مجموعه کتابهای علوم پایه

آنالیز ریاضی

جلد اول

تئوری اعداد حقیقی

غلامحسین مصاحب

غلامحسین مصاحب

آنالیز ریاضی

جلد اول

تئوری اعداد حقیقی

قسمت I

مقدمات عمومی. میدان مرتب اعداد حقیقی

مؤسسه انتشارات امیرکبیر

فهرست اجمالی مندرجات جلد اول

جلد اول کتاب، به سبب کثرت تعداد صفحات، در دو قسمت I و II صحافی شده است. این فهرست مندرجات هر دو قسمت را فرا میگیرد، و در آغاز هر دو قسمت ــ که هر یک خود یک مجلد است ــ میآید. فهرست تفصیلی الفبائی مندرجات جلد اول در ملحقات کتاب (در قسمت II) آمده است.

جلد اول: قسمت I

دیباچه

مقاله‌ی اول

مقدمات عمومی

مقاله‌ی دوم

تئوری مقدماتی اعداد حقیقی

جلد اول: قسمت II

ضمایم و ملحقات

مقدمه‌ی فنی

مندرجات این مقدمه در پنج قسمت، به شرح ذیل، طبقه‌بندی شده است:

به محصلین توصیه میکنیم که، پیش از شروع به مطالعه‌ی متن کتاب، این مقدمه را به دقت بخوانند، تا بر موضوع کتاب، اهمیت آن، و شرایطی که در صورت رعایت کردن آنها میتوانند از خواندن کتاب حاصلی ببرند واقف شوند.

۱ § کلیاتی در باب کتاب حاضر

۱.۱. مجموعه‌ی ریاضیات زنده

کتاب حاضر جلد اول دوره‌ای است در آنالیز ریاضی، که با توجه خاص به احتیاجات محصلین ایرانی نوشته شده است. این دوره جزء مجموعه‌ای از کتب ریاضیات عالی است که نام مجموعه‌ی ریاضیات زنده بر آن نهاده‌ایم، و کتاب حاضر سر سلسله‌ی این مجموعه میباشد. هدف از طرح مجموعه‌ی ریاضیات زنده اینست که متدرجاً کتابهائی دقیق و مبتنی بر افکار معاصر در ریاضیات در اختیار محصلین ایرانی گذاشته شود، شاید روزی برسد که آنان نیز ــ بجای ریاضیات قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم ــ ریاضیات زمان خود را فرا گیرند. این مجموعه را زنده خوانده‌ایم به این نیت که، متدرجاً که از قوه به فعل میآید، زنده و مطابق افکار و ترقیات روز بماند.

۱.۲. پیدایش کتاب حاضر

از سال تحصیلی ۱۳۴۰ ــ ۱۳۴۱، که نگارنده درس منطق ریاضی را در دانشسرای عالی برقرار نمود، همواره کوشید تا محصلین دانشسرا را با ریاضیات به معنی واقعی آشنا سازد، و از همان زمان، فکر ریاضیات جدید را به آنان تلقین نمود. با تأسیس مؤسسه‌ی ریاضیات در

دانشسرای عالی در سال ۱۳۴۵، و اجرای برنامه‌ای بسیار جدید و مترقی در ریاضیات عالیه در این مؤسسه به منظور تربیت مدرسین ریاضیات برای تدریس در دانشگاهها و سایر مدارس عالیه، اقدامات دانشسرا در این زمینه در سطح عالی صورت رسمی یافت. از جمله‌ی دروسی که نگارنده برای محصلین دوره‌ی مدرسی ایراد میکرد دروسی بود در مبانی آنالیز و تئوری اعداد حقیقی، که در ضمن آنها یادداشتهائی در این باب فراهم گردید، که سطح آنها به مراتب از سطح کتاب حاضر بالاتر است. البته، این یادداشتها و جزوه‌هائی که از روی آنها تهیه میشد نمیتوانست جایگزین کتابی منقح باشد. از طرف دیگر، تنقیح و تدوین آنها به صورت کتاب بیحاصل بود، زیرا، استفاده از چنین کتابی به عده‌ای بسیار قلیل محدود میشد.
در همین زمان بود که دوست ارجمند، آقای علی اصغر مهاجر، که ذکر خیر ایشان در آغاز مقدمه‌ی کتاب گذشت، نگارنده را به تألیف دوره‌ی کتابی در آنالیز ریاضی که مورد استفاده‌ی همه‌ی محصلین این علم باشد تشویق کردند، و نگارنده بدین کار که از قدیم نیت آن را داشت اقدام نمود، و طرح اولیه‌ی کتاب حاضر را فراهم آورد، و سپس، به تنقیح و تدوین و تکمیل و آماده ساختن آن برای چاپ پرداخت.

پس از اینکه اولین دسته از محصلین مؤسسه‌ی ریاضیات در شهریور ماه ۱۳۴۷ فارغ‌التحصیل شدند، دانشسرای عالی برنامه‌ی ریاضیات دوره‌ی لیسانس خود را یکباره و بکلی دگرگون ساخت، و به اجرای برنامه‌ای نوین اقدام نمود، تا کسانی که به اخذ درجه‌ی لیسانس در ریاضیات از دانشسرای عالی نایل میشوند برای تدریس ریاضیات جدید مجهز باشند. از جمله‌ی مواد اساسی این برنامه درسی است بنیادی، به مدت یک سال، به عنوان ریاضیات عمومی، که مواد آن کما بیش همان است که در دو مقاله‌ی اول کتاب حاضر ملاحظه میشود، و هدفش اینست که محصلین رشته‌ی ریاضیات را مقدمةً با بعضی مقدمات عمومی آشنا سازد، و سپس، تئوری اعداد حقیقی را به آنان بیاموزد. چون لازم بود که این درس اساسی از روی متنی دقیق و منقح تدریس شود، با کسب اجازه از مؤسسه‌ی فرانکلین، طرح اولیه‌ی کتاب حاضر در دسترس محصلین قرار داده شد. برنامه‌ی ریاضیات عمومی در سال تحصیلی ۱۳۴۷ ــ ۴۸ بر اساس همین طرح اولیه اجرا شد، و ــ به سبب شوق و مساعی متقابل مدرسین جوان و مجهز ریاضیات دانشسرای عالی و محصلین رشته‌ی ریاضیات دانشسرا ــ نتایج آن از حد انتظار بالاتر بود.

۱.۳. هدف و روش

هدف کتاب حاضر آماده کردن محصلین برای تحصیل آنالیز ریاضی است، ولی، این کتاب، به

سبب روش تألیف آن ــ که مبتنی بر روشهای تعلیمی این عصر در ریاضیات است، و ریاضیات جدید الهامبخش آن بوده است ــ پایه‌ی تحصیل هر رشته‌ی دیگر این علم میباشد. توضیح آنکه آموختن ریاضیات در این زمان موقوف به فرا گرفتن بعضی مقدمات عمومی است، که هیچ محصل ریاضیات از آنها مستغنی نیست. بعلاوه، بالاخص آنالیز ریاضی، اضافه بر این مقدمات عمومی، مبتنی بر تئوری اعداد حقیقی است. پس، این کتاب را در دو مقاله تنظیم کرده‌ایم: مقاله‌ی اول در مقدمات عمومی، و مقاله‌ی دوم در تئوری اعداد حقیقی. مقدمات عمومی مورد نظر عبارتند از آشنائی با منطق؛ آشنائی با مجموعه‌ها و با بعضی مفاهیم بنیادی ریاضی (مانند نسبت، تابع، و عمل)، که منجر به شناختن مفهوم دستگاه ریاضی میگردد، که جزء تعریف ریاضیات جدید[1] است. جا دارد که در باب این مباحث و نیز در باب تئوری اعداد حقیقی توضیحاتی بیاوریم، تا جنبه‌ی بنیادی آنها به خوبی آشکار گردد، و نیز روش طرح آنها در کتاب حاضر معلوم شود. در باب مقدمات عمومی، در قسمت ۴ این مقدمه، که خطابی به محصلین است، توضیحاتی مشروحتر آمده است. همچنین، نقش این کتاب در آشنا ساختن محصلین با ریاضیات جدید در بند ۵.۳.۳ توضیح داده شده است.

۰.۱.۳.۱ آشنائی با منطق

چون اطلاعات ما با گزاره‌ها (جمله‌های خبری) بیان میشود، و استدلال ناشی از ساختمان منطقی گزاره‌ها است، محصل ریاضیات بالضروره باید تا حدی با این مسائل آشنا باشد تا ماهیت دلایل ریاضی را دریابد، و استدلال را از مغالطه باز شناسد. پس، مقدم بر هر موضوع دیگر، در فصل اول کتاب، اطلاعاتی مختصر در این باب آمده است. پیش از فراگرفتن مندرجات این فصل، خواندن فصول بعد کاری بیحاصل است. بالاخره، خواستاران آشنائی بیشتر با منطق میتوانند، پس از اتمام فصل ۱، فصل ۱ ض (فصل اول ضمیمه) را بیاموزند.

با تأکیدی که در لزوم آشنائی با منطق کردیم، بطور کلی، از نوشتن مطالب کتاب به زبان منطق، جز در مورد بعضی روابط منطقی ساده، احتراز نموده‌ایم. تجربه نشان داده است که بکار بستن این زبان، مخصوصاً در مراحل اولیه که محصل پختگی کافی ندارد، استدلالها را کما بیش به صورت ماشینی در میآورد، و بعلاوه، بر مشکلات فهم مطلب می‌افزاید. محصلینی را که متدرجاً با این علامات آشنا میشوند یا احیاناً در کتابهائی به آنها بر میخورند از خطر استعمال بی مبالات علامات زبان منطق بر حذر میداریم. هر یک از این علامات نقش منطقی دقیقی دارد و ــ بر خلاف رسمی که متأسفانه کما بیش رواج یافته است ــ نباید آنها را علامات اختصاری برای زبان عادی شمرد، و به دلخواه به کار برد. استعمال بی مبالات این علامات

---

(۱) در باب ریاضیات جدید به قسمت ۵ این مقدمه رجوع شود.

منجر به عباراتی درهم پیچیده و نامفهوم و حتی بیمعنی میگردد، که نمونه‌هائی از آنها در بعضی از کتابهای معاصر خارجی مشهود است. خلاصه، هدف ما از آشنا ساختن محصلین با منطق این بوده است که ماهیت استدلال ریاضی را دریابند، نه اینکه، با در کار آوردن زبانی جدید، فهم استدلالهای ریاضی را مغلق و بر آنها دشوارتر سازیم.

۰.۱.۳.۲ آشنائی با مجموعه‌ها

تئوری مجموعه‌ها زبان ریاضیات عصر حاضر است. به گفته‌ی بورباکی*[1]، امروز میتوان تقریباً همه‌ی ریاضیات معاصر را از یک منبع واحد استخراج کرد، و آن تئوری مجموعه‌ها است. بعلاوه، این تئوری امروز تقریباً در همه‌ی رشته‌های علوم دقیقه موارد استعمال یافته است (مثلاً، ذیل صفحه‌ی ۶۳۴ ملاحظه شود). اگرچه در مبانی تئوری مجموعه‌ها مشکلاتی هست، اغلب ریاضیون با توصیف و تقدیری که هیلبرت* از آن کرده است، و در ذیل صفحه‌ی ۱۲۸ نقل شده، همداستانند. بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضی و منطقی ــ از قبیل نسبت، تابع، و عمل ــ که سابقاً مبهم بود ــ در پرتو مفهوم مجموعه دقیقاً تعریف و در خواص آنها تحقیق شده است.

در جاهائی که تحصیلات ابتدائی و متوسطه بر طبق برنامه‌های مبتنی بر ریاضیات جدید آغاز میشود، هنگامی که محصل به تحصیلات عالی میرسد با بسیاری از این مفاهیم بنیادی آشنائی دارد، ولی محصلین ما باید این مباحث را در آغاز تحصیلات عالیه بیاموزند. این امر مستلزم اتخاذ روش خاصی در طرح این مباحث بوده است که توضیح آن را در ۰.۳.۰۵ آورده‌ایم. در اینجا به ذکر این مطلب اکتفا میکنیم که طرح مباحث مذکور در کتاب حاضر بسیار ساده و، در عین حال، دقیق است. تسامحات و «بی بند و باریهای» بعضی از مؤلفین در این مباحث بنیادی به بهانه‌ی «نزدیک کردن مطالب به ذهن» مورد قبول ما نیست، زیرا، تا هر مرحله در ریاضیات پیش برویم سر و کارمان با مجموعه‌ها و مفاهیم وابسته بدانها است، و از جایگزین ساختن مطالب خالی از دقت در ذهن محصلی که به پایه‌ی خواندن این کتاب رسیده است باید احتراز کرد، چه، در مراحل بعد، خارج کردن مطالب نادرست یا خالی از دقت از ذهن کار آسانی نیست.

۰.۱.۳.۳ تئوری اعداد حقیقی

اعداد حقیقی از مهمترین موجودات ریاضی و پایه‌ی آنالیز ریاضی هستند، و تئوری اعداد حقیقی را بعضی منشأ بسیاری از رشته‌های ریاضیات کنونی شمرده‌اند. در هر حال، تردیدی

---

(۱) در باب کسانی که نامشان با علامت «*» ممتاز است اطلاعات مختصری در قسمت زندگینامه (صفحات ۸۵۳ ــ ۸۷۴) آمده است.

نیست که مساعی ریاضیدانها در استوار ساختن مبانی تئوری اعداد حقیقی سهمی بسیار مهم در پیشرفت و تکامل علوم ریاضی داشته است. در تسامحی که در تعلیم این تئوری بنیادی میشود در قسمت ۱.۴ سخن خواهیم گفت.
از پایه‌گذاران طرح دقیق تئوری اعداد حقیقی باید از وایرشتراس* نام برد، که این کار را در صدر برنامه‌ی خود برای حسابیدن آنالیز قرار داد. امروز در طرح این تئوری دو روش معمول است: یکی روش اصل موضوعی، که در کتاب حاضر اتخاذ شده است، و اصول آن در فصل ۴ آمده؛ و دیگری روش ساختمانی. طرق متداول در طرح ساختمانی یکی تعریف اعداد حقیقی است به وسیله‌ی رشته‌های اساسی اعداد منطق، که اساساً از کانتور* میباشد، و شارل مره*، ریاضیدان فرانسوی نیز، مستقل از کانتور، آن را بسط داده است (۱۸۷۲). دیگری تعریف اعداد حقیقی به وسیله‌ی برشهای میدان اعداد منطق میباشد، که اساساً از ددکیند* است. اگرچه ما در این کتاب متعرض روش ساختمانی نشده‌ایم، موضوع برشها را در فصل ۶ و موضوع رشته‌های اساسی را در فصل ۷ آورده‌ایم.

۱.۴. کتابی ناظر به احتیاجات محصلین ایرانی

چنانکه قبلاً اشاره کردیم، کتاب حاضر با توجه کامل به احتیاجات خاص محصلین ایرانی در تحصیل مقدمات عمومی ریاضیات، و بالاخص در تحصیل آنالیز ریاضی، تهیه شده است، و از این نظر، در میان کتابهای بسیار متعددی که به زبانهای گوناگون در این علم موجود است منحصر بفرد میباشد. این گفته نباید حمل به «تعریف» از کتاب بدان معنی که عادةً از لفظ «تعریف» متبادر به ذهن است گردد؛ نگارنده به هیچ وجه چنین نیت ناصوابی نداشته است. بلکه، مقصود اینست که، در کتابهای جدّی آنالیز مقدماتی به زبانهای دیگر، متعرض بسیاری از آنچه ما به عنوان مقدمات عمومی (مقاله‌ی اول) آورده‌ایم بدان تفصیل و با آن همه امثله و تمریناتی که در کتاب حاضر آمده است نمیشوند، زیرا، اصول این مطالب را محصلین در تحصیلات قبلی خود میآموزند.
از مقاله‌ی اول که بگذریم، تقریباً بقیه‌ی کتاب در تئوری اعداد حقیقی است، که به اهمیت آن در بند ۱.۳.۳ اشاره کردیم. متأسفانه، معمولاً توجهی که درخور این موضوع اساسی باشد بدان مبذول نمیشود. در طی تحصیلات متوسطه، محصل اطلاعاتی کما بیش سطحی از اعداد حقیقی کسب میکند که بیشتر جنبه‌ی عملی دارند؛ و خواص عمیق این اعداد را معمولاً به «ریاضیات عالی»، حواله میدهند. وقتی هم که محصل به «ریاضیات عالی» میرسد، اغلب فرض میکنند که اعداد حقیقی را در دوره‌ی متوسطه آموخته است، و تعلیمات بعدی را بر این فرض مینهند. در نتیجه، در ریاضیات عالی هم محصلین چیزی جز عمل کردن با اعداد حقیقی در این باب فرا

نمیگیرند، و در تحصیل آنالیز ریاضی[1]، دوچار مشکلات طاقت‌فرسا میگردند، و در نتیجه، از این علم ــ که یکی از زیباترین مباحث ریاضی و نیرومندترین حربه‌ی آدمی در حل مسائل علوم دقیقه است ــ بی بهره میمانند.

نظر به اهمیت بنیادی تئوری اعداد حقیقی، مخصوصاً در سنوات اخیر، کتابهائی در این باب به زبانهای خارجی نوشته شده است، و در بعضی جاها درسهای خاص تحت این عنوان داده میشود. از کتابهای مذکور، بعضی سطحی هستند، و حاجت محصل آنالیز را مرتفع نمیسازند، و برخی سخت فشرده و درخور استفاده‌ی محصلین پیشرفته میباشند، و هر یک به جهتی از وارد شدن در تفصیل کافی اجتناب میکنند. بالنتیجه، هیچ یک از آنها رافع احتیاجات یک محصل ایرانی که تازه وارد ریاضیات عالیه میشود نیست.

در کتاب حاضر کوشیده‌ایم که این مشکلات را از پیش پای محصلین برداریم. شرح تحلیلی مندرجات کتاب در باب اعداد حقیقی در ضمن قسمت ۱.۶ آمده است.

۱.۵. بعضی از خصوصیات دیگر کتاب. کتاب حاضر نوعی «خودآموز» است. سبک تألیف آن بسیار مساعد با «تحصیل پیش خود» میباشد، تا کسانی هم که دسترس به معلم یا مدرسه ندارند از آن کاملاً بهره‌ور شوند. درج امثله و تمرینات بسیار فراوان در کتاب به همین نظر بوده است.

۱.۵.۱. تعریفات و براهین

بسیاری از محصلین ریاضیات اهمیت تعریف را نمیدانند، و به براهین توجهی مبذول نمیکنند، بلکه چنین میپندارند که ریاضیات فن مسئله حل کردن است در حدود مقتضی برای قبول شدن در امتحانات. در ۴ §، که روی سخن بالاخص با محصلین است، در این باب صحبت کرده‌ایم، و اهمیت تعریفات و براهین را آشکار ساخته‌ایم. در متن کتاب، منتهای کوشش در دقیق بودن تعریفات مبذول شده است. معمولاً، هر مفهوم اساسی را قبلاً در ضمن مثالهائی توضیح داده‌ایم، و سپس تعریف کلی را به صورت رسمی آورده‌ایم، تا علت وجودی تعریف، یا به اصطلاح، «باعث بر تعریف» آشکار شود، و هم بیان دقیق آن در دست باشد. همچنین، در مورد بسیاری از قضایا، قبلاً مقصود در حالت یا حالاتی خاص توضیح داده شده، و سپس بیان کلی و برهان آنها آمده است، و هر جا استدلالی متضمن نکته‌ی خاصی بوده است این مطلب گوشزد شده. در مورد بعضی از احکام که اثباتشان مستقیم و «سرراست» و بر قیاس ما سبق است، آوردن

---

(۱) مقصود آنالیز ریاضی به معنی واقعی آنست، نه مطالبی بیمایه و پیش پا افتاده از تکنیک حساب دیفرانسیل و انتگرال که گاه به عنوان آنالیز قلمداد میشود.

برهان را به متعلم محول کرده‌ایم.

۱.۵.۲. امثله و تمرینات
کتاب حاضر مشتمل بر بیش از ۶۵۰ مثال و مسئله‌ی حل‌شده و ۲۶۰۰ تمرین است، که به چند دسته تقسیم میشوند.
(آ). مثالهائی که قبل از تعریفات برای آشکار ساختن «باعث بر تعریف» آمده‌اند، یا، پیش از بیان و برهان کلی قضایا، به منظور روشن ساختن موضوع قضیه و احیاناً روش اثبات آن درج شده‌اند.
(ب). اغلب، علاوه بر مثالهای مقدم بر تعریفات و قضایا، مثالها یا مسائلی پس از آنها برای نشان دادن چگونگی تعریفات در موارد خاص یا استفاده از قضایا در حل مسائل آمده است.
(پ). پس از تقسیمات عمده در هر فصل، تمرینهائی مربوط به مطالب موضوع بحث در آن قسمت آمده است. در تنظیم این تمرینها دقت شده است که مسائل آسانتر پیش از مسائل نسبةً دشوار آیند، و این امر، و نیز محدود بودن موضوع مسائل به قسمتی خاص، تا حدی راهنمای محصل در حل آنها تواند بود.
(ت). در آخر اغلب فصول، تمرینهای اضافی تحت عنوان مسائل مختلفه آورده‌ایم. این تمرینها نوعاً دشوارتر از تمرینات آخر قسمتها است، و عمداً متفرق تنظیم شده است.

توجه داشته باشید که مسائلی که، بدون عبارت «ثابت کنید که»، به صورت حکمی بیان شده‌اند قضایائی هستند که باید آنها را ثابت کرد.

از لحاظ تدریس، باید توجه داشت که ــ جز در مراحل اولیه (مثلاً در فصل ۱، در آشنائی با منطق) ــ مقتضی نیست که همه‌ی امثله را در کلاس مطرح یا همه‌ی مسائل را در آن جا حل کنند، زیرا، این کار وقت بسیار میگیرد، و بعلاوه، محصل را از اینکه به خود تکیه کند باز میدارد.
تعدادی از امثله‌ی کتاب و بیشتر مسائل تمرینی آن مأخوذ از منابع فرنگی است، که فهرست اهم آنها در آخر کتاب مندرج میباشد. چون در ضمن کار به اشتباهات (چاپی و حز آن) و تسامحاتی در بعضی از این مآخذ برخوردیم، یکایک مسائل را مورد بررسی قرار دادیم، و منقح کردیم، ولی ادعا نداریم که خود از آن گونه اشتباهات یا تسامحات مصون مانده‌ایم.

۱.۶. تحلیل اجمالی مندرجات کتاب. کتاب حاضر مشتمل بر دو مقاله و ضمایم و

ملحقاتی چند است. مقاله‌ی اول در مقدمات عمومی و مقاله‌ی دوم در تئوری اعداد حقیقی است.

۰۱۰۶۰۱ مقاله‌ی اول (مقدمات عمومی)
این مقاله مشتمل بر سه فصل است.
فصل ۱ در آشنائی با منطق است (۱۰۳۰۱ ملاحظه شود)، و اصطلاحات و سایر مندرجات آن در سراسر کتاب بکار میرود. پس، پیش از فراگرفتن مطالب این فصل، خواندن فصول بعد کاری بیحاصل است. خواستاران آشنائی بیشتر با منطق میتوانند، پس از اتمام فصل ۱، فصل ۱ ض (فصل اول ضمیمه) را بیاموزند.
فصل ۲ مشتمل بر اصول ابتدائی حساب مجموعه‌ها است. در فصل ۳، مطالب فصل ۲ را در تعریف بعضی از مفاهیم حیاتی ریاضیات ــ مانند نسبت، تابع، و عمل ــ و در تحقیق در بعضی خواص بنیادی آنها بکار بسته‌ایم. پس از آن، توضیحات مختصری در باب دستگاههای مجرد ریاضی، که اساس ریاضیات جدید میباشند، آمده است، و فصل ۳ با بحث بسیار مجملی از یکی از اهم دستگاههای ریاضی، یعنی گروههای آبلی ــ که در ساختن تئوری اعداد حقیقی در فصول بعد در کار میآیند ــ ختم میشود. در فصل ۲ ض، اطلاعاتی جامعتر و کلیتر در باب مندرجات فصول ۲ و ۳ آمده است.
خلاصه، مقاله‌ی اول کتاب مدخل ریاضیات جدید است. برای اطلاع بیشتر در این باب به بند ۵۰۳۰۳ رجوع کنید.

۰۱۰۶۰۲ مقاله‌ی دوم: اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی (فصل ۴)
در فصل ۴، که اولین فصل مقاله‌ی دوم است، ابتدا نظری اجمالی به اطلاعات قبلی محصلین از اعداد حقیقی می‌افکنیم، و سپس، بعد از شرح مختصری در باب روش اصل موضوعی، با استفاده از آنچه در فصول قبل آموخته‌اند، زمینه‌ی تئوری اعداد حقیقی را به روش اصل موضوعی فراهم میسازیم. در پایان فصل، اصول موضوعه‌ی میدان مرتب و تمام اعداد حقیقی آمده است.

۰۱۰۶۰۳ مقاله‌ی دوم: میدان مرتب اعداد حقیقی (فصل ۵)
فصل ۵ مشتمل بر اهم خواص میدان مرتب اعداد حقیقی است (خواص ناشی از تمامیت در فصل ۶ آغاز میگردد)، و بالاخص، خواص عمومی نامساویها، قدر مطلق، دستگاههای اعداد طبیعی و اعداد صحیح، و تعمیم اعمال جمع و ضرب از مندرجات این فصل است.
نظر به اهمیت فوق‌العاده‌ی نامساویها در ریاضیات، در بحث از آنها طریق تفصیل را پیش

گرفته‌ایم. البته، این موضوع مهم در فصل ۵ ختم نمیشود، و در فصول بعد (مخصوصاً در فصل ۶ در حل نامساویها) تفصیلات دیگر در باب نامساویها میآید، و در فصل ۵ ض، بعضی از نامساویهای معروف که در آنالیز اهمیت اساسی دارند مورد بحث قرار میگیرند.

در مبحث اعداد طبیعی، به صورتهای مختلف استقراء در اثبات احکام و در تعریفات توجه خاص مبذول شده است، و خوشترتیبی اعداد طبیعی اثبات گردیده. بسیاری از استدلالهای استقرائی هست که در کتابهای عادی نامی از آنها برده نمیشود، اما، در استنتاج بدانها توسل میجویند. در باب همه‌ی این استدلالها توضیح کافی آورده‌ایم، و شاید بتوان گفت که در باب استدلال استقرائی از هیچ نکته‌ی قابل ذکری فروگذار نشده است. تعریفات استقرائی در ریاضیات اهمیت حیاتی دارند. چنانکه در متن کتاب گفته‌ایم، فرار از این تعریفات در مواردی که بالضروره باید بدانها توسل جست منجر به تعریفگونه‌هائی عاری از دقت میشود، که محصلین را دوچار مشکلات کمرشکن میسازند. اینکه بسیاری از محصلین از علامات Σ و Π وحشت دارند، و حتی در محاسبات ساده با آنها دستخوش تزلزل و تردید میشوند، ناشی از اینست که معمولاً تعریف درست این علامات به آنان آموخته نمیشود، و چیزی را که تعریفش را ندانیم نمیشناسیم، و البته با چیزی که نمیشناسیم نمیدانیم چگونه عمل کنیم. تعریف علامات مذکور به استقراء است، و ما، پس از آوردن تعریف استقرائی آنها، از قواعد محاسبه با Σ و Π به تفصیل سخن گفته‌ایم. پس از آن، راه تعریف بعضی از موجودات مهم ریاضی (مانند تابع فاکتوریل) و بعضی از احکام عمده (مانند دوجمله‌ای نیوتن) برای محصلین باز و هموار میشود، و بعضی از استدلالهائی که اغلب سبب حیرت آنهاست جنبه‌ی عادی و طبیعی میگیرند.

بسیاری از خواص اساسی دستگاه اعداد صحیح (و بالاخص اعداد طبیعی) هست که محصلین ناآشنا با تئوری اعداد اطلاعاتی بس تیره و مبهم از آنها دارند. در پایان فصل ۵، آن قسمت از این خواص را که در فصول بعد بدانها استناد میشود بیان و ثابت کرده‌ایم.

در این فصل وارد مسئله‌ی «شمردن» نشده‌ایم. بعضی از حالات مهم این مسئله در فصل ۳ ض آمده است.

خلاصه، فصل ۵ مشتمل بر خواص میدان مرتب اعداد حقیقی است بدون در کار آوردن اصل موضوع تمامیت. خواص مندرج در فصل ۵ را میتوان خواص سطحی اعداد حقیقی دانست.

۱.۶.۴. مقاله‌ی دوم: اصل موضوع تمامیت (فصل ۶)

از فصل ۶ خواص عمیق اعداد حقیقی آغاز میگردد. پس از توضیح مفاهیم مهم سوپرموم و اینفیموم مجموعه‌های اعداد (بحث از سوپرموم و اینفیموم در مجموعه‌های مرتب به طور کلی در فصل ۲ ض آمده است)، و نشان دادن «نقص» میدان اعداد منطق، اصل موضوع تمامیت را،

که منشأ خواص عمیق اعداد حقیقی است، آورده‌ایم، و سپس، به استخراج نتایج مهم آن پرداخته‌ایم. از آن جمله است اثبات خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی و نتایج آن، و اثبات وجود ریشه، و مبحث نماینده‌های کسری، و نامساویهای بنیادی مربوط به آنها.

در بسیاری از کتابها از اینکه بینهایت (∞ یا $+\infty$، و $-\infty$) را علناً وارد بحث نمایند اجتناب میکنند، ولی ــ چون استعمال این علامات احترازناپذیر است ــ در موارد متعدد آنها را «دزدکی» در کار میاورند، و در نتیجه، هویت این موجودات مهم ریاضی بر محصل مکتوم میماند. مثلاً، گاه میگویند اگر مجموعه‌ای غیرخالی مانند A از اعداد از بالا نامحدود باشد، اگرچه سوپرموم ندارد، برای آن قائل به سوپرموم میشویم، و مینویسیم $\sup A = \infty$. در مورد دیگر، میگویند مجموعه‌ی اعداد بزرگتر از a را (a, ∞) مینامیم. آیا ∞ در استعمال اخیر همان ∞ است که در عبارت $\sup A = \infty$ بکار رفته است؟ سِرّ اتخاذ این روش بر ما معلوم نیست. ما ∞ (یا $+\infty$) و $-\infty$ را رسماً در فصل ۶ وارد کار کرده‌ایم، و خواص عمومی آنها را به استناد تعریفات و قراردادهای مربوط خاطرنشان ساخته‌ایم.

پس از تعریف بازه‌ها و شرح احکام مربوط به آنها، حل دسته‌های بسیار مهمی از نامساویهای مقدماتی آغاز میگردد. تجربه نشان داده است که این موضوع از مشکلات طاقت‌فرسای کار محصلین است. بنا بر این، در این باب تفصیل فراوان و امثله و تمرینات بسیار متعدد آورده‌ایم. امید است با روش منطقی و مبتنی بر حساب مجموعه‌ها که در این موضوع بکار رفته است گره از کار محصلینی که حاضرند فکر خود را به کار اندازند گشوده شود. اگرچه تکرار مکرر است، پیشرفت در این کتاب، و به طور کلی در ریاضیات، موقوف بر تسلط یافتن بر نامساویها و توانائی بکار بستن آنها در حل مسائل گوناگون است.

۵.۶.۱۰. مقاله‌ی دوم: حدود رشته‌ها (فصل ۷)

کلیاتی در باب رشته‌ها، که از اهم موجودات ریاضی هستند، در فصل ۵ آمده است، اما، تحقیق عمیق در رشته‌های اعداد حقیقی در فصل ۷ آغاز میگردد. مفاهیم موضوع این فصل از مندرجات فصول قبل (و بالاخص فصل ۵، که صرفاً جنبه‌ی جبری دارد) دقیقتر و «ظریفتر» میباشند، و مخصوصاً مبتدیان باید بدانها توجه خاص مبذول دارند.

در باب حدود و تقارب، اصطلاحاتی گوناگون متداول است، که بعضی قابل تعریف دقیق ریاضی است، و برخی را باید صرفاً عامیانه شمرد. دسته‌ی اول را دقیقاً تعریف کرده‌ایم. از استعمال اصطلاحات دسته‌ی دوم، که سبب گمراهی است، باید اجتناب نمود.

تجربه نشان میدهد که آغاز کردن مبحث حد با هیچرشته‌ها برای آماده ساختن محصلین جهت درک مفهوم حیاتی حد مفیدتر از آنست که مستقیماً تعریف حد و تقارب به آنان عرضه شود.

بنا بر این، پیش از اینکه وارد موضوع حد و تقارب به صورت کلی شویم، به هیچ‌رشته‌ها پرداخته‌ایم، و در ضمن این مبحث، تکنیک ε را، که از روشهای بنیادی آنالیز است، در ضمن امثله و استدلالهای متنوع توضیح داده‌ایم. پس از آن، مبحث حد و تقارب به صورت کلی آمده است. ضمناً، چون ما ∞ و $-\infty$ را رسماً معرفی و علناً وارد کار کرده‌ایم، نتایجی که در باب حدود عرضه شده‌اند صورتی یکنواخت و کلی دارند.

از مباحث مهم دیگر این فصل رشته‌های یکنواخت، اصل بازه‌های تودرتو، و مبحث رشتکها است.

در این مرحله، مقدمات کافی برای تعریف قوای حقیقی فراهم شده است. پس از تعریف قوای حقیقی و اثبات خواص آنها، اثبات وجود لگاریتم و خواص آن می‌آید. در هر دو مورد، توجه خاص به نامساویها مبذول گردیده است.

علامات O و o از وسایل توانای آنالیز در بسیاری از مسائل میباشند، و اگرچه قدرت قواعد محاسبه با این علامات پس از آموختن مبحث بسط توابع در آنالیز پدیدار میگردد، در پایان فصل ۷ این علامات را در مورد رشته‌ها معرفی کرده‌ایم، و قواعد محاسبه با آنها را به صورتی جامع آورده‌ایم تا هرچه زودتر محصلین با این وسایل مفید آشنا شوند. چنانکه در آنالیز معلوم خواهد شد، خواص این علامات در مورد توابع دلخواه، با تغییرات جزئی لفظی، همانها است که در فصل ۷ کتاب حاضر آمده است. معذلک، این علامات و قواعد محاسبه با آنها را در بقیه‌ی متن کتاب بکار نبرده‌ایم، و مبتدیان میتوانند از آنها درگذرند.

۱.۶.۶. مقاله‌ی دوم: سلسله‌ها (فصل ۸)

بسیاری از محصلین در مبحث سلسله‌ها مواجه با مشکلات اساسی میشوند، و در مسائل این مبحث همواره دستخوش تردید و تزلزل میباشند. این امر از یک طرف ناشی از عدم توجه کافی به تعریف دقیق سلسله‌ها است، و از طرف دیگر، به سبب قراردادهائی نامطلوب ولی رایج در این مبحث است: علامتی مانند

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (۱)$$

ممکن است به معنی نام یک سلسله باشد یا به معنی مقدار آن سلسله (در صورت وجود)، و در هر حال، در علامت مذکور، علامت $+$ به معنی عادی آن (علامت عمل جمع) نیست. بلکه معنی قراردادی دیگری دارد. به سبب مجموعه‌ی این مشکلات، بسیاری از محصلین از سلسله‌ها، که از مهمترین وسایل آنالیز ریاضی هستند، تصوری بس آشفته دارند. بدین جهت، در آغاز فصل ۸، برای روشن ساختن مفهوم سلسله، و رفع شبهاتی که در این باب ممکن است به ذهن خطور کند، توضیحات فراوان آورده‌ایم.

رسم است که مبحث سلسله‌ها را با سلسله‌های نـامنفی آغاز میکنند. این امر مُـمِـدّ مشـکـلات سابق‌الذکر است، زیرا، سلسله‌ای مانند (۱)، در صورتی که جمله‌هایش نامنفی باشند، خـواصی مشابه خواص حاصلجمعهای عـادی (یعنی عباراتی متناهی به صورت $a_n + \cdots + a_2 + a_1$) دارد. بدین‌گونه، متعلم با «امنیتی کاذب» مأنوس میشود، و اغلب، در محاسبه با سلسله‌ها به طور کلی، به قیاس اعمالی که در مورد حـاصلجمعهای عادی مجاز است، اعمالی انجـام میدهد کـه مجوزی بـرای آنها نیست. بـدین جهت، ما از رسم مـذکور عـدول کرده‌ایم، و ابتدا از سلسله‌ها بـه طور کلی و تفاوت آنها با حاصلجمعهای عادی سخن گفته‌ایم، و اعمال غیر مجاز بر آنها را روشن ساخته‌ایم، تا محصلین در کار کردن با این وسایل مهم آنالیز بیدار باشند.

آنچه در فصل ۸ در بـاب سلسله‌هـا آمـده است مقدماتی بیش نیست. تفصیـل بیشتر و خـواص عمیقتر سلسله‌ها در آنالیز خواهد آمد.

۱.۰۶.۰۷. مقاله‌ی دوم: عددنویسی و محاسبه (فصل ۹)

این فصل نهائی مقاله‌ی دوم، بـا مبانی نظری عددنـویسی آغـاز میشود. پس از اثبات امـکان نمایش اعداد صحیح در مبنای دلخواهی مانند g (عددی طبیعی و بزرگتر از واحد)، به نمایش اعداد با «کسور ژئی» (تعمیم نمایش اعداد با کسور اعشاری) پرداخته‌ایم، تا وقتی شخص بـا عبارتی مانند $\pi = 3{,}141\,5\ldots$ مواجه میشود معنی آن را به درستی بداند.

در پایان فصل، ملاحظاتی اجمالی در محاسبات تقریبی آمده است.

۱.۰۶.۰۸. فصول ضمیمه

کتاب حاضر شش فصل ضمیمه دارد، که با علامات ۱ ض تا با ۶ ض شماره‌گذاری شده‌اند.

فصل ۱ ض متمم فصل ۱ (آشنائی با منطق) است. چنانکه سابقاً تـوصیه کـردیم، خوبست کـه متعلم، پس از اتمام فصل ۱، ایـن فصل را نزد خود مطالعه کند تا، علاوه بر فوایـد دیگر، بـر مندرجات فصل ۱ بهتر تسلط یابد.

فصل ۲ ض در باب مجموعه‌ها و نسب و متمم فصول ۲ و ۳ است، و یکی از فواید آن آمـاده ساختن محصلین است بـرای رشته‌هـای دیگری از ریـاضیات (مانند توپولوژی)، کـه در آنها تفصیلی بیش از آنچه در فصـول ۲ و ۳ در بـاب مجموعـه‌هـا آمـده است مـورد نیاز میباشد. اوایـل ایـن فصل مشتمل بـر بعضی از فواید ساده‌ی حساب مجموعه‌ها در شمـردن و استدلال میباشد، و میتوان آن را پس از اتمام فصل ۲ آموخت.

در فصل ۳ ض بعضی مسائل مربوط به شمردن، کـه معمولاً جزء بـرنـامه‌های ریاضیات عالی است، آمده است.

فصل ۴ ض متمم فصل ۷ و در باب حدود اعلی و اسفل رشته‌ها است، که از مفاهیم بسیار مهم ریاضی میباشند، و در آنالیز همواره مورد نیازند.
فصل ۵ ض مشتمل بر بعضی نامساویهای مشهور و مهم است.
فصل ۶ ض جزء ملحقات کتاب است، و تفصیل آن در ۱.۶.۰۹ میآید.

۱.۰۶.۰۹. ملحقات دیگر

از ملحقات کتاب فصلی است (فصل ۶ ض) در اعداد مختلط. دستگاههای اساسی اعداد آنالیز دو دستگاه اعداد حقیقی و اعداد مختلطاند. بعلاوه، در بعضی برنامه‌های ریاضیات عالیه، مبحث اعداد مختلط زودتر از آنچه ما پیشبینی کرده‌ایم مورد نیاز محصلین است. بدین مناسبات، فصل مذکور را در این باب تنظیم کرده‌ایم. چون بنای ما در کتاب حاضر بر این بوده است که پیش از تعریف دقیق یک شیء یا یک مفهوم اساسی ریاضی آن را بکار نبریم ـ و در این جلد هنوز به مرحله‌ی تعریف توابع مثلثاتی نرسیده‌ایم ـ از صورت مثلثاتی اعداد مختلط و فواید آن چیزی نگفته‌ایم.

از ملحقات دیگر کتاب قسمتی است تحت عنوان زندگینامه (صفحات ۸۵۳ ـ ۸۷۴). چنانکه در مقدمه‌ی آن قسمت گفته‌ایم، ریاضیدانهای بزرگ ائمه‌ی علوم ریاضی هستند، و لازم است که محصل ریاضیات امامهای علمی را که تحصیل میکند بشناسد. چون محصلین ایرانی وسیله‌ای برای نیل بدین منظور ندارند، در قسمت زندگینامه، ریاضیدانهائی را که نامشان در کتاب حاضر آمده است و زندگینامه‌ی آنان مضبوط میباشد به اختصار معرفی کرده‌ایم. نام این کسان در کتاب با علامت ستاره (*) ممتاز است. زندگینامه‌ی هر کس با تلفظ صحیح نام وی همراه میباشد، و هر جا، در متن، به نامی ممتاز با «*» برخورد نمایند، برای تلفظ صحیح آن میتوانند به سطر اول زندگینامه‌ی وی رجوع کنند.

از ملحقات بسیار مهم کتاب فهرست تفصیلی الفبائی مطالب آن است. محصلین باید با استفاده از این گونه فهرستها مأنوس شوند، زیرا چنین فهرستها راهنمای بسیار مفیدی برای جستن مطالب مورد نظر در کتاب میباشند. ممکن است شما در ضمن مطالعه به اصطلاح «گروه آبلی» یا نسبت «نامنعکس» برخورد کنید، و معنی آن را ندانید یا معنی دقیق آن از نظرتان محو شده باشد. فهرست الفبائی به شما نشان میدهد که اصطلاح اول در صفحه‌ی ۱۴۰ و اصطلاح دوم در صفحه‌ی ۱۰۵ تعریف شده است.

دیگر از ملحقات کتاب دو لغتنامه‌ی ریاضی فارسی به انگلیسی و بالعکس است. در باب اصطلاحات کتاب به ۳ § رجوع شود.

۲ § راهنمای خواندن کتاب

در تنظیم این کتاب قراردادهائی بکار رفته است که برای استفاده‌ی کامل از کتاب توجه بدانها ضروری است.

۲.۱. شماره‌گذاری مطالب. مطالب کتاب به «روش اعشاری»، که اصلاً از پئانو* است، طبقه‌بندی شده است. مثلاً، در صفحه‌ی ۳، مبحث رابطهای گزاره‌ای چنین آغاز میشود:

۲ § رابطهای گزاره‌ای

این مبحث مشتمل بر چند قسمت است، و از آن جمله قسمت مربوط به ترکیب شرطی است (صفحه‌ی ۷) که چنین آغاز میگردد:

۲.۵. ترکیب شرطی.

قسمت ترکیب شرطی خود چند جزء دارد، که بترتیب، از ۱ ببعد شماره‌گذاری شده‌اند، مانند

۲.۵.۱. عکس یک گزاره‌ی شرطی (صفحه‌ی ۷)

۲.۵.۲. عکس نقیض یک گزاره‌ی شرطی (صفحه‌ی ۸)

. . . .

۲.۵.۵. شرط لازم؛ شرط کافی (صفحه‌ی ۹).

امثله‌ای که تحت یک عنوان میآیند هر یک با یک حرف سیاه الفبای فارسی به ترتیب الفبائی، نه به حساب ابجدی، علامتگذاری شده‌است، و قسمتهای مختلف یک قضیه معمولاً با ارقام رومی، و تمرینات با ارقام سیاه فارسی. مثلاً در صفحات ۱۶ و ۱۷، تحت عنوان «۳.۳.۱. امثله»، دو مثال (آ) و (ب) آمده است؛ قضیه‌ی ۱.۴.۶ (صفحه‌ی ۵۳) دارای چهار قسمت I، II، III، و IV میباشد؛ تمرین ۱.۳.۳ (صفحه‌ی ۵۲) مشتمل بر پنج مسئله است.

مطالب مندرج در شماره‌هائی که با علامت صلیب درشت («†») ممتازند آنهائی هستند که در مرتبه‌ی اول مطالعه‌ی کتاب میتوان از آنها درگذشت بی‌آنکه از این راه خللی به تسلسل مطالب وارد شود. علامات لانداو (۱۰ § فصل ۷) نیز، چنانکه سابقاً گفته شد، از این جمله‌اند.

۲.۲. ارجاعات. شماره‌گذاری مرتب منطقی سابق‌الذکر کاری پر زحمت بوده است، ولی، بدان وسیله، توانسته‌ایم هر جا یادآوری مطلبی یا تذکر حکمی ضروری یا مفید بوده است به سهولت آن را یادآوری کنیم. قرارداد مربوط به این ارجاعات بدین شرح است:

ارجاع در یک فصل به مطالب آن فصل با ذکر شماره‌ی مطلب مورد نظر است. مثلاً،

در سطر ۸ صفحه‌ی ۱۱۸، در فصل ۳، این عبارت دیده میشود:

. . . بنا بر ۲۰۲۰۵، I تابعی . . . .

در این عبارت، «۲۰۲۰۵» یعنی مطلب دارای شماره‌ی ۲۰۲۰۵ در همان فصل ۳. با مراجعه به شماره‌ی فصول و شماره‌ی مطالب در بالای صفحات، دیده میشود که مطلب مذکور در صفحه‌ی ۸۹ تحت عنوان «قضیه» آمده است. در مواردی که مطلبی که بدان ارجاع کرده‌ایم دارای چند قسمت است شماره‌ی قسمت مورد نظر با قید «:» در سمت راست شماره‌ی آن مطلب آمده است. مثلاً، در سطر ۵ از پایین صفحه‌ی ۱۹۲ در فصل ۵ این عبارت دیده میشود:

. . . و این با V: ۴۰۲۰۴ . . . .

شماره‌ی ۴۰۲۰۴ مربوط به همان فصل ۵ و در صفحه‌ی ۱۸۶ آمده است، و قسمت V آن این حکم است:

1 ابتدای مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. به عبارت دیگر . . ..

در ارجاع از فصلی به فصل دیگر، شماره‌ی این فصل دیگر با «:» در سمت چپ شماره‌ی مطلبی که بدان ارجاع داده‌ایم مشخص میشود. مثلاً، در سطر ۱۲ صفحه‌ی ۱۱۲ در فصل ۳ عبارت

بین نسبتهای هم‌ارزی و افراز مجموعه‌ها (۲ : ۴۰۷) . . .

آمده است، که در آن، مقصود از «۲ : ۴۰۷» قسمت ۴۰۷ فصل ۲ میباشد. همچنین، در سطر ۶ صفحه‌ی ۱۶۸ در فصل ۵ چنین آمده است:

. . . نمونه‌ی دیگر آن را در آ : ۳۰۲۰۷ : ۲ در . . . .

مقصود از «آ : ۳۰۲۰۷ : ۲» بخش «آ» از قسمت «۳۰۲۰۷» از فصل ۲ است (صفحه‌ی ۷۰). در باب یادآوری احکام مورد استناد در میان روابط ریاضی، صفحه‌ی ۱۶۰، پس از اتمام برهان قضیه‌ی ۱۰۲۰۴، ملاحظه شود.

۲۰۳. بعضی قراردادهای اختصاری. در انشاء ریاضی، بعضی قراردادهای اختصاری هست که در کتاب حاضر از آنها متابعت شده است. از جمله، موارد ذیل را باید به خاطر سپرد:

(آ). داخل کردن حرف یا علامتی که قبلاً ذکری از آن نبوده است بدون تعریف صریح. توضیح این مطلب در ذیل صفحه‌ی ۴۷ مذکور است.

(ب). در مسئله‌ای ممکن است اشیائی، مثلاً «a_1، a_2، . . .، و a_n» مورد بحث باشند. در این صورت، اغلب، به جای اینکه هر جا از این اشیاء صحبت میشود یکایک آنها را نام بریم، و مثلاً بگوئیم

a_1، a_2، ...، و a_n چنین و چنانند

مختصراً میگوئیم

aها چنین و چنانند.

خلاصه، هر جا عباراتی مانند «aها» و «Pها»، و نظایر آنها میآید مقصود aهای مورد بحث، Pهای مورد بحث، و غیره است. البته، استعمال این گونه عبارات اختصاری و سایر اختصارات مشروط بر اینست که باعث کوچکترین ابهامی نشود.

(و). گاه بعضی از شرطهائی را که به عنوان جمله‌ی معترضه میآیند، پس از فرمول مربوط یا (در سیاق فارسی) بعد از آن، در داخل پرانتز مینویسند. مثلاً، عبارت

$$\lim a_n = \alpha\ (\leqslant 0)$$

یعنی

$\lim a_n = \alpha$، که α عددی کوچکتر یا مساوی 0 است.

همچنین، عبارت

فرض کنیم $m < n$ $(m, n \in \mathbf{N})$

یعنی

فرض کنیم $m < n$ (m و n دو عدد طبیعی‌اند).

(ز). عبارتی مانند

فرض کنیم $0 < \varepsilon$ عددی دلخواه باشد

یعنی

فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد.

موارد مشابه را بر همین قیاس کنید.

(ژ). نوشتن روابط متوالی جز در مورد نسبتهای متعدی درست نیست، ولی معمول است. عبارت «$a = b$ و $b = c$» را میتوان به صورت $a = b = c$ نوشت، زیرا، اگر a مساوی b و b مساوی c باشد a مساوی c است؛ و هکذا در مورد $>$ و $a < b < c$ و $\leqslant$ و $a \leqslant b \leqslant c$. بدین قیاس، گاه مینویسند

$$0 \neq a < 1.$$

عباراتی مانند $0 \neq a < 1-$، $a \neq b \neq c$، و $a \neq b > 0$ گمراه کننده‌اند، و از نوشتن آنها باید اجتناب کرد.

۲.۴. زندگینامه‌ها. چنانکه در ۱.۶.۹ گفته شد، علامت ستاره در بالای یک نام حاکی از اینست که زندگینامه‌ای از صاحب نام در صفحات ۸۵۳ – ۸۷۴ کتاب مندرج میباشد.

۳ § اصطلاحات و ارقام

۳.۱ اصطلاحات. اصطلاحات در تفهیم و تفهم علوم و فنون اهمیت حیاتی دارند، و بدون آنها بسط علم امکانپذیر نیست[1]. ذکر مثالی در توضیح این مطلب مفید است. در کتاب اصول اقلیدس*، نقطه، خط، خط مستقیم، سطح، و صفحه قریب بدین مضمون «تعریف» شده‌اند:

نقطه: چیزی که جزء ندارد.

خط: طول بدون عرض.

خط مستقیم: خطی که نسبت به نقاط خود هموار باشد.

سطح: چیزی که فقط طول و عرض دارد.

صفحه: سطحی که نسبت به خطوط مستقیم خود هموار باشد.

اگر اصطلاحاتی برای نقطه، خط، خط مستقیم، و سطح نداشتیم تعریف صفحه بدین صورت در میآمد:

> چیزی که فقط دارای طول و عرض باشد و نسبت به طولهای بدون عرض خود که نسبت به چیزهای بدون جزء خود هموارند هموار باشد.

فکر کنید که اگر هر جا در هندسه از «صفحه» صحبت میشود، به جای لفظ صفحه، عبارت فوق را بکار بریم با چگونه عباراتی مواجه میشویم. و تصدیق کنید که با عباراتی به این درازی، که وقتی شخص به آخر آنها میرسد آغازشان از خاطرش محو شده است، بسط علم هندسه ممکن نیست.

ممکن است گفته شود که این کلیات را با مقدمه‌ی یک کتاب ریاضی محض چه ارتباطی است. ارتباط آن از این نظر است که بعضی از ما اهمیت اصطلاحات را در علوم نمیدانیم، و بسیاری از مردم کم‌مایه گمان میکنند که مطالب علمی را، بدون نیاز به اصطلاحات خاص راجع به آنها، میتوان «نقل به معنی» کرد. «نقل به معنی» در بسیاری از موارد مانند عبارت درازی است که فوقاً در تعریف صفحه آوردیم. تا موقعی که ما اصطلاحات کافی برای بیان مطالب علمی نداشته باشیم توده‌ی مردم و، در مرحله‌ی بالاتر، محصلین تحصیلات عالیه از تحصیل علم بی‌بهره میمانند.

در مورد اصطلاحات، نباید تعصب داشت. سرعت پیشرفت علم به حدی است که اگر ما

---

(1) در این باب در فصل دهم از مدخل جلد اول دایرةالمعارف فارسی، مذکور در ذیل صفحه‌ی 3، توضیحات جامع آمده است.

همه‌ی هم خود را صرف اصطلاح‌سازی برای اکتشافاتی که در ممالک متمدن صورت میگیرد بکنیم بازهم به جایی نخواهیم رسید. اصطلاحات تخصصی را که کما بیش جنبه‌ی بین‌المللی دارند باید به همان صورت و با تلفظی ملایم با تلفظ فارسی بپذیریم. چه ضرورت دارد که ما برای اصطلاحاتی مانند انژکسیون، سورژکسیون، و بیژکسیون کلمات مضحک فارسی درست کنیم، و بعد هم در ساختن مصدر برای آنها و صرف کردن این مصادر وابمانیم، یا عباراتی ثقیل و نارسا و مبهم بسازیم؟ ناتوانی زبان ما و خامی آن برای بیان مطالب علمی این عصر حقیقتی انکارناپذیر است. البته، این حقیقت نباید بهانه باشد برای اینکه دست روی دست بگذاریم، و در صدد وضع اصطلاحات ملایم با زبان فارسی نباشیم، و در نتیجه، آثاری که به زبان فارسی مینویسیم، به قول یکی از ظرفا، فقط «است» و «بود» آنها فارسی باشد.

خطر عظیم در راه اصطلاح‌سازی تعصب است؛ تعصب در اینکه اصطلاحاتی را که سابقه‌ی استعمال قدیم حتی نزد علمای ایرانی مانند خواجه نصیرالدین طوسی دارند تغییر دهیم، و کلماتی مضحک که ضرورةً یکی از حروف پ، چ، ژ، و گ در آنها باشد جایگزین آنها سازیم، یا آنکه سعی کنیم اصطلاحاتی که میسازیم، ولو نارسا و ثقیل باشند، از این حروف بهری داشته باشند.

قسمت بیشتر کتاب حاضر در باب مفاهیمی است که کما بیش تازه هستند. برای بیان بسیاری از این مفاهیم ما ناچار بوده‌ایم اصطلاحاتی وضع کنیم. روش کلی ما در ساختن اصطلاحات با تفصیل کافی در مقدمه‌ی دایرة‌المعارف فارسی آمده است. خلاصه‌ی آن اینکه

(آ). در ساختن اصطلاحات یا بکار بردن اصطلاحات خارجی به نحوی که گزندی به جمله‌بندی فارسی وارد نسازد هیچگونه تعصبی را روا نمیدانیم.

(ب). اصطلاحاتی را که در آثار فارسی سابقه‌ی استعمال دارند به همان صورت اختیار کرده‌ایم، ولو حروف پچژگ در آنها نیامده باشد.

(پ). برای اغلب مفاهیم دیگر، خود اصطلاحاتی ساخته‌ایم. در ساختن بسیاری از این اصطلاحات با استادان زبان مشورت کرده‌ایم. کوشیده‌ایم که اصطلاحات ثقیل نباشند. اصطلاحات را با بررسی کامل ریشه‌های کلمات خارجی معادل آنها ساخته‌ایم، ولی بدان پابند نبوده‌ایم که اصطلاح فارسی بالضروره ترجمه‌ی لفظی اصطلاح خارجی باشد، بلکه مقصود اصلی این بوده است که حتی‌الامکان به مفهوم مورد نظر نزدیک باشد. پوشیده نیست که هیچ اصطلاحی به خودی خود معنی اصطلاحی را نمیرساند، بلکه این منظور فقط به وسیله‌ی تعریف حاصل میشود.

اگر خارجیها، بدون ضرورت منطقی، بلکه به مناسبت سوابق تاریخی، برای یک مفهوم بیش از

یک اصطلاح دارند ضرورتی ندیده‌ایم که ما هم برای آن بیش از یک اصطـلاح وضع کنیم. وضع اصطلاحات متعدد برای یک مفهوم جز تشتت حاصلی نـدارد. مثلاً، در بعضی از زبانهای اروپائیی که نگارنده از آنها خبر دارد، برای عضو یک مجموعه دو اصطلاح (مانند member و element) بکار میرود. ما عضو یک مجموعه را عضو آن مینامیم، و آن را «عنصر» مجموعه نمیخوانیم. آیـا تا کنون فارسی‌زبانی را شنیده‌اید که بگویـد «حسن عنصر فلان انجمن است» نه اینکه «حسن عضو آن انجمن است»؟

(ز). برای معدودی از اصطلاحـات خارجـی نتوانسته‌ایـم کلمات فارسی دلنشین بیابیم. ایـن اصطلاحات را با تلفظی ملایم با زبان فارسی بکار برده‌ایم.

(ژ). از استعمال الفاظ عادی به عنوان اصطلاح حتی‌الامکان اجتناب کرده‌ایم، زیـرا، این گونه الفاظ معانیی کما بیش متبادر به ذهن دارند، و استعمال آنها برای رسانیدن مفاهیم دقیق ریاضی سبب ابهام و گمراهی است.

۳.۲. ارقام

اینک به مسئله‌ی ارقام میپردازیم. چنانکه با یک نظر اجمالی ملاحظه خـواهید کـرد، در کتاب حاضر، در فرمولها و در سیاق ریاضی، ارقام لاتینی بکار برده‌ایم. در این قرن، که حسابگرهای الکترونی عظیم حتی در زندگی عادی بشر متمدن وارد شده‌اند تعصب در ارقامی که اصلاً بـه هیچ وجه به ما ارتباط ندارند ــ و علمای اسلامی آنها را «ارقام هندی» و علمای مغرب‌زمین، بـه مناسبت اینکه آنها را از مسلمانـان اقتباس کرده‌اند، «ارقام عربـی» مینامند ــ در نظر مـا وجهی ندارد. حسابگرهای الـکترونی را کنار میگذاریم. جداول عددی بیشمار علمی و فنی را در نظر آوریم. ممکن است ما یک جدول کوچک مدرسه‌ای فـلان محاسب زحمتکش خـارجی را با ارقام فارسی چـاپ کنیم. امـا این کار دردی را دوا نمیکنـد. جـداول تـوابع خـاص که در ریاضیات کـاربسته همـواره مـورد احتیاج‌انـد، و جداول عظیم عوامل اول اعداد، و جـداول هفت‌رقمی خطـوط مثلثاتی و لگاریتم را هیچ کس عملاً نمیتواند به فارسی باز گرداند، و اگر هم کسی بدین کار دست زنـد تنها مراجعه‌کننده به چنین جدولی خـود او خواهد بـود. از این مرحله‌ی تخصصی پـایینتر میآئیم. چند سال پیش، با یک نفر ریاضیدان خارجی، که بـه مسائل تعلیماتی هم توجه داشت، در باب همین مسئله‌ی ارقام صحبت به میان آمـد. وی میگفت محصل ایرانی باید عددی را که با ارقام هندی یا عربی نوشته شده است، مثلاً، در جدول لگاریتم کـه با ارقام لاتینی نوشته شده بجوید. این کار مستلزم یـک فعالیت ذهنی است، ولـو خفیف باشد. پس از آن، لگاریتم آن عدد را که در جدول با ارقام لاتینی میابد باید به ارقام هندی یا عـربی نقل کند. پس از محاسباتی که با ارقام عربی یـا هندی میکند، لگاریتم عددی را بدست میآورد،

و برای یافتن آن عدد با استفاده از جداول کوچک اجزای متناسبه در جداول لگاریتم، باید مکرر گاه از فارسی به لاتینی و گاه از لاتینی به فارسی نقل نماید. این نقل از ارقامی به ارقام دیگر احتمال ارتکاب خطا را چندین برابر میکند، و بعلاوه، برای تعصبی بیجا، نیروی فکر محصل را که باید صرف فعالیتهای اساسی شود تلف میسازد.

البته، در تعلیمات ما، از این عوامل ضایع‌کننده‌ی نیروی فکر بسیار است. بگذارید حد اقل آنهائی را که ریشه‌های عمیق ندارند بر اندازیم.

۴ § خطاب به محصلین

محصلین عزیز،

این کتاب برای شما نوشته شده است و به شما تعلق دارد، و مقدمه‌ی آن نیز برای شما است، منتها، این قسمت از مقدمه را ــ به سبب اشتمال آن بر مطالبی که باید مورد توجه بیشتر شما قرار گیرد ــ بالاخص تحت عنوان فوق آورده‌ایم.

۴.۱. تجرید در ریاضیات

همه کما بیش شنیده‌اید که امروزه در همه‌جای دنیا برنامه‌های ریاضیات در همه‌ی مراحل دستخوش تحولات و دگرگونیهای عمیق گردیده است. در باب ریاضیات جدید و تحولاتی که تحت نفوذ آن در برنامه‌های ریاضی روی داده است در قسمت ۵ این مقدمه سخن گفته‌ایم. در این مقام توجه شما را بدین مطلب جلب میکنیم که هدف برنامه‌های جدید در مراحل اولیه اینست که به محصل استقلال فکری و قدرت مواجهه با مسائل گوناگون بدهد، و هر چه زودتر که میشود او را با تَـجرید ریاضی آشنا سازد. شاید اصطلاحات تجرُید ریاضی و ریاضیات مُجَرَّد را شنیده باشید. میتوان گفت که تجرید به معنی پیراستن از بعضی عوارض است. برای اینکه این مطلب بهتر روشن شود مثالی میآوریم تا ملاحظه کنید که شما در فعالیت ریاضی خود کارهائی میکنید که جنبه‌ی تجرید دارند. از میان شما، هر کس با بازی شطرنج آشناست میداند که این بازی با مهره‌هائی و بر طبق قواعدی معین انجام میگیرد. این قواعد به ما اجازه میدهند که مهره‌ها را به طرق خاص حرکت دهیم، و اوضاع جدیدی ایجاد کنیم. در صفحه‌ی ۱۵۰ کتاب توضیح داده‌ایم که عمل شما در حل معادله‌ی ساده‌ای مانند $2x - 1 = 0$ کاملاً مانند بازی با مهره‌های شطرنج است، منتها، قواعد این بازی با قواعد بازی شطرنج تفاوت دارد. ریاضیات مجرد چنین بازیی است، یعنی بازی با مهره‌هائی بیمعنی است مانند x، a، A، $\oplus$، و غیره بر طبق قواعد معین. البته، فقط یک بازی ریاضی وجود ندارد. هر یک از دستگاههای ریاضی بازی دلانگیزی دارای قواعد مخصوص به خود میباشد (این قواعد را اصطلاحاً اصول

موضوعه‌ی آن دستگاه خوانند. با این اصطلاح در فصل ۴ با تفصیل بیشتر آشنا خواهید شد). بدیهی است که وقتی مهره‌های ما بیمعنی هستند اطلاق راست و دروغ بر نتایجی که در باب آنها بدست میآوریم نیز بیمعنی است. نظر به این نکات است که برتراند راسل*، ریاضیدان و فیلسوف بزرگ معاصر و از نخستین واضعین منطق جدید، در تعریف علوم ریاضی، به عنوان لطیفه، میگوید ریاضیات علمی است که در آن نه میدانیم از چه چیز صحبت میکنیم و نه میدانیم آنچه که میگوئیم راست است یا نه.

۴.۲. قواعد مشترک بازیهای ریاضی: منطق

خلاصه، بر طبق آنچه اکنون از ریاضیات مراد است، هر مبحث ریاضی بازی با مهره‌هائی است بر طبق قواعد معین، و برای آموختن هر یک از این بازیها باید بر قواعد آن تسلط یابیم. در همه‌ی بازیهای ریاضی یک دسته از قواعد مشترک است. این قواعد ــ که بنا بر آنچه گفته شد نقش اساسی در ریاضیات دارند ــ قواعد استدلال منطقی است، و لهذا، آشنائی با این قواعد ضروری است، و بعلاوه، هر قدر بیشتر بر این قواعد مسلط باشیم توانائی ما در بازیهای ریاضی بیشتر خواهد بود، و اگر اطلاع کافی از آنها نداشته باشیم بازیکنی ناتوان خواهیم بود که در هر قدم بازی وامیمانیم. این ضرورت آشنائی با منطق جهت تحصیل ریاضیات، و بطور کلی برای تحصیل علوم، چیزی نیست که آدمی امروز بدان پی برده باشد. برای مزید بصیرت شما، چند سطر از گفته‌ی خواجه نصیرالدین طوسی در این باب در صدر فصل اول کتاب حاضر (صفحه‌ی ۱) نقل شده است، و میتوانید از هم اکنون بر آن نظر افکنید، اگر چه ادعای مذکور به حدی واضح است که از شاهد و برهان مستغنی است: شما خود میدانید که در ریاضیات تا چه اندازه با اصطلاحاتی از قبیل برهان خلف، شرط لازم، شرط کافی، و غیره سر و کار داریم. البته، بدون فهمیدن این گونه مطالب نباید انتظار داشته باشید که ریاضیات را بفهمید، چه رسد به اینکه بتوانید شخصاً تصرفی در بازیهای ریاضی بکنید. کسی که از منطق بی بهره است بین استدلال و مغالطه و تعریف و قضیه و نظایر آنها تمیز نمیگذارد، و به آسانی فریب میخورد. به عنوان مثال، شاید شما کسانی را دیده‌اید که هنوز، پس از تعریف کردن قوای طبیعی به وسیله‌ی ضرب، رابطه‌ی $a^0 = 1$ را برای شاگردان خود ثابت میکنند! اینها کسانی هستند که تعریف عمل ضرب و تفاوت تعریف و قضیه را نمیفهمند.

نظر به این ملاحظات است که فصل آشنائی با منطق را در صدر مقاله‌ی اول کتاب قرار داده‌ایم.

۴.۳. ریاضیات واقعی و ریاضیات ماشینی

یکی از هدفهای کتاب کنونی این بوده است که، با تعلیم ریاضیات بر اساس افکار جدید، ریاضیات واقعی را به شما بیاموزد نه ریاضیات ماشینی را. به نظر ما، معلم یا برنامه‌ریزی که

بخواهد محصلین را ماشین بار آورد گناهکار است؛ مخصوصاً در زمان ما و با حسابگرهای محیرالعقول کنونی. به عنوان مثال، یکی از حسابگرهای الکترونی ساخت مؤسسه‌ی آی. بی. ام. در ۳۱ میلیونیم ثانیه دو عدد اعشاری ۱۳ رقمی را ضرب، و محل ممیز را تعیین میکند، و نتیجه را، پس از امتحان صحت آن، بدست میدهد. تصدیق میکنید که اگر شما همه‌ی عمر خود را صرف تمرین کردن در عمل ضرب نمائید هیچ گاه به این سرعت نخواهید رسید. اگر به تحصیلات گذشته‌ی خود بنگرید ملاحظه خواهید کرد که جز ریاضیات ماشینی چیزی نیاموخته‌اید، و حال آنکه مسلماً عده‌ای از شما استعداد داشته‌اند که ریاضیدانهای خوبی بشوند. حد اقل سه سال از عمر شما در مدارس متوسطه صرف میشود برای تعیین اینکه، بازاء چه مقادیر پارامتر، فلان معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف یا ریشه‌های مختلف‌العلامه دارد، یا 1 بین ریشه‌های آنست[1]. پس از آن هم که به «دوره‌ی عالی» میروید چند سال از عمر شما صرف انتگرالگیری میشود بی آنکه معنی واقعی انتگرال را بدانید یا شرایط وجود آن را بیاموزید. نتیجه‌ی این ناهنجاری اینست که بسیاری از کسانی که مدارج رسمی تحصیلات عالیه را طی کرده‌اند حتی از مفاهیم ساده‌ی ریاضی بیخبرند.

۴.۴. شستشوی مغزی؛ تشکیک در حقایق

چنانکه قبلاً گفته شد، طرح اولیه‌ی کتاب حاضر در سال تحصیلی ۱۳۴۷ ـ ۴۸ در دانشسرای عالی تدریس شد. یکی از محصلین با ذوق گفته بود که درس ریاضیات عمومی «شستشوی مغزی» است. اگر این کتاب در شما هم موفق به چنین کاری شود ـ یعنی توفیق یابد که آلودگیهای ناشی از برنامه‌ها و مواد نامناسب و ناهنجار مندرج در آنها را از ذهن شما، که مسلماً در اولین روزی که پا به مدرسه نهاده‌اید پاک و تابناک بوده است، بزداید، و رونق و جلای اولیه را بدان باز گرداند ـ نگارنده و متصدیان تأمین هزینه‌ی چاپ کتاب بر خود خواهند بالید.

یکی دیگر از محصلین با ذوق گفته بود که از زمانی که درس ریاضیات عمومی خوانده‌ایم به بسیاری از حقایق مشکوک شده‌ایم. اگر محصلی در نتیجه‌ی خواندن این کتاب بدین مرحله از معرفت برسد باید بدو تبریک گفت:

شد مشتبه ز کعبه به میخانه راه ما؛
ای خوشتر از هزار یقین اشتباه ما!

«حقایقی» که در نتیجه‌ی خواندن این کتاب بدانها مشکوک خواهید شد، بل، آنها را باطل

---

(۱) غرض از ذکر این مثال تعریض بر معلمین زحمتکش مدارس متوسطه نیست، زیرا، آنها هم اسیر برنامه‌های ریاضی منسوخ مدارس ما هستند.

خواهید شمرد، از قبیل حکم کلی به بزرگتر بودن کل از جزء است، و چه بهتر که هر چه زودتر بدین گونه، به اصطلاح، «حقایق» مشکوک شوید، یا، فی‌المثل، دریابید که بعضی از مطالبی که به عنوان برهان بعضی از قضایای ریاضی آموخته‌اید حدسیاتی بیش نیستند (مثلاً، تبصره‌ی صفحه‌ی ۱۹۰ را ملاحظه کنید).
آری، بسیاری از آنچه آنها را حقیقت میشماریم، وقتی با ترازوی منطق سنجیده شوند، معلوم میشود که پندارهائی در لباس حقیقت هستند.

۴.۵. حیرت و همت

مناسب است که چند کلمه هم در باب آموختن مطالب این کتاب گفته شود. در جاهائی که محصل تحصیلات خود را با برنامه‌هائی مبتنی بر افکار جدید ریاضی آغاز میکند، وقتی که به تحصیلات عالیه میرسد با بسیاری از مطالب مذکور در فصول دوم و سوم کتاب حاضر مأنوس است، و احساس غرابت یا گسستگی در تحصیلات سابق و لاحق خود نمیکند. اگر شما در چنین وضعی هستید فبها، ولی اگر اول بار است که با مطالبی از نوع مندرجات کتاب حاضر آشنا میشوید وضع شما مانند غریبی خواهد بود که تازه وارد شهری میشود که زبان مردم آن را به درستی نمیداند. البته چنین کسی مدتی حیران است. از این امر نباید هراسید. باید با این نظام جدید آشنا شد، و بدان خو گرفت. تجربه‌ی سال گذشته در دانشسرای عالی نشان میدهد که این آشنائی در مدتی کوتاهتر از آنچه انتظار دارید حاصل میگردد، و پس از آن ــ باز هم به گواهی تجربه‌ی گذشته ــ دیگر ریاضیات سطحی رایج شما را اقناع نخواهد کرد. البته این توفیق در نتیجه‌ی همت حاصل میشود، و امید است که در شما که خود را برای تحصیل ریاضیات حاضر کرده‌اید چنین همتی باشد.
هستند کسانی که تحصیل علم را مانند سینما رفتن میدانند: شخص در حال انفعال و بی‌آنکه از خود فعالیتی بروز دهد در مقابل پرده مینشیند، و صحنه‌هائی از برابر او میگذرند. این پندار باطل است. بدانید که ریاضیات علمی زنده و بالان و دارای تحرّک و، به قول فرنگیها، علمی دینامیک است. آموختن آن هم موقوف به فعالیت و تحرّک ذهن متعلم است. بدون این فعالیت جدّی، ممکن است که دیپلم ریاضیات بگیرید، ولی ریاضیات نخواهید آموخت.

۴.۶. تحصیل ریاضیات و تحصیل دیپلم ریاضیات

تصور نمیرود که تفاوت بین تحصیل ریاضیات و تحصیل دیپلم ریاضیات بر کسی پوشیده باشد، منتها، هستند کسانی که قصدشان واقعاً تحصیل ریاضیات است، ولی فقط تحصیل دیپلم ریاضیات به آنان آموخته میشود.

ریاضیات فن حل کردن مسائل امتحانی نیست،

ولی بسیار هستند از جوانان با استعداد که عملاً ریاضیات بدانسان فن مسئله حل کردن، آن هم مسائلی یکنواخت و مبتذل برای «قبول شدن در امتحانات»، وانمود میشود، و این تلقین بسیاری از استعدادها را خاموش کرده است. به همین جهت است که بین محصلین شائق به تحصیل ریاضیات بسیار کسان دیده میشوند که تعریف دقیق مفاهیم ساده‌ی ریاضی را نمیدانند، و عمق استدلالهای ریاضی را درک نمیکنند، ولی مسائل ماشینی از انواع معین را میتوانند حل کنند، و از این راه، به تحصیل دیپلم ریاضیات نایل شوند. مسئله حل کردن فرع است. از ارکان اساسی ریاضیات تعریفات و استدلالها است.

تعریفات موجوداتی را که با آنها سر و کار خواهیم داشت به ما معرفی میکنند، به ما میشناسانند. چگونه میتوانیم از موجودی که آن را نمیشناسیم، یا ناقصاً و به صورت مبهم و متشتت میشناسیم، بحث بامعنی بکنیم؟ بعلاوه، در هر علمی، تعریفات از ارکان استدلال و استنتاج در آن علم میباشند. استنتاج را میتوان به پیمودن پله‌های نردبامی که مطلوب در آخرین پله‌ی آن است تشبیه کرد. هر یک از مراحل استنتاج در حکم یکی از پله‌ها است. اگر یکی از این مراحل بر ما نامعلوم یا سست‌پیوند باشد چگونه میتوان انتظار بالا رفتن از نردبام استنتاج را داشت؟ پس، شما محصلین عزیز، اگر واقعاً خواستار تحصیل ریاضیات هستید باید بکوشید تا تعریف هر مفهوم مربوط به رشته‌ای را که میآموزید دقیقاً درک کنید و فراگیرید، تا هم آن مفهوم را به درستی بشناسید، و هم در استدلال بتوانید بدان استناد کنید.

تعمق در استدلالهای ریاضی برای پی بردن به کنه آنها و به عمق احکام ریاضی نیز منتهای ضرورت را دارد. از این راه است که تیزبین میشوید، و فکر شما بیدار میشود، و صاحب نیروی ابتکار و آماده برای تحقیق میگردید.

۴.۷. پایان

با کمال تأسف باید گفت که بسیاری از محصلین به حد کافی به خواندن و به اینکه فکر خود را بکار اندازند خو نگرفته‌اند. بعضی هم هستند که میخواهند معلم چنان درس دهد که فی‌المجلس آن را فراگیرند، و نیازمند مطالعه نشوند؛ اینها همان کسانی هستند که بین تحصیل علم و تماشای سینما تمیز نمیگذارند، و نمیدانند که، در تحصیلات عالیه، کار معلم بیشتر جنبه‌ی راهنمائی دارد، و همانا متعلم است که باید با همت و کوشش خود درس معلم را فراگیرد.

اگر واقعاً خواهان تحصیل ریاضیات هستید باید در طلب آن زحمت بکشید. صرفاً از گفتن معلم کسی علم نمیآموزد. از کاهلی در خواندن بپرهیزید، و فکر خود را بکار اندازید. از نامأنوس بودن مطالب و تازگی آنها و حیرت اولیه‌ی ناشی از این امور نهراسید. به یقین بدانید که با

راحت‌طلبی و طلب مطالب ساده و مبتذل به جایی نمیرسید. بالاخره، اگر آمادگی برای پذیرفتن سخنانی که گفته شد ندارید «از هم اکنون کتاب را برهم نهید، و کاری دیگر، از قبیل تربیت زنبور عسل یا ساختن شعر مستزاد، پیش گیرید»[۱].

۵ § ریاضیات جدید[۲]

۵.۱. طرح موضوع

اصطلاح ریاضیات جدید امروزه بسیار بر سر زبانهاست، و در باب آن شبهاتی در اذهان هست. بعضی تصور میکنند که ریاضیات جدید علمی است که بر آنچه در گذشته ریاضیات خوانده میشد قلم بطلان کشیده است، و به عنوان علمی جدید پا به عرصه‌ی وجود نهاده. این تصور به کلی بر خلاف حقیقت است. از طرف دیگر، اگر ریاضیات جدید را به معنی قسمت جدید الاکتشاف ریاضیات بگیریم در هر عصری «ریاضیات جدید» وجود داشته است. اصلاً،

ریاضیات چیست؟

جواب این سؤال در زمانهای مختلف و بر حسب بسط ریاضیات و بسط فکر ریاضی متفاوت بوده است. زمانی ریاضیات را علم اعداد، زمانی علم فضا، و زمانی علم کمیات متصل و منفصل تعریف میکردند. این تعریف اخیر، که شاید بیش از یک قرن پیش تا حدی قابل قبول بود، هنوز در بعضی از اذهان باقی است، و حتی در قرن حاضر منشأ آرائی سخیف بوده است، چنانکه، در کتابی به زبان انگلیسی به عنوان فلسفه‌ای برای انسان این عصر (۱۹۳۸)، نویسنده سخنی بدین مضمون میگوید که «قوانین فیزیک را باید به زبان ریاضی بیان کرد؛ اما، چون ریاضیات موضوعی کمی است، و سر و کارش فقط با شمردن و اندازه‌گیری است، قادر به توصیف تغییرات کیفی نیست. بنا بر این، کشف هیچ قانون فیزیکی که خصوصیات تغییرات کیفی را پیشگوئی و توصیف کند ممکن نیست». طرز فکر کنونی را میتوان از این گفته‌ی یکی

---

(۱) اقتباس از گفته‌ی س. ک. کلین (S. C. Kleene)، منطقی بزرگ معاصر امریکائی، در صفحه‌ی سوم کتابش، به نام منطق ریاضی.

(۲) در تدوین این قسمت، از رساله‌ی شوکه به نام ریاضیات جدید چیست؟، و مقاله‌ی سمیثیز به همان عنوان ــ مخصوصاً از دومی ــ استفاده شده است. نام و نشان اصلی آنها اینست:

Choquet, G., *What is Modern Mathematics*, Reading (Educational Explorers), 1963.

Smithies, F., What is Modern Mathematics? *Mathematical Gazette*, vol. XLVII, 278 - 298 (1963).

از محققین معاصر دریافت: «در باب علم فیزیک، آشکار شده است که ضرورت ندارد که ما ماهیت موجودات مورد بحث را بشناسیم بلکه آنچه ضروری است شناختن ساختمان ریاضی آنهاست، و در حقیقت، تنها چیزی که میشناسیم همین است».
نقش ریاضیات در هر مبحث علمی، خواه در علم اقتصاد یا در علم نجوم، همین شناسانیدن ساختمان ریاضی است.

۵.۲. ساختمان ریاضی و ریاضیات جدید

هر ساختمان ریاضی مجموعه‌ای از اشیاء و نسبتهائی بین آنهاست. ماهیت این اشیاء ملحوظ نیست (این امر برای اینکه یک ساختمان ریاضی تئوریهای مختلف را در بر گیرد اهمیت اساسی دارد)؛ آنچه مهم است نسبتهائی است که بین آنها قائل میشویم. این نسبتها با اصول موضوعه‌ی مشخص‌کننده‌ی ساختمان مورد نظر بیان میشوند.
آنچه در زمان ما «ریاضیات جدید» خوانده میشود همانا علم ساختمانهای ریاضی است.
بنا بر این تعریف، کسانی که تا حدی در ریاضیات پیش رفته‌اند ملاحظه میکنند که «ریاضیات جدید» در واقع چندان جدید نیست، بلکه، قسمت عمده‌ی آن بیش از پنجاه سال قبل به وجود آمده است. در واقع، تأثیر عمیق آن در تعلیم و تعلم ریاضیات در سنوات اخیر است که سبب اتصاف آن به «جدید»، «نوین»، یا «مدرن» گردیده است، و در حقیقت، در بسیاری از موارد، اصطلاح «ریاضیات جدید» ناظر به تعلیم و تعلّم ریاضیات بر طبق روش مبتنی بر ریاضیات معاصر میباشد. ضمناً، از تعریف مذکور ملاحظه میکنید که، اولاً، فهم معنی ریاضیات جدید موقوف به اینست که شخص تا حدی در ریاضیات پیش رفته باشد؛ و ثانیاً، حتی در تعریف ریاضیات جدید باید به مفهوم مجموعه توسل جست. زبان ریاضیات جدید، چنانکه قبلاً گفتیم، تئوری مجموعه‌ها است.

۵.۲.۱. نقش روش اصل موضوعی در ریاضیات جدید

پیش از اینکه به نقش ریاضیات جدید در تعلیم و تربیت بپردازیم لازم است تذکر دهیم که، به زعم بعضی، سیمای اساسی ریاضیات جدید بکاربستن روش اصل موضوعی است. این رأی ناشی از سهل انگاری است. روش اصل موضوعی از زمان اقلیدس (حدود ۳۰۰ قم) سابقه دارد. اما، اغلب دستگاههای سابق اصول موضوعه جنبه‌ی مشترکی دارند، و آن اینکه هدف آنها مشخص کردن ساختمانهای خاص (مانند هندسه‌ی اقلیدسی، یا اعداد طبیعی، یا اعداد حقیقی) به وسیله‌ی اصول موضوعه بوده است، و اگر دو دستگاه ریاضی در یکی از این دستگاههای اصول موضوعه صدق کنند آن دو دستگاه ریاضی در حقیقت معرف یک موجود ریاضی میباشند.

از طرف دیگر، بیشتر دستگاههای کنونی اصول موضوعه «چندجانبی» هستند. نمونه‌ی ساده‌ای از اصول موضوعه‌ی چندجانبی اصول موضوعه‌ی گروه است، که در پایان فصل ۳ کتاب حاضر آمده است، و ساختمانهای ریاضی متمایز بیشماری در آنها صدق میکنند. بدین گونه، یک دستگاه اصول موضوعه یک ساختمان ریاضی را مشخص نمیکند، بلکه یک نوع، یا به اصطلاح، یک کاتگوری[1] ساختمان ریاضی را مشخص میسازد.

۵.۳. نقش تعلیمی ریاضیات جدید

مطابق‌ساختن تعلیم و تعلّم ریاضیات با پیشرفتهای این علم سابقه‌ای متمد دارد. نخستین نهضت بزرگ در این زمینه از زمان کلاین* (۱۸۴۹ – ۱۹۲۵)، ریاضیدان آلمانی، در آلمان آغاز گردید (صفحه‌ی ۸۶۶ ملاحظه شود). متأسفانه، در مطابقت‌دادن تعلیم و تعلم با تحول علم و فرهنگ گاه تأخیر شده است، و هم علم و هم تعلیم و تعلم از این تأخیر آسیب دیده‌اند. بالاخص، در پنجاه سال اخیر، پیشرفت علم چنان سریع بوده است که چنین تأخیری احترازناپذیر بوده است. سابقاً، حد اقل قسمتی از دروس ریاضی فن محاسبه و ترسیمات هندسی و عبارت از دستورالعملهائی بود از این قبیل که اول چنین کن و سپس چنان کن. متعلم موظف بود که این دستورالعملها را به خاطر سپارد. هنوز هم در جاهائی که برنامه‌های قدیم اجرا میشود حال بدین منوال است. امروز معتقدند که ریاضیات را باید به عنوان تحقیق در ساختمانهای ریاضی تدریس کرد، تا در مواجهه با مسئله‌ای، که در آن، ساختمان ریاضی ساده‌ای در حجاب شرایط و اوضاعی درهم‌پیچیده مستتر است، شخص بتواند آن ساختمان را تشخیص دهد، و مجزا کند، و به وسیله‌ی خواص آن ساختمان، به حل مسئله نایل شود. کار اصلی تعلیم ریاضیات همین است. وظیفه‌ی معلم اینست که قوه‌ی دریافت ساختمان ریاضی نهفته در اوضاع گوناگون را – اعم از اوضاع واقعی یا ساختگی و مجرد یا محسوس – و استفاده از آن ساختمان را در متعلم برانگیزد، و خلاصه، به او بیاموزد که ریاضی فکر کند.

۰۵.۳.۱ افراط و تفریط

در طرح و اجرای برنامه‌های جدید، احتراز از افراط و تفریط بسیار اهمیت دارد. بعضی از طرفداران پُرحرارت ریاضیات جدید خواستار آنند که تدریس ریاضیات از ساده‌ترین و کلیترین ساختمانها شروع شود، و متدرجاً به ساختمانهای خاص یا درهم‌پیچیده بپردازد. افراطیهائی هستند که فریاد «مرگ بر هندسه‌ی اقلیدس» میزنند، و خواهان آن هستند که تدریس هندسه با اصول موضوعه‌ی هیلبرت* آغاز گردد. به نظر نمیرسد که این گونه افراطکاریها منتج به نتیجه‌ی

---

category (۱)

مطلوبی گردد. یکی از محققین سخنی بدین مضمون میگوید که آموختن فرایندی است که از معلوم به مجهول، از جزئی به کلی، و از محسوس به معقول هدایت میکند. . . پیش از اینکه یک مفهوم کلی را در کار آوریم، هر قدر هم این مفهوم از جنبه‌ی منطقیِ محض ساده باشد، اهمیت اساسی دارد که موارد متنوع محسوس از آن گرد آوریم، و پس از آن، توجه را به مشابهت آنها و تعلقشان به یک ساختمان جلب کنیم.

۵.۳.۲. ریاضیات جدید و تمرین

یکی از شبهاتی که در بعضی اذهان خام یا ناتوان هست این است که «ریاضیات جدید از تمرین احتراز دارد». این پندار ناصواب است. البته، تمرینهای مکرر یکنواخت چه در ریاضیات جدید و چه در «ریاضیات سابق» مردود است. اما، تمرینهای مناسب هر مقام، که هر یک متضمن وضعیتی تازه باشد، نه فقط مفید بلکه ضروری است، زیرا، بدین وسیله، متعلم با مفاهیم کما بیش مجردی که میآموزد مأنوس میگردد. در غیر این صورت، پیشرفتی نسبت به وضع «دستورالعمل حفظ کردن» که سابقاً بدان اشاره کردیم حاصل نمیشود. تفاوت این است که در وضع جدید، محصل، بجای دستورالعمل، اصول موضوعه و براهین را حفظ میکند.

۵.۳.۳. کتاب حاضر و ریاضیات جدید

توضیحاتی که در صفحات قبل در باب کتاب حاضر و ریاضیات جدید گذشت گفته‌ی سابق ما را که این کتاب بر اساس افکار ریاضی این عصر تألیف شده است، و نیز نقش کتاب را در آشنا ساختن محصلین با ریاضیات جدید بیش از پیش محقق میسازد.

حاجت به گفتن نیست که محصلینی که تحصیلات خود را از ابتدا با برنامه‌های جدید ریاضیات آغاز میکنند، وقتی که به مراحل عالی میرسند، با زبان ریاضیات امروز و با تجرید ریاضی کما بیش آشنا هستند، و میتوانند تحصیلات عالیه‌ی خود را یک باره در دنیای ریاضیات مجرد شروع کنند. اما، چون محصلین ما در تحصیلات ابتدائی و متوسطه از این گونه برنامه‌ها محرومند، مقدماتی را که در جاهای دیگر قبل از شروع به تحصیلات عالیه میآموزند ما باید در ابتدای این تحصیلات قرار دهیم، و این کار متضمن مشکلی از لحاظ تألیف کتاب است، زیرا، اگر مطالب به زبان ابتدائی و با تسامحاتی که در آن مرحله در بیان مطالب روا میدارند تقریر شود برای محصلینی که چندین سال نوعی ریاضیات خوانده‌اند ملال‌آور و تا حدی غیر قابل قبول خواهد بود. بدین جهت، ما راه وسطی اختیار کرده‌ایم، و آن تدوین مطالب است با زبان و تدریج و دقتی که درخور محصلین ایرانی طالب ریاضیات عالیه است. از زبان ریاضیات این عصر، یعنی، از تئوری مجموعه‌ها و مفاهیم وابسته بدان اطلاعاتی دقیق به دست داده‌ایم،

به نحوی که در اواخر مقاله‌ی اول، که مختصراً از دستگاه مجرد و ساختمان مجرد ریاضی سخن میرود، محصلین آمادگی کافی برای فهم این مطالب دارند. بعلاوه، در مواضع مختلف کتاب، توجه متعلم را به دستگاههای مختلف جلب کرده‌ایم. مثلاً، در فصل ۲ ض، ساختمان مجرد معروف به جبر بولی را با بعضی از مدلهای آن (جبر مجموعه‌ها، حساب گزاره‌ها، و جبر کلیدهای برق) آورده‌ایم، و با استفاده از موقعیتهای مناسب، بعضی از مفاهیم اساسی مربوط به دستگاههای ریاضی را (مانند مفهوم ایزومورفیسم) تعریف کرده‌ایم. تصور میرود که مجموعه‌ی این مطالب در پخته کردن فکر ریاضی محصلین و در بیدار کردن آنها به منظور اینکه از ریاضیات این عصر باخبر شوند سخت مؤثر باشد. در باب امثله و تمرینات و نحوه‌ی در کار آوردن تعریفات و اثبات قضایا قبلاً توضیح کافی ذکر شد.

۵.۴. چگونه باید برنامه‌های ریاضی را اصلاح کرد؟

در این قسمت، صحبت از اصلاح برنامه‌های ریاضی ما در دوره‌های ابتدائی و متوسطه است. در باب برنامه‌های فعلی ــ که با هر معیاری سنجیده شوند محکومند، و متأسفانه معلمین زحمتکش و دلسوز مدارس ما موظف به اجرای آنها هستند ــ هرچه گفته شود زاید است. بر «اقداماتی» هم که به عنوان اصلاح آنها میشود نامی جز کمدی ریاضیات جدید نمیتوان نهاد. آیا با چند خبر تبلیغاتی، و به دست اشخاص ناصالح، میتوان این برنامه‌ها را اصلاح کرد؟ و آیا ممالک اروپا و ایالات متحده‌ی امریکا بدین طریق برنامه‌های خود را اصلاح کرده‌اند؟

۵.۴.۱. گروه بررسی ریاضیات مدارس

برای اینکه مطلب روشن شود، توضیحاتی در باب یکی از سازمانهای مشهور در ساختن برنامه‌ی ریاضیات ابتدائی و متوسطه، معروف به گروه بررسی ریاضیات مدارس[۱]، میآوریم. این سازمان که، با حروف اوایل نام آن، به SMSG معروف است، امروز یکی از مراکز مهم و معروف تحقیق در برنامه‌های ریاضی است، و تا کنون قریب صد مجلد کتاب بر طبق برنامه‌های جدید منتشر ساخته است.

تعلیمات متوسطه در امریکا تا ایام اخیر مبتنی بود بر گزارش سال ۱۹۱۸ کمیسیونی معروف به کمیسیون تجدید سازمان مدارس متوسطه، که تعلیمات متوسطه را بر گرد اموری از قبیل بهداشت، حرفه، شارمندی، استفاده‌ی با ارزش از ایام فراغت، و امثال آنها متمرکز میکرد. این

---

(۱) School Mathematics Study Group

اطلاعاتی که در متن در باب این سازمان آمده است مأخوذ است از کتاب ووتن به نام ساخت یک برنامه. نام و نشان اصلی اینست:

Wooton, W., *The Making of a Curriculum*, New Haven (Yale University), 1965.

گزارش به حدی در تعلیمات متوسطه در امریکا مؤثر افتاد که آن را متنفذترین مدرک واحد در تاریخ تعلیم و تربیت در امریکا خوانده‌اند. گزارش مذکور سبب پایین آمدن سطح عمومی تحصیلات ریاضی در آن کشور گردید[1].

در طی سالهای ۱۹۲۰ – ۱۹۵۰، دروس ریاضی در مدارس متوسطه جنبه‌ی عملی داشت، و توجه به مسائل نظری متدرجاً کاهش یافت، و سطح کتب درسی نیز پایین آمد. در سال ۱۹۵۰، بسیاری از معلمین ریاضیات در مدارس متوسطه در حدودی که خود تحصیل کرده بودند تعلیم میدادند، و کسانی که تحصیلاتشان در تربیت بدنی، زبان انگلیسی، تاریخ، یا خانه‌داری بود به تدریس ریاضیات گماشته میشدند.

از حدود سال ۱۹۵۰ یا کمی پیش از آن، گروههائی کوچک در گوشه و کنار مملکت در صدد اصلاح این وضع بر آمدند، و در دهه‌ی ۱۹۵۰ – ۱۹۶۰ فعالیت آنان شدیدتر گردید. از عواملی که به قول خود امریکائیها در تشدید فعالیت در اصلاح برنامه‌های ریاضی بسیار مؤثر بود فرستادن سپوتنیک I بود به فضا به توسط دولت شوروی (۴ اکتبر ۱۹۵۷)، که هم از لحاظ اعتبار ملی و هم از جهات امنیتی بر امریکائیان سخت گران آمد، و نه فقط مقامات فرهنگی، بلکه مردم عادی را هم خواستار «اقداماتی در باب ریاضیات» نمود. در این اوضاع بود که SMSG به وجود آمد.

پیش از ذکر چند کلمه در باب SMSG، باید گفته شود که، به سبب کمبود ریاضیدانان، که در دهه‌ی ۱۹۵۰ – ۱۹۶۰ رو به ازدیاد بود، در ۲۱ نوامبر ۱۹۵۸ با کومک بنیاد ملی علم (تحت نظر دولت امریکا) کنفرانسی از ریاضیدانها در شیکاگو تشکیل گردید تا مسئله‌ی عرضه و تقاضای ریاضیدان را مورد بررسی قرار دهد. اگرچه مسئله‌ی مورد بحث کنفرانس مربوط به تحصیلات عالیه به نظر میرسید، رأی اعضای کنفرانس بر این قرار گرفت که تمرکز مساعی در کارآموزی پرسنل ریاضیدان در دانشکده‌ها – خواه در سطح لیسانس یا برتر از آن – «حمله‌ای است کم‌دامنه بر مشکلی که دامنه‌اش پهناور است»، و **یکی از اسباب کمبود اشخاص دارای کارآموزی و تجربه‌ی کافی در ریاضیات نقص تحصیلات پیش‌ازدانشگاهی است.**

باری، پس از تأسیس SMSG به رهبری دانشگاه مشهور ییل، بنیاد ملی علم در سال ۱۹۵۸ کومک اولیه‌ای به مبلغ صد هزار دلار به آن گروه اعطا کرد «تا برنامه‌ای عملی که سطح عمومی تعلیم ریاضیات را در مدارس ابتدائی و متوسطه بهبودی بخشد» طرح کند. شرح فعالیتهای سازمان SMSG و کومکهای «پرسنلی» و مالی که از منابع مختلف دریافت داشته

(۱) فلسفه‌ی تربیتی مندرج در این گزارش بود که به وسیله‌ی بعضی که دیدن امریکا آنان را خیره کرده بود بر دستگاه فرهنگی ما تحمیل شد، و سطح تحصیلات متوسطه را در ایران به میزان بیسابقه‌ای پایین آورد.

است تا توفیق انجام خدمتی یافته در این مختصر نمیگنجد. طالبین اطلاعات بیشتر باید به کتاب ووتن مذکور در ذیل صفحه‌ی 34 رجوع کنند. در ضمایم آن کتاب، فهرست ریاضیدانها و معلمین ریاضیات و سایر کسانی را که آن گروه از همکاری آنان برخوردار بوده است ملاحظه خواهند کرد. جمع کومک مالی بنیاد ملی علم به گروه در دوره‌ی مختوم به سپتامبر ۱۹۶۱ از چهار میلیون دلار متجاوز بوده است.

سازمان SMSG و سازمانهای دیگر در امریکا، انگلستان، و غیره، با سرمایه‌های هنگفت مادی و معنوی، هر یک راهی ناهموار را تا حدی هموار کرده‌اند و پیموده‌اند، و چند سال در باب برنامه‌ی ریاضیات مدارس ابتدائی و متوسطه تجربه اندوخته‌اند. کتابهای درسی متعدد و کتابهای راهنمای معلم برای هریک تألیف کرده‌اند و، در نتیجه‌ی تجربه‌های حاصل از تدریس آنها به گروههای کم و بیش وسیع از شاگردان، در آنها تجدید نظر کرده‌اند، و هنوز هم مشغول ارزیابی کار خود و بهتر گردانیدن برنامه‌ها و کتابهای درسی میباشند. ما نه سرمایه‌ی معنوی تجدید آزمایشهای آنها را داریم و نه حاضریم سرمایه‌ی مادی کافی در این راه بگذاریم.

۲.۴.۵. تألیف و ترجمه در «ریاضیات جدید»

به عنوان جمله‌ی معترضه، باید توجه خوانندگان را به موضوع مهم فوق جلب کنیم، زیرا، تألیف و ترجمه به «سبک ریاضیات جدید» کاری «سهل و ممتنع» است، و هر قدر سطح مطلب پایینتر باشد نوشتن آن دشوارتر. اولاً، در ده سال اخیر تعدادی بسیار زیاد کتاب تحت عنوان ریاضیات جدید به زبانهای خارجی نوشته شده است، که در میان آنها کتابهای بی‌اعتبار کمیاب نیست. ثانیاً، بعضی کسان که مختصر اطلاعی مثلاً از زبان انگلیسی و ریاضیات دارند با ملاحظه‌ی یک کتاب انگلیسی ابتدائی در «ریاضیات جدید» ـ چون آن را خالی از فرمولهای پیچیده‌ی ریاضی میبینند ـ ترجمه‌ی آن را سهل میپندارند، و البته به نیت خدمت، ولی بی‌آنکه زبانهای فارسی و انگلیسی را درست بدانند، و از اصل مطلب بهره‌ی کافی داشته باشند، دست به ترجمه‌ی آن میزنند. ترجمه‌هائی که در شرایط مذکور به عمل آید سخت گمراه‌کننده است، و افکار و مفاهیم نادرستی به ذهن محصلین القا میکند، که زدودن آنها در تحصیلات آتیه خالی از دشواری نیست[1].

(۱) چندی قبل، یکی از شاگردان نگارنده نوشته‌ای از یکی از «کارشناسان» برای او فرستاده بود که، در آن، مؤلف جمله‌هائی از قبیل «a فرد است» را «جمله‌ی شرطی» خوانده است، و حال آنکه یک محصل مدرسه‌ی ابتدائی تشخیص میدهد که چنین جمله‌ای شرطی نیست. سبب «اشتباه» نویسنده‌ی آن نوشته این بوده است که بین کلمه‌ی condition [= شرط] کتب انگلیسی با اصطلاح conditional sentence [= جمله‌ی (یا، به اصطلاح ما، گزاره‌ی) ←

۵۰۴۰۳. چاره چیست؟

اگر قبول کردیم که باید برنامه‌های فعلی ریاضی مدارس در پرتو افکار کنونی اصلاح شود باید تحقیق کنیم که این اصلاح چگونه باید اعمال گردد؛ چه موادی را باید در مدارس ابتدائی و متوسطه تدریس کرد، و چگونه باید آنها را تدریس نمود. نگارنده به هیچ وجه صلاحیت پاسخگفتن به این سؤالات را ندارد، و در ایران هم کسی را نمیشناسد که برای این کار صالح باشد. بعلاوه، چنانکه از توضیحات سابق معلوم است، این کار مستلزم صرف سرمایه‌های مادی و معنوی هنگفت است که ما هیچ یک را در اختیار نداریم، و اگر هم داشتیم، صرفکردن آنها بدون استفاده از نتایج حاصل به وسیله‌ی گروههای مجهزی که چند سال است در این امر تجربه اندوخته‌اند کاری عاقلانه نمیبود.

ما در بنای ساختمانهای عظیم متوسل به متخصصین مجرب خارجی میشویم. کدام بنا عظیمتر از تعلیم و تربیت جوانان مستعد این آب و خاک است؟ راه اصلاح برنامه‌های ما اینست که یک هیئت عالیمقام از یکی از این گروهها برای مدت چند سال استخدام کنیم تا با گروهی از ایرانیان اعم از استاد و دبیر و آموزگار، که انتخابشان صرفاً براساس صلاحیت علمی و فنی باشد، و زبان هیئت را هم به حد کافی بدانند، برنامه‌ای مناسب با این محیط **ایجاد کنند**، و طرح کتابهائی مناسب با آن بریزند، و پس از آن، مراکزی متعدد برای کارآموزی دیگر معلمین مدارس ابتدائی و متوسطه به منظور آماده‌ساختن آنان جهت اجرای برنامه‌ی جدید دایر شود. فقط در صورت اجرای چنین طرحی است که میتوان به اصلاح واقعی برنامه‌های ریاضی دبستانی و دبیرستانی امید داشت.

غلامحسین مصاحب

تهران

دی ماه ۱۳۴۸ هجری شمسی

→ شرطی] تمیز نگذاشته است. جمله‌ی «a فرد است» گزاره‌ی شرطی نیست، ولی شرطی بر a مقرر میکند، اما نویسنده‌ی کارشناس این تفاوت را تشخیص نداده است.

در نوشته‌ای دیگر، مجموعه‌ی خالی مجموعه‌ای تعریف شده است که 0 عضو آن باشد. معلوم نیست مجموعه‌ای که عضوی دارد چگونه خالی است.

این وضع یادآور وضع مسئله‌ی تربیع دایره در قرون قدیم است، که حتی کسانی که بهره‌ای از ریاضیات نداشتند رسائلی در باب آن تألیف میکردند، و کار بدانجا رسید که دو تن از «کارشناسان تربیع دایره» شرکتی برای «قبول سفارشات تربیع دایره» دایر داشتند. برای اطلاع بیشتر میتوان رجوع کرد به جلد دوم کتاب راوس بال به نام تفریحات ریاضی. نام و نشان اصلی این است:

Rouse Ball, W., *Recréations Mathématiques*, II, Paris (Hermann), 1926.

مقاله‌ی اول

مقدمات عمومی

فصل ۱

آشنائی با منطق

... و چنانک بـه نادر افتد کـه مـردمی که نجارت نا‌آموخته تختی نیک تـواند تراشید، به نـادر افتد کـه مردمـی منطق ناآموخته علمی مکتسب بر وجهی کامل حاصل تـوانـد کرد. بـل، همچنانک بیشتر مـردم کـه نجارت ندانند قادر بـاشند بر آنک چوبـی بتراشند اما واثق نباشند به آنک آن چوب بـه آن تـراشیدن بـه اصلاح آید یـا نیاید، بلک تباه شود، بیشتر مـردم که منطق ندانند در معانـی تصرفی توانند کرد، اما واثـق نباشند بـه آنـک از آن تصرف علمـی حـاصل شود یا نشود، بلک در حیرت بیفزایـد، یا در ضلالت افکند. و نه هرکـه کاری کند دانـد کـه چـه میکند، یـا چه میباید کرد، بلک بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و همچنین بـاشد حکـم کسانـی کـه طلب علـوم کنند و بـر صناعت منطق واقـف نباشند. خواجه نصیرالدین طوسی.

0 § مقدمه

در هر مبحث ریاضی، مفاهیم گوناگون و متنوع ـ از قبیل مجموعه، نسبت، تابع، تساوی، عمل، و غیره ـ در کـار میآید، کـه بـدون آشنائی بـا آنها تحصیل ریاضیات ممکن نیست. تعریف دقیق همه‌ی مفاهیم مذکور و نظایر آنها، اگر هـم ممکن بود، در شروع مطلب، و بدون فراهم ساختن مقدماتـی مقدور نمیبود. بنا بر این، در آغاز کار باید تا حدی بـه اطلاعات کمابیش مبهمی کـه هر محصل ریاضیات در ذهن خـود اندوخته دارد اعتماد کـرد، و متدرجاً این اطلاعات را تنقیح نمود. مثلاً، اگرچه بحث رسمی ما از اعداد حقیقی از اواخر فصل ۴ آغاز میشود، پیش از آن، در امثله و تمرینات، اغلب بـدین اعداد و اقسام آنهـا (اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد مُنطق، و اعداد اصم)[1] و به آنچه محصل در باب آنها در جبر مقدماتی آموخته است توسل میجوئیم.

---

(۱) اعـداد طبیعـی یعنی اعـداد 1، 2، 3، . . . . اعـداد صحیح یـعنی اعداد طبیعی و ←

مقدم بر هرچیز دیگر لزوم آشنائی با ساختمان منطقی جملههائی است که مطالب ریاضی بدان وسیله بیان میشوند. در فصل حاضر، اطلاعاتی بسیار مختصر و ابتدائی در این زمینه خواهد آمد.

§۱ گزارهها

۱.۱. تعریفات. بنا بر تعریف، گُزاره جملهای است که یا راست باشد یا دروغ، اگرچه بر ما معلوم نباشد که راست است یا دروغ. مثلاً، هر یک از جملههای

5 فرد است 7 زوج است

$\pi^{\sqrt{2}}$ اصم است حسن پرویز را بقتل رسانید

یک گزاره است، اگرچه، مثلاً، هنوز هیچکس نمیداند که $\pi^{\sqrt{2}}$ اصم هست یا نه. ما برای هر گزاره یک ارزش راستی قائل میشویم، از این قرار: اگر گزارهای راست باشد گوئیم ارزش راستی (یا مختصراً، ارزش) آن راست است، و اگر دروغ باشد دروغ.

گزارهای را که از شیء[1] یا از اشیاء معین خبر دهد گزارهی شخصی نامند؛ مانند گزارههای چهارگانهی فوق. گزارهی کلی گزارهای است که خبری از هرچیز یا از هر دو چیز (وغیره) از دستهی معینی از اشیاء میدهد. گزارهی جزئی یا وجودی گزارهای است حاکی از اینکه، در میان دستهی معینی از اشیاء، حداقل یک چیز هست که خاصیت معینی دارد، یا حداقل دو (یا بیشتر) چیز هست که با هم رابطهی معینی دارند. در زبان عادی، معمولاً گزارههای کلی با الفاظ هر و هیچ، و گزارههای وجودی با الفاظ بعض یا بعضی از بیان میشوند. از گزارهای ذیل، آ ـ ت کلی هستند، و ث ـ ح وجودی یا جزئی:

(آ) هر عدد صحیح فرد یا زوج است.
(ب) هر عدد صحیح بر 5 قابل قسمت است.
(پ) هیچ عدد از خود کوچکتر نیست.
(ت) بازاء هر دو عدد، حاصلجمع اولی با دومی مساوی حاصلجمع دومی با اولی است.
(ث) بعضی از اعداد اول فردند.
(ج) بعضی از اعداد اول زوجند.

→ متقابلهای آنها (مثلاً 2 — و 1 —) و صفر. اعداد منطق یعنی اعدادی که میتوان آنها را با کسرهای متعارفی (کسر متعارفی کسری است که صورت و مخرجش اعداد صحیح و مخرجش غیراز صفر باشد) بیان کرد (مثلاً، 3/2، 3/1، 2/5 —، و 0/4)؛ بالاخص، هر عدد صحیح عددی است منطق. اعداد اصم یعنی اعدادی که منطق نیستند (مانند $\sqrt{2}$، π، و $-\sqrt{3}$). اعداد حقیقی یعنی اعداد منطق و اصم. ما هر جا «عدد» میگوئیم مرادمان عدد حقیقی است، مگر آنکه خلاف این مقصود تصریح شود.

(۱) «شیء» و «چیز» در اصطلاح منطق اعم از ذیروح و غیر ذیروح و موجود در ذهن یا در خارج است. عدد پنج، سعدی، پاریس، سگ اصحاب کهف، و فولادزره دیو هر یک شیء است.

(چ) عدد صحیحی هست که مربعش منفی است.
(ح) دو عدد صحیح هست که تفاضل مربعاتشان مجذور کامل است.
تقریباً همه‌ی قضایای مهم ریاضی گزاره‌های کلی هستند.

۱.۱.۱. تبصره. در ریاضیات، بعضی از گزاره‌ها را به وسیله‌ی علامات مینویسند، مانند،

$a = b$ به معنی a مساوی b است.
$a < b$ به معنی a کوچکتر از b است.
$a \leqslant b$ به معنی a نابیشتر از b است.
$a \geqslant b$ به معنی a ناکمتر از b است.

چنانکه ملاحظه میشود، هریک از عبارات سمت راست فعل مقتضی را همراه دارد[1]. البته، فعل این عبارات، به مقتضای قواعد دستور زبان، ممکن است تغییر پذیرد. مثلاً، عبارات

فرض کنیم $a = b$. اگر $a < b$ ...

را، بترتیب، چنین میخوانیم:

فرض کنیم a مساوی b باشد.
اگر a کوچکتر از b باشد....

پس، از نوشتن عباراتی مانند «فرض کنیم $a = b$ باشد» و «اگر $a < b$ باشد» باید احتراز کرد.

توجه به مندرجات این تبصره برای فهم جمله‌بندیها در کتاب حاضر ضروری است. مثلاً، گاه به عباراتی به صورت

چون $a < b$، $a + a < b + a$، و لهذا، $2a < b + a$

برمیخورید، که به فارسی باید آن را چنین خواند:

چون a کوچکتر از b است، $a + a$ کوچکتر از $b + a$ است، و لهذا، $2a$ کوچکتر از $b + a$ است.

۲ § رابطهای گزاره‌ای

۲.۱. مقدمه. گزاره‌های مرکبی که همواره در ریاضیات در کار میآیند گزاره‌های ساخته شده از گزاره‌های دیگر به وسیله‌ی الفاظ چهارگانه‌ی

چنین نیست که، و، یا، اگر

میباشند، که اولی در یک گزاره عمل میکند، و هر یک از سایرین در دو گزاره. این الفاظ را رابطهای گزاره‌ای نامیم، و در صفحات آتیه توضیحاتی در باب آنها میآوریم، زیرا، فهمیدن

---

(۱) همچنین است عبارات $\Delta \| \Delta'$ (Δ موازی Δ' است) و $\Delta \perp \Delta'$ (Δ عمود بر Δ' است) در هندسه؛ و عبارات $a \in A$ و $A \subseteq B$، که در فصل ۲ خواهیم آموخت؛ و غیره.

استدلال ریاضی بدون اطلاع از خواص این الفاظ ممکن نیست.

۲.۲. نقیض. اگر p گزاره‌ای باشد[۱]، گزاره‌ی

چنین نیست که p

را نقیض p خوانیم. مثلاً، اگر p گزاره‌ی

5 فرد است

باشد، نقیض آن گزاره‌ی

چنین نیست که 5 فرد است

میباشد، که در زبان عادی با عبارت «5 فرد نیست» بیان میشود.
ارزش راستی نقیض یک گزاره چنین است: اگر یک گزاره راست (دروغ) باشد نقیضش دروغ (راست) است، و بالعکس.

۲.۲.۱. ناقض. در بسیاری از عبارات علامتی ریاضی، ترکیبات گزاره‌ها میآیند. نوشتن این ترکیبات با رابطهای گزاره‌ای فارسی اغلب متضمن این مشکل است که باید قسمتی از عبارت را از چپ به راست و قسمتی را از راست به چپ خواند. برای اینکه این محذور تا حدی مرتفع شود، هر جا مناسب باشد، علاماتی بجای رابطهای گزاره‌ای فارسی بکار میبریم[۲]، که بتدریج معرفی خواهند شد. فعلاً علامت

$$\sim$$

را، موسوم به ناقض، بجای «چنین نیست که» معرفی میکنیم. ناقض در طرف چپ گزاره‌ای که در آن عمل میکند قرار میگیرد. مثلاً، $\sim(1 = 2)$ یعنی «چنین نیست که 1 مساوی 2 است» (یا، «1 مساوی 2 نیست»)، و $\sim(a \leqslant b)$ یعنی «چنین نیست که a نابیشتر از b است» (یا، «a نابیشتر از b نیست»).

۲.۳. ترکیب عطفی. گزاره‌ی مرکب از دو گزاره را به‌وسیله‌ی لفظ «و» ترکیب عطفی اولی با دومی، و هر یک از این دو گزاره را یک مؤلفه‌ی آن ترکیب نامیم. مثلاً، گزاره‌ی

(۱) 5 فرد است **و** برف سیاه است

ترکیب عطفی دو گزاره‌ی

5 فرد است برف سیاه است

میباشد، و هر یک از این دو گزاره یک مؤلفه‌ی گزاره‌ی (۱) یا یک گزاره‌ی سازای[۳] آن هستند.
ارزش ترکیب عطفی دو گزاره چنین است: ترکیب عطفی دو گزاره فقط و فقط وقتی

---

(۱) در این فصل، حروف p، q، r، s، و عنداللزوم، همین حروف را با اندیس (مانند p_1، p_2، و غیره)، برای نام بردن از گزاره‌های دلخواه بکار میبریم.
(۲) فایده‌ای که بدان اشاره شد از فواید فرعی این علامات است.
(۳) «سازا» یعنی «سازنده».

راست است که هر دو مؤلفه‌اش راست باشند.

لفظ ولی در ترکیب دو گزاره، از جنبه‌ی منطقی، در حکم «و» است. گزاره‌ی

5 فرد است ولی برف سیاه است

مانند گزاره‌ی (۱)، دروغ میباشد.

۲.۳.۱. عاطِف. بجای «و» در ترکیب دو گزاره، هرجا مناسب باشد، علامت

$$\&$$

را، موسوم به عاطف، بکار میبریم. اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی «p و q» را چنین مینویسیم:

$$p \,\&\, q.$$ [۱]

امثله. عبارت

$$a < b \,\&\, b < c$$

یعنی

a کوچکتر از b است و b کوچکتر از c است.

همچنین، ترکیبات

$$(\text{آ}) \quad \sim (a < b) \,\&\, b < c, \qquad (\text{ب}) \quad a < b \,\&\, \sim (b < c),$$

$$(\text{پ}) \quad \sim (a < b \,\&\, b < c),$$

بترتیب، به معانی ذیل است:

(آ ـ ۱) a کوچکتر از b نیست و b کوچکتر از c است.

(ب ـ ۱) a کوچکتر از b است و b کوچکتر از c نیست.

(پ ـ ۱) چنین نیست که (a کوچکتر از b است و b کوچکتر از c است).

عبارت اخیر را به زبان عادی به هر یک از صورتهای ذیل میتوان بیان کرد:

چنین نیست که هم $a < b$ و هم $b < c$.

چنین نیست که در عین حال $a < b$ و $b < c$.

۲.۳.۲. تبصره. ترکیب $p \,\&\, q \,\&\, r$ به خودی خود بیمعنی است، زیرا & دو گزاره را با هم ترکیب میکند، و در عبارت مذکور معلوم نیست که هر یک از دو مورد & کدام دو گزاره را با هم ترکیب کرده است. ما $p \,\&\, q \,\&\, r$ را **بر طبق قرارداد** بـه معنی $(p \,\&\, q) \,\&\, r$ میگیریم[۲]. مثلاً، $a < 1 \,\&\, a^2 > 2 \,\&\, a^3 > -8$ یعنی

$$(a < 1 \,\&\, a^2 > 2) \,\&\, a^3 > -8.$$

وقتی معنی $p \,\&\, q \,\&\, r$ دانسته شد، $p \,\&\, q \,\&\, r \,\&\, s$ به معنی $(p \,\&\, q \,\&\, r) \,\&\, s$ خواهد

---

(۱) حاجت بـه تذکر نیست کـه اینگونه عبارات، مانند فرمولهای ریاضی، از چپ به راست خوانده میشوند.

(۲) در زبانهای طبیعی (مانند فارسی، انگلیسی، و غیره) بدین مطلب اعتنا نمیشود. اما در زبانهای علامتی توجه بدین گونه نکات ضروری است.

بود، و قس علیهذا در هر مورد خاص دیگر.

۲.۴. ترکیب فصلی. از الفاظی که بدان وسیله گزاره‌ها را با هم ترکیب میکنند لفظ «یا» است. در استعمال عادی، معمولاً گزاره‌ی حاصل از ترکیب دو گزاره به‌وسیله‌ی این لفظ فقط و فقط وقتی راست شمرده میشود که یکی از این دو گزاره راست و دیگری دروغ باشد. اما، در استعمال منطقی، اگر این دو گزاره هر دو راست باشند نیزگزاره‌ی مرکب از آنها به وسیله‌ی لفظ «یا» راست محسوب است. «یا» را در معنی اول یاء مانع جمع (یعنی مانع جمع راست بودن دو گزاره‌ای که بوسیله‌ی «یا» ترکیب میشوند) و در معنی ثانی یاء منطقی خوانیم. مثلاً، گزاره‌ی

(۱) 5 فرد است **یا** 5 اول است

با یاء مانع جمع دروغ ولی با یاء منطقی راست است. در منطق، لفظ «یا» همواره به معنی منطقی بکار میرود. معنی منع جمع را گاه با تکرار «یا» و گاه به وسیله‌ی الّا بیان میکنند، مانند

یا 5 فرد است یا 5 اول است

5 فرد است و الا اول است.

گزاره‌ی مرکب از دو گزاره را با «یا» (به معنی منطقی) ترکیب فصلی آنها، و این گزاره‌ها را مؤلفه‌های آن ترکیب فصلی نامیم. بنابر توضیحات سابق الذکر، ارزش ترکیب فصلی دو گزاره چنین است: یک ترکیب فصلی فقط و فقط وقتی دروغ است که هر دو مؤلفه‌اش دروغ باشند. مثلاً، از گزاره‌های ذیل، فقط (۴) دروغ است:

(۱) 5 فرد است یا برف سفید است.

(۲) 5 فرد است یا برف سیاه است.

(۳) 5 زوج است یا برف سفید است.

(۴) 5 زوج است یا برف سیاه است.

۲.۴.۱. فاصِل. بجای یاء منطقی، هرجا مناسب باشد، علامت

را، موسوم به فاصل، بکار میبریم. اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی «p یا q» را چنین مینویسیم:

$$p \vee q.$$

امثله. عبارات

(آ) $a < b \vee a = b$; (ب) $\sim (a < b) \vee a = b$;

(پ) $a < b \vee \sim (a = b)$; (ت) $\sim (a < b \vee a = b)$;

بترتیب، به معانی ذیل است:

(آ ـ ۱) a کوچکتر از b است یا a مساوی b است.

(ب ـ ۱) a کوچکتر از b نیست یا a مساوی b است.

(پ ـ ۱) a کوچکتر از b است یا a مساوی b نیست.

(ت ـ ۱) چنین نیست که (a کوچکتر از b است یا a مساوی b است).

۲.۴.۲. تبصره. به قیاس آنچه در ۲.۳.۲ گفته شد، $p \vee q \vee r$ را به معنی $(p \vee q) \vee r$ میگیریم، و غیره.

۲.۵. ترکیب شرطی. اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ

(I) اگر p q

را ترکیب شرطی p با q (به همین ترتیب) خوانیم. مثلاً، گزارهٔ

(۱) اگر زوایای α و β متقابل به رأس باشند $\alpha = \beta$

ترکیب شرطی گزارهٔ

(۲) زوایای α و β متقابل به رأسند

است با گزارهٔ

(۳) $\alpha = \beta$.

در گزارهٔ (I)، در اصطلاح دستور زبان، p را شرط و q را جواب شرط خوانند. در منطق p را مقدّم و q را تالی گزارهٔ (I) نامیم. مثلاً، گزاره‌های (۲) و (۳) بترتیب مقدم و تالی گزارهٔ (۱) میباشند. ما در نوشتن گزاره‌های شرطی، هرجا بیم ابهام برود، یا درازی مقدم و تالی سبب دشواری خواندن باشد، لفظ آنگاه را بین مقدم و تالی درج میکنیم. مثلاً گزارهٔ (I) را به صورت

(II) اگر p آنگاه q

مینویسیم، و گزارهٔ «اگر $a > 1$ $a^2 > 1$» را به صورت

اگر $a > 1$ آنگاه $a^2 > 1$.

بالاخره، ارزش راستی گزاره‌های شرطی چنین تعیین میشود: یک گزارهٔ شرطی فقط و فقط وقتی دروغ است که مقدمش راست و تالیش دروغ باشد. بالنتیجه، یک گزارهٔ شرطی که مقدمش دروغ، یا تالیش راست، یا مقدم و تالیش هم‌ارزش باشند راست است.

امثله. از گزاره‌های ذیل، دومی دروغ است، و سایرین راست میباشند:

اگر 5 فرد است 7 اول است.

اگر 5 فرد است 7 زوج است.

اگر 5 زوج است 7 اول است.

اگر 5 زوج است 7 زوج است.

همچنین، از گزاره‌های ذیل، (۲) دروغ است، و سایرین راست هستند:

(۱) اگر $2 < 3$ آنگاه $1 < 2$. (۲) اگر $2 < 3$ آنگاه $1 > 2$.

(۳) اگر $2 > 3$ آنگاه $1 < 2$. (۴) اگر $2 > 3$ آنگاه $1 > 2$.

۲.۵.۱. عکس یک گزارهٔ شرطی. گزارهٔ «اگر q آنگاه p» را عکس گزارهٔ «اگر p آنگاه q» نامند. به عبارت دیگر، عکس یک گزارهٔ شرطی گزاره‌ای است شرطی که

مقدم و تالیش، بترتیب، تالی و مقدم گزاره‌ی اولیه باشند. مثلاً، عکس گزاره‌ی (۳) فوق گزاره‌ی «اگر $1 < 2$ آنگاه $2 > 3$» است، که دروغ میباشد. چنانکه دیده میشود، ممکن است یک گزاره‌ی شرطی راست (دروغ) باشد ولی عکسش دروغ (راست). در باب این نکته‌ی مهم، در ۴.۴ نیز سخن خواهیم گفت.

۲.۵.۲. عکس نقیض یک گزاره‌ی شرطی. بنا بر تعریف، عکس نقیض یک گزاره‌ی شرطی گزاره‌ای است شرطی که مقدم و تالی آن، بترتیب، نقیض تالی و نقیض مقدم گزاره‌ی اولیه باشند. به عبارت دیگر، عکس نقیض گزاره‌ی

(۱) اگر p آنگاه q

گزاره‌ی

(۲) اگر $\sim q$ آنگاه $\sim p$

(اگر چنین نیست که q آنگاه چنین نیست که p) میباشد. مثلاً، عکس نقیض گزاره‌ی

اگر a فرد است $a + 1$ زوج است

گزاره‌ی ذیل است:

اگر $a + 1$ زوج نیست a فرد نیست.

با اندک تأملی معلوم میشود که هر گزاره‌ی شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارزش است (ثابت کنید. توجه کنید که گزاره‌ی (۱) فقط و فقط وقتی دروغ است که p راست باشد و q دروغ، و در این حالت، $\sim q$ راست است و $\sim p$ دروغ).

این خاصیت در استدلال بسیار بکار میآید، چنانکه معلوم خواهد شد.

۲.۵.۳. تبصره. گزاره‌های شرطی همواره در ریاضیات در کار میآیند، اگر چه، در بعضی موارد، بیان عادی ریاضیات پوشاننده‌ی ساختمان آنهاست. نوعی که بالاخص باید بدان توجه داشت از این قبیل میباشد:

(۱) در مثلث ABC ، اگر $AB = AC$ آنگاه $\angle B = \angle C$

که بدین معنی است:

(۲) اگر ABC مثلث باشد آنگاه اگر $AB = AC$ آنگاه $\angle B = \angle C$.

و این گزاره ترکیبی است شرطی با مقدم

ABC مثلث است

و تالی

اگر $AB = AC$ آنگاه $\angle B = \angle C$.

گزاره‌ی (۲) با گزاره‌ی ذیل، که با زبان فارسی ملایمتر است، معادل میباشد:

(۳) اگر ABC مثلث باشد و $AB = AC$ آنگاه $\angle B = \angle C$.

(در این باب به تمرین ۲.۸.۶:۶ رجوع شود.)

۲.۵.۴. تبصره. بیان ترکیبات شرطی در زبانهای طبیعی بسیار متنوع است. از جمله،

گزاره‌های ذیل جملگی به یک معنی هستند:

اگر p [آنگاه] q	q اگر p
هر گاه p [آنگاه] q	q به شرط آنکه p
در حالتی که p q	q در صورتی که p
p فقط وقتی که q	فقط وقتی که q p.

دو طریق مهم دیگر در بیان گزاره‌های شرطی هست، که در ۲.۵.۵ خواهد آمد.

۲.۵.۵. شرط لازم؛ شرط کافی. در یک گزاره‌ی شرطی، مقدم را شرط کافی برای تالی، و تالی را شرط لازم برای مقدم خوانند. بنا بر این، گزاره‌ی «اگر p آنگاه q» را میتوان به هر یک از عبارات ذیل بیان کرد:

q شرط لازم برای p است.

شرط لازم برای p آنست که q.

p شرط کافی برای q است.

شرط کافی برای q آنست که p.

مثلاً، گزاره‌ی

اگر $a > 1$ آنگاه $a^2 > 1$

را میتوان به هر یک از طرق ذیل بیان کرد:

شرط لازم برای آنکه $a > 1$ آنست که $a^2 > 1$.

شرط کافی برای آنکه $a^2 > 1$ آنست که $a > 1$.

۲.۵.۶. تبصره. گزاره‌ی

p مگر آنکه q

یعنی

اگر $\sim q$ آنگاه p

مثلاً، گزاره‌ی

او را نمیبخشم مگر آنکه عذرخواهی کند

یعنی

اگر عذرخواهی نکند او را نمیبخشم.

۲.۶. ترکیب دوشرطی؛ شرط لازم و کافی. گزاره‌ی

(I) اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p

را، که ترکیب عطفی گزاره‌ی «اگر p آنگاه q» با عکس آنست، ترکیب دوشرطی p با q، و p و q را مؤلفه‌های این ترکیب خوانیم. گزاره‌ی (I) را گاه مختصراً به صورت ذیل بیان میکنند:

(II) اگر p آنگاه q، و بالعکس.

گزاره‌های دوشرطی در ریاضیات بسیار در کار می‌آیند؛ مانند

(۱) اگر $a = b$ آنگاه $2a = 2b$ و اگر $2a = 2b$ آنگاه $a = b$.

(۲) اگر نقطه‌ی M برعمود منصف قطعه خط مستقیم AB باشد آنگاه $MA = MB$، و بالعکس.

بر حسب تنوعی که در بیان گزاره‌های شرطی هست، گزاره‌های دوشرطی را نیز میتوان به اقسام مختلف بیان کرد. مثلاً، بر طبق اصطلاحات مذکور در ۲.۵.۵، گزاره‌ی (I) را میتوان چنین بیان نمود:

شرط لازم برای آنکه p آنست که q و شرط کافی برای آنکه p آنست که q

یا مختصراً

(III) شرط لازم و کافی برای آنکه p آنست که q.

همچنین، گزاره‌ی (I) را بدین صورت نیز بیان میکنند:

(IV) p فقط و فقط وقتی که q.

بالاخره، در رسم‌الخط علامتی، گزاره‌ی (I) و صورتهای مترادف آن، یعنی (II)، (III)، و (IV) را، به صورت

$$p \leftrightarrow q$$

نیز می‌نویسیم، و علامت

$$\leftrightarrow$$

را، که مبین شرط لازم و کافی است، دونَعل میخوانیم.

امثله

(آ). گزاره‌ی (۱) مذکور در ۲.۶ را میتوان به هر یک از عبارات ذیل بیان کرد:

شرط لازم و کافی برای آنکه $a = b$ آنست که $2a = 2b$.

$$a = b \leftrightarrow 2a = 2b.$$

(ب). گزاره‌ی (۲) مذکور در ۲.۶ را میتوان به هر یک از این عبارات بیان کرد:

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ی M بر عمود منصف قطعه خط مستقیم AB واقع باشد آنست که $MA = MB$.

نقطه‌ی M فقط و فقط وقتی بر عمود منصف قطعه خط مستقیم AB واقعست که $MA = MB.$

۲.۶.۱. ارزش ترکیب دوشرطی. به آسانی می‌توان ثابت کرد که یک ترکیب دوشرطی فقط و فقط وقتی راست است که مؤلفه‌های آن هم‌ارزش باشند. زیرا، بنا بر آنچه در ارزش ترکیب شرطی گفته شد، در گزاره‌ی (I) قسمت ۲.۶، اگر p و q هر دو راست یا هر دو دروغ باشند ترکیب شرطی هریک با دیگری راست است، و لهذا، ترکیب عطفی این دو ترکیب شرطی، یعنی گزاره‌ی (I)، راست میباشد. وقس علیهذا در حالتی که یکی از p و q راست باشد، و دیگری دروغ.

مثال. از گزاره‌های ذیل، اولی وچهارمی راست و دومی و سومی دروغند:

اگر 5 فرد است برف سفید است، و بالعکس.
اگر 5 فرد است برف سیاه است، و بالعکس.
اگر 5 زوج است برف سفید است، و بالعکس.
اگر 5 زوج است برف سیاه است، و بالعکس.

۲.۶.۲. عکس نقیض گزاره‌های دوشرطی. بنا بر تعریف، عکس نقیض گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ گزاره‌ی $\sim q \leftrightarrow \sim p$ است، که مؤلفه‌هایش، بترتیب، نقیض مؤلفه‌های گزاره‌ی اولیه‌اند. مثلاً، عکس نقیض گزاره‌ی $a = b \leftrightarrow 2a = 2b$ گزاره‌ی $\sim (a = b) \leftrightarrow \sim (2a = 2b)$ (و به عبارت دیگر، گزاره‌ی $a \neq b \leftrightarrow 2a \neq 2b$) است، که میتوان آن را چنین بیان کرد:

شرط لازم و کافی برای آنکه a مساوی b نباشد آنست که $2a$ مساوی $2b$ نباشد.

با اندک تأملی معلوم میشود که عکس نقیض یک گزاره‌ی دوشرطی با آن گزاره هم ارزش است (ثابت کنید).

۲.۷. تمرین

۱. p، q، و r بترتیب به معنی «5 فرد است»، «برف سیاه است»، و «برف سفید است» میباشند. اقسام ممکنه‌ی ترکیبات عطفی، فصلی، شرطی، و دوشرطی این گزاره‌ها را دو بدو بنویسید، و ارزش هریک را تعیین کنید.

۲. معنی «یا» را در این قضیه توضیح دهید: اگر اضلاع زوایای α و β نظیر بنظیر با هم متوازی باشند این دو زاویه مساوی یا مکمل یکدیگرند.

۳. از واقعه‌ی قتلی این اطلاعات بدست آمده است که جملگی راست هستند:

(۱) اگر حسین قاتل نیست پرویز قاتل است.
(۲) حسین قاتل نیست یا مقتول مست بوده است.
(۳) اگر مقتول مست بوده است قتل در مهمانخانه واقع نشده است.
(۴) قتل در مهمانخانه واقع شده است.

قاتل کیست؟

۴. در مسئله‌ی ۱، عکس گزاره‌های شرطی و عکس نقیض گزاره‌های شرطی و دوشرطی را بنویسید، و هر یک را به صورت شرط لازم یا کافی بیان کنید.

۵. پنج گزاره‌ی راست (دروغ) بنویسید که عکس هر یک دروغ (راست) باشد. همچنین، پنج گزاره‌ی راست (دروغ) بنویسید که عکس هر یک با آن همارزش باشد.

۶. پنج گزاره‌ی دوشرطی ریاضی بنویسید و هر یک و عکس نقیض هریک را به اقسامی که در ۲.۶ آموختید بیان کنید.

۷. p به معنی «حسن پدر بزرگ حسین است» و q به معنی «پدر حسین پسر حسن است» میباشد. در عبارات

p . . . برای q است $\qquad\qquad$ q . . . برای p است

هر یک از الفاظ ذیل را بجای «. . .» قرار دهید، و ارزش گزاره‌های حاصل را تعیین کنید:

(آ) شرط لازم $\qquad$ (ب) شرط کافی
(پ) شرط لازم و کافی $\qquad$ (ت) نه شرط لازم نه شرط کافی

۰۸ p و q و r دارای معانی ذیل هستند:
p: حسن بیش از 10 ریال دارد.
q: حسن بیش از 5 ریال دارد.
r: حسن بیش از 50 ریال دارد.
اقسام ترکیبات شرطی p، q، و r را بنویسید (ممکن است مقدم و تالی یک گزاره باشند)، و از میان این ترکیبات، آنهائی را که بر طبق اصول ریاضی مسلماً راست هستند به صورت شرط لازم و شرط کافی بیان کنید.

۰۹ ارزش راستی گزارهٔ $p \,\&\, q \,\&\, r$ را بر حسب ارزشهای راستی گزاره‌های p، q، و r تعیین کنید (بر حسب آنکه p، q، و r هر سه راست باشند یا حد اقل یکی از آنها دروغ باشد دو حالت تشخیص دهید). مثال بیاورید.

۱۰. ارزش راستی گزارهٔ $p \vee q \vee r$ را بر حسب ارزشهای راستی گزاره‌های p، q، و r تعیین کنید.

۱۱. آیا ممکن است گزاره‌های شرطی
اگر p آنگاه q اگر q آنگاه r
راست باشند ولی گزارهٔ ذیل دروغ باشد؟
اگر p آنگاه r.

۱۲. آیا ممکن است گزاره‌های شرطی
اگر p_1 آنگاه r اگر p_2 آنگاه r
راست باشند ولی گزارهٔ ذیل دروغ باشد؟
اگر p_1 یا p_2 آنگاه r.

۲.۸. ترکیبات منطقی معادل. ترکیبات تعدادی متناهی از گزاره‌های دلخواه را به وسیلهٔ رابطهای گزاره‌ای ترکیبات منطقی خوانیم. مثلاً، هر یک از ترکیبات «چنین نیست که p» (یا $\sim p$)، «اگر p آنگاه q»، و $p \,\underline{\underline{\Omega}}\, q$ یک ترکیب منطقی است. اگر در یک ترکیب منطقی، بجای حروف، گزاره‌های مشخص قرار دهیم، گزارهٔ مشخصی حاصل میشود. مثلاً، در ترکیب منطقی $p \,\&\, q$، اگر، بجای p و q، گزاره‌های «حسن آمد» و «تقی رفت» را قرار دهیم گزارهٔ «حسن آمد و تقی رفت» حاصل میشود؛ و اگر گزاره‌های «5 فرداست» و $4 < 2$ را قرار دهیم گزارهٔ «5 فرد است و $4 < 2$».
در ۲.۵.۲ گفتیم که دو ترکیب منطقی
(۱) اگر p آنگاه q
(۲) اگر $\sim q$ آنگاه $\sim p$
همواره با هم هم‌ارزشند، بدین معنی که، اعم از اینکه p و q راست باشند یا دروغ، اگر (۱) راست باشد (۲) نیز راست است، و اگر (۱) دروغ باشد (۲) نیز دروغ است. چنین دو ترکیب منطقی را معادل یکدیگر خوانیم. بنا بر این، و با توجه به ۲.۶.۲،

۲.۸.۱. قضیه. هر ترکیب شرطی یا دوشرطی با عکس نقیض خود معادل است.
شناختن ترکیبات منطقی معادل در استدلال بسیار مفید است. از جمله باید دانست که

۲.۸.۲. قضیه. «چنین نیست که چنین نیست که p» با «p» معادل است. (چرا؟)

۲.۸.۳. قضیه. (معادلات د مورگن*). ترکیبات منطقی

(۱) چنین نیست که (p و q)

(۲) چنین نیست که p یا چنین نیست که q

با هم، و ترکیبات منطقی

(۳) چنین نیست که (p یا q)

(۴) چنین نیست که p و چنین نیست که q

با هم معادلند[1].

اثبات هر دو حکم آسان است. مثلاً، برای اثبات معادل بودن (۱) و (۲) گوئیم اولاً، اگر p و q هر دو راست باشند آنگاه «p و q»، که ترکیب عطفی آنهاست، راست میباشد، و لهذا، (۱) که نقیض آنست دروغ است. اما، در این صورت، گزاره‌های

(آ) چنین نیست که p (ب) چنین نیست که q

دروغ میباشند، و لهذا، (۲) که ترکیب فصلی آنهاست نیز دروغ است. ثانیاً، اگر حد اقل یکی از p و q دروغ باشد آنگاه «p و q» دروغ، و لهذا، (۱) راست است. اما، در این صورت، حد اقل یکی از (آ) و (ب) راست است، و لهذا، (۲) نیز راست مباشد.

۲.۸.۴. امثله. نقیض گزاره‌ی

حسن کچل است و حسن احول است

گزاره‌ی

چنین نیست که (حسن کچل است و حسن احول است)

میباشد که، بنا بر معادلات د مورگن، معادل است با

حسن کچل نیست یا حسن احول نیست.

همچنین، نقیض گزاره‌ی

حسن میآید یا کتاب را میفرستد

گزاره‌ی

چنین نیست که (حسن میآید یا کتاب را میفرستد)

میباشد، که معادل گزاره‌ی ذیل است:

حسن نمیآید و کتاب را نمیفرستد.

۲.۸.۵. تبصره. در بسیاری از موارد حاجت می‌افتد به استفاده از نقیض ترکیب عطفی یا فصلی دو گزاره. البته، نقیض یک گزاره را میتوان به وسیله‌ی پیشوند «چنین نیست که» بیان کرد. مثلاً، نقیض گزاره‌ی

(۱) $a < 1 \vee a > 2$

---

(۱) به عبارت دیگر $\sim (p \,\&\, q)$ با $(\sim p) \vee (\sim q)$ معادل است، و $\sim (p \vee q)$ با $(\sim p) \,\&\, (\sim q)$.

را میتوان چنین بیان نمود.

(۲) چنین نیست که ($a < 1$ یا $a > 2$)،

امـا نتیجه گرفتن از اینگـونه عبارات، کـه نـاقض تـا انتهای آنهـا عمل میکند، دشوار است. معادلات د مـورگـن، با حرکت دادن ناقض، این مشکـل را حـل میکنند. مثلاً، اینک میدانیم که نقیض (۱) معادل گـزارهی ذیل است:

a کوچکتر از 1 نیست و a بزرگتر از 2 نیست.

۲.۸.۶. تمرین

۱. نقیض هـر یـک از تـرکیبات عطفی و فصلی مسئلـهی ۲.۷:۱ را بـه وسیلـهی معادلات د مورگن بیان کنید.

۲. مطلوبست نقیض هریک از گـزارههای ذیل:

$a \leqslant 1$[۱]، $a < 1 \vee a > -1$، $0 < a < 4$[۲]، $a = \pm 2$[۳].

۳. معادلات د مورگن را در مورد گـزارههای ذیل تعمیم دهید:

چنین نیست که (p و q و r). چنین نیست که (p یا q یا r).

۴. نقیض گزارهی «روزی است خوش و هوا نه گرم است و نه سرد» را بنویسید.

۵. ثابت کنید که دو گـزارهی ذیل معادل یکدیگرند، و مثال بیاورید:

(آ) اگر p آنگاه q؛ (ب) (چنین نیست که p) یا q.

۶. همان مسئله را در باب دو گزارهی ذیل حل کنید:

(آ) اگر p آنگاه (اگر q آنگاه r)؛

(ب) اگر p و q آنگاه r.

۷. از سه گـزارهی p، q، و r، بـه وسیلـهی & و پـرانتز میتوان تـرکیبات عـطـفی متعدد ساخت، مـانند $p \,\&\, (q \,\&\, r)$، $(p \,\&\, q) \,\&\, r$، و غیره (یکی از این ترکیبات همانست که در ۲.۳.۲ شناختیم). ثـابت کنید که جمیع این تـرکیبات دو بـدو با هم معادلند. (بـه ۲.۷:۹ توجه کنید.)

۸. نظیر همان حکم را در باب $\vee$ و ترکیب فصلی ثابت کنید.

۳ § گزارهنماها و اسمنماها

۳.۱. عـالَم سخـن. در هر مبحثی، گـروه (یـا، بـه اصطـلاح، مجموعـهی) افـراد اولیهی موضوع بحث را عالم سخن آن مبحث میخوانند. مثلاً، در جبر مقدماتی، عالم سخن مجموعهی اعداد حقیقی است، و عالـم سخن علم نجـوم مجموعهی اجرام سماوی میباشد. در هـر مبحث، گـزارههائی در باب افراد عالم سخن آن مبحث گفته میشود کـه مبین خواصی از این افـراد یـا نسبتهائی بین آنـها میباشند. مـثلاً، در عـلم نجـوم میگـوئیم «زمـین سیـاره است» و «مریخ بـه دور خـورشید میگردد»، و در علـم جبر، گـوئیم «-3 منفـی است» و «$3 > 2$». خـواص و

---

(۱) $a \leqslant 1$، بنا بر تعریف، یعنی $a < 1 \vee a = 1$

(۲) $0 < a < 4$، بنا بر تعریف، یعنی $0 < a \,\&\, a < 4$

(۳) $a = \pm 2$، بنا بر تعریف، یعنی $a = 2 \vee a = -2$

نسبتهائی را که ذکر آنها در باب افراد یک عالم سخن با معنی است خواص و نسبتهای متعلق به آن عالم سخن نامیم. مثلاً، خاصیت شاعری و نسبت برادری از خواص و نسب متعلق به مجموعه‌ی آدمیان است، و خواص منفی بودن و مجذور کامل بودن از خواص متعلق به مجموعه‌ی اعداد. عبارات «5 شاعر است» و «2 برادر 7 است» بیمعنی میباشند، و همچنین است عبارات «حسن منفی است» و «تقی مجذور کامل است».

بحث علمی از یک عالم سخن متضمن تقریر گزاره‌هائی در باب اشیاء موضوع بحث آن عالم است. عناصری که در این کار مورد نیازند عبارتند از اسامی خاص (ثابتها)، متغیرها، و خواص (یا صفات) و نسب. در سطور آتیه، این عناصر را مختصراً مورد بحث قرار میدهیم.

۳.۲. اسامی خاص یا ثابتها. بنا بر تعریف، ثابت به معنی اسم خاص است. اسم خاص در اصطلاح ما اعم است از (۱) اسم خاص به معنی دستوری، یعنی، کلمه یا علامتی که بر فرد مشخصی دلالت میکند، و (۲) شرح مُشَخَّص، یعنی، ترکیبی از کلمات یا علامات که فردی را مشخص میسازند.

امثله از اسامی خاص (ثابتها)

به معنی دستوری: «سعدی»، «5»، «۵»، «پنج».

شرح مشخص:

پدر سعدی، مربع 5، سراینده‌ی شاهنامه،

بلندترین قله‌ی ایران، $2 \cdot 3 - 4^2$,

(*) عددی که حاصلجمع آن با هر عدد مساوی این عدد است،

(†) نسبت محیط دایره به قطرش.

بر خلاف، ترکیباتی مانند «مقسوم علیه 12» و «مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره‌ی O» اسم خاص نیستند، زیرا بر یک شیء مشخص دلالت نمیکنند. بدین جهت، آنها را شروح نامشخص نیز مینامند.

بسیاری از اشیاء ریاضی اسامی خاص بیشمار دارند. مثلاً، لفظ «سه» وعلامات

$$۳, \qquad 3, \qquad \mathrm{III}, \qquad 1+2, \qquad \sqrt{۹}$$

جملگی اسامی یک شیء ریاضی هستند، و این شیء اسامی دیگر نیز دارد، از قبیل

three, *trois*, *drei*, ثلاثه , ...

تعریف اشیاء ریاضی یا نام بردن از آنها بوسیله‌ی شروح مشخص بسیار متداول است. مثلاً، «25» نام یک شیء ریاضی است، و شرح مشخص «مربع 5» (یا 5^2) نام دیگری از همان شیء است؛ و نیز عبارات

$$2+1, \qquad 4-1, \qquad 5-2, \qquad 2 \,.\, 5 - 4^2 + 9$$

اسامی یک شیء میباشند. بالاخره، «0» و شرح (*) سابق‌الذکر هر دو اسم یک شیء هستند، و همچنین است «π» و شرح (†) سابق‌الذکر.

۳.۲.۱. تبصره. باید دانست که اگرچه اسم خاص به معنی دستوری و شرح مشخص یک شیء بر آن شیء دلالت دارند، بین این دو تفاوت مهمی هست، و آن اینکه دلالت یک اسم خاص بر مُسَمّای آن بر حسب قرارداد است، و اگر کسی با این قرارداد آشنا نباشد نمیتواند شیء را با اسمش تشخیص دهد؛ ولی، شرح مشخص یک شیء آن شیء را حتی بر کسی که هیچ آشنائی قبلی با آن شیء ندارد مشخص میسازد. مثلاً، بر طبق قرارداد، «π» نام عددی است. عبارت «نسبت محیط دایره به قطرش» نام دیگری از همان عدد است. نام دوم عدد مورد بحث را مشخص میسازد، و این نام هرگز نام عددی دیگر نتواند بود. از طرف دیگر، با تغییر قرارداد، میتوان «π» را نام عددی دیگر قرار داد.

۳.۳. گزارههای شخصی و اسامی خاص. در ۱.۰۱ گفته شد که گزارهی شخصی گزارهای است که از شیء یا از اشیاء معین خبر دهد. یکی از اصول کلی و بسیار مهم منطقی، که افاده و استفاده از هر زبان بستگی تام بدان دارد اینست که در خبر دادن از اشیاء معیّن، اسامی خاص آن اشیاء بکار میرود نه خود آن اشیاء؛ چنانکه اگر بخواهیم ازمردی که گلستان را تصنیف کرده است خبری بدهیم ــ مثلاً خبر دهیم که وی شیرازی بوده است ــ خود آن مرد را روی صفحهی کاغذ نمیآوریم، بلکه اسم خاصی ازو را بکار برده مینویسیم «سعدی شیرازی بوده است» یا «مصنف گلستان شیرازی بوده است».

بکار بستن اصل مذکور در مورد اشیاء عادی خالی از اشکال است، زیرا در این حالت، تمیز اسم و مسما آشکار میباشد، و مثلاً، هیچ عاقلی سعدی را با نام وی یا قلهی دماوند را با نام آن خلط نمیکنند. اما، در مورد اشیائی از قبیل کلمات و علامات و عبارات زبان، گاه مردم عاقل هم اسم و مسما را باهم خلط میکنند، و علت آن اینست که اشیاء مذکور اغلب به عنوان اسم خود نیز بکار میروند. چون خلط اسم و مسما سبب بدفهمی و احیاناً مشکلات جدی است، مثالهائی برای توضیح میآوریم.

۳.۳.۱. امثله

(آ). چنانکه گذشت، علامات «سه» و «۳»، و «3» اسامی خاص یک شیء ریاضی هستند. اگر بخواهیم از این شیء خبری بدهیم ــ مثلاً خبر دهیم که این شیء فرد است ــ یکی از اسامی خاص آن را بکار برده گوئیم

سه فرد است یا ۳ فرد است.

اینک گزارهی

۳ سه دندانه دارد

را اختیار میکنیم. البته این گزاره خبری از عدد سه نمیدهد ــ زیرا، دندانه داشتن از صفات اعداد نیست ــ بلکه خبری از علامت

۳

میدهد. پس، بر طبق اصل مذکور، در گزارهی مورد بحث، علامت «۳» بعنوان اسم همین علامت بکار رفته است[۱].

---

(۱) درمنطق، اغلب برای ساختن اسم یک عبارت (اعم ازکلمات یا علامات یاترکیبات ←

(ب). در مثال (آ)، تفاوت اسم و مسما همه‌جا آشکار است. اما موارد دیگر هست که در آنها بسیاری از محصلین در اشتباه می‌افتند، و خواص اعداد را با خواص اسامی آنها خلط میکنند، و از آن جمله کسور متعارفی است. هر کسر متعارفی اسم عددی است (و این عدد، چنانکه از توضیحات مذکور در ۳.۲ معلومست، اسامی بیشمار دارد)، و صورت و مخرج کسر اجزای این اسم هستند نه اجزای عددی که مسمای این اسم است، و صفات صورت و مخرج داشتن یا نداشتن از صفات اعداد نیست. پس، از دو گزاره‌ی

14/16 کوچکتر از واحد است

صورت 14/16 زوج است

اولی خبری ازعدد مشخصی میدهد، که «14/16» یکی از اسامی آنست، اما دومی خبری از این عدد نمیدهد، بلکه خبری از یکی از اسامی این عدد میدهد، که در مورد این اسم راست است، اما مثلاً در مورد «7/8»، که اسم دیگری از همان عدد است، دروغ میباشد.

۳.۳.۲. تبصره. روابط بین ثابتهای ریاضی گزاره‌های شخصی میباشند؛ مانند روابط $7 > 3$ و $\sin(\pi/2) = 1$. بر خلاف، حاصلهای اعمال جبری بر اعداد ثابت اسامی خاص هستند، مانند عبارات $2 + 3$، $4^2 + (-3) \cdot 2$، و $\sqrt{4}$ (اولی از اسامی خاص 5 است، دومی از اسامی خاص 10، و سومی از اسامی خاص 2).

۳.۳.۳. تمرین

۱. در هریک از گزاره‌های آتیه، معلوم کنید کلمات یا علاماتی که زیر آنها خط کشیده شده است به عنوان اسم چه چیز در آن گزاره بکار رفته‌اند، و گزاره از چه چیز خبر میدهد:

(آ) اصفهان در جنوب تهران است. (ب) π از حروف الفبای لاتینی است. (پ). ... $3,141 = \pi$. (ت) 9 دندانه ندارد. (ث) حافظ بزرگترین شاعر پارسی‌گوی است. (ج) ۵ > ۲. (چ) 0 بیضی‌شکل است. (ح) گلستان از آثار عنصری است. (خ) III بزرگتر از II است. (د) 0 عددی صحیح است. (ذ) حسن برادر پروین است. (ر) III یک خط از II بیشتر دارد. (ز) سعدی اسم سعدی است. (ژ) حسن سه حرف از پروین کمتر دارد. (س) سعدی از حیث حروف با عدسی یکسان است.

۲. خاصیتی از اسمی از یک عدد که خود اختیار میکنید بنویسید که عده‌ی بیشماری از اسامی این عدد فاقد آن خاصیت باشند.

۳.۴. متغیرها. در زبان فارسی (و در سایر زبانهای طبیعی)، علاوه بر اسامی خاص،

→ آنها) آن عبارت را بین علامت نقل قول قرار میدهند تا اسم و مسما با یکدیگر خلط نشوند. بدین‌گونه، مثلاً گزاره‌ی مورد بحث در متن به صورت

«۳» سه دندانه دارد

نوشته میشود. همچنین، اگر بخواهیم از گزاره‌ی

5 فرد است

خبری بدهیم باید اسمی از این گزاره را بکار بریم؛ مثلاً

«5 فرد است» راست است.

اسامی مبهمی از قبیل فلان و بهمان هست که بر شیء مشخصی دلالت نمیکنند، بلکه، در هر بحثی، اسامی مبهمی برای هر یک از اشیاء مورد بحث میباشند. در استعمال عادی، اغلب لفظی حاکی از نوع افراد عالم سخن همراه این الفاظ میآید، مانند اینکه «فلان کس شاعر است» یا «فلان عدد فرد است».

این گونه اسامی مبهم برای افراد نامشخص در ریاضیات و منطق و بسیاری از علوم دیگر اهمیت حیاتی دارند. در جبر مقدماتی، علاوه بر اسامی خاص و گزارهها، همواره دو دستهی دیگر از عبارات در کار میآیند: یکی عباراتی مانند $x + y$ و $\sqrt{x}$، که به ظاهر مانند اسامی خاص هستند (مثلاً، مانند $2 + 3$ و $\sqrt{5}$)؛ و دیگر عباراتی از قبیل «x فرد است» و «$x > y$»، که به ظاهر مانند گزارههای شخصی هستند (مثلاً، مانند «5 فرد است» و «$3 > 12$»). در باب هر دو دسته عنقریب توضیحات کافی خواهد آمد. آنچه اینک باید بدان بذل توجه کامل کرد اینست که، در این عبارات، x و y اسم عدد معینی نیستند، بلکه اسامی مبهمی برای هر یک از اعداد مورد بحث میباشند. اینگونه حروف را «متغیر» نامند. بطورکلی، بنا بر تعریف، متغیر عبارتست از حرف یا علامتی که، بر خلاف اسم خاص، اسم فرد معینی نیست، بلکه اسم مبهمی است برای هر یک از افراد مجموعه معینی از اشیاء. این مجموعه را راستهی آن متغیر، و افرادش را مقادیر آن متغیر خوانیم. مثلاً، در جبر مقدماتی، راستهی متغیرهای x و y و غیره مجموعهی اعداد حقیقی است، و هر عدد حقیقی (مثلاً، 5، $\sqrt{2}$، 3/4 —، π، و غیره) یکی از مقادیر این متغیرها است.

استعمال متغیرها به جبر و رشتههای دیگر ریاضیات محدود نیست. در یک مبحث علمی، اغلب، دستهائی از حروف را به عنوان اسامی مبهم افراد عالم سخن آن مبحث بکار میبرند، و این حروف را متغیرهای فردی نامند. مثلاً، در بحث از افراد انسانی، میتوان متغیرهای فردی x، y، و غیره را به عنوان اسامی مبهمی برای هر یک از افراد انسانی بکار برد؛ در این صورت، مجموعهی افراد انسانی راستهی متغیرها، و هر یک از سعدی، هیتلر، و سرایندهی شاهنامه یکی از مقادیر متغیرها میباشد. درهندسه، متغیرهای فردی M، N، و غیره به عنوان اسامی مبهم نقاط بکار میروند.

۳.۵. گزارهنما. عبارت

$$x \text{ فرد است} \qquad (۱)$$

به ظاهر ساختمان گزارههای شخصی

(۲) 5 فرد است (۳) 6 فرد است

را دارد. معذلک، (۱) گزاره نیست، زیرا ـ بسبب نامشخص بودن x — نه راست است و نه دروغ. اگر در (۱)، بجای x، اسم خاص یکی از مقادیر x قرار داده شود این عبارت مبدل به گزاره میگردد (مانند گزارههای ۲ و ۳). عبارت (۱) را، به مناسبت شباهت ظاهری آن با گزارههای مذکور، «گزارهنما» میخوانیم. بطور کلی، گزارهنما یعنی عبارتی مشتمل بر یک یا چند متغیر فردی که، با تبدیل یکنواخت[1] این متغیر یا متغیرها به اسم یا اسامی

---

(۱) یعنی تبدیل جمیع موارد هرمتغیر در سراسر آن عبارت به یک اسم خاص.

خاص اشیاء مناسب[1]، مبدل به گزاره شود؛ چنین گزاره‌ای را یک نمونه‌ی آن گزاره‌نما خوانیم. پس، عبارت (۱) یک گزاره‌نما است، و گزاره‌های (۲) و (۳) از نمونه‌های آن هستند. همچنین، عبارت $x < y$ یک گزاره‌نما است، و گزاره‌های $3 < 2$ و $0 < 5$ از نمونه‌های آن میباشند. بطورکلی، همه‌ی روابط ریاضی مشتمل بر متغیرها گزاره‌نما هستند. بالاخره، هر یک از جمله‌های ذیل نیز گزاره‌نما است:

(۴) x شیرازی است، (۵) x y را بقتل رسانید.

معمولاً، گزاره‌نماها را، بر حسب متغیرهای فردی آنها، به علامات

$$F(x), \qquad F(x, y), \qquad F(x, y, z), \ldots$$

و همین علامات با حروف G، H، و K بجای F، نمایش میدهیم[2]. در اصطلاح منطق، این حروف را در استعمال مذکور حروف محمولی نامند.

در گزاره‌نمای $F(x)$، اگر x را به a (اسم خاص فردی مشخص) تبدیل کنیم گزاره‌ای حاصل میشود که آن را به $F(a)$ نمایش میدهیم. همچنین، در گزاره‌نمای $F(x, y)$، اگر x و y را بترتیب به a و b تبدیل کنیم گزاره‌ای حاصل میشود که آن را به $F(a, b)$ نمایش میدهیم. اگر $F(a)$ راست باشد گوئیم a در $F(x)$ صدق میکند، و الا فلا. همچنین، اگر $F(a, b)$ راست باشد گوئیم دستگاه مقادیر a و b، بترتیب بجای x و y، در $F(x, y)$ صدق میکنند، و الا فلا. تعمیم آسان است.

مثلاً، اگر $F(x)$ گزاره‌نمای (۱) باشد، $F(5)$ گزاره‌ی (۲) و $F(6)$ گزاره‌ی (۳) خواهد بود؛ پس، 5 در $F(x)$ صدق میکند، و 6 در آن صدق نمیکند. همچنین، اگر گزاره‌نمای (۵) را به $G(x, y)$ نمایش دهیم، و حسن را a و پرویز را b بنامیم، $G(a, b)$ گزاره‌ی «حسن پرویز را بقتل رسانید» خواهد بود، و $\sim G(a, b)$ گزاره‌ی «چنین نیست که حسن پرویز را بقتل رسانید».

۳.۵.۱. تبصره. تعریف معادل بودن را میتوان در مورد گزاره‌نماها تعمیم داد. در ریاضیات، مثلاً وقتی میگوئیم دو گزاره‌نمای $x < y$ و $-y < -x$ معادل یکدیگرند مقصود اینست که، بازاء هر دستگاه از مقادیر x و y، ارزش گزاره‌های حاصل از این دو گزاره‌نما یکسان است.

۳.۵.۲. خواص (صفات). گزاره‌نمای «x فرد است» مبین خاصیت (یا صفت) فرد بودن است. بطور کلی، گزاره‌نمای $F(x)$ مبین یک خاصیت است؛ معمولاً این خاصیت را به همان

(۱) «اشیاء مناسب» همان اعضای راسته‌ی متغیرها، و به عبارت دیگر همان مقادیر متغیرها میباشند.

(۲) در این مورد و موارد مشابه، برای اینکه به جهت کمبود حروف به سختی نیفتیم، حروف را با اندیس (مانند F_1، F_2، و غیره) نیز بکار میبریم، و وقتی که «حروف» میگوئیم اعم از حروف بی‌اندیس یا بااندیس است. حروف زبردار (مانند F' و G'') نیز تابع همین حکم است.

حرف F نمایش میدهیم. در این صورت، گزاره‌نمای $F(x)$ را میتوان چنین بیان کرد:

x خاصیت F دارد.

مثلاً، اگر $F(x)$ به معنی «x فرد است» باشد، F خاصیت فرد بودن خواهد بود. بالعکس، اگر G خاصیت زرد بودن، و H خاصیت شاعر بودن باشد $G(x)$ یعنی «x زرد است»، و $H(z)$ یعنی «z شاعر است».

چنانکه بعداً خواهیم دید، گزاره‌نمائی که بیش از یک متغیر دارد مبین یک نسبت است.

۳.۵.۳. تمرین

۱. بنا بر آنکه F ، G ، و H، بترتیب، صفات اول بودن، زوج بودن، و فرد بودن باشد، اولاً، گزاره‌های ذیل را به فارسی ترجمه کنید؛ ثانیاً تعیین کنید کدام یك از آنها راست است.

(آ) $\sim G(2) \vee F(9)$.

(ب) $\sim H(5) \,\&\, G(2)$.

(پ) اگر $H(5)$ آنگاه $F(9)$.

(ت) اگر $F(5)$ یا $G(2)$ آنگاه $\sim H(9)$.

(ث) $\sim F(5) \not\equiv H(2)$.

(ج) اگر $F(2) \sim$ آنگاه $G(9)$ بشرط آنکه اگر $F(5)$ آنگاه $H(9)$.

(چ) $G(2)$ بشرط آنکه اگر $F(9)$ آنگاه $G(9)$.

(ح) اگر $G(5) \sim$ آنگاه $H(2)$ و $G(9)$ و $\sim F(5)$.

(خ) $F(5) \sim$ فقط وقتی که $\sim G(2)$.

(د) شرط لازم برای آنکه $H(2)$ آنست که $H(9)$.

(ذ) $H(9)$ شرط کافی است برای آنکه $F(5)$.

(ر) شرط لازم و کافی برای آنکه $G(9) \sim$ آنست که اگر $F(5)$ آنگاه $\sim G(2)$.

۳.۶. اسمنماها. بنا بر تعریف، اسمنما عبارتی است مشتمل بر یک یا چند متغیر فردی که، با تبدیل یکنواخت این متغیر یا متغیرها به اسم یا اسامی خاص اشیاء مناسب، مبدل به اسم خاص شود.

در توضیح این تعریف، گوئیم مثلاً، عبارت «پدر x»، اگر چه به ظاهر مانند «پدرسعدی» است (که اسم خاص فرد مشخصی است)، بسبب نا مشخص بودن x، اسم فرد مشخصی نیست؛ اما، اگر در آن، بجای x، اسم فرد مشخص مناسبی قرار دهیم، تبدیل به اسم خاص میشود، مانند «پدر سعدی»، «پدر هیتلر»، و غیره. پس، عبارت «پدر x» یک اسمنما است. همچنین، عبارت «مرز بین x و y» یک اسمنما است، و بازاء مقادیر فرانسه و بلژیک، بترتیب، از x و y، به عبارت «مرز بین فرانسه و بلژیک» تبدیل میشود، که اسم خاص شیء مشخصی است.

۳.۶.۱. تبصره. در ریاضیات، همواره با گزاره‌نماها و اسمنماها سر و کار داریم. در جبر، همه‌ی حاصلهای اعمال (**نه روابط**) مشتمل بر متغیرها اسمنما هستند. مثلاً، عبارت $2x + 1$

یک اسمنما است، و بازاء مقادیر 2 و 3 − از x بترتیب به $1 + 2\cdot 2$ و $1 + (3 -)\cdot 2$ تبدیل میشود، که اولی یکی از اسامی عدد 5 است، و دومی از اسامی عدد 5 − . همچنین، هریک از عبارات x^2، $\sin x$، $\log (x + y)$، و $(x^2 - 1)/(y^2 + z^2 - 1)$ اسمنما است.
روابط بین اسمنماها گزاره‌نما هستند، مانند

$$2x + 1 = x^2, \qquad \sin x = \log (x + y).$$

عبارت حاصل از تبدیل متغیرهای فردی یک گزاره‌نما به اسمنماها گزاره‌نما است. مثلاً، اگر $F(x)$ به معنی «x فرد است» باشد، $F(x^2 + 1)$ به معنی «$x^2 + 1$ فرد است» خواهد بود. همچنین، در گزاره‌نمای $x < y$، اگر بجای x و y، بترتیب، اسمنماهای $x^2 + 1$ و $2x - y + z$ را قرار دهیم، گزاره‌نمای $x^2 + 1 > 2x - y + z$ حاصل میگردد.

۳.۶.۲. تمرین

۱. در مورد هر یک از عبارات آتیه، مستدلاً تعیین کنید که این عبارت اسم خاص، اسمنما، گزاره، یا گزاره‌نما است:
(آ) بلندترین قله‌ی اروپا. (ب) جذر 5. (پ) واسطه‌ی هندسی 2 و x. (ت) واسطه‌ی عددی 3 و 5. (ث) پایتخت y. (ج) $2x + 1$. (چ) $2x + 1 > 0$. (ح) مادر پرویز و بهرام. (خ) مادر پرویز و z. (د) مادر z و x. (ذ) مربع z. (ر) $x^3 < y^3$. (ز) $\log x$. (ژ) $\log x - x$. (س) $\log x = x$. (ش) $(2 + 3x) - y$. (ص) $2 + 3x \leqslant y$. (ض) واسطه‌ی هندسی 2 و 8 از واسطه‌ی عددی آنها بیشتر نیست. (ط) مردی که شاهنامه را سرود. (ظ) مردی که شاهنامه را سرود زبان فارسی را زنده کرد. (ع) نسبت محیط دایره به قطرش عددی اصم است.

۳.۷. متغیرها به عنوان جایْبان. در عبارات مشتمل بر متغیرهای فردی که تا کنون دیدیم متغیرها به عنوان جاییان (نگاه‌دارنده‌ی جای) اسامی خاص بکار رفته‌اند، یعنی محل اسامی خاص را در این عبارات نشان میدهند.
اگرچه رسم است که، در علوم، بعضی از حروف را به عنوان متغیرهای فردی جهت جایانی بکار میبرند، این امر ضرورت منطقی ندارد. گزاره‌نماهای «x فرد است» و «x مؤلف y است» را میتوان مثلاً به صورت

ـــ فرد است   □ مؤلف ○ است

نوشت، که هر یك از آنها قالبی است که موضع یا مواضعی خالی برای اسامی خاص دارد. بکار بردن این گونه علامات به عنوان جایبان در امور عادی، مثلاً در پرسشنامه‌ها و «فرمهای» گوناگون، رواج تام دارد. عبارت

مبلغ ــــــ ریال از بابت حق عضویت سال ـــ ۱۳۴
از آقای ــــــــ دریافت گردید

مشتمل بر سه جایبان است، و با قرار دادن اسامی خاص بجای آنها تبدیل به گزاره میگردد. لفظ «فلان» و غیره، که در آغاز ۳.۴ بدان اشاره کردیم، در جمله‌ی «فلان شاعر است» نقش جایبان دارد.

چنانکه ملاحظه میشود، اهمیت متغیرها منحصر به ریاضیات و منطق نیست، بلکه در مسائل مربوط به زندگی عادی نیز متغیرهای گوناگون در کار میآیند.

۳.۷.۱. تمرین

۱. عالم سخن مجموعه‌ی کسرهای متعارفی است. از هر یک از عبارات آتیه نمونه‌ای بیاورید و سپس هر عبارت را به صورت متداول در ریاضیات بنویسید:

$\square^3 + \bigcirc^3 + \triangle^3 - 3 . \square . \bigcirc . \triangle.$ $\quad\quad$ $\square^2 - 2 . \square + 1.$

$(\square - 1)/(\bigcirc^2 + 1) < 0.$ $\quad\quad$ $\bigcirc^2 + 6 = 5 \bigcirc.$

۲. در صفحه‌ی اول شناسنامه‌های پرنشده چنین عبارتی دیده میشود:

آقای   نام خانوادگی   فرزند آقای   و
خانم   در تاریخ روز   ماه   سال   در
شهر   متولد شده است.

این عبارت را بوسیله‌ی متغیرهای فردی بازنویسی کنید، و راسته‌ی هر متغیر را تعیین نمائید، و دو نمونه از عبارت مذکور بیاورید.

۳.۸. متغیرهای آزاد و پابند. معنی عبارتی (گزاره‌نما یا اسمنما) که مشتمل بر یک یا چند متغیر جایان است به این متغیر یا متغیرها بستگی دارد. مانند عبارت «x فرد است» و «پدر x»، که معنی هر یک بستگی به x دارد. چنین مورد ازیک متغیر را در یک عبارت آزاد خوانند. بطور کلی، موردی از یک متغیر را در یک عبارت (گزاره‌نما یا اسمنما) آزاد نامیم در صورتی که معنی آن عبارت بدان مورد متغیر بستگی داشته باشد. در گزاره‌نماها و اسمنماهائی که تا کنون در امثله و توضیحات آوردیم، همه‌ی موارد متغیرها آزاد هستند.

نکته‌ای که در فهم عبارات ریاضی منتهای اهمیت را دارد ــ و لهذا، باید کمال توجه را بدان مبذول داشت ــ اینست که ممکن است یك عبارت شامل یك متغیر فردی باشد، ولی معنی آن از این متغیر مستقل باشد. مثلاً، درجبر مقدماتی، جمله‌ی

(۱)   بازاء هر مقدار x،[1] x^2 نامنفی است

بدین معنی است:

(۲)   مربع هر عدد حقیقی نامنفی است،

و جمله‌ی

(۳)   بازاء بعضی مقادیر y، مضاعف y کوچکتر از 1 است

بدین معنی:

(۴)   مضاعف بعضی از اعداد حقیقی کوچکتر از 1 است.

پس (۱) و (۳) گزاره‌اند، و موارد x در اولی و موارد y در دومی جنبه‌ی ظاهری دارند، و البته قابل تعویض با اسامی خاص نمیباشند ــ زیرا مثلاً، (۱) بمعنی گزاره‌ی کلی (۲) است، که x اصلاً در آن موردی ندارد تا بتوان بجای آن اسم خاصی قرار داد. اصطلاحاً، موردی از یک متغیر را در یک عبارت پابند یا ظاهری خوانند در صورتی که معنی آن عبارت از این مورد آن

(۱) «بازاءِ هر مقدار x» یعنی «هر مقداری برای x اختیار کنیم».

متغیر مستقل باشد. مثلاً، موارد x در (۱)، و نیز موارد y در (۳) پابند میباشند. بنا براین تعریف، تبدیل همه‌ی موارد پابند یک متغیر در عباراتی مانند (۱) و (۳) معنی عبارت را تغییر نمیدهد، و مثلاً، جمله‌های

بازاء هر مقدار z، z^2 نامنفی است،

بازاء بعضی مقادیر t، مضاعف t کوچکتر از 1 است،

بترتیب، به معنی (۲) و (۴) میباشند.

از توضیحات مذکور ضرورت تمیز دادن موارد آزاد و پابند متغیرهای فردی در یک عبارت برای فهم معنی آن بخوبی آشکار میگردد. در مثالهای قبل، پیشوندهائی از قبیل

بازاء هر مقدار x بازاء بعضی مقادیر y

راهنمای تشخیص موارد پابند متغیرها میباشند. اما باید دانست که در ریاضیات، در بیان قضایای کلی، پیشوندهای کلیت (از قبیل «بازاء هر x») را وقتی که ناظر به همه‌ی حکم میباشند نمیآورند. مثلاً، قضیه‌ی

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

را با همین فرمول بیان میکنند، ولی بیان کامل آن اینست:

بازاء هر x و بازاء هر y (یا مختصراً، بازاء هر x و y)،

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

گاه نیز لفظ همواره را جایگزین پیشوندهای کلیت میسازند، مانند

همواره $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

بر طبق معمول، این روشهای اختصاری در سراسر کتاب حاضر بکار میرود.

۳.۸.۱. تبصره. توضیحات سابق‌الذکر بعضی مسائلی را که گاه محصلین فهم آنها را دشوار میابند روشن میسازند. مثلاً، پس از اثبات اینکه

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \qquad (۱)$$

روابط ذیل را که، بترتیب، از تبدیل x به $-x$ و $2x^2$ در (۱) حاصل میشوند ثابت شده میشماریم:

$$(-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1, \qquad (۲)$$

$$(2x^2 + 1)^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1. \qquad (۳)$$

توضیح مطلب اینست که در سراسر (۱) متغیر x پابند است، و (۱) بدین معنی است:

مربع حاصلجمع هر عدد با 1 مساوی است با حاصلجمع مربع آن عدد با مضاعف آن با 1،

و این حکمی است که درباره‌ی هر عدد ثابت شده است. پس، بالاخص بازاء اعداد $-x$ و $2x^2$ نیز برقرار است، یعنی مثلاً

$$((-x) + 1)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 1,$$

که پس از اختصار به صورت (۲) درمیاید. همچنین است وقتی که بیش از یک متغیر در کار آید. مثلاً، پس از اثبات یا پذیرفتن رابطه‌ی $a + b = b + a$ به عنوان یک قضیه‌ی

ریاضی، میتوان از آن نتیجه گرفت که

$$3a + (-b) = (-b) + 3a,$$
$$3a + 2a = 2a + 3a,$$

و غیره (مشروحاً توضیح دهید).

۴ § نکاتی چند در استنتاج[1]

۴.۱. قضایای کلی و قضایای جزئی. چنانکه در ۱.۱ اشاره کردیم، تقریباً همه‌ی قضایای مهم ریاضی گزاره‌های کلی هستند. مثالی از یک قضیه‌ی کلی ساده اینست:

(آ) x هر قوسی باشد، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

برای اثبات این قضیه، باید ثابت کرد که گزاره‌نمای

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (۱)$$

بازاء هر مقدار قوس x راست است. روش عمومی برای این کار این است که فرض میکنند x قوسی **دلخواه** ولی، پس ازآن در سراسر استدلال، **ثابت** باشد. سپس، با آوردن دلیل، ثابت میکنند که x در گزاره‌نمای (۱) صدق میکند، و اثبات (آ) را به همین جا، یا با عبارتی مانند

چون x قوسی دلخواه فرض شده بود، گزاره‌نمای (۱) بازاء هر مقدار x برقرار است

ختم میکنند. توجیه این استدلال آسان است. توضیح آنکه اگر y قوس دلخواه دیگری باشد، هر گاه در دلیل مذکور، موارد x را به y تبدیل کنیم، آن دلیل مبدل میشود به دلیل $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. پس، با اثبات رابطه‌ی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ بازاء قوس دلخواه x، در حقیقت گزاره‌ی کلی (آ) ثابت شده است.

روش استدلال وقتی که حکم کلی درباره‌ی بیش از یک چیز باشد همین است. مثلاً برای اثبات اینکه

بازاء هر دو عدد x و y، $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

دو عدد دلخواه ولی، از این ببعد ثابت، مانند x و y اختیار و ثابت میکنیم که این دو عدد در گزاره‌نمای $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ صدق میکنند.

اینک به قضایای جزئی میپردازیم، و به عنوان مثال، قضیه‌ی

(ب) عددی صحیح مانند x هست که $x^2 - 17$ مجذور کامل است

را اختیار میکنیم. بنا بر آنچه در ۱.۱ دانستیم، گزاره‌ی (ب) حکم میکند به اینکه حداقل یک عدد صحیح مانند x هست که در گزاره‌نمای

$x^2 - 17$ مجذور کامل است

صدق میکند. ساده‌ترین راهی که برای اثبات این مطلب بنظر میرسد عرضه کردن عددی صحیح

(۱) مقصود ما در این قسمت وارد شدن در مبحث استنتاج نیست، بلکه جلب توجه محصلین است به بعضی از قواعد ساده‌ی استنتاج (نتیجه‌گیری) و استدلال (دلیل آوردن) به منظور تسهیل فهم براهین ریاضی.

است که در این گزاره‌نما صدق کند. چون $64 = 17 - 81 = 17 - 9^2$، عدد 9 در گزاره‌نمای مذکور صدق میکند؛ با عرضه کردن این عدد، اثبات (ب) تمام است. همچنین، اثبات گزاره‌ی

(پ) دو عدد صحیح هست که تفاضل مجذورات آنها مجذور کامل است

با عرضه کردن اعداد 5 و 4 تمام میباشد. البته، عرضه کردن شیء یا اشیائی که در گزاره‌نمای مفروضی صدق کنند همیشه بدین سهولت نیست، و از این گونه حالات ساده که بگذریم، اثبات وجود آنها کمابیش زحمت دارد.

۴.۱.۱. تبصره. در مثالهای مذکور در ۴.۱، جز (پ) گزاره‌های کلی و جزئی را به وسیله‌ی گزاره‌نماها بیان کردیم. اگر چه این کار در زبان عادی معمول نیست، در استدلال ناچار به گزاره‌نماها باز میگردند. مثلاً، قضیه‌ی (آ) مذکور در ۴.۱ به زبان عادی چنین بیان میشود:

مجموع مربعین جیب و جیب تمام هر قوس مساوی 1 است.

اما، برای اثبات این قضیه، باید قوسی دلخواه مانند x اختیار کرد، و ثابت نمود که در گزاره‌نمای $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ صدق میکند.

۴.۱.۲. تبصره. اثبات احکام «مختلط» بر طبق اصول سابق‌الذکر است. مثلاً، برای اثبات اینکه، بازاء هر عدد، عددی بزرگتر از آن وجود دارد، فرض میکنیم x عددی دلخواه باشد، و ثابت میکنیم که عددی بزرگتر از x وجود دارد. گوئیم، از $1 > 0$ نتیجه میشود $x + 0 < x + 1$، و از آنجا $x < x + 1$. پس، ثابت شد که $x + 1$ بزرگتر از x است، و هوالمطلوب.

۴.۱.۳. تبصره. گزاره‌هائی را که با «هیچ» بیان میشوند میتوان با «هر» بیان کرد. مثلاً، گزاره‌ی «هیچ عدد فرد نیست» بدین معنی است:

هر عدد اختیار کنیم، آن عدد فرد نیست،

یا[1] مختصراً،

بازاء هر عدد، آن عدد فرد نیست.

همچنین، گزاره‌ی «حسن هیچ کتابی را نخوانده است» بدین معنی است:

هر کتابی اختیار کنیم، حسن آن را نخوانده است

یا

بازاء هر کتاب، حسن آن را نخوانده است.

۴.۱.۴. اثبات به انتفاء مقدم. اگر x نمایش عدد حقیقی دلخواهی باشد، گزاره‌نمای

اگر $x < x$ آنگاه x مجذور کامل است،

---

(۱) ذیل صفحه‌ی ۲۲ ملاحظه شود.

که مقدمش بازاء هر مقدار x دروغ است، بازاء هر مقدار x راست میباشد. بنا بر این، گزاره‌ی

بازاء هر مقدار x، اگر $x < x$ آنگاه x مجذور کامل است،

یا، به‌عبارت دیگر،

هر عدد که از خودش کوچکتر باشد مجذور کامل است

یک قضیه‌ی ریاضی است. اصطلاحاً گوئیم این قضیه به انتفاء مقدم برقرار است.

این گونه قضایا نوعاً مفید فایده‌ای نیستند؛ با هر گزاره‌نمائی که همواره دروغ باشد میتوان از این گونه قضایا ساخت؛ مانند

اگر $x \neq x$ آنگاه مرکز دایره بر محیط آن قرار دارد،

اگر $x < 0$ و $x > 0$ آنگاه $2 = 1$،

اگر 5 زوج باشد و زوج نباشد آنگاه 9 مکعب کامل است،

و غیره. معذلک، قضایای مفید و مهمی به صورت

بازاء هر x، اگر $F(x)$ آنگاه $G(x)$

هست که به انتفاء مقدم، یعنی بسبب اینکه $F(x)$ همواره دروغ است، برقرار میباشند. نمونه‌ای از قضایای مهمی که به انتفاء مقدم ثابت میشوند در ۱.۴.۴ فصل ۲ خواهد آمد.

۴.۱.۵. نقیض گزاره‌های کلی و جزئی. در ۲.۸.۵ به اهمیت حرکت دادن ناقض اشاره کردیم. اهمیت این موضوع در باب گزاره‌های کلی و جزئی به مراتب بیشتر است، و در بسیاری موارد، فهم استدلال ریاضی بدون علم به چگونگی حرکت دادن ناقض سخت متعسّر است. در منطق، قواعدی برای این کار هست، ولی فعلاً مجال ورود در آنها نیست[1]، بلکه در اینجا اکتفا میکنیم به ذکر نمونه‌هائی چند که فهم آنها بر هر فارسی‌زبان آسان است. مقدمةً تذکر میدهیم که در منطق ابتدائی گزاره‌های کلی و جزئی ساده را به چهار نوع تقسیم میکنند، که نام و نمونه‌ای از هر یك ذیلاً ملاحظه میشود

نام		نمونه
موجب کلّی	(آ)	هر انسان حیوان است.
سالب کلی	(ب)	هیچ انسان جماد نیست.
موجب جزئی	(پ)	بعض انسان جماد است.
سالب جزئی	(ت)	بعض انسان حیوان نیست.

اینک میدانید که گزاره‌ی سالب کلی قابل بیان به وسیله‌ی «هر» است؛ و گزاره‌های جزئی جنبه‌ی وجودی دارند: گزاره‌ی «بعض انسان جماد است» یعنی «انسانی هست که جماد است» یا «حد اقل یک انسان هست که جماد است» یا «بازاء بعضی از افراد انسانی، وی جماد است». بدین گونه نقیض گزاره‌ی (آ) ــ یعنی گزاره‌ی

(۱) در فصل ۱ض توضیح کافی در این باب آمده است.

چنین نیست که هر انسان حیوان است ـــ

معادل است با گزاره‌ی «انسانی هست که حیوان نیست»، و این خود معادل گزاره‌ی (ت) است. بالعکس، نقیض گزاره‌ی (ت) معادل گزاره‌ی (آ) میباشد. همچنین، گزاره‌های (ب) و (پ) نقیض یکدیگرند. برای تسهیل مراجعه، هر دو دسته گزاره‌ی متناقض از این گزاره‌ها را در یک ردیف از جدول ذیل آورده‌ایم. در ردیف I، گزاره‌ی (آ) و صورت تحلیل شده‌ی آن ضبط است، و به محاذات آن، نقیضش، یعنی گزاره‌ی (ت) و صورتهای معادلش. در هر ردیف، هر گزاره‌ی خانه‌ی راست نقیض هر گزاره‌ی خانه‌ی چپ است، و بالعکس. جلب توجه محصلین به صورتهای تحلیل شده لازم است: اگر چه این صورتها ممکن است ناخوشایند و بازبان فارسی ناملایم باشند، همین صورتهای «تشریح شده»اند که باطن استدلال را آشکار میسازند.

	گزاره نقیض	نقیض گزاره
I	هر انسان حیوان است. بازاء هر انسان، وی حیوان است.	بعض انسان حیوان نیست. انسانی هست که حیوان نیست. بازاء بعض انسان، چنین نیست که وی حیوان است. حد اقل یک انسان هست که چنین نیست که وی حیوان است.
II	هیچ انسان حیوان نیست. بازاء هر انسان، چنین نیست که وی حیوان است.	بعض انسان حیوان است. انسانی هست که حیوان است. بازاء بعض انسان، وی حیوان است. حد اقل یک انسان هست که حیوان است.

جدول فوق سرمشق و اساس عمل حرکت دادن ناقض است. در مورد گزاره‌های پیچیده میتوان متدرجاً این سرمشقها را بکار بسته ناقض را مرحله به مرحله پیش راند.

۴.۱.۵.۱. امثله

(آ). گزاره‌ی ذیل را اختیار میکنیم:

(۱) هر عدد فرد یا زوج است.

نقیض این گزاره، بر طبق ردیف I جدول، معادل، است با
(۲) عددی هست که چنین نیست که آن (عدد) فرد یا زوج است.
در عبارت
(۳) چنین نیست که آن فرد یا زوج است،
بر طبق قانون د مورگن، میتوان ناقض را به چپ حرکت داد. در نتیجه، (۳) معادل میشود با
آن فرد نیست و آن زوج نیست.
پس، نقیض (۱)، یعنی گزاره‌ی (۲)، معادل است با گزاره‌ی
(۴) عددی هست که فرد نیست و زوج نیست.
(ب). نقیض گزاره‌ی
(۱) هر کس بعضی کتابها را خوانده است.
این گزاره کلی است. پس، ابتدا، بر طبق ردیف I، نقیض آن را چنین مینویسیم:
(۲) کسی هست که چنین نیست که بعضی کتابها را وی خوانده است.
در این گزاره، جزء بعد از «کسی هست که» نقیض گزاره‌ی
(۳) بعضی کتابها را وی خوانده است
میباشد. چون (۳) گزاره‌ای جزئی است، نقیضش، بر طبق ردیف II، معادل است با
(۴) بازاء هر کتاب، وی آن را نخوانده است.
پس، نقیض (۱) معادل است با
(۵) کسی هست که، بازاء هر کتاب، وی آن را نخوانده است.
بالاخره، این گزاره به زبان فارسی عادی چنین بیان میشود:
(۶) کسی هست که هیچ کتابی را نخوانده است.

۴.۱.۵.۲. تبصره. مقصود از مثالهای سابق ارائه‌ی طریق استفاده از سرمشقهای مندرج در جدول است در موارد پیچیده، نه مقید ساختن محصلین به اینکه در هرمورد متوسل به آن سرمشقها شوند. هر فارسی‌زبان بلادرنگ یا با کمی تأمل درمییابد که نقیض گزاره‌ی (۱) مثال آ:۴.۱.۵.۰۱ گزاره‌ی (۴) است، و نقیض گزاره‌ی (۱) مثال (ب) گزاره‌ی (۶)؛ و برای رسیدن به این نتیجه حاجت به طی کردن راههای درازی که در حل این مثالها رفتیم نیست. مثال دیگری که نظایرش در استدلالهای ریاضی بسیار مورد لزوم است ساختن نقیض گزاره‌ی
(۱) هر باغ درختی دارد که همه‌ی برگهایش قرمز است
میباشد. نقیض این گزاره گزاره‌ی
(۲) باغی هست که هر درختش برگی دارد که قرمز نیست
است، و برای تمرین، بسیار مناسب است که محصلین نقیض گزاره‌ی (۱) را با حرکت دادن تدریجی ناقض به صورت (۲) درآورند. صورت کلیتر مثال فوق اینست:
(*) بازاء هر عضو باشگاه A عضوی از باشگاه B هست
که بازاء هر عضو باشگاه C رابطه‌ی ρ بین این سه
عضو بر قرار است[1]،
که نقیضش چنین میباشد:

---

(۱) مانند اینکه هر سه در یک دانشکده تحصیل کرده‌اند.

(ث) باشگاه A عضوی دارد که بازاء هر عضو باشگاه B عضوی از باشگاه C هست که بین آنها رابطه‌ی ρ برقرار نیست.

۴.۱.۶. مثال نقض. در موارد بسیار متعدد مواجه میشویم با این مسئله که فلان گزاره‌ی کلی ریاضی قضیه‌ی ریاضی هست یا نه. به عنوان مثال، در آغاز تحصیل مثلثات، ممکن است این سؤال به ذهن محصل خطور کند که رابطه‌ی

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y \qquad (۱)$$

همیشه بر قرار هست یا نه؛ و به عبارت دیگر، گزاره‌ی

(۲) بازاء هر دو قوس x و y، $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$

قضیه‌ی مثلثات هست یا نه. بدین سؤال میتوان چنین جواب داد:

گزاره‌ی (۲) قضیه‌ی مثلثات نیست، زیرا، مثلاً مقادیر $x = y = \pi/2$، در رابطه‌ی (۱) صدق نمیکنند.

این جواب قابل قبول است، زیرا، با عرضه کردن مقادیر مذکور، در واقع ثابت کرده‌ایم که

(۳) دو قوس مانند x و y هست که $\sin(x+y) \neq \sin x + \sin y$

و این گزاره، چنانکه با اندک تأملی معلوم میشود، معادل نقیض (۲) است. خلاصه، با اثبات گزاره‌ی (۳)، گزاره‌ی (۲) را باطل کرده‌ایم.

شیء یا اشیاء خاصی را که بدان وسیله یک حکم کلی را، با اثبات نقیض آن، ابطال میکنند مثال نقض خوانند. در مثال مذکور، مقادیر $\pi/2$ (برای x) و $\pi/2$ (برای y) مثال نقض حکم (۲) هستند.

۴.۱.۷. تمرین

۱. از احکام آتیه، بعضی قضیه‌ی ریاضی هستند، و برخی همیشه برقرار نمیباشند. قضایا را ثابت کنید، و نکاتی را که در صفحات قبل در باب استنتاج آموختید در ضمن اثبات آنها توضیح دهید. در مورد سایر احکام، اولاً نقیض هر یک را بنویسید، و ثانیاً آن حکم را باطل کنید.

(آ) حاصلضرب هر دو عدد منتها مساوی نصف مجموع مربعین آنها است. (ب) مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست. (پ) بعضی اعداد اول زوجند. (ت) بعضی اعداد اول فردند. (ث) عددی هست که از هر عدد دیگر بزرگتر است. (ج) واسطه‌ی هندسی دو عدد همواره از واسطه‌ی عددی آنها کوچکتر است. (چ) هر دو زاویه‌ی مساوی متقابل به رأس میباشند. (ح) هر چهارضلعی که اقطارش بر هم عمود باشند لوزی است. (خ) دو عدد صحیح متوالی هست که هر دو اولند. (د) مرکز اصلی سه دایره که مراکزشان بریک استقامت نباشد همواره در خارج آنهاست.

۴.۲. قضایای شرطی. وقتی گفته میشود که

(۱) از «$x < y$» نتیجه میشود «$-y < -x$»

مقصود اینست که همواره (یعنی بازاء جمیع مقادیر x و y) اگر «$x < y$» راست باشد «$-y < -x$» نیز راست است. عبارات دیگری که برای بیان همین مقصود بکار میرود اینست:

(۲) «$x < y$» مستلزم «$-y < -x$» است.

(۳) «$-y < -x$» از «$x < y$» لازم میآید.

وقتی که (۱) (یا صورتهای معادل آن) برقرار باشد، بنا بر تعریف ارزش ترکیب شرطی، ترکیب شرطی

(۴) اگر $x < y$ آنگاه $-y < -x$

یک قضیه‌ی ریاضی است، یعنی همواره راست است. بالعکس، اگر بدانیم که (۴) یک قضیه‌ی ریاضی است، ناچار، هر وقت «$x < y$» راست باشد «$-y < -x$» نیز راست است، و لهذا، دومی نتیجه‌ی اولی است. پس، برای اثبات اینکه (۴) یک قضیه‌ی ریاضی است کافی است ثابت کنیم که تالی آن نتیجه‌ی مقدم آنست (یا، از مقدم لازم میآید).

تعریفات و نکات مذکور را میتوان تعمیم داد. بالاخص، به استناد اصول منطقی معلوم میشود که، برای اثبات اینکه ترکیبی شرطی مانند

(*) اگر P آنگاه Q،

که در آن P و Q گزاره‌ها یا گزاره‌نماهائی هستند[1]، قضیه است کافی است ثابت کنیم که Q نتیجه‌ی P است. این روشی است که در سراسر هندسه‌ی مقدماتی بکار برده‌اید: مقدم ترکیب شرطی مورد ادعا را، به عنوان فرض قضیه، مقدمه قرار میدهند، و تالی را، به عنوان حکم[2] قضیه، از آن استنتاج میکنند (مثال آ:۴.۲.۱ ملاحظه شود). بعلاوه، اینک که میدانید که (*) با عکس نقیض خود، یعنی

(+) اگر $\sim Q$ آنگاه $\sim P$،

معادل است، جهت اثبات (*)، کافی است (+) را ثابت کنید. برای این منظور، چنانکه گفته شد، کافی است $\sim Q$ را مفروض بگیریم، و $\sim P$ را از آن استنتاج کنیم.

۴.۲.۱. تبصره. استنتاج مذکور در مثال آغاز ۴.۲ فقط یک مقدمه دارد. سایر حالات را میتوان به این حالت بازگردانید. مثلاً، وقتی گفته میشود که

(۱) از «$x < y$» و «$y < z$» نتیجه میشود «$x < z$»

مقصود اینست که همواره اگر $x < y$ و $y < z$ راست باشند $x < z$ نیز راست است. چون

---

(۱) حروف P و Q و، عنداللزوم، R و S را برای نامیدن گزاره‌ها یا گزاره‌نماهای دلخواه بکار میبریم.

(۲) اصطلاح حکم در منطق به معنی دیگری نیز بکار میرود، و آن عمل ذهنی تصدیق است، خواه به ایجاب باشد (مانند «5 فرد است» و $2 < 3$) یا به سلب (مانند «5 فرد نیست» و «7 بزرگتر از 11 نیست»). هر گزاره حکمی را با الفاظ بیان میکند. بدین مناسبت، گزاره‌ای را که به عنوان گزاره‌ی راست اعلام شود نیز حکم میخوانند، و بدین معنی است که از احکام ریاضی سخن میگویند، و بجای «قضیه» هم‌گاه «حکم» میگویند.

$y < x$ و $z < y$ فقط و فقط وقتی در عین حال راست هستند که ترکیب عطفی آنها، یعنی $x < y \ \& \ y < z$ راست باشد، مقصود فوق معادل است با اینکه

(۲) از «$x < y \ \& \ y < z$» نتیجه میشود «$x < z$».

خلاصه، احکام (۱) و (۲) معادل یکدیگرند، و (۲) را بیش از یک مقدمه نیست.

۴.۲.۲. امثله

(آ). در هندسه‌ی مسطحه، میخواهیم ثابت کنیم که هر نقطه که بر عمود منصف یک قطعه خط مستقیم واقع باشد از طرفین آن به یک فاصله است.

بر طبق روش عمومی قضایای کلی، فرض میکنیم AB قطعه خط مستقیمی دلخواه باشد، و ثابت میکنیم که هر نقطه‌ی واقع بر عمود منصف AB از طرفین AB به یک فاصله است. برای این منظور، بازاء نقطه‌ی دلخواه M، ثابت میکنیم که

(*) اگر نقطه‌ی M بر عمود منصف قطعه خط مستقیم AB باشد آنگاه $MA = MB$.

چنانکه ملاحظه میشود، روش عمومی اثبات احکام کلی اثبات قضیه‌ی مورد بحث را به اثبات قضیه‌ی شرطی (*) باز میگردانند. در (*)، فرض و حکم چنین است:

فرض: نقطه‌ی M بر عمود منصف قطعه خط مستقیم AB است.

حکم: $MA = MB$.

برای اثبات قضیه، به استناد فرض، برای «$MA = MB$» دلیل میآورند.

(ب). ثابت کنید که اگر مربع یک عدد صحیح زوج باشد آن عدد زوج است.

فرض میکنیم n عدد صحیح دلخواهی باشد. باید ثابت کرد که

(*) اگر n^2 زوج باشد n زوج است.

برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که

(†) اگر n زوج نیست n^2 زوج نیست.

فرض: n زوج نیست.

حکم: n^2 زوج نیست.

برهان. به موجب فرض، باقیمانده‌ی تقسیم n بر 2 مساوی 1 است. پس، اگر k خارج قسمت تقسیم باشد، $n = 2k + 1$. بالنتیجه، $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$، و عدد اخیر زوج نیست. ▲ (۴.۲.۳ ملاحظه شود.)

۴.۲.۳. قرارداد. در این کتاب، در پایان براهین، بجای الفاظی از قبیل «و هوالمطلوب»، «و این همان است که میخواستیم»، و امثال آنها، علامت «▲» قرار داده خواهد شد.

۴.۲.۴. قاعده‌ی تعدّی مقدمات شرطی. از مقدمات

(۱) اگر $a_1 < b_1$ آنگاه $a_2 < b_2$،

(۲) اگر $a_2 < b_2$ آنگاه $a_3 < b_3$،

با توجه به مسئله ۲.۷:۱۱، نتیجه میشود،

(۳) اگر $a_1 < b_1$ آنگاه $a_3 < b_3$.

بطور کلی، به استناد اصول منطقی، میتوان ثابت کرد که از مقدمات «اگر P آنگاه Q» و «اگر

Q آنگاه R» نتیجه میشود، «اگر P آنگاه R» (قاعده‌ی تعدی). از اینجا، بنا بر آنچه در ۴.۲ دانسته شد، معلوم است که اگر P مستلزم Q و Q مستلزم R باشد آنگاه P مستلزم R است (صورت دیگر قاعده‌ی تعدی). تعمیم در هر حالت خاص آسان است.

۴.۲.۵. استنتاج از مقدمات متناقض. دو ترکیب منطقی حروف p، q، r، و s[1]، و نیز دو گزاره‌نما را متناقض خوانند در صورتی که ترکیب عطفی آنها همواره دروغ باشد. مثلاً ترکیبات منطقی p و $\sim p$ متناقضند، زیرا، p هر گزاره‌ای باشد، ترکیب عطفی $p \,\&\, (\sim p)$ دروغ است. ترکیب عطفی p و $\sim p$ معروف به اجتماع نقیضین است[2]، که از تناقضات معروف منطقی است. همچنین، گزاره‌نماهای $x < y$ و $y < x$ متناقضند، زیرا ترکیب $x < y \,\&\, y < x$ همواره دروغ است.

دو مقدمه‌ی متناقض هر گزاره یا گزاره‌نما را نتیجه میدهند.

زیرا، فرض‌کنیم P_1 و P_2 دو مقدمه‌ی متناقض باشند، و Q گزاره یا گزاره‌نمای دلخواهی باشد. بنا بر توضیحات مذکور در ۴.۲.۱، حکم فوق معادل است با اینکه

از $P_1 \,\&\, P_2$ نتیجه میشود Q،

و معنی این حکم اینست که اگر $P_1 \,\&\, P_2$ راست باشد Q نیز راست است، و چون، بنا بفرض، $P_1 \,\&\, P_2$ همواره دروغ است، حکم اخیر به انتفای مقدم برقرار میباشد.

بنا بر حکم مذکور، مثلاً در علم هندسه، اگر دو گزاره‌ی متناقض را بپذیریم هم نتیجه میشود که مجموع زوایای مثلث دو قائمه است، و هم اینکه مجموع زوایای مثلث دو قائمه نیست؛ هم نتیجه میشود که زوایای متقابل به‌رأس باهم متساویند، و هم نتیجه میشود که زوایای متقابل به رأس باهم متساوی نیستند؛ و غیره. بدین گونه، علم هندسه مجموعه‌ای از گزاره‌های دو به دو متناقض میشود، و در این علم، نه چیزی برای اثبات میماند نه چیزی برای ابطال، و خلاصه، علم هندسه از میان میرود. همچنین، در علم جبر، اگر دو حکم متناقض، مانند $x < y$ و $y < x$ را بپذیریم، هر رابطه‌ی جبری ــ مثلاً $x = y$، $x \neq y$، $x < x$، $2 = 3$، $2 \neq 3$ و غیره ــ یک قضیه‌ی جبر خواهد بود، یعنی به استناد آن دو حکم متناقض قابل اثبات است، و در نتیجه، سرنوشت جبر نیز مانند آن میشود که در باب هندسه گفتیم؛ و هکذا در مورد علوم دیگر. اجتناب از تناقضات در علوم، و ملامتی که بر تناقض روا میدارند ــ مانند اینکه چون فلان فرض منجر به تناقض میگردد باطل است ــ ناشی از همین امر است. توجیه عادی برهان خلف (۴.۵) بر اساس اجتناب از تناقض میباشد.

۴.۳. قضایای دوشرطی (شرط لازم و کافی). بنا بر تعریف ترکیب دوشرطی، قضیه‌ای به صورت

---

(۱) ذیل ۱ صفحه‌ی ۴ ملاحظه شود. هر یک از این حروف خود یک ترکیب منطقی محسوب است.

(۲) همچنین است ترکیب عطفی یک گزاره‌نما با نقیض آن.

$$P \Leftrightarrow Q \qquad (*)$$

بدین معنی است

(†) اگر P آنگاه Q و اگر Q آنگاه P.

پس، اثبات (*) متضمن اثبات دو قضیه‌ی ذیل است:

(۱) اگر P آنگاه Q (یا «شرط لازم برای آنکه P آنست که Q»)،

(۲) اگر Q آنگاه P (یا «شرط کافی برای آنکه P آنست که Q»).

بنا بر ۴.۲، برای اثبات (۱)، کافی است P را فرض قرار دهیم و Q را از آن نتیجه بگیریم؛ و برای اثبات (۲)، کافی است Q را فرض قرار دهیم، و P را از آن نتیجه بگیریم. معمولاً استدلال را چنین تنظیم میکنند:

لزوم [در اینجا P را فرض قرار میدهند، و برای Q دلیل میآورند].

کفایت [در اینجا Q را فرض قرار میدهند، و برای P دلیل میآورند].

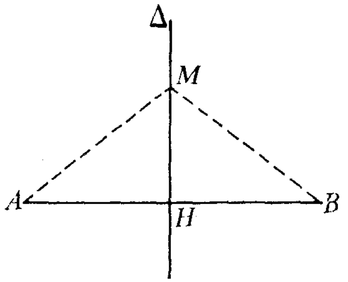
همچنین، برای اثبات هر یک از (۱) و (۲) میتوان عکس نقیض آن را ثابت نمود.

۴.۳.۱. مثال. ثابت کنید که

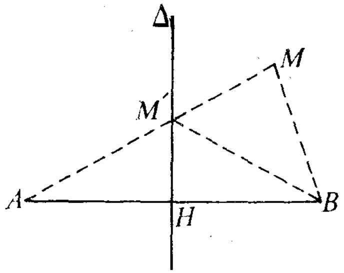
شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ی M بر عمود منصف قطعه خط مستقیم AB باشد آنست که $MA = MB$.

برهان. لزوم. فرض کنیم Δ عمود منصف AB و M بر Δ واقع باشد (شکل۱). MA و MB را وصل میکنیم. از تساوی دو مثلث حاصل نتیجه میشود $MA = MB$.

کفایت. فرض کنیم نقطه‌ی M چنان باشد که $MA = MB$. عمود MH را بر AB فرود میآوریم. از تساوی مثلثهای حاصل نتیجه میشود $HA = HB$. پس، MH عمود منصف AB است. ▲



شکل ۱



شکل ۲

اینک قسمت «کفایت» را به طریق دیگر ثابت میکنیم.

کفایت. کافی است ثابت کنیم که اگر M بر Δ واقع نباشد آنگاه $MA \neq MB$. پس، فرض کنیم M بر Δ واقع نباشد (شکل ۲). در این صورت، M با یکی از A و B در طرفین Δ واقع است. بی آنکه خللی به کلیت برهان وارد شود، میتوان فرض کرد که M و A

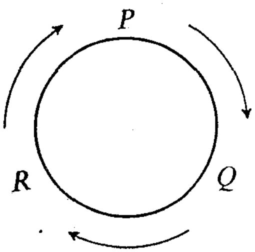
در طرفین Δ واقع‌اند[1]. در این صورت MA خط Δ را در نقطه‌ای مانند M' قطع میکند. بنا بر قسمت لزوم، $M'A = M'B$. اما در مثلث $MM'B$، $MB < MM' + M'B$؛ از آنجا $MB < MM' + M'A$، و لهذا، $MB < MA$. پس، $MA \neq MB$. ▲

۴.۳.۲. اثبات معادل بودن چند گزاره یا گزاره‌نما. دانسته شد که اگر عبارتی به صورت $P \boxed{\text{⇔}} Q$ قضیه‌ی ریاضی باشد آنگاه Q نتیجه‌ی P است، و P نتیجه‌ی Q، و لهذا، همواره اگر P راست باشد Q نیز راست است، و هر گاه Q راست باشد P هم راست است؛ و به عبارت دیگر، P و Q معادل یکدیگرند. بالعکس، اگر P و Q معادل یکدیگر باشند هر یک از آنها نتیجه‌ی دیگری است.

گاه حاجت می‌افتد به اثبات معادل بودن چند عبارت دو بدو. به عنوان مثال، سه عبارت P، Q، و R را اختیار میکنیم. برای اثبات معادل بودن آنها دو بدو کافی است ثابت کنیم که

(۱) از P نتیجه میشود Q؛ (۲) از Q نتیجه میشود P؛
(۳) از Q نتیجه میشود R؛ (۴) از R نتیجه میشود Q؛
(۵) از R نتیجه میشود P؛ (۶) از P نتیجه میشود R.

اما، با اندک تأملی معلوم میشود که اگر یک حلقه از این استنتاجات را ثابت کنیم کافی است. زیرا، مثلاً اگر (۱)، (۳)، و (۵) ثابت شود، از (۱) و (۳)، به قاعده تعدی، معلوم میشود که P مستلزم R است، و این به معنی (۶)میباشد؛ و هکذا در مورد (۲) و (۴).
تعمیم در هر مورد خاص آسان است و به متعلم محول میشود.



شکل ۳

۴.۳.۲.۱. مثال. میدانیم که میتوان[2] بر طرفین یک نامساوی یک مقدار افزود. اینک میخواهیم ثابت کنیم که گزاره‌نماهای

$P: \quad x < y,$ $\qquad Q: \quad x - y < 0,$
$R: \quad -y < -x,$ $\qquad S: \quad 0 < y - x$

---

(۱) اینکه از فرض مذکور خللی به کلیت برهان وارد نمیشود از این جهت است که اگر M و B در طرفین Δ واقع باشند برهانی مانند برهان حالتی که M و A در طرفین Δ واقعند ما را به مقصود میرساند.

(۲) متأسفانه، استعمال لفظ «میتوان» در ریاضیات رایج و اغلب برای مبتدی گمراه کننده است. مثلاً، میگویند از طرفین تساوی «میتوان» دو مقدار مساوی و متحدالعلامه را اسقاط کرد. اگر صرف توانستن ملاک باشد، مقادیر غیر مساوی را هم میتوان اسقاط کرد، و این توانائی را هم داریم که، در رابطه‌ی $a = b$، هم a و هم b را اسقاط کنیم. بنا بر این، احتراز از استعمال این لفظ اولی است، مگر اینکه هر جا آن را بکار میبریم مقصود را صریحاً بگوئیم. بالاخص این موارد قابل ذکر است:

(آ) در استنتاج، هر جا گفته میشود که از مقدمات مفروض «میتوان» فلان نتیجه را ←

دو بدو معادل یکدیگرند.

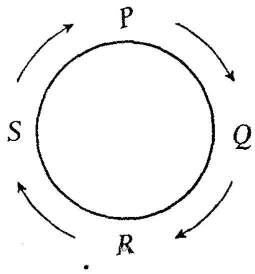
برهان. کافی است ثابت کنیم که

(آ) از $x < y$ نتیجه میشود $x - y < 0$؛

(ب) از $x - y < 0$ نتیجه میشود $-y < -x$؛

(پ) از $-y < -x$ نتیجه میشود $0 < y - x$؛

(ت) از $0 < y - x$ نتیجه میشود $x < y$.



شکل ۴

اثبات از این قرار است:

اولاً، فرض کنیم $x < y$. نتیجه میشود، $x + (-y) < y + (-y)$، و از آنجا، $x - y < 0$.

ثانیاً، فرض کنیم $x - y < 0$. نتیجه میشود، $(x - y) + (-x) < 0 + (-x)$، و از آنجا، $-y < -x$.

ثالثاً، فرض کنیم $-y < -x$. نتیجه میشود، $(-x) + (-y) < y + (-x)$، $y + (-y) <$ و از آنجا، $0 < y - x$.

رابعاً، فرض کنیم $0 < y - x$. نتیجه میشود، $x + 0 < (y - x) + x$، و از آنجا، $x < y$. ▲

۴.۴. عکس قضایا. میدانیم (۲.۵.۱) که ممکن است یک گزاره‌ی شرطی راست ولی عکس آن دروغ باشد. پس،

ممکن است عکس یک قضیه قضیه نباشد.

اگرچه شاید این گفته را محصلین بسیار شنیده‌اند توجه لازم بدان معطوف نمیشود. فاحشترین نمونه‌ی این عدم توجه در «اثبات قهقرائی» تساویها و نامساویها دیده میشود. مثلاً، برای اثبات تساوی $A = B$، این تساوی را مفروض میگیرند و، با یک سلسله عملیات، از آن به رابطه‌ای که راست بودنش بدیهی است (مانند $0 = 0$) میرسند، و راست بودن این نتیجه‌ی نهائی را دلیل راست بودن $A = B$ میشمارند. تحلیل این روش به منظور جلب توجه به عیب آن لازم است. فرض کنید مقصود اثبات تساوی $A = B$ (۱) است. در این تساوی تصرفی میکنید، و آن را به صورت $A_1 = B_1$ (۲) در میآورید. با تصرف در (۲)، آن را به صورت $A_2 = B_2$ (۳)، و مثلاً، با تصرفی در (۳) آن را به صورت $0 = 0$ (۴) در میآورید. آیا از این جا میتوان حکم به برقراری (۱) کرد؟ برای پاسخ گفتن به این سؤال باید توجه کرد که آنچه از تصرفات خود حاصل کرده‌اید اینست:

(آ) از $A = B$ نتیجه میشود $A_1 = B_1$،

→ گرفت مقصود اینست که این نتیجه‌گیری درست است.

(ب) در تساویها و نامساویها، وقتی گفته میشود که «میتوان» فلان تصرف را کرد مقصود اینست که عبارت اولیه مستلزم عبارت حاصل از تصرف مورد نظر است؛ و به عبارت دیگر، دومی نتیجه‌ی اولی است. پس، مقصود از اینکه «میتوان» به طرفین یک نامساوی مقداری افزود اینست که اگر، مثلاً نامساوی $a < b$ مفروض باشد، x هر چه باشد، از آن نتیجه میشود $a + x < b + x$.

(ب) از $A_1 = B_1$ نتیجه میشود $A_2 = B_2$،
(پ) از $A_2 = B_2$ نتیجه میشود $0 = 0$.

پس، به قاعده‌ی تعدی

(ت) از $A = B$ نتیجه میشود $0 = 0$.

اینک اگر سؤال سابق را در نظر آورید ملاحظه میکنید که جواب آن عموماً منفی است، مگر آنکه رشته‌ی استنتاجات (آ) ـ (پ) بازگشتپذیر باشد، یعنی، از $0 = 0$ هم $A = B$ نتیجه شود؛ و خلاصه، (۱) نه فقط (۲) را نتیجه دهد، بلکه با آن معادل باشد، و نیز (۲) با (۳) و (۳) با (۴) معادل باشد.

۴.۴.۱. مثال. ثابت کنید که $5 = 2$.
تساوی $5 = 2$ (۱) را میتوان چنین نوشت، $2 = 5$ (۲). از جمع (۱) و (۲) عضو به عضو نتیجه میشود، $7 = 7$، که بالبداهه راست است، و هوالمطلوب!

۴.۴.۲. تبصره. از ترکیبات شرطی ساده که بگذریم، استعمال اصطلاح عکس کما بیش متشتت است. ما موارد آتیه را که استعمال این اصطلاح در آنها تقریباً یکنواخت است تذکر میدهیم. در موارد دیگر، احتراز از بکار بردن این اصطلاح اولی است.

I. عکس ترکیب

اگر P آنگاه اگر Q آنگاه R،

بنا بر تعریف، ترکیب ذیل است:

اگر P آنگاه اگر R آنگاه Q.

مثلاً، با توجه به ۲.۵.۳، عکس گزاره‌ی

در مثلث ABC، اگر $AB = AC$ آنگاه $\angle B = \angle C$.

گزاره‌ی ذیل میباشد:

در مثلث ABC، اگر $\angle B = \angle C$ آنگاه $AB = AC$.

II. عکس گزاره‌ای کلی از نوع

هر مثلث شکل است

اینست:

هر شکل مثلث است.

III. به موارد مستنبط از این مثالها نیز توجه کنید:

گزاره: هر دو مثلث متساوی متشابهند.
عکس: هر دو مثلث متشابه متساویند.
گزاره: در هر دایره، هر دو وتر متساوی‌الطول از مرکز به یک فاصله‌اند.
عکس: در هر دایره، هر دو وتر که از مرکز به یک فاصله باشند متساوی الطولند.

۴.۴.۳. تبصره‌ی مهم. در ریاضیات مواردی هست که ترکیب دوشرطی را به صورت

ترکیب شرطی بیان میکنند، و آن در تعریفات است. تعریفی مانند

(۱) مثلث ABC را متساوی‌الساقین نامند در صورتی که دارای دو ضلع متساوی باشد،

و صورتهای مشابه آن، در واقع بدین معنی است:

(۲) مثلث ABC فقط و فقط وقتی متساوی‌الساقین است که دو ضلع آن متساوی باشند.

توجه بدین نکته کمال ضرورت را دارد، زیرا، بسیاری از استدلالهای ریاضی ناشی از تعریفات است، و آنچه را از یک ترکیب دوشرطی میتوان نتیجه گرفت عموماً نمیتوان از یک ترکیب شرطی بدست آورد. مثلاً، بنا بر ۲.۵.۴، گزاره‌ی (۱) بدین معنی است:

اگر مثلث ABC دارای دو ضلع متساوی باشد مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

و این گزاره به خودی خود نتیجه نمیدهد که اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد دارای دو ضلع متساوی است.

چون بیان تعریفاتی که جنبه‌ی دوشرطی دارند به صورت شرطی در ریاضیات متداول است، در کتاب حاضر در این موارد همین طریق بیان بکار رفته است. با تذکری که دادیم، معنی واقعی تعریفاتی که بدین گونه بیان میشوند معلوم خواهد بود.

۴.۵. برهان خلف. روش برهان خلف یکی از روشهای استدلالی بسیار توانا است، و لهذا ـ بی‌آنکه وارد مجوز منطقی آن بشویم ـ آن را یاد آوری میکنیم، زیرا تعداد موارد توسل به برهان خلف در ریاضیات از شمار بیرون است.

روش برهان خلف در اثبات اینکه گزاره یا گزاره‌نمای Q نتیجه‌ی مقدمات مفروضی است اینست که $\sim Q$ (نقیض نتیجه‌ی مطلوب) را ـ که گاه آن را «قول مدّعی» مینامند، و ما آن را فرض خلف میخوانیم ـ مفروض میگیرند، و از این فرض به یاری مقدمات مفروض و قضایائی که قبلاً ثابت یا پذیرفته شده است، دو نتیجه‌ی متناقض، یا نتیجه‌ای نقیض یکی از مفروضات یا نقیض قضیه‌ای که قبلاً ثابت یا پذیرفته شده است، استخراج میکنند، و بدین استناد، حکم به باطل بودن «قول مدعی» و اثبات نتیجه‌ی مطلوب میکنند.

در فصول آتیه، موارد بسیار از استعمال برهان خلف خواهد آمد. محصلین باید در مثالهای آینده درست تأمل کنند تا در آن موارد گرفتار مشکلی نشوند.

۴.۵.۱. امثله

(آ). در هندسه‌ی مسطحه، ثابت کنید که اگر سه خط مستقیم Δ، Δ'، و Δ'' دو بدو متمایز باشند، و $\Delta \parallel \Delta'$ و $\Delta \parallel \Delta''$ آنگاه $\Delta'' \parallel \Delta'$.

فرض: Δ، Δ'، و Δ'' دو بدو متمایزند، و $\Delta \parallel \Delta'$ و $\Delta \parallel \Delta''$.

حکم: $\Delta'' \parallel \Delta'$.

برهان (خلف). فرض کنیم Δ' با Δ'' موازی نباشد (فرض خلف). از فرض خلف و فرض متمایز بودن Δ' و Δ'' (از مفروضات قضیه) لازم میآید که این دو خط در یک نقطه، مثلاً M،

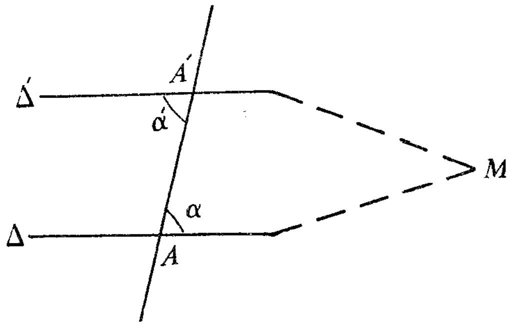
یکدیگر را قطع کنند. چون، به فرض قضیه، $\Delta \parallel \Delta'$، M در خارج Δ واقع است. پس، از نقطه‌ی M، واقع در خارج Δ، دو خط متمایز Δ' و Δ'' به موازات Δ گذشته‌اند، و این با اصل موضوع اقلیدس متناقض است. [پس، فرض خلف (موازی نبودن Δ' با Δ'')، که نقیض حکمی که قبلاً پذیرفته شده است از آن لازم می‌آید، باطل است، و $\Delta'' \parallel \Delta'$.]
عبارتی مانند آنکه در داخل [ ] قرار داده‌ایم اغلب در پایان براهین خلف آورده میشود، ولی ذکرش تکرار مکرر است، و ما برای جلب توجه به همین نکته آن را آوردیم. برهان خلف با استنتاج تناقض از فرض خلف تمام میباشد.
(ز). در هندسه‌ی مسطحه، این قضیه را میدانیم

(*) هر زاویه‌ی خارجه‌ی مثلث از هر یک از زوایای داخله که با آن رأس مشترك ندارند بزرگتر است.

میخواهیم ثابت کنیم که،

هر گاه دو خط متمایز را خط ثالثی قطع کند چنانکه دو زاویه‌ی متبادله‌ی داخله باهم مساوی باشند آن دو خط باهم متوازیند.

دو خط متمایز دلخواه Δ و Δ' و قاطع دلخواه AA' را اختیار میکنیم (شکل ۵).



شکل ۵

فرض: $\alpha = \alpha'$ حکم: $\Delta \parallel \Delta'$

برهان (خلف). فرض کنیم $\sim (\Delta \parallel \Delta')$ (فرض خلف). پس Δ و Δ' در یک نقطه، مثلاً M، یکدیگر را قطع میکنند. در این صورت، یکی از α و α' زاویه‌ی خارجه‌ی مثلث MAA' و دیگری زاویه‌ی داخله‌ی آنست، و بالنتیجه، بنا بر (*)، $\alpha \neq \alpha'$، و این با فرض قضیه $(\alpha = \alpha')$ متناقض است.

۴.۶. قواعد استدلالی ناشی از خواص یاء منطقی.

در پایان این قسمت، دو قاعده‌ی استدلالی مفید ناشی از خواص یاء منطقی (V) میآوریم.
بنا بر آنچه در ۲.۴ در باب ارزش ترکیب فصلی آموختیم، اگر p گزاره‌ی راستی باشد، q هر گزاره‌ای باشد، گزاره‌ی $p \vee q$ راست است. پس، اگر p مفروض باشد، میتوان $p \vee q$ را از آن نتیجه گرفت. مثلاً، از گزاره‌ی «5 فرد است» میتوان گزاره‌ی «5 فرد است یا 7 زوج است» را نتیجه گرفت. با اندک تأملی معلوم میشود که این استنتاج را در مورد گزاره‌نماها نیز میتوان بکاربست. مثلاً اگر $x < y$ (۱) مفروض باشد میتوان گزاره‌نمای $x < y \vee x = y$ (۲)

را از آن استنتاج کرد، زیرا، بازاء هر دستگاه از مقادیر x و y که (۱) راست باشد (۲) نیز راست است. خلاصه،

۴.۶.۱. قاعده‌ی ادخال فاصل. از یک گزاره یا گزاره‌نمای مفروض میتوان ترکیب فصلی آن را با هر گزاره یا گزاره‌نمای دلخواه نتیجه گرفت.

همچنین، بنا بر ارزش ترکیب فصلی، اگر $P \vee Q$ راست باشد، و نقیض یکی از دو مؤلفه، مثلاً P، نیز راست باشد، ناچار باید مؤلفه‌ی دیگر (Q) راست باشد. پس،

۴.۶.۲. قاعده‌ی رفع مؤلفه. از یک ترکیب فصلی و نقیض یکی از مؤلفه‌های آن میتوان مؤلفه‌ی دیگر را نتیجه گرفت.

۴.۶.۳. امثله و فواید

(آ). از $a = b$ نتیجه میشود $a \leqslant b$.

این استنتاج، که اغلب باعث حیرت محصلین است، ناشی از قاعده‌ی ادخال فاصل است. زیرا، از $a = b$، بنا بر این قاعده، نتیجه میشود، $a < b \vee a = b$، و این به معنی $a \leqslant b$ است.

بر طبق همان قاعده، از $a < b$ میتوان $a \leqslant b$ را نتیجه گرفت.

(ب). از مقدمات

نقطه‌ی M بر خط D یا بر دایره‌ی C است،

نقطه‌ی M بر خط D نیست،

بنا بر قاعده‌ی رفع مؤلفه، نتیجه میشود،

نقطه‌ی M بر دایره‌ی C است.

(پ). از مقدمات

$$(۱) \qquad a \leqslant b, \qquad\qquad (۲) \qquad a \neq b,$$

به قاعده‌ی رفع مؤلفه، نتیجه میشود، $a < b$. زیرا، به موجب (۱)،

$$(۳) \qquad a < b \vee a = b$$

و چون $a \neq b$ نقیض $a = b$ است، از (۲) و (۳) نتیجه میشود، $a < b$.▲

(ت). طریقه‌ی معروف به طریقه‌ی حذف در استدلال با قاعده‌ی رفع مؤلفه بستگی تام دارد. در این طریقه، جمیع شقوق ممکنه را (یعنی انواع حالاتی را که، در شرایط مفروض در قضیه، حد اقل یکی از آنها باید وقوع یابد)، که حکم مطلوب یکی از آنهاست، در نظر میگیرند، و همه‌ی شقوق را، جز حکم مطلوب، باطل میکنند. مثلاً، در هندسه‌ی مسطحه، فرض کنید این دو قضیه قبلاً ثابت شده است:

I. اگر دو ضلع از مثلثی باهم متساوی باشند زوایای مقابل به آنها باهم متساویند.

II. اگر دو ضلع مثلثی نامساوی باشند زاویه‌ی مقابل به ضلع اطول اعظم است.

اینک میخواهیم ثابت کنیم که

(*) اگر دو زاویه از مثلثی نامساوی باشند ضلع مقابل به زاویه‌ی اعظم اطول است.

فرض کنیم ABC مثلث مفروض باشد، و $\angle B < \angle A$. حکم قضیه اینست که $BC > AC$. گوئیم همواره

(۱) $AC < BC$ یا $BC = AC$ یا $BC < AC$.

(هر یک از مؤلفه‌های این ترکیب فصلی یکی از «شقوق ممکنه» است. چون بین دو طول BC و AC همواره یکی از روابط $BC > AC$، $BC = AC$، و $BC < AC$ برقرار است، جمیع شقوق ممکنه در ترکیب فصلی (۱) آمده‌اند). اینک شق $BC < AC$ را به برهان خلف باطل میکنیم. گوئیم، اگر $BC < AC$ آنگاه، بنا بر II، لازم میآید که $\angle B < \angle A$، و این خلاف فرض است. پس، $\sim (BC < AC)$. از این و (۱) به قاعده‌ی رفع مؤلفه نتیجه میشود،

(۲) $BC > AC$ یا $BC = AC$.

حال شق $BC = AC$ را نیز به وسیله‌ی I به برهان خلف باطل میکنیم. بدین گونه، از (۲) به قاعده‌ی رفع مؤلفه نتیجه میشود، $BC > AC$.▲

۴.۷. تمرین

۱. کدام یک از احکام ذیل برقرار است؟

(آ) $x > 2$ مستلزم $x > 1$ است.

(ب) $x > 1$ معادل $x > 2$ است.

(پ) $(x-1)^2 = 0$ مستلزم $x = 1$ است.

(ت) $(x-1)^2 = 0$ معادل $x = 1$ است.

(ث) $0 < x$ & $x^2 = 9$ معادل $(x-3)^2 = 0$ است.

(ج) $x = 2$ مستلزم $2x^2 - 5x + 2 = 0$ است، ولی از آن لازم نمیآید.

(چ) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ مستلزم $x = 2$ است، ولی از آن لازم نمیآید.

(ح) $p \vee q$ مستلزم p است.

(خ) p & q مستلزم p است.

۲. ثابت کنید که

(آ). شرط لازم برای آنکه زاویه‌ی α از مثلث ABC منفرجه باشد آنست که ضلع a از هر یک از اضلاع b و c بزرگتر باشد، ولی این شرط کافی نیست.

(ب) در مثلث ABC، برای اینکه $a > b$ و $a > c$ کافی است که $\alpha > 90°$، ولی این شرط لازم نیست.

(پ) $x > 2$ شرطی کافی برای $0 < x$ است، و $0 < x$ شرطی لازم برای $2 < x$ است.

(ت) در مثلث ABC، شرط لازم و کافی برای اینکه α منفرجه باشد آنست که $a^2 > b^2 + c^2$.

۳. در عبارات آ ـ ج آتیه، جای ستاره‌ها را با هر یک از الفاظ ذیل که مناسبتر است پر کنید:

(۱) لازم و کافی (۲) لازم ولی غیرکافی

(۳) کافی ولی غیر لازم (۴) نه لازم و نه کافی

(آ) شرط * * برای اینکه عدد طبیعی n مضرب 4 باشد آنست که عدد متشکل از دو رقم اخیر سمت راست آن مضرب 4 باشد.

(ب) شرط * * برای اینکه $ab = 0$ آنست که $a = 0$ و $b = 0$.

(پ) شرط * * برای اینکه $ab = 0$ آنست که $a = 0$ یا $b = 0$.

(ت) شرط * * برای اینکه $a = b$ آنست که $a^2 = b^2$.

(ث) شرط * * برای اینکه سه ضلع مثلث ABC باهم مساوی باشند آنست که سه زاویه‌ی آن باهم مساوی باشند.

(ج) شرط * * برای اینکه اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ باهم مساوی باشند آنست که زوایای آن با هم مساوی باشند.

۴. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه بازاء جمیع مقادیر x.

$$x^2 + 2bx + c = (x + l)^2$$

آنست که $b^2 = c$.

۵. مطلوبست شرط لازم و کافی بر حسب a و b برای آنکه بازاء جمیع مقادیر x، $ax^2 + b > 0$.

۶. مراحل حل هر یک از معادلات ذیل را بتفصیل بنویسید، و هر مرحله را که بازگشتپذیر است مشخص کنید:

(آ) $6(x - 2) = 5x - 7.$ (ب) $\sqrt{3x + 10} = 2 + \sqrt{x - 4}.$

۷. در یک امتحان کتبی، از جمله‌ی سؤالات این بوده است:

$$\text{اگر } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ آنگاه } \frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2} = \frac{xy}{ab} \quad (1)$$

(مخرجها مخالف صفر فرض میشوند). محصلی مسئله را چنین حل کرده است:

«اگر (۱) برقرار باشد خواهیم داشت:

$$ab(x^2 - y^2) = xy(a^2 - b^2)$$

از آنجا $(ax + by)(bx - ay) = 0$. پس، $ax + by = 0$ یا $bx - ay = 0$.

اما رابطه‌ی دوم بنا بفرض برقرار است. پس حکم ثابت میباشد.»

چه ایرادی بر این استدلال وارد است؟

۸. آیا استدلال ذیل برای اثبات رابطه‌ی

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sin x + \cos x$$

بازاءِ قوس حاده‌ی x مقنع است؟

از رابطه‌ی مذکور نتیجه میشود،

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x,$$

و یا $1 + \sin 2x = 1 + \sin 2x$، و هوالمطلوب.

۹. درهر دسته از گزاره‌های ذیل هر یک را که قضیه است مشخص و با کوتاهترین دلیلی که میتوانید ثابت کنید، و سایرین را باطل نمایید:

(آ) هر چهار ضلعی که متوازی‌الاضلاع باشد اقطارش منصف یکدیگرند. هر چهار ضلعی که متوازی‌الاضلاع نباشد اقطارش منصف یکدیگر نیستند. هر چهار ضلعی که اقطارش منصف یکدیگر نباشند متوازی‌الاضلاع نیست. هر چهار ضلعی که اقطارش منصف یکدیگر باشند متوازی‌الاضلاع است.

(ب) اگر در یک چهار ضلعی اضلاع با هم مساوی باشند اقطار بر هم عمودند. اگر در یک چهار ضلعی اضلاع با هم مساوی نباشند اقطار برهم عمود نیستند. اگر در یک چهار ضلعی اقطار بر هم عمود نباشند اضلاع باهم متساوی نیستند. اگر در یک چهار ضلعی اقطار بر هم عمود باشند اضلاع با هم متساویند.

(پ). در هر معادله‌ی درجه‌ی دوم، اگر جمله‌ی معلوم صفر باشد یکی از ریشه‌ها صفر است. در هر معادله‌ی درجه دوم، اگر جمله‌ی معلوم صفر نباشد هیچ یک از ریشه‌ها صفر نیست. در هر معادله‌ی درجه‌ی دوم، اگر یکی از ریشه‌ها صفر نباشد جمله‌ی معلوم مساوی صفر نیست.

(ت) در مثلث ABC، اگر A منفرجه باشد هم بزرگتر از B و هم بزرگتر از C است.

در مثلث ABC، اگر A هم بزرگتر از B و هم بزرگتر از C باشد A منفرجه است. در مثلث ABC، اگر زاویه‌ی A هم بزرگتر از B و هم بزرگتر از C نباشد A منفرجه نیست. در مثلث ABC، اگر A منفرجه نباشد در عین حال بزرگتر از B و بزرگتر از C نیست.

۱۰. سه قضیه از هندسه‌ی مقدماتی که اثبات آنها به طریقه‌ی حذف است انتخاب کنید، و اثبات هر یک را به طریقی که در ت: **۴.۶.۳** گذشت توضیح دهید.

۱۱.[۱] $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، و متغیرهای فردی a، b، و غیره اسامی اعداد حقیقی دلخواهند. این دو حکم را میدانیم:

(*) همواره اگر $a < b$ و $b < c$ آنگاه $a < c$.

(†) بازاءِ هر دو عدد حقیقی a و b، همواره یکی و تنها یکی از روابط $a > b$، $a = b$، و $b < a$ برقرار است.

بعلاوه، این تعریف در دست است:

$a \leqslant b$ یعنی $a < b \vee a = b$.

بدون استفاده از هیچ اطلاع دیگر در باب اعداد حقیقی جز خواص تساوی، این احکام را ثابت کنید:

(آ) a هر عدد (حقیقی) باشد، $\sim (a < a)$

(ب) اگر $a < b$ آنگاه $\sim (b < a)$

(پ) اگر $a < b$ آنگاه $a \neq b$

(ت) اگر $a \neq b$ آنگاه $a < b$ یا $b < a$

(ث) بازاءِ هر دو عدد a و b، یا $a \leqslant b$ یا $b < a$

(ج) اگر $a \leqslant b$ آنگاه $\sim (b < a)$

(چ) اگر $a < b$ آنگاه $\sim (b \leqslant a)$

(ح) اگر $a < b$ آنگاه $a \leqslant b \;\&\; a \neq b$، و بالعکس.

(خ) همواره $a \leqslant a$

(د) همواره $a \leqslant b \vee b \leqslant a$

۱۲. در یکی از کتابهای رسمی دبیرستانی، برای اثبات اینکه دو کمیت l و l' باهم متساویند، «ثابت کرده‌اند» (!) که $l' > l$ و $l > l'$، و سپس گفته‌اند:

«و این ممکن نیست که l هم بزرگتر از l' و هم کوچکتر از l' باشد. پس l' مساوی l است.»

فساد این استدلال را توضیح دهید.

۵ § تساوی منطقی یا همانی

۵.۱. مقدمه. اصطلاح «تساوی» در ریاضیات به معانی گوناگون بکار میرود. مثلاً، در حساب میگویند 4/3 مساوی 20/15 است $(4/3 = 20/15)$ و در هندسه میگویند اگر در دو مثلث دو ضلع و زاویه‌ی بینهما نظیر بنظیر باهم متساوی باشند آن دو مثلث باهم متساویند؛ و حال آنکه، در مثال اول مقصود اینست که «4/3» و «20/15» اسامی یک عدد هستند، و در مثال دوم، غرض از تساوی دو مثلث قابلیت انطباق آنهاست بر یکدیگر.

---

(۱) حل این مسئله را میتوان به بعد از آموختن مبحث تساوی (§ ۵) موکول کرد.

از ارکان هر مبحث ریاضی نوعی تساوی است. چون تساوی به معنی منطقی همواره در کتاب حاضر بکار میرود، فعلاً به ایراد توضیحاتی در این باب مبادرت میکنیم.

۵.۲. تعریف تساوی منطقی. «$x = y$» یعنی x و y اسامی یک چیز هستند. گزاره‌نمای $x = y$ را «x **مساوی** y است» یا «x همان y است» میخوانیم.

۵.۲.۱. تعریف. «$x \neq y$» یعنی $(x = y) \sim$ (نقیض $x = y$).
پس، $x \neq y$ یعنی x و y **اسامی دو شیء متمایزند**. گزاره‌نمای $x \neq y$ را «x مساوی y نیست» یا «x مخالف y است» یا «x غیر از y است» میخوانیم.
بنا بر تعریفات مذکور، از گزاره‌های ذیل، (۱) و (۳) راست هستند، و (۲) و (۴) دروغ:

(۱)	سراینده‌ی بوستان = سعدی؛	(۲)	فردوسی = سعدی؛
(۳)	$3 = 2 + 1;$	(۴)	$3 \neq \sqrt{9}.$

۵.۳. خواص اساسی تساوی (منطقی). خواص اساسی تساوی ناشی از تعریف آنست. ابتدا این خواص را، و سپس توضیحاتی در باب هر یک میآوریم.

۵.۳.۱. خاصیت انعکاسی. همواره $x = x$.

۵.۳.۲. خاصیت تقارن. همواره اگر $x = y$ آنگاه $y = x$.

۵.۳.۳. خاصیت تعدی. همواره اگر $x = y$ و $y = z$ آنگاه $x = z$.

۵.۳.۴. اصل تعویضپذیری عبارات مساوی. در یک گزاره یا گزاره‌نما، بجای اسمی از یک چیز، میتوان[۲] اسم دیگری از آن چیز را قرار داد[۳].

۵.۳.۵. توضیحات، امثله، و فواید
(آ). چنانکه اشاره کردیم، خواص چهارگانه‌ی تساوی منطقی نتایج ساده‌ی تعریف تساوی هستند، از این قرار: ۵.۳.۱ بدین معنی است که x و x اسامی یک چیزند؛ ۵.۳.۲ بدین معنی است که اگر x و y اسامی یک چیز باشند y و x نیز اسامی یک چیزند؛ و هکذا در مورد ۵.۳.۳؛ و این همه بدیهی است. در مورد اصل مهم تعویضپذیری، فرض کنید مقدمات ذیل در دست است:

(۱) سراینده‌ی بوستان = سعدی
(۲) سعدی مصنف گلستان است.

---

(۱) در باب اقسام دیگر تساوی توضیحاتی در ۳:۵ خواهد آمد.
(۲) در باب «میتوان» ذیل ۲ صفحه‌ی ۳۴ ملاحظه شود.
(۳) این تبدیل ضرورت ندارد یکنواخت (ذیل صفحه‌ی ۱۸) باشد.

به موجب (۱)، «سعدی» و «سراینده‌ی بوستان» اسامی یک فرد میباشند. اگر در (۲)، بجای «سعدی»، اسم دیگر سعدی، یعنی «سراینده‌ی بوستان» را قرار دهیم، گزاره‌ی

(۳) سراینده‌ی بوستان مصنف گلستان است

حاصل میشود، که بالبداهه نتیجه‌ی (۱) و (۲) است.

(ذ). اگر $x = z$ و $y = z$ آنگاه $x = y$.

زیرا، فرض کنیم $x = z$ (۱) و $y = z$ (۲). از (۲)، بنا بر خاصیت تقارن، نتیجه میشود، $z = y$ (۳). از (۱) و (۳)، بنا بر خاصیت تعدی، نتیجه میشود، $x = y$. ▲

(ر). اصل تعویضپذیری در ریاضیات همواره بکار میرود. اینکه، به استناد $x = y$، از رابطه‌ی $x = x^2 - 1$ رابطه‌ی $y = y^2 - 1$ را نتیجه میگیریم با قرار دادن نام دیگری از x است در $x = x^2 - 1$ بجای «x» و بکار بستن اصل تعویضپذیری.

بسیاری از استدلالهای مهم ریاضی که تساوی در آنها به معنی منطقی است به وسیله‌ی اصل تعویضپذیری صورت میگیرد. مثلاً، در حساب، فرض کنیم $a = b$ (۱) مفروض، و مقصود اثبات $a + x = b + x$ باشد. گوئیم، بر طبق خاصیت انعکاسی تساوی، $a + x = a + x$ (۲). اینک از (۱) و (۲) به موجب اصل تعویضپذیری نتیجه میشود، $a + x = b + x$. اینست اثبات اینکه «به طرفین تساوی میتوان یک مقدار افزود».

۵.۳.۶. تبصره. قراردادهای اختصاری ذیل همواره بکار میرود:

$a = b = c$ بجای $a = b \;\&\; b = c$

$a = b = c = d$ بجای $a = b \;\&\; b = c \;\&\; c = d$

و غیره.

۵.۴. تمرین

۱. ثابت کنید که اگر $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ آنگاه a_1، a_2، a_3، و a_4 دوبدو با هم متساویند.

۲. ثابت کنید که اگر a در گزاره‌نمای $F(x)$ صدق کند ولی b در آن صدق نکند آنگاه $a \neq b$ (به عبارت دیگر، اگر a واجد خاصیتی و b فاقد آن خاصیت باشد آنگاه $a \neq b$).

۳. معنی «تساوی» را در هر یک از این گزاره‌ها توضیح دهید:

(آ) در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، زاویه‌ی B مساوی زاویه C است.

(ب) در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، ارتفاع مرسوم از A مساوی میانه‌ی مرسوم از A است.

۴. ثابت کنید که اگر $a = b$ آنگاه $ax = bx$.

۵. چه ایرادی بر این استدلال وارد است:

«واضح است که

(۱) $2/3 = 16/24.$

(۲) مخرج $2/3$ فرد است.

حال اگر در (۲)، بجای $2/3$، مساوی آن $16/24$ را قرار دهیم، بنا بر اصل تعویضپذیری، نتیجه میشود:

مخرج $16/24$ فرد است.

بالنتیجه، 24 فرد است».

فصل ۲
آشنائی با مجموعه‌ها

0 § مقدمه

در هر مبحثی از ریاضیات، صحبت از مجموعه‌ای است از اشیاء، و خواصی از آنها، و نسبی بین آنها، و اعمالی بر آنها. از میان این مفاهیم، مفهوم مجموعه اهمیت خاصی دارد، زیرا سایر مفاهیم ریاضی را میتوان بدان وسیله تعریف کرد. پس، تئوری[1] مجموعه‌ها پایه‌ی ریاضیات است، و از جنبه‌ی منطقی، حتی میتوان گفت که ریاضیات چیزی جز تئوری مجموعه‌ها نیست. واضع این تئوری گ. کانتور* (۱۸۴۵ — ۱۹۱۸)، ریاضیدان شهیر آلمانی، است.

در فصل حاضر با الفبای زبان مجموعه‌ها آشنا میشویم. در فصل ۲ض اطلاعات مقدماتی بیشتر در باب مجموعه‌ها آمده است. فصل حاضر مشتمل بر حد اقل اطلاعات لازم در این باب برای فهم مطالب آتیه است، و باید بر مندرجات آن تسلط کامل داشت. در فصل ۳ زبان مجموعه‌ها را در تعریف بعضی از مفاهیم اساسی ریاضیات خواهیم آموخت.

۱ § مفاهیم اولیه

۱.۱. مجموعه و عضویت. در اصطلاح ریاضی، هر گروه مشخص از اشیاء دو بدو متمایز را مجموعه و هر یک از آن اشیاء را یک عضو این مجموعه نامند. مقصود از مشخص بودن گروهی از اشیاء اینست که، بازاء هر چیز، این چیز در واقع عضو آن گروه هست یا عضو آن نیست. هر مجموعه با اعضای خود مشخص است، و اموری از قبیل ترتیب اعضا و غیره خارج از مفهوم مجموعه است.

۱.۱.۱. نامگذاری و علامات. معمولاً مجموعه‌های دلخواه را با حروف بزرگ الفبای لاتینی و اعضای دلخواه مجموعه‌ها را با حروف کوچک همان الفبا مینامیم. برای بعضی مجموعه‌های خاص اسامی خاصی در سراسر کتاب بکار میبریم که باید آنها را بخاطر سپرد. از آن جمله است

N : مجموعه‌ی اعداد طبیعی	**I** : مجموعه‌ی اعداد صحیح
Q : مجموعه‌ی اعداد منطق	**R** : مجموعه‌ی اعداد حقیقی

از طرق مهم نامگذاری مجموعه‌ها نامگذاری به وسیله‌ی درج اسامی اعضای مجموعه در داخل

---

(۱) در اصطلاح ریاضیات، مجموعه‌ای از اصول و تعریفات و قضایای مربوط به یک موضوع را که بر حسب روابط منطقی آنها با یکدیگر تنظیم شده باشند یک تئوری (theory) میخوانند، مانند «تئوری اعداد» (حساب عالی) و «تئوری معادلات».

ابرو است. این طریقه را وقتی میتوان بکار بست که عده‌ی اعضای مجموعه نسبةً کم باشد. مثلاً، مجموعه‌ای را که اعضایش منحصر به 1 و 2 باشند مجموعه‌ی $\{2, 1\}$ مینامیم. در سایر موارد، هر جا ابهامی روی ندهد، میتوان نامگذاری بوسیله‌ی ابرو را با درج بعضی از اعضای مجموعه در داخل ابرو بکار برد. مثلاً، مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی را مجموعه‌ی

$$\{\text{ا، ب، پ، . . . ، ی}\}$$

مینامیم، و مجموعه‌ی اعداد طبیعی از 5 تا با[1] 1000 را مجموعه‌ی

$$\{5, 6, \cdots 1\,000\}.$$

روش نامگذاری با ابرو در مورد مجموعه‌های نامتناهی نیز، البته مشروط به اینکه بیم ابهام نرود، بکار میرود. مثلاً، مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به هر یک از اسامی ذیل نیز میتوان خواند:

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}, \qquad \{1,2, 3, \cdots\}.$$

بالاخره، بطورکلی، علامت $\{a, b, c, \cdots\}$ به عنوان نام مجموعه‌ای بکار میرود که a، b، و c از اعضای آن هستند، و ممکن است عضو یا اعضای دیگر نیز داشته باشد.

عضویت a را در مجموعه‌ی A به صورت

$$a \in A$$

مینویسیم[2]، که چنین خوانده میشود:

a عضو A است یا a به A تعلق دارد.

وقتی که a عضو A باشد گویند a به A نسبت عضویت دارد، یا آنکه A شامل a است.

گزاره‌نمای $(a \in A) \sim$ (نقیض $a \in A$) را به صورت

$$a \notin A$$

مینویسیم، که به معنی «a عضو A نیست» یا «a به A تعلق ندارد» است، و آن را بدین عبارت هم میخوانند:

a نسبت به A خارجی است.

بالاخره، برای اختصار، گزاره‌نمای

$$a \in A \,\&\, b \in A \,\&\, \cdots \,\&\, l \in A$$

را بدین صورت مینویسیم:

$$a, b, \cdots, l \in A.$$

۱.۱.۲. امثله

(آ). $1 \in \{1, 2, 3\}$، $3 \in \{1, 2, 3\}$، ولی $2 \notin \{1, 2, 3\}$. —

(ب). اگر A مجموعه‌ی شعرای فارسی زبان باشد،

حافظ $\in A$, هیتلر $\notin A$,

حافظ، سعدی، عنصری $\in A$.

---

(۱) «تا با 1000» یعنی «تا 1000 و با 1000»، و حال آنکه «تا 1000» خود 1000 را شامل نمیشود.

(۲) استعمال حرف یونانی $\in$ بدین منظور از پئانو* است.

(پ). (مجموعه‌سازی). محصلین باید بر ساختن مجموعه‌ها جهت توضیح تعریفات و احکام یا ابطال احکام تسلط یابند. نامگذاری مجموعه‌ها به وسیله‌ی ابرو طریق ساده‌ی این کار است. مثلاً $A = \{1, +\}$[1] مجموعه‌ای است که اعضایش 1 و $+$ هستند، و $B = \{1, \nmid\!\!\!+, \text{ع}\}$ مجموعه‌ای است که اعضایش 1، $\nmid\!\!\!+$، و ع میباشند. مجموعه‌ای که اعضایش $+$، A و B باشند عبارتست از $C = \{+, A, B\}$ یا

$$C = \{+, \{1, +\}, \{1, \nmid\!\!\!+, \text{ع}\}\}.$$

چنانکه دیده میشود، $A \ni 1$، $B \ni 1$، $A \in C$، $B \in C$، ولی $1 \notin C$. مجموعه‌ی C مثالی است از مجموعه‌هائی که بعضی از اعضایشان مجموعه‌اند.
ضمناً از این مثال معلوم میشود که

۱.۱.۳. قضیه. عضو عضو یک مجموعه ممکن است عضو آن مجموعه نباشد.

۱.۱.۴. تمرین

۱. این مجموعه‌ها را با اعضایشان نامگذاری کنید:
(آ) مجموعه‌ی اعداد طبیعی بیش از 1 و کمتر از 4. (ب) مجموعه‌ی حروف نقطه‌دار الفبای فارسی. (پ) مجموعه‌ی حروف نقطه‌دار الفبای لاتینی. (ت) مجموعه‌ی حروفی از الفبای فارسی که هر یک سه نقطه دارد. (ث) مجموعه‌ی اعداد اول کمتر از 20. (ج) مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های عدد 18. (چ) مجموعه‌ی اعدادی که مساوی 4 یا مساوی 5 هستند.

۲. a شیء مفروضی است. دو مجموعه مانند A و B بسازید که، در عین حال، $a \in A$، $A \in B$، و $a \in B$. آیا این مطلب با ۱.۱.۳ تعارضی دارد؟

۳. سه مجموعه مانند A، B، و C بسازید که، در عین حال، $A \notin B$، $B \notin C$، و $A \in C$.

۴. آیا صحبت کردن از مجموعه‌ی $\{1, 2, 1, 1, 2, 3\}$ با توصیف مجموعه به شرح مذکور در آغاز ۱.۱ تعارضی دارد؟

۵. اعضای هر یک از مجموعه‌های ذیل را بنویسید:

$$\{\oplus, \oplus, 1, 1\}, \qquad \{1, \oplus, 1\}, \qquad \{1, \oplus\},$$
$$\{\{1, +\}, \{1, \oplus\}\}, \qquad \{+, \{1, +\}\}, \qquad \{1, \{1, +\}\},$$
$$\{\{1, +\}, \{1, \{+, \{1, +\}\}\}\}. \qquad \{1, +, \{1, +\}\}$$

۶. دو مجموعه‌ی A و B چنانند که هر عضو A عضو B است. ثابت کنید که هر چیز که نسبت به B خارجی باشد نسبت به A هم خارجی است.
آیا از فرض مذکور میتوان نتیجه گرفت که اگر شیئی نسبت به A خارجی باشد نسبت به B هم خارجی است؟

۱.۱.۵. ملاحظاتی در مفاهیم مجموعه و عضویت. در بسیاری از کتابهای ریاضی

---

(۱) هر وقت که حرف یا علامتی، بدون سابقه، بوسیله‌ی رابطه‌ای وارد بحث میشود، همین رابطه معرف آنست. در رابطه‌ی «$A = \{1, +\}$» در متن معنی طرف دوم معلوم است، اما قبلاً اسمی از A در میان نبوده است. پس، همان رابطه A را تعریف میکند. به عبارت دیگر، رابطه‌ی مذکور بدین معنی است:

مجموعه‌ی $\{1, +\}$، که آن را A مینامیم.

این روش اختصاری در ریاضیات بسیار متداول است، و باید آن را بخاطر سپرد.

عبارتی مانند آنکه در آغاز ۱.۱ ذکر شد به عنوان «تعریف» مجموعه عرضه میشود. بعلاوه، در کتابهای مقدماتی، برای نزدیک کردن مطلب به ذهن مبتدی، مثالهائی از مجموعه‌های اشیاء مادی میآورند، که از جهاتی گمراه کننده است. منظور از توضیحات آتیه رفع این گونه مشکلات است، تا از آغاز کار تصوری نسبةً صحیح از مفهوم مجموعه در ذهن محصلین حاصل شود.

همه‌ی ما معنی لفظ مجموعه را کما بیش میفهمیم، و اگر در یک نوشته‌ی عادی، مثلاً، با عبارت

(۱) مجموعه‌ی ستارگان آسمان

مواجه شویم فکر اینکه «مجموعه» را تعریف کنیم به ذهنمان خطور نمیکند، چنانکه در مورد الفاظ «قوم» و «گله» نیز چنین است. مجموعه‌ای که به عنوان مثال ذکر شد گروهی است از اشیاء متمایز، که آنها را اعضای مجموعه مینامند. مثلاً، ماه، خورشید، قلب‌الاسد، وجَدی از اعضای مجموعه‌ی (۱) هستند، ولی هیچیک از دب اکبر، سعدی، و عدد پنج عضو آن نیست.

نظر به بداهت مفهوم مجموعه، ما در صدد تعریف کردن آن بر نمیآئیم، زیرا مفهومی واضحتر از مفهوم مجموعه سراغ نداریم تا مجموعه را بدان وسیله تعریف کنیم. منتها، برای اینکه این مفهوم تا حدی از ابهاماتی که همراه معانی الفاظ عرفی هست پیراسته شود تا بتوان مجموعه‌ها را موضوع بحث علمی قرار داد، به ایراد توضیحاتی در این باب مبادرت میکنیم.

در توضیح مربوط به مجموعه‌ی مثال (۱)، عبارت «گروهی از اشیاء متمایز» را در بیان معنی مجموعه آوردیم. اما باید دانست که در اصطلاح ریاضیات، هر گروهی از اشیاء را مجموعه نمیخوانیم، بلکه، «مجموعه» را در اصطلاح این علم چنین توصیف میکنیم: مجموعه عبارتست از گروهی از اشیاء متمایز، مشروط بر اینکه این گروه مشخص باشد؛ یعنی، بازاء هر شیء، این شیء، در واقع، یا عضو گروه مورد بحث باشد یا عضو آن نباشد، خواه در هر مورد خاص بر ما معلوم باشد که کدام یک از دو حالت تحقق دارد یا نه؛ بعبارت دیگر، این سؤال که آیا شیء مورد نظر عضو گروه مذکور هست یا نه یک جواب قاطع داشته باشد، خواه در هر مورد خاص این جواب بر ما معلوم باشد یا نه.

چنانکه ملاحظه میشود، مشخص بودن به معنی مذکور جزء توصیف مجموعه (در اصطلاح ریاضیات) است. معذلک، گاه، برای تأکید، از یک مجموعه‌ی مشخص یا از مشخص بودن یک مجموعه سخن میرود، و حال آنکه مجموعه‌ی نامشخص در حقیقت مجموعه نیست. بدیهی است که اگر اعضای گروهی از اشیاء متمایزْ معیّن باشند این گروه مشخص است، یعنی مجموعه است. این مطلب مهم را معمولاً با این عبارت بیان میکنند که هر مجموعه با اعضای خود مشخص میشود.

۱.۱.۵.۱. امثله

(آ). مجموعه‌ی اعداد بزرگ مجموعه‌ی مشخصی نیست، یعنی، از جنبه‌ی ریاضی مجموعه نیست، زیرا این سؤال که آیا 1000 عضو این مجموعه هست یا نه (یعنی، آیا 1000 عددی بزرگ است یا نه) جواب قاطع ندارد.

(ب). مجموعه‌ی اعداد منطق مجموعه‌ای است مشخص، زیرا هر عدد یا منطق است یا منطق نیست، یعنی، یا به مجموعه‌ی مذکور تعلق دارد یا بدان تعلق ندارد. مثلاً، اعداد 2 و 3/2 — بدین مجموعه تعلق دارند، و $\sqrt{2}$ بدان تعلق ندارد. در مورد عدد π، امروز شما میدانید که این عدد عضو مجموعه‌ی اعداد منطق نیست، ولی این مطلب تا قرن ۱۸م معلوم نبود، و اول‌بار لامبرت* آن را ثابت کرد. در مورد عدد $\pi^{\sqrt{2}}$، علی‌رغم کوششهای ریاضیدانهای بزرگ، هنوز هیچ کس نمیداند که این عدد منطق هست یا نه، ولی، بر طبق اصول ریاضی، این عدد یا منطق است (یعنی به مجموعه‌ی مورد بحث تعلق دارد) یا منطق نیست.

(پ). مجموعه‌ی حروف کلمه‌ی «سعید» مجموعه‌ای است که اعضایش حروف

د ی ع س

هستند، و لاغیر، و این مجموعه با اعضای خود مشخص است، زیرا، اگر a شیء دلخواهی باشد، هر گاه a یکی از حروف چهارگانه‌ی مذکور باشد بدان مجموعه تعلق دارد، و الا فلا.

۱۰۱.۵.۲. تمرین

۱. آیا جمله‌ی ذیل گزاره است؟

1 000 000 عضو مجموعه‌ی اعداد بسیار بزرگ است.

۲. از مجموعه‌های ذیل کدام یک مشخص‌اند؟

(آ) مجموعه اطفالی که موی آنها بور است. (ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح. (پ) مجموعه‌ی اعداد اول. (ت) مجموعه‌ی اعداد جالب (دارای خاصیتی جالب). (ث) مجموعه‌ی رنگهای زیبا. (ج) مجموعه‌ی اشخاص یکدست. (چ) مجموعه‌ی اعداد اصمی به صورت $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ که هزارمین رقم بسط اعشاری آنها فرد است. (ح) مجموعه‌ی مردم مهربان.

۱۰۱.۵.۳. تبصره. مجموعه‌هائی که در مباحث مختلف ریاضی می‌آیند همه مجموعه‌های مشخص‌اند، یعنی واقعاً مجموعه میباشند. در مجموعه‌هائی که پس از این در امثله و تمرینات می‌آید، ممکن است مشخص بودن مجموعه‌ای مورد اختلاف واقع شود. ما در این گونه موارد همواره مجموعه‌های موضوع بحث را مشخص فرض میکنیم. مثلاً، هر جا از مجموعه‌ی اشیاء زرد صحبت میکنیم فرض اینست که رنگ زرد رنگ مشخصی است، و اختلافی در تشخیص دادن آن نیست، و لو عملاً چنین نباشد.

۱۰۱.۵.۴. تبصره. مشخص بودن یک مجموعه با اعضایش نتیجه‌ی مهمی دارد، و آن اینکه مجموعه‌ی چند شیء از ترتیب این اشیاء (اعضای مجموعه) مستقل است. مثلاً، مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از 4 اعضایش 1، 2، و 3 هستند، و این مجموعه با این اعضا مشخص است، و هیچ امر دیگر (از جمله ترتیب اعضا) مطلقاً مداخله‌ای در مفهوم مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از 4 ندارد. محصلین باید دقیقاً در این نکته تأمل کنند، زیرا بسیار دیده شده است که مفهوم مجموعه را با نسبتهائی که احیاناً ممکن است بین اعضای مجموعه تعریف شده باشند میآلایند، و این امر منجر به مشکلات جدّی میشود. مثلاً، اغلب تصور میکنند که مجموعه‌ی اعداد طبیعی عبارتست از دسته‌ی اعداد

$$1,\quad 2,\quad 3,\cdots$$

به ترتیب فوق. این اشتباه محض است، و ناشی از خلط مفهوم مجموعه است با مجموعه‌ی مرتب (یعنی یک مجموعه به انضمام یک ترتیب). مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ای است که اعضایش اعداد طبیعی هستند، و لا غیر، و این مجموعه صرفاً با اعضای خود مشخص است، و ملحوظ داشتن ترتیب معیّن برای اعضا امری است بکلی خارج از مفهوم مجموعه‌ی اعداد طبیعی.

۱.۱.۵.۵. تبصره. در توصیف مجموعه، قیدی در باب ماهیت و تعداد اعضا نیست. این امر دست ما را در ساختن مجموعه‌ها بکلی باز میگذارد. مجموعه‌ی

{عصای موسی ,پاریس ,جدی ,5 ,سعدی}

مجموعه‌ای است که سعدی، 5، جدی، پاریس، و عصای موسی اعضای آن هستند. البته مجموعه‌هائی که در مباحث ریاضی در کار میآیند تشتت مشهود در این مجموعه را از لحاظ ماهیت اعضا ندارند؛ بعلاوه اعضای آنها موجودات ریاضی (اعداد، نقاط، خطوط، و غیره) میباشند.
یک مجموعه ممکن است متناهی[1] باشد، مانند مجموعه‌ی سابق‌الذکر؛ یا نامتناهی باشد (یعنی عده‌ی اعضایش متناهی نباشد)، مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی، مجموعه‌ی نقاط یک صفحه، و مجموعه‌ی مثلثها.
چنانکه سابقاً دیدیم، اعضای یک مجموعه ممکن است خود مجموعه باشند.

۱.۱.۵.۶. تبصره. اعضای یک مجموعه را نباید با اجزای اعضای آن خلط کرد. مجموعه‌ی ایرانیها مجموعه‌ای است که هر ایرانی، از جمله فردوسی، عضو آنست. اما گوش چپ فردوسی عضو این مجموعه نیست. همچنین، هر مثلث عضو مجموعه‌ی مثلثها است، اما اضلاع یا زوایای یک مثلث عضو این مجموعه نیستند.

۱.۱.۵.۷. تبصره. مجموعه‌ای از اشیاء را نباید با اجتماع مادی آنها یا با شیء حاصل از ترکیب یا بر روی هم ریختن این اشیاء خلط کرد. مثلاً، مجموعه‌ی محصلین دانشسرای عالی تهران در تاریخ معین اجتماع مادی محصلین مذکور نیست، بلکه، هر محصل دانشسرا عضو این مجموعه است، خواه در دانشسرا حاضر باشد، یا در مسافرت، یا در منزل خود در خواب یا در حال مطالعه باشد.

۱.۲. تساوی مجموعه‌ها. ما تساوی را در مجموعه‌ها به معنی منطقی میگیریم. به عبارت دیگر، اگر A و B دو مجموعه باشند، $A = B$ یعنی A و B اسامی یک مجموعه‌اند، و $A \neq B$ یعنی A و B متمایزند.
از اصل تعویض‌پذیری عبارات مساوی معلومست که اگر $A = B$ آنگاه هر عضو A عضو B

(۱) تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در فصل ۳ خواهد آمد.

است، و هر عضو B عضو A. بالعکس، چون هر مجموعه با اعضایش مشخص میشود، اگر A و B از حیث اعضا یکسان باشند بدیهی بنظر میآید که A و B متمایز نتوانند بود. ما این مطلب را به عنوان یک اصل کلی میپذیریم، و هر دو نکته را تحت عنوان «اصل گسترش» گرد میآوریم:

۱.۰۲.۰۱. اصل گسترش. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعههای A و B باهم مساوی باشند آنست که هر عضو A عضو B و هر عضو B عضو A باشد.
مثلاً، بنا بر این اصل، مجموعههای

$$\{1, 2, 0\}, \qquad \{0, 1, 2\}, \qquad \{2, 0, 0, 1, 2\}$$

دو بدو باهم متساویند. چنانکه دیده میشود، اصل گسترش دو نکتهی مهم سابقالذکر را در باب مفهوم مجموعه در بر دارد: یکی مستقل بودن مفهوم مجموعهای از اشیاء از ترتیب آنها، و دیگری متمایز بودن اعضای یک مجموعه دو بدو. ضمناً از اصل گسترش معلوم است که

۱.۰۲.۰۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه $A \neq B$ آنست که حد اقل یکی از A و B عضوی غیر متعلق به دیگری داشته باشد. (به برهان خلف ثابت کنید.)
مثلاً $\{1, 3\} \neq \{1, 2, 3\}$ و $\{0, 2\} \neq \{2, 4\}$.

۱.۰۲.۰۳. تمرین
۱. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه دو مجموعه باهم مساوی باشند آنست که هر چیز که نسبت به هر یک از آنها خارجی است نسبت به دیگری هم خارجی باشد.

۱.۰۳. تعمیم مفهوم مجموعه. مفهوم عادی «مجموعه» متضمن دارا بودن بیش از یک عضو است. از این لحاظ، عبارات «مجموعهی اعداد اول زوج» و «مجموعهی سلاطین فرانسه در قرن بیستم» بیمعنی است؛ زیرا، اولاً، جز ۲، عدد اول زوجی وجود ندارد، و ثانیاً، فرانسه در قرن بیستم سلطان نداشته است. معذلک، برای تعمیم، مجموعهی دارای یک عضو و مجموعهی خالی (از عضو) را در جرگهی مجموعهها میپذیریم، و آنها را تابع اصل گسترش قرار میدهیم. مجموعهای را که یگانه عضوش a باشد مجموعهی یکانی a یا مُنفَردهی a خوانیم، و بر طبق قرارداد نامگذاری با ابرو، به $\{a\}$ نمایش میدهیم.

در باب مجموعهی خالی، باید دانست که بیش از یک مجموعهی خالی وجود ندارد (زیرا، فرض کنیم A و B خالی باشند. اگر $A \neq B$ آنگاه، بنا بر ۱.۰۲.۰۲، لازم میآید که یکی از A و B عضوی داشته باشد) . مجموعهی خالی را

$$\varnothing$$

میخوانیم[۱]. پس، گزارهنمای $x \in \varnothing$ بازاء هر مقدار x دروغ است. مثلاً، مجموعهی سلاطین

(۱) بعضی از علمای منطق، مجموعهی خالی را به حرف یونانی Λ نمایش میدهند، که یادآور کاسهای وارون، و لهذا، خالی است؛ در مقابل حرف V برای مجموعهی عمومی (۱.۰۶).

فرانسه در قرن بیستم، و نیز مجموعه‌ی مماسهای مرسوم بر یک دایره از مرکز آن، هر یک مساوی $\varnothing$ است. مجموعه‌ی اعداد اول زوج مجموعه‌ی $\{2\}$ است.

۱.۳.۱. تبصره. بنا بر اصل گسترش و تعریف مجموعه‌ی یکانی،

$$\{a\} = \{b\} \;\underline{\Omega}\; a = b.$$

۱.۳.۲. تبصره. منفرده‌ی $\varnothing$ مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ است که، بر خلاف $\varnothing$، یک عضو دارد. پس، $\{\varnothing\} \neq \varnothing$. ما، بطور کلی، یک شیء را غیر از منفرده‌ی آن میشماریم.

۱.۳.۳ تمرین

۱. پنج مثال ریاضی از مجموعه‌ی خالی و پنج مثال ریاضی از مجموعه‌ی یکانی بیاورید (بعضی مثالها از جبر و برخی از هندسه باشد).

۲. اعضای هر یک از این مجموعه‌ها را بنویسید:

$$\{1\},\quad \{1, 2\},\quad \{\{1\}\},\quad \{\{1\}, 2\},\quad \{1, \{1\}\},\quad \{1, \{1\}, 2\},$$
$$\{1, \{1, 2\}\},\quad \{1, \{\{1\}\}\},\quad \{\{\{1, \{1, 2\}\}\}\}.$$

۳. این مجموعه‌ها را به صورتی ساده‌تر بنویسید:

$$\{a, a, a\},\qquad \{\{a\}, \{a, a\}\},\qquad \{\{a, a, a,\}\ a\}.$$

۴. ثابت کنید که مجموعه‌های ذیل دوبدو متمایزند:

$$\varnothing,\qquad \{\varnothing\},\qquad \{\{\varnothing\}\},\qquad \{\{\{\varnothing\}\}\}.$$

۵. مجموعه‌ای دارای پنج عضو بسازید که، از هر دو عضو آن، یکی عضو دیگری باشد.

۱.۴. جزئیت. اگر هر عضو مجموعه‌ی A عضو مجموعه‌ی B باشد گوئیم A جزء B یا مجموعک B است، یا B حاوی A است؛ و اگر، در این حال، B عضوی غیر متعلق به A داشته باشد، گوئیم A جزء حقیقی B یا مجموعک حقیقی B است. گزاره‌نمای «A مجموعک B است» را به صورت $A \subseteq B$، و گزاره‌نمای «A مجموعک حقیقی B است» را به صورت $A \subset B$ مینویسیم[۱]. خلاصه،

۱.۴.۱. تعریفات

I. $A \subseteq B$ یعنی هر عضو A عضو B است؛ و به عبارت دیگر،
بازاء هر x، اگر $x \in A$ آنگاه $x \in B$.

II. $A \subset B$ یعنی هر عضو A عضو B است، ولی B عضوی غیر متعلق به A دارد.

بنا بر تعریف I،

---

(۱) بعضی از ریاضیدانها گزاره‌نمای «A مجموعک B است» را به صورت $A \subset B$ مینویسند، و بدین جهت، در مورد مجموعک حقیقی به زحمت می‌افتند. استعمال علامات $\subseteq$ و $\subset$ به معانی مذکور در متن ارجح است (با $\leqslant$ و $>$ در جبر مقایسه کنید).
گزاره‌نمای «B حاوی A است» را بعضی به صورت $B \supset A$ مینویسند. ما این رسم‌الخط را بکار نمیبریم.

۱.۴.۲. قضیه. $\sim (A \subseteq B)$ معادل است با اینکه A عضوی غیر متعلق به B دارد. (چرا؟)

مثلاً، $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$، $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$، و $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$.
همچنین، مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعک (حقیقی) مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، و مجموعه‌ی ایرانیان شیرازی مجموعک (حقیقی) مجموعه‌ی ایرانیان. بالاخره،

$$\sim (\{1\} \subseteq \{0, 2\}), \qquad \sim (\{1, 2\} \subseteq \{1, 3\}),$$

از تعریف جزئیت و اصل گسترش معلومست که

۱.۴.۳. قضیه. اگر دو مجموعه با هم مساوی باشند هر یک از آنها مجموعک دیگری است. بالعکس، دو مجموعه که هر یک از آنها مجموعک دیگری باشد با هم متساویند.
این قضیه در اثبات تساوی مجموعه‌ها بسیار بکار می‌آید.

۱.۴.۴. قضیه. همواره $\varnothing \subseteq A$. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی خالی مجموعک هر مجموعه است.
برهان. x هر چه باشد، ترکیب شرطی «اگر $x \in \varnothing$ آنگاه $x \in A$»، بسبب دروغ بودن مقدم آن، راست است. پس، حکم به انتفاء مقدم بر قرار است (۱ : ۴.۱.۴). ▲
قضیه را به برهان خلف نیز میتوان ثابت کرد. فرض کنیم $\sim (\varnothing \subseteq A)$ (فرض خلف). از اینجا بنا بر ۱.۴.۲ لازم میآید که $\varnothing$ عضوی داشته باشد، و این با تعریف $\varnothing$ متناقض است. ▲

۱.۴.۵. قضیه. همواره $A \subseteq A$ (چرا؟).

۱.۴.۶. قضیه. همواره

I. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.
II. اگر $A \subseteq B$ و $B \subset C$ آنگاه $A \subset C$.
III. اگر $A \subset B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subset C$.
IV. اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ آنگاه $A \subset C$.

برهان. جملگی این احکام نتایج مستقیم تعریفات هستند. به عنوان مثال I را ثابت میکنیم. فرض کنیم $A \subseteq B$ (۱) و $B \subseteq C$ (۲). باید ثابت کرد که هر چیز که عضو A باشد عضو C است. پس، فرض کنیم x عضو دلخواهی از A باشد ($x \in A$). به موجب (۱) خواهیم داشت، $x \in B$. پس، به موجب (۲)، $x \in C$. ▲

۱.۴.۷. تعریفات. با توجه به ۱.۴.۶ و به قیاس آنچه در ۵.۳.۶ : ۱ در باب تساوی گفته شد، تعریفات ذیل را میآوریم:

$A \subseteq B \subseteq C$	یعنی	$A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C$
$A \subseteq B \subset C$	یعنی	$A \subseteq B \;\&\; B \subset C$

$A \subset B \subset C$	یعنی	$A \subset B \,\&\, B \subset C$
$A \subseteq B = C$	یعنی	$A \subseteq B \,\&\, B = C$
$A = B \subseteq C$	یعنی	$A = B \,\&\, B \subseteq C$
$A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$	یعنی	$A \subseteq B \,\&\, B \subseteq C \,\&\, C \subseteq D$

و غیره.

۱.۴.۸. تبصره. اگر $A \in B$ گویند A به B نسبت عضویت دارد، و اگر $A \subseteq B$ گویند A به B نسبت جزئیت دارد (در این صورت گویند B به A نسبت احتوا دارد). بین نسبتهای عضویت و جزئیت باید به دقت تمیز گذاشت، و روابط $A \in B$ و $A \subseteq B$ را نباید با هم خلط کرد. در ۱.۱.۳ دیدیم که عضو عضو یک مجموعه ممکن است عضو این مجموعه نباشد. اما، به موجب I : ۱.۴.۶، همواره جزء جزء یک مجموعه جزء آن مجموعه است.

۱.۴.۹ تمرین

۱. در هر یک از مسائل آتیه (آ ـ چ)، تعیین کنید که از مجموعه‌های A و B کدام یک مجموعک دیگری و کدام یک مجموعک حقیقی دیگری است. در هر مجموعه، علامات متمایز داخل ابروها اسامی اشیاء متمایز فرض میشوند.

(آ)	$A = \{1, *, 7\}$,	$B = \{*, 10, 1, 7\}$.
(ب)	$A = \{\omega, 5, a, 6\}$,	$B = \{a\}$.
(پ)	$A = \{1, 2, a, b\}$,	$B = \{a, 1, b, 2\}$.
(ت)	$A = \{*, \Lambda, a\}$,	$B = \{\Lambda, \omega, a\}$.
(ث)	$A = \{1, \{1\}\}$,	$B = \{\{1, 1\}, 1\}$.
(ج)	$A = \{\{1\}\}$,	$B = \{1\}$.
(چ)	$A = \{*, \square, \{*, \square\}\}$,	$B = \{\square, \{*, \square\}\}$.

۲. A_1، A_2، A_3، A_4، و A_5، بترتیب، مجموعه‌ی حروف کلمات «سعید»، «سعدی»، «عدس»، «عدسی»، و «سعد» است. هر یک از روابط $=$، $\neq$، $\subseteq$، و $\subset$ را که بین این مجموعه‌ها دو بدو برقرار است بنویسید.

۳. پنج مجموعه مانند A، B، C، D، و E بسازید که در عین حال
$$A \subseteq B, \qquad B \in C, \qquad C \subseteq D, \qquad D \subseteq E.$$

۴. هر یک از احکام ذیل را با ساختن مجموعه‌های مناسب باطل کنید:

(آ) همواره اگر $x \in B$ و $\sim(C \subseteq B)$ آنگاه $x \notin C$.

(ب) همواره اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ آنگاه $A \in C$.

(پ) همواره اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ آنگاه $A \notin C$.

۵. اگر $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq E \subseteq A$ آنگاه $A = B = C = D = E$، و بالعکس.

۶. مجموعه‌ای دارای چهار عضو بسازید که هر عضو آن جزء آن نیز باشد.

۷. شرط لازم و کافی برای آنکه $A \subset B$ آنست که $A \subseteq B \,\&\, A \neq B$.

۸. مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه $\{a\} \subseteq A$.

۹. ثابت کنید که

(آ) هیچ مجموعه جزء حقیقی خود نیست.

(ب) هر مجموعه که جزء مجموعهٔ خالی باشد خالی است.
(پ) مجموعهٔ خالی جزء حقیقی ندارد.

۱.۵. مجموعهٔ مجموعکان. یکی از روشهای تئوری مجموعه‌ها ساختن مجموعه‌های جدید از مجموعه‌های مفروض میباشد. مجموعهٔ جمیع مجموعکهای یک مجموعه از این جمله است:

۱.۵.۱. تعریف. مجموعهٔ جمیع مجموعکهای A را $\mathcal{P}(A)$ یا مجموعهٔ مجموعکان A مینامیم.
مثلاً، فرض کنیم a، b، و c دو بدو متمایز باشند، و $A = \{a, b, c\}$. چنانکه میدانیم (۱.۴.۴ و ۱.۴.۵)، $\varnothing$ و A از مجموعکان A هستند. سایر مجموعکان A عبارتند از

$$\{a}, \quad \{b\}, \quad \{c\}, \quad \{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}.$$

مجموعهٔ جمیع این مجموعکها عبارتست از

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

بطور کلی، بنا بر احکامی که بدانها اشاره شد،

۱.۵.۲. قضیه. A هر مجموعه‌ای باشد،

$$A \in \mathcal{P}(A). \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A). \qquad \mathcal{P}(A) \neq \varnothing.$$

۱.۵.۳. تمرین

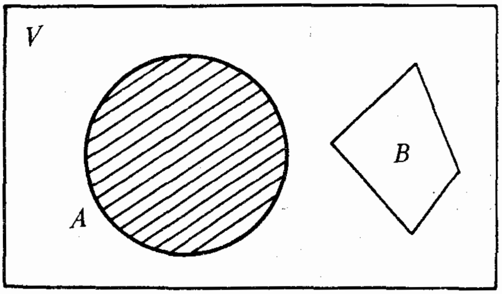
۱. مجموعهٔ مجموعکان هر یک از این مجموعه‌ها را بنویسید:

$$\{1\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1, 2, 3\}, \quad \{1, \{1\}\}, \quad \varnothing, \quad \{\varnothing\},$$
$$\{\varnothing, \{1, \{1\}\}\}, \quad \{\varnothing, \{1, \varnothing\}, \{\varnothing, \{1, \varnothing\}\}\}.$$

۱.۶. مجموعهٔ عمومی. در اصطلاح تئوری مجموعه‌ها، مجموعهٔ عمومی یعنی مجموعهٔ جمیع اشیاء. پس، هر چیز عضو مجموعهٔ عمومی است، و هر مجموعه مجموعک مجموعهٔ عمومی. مفهوم مجموعهٔ عمومی بدین پهناوری متضمن مشکلات جدّی است، که ذکر آنها در این مختصر نمیگنجد. بعلاوه، در ریاضیات و در سایر مباحث علمی، جز در خود تئوری مجموعه‌ها، با مجموعهٔ جمیع اشیاء مواجه نمیشویم، بلکه، در هر تئوری دیگر، عالم سخن تئوری ــ یعنی اشیاء اولیهٔ مورد بحث آن ــ مجموعهٔ عمومی آن تئوری است. مثلاً، در جبر مقدماتی، اشیاء اولیهٔ مورد بحث اعداد حقیقی هستند؛ مجموعهٔ اعداد حقیقی عالم سخن (۱ : ۳.۱) یا مجموعهٔ عمومی جبر مقدماتی است، و در این علم، از خواص و نسب اعضای این مجموعه (اعداد حقیقی) و مجموعکهای آن (مانند مجموعهٔ اعداد طبیعی) بحث میشود. همچنین، در هندسهٔ تحلیلی مسطحه، اشیاء اولیهٔ موضوع بحث نقاط صفحهٔ دو محور مختصات میباشند، که مجموعهٔ آنها عالم سخن یا مجموعهٔ عمومی این علم است، و در این

علم، از خواص و نسب این نقاط و مجموعه‌هائی از آنها (منحنیات و غیره) بحث میشود. مجموعه عمومی معمولاً با حرف V نامیده میشود[1].

۱.۶.۱. تصویر ون* یا تصویر اویلر*. برای تسهیل فهم تعریفات و قوانین حساب مجموعه‌ها، و حل بعضی از مسائل این مبحث، نمایش هندسی ساده‌ای موسوم به تصویر ون یا تصویر اویلر بکار میرود. مجموعه‌ی عمومی را با نقاط ناحیه‌ای از صفحه، مثلاً به شکل مستطیل، و هرعضو آن را با نقطه‌ای از این ناحیه نمایش میدهند، و مجموعه‌های مورد بحث را



شکل ۶

با نواحیی جزء مجموعه‌ی عمومی. نواحی نمایش مجموعه‌های مختلف را میتوان مثلاً با پردازهای متفاوت مشخص کرد. در مواردی که مجموعه‌ی عمومی مداخله‌ای در بحث ندارد، از رسم آن احتراز میکنند. در رسم تصویر ون، شکل و اندازه‌ی نواحیی که برای نمایش دادن مجموعه‌های مورد بحث بکار میروند بلاتأثیر است، اما این نواحی باید با اوضاع مورد بحث مطابقت داشته باشند. مثلاً، اگر $A \subseteq B$، ناحیه‌ی نمایش A نباید از ناحیه‌ی نمایش B تجاوز کند. بالاخره، باید دانست که تصویر ون جایگزین برهان نیست.

۱.۶.۲. تمرین

۱. جمیع حالت ممکنه‌ی دو مجموعه‌ی غیر خالی A و B را از لحاظ جزئیت یکی در دیگری به وسیله‌ی تصویر ون نمایش دهید.

۲. احکام قضیه‌ی ۱.۴.۶ و مسئله‌ی ۱.۴.۹:۴ را به وسیله‌ی تصویر ون توضیح دهید.

۲ § مجموعه‌ها و خواص

۲.۱. مقدمه. چون هرمجموعه با اعضایش مشخص میشود، ساده‌ترین طریقی که برای مشخص کردن یک مجموعه بنظر میرسد نام بردن یک یک اعضای آن است. مجموعه‌ی شاگردان یک مدرسه و مجموعه‌ی کتابهای یک کتابخانه را بدین طریق مشخص میسازند. بکار بستن این طریقه در مورد مجموعه‌های نامتناهی (مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی) غیرممکن است، و

---

(۱) ذیل صفحه‌ی ۵۱ ملاحظه شود.

در مورد مجموعه‌های متناهی‌هم، اگر عده‌ی اعضا نسبةً زیاد باشد (مانند مجموعه‌ی ایرانیان، و مجموعه‌ی اعداد طبیعی از 1 تا $10\,000$)، عملاً غیر مقدور است.

طریق دیگر در مشخص کردن مجموعه‌ها توسل به خواص است، که از قدیم‌الایام در هندسه‌ی مقدماتی در تعریف مکانهای هندسی بکار میرفته است: یک مکان هندسی چیزی نیست جز مجموعه‌ای از نقاط که با خاصیتی مشخص میشود. بطور کلی، بین مجموعه‌ها و خواص (یا صفات) بستگی نزدیکی وجود دارد. اولاً، هرمجموعه معرف خاصیتی است که مختص اعضای آن مجموعه است، یعنی، هر عضو آن مجموعه واجد این خاصیت است، و هرشیء که واجد این خاصیت باشد عضو آن مجموعه است. مثلاً، از مجموعه‌های

مجموعه‌ی موالید سال ۱۳۳۵ هش، مجموعه‌ی اعداد فرد،

اولی معرف خاصیت مولود سال ۱۳۳۵ هش بودن است، و دومی معرف خاصیت عدد فرد بودن. ثانیاً، بدیهی بنظر میآید که هر خاصیت مجموعه‌ای را مشخص میکند؛ مثلاً، خاصیت زرد بودن مجموعه‌ی اشیاء زرد را مشخص میکند، و خاصیت ریاضیدان کچل بودن مجموعه‌ی ریاضیدانهای کچل را. ما این مطلب را، بطور کلی، به عنوان «اصل شهودی تجرید» میپذیریم:

۲.۲. اصل شهودی تَجْرید. هر خاصیت مجموعه‌ای را مشخص میکند، که هر یک از اعضای آن واجد این خاصیت است، و هر شیء که واجد این خاصیت باشد بدان مجموعه تعلق دارد.

در نامگذاری مجموعه‌هائی که با خواص مشخص میشوند رسم‌الخطی در ریاضیات متداول است که باید کاملاً بر آن تسلط یافت. بنا بر اصل تجرید، خاصیت مفروض F مجموعه‌ی چیزهای واجد خاصیت F را مشخص میسازد. این مجموعه را میتوان چنین نامید:

(۱) مجموعه‌ی x هائی[1] که x خاصیت F دارد.

بالاخره، چنانکه میدانیم، «x خاصیت F دارد» یعنی x در گزاره‌نمای $F(x)$ صدق میکند. پس، (۱) مترادف است با

(۲) مجموعه‌ی x هائی که x در $F(x)$ صدق میکند

یا مختصراً

(۳) مجموعه‌ی x هائی که $F(x)$.

عبارت (۱)، (۲)، و (۳) را به صورت

$$\{x \mid F(x)\} \qquad (۴)$$

مینویسید، و آن اسم مجموعه‌ی چیزهای واجد خاصیت F است.

برای نامگذاری مجموعه‌ی چیزهای واجد خاصیت F، ابتدا این خاصیت را با یک گزاره‌نما بیان میکنیم، و سپس مجموعه را به صورت (۴) مینویسیم، چنانکه از امثله‌ی متعدد آتیه معلوم خواهد شد.

---

(۱) به استعمال متغیر فردی x و اسم مبهم «چیز» بجای یکدیگر توجه کنید.

۲.۲.۱. تبصره. بالعکس، گزاره یا گزاره‌نمائی را که مبین خاصیتی است میتوان با عضویت در مجموعه‌ی اشیاء واجد آن خاصیت بیان کرد. مثلاً، گزاره‌ی «حسن ایرانی است» یعنی «حسن عضو مجموعه‌ی ایرانیان است»؛ و گزاره‌نمای «m عدد صحیح است» یعنی «m عضو مجموعه‌ی اعداد صحیح است»، یا $m \in \mathbf{I}$. این طریق بیان در ریاضیات بسیار استعمال میشود. مثلاً، اغلب بجای اینکه بگوئیم «فرض کنیم m عددی صحیح باشد»، میگوئیم «فرض کنیم $m \in \mathbf{I}$».

۲.۲.۲. امثله

(آ). مجموعه‌ی اشیاء زرد را میتوان چنین تعریف کرد:

مجموعه‌ی xهائی که x زرد است،

یا $\{x \mid$ زرد است $x\}$.

(ب). «خواص مرکب» را میتوان به خواص بسیط تحلیل کرد. مثلاً، مجموعه‌ی اشیاء زرد مدوّر با خاصیت «زرد بودن و مدور بودن» مشخص میشود، و اگر خواص زرد بودن و مدور بودن را بترتیب F و G بنامیم، مجموعه‌ی مذکور را میتوان چنین تعریف کرد:

مجموعه‌ی z هائی که $F(z)$ و $G(z)$،

یا $\{z \mid F(z) \,\&\, G(z)\}$.

(پ). اگر A مجموعه‌ی اعداد صحیح بزرگتر از 2 باشد A را میتوان چنین تعریف کرد:

مجموعه‌ی xهائی که x عدد صحیح است و $x > 2$،

یا $\{x \mid$ (x عدد صحیح است) $\& \; x > 2\}$، یا $\{x \mid x \in \mathbf{I} \,\&\, x > 2\}$.

۲.۲.۳. تمرین

۱. این مجموعه‌ها را بوسیله‌ی خواص نامگذاری کنید:

(آ) مجموعه‌ی سنگهای گرانبها. (ب) مجموعه‌ی سنگهای گرانبهای سبزرنگ. (پ) مجموعه‌ی اعداد اول کوچکتر از 1 000. (ت) مجموعه‌ی جنهای دم‌سیاه سبزچشم. (ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی پنج رقمی. (ج) مجموعه‌ی اعداد صحیحی که مکعب هر یک بیش از 8 — و کمتر از 11 است.

۲. هر یک از مجموعه‌های ذیل را به زبان فارسی تعریف و با اعضایش مشخص کنید:

(آ) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \,\&\, 2 < n < 5\}$; (ب) $\{n \mid n \in \mathbf{I} \,\&\, 2 < n < 5\}$;

(پ) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \,\&\, n^2 = 9\}$; (ت) $\{n \mid n \in \mathbf{I} \,\&\, n^2 = 9\}$;

(ث) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \,\&\, -3 < n \leqslant 2\}$; (ج) $\{n \mid n \in \mathbf{I} \,\&\, -3 < n \leqslant 2\}$;

(چ) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \,\&\, n^2 = 0\}$; (ح) $\{n \mid n \in \mathbf{I} \,\&\, n^2 = 0\}$.

۲.۳. متغیرهای فردی مقید. در مثال پ: ۲.۲.۲، قید «x عدد صحیح است» جزء خاصیت تعریف‌کننده‌ی مجموعه‌ی A است، و آن را نمیتوان اسقاط کرد. مجموعه‌ی $\{x \mid x > 2\}$ مجموعه‌ی اشیاء بزرگتر از 2 است، و مثلاً $\sqrt{7}$ بدان تعلق دارد، و حال آنکه $\sqrt{7} \notin A$. اینک فرض کنید موضوع بحث ما اعداد صحیح باشد. در تعریف هر مجموعه‌ای از اعداد صحیح، به جهتی که گفته شد، باید گزاره‌نمای «x عدد صحیح است» را تکرار کرد. نتیجه‌ی نامطلوب بدیهی این کار طول کلام است. اما، اگر، بر طبق قرارداد، متغیرهای فردی

یا بعضی از آنها را، مثلاً m و n، به نامیدن اعداد صحیح دلخواه مقید سازیم، یعنی راستهی این متغیرها (۳.۴ : ۱) را مجموعهی اعداد صحیح قرار دهیم، A را میتوان به صورت

مجموعهی m هائی که $m > 2$

یا $\{m \mid m > 2\}$ بیان کرد، زیرا، بر طبق قرارداد مذکور، قید «m عدد صحیح است» در هر دو عبارت مستتر میباشد.

استعمال متغیرهای فردی مقید، یعنی متغیرهائی که راستهی آنها محدود به مجموعهی معینی است، در ریاضیات بسیار رایج است. مثلاً، در مبحث اعداد حقیقی، میتوان حروف کوچک الفبای لاتینی را به نامیدن اعداد حقیقی دلخواه، و از آن جمله، حروف m، n، p، و q را به نامیدن اعداد صحیح دلخواه مقید ساخت، تا هر جا مثلاً متغیر m درکار آید، بدون اینکه حاجت به گفتن باشد، دانسته شود که عددی صحیح مراد است.

۲.۳.۱. امثله و فواید مختلفه

(آ). در هندسه، معمولاً حروف بزرگ الفبای لاتینی را، به عنوان متغیرهای فردی، برای نامیدن نقاط دلخواه بکار میبرند. در این مسئله، حرف M بدین معنی بکار میرود.
هر مکان هندسی مجموعهای است از نقاط که با خاصیتی مشخص میشود. مثلاً، کرهای به مرکز O و شعاع r را میتوان چنین تعریف کرد:

مجموعهی نقاطی که فاصلهی هر یک از O مساوی r است

یا

مجموعهی Mهائی که $OM = r$

یا بالاخره، $\{M \mid OM = r\}$، و این تعریف کرهی مذکور است.

(ب). اگر F خاصیتی باشد، $\{x \mid F(x)\}$ اسم شیءِ مشخصی است (مجموعهی اشیاءِ واجد خاصیت F)، و معنی آن از متغیر فردی x مستقل است. پس، بر طبق اصطلاح مذکور در ۱:۳.۸، موارد x در $\{x \mid F(x)\}$ پابند هستند. عبارت $\{y \mid F(y)\}$ نیز بهِ معنی مجموعهی اشیاءِ واجد خاصیت F است.

(پ). از تعریف $\{x \mid F(x)\}$ معلومست که، بازاءِ هر شیء مانند a،

$$a \in \{x \mid F(x)\} \;\underline{\Omega}\; F(a).$$

(ت). اگر گزارهنمای $F(x)$ همواره دروغ باشد، هیچ چیز واجد خاصیت F نخواهد بود، و لهذا، $\varnothing = \{x \mid F(x)\}$. مثلاً، اگر متغیرهای فردی مقید به $\mathbf{R}$ باشند، $\{x \mid x^2 + 1 < 0\} = \varnothing$. بر خلاف، $\{x \mid x^2 + 1 > 0\} = \mathbf{R}$.

(ث). اگر گزارهنمای $F(x)$ مستلزم گزارهنمای $G(x)$ باشد، و به عبارت دیگر، اگر هر چیز که خاصیت F دارد خاصیت G هم داشته باشد، آنگاه

$$\{x \mid F(x)\} \subseteq \{x \mid G(x)\}.$$

مثلاً، هر عدد حقیقی کوچکتر از 1 کوچکتر از 2 نیز هست. پس،

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \;\&\; x < 1\} \subseteq \{x \mid x \in \mathbf{R} \;\&\; x < 2\}$$

یا، با استعمال متغیرهای مقید به $\mathbf{R}$،

$$\{x \mid x < 1\} \subseteq \{x \mid x < 2\}.$$

(ج). اگر گزارهنماهای $F(x)$ و $G(x)$ معادل یکدیگر باشند، هر عضو $\{x \mid F(x)\}$ (یعنی، هر شیءِ واجد خاصیت F) عضو $\{x \mid G(x)\}$ است، و بالعکس. پس،

$$\{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\}$$

(چ). اگر A مجموعه‌ای باشد، $\mathcal{P}(A)$ (۱.۵.۱) با خاصیت جزء A بودن تعریف میشود به عبارت دیگر، $\mathcal{P}(A)$ مجموعه‌ی اشیائی است مانند X که در گزاره‌نمای $X \subseteq A$ صدق کند. پس، $\mathcal{P}(A)$ را میتوان تعریف کرد:

$\mathcal{P}(A)$ یعنی $\{X \mid X \subseteq A\}$.

از اینجا، با توجه به مثال (ـ)، نتیجه‌ی بدیهی ذیل حاصل میشود، که اساس اثبات خواص مجموعه مجموعکان است:

$$X \in \mathcal{P}(A) \;\text{I}\!\!\!\text{I}\; X \subseteq A.$$

(ح). مجموعه‌هائی را که با اعضایشان تعریف شده‌اند میتوان به وسیله‌ی خواص تعریف کرد. به عنوان مثال، مجموعه‌ی $\{a\}$ را اختیار میکنیم. هر چیز که عضو این مجموعه باشد مساوی a است، و بالعکس، هر چیز که مساوی a باشد به این مجموعه تعلق دارد. پس مجموعه‌ی $\{a\}$ را میتوان با خاصیت «مساوی a بودن» تعریف کرد، بدین گونه:

$$\{a\} = \{x \mid x = a\}.$$

همچنین، مجموعه‌ی $\{a, b\}$ را میتوان با خاصیت «مساوی a یا مساوی b بودن» تعریف کرد، بدین گونه:

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}.$$

۲.۴. مجموعه‌ی صدق (یا مجموعه‌ی جوابهای) یک گزاره‌نما. فرض کنیم A مجموعه‌ای (مثلاً عالم سخن) و $F(x)$ یک گزاره‌نما باشد. بنا بر آنچه گذشت، مجموعه‌ی $\{x \mid x \in A \;\&\; F(x)\}$ مجموعه‌ی اشیائی است مانند x که در $x \in A$ و $F(x)$ صدق میکنند، یعنی عضو A هستند و، در عین حال، خاصیت F دارند. این مجموعه را مجموعه‌ی صدق $F(x)$ در A یا، به اصطلاح جبری، مجموعه‌ی جوابهای $F(x)$ در A نامند، و اگر متغیرهای فردی را به A مقید سازیم، میتوان آن را به صورت $\{x \mid F(x)\}$ نوشت. مثلاً، مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $2x^2 - 5x + 2 = 0$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح و در مجموعه‌ی اعداد منطق، به ترتیب، عبارتست از

$$\{x \mid (x \text{ عدد صحیح است}) \;\&\; (2x^2 - 5x + 2 = 0)\},$$
$$\{x \mid (x \text{ عدد منطق است}) \;\&\; (2x^2 - 5x + 2 = 0)\}.$$

مجموعه‌ی اول مساوی $\{2\}$ و مجموعه‌ی دوم مساوی $\{2, 1/2\}$ میباشد.

واضحست که اگر هیچ عضو A در $F(x)$ صدق نکند مجموعه‌ی صدق $F(x)$ در A خالی است، و اگر هر عضو A در $F(x)$ صدق کند مجموعه‌ی صدق $F(x)$ در A مساوی A است.

۲.۴.۱. تبصره. گاه با عباراتی به صورت

$$\{x \mid x \in A \;\&\; P\} \qquad (۱)$$

مواجه میشویم که در آن، P گزاره یا گزاره‌نمائی خالی از موارد آزاد x است، و لهذا، خبری از x نمیدهد، و بالنتیجه، x را تابع شرطی نمیسازد؛ مانند

$$(۲)\quad \{x \mid x \in A \;\&\; 1 = 1\}, \qquad (۳)\quad \{x \mid x \in A \;\&\; 1 \neq 1\}.$$

این گونه عبارات مستقیماً در زمره‌ی عبارتی مانند $\{x \mid x \in A \;\&\; F(x)\}$ که تا کنون مورد بحث بود در نمیآیند. با توجه به اینکه، بر طبق خواص تساوی منطقی، گزاره نمای $x = x$

بازاء هر مقدار x راست است، دیده میشود که P با $P \mathbin{\&} x = x$ معادل است. بدین جهت، (۱) را به معنی

$$\{x \mid x \in A \mathbin{\&} (P \mathbin{\&} x = x)\}$$

میگیریم. بدین گونه (۲) به معنی $\{x \mid x \in A \mathbin{\&} (1 = 1 \mathbin{\&} x = x)\}$ خواهد بود، که (چون $1 = 1 \mathbin{\&} x = x$ همواره راست است) مساوی A میباشد. به همین قیاس، (۳) مساوی $\varnothing$ است.

۲.۵. تمرین

۱. مجموعه‌های مسئله‌ی ۲.۲.۳:۲ را، با استعمال متغیرهای مقید، به صورتی ساده‌تر بنویسید.

۲. بنا بر آنکه

$$V_1 = \{1, 2, 3, \ldots 8\},$$
$$V_2 = \{-3, -2, \ldots, 8\},$$

مجموعه‌ی صدق هر یک از گزاره‌نماهای ذیل را یک بار در V_1 و بار دیگر در V_2 نامگذاری و سپس با اعضایش مشخص کنید:

(آ) $x + 3 < 7.$ (ب) $x + 3 > 6.$
(پ) $x + 3 = 1.$ (ت) $x > 5.$
(ث) $x + 2 < 6.$ (ج) $x - 4 > 8.$
(چ) $x^2 - 1 < 0.$ (ح) $x^2 - 1 \leqslant 0.$
(خ) $x + 1 = 1 + x.$ (د) $x + 1 \neq x + 1.$

۳. مجموعه‌ی عمومی مجموعه‌ی جمیع مثلثها است، و F و G بترتیب خواص متساوی‌الزوایا بودن و متساوی‌الاضلاع بودن. ثابت کنید که

$$\{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\}.$$

۴. $F(x)$ به معنی $x < 5$ است و $G(x)$ به معنی $(x + 1)^2 \leqslant 29$. آیا خواص F و G در اعداد حقیقی با هم معادلند؟ در اعداد طبیعی چطور؟ نتایج حاصل را به وسیله‌ی تساوی یا عدم تساوی مجموعه‌ها نمایش دهید.

۲.۶. تعمیم نامگذاری با خواص. روش نامگذاری با خواص را میتوان تعمیم داد. به عنوان مثال، فرض کنیم F صفت شاعر فارسی‌زبان بودن، و $ع(x)$ اسمنمای «پدر x» باشد. مجموعه‌ی مقادیر $ع(x)$ بازاء جمیع مقادیری از x که در $F(x)$ صدق کنند مجموعه‌ی پدران جمیع شعرای فارسی‌زبان میباشد. این مجموعه را $\{x \text{ پدر} \mid F(x)\}$ یا $\{ع(x) \mid F(x)\}$ مینامیم. بطور کلی، اگر $ع(x)$ اسمنمائی مربوط به متغیر فردی x باشد،

$$\{ع(x) \mid F(x)\}$$

یعنی مجموعه‌ی مقادیر $ع(x)$ [یا «مجموعه‌ی اشیائی به صورت $ع(x)$»] بازاء جمیع مقادیری از x که در $F(x)$ صدق کنند (یعنی واجد خاصیت F باشند). تعمیم این قرارداد آسان است. مثلاً، اگر $ع(x, y)$ اسمنمائی مربوط به متغیرهای فردی x و y باشد،

$$\{ع(x, y) \mid F(x, y)\}$$

یعنی مجموعه‌ی جمیع مقادیر $ع(x, y)$ بازاء جمیع مقادیری از x و y که در گزاره‌نمای

$F(x, y)$ صدق کنند.

۲.۶.۱. امثله

(آ). مجموعه‌ی مربعات اعداد طبیعی را میتوان چنین تعریف کرد:

مجموعه‌ی اشیائی به صورت x^2 که x عدد طبیعی است

یا $\{x^2 \mid$ عدد طبیعی است $x\}$، یا بالاخره، $\{x^2 \mid x \in \mathbf{N}\}$.

(ب). چنانکه میدانید، مضرب صحیح عدد حقیقی a یعنی حاصلضرب عددی صحیح در a. فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع مضارب صحیح a باشد. مجموعه‌ی A را میتوان به هر یک از این دو صورت نامگذاری کرد:

$\{x \mid$ مضرب صحیح a است $x\}$،

$\{x \mid$ مساوی حاصلضرب یک عدد صحیح است در a $x\}$.

اما، با توجه به اینکه مجموعه‌ی مورد بحث مجموعه‌ی مقادیر an است بازاء جمیع مقادیر صحیح n، میتوان آن را چنین نامید: $\{an \mid n \in \mathbf{I}\}$.

(پ). مجموعه‌ی کسرهای متعارفیی که حاصلجمع صورت و مخرج هر یک مساوی 8 است. چنانکه میدانیم، کسر متعارفی عبارتی است به صورت m/n که، در آن، m و n اعداد صحیح‌اند $(m, n \in \mathbf{I})$ و $n \neq 0$. پس، مجموعه‌ی مذکور عبارتست از

$$\{m/n \mid m, n \in \mathbf{I} \;\&\; n \neq 0 \;\&\; m + n = 8\}.$$

۲.۶.۲. تمرین

۱. بنا بر آنکه $A = \{0, 1, -2\}$ و $B = \{1, 2\}$، هر یک از مجموعه‌های ذیل را به زبان فارسی تعریف و با اعضایش مشخص کنید:

(آ) $\{x^2 \mid x \in A\}$، (ب) $\{1/x \mid x \in B\}$.

(پ) $\{x + y \mid x \in A \;\&\; y \in B\}$. (ت) $\{xy \mid x \in B \;\&\; y \in A\}$.

(ث) $\{x/y \mid x \in A \;\&\; y \in B\}$. (ج) $\{x^2 + y^2 \mid x \in A \;\&\; y \in B \;\&\; x > y\}$.

۲. پنج عضو از هر یک از مجموعه‌های ذیل بنویسید:

(آ) $\{\sin x \mid x \in \mathbf{R} \;\&\; 0 \leqslant x \leqslant \pi/2\}$. (ب) $\{\log x \mid x \in \mathbf{N}\}$.

۳. این مجموعه‌ها را به وسیله‌ی علامات نامگذاری کنید:

(آ). مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد. (ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج. (پ) مجموعه‌ی مکعبات اعداد طبیعی بزرگتر از 5. (ت) مجموعه‌ی مکعبات اعداد طبیعی فرد. (ث) مجموعه‌ی لگاریتمهای اعداد طبیعی. (ج) مجموعه‌ی معکوسات اعداد طبیعی. (چ) مجموعه‌ی کسرهائی که صورت هر یک فرد و مخرجش زوج باشد. (ح) مجموعه‌ی کسرهای متعارفی تحویلناپذیر.

۲.۷. تمرین (متفرقه)

۱. مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه $\{a\} = \{c, d\}$.

† **۲.** ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

آنست که $a = c$ و $b = d$.

۳. فرض کنیم $a \neq b$ و $A = \{a, b\}$. مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}^2(A)$ را با اعضایشان مشخص کنید. [$\mathcal{P}^2(A)$ به معنی $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$، یعنی مجموعه‌ی مجموعکان $\mathcal{P}(A)$ است.]

۴. بنا بر آنکه $B = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ و $C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$، کدام یک از گزاره‌های ذیل راست

و کدام یک از آنها دروغ است؟

(آ) $B \in C$, (ب) $B \notin \mathcal{P}(C)$, (ج) $B \in \mathcal{P}^2(C)$.

۵. همواره $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A)$.

۶. همواره $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

۷. همواره $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

† ۲.۸. مشکلات بسط شهودی نظریه‌ی مجموعه‌ها. پس از تأسیس نظریه‌ی مجموعه‌ها، کانتور و دیگر ریاضیون به بسط این نظریه پرداختند، و این رشته وسعت فراوان یافت. اما تحقیقاتی که در آن ایام در این باب به عمل میآمد به روش شهودی ریاضیات قرن نوزدهم بود، که ما نیز کمابیش آن را پیش گرفته‌ایم، و بدیهیات عرفی بیش و کم در آن راه دارد. بهمین جهت، بسط نظریه‌ی مجموعه‌ها منجر به تناقضاتی گردید که آنها را پارادوکس[1]های نظریه‌ی مجموعه‌ها میخوانند، و از معروفترین آنها پارادوکسهای کانتور، بورالی ــ فورتی*، و راسل* است. توضیح دو پارادوکس اول محتاج اطلاعات نسبةً وسیع در نظریه‌ی مجموعه‌ها میباشد، اما پارادوکس راسل بسیار ساده است، و ذیلاً به توضیح آن میپردازیم.

بر طبق اصل شهودی تجرید، هر خاصیت مجموعه‌ای را مشخص میسازد. اینک خاصیت «عضو خود نبودن» را اختیار میکنیم (بسیاری از چیزها واجد این خاصیت هستند؛ مثلاً اگر x مجموعه نباشد در $x \notin x$ صدق میکند. همچنین اگر A مجموعه‌ی گربه‌ها باشد، بالبداهه A گربه نیست، و لهذا $A \notin A$). مجموعه‌ی $\{x \mid x \notin x\}$ را، که با خاصیت عضو خود نبودن مشخص میشود، E مینامیم. اینک میپرسیم که آیا E عضو خود هست یا نه. این سؤال یکی از دو جواب ذیل را دارد:

(۱) $E \in E$, (۲) $E \notin E$.

اما، بنا بر تعریفِ E، یک شیء فقط و فقط وقتی به E تعلق دارد که عضو خود نباشد. پس، در حالت (۱) لازم میآید که $E \notin E$، و این نقیض (۱) است؛ و در حالت (۲) لازم میآید که $E \in E$، و این نقیض (۲) است. پس، هر یک از حالات ممکنه منجر به تناقض میگردد.

ما وارد بحث در دو پارادوکس دیگر نمیشویم، و همینقدر اشاره میکنیم که پارادوکس کانتور ناشی از مفهوم مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است.

تناقضاتی که به آنها اشاره شد ما را در صحت اصل شهودی تجرید مشکوک میسازد، و چنین مینماید که این اصل را نمیتوان بطور مطلق و بدون هیچ قید و شرطی بکار برد. شرح کوششهای علمای منطق و ریاضیات برای تأسیس نظریه‌ی مجموعه‌ها بر اساسی که راه را بر تناقضات بربندد از حوصله‌ی این کتاب خارج است، اما ذکر این نکته خالی از فایده نیست که، در تناقضاتی که میشناسیم، همواره پای مجموعه‌های «بسیار پهناور» در کار است. در مباحث ریاضی ــ گذشته از خود نظریه‌ی مجموعه‌ها ــ هیچگاه مفاهیمی مانند مجموعه‌ی همه‌ی اشیاء یا مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها ــ که علاوه بر وسعت فوق‌العاده، فاقد هرگونه تجانسی از لحاظ ماهیت اعضا میباشند ــ درکار نمیآید، بلکه، در هر مبحث ریاضی، اشیائی که در کار میآیند

---

paradox (۱)

اعضا یا اجزای مجموعه‌ی معینی هستند، و این مجموعه عالم سخن آن مبحث (مجموعه‌ی‌عمومی آن) است.

§۳ ترکیب مجموعه‌ها

به وسیله‌ی اعمالی چند بر مجموعه‌ها، میتوان مجموعه‌هائی از مجموعه‌های مفروض ساخت. این اعمال عبارتند از جمع منطقی ($\cup$)، ضرب منطقی ($\cap$)، تفریق ($-$)، و متفرعات آنها. در تعریفات آتیه، مجموعه‌هائی که ذکرشان میآید اجزای یک مجموعه‌ی عمومی فرض میشوند. یادآوری میکنیم که حروف A، B، C، و غیره اسامی مجموعه‌های دلخواه میباشند.

۳.۱. تعریفات

۳.۱.۱. $A \cup B$ یعنی $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
به عبارت دیگر، $A \cup B$ مجموعه‌ی جمیع اشیائی است که عضو A یا عضو B باشند (چون ما «یا» را به معنی منطقی میگیریم، اشیائی که هم به A و هم به B تعلق دارند نیز عضو $A \cup B$ هستند). علامت «$\cup$» را ناو و $A \cup B$ را اتحادیه‌ی A با B یا حاصلجمع منطقی A با B خوانیم.

۳.۱.۲. $A \cap B$ یعنی $\{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$.
به عبارت دیگر، $A \cap B$ مجموعه‌ی جمیع اشیائی است که عضو A و عضو B هستند؛ یعنی، $A \cap B$ مجموعه‌ی جمیع اعضای مشترک A و B است. علامت «$\cap$» را طاق و $A \cap B$ را مقطع A با B یا حاصلضرب منطقی A در B نامیم.

۳.۱.۳. اگر $A \cap B = \varnothing$ (یعنی، اگر A و B عضو مشترک نداشته باشند) A و B را از هم جدا گوئیم.

۳.۱.۴. $A - B$ یعنی $\{x \mid x \in A \;\&\; x \notin B\}$.
به عبارت دیگر، $A - B$ مجموعه‌ی جمیع اعضائی از A است که نسبت به B خارجی هستند (یعنی به B تعلق ندارند)، و آن را تفاضل A با B خوانند.

۳.۱.۵. اگر $B \subseteq A$ آنگاه $A - B$ را متمم B نسبت به A خوانیم، و گاه به علامت $\mathscr{C}_A B$ نمایش میدهیم[1].

(۱) «$\mathscr{C}$» حرف اول کلمه‌ی فرانسوی و انگلیسی complement [= متمم] است.

۳.۱.۶. $\overline{A}$ یعنی $\complement_V A$.
به عبارت دیگر، $\overline{A}$ مجموعه‌ی جمیع اشیاء (اعضای مجموعه‌ی عمومی V) غیر متعلق به A، یا $\{x \mid x \notin A\}$ میباشد، و آن را متمم A نامیم.

۳.۱.۷. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم

$$V = \{b, a, e, c, x, d\},$$
$$A = \{a, b\}, \qquad B = \{b, c, e\}, \qquad C = \{e\}, \qquad D = \{b, a, c, d\},$$

که در آنها a، b، c، d، e، و x دو بدو متمایزند.

بنا بر تعریفات سابق‌الذکر، اولاً،

$$B \cup A = \{b, c, e, a\} = A \cup B, \qquad A \cup B = \{a, b, c, e\},$$
$$A \cup A = \{a, b\} = A, \qquad B \cup C = C \cup B = \{b, c, e\} = B,$$
$$A \cup \varnothing = A. \qquad A \cup V = \{a, b, e, c, x, d\} = V,$$

ثانیاً،

$$B \cap D = D \cap B = \{b, c\}, \qquad A \cap B = B \cap A = \{b\},$$
$$A \cap C = C \cap A = \varnothing, \qquad C \cap C = \{e\} = C,$$
$$B \cap V = \{b, c, e\} = B. \qquad B \cap \varnothing = \varnothing,$$

ثالثاً، C و D از هم جدا هستند. رابعاً،

$$B - A = \{c, e\}, \qquad A - B = \{a\},$$
$$C - A = \{e\} = C, \qquad A - C = \{a, b\} = A,$$
$$\complement_D A = \{c, d\}, \qquad A - V = \varnothing,$$
$$\overline{A} = \{e, c, x, d\}, \qquad \overline{D} = \{e, x\}, \qquad \overline{V} = \varnothing.$$

(ب). فرض کنیم مجموعه‌ی عمومی مجموعه‌ی جمیع افراد انسانی، A مجموعه‌ی جمیع ریاضیدانها، و B مجموعه‌ی جمیع شعرا باشد.

(۱) $A \cup B$ مجموعه‌ی کسانی است که ریاضیدان یا شاعرند؛ هر ریاضیدان شاعر و هر شاعر ریاضیدان عضو این مجموعه است.

(۲) $A \cap B$ مجموعه‌ی ریاضیدانهای شاعر (یا شعرای ریاضیدان) است.

(۳) $A - B$ مجموعه‌ی ریاضیدانهائی است که شاعر نیستند، و $B - A$ مجموعه‌ی شعرائی است که ریاضیدان نیستند.

(۴) $\overline{A}$ مجموعه‌ی کسانی است که ریاضیدان نیستند، و $\overline{B}$ مجموعه‌ی کسانی که شاعر نیستند.

(پ). اعمال سابق‌الذکر را میتوان بر مجموعه‌های حاصل از اعمال انجام داد. در نوشتن حاصلهای اعمالی که بر حاصلهای اعمال انجام میگیرند باید، به همان طریق که در جبر معمول است، جمله یا جمله‌هائی را که هر عمل بر آنها انجام میگیرد عنداللزوم با پرانتز (یا کروشه یا ابرو) مشخص ساخت، و الا، عبارات حاصل بیمعنی خواهند بود. مثلاً، عبارت $A \cap B - C$ بیمعنی است، اما $A \cap (B - C)$ مقطع A است با $B - C$، و $(A \cap B) - C$ تفاضل $A \cap B$ است با C. همچنین، $\overline{D \cap (A \cup B)}$ متمم مجموعه‌ی $D \cap (A \cup B)$ است، که خود مقطع D با $A \cup B$ میباشد. در مثال (آ)،

$$D \cap (A \cup B) = \{b, a, c, d\} \cap \{a, b, c, e\} = \{b, a, c\}.$$

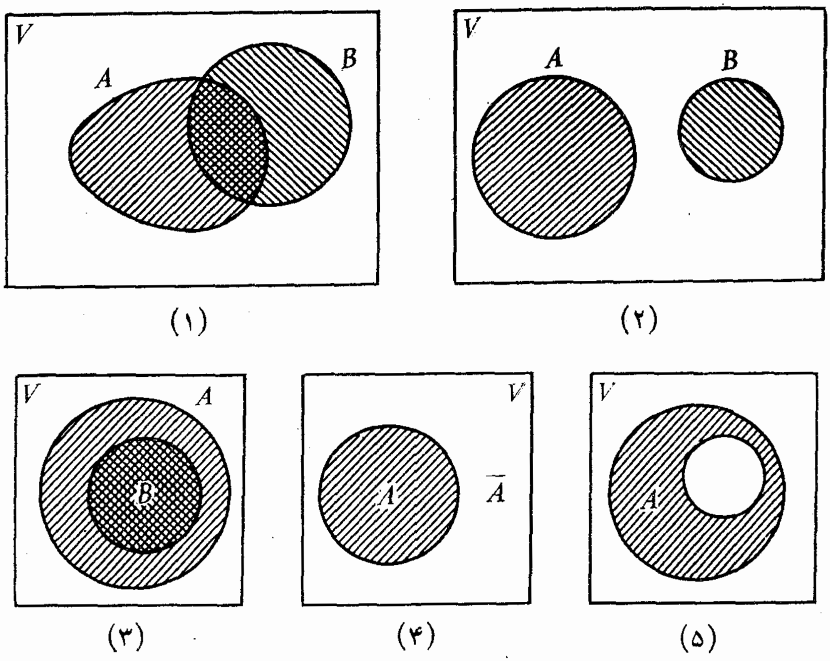
پس،

$$\overline{D \cap (A \cup B)} = \overline{\{b, a, c\}} = \{e, x, d\}.$$

(آ). تعریفات اعمال را میتوان به وسیلهی تصویر ون توضیح داد. در شکل ۷، ناحیهای که پرداز از نوع / دارد نمایش مجموعهی A است، و آنکه پرداز از نوع \ دارد نمایش B. مجموعهی $A \cup B$ با ناحیهای که نقاطش به A یا به B تعلق دارند، یعنی با ناحیهای که حد اقل یک نوع پرداز دارد، نمایش داده میشود، و غیره. تفصیل از این قرار است:

در قسمتهای ۱ ــ ۳، ناحیهای که حد اقل یک نوع پرداز دارد نمایش $A \cup B$ است. در قسمت ۳، $A \cup B$ همان A است.

در قسمتهای ۱ و ۳، ناحیهای که هر دو نوع پرداز را دارد نمایش $A \cap B$ است. در قسمت



شکل ۷

۳، $A \cap B$ همان B است. در قسمت ۲، دو مجموعه عضو مشترک ندارند ($A \cap B = \varnothing$)، بلکه از هم جدا هستند.

در قسمتهای ۱ ــ ۳، ناحیهای که فقط پرداز از نوع / دارد نمایش $A - B$ است.

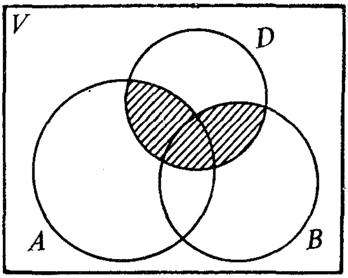
در قسمتهای ۱ و ۲، ناحیهای که فقط پرداز از نوع \ دارد نمایش $B - A$ میباشد.

در قسمت ۳، $B - A$ خالی است ($B - A = \varnothing$).

در قسمتهای ۴ و ۵، قسمتی از V که خالی از پرداز است نمایش $\overline{A}$ میباشد.

(ب). در شکل ۸ سه مجموعهی A، B، و D نمایش داده شده است. ناحیهای که پرداز دارد نمایش مجموعهی $(A \cup B) \cap D$ است و ناحیهی خالی از پرداز نمایش مجموعهی

$.\overline{D \cap (A \cup B)}$



شکل ۸

۳.۱.۸. تمرین

۱. با علامات مثال آ: ۳.۱.۷، این مجموعه‌ها را با اعضایشان مشخص کنید:

(آ) $(A \cup B) \cup C.$ (ب) $A \cup (B \cup C).$

(پ) $(A \cap B) \cap C.$ (ت) $A \cap (B \cap C).$

(ث) $A \cup (B \cap C).$ (ج) $A \cap (B \cup C).$

(چ) $(A \cup B) \cap (A \cup C).$ (ح) $(A \cap B) \cup (A \cap C).$

(خ) $(A \cup B) - C.$ (د) $(A \cap B) - C.$

(ذ) $A \cap (B - C).$ (ر) $A - (B - C)$

(ز) $A - B.$ (ژ) $A \cap \overline{B}.$

(س) $\overline{A \cup B}.$ (ش) $\overline{A} \cap \overline{B}.$

(ص) $\overline{A \cap B}.$ (ض) $\overline{A} \cup \overline{B}.$

۲. مجموعه‌ی عمومی (V) را رسم کنید، و مجموعه‌های A و B را به طریقی که از هم جدا نباشند نمایش دهید تا V به چهار ناحیه منقسم شود. هر یک از این نواحی نمایش چه مجموعه‌ای است؟

۳. در همان شکل ناحیه‌ی نمایش‌دهنده‌ی هر یک از مجموعه‌های ذیل را تعیین کنید:

$$\overline{A \cup B}, \quad \overline{A} - B, \quad \overline{B} - A, \quad \overline{A} \cap \overline{B}.$$

۴. مجموعه‌ی عمومی مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج است، و متغیر فردی n مقید بدان میباشد، و

$$A = \{n \mid 3 < n < 5\}, \quad B = \{n \mid 3 \leqslant n \leqslant 6\}, \quad C = \{n \mid 11 < n < 12\}.$$

مجموعه‌های آ ـ ض مسئله‌ی ۱ را با اعضایشان مشخص کنید.

۵. عالم سخن مجموعه‌ی چهار ضلعیهای واقع در صفحه‌ی مفروض است، و متغیرهای فردی مقید به این عالم هستند، و

$A_1 = \{x \mid$ متوازی‌الاضلاع است $x\}$, $A_2 = \{x \mid$ مستطیل است $x\}$,

$A_3 = \{x \mid$ مربع است $x\}$, $A_4 = \{x \mid$ لوزی است $x\}$.

کدام یک از این گزاره‌ها راست است؟

$A_1 \subseteq A_2,$ $A_3 \subseteq A_1 \cap A_4,$[1]

---

(۱) این گزاره معنائی جز $A_3 \subseteq (A_1 \cap A_4)$ نتواند داشت.

$$A_3 = A_1 \cap A_4, \qquad A_2 \subseteq A_1,$$
$$A_3 \subseteq A_2 \cap A_4, \qquad A_1 \cap A_4 = A_2,$$
$$A_3 = A_2 \cap A_4. \qquad A_1 \cap A_4 = A_3,$$
$$A_1 \cap A_4 = A_4,$$

۶. این احکام را با ساختن مجموعه‌های مناسب باطل کنید:

(آ) همواره $B \cup (A - B) = A$ (مثالی نیز بیاورید که تساوی برقرار باشد).

(ب) اگر $A \cup X = B$ آنگاه $X = B - A$ (مثالی نیز بیاورید که هر دو تساوی در عین حال برقرار باشند).

(پ) همواره اگر $A \cup B = C \cup B$ آنگاه $A = C$ (مثالی نیز برای برقراری هر دو تساوی در عین حال بیاورید).

۳.۲. قوانین اعمال. اعمال سابق‌الذکر تابع قوانین مهمی هستند که اغلب آنها نتایج مستقیم تعریفات مذکور میباشند [۱]. مثلاً، فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد. اگر B مجموعه‌ای دلخواه باشد، بنا بر تعریف اتحادیه، هر عضو A عضو $A \cup B$ و نیز عضو $B \cup A$ است، و بنا بر تعریف مقطع، هر عضو $A \cap B$ و نیز هر عضو $B \cap A$ تعلق به A دارد. پس،

۳.۲.۱. قضیه. I. همواره

$$A \subseteq B \cup A. \qquad A \subseteq A \cup B,$$

به عبارت دیگر، هر مجموعه جزء اتحادیه‌ی آن مجموعه است با هر مجموعه‌ای دلخواه.

II. همواره

$$B \cap A \subseteq A. \qquad A \cap B \subseteq A,$$

به عبارت دیگر، مقطع هر مجموعه با مجموعه‌ای دلخواه جزء آن مجموعه است.

از اینجا قضیه‌ی مفید ذیل حاصل میشود، که حاکی از بستگی جزئیت با جمع و ضرب است:

۳.۲.۲. قضیه. همواره

$$\text{(I)} \qquad A \subseteq B \;\underline{\Omega}\; A \cup B = B.$$

$$\text{(II)} \qquad A \subseteq B \;\underline{\Omega}\; A \cap B = A.$$

(بالنتیجه، اگر مجموعه‌ای جزء مجموعه‌ای باشد، در اتحادیه‌ی آنها، مجموعه‌ی «بزرگتر»، و در مقطع آنها، مجموعه‌ی «کوچکتر» دیگری را «جذب» میکند.)

برهان. اثبات هر دو حکم آسان است. مثلاً، برای اثبات (I)، گوئیم، اولاً، اگر $A \subseteq B$ آنگاه هر عضو $A \cup B$ عضو B است، و لهذا، $A \cup B \subseteq B$. از طرف دیگر، همواره $B \subseteq A \cup B$. پس بنا بر ۱.۴.۳، $A \cup B = B$. ثانیاً، اگر $A \cup B = B$ آنگاه، با توجه به $A \subseteq A \cup B$ خواهیم داشت، $A \subseteq B$. ▲

---

(۱) متعلمین باید هریک از خواص آتیه را با آوردن مثال و نیز به وسیله‌ی تصویر ون توضیح دهند، و سپس به استدلال بپردازند.

۳.۲.۳. امثله و فواید.

(آ). چون همواره $\varnothing \subseteq A$، بنا بر ۳.۲.۲،

$$\varnothing \cap A = \varnothing. \qquad \varnothing \cup A = A.$$

(با $a = a + 0$ و $0 = a \cdot 0$ در حساب مقایسه کنید).

(ب). چون همواره $A \subseteq A$، بنا بر ۳.۲.۲،

$$A \cap A = A. \qquad A \cup A = A,$$

این دو قانون را قوانین خودنمائی[1] نامند. بنا بر این قوانین، در حساب مجموعه‌ها، «ضریب» و «نماینده» در کار نمیآید.

(پ). چون $A \cap B$ جزء A و $A \cup B$ حاوی A است،

$$A \cap (A \cup B) = A. \qquad A \cup (A \cap B) = A,$$

این قوانین را قوانین جذب نامند.

(ت). فرض کنیم V مجموعه‌ی عمومی و A مجموعکی از V باشد. بنا بر ۳.۲.۲،

$$A \cap V = A. \qquad A \cup V = V,$$

ذیلاً بعضی دیگر از خواص مهم اعمال را، در ضمن سه قضیه، میآوریم، و سپس، به ایراد توضیحاتی در باب آنها مبادرت میکنیم.

۳.۲.۴. قضیه. (قوانین جمع و ضرب). همواره

I. قوانین تعویضپذیری

$$A \cup B = B \cup A. \qquad (\text{I آ})$$

$$A \cap B = B \cap A. \qquad (\text{I ب})$$

II. قوانین شرکتپذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C. \qquad (\text{II آ})$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \qquad (\text{II ب})$$

III. قوانین توزیعپذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (\text{III آ})$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (\text{III ب})$$

۳.۲.۵. قضیه (قوانین متممگیری[2]). همواره

$$A \cup \overline{A} = V. \qquad (\text{I آ})$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing. \qquad (\text{I ب})$$

$$\overline{\overline{A}} = A. \qquad (\text{II})$$

---

(۱) از «خود» و «نمائی» [منسوب به نما، به معنی نماینده]، به معنی «مساوی نماینده‌ی خود».

(۲) در این قوانین، A مجموعکی از مجموعه‌ی عمومی V است، و متممها نسبت به V میباشند.

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. & \text{(III آ)}\\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. & \text{(III ب)}\end{array}\right\}$$ (قوانین د مورگن*)

$$\overline{V} = \varnothing. \quad \text{(IV آ)}$$

$$\overline{\varnothing} = V. \quad \text{(IV ب)}$$

۳.۲.۶. قضیه. (قانون تفریق[1]). همواره

$$A - B = A \cap \overline{B}.$$

۳.۲.۷. توضیحات، امثله، و فواید

(آ). قوانین دسته‌های I و II قضیه‌ی ۳.۲.۴ مانند قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری اعمال جمع و ضرب در حساب ($a + b = b + a$ و غیره) میباشند. قانون (III ب) در این قضیه مانند قانون

$$a\,.\,(b + c) = (a\,.\,b) + (a\,.\,c)$$

در حساب است، که آن را قانون توزیعپذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع نامند. بنا بر (III آ)، عمل جمع منطقی نسبت به عمل ضرب منطقی توزیعپذیر است. فرمول نظیر (III آ) در حساب فرمول

$$a + (b\,.\,c) = (a + b)\,.\,(a + c)$$

است، که همیشه برقرار نیست.

اثبات قوانین مذکور آسان است. هر یک از این قوانین حکم میکند به تساوی دو مجموعه. راه مستقیم اثبات تساوی دو مجموعه توسل به اصل گسترش است. به عنوان مثال، (III آ) را ثابت میکنیم. فرض کنیم

$$K = A \cup (B \cap C), \qquad\qquad L = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

باید ثابت کرد که $K = L$. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که هر عضو K عضو L است، و هر عضو L عضو K است.

اولاً، فرض کنیم x عضو دلخواهی از K باشد. چون K اتحادیه‌ی A و $B \cap C$ است، خواهیم داشت $x \in A$ یا $x \in B \cap C$. پس، دو حالت تشخیص میدهیم. حالت اول: $x \in A$. پس، بنا بر قسمت اول ۳.۲.۱، $x \in A \cup B$[2] و $x \in A \cup C$. بالنتیجه، x به مقطع $A \cup B$ و $A \cup C$، یعنی به L، تعلق دارد. حالت دوم: $x \in B \cap C$. بنا بر تعریف مقطع، $x \in B$ و $x \in C$، و بالنتیجه، $x \in A \cup B$ و $x \in A \cup C$. پس، $x \in L$. خلاصه اگر $x \in K$، در هر حالت، $x \in L$.

ثانیاً، فرض‌کنیم x عضو دلخواهی از L باشد. بالنتیجه $x \in A \cup B$ (۱) و $x \in A \cup C$ (۲). اینک دو حالت تشخیص میدهیم. حالت اول: $x \in A$. پس، بنا بر قسمت اول ۳.۲.۱، x به K تعلق دارد. حالت دوم: $x \notin A$. در این حالت، بنا بر (۱) و (۲) و

(۱) در قانون تفریق، A و B مجموعکهائی از یک مجموعه‌ی عمومی هستند، و متممها نسبت به این مجموعه میباشند.

(۲) عبارت $x \in A \cup B$ جز $x \in (A \cup B)$ معنائی نتواند داشت، و لهذا، خالی از ابهام است.

تعریف اتحادیه، $x \in B$ و $x \in C$، و بالنتیجه، $x \in B \cap C$. پس، بنا بر قسمت اول ۳.۲.۱، x به K تعلق دارد. خلاصه، اگر $x \in L$، در هر حالت، $x \in K$.
بالنتیجه، هر عضو K عضو L است، و هر عضو L عضو K است. پس، به موجب اصل گسترش، $K = L$.▲

(ب). احکام قضیه‌ی ۳.۲.۵ ناشی از تعریف متمم است. فرض کنیم V مجموعه‌ی عمومی و A مجموعک دلخواهی از V باشد. بنا بر تعریف مذکور، بازاء عضو دلخواهی از V مانند x، $x \in \overline{A}$ معادل $x \notin A$ است. از اینجا نتیجه میشود که $x \in A$ با $x \notin \overline{A}$ معادل میباشد.

اینک به آسانی میتوان احکام مذکور را ثابت کرد. مثلاً، برای اثبات II، یعنی مساوی بودن $\overline{\overline{A}}$ (متمم $\overline{A}$) با A، گوئیم اگر $x \in \overline{\overline{A}}$ آنگاه $x \notin \overline{A}$، و بالنتیجه، $x \in A$. بالعکس، اگر $x \in A$ آنگاه $x \notin \overline{A}$، و بالنتیجه، $x \in \overline{\overline{A}}$. ▲

برای اثبات (III آ) (قانون د مورگن)، گوئیم اگر $x \in \overline{A \cup B}$ (۱) آنگاه $x \notin A \cup B$. پس، بنا بر تعریف اتحادیه، $x \notin A$ و $x \notin B$. بالنتیجه، $x \in \overline{A}$ و $x \in \overline{B}$. پس، $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ (۲). به همین قیاس از (۲) میتوان (۱) را نتیجه گرفت. ▲

اثبات سایر قوانین بر متعلم است.

(پ). اثباب قضیه‌ی ۳.۲.۶ به متعلم محول میشود. این قانون مهم تفریق را به ضرب و متمم باز میگرداند. مثلاً،

$$A - A = A \cap \overline{A} = \varnothing, \qquad A - \varnothing = A \cap \overline{\varnothing} = A \cap V = A,$$
$$\varnothing - A = \varnothing \cap \overline{A} = \varnothing.$$

مسئله‌ی ۶ تمرین ۳.۱.۸ تفاوت فاحش خواص تفریق مجموعه‌ها و تفریق اعداد را آشکار میسازد.

(ت). بنا بر قسمتهای (II آ) و (II ب) از ۳.۲.۴، $A \cup (B \cup C)$ و $(A \cup B) \cup C$ اسامی یک مجموعه‌اند، و $A \cap (B \cap C)$ و $(A \cap B) \cap C$ نیز اسامی یک مجموعه میباشند. برای هر یک از این مجموعه‌ها اسم ساده‌تری وضع میکنیم:

۳.۲.۸. تعریفات.

I. مجموعه‌ی $(A \cup B) \cup C$ را به نام «$A \cup B \cup C$» میخوانیم.

II. مجموعه $(A \cap B) \cap C$ را به نام «$A \cap B \cap C$» میخوانیم.

۳.۲.۹. تمرین

۱. از احکام ذیل، بعضی قانون حساب مجموعه‌ها هستند، و برخی همیشه بر قرار نیستند. آنها را از سایرین جدا و ثابت و بقیه را باطل کنید.

(آ) اگر $A \cup B = V$ آنگاه $B = \overline{A}$.

(ب) اگر $A \cup B = A$ آنگاه $B = \varnothing$.

(پ) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

(ت) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

(ث) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$.

(ج) $(A - B) \cap B = \varnothing$.

(چ) $A \cup B = (A - B) \cup B$.
(ح) $A \cap B = A - (A - B)$.
(خ) $(A \cup C) - (B \cup C) = A - B$.
(د) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup C \subseteq B \cup C$.
(ذ) اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cup C \subset B \cup C$.
(ر) اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \cup B \subseteq C$.
(ز) اگر $A \subset C$ و $B \subset C$ آنگاه $A \cup B \subset C$.

۴ § تعمیم اتحادیه و مقطع

۴.۱. تعریفات

۴.۱.۱. اتحادیه‌ی چند مجموعه مجموعه‌ی جمیع اشیائی است که حد اقل متعلق به یکی از آنها باشند.

۴.۱.۲. مقطع چند مجموعه مجموعه‌ی جمیع اعضای مشترک آنهاست.

مثلاً، مجموعه‌ی $A \cup B \cup C$، که در ۳.۲.۸ تعریف شد، اتحادیه‌ی سه مجموعه‌ی A، B، و C است، زیرا، به آسانی معلوم میشود که هر شیء که حد اقل به یکی از A، B، و C متعلق باشد عضو مجموعه‌ی $A \cup B \cup C$ است، و بالعکس. همچنین، مجموعه‌ی $A \cap B \cap C$ مقطع سه مجموعه‌ی A، B، و C میباشد.

۴.۲. تعریفات. فرض کنیم $\mathcal{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد. اتحادیه‌ی $\mathcal{M}$، که آن را $\bigcup \mathcal{M}$ میخوانیم، یعنی اتحادیه‌ی اعضای $\mathcal{M}$؛ و مقطع $\mathcal{M}$، که آن را $\bigcap \mathcal{M}$ مینامیم، یعنی مقطع اعضای $\mathcal{M}$. به عبارت دیگر

$$\bigcup \mathcal{M} = \{x \mid \text{دارد } \mathcal{M} \text{ تعلق به عضوی از } x\},$$
$$\bigcap \mathcal{M} = \{x \mid \text{دارد } \mathcal{M} \text{ تعلق به همه‌ی اعضای } x\}.$$

در مثال سابق، $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$، و

$$\bigcup \mathcal{M} = A \cup B \cup C, \qquad \bigcap \mathcal{M} = A \cap B \cap C.$$

بطور کلی، اگر $\mathcal{M} = \{A, B, \cdots, X, \cdots\}$ آنگاه $\bigcup \mathcal{M}$ را به صورت

$$A \cup B \cup \cdots \cup X \cup \cdots$$

و $\bigcap \mathcal{M}$ را به صورت ذیل نیز مینویسند،

$$A \cap B \cap \cdots \cap X \cap \cdots.$$

اتحادیه و مقطع مجموعه‌ای از مجموعه‌ها خواص مهمی دارند، که نتایج تعریفات سابق میباشند. مثلاً،

۴.۳. قضیه. مقطع مجموعه‌ای از مجموعه‌ها جزء هر یک از آنها است.

زیرا، هر عضو مقطع مذکور، بنا بر تعریف مقطع، به هر یک از آن مجموعه‌ها تعلق دارد. ▲
همچنین،

۴.۴. قضیه. اگر $\mathscr{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها و E مجموعک هر یک از اعضای $\mathscr{M}$ باشد، آنگاه $E \subseteq \bigcap \mathscr{M}$.
زیرا، بنا بر مفروضات، هر عضو E به جمیع اعضای $\mathscr{M}$ تعلق دارد، و لهذا، عضو مشترک جمیع آنهاست. ▲

قضایای ذیل نظایر قضایای فوق در مورد اتحادیه هستند، و اثبات آنها به متعلم محول میشود:

۴.۵. قضیه. اتحادیه‌ی مجموعه‌ای از مجموعه‌ها حاوی هر یک از آنهاست.

۴.۶. قضیه. اگر $\mathscr{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها و مجموعه‌ی E حاوی هر یک از اعضای $\mathscr{M}$ باشد آنگاه $\bigcup \mathscr{M} \subseteq E$.

در پایان این قسمت، مسئله‌ی افراز یک مجموعه را، که بعداً بکار خواهد آمد، توضیح میدهیم.

۴.۷. تعریف. افراز مجموعه‌ی A یعنی مجموعه‌ای مانند $\mathscr{M}$ از مجموعکهای غیر خالی A بطوری که هر عضو A متعلق به یک و تنها یک عضو $\mathscr{M}$ باشد.
اگر $\mathscr{M}$ یک افراز A باشد گوئیم $\mathscr{M}$ مجموعه‌ی A را افراز میکند.
مثلاً، اگر $A = \{1, 0, 2, 4\}$ هر یک از

$$\mathscr{M}_1 = \{\{1\}, \{0\}, \{2\}, \{4\}\},$$
$$\mathscr{M}_2 = \{\{1, 2, 4\}, \{0\}\}.$$

یک افراز A است.

مسئله‌ی افراز با طبقه‌بندی دسته‌ای از اشیاء بستگی تام دارد. طبقه‌بندی شاگردان یک دانشگاه بر حسب دانشکده‌ای که در آن تحصیل میکنند یک افراز مجموعه‌ی شاگردان مذکور است، و طبقه بندی آنها بر حسب جنس افراز دیگری از همان مجموعه میباشد. در این باب، در ۵.۳ : ۳، با تفصیل بیشتر گفتگو خواهیم کرد.

۴.۸ تمرین

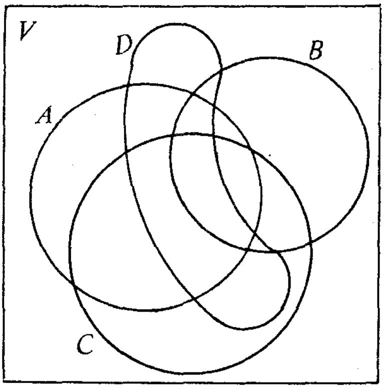
۱. بنا بر آنکه $A = \{0, 5\}$، $B = \{3, 4\}$، $C = \{0, 3, 7\}$، $D = \{2\}$، و $\mathscr{M} = \{A, B, C, D\}$، مطلوبست $\bigcup \mathscr{M}$ و $\bigcap \mathscr{M}$.
۲. سه افراز از مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی بنویسید.
۳. با توجه به باقیمانده‌های تقسیم اعداد طبیعی بر 2، 3، و 4، $\mathbf{N}$ را به سه طریق افراز کنید.
۴. چند افراز از مجموعه‌ی غیر خالی A وجود دارد که A عضو آن باشد؟
۵. چه رابطه‌ای بین یک افراز مجموعه‌ی غیر خالی A و $\mathscr{P}(A)$ هست؟

۶. حکم آتیه را ثابت و آن را در مورد هر یک از مسائل ۲ ــ ۵ تحقیق کنید:
شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی $\mathscr{M}$ از مجموعکهای غیر خالی مجموعه‌ی A یک افراز A باشد آنست که، در عین حال، اعضای $\mathscr{M}$ دو بدو از هم جدا باشند، و $A = \bigcup \mathscr{M}$.

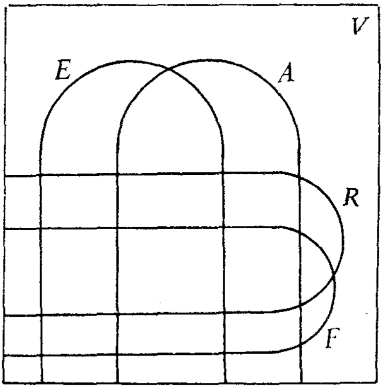
۵ § تمرین

۱. در تصویر ون، سه مجموعه‌ی A، B، و C با سه دایره‌ی دو بدو متقاطع نمایش داده شده‌اند بطوری که V (مجموعه‌ی عمومی) به هشت ناحیه تقسیم شده است. معلوم کنید هر یک از این نواحی چه مجموعه‌ای را نمایش میدهد.

۲. در رسم تصویر ون در مسائلی که پای چهار مجموعه در کار است میتوان این مجموعه‌ها را بر طبق تصاویر ۹ یا ۱۰ نمایش داد. تصویر ۱۰ مربوط است به مجموعه‌ی شاگردان یک مدرسه‌ی السنه (مجموعه‌ی عمومی)، و نواحی E، A، F، و R بـه ترتیب نمایش مجموعه‌ی شاگردانی است که انگلیسی، آلمانی، فرانسوی، یا روسی تحصیل میکنند. هر یک از ۲۳ ناحیه‌ای که در شکل دیده میشود کدام دسته از شاگردان را نمایش میدهد؟



شکل ۹



شکل ۱۰

۳. مجموعه‌ی عمومی (V) مجموعه‌ی آدمیان است، و

$A =$ مجموعه‌ی ایرانیها،
$B =$ مجموعه‌ی هندیها،
$C =$ مجموعه‌ی فلاسفه،
$D =$ مجموعه‌ی شعرا،
$E =$ مجموعه‌ی کسانی که چای مینوشند،
$F =$ مجموعه‌ی کسانی که قهوه مینوشند،
$G =$ مجموعه‌ی کسانی که شراب مینوشند.

این مجموعه‌ها را بوسیله‌ی علامات مذکور بیان کنید:
(آ) مجموعه‌ی فلاسفه‌ی ایرانی که شراب مینوشند.
(ب) مجموعه‌ی شعرای هندی که شراب و قهوه مینوشند.
(پ) مجموعه‌ی شعرای ایرانی که شراب و قهوه مینوشند ولی چای نمینوشند.

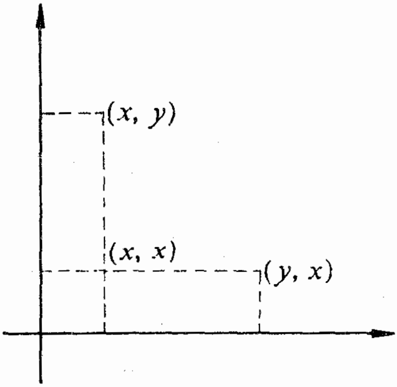
(ذ) مجموعه‌ی نوشندگان غیر ایرانی و غیر هندی چای.
(ذ) مجموعه‌ی کسانی که نه شراب، نه چای، و نه قهوه مینوشند.
(ج) مجموعه‌ی شعرای ایرانی یا هندی که شراب مینوشند ولی قهوه یا چای نمینوشند.
(چ) مجموعه‌ی فلاسفه‌ی ایرانی یا هندی.
(ح) مجموعه‌ی فلاسفه‌ی غیر ایرانی و غیر هندی، که هم شراب، هم چای، و هم قهوه مینوشند.

فصل ۳

نسبت

§۱ کلیات در نِسَبِ دوتائی

۱.۰۱ زوج مرتب. چنانکه میدانید، هر دسته‌ی متشکل از دو عدد حقیقیِ دارایِ ترتیب معین را میتوان بوسیله‌ی نقطه‌ای از صفحه‌ی دو محور مختصات نمایش داد، که عدد اول طول و عدد دوم عرض آن است. دو دسته‌ی مرتب (x, y) و (x', y') فقط و فقط وقتی یک نقطه را نمایش میدهند که $x = x'$ و $y = y'$. ضمناً ملاحظه میکنید که مفهوم دسته‌ی متشکل از دو عدد حقیقی با ترتیب معین با مفهوم مجموعه‌ی دو عدد حقیقی از دو جهت متفاوت است. اول اینکه در مفهوم مجموعه ترتیب اعضا ملحوظ نیست، بلکه $\{x, y\} = \{y, x\}$، و حال آنکه، در مورد دسته‌هائی از نوع مذکور، عموماً (x, y) با (y, x) متفاوت است (شکل ۱۱). دوم اینکه اگر $y = x$ آنگاه $\{x, y\} = \{x\}$، و حال آنکه، در همان صورت، دسته‌ی (x, x) هویت خود را به عنوان دسته‌ای از دو عدد حفظ میکند.



شکل ۱۱

دسته‌های متشکل از دو شیء با ترتیب معین، که مثالی از آن گذشت، در توضیحات آتیه نقش اساسی دارند. چنین دسته‌ای را زوج مرتب میخوانیم، و زوج مرتب x و y را (با همین ترتیب) به (x, y) نمایش میدهیم، و ازواج مرتب (x, y) و (x', y') را فقط وقتی مساوی میشماریم که $x = x'$ و $y = y'$.

در زوج مرتب (x, y)، x را مختص اول و y را مختص دوم این زوج مرتب نامیم. فراموش نکنید که بین زوج مرتب (x, y) و مجموعه‌ی $\{x, y\}$ باید بدقت تمیز بگذارید. x و y را «اعضای» (x, y) **نخوانید.**

سه تائی مرتب را میتوان بوسیله‌ی زوج مرتب تعریف کرد: سه‌تائی مرتب x، y، و z، که به علامت (x, y, z) نمایش داده میشود، یعنی زوج مرتب $((x, y), z)$، یا زوج مرتبی که مختص اولش زوج مرتب (x, y) است، و مختص دومش z.

۱.۱.۰۱ تبصره. در این مرحله، مجموعه‌سازی از اشیاء گوناگون بر شما معلوم است. از جمله، میتوانید مجموعه‌هائی از ازواج مرتب بسازید. مثلاً، از سه زوج مرتب $(1, 1)$،

$(1, 3)$، و $(2, 4)$ میتوان مجموعه‌ی

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$$

را ساخت. ملاحظه کنید که هر یک از زوجهای مرتب مذکـور شیء مشخصی است و عضو A میباشد، یعنی

$$(1, 1) \in A, \qquad (1, 3) \in A, \qquad (2, 4) \in A.$$

همچنین، ملاحظه کنید که، بنا بر تعریف تساوی زوجهای مرتب، هیچ یک از اشیاء $(3, 1)$ و $(4, 2)$ عضو A نیست، یعنی

$$(3, 1) \notin A, \qquad (4, 2) \notin A.$$

چنانکه خواهید دید، مجموعه‌های ازواج مرتب در ریاضیات اهمیت حیاتی دارند.

۱.۱.۲.۳. تمرین

۱. دو مجموعه از ازواج مرتب بسازید که یکی جزء حقیقی دیگری باشد.

۲. بنا بر آنکه

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}, \qquad B = \{(1, 3), (4, 2)\},$$

مطلوبست $A \cup B$، $A \cap B$، $A - B$، و $B - A$.

۳. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای تساوی سه‌تائیهای مرتب (x, y, z) و (x', y', z') آنست که $x = x'$، $y = y'$، و $z = z'$.

۲.۲.۳. نسب دوتائی

۱.۲.۲.۳. تعریف. هر مجموعه‌ای از ازواج مرتب را یک نسبت دوتائی خوانیم[1].

در این کتاب، هر جا کلمه‌ی نسبت مطلقاً بکار رود مقصود نسبت دوتائی است.

در این فصل معمولاً، متغیرهای فردی f، g، و h را برای نامیدن انـواع نسب دلخواه بکار میبریم.

بطور کلی، اگر f یک نسبت باشد، بنا بر تعریف فوق، f مجموعه‌ای است از اشیائی به صورت (x, y)، و هر یک از این اشیاء یک عضو آن نسبت است. معمولاً، گـزاره‌نمای $(x, y) \in f$ را به صورت xfy مینویسند:

۲.۲.۲.۳. تعریف. xfy یعنی $(x, y) \in f$. گـزاره‌نمـای xfy بدیـن عبارات خوانـده میشود:

x نسبت f به y دارد؛

بین x و y نسبت f بر قرار است.

(۱) در این فصل از نسبتهای عـادی مانند نسبتهای پدری، مـادری، و غیره صحبتی نمیکنیم. در فصل ۲ض توضیح کافی در این باب و در تعـریف این گونه نسبتها بـه وسیله‌ی مجموعه‌های ازواج مرتب آمده است.

بنا بر این تعریف، $(xfy)\sim$ («x نسبت f به y ندارد») معادل $(x, y) \notin f$ است.

۱.۲.۳. امثله و فواید

(آ). مجموعه‌ی

$$f = \{(1, 2), (1, \text{سعدی}), (\text{تهران}, 1), (\text{سعدی}, \text{تهران}), (1, 1)\}$$

یک نسبت است، و هر یک از ازواج مرتب داخل ابرو یک عضو آن میباشد، مثلاً، $(1, 2) \in f$ و یا $1f2$؛ به عبارت دیگر، 1 نسبت f به 2 دارد. همچنین، سعدی نسبت f به 1 و نیز نسبت f به تهران دارد، اما $\sim$(سعدی f تهران)، زیرا زوج مرتب (سعدی ,تهران) عضو f نیست.

(ب). $\varnothing$ یک نسبت شمرده میشود، منتها، چون هیچ چیز این نسبت را به چیزی ندارد (چرا؟)، $\varnothing$ را نسبت ممتنع نامند.

(پ). چون هر نسبت یک مجموعه است، میتوان مفاهیم و احکام مربوط به مجموعه‌ها را در باب نسب بکار برد (مسائل ۱ و ۲ از تمرین ۱.۱.۲ ملاحظه شود). بالاخص، باید توجه داشت که هر جزء (مجموعک) یک نسبت یک نسبت است.

به هر نسبت چند مجموعه‌ی مهم وابسته است که باید آنها را به خوبی شناخت:

۱.۲.۴. تعریف. فرض کنیم f نسبتی باشد.

I. حوزه‌ی f (علامت: حf) یعنی مجموعه‌ی مختصات اول جمیع ازواج مرتب متعلق به f؛ و به عبارت دیگر، مجموعه‌ی جمیع اشیائی که هر یک به چیزی نسبت f دارد.

II. حوزه‌ی عکس f (علامت: حعf) یعنی مجموعه‌ی مختصات دوم جمیع ازواج مرتب متعلق به f؛ و به عبارت دیگر، مجموعه‌ی جمیع اشیائی که به هر یک از آنها چیزی نسبت f دارد.

III. دامنه‌ی f (علامت: دf) یعنی اتحادیه‌ی حوزه و حوزه‌ی عکس f؛ به عبارت دیگر،

$$\text{د}f = \text{ح}f \cup \text{حع}f$$

مثلاً، در نسبت مثال آ: ۱.۲.۳، اگر سعدی و تهران را، بترتیب، a و b بنامیم،

$$\text{ح}f = \{1, a\}, \qquad \text{حع}f = \{2, 1, b\},$$

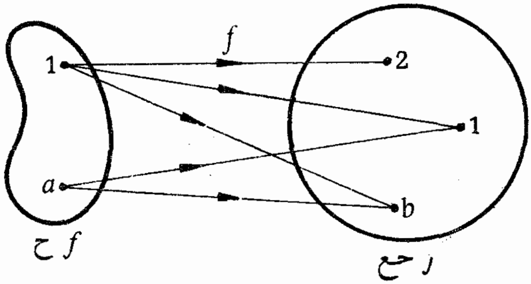
$$\text{د}f = \{1, 2, a, b\}.$$

۱.۲.۵. نمایش نسب. نسبتها را به طرق گوناگون میتوان نمایش داد. از جمله اینکه اعضای حوزه و حوزه‌ی عکس نسبت را جداگانه (ولو عضو مشترک داشته باشند) به وسیله‌ی نقاطی[1] نمایش میدهند، و هر رابطه به صورت xfy را با سهمی به مبدأ x و منتهای y. حاجت به تذکار نیست که، در این نمایش، جهت سهمها منتهای اهمیت را دارد. در شکل ۱۲، نمایش سهمدار

(۱) وضع نقاط خالی از اهمیت است.

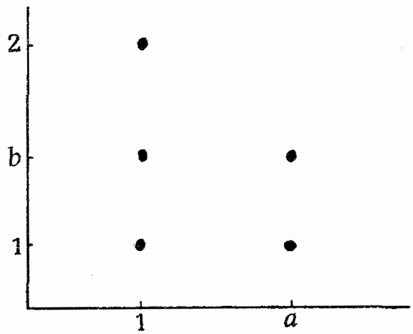
نسبت مثال آ : ۱.۲.۳ بدین طریق دیده میشود.

$$f = \{(1, 2), (a, 1), (1, b), (a, b), (1, 1)\}.$$



شکل ۱۲

طریق دیگر در نمایش نسب نمایش کارتزین[1] است، که مانند نمایش دادن نقاط یک صفحه با مختصاتشان میباشد. در این طریقه، برای احتراز از تشتت و بینیازی از رسم سهمها، همواره اعضای حوزه‌ی نسبت را بر خطی افقی و اعضای حوزه‌ی عکس را بر خطی قائم نمایش میدهیم، و هر عضو نسبت را به وسیله‌ی نقطه‌ای که مختصاتش مختصات آن عضو هستند مشخص میکنیم. مجموعه‌ی این نقاط را نمودار یا گراف[2] نسبت خوانند. در شکل ۱۳، نمودار نسبت f سابق‌الذکر دیده میشود.



شکل ۱۳

۱.۲.۶. تبصره. نسب را از دریچه‌های مختلف میتوان نگریست، و نامگذاری کرد. چون نسبتی مانند f هر عضو حوزه‌ی خود را با یک یا چند عضو از حوزه‌ی عکس خود جفت میکند، f را تناظر (بین fح و fرحع) میخوانند، و اگر xfy آنگاه گویند y نظیر (یا یکی از نظیرهای) x است در این تناظر. همچنین، میتوان گفت که نسبت f هر عضو fح را به

(۱) cartesian (به معنی «منسوب به دکارت*»).
(۲) graph

نظیرهای آن «تبدیل» میکند. از این لحاظ نسبت را تبدیل نیز میخوانند[۱]، و اگر xfy آنگاه y را مُبَدَّل x در تبدیل f نامند، و x را اصل y در آن تبدیل خوانند. در شکل ۱۲ (صفحه‌ی ۷۹)، هر یک از 1، 2، و b نظیر 1 است در تناظر f، و هر یک از آنها مبدل 1 است در تبدیل f، و هر یک از 1 و a اصل b در همین تبدیل میباشد.

بالاخره، با توجه به شکل مذکور، میتوان گفت که نسبت f حوزه‌ی خود را بر حوزه‌ی عکس خود «مینگارد» یا بر آن «نقش میکند». از این لحاظ، نسبت را نِگاشت خوانیم، و اگر xfy آنگاه y را نگاره‌ی x یا نقش x با نگاشت f نامیم. اغلب، اصطلاح نگاشت را در مورد توابع (۲§) بکارمیبرند، و ما نیز چنین خواهیم کرد.

۱.۲.۷. تبصره. چون لازم است که محصلین بر استدلال با نسبتها تسلط یابند، در پایان این کلیات، خلاصه‌ی نکات سابق‌الذکر را که برای این منظور باید حاضرالذهن داشت ذیلاً میآوریم.

I. اگر f یک نسبت باشد عضو دلخواهی از f زوج مرتبی است مانند (x, y).

II. عبارت «$(x, y) \in f$» و «xfy» به یک معنی هستند.

III. اگر xfy آنگاه $x \in$ ح f و $y \in$ حع f.

IV. اگر $x \in$ ح f آنگاه چیزی مانند y هست که xfy.

V. اگر $y \in$ حع f آنگاه چیزی مانند x هست که xfy.

VI. اگر $x \in$ د f آنگاه چیزی مانند y هست که xfy یا yfx.

برای مزید توضیح، دو مثال میآوریم. در این مثالها، ارقام رومی اشاره به مواد ششگانه‌ی فوق است.

۱.۲.۷.۱. مثال ۱. اگر f و g دو نسبت باشند شرط لازم و کافی برای آنکه $f \subseteq g$ آنست که هر چیز که نسبت f به چیزی دارد نسبت g هم بدان داشته باشد.

برهان. فرض کنیم f و g دو نسبت باشند. لزوم. فرض کنیم $f \subseteq g$ (۱). اگر xfy آنگاه، بنا بر II، $(x, y) \in f$. پس، بنا بر (۱)، $(x, y) \in g$. بالنتیجه، بنا بر II، xgy. کفایت. فرض کنیم شرط مذکور در قضیه برقرار باشد. باید ثابت کرد که هر عضو f عضو g است. فرض کنیم زوج مرتب (x, y) عضو دلخواهی از f باشد. بنا بر II، xfy. پس، بنا بر فرض، xgy، بالنتیجه، بنا بر II، $(x, y) \in g$. ▲

۱.۲.۷.۲. مثال ۲. اگر f و g دو نسبت باشند و $f \subseteq g$ آنگاه

$$\text{ح} f \subseteq \text{ح} g, \qquad \text{حع} f \subseteq \text{حع} g.$$

برهان. فرض کنیم $f \subseteq g$ (۱). رابطه‌ی اول را ثابت و اثبات دومی را به متعلم محول میکنیم. فرض کنیم x عضو دلخواهی از حf باشد. بنا بر IV، چیزی مانند y هست

---

(۱) در اغلب رشته‌های ریاضیات، اصطلاح تبدیل را فقط در مورد توابع، که از اقسام نسبت میباشند، بکار میبرند.

که xfy. پس، بنا بر (۱) و مثال قبل، xgy. بالنتیجه، بنا بر III، $x \in \text{ح}g$. ▲

۱.۲.۸. تمرین

۱. کدام یک از (a, b)، $\{(a, b)\}$، $\{\{(a, b)\}\}$ یک نسبت است؟
۲. دو نسبت مانند f و g بسازید که دومی دارای پنج عضو باشد و هر چیز که نسبت f به چیزی دارد نسبت g هم به آن داشته باشد. هر دو نسبت را به دو طریق نمایش دهید.
۳. نسبتی مانند f بنویسید که همواره اگر xfy آنگاه yfx.
۴. در شکل ۱۲ (صفحهٔ ۷۹) جهت همهٔ سهمها را تغییر میدهیم. نسبتی بنویسید که شکل جدید نمایش سهمدار آن باشد.
۵. شرط لازم و کافی برای آنکه دو نسبت f و g باهم متساوی باشند آنست که همواره اگر xfy آنگاه xgy و بالعکس.
۶. دو نسبت f و g باهم متساویند. ثابت کنید که

$$\text{حع}f = \text{حع}g, \qquad \text{ح}f = \text{ح}g,$$

۱.۳. حاصلضرب مستقیم (یا کارتزین) دو مجموعه. از جملهٔ نسبتهای مهم حاصلضرب مستقیم دو مجموعه است. قبلاً مطلب را با مثالی توضیح میدهیم. فرض کنیم

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{0, 1\}.$$

ازواج مرتبی که مختص اول هر یک عضو A و مختص دومش عضو B باشد منحصرند به

$$(1, 0), \quad (1, 1), \quad (2, 0), \quad (2, 1), \quad (3, 0), \quad (3, 1).$$

مجموعهٔ جمیع این ازواج یک نسبت است. این نسبت را $A \times B$ یا حاصلضرب مستقیم (یا کارتزین) A در B مینامند. به عبارت دیگر،

$$A \times B = \{(1, 0),\ (1, 1),\ (2, 0),\ (2, 1), (3, 0),\ (3, 1)\}.$$

این مجموعه را میتوان چنین تعریف کرد:

مجموعهٔ ازواج مرتبی مانند (x, y) که $x \in A$ و $y \in B$؛

یا، با توجه به ۲:۲.۶، $\{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B\}$. در پرتو این توضیحات، تعریف کلی ذیل را میآوریم:

۱.۳.۱. تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند، $A \times B$ یعنی نسبت

$$\{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B\}.$$

$A \times B$ را حاصلضرب مستقیم (یا کارتزین) A در B (به همین ترتیب) نامند. بالاخص، $A \times A$ را A^2 مینامیم؛ به عبارت دیگر،

$$A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

چون هر جزء یک نسبت خود یک نسبت است، هر مجموعک حاصلضرب مستقیم دو مجموعه یک نسبت میباشد. نظر به اهمیت نسب جزء یک حاصلضرب مستقیم، اصطلاحاتی در مورد این نسب متداول است، از این قرار:

۱.۳.۲. تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند.

I. f را نسبتی **از** A **در** B خوانیم اگر $f \subseteq A \times B$. بالاخص، $A \times B$ را نسبت عمومی[۱] از A در B نامیم.

II. f را نسبتی **در** A خوانیم اگر $f \subseteq A \times A$.

III. نسبت همانی در A یا قطر A یعنی $\{(x, y) \mid x, y \in A \,\&\, x = y\}$. به عبارت دیگر، نسبت همـانی در A، که گاه I_A نامیده میشود، مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتبی است از اعضای A که مختصات هر یک از آنها یکسان باشند.

۱.۳.۳. امثله

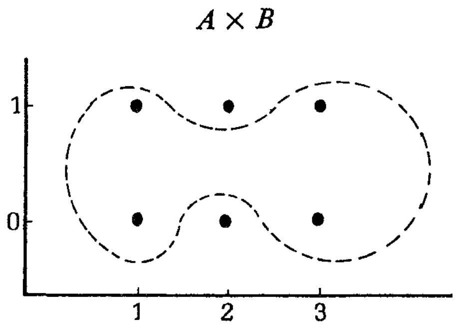
در مثالهای آتیه، A و B مجموعه‌های مذکور در آغاز ۱.۳ میباشند.

(آ).

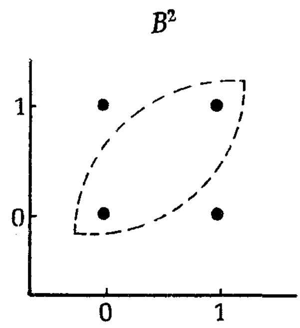
$$B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\},$$
$$B^2 = B \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

از مقایسه‌ی $A \times B$ و $B \times A$ معلوم است که $A \times B \neq B \times A$.

در شکلهای ۱۴ و ۱۵، نمایش کارتزین دو نسبت $A \times B$ و B^2 دیده میشود[۲].



شکل ۱۴



شکل ۱۵

(ب). نسبت $f = \{(1, 0) (1, 1), (3, 1), (3, 0)\}$ مجموعـک $A \times B$ است. پس، f نسبتی است از A در B. بعلاوه،

$$\text{ح}f = \{1, 3\} \subseteq A, \qquad \text{حع}f = \{0, 1\} = B.$$

نمایش کارتزین نسبت f در شکل ۱۴، در داخل نقطه‌چین، دیده میشود.

(پ). نسبت $g = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ مجموعک $B \times B$ است. پس، g نسبتی است در B. همچنین، $B \times B$ نسبتی است در B (نسبت عمومی در B).

(ت). نسبت $h = \{(0, 0), (1, 1)\}$ نسبت همانی در B یا قطر B است، و نمـایش کارتزین آن در شکل ۱۵ در داخل نقطه‌چین مشاهده میشود.

---

(۱) وجه تسمیه اینست که، بازاءِ هر x از A و هر y از B، $(x, y) \in A \times B$. پس، با توجه به ۱.۲.۲، هر عضو A به هر عضو B نسبت $A \times B$ دارد.

(۲) خطوط نقطه‌چین در شکلها مربوط به این مثال نیست.

۱.۳.۴. تمرین

۱. a، b، c، d، و e دو بدو متمایزند، و

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{e, d\}.$$

اولاً، نسبتهای $A \times B$، $B \times A$، A^2، و B^2 را با اعضایشان مشخص کنید. ثانیاً، چند نسبت از A در B، چند نسبت از B در A، نسبت همانی در A، و نسبت همانی در B را بنویسید. ثالثاً، در مورد هر یک از نسبتهای مذکور در دو قسمت قبل، حوزه و حوزه‌ی عکس هر نسبت را مشخص و نمایش کارتزین نسبت را رسم کنید.

۲. $A = \{a, b\}$ و $a \neq b$. همه‌ی نسبتهای در A را بنویسید، و هر یک را که میشود نمایش دهید.

۳. دو مجموعه‌ی غیر خالی مانند A و B بسازید که $A \times B = B \times A$.

۴. در مسئله‌ی ۱، نسبتهای، $A \times \varnothing$، $\varnothing \times A$، $(A \times B) \cup (B \times A)$، و $(A \times B) \cap (B \times A)$ را مشخص کنید.

۵. شرط لازم و کافی برای آنکه زوج مرتب (x, y) متعلق به نسبت $A \times B$ باشد چیست؟

۱.۴. نسب و گزاره‌نماها. فرض کنیم A مجموعه‌ای و $F(x, y)$ گزاره‌نمائی باشد. به قیاس آنچه در ۲:۲.۴ گذشت، مجموعه‌ی ازواج مرتب (x, y) از اعضای A را که در $F(x, y)$ صدق کنند (۱:۳.۵) مجموعه‌ی صدق $F(x, y)$ در $A \times A$ (یا در A) میخوانیم. این مجموعه عبارتست از نسبت

$$f = \{(x, y) \mid x, y \in A \;\&\; F(x, y)\}, \qquad (*)$$

که نسبتی است در A، و آن را نسبتی در A که با گزاره‌نمای $F(x, y)$ مشخص (یا تعریف) میشود نامیم. از $(*)$ معلومست که زوج مرتب (x, y) از اعضای A فقط و فقط وقتی به f تعلق دارد که در $F(x, y)$ صدق کند؛ به عبارت دیگر، بازاء هر x و y از A،

$$x f y \Leftrightarrow F(x, y). \qquad (\dagger)$$

بالاخره، اگر x و y را به A مقید سازیم $(*)$ را میتوان به صورت ذیل نوشت:

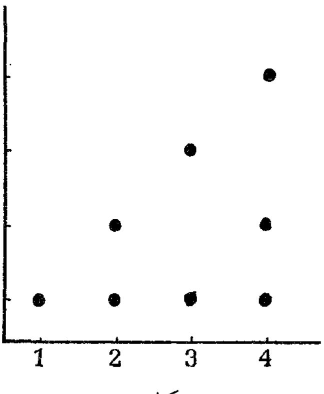
$$f = \{(x, y) \mid F(x, y)\}.$$

۱.۴.۱. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F(x, y)$ به معنی «x بر y قابل قسمت است» باشد. مجموعه‌ی صدق $F(x, y)$ در A عبارتست از نسبت

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\},$$

که آن را میتوان «نسبت قابلیت قسمت در A» نامید، و نمودار آن در شکل ۱۶ دیده میشود. این نمودار نمایش هندسی مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $F(x, y)$ است در A.



شکل ۱۶

(ب). نکته‌ای که در ۲:۲.۴.۱ گفته شد در اینجا نیز قابل توجه است. در مثال (آ)، با متغیرهای فردی

مقید به A، نسبت

$$g = \{(x, y) \mid 2 > 1\}$$

را به معنی

$$\{(x, y) \mid 2 > 1 \,\&\, x = x \,\&\, y = y\} \qquad (۱)$$

میگیریم. چون هر x و y از A در گزاره‌نمای $2 > 1 \,\&\, x = x \,\&\, y = y$ صدق میکند، نسبت (۱) مساوی $A \times A$ میباشد. همچنین، نسبت $h = \{(x, y) \mid y > 3\}$ به معنی $\{(x, y) \mid x = x \,\&\, y > 3\}$ است، که مجموعه‌ی ازواج مرتبی از اعضای A است که مختص دوم هر یک از 3 بزرگتر باشد، یعنی

$$h = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}.$$

۱.۴.۲. تعریف نسب در ریاضیات. در ریاضیات، معمولاً در تعریف نسبتی مانند f در مجموعه‌ای مانند A، گزاره‌نمای $x f y$ را به وسیله‌ی گزاره‌نمائی مانند $F(x, y)$ که معنیش معلوم است تعریف میکنند. در این صورت، نسبت f را، اگر بخواهیم، میتوانیم به طریقی که در ۱.۴ دانسته شد، به وسیله‌ی ازواج مرتب تعریف کنیم.

۱.۴.۲.۱. مثال. در مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbf{N}$)، عمل جمع را میدانیم و میخواهیم نسبت کوچکتری را در این مجموعه تعریف کنیم.

نسبت مورد نظر را f مینامیم، و گزاره‌نمای $x f y$ (به معنی «x نسبت کوچکتری به y دارد» یا «x کوچکتر از y است») را به وسیله‌ی عمل جمع تعریف میکنیم. با استعمال متغیرهای فردی مقید به $\mathbf{N}$، تعریف مطلوب اینست:

$x f y$ یعنی عددی طبیعی هست که حاصلجمعش با x مساوی y است.

نسبت مورد بحث، مانند سایر نسبتهای مهم ریاضی، اسم خاصی دارد، و آن «$<$» است. تعریف مذکور تعریف «$x < y$» میباشد، و با در دست داشتن آن، تعریف نسبت «$<$» چنین خواهد بود:

$$< = \{(x, y) \mid \text{عددی طبیعی هست که حاصلجمعش با } x \text{ مساوی } y \text{ است}\}.$$

۱.۴.۳. تبصره. موارد بسیار متعدد در ریاضیات هست که نسبتهائی بکار میبرند بی آنکه اسم نسبت در کار آورند. مثلاً، «خطی با معادله‌ی $y = 1 - x$» یعنی مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی که x و y در گزاره‌نمای $y = 1 - x$ صدق کنند، و این نیست مگر نسبت

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \,\&\, y = 1 - x\},$$

که مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $y = 1 - x$ است در $\mathbf{R}$. پس، «خطی با معادله‌ی $y = 1 - x$» یعنی نسبتی در $\mathbf{R}$ که با گزاره‌نمای مذکور مشخص میگردد. نمایش کارتزین این نسبت همان است که معمولاً «نمایش معادله‌ی $y = 1 - x$» خوانده میشود. همچنین، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که مختصاتشان، در عین حال، در گزاره‌نماهای $1 \leqslant x$ و $y > x$ صدق کنند نمایش کارتزین نسبت

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \,\&\, 1 \leqslant x \,\&\, y > x\}$$

یا نمایش هندسی مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $x < y \;\&\; x \leqslant 1$ میباشد.

۱.۴.۴. تبصره در تسمیه‌ی نسب. در منطق، اغلب، نسبتها را به صورتی که در گزاره‌ها میآیند میخوانند. مانند نسبت پدرِ، بجای نسبت پدری؛ نسبت بزرگتر از، بجای نسبت بزرگتری؛ نسبت بینِ، بجای نسبت بینیت؛ و نسبت قابل قسمت بر، بجای نسبت قابلیت قسمت.

۱.۴.۵. تمرین

۱. $A = \{0, 1, 2, -1\}$ و $F(x, y)$ به معنی «x کوچکتر از y است» میباشد. نسبتی را که به وسیله‌ی $F(x, y)$ در A تعریف میشود با ازواج مرتب آن بنویسید، و نمایش کارتزین آن را رسم کنید.

۲. بنا بر آنکه

$$A = \{\text{پاریس ,مادرید ,اسپانیا ,فرانسه ,انگلستان ,تهران}\}$$

و $F(x, y)$ به معنی «x پایتخت y است» باشد، نسبتی را که به وسیله‌ی $F(x, y)$ در A تعریف میشود با ازواج مرتب آن بنویسید، و نمودار آن را رسم کنید.

۱.۵. نسبتهای سه‌تائی. بحث گذشته در باب نسبتهای دوتائی بود. در این مقام، توضیح مختصری در باب نسبتهای سه‌تائی میآوریم.

۱.۵.۱. تعریف. نسبت سه‌تائی یعنی مجموعه‌ای از سه‌تائیهای مرتب.

اگر $F(x, y, z)$ گزاره‌نمائی مشتمل بر سه متغیر فردی x، y، و z باشد، مجموعه‌ی

$$\{(x, y, z) \mid F(x, y, z)\} \qquad (*)$$

بر طبق قرارداد مذکور در ۲:۲.۶، عبارتست از مجموعه‌ی جمیع سه‌تائیهای مرتب (x, y, z) که مختصاتش در گزاره‌نمای $F(x, y, z)$ صدق کنند. مجموعه‌ی $(*)$ یک نسبت سه‌تائی است، و گزاره‌نمای مذکور مبین این نسبت است. مثلاً، در اعداد طبیعی، گزاره‌نمای «z بین x و y است» (یا $x < z < y$) مبین نسبت بینیّت است، و این نسبت عبارتست از

$$\{(x, y, z) \mid x < z < y\}. \qquad (۱)$$

تعلق داشتن یک سه‌تائی مرتب از اعداد طبیعی به مجموعه‌ی (۱) یعنی برقراری نسبت بینیت بین مختصات آن به ترتیب معین، و بالعکس. مثلاً، «5 بین 2 و 7 است» یعنی سه‌تائی مرتب $(2, 7, 5)$ به مجموعه‌ی (۱) تعلق دارد.

از نسبتهای سه‌تائی مهم حاصلضرب مستقیم سه مجموعه است:

۱.۵.۲. تعریف. اگر A، B، و C سه مجموعه باشند، حاصلضرب مستقیم A در B در C (به همین ترتیب)، که $A \times B \times C$ نامیده میشود، چنین تعریف میشود:

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A \;\&\; y \in B \;\&\; z \in C\}.$$

بالاخص، $A \times A \times A$ را A^3 مینامیم.

۱.۵.۳. تبصره. نسبتهای سه‌تائی به نسبتهای دوتائی قابل تحویل‌اند، زیرا، مجموعه‌ای از سه‌تائیهای مرتب مانند

$$f = \{(x, y, z), (x', y', z'), \cdots\}, \tag{۱}$$

بنا بر تعریف سه‌تائی مرتب، به معنی

$$\{((x, y), z), ((x', y'), z'), \cdots\} \tag{۲}$$

است، و این مجموعه مجموعه‌ای است از ازواج مرتب، و لهذا، یک نسبت دوتائی است. حوزه و حوزه‌ی عکس این نسبت عبارتند از

$$\text{ح}f = \{(x, y), (x', y'), \cdots\}, \tag{۳}$$

$$\text{حع}f = \{z, z', \cdots\}. \tag{۴}$$

در نسبت سه‌تائی (۱)، اگر مختصات اول، دوم، و سوم اعضای این نسبت، بترتیب، متعلق به مجموعه‌های A، B، و C باشند، مجموعه‌ی (۳) مجموعکی از $A \times B$، و مجموعه‌ی (۴) مجموعکی از C خواهد بود، و نسبت f نسبتی از $A \times B$ در C میباشد.

۱.۵.۴. تمرین

۱. a، b، c، d، و e دو بدو متمایزند، و

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{d\}, \qquad C = \{c, e\}.$$

هر یک از مجموعه‌های $A \times B \times C$ و C^3 را با اعضایش مشخص کنید.

۱.۶. بعضی قراردادهای اختصاری. از این ببعد، برای اختصار در بیان، قراردادهای ذیل را بکار میبریم:

I. «هر x (از A)» بجای «هر شیء دلخواه مانند x (از A)».

II. «هر x و y (از A)» بجای «هر دو شیء دلخواه مانند x و y (متعلق به A)».

III. «xی[1] (از A) هست که» بجای «شیئی مانند x (متعلق به A) هست که».

IV. «xی و yی (از A) هست که» بجای «دو شیء مانند x و y (متعلق به A) هست که».

تعمیم آسان است.

مثلاً، گزاره‌ی

بازاء هر عضو A مانند x، عضوی مانند y از B هست که xfy

را چنین بیان میکنیم:

بازاء هر x از A، yی از B هست که xfy.

---

(۱) بخوانید «ایکسی». همچنین، «yی» و «zی» را «ایگرکی» و «زدی» میخوانیم، و غیره.

همچنین، قضیه‌ی

بازاء هر عدد حقیقی مانند x، عددی صحیح مانند n هست که $x < n$

با قراردادهای فوق چنین بیان میشود:

بازاء هر x از $\mathbf{R}$، nی از $\mathbf{I}$ هست که $x < n$.

۲ § کلیات در باب توابع

۲.۱. مقدمه. مفهوم تابع از مهمترین و اساسیترین مفاهیم منطقی و ریاضی است. محصلین باید اطلاعات مبهمی را که از «تابع» و «متغیر مطلق» دارند کنار بگذارند، و از آغاز از راه راست وارد این موضوع شوند.

جهت آماده کردن ذهن برای تعریف تابع، مثالی میآوریم. در نسبت

$$g = \{(1, 1), (1, 4), (4, 2)\}$$

ازواج مرتب $(1, 1)$ و $(1, 4)$ در مختص اول شریکند، ولی مختصات دومشان متفاوت است؛ و چنانکه دیده میشود، $1g1$ و $1g4$. اما، نسبت

$$f = \{(1, 1), (4, 1), (3, 0), (2^2, 1), (0, 1)\}$$

دارای این خصوصیت است که هر دو عضو آن که مختصات اولشان با هم مساوی هستند مختصات دومشان نیز با هم مساویند؛ و به عبارت دیگر، هر وقت xfy و xfz آنگاه $z = y$. چنین نسبتی را تابع نامند. بطور کلی

۲.۲. تعریف[۱]. نسبت f را یک تابع خوانیم در صورتی که همواره اگر xfy و xfz آنگاه $y = z$.

توجه داشته باشید که هر تابع یک نسبت است.

۲.۲.۱. تعریف. اگر نسبت f تابع باشد fح را حوزه‌ی تعریف f و هر عضو آن را یک شناسه‌ی f، و fحع را حوزه‌ی مقادیر f و هر عضو آن را یک مقدار f خوانند.

قضیه‌ی اساسی ذیل نتیجه‌ی مستقیم تعریف تابع است، و یک تعریف مهم در ضمن آن آمده است:

۲.۲.۲. قضیه. فرض کنیم f یک تابع باشد.

I. بازاء هر عضو حوزه‌ی تعریف f مانند x، یک و تنها یک عضو مانند y از حوزه‌ی مقادیر f هست که xfy.

II. (تعریف) یگانه عضو مذکور در قسمت I را $f(x)$ (و در بعضی موارد[۲] fx) مینامیم؛

---

(۱) این تعریف ناظر به «تابع یکمقداری» است. در کتاب حاضر، اصطلاح تابع همواره به همین معنی بکار میرود.

(۲) مانند $\sin x$ و $\log x$.

و آن را مقدار تابع f در x یا مقدار نظیر x از تابع f میخوانیم.

III. بازاء هر x از حf، $xff(x)$.

IV. بازاء هر x از حf، اگر xfy آنگاه $f(x) = y$ و بالعکس.

برهان. فرض کنیم نسبت f تابع باشد. اگر $x \in$ حf آنگاه چیزی، مثلاً y، هست که xfy (۱). بعلاوه، این چیز منحصر بفرد است، زیرا، اگر در عین حال xfz (۲) آنگاه از (۱) و (۲)، بنا بر تعریف تابع، نتیجه میشود، $y = z$. ضمناً، بنا بر (۱)، $y \in$ حعf.

در باب تعریف II، باید به خاطر سپرد که این تعریف مختص توابع است. بنا بر این تعریف، بازاء هر x از حf، $f(x)$ یگانه چیزی است که x بدان نسبت f دارد (قسمت III). مثلاً، در مورد تابع f مذکور در ۲۰۱،

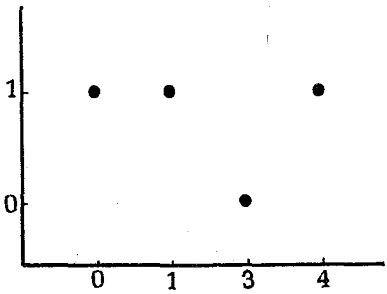
$$f(1) = f(4) = f(0) = 1, \qquad f(3) = 0.$$

بالاخره، فرض کنیم $x \in$ حf. اگر xfy آنگاه، بنا بر I و II، $f(x) = y$. بالعکس، اگر $y = f(x)$ آنگاه، بنا بر III، xfy. ▲

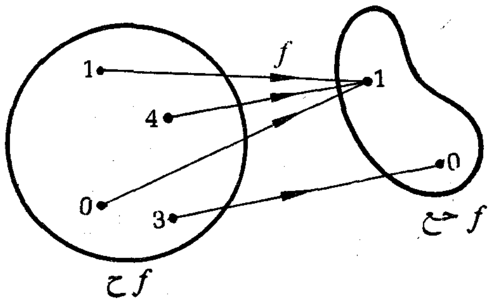
۲.۲.۳. خصوصیت نمایش توابع. نمایشهای کارتزین و سهمدار توابع هر یک خصوصیتی دارد که ناشی از I:۲.۲.۰۲ است. در نمایش کارتزین، بر هر یک از خطوط قائم مرسوم از اعضای حوزه‌ی تابع فقط یک نقطه از نمودار تابع قرار دارد. در نمایش سهمدار، از هر عضو حوزه‌ی تابع فقط یک سهم خارج میشود.

در شکلهای ۱۷ و ۱۸ دو نمایش تابع f مذکور در ۲۰۱ دیده میشود.

$$f = \{(1, 1), (4, 1), (3, 0), (2^2, 1), (0, 1)\}$$



شکل ۱۷



شکل ۱۸

بر طبق اصطلاحات مذکور در ۱.۲.۰۶، میتوان گفت که، در تبدیل f، هر عضو حf درست یک مبدّل دارد؛ یا آنکه نگاشت f هر عضو حوزه‌ی خود را فقط بر یک عضو حوزه‌ی عکس خود مینگارد.

اینک بعضی از اقسام توابع را تعریف میکنیم، و سپس، در ۲.۲.۰۷، مثالهائی در باب

آنها میآوریم.

۲.۲.۴. تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند.

I. تابع f را تابعی **بَر** A **بِتوی** B خوانند در صورتی که

$$\text{ح}f = A, \qquad \text{حع}f \subseteq B,$$

و این مطلب را بدین صورت بیان میکنند:

$$f : A \to B$$

(بخوانید «تابع f بر A بتوی B» یا «f تابعی بر A بتوی B است»).

II. تابع f را **بر** A **بِروی** B خوانند در صورتی که

$$\text{ح}f = A, \qquad \text{حع}f = B.$$

۲.۲.۵. قضیه. اگر A مجموعه‌ای باشد I_A (نسبت همانی در A) تابعی است که حوزه‌ی تعریف و حوزه‌ی مقادیرش A است، و بازاء هر x از A، $I_A(x) = x$. (I_A را تابع همانی در A میخوانند.)

این حکم نتیجه‌ی مستقیم تعریف نسبت همانی است، و اثباتش به متعلم محول میشود.

۲.۲.۶. تعریف. تابع f را یک تابع ثابت خوانیم در صورتی که fحع مجموعه‌ای یکانی باشد؛ یعنی، مقداری ثابت مانند c موجود باشد که، بازاء هر x از حf، $f(x) = c$.

۲.۲.۷. امثله[۱]

(آ). فرض کنیم

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{1, 6, 7\},$$
$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 6), (4, 1)\},$$
$$g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 6), (4, 7)\}.$$

(۱). هر یک از f و g تابع است، و

$$\text{ح}f = \{1, 2, 3, 4\} = A, \qquad \text{حع}f = \{1, 6\} \subseteq B,$$
$$\text{ح}g = \{1, 2, 3, 4\} = A, \qquad \text{حع}g = \{1, 6, 7\} = B.$$

(۲). چنانکه دیده میشود، هر دو تابع بر A بتوی B هستند؛ و بعلاوه، g بر A بروی B است، اما f بروی B نیست.

(۳). تابع f هر عضو A را بر یك عضو B نقش یا به آن تبدیل میکند، اما B عضوی دارد (7) که نقش یا مبدل عضوی از A نیست. تابع g نیز هرعضو A را بر یک عضو B نقش میکند، و بعلاوه، هر عضو B مبدل حد اقل یک عضو A است. بیان کلی این مطالب بر متعلم است.

(ب). نسبت $g = \{(1, 1), (0, 0)\}$ تابع همانی در $A = \{1, 0\}$ است. $\text{ح}g = \text{حع}g = A$، $g(1) = 1$، و $g(0) = 0$. تابع g هر عضو A را به همان عضو تبدیل میکند.

---

(۱) در مثالهای آ ـ ب نمایشهای سهمدار و کارتزین هر تابع را رسم کنید.

بطور کلی، تابع همانی‌در یک مجموعه، هر عضو این مجموعه را به همان عضو تبدیل میکند. بدین مناسبت، تابع همانی را تبدیل همانی هم میخوانند.

(پ). نسبت $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ یک تابع است، و

$$\text{ح}f = \{1, 2, 3\}, \qquad \text{حع}f = \{2\}.$$

پس، f تابعی است ثابت. $f(1) = f(2) = f(3) = 2$.

(ت). در مثالهای سابق‌الذکر، تحقیق در اینکه نسبتهای مورد بحث تابع‌اند با بررسی ازواج مرتب آنها میسر است. وقتی که یک نسبت با گزاره‌نمائی تعریف شده باشد، برای تشخیص اینکه آن نسبت تابع هست یا نه، به تعریف تابع متوسل میشویم. مثلاً، فرض کنید نسبت f در $\mathbf{R}$ با گزاره‌نمای $2x + 3y = 1$ تعریف شده باشد، یعنی

$$f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \ \& \ 2x + 3y = 1\}.$$

برای تحقیق در اینکه این نسبت تابع هست یا نه، فرض کنیم xfy و xfz، نتیجه میشود، $2x + 3y = 1$ و $2x + 3z = 1$، و از آنجا $2x + 3y = 2x + 3z$. پس، $y = z$. بالنتیجه، نسبت مذکور تابع است.

۲.۲.۸. تمرین

۱. در هر یک از نسبتهای ذیل، حروف متمایز داخل هر ابرو اسامی اشیاء متمایزند. (آ) کدام یک از این نسبتها تابع است؟ (ب) در مورد هر تابع، حوزه‌ی تعریف و حوزه‌ی مقادیر و نیز مقدار تابع را در هر عضو حوزه‌ی تعریف آن بنویسید. (پ) هر یک از سه نسبت را به دو طریق نمایش دهید.

$$f = \{(a, m), (a, n), (b, p), (c, c)\},$$
$$g = \{(p, p), (a, p), (b, m), (c, m)\},$$
$$h = \{(a, a), (b, m), (c, n)\}.$$

۲. در مورد هر یک از نسبتهای مسئله‌ی قبل که تابع است، دو مجموعه مانند A و B بنویسید که آن تابع بر A بروی B باشد.

۳. ثابت کنید که $\varnothing$ تابع است.

۴. فرض کنیم $A = \{0, 1\}$. (آ) همه‌ی نسبتهای جزء $A \times A$ را بنویسید، و از میان آنها، توابع را از سایرین تفکیک، و نیز توابع ثابت و همانی را مشخص کنید. (ب) در مورد هر تابع، تعیین کنید که این تابع بر A است یا نه، و توابع بر A بتوی A و بروی A را مشخص کنید.

۵. $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \ \& \ x \leqslant 5\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbf{I} \ \& \ -2 \leqslant x \leqslant 5\}$. بدون توسل به نمایش هندسی، تعیین کنید که کدام یک از نسبتهای ذیل تابع است. سپس، مطلب را به وسیله‌ی نمایش هندسی تحقیق کنید:

(آ) $\{(x, y) \mid x \in A \ \& \ y \in \mathbf{R} \ \& \ y = x^2\}$.

(ب) $\{(x, y) \mid x \in A \ \& \ y \in \mathbf{R} \ \& \ x = y^2\}$.

(پ) $\{(x, y) \mid x \in B \ \& \ y \in \mathbf{R} \ \& \ y = x^2\}$.

(ت) $\{(x, y) \mid x \in B \ \& \ y \in \mathbf{R} \ \& \ x = y^2\}$.

۶. ثابت کنید که هر مجموعک یک تابع نیز تابع است.

۲.۳. تساوی توابع. قضیه‌ای که میآید از اهم قضایای مبحث توابع است، و اگر چه نتیجه‌ی مستقیم تعریف تابع و احکام مربوط به نسب میباشد، اثبات آن را، به عنوان «سرمشق»،

به تفصیل ذکر میکنیم.

۲.۳.۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه دو تابع f و g باهم مساوی باشند آنست که در عین حال،

I. $\text{ح}f = \text{ح}g$

II. بازاء هر x از حوزه‌ی تعریف مشترک، $f(x) = g(x)$.

برهان. فرض کنیم f و g تابع باشند.

لزوم. فرض کنیم $f = g$ (۱). برای اثبات I ملاحظه میکنیم که، بنا بر (۱)، $f \subseteq g$ و $g \subseteq f$. پس، بنا بر ۱.۲.۷.۲، $\text{ح}f \subseteq \text{ح}g$ و $\text{ح}g \subseteq \text{ح}f$، و از آنجا، $\text{ح}f = \text{ح}g$. برای اثبات II، گوئیم اگر x عضوی از حوزه‌ی تعریف مشترک باشد، و $y = f(x)$ (۲) آنگاه $(x, y) \in f$. پس، بنا بر (۱)، $(x, y) \in g$، و یا xgy، و بالنتیجه، $y = g(x)$. پس، به موجب (۲)، $f(x) = g(x)$.

کفایت. فرض کنیم I و II برقرار باشند. گوئیم $f = g$. زیرا، اگر (x, y) عضو دلخواهی از f باشد خواهیم داشت، $x \in \text{ح}f$ (آ) و $y = f(x)$ (ب). بنا بر (آ) و I، $x \in \text{ح}g$. پس، بنا بر III :۲.۲.۰.۲، $(x, g(x)) \in g$. بالنتیجه، بنا بر (ب) و II، $(x, y) \in g$. پس، هر عضو f عضو g است. به همین قیاس معلوم میشود که هر عضو g عضو f است. پس، $f = g$. ▲

۲.۳.۲. تمرین

۱. اگر f تابع باشد و $g \subseteq f$ آنگاه، بازاء هر x از حg، $g(x) = f(x)$. مثال بیاورید.

۲.۴. مشخص کردن و تعریف توابع.

بنا بر قضیه‌ی ۲.۳.۱، هر تابع با حوزه‌ی تعریف خود و مقدار آن بازاء هر یک از اعضای حوزه‌ی تعریفش مشخص میشود.

طریق کلی تعریف کردن توابع مبتنی بر همین نکته است. نظر به اهمیت فوق‌العاده‌ی موضوع، آن را مشروحاً توضیح میدهیم.

۲.۴.۱. وقتی که عده‌ی اعضای حوزه‌ی تعریف نسبةً کم باشد تابع مورد نظر را میتوان به وسیله‌ی جدول تعریف کرد: اعضای حوزه‌ی تعریف را بر یک سطر مینویسیم، و بر سطری زیر آن، بازاء هر x از حوزه‌ی تعریف، مقدار تابع را در x، بر سطر زیرین، زیر x درج میکنیم. مثلاً، جدول

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	1	2

تابع $f = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\}$ را مشخص میکند.

۲.۴.۲. طریق کلی تعریف کردن یک تابع اینست که اولاً، حوزه‌ی تعریف تابع را مشخص میکنند؛ و ثانیاً، ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع بازاء هر عضو حوزه‌ی تعریف بدست میدهند. البته، این ضابطه باید چنان باشد که، بازاء هر عضو حوزه‌ی تعریف، یک و تنها یک مقدار برای تابع بدست دهد. اینک به توضیح این مطلب در حالات مختلف میپردازیم.

۲.۴.۳. در توابعی که در ریاضیات مقدماتی در کار میآید، ضابطه‌ی تعریف تابع فرمولی[1] است که، مثلاً، مقدار $f(x)$ را بر حسب x (عضو دلخواهی از حوزه‌ی تعریف تابع) بدست میدهد. چنین فرمولی به صورت $f(x) = \xi(x)$ است، که در آن، $\xi(x)$ یک اسمنما (مثلاً $2x+1$ یا $\sqrt{x}$ یا $\sin x$) است. ما، اغلب، تعریف تابع f با حوزه‌ی تعریف A و ضابطه‌ی $f(x) = \xi(x)$ را چنین (یا به صورتهای مشابه) عرضه میکنیم:

تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = \xi(x) \qquad (x \in A).$$

اگر $f(x)$ را y بنامیم، در این تعریف، y جایگزین $f(x)$ میشود، و تعریف تابع صورت عادی تعریف با گزاره‌نما را میگیرد. تابع f مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتب (x, y) است بازاء جمیع مقادیر x که x عضو A باشد. به عبارت دیگر،

$$f = \{(x, y) \mid x \in A \;\&\; y = \xi(x)\},$$

یا

$$f = \{(x, \xi(x)) \mid x \in A\}.$$

مثلاً، ضابطه‌ی

$$y = 2x - 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

تابعی بر $\mathbf{R}$ تعریف میکند. اگر این تابع را f بنامیم، $f(x) = 2x - 1$، و

$$f = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R} \;\&\; y = 2x - 1\} = \{(x, 2x-1) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

بالاخره، صورت دیگری که باید با آن مأنوس شد ناشی از این است که تابع f بر A با ضابطه‌ی $f(x) = \xi(x)$ عضو x از A را به $\xi(x)$ تبدیل میکند. بدین مناسبت، تعریف این تابع را به صورت

$$f: x \to \xi(x) \qquad (x \in A)$$

هم عرضه میکنند. مثلاً،

$$f: n \to 2n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

یعنی تابع f بر $\mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $f(n) = 2n$، و آن عبارتست از تابع

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \cdots, (n, 2n), \cdots\}.$$

۲.۴.۴. بسیاری از توابع مهم هستند که ضابطه‌ی آنها با «فرمول» قابل بیان نیست. این توابع را نیز میتوان به طرق سابق‌الذکر تعریف کرد.

---

(۱) اغلب این فرمول را تسامحاً تابع میخوانند (۲.۴.۶ ملاحظه شود).

مثلاً، فرض کنیم $A = \{1,\ 1{,}5,\ 0{,}2,\ 2\}$. ضابطه‌ی

y یعنی جزء صحیح x $(x \in A)$

تابعی مانند f بر A تعریف میکند. جدول تابع از این قرار است:

x	1	1,5	0,2	2
$y = f(x)$	1	1	0	2

ملاحظه کنید که اگر g تابعی بر $B = \{1{,}1,\ 1{,}3,\ 0{,}4,\ 2\}$ با همان ضابطه باشد، حوزه‌ی مقادیر f و g یکی است. اما، بنا بر قضیه‌ی ۲.۳.۱، این تابع غیر از تابع f است، اگر چه مجموعه‌ی مقادیر دو تابع یکی و ضابطه‌ی آنها هم یکی است.

۲.۴.۵. بسیار اتفاق می‌افتد که مقدار یک تابع در سراسر حوزه‌ی تعریفش با یک ضابطه مشخص نمیشود. مثلاً، ممکن است A (حوزه‌ی تعریف تابع f) دارای دو مجموعک جدا از هم مانند A_1 و A_2 باشد بطوری که $A = A_1 \cup A_2$، و مقادیر تابع بر A_1 با یک ضابطه و بر A_2 با ضابطه‌ای دیگر مشخص شوند. در این صورت، تعریف تابع را میتوان به صورتهای ذیل یا به صورتهای مشابه عرضه کرد:

تابع f با ضابطه‌ی (مرکب)

$$f(x) = \begin{cases} \xi_1(x) & \text{اگر } x \in A_1 \\ \xi_2(x) & \text{اگر } x \in A_2 \end{cases}.$$

تابع f با ضابطه‌ی (مرکب)

$$f(x) = \begin{cases} \xi_1(x) & (x \in A_1), \\ \xi_2(x) & (x \in A_2). \end{cases}$$

مثلاً، فرض کنیم A و B، بترتیب مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج باشند. واضحست که $A \cap B = \varnothing$ و $A \cup B = \mathbf{N}$. ضابطه‌ی مرکب

$$f(x) = \begin{cases} \text{تهران} & (x \in A), \\ \text{پاریس} & (x \in B). \end{cases}$$

تابعی بر $\mathbf{N}$ تعریف میکند، که حوزه‌ی مقادیرش مجموعه‌ی {پاریس ,تهران} است؛ و مثلاً

$f(1) = f(7) =$ تهران, $f(6) =$ پاریس.

۲.۴.۶. تبصره‌ی مهم. عباراتی از قبیل «تابع $y = x - 1$»، که شاید بسیار شنیده یا دیده‌اید به خودی خود بیمعنی است. آیا فرمول $y = x - 1$ تابع است؟ آیا y تابع است؟ اینک شما میدانید که هیچ یک از این دو تابع نیست. هر تابع مجموعه‌ای از ازواج مرتب است، و چنانکه میدانید، در ریاضیات مقدماتی به سبک قدیم هم که از «تابع $y = x - 1$» سخن میگویند، در رسم نمایش تابع، نمودار مجموعه‌ای از ازواج مرتب را رسم میکنند. چنانکه گذشت، نه فرمول $y = x - 1$ تابع است، و نه y؛ بلکه، گزاره‌نمای $y = x - 1$ ضابطه‌ی تعریف تابعی تواند بود، که y مقدار آن است در x. بعلاوه، چنانکه اینک میدانید، فرمول $y = x - 1$، برحسب مجموعه‌ای که به عنوان حوزه‌ی تعریف اختیار

شود، توابع گوناگون تعریف میکند. پس، عبارت «تابع $y = x - 1$» از هر جهت بیمعنی است. البته، اگر مجموعه‌ای مانند A از اعداد به عنوان حوزه‌ی تعریف اختیار شود، گزاره‌نمای $y = x - 1$ تابعی بر A تعریف میکند، و آن عبارتست از

$$f = \{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y = x - 1\},$$

یا

تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = x - 1 \qquad (x \in A),$$

یا مختصراً

تابع f بر A با ضابطه‌ی $y = x - 1$.

بالاخره، باید دانست که معمولاً در یک مبحث ریاضی، **بر طبق قرارداد**، برای توابعی که در آن مبحث در کار میآیند وسیعترین حوزه‌ی تعریف سازگار با مقادیر مورد بحث در آن مبحث را قائل میشوند تا از ذکر حوزه‌ی تعریف در هر مورد بینیازی حاصل شود. مثلاً، در مباحثی که توابع حقیقی (یعنی توابعی که مقادیرشان اعداد حقیقی هستند) بر $\mathbf{R}$ یا بر مجموعکهای آن مورد بحث هستند، اگر قائل به قرارداد مذکور شویم، تابعی با ضابطه‌ی $y = x - 1$ تابعی است بر $\mathbf{R}$، زیرا، فرمول $y = x - 1$، بازاء هر مقدار حقیقی x، مقداری حقیقی برای y بدست میدهد؛ اما حوزه‌ی تعریف تابعی با ضابطه‌ی $y = \sqrt{x}$ مجموعه‌ی $\{x \mid x \in \mathbf{R} \,\&\, 0 \leqslant x\}$ است، و حوزه‌ی تعریف تابعی با ضابطه‌ی $y = 1/x$ مجموعه‌ی $\mathbf{R} - \{0\}$. در مبحث حاضر، که توابع گوناگون در امثله و تمرینات میآیند، در تعریف توابع، همه جا حوزه‌ی تعریف را مشخص میکنیم.

۲.۴.۷. تمرین

۱. هر یک از توابع ذیل را با جدول و ازواج مرتب آن بنویسید، و نمودار آن را رسم کنید:

(آ). تابع f بر $A = \{-1, -4, 0, 2, -3\}$ با ضابطه‌ی
اگر $x < 0$ آنگاه $f(x) = \pi$ و الا $f(x) = x$.

(ب). تابع f بر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{اگر } x \text{ فرد است} \\ 2 - x & \text{اگر } x \text{ زوج است} \end{cases}$$

(پ). تابع f بر $A = \{1, 1/3, 1/4, 1/5\}$ با ضابطه‌ی
$f(x)$ نزدیکترین عدد صحیح است به x.

۲. A_1، A_2، و A_3 مجموعه‌های اعداد طبیعیی هستند که باقیمانده‌ی تقسیم آنها بر 3، بترتیب، 1، 2، و 0 است، و تابع f بر $\mathbf{N}$ چنین تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \text{باقیمانده‌ی تقسیم } 2x \text{ بر } 3 & (x \in A_1) \\ \text{باقیمانده‌ی تقسیم } x + 2 \text{ بر } 3 & (x \in A_2) \\ \text{باقیمانده‌ی تقسیم } x + 1 \text{ بر } 3 & (x \in A_3) \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم[1]، و تابع را به صورتی ساده‌تر تعریف کنید.

۳. نمودار توابعی را که به شرح ذیل تعریف شده‌اند رسم کنید؛

(آ) $f : x \to 1 - x \quad (x \in \mathbf{N}).$

(ب) $f : x \to 1 - x \quad (x \in \mathbf{I}).$

(پ) $f : x \to 1 - x \quad (x \in \mathbf{R}).$

(ت) $f : x \to 1 - x \quad (x \in \{0, 1, -1\}).$

۲.۵. توابع یک یا چند شناسه. توابعی که تا کنون از آنها بحث کردیم جملگی نسبتهای دوتائی هستند. این گونه توابع را توابع یک شناسه (۲.۲.۲) یا توابع یک متغیر (یا یک «متغیر مطلق») نامند. اگر حوزه‌ی تعریف یک تابع خود مجموعه‌ای از ازواج مرتب باشد تابع را تابع دو شناسه یا تابع دو متغیر نامند.

مثلاً، نسبت سه‌تائی

$$f = \{(1, 0, 2), (5, 5, 1,) (3, 2, 1)\}.$$

که در آن

$$\text{ح}f = \{(1, 0), (5, 5), (3, 2)\}, \qquad \text{حع}f = \{2, 1\},$$

دارای این خاصیت است که هیچ دو عضو آن دارای مختصات اول متساوی و مختصات دوم متمایز نیستند، و لهذا، تابعی از دو شناسه است، و مقدارش در اعضای حوزه‌ی تعریف آن عبارتند از

$$f((1, 0)) = 2, \qquad f((5, 5)) = 1, \qquad f((3, 2)) = 1.$$

بطور کلی، اگر f تابعی از دو شناسه باشد، مقدار آن را بازاء عضو (x, y) از حوزه‌ی تعریف آن، بجای $f((x, y))$،

$$f(x, y)$$

مینامند. مثلاً، در مثال قبل،

$$f(1, 0) = 2, \qquad f(5, 5) = 1 \qquad f(3, 2) = 1.$$

§۳ بعضی مفاهیم و احکام عمومی در باب نسب و توابع

۳.۱. عکس. فرض میکنیم a، b، و c دو بدو متمایز باشند، و نسبت

$$f = \{(a, a), (b, a), (c, b)\}$$

را اختیار میکنیم. اگر همه‌ی ازواج مرتب f را مقلوب کنیم (یعنی محل دو مختص هر یک را تعویض نمائیم) نسبت

$$g = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$$

حاصل میشود. از طریق ساختن g از روی f واضحست که g مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتبی

---

(۱) وقتی که عده‌ی اعضای حوزه‌ی تعریف تابع «زیاد است» باید به رسم قسمتی از نمودار اکتفا کرد.

است مانند (x, y) که $(y, x) \in f$، و یا yfx. نظر به اهمیت نسبی که بدین گونه از نسبتها حاصل میشوند، برای آنها اسم خاصی میآوریم.

۳.۱.۱. تعریف. عکس نسبت f، که $f^{\smallsmile}$ خوانده میشود، بنا بر تعریف، عبارتست از نسبت

$$f^{\smallsmile} = \{(x, y) \mid yfx\}.$$

اثبات احکام مربوط به عکس بسیار سهل و جملگی مبتنی بر اینست که، بنا بر ۳.۱.۱، همواره $(y, x) \in f$ $\Longleftrightarrow$ $(x, y) \in f^{\smallsmile}$ (به عبارت دیگر، اگر $xf^{\smallsmile}y$ آنگاه yfx، و بالعکس). پیش از اینکه نمونهای بیاوریم، ملاحظه کنید که در مثال مذکور در آغاز ۳.۱، $(f^{\smallsmile})^{\smallsmile}$، یعنی عکس $f^{\smallsmile}$، نسبت $\{(a, a) (b, a), (c, b)\}$ است، که همان f میباشد. بطور کلی،

۳.۱.۲. قضیه. اگر f یک نسبت باشد $(f^{\smallsmile})^{\smallsmile} = f$.

برهان. اولاً، اگر $(x, y) \in (f^{\smallsmile})^{\smallsmile}$ آنگاه $(y, x) \in f^{\smallsmile}$، ولهذا، $(x, y) \in f$. ثانیاً، اگر $(x, y) \in f$ آنگاه $(y , x) \in f^{\smallsmile}$، و بالنتیجه، $(x, y) \in (f^{\smallsmile})^{\smallsmile}$. ▲

اثبات قضیهی ذیل به متعلم محول میشود:

۳.۱.۳. قضیه. اگر f یک نسبت باشد حعf = ح$f^{\smallsmile}$ و حf = حع$f^{\smallsmile}$.

در مثال مذکور در آغاز ۳.۱، f تابع است، ولی g (یعنی $f^{\smallsmile}$) تابع نیست. پس، عکس یک تابع ممکن است تابع نباشد.

۳.۱.۴. تعریف تابع معکوس. اگر عکس تابع f نیز تابع باشد آن را تابع معکوس f یا f^{-} خوانیم؛ و در این صورت، گوئیم f تابع معکوس دارد، و نیز گوئیم f^{-} موجود است.

۳.۱.۵. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عکس نسبت f تابع باشد آنست که همواره اگر xfy و ufy آنگاه $x = u$.

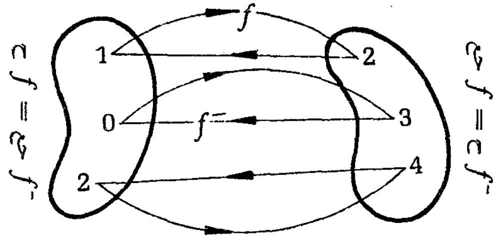
برهان. اولاً، فرض کنیم $f^{\smallsmile}$ تابع باشد، و xfy (۱) و ufy (۲). بنا بر (۱) و (۲)، $yf^{\smallsmile}x$ و $yf^{\smallsmile}u$. پس، چون $f^{\smallsmile}$ تابع است، $u = x$. ثانیاً، گوئیم اگر شرط مذکور در قضیه برقرار باشد $f^{\smallsmile}$ تابع است. زیرا، فرض کنیم $xf^{\smallsmile}y$ و $xf^{\smallsmile}z$. بالنتیجه، yfx و zfx. پس، بنا بر فرض، $y = z$. ▲

۳.۱.۶. امثله و فواید

(آ). وقتی f تابع باشد ولی $f^{\smallsmile}$ تابع نباشد، در تصویر f با سهمها، از هر عضو حf درست

یک سهم خارج میشود، ولی به بعضی (یا همه‌ی) اعضای fحع بیش از یک سهم وارد میشود (شکل در صفحه‌ی ۸۸ ملاحظه شود).
(ب). وقتی f تابع باشد و عکس آن نیز تابع باشد، از هر عضو fح درست یک سهم خارج میشود، و بنا بر ۳.۱.۵، به هر عضو fحع درست یک سهم وارد میگردد (بچه دلیل؟). مثال:

$$f = \{(1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (2,\ 4)\},$$
$$f^{\smile} = \{(2,\ 1),\ (3,\ 0),\ (4,\ 2)\}.$$



شکل ۱۹

در این حالت مهم است که تابع f را، چنانکه خواهد آمد (۶ §)، تناظر یک‌بیک میخوانیم.
(پ). فرض کنیم تابع f با ضابطه‌ی ذیل تعریف شده باشد:

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbf{N}).$$

آیا f تابع معکوس دارد؟ با توجه به ۳.۱.۵، فرض کنیم xfy و ufy، خواهیم داشت $y = f(x) = x^2$ و $y = f(u) = u^2$. بالنتیجه، $x^2 = u^2$، و از آنجا، $x = u$ (بچه دلیل؟). پس، $f^{\smile}$ موجود است (یعنی f تابع معکوس دارد). برای مشخص کردن $f^{\smile}$، ملاحظه میکنیم که زوج مرتب دلخواهی از f به صورت $(x,\ x^2)$ است. پس،

$$f^{\smile} = \{(x^2,\ x) \mid x \in \mathbf{N}\}.$$

اما، طریق رایج، و اغلب مناسبتر، تعریف $f^{\smile}$ بر طبق ۳.۱.۱ است:

$$f^{\smile} = \{(x,\ y) \mid y \in \mathbf{N}\ \&\ x = y^2\}.$$

۳.۱.۷. تمرین

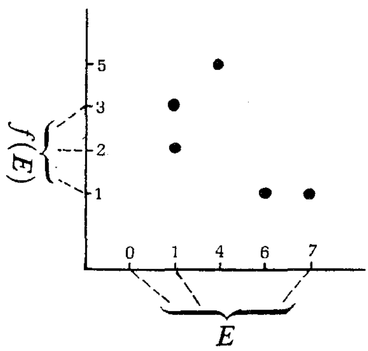
۱. نسبت f را چنان بسازید که
(آ) نه f تابع است نه $f^{\smile}$.
(ب) f تابع نیست ولی $f^{\smile}$ تابع است.
(پ) f تابع است و $f^{\smile}$ تابع نیست.
(ت) f و $f^{\smile}$ تابعند.
در هر حالت، نمایش f و $f^{\smile}$ را به وسیله‌ی سهمها و نیز گراف هر یک را رسم کنید.
۲. ثابت کنید که $\varnothing$ تابع معکوس دارد، و $\varnothing = \varnothing^{\smile}$.
۳. ثابت کنید که $(A \times B)^{\smile} = B^{\smile} \times A^{\smile}$. (طرف اول به معنی عکس نسبت $A \times B$ است.)
۴. ثابت کنید که تابع همانی در یک مجموعه تابع معکوس دارد، و با آن مساوی است.

۵. بنا بر آنکه $f = \{(x,\ y) \mid x,\ y \in \mathbf{R}\ \&\ 2x = y\}$ مطلوبست تعیین $f^{\vee}$.
۶. عکس هر یک از نسبتهای مسئله‌ی ۲.۲.۸.۱ را تعیین کنید. کدام یک از عکسها تابع است؟

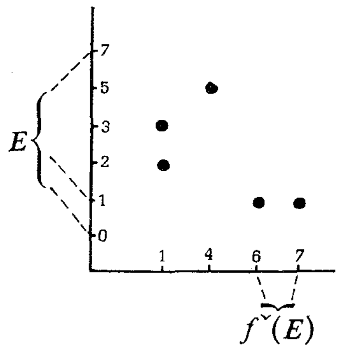
۳.۲. تصویر و تصویر عکس. به یک نسبت و یک مجموعه دو مجموعه‌ی مهم تعلق میگیرد. مثلاً، فرض کنیم

$$f = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (4,\ 5),\ (7,\ 1),\ (6,\ 1)\}, \qquad E = \{0,\ 1,\ 7\}.$$

مجموعه‌ی اشیائی که به هر یک از آنها عضوی از E نسبت f دارد مجموعه‌ی $\{3\ ,2\ ,1\}$ است، که آن را $f(E)$ مینامند. بر حسب گراف نسبت (شکل ۲۰)، $f(E)$ را میتوان تصویر



شکل ۲۰



شکل ۲۱

نقاطی از گراف f بر «محور عرض» دانست که مختص اولشان به E تعلق دارد. بدین مناسبت، $f(E)$ را تصویر E با نسبت f میخوانند. به زبان تبدیلات، میتوان گفت که نسبت f مجموعه‌ی E را، تماماً یا بعضاً، به مجموعه‌ی $f(E)$ تبدیل میکند (با نمایش سهمدار توضیح دهید). اینک تعریف کلی:

۳.۲.۱. تعریف. اگر f نسبتی و E مجموعه‌ای باشد مجموعه‌ی اشیائی را که به هر یک از آنها عضوی از E نسبت f دارد (و به عبارت دیگر، مجموعه‌ی مبدلهای اعضای E را در تبدیل f) تصویر مجموعه‌ی E با نسبت f یا $f(E)$ خوانیم.
بنا بر این تعریف، هر عضو $f(E)$ عضو fحع است. پس،

۳.۲.۲. قضیه. همواره $f(E) \subseteq$ fحع.

۳.۲.۳. قضیه. اگر f نسبتی و E مجموعه‌ای باشد $f^{\vee}(E)$ مجموعه‌ی اشیائی است که هر

یک از آنها به عضوی از E نسبت f دارد. بعلاوه همواره،

$$f^{\vee}(E) \subseteq \text{ح} f.$$

برهان. حکم نتیجه‌ی ۳.۲.۱ و تعریف $f^{\vee}$ است. اگر x عضوی از $f^{\vee}(E)$ باشد، بنا بر ۳.۲.۱، عضوی از E، مثلاً y، هست که $y f^{\vee} x$، و از آنجا $x f y$. بالعکس، اگر x به عضوی از E، مثلاً y، نسبت f داشته باشد آنگاه $y f^{\vee} x$، و لهذا $x \in f^{\vee}(E)$. بالاخره، بنا بر ۳.۲.۲، $\text{ح} f = \text{حع} f^{\vee}$ ▲ $.f^{\vee}(E) \subseteq$

۳.۲.۴. تعریف. اگر f نسبتی و E مجموعه‌ای باشد مجموعه‌ی $f^{\vee}(E)$ را تصویر عکس مجموعه‌ی E با نسبت f نامند.

در مثال مذکور در آغاز ۳.۲، $f^{\vee}(E) = \{7, 6\}$ (شکل ۲۱).

۳.۲.۵. تمرین

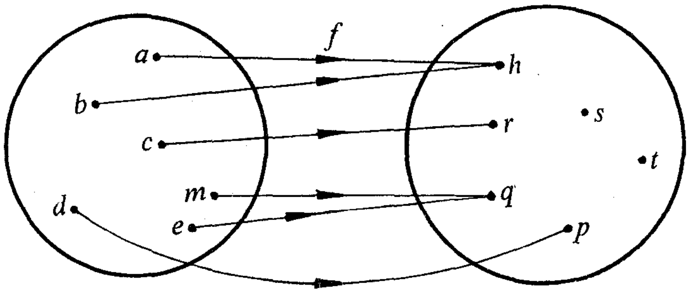
۱. بنا بر آنکه $f = \{(0, 0), (1, 0), (3, 5), (4, 6), (2, 6)\}$، گراف f را رسم کنید، و بر روی آن، تصویر مجموعه‌ی $\{0, 5, 4, 2\}$ و تصویر عکس مجموعه‌ی $\{1, 0, 6\}$ را به وسیله‌ی f معین نمائید.

۲. فرض کنیم

$$f = \{(3, 1), (2, 2), (5, 1), (6, 2), (3, 4)\},$$
$$g = \{(0, 0), (3, 5), (2, 1), (1, 1), (5, 0)\},$$
$$h = \{(3, 7), (2, 9), (1, 0), (0, 3), (7, 5)\},$$
$$S = \{1, 3, 5, 2\}, \qquad H = \{0, 5, 9, 4\}, \qquad K = \{3, 2, 9, 0\},$$
$$A = \{3, 4, 5\}, \qquad B = \{1, 2, 0\}, \qquad C = \{2, 3, 4, 5\}.$$

اولاً، عکس هر یک از سه نسبت را بنویسید. ثانیاً، تصویر هر یک از مجموعه‌های S، H، و K را به وسیله‌ی هر یک از سه نسبت پیدا کنید. ثالثاً، تصویر عکس هر یک از مجموعه‌های A، B، و C را به وسیله‌ی هر یک از سه نسبت بیابید.

۳. تابع f با نمایش ذیل تعریف شده است:



شکل ۲۲

هر یک از مجموعه‌های ذیل را با اعضایش مشخص کنید:

$f(\{e, b, m\})$. $f(\{a, e, d\})$. $f(\{b, d, m\})$.
$f^{\smile}(\{t\})$. $f^{\smile}(\{r, s\})$. $f^{\smile}(\{h\})$.
$f(\{a, b, e, m\})$. $f^{\smile}(\{t, s\})$. $f^{\smile}(\{r, n\})$.
$f^{\smile}(\{p, h, q\})$. $f^{\smile}(\{s, p, r\})$. $f^{\smile}(\{r, h, q\})$.

۴. با مفروضات مسئله‌ی قبل، مجموعه‌کی مانند A از fح و عضوی مانند x از fح تعیین کنید که، در عین حال، $x \notin A$ و $f(x) \in f(A)$.

۳.۳. تحدید نسب و توابع

۳.۳.۱. تعریف. اگر نسبت g جزء نسبت f باشد g را یک تَحدید[1] f و f را یک توسیع g خوانیم.

از تحدیدهای مهم یک نسبت تحدیدهای آنست به وسیله‌ی مجموعه‌ها. به عنوان مثال، فرض کنیم

$$f = \{(0, 1), (3, 7), (2, 5), (2, 3)\}, \qquad E = \{0, 3, 4\}.$$

اگر از اعضای f جمیع آنهائی را انتخاب کنیم که مختص اول هر یک عضو E است مجموعه‌ی جمیع این ازواج نسبت

$$g = \{(0, 1), (3, 7)\}$$

خواهد بود، که جزء f است. پس، g یک تحدید f میباشد. این تحدید خاص را تحدید f به E یا $f|E$ مینامیم، و آن مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتبی است مانند (x, y) که، در عین حال، تابع دوشرط هستند: $x \in E$ و xfy.

بطور کلی،

۳.۳.۲. تعریف. اگر f نسبتی و E مجموعه‌ای باشد، تحدید f به E یا $f|E$ چنین تعریف میشود:

$$f|E = \{(x, y) \mid x \in E \,\&\, xfy\}.$$

(واضحست که $f|E \subseteq f$.)

به وسیله‌ی تحدید یک نسبت به مجموعه‌های مناسب، میتوان توابعی از آن نسبت استخراج کرد. مثلاً، در مثال سابق، f تابع نیست، اما g (یعنی $f|E$) تابع است.

۳.۳.۳. تحدید و توسیع توابع. چون هر جزء یک تابع خود تابع است، هر تحدید یک تابعْ تابع میباشد. بعلاوه، با توجه به ۲.۳.۲:۱، معلوم است که هر تحدید یک تابع با حوزه‌ی تعریف خود مشخص میشود، زیرا اگر f یک تابع و g یک تحدید آن باشد

---

(۱) اصطلاحات «تحدید» و «توسیع» در این باب به دو معنی بکار میرود. یکی به معنی محدود کردن یک نسبت یا وسعت بخشیدن بدان، و دیگری (که در ۳.۳.۱ بکار رفته است) به معنی نسبت حاصل از محدود کردن یک نسبت یا از وسعت بخشیدن بدان.

$(g \subseteq f)$، و gح مشخص باشد، آنگاه مقدار g در هر عضو حوزه‌ی تعریفش مشخص است. بر خلاف، تابعی که توسیع تابع مفروض g باشد تنها با حوزه‌ی تعریف خود مشخص نمیشود. مثلاً، اگر $g = \{(0, 1), (2, 5)\}$، هر یک از توابع

$$f_1 = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5)\}, \qquad f_2 = \{(0, 1), (2, 5), (1, 0)\}$$

یک توسیع g است، و $\{0, 1, 2\} = $ح$f_2 = $ح$f_1$.

مسئله‌ی توسیع یک تابع معمولاً چنین مطرح میشود که تابعی مفروض است، و میخواهیم، به وسیله‌ی توسیع آن، تابعی دارای خواص معین بدست آوریم، چنانکه بعدها معلوم خواهد شد.

۳.۳.۴. تمرین

۱. تحدید هر یک از نسبتهای مسئله‌ی ۳.۲.۵:۲ را به هر یک از مجموعه‌های $\{2, 5, 1\}$، $\{3, 4, 0\}$، و $\{1, 0, 7\}$ بنویسید.

۲. در مورد هر یک از توابع ذیل، اولاً حوزه‌ی تعریف و حوزه‌ی مقادیر هر یک را بنویسید، و تعیین کنید که آیا عکس هیچ یک تابع هست یا نه. ثانیاً تعیین کنید که آیا هیچ یک از آنها تحدید یکی دیگر هست یا نه.

$$f_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 0)\},$$
$$f_2 = \{(2, 1), (4, 1), (1, 2), (4, 1)\},$$
$$f_3 = \{(0, 2), (2, 2), (1, 4), (3, 0)\},$$
$$f_4 = \{(4, 1), (1, 2), (2, 1), (0, 5)\}.$$

۳.۴. ضرب نسبی یا ترکیب نسب و توابع.

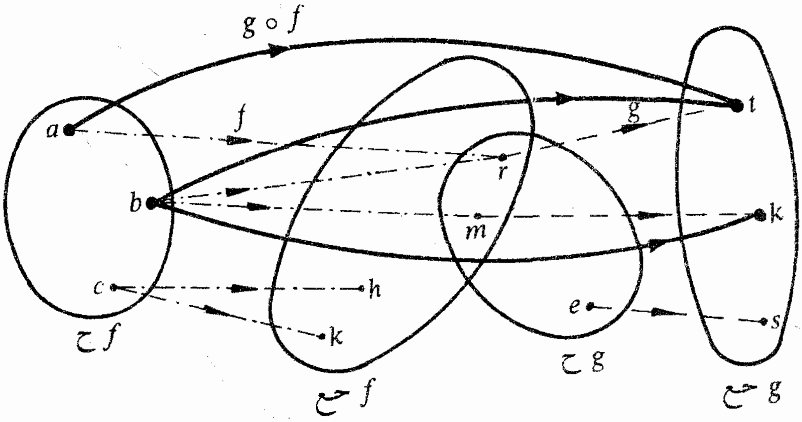
یکی از طرق مهم ساختن نسب و توابع جدید از نسب یا توابع مفروض ضرب نسبی آنهاست. برای توضیح، فرض کنیم

$$f = \{(a, r), (b, m), (c, h), (c, k), (b, r)\},$$
$$g = \{(r, t), (m, k), (e, s)\}.$$

حروف متمایز داخل ابروها اسامی اشیاء متمایز فرض میشوند. اینک ازواج مرتبی مانند (x, y) با این خصوصیت اختیار میکنیم:

x به چیزی نسبت f دارد که آن به y نسبت g دارد.

مثلاً، (a, t) از جمله‌ی این ازواج است، زیرا afr & rgt. از بررسی اعضای f و g دیده میشود که ازواج مرتب دارای خصوصیت مذکور منحصرند به (a, t)، (b, t)، و (b, k). مجموعه‌ی جمیع این ازواج نسبت $h = \{(a, t), (b, t), (b, k)\}$ است، که آن را «حاصلضرب نسبی f در g» یا $g \circ f$ مینامیم. چنانکه انتظار میرود، fح $\subseteq h$ح و gحع $\subseteq h$حع. نمایش نسبتها برای مزید توضیح مفید است. در شکل ۲۳، هر عضو مشترک fحع و gح با یک نقطه نمایش داده شده است.



شکل ۲۳

اینک تعریف کلی،

۳.۴.۱. تعریف. اگر f و g دو نسبت باشند، حاصلضرب نسبی f در g یا مُرَکَّبِه‌ی f و g (به همین ترتیب)، که $g \circ f$ نامیده میشود، بنا بر تعریف، عبارتست از نسبت

$g \circ f = \{(x, y) \mid$ چیزی هست که x به آن نسبت f و آن به y نسبت g دارد$\}$

۳.۴.۲. تبصره. به این نکات توجه کنید:

I. اگر f، g، و h سه نسبت باشند، $h \circ (g \circ f)$ حاصلضرب نسبی نسبت $g \circ f$ است در h، و $(h \circ g) \circ f$ حاصلضرب نسبی f است در $h \circ g$.

II. بر طبق ۱.۲.۲، $x(g \circ f)y$ یعنی x به y نسبت $g \circ f$ دارد، یا $(x, y) \in g \circ f$. همچنین، $x(h \circ (g \circ f))y$ یعنی x به y نسبت $h \circ (g \circ f)$ دارد، یا $(x, y) \in h \circ (g \circ f)$؛ و غیره.

III. اگر نسبت $g \circ f$ تابع باشد، بر طبق تعریف عادی (۲.۲.۲)، $(g \circ f)(x)$ یعنی مقدار تابع $g \circ f$ در x. مثلاً، در مثال سابق‌الذکر، $(g \circ f)(a) = t$.

۳.۴.۳. تمرین

۱. بنا بر آنکه

$$f = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_5)\},$$
$$g = \{(b_1, c_1), (b_3, c_1), (b_5, c_2), (b_6, c_3)\},$$

و a_1، a_2، b_1، وغیره دو بدو متمایز باشند، $g \circ f$ را با اعضایش و از روی نمایش f و g مشخص کنید.

۲. ثابت کنید که حاصلضرب نسبی دو تابع

$$f = \{(1,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 8),\ (4,\ 9)\},$$
$$g = \{(5,\ 10),\ (6,\ 10),\ (8,\ 0),\ (11,\ 12)\}$$

تابع $\{(1,\ 10),\ (3,\ 0)\}$ است.

۳. بنا بر آنکه $f = \{(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 1)\}$، نسبت $f \circ f^{\smile}$ را با اعضایش مشخص کنید.

۴. با علامات مسئلهی ۳.۳.۴:۲، هر یک از حاصلضربهای ذیل را با اعضایش مشخص کنید:

$$f_1 \circ f_2, \qquad f_2 \circ f_3, \qquad (f_1 \circ f_2) \circ f_3, \qquad f_1 \circ (f_2 \circ f_3).$$

۵. دو تابع مانند f و g چنان بسازید که $f \circ g \neq g \circ f$.

حاصلضرب نسبی نسب، و خاصه توابع، در ریاضیات اهمیت فراوان دارد. بدین جهت، بعضی از اهم خواص آن را در ضمن قضایای آتیه ثابت میکنیم.

۳.۴.۴. قضیه. همواره

$$\text{(I)} \qquad \text{ح}(g \circ f) \subseteq \text{ح}f; \qquad\qquad \text{(II)} \qquad \text{حع}(g \circ f) \subseteq \text{حع}g;$$

و بالاخص،

III. اگر $\text{ح}g \subseteq \text{حع}f$ آنگاه $\text{ح}(g \circ f) = \text{ح}f$.

IV. اگر $\text{حع}f \subseteq \text{ح}g$ آنگاه $\text{حع}(g \circ f) = \text{حع}g$.

برهان. جملگی این احکام با توجه به معنی $g \circ f$ بدیهی هستند. بعنوان مثال، I و III را ثابت میکنیم. برای اثبات I، گوئیم اگر $x \in \text{ح}(g \circ f)$ آنگاه x به چیزی نسبت $g \circ f$ دارد، و لهذا، بنا بر تعریف (۳.۴.۱)، x به چیزی نسبت f دارد. پس، $x \in \text{ح}f$. برای اثبات III، فرض کنیم $\text{ح}g \subseteq \text{حع}f$ (۱). بنا بر I، برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم که $\text{ح}f \subseteq \text{ح}(g \circ f)$ (*). گوئیم، اگر $x \in \text{ح}f$ آنگاه چیزی ــ مثلاً u ــ هست که xfu (۲). پس، $u \in \text{حع}f$، و لهذا، بنا بر (۱)، $u \in \text{ح}g$. پس، چیزی ــ مثلاً y ــ هست که ugy (۳). بنا بر (۲) و (۳)، $x(g \circ f)y$، و بالنتیجه، $x \in \text{ح}(g \circ f)$. پس، (*) بر قرار است. ▲

۳.۴.۵. قضیه. بازاء هر سه نسبت f، g، و h،

$$(*) \qquad\qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

برهان. ثابت میکنیم که هر عضو طرف اول (*) متعلق به طرف دوم آن است، و اثبات نیمهی دیگر را به متعلم محول میکنیم. فرض کنیم $(x,\ y)$ عضو دلخواهی از طرف اول باشد، یعنی $x(h \circ (g \circ f))y$. پس، چیزی ــ مثلاً u ــ هست که

$$(۱) \qquad x(g \circ f)u, \qquad\qquad (۲) \qquad uhy.$$

بنا بر (۱)، چیزی ــ مثلاً v ــ هست که

$$(۳) \qquad xfv, \qquad\qquad (۴) \qquad vgu.$$

بنا بر (۲) و (۴)، $v(h \circ g)y$ (۵). اینک، بنا بر (۳) و (۵)، $x((h \circ g) \circ f)y$؛ و به عبارت دیگر، $(x,\ y) \in (h \circ g) \circ f$. ▲

در اثبات دو قضیه‌ی قبل توضیح فراوان آوردیم تا روش استدلال با حاصلضرب نسبی خوب روشن شود. اثبات قضیه‌ی مهم ذیل را به متعلم محول میکنیم:

۳.۴.۶. قضیه. بازاء هر دو نسبت f و g،

$$(g \circ f)^{\check{}} = f^{\check{}} \circ g^{\check{}}.$$

(طرف اولِ تساوی عکس نسبت $g \circ f$ است.)

اینک به بعضی از خصوصیات حاصلضرب نسبی توابع میپردازیم.

۳.۴.۷. قضیه. اگر f و g دو تابع باشند،

I. $g \circ f$ تابع است.

II. بازاء هر x از ح$(g \circ f)$،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

برهان. فرض‌کنیم f و g تابع باشند. برای اثبات I، کافی است ثابت کنیم که اگر $x(g \circ f)y$ (۱) و $x(g \circ f)z$ (۲) آنگاه $z = y$. پس، (۱) و (۲) را مفروض میگیریم. بنا بر تعریفِ $g \circ f$، چیزی مانند u و چیزی مانند v هست که

(۴)	$ugy,$	(۳)	$xfu,$
(۶)	$vgz.$	(۵)	$xfv,$

بنا بر (۳) و (۵) و فرض تابع بودن f، $v = u$. پس، بنا بر (۴) و (۶) و فرض تابع بودن g، $z = y$.

برای اثبات II، گوئیم اگر x عضوی از ح$(g \circ f)$ باشد yی هست که $x(g \circ f)y$ (آ). بنا بر قسمت I، $y = (g \circ f)(x)$ (ب). بنا بر (آ)، zی هست که xfz و zgy. پس $z = f(x)$ و $y = g(z) = g(f(x))$. بالنتیجه، بنا بر (ب)، حکم ثابت است. ▲

۳.۴.۸. تعریف تابع مضاف. اگر f و g دو تابع باشند تابع $g \circ f$ را تابع مضافِ g و f یا تابع مرکب از f و g یا مرکبه‌ی f و g خوانیم.

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی ساده‌ی ۳.۴.۴ و ۳.۴.۷ است، و در مبحث تابع مضاف در ریاضیات بسیار مفید میباشد. اثبات آن بر متعلم است:

۳.۴.۹. قضیه. اگر

$$g : B \to C \qquad f : A \to B,$$

آنگاه $g \circ f$ تابعی بر A بتوی C است، و بازاء هر x از A،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

۳.۵. خواص مربوط به نسب. بعضی از نسبتها خواص مهمی دارند. مثلاً، نسبت کوچکتری در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای این خاصیت است که هیچ عدد صحیح این نسبت را به خود ندارد. بر خلاف، نسبت قابلیت قسمت در همان مجموعه دارای این خاصیت است که هر عدد صحیح این نسبت را به خود دارد، یعنی هر عدد صحیح بر خودش قابل قسمت است. ذیلاً اهم خواصی را که نسبتهای مهم ریاضی، بتفاوت، واجد بعضی از آنها هستند تعریف میکنیم.

۳.۵.۱. تعریفات. فرض کنیم A مجموعه‌ای و f نسبتی در A باشد ($f \subseteq A \times A$).

I. f را در A منعکس یا انعکاسی خوانیم در صورتی که هر عضو A این نسبت را به خود داشته باشد؛ یعنی، بازاء هر x از A، xfx. به عبارت دیگر، f فقط و فقط وقتی در A منعکس است که، بازاء هر x از A، $(x, x) \in f$.

اگر، بازاء هر x از A، $\sim (xfx)$ [یا $(x, x) \notin f$] آنگاه f را در A نامنعکس گوئیم.

II. f را در A مُتَعَدّی خوانیم در صورتی که، بازاء هر x، y، و z از A، اگر xfy و yfz آنگاه xfz.

III. f را در A متقارن نامیم در صورتی که همواره اگر از یک طرف بین دو عضو A بر قرار باشد از طرف دیگر نیز بر قرار باشد؛ یعنی، بازاء هر x و y از A، اگر xfy آنگاه yfx. به عبارت دیگر، f فقط و فقط وقتی در A متقارن است که، بازاء هر زوج مرتب از اعضای A و مقلوب آن زوج، یا هر دو زوج عضو f باشند یا هیچ یک عضو f نباشد.

در صورتی که، بازاء هر x و y از A، اگر xfy آنگاه $\sim (yfx)$ نسبت f را در A نامتقارن خوانیم.

IV. f را در A قناس خوانیم در صورتی که بین هیچ دو عضو متمایز A از دو طرف بر قرار نباشد؛ یعنی، بازاء هر x و y از A، اگر $x \neq y$ آنگاه $\sim (xfy)$ یا $\sim (yfx)$ [یعنی، $(x, y) \notin f$ یا $(y, x) \notin f$].

با اندک تأملی معلوم میشود که این تعریف معادل است با اینکه، بازاء هر x و y از A، اگر xfy و yfx آنگاه $x = y$.

V. f را در A مرتبط خوانیم در صورتی که بین هر دو عضو A حد اقل از یک طرف بر قرار باشد، یعنی، بازاء هر x و y از A، xfy یا yfx.

VI. f را در A تابع اصل تَثلیث ضعیف خوانیم در صورتی که، بازاء هر x و y از A، حد اقل یکی از سه رابطه‌ی $x = y$، xfy، و yfx بر قرار باشد. اگر، بازاء هر x و y از A، همواره یکی و تنها یکی از این سه رابطه بر قرار باشد f را در A تابع اصل تثلیث[1] (قوی) نامیم.

در آتیه، هر جا بیم ابهام نرود، قید «در A» را در اصطلاحات مذکور ذکر نمیکنیم.

---

(۱) هر جا اصل تثلیث بطور مطلق گفته شود مقصود اصل تثلیث قوی است.

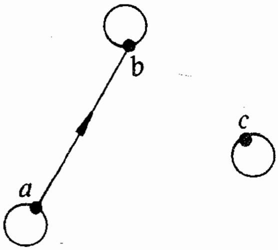
۳.۵.۲. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم a، b، و c دو بدو متمایز باشند، و

$$A = \{a, b, c\}, \qquad f = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}.$$

بالبداهه، f منعکس، متعدی، و قناس است، اما متقارن نیست، زیرا $(a, b) \in f$ ولی $(b, a) \notin f$. همچنین، f مرتبط نیست، زیرا مثلاً نه $(b, c) \in f$ و نه $(c, b) \in f$. بالاخره، f تابع اصل تثلیث ضعیف نیست.

(ب). خواص نسب را به وسیله‌ی نمایش خاصی میتوان توضیح داد. اعضای A را به وسیله‌ی نقاطی نمایش میدهیم. هر رابطه به صورت xfy که در آن $x \neq y$ با سهمی به مبدأ x و منتهای y، و هر رابطه به صورت xfx با قوسی که آغاز و انجامش x است نمایش داده میشود. بر متعلم است که خصوصیات نمایش نسبتهای واجد هر یک از خواص سابق‌الذکر را توضیح دهد. مثلاً، اگر نسبت f متعدی باشد، و x با دو سهم متوالی به y مرتبط باشد (یعنی سهمی از x به نقطه‌ای و سهمی از این نقطه به y منتهی شود) سهمی هست که مستقیماً از x به y میرود. در شکل ۲۴ نمایش نسبت f مثال (آ) دیده میشود.



شکل ۲۴

(پ). نسبت همانی در هر مجموعه‌ای از اشیاء منعکس، متعدی، متقارن، و قناس است (چرا؟).

(ت). فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع خطوط مستقیم واقع در صفحه‌ی مفروضی باشد، و متغیرهای فردی Δ، Δ'، Δ''، ... مقید به A باشند. در A نسبت توازی ($\|$) را با گزاره‌نمای

$\Delta \| \Delta'$ یعنی Δ بر Δ' منطبق است یا با آن نقطه‌ی مشترک ندارد

تعریف میکنیم. معلومست که همواره (۱) $\Delta \| \Delta$؛ (۲) اگر $\Delta \| \Delta'$ آنگاه $\Delta' \| \Delta$؛ و (۳) اگر $\Delta \| \Delta'$ و $\Delta' \| \Delta''$ آنگاه $\Delta \| \Delta''$. بالنتیجه، نسبت توازی در A انعکاسی، متقارن، و متعدی است.

(ث). در مجموعه‌ی مثال قبل، نسبت عمود بودن ($\perp$) نامنعکس و متقارن است، ولی متعدی نیست.

(ج). فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد. نسبت جزئیت در $\mathcal{P}(A)$ منعکس، متعدی، و قناس است (چرا؟). آیا این نسبت مرتبط است؟

(چ). بعضی از خواص سابق‌الذکر با بعضی دیگر بستگی دارند. مثلاً، اگر f نسبتی در مجموعه‌ی A و نامتقارن باشد نامنعکس نیز هست، و الا A عضوی دارد مانند x که $(x, x) \in f$. پس، (x, x) و مقلوبش به f تعلق دارند، و این با فرض نامتقارن بودن f متناقض است.

از خصوصیات نسبتهای منعکس اینست که

۳.۵.۳. قضیه. اگر f نسبتی در A و منعکس باشد آنگاه

$$A = \text{ح}f = \text{حع}f = \text{د}f.$$

مثلاً، برای اثبات رابطه‌ی $\text{ح}f = A$، گوئیم چون f جزء $A \times A$ است، $\text{ح}f \subseteq A$. پس، کافی است ثابت کنیم که $A \subseteq \text{ح}f$، و این بدیهی است، زیرا، اگر x عضو دلخواهی

از A باشد، بنا بفرض xfx، و بالنتیجه، $x \in$ ح f. ▲

اثبات قضیه‌ی ذیل بسیار سهل است، و به متعلم محول میشود:

۳.۵.۴. قضیه. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A باشد. اگر f یکی از خواص مذکور در ۳.۵.۱ را داشته باشد $\check{f}$ نیز آن خاصیت را در A دارد.

۳.۵.۵. تبصره. اگر f نسبتی باشد، xfy را علی‌الرسم «x نسبت f به y دارد» میخوانیم. اگر f متقارن باشد، هر گاه x نسبت f به y داشته باشد y هم نسبت f به x دارد. بدین جهت، رابطه‌ی xfy را در مورد نسبتهای متقارن خاص اغلب با عبارت «x و y نسبت f به یکدیگر دارند» و نظایر آن میخوانند؛ مانند «x و y باهم مساوی (یا موازی) اند».

۳.۵.۶. تمرین

در مسائلی که متغیرهای فردی در آنها دیده میشود حروف متمایز اسامی اشیاء متمایزند.

۱. فرض کنیم $A = \{2, 5, 6\}$،

$$f = \{(2, 2), (2, 5), (2, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\},$$
$$g = \{(2, 5), (2, 6), (5, 6,)\}, \qquad h = \{(2, 2), (5, 5), (6, 6)\}.$$

سه نسبت را نمایش دهید، و معلوم کنید هر یک از آنها کدام یک از خواص مذکور در ۳.۵.۱ را دارد و کدام یک را ندارد.

۲. بنا بر آنکه $A = \{a, b, c\}$، از نسبتهای ذیل در A، کدام یک، در عین حال، منعکس، متعدی، و قناس است، و کدام یک، در عین حال، نا منعکس و متعدی است.

(آ) $\{(a, b)\}$. (ب) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$.
(پ) $\{(b, c), (a, c)\}$. (ت) $\{(b, c), (c, a)\}$. (ث) $\{(a, a), (b, b), (a, c)\}$.
(ج) $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$. (چ) $\{(c, b), (b, b)\}$. (ح) $\{(a, a)\}$.
(خ) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, b)\}$.

۳. در مجموعه‌ای که خود اختیار میکنید نسبتی بسازید که (آ) نه منعکس باشد نه نامنعکس؛ (ب) نه متقارن باشد نه نامتقارن.

۴. در مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ نسبتی بسازید که (آ) منعکس و قناس باشد، ولی متعدی نباشد. (ب) قناس و متعدی باشد، ولی منعکس نباشد. (پ) متعدی و منعکس باشد، ولی قناس نباشد.

۵. $A = \{1, 2, 3, 6\}$ و نسبت f در مجموعه‌ی A با ضابطه‌ی «xfy یعنی x بر y قابل قسمت است» تعریف شده است. نسبت f کدام یک از خواص سابق‌الذکر را دارد؛

۶. نسبتی بسازید که تابع اصل تثلیث ضعیف باشد ولی تابع اصل تثلیث نباشد.

۷. اگر f نسبتی در مجموعه‌ی A و نامنعکس و متعدی باشد نامتقارن هم هست.

۸. اگر f نسبتی در مجموعه‌ی A و مرتبط باشد منعکس نیز هست.

۴§ نسب ترتیبی

۴.۱. مقدمه. آنچه از اصطلاح نسبت ترتیبی به ذهن میرسد نسبتی است که بر حسب آن

بتوان ترتیبی بین هر دو عضو مجموعه‌ای که این نسبت در آن تعریف شده است قائل شد (مانند اینکه بتوان عضوی را پیش از، کوچکتر از، زیر، بعد از، بزرگتر از، یا بالای عضو دیگر شمرد)، و بدین وسیله، آن مجموعه را مرتب کرد. این گونه نسبتها، علاوه بر استعمال عرفی، در همه‌ی مباحث ریاضی، و در اغلب علوم دیگر در کار میآیند، و لهذا جا دارد که آنها را دقیقاً تعریف کنم.

برای آماده کردن ذهن، فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A باشد. برای اینکه f مجموعه‌ی A را مرتب کند باید واجد شرایطی باشد که جملگی ناشی از مفهوم عادی ترتیب است. مثلاً، اگر f نسبت سبکتری در اشیاء مادی باشد انتظار داریم که (۱) هیچگاه چیزی سبکتر از خود نباشد (یعنی، f نامنعکس باشد)؛ (۲) اگر x سبکتر از y است y سبکتر از x نباشد (یعنی، f نامتقارن باشد)، (۳) اگر x سبکتر از y و y سبکتر از z است آنگاه x سبکتر از z باشد (یعنی، f متعدی باشد)؛ و (۴) f تابع اصل تثلیث باشد. با اندک تأملی معلوم میشود که نسبتهای متعدی و، در عین حال، تابع اصل تثلیث (قوی) نامنعکس و نامتقارن هستند.

در پرتو توضیحات مذکور، تعریف کلی ذیل را میآوریم:

۴.۲. تعریف. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A باشد. نسبت f را یک نسبت ترتیبی در A یا یک ترتیب A یا یک ترتیب در A خوانیم اگر f متعدی و تابع‌اصل تثلیث باشد. در این صورت، زوج مرتب (A, f) را مجموعه‌ی مرتب A با نسبت ترتیبی f یا، مختصراً (هر جا بیم ابهام نرود)، مجموعه‌ی مرتب A خوانیم، و گوئیم نسبت f مجموعه‌ی A را مرتب میکند.

۴.۲.۱. قضیه. هر نسبت ترتیبی نامنعکس و نامتقارن است. (چرا؟)

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم ۳.۵.۴ است:

۴.۲.۲. قضیه. اگر نسبت f مجموعه‌ی A را مرتب کند نسبت $f^{\smallsmile}$ نیز این مجموعه را مرتب میکند.

معلومست که ترتیبی که $f^{\smallsmile}$ به اعضای A میدهد مقلوب ترتیب آنها با f است، بدین معنی که اگر xfy آنگاه $yf^{\smallsmile}x$.

۴.۲.۳. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم a، b، و c دو بدو متمایز باشند، و $A = \{a, b, c\}$، و

$$f = \{(c, b), (b, a), (c, a)\}.$$

معلوم است که f یک نسبت ترتیبی در A است. همچنین نسبت $f^{\smallsmile} = \{(b, c), (a, b), (a, c)\}$ یک نسبت ترتیبی در A است. هر دو نسبت را نمایش دهید.

(ب). اگر قرار بگذاریم که هرگاه xfy آنگاه x را در سمت چپ y بنویسیم، در مثال سابق، ترتیبی را که f به اعضای A میدهد میتوان به صورت

$$c, \quad b, \quad a \tag{۱}$$

عرضه کرد، و ترتیبی را که $f^{\smile}$ به اعضای آن میدهد به صورت

$$a, \quad b, \quad c. \qquad (۲)$$

(پ). اگر $<$ و $>$، بترتیب، نسبتهای کوچکتری و بزرگتری در $\mathbf{N}$ باشند، هر یک از $<$ و $>$ یک نسبت ترتیبی در $\mathbf{N}$ است، و به قیاس آنچه در (ب) گفته شد، ترتیبی را که این دو نسبت به $\mathbf{N}$ میدهند میتوان، بترتیب، چنین عرضه کرد:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots, \qquad (۱)$$

$$\ldots,\ n+1,\ n,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1. \qquad (۲)$$

(ت). در مجموعه‌های مرتب میتوان مفاهیمی مانند مفاهیم عادی وابسته به ترتیب تعریف کرد. مثلاً، در مجموعه‌ی مرتب (A, f)، اگر A عضوی مانند a داشته باشد که هیچ عضو A نسبت f به آن نداشته باشد a را ابتدای A بر حسب f نامیم، و اگر A عضوی مانند b داشته باشد که به هیچ عضو A نسبت f نداشته باشد b را انتهای A بر حسب f خوانیم. اگر xfy و yfz آنگاه گوئیم y بر حسب f بین x و z است، و غیره. اگر، وقتی که xfy، x را بر حسب f پیش از y، و y را بر حسب f بعد از x بخوانیم، میتوان گفت که ابتدای A بر حسب f عضوی از A است که هیچ عضو A بر حسب f پیش از آن نیست، و انتهای A بر حسب f عضوی از A است که هیچ عضو A بر حسب f بعد از آن نیست.

مثلاً، در مثال (آ)، c ابتدای (انتهای) A است بر حسب f ($f^{\smile}$)، و a انتهای (ابتدای) A است بر حسب f ($f^{\smile}$). در مثال (پ)، 1 ابتدای $\mathbf{N}$ است بر حسب $<$ و انتهای آن است بر حسب $>$. $\mathbf{N}$ بر حسب $<$ ($>$) انتها (ابتدا) ندارد.

۴.۲.۴. تبصره‌ی مهم. از خلط کردن دو مفهوم «مجموعه» و «مجموعه‌ی مرتب» باید اکیداً احتراز کرد[۱]. مجموعه‌ی مرتب، چنانکه گذشت، زوج مرتبی است از یک مجموعه و یک نسبت ترتیبی در آن. خواصی که معمولاً به مجموعه‌های مرتب نسبت داده میشود خواص خود مجموعه به عنوان مجموعه نیست، بلکه ناشی از ترتیب آنهاست، و با تغییر ترتیب ممکن است تغییر پذیرد. چنانکه در مثال اخیر دیدیم، در مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{N}, <)$ گزاره‌ی «1 ابتدای اعداد طبیعی است» راست است، ولی این گزاره در مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{N}, >)$ دروغ میباشد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی، بر حسب ترتیبی که به آن داده شود، ممکن است ابتدا داشته باشد یا نه.

۴.۳ ترتیب القائی. بر طبق مفهوم عادی ترتیب، بدیهی بنظر میآید که اگر مجموعه‌ای را با ترتیب معینی مرتب کنیم هر مجموعک آن نیز ترتیبی میابد. مثلاً، اگر مجموعه‌ای مانند A از زنان و مردان را به ترتیب قد مرتب کنیم مجموعه‌ی زنان عضو آن مجموعه نیز به ترتیب قد مرتب میشود. بعلاوه، ترتیب هر دو زن به عنوان اعضای این مجموعه‌ی زنان همان ترتیب آنان به عنوان اعضای مجموعه‌ی مختلط A است. همچنین، اگر $A = \{3, 1, 2, 4\}$ و $B = \{4, 1, 2\}$، و A را بر حسب نسبت کوچکتری مرتب کنیم («1, 2, 3, 4»)، از این ترتیب، ترتیب «1, 2, 4» برای B حاصل میشود که، در آن، ترتیب هر دو عضو B همان

---

(۱) ۲:۱.۱.۵.۴ ملاحظه شود.

ترتیب آنهاست به عنوان اعضای A. در هر دو مثال، ترتیبی که به A داده میشود ترتیبی به مجموعک مورد نظر از آن القا میکند. تعریف دقیق مطالبی که در ضمن مثالهای مذکور گذشت آسان است. مثلاً، در مثال دوم، نسبت کوچکتری در A عبارتست از

$$f = \{(1, 2), (1, 3,) (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتبی از f که مختصات هر یک متعلق به B باشند عبارتست از

$$f' = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\},$$

که تحدیدی از f است، و نسبت کوچکتری در B میباشد. واضحست که، بازاء هر x و y از B، فقط و فقط وقتی $x f' y$ که $x f y$؛ یا، به زبان عادی، ترتیب هر دو عضو B بر حسب f' همان ترتیب آنهاست بر حسب f. اینک بیان کلی مطالب مذکور را آغاز میکنیم.

۴.۳.۱. تعریف. اگر f نسبتی در مجموعه‌ی A و B مجموعکی از A باشد نسبت

$$f' = \{(x, y) \mid x, y \in B \;\&\; x f y\}$$

را، که مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتبی است از f که مختصات هر یک از آنها به B تعلق دارند، نسبت القائی f به B خوانیم.

واضحست که

۴.۳.۲. قضیه. با مفروضات تعریف فوق، بازاء هر x و y از B،

$$x f' y \Leftrightarrow x f y.$$

نسبت f' خواصی از f «به ارث میبرد». مثلاً، فرض کنیم f در A متعدی باشد. در این صورت، f' نیز در B متعدی است. زیرا، فرض کنیم x، y، و z اعضای دلخواهی از B باشند، و $x f' y$ و $y f' z$. بالنتیجه، $x f y$ و $y f z$، و چون $x, y, z \in A$، و f متعدی فرض شده است، $x f z$. اینک از $x, z \in B$ و $x f z$، بنا بر تعریف f'، نتیجه میشود، $x f' z$. ▲

به همین قیاس به‌آسانی معلوم میشود که

۴.۳.۳. قضیه. اگر نسبت f مجموعه‌ی A را مرتب کند، و B مجموعکی از A باشد، نسبت f' که f به B القا میکند B را مرتب مینماید (ترتیب القائی)، و بعلاوه، ترتیب هر دو عضو B بر حسب نسبت f' همان ترتیب آنهاست بر حسب نسبت f (به عبارت دیگر، بازاء هر x و y از B، $x f' y \Leftrightarrow x f y$).

نظر به خاصیت اخیر است که، در ریاضیات، معمولاً ترتیب القائی را به همان نام ترتیب القا ـ کننده میخوانند[1]، چنانکه ذیلاً خواهیم دید.

۴.۳.۴. فایده. در ریاضیات، نسبت کوچکتری در اعداد طبیعی، نسبت کوچکتری در اعداد صحیح، نسبت کوچکتری در اعداد حقیقی، و غیره ـ جملگی را «$<$» مینامند. در این مرحله،

---

(۱) این تسامح در نسبتهای دیگر نیز معمول است.

شما میدانید که این نسبتها دوبدو متفاوتند. مثلاً، اگر $<$ نسبت کوچکتری در اعداد حقیقی و $<_{\mathrm{N}}$ نسبت کوچکتری در اعداد طبیعی باشد، $(-2, 3) \in <$ ولی $(-2, 3) \notin <_{\mathrm{N}}$، و به عبارت دیگر، $-2 < 3$ ولی $\sim(-2 <_{\mathrm{N}} 3)$. چگونه است که، در ریاضیات، این نسبتهای متفاوت را به یک نام میخوانند؟ اینک جواب گفتن به این سؤال آسان است. فرض کنید $<$ (نسبت کوچکتری در اعداد حقیقی) معلوم باشد. نسبت $<_{\mathrm{N}}$ (نسبت کوچکتری در اعداد طبیعی) را میتوان چنین تعریف کرد:

$$<_{\mathrm{N}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \;\&\; x < y\}.$$

این نسبت همان ترتیبی است که $<$ به $\mathbf{N}$ القا میکند، و چون، بازاء هر دو عدد طبیعی x و y، گزاره‌نماهای $x < y$ و $x <_{\mathrm{N}} y$ معادل یکدیگرند، نسبت $<_{\mathrm{N}}$ را، بر سبیل تسامح، به همان نام $<$ میخوانند.

۴.۳.۵. تمرین

۱. $A = \{-2, 3, 1, 0\}$ و

$$f = \{(3, 1), (3, 0), (0, -2), (1, 0), (3, -2), (1, -2)\}.$$

ثابت کنید که (A, f) مجموعه‌ای است مرتب، و اسم مناسبی برای f پیشنهاد کنید.

۲. در مجموعه‌ی مرتب (A, f)، ابتدای (انتهای) A بر حسب f، در صورت وجود، منحصر بفرد است.

۳. در $\mathbf{N}$ نسبتهای f و g چنین تعریف شده‌اند:

xfy یعنی x فرد و y زوج است یا x و y فردند و $x < y$ یا x و y زوجند و $x < y$.

xgy یعنی x فرد و y زوج است یا x و y فردند و $x < y$ یا x و y زوجند و $x > y$.

قرار میگذاریم که هر گاه xfy (xgy) آنگاه x را پیش از y بنویسیم.

(آ). اعداد طبیعی از 1 تا با 20 را یک بار بر حسب f و یک بار بر حسب g بر طبق قرار فوق بنویسید.

(ب). ثابت کنید که هر یک از f و g مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ را مرتب میکند، و $\mathbf{N}$ برحسب f ابتدا دارد ولی انتها ندارد، اما بر حسب g هم ابتدا و هم انتها دارد.

(پ). ثابت کنید که بر حسب هر یک از دو نسبت f و g اعدادی طبیعی بین 1 و 2 وجود دارد.

۵§ نسبتهای هم‌ارزی

۵.۱. تعریف. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A باشد. نسبت f را یک نسبت هم‌ارزی در A خوانیم در صورتی که در A منعکس، متقارن، و متعدی باشد. در این صورت، اگر نسبت f بین x و y برقرار باشد گوئیم x و y برحسب f هم‌ارز هستند (۳.۵.۵).

بنا بر ۳.۵.۳،

۵.۱.۱. قضیه. اگر f یک نسبت هم‌ارزی در مجموعه‌ی A باشد، $A = \mathrm{d}f$.

۵.۱.۲. امثله

(آ). معروفترین نسبتهای همارزی در مجموعه‌ی A تابع همانی در A است. بر حسب این نسبت، هر عضو A با خودش همارز است، و لاغیر.

(ب). فرض کنیم $A = \{a, m, b, p, n\}$، و a، b، m، n، و p دوبدو متمایز باشند. نسبت

$$f = \{(a, a), (b, b), (m, m), (n, n), (p, p), (a, b), (b, a), (m, n), (n, m), (m, p), (p, m), (n, p), (p, n)\}$$

یک نسبت همارزی در A است. چون afa، a با خود برحسب f همارز است؛ چون afb و bfa، a و b برحسب f همارز میباشند.

(پ). بنا بر ت: ۳.۵.۲، نسبت توازی در مجموعه‌ی خطوط مستقیم واقع در یک صفحه یک نسبت همارزی است. همچنین است نسبت توازی در مجموعه‌ی خطوط مستقیم فضای عادی.

(ت). نسبت تشابه در مجموعه‌ی مثلثهای واقع در یک صفحه یک نسبت همارزی است.

۵.۲. نسبتهای همارزی و افراز.

بین نسبتهای همارزی و افراز مجموعه‌ها (۲:۴۰۷) بستگی مهمی وجود دارد. قبلاً این بستگی را به وسیله‌ی مثالهائی توضیح میدهیم.

۵.۲.۱. امثله.

(آ). به مثال ب: ۵.۱.۲ باز میگردیم. هر عضو A با اعضائی از A بر حسب نسبت f همارز است. مثلاً، مشاهده میکنیم که afa و afb. پس، a با a و با b بر حسب نسبت f همارز میباشد. مجموعه‌ی این اعضا، یعنی مجموعه‌ی $\{a, b\}$، را یک «دسته‌ی همارز بر حسب نسبت f»، و a را «عضو مولد» این دسته خوانیم، و دسته‌ی مذکور را $[a]$ مینامیم. همچنین، $[m]$ یعنی مجموعه‌ی اعضائی از A که m با هر یک از آنها بر حسب نسبت f همارز است، یا $\{x \mid mfx\}$. این اعضا عبارتند از m، n، و p، و لهذا $[m] = \{m, n, p\}$. بدین گونه، دیده میشود که

$$[a] = [b] = \{a, b\},$$
$$[m] = [n] = [p] = [m, n, p].$$

چنانکه ملاحظه میشود، دو دسته‌ی همارز یا باهم مساویند یا از یکدیگر جدا هستند. بعلاوه، مجموعه‌ی دسته‌های همارز، یعنی مجموعه‌ی

$$\{\{a, b\}, \{m, n, p\}\}$$

که آن را A/f مینامیم، یک افراز A است. این افراز را افرازی که f به A القا میکند نامیم.

(ب). بالعکس، فرض کنیم $A = \{0, 1, 3\}$. مجموعه‌ی

$$\mathscr{M} = \{\{1\}, \{0, 3\}\}$$

یک افراز A است. اینک نسبت f را در A با این ضابطه تعریف میکنیم:

xfy یعنی x و y به یک عضو $\mathscr{M}$ تعلق دارند.

پس، $1f1$، $0f0$، $0f3$، $3f3$، و $3f0$، و نسبت f با ازواج مرتب آن عبارتست از

$$f = \{(1, 1), (0, 0), (0, 3), (3, 3), (3, 0)\},$$

و بالمعاینه معلومست که f یک نسبت همارزی در A است. این نسبت را نسبتی که $\mathscr{M}$ به A القا میکند خوانیم. معلومست که مجموعه‌ی دسته‌های همارز بر حسب نسبت f همان $\mathscr{M}$ است.

اینک به بیان کلی مطالب گذشته میپردازیم.

۵.۲.۲. تعریفات. فرض کنیم f یک نسبت هم‌ارزی در مجموعه‌ی A باشد. مجموعه‌ی جمیع اعضائی از A را که عضوی از A با هر یک از آنها هم‌ارز است یک دسته‌ی هم‌ارز بر حسب نسبت f و آن عضو را عضو مولد این دسته نامیم. دسته‌ای را که عضو مولدش a باشد $[a]$ میخوانیم. به عبارت دیگر،

$$[a] = \{x \mid afx\}.$$

مجموعه‌ی جمیع دسته‌های هم‌ارز بر حسب نسبت f را A/f یا خارج قسمت A بر f نامیم.

۵.۲.۳. قضیه (خواص دسته‌های هم‌ارز). فرض کنیم f یک نسبت هم‌ارزی در مجموعه‌ی غیر خالی A باشد. در احکام آتیه و اثبات آنها، مقصود از «هم‌ارز» همه جا «هم‌ارز بر حسب نسبت f» است، و متغیرهای فردی مقید به A میباشند.

I. هر دسته‌ی هم‌ارز مجموعک A است.

II. همواره $a \in [a]$. بالنتیجه، هیچ دسته‌ی هم‌ارز خالی نیست.

III. اعضای هر دسته‌ی هم‌ارز دوبدو هم‌ارزند.

IV. دو دسته‌ی هم‌ارز فقط و فقط وقتی باهم مساویند که عضوی از یکی هم‌ارز عضوی از دیگری باشد.

V. شرط لازم و کافی برای آنکه xی از A عضو یک دسته‌ی هم‌ارز باشد آنست که این دسته مساوی $[x]$ باشد.

VI. دو دسته‌ی هم‌ارز یا باهم مساویند یا از هم جدا هستند.

برهان. احکام مذکور جملگی نتیجه‌ی مستقیم تعریف هستند. باید بخاطر داشت که، بنا بر ۵.۲.۲،

$$x \in [a] \;\underline{\Omega}\; afx. \qquad (*)$$

اینک به اثبات احکام فوق میپردازیم. I بدیهی است.

II. چون f منعکس است، afa. پس، بنا بر (*)، $a \in [a]$.

III. اگر $x \in [a]$ و $y \in [a]$ آنگاه، بنا بر (*)، afx (۱) و afy (۲). چون f متقارن است، از (۱) نتیجه میشود، xfa (۳). چون f متعدی است، از (۳) و (۲) نتیجه میشود، xfy.

IV. اولاً، اگر $[b] = [a]$ با توجه به II خواهیم داشت $a \in [b]$. پس، بنا بر (*)، bfa. ثانیاً، فرض کنیم $x \in [a]$ (۱)، $y \in [b]$ (۲)، و xfy (۳). گوئیم $[b] = [a]$. زیرا، بنا بر (۱)، (۲)، و (۳)، afb (چرا؟). حال اگر z عضوی از $[a]$ باشد، بنا بر (*)، afz، و لهذا، zfa، و بالنتیجه، zfb. پس، بنا بر (*)، $z \in [b]$. به همین قیاس معلوم میشود که هر عضو $[b]$ عضو $[a]$ است، و بالنتیجه، $[b] = [a]$.

V. اگر $x \in [a]$ آنگاه afx. پس، بنا بر IV، $[x] = [a]$. بالعکس، اگر یک دسته‌ی هم‌ارز مساوی $[x]$ باشد، بنا بر II، x بدان تعلق دارد.

اثبات VI به متعلم محول میشود. ▲

۵.۲.۴. قضیه. با مفروضات قضیه‌ی قبل، A/f یک افراز A است (افرازی که f به A القا میکند).
برهان. بنا بر تعریف افراز و قسمتهای I و II قضیه‌ی قبل، کافی است ثابت کنیم که هیچ عضو A به بیش از یک دسته‌ی هم‌ارز تعلق ندارد، و این، بنا بر قسمت VI قضیه‌ی قبل، بدیهی است. ▲

۵.۲.۵. قضیه. اگر $\mathscr{M}$ یک افراز مجموعه‌ی غیر خالی A باشد نسبت f که با ضابطه‌ی

xfy یعنی x و y متعلق به یک عضو $\mathscr{M}$ هستند

تعریف شود یک نسبت هم‌ارزی در A است[1] (نسبت هم‌ارزیی که $\mathscr{M}$ به A القا میکند).
برهان. چون اشیاء متعلق به اعضای $\mathscr{M}$ تعلق به A دارند، f نسبتی است در A. اگر a عضو دلخواهی از A باشد، بنا بر تعریف افراز، a به عضوی از $\mathscr{M}$ تعلق دارد، و بالنتیجه، بنا بر تعریف f، afa. پس، f منعکس است. تقارن f بدیهی است. بالاخره، برای اثبات تعدی، فرض کنیم afb و bfc. پس، a و b به عضوی از $\mathscr{M}$، مثلاً E، و b و c به عضوی از $\mathscr{M}$، مثلاً F، تعلق دارند. از اینجا لازم میآید که $E = F$ (زیرا، از $E \neq F$ نتیجه میشود که b به دو عضو $\mathscr{M}$ تعلق دارد، و این با تعریف افراز متناقض است). پس $a, c \in E$، و بالنتیجه، afc. ▲

۵.۳. تمرین

۱. کدام یک از نسبتهای ذیل در مجموعه‌ای که معین شده است یک نسبت هم‌ارزی است؟

نسبت	مجموعه
$\{(4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$	$\{4, 6, 8\}$
$\{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6)\}$	$\{4, 6, 8\}$
$\{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 8), (8, 4)\}$	$\{4, 6, 8\}$
$\{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 8), (8, 4)\}$	$\{4, 6\}$
$\{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 8), (8, 4)\}$.	$\{4, 6, 8, 9\}$

۲. آیا میشود که یک نسبت هم‌ارزی در A این مجموعه را مرتب کند؟

۳. A مجموعه‌ی افراد انسانیی است که در حال حاضر در ایران زندگی میکنند، و نسبت f در A، که آن را «نسبت همخانگی» مینامیم، با ضابطه‌ی ذیل تعریف شده است:

xfy یعنی x و y در یک خانه زندگی میکنند.

برای احتراز از ابهام، فرض میکنیم هرکس در یک خانه زندگی میکند، و هرکس با خودش همخانه است. بالبداهه، f یک نسبت هم‌ارزی در A است. تعریفات ۵.۲.۲ و احکام قضایای ۵.۲.۳ و ۵.۲.۴ را در باب این نسبت توضیح دهید.

---

(۱) میتوان ثابت کرد که $A/f = \mathscr{M}$ و f یگانه نسبت هم‌ارزی در A است که خارج قسمت A بر آن مساوی $\mathscr{M}$ است. اثبات این احکام مشکل اساسی ندارد، ولی، برای اختصار، از آن درمیگذریم.

۴. در مورد هر یک از نسبتهای مسئلهی ۱ که نسبت همارزی در مجموعهی نظیر آنست افرازی را که آن نسبت به این مجموعه القا میکند بنویسید.

۵. در $\mathbf{I}$ نسبت $\equiv_4$ را چنین تعریف میکنیم:

$x \equiv_4 y$ یعنی $x - y$ به 4 قابل قسمت است.

ثابت کنید که $\equiv_4$ یک نسبت همارزی در $\mathbf{I}$ است، و دستههای همارز بر حسب این نسبت را تعیین کنید.

۶. اسامی متفاوت مذکور در داخل ابروها اسامی افراد دو بدو متمایزند:

$A =$ {حسن، احمد، محمد، محسن، حسین، محمود، اصغر، سعید}،

$\mathcal{M} =$ {{حسن، حسین}، {احمد، اصغر}، {محمد، محسن، محمود}، {سعید}}.

نسبت همارزی f را که $\mathcal{M}$ به A القا میکند بنویسید، و اسم مناسبی برای آن پیشنهاد کنید. سپس، A/f را تعیین نمائید.

۵.۴. فواید نسبتهای همارزی. نسبتهای همارزی در منطق و ریاضیات اهمیت تمام دارند. این نسبتها از لحاظ منعکس بودن، تقارن، و تعدی مانند نسبت تساوی منطقی هستند، و در واقع، هر نسبت همارزی نوعی تساوی یا تساوی از جهتی است. به همین جهت، گاه حکم به برقراری یک نسبت همارزی را بین دو چیز با تساوی آنها از جهت مناسب بیان میکنند. مثلاً، نسبت هموزن بودن در اشیاء مادی را نسبت تساوی در وزن میخوانند، و گزارهنمای «x نسبت هموزن بودن به y دارد» را با عبارت «x از لحاظ وزن با y یکسان است» بیان میکنند. البته، نسبتهای همارزی، غیر از نسبت همانی (تساوی منطقی)، خاصیت تعویضپذیری را به طور کلی ندارند، و مثلاً، اگر f نسبت هموزن بودن در اشیاء مادی باشد، از مقدمات $x f y$ و «x زرد است» نمیتوان نتیجه گرفت که y زرد است.

اگر $A = \{a, b, c, \cdots\}$ مجموعهای و I نسبت همانی در A باشد، I یک نسبت همارزی در A است (چرا؟)، و

$$A/I = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \cdots\}.$$

پس، میتوان گفت که افرازی که I به A القا میکند تفصیلیترین افرازها است. بازاء هر نسبت همارزی دیگر در A مانند f، همهی اعضائی از A که از «جهتی» که با f بیان میشود همانند هستند در یک دسته قرار میگیرند، و لاغیر. به عبارت دیگر، یک دستهی همارز مجموعهی جمیع اعضائی است از A که از جهت مذکور (نه از جمیع جهات، که مختص نسبت همانی یا تساوی منطقی است) غیر قابل تمییزند. بنا بر این، میتوان از هر دستهی همارز بر حسب نسبت f، یعنی از هر عضو A/f، یک عضو را، به عنوان نمایندهی آن دسته اختیار کرد، و بجای A، مجموعهی این نمایندهها را مورد توجه قرار داد، یا آنکه توجه را اساساً از A به A/f معطوف کرد. تفصیل این مطالب و اهمیت آنها را در جبر نوین خواهید دید.

† ۵.۴.۱. تبصره. نظر به اهمیت فراوان نکتهی اخیر در ریاضیات کنونی، توضیح مختصری در باب آن میآوریم.

چنانکه در فصل ۱ در باب تساوی گفتیم، از ارکان هر دستگاه ریاضی نوعی تساوی

است، یعنی نوعی نسبت هم‌ارزی. سابقاً، وقتی که مجموعه‌ای مانند A با نسبتی هم‌ارزی در آن مانند f در دست بود، با عبارتی بدین مضمون

$$afb \text{ یعنی } a = b$$

تساوی را در آن مجموعه تعریف میکردند، چنانکه، در هندسه، تساوی را در اشکال هندسی به معنی نسبت قابلیت انطباق یا هَمـنِهِشتی میگیرند. روش نوین اینست که توجه را از A به A/f معطوف میدارند، و بجای اینکه از a و b و غیره گفتگو کنند، و $a = b$ را با afb تعریف نمایند، از $[a]$ و $[b]$ و غیره گفتگو میکنند. چون afb معادل $[a] = [b]$ است، نیازی به تعریف مجدد تساوی نخواهد بود.

وقتی که A/f را جایگزین A ساختیم باید توابع و اعمالی را که در A تعریف شده‌اند، و بستگیهای A را با مجموعه‌های دیگر، به A/f منتقل ساخت. در بسیاری از موارد مهم، سیماهای ساختمانی A به صورتی ساده‌تر در A/f پدید میآیند.

۵.۴.۲. تعریف به وسیله‌ی نسبتهای هم‌ارزی. دیگر از فواید اساسی نسبتهای هم‌ارزی اینست که، به وسیله‌ی این گونه نسبتها، بسیاری از مفاهیم ریاضی را ــ که معمولاً بی تعریفی مقنع میپذیریم ــ میتوان تعریف کرد. به عنوان مثال، مفهوم امتداد را در هندسه‌ی عادی اختیار میکنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع خطوط مستقیم باشد. بنا بر تعریف،

خطوط مستقیم a و b هم‌امتدادند

یعنی $a \parallel b$. چنانکه دیده میشود، اگر چه لفظ «امتداد» در عبارت «هم‌امتدادبودن» آمده است، مفهوم هم‌امتدادبودن را میتوان بی توسّل به مفهوم امتداد تعریف کرد. بر طبق تعریف فوق، نسبت هم‌امتدادبودن، یا f، یک نسبت هم‌ارزی در A است. یک دسته‌ی هم‌ارز بر حسب نسبت هم‌امتدادبودن عبارتست از مجموعه‌ی جمیع خطوطی که دو بدو با هم متوازیند، و اگر a خط مستقیمی باشد $[a]$ مجموعه‌ی جمیع خطوط موازی با a است. ما همین دسته را «امتداد a» مینامیم. به عبارت دیگر، بنا بر تعریف،

امتداد a یعنی $[a]$

سپس، امتداد را چنین تعریف میکنیم:

امتداد یعنی A/f.

این تعریف ممکن است عرفاً مطبوع نباشد، ولی ــ گذشته از این که طالبین مطبوعیت عرفی نمیتوانند امتداد را تعریف کنند ــ ما را با مطبوعیت عرفی سر و کاری نیست. تعریف مذکور آنچه را که از جنبه‌ی ریاضی از مفهوم امتداد میخواهیم بدست میدهد.

به عنوان مثال دیگر، به مبحث حاملها رجوع میکنیم. مفاهیم «حامل آزاد» و «حامل پابند» اغلب بر محصلین مبهم است. در پرتو مطالبی که در فصل حاضر آموختیم تعریف این مفاهیم آسان است، و ذیلاً بدان میپردازیم.

تعریف ۱. حامل پابند یعنی زوج مرتب دو نقطه. مختص اول یک حامل را مبدأ، مختص دوم آن را منتها، خطِ نامتناهی واصل بین مبدأ و منتها را محمل، و فاصله‌ی آنها را کمیت یا

هَـنْـگ، و جهت از مبدأ به منتها را جهت آن حامل نامیم. حامـل (a, b) معمولاً به عـلامت $\overrightarrow{ab}$ نمایش داده میشود.

تعریف ۲. دو حامـل پابند را همسنگ خـوانیم در صورتی که محملهـای آنهـا متوازی باشند، و دو حامل دارای یک جهت و یک کمیت باشند.

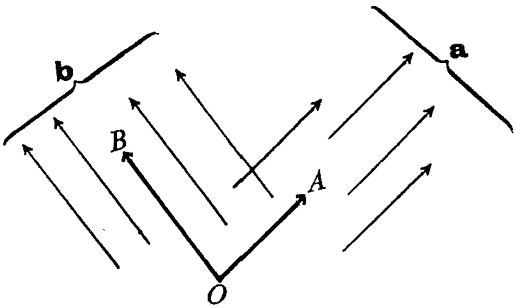
بر طبق قضایای هندسه‌ی مقدماتی، به آسانی معلوم میشود که

قضیه‌ی ۱. نسبت همسنگی در مجموعه‌ی حاملهای پابند یک نسبت هم‌ارزی است.

هر دسته‌ی هم‌ارز بر حسب نسبت همسنگی عبارتست از مجموعه‌ی جمیع حاملهای پابند همسنگ با یک حامل پابند.

تعریف ۳. هر دسته‌ی هم‌ارز بر حسب نسبت همسنگـی را یکـــ حامل آزاد نامیم. یک حامل آزاد را با حرفی که سهمی بالای آن قرار دارد (مانند $\vec{v}$) یا با حرفی «سیاه» (مـانند **v**) مینامند.

بدیهی است که یک حامـل آزاد را نمیتوان بـا تصویـر هندسی نمـایش داد. معمولاً، عضوی از یک حـامل آزاد را (یعنی حامل پـابندی متعلق بـه آن را) بـه عنوان نماینده‌ی آن حامل آزاد انتخاب میکنند، و در استدلال با حاملهای آزاد نماینده‌های آنها را بکار میبرنـد. در شکل مجمل ۲۵، حاملهای پابند $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ نمایش حاملهای آزاد **a** و **b** میباشند.



شکل ۲۵

۶§ تناظر یـکـبـیـک (1_1)

چنانکه در مبحث عکس نسب دیدیم، ممکن است یک نسبت تـابع باشد ولی عکس آن تابـع نباشد. توابعی که عکس آنها نیز تـابع است در ریاضیات اهمیت فراوان دارنـد. چنانـکه از توضیحات مثال ۶.۱.۳ : ب معلوم است، در ایـن حالت، نه فقط هر عضو حوزه‌ی تعریف تابع فقط یک نظیر در حوزه‌ی مقادیر دارد، بلکه هر عضو حوزه‌ی مقـادیر تـابع نیز نظیر فقط یک عضوحوزه‌ی تعریف تابع است (شکل ۱۹ در صفحه‌ی ۹۷ نیز ملاحظه شود). بـدین مناسبت، تابعی را که عکسش نیز تابع باشد «تناظر یکبیک» خـوانیم.

۶.۱. تعریف.

I. تابع f را یک تناظر یکبیک (یا $1-1$) خوانیم در صورتی که تابع معکوس داشته باشد، یعنی، f^{-} موجود باشد.

II. اگر A و B دو مجموعه باشند تابع f را یک تناظر یکبیک بین A و B نامیم در صورتی که f تابعی بر A بروی B باشد و f^{-} موجود باشد.

۶.۱.۱ امثله

(آ). نسبت $\{(a, a)\}$ تناظری $1-1$ است.

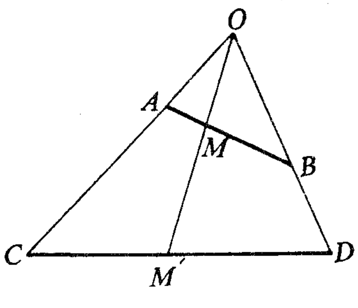
(ب). اگر I تابع همانی در مجموعه‌ی A باشد، بنا بر ۲.۲.۵، I تابعی بر A بروی A است، و بنا بر ۴ : ۳.۱.۷، I^{-} موجود است. پس، I یک تناظر $1-1$ بین A و A است. از این مثال معلوم میشود که همواره تناظری $1-1$ بین یک مجموعه و خودش وجود دارد.

(پ). اگر f تناظری $1-1$ بین مجموعه‌های A و B باشد، بنا بر ۳.۱.۲ و ۳.۱.۳، f^{-} تناظری $1-1$ بین B و A است.

(ت). بین یک مجموعه و یک مجموعک حقیقی آن ممکن است تناظری $1-1$ موجود باشد. مثلاً، اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج باشد، به آسانی دیده میشود که تابع $f: n \to 2n$ تناظری $1-1$ بین $\mathbf{N}$ و A است. این تناظر را میتوان چنین نمایش داد:

$$\begin{array}{lcccccc} \mathbf{N}: & 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ A: & 2, & 4, & 6, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

(ث). فرض کنیم AB قطعه خطی مستقیم به طول یک سانتیمتر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دلخواه باشد (مطابق شکل ۲۶). تابع f را بر مجموعه‌ی نقاط AB با این ضابطه تعریف میکنیم: $f(M)$ یا M' یعنی نقطه‌ی تقاطع خط OM با CD. به آسانی دیده میشود که f تناظری $1-1$ بین مجموعه‌ی نقاط خط AB است با مجموعه‌ی نقاط CD.



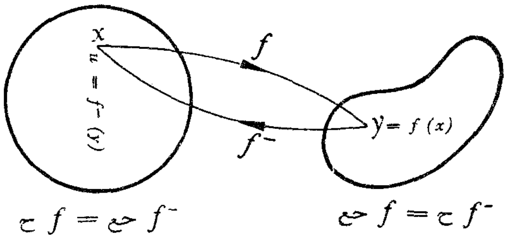
شکل ۲۶

۶.۱.۲. قضیه. اگر f تناظری $1-1$ باشد،

I. بازاء هر x از fح، $f^{-}(f(x)) = x$.

II. بازاء هر y از fحع، $f(f^{-}(y)) = y$.

برهان. قسمت I را ثابت میکنیم، و قبلاً به توضیح آن میپردازیم. فرض کنیم f تناظری $1-1$ و x عضوی از fح باشد. به زبان تبدیلات، تبدیل f این عضو را به $y = f(x)$ تبدیل میکند (شکل ۲۷)، که عضوی از fحع، و لهذا از f^{-}ح است. پس، تابع f^{-} این عضو را به $f^{-}(y)$ تبدیل میکند، که متعلق به f^{-}حع (یعنی به fح) است. حکم قسمت I اینست که این عضو اخیر همان x است. اینک اثبات این مطلب آسان است، زیرا، اگر $u = f^{-}(y)$ آنگاه $y f^{-} u$، و بالنتیجه، $u f y$. از طرف دیگر $x f y$. پس بنا بر ۳.۱.۵، $u = x$. بالنتیجه،



شکل ۲۷

$$x = u = f^{-}(y) = f^{-}(f(x)). \blacktriangle$$

اثبات قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود:

۶.۱.۳. قضیه. اگر f تابعی بر A بروی B باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه f تناظری $1\text{—}1$ بین A و B باشد آنست که، بازاء هر x و x' از A، اگر $x \neq x'$ آنگاه $f(x) \neq f(x')$.

۶.۱.۴. تمرین

۰۱ $\varnothing$ تناظری $1\text{—}1$ است.

۰۲ هر جزء یک تناظر $1\text{—}1$ تناظری $1\text{—}1$ است.

۰۳ a، b، و c دوبدو متمایزند. جمیع تناظرهای $1\text{—}1$ بین دو مجموعه‌ی $\{a, b, c\}$ و $\{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

۰۴ بین هر جفت از مجموعه‌های ذیل تناظری $1\text{—}1$ بنویسید:

(آ). $\mathbf{N}$ و مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی.

(ب). $\mathbf{N}$ و مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی.

(پ). $\mathbf{N}$ و $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

(ت). مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی.

(ث). $\mathbf{N}$ و مجموعه‌ی اعداد طبیعیی که مجذور کامل‌اند.

(ج). $\mathbf{N}$ و $\mathbf{I}$. (راهنمائی: تابع f را با ضابطه‌ی

$$f(n) = (-1)^n \cdot \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4}$$

ملاحظه کنید.)

§۷ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۷.۱. مقدمه. شاید همه اصطلاحات مجموعه‌ی متناهی و مجموعه‌ی نامتناهی را شنیده باشید. مجموعه‌ی انگشتان دست راست خود را مجموعه‌ای متناهی ولی مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی میشمارید. مسائل متعدد هست که

حل آنها در مورد مجموعه‌های متناهی آسان است، ولی در مورد مجموعه‌های نامتناهی مواجه با مشکلاتی میگردد. مثلاً، عده‌ی اعضای مجموعه‌ی حروف نقطه‌دار الفبای فارسی از عده‌ی حروف مجموعه‌ی الفبای فارسی کوچکتر است، زیرا، مجموعه‌ی اول جزء مجموعه‌ی دوم است، و به اصطلاح معروف، «کل بزرگتر از جزء است»، اما، آیا این اصل در مورد مجموعه‌های نامتناهی هم صادق است، و مثلاً عده‌ای اعداد طبیعی زوج از عده‌ی اعداد طبیعی کمتر است؟ برای پاسخ گفتن به این سؤالات باید قبلاً، مفاهیم متناهی و نامتناهی را در مورد مجموعه‌ها به طریق ریاضی تعریف کرد.

مسئله‌ی مقایسه‌ی دو مجموعه از لحاظ عده‌ی اعضا با مفهوم عده‌ی اعضا بدان حد وابسته به نظر میرسد که، در بادی امر، چنین مینماید که حل این مسئله بدون تعریف قبلی عده‌ی اعضا مقدور نیست. فرض کنیم A مجموعه‌ای از اشخاص سرپا ایستاده و B مجموعه‌ای از صندلیها باشد. راه مستقیمی که برای مقایسه‌ی عده‌ی اعضای این دو مجموعه بنظر میرسد اینست که عده‌ی اعضای هر یک از دو مجموعه را بوسیله‌ی شمردن تعیین کنیم، و اعداد حاصل از دو شمارش را باهم مقایسه نمائیم. واضحست که از این طریق نمیتوان مجموعه‌های نقاط دو قطعه خط را با هم یا مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج با هم از لحاظ عده‌ی اعضا مقایسه کرد، زیرا شمردن عده‌ی اعضای این مجموعه‌ها از قدرت آدمی خارج است. برای رهائی از این مشکل، فکر بلند کانتور* چاره‌ای بدیع اندیشیده است. در مثال سابق‌الذکر (اشخاص و صندلیها) راه ساده‌ای برای مقایسه‌ی دو مجموعه از لحاظ عده‌ی اعضا وجود دارد، و آن کوشش در برقرار کردن تناظری است 1ـ1 بین دو مجموعه به وسیله‌ی نشاندن اشخاص بر صندلیها. در راه اجرای این عمل، سه حالت ممکن است اتفاق افتد:

حالت اول آنکه هیچ صندلی خالی نماند، و هیچ شخص سرپا ایستاده نماند. در این حالت، یعنی وقتی که برقرار کردن تناظری 1ـ1 بین مجموعه‌های A و B ممکن باشد، دو مجموعه همعدد (یکسان از لحاظ عده‌ی اعضا) هستند. امکان برقرار کردن تناظری 1ـ1 بین دو مجموعه حاکی است از همعدد بودن آنها به معنائی که عادةً از این لفظ استنباط میشود.

حالت دوم آنست که کسی سرپا ایستاده نماند، و بعضی صندلیها خالی بماند. در این حالت، عده‌ی اعضای A کمتر از عده‌ی اعضای B محسوب میشود. مشخصات این حالت اینست که اولاً A با مجموعکی از B (مجموعه‌ی صندلیهای اشغال‌شده) همعدد است، و ثانیاً B با هیچ مجموعک A همعدد نیست.

حالت سوم آنست که همه‌ی صندلیها اشغال شود، و بعضی اشخاص سرپا بمانند. بحث در این حالت مانند حالت دوم است.

مثال مذکور در مورد دو مجموعه بود که «متناهی» محسوب میشوند، اما وقتی راه باز شد، فکر آزاد و بندگسیل ریاضی این قید را به یکسو مینهد. بدین گونه، دو تعریف آتیه، که هر دو مستقل از مفهوم عدد است، حاصل میگردد.

۷.۲. تعریف. مجموعه‌ی A را با مجموعه‌ی B همعدد خوانیم در صورتی که تناظری 1ـ1

بین A و B برقـرار باشد. بجای اصطلاح «همعدد»، اصطلاحات همقوت و متشابـه نیـز بکار میرود. گزاره‌نمای

$$A \cong B$$

یعنی A با B همعدد (یا همقوت یا متشابه) است.

۷.۲.۱. تعریف. اگر مجموعه‌ی A با مجموعکی از مجموعه‌ی B همعدد باشد، ولی B با هیچ مجموعک A همعدد نباشد گوئیم A ضعیفتر از B است (علامت: $A < B$) یا B قویتر از A است (علامت: $B > A$).

ملاحظه کنید که تعریفات فوق کلیت دارند، و چون مستقل از مفهـوم «عدد» هستند، میتوان آنها را در مورد مجموعه‌هائی که در استعمال عرفی «عده‌ی اعضا» برای آنها معنی ندارد (مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی) بکار بست. در هر حال، چون «عدد» را تعریف نکرده‌ایم، در اثبـات احکام مربوط به همعدد بودن و قوت و ضعف باید صرفاً به تعریفات دقیق فوق استناد کرد نه به مطالبی تعریف‌نشده یـا اموری که لفظاً بـدیهی بنظر میـآیند. مثلاً، بنظر بدیهی میآید که اگـر مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی B همعدد باشد مجموعه‌ی B نیز با A همعدد است، امـا این بداهت از آن جهت است که ما به مجموعه‌های متناهی و عـده‌ی اعضای آنها می‌اندیشیم، که هیچ یک هنوز تعریف نشده است. قضیه‌ی ذیل نشان میدهد که مفهوم همعدد بودن برطبق تعریف ۷.۲ این گونه انتظارات اولیه را که عرفاً از این مفهوم داریم برمیآورد:

۷.۲.۲. قضیه. نسبت همعدد بودن در مجموعه‌ی جمیع مجموعه‌ها[1] یک نسبت هم‌ارزی است، یعنی، همواره

I. $A \cong A$؛

II. اگر $A \cong B$ آنگاه $B \cong A$؛

III. اگر $A \cong B$ و $B \cong C$ آنگاه $A \cong C$.

برهان. قسمتهای I و II بنا بـر قسمتهای (ب) و (پ) از مثالهای ۶.۱.۱ بدیهی است. برای اثبات III، فـرض‌کنیم $A \cong B$ و $B \cong C$. پس، بنـا بر تعریـف، تنـاظری 1ـ1 مانند f بین A و B، و تنـاظری 1ـ1 مانند g بین B و C موجود است. اینک گوئیم $g \circ f$ تناظری 1ـ1 بین A و C است. زیرا، بنا بر ۳.۴.۰۷، $g \circ f$ تابع است، و بنـا بـر قسمتهـای III و IV از ۳.۰۴.۴، $A = (g \circ f)$حع و $C = (g \circ f)$حع. پس، $g \circ f$ تـابـعـی است بـر A بروی C. بالاخره، بنا بفرض، f^{-} و g^{-}، و بالنتیجه $f^{-} \circ g^{-}$ تابع است. پس، بنا بر ۳.۰۴.۷، $(g \circ f)^{\vee}$ نیز تابع است. خلاصه، $g \circ f$، تناظری 1ـ1 بین A و C است. ▲

۷.۲.۳. امثله

(آ). یک مجموعـه ممکن است بـا یک مجموعک حقیقی خـود همعدد باشد. مثـلاً، بنـا بـر

(۱) هر جا از «مجموعـه‌ی جمیع مجموعه‌ها» سخن میـرود مقصود جمیع مجموعه‌هـائی است که مجموعـک یک مجموعه‌ی عمومی مفروض هستند.

ت: ۶.۱.۱، مجموعه‌ی اعداد طبیعی با مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج همعدد است. در مثال ۵: ۶.۱.۱، مجموعه‌ی نقاط قطعه خط AB با مجموعه‌ی نقاط قطعه خط CD همعدد است.

(ب). اگر $A \cong B$ (۱)، $C \cong D$ (۲)، و $A < C$ (۳) آنگاه $B < D$.

برای اثبات، (۱)، (۲)، و (۳) را مفروض میگیریم. بنا بر ۷.۲.۱، کافی است ثابت کنیم که، اولاً، B با مجموعکی از D همعدد است، و ثانیاً، D با هیچ مجموعک B همعدد نیست. گوئیم، بنا بر (۳)، C مجموعکی مانند C_1 دارد که $A \cong C_1$ (۴)، بنا بر (۲)، تناظری 1ـ1 بین C و D موجود است. اگر D_1 مجموعه‌ی نظایر اعضای C_1 در این تناظر باشد، خواهیم داشت، $C_1 \cong D_1$ (۵). بنا بر (۴)، (۵)، (۱)، و ۷.۲.۲، $B \cong D_1$ (۶). پس، B با مجموعکی از D همعدد است. باقی میماند اثبات اینکه D با هیچ مجموعک B همعدد نیست. اگر چنین نباشد، با استدلالی شبیه آنکه گذشت، لازم میآید که C همعدد با مجموعکی از A باشد، و این با (۳) متناقض است. ▲

۷.۲.۴. تبصره. اگر A و B دو مجموعه باشند یا A همعدد با مجموعکی از B هست یا نه؛ و نیز، یا B همعدد با مجموعکی از A هست یا نه. بنا بر این، چهار حالت ذیل متصور است:

(آ). A همعدد با مجموعکی از B است، و B همعدد با مجموعکی از A.

(ب). A همعدد با مجموعکی از B است، ولی B همعدد با هیچ مجموعک A نیست.

(پ). B همعدد با مجموعکی از A است، ولی A همعدد با هیچ مجموعک B نیست.

(ت). نه A همعدد با مجموعکی از B است، نه B همعدد با مجموعکی از A.

در حالات (ب) و (پ)، بنا بر تعریف (۷.۲.۱)، بترتیب، $A < B$ و $B < A$. حالت (ت)، به استناد اصولی که وارد آنها نمیشویم، ممتنع است. در مورد حالت (آ)، حکم مهم ذیل، که کانتور* آن را حدس زده بود و شاگردش برنشتاین* آن را ثابت کرد برقرار است:

۷.۲.۵. قضیه (معروف به قضیه‌ی کانتور و برنشتاین یا قضیه‌ی برنشتاین یا قضیه‌ی هم‌ارزی). اگر هر یک از دو مجموعه‌ی A و B با مجموعکی از دیگری همعدد باشد A و B خود همعددند.

ما به اثبات این حکم نمیپردازیم.

۷.۲.۶. تمرین

۱. مسائل ۶.۱.۴:۴ را با اصطلاح همعدد بودن بیان کنید.

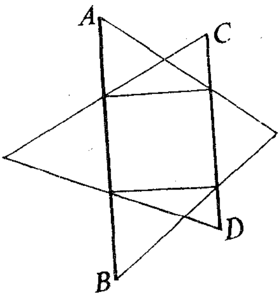
۲. بنا بر آنکه $A \cong B$، دو مجموعه مانند A_1 و B_1 بسازید که $A_1 \cong A$، $B_1 \cong B$، و $A_1 \cap B_1 = \varnothing$.

۳. در شکل ۲۸، به وسیله‌ی قضیه‌ی کانتور و برنشتاین ثابت کنید که مجموعه‌ی نقاط خط AB با مجموعه‌ی نقاط خط CD همعدد است.

۴. بنا بر آنکه $A \subseteq B$، در برقراری نسب همعدد بودن و قویتر و ضعیفتر بودن بین A و B بحث کنید.

۵. اگر $A \subseteq B \subseteq C$ و $A \cong C$ آنگاه $A \cong B \cong C$.

۶. اگر $A \cong B$، $B \cong C$، و $A \subseteq D \subseteq C$ آنگاه $D \cong C$.



شکل ۲۸

۷. اگر $A \cong C$، $B \cong D$، $C \subseteq B$، و $D \subseteq A$ آنگاه $A \cong B$.
۸. نسبت $>$ متعدی است، یعنی، اگر $A > B$ و $B > C$ آنگاه $A > C$.

۷.۳. مجموعه‌های متناهی. تعریف مجموعه‌های متناهی و مخصوصاً کشف خواص این مجموعه‌ها به وسیله‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی صورت میگیرد، که بحث رسمی از آن در فصل ۵ خواهد آمد. بدین جهت، طرح مسئله‌ی مجموعه‌های متناهی در این مقام خارج از ترتیب منطقی است. معذلک، چون خواصی از اعداد طبیعی را که در اینجا بکار میبریم در آن فصل هم ثابت نخواهیم نمود[1]، ترتیب حاضر را اتخاذ کردیم.

به زبان عادی، میتوان گفت که مجموعه‌ی متناهی مجموعه‌ای است که اعضایش را بتوان «شمرد». اما، «شمردن» چیست؟ برای تسهیل بیان، قبلاً تعریف ذیل را میآوریم:

۷.۳.۱. تعریف. بازاء عدد طبیعی k، مجموعه‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از k را قطعه‌ی اعداد طبیعی در k یا $\mathbf{N}_k$ نامیم. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{N}_k = \{n \mid n \in \mathbf{N} \,\&\, n \leqslant k\}.$$

مثلاً $\mathbf{N}_1 = \{1\}$، $\mathbf{N}_2 = \{1, 2\}$، و $\mathbf{N}_3 = \{1, 2, 3\}$.

مسئله‌ی شمردن بستگی به قطعه‌های اعداد طبیعی دارد. مثلاً، شمردن اعضای مجموعه‌ی

$$A = \{+, \text{ح}, \perp\}$$

بدین طریق صورت میگیرد که یکی از اعضای A، مثلاً، $+$ را، مطابق عدد طبیعی 1 قرار میدهیم، و سپس، یکی دیگر از اعضای آن، مثلاً ح را، مطابق 2، و یکی دیگر، جز آن دو را، مطابق عدد 3. در این مثال، با بکار بردن همه‌ی اعضای $\mathbf{N}_3$ عمل شمردن تمام میشود. چنانکه دیده میشود، شمردن اعضای A چیزی نیست جز برقرار کردن تناظر 1ـ1

$$\{(1, +), (2, \text{ح}), (3, \perp)\}$$

بین $\mathbf{N}_3$ و A. بطور کلی،

۷.۳.۲. تعریف. شمردن اعضای مجموعه‌ی A یعنی برقرار کردن تناظری 1ـ1 بین قطعه‌ای از اعداد طبیعی با این مجموعه (در این صورت، A و این قطعه همعدد میباشند). اگر چنین تناظری موجود باشد گوئیم A قابل شمردن است، یا شمردن اعضای آن ممکن است.

چنانکه خواهیم دید، هر مجموعه‌ای قابل شمردن نیست، بلکه مجموعه‌هائی وجود دارد که شمردن اعضایشان ممکن نمیباشد. بنا بر تعریف فوق، مجموعه‌ی A فقط و فقط وقتی قابل شمردن است که عددی طبیعی مانند k موجود باشد بطوری که $A \cong \mathbf{N}_k$. میتوان ثابت کرد که این عدد منحصر بفرد است؛ به عبارت دیگر، یک مجموعه با بیش از یک قطعه‌ی اعداد طبیعی همعدد نتواند بود.

---

(۱) همه‌ی خواص مذکور را میتوان بر اساس آنچه در فصل ۵ ثابت خواهد شد ثابت کرد، ولی، این کار دراز در کتاب حاضر نمیگنجد، و خود موضوع بحثی جداگانه است.

۷.۳.۳. تعریف. مجموعه‌ی A را متناهی خوانیم در صورتی که خالی باشد یا با قطعه‌ای مانند $\mathbf{N}_k$ از اعداد طبیعی همعدد باشد. در حالت اول گوئیم A دارای 0 عضو است، یا عده‌ی اعضای آن 0 است؛ در حالت ثانی، عدد طبیعی k را ــ که، بنا بر توضیحات سابق، منحصر بفرد است ــ عده‌ی اعضای A نامیم. معمولاً، عده‌ی اعضای مجموعه‌ی متناهی A را $n(A)$ مینامیم.

۷.۳.۴. امثله و فواید

(آ). هر مجموعه‌ی یکانی متناهی است، و عده‌ی اعضایش مساوی 1 است. زیرا، اگر $A=\{a\}$، تابع $\{(1, a)\}$ تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}_1$ و A است.

(ب). اگر $A=\{\text{ح}, \text{ی}, \text{م}\}$، تابع $\{(1, \text{م}), (2, \text{ی}), (3, \text{ح})\}$ تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}_3$ و A است. پس، $n(A)=3$.

(پ). هر مجموعه که با یک مجموعه‌ی متناهی همعدد باشد متناهی است، و عده‌ی اعضای دو مجموعه یکسان است (چرا؟).

(ت). چون هر مجموعه با خود متشابه است، بازاءِ هر عدد طبیعی k، $\mathbf{N}_k \cong \mathbf{N}_k$. پس، $\mathbf{N}_k$ متناهی است، و $n(\mathbf{N}_k)=k$ (به عبارت دیگر، عده‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از k مساوی k است).

(ث). از مثال قبل معلوم میشود که هر عدد طبیعی عده‌ی اعضای یک مجموعه‌ی متناهی است. به عبارت دیگر، بازاءِ هر عدد طبیعی مانند k، مجموعه‌ای مانند A هست که $n(A)=k$.

از مهمترین خواص مجموعه‌های متناهی، که این مجموعه‌ها را از مجموعه‌های نامتناهی (۷.۴) ممتاز میسازد، اینست که

۷.۳.۵. قضیه. هر مجموعک یک مجموعه‌ی متناهی متناهی است، و اگر A متناهی باشد و $B \subset A$ آنگاه $0 \leqslant n(B) < n(A)$.

ما این قضیه را ثابت نمیکنیم، و اثبات حکم مهم ذیل را، که نتیجه‌ی ساده‌ی آنست، بر عهده‌ی متعلم میگذاریم:

۷.۳.۶. قضیه. هیچ مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعک حقیقی خود همعدد نیست.

احکام ذیل در تعیین عده‌ی اعضای مجموعه‌های متناهی بسیار مفید است. ما وارد اثبات آنها نمیشویم. بر متعلم است که هر حکم را با آوردن مثالی توضیح دهد.

۷.۳.۷. قضیه. فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند.

I. مجموعه‌های $A \cup B$، $A \cap B$، و $A - B$ متناهی‌اند[۱]، و

(۱) چون $A \cap B \subseteq A$ و $A - B \subseteq A$، متناهی بودن $A \cap B$ و $A - B$ نتیجه‌ی ۷.۳.۵ است.

$$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B).$$ [۱]

II. (بالاخص) اگر A و B از هم جدا باشند،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

III. $A \times B$ متناهی است، و

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

(قسمتهای II و III بستگی اعمال جمع و ضرب را با عده‌ی اعضای مجموعه‌های متناهی آشکار میسازند.)

۷.۳.۸. مثال. برای اینکه قدرت احکام مذکور در استدلال آشکار شود ثابت میکنیم که اگر یک عضو از یک مجموعه‌ی متناهی غیرخالی برداریم یک واحد از عده‌ی اعضایش کم میشود. فرض کنیم A مجموعه‌ای متناهی و غیرخالی باشد، و $n(A) = k$، و a عضوی از A باشد. اگر $B = A - \{a\}$ آنگاه $B \subset A$، و لهذا، B متناهی است. بعلاوه، $B \cup \{a\} = A$ و $B \cap \{a\} = \varnothing$. پس، به موجب II : ۷.۳.۷،

$$k = n(A) = n(B) \cup n(\{a\}) = n(B) + 1,$$

و بالنتیجه، $n(B) = k - ۱$. ▲

۷.۴. مجموعه‌های نامتناهی

۷.۴.۱. تعریف. مجموعه‌ی A را نامتناهی خوانیم در صورتی که متناهی نباشد.

آیا مجموعه‌ی نامتناهی وجود دارد؟ قبلاً ملاحظه میکنیم که بنا بر ۷.۳.۵ و ۷.۳.۶،

۷.۴.۲. قضیه. هر مجموعه که مجموعکی نامتناهی داشته باشد خود نامتناهی است.

۷.۴.۳. قضیه. هر مجموعه که با یک مجموعک حقیقی خود همعدد باشد نامتناهی است.

اینک پاسخ گفتن به سؤال مذکور آسان است. در آ : ۷.۲.۳ دیدیم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج، که یک مجموعک حقیقی آنست، همعدد است. پس، به موجب ۷.۴.۳،

۷.۴.۴. قضیه. $\mathbf{N}$ نامتناهی است.

اینک، چون $\mathbf{N}$ مجموعک حقیقی هر یک از $\mathbf{I}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{R}$ است، هر یک از این مجموعه‌ها نیز نامتناهی میباشد.

۷.۴.۵. تعریف. مجموعه‌ی A را شُمارا خوانیم در صورتی که با $\mathbf{N}$ همعدد باشد. یک مجموعه‌ی نامتناهی را که شمارا نباشد ناشمارا نامیم. بالاخره، اگر مجموعه‌ای متناهی یا شمارا

---

(۲) مثالهائی از فواید این رابطه در فصل ۳ض آمده است.

باشد گوئیم متنها شمارا است.

۷.۴.۶. امثله و فواید

(آ). هر مجموعه که با یک مجموعه‌ی نامتناهی همعدد باشد نامتناهی است. (چرا؟)

(ب). مجموعه‌های شمارا دو بدو همعددند.

(پ). هر مجموعه‌ی شمارا نامتناهی است، و همچنین است هر مجموعه که با یک مجموعه‌ی شمارا همعدد باشد.

(ت). هر یک از مجموعه‌های $\mathbf{N}$، اعداد طبیعی فرد، اعداد طبیعی زوج، مربعات اعداد طبیعی، اعداد صحیح منفی، و $\mathbf{I}$ شمارا هستند.

(ث). با استفاده از خواص ابتدائی اعداد طبیعی میتوان ثابت کرد که $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (مجموعه‌ی ازواج مرتب اعداد طبیعی) مجموعه‌ای است شمارا.

برای اثبات، کافی است تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ و $\mathbf{N}$ برقرار کنیم. برای این منظور تابع f را بر $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ با ضابطه‌ی

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$$

اختیار میکنیم. چون m و n اعداد طبیعی‌اند، $2^{m-1}(2n - 1)$ نیز عددی طبیعی است، و بالنتیجه، f تابعی است بتوی $\mathbf{N}$. برای اثبات اینکه f بروی $\mathbf{N}$ است، فرض کنیم k عدد طبیعی دلخواهی باشد. بوسیله‌ی تقسیم همواره میتوان k را به صورت $2^i \cdot l$ در آورد که در آن i عددی صحیح و نامنفی و l فرد است. حال اگر چنین قرار دهیم: $m = i + 1$ و $n = (l + 1)/2$، خواهیم داشت، $f(m, n) = k$. پس، f همه‌ی مقادیر طبیعی را میگیرد؛ و بالنتیجه، $\mathbf{N} = f$حع. بالاخره، برای اثبات 1ـ1 بودن f، فرض کنیم $f(m, n) = f(m', n')$، خواهیم داشت،

$$2^{m-1}(2n - 1) = 2^{m'-1}(2n' - 1).$$

بالنتیجه، $m - 1 = m' - 1$، و از آنجا، $m = m'$ و $n = n'$. پس، f تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ و $\mathbf{N}$ میباشد. ▲

طرح ذیل چگونگی تناظر 1ـ1 مذکور را نشان میدهد:

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$	$\mathbf{N}$
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ...	1, 3, 5, 7, ...
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), ...	2, 6, 10, 14, ...
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), ...	4, 12, 20, 28, ...
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), ...	8, 24, 40, 56, ...
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

۷.۴.۷. تبصره. مجموعه‌های نامتناهی که در مثالهای ۷.۴.۶ دیدیم جملگی شمارا هستند، یعنی، با $\mathbf{N}$ همعدد میباشند. این مطلب ممکن است چنین به ذهن القا کند که مجموعه‌های نامتناهی، هر قدر هم «پهناور» باشند (مانند $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$) با مجموعه‌ی اعداد طبیعی همعددند. اما، بعدها معلوم خواهد شد که حقیقت غیر از این است، و در واقع، مجموعه‌ی اعداد طبیعی ضعیفترین مجموعه‌های نامتناهی است. در اینجا به ذکر قضیه‌ی ذیل اکتفا میکنیم. این قضیه نشان

میدهد که، بازاء هر مجموعه، مجموعه‌ای قویتر از آن وجود دارد.

۷.۴.۸. قضیه‌ی کانتور. A هر مجموعه‌ای باشد $A < \mathcal{P}(A)$.

برهان. اگر $A = \{a, b, c, \cdots\}$ بالبداهه A با مجموعه‌ی

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \cdots\}$$

که مجموعکی از $\mathcal{P}(A)$ است، همعدد است. باقی میماند اثبات اینکه $\mathcal{P}(A)$ با مجموعکی از A همعدد نیست. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که تابعی بر A بروی $\mathcal{P}(A)$ وجود ندارد. اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم f چنین تابعی باشد، و $X = \{a \mid a \in A \,\&\, a \notin f(a)\}$ (۱). چون X مجموعکی از A است، $X \in \mathcal{P}(A)$، و لهذا، عضوی مانند b از A هست که $X = f(b)$ (۲). اما، یا $b \in f(b)$ یا $b \notin f(b)$. بنا بر (۱)، در حالت اول $b \notin X$ و در حالت ثانی $b \in X$. پس، در هرحالت $X \neq f(b)$، و این با (۲) متناقض است. ▲

بالاخص، اگر A نامتناهی باشد مجموعه‌ی $\mathcal{P}(A)$ که از آن قویتر است نیز نامتناهی است (چرا؟). مثلاً، $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ مجموعه‌ای است نامتناهی، و چون از $\mathbf{N}$ قویتر است، شمارا نیست. این اولین مثالی است که تا کنون از یک مجموعه‌ی ناشمارا آورده‌ایم.

۷.۴.۹. شماره‌گذاری. اگر مجموعه‌ی متناهی A با قطعه‌ای از اعداد طبیعی، مثلاً $\mathbf{N}_k$، همعدد باشد، به مقتضای تناظر 1ـ1 بین $\mathbf{N}_k$ و A میتوان اعضای A را شماره‌گذاری کرد: در تناظر مذکور، هر عضو A نظیر یک (و تنها یک) عدد طبیعی متعلق به $\mathbf{N}_k$ است؛ این عدد طبیعی را «شماره»ی آن عضو قرار میدهیم. بدین‌گونه، اعضای A را میتوان به صورت

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_k \qquad (۱)$$

نوشت که، در آن، بطور کلی، a_n عضوی از A است که نظیر عضو n از $\mathbf{N}_k$ میباشد. چون تناظر 1ـ1 بین A و $\mathbf{N}_k$ منحصربفرد نیست، شماره‌گذاری اعضای A نیز منحصر بفرد نیست.

به همین قیاس، مجموعه‌های شمارا را میتوان به وسیله‌ی $\mathbf{N}$ شماره‌گذاری کرد، و مثلاً، به صورت

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (۲)$$

نوشت. هر یک از طرحهای (۱) و (۲) نمایش یک رشته[1] است؛ طرح (۱) نمایش رشته‌ای متناهی است، و طرح (۲) نمایش رشته‌ای نامتناهی.

نظر به نکته‌ی اخیر، گاه در تعریف مجموعه‌های شمارا گویند مجموعه‌ی شمارا مجموعه‌ای است که بتوان اعضایش را (به وسیله‌ی شماره‌گذاری با اعداد طبیعی) به صورت رشته‌ای نامتناهی نوشت.

۷.۵. اعداد اصلی. «عده‌ی اعضا»، که آن را در مورد مجموعه‌های متناهی تعریف کردیم،

---

(۱) رشته‌ها از اهم مفاهیم ریاضی هستند، و بعداً به تفصیل از آنها سخن خواهد رفت.

دارای این دو خصوصیت است که، اولاً، به هر مجموعه‌ی متناهی تعلق میگیرد، و ثانیاً، عده‌ی اعضای دو مجموعه‌ی متناهی فقط و فقط وقتی با هم متساویند که این دو مجموعه، به معنی مذکور در ۷.۲، همعدد یا متشابه باشند. از این مرحله تا مرحله‌ی قائل شدن به «عده‌ی اعضا» برای مجموعه‌های نامتناهی یک قدم بیش نیست، و این همان قدمی است که کانتور برداشت، و دنیائی بدیع و بی‌انتها و پر از شگفتیها در ریاضیات خلق کرد[1]. به قیاس حالت مجموعه‌های متناهی، برای هر مجموعه‌ی نامتناهی نیز قائل به شیئی موسوم به عدد اصلی یا عده‌ی اعضا میشویم، و این شیء را تابع این شرط قرار میدهیم که اعداد اصلی دو مجموعه فقط و فقط وقتی با هم متساویند که این دو مجموعه همعدد باشند. اعداد اصلی مجموعه‌های متناهی همان عده‌ی اعضای آنهاست که سابقاً تعریف شد. اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را اعداد ترانسفینی[2] خوانند. عدد اصلی **N**، یعنی عده‌ی اعداد طبیعی را، به نام حرف اول الفبای عبری، یعنی $\aleph$ (الف)، $\aleph_0$ (بخوانید الـف صفر) مینامند. بنا بر آنچه گذشت، عده‌ی اعضای هر مجموعه‌ی شمارا $\aleph_0$ است. اعداد اصلی را میتوان با هم مقایسه کرد. عدد اصلی مجموعه‌ی A را کوچکتر از عدد اصلی مجموعه‌ی B نامیم در صورتی که A ضعیفتر از B باشد. حساب اعداد اصلی از مباحث بسیار جالب و شگفت‌انگیز تئوری مجموعه‌ها است.

در پایان باید گفته شود که تعریف عدد اصلی به شرح مذکور مقنع نیست. تعریف دقیق عدد از موفقیتهای بزرگ منطق ریاضی است. در این باب فقط به این مطلب اشاره میکنیم که، بنا بر ۷.۲۰۲، نسبت همعدد بودن یک نسبت هم‌ارزی در مجموعه‌ی مجموعه‌ها است، و هر دسته‌ی هم‌ارز بر حسب این نسبت مجموعه‌ی جمیع مجموعه‌هائی است که دو بدو همعددند. بر طبق روش تعریف به وسیله‌ی نسبتهای هم‌ارزی، میتوان دسته‌ی هم‌ارز مجموعه‌ی A را عدد اصلی A نامید. خواستاران اطلاعات بیشتر در این باب باید به کتب جدّی منطق ریاضی و کتب مربوط به بنیاد ریاضیات رجوع کنند.

۸ § عمل

۸.۱. مقدمه. ما همه با اعمال گوناگون در مجموعه‌های مختلف آشنا هستیم. به عنوان مثال میتوان **I** را با هر یک از اعمال $+$، $\times$، و $-$ ذکر کرد. بازاء هر دو عدد صحیح مشخص مانند a و b، میتوانیم حاصل هر یک از اعمال مذکور را بر a و b بیابیم. در مورد دو عمل اول، ترتیب a و b در حاصل عمل بی تأثیر است، اما در مورد سومی چنین نیست، و مثلاً،

---

(۱). هیلبرت*، در باره‌ی کارهای کانتور در این باب و در باب دنیائی که مخلوق اوست، گوید: «این تئوری [تئوری کانتور] بنظر من قابل تحسینترین ثمره‌ی فکر ریاضی و محققاً یکی از بزرگترین کارهائی است که ذهن آدمی انجام داده است... کانتور بهشتی برای ما آفریده است که هیچکس را یارای بیرون راندن ما از آن نیست.»

(۲) transfini

$2 - 3 \neq 3 - 2$. پس، بطور کلی، اعمال مذکور بر ازواج مرتب اعداد صحیح، مانند (a, b)، انجام میگیرند. این اعمال را، از آن جهت که بر دو عدد انجام میگیرند، اعمال دوتائی میخوانیم. اگر چه ما همه قادر به اجرای اعمال مذکور و بسیاری از اعمال دیگر هستیم، اگر از ما بپرسند که تعریف کلی عمل دوتائی چیست شاید نتوانیم جوابی که از جنبه‌ی ریاضی قابل قبول باشد به این سؤال بدهیم. معذلک، تعریف ریاضی عمل بر اساس آنچه در صفحات قبل آموختیم آسان است. برای توضیح، به $\mathbf{I}$ با عمل $-$ باز میگردیم. بر طبق این عمل، بازاء هر زوج مرتب از اعضای $\mathbf{I}$، یک و تنها یک عضو از $\mathbf{I}$ مشخص میشود. چون مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتب اعضای $\mathbf{I}$ مجموعه‌ی $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ است، عمل تفریق به معنی عادی تابعی بر $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ بتوی $\mathbf{I}$ مشخص میسازد که مقدارش بازاء عضو دلخواه (a, b) از $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ برابر $a - b$ است. ما خود این تابع را عمل تفریق مینامیم؛ علامت «$-$» نام این تابع است؛ و مقدار این تابع در (a, b)، که بر طبق قرار مذکور در ۲.۵ باید «$-(a, b)$» نامیده شود، ولی معمولاً $a - b$ خوانده میشود، حاصل عمل $-$ بر a و b (به همین ترتیب) میباشد. مثلاً، $-(4, 3) = 1$ و $-(3, 4) = -1$.
اینک تعریف کلی عمل دوتائی:

۸.۲. تعریف. اگر A مجموعه‌ای غیر خالی باشد، هر تابع بر $A \times A$ بتوی A را یک عمل دوتائی در A خوانیم، و مقدار این تابع را در زوج مرتب (a, b) از اعضای A حاصل آن عمل بر a و b (به همین ترتیب) نامیم.
از این ببعد، هر جا از عمل سخن میرود مقصود عمل دوتائی است مگر آنکه خلاف این امر تصریح یا صریحاً از سیاق عبارت معلوم شود.

۸.۲.۱. علامات. در بحث از اعمال، احتیاج به متغیرهائی برای نامیدن اعمال دلخواه داریم. اگرچه میتوان حروفی را که تاکنون برای نامیدن توابع دلخواه بکار بردیم در اینجا نیز بکار برد، رسم است که توابعی را که به عنوان عمل ملحوظ میشوند به نامهائی مانند $\bigcirc$، $*$، $\square$، و غیره میخوانند. اعمال مشخص و مهم ریاضی اسامی خاص دارند، از قبیل $+$، $\times$، $-$، و غیره.

اگر $\bigcirc$ عملی در مجموعه‌ی A باشد، و $a, b \in A$، حاصل عمل $\bigcirc$ بر a و b، بنا بر تعریف فوق، مقدار تابع $\bigcirc$ است در (a, b)، یعنی $\bigcirc(a, b)$، اما رسم است که این حاصل را

$$a \bigcirc b$$

مینامند. در این عبارت، a و b جمله‌های عمل هستند.

۸.۲.۲. استعمال پرانتز. فرض کنیم $\bigcirc$ عملی در مجموعه‌ی A باشد، و a، b، و c اعضای دلخواهی از A باشند. چون $\bigcirc$ تابعی بتوی A است، حاصلهای $a \bigcirc b$ و $b \bigcirc c$ و

غیره نیز اعضای A هستند. پس، «حاصل عمل $\bigcirc$ بر a و $b \bigcirc c$» و «حاصل عمل $\bigcirc$ بر $a \bigcirc b$ و $b \bigcirc c$» نیز اعضای مشخصی از A میباشند. این حاصلها را به وسیلهی پرانتز[1] نامگذاری میکنند؛ مثلاً، $a \bigcirc (b \bigcirc c)$ و $(a \bigcirc b) \bigcirc (b \bigcirc c)$. استعمال پرانتز بر طبق این قرارداد است: هر جملهی یک عمل را، در صورتی که خود حاصل عملی باشد، با محصور کردن آن به وسیلهی پرانتز، مشخص میکنیم.

۸.۲.۳. تبصرهی مهم؛ قرارداد الحاق به چپ. اگر $\bigcirc$ یک عمل دوتائی در مجموعهی A باشد، و a، b، c، d، ... اعضای A باشند، عبارات $a \bigcirc b \bigcirc c$ و $a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc d$ و امثال آنها **به خودی خود بیمعنی هستند**، زیرا در هیچ یک از آنها جملههای موارد عمل مشخص نیست. پس، فقط **بر طبق قرارداد** میتوان برای عبارات مذکور معنی قائل شد. قراردادی که در این مورد بکار میرود قرارداد الحاق به چپ است، و آن اینکه جملهی هر عمل در سمت چپ همهی آنچه در طرف چپ آنست محسوب میشود. بر طبق این قرارداد،

$$a \bigcirc b \bigcirc c \quad \text{یعنی} \quad (a \bigcirc b) \bigcirc c$$

$$a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc d \quad \text{یعنی} \quad ((a \bigcirc b) \bigcirc c) \bigcirc d$$

و غیره. مثلاً، در جبر مقدماتی، $a + b + c$ به معنی $(a + b) + c$ است، و $a - b - c$ به معنی $(a - b) - c$.

۸.۲.۴. تعریف کردن یک عمل در یک مجموعه. تعریف کردن یک عمل در مجموعهای مانند A بر طبق اصول کلی تعریف توابع (۲.۴) صورت میگیرد. چون حوزهی تعریف هر عمل در A مجموعهی $A \times A$ است، برای تعریف یک عمل در A کافی است ضابطهای برای مشخص کردن حاصل آن عمل بر دو عضو مرتب دلخواه A بدست دهیم. وقتی که عدهی اعضای A نسبةً کم باشد، چنانکه در ۲.۴.۱ دانسته شد، میتوان عمل $\bigcirc$ را در A با جدولی مانند جدول ذیل تعریف کرد، که در سطر اول آن جمیع ازواج مرتب اعضای A آمده

(x, y)	(a, b)	(a', b')	(a'', b'')	$\cdots$
$x \bigcirc y$	c	c'	c''	$\cdots$

است، و در سطر زیرین، مقدار تابع $\bigcirc$ بازاء هر یک از این ازواج. اما، در مورد اعمال، این جدول را مانند جدول ضرب عادی به صورت ذیل تنظیم میکنند، و این جدول را جدول عمل $\bigcirc$ نامند:

---

(۱) کروشه (یا قلاب) و ابرو در حکم پرانتز هستند. این تذکر در آتیه هیچگاه تکرار نخواهد شد.

$$\begin{array}{c|c} \bigcirc & \cdots b \cdots \\ \hline \vdots & \vdots \\ a & \cdots c \\ \vdots & \end{array}$$

در سطر اول و ستون اول این جدول همه‌ی اعضای A درج میشوند. حاصل $a \bigcirc b$ را در محل تلاقی سطر محاذی a (جمله‌ی چپ عمل) و ستون محاذی b (جمله‌ی راست عمل) ضبط میکنند.

۸.۲.۵. امثله و فواید

(آ). نکته‌ی بسیار مهمی که کمتر بدان توجه میشود نقش تساوی در تعریف عمل در یک مجموعه است. در هر مورد که عملی در مجموعه‌ای تعریف میشود فرض اینست که نوعی «تساوی» (نسبت هم‌ارزی) قبلاً در آن مجموعه تعریف شده است. تعریف یک عمل باید چنان باشد که حاصل آن عمل بر هر دو جمله با این جمله‌ها مشخص باشد، بدین معنی که اگر a و b، بترتیب، «مساوی» a' و b' هستند حاصل عمل بر a و b «مساوی» حاصل عمل بر a' و b' باشد. چون ما همه جا تساوی را به معنی منطقی میگیریم، شرط مذکور، به موجب تعویضپذیری مقادیر مساوی، بخودی خود بر قرار است. توضیح این مطلب اساساً همانست که در ۵.۳.۰۵ : ۱ گذشت: فرض کنیم $\bigcirc$ عملی در مجموعه‌ی A باشد، و $a = a'$ (۱) و $b = b'$ (۲). چون تساوی منطقی منعکس است، $a \bigcirc b = a \bigcirc b$ (۳). از (۱) و (۳)، به موجب تعویضپذیری مقادیر مساوی، نتیجه میشود، $a \bigcirc b = a' \bigcirc b$ (۴). از (۲) و (۴) به همان قیاس نتیجه میشود، $a \bigcirc b = a' \bigcirc b'$. ▲

البته، در تعریف عمل در مجموعه‌ای که تساوی در آن نسبتی هم‌ارزی غیر از تساوی منطقی است باید پیشبینی لازم را برای بر قراری شرط اساسی مذکور بعمل آورد.

(ب). [«عملسازی»]. محصلین ــ برای اینکه در ریاضیات وسعت نظر حاصل کنند تا فکرشان محدود به اعمال عادی ریاضی بر اشیاء مأنوس (مانند عمل جمع در اعداد) نماند ــ باید در «عملسازی» تمرین نمایند. به عنوان اولین مثال، مجموعه‌ی $A = \{m, n\}$ را با فرض اینکه $m \neq n$ اختیار میکنیم، و به طریقی که در ۸.۲.۴ گفته شد، به تعریف کردن یک عمل در A، که آن را عمل $\bigcirc$ مینامیم، میپردازیم. ازواج مرتب اعضای A منحصرند به

$$(m, m), \qquad (m, n), \qquad (n, m), \qquad (n, n).$$

حال باید $m \bigcirc m$، $m \bigcirc n$، $n \bigcirc m$، و $n \bigcirc n$ را تعریف کرد. مثلاً، چنین قرار میدهیم:

$$m \bigcirc m = m, \qquad n \bigcirc m = n,$$
$$m \bigcirc n = n, \qquad n \bigcirc n = n.$$

$\bigcirc$	m	n
m	m	n
n	n	n

تعریف عمل $\bigcirc$ تمام است. جدول عمل در حاشیه دیده میشود. مجموعه‌ی A با عمل $\bigcirc$ که در آن تعریف شده است تشکیل یک دستگاه ریاضی (۸.۳) میدهد که آن را دستگاه $(A; \bigcirc)$ مینامیم. در این دستگاه میتوان «محاسبه» کرد، و مسائل گوناگون مطرح نمود. مثال از محاسبه:

$$[m \bigcirc (n \bigcirc n)] \bigcirc (n \bigcirc m) = (m \bigcirc n) \bigcirc n = n \bigcirc n = n.$$

همچنین، حل معادله $n \bigcirc x = n$ در دستگاه $(A; \bigcirc)$ به معنی تعیین مقادیری از x (یا

اعضائی‌از A) است که در معادله‌ی مذکور صدق کنند. چنانکه از جدول عمل دیده میشود، جوابهای این معادله عبارتند از $x' = m$ و $x'' = n$. بالاخره، معادله‌ی $n \bigcirc x = m$ در دستگاه مورد بحث ممتنع است.

(پ) [عملسازی]. در مجموعه‌ی $B = \{0, 1, 2, 3\}$، دو عمل $\bigcirc$ و $*$ را بر طبق ضوابط ذیل تعریف میکنیم:

$a \bigcirc b$ یعنی مانده‌ی $a + b$ در طرح 4 به 4

$a * b$ یعنی مانده‌ی ab در طرح 4 به 4

مثلاً، $1 \bigcirc 2 = 3$، $3 \bigcirc 3 = 2$، $2 * 2 = 0$. جدول دو عمل ذیلاً ملاحظه میشود. توضیح ساختمان آنها بر متعلم است

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\bigcirc$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

۸.۲.۶. تبصره. در تداول عادی ریاضیات، اصطلاح عمل به معانی وسیعتر از آنچه در ۸.۲ گذشت بکار میرود. مثلاً، ممکن است جمله‌های عمل اعضای یک مجموعه نباشند، یا آنکه حاصل عمل از اشیائی که عمل بر آنها انجام میگیرد نباشد. از این جمله‌اند اعمال ضرب اعداد در حاملها، ضرب عددوار[1] حاملها، و ضرب هندسی حاملهای واقع در یک صفحه. تعریف سابق‌الذکر را میتوان تعمیم داد تا این گونه حالات را فراگیرد: بطور کلی، اگر A، B، و C سه مجموعه باشند، هر تابع بر $A \times B$ بتوی C را یک عمل میخوانیم.

مطلب دیگر اینست که، بر طبق تعریف ۸.۲، به هر زوج مرتب از اعضای مجموعه‌ای که عملی درآن تعریف شده است یک (و تنها یک) حاصل عمل تعلق میگیرد. بدین معنی، تفریق در اعدادطبیعی عمل نیست، و تقسیم در اعداد حقیقی عمل نمیباشد.

۸.۲.۷. بسته بودن نسبت به یک عمل. تعریف. فرض کنیم $\bigcirc$ عملی در مجموعه‌ی A باشد. مجموعه‌ک غیر خالی E از A را نسبت به عمل $\bigcirc$ بسته خوانیم در صورتی که حاصل عمل $\bigcirc$ بر هر زوج مرتب از اعضای E عضو E باشد.

در توضیح این تعریف، باید ملاحظه کرد که اگر $E \subseteq A$ آنگاه اعضای E به A تعلق دارند، و بر هر دو عضو مرتب E، بعنوان اعضای A، میتوان عمل $\bigcirc$ را اجرا کرد، ولی حاصل عمل ممکن است عضو E نباشد. مثلاً، اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح را با عمل تفریق اختیار کنیم، $\mathbf{N}$ جزئی از آن مجموعه است، و $2, 5 \in \mathbf{N}$، ولی $2 - 5 \notin \mathbf{N}$؛ پس، مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق اعداد صحیح بسته نیست. اما، $\mathbf{N}$ نسبت به عمل جمع $\mathbf{I}$ بسته است،

---

(۱) حاصلضرب عددوار دو حامل عبارتست از حاصلضرب کمیتهای آنها در جیب تمام زاویه‌ی بینهما.

زیرا حاصلجمع دو عدد طبیعی عدد طبیعی است.

۸.۲.۸. تمرین

۱. آیا بوسیله‌ی ضابطه‌ی ذیل عملی در $\mathbf{N}$ تعریف میشود؟
حاصل عمل مطلوب بر هر دو عضو مرتب $\mathbf{N}$ یکی از مقسوم‌علیه‌های مشترک آن دو عضو است.

۲. در مجموعه‌ی $A = \{1, 2\}$ عمل $\bigcirc$ با جدول مقابل تعریف شده است. مطلوبست محاسبه‌ی

$$1 \bigcirc 2, \qquad 1 \bigcirc 1,$$
$$2 \bigcirc 2, \qquad 2 \bigcirc 1,$$
$$(1 \bigcirc 1) \bigcirc 1. \qquad 1 \bigcirc (1 \bigcirc 1),$$

$\bigcirc$	1	2
1	2	2
2	1	2

۳. در مجموعه‌ی $\{a\}$ عملی تعریف کنید.

۴. در مجموعه‌ی $A = \{m, n\}$ $(m \neq n)$ عمل $\bigcirc$ را چنان تعریف کنید که معادله‌ی $m \bigcirc x = n$ اولاً دارای دو جواب باشد؛ ثانیاً ممتنع باشد.

۵. A مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی و B مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی است. کدام یک از A و B نسبت به عمل جمع (ضرب) اعداد طبیعی بسته است؟

۸.۳. دستگاه (یا ساختمان جبری). یک مجموعه بخودی خود، مانند توده‌ای از گچ، ماده‌ی اولیه است؛ اما، بر حسب طرحهای مختلف، میتوان با آن ساختمانهائی بنا نهاد. مثلاً، با تعریف‌کردن اعمال یا نسبتهائی در یک مجموعه، میتوان این مجموعه را به یک «دستگاه» یا «ساختمان» تبدیل کرد، چنانکه مجموعه‌ی اعداد طبیعی، با تعریف عمل جمع و نسبت کوچکتری در آن، سازمان خاصی مییابد، و به یک ساختمان یا دستگاه جبری مبدل میشود. بطور کلی، دستگاه جبری یا ساختمان جبری یعنی یک مجموعه‌ی غیر خالی به انضمام تعدادی متناهی اعمال[1] یا نسبتهائی که در آن مجموعه تعریف شده‌اند.

برای نامگذاری یک دستگاه ریاضی، مجموعه‌ی آن، و سپس اعمال و سپس نسبتهائی را که در آن تعریف شده‌اند، بترتیب از چپ به راست، در داخل پرانتز مینویسند. مثلاً، مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با عمل جمع دستگاه $(\mathbf{N}; +)$ خوانیم. دستگاه $(\mathbf{I}; +, \times; \leqslant)$ دستگاه متشکل از مجموعه‌ی اعداد صحیح با اعمال جمع و ضرب و نسبت نابیشتری است. معمولاً، هر جا بیم ابهام نرود، دستگاهها را به نام مجموعه‌ی آنها میخوانند.

دستگاههائی که فوقاً به عنوان مثال آوردیم از دستگاههائی هستند که با آنها مأنوس، و برای مجموعه و اعمال آنها «معانی واقعی» قائل هستید. ساختن دستگاههائی که فاقد چنین معانیی هستند (یا، به اصطلاح ریاضی، دستگاههای مُجَرَّد) آسان است (به اهمیت فوق‌العاده‌ی این گونه دستگاهها در ۹.۴ اشاره خواهیم کرد)؛ دستگاه مثال (ب) مذکور در ۸.۲.۵ یک دستگاه جبری مجرد است.

---

(۱) اعمال ممکن است یکتائی باشند. تعریف عمل یکتائی در ۸.۶ خواهد آمد.

۸.۳.۱. تبصره. در دستگاهی مانند $(A; \bigcirc)$، عمل دستگاه را گاه «جمع» و گاه «ضرب» نامند. در دستگاهی مانند $(A; \bigcirc, *)$، یکی از اعمال دستگاه را «جمع» و دیگری را «ضرب» خوانند. در هر حال، جمله‌های عمل «ضرب» را عوامل ضرب نامند.
معمولاً عمل جمع یک دستگاه را به «$+$» و عمل ضرب آن را به «$\times$» یا به «$\cdot$» نمایش میدهند، و در مورد ضرب، بجای $a \times b$ یا $a \cdot b$، مینویسند ab. در کتابهای مقدماتی، از استعمال علامات $+$ و $\times$ (و صورتهای دیگرش) به عنوان اسامی اعمال دستگاههای مجرد احتراز میشود تا راه اینکه مبتدیان این اعمال را با اعمال جمع و ضرب اعداد خلط کنند مسدود گردد.

۸.۴. عضو خنثا

۸.۴.۱. تعریف. در دستگاهی با مجموعه‌ی A، عضو e از A را نسبت به عمل $\bigcirc$ از دستگاه عضو خنثا خوانیم در صورتی که بازاء هر a از A،

$$a \bigcirc e = e \bigcirc a = a.$$

مثلاً، در دستگاه $(\mathbf{I}; +, \times)$، 0 عضو خنثی نسبت به عمل $+$ است، و 1 عضو خنثا نسبت به عمل $\times$. در دستگاه $(A; \bigcirc)$ مثال ۸.۲.۵ : ب، m عضو خنثای دستگاه است نسبت به عمل $\bigcirc$ دستگاه مسئله‌ی ۸.۲.۸ : ۲ عضو خنثا ندارد.

۸.۴.۲. قضیه. عضو خنثای یک دستگاه نسبت به هر عمل آن، در صورت وجود، منحصر بفرد است.
برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ی دستگاه و $\bigcirc$ یکی از اعمال آن باشد. اگر e و e' اعضای خنثای دستگاه نسبت به عمل $\bigcirc$ باشند، چون e عضو خنثا است، $e' \bigcirc e = e'$، و چون e' عضو خنثی است، $e' \bigcirc e = e$. پس، $e = e'$. ▲

۸.۴.۳. تعریف. عضو خنثای یک دستگاه را نسبت به عملی از دستگاه که جمع (ضرب) خوانده شده است صفر دستگاه (واحد دستگاه) خوانند.

۸.۴.۴. تعریف. فرض کنیم $\bigcirc$ عملی در دستگاهی با مجموعه‌ی A باشد، و دستگاه نسبت به این عمل عضو خنثا (e) داشته باشد. اگر بازاء عضو a از A عضوی مانند a' از A باشد که

$$a \bigcirc a' = a' \bigcirc a = e$$

آنگاه a' را یک قرینه‌ی a خوانیم. اگر عمل $\bigcirc$ موسوم به جمع (ضرب) باشد، بجای «قرینه»، متقابل (عکس) گوئیم.

۸.۴.۵. تمرین
۱. کدام یک از دستگاههای ذیل عضو خنثا دارد؟

$$(\mathbf{N}; +), \qquad (\mathbf{N}; \times), \qquad (\mathbf{I}; +),$$
$$(\mathbf{I}; \times), \qquad (\mathbf{I}; -), \qquad (\mathbf{Q}; \times).$$

۲. در هر یک از دستگاههای مسئله ۱، در وجود قرینه برای اعضا تحقیق کنید.

۳. در دستگاه مثال پ: ۸.۲.۵، اعضای خنثای دستگاه را نسبت به هر یک از اعمال $\bigcirc$ (جمع) و $*$ (ضرب) تعیین کنید، و ثابت کنید که در این دستگاه ممکن است حاصلضرب دو عامل صفر[1] باشد ولی هیچیک ازعوامل صفر نباشند.

۴. در مجموعه‌ی $A = \{4, 2, 3\}$، عملی، که آن را ضرب مینامیم، تعریف کنید بطوری که 4 واحد دستگاه باشد، و هر یک از 2 و 3 دو عکس داشته باشد.

۸.۵. خواص اعمال. بعضی از اعمال ریاضی خواص مهمی دارند که اینک به تعریف آنها، و سپس (در ۸.۶) به فوایدشان میپردازیم. در تعریفات آتیه، A مجموعه‌ای غیر خالی است، و $\bigcirc$ و $*$ دو عمل دوتائی در A هستند.

۸.۵.۱. تعریف. عمل $\bigcirc$ را شرکتپذیر خوانیم در صورتی که بازاء هر a و b و c از A،

$$a \bigcirc (b \bigcirc c) = (a \bigcirc b) \bigcirc c.$$

۸.۵.۲. تعریف. عمل $\bigcirc$ را تعویضپذیر یا مستقل از ترتیب جمل نامیم در صورتی که بازاء هر a و b از A،

$$a \bigcirc b = b \bigcirc a.$$

۸.۵.۳. تعریف. عمل $*$ را نسبت به عمل $\bigcirc$ توزیعی یا توزیعپذیر خوانیم در صورتی که بازاء هر a و b و c از A، در عین حال،

$$a * (b \bigcirc c) = (a * b) \bigcirc (a * c) \qquad \text{(توزیعپذیری از چپ)}$$
$$(b \bigcirc c) * a = (b * a) \bigcirc (c * a) \qquad \text{(توزیعپذیری از راست)}$$

۸.۵.۴. امثله و فواید

(آ). اعمال جمع و ضرب در اعداد شرکتپذیر و تعویضپذیرند، زیرا همواره

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c,$$
$$a + b = b + a, \qquad a \,.\, b = b \,.\, a.$$

اما عمل تفریق نه شرکتپذیر است و نه تعویضپذیر، زیرا مثلاً،

$$4 - (2 - 5) \neq (4 - 2) - 5, \qquad 7 - 3 \neq 3 - 7.$$

(ب). در دستگاه $(A; \bigcirc)$ مثال ب: ۸.۲.۵، عمل $\bigcirc$ بالبداهه تعویضپذیر است. برای تحقیق در شرکتپذیری، ملاحظه میکنیم که اقسام ممکنه‌ی دسته‌های سه‌تائی از اعضای A منحصر به هشت دسته‌ی ذیل است[2]:

---

(۱) البته، مقصود صفر دستگاه است.

(۲) برای اینکه تشخیص حالات ممکنه با نظم و ترتیب، و بی اینکه حالتی فوت یا ←

$$\begin{array}{llll} m,\ m,\ m; & m,\ m,\ n; & m,\ n,\ m; & m,\ n,\ n; \\ n,\ m,\ m; & n,\ m,\ n; & n,\ n,\ m; & n,\ n,\ n. \end{array}$$

پس باید صحت هشت تساوی از قبیل

$$m \bigcirc (m \bigcirc m) = (m \bigcirc m) \bigcirc m,$$
$$m \bigcirc (m \bigcirc n) = (m \bigcirc m) \bigcirc n,$$

و غیره را تحقیق کرد. به آسانی دیده میشود که هر هشت تساوی بر قرار است. پس، عمل $\bigcirc$ شرکتپذیر نیز هست.

(پ). اگر عمل $*$ تعویضپذیر باشد، توزیعپذیری آن نسبت به عمل $\bigcirc$ از چپ با توزیعپذیری آن نسبت به عمل $\bigcirc$ از راست معادل است (هر یک نتیجه‌ی دیگری است).

(ت). در مجموعه‌ی اعداد صحیح، عمل ضرب نسبت به هر یک از اعمال جمع و تفریق توزیعپذیر است، زیرا همواره

$$a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c), \qquad a \,.\, (b - c) = (a \,.\, b) - (a \,.\, c).$$

اما عمل جمع نسبت به عمل ضرب توزیعپذیر نیست، زیرا، مثلاً،

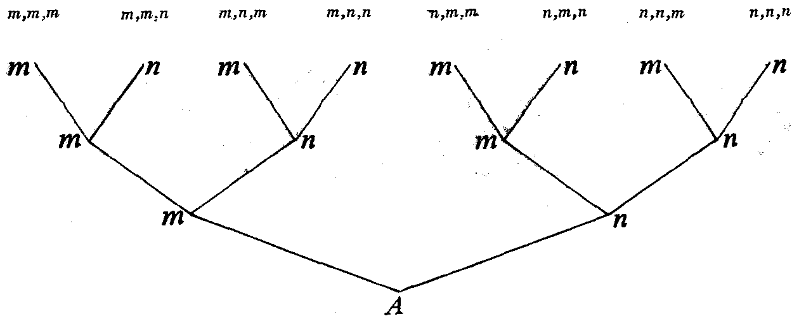
$$3 + (2 \,.\, 4) \neq (3 + 2) \,.\, (3 + 4).$$

(ث). اعمال $\cup$ و $\cap$ در مجموعه‌ها شرکتپذیر و تعویضپذیرند، و هر یک نسبت به دیگری توزیعپذیر است (۲:۳.۲.۴ ملاحظه شود).

(ج). عمل ضرب نسبی نسبتها شرکتپذیر است، ولی تعویضپذیر نیست.

(چ). اگر عمل $*$ نسبت به عمل $\bigcirc$ توزیعی باشد، میتوان در عبارات $(a * b) \bigcirc (a * c)$ و $(b * a) \bigcirc (c * a)$، بترتیب، از چپ و راست فاکتورگیری کرد، و این عبارات را، بترتیب، به صورتهای $a * (b \bigcirc c)$ و $(b \bigcirc c) * a$ نوشت (مقصود از «میتوان» اینست که، در هر حالت، عبارت حاصل از فاکتورگیری با عبارت اولیه مساوی است).

← مکرر شود، صورت پذیرد، وسیله‌ی ساده و مفیدی هست، و آن تنظیم نمودار شجری است. در مثال مذکور در متن، برای تشکیل دادن یک دسته‌ی سه‌تائی از اعضای A، در مرحله‌ی اول میتوان یا m یا n را اختیار کرد، و سپس، در مرحله‌ی بعد، یا m یا n را و غیره، شکل ذیل (نمودار شجری) جمیع دسته‌های ممکن را نمایش میدهد:



۸.۵.۵. تمرین

۱. فرض کنیم $m \neq n$ و $A = \{m, n\}$. عمل $\bigcirc$ در A بر طبق جدول مقابل تعریف شده است. ثابت کنید که $\bigcirc$ تعویضپذیر و شرکتپذیر است، و مجموعه‌ی A نسبت به این عمل عضو خنثا و هر عضو آن قرینه دارد.

$\bigcirc$	m	n
m	m	n
n	n	m

۲. در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اعمال $\bigcirc$ و $*$ بر طبق این ضوابط تعریف شده‌اند:

$$m * n = m + n^2, \qquad m \bigcirc n = mn^2,$$

در شرکتپذیری و تعویضپذیری این اعمال و توزیعپذیری هر یک نسبت به دیگری تحقیق کنید.

۸.۶. نتایج خواص اعمال. در این قسمت، بعضی از نتایج مهم خواص اعمال را، به مناسبت فواید عملی آنها، میآوریم.

۸.۶.۱. تعمیم شرکتپذیری. اگر $\bigcirc$ عملی در مجموعه‌ی A باشد، عبارتی مانند

$$a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc \cdots \bigcirc l \qquad (\dagger)$$

که در آن a، . . .، و l از اعضای A هستند **بخودی خود بیمعنی است** (۸.۲.۳)، اما، با درج پرانتزهای مناسب در آن ـ یعنی پرانتزهائی که جمله‌های هر مورد عمل $\bigcirc$ را مشخص سازند ـ میتوان عباراتی با معنی از آن استخراج کرد. مثلاً، از عبارت بیمعنی

$$a \bigcirc b \bigcirc c \qquad (\text{آ})$$

دو عبارت با معنی

$$a \bigcirc (b \bigcirc c) \quad (\text{پ}) \qquad\qquad (a \bigcirc b) \bigcirc c \quad (\text{ب})$$

حاصل میشود، و از عبارت بیمعنی

$$a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc d \bigcirc e \qquad (\text{ت})$$

عبارات با معنی ذیل و جز آنها:

$$\{[(a \bigcirc b) \bigcirc c] \bigcirc d\} \bigcirc e, \qquad (\text{ث})$$

$$(a \bigcirc b) \bigcirc [c \bigcirc (d \bigcirc e)]. \qquad (\text{ج})$$

اگر عمل $\bigcirc$ شرکتپذیر باشد، جمیع عبارات با معنیی که بدین گونه از عبارات بیمعنی $(\dagger)$ حاصل میشوند دوبدو باهم متساویند (تعمیم شرکتپذیری). اثبات این حکم کلی (و حکم کلی مذکور در ۸.۶.۳) به وسیله‌ی اصل استقراء صورت میگیرد، و فعلاً وارد آن نمیشویم، بلکه در این جا و در ۸.۶.۳، روش اثبات احکام مورد ادعا را در حالات خاص توضیح میدهیم.

اینک به حکم تعمیم شرکتپذیری باز میگردیم. این حکم را در هر حالت خاص میتوان، به استناد شرکتپذیری عمل $\bigcirc$، به آسانی ثابت کرد. در مورد عبارات مستخرج از (آ)، مساوی بودن عبارات (ب) و (پ) ناشی از فرض شرکتپذیری است. برای اثبات حکم در مورد (ت)، کافی است ثابت کنیم که هر یک از عبارات با معنی حاصل از (ت) به وسیله‌ی درج پرانتزهای مناسب با عبارتی که بر طبق قرارداد الحاق به چپ (۸.۲.۳) از (ت) استخراج میشود ـ یعنی با عبارت (ث) ـ مساوی است. اثبات مساوی بودن (ج) با (ث) از این قرار است:

$$\overbrace{(a \circ b)} \circ [c \circ \overbrace{(d \circ e)}]$$ بنا بر شرکتپذیری
$$= [\overbrace{(a \circ b) \circ c}] \circ (d \circ e)$$ بنا بر شرکتپذیری
$$= \{[(a \circ b) \circ c] \circ d\} \circ e. \blacktriangle$$

(ملاحظه کنید که، پیش از هر تساوی، مستند آن را ضبط کرده‌ایم: عبارت مذکور در سطر اول، بنا بر تعریف شرکتپذیری، مساوی عبارت مذکور در سطر دوم است، که خود، به همان جهت، مساوی عبارت مذکور در سطر سوم میباشد.)

۸.۶.۲. فایده. بنا بر حکم تعمیم شرکتپذیری، وقتی که عمل $\circ$ شرکتپذیر باشد، عبارت $(\dagger)$ را مقدار مشترک عبارات بامعنی مستخرج از آن به وسیله‌ی درج پرانتزهای مناسب تعریف میکنند. این تعریف تعارضی با قرارداد الحاق به چپ ندارد، زیرا، یکی از عبارات بامعنی مستخرج از $(\dagger)$ به وسیله‌ی درج پرانتزهای مناسب همانست که بر طبق قرارداد مذکور ساخته میشود. البته، در مورد اعمالی که شرکتپذیر نیستند تعمیم شرکتپذیری برقرار نیست. مثلاً، در تفریق اعداد، عموماً

$$\{[(a - b) - c] - d\} - e \neq (a - b) - [c - (d - e)].$$

۸.۶.۳. تعمیم تعویضپذیری. اگر عمل $\circ$ در A، علاوه بر شرکتپذیری، تعویضپذیر هم باشد، عبارت

$$(\dagger) \qquad a \circ b \circ c \circ \cdots \circ l,$$

نه فقط از دسته‌بندی جمل به وسیله‌ی پرانتز، بلکه از ترتیب جمله‌ها هم مستقل است (تعمیم تعویضپذیری). اثبات این حکم نیز در هر حالت خاص آسانست. به عنوان مثال، ثابت میکنیم که، در شرایط مذکور،

$$a \circ b \circ c \circ d = a \circ c \circ b \circ d.$$

دلیل از این قرار است:

$$a \circ b \circ c \circ d$$ بنا بر تعریف
$$= a \circ (b \circ c) \circ d$$ بنا بر تعویضپذیری
$$= a \circ (c \circ b) \circ d$$ بنا بر تعریف
$$= a \circ c \circ b \circ d. \blacktriangle$$

۸.۷. اعمال یکتائی. اگر A مجموعه‌ای غیر خالی باشد، هر تابع بر A بتوی A را یک عمل یکتائی در A، و بازاء هر a از A، مقدار این تابع را در a حاصل آن عمل بر a خوانیم.

در نامیدن حاصل اعمال یکتائی، معمولاً رسم‌الخط متداول در مورد توابع بطور کلی بکار میرود: اگر $*$ یک عمل یکتائی در A باشد، حاصل این عمل را بر عضو a از A به نام «$*(a)$» (و گاه «$a*$») میخوانیم.

۸.۷.۱. امثله
(آ). تابع f بر $\mathbf{R}$ بتوی $\mathbf{R}$ با ضابطه‌ی
$f(x)$ یعنی متقابل x
یک عمل یکتائی در $\mathbf{R}$ است. متأسفانه، این عمل، مانند عمل دوتائی تفریق، به نام «$-$» خوانده میشود، و مقدار آن را در x به نام «$-x$» مینامند.
(ب). در هندسه‌ی مقدماتی، فرض کنیم P صفحه‌ای مفروض و Δ خط مستقیم مفروضی غیر موازی با P و A مجموعه‌ی نقاط فضا باشد. تابع f بر A بتوی مجموعه‌ی نقاط P که با ضابطه‌ی
$f(M)$ یعنی تصویر نقطه‌ی M بر P به موازات Δ
تعریف شود یک عمل یکتائی در A است.

۸.۷.۲. تبصره. فرض کنیم $*$ یک عمل یکتائی در مجموعه‌ی غیر خالی A باشد، و $a, b \in A$. حاصلهای عمل $*$ بر a و b مقادیر تابع $*$ در a و b، یعنی $*(a)$ و $*(b)$، میباشند، و واضح است که اگر $a = b$ آنگاه $*(a) = *(b)$. این نکته را، که نظیر نکته‌ی مذکور در آ : ۸.۲.۰۵ در باب اعمال دوتائی است، نباید ~~از~~ نظر دور داشت.

۹ § گروهها

۹.۱. مقدمه. در این قسمت، شرحی بسیار مجمل در باب یکی از مهمترین دستگاههای ریاضی، یعنی گروهها، میآوریم.
مختصراً میتوان گفت که گروه دستگاهی است از یک مجموعه‌ی غیر خالی و یک عمل دوتائی در آن مجموعه، که اولاً، این عمل شرکتپذیر باشد؛ ثانیاً، دستگاه عضو خنثا نسبت به این عمل داشته باشد؛ و ثالثاً، هر عضو دستگاه نسبت به این عمل قرینه داشته باشد. مثلاً، دستگاه $(\mathbf{I}; +)$ یک گروه است. همچنین، از مسئله‌ی ۱ : ۸.۵.۰۵ معلومست که دستگاه $(A; \bigcirc)$ مذکور در آن مسئله یک گروه است. دو گروه $(\mathbf{I}; +)$ و $(A; \bigcirc)$ گروههای تعویضپذیرند، یعنی عمل آنها تعویضپذیر میباشد.
اینک به تعریف کلی گروه میپردازیم.

۹.۲. تعریف. دستگاه $(G; \bigcirc)$ را، که در آن، G مجموعه‌ای غیر خالی و $\bigcirc$ عملی دوتائی در G است یک گروه خوانیم هرگاه تابع شرایط ذیل (موسوم به اصول موضوعه‌ی گروه) باشد:
گ ۱. عمل $\bigcirc$ شرکتپذیر است.
گ ۲. دستگاه $(G; \bigcirc)$ عضو خنثا دارد؛ یعنی، G دارای عضوی مانند e هست که، بازاء هر a از G،

$$a \bigcirc e = e \bigcirc a = a.$$

(این عضو را، که به موجب ۸.۴.۰۲ منحصر بفرد است، عضو خنثای گروه نامند).
گ ۳. هر عضو G قرینه دارد؛ یعنی بازاء هر a از G، عضوی مانند a' از G هست که

$$a \bigcirc a' = a' \bigcirc a = e.$$

اگر، بعلاوه، اصل موضوع ذیل نیز برقرار باشد، گروه را گروه تعویضپذیر یا گروه آبلی[۱] نامند:

گ ۴. عمل $\bigcirc$ تعویضپذیر است.

۹.۲.۱. تمرین

۱. کدام یک از دستگاههای ذیل گروه است؟

(آ) $(\mathbf{N}; +)$. (ب) $(\mathbf{N}; \times)$. (پ) $(\mathbf{I}; \times)$.
(ت) $(\mathbf{Q}; +)$. (ث) $(\mathbf{Q}; \times)$. (ج) $(\mathbf{I} - \{0\}; +)$.
(چ) $(\mathbf{Q} - \{0\}; \times)$. (ح) $(\mathbf{I} - \{0\}; \times)$ (خ) $(\mathbf{R}; +)$.
(د) $(\mathbf{R} - \{0\}; \times)$.

۹.۳. تئوری ابتدائی گروههای آبلی. تئوری گروهها بسیار مفصل و خود موضوع کتابها است. ما در این مختصر بعضی از خواص عمومی گروههای آبلی را که در فصول آتیه بکار خواهد آمد میآوریم. در آنچه میآید، $(G; \bigcirc)$ گروه مورد بحث است، و e عضو خنثای آن میباشد، که ـ چنانکه میدانیم ـ منحصر بفرد است. سایر حروف کوچک الفبای لاتینی اسامی اعضای دلخواه G میباشند.

۹.۳.۱.قضیه (قاعدهی اسقاط). در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، اگر $a \bigcirc x = b \bigcirc x$ آنگاه $a = b$.

برهان. فرض کنیم $a \bigcirc x = b \bigcirc x$ (۱). بنا بر گ ۳، عضوی مانند x' از G هست که $x \bigcirc x' = e$ (۲). اینک گوئیم

a	بنا بر گ ۲
$= a \bigcirc e$	بنا بر (۲)
$= a \bigcirc (x \bigcirc x')$	بنا بر گ ۱
$= (a \bigcirc x) \bigcirc x'$	بنا بر (۱)
$= (b \bigcirc x) \bigcirc x'$	بنا بر گ ۱
$= b \bigcirc (x \bigcirc x')$	بنا بر (۲)
$= b \bigcirc e$	بنا بر گ ۲
$= b.$ ▲	

۹.۳.۱.۱. تبصره. به مناسبت تعویضپذیری عمل گروه (گ ۴)، از قضیهی فوق معلوم میشود که

اگر $x \bigcirc a = x \bigcirc b$ آنگاه $a = b$.

---

(۱) بنام آبل*، ریاضیدان شهیر نروژی.

زیرا، اگر $x \bigcirc a = x \bigcirc b$ آنگاه، بنا بر گ ۴، $a \bigcirc x = b \bigcirc x$، و از آنجا، بنا بر ۹.۳.۱، $a = b$.
نظیر این نکته را در موارد آتیه باید در نظر داشت. مثلاً، بنا بر تعویضپذیری عمل گروه (گ ۴)، حکمی به صورت $a \bigcirc b = b \bigcirc a = c$ را فقط به‌صورت $a \bigcirc b = c$ بیان و ثابت میکنیم، ولی پس از آن، هر جا بخواهیم، از قسمت $b \bigcirc a = c$ نیز استفاده یا بدان استناد مینمائیم.

۹.۳.۲. قضیه (یکتائی قرینه). در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، قرینه‌ی هر عضو G منحصر بفرد است.
برهان. کافی است ثابت کنیم که اگر a عضو دلخواهی از G باشد، و a' و a'' قرینه‌های آن باشند $a' = a''$، و این واضح است، زیرا، در شرایط مذکور، بنا بر گ ۳، $a' \bigcirc a = e$ و $a'' \bigcirc a = e$، و از آنجا، $a' \bigcirc a = a'' \bigcirc a$. پس، به قاعده‌ی اسقاط، $a' = a''$. ▲

۹.۳.۳. فایده و تعریف. بنا بر قضیه‌ی فوق، میتوان در گروه $(G; \bigcirc)$ عملی یکتائی، که آن را عمل «$'$» (عمل قرینه‌سازی) و حاصلش را بر عضو a از G به نام «a'» میخوانیم، تعریف کرد، از این قرار:

a' یعنی قرینه‌ی a.

بنا بر قاعده‌ی استعمال پرانتز، $(a')'$ یعنی قرینه‌ی a'، $(a \bigcirc b)'$ یعنی قرینه‌ی $a \bigcirc b$، و غیره.
بالاخره، با توجه به ۸.۷.۲ معلومست که اگر $a = b$ آنگاه $a' = b'$.

۹.۳.۴. قضیه در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، معادله‌ی $a \bigcirc x = b$ همواره یک و تنها یک جواب جواب دارد، و آن $b \bigcirc a'$ است.
برهان. اولاً، واضحست که $b \bigcirc a'$ در معادله‌ی مذکور صدق میکند، زیرا

$a \bigcirc (b \bigcirc a')$	بنا بر گ ۴
$= a \bigcirc (a' \bigcirc b)$	بنا بر گ ۱
$= (a \bigcirc a') \bigcirc b$	بنا بر گ ۳
$= e \bigcirc b$	بنا بر گ ۲
$= b.$	

ثانیاً، معادله بیش از یک جواب نتواند داشت، زیرا اگر $a \bigcirc x = b$ و $a \bigcirc y = b$ آنگاه $a \bigcirc x = a \bigcirc y$، و بنا بر قاعده‌ی اسقاط، $x = y$. ▲

۹.۳.۵. تبصره. برای حل مستقیم معادله‌ی $a \bigcirc x = b$، با توجه به ۹.۳.۱ گوئیم شرط لازم و کافی برای آنکه $a \bigcirc x = b$ آنست که $(a \bigcirc x) \bigcirc a' = b \bigcirc a'$. اما

$(a \bigcirc x) \bigcirc a'$	بنا بر گ ۴
$= (x \bigcirc a) \bigcirc a'$	بنا بر گ ۱

$$= x \bigcirc (a \bigcirc a')$$ بنا بر گ ۳
$$= x \bigcirc e$$ بنا بر گ ۲
$$= x.$$

پس، $x = b \bigcirc a'$. (با حل معادله‌ی $a + x = b$ در جبر به وسیله‌ی افزودن $a -$ به طرفین مقایسه کنید.)

۹.۳.۶. قضیه. در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، $(a')' = a$.
برهان. چون a' قرینه‌ی a است، $a \bigcirc a' = e$، و چون $(a')'$ قرینه‌ی a' است، $(a')' \bigcirc a' = e$. پس، به قاعده‌ی اسقاط، $(a')' = a$. ▲
اثبات قضیه‌ی ساده‌ی ذیل به متعلمین محول میشود:

۹.۳.۷. قضیه. در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، قرینه‌ی a یگانه جواب معادله‌ی $a \bigcirc x = e$ است.

۹.۳.۸. قضیه. در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، اگر $a' = b'$ آنگاه $a = b$.
برهان. زیرا، اگر $a' = b'$ آنگاه بنا بر توضیح مذکور در ۹.۳.۳، $(a')' = (b')'$. پس، بنا بر ۹.۳.۶، $a = b$. ▲

۹.۳.۹. قضیه. در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، $e' = e$.
برهان. کافی است ملاحظه کنیم که $e \bigcirc e = e$ و ۹.۳.۷ را بکار بندیم. ▲

۹.۳.۱۰. قضیه. در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، $(a \bigcirc b)' = a' \bigcirc b'$.
برهان. به موجب ۹.۳.۷، کافی است ثابت کنیم که $a' \bigcirc b'$ در معادله‌ی $(a \bigcirc b) \bigcirc x = e$ صدق میکند، و این معلومست، زیرا

$$(a \bigcirc b) \bigcirc (a' \bigcirc b')$$ بنا بر گ ۴
$$= (a \bigcirc b) \bigcirc (b' \bigcirc a')$$ بنا بر گ ۱
$$= [(a \bigcirc b) \bigcirc b'] \bigcirc a'$$ بنا بر گ ۱
$$= [a \bigcirc (b \bigcirc b')] \bigcirc a'^{(1)}$$
$$= (a \bigcirc e) \bigcirc a' = a \bigcirc a' = e.$$ ▲

۹.۴. نتیجه. مبحث گروه را با بعضی گروههای خاص آغاز کردیم (۹.۱). این گروهها و گروههائی که در ضمن مسائل ۹.۲.۱ آمده‌اند نشان میدهند که دستگاههای بسیار متفاوت، چه از لحاظ تعداد و ماهیت اعضا و چه از لحاظ ماهیت عمل آنها، تحت عنوان واحد گروه میآیند.

---

(۱) مستند سایر تساویها را بیان کنید.

در ۹.۳ قضایائی کلی در باب گروههای آبلی ثابت کردیم. البته توجه کرده‌اید که، در اثبات این قضایا، ماهیت اعضا و عمل گروه هیچ مداخله‌ای ندارند، بلکه فقط اصول موضوعه‌ی گروه مورد استناد میباشند. این نکته نتیجه‌ای بسیار مهم و عمیق دارد که اینک به توضیح آن میپردازیم. فرض کنیم از دستگاه $(\mathbf{R}; +)$ هیچ نمیدانیم جز اینکه این دستگاه تابع اصول موضوعه‌ی گروه آبلی است. معلوم است که اگر گروه آبلی $(G; \bigcirc)$ را تعبیر کنیم، بدین طریق که G را به معنی $\mathbf{R}$ و $\bigcirc$ را به معنی $+$ بگیریم، و عضو خنثای گروه $(\mathbf{R}; +)$ را بر طبق معمول، به 0 نمایش دهیم، قضایای تئوری گروه آبلی به قضایائی در باب اعداد حقیقی و عمل جمع آنها تبدیل میشوند. مثلاً،

(آ) [به موجب ۹.۲.۱] اگر $a + x = b + x$ آنگاه $a = b$.

(ب) [به موجب گ ۳ و ۹.۳.۲] بازاء هر عدد حقیقی a، یک و تنها یک عدد حقیقی مانند a' هست که $a + a' = 0$؛ یا، اگر، بر طبق معمول، قرینه‌ی a را به $-a$ نمایش دهیم، $a + (-a) = 0$.

(پ) [به موجب ۹.۳.۶] $-(-a) = a$.

(ت) [به موجب ۹.۳.۷] $-0 = 0$.

(ث) [به موجب ۹.۳.10] $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

البته، تعبیر گروه آبلی $(G; \bigcirc)$ منحصر به آنکه گذشت نیست. اگر G را به معنی $\mathbf{R} - \{0\}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی غیر از صفر) و $\bigcirc$ را به معنی ضرب عادی بگیریم، دستگاه $(\mathbf{R} - \{0\}; \times)$ در اصول موضوعه‌ی گروه آبلی صدق میکند. و لهذا ــ با این تعبیر ــ قضایای تئوری گروههای آبلی به قضایائی در باب اعداد حقیقی غیر از صفر و عمل ضرب آنها مبدل میگردد. مثلاً، اگر قرینه‌ی عدد حقیقی غیر از صفر a را، بر طبق معمول، a^{-1} بنامیم، قضایای ۹.۳.۹ و ۹.۳.10، بترتیب، بدین صورت درمیآیند:

(۱) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(۲) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

ملاحظه کنید که، بدون اطلاع از تئوری مقدماتی گروههای آبلی، اگر مثلاً میخواستیم قضیه‌ی (ث) را در دستگاه $(\mathbf{R}; +)$ ثابت کنیم ناچار بودیم که دلیلی مانند آنکه در اثبات ۹.۳.10 گذشت بیاوریم. همچنین، برای اثبات قضیه‌ی (۲) در دستگاه $(\mathbf{R} - \{0\}; \times)$ ناچار بودیم که دلیلی شبیه همان دلیل بیاوریم، وهکذا در مورد سایر گروههای خاص با تأسیس تئوری گروه آبلی به عنوان یک دستگاه جبری مجرّد، از اثبات خواص ناشی از اصول موضوعه‌ی گروه آبلی در یکایک گروههای خاص بینیاز میشویم. صرفه‌جوئی حاصل از این راه درصرف نیروی فکر آدمی از وصف بیرون است، و همین امر یکی از مزایای مهم تئوریهای مجرد میباشد.

۹.۵. تمرین

۰۱ در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، ثابت کنید که $(a \bigcirc b \bigcirc c)' = a' \bigcirc b' \bigcirc c'$.

۰۲ در گروه آبلی $(G; \bigcirc)$، این معادله را حل کنید:

$$x \bigcirc a \bigcirc b \bigcirc x \bigcirc c = b \bigcirc x \bigcirc a.$$

۳. قضایای گروه آبلی را در هر یک از دستگاههای تمرین ۹.۲.۱ که گروه آبلی است تعبیر کنید.

مقاله‌ی دوم

تئوری مقدماتی

اعداد حقیقی

فصل ۴

اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی

۱ § مقدمه

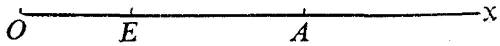
۱.۱. پیش از ورود در تئوری اعداد حقیقی، مفید است که اطلاعاتی را که مسلّماً خواننده‌ی این کتاب از اعداد حقیقی دارد در پرتو مطالبی که در فصول قبل آموختیم از نظر بگذرانیم، و آنها را جمع و جور کنیم، تا ضمناً زمینه‌ای واضح برای مطالب آتیه فراهم شود.

۱.۲. اعداد طبیعی و اعداد صحیح حسابی. تحصیل ریاضیات با حساب ابتدائی آغاز میگردد، که در آن، با اعداد صحیح حسابی، یعنی اعداد طبیعی به انضمام صفر، و ترتیب آنها، و «چهار عمل اصلی» بر آنها آشنا میشویم. این اعداد وسیله‌ی شمردن و شماره‌گذاری هستند. از اعمال اربعه، اجرای اعمال جمع و ضرب بر هر دو عدد صحیح حسابی ممکن است، اما در مورد تفریق و تقسیم چنین نیست. به عبارت دیگر، بر طبق اصطلاحات سابق، اعمال جمع و ضرب اعمالی در مجموعه‌ی اعداد صحیح حسابی هستند، اما اعمال تفریق و تقسیم اعمالی در این مجموعه نیستند.

۱.۳. اعداد مُنطِق حسابی. در مرحله‌ای دیگر از حساب مقدماتی، اعداد منطق حسابی ــ یعنی اعدادی به صورت p/q، که در آن p عددی صحیح (حسابی) و q عددی طبیعی است ــ و ترتیب آنها، و چهار عمل اصلی بر آنها را میآموزیم. در دستگاه اعداد منطق حسابی، تقسیم بر هر عدد غیر از صفر ممکن است

از خواص مهم اعداد منطق اینست که، بازاء هر دو عدد منطق مانند a و b که $a < b$، عددی منطق مانند c هست که $a < c < b$ (مثلاً، نصف مجموع a و b این خاصیت را دارد). چنانکه دیده میشود، اعداد منطق، بر خلاف اعداد صحیح، سخت «فشرده» هستند.

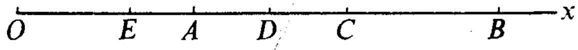
۱.۴. نمایش اعداد منطق. در ریاضیات مقدماتی، بتدریج با نمایش دادن اعداد منطق حسابی به وسیله‌ی طول قطعات مستقیم آشنا میشویم. اگر بر نیمخط Ox (شکل ۲۹) قطعه‌ی



شکل ۲۹

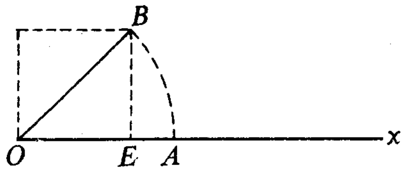
OE را بعنوان واحد طول انتخاب کنیم، بازاء هر عدد منطق مانند a، نقطه‌ای مانند A بر Ox هست که $a = OA/OE$. این نقطه را، که «نظیر» عدد منطق a یا «نمایش» آنست، یک

نقطه‌ی منطق از Ox مینامیم. اگر a و b دو عدد منطق متمایز و A و B نقاط نظیر آنها باشند (شکل ۳۰) وسط قطعه‌ی AB (نقطه‌ی C) نظیر عـدد منطق $(a+b)/2$ است، و مثلاً وسط AC (نقطه‌ی D) نیز نظیر یک عدد منطق میباشد، و غیره. از این ملاحظات ممکن است چنین



شکل ۳۰

بنظر آید که، بالعکس، هر نقطه از خط Ox نمایش یک عدد منطق است. اما میدانید، و یونانیان در چند صد سال پیش از میلاد میدانستند، که چنین نیست، و مثلاً، اگر OB قطر مربعی به ضلع OE باشد (شکل ۳۱)، و $OA = OB$، نقطه‌ی A نظیر هیچ عدد منطقی نیست. چون



شکل ۳۱

$\overline{OA}^2 = 2$، این مطلب را میتوان چنین بیان کرد که عدد منطقی وجود ندارد که در رابطه‌ی $x^2 = 2$ صدق کند، و بعبارت دیگر، معادله‌ی $x^2 = 2$ در میان اعداد منطق حسابی جواب ندارد[1]. از این لحاظ، میتوان گفت که نقطه‌ی A رخنه‌ای در نقاط منطق نیمخط Ox است.

۱.۵. اعداد اصم و اعداد حقیقی حسابی. برای حل مشکل بی‌جواب بودن معادله‌ی $x^2 = 2$ در میان اعداد منطق حسابی، و به عبارت دیگر، برای پر کردن رخنه‌های مجموعه‌ی نقاط منطق نیمخط Ox، مجموعه‌ی اعداد منطق حسابی را، با ملحق کردن اشیاء جدیدی (مانند $\sqrt{2}$) به آن، وسعت میدهند. این اشیاء جدید را، که نظایر نقاط غیر منطق نیمخط Ox هستند، اعداد اصم حسابی، و مجموعه‌ی جمیع اعداد حسابی را، اعم از منطق و اصم، اعداد حقیقی حسابی مینامند. در مجموعه‌ی اعداد حقیقی حسابی، ترتیب و اعمال اربعه را تعریف میکنند. در دستگاهی که بدین گونه حاصل میشود، معادله‌ی $x^2 = 2$ دارای جواب $\sqrt{2}$ است.

۱.۶. اعداد حقیقی. بر طبق مطالب و مسائلی که در باب گروهها آموختیم، میدانیم که هیچ یک از مجموعه‌های اعداد سابق‌الذکر (اعداد صحیح حسابی، اعداد منطق حسابی، و اعداد حقیقی حسابی) با عمل جمع خود گروه نیست، و معادله‌ی $a + x = b$ در دستگاههای متشکل از مجموعه‌های سابق‌الذکر با عمل جمع عموماً ممتنع است.

برای رفع مشکل اخیر، دستگاههای مذکور را، با ملحق کردن اشیاء جدیدی به آنها، «وسعت»

(۱) اثبات این مطلب در فصل ۶ خواهد آمد.

میدهند به نحوی که دستگاههای حاصل از این توسیع با عمل جمع خود گروه باشند. این توسیع، در آغاز جبر مقدماتی، بدیق طریق صورت میگیرد که، بازاء هر عدد حقیقی حسابی مانند a، علامت «$-a$» را به عنوان «عدد متقابل a» در کار میآورند. مجموعه‌ی اعداد حقیقی حسابی و متقابلهای آنها مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbf{R}$) میباشد. پس از آن، قواعدی برای محاسبه با این اعداد میآورند، که بعضی را (مثلاً قواعد جمع) به وسیله‌ی حرکت بر یک محور به طرف چپ یا راست یا بوسیله‌ی قرض و طلب و امثال آنها توضیح میدهند، و برخی از آنها را محصلین همواره به عنوان معما تلقی میکنند، از قبیل اینکه حاصلضرب دو عدد منفی مثبت است. به هر حال، محصل، در نتیجه‌ی تمرین و تکرار، با محاسبات جبری مأنوس میشود، و از جمله، درمییابد که، در این دستگاه جدید، معادله‌ی $a + x = b$ همواره جواب دارد. بالاخره، با در کار آوردن اعداد حقیقی، تناظر بین نقاط یک محور و اعداد هم کامل میشود، بدین معنی که هر عدد حقیقی نظیر نقطه‌ای از محور $x'x$ است، و بالعکس. همین تناظر تأسیس هندسه‌ی تحلیلی را ممکن میسازد.
مجموعه‌ی اعداد حقیقی مجموعکهای مهمی دارد که از آن جمله‌اند، (۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbf{N}$)؛ (۲) مجموعه‌ی اعداد صحیح ($\mathbf{I}$)، که مجموعه‌ی جمیع اعداد صحیح حسابی و متقابلهای آنهاست؛ و (۳) مجموعه‌ی اعداد منطق ($\mathbf{Q}$)، که مجموعه‌ی اعداد منطق حسابی و متقابلهای آنهاست.

۱.۷. دستگاه اعداد حقیقی. در جبر مقدماتی، اطلاعاتی از دستگاه $(\mathbf{R}; +, \times; <)$ کسب کرده‌اید. قسمتی از این اطلاعات را، بر طبق آنچه در فصل ۳ آموختیم، میتوان چنین بیان کرد:

(آ) دستگاه $(\mathbf{R}; +)$ یک گروه آبلی است؛
(ب) دستگاه $(\mathbf{R} - \{0\}; \times)$ یک گروه آبلی است؛
(پ) عمل $\times$ نسبت به عمل $+$ توزیعی است؛
(ت) $<$ یک نسبت ترتیبی در $\mathbf{R}$ است؛
(ث) اگر $a < b$ آنگاه $a + c < b + c$؛
(ج) اگر $a < b$ و $0 < c$ آنگاه $ac < bc$.

در اصطلاح ریاضیات، هر دستگاهی مانند $(\mathbf{R}; +, \times)$ را ــ قطع نظر از معنی $\mathbf{R}$، $+$، و $\times$ ــ که دارای خواص (آ) ــ (پ) و مجموعه‌ی آن حد اقل دارای دو عضو باشد یک میدان، و بعلاوه، اگر نسبتی ترتیبی و تابع خواص (ث) و (ج) در آن تعریف شده باشد، آن را یک میدان مرتب خوانند. پس، دستگاه اعداد حقیقی با اعمال جمع و ضرب و نسبت $<$ یک میدان مرتب است. آیا میدان مرتب بودن دستگاه اعداد حقیقی را مشخص میکند؟ جواب این سؤال منفی است. مثلاً، دستگاه $(\mathbf{Q}; +, \times; <)$ نیز بالبداهه یک میدان مرتب است، و حال آنکه $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. میدان مرتب اعداد منطق، به سبب «رخنه‌دار» بودنش، دستگاهی «ناتمام» است. برخلاف، دستگاه اعداد حقیقی تمام است؛ اما خواص (آ) ــ (ج) از این دستگاه

تمامیت آن را تأمین نمیکنند. در این باب، بعداً نیز سخن خواهیم گفت (۳.۱).

۱.۸. «بازی» با اعداد حقیقی. اطلاعات شما از دستگاه اعداد حقیقی تا حد وسیعی مبتنی است بر تجربه و مشهودات و معنای خارجیی که برای اعداد حقیقی در ذهنتان رسوخ دارد («تعریف» عدد را در حساب ابتدائی به عنوان «حاصل شمردن»، و نیز تعریف جمع و تعریف کسر را بخاطر بیاورید). اما، خوشبختانه، در محاسبات و استدلالهای جبری، جنبه‌های تجربی و شهودی را فراموش میکنید، و عمل شما مانند بازی کردن با مهره‌هائی بر طبق قواعد معین میباشد. مثلاً، فرض کنید رابطه‌ی

$$2x + 1 = 5 \qquad (۱)$$

در دست است. این رابطه را میتوان به وضعی از مهره‌های شطرنج بر صفحه‌ی بازی تشبیه کرد. هر تغییری در وضع مهره‌ها بر طبق قواعد معیّن بازی صورت میگیرد. در اینجا، بر طبق یکی از قواعد «بازی»، میتوان مهره‌ها را از وضع (۱) به وضع

$$2x = 5 - 1$$

درآورد، و این را، بر طبق قاعده‌ی دیگر، به وضع $2x = 4$، و این را به وضع $x = 4/2$، و بالاخره، این را به وضع $x = 2$. در این بازی، نه معنی اعداد مداخله‌ای در کار داشته است، و نه معانی اعمال برای استوار ساختن تئوری اعداد حقیقی بر مبانی محکم، همین روش را پیش میگیریم: اعداد حقیقی مهره‌هائی خواهند بود که بر طبق قوانین معیّن (موسوم به اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی) و قواعد منطقی استدلال با آنها بازی میکنیم. تئوری اعداد حقیقی چیزی جز این بازی نیست. در صفحات آتیه، با اصول این بازی تا حدی آشنا خواهیم شد. اهمیت تعلیمی اتخاذ این روش در ۲ § معلوم میگردد.

۲ § روش اصل موضوعی

۲.۱. مقدمه. هر تئوری علمی مجموعه‌ای است منظم از گزاره‌هائی که راست شمرده میشوند، و مبیّن خواصی از اشیاء موضوع بحث آن تئوری یا نسبتهائی بین آنها میباشند. مثلاً، در هندسه، نقاط و خطوط و زوایا از جمله‌ی اشیاء مورد بحث هستند، و گزاره‌های «هر نقطه از عمود منصف یک قطعه خط مستقیم از طرفین آن به یک فاصله است» و «زوایای متقابل به رأس باهم متساویند» از گزاره‌های راست هندسه میباشند. در یک تئوری ریاضی (مثلاً هندسه)، گزاره‌های راست تئوری (قضایا) نظم و ترتیبی خاص دارند، و آن ناشی از اینست که بعضی از آنها نتیجه‌ی منطقی بعضی دیگر است؛ و بعبارت دیگر، بعضی از آنها از بعضی دیگر لازم میآید. البته، در هر مورد، چنین ادعائی را باید با آوردن دلیل ثابت کرد.

در تأسیس یک تئوری ریاضی طبعاً دو سؤال به ذهن شخص خطور میکند: یکی اینکه، از اشیاء مورد بحث، کدام را تعریف کنیم، و دیگر اینکه، از گزاره‌ها، کدام را ثابت نمائیم. جوابی که در بادی امر به این سؤالات بنظر میرسد اینست که هر چه را از آن سخن میگوئید

تعریف کنید، و هر چه را بدان حکم میکنید ثابت نمائید. البته کمال مطلوب همین است، اما با اندک تأملی آشکار میشود که این کمال مطلوبْ غیر ممکن‌الوصول است. مثلاً، در هندسه، در تعریف «نقطه» ناچار باید به عبارات دیگر توسّل جست، و در تعریف هر یک از این عبارات به عبارات دیگر، و هکذا. این رشته‌ی تعریفات یا الی غیرالنهایه ادامه مییابد (تسلسل) یا در مرحله‌ای به عبارتی که تعریف آن مورد نظر بود باز میگردد (دور)؛ و در هر دو حالت، عبارت مذکور بدون تعریف میماند. در اثبات گزاره‌ها نیز حال بر همین منوال است: در اثبات یک گزاره باید به گزاره‌های دیگر استناد کرد، و در اثبات هر یک از این گزاره‌ها باید به گزاره‌های دیگر توسل جست، و هکذا؛ و این امر نیز منجر به دور یا تسلسل میگردد؛ و در هر حالت، گزاره‌ی مورد نظر بدون دلیل میماند.

۲.۲. روش اصل موضوعی. بنا بر آنچه گذشت، تعریف همه‌ی عبارات یک تئوری ریاضی، و نیز اثبات همه‌ی گزاره‌های آن، غیر ممکن است. پس، در ساختن یک تئوری، ناچار باید بعضی از عبارات آن را، بدون تعریف، موضوع بحث قرار داد، و بعضی از گزاره‌های آن را، بدون دلیل، بعنوان گزاره‌های راست تئوری قبول کرد. عبارات مذکور را حدود اولیه یا حدود تعریف‌نشده، و گزاره‌های مذکور را اصول موضوعه یا آکسیوم[۱]های آن تئوری نامند. پس از انتخاب حدود اولیه‌ی یک تئوری، هیچ عبارت دیگر در آن تئوری قابل بحث نخواهد بود مگر اینکه به وسیله‌ی حدود اولیه یا عباراتی که قبلاً به وسیله‌ی حدود اولیه تعریف شده‌اند تعریف شود؛ عباراتی را که بدین گونه تعریف میشوند حدود ثانوی یا حدود تعریف‌شده‌ی تئوری نامند. همچنین، پس از انتخاب اصول موضوعه‌ی یک تئوری، گزاره‌ای از این تئوری فقط و فقط وقتی به عنوان یک گزاره‌ی راست تئوری پذیرفته میشود که به دلیل از اصول موضوعه‌ی تئوری استنتاج شود؛ در این صورت، آن گزاره را یک «قضیه»ی آن تئوری خوانند. خلاصه، قضیه‌ی یک تئوری یعنی گزاره‌ای که نتیجه‌ی اصول موضوعه‌ی آن تئوری باشد؛ بالاخص، اصول موضوعه‌ی یک تئوری از قضایای آن میباشند.

روش مذکور را در تأسیس یک تئوری ریاضی روش اصل موضوعی نامند. خلاصه، روش اصل موضوعی در تأسیس یک تئوری اینست که (۱) دسته‌ای از عبارات آن تئوری را، بدون تعریف، به عنوان حدود اولیه‌ی آن تئوری اختیار میکنیم؛ و (۲) دسته‌ای از گزاره‌های آن تئوری را به عنوان اصول موضوعه‌ی آن انتخاب مینمائیم. قضایای تئوریِ موردِ نظرْ گزاره‌هائی هستند در باب اشیاء مورد بحث آن تئوری که از اصول موضوعه‌ی آن بر طبق قواعد استدلال منطقی استخراج شوند. هر تئوری را که به این روش تأسیس شود یک تئوری قیاسی (یا اصل موضوعی) نامند.

۲.۲.۱. تبصره. نخستین مبحثی از ریاضیات که به روش اصل موضوعی تأسیس شده است

---

(۱) axiom

هندسه‌ی مقدماتی است، و این کار بیش از دو هزار سال قبل بـه وسیله‌ی اقلیدس*، دانشمند بزرگ یونانـی حوزه‌ی علمی اسکندریـه، صورت گـرفت. کتاب اصول هندسه‌ی وی از این جهت بین آثار علمیی که تا اواخـر قرن ۱۹م به وجود آمده است منحصر بفرد میباشد. چنانکه مـلاحظه میشود، روش اصل موضوعی اساساً بسیار قدیمی است؛ اما تنقیح و تکمیل این روش عمدةً از کارهای محققین عصر حاضر میباشد.

کتاب اصـول هندسه‌ی اقـلیدس شروع میشود با چند «تعریـف»، و چند حکم، کـه وی دلیلی بر آنها اقامه نمیکند. تعریفاتی که اقلیدس آورده است از این قبیل است:

نقطه آنست که جزء ندارد. خط طول بدون عرض است.

اقلیدس همه‌ی اصطلاحاتی را کـه بکار میبرد تعریف نمیکند، و ــ چنانکه از تـوضیحات سابـق الذکر معلوم شد ــ نمیتواند تعریف کند. مثلاً، کلمات «طول» و «عرض»، کـه در تعریف خـط آمده است، در کتاب اقلیدس تعـریف نشده است. در حقیقت، نقـطـه و خـط از حـدود اولیه‌ی هندسه‌ی اقلیدس هستند، و تـوضیحاتی کـه در کتابهـای هندسه‌ی مقدمـاتـی در بـاب این حـدود میآورند، اگر چه گاه بـه عنوان تعریـف عـرضه میشود، در حقیقت تعریف نیست، بلکه بـرای نزدیک کردن این حدود است به ذهن مبتدی.

اقلیدس گزاره‌هائی را کـه بدون دلیل میپذیرد به دو دسته تقسیم میکند[1]: پـوستولا[2]ها یـا اصول موضوعـه، و آکسیومها یا بدیهیات اولیه یا علوم متعارفه. آکسیومها احکام هندسی نیستند بلکه «حقایـق کلـی» میباشند، از قبیل اینکـه «کل بـزرگتر از جـزء است» و «دو چیز مساوی با یک چیز با هم متساویند». پوستولاها «حقایق هندسی» هستند؛ معروفترین آنها پنجمین پوستولای اقـلیدس است[3]، کـه معادل اصل مـوضوع معروف مربـوط بـه خطوط‌متوازی است. با پیشرفت ریاضیات، این طبقه‌بندی متزلـزل گـردید. اولاً معلوم شد کــه پوستولای پنجم «حقیقت هندسی» نیست، و ثـانیاً آشکار گردید که حد اقل بعضی از آکسیومـهـا «حقیقت کلی» نیستند، و بداهت مطلق مورد ادعای واضعین آنها را ندارند، و مثلاً نمیتوان علی‌الاطـلاق حکم بـه بزرگتر بودن «کل» از «جزء» کـرد[4]. پس، تقسیم کردن گزاره‌های اولیه‌ی یک تئوری بـه «علوم متعارفه» یا «بدیهیات اولیه» (آکسیومها) و «اصول موضوعـه» (پوستولاها) وجهـی ندارد. در اصطلاح ما، هر گزاره‌ای که، در تأسیس یک تئوری، بدون دلیل پذیـرفته شود یک اصل موضوع یا آکسیوم آن تئوری است.

۲.۲.۲. تبصره. گفتیم کـه قضایای یک تئوری نتایـج اصول موضوعه‌ی آن میباشند. پس

---

(۱) این طبقه‌بندی حد اقل از زمان ارسطو (۳۸۴ ــ ۳۲۲ یا ۳۲۱ قم) سابقه دارد.

(۲) postulate

(۳) پنجمین پوستولای اقلیدس اینست کـه اگر خط مستقیمی دو خـط مستقیم را قطـع کند بطوری که، از زوایای حادث، مجموع دو زاویه‌ی داخلی واقع در یک طرف قـاطع کمتر از دو قائمه باشد، اگر آن دو خط را در این طرف امتداد دهیم سر انجام یکدیگر را تـلاقی میکنند.

(۴) مثلاً چنانکه دیدید، عده‌ی اعداد طبیعی مساوی عده‌ی اعداد طبیعی زوج است.

اصول موضوعه‌ی یک تئوری مقدمات مشترک جمیع قضایای آنند. مثلاً، فرض کنیم A_1، A_2، . . .، و A_n اصول موضوعه‌ی هندسه‌ی مقدماتی باشند. وقتی گفته میشود که گزاره‌ی

(۱) زوایای متقابل به رأس با هم متساویند

قضیه‌ی هندسه است مقصود اینست که این گزاره نتیجه‌ی مقدمات A_1، A_2، . . .، و A_n میباشد. برای اثبات (۱)، باید آن را از این مقدمات نتیجه گرفت.

۲.۳. اهمیت تعلیمی روش اصل موضوعی. آموختن مباحث ریاضی به روش اصل موضوعی ــ ولو، مانند هندسه‌ی اقلیدس، به معیارهای کنونی ناقص باشد ــ از جنبه‌ی تعلیمی مزایای انکارناپذیر دارد. در اثبات قضایا و حل مسائل مبحثی که به روش اصل موضوعی میآموزیم، مبنای کار ما مشخص است، و میدانیم که به چه چیزها میتوانیم استناد کنیم. برای اینکه این نکته‌ی مهم بهتر آشکار شود، فرض‌کنید از شما بپرسند که چرا ارتفاعات مثلث در یک نقطه متقاطعند. البته میتوانید برای این حکم دلیل بیاورید. اگر در باب احکامی که در این استدلال به آنها استناد میکنید همین سؤال تکرار شود برای این احکام هم دلیل میآورید. اگر سؤال مکرر شود عاقبت استنادتان به چند حکم معدودی خواهد بود که در ابتدای هندسه به عنوان اصول موضوعه پذیرفته‌اید. از طرف دیگر، شاید بسیار از خود یا از دیگران پرسیده‌اید، یا دیگران از شما پرسیده‌اند، که چرا حاصلضرب دو عدد منفی مثبت است، و هیچگاه به این سؤال جوابی نشنیده‌اید یا نداده‌اید. سبب اینست که اطلاعات شما از مبادی جبر اطلاعاتی است متفرق و (حد اقل تا حدی) بدون ارتباط با یکدیگر، و فاقد نظم و ترتیب خاصی که در آغاز ۲.۱ به آن اشاره کردیم. در آموختن اعداد حقیقی، آیا «$>$» را با تعریف شناخته‌اید یا بدون تعریف؛ و در هر حال، چگونه از نامساوی $x > y$ نامساوی $-x > -y$ را نتیجه میگیریم؟ آیا «0» را بعنوان یک حد اولیه پذیرفته‌اید یا با تعریف «$a - a = 0$» به شما معرفی شده است؛ و در هر حال، چگونه ثابت میکنید که $b - b = 0$، و در اثبات به چه احکامی میتوانید استناد کنید؟ قوت قلب ما در هندسه ناشی از روش اصل موضوعی در تأسیس آن، و تزلزل ما در مبحث اعداد حقیقی، که پایه‌ی آنالیز ریاضی است، ناشی از بی پایه بودن روش تعلیم و تعلّم این مبحث است.

اهمیت روش اصل موضوعی منحصر به مزایای تعلیمی آن نیست، ولی فواید اساسی این روش در این مختصر نمیگنجد.

۳§ طرح اصل موضوعی تئوری اعداد حقیقی

۳.۱. مسئله‌ی تأسیس یک تئوری به روش اصل موضوعی معمولاً بدین طریق پیش میآید که شخص اطلاعاتی از موضوعی دارد، و میخواهد این اطلاعات را جمع و جور و تنظیم کند، و به صورت علمی در آورد. برای این منظور، چنانکه از توضیحات سابق‌الذکر استنباط میشود، باید ابتدا به انتخاب حدود اولیه و اصول موضوعه، و سپس به استخراج قضایای تئوری، یعنی

نتایج اصول موضوعه، پرداخت.

وضع ما در مورد اعداد حقیقی همین گونه است: میخواهیم اطلاعات خود را از اعداد حقیقی تنظیم کنیم، و به صورت یک تئوری علمی در آوریم. قضایای این تئوری در باب اشیاء گوناگون است، از قبیل

$$\text{اعضای } \mathbf{R} \qquad 0 \qquad 1$$
$$< \qquad + \qquad -$$
$$\times \qquad / \qquad \leqslant$$

و غیره. میدانیم که همه‌ی این اشیاء را نمیتوان تعریف کرد. ما، از این میان

$$\mathbf{R}, \qquad +, \qquad \times, \qquad <$$

را ــ که اولی مجموعه‌ای حداقل دارای دو عضو، $+$ و $\times$ دو عمل دوتائی در آن، و $>$ نسبتی دوتائی در آن است ــ بدون تعریف، به عنوان حدود اولیه‌ی تئوری اعداد حقیقی اختیار میکنیم، و هر عضو $\mathbf{R}$ را یک عدد حقیقی میخوانیم. پس،

x عدد حقیقی است یعنی $x \in \mathbf{R}$.

اینک به انتخاب اصول موضوعه‌ی تئوری اعداد حقیقی میپردازیم. خواص (آ) ــ (ج) مذکور در ۱۰۷ را از اصول موضوعه قرار میدهیم. چون برای $\mathbf{R}$ قائل به حد اقل دو عضو شده‌ایم، این خواص دستگاه اعداد حقیقی را به عنوان یک میدان مرتب معرفی میکنند. اما، در ۱۰۷ یادآوری کردیم که خواص مذکور دستگاه اعداد حقیقی را مشخص نمیسازند. بنا بر این، اصل موضوع دیگری، به نام «اصل موضوع تمامیت»، نیز اختیار میکنیم، که توضیح آن بعداً خواهد آمد. ثابت میشود که این اصول موضوعه دستگاه اعداد حقیقی را از جنبه‌ی ریاضی مشخص میسازند.

برای تسهیل مراجعه، اصول موضوعه‌ی تئوری اعداد حقیقی را فهرست‌وار در آخر این فصل در صفحه‌ی ۱۵۶ آورده‌ایم. اصطلاحات «بند بالا» و «سوپرموم»، که در اصل موضوع تمامیت آمده‌اند، به موقع تعریف خواهند شد. در فصول آتیه به استخراج بعضی از نتایج اصول موضوعه، یعنی قضایای تئوری اعداد حقیقی، خواهیم پرداخت.

۳.۲. تنبیهات

۳.۲.۱. باید درست معلوم باشد که مقصود اصلی ما در این مقاله چیست. آیا میخواهیم همه‌ی تئوری اعداد حقیقی را به روش اصل موضوعی بنا کنیم؟ مطلقاً چنین ادعائی نداریم، و شما هم چنین انتظاری از این مقاله نداشته باشید. مقصود اصلی اینست که، با استخراج بعضی از اهم خواص اعداد حقیقی از اصول موضوعه‌ی سابق‌الذکر، راه کار را نشان دهیم. در نتیجه، بی آنکه محصل گرفتار جزئیات ملال‌آور شود، پایه‌ای متین برای اطلاعات قبلی خود میابد، که میتواند بسیاری از نگفته‌ها را بر آن استوار سازد، و ــ در عین حال ــ برای فهم خواص عمیق اعداد حقیقی (فصل ۶ ببعد)، که پایه‌ی آنالیز است، آماده میشود.

۳.۲.۲. از ایـن ببعد، هر جا از **عدد** سخن میرود مقصود **عدد حقیقی** است، و متغیرهـای فردی مـقـیـّـد به $\mathbf{R}$ هستند، مگـر آنکه خـلاف این امـر تصریح یـا صریـحاً از سیاق عبارت استنباط شود. مثلاً، متغیر h اسم عدد حقیقی نامشخصی است، اما اگر بگوئیم «تابع h» معلوم است که «h» به معنی سابق بکار نرفته است.

فهرست

اصول موضوعه‌ی دستگاه اعداد حقیقی[۱]

$(\mathbf{R}; +, \times; <)$

I. اصول موضوعه‌ی میدان

حم ۱. $\mathbf{R}$ مجموعه‌ای است حد اقل دارای دو عضو، و $+$ (جمع) و $\times$ (ضرب) دو عمل دوتائی در $\mathbf{R}$ میباشند.

$a \times b$ را به صورت $a \cdot b$ یا ab نیز مینویسیم.

حم ۲. $+$ شرکتپذیر است.

حم ۳. $\mathbf{R}$ نسبت به عمل $+$ عضو خنثا دارد.

حم ۴. هر عضو $\mathbf{R}$ نسبت به عمل $+$ قرینه دارد.

حم ۵. $+$ تعویضپذیر است.

بر طبق حم ۱ـحم ۵، دستگاه $(\mathbf{R}; +)$ یک گروه آبلی است. عضو خنثای این گروه را «0» (صفر)، و قرینه‌ی عدد a را، که متقابل a خوانده میشود، «$-a$» مینامیم.

حم ۶. $\times$ شرکتپذیر است.

حم ۷. $\mathbf{R} - \{0\}$ نسبت به عمل $\times$ بسته است.

حم ۸. $\mathbf{R} - \{0\}$ نسبت به عمل $\times$ عضو خنثا دارد.

حم ۹. هر عضو $\mathbf{R} - \{0\}$ نسبت به عمل $\times$ قرینه دارد.

حم 10. $\times$ تعویضپذیر است.

بر طبق حم ۱ و حم ۶ـحم 10، دستگاه $(\mathbf{R} - \{0\}; \times)$ یک گروه آبلی است. عضو خنثای این گروه را «1» (یک) مینامیم.

حم ۱۱. $\times$ نسبت به $+$ توزیعپذیر است.

II. اصول موضوعه‌ی ترتیب

حت ۱. $<$ (موسوم به نسبت کوچکتری) نسبتی دوتائی در $\mathbf{R}$ است.

حت ۲. $<$ متعدی است.

حت ۳. $<$ تابع اصل تثلیث (قوی) است.

حت ۴. اگر $a < b$ آنگاه $a + c < b + c$.

حت ۵. اگر $a < b$ و $0 < c$ آنگاه $ac < bc$.

III. اصل موضوع تمامیت

حتم . هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد حقیقی که بند بالا داشته باشد سوپرموم دارد.

---

(۱) قرارداد استعمال حروف در ۳.۲.۲ ذکر شد.

اسامی بعضی از مجموعکهای R[1]

$\mathbf{N}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی؛ $\mathbf{N}_k$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از عدد طبیعی k؛ $\mathbf{I}$: مجموعه‌ی اعداد صحیح؛ $\mathbf{I}^+$: مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت؛ $\mathbf{I}^-$: مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی؛ $\mathbf{I}_n$: مجموعه‌ی اعداد صحیح ناکمتر از عدد صحیح n؛ $\mathbf{Q}$: مجموعه‌ی اعداد منطق؛ $\mathbf{Q}^+$: مجموعه‌ی اعداد منطق مثبت؛ $\mathbf{Q}^-$: مجموعه‌ی اعداد منطق منفی؛ $\mathbf{R}^+$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت؛ $\mathbf{R}^-$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی.

(۱) این مجموعکها متدرجاً تعریف خواهند شد. مقصود از ضبط اسامی آنها در اینجا تسهیل مراجعه است.

فصل ۵

نتایج اصول موضوعه‌ی میدان مرتب

0 § مقدمه

این فصل مشتمل بـر نتایج اصول موضوعه‌ی میدان مرتب است. در ۳ـ۱ §§، خواص مهم چهار عمل اصلی و ترتیب اعـداد حقیقی از ایـن اصول موضـوعه استـخراج شده است. در ایـن سه قسمت، از مقتضیات روش اصل موضوعی منحرف نشده‌ایم: فرض اینست کـه از اشیائی که نامشان را اعداد حقیقی گـذاشته‌ایم هیچ نمیدانیم مگر آنچه در اصول موضـوعه آمده است. این اصول موضوعه و قواعد استدلال منطقی قواعد بـازی مـذکـور در ۱۰۸ : ۴ میباشند. در یک استدلال، اگر از این قواعد و قضایائی که قبلاً از آنها استخراج شده است تجاوز شود آن استدلال قابل قبول نخواهد بـود. پس از مباحث مذکور، خواص مقدماتی قابل استـخراج از اصول موضوعه و قضایای ثـابت‌شده را کـه محصلین در ریاضیات مقدماتی آمـوخته‌اند معلوم فرض میکنیم.

از ۴ § بحث در اعداد طبیعی و اعـداد صحیح آغـاز میشود. پایه‌ی تئوری اعداد طبیعی به روش اصل موضوعی گذاشته شده است، ولی، پس از آن، بعضی از خواص این اعداد را که محصلین از پیش میدانند یـا در مقاله‌ی اول به روش شُـهودی (غیر اصل مـوضـوعی) از آنها بحث کـرده‌ایم معلوم میشماریم. اتخاذ ایـن روش نه از آن جهت است کـه این خـواص قابل استخراج از اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی نیستند، بلکه بدیـن سبب است کـه استخراج آنها از این طـریق کاری است اغلب طـولانی و نسبةً پـر زحمت، و در حقیقت، مـوضوع بحثی جداگانه است که ورود در آن ما را از راهی که در پیش داریم منحرف میسازد.

بالاخره، روشی که اتخاذ شده است بالطبع در تنظیم تمرینها مؤثر بـوده. تا در مرحله‌ی پـیسازی هستیم، و هنوز قـواعد کافـی بـرای حـل مسائـل بـدست نیاورده‌ایم، تمرینها بیشتر جنبه‌ی نظری دارند، و احکامی هستند کـه باید به استناد آنچه قبلاً پذیرفته یـا ثابت شده است ثابت شوند. پس از آنکه قواعد کافی بدست آمد، «مسائل عملی» میآید.

۱ § اعمال

۱.۰۱. جمع. بنابر حم ۱ـحم ۵، دستگـاه $(\mathbf{R};+)$ یک گروه آبـلی است. پس، به موجب آنچه در باب گروههای آبلی ثابت شد، احکام ذیل برقرار است:

۱.۰۱.۰۱. قضیه. یک و تنها یک عدد، کـه آن را «0» مینامیم، هست کـه، بازاء هـر عدد a، $a+0=a$.

۱.۱.۲. قضیه (قاعده‌ی اسقاط در عمل جمع). اگر $a + c = b + c$ آنگاه $a = b$.

۱.۱.۳. قضیه. بازاء هر عدد a یک و تنها یک عدد، که آن را «$-a$» (متقابل a) مینامیم هست که $a + (-a) = 0$.

۱.۱.۴. قضیه. معادله‌ی $a + x = b$ همواره یک و تنها یک جواب دارد، و آن $b + (-a)$ است.

۱.۱.۵. قضیه. $-(-a) = a$.

۱.۱.۶. قضیه. اگر $-a = -b$ آنگاه $a = b$.

۱.۱.۷. قضیه. $-0 = 0$.

۱.۱.۸. قضیه. $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

۱.۱.۹. قرارداد.
I. با توجه به حم ۲، $(a + b) + c$ یا $a + (b + c)$ را $a + b + c$ مینامیم.
II. عبارت «$x = a \vee x = -a$» را به صورت اختصاری «$x = \pm a$» مینویسیم.

۱.۲. تفریق. در $\mathbf{R}$، عملی دوتائی، که آن را «$-$» (عمل تفریق)، و حاصلش را بر دو عدد b و a (به همین ترتیب) «$b - a$» (تفاضل b و a) مینامیم، بر طبق این ضابطه تعریف میکنیم:

۱.۲.۱. تعریف. $b - a$ یعنی $b + (-a)$.
باید توجه داشت که، در $b - a$، «$-$» نام عمل دوتائی تفریق است، اما در $b + (-a)$، «$-$» نام یک عمل یکتائی میباشد.
از تعریف فوق بنابر ۱.۱.۴ نتیجه میشود:

۱.۲.۲. قضیه. $a + (b - a) = b$.

۱.۲.۳. قضیه (قاعده‌ی نقل یک جمله از یک طرف معادله به طرف دیگر). اگر $a + x = b$ آنگاه $x = b - a$، و بالعکس. (چرا؟)
قضیه‌ی ذیل در استدلال مفید میباشد:

۱.۲.۴. قضیه. اگر $a = b$ آنگاه $b - a = 0$ و بالعکس.
برهان. اگر $a = b$ آنگاه بنابر ۱.۲.۰۱ و ۱.۰۱.۳،

$$b - a = b + (-a) = b + (-b) = 0.$$

بالعکس، اگر $b - a = 0$ آنگاه، بنابر ۱.۲.۰۲، $b = 0 + a$. پس، بنابر ۱.۰۱.۰۱، $a = b$. ▲

قواعد محاسبه با تفریق در تمرین ۱.۲.۰۵ آمده است. به عنوان مثال، ثابت میکنیم که

$$-(a - b) = (-a) + b = b - a.$$

بنا بر حم ۵ و ۱.۲.۰۱، $(-a) + b = b + (-a) = b - a$. پس، کافی است ثابت کنیم که $-(a - b) = (-a) + b$. اثبات از این قرار است:

$$\begin{aligned} &-(a - b) && \text{بنا بر ۱.۲.۰۱} \\ &\quad = -[a + (-b)] && \text{بنا بر ۱.۰۱.۰۸} \\ &\quad = (-a) + [-(-b)] && \text{بنا بر ۱.۰۱.۰۵} \\ &\quad = (-a) + b. \blacktriangle \end{aligned}$$

معمولاً، این گونه تساویهای مسلسل را به دنبال هم مینویسیم، و مستند هر تساوی را پیش از آن در داخل کروشه میآوریم، بدین صورت:

$$\begin{aligned} -(a - b) [۱.۲.۰۱] &= -[a + (-b)] [۱.۰۱.۰۸] \\ &= (-a) + [-(-b)] [۱.۰۱.۰۵] = (-a) + b. \blacktriangle \end{aligned}$$

۱.۲.۵. تمرین (قواعد محاسبه با تفریق)
۰۱ ثابت کنید که

(۱) $a - a = 0.$
(۲) $a - 0 = a.$
(۳) $0 - a = -a.$
(۴) $-(a + b) = (-a) - b.$
(۵) $(a + b) - c = a + (b - c) = a - (c - b).$
(۶) $(a + c) - (b + c) = a - b.$
(۷) $(b - a) + (c - b) = c - a.$
(۸) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$
(۹) $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c.$

۱.۲.۶. قرارداد. عبارت «$(a - b) - c$» را «$a - b - c$» مینامیم. به عبارت دیگر، برای «$a - b - c$» بر طبق قرارداد الحاق به چپ معنی قائل میشویم. همچنین، «$(a - b) + c$» را «$a - b + c$» مینامیم.

۱.۳. ضرب

۱.۳.۱. قضیه. حاصلضرب هر عدد در 0 مساوی 0 است.

برهان. فرض کنیم a عدد دلخواهی باشد.

$$a \,.\, a + a \,.\, 0 \,[\text{حم ۱۱}] = a \,.\, (a+0) \,[۱.۱.۱] = a \,.\, a \,[۱.۱.۱]$$
$$= a \,.\, a + 0.$$

پس، بنا بر قاعده‌ی اسقاط در جمع، $a \,.\, 0 = 0$. ▲

چون $\mathbf{R}$ حد اقل دو عضو دارد (حم ۱)، $\mathbf{R} - \{0\}$، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی غیر از 0، خالی نیست. پس، بنا بر حم ۶ـحم ۱۰، $\mathbf{R} - \{0\}$ با عمل ضرب یک گروه آبلی است. عضو خنثای این گروه را، که غیر از صفر است، «1» مینامیم. پس، بازاء هر عدد غیر از صفر مانند a، $a \,.\, 1 = a$. بنا بر ۱.۳.۱، این تساوی بازاء $a = 0$ هم برقرار است. خلاصه،

۱.۳.۲. قضیه. یک و تنها یک عدد حقیقی، که آن را «1» مینامیم، هست که $0 \neq 1$، و بازاء هر عدد مانند a، $a \,.\, 1 = a$.

۱.۳.۳. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه حاصلضرب دو عدد صفر باشد آنست که حد اقل یکی از آنها صفر باشد.

برهان. کفایت شرط بنا بر ۱.۳.۱ مسلم است. اثبات لزوم به برهان خلف است. اگر $ab = 0$ (۱) ولی $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه a و b به $\mathbf{R} - \{0\}$ تعلق دارند. پس، بنا بر حم ۷، ab نیز بدین مجموعه تعلق دارد، یعنی $ab \neq 0$، و این با (۱) متناقض است. ▲

۱.۳.۴. قرارداد.

I. با توجه به حم ۶، $(ab)c$ یا $a(bc)$ را abc مینامیم.

II. در عبارات $a \,.\, b + a \,.\, c$ و $a \,.\, b - a \,.\, c$، اعمال + و − را «قویتر» از عمل. میشماریم؛ یعنی، $a \,.\, b + a \,.\, c$ را به معنی $(a \,.\, b) + (a \,.\, c)$ و $a \,.\, b - a \,.\, c$ را به معنی $(a \,.\, b) - (a \,.\, c)$ میگیریم.

پس، مثلاً، با توجه به ۱.۱.۹، $aa + abc + bb$ یعنی

$$\{(aa) + [(ab)c]\} + (bb).$$

۱.۳.۵. قضیه (توزیعپذیری ضرب نسبت به تفریق).

$$a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c.$$

برهان. بنا بر ۱.۲.۳، کافی است ثابت کنیم که

$$a \,.\, (b - c) + a \,.\, c = a \,.\, b.$$

دلیل از این قرار است:

$$a \,.\, (b - c) + a \,.\, c \,[\text{حم ۱۱}] = a \,.\, [(b - c) + c] \,[\text{حم ۵}]$$
$$= a \,.\, [c + (b - c)] \,[۱.۲.۲] = a \,.\, b. \blacktriangle$$

۱.۳.۶. قضیه («قواعد علامات» در ضرب).

(I) $(-a).b=-(a.b).$ (II) $(-a)\cdot(-b)=ab.$

برهان. برای اثبات (I) گوئیم،

$(-a).b$ [۱.۲.۰۵ : ۳] $=(0-a).b$ [حم ۱۰] $=b.(0-a)$ [۱.۳.۰۵]
$=b.0-b.a$ [۱.۳.۰۱] $=0-b.a$ [۱.۲.۰۵:۳]
$=-(b.a)$ [حم ۱۰] $=-(a.b).$

برای اثبات (II) گوئیم،

$(-a).(-b)$ [بنا بر قسمت I] $=-[a.(-b)]$ [حم ۱۰]
$=-[(-b).a]$ [بنا بر قسمت I] $=-[-(b\cdot a)]$ [۱.۱.۰۵]
$=b.a$ [حم ۱۰] $=ab.$ ▲

بنا بر قسمت اول قضیه‌ی فوق، قرارداد ذیل را میآوریم:

۱.۳.۰۷. قرارداد. $b\ .\ (a-)$ را، که همان (ab) — است، ab — مینامیم.

۱.۳.۰۸. قضیه (قاعده‌ی اسقاط در عمل ضرب). اگر $ac=bc$ و $c\neq 0$ آنگاه $a=b$.

برهان. فرض کنیم $ac=bc$ (۱) و $c\neq 0$ (۲). از (۱) بنا بر ۱.۲.۰۴، $bc-ac=0$، و از آنجا، بنا بر حم ۱۰، $cb-ca=0$. پس، بنا بر ۱.۳.۰۵، $c(b-a)=0$. بالنتیجه، بنا بر (۲) و ۱.۳.۰۳، $b-a=0$. پس، بنا بر ۱.۲.۰۴، $a=b$. ▲

۱.۴. بعضی اعداد خاص. فعلاً دو عدد مشخص متمایز میشناسیم، یکی 0 و دیگری 1. اسامی خاص بعضی از اعداد در تعریفات ذیل آمده است:

۱.۴.۰۱. تعریف.

2 یعنی $1+1$
3 یعنی $2+1$
4 یعنی $3+1$
5 یعنی $4+1$
6 یعنی $5+1$
7 یعنی $6+1$
8 یعنی $7+1$
9 یعنی $8+1$.

۱.۴.۰۲. تعریف. «aa» را «a^2» (مجذور a یا مربع a) و «aaa» را «a^3» (مکعب a) مینامیم.

۱.۴.۰۳. امثله

(آ). («دوتا دوتا چهارتا»). ثابت کنید که $4=2\ .\ 2$.

$$2 \,.\, 2\,[۱.۴.۱] = 2 \,.\, (1+1)\,[\text{حم ۱۱}] = 2 \,.\, 1 + 2 \,.\, 1\,[۱.۳.۲]$$
$$= 2 + 2\,[۱.۴.۱] = 2 + (1+1)\,[\text{حم ۲}]$$
$$= (2+1) + 1\,[۱.۴.۱] = 3 + 1\,[۱.۴.۱] = 4. \blacktriangle$$

(ز). عبارت $a + a$ را مختصر کنید.

$$a + a = a \,.\, 1 + a \,.\, 1\,[\text{حم ۱۱}] = a \,.\, (1+1)\,[۱.۴.۱]$$
$$= a \,.\, 2\,[\text{حم ۱۰}] = 2a.$$

(ح). عبارت $4a - (-2a)$ را مختصر کنید.

$$4a - (-2a)\,[۱.۲.۱] = 4a + [-(-2a)] = 4a + 2a$$
$$= (4+2) \,.\, a = [4 + (1+1)] \,.\, a$$
$$= [(4+1)+1] \,.\, a = (5+1) \,.\, a = 6a.$$

۱.۴.۴. تمرین

غرض از تمرینات آتیه این نیست که محاسبات ساده‌ی جبری را، که مسلماً میدانید، به شما بیاموزیم، بلکه مقصود از آوردن آنها تمرین در استدلال است به مقتضای روش اصل موضوعی، یعنی به‌استناد اصول موضوعه و قضایائی که قبلاً از آنها استخراج شده است. در حل آنها، به هیچوجه نباید از این راه منحرف شوید. در غیر این صورت، جز تضییع وقت حاصلی نخواهید برد.

۱. ثابت کنید که $1 \neq 2$. بطور کلی، ثابت کنید که همواره $a \neq a + 1$.

۲. ثابت کنید که

$3 + 3 = 6.$ $\quad 4 + 5 = 9.$ $\quad 9 - 3 = 6.$ $\quad 6 - 5 = 1.$
$3 - 4 = -1.$ $\quad 2 - 9 = -7.$ $\quad 7 - (9 - 5) = 3.$
$4 + (-5) = -1.$ $\quad 4 - (-5) = 9.$ $\quad (-4) + (-3) = -7.$
$(-4) - (-3) = -1.$ $\quad (-3) - (-4) = 1.$ $\quad (-5) - 2 = -7.$

۳. ثابت کنید که

$2 \,.\, 3 = 6.$ $\quad 2 \,.\, 4 = 8.$ $\quad (-3) \,.\, (-1) = 3.$ $\quad -a = (-1) \,.\, a$

۴. این عبارت را مستدلاً مختصر کنید:

$2a + 3a.$ $\quad 8a - a.$ $\quad 2a - 5a.$ $\quad -3a - (-a).$
$a + a + a.$ $\quad (a + 2b) - (3a - 4b).$

۵. ثابت کنید که

$$(a - b) \,.\, (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc).$$
$$(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2.$$
$$(a + b) \,.\, (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

۱.۵. عکس و خارج قسمت. چنانکه دیدیم، دستگاه $(\mathbf{R} - \{0\}; \times)$ یک گروه آبلی و عضو خنثای آن 1 است. بنا بر این، هر یک از قضایای تئوری گروههای آبلی که سابقاً آموختیم قضیه‌ای از این دستگاه بدست میدهد، که ذیلاً آنها را ذکر میکنیم. در بیان این قضایا

باید توجه داشت که اعضای $\mathbf{R} - \{0\}$، چنانکه قبلاً تذکر دادیم، اعداد حقیقی غیر از 0 هستند، و عبارات $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ و $a \neq 0$ معادل میباشند. اینک بعضی از قضایای مورد نظر.

۱.۵.۱. قضیه و تعریف. بازاء هر عدد a غیر از صفر، یک و تنها یک عدد غیر از صفر هست که حاصلضرب آن در a مساوی 1 است. این عدد را عکس a یا a^{-1} میخوانیم. پس:

$$aa^{-1} = 1 \qquad\qquad (a \neq 0).$$

بر طبق قرارداد کلی، «$(a^{-1})^{-1}$» یعنی عکس a^{-1}، «$(a\,.\,b)^{-1}$» یعنی عکس $a\,.\,b$، و غیره.

۱.۵.۲. قضیه.

I. اگر $a \neq 0$ آنگاه $(a^{-1})^{-1} = a$.

II. اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه اگر $a^{-1} = b^{-1}$ آنگاه $a = b$.

III. $1^{-1} = 1$.

IV. اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه $(a\,.\,b)^{-1} = a^{-1}\,.\,b^{-1}$.

۱.۵.۳. قضیه. بازاء هر دو عدد a و b که $a \neq 0$، معادلهٔ $ax = b$ یک و تنها یک جواب دارد، و آن ba^{-1} است.

برهان. چون $a \neq 0$، a^{-1} «موجود است» (یعنی a عکس دارد). اثبات صدق‌کردن ba^{-1} در معادله بر متعلم است. برای اثبات یکتائی جواب، گوئیم اگر $ax_1 = b$ و $ax_2 = b$ آنگاه $ax_1 = ax_2$، و لهذا، بنا بر قاعدهٔ اسقاط در عمل ضرب، $x_1 = x_2$. ▲

۱.۵.۴. خارج قسمت. تعریف. بازاء دو عدد a و b که $a \neq 0$، عدد ba^{-1} را

$$\frac{b}{a} \qquad \text{یا} \qquad b/a$$

یا خارج قسمت b بر a خوانیم.

عبارت «b/a» را یک کسر، و b را صورت و a را مخرج این کسر نامیم. ملاحظه کنید که عبارت $b/0$ را تعریف نمیکنیم؛ این عبارت بی معنی است.

از تعریف فوق به آسانی نتیجه میشود:

۱.۵.۵. قضیه. اگر $a \neq 0$ آنگاه $a\,.\,(b/a) = b$.

۱.۵.۶. قضیه. اگر $a \neq 0$ و $ax = b$ آنگاه $x = b/a$.

۱.۵.۷. قضیه. یک کسر فقط و فقط وقتی مساوی صفر است که صورتش صفر باشد.

اینک میتوان قواعد محاسبه با کسور را ثابت کرد. اهم این قواعد در دو قضیهٔ ذیل

و در تمرینات 1.5.10 آمده است.

۱.۵.۸. قضیه.

I. $a/1 = a$.

II. اگر $a \neq 0$ آنگاه $1/a = a^{-1}$.

III. اگر $a \neq 0$ آنگاه $a/a = 1$.

اثبات بر متعلم است.

۱.۵.۹. قضیه (قاعده‌ی علامات در تقسیم). اگر $a \neq 0$ آنگاه

$$\text{I.} \qquad \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = \frac{b}{-a}.$$

$$\text{II.} \qquad \frac{-b}{-a} = -\frac{-b}{a} = -\frac{b}{-a} = \frac{b}{a}.$$

برهان. قبلاً ملاحظه میکنیم که، چون $a \neq 0$، طرفین هر یک از تساویها معنی دارد. اینک ثابت میکنیم که $(-b)/a = -(b/a)$. اثبات سایر روابط بر متعلم است.

$$\frac{-b}{a}[۱.۵.۴] = (-b) \,.\, a^{-1}\, [۱.۳.۶ : \mathrm{I}] = -(b \,.\, a^{-1})\, [۱.۵.۴]$$
$$= -(b/a). \blacktriangle$$

۱.۵.10. تمرین (قواعد محاسبه باکسور)

۰۱ تساویهای ذیل را، که مشروط به صفر نبودن مخرجها هستند، ثابت کنید:

(۱) $(ac)/(ab) = c/b.$

(۲) $1/(b/a) = a/b.$

(۳) $(d/a)/(c/b) = (db)/(ac).$

(۴) $(b/a) + (c/a) = (b + c)/a.$

(۵) $(c/a) + (d/b) = (cb+ad)/(ab).$

(۶) $(c/a) - (d/b) = (cb - ad)/(ab).$

۱.۶. نتیجه. آنچه گذشت برای نشان دادن چگونگی استخراج قواعد اعمال از اصول موضوعه کافی است. از این ببعد، چهار عمل اصلی جبر مقدماتی، از جمله جمع جبری، تحویل جمل متشابه، فاکتورگیری، محاسبات با کسور، و حل معادلات درجه‌ی اول معلوم فرض میشود.

۱.۶.۱. تبصره. چنانکه در ۱.۷ : ۴ تذکر دادیم، هر دستگاهی مانند $(\mathbf{R}; +, \times)$ ــ معانی $\mathbf{R}$، $+$، و $\times$ هر چه باشد ــ که مجموعه و اعمالش در حم ۱ــحم ۱۱ صدق کنند یک میدان نامیده می‌شود. چون در استخراج قضایای کلیی که تا کنون در این فصل آموخته‌ایم

جز به اصول موضوعه‌ی مذکور استناد نکرده‌ایم، و بالاخص، معانی $\mathbf{R}$ و $+$ و $\times$ هیچ مداخله‌ای در استدلال نداشته‌اند، قضایای کلّیی که ثابت شد قضایای هر میدان میباشند. به عبارت بهتر، عنوان مطالب گذشته را میتوانستیم تئوری مقدماتی میدان قرار دهیم.

۲ § ترتیب

۲۰۱. کلیات. برطبق اصول موضوعه‌ی حت ۱ــحت ۳، نسبت $<$ (کوچکتری) مجموعه‌ی اعداد حقیقی را مرتب میکند. ما هر جا از مجموعه‌ی مرتب اعداد حقیقی سخن میگوئیم مقصودمان مجموعه‌ی $\mathbf{R}$ با ترتیب $<$ است؛ و نیز، هر جا از ترتیب اعضای مجموعکهای $\mathbf{R}$ سخن میرود مقصود ترتیبی است که $<$ به آنها القا میکند (۳ : ۴۰۳). توجه به این نکات ضروری است. زیرا، چنانکه میدانیم، خواص یک مجموعه‌ی مرتب ناشی از نسبتی است که مجموعه بدان وسیله ترتیب یافته است.

اینک چند نسبت دیگر در $\mathbf{R}$ تعریف میکنیم. این نسبتها عبارتند از $\leqslant$ (نابیشتری)، $>$ (بزرگتری)، و $\geqslant$ (ناکمتری). تعریف این نسبتها به وسیله‌ی گزاره‌نماها خواهد بود:

۲۰۱۰۱. تعریفات.

I. $y \leqslant x$ یعنی $x < y \vee x = y$.

II. $y > x$ یعنی $y < x$.[1]

III. $y \geqslant x$ یعنی $x > y \vee x = y$.

با اندک تأملی معلوم میشود که نسبت $>$ عکس نسبت $<$ است، و نسبت $\geqslant$ عکس نسبت $\leqslant$. قضایای آتیه در باب نسبتهای $<$ و $\leqslant$ خواهند بود، و بیان آنها برحسب $>$ و $\geqslant$ به متعلم محول میشود. ضمناً، بنابر I و III، نسبت $\leqslant$ را نسبت منتها مساوی یا کوچکتر یا مساوی، و نسبت $\geqslant$ را نسبت حد اقل مساوی یا بزرگتر یا مساوی نیز میخوانند.

۲۰۱۰۲. تعریف. هر عبارت را که به یکی از صورتهای $x < y$، $x > y$، $x \leqslant y$، یا $x \geqslant y$ باشد یک نامساوی، و اگر تصریح بیشتر لازم باشد، $x < y$ و $x > y$ را نامساوی اکید خوانیم.

۲۰۱۰۳. تعریف. عدد a را مثبت خوانیم اگر $a > 0$، و آن را منفی نامیم اگر $a < 0$.

بنا بر اصل تثلیث، بازاء عدد دلخواه a، همواره یکی و تنها یکی از روابط $a = 0$، $a < 0$، و $0 < a$ برقرار است. پس،

---

(۱) ملاحظه کنید که «نوک» $<$ و $>$ همیشه به طرف عدد کوچکتر است.

۲.۱.۴. قضیه. هر عدد یا مثبت یا منفی یا صفر است، و جمع آمدن هیچ دو حالت از این حالات ممکن نیست. بالاخص، 0 نه مثبت است و نه منفی.

۲.۱.۵. تعریف. بنا بر تعریف،

$$\mathbf{R}^- = \{x \mid x < 0\}. \qquad \mathbf{R}^+ = \{x \mid 0 < x\},$$

۲.۲. بعضی خواص عمومی. خواصی که ذیلاً میآیند ناشی از خواص نسبتهای ترتیبی و تعریفات سابق‌الذکر هستند. احکام مندرج در قضیه‌ی ذیل را قبلا در ۱۱ : ۴۰۷ : ۱ دیده‌اید:

۲.۲.۱. قضیه.

I. $<$ نامنعکس است، یعنی همواره $\sim(a < a)$.

II. $<$ نامتقارن است، یعنی اگر $a < b$ آنگاه $\sim(b < a)$.

III. اگر $a < b$ آنگاه $a \neq b$.

IV. اگر $a \neq b$ آنگاه $a < b$ یا $b < a$.

V. بازاء هر دو عدد a و b، یا $b \leqslant a$ یا $a < b$. بالنتیجه، $b \leqslant a$ معادل $\sim(b < a)$ است، و $b < a$ معادل $\sim(a \leqslant b)$.

VI. اگر $a < b$ آنگاه $a \leqslant b \;\&\; a \neq b$، و بالعکس.

بنا بر قسمت V، اگر $0 \leqslant a$ آنگاه a منفی نیست، و اگر $a \leqslant 0$ آنگاه a مثبت نیست. پس، تعریف ذیل را میآوریم:

۲.۲.۲. تعریف. اگر $0 \leqslant a$ گوئیم a نامنفی است؛ و اگر $a \leqslant 0$ گوئیم a نامثبت است.

۲.۲.۳. قضیه.

I. اگر $a \leqslant b$ و $b < c$ آنگاه $a < c$.

II. اگر $a < b$ و $b \leqslant c$ آنگاه $a < c$.

برهان. I را ثابت و اثبات II را به متعلم محول میکنیم. فرض کنیم $a \leqslant b$ (۱) و $b < c$ (۲). بنا بر (۱)، $a < b$ یا $a = b$. پس، دو حالت تشخیص میدهیم. حالت اول: $a < b$ (۳). از (۳) و (۲)، بنا بر تعدی $<$ (حت ۴)، نتیجه میشود، $a < c$. حالت دوم: $a = b$ (۴). از (۲) و (۴) بنا بر اصل تعویض‌پذیری مقادیر مساوی نتیجه میشود، $a < c$. پس، در هر حالت، $a < c$. ▲

۲.۲.۴. تبصره. در اثبات قضیه‌ی فوق، $a < c$ را از مقدمات $a \leqslant b$ (۱) و

$b < c$ (۲)، که اولی ترکیبی فصلی است $(a < b \vee a = b)$، استخراج کردیم. «حالاتی» که تشخیص دادیم هر یک نظیر یک مؤلفه‌ی مقدمه‌ی فصلی مذکور است. این طریقه اغلب در استنتاج از مقدمه‌ای که به صورت ترکیب فصلی است بکار میرود: هر یک از مؤلفه‌های این ترکیب مطابق یک «حالت» است، و اگر از هریک از این مؤلفه‌ها نتیجه‌ی مطلوب استخراج شود معلوم میگردد که حکم در «جمیع حالات» برقرار است. این طریقه‌ی استدلالی را طریقه‌ی حالات نامند، و نمونه‌ی دیگر آن را در آ: ۳.۲.۰۷ : ۲ در اثبات توزیعپذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ دیدیم.

طریقه‌ی حالات در ریاضیات موارد استعمال فراوان دارد. در موارد بسیار، برای اثبات یک حکم، جمیع حالات ممکنه را تشخیص میدهند، و در هریک از این حالات حکم را ثابت میکنند، و با این کار، برهان را تمام میشمارند. مثلاً در هندسه‌ی مقدماتی، برای اثبات اینکه مقیاس زاویه‌ی محاطی نصف قوس مقابل آنست، برحسب اینکه مرکز دایره بر یکی از اضلاع یا در داخل زاویه یا در خارج آن باشد، سه حالت تشخیص میدهند، ودر هر یک از این حالات ثابت میکنند که مقیاس زاویه‌ی مورد بحث نصف قوس مقابل آنست. چون سه حالت مذکور شامل جمیع حالات ممکنه است، حکم ثابت خواهد بود.

بالاخره، اگر، مثلاً، دو مقدمه‌ی فصلی در کار باشند میتوان مؤلفه‌های آنها را دو بدو گرفت، و چهار حالت تشخیص داد. مثلاً، اگر بخواهیم صرفاً به استناد حت ۲ ثابت کنیم که

اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ آنگاه $a \leqslant c$

گوئیم مقدمه‌ی اول به معنی «$a = b$ یا $a < b$» است، و مقدمه‌ی دوم به معنی «$b = c$ یا $b < c$». پس، چهار حالت ذیل را تشخیص میدهیم.

$$\begin{cases} a = b \\ b = c. \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b \\ b < c \end{cases} \qquad \begin{cases} a < b \\ b = c \end{cases} \qquad \begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases}$$

در سه حالت اول $a < c$ و در حالت چهارم $a = c$ نتیجه میشود. پس، در هر حال، به ادخال فاصل، $a \leqslant c$.

۲.۲.۵. قضیه. نسبت $\leqslant$ منعکس، متعدی، قناس، و مرتبط است، یعنی، همواره

I. $a \leqslant a$؛

II. اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ آنگاه $a \leqslant c$؛

III. اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ آنگاه $a = b$؛

IV. $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$.

برهان. قسمتهای I و IV در ضمن ۱۱ : ۴۰۷ : ۱ و اثبات II فوقاً گذشت. بعلاوه، برای اثبات II، با توجه به ۲.۲.۳، میتوان با تشخیص دادن دو حالت برهان را تمام کرد. بالاخره، برای اثبات III، به برهان خلف استدلال میکنیم. فرض کنیم $a \leqslant b$ (۱) و $b \leqslant a$ (۲)، ولی $a \neq b$ (۳). از (۱) و (۳) بنا بر قسمت VI قضیه‌ی ۲.۲.۱، $a < b$، و از این و (۲) بنا بر قسمت II قضیه‌ی ۲.۲.۳، $a < a$، و این با I : ۲.۲.۱ متناقض است. ▲

۲.۲.۶. تعریف. بنا بر تعدیِ $>$ و $\leqslant$ و قضیه‌ی ۲.۲.۳، این قراردادها را برای اختصار در تحریر میآوریم:

$a < b < c$ بجای $a < b \,\&\, b < c$

$a \leqslant b \leqslant c$ بجای $a \leqslant b \,\&\, b \leqslant c$

$a \leqslant b < c$ بجای $a \leqslant b \,\&\, b < c$

$a < b \leqslant c$ بجای $a < b \,\&\, b \leqslant c$

تعمیم در مورد عده‌ی معینی از نامساویها و تساویها آسان است. مثلاً، $a < b < c = d$ بدین معنی است:

$$a < b \,\&\, b \leqslant c \,\&\, c = d.$$

نسبتهای $<$ و $\leqslant$ نیز متعدی هستند، و قراردادهای مشابه در مورد آنها هست، چنانکه بر متأمل معلوم است.

۲.۳. نامساویها و جمع و تفریق.

در این قسمت، «عمل» با نامساویها، یعنی تصرفات در آنها را، آغاز میکنیم. این تصرفات در یک یا چند نامساوی نامساوی دیگری بدست میدهند. وقتی گفته میشود که در یک یا چند نامساوی مفروض میتوان[1] فلان تصرفات را بعمل آورد مقصود اینست که اگر نامساوی یا نامساویهای مفروض راست باشند نامساوی حاصل از تصرفات مذکور نیز راست است. مثلاً، بنا بر حت ۴، «میتوان» بر طرفین نامساوی $a < b$ یک عدد افزود.

۲.۳.۱. قضیه (اسقاط «جمل مساوی و متحدالعلامه» از طرفین نامساوی).

I. $\quad a < b \Leftrightarrow a + c < b + c.$

II. $\quad a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c.$

برهان. نیمی از I همان حت ۴ است. حال فرض کنیم $a + c < b + c$. بنا بر حت ۴، $(a + c) + (-c) < (b + c) + (-c)$؛ و از آنجا $a < b$.

برای اثبات II، گوئیم اگر $a \leqslant b$ آنگاه $a < b$ یا $a = b$. پس، $a + c < b + c$ یا $a + c = b + c$. بالنتیجه، بنا بر تعریف $\leqslant$، $a + c \leqslant b + c$. بالعکس، اگر $a + c \leqslant b + c$، بنا بر نیمی از II که ثابت شد،

$$a + c + (-c) \leqslant (b + c) + (-c),$$

و از آنجا $a \leqslant b$. ▲

۲.۳.۲. قضیه.

I. نامساویهای ذیل دو بدو معادل یکدیگرند:

$$x < y; \qquad x - y < 0; \qquad -y < -x; \qquad 0 < y - x.$$

---

(۱) ذیل ۲ صفحه‌ی ۳۴ ملاحظه شود.

II. نامساویهای ذیل دو بدو معادل یکدیگرند:
$$x \leqslant y; \qquad x - y \leqslant 0; \qquad -y \leqslant -x; \qquad 0 \leqslant y - x.$$
اثبات قسمت I در ۱:۴.۳.۲.۱ گذشت. اثبات قسمت II بر متعلم است.

۲.۳.۳. قضیه (جمع نامساویهای همجهت، «عضو بعضو»).
I. اگر $a < b$ و $c < d$ آنگاه $a + c < b + d$؛
II. اگر $a \leqslant b$ و $c < d$ آنگاه $a + c < b + d$؛
III. اگر $a \leqslant b$ و $c \leqslant d$ آنگاه $a + c \leqslant b + d$.

برهان. مثلاً، برای اثبات I، فرض کنیم $a < b$ و $c < d$. از این دو، بنا بر حت ۴، نتیجه میشود، $a + c < b + c$ و $b + c < b + d$. پس، بنا بر تعدی $<$، $a + c < b + d$. ▲

اثبات دو قضیه‌ی ذیل بر متعلم است:

۲.۳.۴. قضیه. اگر a مثبت (منفی) باشد a — منفی (مثبت) است.

۲.۳.۵. قضیه. حاصلجمع دو عدد مثبت (منفی) مثبت (منفی) است.

۲.۳.۶. تبصره. نامساویهای «همجهت» را **نمیتوان** عضو بعضو از هم تفریق کرد: **چنین نیست که** همواره اگر $a < b$ و $c < d$ آنگاه $a - c < b - d$.

۲.۳.۷. تبصره. در III : ۲.۳.۳ دیدیم که اگر $a \leqslant b$ (۱) و $c \leqslant d$ (۲) آنگاه $a + c \leqslant b + d$ (۳). اینک این سؤال پیش میآید که، با مفروضات (۱) و (۲)، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در (۳) ــ یعنی، برای اینکه (۳) به صورت $a + c = b + d$ (۴) درآید ــ چیست.

واضح است که اگر $a = b$ (۵) و $c = d$ (۶) آنگاه در (۳) تساوی برقرار است. پس، شرایط (۵) و (۶) برای برقراری تساوی در (۳) کافی هستند. اینک ثابت میکنیم که، با مفروضات (۱) و (۲)، اگر در (۳) تساوی برقرار باشد، ناچار (۵) و (۶) برقرارند. اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم (۴) برقرار باشد، ولی حد اقل یکی از (۵) و (۶) برقرار نباشد. اگر (۵) برقرار نباشد خواهیم داشت، $a \neq b$، و لهذا، بنا بر (۱)، $a < b$ (۷). از (۷) و (۲) بنا بر II : ۲.۳.۳ نتیجه میشود، $a + c < b + d$. پس، بنا بر III : ۲.۲.۱، $a + c \neq b + d$، و این با (۴) متناقض است. به همین قیاس معلوم میشود که فرض $c \neq d$ منجر به تناقض میگردد. ▲

اینک حکم III : ۲.۳.۳ را میتوان به صورت کاملتر ذیل بیان کرد:

> اگر $a \leqslant b$ و $c \leqslant d$ آنگاه $a + c \leqslant b + d$، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در رابطه‌ی اخیر آنست که $a = b$ و $c = d$.

مسئله‌ی تعیین شرایط برقراری تساوی در یک نامساوی (یعنی شرایط تساوی طرفین آن) حائز اهمیت فراوان است، و گذشته از موارد ساده (مانند مثال فوق) حل آن به آسانی صورتپذیر نیست. محصلین باید به این مسئله ــ که در امثله و تمرینات آتیه نمونه‌های دیگر آن خواهد آمد ــ توجه خاص مبذول دارند.

۲.۳.۰۸ تمرین

۰۱ اگر a مثبت باشد $x < x + a$ و بالعکس. اگر a منفی باشد $x + a < x$ و بالعکس.

۰۲ همواره $a - y < a - x \iff x < y$.

۰۳ اگر $a < b < c$ آنگاه $0 < b - a < c - a$ و بالعکس.

۰۴ ثابت کنید که اگر $a < b$، $a' < b'$، و $a'' < b''$ آنگاه

$$a + a' + a'' < b + b' + b''.$$

سپس، حکم را در صورتی که در بعضی از نامساویهای مفروض، به اقسام ممکنه، $<$ را به $\leqslant$ تبدیل کنیم بیان و ثابت کنید.

۰۵ اگر $x + x + x = 0$ آنگاه $x = 0$.

۰۶ اگر $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ آنگاه $a_1 \leqslant a_3$، و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که $a_1 = a_2 = a_3$.

۰۷ اگر $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$، آنگاه $a_1 \leqslant a_4$، و در رابطه‌ی اخیر تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

۰۸ اگر $a_1 \leqslant b_1$، $a_2 \leqslant b_2$، و $a_3 \leqslant b_3$ آنگاه

$$a_1 + a_2 + a_3 \leqslant b_1 + b_2 + b_3,$$

و در این رابطه تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a_1 = b_1$، $a_2 = b_2$، و $a_3 = b_3$.

۰۹ اگر $a \leqslant b$ و $c \leqslant d$ آنگاه $a - d \leqslant b - c$، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در رابطه‌ی اخیر آنست که $a = b$ و $c = d$.

۲.۴. نامساویها و ضرب و تقسیم. بنا بر حت ۵، طرفین یک نامساوی را میتوان در یک عدد مثبت ضرب کرد. ذیلاً اهم نتایج این اصل موضوع را میآوریم.

۲.۴.۱. قضیه. اگر a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند ab مثبت است، و اگر یکی از آنها مثبت و دیگری منفی باشد ab منفی است.

برهان. حالت اول: $0 < a$ و $0 < b$. بنا بر حت ۵، $0 . b < a . b$، و یا $0 < ab$.
حالت دوم: $a < 0$ و $b < 0$. پس، $0 < -a$ و $0 < -b$. بالنتیجه، بنا بر حالت اول، $0 < (-a) \cdot (-b)$. پس، $0 < ab$. حالت سوم: یکی از a و b منفی و دیگری مثبت است. بی آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود میتوان فرض کرد $0 < a$ و $b < 0$. از دومی نتیجه میشود، $0 < -b$. پس، بنا بر حالت اول، $0 < a \cdot (-b) = -ab$، و بالنتیجه، $ab < 0$. ▲

اثبات سه قضیه ذیل به متعلم محول میشود.

۲.۴.۲. قضیه. مربع هر عدد غیر از صفر مثبت است.

۲.۴.۳. قضیه. $0 < 1$.

۲.۴.۴. قضیه. اگر a مثبت (منفی) باشد a^{-1} نیز مثبت (منفی) است.
(ملاحظه کنید که $a \,.\, a^{-1} = 1$.)

۲.۴.۵. قضیه. اگر $0 < a < b$ آنگاه $0 < b^{-1} < a^{-1}$، و بالعکس.
برهان. فرض کنیم $0 < a$ و $a < b$. پس، $0 < b$، و بنا بر ۲.۴.۴، $0 < a^{-1}$ و $0 < b^{-1}$، و بالنتیجه، $0 < a^{-1}\, b^{-1}$. از این و $a < b$ بنا بر ح‌ت ۵، $a \,.\, (a^{-1}\, b^{-1}) < b \,.\, (a^{-1}\, b^{-1})$، و از آنجا، $b^{-1} < a^{-1}$. بالعکس، اگر $0 < b^{-1} < a^{-1}$ آنگاه، بنا بر قسمت اول قضیه، $0 < (a^{-1})^{-1} < (b^{-1})^{-1}$، و از آنجا $0 < a < b$. ▲

۲.۴.۶. قضیه. اگر a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند b/a مثبت است، و اگر یکی از آنها مثبت و دیگری منفی باشد b/a منفی است. (چرا؟)

۲.۴.۷. قضیه (ضرب یا تقسیم طرفین نامساوی در یا بر یک عدد).
I. اگر $0 < c$ آنگاه نامساویهای

(۱) $a < b,$ (۲) $ac < bc,$ (۳) $a/c < b/c$

دو بدو با هم، و نامساویهای

(۴) $a \leqslant b,$ (۵) $ac \leqslant bc,$ (۶) $a/c \leqslant b/c$

دو بدو با هم معادلند.
II. اگر $c < 0$ آنگاه نامساویهای

$a < b,$ $bc < ac,$ $b/c < a/c$

دو بدو با هم، و نامساویهای

$a \leqslant b,$ $bc \leqslant ac,$ $b/c \leqslant a/c$

دو بدو با هم معادلند.
برهان. اولاً فرض کنیم $0 < c$. از (۱)، بنا بر ح‌ت ۵، (۲) نتیجه میشود. بالعکس، اگر (۲) مفروض باشد، از ضرب طرفین آن در c^{-1} (که چون $0 < c$، بنا بر ۲.۴.۴ مثبت است) نتیجه میشود $a < b$. همچنین، اگر (۱) مفروض باشد از ضرب طرفین آن در c^{-1} نامساوی (۳) نتیجه میشود، و اگر (۳) مفروض باشد از ضرب طرفینش در c نامساوی (۱) حاصل میگردد. اثبات معادل بودن (۴) و (۵) و (۶) به طریقه‌ی حالات و به وسیله‌ی قسمتی است که ثابت شد.
ثانیاً، فرض کنیم $c < 0$، و لهذا $-c > 0$. بنا بر آنچه ثابت شد، نامساوی

$a < c$ معادل نامساوی $a\,.\,(-c) < b\,.\,(-c)$ است، که خود معادل نامساوی $-(bc) < -(ac)$ میباشد، و این، بنا بر ۲.۳.۰۲، معادل نامساوی $bc < ac$ است. اتمام بر متعلم است. ▲

۲.۴.۸. قضیه. (ضرب نامساویها عضو بعضو).

I. اگر $a < b$، $c < d$، $0 < b$، و $0 < c$ آنگاه $ac < bd$.

II. اگر $0 \leqslant a < b$ و $0 < c \leqslant d$ آنگاه $ac < bd$.

برهان. قسمت اول را ثابت میکنیم. بنا بر مفروضات و حتـ ۵، $ac < bc$ و $bc < bd$، و بالنتیجه، $ac < bd$. ▲

اثبات قضیه‌ی ذیل بر متعلم است.

۲.۴.۹. قضیه.

I. اگر $0 < bd$ آنگاه $ad < bc$ $\Leftrightarrow$ $a/b < c/d$.

II اگر $0 < b$ آنگاه $a < bc$ $\Leftrightarrow$ $a/b < c$.

III. اگر $0 < d$ آنگاه $ad < c$ $\Leftrightarrow$ $a < c/d$.

۲.۴.۱۰. تعریف. اگر a و b دو عدد متمایز باشند، عدد c را واقع بین a و b خوانند در صورتی که $a < c < b$ یا $b < c < a$. اگر حد اقل یکی از دو نامساوی مبیّن بینیّت غیر اکید باشد (مانند آنکه $a \leqslant c < b$ یا $b \leqslant c \leqslant a$) گوئیم c به معنی وسیع بین a و b است.

چون $2 \neq 0$ (بچه دلیل؟)، تعریف ذیل معنی دارد:

۲.۴.۱۱. تعریف. عدد $(a+b)/2$ را نصف مجموع a و b نامند.

۲.۴.۱۲. قضیه. نصف مجموع دو عدد متمایز بین آنها واقعست.

برهان. فرض کنیم a و b دو عدد دلخواه باشند، و $a \neq b$. بنا بر اصل تثلیث، $a < b$ یا $b < a$. بی آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود، میتوان فرض کرد که $a < b$. از آنجا، $a+a < a+b$ و $a+b < b+b$، و یا $2a < a+b$ و $a+b < 2b$. پس، بنا بر قضیه‌ی ۲.۴.۹، $a < (a+b)/2$ و $(a+b)/2 < b$. ▲

۲.۴.۱۳. امثله و فواید

(آ). همواره $0 \leqslant a^2$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a = 0$. (چرا؟)

(ب). بازاء هر دو عدد a و b، $2ab \leqslant a^2 + b^2$، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $a = b$.

نامساوی مذکور معادل نامساوی $(a^2 + b^2) - 2ab \geqslant 0$ است (چرا؟)، که خود معادل نامساوی $(a - b)^2 \geqslant 0$ میباشد، و این، بنا بر مثال (آ)، همیشه برقرار است، و بعلاوه، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آن اینست که $a - b = 0$، و این معادل $a = b$ میباشد. ▲

(پ). ثابت کنید که بازاء هر دو عدد a و b که هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \qquad (*)$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی را تعیین کنید.

بنا بر مفروضات، $ab > 0$. پس، با توجه به ۲.۱.۱ و ۲.۴.۷، (*) معادل است با نامساوی

$$ab\,(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geqslant 2ab,$$

که، بنا بر قواعد محاسبه با کسور ، معادل است با

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$

که، بنا بر تعریف $\geqslant$، معادل است با

$$2ab \leqslant a^2 + b^2, \qquad (\dagger)$$

و این، بنا بر مثال (ب) همیشه برقرار است. پس، (*) همیشه برقرار میباشد. ضمناً، به سبب معادل بودن (*) و (†)، و با توجه به مثال (ب)، تساوی فقط و فقط وقتی در (*) برقرار است که $a = b$.

(ت). ثابت کنید که اگر حاصلضرب دو عدد مثبت مساوی 1 باشد حاصلجمعشان کمتر از 2 نتواند بود.

فرض کنیم $xy = 1$، و بالنتیجه، $y = 1/x$. بر طبق مثال قبل، $x/1 + 1/x \geqslant 2$، و یا $x + y \geqslant 2$. ▲

۲.۴.۱۴. تمرین

۱. اعداد 0، 1، ...، 9 را دو بدو مستدلاً با هم مقایسه کنید.

۲. در هر یک از ازواج دو عدد که ذیلاً میآید اقسام نامساویهای ممکنه بین اعداد هر زوج را بنویسید:

(آ) $2, 3.$	(ب) $-1, 2.$	(پ) $-2, -3.$
(ت) $0, -1.$	(ث) $-2, -2.$	(ج) $0, 0.$

۳. اگر $a < b$ و $c < d$ و حد اقل سه عدد از اعداد a، b، c، و d مثبت باشد آنگاه $ac < bd$.

۴. در مسئلهی قبل، ثابت کنید که اگر $a < b$ و $c < d$ ولی کمتر از سه عدد از اعداد a، b، c، و d مثبت باشد ممکن است نامساوی $ac < bd$ برقرار نباشد.

۵. اگر $a \leqslant b$، $a' \leqslant b'$، $c > 0$، و $c' > 0$ آنگاه

$$ac + a'c' \leqslant bc + b'c',$$

و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که $a = b$ و $a' = b'$.

۶. مسئلهی ۳ را در مورد سه نامساوی و سه عدد مثبت بیان و ثابت کنید.

۷. اگر $0 < a \leqslant b$ و $0 < a' \leqslant b'$ آنگاه $0 < aa' \leqslant bb'$، و شرط لازم و کافی برای آنکه $aa' = bb'$ آنست که $a = b$ و $a' = b'$.

۸. نظیر مسئله‌ی قبل را در مورد سه دسته نامساوی بیان و ثابت کنید.
۹. اگر $a \geqslant b > 0$ و $c \geqslant d > 0$ آنگاه $a/d \geqslant b/c$، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $a = b$ و $c = d$.
۱۰. همواره $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 0$، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $a = b = c = 0$.
۱۱. همواره اگر $0 < a < b$ آنگاه $0 < a^2 < b^2$. آیا عکس این حکم برقرار است؟
۱۲. همواره

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leqslant (ac - bd)^2,$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $ad = bc$.
۱۳. همواره $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 4ab(a - b)^2$. شرط لازم و کافی برای برقرازی تساوی چیست؟
۱۴. همواره $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x = y = 0$.
۱۵. (حالات خاص نامساوی کوشی*). ثابت کنید که همواره

(آ) $$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2)^2;$$

(ب) $$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2;$$

و در هر مورد شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی را تعیین کنید.
۱۶. ثابت کنید که نامساویهای ذیل همیشه برقرارند، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی را در هر یک معین کنید:

(آ) $$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geqslant 0;$$

(ب) $$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx;$$

(پ) $$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geqslant xyz\,(x + y + z).$$

۱۷. بازاء هر سه عدد نامنفی x، y، و z،

$$x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geqslant 6xyz.$$

۱۸. همواره $a^3 < b^3 \iff a < b$.
۱۹. اگر $1 + h > 0$ آنگاه $(1 + h)^3 \geqslant 1 + 3h$، و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $h = 0$.
۲۰. اگر $a^2 > b^2$ و $ab > 0$ آنگاه یا $a > b > 0$ یا $a < b < 0$.
۲۱. اگر $a < b < c$ آنگاه $(a + b)/2 < (a + b + c)/3$.
۲۲. اگر $a/b \leqslant c/d$ آنگاه $(a + b)/b \leqslant (c + d)/d$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $ad = bc$.
۲۳. اگر $a/b \leqslant c/d$، و a، b، c، و d مثبت باشند آنگاه $a/(a + b) \leqslant c/(c + d)$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $ad = bc$.
۲۴. اگر $b > 0$، $d > 0$، و $a/b < c/d$ آنگاه

$$a/b < (a + c)/(b + d) < c/d.$$

۲۵. اگر $b > 0$، $d > 0$، و $a/b \leqslant c/d$ آنگاه

$$a/b \leqslant (a + c)/(b + d) \leqslant c/d,$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $ad = bc$.
۲۶. اگر $a \neq b$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه x بین a و b باشد آنست که $(x - a)(x - b) < 0$.

۲۷. اگر a عددی بزرگتر از 1 باشد بین 1 و a عددی هست که مربعش از a کوچکتر است. (راهنمائی: $2a/(1+a)$ را امتحان کنید.)

۲.۵. چند قضیه‌ی عمومی. در آنالیز بسیار پیش می‌آید که اثبات مستقیم حکمی به صورت $a \leqslant b$ دشوار است، اما، مثلاً، نسبةً به آسانی میتوان ثابت کرد که هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر است. چنانکه خواهیم دید، از اینجا لازم میآید که $a \leqslant b$. ذیلاً قضایای چندی در این زمینه میآوریم. این قضایا در فصل حاضر مورد حاجت نیستند، وآموختن آنها را میتوان به هنگام نیاز محول کرد.

۲.۵.۱. قضیه. اگر دو عدد a و b چنان باشند که هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر باشد آنگاه $a \leqslant b$. به عبارت دیگر، اگر

بازاء هر x، اگر $b < x$ آنگاه $a \leqslant x$

آنگاه $a \leqslant b$.

برهان. فرض کنیم هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر باشد، ولی $\sim (a \leqslant b)$ (فرض خلف). از فرض خلف نتیجه میشود، $b < a$، و لهذا $0 < \frac{a-b}{2}$. پس، عدد $b + \frac{a-b}{2}$ از b بزرگتر است. بالنتیجه، بنا بر فرض قضیه،

$$a \leqslant b + \frac{a-b}{2},$$

و از آنجا، $a \leqslant b$، و این با فرض خلف متناقض است. ▲

چون شرط لازم و کافی برای آنکه عدد x بزرگتر از b باشد آنست که عددی مثبت مانند h باشد که $x = b + h$، قضیه‌ی فوق را بدین صورت نیز میتوان بیان کرد:

۲.۵.۲. قضیه. اگر، بازاء هر عدد مثبت h، $a \leqslant b + h$ آنگاه $a \leqslant b$.
(بر متعلم است که این قضیه را مستقیماً، به قیاس آنچه در برهان قضیه‌ی قبل گذشت، ثابت کند.)

اثبات دو قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود.

۲.۵.۳. قضیه. اگر دو عدد a و b چنان باشند که هر عدد کوچکتر از a از b نابیشتر باشد آنگاه $a \leqslant b$.

۲.۵.۴. قضیه. اگر $0 \leqslant a$ و، بازاء هر عدد مثبت مانند h، $a \leqslant h$ آنگاه $a = 0$.

۲.۶. عضو مینیموم و عضو ماکزیموم. در مجموعه‌ی $A = \{3, -2, 1\}$،

$$-2 \in A, \qquad -2 \leqslant 3, \qquad -2 \leqslant -2, \qquad -2 \leqslant 1;$$
$$3 \in A, \qquad 3 \leqslant 3, \qquad -2 \leqslant 3, \qquad 1 \leqslant 3.$$

به عبارت دیگر، -2 عضو A و از هر عضو آن نابیشتر است، و 3 عضو A و از هر عضو A ناکمتر است. بدین مناسبت، -2 را عضو مینیموم A (یا ابتدای A یا عضو اقل A)، و 3 را عضو ماکزیموم A (یا انتهای A یا عضو اکثر A) نامیم. بطور کلی،

۲.۶.۱. تعریفات. فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد باشد.

I. اگر A عضوی مانند a داشته باشد که از هر عضو A نابیشتر باشد (یعنی، بازاء هر x از A، $a \leqslant x$) a را عضو مینیموم A یا $\min A$ یا ابتدای A یا عضو اقل A نامیم.

II. اگر A عضوی مانند b داشته باشد که هر عضو A نابیشتر از آن باشد (یعنی، بازاء هر x از A، $x \leqslant b$) b را ماکزیموم A یا $\operatorname{Max} A$ یا انتهای A یا عضو اکثر A نامیم.

III. عبارت «$\min A$ ($\operatorname{Max} A$) موجود است» یعنی A عضو مینیموم (ماکزیموم) دارد، و قس علیهذا در موارد دیگر.

در مثال سابق، $\min A = -2$ و $\operatorname{Max} A = 3$.

۲.۶.۲. قضیه. ابتدای (انتهای) مجموعه‌ای از اعداد، در صورت وجود، منحصر بفرد است.

برهان (در مورد ابتدا). اگر a و a' ابتدای مجموعه‌ی A باشند، بنا بر تعریف، از طرفی $a \leqslant a'$ و از طرف دیگر $a' \leqslant a$. پس بنا بر قناسیِ $\leqslant$، $a = a'$. ▲

۲.۶.۳. قضیه. اگر $\operatorname{Max} A$ و $\min A$ موجود باشند آنگاه $\min A \leqslant \operatorname{Max} A$. (چرا؟)

۲.۶.۴ امثله

(آ). چون همواره $a \leqslant a$، مجموعه‌ی یکانی $\{a\}$ عضو اقل و عضو اکثر دارد، و $\min \{a\} = \operatorname{Max} \{a\} = a$.

(ب). مجموعه‌ی $A = \{a, b\}$ عضو اکثر و عضو اقل دارد، زیرا بنا بر اصل تثلیث، $a = b$، $a < b$، یا $b < a$. در حالت اول، بنا بر (آ)، $\min A = \operatorname{Max} A = a$. در حالت دوم، از طرفی $a \leqslant a$ و $b \leqslant a$، و از طرف دیگر، $a \leqslant b$ و $b \leqslant b$. پس، $\min A = a$، و $\operatorname{Max} A = b$. و قس علیهذا در حالت سوم. ▲

۲.۶.۵. قضیه. $\mathbf{R}$ بی ابتدا و بی انتها است.

برهان (خلف در مورد انتها). اگر a انتهای $\mathbf{R}$ باشد، چون $a + 1$ عددی حقیقی است، $a + 1 \leqslant a$ (۱). اما $a < a + 1$ (۲). از (۱) و (۲) نتیجه میشود $a < a$، و این ممکن نیست. ▲

۲.۶.۶. تبصره. استعمال صفات عالی در ریاضیات در مواردی هم که مقایسه مورد ندارد معمول است. مثلاً، بطور کلی، میگویند ابتدای مجموعه‌ای از اعداد کوچکترین عضو آنست، و انتهای مجموعه‌ای از اعداد بزرگترین عضو آنست، اگر چه در مورد مجموعه‌ی

$\{a\}$، که بیش از یک عضو ندارد، استعمال «بزرگترین عضو» و «کوچکترین عضو» برخلاف قیاس است.

۲.۶.۷. تمرین

۱. مطلوبست محاسبه‌ی

(آ) $\min\{3, 7, 0, -2\}$.

(ب) $\operatorname{Max}\{4, 4\}$.

(پ) $\operatorname{Max}\{-3, -1\}$.

(ت) $\min\{-7, -4, -1\}$.

(ث) $\dfrac{\operatorname{Max}\{4, -3\} . \operatorname{Max}\{0, 5\} + \operatorname{Max}\{-4, 4\} - \operatorname{Max}\{-9, -8\}}{2 \operatorname{Max}\{1, 4\}}$.

(ج) $\operatorname{Max}\{-1, -2\} . \min\{-1, -2, 0\} - \min\{1, 2\} . \min\{1, 2, 0\}$.

۲. همواره[1]

$$\min\{a, b\} \leqslant \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \leqslant \operatorname{Max}\{a, b\}.$$

۳. اگر $\min\{a, b\} = \operatorname{Max}\{a, b\}$ آنگاه $a = b$.

۴. ثابت کنید که $b = \operatorname{Max}\{a, b\} \iff a \leqslant b$، و نظیر این حکم را در مورد عضو مینیموم بیان و ثابت کنید.

۵. همواره

$$\operatorname{Max}\{a, b\} = -\min\{-a, -b\}. \qquad \min\{a, b\} = -\operatorname{Max}\{-a, -b\}.$$

۶. اگر a مثبت باشد

$$\min\{a, 0\} = 0; \qquad \operatorname{Max}\{a, 0\} = a,$$

و اگر a منفی باشد

$$\min\{a, 0\} = a. \qquad \operatorname{Max}\{a, 0\} = 0,$$

۷. ثابت کنید که مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ عضو ماکزیموم و عضو مینموم دارد، و

$$\min\{a, b, c\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}.$$
$$\operatorname{Max}\{a, b, c\} = \operatorname{Max}\{\operatorname{Max}\{a, b\}, c\}.$$

۸. احکام ذیل را ثابت کنید، و برای هر یک مثال عددی بیاورید:

(آ) $\min\{a, b, c\} \leqslant \min\{b, c\}$.

(ب) $\operatorname{Max}\{a, b, c\} \geqslant \operatorname{Max}\{b, c\}$.

(پ) $\min\{-a, -b, -c\} = -\operatorname{Max}\{a, b, c\}$.

(ت) $\operatorname{Max}\{-a, -b, -c\} = -\min\{a, b, c\}$.

۹. ثابت کنید که مجموعه‌ی $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ نه ابتدا دارد و نه انتها.

۱۰. در وجود ابتدا و انتهای مجموعه‌های ذیل تحقیق کنید:

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}. \qquad \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}, \qquad \{x \mid 0 \leqslant x < 1\},$$

۱۱. ثابت کنید که $\mathbf{R}^- \cup \{0\}$ ابتدا ندارد ولی انتها دارد، و $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ ابتدا دارد اما بی انتهاست.

---

(۱) رابطه‌ای که میآید صورت مختصر این دو رابطه است:

$$\begin{cases} \min\{a, b\} \leqslant a \leqslant \operatorname{Max}\{a, b\}, \\ \min\{a, b\} \leqslant b \leqslant \operatorname{Max}\{a, b\}. \end{cases}$$

۳ § قدر مطلق

۳.۱. تابع قدر مطلق. اینک میپردازیم به تعریف و استخراج خواص تابع بسیار مهمی بر $\mathbf{R}$، که تابع قدر مطلق یا «$|\ |$» نام دارد، و مقدار آن در a قدر مطلق a یا

$$|a|$$

خوانده میشود. تعریف تابع چنین است:

۳.۱.۱. تعریف. تابع «$|\ |$» تابعی است بر $\mathbf{R}$ با ضابطه‌ی

$$|a| = \begin{cases} a & (0 \leqslant a), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

مثلاً، $|2| = 2$، $|0| = 0$، $|-3| = -(-3) = 3$.

چون تابع قدر مطلق با ضابطه‌ای مرکب تعریف شده است، در اثبات احکام مربوط به قدر مطلق اغلب باید به طریقه‌ی حالات استدلال کرد. تفصیل استدلالی از این قبیل در اثبات قضیه‌ی ۳.۱.۴ آمده است.

۳.۱.۲. قضیه.

I. همواره $0 \leqslant |a|$.

II. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

III. $|a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ و $|a| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

IV. $|a| = |-a|$.

V. $(|a|)^2 = |a| . |a| = a^2 = (-a)^2$.

VI. اگر $|a| = |b|$ آنگاه $a = b \vee a = -b$، و بالعکس.

این احکام نتیجه‌ی مستقیم تعریف هستند، و اثبات آنها بر متعلم است. برای اثبات قسمت اول VI، چون یا $a < 0$ یا $a \geqslant 0$ و یا $b < 0$ یا $b \geqslant 0$، باید چهار حالت تشخیص داد.

۳.۱.۳. مثال. معادله‌ی $|x - 1| = 3$ را حل کنید.

بنا بر قسمت VI قضیه‌ی فوق، گزاره‌نمای $|x - 1| = 3$ معادل گزاره‌نمای $x - 1 = 3 \vee x - 1 = -3$ است. گزاره‌نماهای $x - 1 = 3$ و $x - 1 = -3$، بترتیب، معادل گزاره‌نماهای $x = 4$ و $x = -2$ میباشند. پس 4 و -2 جوابهای معادله‌ی مذکورند. از اینجا ضمناً نتیجه میشود،

$$\{x \,|\, |x - 1| = 3\} = \{x \,|\, x - 1 = 3 \vee x - 1 = -3\} = \{4, -2\}.$$

۳.۱.۴. قضیه. $|ab| = |a|.|b|$.

برهان. اثبات به طریقه‌ی حالات است. اگر حد اقل یکی از a و b صفر باشد طرفین تساوی مساوی 0 میباشند، و اگر $a > 0$ و $b > 0$ طرفین مساوی ab هستند. باقی میماند حالاتی که یکی از a و b مثبت و دیگری منفی باشد یا a و b هر دو منفی باشند. در حالت اول، کافی است حکم را در صورتی که $a < 0$ و $b > 0$ ثابت کنیم. گوئیم، بنا بر IV : ۳.۱.۲، $|ab| = |-(ab)|$. پس بنا بر ۱.۳.۶، $|ab| = |(-a).b|$. بالنتیجه، بنا بر حالت دو عامل مثبت،

$$|ab| = |-a|.|b| [۳.۱.۲ : \mathrm{IV}] = |a|.|b|.$$

بالاخره، اگر $a < 0$ و $b < 0$ آنگاه

$$|ab| = |(-a).(-b)| = |-a|.|-b| = |a|.|b|. \blacktriangle$$

۳.۱.۵. تمرین

۱. عبارت $2|x+1| + |x| + |x-1| - 3$ را با هریک از مفروضات ذیل مختصر کنید:

(آ)	$x < -1.$	(ب)	$x \leqslant -1.$
(پ)	$-1 < x < 0.$	(ت)	$-1 \leqslant x < 0.$
(ث)	$-1 < x \leqslant 0.$	(ج)	$-1 \leqslant x \leqslant 0.$
(چ)	$0 < x < 1.$	(ح)	$0 \leqslant x < 1.$
(خ)	$0 < x \leqslant 1.$	(د)	$0 \leqslant x \leqslant 1.$
(ذ)	$x > 1.$	(ر)	$1 \leqslant x.$

۲. این معادلات را حل کنید، و نتایج حاصل را به وسیله‌ی تساوی مجموعه‌ها بنویسید:

$|2-x| = 1.$ $\quad |2-x| = 0.$ $\quad |4x+1| = 7.$

$|x+1| = x.$ $\quad |x-1| = 2x+4.$ $\quad |x+1| = |x-2|.$

$|2x+3| = |4-x|.$ $\quad |3x+2| + |2x+3| = 0.$

۳. دستگاههای ذیل را حل کنید:

$$\begin{cases} |x| = 1, \\ |x-2| = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-3| = 2, \\ |x-7| = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-3| = 2, \\ |x+3| = 1. \end{cases}$$

۴. ثابت کنید که اگر $a \neq 0$ آنگاه $|b/a| = |b|/|a|$.

۳.۲. قضیه. اگر $a < c < b$ آنگاه

$$|c| < \mathrm{Max}\,\{|a|, |b|\}. \qquad (*)$$

برهان. فرض کنیم $a < c$ (۱) و $c < b$ (۲)؛ و بالنتیجه، $a < b$ (۳). بنا براین، حالات ممکنه‌ی بین a، b، و 0 از لحاظ ترتیب منحصر است به سه حالت $0 \leqslant a$، $b \leqslant 0$، و $a < 0 < b$ (به تفصیل ثابت کنید).

حالت اول: $0 \leqslant a$. با توجه به (۱) و (۳) خواهیم داشت $|a| = a$، $|b| = b$، و $|c| = c$. در این صورت با توجه به (۳)،

$$\mathrm{Max}\,\{|a|, |b|\} = \mathrm{Max}\,\{a, b\} = b.$$

پس، بنا بر (۲)، (*) برقرار است.

حالت دوم: $0 \leqslant b$. اثبات مانند حالت اول و به متعلم محول است.

حالت سوم: $a < 0 < b$. برحسب اینکه $c < 0$ یا $0 \leqslant c$، این حالت به دو شق منقسم میشود. اثبات حکم را در شق اول میآوریم، و در شق دوم به عهدهی متعلم میگذاریم.

شق اول: $c < 0$. با توجه به (۱) خواهیم داشت $0 < -c < -a$. پس، بنا بر آنچه در حالت اول ثابت شد،

$$| c | = | -c | < \operatorname{Max} \{| 0 |, | -a |\} = \operatorname{Max} \{0, | a |\}$$
$$= | a | \leqslant \operatorname{Max} \{| a |, | b |\}. \blacktriangle$$

۳.۲.۱. قضیه. اگر $b > 0$ نامساویهای ذیل دو بدو باهم معادلند:

$$(\text{آ}) \quad | a | < b, \qquad (\text{ب}) \quad -b < a < b, \qquad (\text{پ}) \quad a^2 < b^2.$$

برهان. فرض‌کنیم $b > 0$ (۱). پس $-b < 0$ (۲). برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم که (آ) معادل (ب) و معادل (پ) است.

اولاً، (آ) را مفروض میگیریم، و دو حالت تشخیص میدهیم. حالت اول: $0 \leqslant a$ (۳). بنا بر (آ) و ۳.۱.۰۱، $a < b$؛ بنا بر (۲) و (۳)، $-b < a$؛ پس، $-b < a < b$.

حالت دوم: $a < 0$. بنا بر (۱)، $a < b$، و بنا بر (آ)، $-a < b$، و لهذا $-b < a$.

بالنتیجه، $-b < a < b$. پس، در هر حالت، (ب) از (آ) نتیجه میشود.

ثانیاً، اگر (ب) مفروض باشد، بنا بر ۳.۰۲،

$$| a | < \operatorname{Max} \{| -b |, | b |\} = \operatorname{Max} \{b, b\} = b.$$

پس، (آ) و (ب) معادل یکدیگرند.

برای اثبات معادل بودن (آ) و (پ)، اولاً، (آ) را مفروض میگیریم. چون $0 \leqslant | a |$ و $0 < b$، خواهیم داشت، $| a | . | a | \leqslant | a | . b$ و $| a | . b < b . b$، و بالنتیجه، $| a | . | a | < b . b$. پس، بنا بر V : ۳.۱.۰۲، $a^2 < b^2$. ثانیاً، (پ) را مفروض میگیریم، و (آ) را به برهان خلف ثابت میکنیم. فرض کنیم (فرض خلف) $\sim (| a | < b)$. پس، $b \leqslant | a |$، و بالنتیجه، $b . b \leqslant | a | . b$ و $| a | . b \leqslant | a | . | a |$، و از آنجا $b^2 \leqslant a^2$، و این با (پ) متناقض است.

پس، (آ) و (پ) معادل یکدیگرند. $\blacktriangle$

۳.۲.۲. قضیه. اگر $b > 0$ نامساویهای ذیل دو بدو با هم معادلند:

$$(\text{آ}) \quad | a | \leqslant b, \qquad (\text{ب}) \quad -b \leqslant a \leqslant b, \qquad (\text{پ}) \quad a^2 \leqslant b^2.$$

برهان. (ب) را از (آ) استنتاج و اتمام برهان را به متعلم محول میکنیم. پس، (آ) را مفروض میگیریم؛ خواهیم داشت $| a | < b$ یا $| a | = b$.

حالت اول: $| a | < b$. بنا بر ۳.۲.۱، $a < b$ و $-b < a$، و از آنجا، $a \leqslant b$ و $-b \leqslant a$، و بالنتیجه، $-b \leqslant a \leqslant b$. حالت دوم: $| a | = b$ (۱). به موجب VI : ۳.۱.۰۲ خواهیم داشت، $a = b$ یا $a = -b$. در صورت اول، (ب) به معنی

$b \leqslant b \leqslant b-$ و در صورت ثانی به معنی $b \leqslant b- \leqslant b-$ است، که هر دو بالبداهه برقرارند (چرا؟). ▲

۳.۲.۳. قضیه. اگر $0 \leqslant b$ نامساویهای ذیل دو بدو معادل یکدیگرند:

$$(\text{آ})\quad b<|a|,\qquad (\text{ب})\quad a<-b \vee b<a,\qquad (\text{پ})\quad b^2<a^2.$$

برهان. اگر $0 \leqslant b$ آنگاه $b=0$ یا $0<b$. اثبات حکم در حالت اول بر متعلم است. به عنوان نمونه، در حالتی که $0<b$ ثابت میکنیم که (آ) و (ب) معادل یکدیگرند. گوئیم، بنا بر ۳.۲.۲، $|a| \leqslant b$ و $-b \leqslant a \,\&\, a \leqslant b$ — معادل یکدیگرند. پس، نقیضهای آنها نیز با هم معادلند. اما، نقیض اولی معادل $b<|a|$ است، و نقیض دومی، بنا بر معادلات د مورگن، معادل $\sim(a \leqslant b) \vee \sim(-b \leqslant a)$ است، که خود معادل $a<-b \vee b<a$ میباشد. ▲

۳.۲.۴. قضیه. اگر $0 \leqslant b$ نامساویهای ذیل دو بدو معادلند:

$$b \leqslant |a|,\qquad a \leqslant -b \vee b \leqslant a,\qquad b^2 \leqslant a^2.$$

اثبات بر متعلم است.

۳.۳. قضیه. همواره

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $0 \leqslant ab$ (یعنی حد اقل یکی از a و b صفر باشد، یا آنکه a و b هر دو مثبت یا هردو منفی باشند).

برهان. اگر a (b) صفر باشد دو طرف نامساوی مساوی $|b|$ ($|a|$) هستند، و اگر a و b هر دو مثبت باشند دو طرف مساوی $a+b$ میباشند. اگر $a<0$ و $b<0$ آنگاه با توجه به حالت دو جملهی مثبت،

$$\begin{aligned}|a+b| &= |-(a+b)| = |(-a)+(-b)|\\ &= |-a|+|-b| = |a|+|b|.\end{aligned}$$

باقی میماند حالتی که یکی از a و b مثبت و دیگری منفی باشد. بی آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود، میتوان فرض کرد که $0<a$ و $b<0$. پس، $b<a+b$ و $a+b<a$. بالنتیجه، بنا بر ۳.۰۲، $|a+b|<\operatorname{Max}\{|a|,|b|\}$. عبارت طرف راست این نامساوی مساوی $|a|$ یا $|b|$ است، و چون $0<|a|$ و $0<|b|$،

$$|b|<|a|+|b|,\qquad\qquad |a|<|a|+|b|,$$

و بالنتیجه، $\operatorname{Max}\{|a|,|b|\}<|a|+|b|$. پس $|a+b|<|a|+|b|$. ▲

۳.۳.۱. قضیه.

$$\begin{aligned}-|a+b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a+b|,\\ -|a-b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a-b|;\end{aligned}$$

یا (با توجه به ۳.۲.۲) مختصراً

$$||a|-|b|| \leqslant |a+b|, \qquad ||a|-|b|| \leqslant |a-b|.$$

برهان. از رابطه‌ی $a=(a+b)+(-b)$ بنا بر ۳.۳ نتیجه میشود، $|a| \leqslant |a+b|+|-b| = |a+b|+|b|$، و از آنجا،

$$|a|-|b| \leqslant |a+b|.$$

به همین قیاس، از رابطه‌ی $b=(a+b)+(-a)$ نتیجه میشود، $|b|-|a| \leqslant |a+b|$، و از آنجا

$$-|a+b| \leqslant |a|-|b|.$$

همچنین، از روابط $a=(a-b)+b$ و $b=(b-a)+a$ نامساویهای دیگر حکم بدست میآید. ▲

۳.۴. تعریف. تابع علامت یا sgn[1]، که مقدارش در x موسوم به $\operatorname{sgn} x$ یا علامت x است، تابعی است بر $\mathbf{R}$ که با ضابطه‌ی ذیل تعریف میشود:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x<0, \\ 0 & x=0, \\ 1 & x>0. \end{cases}$$

اثبات قضیه‌ی ذیل بر متعلم است:

۳.۴.۱. قضیه.

I. همواره $a=|a|\operatorname{sgn} a$ و $|a|=a\operatorname{sgn} a$.

II. اگر $a \neq 0$ آنگاه $\operatorname{sgn} a = a/|a| = |a|/a$.

III. اگر دو عدد a و b غیر از صفر باشند آنگاه شرط لازم وکافی برای آنکه $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$ آنست که a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

بنا بر قسمت اخیر، تعریف ذیل را میآوریم:

۳.۴.۲. تعریف. دو عدد را متحدالعلامه خوانیم در صورتی که هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند، و آنها را مختلف‌العلامه نامیم در صورتی که یکی از آنها مثبت و دیگری منفی باشد.

۳.۵. تمرین

۱. همواره $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

۲. همواره $|a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|$.

۳. همواره اگر $a \leqslant x \leqslant b$ آنگاه $|x| \leqslant |a|+|b|$. آیا عکس این حکم برقرار است؟

۴. همواره $|a+b|+|a-b| \geqslant |a|+|b|$.

---

(۱) از کلمه‌ی لاتینی signum، به معنی «علامت».

۵. همواره اگر $|d| \neq |c|$ آنگاه

$$\left|\frac{a+b}{c+d}\right| \leqslant \frac{|a|+|b|}{||c|-|d||}.$$

۶. ثابت کنید که

$$|x-1|+|x-2| \geqslant 1, \qquad (\text{آ})$$

$$|x-1|+|x-2|+|x-3| \geqslant 2, \qquad (\text{ب})$$

و در هر دو مورد تحقیق کنید که در چه صورت تساوی برقرار است.

۷. بنا بر آنکه $a<b<c$ ثابت کنید که

$$|x-a|+|x-b|+|x-c| \geqslant c-a,$$

و تعیین کنید بازاءِ چه مقادیری از x تساوی برقرار است.

۸. ثابت کنید که اگر $|b| \leqslant 1$ و

$$f(x)=a-bx \qquad (x \in \mathbf{R})$$

آنگاه $f(-|a| \operatorname{sgn} b) \geqslant 0$.

۹. ثابت کنید که

$$|a| = \operatorname{Max}\{a, -a\}. \qquad (\text{آ})$$

$$\operatorname{Max}\{a, b\} = \frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}. \qquad (\text{ب})$$

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}. \qquad (\text{پ})$$

$$\operatorname{Max}\{a, 0\} = \frac{a+|a|}{2}. \qquad (\text{ت})$$

$$\min\{a, 0\} = \frac{a-|a|}{2}. \qquad (\text{ث})$$

۴ § اعداد طبیعی

۴.۱. مقدمه. مجموعه‌ی اعداد طبیعی بنیادیترین مجموعه‌های اعداد و از مهمترین مجموعکهای $\mathbf{R}$ است، و بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضی ــ از قبیل مفاهیم شمردن، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، و رشته‌ها ــ ناشی از آن میباشد. در این قسمت، مقدمات تئوری اعداد طبیعی را بر اساس اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی بنا میکنیم. برای آماده کردن ذهن، قبلاً اعداد طبیعی را چنانکه با آنها مأنوس هستید مورد بررسی قرار میدهیم، و بعضی از خواصی را که از این بررسی سطحی میتوان استنباط کرد خاطرنشان میسازیم.

۴.۱.۱. اعداد طبیعی بدان گونه که آنها را میشناسیم عبارتند از اعداد

$$1, \quad 1+1, \quad (1+1)+1, \quad ((1+1)+1)+1, \ldots,$$

که مجموعه‌ی آنها مجموعه‌ی اعداد طبیعی خوانده میشود. چنانکه از طرح فوق مشهود است، مجموعه‌ی مذکور دارای این دو خاصیت است: اولاً، «یکدار» است، یعنی 1 بدان

تعلق دارد؛ و ثانیاً «موروثی» است، بدین معنی که همواره اگر x بدان تعلق داشته باشد $x + 1$ نیز بدان تعلق دارد. مجموعه‌های یکدار و موروثی از اعداد منحصر به مجموعه‌ی اعداد طبیعی نیستند. مثلاً، $\mathbf{R}$ یکدار و موروثی است. اما، با اندك تأملی، بدیهی بنظر میآید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی «کوچکترین» یا «کم‌وسعترین» مجموعه‌های یکدار و موروثی است. زیرا، اگر A مجموعه‌ای یکدار و موروثی باشد، چون A یکدار است، $1 \in A$؛ پس، چون A موروثی است، $1 + 1 \in A$؛ و به همین دلیل، $1 + (1 + 1) \in A$، و غیره. بنا بر این، مجموعه اعداد طبیعی جزء هر مجموعه‌ی یکدار و موروثی بنظر میرسد، و لهذا میتوان آن را مقطع جمیع مجموعه‌های یکدار و موروثی شمرد.

۴.۱.۲. از ساختمان اعداد طبیعی به شرح مذکور معلومست که اگر n عددی طبیعی باشد، بین n و $n + 1$ عددی طبیعی وجود ندارد. بدین مناسبت $n + 1$ را تالی بلا فصل n نامیم. همچنین معلوم است که هر عدد طبیعی، غیر از 1، تالی بلافصل یک عدد طبیعی است.

۴.۱.۳. خاصیت مهم دیگری که از طرح مذکور استنباط میشود خاصیت معروف به اصل استقراء ریاضی یا، مختصراً، اصل استقراء است، و آن اینکه

اگر خاصیت F تابع دو شرط ذیل باشد هر عدد طبیعی واجد خاصیت F است:

I. 1 خاصیت F دارد؛

II. با هر عدد طبیعی، تالی بلا فصل آن نیز خاصیت F دارد.

(مقصود از عبارت اختصاری اخیر اینست که، بازاء هر عدد طبیعی مانند n، اگر n خاصیت F داشته باشد $n + 1$ نیز خاصیت F دارد). در بادی امر این حکم بدیهی بنظر میآید. زیرا بنا بر I، 1 خاصیت F دارد.

پس، بنا بر II،

$1 + 1$ خاصیت F دارد.

پس، بنا بر II،

$1 + (1 + 1)$ خاصیت F دارد.

پس، بنا بر II،

$1 + (1 + (1 + 1))$ خاصیت F دارد.

و هکذا (یا «و غیره»). پس همه‌ی اعداد طبیعی خاصیت F دارند!

اما، اندك تأملی نشان میدهد که این استدلال پایه‌ی منطقی ندارد، و قابل قبول نیست، زیرا، مراحل استدلال فوق پایان ندارد. برای گریز از همین مشکل است که متوسّل به الفاظی مبهم و فریبنده مانند و هکذا و و غیره یا به «. . .» میشوند، و این الفاظ را جایگزین استدلالی که مراحلش نامتناهی است میسازند. عن قریب، اصل استقراء را بر اساس اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی ثابت خواهیم کرد. پس از آن، دست «و غیره» از کار کوتاه خواهد شد.

۴.۱.۴. بالاخره، یکی دیگر از اهمّ خواص مجموعه‌ی مرتب اعداد طبیعی با نسبت کوچکتری، که بستگی تام با اصل استقراء دارد، و در بحثهای مقدماتی به ندرت اسمش میآید، اینست که، نه فقط مجموعه‌ی جمیع اعداد طبیعی، بلکه هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد طبیعی ابتدا دارد (خاصیت خوشترتیبی). مثلاً، مجموعه‌ی اعداد طبیعی که رقم آحادشان 0 است، و نیز مجموعه‌ی اعداد اول ناکمتر از 24، هر یک ابتدا دارد؛ ابتدای اولی 10 است، و ابتدای دومی 29. چنانکه خواهیم دید، این خاصیت در استدلال بسیار توانا است. واضحست که همه‌ی مجموعه‌های اعداد این خاصیت را ندارند. مثلاً، مجموعه‌ی جمیع اعداد حقیقی اصلاً ابتدا ندارد، و مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی، اگر چه خودش ابتدا دارد، دارای مجموعکهای بی‌ابتدا است (مانند مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت).

اینک این ملاحظات ابتدائی را کنار میگذاریم، و به تأسیس تئوری اعداد طبیعی میپردازیم.

۴.۲. مجموعه‌ی اعداد طبیعی

۴.۲.۱. تعریف. مجموعه‌ی A از اعداد را موروثی خوانیم در صورتی که همواره اگر $x \in A$ آنگاه $x + 1 \in A$. اگر $1 \in A$ و A موروثی باشد گوئیم A یکدار و موروثی است.

۴.۲.۲. تمرین
۰۱ مجموعه‌ی $\{x \mid 1 \leqslant x\}$ یکدار و موروثی است.

۴.۲.۳. تعریف. مقطع[1] جمیع مجموعه‌های یکدار و موروثی را مجموعه‌ی اعداد طبیعی یا $\mathbf{N}$، و هر عضو آن را یک عدد طبیعی نامیم.

۴.۲.۴. قضیه.
I. $1 \in \mathbf{N}$؛ یعنی، 1 عدد طبیعی است.
II. $\mathbf{N}$ مجموعک هر مجموعه‌ی یکدار و موروثی است.
III. همواره اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه $n + 1 \in \mathbf{N}$.
IV. $\mathbf{N}$ یکدار و موروثی است.
V. 1 ابتدای مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. به عبارت دیگر، بازاء هر عدد طبیعی مانند n، $1 \leqslant n$.
VI. هر عدد طبیعی مثبت است.

برهان. I نتیجه‌ی تعریف $\mathbf{N}$ (۴.۲.۳) و تعریف مقطع است، و II نتیجه‌ی مستقیم تعریف $\mathbf{N}$ و ۴.۳ : ۲. برای اثبات III، فرض کنیم $n \in \mathbf{N}$. بنا بر ۴.۲.۳ و تعریف مقطع، n عضو هر

(۱) در این مبحث مندرجات ۴ § فصل ۲ را در باب مقطع مجموعه‌ها باید حاضرالذهن داشت.

مجموعه‌ی یکدار و موروثی است. پس بنا بر ۴.۲.۰۱، $n + 1$ نیز عضو هر مجموعه‌ی یکدار و موروثی است، و لهذا، عضو مقطع آنهاست. IV نتیجه‌ی II و III است. برای اثبات V، کافی است ملاحظه کنیم که، بنا بر ۴.۲.۰۲ و قسمت II، $\mathbf{N}$ مجموعک $\{x \mid 1 \leqslant x\}$ است. بالاخره، VI نتیجه‌ی V و ۲.۴.۰۳ است. ▲

۴.۲.۵. تعریف. اگر n عددی طبیعی باشد عدد $n + 1$ را که، بنا بر آنچه گذشت، عددی طبیعی است، تالی بلافصل یا، مختصراً، تالی n خوانیم[1].

۴.۲.۶. تعریف[2]. بازاء عدد طبیعی k، مجموعه‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از k را قطعه‌ی k در $\mathbf{N}$ یا $\mathbf{N}_k$ نامیم. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{N}_k = \{n \mid n \in \mathbf{N} \;\&\; n \leqslant k\}.$$

۴.۲.۷. قرارداد. از این ببعد، متغیرهای فردی k، m، و n مقید به $\mathbf{N}$، یعنی اسامی اعداد طبیعی نامشخص، خواهند بود، مگر آنکه خلاف این مقصود تصریح یا صریحاً از سیاق مطلب استنباط شود.

۴.۲.۸. تمرین

۱. اعداد 2، 3، . . .، و 9 از اعداد طبیعی‌اند.

۲. بازاء هر m و n، $m \leqslant mn$.

۳. $mn = 1 \;\underline{\text{O}}\; m = n = 1$.

۴. با توجه به مجموعه‌ی $\{1\} \cup \{x \mid 2 \leqslant x\}$، ثابت کنید که هیچ عدد طبیعی بین 1 و 2 نیست.

۵. ثابت کنید که همواره $1 \in \mathbf{N}_k$ و $k \in \mathbf{N}_k$.

۶. بدیهی بنظر میآید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از $k + 1$ عبارتست از مجموعه‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از k به انضمام $k + 1$، یعنی

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{N}_k \cup \{k + 1\}.$$

برای اثبات این حکم، شخصی چنین استدلال میکند: اولاً، اگر n عضو دلخواهی از مجموعه‌ی طرف دوم باشد آنگاه $n \in \mathbf{N}_k$ یا $n \in \{k + 1\}$. در حالت اول $n \leqslant k$، و لهذا، $n \leqslant k + 1$؛ و در حالت ثانی $n = k + 1$، و لهذا $n \leqslant k + 1$. پس، در هر حالت، $n \in \mathbf{N}_{k+1}$. ثانیاً، اگر n عضو دلخواهی از $\mathbf{N}_{k+1}$ باشد، بنا بر ۴.۲.۶، $n \leqslant k + 1$، و بالنتیجه، $n = k + 1$ یا $n < k + 1$. در حالت اول $n \in \{k + 1\}$؛ و در حالت ثانی $n \leqslant k$، و لهذا، $n \in \mathbf{N}_k$. پس، در هر حالت، n به مجموعه‌ی طرف دوم تعلق دارد. بنا بر این، به موجب اصل گسترش، تساوی برقرار است.
آیا استدلال مذکور درست است؟

---

(۱) سبب قید «بلافصل» اینست که، چنانکه در ۴.۴.۶ ثابت خواهد شد، بین اعداد طبیعی n و $n + 1$ عددی طبیعی وجود ندارد.

(۲) این تعریف قبلا در ۷.۳.۱ : ۳ آمده است.

۴.۳. استقراء

۴.۳.۱. قضیه (صورتی از اصل استقراء[1]). هر مجموعه‌ی یکدار و موروثی از اعداد طبیعی شامل همه‌ی اعداد طبیعی، و لهذا، مساوی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.
برهان. اگر مجموعه‌ی A از اعداد طبیعی یکدار و موروثی باشد، بنا بر II : ۴.۲.۴، $A \subseteq \mathbf{N}$. اما، بنا بفرض، $\mathbf{N} \subseteq A$. پس، $A = \mathbf{N}$. ▲

معمولاً اصل استقراء را به صورت ذیل، که با استدلال مساعدتر است، بیان میکنند:

۴.۳.۲. قضیه (اصل استقراء[1]). اگر خاصیت F تابع شرایط دوگانه‌ی ذیل باشد جمیع اعداد طبیعی واجد این خاصیت خواهند بود:

I. 1 خاصیت F دارد؛

II. بازاء هر عدد طبیعی n، اگر n خاصیت F داشته باشد $n+1$ نیز خاصیت F دارد.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع اعداد طبیعی واجد خاصیت F باشد. بنا بر I، $1 \in A$ و بنا بر II، همواره اگر $n \in A$ آنگاه $n+1 \in A$. پس، A مجموعه‌ای یکدار و موروثی از اعداد طبیعی است. بالنتیجه، به موجب ۴.۳.۱، $A = \mathbf{N}$. ▲

چنانکه میدانیم، گزاره‌نمای $F(n)$ به معنی «n خاصیت F دارد» میباشد. پس، ۴.۳.۲ را میتوان چنین بیان کرد:

۴.۳.۳. قضیه (اصل استقراء). اگر خاصیت F تابع شرایط دوگانه‌ی ذیل باشد جمیع اعداد طبیعی خاصیت F دارند:

I. $F(1)$؛

II. بازاء هر n، اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$.

۴.۳.۴. روش استقرا در استدلال. روش استقراء در اثبات اینکه همه‌ی اعداد طبیعی دارای خاصیت مفروض F هستند مبتنی بر اصل استقراء است: ثابت میکنیم که خاصیت F تابع شرایط I و II مذکور در اصل استقراء است. اثبات $F(1)$ اغلب آسان است. برای اثبات II، فرض میکنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد، و $F(n)$ را (به عنوان فرض استقراء) مفروض میگیریم، و $F(n+1)$ (حکم استقراء) را از آن استخراج میکنیم.
روش استقراء از وسایل بسیار توانا در استدلال است، و در ریاضیات فوق‌العاده اهمیت دارد، چنانکه متدرجاً معلوم خواهد شد.

۴.۳.۵. امثله
(آ). ثابت کنید که هر عدد طبیعی مساوی 1 یا تالی بلافصل یک عدد طبیعی است.

---

(۱) این اصل را اصل استقراء ضعیف هم مینامند. سبب آن در 4.6.11 معلوم خواهد شد.

خاصیت مذکور در قضیه با گزاره‌نمای

$F(n)$: $n = 1$ یا n تالی بلافصل یک عدد طبیعی است

بیان میشود. برای اثبات قضیه، باید ثابت کرد که هر عدد طبیعی در این گزاره‌نما صدق میکند. اثبات به استقراء است، از این قرار:

اولاً، $F(1)$ را ثابت میکنیم. $F(1)$ بدین معنی است:

$1 = 1$ یا 1 تالی بلافصل یک عدد طبیعی است

و این ترکیب فصلی بالبداهه راست است، زیرا مؤلفه‌ی $1 = 1$ راست میباشد.

ثانیاً، فرض میکنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد، و $F(n)$ را نیز مفروض میگیریم («$F(n)$» فرض استقراء است)، و $F(n + 1)$، یعنی

$n + 1 = 1$ یا $n + 1$ تالی بلافصل یک عدد طبیعی است

را ثابت میکنیم. برقرار بودن این نیز بدیهی است، زیرا، $n + 1$ تالی بلافصل n است.

پس، بنا بر آنچه ثابت شد، و به موجب اصل استقراء، هر عدد طبیعی در $F(n)$ صدق میکند[1]. ▲

(ب). بسیاری از نوآشنایان با اصل استقراء چنین میپندارند که هر حکم کلی در باب اعداد طبیعی باید از طریق استقراء ثابت شود. این گمان درست نیست، و روش عمومی اثبات احکام کلی، که در ۱:۴.۱ گذشت، در اینجا هم در موارد مقتضی بکار میرود. به عنوان مثال ثابت میکنیم که

(*) حاصلجمع هر دو عدد طبیعی عددی طبیعی است.

برای این منظور، فرض میکنیم m عدد طبیعی دلخواهی (و از این ببعد ثابت) باشد، وثابت میکنیم که

حاصلجمع m با هر عدد طبیعی عددی طبیعی است،

یا، به عبارت دیگر،

(†) بازاءِ هر n، $m + n \in \mathbf{N}$.

برای اثبات این حکم، به استقراء ثابت میکنیم که هر عدد طبیعی n در گزاره‌نمای

$$F(n): \qquad m + n \in \mathbf{N}.$$

صدق میکند.

اولاً، $F(1)$ به‌معنی $m + 1 \in \mathbf{N}$ است، و این بالبداهه برقرار است، زیرا، به موجب فرض، $m \in \mathbf{N}$؛ پس، بنا بر III:۴.۲.۴، $m + 1 \in \mathbf{N}$.

ثانیاً، بازاءِ عدد طبیعی دلخواه n، $F(n)$ را مفروض میگیریم، و ثابت میکنیم که

$$F(n + 1): \qquad m + (n + 1) \in \mathbf{N}.$$

گوئیم، بنا بر فرض استقراء، $m + n \in \mathbf{N}$. پس، بنا بر III : ۴.۲.۴، $(m + n) + 1 \in \mathbf{N}$. اما، $(m + n) + 1 = m + (n + 1)$. پس، $m + (n + 1) \in \mathbf{N}$. بالنتیجه، بنا بر اصل استقراء، (†) برقرار است.

پس، چون m عدد طبیعی دلخواهی فرض شده بود، (*) نیز برقرار میباشد. ▲

(پ). در بکار بستن اصل استقراء باید هر دو حکم مذکور در ۴.۳.۴ را ثابت کرد. بالاخص، اثبات اینکه $F(n + 1)$ نتیجه‌ی $F(n)$ است باید بازاءِ همه‌ی مقادیر طبیعی n درست باشد. عدم توجه به این نکات منجر به نتایج دروغ میشود، چنانکه در آتیه معلوم خواهد شد[2].

---

(۱) این جمله‌ی اخیر، یا عبارتی بدان مضمون، که معمولاً در پایان براهین استقرائی میآید، اغلب تکرار مکرر و ذکرش غیرضروری است.

(۲) تمرینات ۴ : ۴.۳.۷، ۱ : ۴.۷.۵، و ۲ : ۴.۷.۵ ملاحظه شود.

۴.۳.۶. تبصره. بحث از استقراء فرصت مناسبی به ما میدهد که توجه متعلمین را به **تفاوت فاحش حکم حدسی و حکم مدلل** (قضیه‌ی ریاضی) جلب کنیم. برای توضیح این نکته‌ی بسیار مهم، مثالی مبتنی بر اطلاعات قبلی محصلین میآوریم.

در بعضی کتابها، در تعیین مشتق nم تابعی که با ضابطه‌ی $y = \sin x$ تعریف میشود، چنین «دلیلی» میآورند:

$$«y' = y \text{ مشتق اول } = \cos x = \sin (x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = y \text{ مشتق دوم } = \cos (x+\frac{\pi}{2}) = \sin (x+\frac{2\pi}{2}),$$

$$y''' = y \text{ مشتق سوم } = \cos (x+\frac{2\pi}{2}) = \sin (x+\frac{3\pi}{2}),$$

و غیره. پس، بطور کلی،

$$y^{(n)} = y \text{ مشتق } n\text{م} = \sin (x+\frac{n\pi}{2}).»$$

این «دلیل» گمراه‌کننده و غیر قابل قبول است، و حاکی از تمیز نگذاشتن بین حدس و حکم ثابت‌شده میباشد. البته گاه اتفاق می‌افتد (مانند مثال فوق) که شخص **میپندارد** که محاسباتی را که در حالات خاص کرده است میتواند تحت یک قاعده‌ی کلی درآورد، و چه بسا این قاعده را «حدس میزند». چنین حدسی، اگر صحت آن با دلیل ثابت نشود، قابل اعتماد نیست، و نباید آن را به عنوان یک قضیه‌ی ریاضی عرضه کرد. برای نمونه، یک مثال تاریخی میآوریم. اگر در سه‌جمله‌ای $n^2 - n + 41$، بجای n اعداد 1، 2، . . .، و 9 قرار دهید ملاحظه خواهید کرد که اعدادِ حاصلْ جملگی عدد اول‌اند. از اینجا، ممکن است به ذهن برسد که مقادیر این سه جمله‌ای بازاء هر عدد طبیعی عددی است اول. اگر مقادیر سه‌جمله‌ای مذکور را بازاء مقادیر 10، 11، . . .، 30، و 31 از n حساب کنیم باز هم اعدادِ حاصلْ اول میباشند، و این نتیجه مؤید حدس ما است. اما، اگر محاسبه را ادامه دهیم، بازاء $n = 41$ عدد $41^2 - 41 + 41$ حاصل میشود، که بالبداهه اول نیست. پس، حدس مذکور نادرست است. در مورد کثیرالجمله‌ی $n^2 - 79n + 1601$، بازاء مقادیر 0، 1، . . .، و 79 از n، مقادیر کثیرالجمله جملگی اعداد اولند، اما، عدد حاصل بازاء $n = 80$ اول نیست.

توضیحات مذکور ممکن است چنین به ذهن القا کنند که، در ریاضیات، باید راه را بر حدس بربست. این تصور خطا است. حدس در جای خود اهمیت دارد، و گاه راهنمای کشف قوانین است، ولی تا موقعی که آنچه حدس میزنیم به دلیل ثابت نشده است جز حدس نیست. در مثال سابق، مقادیر مشتقات اول و دوم و سوم y ممکن است چنین به ذهن القا کنند که

(*) بازاء هر عدد طبیعی n، مشتق nم y مساوی $sin\ (x+\frac{n\pi}{2})$ است.

اما آیا این گزاره راست است؟ بدیهی است که محاسبات متوالی جوابگوی این سؤال نتوانند بود، زیرا، تحقیق در درستی یا نادرستی گزاره‌نمای

$$F(n): \qquad y^{(n)} = sin\ (x + \frac{n\pi}{2})$$

بازاء همه‌ی اعداد طبیعی از قدرت آدمی خارج است، و لفظ «و غیره» هم ــ که آن را جایگزین این تحقیق قلمداد میکنند ــ گره این مشکل را نمیگشاید. چاره‌ی کار در اصل استقراء است. به محاسبه معلوم شد که گزاره‌نمای $F(n)$ بازاء $n = 1$ راست است. بعلاوه، اگر $F(n)$ را مفروض بگیریم، مشتق $n + 1$ ام y، یعنی مشتق مشتق n ام آن، چنین خواهد بود:

$$y^{(n+1)} = cos\ (x + \frac{n\pi}{2}) = sin\ (x + \frac{(n+1)\pi}{2}),$$

و این همان $F(n + 1)$ میباشد. پس، بنا بر اصل استقراء، حکم (*) برقرار است.

در پایان این توضیحات، باید گفته شود که، در موارد بسیار، از آوردن دلیل استقرائی ــ به سبب «سرراست» بودن آن، یا به جهت نامناسب بودن آن برای مبتدی، و جز آنها ــ احتراز میشود. در این صورت، بهتر آنست که این مطلب را، که برهان حکم مورد نظر به استقراء است، خاطر نشان سازند.

۴.۳.۷. تمرین.

۱. حاصلضرب دو عدد طبیعی عددی طبیعی است.

۲. بازاءِ هر عدد طبیعی n، عدد $(n^2/2) + (n/2)$ عددی طبیعی است.

۳. بازاءِ هر عدد طبیعی n، عدد $(n^3/6) + (n^2/2) + (n/3)$ عددی طبیعی است.

۴. آیا استدلال آتیه برای اثبات اینکه هر عدد طبیعی با تالی بلافصل خود مساوی است درست است؟ «گزاره‌نمای $n = n + 1$ را $F(n)$ مینامیم. اگر $F(n)$ مفروض باشد نتیجه میشود، $n + 1 = (n + 1) + 1$، و این همان $F(n + 1)$ است. پس، بنا بر اصل استقراء، حکم برقرار است.»

۴.۴. بعضی از خواص اساسی اعداد طبیعی

۴.۴.۱. قضیه. 1 تالی بلافصل هیچ عدد طبیعی نیست، و هر عدد طبیعی غیر از 1 تالی بلافصل یک (و تنها یک) عدد طبیعی است.

برهان. اثبات اینکه 1 تالی بلافصل هیچ عدد طبیعی نیست، و اینکه یک عدد طبیعی تالی بلافصل منتها یک عدد طبیعی است بر متعلم است. اینک فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد، و $n \neq 1$. بنا بر آ : ۴.۳.۵،

$n = 1$ یا n تالی بلافصل یک عدد طبیعی است.

پس، به قاعده‌ی رفع مؤلفه، n تالی بلافصل یک عدد طبیعی است. ▲

بنا بر قضیه‌ی فوق،

۴.۴.۲. قضیه. اگر $n \neq 1$ آنگاه $n - 1$ عددی طبیعی است (این عدد را سابق بلافصل n یا، مختصراً، سابق n نامیم).

۴.۴.۳. تبصره. نخستین کسی که تئوری اعداد طبیعی را مستقلاً به روش اصل موضوعی بنا نهاد پئانو* است. در تئوری پئانو، حدود اولیه عبارتند از: مجموعه‌ای غیر خالی $(\mathbf{N})$؛ عضوی از آن مجموعه، موسوم به 1؛ و تابعی مانند s بر $\mathbf{N}$ بتوی $\mathbf{N}$، موسوم به تالی (بلافصل). اصول موضوعه‌ی پئانو برای اعداد طبیعی عبارتند از

(۱) $1 \in \mathbf{N}$؛

(۲) اگر $x \in \mathbf{N}$ آنگاه $s(x) \in \mathbf{N}$.

(۳) بازاء هر x از $\mathbf{N}$، $1 \neq s(x)$؛

(۴) اگر $s(x) = s(y)$ آنگاه $x = y$؛

(۵) اگر مجموعک A از $\mathbf{N}$ در شرایط ذیل صدق کند آنگاه $A = \mathbf{N}$:

(آ) $1 \in A$؛

(ب) همواره اگر $x \in A$ آنگاه $s(x) \in A$.

به استناد این اصول موضوعه، میتوان اعمال $+$ و $\times$ و نسبتی ترتیبی $(<)$ در $\mathbf{N}$ تعریف کرد، و ثابت نمود که $s(x) = x + 1$؛ و سایر خواص اعداد طبیعی را استخراج کرد. تطبیق اصول موضوعه‌ی پئانو با قضایای سابق آسان است.

۴.۴.۴. قضیه. مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است. به عبارت دیگر، حاصلجمع و نیز حاصلضرب دو عدد طبیعی عددی طبیعی است. (چرا؟)

۴.۴.۵. قضیه. بازاء هر دو عدد طبیعی m و n، اگر $n < m$ آنگاه $m - n$ عددی طبیعی است.

راهنمائی. به استقراء ثابت کنید که هر عدد طبیعی n در گزاره نمای ذیل صدق میکند:

تفاضل هر عدد طبیعی بزرگتر از n با n عددی طبیعی است.

۴.۴.۶. قضیه. بین یک عدد طبیعی و تالی بلافصل آن هیچ عدد طبیعی وجود ندارد.

برهان. (خلف). اگر چنین نباشد، عددی طبیعی مانند n هست که بین n و $n + 1$ عددی طبیعی وجود دارد. اگر m چنین عددی باشد خواهیم داشت $n < m$ و $m < n + 1$. بنا بر اولی، $m - n$ عددی طبیعی است، و بنا بر دومی، $m - n < 1$، و این با ۴.۲.۴ : V متناقض است. ▲

۴.۴.۷. قضیه. بازاء هر دو عدد طبیعی m و n،

$$m < n \;\Leftrightarrow\; m + 1 \leqslant n;$$
$$m < n + 1 \;\Leftrightarrow\; m \leqslant n.$$

اثبات به متعلم محول میشود.

۴.۴.۸. تمرین.
۱. تساوی موضوع بحث مسئلهی ۶ : ۴.۲.۸ را ثابت کنید.
۲. k عددی طبیعی و بزرگتر از 1 است. ثابت کنید که مجموعهی اعداد طبیعی کوچکتر از k مساوی مجموعهی اعداد طبیعی نابیشتر از $k - 1$ است.

۴.۵. تعریفات استقرائی یا تَراجُعی. تا هر مرحله که در ریاضیات پیش رویم با توابعی که حوزهی تعریفشان $\mathbf{N}$ است سر و کار داریم. در این توابع، که عنوان رشته دارند، بعداً با تفصیل کافی گفتگو میکنیم، اما فعلاً موضوع رشته را در کار نمیآوریم، بلکه مختصراً از طریق خاصی در تعریف کردن توابع بر $\mathbf{N}$ صحبت میکنیم.

روش کلی تعریف توابع را در ۲.۴ : ۳ آموختیم. در مورد تعریف توابعی که حوزهی تعریفشان $\mathbf{N}$ است روش خاصی هست که مبتنی بر اصل استقراء است، و در ریاضیات فوقالعاده اهمیت دارد. برای آماده ساختن ذهن، مطلب را با مثالی آغاز میکنیم. فرض کنیم در باب تابع f بر $\mathbf{N}$ این اطلاعات در دست است:

$$(۱) \qquad f(1) = -2,$$
$$(۲) \qquad f(n+1) = 2f(n) + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

ملاحظه کنید که رابطهی (۱) مقدار تابع مطلوب f را در 1 بدست میدهد، و رابطهی (۲) مقدار آن را در هر عدد طبیعی دیگر به مقدار آن در سابق بلافصل این عدد باز میگرداند. به همین مناسبت، رابطهی (۲) را یک رابطهی تراجعی نامیم. واضحست که، با اطلاعات دادهشده، میتوان مقدار f را در هر عدد طبیعی معیّنْ متدرجاً حساب کرد. مثلاً، برای محاسبهی $f(4)$ گوئیم

$$(۳) \qquad f(2) = f(1+1)[۲] = 2f(1) + 1[۱] = -3,$$
$$(۴) \qquad f(3) = f(2+1) = 2f(2) + 1 = -5,$$
$$(۵) \qquad f(4) = f(3+1) = 2f(3) + 1 = -9.$$

بنا بر ملاحظات مذکور، بدیهی بنظر میآید که اطلاعات دادهشده به وسیلهی (۱) و (۲) تابع f را بر $\mathbf{N}$ مشخص میسازند. این حکمْ حدسی بیش نیست، و در باب آن دو سؤال پیش میآید: اول آنکه آیا تابعی که در شرایط (۱) و (۲) صدق کند وجود دارد یا نه؛ دوم آنکه این تابع، در صورت وجود، منحصر بفرد است یا نه. در این موضوع قضیهای کلی هست که میتوان آن را بر اساس آنچه قبلاً ثابت کردیم ثابت کرد، ولی ما به بیان آن، بدون ذکر دلیل، اکتفا میکنیم:

۴.۵.۱. قضیه. فرض کنیم A مجموعهای از اشیاء دلخواه، و a عضو معینی از آن باشد. همواره یک و تنها یک تابع مانند f بر $\mathbf{N}$ بتوی A وجود دارد که در شرایط ذیل صدق میکند:

I. $f(1) = a$؛
II. f در رابطه‌ی تراجعی مفروضی صدق میکند (مقصود از رابطه‌ی تراجعی رابطه‌ای است که، بازاء هر عدد طبیعی n، مقدار $f(n+1)$ را بر حسب مقدار $f(n)$ و احیاناً n مشخص سازد؛ یا به عبارت دیگر، بازاء هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 مانند n، مقدار $f(n)$ را برحسب $f(n-1)$ و احیاناً n مشخص سازد.)

۴.۵.۲. تعریف. تعریف تابع f را بر طبق قضیه‌ی فوق تعریف تابع به استقراء یا به تراجع خوانند. و نیز، چون بدین وسیله، بازاء هر عدد طبیعی n، شیء موسوم به $f(n)$ مشخص میشود، در ریاضیات، تعریف استقرائی تابع f را، اغلب، تعریف استقرائی $f(n)$ مینامند، و در مورد بعضی از توابع خاص، اصلاً اسم تابع را بمیان نمیآورند (مثال ۴.۵.۴ ملاحظه شود).

۴.۵.۳. تبصره‌ی مهم. چنانکه متدرجاً خواهید دید، تعریف به استقراء وسیله‌ی تعریف دقیق بسیاری از اشیاء ریاضی است، و این روش ـ نه فقط در موارد فراوان، که پیروی از طریقه‌ی کلی تعریف توابع (۲.۴ : ۳) قابل اجرا نیست، وسیله‌ی تعریف اشیاء مورد نظر است ـ بلکه، در مواردی دیگر، تعریفات ساده‌تر و مساعدتر با استدلال بدست میدهد.

فرار از تعریفات استقرائی در مسائلی که جای این گونه تعریفات است منجر به تعریفگونه‌هائی عاری از دقت و مشکلات ناشی از آن میگردد[۱]، و باید بکلی از آن اجتناب کرد.

۴.۵.۴. مثال

فرض کنیم a عددی حقیقی باشد. بنا بر ۴.۵.۱، روابط

$$f(1)=a, \qquad f(n+1)=f(n)\cdot a \qquad (n \in \mathbf{N})$$

تابعی را که f نامیده شده است بتوی $\mathbf{R}$ تعریف میکنند. بعضی از مقادیر این تابع عبارتند از

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1)\cdot a = a\cdot a,\\ f(3) &= f(2)\cdot a = (a\cdot a)\cdot a,\\ f(4) &= f(3)\cdot a = ((a\cdot a)\cdot a)\cdot a. \end{aligned}$$

تابع f موضوع این مثال از توابع مهم ریاضیات مقدماتی است، و موسوم به تابع قوه‌ی طبیعی عدد حقیقی a است، و مقدارش را در n به نام a^n یا «قوه‌ی nم a» میخوانند.

روابط مذکور در آغاز مثال تعریف استقرائی این تابع یا، بر طبق اصطلاح مذکور در ۴.۵.۲، تعریف استقرائی a^n است. خلاصه،

۴.۵.۵. تعریف قوای طبیعی یك عدد حقیقی. قوه‌ی nم عدد حقیقی a، که آن را

---

(۱) از آن جمله است ناتوانی بسیاری از محصلین ریاضیات عالیه در محاسبات عادی با Σ و Π (§ ۷).

a^n مینامیم[1]، به استقراء چنین تعریف میشود:

$$a^1 = a, \qquad (۴\cdot۵\cdot۵\cdot۱)$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \qquad (n \in \mathbf{N}). \qquad (۴\cdot۵\cdot۵\cdot۲)$$

چنانکه در ۴.۵.۳ اشاره کردیم، تعریفات استقرائی با استدلال استقرائی بسیار مساعدند. اثبات قسمتهائی از قضیه‌ی ذیل بدین روش انجام میگیرد.

۴.۵.۶. قضیه (قواعد محاسبه با قوای طبیعی). همواره، به شرط بامعنی بودن جمل در روابطی که این شرط مورد دارد،

I. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

II. $a^n/a^m = \begin{cases} a^{n-m} & (m < n), \\ 1/a^{m-n} & (n < m). \end{cases}$

III. $(a^n)^m = a^{nm}$.

IV. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

V. $a^n/b^n = (a/b)^n$.

VI. $1^n = 1$.

برهان. از این قوانین، II و V، بترتیب نتیجه‌ی مستقیم I و IV اند، و اثبات سایرین به استقراء است. به عنوان مثال، I و II را ثابت و اثبات سایرین را به متعلم محول میکنیم.

اثبات I. بیان کامل حکم با توجه به لفظ «همواره» اینست: «بازاء هر عدد حقیقی a و هر دو عدد طبیعی m و n، رابطه‌ی I برقرار است». برای اثبات، فرض میکنیم a عدد حقیقی دلخواهی و m عدد طبیعی دلخواهی باشد، و به استقراء ثابت میکنیم که هر عدد طبیعی n در I صدق میکند.

اولاً، $a^1 \cdot a^m = a^{1+m}$، زیرا

$$a^{1+m} = a^{m+1}\,[۴\cdot۵\cdot۵\cdot۲] = a^m \cdot a\,[۴\cdot۵\cdot۵\cdot۱] = a^m \cdot a^1 = a^1 \cdot a^m.$$

ثانیاً، I را مفروض میگیریم و گوئیم

$$a^{n+1} \cdot a^m\,[۴\cdot۵\cdot۵\cdot۲] = (a^n \cdot a) \cdot a^m = (a^n \cdot a^m) \cdot a[\mathrm{I}]$$
$$= a^{n+m} \cdot a\,[۴\cdot۵\cdot۵\cdot۲] = a^{(n+m)+1} = a^{(n+1)+m}. \blacktriangle$$

اثبات II. (در این رابطه، فرض اینست که $a \neq 0$). اولاً، اگر $n > m$ آنگاه $n - m$ عددی طبیعی است. پس به موجب I، $a^m \cdot a^{n-m} = a^{m+(n-m)} = a^n$، و از اینجا قسمت اول II حاصل میشود. ثانیاً، اگر $m > n$ آنگاه $m - n$ عددی طبیعی است، و از آنجا قسمت دوم II بدست میآید. ▲

۴.۵.۷. تمرین

۰۱ در هریک از توابع ذیل که، به استقراء، بر $\mathbf{N}$ بتوی $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند، $f(5)$ و $f(8)$

---

(۱) در عبارت a^n، چنانکه میدانید، a را پایه، و n را قوه یا نماینده یا نما میخوانند.

را حساب کنید:

$$(\text{آ})\quad f(1)=a,\qquad f(n+1)=f(n)+d \qquad (n\in \mathbf{N}).$$
$$(\text{ب})\quad f(1)=a,\qquad f(n)=f(n-1)+d \qquad (n\geqslant 2).$$
$$(\text{پ})\quad f(1)=2,\qquad f(n+1)=nf(n)-n^2+2 \qquad (n\geqslant 1).$$

۲. آیا بر طبق آنچه تا کنون آموخته‌ایم میتوان a^n را «حاصلضرب a در خودش n مرتبه» تعریف کرد؟

۳. همواره $0^n = 0$.

۴. اگر $a > 0$ آنگاه همواره $a^n > 0$.

۵. اگر $a > 1$ آنگاه همواره $a^n > 1$، و اگر $0 < a < 1$ آنگاه همواره $a^n < 1$.

۶. همواره $2^n > n$.

۷. بطور کلی، اگر $a \geqslant 2$ آنگاه همواره $a^n > n$.

۸. بازاء هر عدد حقیقی a و هر عدد طبیعی n، $|a^n| = (|a|)^n$.

۹. همواره

$$(a^2-b^2)(a^4-b^4) \leqslant (a^3-b^3)^2.$$
$$(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2.$$

۱۰. اگر $ab \geqslant 0$ آنگاه

$$(a^2-b^2)^2 \geqslant (a-b)^4,$$

و اگر $ab \leqslant 0$ آنگاه

$$(a^2-b^2)^2 \leqslant (a-b)^4.$$

۴.۶. خوشترتیبی. چنانکه میدانیم، بعضی از مجموعه‌های مرتب اعداد ابتدا ندارند، و بعلاوه، ممکن است یک مجموعه‌ی مرتب خود ابتدا داشته باشد، ولی دارای مجموعکهای بی‌ابتدا باشد. مجموعه‌هائی که هر مجموعک غیر خالی آنها ابتدا دارد در ریاضیات اهمیت فراوان دارند. لهذا، اصطلاح خاصی برای آنها میآوریم.

۴.۶.۱. تعریف. مجموعه‌ی مرتب $(A, <)$ از اعداد را خوشترتیب خوانیم هرگاه هر مجموعک[1] غیر خالی A ابتدا داشته باشد. در این صورت گوئیم نسبت $<$ مجموعه‌ی A را خوشترتیب میکند.

۴.۶.۲. امثله

(آ). هیچ یک از $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ خوشترتیب نیست.

(ب). مجموعه‌ی $\{1, 0, 2\}$ خوشترتیب است (جمیع مجموعکهای غیر خالی آن را بنویسید، و تحقیق کنید که جملگی ابتدا دارند).

(پ). $\varnothing$ خوشترتیب است، زیرا مجموعک غیر خالی ندارد.

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم تعریف است:

---

(۱) بخاطر داشته باشید که هر مجموعه یکی از مجموعکهای خود میباشد.

۴.۶.۳. قضیه. اگر نسبت $>$ مجموعه‌ای از اعداد را خوشترتیب کند هر مجموعک آن را نیز خوشترتیب میکند. (چرا؟)

یکی از مهمترین خواص مجموعه‌ی مرتب اعداد طبیعی خوشترتیبی آنست:

۴.۶.۴. قضیه. مجموعه‌ی اعداد طبیعی با نسبت $>$ خوشترتیب است. به عبارت دیگر، هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد طبیعی برحسب نسبت $>$ ابتدا دارد.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی باشد، یعنی $A \subseteq \mathbf{N}$ (۱) و $A \neq \varnothing$ (۲). گوئیم A ابتدا دارد. برای این منظور، فرض کنیم

$$B = \{k \mid \text{از هر عضو } A \text{ نابیشتر است } k\}.$$

به‌آسانی دیده میشود که B دارای خواص ذیل است (ثابت کنید):

(۳) $1 \in B$؛

(۴) تالی هیچ عضو A به B تعلق ندارد؛

(۵) $B \subset \mathbf{N}$.

اینک گوئیم B عضوی دارد که تالی آن عضو B نیست. زیرا، اگر چنین نباشد، بنا بر (۳) و اصل استقراء، لازم میآید که $B = \mathbf{N}$، و این با (۵) متناقض است. فرض کنیم m این عضو باشد؛ یعنی، $m \in B$ (۶) ولی $m + 1 \notin B$ (۷). گوئیم m ابتدای A است. اثبات آسان است. بنا بر(۶)، m از همه‌ی اعضای A نابیشتر است. باقی میماند اثبات اینکه $m \in A$. اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم $m \notin A$ (۸). اگر n عضو دلخواهی از A باشد، بنا بر (۶) و تعریف B، $m \leqslant n$. پس، بنا بر (۸)، $m < n$. بالنتیجه، $m + 1 \leqslant n$. پس، چون n عضو دلخواهی از A فرض شده بود، $m + 1$ از هر عضو A نابیشتر است، و لهذا، $m + 1 \in B$، و این با (۷) متناقض است. ▲

۴.۶.۵. فایده. قضیه‌ی ۴.۶.۴ از وسایل بسیار توانا در استدلال است. بالاخص، استعمال آن در برهان خلف جهت اثبات اینکه همه‌ی اعضای مجموعکی غیر خالی مانند M از $\mathbf{N}$ دارای خاصیت معین F هستند بدین نحو است که فرض میکنیم چنین نباشد. در این صورت، اگر A مجموعه‌ی اعضائی از M باشد که فاقد خاصیت F هستند، A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی خواهد بود. پس، بنا بر ۴.۶.۴، A ابتدا دارد. از وجود ابتدا برای A تناقض مطلوب را استخراج میکنند. نمونه‌هائی از این روش در اثبات صور مختلف اصل استقراء خواهد آمد.

برای آماده کردن ذهن جهت قضیه‌ی آتیه، تذکر میدهیم که بسیاری از خواص هستند که همه‌ی اعداد طبیعی واجد آنها نیستند، اما، همه‌ی اعداد طبیعی «از مرتبه‌ای ببعد»، یعنی همه‌ی اعداد طبیعی ناکمتر از عدد طبیعی معیّنی مانند m، واجد آنها میباشند . در اثبات

---

(۱) مثلاً، اعداد 1 و 2 در نامساوی $2n + 1 < 2^n$ صدق نمیکنند، اما چنانکه خواهیم دید، این نامساوی بازاء $n \geqslant 3$ همواره برقرار است.

احکامی از این قبیل، قضیه‌ی ذیل فواید بسیار دارد:

۴.۶.۶. قضیه (استقراء ابتدا از عدد طبیعی m). اگر m عدد طبیعی مفروضی و F خاصیتی تابع شرایط ذیل باشد آنگاه همه‌ی اعداد طبیعی ناکمتر از m خاصیت F دارند:

I. $F(m)$؛

II. بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $m \leqslant n$ و $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$.

برهان (خلف). مجموعه‌ی اعداد طبیعی ناکمتر از m را M مینامیم، و فرض میکنیم که I و II برقرار باشند، اما همه‌ی اعضای M خاصیت F نداشته باشند. پس، اگر A مجموعه‌ی اعضائی از M باشد که فاقد خاصیت Fاند A ابتدا دارد، و اگر k ابتدای آن باشد، بنا بر I، $k \neq m$، و لهذا، بنا بر تعریفِ M، $m < k$، و از آنجا $1 < k$. پس، عدد $n = k - 1$ عددی طبیعی است. چون $m < k = n + 1$، $m \leqslant n$، و بالنتیجه، $m \leqslant n < k$. پس، از طرفی، بنا بر II، $n + 1$، یعنی k، خاصیت F دارد، و از طرف دیگر، بنا بر تعریف k، k خاصیت F ندارد. با این تناقض، برهان تمام است. ▲

۴.۶.۷. فایده. استعمال قضیه‌ی ۴.۶.۶ مانند آنست که در ۴.۳.۴ توضیح داده شد: برای اینکه به استقراء ابتدا از عدد طبیعی m ثابت کنیم که همه‌ی اعداد طبیعی ناکمتر از m خاصیت F دارند، ثابت میکنیم که F تابع شرایط I و II قضیه‌ی ۴.۶.۶ است. برای اثبات II، فرض میکنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد بطوری که $m \leqslant n$ و $F(n)$، و از این مفروضات (فرض استقراء)، $F(n+1)$ را نتیجه میگیریم. نظیر نکاتی که در پ: ۴.۳.۵ گفته شد در اینجا نیز باید رعایت شود.

۴.۶.۷.۱. امثله

(آ). مقایسه‌ی مقادیر $2n+1$ و 2^n بازاء مقادیر طبیعی n.

به محاسبه معلوم میشود که

n	1	2	3	4	5	6
$2n+1$	3	5	7	9	11	13
2^n	2	4	8	16	32	64

این نتایج ممکن است چنین به ذهن القا کنند که

(*) بازاء هر عدد طبیعی n که $n \geqslant 3$، $2n + 1 < 2^n$.

اینک به اثبات این حکم به استقراء ابتدا از 3 میپردازیم. گزاره‌نمای $2n + 1 < 2^n$ را $F(n)$ مینامیم. به محاسبه معلوم شد که $F(3)$ راست است. حال فرض میکنیم:

(۱) $n \geqslant 3,$ (۲) $2n + 1 < 2^n,$

و $F(n+1)$، یعنی $2(n+1)+1 < 2^{n+1}$، را ثابت میکنیم. گوئیم، بنا بر (۲)، $4n+2 < 2^{n+1}$ (۳). اما $2n+3 < 4n+2$ (۴) (زیرا، این نامساوی معادل $2n > 1$ است). اینک، از (۳) و (۴)، $F(n+1)$ حاصل میشود. پس، به استقراء ابتدا از 3، (*) برقرار است.

(ب). بازاء هر عدد طبیعی n، $n^2 < 2^{n+1}$.

به محاسبه دیده میشود که حکم بازاء $n=1$ و $n=2$ برقرار است. اینک به استقراء ابتدا از 3 ثابت میکنیم که بازاء هر n، اگر $n \geqslant 3$ آنگاه $n^2 < 2^{n+1}$ (۱). این نامساوی بازاء $n=3$ برقرار است. حال فرض کنیم $n \geqslant 3$ (۲)، و (۱) نیز برقرار باشد. گوئیم $(n+1)^2 < 2^{n+2}$. زیرا، $(n+1)^2 = n^2\,(1+\frac{1}{n})^2$.

اما، به موجب (۲)، $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3}$، و لهذا $1+\frac{1}{n} \leqslant 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. بالنتیجه، با توجه به فرض استقراء،

$$(n+1)^2 \leqslant \frac{16}{9}\,n^2 < \frac{16}{9}\cdot 2^{n+1} < 2\cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}. \blacktriangle$$

به عنوان مثال دیگر، از فواید قضیه‌ی ۴.۶.۶، ثابت میکنیم که

۴.۶.۸. قضیه. اگر خاصیت F تابع شرایط ذیل باشد جمیع اعداد طبیعی خاصیت F دارند:

I. $F(1)$ و $F(2)$؛

II. بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n > 1$ و $F(n-1)$ و $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$.

برهان. گزاره‌نمای

$n-1$ و n خاصیت F دارند

را $G(n)$ مینامیم. به استقراء ابتدا از 2 ثابت میکنیم که هر عدد طبیعی ناکمتر از 2 خاصیت G دارد. بنا بر I، $G(2)$ برقرار است. اگر $n > 1$ و $G(n)$ برقرار باشد خواهیم داشت: $F(n-1)\ \&\ F(n)$ (۱). پس، بنا بر II، $F(n+1)$ (۲). با بر(۱) و (۲)، $n+1$ خاصیت G دارد. پس، ثابت شد که هر عدد طبیعی خاصیت G دارد. اینک، اگر، n عدد طبیعی دلخواهی باشد، هرگاه $n=1$ آنگاه بنا بر I، و الّا، بنا بر آنچه ثابت شد، n خاصیت F دارد. ▲

۴.۶.۹. تمرین

۱. روابط ذیل هر یک از مرتبه‌ای ببعد همواره برقرار است. این مرتبه را تعیین و حکم را به استقراء ثابت کنید:

(آ) $n^2 < 2^n$. (ب) $n^3 < 3^n$.

۲. حاصلضرب دو عدد طبیعی که یکی از آنها ناکمتر از 2 و یکی ناکمتر از 3 باشد از

حاصلجمع آنها بزرگتر است.
۳. هر عدد طبیعی بزرگتر از 15 را میتوان به صورت $3k + 5l$ نوشت، که در آن، k و l دو عدد طبیعی‌اند.

۴.۶.۱۰. قضیه (استقراء قوی ابتدا از عدد طبیعی m[1]). اگر m عددی طبیعی و F خاصیتی تابع شرایط ذیل باشد جمیع اعداد طبیعی ناکمتر از m خاصیت F دارند.

I. $F(m)$؛

II. بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $m \leqslant n$ و همه‌ی اعداد طبیعی ناکمتر از m و نابیشتر از n خاصیت F داشته باشند $n + 1$ نیز خاصیت F دارد.

اثبات به برهان خلف و به استناد ۴.۶.۴ است، و به متعلمین پیشرفته محول میشود.

۴.۶.۱۱. تبصره. در اثبات حکمی به صورت «هر عدد طبیعی خاصیت F دارد» به استقراء قوی، باید، اولاً، $F(1)$ را ثابت کرد، و ثانیاً، از این فرض که همه‌ی اعداد طبیعی نابیشتر از n خاصیت F دارند (فرض استقراء) نتیجه گرفت که $n + 1$ خاصیت F دارد. در واقع، فرض استقراء در اینجا عبارتست از

$$F(1), F(2), \ldots, F(n-1), F(n).$$

البته، استخراج $F(n+1)$ از این مقدمات آسانتر از استخراج آن تنها از $F(n)$ در روش استقراء عادی (۴.۳.۴) است، و هکذا وقتی که استقراء از عددی طبیعی جز 1 آغاز شود. قید «قوی» در ۴.۶.۱۰ ناظر به همین امر است، و در مقابل، ۴.۳.۴ و ۴.۶.۶ را گاه مقید به قید «ضعیف» میکنند.

۴.۷. پایان. در صفحات قبل، خواص اساسی دستگاه اعداد طبیعی را آموختیم. خواص بسیار متعدد این اعداد را، که با بعضی از آنها آشنا هستید، و احکام مذکور در § ۷ فصل ۳ را در باب مجموعه‌های متناهی و نامتناهی میتوان بر اساس احکام سابق‌الذکر ثابت کرد، ولی قدم نهادن در این راه دراز از موضوع کار ما خارج است، و در آتیه، آن خواص و احکام را معلوم فرض میکنیم، و عنداللزوم به تکمیل آنها میپردازیم. مثلاً، در ب: ۴.۶.۲ دیدیم که مجموعه‌ی متناهی $\{2, 0, 1\}$ خوشترتیب است. بطور کلی، چنین بنظر میرسد که هر مجموعه‌ی غیر خالی و متناهی از اعداد، برحسب نسبت $>$، ابتدا و انتها دارد. این مطلب، در مورد مجموعه‌هائی دارای یک یا دو عضو، در قسمتهای (آ) و (ب) از ۲.۶.۴ ثابت شد. اینک که حربه‌ی توانای استقراء در دست است میتوان آن را بطور کلی ثابت کرد:

۴.۷.۱. قضیه. هر مجموعه از اعداد حقیقی که متناهی و غیر خالی باشد ابتدا و انتها دارد. (بالنتیجه، هر مجموعه‌ی متناهی از اعداد حقیقی خوشترتیب است.)

برهان. حکم را در مورد انتها ثابت میکنیم. باید ثابت کرد که

---

(۱) در حالتی که $m = 1$ مطلقا استقراء قوی میگوئیم.

(*) بازاء هر عدد طبیعی n، هر مجموعه از اعداد که دارای n عضو باشد انتها دارد.
اثبات به استقراء نسبت به عده‌ی اعضا است. چنانکه گفته شد، هر مجموعه از اعداد که یک یا دو عضو داشته باشد دارای انتها است. پس، فرض کنیم حکم بازاء هر مجموعه‌ای از اعداد که دارای n عضو باشد برقرار باشد، و A مجموعه‌ای از اعداد و دارای $n+1$ عضو باشد. عضو دلخواهی از A، مثلاً a، را اختیار میکنیم. مجموعه‌ی $A-\{a\}$ دارای n عضو است. پس بنا بر فرض استقراء، $A-\{a\}$ عضو ماکزیموم دارد. این عضو را b مینامیم. مجموعه‌ی $\{a, b\}$، چنانکه گفته شد، عضو ماکزیموم دارد. فرض کنیم $c = \text{Max}\,\{a, b\}$. با اندک تأملی معلوم میشود که، اولاً $c \in A$، و ثانیاً، هر عضو A از c نابیشتر است. پس $c = \text{Max}\,A$. بنا بر این، به موجب اصل استقراء، (*) برقرار است. ▲

۴.۷.۲. فایده. بنا بر قضیه‌ی فوق، هر مجموعه‌ای از اعداد که ابتدا (انتها) نداشته باشد نامتناهی است. این نکته در اثبات نامتناهی بودن مجموعه‌ها مفید است.

۴.۷.۳. تعریفات استقرائی. قضیه‌ی تعریف استقرائی (۴.۵.۱) را میتوان به صورتهائی کلیتر ثابت کرد. در این مختصر به بیان آنها اکتفا میکنیم.

نظیر قضیه‌ی مهم ۴.۶.۶، قضیه‌ای است در باب تعریف تابعی مانند f بر مجموعه‌ی اعداد طبیعی ناکمتر از عدد طبیعی معیّن m، یعنی بر مجموعه‌ی $M = \{n \mid m \leqslant n\}$. بیان قضیه مانند ۴.۵.۱ است با قرار دادن m بجای 1، M بجای $\mathbf{N}$، و مقید ساختن n به M. بعلاوه، بجای اینکه، در آغاز مقدار f در m داده شود، ممکن است مقدار f را در تعدادی معیّن از اعضای متوالی M از m ببعد بدهند، و پس از آن، به وسیله‌ی رابطه‌ای تراجعی مشخص سازند. این رابطه‌ی تراجعی ممکن است مقدار f را در n بر حسب n و مقادیر تابع در تعداد معینی از اعضای M که بلافاصله پیش از n هستند بیان کند. مثلاً، روابط

$$(۱) \qquad f(2) = 1, \qquad f(3) = 0,$$
$$(۲) \qquad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (n > 3)$$

تابع موسوم به f را بر $\{n \mid 2 \leqslant n\}$ تعریف میکنند. در اینجا، روابط (۱) مقادیر تابع را در 2 و 3 بدست میدهند، و رابطه‌ی تراجعی (۲) مقدار تابع را در n $(n > 3)$ بر حسب مقادیر آن در $n-1$ و $n-2$ بیان میکند. مثلاً،

$$f(4) = f(3) + f(2) = 1,$$
$$f(5) = f(4) + f(3) = 1,$$
$$f(6) = f(5) + f(4) = 2.$$

بالاخره، رابطه‌ی تراجعی تعریف تابع مورد بحث را به صورت ذیل نیز میتوان عرضه کرد:

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) \qquad (n \geqslant 3).$$

تعریف استقرائی صورت دیگری نیز دارد (تعریف به استقراء قوی) و آن اینکه رابطه‌ی تراجعی تعریف تابع مقدار تابع را در عضوی مانند n از حوزه‌ی تعریف آن

برحسب n و مقادیر تابع در همه‌ی اعضای ماقبل n مشخص میسازد.

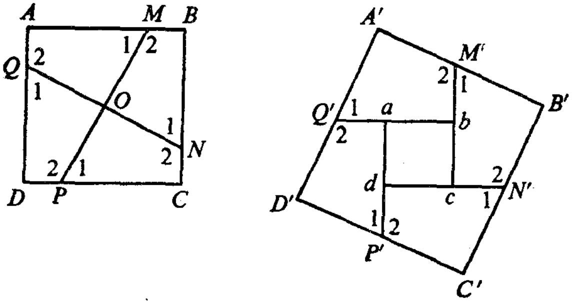
۴.۷.۴. تبصره. تا کنون استدلال استقرائی و تعریف تراجعی را در مسائل مربوط به اعداد حقیقی بکار بردیم. اما، دامنه‌ی استعمال این روشها و توانائی آنها محدود به این مسائل نیست. برای اینکه محصلین وسعت نظر حاصل کنند، مثالی از نوع دیگر میآوریم.

۴.۷.۴.۱. مثال

میخواهیم ثابت کنیم که هر تعداد متناهی (حد اقل 2) مربع را همواره میتوان چنان بُرید که، با قرار دادن قطعات حاصل در کنار یکدیگر به طریق مناسب، مربعی حاصل شود. اثبات به استقراء ابتدا از 2 است نسبت به عده‌ی مربعات. اثبات حکم در مورد دو مربع آسان است. فرض کنیم $ABCD$ و $abcd$ دو مربع مفروض با اضلاع x و y باشند (شکل ۳۲)، و $x \leqslant y$، و

$$AM = BN = CP = DQ = \frac{x+y}{2}.$$

به آسانی دیده میشود که خطوط MP و QN در مرکز مربع $ABCD$ تلاقی میکنند، و بر هم عمودند. اینک مربع $ABCD$ را در امتداد این خطوط به چهار پاره تقسیم میکنیم، و این پاره‌ها را، به طریقی که در قسمت راست شکل دیده میشود، در اطراف مربع $abcd$ قرار میدهیم. به آسانی میتوان ثابت کرد که شکل $A'B'C'D'$ که بدین گونه حاصل میشود مربع است.



شکل ۳۲

اینک فرض کنیم حکم در مورد هر دسته از n مربع $(n \geqslant 2)$ برقرار باشد، و S دسته‌ای از $n+1$ مربع باشد. این مربعات را، به وسیله‌ی شماره‌گذاری، میتوان S_1، S_2، . . .، S_n، و S_{n+1} نامید. بنا بر فرض استقراء، n مربع S_1، S_2، . . .، و S_n را میتوان چنان برید که اگر قطعات حاصل را به طریقی مناسب در کنار هم قرار دهیم مربعی مانند S' بدست آید. بعلاوه، بنا بر آنچه ثابت شد، دو مربع S' و S_{n+1} را نیز میتوان به همان گونه برید. پس، چون در این برش نهائی قطعات حاصل از مربع S' قطعاتی حاصل از بریدن مربعات S_1، . . .، S_n هستند، حکم در مورد $n+1$ مربع مذکور برقرار است. ▲

۴.۷.۵. تمرین

۱. میخواهیم ثابت کنیم که هر تعداد متناهی از محصلین که در امتحانی شرکت کنند جملگی یک نمره میگیرند.
اثبات به استقراء است. گزاره‌نمای
(*) اگر گروهی از n محصل در امتحانی شرکت کنند جملگی یک نمره میگیرند
را $F(n)$ مینامیم. بالبداهه، $F(1)$ راست است. اینک (*) را مفروض میگیریم، و فرض میکنیم A مجموعه‌ای از $n+1$ محصل باشد. دو محصل معیّن از این مجموعه را در نظر میگیریم، و آنها را a و b مینامیم، و فرض میکنیم B مجموعه‌ی سایر محصلین باشد. $B \cup \{a\}$ مجموعه‌ای است از n محصل، و لهذا، بنا بر فرض استقراء، اگر این محصلین در امتحانی شرکت کنند جملگی یک نمره میگیرند. پس، نمره‌ی هر محصل متعلق به B مساوی نمره‌ی a است. به همین قیاس، با توجه به مجموعه‌ی $B \cup \{b\}$ معلوم میشود که اگر محصلین متعلق به این مجموعه در امتحانی شرکت کنند محصلین متعلق به B همان نمره‌ای را که b میگیرد میگیرند. پس، اگر محصلین متعلق به A، یعنی به $B \cup \{a\} \cup \{b\}$، در امتحانی شرکت کنند، جملگی یک نمره میگیرند. بالنتیجه، بنا بر اصل استقراء، حکم ثابت است.
چه ایرادی بر این استدلال وارد است؟

۲. میخواهیم ثابت کنیم که هر تعداد متناهی از خطوط مستقیم واقع در یک صفحه که دو بدو متوازی نباشند از یک نقطه میگذرند.
اثبات به استقراء ابتدا از 2 نسبت به عده‌ی خطوط است. بالبداهه، حکم بازاء دو خط برقرار است. فرض کنیم حکم بازاء n $(n \geqslant 2)$ خط برقرار باشد، و D_1، . . .، D_n، و D_{n+1} دسته‌ای از $n+1$ خط دو بدو نامتوازی باشد. بنا بر فرض استقراء، D_1، . . .، D_n از یک نقطه، مثلاً M، میگذرند. برهان را تمام کنید، و نادرستی آن را توضیح دهید.

۳. هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد طبیعی که از بالا به عددی طبیعی محدود باشد (یعنی همه‌ی اعضایش از عدد طبیعی معینی نابیشتر باشند) انتها دارد.

۴. اگر F خاصیتی باشد بطوری که همواره اگر عددی طبیعی واجد این خاصیت باشد عددی طبیعی و کوچکتر از آن و واجد خاصیت F موجود باشد آنگاه هیچ عدد طبیعی واجد خاصیت F نیست. (این قضیه در حساب عالی فواید عدیده دارد.)

۵ § اعداد صحیح

۵.۱. تعریف. مجموعه‌ی اعداد صحیح، که آن را $\mathbf{I}$ مینامیم، یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی و متقابلهای آنها و صفر. به عبارت دیگر، بنا بر تعریف،
$$\mathbf{I} = \mathbf{N} \cup \{-x \mid x \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}.$$
اثبات قضیه‌ی ذیل بر متعلم است:

۵.۱.۱. قضیه.
I. بازاء هر عدد صحیح a، همواره یکی و تنها یکی از روابط ذیل برقرار است:
$$a = 0, \qquad a \in \mathbf{N}, \qquad -a \in \mathbf{N}.$$
II. متقابل هر عدد صحیح عددی است صحیح.

۵.۱.۲. بعضی از مجموعکهای $\mathbf{I}$. بعضی از مجموعکهای مهم مجموعه‌ی اعداد صحیح عبارتند از

$\mathbf{I}^+$، یا مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت، که همان $\mathbf{N}$ است،

$\mathbf{I}^-$، یا مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی، که مجموعه‌ی متقابلهای اعداد طبیعی است،

$\mathbf{I}_m$، که مجموعه اعداد صحیح ناکمتر از عدد صحیح m است. بالاخص، $\mathbf{I}_0$ (مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی) مساوی $\mathbf{N} \cup \{0\}$ میباشد.

۵.۱.۳. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه یک عدد حقیقی عدد صحیح باشد آنست که مساوی تفاضل دو عدد طبیعی باشد.

برهان. لزوم. فرض کنیم $a \in \mathbf{I}$. بنا بر ۵.۱.۱، $a = 0$ یا $a \in \mathbf{N}$ یا $-a \in \mathbf{N}$. در حالت اول، $a = 1 - 1$؛ در حالت دوم، $a = (a+1) - 1$. و در حالت سوم $a = 1 - (-a+1)$. پس، در هر حالت، a تفاضل دو عدد طبیعی است.

کفایت. فرض کنیم a عددی دلخواه باشد، و دو عدد طبیعی مانند m و n موجود باشد که $a = n - m$. بنا بر اصل تثلیث، $n = m$ یا $m < n$ یا $n < m$. در حالت اول $a = 0$؛ در حالت ثانی $a \in \mathbf{N}$، و در حالت سوم $-a \in \mathbf{N}$. پس، در هر حالت $a \in \mathbf{I}$ ▲

۵.۱.۴. قضیه. $\mathbf{I}$ نسبت به اعمال جمع، تفریق، و ضرب بسته است

برهان (در مورد جمع) فرض کنیم $a, b \in \mathbf{I}$. باید ثابت کرد که $a + b \in \mathbf{I}$. بنا بر فرض و ۵.۱.۳، اعدادی طبیعی مانند m، n، p، و q هست که $a = n - m$ و $b = q - p$.

پس،

$$a + b = (n - m) + (q - p) = (n + q) - (m + p).$$

پس، بنا بر ۵.۱.۳، $a + b \in \mathbf{I}$. ▲

۵.۱.۵ تمرین

۱. اگر n عددی صحیح باشد بین n و $n+1$ عددی صحیح وجود ندارد (به همین جهت، $n+1$ را تالی بلافصل n، و n را سابق بلافصل $n+1$ خوانیم).

۲. اگر $m, n \in \mathbf{I}$ و $m < n+1$ آنگاه $m \leqslant n$.

۳. مجموعه‌ی اعداد صحیح ابتدا ندارد.

۵.۲. قوای صحیح اعداد حقیقی. یکی از مسائل مهمی که در ریاضیات با آن مواجه میشویم مسئله‌ی توسیع یک تابع است، که در ۳.۳.۳ : ۳ بدان اشاره کردیم. مثلاً، در ۴.۵.۵، بازاء عدد حقیقی a، تابعی بر $\mathbf{N}$ تعریف کردیم که مقدارش بازاء عدد طبیعی n به نام a^n خوانده میشود. اینک، بازاء عدد حقیقی و غیر از صفر a تابعی بر $\mathbf{I}$، موسوم به تابع قوه‌ی صحیح a، تعریف میکنیم که تابع سابق مجموعکی از آن باشد. برای مقدار این تابع در عدد صحیح n علامت خاصی وضع نمیکنیم، بلکه آن را به همان نام a^n میخوانیم. چون

a^n بازاء اعضای $\mathbf{N}$ تعریف شده است، برای اتمام تعریف آن، با توجه به تعریف $\mathbf{I}$ (۵.۱)، کافی است آن را بازاء $n = 0$ و $-n \in \mathbf{N}$ — تعریف کنیم. تعریف از این قرار است:

۵.۲.۱. تعریف قوه‌ی صحیح. فرض کنیم a عددی حقیقی و غیر از 0 باشد. بازاء عدد صحیح n، قوه‌ی nم a، که آن را a^n مینامیم، بر طبق ضابطه‌ی ذیل تعریف میشود:

I. اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه a^n همان است که در ۴.۵.۵ تعریف شد؛

II. $a^0 = 1$؛

III. اگر $-n \in \mathbf{N}$ — آنگاه $a^n = 1/a^{-n}$.

۵.۲.۱.۱. تبصره.

I. در مورد قوای صحیح نامنفی اعداد حقیقی، بعضی از ریاضیون قید $a \neq 0$ را برمیدارند. بدین گونه، این قوا بر طبق قسمتهای I و II از ۵.۲.۱، بدون قید $a \neq 0$، تعریف میشوند، و بالاخص، $0^0 = 1$.

II. نظر به نحوه‌ی تعریف قوه‌ی صحیح، در اثبات احکام مربوط به قوای صحیح، گاه باید به طریقه‌ی حالات متوسل شد (مثلاً، برهان ۵.۲.۲ و ۵.۲.۳ ملاحظه شود).

۵.۲.۲. قضیه. اگر $a \neq 0$ و $n \in \mathbf{I}$ آنگاه، اولاً، $a^n \neq 0$؛ و ثانیاً،

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

برهان. فرض کنیم $a \neq 0$ (۱) و $n \in \mathbf{I}$ (۲). اولاً، اگر $n = 0$، بنا بر تعریف، و اگر $n \in \mathbf{N}$، بنا بر تعریف و خواص قوای طبیعی، $a^n \neq 0$. بالاخره، اگر $-n \in \mathbf{N}$ — آنگاه بنا بر آنچه گذشت، $a^{-n} \neq 0$. پس، بنا بر III : ۵.۲.۱، $a^n \neq 0$. ثانیاً، اگر $n = 0$ یا $-n \in \mathbf{N}$ — آنگاه تساوی مذکور نتیجه‌ی مستقیم ۵.۲.۱ است. بالاخره، اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه $-(-n) \in \mathbf{N}$ — . پس، بنا بر III : ۵.۲.۱،

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{-(-n)}} = \frac{1}{a^n},$$

و از آنجا، $a^n = 1/a^{-n}$. ▲

۵.۲.۳. قضیه (قواعد محاسبه با قوای صحیح). همواره، به شرط با معنی بودن جمله‌ها بر طبق تعریفات[۱]،

I. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

II. $a^n/a^m = a^{n-m}$.

III. $(a^n)^m = a^{nm}$.

IV. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

---

(۱) البته در مورد VI این شرط زاید است.

$$\text{V.}\qquad a^n/b^n = (a/b)^n.$$
$$\text{VI.}\qquad 1^n = 1.$$

برهان. به عنوان نمونه، I را ثابت میکنیم. برای این منظور چند حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: حد اقل یکی از m و n صفر است. در این حالت تساوی به موجب II : ۵.۲.۱ برقرار میباشد.

حالت دوم: $m > 0$ و $n > 0$. تساوی بنا بر I : ۴.۵.۶ برقرار است.

حالت سوم: $m < 0$ و $n < 0$. پس، $-m > 0$ و $-n > 0$.

$$a^n \cdot a^m\ [\text{۵.۲.۱ : III}] = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot a^{-m}}\ [\text{حالت دوم}]$$
$$= \frac{1}{a^{(-n)+(-m)}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}}\ [\text{۵.۲.۲}] = a^{n+m}$$

حالت چهارم: یکی از m و n مثبت و دیگری منفی است. بی آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، میتوان فرض کرد که $m < 0$ و $n > 0$. بنا بر ۵.۲.۲،

$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{a^n}{a^{-m}}.$$

اینک این حالت را به سه شق منشق میکنیم. شق اول: $n = -m$. بنا بر رابطه‌ی فوق، $a^n \cdot a^m = 1$، و بعلاوه، $a^{n+m} = a^0 = 1$. پس، I برقرار میباشد. شق دوم: $-m < n$، و یا $n + m > 0$. بنا بر رابطه‌ی فوق و II : ۴.۵.۶، $a^n \cdot a^m = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$. شق سوم: $n < -m$، و یا $n + m < 0$. بر طبق همان مستندات و ۵.۲.۲،

$$a^n \cdot a^m = \frac{1}{a^{(-m)-n}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{n+m}. \blacktriangle$$

بر متعلم است که سایر احکام قضیه را با تفصیل تمام ثابت کند.

اینک به چند نامساوی مهم مربوط به قوای صحیح میپردازیم.

۵.۲.۴. قضیه. فرض کنیم $a > 0$ و $n \in \mathbf{I}$.

I. اگر $a > 1$ آنگاه

$$n < 0 \iff a^n < 1, \qquad n > 0 \iff a^n > 1,$$

II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه

$$n < 0 \iff a^n > 1. \qquad n > 0 \iff a^n < 1,$$

برهان. فرض کنیم $a > 0$ و $n \in \mathbf{I}$.

قسمت I. فرض کنیم $a > 1$. به آسانی به استقراء معلوم میشود که همواره اگر $n > 0$ آنگاه $a^n > 1$. اگر $n < 0$ آنگاه $-n > 0$، و بنا بر آنچه ثابت شد، $a^{-n} > 1$، و از آنجا، $a^n < 1$. پس، نیمی از هر یک از دو معادله برقرار است. بالعکس، با مفروضات

سابق، فرض کنیم، $a^n < 1$ (۱). گوئیم $0 < n$. اثبات به برهان خلف است. اگر $\sim (n > 0)$ آنگاه $n \leqslant 0$. اگر $n = 0$ آنگاه $a^n = 1$، و اگر $n < 0$ آنگاه، بنا بر آنچه ثابت شد، $a^n > 1$، و این هر دو با (۱) متناقض است. به همین طریق معلوم میشود که اگر $a^n < 1$ آنگاه $n < 0$.

قسمت II. کافی است ملاحظه کنیم که اگر $0 < a < 1$ آنگاه $1/a > 1$. پس، بنا بر قسمت I، $n > 0$ معادل $(1/a)^n > 1$ است، که خود معادل $a^n < 1$ میباشد، و هکذا در مورد معادله‌ی دوم. ▲

۵.۲.۵. قضیه. فرض کنیم $a > 0$، $b > 0$، و $n \in \mathbf{I}$.

I. اگر $n > 0$ آنگاه $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.

II. اگر $n < 0$ آنگاه $a^n > b^n \Leftrightarrow a < b$.

برهان. فرض کنیم $a > 0$، $b > 0$، و $n \in \mathbf{I}$.

قسمت I. فرض کنیم $n > 0$. اگر $a < b$ آنگاه $b/a > 1$، و بنا بر قضیه‌ی قبل، $(b/a)^n > 1$، و از آنجا $a^n < b^n$ (۱). بالعکس، اگر (۱) برقرار باشد، ولی $\sim (a < b)$ آنگاه $b \leqslant a$. اگر $a = b$ آنگاه $a^n = b^n$، و اگر $a < b$ آنگاه، بنا بر قسمتی که ثابت شد، $a^n < b^n$، و این هر دو با (۱) متناقض است.

قسمت II. فرض کنیم $n < 0$. پس، $-n > 0$. بنا بر قسمت I، نامساوی $a < b$ معادل نامساوی $a^{-n} < b^{-n}$ است، که معادل $a^n > b^n$ میباشد. ▲

۵.۲.۶. قضیه.

I. اگر $a \geqslant 0$ و $b \geqslant 0$، و بازاء عددی طبیعی مانند n، $a^n = b^n$ آنگاه $a = b$.

II. اگر $a > 0$ و $b > 0$، و بازاء عددی صحیح و غیر از 0 مانند n، $a^n = b^n$ آنگاه $a = b$.

برهان. قسمت I. فرض کنیم $a \geqslant 0$، $b \geqslant 0$، $n \in \mathbf{N}$، و $a^n = b^n$. اگر $a = 0$ آنگاه $a^n = 0$، و از آنجا، $b^n = 0$، و بالنتیجه، $b = 0$. پس، $a = b$. و قس علیهذا اگر $b = 0$. پس، فرض کنیم $a > 0$ و $b > 0$. اگر $a \neq b$ آنگاه، بنا بر ۵.۲.۵ : I خواهیم داشت، $a^n < b^n$ یا $a^n < b^n$، و این هر دو مخالف فرض است. پس، $a = b$.

قسمت II. فرض کنیم $a > 0$، $b > 0$، $n \neq 0$، و $a^n = b^n$. اگر $n > 0$ آنگاه، بنا بر قسمت I، $a = b$. اگر $n < 0$ آنگاه $-n > 0$. بنا بفرض، $1/a^n = 1/b^n$، و از آنجا، $a^{-n} = b^{-n}$. پس، بنا بر قسمت I، $a = b$. ▲

۵.۲.۷. قضیه. فرض کنیم $0 < a \leqslant b$ و $n \in \mathbf{I}$. اولاً، اگر $n \geqslant 0$ آنگاه $0 < a^n \leqslant b^n$، و اگر $n \leqslant 0$ آنگاه $a^n \geqslant b^n > 0$. ثانیاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $a^n = b^n$ آنست که $n = 0$ یا $a = b$. (چرا؟)

۵.۲.۸. قضیه. اگر $0 \leqslant a < b$ و $n \in \mathbf{N}$ آنگاه $0 \leqslant a^n < b^n$. (چرا؟)

۵.۲.۹. قضیه. اگر $a \geqslant 0$، $b \geqslant 0$، و بازاء عددی طبیعی مانند n، $0 \leqslant a^n < b^n$ آنگاه $a < b$. (چرا؟)

۵.۲.۱۰. قضیه. اگر $a > 0$ و $n, m \in \mathbf{I}$ آنگاه

I. اگر $a > 1$ آنگاه $a^m < a^n \iff m < n$.

II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a^n < a^m \iff m < n$.

برهان. اولاً فرض کنیم $1 < a$. نامساوی $m < n$ معادل نامساوی $0 < n - m$ است که، بنا بر I : ۵.۲.۴، معادل نامساوی $1 < a^{n-m}$ میباشد. نامساوی اخیر معادل نامساوی $1 < a^n/a^m$ است، که خود معادل نامساوی $a^m < a^n$ میباشد. و هکذا در مورد قسمت II. ▲

۵.۳. خصوصیات ترتیب اعداد صحیح. چون مجموعه‌ی $\mathbf{I}$ برحسب $<$ ابتدا ندارد خوشترتیب نیست، و قضیه‌ی نیرومندی مانند ۴.۶.۴ در آن برقرار نمیباشد. مثلاً، مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچکتر از 10 (یا از 0 یا از 5 −) ابتدا ندارد. اما قضیه‌ی مهم ذیل در مجموعه مرتب $(\mathbf{I}, <)$ برقرار است:

۵.۳.۱. قضیه. فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد صحیح باشد.

I. اگر A از بالا به عدد صحیحی محدود باشد[1] انتها دارد.

II. اگر A از پایین به عدد صحیحی محدود باشد[2] ابتدا دارد.

(البته، ابتدا و انتها برحسب $<$ مراد است.)

برهان. قسمت I. فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{I}$ و $A \neq \varnothing$، و A از بالا به عدد صحیح r محدود باشد. برای اثبات اینکه A انتها دارد چند حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: A حد اقل یک عضو مثبت (یعنی متعلق به $\mathbf{N}$) دارد. در این صورت $r \in \mathbf{N}$، $A \cap \mathbf{N} \neq \varnothing$، و $A \cap \mathbf{N}$ از بالا به r محدود است. پس، $A \cap \mathbf{N}$ انتها دارد (۳ : ۴.۷.۵)، و بالبداهه، انتهای آن انتهای A است (چرا؟).

حالت دوم: A عضو مثبت ندارد، ولی $0 \in A$. در این حالت، 0 انتهای A است (چرا؟).

حالت سوم: اعضای A جملگی منفی هستند. فرض کنیم B مجموعه‌ی متقابلهای اعضای A باشد. B مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی است، و بالنتیجه ابتدا دارد. فرض کنیم k ابتدای آن باشد. به آسانی دیده میشود که $k -$ انتهای A است. زیرا، اولاً، بنا بر تعریف B، $-k \in A$؛ ثانیاً، اگر a عضو دلخواهی از A باشد، $-a \in B$، و بالنتیجه،

$k \leqslant -a$، و از آنجا $a \leqslant -k$.

---

(۱) مقصود اینست که همه‌ی اعضای A از عدد صحیح معینی نابیشتر باشند.

(۲) یعنی همه‌ی اعضای A از عدد صحیح معینی ناکمتر باشند.

قسمت II. برای اثبات II، گوئیم اگر مجموعه‌ی غیر خالی A از اعداد صحیح از پایین به عدد صحیح r محدود باشد، و B مجموعه‌ی متقابلهای اعضای A باشد، آنگاه B مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد صحیح، و از بالا به عدد صحیح r — محدود است (چرا؟). پس، بنا بر I، B انتها دارد. اینک به آسانی میتوان ثابت کرد که متقابل انتهای B ابتدای A است. ▲

۵.۴. استقراء در اعداد صحیح. به استناد قضیه‌ی ۵.۳.۱، میتوان صورتهای مختلف اصل استقراء را در مورد اعداد صحیح تعمیم داد. مثلاً، قضیه‌ی ذیل قضیه‌ی ۴.۶.۶ را در بر دارد[1]:

۵.۴.۱. قضیه‌ی استقراءِ ابتدا از عدد صحیح m. اگر m عدد صحیح مفروضی و F خاصیتی تابع شرایط ذیل باشد آنگاه جمیع اعداد صحیح ناکمتر از m خاصیت F دارند:

I. $F(m)$

II. بازاء هر عدد صحیح n، اگر $m \leqslant n$ و $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$.

اثبات مانند اثبات ۴.۶.۶ است، و به متعلم محول میشود.

۵.۴.۲. تعریفات استقرائی. صورتهای مختلف تعریف استقرائی (۴.۷.۳) را میتوان ابتدا از هر عدد صحیح معیّن، با تصرفات لفظی، تعمیم داد[2]. کافی است در مندرجات ۴.۷.۳، m را عددی صحیح و M را مجموعه‌ی اعداد صحیح ناکمتر از m بگیریم. بالاخص، تعریف توابع بر $\mathbf{I}_0$ به استقراء بسیار بکار میآید. مثلاً، روابط

$$f(0)=1, \qquad f(n+1)=f(n)\cdot(n+1) \qquad (n \in \mathbf{I}_0)$$

تابعی را که f نامیده شده است بر $\mathbf{I}_0$ تعریف میکنند. با این تابع مهم، چنانکه خواهید دید، بسیار سر و کار داریم.

۵.۵. پایان. اینک که خواص اساسی اعداد صحیح را در دست داریم، در این باب نیز همان روشی را که در ۴.۷ گفته شد اتخاذ میکنیم، و از ذکر خواص مقدماتی این اعداد که در تحصیلات قبلی خود آموخته‌اید اجتناب مینمائیم. برای یادآوری و تسهیل مراجعه، بعضی از این خواص را در ۹ § فصل حاضر گرد آورده‌ایم. در اینجا، به یادآوری قضیه‌ی مهم ذیل اکتفا میکنیم:

---

(۱) بعضی احکام دیگر از این قبیل در ضمن تمرین ۵.۵.۴ آمده است.

(۲) وارد اثبات این صورتهای تعمیم یافته نمیشویم.

۵.۵.۱. قضیه[1] (قضیه‌ی تقسیم اعداد صحیح). فرض کنیم m و n دو عدد صحیح باشند، و $m \neq 0$.

I. یک و تنها یک دستگاه عدد صحیح، مانند q و r هست که در عین حال،

$$n = mq + r, \qquad 0 \leqslant r < |m|.$$

(q را خارج قسمت و r را باقیمانده‌ی اصلی تقسیم n بر m نامند).

II. یک و تنها یک دستگاه عدد صحیح، مانند q_1 و r_1، هست که در عین حال،

$$n = mq_1 + r_1, \qquad -|m| \leqslant 2r_1 < |m|.$$

(r_1 را کوچکترین باقیمانده‌ی مطلق تقسیم n بر m نامند).

تعریف ذیل را نیز یادآوری میکنیم:

۵.۵.۲. تعریف. بازاء دو عدد صحیح m و n، اگر عدد صحیحی مانند q باشد که $n = mq$ گویند m عادکننده‌ی n است یا آنکه m n را عاد میکند. گزاره‌نمای «m عادکننده‌ی n است» به صورت

$$m \mid n$$

و نقیضش به صورت

$$m \nmid n$$

نوشته میشود. اگر $m \mid n$ گویند n بر m قابل قسمت است، و m را یک مقسوم‌علیه n، و n را یک مضرب[2] m خوانند.

۵.۵.۳. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم $n = -178$ و $m = 7$. چون $178 = 7 \cdot 25 + 3$،

$$-178 = 7 \cdot (-25) + (-3),$$
$$-178 = 7 \cdot (-25) + 7 - 7 + (-3) = 7 \cdot (-26) + 4.$$

در اینجا، 4 باقیمانده‌ی اصلی و 3 − کوچکترین باقیمانده‌ی مطلق تقسیم 178 − بر 7 میباشد.

(ب). اگر $m = 2$، و n عدد صحیح دلخواهی باشد، باقیمانده‌ی اصلی تقسیم n بر m یکی از اعداد 0 و 1 است. پس، بنا بر ۵.۵.۱، بازاء مقدار مناسبی از عدد صحیح q، یا $n = 2q$ (در این صورت گوئیم n زوج است) یا $n = 2q + 1$ (در این صورت گوئیم n فرد است). این مطلب را چنین بیان میکنند که هر عدد صحیح به یکی از دو صورت $2q$ و $2q + 1$ است.

در همین مثال، کوچکترین باقیمانده‌ی مطلق تقسیم n بر 2 در شرایط $-2 \leqslant 2r_1 < 2$ صدق میکند، که از آن، مقادیر 1 − و 0 برای r_1 بدست میآید. پس، مثلاً، یا $n = 2q_1$

---

(۱) برای راهنمائی در اثبات این قضیه، مسائل ۱۲ و ۱۳ تمرین ۵.۵.۴ ملاحظه شود.

(۲) بطور کلی، اگر a عددی حقیقی باشد، هر عدد را که به صورت ka $(k \in \mathbf{I})$ باشد یک مضرب صحیح a نامند.

یا $n = 2q_1 - 1$؛ و به عبارت دیگر، هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $2q_1$ یا $2q_1 - 1$ است.

(پ).

$$1 \mid 6, \quad -1 \mid 6, \quad 6 \mid 6, \quad -6 \mid 6, \quad 0 \mid 0, \quad 6 \mid 0,$$
$$2 \mid 6, \quad -2 \mid 6, \quad 2 \mid -6, \quad -2 \mid -6, \quad 5 \nmid 6, \quad 3 \nmid 1.$$

(ت). ثابت کنید که بازاءِ هر عدد صحیح نامنفی n، عدد $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ بر 43 قابل قسمت است.

گزاره‌نمای $43 \mid 6^{n+2} + 7^{2n+1}$ (۱) را $F(n)$ مینامیم، و حکم را به استقراء ابتدا از 0 (۵.۴.۱) ثابت میکنیم. $F(0)$ به معنی $43 \mid 6^2 + 7$، یا $43 \mid 43$، میباشد، که راست است. حال فرض میکنیم $n \geqslant 0$، و (۱) را نیز مفروض میگیریم، و $F(n+1)$، یعنی $43 \mid 6^{n+3} + 7^{2n+3}$ (*)، را ثابت میکنیم. برای این منظور ملاحظه میکنیم که

$$(۲) \quad 6^{n+3} + 7^{2n+3} = 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + (7^{2n+3} - 6 \cdot 7^{2n+1})$$
$$= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1}.$$

بنا بر (۱) و ۵.۵.۲، عددی صحیح مانند q هست که $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43q$. پس، به موجب (۲)، $6^{n+3} + 7^{2n+3} = 43(6q + 7^{2n+1})$، و بالنتیجه (*) برقرار است. ▲

۵.۵.۴. تمرین

۱. در هر یک از ازواج اعداد ذیل، باقیمانده‌ی اصلی و کوچکترین باقیمانده‌ی مطلق تقسیم عدد سمت چپ را بر عدد سمت راست تعیین کنید:

$$173, 5. \qquad 173, -5. \qquad -173, 5. \qquad -173, -5.$$
$$11, 18. \qquad 11, -18. \qquad -11, 18. \qquad -11, -18.$$

۲. بنا بر آنکه $n \in \mathbf{I}$، ثابت کنید که (آ) اگر $a > 0$ آنگاه $a^n > 0$؛ (ب) اگر $a < 0$ و $2 \mid n$ آنگاه $a^n > 0$؛ (پ) اگر $a < 0$ و $2 \nmid n$ آنگاه $a^n < 0$. (ت) اگر $2 \mid n$ آنگاه $(-1)^n = 1$؛ (ث) اگر $2 \nmid n$ آنگاه $(-1)^n = -1$.

۳. ثابت کنید که هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $3k$ و $3k \pm 1$ (یعنی $3k + 1$ یا $3k - 1$) است.

۴. ثابت کنید که مربع هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $4k$ و $4k + 1$ است.

۵. هریک از مجموعه‌های ذیل را با اعضایش مشخص کنید:

(آ) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \;\&\; n \mid 12\}$.

(ب) $\{n \mid n \in \mathbf{I} \;\&\; n \mid 12\}$.

(پ) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \;\&\; n \mid 18 \;\&\; n \mid 30\}$.

(ت) $\{n \mid n \in \mathbf{N} \;\&\; n \mid 18 \;\&\; n \nmid 30\}$.

(ث) $\{n \mid n \in \mathbf{I} \;\&\; -2 \leqslant n < 4 \;\&\; n \mid -18\}$.

۶. A و B، بترتیب، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اعداد 6 و 15 هستند. مجموعه‌ی $A \cap B$ را به زبان فارسی تعریف و با اعضایش مشخص کنید.

۷. به استقراء ثابت کنید که بازاءِ هر عدد صحیح نا منفی n،

(آ) $64 \mid 9(9^n - 1) - 8n$. (ب) $9 \mid 5^{2n} + 3n - 1$.

$$(\text{پ})\quad 133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}.$$

۸. $F(n)$ به معنی $64 \mid 3^{2n} - 8n + 1$ است. ثابت کنید که همواره اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$. سپس ثابت کنید که گزاره‌ی «بازاءِ هر عدد طبیعی n، $3^{2n} - 8n + 1$ بر 64 قابل قسمت است» دروغ است.

۹. اگر m عدد صحیح مفروضی و F خاصیتی تابع شرایط ذیل باشد آنگاه همه‌ی اعداد صحیح نابیشتر از m خاصیت F دارند:

I. $F(m)$

II. بازاءِ هر عدد صحیح n، اگر $n \leqslant m$ و $F(n)$ آنگاه $F(n-1)$.

۱۰. (استقراء قوی ابتدا از عدد صحیح m). قضیه‌ی ۴.۶.۱۰ را با تبدیل لفظ «طبیعی» به صحیح در سراسر آن بیان و ثابت کنید.

۱۱†. اگر m عدد صحیح مفروضی باشد، و F خاصیتی واجد شرایط ذیل باشد آنگاه همه‌ی اعداد صحیح خاصیت F دارند:

I. $F(m)$

II. بازاءِ هر دو عدد صحیح n_1 و n_2 که $n_1 \leqslant m \leqslant n_2$، اگر همه‌ی اعداد صحیح بین n_1 و n_2 خاصیت F داشته باشند n_1 و n_2 نیز خاصیت F دارند.

(راهنمائی: و الا، عدد صحیحی مانند k هست که $F(k)$ دروغ است. بنا بر I، $k \neq m$. پس، یا $m < k$ یا $k < m$. در حالت اول، فرض کنید A مجموعه‌ی اعداد صحیحی باشد که از m بزرگتر و فاقد خاصیت F هستند. اگر n_2 ابتدای A باشد، $n_1 = m - 1 < m < n_2$. پس، n_2 خاصیت F دارد. . . .)

۱۲†. با مفروضات ۵.۵.۱ : I، ثابت کنید که مجموعه‌ی

$$\{n - mk \mid k \in \mathbf{I} \ \&\ n - mk \geqslant 0\}$$

خالی نیست. ابتدای آن را که عددی است به صورت $n - mq$، r بنامید، و از اینجا ۵.۵.۱ : I را ثابت کنید. (راهنمائی: به ۸ : ۳.۵ توجه کنید.)

۱۳†. قسمت دوم ۵.۵.۱ را به وسیله‌ی قسمت اول آن ثابت کنید. (راهنمائی: بنا بر قسمت اول، $n = mq + r$. بر حسب آنکه $2r < |m|$ یا نه دو حالت تشخیص دهید. در حالت دوم فرض کنید $r_1 = r - |m|$.)

۵.۶. اعداد منطق.

در این قسمت، تعریف اعداد منطق و بعضی از خواص ابتدائی آنها را میآوریم. خواص عمقی این اعداد در فصل ۶ خواهد آمد.

۵.۶.۱. تعریف. عدد مُنطِق عددی است که مساوی خارج قسمت دو عدد صحیح باشد[۱]؛ یعنی مساوی باشد با کسری که صورت و مخرج آن اعداد صحیح‌اند (چنین کسری را کسر منطق یا کسر متعارفی نامیم).

مجموعه‌ی اعداد منطق را $\mathbf{Q}$، مجموعه‌ی اعداد منطق مثبت را $\mathbf{Q}^+$، و مجموعه‌ی اعداد منطق

---

(۱) ملاحظه کنید که ، بنا بر تعریف خارج قسمت و کسر (۱.۵.۴)، عبارتی به صورت «$a/0$» عدد نیست، بلکه بیمعنی است. به همین جهت، در تعریف عدد منطق، قید صفر نبودن «مقسوم‌علیه» یا «مخرج» را نیاورده‌ایم (این قیود در تعریف مستترند).

منفی را $\mathbf{Q}^-$ مینامیم.

بنا بر ۱.۵.۸ : I،

۵.۶.۲. قضیه. هر عدد صحیح عددی است منطق.

بنا بر قواعد محاسبه با کسور (۱.۵.10) و ۵.۱.۴،

۵.۶.۳. قضیه. مجموعه‌ی اعداد منطق نسبت به اعمال جمع، تفریق، و ضرب بسته است؛ و خارج قسمت یک عدد منطق بر عدد منطقی غیر از 0 عددی است منطق.

۵.۶.۴. تعریف. مجموعه‌ی A از اعداد را چِگال خوانیم اگر بین هر دو عضو متمایز آن عضوی از آن واقع باشد.

چنانکه دیده‌ایم، هیچ یک از $\mathbf{N}$ و $\mathbf{I}$ چگال نیستند، اما، بنا بر ۲.۴.۱۲،

۵.۶.۵. قضیه. مجموعه‌ی اعداد منطق چگال است.

۶ § رشته‌ها

۶.۱. خانواده‌ها. فرض کنیم I یک مجموعه و f تابعی بر I باشد. گاهی از اوقات، تابع f را یک خانواده، I را مجموعه‌ی اندیسگذار و هر عضو آن را یک اندیس، و هر مقدار تابع را یک جمله‌ی خانواده میخوانند.

در این گونه موارد، مقدار f را در عضو دلخواه λ از I، بجای $f(\lambda)$، معمولاً

$$f_\lambda$$

مینامند، و خود تابع f را بدین صورت مینویسند[1]:

$$\{f_\lambda\}_{\lambda\in \mathrm{I}}.$$

خلاصه،

$$f = \{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{I}} = \{(\lambda, f_\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{I}\}.$$

اصطلاحات و علامات مذکور وقتی بکار میروند که توجه در درجه‌ی اول معطوف به مقادیر تابع (یعنی جمله‌های خانواده) باشد. خانواده‌هائی را که در آتیه در کار میآیند با حروف a، b، c، u، v، x، و غیره مینامیم. چون استعمال این حروف بدین منظور همواره با لفظ «خانواده» یا قیدی از این قبیل همراه است، سوء تفاهمی از استعمال حروف لاتینی بدین معنی ناشی نمیشود.

---

(۱) استعمال ابرو را در اینجا با استعمال آن برای نامگذاری مجموعه‌ها خلط نکنید. در استعمال کنونی معمولاً لفظ «خانواده» یا قیدی از این قبیل (مثلاً «رشته» یا «$\lambda \in \mathrm{I}$») میآید، که مانع سوء تفاهم است.

۶.۱.۱. امثله

(آ). فرض کنیم α، β، و γ دو بدو متمایز باشند، و $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \mathrm{I}$، و A مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی باشد. تابع

$$x = \{(\alpha, \text{م}), (\beta, \text{ص}), (\gamma, \text{م})\}$$

یک خانواده است، I مجموعه‌ی اندیسگذار، و هر یک از α، β، و γ یک اندیس. مقادیر این تابع (جمله‌های خانواده) عبارتند از

$$x(\alpha) = x_\alpha = \text{م}, \qquad x(\beta) = x_\beta = \text{ص}, \qquad x(\gamma) = x_\gamma = \text{م}.$$

خانواده‌ی x، یا $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{I}}$، با ازواج مرتبش چنین نوشته میشود:

$$x = \{x_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{I}} = \{(\alpha, x_\alpha), (\beta, x_\beta), (\gamma, x_\gamma)\}.$$

بالاخره، مجموعه‌ی جمله‌های خانواده (مجموعه‌ی مقادیر آن) عبارتست از

$$\text{ح}x = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\} = \{\text{م}, \text{ص}\},$$

که، البته، نباید آنرا با خود خانواده خلط کرد.

(ب). فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارا باشد (۷.۴.۵ : ۳)، و f تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}$ و A. اگر $\mathbf{N}$ را مجموعه‌ی اندیسگذار بگیریم، f یک خانواده با مجموعه‌ی اندیسگذار $\mathbf{N}$ خواهد بود، و عضوی از A را که نظیر عدد طبیعی n است، بجای $f(n)$، میتوان f_n نامید. در اینجا، A مجموعه‌ی مقادیر تابع f است، و اعضایش به وسیله‌ی $\mathbf{N}$ اندیسگذاری یا «شماره‌گذاری» میشوند (۷.۴.۹ : ۳ ملاحظه شود).

خانواده‌هائی که مجموعه‌ی اندیسگذار آنها $\mathbf{N}$ است ــ به عبارت دیگر، توابع بر $\mathbf{N}$، که در ۴.۵ از آنها نام بردیم ــ در ریاضیات اهمیت حیاتی دارند، و به همین جهت، اصطلاحات خاصی در مورد آنها وضع شده است که ذیلاً به تعریف و توضیح آنها میپردازیم.

۶.۲. تعریف. خانواده‌ای را که مجموعه‌ی اندیسگذار آن $\mathbf{N}$ باشد یک رشته‌ی نامتناهی یا، مختصراً، یک رشته نامیم. به عبارت دیگر، رشته یعنی تابعی بر $\mathbf{N}$.

۶.۲.۱. امثله.

هر یک از توابع ذیل یک رشته است:

(آ). تابع a بر $\mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $a(n) = n$.

(ب). تابع b بر $\mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $b(m) = 2m - 1$.

(پ). تابع u بر $\mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $u(n) = n/2$.

(ت). تابع c بر $\mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $c(i) = \text{س}$.

۶.۲.۲. تعریف. مقدار رشته‌ی x را در n (یا در m یا در i، و غیره، که جملگی متغیرهائی مقید به $\mathbf{N}$ هستند) جمله‌ی عمومی رشته نامند، و بر طبق قرارداد عمومی در باب خانواده‌ها (۶.۱)، به x_n (یا x_m، یا x_i، و غیره) نمایش میدهند.

در رشته‌های مثال ۶.۲.۱، a_n یا n، b_m یا $2m - 1$، u_n یا $n/2$، و c_i یا س، بترتیب، جمله‌ی عمومی رشته‌های a، b، u، و c است.

۶.۲.۳. نامگذاری

I. رشته‌ها را میتوان بر طبق قرارداد کلی مذکور در ۶.۱ نامگذاری کرد. اگر x رشته‌ای با جمله عمومی x_n باشد این رشته را رشته‌ی

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

مینامیم. به جای علامت اخیر، علامات

$$\{x_n\}_{n=1}, \qquad \{x_n\}_1, \qquad \{x_n\}$$

نیز بکار میرود. مثلاً، رشته‌ی ب : ۶.۲.۱ را میتوان به اسامی

$$\{2m-1\}_{m\in\mathbf{N}}, \qquad \{2m-1\}_{m=1}, \qquad \{2m-1\}$$

نامید، و رشته‌ی ت : ۶.۲.۱ را به اسامی

$$\{\text{س}\}_{n\in\mathbf{N}}, \qquad \{\text{س}\}_{n=1}, \qquad \{\text{س}\}_{i=1}.$$

II. چون اعداد طبیعی ترتیب مشخصی دارند[1] ترتیبی از طریق اندیسهای جمله‌های رشته به این جمل میدهند. اصطلاح رشته در مورد تابعی بر $\mathbf{N}$ در موردی بکار میرود که توجه در درجه‌ی اول معطوف به مقادیر تابع (جمله‌های رشته) و ترتیب آنها برحسب اندیسشان باشد، و هر جا از ترتیب جمل یک رشته سخن میرود مقصود ترتیب توالی آنهاست به مقتضای ترتیب مذکور. به مقتضای این ترتیب، رشته‌ی $\{x_n\}$ را به صورت

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (*)$$

نیز مینویسند. در این رسم الخط، سه نقطه («. . .») به معنی و غیره است، و بعلاوه، اولاً، عده‌ی جمله‌هائی که متوالیاً از سمت چپ («آغاز رشته») نوشته میشود خالی از اهمیت میباشد، و مثلاً رشته‌ی $\{x_n\}$ را میتوان رشته‌ی «$x_1, \ldots, x_n, \ldots$» نامید[2]؛ ثانیاً، جمله‌ی بعد از سه نقطه‌ی اول جمله‌ی عمومی است؛ و ثالثاً، سه نقطه‌ی سمت راست حاکی از اینست که رشته «ادامه دارد».

نظر به طرح $(*)$، x_n را جمله‌ی nم رشته میخوانند.

مثلاً، رشته‌های مثال ۶.۲.۱ را میتوان بترتیب چنین نمایش داد:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;$$

$$1, 3, 5, \ldots, 2m-1, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots, \frac{n}{2}, \ldots;$$

$$\text{س}, \text{س}, \text{س}, \ldots, \text{س}, \ldots.$$

بالاخره، وقتی که بخواهند توجه را به بعضی از جمله‌های رشته جلب کنند، آنها را نیز مینویسند، مانند

---

(۱) مقصود ترتیب آنهاست بر حسب نسبت $<$.

(۲) هر جا رشته‌ای را با جمله‌هایش در میان عبارات فارسی میآوریم آن را بین علامت « » محصور میکنیم تا یادآور این باشد که ترتیب از چپ به راست ملحوظ است.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots;$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_m, \ldots;$$

که، در اولی، دو جملهی متوالی مراتب nم و $n+1$م، و در دومی، جملههای nم و mم نمایش داده شدهاند.

III. در هر حال، هیچ یک از اسامیی که بر یک رشته میگذاریم نباید معنی واقعی رشته را از نظر دور سازد: رشتهی x یعنی تابع
$$\{(1, x_1), (2, x_2), \ldots, (n, x_n) \ldots\}$$
یا $\{(n, x_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$. مثلاً، در مثال ۶.۲.۱،
$$\begin{aligned} a = \{n\}_{n=1} &= \{(1, 1), (2, 2), \ldots (n, n), \ldots\} \\ &= \{(n, n) \mid n \in \mathbf{N}\}, \\ c = \{\text{س}\}_{n\in\mathbf{N}} &= \{(1, \text{س}), (2, \text{س}), \ldots (n, \text{س}), \ldots\} \\ &= \{(n, \text{س}) \mid n \in \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$
بالاخص، رشتهی a، یعنی رشتهی
$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$
را، رشتهی اعداد طبیعی نامند.

IV. بالاخره، اگر چه تکرار مکرر است، توجه داشته باشید که، در نوشتن یک رشته به وسیلهی ابرو یا بر طبق طرح (*) قسمت II، متغیر فردیی که به عنوان اندیس بکار میرود بی تأثیر است، و این متغیر متغیری است ظاهری. مثلاً، رشتهی $\{a_n\}_{n=1}$ همان رشتهی $\{a_i\}_{i=1}$ است، و رشتهی $\{2m-1\}_{m=1}$ همان رشته $\{2k-1\}_{k=1}$.

۶.۲.۴. تعریف. اگر مقادیر یک رشته متعلق به مجموعهی مفروض A باشند آن رشته را یک رشته در A یا رشتهای از اعضای A نامیم. بالاخص، رشتهای در $\mathbf{N}$، در $\mathbf{I}$، در $\mathbf{Q}$، یا در $\mathbf{R}$، بترتیب، رشتهای از اعداد طبیعی، رشتهای از اعداد صحیح، رشتهای از اعداد منطق، و رشتهای از اعداد حقیقی خوانده میشوند (واضح است که رشتهای از اعداد طبیعی رشتهای از اعداد صحیح و نیز رشتهای از اعداد منطق است، و غیره).
مثلاً، از بررسی حوزهی مقادیر رشتههای a، b، u، و c مثال ۶.۲.۱ دیده میشود که a و b رشتههائی از اعداد طبیعیاند، u رشتهای است از اعداد منطق، و c رشتهای است از حروف الفبای فارسی.

۶.۲.۵. تعریف. رشتهی ثابت یعنی تابعی ثابت بر $\mathbf{N}$؛ و به عبارت دیگر، رشتهای که حوزهی مقادیرش یک مجموعهی یکانی باشد، یا آنکه جملههایش با هم متساوی باشند.
مثلاً، رشتهی c مثال ت : ۶.۲.۱ یک رشتهی ثابت است ($\{\text{س}\} = c$ح).

۶.۲.۶. تبصره. چون هر رشته یک تابع است، آنچه را در باب توابع آموختیم میتوان در مورد رشته‌ها بکار بست. مثلاً، بنا بر ۲.۳۰۱ : ۳، شرط لازم و کافی برای آنکه دو رشته‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ با هم متساوی باشند آنست که، بازاء هر n، $x_n = y_n$.

رشته‌ها را میتوان بر طبق طریق کلی تعریف توابع تعریف کرد. بعلاوه، تعریف استقرائی در مورد رشته‌ها بسیار در کار میآید (۶.۳).

برای مزید توضیح مثالهای متعدد میآوریم. این مثالها متضمن نکات مهمی است، و متعلمین باید در آنها عمیقاً تأمل کنند.

۶.۲.۷. امثله و فواید

(آ). رشته‌هائی که در مثال ۶.۲.۱ دیدیم، هریک با فرمولی که مقدار جمله‌ی عمومی رشته را بدست میدهد تعریف شده است. حالات دیگری که در فصل ۳ در تعریف توابع دیدیم بالاخص در تعریف رشته‌ها نیز پیش میآیند. مثلاً، ممکن است ضابطه‌ی تعریف یک رشته با «فرمول» قابل بیان نباشد، یا بیان آن بدین صورت دشوار یا دور از ذهن باشد[۱]. بعلاوه، بسا ممکن است ضابطه‌ی تعریف یک رشته وسیله‌ای برای اینکه عملاً جمله‌ای از مرتبه‌ی معیّن از آن رشته را تعیین کنیم بدست ندهد؛ مانند رشته u با ضابطه‌ی

u_n رقم nم بسط اعشاری π است.

در اینجا، $u_1 = 3$، $u_2 = 1$، و $u_3 = 4$. اما هنوز هیچ کس مقدار $u_{1\,000\,000}$ را نمیداند[۲].

(ب). رشته‌ی $a = \{a_m\}$ با ضابطه‌ی

a_m یعنی باقیمانده‌ی تقسیم m بر 2 منهای $1/2$

را با جمله‌هایش میتوان چنین نوشت:

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{(-1)^{m-1}}{2}, \ldots$$

نمایش کارتزین رشته در شکل ۳۳ دیده میشود[۳].

ضابطه‌ی تعریف رشته‌ی مورد بحث را میتوان به عبارات دیگر نیز بیان کرد، مثلاً،

$$a_m = \begin{cases} -1/2 & (2 \mid m), \\ 1/2 & (2 \nmid m). \end{cases}$$

همچنین، چون هر عدد طبیعی زوج به صورت $2k$ و هر عدد طبیعی فرد به صورت $2k - 1$ است، رشته‌ی $\{a_m\}$ را میتوان چنین تعریف کرد:

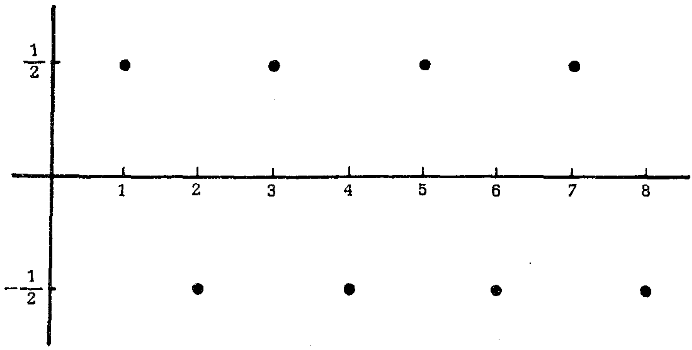
---

(۱) مثلاً، رشته‌ی $\{b_n\}$ مثال (ت) را با ضابطه‌ای که در ذیل صفحه‌ی ۲۱۸ آمده است ملاحظه کنید.

(۲) در این مثال به اطلاعات قبلی محصلین توسل میجوئیم. رسماً هنوز نمیدانم π چیست، و «بسط اعشاری» به چه معنی است.

(۳) در رشته‌های نامتناهی ناچار به رسم قسمتی از نمایش رشته که شکل عمومی گراف را کمابیش مشخص سازد اکتفا میشود. نمایش توابعی را که حوزه‌ی تعریفشان نامتناهی است بر همین قیاس کنید.

$$a_{2k} = -\,1/2, \qquad a_{2k-1} = 1/2, \qquad (k \in \mathbf{N}).$$



شکل ۳۳

(پ). یک رشته را با مجموعه‌ی جمل آن خلط نکنید. در مثال (د)، رشته‌ی $\{a_m\}$ رشته‌ی نامتناهی «$1/2,\ -\ 1/2,\ 1/2,\ldots$» است، ولی، مجموعه‌ی جمل (یا مجموعه‌ی مقادیر) آن مجموعه‌ی متناهی $\{1/2,\ -\ 1/2\}$ میباشد. توجه به نمایش رشته (شکل ۳۳) در توضیح این مطلب مفید است.

(ت). رشته‌های

$$a: \qquad 1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\ldots \frac{1}{n},\ldots$$

$$b: \qquad \frac{1}{2},\quad 1,\quad \frac{1}{3},\ldots \frac{1}{n},\ldots$$

متمایزند، زیرا، $a_1 = a\,(1) = 1$ ولی $b_1 = b(1) = 1/2$.

رشته‌ی اول با ضابطه‌ی $a_n = 1/n$ تعریف میشود، ولی رشته‌ی دوم با ضوابط

$$b_1 = 1/2, \qquad b_2 = 1, \qquad b_n = 1/n \qquad (n > 2).$$ [1]

(ث). گاه چند جمله‌ی متوالی از آغاز یک رشته را میدهند، و جمله‌ی عمومی آن را میطلبند، مانند اینکه

مطلوبست جمله‌ی عمومی رشته‌ی «$1, 3, 5, 7, \ldots$».

این سؤال به خودی خود گمراه کننده است، زیرا، تابعی بر $\mathbf{N}$ با مقادیرش در تعداد معدودی از اعضای حوزه‌ی تعریف مشخص نمیشود. اگر رشته‌های a و b را با جمله‌ی عمومی

$$a_n = 2n - 1; \qquad b_n = 2n - 1 + \frac{1}{5}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

تعریف کنیم، چهار جمله‌ی اول هر یک از دو رشته همان اعداد 1، 3، 5، و 7 است، اما،

---

(۱) رشته‌ی $\{b_n\}$ را میتوان با ضابطه‌ی

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n!}{3}\pi$$

تعریف کرد که، در آن، $n!$ به معنی مذکور در ۸.۱ است.

مثلاً، $a_5 = 9$ ولی $b_5 = 9 + (24/5)$.

طرح مسائلی به صورت مبهم مذکور، به منظور تمرین در حدس زدن، در کتابهای ریاضی متداول است، و اینک که توجه محصلین را به ابهام آنها جلب کردیم، خود از این روش پیروی میکنیم، و فقط یادآوری مینمائیم که، در این گونه موارد، باید به «ساده‌ترین» یا «طبیعیترین» حدس اکتفا کرد، اگر چه این دو صفت خود مبهم میباشند.

(ج). اندیس یک رشته را با متغیر یا متغیرهای دیگری که ممکن است در تعریف آن آمده باشند خلط نکنید. جمله‌های رشته‌ی $\{2n - 3i\}_{n=1}$ عبارتند از

$$2 - 3i,\ 4 - 3i,\ \ldots,\ 2n - 3i,\ \ldots.$$

ولی، جمله‌های رشته‌ی $\{2n - 3i\}_{i=1}$ عبارتند از

$$2n - 3,\ 2n - 6,\ \ldots,\ 2n - 3i,\ \ldots.$$

(چ). رشته‌های مثالهای گذشته همه رشته‌هائی در $\mathbf{R}$ (یعنی، رشته‌هائی از اعداد حقیقی) هستند. چنانکه از تعریف رشته (و نیز از مثال ت: ۶.۲.۱) معلومست، مقادیر یک رشته ممکن است اشیائی غیر از اعداد باشند. مثلاً، در هندسه‌ی تحلیلی مسطحه، فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع دوایری باشد به مرکز مبداء مختصات. چنین دایره‌ای را، در صورتی که شعاعش r باشد، Γ_r میخوانیم. رشته‌ی $\{\Gamma_r\}_{r=1}$ رشته‌ای است از اعضای A، و عبارتست از رشته‌ی دوایری به مرکز مبداء مختصات که شعاعشان اعداد طبیعی است. هر یک از جمله‌های این رشته مجموعه‌ای از نقاط است. پس، رشته‌ی $\{\Gamma_r\}$ رشته‌ای از **مجموعه‌ها** است. در باب این گونه رشته‌ها در ۶.۴ بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۶.۲.۸. توسیع تعریف رشته. گاه اصطلاح رشته را به معنائی وسیعتر از آنچه گذشت بکار میبرند، و هر خانواده‌ای را که مجموعه‌ی اندیسگذار آن به صورت $\mathbf{I}_m$ یا مجموعه‌ای متناهی از اعداد صحیح متوالی باشد رشته میخوانند، و برحسب اینکه مجموعه‌ی اندیسگذار یک رشته مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی باشد، آن رشته را متناهی یا نامتناهی نامند. بالاخص، رشته‌هائی با مجموعه‌ی اندیسگذار $\mathbf{I}_0$ زیاد در کار میآیند.

نامگذاری در این حالت به همان قیاس است که در ۶.۲.۳ گذشت. مثلاً، اگر m عدد صحیح معینی باشد، رشته‌ی

$$\{a_n\}_{n \in \mathbf{I}_m} \quad \text{یا} \quad \{a_n\}_{n=m} \quad \text{یا} \quad \{a_n\}_m \quad \text{یا}$$

$$a_m,\ a_{m+1},\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

رشته‌ای است نامتناهی که مجموعه‌ی اندیسگذارش $\mathbf{I}_m$ و جمله‌ی عمومیش a_n است، اما، بازاء عدد طبیعی k، جمله‌ی kاُم این رشته a_{m+k-1} میباشد. بالاخص، رشته‌ی $\{a_n\}_{n=0}$ یا

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

تابعی است بر $\mathbf{I}_0$.

همچنین، تابع u بر $I = \{-2, -1, 0, 1\}$ و با مقادیر

$$u_{-1} = \text{حافظ}, \qquad u_{-2} = u(-2) = \text{سعدی},$$

$$u_1 = \text{سعدی}, \qquad u_0 = \text{عنصری},$$

رشته‌ای متناهی از شعرای فارسی‌زبان میباشد. بطور کلی، رشته‌ی x را که مجموعه‌ی

اندیسگذارش مجموعه‌ی اعداد صحیح متوالی از p تا با q است به هر یک از نامهای ذیل میخوانیم:

$$\{x_n\}_{n=p}^{q}, \qquad \{x_n\}_{p\leqslant n\leqslant q},$$
$$x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q.$$

ما هر جا بطور مطلق «رشته» میگوئیم مرادمان رشته‌ی نامتناهی به معنی مذکور در ۶.۲ است. آنچه در باب رشته بدین معنی گفته میشود با مختصر تغییر لفظی در مورد سایر رشته‌های نامتناهی برقرار است.

۶.۲.۹. تمرین

۱. در مورد هر یک از رشته‌های ذیل، اولاً پنج جمله‌ی متوالی از آغاز رشته را بنویسید و نمایش دهید؛ ثانیاً، جمله‌ی 534م رشته چیست؛ ثالثاً، جمله‌های $n+1$م، $n-2$م، و $m+3$م رشته را بنویسید؛ رابعاً مجموعه‌ی مقادیر رشته را بنویسید؛ خامساً رشته را با ازواج مرتب آن تعریف کنید:

(آ) $\{1/n\}_{n=1}$. (ب) $\{k^2\}_{k=1}$. (پ) $\{-n\}_{n=1}$.
(ت) $\{5\}_{j=1}$. (ث) $\{n/(n+1)\}_{n=1}$. (ج) $\{\operatorname{sgn} k\}_{k=1}$.
(چ) $\{1-\operatorname{sgn} n\}_{n=1}$. (ح) $\{1-j\}_{j=1}$. (خ) $\{\text{تهران}\}_{n=1}$.

۲. در مورد هر یک از رشته‌هائی که ذیلاً با جمله‌ی عمومی خود معرفی شده‌اند به همان سؤالات، جز قسمت نمایش رشته، جواب دهید.

(آ) $a_n = nx+1.$ (ب) $a_n = nk.$ (پ) $a_k = nk.$
(ت) $b_n = x-2.$ (ث) $b_n = m-2n.$ (ج) $b_m = m-2n.$

۳. به هریک از سؤالات مذکور در مسئله‌ی ۱ که در باب رشته‌های ذیل مورد دارد جواب دهید.

(آ) $\{1/n\}_{n=3}$. (ب) $\{1/n\}_{n=3}^{8}$. (پ) $\{-m\}_{m=0}$.
(ت) $\{\operatorname{sgn} n\}_{n=-10}^{5}$. (ث) $\{4+\operatorname{sgn} i\}_{i=0}$.

۴. معنی هر یک از علامات ذیل و تفاوت هریک را با سایرین توضیح دهید. مثال بیاورید:

(آ) $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$.
(ب) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.
(پ) $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
(ت) $a_1, \ldots, a_m, \ldots$.
(ث) $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

۵. i عدد طبیعی ثابتی است. ده جمله‌ی متوالی از آغاز هر یک از رشته‌های $\{2n-1\}_{n=1}$ و $\{2n-2i-1\}_{n=i+1}$ را بنویسید. آیا این دو رشته باهم متساویند؟

۶. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

اگر n زوج باشد a_n نصف n است، و الا تالی بلافصل n

تعریف شده است. ده جمله از آغاز رشته را بنویسید، و رشته را نمایش دهید. سپس، تعریف این رشته را به صورتی دیگر بیان کنید.

۷. رشته‌ی u با ضوابط ذیل تعریف شده است:

$$u_{3k-1} = 0, \qquad u_{3k} = 1, \qquad u_{3k+1} = -1, \qquad (k \in \mathbf{I}_0).$$

اولاً، مطلوبست مقدار u_{700}، u_{693}، و u_{245}؛ ثانیاً مجموعه‌ی اندیسگذار و مجموعه‌ی مقادیر رشته را تعیین، و نمایش رشته را رسم نمائید.

۸. رشته‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ با ضوابط ذیل تعریف شده‌اند:

$$x_n = \begin{cases} n & (2 \mid n) \\ -n & (2 \nmid n) \end{cases} \qquad\qquad y_n = \begin{cases} 1-n & (2 \mid n) \\ 1+n & (2 \nmid n) \end{cases}$$

ثابت کنید که مجموعه‌ی جمل دو رشته با هم مساویند. آیا این دو رشته باهم مساویند؟

۹. پنج رشته‌ی دو به دو متمایز بنویسید که جملگی با «$0, 2, 4, 6, 8$» آغاز شوند.

۱۰. A مجموعه‌ی خطوط مستقیم صفحه‌ی دو محور مختصات است، و Δ_n خطی با معادله‌ی $x + ny - 1 = 0$. (آ) پنج جمله‌ی اول رشته‌ی $\{\Delta_n\}_{n=0}$ را بنویسید. (ب) آیا در این رشته دو جمله‌ی عمود بر هم یا دو جمله‌ی موازی با هم وجود دارد؟ (پ) رشته‌ای از اعضای A بنویسید که جمله‌هایش دو بدو با هم موازی باشند.

۶.۳. تعریف تراجعی رشته‌ها. چون رشته‌های نامتناهی توابعی بر $\mathbf{N}$ یا بطور کلی بر $\mathbf{I}_m$ هستند، میتوان اصول کلی مربوط به تعریفات استقرائی را در تعریف رشته‌ها بکار بست. مختصر تصرفی که میکنیم اینست که، مثلاً، مقدار تابع f را در n، بجای $f(n)$، f_n مینامیم. نظر به اهمیت موضوع، چند مثال میآوریم:

۶.۳.۱. امثله و فواید

(آ). روابط

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad (n \geqslant 3),$$

که میتوان آنها را به صورت

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n \geqslant 3)$$

نوشت، تابع f را بر $\mathbf{N}$، یا رشته‌ی $\{f\}_{n=1}$ را تعریف میکنند. آغاز این رشته چنین است:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots.$$

جمل این رشته بـه اعداد فیبوناتچی* معروفند، و خواص بسیار جالب دارند (۳۴ : ۱۰).

(ب). رشته‌ی تصاعد عددی با قدر نسبت d و جمله‌ی اول a، که آن را رشته‌ی $\{u_n\}_{n=1}$ مینامیم، چنین تعریف میشود:

$$(۱) \qquad u_1 = a,$$

$$(۲) \qquad u_n = u_{n-1} + d \qquad (n \geqslant 2).$$

همچنین، رشته‌ی تصاعد هندسی با قدر نسبت q و جمله‌ی اول a، که آن را رشته‌ی $\{v_n\}_{n=1}$ مینامیم، چنین تعریف میشود:

$$(۱') \qquad v_1 = a,$$

$$(۲') \qquad v_n = v_{n-1} \cdot q \qquad (n \geqslant 2).$$

(پ). در رشته‌ای که به استقراء تعریف شده است، گاه میتوان جمله‌ی دارای اندیس n از رشته

را برحسب n حساب کرد[۱]. محاسبه‌ی چند جمله از آغاز رشته برای حدس زدن مفید است. مثلاً، در رشته تصاعد عددی مثال (ب)، دیده میشود که

$$u_2 = u_1 + d = a + \mathbf{1} \cdot d,$$
$$u_3 = u_2 + d = a + \mathbf{2} \cdot d,$$
$$u_4 = u_3 + d = a + \mathbf{3} \cdot d.$$

از اینجا چنین حدس میزنیم که، بازاءِ هر عدد طبیعی n،

$$u_n = a + (n-1)d. \qquad (*)$$

اینک باید تحقیق کرد که این حکم حدسی برقرار هست یا نه. برای این کار به استدلال استقرائی متوسل میشویم. بازاءِ $n = 1$، فرمول (*) به صورت $u_1 = a$ در میآید، و این، بنابر فرمول (۱) مثال قبل، راست است. حال (*) را مفروض میگیریم. بنابر رابطه‌ی تراجعی تعریف تصاعد عددی مورد بحث،

$$u_{n+1} = u_n + d = [u_1 + (n-1)d] + d = u_1 + nd;$$

و این همان (*) است با $n + 1$ بجای n. پس، (*) بازاءِ هرعدد طبیعی برقرار است.

به همین طریق معلوم میشود که، در تصاعد هندسی مثال (ب)، بازاءِ هر عدد طبیعی n،

$$v_n = aq^{n-1}.$$

(ت). بالعکس، رشته‌ی a را که با ضابطه‌ی

$$a_n = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) \qquad (n \in \mathbf{I}_0) \qquad (۱)$$

تعریف شده است اختیار میکنیم، و به تعریف کردن آن به استقراء میپردازیم. از محاسبه‌ی a_n و a_{n-1} معلوم میشود که

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 \qquad (n \in \mathbf{N}). \qquad (۲)$$

این فرمول نشان میدهد که هر جمله‌ی رشته را چگونه از جمله‌ی قبل میتوان بدست آورد، اما نشان نمیدهد که رشته چگونه آغاز میشود. برای رفع این نقیصه، ملاحظه میکنیم که، بنابر (۱)، $a_0 = 0$. از اینجا چنین بنظر میرسد که رشته‌ی b با تعریف تراجعی

$$b_0 = 0, \qquad b_n = b_{n-1} + (n-1)^2 \qquad (1 \leqslant n) \qquad (۳)$$

همان رشته‌ی a است. برای اثبات این حکم باید ثابت کرد که دو تابع a و b با هم متساویند. چون حوزه‌ی تعریف هر دو تابع $\mathbf{I}_0$ است، بنا بر شرط تساوی دو تابع، کافی است ثابت کنیم که، بازاءِ هر n از $\mathbf{I}_0$، $a_n = b_n$. اثبات به استقراءِ ابتدا از 0 است، و به متعلم محول میشود.

۶.۳.۲. تمرین

۱. در رشته‌هائی که ذیلا به استقراء تعریف شده‌اند جمله‌ی هشتم رشته را تعیین کنید، و رشته را نمایش دهید:

(آ) $a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + 2 \qquad (n \in \mathbf{I}_0).$

(ب) $a_0 = 0, \qquad a_n = a_{n-1} + 2 \qquad (n \in \mathbf{N}).$

(پ) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}).$

---

(۱) این کار اغلب ممکن نیست، و اهمیت تعریفات استقرائی ناشی از همین امر است که تعریف رشته‌هائی را که نمیتوان ضابطه‌ای عادی برای آنها یافت مقدور میسازند.

(ز) $u_1 = 2, \quad u_{n+1} = nu_n - n^2 + 2 \quad (n \in \mathbf{N}).$

(ژ) $v_1 = 1, \quad v_2 = 3, \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n \quad (n \in \mathbf{N}).$

۲. در هر یک از رشته‌های مسئله‌ی ۱، جمله‌ی عمومی رشته را برحسب n بیان کنید.

۳. رشته‌های ذیل را به استقراء تعریف کنید.

(آ) $\{2n\}_{n=1}$. (ب) $\{2n-1\}_{n=1}$.

(پ) $\{2n+1\}_{n=0}$. (ت) $\{n(n+1)/2\}_{n=1}$.

۶.۴. رشته‌های مجموعه‌ها. در چ: ۶.۲.۷ با رشته‌ای آشنا شدیم که مقادیرش مجموعه‌هائی هستند. بطور کلی، اگر $\mathcal{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد، هر رشته از اعضای $\mathcal{M}$ رشته‌ای از مجموعه‌ها است. رشته‌ای مانند $\{A_n\}_{n=1}$ از مجموعه‌ها خانواده‌ای است که مجموعه‌ی اندیسگذار آن $\mathbf{N}$ است، و هر یک از مجموعه‌های A_1، A_2، . . . یک جمله‌ی آن خانواده میباشد.

به قیاس آنچه در ۴ § فصل ۲ گذشت، میتوان اتحادیه و مقطع خانواده‌ای از مجموعه‌ها را تعریف کرد:

۶.۴.۱. تعریف[۱]. اتحادیه‌ی خانواده‌ای از مجموعه‌ها مجموعه‌ی جمیع اشیائی است که هر یک از آنها حد اقل متعلق به یکی از جمله‌های خانواده باشد؛ و مقطع خانواده‌ای از مجموعه‌ها مجموعه‌ی جمیع اعضای مشترک جمل خانواده است.

اتحادیه‌ی رشته‌ی $\{A_n\}_{n=1}$ از مجموعه‌ها را معمولاً

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \qquad \text{یا} \qquad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$$

و مقطع آن را

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots \qquad \text{یا} \qquad \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$$

مینامند، و هر جا بیم ابهام نرود، «$n \in \mathbf{N}$» را نمینویسند. بطور کلی، اگر I مجموعه‌ی اندیسگذار رشته‌ی $\{A_n\}_{n\in\mathrm{I}}$ از مجموعه‌ها باشد، اتحادیه و مقطع رشته را، بترتیب $\bigcup_{n\in\mathrm{I}} A_n$ و $\bigcap_{n\in\mathrm{I}} A_n$ مینامند، و گاه ـ بجای «$n \in \mathrm{I}$» ـ گزاره‌نمائی معادل آن مینویسند. مثلاً، اتحادیه‌ی خانواده‌ی $\{A_n\}_{n=0}^{5}$ را، که مجموعه‌ی اندیسگذارش $\mathrm{I} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ است، میتوان $\bigcup_{0\leqslant n\leqslant 5} A_n$ نامید.

۶.۴.۲. مثال. فرض کنیم $\mathbf{N}_k$ قطعه‌ی اعداد طبیعی در k باشد. رشته‌ی $\{\mathbf{N}_k\}_{k=1}$ را میتوان چنین نوشت:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, k\}, \ldots .$$

---

(۱) این موضوع در فصل حاضر مورد نیاز نخواهد بود.

به عنوان تمرین، ثابت کنید که $\mathbf{N} = \bigcup \mathbf{N}_k$ و $\bigcap \mathbf{N}_k = \{1\}$.

۶.۴.۳. تمرین

۰۱ رشته $\{A_i\}_{i=1}^5$ بر طبق این ضابطه تعریف شده است:

A_i یعنی مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های i.

جمله‌های رشته را با اعضایشان مشخص و $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant 5} A_i$ و $\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant 5} A_i$ را تعیین کنید.

۶.۵. رشته‌های مضاعف یا دوتائی. فرض کنیم I و J دو مجموعه باشند، و a تابعی بر $I \times J$ باشد. بر طبق تعریف مذکور در ۶.۱، a را میتوان خانواده‌ای با مجموعه‌ی اندیسگذار $I \times J$ نامید. عضو دلخواهی از $I \times J$ به صورت (i, j) است که، در آن، $i \in I$ و $j \in J$. بر طبق قرارداد مذکور در ۶.۱، مقدار تابع a را در (i, j) باید $a_{(i,j)}$ نامید، ولی معمولاً آن را

$$a_{i,j}$$

میخوانند. بالاخص

۶.۵.۱. تعریف. اگر m و n دو عدد صحیح باشند خانواده‌ای را که مجموعه‌ی اندیسگذار آن $\mathbf{I}_m \times \mathbf{I}_n$ باشد یک رشته مضاعف یا دوتائی نامند. رشته‌ی مضاعف a را به صورت

$$a_{i,j} \qquad (i \in \mathbf{I}_m,\ j \in \mathbf{I}_n)$$

یا به صورتهای

$$\{a_{i,j}\}_{(i,j)\in \mathbf{I}_m\times \mathbf{I}_n}, \qquad \{a_{i,j}\}_{i\in \mathbf{I}_m, j\in \mathbf{I}_n}$$

نمایش میدهند.

۶.۵.۲. مثال. تابع a بر $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ با ضابطه‌ی

$$a_{i,j} = 2i - 3j$$

یک رشته‌ی دوتائی است، و مثلاً

$$a_{1,2} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4, \qquad a_{2,1} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1,$$
$$a_{k,3} = 2k - 9, \qquad a_{2,j} = 4 - 3j.$$

بازاء هر عدد طبیعی ثابت i، مجموعه‌ی ازواج مرتب

$$\{(i, a_{i,1}), (i, a_{i,2}), (i, a_{i,3}), \ldots\}$$

رشته‌ای ساده (یعنی رشته‌ای به معنی مذکور در ۶.۲) با مجموعه‌ی اندیسگذار $\mathbf{N}$ است، و اگر آن را رشته‌ی b بنامیم ضابطه‌ی تعریف آن چنین خواهد بود:

$$b_j = a_{i,j} \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

مثلاً، بازاء $i = 2$، رشته‌ی ساده‌ی $\{b_j\}$ که بدین گونه از رشته‌ی مذکور حاصل میشود رشته‌ی $\{a_{2,j}\}$ یا $\{4 - 3j\}$ است با ضابطه‌ی $b_j = a_{2,j} = 4 - 3j$.

۶.۵.۳. تمرین

۱. رشته‌ی مضاعف a بر $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $a_{i,j} = (1/i) + (1/j)$ تعریف شده است. جمیع جمله‌هائی از رشته را که در شرط $i + j = 5$ صدق میکنند بنویسید.

۲. رشته‌ی مضاعف

$$a_{i\,j} = i^2 - i\,j \qquad (i \in \mathbf{I}_{-2},\ j \in \mathbf{I}_0)$$

مفروض است. پنج جمله از هر یک از رشته‌های ساده‌ی ذیل را بنویسید:

$$\{a_{0,j}\} \qquad (j \in \mathbf{I}_0); \qquad\qquad \{a_{-2,j}\} \qquad (j \in \mathbf{I}_0);$$
$$\{a_{i,2}\} \qquad (i \in \mathbf{I}_{-2}); \qquad\qquad \{a_{i,1}\} \qquad (i \in \mathbf{I}_{-2}).$$

§ ۷ تعمیم اعمال جمع و ضرب

۷.۱. مقدمه. ما همه اصطلاحات حاصلجمع و حاصلضرب چند عدد یا رشته‌ای از اعداد را شنیده‌ایم، و با عبارات بسیار به صورتهای

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \qquad\qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4, \qquad\qquad a_1 \cdot a_2 \ldots a_n,$$

و امثال آنها آشنا هستیم. اما اینک میدانیم که این عبارات، به خودی خود، بیمعنی هستند، زیرا، جمع و ضرب اعمال دوتائی میباشند. پس، برای اینکه صحبت از حاصلجمع و حاصلضرب چند عدد معقول باشد، باید حاصلجمع چند عدد و نیز حاصلضرب چند عدد را تعریف کرد. چنانکه خواهیم دید، تعریفات مطلوب به استقراء حاصل میشود. در این تعریفات عباراتی به صورتهای

$$(*) \qquad \sum_{i=m}^{n} a_i, \qquad\qquad (\dagger) \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i$$

در کار میآیند[1] که در آنها، m و n دو عدد صحیح‌اند، و $m \leqslant n$. قبل از تعریف دقیق این عبارات، برای آماده کردن ذهن، توضیحاتی در باب $(*)$ میآوریم. همین توضیحات را، با تغییرات جزئی لفظی، میتوان در باب $(\dagger)$ تکرار کرد. معمولاً میگویند $(*)$ عبارتست از حاصلجمع اعداد حاصل از قرار دادن اعداد صحیح از m تا با n در a_i به جای i، یعنی حاصلجمع اعداد

$$(۱) \qquad a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n.$$

مثلاً

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = a_2 + a_3 + a_4, \qquad\qquad \prod_{i=-1}^{2} a_i = a_{-1} \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2.$$

واضح است که «تعریف» مذکور در حقیقت تعریف نیست، زیرا، هنوز جمع بیش از دو عدد تعریف نشده است تا $(*)$ بطور کلی بدان وسیله تعریف شود. برای رسیدن به تعریف مقنع عبارت $(*)$، ملاحظه میکنیم که اگر $\sum_{i=m}^{n} a_i$، یعنی «حاصلجمع» اعداد (۱)، در دست باشد

---

(۱) Σ (سیگما) و Π (پی) از حروف بزرگ الفبای یونانی هستند.

انتظار داریم که $\sum_{i=m}^{n+1} a_i$، یعنی «حاصلجمع» اعداد

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n, a_{n+1},$$

از جمع کردن حاصل اول با a_{n+1} حاصل شود، یعنی این رابطه برقرار باشد:

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1}.$$

بعلاوه، برای تعمیم، مطلوبست که (*) در حالتی که $n = m$ نیز معنی داشته باشد، و این منظور با «تعریف» مذکور حاصل نمیشود. زیرا، در این حالت، رشته‌ی (۱) بیش از یک جمله ندارد، و آن a_m است، و عبارت «حاصلجمع a_m» با مفهوم عادی جمع بیمعنی است. ما، در این حالت، (*) را مساوی a_m تعریف میکنیم. بدین گونه، به تعریف استقرائی (*) و، با زمینه‌سازی مشابه، (†) میرسیم:

۷.۲. تعریف. فرض کنیم m عددی صحیح و $\{a_i\}_{i=m}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد، و n عدد صحیحی ناکمتر از m باشد.

I. عبارت $\sum_{i=m}^{i=n} a_i$ (بخوانید سیگمای ـ یا حاصلجمع ـ a_i از i مساوی m تا n)، یا مختصراً $\sum_{i=m}^{n} a_i$، به استقراء چنین تعریف میشود:

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m, \tag{۷.۲.۱}$$

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1}.\text{[1]} \tag{۷.۲.۲}$$

در عبارت $\sum_{i=m}^{n} a_i$، a_i را عبارت تحت $\sum$، i را اندیس جمع، و m و n را، بترتیب، حدود پایین و بالای $\sum$ نامیم.

عبارت $\sum_{i=m}^{n} a_i$ را، هر جا بیم ابهام نرود، به صورت $\sum_{m}^{n} a_i$، و نیز آن را به صورت ذیل هم مینویسند[2]:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

---

(۱) این فرمول به صورت $\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1}$ نیز نوشته میشود، و هکذا در مورد فرمول ۷.۲.۴.

(۲) ملاحظه کنید که ترتیب جمله‌ها در عبارت آتیه و نیز در مورد ضرب (قسمت II) همان ترتیب توالی جمل رشته‌ی $\{a_i\}_{i=m}^{n}$ است (III : ۶.۲.۳ ملاحظه شود).

II. عبارت $\prod_{i=m}^{i=n} a_i$ (بخوانید پیِ ـ یا حاصلضربِ ـ a_i از i مساوی m تا n)، یا مختصراً $\prod_{i=m}^{n} a_i$، به استقراء چنین تعریف میشود:

$$\prod_{i=m}^{m} a_i = a_m, \tag{۷.۲.۳}$$

$$\prod_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}. \tag{۷.۲.۴}$$

در عبارت $\prod_{i=m}^{n} a_i$، a_i را عبارت تحت $\prod$، i را اندیس ضرب، و m و n را، بترتیب، حدود پایین و بالای $\prod$ نامیم.

عبارت $\prod_{i=m}^{n} a_i$ را، هر جا بیم ابهام نرود، به صورت $\prod_{m}^{n} a_i$، و نیز آن را بـه صورت ذیـل هم مینویسند[۱]:

$$a_m \, a_{m+1} \, . \, . \, . \, a_n.$$

۷.۲.۵. امثله

(آ).

بنابر ۷.۲.۱
$$\sum_{i=0}^{0} a_i = a_0, \tag{۱}$$

بنابر ۷.۲.۲ و (۱)
$$\sum_{i=0}^{1} a_i = \left(\sum_{i=0}^{0} a_i\right) + a_1 = a_0 + a_1, \tag{۲}$$

بنابر ۷.۲.۲ و (۲)
$$\sum_{i=0}^{2} a_i = \left(\sum_{i=0}^{1} a_i\right) + a_2 = (a_0 + a_1) + a_2, \tag{۳}$$

بنابر ۷.۲.۲ و (۳)
$$\sum_{i=0}^{3} a_i = \left(\sum_{i=0}^{2} a_i\right) + a_3 = ((a_0 + a_1) + a_2) + a_3. \tag{۴}$$

این نتایج مطابقت تعریف سابق را با قـرارداد الحـاق به چپ (۸.۲.۳ : ۳) آشکار میسازند.

ضمناً ملاحظه کنید که در همه‌ی عبارات فـوق میتوان قید « $i =$ » را از زیر سیگماها اسقاط کرد، زیرا، مثلاً در عبارت $\sum_{0}^{3} a_i$ اندیس جمع مشخص میباشد (با ۷.۲.۷ مقایسه شود).

(ب). مطلوبست محاسبه‌ی $\prod_{i=-2}^{1} \frac{1}{i^2+1}$.

---

(۱) ذیل ۲ صفحه‌ی قبل دیده شود.

در اینجا $a_i = \frac{1}{i^2+1}$، و بنابر ۷.۲.۴ و ۷.۲.۳ متدرجاً خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\prod_{i=-2}^{1} \frac{1}{i^2+1} &= \Big(\prod_{i=-2}^{0} \frac{1}{i^2+1}\Big) \cdot \frac{1}{1+1}\\ &= \Big(\Big[\prod_{i=-2}^{-1} \frac{1}{i^2+1}\Big] \cdot \frac{1}{0+1}\Big) \cdot \frac{1}{1+1}\\ &= \Big(\Big[\Big(\prod_{i=-2}^{-2} \frac{1}{i^2+1}\Big) \cdot \frac{1}{1+1}\Big] \cdot \frac{1}{0+1}\Big) \cdot \frac{1}{1+1}\\ &= \Big(\Big[\Big(\frac{1}{4+1}\Big) \cdot \frac{1}{1+1}\Big] \cdot \frac{1}{0+1}\Big) \cdot \frac{1}{1+1}\\ &= \Big(\Big(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1}{1}\Big) \cdot \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(پ). رشته‌ی مورد بحث ممکن است ثابت باشد. مثلاً،

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} 2 = \Big(\sum_{i=1}^{3} 2\Big) + 2 &= \Big[\Big(\sum_{i=1}^{2} 2\Big) + 2\Big] + 2\\ &= \Big(\Big[\Big(\sum_{i=1}^{1} 2\Big) + 2\Big] + 2\Big) + 2 = [(2+2)+2]+2 = 8;\end{aligned}$$

$$\prod_{i=0}^{5} 2 = (\{[(2 \cdot 2) \cdot 2] \cdot 2\} \cdot 2) \cdot 2 = 64.$$

(ت). محاسبات آتیه را، که مبتنی بر ۷.۲.۱ و ۷.۲.۲ هستند، بامثال (آ) مقایسه کنید:

$$\sum_{j=0}^{0} a_j = a_0 = \sum_{i=0}^{0} a_i;$$

$$\sum_{j=0}^{1} a_j = \Big(\sum_{j=0}^{0} a_j\Big) + a_1 = a_0 + a_1 = \sum_{i=0}^{1} a_i.$$

نتایج حاصل در مثال اخیر خلاف انتظار نیست. چنانکه میدانیم، در عبارت $\{a_i\}_{i=m}$، متغیر i متغیری ظاهری است، و رشته‌ی $\{a_i\}_{i=m}$ همان رشته‌ی $\{a_j\}_{j=m}$ یا رشته‌ی

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n, \ldots$$

میباشد. بنا بر این، باید انتظار داشت که $\sum_{i=m}^{n} a_i$ با $\sum_{j=m}^{n} a_j$ مساوی باشد، و هکذا در مورد ضرب. به عبارت دیگر، متغیر i در عبارات $\sum_{i=m}^{n} a_i$ و $\prod_{i=m}^{n} a_i$ متغیری ظاهری است؛ معنی هر دو عبارت از i مستقل است. ذیلاً به اثبات این حکم میپردازیم.

۷.۲.۶. قضیه (استقلال از اندیس جمع و ضرب). بازاء هر دو عدد صحیح m و n که $m \leqslant n$،

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j. \qquad (۷.۲.۶.۱)$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_j. \qquad (۷.۲.۶.۲)$$

برهان (قسمت اول). فرض میکنیم m عدد صحیحی دلخواه و از این ببعد ثابت باشد، و به استقراء ابتدا از m ثابت میکنیم که تساوی ۷.۲.۶.۱ بازاء هر عدد صحیح n که $m \leqslant n$ برقرار است.

اولاً، بنا بر تعریف،

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m, \qquad \sum_{j=m}^{m} a_j = a_m.$$

پس، ۷.۲.۶.۱ بازاء $n = m$ برقرار است. ثانیاً، فرض کنیم n عدد صحیحی ناکمتر از m باشد، و ۷.۲.۶.۱ برقرار باشد. بنا بر تعریف،

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1}, \qquad \sum_{j=m}^{n+1} a_j = \left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right) + a_{n+1}.$$

پس، بنا بر فرض استقراء،

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{j=m}^{n+1} a_j. \blacktriangle$$

۷.۲.۷. تبصره. اندیس جمع یا ضرب را نباید با حروف دیگر مستقل از این اندیسها که در عبارت تحت $\sum$ یا $\prod$، به صورت اندیس یا جز آن، آمده‌اند خلط کرد. مثلاً

$$\prod_{i=1}^{3} a_i^k = a_1^k \cdot a_2^k \cdot a_3^k,$$

اما

$$\prod_{k=1}^{3} a_i^k = a_i^1 \cdot a_i^2 \cdot a_i^3 = a_i^6.$$

در این مثالها، درج اندیس ضرب در زیر $\prod$ ضروری است، زیرا عبارت $\prod_1^3 a_i^k$ مبهم میباشد.

۷.۲.۸. تمرین

۱. مطلوبست محاسبه‌ی

(آ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$. (ب) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k}$.

(پ) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{4} i^2$. (ت) $\displaystyle\sum_{r=-17}^{-10} r$.

(ث) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{4} n^2$. (ج) $\displaystyle\sum_{m=3}^{5} m(m+1)$.

(چ) $\displaystyle\sum_{k=1+2}^{4+2} \frac{1}{k-\mathbf{2}}$. (ح) $\displaystyle\sum_{m=3-2}^{5-2} (m+\mathbf{2})[(m+\mathbf{2})+1]$.

(خ) $\prod_{n=2}^{6}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$ (د) $\prod_{n=2}^{6}\frac{n^3-1}{n^3+1}.$

(ذ) $\prod_{n=1}^{5}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$ (ر) $\prod_{n=5}^{9}\frac{(n-3)^3-1}{(n-3)^3+1}.$

(ز) $\sum_{n=1}^{10}(1+(-1)^n).$ (ژ) $\prod_{n=1}^{10}(1-(-1)^n).$

۲. از مقایسه‌ی نتایج حاصل در بعضی از قسمتهای مسئله‌ی ۱ (مثلاً ج با ح) میتوانید قواعدی در باب محاسبه با Σ و Π حدس بزنید. این حدسها را بیان کنید، و در تأیید هر یک خودتان مثالی بسازید.

۳. بنا بر آنکه $f(x)=x^2$ مطلوبست مقدار

(آ) $\sum_{i=0}^{5} f(i).$ (ب) $\prod_{k=1}^{3} f(k).$

۴. این عبارات را مختصر کنید:

(آ) $\sum_{i=2}^{7}(x_{i+1}-x_i).$ (ب) $\prod_{i=2}^{7}(x_{i+1}/x_i).$

۵. عبارات ذیل را به وسیله‌ی Σ یا Π بنویسید:

(آ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$ (ب) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}.$

(پ) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$ (ت) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}.$

(ث) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3.$ (ج) $1^3-2^3+3^3-4^3+5^3.$

(چ) $a_5-a_6+a_7-a_8.$ (ح) $|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|.$

(خ) $|a_1+a_2+a_3+a_4|.$ (د) $|a_1|-|a_2|+|a_3|-|a_4|.$

(ذ) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{10}).$

(ر) $(k+a_1)(k+a_2)\ldots(k+a_{10}).$

(ز) $(1+a_1)(1-a_2)(1+a_3)\ldots(1-a_{10}).$

(ژ) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1000\cdot 1001}.$

(س) $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{50}{49}.$

۷.۳. امثله از استدلال. سابقاً اشاره کردیم که تعریفات تراجعی با استدلال استقرائی بسیار مساعدند. با تعریف اشیاء جدید ریاضی به تراجع، احکام اساسی مربوط به آنها را میتوان به استقراء ثابت، و بسیاری از مسائل مربوط به آنها را به همین روش حل کرد. در مورد فعلی، حاصلجمعها یا حاصلضربهای مورد بحث را به وسیله‌ی $\sum$ یا $\prod$ بیان میکنیم، و سپس به استدلال یا محاسبه میپردازیم. ذیلاً مثالهائی در توضیح این کلیات میآوریم.

۷.۳.۱. مثال ۱. در ریاضیات مقدماتی میآموزیم که

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$$

این دستور را میتوان چنین نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2. \qquad (*)$$

آیا این فرمول بازاءِ جمیع مقادیر طبیعی n برقرار است؟ به استقراء ثابت میکنیم که چنین است. بازاءِ $n = 1$، $(*)$ به صورت $\sum_{i=1}^{1} i = (1 \cdot 2)/2$ در میآید، که طرف اولش، بنا بر ۷.۲.۱، مساوی 1 است. پس، $(*)$ بازاءِ $n = 1$ برقرار است. اینک $(*)$ را مفروض میگیریم، و ثابت میکنیم که

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)(n+2)/2.$$

گوئیم

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \; [\text{۷.۲.۲}] = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \; [*] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

پس، $(*)$ بازاءِ هر عدد طبیعی برقرار است. ▲

۷.۳.۲. مثال ۲ (بستگی قوهٔ طبیعی با ضرب). در ریاضیات مقدماتی، قوهٔ nم عدد a را چنین تعریف میکنند:

$$a^1 = a, \qquad a^n = \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n \text{ مرتبه}} \qquad (n > 1).$$

بر طبق تعریف II : ۷.۲، «حاصلضرب n عامل مساوی با a»، خواه n مساوی 1 باشد یا بزرگتر از آن، به صورت $\prod_{i=1}^{n} a$ نوشته میشود. اینک ثابت میکنیم که این حاصلضرب با a^n به معنائی که سابقاً به استقراء تعریف کردیم مساوی است، یعنی

$$\prod_{i=1}^{n} a = a^n. \qquad (*)$$

بنا بر ۷.۲.۳ و ۴.۵.۵.۱، $(*)$ بازاءِ $n = 1$ برقرار است. اگر $(*)$ برقرار باشد آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n+1} a \; [\text{۷.۲.۴}] = \left(\prod_{i=1}^{n} a\right) \cdot a \; [*] = a^n \cdot a \; [\text{۴.۵.۵.۲}] = a^{n+1}. \;▲$$

۷.۳.۳. مثال ۳ (تعمیم توزیعپذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع). میخواهیم ثابت کنیم که حاصلضرب یک عدد در مجموع تعدادی متناهی از اعداد مساوی است با مجموع حاصلضربهای آن در یکایک این اعداد. به عبارت دیگر، بازاءِ هر عدد طبیعی n،

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n).$$

حکم را میتوان چنین نوشت:

$$(*) \qquad c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i.$$

اثبات به استقراء است، و به متعلم محول میشود.

ملاحظه کنید که، در (*)، c عددی است مستقل از اندیس جمع (یعنی از i).

مثلاً $\sum_{i=1}^{2} ia_i = a_1 + 2a_2$ اما $i\sum_{i=1}^{2} a_i = i(a_1 + a_2)$.

۷.۳.۴. مثال ۴. چنین بنظر میآید که

$$(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots b_n)$$
$$= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots (a_n + b_n).$$

به عبارت دیگر

$$(*) \qquad \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) \qquad (m \leqslant n).$$

برای اثبات، فرض میکنیم m عدد صحیح دلخواهی باشد، و به استقراءِ ابتدا از m ثابت میکنیم که، بازاءِ هر عدد صحیح n، اگر $m \leqslant n$ آنگاه رابطهی (*) برقرار است. برای اختصار، فرض کنیم $c_i = a_i + b_i$ (۱). به آسانی دیده میشود که رابطهی (*) بازاءِ $n = m$ برقرار است. حال فرض کنیم (*) بازاءِ عدد صحیح دلخواه n که $m \leqslant n$ برقرار باشد. در این صورت،

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i + \sum_{i=m}^{n+1} b_i \quad [\text{۷.۲.۲}]$$
$$= \left[\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right] + \left[\left(\sum_{i=m}^{n} b_i\right) + b_{n+1}\right] \; [\text{حم ۲ و حم ۵}]$$
$$= \left[\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i\right] + (a_{n+1} + b_{n+1}) \; [(\text{۱}) \text{ و } (*)]$$
$$= \left(\sum_{i=m}^{n} c_i\right) + c_{n+1} \, [\text{۷.۲.۲}] = \sum_{i=m}^{n+1} c_i. \blacktriangle$$

۷.۳.۵. تمرین

۱. از تساویهای ذیل بعضی همیشه (بازاءِ جمیع مقادیر طبیعی n) برقرارند، و برخی چنین نیستند. برقرار بودن آنها را ثابت و اینها را باطل کنید:

(آ) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} = \frac{n}{216}(22n^2 - 147n + 341).$

(ب) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a = na.$

(پ) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

(ت) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1/k) = (4 + 9n - n^2)/12.$

۲. مستقیماً (به محاسبه) تحقیق کنید که

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{ij} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{5} 2i(3i-1) = 2\sum_{i=0}^{5} i(3i-1),$$

اما روابط ذیل عموماً بر قرار نیستند:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i(i+j)} = \frac{1}{i+j} \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i}. \qquad \sum_{i=0}^{5} 2i(3i-1) = 2i \sum_{i=0}^{5} (3i-1),$$

۳. بنا بر آنکه

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 . 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

اولاً s_1، s_2، s_3، s_4، و s_5 را حساب کنید. ثانیاً، با تأمل در نتایج حاصل، دستور کلی برای محاسبه‌ی s_n بر حسب n بدست آورید.

۴. دستوری کلی برای محاسبه‌ی هر یک از عبارات ذیل بدست آورید:

(آ) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$ (ب) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$

۵. ثابت کنید که، بازاءِ هر عدد طبیعی n،

(آ) $$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (-a_1) + (-a_2) + \cdots + (-a_n).$$

(ب) $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n).$$

(پ) $$(a_1 \cdot a_2 \ldots a_n) \cdot (b_1 \cdot b_2 \ldots b_n) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2) \ldots (a_n b_n).$$

۶. احکام ذیل را باطل کنید:

(آ) $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

(ب) $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

۷.۴. قواعد محاسبه. قواعد محاسبه با $\sum$ و $\prod$ در ریاضیات عالی، از لحاظ اهمیت، همپایه‌ی قواعد جمع و ضرب در جبر مقدماتی هستند، و باید بر آنها تسلط کامل یافت. ذیلاً اهم این قواعد را میآوریم. روش اثبات آنها در امثله‌ی گذشته معلوم شد، و نمونه‌های دیگر خواهد آمد. معمولاً احکام را در مورد $\sum$ ثابت میکنیم؛ در اثبات احکام متناظر در مورد $\prod$ نیازی جز به تغییر دادن بعضی الفاظ یا علامات نیست. یاد آوری میکنیم که، بنا بر تعریف، همواره حد بالای $\sum$ و $\prod$ ناکمتر از حد پایین آنها فرض میشود.

در باب قضیه‌ی آتیه، توضیح کافی در ۷.۳.۳ ذکر شد:

۷.۴.۱. قضیه (تعمیم توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع). اگر c مستقل از اندیس جمع باشد آنگاه

$$c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} ca_i. \qquad (۷.۴.۱.۱)$$

بالاخص،

$$-\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} (-a_i). \qquad (۷.۴.۱.۲)$$

(رابطه‌ی اول مجوز «فاکتورگیری» در $\sum$ نیز هست. البته، عامل مشترک باید از اندیس جمع مستقل باشد.)

فرض کنیم m، n، و k سه عدد صحیح نامنفی باشند، و $m \leqslant k < n$. رشته‌ی اعداد

$$a_m, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$$

را میتوان به دو رشته‌ی

$$a_m, \ldots, a_k, \qquad a_{k+1}, \ldots, a_n$$

تفکیک کرد. عادةً انتظار برقراری روابط ذیل را داریم:

$$a_m + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n = (a_m + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n),$$

$$a_m \ldots a_k \cdot a_{k+1} \ldots a_n = (a_m \ldots a_k) \cdot (a_{k+1} \ldots a_n).$$

به عبارت دقیقتر،

۷.۴.۲. قضیه[۱]. بازاء هر سه عدد صحیح m، k، و n، اگر $m \leqslant k < n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i, \qquad (۷.۴.۲.۱)$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m}^{k} a_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_i. \qquad (۷.۴.۲.۲)$$

برهان (۷.۴.۲.۱). فرض کنیم m عدد صحیح دلخواهی باشد. اگر $m \leqslant k < n$ آنگاه $m < n$، و از آنجا $n \geqslant m + 1$. پس، کافی است ثابت کنیم که بازاء هر عدد صحیح n که ناکمتر از $m + 1$ باشد رابطه‌ی ۷.۴.۲.۱ بازاء هر عدد صحیح k که $m \leqslant k < n$ برقرار است. اثبات به استقراء ابتدا از $m + 1$ است.

اولاً، اگر $n = m + 1$ آنگاه $m \leqslant k < m + 1$، و لهذا، $k = m$، و حکم چنین میشود:

---

(۱) این قضیه تعمیمی از خاصیت شرکتپذیری است. حکم کلی در ضمن ۷.۷ خواهد آمد.

$$\sum_{i=m}^{m+1} a_i = \sum_{i=m}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+1} a_i,$$

و این نتیجه‌ی مستقیم تعریف است.

ثانیاً، فرض کنیم n عدد صحیح دلخواهی ناکمتر از $m+1$ باشد، و ۷.۴.۲.۱ بازاء هر عدد صحیح k که $m \leqslant k < n$ برقرار باشد. گوئیم

(*) بازاء هر عدد صحیح k که $m \leqslant k < n+1$،

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_i. \qquad (\dagger)$$

زیرا، فرض کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد و $m \leqslant k < n+1$. از $k < n+1$ نتیجه میشود $k < n$ یا $k = n$. پس، دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $k < n$ (۱). گوئیم،

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i$$ بنا بر تعریف (۷.۲.۲)

$$= \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1}$$ بنا بر (۱) و فرض استقراء

$$= \Big(\sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i\Big) + a_{n+1}$$ بنا بر حم ۲

$$= \sum_{i=m}^{k} a_i + \Big(\sum_{i=k+1}^{n} a_i + a_{n+1}\Big)$$ بنا بر تعریف (۷.۲.۲)

$$= \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_i.$$

پس، (†) برقرار است.

حالت دوم: $n = k$. اثبات (†) بر متعلم است. ▲

به وسیله‌ی ۷.۲.۲ و ۷.۲.۴ میتوان «جمله‌ی آخر» یک حاصلجمع یا حاصلضرب را از تحت $\sum$ یا $\prod$ خارج کرد. از قضیه‌ی ۷.۴.۲ بلا درنگ قواعد ذیل برای خارج کردن جمله‌ی اول حاصل میشود:

۷.۴.۳. قضیه. اگر $m < n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_i; \qquad (۷.۴.۳.۱)$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m . \prod_{i=m+1}^{n} a_i. \qquad (۷.۴.۳.۲)$$

مثلاً، $\sum_{-2}^{5} a_i = a_{-2} + \sum_{-1}^{5} a_i$.

از قواعد مهم محاسبه با $\sum$ و $\prod$ قواعد «لغزاندن حدود» است، که در ضمن مسئله‌ی ۲ : ۷.۲.۸ بدانها برخورده‌اید. حکم کلی اینست:

۷.۴.۴. قضیه (قواعد لغزاندن حدود). بازاء هر سه عدد صحیح m، n، و k، اگر $m \leqslant n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}, \qquad (۷.۴.۴.۱)$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}. \qquad (۷.۴.۴.۲)$$

و همین روابط با «$\prod$» بجای «$\sum$».

اثبات قضیه به متعلم محول میشود. مثال:

$$\sum_{i=8}^{25} a_i = \sum_{i=3}^{20} a_{i+5} = \sum_{i=0}^{17} a_{i+8},$$

$$\prod_{i=0}^{10} (i^2 + i) = \prod_{i=3}^{13} [(i-3)^2 + (i-3)].$$

با احکام مندرج در قضیه‌ی ذیل در ۷.۳.۴ و ۵ : ۷.۳.۵ آشنا شده‌اید. قضیه را به عنوان تمرین ثابت کنید:

۷.۴.۵. قضیه. اگر $m \leqslant n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i); \qquad (۷.۴.۵.۱)$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i); \qquad (۷.۴.۵.۲)$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} b_i = \prod_{i=m}^{n} a_i b_i. \qquad (۷.۴.۵.۳)$$

از قواعد مفید محاسبه با $\sum$ و $\prod$ قواعد اِدغام است. این قواعد در محاسبه با عباراتی به صورتهای

$$(a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n),$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

بکار میروند. در این عبارات، بر طبق یک اصطلاح بیمعنی، همه‌ی aها[۱] جز a_m و a_{n+1} «از هم میروند»، و از اولی $a_{n+1} - a_m$ و از دومی a_{n+1}/a_m حاصل میشود. در این باب، بسیاری از محصلین دوچار حیرت میشوند: در «وسط راه»، در قسمت «. . .»، که جانشین «و غیره» است، چه روی میدهد؟

اینک که تعریف دقیق جمع و ضرب را آموختیم، رهائی از این مشکل آسان است:

۷.۴.۶. قضیه (قواعد ادغام در $\sum$ و $\prod$).

$$\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m. \qquad (۷.۴.۶.۱)$$

$$\prod_{i=m}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}. \qquad (۷.۴.۶.۲)$$

برهان. ۷.۴.۶.۱ را ثابت و اثبات رابطه‌ی دوم را به متعلم محول میکنیم (استدلال آتیه مثال خوبی است برای آموختن استعمال قواعد سابق‌الذکر). اگر $n = m$ آنگاه ۷.۴.۶.۱ بنا بر ۷.۲.۰۱ واضحست. پس، فرض کنیم $m < n$. بنا بر ۷.۴.۵.۲، طرف اول رابطه‌ی ۷.۴.۶.۱ مساوی است با

$$\sum_{i=m}^{n} a_{i+1} - \sum_{i=m}^{n} a_i. \qquad (۱)$$

اینک، به وسیله‌ی لغزاندن حدود در جمله‌ی اول، اندیس عبارت تحت سیگمای اول را با اندیس عبارت تحت سیگمای دوم یکسان میکنیم. بدین گونه، (۱) مساوی میشود با

$$\sum_{i=m+1}^{n+1} a_i - \sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (۲)$$

بالاخره، به وسیله‌ی ۷.۲.۰۲ و ۷.۴.۳.۰۱، جمله‌های مشترک دو $\sum$ را جدا میکنیم؛ (۲) مساوی میشود با

$$\left[\left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right] - \left[a_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right] = a_{n+1} - a_m. \blacktriangle$$

آخرین قضیه‌ی کلی مهمی که در این مقام در باب $\sum$ و $\prod$ ثابت میکنیم اینست که حاصلجمع اعداد

$$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n \qquad (m \leqslant n) \qquad (۱)$$

با حاصلجمع اعداد

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{m+1}, a_m \qquad (۲)$$

---

(۱) «aها» یعنی a_m، a_{m+1}، . . .، و a_{n+1} که مورد بحث هستند. موارد مشابه را بر همین قیاس کنید.

مساوی است، و هکذا حاصلضرب آنها[1]. قبلاً باید مسئله را به صورت دقیق ریاضی بیان کرد.
حاصلجمع اعداد رشته‌ی (۱)، بنا بر تعریف، $\sum_{i=m}^{n} a_i$ است، اما، حاصلجمع اعداد (۲) را نمیتوان $\sum_{i=n}^{m} a_i$ نامید، زیرا این عبارت بر طبق قراری که در ۷.۲ گذاشتیم بیمعنی است. رهائی از این مشکل آسان است. چون $n \leqslant m$، $-m \leqslant -n$، و بازاء هر j که $-n \leqslant j \leqslant -m$، $m \leqslant -j \leqslant n$. حال اگر رشته‌ی $\{b_j\}_{j=-n}^{-m}$ را با ضابطه‌ی

$$b_j = a_{-j} \qquad (-n \leqslant j \leqslant -m) \tag{۳}$$

تعریف کنیم اعداد (۲) بدین صورت در میآیند:

$$b_{-n}, b_{-n+1}, \ldots, b_{-m+1}, b_{-m},$$

و حاصلجمع این اعداد $\sum_{j=-n}^{-m} b_j$ میباشد که، نظر به رابطه‌ی (۳)، آن را $\sum_{j=-n}^{-m} a_{-j}$ مینامند، و اینک مساوی بودن اعداد رشته‌ی (۱) با اعداد ردیف (۲) با رابطه‌ی

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=-n}^{-m} b_j \ (\text{یا } \sum_{i=-n}^{-m} b_i)$$

بیان میشود، که مهیا برای استدلال استقرائی است:

۷.۴.۷. قضیه. اگر $\{a_i\}_{i=m}^{n}$ رشته‌ای از اعداد باشد، و رشته‌ی $\{b_i\}_{-n}^{-m}$ با ضابطه‌ی

$$b_i = a_{-i} \qquad (-n \leqslant i \leqslant -m) \tag{*}$$

تعریف شود، آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=-n}^{-m} b_i; \tag{۷.۴.۷.۱}$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=-n}^{-m} b_i. \tag{۷.۴.۷.۲}$$

در شرایط مذکور، طرف دوم روابط فوق را، بترتیب، $\sum_{i=-n}^{-m} a_{-i}$ و $\prod_{i=-n}^{-m} a_{-i}$ مینامیم.

برهان. قسمت اول را به استقراء ابتدا از m ثابت میکنیم. اولاً،

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m, \qquad \sum_{i=-m}^{-m} b_i = b_{-m}\,[(*)] = a_m.$$

ثانیاً، فرض کنیم $m \leqslant n$ و ۷.۴.۷.۱ برقرار باشد. گوئیم

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1}\ [۷.۴.۷.۱]$$

---

(۱) این حکم حالت خاصی از استقلال حاصلجمع و حاصلضرب چند عدد است از ترتیب عوامل، که صورت کلی آن در ۷.۷.۵ آمده است.

$$= a_{n+1} + \sum_{i=-n}^{-m} b_i \; [(*)]$$
$$= b_{-(n+1)} + \sum_{i=-n}^{-m} b_i \; [۷.۴.۳.۱]$$
$$= \sum_{i=-(n+1)}^{-m} b_i. \blacktriangle$$

۷.۴.۷.۳. مثال. حاصلضرب $\prod_{i=0}^{4} (a+4-i)$ را اختیار میکنیم. در اینجا $a_i = a+4-i$. پس، اگر

$$b_i = a_{-i} = a+4+i \quad (-4 \leqslant i \leqslant 0)$$

آنگاه

$$\prod_{i=0}^{4} (a+4-i) = \prod_{-4}^{0} (a+4+i) \; [۷.۴.۴.۱] = \prod_{0}^{4} (a+i).$$

ملاحظه کنید که

$$\prod_{i=0}^{4} (a+4-i) = (a+4)(a+3)(a+2)(a+1)a;$$
$$\prod_{i=0}^{4} (a+i) = a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4).$$

در پایان این قسمت، قضیه‌ی مفید ذیل را میآوریم.

۷.۴.۸. قضیه.

$$\sum_{i=1}^{n} a = na. \qquad (۷.۴.۸.۱)$$

$$\sum_{i=m}^{n} a = (n-m+1)a. \qquad (۷.۴.۸.۲)$$

$$\prod_{i=1}^{n} a = a^n. \qquad (۷.۴.۸.۳)$$

$$\prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1}. \qquad (۷.۴.۸.۴)$$

در باب ۷.۴.۸.۳، مثال ۷.۳.۰۲ ملاحظه شود. رابطه‌ی ۷.۴.۸.۱ همان است که گاه به صورت

$$\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n \text{ مرتبه}} = na$$

نوشته میشود، و مبین بستگی ضرب در یک عدد طبیعی با «جمع مکرر» است، که در حساب

ابتدائی به عنوان تعریف ضرب بکار میرود.

۷.۵. امثله و فواید

۷.۵.۱. در تعیین حاصلجمع جمل رشته‌ی $\{b_i\}_{i=m}^n$، اگر بتوان رشته‌ای مانند $\{a_i\}$ یافت که همواره $b_i = a_{i+1} - a_i$ آنگاه، به وسیله‌ی قاعده‌ی ادغام در $\sum$، میتوان $\sum_{i=m}^n b_i$ را تعیین کرد. مثلاً، برای محاسبه‌ی حاصلجمع موضوع مثال ۷.۳.۱، ملاحظه میکنیم که $i = \frac{1}{2} i(i+1) - \frac{1}{2} i(i-1)$. پس،

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

۷.۵.۲. به عنوان مثال دیگر، s_n موضوع مسئله‌ی ۳ : ۷.۳.۵ را اختیار میکنیم. با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = -\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

۷.۵.۳. گاه میتوان یک حاصلجمع را به حاصلجمعهائی که مقدارشان معلوم است تجزیه و سپس آن را حساب کرد. مثلاً، حاصلجمع n جمله‌ی اول یک تصاعد عددی با قدر نسبت d و جمله‌ی اول a عبارتست از

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [a + (i-1)d] &= \sum_{i=1}^n [(a-d) + id] \\ &= \sum_{i=1}^n (a-d) + \sum_{i=1}^n id \ [\text{۷.۴.۱.۱ و ۷.۴.۸.۱}] \\ &= n(a-d) + d\sum_{i=1}^n i \ [\text{۷.۵.۱}] \\ &= n(a-d) + d \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} n[2a + (n-1)d]. \end{aligned}$$

۷.۵.۴. به وسیله‌ی لغزانیدن حدود میتوان، از دستوراتی که بدست میآید، دستورات کلیتر بدست آورد. مثلاً، در مثال ۷.۵.۱، حاصلجمع اعداد طبیعی از 1 تا با n را بدست آوردیم. حال اگر حاصلجمع اعداد طبیعی از m تا با n مطلوب باشد میتوان چنین استدلال کرد:

$$\sum_{i=m}^n i = \sum_{i=1}^{n-(m-1)} [i + (m-1)] = \sum_{i=1}^{n-m+1} i + \sum_{i=1}^{n-m+1} (m-1)$$

$$= \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} + (n-m+1)(m-1)$$
$$= \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}.$$

۷.۵.۵. با تلفیق تدابیر سابق‌الذکر و امثال آنها میتوان بعضی حاصلجمعها را حساب کرد. مثلاً، فرض کنیم دستور بسط $(1+i)^3$ معلوم باشد، و

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

با توجه به رابطه‌ی $(1+i)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1).$$

طرف اول، بنا بر قاعده‌ی ادغام، مساوی $(1+n)^3 - 1$ است. پس،

$$(1+n)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

و از آنجا،

$$S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

۷.۵.۶. در جبر مقدماتی، به استناد دستورات تجزیه‌ی $a^2 - b^2$، $a^3 - b^3$، $a^4 - b^4$، و غیره به حاصلضرب $a - b$ در عاملی دیگر، ادعا میکنند که، بازاءِ هر عدد طبیعی n،

$$(1) \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

راه اثبات این مدعا اساساً اینست که، در طرف دوم، عمل ضرب را انجام دهیم، و ثابت کنیم حاصلضرب مساوی $a^n - b^n$ است. اما ــ چون n عدد طبیعی دلخواهی است ــ پر کردن جای «. . .»، و لهذا، نوشتن همه‌ی جمله‌های حاصلضرب عملی نیست. قواعد محاسبه با Σ این مشکل را برطرف میکند. قبلاً ملاحظه میکنیم که عامل دوم طرف راست در (۱) عبارتست از $\sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r-1}$. پس، حکم مورد ادعا چنین است:

۷.۵.۷. قضیه. همواره

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

برهان. اگر طرف دوم را A بنامیم، بنا بر توزیعپذیری ضرب نسبت به تفریق، و با توجه به اینکه a و b از اندیس جمع مستقل‌اند، خواهیم داشت:

$$A = a \cdot \sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r-1} - b \cdot \sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r}.$$

بنابر ۷.۴.۳.۱ و با لغزانیدن حدود،

$$\sum_{r=1}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1} = a^n + \sum_{r=2}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1} = a^n + \sum_{r=1}^{n-1} a^{n-r} b^r.$$

از طرف دیگر،

$$\sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^r = \left(\sum_{r=1}^{n-1} a^{n-r} b^r\right) + b^n.$$

بالنتیجه، $A = a^n - b^n$. ▲

۷.۵.۸. تمرین

۱. $\sum_{i=m}^{n} a_i$ چند جمله دارد؛ ادعای خودرا به استقراء ثابت کنید.

۲. تساویهای ذیل را به وسیله‌ی قواعد محاسبه با Σ ثابت کنید:

(آ) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

(ب) $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$

(پ) $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 5k) = n(n+1)(n-2).$

(ت) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$

(ث) $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{4m^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$

(ج) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(3r-2)(3r+1)} = \frac{n}{3n+1}.$

(چ) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$

(ح) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$

راهنمائی: میتوان ملاحظه کرد که

$$\frac{1}{r(r+2)} = \frac{r+1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{(r+2)-1}{r(r+1)(r+2)}.$$

۳. دستوری برای محاسبه‌ی هر یک از حاصلجمعهای ذیل بدست آورید، و سپس صحت آن را به استقراء بیازمایید:

(آ) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}.$

(ر) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+3)}$

(ز) $\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{(2h-1)(2h+3)}$

۴. تساویهای ذیل را به وسیله‌ی قواعد محاسبه با Π ثابت کنید:

(آ) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$. (ب) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

۵. با استعمال قواعد محاسبه با Σ، حاصلجمع جمل متوالی یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت d را از جمله‌ی mم تا با جمله‌ی nم بدست آورید.

۶. با استعمال قواعد محاسبه با Π، همان مسئله را در مورد تصاعد هندسی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت q حل کنید.

۷. بنا بر آنکه $a \neq 1$ دستوری برای محاسبه‌ی هر یک از حاصلجمعهای ذیل بدست آورید:

$$s=\sum_{r=1}^{n} ra^{r-1}. \qquad \sigma=\sum_{r=1}^{n} r^2a^{r-1}.$$

راهنمائی: برای اولی به $(1-a)s$ و برای دومی به $(1-a)^2\sigma$ توجه کنید.

۸. ثابت کنید که بازاءِ هر عدد طبیعی فرد n،

$$a^n+b^n=(a+b)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}a^{n-r}b^{r-1}.$$

۷.۶. حاصلجمع مضاعف.

۷.۶.۱. تعریف. فرض کنیم m، n، p، و q اعدادی صحیح باشند، و $m \leqslant n$ و $p \leqslant q$، و رشته‌ی

$$a_{i,j} \qquad (i \in \mathbf{I}_m,\ j \in \mathbf{I}_p)$$

رشته‌ی مضاعفی از اعداد حقیقی باشد. عبارت

$$\sum_{i=m}^{i=n}\left(\sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j}\right) \qquad (*)$$

را یک حاصلجمع مضاعف خوانیم، و به صورت

$$\sum_{i=m}^{i=n}\sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j} \qquad (\dagger)$$

مینویسیم. مانند سابق، هرجا بیم ابهام یا تیرگی نرود، اندیسهای جمع را در بالای سیگماها نمینویسند.

تعریف $\sum_{i=m}^{i=n}\sum_{j=p}^{j=i} a_{i,j}$ و $\sum_{i=m}^{i=n}\sum_{j=i}^{j=q} a_{i,j}$ وقتی که این مقادیر معنی داشته باشند[1] به همین قیاس است.

---

(۱) ۲ : ۷.۶.۷ ملاحظه شود.

۷.۶.۱.۱. تبصره. آیا عبارت (*)، که آن را حاصلجمع مضاعف خواندیم و به صورت (†) نمایش دادیم، معنی دارد؟ جواب گفتن به این سؤال آسان است. با شرایط مذکور در آغاز ۷.۶.۱، بازاء هر i از $\mathbf{I}_m$، حاصلجمع $\sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j}$ بر طبق I : ۷.۲ تعریف میشود، و اگر مقدار آن را b_i بنامیم، عبارت (*) به صورت $\sum_{i=m}^{i=n} b_i$ در میآید که بنا بر I : ۷.۲ تعریف میشود.

۷.۶.۱.۲. امثله

(آ). محاسبهی حاصلجمع مضاعف $A = \sum_{i=2}^{5} \sum_{j=-3}^{-1} a_{i,j}$.

در اینجا

$$b_i = \sum_{j=-3}^{-1} a_{i,j} = a_{i,-3} + a_{i,-2} + a_{i,-1}.$$

پس،

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=2}^{5} (a_{i,-3} + a_{i,-2} + a_{i,-1}) \\ &= (a_{2,-3} + a_{2,-2} + a_{2,-1}) \\ &+ (a_{3,-3} + a_{3,-2} + a_{3,-1}) \\ &+ (a_{4,-3} + a_{4,-2} + a_{4,-1}) \\ &+ (a_{5,-3} + a_{5,-2} + a_{5,-1}). \end{aligned}$$

(ب).

$$\begin{aligned} \sum_{j=-3}^{-1} \sum_{i=2}^{5} a_{i,j} &= \sum_{j=-3}^{-1} (a_{2,j} + a_{3,j} + a_{4,j} + a_{5,j}) \\ &= (a_{2,-3} + a_{3,-3} + a_{4,-3} + a_{5,-3}) \\ &+ (a_{2,-2} + a_{3,-2} + a_{4,-2} + a_{5,-2}) \\ &+ (a_{2,-1} + a_{3,-1} + a_{4,-1} + a_{5,-1}). \end{aligned}$$

از مقایسهی دو حاصلجمع مضاعف مذکور در مثالهای (آ) و (ب) دیده میشود که این حاصلجمعها با هم متساویند. بطور کلی،

۷.۶.۲. قضیه. همواره

$$\sum_{i=m}^{i=n} \sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{j=q} \sum_{i=m}^{i=n} a_{i,j} \qquad (m \leqslant n,\ p \leqslant q). \qquad (*)$$

برهان. فرض میکنیم m، p، و q سه عدد صحیح دلخواه باشند و $p \leqslant q$، و به استقراء ابتدا از m ثابت میکنیم که تساوی (*) بازاء هر n که $m \leqslant n$ برقرار است.

اولاً، بازاء $n = m$ خواهیم داشت،

$$\text{طرف اول} = \sum_{i=m}^{i=m}\left(\sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j}\right) [۷\cdot۲\cdot۱] = \sum_{j=p}^{j=q} a_{m,j},$$

$$\text{طرف دوم} = \sum_{j=p}^{j=q}\left(\sum_{i=m}^{i=m} a_{i,j}\right) [۷\cdot۲\cdot۱] = \sum_{j=p}^{j=q} a_{m,j}.$$

پس، تساوی حکم برقرار است.

ثانیاً فرض کنیم n عدد صحیح دلخواهی ناکمتر از m باشد، و تساوی (*) برقرار باشد. گوئیم

$$\sum_{i=m}^{i=n+1}\sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j} [۷\cdot۲\cdot۲] = \sum_{i=m}^{i=n}\sum_{j=p}^{j=q} a_{i,j} + \sum_{j=p}^{j=q} a_{n+1,j}.$$

طـرف دوم، بنا بر فرض استقراء مساوی است با

$$\sum_{j=p}^{j=q}\sum_{i=m}^{i=n} a_{i,j} + \sum_{j=p}^{j=q} a_{n+1,j}.$$

و این، بنا بر ۷.۴.۵.۱، مساوی است با

$$\sum_{j=p}^{j=q}\left(\sum_{i=m}^{i=n} a_{i,j} + a_{n+1,j}\right),$$

و این بنا بر ۷.۲.۲ مساوی است با

$$\sum_{j=p}^{j=q}\sum_{i=m}^{i=n+1} a_{i,j}. \blacktriangle$$

†۷.۶.۳. تبصـره. در قضیه‌ی آتیه حاصلجمعهای مضاعفی می‌آید به صورتهای

$$(۱)\quad \sum_{i=m}^{i=n}\sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j}, \qquad (۲)\quad \sum_{j=m}^{j=n}\sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j},$$

که در آنها یکی از حدود سیـگمای داخلی (سیگمای دوم از چپ به راست) «متغیر» و مساوی اندیس جمع سیگمای خارجی است. چنانکه از اشاره‌ی قسمت اخیر تعـریف ۷.۶.۱ معلـوم است، عبارت (۱) بـه معنی $\sum_{i=m}^{i=n}\left(\sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j}\right)$ است، و هکـذا در مورد دومـی. توجیه تعریف به همان قیاس است که در ۷.۶.۱.۱ گفته شد.

بـه عنوان مثال، $\sum_{i=3}^{i=6}\sum_{j=3}^{j=i} a_{i,j}$ را اختیار میکنیم. اگـر فرض کنیم $b_i = \sum_{j=3}^{j=i} a_{i,j}$ خـواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{i=6}\sum_{j=3}^{j=i} a_{i,j} &= \sum_{i=3}^{i=6} b_i = b_3 + b_4 + b_5 + b_6\\ &= \sum_{j=3}^{3} a_{3,j} + \sum_{j=3}^{4} a_{4,j} + \sum_{j=3}^{5} a_{5,j} + \sum_{j=3}^{6} a_{6,j}\\ &= a_{3,3}\\ &+ a_{4,3} + a_{4,4}\end{aligned}$$

$$+ a_{5,3} + a_{5,4} + a_{5,5}$$
$$+ a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6}.$$

اگر این اعداد را ستونی با هم جمع کنیم حاصلجمع آنها چنین خواهد بود:

$$\sum_{i=3}^{6} a_{i,3} + \sum_{i=4}^{6} a_{i,4} + \sum_{i=5}^{6} a_{i,5} + \sum_{i=6}^{6} a_{i,6},$$

و این خود مساوی

$$\sum_{j=3}^{j=6} \sum_{i=j}^{i=6} a_{i,j}$$

است. پس،

$$\sum_{i=3}^{i=6} \sum_{j=3}^{j=i} a_{i,j} = \sum_{j=3}^{j=6} \sum_{i=j}^{i=6} a_{i,j}.$$

بطور کلی، حاصلجمع مضاعف $\sum_{i=m}^{i=n} \sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j}$ مساوی است با

$$\sum_{j=m}^{j=m} a_{m,j} + \sum_{j=m}^{j=m+1} a_{m+1,j} + \sum_{j=m}^{j=m+2} a_{m+2,j} + \cdots + \sum_{j=m}^{j=n} a_{n,j},$$

که آن را میتوان چنین نوشت،

$$\begin{aligned} & a_{m,m} \\ & + a_{m+1,m} + a_{m+1,m+1} \\ & + a_{m+2,m} + a_{m+2,m+1} + a_{m+2,m+2} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n,m} + a_{n,m+1} + \cdots + a_{n,n}. \end{aligned}$$

اگر این اعداد را ستونی با هم جمع کنیم عدد

$$\sum_{i=m}^{i=n} a_{i,m} + \sum_{i=m+1}^{n} a_{i,m+1} + \cdots + \sum_{i=n}^{i=n} a_{i,n}$$

حاصل میشود، که مساوی است با

$$\sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j}.$$

قضیه‌ی آتیه حکم میکند به اینکه این حاصلجمع ستونی با حاصلجمع مضاعف اولیه مساوی است:

۷.۶.۴† قضیه. همواره

$$\sum_{i=m}^{i=n} \sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j}. \qquad (*)$$

برهان. اثبات به استقراء نسبت به n است.

اولاً، بازاء $n = m$ خواهیم داشت،

$$\text{طرف اول} = \sum_{i=m}^{i=m} \sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{j=m} a_{m,j} = a_{m,m},$$

$$\text{طرف دوم} = \sum_{j=m}^{j=m} \sum_{i=j}^{i=m} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{i=m} a_{i,m} = a_{m,m}.$$

ثانیاً، فرض میکنیم $n \geqslant m$ و تساوی (*) برقرار باشد، و ثابت میکنیم که همین تساوی با $n+1$ بجای n برقرار است. گوئیم

$$\sum_{i=m}^{i=n+1} \sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j}$$

$$= \sum_{i=m}^{i=n} \sum_{j=m}^{j=i} a_{i,j} + \sum_{j=m}^{j=n+1} a_{n+1,j} \qquad \text{بنا بر ۷.۲.۲}$$

$$= \sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j} + \sum_{j=m}^{j=n+1} a_{n+1,j} \qquad \text{بنا بر فرض استقراء}$$

$$= \sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j} + \sum_{j=m}^{j=n} a_{n+1,j} + a_{n+1,n+1} \qquad \text{بنا بر ۷.۲.۲}$$

$$= \sum_{j=m}^{j=n} \left(\sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j} + a_{n+1,j}\right) + a_{n+1,n+1} \qquad \text{بنا بر ۷.۴.۵.۱}$$

$$= \sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n+1} a_{i,j} + a_{n+1,n+1} \qquad \text{بنا بر ۷.۲.۲}$$

$$= \sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n+1} a_{i,j} + \sum_{j=n+1}^{j=n+1} \sum_{i=j}^{i=n+1} a_{i,j} \qquad \text{بنا بر ۷.۲.۱ و ۷.۶.۱}$$

$$= \sum_{j=m}^{j=n+1} \sum_{i=j}^{i=n+1} a_{i,j}. \blacktriangle \qquad \text{بنا بر ۷.۴.۲.۱}$$

از قضیه‌ی فوق به آسانی قضیه‌ی ذیل حاصل میشود، که اثبات آن را به متعلم محول میکنیم:

۷.۶.۵† قضیه. اگر $k < m$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{i=n} \sum_{j=k}^{j=i} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{j=n} \sum_{i=j}^{i=n} a_{i,j} + \sum_{j=k}^{j=m-1} \sum_{i=m}^{i=n} a_{i,j}.$$

۷.۶.۶† قضیه (تعمیم توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع).

$$\sum_{i=m}^{i=n} a_i \cdot \sum_{j=p}^{j=q} b_j = \sum_{i=m}^{i=n} \sum_{j=p}^{j=q} a_i\, b_j.$$

اثبات به استقراء نسبت به n است، و به متعلم محول میشود.

۷.۶.۷. تمرین

۱. مطلوبست محاسبه‌ی

(آ) $\sum_{i=1}^{i=6}\sum_{j=3}^{j=5} i^2 j.$ (ب) $\sum_{i=2}^{i=5}\sum_{j=0}^{j=i} i^j.$

(پ) $\sum_{j=1}^{j=4}\sum_{i=1}^{i=j}(i+j).$ (ت) $\sum_{j=-5}^{j=-3}\sum_{i=j}^{i=-3} a_{i,j}.$

(ث) $\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=j}^{i=5} a_{i,j}.$

۲. آیا عبارات ذیل بر طبق روش تعریف مذکور در ۷.۷.۱ معنی دارند؟

$\sum_{i=4}^{i=7}\sum_{j=i}^{j=3} a_{i,j},$ $\sum_{j=4}^{j=7}\sum_{i=5}^{i=j} a_{i,j}.$

۳. در حاصلجمعهای مضاعف آتیه ترتیب سیگماها را به طریقی که مناسب است تغییر دهید:

(آ) $\sum_{i=5}^{i=8}\sum_{j=2}^{j=4} a_{i,j}.$ (ب) $\sum_{i=-3}^{i=2}\sum_{j=-4}^{j=i} a_{i,j}.$

(پ) $\sum_{i=-1}^{i=3}\sum_{j=-1}^{j=i} a_{i,j}.$ (ت) $\sum_{i=2}^{i=6}\sum_{j=-1}^{j=i} a_{i,j}.$

(ث) $\sum_{j=-5}^{j=-3}\sum_{i=j}^{i=-3} a_{i,j}.$

۴. ثابت کنید که $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} 2^i = 2^{n+2} - n - 3$.

۵. قضایای ۷.۶.۵ و ۷.۶.۶ را با آوردن مثال توضیح دهید.

۶. دستوری برای بسط $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ بر طبق قوای صعودی x بدست آورید.

۷. ثابت کنید که

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r x^r\right)\left(\sum_{r=0}^{m} b_r x^r\right) = \sum_{r=0}^{n+m}\left(\sum_{s=0}^{s=r} a_s b_{r-s}\right)x^r$$

مشروط بر اینکه تعریف aها و bها را چنین تکمیل کنیم:

(آ) اگر $r < 0$ یا $r > n$ آنگاه $a_r = 0$.

(ب) اگر $r < 0$ یا $r > m$ آنگاه $b_r = 0$.

† ۷.۷. تعمیم اعمال در نیمگروهها. روشی را که در ۷.۱ و ۷.۲ در تعمیم اعمال جمع و ضرب اعداد حقیقی آوردیم میتوان در دستگاههای مجرد معروف به نیمگروه بکار بست چنانکه ذیلاً معلوم خواهد شد.

† ۷.۷.۱. تعریف. دستگاه $(G; \circ)$ را که در آن $\circ$ عملی دوتائی در مجموعه‌ی غیر خالی G است یک گُروهْوار نامیم. گروهواری را که عمل آن شرکتپذیر باشد نیمْگروه، و نیمگروهی را که عمل آن تعویضپذیر باشد نیمگروه تعویضپذیر خوانیم.

در این قسمت، حروف کوچک الفبای لاتینی اسامی اعضای دلخواه نیمگروههای مورد بحث خواهند بود.

فرض کنیم $(G; \bigcirc)$ یک نیمگروه باشد، و m و n دو عدد صحیح باشند، و $m \leqslant n$، و $\{a_i\}_m$ رشته‌ای از اعضای G باشد. عبارت

$$\mathop{\boxed{\times}}_{i=m}^{n} a_i$$

را به استقراء چنین تعریف میکنیم:

$$(۷.۷.۲) \qquad \mathop{\boxed{\times}}_{i=m}^{m} a_i = a_m,$$

$$(۷.۷.۳) \qquad \mathop{\boxed{\times}}_{i=m}^{n+1} a_i = \Big(\mathop{\boxed{\times}}_{i=m}^{n} a_i\Big) \bigcirc a_{n+1}.$$

عبارت $\mathop{\boxed{\times}}_{i=m}^{n} a_i$ را حاصل عمل $\bigcirc$ بر «$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$» خوانند، و آن را به صورت

$$a_m \bigcirc a_{m+1} \bigcirc \cdots \bigcirc a_n$$

هم مینویسند. بعلاوه، وقتی که عمل $\bigcirc$ عمل «جمع» («ضرب»)[1] باشد، بجای «$\boxed{\times}$»، معمولاً «$\sum$» («$\prod$») بکار میبرند.

معلوم است که خواصی از $\sum$ و $\prod$ که سابقاً صرفاً به استناد شرکتپذیری اعمال جمع و ضرب اعداد حقیقی ثابت شد در هر نیمگروه در مورد $\boxed{\times}$ برقرار میباشند[2].

۷.۷.۴† تعمیم شرکتپذیری. در نیمگروه $(G; \bigcirc)$ میتوان خاصیت شرکتپذیری را تعمیم داد. قبلاً باید عبارت مبهم «درج پرانتزهای مناسب»[3] را به صورت دقیق ریاضی تعریف کرد. برای آماده کردن زمینه، عبارت

$$\mathop{\boxed{\times}}_{i=1}^{9} a_i = a_1 \bigcirc a_2 \bigcirc a_3 \bigcirc \cdots \bigcirc a_9$$

را اختیار میکنیم، و عبارت

$$(۱) \qquad (a_1 \bigcirc a_2 \bigcirc a_3) \bigcirc a_4 \bigcirc a_5 \bigcirc (a_6 \bigcirc a_7 \bigcirc a_8 \bigcirc a_9)$$

را، که از درج پرانتزها در آن حاصل شده است، مورد نظر قرار میدهیم. اگر فرض کنیم

$$b_1 = \mathop{\boxed{\times}}_{i=1}^{3} a_i, \qquad b_2 = \mathop{\boxed{\times}}_{i=4}^{4} a_i, \qquad b_3 = \mathop{\boxed{\times}}_{i=5}^{5} a_i, \qquad b_4 = \mathop{\boxed{\times}}_{i=6}^{9} a_i,$$

عبارت (۱) به صورت $b_1 \bigcirc b_2 \bigcirc b_3 \bigcirc b_4$ در میآید، که به معنی $\mathop{\boxed{\times}}_{j=1}^{4} b_j$ است، و انتظار داریم که این عبارت مساوی $\mathop{\boxed{\times}}_{i=1}^{9} a_i$ باشد. ملاحظه کنید که رشته‌ی «b_1, b_2, b_3, b_4» با اعداد

$$n_1 = 3, \qquad n_2 = 4, \qquad n_3 = 5, \qquad n_4 = 9$$

---

(۱) ۸.۳.۱ : ۳ ملاحظه شود.

(۲) البته با تصرفاتی جزئی، مانند تبدیل $\sum$ به $\boxed{\times}$ و تبدیل $+$ در میان aها به $\bigcirc$.

(۳) ۸.۶.۱ : ۳ دیده شود.

بدین صورت مشخص میشود:

$$b_1 = \bigsqcup_{i=1}^{n_1} a_i, \quad b_2 = \bigsqcup_{i=n_1+1}^{n_2} a_i, \quad b_3 = \bigsqcup_{i=n_2+1}^{n_3} a_i, \quad b_4 = \bigsqcup_{i=n_3+1}^{n_4} a_i.$$

بعلاوه، رشته‌ی «n_1, n_2, n_3, n_4» تابعی است بتوی $\mathbf{N}_9$ با مجموعه‌ی اندیسگذار $\mathbf{N}_4$، و اگر این تابع را φ_4^9، یا مختصراً φ، بنامیم خواهیم داشت،

$$n_1 = \varphi(1), \quad n_2 = \varphi(2) \quad n_3 = \varphi(3), \quad n_4 = \varphi(4).$$

بیان کلی مطلب در قضیه‌ی ذیل آمده است. تفصیلی که در بیان قضیه دیده میشود برای تعریف دقیق درج پرانتزها است:

† **۷.۷.۵. قضیه** (قانون کلی شرکتپذیری). فرض کنیم $\{a_i\}$ رشته‌ای از اعضای نیمگروه G، n عددی طبیعی، و k عضو دلخواهی از $\mathbf{N}_n$ باشد، و φ_k^n یا مختصراً، φ، تابعی بر $\mathbf{N}_k$ بتوی $\mathbf{N}_n$ باشد بطوری که

$$\text{(آ)} \qquad \varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(k) = n.$$

در این صورت، اگر

$$\text{(ب)} \qquad b_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\varphi(1)} a_i,$$

$$\text{(پ)} \qquad b_j = \bigsqcup_{i=\varphi(j-1)+1}^{\varphi(j)} a_i \qquad (j = 2, \ldots, k)$$

آنگاه

$$(*) \qquad \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i = \bigsqcup_{j=1}^{k} b_j.$$ [1]

یا، به زبان عادی،

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n = (a_1 \circ \cdots \circ a_{\varphi(1)}) \circ (a_{\varphi(1)+1} \circ \cdots \circ a_{\varphi(2)}) \circ \ldots (a_{\varphi(k-2)+1} \circ \cdots \circ a_{\varphi(k-1)}) \circ (a_{\varphi(k-1)+1} \circ \cdots \circ a_n).$$

برهان. گزاره‌نمای

> بازاء هر k از $\mathbf{N}_n$ و هر تابع مانند φ_k^n (یا φ) بر $\mathbf{N}_k$ بتوی $\mathbf{N}_n$ که در (آ) صدق کند، اگر b ها بر طبق (ب) و (پ) تعریف شوند آنگاه (*) برقرار است

---

(۱) اگر $n > 1$، $k = 2$، و $1 \leqslant m < n$ آنگاه

$$\varphi = \{(1, m), (2, n)\}$$

تابعی است بر $\mathbf{N}_2$ بتوی $\mathbf{N}_n$. و $b_1 = \bigsqcup_1^m a_i$ و $b_2 = \bigsqcup_{m+1}^n a_i$، و حکم قضیه به صورت

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{m} a_i\Big) \circ \Big(\bigsqcup_{i=m+1}^{n} a_i\Big)$$

در میآید، که نظیر ۷.۴.۲ است.

را $F(n)$ مینامیم، و به استقراء قوی ثابت میکنیم که هر عدد طبیعی n خاصیت F دارد. به آسانی دیده میشود که $F(1)$ راست است. اینک، $F(1)$، . . .، و $F(n)$ را مفروض میگیریم (فرض استقراء). برای اثبات $F(n+1)$، فرض میکنیم $k \in \mathbf{N}_{n+1}$، و φ_k^{n+1} (یا φ) تابعی بر $\mathbf{N}_k$ بتوی $\mathbf{N}_{n+1}$ باشد بطوری که

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(k) = n+1, \tag{۱}$$

و bها بر طبق (ب) و (پ) تعریف شده باشند، و ثابت میکنیم که

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{n+1} a_i = \mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k} b_j. \tag{†}$$

برای این منظور دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: [۱] $k = 1$. در این صورت $\mathbf{N}_k = \{1\}$ و $\varphi(1) = n+1$، و

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k} b_j = b_1 \,[(\text{ب})] = \mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{\varphi(1)} a_i = \mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{n+1} a_i.$$

پس، در این حالت، (†) برقرار است.

حالت دوم: [۲] $k > 1$. بنا بر (۱)، $m = \varphi(k-1) < \varphi(k) = n+1$. پس، $m \leqslant n$، و بنا بر فرض استقراء، $F(m)$ برقرار است. از اینجا، با توجه به اینکه $\varphi - \{(k, n+1)\}$ تابعی بر $\mathbf{N}_{k-1}$ بتوی $\mathbf{N}_m$ است، خواهیم داشت،

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{m} a_i = \mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{k-1} b_j. \tag{۲}$$

پس،

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k} b_j \,[\text{۷.۷.۳}] = \left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k-1} b_j\right) \circ b_k \,[(\text{۲}), \text{پ}] = \left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{m} a_i\right) \circ \left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=m+1}^{n+1} a_i\right). \tag{۳}$$

حال اگر $m = n$ آنگاه

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k} b_j \,[(\text{۳})] = \left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{n} a_i\right) \circ a_{n+1} \,[\text{۷.۷.۳}] = \mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{n+1} a_i.$$

اما، اگر، $m < n$ آنگاه

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k} b_j \,[(\text{۳}), \text{۷.۷.۳}] = \left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{m} a_i\right) \circ \left[\left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=m+1}^{n} a_i\right) \circ a_{n+1}\right].$$

پس، بنا بر شرکتپذیری عمل $\circ$،

$$\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{j=1}^{k} b_j = \left[\left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=1}^{m} a_i\right) \circ \left(\mathop{\text{\Large$\sqcup$}}_{i=m+1}^{n} a_i\right)\right] \circ a_{n+1}.$$

چون $1 \leqslant m < n$ و، بنا بر فرض استقراء، $F(n)$ برقرار است، بنا بر رابطه‌ی ذیل

---

(۱) این حالت نظیر آنست که پرانتزی در کار نیاید (یا، همه‌ی جمله‌ها در یک پرانتز قرار داده شوند).

(۲) در این حالت، جمله‌ها به k دسته منقسم شده‌اند. اساس استدلال آتیه اینست که «جمله‌های واقع در پرانتز آخر» (یعنی b_k) را جدا میکنیم تا زمینه برای استفاده از فرض استقراء آماده شود.

صفحه‌ی ۲۵۰ خواهیم داشت،

$$\mathop{\bigsqcup}_{j=1}^{k} b_j = \left(\mathop{\bigsqcup}_{i=1}^{n} a_i\right) \circ a_{n+1} \,[\text{۷.۷.۳}] = \mathop{\bigsqcup}_{i=1}^{n+1} a_i. \blacktriangle$$

† ۷.۷.۶. تبصره در باب رشته‌ها. در استدلال با رشته‌ها گاه محتاج به تصرفاتی میشویم که، اگر چه ناشی از تعریف رشته‌اند، درک سبب آنها بر مبتدیان گاه دشوار است. در این زمینه، پیش از قضیه‌ی ۷.۴.۷ توضیحاتی آوردیم. برای مزید توضیح، رشته‌ی

$$\{a_i\}_1^n = a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \qquad (1 < k < n)$$

را اختیار میکنیم. ردیف اعداد

$$a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n \tag{۱}$$

با اندیسهائی که در ذیل جمل آن دیده میشود رشته نیست، زیرا، مجموعه‌ی اندیسگذار آن قطعه‌ی اعداد طبیعی نیست. در بسیاری از مسائل حاجت می‌افتد به اینکه چنین ردیف «نامنظم» (از لحاظ اندیس) از اعداد را، با تجدید شماره‌گذاری، به رشته‌ای که از حیث مقدار و ترتیب توالی جمل مانند ردیف مذکور باشد تبدیل کنیم. در مثال مورد بحث، رشته‌ی $\{c_i\}_1^{n-1}$ با ضابطه‌ی ذیل رشته‌ی مطلوب است:

$$c_i = \begin{cases} a_i & (1 \leqslant i \leqslant k-1), \\ a_{i+1} & (k \leqslant i \leqslant n-1) \end{cases}$$

روش تبدیل کردن ردیفهای اعداد به وسیله‌ی تجدید شماره‌گذاری به رشته‌ها در تعریف دقیق بعضی از مفاهیم بکار میآید. از آن جمله است مفهوم رشته‌ی حاصل از تغییر نظم رشته‌ای از اعداد. به عنوان مثال، رشته‌ی

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \tag{۲}$$

را اختیار میکنیم. ردیف اعداد

$$a_3, a_2, a_5, a_1, a_4 \tag{۳}$$

از تغییر نظم جمل رشته‌ی (۲) حاصل شده است. اگر اعداد ردیف (۳) را، بترتیب، b_1، b_2، b_3، b_4، و b_5 بنامیم رشته‌ی

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \tag{۴}$$

حاصل میشود. این رشته را رشته‌ای حاصل از تغییر نظم رشته‌ی (۲) مینامیم. تعریف این رشته آسان است: مجموعه‌ی اندیسها در هر یک از اعداد ردیفهای (۲) و (۳) مجموعه‌ی $\mathbf{N}_5$ است، و ردیف (۳) با تناظر 1—1

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{array}$$

بین $\mathbf{N}_5$ و $\mathbf{N}_5$ حاصل میشود. اگر این تناظر را φ بنامیم رشته‌ی (۴) با ضابطه‌ی

$$b_i = a_{\varphi(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

تعریف میشود.

اینک تعریف کلی،

† ۷.۷.۷. تعریف. رشته‌ی $\{b_i\}_1^n$ را رشته‌ای حاصل از تغییر نظم (یا تغییر ترتیب) رشته‌ی $\{a_i\}_1^n$ نامیم در صورتی که تناظری 1ـ1 مانند φ بین $\mathbf{N}_n$ و $\mathbf{N}_n$ باشد بطوری که

$$b_i = a_{\varphi(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(تعمیم تعریف در مورد رشته‌ی نامتناهی $\{a_i\}$ بالبداهه انجام میگیرد.)

† ۷.۷.۸. تمرین

۱. فرض کنیم φ تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}_{n+1}$ و $\mathbf{N}_{n+1}$ باشند، و $k = \varphi(n+1)$. تابع ψ را بر $\mathbf{N}_n$ با ضابطه‌ی ذیل تعریف میکنیم:

$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & (\varphi(i) < k), \\ \varphi(i) - 1 & (\varphi(i) > k). \end{cases}$$

اولاً، بازاء $n = 5$ و تناظر یکبیکی که خود بین $\mathbf{N}_6$ و $\mathbf{N}_6$ اختیار میکنید، تابع ψ را با ازواج مرتب آن بنویسید. ثانیاً، بطور کلی، ثابت کنید که ψ تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}_n$ و $\mathbf{N}_n$ میباشد.

راهنمائی: ثابت کنید که $\mathbf{N}_n = \psi$حع، و سپس، ۶.۱.۳ : ۳ را بکار برید.

اینک مقدمات کافی برای تعمیم خاصیت تعویض‌پذیری در نیمگروههای تعویض‌پذیر داریم. بیان عادی مطلب این است که، در نیمگروه تعویضپذیر $(G; \bigcirc)$، حاصل عبارت

$$a_1 \bigcirc a_2 \bigcirc \cdots \bigcirc a_n \qquad (۱)$$

از ترتیب عوامل مستقل است[۱]. بیان دقیق این حکم در ۷.۷.۱۱ آمده است. مقدمةً تعریفی میآوریم، و سپس، ثابت میکنیم که، در (۱)، هر یک از جمله‌ها را میتوان در ابتدا یا در انتها قرار داد بی‌آنکه حاصل عبارت تغییر کند (۷.۷.۱۰).

† ۷.۷.۹. تعریف. در نیمگروه $(G; \bigcirc)$، فرض کنیم $n > 1$ و $m \leqslant n$. بنا بر تعریف،

$$\mathop{\bigcirc}_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i \quad \text{یعنی} \quad \left\{\begin{array}{ll} \mathop{\bigcirc}\limits_{2}^{n} a_i & \text{اگر } m = 1\text{؛} \\ \mathop{\bigcirc}\limits_{1}^{n-1} a_i & \text{اگر } m = n\text{؛} \\ \left(\mathop{\bigcirc}\limits_{1}^{m-1} a_i\right) \bigcirc \left(\mathop{\bigcirc}\limits_{m+1}^{n} a_i\right) & \text{اگر } 1 < m < n. \end{array}\right.$$

---

(۱) ۸.۶.۳ : ۳ ملاحظه شود.

† **۷.۷.۱۰. قضیه.** در نیمگروه تعویضپذیر $(G;\ \bigcirc)$، اگر $n > 1$ و $m \leqslant n$ آنگاه

$$\bigodot_{i=1}^{n} a_i = a_m \bigcirc \Bigl(\bigodot_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}\Bigr) a_i = \Bigl(\bigodot_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i\Bigr) \bigcirc a_m.$$

برهان. کافی است تساوی اول را ثابت کنیم. اگر $n = 1$ یا $n = m$ حکم به سهولت از تعریفات و تعمیم شرکتپذیری نتیجه میشود، و اگر $1 < m < n$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\bigodot_{i=1}^{n} a_i\ [\text{۷.۷.۵}] &= \Bigl(\bigodot_{i=1}^{m} a_i\Bigr) \bigcirc \Bigl(\bigodot_{i=m+1}^{n} a_i\Bigr)\ [\text{۷.۷.۳}]\\
&= \Bigl[\Bigl(\bigodot_{i=1}^{m-1} a_i\Bigr) \bigcirc a_m\Bigr] \bigcirc \Bigl(\bigodot_{i=m+1}^{n} a_i\Bigr)\ [\text{شرکتپذیری عمل } \bigcirc]\\
&= a_m \bigcirc \Bigl[\Bigl(\bigodot_{i=1}^{m-1} a_i\Bigr) \bigcirc \Bigl(\bigodot_{i=m+1}^{n} a_i\Bigr)\Bigr]\ [\text{۷.۷.۹}]\\
&= a_m \bigcirc \Bigl(\bigodot_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i\Bigr). \blacktriangle
\end{aligned}$$

† **۷.۷.۱۱. قضیه** (قانون کلی تعویضپذیری). در نیمگروه تعویضپذیر $(G;\ \bigcirc)$، بازاء هر رشته مانند $\{a_i\}_1^n$ از اعضای G و هر رشته مانند $\{b_i\}_1^n$ که حاصل از تغییر نظم آن رشته باشد،

$$\bigodot_{i=1}^{n} a_i = \bigodot_{i=1}^{n} b_i.$$

(قضیهی ۷.۴.۷ حالت خاصی از این قضیه است.)

برهان. اثبات به استقراء است.

اولاً، بازاء $n = 1$ حکم بدیهی است.

ثانیاً، فرض کنیم حکم در مورد هر رشتهی n جملهای از اعضای G برقرار باشد، و $a = \{a_i\}_1^{n+1}$ رشتهای دارای $n+1$ جمله از اعضای G، و $b = \{b_i\}_1^{n+1}$ رشتهای حاصل از تغییر نظم این رشته باشد. بنا بر تعریف، تناظری 1ـ1 مانند φ بین $\mathbf{N}_{n+1}$ و $\mathbf{N}_{n+1}$ هست که

$$b_i = a_{\varphi(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1).$$

بالاخص، اگر $k = \varphi(n+1)$ آنگاه

$$b_{n+1} = a_{\varphi(n+1)} = a_k.^{1} \tag{۱}$$

حال رشتهی $\{c_i\}_1^n$ را چنین تعریف میکنیم:

$$c_i = \begin{cases} a_i & (1 \leqslant i < k),\\ a_{i+1} & (k \leqslant i \leqslant n). \end{cases} \tag{۲}$$

---

(۱) اساس استدلال آتیه اینست که جملهی b_{n+1} را از رشتهی b و جملهی نظیر آن، یعنی a_k، را از رشتهی a اسقاط میکنیم تا دو رشتهی nجملهای (در مورد a پس از تجدید شمارهگذاری) حاصل گردد، و بتوان فرض استقراء را بکار بست.

بنابر ۷.۷.۱۰،

$$\bigsqcup_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} a_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} c_i. \qquad (۳)$$

بعلاوه، با علامات مسئلهٔ ۱ : ۷.۷.۸، به آسانی دیده میشود که

$$b_i = a_{\varphi(i)} = c_{\psi(i)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

و رشتهٔ $\{b_i\}_1^n$ رشته‌ای حاصل از تغییر نظم رشتهٔ $\{c_i\}_1^n$ است. پس، بنا بر فرض استقراء،

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} b_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} c_i. \qquad (۴)$$

اینک گوئیم

$$\begin{aligned}\bigsqcup_{i=1}^{n+1} a_i \;[۷.۷.۱۰] &= \Big(\bigsqcup_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} a_i\Big) \circ a_k \;[۳]\\ &= \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} c_i\Big) \circ a_k \;[(۴), (۱)]\\ &= \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} b_i\Big) \circ b_{n+1} \;[۷.۷.۳]\\ &= \bigsqcup_{i=1}^{n+1} b_i. \blacktriangle\end{aligned}$$

۷.۸. تعمیم بعضی احکام. بعضی از احکامی را که در قسمتهای سابق در مورد دو یا سه یا تعداد معین دیگر از اعداد ثابت کردیم میتوان، به استقراء، در مورد هر تعداد متناهی از اعداد تعمیم داد. البته، در هر مورد، باید حکم کلی را دقیقاً بیان کرد، و سپس به اثباتش پرداخت. به عنوان نمونه، چند مثال میآوریم.

I. بالبداهه، اگر $a_1 = a_2$ آنگاه $a_1 = a_2$؛ و بعلاوه، بنا بر خاصیت تعدی تساوی، اگر $a_1 = a_2$ و $a_2 = a_3$ آنگاه $a_1 = a_3$. حکم کلی اینست.

تعمیم تعدی تساوی. بازاء هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 مانند n، و هر رشته از اعداد حقیقی مانند «$a_1, a_2, \ldots, a_n$»، اگر

$$(*) \quad a_1 = a_2,\, a_2 = a_3,\, \ldots,\, a_{n-1} = a_n$$

آنگاه $a_1 = a_n$.

معمولاً ترکیب عطفی (*) را مختصراً چنین بیان میکنند[۱]:

---

(۱) موارد مشابه را که در آتیه خواهد آمد باید بر همین قیاس کرد. صورت اختصاری دیگر (*) اینست:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

یا مثلاً،

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n.$$

$$a_i = a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

II. میدانیم که $|a_1| \leqslant |a_1|$ و $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$، و «غیره». حکم کلی اینست که، بازاء هر عدد طبیعی n،

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|;$$

یا $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. قبل از تعریف کلی عمل جمع، حتی بیان این صورت کلـی ممکن نبود.

III. بالبداهـه، اگـر $a_1 \leqslant a_2$ آنـگـاه $a_1 \leqslant a_2$؛ و بعلاوه، بنابر تعدی $\leqslant$، اگـر $a_1 \leqslant a_2$ و $a_2 \leqslant a_3$ آنگاه $a_1 \leqslant a_3$. حکم کلی اینست:

تعمیم تعدی $\leqslant$. بازاء هر عدد طبیعی بزرگتر از 1، مانند n، و هر رشته از اعـداد حقیقی مانند «$a_1, a_2, \ldots, a_n$»،
اگر

$$(*) \quad a_1 \leqslant a_2, a_2 \leqslant a_3, \ldots, a_{n-1} \leqslant a_n$$

آنگاه $a_1 \leqslant a_n$.

ترکیب عطفی (*) را به صورت اختصاری

$$a_i \leqslant a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

یا

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$$

مینویسند.

هر تعمیم از آن قبیل کـه گفته شد تا ثابت نشود جـز حـدس نیسـت. در بقیـه‌ی ایـن قسمت، چند قضیه‌ی کلی و مهم، و تفصیل اثبات یکی از آنهـا (۷.۸.۲) را میـآوریـم. اثبات تعمیم تعدی تساوی و نیز اثبات قضیه‌ی ذیل بسیار سهل است، و به متعلم محول میشود.

۷.۸.۱. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n و هر رشته مانند $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ از اعداد حقیقی،

$$\text{I.} \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|;$$

$$\text{II.} \qquad \left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|.$$

۷.۸.۲. قضیه[1] (تعمیم تعدی $\leqslant$). بازاء هر عدد طبیعی و بـزرگتـر از 1 مانند n، و هـر رشته مانند «$a_1, a_2, \ldots, a_n$» از اعداد حقیقی، اگر

$$(\text{آ}) \qquad a_i \leqslant a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

---

(۱) مسائل ۶ و ۷ تمرین ۲.۳.۸ ملاحظه شود.

آنگاه اولاً، $a_1 \leqslant a_n$، و ثانیاً، در رابطه‌ی اخیر فقط و فقط وقتی تساوی برقرار است (یعنی $a_1 = a_n$) که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. (بالنتیجه، اگر حداقل یکی از نامساویهای (آ) اکید باشد $a_1 < a_n$).

برهان. اثبات به استقراء ابتدا از 2 نسبت به عده‌ی جمله‌های رشته است. بازاء رشته‌ی دلخواهی مانند «a_1, a_2»، دارای دوجمله ($n = 2$)، حکم قضیه بدیهی است. فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از 1 باشد، و حکم بازاء هر رشته‌ی nجمله‌ای (دارای n جمله) که جمله‌هایش در نامساویهای مذکور صدق کنند برقرار باشد، و «$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$» رشته‌ی دلخواهی $n+1$جمله‌ی باشد، و

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}. \qquad (۱)$$

باید ثابت کرد که

$$\left.\begin{array}{l} (*)\ a_1 \leqslant a_{n+1}؛ \\ (\dagger)\ \text{فقط و فقط وقتی } a_1 = a_{n+1} \text{ که } a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}. \end{array}\right\}$$

گوئیم به موجب (۱)،

$$(۲)\quad a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n; \qquad\qquad (۳)\quad a_n \leqslant a_{n+1}.$$

چون «$a_1, a_2, \ldots, a_n$» رشته‌ای n جمله‌ای است، بنا بر (۲) و فرض استقراء،

$$\left.\begin{array}{l} (۴)\ a_1 \leqslant a_n؛ \\ (۵)\ \text{فقط و فقط وقتی } a_1 = a_n \text{ که } a_1 = a_2 = \cdots = a_n. \end{array}\right\}$$

بنا بر (۴) و (۳)، $a_1 \leqslant a_{n+1}$، و این همان $(*)$ است. برای اثبات $(\dagger)$، گوئیم اگر (۶) $a_1 = a_{n+1}$ آنگاه، بنا بر (۳)، $a_n \leqslant a_1$، و لهذا، بنا بر (۴)، $a_1 = a_n$. پس، بنا بر (۵)، $a_1 = a_2 \cdots = a_n$، و بالنتیجه، بنا بر (۶)، $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$ (۷).

بالعکس، اگر (۷) برقرار باشد، بالبداهه، $a_1 = a_{n+1}$. ▲

اثبات قضایای ذیل به متعلم محول میشود:

۷.۸.۳. قضیه[۱]. بازاء هر عدد طبیعی n، اگر

$$a_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$0 < x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

و در رابطه‌ی اخیر، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$a_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

بالاخص،

---

(۱) مسائل ۵ و ۶ تمرین ۲.۴.۱۴ ملاحظه شود.

۷.۸.۴. قضیه («جمـع نامساویهـای یکسان عضو بعضو»). بازاء هر عدد طبیعی n، اگر

$$a_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

و در رابطهٔ اخیر، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$a_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

از اینجا به توجه به $0 \leqslant a^2$ نتیجه میشود:

۷.۸.۵. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n،

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار میشود که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

۷.۸.۶. قضیه . بازاء هر عدد طبیعی n، اگر

$$0 < a_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه

$$0 < \prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} b_i,$$

و تساوی بین دو $\prod$ فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$a_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

به عنوان مثال و فایده‌ای از احکام مذکور، به دستور

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r-1}$$

باز میگردیم. فرض کنیم $a > 0$، $b > 0$، و $n > 1$. اگر $b < a$ آنگاه

$$b^{n-1} \leqslant a^{n-r} b^{r-1} \leqslant a^{n-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

بعلاوه، بنا بر مفروضات، نامساوی اول بازاء $r = 1$ و نامساوی دوم بازاء $r = n$ اکید است. پس، بنا بر ۷.۸.۴،

$$\sum_{r=1}^{n} b^{n-1} < \sum_{r=1}^{n} a^{n-r} b^{r-1} < \sum_{r=1}^{n} a^{n-1}.$$

طرف اول مساوی nb^{n-1} و طـرف دوم مساوی na^{n-1} میـباشد. پس، چـون $a - b > 0$، خواهیم داشت،

(۱) مسائل ۷ و ۸ تمرین ۲.۴.۱۴ ملاحظه شود.

$$n(a-b)b^{n-1} < a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}.$$

به آسانی دیده میشود که اگر $a < b$ نیز این نامساوی برقرار است. پس،

۷.۸.۷. قضیه. اگر $a > 0$، $b > 0$، $a \neq b$، و $n > 1$ آنگاه

$$n(a-b)b^{n-1} < a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}.$$

در پایان این قسمت، نامساویهای مذکور در مسئلهی ۱۵ : ۲.۴.۱۴ را به صورت ذیل تعمیم میدهیم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

این نامساوی به نامساوی کوشی*، نامساوی شوارتس*، و نامساوی بونیاکوفسکی* معروف است. برای تسهیل، دو تعریف و یک لم[1] میآوریم.

۷.۸.۸. تعریفات.

I. اگر همهی جملههای رشتهی $\{a_i\}_1^n$ صفر باشند گوئیم این رشته صفر است.

II. رشتهی $\{a_i\}_1^n$ را با رشتهی $\{b_i\}_1^n$ متناسب نامیم در صورتی که دو عدد ثابت مانند u و v باشد که $u \neq 0 \vee v \neq 0$ و

$$ua_i = vb_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

مثلاً، دو رشتهی ذیل متناسبند:

$$2, 4, 3, 0, 1, 0; \qquad\qquad 6, 12, 9, 0, 3, 0.$$

۷.۸.۸.۱. تبصره.

I. رشتهی ثابت $\{0\}_1^n$ با هر رشته مانند $\{a_i\}_1^n$ متناسب است.

II. اگر رشتهی $\{a_i\}_1^n$ با رشتهی $\{b_i\}_1^n$ متناسب باشد دومی نیز با اولی متناسب است. بنا بر این، بجای اینکه بگوئیم رشتهی $\{a_i\}_1^n$ با رشتهی $\{b_i\}_1^n$ متناسب است، میگوئیم رشتههای $\{a_i\}_1^n$ و $\{b_i\}_1^n$ با هم متناسبند.

III. اگر هیچ یک از رشتههای $\{a_i\}_1^n$، $\{b_i\}_1^n$، و $\{c_i\}_1^n$ صفر نباشد، و اولی با دومی و دومی با سومی متناسب باشد آنگاه اولی با سومی متناسب است.

IV. فرض کنیم رشتههای $\{a_i\}_1^n$ و $\{b_i\}_1^n$ متناسب باشند، و هیچ یک از آنها صفر نباشد. در این صورت، اگر، بازاء عددی طبیعی مانند k، $a_k = 0$، آنگاه $b_k = 0$؛ و بازاء مقادیری

---

(۱) لم اصطلاحی است اصلاً یونانی، و در ریاضیات، عموماً، به قضیهای گفته میشود که به خودی خود مهم و منظور نظر نیست، بلکه عنوان مراحلی از دلیل قضیهای دیگر را دارد. عرضه کردن این مراحل به عنوان لم برای اینست که اثبات قضیهی اصلی زیاد دراز نشود.

از i که $a_i \neq 0$، نسبت a_i/b_i از i مستقل است.

لم. اگر A و C دو عدد مثبت باشند، و سه جمله‌ای $Ax^2 + 2Bx + C$ بازاء جمیع مقادیر x نامنفی باشد آنگاه $B^2 - AC \leqslant 0$.

زیرا،

$$A(Ax^2 + 2Bx + C) = (Ax + B)^2 + AC - B^2,$$

و بنا بر فرض، مقدار این عبارت بازاء $x = -B/A$ نامنفی است. ▲

۷.۸.۹. قضیه (نامساوی کوشی). بازاء هر عدد طبیعی n و هر دو رشته مانند $\{a_i\}_1^n$ و $\{b_i\}_1^n$ از اعداد حقیقی،

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که دو رشته‌ی مذکور متناسب باشند.

برهان. اگر یکی از دو رشته صفر باشد حکم بدیهی است. پس، فرض میکنیم هیچ یک از آنها صفر نباشد، و چنین قرار میدهیم:

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

فرض کنیم x عدد دلخواهی باشد. بنا بر ۷.۸.۵، بازاء هر مقدار x،

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = Ax^2 + 2Bx + C.$$

بنا بر فرض، $A > 0$ و $C > 0$. پس بنا بر لم سابق، $B^2 - AC \leqslant 0$، و این همان نامساوی مطلوبست. برای اثبات حکم مربوط به تساوی، اولاً، فرض کنیم $B^2 = AC$. چون $A > 0$ و $C > 0$، $B \neq 0$. اینک دو عدد دلخواه مانند u و v اختیار میکنیم که $uB = vC$. در این صورت، $C = uB/v$ و $A = B^2/C = vB/u$، و لهذا،

$$\sum_{1}^{n} (ua_i - vb_i)^2 = Au^2 - 2uvB + Cv^2 = 0.$$

پس، به موجب ۷.۸.۵،

$$ua_i - vb_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

پس، دو رشته متناسبند. ثانیاً، فرض کنیم دو رشته متناسب باشند. پس، دو عدد مانند u و v هست که $u \neq 0 \vee v \neq 0$ و

$$ua_i = vb_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

بی آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، میتوان فرض کرد که $u \neq 0$. در این صورت، بازاء هر i از 1 تا با n، $a_i = vb_i/u$، و با محاسبه‌ی ساده‌ای معلوم میشود که $B^2 - AC = 0$. ▲

۸ § دو جمله‌ای نیوتن

۸.۱. تابع فاکْتوریِل[1]. در ۵.۴.۲ به تابع f بر $\mathbf{I}_0$ که به استقراء با روابط

$$f(0) = 1, \qquad f(n+1) = f(n)\,.\,(n+1) \qquad (n \in \mathbf{I}_0)$$

تعریف میشود اشاره کردیم. این تابع از توابع مهم ریاضی است. نامش تابع فاکتوریل است، و مقدارش را در n، بجای $f(n)$، $n!$ (بخوانید فاکتوریِلْ n) مینامند. خلاصه،

۸.۱.۱. تعریف. $n!$ به استقراء چنین تعریف میشود:

$$0! = 1,$$
$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \qquad (n \in \mathbf{I}_0).$$

مثلاً،

$$1! = (0+1)! = 0! \cdot 1 = 1;$$
$$2! = (1+1)! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2;$$
$$3! = (2+1)! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3;$$
$$4! = (3+1)! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4;$$

بطور کلی، به‌آسانی به استقراء معلوم میشود که

۸.۱.۲. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n،

$$n! = \prod_{r=1}^{n} r = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

۸.۱.۳. قضیه. اگر $m, n \in \mathbf{N}$ و $m < n$ آنگاه

$$\frac{n!}{m!} = \prod_{r=m+1}^{n} r = (m+1)(m+2) \ldots n.$$

برهان. بنا بر ۸.۱.۲ و ۷.۴.۲.۲،

$$m! \prod_{r=m+1}^{n} r = \prod_{r=1}^{m} r \cdot \prod_{r=m+1}^{n} r = \prod_{r=1}^{n} r = n!. \blacktriangle$$

۸.۱.۴. تمرین

۱. حاصلضرب اعداد طبیعی از 7 تا با 109 را به وسیله‌ی فاکتوریل بنویسید.

۲. مقدار $(2n)!/(n!)^2$ را بازاء $n = 10$ حساب کنید.

۳. اگر $m, n \in \mathbf{N}$ و $m \leqslant n$ آنگاه

---

(1) factorial

$$\frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

۴. ثابت کنید که اگر $0 \leqslant m < n$ آنگاه

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}+\frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!}.$$

۸.۲. ضرایب دوجمله‌ای. در این قسمت، متغیرهای فردی m و n مقید به $\mathbf{I}_0$ میباشند مگر آنکه خلاف این مقصود تصریح شود.

۸.۲.۱. تعریف. فرض کنیم a عددی حقیقی باشد. عبارت $\binom{a}{m}$ (بخوانید «a روی m» یا «a بر m») به استقراء چنین تعریف میشود:

I. $$\binom{a}{0}=1,$$

II. $$\binom{a}{m}=\frac{1}{m!}\cdot\prod_{r=0}^{m-1}(a-r) \qquad (1\leqslant m).$$

هر عبارتی به صورت $\binom{a}{m}$ یک ضریب دوجمله‌ای[1] خوانده میشود. بالاخص، $\binom{n}{m}$ را C^n_m نیز مینامند[2].

بنا بر تعریف فوق و خواص ضرب،

۸.۲.۲. قضیه.

(۸.۲.۲.۱) $$\binom{a}{1}=a.$$

(۸.۲.۲.۲) $$\binom{0}{0}=1.$$

(۸.۲.۲.۳) $$\binom{n}{n}=1.$$

(۸.۲.۲.۴) $$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad (0\leqslant m\leqslant n).$$

۸.۲.۳. امثله

(آ) $$\binom{-1/2}{1}=-\frac{1}{2}.$$

---

(۱) وجه تسمیه اینست که ضرایب بسط $(a+b)^n$ بر طبق دستور معروف به دوجمله‌ای نیوتن (۸.۳.۱) اعدادی مساوی $\binom{n}{m}$ هستند.

(۲) از نامهای دیگرش $C(n, m)$، ${}_nC_m$، و C^m_n است.

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1}{3!}\prod_{r=0}^{2}\left(\frac{1}{2} - r\right) = \frac{1}{16}, \qquad (ب)$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10. \qquad (پ)$$

(ت) در جدول ذیل، بازاء مقادیر از 0 تا با 9 از n، مقادیر $\binom{n}{m}$ بازاء جمیع مقادیری از m که $m \leqslant n$ مندرج است:

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.
3	1	3	3	1	.	.	.	.	.	.
4	1	4	6	4	1	.	.	.	.	.
5	1	5	10	10	5	1	.	.	.	.
6	1	6	15	20	15	6	1	.	.	.
7	1	7	21	35	35	21	7	1	.	.
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	.
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

هر جدولی را که مقادیر $\binom{n}{m}$ بدین گونه (یا به صورتهای مشابه) در آن تنظیم شود مثلث حسابی پاسکال* نامند. از جدول فوق معلومست که، مثلاً،

$$\binom{8}{2} = 28, \qquad \binom{8}{8-2} = \binom{8}{6} = 28; \qquad (۱)$$

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = 21 + 35 = 56 = \binom{8}{3}. \qquad (۲)$$

هر دو خاصیت کلیت دارد:

۸.۲.۴. قضیه.

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \qquad (m \leqslant n).$$

۸.۲.۵. قضیه.

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} \qquad (m < n).$$

(اولی بدیهی، و دومی همان حکم مسئله‌ی ۴ : ۸.۱.۴ است.)

۸.۲.۶. تمرین
۰۱ ثابت کنید که

(آ) $\binom{-2}{4} = 5.$ (ب) $\binom{-3}{3} = -10$

(پ) $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1} \qquad (m \geqslant 1).$

(ت) $\frac{n+1}{m+1}\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$

(ث) $\binom{-a}{m} = (-1)^m\binom{a+m-1}{m}.$

(ج) $\binom{-1}{m} = (-1)^m.$

(چ) $\binom{-1/2}{m} = (-1)^m \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2m)}.$

۸.۳. بسط قوای یک دوجمله‌ای. اعداد مندرج در سطور مثلث پاسکال خاصیت مهم دیگری نیز دارند: اعداد مندرج در سطر محاذی $\binom{1}{m}$ ضرایب $a+b$، در سطر محاذی $\binom{2}{m}$ ضرایب بسط $(a+b)^2$، و در سطر محاذی $\binom{3}{m}$ ضرایب بسط $(a+b)^3$ هستند، و غیره؛ و مثلاً، بسط $(a+b)^4$ را میتوان چنین نوشت:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 = \sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}a^{4-r}b^r.$$

بطور کلی،

۸.۳.۱. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n،

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \qquad (*)$$

[این دستور به دستور دوجمله‌ای[1]، دستور بسط دو جمله‌ای، و دو جمله‌ای نیوتن معروفست، و آن را به صورت

(۱) تسمیه‌ی «$\binom{n}{m}$» به «ضریب دوجمله‌ای» به همین مناسبت است.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots +$$
$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

هم مینویسند.]

برهان. اثبات به استقراء است. به آسانی دیده میشود که (*) بازاء $n = 1$ برقرار است. اینک فرض میکنیم (*) برقرار باشد. با تصرفاتی مانند آنکه در اثبات ۷.۵.۷ گذشت معلوم میشود که

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r\\ &= a^{n+1} + \left[\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r+1}b^r + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^r\right] + b^{n+1}\end{aligned}$$

پس بنا بر I : ۸.۲.۱، ۸.۲.۵، و ۳ : ۸.۲.۲،

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}a^{n-r+1}b^r + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\ &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n+1}{r}a^{n-r+1}b^r + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\ &= \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a^{(n+1)-r}b^r;\end{aligned}$$

و این همان دستور (*) است با تبدیل n در آن به $n+1$. ▲

۸.۳.۲. فواید

I. بسط $(a+b)^n$ بر طبق دستور (*) دارای $n+1$ جمله است، و بر حسب قوای صعودی b مرتب میباشد، و جملهی مشتمل بر b^r جملهی $r+1$ام بسط است. پس، اگر جملهی rام بسط را T_r بنامیم،

$$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r \qquad (0 \leqslant r \leqslant n),$$

$$T_r = \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1} \qquad (1 \leqslant r \leqslant n+1).$$

واضحست که جملهی rام از انتهای بسط جملهی $n+2-r$ام از ابتدای آن، و لهذا مساوی

$$T_{n+2-r} = \binom{n}{n-r+1}a^{r-1}b^{n-r+1}$$

میباشد. از اینجا، با توجه به ۸.۲.۴، معلوم میشود که در بسط $(a+b)^n$ بر طبق دستور (*)، ضرایب جمل متساویالبعد از طرفین با هم متساویاند.

II. از روابط مذکور در I معلوم میشود که

$$T_{r+1} = T_r \cdot \frac{n-r+1}{r}a^{-1}b.$$

از اینجا قاعده‌ی ذیل برای یافتن هر جمله از جمله‌ی بلافاصله پیش از آن بدست میآید: از مرتبه‌ی دوم ببعد، اولاً، «جزء حرفی»[1] جمله‌ی مطلوب با کاستن یک واحد از نماینده‌ی a و افزودن یک واحد به نماینده‌ی b در جمله‌ی قبل حاصل میشود؛ و ثانیاً، ضریب جمله‌ی مطلوب مساوی است با حاصلضرب ضریب جمله‌ی قبل در نسبت نماینده‌ی a در جمله‌ی قبل به نماینده‌ی b در جمله‌ی مطلوب.

۸.۳.۳. امثله

(آ). بسط $(a+b)^5$.

اولین جمله‌ی بسط a^5 (یا a^5b^0) است.

جزء حرفی دومین جمله‌ی بسط $a^{5-1}b^{0+1}$ یا a^4b است، و ضریب آن مساوی است با $(5/1)\cdot 1$، یا 5. پس، جمله‌ی دوم $5a^4b$ میباشد.

جزء حرفی سومین جمله‌ی بسط a^3b^2 است، و ضریب آن $(4/2)\cdot 5$ یا 10. پس سومین جمله $10a^3b^2$ است.

اینک، چون بسط مطلوب شش جمله دارد، ضرایب جمل چهارم، پنجم، و ششم، بترتیب، 10، 5، و 1 است، و بالنتیجه،

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

(ب). از دستور دوجمله‌ای، با تبدیل b به $-b$ نتیجه میشود،

$$(a-b)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r}b^r.$$

(پ). از دستورات بسط $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ نتیجه میشود،

$$(a+b)^n + (a-b)^n = \sum_{r=0}^{n} [1+(-1)^r]\cdot\binom{n}{r} a^{n-r}b^r.$$

بدیهی است که، در طرف دوم، فقط جمله‌هائی که نماینده‌ی b در آنها زوج است باقی میمانند. مثلاً،

$$(1+x)^7 + (1-x)^7 = \sum_{r=0}^{7} [1+(-1)^r]\binom{7}{r} x^r$$
$$= 2\cdot\left[\binom{7}{0} + \binom{7}{2}x^2 + \binom{7}{4}x^4 + \binom{7}{6}x^6\right].$$

(ت). از دستورات بسط $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ بازاء $a=b=1$ نتیجه میشود،

$$2^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n};$$

$$0 = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}$$
$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

---

(۱) یعنی جزئی که به صورت حاصلضرب قوه‌ای از a در قوه‌ای از b است.

(ث). اگر $b/a = x$ آنگاه
$$(a+b)^n = [a(1+x)]^n = a^n(1+x)^n.$$
بنا بر این، بسط قوای طبیعی هر دو جمله‌ای را میتوان به بسط عبارتی به صورت $(1+x)^n$ باز گردانید. این نکته در حل بعضی مسائل مفید است.

(ج). فرض کنیم $h > 0$. از دستور
$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \cdots + h^n$$
معلوم میشود که همواره
$$(1+h)^n > 1 + nh. \qquad (n > 1)$$
$$(1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \qquad (n > 2).$$
نامساوی اول حالت خاصی از قضیه‌ی مهم ذیل است:

۸.۳.۴. قضیه (نامساوی برنوییّی). اگر $1 + h \geqslant 0$ آنگاه، بازاء هر عدد طبیعی n،
$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh \qquad (*)$$
و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $h = 0$ یا $n = 1$.

برهان. بازاء $n = 1$، $(*)$ برقرار است، و اگر $(*)$ برقرار باشد آنگاه
$$(1+h)^{n+1} \geqslant (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2;$$
و از آنجا $(1+h)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)h$. پس، اثبات برقراری $(*)$ تمام است. بعلاوه، اگر $h = 0$ یا $n = 1$ بالبداهه $(1+h)^n = 1 + nh$ (۱). بالعکس، اگر (۱) برقرار باشد و $n \neq 1$ آنگاه، بنا بر قسمت اول $(1+h)^{n-1} \geqslant 1 + (n-1)h$، و از آنجا، به طریقی که گذشت، $(1+h)^n \geqslant 1 + nh + (n-1)h^2$. پس، بنا بر (۱)، $(n-1)h^2 = 0$، و از آنجا، $h = 0$. ▲

۸.۳.۵. تمرین[۱]

۱. در بسط $(a+b)^{12}$، ضریب a^5b^7 را تعیین کنید.

۲. در بسط $(2x+3y)^7$؛ ضریب x^3y^4 چیست؟

۳. در بسط $(a+b)^n$، که در آن a و b اعداد مثبتی هستند، سه جمله‌ی اول بترتیب، 3^6، و 2916، و 4860 است. a، b، و n را تعیین کنید.

۴. بسط $(a-2x)^7$ را بنویسید.

۵. جمله‌ی پنجم بسط $(a+2x^3)^{17}$ را تعیین کنید.

۶. ضریب x^{16} در بسط $(x^2-2x)^{10}$ چیست؟

۷. جمله‌ی وسط در بسط $\left(a - \frac{2}{a}\right)^{12}$ چیست؟

---

(۱) تمرینات مختلفه در باب ضرایب دوجمله‌ای در § ۱۰ آمده است.

۸. جمله‌ی مستقل از x را در بسط $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^9$ تعیین کنید.

۹. ضریب x^{32} و x^{-17} را در بسط $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ معلوم کنید.

۱۰. مطلوبست ضریب x^3 در بسط $(3-x)^2\left(\frac{1}{3}+3x\right)^5$.

۱۱. ضریب x^r در بسط $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ چیست؟

۱۲. جمله‌ی مستقل از x در بسط $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ چیست؟

۱۳. بنا بر آنکه x^r در بسط $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ بیاید ضریب آن چیست؟

۱۴. بزرگترین ضریب از حیث قدر مطلق در بسط $(a+b)^n$ کدام است.

۱۵. ثابت کنید که جمله‌ی وسط در بسط $(1+x)^{2n}$ عبارتست از

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}\cdot 2^n x^n.$$

۱۶. اگر $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} c_r x^r$ آنگاه $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} c_{n-r}x^r$.

۱۷. اگر $x+y=a>0$ و $n\in\mathbf{N}$ آنگاه

$$x^n+y^n\geqslant a^n/2^{n-1},$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $n=1$ یا $x=y=a/2$.

۹ § یادآوری بعضی از خواص اعداد صحیح

۹.۱. مقدمه. چنانکه در ۵.۵ وعده دادیم، در این قسمت بعضی از خواص اعداد صحیح را، جهت تسهیل مراجعه، یادآوری میکنیم. برای احتراز از تکرار تذکر میدهیم که، در این قسمت، حروف کوچک الفبای لاتینی از a تا با s مقید به $\mathbf{I}$ هستند، مگر آنکه خلاف این مطلب تصریح شود یا آنکه، بعضی از حروف، بر طبق تعریف، مقید به مجموعه‌های دیگر اعداد شوند. همچنین، هرجا عدد میگوئیم، مقصود عدد صحیح است، مگر آنکه خلاف این منظور تصریح شود.

تعریف عاد کردن و مقسوم‌علیه و مضرب در ۵.۵.۲ گذشت. خواص ابتدائی نسبت عاد کردن در تمرین ذیل آمده است، و باید آنها را حاضرالذهن داشت.

۹.۱.۱. تمرین

۱.[1] $a\mid a$ ؛ $\pm 1\mid a$ ؛ $\pm a\mid 0$.

---

(۱) عبارت «$\pm a\mid b$» به معنی «$a\mid b$ و $-a\mid b$» است.

۲. 0 فقط 0 را عاد میکند.
۳. اگر $a \mid b$ آنگاه $-a \mid b$، $a \mid -b$، و $\pm|a| \mid |b|$.
۴. اگر $a \mid b$ و $b \mid c$ آنگاه $a \mid c$.
۵. اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ آنگاه $ac \mid bd$.
۶. اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid bc$.
۷. اگر $ac \mid bc$ و $c \neq 0$ آنگاه $a \mid b$.
۸. اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ آنگاه $|a| = |b|$ (یا $b = \pm a$).
۹. اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ آنگاه $a \mid bm + cn$.
۱۰. اگر $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ و b عادکنندهی k جمله از جمل این معادله باشد جملهی دیگر را نیز عاد میکند.
۱۱. اگر $b \neq 0$ و $a \mid b$ آنگاه $|a| \leqslant |b|$.
۱۲. $a = \pm 1 \;\text{⟷}\; a \mid 1$ و $a = \pm 1 \;\text{⟷}\; a \mid -1$.

۹.۱.۲. تبصره. چون 0 مقسومعلیه عددی جز 0 نیست، در آتیه مقسومعلیههائی از اعداد را که مخالف 0 هستند مورد بحث قرار میدهیم، و در عبارتی مانند $a \mid b$ قید $a \neq 0$ را مستتر میگیریم.

۹.۲. بمعم و کمم. هر عدد که، در عین حال، چند عدد را عاد کند یک مقسومعلیه مشترک آنها، و هر عدد که، در عین حال، مضرب چند عدد باشد، یک مضرب مشترک آنها نامیده میشود. مثلاً، هر یک از 2 و $2-$ یک مقسومعلیه مشترک 6، $8-$، و 30 است؛ و هر یک از 36 و $72-$ یک مضرب مشترک اعداد 6، $12-$، 9، و $18-$.

۹.۲.۱. قضیه و تعریف. فرض کنیم حداقل یکی از اعداد a، b، . . .، و l غیر از 0 باشد.

I. مجموعهی مقسومعلیههای مشترک اعداد مذکور عضو اکثر دارد، و این عضو ناکمتر از 1 است.

II. (تعریف). عضو اکثر مجموعهی مقسومعلیههای مشترک اعداد مذکور را بزرگترین مقسومعلیه مشترک (علامت اختصاری: بمعم) آنها یا $(a, b, \dots l)$ خوانیم.

برهان. قبلاً ملاحظه میکنیم که مجموعهی مقسومعلیههای یک عدد غیر از صفر مجموعهای است متناهی (زیرا اگر $n \neq 0$ و $m \mid n$ آنگاه بنا بر ۹.۱.۱ : ۱۱، $|m| \leqslant |n|$). پس، اگر حداقل یکی از اعداد a، b، . . .، و l غیر از صفر باشد مجموعهی مقسومعلیههای مشترک آنها مجموعهای است متناهی، و لهذا، عضو اکثر دارد، و چون 1 هر عدد را عاد میکند، 1 متعلق به مجموعهی مذکور است، و بالنتیجه، از عضو اکثر آن نابیشتر میباشد. ▲

۹.۲.۲. قضیه و تعریف. فرض کنیم هیچ یک از اعداد a، b، . . .، و l صفر نباشد.

I. مجموعهی مضارب مشترک مثبت این اعداد عضو اقل دارد.

II. (تعریف). عضو اقل مجموعه‌ی مضارب مشترک مثبت اعداد مذکور را کوچکترین مضرب مشترک (علامت اختصاری: کمم) آنها یا $[a, b, \ldots l]$ خوانیم.
برهان. کافی است ملاحظه کنیم که عدد مثبت $|a| \cdot |b| \ldots |l|$ مضرب مشترکی از اعداد مذکور است. پس، مجموعه‌ی مضارب مشترک مثبت آن اعداد مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی است، و لهذا، عضو اقل دارد. ▲

بنا بر تعریفات مذکور، هر جا از بمعم چند عدد صحبت میکنیم فرض اینست که حد اقل یکی از آنها غیر از 0 است، و هر جا از کمم چند عدد سخن میرود فرض اینست که هیچ یک از آن اعداد مساوی 0 نیست.

چنانکه گذشت، همواره $(a, b, \ldots, l) \geqslant 1$.

۹.۲.۳. تعریف. اگر $(a, b) = 1$ گوئیم a و b نسبت به هم متباین‌اند. اگر $(a, b, \ldots l) = 1$ گوئیم a، b، ...، و l جمعاً متباین‌اند.

۹.۲.۴. امثله
(آ). $(15, 35) = (-15, 35) = (15, -35) = (-15, -35) = 5$.
(ب). $[6, 4] = [-6, 4] = [6, -4] = [-6, -4] = 12$.
(پ). اعداد 14 و 5 متباین‌اند. اعداد 10، 5، و 14 جمعاً متباین‌اند، اما دو به دو متباین نیستند. اعداد 17، 5، و 14 جمعاً و دو به دو متباین‌اند.
(ت). اگر اعداد a و b متباین باشند مقسوم‌علیه‌های مشترك آنها منحصر به 1 و 1 — است. زیرا، فرض کنیم $(a, b) = 1$ و c مقسوم‌علیه مشترکی از a و b باشد. در این صورت، $|c|$ نیز مقسوم‌علیه مشترکی از a و b است. پس، بنا بر تعریف بمعم، $1 \geqslant |c|$، و از آنجا، $c = \pm 1$.
(ث). $(n, 1) = (n, -1) = 1$.
(ج). $(n, 0) = |n|$.
(چ). اگر $(n, 0) = 1$ آنگاه $n = \pm 1$.

اینک بعضی از خواص اساسی کمم و بمعم دو عدد را میآوریم.

۹.۲.۵. قضیه. کمم دو عدد هر مضرب مشترک آنها را عاد میکند.
† برهان. فرض کنیم $a \neq 0$، $b \neq 0$، $m = [a, b]$، و n مضرب مشترک دلخواهی از a و b باشد. بنا بر ۵.۵.۱، دو عدد مانند q و r هست که

$$|n| = mq + r, \qquad 0 \leqslant r < m. \tag{۱}$$

چون $|n|$ و m بر a و بر b قابل قسمت‌اند، بنا بر (۱) و ۱۰ : ۹.۱.۱، $a \mid r$ و $b \mid r$. پس، r مضرب مشترکی از a و b است. حال اگر $r \neq 0$ آنگاه $0 < r < m$، و این با تعریف

m متناقض است. بالنتیجه، $r = 0$. پس، $|n| = mq$، و از آنجا، $m \mid n$. ▲

۹.۲.۶. قضیه. بمعم دو عدد بر هر مقسوم‌علیه مشترک آنها قابل قسمت است.

† برهان. فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند، و حداقل یکی از آنها صفر نباشد. اگر یکی از این اعداد، مثلاً a، 0 باشد آنگاه $b \neq 0$، و $|b| = (a, b)$. حال اگر d مقسوم‌علیه مشترکی از a و b باشد، آنگاه $d \mid b$، و از آنجا، $d \mid |b|$، و حکم برقرار است. پس، فرض کنیم.

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0, \qquad m = [a, b].$$

چون $|a| \cdot |b|$ مضرب مشترکی از a و b است، بنا بر ۹.۲.۵، $m \mid |a| \cdot |b|$. پس، عدد

$$d = \frac{|a| \cdot |b|}{m} \qquad (۱)$$

عددی صحیح و مثبت است. چون $m \mid |a|$ و $m \mid |b|$، بنا بر (۱)، اعداد $|a|/d$ و $|b|/d$ اعدادی صحیح‌اند، و لهذا، d مقسوم‌علیه مشترک مثبتی از a و b است. حال ثابت میکنیم که

(آ) d بمعم a و b است.

(ب) d بر هر مقسوم‌علیه مشترک a و b قابل قسمت است.

گوئیم، اگر c مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی از a و b باشد اعداد a/c و b/c صحیح‌اند، و بالنتیجه، ab/c مضرب مشترکی از a و b است. پس، بنا بر ۹.۲.۵، عدد $(ab/c)/m$ عددی است صحیح. از اینجا، با توجه به (۱)، معلوم میشود که d/c عددی صحیح است، و لهذا، $c \mid d$. پس، بنا بر ۹.۱.۰۱ : ۱۱، $|c| \leqslant d$؛ و اثبات (آ) تمام است. ضمناً معلوم شد که اگر c مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی از a و b باشد $c \mid d$. ▲

۹.۲.۷. قضیه. اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه

$$|a| \cdot |b| = (a, b) \cdot [a, b].$$

بالاخص، کمم دو عدد طبیعی متباین مساوی حاصلضرب آنهاست.

۹.۲.۸. قضیه. اگر عدد صحیحی حاصلضرب دو عدد صحیح را عاد کند و با یکی از آنها متباین باشد دیگری را عاد میکند.

† برهان. فرض کنیم

$$(۱) \quad c \mid ab, \qquad\qquad (۲) \quad (c, a) = 1.$$

گوئیم $c \mid b$. اگر $a = 0$ آنگاه، بنا بر (۲)، $c = \pm 1$، و حکم برقرار است. پس، فرض کنیم $a \neq 0$. بنا بر (۲) و ۹.۲.۷، عدد $|a| \cdot |c|$ کمم a و c است. بعلاوه، با توجه به (۱)، عدد ab از مضارب مشترک a و c است. پس، بنا بر ۹.۲.۵، عدد $ab/|a||c|$ عددی است صحیح؛ و بالنتیجه، $b/|c|$ نیز صحیح است، و از آنجا $c \mid b$. ▲

بنا بر قضیه‌ی فوق، اگر عدد صحیحی با دو عدد صحیح متباین باشد با حاصلضرب آنها

متباین است. از اینجا به استقراء معلوم میشود که

۹.۲.۹. قضیه. هر عدد صحیح که با هر یک از چند عدد صحیح متباین باشد با حاصلضرب آنها متباین است.

بنا بر این،

۹.۲.۱۰. قضیه. اگر $(a, b) = 1$ آنگاه هر قوه‌ی طبیعی a با هر قوه‌ی طبیعی b متباین است.

نتیجه‌ی ساده‌ی ذیل نیز بعدها بکار خواهد آمد.

۹.۲.۱۱. قضیه. اگر دو کسر مثبت‌المخرج m/n و p/q باهم مساوی باشند، و p/q تحویلناپذیر[1] باشد، آنگاه m و n، بترتیب، با p و q همضریب[2] اند، و $q \leqslant n$.

برهان. فرض کنیم $n > 0$، $q > 0$،

$$(۱) \quad m/n = p/q, \qquad (۲) \quad (p, q) = 1.$$

بنا بر (۱)، $pn = qm$ (۳). چون $q \mid qm$، از (۳) نتیجه میشود، $q \mid pn$. پس، بنا بر (۲) و ۹.۲.۸، $q \mid n$. بالنتیجه، عددی صحیح مانند k هست که $n = kq$. از این و (۳) نتیجه میشود، $m = kp$. بعلاوه، از $q \mid n$ خواهیم داشت، $q \leqslant n$. ▲

۹.۳. اعداد اول و قضیه‌ی اصلی علم حساب. هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 مانند n دو مقسوم‌علیه مثبت دارد: 1 و n. بعضی اعداد طبیعی مقسوم‌علیه یا مقسوم‌علیه‌های مثبت دیگر نیز دارند. این نکته منشاء طبقه‌بندی اعداد طبیعی بزرگتر از 1 است به اعداد اول و اعداد مرکب.

۹.۳.۱. تعریف. یک عدد طبیعی بزرگتر از 1 را عدد اول خوانیم در صورتی که مقسوم‌علیه‌های مثبت آن منحصر به 1 و خود آن عدد باشند؛ و الا آن را مرکب نامیم.

اعداد اول را معمولاً به حروف p و q نمایش میدهیم.

۹.۳.۲. قضیه. هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 قابل تجزیه به حاصلضرب اعداد اول است[3].

(این اعداد را عوامل اول آن عدد نامیم.)

† برهان. اثبات به استقراء قوی ابتدا از 2 است. در مورد 2 حکم برقرار است، زیرا

---

(۱) کسر p/q را تحویلناپذیر خوانیم در صورتی که $(p, q) = 1$.

(۲) اعداد m و n را، بترتیب، با p و q همضریب نامیم در صورتی که عددی صحیح مانند k باشد که $m = kp$ و $n = kq$.

(۳) حاصلضرب به معنی کلی مراد است. مثلاً $7 = \prod_{i=1}^{1} 7$.

$2\prod_{i=1}^{1} = 2$. حال فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی ناکمتر از 2 باشد، و حکم بازاء هرعدد طبیعی از 2 تا با n برقرار باشد. اگر $n+1$ اول باشد فبها، و الا، مقسوم‌علیهی مانند n_1 دارد که $1 < n_1 < n+1$. پس، اگر $n_1 n_2 = n+1$ آنگاه $1 < n_2 < n+1$. چون $2 \leqslant n_1 \leqslant n$ و $2 \leqslant n_2 \leqslant n$، بنا بر فرض استقراء، هر یک از n_1 و n_2 قابل تجزیه به حاصلضرب اعداد اول است، و لهذا، حکم در مورد $n_1 n_2$، یعنی $n+1$، نیز برقرار میباشد. ▲

۹.۳.۳. قضیه. مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است.

† برهان. در غیر این صورت، عددی طبیعی مانند n هست که عده‌ی اعداد اول مساوی n است. فرض کنیم

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{۱}$$

جمیع اعداد اول باشند، و

$$m = p_1 p_2 \ldots p_n + 1. \tag{۲}$$

اینک ثابت میکنیم که عدد اولی غیر از اعداد (۱) وجود دارد، و این واضح است، زیرا، بنا بر ۹.۳.۲، m عامل اولی مانند q دارد. اما، بنا بر (۲)، m بر هیچ یک از اعداد (۱) قابل قسمت نیست. پس، عدد اول q غیر از اعداد (۱) است، و این خلاف فرض خلف است. ▲

چون مقسوم‌علیه‌های عدد اول p منحصر به 1، -1، p، و $-p$ هستند، بمعم p با عدد صحیح n جز 1 و p نتواند بود. در حالت اول، $(n, p) = 1$، و در حالت ثانی، $p \mid n$. این نتیجه موضوع قسمت اول قضیه‌ی ذیل است؛ اثبات دو قسمت دیگر بسیار سهل است.

۹.۳.۴. قضیه.

I. بازاء هر عدد اول p و هر عدد صحیح n، یا $(p, n) = 1$ یا $p \mid n$.

II. اگر عدد اولی حاصلضرب چند عدد را عاد کند حد اقل یکی از آنها را عاد میکند.

III. اگر عدد اولی حاصلضرب چند عدد اول را عاد کند با یکی از آنها مساوی است.

چنانکه گفتیم، هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 قابل تجزیه به حاصلضرب اعداد اول است. مثلاً،

$$120 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2, \qquad 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

و غیره. این تجزیه‌ها، قطع نظر از ترتیب عوامل، با هم تفاوتی ندارند. بطور کلی،

۹.۳.۵. قضیه (قضیه‌ی اصلی علم حساب). تجزیه‌ی یک عدد طبیعی بزرگتر از 1 به عوامل اول، قطع نظر از ترتیب این عوامل، منحصر بفرد است.

† برهان. قبلاً ملاحظه میکنیم که، در تجزیه‌ی عدد n به عوامل اول، عنداللزوم با تغییر دادن محل عوامل، میتوان این عوامل را چنان مرتب کرد که هر عامل که در سمت چپ دیگری است

از آن نابیشتر باشد. پس، برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم که اگر

$$(۱) \qquad p_1p_2\ldots p_r \qquad (p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_r),$$
$$(۲) \qquad q_1q_2\ldots q_s \qquad (q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_s)$$

دو تجزیه‌ی یک عدد طبیعی بزرگتر از 1 به عوامل اول باشند آنگاه، در عین حال،

$$r = s$$
$$p_i = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

اثبات به استقراء قوی ابتدا از 2 است. عدد اول 2 بالبداهه در حکم صدق میکند (چرا؟). پس، فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی ناکمتر از 2 باشد، و همه‌ی اعداد از 2 تا با n در حکم صدق کنند. گوئیم حکم در مورد عدد $n+1$ نیز برقرار است. زیرا، فرض کنیم (۱) و (۲) دو تجزیه‌ی $n+1$ به عوامل اول باشند. اگر $n+1$ اول باشد بالبداهه در حکم صدق میکند. در غیر این صورت، $1 < r$ و $1 < s$. چون

$$(۳) \qquad n+1 = p_1p_2\ldots p_r = q_1q_2\ldots q_s,$$

و p_r حاصلضرب pها[1] را عاد میکند حاصلضرب qها را نیز عاد میکند. پس، بنا بر III : ۹.۳.۴، عددی طبیعی مانند i هست که $p_r = q_i$. به همین قیاس معلوم میشود که عددی طبیعی مانند j هست $q_s = p_j$. اما

$$p_j \leqslant p_r = q_i \leqslant q_s = p_j.$$

پس، $p_r = q_s$ (۴). بالنتیجه، بنا بر (۳)،

$$(۵) \qquad \frac{n+1}{p_r} = p_1p_2\ldots p_{r-1} = q_1q_2\ldots q_{s-1}.$$

اما، $1 < (n+1)/p_r < n+1$. پس، بنا بر (۵) و فرض استقراء، اولاً، $r-1 = s-1$، و از آنجا، $r = s$؛ و ثانیاً،

$$p_i = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

و از آنجا، بنا بر (۴)،

$$p_i = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \blacktriangle$$

۹.۳.۶. فواید

I. در تجزیه‌ی عدد طبیعی n به حاصلضرب عوامل اول، ممکن است بعضی از این عوامل مکرر شوند (به تجزیه‌ی 120 که قبل از ۹.۳.۵ گذشت نگاه کنید). اگر p_1، ...، p_r عوامل اولِ دو بدو متمایزِ n باشند، تجزیه‌ی n را به عوامل اول میتوان چنین نوشت:

$$(*) \qquad n = p_1^{a_1}\cdot p_1^{a_2}\ldots p_r^{a_r},$$

که، در آن، a_1، ...، و a_r اعداد طبیعی هستند. این تجزیه را تجزیه‌ی رسمی n به عوامل اول نامیم. مثلاً، تجزیه‌ی رسمی 120، 125، و $588\,000$ به عوامل اول عبارتست از

---

(۱) «pها» یعنی اعداد p_1، ...، و p_r که مورد بحث هستند. ذیل صفحه‌ی ۲۳۷ ملاحظه شود.

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 125 = 5^3, \quad 588\,000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

II. اگر n عدد صحیحی غیر از 0، 1، و $1-$ باشد آن را به یک و تنها به یک طریق میتوان به صورت

$$n = \operatorname{sgn} n \cdot p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$$

تجزیه کرد که، در آن، p_1، . . .، p_r اعداد اول دو بدو متمایزند، و نمایندهها اعدادی طبیعی میباشند.

III. اگر (*) تجزیهی رسمی عدد طبیعی n به عوامل اول باشد با اندک تأملی معلوم میشود که مقسومعلیههای مثبت عدد n منحصرند به جمیع اعدادی به صورت

$$p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \ldots p_r^{b_r}, \tag{+}$$

که، در آن،

$$0 \leqslant b_i \leqslant a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

مثلاً، $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. هر عدد به صورت $2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$ با شرایط

$$b_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, \qquad b_2 \in \{0, 1\}, \qquad b_3 \in \{0, 1\}$$

یکی از مقسومعلیههای 120 است، و 120 را مقسومعلیه مثبتی جز این اعداد نیست.

IV. از مطلب مذکور در III قاعدهی تعیین بمعم دو عدد طبیعی از تجزیهی رسمی آنها به عوامل اول، که آن را در حساب مقدماتی دیدهاید، به آسانی استنباط میشود: عوامل مشترک را با کوچکترین نماینده اختیار و در هم ضرب میکنیم. مثلاً،

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \qquad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2, \qquad (120, 300) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

V. واضح است که اگر اعداد طبیعی m و n متباین باشند عامل اول مشترک نتوانند داشت، و لهذا، در تجزیهی رسمی آنها به عوامل اول، پایهای که در هر دو تجزیه مشترک باشد وجود ندارد. از طرف دیگر، اگر در تجزیهی m و n به صورت مذکور پایهی مشترکی مانند p وجود داشته باشد آنگاه $p \mid m$ و $p \mid n$، و لهذا، m و n متباین نیستند.

۹.۴. جوابهای منطق بعضی معادلات صحیح.

معادلهای به صورت

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{۱}$$

را، که در آن، n عددی طبیعی و aها اعداد حقیقیاند، یک معادلهی صحیح درجهی nم (یا از درجهی nم)، و جملهی a_0x^n (جملهی دارای بالاترین درجه) را جملهی پیشرو آن نامیم. معادلاتی که در اینجا مورد توجه ما هستند معادلات صحیحی هستند که ضرایب آنها (a_0، a_1، . . .، و a_n) اعداد صحیحاند. چنین معادلهای را، در صورتی که ضریب جملهی پیشرو آن 1 باشد، یک معادلهی تَکین خوانیم. مثلاً، معادلات

$$3x^3 - 7x^2 + 2x = 0 \tag{۲}$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{۳}$$

معادلاتی صحیحاند. اولی از درجهی سوم و جملهی پیشرو آن $3x^3$ است، و دومی از درجهی چهارم و جملهی پیشرو آن x^4. معادلهی (۳) معادلهای است تکین.

معادله‌ی (۲) دارای جوابهای منطق 0، 2، و $1/3$ است، و معادله‌ی (۳) دارای جوابهای منطق 1 و 2. بطور کلی، از مسائل مهمی که در باب معادلات صحیح دارای ضرایب صحیح پیش میآید تحقیق در وجود جوابهای منطق و امکان وجود جوابهای منطق غیر صحیح است. به وسیله‌ی خواص سابق‌الذکر اعداد صحیح اطلاعات جالبی در این باب بدست میآید.

۹.۴.۱. قضیه (قضیه‌ی گاوس*). یک معادله‌ی تکین جواب منطق غیر صحیح ندارد. به عبارت دیگر، اگر یک معادله‌ی تکین دارای جوابی منطق باشد این جواب عددی است صحیح.

برهان. فرض کنیم معادله‌ی تکین

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (۱)$$

دارای جوابی منطق باشد. چون معادله‌ی (۱) فقط و فقط وقتی دارای جواب 0 است که $a_n = 0$، و عدد منطق 0 عدد صحیح هم هست، کافی است حکم را در حالتی که $a_n \neq 0$ ثابت کنیم. اینک جواب منطق مذکور را به کسری تحویلناپذیر، مثلاً r/s، تحویل میکنیم. چون r/s جواب (۱) است،

$$r^n + a_1r^{n-1}s + \cdots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n = 0. \qquad (۲)$$

چون جمله‌های این معادله از جمله‌ی دوم ببعد بر s قابل قسمت‌اند، بنا بر ۹.۱.۰۱ : ۱۰، $s \mid r^n$. پس، s مقسوم‌علیه مشترکی از s و r^n است. اما، بنا بفرض، $(s, r) = 1$. پس، بنا بر ۹.۲.۱۰، $(s, r^n) = 1$. بالنتیجه، بنا بر ۹.۲.۶، $s \mid 1$، و از آنجا $s = \pm 1$. پس، r/s عددی است صحیح. ▲

۹.۴.۲. فایده. با علامات مذکور در قضیه‌ی ۹.۴.۱ و برهان آن، به قیاس آنچه گذشت معلوم میشود که $r \mid a_n$. پس، جوابهای صحیح یک معادله‌ی تکین، در صورت وجود، از مقسوم‌علیه‌های جمله‌ی معلوم معادله میباشند.

قضیه‌ی گاوس حالت خاصی از قضیه‌ی ذیل است که اثباتش به متعلم محول میشود:

۹.۴.۳. قضیه. اگر ضرایب معادله‌ی

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

اعداد صحیح باشند، هر جواب منطق تحویلناپذیر آن مانند r/s، در عین حال، در شرایط $r \mid a_n$ و $s \mid a_0$ صدق میکند.

۹.۴.۴. امثله

(آ). اگر معادله‌ی تکین $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ جوابی منطق داشته باشد، بنا بر قضیه‌ی گاوس، این جواب عددی است صحیح، و بنا بر ۹.۴.۲، از مقسوم‌علیه‌های 2 میباشد، و لهذا، جز از اعداد ± 1 و ± 2 نتواند بود[1]. با امتحان معلوم میشود که جوابهای مطلوب اعداد 1 و 2 هستند.

---

(۱) عبارت «جز از اعداد ± 1 و ± 2» یعنی «جز از اعداد 1، -1، 2، و -2».

(ز). به همان طریق معلوم میشود که معادلهی $x^2 - 2 = 0$ جواب منطق ندارد. (ملاحظه کنید که هنوز نمیدانیم که این معادله جواب دارد یا نه.)
(ژ). جوابهای منطق معادلهی $3x^3 + 2x^2 + 5x - 2 = 0$.
اگر این معادله جوابی مانند r/s با شرط $(r, s) = 1$ داشته باشد، $r \mid -2$ و $s \mid 3$. پس، مقادیر r جز ± 1 و ± 2، و مقادیر s جز ± 1 و ± 3 نتوانند بود. چون جمیع کسور ممکنه را امتحان کنیم دیده میشود که یگانه جواب منطق معادلهی مذکور $1/3$ است.

۹.۴.۵. تمرین

۰۱ جوابهای منطق معادلهی ذیل را در صورت وجود تعیین کنید:

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10 = 0$$

۱۰ § مسائل مختلفه

۰۱[1] بازاء هر x از $\mathbf{R}$، جزء مثبت x (x^+) و جزء منفی x (x^-) چنین تعریف میشوند:

$$x^+ = \begin{cases} x & (x \geqslant 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & (x > 0), \\ -x & (x \leqslant 0). \end{cases}$$

(ملاحظه کنید که جزء منفی x نامنفی است). ثابت کنید که همواره

(I) $x = x^+ - x^-$. (II) $|x| = x^+ + x^-$.

(III) $x^- = (-x)^+$. (IV) $x^+ = (-x)^-$.

(V) $x^+ = \dfrac{x + |x|}{2}$. (VI) $x^- = \dfrac{|x| - x}{2}$.

(VII) $x^+ = 0 \Leftrightarrow x^- = -x \Leftrightarrow |x| = -x$.

(VIII) $x^- = 0 \Leftrightarrow x^+ = x \Leftrightarrow |x| = x$.

(IX) $x \leqslant y \Leftrightarrow (x^+ \leqslant y^+ \,\&\, x^- \geqslant y^-)$.

(X) $(cx)^+ = cx^+ \quad (c > 0)$.

(XI) $(cx)^- = cx^- \quad (c > 0)$.

(XII) $|x^+ - y^+| \leqslant |x - y|$.

(XIII) $|x^- - y^-| \leqslant |x - y|$.

۰۲ (استقراء محدود). k عدد طبیعی مفروضی است، و F خاصیتی. میدانیم که
(آ). $F(1)$
(ب). بازاء هر عدد طبیعی n که $1 \leqslant n < k$، اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$.
ثابت کنید که هر عضو $\mathbf{N}_k$ خاصیت F دارد.

۰۳ دستوری کلی برای محاسبهی این عبارات بدست آورید:

(آ) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$.

---

(۱) با مسئلهی ۴۶ مقایسه کنید.

(د) $$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}.$$

۴. ثابت کنید که بازاء هر عدد طبیعی n،

(آ) $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

(ب) $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24} \qquad (n\geqslant 2).$$

(پ) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}.$$

(ت) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n \qquad (n\geqslant 2).$$

۵. اگر $n\in\mathbf{N}$ آنگاه

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\cdot 2n$$
$$=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)(2n-1).$$

۶. اگر $n\in\mathbf{N}$ آنگاه

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}=2^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}=\frac{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)}{n!}.$$

۷. همواره

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{(2r-1)(2r+1)}{2r\cdot 2r}=\frac{(2n+1)[(2n)!]^2}{2^{4n}\cdot(n!)^4}.$$

۸. اگر $n\in\mathbf{N}\ \&\ n\geqslant 7$ آنگاه $n!>3^n$.

۹. اگر $n\in\mathbf{N}\ \&\ n\geqslant 5$ آنگاه $(2n)!/(n!)^2<4^{n-1}$.

۱۰. اگر $n\in\mathbf{N}\ \&\ n>2$ آنگاه $(n!)^2>n^n$.

۱۱. اگر $n\in\mathbf{N}\ \&\ n>1$ آنگاه

$$n^n>1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1).$$

۱۲. رشته‌ی $\{u_n\}$ به استقراء چنین تعریف شده است:

$$u_1=0, \qquad (n+1)^2u_n=(n-1)u_{n-1}-n \qquad (n>1).$$

ثابت کنید که همواره اگر $n>1$ آنگاه $-1<u_n<0$.

۱۳. رشته‌ی $\{u_n\}_{n=0}$ به استقراء چنین تعریف شده است:

$$u_0=2, \qquad u_1=3, \qquad u_{n+1}=3u_n-2u_{n-1} \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

u_n را بر حسب n حساب کنید.

۱۴. رشته‌ی $\{a_n\}$ به استقراء چنین تعریف شده است:

$$a_1=0, \quad a_2=1, \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n-1}) \qquad (2\leqslant n).$$

a_n را بر حسب n بیان کنید.

۱۵. اگر

$$ac' - 2bb' + ca' = 0, \qquad ac - b^2 > 0$$

آنگاه $a'c' - b'^2 \leqslant 0$.

۱۶. اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ آنگاه

$$-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1.$$

۱۷. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $x > 1$ آنگاه $x^n > n(x-1)$.

۱۸. اگر a، b، و c مثبت باشند آنگاه

(آ) $\quad 2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b).$

(ب) $\quad 6abc \leqslant bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b).$

در هر حالت شرط برقراری تساوی را تعیین کنید.

۱۹. همواره $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c)$.

۲۰. اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از 2 باشد قوه‌ی nم طول وتر هر مثلث قائم‌الزاویه از مجموع قوای nم طولهای اضلاع آن بزرگتر است.

۲۱. همواره

(آ) $\quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$ $\qquad$ (ب) $\quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leqslant \frac{x^4+y^4}{2}.$

(پ) $\quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^8 \leqslant \frac{x^8+y^8}{2}.$

۲۲. اگر $x + y \geqslant 0$ آنگاه

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n+y^n}{2}.$$

۲۳. همواره

$$\left(\frac{u+v+x+y}{4}\right)^2 \leqslant \frac{u^2+v^2+x^2+y^2}{4}.$$

۲۴. بطور کلی، اگر u، v، x، و y نامنفی باشند، بازاء هر عدد طبیعی n،

$$\left(\frac{u+v+x+y}{4}\right)^n \leqslant \frac{u^n+v^n+x^n+y^n}{4}.$$

۲۵. اگر x، y، و z نامنفی باشند

(آ) $$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leqslant \frac{x^3+y^3}{2}.$$

(ب) $$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leqslant \frac{x^3+y^3+z^3}{3}.$$

۲۶. a، b، و c سه عدد طبیعی مفروضند. فرض میکنیم بازاء هر عدد طبیعی n مثلثی با اضلاع a^n، b^n و c^n موجود باشد. ثابت کنید که جمیع این مثلثها متساوی‌الساقین میباشند.

۲۷. اگر $|b - a| < |b|$ آنگاه a و b متحدالعلامه‌اند.

۲۸. اگر $a = b + c$ و $ac < 0$ آنگاه

$$\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b = -\operatorname{sgn} c, \qquad |a| < |b|, \qquad |c| < |b|.$$

۲۹. $\{p_n\}_{n=0}$ و $\{q_n\}_{n=0}$ دو رشته از اعداد مثبت‌اند، و k عدد مثبت مفروضی است، و

بازاء هر عدد طبیعی n،

$$p_n = \frac{1}{2}(p_{n-1} + q_{n-1}), \qquad p_{n-1}q_{n-1} = k^2.$$

بنا بر آنکه $p_0 > q_0$، ثابت کنید که، اولاً، بازاء هر عدد طبیعی n،

$$p_{n-1} > p_n > k > q_n > q_{n-1}.$$

ثانیاً، اگر $p_n = k(1 + 2a_n)$ آنگاه، بازاء هر عدد طبیعی n، $a_n < a_0^{2^n}$.

۳۰. m و n دو عدد طبیعی هستند، و $n > 1$ و $m \leqslant n$. عبارات

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i, \qquad \prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i.$$

را، بترتیب، با قرار دادن $\sum$ و $+$ یا $\prod$ و $\times$ در ۷.۷.۹ بجای $\boxtimes$ و $\bigcirc$ تعریف و ثابت کنید که

$$\sum_{1}^{n} a_i = a_m + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_m \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i.$$

بطور کلی، بازاء سه عدد صحیح k، m، و n، عبارات

$$\sum_{\substack{i=k\\ i\neq m}}^{n} a_i, \qquad \prod_{\substack{i=k\\ i\neq m}}^{n} a_i$$

را با شرایط مناسب برای k، m، و n تعریف و نظیر روابط فوق را در مورد آنها بیان و ثابت کنید.

۳۱ (فرمول جمع جزئی آبل*). فرض کنیم $\{a_n\}_{n=0}$ و $\{b_n\}_{n=0}$ دو رشته از اعداد حقیقی باشند، و

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (n \geqslant 0)$$

(آ). بازاء هر n از $\mathbf{I}_0$ و هر k از $\mathbf{N}$،

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i b_i = \sum_{i=n+1}^{n+k} A_i(b_i - b_{i+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k}b_{n+k+1}$$
$$= \sum_{i=n+1}^{n+k-1} A_i(b_i - b_{i+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k}b_{n+k}.$$

(این رابطه‌ی مهم به فرمول جمع جزئی آبل* معروف است.)

(ب). اگر A_{-1} را مساوی 0 تعریف کنیم فرمول فوق بازاء $n = -1$ نیز برقرار است.

(پ). اگر c عددی ثابت باشد، و $A'_i = A_i + c$ آنگاه

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i b_i = \sum_{i=n+1}^{n+k} A'_i(b_i - b_{i+1}) - A'_n b_{n+1} + A'_{n+k}b_{n+k+1}.$$

(ت). نظیر احکام فوق را در مورد دو رشته‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ بیان و ثابت کنید.

۳۲. a و d دو عدد حقیقی مفروضند، و m عدد طبیعی مفروضی است. بنا بر آنکه

$$u_r = (a + rd)[a + (r+1)d] \ldots [a + (r + m - 1)d]$$

مطلوبست محاسبه‌ی $\sum_{r=0}^{n-1} u_r$ بر حسب n و مفروضات مسئله.
بالاخص، نتیجه بگیرید که

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1)(2n+3) = n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2);$$

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\ldots(r+m-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{m+1}.$$

راهنمائی: ملاحظه کنید که $[a+(r-1)d]u_r = [a+(r+m-1)d]u_{r-1}$. طرف دوم را v_r بنامید، و $v_{r+1} - v_r$ را حساب کنید. جواب:

$$\sum_{r=0}^{n-1} u_r = \frac{1}{(m+1)d}\Big\{[a+(n-1)d](a+nd)\ldots[a+(n+m-1)d] - (a-d)a(a+d)\ldots[a+(m-1)d]\Big\}.$$

۳۳. با مفروضات مسئله‌ی قبل و بنا بر آنکه $m > 1$ مطلوبست محاسبه‌ی $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{u_r}$ با فرض معنی داشتن جمل.
جواب:

$$\frac{1}{(m-1)d}\left[\frac{1}{a(a+d)\ldots[a+(m-2)d]} - \frac{1}{(a+nd)[a+(n+1)d]\ldots[a+(n+m-2)d]}\right].$$

بالاخص،

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)\ldots(r+m-1)} = \frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}\right].$$

۳۴ (بعضی از خواص رشته‌ی فیبوناتچی[1]). رشته‌ی فیبوناتچی به استقراء چنین تعریف میشود:

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (n \geqslant 3).$$

احکام ذیل را ثابت کنید:

(۱) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1.$

(۲) $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}.$

(۳) $u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$

(۴) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = 1 - u_{2n-1}.$

(۵) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1.$

---

(۱) آ ۶.۳.۱

(۶) $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}.$

(۷)[۱] $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}.$

(۸) $u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$

(۹) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n.$

۳۵. هر دو جمله‌ی متوالی رشته‌ی فیبوناتچی با هم متباین‌اند.

۳۶. در معادله‌ی تکین

$$x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$$

اگر شرایط ذیل در عین حال برقرار باشند معادله جواب منطق ندارد:

$$a_n = 1, \qquad 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0, \qquad 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i \neq 0.$$

۳۷. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $0 < x < 1$ آنگاه

$$\frac{1 - x^{n+1}}{n+1} < \frac{1 - x^n}{n}.$$

۳۸. اگر $ab \neq 0$، $0 < r < 1$، و $-1 \leqslant a/b \leqslant r$ آنگاه

$$|a + b| \leqslant \frac{1+r}{1-r}(|b| - |a|).$$

۳۹. اگر $x \geqslant 0$، $y \geqslant 0$، $x + y < 1$، و $h \leqslant x + hy$ آنگاه $h \leqslant x + y$.

۴۰. همواره، به شرط با معنی بودن جمله‌ها،

$$\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

۴۱. اگر

$$0 < a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (n \geqslant 2).$$

۴۲. اگر

$$0 < a_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (n \geqslant 2).$$

۴۳. همواره

(آ) $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant \min\{x_2, \ldots, x_n\} \leqslant \mathrm{Max}\{x_2, \ldots, x_n\} \leqslant \mathrm{Max}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$

(ب) $\min\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots x_n\} = \min\{\min\{x_1, \ldots x_r\}, \min\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}\}.$

---

(۱) استقراء نسبت به m به وسیله‌ی ۴.۶.۸.

(د) $\text{Max}\,\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\} = \text{Max}\,\{\text{Max}\,\{x_1, \ldots, x_r\}, \text{Max}\,\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}\}.$

(ذ) $\min\,\{x_1, \ldots, x_n\} = -\,\text{Max}\,\{-x_1, \ldots, -x_n\}.$

(ذ) $\text{Max}\,\{x_1, \ldots, x_n\} = -\min\,\{-x_1, \ldots, -x_n\}.$

۴۴. اگر

$$a_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)،$$

$$m = \min\,\{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad M = \text{Max}\,\{x_1, \ldots, x_n\},$$

آنگاه

$$m \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant M;$$

و شرط لازم و کافی برای اینکه در یک طرف تساوی برقرار باشد آنست که

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m = M.$$

۴۵. اگر

$$b_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right\} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} \leqslant \text{Max}\left\{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

شرط لازم و کافی برای اینکه در یک طرف تساوی برقرار باشد چیست؟

۴۶. بنا بر تعریف،

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^+ = \text{Max}\,\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^- = \min\,\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

ثابت کنید که

(آ) $\{a, b\}^+ + \{c, d\}^+ \geqslant \{a, b, c, d\}^+.$

(ب) $\{-a, -b\}^- = -\{a, b\}^+.$

(پ) $\{a_1, \ldots, a_n\}^- \leqslant \min\,\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant \text{Max}\,\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant \{a_1, \ldots, a_n\}^+.$

۴۷. ثابت کنید که از هر رشته مانند $\{a_i\}_1^n$ از اعداد حقیقی که واجد خواص

$$0 \leqslant a_1, \qquad a_{i-1} \leqslant a_i \leqslant 2a_{i-1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

باشند میتوان حاصلجمعی جبری مانند

$$s = (-1)^{k_1} a_1 + (-1)^{k_2} a_2 + \cdots + (-1)^{k_n} a_n$$

ساخت که $0 \leqslant s \leqslant a_1$.

۴۸. اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه

$$\frac{n}{(n+1)(2n+1)} < \sum_{r=n+1}^{2n} \frac{1}{r^2} < \frac{n}{(n+1)(2n+1)} + \frac{3n+1}{4n(n+1)(2n+1)}.$$

۴۹. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $0 < a < 1$ آنگاه

$$(1-a)^n \geqslant 1 - na.$$

۵۰. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $n > 1$ آنگاه

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

۵۱. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $n > 1$ آنگاه

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

۵۲. اگر $n \in \mathbf{N}$، $a > 0$، $b > 0$، و $a \neq b$ آنگاه

$$[a - (n+1)(a-b)]a^n < b^{n+1}.$$

۵۳. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $0 < a < 1$ آنگاه

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

۵۴. اگر $n \in \mathbf{N}$ و $0 < a < \frac{1}{n}$ آنگاه

$$(1+a)^n < \frac{1}{1-na}.$$

۵۵. اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه

$$\left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-n} > \frac{5}{6}.$$

۵۶. اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

راهنمائی: طریق حالات برحسب باقیمانده‌ی تقسیم n بر 6، و مسائل ۵۵ و ۵۱.

۵۷. اگر $n \in \mathbf{N}$، $a \geqslant 0$، $b \geqslant 0$، و $n \geqslant 2$ آنگاه

$$(a+b)^n - a^n - b^n \leqslant nab(a+b)^{n-2}.$$

۵۸. اگر bها اعدادی مثبت باشند همواره

$$\sum_1^n b_i \cdot \sum_1^n \frac{1}{b_i} \geqslant n^2.$$

۵۹. بنا بر آنکه $k \in \mathbf{N}$ و $S_k = \sum_{r=1}^n r^k$ ثابت کنید که

$$(n+1)^k - (n+1) = \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{k-r} S_r.$$

سپس S_4 را بر حسب n حساب کنید.

۶۰. بنا بر آنکه $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n c_r x^r$، ثابت کنید که

$$\sum_{r=1}^n r c_r x^{r-1} = n(1+x)^{n-1}; \qquad \text{(آ)}$$

$$\text{(د)} \qquad \sum_{r=0}^{n} \frac{c_r}{r+1}x^{r+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

۶۱. با توجه به رابطه‌ی $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ ثابت کنید که، بازاء هر عدد صحیح نامنفی n،

$$\sum_{0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{r}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

۶۲. ثابت کنید که

$$\text{(آ)} \qquad \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{I}_0).$$

$$\text{(ب)} \qquad \binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{I}_0).$$

$$\text{(پ)} \qquad \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

$$\text{(ت)} \qquad \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0 \qquad (n > 1).$$

۶۳. ثابت کنید که

$$\text{(آ)} \qquad \sum_{r=1}^{n} \left[r\binom{n}{r}\Big/\binom{n}{r-1}\right] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{(ب)} \qquad \prod_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] = \frac{(n+1)^n}{n!}\prod_{r=1}^{n}\binom{n}{r}.$$

۶۴. فرض کنیم $F(r)$ گزاره‌نمائی باشد که تعدادی متناهی از مقادیر صحیح r در آن صدق کنند. حاصلجمع مقادیر a_r را بازاء جمیع این مقادیر r به

$$\sum_{F(r)} a_r$$

نمایش میدهند: مثلاً، اگر n عدد صحیح نامنفی مفروضی باشد،

$$\sum_{0 \leqslant 2r \leqslant n} \binom{n}{2r}$$

یعنی حاصلجمع مقادیر $\binom{n}{2r}$ بازاء جمیع مقادیر صحیحی از r که نامنفی و از $n/2$ نابیشتر باشند، و آن عبارتست از حاصلجمع

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$$

تا جائی که عدد پایین از عدد بالا تجاوز کند. اگر خارج قسمت تقسیم n را بر 2 به $[n/2]$ نمایش دهیم، این حاصلجمع مساوی $\sum_{r=0}^{[n/2]} \binom{n}{2r}$ خواهد بود.

ثابت کنید که

$$\text{(آ)} \qquad \sum_{0 \leqslant 2r \leqslant n} \binom{n}{2r} = \begin{cases} 2^{n-1} & (n \in \mathbf{N}), \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

$$\sum_{1\leqslant 2r-1\leqslant n}\binom{n}{2r-1}=\sum_{r=1}^{[(n+1)/2]}\binom{n}{2r-1}=2^{n-1}. \qquad (د)$$

۶۵. اگر $n\in \mathbf{I}_0$ آنگاه

$$\binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}^2=\begin{cases}0 & (2\nmid n)\\ \dfrac{(-1)^{n/2}n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2} & (2\mid n)\end{cases}$$

۶۶. ثابت کنید که

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{n}{r}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

(راهنمائی: استقراء)

۶۷. اگر $k, m, n\in \mathbf{I}_0$ و $k\leqslant \min\{m, n\}$ آنگاه

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}=\binom{n+m}{k}.$$

۶۸. دستورات

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$$
$$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2,$$

هر یک a^n+b^n را بازاء مقدار خاصی از n بر حسب قوای $a+b$ و ab بیان میکنند. بطور کلی، بازاء هر عدد طبیعی n،

$$a^n+b^n=\sum_{0\leqslant 2r\leqslant n}(-1)^r\frac{n}{n-r}\binom{n-r}{r}a^rb^r(a+b)^{n-2r}.$$

راهنمائی: استقراء به وسیله‌ی ۴.۶.۸.

۶۹ (دستور دوجمله‌ای واندرموند* یا دوجمله‌ای فاکتوریل).

(آ). فرض کنیم a و h دو عدد حقیقی باشند، و $n\in \mathbf{I}_0$. علامت $a^{n|h}$ چنین تعریف میشود:

$$a^{0|h}=1,$$
$$a^{n|h}=\prod_{r=0}^{n-1}(a-rh) \qquad (n\geqslant 1).$$

ثابت کنید که

$$a^{n|0}=a^n; \qquad a^{1|h}=a;$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n^{r|1}}{r!}; \qquad \binom{n}{r}\binom{m}{k-r}=\frac{1}{k!}\binom{k}{r}n^{r|1}m^{(k-r)|1};$$

$$(-1)^r\binom{m+r}{r}\binom{n}{k-r}=\frac{1}{k!}\binom{k}{r}(-m-1)^{r|1}n^{(k-r)|1}.$$

(ب). دستور ذیل را، که به دستور دوجمله‌ای واندرموند یا دستور دوجمله‌ای فاکتوریل معروف است، ثابت کنید:

$$(a+b)^{n|h}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{(n-r)|h}b^{r|h}.$$

دستور دوجمله‌ای نیوتن حالت خاصی این دستور است (چگونه؟).

۷۰. حکم مسئله‌ی ۶۷ را به وسیله‌ی دستور دوجمله‌ای واندرموند ثابت کنید.

۷۱. اگر $k, m, n \in \mathbf{I}_0$ و $k \leqslant n$ آنگاه

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{m+r}{r}\binom{n}{k-r}=\frac{(n-m-1)^{k|1}}{k!}.$$

۷۲. (اتحاد لاگرانژ*)، ثابت کنید که

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

(طرف دوم را به صورت

$$\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

نیز مینویسند، و آن عبارتست از حاصلجمع جمیع اعداد حاصل از $(a_ib_j-a_jb_i)^2$ بازاء جمیع مقادیر طبیعی i و j که در شرایط $1 \leqslant j < i \leqslant n$ صدق کنند.)

۷۳. قضیه‌ی نامساوی کوشی را به وسیله‌ی اتحاد لاگرانژ ثابت کنید.

۷۴. اگر a جواب معادله‌ی

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

باشد آنگاه $|a|<1+|a_1|+\cdots+|a_n|$.

۷۵. فرض کنیم

$$a_0>1,\qquad 0\leqslant a_n<1\qquad(n\geqslant 1).$$

در این صورت، اگر $|x| \leqslant 1/2$ آنگاه، بازاء هر عدد طبیعی m،

$$\left|\sum_{n=0}^{m}a_nx^n\right|>1-2|x|.$$

۷۶. اگر aها اعدادی مثبت باشند، $m, n \in \mathbf{N}$، $n > m$، $n \geqslant 2$، و

$$s=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}a_i>a_i\qquad(i=1, 2, \cdots, n)$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{mn}{n-m}.$$

۷۷. a و b دو عدد مفروضند، و $\{(a_n, b_n)\}_{n=0}$ رشته‌ای است از ازواج مرتب اعداد حقیقی، که جمله‌ی اولش (a_0, b_0) است، و $a_0=a$ و $b_0=b$، و همواره

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2},\qquad(n\geqslant 0).$$

ثابت کنید که، بازاء $n \geqslant 0$،

$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right),$$

$$b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

فصل ۶

اصل موضوع تمامیت

در فصل ۵ بعضی از خواص سطحی اعداد حقیقی را آموختیم. اینک به بررسی خواص عمقی این اعداد میپردازیم. مانند سابق، «عدد» را به معنی «عدد حقیقی» بکار میبریم. مجموعه‌های مورد بحث مجموعکهای $\mathbf{R}$، یعنی مجموعه‌هائی از اعداد حقیقی، هستند، و اغلب، بجای «یک مجموعه از اعداد»، مختصراً، «یک مجموعه» میگوئیم. علاوه بر حروف کوچک الفبای لاتینی، بعضی از حروف کوچک الفبای یونانی را نیز برای نامیدن اعداد حقیقی نامشخص بکار میبریم. بالاخره، در همه‌ی موارد مذکور، هرگاه مقصود دیگری اراده شود یا قید دیگری در کار آید صریحاً گفته خواهد شد.

۱ § سوپرموم و اینفیموم

۱.۱. بندها

۱.۱.۱. تعریفات. فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد باشد.

I. عدد x را یک بند بالای A خوانیم در صورتی که از هر عضو A ناکمتر باشد؛ و آن را یک بند پایین A نامیم در صورتی که از هر عضو A نابیشتر باشد.

II. A را از بالا محدود (از بالا نامحدود) گوئیم اگر بند بالائی داشته (نداشته) باشد، و آن را از پایین محدود (از پایین نامحدود) گوئیم اگر بند پایینی داشته (نداشته) باشد.

III. A را محدود گوئیم اگر از بالا و پایین محدود باشد.

IV[1]. بندهای رشته‌ای از اعداد، بنا بر تعریف، بندهای مجموعه‌ی جمله‌های آنست، و بر حسب اینکه این مجموعه از بالا یا از پایین یا مطلقاً محدود باشد رشته را، بترتیب، از بالا یا از پایین یا مطلقاً محدود خوانند.

۱.۱.۲. تبصره. بنا بر تعریفات سابق، گزاره‌ی «A از بالا محدود است» بدین معنی است:

عددی مانند x هست که، بازاء هر y از A، $y \leqslant x$.

گزاره‌ی «A از بالا نامحدود است» نقیض گزاره‌ی فوق، و معادل است با گزاره‌ی

x هر عددی باشد yی از A هست که $x < y$.

به عبارت دیگر، گزاره‌ی «A از بالا نامحدود است» معادل است با اینکه، هر عددی اختیار کنیم، A عضوی بزرگتر از آن عدد دارد.

به همین قیاس معلوم میشود که گزاره‌ی «A از پایین نامحدود است» معادل است با

---

(۱) با این تعریف تا فصل ۷ کاری نداریم.

اینکه، هر عددی اختیار کنیم، A عضوی کوچکتر از آن دارد.
نکات مذکور در اثبات محدود یا نامحدود بودن مجموعه‌ها همواره بکار میآیند.

۱.۱.۳. امثله و فواید

(آ). اگر مجموعه‌ی A عضو اقل (عضو اکثر) داشته باشد این عضو یک بند پایین (بند بالای) A است.
(ب). چنانکه میدانیم، هر مجموعه‌ی متناهی غیر خالی از اعداد عضو اقل و عضو اکثر دارد، و بالنتیجه، محدود است.
(پ). یک مجموعه‌ی نامتناهی ممکن است از بالا، از پایین، یا مطلقاً محدود باشد، یا اصلاً محدود نباشد، مثلاً، $\{0\} \cup \mathbf{R}^-$ از بالا محدود است (0 یک بند بالای آنست)، ولی از پایین محدود نیست (چرا؟)؛ $\mathbf{R}$ نه از بالا محدود است نه از پایین (چرا؟). بالاخره، مجموعه‌ی $\{1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$ شمارا است (چرا؟)، و لهذا، نامتناهی؛ 1 و هر عدد بزرگتر از آن یک بند بالای آنست، و 0 و هر عدد منفی یک بند پایین آن.
(ت). هر عدد حقیقی یک بند بالای $\varnothing$ است، زیرا، بازاء هر عدد مانند x، گزاره‌نمای «هر عضو $\varnothing$ از x نابیشتر است» به انتفاء مقدم راست میباشد. همچنین، هر عدد حقیقی یک بند پایین $\varnothing$ است. بالنتیجه، $\varnothing$ محدود است.
(ث). A مجموعه‌ی اعدادی است که مربع هر یک از 2 کوچکتر است. ثابت کنید که A غیر خالی و 3 یک بند بالای آنست.
بنا بفرض، $A = \{x \mid x^2 < 2\}$. چون $1^2 = 1 < 2$، $1 \in A$، و لهذا، $A \neq \varnothing$. برای اثبات قسمت دیگر باید ثابت کرد که هر عضو A از 3 نابیشتر است. اگر چنین نباشد A عضوی مانند x دارد که $\sim (x \leqslant 3)$، و بالنتیجه، $3 < x$. پس، $9 < x^2$، و به طریق اولی $2 < x^2$، و این با عضویت x در A متناقض است. ▲
استدلالی که در این مثال گذشت در آتیه در موارد عدیده بکار میآید.

۱.۱.۴. تمرین

۱. هر بند پایین یک مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد از هر بند بالای آن نابیشتر است. آیا این حکم در حالتی که قید «غیر خالی» را برداریم برقرار میماند؟
۲. اگر مجموعه‌ی A بند بالائی (بند پایینی) متعلق به A داشته باشد این بند عضو اکثر (عضو اقل) A است.
۳. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی A محدود باشد آنست که عددی مثبت مانند a موجود باشد که، بازاء هر x از A، $|x| < a$.
۴. یک مجموعه‌ی غیر خالی محدود (از بالا، از پایین، یا مطلقاً) ممکن است بندی متعلق به خود مجموعه داشته باشد یا نه. برای هر یک از حالات ممکنه مثالی بیاورید.
۵. ثابت کنید که مجموعه‌های ذیل غیر خالی و محدودند:

$$\{x \mid 0 \leqslant x \;\&\; x^2 < 5\}. \qquad \{x \mid x^2 < 5\}. \qquad \{x \mid 2 < x^2 < 6\}.$$

۶. در این مسئله، مجموعه‌ی بندهای بالای مجموعه‌ای مانند E از اعداد حقیقی به E^+ و مجموعه‌ی بندهای پایین آن به E^- نمایش داده شده است. همچنین، مجموعه‌ی بندهای بالای E^+ را E^{++} و مجموعه‌ی بندهای پائین آن را E^{+-} مینامیم، و غیره. بنا بر آنکه A و B

دو مجموعه از اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید که

(آ). اگر $A \subseteq B$ آنگاه

$$B^- \subseteq A^-, \qquad B^+ \subseteq A^+,$$

(ب) $A \subseteq A^{-+}, \qquad A \subseteq A^{+-},$

(پ) $A^{-+-} = A^-, \qquad A^{+-+} = A^+,$

(ت) $A^{-+-+} = A^{-+}, \qquad A^{+-+-} = A^{+-},$

۱.۲. سوپرموم[۱] و اینفیموم[۲]. اگر عددی بند بالای مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد باشد هر عدد بزرگتر از آن نیز یک بند بالای آن مجموعه است. بندهای بالای یک مجموعه‌ی غیر خالی (البته در صورت وجود چنین بندها) اطلاعی از لحاظ بزرگی اعضای این مجموعه بدست میدهند، و بدیهی است که اطلاعی که بندهای بالای کوچکتر میدهند از اطلاع حاصل از بندهای بالای بزرگتر دقیقتر است. مثلاً، از دانستن اینکه 1000 یک بند بالای مجموعه‌ی A است اطلاعی در این باب که این مجموعه عضوی بین 500 و 600 دارد یا نه حاصل نمیشود، اما اگر بدانیم که 105 نیز بند بالای همین مجموعه است معلوم میشود که A عضوی بزرگتر از 105 ندارد. نظیر این توضیحات را میتوان درباره‌ی بندهای پایین آورد. بنا بر آنچه گذشت، به زبان عامیانه میتوان گفت که «بهترین» بندهای بالا کوچکترین آنهاست، و «بهترین» بندهای پایین بزرگترین آنها. بنابراین، تعریفات کلی ذیل را میآوریم:

۱.۲.۱. تعریفات. فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد باشد.

I. عدد α را سوپرموم A یا

$$\sup A \qquad \text{یا} \qquad \sup_{x\in A} x$$

خوانیم در صورتی که بند بالای A باشد، و در عین حال، از هر بند بالای A نابیشتر باشد. به عبارت دیگر $\sup A$ یعنی ابتدای مجموعه‌ی بندهای بالای A.

II. عدد α را اینفیموم A یا

$$\inf A \qquad \text{یا} \qquad \inf_{x\in A} x$$

نامیم در صورتی که بند پایین A باشد و، در عین حال، از هر بند پایین A ناکمتر باشد. به عبارت دیگر، $\inf A$ یعنی انتهای مجموعه‌ی بندهای پایین A.

III. عبارت «سوپرموم (اینفیموم) A موجود است» یعنی «A سوپرموم (اینفیموم) دارد».

IV[۳]. سوپرموم و اینفیموم رشته‌ای از اعداد حقیقی، بترتیب، سوپرموم و اینفیموم مجموعه‌ی جمله‌های آنست.

---

(۱) supremum (۲) infimum

(۳) با این تعریف در فصل حاضر کاری نداریم.

۱.۲.۱.۰۱. تبصره. در صحبت کردن از سوپرموم و اینفیموم مجموعه‌ها، اغلب به عباراتی مانند

$\alpha = \sup A$ موجود است. $\alpha = \inf A$ موجود است.

بر میخوریم، بی‌آنکه قبلاً اسمی از α در میان آمده باشد[1]. معنی عبارت اول اینست که «سوپرموم A موجود است و آن را α مینامیم»، و هکذا در مورد دومی.

۱.۲.۱.۰۲. تبصره. مفاهیم سوپرموم و اینفیموم را میتوان در هر مجموعه‌ی مرتب تعریف کرد. خواستاران اطلاع در این باب میتوانند به ۵ § فصل ۲ض در کتاب حاضر رجوع کنند.

۱.۲.۲. قضیه. یک مجموعه از اعداد منتها یک سوپرموم (اینفیموم) تواند داشت. به عبارت دیگر، سوپرموم (اینفیموم) مجموعه‌ای از اعداد، در صورت وجود، منحصر بفرد است.
برهان (در مورد سوپرموم). اگر α و β سوپرمومهای مجموعه‌ی A باشند، هریک از آنها یک بند بالای A است. پس، بنا بر تعریف سوپرموم، از طرفی $\beta \leqslant \alpha$ و از طرف دیگر $\alpha \leqslant \beta$، و بالنتیجه، $\alpha = \beta$. ▲

۱.۲.۳. امثله و فواید

(آ). بنا بر تعریف سابق‌الذکر، برای اثبات اینکه $\alpha = \sup A$ کافی است ثابت کنیم که، اولاً، α یک بند بالای A است، یعنی، بازاءِ هر x از A، $x \leqslant \alpha$؛ و ثانیاً، A بند بالائی کوچکتر از α ندارد، و به عبارت دیگر، اگر y بند بالای دلخواهی از A باشد، $\alpha \leqslant y$. و قس‌علیهذا در مورد اینفیموم.

(ب). اگر $A = \{3, -2, 1\}$ آنگاه $\sup A = 3$. زیرا، چون 3 عضو اکثر A است یک بند بالای A است؛ و اگر y یک بند بالای A باشد، از $3 \in A$ و تعریف بند بالا نتیجه میشود، $3 \leqslant y$. به همین قیاس، $\inf A = -2$.

(پ). اگر $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ آنگاه

$$\sup A = 1, \qquad \inf A = 0.$$

رابطه‌ی مربوط به سوپرموم را ثابت میکنیم، و چون این مثال در نوع خود اولین مثالی است که آمده است، مراحل برهان را به تفصیل میآوریم.
اولاً، از تعریف A معلوم است که 1 یک بند بالای A است.
ثانیاً، به برهان خلف ثابت میکنیم که A بند بالائی کوچکتر از 1 ندارد. فرض کنیم

(۱) $x < 1$؛ (۲) x بند بالای A است.

قبلاً ثابت میکنیم که $x > 0$ (۳). گوئیم، بنا بر تعریف A، $1/2 \in A$. پس، بنا بر (۲) و تعریف بند بالا، $1/2 \leqslant x$، و بالنتیجه، (۳) برقرار است. بنا بر (۱) و (۳)،

$$0 < x < 1 \qquad (۴)$$

پس، $1/2 < (x+1)/2 < 1$ (۵). و لهذا، $x < (x+1)/2 < 1$ (۶) $0 < (x+1)/2 < 1$. از (۶) بنا بر تعریف A، $(x+1)/2 \in A$. از این و (۵) نتیجه میشود که A عضوی بزرگتر از x دارد،

---

(۱) ذیل صفحه‌ی ۴۷ ملاحظه شود.

و این با (۲) متناقض است. ▲
بر متعلم است که رابطه‌ی $\inf A = 0$ را با تفصیل تمام ثابت کند.
از این مثال ضمناً معلوم میشود که سوپرموم و اینفیموم یک مجموعه ممکن است بدان تعلق نداشته باشند.
(ذ). $\mathbf{R}$ نه سوپرموم دارد نه اینفیموم، زیرا، نه بند بالا دارد نه بند پایین.
(ژ). $\varnothing$ نه سوپرموم دارد نه اینفیموم. (چرا؟)

۱.۲.۴. قضیه. اگر $\sup A$ و $\inf A$ موجود باشند آنگاه

$$\inf A \leqslant \sup A.$$

برهان. فرض کنیم $\sup A$ و $\inf A$ موجود باشند. در این صورت، A خالی نیست. اگر a عضو دلخواهی از A باشد از طرفی $a \leqslant \sup A$ و از طرف دیگر $\inf A \leqslant a$. پس، $\inf A \leqslant \sup A$. ▲

قضیه‌ی ذیل در استدلال بسیار مفید است:

۱.۲.۵. قضیه. فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد و $\underline{A}$ مجموعه‌ی متقابلهای اعضای A باشد.

I. اگر $\sup A$ موجود باشد $\inf \underline{A}$ نیز موجود است، و

$$\inf \underline{A} = -\sup A$$

II. اگر $\inf A$ موجود باشد $\sup \underline{A}$ نیز موجود است، و

$$\sup \underline{A} = -\inf A$$

برهان. قبلاً ملاحظه میکنیم که
(آ) اگر $\sup A$ یا $\inf A$ موجود باشد آنگاه $A \neq \varnothing$؛
(ب)، اگر $A \neq \varnothing$ آنگاه $\underline{A} \neq \varnothing$، و بعلاوه، متقابل هر بند بالای (بند پایین) A یک بند پایین (بند بالای) $\underline{A}$ است، و بالعکس (چرا؟).

اینک I را ثابت و اثبات II را به متعلم محول میکنیم. فرض کنیم $\alpha = \sup A$ (۱). اولاً، چون α یک بند بالای A است، $-\alpha$ یک بند پایین $\underline{A}$ است. ثانیاً، اگر a بند پایین دلخواهی از $\underline{A}$ باشد آنگاه $-a$ یک بند بالای A است، و بالنتیجه، بنا بر (۱)، $\alpha \leqslant -a$، و از آنجا، $a \leqslant -\alpha$. پس، $-\alpha$ یک بند پایین $\underline{A}$ و از هر بند پایین آن ناکمتر است. بالنتیجه، $-\alpha = \inf \underline{A}$. ▲

در مثال ب: ۱.۲.۳، که مجموعه‌ی A اعضای اقل و اکثر دارد، دیدیم که همین اعضا، بترتیب، $\sup A$ و $\inf A$ هستند. اما، عکس این حکم بطور کلی برقرار نیست، زیرا، سوپرموم و اینفیموم یک مجموعه ــ برخلاف اعضای اکثر و اقل آن ــ ممکن است متعلق به آن مجموعه نباشند (مثال پ: ۱.۲.۳ ملاحظه شود). حکم کلی اینست:

۱.۲.۶. قضیه. فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد باشد.

I. اگر $\operatorname{Max} A$ $(\min A)$ موجود باشد آنگاه $\sup A$ $(\inf A)$ نیز موجود و با آن

مساوی است.

II. اگر $\sup A$ $(\inf A)$ موجود و متعلق به A باشد آنگاه $\operatorname{Max} A$ $(\min A)$ نیز موجود و با آن مساوی است.

هر دو حکم نتیجه‌ی تعریفات و اثبات آنها بر متعلم است.

۱.۲.۷. فایده. بنا بر قضیه‌ی فوق، اگر $\sup A$ (یا $\inf A$) موجود ولی غیر متعلق به A باشد آنگاه A عضو اکثر (یا عضو اقل) ندارد، و لهذا، نامتناهی است.

۱.۳. خواص مشخصه‌ی سوپرموم و اینفیموم. سوپرموم و اینفیموم مجموعه‌های اعداد با خواص ساده و مهمی مشخص میشوند که در قضایای آتیه آمده است.

۱.۳.۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد α سوپرموم مجموعه‌ی غیر خالی A از اعداد باشد آنست که، در عین حال،

I. بازاء هر x از A، $x \leqslant \alpha$؛

II. بازاء هر عدد کوچکتر از α مانند u، A عضوی بزرگتر از u داشته باشد.

برهان. لزوم. فرض کنیم $\sup A$ موجود باشد، و $\alpha = \sup A$ (۱). قسمت I، بنا بر تعریف $\sup A$ برقرار است. اثبات II به برهان خلف است. اگر $u < \alpha$ (۲) ولی A عضوی بزرگتر از u نداشته باشد آنگاه، بازاء هر x از A، $x \leqslant u$. پس، u یک بند بالای A است، و این با (۱) و (۲) متناقض است.

کفایت. فرض کنیم عدد α در I و II صدق کند. بنا بر I، α یک بند بالای A است. بعلاوه، اگر y بند بالای دلخواهی از A باشد $\alpha \leqslant y$. زیرا، اگر چنین نباشد خواهیم داشت $y < \alpha$. پس، بنا بر II، عضوی مانند x از A هست که $y < x$، و این با فرض اینکه y بند بالای A است متناقض است. ▲

قضیه‌ی ذیل نظیر ۱.۳.۱ است در باب اینفیموم:

۱.۳.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد α اینفیموم مجموعه‌ی غیر خالی A از اعداد باشد آنست که، در عین حال،

I. بازاء هر x از A، $\alpha \leqslant x$؛

II. بازاء هر عدد بزرگتر از α مانند v، A عضوی کوچکتر از v داشته باشد.

برهان. بر متعلم است که این قضیه را با استدلالی مانند آنکه در اثبات ۱.۳.۱ گذشت ثابت کند. برهان آتیه فایده‌ی قضیه‌ی ۱.۲.۵ را نشان میدهد.

برای اثبات لزوم، فرض کنیم $\inf A$ موجود باشد، و $\alpha = \inf A$ (۱). قسمت I، بنا بر تعریف $\inf A$، برقرار است. حال فرض کنیم $\alpha < v$، و بالنتیجه، $-v < -\alpha$ (۲). اگر $\underline{A}$ مجموعه‌ی متقابلهای اعضای A باشد، بنا بر ۱.۲.۵، $\sup \underline{A} = -\alpha$. پس، بنا بر (۲) و ۱.۳.۱، عددی مانند x هست که $x \in \underline{A}$ و $-v < x$، و از آنجا، $-x \in A$ و

$v < x$ —. اثبات کفایت به این روش بر متعلم است. ▲

۱.۳.۳. اِپْسیلون (ε). در آنالیز رسم است که، در بعضی مباحث، حرف یونانی «ε» را به عنوان اسم عدد حقیقی مثبت نامشخصی بکار میبرند. در این صورت، اگر a عدد مفروضی باشد، $a < a + \varepsilon$؛ و بعلاوه، هر عدد بزرگتر از a، بازاء مقداری از ε، مساوی $a + \varepsilon$ است، و قس‌علیهذا در مورد اعداد کوچکتر از a. بدین گونه، خواص مشخصه‌ی $\sup A$ و $\inf A$ را، که در قضایای ۱.۳.۱ و ۱.۳.۲ گذشت، میتوان چنین بیان کرد (هر دو حکم را مستقیماً ثابت کنید):

۱.۳.۴. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد α سوپرموم مجموعه‌ی غیر خالی A از اعداد باشد آنست که در، عین حال،

I. بازاء هر x از A، $x \leqslant \alpha$؛

II. بازاء هر عدد مثبت مانند ε، xی از A باشد که $\alpha - \varepsilon < x$.

۱.۳.۵. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد α اینفیموم مجموعه‌ی غیر خالی A از اعداد باشد آنست که، در عین حال،

I. بازاء هر x از A، $\alpha \leqslant x$.

II. بازاء هر عدد مثبت مانند ε، xی از A باشد که $x < \alpha + \varepsilon$.

۱.۳.۶. فایده. در آ: ۱.۲.۳ به روش اثبات اینکه عددی مانند α سوپرموم یا اینفیموم مجموعه‌ای از اعداد است اشاره کردیم. قضایای ۱.۳.۱، ۱.۳.۲، ۱.۳.۴، و ۱.۳.۵ روش توانای دیگری برای این منظور بدست میدهند. مثلاً، بنا بر ۱.۳.۱، برای اثبات اینکه عدد α سوپرموم مجموعه‌ی A است، کافی است اولاً ثابت کنیم که، بازاء هر x از A، $x \leqslant \alpha$؛ و ثانیاً به فرض اینکه u عددی کوچکتر از α باشد، ثابت کنیم که A عضوی بزرگتر از u دارد. در مورد قسمت دوم، بنا بر ۱.۳.۴، کافی است فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد، و ثابت کنیم که A عضوی بزرگتر از $\alpha - \varepsilon$ دارد.

۱.۴. تمرین

۱. در مورد هر یک از مجموعه‌های ذیل مستدلاً تعیین کنید که مجموعه سوپرموم یا اینفیموم دارد یا نه، و هر یک را که موجود است تعیین کنید، و معلوم نمائید که تعلق به مجموعه دارد یا نه:

(آ) $\{x \mid 0 < x\}$. (ب) $\{x \mid 0 \leqslant x\}$.

(پ) $\{x \mid x < 0\}$. (ت) $\{x \mid x \leqslant 0\}$.

(ث) $\{x \mid x = 1\}$. (ج) $\{x \mid |x| = 1\}$.

(چ) $\{x \mid |x| < 1\}$. (ح) $\{x \mid |x| > 1\}$.

(د) $\{x \mid |x| \geqslant 1\}$.
(خ) $\{x \mid |x| \leqslant 1\}$.
(ر) $\{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$.
(ذ) $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$.
(ژ) $\{x \mid x = 0\}$.
(ز) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

۰۴ در مورد هر یک از مجموعه‌های مسئله‌ی قبل که سوپرموم یا اینفیموم دارد خواص مشخصه را بازاء $\varepsilon = 1$ و $\varepsilon = 1/5$ تحقیق کنید.

۰۴ نقیض هر یک از گزاره‌نماهای «α سوپرموم A است» و «α اینفیموم A است» را بر طبق تعریف (۱.۲.۱) و نیز از روی خواص مشخصه یا حرکت دادن ناقض بیان کنید.
[مثال: بر طبق ۱.۳.۱، «α سوپرموم A نیست» معادل است با گزاره‌نمای «xی از A هست که $x > \alpha$ یا عددی مانند u هست که $u < \alpha$ و u از هر عضو A ناکمتر است».]

۰۴ آیا

(آ) $3 = \sup \{x \mid 0 < x < 4\}$?
(ب) $3 = \sup \{x \mid 0 < x < 2\}$?
(پ) $-1 = \inf \{x \mid -1/2 \leqslant x\}$?
(ت) $1/2 = \inf \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2/3\}$?

۰۵ A مجموعه‌ای دارای سوپرموم و اینفیموم، و c عددی مفروض است، و $B = \{c + x \mid x \in A\}$.
ثابت کنید که $\sup B$ و $\inf B$ موجودند، و

$$\sup B = c + \sup A, \qquad \inf B = c + \inf A.$$

۰۶ بازاء هر دو عدد حقیقی x و y،

(I) $|x| = \sup \{x, -x\}$.

(II)[1] $x^+ = \sup \{0, x\}$.

(III) $x^- = \sup \{0, -x\}$.

(IV) $$\begin{aligned}\sup \{x, y\} &= x + \sup \{0, y - x\}\\ &= x + (y - x)^+\\ &= x + (x - y)^-.\end{aligned}$$

(V) $$\begin{aligned}\inf \{x, y\} &= x + \inf \{0, y - x\}\\ &= x - (x - y)^+\\ &= x - (y - x)^-.\end{aligned}$$

(VI) $\sup \{x, y\} = \frac{1}{2}[x + y + |y - x|]$.

(VII) $\inf \{x, y\} = \frac{1}{2}\{x + y - |y - x|\}$.

۲§ اصل موضوع تمامیت

۲.۱ نقص میدان اعداد منطق. چنانکه سابقاً دیدیم، بین هر دو عدد منطق متمایز عدد

---

(۱) برای تعریف x^+ و x^- به ۱:۱۰:۵ رجوع شود.

منطقی وجود دارد. با وجود این «فشردگی»، مجموعه‌ی اعداد منطق به حد کافی فشرده نیست، و بسیاری از مسائل ریاضی را بی‌جواب میگذارد[1]. مثلاً،

۲.۱.۰۱. قضیه. هیچ عدد منطقی نیست که مربع آن مساوی 2 باشد. به عبارت دیگر، معادله‌ی $x^2 = 2$ جواب منطق ندارد.

این حکم نتیجه‌ی ساده‌ی قضیه‌ی گاوس است (ب: ۹.۴.۰۴ : ۵ را ملاحظه کنید).

۲.۱.۰۲. امثله و فواید

(آ). قضیه‌ی فوق برهان مقدماتی ساده‌ای دارد که، به مناسبت سابقه‌ی تاریخی آن، به ذکرش مبادرت میشود. فرض کنیم عدد منطقی باشد که در معادله‌ی $x^2 = 2$ صدق کند. چون اگر a در این معادله صدق کند $-a$ نیز در آن صدق میکند، از فرض خلف نتیجه میشود که معادله‌ی مورد بحث جوابی منطق و مثبت دارد. این جواب را به صورت کسری تحویلناپذیر مانند m/n که $m, n \in \mathbf{N}$ مینویسیم. بنا بر فرض خلف، $2 = (m/n)^2$، و از آنجا $m^2 = 2n^2$ (۱). پس $2 \mid m^2$، و بالنتیجه (بنا بر II : ۹.۳.۰۴ : ۵)، $2 \mid m$. فرض کنیم $m = 2m_1$. از (۱) نتیجه میشود، $n^2 = 2m_1^2$، و از آنجا، به قیاس آنچه گذشت، $2 \mid n$. خلاصه، $2 \mid m$ و $2 \mid n$، و این با فرض تحویلناپذیر بودن m/n متناقض است. ▲

(ب). برهان مقدماتی دیگر قضیه‌ی ۲.۱.۰۱ از این قرار است:

مانند سابق، فرض کنیم m/n با شرایط $(m, n) = 1$ و $m, n \in \mathbf{N}$ جواب معادله‌ی $x^2 = 2$ باشد. در این صورت $m^2 = 2n^2$ (۱)، و از آنجا، $n^2 < m^2 < 4n^2$، و بالنتیجه، $n < m < 2n$ (۲). بعلاوه، بنا بر (۱)،

$$\frac{m}{n} = \frac{2n}{m} = \frac{2n-m}{m-n}.$$

پس، به موجب ۹.۲.۱۱ : ۵، $n \leqslant m - n$، و از آنجا $2n \leqslant m$، و این با (۲) متناقض است. ▲

(پ). بازاءِ هر عدد منطق مثبت که مربعش از 2 کوچکتر باشد عدد منطقی بزرگتر از آن هست که مربعش از 2 کوچکتر است.

زیرا فرض کنیم $r \in \mathbf{Q}^+$ و $r^2 < 2$. عدد $k = (2 - r^2)/(2r + 1)$ منطق است، و $0 < k$. اگر h عدد منطق دلخواهی باشد بطوری که $0 < h < 1$ و $h < k$ (چرا چنین عددی وجود دارد؟)، و $r_1 = r + h$، آنگاه، r_1 منطق است، و

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + (2r + h)h < r^2 + (2r + 1)h < r^2 + (2r + 1)k \\ &= r^2 + (2 - r^2) = 2. \blacktriangle \end{aligned}$$

مثلاً، اگر $r = 1{,}4$ آنگاه $r^2 = 1{,}96 < 2$ و $k = 1/95$. بازاءِ $h = 1/100$ خواهیم داشت، $r_1 = 1{,}41$ و $r_1^2 = 1{,}988\,1 < 2$.

(ت). بازاءِ هر عدد منطق مثبت که مربعش بیشتر از 2 باشد عدد منطق مثبتی کوچکتر از آن هست که مربعش از 2 بیشتر است.

---

(۱) ملاحظه کنید که هنوز نمیدانیم که عددی غیر منطق وجود دارد یا نه.

زیرا، فرض کنیم $r \in \mathbf{Q}^+$ و $2 > r^2$. اگر $h = (r^2 - 2)/2r$ و $s = r - h$، به آسانی دیده میشود که $r > s > 0$ و $2 > s^2$. ▲ (مثال عددی بیاورید.)

ممتنع‌بودن معادله‌ی $x^2 = 2$ در میدان اعداد منطق بستگی تام با نقص یا ناتمامی خاصی در میدان اعداد منطق دارد، و آن اینکه

۲.۱.۳. قضیه. مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد منطق هست که از بالا محدود است ولی در میدان اعداد منطق سوپرموم ندارد[۱].

برهان. ثابت میکنیم که مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbf{Q}^+ \;\&\; x^2 < 2\}$ واجد خواص مذکور در قضیه است. معلوم است که A غیر خالی و از بالا محدود است (چرا؟). اینک به برهان خلف استدلال میکنیم. فرض کنیم r عددی منطق باشد، و $r = \sup A$ (۱). چون $1 \in A$، $1 \leqslant r$، و لهذا $0 < r$. بعلاوه، بنا بر اصل تثلیث و ۲.۱.۰۱، یا $r^2 < 2$ یا $r^2 > 2$. در حالت اول، بنا بر مثال پ: ۲.۱.۰۲، عددی منطق مانند r_1 هست که $0 < r < r_1$ و $r_1^2 < 2$. پس، r_1 عضو A و از r بزرگتر است، و این با (۱) متناقض است. در حالت دوم $(r^2 > 2)$، بنا بر مثال ت: ۲.۱.۰۲، عددی منطق مانند s هست که $r > s > 0$ و $2 < s^2$. پس، بنا بر (۱) و ۱.۳.۰۱، عضوی از A، مثلاً r_1، هست که $s < r_1$، و از آنجا $r_1^2 > s^2 > 2$، و این با عضویت r_1 در A متناقض است. ▲

اینک که نقص میدان اعداد منطق آشکار گردید به بیان اصل موضوع تمامیت میپردازیم[۲]:

۲.۲. اصل موضوع تمامیت. هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد حقیقی که بند بالا داشته باشد سوپرموم دارد.

۲.۲.۱. اهمیت اصل موضوع تمامیت. اصل موضوع تمامیت مشخص‌کننده‌ی دستگاه اعداد حقیقی در میان میدانهای مرتب است[۳]، و از ارکان اساسی آنالیز میباشد، و بی مأنوس شدن با آن و تسلط یافتن بر آن، فهمیدن این علم ممکن نیست.

چنانکه متدرجاً خواهید دید، بسیاری از خواص عادی اعداد حقیقی هست که اثبات آنها به استناد اصل موضوع نیرومند تمامیت است. اصل موضوع تمامیت مانع از اینست که، در دستگاه اعداد حقیقی، وضعی مانند آنکه در قضیه‌ی ۲.۱.۰۳ در اعداد منطق با آن مواجه شدیم

---

(۱) یعنی، عدد منطقی وجود ندارد که سوپرموم آن باشد.

(۲) مراجعه به ۱.۷ و ۳.۱ در فصل ۴ مفید است.

(۳) این مطلب مهم در کتاب حاضر ثابت نخواهد شد.

پیش آید، و چنانکه خواهیم دید، به استناد این اصل موضوع میتوان ثابت کرد که، نه فقط معادلهی $x^2 = 2$، بلکه معادلهی $x^n = a$ $(a \geqslant 0)$ همواره در $\mathbf{R}$ جواب دارد.
مقدمةً، برای ارائهی طریق استفاده از اصل موضوع تمامیت، مثالهائی میآوریم.

۳.۲.۲. امثله و فواید

(آ). بر خلاف حکم ۲.۱.۱، در میدان اعداد حقیقی، یک و تنها یک عدد حقیقی مثبت وجود دارد که مربعش مساوی 2 است. (این عدد را «$\sqrt{2}$» مینامیم.)
اینکه بیش از یک چنین عدد وجود ندارد واضح است، زیرا، اگر x و y مثبت باشند و $x^2 = 2$ و $y^2 = 2$ آنگاه $x^2 = y^2$، و از آنجا بنا بر ۵.۲.۶ : ۵، $x = y$. اینک به اثبات وجود چنین عددی میپردازیم[۱]. فرض کنیم

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}^+ \,\&\, x^2 < 2\}.$$

مجموعهی A غیر خالی و از بالا محدود است (چرا؟). پس، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\alpha = \sup A$ (۱) موجود میباشد. چون $1 \in A$، $\alpha \geqslant 1 > 0$. اینک ثابت میکنیم که $\alpha^2 = 2$ (*). اگر چنین نباشد آنگاه یا $\alpha^2 < 2$ یا $\alpha^2 > 2$. در حالت اول، اگر h را چنان انتخاب کنیم که $0 < h < 1$ و $h < (2 - \alpha^2)/(2\alpha + 1)$، به آسانی دیده میشود[۲] که $(\alpha + h)^2 < 2$. پس، $\alpha + h \in A$، و این با (۱) متناقض است. در حالت ثانی $(\alpha^2 > 2)$، فرض کنیم $h = (\alpha^2 - 2)/2\alpha$ و $s = \alpha - h$. به آسانی دیده میشود که $0 < s < \alpha$ و $s^2 > 2$. بنا بر دومی، عدد s یک بند بالای A است (چرا؟)، و این، با توجه به $s < \alpha$، با (۱) متناقض است. پس، (*) به برهان خلف برقرار میباشد. ▲

(ب). یگانه جواب مثبت معادلهی $x^2 = 2$، که در مثال (آ) وجود آن را ثابت کردیم، و آن را $\sqrt{2}$ نامیدیم، بنا بر ۲.۱.۱ منطق نیست. این اولین عدد حقیقی غیر منطق است که تاکنون یافتهایم. در § ۴ به این موضوع باز میگردیم.

(پ). اگر A مجموعهای غیر خالی از اعداد حقیقی و از بالا محدود، و B مجموعکی غیر خالی از A باشد آنگاه $\sup B$ موجود است، و $\sup B \leqslant \sup A$.

فرض کنیم A غیر خالی و از بالا محدود باشد. بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\sup A$ موجود است. بعلاوه، چون $\sup A$ یک بند بالای A است، بالبداهه بند بالای B نیز هست. پس، B، غیر خالی و از بالا محدود است. بالنتیجه، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\sup B$ موجود است. بالاخره، چون $\sup A$ یک بند بالای B است، $\sup B \leqslant \sup A$. ▲

(ت). A مجموعهای غیر خالی از اعداد حقیقی و از بالا محدود است، و c عدد حقیقی مثبت مفروضی است. بنا بر آنکه $B = \{cx \mid x \in A\}$، ثابت کنید که B از بالا محدود است، و $\sup B = c \sup A$.
فرض کنیم $A \neq \varnothing$ و A از بالا محدود باشد. واضح است که $B \neq \varnothing$. اگر λ یک بند بالای A باشد $c\lambda$ یک بند بالای B است. زیرا، اگر z عضو دلخواهی از B باشد xی از A هست

---

(۱) استدلال آتیه را با برهان ۲.۱.۳ مقایسه کنید.
(۲) به برهان پ : ۲.۱.۲ رجوع کنید.

که $z = cx$، و چون $x \leqslant \lambda$، $z \leqslant c\lambda$. پس، قسمت اول حکم برقرار است.
چون A و B مجموعه‌هائی غیر خالی و از بالا محدودند، $\sup A$ و $\sup B$ موجودند. برای اثبات اینکه $\sup B = c \sup A$، به وسیله‌ی [1] ۱.۳.۱ ثابت میکنیم که $c \sup A$ سوپرموم B است. اولاً، چون $\sup A$ یک بند بالای A است، بنا بر آنچه ثابت شد، $c \sup A$ یک بند بالای B است. ثانیاً، فرض کنیم $u < c \sup A$، و بالنتیجه، $u/c < \sup A$. پس، xای از A هست که $u/c < x$، و از آنجا، $u < cx$. اما، $cx \in B$. پس، B عضوی بزرگتر از u دارد. ▲

(ث). A و B دو مجموعه‌ی غیر خالی و محدود از اعداد حقیقی هستند، و C مجموعه‌ی جمیع اعدادی است که هر یک حاصلجمع عضوی از A است با عضوی از B. به عبارت دیگر،

$$C = \{x + y \mid x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

ثابت کنید که $\sup C$ موجود است، و

$$\sup C = \sup A + \sup B. \qquad (*)$$

چون A و B غیر خالی و محدودند، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\sup A$ و $\sup B$ موجودند. فرض کنیم $\alpha = \sup A$ (۱) و $\beta = \sup B$ (۲). اینک، برای اثبات وجود $\sup C$، اولاً ملاحظه میکنیم که، چون $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$، C خالی نیست. ثانیاً، اگر z عضو دلخواهی از C باشد، بنا بر تعریف C، z حاصلجمع عضوی از A است با عضوی از B، یعنی، xای از A و yای از B هست که $z = x + y$. بنا بر (۱) و (۲)، $x \leqslant \alpha$ و $y \leqslant \beta$. بالنتیجه، $z \leqslant \alpha + \beta$. پس، $\alpha + \beta$ یک بند بالای C است. خلاصه، C مجموعه‌ای غیر خالی و دارای بند بالاست. پس، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\sup C$ موجود است. اینک به اثبات (*)، یعنی اثبات رابطه‌ی $\sup C = \alpha + \beta$، میپردازیم. چون ثابت شد که $\alpha + \beta$ یک بند بالای C است، بنابر ۱.۳.۴، کافی است ثابت کنیم که، بازاء عدد مثبت دلخواه ε، عضوی از C هست که از $\alpha + \beta - \varepsilon$ بزرگتر است. پس، فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\varepsilon/2$ عددی مثبت است، بنا بر (۱) و (۲) و ۱.۳.۴، xای از A و yای از B هست که $\alpha - (\varepsilon/2) < x$ و $\beta - (\varepsilon/2) < y$، و بالنتیجه، $\alpha + \beta - \varepsilon < x + y$. پس، چون $x + y \in C$، $\alpha + \beta$ سوپرموم C است. ▲

اثبات (*) به طریقی دیگر نیز میسر است. فرض کنیم $\gamma = \sup C$ (۳)، چون $\alpha + \beta$ یک بند بالای C است، $\gamma \leqslant \alpha + \beta$ (۴). از طرف دیگر، معلوم شد که، بازاء عدد مثبت دلخواه ε، عضوی مانند $x + y$ از C هست که $\alpha + \beta - \varepsilon < x + y$ (۵). بعلاوه، بنا بر (۳)، $x + y \leqslant \gamma$. پس، بنا بر (۵)، $\alpha + \beta - \varepsilon < \gamma$، و از آنجا $\alpha + \beta \leqslant \gamma + \varepsilon$. بالنتیجه، به موجب ۲.۵.۲: ۵، $\alpha + \beta \leqslant \gamma$ (۶). از (۴) و (۶) نتیجه میشود، $\gamma = \alpha + \beta$. ▲

۲.۲.۳. قضیه. هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد حقیقی که بند پایین داشته باشد اینفیموم دارد.

برهان. فرض کنیم $A \neq \varnothing$ و A از پایین محدود باشد، و $\underline{A}$ مجموعه‌ی متقابلهای اعضای A باشد. بنا بر مفروضات، $\underline{A}$ غیر خالی و از بالا محدود است؛ و لهذا، $\sup \underline{A}$ موجود میباشد. پس، بنا بر ۱.۲.۰۵، $\inf A$ موجود است. ▲

---

(۱) ۱.۳.۶ نیز ملاحظه شود.

۲.۲.۴. تمرین
۰۱ معادله‌ی $x^2 = 3$ در میدان اعداد منطق جواب ندارد.
۰۲ یک و تنها یک عدد حقیقی مثبت هست که در معادله‌ی $x^2 = 3$ صدق میکند.
۰۳ اگر A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد حقیقی و از پایین محدود باشد، و $B \neq \varnothing$ و $B \subseteq A$، آنگاه $\inf B$ موجود است، و $\inf A \leqslant \inf B$.
۰۴ A و B دو مجموعه‌ی غیر خالی از اعدادند، و هر عضو A از هر عضو B بزرگتر است. ثابت کنید که $\inf A$ و $\sup B$ موجودند، و $\inf A \geqslant \sup B$.
۰۵ A مجموعه‌ای غیر خالی و محدود از اعداد است، و A_1 و A_2 مجموعکهائی از آن هستند. میدانیم که هر عضو A به یکی و تنها به یکی از A_1 و A_2 تعلق دارد، و بعلاوه، بازاء هر عضو A_1، A_2 عضوی بزرگتر از آن دارد. ثابت کنید که $\sup A_2$ موجود و مساوی $\sup A$ است.
۰۶ A مجموعه‌ای غیر خالی و محدود از اعداد حقیقی است، و c عدد حقیقی مفروضی. بنا بر آنکه $B = \{cx \mid x \in A\}$، ثابت کنید که
(آ) B غیر خالی و محدود است.
(ب) اگر $c \geqslant 0$ آنگاه $\sup B = c \sup A$ و $\inf B = c \inf A$.
(پ) اگر $c < 0$ آنگاه $\sup B = c \inf A$ و $\inf B = c \sup A$.
۰۷ با مفروضات ۲.۲.۲ : ۵، ثابت کنید که

$$\inf C = \inf A + \inf B.$$

۰۸ مجموعه‌های A و B از اعداد منطق چنین تعریف شده‌اند:

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{Q}\ \&\ (x < 0 \vee x^2 < 2)\},$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbf{Q}\ \&\ (0 < x\ \&\ x^2 > 2)\}.$$

ثابت کنید که
(آ). $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$.
(ب). $A \cap B = \varnothing$.
(پ). $A \cup B = \mathbf{Q}$.
(ت). بازاء هر x از A و هر y از B، $x < y$.
(ث). مجموعه‌ی A فاقد عضو اکثر و مجموعه‌ی B فاقد عضو اقل است.
نتایج حاصل را به وسیله‌ی نمایش اعداد منطق بر یک محور به زبان هندسی بیان کنید.

۳ § خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

۳.۱. مقدمه. با عطف توجه خواننده به ۲.۲.۱، در این قسمت یکی از اهمّ خواص اعداد حقیقی و نتایج آن را مورد بحث قرار میدهیم.
واضح مینماید که اگر a عددی مثبت و b عددی دلخواه باشد میتوان a را به «دفعات کافی» با خودش جمع کرد بطوری که حاصلجمع از b تجاوز کند. به عبارت دقیق،

۳.۲. قضیه (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی). بازاء هر دو عدد حقیقی a و b که

$a > 0$، عددی طبیعی مانند n هست که $b < an$.
برهان. اگر $b \leqslant 0$ نامساوی مذکور بازاء $n = 1$ برقرار است. پس، فرض کنیم $b > 0$. اثبات به برهان خلف است. اگر عددی طبیعی مانند n که در $b < an$ صدق کند موجود نباشد آنگاه، بازاء هر عدد طبیعی n، $an \leqslant b$. پس، اگر $A = \{an \mid n \in \mathbf{N}\}$ آنگاه، اولاً، $A \neq \varnothing$ (زیرا، مثلاً، $a \in A$)، و ثانیاً، b یک بند بالای A است. پس، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\alpha = \sup A$ (۱) موجود است. چون $\alpha - a < \alpha$، بنا بر ۱.۳.۰۱، عضوی از A، یعنی عددی مانند ka که $k \in \mathbf{N}$، هست که $\alpha - a < ka$، و از آنجا، $\alpha < (k+1)a$ (۲). اما، بنا بر تعریف A، $(k+1)a \in A$. پس، بنا بر (۱)، $(k+1)a \leqslant \alpha$، و این با (۲) متناقض است. ▲

۳.۲.۱. قضیه. بازاء هر عدد حقیقی a عددی طبیعی هست که از آن بزرگتر است. (چرا؟)

۳.۲.۲. قضیه. بازاء هر عدد مثبت مانند ε عددی طبیعی مانند n هست که $1/n < \varepsilon$. (چرا؟)

۳.۲.۳. قضیه. هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح قرار دارد.
برهان. فرض کنیم a عدد حقیقی دلخواهی باشد. بنا بر ۳.۲.۰۱، عددی طبیعی مانند m و عددی طبیعی مانند n هست که $a < m$ و $-a < n$. پس، $-n < a < m$. ▲

از خواص معروف اعداد حقیقی اینست که هر عدد «بین»[1] دو عدد صحیح متوالی است. بیان دقیق و اثبات حکم اینست:

۳.۳. قضیه. بازاء هر عدد حقیقی a یک و تنها یک عدد صحیح مانند n هست که

$$n \leqslant a < n+1.$$

برهان. بنا بر ۳.۲.۰۳، دو عدد صحیح مانند k و l هست که $k < a < l$. مجموعه‌ی $A = \{m \mid m \in \mathbf{N} \; \& \; k+m > a\}$ مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی است (چرا غیر خالی است؟). اگر p ابتدای آن باشد، $k + p > a$ ولی $a \geqslant k + (p-1)$. اینک اگر $p = 1$ آنگاه، بازاء $n = k$، و اگر $p > 1$ آنگاه، بازاء $n = k + p - 1$، خواهیم داشت، $n \leqslant a < n+1$. پس، اثبات وجود تمام است. برای اثبات یکتائی، گوئیم اگر $n \leqslant a < n+1$ و $n_1 \leqslant a < n_1 + 1$ و $n \neq n_1$ آنگاه $n < n_1$ یا $n_1 < n$. در حالت اول، $n < n_1 \leqslant a < n+1$، و از آنجا $n < n_1 < n+1$، و این ممتنع است؛ و هکذا در حالت ثانی. ▲

با توجه به قضیه‌ی فوق، تعریف ذیل را میآوریم:

---

[1] مقصود بینیت به معنی وسیع است (۵ : ۲.۴.۱۰).

۳.۴. تعریف. تابع جزء صحیح، که مقدارش در عدد حقیقی x به $[x]$ (بخوانید «جزء صحیح x») موسوم است، تابعی است بر $\mathbf{R}$ بتوی $\mathbf{I}$ با ضابطه‌ی ذیل:

$[x]$ یعنی یگانه عدد صحیح n که $n \leqslant x < n+1$.

جزء کسری x یعنی $x - [x]$.

امثله

$$[2] = 2, \qquad [-3] = -3, \qquad [3{,}5] = 3, \qquad [-3{,}5] = -4,$$
$$2 - [2] = 0, \qquad (-3) - [-3] = 0, \qquad (-3{,}5) - [-3{,}5] = 0{,}5.$$

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم تعریف و اثبات آن بر متعلم است:

۳.۴.۱. قضیه. همواره

$$\text{I.} \qquad [x] \leqslant x < [x] + 1.$$
$$\text{II.} \qquad x - 1 < [x] \leqslant x.$$
$$\text{III.} \qquad 0 \leqslant x - [x] < 1.$$

۳.۴.۲. قضیه. فرض کنیم m عددی صحیح باشد.

I. اگر $m \leqslant x$ آنگاه $m \leqslant [x]$.

II. اگر $x < m$ آنگاه $[x] < m$.

(چرا؟)

۳.۴.۳. تمرین

۱. اگر $n \in \mathbf{I}$ آنگاه $[a+n] = [a] + n$.

۲. عدد $[a] + [-a]$، برحسب آنکه a عددی صحیح باشد یا نه، مساوی 0 یا $1 -$ است. بالنتیجه، اگر $a \notin \mathbf{I}$ آنگاه $[-a] = -[a] - 1$.

۳. همواره $[a] + [b] \leqslant [a+b]$.

†۳.۵. قضیه. اگر $a > 0$ و n عددی طبیعی باشد آنگاه یک و تنها یک عدد صحیح مانند g هست که، در عین حال،

$$g \geqslant 0, \qquad g^n \leqslant a < (g+1)^n.$$

برهان. اولاً، اثبات وجود. فرض کنیم $A = \{x \mid x \in \mathbf{I}_0 \;\&\; x^n \leqslant a\}$. بالبداهه $0 \in A$ و لهذا $A \neq \varnothing$. بعلاوه، اگر k عددی طبیعی و بزرگتر از a باشد k یک بند بالای A است، زیرا، اگر چنین نباشد، xی از A خواهد بود که $k < x$، و از آنجا، $k^n < x^n$. اما، بازاء هر عدد طبیعی n، $k^n \geqslant k$ (به استقراء ثابت کنید). پس، $k < x^n$، و چون $k > a$، $a < x^n$، و این با عضویت x در A متناقض است. خلاصه، A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد صحیح و از بالا به عدد صحیحی محدود است، و بالنتیجه (بنا بر I : ۵.۳.۱ : ۵) انتها دارد. اگر g انتهای A باشد، بالبداهه $g \geqslant 0$، و $g^n \leqslant a$، ولی $\sim((g+1)^n \leqslant a)$، و از آنجا،

$a < (g+1)^n$. پس، اثبات وجود تمام است.
ثانیاً، اثبات یکتائی. فرض کنیم اعداد صحیح g و h در شرایط

$$g \geqslant 0, \qquad g^n \leqslant a < (g+1)^n,$$
$$h \geqslant 0, \qquad h^n \leqslant a < (h+1)^n.$$

صدق کنند. اگر $g \neq h$ آنگاه $h < g$ یا $g < h$. بی‌آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود میتوان فرض کرد $h < g$. پس، $0 \leqslant h^n < g^n$. بالنتیجه، بنا بر مفروضات، $0 \leqslant h^n < g^n \leqslant a < (h+1)^n$، و از آنجا، $0 \leqslant h < g < h+1$ (چرا؟).
پس، عدد صحیح g بین دو عدد صحیح متوالی h و $h+1$ قرار داد، و این ممتنع است. ▲

این خاصیت معروف، که هر عدد مثبت «بین» دو قوه‌ی متوالی 10 است حالت خاصی از قضیه‌ی ذیل است:

† ۳.۶. قضیه. اگر a و g دو عدد حقیقی باشند، و $0 < a$ و $1 < g$ آنگاه یک و تنها یک عدد صحیح مانند n هست که $g^{n-1} \leqslant a < g^n$؛ و بعلاوه اگر $1 \leqslant a$ آنگاه $n > 0$، و اگر $0 < a < 1$ آنگاه $n \leqslant 0$.

برهان. اثبات یکتائی بر متعلم است. برای اثبات وجود دو حالت تشخیص میدهیم.
حالت اول: $1 \leqslant a$. فرض کنیم $A = \{k \mid k \in \mathbf{I}_0 \;\&\; a < g^k\}$. مجموعه‌ی A خالی نیست. زیرا، بنا بر خاصیت ارشمیدسی، عددی طبیعی مانند m هست که $a < m(g-1)$. اما، بنا بر ۷.۸.۷ : ۵، $m(g-1) \leqslant g^m - 1$. پس، $a < g^m - 1$، و به طریق اولی $a < g^m$؛ بالنتیجه، $m \in A$. اگر n ابتدای A باشد آنگاه $a < g^n$. بعلاوه، $n \neq 0$، زیرا $a \geqslant 1 = g^0$. بالنتیجه، $n > 0$. بالاخره، چون n ابتدای A است، $\sim(a < g^{n-1})$، و از آنجا، $g^{n-1} \leqslant a$. حالت دوم: $0 < a < 1$. بالنتیجه، $a^{-1} > 1$. بنا بر آنچه ثابت شد، عددی طبیعی مانند m هست که $a^{-1} < g^m$، ولهذا $a^{-1} \leqslant g^m$. پس، مجموعه‌ی اعدادی طبیعی مانند k که $a^{-1} \leqslant g^k$ خالی نیست. اگر ν ابتدای این مجموعه باشد $a^{-1} \leqslant g^{\nu}$ ولی $g^{\nu-1} < a^{-1}$، و بالنتیجه، $g^{-\nu} \leqslant a < g^{-\nu+1}$. پس، اگر n را مساوی $-\nu+1$ بگیریم خواهیم داشت، $n \leqslant 0$ و $g^{n-1} \leqslant a < g^n$. ▲

† ۳.۶.۱. تمرین

۱. اگر $a > 1$، $n \in \mathbf{N}$، و $n > 1$ آنگاه عددی طبیعی مانند k هست که $n^{-k} < a$.

† ۳.۷. قضیه. فرض کنیم a عددی حقیقی باشد و n عددی طبیعی و بزرگتر از 1. بازاء هر عدد صحیح k عدد صحیحی مانند m هست که

$$mn^k \leqslant a < (m+1)n^k.$$

برهان. چون $0 < 1 < n$، بازاء هر عدد صحیح k، $n^k > 0$. پس، بنا بر خاصیت ارشمیدسی، دو عدد طبیعی مانند l_1 و l_2 هست که $a < l_1 n^k$ (۱) و $-a < l_2 n^k$، و از

آنجا $a < (-l_2)n^k$ (۲). فرض کنیم

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{I} \ \& \ xn^k \leqslant a\}.$$

بنا بر (۲)، $l_2 \in A$ ---. بعلاوه، اعضای A از l_1 نابیشترند، زیرا، اگر، بازاء عضوی مانند x از A، $x > l_1$ آنگاه، با توجه به (۱)، $xn^k > l_1n^k > a$، و این با عضویت x در A متناقض است. پس، بنا بر ۵.۳۰۱ : ۵، A عضو ماکزیموم دارد. اگر $m = \operatorname{Max} A$ خواهیم داشت $m \in A$ ولی $m + 1 \notin A$؛ و از آنجا $mn^k \leqslant a$ ولی $a < (m+1)n^k$. ▲

۴ § ریشه‌ها و قوای منطق

۴.۱. مقدمه. در ۲.۱.۱ و نیز در قسمتهای (آ) و (ب) از ۲.۱.۲ دیدیم که عددی منطق که مربعش مساوی 2 باشد وجود ندارد؛ یعنی، معادله‌ی $x^2 = 2$ در میدان اعداد منطق ممتنع است. برخلاف، در آ : ۲.۲.۲، به استناد اصل موضوع تمامیت ثابت شد که معادله‌ی مذکور در میدان اعداد حقیقی جواب دارد. اینک، چنانکه در ۲.۲.۱ وعده دادیم، به حل کلی مسئله میپردازیم، و ثابت میکنیم که، بازاء هر عدد طبیعی n و هر عدد نامنفی a، معادله‌ی $x^n = a$ یک و تنها یک جواب نامنفی (موسوم به «ریشه nم a») دارد.

مقدمةً لمّ ذیل را ثابت میکنیم:

لم. بازاء هر عدد طبیعی ناکمتر از 2 مانند n و هر عدد حقیقی بزرگتر از 1 مانند u، عددی حقیقی بین 1 و u هست که قوی nم آن از u کمتر است.

برهان. اثبات به استقراء ابتدا از 2 است. بازاء $n = 2$، حکم بنا بر ۲۷ : ۲.۴.۱۴ : ۵ برقرار است. پس، فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی ناکمتر از 2 باشد، و حکم بازاء n و هر عدد حقیقی بزرگتر از 1 برقرار باشد، و u عدد دلخواهی بزرگتر از 1 باشد. گوئیم حکم بازاء $n+1$ و u برقرار است. زیرا، بنا بر فرض استقراء، عددی مانند v هست که

$$(۱) \quad 1 < v < u, \qquad\qquad (۲) \quad v^n < u.$$

چون $v > 1$، بنا بر فرض استقراء، عددی مانند w هست که

$$(۳) \quad 1 < w < v, \qquad\qquad (۴) \quad w^n < v.$$

بنا بر (۳) و (۱)، $1 < w < u$ (۵). بنا بر (۴)، $w^{n+1} < vw$، و بنا بر (۳)، $vw < v^2$، و لهذا $w^{n+1} < v^2$. اما چون $n \geqslant 2$، با توجه به (۲)، $v^2 \leqslant v^n < u$. بالنتیجه، $w^{n+1} < u$. بنا بر این رابطه و (۵) حکم ثابت است. ▲

۴.۲. قضیه (وجود و یکتائی ریشه‌های اعداد نامنفی[1]). بازاء هر عدد نامنفی a و هر عدد طبیعی n همواره یک و تنها یک عدد نامنفی مانند b وجود دارد که $b^n = a$. بعلاوه، اگر $a > 0$ آنگاه $b > 0$.

---

(۱) وجود ریشه‌ی nم اعداد نامنفی را میتوان به طریق ساده‌ای مبتنی بر قضیه‌ی معروف به قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کناستر ثابت کرد (۵ § فصل ۲ض ملاحظه شود).

برهان. اینکه منتها یک چنین عدد موجود تواند بود واضح است، زیرا، اگر $a = b^n$ و $a = b_1^n$، و b و b_1 نامنفی باشند، بنا بر ۵.۲.۶ : ۵، $b = b_1$. برای اثبات وجود ملاحظه میکنیم که اگر $a = 0$ آنگاه $a = 0 = 0^n$، و اگر $a = 1$ آنگاه $a = 1 = 1^n$، و بالاخره، اگر $n = 1$ آنگاه $a = a^n$. باقی میماند اثبات حکم در حالتی که $0 < a \neq 1$ و $2 \leqslant n$. برای این منظور دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $1 < a$. فرض کنیم $A = \{x \mid 0 < x \ \&\ x^n < a\}$. بالبداهه $1 \in A$ (۱). عدد a یک بند بالای A است. زیرا، بنا بر مفروضات، $a^n > a$ (چرا؟). حال اگر xی از A باشد که $a < x$ خواهیم داشت $a < a^n < x^n$، و این با عضویت x در A متناقض است. خلاصه، A مجموعه‌ای غیر خالی و از بالا محدود است. بالنتیجه، $b = \sup A$ (۲) موجود است. بنا بر (۱)، $0 < 1 \leqslant b$ (۳). حال ثابت میکنیم که $b^n = a$ (*). اثبات به برهان خلف است. اگر (*) برقرار نباشد آنگاه یا $b^n < a$ یا $a < b^n$. اولاً، فرض کنیم $b^n < a$. پس، $1 < a/b^n$. بالنتیجه، بنا بر لم سابق، عددی مانند v هست که $1 < v < a/b^n$ و $v^n < a/b^n$. پس $(vb)^n < a$، و چون vb مثبت است، $vb \in A$. از اینجا، بنا بر (۲)، خواهیم داشت، $vb \leqslant b$، و بالنتیجه $v \leqslant 1$، و این با $1 < v$ متناقض است. ثانیاً، فرض کنیم $a < b^n$. پس $1 < b^n/a$، و لهذا، عددی مانند v هست که $1 < v < b^n/a$ و $v^n < b^n/a$. بالنتیجه $a < (b/v)^n$. پس، b/v یک بند بالای A است (چرا؟)، و بالنتیجه، بنا بر (۲)، $b \leqslant b/v$، و این نیز منجر به تناقض میشود. پس، (*) برقرار است.

ضمناً ملاحظه کنید که در این حالت $1 < b$، زیرا، اگر $b \leqslant 1$ آنگاه $b^n \leqslant 1^n$، و یا $a < 1$، و این خلاف فرض است.

حالت دوم: $0 < a < 1$. در این صورت $1 < 1/a$. پس، بنا بر حالت اول، عددی مثبت مانند b_1 هست که $b_1^n = 1/a$. پس، اگر $b = 1/b_1$ آنگاه $b > 0$ و $b^n = a$. (ضمناً ملاحظه کنید که در این حالت $b < 1$.) ▲

بر اساس قضیه‌ی ۴.۲، تعریف ذیل را میآوریم:

۴.۳. تعریف. بازاء عدد حقیقی نامنفی a و عدد طبیعی دلخواه n، یگانه عدد نامنفی b را که در معادله‌ی $x^n = a$ صدق میکند ریشه‌ی nم a یا «$\sqrt[n]{a}$» خوانیم. بالاخص، $\sqrt[2]{a}$ را $\sqrt{a}$ یا جذر a، و $\sqrt[3]{a}$ را کعب a نامیم.

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم ۴.۲ و برهان آن و ۴.۳ است:

۴.۴. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n و هر عدد نامنفی a،

I. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

II. اگر $0 \leqslant x$ آنگاه $\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$.

III. اگر $1 < a$ آنگاه $1 < \sqrt[n]{a}$، و اگر $0 < a < 1$ آنگاه $0 < \sqrt[n]{a} < 1$.

IV. $\sqrt[n]{a^n} = a$.
V. $\sqrt[1]{a} = a$.
VI. $\sqrt[n]{0} = 0$.
VII. $\sqrt[n]{1} = 1$.

۴.۴.۱. تبصره.

I. بازاء عدد نامنفی a، عبارت نامنفی $\sqrt[n]{a}$ را معمولاً یک رادیکال حسابی مینامند. قواعد محاسبه با رادیکالها که در جبر مقدماتی آموختهاید ناظر به رادیکالهای حسابی میباشند.

II. اگر $a > 0$ و $2 \mid n$ آنگاه معادلهی $x^n = a$، علاوه بر $\sqrt[n]{a}$، یک جواب دیگر نیز دارد، و آن $-\sqrt[n]{a}$ است. تأکید میکنیم که این جواب در قواعد محاسبه با رادیکالها مورد اعتنا نیست.

III. بنا بر ۴.۴ : IV، اگر a نامنفی باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$. بطور کلی، a هر عددی باشد، بازاء هر عدد طبیعی زوج n، a^n نامنفی است، و $\sqrt[n]{a^n}$ وجود دارد، **اما رابطهی** $\sqrt[n]{a^n} = a$ **بطور کلی برقرار نیست** (مثلاً، $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$). با توجه به اینکه اگر $2 \mid n$ آنگاه $|a|^n = a^n$، این حکم کلی برقرار است که اگر n زوج باشد، بازاء هر عدد حقیقی a،

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \qquad (a \in \mathbf{R},\ 2 \mid n).$$

بالاخص، همواره $\sqrt{a^2} = |a|$، و لهذا

$$a \leqslant \sqrt{a^2} \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

IV. اگر a منفی باشد عبارت $\sqrt[n]{a}$ بیمعنی است، ولی در این صورت، اگر n فرد باشد، معادلهی $x^n = a$ دارای جواب $-\sqrt[n]{|a|}$ است. اغلب این جواب را $\sqrt[n]{a}$ مینامند.

احکام سادهی مذکور در قضیهی ۴.۴ اساس اثبات قواعد محاسبه با رادیکالهای حسابی است. به عنوان نمونه، چند مثال مهم در این باب میآوریم.

۴.۴.۲. مثال. اگر

$$(1)\quad m, m' \in \mathbf{I}, \qquad n, n' \in \mathbf{N},$$
$$(2)\quad a > 0, \qquad (3)\quad m/n = m'/n',$$

آنگاه

$$(*)\quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}.$$

برهان. بنا بر (۳)، $mn' = m'n$ (۴). پس، اگر یکی از m و m' صفر باشد دیگری هم صفر است، و در این صورت، بنا بر ۴.۴ : VII، طرفین (*) مساوی 1 میباشند. پس، فرض کنیم $m \neq 0$ و $m' \neq 0$. بنا بر (۲) و خواص قوای صحیح، $a^m > 0$ و $a^{m'} > 0$. پس، $\sqrt[n]{a^m}$ و $\sqrt[n']{a^{m'}}$ وجود دارند، و اگر $x = \sqrt[n]{a^m}$ و $y = \sqrt[n']{a^{m'}}$ آنگاه $x > 0$ و $y > 0$،

و بنا بر II : ۴.۴، $x^n = a^m$ و $y^{n'} = a^{m'}$. پس، بر طبق خواص قوای صحیح،
$$x^{m'n} = (x^n)^{m'} = (a^m)^{m'} = (a^{m'})^m = (y^{n'})^m = y^{mn'}$$
پس، به موجب (۴) و ۵.۲.۶ : ۵، $x = y$. ▲

۴.۴.۳. مثال. اگر $a > 0$ و $n, n' \in \mathrm{N}$ آنگاه
$$\sqrt[nn']{a^{n'}} = \sqrt[n]{a}.$$
(حالت خاص ۴.۴.۲ است).

۴.۴.۴. مثال. اگر $a > 0$ و $b > 0$ آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ $\Leftrightarrow$ $a < b$.
برهان. فرض کنیم $a > 0$ و $b > 0$. اولاً، اگر $a < b$ ولی $\sim(\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b})$ آنگاه $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b} > 0$. پس به موجب ۵.۲.۷ : ۵، $(\sqrt[n]{a})^n \geqslant (\sqrt[n]{b})^n$، و از آنجا، $a \geqslant b$، و این با فرض متناقض است. ثانیاً، اگر $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ آنگاه، بنا بر ۵.۲.۵ : ۵، $(\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n$، و از آنجا، $a < b$. ▲

۴.۴.۵. مثال. اگر $1 < n < n'$ آنگاه
I. اگر $a > 1$ آنگاه $a > \sqrt[n]{a} > \sqrt[n']{a} > 1$؛
II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n']{a} < 1$.
برهان. در قسمت I، با توجه به III : ۴.۴، کافی است نامساویهای اول و دوم را ثابت کنیم. اولاً، چون $a > 1$، $a^n > a$. پس، بنا بر ۴.۴.۴، $\sqrt[n]{a^n} > \sqrt[n]{a}$، و از آنجا، $a > \sqrt[n]{a}$. ثانیاً، چون $n < n'$، $a^n < a^{n'}$. پس، بنا بر ۴.۴.۴، $\sqrt[nn']{a^n} < \sqrt[nn']{a^{n'}}$. پس، بنا بر ۴.۴.۳، $\sqrt[n']{a} < \sqrt[n]{a}$. اثبات قسمت II بر متعلم است. ▲

۴.۵. قوای منطق (یا کسری). در این قسمت میخواهیم بازاء عدد مثبت a و عدد منطق r معنائی برای a^r وضع کنیم. برای احتراز از تکرار تذکر میدهیم که، **از اینجا تا پایان ۴ §، متغیرهای فردی n، n'، n'' و غیره مقید به N، متغیرهای فردی m، m'، m''، و غیره مقید به I، و متغیرهای فردی r، s، r' ، s'، و غیره مقید به Q میباشند.**

عدد منطق r نامهای بیشمار به صورت m/n (یعنی ـ بر طبق قرارداد مذکور ـ به صورت کسری که مخرجش عددی طبیعی و صورتش عددی صحیح است) دارد. حال اگر a عدد حقیقی مثبتی باشد، a^m مثبت است، و لهذا، $\sqrt[n]{a^m}$ عددی است مشخص. این عدد را، بنا بر تعریف، a^r یا $a^{m/n}$ میخوانیم. برای اینکه این تعریف قابل قبول باشد لازمست که مقدار a^r از اسمی که برای r اختیار میشود مستقل باشد. اما این مقصود حاصل است، زیرا، اگر $r = m/n$ و $r = m'/n'$ آنگاه، بنا بر ۴.۴.۲، $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$، و یا $a^{m/n} = a^{m'/n'}$. بنا

بر این ملاحظات، تعریف ذیل را میآوریم:

۴.۵.۱. تعریف. فرض کنیم a عددی حقیقی و مثبت و r عددی منطق باشد. اگر $r = m/n$ $(m \in \mathbf{I}, n \in \mathbf{N})$، بنا بر تعریف،

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

بنا بر آنچه گفته شد،

۴.۵.۲. قضیه. اگر $a > 0$ و $m/n = m'/n'$ آنگاه

$$a^{m/n} = a^{m'/n'}.$$

۴.۵.۳. تبصره در باب تعریف.

I. اگر m/n عددی صحیح مانند k باشد،

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n}\ [۴.۴ : \mathrm{IV}] = a^k.$$

پس، بازاء مقادیر صحیح r، مقدار a^r بر طبق تعریف فوق همانست که قبلاً در مبحث قوای صحیح تعریف شد.

II. به قیاس آنچه در ۵.۲.۱.۱ : ۵ گذشت، اگر $m \in \mathbf{I}_0$ میتوان حالتی را که $a = 0$ نیز مشمول تعریف سابق قرارداد.

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم تعریف است:

۴.۵.۴. قضیه. اگر $a > 0$ آنگاه همواره

I. $a^r > 0.$

II. $(a^{m/n})^n = a^m.$

III. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$

محاسبه با قوای منطق تابع قواعدی مانند قواعد ششگانه‌ی ۵.۲.۳ : ۵ میباشد:

۴.۶. قضیه (قواعد محاسبه با قوای منطق). همواره، به شرط مثبت‌بودن پایه‌ها و منطق بودن نماینده‌ها،

(۴.۶.۱) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$

(۴.۶.۲) $a^r/a^s = a^{r-s}.$

(۴.۶.۳) $(a^r)^s = a^{rs}.$

(۴.۶.۴) $a^r b^r = (ab)^r.$

(۴.۶.۵) $a^r/b^r = (a/b)^r.$

(۴.۶.۶) $1^r = 1.$

برهان. سه رابطه‌ی اول را ثابت و اثبات سایرین را به متعلم محول میکنیم.

اثبات ۴.۶.۱. r و s را به صورت کسوری متعارفی و دارای یک مخرج مثبت مینویسیم،

مثلاً، $r = m/n$ و $s = m'/n$. فرض کنیم

$$a^r = a^{m/n} = x, \qquad a^s = a^{m'/n} = y.$$

بنا بر II : ۴.۵.۴، $a^m = x^n$ و $a^{m'} = y^n$. پس، بنا بر قواعد اعمال با قوای صحیح،

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n = a^m \cdot a^{m'} = a^{m+m'}$$

پس، xy ریشه‌ی nم عدد مثبت $a^{m+m'}$ است. بالنتیجه، بنا بر ۴.۵.۱،

$$xy = a^{\frac{m+m'}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}} = a^{r+s}. \blacktriangle$$

اثبات ۴.۶.۲. بنا بر ۴.۶.۱، $a^r = a^{s+(r-s)} = a^s \cdot a^{r-s}$. اینک طرفین را بر عدد مثبت a^s تقسیم میکنیم. ▲

اثبات ۴.۶.۳. فرض کنیم $r = m/n$، $s = m'/n'$،

$$a^r = a^{m/n} = x, \qquad (a^r)^s = x^{m'/n'} = y, \qquad a^{rs} = a^{mm'/nn'} = z.$$

بالنتیجه، $x^n = a^m$، $y^{n'} = x^{m'}$، و

$$z^{nn'} = a^{mm'} = (a^m)^{m'} = (x^n)^{m'} = (x^{m'})^n = y^{nn'}.$$

و از آنجا، $z = y$. ▲

۴.۷. نامساویهای ابتدائی در باب قوای منطق و ریشه‌ها. احکام آتیه عمدةً تعمیم و تکمیل آنهائی است که در ۵.۲.۴ ــ ۵.۲.۱۰ فصل ۵ در باب قوای صحیح گذشت، و باید آنها را حاضرالذهن داشت.

۴.۷.۱. قضیه. فرض کنیم $a > 0$ و $r \in \mathbf{Q}$.

I. اگر $a > 1$ آنگاه $a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$ و $a^r < 1 \Leftrightarrow r < 0$.

II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a^r < 1 \Leftrightarrow r > 0$ و $a^r > 1 \Leftrightarrow r < 0$.

برهان. قسمت I. فرض کنیم $a > 1$. اگر $r > 0$ میتوان نوشت، $r = n'/n$. چون $a > 1$، $a^{n'} > 1$. پس. بنا بر III : ۴.۴، $\sqrt[n]{a^{n'}} > 1$، و از آنجا، $a^r > 1$ (۱). بالعکس، اگر (۱) برقرار باشد، و $r = m/n$، آنگاه $a^{m/n} > 1$. پس، $(a^{m/n})^n > 1^n$، و از آنجا، $a^m > 1$، و این ممکن نیست مگر آنکه $m > 0$، و لهذا $r > 0$. برای اثبات معادله‌ی دیگر ملاحظه میکنیم که $r < 0$ معادل $-r > 0$ است که، بنا بر آنچه ثابت شد، معادل $a^{-r} > 1$ میباشد. اما $a^{-r} = (a^r)^{-1} = 1/a^r$. پس، $r < 0$ معادل $1/a^r > 1$ است، که خود معادل $a^r < 1$ میباشد.

قسمت II. کافی است ملاحظه کنیم که اگر $0 < a < 1$ آنگاه $1/a > 1$، و قسمت اول را بکار بندیم. ▲

اثبات قضایای آتیه به همان قیاس است که در فصل ۵ در باب قوای صحیح دانسته شد، و به متعلمین محول میشود.

۴.۷.۲. قضیه. فرض کنیم $a > 0$، $b > 0$ و $r \in \mathbf{Q}$.

I. اگر $r > 0$ آنگاه $a^r < b^r$ اگروتنهااگر $a < b$.
II. اگر $r < 0$ آنگاه $a^r > b^r$ اگروتنهااگر $a < b$.

۴.۷.۳. قضیه. اگر $a > 0$ و $b > 0$، و بازاء عددی منطق و غیر از 0 مانند r، $a^r = b^r$ آنگاه $a = b$.

۴.۷.۴. قضیه. فرض کنیم $0 < a \leqslant b$ و $r \in \mathbf{Q}$. اولاً، اگر $r \geqslant 0$ آنگاه $0 < a^r \leqslant b^r$، و اگر $r \leqslant 0$ آنگاه $0 < b^r \leqslant a^r$. ثانیاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $a^r = b^r$ آنست که $r = 0$ یا $a = b$.

۴.۷.۵. قضیه. فرض کنیم $a > 0$ و $r, s \in \mathbf{Q}$.
I. اگر $a > 1$ آنگاه $a^r < a^s$ اگروتنهااگر $r < s$.
II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a^s < a^r$ اگروتنهااگر $r < s$.

۴.۷.۶. قضیه. بازاء هر عدد حقیقی h که $1 + h \geqslant 0$، و هر عدد طبیعی n،

$$\sqrt[n]{1+h} \leqslant 1 + \frac{h}{n}, \qquad (*)$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $h = 0$ یا $n = 1$.

برهان. اگر $1 + h = 0$ نامساوی $(*)$ بالبداهه برقرار است. پس فرض کنیم $1 + h > 0$ (۱) و $h/n = h'$. بنا بر (۱)، $1 - (1/n) \geqslant 0$، $1 + h' > 0$. پس، بنا بر نامساوی برنویی، $0 < 1 + nh' \leqslant (1 + h')^n$. بالنتیجه، بنا بر ۴.۷.۴، $(1 + nh')^{1/n} \leqslant 1 + h'$، و این همان $(*)$ است. بعلاوه، واضح است که اگر $h = 0$ یا $n = 1$ آنگاه در $(*)$ تساوی برقرار میباشد. بالعکس، اگر در $(*)$ **تساوی برقرار** باشد خواهیم داشت، $1 + nh' = (1 + h')^n$. پس، بنا بر قضیه‌ی نامساوی برنویی، $n = 1$ یا $h' = 0$، و رابطه‌ی اخیر معادل $h = 0$ است. ▲

۴.۷.۷. امثله
(آ). 3 بزرگتر است یا $10 - 4\sqrt{3}$؛
نامساوی $3 < 10 - 4\sqrt{3}$ معادل نامساوی $4\sqrt{3} < 7$ است، که چون طرفینش مثبت‌اند، بنا بر ۴.۷.۲، معادل نامساوی $(4\sqrt{3})^2 < 7^2$، یعنی $48 < 49$ میباشد، که برقرار است. پس، 3 از دیگری کوچکتر است.
(ب). بنا بر نامساوی کوشی (۷.۸.۹ : ۵)، همواره

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

(پ). همواره

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{1/2}\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{1/2}$$

اگر $x_i-y_i=a_i$ و $y_i-z_i=b_i$ نامساوی مورد بحث چنین نوشته میشود:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}.$$

چون طرفین نامنفی‌اند، این نامساوی معادل نامساوی حاصل از مجذور کردن طرفین است. استدلال را تمام کنید.

(ة)• در این مرحله، مقدمات کافی برای آموختن نامساوی بسیار مهم و مشهور وسایط عددی و هندسی (۲ § فصل ۵ ض) دارید.

۴.۷.۸• تمرین

۱• به وسیله‌ی نامساویهای ابتدائی در باب ریشه‌ها، ثابت کنید که

(آ) $\sqrt{10}+\sqrt{2}>\sqrt{17}.$ (ب) $\sqrt{2}+\sqrt{6}<\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

(پ) $\sqrt[3]{5}<\sqrt{2}+0{,}3.$

۲• اعداد ذیل را با هم مقایسه کنید:

(آ) $\sqrt{19}+\sqrt{21},\quad \sqrt{17}+\sqrt{23}.$

(ب) $\sqrt{11}-\sqrt{8},\quad \sqrt{17}-\sqrt{15}.$

(پ) $\sqrt{17}+4\sqrt{5},\quad 5\sqrt{7}.$ (ت) $2\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{27}.$

۳• اگر $k,n\in\mathbf{N}$ و $1<k<n$ آنگاه

$$\sqrt{n-k}-\sqrt{n-1}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n+k}.$$

۴• اگر a، b، x، و y نامنفی باشند

$$\sqrt{(a+b)(x+y)}\geqslant\sqrt{ax}+\sqrt{by}.$$

۵• اگر $a+x>0$ و $y=\sqrt{a+x}>x$ آنگاه $\sqrt{a+y}>y$.

۶• اگر a و b مثبت باشند

(آ) $$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b};$$

(ب) $$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

۷• همواره $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant|a|+|b|$.

۸• اگر $x>0$ آنگاه

(آ) $$\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2};$$

(ب) $$\frac{x}{3+x}<\sqrt[3]{1+x}-1<\frac{x}{3}.$$

۹• اگر $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ آنگاه

$$\sqrt[n]{a+b}\leqslant\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}.$$

۱۰• اگر $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ آنگاه

$$|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\,|\leqslant\sqrt[n]{|\,a-b|}.$$

۱۱. اگر $x>0$ ،$y>0$، و

$$x-\sqrt{x}\leqslant y-\frac{1}{4}\leqslant x+\sqrt{x}$$

آنگاه

$$y-\sqrt{y}\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant y+\sqrt{y}.$$

۵ § اعداد اَصَم

۵.۱. تعریف. عدد حقیقی a را **اصم** خوانیم در صورتی که منطق نباشد.

۵.۱.۱. قضیه. عدد اصم وجود دارد.

برهان. بنابر ۴.۲، عددی حقیقی (موسوم به $\sqrt{2}$) وجود دارد که مربعش مساوی 2 است، و بنا بر ۲.۱.۱، این عدد منطق نیست. ▲

احکام ساده و مهم ذیل نتیجه‌ی مستقیم ۵.۶.۳ : ۵ و تعریف عدد اصم میباشند:

۵.۱.۲. قضیه. فرض کنیم α اصم و r منطق باشد.

I. $\alpha\neq 0$

II. $\alpha+r$ و $\alpha-r$ اصم‌اند.

III. $-\alpha$ اصم است.

IV. اگر $r\neq 0$ آنگاه αr، α/r، و r/α اصم‌اند.

V. $1/\alpha$ اصم است.

[مثلاً، برای اثبات اصم بودن $\alpha+r$، گوئیم اگر این عدد منطق باشد عدد $(\alpha+r)-r$ نیز منطق خواهد بود.]

۵.۱.۳. امثله

(آ). اعداد $\sqrt{2}+1$، $\sqrt{2}-1$، و $-\sqrt{2}$ اصم‌اند.

اعداد $3\sqrt{2}$، $\sqrt{2}/(-5)$، $1/\sqrt{2}$، و $\left(\frac{3}{4}\right)\Big/\sqrt{2}$ اصم‌اند، ولی $0\cdot\sqrt{2}$ منطق است.

(ب). حاصلجمع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت دو عدد اصم ممکن است اصم نباشد. مثلاً، اعداد $\sqrt{2}+1$ و $\sqrt{2}-1$ اصم هستند، ولی حاصلجمعشان منطق است. برای سایر حالات مثال بیاورید.

(پ). اگر x عددی حقیقی و مثبت باشد عدد اصم مثبتی کوچکتر از x وجود دارد. زیرا، بنا بر خاصیت ارشمیدسی، عددی طبیعی مانند n هست که $\sqrt{2}<nx$، و بالنتیجه، $\sqrt{2}/n<x$، و

و بنا بر IV : ۵.۱.۲، $\sqrt{2/n}$ اصم است.

۵.۲. تعریف. اگر A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد مجموعک B از A را **در A چگال** خوانیم در صورتی که بین هر دو عضو متمایز A عضوی از B واقع باشد.

احکام آتیه اطلاعاتی مهم در باب توزیع اعداد منطق و اعداد اصم بدست میدهند.

۵.۲.۱. قضیه. مجموعه‌ی اعداد منطق در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چگال است. به عبارت دیگر، بین هر دو عدد حقیقی متمایز عدد منطقی قرار دارد.
برهان. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند، و $a \neq b$. بی آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود، میتوان فرض کرد $a < b$. پس، $b - a > 0$، و لهذا $1/(b-a) > 0$. بنا بر ۳.۲.۱، عددی طبیعی مانند n هست که $1/(b-a) < n$، و بالنتیجه، $1/n < b - a$. از طرف دیگر، بنا بر ۳.۳، عددی صحیح مانند m هست که $m \leqslant na < m + 1$. بالنتیجه،
$$a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$
پس، عدد منطق $(m+1)/n$ بین a و b است. ▲

۵.۲.۲. قضیه. مجموعه‌ی اعداد منطق بین دو عدد حقیقی متمایز نامتناهی است.
برهان (خلف). فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند، و $a < b$، و A مجموعه‌ی جمیع اعداد منطق بین a و b باشد. اگر A متناهی باشد عضو اقل دارد، و اگر c عضو اقل آن باشد، $a < c < b$. بنا بر ۵.۲.۱، عددی منطق مانند r هست که $a < r < c$. پس، بنا بر تعریف A، $r \in A$، و این با تعریف c متناقض است. ▲

۵.۲.۳. قضیه. بین هر دو عدد حقیقی متمایز عددی اصم وجود دارد.
برهان. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند، و $a < b$. بنا بر ۵.۲.۱، عددی منطق مانند r هست که $a < r < b$. بالنتیجه، $b - r > 0$. پس، بنا بر پ : ۵.۱.۳، عددی اصم مانند c هست که $0 < c < b - r$. فرض کنیم $d = c + r$. چون c اصم و r منطق است، d اصم میباشد، و به آسانی دیده میشود که $a < d < b$. ▲

۵.۲.۴. قضیه. مجموعه‌ی جمیع اعداد اصم بین دو عدد متمایز نامتناهی است.
اثبات بر عهده‌ی متعلم است.

۵.۳. ملاحظات ابتدائی در باب اعداد اصم و منطق. مسئله‌ی تشخیص اینکه یک عدد حقیقی معیّن اصم است یا منطق، گذشته از موارد پیش پا افتاده (مانند $3/2$ و $\sqrt{2}$)، سخت دشوار است، و مشکلات لاینحل دارد. در این قسمت، بعضی نکات ابتدائی مفید در این

باب میآوریم.

چنانکه دیدیم، $\sqrt{2}$ عددی اصم است. از طرف دیگر، $\sqrt{4}$، $\sqrt{25}$، $\sqrt[3]{216}$، و $\sqrt[n]{1}$ منطق میباشند. اینک این سؤال پیش میآید که ریشه‌ی nم یک عدد صحیح نامنفی در چه صورت منطق است. چون همواره $a = \sqrt[1]{a}$ و $0 = \sqrt[n]{0}$، ریشه‌های از مرتبه‌ی 2 ببعد اعداد طبیعی را مورد نظر قرار میدهیم.

۵.۳.۱. قضیه. اگر $a, n \in \mathbf{N}$ و $n > 1$ آنگاه $\sqrt[n]{a}$ فقط و فقط وقتی منطق است که a قوه‌ی nم عددی طبیعی باشد. در این صورت، $\sqrt[n]{a}$ عددی طبیعی است.

برهان. کفایت شرط بدیهی است. برای اثبات لزوم، ملاحظه میکنیم که عدد مثبت $\sqrt[n]{a}$ در معادله‌ی تکین $x^n - a = 0$ صدق میکنید. پس، اگر $\sqrt[n]{a}$ منطق باشد، بنا بر قضیه‌ی گاوس، عددی صحیح است. بعلاوه، این عدد مثبت هم هست، و a قوه‌ی nم آنست. ▲

۵.۳.۲. امثله و فواید

(آ). اگر $a, n \in \mathbf{N}$ و هر دو عدد بزرگتر از 1 باشند $\sqrt[n]{a}$ فقط و فقط وقتی منطق است که، در تجزیه‌ی رسمی a به عوامل اول، نماینده‌ی یکایک عوامل اولِ a بر n قابل قسمت باشد.

زیرا، بنا بر ۵.۳.۱، اگر $\sqrt[n]{a}$ منطق باشد آنگاه عددی طبیعی مانند b هست که $a = b^n$.

پس، اگر $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ تجزیه‌ی رسمی b به عوامل اول باشد،

$$a = b^n = p_1^{nk_1} \cdot p_2^{nk_2} \ldots p_r^{nk_r}.$$

بنا بر قضیه‌ی اصلی علم حساب، حاصلضرب طرف راست تجزیه‌ی رسمی a است به عوامل اول، و دارای خاصیت مذکور هست. بالعکس، اگر تجزیه‌ی رسمی a به عوامل اول بدین صورت باشد بالبداهه $\sqrt[n]{a}$ عددی طبیعی است.

(ب). بنا بر (آ)، اعداد $\sqrt{3}$، $\sqrt[3]{2}$، $\sqrt[3]{4}$، و $\sqrt[5]{10}$ اصم میباشند. اگر $a = 3^{10} \cdot 11^{15} \cdot 29^{35}$ آنگاه $\sqrt[5]{a}$ منطق (و مساوی $3^2 \cdot 11^3 \cdot 29^7$) است، ولی $\sqrt[10]{a}$ اصم میباشد.

(پ). اگر $a, b, n \in \mathbf{N}$، $n > 1$، و $(a, b) = 1$، آنگاه $\sqrt[n]{ab}$ فقط و فقط وقتی منطق است که هر یک از a و b قوه‌ی nم یک عدد طبیعی باشد (چرا؟). شرط $(a, b) = 1$ در برقراری حکم فوق ضروری است. مثلاً، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{24}$ اصمند، اما $\sqrt{6 \cdot 24}$ منطق است.

بنا بر قضیه‌ی گاوس،

۵.۳.۳. قضیه. اگر یک معادله‌ی تکین ریشه‌ای غیر صحیح داشته باشد این ریشه اصم است.

۵.۳.۴. تعریف. عدد نامنفی a را قوه‌ی nم کامل نامند در صورتی که $\sqrt[n]{a}$ منطق باشد. بجای «قوه‌ی دوم کامل» و «قوه‌ی سوم کامل»، بترتیب، مجذور کامل و مکعب کامل گویند.

جلب توجه به دسته‌ای از اعداد اصم که در ریاضیات مقدماتی با آنها آشنا شده‌اید مفید است:

۵.۳.۵. تعریف. عدد اصم مربعی یعنی عدد اصمی به صورت $a+\sqrt{b}$، که در آن a و b منطق‌اند، و b مجذور کامل نیست (یعنی $\sqrt{b}$ اصم است). در این صورت، اگر $a=0$ عدد اصم مربعی را عدد اصمِ مربعیِ مَحْض نامند. دو عدد اصم مربعی $a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b}$ را مزدوج یکدیگر خوانند[۱]. معلوم است که حاصلضرب دو عدد مزدوج منطق است:

$$(a+\sqrt{b})\cdot(a-\sqrt{b}) = a^2 - b.$$

در حل مسائل مربوط به اعداد اصم مربعی، قضیه‌ی ذیل اهمیت تمام دارد.

۵.۳.۶. قضیه. اگر $a, a', b, b' \in \mathbf{Q}$، $b>0$، $b'>0$، و

$$a+\sqrt{b} = a'+\sqrt{b'} \qquad (*)$$

آنگاه $a=a'$ & $b=b'$ یا هر یک از b و b' مربع عددی منطق است.

برهان. فرض کنیم مفروضات برقرار باشند. اگر $b=b'$ (در این صورت، بنا بر (*)، $a=a'$) فبها. پس، فرض کنیم $b\neq b'$. بالنتیجه، $\sqrt{b}\neq\sqrt{b'}$، و از رابطه‌ی $(\sqrt{b}+\sqrt{b'})(\sqrt{b}-\sqrt{b'}) = b-b'$ نتیجه میشود،

$$\sqrt{b}+\sqrt{b'} = (b-b')/(\sqrt{b}-\sqrt{b'}). \qquad (۱)$$

چون a و a' منطق‌اند، بنا بر (*)، $\sqrt{b}-\sqrt{b'}$ منطق است. پس، بنا بر (۱)، $\sqrt{b}+\sqrt{b'}$ نیز منطق است. بالنتیجه، مجموع و تفاضل این دو، و لهذا، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{b'}$ منطق‌اند. ▲

۵.۳.۷. قضیه. با مفروضات قضیه‌ی قبل در باب حروف، اگر $\sqrt{b}$ و $\sqrt{b'}$ اصم باشند، و

$$a+\sqrt{b} = a'+\sqrt{b'}$$

آنگاه

$$a-\sqrt{b} = a'-\sqrt{b'}.$$

(اثبات بر متعلم است.)

۵.۳.۸. تعریف. دو عدد اصم مربعی محض را متشابه نامند اگر مضارب منطق[۲] یک عدد اصم مربعی محض باشند. در غیر این صورت، آنها را نامتشابه خوانند.

---

(۱) بطور کلی، اگر a و b منطق و $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ اصم باشند، اعداد $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ را مزدوج یکدیگر نامند. حاصلضرب چنین دو عدد اصم عددی است منطق.

(۲) عدد v را یک مضرب منطق عدد u نامیم اگر عددی منطق مانند r باشد که $v=ru$.

مثلاً، $\sqrt{8}$ و $\sqrt{25/2}$ متشابهند، زیرا $2\sqrt{2} = 8$ و $\sqrt{25/2} = (5/2)\sqrt{2}$.

۵.۳.۹. قضیه. اگر m و n دو عدد طبیعی متباین و اعداد $\sqrt{m}$ و $\sqrt{n}$ اصم باشند این دو عدد نامتشابهند.

برهان. فرض کنیم $m, n \in \mathbf{N}$، $(m, n) = 1$، و $\sqrt{m}$ و $\sqrt{n}$ اصم باشند. اگر این دو عدد متشابه باشند اعدادی منطق مانند r، s، و t هست که $\sqrt{m} = r\sqrt{t}$ و $\sqrt{n} = s\sqrt{t}$، و بالنتیجه، $\sqrt{mn}$ منطق است. پس، بنا بر پ: ۵.۳.۲، هر یک از m و n مجذور یک عدد طبیعی میباشد، و این با فرض متناقض است. ▲

۵.۴. امثله و فواید

(آ). عدد $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ اصم است.

قبلاً ببینیم چیزی که به نام «$\sqrt{2 + \sqrt{2}}$» خوانده شده است وجود دارد یا نه. میدانیم که $a = \sqrt{2}$ عددی حقیقی است. پس، $a + 2$ نیز عددی حقیقی است، و بالبداهه $0 < a + 2$. پس، بنا بر ۴.۲، یک و تنها یک عدد مثبت، مثلاً b، هست که $b^2 = 2 + a$. همین عدد b است که، بر طبق تعریف، $\sqrt{2 + a}$ یا $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ نامیده میشود.

اینک، برای اثبات اصم بودن b، گوئیم بنا بر آنچه گذشت، $b^2 - 2 = a = \sqrt{2}$. پس، بنا بر تعریف $\sqrt{2}$، $(b^2 - 2)^2 = 2$، و یا $b^4 - 4b^2 + 2 = 0$. چنانکه دیده میشود، عدد b در معادلهٔ تکین $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ صدق میکند. اما، به آسانی معلوم میشود که این معادله جواب صحیح ندارد. پس، b اصم است. ▲

(ب). عدد $x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$ اصم است.

اگر فرض کنیم $a = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}$ و $b = \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$ خواهیم داشت:

$$x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$
$$= 8 + 3 \cdot \sqrt[3]{16 - 15} \cdot x = 8 + 3x.$$

پس، x در معادلهٔ تکین $x^3 - 3x - 8 = 0$ صدق میکند. چون این معادله جواب صحیح ندارد، x اصم است. ▲

(پ). اگر $a + \sqrt{b}$ عددی اصم مربعی باشد به استقراء معلوم میشود (ثابت کنید) که مقدار x^m را بازاء $x = a + \sqrt{b}$ میتوان به صورت $c + d\sqrt{b}$ در آورد، که در آن، c و d اعدادی منطق هستند؛ و بعلاوه، مقدار x^m بازاء $x = a - \sqrt{b}$ مساوی $c - d\sqrt{b}$ است. بالنتیجه، اگر

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (۱)$$

کثیرالجمله‌ای با ضرایب منطق باشد مقدار آن را بازاء $x = a + \sqrt{b}$ میتوان به صورت $P + Q\sqrt{b}$ در آورد، که در آن، P و Q اعدادی منطق‌اند؛ و در این صورت، مقدار کثیرالجمله بازاء $x = a - \sqrt{b}$ مساوی $P - Q\sqrt{b}$ خواهد بود. اگر

$P+Q\sqrt{b}=0$ (یعنی، اگر $a+\sqrt{b}$ یک ریشه‌ی کثیرالجمله‌ی (۱) باشد)، بنا بر ۵.۳.۶، $P=Q=0$، و بالنتیجه، $P-Q\sqrt{b}=0$. از اینجا این قضیه‌ی مهم حاصل میشود:

۵.۵. قضیه. اگر یک عدد اصم مربعی ریشه‌ی کثیرالجمله‌ای دارای ضرایب منطق باشد مزدوج آن نیز ریشه‌ی همان کثیرالجمله است.

۵.۶. تبصره. بطور کلی، هر عدد را که ریشه‌ی معادله‌ای صحیح و جبری با ضرایب منطق باشد یک عدد جبری[1] نامند. بالبداهه، عدد منطق r یک عدد جبری است (جواب معادله‌ی $x-r=0$ است). اعداد اصمی که در توضیحات و مثالهای سابق دیدیم جملگی اعداد (اصم) جبری هستند، مانند عدد $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (مثال آ : ۵.۴)، و عدد x موضوع مثال ب : ۵.۴. اینک این سؤال پیش میآید که آیا اعداد اصم غیر جبری هم وجود دارد یا نه. ثابت میشود (۶ § فصل ۲ ض) که نه فقط جواب این مسئله مثبت است، بلکه «اکثریت قریب به اتفاق» اعداد حقیقی نه منطق‌اند و نه اصم جبری. به عبارت دقیقتر، مجموعه‌ی جمیع این اعداد مجموعه‌ای است شمارا، یعنی عده‌ی اعضایش مساوی عده‌ی اعداد طبیعی است، و حال آنکه مجموعه‌ی سایر اعداد حقیقی، که آنها را اعداد مُتَعالی مینامند، ناشمارا است (کانتور*).

۵.۷. ملاحظات تاریخی در باب اعداد اصم[2]. اعداد اصم سابقه‌ای قدیم دارند. کشف اصم بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن به فیثاغوریان منسوب است. تئودوروس* (اواخر قرن ۵م قم)، استاد افلاطون در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرده است، و اصم بودن جذر 3 و سایر اعداد طبیعی غیر مجذور کامل را تا 17 به ثبوت رسانیده. ائودوکسوس* (حدود ۴۰۸ ـ حدود ۳۵۵ قم)، ریاضیدان یونانی و یکی از بزرگترین ریاضیدانهای جهان، تئوری نسبت را در مورد مقادیر اصم تعمیم داد. یونانیان، به جای عدد مجرد، عمدةً به کمیات هندسی نظر داشتند. کارهای آنها در زمینه‌ی اعداد اصم در کتاب اصول هندسه، از اقلیدس، به اوج میرسد.

بحث هندسی از کمیات اصم متدرجاً منجر به مفهوم عدد اصم گردید، و مبحث اعداد اصم اغلب در کتابهای «حساب نظری» قرن ۱۵م میلادی دیده میشود.

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی نسبت محیط دایره به قطر آن است، که از ایام بسیار قدیم مورد توجه بوده. این عدد از زمان اویلر* ببعد به نام «π» خوانده میشود. عدد مشهور دیگر، که در فصل بعد با آن آشنا خواهید شد، عددی است که «e» نامیده میشود، و سابقه‌اش ظاهراً از بعد از کشف لگاریتم است. چنانکه در مقاله‌ی اول اشاره کردیم، تا اواسط قرن ۱۸م

(۱) با اصطلاح «عدد جبری» جبر مقدماتی خلط نشود.
(۲) این قسمت را برای مزید بصیرت متعلمین آورده‌ایم، و مندرجات آن مداخله‌ای در مطالبی که پس از آن خواهد آمد ندارند.

کسی نمیدانست که این اعداد منطق هستند یا اصم، تا آنکه لامبرت* در ۱۷۶۱ اصم بودن آنها را ثابت کرد. اصم بودن e^2 در ۱۸۴۰ به وسیله‌ی لیوویل* به ثبوت رسید. امروز میدانیم که همه‌ی قوای طبیعی e و π و کثیرالجمله‌های صحیح برحسب e یا π با ضرایب منطق اعداد اصم هستند. اصم بودن اعداد 2^e، π^e، و $\pi^{\sqrt{2}}$، و عدد معروف به ثابت اویلر (که بعداً با آن آشنا خواهید شد) هنوز دانسته نیست[1]، ولی میدانیم که اعداد $2^{\sqrt{2}}$ و e^π اصم‌اند.

مسئله‌ی جبری یا متعالی بودن یک عدد خود مسئله‌ی دیگری است. در این موضوع سه مسئله‌ی متمایز میتوان مطرح کرد: اول اثبات وجود اعداد متعالی (بدون الزام به عرضه کردن چنین عددی)؛ دوم عرضه کردن عددی متعالی؛ سوم ــ که به مراتب از دو دیگر مشکلتر است ــ اثبات اینکه عدد معینی (نه عددی که بدین منظور ساخته شده است، بلکه اعدادی مانند e یا π، و اعداد مشخص دیگر متداول در آنالیز) متعالی هست یا نه. نخستین ریاضیدانی که دسته‌ای از اعداد متعالی عرضه کرد لیوویل* است (۱۸۴۴). پس از وی، هرمیت* متعالی بودن e را ثابت کرد (۱۸۷۳)، و سپس، لیندمان* متعالی بودن π را به ثبوت رسانید (۱۸۸۲). با اثبات قضیه‌ی شگفت‌انگیز کانتور (آخر ۵.۶)، معلوم شد که ــ به عبارت مجازی ــ تقریباً همه‌ی اعداد متعالی هستند. در واقع، اعداد متعالی اعداد استثنائی نیستند، بلکه اعداد غیر متعالی‌اند که جنبه‌ی استثنائی دارند.

در کنگره‌ی بین‌المللی پاریس (سال ۱۹۰۰)، هیلبرت* توجه ریاضیون را به بیست و سه مسئله‌ی لاینحل جلب کرد. هفتمین آنها تحقیق در متعالی بودن اعدادی بود به صورت a^b با مفروضات $a \neq 0$، $a \neq 1$، جبری بودن a و b، و اصم بودن b. در ۱۹۳۴ ثابت شد که این اعداد جملگی متعالی هستند.

۵.۸. تمرین[2]

۰۱ بی استناد به قضیه‌ی ۵.۳.۹، ثابت کنید که اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ نامتشابهند.

۰۲ اگر $\sqrt{a}$ اصم مربعی محض باشد با $\sqrt{1/a}$ متشابه‌است.

۰۳ اگر a منطق و $\sqrt[3]{a}$ اصم باشد $\sqrt[3]{a^2}$ نیز اصم است.

۰۴ اگر $m, n \in \mathbf{N}$ و $\sqrt{m}$ اصم باشد، $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ نیز اصم است.

۰۵ اگر a، b، و c منطق باشند و

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$$

آنگاه $a=b=c=0$.

۰۶ اگر a و b منطق و نامنفی باشند شرط لازم و کافی برای آنکه $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ منطق باشد آنست که $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ منطق باشند.

---

(۱) توجه کنید که عددی مانند $\pi^{\sqrt{2}}$ هنوز برای ما معنی ندارد، زیرا تا کنون فقط قوای منطق را تعریف کرده‌ایم. تعریف کلی قوه در فصل ۷ خواهد آمد.

(۲) در § ۱۱ تمرینات دیگر آمده است.

۷. با همان مفروضات، شرط لازم و کافی برای آنکه $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ منطق باشد آنست که $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ منطق باشند یا $a = b$.
۸. هر عدد اصم مربعی عددی جبری است.
۹. a، b، x، و y منطق‌اند، و $\sqrt{b}$ اصم است. شرط لازم و کافی برای آنکه $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ چیست؟
۱۰. اگر صورت و مخرج کسری کثیرالجمله‌هائی صحیح از x با ضرایب منطق باشند مقدار این کسر را بازاء عدد اصم مربعی $x = a + \sqrt{b}$ میتوان به صورت $P + Q\sqrt{b}$ نوشت که در آن P و Q اعداد منطق‌اند.

† ۵.۹. بُرِش و رخنه. چنانکه در مسئله‌ی ۸ : ۲.۲.۴ دیدید، دو مجموعک

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \;\&\; (x < 0 \vee x^2 < 2)\},$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \;\&\; 0 < x \;\&\; x^2 > 2\}$$

از $\mathbf{Q}$ این مجموعه را افراز میکنند، و بعلاوه، هر عضو A کوچکتر از هر عضو B است (چنین افراز را یک «برش در $\mathbf{Q}$» نامیم)، و در این افراز، نه A عضو اکثر دارد و نه B دارای عضو اقل است (چنین برش را یک «رخنه» خوانیم). توجه به زبان هندسی، که در آن مسئله بدان اشاره شده است، وجه تسمیه‌ی رخنه را آشکار میسازد. «رخنه‌ی بین A و B» نظیر عدد حقیقی $\sqrt{2}$ است، که تعلق به $\mathbf{Q}$ ندارد. این عدد اصمْ رخنه‌ی بین A و B را پر میکند. در این قسمت به بحث دقیق از این مفاهیم میپردازیم.

† ۵.۹.۱. تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد حقیقی باشد.

I. زوج مرتب (A, B) از مجموعکهای X را یک برش در X خوانیم در صورتی که واجد شرایط ذیل باشد:

(آ) $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$؛

(ب) $A \cup B = X$؛

(پ) بازاء هر x از A و هر y از B، $x < y$.

مجموعه‌های A و B را، بترتیب، طبقه‌ی پایین و طبقه‌ی بالای برشِ (A, B) نامند. بجای «طبقه»، «مؤلفه» هم میگویند.

II. برشی در X را که طبقه‌ی پایین آن فاقد عضو اکثر و طبقه‌ی بالایش فاقد عضو اقل باشد یک رخنه در X نامند. اگر رخنه‌ای در X موجود باشد گوئیم X رخنه دارد.

† ۵.۹.۲. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم

$$X = \{-1, 0, 1/2, -2, 2\},$$
$$A = \{-2, -1, 0\}, \qquad B = \{1/2, 2\},$$

$$C = \{-2\}, \qquad D = \{-1, 0, 1/2, 2\}.$$

هر یک از ازواج مرتب (A, B) و (C, D) یک برش در X است. هیچ یک از این برشها رخنه نیست.

(ب). بطور کلی، هیچ مجموعه‌ی متناهی رخنه ندارد. (چرا؟)

(پ). طبقات هر برش از هم جدا هستند.

(ت). اگر (A, B) برشی در مجموعه‌ی X باشد هر عضو X که کوچکتر از (بزرگتر از) عضوی از $A(B)$ باشد به $A(B)$ تعلق دارد.

بنا بر مثالی که در آغاز ۵.۹ گذشت،

† ۵.۹.۳. قضیه. $\mathbf{Q}$ رخنه دارد.

در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، در نتیجه‌ی **اصل موضوع تمامیت**، وضع دگرگونه است، چنانکه بزودی معلوم خواهد شد.

† ۵.۹.۴. قضیه. فرض کنیم A و B دو مجموعه از اعداد حقیقی باشند بطوری که

(آ) $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$؛

(ب) بازاء هر x از A و هر y از B، $x \leqslant y$؛

(پ) بازاء هر عدد مثبت ε، xی از A و yی از B هست که $y - x < \varepsilon$.

در این صورت، یک و تنها یک عدد حقیقی مانند α هست که، بازاء هر x از A و هر y از B،

$$x \leqslant \alpha \leqslant y.$$

برهان. بنا بر (آ) و (ب)، A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد حقیقی و از بالا محدود است. پس، $\alpha = \sup A$ (۱) موجود است. بنا بر (۱)، بازاء هر x از A، $x \leqslant \alpha$. بعلاوه، اگر y عضو دلخواهی از B باشد $\alpha \leqslant y$، و الا B عضوی مانند y دارد که $y < \alpha$. بالنتیجه، بنا بر (۱) و خواص مشخصه‌ی سوپرموم، xی از A هست که $y < x$، و این با (ب) متناقض است. پس، اثبات وجود تمام است (ملاحظه کنید که، در اثبات وجود، فقط شرایط (آ) و (ب) در کار آمده‌اند).

برای اثبات یکتائی، فرض کنیم (آ)، (ب)، و (پ) برقرار باشند، و دو عدد مانند α و β باشد که، بازاء هر x از A و هر y از B، $x \leqslant \alpha \leqslant y$ و $x \leqslant \beta \leqslant y$، و $\alpha \neq \beta$. پس، اگر $|\alpha - \beta| = \varepsilon$ آنگاه $\varepsilon > 0$. بنا بر نامساویهای مذکور، بازاء هر x از A و هر y از B،

$$x - y \leqslant \alpha - \beta \leqslant y - x,$$

و از آنجا

$$|\alpha - \beta| \leqslant \operatorname{Max}\{|x - y|, |y - x|\} = y - x,$$

و یا $\varepsilon \leqslant y - x$، و این با (پ) متناقض است. ▲

نظر به چگالی $\mathbf{Q}$ در $\mathbf{R}$ (۵.۲.۱)، از قضیه‌ی فوق بالاخص قضیه‌ی ذیل حاصل میشود:

† ۵.۹.۵. قضیه. فرض کنیم A و B دو مجموعه از اعداد حقیقی باشند بطوری که

(آ) $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$؛
(ب) بازاء هر x از A و هر y از B، $x \leqslant y$؛
(پ) $\mathbf{Q} \subseteq A \cup B$ (یعنی هر عدد منطق متعلق بـه A یا بـه B است).
در این صورت، یک و تنها یک عدد حقیقی مانند α هست که بازاء هر x از A و هر y از B،

$$x \leqslant \alpha \leqslant y.$$

برهان. کافی است ثابت کنیم که، در شرایط مذکور، شرط (پ) قضیه‌ی ۵.۹.۴ بـرقرار است. پس، (آ)، (ب)، و (پ) را مفـروض میگیریـم، و فـرض میکنیم ε عدد مثبت دلخـواهی بـاشد. بنا بر برهان قضیه‌ی قبل، $\alpha = \sup A$ مـوجود است. بنـا بـر ۵.۲۰۱، دو عدد منطق مانند r_1 و r_2 هست که

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < r_1 < \alpha, \qquad \alpha < r_2 < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

با اندك تأملی معلوم میشود که $r_1 \in A$ و $r_2 \in B$ (چرا؟). بعلاوه،

$$r_2 - r_1 < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon. \blacktriangle$$

بالاخص، اگر (A, B) برشی در $\mathbf{Q}$ یا در $\mathbf{R}$ باشد، بنا بـر تعـریف بـرش، شرایط قضیـه‌ی ۵.۹.۵ موجودند، و بالنتیجه،

۵.۹.۶† قضیه. اگر (A, B) برشی در $\mathbf{Q}$ یا در $\mathbf{R}$ بـاشد آنگاه یـک و تنها یـک عدد حقیقی مانند α هست که، بازاء هر x از A و هر y از B،

$$x \leqslant \alpha \leqslant y.$$

۵.۹.۷† قضیه (ددکیند*). $\mathbf{R}$ رخنه ندارد.

برهان. فرض کنیم (A, B) برش دلخواهی در $\mathbf{R}$ و α عدد حقیقی مـذکور در ۵.۹.۶ بـاشد. چون $A \cup B = \mathbf{R}$، $\alpha \in A$ یا $\alpha \in B$. در حالت اول α عضو اکثر A و در حالـت ثانـی عضو اقل B است. ▲

۵.۹.۸† مشخص کردن اعداد حقیقی به وسیله‌ی برشها. چنانکه دیـدیم، اگر دو مجموعه‌ی A و B از اعداد حقیقی واجد شرایط مـذکور در ۵.۹.۴ باشند، و بـالاخص، اگـر (A, B) برشی در $\mathbf{Q}$ یا در $\mathbf{R}$ باشد، یک و تنها یک عدد حقیقی مانند α هست که، بازاء هـر x از A و هر y از B، $x \leqslant \alpha \leqslant y$. بدین جهت، در شرایط مذکور، گوئیم برش (A, B) عدد α را مشخص میکند. بالعکس، اگر α عدد حقیقی دلخواهی باشد، و مجموعه‌های A و B را چنین تعریف کنیم،

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \;\&\; x \leqslant \alpha\}, \qquad B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \;\&\; x > \alpha\},$$

با اندک تأملی معلوم میشود که (A, B) برشی است در مجموعه‌ی اعـداد حقیقـی، و α عددی است که با این برش مشخص میشود.

بالاخص، فرض کنیم (A, B) برشی در $\mathbf{Q}$ باشد. با اندک تأملی معلوم میشود که ممکن نیست که، در عین حال، A عضو اکثر و B عضو اقل داشته باشد (چرا؟). پس، یکی از سه حالت ذیل ممکن است اتفاق افتد:

(آ) A عضو اکثر دارد، و B عضو اقل ندارد؛

(ب) B عضو اقل دارد، و A عضو اکثر ندارد؛

(پ) نه A عضو اکثر و نه B عضو اقل دارد.

مثال از حالت (آ) با مجموعه‌های

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \ \& \ x \leqslant 2/3\}, \qquad B = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \ \& \ x > 2/3\}$$

و از حالت ثانی با مجموعه‌های

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \ \& \ x < 2/3\}, \qquad B = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \ \& \ x \geqslant 2/3\}$$

بدست میآید. مثال حالت سوم همان است که در آغاز ۵.۹ گذشت.

برش (A, B) در $\mathbf{Q}$، در حالت اول عضو اکثر A را، که عددی منطق است، و در حالت ثانی، عضو اقل B را، که عددی منطق است، مشخص میسازد. در حالت سوم، عدد حقیقی α که با برش (A, B) مشخص میشود عددی اصم است (و الا باید این عدد به A یا به B متعلق باشد، و در صورت اول عضو اکثر A و در حالت ثانی عضو اقل B خواهد بود). در این حالت بازاء هر x از A و هر y از B، $x < \alpha < y$، و بعلاوه، بازاء هر عدد مثبت ε، xی از A و yی از B هست که $y - x < \varepsilon$. بالاخره، در این حالت سوم است که، به عبارت مجازی، عدد α برش (A, B) را، که رخنه‌ای در $\mathbf{Q}$ است، پر میکند.

۶ § نمایش هندسی اعداد حقیقی

۶.۱. فضاهای متری. در هندسه‌ی مقدماتی، بازاء هر دو نقطه مانند P و Q، عددی موسوم به فاصله‌ی P و Q، که ما آن را $\rho(P, Q)$ مینامیم، تعریف میکنند، که واجد این سه خاصیت است:

اولاً، همواره $\rho(P, Q) \geqslant 0$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $P = Q$ (یعنی، «P» و «Q» اسامی یک نقطه‌اند.)؛

ثانیاً، همواره $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$؛

ثالثاً، همواره $\rho(P, R) \leqslant \rho(P, Q) + \rho(Q, R)$.

رابطه‌ی اخیر، در حالتی که P، Q، و R بر یک استقامت نباشند، مبین کوتاهتر بودن یک ضلع مثلث PQR از مجموع دو ضلع دیگر آنست، و به همین جهت، آن را نامساوی مثلث میخوانند.

بر طبق توضیحات مذکور، «فاصله‌ی دو نقطه» تابعی است که حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی جمیع ازواج مرتب نقاط است، و حوزه‌ی مقادیرش جزء مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است. اینک مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4\}$ را اختیار میکنیم و، برای اختصار، متغیرهای فردی را بدان مقید میسازیم. تابع ρ بر $A \times A$ با ضابطه‌ی

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

چنانکه با اندک تأملی معلوم میشود، واجد سه خاصیت سابق‌الذکر است، و لهـذا میتوان آن را یک «تابع فاصله» برای A نامید. اصطلاحاً، A را به انضمام تابع فاصله‌ی آن، یا، بـه عبارت دقیقتر، زوج مرتب (A, ρ) را، یک «فضای مِـتـری» و تـابع ρ را «مِـتـریک[1]» ایـن فضا مینامند. بطور کلی،

۶.۱.۱. تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد. تابع ρ بر $X \times X$ بتوی $\mathbf{R}$ را یـک تابع فاصله برای X یا یک متریک برای X نامیم در صورتی که واجد خواص ذیـل بـاشد:

I. بازاء هر x و y از X، $\rho(x, y) \geqslant 0$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x = y$؛

II. بازاء هر x و y از X، $\rho(x, y) = \rho(y, x)$؛

III. (نامساوی مثلث). بازاء هر x، y، و z از X،

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

اگر ρ یک متریک برای X باشد $\rho(x, y)$ را فـاصله‌ی x و y و زوج مـرتب (X, ρ) را یک فضای متری نامند. هر جا بیم ابهام نرود، فضای متری (X, ρ) را، مختصراً، فضای متری X، و اعضای X را نقاط این فضا نامند.

۶.۲. خط حقیقی (اقلیدسی). تابع ρ بر $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ با ضابطه‌ی

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

در شرایط سه‌گانه‌ی مذکور در ۶.۱.۱ صدق میکند (چـرا؟)، و لهذا، یک متـریک بـرای $\mathbf{R}$ است. فضای متری $(\mathbf{R}, \rho)$ را خط حقیقی اقلیدسی یـا فضای اقلیدسی یک‌بُـعدی خوانیم. بر طبق بیان اختصاری سابق‌الذکر، معمولاً این فضا به همان نام $\mathbf{R}$ و اعضای $\mathbf{R}$ به نام نقـاط حقیقی خوانده میشوند.

بنا بر تعریف مذکور، همواره

$$\rho(0, x) = |x| = x \operatorname{sgn} x.$$
$$x = \rho(0, x) \cdot \operatorname{sgn} x.$$

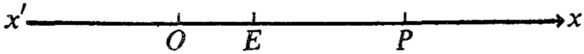
۶.۲.۱. نمایش هندسی خط اقلیدسی. نمایش هندسی خط حقیقی اقلیدسی هـم برای توضیح و «محسوس» ساختن مطالب مفید است، و هم، اغلب، راهنمای یافتن طـریق استـدلال میباشد. پیش از ورود در مطلب لازم است تذکـر دهیم کـه **نمایش هندسی و «محسوس بودن» از روی شکل جایگزین برهان نمیباشد.**

نمایش هنـدسی اعداد حقیقی مبتنی است بر اصول موضوعه‌ی هنـدسه‌ی اقلیـدسی (هنـدسه‌ی

---

(۱) metric

عادی)، و ورود در آن بکلی از موضوع بحث ما خارج است، و در این باب فقط به یادآوری رؤوس مطالبی که محصلین میدانند اکتفا میکنیم. محور خطی است که، به اصطلاح هندسه‌ی مقدماتی، از طرفین الی غیرالنهایه ممتد فرض میشود، و بر آن جهتی به عنوان جهت مثبت، و نقطه‌ای، مانند نقطه‌ی O، به عنوان مبدأ، اختیار شده است. محور مُدَرَّج آنست که قطعه‌ای مانند OE بر آن، در جهت مثبت، به عنوان واحد طول مشخص شده است (شکل ۳۴). معمولاً وقتی که یک محور در کار است، آن را افقی و جهت مثبت آن را از چپ به راست میگیرند (در توضیحات آتیه، ما نیز چنین میکنیم). در این صورت، نسبتِ «در سمتِ چپِ» بین نقاط محور نسبتی متعدی و تابع اصل تثلیث قوی است، و لهذا، نقاط محور را مرتب میکند. بازاء هر نقطه مانند P از محور مدرج $x'x$، مقدار طول هندسی OP بر حسب واحد OE عددی است مشخص. اگر نقطه‌ی P بر نیمه‌ی مثبت محور (نیمه‌ی Ox) باشد این عدد را و اگر بر نیمه‌ی منفی محور باشد متقابل این عدد را طول نقطه‌ی P (نسبت به مبدأ O) میخوانند. طول O



شکل ۳۴

مساوی صفر و طول E مساوی 1 است. بدین گونه، بازاء هر نقطه از محور یک و تنها یک عدد حقیقی مشخص میشود، و به عبارت دیگر، نسبت $\{(P, x) \mid$ است P طول $x\}$ تابعی است بر مجموعه‌ی نقاط محور $x'x$ بتوی $\mathbf{R}$. اساس نمایش هندسی اعداد حقیقی این اصل است که این تابع تناظری است 1ــ1 بین مجموعه‌ی نقاط محور $x'x$ و $\mathbf{R}$، و این تناظر حافظ ترتیب است، بدین معنی که اگر نقطه‌ی P با طول x در سمت چپ نقطه‌ی Q با طول y باشد، آنگاه $x < y$، و بالعکس، اگر دو عدد x و y در رابطه‌ی اخیر صدق کنند آنگاه نقطه‌ی نظیر x در سمت چپ نقطه‌ی نظیر y میباشد. به مناسبت تناظر مذکور، اغلب اعتنائی به تفاوت مجموعه‌ی نقاط یک محور مدرج و مجموعه‌ی مرتب اعداد حقیقی نمیکنند، و محور مذکور را خط حقیقی، خط $\mathbf{R}$، یا خط اعداد مینامند، و نقاط آن را به نام طولشان میخوانند، و مثلاً، بجای نقطه‌ای با طول x، مختصراً نقطه‌ی x میگویند.

بر محور $x'x$، فاصله‌ی دو نقطه‌ی x و y، بنا بر تعریف، عبارتست از عدد $|x - y|$. بدین گونه، احکام مربوط به عدد $|x - y|$ را میتوان، به زبان هندسی، بر حسب فاصله‌ی x و y بیان کرد یا با تصویر نمایش داد، و بالعکس، چنانکه در آتیه معلوم خواهد شد.

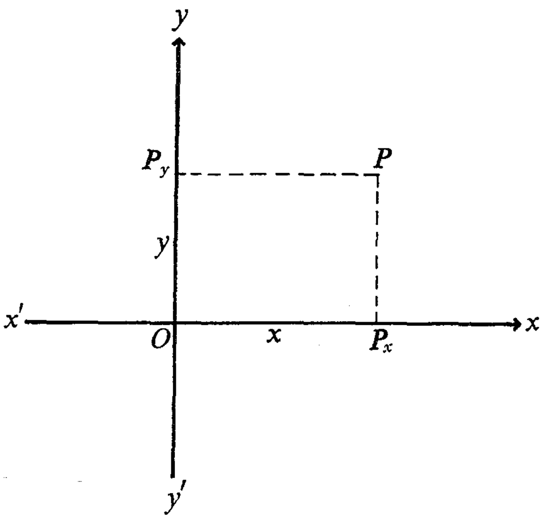
۶.۳. فضای اقلیدسی دو بعدی. اینک به تبدیل کردن $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ یا $\mathbf{R}^2$ به یک فضای متری میپردازیم. اعضای دلخواه $\mathbf{R}^2$ را P، Q، و غیره مینامیم. هر یک از اینها زوج مرتبی از اعداد حقیقی است. متریک مورد نظر چنین تعریف میشود: اگر $P_1 = (x_1, y_1)$ و

$P_2 = (x_2, y_2)$ آنگاه

$$\rho(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

به آسانی ثابت میشود که تابع[1] ρ واجد خواص سه‌گانه‌ی متریک (۶.۱.۱) هست. مجموعه‌ی $\mathbf{R}^2$ را با متریک ρ فضای اقلیدسی دوبعدی یا صفحه‌ی اقلیدسی یا، مختصراً، صفحه میخوانیم.

۶.۳.۱. نمایش هندسی فضای اقلیدسی دو بعدی. فضای اقلیدسی دو بعدی را میتوان بر اساس نمایش فضای اقلیدسی یک‌بعدی، که در ۶.۲.۱ گذشت، نمایش داد. نقطه‌ای مانند O را، موسوم به مبدأ مختصات، نمایش زوج مرتب $(0, 0)$ میگیریم، و از این نقطه دو محور عمود بر هم، مانند $x'x$ («محور xها» یا «محور طول») و $y'y$ («محور yها» یا «محور عرض») با مبدأ مشترک O رسم، و واحدی برای طول اختیار میکنیم. محورهای مذکور را محورهای مختصات و صفحه‌ی آنها را صفحه‌ی مختصات نامیم. امتداد و جهت محورهای مختصات معمولاً به صورتی است که در شکل ۳۵ دیده میشود. اگر P نقطه‌ای از



شکل ۳۵

صفحه‌ی دو محور مختصات باشد، طولهای تصاویر P را بر محورهای $x'x$ و $y'y$ ــ یعنی قطعات $\overline{OP_x}$ و $\overline{OP_y}$ را ــ بترتیب، طول و عرض نقطه‌ی P نسبت به این محورها نامند، و طول و عرض یک نقطه را مختصات آن (نسبت به محورهای مفروض) میخوانند.

بنا بر توضیات مذکور در ۶.۲.۱ و قضایای هندسه‌ی مقدماتی، هر زوج مرتب (x, y) از

---

(۱) حوزه‌ی تعریف این تابع چیست؟

اعداد حقیقی یک و تنها یک نقطه از صفحه‌ی مختصات را مشخص میسازد، و آن نقطه‌ای است با طول x و عرض y. بالعکس، نقطه‌ی P با طول x و عرض y زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی را مشخص میکند. این تناظر 1ـ1 بین مجموعه‌ی $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ و نقاط یک صفحه با مشخص کردن محورهای مختصات و واحد طول مشخص میباشد. اسمنمای «نقطه‌ی P با مختصات x و y» را معمولاً به صورت «$P(x, y)$» مینویسند.
بالاخره، اگر $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ دو نقطه از صفحه‌ی مختصات باشند فاصله‌ی هندسی آنها عبارتست از

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

و این همان $\rho(P_1, P_2)$ است، که در ۶.۳ تعریف کردیم. بنا بر این ملاحظات است که صفحه‌ی اقلیدسی دو بعدی (۶.۳) را به وسیله‌ی صفحه‌ی مختصات نمایش میدهیم.

۶.۴. فضای اقلیدسی nبعدی. توضیحات سابق‌الذکر را میتوان تعمیم داد. برای این منظور تعریف nتائی مرتب مورد نیاز است. به خاطر دارید که در آغاز فصل ۳ مفهوم زوج مرتب را پذیرفتیم، و سپس، سه‌تائی مرتب را بدان وسیله تعریف کردیم. در آن موقع راهی به تعریف به وسیله‌ی استقراء نداشتیم، اما اینک این راه برای ما باز است، و میتوانیم بطور کلی nتائی مرتب را تعریف کنیم.

۶.۴.۱. تعریف. nتائی مرتب $(n \geqslant 2)$ اعداد x_1، x_2، . . .، x_n، که به

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

نمایش داده میشود، به استقراء چنین تعریف میشود:

I. اگر $n = 2$ آنگاه nتائی مرتب x_1 و x_2 همان زوج مرتب (x_1, x_2) است.

II. بازاء هر عدد طبیعی n که $n \geqslant 2$، $n+1$تائی مرتب x_1، x_2، . . .، x_n، و x_{n+1}، یعنی $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$، عبارتست از زوج مرتبی که مختص اولش nتائی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ است و مختص دومش x_{n+1}. به عبارت دیگر،

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}) \qquad (n \geqslant 2).$$

به آسانی معلوم میشود که (ثابت کنید)

۶.۴.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای تساوی دو nتائی مرتب

$$(x_1, \ldots, x_n), \qquad (y_1, \ldots, y_n)$$

آنست که

$$x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

اینک میتوان تعریف حاصلضرب مستقیم مجموعه‌ها را نیز تعمیم داد.

۶.۴.۳. تعریف. اگر $n \geqslant 2$ آنگاه حاصلضرب مستقیم n مجموعه‌ی A_1، A_2، . . .، و A_n، که $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ نامیده میشود، عبارتست از مجموعه‌ی

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \,\&\, x_2 \in A_2 \,\&\, \ldots\, x_n \in A_n\}.$$

بالاخص، اگر $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$، حاصلضرب مذکور را A^n نیز مینامند. بـه عبارت دیگر،

$$A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in A\} \qquad (n \geqslant 2).$$

مثلاً، اگر $n \geqslant 2$ آنگاه $\mathbf{R}^n$ یعنی مجموعه‌ی جمیع nتائیهـای مـرتب اعـداد حقیقی. اعضـای دلخـواه $\mathbf{R}^n$ را P، Q، و غیره مینامیم. اگـر بـازاء دو عضـو $(x_1, \ldots, x_n)$ و $(y_1, \ldots, y_n)$، یا مثلاً P و Q، از $\mathbf{R}^n$ چنین قرار دهیم:

$$(*) \qquad \rho(P, Q) = \Big[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big]^{1/2},$$

به آسانی معلوم میشود که تابع ρ واجد خواص سه‌گانه‌ی مذکور در ۶.۱.۰۱ هست[۱]، و لـهـذا، یک متریک برای $\mathbf{R}^n$ میباشد.

۶.۴.۴. تعریف. فضای اقلیدسی nبعدی یعنی مجموعه‌ی $\mathbf{R}^n$ با متریک $(*)$.

چنانکه در هندسه‌ی تحلیلی دیده‌اید، فضای اقلیـدسی سه‌بعدی $(n = 3)$ را، بـه همان قیاس که در ۶.۳.۱ گذشت، میتوان به طریق هنـدسی نمـایش داد. بازاء $n \geqslant 4$ راهی بـرای نمایش هندسی $\mathbf{R}^n$ نداریم.

۶.۵. تبصره. مطالبی که گذشت اساس رابطه‌ی آنالیز و هنـدسه و پایه‌ی هنـدسه‌ی تحلیلی است.

مفاهیم عادی هندسی را میتوان بدون توسل به تصویر هندسی تعـریف کـرد. مثـلاً، در هندسه‌ی مسطحه، خط مستقیم را مجموعه‌ی ازواج مرتبی از اعـداد حقیقی تعـریف میکنیم کـه مختصاتشان، x و y، در گزاره‌نمائی از درجه‌ی اول مانند

$$ax + by + c = 0 \qquad (a \neq 0 \vee b \neq 0)$$

صدق کنند.

نقطه‌ی $P(x, y)$ را بین نقـاط $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نـامیم در صورتی کـه عـددی حقیقی مانند t باشد که $0 < t < 1$، و

$$(۱) \quad x = (1 - t)x_1 + tx_2, \qquad y = (1 - t)y_1 + ty_2.$$

مجموعه‌ی جمیع نقاط بین P_1 و P_2 را، به انضمام این نقاط، قطعه خط P_1P_2 نامـیم، و آن عبارتست از مجموعه‌ی نقاطی مانند P با مختصات x و y مذکور در (۱) بازاء جمیـع مقادیر t که در شرایط $0 \leqslant t \leqslant 1$ صدق کنند. نقطه‌ی P_1 را، کـه بازاء $t = 0$ حاصل میشود، مبدأ قطعه خط P_1P_2، و P_2 را منتهای آن نامیم.

ادامه دادن بدین بحث جالب ما را از راهی که در پیش داریم منحرف میسازد.

---

(۱) برای اثبات نامساوی مثلث به پ: ۴.۷.۷ رجوع شود.

۷ § بینهایت

۷.۱. مقدمه. برای تعمیم و تسهیل بیان بسیاری از مطالب آنالیز، دو شیء متمایز جدید، که یکی را

∞ («بینهایت») یا $+\infty$ («باضافه‌ی بینهایت»)

و دیگری را

$-\infty$ («منهای بینهایت»)

مینامیم، و

هیچ یک از آنها عدد حقیقی نیست

اختیار میکنیم، و با ملحق کردن[1] آنها به $\mathbf{R}$، مجموعه‌ی

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

را میسازیم.

مجموعه‌ی $\mathbf{R}$ با نسبت کوچکتری مجموعه‌ای است مرتب، و $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}^*$. نسبت کوچکتری را، به شرحی که خواهد آمد، وسعت میبخشیم تا نسبتِ حاصل از توسیعْ مجموعه‌ی $\mathbf{R}^*$ را مرتب کند به نحوی که $-\infty$ و هر عدد حقیقی کوچکتر از ∞ شود، و $-\infty$ کوچکتر از هر عدد حقیقی گردد.

۷.۲. تعریف. ∞ (یا $+\infty$) و $-\infty$ دو شیء متمایز و متمایز از اعداد حقیقی‌اند، و

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

مجموعه‌ی $\mathbf{R}^*$ را، اگر چه همه‌ی اعضایش عدد حقیقی نیستند، مجموعه‌ی مُنْبَسَط اعداد حقیقی نامند. برای تأکید و احتراز از ابهام، اعضای $\mathbf{R}$ (اعداد حقیقی) را گاه اعداد حقیقی متناهی میخوانند.

۷.۲.۱. تبصره.

I. هر یک از علامات $-\infty$ و $+\infty$ یک شیء واحد تفکیک‌ناپذیر است. مخصوصاً، $-\infty$ را نباید متقابل ∞ شمرد، و انتظار برقراری رابطه‌ای مانند $\infty + (-\infty) = 0$ را داشت[2].

---

(۱) اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند مجموعه‌ی $A \cup B$ را مجموعه‌ی حاصل از ملحق کردن B به A نامند. بالاخص، اگر $x' \notin A$، $x'' \notin A$، ... آنگاه مجموعه‌ی

$$A \cup \{x', x'', \ldots\}$$

را مجموعه‌ی حاصل از ملحق کردن اشیاء x'، x''، ... به A نامند.

(۲) هنوز در $\mathbf{R}^*$ عملی تعریف نکرده‌ایم. پس از آن هم، $\infty + (-\infty)$ بیمعنی خواهد بود (۷.۴.۳).

II. ∞ (یا $+\infty$) را نباید با اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی، یعنی با اعداد ترانسفینی(۷.۵ : ۳)، خلط کرد. «∞» فقط علامتی است تابع قراردادهای آتیه و لاغیر.

III. بنا بر قراری‌که در ۱.۱۰۹ : ۵ در باب اعداد حقیقی گذاشتیم، عبارت «$x = \pm\infty$» را به معنی «$x = -\infty \vee x = \infty$» میگیریم.

IV. بنا بر تعریف $\mathbf{R}^*$،

$$x \in \mathbf{R}^* \;\underline{\Omega}\; (x = -\infty \vee x \in \mathbf{R} \vee x = \infty),$$

و بعلاوه، سه گزاره‌نمای داخل پرانتز دو بدو مانعةالجمع‌اند. پس، در باره‌ی عضوی از $\mathbf{R}^*$ مانند x، مثلاً، اگر بدانیم که $x \neq -\infty$ نتیجه میگیریم که یا x عددی حقیقی است یا $x = \infty$.

نظر به تعریف $\mathbf{R}^*$ و معادله‌ی فوق، اثبات احکام مربوط به $\mathbf{R}^*$ را اغلب باید به طریقه‌ی حالات انجام داد.

۷.۲.۲. تعریف. در $\mathbf{R}^*$، نسبت دوتائی $<^*$ را (موسوم به نسبت کوچکتری در $\mathbf{R}^*$) چنین تعریف میکنیم:

$$<^* = < \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbf{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

از این تعریف بالبداهه معلوم است که

۷.۲.۳. قضیه.

I. بازاء هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$x < y \;\underline{\Omega}\; x <^* y.$$

II. $-\infty <^* \infty$.

III. بازاء هر عدد حقیقی مانند x،

$$-\infty <^* x, \qquad x <^* \infty.$$

IV. نسبت $<^*$ متعدی و تابع اصل تثلیث (قوی) است، و بالنتیجه، یک نسبت ترتیبی در $\mathbf{R}^*$ است.

اثبات قضیه به متعلم محول میشود.

بنا بر قسمت اول قضیه‌ی فوق، بازاء هر دو عدد حقیقی x و y، کوچکتر بودن x از y در $\mathbf{R}$ (یعنی، بر حسب نسبت $<$) معادل کوچکتر بودن x از y است (به عنوان اعضای $\mathbf{R}^*$) در $\mathbf{R}^*$. بنا بر این، ضرورتی برای اینکه نام تازه‌ای بر نسبت کوچکتری در $\mathbf{R}^*$ بگذاریم نیست، و میتوان این نسبت را به همان نام «$<$» نامید.

۷.۲.۴. قرارداد. نسبت $<^*$ را به همان نام «$<$» میخوانیم.

۷.۲.۵. تبصره. نسبتهای $\leqslant$، $>$، و $\geqslant$ را در $\mathbf{R}^*$ به همان قیاس که در ۲.۱۰۱ : ۵ دانسته

شد، به وسیله‌ی گزاره‌نماها تعریف میکنیم. مثلاً، اگر $x, y \in \mathbf{R}^*$
$x \leqslant y$ یعنی $x < y \vee x = y$.
مثلاً، $\infty \leqslant \infty$ و $-\infty \leqslant 1 \leqslant \infty$.
بر متعلم است اثبات اینکه نسبت $\leqslant$ در $\mathbf{R}^*$ منعکس، متعدی، قناس، و مرتبط است.

۷.۲.۶. قضیه. بازاءِ هر x از $\mathbf{R}^*$،
$$-\infty \leqslant x \leqslant \infty,$$
و شرط لازم و کافی برای آنکه x عدد حقیقی باشد آنست که
$$-\infty < x < \infty.$$
برهان. فرض کنیم $x \in \mathbf{R}^*$. سه حالت تشخیص میدهیم[1].
حالت اول: $x = -\infty$. باید ثابت کرد که $-\infty \leqslant -\infty \leqslant \infty$. نیمه‌ی اول بنا بر منعکس بودن $\leqslant$ برقرار است، و نیمه‌ی دوم از II : ۷.۲.۳ به ادخال فاصل نتیجه میشود. حالت دوم: $x = \infty$. اثبات به قیاس حالت اول است. حالت سوم: $x \in \mathbf{R}$. از III : ۷.۲.۳ به ادخال فاصل نتیجه میشود، $-\infty \leqslant x$ و $x \leqslant \infty$.
برای اثبات قسمت اخیر، گوئیم اگر x عددی حقیقی باشد، بنا بر III : ۷.۲.۳، $-\infty < x < \infty$ (۱). بالعکس، اگر $x \in \mathbf{R}^*$ و (۱) برقرار باشد آنگاه $x \neq -\infty$ و $x \neq \infty$، و لهذا، بنا بر تعریف $\mathbf{R}^*$، $x \in \mathbf{R}$. ▲
برای تمرین بیشتر در اثبات احکام مربوط به $(\mathbf{R}^*, <)$، قضایای مفید آتیه را، که مکمل قضایای عمومی مذکور در ۲.۵ : ۵ هستند میآوریم.

۷.۲.۷. قضیه. فرض کنیم $a \in \mathbf{R}^*$.
I. اگر a از هر عدد حقیقی نابیشتر باشد آنگاه $a = -\infty$.
II. اگر a از هر عدد حقیقی ناکمتر باشد آنگاه $a = \infty$.
برهان (قسمت I). فرض کنیم $a \in \mathbf{R}^*$ و a از هر عدد حقیقی نابیشتر باشد، ولی $a \neq -\infty$ (فرض خلف). پس، $a = \infty$ یا $a \in \mathbf{R}$. در حالت اول، بنا بر III : ۷.۲.۳، $1 < a$، و این خلاف فرض است. در حالت دوم، $a - 1 \in \mathbf{R}$، و $a - 1 < a$، و این نیز خلاف فرض است. ▲

۷.۲.۸. قضیه. اگر $a, b \in \mathbf{R}^*$ آنگاه از هر یک از مفروضات ذیل نتیجه میشود، $a \leqslant b$.
(آ) بازاء هر عدد حقیقی مانند x، اگر $b < x$ آنگاه $a \leqslant x$.
(ب) بازاء هر عدد حقیقی مانند x، اگر $x < a$ آنگاه $x \leqslant b$.
برهان. نیمی از قضیه را ثابت میکنیم. فرض میکنیم $a, b \in \mathbf{R}^*$ و (ب) برقرار باشد، و ثابت میکنیم که $a \leqslant b$ (†). اگر $a = -\infty$ آنگاه، بنا بر ۷.۲.۶، (†) برقرار است. اگر

---

(۱) IV : ۷.۲.۱ ملاحظه شود.

$\infty = a$ آنگاه از (ب) با توجه به قسمت اخیر ۷.۲.۶ معلوم میشود که، بازاء هر عدد حقیقی مانند x، $x \leqslant b$. پس، بنا بر II : ۷.۲.۷، $b = \infty$، و (†) برقرار است. باقی میماند حالتی که $a \in \mathbf{R}$. چون $a - 1 \in \mathbf{R}$ و $-\infty < a - 1 < a$، بنا بر (ب)، $-\infty < a - 1 \leqslant b$. پس، $b = \infty$ یا $b \in \mathbf{R}$. در حالت اول بنا بر ۷.۲.۶ و در حالت ثانی بنا بر ۲.۵.۱ : ۵، $a \leqslant b$. ▲

۷.۲.۹. تبصره در تعمیم تعریفات و احکام. از مفاهیمی که سابقاً در $\mathbf{R}$ تعریف کردیم، بعضی صرفاً ناشی از ترتیب این مجموعه هستند، یعنی، مربوط به مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}, <)$ میباشند. این گونه مفاهیم را میتوان در هر مجموعه‌ی مرتب، و بالاخص در مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}^*, <)$، تعریف کرد[1]. در حالت مورد نظر، این گونه تعمیمها با تصرفات جزئی لفظی ــ از قبیل

تبدیل «عدد» یا «عدد حقیقی» به «عضو $\mathbf{R}^*$»،

تبدیل «مجموعه‌ای از اعداد» به «مجموعکی از $\mathbf{R}^*$»،

و امثال آنها ــ در تعریفات مربوط به مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}, <)$ صورت میگیرد. مثلاً، به قیاس ۲.۶.۱ : ۵ و I : ۱.۱.۱، گوئیم

(آ). اگر $A \subseteq \mathbf{R}^*$ آنگاه عضو a از A را عضو ماکزیموم (عضو مینیموم) A خوانیم در صورتی که، بازاء هر x از A، $x \leqslant a$ $(a \leqslant x)$.

(ب). اگر $A \subseteq \mathbf{R}^*$ آنگاه عضو a از $\mathbf{R}^*$ را یک بند بالای (بند پایین) A خوانیم در صورتی که، بازاء هر x از A، $x \leqslant a$ $(a \leqslant x)$.

باید توجه داشت که، در تعریف محدودیت (II : ۱.۱.۱)، فقط بندهائی معتبرند که متناهی (عدد حقیقی) باشند.

۷.۲.۹.۱. امثله و فواید

(آ). بنا بر ۷.۲.۶، ∞ یک بند بالای هر مجموعک $\mathbf{R}^*$ (و بالاخص، هر مجموعه از اعداد حقیقی) است، و $-\infty$ یک بند پایین آن.

(ب). $\mathbf{N}$ در $\mathbf{R}$ بند بالا ندارد، اما ∞ یک بند بالای آن است در $\mathbf{R}^*$. از طرف دیگر، 0 یک بند پایین $\mathbf{N}$ است در $\mathbf{R}$ و نیز در $\mathbf{R}^*$. مجموعه‌ی $\mathbf{N}$، خواه مجموعک $\mathbf{R}$ تلقی شود و خواه مجموعک $\mathbf{R}^*$، از بالا نامحدود و از پایین محدود است.

(پ). اگر[2] $A = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ آنگاه $\operatorname{Max} A = \infty$، زیرا، اولاً، $\infty \in A$؛ و ثانیاً، ∞ یک بند بالای A است. بعلاوه، $\min A = 1$.

احکام مربوط به مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}, <)$ را میتوان در مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}^*, <)$ تعمیم داد. نمونه‌هائی از اثبات احکام در $(\mathbf{R}^*, <)$ گذشت.

---

(۱) در فصل ۲ ض، در مبحث مربوط به نسب ترتیبی، اطلاعاتی مفید در این باب آمده است.

(۲) توجه کنید که A مجموعک $\mathbf{R}$ نیست، ولی $A \subset \mathbf{R}^*$.

۷.۲.۱۰. تعریف.

$$\begin{cases} |\infty| = \infty; \\ |-\infty| = \infty; \\ \operatorname{sgn} \infty = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\infty) = -\infty; \\ -(-\infty) = \infty; \\ \operatorname{sgn}(-\infty) = -1. \end{cases}$$

۷.۲.۱۱. تمرین

۱. بازاء هر x از $\mathbf{R}^*$،

$$x \leqslant -\infty \Leftrightarrow x = -\infty.$$
$$\infty \leqslant x \Leftrightarrow x = \infty.$$

۲. اگر $a, x \in \mathbf{R}^*$ و $a \geqslant 0$ آنگاه

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$
$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

۳. بازاء هر a و b از $\mathbf{R}^*$،

$$a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a. \qquad a < b \Leftrightarrow -b < -a.$$

۷.۳. تعمیم مفاهیم سوپرموم و اینفیموم. تعریفات ۱.۲.۰۱ را به همان طریق که در ۷.۲.۰۹ گفته شد میتوان تعمیم داد.

بالاخص، فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد حقیقی باشد. اگر A از بالا نامحدود باشد در $\mathbf{R}$ سوپرموم ندارد، یعنی، عددی حقیقی مانند α که در I : ۱.۲.۰۱ صدق کند موجود نیست. اما، در $\mathbf{R}^*$، ∞ یک بند بالای A است، و چون A بند بالای دیگر ندارد،

$$\sup A = \infty.$$

همچنین، اگر A از پایین نامحدود باشد آنگاه

$$\inf A = -\infty.$$

فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد حقیقی باشد. اگر A از بالا محدود باشد، بنا بر اصل موضوع تمامیت، سوپرموم دارد، و سوپرموم آن عددی حقیقی است، و اگر A از بالا نامحدود باشد سوپرموم آن ∞ است. و هکذا در مورد اینفیموم. پس، در تعمیم اصل موضوع تمامیت، این حکم برقرار است:

۷.۳.۱. قضیه. هر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد حقیقی مانند A یک سوپرموم و یک اینفیموم دارد. بعلاوه، اولاً، اگر A از بالا محدود باشد آنگاه $\sup A \in \mathbf{R}$، و اگر از بالا نامحدود باشد آنگاه $\sup A = \infty$؛ ثانیاً، اگر A از پایین محدود باشد آنگاه $\inf A \in \mathbf{R}$، و اگر از پایین نامحدود باشد آنگاه $\inf A = -\infty$.

تحقیق در تعمیم خواص سابق‌الذکر سوپرموم و اینفیموم به متعلمین محول میشود.

۷.۳.۲. تمرین
۰۱ بنا بر آنکه A مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد حقیقی باشد،
I. شرط لازم و کافی برای آنکه $\sup A = \infty$ آنست که، بازاء هر عدد حقیقی مانند u، A عضوی بزرگتر از u داشته باشد.
II. شرط لازم و کافی برای آنکه $\inf A = -\infty$ آنست که، بازاء هر عدد حقیقی مانند v، A عضوی کوچکتر از v داشته باشد.

۷.۴. دستگاه مُنْبَسِط اعداد حقیقی[۱]**.** اعمال جمع و ضرب را میتوان تا حدی، بر طبق قراردادهای مناسب، در $\mathbf{R}^*$ تعمیم داد، اما نمیتوان این اعمال را چنان وسعت داد که همه‌ی خواص عادی خود را حفظ کنند، و در عین حال، اعمالی در $\mathbf{R}^*$ باشند.
روش عادی مجهز کردن $\mathbf{R}^*$ با اعمال $+$ و $\times$ اینست که در میان اعضای متناهی $\mathbf{R}^*$ (یعنی در میان اعداد حقیقی) بر طبق قواعد مربوط به دستگاه اعداد حقیقی عمل میکنیم، و با ∞ و $-\infty$ بر طبق قواعد قراردادی آتیه. مجموعه‌ی مرتب $\mathbf{R}^*$ را با اعمالی که جزءاً در آن تعریف شده‌اند دستگاه منبسط اعداد حقیقی میخوانیم، و آن را، تسامحاً، به $(\mathbf{R}^*; +, \times; <)$ نمایش میدهیم.
اینک قواعد قراردادی اعمال:

۷.۴.۱. قواعد جمع جبری. اولاً[۲]،
$$\infty + \infty = \infty;$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty.$$
ثانیاً، بازاء هر **عدد حقیقی** a،
$$a + \infty = \infty + a = \infty;$$
$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = a - \infty = -\infty + a = -\infty.$$

۷.۴.۲. قواعد ضرب. بازاء هر **عضو** $\mathbf{R}^*$ مانند a، اولاً[۲]، اگر $0 < a$ آنگاه
$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty;$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty.$$
ثانیاً، اگر $a < 0$ آنگاه
$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty;$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty.$$
بالاخص،

---

(۱) این قسمت تا ۷.۴.۹ در فصل حاضر مورد نیاز نیست.
(۲) این امر منجر به تناقض میشود. مثلاً، در این صورت، $\infty + \infty \in \mathbf{R}^*$ و $\infty + \infty < \infty + 0 = \infty$. پس، $\mathbf{R}^*$ عضوی $(\infty + \infty)$ بزرگتر از ∞ خواهد داشت، و این با ۷.۲.۶ متناقض است.

$$\infty \cdot \infty = \infty; \qquad (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty;$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty)\cdot \infty = -\infty.$$

۷.۴.۳. عبارات بیمعنی. عبارات آتیه را تعریف نمیکنیم[1]، و لهذا، بیمعنی هستند. اولاً،

$$\infty - \infty; \quad \infty + (-\infty); \quad -\infty + \infty; \quad (-\infty) + \infty.$$

ثانیاً[2]،

$$0 \cdot \infty; \qquad \infty \cdot 0; \qquad 0 \cdot (-\infty) \qquad (-\infty)\cdot 0.$$

ثالثاً،

$$\frac{\infty}{\infty}; \qquad \frac{\infty}{-\infty}; \qquad \frac{-\infty}{\infty}; \qquad \frac{-\infty}{-\infty}.$$

رابعاً[3]، بازاء $a \in \mathbf{R}$،

$$\frac{a}{\infty}, \qquad \frac{a}{-\infty}.$$

بنا بر این، مثلاً، توزیعپذیری عمل $\times$ نسبت به عمل $+$ در $\mathbf{R}^*$ برقرار نیست، زیرا

$$(2-1)\cdot\infty = 1\cdot\infty = \infty,$$

ولی

$$2\cdot\infty - 1\cdot\infty = \infty - \infty,$$

و عبارت اخیر بیمعنی است.

۷.۴.۴. تبصره. بنا بر تعریفات مذکور، بازاء هر a و b از $\mathbf{R}^*$، اگر $a+b$ (ab) معنی داشته باشد آنگاه $a+b \in \mathbf{R}^*$ ($ab \in \mathbf{R}^*$).

۷.۴.۵. تمرین

۱. فرض کنیم $a, b \in \mathbf{R}^*$. ثابت کنید که اگر $b = \infty$ ($b = -\infty$) و $a+b$ معنی داشته باشد آنگاه $a+b=\infty$ ($a+b=-\infty$).

۲. نظیر حکم فوق را در مورد ضرب بیان و ثابت کنید.

۷.۴.۶. تبصره در تعمیم احکام. بعضی از روابط مشتمل بر اعمال را که در $\mathbf{R}$ ثابت شده‌اند، با قید «با معنی بودن» بر طبق تعریفات ۷.۴.۱_۷.۴.۳، میتوان در $\mathbf{R}^*$ تعمیم داد. این قید برای اینست که راه ورود عباراتی که در ۷.۴.۳ بیمعنی شمرده شده‌اند مسدود شود. به عنوان مثال، دو قضیه‌ی مفید ذیل را میآوریم.

---

(۱) اگر _ استثناءاً _ از این قرار عدول کنیم تصریح خواهیم کرد.
(۲) بعضی از مؤلفین عبارات مذکور را مساوی 0 تعریف میکنند.
(۳) بعضی از مؤلفین عبارات مذکور را مساوی 0 تعریف میکنند.

۷.۴.۷. قضیه. اگر

$$(\text{آ}) \qquad a, b, c, d \in \mathbf{R}^*,$$

$$(\text{ب}) \qquad a \leqslant b, \qquad\qquad (\text{پ}) \qquad c \leqslant d$$

آنگاه

$$(*) \qquad a + c \leqslant b + d$$

مشروط بر اینکه $a + c$ و $b + d$ معنی داشته باشند.

برهان. قبلاً ملاحظه میکنیم که معنی داشتن $a + c$ ($b + d$) موقوف به اینست که اگر یکی از a و c (b و d) مساوی ∞ است دیگری مساوی $-\infty$ نباشد، و اگر یکی از آنها مساوی $-\infty$ است دیگری مساوی ∞ نباشد.

اینک (آ)، (ب)، و (پ) را مفروض میگیریم، و نیز فرض میکنیم $a + c$ و $b + d$ معنی داشته باشند، و بر حسب مقادیر a و c سه حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $a = -\infty$. بنا بر فرض معنی داشتن، $a + c = -\infty$ و $b + d \in \mathbf{R}^*$. پس بنا بر ۷.۲.۶، (*) برقرار است.

اثبات در حالتی که $c = -\infty$ به همین قیاس است.

حالت دوم: $a = \infty$. بنا بر (ب)، $b = \infty$. پس، بنا بر فرض با معنی بودن، طرفین (*) مساوی ∞ میباشند، و این نامساوی برقرار است.

اثبات در حالتی که $c = \infty$ به همین قیاس است.

حالت سوم: $a, c \in \mathbf{R}$. بنا بر (ب) و (پ)،

$$b \in \mathbf{R} \vee b = \infty, \qquad\qquad d \in \mathbf{R} \vee d = \infty.$$

اگر $b = \infty$ یا $d = \infty$ آنگاه $b + d = \infty$، و (*) بنا بر ۷.۲.۶ برقرار است. در غیر این صورت، $b \in \mathbf{R}$ و $d \in \mathbf{R}$، و (*) به موجب III : ۲.۳.۳ : ۵ برقرار میباشد. ▲

۷.۴.۸. قضیه. اگر

$$a, b, \lambda \in \mathbf{R}^*, \quad a \leqslant b, \quad \lambda \geqslant 0$$

آنگاه

$$\lambda a \leqslant \lambda b$$

مشروط بر اینکه حاصلضربهای مذکور در طرفین معنی داشته باشند.

اثبات بر عهده‌ی متعلم است.

۷.۴.۹. تمرین

۰۱ اگر $a, b \in \mathbf{R}^*$ آنگاه $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ مشروط بر اینکه $a + b$ معنی داشته باشد.

۰۲ اگر $a, b \in \mathbf{R}^*$ آنگاه $|ab| = |a| \cdot |b|$ مشروط بر اینکه عبارات واقع در طرفین معنی داشته باشند.

۰۳ بنا بر تعریف[۱]،

$$\infty^{+} = \infty, \quad \infty^{-} = 0, \quad (-\infty)^{+} = 0, \quad (-\infty)^{-} = \infty.$$

ثابت کنید که بازاءِ هر x از $\mathbf{R}^*$،

$$x = x^{+} - x^{-}, \qquad |x| = x^{+} + x^{-}.$$
$$x^{-} = (-x)^{+}, \qquad x^{+} = (-x)^{-}$$

۸ § بازه‌های اعداد حقیقی

بازه‌های اعداد حقیقی یا، مختصراً، بازه‌ها، از مجموعکهای بسیار مهم $\mathbf{R}$ هستند. در این قسمت، تعریف و بعضی از خواص اساسی آنها را میآوریم.

۸.۱. تعریفات

۸.۱.۱. بازه‌ها(ی محدود). بازاءِ دو عدد حقیقی a و b که $a < b$، هر یک از چهار مجموعه‌ی ذیل را یک بازه‌ی a و b خوانیم:

$$\{x \mid a < x < b\}, \quad \{x \mid a \leqslant x < b\}, \quad \{x \mid a < x \leqslant b\}, \quad \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

چون هر یک از این مجموعه‌ها مجموعه‌ی محدودی از اعداد حقیقی است، بازه‌های مذکور را بازه‌های محدود هم میخوانیم.

نظر به اهمیت فراوان بازه‌ها در آنالیز، برای هر یک از انواع بازه‌ها علامت خاصی وضع شده است[۲]، از این قرار:

(a, b) به معنی $\{x \mid a < x < b\}$،

$[a, b)$ به معنی $\{x \mid a \leqslant x < b\}$،

$(a, b]$ به معنی $\{x \mid a < x \leqslant b\}$،

$[a, b]$ به معنی $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

در هر یک از این بازه‌ها، a را انتهای چپ، b را انتهای راست، $(a+b)/2$ را وسط، و $b - a$ را طول بازه نامیم. هر عضو یک بازه را جز دو انتهای آن یک عضو (یا نقطه‌ی) داخلی بازه خوانیم. بازه‌ی (a, b) را بازه‌ی باز a و b و بازه‌ی $[a, b]$ را بازه‌ی بسته a و b نامیم.

۸.۱.۲. بازه‌های نامحدود. مجموعه‌ی $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ (یعنی $\mathbf{R}$) و نیز،

---

(۱) ۱ : ۱۰ : ۵ ملاحظه شود.

(۲) در بعضی از کتابها، در مورد سه بازه‌ی اول، به جای اسامی مذکور در متن، به ترتیب از چپ به راست، این اسامی را بکار میبرند:

$$]a, b[, \qquad [a, b[, \qquad]a, b].$$

بازاء عدد حقیقی a، هر یک از مجموعه‌های

$$\{x \mid x \leqslant a\}, \qquad \{x \mid x < a\}, \qquad \{x \mid a \leqslant x\}, \qquad \{x \mid a < x\}$$

از اعداد حقیقی را یک بازه‌ی نامحدود نامیم. ملاحظه کنید که اعضای این بازه‌ها اعداد حقیقی هستند، و لاغیر.

چون هر عدد حقیقی بزرگتر از $\infty -$ و کوچکتر از ∞ است، برای بازه‌های مذکور، علامات خاصی به قیاس آنچه در ۸.۱.۱ گذشت وضع میکنیم، از این قرار:

$(-\infty, \infty)$ به معنی $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ یا $\mathbf{R}$،
(a, ∞) به معنی $\{x \mid a < x\}$،
$[a, \infty)$ به معنی $\{x \mid a \leqslant x\}$،
$(-\infty, a)$ به معنی $\{x \mid x < a\}$،
$(-\infty, a]$ به معنی $\{x \mid x \leqslant a\}$.

تعریف دو انتهای چپ و راست این بازه‌ها مانند سابق است. بازه‌های $(-\infty, \infty)$، (a, ∞) و $(-\infty, a)$ بازه‌های باز خوانده میشوند[۱].

۸.۱.۳. امثله

(آ). بازه‌ی باز $(-1, 3)$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین $1-$ و 3 است. اعداد $-1/2$، 0، و 2 تعلق به این بازه دارند، ولی $-1 \notin (-1, 3)$. وسط بازه نقطه‌ی $(-1+3)/2$ (یعنی 1) میباشد. طول بازه $3-(-1)$ (یعنی 4) است. بالاخره، همه‌ی نقاط بازه نقاط داخلی هستند.

(ب). بازه‌ی $(2, \infty)$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگتر از 2 است، و مجموعه‌ی $(-\infty, 3]$ بازه‌ی اعداد حقیقی نابیشتر از 3. علامات $(2, \infty]$، $[-\infty, 3]$، و $(-\infty, \infty]$، چون تعریف نشده‌اند، بیمعنی محسوب میشوند.

۸.۱.۴. تبصره در باب تعریفات

I. در مورد بازه‌های محدود، باید توجه داشت که ما «بازه‌ی a و b» را به فرض اینکه $a < b$ تعریف کردیم. در بعضی کتابها، به فرض اینکه $a \leqslant b$ اکتفا میکنند. در این صورت، اگر $a = b$ آنگاه بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ یک مجموعه‌ی یکانی ($\{a\}$ یا $\{b\}$) است، و سایر بازه‌ها خالی هستند؛ چنین «بازه» را بازه‌ی تَبَهْگِن نامیم.

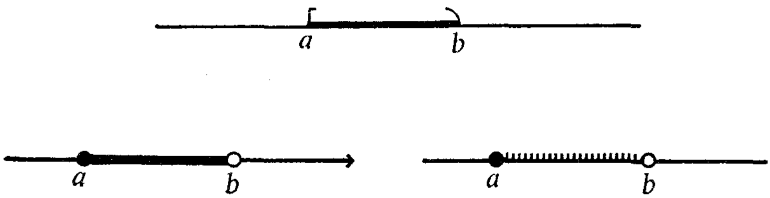
II. توجه کنید که ما «بازه‌ی بسته‌ی نامحدود» تعریف نکرده‌ایم. پس، هر جا از بازه‌ی بسته سخن میرود محدود بودن در آن مستتر است. همچنین است در مورد بازه‌ای که از طول یا از وسط آن سخن میرود.

---

(۱) تعریف بازه‌ها در $\mathbf{R}^*$ نیز میسر است: کافی است در تعریفات ۸.۱.۱، a و b را اعضای $\mathbf{R}^*$ و x را مقید به $\mathbf{R}^*$ بگیریم. این گونه بازه‌ها ممکن است شامل ∞ یا $\infty -$ باشند، مانند $[-\infty, \infty]$ (که همان $\mathbf{R}^*$ است)، و $[0, \infty]$، و غیره.

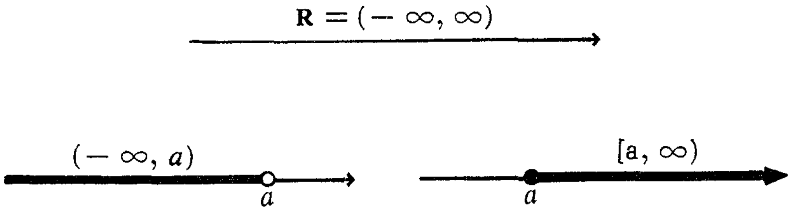
III. وقتی کـه انتهائی از یک بازه بـدان تعلق دارد (نـدارد) بازه را از آن طرف بسته (باز) توان خواند. مثلاً، بازه‌ی $[a, b)$ از طرف چپ باز است، و از طرف راست بسته.

۸.۱.۵. نمایش هندسی. در نمایش هندسی $\mathbf{R}$ بر یک محور، بازه‌ی a و b با نقاط قطعه خط مستقیم ab با دو انتهـای a و b، و خـارج کـردن هر یک از نقاط a و b کـه عضو بازه نیست، نمـایش داده میشود. در شکل ۳۶، چند طـریق نمـایش دادن بازه‌ی $[a, b)$ مـلاحظه میشود.



شکل ۳۶

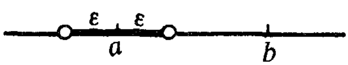
نمایش بازه‌های نامحدود به همین قیاس است (شکل ۳۷).



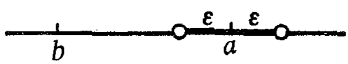
شکل ۳۷

نمایش هندسی بازه‌ها راهنمای کشف بعضی از خواص بازه‌ها، و نیز راهنمای **(نه جایگزین)** اثبات این خواص است. چنانکه از مثال آتیه معلوم میشود.

۸.۱.۶. مثال. فرض کنیم a و b دو عدد متمایز باشند. از تصاویر ۳۸ و ۳۹ چنین مینمـاید



شکل ۳۸



شکل ۳۹

که بـازه‌ی بازی هست که a وسط آنست و b در خارج آن. برای اثبات این حکم، شکل چنین راهنمائی میکند که بازه‌ی مطلوب را باید در طرفین a جدا کرد بطوری که نصف طول هندسی آن از فاصلـه‌ی a و b تجاوز نکند. اینک حکم را بـدون استعانت شکل ثابت میکنیم. بنـا

بفرض، $b - a \neq 0$. پس، $d = | b - a | > 0$. فرض میکنیم ε عدد مثبتی کوچکتر از d باشد، و بازه‌ی $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ر اختیار میکنیم. بالبداهه a وسط این بازه است. بعلاوه، b به این بازه تعلق ندارد، والا خواهیم داشت $a - \varepsilon < b < a + \varepsilon$، و از آنجا، $-\varepsilon < b - a < \varepsilon$، و بالنتیجه $| b - a | < \varepsilon$، و این با تعریفِ ε متناقض است. ▲

۸.۱.۷. تمرین[1]

۱. بنا برآنکه $a < b$ و $c < d$، مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه یکی از بازه‌های c و d مجموعک یکی از بازه‌های a و b باشد.

۲. بنا بـر آنکه $a \leqslant b$، تعیین کنید کدام یک از روابط $=$، $\neq$، $\subseteq$، و $\subset$ بین بازه‌های آتیه دوبدو برقرار است:

$$(-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad (a, \infty), \quad [a, \infty),$$
$$(-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (b, \infty), \quad [b, \infty).$$

۳. هر بازه‌ی باز محدود جزء بازه‌ی باز محدودی است که دو انتهایش متقابل یکدیگرند.

۴. هر نقطه از بازه‌ی باز I وسط بازه‌ی بازی است که مجموعک حقیقی I است.

۵. a و b دو عدد حقیقی متمایز دلخواهند. ثابت کنید که

(آ) بازه‌ی بسته‌ای وجود دارد که a وسط آنست، و b بدان تعلق ندارد.

(ب) دو بازه‌ی بسته‌ی جدا از هم هست که a وسط یکی و b وسط دیگری است.

۶. a و b دو عدد متمایزند، و a به بازه‌ی باز I تعلق دارد. ثابت کنید که بازه‌ی بازی مانند J هست که، در عین حال، $J \subseteq I$، و a وسط J است، و $b \notin J$.

۸.۲. خاصیت مشخصه‌ی بازه‌ها. از نمایش هندسی چنین بنظر میرسد که بازه‌ها مجموعه‌هائی «مرتبط» هستند: اگر x و y دو نقطه‌ی متمایز از بازه‌ای باشند، بدون خارج شدن از آن بازه، میتوان از x به y رفت. بیان دقیق این مطلب مستلزم تعریف مرتبط بودن مجموعه‌ای از اعداد است:

۸.۲.۱. تعریف. مجموعه‌ی A از اعداد حقیقی را مرتبط خوانیم در صورتی که همواره اگر x و y متعلق به A باشند هر عدد بین x و y نیز متعلق به A باشد.

۸.۲.۲. قضیه. هر بازه از اعداد حقیقی، اعم از محدود یا نامحدود، مجموعه‌ای است مرتبط.

اثبات به وسیله‌ی خواص مقدماتی نامساویها است، و به متعلم محول میشود.

واضحست که همه‌ی مجموعه‌های اعداد حقیقی مرتبط نیستند. مثلاً مجموعه‌ی $\{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid -1 < x \leqslant 1\}$، که نمایش آن در شکل ۴۰ دیده میشود، نامرتبط است. مرتبط بودنْ خاصیت مشخصه‌ی بازه‌های اعداد حقیقی است، بدین معنی که نه

---

(۱) هر یک از مسائل را، پس از حل، با مثال عددی و نمایش هندسی توضیح دهید.

فقط هر بازه مرتبط است، بلکه

شکل ۴۰

۸.۲.۳. قضیه. هر مجموعه‌ی مرتبط از اعداد حقیقی که بیش از یک عضو داشته باشد بازه است (محدود یا نامحدود).

برهان. فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}$ و A مرتبط و حد اقل دارای دو عضو باشد، و $a = \inf A$ و $b = \sup A$. چون A حد اقل دو عضو دارد، $a < b$ (چرا؟). حال ثابت میکنیم که A بازه‌ای است که انتهای چپش a و انتهای راستش b است. اثبات به طریق حالات است.

حالت اول: A از بالا و پایین نامحدود است. در این حالت، $a = -\infty$ و $b = \infty$، و باید ثابت کرد که $A = (-\infty, \infty) = \mathbf{R}$. چون $A \subseteq \mathbf{R}$، کافی است ثابت کنیم که $\mathbf{R} \subseteq A$. فرض کنیم x عدد دلخواهی باشد. چون $-\infty < x < \infty$، بنا بر خواص مشخصه‌ی سوپرموم و اینفیموم (۷.۳.۲)، A اعضائی مانند c و d دارد که $c < x < d$. پس، بنا بر فرض مرتبط بودن، $x \in A$. بالنتیجه، $\mathbf{R} \subseteq A$، و لهذا، $A = \mathbf{R}$.

حالت دوم: A از بالا محدود و از پایین نامحدود است. در این حالت، $a = -\infty$ و $b \in \mathbf{R}$. چون هر x از A در $x \leqslant b$ صدق میکند، $A \subseteq (-\infty, b]$ (۱). حال ثابت میکنیم که $(-\infty, b) \subseteq A$ (*). اگر x عضو دلخواهی از $(-\infty, b)$ باشد $-\infty < x < b$. بالنتیجه، A اعضائی مانند c و d دارد که $c < x < d$. پس، $x \in A$، و لهذا، (*) برقرار است. بنا بر (۱) و (*)، اگر $b \in A$ آنگاه $A = (-\infty, b]$، و اگر $b \notin A$ آنگاه $A = (-\infty, b)$.

حالت سوم: A از پایین محدود و از بالا نامحدود است. مانند حالت قبل معلوم میشود که اگر $a \in A$ آنگاه $A = [a, \infty)$، و اگر $a \notin A$ آنگاه $A = (a, \infty)$.

حالت چهارم: A محدود است. در این حالت، $a, b \in \mathbf{R}$. بازاء هر x از A، $a \leqslant x \leqslant b$، و لهذا، $A \subseteq [a, b]$ (۱). حال گوئیم $(a, b) \subseteq A$ (†). زیرا، اگر x عضو دلخواهی از (a, b) باشد خواهیم داشت $a < x < b$. پس، A اعضائی مانند c و d دارد که $c < x < d$، و بالنتیجه $x \in A$، و (†) برقرار است. اتمام مانند حالات سابق است. ▲

۸.۳. اعمال بر بازه‌ها. چون بازه‌ها مجموعه‌هائی هستند، میتوان آنها را به‌وسیله‌ی اعمالی که در § ۳ فصل ۲ تعریف کردیم با هم ترکیب کرد. نمایش هندسی در مختصر کردن حاصل عمل مفید است؛ در این طریقه، به انتهاهای بازه‌ها باید توجه خاص مبذول کرد. مثلاً، اگر $I = (0, 1)$ و $J = (1, 3)$، چنانکه از شکل ۴۱ معلوم است، $I \cap J = \varnothing$. اثبات این

شکل ۴۱

رابطه آسان است: اگـر I و J عضـو مشترکـی، مثـلاً x، داشته باشند آنگـاه، در عین حال، $1 > x > 0$ و $3 > x > 1$، و ایـن ممتنع است. از طـرف دیگـر، اگـر $K = (0, 3)$ و $L = (1, 4)$ (شکل ۴۲) آنگاه مقطع I و J بازه‌ی $(1, 3)$ میباشد (ثابت کنید).

شکل ۴۲

مثالهای فوق چنین به ذهن القا میکنند که مقطع دو بازه‌ی باز خالی یا بازه‌ای بـاز است. ذیلاً اثبات این حکم مهم را میآوریم.

۸.۳.۱. قضیه. مقطع دو بازه‌ی باز (اعم از محدود یـا نامحدود) یا خـالی است یا بازه‌ای باز. (بالنتیجه، اگر دو بازه‌ی باز دارای یک نقطه‌ی مشترک باشند مقطعشان یک بازه است.)

برهان. فـرض کنیم $I' = (a', b')$ و $I'' = (a'', b'')$ دو بازه‌ی باز دلخواه باشند. بـرای اینکه استدلال کلیت داشته باشد، متغیرهای فردی a'، b'، a''، و b'' را به $\mathbf{R}^*$ مقید میکنیم. حـال اگر $I' \cap I'' = \varnothing$ فبها. پس، فرض میکنیم $A = I' \cap I'' \neq \varnothing$ (۱)، و ثابت میکنیم که A بازه‌ای است باز. به عبارت دقیقتر، به فرض آنکه

$$(۲) \qquad a = \mathrm{Max}\,\{a', a''\}, \qquad\qquad (۳) \qquad b = \min\,\{b', b''\},$$

ثابت میکنیم که $a < b$ (*) و $A = (a, b)$ (†).

بنا بر (۱)، عددی حقیقی مانند x هست که $x \in I'$ و $x \in I''$. بنا بر تعریف I' و I''،

$$(۴) \qquad a' < x < b', \qquad\qquad (۵) \qquad a'' < x < b''.$$

پس، بـا تـوجه به (۲) و (۳)، $a < x$ و $x < b$، و بالنتیجه، $a < b$، و این همـان (*) است.

بـرای اثبات (†)، ملاحظه میکنیم که، اولاً، در ضمن استدلال فوق معلوم شد که، بازاء هر x از A، $a < x < b$. پس، $A \subseteq (a, b)$. بالعکس، اگر $x \in (a, b)$ آنگاه $a < x$ و $x < b$. پس، بنا بر (۲)، $a' < x$ و $a'' < x$، و بنا بر (۳)، $x < b'$ و $x < b''$. بالنتیجه، $x \in I'$ و $x \in I''$. پس، بنا بر (۱)، $x \in A$، و لهذا، $(a, b) \subseteq A$. ▲

تعمیم قضیه‌ی فوق در مورد تعدادی متناهی از بازه‌ها آسان است.

اثبات قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود:

۸.۳.۲. قضیه. مقطع دو بـازه‌ی بسته کـه یک نقطه‌ی داخلی مشترک داشته باشند بازه‌ای بسته است.

۸.۳.۳. امثله و فواید

(آ). فرض کنیم $I = (-3, 1)$ و $J = (-1, 2)$. چون $\mathrm{Max}\,\{-3, -1\} = -1$

و $\min\{1, 2\} = 1$، خواهیم داشت، $I \cap J = (-1, 1)$.
همچنین، $(-\infty, 0) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$، زیرا

$$\operatorname{Max}\{-\infty, -\infty\} = -\infty, \qquad \min\{0, -1\} = -1.$$

(د). اگر (a, b) و (a', b') دو بازه‌ی باز باشند، و

$$\min\{b, b'\} \leqslant \operatorname{Max}\{a, a'\}$$

آنگاه $(a, b) \cap (a', b') = \varnothing$ (چرا؟). مثلاً،

$$(-\infty, 0) \cap (1, 2) = \varnothing$$

(ه). قضیه‌ی ۸.۳.۱ در مورد بازه‌های بسته کلیت ندارد، بدین معنی که مقطع دو بازه‌ی بسته ممکن است نه خالی باشد و نه بازه‌ای بسته باشد. همچنین، قضیه‌ی ۸.۳.۲ با اسقاط قید «داخلی» برقرار نیست. مثلاً، اگر $I = [-1, 3]$ و $J = [3, 2]$ آنگاه $I \cap J = \{3\}$.

۸.۳.۴. تحویل به حد اقل بازه‌ها. معمولاً، مجموعه‌ی حاصل از اعمال بر چند بازه را به صورت اتحادیه‌ای از بازه‌ها در میآوریم، و در این اتحادیه، اتحادیه‌ی هر چند بازه را که میشود به یک بازه تحویل میکنیم. بدین گونه، حاصل مورد نظر به صورت یک بازه (واقعی یا تبهگن) یا اتحادیه‌ای از چند بازه درمیآید که، در حالت اخیر، این بازه‌ها دوبدو از هم جدا هستند، و اتحادیه‌ی هیچ دو از آنها بازه نیست. این تحویل را تحویل به حد اقل بازه‌ها نامیم.

تحویل به حد اقل بازه‌ها به وسیله‌ی قواعد حساب مجموعه‌ها، تعریف بازه‌ها، قضیه‌ی ۸.۳.۱، و قواعد مربوط به نامساویها انجام میگیرد، چنانکه از امثله‌ی ذیل معلوم خواهد شد.

۸.۳.۵. امثله

(آ). فرض کنیم $a < b < c$ (۱).
اگر $I = (a, b]$ و $J = (b, c)$ بازه‌های I و J از هم جدا هستند ($I \cap J = \varnothing$)، ولی اتحادیه‌ی آنها بازه‌ی $K = (a, c)$ است:

$$(a, b] \cup (b, c) = (a, c).$$

زیرا اگر x عضو دلخواهی از $I \cup J$ باشد آنگاه $a < x \leqslant b$ یا $b < x < c$، و در هر حال، بنا بر (۱)، $a < x < c$، و لهذا، $x \in K$. بالعکس، به آسانی دیده میشود که اگر x عضو دلخواهی از K باشد آنگاه $x \in I$ یا $x \in J$.

بازه‌های (a, b) و (b, c) نیز از هم جدا هستند، ولی اتحادیه‌ی آنها، یعنی مجموعه‌ی $(a, b) \cup (b, c)$، بازه نیست، زیرا $(a + b)/2$ و $(b + c)/2$ به این مجموعه تعلق دارند، اما b (که بین آنهاست) بدان تعلق ندارد.

(ب). تحویل مجموعه‌ی $A = (1, 3) \cap [(-\infty, -1) \cup [2, \infty)]$ به حد اقل بازه‌ها.
بنا بر توزیعپذیری $\cap$ نسبت به $\cup$،

$$A = [(1, 3) \cap (-\infty, -1)] \cup [(1, 3) \cap [2, \infty)] = \varnothing \cup [2, 3) = [2, 3).$$

(پ). تحویل مجموعه‌ی $A = \overline{(-3, 1]}$ (متمم بازه‌ی $(-3, 1]$) به حد اقل بازه‌ها.
بازه‌ی $(-3, 1]$ با گزاره‌نمای $-3 < x \leqslant 1$، که به معنی $-3 < x \;\&\; x \leqslant 1$ است،

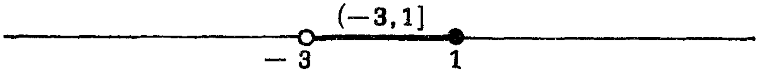
مشخص میشود. پس

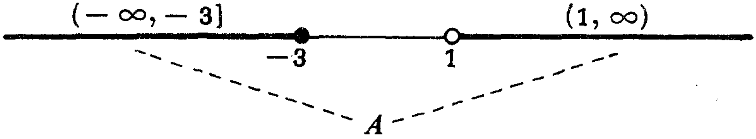
$$A = \{x \mid \sim(-3 < x \;\&\; x \leqslant 1)\}.$$

بر طبق معادله‌ی د مورگن (۲.۸.۳ : ۱)، گزاره‌نمای $\sim(-3 < x \;\&\; x \leqslant 1)$ معادل گزاره‌نمای $\sim(-3 < x) \vee \sim(x \leqslant 1)$ است، که خود معادل گزاره‌نمای $x \leqslant -3 \vee x > 1$ میباشد. پس، با توجه به تعریف اتحادیه،

$$A = \{x \mid x \leqslant -3 \vee x > 1\} = \{x \mid x \leqslant -3\} \cup \{x \mid x > 1\}$$
$$= (-\infty, -3] \cup (1, \infty).$$

ملاحظه کنید که مجموعه‌ی اخیر بازه نیست، زیرا، مثلاً -3 و 2 بدان تعلق دارند، ولی 0، که بین آنهاست، نسبت به آن خارجی است (شکل ۴۳).





(شکل ۴۳).

۸.۳.۶. تمرین

۱. هر یک از مجموعه‌های ذیل را به حد اقل بازه‌ها تحویل کنید.

(آ) $[-1, 3) \cup (2, 4)$. (ب) $(4, 7] \cup (6, 10)$.
(پ) $[3, 11) \cap (7, 12]$. (ت) $(3, 11) \cap [7, 12]$.
(ث) $[3, 11) \cap [7, 12]$. (ج) $(3, 11] - (4, 11]$.
(چ) $[3, 11] - [3, 5]$. (ح) $(3, 11) - (4, 12)$.

۲. بنا بر آنکه $A = (0, 2)$، $B = (1, 5)$، و $C = [4, 5)$، مجموعه‌های مذکور در مسئله‌ی ۱ : ۲.۳.۱.۸ را به حد اقل بازه‌ها تحویل کنید.

۳. مقطع و اتحادیه‌ی بازه‌های $A = (3, 5)$، $B = (3{,}5, 4{,}5)$، $C = (3{,}9, 4{,}1)$، $D = (3{,}99, 4{,}01)$، و $E = (3{,}999, 4{,}001)$ را به حد اقل بازه‌ها تحویل کنید.

۴. بنا بر آنکه $A = (1, 3)$، $B = [3, 5]$، و $C = (5, 6)$، مجموعه‌های $A \cup B$، $B \cup C$، و $A \cap B$ و متمم هر یک را به حد اقل بازه‌ها تحویل کنید.

۵. هر یک از این مجموعه‌ها و متمم آن را به حد اقل بازه‌ها تحویل کنید.

(آ) $A = (-\infty, 1) \cap [-2, 0)$.
(ب) $B = (-\infty, 1) \cap (-2, 0)$.
(پ) $C = (-\infty, 1) \cap (2, \infty)$.
(ت) $D = (-\infty, 1) \cap (-1, \infty)$.
(ث) $A \cap B$.

(ج) $A \cup B$.

(چ) $A \cap \bar{C}$.

(ح) $A \cap \bar{D}$.

(خ) $(-\infty, 2] \cap (\sqrt{2}, \infty)$.

(د) $(\sqrt{2} - 1, \infty) \cap (-\infty, -\sqrt{2} - 1)$.

(ذ) $(-\infty, \sqrt{2} - 1) \cap (-\sqrt{2} - 1, \infty)$.

(ر) $[(\sqrt{2} + \sqrt{3}, 6) \cup (\sqrt{2} + \sqrt{3}, \infty)] \cap$
$[(-\infty, -1) \cup (-3, -\sqrt{2})]$.

۹ § نامساویهای یک مجهولی

۹.۱. کلیّات. فرض کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو اسمنما باشند، و متغیر فردی آنها منحصر به x باشد. نامساویهای (گزاره‌نماهای)

(I) $P(x) < Q(x)$; (II) $P(x) \leqslant Q(x)$;

(III) $P(x) > Q(x)$; (IV) $P(x) \geqslant Q(x)$

را نامساویهای یک مجهولی نامند. مجموعه‌ی صدق (۲.۴ : ۲) نامساوی (I) مجموعه‌ی $\{x \mid P(x) < Q(x)\}$ است، و هکذا در مورد سه نوع دیگر. اگر مجموعه‌ی صدق یک نامساوی خالی باشد (مانند نامساوی $x^2 + 1 < 0$) گویند نامساوی ممتنع است، و الا ممکن. در نامساویهائی که در این قسمت از آنها سخن میرود مجموعه‌ی صدق هر نامساوی اتحادیه‌ی تعدادی متناهی از بازه‌ها است، و مقصود از حل نامساوی تحویل مجموعه‌ی صدق آن به حد اقل بازه‌ها میباشد. هر عضو مجموعه‌ی صدق یک نامساوی را یک جواب آن، و هر یک از بازه‌های حاصل از تحویل مجموعه‌ی صدق یک نامساوی را یک دسته جواب آن نامند.

۹.۱.۱. امثله

(آ). حل نامساویهای صحیح درجه‌ی اول شبیه معادلات صحیح درجه‌ی اول است با رعایت قواعد مربوط به نامساویها. مثلاً، برای حل نامساوی $2x - 3 < 0$، گوئیم این نامساوی معادل نامساوی $2x < 3$ است که خود معادل نامساوی $x < 3/2$ میباشد. بالنتیجه، مجموعه‌ی صدق نامساوی مذکور، یعنی مجموعه‌ی جوابهای آن، عبارتست از

$$\{x \mid 2x - 3 < 0\} = \{x \mid x < 3/2\} = (-\infty, 3/2).$$

پس، نامساوی مورد بحث یک دسته جواب دارد.

به همین قیاس دیده میشود که

$$\{x \mid 0 < x - 1\} = \{x \mid 1 < x\} = (1, \infty);$$
$$\{x \mid 2x - 3 \leqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 3/2\} = (-\infty, 3/2];$$
$$\{x \mid 0 \leqslant x - 1\} = \{x \mid 1 \leqslant x\} = [1, \infty).$$

(ب). نامساویهای $x^2 + 1 < 0$، $x^2 + 1 \leqslant 0$، و $x^4 + 1 < 0$ ممتنع‌اند، زیرا، طرف

اول هر یک، بازاء هر مقدار x، مثبت است. مجموعه‌ی صدق نامساویهای $x^2+1>0$، $x^2+1\geqslant 0$، و $x^4+1>0$ مساوی $\mathbf{R}$ یا $(-\infty, \infty)$ میباشد.

(پ). فرض کنیم $a\neq 0$ و $P(x)=ax^2+bx+c$. چنانکه از رابطه‌ی

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (\Delta=b^2-4ac)$$

معلوم است، اگر $\Delta<0$ آنگاه $P(x)$، بر حسب آنکه $a>0$ یا $a<0$، بازاء جمیع مقادیر x مثبت یا منفی است. پس، مثلاً، در حالت اول، نامساوی $P(x)<0$ ممتنع است، و مجموعه‌ی صدق نامساوی $P(x)>0$ بازه‌ی $(-\infty, \infty)$ میباشد.

۹.۱.۲. تمرین

۱. سلسله‌ی عملیاتی که برای تعیین مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $2x+5<9$ بکار میرود بدین ترتیب عرضه شده است:

(۱) $2x+5<9,$ (۲) $2x<9-5,$

(۳) $2x<4,$ (۴) $x<(4/2),$

(۵) $x<2.$

یکایک این مراحل را به استناد اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی و قضایای مستخرج از آنها توجیه کنید، و ثابت کنید که $x<2$ شرط لازم و کافی برای $2x+5<9$ است.

۲. مجموعه‌ی صدق هر یک از نامساویهای ذیل را تعیین کنید:

(آ) $2x-4<3.$ (ب) $2x-4\leqslant 3.$

(پ) $-3x+1>5.$ (ت) $-3x+1\geqslant 5.$

۳. بنا بر آنکه $a\neq 0$، مجموعه‌ی صدق هر یک از نامساویهای ذیل را در جمیع حالات ممکنه تعیین کنید:

(آ) $ax+b<0.$ (ب) $ax+b\leqslant 0.$

(پ) $ax+b>0.$ (ت) $ax+b\geqslant 0.$

۴. مجموعه‌ی صدق هر یک از نامساویهای ذیل را تعیین کنید:

(آ) $x^2+x+1<0.$ (ب) $x^2-x+1\geqslant 0.$

(پ) $2x^4+1\leqslant 0.$ (ت) $x>2x^2+1.$

(ث) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>0.$

۹.۱.۳. تبصره. چون نامساوی $P(x)<Q(x)$ معادل نامساوی $P(x)-Q(x)<0$ است، مجموعه‌های صدق این دو نامساوی با هم متساویند، و قس‌علیهذا در مورد سه نامساوی دیگر مذکور در آغاز ۹.۱. بنا بر این، در بحث از مجموعه‌ی صدق نامساویهای یک مجهولی، میتوان به نامساویهائی که طرف دوم آنها صفر است، یعنی نامساویهائی به صورتهای

$P(x)<0,$ $P(x)\leqslant 0,$

$P(x)>0,$ $P(x)\geqslant 0$

اکتفا کرد. بحث آتیه‌ی ما منحصر خواهد بود به نامساویهائی از این قبیل که در آنها $P(x)$ حاصلضرب عوامل خطی (یعنی از درجه‌ی اول نسبت به x) است، و به نامساویهائی قابل

تحـویل بـه این حالت. بالاخره، چون هر عامل خطی مانند $ax+b$ مساوی $a\left(x-\frac{-b}{a}\right)$ است، نامساویی از نوع مذکور را همواره میتوان به نامساویی معادل آن تبـدیل کـرد که طرف دومش صفر و طرف اولش یک «حاصلضرب رسمی» (بر طبق تعریف آتیه) باشد:

۹.۱.۴. تعریف[1]. عبارت

$$(*)\quad a(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n}=a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{k_i}$$

را، که تابع شرایط ذیل است، یک حاصلضرب رسمی خوانیم.

I. a، x_1، x_2، . . .، و x_n اعدادی ثابت (مستقل از x) میباشند، و $a\neq 0$.

II. $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

III. $k_1, k_2, \ldots, k_n\in\mathbf{N}$.

در حاصلضرب رسمی $(*)$، x_i (بازاء مقادیر 1، 2، . . .، و n از i) را ریشـه‌ی مـکرر مرتبه‌ی k_i حاصلضرب مذکور و k_i را مرتبه‌ی تکرار این ریشه خوانیم. ریشه‌ی بسیـط ریشه‌ای است که مرتبه‌ی تکرارش 1 باشد.

مثلاً، اسمنمای $-2(x+1)x^3(x-1)^2$ یک حاصلضرب رسمی است، و ریشه‌هـای آن عبارتند از 1 (با مرتبه‌ی تکرار 2)، 0 (با مرتبه‌ی تکرار 3)، و -1 (ریشه‌ی بسیط).

۹.۲. نامساویهای اکید و تعیین علامات. ابتدا نامساویهای اکید

$$\text{(I)}\quad P(x)<0,\qquad\qquad \text{(II)}\quad P(x)>0$$

را موضوع بحث قرار میدهیم. مسئله‌ی حل این نامساویها را میتوان به زبانی دیگـر بیان کرد: بنا بر ۳.۴ : ۵، نامساوی (I) با گزاره‌نمای $\operatorname{sgn} P(x)=-1$ و نامساوی (II) با گزاره‌نمای $\operatorname{sgn} P(x)=1$ معادل است. پس، برای حل نامساویهای مذکور، کـافـی است $\operatorname{sgn} P(x)$ را بازاء جمیع مقادیر x تعیین کنیم، و سپس، از میان این مقادیر، آنهائی را که به مجمـوعه‌ی صدق نامساوی مورد نظر تعلق دارند برگزینیم. تعییـن $\operatorname{sgn} P(x)$ در حالت مـورد بحث ما آسان است. قبلاً مثالهائی میآوریم.

۹.۲.۱. امثله

(آ). تعیین علامت حاصلضرب رسمی $P(x)=(x-x_1)^k$.

ریشه‌ی $P(x)$ عبارتست از x_1. بازاء این مقدار، $\operatorname{sgn} P(x)=0$. هر یک از مقادیر دیگر x تعلق دارد به یکی از بازه‌های باز $(-\infty, x_1)$ و (x_1, ∞)، کـه از هم جدا هستند، و اتحادیه‌ی آنها $\mathbf{R}-\{x_1\}$ است.

---

(۱) اصطلاح «حاصلضرب رسمی» را موقتاً در این قسمت برای تسهیل بیان و احتـراز از تکرار بکار میبریم.

به آسانی دیده میشود که $\operatorname{sgn} P(x)$ در هر یک از این بازه‌ها ثابت (مستقل از مقدار x در این بازه) و یا مساوی 1 یا مساوی -1 است: اگر $x \in (-\infty, x_1)$ آنگاه $x < x_1$، و بالنتیجه، $\operatorname{sgn}(x - x_1) = -1$ و $\operatorname{sgn}(x - x_1)^k = (-1)^k$؛ و اگر $x \in (x_1, \infty)$ آنگاه $\operatorname{sgn}(x - x_1) = 1^k = 1$. چنانکه ملاحظه میشود، $\operatorname{sgn} P(x)$ در بازه‌ی دوم 1 است، و در بازه‌ی اول، بر حسب اینکه k زوج یا فرد باشد، مساوی 1 یا -1.

(ز). تعیین علامت حاصلضرب رسمی $P(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2}$.

در اینجا $\operatorname{sgn} P(x_1) = \operatorname{sgn} P(x_2) = 0$. هر یک از مقادیر دیگر x تعلق به یکی از بازه‌های

$$(-\infty, x_1), \qquad (x_1, x_2), \qquad (x_2, \infty)$$

دارد، که دو بدو از هم جدا هستند، و اتحادیه‌ی آنها $\mathbf{R} - \{x_1, x_2\}$ است. اگر $x \in (-\infty, x_1)$ آنگاه x از x_1 (کوچکترین ریشه‌ی $P(x)$) و، به طریق اولی، از x_2 کوچکتر است. پس،

$$\operatorname{sgn}(x - x_1) = \operatorname{sgn}(x - x_2) = -1$$

و

$$\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} a \cdot (-1)^{k_1} \cdot (-1)^{k_2} = (-1)^{k_1 + k_2} . \operatorname{sgn} a.$$

اگر $x \in (x_2, \infty)$ آنگاه $\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} a$. بالاخره، اگر $x \in (x_1, x_2)$ آنگاه

$$x_1 < x < x_2, \quad \operatorname{sgn}(x - x_1) = 1, \quad \operatorname{sgn}(x - x_2) = -1.$$

پس،

$$\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} a \cdot 1^{k_1} \cdot (-1)^{k_2} = (-1)^{k_2} \cdot \operatorname{sgn} a.$$

چنانکه ملاحظه میشود، اولاً، در بازه‌ی آخر (بازه‌ای که، در آن، مقادیر x بزرگتر از بزرگترین ریشه‌های $P(x)$ هستند)، علامت $P(x)$ همان علامت a است؛ ثانیاً، $\operatorname{sgn} P(x)$ در دو بازه‌ی مجاور $(-\infty, x_1)$ و (x_1, x_2)، واقع در طرفین x_1، اگر k_1 زوج باشد یکسان است، و اگر k_1 فرد باشد متفاوت؛ ثالثاً، نظیر حکم دوم در مورد بازه‌های مجاور (x_1, x_2) و (x_2, ∞)، واقع در طرفین x_2، برقرار است.

(ح). به عنوان مثال عددی از نتایج حاصل در مثال (ز)، حاصلضرب رسمی

$$P(x) = -3(x+1)^3(x-2)^2$$

را اختیار میکنیم. ریشه‌های $P(x)$ عبارتند از -1 و 2؛

$$\operatorname{sgn} P(-1) = \operatorname{sgn} P(2) = 0.$$

اینک بازه‌های

$$(-\infty, -1), \qquad (-1, 2), \qquad (2, \infty)$$

را اختیار میکنیم. در بازه‌ی اخیر، $\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn}(-3) = -1$. پس، در بازه‌ی دوم، $\operatorname{sgn} P(x) = -1$، و در بازه‌ی اول، $\operatorname{sgn} P(x) = 1$. خلاصه‌ی این نتایج را میتوان در جدولی، موسوم به جدول علامت $P(x)$، که با آن مأنوس هستید، درج کرد. سطر اول، در واقع، نمایش خط حقیقی است، که بازه‌های مذکور، هر یک با دو انتهای خود، بر آن مشخص شده است. در سطر دوم، علامت $P(x)$ در هر بازه و در هر جواب $P(x)$ درج میشود.

x	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, \infty)$	∞
$\operatorname{sgn} P(x)$		1	0	-1	0	-1	

معمولاً وقتی که $\operatorname{sgn} P(x) = -1$ به نوشتن «$-$» (بجای «-1») اکتفا میکنند، و وقتی که $\operatorname{sgn} P(x) = 1$، بجای 1، علامت «$+$» را مینویسند.

از توضیحات مذکور حکم کلی ذیل استنباط میشود، که اثباتش بسیار سهل است، و آن را به متعلم محول میکنیم:

۹.۲.۲. قضیه (علامت حاصلضربهای رسمی). در حاصلضرب رسمی

$$P(x) = a \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{k_i}$$

اولاً،

$$\operatorname{sgn} P(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ثانیاً، $P(x)$ در سراسر هر یک از بازههای

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_i, x_{i+1}), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$$

همواره یکی و تنها یکی از علامات 1 و -1 را دارد، و بالاخص، در بازهی آخر، یعنی در بازهی مقادیر بزرگتر از بزرگترین ریشههای حاصلضرب مذکور،

$$\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} a.$$

ثالثاً، بازاء هر ریشه مانند x_i، $\operatorname{sgn} P(x)$ در دو بازهی مجاور واقع در طرفین x_i، اگر مرتبهی تکرار x_i زوج باشد یکسان است، و الا، در یکی از آنها 1 و در دیگری -1 است.

به وسیلهی این قضیه، مسائلی چند را میتوان ماشینوار حل کرد، چنانکه از امثلهی آتیه معلوم میشود.

۹.۲.۳. امثله و فواید

(آ). حل نامساویهائی که یک طرفشان یک حاصلضرب رسمی و طرف دیگرشان 0 است.

به عنوان مثال، نامساوی $-3(x+1)^3(x-2)^2 < 0$ را اختیار میکنیم. جدول علامت طرف اول در پ: ۹.۲.۱ دانسته شد. از این جدول معلومست که نامساوی دارای دو دسته جواب $(-1, 2)$ و $(2, \infty)$ میباشد. مجموعهی صدق نامساوی عبارتست از مجموعهی $(-1, 2) \cup (2, \infty)$، که مساوی مجموعهی $(-1, \infty) - \{2\}$ میباشد.

(ب). تعیین علامت عباراتی صحیح[1] و قابل تحویل به صورت حاصلضرب رسمی، و حل نامساویهای قابل تحویل به این مسئله.

---

(۱) در باب کسور، ۹.۵ ملاحظه شود.

از جملهٔ عبارات مذکور عباراتی هستند به صورت حاصلضرب یک حاصلضرب رسمی در اسمنماهائی که علامتشان، بازاء جمیع مقادیر x، 1 است (حالتی را که علامت همواره -1 باشد، با فاکتورگیری مناسب، میتوان به این حالت باز گردانید).

به عنوان مثال، نامساوی

$$(۱)\quad (-x^2 - x - 1)(1 - x^2)(-2x^2 + 3x - 1) > 0$$

را اختیار میکنیم، و ابتدا آن را به صورت ذیل، که معادل آنست، مینویسیم

$$(۲)\quad -(x^2 + x + 1)(x^2 - 1)(2x^2 - 3x + 1) > 0.$$

به آسانی دیده میشود که همواره $\operatorname{sgn}(x^2 + x + 1) = 1$. پس، نامساوی (۲) معادل نامساوی $(x^2 - 1)(2x^2 - 3x + 1) > 0$ — میباشد که خود، پس از تجزیهٔ عوامل آن، معادل نامساوی

$$(۳)\quad -2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)^2 > 0$$

است. اگر طرف اول این نامساوی را $P(x)$ بنامیم، جدول علامت $P(x)$ چنین خواهد بود:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		1		∞
$\operatorname{sgn} P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

برای پر کردن سطر دوم کافی است ملاحظه کنیم که $\operatorname{sgn} P(x)$ در اولین ستون طرف راست همان $\operatorname{sgn}(-2)$ است. در سایر بازه‌ها، از راست به چپ، $\operatorname{sgn} P(x)$ بر طبق قسمت سوم ۹.۲.۲ از روی مرتبهٔ تکرار ریشه‌ها بدست میآید. از جدول فوق معلومست که نامساوی (۳)، و لهذا، نامساوی (۱) که معادل آنست، دارای یک دسته جواب میباشد، و آن $(-1, 1/2)$ است.

۹.۲.۴. تمرین.

۱. مجموعهٔ صدق هر یک از نامساویهای ذیل را تعیین کنید:

(آ) $x^2 < 4.$

(ب) $x^2 - 3x + 2 > 0.$

(پ) $5 + 4x > x^2.$

(ت) $x^4 - 1 < 0.$

(ث) $x(3x-2)(2x+1)(1-4x) < 0.$

(ج) $-2(x^2-1)(x-3) > 0.$

(چ) $x(2x^2-2)(x-3) > 0.$

(ح) $(x^2+3x+3)(x^2-x-1) < 0.$

(خ) $(x^2-2)(x^2-3)(x+1)(1-x^4) < 0.$

(د) $x^4 - 3x^3 + x - 3 < 0.$

۹.۳. نامساویهای نااکید. حل نامساویهای نااکید در پرتو توضیحات گذشته آسان است. مثلاً، نامساوی $P(x) \leqslant 0$ (۱) به معنی

$$P(x) < 0 \vee P(x) = 0$$

است. پس، مجموعه‌ی صدق آن اتحادیه‌ی مجموعه‌ی صدق نامساوی اکید $P(x) < 0$ است با مجموعه‌ی صدق معادله‌ی $P(x) = 0$. جدول علامت $P(x)$ این مجموعه را به یک نظر آشکار میسازد.

۹.۳.۱. امثله

(آ). نامساوی $-3(x+1)^3(x-2)^2 \geqslant 0$

بر طبق جدول مثال پ : ۹.۲.۱، مجموعه‌ی جوابهای این نامساوی عبارتست از $(-\infty, -1] \cup \{2\}$.

(ب). نامساوی

$$(-x^2 - x - 1)(1 - x^2)(-2x^2 + 3x - 1) \leqslant 0.$$

بر طبق جدول مثال ب : ۹.۲.۳، این نامساوی دارای دو دسته جواب $(-\infty, -1]$ و $[1/2, \infty)$ است.

۹.۳.۲. تمرین

۰۱ نامساویهای تمرین ۱ : ۹.۲.۴ را با تبدیل $<$ به $\leqslant$ ($>$ به $\geqslant$) حل کنید.

۹.۴. جوابهای مشترک. یادآوری میکنیم که اگر $F(x)$ و $G(x)$ دو گزاره‌نما، و A و B، بترتیب، مجموعه‌های صدق آنها باشند، مجموعه‌ی مقادیری از x که، در عین حال، در $F(x)$ و $G(x)$ صدق کنند مجموعه‌ی $\{x \mid F(x) \ \& \ G(x)\}$ است، که مساوی $A \cap B$ میباشد. این مجموعه مجموعه‌ی صدق مشترک دو گزاره‌نما یا مجموعه‌ی جوابهای مشترک آنهاست. اگر این مجموعه عضوی داشته باشد دو گزاره‌نما را (با هم) سازگار خوانیم، و اگر خالی باشد آنها را (با هم) ناسازگار نامیم.

بعضی از صور خاص این مسئله به قرار ذیل است:

I. مجموعه‌ی جوابهای مشترک دو یا چند نامساوی مقطع مجموعه‌های صدق آنهاست.

II. حل نامساویهائی به صورت $P(x) < Q(x) < R(x)$ در واقع تعیین جوابهای مشترک دو نامساوی

$$P(x) < Q(x), \qquad Q(x) < R(x)$$

است، و هکذا وقتی که علامت $\leqslant$ در کار باشد.

III. تعیین مجموعه‌ی صدق یک نامساوی در مجموعه‌ای مانند E از اعداد حقیقی به تعیین مقطع E با مجموعه‌ی صدق نامساوی مذکور (در $\mathbf{R}$) باز میگردد. در اغلب موارد عملی، E همان $\mathbf{R}$ است به استثنای تعدادی متناهی از اعداد حقیقی (مثلاً در بسیاری از نامساویهای کسری[۱])، یا E یک بازه یا اتحادیه‌ای از بازه‌ها است (مثلاً، در بسیاری از نامساویهای اصم[۲]).

---

(۱) ۹.۵ ملاحظه شود.

(۲) ۹.۷ ملاحظه شود.

در حالات نسبةً مفصل، برای تعیین مقطعها میتوان به جدول مشترک علامت توسل جست، چنانکه در ضمن امثلهی آتیه خواهیم دید.

۹.۴.۱. امثله

(آ). مجموعهی جوابهای مشترک دو نامساوی $x < 2$ و $-3 < x$ عبارتست از مجموعهی
$$(-\infty, 2) \cap (-3, \infty) = (-3, 2).$$
(ب). مجموعهی جوابهای مشترک نامساویهای $x < 2$ و $-3 \leqslant x$ مجموعهی ذیل است،
$$(-\infty, 2) \cap [-3, \infty) = [-3, 2).$$
(پ). نامساویهای $x < 2$ و $3 < x$ با هم ناسازگارند (جواب مشترک ندارند)، زیرا $(-\infty, 2) \cap (3, \infty) = \varnothing$.

(ت). مجموعهی جوابهای مشترک سه نامساوی
$$(۱)\ 3x - 2 > 0, \quad (۲)\ 1 - 2x \leqslant 0, \quad (۳)\ x^2 - 1 > 0.$$
مجموعههای صدق سه نامساوی، بترتیب، عبارتند از
$$I_1 = (2/3, \infty), \qquad I_2 = [1/2, \infty), \qquad I_3 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$
مجموعهی جوابهای مشترک سه نامساوی مجموعهی $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ است. برای تحویل این مجموعه به حد اقل بازهها، قبلاً ملاحظه میکنیم که $I_1 \subset I_2$، و بالنتیجه، $I_1 \cap I_2 = I_1$. پس،
$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_1 \cap I_3 &= (2/3, \infty,) \cap [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)] \\ &= [(2/3, \infty) \cap (-\infty, -1)] \cup [(2/3, \infty) \cap (1, \infty)] \\ &= \varnothing \cup (1, \infty) = (1, \infty). \end{aligned}$$
جدول مشترک علامت طرفهای اول سه نامساوی ذیلاً دیده میشود:

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1	∞
$\operatorname{sgn}(3x-2)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\operatorname{sgn}(1-2x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
$\operatorname{sgn}(x^2-1)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$

در سطر اول، $\mathbf{R}$ را با ریشههای طرف اول همهی نامساویهای مورد بحث افراز کردهایم. البته، در تعیین علامت طرف اول هر یک از نامساویها، ریشههای سایرین مداخلهای ندارند، بلکه این ریشهها احیاناً بعضی از بازههای مربوط به آن نامساوی را افراز میکنند. چنانکه از جدول معلوم است، فقط در بازهی $(1, \infty)$ است که (۱)، (۲)، و (۳) در عین حال برقرار میباشند.

(ج). مجموعهی صدق نامساوی $x^2 - x - 2 \leqslant 0$ (۱) در مجموعهی $E = \mathbf{R} - \{0, 2\}$.

مجموعهی صدق نامساوی (۱) در $\mathbf{R}$ بازهی $[-1, 2]$ است. پس، مجموعهی صدق آن در مجموعهی $\mathbf{R} - \{0, 2\}$ عبارتست از مقطع آن بازه با این مجموعه، و آن مساوی است با

$$[-1, 2] - \{0, 2\} = [-1, 0) \cup (0, 2).$$

در تنظیم جدول، هر یک از اعداد 0 و 2 را که به E تعلق ندارند با دو خط قائم از $\mathbf{R}$ خارج ساخته‌ایم. $P(x)$ طرف اول نامساوی است.

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
$\operatorname{sgn} P(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

(چ). مجموعه‌ی صدق نامساوی

$$x(x+1)(x-3) > 0 \qquad (1)$$

در بازه‌ی $I = [2, \infty)$.

مجموعه‌ی صدق (۱) در $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی $(-1, 0) \cup (3, \infty)$ است. پس، مجموعه‌ی صدق آن در I عبارتست از

$$I \cap [(-1, 0) \cup (3, \infty)] = (3, \infty).$$

(ح). تعیین مجموعه‌ی صدق یک نامساوی را در یک بازه اغلب میتوان تسهیل کرد. در مثال قبل، در بازه‌ی I همواره $x > 0$ و $x + 1 > 0$. پس، در این بازه، نامساوی (۱) معادل نامساوی $x - 3 > 0$ میباشد، که مجموعه‌ی صدقش بازه‌ی $(3, \infty)$ است، و این بازه همان مجموعه‌ی صدق (۱) در I میباشد.

۹.۴.۲. تمرین

۱. جوابهای مشترک دستگاههای ذیل را تعیین کنید:

(آ) $5x + 12 < 0$ و $3x + 1 < 3$.

(ب) $1 < x < 4$ و $x \geqslant -2$.

(پ) $1 < x \leqslant 4$ و $x \geqslant -4$.

(ت) $1 < x \leqslant 4$ و $x > -4$.

(ث) $1 < x < 4$ و $3 < x < 6$.

(ج) $9x^2 > 16x(x+1)$، $(x+1)(8x+1) > 0$، و $3x > -2(x+1)$.

۲. مطلوبست مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $9 < (x-2)^2 \leqslant 16$.

۳. P به معنی $-x^2 + 3x$ است و Q به معنی $x^2 + (1/2)$. جوابهای مشترک هر دسته از نامساویهای ذیل را تعیین کنید.

(آ) $0 \leqslant P < 1$ و $0 \leqslant Q < 1$.

(ب) $1 \leqslant P < 2$ و $0 \leqslant Q < 2$.

(پ) $2 \leqslant P < 3$ و $2 \leqslant Q < 3$.

۴. جوابهای نامساویهای (آ) ـ (ج) تمرین ۹.۲.۴ را در هر یک از مجموعه‌های $(-1, 1)$، $[-1, 1]$، و $(-\infty, 0]$ تعیین کنید.

۹.۵. نامساویهای کسری.

حل نامساویهای قابل تحویل به نامساویهائی که یک طرفشان صفر است و طرف دیگرشان کسری که صورت و مخرجش حاصلضربهای رسمی هستند در پرتو

توضیحات گذشته آسان است. در این گونه مسائل، باید مقادیری از x را که بازاء آنها عبارات بیمعنی (کسوری با مخرج 0) در کار میآیند از $\mathbf{R}$ خارج کرد، و در مجموعکی از $\mathbf{R}$ که میماند، نامساوی را به صورتی معادل آن و عاری از مخرج تحویل نمود.

۹.۵.۱. مثال. نامساوی

$$\frac{x+2}{2x+1} < \frac{x-2}{x+4} \qquad (*)$$

را اختیار میکنیم. گزاره‌نمای $(*)$ بازاء مقادیر $-1/2$ و -4 از x بیمعنی است، و تحقیق در مجموعه‌ی صدق آن فقط در مجموعه‌ی $E = \mathbf{R} - \{-1/2, -4\}$ معنی دارد. پس، x را مقید به E میگیریم.

در این صورت، $(*)$ معادل است با

$$\frac{x+2}{2x+1} - \frac{x-2}{x+4} < 0,$$

که خود معادل نامساوی

$$\frac{-x^2+9x+10}{(2x+1)(x+4)} < 0$$

است، و آن، بنا بر قیدی که جهت x قائل شدیم، معادل نامساوی

$$(-x^2+9x+10)(2x+1)(x+4) < 0$$

میباشد، که خود معادل این نامساوی است:

$$-2(x+4)(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-10) < 0. \qquad (\dagger)$$

خلاصه، در $\mathbf{R} - \{-1/2, -4\}$، $(*)$ معادل $(\dagger)$ است. اگر طرف اول نامساوی $(\dagger)$ را $P(x)$ بنامیم، جدول علامت $P(x)$ چنین است:

x	$-\infty$		-4		-1		$-\frac{1}{2}$		10		∞
$\operatorname{sgn} P(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

نامساوی $(*)$ سه دسته جواب دارد: $(-\infty, -4)$، $(-1, -1/2)$، و $(10, \infty)$. مجموعه‌ی صدق $(*)$ اتحادیه‌ی این سه بازه است.

اگر در $(*)$ بجای «$<$»، «$\leqslant$» قرار دهیم، مجموعه‌ی جوابهای نامساوی حاصل در $\mathbf{R} - \{-1/2, -4\}$ مجموعه‌ی $(-4, -1] \cup (-1/2, 10]$ خواهد بود.

۹.۵.۲. تمرین

۱. نامساویهای ذیل را حل کنید:

(آ) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0.$ (ب) $\dfrac{x-3}{x-3} < x.$

(ت) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21}>0.$ (پ) $\dfrac{2x-1}{3-2x}\leqslant\dfrac{1}{2}.$

(ج) $x+1>\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}.$ (ث) $x+1>\dfrac{1}{x}-1.$

(چ) $(x^2+x+1)(x-1)^2/(1-3x)>0.$

(ح) $(4x-5)/(x^2-1)\geqslant 4.$

(خ) $(3x+2)/(2x+3)>x/(x+1).$

(د) $\dfrac{x-1}{x(x+3)}\leqslant\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}.$

(ذ) $1+\dfrac{x-4}{x-3}>\dfrac{x-2}{x-1}.$

۲. مجموعه‌ی صدق نامساوی $(x+5)/(3x-2)>0$ را در بازه‌ی $(7,\infty)$ تعیین کنید.

۳. نامساوی $1/3<(2x-1)/(3-2x)\leqslant 1/2$ را حل کنید.

۴. جوابهای مشترک هر دسته از نامساویهای ذیل را تعیین کنید:

(آ)[1] $9x^2>16x(x+1),\qquad (x+1)(8x+1)>0,\qquad \dfrac{3x}{x+1}>-2.$

(ب) $\dfrac{x+2}{2x+1}<\dfrac{x-2}{x+4},\qquad x-\dfrac{3}{x}\geqslant 2.$

(پ) $\dfrac{1-x}{x^2-5x+6}\geqslant 0,\qquad x^4-x^2\geqslant 0.$

۹.۶. نامساویهای شامل قدر مطلق. طریق کلی حل این گونه نامساویها اینست که، بر طبق قواعد مربوط به قدر مطلق، و عنداللزوم با تشخیص حالات مختلف، این نامساویها را تبدیل میکنند به نامساویهائی معادل آنها و عاری از علامت قدر مطلق. بالاخص، باید خواص اولیه‌ی قدر مطلق (موضوع قضیه‌ی ۳.۱.۲ : ۵) و قضایای ۳.۲.۱ ــ ۳.۲.۴ فصل ۵ را کاملاً حاضرالذهن داشت. نامساویهائی که طرف اولشان به صورت $|ax+b|$ $(a\neq 0)$ و طرف دومشان 0 یا عدد ثابت دیگری است مستقیماً به وسیله‌ی خواص و قضایای مذکور حل میشوند، و بعلاوه، این خواص و قضایا وسیله‌ی برطرف کردن علامت قدر مطلق میباشند.

۹.۶.۱. امثله

(آ). نامساوی $|x-2|<0$ ممتنع است، زیرا قدر مطلق یک عدد هیچگاه منفی نیست.

(ب). نامساوی $|2x+3|\geqslant 0$ بازاء جمیع مقادیر x برقرار است (مجموعه‌ی صدق آن $\mathbf{R}$ میباشد).

(پ). نامساوی $|x+1|>0$، بنا بر III : ۳.۱.۲ : ۵ معادل است با $x+1\neq 0$، یا

(۱) جواب این مسئله را با جواب مسئله‌ی (ج) تمرین ۱ : ۹.۴.۲ مقایسه و نتیجه را توجیه کنید.

$-1 \neq x$. پس، مجموعه‌ی صدق نامساوی مجموعه‌ی $\{-1\} - \mathbf{R}$ یا $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ است. مسئله را به وسیله‌ی ۳.۲.۳ : ۵ حل کنید.

(ژ). نامساوی $|x - a| \leqslant 0$ بازاءِ $x = a$ بالبداهه برقرار است، و بازاءِ $x \neq a$، بنا بر III : ۳.۱.۲ : ۵ برقرار نیست. پس، مجموعه‌ی صدق آن $\{a\}$ است.

(ژ). نامساوی $|x - 2| < 3$ (۱)، بنا بر ۳.۲.۱ : ۵ معادل نامساویهای $-3 < x - 2 < 3$ است، که خود معادل $-1 < x < 5$ میباشد. پس، مجموعه‌ی جوابهای (۱) بازه‌ی $(-1, 5)$ است.

(ج). نامساوی $|x - 2| \geqslant 3$ (۱)، بنا بر ۳.۲.۴ : ۵ معادل است با $x - 2 \geqslant 3 \vee x - 2 \leqslant -3$، و مجموعه‌ی صدقش اتحادیه‌ی مجموعه‌های صدق دو نامساوی $x - 2 \geqslant 3$ و $x - 2 \leqslant -3$ میباشد. پس، مجموعه‌ی صدق (۱) مجموعه‌ی $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$ است. مسئله را به وسیله‌ی خواص قوا حل کنید.

(چ). نامساوی $|x^2 - 7x + 2| \leqslant 2$ معادل نامساویهای

$$-2 \leqslant x^2 - 7x + 2 \leqslant 2$$

است، که جوابهای آن جوابهای مشترک دو نامساوی

$$x^2 - 7x + 4 \geqslant 0, \qquad x^2 - 7x \leqslant 0$$

میباشند. مجموعه‌ی این جوابها عبارتست از $\left[0, \frac{7 - \sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{7 + \sqrt{33}}{2}, 7\right]$.

(ح). نامساوی

$$(۱) \qquad |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \leqslant 2(x - 1)$$

را اختیار میکنیم. برای برطرف کردن علامات قدر مطلق، $\mathbf{R}$ را به وسیله‌ی اعداد 1، 2، و3 به بازه‌های

$$A = (-\infty, 1], \qquad B = (1, 2], \qquad C = (2, 3], \qquad D = (3, \infty)$$

افراز میکنیم. مجموعه‌ی صدق (۱) اتحادیه‌ی مجموعه‌های صدق آنست در یکایک این بازه‌ها.
در بازه‌ی A، $x \leqslant 1$. پس، $x - 1 \leqslant 0$، و لهذا، $x - 2 < 0$ و $x - 3 < 0$، و (۱) معادل است با

$$-(x - 1) - (x - 2) - (x - 3) \leqslant 2(x - 1),$$

و یا $5x \geqslant 8$، که معادلست با $x \geqslant 8/5$. پس، مجموعه‌ی صدق (۱) در A خالی است.
در بازه‌ی B، $1 < x \leqslant 2$. بالنتیجه، $x - 1 > 0$، $x - 2 \leqslant 0$، و $x - 3 \leqslant 0$، و (۱) معادل است با

$$x - 1 - (x - 2) - (x - 3) \leqslant 2(x - 1),$$

و یا $3x \geqslant 6$. پس، مجموعه‌ی صدق (۱) در بازه‌ی B مجموعه‌ی $\{2\}$ است. به همین قیاس معلوم میشود که مجموعه‌ی صدق (۱) در بازه‌ی C بازه‌ی $(2, 3]$ و در بازه‌ی D بازه‌ی $(3, 4]$ است. پس، مجموعه‌ی صدق (۱) عبارتست از

$$\varnothing \cup \{2\} \cup (2, 3] \cup (3, 4] = [2, 4].$$

(خ). گشودن چشم بصیرت سبب تسهیل فراوان است. مثلاً، در مثال قبل، ملاحظه میکنیم که جمله‌های طرف اول نامساوی (۱) نامنفی هستند، و هر سه در عین حال 0 نتوانند بود. پس، بنا بر ۷.۸.۴ : ۵، حاصلجمع آنها مثبت است. بالنتیجه، اگر نامساوی (۱) جوابی داشته باشد این جواب در نامساوی $2(x - 1) > 0$ (یا $x > 1$) صدق میکند. پس، نامساوی (۱) در خارج بازه‌ی $(1, \infty)$ جوابی ندارد، و لهذا، کافی است مجموعه‌ی صدق آن را در

$I = (1, \infty)$ تعیین کنیم. در این صورت، $x - 1 > 0$، و بالنتیجه، $|x - 1| = x - 1$. پس، در I، نامساوی (۱) معادل نامساوی

$$|x - 2| + |x - 3| \leqslant x - 1$$

است. اینک برای برطرف کردن علامت قدر مطلق در این نامساوی، I را به بازه‌های $(1, 2]$، $(2, 3]$، و $(3, \infty)$ افراز، و مانند حالت سابق عمل میکنیم.

۹.۶.۲ تمرین

۱. این نامساویها را حل کنید، و مجموعه‌ی صدق هر یک را که خالی نیست نمایش دهید:

(آ) $|x| < 2$. (ب) $|x| \leqslant \sqrt{2}$.
(پ) $|-x| < \sqrt{3}$. (ت) $|-x| < -1$.
(ث) $|x| < -2$. (ج) $|-x| < -\sqrt{3}$.
(چ) $|x| > 2$. (ح) $|x| \geqslant 2$.
(خ) $|-x| > 3$. (د) $|-x| \geqslant 3$.
(ذ) $|x| > -\sqrt{2}$. (ر) $|-x| \geqslant -3$.
(ز) $|x| < 0$. (ژ) $|x| \leqslant 0$.
(س) $|x| > 0$. (ش) $|x| \geqslant 0$.

۲. مسئله‌ی ۱ را در مورد نامساویهای ذیل حل کنید:

(آ) $|2x + 1| < 5$. (ب) $|2x + 1| \leqslant 5$.
(پ) $|2x + 1| > 5$. (ت) $|2x + 1| \geqslant 5$.
(ث) $|2x + 1| > -5$. (ج) $|2x + 1| \leqslant -5$.
(چ) $|x - 2| \leqslant \sqrt{3}$. (ح) $4 \leqslant |x - 2|$.
(خ) $2 < |3 - x|$. (د) $0 < |x + 1|$.
(ذ) $|x + 1| > 2$.

۳. این نامساویها را حل کنید:

(آ) $|2x - 3| < x$. (ب) $|1 - x| \geqslant x$.
(پ) $\left|x + \frac{1}{x}\right| < 6$. (ت) $\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right| < 1$.
(ث) $\left|\frac{2x - 1}{x + 1}\right| > 1$. (ج) $|x^2 - 5x - 4| < 10$.
(چ) $|x^2 - x + 1| > 1$. (ح) $|x - 1| < |x - 3|$.
(خ) $|x| + |x + 1| + |x + 2| < x^2 + x$.
(د) $|x + 1| > \left|\frac{1}{x} - 1\right|$. (ذ) $\frac{4x - 5}{|x - 2|} \geqslant x$

۴. مطلوبست جوابهای مشترک نامساویهای

(آ) $2 < |x - 7| \leqslant 9$ و $2 < |x + 7| < 9$.
(ب) $1 < |x| < 4$ و $3 \leqslant |x| < 6$.

(پ) $9 > |x+7| > 2$ و $3 > |x-4| > 0$.

۹.۷. بعضی نامساویهای اصم درجه‌ی دوم. در این باب باید قواعد مربوط به رادیکالهای حسابی را بکار بست. بالاخص، باید توجه داشت که (آ) $\sqrt{a}$ فقط و فقط وقتی معنی دارد که $a \geqslant 0$؛ (ب) اگر $a \geqslant 0$ آنگاه $\sqrt{a} \geqslant 0$؛ (پ) $\sqrt{a^2} = |a|$. همچنین قواعد مقایسه‌ی رادیکالها را باید حاضرالذهن داشت. در این باب نه میتوان بیش از این «قواعد کلی» آورد، و نه چنین قواعدی ـ بسبب اینکه گرایش به ماشینی‌ساختن ذهن محصلین دارند ـ سودمند میباشند. معذلک، شاید جلب توجه به دو نوع نامساوی ذیل مفید باشد. برای احتراز از تکرار، تذکر میدهیم که، در توضیحات آتیه، $P(x)$ و $Q(x)$ کثیرالجمله‌های صحیح از x میباشند.

I. نامساوی

$$\sqrt{P(x)} < Q(x). \qquad (*)$$

اولین شرط امکان آنست که $P(x) \geqslant 0$ (۱). در صورت برقراری این شرط، چون $\sqrt{P(x)} \geqslant 0$، نامساوی (*) در صورتی ممکن است جواب داشته باشد که $Q(x) > 0$ (۲). پس، جوابهای (*)، در صورت وجود، از جوابهای مشترک (۱) و (۲) ـ و به عبارت دیگر، متعلق به مجموعه‌ی

$$E = \{x \mid P(x) \geqslant 0\} \cap \{x \mid Q(x) > 0\}$$

میباشند. در این مجموعه، (*) معادل نامساوی $P(x) < [Q(x)]^2$ است. اگر E_1 مجموعه‌ی جوابهای این نامساوی باشد، مجموعه‌ی جوابهای نامساوی (*) مجموعه‌ی $E \cap E_1$ خواهد بود.

II. نامساوی

$$\sqrt{P(x)} > Q(x). \qquad (\dagger)$$

در اینجا نیز اولین شرط امکان آنست که $P(x) \geqslant 0$. فرض کنیم E مجموعه‌ی جوابهای این نامساوی باشد. این مجموعه را بر حسب $\operatorname{sgn} Q(x)$ افراز میکنیم. فرض کنیم

$$A = \{x \mid Q(x) < 0\}, \qquad B = \{x \mid Q(x) = 0\}, \qquad C = \{x \mid Q(x) > 0\}.$$

مجموعه‌ی صدق (†) اتحادیه‌ی مجموعه‌های صدق آن در $E \cap A$، $E \cap B$، و $E \cap C$ میباشد. واضح است که

(آ) در $E \cap A$، نامساوی (†) همواره برقرار است؛

(ب) در $E \cap B$، بازاء مقادیری از x که $P(x) \neq 0$ نامساوی (†) برقرار است.

(پ) در $E \cap C$ نامساوی (†) معادل نامساوی $P(x) > [Q(x)]^2$ است. پس، اگر D مجموعه‌ی جوابهای این نامساوی در $\mathbb{R}$ باشد مجموعه‌ی جوابهای (†) در $E \cap C$ مجموعه‌ی $E \cap C \cap D$ خواهد بود.

خلاصه، مجموعه‌ی صدق (†) عبارتست از

$$(E \cap A) \cup [E \cap B \cap \{x \mid P(x) \neq 0\}] \cup [E \cap C \cap \{x \mid P(x) > [Q(x)]^2\}].$$

در پایان، تأکید میکنیم که غرض از توضیحات گذشته گشودن چشم محصلین بود به نکاتی که در حل نامساویهای اصم باید بدانها توجه داشت، نه اینکه آنها را حفظ کنند، و ماشینوار بکار برند.

۹.۷.۱. امثله

(آ). حل نامساوی $\sqrt{2(x-1)} < -x$ (۱).

گزاره‌نمای (۱) فقط و فقط وقتی معنی دارد که $x - 1 \geqslant 0$، و در این صورت، طرف اول آن نامنفی است، و لهذا، هر جواب (۱)، در صورت وجود، در شرط $-x > 0$ صدق میکند. پس، جوابهای (۱)، در صورت وجود، از جملهٔ جوابهای مشترک دو نامساوی

$$x - 1 \geqslant 0, \qquad x < 0$$

میباشند. چون این دو نامساوی ناسازگارند، (۱) ممتنع است.

(ب). حل نامساوی $\sqrt{2(x+1)} > x$ (۱).

جوابهای این نامساوی، در صورت وجود، متعلق به مجموعهٔ صدق نامساوی $x + 1 \geqslant 0$، یعنی به بازهٔ $E = [-1, \infty)$، میباشند. اینک، بر حسب $\operatorname{sgn} x$، این بازه را به مجموعه‌های $A = [-1, 0)$، $B = \{0\}$، و $C = (0, \infty)$ افراز میکنیم.

(I). در A نامساوی (۱) همواره برقرار است.

(II). در B نیز نامساوی برقرار میباشد.

(III). در C، نامساوی (۱) معادل نامساوی $2(x+1) > x^2$ است، که مجموعهٔ صدقش در $\mathbf{R}$ بازهٔ $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$، و در C بازهٔ $(0, 1+\sqrt{3})$ میباشد.

پس، مجموعهٔ صدق (۱) عبارتست از

$$[-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1+\sqrt{3}) = [-1, 1+\sqrt{3}).$$

(پ). حل نامساوی

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \leqslant \sqrt{6x-1}. \qquad (۱)$$

جوابها، در صورت وجود، متعلق به بازهٔ $I = [1/6, \infty)$ هستند. در این بازه نامساوی (۱) معادل نامساوی حاصل از مجذور کردن طرفین آنست، یا با نامساوی

$$\sqrt{x(x+1)} \leqslant 2x - 1. \qquad (۲)$$

شرط امکان (۲) آنست که $2x - 1 \geqslant 0$. در مجموعهٔ $J = I \cap [1/2, \infty) = [1/2, \infty)$، نامساوی (۲) معادل نامساوی حاصل از مجذور کردن طرفین است، یا با نامساوی $3x^2 - 5x + 1 \geqslant 0$، که مجموعهٔ جوابهایش در $\mathbf{R}$ عبارتست از

$$\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{13}}{6}, \infty\right).$$

مقطع این مجموعه با J، یعنی بازهٔ $\left[\frac{5+\sqrt{13}}{6}, \infty\right)$، مجموعهٔ جوابهای نامساوی (۱) میباشد.

۹.۷.۲. تمرین

۱. این نامساویها را حل کنید

(آ) $\sqrt{1-x} > x.$

(ب) $\sqrt{2x-1} < 3x-2.$

(پ) $\sqrt{x+3} > x+1.$

(ت) $\sqrt{2x+6} < \sqrt{3-5x}.$

(ث) $\sqrt{2x-5} < 1-5x.$

(ج) $x-2 > \sqrt{x^2-2x}.$

(چ) $2x-\sqrt{x-1} < 0.$

(ح) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x^2+x-1}.$

(خ) $2x-\sqrt{x^2-3x-4} < 1.$

(د) $\sqrt{x^2-5x+4} > 2-x.$

(ذ) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3.$

(ر) $3\sqrt{6+x-x^2}+2 > 4x.$

(ز) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1} > \sqrt{3x}.$

(ژ) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x} > 2.$

(س) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} < 1.$

(ش) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}.$

(ص) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} < \sqrt{10x-1}.$

(ض) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{3x-2}.$

۹.۸. امثله‌ی مختلفه

۹.۸.۱. حل و بحث نامساوی

$$\frac{2ax+3}{5x-4a} < 4. \tag{۱}$$

در $\mathbf{R}-\{4a/5\}$ نامساوی معادل است با نامساوی

$$(5x-4a)[2(a-10)x+16a+3] < 0. \tag{۲}$$

حالت اول: $a=10$. مجموعه‌ی صدق نامساوی بازه‌ی $(-\infty, 8)$ است.

حالت دوم: $a \neq 10$. نامساوی معادل است با نامساوی

$$10(a-10)\left(x-\frac{4a}{5}\right)\left(x+\frac{16a+3}{2(a-10)}\right) < 0. \tag{۳}$$

ریشه‌های حاصلضرب رسمی طرف اول عبارتند از

$$x_1 = \frac{4a}{5}, \qquad x_2 = -\frac{16a+3}{2(a-10)}$$

به آسانی دیده میشود که $x_2 - x_1$، بر حسب اینکه $a < 10$ یا $a > 10$ منفی یا مثبت است. پس، مجموعه‌ی صدق نامساوی، اگر $a < 10$ مجموعه‌ی $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ است، و اگر $a > 10$ مجموعه‌ی (x_2, x_1).

۹.۸.۲. مطلوبست تعیین مقادیری از a که، بازاء آنها، نامساویهای ذیل جواب مشترک ندارند:

$$(1) \qquad ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geqslant 0,$$

$$(2) \qquad ax \geqslant a^2 - 2.$$

قبلاً ملاحظه میکنیم که

(آ) بنا بر صورت مسئله، $a \neq 0$.

(ب) اگر طرف اول (۱) را $P(x)$ بنامیم، جوابهای $P(x)$ عبارتند از $x_1 = 2(1-a)/a$ و $x_2 = (a+1)/a$، و $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

(پ) اگر A و B، بترتیب، مجموعه‌های صدق نامساویهای (۱) و (۲) باشند شرط لازم و کافی برای ناسازگاری (۱) و (۲) آنست که

$$(*) \qquad A \cap B = \varnothing.$$

اینک بر حسب $\operatorname{sgn} a$ دو حالت تشخیص میدهیم.

I. $a < 0$. در این حالت، $x_1 < x_2$، و

$$A = [x_1, x_2], \qquad B = \left(-\infty, \frac{a^2-2}{a}\right].$$

به آسانی دیده میشود که $(*)$ فقط و فقط وقتی برقرار است که $x_1 > \frac{a^2-2}{a}$، و از آنجا $a < -1-\sqrt{5}$.

II. $a > 0$. در این حالت، $B = \left[\frac{a^2-2}{a}, \infty\right)$. رابطه‌ی $(*)$ معادل رابطه‌ی $B \subseteq \overline{A}$ است. معلوم است که $\overline{A}$ مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای $P(x) < 0$ میباشد، و آن بازه‌ی بازی است که دو انتهایش x_1 و x_2 هستند. پس، برقراری رابطه‌ی $B \subseteq \overline{A}$ ممتنع میباشد، و به عبارت دیگر، هیچ مقدار مثبت a در شرط مطلوب صدق نمیکند.

پس مسئله فقط یک دسته جواب برای a دارد، و آن بازه‌ی $(-\infty, -1-\sqrt{5})$ میباشد.

۹.۸.۳. حل و بحث نامساوی

$$(1) \qquad \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a \qquad (a > 0).$$

جوابهای نامساوی، در صورت وجود، تعلق به مجموعه‌ی صدق مشترک نامساویهای $a + x \geqslant 0$ و $a - x \geqslant 0$ دارند، و آن بازه‌ی $I = [-a, a]$ است.

در این بازه، (۱) معادل نامساوی

$$(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2 > a^2$$

است، که خود معادل نامساوی ذیل میباشد:

$$2\sqrt{a^2-x^2} > a^2-2a. \qquad (۲)$$

چون $a>0$، $\operatorname{sgn}(a^2-2a)=\operatorname{sgn}(a-2)$. پس، سه حالت تشخیص میدهیم.

I. $a-2<0$. مجموعه‌ی صدق (۲)، و لهذا، مجموعه‌ی صدق (۱)، بازه‌ی I است.

II. $a-2=0$. نامساوی (۲) معادل نامساوی $\sqrt{4-x^2}>0$ است، که مجموعه‌ی صدق آن بازه‌ی $(-2, 2)$ میباشد.

III. $a-2>0$. نامساوی (۲) در I معادل نامساوی

$$4(a^2-x^2) > (a^2-2a)^2$$

است، که خود معادل نامساوی $x^2 < a^3(4-a)/4$ (۳) میباشد. علامت طرف دوم همان علامت $a-4$ است. پس،

III (آ). اگر $a \geqslant 4$ آنگاه (۳)، و بالنتیجه، (۱) ممتنع است.

III (ب). اگر $a<4$ آنگاه مجموعه‌ی صدق نامساوی (۳) بازه‌ی

$$J=\left(-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)},\ \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}\right)$$

است. با توجه به اینکه $2<a<4$، به آسانی دیده میشود که $J \subset I$. پس، J مجموعه‌ی صدق نامساوی (۱) است.

خلاصه‌ی بحث:

(i) $0<a<2$. مجموعه‌ی صدق نامساوی (۱) بازه‌ی $[-a, a]$ است.

(ii) $a=2$. مجموعه‌ی صدق نامساوی (۱) بازه‌ی $(-a, a)$ است.

(iii) $2<a<4$. مجموعه‌ی صدق نامساوی (۱) بازه‌ی J است.

(iv) $a \geqslant 4$. نامساوی (۱) ممتنع است.

۱۰ § حومه‌ها

۱۰.۱. تعریف. حومه‌ی عدد حقیقی a یعنی بازه‌ی بازی که a بدان متعلق باشد. بالاخص، اگر r عدد مثبتی باشد، بازه‌ی باز $(a-r, a+r)$ را، که a وسط آنست، حومه‌ی a به شعاع r خوانیم.

حومه‌ها را اغلب به حرف U نمایش میدهیم؛ حومه‌ای از a را $U(a)$ (اگر بیم ابهام نرود، U)، و حومه‌ای از a به شعاع r را $U_r(a)$ یا $U(a, r)$ مینامیم.

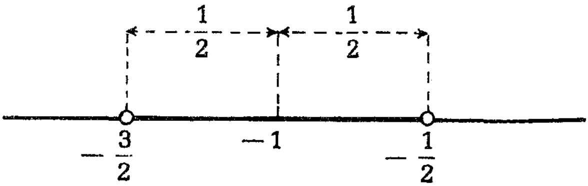
۱۰.۲.۱. امثله

(آ). بازه‌ی $U=(-2, 1)$ یک حومه‌ی 0 و نیز یک حومه‌ی 1 ــ است، ولی حومه‌ی 1 نیست.

(ب). هر بازه‌ی باز حومه‌ای از هر یک از نقاط خود میباشد.

(پ). حومه‌ی 1 ــ به شعاع $\frac{1}{2}$ بازه‌ی باز $\left(-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right)$ یا $\left(-\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ میباشد

(شکل ۴۴).



(شکل ۴۴)

(ت). بنا بـر ۸.۳.۱، اگر U_1 و U_2 حومه‌هائی از عدد a باشند $U_1 \cap U_2$ نیز حومه‌ای از a است.

۱۰.۲.۲. تبصره. حومه‌ی a به شعاع r، بنا بر تعریف، مجموعه‌ی $\{x \mid a-r<x<a+r\}$ است، که مساوی $\{x \mid -r<x-a<r\}$ میباشد، و این مساوی است با $\{x \mid |x-a|<r\}$. به عبارت دیگر، حومه‌ی a به شعاع r مجموعه‌ی جمیع اعدادی (نقاطی) است که فاصله‌ی هر یک از a کمتر از r است.
ضروری است که محصلین بر نوشتن حومه‌ها به صورتهای گوناگون تسلط یابند. در مورد حومه‌ی مثال (پ) سابق، میتوان نوشت:

$$U(-1, 1/2)=\left(-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right)=\left\{x \mid -1-\frac{1}{2}<x<-1+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2}\right\}=\left\{x \mid |x+1|<\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

در آتیه به حومه‌های ∞ و $-\infty$ احتیاج داریم. تعریف از این قرار است:

۱۰.۲.۳. تعریف. بازاء هر عدد حقیقی a، بازه‌ی (a, ∞) را یک حومه‌ی ∞ و بازه‌ی $(-\infty, a)$ را یک حومه‌ی $-\infty$ خوانیم. به عبارت دیگر، بازاء هر عدد a، مجموعه‌ی $\{x \mid x>a\}$ یک حومه‌ی ∞ است، و مجموعه‌ی $\{x \mid x<a\}$ یک حومه‌ی $-\infty$.

۱۰.۲.۴. تمرین

۰۱ هر یک از حومه‌های ذیل را به جمیع صورتهائی که گفته شد بنویسید:

(آ) $U_{0,1}(4)$; (ب) $U_2(1)$; (پ) $U_{0,001}(4)$;
(ت) $U(-1, 1/3)$; (ث) $U_{1/2}(0)$; (ج) $U_1(0)$;
(چ) $U_\varepsilon(7)$; (ح) $U(1/4, 1/4)$; (خ) $U_\varepsilon(a)$.

۰۲ بازاء هر یک از مقادیر ذیل از a، طویلترین حومه‌ای از a را که جزء بازه‌ی $[1, 3)$

است بنویسید:

$$2; \quad 2{,}2; \quad 1{,}3; \quad 2{,}7; \quad 1{,}1;$$
$$2{,}9; \quad 3; \quad 1; \quad 1{,}1; \quad 4.$$

۳. همان مسئله را با بازه‌ی $[1 - ,4 -)$ و مقادیر ذیل برای a حل کنید:

$$-2; \quad -3; \quad -1{,}1; \quad -3{,}8; \quad -1{,}001;$$
$$-1; \quad -4; \quad -1{,}000\,01; \quad -3{,}999.$$

۴. حومه‌ای به شعاع r از 2 تعیین کنید که، در عین حال، جزء $U(2, 0{,}1)$ و $U(2, 0{,}13)$ باشد.

۵. ثابت کنید که اگر $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ آنگاه $U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon'}(a)$.

۶. $U_{r_1}(a)$ و $U_{r_2}(a)$ دو حومه‌ی مفروض a هستند. ثابت کنید که عددی مثبت مانند r هست که $U_r(a)$ جزء هر دو حومه‌ی مذکور است. بزرگترین مقدار r چیست؟

۱۱ § مسائل مختلفه

۱. اگر $n \in \mathbf{N}$ عدد $\sqrt{n(n+1)}$ اصم است.

۲. اگر $n \in \mathbf{N}$ عدد $\sqrt{n/(n+2)}$ اصم است.

۳. بنا بر آنکه a، b، c، و d منطق باشند، و z اصم باشد، مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه عدد $(az+b)/(cz+d)$ اصم باشد.

۴. اگر $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ دو عدد اصم مربعی نامتشابه، و a، b، c، و d اعدادی منطق باشند، و

$$a + b\sqrt{x} + c\sqrt{y} + d\sqrt{xy} = 0$$

آنگاه $a = b = c = d = 0$.

۵. اگر a، b، x، و y منطق باشند، و

$$(ay - bx)^2 + 4(a - x)(b - y) = 0$$

آنگاه $x = a \;\&\; y = b$ یا $\sqrt{1 - ab} \in \mathbf{Q} \;\&\; \sqrt{1 - xy} \in \mathbf{Q}$.

۶. فرض کنیم $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ دو عدد اصم مربعی محض باشند. هر کثیرالجمله‌ای بر حسب $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ را که ضرایبش منطق باشند میتوان به صورت $a + b\sqrt{x} + c\sqrt{y} + d\sqrt{xy}$ نوشت که، در آن، a، b، c، و d اعداد منطق‌اند.

مقصود از «کثیرالجمله‌ای بر حسب $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ با ضرایب منطق» حاصلجمع تعدادی متناهی جمله است به صورت $r\,(\sqrt{x})^m\,(\sqrt{y})^n$ که، در آن، m و n اعدادی صحیح و نامنفی هستند، و r منطق است.

۷. بدون استعانت قضیه‌ی گاوس و احکام ناشی از آن، ثابت کنید که $\sqrt[3]{2}$ اصم است.

۸. ثابت کنید که عدد $\sqrt[3]{2}$ را نمیتوان به صورت $p + q\sqrt{r}$، که در آن p، q، و r اعدادی منطق‌اند، درآورد.

۹. اگر $m, n \in \mathbf{N}$ و $\sqrt{m}$ اصم باشد $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n}$ نیز اصم است.

۱۰. اگر $P(x)$ کثیرالجمله‌ی صحیحی از x با ضرایب منطق باشد $P(\sqrt[3]{2})$ را می‌توان بصورت $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ درآورد که، در آن، a، b، و c اعداد منطق‌اند.

۱۱. اعداد $(\sqrt[3]{2}-1)^5$ و $(\sqrt[3]{2}+1)/(\sqrt[3]{2}-1)$ را به صورت مذکور در مسئله‌ی قبل درآورید.

۱۲. اگر a، b، و c منطق باشند شرط لازم و کافی برای آنکه

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$$

آنست که $a=b=c=0$.

۱۳. اگر a، b، c، و d منطق باشند، و

$$a+\sqrt[3]{b}=c+\sqrt[3]{d},$$

آنگاه $a=c\ \&\ b=d$ یا b و d مکعب کامل‌اند.

۱۴. اعداد منطق a و b را چنان تعیین کنید که

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}.$$

۱۵. $\alpha, a, b, c, a', b', c' \in \mathbf{Q}$، و $\sqrt[3]{\alpha}$ اصم است. مطلوبست شرط آنکه عدد ذیل منطق باشد:

$$(a\sqrt[3]{\alpha^2}+b\sqrt[3]{\alpha}+c)/(a'\sqrt[3]{\alpha^2}+b'\sqrt[3]{\alpha}+c').$$

۱۶. بنا بر آنکه u_n جمله‌ی nم رشته‌ی فیبوناتچی (۳۴ : ۱۰ : ۵) باشد، ثابت کنید که

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

۱۷. ثابت کنید که اگر $n\in\mathbf{N}$ آنگاه

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}).$$

نتیجه بگیرید که اگر $k>1$ آنگاه

$$2\sqrt{k}-2<\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{k}-1.$$

۱۸. m و n هر دو عدد طبیعی باشند $\sqrt{2}$ بین m/n و $(m+2n)/(m+n)$ است، و دومی بدان نزدیکتر است. مثال عددی بیاورید.

۱۹. اگر $a<\sqrt{n}<a+1$ آنگاه

$$\frac{a(a^2+3n)}{3a^2+n}<\sqrt{n}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3n]}{3(a+1)^2+n}.$$

۲۰. اگر $a<\sqrt[3]{n}<a+1$ آنگاه

$$\frac{a(a^3+2n)}{2a^3+n}<\sqrt[3]{n}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2n]}{2(a+1)^3+n}.$$

۲۱. اگر $n>3$ آنگاه $\sqrt[n]{2}-1<1/(n+1)$.

۲۲. اگر $a>1$ و $n>1$ آنگاه

$$0<\sqrt[n]{a}-1<(a-1)/n.$$

۲۳. اگر $d > 0$ و $n > 1$ آنگاه

$$\sqrt[n]{1+d} > \frac{1}{1-\frac{d}{n(1+d)}} > 1+\frac{d}{n(1+d)}.$$

۲۴. بدون استعانت از «قضیه‌ی علامت سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم» ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه، بازاء جمیع مقادیر x،

$$ax^2+2bx+c \geqslant 0$$

آنست که، در عین حال،

$$a \geqslant 0, \qquad c \geqslant 0, \qquad ac-b^2 \geqslant 0$$

۲۵. اگر هر دو سه‌جمله‌ای $ax^2+2bx+c$ و $px^2+2qx+r$ بازاء جمیع مقادیر x نامنفی باشند سه‌جمله‌ای $apx^2+2bqx+cr$ نیز بازاء جمیع مقادیر x نامنفی است.

۲۶. به فرض آنکه همواره اگر $|x| \leqslant 1$ آنگاه

$$|ax^2+bx+c| \leqslant 1$$

ثابت کنید که همواره اگر $|x| \leqslant 1$ آنگاه

$$|2ax+b| \leqslant 4.$$

۲۷. اگر $|x| \leqslant 1$ و $|y| \leqslant 1$ آنگاه

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} \leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی چیست؟

۲۸. اگر $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ آنگاه

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\,abc,$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $a=b=c$.

۲۹. اگر $a > 0$، $b > 0$، و $a+b=1$ آنگاه

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی چیست؟

۳۰. اگر $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ آنگاه

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $a=b=c$.

۳۱. اگر x، y، و z نامنفی باشند آنگاه

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2) \geqslant 9x^2y^2z^2$$

۳۲. اگر x، y، و z سه عدد مثبت باشند آنگاه

$$xy+yz+zx \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

۳۳. a، b، و c اضلاع یک مثلث، s مساحت آن، و v_1، v_2، و v_3 طولهای منصف‌الزوایای آن هستند. ثابت کنید که

$$(\text{آ}) \quad a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,s+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

(د) $v_1^2+v_2^2+v_3^2 \geqslant 3\sqrt{3}\, s.$

۳۴. بنا بر آنکه $a, b \in \mathbf{R}^+$ و $c, d \in \mathbf{Q}^+$،

$$a^{c+d}+b^{c+d} \geqslant a^c b^d + a^d b^c.$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی چیست؟

۳۵. مجموعه‌ی صدق هر یک از نامساویهای ذیل را تعیین کنید:

(آ) $(|x|-5)(|x|-3) > 0.$

(ب) $(x-1)(x-2) > (|x|-1)(|x|-2).$

(پ) $||x|-5| > ||3x|-3|.$

(ت) $(|x|-5)(|x|-3) > (|x|-5)/(|x|-3).$

(ث) $\sqrt{|x^2-1|} > x-5.$

(ج) $\sqrt{x+5} > \sqrt{|x^2-10x+25|}.$

۳۶. در مجموعه‌ی صدق هر یک از گزاره‌نماهای ذیل بر حسب مقادیر مختلف λ بحث کنید:

(آ) $5\lambda x - 9 > 10x - 3\lambda.$

(ب) $\dfrac{\lambda-3}{2\lambda}x > \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{x-1}{\lambda}.$

(پ) $\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2-1}x > \dfrac{2-x}{\lambda-1} + \dfrac{1+x}{\lambda+1}.$

(ت) $\dfrac{x^2-2\lambda x-24\lambda^2}{2\lambda+1} > 0.$

۳۷. در مورد هر یک از نامساویهای آتیه، تعیین کنید که نامساوی بازاء چه مقادیری از λ ممکن است، و در این صورت، جواب آن چیست:

(آ) $|x+1|+|x-1| < \lambda.$

(ب) $|x|+|x-1|+|x-2| > \lambda.$

۳۸. در مجموعه‌ی صدق هر یک از گزاره‌نماهای ذیل بازاء جمیع مقادیر ممکنه‌ی a و b بحث کنید:

(آ) $|x-a| < |x-b|.$ (ب) $|x-a| < x-b.$

(پ) $x-a < |x-b|.$ (ت) $|x^2-a| < b.$

۳۹. بازاء چه مقادیر مثبت a نامساوی $\sqrt{a+x} > x$ ممکن است؟

۴۰. نامساوی $\sqrt{x^2+x+1} > ax+b$ را حل و بحث کنید.

۴۱. نامساوی ذیل را حل و بحث کنید:

$$\sqrt{(3x+\lambda)/(x-\lambda)} < \lambda - 1.$$

۴۲. نامساوی ذیل را حل و بحث کنید:

$$x+\sqrt{a^2-x^2} > b.$$

۴۳. نامساوی $2|x-a| < 2ax - x^2 - 2$ را حل و بحث کنید.

۴۴. ثابت کنید که اگر $0 < x < 1/2$ آنگاه

$$\left|\frac{x^2-x+1}{1+x-2x^2}\right| > \frac{3}{4(1+x)}.$$

۴۵. ثابت کنید که اگر $|x-5|<1$ آنگاه مقدار $x/(x+10)$ از بازه‌ی $(1/4, 3/7)$ خارج نتواند بود.

۴۶. عدد مثبت h در چه شرایطی صدق کند تا همواره اگر $|x-1|<h$ آنگاه $|x^2+10x-11|<1/2$؟

۴۷. بازاء چه مقادیری از عدد مثبت λ همواره اگر $|x-2|<\lambda$ آنگاه

$$\left|\frac{x+26}{x^2+3}-4\right|<\frac{1}{5}?$$

۴۸. اگر $0<x<y$، $0<\delta<2$، $0<2-x^2<\delta$، و $0<y^2-2<\delta$ آنگاه $y-x<\delta$.

۴۹. با توجه به نامساوی $x^2-3x+3\leqslant 0$، تعیین کنید بازاء چه مقادیر x جزء صحیح x^2-3x مساوی جزء صحیح $x^2+(1/2)$ است.

* * *

۵۰. متغیرهای فردی مقید به $\mathbf{R}$ هستند. هر یک از نسب $=$، $\subseteq$، و $\subset$ را که بین مجموعه‌های ذیل دو بدو برقرار است بنویسید:

$A_1=\{x\mid 0<x<2\};$ $\quad$ $A_2=\{x\mid |x|<1\};$

$A_3=\{x\mid x<x^2\};$

$A_4=\{x\mid$ yی هست که $x=y^2\};$

$A_5=\{x\mid$ yی هست که $x=1/y\};$

$A_6=\{x\mid$ yی هست که $x=3y\};$

$A_7=\{x\mid$ yی و zی هست که $x=y^2$ و $y+z^2<1\};$

$A_8=\{x\mid$ بازاء هر y، $|x-y|=x-y\};$

$A_9=\{x\mid$ بازاء هر y، $|x-y|=|y|-|x|\};$

$A_{10}=\{x\mid$ yی هست که $y^2+xy+x=1\}.$

۵۱. اگر A و B دو مجموعه‌ی محدود و غیر خالی از اعداد حقیقی باشند،

$$\sup(A\cup B)=\operatorname{Max}\{\sup A, \sup B\};$$
$$\inf(A\cup B)=\min\{\inf A, \inf B\}.$$

۵۲. A مجموعه‌ای محدود و غیر خالی از اعداد حقیقی است، و $B=\{|x|\mid x\in A\}$. ثابت کنید که مجموعه‌ی B محدود است، و

(آ) $\quad \sup B=\operatorname{Max}\{|\sup A|, |\inf A|\};$

(ب) $\quad 0\leqslant \inf B\leqslant \min\{|\sup A|, |\inf A|\}.$

ثابت کنید که در (ب) در هر طرف ممکن است تساوی برقرار باشد.

۵۳. A مجموعه‌ای محدود و غیر خالی از اعداد حقیقی است، و بازاء عدد صحیح مفروض n،

$$A_n=\{a^n \mid a\in A \text{ و } a^n \text{ معنی دارد}\}.$$

ثابت کنید که

(آ) $\quad \sup A_2=\operatorname{Max}\{(\sup A)^2, (\inf A)^2\};$

$$0 \leqslant \inf A_2 \leqslant \min \{(\sup A)^2, (\inf A)^2\}.$$

(ب) $\sup A_3 = (\sup A)^3; \qquad \inf A_3 = (\inf A)^3.$

(پ). اگر $\inf A > 0$ آنگاه

$$\sup A_{-1} = 1/\inf A; \qquad \inf A_{-1} = 1/\sup A.$$

(ت). اگر $\inf A = 0$ و همه‌ی اعضای A مثبت باشند آنگاه $\inf A_{-1} = 1/\sup A$ و A_{-1} از بالا محدود نیست.

(ث). با مفروضات (ت)، اگر $0 \in A$ آیا احکام مذکور در (ت) برقرارند؟

۵۴. A مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی نامنفی است، و

$$B = \{x \mid x \geqslant 0 \ \& \ x^2 \in A\}.$$

ثابت کنید که

$$\sup B = \sqrt{\sup A}; \qquad \inf B = \sqrt{\inf A}.$$

۵۵. A و B دو مجموعه از اعداد حقیقی و از بالا محدودند، و

$$C = \{xy \mid x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

ثابت کنید که

(آ) ممکن است C از بالا محدود نباشد.

(ب) اگر A و B از پایین هم محدود باشند، آنگاه C از بالا محدود است، و

$$\sup C = \mathrm{Max}\,\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\}.$$

۵۶. Z مجموعه‌ای غیرخالی از ازواج مرتب اعداد حقیقی است، و مجموعه‌های A، B، و C چنین تعریف شده‌اند:

$$A = \{\sqrt{x^2 + y^2} \mid (x, y) \in Z\},$$
$$B = \{x \mid (x, y) \in Z \text{ هست که } y \text{ ی}\},$$
$$C = \{x \mid (y, x) \in Z \text{ هست که } y \text{ ی}\}.$$

ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه A محدود باشد آنست که B و C هر دو محدود باشند، و در این صورت

$$\sup A \leqslant \mathrm{Max}\,\{|\sup B|, |\inf B|\} + \mathrm{Max}\,\{|\sup C|, |\inf C|\}.$$

۵۷. A و B دو مجموعه‌ی محدود از اعداد مثبت‌اند. مجموعه‌ی C از اعداد دارای این خصلت است که هر عضوش حاصلجمع عضوی از A است با عضوی از B. بعلاوه، بازاء هر a از A، b ی از B و c ی از C هست که $c = a + b$. اولاً، ثابت کنید که C از بالا محدود است، و

$$\sup A \leqslant \sup C \leqslant \sup A + \sup B.$$

ثانیاً، ثابت کنید که در هر طرف ممکن است تساوی برقرار باشد.

غلامحسین مصاحب

آنالیز ریاضی

جلد اول

تئوری اعداد حقیقی

قسمت II

رشته‌ها و سلسله‌ها. ضمایم و ملحقات

فصل ۷

حدود رشته‌ها

یادآوری

از این ببعد، مقصود از رشته رشته‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی (توابعی بر $\mathbf{N}$ بتوی $\mathbf{R}$) است. احکام مربوط به این گونه رشته‌ها را، چنانکه در ۶.۲.۸ : ۵ اشاره کردیم، میتوان در مورد رشته‌های نامتناهی با مجموعه‌ی اندیسگذار $\mathbf{I}_k$ با تصرفات جزئی لفظی تعمیم داد.

متغیرهای فردی ε، η، و δ مقید به $\mathbf{R}^+$ هستند (پس، مثلاً، «عدد دلخواه ε» یعنی «عدد مثبت دلخواه ε»). متغیرهای فردی M، N، μ، و ν را نیز به عنوان اسامی اعداد طبیعی یا صحیح دلخواه بکار میبریم.

۱ § بعضی مفاهیم ابتدائی

۱.۱. مقدمه. سابقاً به اهمیت حیاتی رشته‌ها در ریاضیات اشاره کردیم. در بیان خواص عمیق رشته‌ها اصطلاحاتی مبهم و احیاناً عامیانه بر سر زبانها هست که، از آن میان، آنهائی را که قابل تعریف دقیق ریاضی هستند باید بدین گونه تعریف کرد، و از استعمال سایرین باید بکلی دوری جست.

خواصی از رشته‌ای مانند $\{a_n\}$ که در آنالیز مورد توجه است خواص «قسمت دوردست رشته» یا خواص آن «بازاء مقادیر بزرگ n» (یا «بازاء مقادیری از n که به قدر کافی بزرگ هستند») میباشند. در بسیاری از رشته‌ها، جمله‌های اوایل رشته از لحاظ مقدار ناهمواریهائی دارند، ولی، وقتی که به حد کافی در رشته پیش رویم، هموار میشوند. از طرف دیگر، بسیاری از رشته‌ها هستند که، هر قدر هم در آنها پیش رویم، جمله‌هایشان ناهمواری و جست و خیز خود را حفظ میکنند. از این احوال، که به تدریج به معنی دقیق آنها واقف خواهید شد، به «رفتار رشته بازاء مقادیر بزرگ n» تعبیر میکنند. مثلاً، اگر نمودار رشته‌های $\{(-1)^n/n\}$، $\{n\}$، و $\{(-1)^{n-1}\}$ را رسم کنید ملاحظه خواهید کرد که رشته‌ی اول رشته‌ای «خوشرفتار» است: جمله‌هایش متدرجاً به 0 نزدیک میشوند؛ رشته‌ی دوم ــ اگر چه جمله‌هایش به عددی نزدیک نمیشوند ــ رفتاری نسبةً هموار دارد؛ رشته‌ی سوم رشته‌ای بس «کجرفتار» است: هر قدر در آن پیش رویم، از جست و خیز و نوسان خود دست برنمیدارد.

در صفحات آتیه به تعریف دقیق اصطلاحات و مفاهیم مذکور میپردازیم.

۱.۱.۱. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای و F خاصیتی باشد. از لحاظ اینکه همه یا بعضی از

جمله‌های $\{a_n\}$ واجد یا فاقد خاصیت F باشند، چند حالت ممکن است اتفاق افتد:

I. همه‌ی جمله‌های $\{a_n\}$، احیاناً جز تعدادی متناهی از آنها، خاصیت F دارند.

II. هیچ یک از جمله‌های $\{a_n\}$، احیاناً جز تعدادی متناهی از آنها، خاصیت F ندارد.

III. نه I و نه II.

در صفحات آتیه، به توضیح این حالات و بیان آنها به صورتی مساعد با استدلال میپردازیم.

۱.۰۱.۰۳. تبصره. در فصل ۵، ضرورت تمیز گذاشتن بین یک رشته و مجموعه‌ی جمل آن را خاطر نشان ساختیم (مثلاً پ: ۶.۰۲.۰۷ : ۵ ملاحظه شود).

اگر $a = \{a_i\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و A مجموعه‌ی جمل آن باشد، بنا بر تعریف، a تابعی است بر $\mathbf{N}$، و $A = a$حع. پس،

اولاً، هر مقدار a به A تعلق دارد، و به عبارت دیگر، بازاء هر عدد طبیعی n، $a_n \in A$.

ثانیاً، هر عضو A مقدار تابع a است بازاء عضو یا اعضائی از $\mathbf{N}$؛ و به عبارت دیگر، اگر $b \in A$ آنگاه عددی طبیعی مانند n هست که $b = a_n$.

نکات فوق وسیله‌ی بیان مفاهیم و احکام مربوط به رشته‌ها است بر حسب اصطلاحات مربوط به رشته‌ها، چنانکه در آتیه معلوم خواهد شد.

۱.۰۱.۰۴. تبصره. وقتی که از عده‌ی جمله‌های یک رشته که دارای خاصیتی مانند F هستند سخن میرود همواره مقصود عده‌ی اندیسهائی است که جمله‌های نظیر آنها دارای این خاصیت هستند.

مثلاً، در رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = -1, \qquad a_n = 2 \quad (n \geqslant 5),$$

مجموعه‌ی جمله‌ها مجموعه‌ی متناهی $A = \{-1, 2\}$ است. اما، عده‌ی جمله‌های منفی رشته، یعنی عده‌ی اعضای مجموعه‌ی $\{n \mid a_n < 0\}$، مساوی 4 میباشد؛ و عده‌ی جمله‌های مثبت رشته همان عده‌ی اعضای مجموعه‌ی $\{n \mid a_n > 0\}$ است، که مجموعه‌ای است نامتناهی.

۱.۰۲. خواص یک رشته «از مرتبه‌ای ببعد». در این قسمت، اساساً حالت I مذکور در ۱.۰۱.۰۱ مورد بحث است. جهت آماده کردن ذهن، قبلاً مثالهائی میآوریم.

۱.۰۲.۰۱. امثله

(آ). اگر $\{a_n\}$ رشته‌ی $\{1/n\}$ و F خاصیت مثبت بودن باشد، همه‌ی جمله‌های رشته خاصیت F دارند. به عبارت دیگر، جمله‌های رشته از مرتبه‌ی اول ببعد خاصیت F دارند. بدیهی است که از هر مرتبه‌ای برتر از اول نیز جمله‌ها دارای خاصیت F میباشند.

(ب). رشته‌ی

$$10, 500, 15, 20, 25, \ldots$$

را با ضابطه‌ی

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 500, \quad a_n = 5n \quad (n \geqslant 3)$$

اختیار میکنیم، و فرض میکنیم F خاصیت بزرگتر بودن از 200 باشد. واضحست که همه‌ی جمله‌ها خاصیت F ندارند، اما، از مرتبه‌ی 41م ببعد، همه‌ی جمله‌ها، بدون استثناء، دارای خاصیت F هستند. نیز معلومست که از هر مرتبه‌ای برتر از 41م هم همه‌ی جمله‌ها خاصیت F دارند.

در هر دو مثال، بدون اعتنا، به مرتبه‌ی معین، میتوان گفت که a_n از مرتبه‌ای ببعد خاصیت F دارد. اغلب، این مطلب را بدین عبارت هم بیان میکنند که وقتی n «بقدر کافی» بزرگ باشد a_n خاصیت F دارد. بطور کلی،

۱.۲.۲. تعریف. گزاره‌های

a_n از مرتبه‌ای ببعد خاصیت F دارد

وقتی که n بقدر کافی بزرگ باشد a_n خاصیت F دارد

هر دو بدین معنی هستند:

عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $N \leqslant n$ آنگاه $F(a_n)$.

(در استدلال باید به همین صورت دقیق اخیر توسل جست.)

۱.۲.۳. تبصره. بنا بر توضیحات مذکور در فصل ۱ در باب گزاره‌های کلی، گزاره‌های ذیل جملگی به یک معنی هستند:

همه‌ی جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$ خاصیت F دارند،

بازاء هر (عدد طبیعی) n، a_n خاصیت F دارد،

بازاء هر (عدد طبیعی) n، $F(a_n)$.

همواره $F(a_n)$.

اینک، در تعقیب مثالهای سابق، ثابت میکنیم که

۱.۲.۴. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای و F خاصیتی باشد، و منتها تعدادی متناهی از جمل $\{a_n\}$ فاقد خاصیت F باشند، جمل رشته از مرتبه‌ای ببعد خاصیت F دارند، یعنی، عددی طبیعی مانند N هست که

(۱.۲.۴.۱) بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $N \leqslant n$ آنگاه $F(a_n)$.

برهان. اگر همه‌ی جمله‌های $\{a_n\}$ دارای خاصیت F باشند آنگاه گزاره‌نمای ۱.۲.۴.۱ بازاء $N = 1$ برقرار است. در غیر این صورت، فرض کنیم A مجموعه‌ی اندیسهای جمله‌هائی از $\{a_n\}$ باشد که خاصیت F ندارند. بنا بر مفروضات، A مجموعه‌ای متناهی و غیر خالی از

اعداد طبیعی است، و لهذا عضو اکثر دارد. اگر μ عضو اکثر A باشد، با اندک تأملی دیده میشود که ۱.۲.۴.۱ بازاء $N = \mu + 1$ برقرار است. ▲

۱.۲.۵. تبصره. قبل از ذکر امثله، توجه محصلین را به نکاتی چند در باب قضیه‌ی سابق جلب میکنیم.

I. کوچکترین مقدار عدد طبیعی N را که، بازاء آن، گزاره‌نمای ۱.۲.۴.۱ برقرار است *آغاز استمرار* خاصیت F برای رشته‌ی $\{a_n\}$ نامیم. وقتی که F با گزاره‌نمائی بیان شده باشد، برای اختصار، این کوچکترین مقدار را آغاز استمرار آن گزاره‌نما برای رشته‌ی $\{a_n\}$ گوئیم. در مثالهای ۱.۲.۰۱، 1 آغاز استمرار خاصیت مثبت بودن برای رشته‌ی $\{1/n\}$ است، و 41 آغاز استمرار خاصیت بزرگتر از 200 بودن برای رشته‌ی مثال (ب).
بطور کلی اگر همه‌ی جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$ دارای خاصیت F باشند 1 آغاز استمرار این خاصیت برای آن رشته است. در غیر این صورت، عدد $\mu + 1$ (برهان قضیه‌ی ۱.۲.۴ را ملاحظه کنید) آغاز استمرار خاصیت F برای رشته‌ی $\{a_n\}$ میباشد، زیرا، بنا بر تعریف μ، a_μ خاصیت F ندارد، اما، جمله‌های رشته، از $a_{\mu+1}$ ببعد، دارای خاصیت F هستند.

II. اگر گزاره‌نمای ۱.۲.۴.۱ بازاء مقداری از N برقرار باشد بازاء هر عدد طبیعی بزرگتر از آن نیز برقرار است. هر مقدار N را که در گزاره‌نمای مذکور صدق کند یک *مرحله‌ی استمرار* خاصیت F (برای رشته‌ی $\{a_n\}$) نامیم. واضحست که مرحله‌ی استمرار خاصیت F، برخلاف آغاز استمرار این خاصیت، منحصر بفرد نیست. در مثال (آ) سابق، هر عدد طبیعی معیّن، و در مثال (ب)، هر عدد طبیعی معین ناکمتر از 41 یک مرحله‌ی استمرار خاصیت مورد بحث برای رشته‌ی مورد بحث میباشد.

III. بالاخص، آغاز استمرار خاصیت F برای یک رشته یک مرحله‌ی استمرار نیز هست. البته، اطلاعی که آغاز استمرار بدست میدهد دقیقتر از آنست که از سایر مراحل استمرار بدست میآید: آغاز استمرار *اولین* جمله‌ای از رشته را که، از آن ببعد، همه‌ی جمله‌ها خاصیت F دارند بدست میدهد، و حال آنکه، اگر N یک مرحله‌ی استمرار باشد آنچه استنباط میشود اینست که جمله‌های رشته از a_N ببعد همه خاصیت F دارند، ولی ممکن است، مثلاً، a_{N-1} هم خاصیت F داشته باشد. پس، میتوان گفت که، در مورد یک رشته و یک خاصیت، آغاز استمرار *بهترین* (یعنی کوچکترین) مرحله‌ی استمرار است.

IV. در قضیه‌ی ۱.۲.۴، اگر «$n \geqslant N$» را به «$n > N$» تبدیل کنیم قضیه‌ای معادل آن قضیه حاصل میشود (ثابت کنید).

۱.۲.۶. تبصره. در حالت II مذکور در ۱۰۱۰۱، به قیاس آنچه در ۱.۲.۴ گذشت، معلوم میشود که جملههای رشتهی $\{a_n\}$ از مرتبهای ببعد فاقد خاصیت F هستند، یعنی، عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $\sim F(a_n)$.

۱.۲.۷. امثله و فواید

(آ). رشتهی $\{1/n\}$ را اختیار و فرض میکنیم F خاصیت کوچکتر بودن از 0,001 باشد. معلومست که همهی جملههای رشته این خاصیت را ندارند. اما، از مرتبهای ببعد، همهی جملهها دارای خاصیت F هستند، زیرا، نامساوی $1/n < 0{,}001$ معادل نامساوی $n > 1000$ است، و از اینجا معلوم میشود که همواره اگر $n \geqslant 1001$ آنگاه $1/n < 0{,}001$. در اینجا، 1001 آغاز استمرار خاصیت F برای رشتهی $\{1/n\}$ است. واضحست که جملههای رشته از هر مرتبهای برتر از 1001م نیز دارای خاصیت F میباشند. مثلاً، $N = 10\,000$ یک مرحلهی استمرار است، ولی، بهترین مرحلهی استمرار 1001 میباشد.

(ب). رشتهی a را با جملهی عمومی $a_n = (-1)^n/n$ اختیار میکنیم، و فرض میکنیم F خاصیت واقع بودن در حومهایاز 0 به شعاع 0,3 باشد. این خاصیت با گزارهنمای $|a_n| < 0{,}3$ (۱) بیان میشود، که معادل گزارهنمای $1/n < 0{,}3$ است، که خود معادل $n > 10/3$ میباشد. بازاء $n \geqslant 4$، نامساوی (۱) برقرار است. جملههای رشته، از مرتبهی چهارم ببعد، در $U_{0,3}(0) = (-0{,}3, 0{,}3)$ قرار دارند[۱]، و 4 آغاز استمرار خاصیت مذکور میباشد.

نتیجهی فوق را با نمایش کارتزین نیز میتوان بیان کرد. گزارهنمای $|a_n| < 0{,}3$ معادل $-0{,}3 < a_n < 0{,}3$ است. پس، اگر خطوط $y = \pm 0{,}3$ را رسم کنیم قسمتی از نمایش رشتهی $\{(-1)^n/n\}$ که بر خط $n = 4$ یا در طرف راست آنست در نوار بین این دو خط قرار دارد[۲]. بیان کلی این نمایش مفید در مورد رشتهای مانند $\{a_n\}$ که جمل آن از مرتبهای ببعد خاصیت F دارند به متعلم محول میشود.

(پ). رشتهی $\{100/n^2\}$ و خاصیت بزرگتر بودن از 4 را اختیار میکنیم. از نامساوی $(100/n^2) > 4$ معلوم میشود که، از مرتبهی 5م ببعد، جملههای رشته فاقد خاصیت مذکور هستند. به عبارت دیگر، 5 آغاز استمرار نامساوی $\sim((100/n^2) > 4)$ یا $100/n^2 \leqslant 4$ میباشد.

(ت). رشتهی $\{n^2\}$ و خاصیت واقع بودن در حومهی $(10^6, \infty)$ از ∞ را اختیار میکنیم. از نامساوی $n^2 > 10^6$ معلوم میشود که جملههای رشته از مرتبهی 1001م ببعد دارای خاصیت مذکور هستند، یعنی، در حومهای از ∞ به مبدأ 10^6 قرار دارند.

(ث). ثابت کنید که، از مرتبهای ببعد، نامساویهای ذیل در عین حال برقرارند:

(۱) $1000 < n^2,$ (۲) $n^2 < n^3/8\,000\,000.$

نامساوی (۱) معادل نامساوی $n > \sqrt{1000}$ است. چون $\sqrt{1000}$ بین 31 و 32 است، آغاز

---

(۱) حومهی مورد بحث و پانزده جملهی اول رشته را بر یک محور نمایش دهید.

(۲) با نمایش کارتزین پانزده جملهی رشته توضیح دهید.

استمرار (۱) $N_1 = 32$ میباشد. نامساوی (۲) معادل نامساوی $n > 8\,000\,000$، و آغاز استمرارش $N_2 = 8\,000\,001$ است. واضحست که، از مرتبه‌ی $8\,000\,001$م ببعد نامساویهای (۱) و (۲) در عین حال برقرارند. ملاحظه کنید که آغاز استمرار (۱) و (۲) در عین حال عبارتست از $\mathrm{Max}\,\{N_1, N_2\}$.
وضعی که در مثال اخیر ملاحظه شد در مبحث حدود بسیار پیش می‌آید. برای احتراز از تکرار آن را به صورت کلی ذیل بیان میکنیم:

۱.۲.۸. قضیه. اگر گزاره‌نماهای $F(n)$ و $G(n)$ هر یک از مرتبه‌ای ببعد برقرار باشد مرتبه‌ای هست که، از آن ببعد، هر دو در عین حال برقرارند. به عبارت دقیقتر، اگر $F(n)$ از مرتبه‌ی N_1 ببعد و $G(n)$ از مرتبه‌ی N_2 ببعد برقرار باشد، و $N = \mathrm{Max}\,\{N_1, N_2\}$، آنگاه، از مرتبه‌ی N ببعد، $F(n)$ و $G(n)$ در عین حال برقرارند. (تعمیم بازاء هر تعداد متناهی از گزاره‌نماها آسان است.)
برهان. اگرچه این حکم در پرتو توضیحات گذشته بدیهی است، نظر به کثرت فواید آن برهانش را میاوریم. بنا بر فرض قضیه،

(۱) بازاء هر n، اگر $N_1 \leqslant n$ آنگاه $F(n)$،

(۲) بازاء هر n، اگر $N_2 \leqslant n$ آنگاه $G(n)$.

حال فرض کنیم $N = \mathrm{Max}\,\{N_1, N_2\}$، و بالنتیجه، $N_1 \leqslant N$ (۳) و $N_2 \leqslant N$ (۴).
اینک اگر m عدد طبیعی دلخواهی باشد بطوری که $N \leqslant m$ (۵) آنگاه، بنا بر (۳) و (۴) و (۵)، $N_1 \leqslant m$ و $N_2 \leqslant m$. پس، بنا بر (۱) و (۲)، $F(m)$ و $G(m)$. بالنتیجه، بازاء هر عدد طبیعی m، اگر (۵) برقرار باشد آنگاه $F(m)\ \&\ G(m)$. ▲

۱.۲.۹. تبصره. اگر k عدد صحیح ثابتی باشد، رشته‌ی $\{a_n\}_{n=k}$، چنانکه میدانیم، تابعی است بر $\mathbf{I}_k$، و لهذا، در بحث از چنین رشته‌ای، فقط مقادیری از n در کار می‌آیند که در شرط $k \leqslant n$ صدق کنند. پس، مطالب سابق‌الذکر را میتوان، با مقید کردن n به این شرط، در مورد رشته‌ی $\{a_n\}_{n=k}$ بیان کرد.
مثلاً، اگر F خاصیت کوچکتر بودن از $1/10$ باشد آغاز استمرار این خاصیت برای رشته‌ی $\{1/n\}_{n=1}$ عدد $N = 11$ است، اما، آغاز استمرار همان خاصیت برای رشته‌ی $\{1/n\}_{n=20}$ به وسیله‌ی شرایط $20 \leqslant n\ \&\ 1/n < 1/10$ مشخص میشود، و آن $N' = 20$ است. در رشته‌ی اول، از اندیس 11 ببعد جمله‌ها خاصیت F دارند، و در رشته‌ی دوم از اندیس 20 ببعد؛ تفاوت دو حالت در این است که، در اولی، اندیس هر جمله مرتبه‌ی آن نیز هست، ولی در دومی چنین نیست.

۱.۲.۱۰. بعضی ملاحظات منطقی. از این فصل ببعد همواره با گزاره‌هائی سر و کار داریم که پیشوندهای کلیت یا جزئیت متوالی در آغاز آنها میآیند. کار کردن با این گونه گزاره‌ها اغلب برای محصلین ناآشنا با مبادی منطقی متضمن مشکلات جدی است. بنا بر این،

ذکر توضیحاتی در این باب مفید است.

در ۳۰۸ : ۱ توضیحات مختصری در باب پیشوندهای کلیت و جزئیت آوردیم، و خاطرنشان کردیم که پیشوند کلیت معمولاً با الفاظ هر و هیچ، و پیشوند جزئیت با الفاظ بعض و بعضی از بیان میشوند، و تذکر دادیم که گزاره‌های جزئی جنبه‌ی وجودی دارند. در ریاضیات، برای آشکار ساختن این جنبه، گزاره‌های وجودی را با پیشوندهائی مانند

xی هست که، بازاء بعضی مقادیر x

بیان میکنند، و عنداللزوم راسته‌ی متغیر فردی را نیز ذکر میکنند، مانند

عددی طبیعی مانند n هست که.

نمونه‌ای از گزاره‌هائی که پیشوندهای متوالیِ یکسان در آغاز آنهاست اینست:

(۱) بازاء هر x و بازاء هر y، $x + y = y + x$.

(۲) xی هست و yی هست که $x < y$.

به استناد اصول منطقی میتوان ثابت کرد که

تعویض محل این گونه پیشوندهای متوالیِ یکسان در یک گزاره آن را به گزاره‌ای معادل آن تبدیل میکند.

مثلاً، گزاره‌های (۱) و (۲) بترتیب با گزاره‌های ذیل معادلند:

($1'$) بازاء هر y و بازاء هر x، $x + y = y + x$.

($2'$) yی هست و xی هست که $x < y$.

بیان گزاره‌ها به زبان عادی این نکته‌ی مهم را آشکار میسازد. مثلاً، گزاره‌های (۱) و ($1'$) هر دو بدین معنی هستند:

($1''$) بازاء هر دو عدد، حاصلجمع یکی با دیگری مساوی حاصلجمع این دیگری با آن یکی است.

و گزاره‌های (۲) و ($2'$) هر دو بدین معنی:

($2''$) دو عدد هست که یکی از دیگری کوچکتر است.

در مورد پیشوندهای نایکسان مطلب بدین سادگی نیست. گزاره‌ی

(۳) بازاء هر x، yی هست که $y > x$

یعنی، بازاء هر عدد، عددی بزرگتر از آن هست، و این گزاره راست است. اما، گزاره‌ی

(۴) yی هست که بازاء هر x، $y > x$

یعنی

($4'$) عددی هست که از هر عدد بزرگتر است

و این گزاره دروغ است. پس،

تعویض محل یک پیشوند کلیت با یک پیشوند جزئیت که به دنبال آن آمده است جایز نیست.

اینک گزاره‌ی راست

(۵) y ی هست که، بازاء هر x، $x+y>x$

را اختیار میکنیم. از تعویض محل پیشوندها گزاره‌ی راست

(۶) بازاء هر x، y ی هست که $x+y>x$

حاصل میشود. به استناد اصول منطقی میتوان ثابت کرد که

تعویض محل یک پیشوند جزئیت با یک پیشوند کلیت که به دنبال آن آمده است جایز است، بدین معنی که گزاره‌ی حاصل از تعویض نتیجه‌ی گزاره‌ی اولیه است (نه معادل آن).

بنا بر آنچه گذشت، در تعریف و استدلال، باید به محل پیشوندهای کلیت و جزئیت توجه کامل مبذول کرد.

۱.۲.۱۵.۱. تبصره. در باب ساختن نقیض گزاره‌ها با حرکت دادن ناقض، در فصل ۱ توضیحات و امثله و تمرینات کافی آورده‌ایم، و محصلین باید مطالب مذکور در آنجا را حاضرالذهن داشته باشند[1]. مثلاً، نقیض گزاره‌ی

(۱) عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هرعدد طبیعی n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $F(a_n)$،

که در تعریف ۱.۲.۲ آمده است، چنین است:

(۲) بازاء هر عدد طبیعی مانند N، عددی طبیعی مانند n هست که $n \geqslant N$ و $\sim F(a_n)$

(به تبدیل پیشوند کلیت به پیشوند جزئیت و بالعکس توجه کنید). بنا بر آنچه در فصل ۱ در اثبات احکام کلی و جزئی آموختیم، برای اثبات حکمی به صورت (۱)، کافی است عدد طبیعی مناسبی مانند N عرضه کنیم، و ثابت کنیم که اگر n عدد طبیعی دلخواهی ناکمتر از N باشد آنگاه a_n خاصیت F دارد. اما، برای اثبات حکمی به صورت (۲)، کافی است فرض کنیم N عدد طبیعی دلخواهی باشد، و عددی طبیعی مانند n عرضه کنیم که، در عین حال، $n \geqslant N$ و a_n خاصیت F نداشته باشد.

۱.۲.۱۱. تمرین

۰۱ در مورد هر یک از رشته‌هائی که ذیلاً با ضابطه‌ای تعریف شده‌اند و خاصیت یا شرط همراه آن، آغاز استمرار این خاصیت یا شرط را در آن رشته تعیین کنید، و نتیجه‌ی حاصل را به زبان هندسی بیان نمایید.

(آ). $a_n = 10\,000/n$ و خاصیت کوچکتر یا مساوی 10^{-6} بودن.

(ب). $a_n = 1\,000\,000/n$ و همان خاصیت.

(پ). $a_n = n$ و خاصیت بزرگتر از 10^8 بودن.

---

(۱) در فصل ۱ ض در این باب توضیحات اساسیتر آمده است.

(ت). $a_n = n/100\,000\,000$ و همان خاصیت.
(ث). $a_n = -1/n$ و خاصیت واقع بودن در $U(0, 0{,}001)$.
(ج). $a_n = (-1)^n \cdot 100/n$ و همان خاصیت.
(چ). $a_n = n/(n^2+1)$ و خاصیتی که با $a_n < 0{,}001$ بیان شده است.
(ح). $a_n = (n^2+1)/n$ و شرط $a_n > 10^6$.
(خ). $a_n = (n+1)/n^2$ و شرط $a_n < 10^{-6}$.
(د). $a_n = (n-1)/(n+1)$ و شرط $1 - a_n < 0{,}001$.
(ذ). $a_n = \sqrt{n}$ و خاصیت واقع بودن در $(1\,973, \infty)$.
(ر). $a_n = 1/\sqrt{n}$ و شرط $a_n < 0{,}075$.

۲. F خاصیت واقع بودن در بازه‌ی $(-\infty, 10^{15})$ است. ثابت کنید که رشته‌هائی که ذیلاً با جمله‌ی عمومی خود معرفی شده‌اند از مرتبه‌ای ببعد فاقد این خاصیت‌اند:
(آ) n. (ب) n^2. (پ) n^3+1.
(ت) $\sqrt[4]{n}$. (ث) $\sqrt[3]{n}$. (ج) $\sqrt{n}/10^6$.

۳. در هر دسته از نامساویهای ذیل ثابت کنید که نامساویها از مرتبه‌ای ببعد، در عین حال، برقرارند.
(آ). $0{,}999\,9 < n/(n+1) < 1{,}01$.
(ب). $(-1)^n/n < 0{,}002$ و $(-1)^n/n > -0{,}000\,1$.
(پ). $10^6 < n^5/6$ و $7n^3 < n^5/6$.
(ت). $10^6 < n^5/500$، $7n^3 < n^5/500$ و $10^{15}n^2 < n^4 \cdot 10^{-10}$.

۴. نظیر قضیه‌ی ۱.۲.۸ را در مورد تعدادی متناهی از گزاره‌نماها بیان و ثابت کنید.

۵. در هر دسته از گزاره‌نماهای ذیل، تحقیق کنید که آیا ممکن است همه‌ی گزاره‌نماها در عین حال از مرتبه‌ای ببعد برقرار باشند یا نه.
(آ). $1{,}999 < (2n+1)/n < 2{,}000\,1$ و $1{,}999\,9 < (2n+1)/n$.
(ب). $1{,}999 < (2n+1)/n < 2{,}000\,1$ و $2{,}001 < (2n+1)/n < 2{,}01$.
(پ). $100n^3 > n^4$ و $1\,000n^6 < n^8$.

۱.۲.۱۳. تبصره. اثبات اینکه رشته‌ای از مرتبه‌ای ببعد خاصیتی مانند F دارد همیشه بدان سهولت که در امثله و تمرینات سابق دیدید انجامپذیر نیست، و مخصوصاً تعیین آغاز استمرار، اغلب، اگر هم مقدور باشد، کاری پر زحمت است، و در بسیاری از مسائل ناچار باید به تعیین مرحله‌ای برای استمرار یا اثبات وجود چنین مرحله‌ای اکتفا کرد. معمولاً در مسائل مربوط به رشته‌ها آنچه اساساً مورد نظر است اثبات اینست که جمله‌های رشته‌ی مورد بحث از مرتبه‌ای ببعد همواره خاصیت معینی دارند، نه اینکه ابتدا از چه مرتبه‌ای همواره آن خاصیت را دارند. در این صورت، تعیین یا اثبات وجود مرحله‌ای برای استمرار کفایت میکند. برای این منظور اغلب باید به حیل و تدابیری (مانند «دفع شرّ جمله‌های مزاحم» به منظور تسهیل مقایسه) متوسل شد. این تدابیر را نمیتوان تحت قاعده‌ای کلی درآورد، بلکه در هر مقام، باید حیله‌ای

مناسب آن مقام اندیشید.
برای مزید توضیح چند مثال میآوریم.

۱.۲.۱۳. امثله

(آ). ثابت کنید که جملههای رشتهی $\{a_n\}$ با جملهی عمومی
$$a_n = (n^2+1)/(n^5+6n^3+1)$$
وقتی n بقدر کافی بزرگ باشد از 10^{-6} کوچکترند.
باید ثابت کرد که عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $N \leqslant n$ آنگاه $a_n < 10^{-6}$.
تعیین بهترین مقدار N مستلزم حل نامساوی
$$(n^2+1)/(n^5+6n^3+1) < 10^{-6} \qquad (۱)$$
است، که زحمت نسبةً زیاد دارد، و از آن در میگذریم، بلکه نامساویی سادهتر میجوئیم که شرط کافی برای (۱) باشد. کافی است اسمنمائی مانند b_n بیابیم که، اولاً، همواره $a_n \leqslant b_n$، و ثانیاً، به آسانی بتوان ثابت کرد که، از مرتبهای مانند N ببعد، $b_n < 10^{-6}$. در این صورت، از مرتبهی N ببعد، به طریق اولی، $a_n < 10^{-6}$. مثلاً، ملاحظه میکنیم که همواره
$$n^2+1 \leqslant n^2+n^2 = 2n^2, \qquad n^5+6n^3+1 > n^5.$$
پس، همواره
$$a_n < 2n^2/n^5 = 2/n^3.$$
به آسانی معلوم میشود که، بازاء $n \geqslant 126$، $2/n^3 < 10^{-6}$، و به طریق اولی، $a_n < 10^{-6}$. عدد 126 بهترین مقدار N نیست، و مثلاً، $a_{125} < 10^{-6}$. با اتخاذ تدبیر مناسبتر در «دفع شر»، میتوان مرحلهی بهتری برای استمرار بدست آورد. مثلاً، چون همواره
$$n^5+6n^3+1 > n^5+n^3 = n^3(n^2+1),$$
$a_n < 1/n^3$، و از نامساوی $1/n^3 < 10^{-6}$ مقدار 101 برای N بدست میآید، که آن هم بهترین مقدار نیست.

(ب). ثابت کنید که اگر n بقدر کافی بزرگ باشد
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 0{,}000\,2. \qquad (۱)$$
اگر طرف اول را a_n بنامیم،
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
نامساوی $1/(2\sqrt{n}) < 0{,}000\,2$ (۲) معادل است با $n > 6\,250\,000$ (۳). پس، اگر $n > 6\,250\,000$ آنگاه (۲) و، به طریق اولی، (۱) برقرار است.

(پ). ثابت کنید که اگر n بقدر کافی بزرگ باشد
$$a_n = \frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2} < 0{,}000\,001.$$
قبلاً ملاحظه میکنیم که
$$\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}.$$

بـه آسانـی دیـده میشود کـه نـامساوی $(n+1)/n^2 < 0{,}000\,001$ بازاء $n \geqslant 1\,000\,002$ بـرقـرار است. پس، به طریق اولی، از مرتبه‌ی $1\,000\,002$م ببعد، $a_n < 0{,}000\,001$. بـه محاسبه میتوان تحقیق کرد که a_n ابتدا از مرتبه‌ی $1\,000\,001$م در نـامساوی اخـیـر صدق میکند.

(ت). ثابت کنید اگر n بقدر کافی بزرگ باشد

$$0{,}99 < 1 + (-1)^n \cdot \frac{3}{n} < 1{,}02. \qquad (*)$$

نامساوی فوق معادل است با نامساوی

$$-0{,}01 < (-1)^n \cdot \frac{3}{n} < 0{,}02.$$

چون همواره $-3/n \leqslant (-1)^n \cdot 3/n \leqslant 3/n$، کـافی است ثابت کنیم کـه، از مـرتبه‌ای ببعد، در عین حال،

$$(۱) \quad -0{,}01 < -3/n, \qquad\qquad (۲) \quad 3/n < 0{,}02.$$

نامساوی (۱) بازاء $n \geqslant 301$ و نـامساوی (۲) بازاء $n \geqslant 151$ همـواره برقـرار است. پس، بازاء

$$n \geqslant \text{Max}\,\{301, 151\} = 301$$

نامساوی (*) همواره بـرقرار میباشد. عدد 301 آغاز استمرار (*) نیست، بلکـه (*) بـازاء $n = 300$ هم برقرار است، و این آغاز استمرار میباشد (چرا؟).

(ث). در مورد رشته‌هائی که به استقراء تعریف میشوند، اغلب، استدلال استقـرائی مفیـد است. مثلاً، فرض کنیم رشته‌ی $\{a_n\}$ چنین تعریف شده باشد:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

میخواهیم ثابت کنیم که همواره $a_n < 2$ (۱).

بالبداهه $a_1 < 2$. بعلاوه، اگر (۱) برقرار باشد خواهیم داشت،

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2. \blacktriangle$$

۱.۲.۱۴. تمرین

۱. ثابت کنید که هر یک از نامساویهای ذیل از مرتبه‌ای ببعد برقرار است؛

(آ) $\dfrac{n^3+1}{n^4+1} < 0{,}01.$ (ب) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 0{,}03.$

(پ) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 - 1 < 0{,}001.$ (ت) $\dfrac{n!}{n^n} < 0{,}0001.$

(ث) $n^5 - 7n^3 - 8n - 10^{15} > n^5/2.$

(ج) $0 > \sqrt{4 - (3/n)} - 2 > -0{,}01.$

(چ) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} < 10^{-6}.$

۲. ثابت کنید که از مرتبه‌ای ببعد، در عین حال،

$$\frac{n^3+1}{n^4+1} < 0{,}01. \qquad \frac{8n+3}{n^2+3n+1} < 0{,}003,$$

۳. بنا بر آنکه $a_n = \left[1 - \frac{(-1)^n}{n}\right]^{1/2} - 1$، ثابت کنید که، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n \in (-10^{-5}, 10^{-4})$.

۱.۳. «بینهایت بار». در رشته‌ی

$$1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$$

با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n-1}$، مجموعه‌ی مقادیری از n که، بازاء آنها، a_n منفی است مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج است، که مجموعه‌ای است نامتناهی. اغلب، برای اختصار، میگویند «a_n بینهایت بار منفی است». بطور کلی،

۱.۳.۱. تعریف. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای و F خاصیتی باشد، عبارت

a_n بینهایت بار خاصیت F دارد (ندارد)

بدین معنی است:

مجموعه‌ی مقادیری از n که، بازاء آنها، a_n خاصیت F دارد (ندارد) مجموعه‌ای نامتناهی است.

۱.۳.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه a_n بینهایت بار خاصیت F داشته باشد آنست که، بازاء هر عدد طبیعی N، عددی طبیعی مانند n موجود باشد که، در عین حال، $n > N$ و $F(a_n)$.

برهان. اگر چه اثبات قضیه بسیار سهل است، برای ارائه‌ی فایده‌ی مندرجات ۱.۲.۱۵.۱ به توضیح آن میپردازیم. فرض کنیم a_n بینهایت بار خاصیت F داشته باشد، ولی حکم برقرار نباشد. از نقیض حکم (فرض خلف) چنین نتیجه میشود که عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n > N$ آنگاه $\sim F(a_n)$. پس، مجموعه‌ی مقادیری از n که بازاء آنها a_n خاصیت F دارد مجموعکی از مجموعه‌ی متناهی $\{n \mid n \leqslant N\}$ میباشد، و این خلاف فرض است. ▲

۱.۳.۳. رجوع به حالات سه‌گانه. اینک به حالات سه‌گانه‌ی مذکور در ۱.۱.۱ باز میگردیم. حالت I با این خاصیت مشخص میگردد که مجموعه‌ی مقادیری از n که بازاء آنها a_n خاصیت F ندارد متناهی است، و حالت II با این خاصیت که مجموعه‌ی مقادیری از n که، بازاء آنها، a_n خاصیت F دارد متناهی است. پس، در حالت III، هیچ یک از این دو مجموعه متناهی نیست، و به عبارت دیگر، در این حالت، a_n بینهایت بار خاصیت F دارد، و بینهایت بار خاصیت F ندارد؛ و یا، با توجه به ۱.۳.۲، بازاء هر عدد طبیعی N، دو عدد طبیعی

بزرگتر از N مانند k و l هست که $F(a_k)$ و $F(a_l)$ ~. خلاصه، به زبان عادی، میتوان گفت که در حالت I (II)، اگر در رشته‌ی $\{a_n\}$ «پیش رویم» به جائی میرسیم که از آن ببعد همه‌ی جمله‌ها واجد (فاقد) خاصیت F اند، ولی، در حالت III، هر قدر در این رشته پیش رویم جمله‌هائی واجد خاصیت F و نیز جمله‌هائی فاقد خاصیت F وجود دارند. وقتی که به خاصیت معین F نظر داریم، به زبانی خالی از دقت ولی گویا، میتوان گفت که در حالت III، رشته‌ی $\{a_n\}$، بسبب «جست و خیز» بیشمارش، بسیار «کجرفتار» است.

۱.۳.۴. مثال. در رشته‌ی $\{(-1)^{n-1}\}$ مذکور در آغاز ۱.۳، اولاً، همه‌ی جمله‌ها از 1 نابیشترند. ثانیاً، هیچ یک از جمله‌ها از 2 بزرگتر نیست. ثالثاً، هر یک از مجموعه‌های $\{n \mid (-1)^{n-1} > 0\}$ و $\{n \mid (-1)^{n-1} < 0\}$ نامتناهی است؛ a_n بینهایت بار مثبت است، و بینهایت بار منفی. نمایش کارتزین رشته را رسم کنید، و «رفتار» رشته را بر حسب هر یک از خواص مذکور از روی آن توضیح دهید.

۱.۳.۵. تمرین

۱. کدام یک از گزاره‌نماهای ذیل بینهایت بار و کدام یک از آنها از مرتبه‌ای ببعد برقرار است؟

(آ). n اول است.

(ب). $1 + (-1)^n > 0$

(پ). n^2 زوج است.

(ت). $(-1)^n/n$ مثبت است.

(ج). $n^3 > 100n^2 + 1000n + 10^5$

(چ). $n^5 > 2^n$.

۲. در مورد هر یک از رشته‌هائی با جمله‌ی عمومی

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad a_n = -n + (-1)^n \cdot n,$$

کدام یک از احکام ذیل صادق است:

(آ) a_n از مرتبه‌ای ببعد مثبت است.

(ب) a_n بینهایت بار نامنفی است.

(پ) a_n از مرتبه‌ای ببعد صفر است.

(ت) a_n بینهایت بار صفر است.

(ث) a_n بینهایت بار منفی است.

(ج) حومه‌ای از 0 هست که، از مرتبه‌ای ببعد، a_n در آن واقع است.

(چ) حومه‌ای از ∞ هست که، از مرتبه‌ای ببعد، a_n در آن قرار دارد.

(ح) حومه‌ای از $-\infty$ هست که، از مرتبه‌ای ببعد، a_n بدان تعلق دارد.

۳. $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی است، و α عددی حقیقی و ثابت. میدانیم که عددی طبیعی مانند N هست که از مرتبه‌ی N ببعد، بازاء هر ε، $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. ثابت کنید که

جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$، منتها جز تعدادی متناهی از آنها، مساوی α است.

۱.۴. رشته‌های محدود. سابقاً (در IV : ۱.۱.۱ : ۶) بندهای رشته‌ها و رشته‌های محدود را تعریف کردیم. به همان قیاس، عضو ماکزیموم یا عضو اکثر یک رشته، و نیز عضو مینیموم یا عضو اقل یک رشته را، بترتیب، اعضای اکثر و اقل مجموعه‌ی جمله‌های آن تعریف میکنیم.
با توجه به ۱.۱.۲، بدیهی است که

۱.۴.۱. قضیه.
I. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد α یک بند بالای (بند پایین) رشته‌ی $\{a_n\}$ از اعداد باشد آنست که، بازاء هر عدد طبیعی n، $a_n \leqslant \alpha$ $(\alpha \leqslant a_n)$.
II. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ محدود باشد آنست که عددی مثبت مانند α موجود باشد که، بازاء هر عدد طبیعی n، $|a_n| \leqslant \alpha$ (یا $|a_n| < \alpha$).
توجه کنید که، در قضیه‌ی فوق، عدد α **عددی ثابت** (مستقل از n) است.
بالاخره، واضحست که عضو ماکزیموم (مینیموم) یک رشته جمله‌ای است از آن که بند بالای (بند پایین) آن باشد.

۱.۴.۲. امثله و فواید
(آ). رشته‌ی $\{(-1)^n\}$ یا

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots \qquad (1)$$

رشته‌ای است محدود، زیرا، همواره $|(-1)^n| = 1 \leqslant 1$. مجموعه‌ی جمله‌های رشته‌ی مجموعه‌ی $A = \{-1, 1\}$ است، که اعضای اکثر و اقل آن، بترتیب، 1 و -1 میباشند. پس، 1 عضو اکثر و -1 عضو اقل رشته است.
(ب). رشته‌ی $\{n/(n+1)\}$ رشته‌ای است محدود، زیرا، بازاء هر عدد طبیعی n، $0 < n/(n+1) < 1$؛ و 0 یک بند پایین و 1 یک بندبالای رشته میباشد. مجموعه‌ی جمله‌های رشته مجموعه‌ی نامتناهی $A = \{1/2, 2/3, 3/4, \ldots\}$ است. عضو اقل این مجموعه (و لهذا، عضو اقل رشته‌ی مذکور) $1/2$ میباشد، زیرا، همواره $1/2 \leqslant n/(n+1)$. رشته عضو اکثر ندارد، زیرا، اگر جمله‌ای از رشته، مثلاً $k/(k+1)$، را اختیار کنیم، از نامساوی $k/(k+1) < n/(n+1)$ معلوم میشود که، از مرتبه‌ی $k+1$ ببعد، جمله‌های رشته از $k/(k+1)$ بزرگترند.
(پ). فرض کنیم $a_n = -n + (1/n)$. واضحست که، بازاء هر عدد طبیعی n، $a_n \leqslant 0$. پس، رشته‌ی $\{a_n\}$ از بالا محدود است. اما، این رشته از پایین محدود نیست، زیرا، بازاء هر عدد حقیقی مانند α، از مرتبه‌ای ببعد $-n + (1/n) < \alpha$ (چرا و از چه مرتبه؟). رشته عضو مینیموم ندارد، و 0 عضو ماکزیموم آنست.
(ت). هر رشته‌ی ثابت محدود است.
(ث). هر رشته که جمله‌هایش همه نامنفی (نامثبت) باشند از پایین (از بالا) محدود است.

۱.۴.۳. تمرین

۱. کدام یک از رشته‌های ذیل از بالا، از پایین، یا مطلقا محدود است؟ کدام یک از آنها عضو ماکزیموم یا عضو مینیموم دارد؟

(آ) $\{n\}$.　　(ب) $\{1/n\}$.

(پ) $\{(-1)^n\}$.　　(ت) $\{(-1)^n/n\}$.

(ث) $\{-n\}$.　　(ج) $\{(-1)^n \cdot n\}$.

(چ) $\{(n+1)/n\}$.　　(ح) $\{(-1)^n \cdot (n+1)/n\}$.

(خ) $\{n^2/(n+1)\}$.　　(د) $\{(-1)^n \cdot n^2/(n+1)\}$.

(ذ) $\{(n+1)/n^2\}$.　　(ر) $\{(-1)^n \cdot (n+1)/n^2\}$.

(ز) $\left\{(-1)^n \cdot \left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$　　(ژ) $\{n \cdot [(-1)^n - 1]\}$.

(س) $\left\{n[(-1)^n - 1] - \dfrac{1}{n}\right\}$.　　(ش) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

۲. همان مسئله را در مورد رشته‌های ذیل حل کنید:

(آ) $a_1 = 0, \qquad a_n = 1/n \qquad (n > 1)$.

(ب) $a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_n = (n+1)/n \qquad (n > 2)$.

(پ) $a_1 = 0, \qquad a_2 = 2, \qquad a_n = (-1)^n \cdot (n+1)/n \quad (n > 2)$.

۳. اگر جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$ از مرتبه‌ای ببعد از عدد α نابیشتر باشند رشته از بالا محدود است (چرا؟). نظیر این حکم را در باب محدود بودن از پایین بیان و ثابت کنید.

۴. رشته‌ای بسازید که (آ) از پایین نامحدود و از بالا محدود باشد، ولی عضو اکثر نداشته باشد؛ (ب) از بالا و پایین محدود، و دارای عضو اکثر باشد؛ (پ) محدود و دارای عضو اقل ولی فاقد عضو اکثر باشد.

۵. $F_i \ (i = 1, 2, \ldots, 8)$، بترتیب، این خواص میباشند: (۱) محدود بودن از بالا؛ (۲) محدود بودن از پایین؛ (۳) محدود بودن؛ (۴) نامحدود بودن (از بالا و از پایین)؛ (۵) عضو اکثر داشتن؛ (۶) عضو اقل داشتن؛ (۷) عضو اکثر و عضو اقل داشتن؛ (۸) نه عضو اکثر داشتن و نه عضو اقل داشتن. پنجاه و شش گزاره‌نما به صورت

اگر $\{a_n\}$ خاصیت F_i دارد خاصیت F_j دارد

با شرط $i \neq j$ هست. کدام یک از این گزاره‌نماها همیشه برقرار است؟

۶. a عددی است مثبت، و رشته‌ی x به استقراء چنین تعریف شده است:

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت کنید که x رشته‌ای است محدود.

۷. ثابت کنید که رشته‌ی $\{a_n\}$ با تعریف ذیل محدود است:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

۸. ثابت کنید که رشته‌ی $\{s_n\}$ با جمله‌ی عمومی ذیل محدود است،

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

راهنمایی: قبلاً به استقراء ثابت کنید که اگر $2 < k$ آنگاه $k! > 2^{k-1}$.
۹. اگر رشته‌ی $\{|a_n|\}$ از پایین به عدد مثبت c محدود باشد رشته‌ی $\{1/a_n\}$ محدود است. ثابت کنید که اگر شرط مثبت بودن c را برداریم ممکن است رشته‌ی $\{1/a_n\}$ محدود نباشد.

۱.۵. اعمال جبری بر رشته‌ها. در پایان این قسمت، تعریف اعمال جبری بر رشته‌ها را، که در آتیه همواره مورد نیاز خواهد بود، میآوریم.

۱.۵.۱. تعریفات. فرض کنیم

$$\mathrm{a} = \{a_n\}, \qquad \mathrm{b} = \{b_n\}$$

دو رشته از اعداد باشند.

I. حاصلجمع $\{a_n\}$ با $\{b_n\}$، که آن را $\{a_n\} + \{b_n\}$ (یا $\mathrm{a} + \mathrm{b}$) مینامیم، یعنی رشته‌ی $\{a_n + b_n\}$، که جمله‌ی عمومیش $a_n + b_n$ است.

II. متقابل $\{a_n\}$، که آن را $-\{a_n\}$ (یا $-\mathrm{a}$) میخوانیم، یعنی رشته‌ی $\{-a_n\}$، که جمله‌ی عمومیش $-a_n$ است.

III. تفاضل $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$، که آن را $\{a_n\} - \{b_n\}$ (یا $\mathrm{a} - \mathrm{b}$) مینامیم، یعنی رشته‌ی $\{a_n - b_n\}$، که جمله‌ی عمومیش $a_n - b_n$ است.

IV. حاصلضرب عدد ثابت λ در رشته‌ی $\{a_n\}$، که آن را $\lambda\{a_n\}$ (یا $\lambda\mathrm{a}$) مینامیم، یعنی رشته‌ی $\{\lambda a_n\}$، که جمله‌ی عمومیش λa_n است.

V. حاصلضرب $\{a_n\}$ در $\{b_n\}$، که آن را $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$ (یا ab) مینامیم، یعنی رشته‌ی $\{a_n b_n\}$، که جمله‌ی عمومیش $a_n b_n$ است.

VI. خارج قسمت $\{a_n\}$ بر $\{b_n\}$ (به شرط آنکه همواره $b_n \neq 0$)، که آن را $\{a_n\}/\{b_n\}$ (یا a/b) مینامیم، یعنی رشته‌ی $\{a_n/b_n\}$ که جمله‌ی عمومیش a_n/b_n است.

خلاصه، بنا بر تعریف[1]،

$$\begin{aligned}
&\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},\\
&-\{a_n\} = \{-a_n\},\\
&\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\},\\
&\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\},\\
&\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n b_n\}\\
&\{a_n\}/\{b_n\} = \{a_n/b_n\} \qquad (b_n \neq 0 \text{ همواره}).
\end{aligned}$$

۱.۵.۲. تمرین

۱. حاصلجمع، تفاضل، و حاصلضرب دو رشته‌ی محدود، و نیز متقابل یک رشته‌ی محدود، رشته‌ای است محدود.

---

(۱) ملاحظه کنید که، در روابط مذکور، علامات اعمال در طرف چپ مربوط به رشته‌ها است، و در طرف راست مربوط به اعداد حقیقی.

۲. این حکم را باطل کنید که خارج قسمت دو رشته‌ی محدود رشته‌ای محدود است.
۳. این حکم را باطل کنید که حاصلجمع (تفاضل) دو رشته‌ی نامحدود رشته‌ای است نامحدود.
۴. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای نامحدود و λ عدد ثابتی باشد شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{\lambda a_n\}$ محدود باشد آنست که $\lambda = 0$.
۵. a، b، و c سه رشته از اعدادند. ثابت کنید که

$$a - b = a + (-b);$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

۶. S مجموعه‌ی جمیع رشته‌های اعداد حقیقی است، و تعریف اعمال مربوط به S به شرح مذکور در ۱.۵.۱ است.
(آ). ثابت کنید که رشته‌های ثابت $\{0\}$ و $\{1\}$ اعضای خنثای S نسبت به اعمال جمع و ضرب رشته‌ها میباشند.
(ب). دستگاه $(S; +)$ یک گروه آبلی است.
(ج). آیا رشته‌ی $\frac{1}{2}\{1 + (-1)^{n-1}\}$ در دستگاه $(S; .)$ عکس دارد؟
۷. a و b دو عدد حقیقی ثابت‌اند، و V مجموعه‌ی جمیع رشته‌هائی مانند $\xi = \{x_n\}_0$ از اعداد حقیقی است که در رابطه‌ی تراجعی

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \qquad (n \geqslant 2)$$

صدق میکنند. اعضای V را به حروف کوچک الفبای یونانی نمایش میدهیم، و هر عضو آن را یک حامل مینامیم[1]. حروف کوچک الفبای لاتینی نمایش اعداد حقیقی خواهند بود. تعریف اعمال مربوط به V همانهاست که در ۱.۵.۱ گفته شد.
(آ). ثابت کنید که دستگاه $(V; +)$ یک گروه آبلی است. صفر این گروه را θ مینامیم. θ را تعیین کنید.
(ب). اگر ξ و η دو حامل دلخواه، و u و v دو عدد حقیقی دلخواه باشند، $u\xi + v\eta$ یک حامل است.
(پ). (تعریف). دو حامل ξ و η را دارای استقلال خطی نامند در صورتی که همواره اگر $u\xi + v\eta = \theta$ آنگاه $u = v = 0$.
ثابت کنید که حاملهای ξ و η که با شرایط اولیه‌ی

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0; \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

تعریف شده‌اند استقلال خطی دارند.
(ت). ثابت کنید که اگر دو حامل ξ و ξ' دارای استقلال خطی باشند هر حامل را میتوان به صورت $c\xi + c'\xi'$ در آورد که، در آن، c و c' اعداد حقیقی مناسبی هستند.
(ث). ثابت کنید که اگر حاملی به صورت $\{r^n\}_0$ $(r \neq 0)$ وجود داشته باشد r در معادله‌ی درجه‌ی دوم ذیل (معادله‌ی ممیز) صدق میکند:

$$r^2 - ar - b = 0.$$

---

(۱) بر طبق قاعده‌ی تعریف استقرائی، حاملی مانند ξ با «شرایط اولیه»ی خود، یعنی با دو جمله‌ی اولش، مشخص میشود.

(ج). ثابت کنید که اگر معادلهی ممیز دو جواب متمایز[1] مانند r_1 و r_2 داشته باشد دو حامل $\{r_1^n\}_0$ و $\{r_2^n\}_0$ دارای استقلال خطی هستند.

(چ). ثابت کنید که اگر معادلهی ممیز دارای جواب مضاعف r باشد دو حامل $\{r^n\}_0$ و $\{nr^n\}_0$ استقلال خطی دارند.

(ح). از چهار قسمت اخیر چه نتیجهای در باب تعیین ضابطهای برای تعریف رشتهای متعلق به V حاصل میشود؟[2]

---

(۱) چون بحث ما از اعداد حقیقی است، مراد دو جواب حقیقی متمایز است. حکم فوق در بارهی جوابهای مختلط نیز برقرار است.

(۲) دستگاه مسئلهی فوق نمونهای از یکی از مهمترین دستگاههای ریاضی (فضای حاملی) است.

فرض کنیم V مجموعهای غیر خالی از اشیائی باشد. اعضای V را با حروف کوچک الفبای یونانی مینامیم. حروف کوچک الفبای لاتینی مقید به $\mathbf{R}$ هستند. بعلاوه، فرض میکنیم

(آ). در V عملی دوتائی موسوم به «$+$» تعریف شده است.

(ب). عملی دوتائی موسوم به «$\cdot$» بر $\mathbf{R} \times V$ بتوی V تعریف شده است (۸.۲.۶ : ۳). بازاءِ هر u از $\mathbf{R}$ و هر ξ از V، حاصل این عمل را بر زوج مرتب (u, ξ) به نام $u \cdot \xi$ یا $u\xi$ مینامیم.

(بسبب تخصیص حروف به شرح فوق، راه اشتباه اعمال مذکور با اعمال اعداد حقیقی مسدود است. مثلاً، در $a + b$، «$+$» عمل جمع اعداد حقیقی است، ولی، در $\alpha + \beta$، «$+$» عمل جمع V است.)

دستگاه $(V; +, \cdot)$ را یک فضای حاملی (به عبارت دقیقتر، یک فضای حاملی بر میدان اعداد حقیقی) خوانند درصورتی که تابع اصول موضوعهی ذیل باشد:

I. دستگاه $(V; +)$ یک گروه آبلی است. (صفر این دستگاه را θ مینامیم.)

II. بازاءِ هر u و v از $\mathbf{R}$ و هر ξ و η از V،

(۱ _ II) $\quad (u + v)\xi = (u\xi) + (v\xi).$

(۲ _ II) $\quad u(\xi + \eta) = (u\xi) + (u\eta).$

(۳ _ II) $\quad (uv)\xi = u(v\xi).$

(۴ _ II) $\quad 1\xi = \xi.$

به آسانی میتوان ثابت کرد که، در فضای حاملی V، بازاءِ هر u از $\mathbf{R}$ و هر ξ از V،

$$0\xi = \theta; \qquad (-1)\xi = -\xi; \qquad u\theta = \theta.$$

($-\xi$ قرینهی ξ است در گروه آبلی $(V; +)$). تعریف استقلال خطی را میتوان در هر فضای حاملی تعمیم داد.

به سهولت معلوم میشود که دستگاه $(V; +, \cdot)$ مسئلهی ۷ : ۱.۵.۲ یک فضای حاملی است.

بطور کلی، اگر p عدد طبیعی ثابتی باشد، و a_1، a_2، . . .، و a_p اعداد حقیقی مفروضی باشند، و V مجموعهی جمیع رشتههائی مانند $\xi = \{x_n\}$ از اعداد حقیقی باشد که در رابطهی

←

۸. رشته‌ی $\{a_n\}_0$ از اعداد حقیقی به استقراء چنین تعریف شده است:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

a_n را بر حسب n بیان کنید.

۹. همان مسئله را در مورد هر یک از رشته‌هائی که به طریق ذیل تعریف شده‌اند حل کنید:

(آ) $u_0 = u_1 = 1, \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (n > 1).$

(ب) $u_0 = 7, \quad u_1 = 3, \qquad 3u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (n > 1).$

۱۰. a و b دو عدد مفروضند، و رشته‌ی $\{x_n\}_0$ با ضابطه‌ی

$$x_0 = a, \qquad x_1 = b, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \qquad (n \geqslant 1)$$

تعریف شده است. x_n را بر حسب n بیان کنید.

۲ § هیچرشته‌ها

۲.۱. مقدمه. در صفحات قبل، رشته‌های متعدد دیدیم که، بازاء عدد مثبت معینی، جمله‌هایشان، از مرتبه‌ای بعد، در حومه‌ای از 0 که آن عدد شعاع آنست قرار دارند، و به عبارت دیگر، قدر مطلق جمله‌ها، از آن مرتبه بعد، از آن عدد کوچکتر است. مثلاً، اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ را با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^n/n$ اختیار کنیم، بازاء عدد 0,01، از مرتبه‌ی 101م بعد، $a_n \in U_{0,01}(0)$ (و به عبارت دیگر، $|a_n| < 0,01$)، و بازاء عدد 0,001، از مرتبه‌ی 1001م بعد، $a_n \in U_{0,001}(0)$ (و به عبارت دیگر، $|a_n| < 0,001$). با اندک تأملی معلوم میشود که رشته‌ی مذکور **بازاء هر عدد مثبت دلخواه** دارای این خاصیت است، یعنی، جمله‌هایش از مرتبه‌ای بعد در حومه‌ای از 0 به شعاع آن عدد قرار دارند. زیرا، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، شرط $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (۱) معادل نامساوی $|(-1)^n/n| < \varepsilon$ (۲) است، که خود معادل نامساوی $n > 1/\varepsilon$ میباشد. پس، اگر N عددی طبیعی و بزرگتر از $1/\varepsilon$ باشد، بازاء هر n که $n \geqslant N$، نامساویهای (۱) و (۲) برقرار میباشند. عدد N (مرحله‌ی استمرار) بستگی به مقدار ε دارد؛ هر جا جلب توجه بدین بستگی لازم باشد، بجای «N»، «$N(\varepsilon)$» یا «N_ε» مینویسیم. بالاخره، در مثال مورد بحث، بهترین مقدار N، یعنی، آغاز استمرار (۱) را میتوان بر حسب ε بیان کرد: اگر، بر طبق معمول، جزء صحیح عدد $1/\varepsilon$ را $[1/\varepsilon]$ بنامیم، اولین عدد طبیعی بزرگتر $1/\varepsilon$ عدد $[1/\varepsilon] + 1$ خواهد بود. پس، نامساوی $n > 1/\varepsilon$ از مرتبه‌ی $[1/\varepsilon] + 1$ بعد برقرار میباشد، و این بهترین مقدار $N(\varepsilon)$ است. خلاصه، جمله‌های رشته‌ی $\{(-1)^n/n\}$ از مرتبه‌ی $[1/\varepsilon] + 1$ بعد جملگی در

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i}$$

صدق میکنند، دستگاه $(V; +, \cdot)$ یک فضای حاملی بر میدان اعداد حقیقی است. در این فضا میتوان احکامی نظیر احکام مسئله‌ی ۷ بیان و ثابت کرد. معادله‌ی ممیز اینست:

$$r^p - a_1 r^{p-1} - \cdots - a_p = 0.$$

حومه‌ای از 0 به شعاع ε قرار دارند، و بـه عبارت دیگر، قدر مـطلقشان از ε کوچکتر میباشد چون این حکم بازاء هر عدد مثبت ε، هر قدر هم کوچک باشد، بـرقرار است، مجازاً میگویند جمله‌های رشتـه «هر قدر بـخواهیم به 0 نـزدیک میشونـد» یـا «در اطراف 0 گرد میآیند»، اما **از استـعـمـال این تعبیرات مجازی خـالی از دقت و گمراه‌کننده باید بکلی احتراز کرد.**

در پرتو توضیحات گذشته، تعریف ذیل را میآوریم:

۲.۲. تعریف. رشته‌ی $\{a_n\}$ را هیـچـرشـتـه خوانیم در صورتـی کـه، بـازاء **هـر** عدد مثبت ε، جمله‌های رشته از مرتبه‌ای ببعد متعلق بـه $U_\varepsilon(0)$ باشند، یعنـی عـددی طبیعی مانند N (یا $N(\varepsilon)$) موجود باشد بطوری‌که

(＊ـ ۲.۲) بازاء هـر عدد طبـیـعـی n، اگـر $N \leqslant n$ آنگاه $|a_n| < \varepsilon$.

به عبارت دیگر

$\{a_n\}$ هیـچـرشتـه است

یعنی

(+ـ ۲.۲) بازاء هـر عدد مثبت ε عددی طبیعی مـانـنـد N (یا $N(\varepsilon)$) مـوجود است که، بازاء هر عـدد طبیـعـی n، اگر $n \geqslant N$ آنـگـاه $|a_n| < \varepsilon$.

مثلاً، بنا بر توضیحات مذکور در ۲.۱، رشته‌ی $\{(-1)^n/n\}$ هیچرشته است.

هیچرشته‌ها از ارکان اساسی همه‌ی مطالب آتیه هستند. در باب تعریف آنهـا، نکاتی چند را که باید همواره مد نظر داشت در ضمن چند تبصره تـذکر میدهیم، و سپس مثالهائی میآوریم.

۲.۲.۱. تبصره. اگر چه تذکر این نکتـه ممکن است زایـد و توضیح واضـح تلقی شود، گوشزد میکنیم که عدد ε در تعریف هیـچرشته **عددی مستقل از** n میباشد، و همـچنین است عدد $N(\varepsilon)$ (یا N).

۲.۲.۲. تبصره. همچنین، توجه داشـته باشید که اگر $\{a_n\}$ هیچرشته و ε عـدد مثبتی بـاشد، چون $\varepsilon/2$ نیز عدد مثبتی است، بنـا بر تعریف هیچرشته، قدر مطلق جمله‌های رشتـه‌ی $\{a_n\}$ از مرتبه‌ای ببعد از $\varepsilon/2$ کوچکتر است، یعنی، عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon/2)$ موجود است که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N(\varepsilon/2)$ آنگاه $|a_n| < \varepsilon/2$.

نظیر این مطلب را میتوان بازاء ε/c یا $c\varepsilon$ (c عددی است ثابت و مثبت) تکرار کرد.

۲.۲.۳. تبصره. در ＊ـ ۲.۲، اگر، بجای «$n \geqslant N$»، «$n > N$» بنویسیم، تعریفی معادل آنکه گذشت بدست میآید (چرا؟). در هر مـورد، از دو صورت «$n \geqslant N$» و «$n > N$» هر یک را انسب باشد بکار میبریم.

همچنین، باید توجه داشت که نقش متغیر فردی n در ＊ـ ۲.۲ ظاهری است، و ＊ـ ۲.۲، مثلاً، معادلست با

بازاء هر m، اگر $m \geqslant N(\varepsilon)$ آنگاه $| a_m | < \varepsilon$.

بالاخره، ملاحظه کنید که اگر جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$ نامنفی (نامثبت) باشند نامساوی $| a_n | < \varepsilon$ معادل نامساوی $a_n < \varepsilon$ ($- \varepsilon < a_n$) است.

۲.۲.۴. تبصره. برای اثبات اینکه رشته‌ای مانند $\{a_n\}$ هیچرشته است **کافی نیست** که بازاء مقادیر خاص ε وجود عددی مانند $N(\varepsilon)$ را که، بازاء آن، ＊ـ ۲.۲ برقرار باشد ثابت کنیم، بلکه باید این مطلب را بازاء عدد مثبت دلخواه ε، که از پیش اختیار میشود، ثابت کرد. در این زمینه قضیه‌ی ذیل فواید عملی بسیار دارد، زیرا، به موجب آن، در اثبات هیچرشته بودن، میتوان به «εهای کوچک» اکتفا کرد:

۲.۲.۴.۱. قضیه. فرض کنیم c عدد مثبت مفروضی باشد. اگر بازاء هر عدد مثبت دلخواه ε که $\varepsilon < c$ جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$ از مرتبه‌ای ببعد در نامساوی $| a_n | < \varepsilon$ صدق کنند $\{a_n\}$ هیچرشته است.

برهان. فرض کنیم ε_1 عدد مثبت دلخواهی باشد، و $\{a_n\}$ رشته‌ای واجد خاصیت مذکور در قضیه. اگر $\varepsilon_1 < c$ آنگاه، بنا بفرض، از مرتبه‌ای ببعد، $| a_n | < \varepsilon_1$. اگر $c \leqslant \varepsilon_1$ آنگاه، چون $c > 0$، عددی حقیقی مانند ε بین 0 و c وجود دارد. بنا بفرض، از مرتبه‌ای ببعد، $| a_n | < \varepsilon$، و چون $\varepsilon < c \leqslant \varepsilon_1$، از همان مرتبه ببعد، $| a_n | < \varepsilon_1$. پس، $\{a_n\}$ هیچرشته است. ▲

۲.۲.۵. تبصره. نقیض گزاره‌نمای ＋ـ ۲.۲ چنین است:

عددی مثبت مانند ε هست که بازاء هر عدد طبیعی N عددی طبیعی مانند n هست که در عین حال

$$n \geqslant N, \qquad | a_n | \geqslant \varepsilon.$$

پس، برای اثبات اینکه رشته‌ی $\{a_n\}$ هیچرشته نیست **کافی است** عدد مثبتی مانند ε عرضه کنیم بطوری که بینهایت بار $| a_n | \geqslant \varepsilon$. بالاخص، اگر بازاء مقدار معینی از ε مجموعه‌ی $\{n \mid | a_n | < \varepsilon\}$ متناهی (مثلاً خالی) باشد معلوم میشود که $\{a_n\}$ هیچرشته نیست.

۲.۲.۶. تبصره. با عطف توجه به ۱.۲.۹، تعریف هیچرشته بودن رشته‌ی $\{a_n\}_{n=k}$، که در آن k عدد صحیح ثابتی است، آسان است: این رشته را هیچرشته خوانیم در صورتی که، بازاء هر عدد مثبت ε، جمله‌های رشته، از اندیسی ببعد، متعلق به $U_\varepsilon(0)$ باشند، یعنی، عضوی مانند N از $\mathbf{I}_k$ موجود باشد که، بازاء هر n از $\mathbf{I}_k$، اگر $N \geqslant n$ آنگاه $| a_n | < \varepsilon$.

۲.۲.۷. تبصره. نمایش هندسی، اگر چه جایگزین برهان نیست، چنانکه مکرر گفته‌ایم،

برای نزدیک ساختن مطالب به ذهن مفید است. نامساوی $|a_n| < \varepsilon$ معادل است با $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$. اینک فرض کنیم $\{a_n\}$ یک هیچرشته باشد. اگر جمله‌های این رشته را بر یک محور نمایش دهیم، بازاء هر ε، جمله‌های رشته، از مرتبه‌ای ببعد، همگی در بازه‌ی $(-\varepsilon, \varepsilon)$ قرار دارند، و به عبارت دیگر، مجموعه‌ی nهائی که بازاء آنها a_n در خارج این بازه است متناهی است.

در نمایش کارتزین هیچرشته‌ی $\{a_n\}$، بازاء هر عدد مثبت ε، از مرتبه‌ای ببعد، گراف هیچرشته بین دو خط $y = \varepsilon$ و $y = -\varepsilon$ قرار میگیرد.

۲.۲.۰۸. امثله

(آ). رشته‌ی $\{1/\sqrt{n}\}$ هیچرشته است.

زیرا، فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. نامساوی $1/\sqrt{n} < \varepsilon$ (۱) معادل است با نامساوی $n > 1/\varepsilon^2$. پس، بازاء $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon^2] + 1$ (یعنی، اگر $[1/\varepsilon^2] + 1$ را $N(\varepsilon)$ بگیریم)، همواره اگر $n \geqslant N$ خواهیم داشت $1/\sqrt{n} < \varepsilon$. همچنین، میتوان گفت که همواره اگر $n > [1/\varepsilon^2]$ آنگاه $1/\sqrt{n} < \varepsilon$.

مثال عددی: بازاء $\varepsilon = 10^{-3}$، آغاز استمرار (۱) را تعیین کنید.

(ب). رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^n n^{-2}$ هچیرشته است.

زیرا، فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. نامساوی $|(-1)^n n^{-2}| < \varepsilon$ (۱) معادل نامساوی $n^{-2} < \varepsilon$ است، که خود معادل است با نامساوی $n^2 > 1/\varepsilon$، و از آنجا، $n > \sqrt{1/\varepsilon}$. پس، از مرتبه‌ی $N(\varepsilon) = [\sqrt{1/\varepsilon}] + 1$ ببعد نامساوی (۱) برقرار میباشد.

مثال عددی: بازاء $\varepsilon = 0{,}002\ 4$، آغاز استمرار (۱) را تعیین کنید.

(پ). در توضیح ۲.۲.۴ و ۲.۲.۵، رشته‌ی $\{a_n\}$ را با جمله‌ی عمومی

$$a_n = \frac{n+1}{100n}$$

اختیار میکنیم. بازاء $\varepsilon = 1/10$ همه‌ی جمله‌های این رشته در $U_\varepsilon(0)$ قرار دارند؛ بازاء $\varepsilon = 1/50$ همه‌ی جمله‌ها از مرتبه‌ی دوم ببعد در $U_\varepsilon(0)$ واقعند؛ بالاخره، بازاء $\varepsilon = 1/80$، همه‌ی جمله‌ها از مرتبه‌ی پنجم ببعد از ε کمترند. اما، این بررسیهائی که بازاء مقادیر خاص ε بعمل آمد دلیل هیچرشته بودن رشته‌ی $\{(n+1)/(100n)\}$ نیست. به آسانی میتوان ثابت کرد که $\{a_n\}$ هیچرشته نیست، از این قرار: نامساوی $|a_n| < \varepsilon$ معادل است با $n(1 - 100\varepsilon) > 1$، و این نامساوی بازاء مقادیری از ε که در $0 \leqslant 1 - 100\varepsilon$، یا $1/100 \leqslant \varepsilon$، صدق کنند ممتنع است. به عبارت دیگر، بازاء هر مقدار ε که نابیشتر از $1/100$ باشد، $\{n \mid |a_n| < \varepsilon\} = \varnothing$. پس $\{a_n\}$ هیچرشته نیست.

در این مثال، هیچرشته نبودن رشته‌ی $\{a_n\}$ را به طریقی ساده‌تر میتوان استنباط کرد: چون

$$a_n = \frac{n+1}{100n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100n} > \frac{1}{100},$$

بالبداهه بازاءِ هر مقدار ε که نابیشتر از $1/100$ باشد مجموعه‌ی $\{n \mid |a_n| < \varepsilon\}$ خالی است.
(ژ). رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = n/1\,000\,000$ هیچرشته نیست.
زیرا $\{n \mid a_n < \varepsilon\} = \{n \mid n < 1\,000\,000\varepsilon\}$، و مجموعه‌ی طرف دوم متناهی است. مثلاً، بازاءِ $\varepsilon = 2{,}5$، دیده میشود که $2\,499\,999$ جمله‌ی متوالی از ابتدای رشته از $2{,}5$ کوچکترند؛ جمله‌ی $2\,500\,000$م مساوی $2{,}5$ است، و از آن ببعد، همه‌ی جمله‌ها از $2{,}5$ بزرگترند.

۲.۲.۹. تمرین

۱. ذیلاً رشته‌هائی با جمله‌ی عمومی خود معرفی شده‌اند. هیچرشته‌ها را از آنهائی که هیچرشته نیستند مستدلاً تفکیک کنید، و در هر مورد، مثال عددی بیاورید، و نتیجه‌ی حاصل را به زبان هندسی توضیح دهید.

(آ) $100\,000\,000/n$.   (ب) $n/100\,000\,000$.

(پ) n.   (ت) $-n$.

(ث) $1/536n$.   (ج) $-10^{15}/n^2$.

(چ) $(-1)^n \cdot n$.   (ح) $n/(n^2+1)$.

(خ) $(-1)^n$.   (د) $1/\sqrt{n^2+1}$.

(ذ) $\sqrt{n}$.   (ر) $1/\sqrt[3]{n}$.

(ز) $(n+1)/(n-1)$.   (ژ) $(n-1)/(n+1)$.

(س) $\dfrac{n+1}{10^{20}\cdot(n-1)}$.   (ش) $(n^2+1)/n$.

(ص) $1+(-1)^n$.   (ض) $1-(-1)^n$.

(ط) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$.   (ظ) $\dfrac{1-(-1)^n}{n}$.

۲. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ هیچرشته باشد آنست که، بازاءِ هر حومه‌ی 0 مانند U، از مرتبه‌ی ببعد، $a_n \in U$.

۳. $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی است، و c عددی ثابت و مثبت. میدانیم که، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n| \geqslant c$. آیا، ممکن است است رشته‌ی مذکور هیچرشته باشد؟

۲.۳. خواص هیچرشته‌ها. در این قسمت به اثبات اهمّ خواص هیچرشته‌ها میپردازیم. این خواص، چنانکه خواهید دید، وسیله‌ی حل مسائل مربوط به این گونه رشته‌ها میباشند، ولی، اهمیت فوق‌العاده و بنیادی آنها از این جهت است که خواص مذکور در سراسر آنالیز از مبادی کار هستند، چنانکه، عنقریب، مثلاً در مبحث تقارب، خواهیم دید. بعلاوه، نکته‌ای دیگر هست که محصلین باید بدان توجه خاص مبذول دارند، و آن روش اثبات احکام مذکور است، که اگر چه اساساً بسیار سهل است، در سراسر آنالیز بکار میرود. بدین جهت، اثبات اغلب قضایا را با تفصیل تمام میآوریم تا، بدین وسیله، محصلین بر روش ε یا تِکْنیکِ ε تا حدی تسلط

یابند. تکنیک ε در اثبات اینکه رشته‌ای مانند $\{a_n\}$ هیچرشته است همانست که از تعریف (۲.۲) استنباط میشود: **از پیش** عدد مثبت دلخواه ε را اختیار مینمائیم، و ثابت میکنیم که عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ یا، مختصراً، N، هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N$ (یا $n > N$) آنگاه $|a_n| < \varepsilon$. چون ε از پیش معین شده است، با نتیجه گرفتن اینکه، مثلاً، $|a_n| < 2\varepsilon$، برهان تمام نمیشود، بلکه برهان را آنگاه تمام تلقی میکنیم[1] که ثابت شود که از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n| < \varepsilon$. این امر اغلب مستلزم پیشبینیهائی در ضمن استدلال است تا نتیجه‌ی نهائی $|a_n| < \varepsilon$ حاصل شود، چنانکه متدرجاً معلوم خواهد شد.

۲.۳.۱. قضیه. هر رشته که جمله‌هایش، جز تعدادی متناهی از آنها، صفر باشد هیچرشته است (چنین هیچرشته‌ای را هیچرشته‌ی بیمایه خوانیم).

برهان. فرض کنیم جمله‌های رشته‌ی $\{a_n\}$، جز تعدادی متناهی از آنها، صفر باشند. پس، عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $a_n = 0$. بالنتیجه، بازاء هر عدد مثبت ε، از مرتبه‌ی N ببعد، $|a_n| = 0 < \varepsilon$. ▲

۲.۳.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی ثابت $\{c\}$ هیچرشته باشد آنست که $c = 0$.

برهان. کفایت بنا بر ۲.۳.۱ بدیهی است. برای اثبات لزوم، گوئیم اگر $\{c\}$ هیچرشته باشد، بازاء هر عدد مثبت ε، $|c| < \varepsilon$. پس، بنا بر ۲.۵.۴ : ۵، $|c| = 0$، و از آنجا $c = 0$. ▲

۲.۳.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}$ هیچرشته و λ عددی ثابت (مستقل از n) باشد آنگاه رشته‌ی $\{\lambda a_n\}$ (یعنی رشته‌ای که جمله‌ی عمومیش λa_n است) هیچرشته است. بالاخص، اگر $\{a_n\}$ هیچرشته باشد $\{-a_n\}$ نیز هیچرشته است.

برهان. اگر $\lambda = 0$ آنگاه $\{\lambda a_n\}$ رشته‌ی ثابت $\{0\}$ است که، بنا بر ۲.۳.۲، هیچرشته است. پس، فرض کنیم $\{a_n\}$ هیچرشته باشد، و $\lambda \neq 0$؛ بالنتیجه $|\lambda| \neq 0$ (۱). برای

---

(۱) ما این روش را به جهت مزایای تعلیمیی که خاصه جهت مبتدیان برای آن قائل هستیم اتخاذ کرده‌ایم. از اینکه بگذریم، اگر λ عدد مثبت ثابتی باشد، دو گزاره‌نمای ذیل معادل یکدیگرند:

(آ) بازاءِ هر عدد مثبت ε، از مرتبه‌ای ببعد $|a_n| < \varepsilon$.

(ب) بازاءِ هر عدد مثبت ε، از مرتبه‌ای ببعد $|a_n| < \lambda\varepsilon$.

زیرا، اگر (آ) برقرار باشد، بالاخص بازاءِ عدد مثبت $\lambda\varepsilon$ خواهیم داشت، «از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n| < \lambda\varepsilon$». بالعکس، اگر (ب) برقرار باشد، بالاخص بازاءِ عدد مثبت ε/λ خواهیم داشت «از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n| < \lambda \cdot (\varepsilon/\lambda)$».

اثبات هیچرشته بودن $\{\lambda a_n\}$، فرض میکنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد، و ثابت میکنیم که

(*) عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ هست که بازاء هر n، اگر $n \geqslant N(\varepsilon)$ آنگاه، $\varepsilon > |\lambda a_n|$.

گوئیم، باتوجه به (۱)، $\varepsilon/|\lambda|$ عددی مثبت است. پس، چون $\{a_n\}$ هیچرشته است، عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon/|\lambda|)$ هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant M(\varepsilon/|\lambda|)$ آنگاه $|a_n| < \varepsilon/|\lambda|$. بالنتیجه، اگر $N(\varepsilon)$ را همان $M(\varepsilon/|\lambda|)$ بگیریم، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N(\varepsilon)$ آنگاه

$$|\lambda a_n| = |\lambda| \cdot |a_n| < |\lambda| \cdot (\varepsilon/|\lambda|) = \varepsilon.$$

پس، (*) برقرار است[1]. ▲

۲.۳.۳.۱. تبصره. شرط ثابت بودن عدد λ در برقراری قضیه‌ی ۲.۳.۳ واجب‌الرعایه است. مثلاً، اگرچه رشته‌ی $\{1/n\}$ هیچرشته است، رشته‌ی $\{n \cdot (1/n)\}$، که مساوی رشته‌ی ثابت $\{1\}$ است، بنا بر ۲.۳.۲، هیچرشته نیست.

۲.۳.۴. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه $\{a_n\}$ هیچرشته باشد آنست که $\{|a_n|\}$ هیچرشته باشد. (چرا؟)

۲.۳.۵. امثله

(آ). اگر $\{a_n\}$ هیچرشته و λ ثابت و غیر از صفر باشد $\{a_n/\lambda\}$ هیچرشته است.

(ب). سابقاً دیدیم که $\{1/n\}$، $\{1/n^2\}$، و $\{1/\sqrt{n}\}$ هیچرشته‌اند. پس، رشته‌های $\{-1/n\}$، $\{-1/n^2\}$، و $\{-1/\sqrt{n}\}$ نیز هیچرشته‌اند.

(پ). چون $\{1/n\}$ هیچرشته است، رشته‌های $\{10^5/n\}$ و $\{10^{15}/(0{,}007n)\}$ نیز هیچرشته‌اند. استدلال قضیه‌ی ۲.۳.۳ را در اثبات هیچرشته بودن این دو رشته از سربگیرید[2].

(ت). رشته‌ی $\{(-1)^n n^{-2}\}$ هیچرشته است، زیرا $|(-1)^n n^{-2}| = 1/n^2$، و $\{1/n^2\}$ هیچرشته است.

۲.۳.۶. قضیه. اگر $\{a'_n\}$ و $\{a''_n\}$ دو هیچرشته باشند، و رشته‌ی $\{a_n\}$ از مرتبه‌ای بعد در

---

(۱) ممکن است این استدلال برای اثبات قضیه بنظر آید: «چون $\{a_n\}$ هیچرشته است عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ هست که بازاء هر n، اگر $n \geqslant N(\varepsilon)$ آنگاه $|a_n| < \varepsilon$، و بالنتیجه، $|\lambda a_n| = |\lambda| \cdot |a_n| < \varepsilon|\lambda|$». ولی، نامساوی اخیر غیر از نامساوی $|\lambda a_n| < \varepsilon$ (مذکور در (*)) است که مطلوب ما است. اختیار کردن $\varepsilon/|\lambda|$ در متن نمونه‌ای است از پیشبینیهائی که در ۲.۳ بدانها اشاره کردیم.

(۲) بدین گونه تمرینات توجه خاص مبذول دارید. از این راه، نکاتی را که در استدلالهای کلی میآید بهتر در مییابید.

نامساویهای $a'_n \leqslant a_n \leqslant a''_n$ صدق کند $\{a_n\}$ نیز هیچرشته است.
برهان. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر مفروضات قضیه، (آ) از مرتبه‌ای بعد $a''_n < \varepsilon$؛ (ب) از مرتبه‌ی بعد $-\varepsilon < a'_n$؛ (پ) از مرتبه‌ای بعد، $a'_n \leqslant a_n \leqslant a''_n$. بالنتیجه، از مرتبه‌ای بعد، هر سه نامساوی در عین حال برقرارند، و لهذا، $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$، و از آنجا $|a_n| < \varepsilon$. ▲
چون برهان مذکور اولین مورد استعمال روش اثبات قضیه‌ی ۱.۲.۸ است[1] استدلال فوق را با تفصیل تمام تکرار میکنیم (متعلمین باید در هر مورد چنین کنند):
فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر مفروضات و ۱.۲.۰۲، سه عدد طبیعی مانند N_1، N_2، و N_3 هست که همواره

اگر $n \geqslant N_1$ آنگاه $a'_n \leqslant a_n \leqslant a''_n$ (۱)؛
اگر $n \geqslant N_2$ آنگاه $|a'_n| < \varepsilon$ (۲)؛
اگر $n \geqslant N_3$ آنگاه $|a''_n| < \varepsilon$ (۳).

فرض کنیم $N = \mathrm{Max}\,\{N_1, N_2, N_3\}$. پس، اگر $n \geqslant N$ آنگاه نامساویهای (۱)، (۲)، و (۳)، در عین حال، برقرارند، و لهذا، از مرتبه‌ی N بعد،

$$|a_n| \leqslant \mathrm{Max}\,\{|a'_n|, |a''_n|\} < \varepsilon. \blacktriangle$$

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم ۲.۳.۰۶ و قضایای قبل است، و اثبات آن به متعلم محول میشود:

۲.۳.۷. قضیه. اگر $\{a_n\}$ هیچرشته باشد، و رشته‌ی $\{b_n\}$ از مرتبه‌ای بعد در شرط $|b_n| \leqslant |a_n|$ صدق کند آنگاه $\{b_n\}$ نیز هیچرشته است. بالاخص، اگر جمل هیچرشته‌ی $\{a_n\}$ نامنفی باشند، و از مرتبه‌ای بعد، $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ آنگاه $\{b_n\}$ هیچرشته است.

۲.۳.۸. فایده. قضایای ۲.۳.۰۶ و ۲.۳.۰۷، در موارد بسیار، در اثبات هیچرشته بودن یک رشته از طریق مقایسه با هیچرشته‌های معلوم یا رشته‌هائی که اثبات هیچرشته بودنشان آسانتر است بکار میرود (اساس کار همان است که در ۱.۲.۰۱۲ و امثله‌ی ۱.۲.۰۱۳ توضیح داده شد). شناختن بعضی از هیچرشته‌ها برای این منظور مفید است.

۲.۳.۸.۱. امثله و تمرین
(آ). رشته‌ی $\{(-1)^n(n^2+n+1)/(2n^4+3)\}$ هیچرشته است.
بنا بر ۲.۳.۰۴، کافی است ثابت کنیم که رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی

$$a_n = (n^2+n+1)/(2n^4+3)$$

هیچرشته است. گوئیم، همواره

$$0 < a_n < \frac{n^2+n^2+n^2}{2n^4} = \frac{3}{2}n^{-2}.$$

---

(۱) ۱.۲.۱۱ : ۴ نیز ملاحظه شود.

پس، چون $\{n^{-2}\}$ هیچرشته است، بنا بر ۲.۳.۳ و ۲.۳.۷، رشته‌ی $\{a_n\}$ نیز هیچرشته است.
(ب). اگر h عدد ثابت مثبتی باشد رشته‌ی $\{1/(1+nh)\}$ هیچرشته است، زیرا همواره $0 < 1/(1+nh) < 1/(nh)$.
(پ). میدانیم که $\{1/\sqrt{n}\}$ و $\{-1/n^2\}$ هیچرشته‌اند. با توجه به اینکه همواره $-1/n^2 \leqslant (-1)^n/n^3 \leqslant 1/\sqrt{n}$، استدلال قضیه‌ی ۲.۳.۶ را بازاء $\varepsilon = 1/100$ تکرار کنید.
(ت). ثابت کنید که رشته‌ی $\{-2/(2+3n)\}$ هیچرشته است.

۲.۳.۹. قضیه. هر هیچرشته رشته‌ای است محدود.
برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ هیچرشته باشد. بنا بر تعریف، بازاء $\varepsilon = 1$، عددی طبیعی مانند $N(1)$ هست که همواره اگر $n > N(1)$ آنگاه $|a_n| < 1$. حال اگر فرض کنیم
$$\alpha = \text{Max}\,\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N(1)}|, 1\}$$
آنگاه بازاء هر عدد طبیعی n خواهیم داشت، $|a_n| \leqslant \alpha$. ▲

۲.۳.۹.۱. تمرین
۱. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی ذیل تعریف شده است:
$$a_n = \begin{cases} n^{1\,000} & (1 \leqslant n < 654), \\ 1/n^2 & (654 \leqslant n). \end{cases}$$
ثابت کنید که $\{a_n\}$ هیچرشته است، و استدلال قضیه‌ی ۲.۳.۹ را در مورد آن بیاورید.

۲.۴. اعمال بر هیچرشته‌ها

۲.۴.۱. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی ثابت k، حاصلجمع k هیچرشته هیچرشته است، و نیز تفاضل دو هیچرشته هیچرشته است.
برهان. حکم را در مورد حاصلجمع دو هیچرشته ثابت میکنیم. تعمیم (به وسیله‌ی استقراء) و نیز اثبات حکم در مورد تفاضل آسان است، و به متعلم محول میشود. پس، فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو هیچرشته باشند. برای اثبات هیچرشته بودن $\{a_n + b_n\}$، فرض میکنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد، و ثابت میکنیم که، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n + b_n| < \varepsilon$. برای اثبات، گوئیم چون $\varepsilon/2$ عددی مثبت است، و $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هیچرشته‌اند، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n| < \varepsilon/2$، و از مرتبه‌ای ببعد، $|b_n| < \varepsilon/2$. پس، از مرتبه‌ای ببعد، این دو نامساوی در عین حال برقرارند. بالنتیجه، از این مرتبه ببعد،
$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. ▲$$

۲.۴.۱.۰.۱. امثله و تمرین
(آ). برهان قضیه‌ی فوق را به طریق تفصیلی مذکور در اثبات ۲.۳.۶ بیاورید.
(ب). چون رشته‌های $\{1/n\}$، $\{1/n^2\}$، و $\{1/\sqrt{n}\}$ هیچرشته‌اند، سه رشته‌ی a، b، و c با جمله‌ی عمومی

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad c_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

هیچرشته میباشند. برهان تفصیلی مذکور در (آ) را در مورد رشته‌ی $\{a_n\}$ بازاء $\varepsilon = 1/500$ تکرار کنید.

۲.۴.۱.۲. تنبیه. شرط ثابت بودن عده‌ی رشته‌ها در برقراری حکم ۲.۴.۰۱ واجب‌الرعایه است. مثلاً، اگرچه هر یک از n رشته‌ی

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}, \left\{\frac{1}{n+2}\right\}, \ldots, \left\{\frac{1}{2n}\right\}$$

هیچرشته است، رشته‌ی

$$(*) \qquad \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right\}$$

هیچرشته نیست، زیرا همواره

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(چگونه از این نامساوی نتیجه میشود که رشته‌ی $(*)$ هیچرشته نیست؟)

۲.۴.۲. قضیه. حاصلضرب یک رشته‌ی محدود در یک هیچرشته هیچرشته است.
برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ یک هیچرشته و $\{b_n\}$ رشته‌ای محدود باشد. عدد مثبت دلخواه ε را اختیار میکنیم. بنا بفرض، عددی مثبت مانند β هست که، بازاء هر n، $|b_n| < \beta$. چون $\{a_n\}$ هیچرشته است، بازاء عدد مثبت ε/β، عددی مانند $N_1(\varepsilon/\beta)$ هست که همواره اگر $n \geqslant N_1(\varepsilon/\beta)$ آنگاه $|a_n| < \varepsilon/\beta$. فرض کنیم $N(\varepsilon) = N_1(\varepsilon/\beta)$. بازاء $n \geqslant N(\varepsilon)$ خواهیم داشت،

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < (\varepsilon/\beta) \cdot \beta = \varepsilon. \blacktriangle$$

مثلاً، چون $\{1/n\}$ هیچرشته است، و $\{(-1)^n\}$ رشته‌ای محدود، رشته‌ی $\{(-1)^n/n\}$ هیچرشته است.

۲.۴.۳. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی ثابت k، حاصلضرب k هیچرشته هیچرشته است.
(در مورد دو هیچرشته نتیجه‌ی مستقیم ۲.۳.۰۹ و ۲.۴.۰۲ است.)

در پایان این قسمت، به عنوان مثال از تدابیر گوناگونی که در اثبات هیچرشته بودن بکار میرود، چند هیچرشته‌ی قابل توجه میآوریم.

۲.۴.۴. قضیه. اگر $a > 0$ آنگاه رشته‌ی $\{\sqrt[n]{a} - 1\}$ هیچرشته است.
برهان. اگر $a = 1$ حکم بدیهی است. پس، فرض میکنیم $a \neq 1$، و دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $a > 1$. در این حالت، بنا بر خواص ریشه، $\sqrt[n]{a} > 1$. فرض کنیم $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$. بنا بر نامساوی برنویی،

$$a = (1 + x_n)^n \geqslant 1 + nx_n > nx_n.$$

بالنتیجه، همواره $x_n < a/n$. پس چون $\{a/n\}$ هیچرشته است، بنا بر ۲.۳.۷، $\{x_n\}$ هیچرشته است.

حالت دوم: $0 < a < 1$. پس، $1/a > 1$، و بنا بر حالت اول، $\{(1/a)^{1/n} - 1\}$ هیچرشته است. از طرف دیگر، $a \leqslant \sqrt[n]{a} < 1$، و لهذا، رشته‌ی $\{\sqrt[n]{a}\}$ محدود است. پس، بنا بر ۲.۴.۲، رشته‌ی $\{(1/a)^{1/n} - 1\} \cdot \{\sqrt[n]{a}\}$، یعنی رشته‌ی $\{1 - \sqrt[n]{a}\}$، هیچرشته است. بالنتیجه، به موجب ۲.۳.۳، رشته‌ی $\{\sqrt[n]{a} - 1\}$ نیز هیچرشته است. ▲

۲.۴.۵. قضیه. رشته‌ی $\{\sqrt[n]{n} - 1\}$هیچرشته است.
برهان. فرض کنیم $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. واضحست که، از مرتبه‌ی دوم ببعد، $a_n > 0$. چون $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$، بازاء $n \geqslant 2$، بنا بر دستور دوجمله‌ای نیوتن، خواهیم داشت،

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot {a_n}^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\, {a_n}^2,$$

و بالنتیجه،

$$a_n{}^2 < \frac{2}{n-1} \leqslant \frac{2}{n - \dfrac{n}{2}} = \frac{4}{n}.$$

پس، $|a_n| < 2/\sqrt{n}$. بالنتیجه، چون $\{1/\sqrt{n}\}$ هیچرشته است، $\{a_n\}$ نیز هیچرشته است. ▲

۲.۴.۶. قضیه. اگر $|a| < 1$ آنگاه $\{a^n\}$ و $\{na^n\}$ هیچرشته‌اند.
برهان. بنا بفرض، عددی مثبت مانند h هست که $|a| = 1/(1+h)$ (چرا؟). از اینجا، به قیاس اثبات قضیه‌ی قبل، معلوم میشود که، از مرتبه‌ای ببعد،

$$|a^n| < \frac{2}{n(n-1)h^2}, \qquad |na^n| < \frac{2}{(n-1)h^2}.$$

اتمام بر متعلم است. ▲

۲.۵. تمرین

۰۱ به وسیله‌ی قضایای سابق ثابت کنید که هر یک از رشته‌هائی که ذیلاً با جمله‌ی nم خود معرفی شده‌اند هیچرشته است. سپس، در هر مورد، بازاء عدد مثبت مفروض ε، عددی طبیعی

مانند $N(\varepsilon)$ تعیین کنید که، بازاء هر n، اگر $n > N(\varepsilon)$ آنگاه قدر مطلق جملهٔ nم رشته از ε کوچکتر باشد.

(آ) $\dfrac{n}{n^3+n^2+1}$ (ب) $\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}$

(پ) $\dfrac{1+\sqrt{n}}{n^3}$. (ت) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}+5n}$.

(ث) $\dfrac{100n}{n^2-1}$. (ج) $\dfrac{1}{n^3-5n}$.

(چ) $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}$. (ح) $n(\sqrt{n^4+4}-n^2)$.

(خ) $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$. (د) $n(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1})$.

۲. رشتهٔ $\{n!/n^n\}$ هیچرشته است.

۳. رشته‌ای مانند $\{a_n\}$ بسازید که بینهایت بار $a_n = 0$ و بعلاوه
(آ) $\{a_n\}$ هیچرشته باشد. (ب) $\{a_n\}$ هیچرشته نباشد.

۴. اگر $\{a_n\}$ هیچرشته باشد $\{\sqrt{|a_n|}\}$ نیز هیچرشته است.

۵. این حکم را که خارج قسمت هر دو هیچرشته هیچرشته است (نیست) باطل کنید.

۶. $\{a_n\}$ هیچرشته است، و $\{b_n\}$ همواره در شرط $|b_n| \geqslant c > 0$ صدق میکند. ثابت کنید که رشتهٔ $\{a_n/b_n\}$ هیچرشته است. آیا اگر شرط $c > 0$ را برداریم حکم برقرار میماند؟

۷. ثابت کنید که رشتهٔ مسئلهٔ ۱۲ : ۱۰ : ۵ هیچرشته است.

۸. آیا هر هیچرشته که جمله‌هایش همگی مثبت باشند عضو ماکزیموم دارد؟

۳ § رشته‌های متقارب و حدود

۳.۱. مقدمه. رشتهٔ $\left\{(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{n}\right\}$، چنانکه معلوم است، هیچرشته است: بازاء هر عدد مثبت ε، جمله‌های رشته از مرتبه‌ای ببعد در $U_\varepsilon(0)$ قرار دارند. اما، رشتهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی $a_n = 1+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{n}$ هیچرشته نیست، زیرا، مثلاً بازاء $\varepsilon = 1/2$، جمله‌های آن از مرتبه‌ای ببعد در خارج $U_\varepsilon(0)$ قرار دارند (چرا و از چه مرتبه؟). منتها، رشتهٔ $\{a_n\}$ دارای این خاصیت است که اگر عدد ثابت 1 را از جمله‌های آن بکاهیم رشتهٔ حاصل، یعنی $\{a_n - 1\}$ یا $\left\{(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{n}\right\}$، هیچرشته است. این خاصیت اطلاع بسیار مهمی از «رفتار» رشتهٔ $\{a_n\}$ بازاء مقادیر بزرگ[1] n» بدست میدهد. توضیح آنکه، چون $\{a_n - 1\}$ هیچرشته است، بازاء هر ε، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n - 1| < \varepsilon$، و چون این

(۱) به ابهام این عبارت توجه کنید. بیان نهائی مطلب از این گونه ابهامات پیراسته خواهد بود.

نامساوی معادل نامساوی $1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon$ است، a_n از مرتبه‌ای ببعد تعلق به $U_\varepsilon(1)$ دارد. مثلاً، بازاء $\varepsilon = 0{,}24$، جمله‌های رشته از مرتبه‌ی نهم ببعد در $U_{0,24}(1)$ قرار دارند؛ و بازاء $\varepsilon = 0{,}0001$، از مرتبه‌ی 20001م ببعد در $U(1, 0{,}0001)$. به تعبیر مجازی، میگویند جمله‌های رشته «هر قدر بخواهیم به 1 نزدیک میشوند»، ولی ما این عبارت مبهم را بکار نمیبریم، بلکه، در شرایط مذکور، بر طبق تعریف دقیقی که خواهد آمد، میگوئیم a_n (یا رشته‌ی $\{a_n\}$) متقارب به 1 است، یا به 1 میل میکند، یا حد آن مساوی 1 است. در این حالت نمایش کارتزین رشته خصوصیتی دارد، و آن اینست که، چون از مرتبه‌ای ببعد $1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon$، اگر خطوط نمایش $y = 1-\varepsilon$ و $y = 1+\varepsilon$ را رسم کنیم، نمودار رشته از آن مرتبه ببعد در نوار بین این دو خط، به عرض 2ε، قرار میگیرد (بازاء $\varepsilon = 0{,}24$، نمایش 15 جمله‌ی متوالی از ابتدای رشته‌ی سابق‌الذکر را رسم کنید). بالاخره، ملاحظه کنید که در این مثال، 1 تعلق به رشته ندارد، یعنی هیچ جمله‌ی رشته مساوی 1 نیست، زیرا، معادله‌ی $1 + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{2}{n} = 1$ ممتنع است.

در پرتو توضیحات گذشته، تعریف ذیل را میآوریم:

۳.۲. تعریف. رشته‌ی $\{a_n\}$ از اعداد را متقارب به **عدد ثابت** (مستقل از n) α خوانیم در صورتی که، بازاء هر عدد مثبت مانند ε، جمله‌های رشته، از مرتبه‌ای ببعد، در $U_\varepsilon(\alpha)$ واقع باشند. در این صورت گویند a_n به α میل میکند یا α حد رشته‌ی $\{a_n\}$ (یا حد a_n) است. عبارت

$$a_n \to \alpha$$

یعنی «a_n به α میل میکند»، و عبارات

$$\alpha = \lim_n a_n$$

یعنی[۱] «α حد a_n است». هر جا بیم ابهام نرود، بجای «$\lim_n a_n$» مختصراً «$\lim a_n$» مینویسیم[۲].

بنا بر تعریف حومه‌ها و هیچرشته‌ها، تعریف فوق معادل با تعریف ذیل است:

۳.۲.۱. تعریف. «$\{a_n\}$ به α متقارب است» یعنی رشته‌ی $\{a_n - \alpha\}$ هیچرشته است، و به عبارت دیگر، یعنی

(۳.۲.۱.۱) بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N(\varepsilon)$ آنگاه $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

مثلاً، بنا بر توضیحات مذکور در ۳.۱، رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = 1 + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{2}{n}$ به 1 متقارب است، یا حدش 1 است، و میتوان نوشت:

---

(۱) علامت «lim» از حروف اوایل کلمه‌ی «limit» به معنی «حد» است.

(۲) در باب علامت $\lim_{n\to\infty} a_n$ به ۳.۲.۱۵ رجوع کنید.

$$1+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}\to 1, \qquad \lim\left[1+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}\right]=1$$

چنانکه ملاحظه شد، حد این رشته بدان تعلق ندارد.

۳.۲.۲. تعریف. رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب است یا a_n حد دارد یا $\lim a_n$ موجود است یعنی عددی مانند α هست که $\{a_n\}$ بدان متقارب است.

از تعریف حد بدیهی بنظر میآید که وقتی رشته‌ی $\{a_n\}$ به عددی مانند α میل میکند، به عبارت مجازی، جمله‌های دوردست رشته در حول α متمرکز میشوند. بسیاری از احکام مربوط به حد را میتوان با این تعبیر بر خود محسوس ساخت. از جمله حکم مهم ذیل است که توضیح آن را به وسیله‌ی نمایش هندسی بر متعلم میگذاریم:

۳.۲.۳. قضیه. حد یک رشته، در صورت وجود، منحصر بفرد است. به عبارت دیگر، یک رشته به دو عدد متمایز متقارب نتواند بود.

برهان (خلف). اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب به α و نیز به β باشد، بنا بر تعریف، هر یک از $\{a_n-\alpha\}$ و $\{a_n-\beta\}$ هیچرشته است. پس، بنا بر ۲.۴.۱، $\{\alpha-\beta\}$ نیز هیچرشته است. بالنتیجه، بنا بر ۲.۳.۲، $\alpha=\beta$. ▲

چون رشته‌ی $\{a_n\}$ همان رشته‌ی $\{a_n-0\}$ است، از ۳.۲.۱ نتیجه میشود،

۳.۲.۴. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه $\{a_n\}$ هیچرشته باشد آنست که $\lim a_n=0$.

بالنتیجه، بنا بر ۳.۲.۱،

۳.۲.۵. قضیه. $\lim (a_n-\alpha)=0 \Leftrightarrow \lim a_n=\alpha$

بالاخره، این نتیجه‌ی ساده‌ی تعریفات را هم میآوریم:

۳.۲.۶. قضیه. اگر در رشته‌ی $\{a_n\}$ همه‌ی جمله‌ها، منتها جز تعدادی متناهی از آنها، مساوی عدد ثابت c باشند آنگاه $\lim a_n=c$. بالاخص، رشته‌ی ثابت $\{c\}$ متقارب به c است، یعنی،

$$\lim c=c.$$

برهان. حکم نتیجه‌ی مستقیم ۲.۳.۱ است، زیرا در شرایط مذکور، همه‌ی جمله‌های رشته‌ی $\{a_n-c\}$، منتها جز تعدادی متناهی از آنها، مساوی 0 میباشد. ▲

قبل از ذکر امثله، بعضی ملاحظات اساسی در باب مفهوم حیاتی حد را در ضمن چند تبصره میآوریم. اغلب نکاتی که خواهد آمد ناشی از مطالبی است که در ۲.۲.۱ ــ ۲.۲.۷ در باب هیچرشته‌ها گفته شد.

۳.۲.۷. تبصره. بخاطر بسپارید که در تعریفات سابق عدد α **عددی ثابت** (مستقل از n)

است. عباراتی مانند

$$\lim_n a_n = n^2 - 1, \qquad \lim_k a_k = 2k$$

بکلی بیمعنی است.

۳.۲.۸. تبصره. همچنین، توجه کنید که، در گزاره‌ی ۳.۲.۱.۱، اعداد ε و $N(\varepsilon)$ **اعدادی ثابت** (مستقل از n) میباشند.
نیز، به قیاس آنچه در ۲.۲.۲ گفته شد، اگر $\{a_n\}$ متقارب به α و ε عدد مثبتی باشد، چون $\varepsilon/2$ نیز عددی مثبت است، بنا بر تعریف حد، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$، و به عبارت دیگر، عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon/2)$ هست که همواره اگر $n \geqslant N(\varepsilon/2)$ آنگاه $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$. بطور کلی، اگر c عددی ثابت و مثبت باشد، نظیر این حکم در مورد $c\varepsilon$ و ε/c برقرار است.
همچنین، به قیاس آنچه در قسمت اول ۲.۲.۳ گفته شد، اگر در ۳.۲.۱.۱، به جای، «$n \geqslant N(\varepsilon)$»، «$n > N(\varepsilon)$» قرار دهیم گزاره‌ی جدید با ۳.۲.۱.۱ معادل خواهد بود (چرا؟)؛ و نیز، نقش متغیر n در ۳.۲.۱.۱ ظاهری است.

۳.۲.۹. تبصره. بنا بر ۲.۳.۳، رشته‌ی $\{a_n - \alpha\}$ فقط و فقط وقتی هیچرشته است که رشته‌ی $\{\alpha - a_n\}$ هیچرشته باشد. پس، در تعریف تقارب همه جا میتوان، بجای «$a_n - \alpha$»، «$\alpha - a_n$» نوشت.

۳.۲.۱۰. تبصره. وقتی که عدد α در دست باشد، اثبات اینکه $a_n \to \alpha$ به اثبات هیچرشته بودن $\{a_n - \alpha\}$ باز میگردد، که با تفصیل کافی از آن بحث کرده‌ایم. اما اثبات اینکه رشته‌ای متقارب است، یا تعیین حد آن، مسئله‌ی دیگری است، که بعداً طرقی برای حل آن در بعضی حالات خواهیم آموخت.
ضمناً، در این باب به تبصره‌ی ۲.۲.۴ توجه داشته باشید. نظیر بدیهی قضیه‌ی ۲.۲.۴.۱ در اینجا اینست:

۳.۲.۱۰.۱. قضیه. فرض کنیم c عدد مثبت مفروضی باشد. اگر بازاء هر عدد مثبت دلخواه ε که $c > \varepsilon$، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ آنگاه $a_n \to \alpha$.

۳.۲.۱۱. تبصره. بخاطر داشته باشید که حد یک رشته ممکن است متعلق به آن رشته نباشد، یعنی جمله‌ای از آن رشته نباشد (اغلب چنین است).

۳.۲.۱۲. تبصره. احکام معادل

$$\sim(\lim a_n = \alpha), \qquad \sim(a_n \to \alpha),$$

معادل با هیچرشته نبودن $\{a_n - \alpha\}$ میباشند. پس، برای اثبات آنها میتوان نکات مذکور در

۲.۲.۵ را بکار بست. مثلاً، اگر عدد مثبتی مانند ε عرضه کنیم بطوری که بینهایت بار $\varepsilon \leqslant |a_n - \alpha|$، یا آنکه مجموعه‌ی $\{n \,|\, |a_n - \alpha| < \varepsilon\}$ متناهی (مثلاً خالی) باشد آنگاه a_n به α میل نمیکند.
همچنین، بنا بر ۳.۲.۲، حکم

$\{a_n\}$ متقارب نیست

معادل است با اینکه

α هر عددی باشد، $\{a_n - \alpha\}$ هیچرشته نیست.

۳.۲.۱۳. تبصره. تعمیم تعریف تقارب در مورد رشته‌ای مانند $\{a_n\}_{n=r}$ به همان قیاس است که در ۲.۲.۶ گذشت.

۳.۲.۱۴. تبصره. در باب تقارب نیز ملاحظاتی مانند آنچه در ۲.۲.۷ دانسته شد هست، و به این مطلب در قسمت اخیر ۳.۱ و نیز پس از ۳.۲.۲ اشاره کردیم. مثلاً، اگر $a_n \to \alpha$ آنگاه بازاء عدد مثبت دلخواه ε، از مرتبه‌ای مانند $N(\varepsilon)$ ببعد، $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$.
پس، از این مرتبه ببعد، نمایش کارتزین رشته بین خطوط $y = \alpha - \varepsilon$ و $y = \alpha + \varepsilon$ قرار دارد.
چنانکه ملاحظه میشود، وجود حد برای یک رشته حاکی از محدودیتی در تغییرات جمله‌های رشته و «جست و خیز» آنها، و خلاصه، موجب «خوشرفتاری» آنست.

۳.۲.۱۵. تبصره در باب علامت حد. بجای علامت $\lim_n a_n$، علامت

$$\lim_{n\to\infty} a_n \qquad (*)$$

هم بسیار دیده میشود. در این عبارت، علامات $\to$ و ∞ را باید اجزای علامت تجزیه‌ناپذیر

$$\lim_{\to\infty},$$

تلقی کرد. متغیر فردی n در هر دو عبارت متغیری ظاهری است، و عبارات

$$\lim_n a_n, \qquad \lim_m a_m, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \lim_{m\to\infty} a_m$$

جملگی به یک معنی هستند.
عبارت (*) را چنین میخوانند:

حد a_n وقتی که n به ∞ میل کند (یا نزدیک شود).

علامت (*) و عبارت فوق از بقایای زمانی هستند که رشته‌ها، و توابع را بطور کلی، به طریقی جز آنچه امروز جاری است تعریف میکردند. a_n را متغیری میشمردند که با تغییر «متغیر مطلق» n تغییر میکند[1]، و $\lim_{n\to\infty} a_n$ را راجع به رفتار a_n وقتی که n «به بینهایت میل کند»، یعنی متزایداً بزرگ شود، میدانستند.

۳.۲.۱۶. تبصره. اگرچه تقارب یا حد داشتن از خواص مربوط به رشته‌ها است، چنانکه

---

(۱) در باب تحول مفهوم تابع اطلاعاتی کافی در ۳.۳.۱ فصل ۲ ض آمده است.

در تعریف (۳.۲) و علامات سابق دیده شد، و در ۳.۲.۱۵ نیز تلویحاً اشاره کردیم، این خاصیت را اغلب به جملهٔ عمومی رشته نسبت میدهند، و مثلاً از «تقارب a_n» یا از حد آن سخن میگویند. همچنین، با عباراتی مانند

$$\text{حد عبارت } \frac{2n-1}{n+3} \qquad (*)$$

بسیار مواجه میشویم. مقصود از عبارت (*)

$$\text{حد رشتهٔ } \left\{\frac{2n-1}{n+3}\right\}$$

یا

$$\text{حد رشتهٔ } \{a_n\} \text{ با ضابطهٔ } a_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

است. در رشتهٔ فوق، اندیس مبدأ را 1 (یعنی، رشته را تابعی بر $\mathbf{N}$) گرفته‌ایم. در آتیه، این خاصیت بسیار مهم را ثابت خواهیم کرد که تقارب یا عدم تقارب یک رشته، و حد آن در حالت تقارب، از اندیس مبدأ مستقل‌اند، و لهذا، از لحاظ تحقیق در تقارب، (*) را میتوان به معنی

$$\text{حد رشتهٔ } \left\{\frac{2n-1}{n+3}\right\}_{-2}$$

گرفت. در این صورت، مجموعهٔ اندیسگذار رشته $\mathbf{I}_{-2}$ میباشد. معذلک، بر طبق قراری که گذاشته‌ایم، رشته‌ها را با مجموعهٔ اندیسگذار $\mathbf{N}$ میگیریم، مگر اینکه عبارتی که داده میشود بازاء بعضی از اعضای اولیهٔ $\mathbf{N}$ بیمعنی باشد. مثلاً

$$\text{حد عبارت } \frac{2n-1}{(n-1)(n-3)}$$

را بدین معنی میگیریم:

$$\text{حد رشتهٔ } \left\{\frac{2n-1}{(n-1)(n-3)}\right\}_4$$

۳.۲.۱۷. امثله

(آ). رشته‌هائی که جملهٔ عمومی آنها $1/n$، $1/m^2$، $1/\sqrt{n}$، $(-1)^n/n$، و $1/(k+1)$ است جملگی هیچ‌رشته‌اند. پس، بنا بر ۳.۲.۴، جملگی متقارب به 0 اند. به عبارت دیگر،

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0; \qquad \lim_m \frac{1}{m^2} = 0, \qquad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

$$\frac{(-1)^n}{n} \to 0, \qquad \lim_k \frac{1}{k+1} = 0.$$

واضحست که حد هیچ یک از رشته‌های مذکور بدان رشته تعلق ندارد.

(ب). رشتهٔ $\{(n-1)/n^2\}$ نیز هیچ‌رشته است. پس، $\lim [(n-1)/n^2] = 0$. در اینجا 0 (حد رشته) بدان تعلق دارد (مساوی جملهٔ اول آنست).

(پ). بنا بر قضایای ۲.۴.۴ ـ ۲.۴.۶،

I. اگر $a > 0$ آنگاه $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$.

II. $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

III. اگر $|a| < 1$ آنگاه $\lim_n a^n = 0$ و $\lim_n na^n = 0$.

(ت). ثابت کنید که $\lim \dfrac{2n+1}{n} = 2$.

فرض کنیم $a_n = (2n+1)/n$. بالبداهه، $a_n - 2 = 1/n$. چون $\{1/n\}$ هیچرشته است حکم برقرار میباشد. ضمناً واضحست که همواره $a_n \neq 2$.

(ث). در مثال قبل، تعیین کنید که از چه مرتبه ببعد فاصلهی جملههای رشته از 2 از عدد مثبت مفروض ε کوچکتر است.

باید نامساوی $|a_n - 2| < \varepsilon$ را حل کرد. به آسانی دیده میشود که از مرتبهی $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ ببعد جملههای رشته در $U_\varepsilon(2)$ قرار دارند.

(ج). بنا بر آنکه $a_n = \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{1/2}$، حد رشتهی $\{a_n\}$ را حدس بزنید، و حدس خود را بیازمایید.

وقتی که n بزرگ شود[1]، $\dfrac{(-1)^n}{n}$ کوچک میشود[1]، و $1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$، و لهذا، a_n به 1 نزدیک میگردد. پس احتمال میرود که رشتهی $\{a_n\}$ متقارب به 1 باشد. برای اثبات، ملاحظه میکنیم که

$$|a_n - 1| = \frac{1/n}{\sqrt{1 - \dfrac{(-1)^n}{n}} + 1} < \frac{1}{n}.$$

پس، $\{a_n - 1\}$ هیچرشته است، و بالنتیجه، $\lim a_n = 1$. ▲

(چ). بنا بر آنکه $a_n = (\sqrt{2}\,n - 5)/(n-3)$، حد a_n را حدس بزنید، و حدس خود را بیازمایید.

قبلاً باید توجه کرد که a_n فقط بازاء $n > 3$ معنی دارد. به عبارت دیگر، رشتهای که در اینجا مورد بحث است رشتهی $\{(\sqrt{2}\,n - 5)/(n-3)\}_{n=4}$ میباشد. حال ملاحظه میکنیم که

$$a_n = \frac{\sqrt{2} - \dfrac{5}{n}}{1 - \dfrac{3}{n}}.$$

وقتی که n بزرگ شود، صورت به $\sqrt{2}$ و مخرج به 1 نزدیک میشود. پس، محتملاً، a_n به $\sqrt{2}/1$ (یا $\sqrt{2}$) میل میکند. استدلال مانند مثال (ج) است با قید $n \geqslant 4$. با این قید،

---

(۱) چون در مرحلهی حدس هستیم این عبارت عاری از دقت را بکار میبریم.

$$a_n - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}-5}{n-3}.$$

رشته‌ی $\{(3\sqrt{2}-5)/(n-3)\}$ هیچ‌رشته است. پس،

$$\lim \frac{\sqrt{2}\,n-5}{n-3} = \sqrt{2}. \blacktriangle$$

(ح). رشته‌ی $\{x_n\}$ با ضابطه‌ی

$$x_n = 10^6, \qquad 1 \leqslant n \leqslant 2^{70}; \qquad x_n = \frac{2n+1}{n}, \qquad n > 2^{70}$$

تعریف شده است. ثابت کنید که $\lim x_n = 2$ (با مثال (ز) مقایسه کنید).

فرض کنیم ε عدد مثبت مفروضی باشد. نامساوی $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$ معادل نامساوی $n > 1/\varepsilon$ است، که از مرتبه‌ی $[1/\varepsilon]+1$ برقرار میباشد. پس، اگر $N = \mathrm{Max}\,\{2^{70}+1, [1/\varepsilon]+1\}$ آنگاه از مرتبه‌ی Nم ببعد، $|x_n - 2| < \varepsilon$. $\blacktriangle$

(خ). ثابت کنید که رشته‌ی $\{n^2/(2n^2+1)\}$ متقارب به 1 نیست.

فرض کنیم $a_n = n^2/(2n^2+1)$. نامساوی $|1-a_n| = 1-a_n < \varepsilon$ معادل نامساوی $(2\varepsilon-1)n^2 > 1-\varepsilon$ است، که بازاء $\varepsilon = 1/2$ ممتنع میباشد. پس، $\{n \,|\, |1-a_n| < 1/2\} = \varnothing$. بالنتیجه، a_n متقارب به 1 نیست.

(د). رشته‌ی $\{n/10^6\}$ متقارب نیست.

باید ثابت کرد که عددی مانند α وجود ندارد که رشته‌ی $\{n\cdot 10^{-6} - \alpha\}$ هیچ‌رشته باشد. فرض کنیم α عدد دلخواهی باشد، و $\varepsilon = 1$. با توجه به نامساوی $|n\cdot 10^{-6} - \alpha| \geqslant n\cdot 10^{-6} - |\alpha|$، فرض کنیم $n\cdot 10^{-6} - |\alpha| > 1$، خواهیم داشت، $n > (1+|\alpha|)\cdot 10^6 = K$. پس، از مرتبه‌ی $[K]+1$م ببعد $|n\cdot 10^{-6} - \alpha| > 1$. $\blacktriangle$

به طریق دیگر، چون رشته‌ی $\{n/10^6\}$ از بالا نامحدود است (چرا؟)، بازاء عدد مثبت دلخواه ε، از مرتبه‌ای ببعد، $n\cdot 10^{-6} > \alpha + \varepsilon$، و بالنتیجه، $n\cdot 10^{-6} - \alpha > \varepsilon$. پس، هیچ‌رشته بودن $\{n\cdot 10^{-6} - \alpha\}$ ممتنع است.

(ذ). رشته‌ی $\{(-1)^{n-1}\}$ یا

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$$

متقارب نیست.

فرض کنیم رشته‌ی مذکور متقارب و α حد آن باشد. پس، بازاء $\varepsilon = 1/2$، از مرتبه‌ای مانند N ببعد، $|(-1)^{n-1} - \alpha| < 1/2$ (۱). اگر در (۱) به n دو مقدار بزرگتر از N، یکی زوج و دیگری فرد، بدهیم نتیجه میشود،

$$|1-\alpha| < 1/2, \qquad |-1-\alpha| < 1/2,$$

و بالنتیجه،

$$2 = |(1-\alpha) - (-1-\alpha)| \leqslant |1-\alpha| + |-1-\alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

و این ممتنع است. ▲

(ر). رشته‌ی $\left\{\dfrac{2n+1}{n+m}\right\}_{n=1}$، که در آن m عدد طبیعی مفروضی است، متقارب به 2 میباشد، زیرا،

$$\left|\frac{2n+1}{n+m} - 2\right| = \frac{2m-1}{n+m} < \frac{2m-1}{n},$$

و رشته‌ی $\left\{\dfrac{2m-1}{n}\right\}$ هیچرشته است. پس،

$$\lim_n \frac{2n+1}{n+m} = 2.$$

رشته‌ی $\left\{\dfrac{2n+1}{n+m}\right\}_{m=1}$، که در آن n عدد طبیعی مفروضی است، هیچرشته است. پس،

$$\lim_m \frac{2n+1}{n+m} = 0.$$

۳.۲.۱۸. تمرین

۱. ثابت کنید که

(آ) $\lim \dfrac{1-2n}{1-n} = 2.$

(ب) $\lim \dfrac{n+1}{3n-2} = \dfrac{1}{3}.$

(پ) $\lim \dfrac{1-2n}{1+n} = -2.$

(ت) $\lim \dfrac{2n}{5-n} = -2.$

(ث) $\dfrac{n+1}{n} \to 1.$

(ج) $\dfrac{n}{n^2+1} \to 0.$

(چ) $\lim \dfrac{-3n}{\sqrt{n^2+1}} = -3.$

(ح) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-3}} \to 1.$

(خ) $\lim \dfrac{n+(-1)^n}{\sqrt{3}\,n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(د) $\sqrt[3]{11+\dfrac{2}{n}} \to \sqrt[3]{11}.$

۲. در هر یک از مسائل ۱، بازاءِ عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ بیابید که، از آن مرتبه ببعد، جمله‌های رشته در حومه‌ای از حد رشته به شعاع ε قرار گیرند. مطلب را با نمایش کارتزین و مقادیر عددی برای ε توضیح دهید.

۳. حد هر یک از عبارات ذیل را حدس بزنید، و حدس خود را بیازمایید. سپس مسئله‌ی ۲ را در مورد هر یک حل کنید:

(آ) $(2n^2+1)/n^2.$

(ب) $(1-n^2)/2n^2.$

(پ) $(\sqrt{6}\,n-1)/(\sqrt{2}\,n+1).$

(ت) $\sqrt[3]{2}\,n/(1-2n).$

(ث) $[1+(-1)^n]/n.$

(ج) $[1-(-1)^n]/n.$

(چ) $2+\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot 10^6.$

(ح) $\left[3-\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{1/2}.$

(خ) $2n/(n+4\sqrt{n})$. (د) $2n/(n+\sqrt{n})$.

(ذ) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}$. (ر) $\sqrt{n}/(4-2\sqrt{n})$.

۴. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ به عدد α متقارب باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت ε، مجموعه‌ی $\{n \mid |a_n - \alpha| \geqslant \varepsilon\}$ متناهی باشد.

۵. ثابت کنید که

(آ) $(2+3n)/(2+n)$ به 2 میل نمیکند.

(ب) $(n+1)/2n$ به -1 میل نمیکند.

(پ) $(n^2+1)/(n^2-3n+2)$ به -2 میل نمیکند.

۶. ثابت کنید که رشته‌های ذیل متقارب نیستند:

(آ) $\{n\}$. (ب) $\{-n\}$.

(پ) $\left\{\frac{(-1)^n}{1000}\right\}$. (ت) $\{1+(-1)^n\}$.

(ث) $\{(-1)^n \cdot n\}$. (ج) $\{(-1)^{n-1} \cdot n\}$.

(چ) $\{(-1)^n \cdot \sqrt{n}\}$. (ح) $\{n \cdot [1+(-1)^n]\}$.

۷. حد رشته‌های ذیل را حدس بزنید، و حدس خود را بیازمایید، و در مورد هر رشته، تعیین کنید که از چه مرتبه‌ای ببعد قدر مطلق تفاضل جمل رشته با حد آن از 10^{-250} کمتر است:

(آ) $a_1 = a_2 = -5, \quad a_3 = 10, \quad a_n = \dfrac{1-2n}{1-n} \quad (n \geqslant 4)$.

(ب) $a_n = 10^{1000} \quad (1 \leqslant n \leqslant 10^4), \quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} \quad (n \geqslant 10\,001)$.

(پ) $a_n = 0 \quad (1 \leqslant n \leqslant 100 \vee 1000 < n \leqslant 10\,000)$,

$a_n = 50 \ (101 < n \leqslant 1000), \quad a_n = \dfrac{2n}{5-n} \quad (n > 10\,000)$.

(ت) $a_n = 0 \quad (1 \leqslant n \leqslant 100), \quad a_n = 10^4 \quad (150 < n \leqslant 2^8)$,

$a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+2}$ (سایر مقادیر n).

(ث) $a_n = 500^{10^{600}} \quad (1 \leqslant n \leqslant 10^{700}), \quad a_n = \dfrac{n+1}{n} \quad (n > 10^{700})$.

۸. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب به عدد α باشد آنست که، بازاء هر حومه‌ی α مانند U، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n \in U$.

۹. شخصی تقارب رشته‌ی $\{a_n\}$ را به عدد α، بجای ۳.۲.۱.۱، با این گزاره تعریف کرده است:

بازاء هر عدد نامنفی ε عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $|a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.

اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ بر طبق این تعریف متقارب به عدد α باشد چه اطلاعی در باب این رشته

حاصل میشود؟ آیا این تعریف برای تقارب بهتر است یا تعریف به وسیله‌ی ۳.۲.۱.۱؟
در پایان این قسمت، یکی از خواص مهم رشته‌های متقارب را میآوریم:

۳.۲.۱۹. قضیه. هر رشته‌ی متقارب محدود است.
برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای متقارب و α حد آن باشد. چون رشته‌ی $\{a_n - \alpha\}$ هیچرشته است، بنا بر ۲.۳.۰۹، عددی ثابت و مثبت مانند λ هست که، بازاء هر n، $\lambda > |a_n - \alpha|$، و یا، $\alpha - \lambda < a_n < \lambda + \alpha$، و بالنتیجه، $|a_n| < \text{Max}\{|\lambda - \alpha|, |\lambda + \alpha|\}$. ▲

۳.۲.۲۰. تبصره. عکس قضیه‌ی فوق برقرار نیست. مثلاً، رشته‌ی $\{(-1)^{n-1}\}$ محدود است، اما، چنانکه دیدیم، متقارب نیست.

۳.۳. رشته‌های متباعد و تعمیم مفهوم حد. در قسمت قبل، رشته‌هائی چند دیدیم که متقارب نیستند. بطور کلی،

۳.۳.۱. تعریف. رشته‌ی $\{a_n\}$ را متباعد خوانیم در صورتی که متقارب نباشد. بنا بر ۳.۲.۱۹، اگر رشته‌ای از بالا یا از پایین نامحدود باشد متباعد است، اما رشته‌های متباعد محدود هم وجود دارد (۳.۲.۲۰).

اینک به تعمیم مفهوم حد میپردازیم به نحوی که، علاوه بر رشته‌های متقارب، بعضی رشته‌های متباعد که تا حدی «خوشرفتار» هستند نیز صاحب حد شوند. این مقصود با ملحوظ داشتن حومه‌های ∞ و $-\infty$ (۱۰.۲.۳ : ۶) در تعریف حد (مذکور در ۳.۲) حاصل میشود[۱]:

۳.۳.۲. تعریف. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد.

I. رشته‌ی $\{a_n\}$ را متباعد به ∞ خوانیم در صورتی که، بازاء هر حومه‌ای از ∞، جمله‌های رشته، از مرتبه‌ای ببعد، در این حومه واقع باشند؛ و به عبارت دیگر، در صورتی که

بازاء هر عدد حقیقی u، عددی طبیعی مانند N یا $N(u)$ باشد که، بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $u < a_n$.

در این صورت، گوئیم حد a_n مساوی ∞ است. به قیاس گذشته،

$a_n \to \infty$ یعنی a_n به ∞ متباعد است.

$\lim_n a_n = \infty$ یعنی حد a_n مساوی ∞ است.

II. رشته‌ی $\{a_n\}$ را متباعد به $-\infty$ خوانیم در صورتی که، بازاء هر حومه‌ای از $-\infty$، جمله‌های رشته، از مرتبه‌ای ببعد، در این حومه واقع باشند؛ و به عبارت دیگر، در صورتی که،

---

(۱) ۸: ۳.۲.۱۸ نیز ملاحظه شود.

بازاء هر عدد حقیقی v، عددی طبیعی مانند N یا $N(v)$ باشد که،
بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $a_n < v$.

در این صورت، گوئیم حد a_n مساوی $-\infty$ است. به قیاس گذشته،
$a_n \to -\infty$ یعنی a_n به $-\infty$ متباعد است.
$\lim_n a_n = -\infty$ یعنی حد a_n مساوی $-\infty$ است.

۳.۳.۳. تبصره.

I. تأکید میکنیم که بحث ما از رشته‌های اعداد حقیقی است. پس، هیچ یک از ∞ و $-\infty$ جمله‌ی رشته‌های مورد بحث نمیباشند.

II. از این ببعد مطالب §۷ فصل ۶ در باب «بینهایت» همواره مورد استناد خواهد بود، و باید بر آنها تسلط داشت.

۳.۳.۴. امثله

(آ). ثابت کنید که $\lim \dfrac{n^2}{n+1} = \infty$

فرض کنیم u عدد حقیقی دلخواهی باشد. نامساوی $u < n^2/(n+1)$ (۱) معادل نامساوی $n^2 - nu - u > 0$ است، که اگر u نامثبت باشد بازاء هر مقدار n، و اگر مثبت باشد همواره بازاء $n > \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2+4u})$ برقرار است. پس، در هر حال، از مرتبه‌ای ببعد نامساوی (۱) برقرار میباشد، یعنی $n^2/(n+1)$ در بازه‌ی (u, ∞) قرار دارد.
به عنوان مثال عددی، بازاء $u = 1000$، تعیین کنید که از چه مرتبه‌ای ببعد جمله‌های رشته در بازه‌ی $(1000, \infty)$ قرار دارند. نمایش کارتزین رشته چه خصوصیتی دارد؟

(ب). $\lim (\sqrt{1+n} - n) = -\infty$.

فرض کنیم $a_n = \sqrt{1+n} - n$، و v عدد ثابت دلخواهی باشد. باید ثابت کرد که از مرتبه‌ای ببعد $a_n < v$ (۱). بنا بر ۴.۷.۶ : ۶،

$$a_n < \left(1 + \frac{n}{2}\right) - n = 1 - \frac{n}{2}.$$

پس، اگر $1 - \frac{n}{2} \leqslant v$ (۲) آنگاه (۱) به طریق اولی برقرار است. اما، (۲) معادل $n \geqslant 2(1-v)$ میباشد. پس، اگر N عددی طبیعی و ناکمتر از $2(1-v)$ باشد، بازاء هر n که $n \geqslant N$ نامساوی (۱) برقرار است.
به عنوان مثال عددی، بازاء $v = -10^{15}$، آغاز استمرار (۱) را تعیین کنید. نمایش کارتزین رشته چه خصوصیتی دارد؟

قضیه‌ی ذیل نظیر ۳.۲.۱۰.۱ است، و بنا بر آن، در استدلال به وسیله‌ی تعریفات سابق‌الذکر میتوان به uهای مثبت یا «بزرگ» یا vهای منفی یا «کوچک» اکتفا کرد:

۳.۳.۵. قضیه. فرض کنیم c عددی ثابت باشد.

I. شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim a_n = \infty$ آنست که، بازاء هر عدد u که $u > c$، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n > u$.

II. شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim a_n = -\infty$ آنست که بازاء هر عدد v که $v < c$، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n < v$.

برهان (قسمت مربوط به ∞). لزوم بدیهی است، زیرا اگر $\lim a_n = \infty$ آنگاه، بر طبق تعریف، بازاء هر u، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n > u$. پس، بالاخص بازاء هر u که $u > c$ همین حکم برقرار است. برای اثبات کفایت، فرض کنیم بازاء هر u که $u > c$، از مرتبه‌ای ببعد $a_n > u$؛ و u' عدد دلخواهی باشد. اگر $u' > c$ آنگاه، بنا بفرض، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n > u'$. اگر $u' \leqslant c$ گوئیم، چون $c + 1 > c$، بنا بفرض، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n > c + 1$، و بالنتیجه، از همان مرتبه ببعد، $a_n > u'$. پس، بنا بر تعریف، $\lim a_n = \infty$. ▲

۳.۳.۶. قضیه. حد یک رشته، اعم از اینکه عددی حقیقی یا ∞ یا $-\infty$ باشد، منحصر بفرد است.

برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ی دلخواهی باشد. در ۳.۲.۰۳ دیدیم که حد a_n مساوی دو عدد حقیقی متمایز نتواند بود. باقی میماند اثبات اینکه هر یک از حالات

$$\begin{array}{lll} (\text{آ}) & \lim a_n = \infty, & \lim a_n = -\infty; \\ (\text{ب}) & \lim a_n = \infty, & \lim a_n = \alpha \in \mathbf{R}; \\ (\text{پ}) & \lim a_n = -\infty, & \lim a_n = \alpha \in \mathbf{R} \end{array}$$

ممتنع است. امتناع (آ) و (ب) را ثابت و اثبات امتناع (پ) را به متعلم محول میکنیم.

اولاً، فرض کنیم $\lim a_n = \infty$ و $\lim a_n = -\infty$. بنا بر تعریف، از مرتبه‌ای مانند N_1 ببعد، همواره $a_n > 0$، و از مرتبه‌ای مانند N_2 ببعد، همواره $a_n < 0$. پس، از مرتبه‌ی $\operatorname{Max}\{N_1, N_2\}$ ببعد، در عین حال، همواره $a_n > 0$ و $a_n < 0$، و این ممتنع است.

ثانیاً، فرض کنیم $\lim a_n = \infty$ (۱) و $\lim a_n = \alpha \in \mathbf{R}$ (۲). بنا بر (۲) و ۳.۲.۰۱۹، عددی مثبت مانند u هست که همواره $-u < a_n < u$. پس، هیچ جمله‌ی رشته در بازه‌ی (u, ∞) قرار ندارد، و این با (۱) متناقض است. ▲

۳.۳.۷. تبصره. از این ببعد، وقتی که از حد یک رشته صحبت میشود حد به معنی اعم مراد است[1]. **بین حد داشتن و تقارب تمیز بگذارید.** اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ حد داشته باشد، و حد آن عددی حقیقی باشد آنگاه این رشته متقارب است، و الا متباعد میباشد.

۳.۳.۸. تبصره. رفتار رشته‌های متباعد بسیار متفاوت است. اگر $\lim a_n = \infty$ آنگاه

---

(۱) البته، مگر آنکه خلاف این مقصود تصریح شود.

رشته از بالا نامحدود است، و اگر $\lim a_n = -\infty$ آنگاه رشته از پایین نامحدود میباشد. اما، بسیاری از رشته‌ها هستند که، حتی با تعریف تعمیمی حد هم، حد ندارند. اگر $\{a_n\}$ چنین رشته‌ای باشد، عبارت $\lim a_n$ **بیمعنی است**؛ در این حالت، گاه میگویند «$\lim a_n$ موجود نیست». برای اینکه از این لحاظ در آتیه ابهامی پیش نیاید تذکر میدهیم که قرارداد عادی اینست که هر جا از $\lim a_n$ سخن میرود موجود بودن آن مستتر است مگر آنکه خلاف آن تصریح یا صریحاً از سیاق مطلب استنباط شود. مثلاً، وقتی که مینویسیم $\lim a_n = \alpha$ معلوم است که حد a_n موجود و مساوی α است[۱]؛ اما اگر بپرسند که رشته‌ی $\{a_n\}$ حد دارد یا نه، موجود بودن $\lim a_n$ موضوع بحث است. با وجود قرارداد فوق، در بعضی موارد، برای تأکید بیشتر، به وجود حدود مورد بحث تصریح میکنیم.

رشته‌هائی که حد ندارند «بدرفتارترین» رشته‌ها میباشند. چنانکه دیدیم، رشته‌ی محدود $\{(-1)^{n-1}\}$ از این جمله است. اما ممکن است رشته‌ای نامحدود و بدون حد باشد. مثلاً، رشته‌ی $\{(-1)^{n-1}.\, n\}$ از بالا و پایین نامحدود است، پس متقارب نتواند بود، و بعلاوه، نه به ∞ متباعد است نه به $-\infty$، زیرا، مثلاً، اگر u عدد حقیقی مثبتی باشد، تعدادی نامتناهی از جمله‌های رشته (مثلاً جمله‌های حاصل بازاء مقادیر زوج n) در خارج بازه‌ی (u, ∞) قرار دارند، و لهذا، بینهایت بار $a_n < u$.

در پرتو توضیحات فوق، تعریف ذیل را میآوریم:

۳.۳.۹. تعریف. رشته‌ی متباعد $\{a_n\}$ را نوسانی خوانیم در صورتی که حد نداشته باشد. در این صورت، اگر این رشته محدود باشد آن را دارای نوسان محدود و الا دارای نوسان نامحدود گویند.

ساده‌ترین مثال رشته نوسانی رشته‌ی $\{(-1)^{n-1}\}$ است (دارای نوسان محدود). رشته‌ی $\{(-1)^{n-1}.\, n\}$، چنانکه گذشت، دارای نوسان نامحدود میباشد. به عنوان مثال دیگر از حالات گوناگونی که در بحث از رفتار یک رشته ممکن است پیش آید رشته‌ی مهم تصاعد هندسی را مورد بحث قرار میدهیم.

۳.۳.۱۰. رشته‌ی تصاعد هندسی $\{a^n\}$. چنانکه در ۲.۴.۶ دیدیم اگر $|a| < 1$ این رشته هیچرشته است. اگر $a = 1$ رشته‌ی فوق رشته‌ی ثابت $\{1\}$ است، که حدش مساوی 1 میباشد. اگر $a = -1$ رشته‌ی مورد بحث رشته $\{(-1)^n\}$ است، که نوسانی و دارای نوسان محدود است. باقی میماند حالتی که $|a| > 1$. در این صورت، $\lim |a^n| = \infty$. زیرا، فرض کنیم u عدد دلخواهی باشد، و $|a| = 1 + h$. بنا بفرض، $h > 0$. پس، بنا بر نامساوی برنویی،

$$|a^n| = (1+h)^n \geqslant 1 + nh.$$

بازاء $1 + nh > u$ خواهیم داشت $|a^n| > u$. بالنتیجه، $\lim |a^n| = \infty$. حال اگر

(۱) این مطلب ممکن است مفروض باشد یا قبلاً ثابت شده باشد.

$a > 1$ آنگاه $|a^n| = a^n$، و لهذا، $\lim a^n = \infty$. اگر $a < -1$ آنگاه، بنا بر آنچه ثابت شد، رشته‌ی $\{a^n\}$ نامحدود است، و لهذا، متقارب نتواند بود. بعلاوه، رشته نه به ∞ میل میکند نه به $-\infty$. زیرا، بازاء هر عدد مثبت u، بینهایت بار a^n غیر متعلق به بازه‌ی (u, ∞) است، و بازاء هر عدد منفی v، a^n بینهایت بار غیر متعلق به بازه‌ی $(-\infty, v)$ است. پس، در این حالت، رشته دارای نوسان نامحدود میباشد.

خلاصه‌ی بحث در رفتار رشته‌ی $\{a^n\}$

I. اگر $|a| < 1$ آنگاه $\lim_n a^n = 0$.

II. اگر $a = 1$ آنگاه $\lim_n a^n = 1$.

III. اگر $a = -1$ رشته دارای نوسان محدود است.

IV. اگر $a > 1$ آنگاه $\lim_n a^n = \infty$.

V. اگر $a < -1$ رشته دارای نوسان نامحدود است.

در پایان این قسمت، قضیه‌ای کلی در خاصیت مشخصه‌ی حد میآوریم. اهمیت این قضیه در این است که، در اثبات بسیاری از احکام مربوط به حد، ما را از توسل به طریقه‌ی حالات بینیاز میسازد.

۳.۳.۱۱. قضیه (خاصیت مشخصه‌ی حد). فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و α عضوی از $\mathbf{R}^*$ باشد.

اولاً، اگر $\lim a_n = \alpha$ آنگاه، در عین حال[1]،

I. بازاء هر عدد u، اگر $u < \alpha$، از مرتبه‌ای ببعد، $u < a_n$؛

II. بازاء هر عدد v، اگر $v > \alpha$، از مرتبه‌ای ببعد، $v > a_n$.

ثانیاً، اگر α در شرایط I و II صدق کند $\lim a_n$ موجود و مساوی α است.

برهان. لزوم. فرض کنیم $\lim a_n = \alpha$ (۱).

حالت اول: $\alpha = -\infty$. I به انتقاء مقدم برقرار است، و II به موجب تعریف (۳.۳.۲ : II).

حالت دوم: $\alpha = \infty$. II به انتقاء مقدم برقرار است، و I به موجب تعریف (۳.۳.۲ : I).

حالت سوم: $\alpha \in \mathbf{R}$. برای اثبات I، فرض کنیم $u < \alpha$. پس، $\varepsilon = (\alpha - u)/2 > 0$. بنا بر (۱)، رشته‌ی $\{a_n - \alpha\}$ هیچرشته است. پس، از مرتبه‌ای ببعد، $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$. بالنتیجه، از مرتبه‌ای ببعد،

$$a_n > \alpha - \varepsilon = \alpha - \frac{\alpha - u}{2} = \frac{\alpha + u}{2} > \frac{u + u}{2} = u.$$

---

(۱) ماحصل شرایط آتیه اینست که اگر عددی کوچکتر (بزرگتر) از حد رشته باشد، از مرتبه‌ای ببعد، از جمله‌های رشته کوچکتر (بزرگتر) است، و این مطلب با توجه به نمایش رشته بر یک محور محسوس میباشد.

اثبات II به همین قیاس است.
کفایت. فرض کنیم رشته‌ی $\{a_n\}$ و عضو α از $\mathbf{R}^*$ در I و II صدق کنند.
حالت اول: $\alpha = -\infty$. بنا بر II، اگر v عدد دلخواهی باشد، از مرتبه‌ای بیعد، $a_n < v$. پس، بنا بر تعریف، $\lim a_n = -\infty$.
حالت دوم: $\alpha = \infty$. اثبات به قیاس حالت قبل است.
حالت سوم: $\alpha \in \mathbf{R}$. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon$، بنا بر I و II، از مرتبه‌ای بیعد $\alpha - \varepsilon < a_n$، و از مرتبه‌ای بیعد $a_n < \alpha + \varepsilon$. پس، از مرتبه‌ای بیعد، $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$، و یا $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.
پس، رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب به α است. ▲

۳.۳.۱۲. تبصره. چنانکه ملاحظه شد، در قضیه‌ی فوق، اگر $\alpha = \infty$ فقط شرط I و اگر $\alpha = -\infty$ فقط شرط II در کار می‌آید.

۳.۳.۱۳. تمرین

۱. ثابت کنید که

(آ) $\lim n = \infty.$

(ب) $\lim (-n) = -\infty.$

(پ) $\lim n^2 = \infty.$

(ت) $\lim (n^2 - 2n) = \infty.$

(ث) $\lim (2n - n^2) = -\infty.$

(ج) $\lim \dfrac{-n^2 - n}{4} = -\infty.$

(چ) $\lim (10^6 - n) = -\infty.$

(ح) $\lim [n^2 + (-1)^n \cdot 2n] = \infty.$

۲. در مورد هر یک از رشته‌های ذیل، اولاً تعدادی از جمله‌های رشته را حساب کنید تا بتوانید رفتار رشته را حدس بزنید. ثانیاً، با مدلل کردن حدس خود، رشته‌های دارای حد را از رشته‌های نوسانی تفکیک کنید، و در مورد رشته‌های دسته‌ی اخیر، نوع نوسان را تشخیص دهید:

(آ) $(-1)^n + \dfrac{1}{n}.$

(ب) $(-1)^n \cdot 100 + \dfrac{1000}{n}.$

(پ) $5 + 3 \cdot (-1)^n.$

(ت) $\dfrac{10^6}{n} + (-1)^n.$

(ث) $10^6 \cdot (-1)^n + \dfrac{1}{n}.$

(ج) $(-1)^n \cdot n.$

(چ) $10^6 + (-1)^n \cdot n.$

(ح) $(-1)^n \cdot (10^6 - n).$

(خ) $n \cdot [1 + (-1)^n].$

(د) $n^2 \cdot [1 + (-1)^n].$

(ذ) $(-1)^n \cdot n^2 + n.$

(ر) $n^3 + (-1)^n \cdot n^2.$

(ز) $\frac{2+(-1)^n}{4}$.

۳.۴. تجدید شماره‌گذاری. مقدمةً رشته‌ی $\{a_n\}$ را با ضابطه‌ی $a_n = (n+1)/n$ اختیار میکنیم. جمله‌های این رشته عبارتند از

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, \ldots \\ \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{6}{5}, \ldots . \end{array}$$

وقتی که اعداد فوق را با $\mathbf{N}$ شماره‌گذاری کنیم رشته‌ی $\{a_n\}$ یا $\{a_n\}_1$ حاصل میشود، که تابعی است بر $\mathbf{N}$. اما، همین اعداد را میتوان، مثلاً، با $\mathbf{I}_3$ شماره‌گذاری کرد:

$$\begin{array}{ccccc} b_3, & b_4, & b_5, & b_6, & b_7, \ldots \\ \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{6}{5}, \ldots . \end{array}$$

بدین گونه، رشته‌ی $\{b_n\}_3$ حاصل میشود که تابعی است بر $\mathbf{I}_3$. تعیین ضابطه‌ی تعریف این رشته بر حسب رشته‌ی اولیه آسان است: همواره

$$b_n = a_{n-2} = \frac{n-1}{n-2} \qquad (n \geqslant 3).$$

بدین مناسبت، رشته‌ی $\{b_n\}_3$ را میتوان رشته‌ی $\{a_{n-2}\}_3$ نامید[1]. اگر چه رشته‌های $\{a_n\}_1$ و $\{b_n\}_3$ یکی نیستند (یکی تابعی بر $\mathbf{N}$ است، و دیگری تابعی بر $\mathbf{I}_3$)، یکسان بودن جمله‌های آنها از حیث مقدار و ترتیب توالی چنین به ذهن القا میکند که حد دو رشته یکسان است. قضیه‌ی اساسی ۳.۴.۱ نشان میدهد که این حکم، اگر هم دو رشته در تعدادی متناهی از جمله‌ها متفاوت باشند، کلیت دارد. بدین گونه، اگر رشته‌ی $\{c_n\}_3$ را با ضابطه‌ی

$$c_3 = \frac{1}{100}, \qquad c_4 = 10^7, \qquad c_5 = 100^{500}, \qquad c_n = a_{n-2} \qquad (n \geqslant 6)$$

تعریف کنیم حد (و در نتیجه، رفتار) رشته‌های $\{a_n\}_1$ و $\{b_n\}_3$ و $\{c_n\}_3$ یکسان خواهد بود.

۳.۴.۱ قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=p}$ و $\{b_n\}_{n=q}$ دو رشته باشند و r عددی صحیح و ثابت باشد، و عدد صحیحی مانند N موجود باشد که همواره اگر $n \geqslant N$ آنگاه $b_n = a_{n+r}$[2]. در این شرایط، اگر یکی از $\lim_n a_n$ و $\lim_n b_n$ موجود باشد دیگری نیز موجود و مساوی آن است.

برهان. مفروضات را مفروض میگیریم، و فرض میکنیم $\alpha = \lim a_n$ (۱)، و به وسیله‌ی ۳.۳.۱۱ ثابت میکنیم که $\lim b_n = \alpha$.

---

(۱) نمایش کارتزین دو رشته را یکجا رسم کنید.

(۲) ملاحظه کنید که، بنا بر تعریف دو رشته، $N \geqslant q$ و $N + r \geqslant p$.

فرض کنیم u عدد دلخواهی کوچکتر از α باشد. بنا بر (۱)، عددی صحیح مانند N' هست که $N' \geqslant p$ و

(۲) همواره اگر $n \geqslant N'$ آنگاه $u < a_n$.

فرض کنیم $M = \operatorname{Max}\{N, N' - r\}$ (۳). گوئیم

(*) همواره اگر $n \geqslant M$ آنگاه $u < b_n$.

زیرا، فرض کنیم $n \geqslant M$ (۴). بنا بر (۳)، $n \geqslant N' - r$، و از آنجا، $n + r \geqslant N'$. پس، به موجب (۲)، $u < a_{n+r}$ (۵). از طرف دیگر، بنا بر (۴) و (۳)، $n \geqslant N$. بالنتیجه، بنا بر فرض قضیه، $b_n = a_{n+r}$، و از آنجا، بنا بر (۵)، $u < b_n$. پس، (*) برقرار است. به همین قیاس ثابت میشود که اگر v عدد دلخواهی بزرگتر از α باشد، از مرتبه‌ای ببعد، $v > b_n$. پس، بنا بر ۳.۳.۱۱، $\lim b_n$ موجود و مساوی α است. اثبات حکم به فرض وجود $\lim b_n$ بر عهده‌ی متعلم است. ▲

۳.۴.۲. تعریف. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=p}$ رشته‌ای باشد. رشته‌ی $\{b_n\}_{n=q}$ را حاصل از تجدید شماره‌گذاری (یا از تغییر اندیس مبدأ) در رشته‌ی $\{a_n\}_{n=p}$ خوانیم در صورتی که همواره

$$b_n = a_{n+p-q} \qquad (n \geqslant q).$$

در این شرایط، رشته‌ی $\{b_n\}_{n=q}$ را رشته‌ی

$$\{a_{n+p-q}\}_{n=q}$$

میخوانیم و، بجای $\lim_n b_n$، $\lim_n a_{n+p-q}$ نیز مینویسیم.

بالاخص (بازاء $p - q = 1$ یا $p - q = -1$)، رشته‌ی $\{a_{n+1}\}_{p-1}$ یعنی رشته‌ی $\{b_n\}_{p-1}$ با ضابطه‌ی

$$b_n = a_{n+1} \qquad (n \geqslant p-1)$$

و رشته‌ی $\{a_{n-1}\}_{p+1}$ یعنی رشته‌ی $\{b_n\}_{p+1}$ با ضابطه‌ی

$$b_n = a_{n-1} \qquad (n \geqslant p+1).$$

۳.۴.۲.۱. تبصره. بنا بر ۳.۴.۱، اگر $\lim_n a_n$ موجود، و r عدد صحیح ثابتی باشد، $\lim_n a_{n+r}$ موجود است و

$$\lim_n a_{n+r} = \lim_n a_n.$$

بالاخص، اگر $\lim a_n$ موجود باشد $\lim a_{n+1}$ و $\lim a_{n-1}$ نیز موجودند، و

$$\lim_n a_{n+1} = \lim_n a_{n-1} = \lim_n a_n.$$

مثلاً، از رابطه‌ی $\lim \dfrac{2n+1}{n} = 2$ نتیجه میشود،

$$\lim \frac{2(n-1)+1}{n-1} = \lim \frac{2n-1}{n-1} = 2,$$

$$\lim \frac{2(n+5)+1}{n+5} = \lim \frac{2n+11}{n+5} = 2.$$

۳.۴.۳. تصرفات متناهی در رشته‌ها. تعریف. رشته‌ی $\{b_n\}$ را حاصل از تصرفات متناهی در رشته‌ی $\{a_n\}$ خوانیم در صورتی که از درج، اسقاط، یا تغییر دادن تعدادی متناهی از جمل در این رشته حاصل شده باشد.
مثلاً، از رشته‌ی

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

با تصرفات متناهی و تجدید شماره‌گذاری میتوان رشته‌ی

$$\{b_n\} = 2, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{3}, \ldots$$ [1]

را بدست آورد، که ضابطه‌ی تعریفش چنین است:

$$b_1 = 2, \qquad b_2 = \frac{1}{2}, \qquad b_3 = 5, \qquad b_n = a_{n-1} \qquad (n \geqslant 4).$$

بالعکس، رشته‌ی $\{a_n\}$ را میتوان از تصرفات متناهی در رشته‌ی $\{b_n\}$ بدست آورد، و بر حسب این رشته، چنین تعریف کرد:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = b_{n+1} \qquad (n \geqslant 3).$$

چون تفاوت رشته‌های مذکور در تعدادی متناهی از جمله‌های آنهاست، از قضیه‌ی ۳.۴.۱ معلوم است که رفتار دو رشته یکسان است.
بطور کلی،

۳.۴.۴. قضیه. فرض کنیم رشته‌ی $\{b_n\}$ حاصل از تصرفات متناهی در رشته‌ی $\{a_n\}$ باشد. اگر یکی از $\lim a_n$ و $\lim b_n$ موجود باشد دیگری نیز موجود و با آن مساوی است.
برهان. فرض کنیم رشته‌ی $\{b_n\}$ از تصرفاتی متناهی در رشته‌ی $\{a_n\}$ حاصل شده باشد. بی آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، این تصرفات را میتوان منحصر به اسقاط یا درج تعدادی متناهی جمله دانست (چرا از این راه خللی به کلیت استدلال وارد نمیشود؟). پس، فرض کنیم $\{b_n\}$ با درج p جمله در $\{a_n\}$ و اسقاط q جمله از آن حاصل شده باشد. بالنتیجه، عددی طبیعی مانند N هست که اسقاطات و درج جمل جدید بین N جمله‌ی اول $\{a_n\}$ اعمال شده‌اند. بنا بر این، اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از N باشد a_n در رشته‌ی جدید جمله‌ی $n+p-q$ اُم است، یعنی

$$a_n = b_{n+p-q} \qquad (n > N),$$

و از آنجا

$$b_n = a_{n-p+q} \qquad (n > N + p - q).$$

---

(۱) علامت « ⌈ » نشان میدهد که، از جائی که این علامت آغاز میشود، جمله‌های رشته‌ی دوم از حیث مقدار و ترتیب توالی عیناً همان جمله‌های رشته‌ی اولیه هستند.

پس، شرایط قضیه‌ی ۳.۴.۱ موجود، و بنا بر آن قضیه، حکم برقرار است. ▲

۳.۴.۵. نتیجه. از آنچه از ۳.۴ تا کنون آوردیم این مطلب «بدیهی» محقق شد که اگر جمله‌های دو رشته، قطع نظر از تعدادی متناهی از آنها، از حیث مقدار و ترتیب توالی یکسان باشند رفتار دو رشته یکسان است، و اگر یکی از آنها حد داشته باشد دیگری حدی مساوی با آن دارد. این خاصیت بسیار مهم را به زبان عادی چنین بیان میکنند که رفتار و حد رشته‌ها فقط مربوط به «قسمت نامتناهی» آنهاست، و بالاخص، تصرفات متناهی در یک رشته در رفتار و حد آن تأثیری ندارد.

۳.۴.۶. تمرین

۱. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n = 1/n$ مفروض است، و هر یک از رشته‌های ذیل از تصرفات متناهی در آن حاصل شده است.

(۱). ضابطه‌ی تعریف رشته‌ی جدید را بنویسید

(۲). رشته‌ی اولیه را بر حسب رشته‌ی جدید تعریف کنید.

(۳). شماره‌گذاری رشته‌ی جدید را تجدید کنید به نحوی که رشته‌ای با اندیس مبدأ 0 یا 1 — یا 2 حاصل شود، و ضابطه‌ی تعریف این رشته را بنویسید.

(۴). نتایج حاصل را با رسم نمودار رشته‌ها توضیح دهید.

(آ) $\quad \overline{\left|\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right.}$

(ب) $\quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \overline{\left|\frac{1}{10}, \ldots\right.}$

(پ) $\quad -3, 0, 2, \overline{|1, \ldots}$

(ت) $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \overline{\left|\frac{1}{8}, \ldots\right.}$

۲. به قسمتهای (۱) ـ (۳) مسئله‌ی قبل در مورد هر یک از رشته‌های ذیل، که از تصرفات متناهی در رشته‌ی $\{a_n\}$ حاصل شده است، جواب دهید:

(آ) $\quad a_3, a_7, a_{10}, \overline{|a_{12}, a_{13}, \ldots};$

(ب) $\quad c, \overline{|a_1, a_2, \ldots}$

۳. به قسمتهای (۱) ـ (۳) مسئله‌ی ۱ در موارد ذیل جواب دهید:

(آ). رشته‌ی حاصل از رشته‌ی $\{1/\sqrt{n}\}$ با تبدیل پنج جمله‌ی اول آن به 2.

(ب). رشته‌ی حاصل از رشته‌ی $\{1/n\}$ با اسقاط هزار جمله از ابتدای آن و تبدیل جمل از 1001م تا با 1010 به 5.

(پ). رشته‌ی حاصل از اسقاط جمل ۲۵م و ۴۶م از رشته‌ی اعداد طبیعی.

(ت). رشته‌ی حاصل از رشته‌ی $\{1/(n+1)\}$ با اسقاط جمله‌هائی از این رشته که بین 1/1000 و 1/2000 اند.

(ذ). رشته‌ی حاصل از رشته‌ی $\{1/n\}$ با اسقاط جملی که مخرجشان فرد و کمتر از 1000 است، و اسقاط جملی که مخرجشان زوج و بین 1000 و 2000 است.

۳.۵. حساب حدود. اینک قواعد حساب حدود را آغاز میکنیم.

۳.۵.۱. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد و $\lim a_n$ موجود باشد. اگر $\lim a_n$ مثبت (منفی) باشد عددی مثبت (منفی) مانند λ هست که، از مرتبه‌ای ببعد، $\lambda < a_n$ $(a_n < \lambda)$.
برهان. اگر $\lim a_n > 0$ آنگاه عددی مانند λ هست که $0 < \lambda < \lim a_n$. پس، بنا بر ۳.۳.۱۱، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n > \lambda$. اثبات نیمه‌ی دیگر به همین قیاس است. ▲

۳.۵.۲. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد باشند، و $\lim a_n$ و $\lim b_n$ موجود باشند، و $\lim a_n < \lim b_n$ آنگاه، بازاء هر عدد ثابت λ که بین $\lim a_n$ و $\lim b_n$ باشد، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n < \lambda < b_n$ (و بالنتیجه، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n < b_n$).
برهان. کافی است ملاحظه کنیم که، در شرایط مذکور، بنا بر ۳.۳.۱۱، از مرتبه‌ای ببعد $a_n < \lambda$ و از مرتبه‌ای ببعد $\lambda < b_n$. ▲

۳.۵.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد باشند، و $\lim a_n$ و $\lim b_n$ موجود باشند، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant b_n$، آنگاه $\lim a_n \leqslant \lim b_n$. بالاخص، اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای متقارب و c عددی ثابت باشد، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant c$ $(a_n \geqslant c)$، آنگاه $\lim a_n \leqslant c$ $(\lim a_n \geqslant c)$.
برهان. اگر مفروضات برقرار باشند ولی $\sim (\lim a_n \leqslant \lim b_n)$ آنگاه $\lim b_n < \lim a_n$. پس، بنا بر ۳.۵.۲، از مرتبه‌ای ببعد، $b_n < a_n$، و این با فرض متناقض است. حکم خاص نتیجه‌ی حکم کلی و ۳.۲.۶ است. ▲

۳.۵.۴. تنبیه. بنا بر قضیه‌ی فوق، اگر $\lim a_n$ و $\lim b_n$ موجود باشند، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n < b_n$، آنگاه $\lim a_n \leqslant \lim b_n$. از مقدمات مذکور عموماً **نمیتوان** نتیجه گرفت که $\lim a_n < \lim b_n$. مثلاً، **همواره** $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$، **اما** $\lim \frac{-1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$.

همچنین، **همواره** $\frac{n}{n+2} < \frac{n}{n+1}$، **اما** $\lim \frac{n}{n+2} = \lim \frac{n}{n+1} = 1$.

اثبات قضیه‌ی ذیل آسان و بر عهده‌ی متعلم است:

۳.۵.۵. قضیه. اگر $\lim a'_n$ و $\lim a''_n$ موجود و متساوی باشند، و از مرتبه‌ای ببعد، $a'_n \leqslant a_n \leqslant a''_n$ آنگاه $\lim a_n$ نیز موجود است، و

$$\lim a'_n = \lim a_n = \lim a''_n.$$

۳.۵.۶. تمرین

۱. با فرض موجود بودن $\lim a_n$، این احکام را باطل کنید:

(آ) اگر همواره $a_n < c$ آنگاه $\lim a_n < c$.

(ب) اگر همواره $a_n > c$ آنگاه $\lim a_n > c$.

۲. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب به عددی ناصفر باشد آنگاه عددی مثبت مانند λ هست که از مرتبه‌ای ببعد $|a_n| > \lambda$.

۳. اگر رشته‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقارب باشند، و بینهایت بار $a_n \leqslant b_n$، آنگاه $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

۴. اگر رشته‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقارب باشند، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant b_n$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim a_n < \lim b_n$ آنست که عدد ثابت مثبتی مانند d موجود باشد که، از مرتبه‌ای ببعد، $b_n - a_n > d$.

۳.۵.۷. قضیه. اگر $\lim a_n$ موجود باشد $\lim(-a_n)$ و $\lim |a_n|$ نیز موجودند، و

$$\text{I.} \qquad \lim(-a_n) = -\lim a_n.$$

$$\text{II.} \qquad \lim |a_n| = |\lim a_n|.$$

برهان. اثبات قسمت اول به وسیله‌ی ۳.۳.۱۱ آسان است، و به متعلم محول میشود. برای اثبات قسمت دوم، فرض میکنیم $\lim a_n = \alpha$ و ثابت میکنیم که $\lim |a_n| = |\alpha|$. حالت اول: $\alpha = \infty$. با توجه به ۳.۳.۵، فرض کنیم u عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\lim a_n = \infty$، از مرتبه‌ای بیعد، $u < a_n$. پس، از همان مرتبه ببعد، $u < |a_n|$. بالنتیجه، $\lim |a_n|$ موجود و مساوی ∞ است. حالت دوم: $\alpha = -\infty$. اگر u عدد مثبت دلخواهی باشد، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n < -u < 0$. پس، از همان مرتبه ببعد، $u < -a_n = |a_n|$. بالنتیجه، $\lim |a_n| = \infty = |\alpha|$. حالت سوم: $\alpha \in \mathbf{R}$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، از مرتبه‌ای ببعد، $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. پس، از همان مرتبه ببعد،

$$||a_n| - |\alpha|| \leqslant |a_n - \alpha| < \varepsilon. \blacktriangle$$

۳.۵.۷.۱. تبصره. بنا بر ۲.۳.۴، اگر $\alpha = 0$ عکس قسمت II قضیه‌ی فوق نیز برقرار است. در غیر این صورت، از وجود $\lim |a_n|$ حتی وجود حد برای $\{a_n\}$ لازم نمیآید. مثلاً، اگر $a_n = (-1)^n$ آنگاه $\lim |a_n| = \lim 1 = 1$، و حال آنکه رشته‌ی $\{(-1)^n\}$ حد ندارد.

۳.۵.۸. قضیه. اگر رشته‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقارب باشند رشته‌های $\{a_n + b_n\}$، $\{a_n - b_n\}$، و $\{a_n b_n\}$ نیز متقاربند، و

$$\text{I.} \qquad \lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

$$\text{II.} \qquad \lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

$$\text{III.} \qquad \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

(سه قسمت این قضیه، بترتیب، قضیه‌ی حد مجموع، قضیه‌ی حد تفاضل، و قضیه‌ی حد حاصلضرب در مورد رشته‌های متقارب میباشند.)

برهان. فرض کنیم $\alpha = \lim a_n$ و $\beta = \lim b_n$. برای اثبات قسمت اول، کافی است ملاحظه کنیم که. بنا بفرض، $\{a_n - \alpha\}$ و $\{b_n - \beta\}$ هیچرشته‌اند. بالنتیجه، رشته‌ی $\{(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)\}$، یا $\{(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)\}$، هیچرشته است. پس، رشته‌ی $\{a_n + b_n\}$ متقارب به $\alpha + \beta$ است. اثبات قسمت دوم به همین قیاس است، و نیز میتوان آن را به استناد قسمت اول و ۳.۵.۷ ثابت کرد.

برای اثبات قسمت سوم، کافی است ثابت کنیم که $\{a_nb_n - \alpha\beta\}$ هیچرشته است. گوئیم

$$a_nb_n - \alpha\beta = a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha). \qquad (۱)$$

بنا بفرض و ۳.۲.۱۹، رشته‌ی $\{a_n\}$ محدود است. پس، بنا بر ۲.۴.۰۲، رشته‌ی $\{a_n(b_n - \beta)\}$، و بنا بر ۲.۳.۰۳، رشته‌ی $\{\beta(a_n - \alpha)\}$ هیچرشته‌اند. بالنتیجه، بنا بر ۲.۴.۰۱ و (۱)، رشته‌ی $\{a_nb_n - \alpha\beta\}$ هیچرشته است. ▲

بنا بر قضیه‌ی فوق و ۳.۲.۶، بالاخص احکام مهم ذیل حاصل میشود:

۳.۵.۹. قضیه. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب و c عدد ثابتی باشد آنگاه، در روابط ذیل، حدود طرف چپ موجود و تساویها برقرارند:

I. $\lim (a_n + c) = \lim a_n + c.$

II. $\lim (a_n - c) = \lim a_n - c.$

III. $\lim ca_n = c \lim a_n.$

۳.۵.۹.۱. تنبیه. شرط ثابت بودن c در قضیه‌ی ۳.۵.۹ واجب‌الرعایه است. مثلاً، رشته‌ی ثابت $\{1\}$ متقارب به 1 است، اما رشته‌های $\{1 + n\}$، $\{1 - n\}$، $\{1 + (-1)^n\}$، و $\{(-1)^n \cdot 1\}$ هیچ یک متقارب نیست.

از ۳.۵.۸ به استقراء معلوم میشود که

۳.۵.۱۰. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی ثابت[۱] k، اگر

$$\{a_n\}, \{b_n\}, \ldots, \{l_n\}$$

k رشته‌ی متقارب، و

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$$

k عدد ثابت باشند آنگاه حدود طرف چپ در تساویهای ذیل موجود و تساویها برقرارند:

I. $$\lim_n (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n + \cdots + \lambda_k l_n) = \lambda_1 \lim_n a_n + \lambda_2 \lim_n b_n + \cdots + \lambda_k \lim_n l_n.$$

II. $$\lim_n (a_nb_n \ldots l_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n \ldots \lim_n l_n.$$

---

(۱) ۳.۵.۱۰.۱ ملاحظه شود.

بالاخص،

$$\text{III.} \qquad \lim_n a_n^k = (\lim_n a_n)^k.$$

(دو قسمت اول صورت کلی قضایای حد مجموع و حد حاصلضرب در مورد رشته‌های متقارب میباشند، و قسمت سوم قضیه‌ی حد قوه است.)

۳.۵.۱۰.۱. تنبیه. شرط ثابت بودن k در قضیه‌ی ۳.۵.۱۰ واجب‌الرعایه است. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

تعریف کنیم a_n حاصلجمع n جمله است که حد هر یک 0 است، اما رابطه‌ی $\lim a_n = 0$ دروغ است. اولاً، هنوز نمیدانیم که $\lim a_n$ موجود است یا نه (بعداً خواهیم دانست). ثانیاً، اگر وجود $\lim a_n$ را مفروض بگیریم، چون، به موجب ۲.۴.۱.۲، $a_n \geqslant 1/2$، بنا بر ۳.۵.۳ خواهیم داشت، $\lim a_n \geqslant 1/2$. همچنین، اگر

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

b_n حاصلضرب n جمله است که حد هر یک مساوی 1 است. اما، چنانکه خواهیم دید، رابطه‌ی $\lim b_n = 1$ دروغ است.

مجازاً میتوان گفت که در مواردی از آن قبیل که گذشت دو نیروی متضاد در کار است. مثلاً، در رشته‌ی $\{a_n\}$ سابق‌الذکر، وقتی که n زیاد شود، از یک طرف عوامل سازنده‌ی a_n کوچک میشوند، و از طرف دیگر، در عین حال، تعداد آنها افزون میشود. تشخیص اینکه کدام یک دو نیروی متضاد استیلا میابد یا چه اندازه یکی از آنها اثر دیگری را جبران میکند جز به استدلال مقدور نیست. نمونه‌هائی از این نیروهای متضاد و نتایج شگفت‌انگیز آنها را قبلاً دیده‌ایم. از آن جمله است روابط $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ و $\lim na^n = 0$ $(|a| < 1)$، که در صفحات قبل گذشت. در اولی، مجازاً میتوان گفت که بزرگ شدن عدد واقع در فرجه‌ی رادیکال بزرگ شدن عدد واقع در زیر رادیکال را جبران میکند. در دومی n «هر قدر بخواهیم» بزرگ میشود، و a^n «هر قدر بخواهیم» کوچک میگردد، ولی، سرانجام، قوه استیلا میابد.

۳.۵.۱۰.۲. تبصره. احکام مربوط به تعداد متناهی دلخواهی از رشته‌ها را میتوان به صورتی مناسبتر و متقارنتر بیان کرد. اگر k رشته مورد بحث باشند رشته‌ی iام $(1 \leqslant i \leqslant k)$ را رشته‌ی $a^{(i)}$ یا رشته‌ی $\{a_n^{(i)}\}$ یا رشته‌ی

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}, \ldots$$

مینامیم. در این صورت، رابطه‌ی قضیه‌ی ۳.۵.۱۰ چنین نوشته میشود:

$$\begin{aligned} &\lim_n (\lambda_1 a_n^{(1)} + \lambda_2 a_n^{(2)} + \cdots + \lambda_k a_n^{(k)}) \\ &\qquad = \lambda_1 \lim_n a_n^{(1)} + \lambda_2 \lim_n a_n^{(2)} + \cdots + \lambda_k \lim_n a_n^{(k)}, \end{aligned}$$

و یا

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \lim_n a_n^{(i)}). \tag{۱}$$

همچنین، رابطه‌ی II آن قضیه را میتوان چنین نوشت:

$$\lim_n \prod_{i=1}^{k} a_n^{(i)} = \prod_{i=1}^{k} (\lim_n a_n^{(i)}). \tag{۲}$$

این روابط را بدین عبارت میتوان بیان کرد که اعمال حدگیری و جمع (ضرب) تعدادی متناهی از عوامل تعویضپذیرند، یا آنکه $\lim_n$ و $\sum_1^k$ $\left(\prod_1^k\right)$ تعویضپذیر میباشند.

۳.۵.۱۱. امثله

(آ). چون $\lim (1/n) = 0$، $\lim 1 = 1$، $\lim 3 = 3$، بنا بر قضایای حد مجموع و تفاضل،

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1; \tag{۱}$$

$$\lim \left(\frac{1}{n} - 3\right) = \lim \frac{1}{n} - \lim 3 = 0 - 3 = -3. \tag{۲}$$

از (۱) بنا بر قضیه‌ی حد حاصلضرب (یا، بنا بر III ؛ ۳.۵.۹)،

$$\lim \left[\frac{5}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{5}{6} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{5}{6}. \tag{۳}$$

همچنین، از (۲) و (۳) بنا بر قضیه‌ی حد حاصلضرب،

$$\lim \left[\left(\frac{1}{n} - 3\right) \cdot \frac{5}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = -3 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{5}{2},$$

و یا

$$\lim \frac{5 - 10n - 15n^2}{6n^2} = -\frac{5}{2}. \tag{۴}$$

بالاخره، از (۴) بنا بر قضیه‌ی حد قوه،

$$\lim \left(\frac{5 - 10n - 15n^2}{6n^2}\right)^3 = (-5/2)^3 = -\frac{125}{8}.$$

(ب). فرض کنیم k عدد طبیعی ثابتی باشد، و k رشته‌ی $\{a_n\}$، . . .، $\{l_n\}$ بترتیب متقارب به اعداد α، . . .، و λ باشند. اگر A عددی ثابت باشد، و ν_1، . . .، ν_k اعدادی طبیعی، رشته‌ای که جمله‌ی عمومی آن

$$A a_n^{\nu_1} \ldots l_n^{\nu_k} \tag{*}$$

است متقارب به $A\alpha^{\nu_1} \ldots \lambda^{\nu_k}$ میباشد (نتیجه‌ی مستقیم قضایای حد حاصلضرب و قوه).

(پ). از مثال (ب) با توجه به قضیه‌ی حد مجموع معلوم میشود که، با مفروضات مثال (ب)، هر کثیرالجمله‌ی حاصل از جمع جبری عباراتی به صورت (*) متقارب است، و حدش حاصلجمع جبری حدود جمله‌ها است.

۳.۵.۱۲. مقدمه‌ی تعمیم قواعد محاسبه با حدود. قواعد اعمال با حدود را میتوان

تا اندازه‌ای در مورد رشته‌های متباعد حددار تعمیم داد. در این کار قواعد محاسبه با ∞ و $-\infty$ (مذکور در قسمت ۷.۴ فصل ۶) مورد نیاز خواهند بود، و باید آنها را حاضرالذهن داشت. قیودی که در قضایای آتیه ملاحظه میکنید برای جلوگیری از ورود عبارات بیمعنی (۷.۴.۳ : ۶) است. مثلاً، در عبارتی مانند $b_n + \infty$، باید از اینکه b_n به $-\infty$ متباعد شود جلوگیری کرد تا عبارت بیمعنی $\infty - \infty$ در کار نیاید؛ این مقصود با محدود کردن $\{b_n\}$ از پایین حاصل میشود.

۳.۵.۱۳. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد حقیقی باشند.

I. اگر $\lim a_n = \infty$، و $\{b_n\}$ از پایین محدود باشد، آنگاه $\lim (a_n + b_n)$ موجود و مساوی ∞ است.

II. اگر $\lim a_n = -\infty$، و $\{b_n\}$ از بالا محدود باشد، آنگاه $\lim (a_n + b_n)$ موجود و مساوی $-\infty$ است.

III. اگر[1] $\lim a_n = \pm\infty$، و $\{b_n\}$ از مرتبه‌ای ببعد از پایین به عدد مثبتی محدود باشد، آنگاه $\lim (a_n b_n)$ موجود و مساوی $\lim a_n$ است.

IV. اگر $\lim a_n = \pm\infty$، و $\{b_n\}$ از مرتبه‌ای ببعد از بالا به عددی منفی محدود باشد، آنگاه $\lim (a_n b_n)$ موجود و مساوی $-\lim a_n$ است.

برهان. اثبات جملگی این احکام آسان است. به عنوان مثال، I و نیمی از III را ثابت و اثبات سایرین را به متعلم محول میکنیم.

اولاً، فرض کنیم $\lim a_n = \infty$ (۱) و، بازاء عدد ثابت λ، همواره $b_n \geqslant \lambda$. اگر u عدد دلخواهی باشد، بنا بر (۱)، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n > u - \lambda$. پس، از همان مرتبه ببعد، $a_n + b_n \geqslant a_n + \lambda > u$. پس، رشته‌ی $\{a_n + b_n\}$ به ∞ متباعد است.

ثانیاً، فرض کنیم $\lim a_n = -\infty$ (۱)، و عدد ثابت مثبتی مانند λ باشد که، از مرتبه‌ای مانند N_1 ببعد، $b_n \geqslant \lambda > 0$ (۲). باید ثابت کرد که $a_n b_n$ متباعد به $-\infty$ است. فرض کنیم v عدد منفی دلخواهی باشد. بنا بر (۱)، از مرتبه‌ای مانند N_2 ببعد، $a_n < v/\lambda < 0$ (۳)، و از آنجا، $\lambda a_n < v$ (۴). بنا بر (۳) و (۲)، از مرتبه‌ی $\mathrm{Max}\,\{N_1, N_2\}$ ببعد، $a_n b_n \leqslant \lambda a_n$، و لهذا، بنا بر (۴)، $a_n b_n < v$. ▲

۳.۵.۱۴. قضیه (قواعد کلی حد مجموع، تفاضل، و حاصلضرب). اگر $\lim a_n$ و $\lim b_n$ موجود باشند حدود طرف چپ در هر یک از تساویهای ذیل موجود و تساویها برقرارند، **مشروط بر اینکه** عبارت طرف راست در آن تساوی با معنی باشد:

$$\text{I.} \qquad \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

$$\text{II.} \qquad \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

---

(۱) بخاطر داشته باشید که
$\lim a_n = \pm\infty$ یعنی $\lim a_n = -\infty \vee \lim a_n = \infty$.

$$\text{III.} \qquad \lim (a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

بالاخص، اگر $\lim a_n$ موجود و c عددی ثابت باشد آنگاه، اولاً، همواره

$$\text{IV.} \qquad \lim (a_n \pm c) = \lim a_n \pm c;$$ [1]

و ثانیاً، همواره

$$\text{V.} \qquad \lim ca_n = c \cdot \lim a_n$$

مشروط بر اینکه اگر $\lim a_n = \pm \infty$ آنگاه $c \neq 0$.

برهان. فرض کنیم

$$(\text{آ}) \quad \lim a_n = \alpha; \qquad\qquad (\text{ب}) \quad \lim b_n = \beta$$

قسمت I. چون $\infty - \infty$ و $\infty + - \infty$ بیمعنی هستند، حکم مشروط است به اینکه اگر یکی از α و β مساوی ∞ است دیگری مساوی $- \infty$ نباشد. حال اگر $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ آنگاه حکم همان است که در قسمت اول ۳.۵.۸ گذشت. باقی میماند حالاتی که یکی از α و β مساوی ∞ $(- \infty)$ و دیگری غیر از $- \infty$ (∞) است. بدون اینکه خللی به کلیت استدلال وارد شود، میتوان به اثبات حکم در حالاتی که $\alpha = \infty \ \& \ \beta \neq - \infty$ و $\alpha = - \infty \ \& \ \beta \neq \infty$ اکتفا کرد. در حالت اول، رشته‌ی $\{b_n\}$ از پایین محدود است (چرا؟). پس، بنا بر I : ۳.۵.۱۳، $\lim (a_n + b_n)$ موجود و مساوی ∞ است. اما، در این حالت، بنا بر ۷.۴.۱ : ۶، $\infty = \infty + \beta = \alpha + \beta$. اثبات در حالت دیگر به همین قیاس است.

قسمت II. چون $\infty - \infty$ و $(- \infty) - (- \infty)$ بیمعنی هستند، حکم مشروط به اینست که α و β هر دو ∞ یا هر دو $- \infty$ نباشند. در این صورت، چنین نیست که، در عین حال، یکی از α و $- \beta$ مساوی ∞ و دیگری $- \infty$ است. اما، بنا بر ۳.۵.۷، $\lim (- b_n) = - \beta$ پس، به موجب قسمت اول،

$$\lim [a_n + (- b_n)] = \lim a_n + \lim (- b_n) = \alpha - \beta.$$

قسمت III. چون $0 \cdot \infty$ و $0 \cdot (- \infty)$ بیمعنی هستند، III مشروط است به اینکه، در عین حال، یکی از α و β مساوی 0 و دیگری مساوی $\pm \infty$ نباشد. در حالتی که $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ اثبات حکم در ۳.۵.۸ گذشت. اگر $\alpha = \pm \infty$ آنگاه، بنا بفرض، $\beta \neq 0$. حال اگر $\beta > 0$ $(\beta < 0)$ آنگاه رشته‌ی $\{b_n\}$ از مرتبه‌ای بیعد از پایین (از بالا) به عددی مثبت (منفی) محدود است، و حکم بنا بر قسمتهای III و IV از ۳.۵.۱۳ برقرار میباشد.

بالاخره، حالات خاص نتایج بدیهی حالات کلی است. ▲

۳.۵.۱۴.۱. امثله

(آ). چون $\lim (- n) = - \infty$، $\lim [(- n) \cdot (- n)]$ (یعنی $\lim n^2$) موجود است، و

$$\lim n^2 = \lim (- n) \cdot \lim (- n) = (- \infty) \cdot (- \infty) = \infty.$$

---

(۱) تساوی مورد بحث صورت اختصاری دو تساوی ذیل است:

$$\lim (a_n + c) = \lim a_n + c, \qquad \lim (a_n - c) = \lim a_n - c.$$

(ز). چون $\lim\,(1/n) = 0$ و $\lim - 2 = - 2$، بنا بر مثال قبل، $\lim\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)$ و $\lim\,(-2n^2)$ موجود است، و

$$\lim\left(n^2 + \frac{1}{n}\right) = \lim n^2 + \lim \frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty,$$
$$\lim\,(-2n^2) = \lim\,(-2) \cdot \lim n^2 = -2 \cdot \infty = -\infty.$$

(ح). فرض کنیم $a_n = n^2 - n = n^2 + (-n)$. در اینجا دستور I قضیه‌ی ۳.۵.۱۴ قابل اِعمال نیست، زیرا $\lim n^2 + \lim\,(-n)$ دارای صورت بی‌معنی $\infty + (-\infty)$ میباشد. اما میتوان ملاحظه کرد که $a_n = n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. پس

$$\lim a_n = \lim n^2 \cdot \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

۳.۵.۱۵. قضیه (حد خارج قسمت). فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته‌ی متقارب باشند بطوری که، اولاً، همواره[۱] $a_n \neq 0$، و ثانیاً، $\lim a_n \neq 0$. در این صورت رشته‌ی $\{b_n/a_n\}$ متقارب است، و

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n}.$$

بالاخص، اگر همواره $a_n \neq 0$، و نیز $\lim a_n \neq 0$، آنگاه رشته‌ی $\{1/a_n\}$ متقارب است، و

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$$

برهان. چون $b_n/a_n = b_n \cdot (1/a_n)$، بنا بر ۳.۵.۸، کافی است حالت خاص قضیه را ثابت کنیم. پس، فرض میکنیم همواره $a_n \neq 0$، و $\lim a_n$ عددی حقیقی و ناصفر[۲] مانند α باشد، و ثابت میکنیم که $\{a_n^{-1} - \alpha^{-1}\}$ هیچرشته است. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون اعداد $|\alpha|/2$ و $\varepsilon\alpha^2/2$ مثبت‌اند، از مرتبه‌ای ببعد، در عین حال،

$$|\alpha - a_n| < |\alpha|/2, \qquad |\alpha - a_n| < \varepsilon\alpha^2/2.$$

بنا بر اولی:

$$|a_n| = |\alpha - (\alpha - a_n)| \geqslant |\alpha| - |\alpha - a_n| > |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} = \frac{|\alpha|}{2}.$$

بالنتیجه،

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|\alpha - a_n|}{|\alpha| \cdot |a_n|} < \frac{\varepsilon\alpha^2/2}{|\alpha| \cdot (|\alpha|/2)} = \varepsilon. \blacktriangle$$

---

(۱) ۳.۵.۱۵.۱ ملاحظه شود.

(۲) «ناصفر» یعنی غیر از 0.

۳.۵.۱۵.۱. تبصره. در قضیه‌ی ۳.۵.۱۵، اگر a_n بازاء مقداری از n صفر شود آنگاه رشته‌ی $\{b_n/a_n\}$ مشخص نخواهد بود. شرط $\lim a_n \neq 0$ این امر را تضمین میکند که تعداد مقادیری از n که بازاء آنها $a_n = 0$ متناهی است. از این جهت، و با توجه به اینکه تعدادی متناهی از جمله‌های یک رشته در تقارب آن بلا اثر است، اغلب قید «همواره $a_n \neq 0$» را در قضیه‌ی حد خارج قسمت نمیآورند.
نظیر همین نکته را باید در قضیه‌ی حد ریشه (۳.۵.۱۸) در باب شرط «همواره $a_n \geqslant 0$» ملحوظ داشت. در اینجا میتوان قضیه را مشروط به «از مرتبه‌ای بعد $a_n \geqslant 0$» کرد.
خلاصه، تسامحی که در هر دو حالت روا میدارند در حکم اسقاط تعدادی متناهی از جمله‌های رشته‌ی مورد بحث است، که در «قسمت نامتناهی» رشته تأثیری ندارد.
در باب حد خارج قسمت، دو قضیه‌ی آتیه اهمیت تمام دارند.

۳.۵.۱۶. قضیه. فرض کنیم $\lim a_n = 0$.

I. اگر، از مرتبه‌ای بعد، $a_n > 0$ آنگاه $\lim \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

II. اگر، از مرتبه‌ای بعد، $a_n < 0$ آنگاه $\lim \dfrac{1}{a_n} = -\infty$.

برهان. اثبات بسیار سهل است. مثلاً، برای اثبات I، فرض کنیم u عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\{a_n\}$ هیچرشته است، از مرتبه‌ای بعد، $0 < a_n < 1/u$، و بالنتیجه، $u < 1/a_n$. ▲

۳.۵.۱۷. قضیه. اگر $\lim a_n = \infty$ یا $\lim a_n = -\infty$ آنگاه

$$\lim \frac{1}{a_n} = 0.$$

(چرا؟)

۳.۵.۱۸. قضیه (حد ریشه). اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب و جمله‌هایش نامنفی باشند[1]، بازاء هر عدد طبیعی ثابت k، $\lim_n a_n^{1/k}$ موجود است، و

$$\lim_n a_n^{1/k} = (\lim_n a_n)^{1/k}.$$

برهان. قبلاً ملاحظه میکنیم که اگر همواره $a_n \geqslant 0$، و رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب باشد، آنگاه $\lim a_n \geqslant 0$، و لهذا، $(\lim a_n)^{1/k}$ معنی دارد. حال فرض میکنیم

$$a_n^{1/k} = b_n, \qquad \lim a_n = \alpha \in \mathbf{R}, \qquad (\lim a_n)^{1/k} = \beta.$$

باید ثابت کرد که $\lim b_n$ موجود و مساوی β است.

حالت اول: $\alpha = 0$. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\{a_n\}$ هیچرشته است، از مرتبه‌ای بعد، $0 \leqslant a_n < \varepsilon^k$، و لهذا، $0 \leqslant b_n < \varepsilon$. پس، $\{b_n\}$ هیچرشته است،

---

(۱) ۳.۵.۱۵.۱ ملاحظه شود.

و بالنتیجه، $0 = \lim b_n$. اما، در این حالت، $\beta = 0^{1/k} = 0$. پس، $\lim b_n = \beta$.

حالت دوم: $0 < \alpha$. پس، $0 < \beta$، فرض کنیم ε عدد مثبتی کوچکتر از β باشد. در این صورت، $0 < \beta - \varepsilon < \beta < \beta + \varepsilon$، و لهذا،

$$0 < \beta - \varepsilon < \alpha^{1/k} < \beta + \varepsilon,$$

و از آنجا،

$$(\beta - \varepsilon)^k < \alpha < (\beta + \varepsilon)^k.$$

پس، از مرتبه‌ای ببعد،

$$(\beta - \varepsilon)^k < a_n < (\beta + \varepsilon)^k,$$

و لهذا، از همان مرتبه ببعد،

$$\beta - \varepsilon < b_n < \beta + \varepsilon.$$

پس، $\lim b_n = \beta$. ▲

۳.۵.۱۹. استنتاج به حدگیری (یا **به حد گرفتن**). استنتاج به حدگیری یعنی استنتاج رابطه‌ای بین حدود دو یا چند رشته از رابطه‌ای بین آن رشته‌ها به استناد قواعد حساب حدود.

در استنتاج به حدگیری، باید شرایط قواعدی را که بدانها استناد میشود ــ از قبیل موجود بودن حدود و با معنی بودن حاصلهای اعمال مورد بحث ــ دقیقاً رعایت کرد.

مثلاً،

I. اگر در مورد رشته‌ی $\{a_n\}$ بدانیم که اولاً، از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant c$ (۱)، و ثانیاً، $\lim a_n$ موجود است، آنگاه از (۱) به حدگیری نتیجه میشود، $\lim a_n \leqslant c$.

اما

II. از صِرفِ علم به اینکه از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant c$ **نمیتوان** نتیجه گرفت که $\lim a_n \leqslant c$، زیرا، ممکن است $\lim a_n$ موجود نباشد. مثلاً، $(-1)^n \leqslant 1$، ولی رابطه‌ی $\lim (-1)^n \leqslant 1$ بیمعنی است، زیرا $\lim (-1)^n$ بیمعنی است.

III. اگر در مورد دو رشته‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ بدانیم که از مرتبه‌ای ببعد $a_n = b_n$ (۱) **نمیتوان** نتیجه گرفت که $\lim a_n = \lim b_n$، مگر آنکه قبلاً وجود $\lim a_n$ (یا $\lim b_n$) ثابت شده باشد. در این صورت از (۱) به حدگیری نتیجه میشود، $\lim a_n = \lim b_n$.

IV. از رابطه‌ی $b_n = 1/a_n$ (۱) **نمیتوان** نتیجه گرفت که $\lim b_n = 1/\lim a_n$ (۲). اما، اگر ثابت شده باشد که $\lim a_n$ موجود و ناصفر است آنگاه از (۱) به حدگیری (به استناد ۳.۵.۱۵) میتوان (۲) را نتیجه گرفت.

۳.۵.۲۰. امثله و فواید. به وسیله‌ی قضایای سابق‌الذکر میتوان در رفتار بسیاری از رشته‌ها تحقیق و حد آنها را در صورت وجود تعیین کرد. نظر به کمال اهمیت این موضوع، ذیلاً امثله‌ی متعدد میآوریم.

(آ). رفتار n^r که در آن r عدد منطق ثابتی است.

اگر $r = 0$، رشته‌ی $\{n^r\}$ رشته‌ی ثابت $\{1\}$ و حدش 1 است پس، فرض میکنیم $r \neq 0$، و بر حسب $\operatorname{sgn} r$ دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $r > 0$. در این حالت $\lim_n n^r = \infty$. زیرا، فرض کنیم u عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر قضیه‌ی وجود ریشه، عددی مثبت مانند u_1 هست که $u_1^r = u$. بعلاوه، عددی طبیعی مانند N هست که $N > u_1$. پس، بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $n > u_1$، و لهذا، $n^r > u_1^r = u$ پس، $\lim n^r = \infty$.

حالت دوم: $r < 0$. در این حالت، $-r > 0$، و لهذا، بنا بر حالت قبل، $n^{-r} \to \infty$. پس، بنا بر ۳.۵.۱۷، $\lim n^r = \lim (1/n^{-r}) = 0$.

(ب). رفتار کثیرالجمله‌های صحیح n.

فرض کنیم k عدد طبیعی ثابتی باشد، و p_0، p_1، ...، و p_k اعداد ثابتی باشند، و $p_0 \neq 0$، و

$$a_n = p_0 n^k + p_1 n^{k-1} + \cdots + p_{k-1} n + p_k.$$

در این صورت، رشته‌ی $\{a_n\}$ حد دارد، و حدش همان حد جمله‌ی پیشرو a_n است، زیرا،

$$a_n = p_0 n^k \Big(1 + \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{p_{k-1}}{p_0} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \frac{p_k}{p_0} \cdot \frac{1}{n^k}\Big).$$

بنا بر مثال (آ) و ۳.۵.۱۷، حد هر یک از جمل داخل پرانتز از جمله‌ی دوم ببعد 0 است پس، چون عده‌ی جمل داخل پرانتز عدد ثابت $k + 1$ است، بنا بر I ؛ ۳.۵.۱۰، عبارت داخل پرانتز به 1 میل میکند. بعلاوه، $\lim p_0 = p_0$، و بنا بر مثال (آ)، $\lim_n n^k = \infty$. پس، بنا بر III ؛ ۳.۵.۱۴، $\lim a_n$ موجود است، و

$$\lim a_n = \lim p_0 n^k = \begin{cases} \infty & (p_0 > 0), \\ -\infty & (p_0 < 0). \end{cases}$$

مثلاً،

$$\lim (3n^2 - 10^{18} n - 10^{500}) = \lim 3n^2 = \infty.$$

$$\lim (10^{2000} + 1000^{500} - 10^{-2000} n^2) = \lim (-10^{-2000} n^2) = -\infty.$$

(پ). در تعیین رفتار کسری به صورت

$$a_n = \frac{p_0 n^k + p_1 n^{k-1} + \cdots + p_{k-1} n + p_k}{q_0 n^j + q_1 n^{j-1} + \cdots + q_{j-1} n + q_j} \qquad \begin{matrix} (p_0 q_0 \neq 0) \\ (k, j \in \mathbf{N}) \end{matrix}$$

نمیتوان مستقیماً قضیه‌ی حد خارج قسمت را بکار بست (زیرا، آن قضیه در باب کسوری ثابت شد که صورت و مخرجشان متقارب است)، اما، به قیاس مثال قبل، میتوان نوشت:

$$a_n = \frac{p_0}{q_0} \cdot n^{k-j} \cdot \frac{1 + \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{p_k}{p_0} \cdot \frac{1}{n^k}}{1 + \frac{q_1}{q_0} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{q_j}{q_0} \cdot \frac{1}{n^j}}.$$

در کسر اخیر، صورت و مخرج متقارب به 1 میباشند، و لهذا، حد این کسر موجود و مساوی 1 است. بعلاوه، $\lim (p_0/q_0) = p_0/q_0$، و نیز، بنا بر مثال (آ)، $\lim_n n^{k-j}$ موجود است،

پس، بنا بر قضیه‌ی حد حاصلضرب، حد a_n موجود و مساوی حد خارج قسمت جمله‌ی پیشرو صورت بر جمله‌ی پیشرو مخرج میباشد.
مثلاً،

$$\lim \frac{2n^2-5n+1}{1-3n^3} = \lim \frac{2n^2}{-3n^3} = \lim\left(\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0;$$
$$\lim \frac{2n^3-5n^2-1}{n-3n^3} = \lim \frac{2n^3}{-3n^3} = \lim \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3};$$
$$\lim \frac{2n^3-6n^5-2n}{n^2-3n^3+1} = \lim \frac{-6n^5}{-3n^3} = \lim 2n^2 = 2\cdot\infty = \infty.$$

(ت). تدبیر مذکور در دو مثال سابق را در موارد گوناگون میتوان برای آماده ساختن جمله‌ی عمومی رشته‌ها جهت اعمال قضیه‌ی حد خارج قسمت بکار برد. بعنوان مثال ثابت میکنیم که

$$\lim_n \sqrt{\frac{2n^2-n-30}{4n^2+\sqrt{n}}}$$

موجود و عددی حقیقی است، و مقدار آن را تعیین میکنیم. اگر کسر زیر رادیکال را a_n بنامیم، به آسانی دیده میشود که a_n از مرتبه‌ای ببعد مثبت است. پس، بنا بر قضیه‌ی حد ریشه، برای اثبات وجود حد مذکور، کافی است ثابت کنیم که $\lim a_n$ موجود و عددی حقیقی و نامنفی است، و این معلوم است، زیرا،

$$a_n = \frac{2n^2\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{15}{n^2}\right)}{4n^2\left(1+\frac{1}{4n\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2n}-\frac{15}{n^2}}{1+\frac{1}{4n\sqrt{n}}}.$$

در کسر اخیر، صورت و مخرج متقارب به 1 اند. پس، $\lim a_n$ موجود است، و $\lim a_n = 1/2$.
بالنتیجه،

$$\lim \sqrt{\frac{2n^2-n-30}{4n^2+\sqrt{n}}} = \sqrt{1/2}.$$

(ث). مطلوبست $\lim \sqrt{n}(\sqrt{1+n}-\sqrt{n})$.

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{1+n}-\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

در کسر اخیر، حد مخرج مساوی 2 است. پس $\lim a_n$ موجود و مساوی 1/2 میباشد.

(ج). تحقیق در رفتار رشته‌ی $\{\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}\}$.

$$a_n = \sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

اما، بنا بر ۴.۷.۶ : ۶، $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{3n}$. پس،

$$0 < a_n < n^{-2/3}.$$

بنا بر مثال (آ)، رشته‌ی $\{n^{-2/3}\}$ هیچ‌رشته است. پس، بنا بر ۳.۵.۵، $\lim a_n$ موجود و مساوی 0 است. خلاصه،

$$\lim (\sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n}) = 0.$$

۳.۵.۲۱. تبصره. در رشته‌هائی که به استقراء تعریف میشوند روشی هست که، در بعضی موارد، بدان وسیله میتوان تقارب رشته را ثابت و حد آن را تعیین کرد. نظر به فواید این روش، جلب توجه بدان لازم است.

برای توضیح، فرض کنیم مقصود تحقیق در رفتار رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

$$a_1 = 2, \qquad a_n = \frac{2}{1+a_{n-1}} \qquad (n \geqslant 2)$$

باشد. برای اینکه تحقیق را در مسیری مستقیم بیندازیم، ببینیم اگر رشته‌ی مذکور متقارب به عددی مانند α باشد چه اطلاعاتی در باب α میتوان بدست آورد. پس، فرض کنیم

$$\lim a_n = \alpha \in \mathbf{R}. \qquad (۱)$$

اولاً، به استقراء معلوم میشود که همواره $a_n > 0$، و بالنتیجه، $\alpha \geqslant 0$ (۲).

ثانیاً، از (۱) با توجه به ۳.۴.۲.۱ نتیجه میشود، $\lim a_{n-1} = \alpha$ (۳). بنا بر (۲) و (۳)، از رابطه‌ی تراجعی تعریف رشته به حدگیری نتیجه میشود، $\alpha = 2/(1+\alpha)$. از این معادله، مقادیر $2-$ و 1 برای α بدست میآید، که اولی به موجب (۲) غیر قابل قبول است. پس، $\alpha = 1$.

اینک باید دید که رشته‌ی $\{a_n\}$ واقعاً به 1 متقارب هست یا نه. برای تحقیق در این امر، $|a_n - 1|$ را مورد بررسی قرار میدهیم. بنا بر رابطه‌ی تراجعی تعریف رشته،

$$|a_n - 1| = \left|\frac{2}{1+a_{n-1}} - 1\right| = \frac{|a_{n-1} - 1|}{1+a_{n-1}} \qquad (n \geqslant 2).$$

به آسانی معلوم میشود که همواره $a_n \neq 1$. پس

$$\left|\frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1}\right| = \frac{1}{1+a_{n-1}} \qquad (n \geqslant 2). \qquad (۴)$$

بعلاوه، اگر $\lim a_n = 1$ باید از مرتبه‌ای ببعد $a_n > 1/2$. به آسانی به استقراء معلوم میشود که از آغاز رشته چنین است. پس، بنا بر (۴)،

$$\left|\frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1}\right| < \frac{2}{3} \qquad (n \geqslant 2).$$

بالنتیجه، بازاء $n \geqslant 2$،

$$\prod_{i=2}^{n} \left|\frac{a_i - 1}{a_{i-1} - 1}\right| < \prod_{i=2}^{n} \frac{2}{3}$$

و از آنجا،

$$\left|\frac{a_n - 1}{a_1 - 1}\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

پس

$$0 < |a_n - 1| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad (n \geqslant 2).$$

بنا بـر ۳.۳.۱۰، $\lim (2/3)^{n-1} = 0$. بالنتیجه، بنا بر ۳.۵.۵، $\lim |a_n - 1| = 0$، و از آنجا، $\lim (a_n - 1) = 0$. پس، بنا بر ۳.۲.۵، $\lim a_n = 1$.

۳.۵.۲۲. تمرین

۱. حدود مذکور در مسائل ۱ و ۳ تمرین ۳.۲.۱۸ را بـر طبق قـواعـد حساب حدود تعیین کنید.

۲. مطلوبست تعیین حد عبارات ذیل:

(آ) $\left(5 + \dfrac{2}{n}\right)^2.$

(ب) $n^{-3}(n^3 + 10^{50}n^2 + 1000n + 1).$

(پ) $\dfrac{n}{\sqrt[5]{n^5 + 5n^4}}.$

(ت) $\dfrac{\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{10} - \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{10}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^2}}.$

(ث) $n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1\right).$

(ج) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n + \dfrac{1}{2}}.$

(چ) $n\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{a}{n}}\right) \qquad (n > a).$

(ح) $n\left(1 - \sqrt[5]{1 - \dfrac{1}{n}}\right).$

(خ) $\dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^5}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}.$

۳. ثابت کنید که

(آ) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}.$

(ب) $\lim \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(n+r)^2} = 0.$

(پ) $\lim \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$

(ت) $\lim \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -1.$

(ث) $\lim_n \sum_{r=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^r = \frac{2}{3}.$

(ج) $\lim \prod_{r=2}^{n} \left(1-\frac{1}{r}\right) = 0.$

۴. حدود ذیل را تعیین کنید،

(آ) $\lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right).$

(ب) $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$

(پ) $\lim \prod_{r=1}^{n} \left(1+\frac{1}{r}\right).$

(ت) $\lim \prod_{r=2}^{n} \left(1-\frac{1}{r^2}\right).$

(ث) $\lim \prod_{r=2}^{n} \frac{r^3-1}{r^3+1}.$

۵. در رفتار رشته‌هائی که ذیلاً با جمله‌ی عمومی خود معرفی شده‌اند تحقیق کنید:

(آ) $\frac{n+(-1)^n}{n}$ (ب) $(-1)^n(n-2).$

(پ) $\frac{(-1)^n \cdot 2n+1}{n}.$ (ت) $n+(-1)^n.$

(ث) $n[1+(-1)^n].$ (ج) $2^n/(1+2^n).$

(چ) $n^2+(-1)^n \cdot n.$ (ح) $n+(-1)^n \cdot n^2.$

(خ) $n^2 \cdot [1+(-1)^n].$ (د) $n^2[1-(-1)^n].$

۶. اگر حاصلجمع و تفاضل دو رشته متقارب باشند هر یک از آنها متقارب است.

۷. این احکام را باطل کنید:

(آ). حاصلجمع هر دو رشته‌ی متباعد متباعد است.

(ب). تفاضل هر دو رشته‌ی متباعد متباعد است.

(پ). حاصلضرب هر دو رشته‌ی متباعد متباعد است.

(ت). خارج قسمت هر دو رشته‌ی متباعد متباعد است.

۸. a رشته‌ای است از اعداد حقیقی و $\{0, 1\} = a$حع. بعلاوه، بینهایت بار $a_n = 0$ و بینهایت بار $a_n = 1$. ثابت کنید که رشته‌ی a متقارب نیست.

۸. بنا بـر آنکه $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ و $b_n = \frac{n+1}{2n+1}$، عدد طبیعی N را چنان تعیین کنید که همواره اگر $n > N$ آنگاه

$$\left|a_n + b_n - \frac{3}{2}\right| < 10^{-6}.$$

۹. احکام ذیل را ثابت کنید و برای هر یک از حالات مختلف هر یک مثال بیاورید:

(آ). اگر a_n متقارب یا دارای نوسان محدود باشد، و از مرتبه‌ای ببعد $|a_n| \geqslant |b_n|$، آنگاه b_n متقارب یا دارای نوسان محدود است.

(ب). اگر a_n به ∞ یا به $-\infty$ میل کند یا دارای نوسان نامحدود باشد، و از مرتبه‌ای ببعد $|a_n| \leqslant |b_n|$، آنگاه b_n به ∞ یا به $-\infty$ میل میکند یا دارای نوسان نامحدود است.

(پ). اگر a_n متقارب باشد، و b_n به ∞ یا به $-\infty$ میل کند یا نوسانی باشد، رفتار $a_n + b_n$ مانند رفتار b_n است.

(ت). اگر $a_n \to \infty$، و b_n متباعد به ∞ یا دارای نوسان محدود باشد آنگاه $a_n + b_n \to \infty$.

(ث). حکم (ت) با تبدیل ∞ در سراسر آن به $-\infty$.

(ج). اگر $a_n \to \infty$ و $b_n \to -\infty$ آنگاه $a_n + b_n$ ممکن است متقارب باشد یا به ∞ یا به $-\infty$ میل کند یا نوسانی محدود یا نامحدود باشد.

(چ). اگر a_n و b_n هر دو دارای نوسان محدود باشند $a_n + b_n$ متقارب یا دارای نوسان محدود است.

(ح). اگر a_n نوسانی محدود و b_n نوسانی نامحدود باشد $a_n + b_n$ نوسانی نامحدود است.

(خ). اگر a_n و b_n نوسانی نامحدود باشند $a_n + b_n$ ممکن است متقارب باشد یا به ∞ یا به $-\infty$ میل کند یا نوسانی محدود یا نامحدود باشد.

(د). اگر $a_n \to \infty$ و b_n نوسانی محدود باشد $a_n b_n$ به ∞ یا به $-\infty$ میل میکند یا نوسانی نامحدود است.

(ذ). اگر a_n و b_n نوسانی محدود باشند $a_n b_n$ متقارب یا نوسانی محدود است.

۱۰. a و k دو عدد مفروضند، و $k > 1$، و

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a, \quad a_n - \left(k + \frac{1}{k}\right)a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \quad (n \geqslant 2).$$

ثابت کنید که یگانه مقدار a که بازاء آن $\lim a_n$ عدد حقیقی است $1/k$ میباشد.

۱۱. k عدد منطق ثابتی است، و $a_n = (1 + n^{-k})^n$. ثابت کنید که

$$a_n \begin{cases} \geqslant 1 + n^{1-k} & (k < 1), \\ \leqslant 1 + 2n^{1-k} & (k > 1). \end{cases}$$

ثابت کنید که در هر دو حالت مذکور $\lim a_n$ موجود است، و مقدار آن را تعیین کنید.

۱۲. $\{a_n\}$ رشته‌ای است از اعداد حقیقی و $\lim a_n = \alpha$. ثابت کنید که رشته‌های $\{a_n^+\}$ و

$\{a_n^-\}$ حد دارند، و

$$\lim a_n^+ = \alpha^+, \qquad \lim a_n^- = \alpha^-.$$

(۱ : ۱۰ : ۵ و ۳ : ۷.۴.۹ : ۶ ملاحظه شود.)

۰۱۳ رشته‌ی $\{a_n\}_0$ با ضابطه‌ی

$$a_0 = 0, \qquad a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}} \qquad (n \geqslant 1)$$

تعریف شده است. ثابت کنید که این رشته متقارب است، و حد آن را تعیین کنید.

۰۱۴ a و b دو عدد مثبت مفروضند، و

$$x_0 = b, \qquad x_n = \frac{1}{2}\left[x_{n-1} + \frac{a^2}{x_{n-1}}\right] \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت کنید که رشته‌ی $\{x_n\}_0$ متقارب است، و حد آن را تعیین کنید.

۰۱۵ بنا بر آنکه $a > 0$ مطلوبست حد هر یک از عبارات ذیل:

(آ) $\dfrac{a^{2n}}{1+a^{2n+1}}$. (ب) $\dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$.

۰۱۶ α عددی است مثبت و a_n جزء صحیح $\alpha(n-2)$ است. ثابت کنید که $\lim a_n = \infty$.

۰۱۷ اگر $b_n \to 0$ شرط لازم برای آنکه رشته $\{a_n/b_n\}$ متقارب باشد آنست که $a_n \to 0$، ولی این شرط کافی نیست.

۰۱۸ α عددی است ثابت و رشته‌ی $\{(a_n - \alpha)/(a_n + \alpha)\}$ هیچرشته است. ثابت کنید که $\lim a_n = \alpha$.

۰۱۹ بنا بر آنکه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته‌ی حددار باشند، ثابت کنید رشته‌های $\{\sup\{a_n, b_n\}\}$ و $\{\inf\{a_n, b_n\}\}$ نیز حد دارند، و

$$\lim \sup\{a_n, b_n\} = \sup\{\lim a_n, \lim b_n\},$$
$$\lim \inf\{a_n, b_n\} = \inf\{\lim a_n, \lim b_n\}.$$

۰۲۰ اگر $P(x)$ کثیرالجمله‌ی صحیحی از n باشد آنگاه

$$\lim \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1.$$

۰۲۱ ثابت کنید که همواره اگر $r \in \mathbf{I}_0$ آنگاه

(آ) $$\lim \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r = \frac{x^r}{r!}$$

(ب) $$\lim \sum_{r=0}^{p} \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r = \sum_{r=0}^{p} \frac{x^r}{r!}.$$

۴ § رفتار رشته‌های یکنواخت و نتایج آن

۰۱.۴ مقدمه. در صفحات گذشته قواعدی ابتدائی برای تحقیق در رفتار بعضی رشته‌های

ساده و تعیین حد رشته‌های متقارب آموختیم. اما، گذشته از این حالات ابتدائی، تحقیق در رفتار یک رشته مشکلات جدّی و حتی لاینحل دارد. بطور کلی، مسائل اساسی مربوط به رفتار رشته‌ها یکی از دو نوع ذیل است:

مسئله‌ی اول: تحقیق در رفتار یک رشته، یعنی، تعیین اینکه آن رشته متقارب است یا متباعد، و در صورت ثانی، حد دارد یا نه.

مسئله‌ی دوم: تعیین حد یک رشته‌ی متقارب.

در مورد مسئله‌ی اول دو قاعده‌ی کلی در دست است: یکی قاعده‌ی مربوط به رفتار رشته‌های یکنواخت، که موضوع قضیه‌ی ۴.۴ است، و دیگری ضابطه‌ی عمومی کوشی* که موضوع قسمت ۴.۷ میباشد. مسئله‌ی دوم به مراتب از مسئله‌ی اول دشوارتر است. کنوپ*، ریاضیدان معاصر آلمانی، میگوید که مسئله‌ی دوم یا لاینحل است یا بیمایه. بیمایه شمردن این مسئله از این جهت است که، بنا بر ۳.۲.۳، یک رشته‌ی متقاربْ حد خود را کاملاً مشخص میکند. پس، با تعریف کردن یک عدد به عنوان حد فلان رشته‌ی متقارب، مسئله‌ای نمیماند که در صدد حلش برآییم. اما، تلقی مسئله به این صورت، خاصه در مورد اعدادی که در ریاضیات کاربسته[1] همواره در کار میآیند، مقنع نیست. یکی از این اعداد عدد e است، که به زودی با آن آشنا خواهیم شد، و آن را به عنوان حد رشته‌ی $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ تعریف خواهیم کرد. درست است که این تعریف عدد e را مشخص میکند، اما، در محاسباتی که پای e در کار میآید دردی را دوا نمیکند، بلکه، برای این مقاصد حاجت به «مقدار عددی e»، و لو به تقریب، داریم. برای این منظور نیز تدابیری هست که در آتیه با کمال اختصار به آنها اشاره خواهیم کرد.

اینک موضوع رفتار رشته‌های یکنواخت را با بحث مختصری از سوپرموم و اینفیموم رشته‌های اعداد آغاز میکنیم.

۴.۲. سوپرموم و اینفیموم رشته‌ها.

تعریفات همانست که در ۱.۲.۱ : ۶ گفته شد:

۴.۲.۱. تعریف. سوپرموم و اینفیموم رشته‌ای مانند a از اعداد، بترتیب، سوپرموم و اینفیموم مجموعه‌ی جمله‌های آنست. سوپرموم رشته‌ی a را به هر یک از نامهای

$$\sup_n a_n, \qquad \sup a_n$$

و اینفیموم آن را به هر یک از نامهای

$$\inf_n a_n, \qquad \inf a_n$$

میخوانند.

---

(۱) ریاضیات از لحاظ موارد استعمال آن در علوم و فنون دیگر. رشته‌هائی مانند فیزیک ریاضی، زمینسنجی، مکانیک استدلالی، و نجوم ریاضی شعبه‌هائی از ریاضیات کاربسته میباشند.

در مورد رشته‌ای مانند $\{a_n\}_{n=k}$، سوپرموم رشته‌ی به نامهای

$$\sup\{a_n;\ k\leqslant n\} \qquad \sup_{k\leqslant n} a_n,$$

خوانده میشود، و اینفیموم آن به نامهای

$$\inf\{a_n;\ k\leqslant n\}. \qquad \inf_{k\leqslant n} a_n,$$

۴.۲.۲. تبصره. خواص سوپرموم و اینفیموم رشته‌ها ناشی از خواص کلی این مفاهیم است، که در فصل ۶ دانسته شد، و با توجه به ۱.۱.۰۲ میتوان آنها را بر حسب اصطلاحات مربوط به رشته‌ها بیان کرد. مثلاً، اگر $a=\{a_n\}$ رشته‌ای و A مجموعه‌ی جمل آن باشد واضح است که $A\neq\varnothing$ (چرا؟). پس، بنا بر ۷.۳.۰۱ : ۶، $\sup A$ موجود است؛ و بعلاوه، اگر A از بالا محدود باشد (یعنی، اگر رشته‌ی a از بالا محدود باشد) آنگاه $\sup A\in\mathbf{R}$، و الا، $\sup A=\infty$. و هکذا در مورد اینفیموم. خلاصه،

۴.۲.۳. قضیه (وجود سوپرموم و اینفیموم). هر رشته از اعداد حقیقی یک سوپرموم و اینفیموم دارد. بعلاوه،

I. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ از بالا محدود باشد $\sup a_n\in\mathbf{R}$، و اگر از بالا نامحدود باشد $\sup a_n=\infty$.

II. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ از پایین محدود باشد $\inf a_n\in\mathbf{R}$، و الا $\inf a_n=-\infty$.

همچنین، خواص مشخصه‌ی سوپرموم و اینفیموم را در مورد رشته‌ها میتوان به صور ذیل بیان کرد:

۴.۲.۴. قضیه (خواص مشخصه‌ی سوپرموم). اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و α عددی حقیقی یا ∞ باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه α سوپرموم $\{a_n\}$ باشد آنست که، در عین حال،

I. بازاء هر عدد طبیعی n، $a_n\leqslant\alpha$؛

II. بازاء هر عدد کوچکتر از α مانند u، عددی طبیعی مانند n باشد که $u<a_n$.

در حالتی که $\alpha\in\mathbf{R}$ میتوان II را با ε بیان کرد (۱.۳.۰۴ : ۶). اگر $\alpha=\infty$ آنگاه I به خودی خود برقرار، و لهذا، قابل اسقاط است، و همچنین است قید «کوچکتر از α» در II.

۴.۲.۵. قضیه (خواص مشخصه‌ی اینفیموم). اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و α عددی حقیقی یا $-\infty$ باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه α اینفیموم $\{a_n\}$ باشد آنست که، در عین حال،

I. بازاء هر عدد طبیعی n، $\alpha\leqslant a_n$؛

II. بازاء هر عدد بزرگتر از α مانند v، عددی طبیعی مانند n باشد که $a_n<v$.

در حالتی که $\alpha\in\mathbf{R}$ میتوان II را با ε بیان کرد (۱.۳.۰۵ : ۶). اگر $\alpha=-\infty$ آنگاه I به خودی خود برقرار، و لهذا، قابل اسقاط است، و همچنین است قید «بزرگتر از α» در II.

۴.۲.۶. امثله

(آ). در رشته‌ی $\{(-1)^{n+1}\}$، مجموعه‌ی جمله‌ها $A = \{-1, 1\}$ است، و

$$\inf(-1)^{n+1} = \inf A = -1, \qquad \sup(-1)^{n+1} = \sup A = 1.$$

(ب). بطور کلی، اگر رشته‌ای عضو اقل (عضو اکثر) داشته باشد، همین عضو اینفیموم (سوپرموم) آنست.

(پ). رشته‌ی $\{n/(n+1)\}$ را اختیار میکنیم. جمله‌ی اول این رشته $1/2$ است، و همواره $n/(n+1) \leqslant 1/2$. پس، $1/2$ عضو اقل رشته است، و بنا بر (ب)، $\inf[n/(n+1)] = 1/2$. اینک به استعانت ۴.۲.۴ ثابت میکنیم که $\sup[n/(n+1)] = 1$. واضح است که همواره $n/(n+1) < 1$، پس فرض کنیم u عدد دلخواهی باشد که $u < 1$. نامساوی $n/(n+1) > u$ (۱) معادل نامساوی $n > u/(1-u)$ است. پس، بازاء هر مقدار n که بزرگتر $u/(1-u)$ باشد (۱) برقرار است. بالنتیجه، 1 سوپرموم رشته میباشد. اثبات به وسیله‌ی ε نیز آسان است. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، نامساوی $n/(n+1) > 1 - \varepsilon$ معادل نامساوی $n > (1/\varepsilon) - 1$ است.

۴.۲.۷. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد آنگاه

$$\sup(-a_n) = -\inf a_n; \qquad \inf(-a_n) = -\sup a_n.$$

برهان (قسمت اول). فرض کنیم $\alpha = \inf a_n$ (۱). رشته‌ی $\{b_n\}$ را با ضابطه‌ی $b_n = -a_n$ (۲) تعریف میکنیم. باید ثابت کرد که $-\alpha$ سوپرموم رشته‌ی $\{b_n\}$ است. اثبات به وسیله‌ی خواص مشخصه (۴.۲.۴) است. اولاً، فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد. گوئیم $b_n \leqslant -\alpha$. زیرا، بنا بر (۱) و ۴.۲.۵، $\alpha \leqslant a_n$، و از آنجا $-a_n \leqslant -\alpha$. پس، بنا بر (۲)، $b_n \leqslant -\alpha$. ثانیاً، فرض کنیم $u < -\alpha$. بالنتیجه، $\alpha < -u$. پس، بنا بر (۱) و ۴.۲.۵، عددی طبیعی مانند n هست که $a_n < -u$، و از آنجا، بنا بر (۲)، $u < b_n$. ▲

اثبات قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود:

۴.۲.۸. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد حقیقی باشند، و همواره $a_n \leqslant b_n$ آنگاه

$$\sup a_n \leqslant \sup b_n; \qquad \inf a_n \leqslant \inf b_n.$$

۴.۲.۹. تمرین

۱. سوپرموم و اینفیموم هر یک از رشته‌های ذیل را، در صورت وجود، تعیین نمایید، و در مورد هر یک، تشخیص دهید که به رشته تعلق دارد یا نه.

(آ) $\{1/n\}$. (ب) $\{n\}$.

(پ) $\{n\cdot[(-1)^n + 1]\}$. (ت) $\{n\,.\,[(-1)^n - 1]\}$.

(ث) $\{(n-1)/n\}$. (ج) $\{(n+1)/n\}$.

(چ) $\{n\cdot[(-1)^n - 1] - (1/n)\}$.

۲. $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و c عدد حقیقی ثابتی است. ثابت کنید که

$$\sup(a_n + c) = \sup a_n + c; \qquad \inf(a_n + c) = \inf a_n + c.$$

۰۳ $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی نامنفی و c عدد حقیقی ثابت مثبتی است. ثابت کنید که

$$\sup (ca_n) = c \sup a_n; \qquad \inf (ca_n) = c \inf a_n$$

۴.۳. رشته‌های یکنواخت.

۴.۳.۱. تعریفات. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد باشد.

I. $\{a_n\}$ را صعودی خوانیم اگر همواره $a_n \leqslant a_{n+1}$.

II. $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی خوانیم اگر همواره $a_n < a_{n+1}$.

III. $\{a_n\}$ را نزولی خوانیم اگر همواره $a_{n+1} \leqslant a_n$.

IV. $\{a_n\}$ را اکیداً نزولی خوانیم اگر همواره $a_{n+1} < a_n$.

V. $\{a_n\}$ را یکنواخت خوانیم اگر صعودی یا نزولی باشد.

VI. عبارات

$$\{a_n\}\uparrow, \qquad a_n\uparrow$$

یعنی رشته‌ی $\{a_n\}$ صعودی است، و عبارات

$$\{a_n\}\uparrow \alpha, \qquad a_n\uparrow \alpha$$

یعنی رشته‌ی $\{a_n\}$ صعودی است و به α میل میکند.

همچنین، عبارات

$$\{a_n\}\downarrow, \qquad a_n\downarrow,$$

یعنی رشته‌ی $\{a_n\}$ نزولی است، و عبارات

$$\{a_n\}\downarrow \alpha, \qquad a_n\downarrow \alpha$$

یعنی رشته‌ی $\{a_n\}$ نزولی است و به α میل میکند.

۴.۳.۲. امثله و فواید

(آ). واضحست که هر رشته‌ی اکیداً صعودی (نزولی) صعودی (نزولی) نیز هست.

(ب). اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ صعودی (نزولی) باشد، بازاءِ هر دو عدد طبیعی m و n، اگر $m < n$ $a_m \leqslant a_n$ $(a_n \leqslant a_m)$. (چرا؟)

(پ). رشته‌ی ثابت $\{1\}$ یا «$1, 1, 1, \ldots$» (و بطور کلی، هر رشته‌ی ثابت) صعودی و نزولی است، اما نه اکیداً صعودی است نه اکیداً نزولی.

(ت). رشته‌ی $\{1/n\}$ اکیداً نزولی است، زیرا همواره $n < n+1$، و لهذا، همواره $1/(n+1) < 1/n$.

(ث). رشته‌ی $\{(-1)^n\}$ نه صعودی است نه نزولی، زیرا، اگر n زوج باشد $a_{n+1} < a_n$، و اگر n فرد باشد $a_n < a_{n+1}$.

(ج). رشته‌ی مثال ذ: ۱.۲.۱۲ اکیداً صعودی است.

اثبات به استقراء است. بالبداهه $a_1 < a_2$، و اگر $a_n < a_{n+1}$ آنگاه

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}. \blacktriangle$$

بنظر بدیهی می‌آید که، در هر رشته‌ی اکیداً صعودی از اعداد طبیعی، هر جمله از مرتبه‌ی خود ناکمتر است، به عبارت دیگر

۴.۳.۳. قضیه. اگر k رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد، بازاء هر عدد طبیعی n، $k_n = k(n) \geqslant n$.

برهان. چون $k(1)$ عددی طبیعی است، $1 \leqslant k(1)$. فرض کنیم $k_n \geqslant n$. چون k اکیداً صعودی است، $k_{n+1} > k_n$. بالنتیجه، $k_{n+1} > n$، و از آنجا، $k_{n+1} \geqslant n+1$. ▲

رشته‌ی $\{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2), \ldots\}$ تابعی است بر $\mathbf{N}$ بروی $\mathbf{N}$، و عکس آن نسبت $\{(1, 1)\ (1, 2)\ (2, \ldots)\}$ است، که تابع نیست. اما، عکس رشته‌ی اکیداً صعودی $k = \{2n\}$ تابع است (چرا؟)، و رشته‌ی k تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}$ و kحع است. بطور کلی،

۴.۳.۴ قضیه. هر رشته‌ی اکیداً صعودی از اعداد طبیعی تابع معکوس دارد، و بالنتیجه، تناظری است 1ـ1 بین $\mathbf{N}$ و مجموعه‌ی مقادیر رشته.

برهان. فرض کنیم k رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد. بنا بر ۳.۱.۰۵ : ۳، کافی است ثابت کنیم که اگر $k(n_1) = k(n_2)$ آنگاه $n_1 = n_2$، و این به برهان خلف بدیهی است. ▲

۴.۳.۵. تمرین

۰۱ در مورد رشته‌ی $\{a_n\}$، نقیض هر یک از گزاره‌های ذیل را با حرکت دادن ناقص بیان کنید

(آ) $\{a_n\}$ صعودی نیست؛ (ب) $\{a_n\}$ اکیداً صعودی نیست؛

(پ) $\{a_n\}$ نزولی نیست؛ (ت) $\{a_n\}$ اکیداً نزولی نیست؛

(ث) $\{a_n\}$ یکنواخت نیست.

۰۲ رشته‌های ذیل را بر حسب صعودی یا نزولی (با تفکیک به اکید و جز آن) بودن یا نبودن و محدود بودن (از بالا یا از پایین یا مطلقاً) یا نبودن تفکیک کنید:

(آ) $\{(-1)^n\}$. (ب) $\left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}$.

(پ) $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$. (ت) $\{-2\}$.

(ث) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$. (ج) $\{n^2\}$.

(چ) $\left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$. (ح) $\left\{\dfrac{1}{4} - n^2\right\}$.

(خ) $\{n - (-1)^n\}$. (د) $\left\{\dfrac{1}{n - (-1)^n}\right\}$.

(ر) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$. (ذ) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

(ژ) $\{\sqrt{n^2-1}/n\}$. (ز) $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}$.

(ش) $\{7+2n-3n^2\}$. (س) $\{2n^2-3n+5\}$.

(ص) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$.

۳. اگر $a>0$ آنگاه رشته‌ی $\{\sqrt[n]{a}\}$ محدود به 1 و a است، و بر حسب آنکه $a>1$ یا $a<1$، اکیداً نزولی یا اکیداً صعودی است.

۴. اگر $a>0$ رشته‌ی $\{\sqrt[n]{a}-1\}$ یکنواخت است.

۵. بنا بر آنکه $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$، ثابت کنید که رشته‌ی $\{a_n\}$ اکیداً صعودی و محدود است.

۶. رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی ذیل نزولی است:

$$a_n=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

۷. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ یکنواخت باشد رشته‌ی $\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\Big/n\right\}$ نیز یکنواخت است، و بر حسب آنکه $\{a_n\}$ صعودی یا نزولی باشد صعودی یا نزولی است.

۸. اگر $\{x_n\}_0$ رشته‌ای دلخواه باشد دو رشته مانند $\{a_n\}_0$ و $\{b_n\}_0$ هست که $a_n\uparrow$، $b_n\downarrow$، و همواره $x_n=a_n+b_n$.

راهنمائی: فرض کنیم $\{c_n\}_0$ رشته‌ای دلخواه از اعداد مثبت باشد. a_0 را به دلخواه و b_0 را مساوی x_0-a_0 بگیرید. سپس، بازاءِ هر عدد صحیح نامنفی n،

(۱) اگر $x_{n+1}\geqslant x_n$ آنگاه

$$a_{n+1}=a_n+(1+c_n)(x_{n+1}-x_n),$$
$$b_{n+1}=b_n-c_n(x_{n+1}-x_n);$$

(۲) اگر $x_{n+1}<x_n$ آنگاه

$$a_{n+1}=a_n+c_n(x_n-x_{n+1}),$$
$$b_{n+1}=b_n-(1+c_n)(x_n-x_{n+1}).$$

اینک به قضیه‌ی اصلی این مبحث میپردازیم:

۴.۴. قضیه. هر رشته‌ی یکنواخت حد دارد. بعلاوه،

I. اگر رشته صعودی باشد حدش سوپرموم آنست، و رشته فقط و فقط وقتی متقارب است که از بالا محدود باشد.

II. اگر رشته نزولی باشد حدش اینفیموم آنست، و رشته فقط و فقط وقتی متقارب است که از پایین محدود باشد.

برهان. ابتدا فرض میکنیم رشته‌ی $\{a_n\}$ صعودی باشد، یعنی،

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots, \qquad (1)$$

و $\alpha = \sup a_n$ (۲)، و دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $\alpha = \infty$. در این صورت، $\lim a_n = \infty$. زیرا، فرض کنیم u عدد دلخواهی باشد. چون $\alpha > u$، بنا بر (۲) و ۴.۲.۴، عددی طبیعی مانند N هست که $a_N > u$. پس، بنا بر (۱)، جمله‌های رشته از مرتبه‌ی N بعد از u بزرگترند، و بالنتیجه، $\lim a_n = \infty$.

حالت دوم: $\alpha \in \mathbf{R}$. برای اثبات اینکه $\lim a_n = \alpha$، فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر (۲) و ۴.۲.۴، عددی طبیعی مانند N هست که $\alpha - \varepsilon < a_N$. پس، بنا بر (۱) و (۲)، از مرتبه‌ی N بعد، $\alpha - \varepsilon < a_n \leqslant \alpha$، و از آنجا $-\varepsilon < a_n - \alpha \leqslant 0$، و بالنتیجه، $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. پس، $\lim a_n = \alpha$.

بنا بر آنچه گذشت، رشته‌ی صعودی $\{a_n\}$ همواره حد دارد، و حدش مساوی سوپرموم آنست. اگر رشته از بالا محدود باشد سوپرموم، و لهذا، حد آن عددی حقیقی است، و رشته متقارب است. بالعکس، اگر رشته متقارب باشد، چنانکه میدانیم محدود است.

اثبات حکم در مورد رشته‌های نزولی بوسیله‌ی قسمت اول قضیه است، زیرا، اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ نزولی باشد رشته‌ی $\{-a_n\}$ صعودی است. پس، بنا بر قسمت اول، $\lim(-a_n)$ موجود است، و $\lim(-a_n) = \sup(-a_n)$. اما، $\sup(-a_n) = -\inf a_n$. بعلاوه، چون $\lim(-a_n)$ موجود است، $\lim a_n$ هم موجود و مساوی $-\lim a_n$ میباشد. پس $\lim a_n$ موجود و مساوی $\inf a_n$ است. ▲

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی اصلی ۴.۴ و اثبات آن و اثبات نظیرش در باره‌ی رشته‌های نزولی بر متعلم است.

۴.۴.۱. قضیه. فرض کنیم رشته‌ی صعودی $\{a_n\}$ متقارب به عدد α باشد.

I. همواره $a_n \leqslant \alpha$.

II. شرط لازم و کافی برای آنکه جمله‌ای از رشته مساوی α باشد آنست که از مرتبه‌ای بیعد $a_n = \alpha$.

III. اگر $\{a_n\}$ اکیداً صعودی باشد همواره $a_n < \alpha$.

۴.۴.۲. امثله

(آ). در ۳.۵.۱۰.۱ از رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

نام بردیم. واضح است که

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

پس، $\{a_n\}$ رشته‌ای است اکیداً صعودی. بعلاوه،

$$a_n \leqslant n \cdot \frac{1}{n+1} < 1,$$

و بالنتیجه، $\{a_n\}$ از بالا محدود است. پس، $\lim a_n$ موجود است. بنا بر این، مسئله‌ی اول مذکور در ۴.۱ را در باب رشته‌ی مورد بحث جواب گفتیم. در باب مسئله‌ی دوم، آنچه فعلاً میتوانیم بدان حکم کنیم[1] اینست که، چون همواره $1/2 \leqslant a_n < 1$ (۲.۴.۱.۲ ملاحظه شود)، $1/2 \leqslant \lim a_n \leqslant 1$.

(ب). رشته‌ی $\{a_n\}$ را با تعریف تراجعی

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad (n \geqslant 1)$$

اختیار میکنیم. در مثالهای ذ: ۱.۲.۱۲ و ج: ۴.۳.۲ معلوم شد که این رشته صعودی و از بالا محدود است. پس، $\{a_n\}$ رشته‌ای است متقارب. اینک به طریقی که در ۳.۵.۲۱ آموختیم معلوم میشود که $\lim a_n = 2$.

(پ). مطلوبست حد رشته‌ی

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots.$$

در این گونه مسائل معماانند، باید ابتدا رشته را چنانکه از جمله‌های داده‌شده‌ی آن حدس زده میشود به استقراء تعریف کرد[2]. رشته‌ی فوق را چنین تعریف میکنیم:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (n \geqslant 1).$$

به استقراء معلوم میشود که همواره $a_n < 2$. بعلاوه،

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{2} - \sqrt{a_n}) \geqslant 0.$$

پس، رشته‌ی $\{a_n\}$ صعودی است. بالنتیجه، $\alpha = \lim a_n$ موجود است. اینک به آسانی دیده میشود که $\alpha = 2$.

(ت). رشته‌ی $\{s_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

اختیار میکنیم. واضحست که این رشته اکیداً صعودی است. به آسانی میتوان ثابت کرد که از بالا نامحدود است. زیرا، فرض کنیم u عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد طبیعی v را بزرگتر از $2u$ انتخاب میکنیم، و فرض میکنیم $N = 2^v$. حال اگر $n > N$ آنگاه

$$s_n > \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$

---

(۱) بعدها خواهید دید که $\lim a_n$ مساوی لگاریتم طبیعی 2 است.

(۲) ذ: ۶.۲.۷ : ۵ ملاحظه شود.

$$\left(\frac{1}{2^{\nu-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{\nu}}\right)>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{\nu-1}\cdot\frac{1}{2^{\nu}}$$
$$>\frac{\nu}{2}>u.$$

بالنتیجه، $\lim s_n=\infty$.

(ژ). تحقیق در رفتار رشته‌ی $\{x_n\}$ با ضابطه‌ی

$$x_1=a, \qquad x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n^2+3\right) \qquad (n\geqslant 1),$$

که در آن a عدد حقیقی مفروضی است.

به آسانی معلوم میشود که اگر این رشته متقارب به عدد α باشد $\alpha=1$ یا $\alpha=3$. پس، x_n-1 و x_n-3 را مورد توجه قرار میدهیم. از رابطه‌ی تراجعی تعریف رشته معلوم است که

$$(۱) \quad 4(x_{n+1}-1)=(x_n+1)(x_n-1) \qquad (n\geqslant 1);$$
$$(۲) \quad 4(x_{n+1}-3)=(x_n+3)(x_n-3) \qquad (n\geqslant 1).$$

بالاخره، برای تحقیق در یکنواختی، ملاحظه میکنیم که، بر طبق رابطه‌ی تراجعی،

$$(۳) \qquad 4(x_{n+1}-x_n)=(x_n-1)(x_n-3).$$

اینک، بر حسب مقادیر a حالاتی تشخیص میدهیم. لهذا، قبلاً ملاحظه میکنیم که اگر a را به $-a$ تبدیل کنیم، از مرتبه‌ی دوم ببعد، جمله‌ها بر جای میمانند. بنا بر این، مقادیری از a را که متعلق به بازه‌ی $[0,\infty)$ هستند مورد نظر قرار میدهیم.

حالت اول: $0\leqslant a<1$. به استقراء معلوم میشود که $0\leqslant x_n<1$. بعلاوه، بنا بر (۳)، همواره $x_{n+1}>x_n$. پس، رشته‌ی $\{x_n\}$ صعودی و از بالا به 1 محدود است. بالنتیجه، $\alpha=\lim x_n$ موجود است، و $\alpha\leqslant 1$. پس، چون حد x_n جز 1 و 3 نتواند بود، $\lim x_n=1$.

حالت دوم: $1\leqslant a<3$. به قیاس حالت قبل معلوم میشود که، اولاً، همواره $1\leqslant x_n<3$، و ثانیاً، $\{x_n\}$ رشته‌ای است نزولی. پس، $\lim x_n=1$.

حالت سوم: $a=3$. در این حالت، جمله‌های رشته همگی مساوی 3 هستند، و $\lim x_n=3$.

حالت چهارم: $a>3$. به طریق مذکور در حالت اول معلوم میشود که $x_{n+1}>x_n>3$. پس، $\{x_n\}$ رشته‌ای است صعودی. اما این رشته متقارب نتواند بود، زیرا، اگر متقارب باشد $\lim x_n\geqslant x_1>3$، و حال آنکه حد رشته در حالت تقارب جز 1 و 3 نمیتواند باشد. پس، در این حالت، $\lim x_n=\infty$.

پس، خلاصه‌ی نتایج بحث چنین است:

(۱) اگر $|a|<3$ آنگاه $\lim x_n=1$؛

(۲) اگر $|a|=3$ آنگاه $\lim x_n=3$؛

(۳) اگر $|a|>3$ آنگاه $\lim x_n=\infty$.

یکی از نتایج قضیه‌ی اصلی، که بعدها بکار خواهد آمد، اینست که

۴.۴.۳. قضیه. هر عدد حقیقی و نیز ∞ حد رشته‌ای اکیداً صعودی، و هر عدد حقیقی و نیز $-\infty$ حد رشته‌ای اکیداً نزولی از اعداد منطق است.

برهان. در مورد ∞ و $-\infty$ حکم واضحست: اولی حد رشته‌ی $\{n\}$ است، و دومی حد رشته‌ی $\{-n\}$. پس، به اثبات حکم در مورد عدد حقیقی دلخواه a میپردازیم. برای این منظور، ملاحظه میکنیم که، بازاء هر عدد طبیعی n، عددی منطق مانند r_n هست که

$$a - \frac{1}{n} \leqslant r_n < a - \frac{1}{n+1}. \qquad (۱)$$

به آسانی دیده میشود که $r_n < r_{n+1}$. پس، $\{r_n\}$ رشته‌ای است اکیداً صعودی، و محدود هم هست (چرا؟)، و لهذا، $\alpha = \lim r_n$ موجود میباشد. بالاخره، چون $\lim\left(a - \frac{1}{n}\right) = \lim\left(a - \frac{1}{n+1}\right) = a$، بنا بر ۳.۵.۵ و (۱)، $\lim r_n = a$. اثبات در مورد رشته‌های اکیداً نزولی بر متعلم است. ▲

۴.۴.۴. تمرین

۱. قضیه‌ی اصلی ۴.۴ و قضیه‌ی ۴.۴.۱ و نظیر آن را در باب رشته‌های نزولی در مورد هر یک از رشته‌های مسئله‌ی ۲ : ۴.۳.۵ که یکنواخت است تحقیق کنید.

۲. رشته‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

تعریف شده است. ثابت کنید که این رشته متقارب به عددی مانند α است، و α مساوی حد رشته‌ی مثال آ : ۴.۴.۲ است، و بعلاوه، $37/60 < \alpha < 57/60$.

۳. ثابت کنید که رشته‌ی $\{s_n\}$ با جمله‌ی عمومی

$$s_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}$$

متقارب است، و $\lim s_n \leqslant 1/2$.

۴. ثابت کنید که رشته $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی ذیل متقارب است:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

۵. ثابت کنید که رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

متقارب است[۱].

۶. از رشته‌های ذیل، اولی به $5/6$ و سایرین به 2 متقاربند:

(آ) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = (3a_n + 5)/9 \qquad (n \geqslant 1).$

(ب) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (n \geqslant 1).$

---

(۱) بعدها خواهید دید که $\lim a_n = \pi^2/6$.

(پ) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad (n \geqslant 1).$

(ت) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \dfrac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3} \qquad (n \geqslant 1).$

۷. بنا بر آنکه $a > 0$ و

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \qquad (n \geqslant 1),$$

$\lim x_n$ موجود و عددی حقیقی است.

۸. بنا بر آنکه $0 \leqslant a \leqslant 1/4$ و

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = a + x_n^2 \qquad (n \geqslant 0),$$

ثابت کنید که x_n به ریشه‌ی کوچکتر معادله‌ی $x^2 = x - a$ میل میکند.

۹. c عددی ثابت و ناکمتر از $6-$ است، و

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت کنید که $\lim a_n = 3$.

۱۰. a و b دو عدد مثبت‌اند و $a > b$. دو رشته‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ چنین تعریف شده‌اند:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n \geqslant 1);$$

$$b_1 = \frac{2ab}{a+b}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \qquad (n \geqslant 1)$$

(a_{n+1} واسطه‌ی عددی و b_{n+1} واسطه‌ی توافقی a_n و b_n است).

(آ). ثابت کنید که همواره

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

(ب). ثابت کنید که هر دو رشته متقاربند، و

$$\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{ab}.$$

۴.۵. عدد e. به عنوان ارائه‌ی فواید اصول سابق‌الذکر، در این قسمت یکی از مهمترین اعداد ریاضیات را که، نه فقط در ریاضیات محض، بلکه در ریاضیات کاربسته نیز اهمیت حیاتی دارد تعریف میکنیم.

۴.۵.۱. قضیه. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ موجود و عددی حقیقی است.

برهان. فرض کنیم

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت میکنیم که رشته‌ی $\{a_n\}$ اکیداً صعودی و از بالا محدود است.

اولاً، برای اثبات صعودی بودن، فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد. واضح است که

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$ [نامساوی برنویی]

$$> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

بالنتیجه، همواره $a_{n+1} > a_n$.

ثانیاً، ثابت میکنیم که همواره $a_n < 4$. چون $a_1 = 2$، کافی است حکم را بازاء $n \geqslant 2$ ثابت کنیم. برای این منظور به رشته‌ی $\{b_n\}_{n=2}$ با ضابطه‌ی

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \geqslant 2)$$

متوسل میشویم. به قیاس آنچه گذشت،

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

پس، رشته‌ی $\{b_n\}_{n=2}$ نیز اکیداً صعودی است. بالنتیجه، چون $b_2 = 1/4$،

$$\frac{1}{4} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \geqslant 2).$$

پس، اگر $n \geqslant 2$ آنگاه

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 4\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 4.$$

خلاصه، ثابت شد که رشته‌ی $\{a_n\}$ اکیداً صعودی و از بالا محدود است. پس، $\lim a_n$ موجود و عددی حقیقی است. ▲

۴.۵.۲. تعریف. حد $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ را e مینامیم. به عبارت دیگر، بنا بر تعریف،

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

۴.۵.۳. قضیه. $2 < e \leqslant 3$.

برهان. با علامات مذکور در برهان ۴.۵.۱، چون رشته‌ی $\{a_n\}$ اکیداً صعودی است، بنا بر III : ۴.۴.۱،

$$\lim a_n > a_2 = (3/2)^2 > 2.$$

برای اثبات نامساوی دیگر[1]، ملاحظه میکنیم که اگر $n > 2$ آنگاه، بنا بر دستور دوجمله‌ای

---

(۱) ملاحظه کنید که، بنا بر برهان ۴.۵.۱، همواره $a_n < 4$، و بالنتیجه، $e = \lim a_n \leqslant 4$. استدلال مذکور در متن برای بدست آوردن نامساوی قویتر $e \leqslant 3$ است، که آن را از ۱۰.۵۶ : ۵ نیز میتوان استخراج کرد.

نیوتن،

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\sum_{r=2}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{1}{n}\right)^r \\ &= 2+\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{n^r} \\ &= 2+\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) \\ &< 2+\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!} < 2+\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{2^{r-1}} \\ &= 2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3. \end{aligned}$$

بالنتیجه، $e = \lim a_n \leqslant 3$. ▲

۴.۵.۴. تبصره

I. در فصل ۸ ثابت خواهیم کرد که e عددی اصم است.

II. چنانکه دیدیم، $e > a_2 = 2{,}25$. اینکه این نامساوی قویتر را در حکم قضیه نیاوردیم بدین جهت است که هنوز اعداد اعشاری را رسماً نمیشناسیم.

۴.۵.۵. تمرین

۱. (برهان دیگر ۴.۵.۱). به روش مذکور در برهان ۴.۵.۳، ثابت کنید که رشته‌ی $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ اکیداً صعودی است، و حدش عددی حقیقی است.

۲. ثابت کنید که

(آ) $$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

(ب) $$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e.$$

(پ) $$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

(ت) $$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}.$$

(ث) $$\lim\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1.$$

۳. شخصی مدعی است که $e = 1$ و استدلال او اینست:

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ مرتبه}}$$

$$= \overbrace{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n\ \text{مرتبه}}$$

$$= \overbrace{1\cdot 1\ldots 1}^{n\ \text{مرتبه}} = 1.$$

چه ایرادی بر این استدلال وارد است؟

۴. ثابت کنید که رشته‌ی $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ نزولی است.

۵. بازاءِ هر عدد طبیعی n،

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$ [1]

۶. بازاءِ هر عدد طبیعی n که $n > 6$،

$$n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

۷. $(1\,000\,000)^{1\,000\,000}$ بزرگتر است یا $(1\,000\,001)^{999\,999}$؟

۴.۶. اصل بازه‌های تودرتو

۴.۶.۱. تعریف. رشته‌ی $\{I_n\}_{n=k}$ را رشته‌ای از بازه‌های تودرتو خوانیم در صورتی که هر جمله‌ی آن حاوی جمله‌ی ما بعد باشد، یعنی، همواره

$$I_{n+1} \subseteq I_n \qquad (n \geqslant k).$$

مقطع رشته‌ای از بازه‌های تودرتو ممکن است خالی باشد (مسئله‌ی ۱ در ۴.۶.۳ را در این مرحله حل کنید)، اما

۴.۶.۲. قضیه. مقطع رشته‌ای از بازه‌های بسته‌ی تودرتو هیچگاه خالی نیست، یعنی عددی هست که به همه‌ی آن بازه‌ها تعلق دارد.

برهان. فرض کنیم $\{I_n\}$ رشته‌ای از بازه‌های بسته‌ی تودرتو باشد، و بازاءِ هر m، a_m و b_m دو انتهای چپ و راست I_m باشند. قبلاً این مطلب «بدیهی» را ثابت میکنیم که هر انتهای چپ نابیشتر از هر انتهای راست است، یعنی،

$$(*) \qquad \text{بازاءِ هر } m \text{ و } n\text{،}\ a_m \leqslant b_n.$$

---

(۱) این دستور اطلاعی از مقدار $n!$ بدست میدهد. دستور دقیقتر

$$\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$$

را، که به فرمول سترلینگ* معروف است، بعدها خواهید آموخت.

بنا بر تعریف a_n و b_n، همواره $b_n \leqslant a_n$ (۱). پس، اگر $m = n$ آنگاه نامساوی مذکور در (*) بالبداهه برقرار است. برای حالات دیگر، ملاحظه میکنیم که چون $I_n \subseteq I_{n+1}$، $a_{n+1} \leqslant a_n$ و $b_n \leqslant b_{n+1}$. بالنتیجه، رشتهی $\{a_n\}$ صعودی و رشتهی $\{b_n\}$ نزولی است. حال اگر $n < m$ آنگاه، بنا بر ۴.۳.۰۲، $a_n \leqslant a_m$ و $b_m \leqslant b_n$، و لهذا، با توجه به (۱)، $a_m \leqslant a_n \leqslant b_n$. به همین قیاس، معلوم میشود که اگر $m < n$ آنگاه $b_n \leqslant b_m \leqslant a_m$؛ پس، (*) برقرار است.

بنا بر (*)، b_1 یک بند بالای رشتهی صعودی $\{a_n\}$ است. پس، $\lim a_n$ حقیقی است. فرض کنیم $\alpha = \lim a_n$. عدد α عضو هر یک از بازههای رشتهی $\{I_n\}$ است. زیرا، اگر $I_m = [a_m, b_m]$ جملهی دلخواهی از این رشته باشد، بنا بر (*)، بازاء هر n، $a_n \leqslant b_m$. پس، بنا بر ۳.۵.۰۳، $\alpha \leqslant b_m$. از طرف دیگر، بنا بر تعریف α و ۴.۴.۰۱، $a_m \leqslant \alpha$. بالنتیجه، $a_m \leqslant \alpha \leqslant b_m$. ▲

۴.۶.۳. تمرین

۱. رشتهی $\{I_n\}_{n=0}$ از بازهها با ضابطهی $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ را اختیار میکنیم. ده جمله از رشته را بر محور $x'x$ نمایش دهید. ثابت کنید که رشتهی مذکور رشتهای از بازههای تودرتو است، و مقطعش خالی است.

۲. اگر $\{[a_n, b_n]\}$ رشتهای از بازههای بستهی تودرتو باشد ثابت کنید که $\lim a_n$ و $\lim b_n$ موجود است، و اگر $\lim a_n \neq \lim b_n$ آنگاه مقطع بازههای مذکور بازهی $[\lim a_n, \lim b_n]$ میباشد.

محسوس است که اگر بازههای رشتهای از بازههای بستهی تودرتو متدرجاً «تنگ» شوند بطوری که رشتهی طولهایشان به 0 میل کنند این بازهها بیش از یک عضو مشترک نتوانند داشت. این اصل مهم معروفست به

۴.۶.۴. اصل بازههای تودرتو. قضیه.

هر رشته از بازههای بستهی تودرتو که رشتهی طولهایشان هیچرشته باشد یک و تنها یک عضو مشترک دارند.

برهان. فرض کنیم $\{I_n\}$ رشتهای از بازههای بستهی تودرتو باشد، و $I_n = [a_n, b_n]$، و $\{b_n - a_n\}$ هیچرشته باشد. بنا بر ۴.۶.۲ عددی مانند α هست که به هر I_n تعلق دارد. حال فرض کنیم $\alpha \neq \beta$ و β نیز به هر I_n متعلق باشد. بی آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، میتوان فرض کرد $\alpha < \beta$ (۱). بنا بفرض، بازاء هر n، $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ و $a_n \leqslant \beta \leqslant b_n$. پس، به موجب (۱)، $a_n \leqslant \alpha < \beta \leqslant b_n$، و از آنجا، $b_n - a_n > \beta - \alpha$، و این با هیچرشته بودن $\{b_n - a_n\}$ متناقض است. ▲

اصل مهم فوق را بدین صورت هم میتوان بیان کرد:

۴.۶.۵. قضیه (صورت دوم اصل بازه‌های تودرتو). اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای صعودی و $\{b_n\}$ رشته‌ای نزولی از اعداد حقیقی باشد بطوری که، اولاً، بازاء هر n، $a_n \leqslant b_n$، و ثانیاً، $b_n - a_n \to 0$، آنگاه یک و تنها یک عدد حقیقی مانند α هست که، بازاء هر n،

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n,$$

و این عدد حد مشترک رشته‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ است. (چرا؟)

قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی ساده‌ی اصل بازه‌های تودرتو و اثباتش بر متعلم است:

۴.۶.۶. قضیه. اگر α نقطه‌ی مشترک رشته‌ی $\{I_n\}$ از بازه‌های بسته‌ی تودرتو بر طبق ۴.۶.۴ و U حومه‌ی دلخواهی از α باشد، از مرتبه‌ای ببعد، $I_n \subseteq U$.

۴.۶.۷. فایده. بنا بر اصل بازه‌های تودرتو، هر رشته از بازه‌های بسته‌ی تودرتو که رشته‌ی طول جمله‌هایش هیچرشته باشد یک عدد حقیقی را مشخص میسازد.

با این طریق مشخص کردن اعداد از حساب مقدماتی، در نمایش دادن اعداد اصم با کسور اعشاری (که هنوز ما رسماً وارد بحث آنها نشده‌ایم)، آشنا هستید. رشته‌ی بازه‌های

$$I_1 = [1, 2], I_2 = [1{,}4, 1{,}5], I_3 = [1{,}41, 1{,}42], I_4 = [1{,}414, 1{,}415], \ldots,$$

که دو انتهای هر یک مقادیر تقریبی متناظر $\sqrt{2}$ هستند، رشته‌ای است از بازه‌های بسته‌ی تودرتو که یگانه عضو مشترک آنها $\sqrt{2}$ است، و این رشته مشخص‌کننده‌ی عدد $\sqrt{2}$ میباشد.

اصل بازه‌های تودرتو از وسایل نیرومند تعریف یا اثبات وجود اعداد حقیقیِ واجد خواصِ معیّن میباشد. در عمل، برای استفاده از اصل مذکور بدین منظور، اغلب، بازه‌ی بسته‌ی مناسبی مانند I_1 را نصف میکنند، و سپس، نیمه‌ی بسته‌ی مناسبی از آن، مثلاً I_2، را اختیار میکنند. بعد، I_2 را نصف میکنند، و نیمه‌ی بسته‌ی مناسبی از آن را I_3 میگیرند. بطور کلی، وقتی که I_n تعریف شده است، نیمه‌ی بسته‌ی مناسبی از آن را I_{n+1} میگیرند. بدین گونه، رشته‌ای از بازه‌های بسته‌ی تودرتو به استقراء تعریف میشود، که طولشان به 0 میل میکند. این رشته یگانه عدد حقیقی متعلق به جمیع جمله‌های خود را مشخص میکند. طریقه‌ی مذکور را طریقه‌ی تنصیفات متوالیه میخوانند.

۴.۶.۸. مثال. رشته‌ی $\{I_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \qquad b_n = \frac{n+1}{n}, \qquad I_n = [a_n, b_n]$$

اختیار میکنیم. به آسانی دیده میشود که رشته‌ی $\{a_n\}$ صعودی و رشته‌ی $\{b_n\}$ نزولی است، و همواره $a_n \leqslant b_n$. بعلاوه، $b_n - a_n = 2/n \to 0$. پس، یک و تنها یک عدد حقیقی مانند α هست که همواره $\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{n+1}{n}$، و آن عبارتست از

$$\alpha = \lim \frac{n-1}{n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

۴.۶.۹. تمرین

۱. بنا بر آنکه

$$a_n = \frac{1}{n^3}\sum_{r=1}^{n-1} r^2, \qquad b_n = \frac{1}{n^3}\sum_{r=1}^{n} r^2, \qquad I_n = [a_n, b_n],$$

ثابت کنید که رشته‌ی $\{I_n\}$ رشته‌ای از بازه‌های بسته‌ی تودرتو است، و یک عدد حقیقی را مشخص میکند، و این عدد را تعیین کنید.

۲. $0 < a < b$، و دو رشته‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ چنین تعریف شده‌اند:

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (n \geqslant 1);$$
$$b_1 = b, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت کنید که دو رشته‌ی مذکور تابع شرایط قضیه‌ی ۴.۶.۵ هستند.

راهنمائی: برای قسمت اخیر ملاحظه کنید که

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{b_n - a_n}{2} - \sqrt{a_n}\,(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})$$
$$\leqslant \frac{b_n - a_n}{2}.$$

۳. دو رشته‌ی $\{a_n\}_0$ و $\{b_n\}_0$ از اعداد طبیعی به استقراء چنین تعریف شده‌اند:

$$a_0 = b_0 = 1,$$
$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2 \qquad (n \geqslant 1).$$

(آ). ثابت کنید که همواره اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه

$$a_n^2 - 2b_n^2 = 1.$$

(ب). ثابت کنید که $\lim\,(a_n/b_n)$ و $\lim\,(2b_n/a_n)$ موجود و مساوی $\sqrt{2}$ است.

(پ). دو عدد منطق مانند r و s تعیین کنید که، در عین حال،

$$r < \sqrt{2} < s, \qquad s - r < 5/10^6.$$

۴.۷. ضابطه‌ی کلی تقارب یا ضابطه‌ی کوشی*. تعریفی که سابقاً برای تقارب یک رشته ذکر شد حد آن رشته را در کار میآورد. بسیار مطلوب است که ضابطه‌ای برای تشخیص تقارب داشته باشیم که، در بکار بستن آن، به اینکه حد رشته را از پیش بدانیم حاجت نیفتد. ضابطه‌ای از این قبیل در ضمن قضیه‌ی اصلی ۴.۴ دانسته شد. ضابطه‌ی بسیار مهم دیگر ضابطه‌ی کوشی* است، که به ضابطه‌ی کلی تقارب نیز معروف است، و در این قسمت به توضیح آن میپردازیم.

فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای متقارب به عدد α و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. در این صورت، عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر n، اگر $n > N$ آنگاه $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$. پس، اگر p و q دو عدد طبیعی بزرگتر از N باشند،

$$|a_p - \alpha| < \varepsilon/2, \qquad |a_q - \alpha| < \varepsilon/2,$$

و از آنجا
$$| a_p - a_q | = | (a_p - \alpha) - (a_q - \alpha) | \leqslant | a_p - \alpha | + | a_q - \alpha | < \varepsilon.$$
چنانکه دیده میشود، اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب باشد، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $p > N$ و $q > N$ آنگاه $| a_p - a_q | < \varepsilon$. (این نتیجه را به زبان عامیانه میتوان چنین بیان کرد که، در یک رشته‌ی متقارب، جمله‌ها متزایداً به هم نزدیک میشوند). نکته‌ی مهم این است که شرط مذکور برای تقارب کافی هم هست. قبل از اینکه به اثبات این حکم اساسی بپردازیم، مقدماتی میآوریم.

۴.۷.۱. تعریف. رشته‌ی $\{a_n\}$ را یک رشته‌ی اساسی یا رشته‌ی کوشی* خوانیم در صورتی که، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N باشد که، بازاء هر دو عدد طبیعی p و q که $p > N$ و $q > N$،
$$| a_p - a_q | < \varepsilon.$$

معلومست که اگر، در تعریف فوق، هر مورد $<$ را به $\leqslant$ تبدیل کنیم تعریفی معادل آن بدست میآید. بعلاوه، تعریف مذکور را میتوان به صورتهای دیگری معادل آن، که در دو قضیه‌ی آتیه آمده است، درآورد.

۴.۷.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N باشد که، بازاء هر عدد طبیعی p که $p > N$،
$$| a_p - a_N | < \varepsilon$$
برهان. اولاً، اگر $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی باشد، بنا بر تعریف، عددی طبیعی مانند M هست که

بازاء هر p و q، اگر $p > M$ و $q > M$ آنگاه $| a_p - a_q | < \varepsilon$.

فرض کنیم $N = M + 1$. اگر $p > N$ و $q = N$ آنگاه $p > M$ و $q > M$، و بالنتیجه، $| a_p - a_N | < \varepsilon$. بالعکس، فرض کنیم شرط مذکور در قضیه برقرار باشد. پس، بازاء عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N هست که اگر اعداد طبیعی p و q بزرگتر از N باشند،
$$| a_p - a_N | < \varepsilon/2, \qquad | a_q - a_N | < \varepsilon/2$$
و از آنجا، $| a_p - a_q | < \varepsilon$. ▲

۴.۷.۳. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت مانند ε، عددی طبیعی مانند N باشد که، بازاء هر عدد طبیعی p که $p > N$ و هر عدد طبیعی k،
$$| a_{p+k} - a_p | < \varepsilon. \qquad (*)$$
برهان. اثبات لزوم بنا بر تعریف است، و به متعلم محول میشود. برای اثبات کفایت، فرض

کنیم رشته‌ی $\{a_n\}$ در شرط مذکور در قضیه صدق کند، و ε عدد مثبت دلخواهی و N عدد طبیعی مذکور در قضیه باشد، و $M = N + 1$. اگر q عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از M باشد، و $k = q - M$، از روابط $M > N$ و $k \in \mathbf{N}$، بنا بر فرض، نتیجه میشود، $| a_{M+k} - a_M | < \varepsilon$، و از آنجا، $| a_q - a_M | < \varepsilon$. پس، بنا بر ۴.۷.۲، رشته‌ی $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی است. ▲

۴.۷.۴. تمرین

۱. قضایای ۴.۷.۲ و ۴.۷.۳ را با تبدیل جمیع موارد «$<$» به «$\leqslant$» بیان و ثابت کنید.

۲. اگر $\{a_n\}$ یک رشته‌ی کوشی و M عدد طبیعی مفروضی باشد آنگاه، بازاءِ هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی و بزرگتر از M مانند N هست که، بازاءِ هر p، اگر $p \geqslant N$ آنگاه $| a_p - a_N | < \varepsilon$.

۳. هر رشته‌ی اساسی محدود است.

۴. نقیض گزاره‌ی «رشته‌ی $\{a_n\}$ رشته‌ای اساسی است» را بر حسب ۴.۷.۱، ۴.۷.۲، و ۴.۷.۳، با حرکت دادن ناقص، بیان کنید.

اینک به قضیه‌ی اصلی این مبحث میپردازیم.

۴.۷.۵. قضیه (ضابطه‌ی کلی تقارب یا ضابطه‌ی کوشی). شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ای از اعداد حقیقی متقارب باشد آنست که اساسی باشد.

برهان. در ۴.۷ معلوم شد که هر رشته‌ی متقارب یک رشته‌ی اساسی است. باقی میماند اثبات اینکه هر رشته‌ی اساسی متقارب است. اثبات به وسیله‌ی اصل بازه‌های تودرتو است. فرض کنیم $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی باشد. هیچ‌رشته‌ی $\{1/2^{k-1}\}$ را اختیار میکنیم و، به استقراء، رشته‌ی مناسبی مانند $\{I_k\}$ از بازه‌های بسته‌ی تودرتو تعریف میکنیم که همواره طول I_k مساوی $1/2^{k-1}$ باشد، و سپس ثابت میکنیم که رشته‌ی $\{a_n\}$ به عددی که با این بازه‌ها مشخص میشود متقارب است.

گوئیم، چون $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی است، عددی طبیعی مانند N_1 هست که

(۱) همواره اگر $p \geqslant N_1$ آنگاه $| a_p - a_{N_1} | < 1/2^2$.

باز گوئیم، چون $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی است، عددی طبیعی مانند N' بزرگتر از N_1، هست که همواره اگر $p \geqslant N'$ آنگاه $| a_p - a_{N'} | < 1/2^3$. کوچکترین اعداد طبیعی مانند N' را که واجد این خاصیت باشند N_2 مینامیم. خلاصه،

(۲) N_2 کوچکترین عدد طبیعیی است که $N_1 < N_2$ و همواره اگر $p \geqslant N_2$ آنگاه $| a_p - a_{N_2} | < 1/2^3$.

بطور کلی، فرض کنیم N_k $(k > 1)$ تعریف شده باشد:

(۳) N_k کوچکترین عدد طبیعیی است که $N_{k-1} < N_k$ و همواره اگر $p \geqslant N_k$ آنگاه $| a_p - a_{N_k} | < 1/2^{k+1}$.

گوئیم، چون $\{a_n\}$ یک رشته‌ی اساسی است، عددی طبیعی مانند N'، بزرگتر از N_k، هست که همواره اگر $p \geqslant N'$ آنگاه $|a_p - a_{N'}| < 1/2^{k+2}$. کوچکترین این اعداد را N_{k+1} مینامیم. خلاصه،

(۴) N_{k+1} کوچکترین عدد طبیعی است که $N_k < N_{k+1}$ و همواره اگر $p \geqslant N_{k+1}$ آنگاه $|a_p - a_{N_{k+1}}| < 1/2^{k+2}$.

بدین گونه، رشته‌ی اکیداً صعودی $\{N_k\}$ از اعداد طبیعی تعریف میشود. حال بازه‌ی بسته‌ی I_k را چنین تعریف میکنیم:

$$I_k = [a_{N_k} - \frac{1}{2^k}, a_{N_k} + \frac{1}{2^k}]. \tag{۵}$$

واضح است که طول I_k مساوی $1/2^{k-1}$ است. بعلاوه، همواره

$$I_{k+1} \subseteq I_k \qquad (k \in \mathbf{N}). \tag{۶}$$

زیرا، چون $N_k < N_{k+1}$، بنا بر (۳)،

$$|a_{N_{k+1}} - a_{N_k}| < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

اما، اگر x عضو دلخواهی از I_{k+1} باشد، بنا بر (۵)،

$$|x - a_{N_{k+1}}| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}.$$

بنا بر این،

$$|x - a_{N_k}| = |(x - a_{N_{k+1}}) + (a_{N_{k+1}} - a_{N_k})| < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

پس، $x \in I_k$. بالنتیجه، (۶) برقرار است. پس، $\{I_k\}$ رشته‌ای است از بازه‌های بسته‌ی تودرتو که رشته‌ی طولهای آنها به 0 میل میکند. فرض کنیم α عددی باشد که با این بازه‌ها مشخص میشود. گوئیم،

$$\lim a_n = \alpha.$$

زیرا، فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد طبیعی l را چنان اختیار میکنیم که $1/2^{l-1} < \varepsilon$. چون α عضو مشترک بازه‌های رشته‌ی $\{I_k\}$ است، همواره، $\alpha \in I_k$، و بالاخص، $\alpha \in I_l$. پس،

$$|\alpha - a_{N_l}| \leqslant 1/2^l < \frac{\varepsilon}{2}.$$

از طرف دیگر، بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n \geqslant N_l$ آنگاه

$$|a_n - a_{N_l}| < 1/2^{l+1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

پس، از مرتبه‌ی N_l ببعد،

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \blacktriangle$$

۴.۷.۶. تبصره. ضابطه‌ی کلی تقارب، از این جهت که از حد رشته‌ها مستقل است، در تحقیقات نظری دارای اهمیت فراوان میباشد، اگر چه در عمل چندان فایده‌ای ندارد، زیرا عملاً اثبات وجود عدد N مذکور در ۴.۷.۱ (یا ۴.۷.۲ یا ۴.۷.۳) ندرةً میسر است. برای اثبات تقارب رشته‌ای مانند $\{a_n\}$ به وسیله‌ی این ضابطه، معمولاً اسمنمای ساده‌ای میجوئیم که $|a_p - a_q|$ (یا تفاضلهای مشابه مذکور در ۴.۷.۲ یا ۴.۷.۳) از آن کمتر باشد، و بدین وسیله وجود N را ثابت میکنیم.

۴.۷.۷. امثله

(آ). رشته‌ی $\{a_n\}_0$ با ضابطه‌ی

$$a_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

اساسی و لهذا متقارب است.

قبلاً ملاحظه میکنیم که همواره اگر $p, k \in \mathbf{N}$ و $1 < k$ آنگاه

$$\begin{aligned}
|a_{p+k} - a_p| &= \left|\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+2}}{(p+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{p+k}}{(p+k)!}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(p+1)!} + \frac{1}{(p+2)!} + \cdots + \frac{1}{(p+k)!} \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\Big(1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{(p+2)\cdots(p+k)}\Big) \\
&< \frac{1}{(p+1)!}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\Big) \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\Big(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\Big) < \frac{2}{(p+1)!}.
\end{aligned}$$

اینک فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون رشته‌ی $\{2/(p+1)!\}$ هیچ‌رشته است، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $N < p$ آنگاه $\varepsilon > 2/(p+1)!$، و در این صورت، بازاء هر عدد طبیعی k، $|a_{p+k} - a_p| < \varepsilon$. پس، بنا بر ۴.۷.۳، رشته‌ی $\{a_n\}_{n=0}$ متقارب است. (در فصل ۸ خواهید دید که $\lim a_n = 1/e$).

(ب). رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی ذیل متقارب نیست:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

کافی است ثابت کنیم که این رشته اساسی نیست. بنا بر ۴.۷.۲، اساسی نبودن رشته‌ی $\{a_n\}$ معادل است با اینکه

(*) عدد مثبتی مانند ε هست که بازاء هر عدد طبیعی مانند N عددی طبیعی مانند p هست که، در عین حال،

$$p > N, \qquad a_p - a_N \geqslant \varepsilon.$$

فرض کنیم N عدد طبیعی دلخواهی باشد. اگر $p = 2N$ آنگاه

$$a_p - a_N = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \geqslant N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

پس، اگر ε را مساوی $1/2$ (یا عددی کوچکتر از آن) بگیریم (*) برقرار میباشد. ▲

۴.۷.۸. تمرین

۱. به وسیلهٔ ضابطهٔ کوشی ثابت کنید که رشته‌هائی که ذیلاً با جملهٔ عمومی خود معرفی شده‌اند متقاربند:

(آ) $a_n = 1/n.$

(ب) $a_n = (n+1)/n.$

(پ) $a_n = \sum_{k=0}^{n} (1/k!).$

(ت) $a_n = 1 + 1^{-p} + 2^{-p} + \cdots + n^{-p} \qquad (p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2).$

راهنمائی:

$$a_{n+k} - a_n \leqslant \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+k)^{p-1}}\right).$$

۲. مجموعهٔ جمل رشتهٔ $\{a_n\}$ مجموعه‌ای است متناهی. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه این رشته متقارب باشد آنست که از مرتبه‌ای ببعد جمله‌هایش با هم متساوی باشند.

۳. به وسیلهٔ ضابطهٔ عمومی تقارب ثابت کنید که شرط لازم برای آنکه رشتهٔ $\{a_n\}$ متقارب باشد آنست که $\lim\ (a_{n+1} - a_n) = 0$. آیا این شرط برای تقارب کافی است؟

۵ § رشتکها

۵.۱. مقدمه. معمولاً گفته میشود که رشتهٔ جزء یک رشته یا، به اصطلاح ما، رشتک یک رشته، یعنی رشته‌ای حاصل از انتخاب تعدادی نامتناهی از جمله‌های آن رشته با حفظ ترتیب توالی آنها در رشتهٔ اولیه، یا، به عبارت دیگر، رشته‌ای مانده از یک رشته پس از اسقاط بعضی از جمل آن، مشروط بر اینکه تعدادی نامتناهی از جمله‌ها باقی بمانند. مثلاً، در رشتهٔ

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, \qquad (۱)$$

اگر جمله‌هائی را که اندیس آنها زوج است با حفظ ترتیب توالی آنها در (۱) اختیار کنیم، و به عبارت دیگر، اگر از اعداد (۱) آنهائی را که اندیسشان فرد است اسقاط کنیم، اعداد

$$a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots \qquad (۲)$$

حاصل میشود، که، بنا بر تعریف مذکور، یک رشتک رشتهٔ (۱) است. اما، باید دانست که طرح (۲) را مستقیماً نمیتوان یک رشته شمرد، زیرا مجموعهٔ اندیسگذار یک رشته به معنی عادی کلمه $\mathbf{N}$ است، و حال آنکه اعداد (۲) با مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج اندیسگذاری

شده‌اند. پس تعریف مذکور نارسا است.
نیل به تعریفی مقنع با تجدید اندیسگذاری در اعداد (۲) صورت میگیرد. تابع اکیداً صعودی k را بر $\mathbf{N}$ با ضابطه‌ی $k_n = k(n) = 2n$ اختیار میکنیم، و رشته‌ی $\{b_n\}$ را با ضابطه‌ی $b_n = a_{k(n)}$ تعریف مینمائیم. معلومست که

$$b_1 = a_{k(1)} = a_2, \qquad b_2 = a_{k(2)} = a_4, \qquad b_3 = a_{k(3)} = a_6, \ldots,$$
$$b_n = a_{k(n)} = a_{2n}, \ldots.$$

در واقع، رشته‌ی $\{b_n\}$ است که رشتکی از رشته‌ی (۱) است، منتها، به مناسبت رابطه‌ی $b_n = a_{2n}$، این رشته را به صورت (۲) هم مینویسند. اینک تعریف کلی:

۵.۲. تعریف. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد. رشته‌ی $\{b_n\}$ را یک رشتک این رشته نامیم در صورتی که تابعی اکیداً صعودی بر $\mathbf{N}$ بتوی $\mathbf{N}$ مانند تابع k موجود باشد بطوری که بازاء هر عدد طبیعی n،

$$b_n = a_{k(n)} = a_{k_n}.$$

در این صورت رشته‌ی $\{b_n\}$ را به نام $\{a_{k(n)}\}$ یا $\{a_{k_n}\}$ یا

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n} \ldots$$

نیز میخوانند. تابع k را، که رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی است، تابع گزیننده‌ی رشتک $\{b_n\}$ نامند.

۵.۲.۱. تبصره. با شرایط مذکور در ۵.۲ و بنا بر ۴.۳.۳، همواره $k(n) \geqslant n$. پس، اگر رشته‌ی $b = \{b_n\}$ رشتکی از رشته‌ی $a = \{a_n\}$ باشد b_n مقدار تابع a است بازاء اندیسی حد اقل مساوی n (این مطلب را مختصراً بدین عبارت بیان میکنند که «هر b_n یک a_m است با شرط $m \geqslant n$»). این نکته اساس اثبات خواص رشتکها است، چنانکه عنقریب معلوم خواهد شد.

۵.۲.۲. تمرین

۱. پنج جمله‌ی اول و نیز جمله‌ی عمومی هر یک از رشتکهای رشته‌ی $\{a_n\}$ را که با تابع گزیننده‌ی k با ضابطه‌ی آتیه تعریف میشود بنویسید:

(آ) $k(n) = 2n.$ (ب) $k(n) = 2n - 1.$
(ج) $k(n) = n^2.$ (د) $k(n) = n^2 + 1.$

۲. رشتکی از رشته‌ی $\{2n - 1\}$ را که با تابع گزیننده‌ی k با ضابطه‌ی $k(n) = n^2$ مشخص میشود بنویسید.

۳. همان مسئله را در مورد رشته‌ی $\{\sqrt{n}\}$ و تابع گزیننده‌ی k با ضابطه‌ی $k_n = n^4$ حل کنید.

۴. همان مسئله را در مورد رشته‌ی $\left\{\frac{1}{2}[1 + (-1)^{n+1}]\right\}$ و تابع گزیننده‌ی k با ضابطه‌ی

$k_n = 2n - 1$ حل کنید.

۵. کدام یک از رشته‌های ذیل رشتک رشته‌ی $\{n\}$ است، و هر یک که هست تابع گزیننده‌اش چیست؟

(آ) $\frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2}, \frac{4 \cdot 5}{2}, \ldots.$

(ب) $1, 2, 3, 4, \ldots.$

(پ) $2, 1, 3, 4, \ldots.$

(ت) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots.$

۶. a رشته‌ای است از اعداد حقیقی و k رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی. ثابت کنید که حاصلضرب نسبی (۳.۴ : ۳) $a \circ k$ رشتکی است از a که با تابع گزیننده‌ی k مشخص میشود.

۷. هر رشته رشتک خود میباشد.

۸. هر رشتک یک رشتک یک رشته رشتکی است از این رشته.

۵.۲.۳. تبصره. رشتکهای یک رشته ممکن است واجد خواصی باشند که رشته‌ی اصلی فاقد آنهاست. مثلاً، رشته‌ی

$$1, -1, 1, -1, \ldots \qquad (1)$$

دارای دو رشتک

$$1, 1, 1, \ldots; \qquad -1, -1, -1, \ldots$$

است، که هر دو متقاربند، و حال آنکه رشته‌ی (۱) اصلاً حد ندارد. از طرف دیگر، رشتکهای یک رشته بعضی از خواص آن رشته را به ارث میبرند. مثلاً، معلوم است که هر رشتک یک رشته‌ی محدود رشته‌ای است محدود. در این زمینه، قضیه‌ی ذیل اهمیت تمام دارد.

۵.۲.۴. قضیه. هر رشتک یک رشته‌ی حددار دارای حدی مساوی حد آن رشته است.

برهان. فرض کنیم $\{b_n\}$ رشتکی از رشته‌ی $\{a_n\}$، k تابع گزیننده‌ی آن، و $\alpha = \lim a_n$ موجود باشد. ابتدا فرض کنیم $\alpha \in \mathbf{R}$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، بنا بر فرض، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. اما، بنا بر ۴.۳.۳، همواره $k(n) \geqslant n$. پس، اگر $n > N$ آنگاه $k(n) > N$، و لهذا $|a_{k(n)} - \alpha| < \varepsilon$، و یا $|b_n - \alpha| < \varepsilon$، و بالنتیجه، $\lim b_n = \alpha$. اثبات در حالتی که $\alpha = \infty$ یا $\alpha = -\infty$ به همین قیاس است، و به متعلم محول میشود. ▲

۵.۲.۵. تبصره. بنا بر قضیه‌ی فوق، اگر رشته‌ای متقارب باشد هر رشتک آن نیز متقارب است. اما، چنانکه در ۵.۲.۳ دیدیم، این شرط عموماً کافی نیست، بدین معنی که ممکن است رشتکهائی از یک رشته متقارب باشند بی‌آنکه آن رشته خود متقارب باشد. دو حالت خاص مهم کفایت در قضایای ذیل آمده است.

۵.۲.۶. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه یک رشته‌ی یکنواخت متقارب باشد آنست که

رشتکی متقارب داشته باشد.
برهان. لزوم بنا بر ۵.۲.۴ معلوم است. بالعکس، فرض کنیم رشته‌ی یکنـواخت $\{a_n\}$ رشتکی متقارب داشته باشد. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب نباشد، بنا بر ۴.۴، حد آن ∞ یا $\infty-$ است. پس، بنا بر ۵.۲.۴، حد هر رشتک آن ∞ یا $\infty-$ میباشد، و این خلاف فرض است. ▲

۵.۲.۷. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب باشد آنست که رشتکهای $\{a_{2n-1}\}$ و $\{a_{2n}\}$ از آن متقارب به یک حد باشند.
برهان. لزوم شرط به موجب ۵.۲.۴ بدیهی است. برای اثبات کفـایت، مـلاحظه میکنیم کـه رشتکهای مذکور در قضیه دارای توابع گزینـنده‌ی j و k با ضـوابـط $j(n) = 2n - 1$ و $k(n) = 2n$ میباشند، و آن دو رشتک با ضوابط

$$b_n = a_{2n-1}, \qquad c_n = a_{2n}$$

تعریف میشوند. اینک فرض کنیم

$$\lim b_n = \lim c_n = \alpha \in \mathbf{R}.$$

عدد مثبت دلخواه ε را اختیار میکنیم. بنـا بر مفروضات، دو عدد طبیعی مـانند N_1 و N_2 هست که همواره

(۱) اگر $n \geqslant N_1$ آنگاه $|b_n - \alpha| < \varepsilon$؛

(۲) اگر $n \geqslant N_2$ آنگاه $|c_n - \alpha| < \varepsilon$.

فرض کنیم

$$N = \mathrm{Max}\,\{2N_1 - 1, 2N_2\}. \qquad (۳)$$

گوئیم همواره

(*) اگر $m \geqslant N$ آنگاه $|a_m - \alpha| < \varepsilon$.

زیرا، فرض کنیم $m \geqslant N$. بنا بر (۳) خـواهیـم داشـت، $m \geqslant 2N_1 - 1$ و $m \geqslant 2N_2$. اینک بر حسب اینکه m فرد یا زوج باشد دو حالت تشخیص میدهیم. اولاً، اگر m فـرد باشد آنگاه عددی طبیعی مـانند n هست کـه $m = 2n - 1$. پس $2n - 1 \geqslant 2N_1 - 1$، و از آنجا، $n \geqslant N_1$. پس، بنا بـر (۱)، $|b_n - \alpha| < \varepsilon$. امـا $b_n = a_{2n-1} = a_m$. بالنتیجه، $|a_m - \alpha| < \varepsilon$. به همین طریق معلـوم میشود کـه در حالتی کـه m زوج باشد نیـز همین نامساوی برقرار است. پس، (*) برقرار میباشد، و بالنتیجه، $\lim a_m = \alpha$. ▲

۵.۲.۸. مثال. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی ذیل هیچرشته است:

$$a_n = \begin{cases} -2/(n+1) & (2 \nmid n), \\ 2n/(n^2+4) & (2 \mid n). \end{cases}$$

برای اثبات کافی است ملاحظه کنیم که رشته‌های

$$\{a_{2n-1}\} = \{-1/n\}, \qquad \{a_{2n}\} = \{n/(n^2+1)\}$$

هیچرشته‌اند، یعنی $\lim a_{2n-1} = \lim a_{2n} = 0$. پس، $\lim a_n = 0$.

۵.۲.۹. تمرین

۱. در ۵.۲.۸، از چه مرتبه‌ای ببعد $|a_n| < 0{,}1$؟

۲. ثابت کنید که
$$\lim \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = e.$$

۳. شخصی مدعی است که $e=1$، و استدلال او اینست:
«واضح است که
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^n = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^n.$$
پس، بنا بر قسمت (پ) از ۲ : ۴.۵.۵ و تعریف e،
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} \to (e/e)^n = 1.$$
و لهذا، بنا بر مسئله‌ی ۲ فوق، $e=1$.»
چه ایرادی بر این استدلال وارد است؟

۴. مطلوبست
$$\lim \frac{3(5^n+4n)+1}{2(5^n+4n)-1}.$$

۵. از رشته‌ی $\{a_n\}$، سه رشتک $\{a'_n\}$، $\{a''_n\}$، و $\{a'''_n\}$ با ضوابط
$$a'_n = a_{3n-2}, \qquad a''_n = a_{3n-1}, \qquad a'''_n = a_{3n}$$
استخراج شده‌اند. ثابت کنید که اگر این سه رشته متقارب به عدد α باشند رشته‌ی $\{a_n\}$ نیز متقارب به α است.

۶. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی
$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{اگر } n = 3k \pm 1 \\ 1/(n^2+1) & \text{اگر } n = 3k \end{cases}$$
تعریف شده است. ثابت کنید که $\{a_n\}$ هیچ‌رشته است. از چه مرتبه‌ای ببعد همواره $|a_n| < 10^{-4}$؟

۷. در تعمیم قضیه‌ی ۵.۲.۷، ثابت کنید که اگر دو رشتک $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ از رشته‌ی $\{a_n\}$ این رشته را افنا کنند ــ یعنی هر a_n یک b_n یا یک c_n باشد ــ و رشته‌های $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ متقارب به یک عدد حقیقی باشند، رشته‌ی $\{a_n\}$ نیز متقارب به همین عدد است.

۸. در تعمیم حکم مسئله‌ی ۷، ثابت کنید که اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ با تعدادی متناهی از رشتکهای خود افنا شود، و این رشتکها متقارب به یک عدد حقیقی باشند، رشته‌ی $\{a_n\}$ نیز متقارب به همین عدد است. (مسئله‌ی ۵ فوق حالت خاصی از این قضیه است.)

۹. اگر رشته‌ی $\{b_n\}$ رشتکی از رشته‌ی $\{a_n\}$ باشد آنگاه
$$\sup b_n \leqslant \sup a_n, \qquad \inf b_n \geqslant \inf a_n.$$

† **۵.۳. تبصره.** قضیه‌ی ۵.۲.۴ در شرایطی سست‌تر برقرار است. برای بیان مطلب قبلاً

تعریفی میآوریم.

† **۵.۳.۱. تعریف.** فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد. رشته‌ی $\{b_n\}$ را یک رشتک تَوَسُّعی رشته‌ی $\{a_n\}$ نامیم در صورتی که تابعی مانند k بر $\mathbf{N}$ (یعنی رشته‌ای مانند k از اعداد طبیعی) باشد که $\lim_n k_n = \infty$ و همواره

$$b_n = a_{k(n)} = a_{k_n}.$$

در این صورت، رشته‌ی $\{b_n\}$ را به اسامی $\{a_{k(n)}\}$ و $\{a_{k_n}\}$ میخوانیم، و رشته‌ی k را تابع گزیننده‌ی رشتک $\{b_n\}$ گوئیم.

† **۵.۳.۲. امثله و فواید**

(آ). برداشتن قید «اکیداً صعودی» از تابع گزیننده راه را برای اختلاف ترتیب توالی جمل در رشته‌ی اولیه و رشتکها باز میکند. مثلاً، اگر تابع k را با ضابطه‌ی

$$k(n) = \begin{cases} n^2/2 & (2 \mid n) \\ n^2+1 & (2 \nmid n) \end{cases}$$

تعریف کنیم، و $\{b_n\}$ رشتک توسعی رشته‌ی $\{a_n\}$ با تابع گزیننده‌ی k باشد خواهیم داشت،

$$b_1 = a_2, \qquad b_2 = a_2, \qquad b_3 = a_{10}, \qquad b_4 = a_8, \qquad \ldots$$

(ب). قید «اکیداً صعودی» در تعریف رشتکها مانع از این است که جمله‌های رشته‌ی اصلی در رشتکی از آن مکرر شوند. اما، چنانکه مثال فوق نشان میدهد، در رشتکهای توسعی، این تکرار ممکن است. اگر تابع گزیننده صعودی (نه اکیداً صعودی) باشد جمله‌هائی از رشته‌ی اولیه در رشتک توسعی تکرار میشوند، مانند رشتکهای

$$(۱) \qquad a_1, a_3, a_3, a_6, a_6, a_6, a_7, a_8, a_8, \ldots,$$

$$(۲) \qquad a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, \ldots$$

از رشته‌ی $\{a_n\}$. در این حالت، رشتک توسعی «لکنت» دارد، و میتوان آن را رشتک الکن نامید. ملاحظه کنید که، در این حالت، ترتیب توالی جمل محفوظ میماند. بالاخره، توجه کنید که تابع گزیننده‌ی رشته‌ی (۲)، بر خلاف تابع گزیننده‌ی رشته‌ی (۱)، جمیع مقادیر طبیعی را میگیرد.

† **۵.۳.۳. قضیه.** هر رشتک توسعی یک رشته‌ی حددار دارای حدی مساوی با حد آن رشته است.

برهان مانند برهان ۵.۲.۴ است. توجه کنید که، به موجب شرط $\lim_n k_n = \infty$، بازاء هر عدد طبیعی مانند N عددی طبیعی مانند M هست که همواره اگر $n > M$ آنگاه $k_n > N$.

† **۵.۳.۴. تمرین**

۰۱ ده جمله‌ی اول و نیز جمله‌ی عمومی هر یک از رشتکهای توسعی رشته‌ی $\{a_n\}$ را که با تابع گزیننده‌ی k با ضابطه‌ی آتیه تعریف میشود بنویسید:

(آ) $k_n = n + (-1)^{n+1}$. (ب) $k(n) = n^2 + (-1)^{n+1}$.

(پ) $k(n) = [(n+1)/2]$[1].

۲. رشته‌ی

$$a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, \ldots$$

با تکرار هر جمله‌ی رشته‌ی $\{a_n\}$ به تعداد مرتبه‌ی آن حاصل شده است. تابع گزیننده‌ی این رشته را تعریف کنید.

۳. $\{b_n\}$ رشتکی الکن از رشته‌ی $\{a_n\}$ است، و تابع گزیننده‌ی آن جمیع مقادیر طبیعی را میگیرد. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه b_n متقارب به عدد α باشد آنست که a_n متقارب به α باشد.

۶ § قوای حقیقی

۶.۱. مقدمه. در این مرحله، عباراتی مانند a^3، a^{-2} $(a \neq 0)$، $a^{2/5}$، و $a^{-2/5}$ $(a > 0)$ — و خلاصه، عبارت a^x بازاء مقادیر منطق x و شرط $a \neq 0$ یا $a > 0$ در موارد مقتضی — برای ما معنی دارند، اما، عبارتی مانند $a^{2^{1/2}}$ بیمعنی است. مقصود از مبحث حاضر تعریف موجودی است که، بازاء هر مقدار حقیقی x، به نام a^x خوانده میشود.

پیش از شروع مطلب، بد نیست که مراحل توسیع تدریجی تعریف قوه را که تاکنون آموخته‌ایم از نظر بگذرانیم:

(آ) در مرحله‌ی اول، a^x را به عنوان تابعی بر $\mathbf{N}$ تعریف کردیم؛

(ب) در مرحله‌ی بعد، a^x $(a \neq 0)$ را به عنوان تابعی بر $\mathbf{I}$ معرفی نمودیم؛

(پ) در مرحله‌ی سوم، a^x $(a > 0)$ را به عنوان تابعی بر $\mathbf{Q}$ تعریف کردیم.

توسیعی که فعلاً در نظر داریم تعریف a^x $(a > 0)$ است به عنوان تابعی بر $\mathbf{R}$. برای آماده کردن زمینه، تذکر میدهیم که اگر $x \in \mathbf{R}$ آنگاه، بنا بر ۴.۴.۳، رشته‌ای از اعداد منطق هست که به x متقارب است. اگر $\{r_n\}$ چنین رشته‌ای باشد، چنانکه خواهد آمد، رشته‌ی $\{a^{r_n}\}$ متقارب است، و میتوان حد آن را a^x نامید. اما اینک وضعی مانند آنکه در ۴.۵ : ۶ با آن مواجه شدیم پیش میآید، مگر آنکه ثابت شود که اگر رشته‌ی دلخواه $\{s_n\}$ از اعداد منطق نیز به x متقارب باشد حدود دو رشته‌ی $\{a^{r_n}\}$ و $\{a^{s_n}\}$ یکسان است. در این صورت، این حد با اعداد a و x کاملاً مشخص خواهد بود، و این عدد مشخص را «a^x» مینامیم. پیش از اینکه به اثبات دو حکم اساسی مذکور (موضوع قضیه‌ی ۶.۲) پردازیم، دو لم ثابت میکنیم.

۶.۱.۱. لم ۱. اگر $a > 0$ و $\{r_n\}$ هیچرشته‌ای از اعداد منطق باشد رشته‌ی $\{a^{r_n} - 1\}$ هیچرشته‌است.

برهان. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر ۲.۴.۴، رشته‌های $\{a^{1/n}\}$ و $\{(1/a)^{1/n}\}$

---

(۱) کروشه به معنی جزء صحیح است.

(یا $\{a^{-1/n}\}$) متقارب به 1 اند. پس، عددی طبیعی مانند N_1 هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N_1$ آنگاه $a^{1/n}$ و $a^{-1/n}$، در عین حال، بین $1+\varepsilon$ و $1-\varepsilon$ اند. پس، بالاخص، a^{1/N_1} و a^{-1/N_1} بین $1+\varepsilon$ و $1-\varepsilon$ میباشند. چون $\{r_n\}$ هیچرشته است، عددی طبیعی مانند N هست که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $|r_n| < 1/N_1$، و از آنجا، $-1/N_1 < r_n < 1/N_1$، و بالنتیجه، بنا بر ۴.۷.۵ : ۶، a^{r_n} بین a^{1/N_1} و a^{-1/N_1} است، و چون هر یک از این دو خود بین $1+\varepsilon$ و $1-\varepsilon$ است، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $1-\varepsilon < a^{r_n} < 1+\varepsilon$، و یا $|a^{r_n}-1| < \varepsilon$. ▲

۶.۱.۲. لم ۲. اگر $a > 0$ و $\{r_n\}$ رشته‌ای متقارب و یکنواخت از اعداد منطق باشد رشته‌ی $\{a^{r_n}\}$ متقارب است.

برهان. بنا بر مفروضات، رشته‌ی $\{r_n\}$ محدود است. پس، دو عدد صحیح مانند M و N هست که همواره $M < r_n < N$، و بالنتیجه، همواره a^{r_n} بین دو عدد ثابت a^M و a^N است. بعلاوه، اگر $\{r_n\}$ یکنواخت باشد بالبداهه $\{a^{r_n}\}$ نیز یکنواخت است (چرا؟). پس، $\{a^{r_n}\}$ رشته‌ای است محدود و یکنواخت، و بالنتیجه، متقارب. ▲

۶.۲. قضیه. بازاء هر عدد مثبت a و هر عدد x، اولاً، اگر $\{r_n\}$ رشته‌ی دلخواهی از اعداد منطق و متقارب به x باشد رشته‌ی $\{a^{r_n}\}$ متقارب است، و ثانیاً، اگر $\{r_n\}$ و $\{s_n\}$ دو رشته از اعداد منطق و متقارب به x باشند دو رشته‌ی $\{a^{r_n}\}$ و $\{a^{s_n}\}$ متقارب به یک حد هستند.

برهان. فرض کنیم $a > 0$ و x عدد حقیقی دلخواهی باشد. اولاً، فرض کنیم $\{r_n\}$ رشته‌ی دلخواهی از اعداد منطق باشد بطوری که $x = \lim r_n$ (۱). بنا بر ۴.۴.۳، رشته‌ای صعودی از اعداد منطق، مثلاً رشته‌ی $\{r'_n\}$، هست که $x = \lim r'_n$ (۲). بنا بر لم ۲، $\lim a^{r'_n}$ موجود است؛ فرض کنیم $\alpha = \lim a^{r'_n}$ (۳). بنا بر (۱) و (۲)، رشته‌ی $\{r_n - r'_n\}$ هیچرشته است. پس، بنا بر لم ۱، رشته‌ی $\{a^{r_n - r'_n}\}$ متقارب به 1 میباشد. بالنتیجه، بنا بر (۳) و قضیه‌ی حد حاصلضرب، رشته‌ای که جمله‌ی عمومیش $a^{r_n - r'_n} \cdot a^{r'_n}$ (یعنی a^{r_n}) است متقارب به $\alpha \cdot 1$ میباشد. ثانیاً، اگر $x = \lim r_n$ و $x = \lim s_n$ آنگاه، بنا بر ۵.۲.۷، رشته‌ی

$$r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_n, s_n, \ldots$$

متقارب (به x) است. پس، بنا بر قسمت اول قضیه، رشته‌ی

$$a^{r_1}, a^{s_1}, a^{r_2}, a^{s_2}, \ldots, a^{r_n}, a^{s_n}, \ldots$$

متقارب است. بالنتیجه، بنا بر ۵.۲.۴، دو رشتک $\{a^{r_n}\}$ و $\{a^{s_n}\}$ آن متقارب به یک حد هستند. ▲

اینک تعریف ذیل موجه است:

۶.۳. تعریف. بازاء عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی x، a^x یعنی $\lim_n a^{r_n}$، که در آن، $\{r_n\}$ رشته‌ی دلخواهی از اعداد منطق و متقارب به x است. (عدد a^x، چنانکه دیده شد، از

رشته‌ی اخیر مستقل است، و با a و x مشخص میشود.)

۶.۳.۱. تبصره. اگر $a > 0$، و x عددی منطق باشد، یکی از رشته‌های منطق متقارب به x رشته‌ی ثابت $\{x\}$ است. پس، a^x بنا بر تعریف فوق حد رشته‌ی $\{a^x\}$ است که در آن، a^x قوه‌ی منطقی از a بنا بر تعریف قوای منطق میباشد. بالنتیجه، تعریف جدید و وسیع قوه تعریف سابق را فرا میگیرد.

۶.۳.۲. قضیه.[1] همواره اگر $a > 0$ آنگاه $a^x > 0$.

برهان. فرض کنیم $\{r_n\}$ رشته‌ای از اعداد منطق و متقارب به x باشد. بنا بر تعریف، $a^x = \lim a^{r_n}$. چون رشته‌ی $\{r_n\}$ متقارب است محدود میباشد، و لهذا، دو عدد صحیح مانند M و N هست که همواره r_n بین M و N است. پس، a^{r_n} بین a^M و a^N میباشد. بی آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود میتوان فرض کرد که $a^M < a^{r_n}$. پس، $\lim a^M \leqslant \lim a^{r_n}$، و از آنجا، $a^M \leqslant a^x$. اما، چون $a > 0$، $a^M > 0$. پس، $a^x > 0$. ▲

از نکات جالب اینست که قواعد محاسبه با قوای حقیقی همانند قواعد محاسبه با قوای منطق است، یعنی

۶.۴. قضیه (قواعد محاسبه با قوای حقیقی). اگر $a > 0$ و $b > 0$، و x و y اعداد حقیقی دلخواه باشند،

I.	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
II.	$a^x/a^y = a^{x-y}$.
III.	$(a^x)^y = a^{xy}$.
IV.	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$.
V.	$a^x/b^x = (a/b)^x$.
VI.	$1^x = 1$.

برهان. اثبات ــ جز در مورد III، که در ۶.۶.۳ خواهد آمد ــ بسیار سهل است.

قسمت I. دو رشته مانند $\{r_n\}$ و $\{s_n\}$ از اعداد منطق اختیار میکنیم که $x = \lim r_n$ و $y = \lim s_n$. پس، اگر $t_n = r_n + s_n$ آنگاه $\{t_n\}$ رشته‌ای است از اعداد منطق و $\lim t_n = x + y$؛ و بنا بر تعریف، $a^{x+y} = \lim a^{t_n}$. اما، بنا بر احکام مربوط به قوای منطق،

$$a^{t_n} = a^{r_n+s_n} = a^{r_n} \cdot a^{s_n}.$$

پس، بر طبق قضیه‌ی حد حاصلضرب،

$$a^{x+y} = \lim a^{t_n} = \lim a^{r_n} \cdot \lim a^{s_n} = a^x \cdot a^y.$$

قسمت II. اثبات به همان طریق است که در باب قوای منطق دانسته شد. ضمناً، بنا بر

(۱) قید «$a > 0$» در بیان قضیه زاید است، زیرا a^x بازاء مقادیر مثبت a تعریف شده است. معذلک، برای جلب توجه آن را آورده‌ایم.

این قسمت،

$$a^{-x} = a^{0-x} = a^0/a^x = 1/a^x.$$

قسمت IV. رشته‌ای مانند $\{r_n\}$ از اعداد منطق اختیار میکنیم که $x = \lim r_n$. بنا بر تعریف قوای حقیقی و آنچه در قوای منطق دانسته شد،

$$a^x \cdot b^x = \lim a^{r_n} \cdot \lim b^{r_n} = \lim (a^{r_n} b^{r_n}) = \lim (ab)^{r_n} = (ab)^x.$$

قسمت V. نتیجه‌ی ساده‌ی قسمت IV است.

قسمت VI. رشته‌ی $\{r_n\}$ را مانند قسمت IV اختیار میکنیم.

$$1^x = \lim 1^{r_n} = \lim 1 = 1. \blacktriangle$$

اینک به تعمیم احکام ۴.۷.۱ ـ ۴.۷.۵ فصل ۶ در باب قوای حقیقی میپردازیم.

۶.۵. قضیه. فرض کنیم $a > 0$ و $x \in \mathbf{R}$.

I. اگر $a > 1$ آنگاه

$$x < 0 \Leftrightarrow a^x < 1 \text{ و } x > 0 \Leftrightarrow a^x > 1$$

II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه

$$x < 0 \Leftrightarrow a^x > 1 \text{ و } x > 0 \Leftrightarrow a^x < 1$$

برهان. قسمت I. فرض کنیم $a > 1$ (۱). برای اثبات معادلات مذکور، ثابت میکنیم که

(آ) اگر $x > 0$ آنگاه $a^x > 1$. (ب) اگر $x < 0$ آنگاه $a^x < 1$.

(پ) اگر $a^x > 1$ آنگاه $x > 0$. (ت) اگر $a^x < 1$ آنگاه $x < 0$.

برای اثبات (آ)، فرض کنیم $x > 0$. رشته‌ای مانند $\{r_n\}$ از اعداد منطق مثبت اختیار میکنیم که $x = \lim r_n$. چون $x/2 > 0$، از مرتبه‌ای ببعد $|r_n - x| < x/2$، و از آنجا، $r_n > x/2$. فرض کنیم r عددی منطق باشد بطوری که $0 < r < x/2$. بالنتیجه $0 < r < r_n$. پس، بنا بر (۱) و ۴.۷.۵ : ۶، $a^0 < a^r < a^{r_n}$، و بالنتیجه $1 < a^r$ (۲) و $a^r < a^{r_n}$ (۳). از (۳) نتیجه میشود، $\lim a^r \leqslant \lim a^{r_n}$. پس، چون a^r ثابت است، $a^r \leqslant a^x$، و از آنجا، با توجه به (۲)، $1 < a^x$. برای اثبات (ب)، فرض کنیم $x < 0$. پس، $-x > 0$، و بنا بر قسمت (آ)، $a^{-x} > 1$، و از آنجا $1/a^x > 1$، و بالنتیجه، $a^x < 1$.

اثبات (پ) و (ت) به برهان خلف است و به متعلم محول میشود. پس، اثبات قسمت I تمام است.

برای اثبات قسمت II کافی است ملاحظه کنیم که اگر $0 < a < 1$ آنگاه $1/a > 1$. پس، $x > 0$ معادل $(1/a)^x > 1$ است. اما، بنا بر قسمتهای V و VI از قضیه‌ی ۶.۴، $(1/a)^x = 1^x/a^x = 1/a^x$. پس، $x > 0$ معادل $1/a^x > 1$ است، که خود معادل $a^x < 1$ میباشد. اثبات معادله‌ی دیگر به همین قیاس است. ▲

اثبات قضایای ذیل بر متعلم است:

۶.۵.۱. قضیه. فرض کنیم $a > 0$، $b > 0$، و $x \in \mathbf{R}$.

I. اگر $x > 0$ آنگاه $a^x < b^x \Leftrightarrow a < b$.

II. اگر $x < 0$ آنگاه $b^x < a^x$ $\Leftrightarrow$ $a < b$.

۶.۵.۲. قضیه. اگر $a > 0$ و $b > 0$، و بازاء عددی حقیقی و ناصفر مانند x، $a^x = b^x$، آنگاه $a = b$.

۶.۵.۳ قضیه. فرض کنیم $a > 0$ و $x, y \in \mathbf{R}$.
I. اگر $a > 1$ آنگاه $a^x < a^y$ $\Leftrightarrow$ $x < y$.
II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a^y < a^x$ $\Leftrightarrow$ $x < y$.

۶.۶. قضایائی در باب حدود. قضیه‌ی کلی این قسمت قضیه‌ی ۶.۶.۵ است که، به موجب آن، اگر $\lim a_n$ و $\lim x_n$ حقیقی باشند، و $\lim a_n > 0$، آنگاه $\lim a_n^{x_n}$ موجود است، و

$$\lim a_n^{x_n} = (\lim a_n)^{\lim x_n}.$$

مقدمةً قضیه را در حالاتی که یکی از دو رشته‌ی $\{a_n\}$ و $\{x_n\}$ رشته‌ای ثابت باشد ثابت میکنیم.

۶.۶.۱. قضیه. اگر $a > 0$ و $\{x_n\}$ هیچرشته‌ای از اعداد حقیقی باشد رشته‌ی $\{a^{x_n} - 1\}$ هیچرشته است، و اگر اولی یکنواخت باشد دومی هم یکنواخت است.
اثبات بر متعلم است (مانند اثبات ۶.۱.۱ استدلال کنید).

۶.۶.۲. قضیه. اگر $a > 0$ و رشته‌ی $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی متقارب به عدد حقیقی γ باشد رشته‌ی $\{a^{x_n}\}$ متقارب به a^γ است.
برهان. بنا بفرض، $\{x_n - \gamma\}$ هیچرشته است. پس، بنا بر قضیه‌ی قبل، $a^{x_n - \gamma} \to 1$. چون $\{a^\gamma\}$ رشته‌ای ثابت است، و $a^{x_n} = a^{x_n - \gamma} \cdot a^\gamma$، حکم برقرار میباشد. ▲

۶.۶.۳. فایده. اینک به اثبات حکم III قضیه‌ی ۶.۴، یعنی رابطه‌ی

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (a > 0)$$

میپردازیم. اگر $y = 0$ حکم بدیهی است. پس، فرض میکنیم $y \neq 0$، و سه حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $y \in \mathbf{Q}^+$؛ مثلاً $y = m/n$، که در آن، $m, n \in \mathbf{N}$. فرض کنیم

$$u = (a^x)^y = (a^x)^{m/n}, \qquad v = a^{xy} = a^{mx/n}.$$

بالنتیجه، $u^n = (a^x)^m$. پس، چون $m \in \mathbf{N}$،

$$u^n = \prod_{i=1}^{m} a^x = a^{\sum_{i=1}^{m} x} = a^{mx};$$

و به همین قیاس

$$v^n = (a^{mx/n})^n = a^{\sum_{i=1}^{n}(mx/n)} = a^{n\cdot(mx/n)} = a^{mx}.$$

پس، $u^n = v^n$، و از آنجا $u = v$.

حالت دوم: $y \in \mathbf{Q}^-$. اگر $z = -y$، بنا بر حالت قبل،

$$(a^x)^y = (a^x)^{-z} = \frac{1}{(a^x)^z} = \frac{1}{a^{xz}} = a^{-xz} = a^{xy}.$$

حالت سوم: y عدد اصم دلخواهی است. فرض کنیم $\{r_n\}$ رشته‌ای از اعداد منطق و متقارب به y باشد. بنا بر تعریف قوه و حالاتی که ثابت شد

$$(a^x)^y = \lim (a^x)^{r_n} = \lim a^{xr_n} \text{ [۶.۶.۲] } = a^{xy}. \blacktriangle$$

۶.۶.۴. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد مثبت و متقارب به عدد مثبت α باشد، و x عددی دلخواه باشد، رشته‌ی $\{a_n^x\}$ متقارب به α^x است.

برهان. بازاء $x = 0$ حکم بدیهی است. پس، فرض کنیم $x \neq 0$، و ε عدد مثبت دلخواهی باشد کوچکتر از α^x، و

$$b = (\alpha^x - \varepsilon)^{1/x}, \qquad c = (\alpha^x + \varepsilon)^{1/x}.$$

بنا بر III : ۶.۴،

$$b^x = \alpha^x - \varepsilon, \qquad c^x = \alpha^x + \varepsilon, \qquad (۱)$$

و بالنتیجه، $b^x < \alpha^x < c^x$. پس، بنا بر ۶.۵.۱، α بین b و c است، و چون، بنا بفرض، $a_n \to \alpha$، از مرتبه‌ای ببعد، a_n نیز بین b و c میباشد، و لهذا، a_n^x هم بین b^x و c^x است. پس، با توجه به روابط (۱)، $\alpha^x - \varepsilon < a_n^x < \alpha^x + \varepsilon$، و از آنجا، $| a_n^x - \alpha^x | < \varepsilon$. $\blacktriangle$

۶.۶.۵. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد مثبت و متقارب به عدد مثبت α باشد، و $\lim x_n = \gamma$ آنگاه

$$\lim a_n^{x_n} = \alpha^{\gamma}.$$

برهان. بنا بفرض، از مرتبه‌ای ببعد $| a_n - \alpha | < \alpha/2$، و از آنجا،

$$\alpha/2 < a_n < 3\alpha/2 < 2\alpha.$$

پس، با توجه به ۶.۵.۱،

$$(\alpha/2)^{|x_n-\gamma|} \leqslant a_n^{|x_n-\gamma|} \leqslant (2\alpha)^{|x_n-\gamma|}.$$

چون $| x_n - \gamma | \to 0$، بنا بر ۶.۶.۱،

$$\lim (\alpha/2)^{|x_n-\gamma|} = \lim (2\alpha)^{|x_n-\gamma|} = 1.$$

پس، $\lim a_n^{|x_n-\gamma|} = 1$ (۱). بالنتیجه،

$$\lim a_n^{-|x_n-\gamma|} = \lim \frac{1}{a_n^{|x_n-\gamma|}} = 1. \qquad (۲)$$

پس، چون همواره $-| x_n - \gamma | \leqslant x_n - \gamma \leqslant | x_n - \gamma |$، از (۱) و (۲) نتیجه میشود، $\lim a_n^{x_n-\gamma} = 1$. بالاخره، چون $\lim a_n^{\gamma} = \alpha^{\gamma}$،

$$\lim\,(a_n^{x_n-\gamma}\cdot a_n^{\gamma}) = 1\cdot\alpha^{\gamma} = \alpha^{\gamma};$$

و از آنجا، $\lim a_n^{x_n} = \alpha^{\gamma}$. ▲

در مورد هیچرشته‌ها قضیه‌ی ذیل برقرار است:

۶.۶.۶. قضیه. اگر $\{a_n\}$ هیچرشته‌ای با جمل مثبت باشد، و $\{x_n\}$ رشته‌ای متقارب به عددی مثبت باشد آنگاه رشته‌ی $\{a_n^{x_n}\}$ هیچرشته است.

برهان. ابتدا حکم را در مورد رشته‌ی ثابت $\{x\}$ $(x>0)$ ثابت میکنیم. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد، و $\delta = \varepsilon^{1/x}$. بنا بفرض، از مرتبه‌ای بعد، $0 < a_n < \delta$، و از آنجا، $0 < a_n^x < \delta^x = \varepsilon$.

اینک به اثبات حکم در حالت کلی میپردازیم. فرض کنیم $\lim x_n = \gamma > 0$ (۱). چون $\{a_n\}$ هیچرشته است، از مرتبه‌ای بعد، $0 < a_n < 1$ (۲). بعلاوه بنا بر (۱)، از مرتبه‌ای بعد، $x_n > \gamma/2$ (۳). پس، از مرتبه‌ای بعد، (۲) و (۳) در عین حال برقرارند. بالنتیجه، بنا بر ۶.۵.۳، از مرتبه‌ای بعد،

$$0 < a_n^{x_n} < a_n^{\gamma/2}.$$

اما، بنا بر حالت خاصی که ثابت شد، $\{a_n^{\gamma/2}\}$ هیچرشته است. پس، $\lim a_n^{x_n} = 0$. ▲

۶.۶.۷. تبصره. با توجه به حالت خاص قضیه‌ی فوق، میتوان، بازاء مقادیر مثبت x، 0^x را چنین تعریف کرد:

$$0^x = 0 \qquad (x>0).$$

۶.۶.۸ امثله

(آ). تحقیق در رفتار رشته‌ی $\{n^\alpha\}$، که در آن α عدد حقیقی ثابتی است[۱].

رشته‌ی مذکور همواره حد دارد، و

$$\lim_n n^\alpha = \begin{cases} 0 & (\alpha<0),\\ 1 & (\alpha=0),\\ \infty & (\alpha>0).\end{cases}$$

اگر $\alpha = 0$ حکم بدیهی است. اگر $\alpha < 0$، بنا بر ۶.۶.۶، $\lim (1/n)^{-\alpha} = 0$، و لهذا، $\lim n^\alpha = 0$. اگر $\alpha > 0$ آنگاه، بنا بر آنچه ثابت شد، $\lim n^{-\alpha} = 0$. پس، بنا بر ۳.۵.۱۶، $\lim n^\alpha = \infty$. ▲

(ب). تحقیق در رفتار رشته‌ی $\{n^\alpha a^n\}$، که در آن a و α دو عدد حقیقی ثابت‌اند.

اگر $a = 1$ رشته‌ی مورد بحث همان رشته‌ی مثال (آ) است. در حالات دیگر، رفتار رشته چنین است:

---

(۱) در آ: ۳.۵.۲۰ در رفتار این رشته بازاءِ مقادیر منطق α تحقیق کردیم.

I. اگر $|a| < 1$ یا $a = -1 \ \& \ \alpha < 0$ آنگاه $\lim n^\alpha a^n = 0$.
II. اگر $a > 1$ آنگاه $\lim n^\alpha a^n = \infty$.
III. اگر $a = -1 \ \& \ \alpha = 0$ آنگاه رشته متباعد و دارای نوسانات محدود است.
IV. اگر $a = -1 \ \& \ \alpha > 0$ یا $a < -1$ آنگاه رشته متباعد و دارای نوسانات نامحدود است.

برهان. فرض کنیم $a \neq 1$.

حالت اول: $|a| < 1$. بنا بر ۳.۳.۱۰، $\lim a^n = 0$. حال اگر $\alpha \leqslant 0$، بنا بر مثال (آ)، $\lim n^\alpha$ مساوی 0 یا 1 است، و بالنتیجه، $\lim n^\alpha a^n = 0$. اگر $\alpha > 0$ فرض میکنیم $a_1 = |a|^{1/\alpha}$. پس، $0 < a_1 < 1$، و بنا بر ۲.۴.۶، $\lim n a_1^n = 0$. بالنتیجه، بنا بر ۶.۶.۶، $\lim (n a_1^n)^\alpha = 0$، و از آنجا، $\lim (n^\alpha |a|^n) = 0$. پس، $\lim n^\alpha a^n = 0$.

حالت دوم: $a = -1$. در این حالت، $n^\alpha a^n = (-1)^n n^\alpha$. رشتهی $\{(-1)^n\}$ محدود و دارای نوسانات محدود است. پس، با توجه به مثال (آ)، رشتهی $\{n^\alpha a^n\}$ اگر $\alpha < 0$ هیچرشته است، اگر $\alpha = 0$ متباعد و دارای نوسانات محدود است، و اگر $\alpha > 0$ متباعد و دارای نوسانات نامحدود میباشد.

حالت سوم: $|a| > 1$. اولاً، فرض کنیم $\alpha \leqslant 0$. اگر $a_1 = 1/a$ آنگاه
$$|n^\alpha a^n| = 1/n^{-\alpha}|a_1|^n.$$
چون $|a_1| < 1$، بنا بر حالت اول، $\lim (n^{-\alpha}|a_1|^n) = 0$. پس، $\lim |n^\alpha a^n| = \infty$.
ثانیاً، فرض کنیم $\alpha > 0$. چون $|n^\alpha a^n| \geqslant |a^n|$، خواهیم داشت $\lim |n^\alpha a^n| = \infty$.
پس، اگر $a > 1$ آنگاه $\lim n^\alpha a^n = \infty$، و اگر $a < -1$ آنگاه رشته نوسانات نامحدود دارد. ▲

۷ § لگاریتم

۷.۱. مقدمه. موضوع اولیهی این قسمت تحقیق در جوابهای معادلهی
$$a^\xi = u \tag{۱}$$
است، که در آن، a و u دو عدد مثبت مفروضاند.
وقتی که $a = 1$، بنا بر خواص قوه، معادلهی فوق، جز در حالتی که $u = 1$، ممتنع است، و اگر $a = u = 1$، هر عدد حقیقی در معادلهی (۱) صدق میکند. پس، این حالات را به یکسو مینهیم، و قضیهی اصلی این مبحث را چنین بیان میکنیم:

۷.۲. قضیه. بازاء هر دو عدد حقیقی مثبت a و u که a غیر از 1 باشد همواره یک و تنها یک عدد حقیقی مانند ξ هست که $a^\xi = u$.

برهان. اینکه منتها یک عدد موجود تواند بود نتیجهی مستقیم ۶.۵.۲ است. باقی میماند اثبات وجود. برای این منظور، دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $1 < a$. چون $0 < 1/a < 1$، رشته‌ی $\{a^{-n}\}$ هیچ‌رشته است. به آسانی دیده میشود (چگونه؟) که دو عدد طبیعی مانند n_1 و n_2 هست که $a^{n_1} > u$ (۱) و $a^{-n_2} < u$ (۲). اگر $A = \{x \mid a^x > u\}$، بنا بر (۱)، $A \neq \varnothing$، و بنا بر (۲)، A از پایین محدود است (چرا؟). پس، $\xi = \inf A$ (۳) موجود میباشد. حال ثابت میکنیم که $a^\xi = u$. اگر چنین نباشد $u > a^\xi$ یا $u < a^\xi$. برای ابطال این روابط، قبلاً ملاحظه میکنیم که $\lim a^\xi = a^\xi$ و $\lim a^{-1/n} = \lim a^{1/n} = 1$، و لهذا،

$$(۴)\quad \lim a^{\xi-\frac{1}{n}} = a^\xi, \qquad (۵)\quad \lim a^{\xi+\frac{1}{n}} = a^\xi.$$

حال اگر $u < a^\xi$ آنگاه، بنا بر (۴)، از مرتبه‌ای ببعد، $u < a^{\xi-\frac{1}{n}}$، و لهذا، $\xi - \frac{1}{n} \in A$، و این با (۳) متناقض است. اما اگر $u > a^\xi$ آنگاه، بنا بر (۵)، از مرتبه‌ای مانند N ببعد، $a^{\xi+\frac{1}{n}} < u$، و بالاخص، $a^{\xi+\frac{1}{N}} < u$. از اینجا معلوم میشود که A عضوی نابیشتر از $\xi + \frac{1}{N}$ نتواند داشت (زیرا، اگر $x \leqslant \xi + \frac{1}{N}$ آنگاه $a^x \leqslant a^{\xi+\frac{1}{N}} < u$، و لهذا، $x \notin A$). پس، $\xi + \frac{1}{N}$ یک بند پایین A است، و بالنتیجه، $\xi + \frac{1}{N} \leqslant \inf A$، و این نیز با (۳) متناقض است.

حالت دوم: $0 < a < 1$. در این صورت، $1/a > 1$، و بنا بر حالت اول، عددی مانند ξ_1 هست که $(1/a)^{\xi_1} = u$. پس، بازاء $\xi = -\xi_1$، $a^\xi = u$. ▲

۷.۲.۱. تعریف. بازاء هر دو عدد مثبت a و u که $a \neq 1$، یگانه عدد حقیقی ξ را که در معادله‌ی $a^\xi = u$ صدق کند لگاریتم u در مبنای a یا $\log_a u$ خوانیم. بالاخص، $\log_e u$ را لگاریتم طبیعی u نامیم.

در این کتاب هر جا «log» مینویسیم مقصود لگاریتم طبیعی است مگر آنکه خلاف این مقصود تصریح یا صریحاً از سیاق مطلب استنباط شود.

بنا بر قضیه و تعریف سابق

۷.۲.۲. قضیه. اگر $0 < a \neq 1$ و $0 < u$ آنگاه

$$a^\xi = u \;\Longleftrightarrow\; \xi = \log_a u$$

قواعد محاسبه با لگاریتم به وسیله‌ی معادله‌ی فوق و خواص قوه بدست میآید. اهم این قواعد در قضیه‌ی ذیل آمده است. اثبات قضیه بر متعلم است.

۷.۳. قضیه (قواعد محاسبه با لگاریتم). همواره روابط ذیل برقرارند (در هر رابطه، همه‌ی

لگاریتمها در یک مبنا مانند a هستند مگر آنکه خلاف این مقصود تصریح شده باشد):

I	$\log uv = \log u + \log v.$
II.	$\log (u/v) = \log u - \log v.$
III.	$\log u^v = v \log u.$
IV.	$\log 1 = 0.$
V.	$\log_a a = 1.$
VI.	$\log_a u = \log_b u \cdot \log_a b.$
VII.	$\log_a u + \log_{1/a} u = 0.$

قضیه‌ی ذیل در مقایسه اهمیت تمام دارد:

۷.۴. قضیه. فرض کنیم u و v دو عدد مثبت باشند.

I. اگر $a > 1$ آنگاه $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow u < v$.

II. اگر $0 < a < 1$ آنگاه $\log_a v < \log_a u \Leftrightarrow u < v$.

برهان. بنا بر VII : ۷.۳، کافی است قسمت I را ثابت کنیم. فرض کنیم $a > 1$، $\xi = \log_a u$، و $\eta = \log_a v$. اولاً، اگر $u < v$ ولی $\sim (\log_a u < \log_a v)$ آنگاه $\xi \geqslant \eta$. پس، بنا بر ۶.۵.۳، $a^\xi \geqslant a^\eta$، و از آنجا، $u \geqslant v$، و این با فرض متناقض است. ثانیاً، اگر $\xi < \eta$ به همان قیاس معلوم میشود که $u < v$. ▲

۷.۴.۱. امثله

(آ). نامساوی ذیل را حل کنید:

$$\log_x \sqrt{x + 12} > 1. \qquad (*)$$

بنا بر تعریف ریشه و لگاریتم، گزاره‌نمای $(*)$ بازاءِ $x \leqslant 0$ و $x = 1$ بیمعنی است. پس در مجموعه‌ی صدق $(*)$ در مجموعه‌ی

$$A = \mathbf{R}^+ - \{1\}$$

تحقیق میکنیم. در این مجموعه، $(*)$ معادل نامساوی

$$\log_x \sqrt{x + 12} > \log_x x \qquad (\dagger)$$

است. اینک، با توجه به ۷.۴، مجموعه‌ی A را به دو بازه‌ی $(1, \infty)$ و $(0, 1)$ افراز میکنیم.

(آ). در بازه‌ی $(1, \infty)$، بنا بر I : ۷.۴، نامساوی $(\dagger)$ معادل نامساوی $\sqrt{x + 12} > x$ است که خود، در آن بازه، معادل نامساوی $x^2 - x - 12 < 0$ (۱) میباشد. مجموعه‌ی صدق این نامساوی در $\mathbf{R}$ بازه‌ی $(-3, 4)$ است. پس، مجموعه‌ی صدق آن در $(1, \infty)$ عبارتست از

$$(1, \infty) \cap (-3, 4) = (1, 4).$$

بازه‌ی اخیر یک دسته از جوابهای نامساوی $(\dagger)$ یا $(*)$ میباشد.

(ب). در بازه‌ی $(0, 1)$، به همان قیاس و به استناد II : ۷.۴، نامساوی $(\dagger)$ معادل نامساوی $x^2 - x - 12 > 0$ میباشد، که مجموعه‌ی صدقش در $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی

$(4, \infty) \cup (-\infty, -3)$ است. پس، مجموعه‌ی صدق (†) در $(0, 1)$ عبارتست از
$$(0, 1) \cap [(-\infty, -3) \cup (4, \infty)] = \varnothing.$$
خلاصه، نامساوی (*) فقط و فقط یک دسته جواب دارد، و آن بازه‌ی $(1, 4)$ است.

(ب). نامساوی ذیل را حل و بحث کنید.
$$x^{\log_a x+1} > a^2 x. \qquad (*)$$
گزاره‌نمای فوق فقط وقتی معنی دارد که $0 < a \neq 1$ و $0 < x$. پس، فرض میکنیم
$$0 < a, \qquad a \neq 1, \qquad (۱)$$
و به تحقیق در مجموعه‌ی صدق (*) در $\mathbf{R}^+$ میپردازیم.

حالت اول: $a > 1$. بنا بر I : ۷.۴، نامساوی (*) در $\mathbf{R}^+$ معادل نامساوی
$$\log_a(x^{\log_a x+1}) > \log_a(a^2 x) \qquad (†)$$
است که، بنا بر قواعد محاسبه با لگاریتم، معادل نامساوی
$$(\log_a x + \sqrt{2})(\log_a x - \sqrt{2}) > 0$$
میباشند، و آن فقط و فقط وقتی برقرار است که
$$\log_a x > \sqrt{2} = \log_a a^{2^{1/2}} \qquad (۲)$$
یا
$$\log_a x < -\sqrt{2} = \log_a a^{-2^{1/2}}. \qquad (۳)$$
بنا بر ۷.۴، در $\mathbf{R}^+$، نامساوی (۲) معادل نامساوی $x > a^{2^{1/2}}$ و نامساوی (۳) معادل نامساوی $x < a^{-2^{1/2}}$ است. پس، مجموعه‌ی صدق (†) مجموعه‌ی $(0, a^{-2^{1/2}}) \cup (a^{2^{1/2}}, \infty)$ میباشد.

حالت دوم: $0 < a < 1$. به قیاس حالت قبل و به استناد II : ۷.۴ معلوم میشود که، در این حالت، نامساوی (*) معادل نامساوی
$$-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}$$
است، که مجموعه‌ی صدقش بازه‌ی $(a^{2^{1/2}}, a^{-2^{1/2}})$ میباشد، و همین بازه مجموعه‌ی صدق نامساوی (*) است.

۷.۴.۲. تمرین

۱. بازاء چه مقادیر x اسمنماهای ذیل معنی دارند؟ در اسمنماهای «حرفی» عنداللزوم بر حسب مقادیر مختلف حرف یا حروف بحث کنید.

(آ) $$\frac{1}{\sqrt{a^x - kb^x}}.$$

(ب) $$\log_a(\log_a(\log_a x)).$$

(پ) $$\sqrt{\frac{1-x}{x^2-8x+15}} + \log_{10}[\log_{10}(x^2-5x+16)-1].$$

۲. معادلات ذیل را حل و بحث کنید:

(آ) $$9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$$

(د) $\log_{10}2x = 2\log_{10}(x+\lambda).$

(ذ) $a^{b^x} = c.$

(ر) $\log_{100}x^2 = (\log_{\sqrt{x}}10)(\log_{10}10a - |\log_{10}(x/a)|).$

۳. دو معادله‌ی دو مجهولی ذیل را حل کنید:

$$xy = 3, \qquad |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3.$$

۴. دستگاههای ذیل را حل و بحث کنید:

(آ) $a^{2x} + a^{2y} = b, \quad a^{x+y} = c.$

(ب) $x^a = y^b, \quad \log_c\dfrac{x}{y} = (\log_c x)/(\log_c y).$

۵. نامساویهای ذیل را حل کنید:

(آ) $3^{\log_2\frac{3x-1}{x}} < 1.$

(ب) $(\log_x 2)(\log_{2x}2)(\log_2 4x) > 1.$

(پ) $\log_x\dfrac{2x-1}{x-1} > 1.$

(ت) $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2}.$

(ث) $\log_3\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$

(ج) $\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}.$

قضایای ذیل در باب حدود اهمیت تمام دارند.

۷.۵. قضیه. اگر $0 < a \neq 1$ و $\{x_n\}$ رشته‌ای از اعداد مثبت و متقارب به عدد مثبت γ باشد رشته‌ی $\{\log_a x_n\}$ متقارب به $\log_a\gamma$ است؛ به عبارت دیگر، در شرایط مذکور،

$$\lim_n(\log_a x_n) = \log_a(\lim_n x_n).$$

برهان. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون 1 بین a^ε و $a^{-\varepsilon}$ است، γ بین γa^ε و $\gamma a^{-\varepsilon}$ قرار دارد، و چون $x_n \to \gamma > 0$، از مرتبه‌ای ببعد، x_n نیز بین γa^ε و $\gamma a^{-\varepsilon}$ است. پس، بنا بر قضیه‌ی ۷.۴، از مرتبه‌ای ببعد، $\log_a x_n$ بین $\log_a\gamma + \varepsilon$ و $\log_a\gamma - \varepsilon$ میباشد، و بالنتیجه، $|\log_a x_n - \log_a\gamma| < \varepsilon$. ▲

۷.۵.۱. قضیه. اگر $0 < a \neq 1$ و $\lim x_n = \infty$ آنگاه

$$\lim_n \log_a x_n = \begin{cases}\infty & (a>1)\\ -\infty & (0<a<1).\end{cases}$$

برهان. بنا بر VII : ۷.۳، کافی است حکم را در حالتی که $a > 1$ ثابت کنیم. فرض کنیم

z عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $x_n \to \infty$، از مرتبه‌ای ببعد، $x_n > a^z$. پس، بنا بر ۷.۴، از مرتبه‌ای ببعد، $\log_a x_n > \log_a a^z = z$. ▲

۷.۵.۲. قضیه. اگر $0 < a \neq 1$ و $\{x_n\}$ هیچرشته‌ای با جمل مثبت باشد آنگاه

$$\lim_n \log_a x_n = \begin{cases} -\infty & (a > 1), \\ \infty & (0 < a < 1). \end{cases}$$

اثبات بر متعلم است.

۷.۵.۳. مثال. ثابت کنید که اگر a، α، و β اعدادی ثابت باشند، و $1 < a$، $0 < \alpha$، و $\beta > 0$، آنگاه

$$\lim_n \frac{\log_a^\alpha n}{n^\beta} = 0.$$ [1]

[«$\log_a^\alpha n$» یعنی $(\log_a n)^\alpha$].

برهان. ابتدا حکم را در حالتی که $\alpha = 1$ ثابت میکنیم. بنا بر مفروضات، $1 < a^\beta$. پس، بنا بر ۶.۶ ۸، $\lim\,(n \cdot (1/a^\beta)^n) = 0$. بالنتیجه، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عددی طبیعی مانند N_1 هست که اگر $n > N_1$ آنگاه

$$\frac{n}{(a^\beta)^n} < \frac{\varepsilon}{a^\beta}. \tag{1}$$

از طرف دیگر، اگر $g = [\log_a n]$ آنگاه $g \leqslant \log_a n < g + 1$. بالنتیجه، $a^g \leqslant a^{\log_a n} = n$. پس همواره

$$\frac{\log_a n}{n^\beta} < \frac{g+1}{(a^g)^\beta} = a^\beta \cdot \frac{g+1}{(a^\beta)^{g+1}}. \tag{2}$$

حال فرض کنیم $N = a^{N_1}$. اگر $n > N$ آنگاه $g + 1 > \log_a n > N_1$، و لهذا، بنا بر (۱)،

$$\frac{g+1}{(a^\beta)^{g+1}} < \frac{\varepsilon}{a^\beta}.$$

پس، بنا بر (۲)،

$$\frac{\log_a n}{n^\beta} < a^\beta \cdot \frac{\varepsilon}{a^\beta} = \varepsilon.$$

بالنتیجه،

$$\lim \frac{\log_a n}{n^\beta} = 0.$$

اینک برای اثبات حکم در حالت کلی کافی است ملاحظه کنیم که

---

(۱) پس، میتوان گفت که هر قوه‌ی مثبت n، هر قدر هم کوچک باشد، بر هر قوه‌ی مثبت $\log_a n$ $(a > 1)$، هر قدر هم بزرگ باشد، غلبه دارد.

$$\frac{\log_a^\alpha n}{n^\beta} = \left(\frac{\log_a n}{n^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha,$$

و ۶.۶.۶ را بکار بندیم. ▲

برای مزید تمرین، بعضی از حدود مهم مربوط به e و لگاریتم طبیعی (لگاریتم در مبنای e) را میآوریم.

۷.۶. بعضی حدود مربوط به e و لگاریتم طبیعی. یادآوری میکنیم که، بنا بر تعریف،

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{۷.۶.۱}$$

و بعلاوه،

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e. \tag{۷.۶.۲}$$

۷.۶.۳. قضیه. اگر رشتهی $\{a_n\}$ متباعد به ∞ یا به $-\infty$ باشد،

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e. \tag{*}$$

برهان. اولاً، فرض کنیم $a_n \to \infty$. اگر $g_n = [a_n]$ آنگاه $g_n \to \infty$ (چرا؟)، و

$$\left(1 + \frac{1}{g_n + 1}\right)^{g_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{g_n}\right)^{g_n+1}$$

اما، رشتهی $\left\{\left(1 + \frac{1}{g_n + 1}\right)^{g_n}\right\}$ یک رشتک رشتهی $\left\{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n\right\}$ است، و رشتهی $\left\{\left(1 + \frac{1}{g_n}\right)^{g_n+1}\right\}$ یک رشتک رشتهی $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$. پس، بنا بر ۷.۶.۲، هر دو متقارب به e هستند. بالنتیجه، بنا بر ۳.۵.۵، رابطهی (*) در این حالت برقرار است.

ثانیاً، فرض کنیم $a_n \to -\infty$. اگر $b_n = -a_n$ آنگاه $b_n \to \infty$، و لهذا، $b_n - 1 \to \infty$. پس، بنا بر حالت قبل،

$$\lim \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1} = e. \tag{۱}$$

اما

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{b_n}}.$$

از اینجا، با توجه به (۱) و به اینکه $1/b_n \to 0$، رابطهی (*) حاصل میشود. ▲

۷.۶.۴. قضیه. اگر رشتهی $\{a_n\}$ متباعد به ∞، و x عدد حقیقی دلخواهی باشد،

$$(*) \qquad \lim_n \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x.$$

بالاخص،

$$\lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \qquad \lim_n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

برهان. اگر $x = 0$ رابطه‌ی (*) بالبداهه برقرار است. اگر $x \neq 0$ آنگاه، بنا بر فرض قضیه،

$$\frac{a_n}{x} \to \begin{cases} \infty & (x > 0), \\ -\infty & (x < 0). \end{cases}$$

پس، بنا بر قضیه‌ی قبل، در هر حال،

$$\lim_n \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n/x} = e.$$

از اینجا، بنا بر ۶.۶.۴، رابطه‌ی (*) حاصل میشود. ▲

۷.۶.۵. قضیه. اگر $\{c_n\}$ رشته‌ای از اعداد مثبت و متباعد به ∞ باشد، بازاء هر عدد مثبت مانند x،

$$(*) \qquad \log x = \lim_n c_n(x^{1/c_n} - 1).$$

بالاخص،

$$\log x = \lim n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$$

برهان. رابطه‌ی (*) بازاء $x = 1$ بالبداهه برقرار است. پس، فرض میکنیم $0 < x \neq 1$، و نیز فرض میکنیم همواره $c_n > 0$، و $c_n \to \infty$. بنا بر مفروضات، $x^{1/c_n} \neq 1$ و

$$(۱) \qquad a_n = \frac{1}{x^{1/c_n} - 1} \begin{cases} > 0 & (x > 1), \\ < 0 & (x < 1). \end{cases}$$

بنا بر فرض، $1/c_n \to 0$. پس، بنا بر ۶.۶.۲،

$$\lim_n x^{1/c_n} = x^0 = 1.$$

بالنتیجه، بنا بر ۳.۵.۱۷،

$$\lim_n a_n = \begin{cases} \infty & (x > 1), \\ -\infty & (x < 1). \end{cases}$$

پس، بنا بر ۷.۶.۳ و (۱)،

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_n x^{a_n/c_n} = e.$$

بالنتیجه، بنا بر ۷.۵،

$$\lim_n \log x^{a_n/c_n} = \log e = 1.$$

پس،

$$\lim_n \left(\frac{a_n}{c_n}\log x\right) = \log x \cdot \lim_n \frac{a_n}{c_n} = 1,$$

و از اینجا با لبداهه (*) بدست میآید. ▲

۸ § بعضی قواعد خاص در تعیین حدود

۸.۱. «قضایای حد» کوشی*

۸.۱.۱. قضیه‌ی اول حد کوشی. اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ حد داشته باشد رشته‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

نیز حد دارد، و

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_n a_n.$$

برهان[1]. بر حسب اینکه $\lim a_n$ عددی حقیقی باشد یا نه حالاتی تشخیص میدهیم. برای اثبات حکم در صورتی که $\lim a_n \in \mathbf{R}$، ابتدا حکم در حالتی که $\lim a_n = 0$ ثابت میکنیم. چنانکه ملاحظه خواهد شد، پس از اثبات حکم در این حالت، به‌آسانی میتوان آن را در صورتی که $\lim a_n$ عدد حقیقی دلخواهی باشد ثابت کرد.

اینک استدلال را آغاز میکنیم. فرض کنیم

$$\lim a_n = \alpha.$$

حالت اول: $\alpha = 0$. گوئیم $\lim b_n = 0$. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. باید ثابت کرد که عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $N < n$ آنگاه $|b_n| < \varepsilon$. برای این منظور، b_n را به طریقی مناسب به حاصلجمع دو جمله تفکیک میکنیم بطوری که، از مرتبه‌ای ببعد، قدر مطلق هر یک از این دو جمله از $\varepsilon/2$ کوچکتر باشد. گوئیم، چون $\lim a_n = 0$، عددی طبیعی مانند M هست که همواره

(۱) اگر $m > M$ آنگاه $|a_m| < \varepsilon/2$.

از این ببعد، M ثابت خواهد بود، و لهذا، $A = a_1 + \cdots + a_M$ نیز عددی ثابت است. حال اگر n عددی بزرگتر از M باشد،

$$b_n = \frac{A}{n} + \frac{1}{n} \sum_{m=M+1}^{n} a_m.$$

پس،

$$|b_n| \leqslant \frac{|A|}{n} + \frac{1}{n}\left|\sum_{m=M+1}^{n} a_m\right| \leqslant \frac{|A|}{n} + \frac{1}{n}\sum_{m=M+1}^{n} |a_m|.$$

---

(۱) در روش اثبات قضیه، مخصوصاً «حالت اول»، عمیقاً تأمل کنید، و تا زمانی که آن را به وضوح درنیافته‌اید پیشتر نروید.

در سیگمای اخیر، اندیس هر جمله از M بزرگتر است. پس، بنا بر (۱)،

$$|b_n| \leqslant \frac{|A|}{n} + \frac{n-M}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{|A|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (۲)$$

اما، چون A عددی ثابت است، عددی طبیعی مانند M' هست که همواره اگر $n > M'$ آنگاه $|A/n| < \varepsilon/2$ (۳). اینک فرض کنیم $N = \text{Max}\{M, M'\}$. اگر n عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از N باشد آنگاه $n > M$ و $n > M'$، و بالنتیجه، نامساویهای (۲) و (۳) در عین حال برقرارند. پس، از مرتبه‌ی $N + 1$ بعد،

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

حالت دوم: $\alpha \in \mathbf{R}$. چون رشته‌ی $\{a_n - \alpha\}$ هیچرشته است، بنا بر حالت اول،

$$\lim_n \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} = 0,$$

و یا،

$$\lim_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right) = 0,$$

و بالنتیجه، $\lim b_n = \alpha$.

حالت سوم: $\alpha = \infty$ (آ). عدد مثبت دلخواه u را اختیار میکنیم. بنا بر (آ)، عددی طبیعی مانند M هست که همواره اگر $m > M$ آنگاه $a_m > 2u$. پس، اگر عدد ثابت $a_1 + a_2 + \cdots + a_M$ را A بنامیم، بازاء $n > M$ خواهیم داشت،

$$b_n = \frac{A}{n} + \frac{1}{n}\sum_{m=M+1}^{n} a_m \geqslant \frac{1}{n}\sum_{m=M+1}^{n} a_m - \frac{|A|}{n} > 2u \cdot \frac{n-M}{n} - \frac{|A|}{n}.$$

از اینجا به آسانی دیده میشود که اگر $N = \left[2M + \frac{|A|}{u}\right] + 1$ آنگاه، بازاء هر عدد طبیعی n که $n \geqslant N$، $b_n > u$. پس، $\lim b_n = \infty$.

حالت چهارم: $\alpha = -\infty$. در این صورت، $\lim(-a_n) = \infty$، و نتیجه‌ی مطلوب از آنچه در حالت سوم ثابت شد بدست میآید. ▲

۸.۱.۳. امثله

(آ). اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد مثبت و $\lim a_n$ نیز عددی مثبت باشد آنگاه

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim_n a_n.$$

برهان. فرض کنیم

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \qquad \lim a_n = \alpha.$$

بنا بر مفروضات، $\log a_n$ $(n \geqslant 1)$ و $\log \alpha$ معنی دارد، و $\lim_n \log a_n = \log \alpha$. پس، بنا بر قضیه‌ی اول حد کوشی،

$$\log b_n = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{n} \to \log \alpha.$$

بالنتیجه، بنا بر ۶.۶.۲،

$$e^{\log b_n} \to e^{\log \alpha},$$

و از آنجا، $b_n \to \alpha$. ▲

(ب). عکس قضیه‌ی اول حد کوشی برقرار نیست: ممکن است $\lim \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ موجود باشد، ولی a_n حد نداشته باشد. مثلاً، رشته‌ی $\{(-1)^n\}$ حد ندارد، اما، اگر $a_n = (-1)^n$ آنگاه

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \begin{cases} 0 & (2 \mid n), \\ -1/n & (2 \nmid n), \end{cases}$$

و $\lim b_n = 0$.

۸.۱.۳. قضیه‌ی دوم حد کوشی. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد مثبت باشد، و $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود باشد، $\lim \sqrt[n]{a_n}$ نیز موجود و با آن مساوی است.

برهان. فرض کنیم $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ (۱). بنا بر فرض، $\alpha \geqslant 0$.

حالت اول: $0 < \alpha \in \mathbf{R}$. کافی است رشته‌ی $\{b_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$b_1 = a_1, \qquad b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad (n > 1)$$

تعریف کنیم، و آ : ۸.۱.۲ را بکار بندیم.

حالت دوم: $\alpha = \infty$ (۲). فرض کنیم u عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر (۱) و (۲)، عددی طبیعی مانند M هست که همواره اگر $m \geqslant M$ آنگاه

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} > 2u.$$

از این ببعد، M ثابت خواهد بود. حال اگر $n > M$ آنگاه

$$\prod_{m=M}^{n-1} \frac{a_{m+1}}{a_m} > \prod_{m=M}^{n-1} (2u) = (2u)^{n-M},$$

و از آنجا،

$$\sqrt[n]{a_n} > 2u\left[\frac{a_M}{(2u)^M}\right]^{1/n}$$

اگر عدد ثابت داخل کروشه را A بنامیم، بنا بر ۲.۴.۴، $\lim_n A^{1/n} = 1$. پس، عددی طبیعی مانند M' هست که اگر $n > M'$ آنگاه $A^{1/n} > 1/2$. بالنتیجه، بازاء هر n که $n > \operatorname{Max}\{M, M'\}$، $\sqrt[n]{a_n} > u$. پس، $\lim \sqrt[n]{a_n} = \infty$.

حالت سوم: $\alpha = 0$. رشته‌ی $\{b_n\}$ را با ضابطه‌ی $b_n = 1/a_n$ تعریف میکنیم. بنا بر فرض،

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{(a_{n+1}/a_n)}\,[\text{۳.۵.۱۶ : I}]\to\infty.$$

پس، بنا بر حالت دوم، $\lim\sqrt[n]{b_n}=\infty$. بالنتیجه،

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{b_n}}\,[\text{۳.۵.۱۷}]\to 0.\ \blacktriangle$$

۸.۱.۴. امثله

(آ). ثابت کنید که

$$\lim_n\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}.$$

فرض کنیم $a_n=n!/n^n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n}\to\frac{1}{e}.$$

اینک رابطهٔ مطلوب از قضیهٔ دوم حد کوشی بدست میآید.

(ب). به همین قیاس ثابت میشود که رشتهٔ $\{a/\sqrt[n]{n!}\}$ هیچرشته است از اینجا نتیجه میشود که رشتهٔ $\{a^n/n!\}$ نیز هیچرشته است. اثبات مستقیم این حکم آسان است. فرض کنیم $a\neq 0$ و $N=[|a|]$. پس، $N\leqslant|a|<N+1$ (۱). حال اگر $n\geqslant N+1$ آنگاه

$$0\leqslant\Big|\frac{a^n}{n!}\Big|=\frac{|a^N|\cdot|a^{n-N}|}{N!\,(N+1)(N+2)\dots n}<\frac{|a|^N}{N!}\Big(\frac{|a|}{N+1}\Big)^{n-N}$$
$$=\frac{(N+1)^N}{N!}\Big(\frac{|a|}{N+1}\Big)^n.$$

در عبارت اخیر، $(N+1)^N/N!$ عددی است ثابت. بعلاوه، بنا بر (۱)، $1>|a|/(N+1)\geqslant 0$. پس، حد عبارت اخیر 0 است، و بالنتیجه، $\lim\dfrac{a^n}{n!}=0$.

۸.۲. قضایای شْتولْتْس. قضیهٔ اول حد کوشی را شتولتس به صورت ذیل تعمیم داده است:

۸.۲.۱. قضیهٔ اول شتولتس. فرض کنیم $\{p_n\}_0$ رشتهای از اعداد حقیقی مثبت باشد بطوری که

$$s_n=p_0+p_1+\dots+p_n\to\infty.$$

در این صورت، اگر رشتهٔ $\{a_n\}_0$ حد داشته باشد رشتهٔ $\{b_n\}_0$ با ضابطهٔ

(۱) O. Stolz (۱۸۴۲ ـ ۱۹۰۵).

$$b_n = \frac{p_0a_0 + p_1a_1 + \cdots + p_na_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n}$$

نیز حد دارد، و $\lim b_n = \lim a_n$.

برهان. اثبات مانند اثبات قضیه‌ی اول حد کوشی است. خلاصه‌ی استدلال در حالتی که $\lim a_n = 0$ از این قرار است. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد طبیعی M را چنان اختیار میکنیم که همواره اگر $M < m$ آنگاه $|a_m| < \varepsilon/2$. اینک M را ثابت میداریم، و فرض میکنیم $A = p_0a_0 + \cdots + p_M a_M$. به آسانی دیده میشود که اگر $n > M$ آنگاه

$$|b_n| < \frac{|A|}{s_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

چون $s_n \to \infty$، $\lim (|A|/s_n) = 0$. پس، عددی طبیعی مانند M' هست که اگر $n > M'$ آنگاه $|A|/s_n < \varepsilon/2$. اینک به آسانی دیده میشود که، بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n > \operatorname{Max}\{M, M'\}$ آنگاه $|b_n| < \varepsilon$. ▲

۸.۲.۲. تبصره. در قضیه‌ی ۸.۲.۱، شرط $p_n > 0$ کافی است از مرتبه‌ای ببعد برقرار باشد، زیرا، چون $s_n \to \infty$، از مرتبه‌ای ببعد s_n مثبت است، و کافی است b_n را از آن مرتبه ببعد ملحوظ داریم.

۸.۲.۳. قضیه‌ی دوم شتولتس. اگر $\{x_n\}_0$ و $\{y_n\}_0$ دو رشته از اعداد حقیقی باشند، و $\lim y_n = \infty$، و از مرتبه‌ای ببعد $y_n < y_{n+1}$ آنگاه

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

مشروط بر اینکه حد طرف دوم موجود باشد (اعم از اینکه این حد متناهی باشد یا نامتناهی).

برهان. دو رشته‌ی $\{p_n\}_0$ و $\{a_n\}_0$ را بر طبق روابط ذیل تعریف میکنیم:

$$p_0 = y_0, \qquad p_n = y_n - y_{n-1} \qquad (n \geqslant 1);$$
$$x_0 = p_0a_0, \qquad x_n - x_{n-1} = p_na_n \qquad (n \geqslant 1).$$

بنا بر مفروضات اولاً، از مرتبه‌ای ببعد $p_n > 0$؛ ثانیاً

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = y_n \to \infty;$$

و ثالثاً، $a_n = (x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1})$. پس، اگر $\lim a_n$ موجود باشد، بنا بر قضیه‌ی اول شتولتس و با توجه به ۸.۲.۲، $\lim (x_n/y_n)$ موجود و مساوی آن است. ▲

۸.۲.۴. امثله

(آ). بنا بر آنکه p عدد طبیعی مفروضی باشد مطلوبست

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

فرض کنیم

$$x_0 = 0, \qquad x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \qquad (n \geqslant 1);$$
$$y_0 = 0, \qquad y_n = n^{p+1} \qquad (n \geqslant 1).$$

در این صورت،

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}$$
$$= \frac{n^p}{(p+1)n^p - \binom{p+1}{2}n^{p-1} + \cdots + (-1)^p} \to \frac{1}{p+1}.$$

با لنتیجه،

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

(ب). مطلوبست $\lim \dfrac{\log n!}{\log n^n}$.

فرض کنیم $x_n = \log n!$ و $y_n = \log n^n$. بازاء $n > 1$ خواهیم داشت،

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{\log n}{n \log n - (n-1) \log (n-1)}$$
$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\log n} \cdot \log\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

اما $\lim \log n = \infty$ و

$$\lim \log \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \log \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \log e = 1.$$

پس، $\lim \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1$، و بالنتیجه

$$\lim \frac{\log n!}{\log n^n} = 1.$$

۸.۳. قضیه‌ی چزارو*. اگر رشته‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$، بترتیب، متقارب به a و b باشند آنگاه

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = ab.$$

برهان. فرض کنیم $a_n - a = r_n$ و $\rho_n = |r_n|$. پس،

$$c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1)$$

$$= a \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} + \frac{1}{n}(r_1 b_n + \cdots + r_n b_1).$$

بنا بر قضیه‌ی اول حد کوشی، حد جمله‌ی اول طرف دوم مساوی ab است. پس، کافی است ثابت کنیم که

$$\lim \frac{1}{n}(r_1 b_n + \cdots + r_n b_1) = 0.$$

بنا بر فرض، عددی مثبت مانند λ هست که همواره $|b_n| < \lambda$. پس،

$$\left|\frac{1}{n}(r_1 b_n + \cdots + r_n b_1)\right| \leqslant \lambda \cdot \frac{\rho_1 + \cdots + \rho_n}{n}.$$

اما $\lim \rho_n = 0$. پس، بنا بر قضیه‌ی اول حد کوشی، حد طرف دوم 0 میباشد. ▲

۹ § مسائل مختلفه

۱. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای با جمله‌های مثبت و λ عدد ثابتی بزرگتر از 1 باشد، و از مرتبه‌ای ببعد $a_{n+1} \geqslant \lambda a_n$، آنگاه $\lim a_n = \infty$.

۲. با علامات مسئله‌ی قبل، اگر $0 < \lambda < 1$، و از مرتبه‌ای ببعد $a_{n+1} \leqslant \lambda a_n$، آنگاه $\lim a_n = 0$.

۳. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای و λ عدد ثابتی بین 0 و 1 باشد، و از مرتبه‌ای ببعد $|a_{n+1}| \leqslant \lambda |a_n|$، آنگاه $\lim a_n = 0$.

۴. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای با جمل مثبت باشد و $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha > 1$ آنگاه $\lim a_n = \infty$.

۵. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای باشد، و a_{n+1}/a_n به عددی بین -1 و 1 میل کند آنگاه $\lim a_n = 0$.

۶. بنا بر آنکه $a > 0$، در رفتار رشته‌ی ذیل تحقیق کنید:

$$\left\{a^n \prod_{i=1}^{n} (a^i + 1)\right\}.$$

۷. ثابت کنید که

$$\lim_n \frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right] = a^2 + a + \frac{1}{3}.$$

۸. ν عدد طبیعی ثابتی است، و a_0، ...، و a_ν نیز اعداد ثابتی هستند، و $a_0 + \cdots + a_\nu = 0$. ثابت کنید که

$$\lim_n (a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_\nu \sqrt{n+\nu}) = 0$$

۹. a و b دو عدد مثبت‌اند، و $0 < x_1 < b$، و

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}} \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت کنید که $\lim x_n$ موجود است، و آن را تعیین کنید.

۱۰. در رشته‌ی $\{a_n\}_0$، $a_0 > 0$ و

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \qquad (n \geqslant 0).$$

ثابت کنید که $\lim a_n = \sqrt{2}$.

۱۱. بطور کلی، اگر $a_0 > 0$، و k عدد مثبت دلخواهی باشد، و

$$a_{n+1} = a_n + \frac{k - a_n^2}{2a_n} \qquad (n \geqslant 0)$$

آنگاه $\lim a_n = \sqrt{k}$.

۱۲. اگر a_1، a_2، . . .، و a_k k عدد مثبت مفروض باشند آنگاه

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \operatorname{Max}\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

۱۳. در رشته‌ی $\{a_n\}$، a_1 عدد مفروضی است، و

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 \qquad (n \geqslant 1).$$

در رفتار a_n در هر یک از حالات ذیل تحقیق کنید:

(آ) $1 < a_1 < 2$; (ب) $a_1 = 2$; (پ) $a_1 > 2$.

۱۴. رشته‌ی بازه‌های بسته‌ی $\{I_n\}$ را چنین تعریف میکنیم: $I_1 = [0, 1]$؛ I_2 نیمه‌ی بسته‌ی چپ I_1 است؛ I_3 نیمه‌ی بسته‌ی راست I_2 است؛ و «هکذا». ثابت کنید که رشته‌ی مذکور یک عدد حقیقی را مشخص میکند، و این عدد را تعیین کنید.

۱۵. a و b دو عدد ثابتند، و $a + b \neq 0$. دو رشته‌ی $\{a_n\}_0$ و $\{b_n\}_0$ چنین تعریف شده‌اند:

$$a_0 = a, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \qquad (n \geqslant 0);$$

$$b_0 = b, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n} \qquad (n \geqslant 0).$$

در رفتار دو رشته تحقیق کنید.

۱۶. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

تعریف شده است. ثابت کنید که اگر $c > -1$ آنگاه $\lim a_n = 1$. سپس، در رفتار رشته در حالاتی که $c = -1$ یا $c < -3$ تحقیق کنید.

۱۷. جمله‌ی اول رشته‌ی $\{x_n\}$ عددی مفروض است، و

$$x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6 \qquad (n \geqslant 1).$$

(آ). در رفتار رشته در هر یک از حالات $2 \leqslant x_1 < 3$، $x_1 = 3$، و $x_1 > 3$ تحقیق کنید.

(ب). با توجه به مقدار x_2، حالتی را که $x_1 < 2$ مورد بررسی قرار دهید.

۱۸. بنا بر آنکه $a>0$، $q>0$، و

$$x_1=\frac{1}{2}\left(q+\frac{a}{q}\right),\qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\qquad (n\geqslant 1),$$

ثابت کنید که

$$\frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}=\left(\frac{q-\sqrt{a}}{q+\sqrt{a}}\right)^{2^n},$$

و $\lim x_n$ را تعیین کنید.

۱۹. a و c دو عدد ثابت مثبت‌اند، و دو رشته‌ی $\{a_n\}_0$ و $\{b_n\}_0$ چنین تعریف شده‌اند:

$$a_0=a,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\qquad (n\geqslant 0);$$

$$b_n=c/a_n\qquad (n\geqslant 0).$$

(آ). ثابت کنید که دو رشته به یک عدد حقیقی میل می‌کنند، و این عدد را تعیین کنید.

(ب). دو عدد منطق مانند r و s چنان تعیین کنید که، در عین حال،

$$r<\sqrt{3}<s,\qquad s-r<5/10^4.$$

(پ). a و c را مساوی 2 بگیرید، و ثابت کنید که، در این حالت، اگر $n>$ آنگاه

$$0<a_n-\sqrt{2}<2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}.$$

۲۰. دو رشته‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ با مفروضات $0<x_1<y_1$ به استقراء چنین تعریف شده‌اند:

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},\qquad y_{n+1}=\sqrt{x_{n+1}y_n}.$$

ثابت کنید که رشته‌ی بازه‌های $\{[x_n, y_n]\}$ یک عدد حقیقی را مشخص می‌سازد.[۱]

۲۱. α عددی است مثبت، و β ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^2+x=\alpha$ است. در رشته‌ی $\{a_n\}$، جمله‌ی اول مفروض است، و همواره

$$a_{n+1}=\frac{\alpha}{1+a_n}\qquad (n\geqslant 1).$$

بنا بر آنکه $0\leqslant a_1<\beta$، ثابت کنید که رشته‌های $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ یکنواخت هستند، و $\lim a_n=\beta$.

در حالتی که $a_1>\beta$ تحقیق کنید.

۲۲. بنا بر آنکه $a^2+b^2>0$، $x_0\neq 1$، $x_0\neq -1$، و

$$x_{n+1}=\frac{a+bx_n}{b+ax_n}\qquad (n\geqslant 0),$$

---

(۱) ثابت میشود که این عدد مساوی $\frac{\sin\theta}{\theta}y_1$ است که در آن θ زاویه‌ی حاده‌ای است که $\cos\theta=x_1/y_1$.

رشته‌ی $\{x_n\}_0$ فقط و فقط وقتی متقارب است که

$$\frac{b-a}{b+a} \neq -1.$$

راهنمائی: میتوان چنین قرار داد:

$$y_n = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}.$$

۲۳. α عددی است ثابت. بازاء مقادیر مختلف α در تقارب رشته‌هائی که ذیلاً با جمله‌ی عمومی خود معرفی شده‌اند تحقیق کنید:

(آ) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$. (ب) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.

(پ) $\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n}$. (ت) $\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n}$.

۲۴. ثابت کنید که $\lim \sqrt[2n+1]{n^2+n} = 1$.

۲۵. بنا بر آنکه

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 2, \qquad a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \qquad (n \geqslant 2),$$

ثابت کنید که رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب است، و حد آن را تعیین کنید.

۲۶. اگر رشته‌ی $\{a_{n+1} - a_n\}$ متقارب به عدد α باشد رشته‌ی $\{a_n/n\}$ نیز متقارب به α است.

۲۷. ثابت کنید که رشته‌های ذیل متقاربند

$$\left\{\sqrt[n]{n^3+n^2-1}\right\}_{n=1} \qquad \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}\right\}_{n=1};$$

۲۸. بنا بر آنکه $a, b, c \in \mathbf{R}^+$، در رفتار رشته‌ی $\{x_n\}$ با ضابطه‌ی ذیل تحقیق کنید:

$$x_n = \frac{1}{n}\left[\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+2b}{a+2c} + \cdots + \frac{a+nb}{a+nc}\right].$$

۲۹. ثابت کنید که

$$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4}{e}.$$

۳۰. اگر a عدد ثابت مثبتی باشد

$$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \frac{1}{e}.$$

۳۱. p عددی طبیعی است، و a_n مجموع حاصلضربهای دو به دوی قوای pاُم اعداد 1، 2، . . .، و n است. ثابت کنید که

$$\lim_n \frac{a_n}{(n+1)^{2p+2}} = \frac{1}{2(p+1)^2}.$$

۳۲. رشته‌ی $\{a_n\}$ در رابطه‌ی

$$\lim_n (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) = c$$

صدق میکند. ثابت کنید که

$$\lim \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}c.$$

۳۳. بنا بر آنکه

$$a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \qquad (n \geqslant 2),$$

ثابت کنید که $\lim a_n$ موجود است، و ممکن است عددی حقیقی یا ∞ یا $\infty -$ باشد. برای هر یک از حالات مثال بیاورید.

راهنمائی: یا Nی هست که $a_{N+1} > a_N$ یا نه.

۳۴. $\{a_n\}$ رشته‌ای محدود از اعداد حقیقی است، و همواره

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

ثابت کنید که $\lim (a_{n+1} - a_n) = 0$.

۳۵. k عدد طبیعی ثابت زوجی است، A و αها اعدادی حقیقی‌اند، و

$$f(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k),$$

$$A > 0, \qquad 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_k, \qquad f(0) \leqslant \alpha_1.$$

بعلاوه، c عدد مفروضی است، و $0 \leqslant c \leqslant \alpha_1$. رشته‌ی $\{a_n\}$ به استقراء چنین تعریف شده است:

$$a_1 = c_1 \qquad a_{n+1} = a_n + f(a_n) \qquad (n \geqslant 1).$$

ثابت کنید که

(آ) همواره $0 \leqslant a_n \leqslant \alpha_1$. (ب) $a_n \uparrow$. (پ) $\lim a_n = \alpha_1$.

۳۶. $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو هیچ‌رشته‌اند، و رشته‌ی $\{\alpha_n\}$ با ضابطه‌ی

$$\alpha_n = |a_1| + \dots + |a_n|$$

محدود است. ثابت کنید که رشته‌ی $\{x_n\}$ با ضابطه‌ی

$$x_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$$

هیچ‌رشته است.

راهنمائی: فرض کنید $\varepsilon > 0$، $K > 0$، و همواره $|b_n| < K$.

(آ) رشته‌ی $\{\alpha_n\}$ متقارب به عددی مانند A است. از مرتبه‌ی M ببعد $|b_n| < \varepsilon/2(A+1)$.

(ب) عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $q \geqslant p > N$ آنگاه $\sum_p^q |a_n| < \varepsilon/2K$.

(پ) اگر $n > M + N$ آنگاه $|x_n| \leqslant \left|\sum_1^N\right| + \left|\sum_{N+1}^n\right| < \varepsilon$.

۱۵ § علامات لانْداو*

۱۰.۱. مقدمه. در آنالیز موارد بسیار هست که، با انصراف از دقتی غیر ضروری ــ ولو رسیدن بدان مرحله از دقت ممکن باشد ــ نتیجه‌ی مطلوب را به راهی ساده و عملیتر بدست میآورند. مثلاً در باب رشته‌ی $\{a_n\}$، اگر بدانیم که از مرتبه‌ی N بعد

$$|a_n| < \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{n^2}, \qquad (۱)$$

اطلاعی نسبةً دقیق از جمله‌های رشته از آن مرتبه بعد خواهیم داشت. اما، اگر در باب همان رشته بدانیم که از مرتبه‌ی N بعد

$$|a_n| < 5 \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (۲)$$

یا آنکه فقط بدانیم که از مرتبه‌ی N بعد

$$|a_n| < \frac{1}{n}, \qquad (۳)$$

(۲) اطلاعی کمتر و (۳) اطلاعی از آن هم کمتر بدست میدهد. در بسیاری موارد، بدست آوردن اطلاع دقیقتر (۱) از کسب اطلاعات مندرج در (۲) و (۳) دشوارتر، و در عین حال، برای منظور مورد نظر غیر ضروری است، و حتی اطلاعی که در (۳) آمده است برای مقصود کافی است. البته، در این صورت، ارجح است که به رابطه‌ی سهل‌الوصولتر (۳) اکتفا کنیم، و زحمت بدست آوردن (۱) را به خود ندهیم.

در این زمینه، علامات لانداو در آنالیز رواج فراوان دارند. این علامات عبارتند از

$$O, \qquad o,$$

که به مناسبت کلمه‌ی آلمانی «مرتبه[1]» اختیار شده‌اند. وضع «O» به معنائی که خواهد آمد از باخمان[2] است، ولی کارهای لانداو سبب ترویج آنها گردید. وضع «o» از لانداو است.

ذیلاً به تعریف این علامات و قواعد محاسبه با آنها میپردازیم.

چون در بحث آتیه «مقادیر بزرگ n» مورد نظر هستند، اندیس مبداء رشته‌ها قابل اعتنا نیست. بنا بر این، برای احتراز از تکرار، قرارداد ذیل را میآوریم:

۱۰.۱.۱. قرارداد. در این مبحث، مقصود از رشته تابعی است بر مجموعه‌ای مانند $\mathbf{I}_p$ از اعداد طبیعی. اغلب، رشته‌ها را با حروف f، g، h، φ، و ψ نمایش میدهیم، و بجای «f_n»، «$f(n)$» مینویسیم. در هر مورد، رشته‌های مورد بحث دارای یک حوزه‌ی تعریف فرض میشوند.

---

(۱) Ordnung. به انگلیسی، order.

(۲) P. Bachmann (۱۸۳۷ ــ ۱۹۲۰).

۱۰.۲. تعریفات.

۱۰.۲.۱. تعریف. فرض کنیم f و φ دو رشته باشند[1]. چهار عبارت

وقتی که $n \to \infty$، $f = O(\varphi)$،

بازاء مقادیر بزرگ n، $f = O(\varphi)$،

$$f = O(\varphi) \qquad (n \to \infty),$$

$$f = O(\varphi),$$

جملگی بدین معنی هستند که عددی ثابت (مستقل از n) و مثبت مانند A و عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه

$$| f(n) | \leqslant A | \varphi(n) |.$$

عبارت «$f = O(\varphi)$» را چنین میخوانیم:

f اُی (بزرگ) φ است.[2]

در عبارات سابق‌الذکر، بجای «f» و «φ»، «$f(n)$» و «$\varphi(n)$» هم مینویسند (مانند «$f(n) = O(\varphi(n))$» بجای «$f = O(\varphi)$»).

۱۰.۲.۲. تعریف. فرض کنیم f و φ دو رشته باشند. چهار عبارت

وقتی که $n \to \infty$، $f = o(\varphi)$

بازاء مقادیر بزرگ n، $f = o(\varphi)$

$$f = o(\varphi) \qquad (n \to \infty),$$

$$f = o(\varphi),$$

جملگی بدین معنی هستند که، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه

$$| f(n) | \leqslant \varepsilon | \varphi(n) |.$$

عبارت «$f = o(\varphi)$» را چنین میخوانیم:

f اُیِ کوچکِ φ است.[3]

در عبارات سابق‌الذکر، بجای «f» و «φ»، «$f(n)$» و «$\varphi(n)$» هم مینویسند.

---

(۱) بنا بر ۱۰.۱.۱، یعنی دو رشته مانند $\{f(n)\}_\nu$ و $\{\varphi(n)\}_\nu$.

(۲) رابطه‌ی «$f = O(\varphi)$» را گاه با عبارت ذیل بیان میکنند:

f منتها از مرتبه‌ی φ است.

(۳) رابطه‌ی «$f = o(\varphi)$» را گاه با عبارت ذیل بیان میکنند:

f از مرتبه‌ای پایینتر از φ است.

۱۰.۲.۳. تعریف. اگر φ رشته‌ی ثابتی با ضابطه‌ی $\varphi(n) = c$ باشد، در تعریفات سابق، بجای «$O(\varphi)$» و «$o(\varphi)$»، «$O(c)$» و «$o(c)$» مینویسند. و هکذا در مورد f.

۱۰.۲.۴. نتایج اولیه و امثله

(آ). واضح است که، f هر رشته‌ای باشد، $f = O(f)$.

(ب). اگر $f = o(\varphi)$ آنگاه $f = O(\varphi)$.

زیرا، فرض کنیم $f = o(\varphi)$. بازاء $\varepsilon = 1$، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $|f(n)| \leqslant 1 \cdot |\varphi(n)|$. پس، بنا بر ۱.۲.۱، $f = O(\varphi)$. ▲

(پ). اگر از مرتبه‌ای ببعد $\varphi(n) \neq 0$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $f = o(\varphi)$ آنست که

$$\lim \frac{f(n)}{\varphi(n)} = 0$$

(چرا)؛

(ت). اگر رشته‌های f و φ با ضوابط

$$\varphi(n) = n^2 + 1 \qquad f(n) = n,$$

تعریف شده باشند آنگاه $f(n) = O(\varphi(n))$، و یا

$$n = O(n^2 + 1).$$

زیرا، $n/(n^2+1) < 1$.

(ث). $n = o(n^2+1)$.

حکم نتیجه‌ی رابطه‌ی $\frac{n}{n^2+1} \to 0$ و مثال (پ) است. ضمناً از رابطه‌ی (ث) بنا بر مثال (ب) میتوان نتیجه گرفت که

$$n = O(n^2 + 1).$$

(ج). اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته با ضوابط

$$a_1 = a_2 = 0, \qquad a_n = -1000n^2 - 5n \qquad (n > 2),$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, \qquad b_6 = 0, \qquad b_n = n^2 \qquad (\text{سایر مقادیر } n)$$

تعریف شده باشند آنگاه $a_n = O(b_n)$ و $b_n = O(a_n)$؛ زیرا، اولاً، از مرتبه‌ی هفتم ببعد،

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{1000n^2 + 5n}{n^2} = 1000 + \frac{5}{n} < 1006.$$

و ثانیاً، از مرتبه‌ی سوم ببعد،

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leqslant \frac{n^2}{1000n^2 + 5n} < 1.$$

(چ). بنا بر ۱۰.۲.۳، $f = O(1)$ یعنی عددی ثابت و مثبت مانند A هست که، از مرتبه‌ای ببعد، $|f(n)| \leqslant A$؛ بالنتیجه، رشته‌ی f محدود است. همچنین، $f = o(1)$ یعنی، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $|f(n)| \leqslant \varepsilon$؛ بالنتیجه رشته‌ی f هیچرشته است. عکس هر دو حکم بدیهی است. خلاصه،

I. شرط لازم و کافی برای آنکه $f = O(1)$ آنست که f محدود باشد.

II. شرط لازم و کافی برای آنکه $f = o(1)$ آنست که f هیچرشته باشد.

(ح). اگر $f = O(\varphi)$ آنگاه عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $|f(n)| \leqslant A \cdot |\varphi(n)|$. بالنتیجه، اگر m عددی طبیعی و بزرگتر از N باشد و $\varphi(m) = 0$ آنگاه $f(m) = 0$. خلاصه اگر $f = O(\varphi)$ آنگاه، از مرتبه‌ای ببعد، بازاء هر مقدار n که φ صفر شود f نیز میشود.

پس، اگر در عین حال $f = O(\varphi)$ و $\varphi = O(f)$ آنگاه عددی طبیعی مانند N هست که

$$\{n \mid n > N \;\&\; f(n) = 0\} = \{n \mid n > N \;\&\; \varphi(n) = 0\}.$$

در آنچه گذشت، عباراتی مانند:

$$f = O(\varphi), \qquad\qquad f = o(\varphi)$$

را تعریف کردیم نه خود $O(\varphi)$ و $o(\varphi)$ را. تعریف این دو از این قرار است:

۱۰.۲.۵. تعریف. فرض کنیم φ رشته‌ای باشد.

I. $O(\varphi)$ یعنی تابعی مانند f که $f = O(\varphi)$.

II. $o(\varphi)$ یعنی تابعی مانند f که $f = o(\varphi)$.

بالاخص،

III. $O(1)$ یعنی رشته‌ای محدود؛

IV. $o(1)$ یعنی رشته‌ای که حدش صفر است.

۱۰.۲.۶. تبصره‌ی مهم. علامت « = » را در روابطی که O و o در آنها میآیند نباید با تساوی به معنی عادی آن خلط کرد. این روابط را نمیتوان از راست به چپ خواند. در عبارات

$$f = O(\varphi), \qquad\qquad f = o(\varphi),$$

« = » خاصیت تقارن ندارد.

مثلاً، $n = O(n^2)$؛ اما رابطه‌ی $O(n^2) = n$، بنا بر I : ۱۰.۲.۵، یعنی رشته‌ای که اُی n^2 است مساوی $\{n\}$ است، و این البته دروغ است، زیرا، مثلاً $\{n^2+1\}$ ای $\{n^2\}$ است، و حال آنکه $n^2 + 1 \neq n$.

۱۰.۲.۷. تبصره. در روابطی که موارد متعدد O (یا o) میآید ضرورت ندارد که این موارد

---

(۱) توجه کنید که تابع f، جز از این جهت که اُی φ است، غیر مشخص است، و هکذا در مورد قسمت II.

راجع به یک رشته باشند. مثلاً، اگر φ، ψ، و θ سه رشته باشند، رابطه‌ی

$$O(\varphi) + O(\psi) = O(\theta),$$

بنا بر ۱۰.۲.۵، بدین معنی است که حاصلجمع دو رشته که یکی $O(\varphi)$ و دیگری $O(\psi)$ باشد $O(\theta)$ است. همچنین،

$$O(1) + O(1) = O(1)$$

یعنی حاصلجمع دو رشته‌ی محدود رشته‌ای است محدود.

۱۰.۲.۸. تمرین

۱. ثابت کنید که

(آ) $n = O(n)$.

(ب) $n = O(n^2)$.

(پ) $n = o(n^2)$.

(ت) $n - 5n^2 = O(n^2)$.

(ث) $n^2 = O(n - 5n^2)$.

(ج) $1/n = O(1)$.

(چ) $100n^2 + 5n = O(n^2 + 1)$.

(ح) $100n^2 + 5n = o(n^3)$.

(خ) $0 = O(1)$.

(د) $-3 = O(-1)$.

(ذ) $3 = O(n)$.

(ر) $3 = o(n)$.

۲. عکس حکم ب: ۱۰.۲.۴ را باطل کنید.

۳. بنا بر آنکه $a_n = O(b_n)$ و از مرتبه‌ای به بعد $c_n \geqslant 0$، ثابت کنید که $a_n c_n = O(b_n c_n)$.

۴. ثابت کنید که

(آ). اگر $a_n = o(1)$ و $b_n = O(1)$ آنگاه $a_n b_n = o(1)$.

(ب). اگر $a_n = o(b_n)$ و $b_n = O(c_n)$ آنگاه $a_n = o(c_n)$.

۵. معنی رابطه‌ی

$$O(1) + O(1) = o(n)$$

را بیان و رابطه را ثابت کنید.

۶. فرض کنیم $\alpha > 0$.

I.[1] اگر $f = O(\varphi)$ آنگاه $|f|^\alpha = O(|\varphi|^\alpha)$.

II. اگر $f = o(\varphi)$ آنگاه $|f|^\alpha = o(|\varphi|^\alpha)$.

۱۰.۳. قواعد محاسبه. قواعد محاسبه با O و o، چنانکه در امثله و تمرینات گذشته دیدید، نتایج ساده‌ی تعریفات سابق‌الذکر و قواعد ابتدائی حساب نامساویها هستند. بعضی از این قواعد در ۱۰.۲.۴ و ۱۰.۲.۸ گذشت. ذیلاً بعضی از قواعد مهم دیگر را میآوریم.

۱۰.۳.۱. قضیه. اگر k عدد طبیعی ثابتی، λ_1، . . .، و λ_k اعدادی ثابت، و

---

(۱) اگر $f = \{f_n\}_\nu$ رشته‌ای باشد، $|f|^\alpha$ یعنی رشته‌ی

$$|f(\nu)|^\alpha, |f(\nu+1)|^\alpha, \ldots, |f(n)|^\alpha, \ldots.$$

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}, \qquad \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(k)}$$

رشته‌هائی باشند، و

$$f^{(i)} = O(\varphi^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f^{(i)} = O\Big(\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i \varphi^{(i)}|\Big).$$

همین قضیه با تبدیل O در سراسر آن به o نیز برقرار است.

برهان. بنا بر مفروضات، اعدادی ثابت و مثبت مانند A_1، . . .، و A_k هست که از مرتبه‌ای بیعد،

$$|f^{(i)}(n)| \leqslant A_i |\varphi^{(i)}(n)| \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

پس، اگر $A = \operatorname{Max}\{A_1, \ldots, A_k\}$ آنگاه

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f^{(i)}(n)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i f^{(i)}(n)| \leqslant A \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i \varphi^{(i)}(n)|. \blacktriangle$$

اثبات دو قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود:

۱۰.۳.۲. قضیه. اگر k عدد طبیعی ثابتی، λ_1، . . .، و λ_k اعدادی ثـابت، و ψ رشته‌ای، و

$$f^{(i)}, \qquad \varphi^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

رشته‌هائی باشند بطوری که، اولاً، بازاء هر i از 1 تا با k، از مرتبه‌ای ببعد

$$|\varphi^{(i)}(n)| \leqslant \psi(n),$$

و ثانیاً،

$$f^{(i)} = O(\varphi^{(i)}) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f^{(i)} = O(\psi).$$

همین قضیه با تبدیل O در سراسر آن به o نیز برقرار است.

۱۰.۳.۳. قضیه. اگر

$$f^{(i)} = O(\varphi^{(i)}) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

آنگاه

$$\prod_{i=1}^{k} f^{(i)} = O\Big(\prod_{i=1}^{k} \varphi^{(i)}\Big).$$

همین قضیه با تبدیل O در سراسر آن به o نیز برقرار است.

۱۰.۳.۴. قضیه. اگر λ عددی ثابت و f رشته‌ای باشد آنگاه

I $$O(\lambda f) = O(f).$$

II. $o(\lambda f) = o(f)$

III. $\lambda O(f) = O(f)$

IV. $\lambda o(f) = o(f)$

اثبات این احکام پس از فهم معنی آنها بدیهی است. رابطه‌ی I بدین معنی است که اگر رشته‌ای اُی λf باشد اُی f است. پس، فرض میکنیم $g = O(\lambda f)$، و به استناد تعریف نتیجه میگیریم که $g = O(f)$. همچنین IV بدین معنی است که حاصلضرب λ در رشته‌ای که اُی کوچک f است اُی کوچک f است. پس، فرض میکنیم $g = o(f)$ و ثابت میکنیم که $\lambda g = o(f)$. بیا دو حکم دیگر و اثبات هر چهار حکم به متعلم محول میشود.

۱۰.۳.۵. قضیه (تعدی O و o).

I. $O(O(\varphi)) = O(\varphi).$

II. $o(o(\varphi)) = o(\varphi).$

برهان. رابطه‌ی II را توضیح میدهیم و ثابت میکنیم. در طرف اول، $o(\varphi)$ یعنی تابعی مانند f که

$$f = o(\varphi). \tag{۱}$$

در این صورت، $o(o(\varphi))$ یعنی تابعی مانند g که

$$g = o(f). \tag{۲}$$

اینک رابطه‌ی II به صورت $g = o(\varphi)$ (*) در میآید. خلاصه، از مفروضات (۱) و (۲) باید (*) را نتیجه گرفت. برای این منظور فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر (۱) از مرتبه‌ای ببعد،

$$| f(n) | \leqslant | \sqrt{\varepsilon} | \varphi(n) |,$$

و بنا بر (۲)، از مرتبه‌ای ببعد،

$$| g(n) | \leqslant \sqrt{\varepsilon} | f(n) |.$$

پس، از مرتبه‌ای ببعد،

$$| g(n) | \leqslant \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} | \varphi(n) | = \varepsilon | \varphi(n) |. \blacktriangle$$

سایر قواعد ترکیب O و o در قضیه‌ی ذیل آمده است. اثبات آنها به متعلم محول میشود. تعمیم آنها در مورد تعدادی متناهی از علامات O و o آسان است.

۱۰.۳.۶. قضیه.

I. $o(\varphi) = O(\varphi).$

II. $O(o(\varphi)) = o(\varphi).$

III. $o(O(\varphi)) = o(\varphi).$

IV. $O(\varphi) + O(\varphi) = O(\varphi).$

V. $o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi).$

VI. $O(\varphi)+o(\varphi)=O(\varphi).$

VII. $O(\varphi)O(\psi)=O(\varphi\psi).$

VIII. $o(\varphi)o(\psi)=o(\varphi\psi).$

IX. $O(\varphi)o(\psi)=o(\varphi\psi).$

۱۰.۳.۷. مثال. ثابت کنید که

$$\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2=1+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{*}$$

قبلاً یادآوری میکنیم که

$$O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

اینک گوئیم

$$\begin{aligned}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2&=1+2\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)+\left[O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 [۱۰.۲.۸:۶]\\ &=1+2\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) [۱۰.۳.۴ \text{ و } (1)]\\ &=1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) [۱۰.۳.۶:\mathrm{IV}]\\ &=1+O\left(\frac{1}{n}\right). \blacktriangle\end{aligned}$$

خوبست متعلمین، با توجه به اینکه طرف اول (*) به معنی $[1+f(n)]^2$ است که در آن $f(n)=O(1/n)$، رابطه‌ی حکم را ثابت کنند تا فواید قواعد محاسبه را بهتر دریابند.

۱۰.۴. رشته‌های معادل، تعریف. رشته‌ی f را با رشته‌ی g معادل نامند در صورتی که

$$f-g=o(g).$$

در این صورت، مینویسند

$$f\sim g$$

(بخوانید «f معادل g است»).

قضیه‌ی ذیل در اثبات معادل بودن رشته‌ها فواید عملی بسیار دارد:

۱۰.۴.۱. قضیه. اگر f و g دو رشته باشند، و از مرتبه‌ای بعد $g(n)\neq 0$ [۱]، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $f\sim g$ آنست که

$$\lim_n \frac{f(n)}{g(n)}=1.$$

---

(۱) اگر g رشته‌ی $\{1+(-1)^n\}$ باشد این شرط برقرار نیست.

برهان. فرض کنیم از مرتبه‌ای مانند ν بیعد $g(n) \neq 0$، و رشته‌ها را بر I_ν ملحوظ میداریم. حال اگر $g \sim f$ آنگاه، بنا بر تعریف، بازاء عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N $(N \geqslant \nu)$ هست که

$$| f(n) - g(n) | < \varepsilon | g(n) |,$$

و لهذا،

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

اثبات عکس به همین قیاس است، و به متعلم محول میشود. ▲

۱۰.۴.۲ قضیه. اگر

$$f \sim g$$

آنگاه

$$f = O(g), \qquad g = O(f).$$

برهان. فرض کنیم $f - g = o(g)$. پس، از مرتبه‌ای ببعد،

$$| f(n) - g(n) | \leqslant \frac{1}{2} | g(n) |,$$

و بالنتیجه،

$$|| f(n) | - | g(n) || \leqslant | f(n) - g(n) | \leqslant \frac{1}{2} | g(n) |,$$

و از آنجا،

$$| f(n) | \leqslant \frac{3}{2} | g(n) |, \qquad | g(n) | \leqslant 2 | f(n) |. \ ▲$$

۱۰.۴.۳. قضیه. نسبت $\sim$ در میان رشته‌ها یک نسبت هم ارزی است.

برهان. اولاً اگر f رشته‌ای باشد، بالبداهه $f - f = o(f)$، و یا، $f \sim f$.

ثانیاً، برای اثبات تقارن، فرض کنیم $g \sim f$. بالنتیجه، $g - f = o(g)$. پس، بنا بر ۱۰.۴.۲ و III : ۱۰.۳.۶،

$$f - g = o(O(f)) = o(f),$$

و از آنجا، $g - f = o(f)$. پس، بنا بر تعریف، $g \sim f$.

ثالثاً، برای اثبات تعدی، فرض کنیم $f \sim g$ و $g \sim h$. بالنتیجه،

$$(۱) \quad f - g = o(g), \qquad (۲) \quad g - h = o(h).$$

از (۲) بنا بر ۱۰.۴.۲، $g = O(h)$. پس، با توجه به (۱)،

$$f - g = o(O(h)) = o(h).$$

بالنتیجه،

$$f - h = (f - g) + (g - h) = o(h) + o(h) = o(h).$$

پس، $f \sim h$ ▲

۱۰.۴.۴. تبصره. بنا بر ۱۰.۴.۲ و ح: ۱۰.۲.۴، اگر $f \sim g$ آنگاه عددی طبیعی مانند ν هست که، بازاء هر n که $n \geqslant \nu$، اگر $g(n) = 0$ آنگاه $f(n) = 0$، و اگر $g(n) \neq 0$ آنگاه $f(n) \neq 0$. اگر رشته‌ی φ را بر $\mathbf{I}_\nu$ با ضابطه‌ی

$$\varphi(n) = \begin{cases} f(n)/g(n) & (f(n) \neq 0), \\ 1 & (f(n) = 0) \end{cases}$$

تعریف کنیم واضح است که، اولاً، بازاء هر n از $\mathbf{I}_\nu$، $f(n) = \varphi(n)g(n)$؛ و ثانیاً

$$\lim \varphi(n) = 1.$$ [1]

بالعکس، اگر f و g دو رشته باشند، و رشته‌ای مانند φ واجد شرایط دوگانه‌ی مذکور موجود باشد، به آسانی دیده میشود که $f \sim g$.

خلاصه،

۱۰.۴.۵. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌های f و g معادل باشند آنست که رشته‌ای مانند φ موجود باشد که $\lim \varphi(n) = 1$، و از مرتبه‌ای ببعد $f(n) = \varphi(n)g(n)$.

۱۰.۴.۶. قضیه. اگر $f \sim g$ و $f' \sim g'$ آنگاه $ff' \sim gg'$.

برهان. فرض کنیم $f \sim g$ و $f' \sim g'$. بنا بر قضیه‌ی قبل، دو رشته مانند φ و φ' هست که

$$\lim \varphi(n) = \lim \varphi'(n) = 1, \qquad (۱)$$

و از مرتبه‌ای ببعد،

$$f(n) = \varphi(n)g(n) \qquad f'(n) = \varphi'(n)g'(n).$$

پس، اولاً، از مرتبه‌ای ببعد،

$$f(n)f'(n) = [\varphi(n)\varphi'(n)]g(n)g'(n),$$

و ثانیاً، بنا بر (۱)، رشته‌ی $\varphi\varphi'$ متقارب به 1 است. پس، بنا بر ۱۰.۴.۵، $ff' \sim gg'$. ▲

به همین قیاس معلوم میشود که

۱۰.۴.۷. قضیه. اگر $f \sim g$ و $f' \sim g'$ و از مرتبه‌ای ببعد $f'(n) \neq 0$ آنگاه $f/f' \sim g/g'$.

---

(۱) برای اثبات قسمت اخیر، فرض کنید ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $f \sim g$، از مرتبه‌ای مانند N، که آن را ناکمتر ν میگیریم، $|f(n) - g(n)| < \varepsilon |g(n)|$. حال فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از N باشد. اگر $f(n) = 0$ آنگاه $|\varphi(n) - 1| = 0 < \varepsilon$، و اگر $f(n) \neq 0$ آنگاه $g(n) \neq 0$، و بالنتیجه $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - 1\right| < \varepsilon$، و از آنجا $|\varphi(n) - 1| < \varepsilon$.

۱۰.۴.۸. قضیه. اگر $f \sim g$ و $\lim f(n)$ موجود باشد آنگاه
$$\lim g(n) = \lim f(n).$$
برهان. فرض کنیم $f \sim g$. پس، $g \sim f$. بنا بر ۱۰.۴.۵، رشته‌ای مانند φ هست که $\lim \varphi(n) = 1$، و از مرتبه‌ی مشخصی مانند N ببعد، $g(n) = \varphi(n) f(n)$. پس، چون $\lim f(n)$ موجود است، $\lim g(n)$ هم موجود است، و
$$\lim g(n) = \lim \varphi(n) \cdot \lim f(n) = \lim f(n). \blacktriangle$$

۱۰.۴.۹ امثله.

(آ). بنا بر ۱۰.۴.۱،
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{10n^2 - n} \sim \sqrt{10}\, n,$$
$$2n^3 - 4n^2 + 1 \sim 2n^3$$
(ب). از دو رابطه‌ی اخیر بنا بر ۱۰.۴.۷،
$$\frac{2n^3 - 4n^2 + 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \sim 4n^3\sqrt{n} \to \infty$$
پس، بنا بر ۱۰.۴.۸،
$$\lim \frac{2n^3 - 4n^2 + 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \infty$$
(پ). فرض کنیم
$$a_n = \frac{1}{n^3}, \qquad b_n = \frac{1}{n-1}, \qquad c_n = \frac{n}{n^2 - 1}.$$
واضح است که
$$a_n \sim \frac{1}{n^3}, \qquad b_n \sim \frac{1}{n}, \qquad c_n \sim \frac{1}{n}.$$
از طرف دیگر،
$$a_n + b_n - c_n = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}.$$
از این مثال معلوم میشود که از روابط $f \sim g$ و $f' \sim g'$ عموماً نمیتوان هیچ یک از روابط
$$f + f' \sim g + g', \qquad f - f' \sim g - g'$$
را نتیجه گرفت.

۱۰.۵. تمرین

۱. ثابت کنید که
$$(f + O(\varphi))(g + O(\psi)) = fg + O(f\psi) + O(g\varphi) + O(\varphi\psi).$$
۲. ثابت کنید که

$$\left\{1+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\left\{1+\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = 1+\frac{a+b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

مثال بیاورید.

۳. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته باشند، و رشته‌های $\{na_n\}$ و $\{nb_n\}$ محدود باشند آنگاه

$$(1+a_n)(1+b_n) = 1+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

مثال بیاورید.

۴. ثابت کنید که

$$1-\frac{1}{2(n+1)}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

۵. ثابت کنید که $\log\,(5n^2+13) = O(\log n)$. همچنین، ثابت کنید که عددی مانند λ هست که $\log\,(5n^2+13) \sim \lambda \log n$.

۶. ثابت کنید که

(آ). اگر $a_n = o(b_n)$ و $b_n \sim c_n$ آنگاه $a_n = o(c_n)$.

(ب). اگر $a_n \sim b_n$ و $b_n = o(1)$ آنگاه $a_n = o(1)$:

۷. اگر $a_n - b_n = o(1)$ و $1/b_n = O(1)$ آنگاه $a_n \sim b_n$.

مثالی بیاورید که $a_n - b_n = o(1)$ راست ولی $a_n \sim b_n$ دروغ باشد.

۸. اگر $a_n \sim b_n$ و $b_n = O(1)$ آنگاه $a_n - b_n = o(1)$.

مثالی بیاورید که $a_n \sim b_n$ راست ولی $a_n - b_n = o(1)$ دروغ باشد.

فصل ۸

سلسله‌ها

در این فصل، با کمال اختصار، از رشته‌های حاصل از جمع کردن تدریجی جمله‌های متوالی یک رشته‌ی نامتناهی («رشته‌ی مولّد») از ابتدای آن سخن میرود. این رشته‌های جدید حاصل از رشته‌های مولد عنوان سلسله دارند. پس، سلسله‌ها رشته‌هائی بیش نیستند، منتها، این رشته‌ها از لحاظ ارتباطشان با رشته‌ی مولد مورد تحقیق قرار میگیرند. این تحقیق موضوع مبحث سلسله‌ها است، که یکی از زیباترین مباحث آنالیز است، و در عین حال، وسایلی توانا برای تعریف موجودات جدید ریاضی و حل بسیاری از مسائل این علم بدست میدهد. مبحث سلسله‌ها با کوشش در تعمیم دادن عمل جمع در مورد تعدادی نامتناهی از اعداد پیدایش یافته است[۱]. در فصل حاضر، چگونگی این تعمیم را خواهیم آموخت، و خواهیم دید که در چه شرایطی و تا چه اندازه عمل جمع تعمیم‌یافته از خواص عمل جمع به معنی عادی آن برخوردار است.

۱ § مفاهیم اولیه

۱.۱. مقدمه. برای آماده کردن ذهن، پیش از اینکه رسما به تعریف سلسله بپردازیم، مثالی میآوریم.

از رشته‌ی $\{a_n\}_0$ با ضابطه‌ی $a_n = 1/2^n$، یعنی از رشته‌ی

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \qquad (۱)$$

میتوان این حاصلجمعها را ساخت:

$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = 1 + \frac{1}{2},$$
$$A_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

---

(۱) تاکنون، عمل جمع را فقط در مورد تعدادی متناهی از اعداد تعریف کرده‌ایم.

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n},$$

. . . .

رشته‌ی $\{A_n\}_0$ را، که جمله‌ی عمومی آن

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad (۲)$$

است، سلسله‌ی حادث از رشته‌ی (۱) و رشته‌ی (۱) را رشته‌ی مولد این سلسله نامیم.
نظر به صورت (۲)، سلسله‌ی $\{A_n\}_0$ را به نامهای

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots, \qquad (۳)$$

$$\sum_{n=0} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad (۴)$$

نیز میخوانند. نکته‌ی فوق‌العاده مهمی که باید بدان توجه کامل داشت اینست که، در (۲)، علامات «$+$» و «$\sum$» علامت جمع هستند، اما، استعمال این علامات در (۳) و (۴) نه به معنی عمل جمع است، زیرا عمل جمع، جز در مورد تعدادی متناهی از اعداد، معنی ندارد، و در این صورت هم، حاصل آن عدد است، و حال آنکه هیچ یک از علامات (۳) و (۴) عددی را نشان نمیدهد، بلکه، این علامات نام دیگری برای رشته‌ی $\{A_n\}_0$ میباشند.

اینک به تعریف کلی میپردازیم.

۱.۲. تعریفات. فرض کنیم $\{a_n\}_\nu$ رشته‌ای از اعداد باشد.

I. رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ را با ضابطه‌ی

$$A_n = \sum_{k=\nu}^{n} a_k = a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_n$$

یک سلسله‌ی نامتناهی («سلسله‌ی نامتناهی حادث از رشته‌ی $\{a_n\}_\nu$») یا، مختصراً، یک سلسله خوانیم[1]، و این سلسله را به هر یک از علامات

$$\sum_{n=\nu} a_n, \qquad \sum_{\nu} a_n, \qquad \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n\ [2],$$

یا به «صورت زنجیری»

$$a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_n + \cdots$$

نمایش میدهیم، و n را اندیس جمع نامیم. در حالتی که $\nu = 1$، معمولاً سلسله را $\sum a_n$ نیز

---

(۱) بعضی زوج مرتب $(\{a_n\}_\nu, \{A_n\}_\nu)$ را سلسله میخوانند.

(۲) در این عبارت، $\sum^{\infty}$ را باید علامتی واحد و تفکیک‌ناپذیر تلقی کرد. با ۳.۲.۱۵ : ۷ مقایسه کنید.

میخوانند.

II. رشته‌ی $\{a_n\}_\nu$ را رشته‌ی مولد سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$، ν را اندیس مبدأ سلسله، و هر جمله‌ی رشته‌ی مولد را یک جمله‌ی سلسله و جمله‌ی عمومی آن را جمله‌ی‌عمومی سلسله[1] نامند.

III. هر یک از Aها را یک جَمْعَک سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$، و A_n را جمعک عمومی آن خوانند.

۱.۲.۱. تبصره. بنا بر تعریفات مذکور،

(آ). جمله‌ی nم سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ یعنی جمله‌ی nم رشته‌ی $\{a_n\}_\nu$، و آن $a_{n+\nu-1}$ است. در حالت خاصی که $\nu = 1$، جمله‌ی nم سلسله a_n میباشد.

(ب). جمعک nم سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ یعنی جمله‌ی nم رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$، و آن $A_{n+\nu-1}$ است. در حالت خاصی که $\nu = 1$، جمعک nم سلسله A_n میباشد.

۱.۲.۲. تبصره. چنانکه میدانیم، متغیر فردی n در رشته‌های $\{a_n\}_\nu$ و $\{A_n\}_\nu$ متغیری ظاهری است، و این رشته‌ها، مثلاً، همان رشته‌های $\{a_k\}_\nu$ و $\{A_m\}_\nu$ میباشند. بنا بر این، مثلاً، سلسله‌های

$$\sum_\nu a_n, \qquad \sum_{\nu=k}^{\infty} a_k, \qquad a_\nu + \cdots + a_m + \cdots$$

یکی هستند.

۱.۲.۳. امثله.

(آ). در سلسله‌ی $\sum_{n=0} (1/2^n)$ مذکور در ۱.۱،

(۱) اندیس مبدأ 0 است.

(۲) جمله‌ی عمومی سلسله $a_n = 1/2^n$ میباشد، که جمله‌ی $n+1$م آنست.

(۳) جمعک عمومی سلسله

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

است، که $n+1$مین جمعک آن میباشد.

(۴) «سلسله‌ی $\sum_{n=0} (1/2^n)$» یعنی رشته‌ی $\left\{2 - \frac{1}{2^n}\right\}_0$، و آن را میتوان سلسله‌ی

---

(۱) چون سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ به معنی رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ است، حقاً باید A_n را جمله‌ی عمومی سلسله شمرد، ولی اصطلاح رایج همان است که در متن گفته شد. برای Aها اسم دیگری هست که در III آمده است.

$(1/2^k)\sum_{k=0}^{\infty}$ یا سلسله‌ی

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\cdots$$

نامید.

(ب). سلسله‌ی حادث از رشته‌ی ثابت $\{c\}_2$.

در اینجا،

$$a_n = c \qquad (n \geqslant 2),$$

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} c = (n-1)c.$$

سلسله‌ی حادث از رشته‌ی $\{c\}_2$ یعنی رشته‌ی $\{(n-1)c\}_2$، و آن را میتوان به هر یک از اسامی

$$\sum_2 c, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} c, \qquad c+c+\cdots+c+\cdots$$

نامید. جمله‌ی عمومی سلسله c است، و جمعک عمومی آن $(n-1)c$. جمعک mم سلسله A_{m+2-1} یا A_{m+1} میباشد که مساوی mc است.

۱.۲.۴. تبصره. دیدیم که از هر رشته سلسله‌ای حادث میشود. بالعکس، اگر $\{A_n\}_\nu$ رشته‌ای باشد رشته‌ی $\{a_n\}_\nu$ با ضابطه‌ی

$$a_\nu = A_\nu, \qquad a_n = A_n - A_{n-1} \qquad (n > \nu)$$

سلسله‌ی $\{A_n\}_\nu$ را تولید میکند.

مثلاً، اگر $A_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ آنگاه از رشته‌ی $\{A_n\}$ میتوان رشته‌ی $\{a_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad (n > 1)$$

تعریف کرد. سلسله‌ی حادث از این رشته همان سلسله‌ی $\{A_n\}$ یا $(1/n)\sum_1$ یا

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

است.

۱.۲.۵. تعریف و نامگذاری سلسله‌ها. صورت رسمی در تعریف سلسله‌ها اینست که سلسله را با جمله‌ی عمومی آن به صورت $\sum_\nu a_n$ معرفی کنیم. معذلک، در بعضی موارد ــ بر حسب ضرورت یا به ملاحظات دیگر ــ از این طریق منحرف میشویم.

I. گاه سلسله را به صورت زنجیری، با نوشتن تعدادی کافی از جمله‌های اوایل آن تا

جائی که حدس زدن جملهٔ عمومی را ممکن سازد، معرفی میکنند. در این باب نکته‌ای را که در ژ: ۶.۲.۷ : ۵ بطور کلی در باب رشته‌ها گفته شد باید به یاد داشت. مثلاً، در سلسلهٔ

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots,$$

«حدس طبیعی» اینست که جملهٔ عمومی سلسله

$$a_n=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\qquad (n\geqslant 1)$$

است. در این صورت، سلسلهٔ مذکور سلسلهٔ

$$\sum_1 \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}$$

خواهد بود.

II. طریق مذکور بالاخص در مواردی که ضابطهٔ تعریف رشتهٔ مولد ضابطه‌ای مرکب است مفید میباشد. مثلاً،

سلسلهٔ $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$

یعنی سلسلهٔ $\sum\limits_1 a_n$ با ضابطهٔ

$$a_{2n-1}=a^n,\qquad a_{2n}=b^n.$$

همچنین،

سلسلهٔ $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+\cdots$

یعنی سلسلهٔ $\sum\limits_1 x_n$ با ضابطهٔ

$$x_{2n-1}=a_n,\qquad x_{2n}=b_n.$$

III. به عنوان مثال دیگر، سلسلهٔ

$$(۱)\quad \sum_1 a_n=\sum_1\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

را اختیار میکنیم، و از آن، سلسلهٔ $\sum\limits_1 b_n$ را بدین طریق میسازیم که مرتباً دو جملهٔ مثبت از سلسلهٔ (۱) را میگیریم، و یک جملهٔ منفی به دنبال آن میآوریم. بدین گونه، سلسلهٔ

$$(۲)\quad \sum_1 b_n=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}++-\cdots$$

حاصل میشود. طرح (۲) ساختمان سلسلهٔ $\sum\limits_1 b_n$ را به خوبی آشکار میسازد، ولی ضابطهٔ تعریف آن بدیهی نیست. اگر $3n$ جمله از آغاز سلسلهٔ (۲) اختیار شود، مخرجهای آنها عبارتست از $2n$ عدد فرد متوالی ابتدا از 1 و n عدد زوج متوالی ابتدا از 2. پس، جملهٔ $3n$م سلسلهٔ (۲) مساوی $-\frac{1}{2n}$ میباشد، و مخرج دو جملهٔ قبل $2n$مین و $2n-1$مین عدد فرد طبیعی است. پس، بازاء هر عدد طبیعی n،

$$b_{3n-2}=\frac{1}{4n-3},\qquad b_{3n-1}=\frac{1}{4n-1},\qquad b_{3n}=-\frac{1}{2n}.$$

IV. سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ را، با تفکیک تعدادی متناهی از جمله‌های آن مانند

$$a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_k$$

به صورت

$$a_\nu+a_{\nu+1}+\cdots+a_k+\sum_{n=k+1} a_n$$

نیز مینویسند. مثلاً، سلسله‌ی $\sum_{0} a_n$ را میتوان سلسله‌ی

$$a_0+\sum_{1} a_n$$

نامید. بالعکس، سلسله‌ی

$$0+\sum_{3}\frac{n^2-4}{n}$$

همان سلسله‌ی

$$\sum_{2}\frac{n^2-4}{n}$$

است.

روش فوق در نامگذاری سلسله‌ها مخصوصاً وقتی که تعدادی متناهی از جمله‌های اوایل سلسله با ضابطه یا ضوابط خاص و جمله‌های پس از آن با ضابطه‌ای کلی تعریف شوند بسیار مفید است. مثلاً، رشته‌ی $\{a_n\}_0$ با ضابطه‌ی

$$a_0=1,\qquad a_1=-1,\qquad a_n=\sqrt{n}\qquad (n\geqslant 2)$$

سلسله‌ی

$$1+(-1)+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}+\cdots$$

را احداث میکند. این سلسله را نمیتوان $\sum_{0}\sqrt{n}$ نامید، اما میتوان آن را سلسله‌ی

$$1+(-1)+\sum_{2}\sqrt{n}$$

خواند.

۱.۲.۶. تمرین

۱. معنی هر یک از اصطلاحات ذیل را با ذکر مثال توضیح دهید:

(آ) جمله‌های یک سلسله.

(ب) جمله‌های رشته‌ی مولد یک سلسله.

(پ) جمعکهای یک سلسله.

(ت) رشته‌ی جمعکهای یک سلسله.

---

(۱) این تفکیک ممکن است بر حسب ضرورت یا به منظور خاصی باشد.

(ڎ) جملهٔی دارای اندیس n یک سلسله.
(ج) جملهٔی nام یک سلسله.
(چ) جمعک دارای اندیس n یک سلسله.
(ح) جمعک nام یک سلسله.

۲. مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه $\sum_{\mu} b_n = \sum_{\nu} a_n$.

۳. سلسلهٔی حادث از هر یک از رشته‌های ذیل را، پس از محاسبهٔی جمعک عمومی آن، به صورت $\{A_n\}_\nu$ تعریف کنید، و با $\sum$ و نیز به صورت زنجیری بنویسید:

(آ) $\{1/2^n\}_2$.　　(ب) $\{0\}_{n=0}$.

(پ) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}$　　(ت) $\{m\}_{m=1}$.

(ث) $\left\{\frac{1}{(\sqrt{2}+n)(\sqrt{2}+n+1)}\right\}_0$

(ج) $\{(-1)^n(2n+1)\}_0$.

۴. در هر یک از سلسله‌هائی که ذیلاً تعریف شده است،
(آ) پنج جملهٔی اول سلسله را حساب کنید، و سلسله را به صورت زنجیری بنویسید.
(ب) جمعکهای دارای اندیس مبدأ تا با اندیس 4 هر سلسله را بنویسید.
(پ) چه نتیجه‌ای از مقایسهٔی بعضی از این سلسله‌ها با هم میتوانید بگیرید؟

(آ) $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+2)^2}$.　　(ب) $\sum_{m=2} \frac{(-1)^m}{m^2}$.

(پ) $\sum_0^\infty \frac{1}{k+1}$.　　(ت) $\sum_0^\infty \frac{2n^2-5n+6}{6(n!)}$.

(ث) $\sum_0^\infty \frac{1}{2n^4-12n^3+22n^2-11n+1}$.

۵. در مورد هر یک از سلسله‌های ذیل، ساده‌ترین فرمولی را که میتوانید برای جملهٔی عمومی حدس بزنید، و بازاء مقداری که خود برای ν اختیار میکنید سلسله را به صورت $\sum_\nu a_n$ بنویسید.

(آ) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$

(ب) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$

(پ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$

(ت) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots$

(ث) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots$

(ج) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\cdots$

(چ) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$

(ح) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$

(خ) $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\frac{1}{\sqrt[5]{10}}+\cdots$

(د) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

(ذ) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

(ر) $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\frac{4}{19}+\cdots$

(ز) $\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\cdots$

(ژ) $2a+1+(1-c^2)+\left(1-\frac{c^3}{4}\right)+\left(1-\frac{c^4}{8}\right)+\cdots$

(س) $c-c+c-c+\cdots$

(ش) $(c-c)+(c-c)+(c-c)+\cdots$

۶. سلسله‌ی $\{A_n\}_\nu$ مفروض است. آن را با $\sum$ بنویسید.

۷. جمعک nم سلسله‌ای به طریق ذیل تعریف شده است. سلسله را با $\sum$ و نیز به صورت زنجیری بنویسید.

(آ) $A_n=\frac{2n+1}{n-1} \qquad (n\geqslant 2).$

(ب) $A_n=2^n \qquad (n\geqslant 0).$

(پ) $A_n=0 \qquad (n\geqslant 1).$

(ت) $A_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^n] \qquad (n\geqslant 1).$

(ث) $A_n=(-1)^{n+1}(n+1) \qquad (n\geqslant 2).$

(ج) $A_n=n \qquad (n\geqslant 1).$

(چ) $A_n=-n \qquad (n\geqslant 1).$

۸. $\sum_1 a_n$ و $\sum_1 b_n$ سلسله‌های مذکور در III : ۱.۲.۵ اند، و سلسله‌ی $\sum_1 c_n$ چنین تعریف شده است:

$$\sum_1 c_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

جمعکهای سه سلسله را با حروف A، B، و C با اندیسهای لازم نمایش میدهیم. ثابت کنید که همواره

$$(\text{آ})\quad A_{2n} = C_{2n} - C_n.$$

$$(\text{ب})\quad B_{3n} = A_{4n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= C_{4n} - \frac{1}{2}C_{2n} - \frac{1}{2}C_n$$
$$= A_{4n} + \frac{1}{2}A_{2n}.$$

$$(\text{پ})\quad B_{3n-1} = B_{3n} + \frac{1}{2n}$$

$$(\text{ت})\quad B_{3n-2} = B_{3n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n-1}.$$

۹. $\sum_1 a_n$ همان است که در مسئله‌ی قبل گذشت. و

$$\sum d_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + - - - - \cdots$$

بنا بر آنکه D_n جمعک عمومی این سلسله باشد، ثابت کنید که

$$D_{5n} = \frac{1}{2}(A_{2n} - A_{4n}).$$

۱.۳. رفتار سلسله‌ها. چون هر سلسله یک رشته است، میتوان اصطلاحات مربوط به رفتار رشته‌ها را در مورد سلسله‌ها بکار برد:

۱.۳.۰۱. تعریف. فرض کنیم $\sum_\nu a_n$ سلسله‌ای باشد، و

$$A_n = \sum_{k=\nu}^{n} a_k = a_\nu + \cdots + a_n.$$

I. سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ را متقارب خوانیم در صورتی که رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ متقارب باشد. در این صورت، $\lim_n A_n$ را مقدار یا مجموع یا حاصلجمع سلسله خوانیم.

II. سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ را متباعد نامیم اگر متقارب نباشد. در این صورت، اگر $\lim_n A_n = \pm\infty$ گوئیم سلسله متباعد مشخص است، و $\lim_n A_n$ را مقدار سلسله نامیم، و اگر $\lim_n A_n$ موجود نباشد سلسله را متباعد نامشخص یا نوسانی خوانیم.

III. وقتی که سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ مقداری مانند A داشته باشد. **بر طبق قرارداد،** مقدار

سلسله را به نام خود سلسله میخوانیم، و مینویسیم

$$\sum_{\nu} a_n = A, \qquad a_\nu + \cdots + a_n + \cdots = A.$$

IV. مقصود از رفتار یک سلسله متقارب یا متباعد بودن آنست.

۱.۳.۲. امثله.

(آ). در سلسله‌ی $\sum_0 (1/2^n)$ مذکور در ۱.۱،

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

$$\lim A_n = 2.$$

پس، سلسله‌ی مذکور متقارب است، و مقدار یا مجموع آن 2 میباشد، و میتوان نوشت:

$$\sum_{n=0} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

یا

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2.$$

(ب). سلسله‌ی $\sum_1 (1/n)$ به سلسله‌ی توافقی معروف است.

در اینجا،

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

بنا بر ت: ۴.۴.۲ : ۷.

$$\lim A_n = \infty.$$

پس، سلسله‌ی توافقی متباعد به ∞ است. بنا بر قرارداد مذکور، میتوان نوشت:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty.$$

(پ). سلسله‌ی

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

یا $\sum_1 (-1)^{n-1}$ را اختیار میکنیم. جمعک عمومی سلسله عبارتست از

$$A_n = \begin{cases} 0 & (2 \mid n), \\ 1 & (2 \nmid n). \end{cases}$$

چون رشته‌ی $\{A_n\}$ نوسانی است ($\lim A_n$ موجود نیست) سلسله‌ی مذکور نوسانی میباشد.

۱.۳.۳. تبصره. برای احتراز از تکرار، معمولاً، در نامگذاری جمعکهای سلسله‌ی حادث از رشته‌ی مولد $\{a_n\}_\nu$، حرف بزرگ نظیر a را با اندیسهای مناسب بکار میبریم، مانند A_n و A_k؛ و مقدار سلسله را، در صورت وجود، A مینامیم. به همین قیاس، در سلسله‌ی $\sum_{\mu} b_n$، B_m

به معنی $b_m + \cdots + b_\mu$ است، و B به معنی مقدار سلسله (در صورت وجود).

۱.۳.۴. تبصره‌ی بسیار مهم. مشکل اولیه و جدی مبتدیان در مبحث سلسله‌ها ناشی است از استعمال علامات $\sum$ و $+$ و اصطلاحات نامطلوب ولی رایج مجموع یک سلسله یا حاصلجمع یک سلسله در این مبحث به معانی قراردادی جدید. عدم توجه به تفاوت فاحش این علامات و اصطلاحات به معانی قراردادی جدید با معانی عادی آنها مانع اساسی در درک مفاهیم و احکام این مبحث مهم میباشد. بدین جهت، به ذکر توضیحاتی در این باب میپردازیم.

I. تا آغاز این فصل، علامات $\sum$ و $+$ را برای نامیدن حاصلجمع تعدادی متناهی از اعداد بکار بردیم. حاصل اعمال $\sum$ و $+$ بر هر تعداد متناهی از اعداد یک عدد است.

II. در آغاز این فصل، علامات

$$\sum_{\nu} a_n \tag{*}$$

$$a_\nu + \cdots + a_n + \cdots \tag{**}$$

را برای نامیدن رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ با ضابطه‌ی

$$A_n = a_\nu + \cdots + a_n, \tag{†}$$

یعنی برای نامیدن رشته‌ی

$$\{a_\nu + \cdots + a_n\}_{n=\nu},$$

بکار بردیم. در (†)، علامت $+$ علامت عمل جمع به معنی عادی مذکور در I است. اما، چنانکه در ۱۰۱ نیز تذکر دادیم، در (*) و (**)، علامات $\sum$ و $+$ به معنی عادی خود بکار نرفته‌اند، زیرا، اولاً، جمع به معنی عادی جز در مورد تعدادی متناهی از اعداد معنی ندارد، و ثانیاً، حاصل جمع کردن تعدادی متناهی از اعداد عدد است، و حال آنکه علامات (*) و (**) اسامی رشته‌ای میباشند.

III. در ۱۰۳۰۱، علامات (*) و (**) را به معنی مقدار سلسله‌های (*) و (**)، یعنی به معنی

$$\lim_n (a_\nu + \cdots + a_n)$$

(در صورت وجود این حد)، بکار بردیم. بدین معنی، در صورت وجود حد مذکور، (*) و (**) عضوی از $\mathbf{R}^*$ میباشند، اما، در این معنی هم، استعمال علامات $\sum$ و $+$ به معنی عادی آنها نیست، زیرا، چنانکه گذشت، اعمال $\sum$ و $+$ جز در مورد تعدادی متناهی از اعداد معنی ندارند.

بنا بر این، باید بین علامات $\sum$ و $+$

در جمع عادی

در نامگذاری سلسله‌ها

در نامگذاری مقدار سلسله‌ها،

و نیز بین اصطلاحات مجموع یا حاصلجمع

به معنی عادی (در مورد تعدادی متناهی از اعداد)

در سلسله‌ها

به دقت تمیز گذاشت.

IV. به عنوان مثال، به روابط

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2 \qquad (۱)$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\infty \qquad (۲)$$

مذکور در قسمتهای (آ) و (ب) از امثلهی ۱.۳.۲ باز میگردیم. چون عمل جمع جز در مورد تعدادی متناهی از اعداد معنی ندارد، در هیچ یک از تساویهای (۱) و (۲) عمل $+$ به معنی عادی خود بکار نرفته است. بعلاوه، در مورد (۲)، عمل جمع عادی بدین دلیل هم بیمعنی است که حاصلجمع به معنی عادی عدد است، و حال آنکه ∞ عدد نیست. در حقیقت، روابط (۱) و (۲) صورتی قراردادی برای روابط

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=2, \qquad (۱')$$

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty \qquad (۲')$$

میباشند، و آنچه حاصلجمع سلسله خوانده و با علامت جمع به معنی عادی نوشته میشود، در واقع حد یک رشته است.

برای مزید توضیح بخاطر بیاورید که، در جمع به معنی عادی، اگر عددی مثبت بر عددی بیفزائیم عددی بزرگتر از عدد اولیه حاصل میشود. بدین گونه، چنین به نظر میرسد که اگر این افزایش اعداد مثبت ادامه یابد حاصلجمع متدرجاً بزرگ میشود، و میتواند از هر عدد بزرگی درگذرد، ولی حقیقت امر غیر از این است. در مثال آ: ۱.۳.۲، فرض کنید من یک ریال به شما بدهم. سپس نیم ریال دیگر، سپس 1/4 ریال دیگر، سپس 1/8 ریال دیگر، ... اگر $n+1$ بار به همین طریق عمل کنم پولی که شما از من دریافت داشتهاید $2-2^{-n}$ ریال خواهد بود، که همواره از 2 ریال کمتر است. خلاصه، جمع دریافتی شما نه فقط ــ بر خلاف انتظار ــ چندان زیاد نمیشود، بلکه هیچ گاه به 2 ریال نمیرسد. در این زمینه، گاه عباراتی یاوه از این قبیل که

وقتی که n بینهایت شود دریافتی شما 2 ریال خواهد شد

شنیده میشود. n متغیری مقید به $\mathbf{N}$ است، یعنی اسم عدد طبیعی نامشخصی است، و حال آنکه ∞ عدد نیست؛ در این صورت، چگونه n میتواند مساوی ∞ شود؟!

باری، آنچه در مسئلهی مورد بحث میتوان گفت اینست که، بازاء هر عدد مثبت مانند ε، میتوان پرداختها را آنقدر ادامه داد که اختلاف جمع مبلغ دریافتی شما با 2 ریال از ε ریال کمتر شود؛ ولی این مطلب، به زبان ریاضی، بدین معنی است که جمع دریافتی شما به 2 ریال میل میکند.

اینک فرض کنید روش پرداخت را تغییر دهم، بدین گونه که ابتدا 1 ریال، سپس 1/2 ریال، پس از آن 1/3 ریال، و بطور کلی، در دفعهی nم، $1/n$ ریال به شما بپردازم. در این صورت

جمع دریافتی شما پس از n پرداخت مساوی

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

ریال خواهد بود. معنی اینکه حد این عبارت ∞ است این است که، بازاء هر عدد مثبت u، اگر پرداختها به دفعات کافی بر طبق ضابطه‌ی مذکور تکرار شود جمع دریافتی شما از u ریال تجاوز میکند، و این همان مطلبی است که با رابطه‌ی ($'۲$) بیان شده است، و رابطه‌ی (۲) نیز معنائی جز این ندارد.

تعارضی که ممکن است بین دو مثال به ذهن مبتدی برسد ـ که در یک نحوه‌ی پرداخت جمع دریافتی شما هیچ گاه به 2 ریال نمیرسد، و در دیگری میتواند از میلیونها ریال هم درگذرد ـ فقط وقتی از میان برمیخیزد که بین علامات «$\sum$» و «$+$» به معنی علامات جمع و همین علامات به معنی قراردادی جدید (یعنی به معنی $\lim A_n$) تمیز بگذارید.

V. در استعمال علامات $\sum$ و $+$ به معنی جمع عادی با استعمال آنها به معانی مذکور در II و III راه هر اشتباهی بسته است، زیرا، در معنی عادی، علامات مذکور همواره به صورت

$$\sum_{\nu}^{\mu} a_n, \qquad a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_\mu$$

میآیند نه به صورتهای

$$\sum_{\nu} a_n, \qquad \sum_{\nu}^{\infty} a_n, \qquad a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_n + \cdots.$$

اما، در مورد علامات دسته‌ی اخیر، باید بین استعمال آنها به عنوان نام سلسله و استعمال آنها به عنوان نام مقدار سلسله به دقت تمیز گذاشت. در اغلب موارد، از سیاق مطلب معلوم است که کدام یک از دو معنی مورد نظر است. مثلاً، اگر A عددی باشد، در رابطه‌ی

$$\sum_{\nu} a_n = A \qquad (\text{آ})$$

طرف اول به معنی مقدار سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ است، و معنی (آ) اینست که «$\sum_{\nu} a_n$» (به معنی مقدار سلسله) و A اسامی یک عدد هستند. همچنین، در رابطه‌ای مانند

$$\sum_{\nu} a_n < \sum_{\mu} b_n,$$

طرفین به معنی مقادیر سلسله‌های $\sum_{\nu} a_n$ و $\sum_{\mu} b_n$ میباشند، زیرا، نسبت $<$ نسبتی در $\mathbf{R}^*$ است، و مقایسه‌ی رشته‌ها یا سلسله‌ها بر حسب این نسبت معنی ندارد. بالاخره، در رابطه‌ی

$$\sum_{\nu} a_n < \infty,$$

طرف اول به معنی مقدار سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ است، و معنی رابطه اینست که مقدار این سلسله غیر از ∞ است.

از طرف دیگر در روابطی مانند

$$\sum_{0} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots, \qquad (\text{ب})$$

$$(\text{پ}) \qquad \sum_1 a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots,$$

اگر طرفین را اسامی سلسله‌ها بشماریم معنی رابطه، بر طبق معنی تساوی منطقی، چنین خواهد بود که طرفین اسامی یک سلسله هستند، و اگر طرفین را به معنی مقادیر سلسله‌ها بگیریم معنی رابطه چنین خواهد بود که مقدار سلسله‌ی طرف چپ با مقدار سلسله‌ی طرف راست یکی است، یعنی مقادیر دو سلسله یک عضو $\mathbf{R}^*$ میباشند. البته، این معنی در صورتی قابل قبول است که وجود مقادیر مذکور محقق باشد. بالاخص، رابطه‌ای مانند (پ) در تعریف سلسله‌ها بسیار میآید. در این صورت معنی رابطه‌ی (پ) اینست که سلسله‌ی $\sum_1 a_n$، بنا بر تعریف، عبارتست از سلسله‌ی

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots.$$

در آتیه، برای تسهیل کار مبتدیان، هر جا علامات (*) و (**) به عنوان نام سلسله (نه مقدار آن) بکار روند، قید «سلسله» را میآوریم تا راه هر گونه ابهامی مسدود باشد. بعلاوه، بجای مجموع یا حاصلجمع سلسله، لفظ «مقدار» را بکار میبریم.

VI. اینک که معلوم شد در عبارات

$$\sum_\nu a_n, \qquad a_\nu + \cdots + a_n + \cdots$$

علامات «$\sum$» و «+» معنی جمع عادی را ندارند انتظار اینکه این عبارات بطور کلی تابع قوانین جمع عادی باشند باطل است[1]. مثلاً، در جمع عادی، میتوان عده‌ای از عوامل را در پرانتز گذاشت، یا پرانتزهائی را برداشت، مانند

$$1 - 1 + 1 - 1 = (1 - 1) + (1 - 1) = 1 - (1 - 1) - 1.$$

اما، اجرای این گونه اعمال مثلاً در سلسله‌ی

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

نتایجی از قبیل

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 0 - 0 - \cdots = 1 \end{aligned}$$

بار میآورد، که ناچار باید از آن نتیجه گرفت که $1 = 0$!

۱.۴. تحقیق در رفتار سلسله‌ها. بنا بر ۱.۳.۰۱، تحقیق در رفتار سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$، در حقیقت، تحقیق در رفتار رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ است، و در حالاتی که بتوان A_n را به وسیله‌ی فرمول ساده‌ای برحسب n بیان کرد بر طبق قواعد فصل ۷ به آسانی انجام میگیرد. اما، متأسفانه، در

(۱) مواردی که جایز بودن عملی بر «مجموع» به معنی جدید آن به دلیل ثابت شود از این حکم مستثنی است. اهم این موارد بعداً خواهد آمد.

سلسله‌های مهم این کار به ندرت ممکن است. مثلاً، در سلسله‌ی توافقی، فرمولی برای محاسبه‌ی

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

در دست نداریم، و در ت: ۴.۴.۲ : ۷، با اتخاذ تدبیری خاص، متباعد بودن رشته‌ی $\{A_n\}$ را به ∞ ثابت کردیم. در صفحات آتیه بعضی راههای ابتدائی برای تشخیص رفتار سلسله‌ها خواهیم آورد که در آنها حاجت به محاسبه‌ی جمعکها نیست.

۱.۴.۱. مثال. ثابت کنید که $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

باید ثابت کرد که سلسله‌ی $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقارب و مقدارش 1 است، و این واضح است، زیرا

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

و $\lim A_n = 1$. بنا بر این،

$$\sum_1 \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

۱.۴.۲. تنبیه. رفتار یا مقدار یک سلسله را با رفتار یا حد رشته‌ی مولدآن خلط نکنید. رشته‌ی $\{1/n\}$، چنانکه میدانیم، هیچرشته است، اما سلسله‌ی $\sum_1 (1/n)$ حادث از آن متباعد به ∞ میباشد. همچنین، سلسله‌ی $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقارب به 1 است، و حال آنکه رشته‌ی $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ متقارب به 0 است.

حکم ساده‌ی ذیل در موارد عدیده در تشخیص رفتار و مقدار سلسله‌ها بکار میآید:

۱.۴.۳. قضیه. سلسله‌های $\sum_v a_n$ و $\sum_v (-a_n)$ از حیث رفتار یکسانند[۱]، و اگر یکی از آنها مقدار داشته باشد دیگری مقداری متقابل با آن دارد.

برهان. اگر

$$A_n = a_v + a_{v+1} + \cdots + a_n,$$
$$A'_n = (-a_v) + (-a_{v+1}) + \cdots + (-a_n)$$

آنگاه سلسله‌ی اول به معنی رشته‌ی $\{A_n\}_v$ است، و سلسله‌ی دوم به معنی رشته‌ی $\{A'_n\}_v$.

---

(۱) یعنی اگر یکی از آنها متقارب باشد دیگری هم متقارب است، و اگر یکی از آنها متباعد باشد دیگری نیز متباعد است.

چون $A'_n = -A_n$، بنا بر ۳.۵.۷ : ۷، اگر یکی از $\lim A_n$ و $\lim A'_n$ موجود باشد دیگری نیز موجود و با آن متقابل است. از اینجا معلوم میشود که اگر یکی از دو سلسله متباعد نامشخص باشد دیگری نیز متباعد نامشخص است. ▲

۱.۴.۴. تمرین

۱. ثابت کنید که سلسله‌های ذیل متقاربند، و مقدار هر یک را معلوم کنید.

(آ) $\sum_0 \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. (ب) $\sum \frac{-1}{n(n+1)}$.

(پ) $\sum \frac{2}{3n(n+1)(n+2)}$.

(ت) $\sum_2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) \qquad (a > 1)$.

۲. x عدد مفروضی است بین 0 و 1. ثابت کنید که سلسله‌ی

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

متقارب است، و مقدارش را تعیین کنید.

۳. در رفتار سلسله‌های ذیل تحقیق کنید:

(آ) $0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$.

(ب) $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$.

(پ) $0 - 0 + 0 - 0 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 0 + \cdots$.

(ت) $a + a + a + \cdots + a + \cdots$.

(ث) $a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$.

(ج) $-a + a - a + \cdots + (-1)^n a + \cdots$.

۴. اگر در رشته‌ی $\{a_n\}$ از مرتبه‌ی $N+1$ ببعد همه‌ی جمله‌ها مساوی 0 باشند سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب و مقدارش $\sum_{n=1}^{N} a_n$ است.

۵. در رفتار سلسله‌ی $\sum_1^\infty [a + (n-1)d]$ (سلسله‌ی تصاعد عددی) تحقیق کنید.

۶. سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب است، و λ عددی است ثابت. ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum_\nu \lambda a_n$ نیز متقارب است.

۷. اگر سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum_\nu b_n$ با ضابطه‌ی $b_n = a_{n+1}$ نیز متقارب است.

۸. شرط لازم برای آنکه سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب باشد آنست که $\lim a_n = 0$.

آیا این شرط برای تقارب کافی است؟

راهنمائی: ۳.۴.۲.۱ : ۷.

۹. سلسله‌ی $\sum n^{-1/2}$ متباعد به ∞ است.

راهنمائی: $A_n \geqslant n^{1/2}$.

۱۰. با علامات مذکور در III ؛ ۱.۲.۵، و ۹ ؛ ۱.۲.۶، فرض میکنیم سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب و A مقدار آن باشد. ثابت کنید که

(آ) $\lim A_{4n} = \lim A_{2n} = A$؛

(ب) سلسله‌ی $\sum b_n$ متقارب و مقدارش $\frac{3}{2}A$ است.

(پ) سلسله‌ی $\sum d_n$ متقارب و مقدارش 0 است.

چه نتیجه‌ای در باب بستگی مقدار یک سلسله با ترتیب جمله‌های آن حاصل میشود؛

در مورد تقارب سلسله‌ها ضابطه‌ای کلی در دست داریم. توضیح آنکه متقارب بودن سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ معادل متقارب بودن رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ است، و این خود معادل اساسی بودن این رشته میباشد. پس،

۱.۴.۵. قضیه (ضابطه‌ی کلی تقارب یا ضابطه‌ی کوشی برای سلسله‌ها). شرط لازم و کافی برای آنکه سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ متقارب باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی صحیح و ناکمتر از ν مانند N باشد که، بازاء هر دو عدد صحیح p و q، اگر $p > N$ و $q > N$ آنگاه

$$| A_p - A_q | < \varepsilon.$$

همچنین، با توجه به روابط

$$A_p - A_N = a_{N+1} + \cdots + a_p \qquad (p > N \geqslant \nu),$$
$$A_{p+k} - A_p = a_{p+1} + \cdots + a_{p+k} \qquad (p \geqslant \nu,\ k \in \mathbb{N}),$$
$$A_p - A_{q-1} = a_q + \cdots + a_p \qquad (p \geqslant q > \nu),$$

از قضایای ۴.۷.۲ و ۴.۷.۳ فصل ۷ نتیجه میشود:

۱.۴.۶. قضیه (صور دیگر ضابطه‌ی کلی تقارب برای سلسله‌ها). هر یک از شرایط ذیل لازم و کافی برای تقارب سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ است:

I. بازاء هر عدد مثبت ε، عددی صحیح و ناکمتر از ν مانند N هست که، بازاء هر عدد صحیح p که $p > N$،

$$| A_p - A_N | = |a_{N+1} + \cdots + a_p | < \varepsilon.$$

II. بازاء هر عدد مثبت ε، عددی صحیح و ناکمتر از ν مانند N هست که، بازاء هر عدد صحیح p که $p > N$ و هر عدد طبیعی k،

$$| A_{p+k} - A_p | = | a_{p+1} + \cdots + a_{p+k} | < \varepsilon.$$

III. بازاء هر عدد مثبت ε، عددی صحیح و ناکمتر از ν مانند N هست که، بازاء هر دو

---

(۱) بعداً ثابت خواهیم کرد که چنین است.

عدد صحیح p و q که $p \geqslant q > N$،

$$| A_p - A_{q-1} | = | a_q + a_{q+1} + \cdots + a_p | < \varepsilon.$$

۱.۴.۷. مثال[۱]. سلسله‌ی

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

متقارب است[۲].

فرض کنیم $a_n = 1/n^2$. بازاء هر دو عدد طبیعی p و k،

$$| a_{p+1} + \cdots + a_{p+k} | = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(p+i)^2} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(p+i-1)(p+i)}$$
$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p+k} < \frac{1}{p}.$$

اینک فرض کنیم ε عدد مثبت مفروضی باشد. اگر عدد طبیعی N را بزرگتر از $1/\varepsilon$ اختیار کنیم، همواره اگر $p > N$ و $k \in \mathbf{N}$ آنگاه

$$| a_{p+1} + \cdots + a_{p+k} | < \varepsilon. \blacktriangle$$

ضابطه‌ی کلی تقارب چندان فایده‌ی عملی ندارد، زیرا، عملاً اثبات وجود عدد N مذکور در قضیه‌ی ۱.۴.۶ ندرةً میسر است. از این نظر، شرایطی لازم یا کافی برای تقارب میجویند که مساعد با عمل باشند. یکی از این شرایط، که فواید عملی بسیار دارد، در ۸ : ۱.۴.۴ گذشت، و آن اینست:

۱.۴.۸. قضیه. شرط لازم برای اینکه سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ متقارب باشد آنست که رشته‌ی مولد آن هیچرشته باشد (یعنی، $\lim_n a_n = 0$)، ولی این شرط کافی نیست.

برهان (به وسیله‌ی ضابطه‌ی کلی تقارب). فرض کنیم سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ متقارب باشد. عدد مثبت دلخواه ε را اختیار میکنیم. بنا بر ضابطه‌ی کلی، عددی صحیح مانند N هست که $N \geqslant \nu$، و همواره اگر $N < m \leqslant n$ آنگاه $| a_m + \cdots + a_n | < \varepsilon$. پس، (بازاء $m = n$)، از مرتبه‌ی $N+1$ بعد، $| a_n | < \varepsilon$. بالنتیجه، $\lim a_n = 0$. سلسله‌ی توافقی عدم کفایت شرط را نشان میدهد. ▲

۱.۴.۹. تمرین

۱. کدام یک از این سلسله‌ها متقارب است؟

---

(۱) ۴.۷.۶ : ۷ ملاحظه شود.

(۲) بعدها خواهیم دید که

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(آ) $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. (ب) $\sum e^n$.

(پ) $\sum_0 \frac{1}{\sqrt[n]{n}+10^6}$. (ت) $\sum_0 \frac{n^2}{1000n^2+1}$.

۲. اگر سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum_\nu (a_n - a_{n+1})$ متقارب به a_ν است. مثال بیاورید.

۳. $\{b_n\}$ رشته‌ای است متقارب، و رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n = b_n - b_{n+1}$ تعریف شده است. ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است. مثال بیاورید.

۴. حکم مسئله‌ی ۶ : ۱.۴.۴ را به وسیله‌ی ضابطه‌ی کلی تقارب ثابت کنید.

۵. $\{a_n\}_\nu$ رشته‌ای است از اعداد صحیح، و سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب است. ثابت کنید که از مرتبه‌ای ببعد $a_n = 0$.

۶. اگر سلسله‌ی $\sum_\nu |a_n|$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ نیز متقارب است.

۷. سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب است، و $\{b_n\}_\nu$ رشته‌ای محدود از اعداد میباشد. آیا سلسله‌ی $\sum_\nu a_n b_n$ ضرورةً متقارب است؟ مثال بیاورید.

۸. $\{c_n\}$ هیچ‌رشته‌ای نزولی است، و $\{\lambda_n\}$ رشته‌ای است محدود (یعنی عددی مثبت مانند L هست که همواره $|\lambda_n| \leqslant L$).
ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum (\lambda_{n+1} - \lambda_n)c_n$ متقارب است، و اگر A مقدار و A_n جمعک nم آن باشد

$$|A - A_{n-1}| \leqslant 2Lc_n.$$

در حالتی که $\lambda_n = (-1)^n/2$ تحقیق کنید.

راهنمائی:

$$|A_p - A_{q-1} + \lambda_q c_q - \lambda_{p+1} c_p| \leqslant L(c_q - c_p) \qquad (p \geqslant q > 1),$$

و از آنجا،

$$|A_p - A_{q-1}| \leqslant 2Lc_q.$$

۱.۵. بعضی سلسله‌های مهم. در این قسمت، بعضی از سلسله‌های مهم را که رفتارشان را باید حاضرالذهن داشت، و همچنین، بعضی از فوایدی را که برخی از این سلسله‌ها بدانها رهنمون هستند میآوریم. یادآوری میکنیم که

۱.۵.۱. سلسله‌ی توافقی $\sum (1/n)$ متباعد به ∞ است.

۱.۵.۲. سلسله‌ی $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقارب و مقدارش 1 است.

۱.۵.۳. سلسله‌ی $\sum (1/n^2)$ متقارب است.

۱.۵.۴. سلسله‌ی تصاعد هندسی. مقصود از سلسله‌ی تصاعد هندسی سلسله‌ای است به صورت $\sum_0 q^n$، که در آن q عدد ثابتی (قدر نسبت) است. در اینجا

$$(۱) \quad A_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \qquad (q \neq 1).$$

برای تحقیق در رفتار سلسله، دو حالت تشخیص میدهیم.

I. $|q| < 1$. در این صورت، $\lim q^{n+1} = 0$ و $\lim A_n = \dfrac{1}{1-q}$. پس، سلسله‌ی $\sum_0 q^n$ متقارب است، و مقدارش $1/(1-q)$، و میتوان نوشت،

$$\sum_0^\infty q^n = 1 + q + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

II. $|q| \geqslant 1$. در این صورت، رشته‌ی $\{q^n\}_0$ هیچ‌رشته نیست. پس، بنا بر ۱.۴.۸، سلسله‌ی $\sum_0 q^n$ متباعد است. برای تحقیق بیشتر، حالات ذیل را تشخیص میدهیم:

(آ). اگر $q = 1$ آنگاه $A_n = n + 1$ و $\lim A_n = \infty$. پس، سلسله متباعد و مقدارش ∞ است.

(ب). اگر $q = -1$ آنگاه $A_n = \frac{1}{2}[(-1)^n + 1]$. چون رشته‌ی $\{A_n\}_0$ نوسانی است، سلسله متباعد نامشخص (نوسانی) است.

(پ). اگر اگر $q > 1$ آنگاه $q^n \to \infty$، و بنا بر (۱)، $A_n \to \infty$. پس، سلسله متباعد و مقدارش ∞ است.

(ت). اگر $q < -1$ رشته‌ی $\{A_n\}_0$، و لهذا، سلسله نوسانی است.

خلاصه‌ی بحث در رفتار سلسله‌ی تصاعد هندسی

(۱). $|q| < 1$. سلسله متقارب است و مقدارش $\dfrac{1}{1-q}$

(۲). $q \geqslant 1$. سلسله متباعد به ∞ است.

(۳). $q \leqslant -1$. سلسله نوسانی است.

۱.۵.۵. سلسله توافقی متناوب یا سلسله‌ی لگاریتمی. سلسله‌ی توافقی متناوب سلسله‌ی $\sum_1 \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ یا

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

است، و آن سلسله‌ای است متقارب.

زیرا، فرض کنیم

$$a_n = \frac{1}{n},^{1} \qquad A_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

باید ثابت کرد که رشته‌ی $\{A_n\}$ متقارب است. اثبات به وسیله‌ی ۵.۲.۷ : ۷ است. بـه آسانی دیده میشود که همواره

$$\begin{aligned}
&(\text{آ}) \quad A_{2n+1} - A_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} < 0\\
&(\text{ب}) \quad A_{2n+2} - A_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0,\\
&(\text{پ}) \quad A_{2n+1} > A_{2n} \geqslant A_2 = a_1 - a_2.\\
&(\text{ت}) \quad A_{2n} < A_{2n-1} \leqslant A_1 = a_1.
\end{aligned}$$

رشته‌ی $\{A_{2n-1}\}$، بنا بر (آ)، نزولی، و بنا بر (پ)، از پایین محدود است، و رشتـه‌ی $\{A_{2n}\}$، بنا بر (ب)، صعودی، و بنا بر (ت)، از بالا محدود است. پس، هر دو رشته متقاربند. بعلاوه،

$$\lim A_{2n} = \lim A_{2n-1} + \lim a_{2n} = \lim A_{2n-1}.$$

پس، رشته‌ی $\{A_n\}$ متقارب است[2]. ▲

بعدها خواهیم دید که مقدار سلسله‌ی توافقی متناوب مساوی $\log 2$ (لـگـاریتم طبیعی 2) است. بدین مناسبت، این سلسله را سلسله‌ی لگاریتمی هم میخـوانـنـد. اگر چه فعـلاً مقـدار سلسله‌ی توافقی متناوب را نمیدانیم، از استـدلالی کـه در اثبات تقـارب آن کـردیم میتوانیم اطلاعاتی در باب آن بـدست آوریم. توضیح آنکه اگر A مقدار این سلسله باشد، بنا بـر آنچه گذشت، A حد رشته‌ی اکیداً نـزولی $\{A_{2n-1}\}$ و نیز حد رشته‌ی اکـیداً صعـودی $\{A_{2n}\}$ است. پس، بازاء هر عدد طبیعی n،

$$A_{2n} < A < A_{2n-1}.$$

مثلاً،

$$A_4 < A < A_3$$

و یا

$$7/12 < A < 10/12.$$

۱.۵.۶. تعریف. سلسله‌ی متناوب سلسله‌ای است که جمله‌هایش متنـاوباً مثبت و منفـی باشند. به عبارت دقیقتر، هر یک از سلسله‌های

$$\sum_{\nu} (-1)^{n-\nu} a_n = a_\nu - a_{\nu+1} + a_{\nu+2} - \cdots,$$
$$\sum_{\nu} (-1)^{n-\nu+1} a_n = -a_\nu + a_{\nu+1} - a_{\nu+2} + \cdots$$

را، که در آنها aها اعدادی مثبت‌اند، یک سلسله‌ی متناوب نامیم.

---

(۱) به انحراف از استعمال عادی a_n توجه کنید.

(۲) خوبست متعلمین تعدادی از جمعکهای سلسله را بر یـک محور نمـایش دهنـد تا چگونگی رفتار رشته‌های $\{A_{2n-1}\}$، $\{A_{2n}\}$، و $\{A_n\}$، را به خوبی دریابند.

مثلاً، سلسله‌ی لگاریتمی یک سلسله‌ی متناوب است. بعلاوه، این سلسله دارای این خاصیت است که رشته‌ی قدر مطلق جمله‌هایش هیچرشته‌ای است یکنواخت. چون در اثبات متقارب بودن این سلسله فقط این خواص و متناوب بودن آن در کار آمده است به نظر میرسد که مجموعه‌ی این خواص باید برای تقارب کافی باشد. پیش از بیان و اثبات این حکم، ملاحظه میکنیم که اگر یکی از دو سلسله‌ی $\sum(-1)^{n-1}a_n$ و $\sum(-1)^n a_n$ متقارب باشد، بنا بر ۱.۴.۳، دیگری هم متقارب است. اینک گوئیم

۱.۵.۷. قضیه (قضیه‌ی سلسله‌های متناوب یا قاعده‌ی لایبنیتز*). اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ در شرایط

(۱) همواره $a_n > 0$؛

(۲) $a_n \downarrow$

(۳) $\lim a_n = 0$

صدق کند سلسله‌ی $\sum(-1)^{n-1}a_n$ متقارب است، و همواره

$$0 \leqslant (-1)^n(A - A_n) \leqslant a_{n+1},$$

و یا

$$|A - A_n| \leqslant a_{n+1}.$$

برهان. اثبات به همان قیاس است که در اثبات تقارب سلسله‌ی لگاریتمی گذشت. بر طبق مفروضات، نامساویهای (آ) ـ (ت) مذکور در ۱.۵.۵ با تبدیل آخرین $>$ ($<$) در طرف راست (آ) و (ب) به $\leqslant$ ($\geqslant$) برقرارند (چرا این تبدیل برای برقراری آنها بطور کلی ضروری است؟)، و بقیه‌ی استدلال مانند سابق است. بعلاوه، به قیاس گذشته معلوم میشود که همواره

$$A_{2k} \leqslant A \leqslant A_{2k-1} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

بالنتیجه،

$$0 \leqslant A - A_{2k} \leqslant A_{2k+1} - A_{2k} = a_{2k+1}, \qquad (۱)$$

$$0 \leqslant A_{2k-1} - A \leqslant A_{2k-1} - A_{2k} = a_{2k}. \qquad (۲)$$

حال فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد. اگر n فرد باشد عددی طبیعی مانند k هست که $n = 2k - 1$. پس، بنا بر (۲)، $0 \leqslant A_n - A \leqslant a_{n+1}$، و قس علیهذا در صورتی که n زوج باشد.

۱.۵.۷.۱. تبصره. در شرایط مذکور در ۱.۵.۷، بنا بر نامساوی $|A - A_n| \leqslant a_{n+1}$، قدر مطلق تفاضل مقدار سلسله با هر جمعک آن از قدر مطلق اولین جمله‌ای از سلسله که در آن جمعک نیامده است تجاوز نمیکند. این گونه نامساویها، چنانکه بعداً خواهیم دید، در محاسبه‌ی مقدار تقریبی سلسله‌های متقارب مفیدند. مثلاً، در سلسله‌ی لگاریتمی، بازاء $n = 9$ خواهیم داشت،

$$\left|A-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{9}\right)\right| \leqslant \frac{1}{10},$$

و از آنجا، $0{,}64 < A < 0{,}85$.

۱.۵.۸. فایده. سلسله‌ی لگاریتمی فوایدی آموزنده دارد که، برای مزید بصیرت متعلمین، یکی از آنها را ذکر میکنیم. چنانکه میدانیم، حاصلجمع به معنی عادی از ترتیب جمله‌ها مستقل است. اینک به سلسله‌ی لگاریتمی باز میگردیم، و با علامات مذکور در III : ۱.۲.۵، فرض میکنیم

$$\sum b_n = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

به وسیله‌ی روابط مذکور در ۸ : ۱.۲.۶، بـه آسانی میتوان ثابت کرد کـه این سلسله متقارب است[۲]. زیرا، اگر A مقدار سلسله‌ی لگاریتمی (یعنی حد رشته‌ی $\{A_n\}$) بـاشد، بنا بر خواص عمومی حدود،

$$\lim_n A_{4n} = \lim_n A_{2n} = A.$$

پس،

$$\lim_n B_{3n} = A+\frac{1}{2}A = \frac{3}{2}A,$$

و بالنتیجه،

$$\lim_n B_{3n-1} = \lim\left(B_{3n}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{3}{2}A,$$

$$\lim_n B_{3n-2} = \lim\left(B_{3n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n-1}\right) = \frac{3}{2}A.$$

پس، رشته‌ی $\{B_n\}$ متقارب به $\frac{3}{2}A$ است. به عبارت دیگر، سلسله‌ی $\sum b_n$ متقارب ولی مقدارش مساوی $\frac{3}{2}A$ است. چنانکه دیده میشود، سلسله‌ی $\sum b_n$ کـه از تغییر دادن ترتیب جمله‌های سلسله‌ی لگاریتمی حاصل شده است مقداری متفاوت بـا این سلسله دارد[۳].

۱.۵.۹. تمرین

۱. ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum_0 \frac{(-1)^n}{n!}$ متقارب است. چه اطلاعی در بـاب مقدار ایـن سلسله

---

(۱) در حقیقت $A=\log 2$ و مـقدار تـقریبی آن $0{,}693\,2$ است. در بـاب مـقدار تقریبی سلسله‌های متقارب اطلاعات مختصری در فصل ۹ خواهد آمد.

(۲) 10 : ۱.۴.۴ ملاحظه شود.

(۳) تغییر ترتیب جمله‌های یک سلسله ممکن است رفتار آن را هم تغییر دهد.

میتوانید بدهید؟

۲. اگر $x > -1$ سلسله‌ی $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots -$ متقارب است.

۳. a عدد مثبتی است. ثابت کنید کـه سلسله‌ی $\sum (-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ متقارب است.

۴. بازاءِ چه مقادیر λ سلسله‌ی $\sum \frac{(-1)^n}{n^\lambda}$ متقارب و بازاءِ چه مقادیری متباعد است؟

۵. ثابت کنید که اگر A مقدار سلسله‌ی لگاریتمی باشد،

$$\lim_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = A.$$

۶. قضیه‌ی ۱.۵.۷ را به وسیله‌ی ۸ : ۱.۴.۹ ثابت کنید.

۲ § خواص عمومی سلسله‌ها

۲.۱. مقدمه. چون سلسله‌ها رشته‌هائی بیش نیستند، خواص آنهـا نـاشی از خـواص رشته‌ها است، منتها، بیان این خواص به زبان سلسله‌ها منجر به نتایجی میشود که ما را از اینـکه، در هر مورد، در بحث از سلسله‌ها و حل مسائل مربوط به آنها، متوسل به رشته‌ها شویم بینیاز میسازند، و بدین گونه، سلسله‌ها، به عنوان حربه‌ای توانا در حل مسائل آنـالیز، رأساً در کار میآینـد. در این راه، اولین قدم اساسی تحقیق در این مسئله است که خواص جمع به معنی عـادی تـا چـه حد در سلسله‌ها بر جای میمانند. در این قسمت این موضوع را مورد تحقیق قرار میدهیم.

۲.۲. تغییر اندیس مبدأ و تجدید شماره‌گذاری. قبلاً قـضیـه‌ای کـلی نظیـر ۳.۴.۱ : ۷ ثابت میکنیم. این قضیه حکم میکند بر اینکه اگر جمله‌های دو سلسله «نظیر به نظیر» متساوی باشند دو سلسله از حیث رفتار و مقدار[۱] یکسانند.

۲.۲.۱. قضیه. فرض کنیم $\sum\limits_{\nu} a_n$ و $\sum\limits_{\mu} b_n$ دو سلسله باشند بطوری که همواره

$$b_n = a_{n-\mu+\nu} \qquad (n \geqslant \mu).$$

در این صورت، اگر یکی از دو سلسله مقدار داشته باشد دیگری مقداری مساوی با آن دارد.

برهان. سلسله‌های مذکور بـه معنی رشته‌های $\{A_n\}_\nu$ و $\{B_n\}_\mu$ میباشند. بنا بر تعریف b_n، بـازاءِ هر عدد صحیح n که $n \geqslant \mu$،

$$B_n = \sum_{k=\mu}^{n} b_k = \sum_{k=\mu}^{n} a_{k-\mu+\nu} = \sum_{k=\nu}^{n-\mu+\nu} a_k = A_{n-\mu+\nu}.$$

پس، بنا بر ۳.۴.۱ : ۷، اگر یکی از دو رشته‌ی مذکور حد داشته باشد دیگری حـدی مساوی با آن دارد. بالنتیجه، اگر یکی از دو رشته نوسانی باشد دیگری نیز نوسانی است. ▲

---

(۱) البته در صورت وجود.

۲.۲.۰۲. تبصره. با علامت مذکور در قضیه‌ی فوق،

I. سلسله‌ی $\sum_{\mu} b_n$ را سلسله‌ی $\sum_{\mu} a_{n-\mu+\nu}$ مینامیم.

II. اگر سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ مقدار داشته باشد، رابصه‌ی مقداری ذیل برقرار است:

$$\sum_{n=\nu} a_n = \sum_{n=\mu} a_{n-\mu+\nu}.$$

این رابطه نظیر قواعد لغزاندن حدود در سیگما بـه معنی عـادی آن است، و مـیتوان آن را قاعده‌ی لغزاندن اندیس مبدأ در سلسله‌ها نامید. مثلاً

$$1 = \sum_{1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{-2} \frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

ملاحظه کنید که صورت زنجیری هر سه سلسله چنین است:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots.$$

۲.۲.۰۳. تبصره. بنا بر آنچه گذشت، سه سلسله‌ی

$$\sum_{\nu} a_n, \qquad \sum_{0} a_{n+\nu}, \qquad \sum_{1} a_{n+\nu-1}$$

از حیث رفتار و مقدار یکسانند. بنا بر این، بحث از سلسله‌ها را میتوان به سلسله‌هائی با اندیس مبدأ 0 یا 1 منحصر کرد بی آنکه از این راه خللی به کلیت احکام وارد شود.

۲.۳. مانده‌ها. فرض کنیم $\sum_{\nu} a_n$ سلسله‌ای و k عـدد صحیح ثابتی ناکمتر از ν باشد. آیا، به قیاس جمع عادی، میتوان بین مقادیر سلسله‌ها چنین نوشت:

$$\sum_{\nu} a_n = a_\nu + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots = (a_\nu + \cdots + a_k) + \sum_{k+1} a_n?$$

بدیهی است که اگر یکی از دو سلسله‌ای که در این رابطه آمده است مقدار نـداشته بـاشد رابطه بیمعنی است. برای تحقیق بیشتر، ملاحظه میکنیم که اگر $n > k$ و

$$A_n = a_\nu + \cdots + a_n, \qquad B_n = a_{k+1} + \cdots + a_n$$

آنگاه

$$A_n = A_k + B_n \qquad (n > k).$$

پس، چون A_k عدد ثابتی است، اگر یکی از $\lim_n A_n$ و $\lim_n B_n$ موجود باشد دیگری هم موجود است، و در این صورت، $\lim_n A_n = A_k + \lim_n B_n$، و یا به زبان سلسله‌ها،

۲.۳.۰۱. قضیه. فرض کنیم $\sum_{\nu} a_n$ سلسله‌ای و k عدد صحیح ثابتی ناکمتر از ν باشد. اگـر یکی از دو سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ و $\sum_{k+1} a_n$ مقدار داشته باشد دیـگـری نیز مقـدار دارد، و در ایـن صورت، رابطه‌ی ذیل بین مقادیر دو سلسله برقرار است:

$$\sum_{\nu}^{\infty} a_n = \sum_{\nu}^{k} a_n + \sum_{k+1}^{\infty} a_n. \qquad (۲.۳.۱.۱)$$

۲.۳.۲. تعریف. اگر سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ مقدار داشته باشد، و $k \geqslant \nu$، مقدار سلسله‌ی $\sum_{k+1} a_n$ را مانده‌ی سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ پس از اندیس k خوانیم، و به R_k نمایش میدهیم. بالاخص، در مورد سلسله‌ی $\sum_{1} a_n$، R_k را مانده‌ی سلسله پس از k جمله گوئیم.

بنا بر قضیه‌ی سابق، اگر A مقدار سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ باشد،

$$A = A_k + R_k \qquad (k \geqslant \nu). \qquad (۲.۳.۲.۱)$$

مثلاً، در مورد سلسله‌ی $\sum_{1} \frac{1}{n(n+1)}$،

$$A = 1, \qquad A_k = 1 - \frac{1}{k+1}, \qquad R_k = \frac{1}{k+1}.$$

رشته‌ی مانده‌ها رشته‌ی $\left\{\frac{1}{k+1}\right\}$ (یا $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$) است، که هیچرشته میباشد.

بطور کلی،

۲.۳.۳. قضیه. رشته‌ی مانده‌های یک سلسله‌ی متقارب هیچرشته است.

برهان. بنا بر فرض، $\lim A_n = A \in \mathbf{R}$. پس، رشته‌ی $\{R_n\}$، که همان رشته‌ی $\{A - A_n\}$ است، هیچرشته میباشد. ▲

از قضیه‌ی ۲.۳.۱ قضیه‌ی ذیل در باب تصرفات متناهی در سلسله‌ها نتیجه میشود:

۲.۳.۴. قضیه (تصرفات متناهی در سلسله‌ها). اگر دو سلسله چنان باشند که یکی را از دیگری بتوان با تغییر دادن، درج، یا اسقاط تعدادی متناهی از جمله‌ها بدست آورد آنگاه اگر یکی از دو سلسله متقارب باشد دیگری نیز متقارب است، و اگر یکی از آنها متباعد و مقدارش ∞($-\infty$) باشد دیگری نیز متباعد و مقدارش ∞($-\infty$) است.

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که، در شرایط مذکور، اگر تعدادی مناسب از جمله‌های اوایل دو سلسله را جدا کنیم دو سلسله میماند که جمله‌های آنها نظیر به نظیر با هم متساویند. پس، بنا بر ۲.۲.۱ و ۲.۳.۱، حکم برقرار است. ▲

۲.۳.۵. تبصره. تصرفات نامتناهی در یک سلسله ممکن است رفتار آن را مختل سازد. مثلاً، در سلسله‌ی لگاریتمی، اگر جمله‌های منفی را به متقابل آنها تبدیل کنیم سلسله‌ی توافقی حاصل میشود، که متباعد است.

۲.۳.۶. فایده. قضایای سابق‌الذکر در مبحث سلسله‌ها اهمیت تمام دارند. بنا بر ۲.۳.۴،

رفتار یک سلسله (نه مقدار آن) از تعدادی متناهی از جمله‌های آن مستقل است، و ناشی از «قسمت نامتناهی» سلسله میباشد.

به وسیله‌ی قضایای مذکور، میتوان تعدادی متناهی از جمله‌های «ناهماهنگ» را از یک سلسله جدا کرد، و مزاحمت آنها را مرتفع ساخت، بی آنکه از این امر تغییری عارض رفتار سلسله شود. مثلاً، در سلسله‌ی $\sum a_n$، فرض کنیم $\lim a_n = 0$، و از مرتبه‌ی $N+1$ ببعد سلسله متناوب و رشته‌ی قدر مطلق جمل آن نزولی باشد. در این صورت، بنا بر قضیه‌ی سلسله‌های متناوب، سلسله‌ی $\sum_{N+1} a_n$ متقارب است. پس، بنا بر ۲.۳.۰۱، سلسله‌ی $\sum_1 a_n$ نیز متقارب میباشد. خلاصه، قضیه‌ی سلسله‌های متناوب در صورتی که نزولی بودن قدر مطلق جمل از مرتبه‌ای ببعد آغاز شود نیز برقرار است.

یکی دیگر از نتایج مهم قضیه‌ی ۲.۳.۰۱ قضیه‌ی ذیل است که در مقایسه‌ی مقادیر سلسله‌های متقارب و اثبات برقراری نامساوی اکید بین مقادیر آنها بسیار بکار میآید.

۲.۳.۷. قضیه. فرض کنیم دو سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ و $\sum_\nu b_n$ متقارب باشند، و بازاء هر عدد صحیح n، اگر $\nu \leqslant n$ آنگاه $a_n \leqslant b_n$. در این صورت،

$$\sum_\nu a_n \leqslant \sum_\nu b_n \qquad (*)$$

و اگر بازاء مقداری از n (و لو یک مقدار) $a_n < b_n$ آنگاه نامساوی (*) اکید است.

برهان. در شرایط مذکور، بنا بر ۷.۸.۰۴ : ۵، همواره $A_n \leqslant B_n$. پس، چون، بنا بر فرض، $\lim A_n$ و $\lim B_n$ موجود است، $\lim A_n \leqslant \lim B_n$، و این همان (*) است. برای اثبات قسمت اخیر، فرض کنیم k عددی صحیح مانند باشد که $\nu \leqslant k$ و $a_k < b_k$. بنا بر قسمت اول قضیه،

$$\sum_{k+1} a_n \leqslant \sum_{k+1} b_n. \qquad (۱)$$

بعلاوه، بنا بر ۷.۸.۰۴ : ۵،

$$\sum_\nu^k a_n < \sum_\nu^k b_n. \qquad (۲)$$

از این روابط بنا بر ۲.۳.۰۱.۰۱ نتیجه میشود،

$$\sum_\nu a_n < \sum_\nu b_n. \blacktriangle$$

۲.۴. بعضی اعمال بر سلسله‌ها. اگر $\sum_\nu a_n$ و $\sum_\nu b_n$ دو سلسله و α و β دو عدد ثابت باشند، بنا بر تعریف سلسله، سلسله‌ی $\sum_\nu (\alpha a_n + \beta b_n)$ سلسله‌ای است که رشته‌ی مولد آن رشته‌ی $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_\nu$ است. در باب این قبیل سلسله‌ها احکام ساده‌ای برقرار است، که ذیلاً خواهد آمد.

۲.۴.۱. قضیه. فرض کنیم $\sum_{\nu} a_n$ سلسله‌ای و α عددی ثابت باشد.

I. اگر سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ متقارب باشد سلسله $\sum_{\nu} \alpha a_n$ نیز متقارب است، و

$$\sum_{\nu} \alpha a_n = \alpha \sum_{\nu} a_n.$$

II. اگر سلسله‌ی $\sum_{\nu} a_n$ متباعد مشخص (نامشخص) باشد و $\alpha \neq 0$ آنگاه سلسله‌ی $\sum_{\nu} \alpha a_n$ نیز متباعد مشخص (نامشخص) است. در صورت تباعد مشخص، همان رابطه‌ی فوق برقرار میباشد.

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که اگر A_n و A'_n جمعکهای با اندیس n دو سلسله باشند $A'_n = \alpha A_n$. ▲

۲.۴.۲. قضیه. اگر سلسله‌های $\sum_{\nu} a_n$ و $\sum_{\nu} b_n$ متقارب و α و β دو عدد ثابت باشند آنگاه سلسله‌ی $\sum_{\nu} (\alpha a_n + \beta b_n)$ نیز متقارب است، و

$$\sum_{\nu} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{\nu} a_n + \beta \sum_{\nu} b_n.$$

بالاخص، اگر سلسله‌های $\sum_{\nu} a_n$ و $\sum_{\nu} b_n$ متقارب باشند آنگاه سلسله‌های $\sum_{\nu} (a_n + b_n)$ و $\sum_{\nu} (a_n - b_n)$ نیز متقاربند، و

$$\sum_{\nu} (a_n + b_n) = \sum_{\nu} a_n + \sum_{\nu} b_n, \qquad \sum_{\nu} (a_n - b_n) = \sum_{\nu} a_n - \sum_{\nu} b_n.$$

برهان. اگر C_n جمعک با اندیس n سلسله‌ی $\sum_{\nu} (\alpha a_n + \beta b_n)$ باشد،

$$C_n = \sum_{\nu}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha A_n + \beta B_n.$$

بنا بر فرض، $\lim A_n$ و $\lim B_n$ موجود است. پس، $\lim C_n$ نیز موجود و مساوی $\alpha A + \beta B$ میباشد. ▲

۲.۵. درج و اسقاط پرانتز. در یک حاصلجمع عادی میتوان جمله‌ها را به وسیله‌ی پرانتز دسته‌بندی کرد، یا پرانتزهائی را برداشت، بی آنکه از این اعمال تغییری در حاصلجمع پدید آید. اینک به نظایر این اعمال در سلسله‌ها میپردازیم. برای احتراز از تکرار، تذکر میدهیم که عده‌ی جمل واقع در پرانتزهای مورد بحث همواره متناهی فرض میشوند.

از سلسله‌ی

$$\sum_{1} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{۱}$$

با دسته‌بندی جمل به وسیله‌ی پرانتز میتوان سلسله‌های گوناگون ساخت؛ مانند

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + a_6 + (a_7 + \cdots + a_{15}) + \cdots \tag{۲}$$

بـالعکس، از برداشتن پرانتزها در سلسلهی (۲)، سلسلهی (۱) حـاصل میشود. این دو سلسله یکی نیستند: سلسلهی اول رشتهی $\{A_n\}$ است، که در آن،

$$A_1 = a_1, \qquad A_2 = a_1 + a_2, \qquad A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$A_4 = a_1 + \cdots + a_4, \ldots,$$

و سلسلهی دوم رشتهی $\{B_n\}$ است، که در آن،

$$B_1 = (a_1 + a_2 + a_3),$$
$$B_2 = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5), \ldots.$$

اما، واضح است که رشتهی $\{B_n\}$ رشتکی از رشتهی $\{A_n\}$ میباشد.

بطور کلی، اگر سلسلهی $\sum b_n$ حاصل از درج پرانتزها در سلسلهی (۱) باشـد رشتهی $\{B_n\}$ $(B_n = b_1 + \cdots + b_n)$ رشتکی است از رشتهی $\{A_n\}$ $(A_n = a_1 + \cdots + a_n)$. احکام مربوط به درج یا اسقاط پرانتز در سلسلهها ناشی از احکامی است کـه در باب رشتکها دانسته شد. به خاطر داریم که بعضی از خواص یک رشـته به رشتکهای آن سرایت میکنند، اما عموماً خواص رشتکهای یک رشته به آن رشته سرایت نمیکنند. مثلاً، اگر رشتهی $\{A_n\}$ مذکور در فوق حد داشته باشد رشتهی $\{B_n\}$ هم حدی مساوی آن دارد؛ یا، به زبان سلسلهها،

۲.۵.۱. قضیه. اگر سلسلهی $\sum a_n$ مقدار داشته باشد هر سلسلهی حاصل از درج پرانتزها در آن مقداری مساوی آن دارد.

بنا بر این قضیه، در سلسلههای متقارب، مـانند حاصلجمعهای عـادی، میتوان پرانتزهائی بـه دلخواه درج کرد. مثلاً، اگر A مقدار سلسلهی لگاریتمی باشد،

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$
$$= \sum_1 \frac{1}{(2n-1)2n},$$
$$A = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \cdots$$
$$= 1 - \sum_1 \frac{1}{2n(2n+1)}$$

اما، مسئلهی برداشتن پرانتزها از یک سلسله داستان دیگری است، زیرا، عموماً نمیتوان انتظار داشت کـه از حد داشتن رشتک $\{B_n\}$ از رشتهی $\{A_n\}$ حد داشتن این رشتهی اخیر لازم آیـد، و خـلاصه، اسقاط پرانتزها در یک سلسلـه عموماً جایـز نیست. سلسلهی $\sum (1 - 1)$ همان سلسلهی $\sum 0$ است، که متقارب و مقدارش 0 میباشد. اما سلسلهی

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

که از اسقاط پرانتزها در آن حاصل شده است، نه فقط متقارب نیست، بلکه اصـلاً مقدار ندارد. البته، مواردی هست که از حد داشتن رشتکی از یک رشتـه حد داشتـن آن رشته لازم میـآ ید. مثلاً، با علامات سابقالذکر، فرض کنیم رشتهی $\{A_n\}$ یکنواخـت باشد. در این صورت، بنا بر

۵.۲.۶ : ۷، اگر رشته‌ی $\{B_n\}$ حد داشته باشد رشته‌ی $\{A_n\}$ هم حدی مساوی آن دارد. چون $A_n - A_{n-1} = a_n$، شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{A_n\}$ یکنواخت باشد آنست که همواره $a_n \geqslant 0$ یا همواره $a_n \leqslant 0$. بالنتیجه،

۲.۵.۲. قضیه. فرض کنیم سلسله‌ی $\sum a_n$ حاصل از اسقاط پرانتزها در سلسله‌ی $\sum b_n$ باشد، و همواره $a_n \geqslant 0$ یا همواره $a_n \leqslant 0$. در این صورت، اگر سلسله‌ی $\sum b_n$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum a_n$ هم متقارب است، و مقدار دو سلسله یکی است. (بعلاوه، همین حکم در صورتی که از مرتبه‌ای ببعد $a_n \geqslant 0$ یا از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant 0$ برقرار است[1].)

قضیه‌ی ذیل نیز در این باب مفید است:

۲.۵.۳. قضیه. اگر سلسله‌ی $\sum b_n$ متقارب باشد، و سلسله‌ی $\sum a_n$ حاصل از اسقاط پرانتزها در آن نیز متقارب باشد آنگاه $\sum b_n = \sum a_n$.

برهان. در شرایط مذکور، سلسله‌ی $\sum b_n$ با درج پرانتزها در سلسله‌ی متقارب $\sum a_n$ حاصل میشود. پس، بنا بر ۲.۵.۱، حکم برقرار است. ▲

۲.۵.۴† تبصره. در بکار بستن قضیه‌ی فوق، مشکل اساسی اغلب اثبات متقارب بودن سلسله‌ی حاصل از اسقاط پرانتزها است. در این زمینه، دو حکم مفید هست که به اثبات آنها میپردازیم. قبلاً، درج و اسقاط پرانتز را به صورتی دقیق و مساعد با استدلال تعریف میکنیم. برای آماده کردن ذهن، سلسله‌ی $\sum a_n$ و رشته‌ی اکیداً صعودی φ از اعداد طبیعی را با ضابطه‌ی

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(n) = n^2 \qquad (n > 1)$$

اختیار میکنیم. سلسله‌ی $\sum b_n$ با ضابطه‌ی

$$b_1 = a_{\varphi(1)} + \cdots + a_{\varphi(2)}, \qquad b_n = a_{\varphi(n)+1} + \cdots + a_{\varphi(n+1)} \qquad (n > 1)$$

عبارتست از سلسله‌ی

$$(a_1 + \cdots + a_4) + (a_5 + \cdots + a_9) + (a_{10} + \cdots + a_{16}) + \cdots,$$

که سلسله‌ای است حاصل از درج پرانتزها در سلسله‌ی $\sum a_n$، و بالعکس، سلسله‌ی اخیر سلسله‌ای است حاصل از اسقاط پرانتزها در سلسله‌ی $\sum b_n$. بطور کلی،

۲.۵.۵† تعریف. فرض کنیم $\sum a_n$ سلسله‌ای و φ رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد بطوری که $\varphi(1) = 1$. سلسله‌ی $\sum b_n$ را با ضابطه‌ی

$$b_1 = a_{\varphi(1)} + \cdots + a_{\varphi(2)},$$
$$b_n = a_{\varphi(n)+1} + \cdots + a_{\varphi(n+1)} \qquad (n > 1)$$

سلسله‌ای حاصل از درج پرانتزها در سلسله‌ی $\sum a_n$، و بالعکس، سلسله‌ی اخیر را سلسله‌ای

---

(۱) ۲.۳.۶ ملاحظه شود.

حاصل از اسقاط پرانتزها در سلسلهی $\sum b_n$ خوانند.

اینک میپردازیم به بعضی از حالاتی که میتوان به آسانی حکم کرد بـه متقارب بـودن سلسلهی حاصل از برداشتن پرانتزها از یک سلسلهی متقـارب ، و بالنتیجه، قضیهی ۲.۵.۳ را بکار بست.

† ۲.۵.۶. قضیه. با علامات مذکور در ۲.۵.۵، اگر

(آ) سلسلهی $\sum b_n$ متقارب به عدد B باشد،

(ب) رشتهی $\{b'_n\}$ با جملهی عمومی ذیل هیچرشته باشد:

$$b'_n = |a_{\varphi(n)+1}| + \cdots + |a_{\varphi(n+1)}|$$

آنگاه سلسلهی $\sum a_n$ حاصل از برداشتن پرانتزها در سلسلهی $\sum b_n$ متقارب به B است.

برهان. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر (آ)، عددی طبیعی مـانند N_1 هست که، بازاء هر عدد طبیعی k، اگر $k \geqslant N_1$ آنگاه $|B_k - B| < \varepsilon/2$. بنا بر (ب)، عددی طبیعی مانند N_2 هست کـه، بـازاء هـر k، اگـر $k \geqslant N_2$ آنـگـاه $|b'_k| < \varepsilon/2$. پـس، اگـر $N = \text{Max}\{N_1, N_2\}$ آنگاه

(۱) بازاء هر k، اگر $k \geqslant N$ آنگاه، در عین حال،

$$|B_k - B| < \varepsilon/2, \qquad |b'_k| < \varepsilon/2.$$

اینک ثابت میکنیم که

(*) بازاء هر n، اگر $n > \varphi(N)$ آنگاه $|A_n - B| < \varepsilon$.

در این صورت، نتیجه میشود $A_n \to B$، و حکم ثابت خواهد بود. برای اثبـات (*)، فـرض میکنیم $n > \varphi(N)$ (۲). واضح است که a_n (آخـرین جملـهی A_n) جملـهای از یـکی از جملههای $\sum b_n$ است که در ۲.۵.۵ تعریف شده است. فرض کنیم a_n جـملهای از b_m بـاشد. در ایـن صورت $\varphi(m) < n \leqslant \varphi(m+1)$ (۳). بعلاوه، $m \geqslant N$ (۴)، و الا $m < N$، و از آنجا $m + 1 \leqslant N$، و چـون φ اکـیداً صعودی است، $\varphi(m+1) \leqslant \varphi(N)$. پس، بنا بر (۲)، $\varphi(m+1) < n$، و این با (۳) متناقض است. بالنتیجه،

$$A_n = B_m - (a_{n+1} + \cdots + a_{\varphi(m+1)}),$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned} |A_n - B| &\leqslant |B_m - B| + (|a_{n+1}| + \cdots + |a_{\varphi(m+1)}|) \\ &\leqslant |B_m - B| + b'_m. \end{aligned}$$

پس، با توجه به (۴) و (۱)،

$$|A_n - B| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon. \blacktriangle$$ [۲]

قضیهی ۲.۵.۲ حالت خاصی از قضیهی فوق است. زیرا، اگر از مـرتبهای ببعد همـواره

---

(۱) اینها همان موارد سرایت خاصیتی از رشتکـی از یک رشته بـه آن رشته میباشند.

(۲) ملاحظه کنید که همهی گرفتاریها در این برهان برای این بـود که میخواستیم از خاصیتی از $\{B_n\}$، که رشتکی از $\{A_n\}$ است، به خاصیتی از $\{A_n\}$ پی بریم.

$0 \geqslant a_n$ یا از مرتبه‌ای ببعد همواره $a_n \leqslant 0$ آنگاه شرط (ب) قضیه‌ی ۲.۵.۶ نتیجه‌ی شرط (آ) میباشد. حالت خاص مهم دیگر قضیه‌ی ۲.۵.۶ اینست:

†۲.۵.۷. قضیه. با علامات مذکور در ۲.۵.۵، اگر
(آ) سلسله‌ی $\sum b_n$ متقارب به عدد B باشد،
(ب) رشته‌ی $\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\}$ از بالا محدود باشد،
(پ) $\lim a_n = 0$،
آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب به عدد B است.

برهان. کافی است ثابت کنیم که، در شرایط مذکور، شرط (ب) قضیه‌ی ۲.۵.۶ برقرار است، و این بدیهی است. زیرا، فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر (ب)، عددی طبیعی مانند μ هست که، بازاء هر n، $\varphi(n+1) - \varphi(n) < \mu$. بنا بر (پ)، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $|a_n| < \varepsilon/\mu$. اینک اگر $m > \varphi(N)$ آنگاه $m > N$، و

$$b'_m < [\varphi(m+1) - \varphi(m)] \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} < \mu \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} = \varepsilon. \blacktriangle$$

۲.۶. درج یا اسقاط صفرها. در حاصلجمع به معنی عادی، افزودن جمله‌هائی مساوی 0، یا اسقاط چنین جمله‌ها، حاصلجمع را تغییر نمیدهد، اما، در سلسله‌ها، که «$\sum$» و «$+$» معانی عادی خود را ندارند، بدون دلیل نمیتوان مثلاً حکم به یکسان بودن رفتار سلسله‌های

$$(۱) \quad 1+0+0-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+0-\frac{1}{7}+0+0+0+\frac{1}{9}+\cdots,$$

$$(۲) \quad 1+0-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+0+0+\frac{1}{9}+\cdots,$$

$$(۳) \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

کرد. اثبات مجاز بودن درج یا اسقاط صفرها آسان است، چنانکه ذیلاً معلوم خواهد شد. ملاحظه کنید که اگر A_n جمعک nم سلسله‌ی (۱) و B_n جمعک nم سلسله‌ی (۲) باشد،

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = 1, \qquad A_3 = 1, \qquad A_4 = \frac{2}{3}, \qquad A_5 = \frac{13}{15}, \cdots,$$

$$B_1 = 1, \qquad B_2 = 1, \qquad B_3 = \frac{2}{3}, \qquad B_4 = \frac{13}{15}, \cdots$$

در اینجا، $\{B_n\}$ یک رشتک $\{A_n\}$ است، ولی دومی رشتک اولی نیست، اما هر A_n، بازاء مقداری از m که بیشتر از n نیست، مساوی B_m میباشد.

(۱) بر طبق اصطلاح مذکور در ۵.۳.۲ : ۷، $\{A_n\}$ یک رشتک الکن رشته‌ی $\{B_n\}$ است.

۲.۶.۱. قضیه. اگر $\sum a_n$ سلسله‌ای و $\sum b_n$ سلسله‌ای حادث از اسقاط جمله‌هائی مساوی 0 از $\sum a_n$ یا درج چنین جمله‌هائی در آن باشد آنگاه دو سلسله از حیث رفتار و مقدار یکسانند.
برهان. ابتدا فرض میکنیم $\sum b_n$ با اسقاط «صفرهائی» (یعنی جمله‌هائی که صفر هستند) از $\sum a_n$ حاصل شده باشد. در این صورت، سلسله‌ی دوم از درج صفرهائی در اولی بدست میآید. چون هر جمعک $\sum b_n$، احیاناً با اسقاط صفرهائی، از جمعکی از $\sum a_n$ بدست میآید، رشته‌ی $\{B_n\}$ رشتکی از رشته‌ی $\{A_n\}$ است. پس، اگر $\lim A_n$ موجود باشد $\lim B_n$ موجود و با آن مساوی است.
بالعکس، فرض کنیم $\sum b_n$ متقارب به عددی حقیقی مانند B باشد. پس، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $|B_n - B| < \varepsilon$ (۱). چون $\{B_n\}$ رشتکی از $\{A_n\}$ است، B_{N+1} جمله‌ای از این رشته میباشد. فرض کنیم A_{M+1} این جمله باشد. گوئیم، بازاء هر m، اگر $m > M$ آنگاه $|A_m - B| < \varepsilon$ (*). زیرا فرض کنیم $m > M$. چون

$$A_m = a_1 + \cdots + a_{M+1} + \cdots + a_m,$$

A_m جمعکی است مانند B_p از سلسله‌ی $\sum b_n$ بازاء مقداری از p که $p > N$. پس، بنا بر (۱)، $|B_p - B| < \varepsilon$، و از آنجا، $|A_m - B| < \varepsilon$. اثبات حکم وقتی که $\lim B_n$ مساوی ∞ یا $-\infty$ باشد به همین قیاس است.
اینک بطور کلی فرض کنیم $\sum b_n$ از اسقاط بعضی از جمله‌های مساوی 0 در $\sum a_n$ و درج صفرهای جدید در آن حاصل شده باشد. سلسله‌ی حاصل از اسقاط آن صفرها را از $\sum a_n$ بدون درج صفرهای جدید $\sum c_n$ مینامیم. در این صورت، سلسله‌ی $\sum c_n$ با اسقاط بعضی صفرها از سلسله‌ی $\sum a_n$ و نیز با اسقاط بعضی صفرها از سلسله‌ی $\sum b_n$ حاصل میشود. پس، بنا بر حالتی که ثابت شد، سلسله‌ی $\sum c_n$ از حیث رفتار و مقدار با هر یک از دو سلسله‌ی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یکسان است. بنا بر این، این دو سلسله خود از حیث رفتار و مقدار یکسان میباشند. ▲

۲.۶.۲ امثله و فواید

(آ). فرض کنیم

$$(۱)\quad A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots.$$

بنا بر ۲.۴.۱،

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots.$$

پس، بنا بر ۲.۶.۱،

$$(۲)\quad \frac{1}{2}A = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + \cdots + 0 + \frac{1}{4n-2} + 0 - \frac{1}{4n} + \cdots.$$

از جمع (۱) و (۲)، به موجب ۲.۴.۲ و ۲.۶.۱ نتیجه میشود،

$$(۳)\quad \frac{3}{2}A = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

سلسله‌ی طرف دوم همان سلسله‌ی $\sum b_n$ مذکور در ۱.۵.۸ است، که، بنا بر استدلال فوق، متقارب و مقدارش $\frac{3}{2}A$ میباشد. این همان نتیجه‌ای است که در ۱.۵.۸ به طریقی دیگر بدست آوردیم.

(ب). فرض کنیم سلسله‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقارب به A و B باشند. بنا بر ۲.۴.۲، سلسله‌ی $\sum (a_n + b_n)$، با جمله‌ی عمومی $a_n + b_n$، متقارب به $A + B$ است. آیا برداشتن پرانتزها در این سلسله مجاز است، و

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n + \cdots = A + B?$$

برای جواب گفتن به این سؤال ملاحظه میکنیم که. بنا بر مفروضات و ۲.۶.۱،

$$A = a_1 + 0 + a_2 + 0 + \cdots + 0 + a_n + 0 + \cdots,$$
$$B = 0 + b_1 + 0 + b_2 + \cdots + 0 + b_n + \cdots.$$

پس، بنا بر ۲.۴.۲، سلسله‌ی

$$(a_1 + 0) + (0 + b_1) + \cdots + (a_n + 0) + (0 + b_n) + \cdots$$

و لهذا، سلسله‌ی

$$a_1 + b_1 + \cdots + a_n + b_n + \cdots$$

متقارب و حاصلجمع آن $A + B$ است. نظر به فواید این نتیجه، آن را تحت عنوان یک قضیه میآوریم:

۲.۶.۳. قضیه. اگر سلسله‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$، بترتیب، به A و B متقارب باشند آنگاه

$$\sum (a_n + b_n) = a_1 + b_1 + \cdots + a_n + b_n + \cdots = A + B.$$

۲.۷. تمرین

۱. قضیه‌ی ۲.۴.۲ را در مورد تعدادی متناهی از سلسله‌ها ثابت کنید.

۲. این حکم را باطل کنید که اگر $\sum (a_n + b_n)$ متقارب باشد هر یک از $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقارب است.

۳. دو سلسله مانند $\sum a_n$ و $\sum b_n$ بسازید که $\sum (a_n + b_n)$ و $\sum a_n$ متباعد باشند و $\sum b_n$ متقارب.

۴. اگر $x > -1$ و $x \notin \mathbf{I}$ آنگاه سلسله‌ی

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \cdots$$

متقارب است. (با ۲ : ۱.۵.۹ مقایسه کنید.)

۵. ثابت کنید که

$$1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2 \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

۶. بنا بر آنکه A مقدار سلسله‌ی توافقی متناوب باشد، ثابت کنید که

(آ) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+--\cdots=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A.$

(ب) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+--\cdots=\frac{1}{2}A.$

(پ) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}++--\cdots=\frac{2}{3}A.$

۷. «برهان» ذیل را برای اثبات اینکه $0 < 1-$ رد کنید[1]:
«سلسله‌ی

$$S=1+2+4+8+16+\cdots$$

را اختیار میکنیم. بالبداهه،

$$2S=2+4+8+16+\cdots,$$

و از تفریق دو رابطه، $2S-S=-1$، و یا $S=-1$. اما بالبداهه $S>0$. پس، $0<-1$.»

۸. «برهان» ذیل را برای اثبات مثبت بودن 0 رد کنید:
«سلسله‌های

$$A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots,\qquad B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots$$

را اختیار میکنیم. بالبداهه،

$$2B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=A+B,$$

و از آنجا، $A=B$، و یا، $A-B=0$. اما،

$$A-B=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots.$$

پس، $A-B$ حاصلجمع تعدادی جمله‌ی مثبت است، و لهذا، $A-B>0$. پس، $0>0$.»

۹. آیا استدلال ذیل برای اثبات رابطه‌ی مثال ۱.۴.۱ قابل قبول است؟

$$«\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+1)}=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_1^\infty\frac{1}{n}-\sum_1^\infty\frac{1}{n+1}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)=1.»$$

۳ § کلیات در سلسله‌های نامنفی

۳.۱. تعریف. سلسله‌ی نامنفی سلسله‌ای است که جمله‌هایش جملگی نامنفی باشند.
بنا بر این تعریف، هر سلسله‌ای که همه‌ی جمله‌هایش مثبت باشند سلسله‌ای نامنفی است.

سلسله‌های نامنفی نسبةً خوشرفتار و دارای خواص ساده و مهمی میباشند. قبل از شروع

(۱) به رد کردن یک مرحله‌ی برهان اکتفا نکنید. یکایک مراحل را بررسی و هر یک را مردود است رد کنید، و هکذا در مسائل آتیه.

به بحث از آنها، چند نکته را خاطرنشان میسازیم.

I. بعضی از احکام را در مورد سلسله‌ای به صورت $\sum_1 a_n$ بیان و ثابت میکنیم. چنانکه میدانیم (۲.۲.۳)، این امر خللی به کلیت بحث وارد نمیسازد.

II. بنا بر ۱.۴.۳، بحث در سلسله‌هائی که جمل آنها همگی نامثبت هستند به بحث در سلسله‌های نامنفی باز میگردد.

III. همچنین، اگر سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ تعدادی متناهی جمله‌ی منفی داشته باشد آنگاه عددی صحیح مانند N هست که اگر $n \geqslant N+1$ آنگاه $a_n \geqslant 0$. پس، بنا بر ۲.۳.۱، تحقیق در سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ به تحقیق در سلسله‌ی نامنفی $\sum_{N+1} a_n$ باز میگردد. (۲.۳.۶ نیز ملاحظه شود).

نخستین خاصیت مهم سلسله‌های نامنفی اینست که نوسان در آنها راه ندارد. این خاصیت ناشی از اینست که اگر سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ نامنفی باشد آنگاه همواره $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n$. پس، رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ رشته‌ای صعودی است، و لهذا، $\lim A_n$ موجود است. حال اگر رشته‌ی مذکور از بالا محدود باشد $\lim A_n$ عددی حقیقی و سلسله متقارب است، و الا $\lim A_n = \infty$ و سلسله متباعد به ∞ میباشد. ضمناً، بنا بر ۵.۲.۶ : ۷، شرط لازم و کافی برای متقارب بودن رشته‌ی صعودی $\{A_n\}_\nu$ (یعنی برای متقارب بودن سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$) آنست که این رشته رشتکی متقارب داشته باشد. خلاصه،

۳.۲. قضیه. یک سلسله‌ی نامنفی فقط و فقط وقتی متقارب است که رشته‌ی جمعکهایش محدود باشد، و در غیر این صورت، متباعد به ∞ است.

۳.۲.۱. قضیه. یک سلسله‌ی نامنفی فقط و فقط وقتی متقارب است که رشته‌ی جمعکهای آن رشتکی متقارب داشته باشد.

۳.۲.۲. فایده. اگر سلسله‌ی نامنفی $\sum_\nu a_n$ متقارب به عدد A باشد، چون A حد رشته‌ی صعودی $\{A_n\}_\nu$ است، همواره $A_n \leqslant A$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که، از مرتبه‌ای ببعد، $A_n = A$، یعنی، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n = 0$؛ و این فقط و فقط وقتی روی میدهد که جمله‌های سلسله، جز تعدادی متناهی از آنها، مساوی 0 باشند.

۳.۲.۳. فایده. قضایای ۳.۲ و ۳.۲.۱ روشهائی کلی برای اثبات تقارب سلسله‌های نامنفی بدست میدهند: برای اثبات اینکه سلسله‌ی نامنفی $\sum_\nu a_n$ متقارب است کافی است ثابت کنیم که

I. عددی ثابت مانند K هست که همواره $A_n < K$. یا

II. رشته‌ی جمعکهای سلسله رشتکی متقارب دارد.

به عنوان مثال از استعمال روشهای مذکور، رفتار سلسله‌ی مهم ریمان را مورد بحث قرار

میدهیم.

۳.۲.۴. تعریف. سلسلهی ریمان سلسلهی $\sum n^{-\alpha}$ است که در آن α عددی ثابت است.

۳.۲.۵. قضیه. سلسلهی ریمان اگر $\alpha \leqslant 1$ متباعد و اگر $\alpha > 1$ متقارب است.
برهان. فرض کنیم

$$a_n = n^{-\alpha}, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}.$$

اولاً، اگر $\alpha \leqslant 1$ آنگاه همواره $k^{-\alpha} \geqslant 1/k$، و لهذا، $A_n \geqslant \sum_1^n (1/k)$. نظر به متباعد بودن سلسلهی توافقی، $\lim_n \sum_1^n (1/k) = \infty$. پس، چون $\lim A_n$ موجود است، $\lim A_n = \infty$.

ثانیاً، فرض کنیم $\alpha > 1$. ثابت میکنیم که $\{A_n\}$ رشتکی متقارب دارد. فرض کنیم

$$B_1 = A_1 = a_1,$$
$$B_2 = A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$B_3 = A_7 = a_1 + \cdots + a_7,$$

و بطور کلی،

$$B_n = A_{2^n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

رشتهی $\{B_n\}$ رشتکی از $\{A_n\}$ است، و چون صعودی است، برای اثبات متقارب بودن آن، کافی است ثابت کنیم که از بالا محدود است. گوئیم

$$B_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}\right).$$

اما $2^{-\alpha} + 3^{-\alpha} < 2 \cdot 2^{-\alpha}$ و $4^{-\alpha} + 5^{-\alpha} + 6^{-\alpha} + 7^{-\alpha} < 4 \cdot 4^{-\alpha}$. بطور کلی، اگر فرض کنیم $\delta = 2^{1-\alpha}$ به آسانی معلوم میشود که

$$\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha} < \delta^{k-1} \qquad (k > 1).$$

پس، اگر $n > 1$ آنگاه

$$B_n < 1 + \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^{n-1}.$$

چون $\alpha > 1$، $0 < \delta < 1$. پس، سلسلهی تصاعد $\sum_0^\infty \delta^n$ متقارب به $1/(1-\delta)$ است.

بالنتیجه، با توجه به ۳.۲.۲،

$$B_n < 1/(1-\delta). \blacktriangle$$

۳.۳. تغییر نظم. یکی از خواص مهم سلسله‌های نامنفی متقارب اینست کـه مقـدار آنها، مانند حاصلجمعهای عادی، از «تغییر ترتیب جمل» مستقل است[۱]. قبل از اثبات ایـن مطلب، باید تغییر نظم جمل یک سلسله را تعریف کرد.

۳.۳.۱. تعریف[۲]. سلسله‌ی $\sum b_n$ را سلسله‌ای حاصل از تغییر نظم سلسله‌ی $\sum a_n$ خـوانیم در صورتی که تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}$ و $\mathbf{N}$ مانند k موجود باشد که، بازاء هر n،

$$b_n = a_{k(n)}.$$

معلومست کـه، در صورت وجود چنین تناظری، k^- نیز تناظـری 1ـ1 بـین $\mathbf{N}$ و $\mathbf{N}$ است، و سلسله‌ی $\sum a_n$ حاصل از تغییر نظم سلسله‌ی $\sum b_n$ میباشد.

۳.۳.۲. قضیه (دیریکله*). رفتار و مقدار یک سلسله‌ی نـامنفـی از تـرتیب جمله‌های آن مستقل است. به عبارت دقیقتر، اگر $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی و $\{b_n\}$ رشته‌ای حاصل از تغییر نظم رشته‌ی $\{a_n\}$ باشد آنگاه دو سلسله‌ی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ از حیث رفتار و مقدار یکسانند.

برهان. بنـا بـر فـرض، تنـاظـری 1ـ1 مانند k بین $\mathbf{N}$ و $\mathbf{N}$ هست کـه، بـازاء هـر n، $b_n = a_{k(n)}$ (۱). پـس، اگـر n عـدد طبیعی دلخواهی باشد، و $p = \operatorname{Max}\{k(1), k(2), \ldots, k(n)\}$، آنگـاه هر یـک از b_1، b_2، . . .، و b_n از جمله‌ی اعداد a_1، a_2، . . .، و a_p است، و بالنتیجه،

$$b_1 + \cdots + b_n = B_n \leqslant \sum_1^p a_n = A_p. \qquad (۲)$$

پس، اگر سلسلـه‌ی $\sum a_n$ متقـارب به A باشـد، با تـوجـه بـه ۳.۲.۲ خـواهـیم داشت، $B_n \leqslant A$ (۳). پس، بنا بر ۳.۲، سلسله‌ی $\sum b_n$ متقارب است، و اگـر B مقدار آن باشد، بنا بر (۳)، $B \leqslant A$ (۴). از طرف دیگر، سلسله‌ی $\sum a_n$ حاصل از تغییر نظم سلسلـه‌ی متقارب $\sum b_n$ است، و لهذا، به همان قیاس که گذشت، $A \leqslant B$. از آنجا، با توجه به (۴)، $A = B$. پس، حکم در حالت تقارب ثابت است. بالاخـره، به دلیلی کـه گـذشت، اگر $\sum a_n = \infty$ آنگاه $\sum b_n$ متقارب نتواند بود. پس، بنا بر ۳.۲، $\sum b_n = \infty$. $\blacktriangle$

۳.۴. نتیجه. از آنچه گـذشت معلوم است که، در مورد سلسله‌های نامنفـی، عبـارت $\sum_\nu a_n$ شباهت بسیار به حاصلجمع تعدادی متناهـی از اعداد دارد. بنا بـر ۲.۵.۱ و ۲.۵.۲، در چنیـن

---

(۱) با مندرجات قسمت اخیر ۱.۵.۸ مقایسه کنید.

(۲) مراجعه به قسمتهای ۷.۷.۶ و ۷.۷.۷ فصل ۵ مفید است.

سلسله‌ای میتوان به دلخواه پرانتزهائی درج کرد یا پرانتزهائی را برداشت. بنا بر قضیه‌ی دیریکله، مقدار یک سلسله‌ی نامنفی از ترتیب عوامل مستقل میباشد. چنانکه میدانیم، همه‌ی سلسله‌ها واجد این خواص نیستند.

۴ § قواعد تشخیص رفتار سلسله‌های نامنفی

۴.۱. مقدمه. مسئله‌ی اصلی مبحث سلسله‌ها تعیین رفتار سلسله‌ها است. تعیین رفتار سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ به تعیین رفتار رشته‌ی $\{A_n\}_\nu$ باز میگردد، اما ــ چنانکه در ۱.۴ اشاره کردیم ــ این تحویل مسئله به مسئله‌ای دیگر به ندرت مددکار است. بدین جهت، باید وسایلی دیگر برای حل مسئله‌ی تشخیص رفتار سلسله‌ها اندیشید. در مورد سلسله‌های نامنفی، خوشبختانه قواعدی ساده در دست است که، به کومک آنها، در بسیاری از موارد میتوان رفتار یک سلسله را تشخیص داد. قواعدی که میآید مبتنی است بر مقایسه‌ی جمله‌های سلسله‌ی مورد نظر با جمل سلسله‌ای که رفتار آن معلوم است. چنانکه خواهیم دید، این قواعد در مورد سلسله‌های غیر نامنفی هم بکار میآیند.

برای اینکه بتوان از قواعد مقایسه استفاده کرد باید رفتار بعضی از سلسله‌های نامنفی را حاضرالذهن داشت، و آنها را به عنوان محک بکار برد. در این مرحله میدانیم که

(۱) سلسله‌ی $\sum\limits_{1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ متقارب (به 1) است.

(۲) سلسله‌ی تصاعد هندسی $\sum\limits_{0} q^n$ بازاء $0 \leqslant q < 1$ متقارب (به $\dfrac{1}{1-q}$) و بازاء $q \geqslant 1$ متباعد است.

(۳) سلسله‌ی ریمان ($\sum\limits_{1} n^{-\alpha}$) بازاء $\alpha \leqslant 1$ متباعد و بازاء $\alpha > 1$ متقارب است.

بالاخص،

(۴) سلسله‌ی توافقی متباعد است.

(۵) سلسله‌ی $\sum\limits_{1} (1/n^2)$ متقارب است.

قضیه‌ی آتیه اساس همه‌ی طرق مهم تحقیق در رفتار سلسله‌های نامنفی از طریق مقایسه است.

۴.۲. قضیه (اولین قاعده‌ی مقایسه). فرض کنیم $\sum\limits_{\nu} a_n$ و $\sum\limits_{\nu} b_n$ دو سلسله باشند، و بازاء هر عدد صحیح n که $n \geqslant \nu$، $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

I. اگر $\sum\limits_{\nu} b_n$ متقارب باشد $\sum\limits_{\nu} a_n$ نیز متقارب است، و

$$\sum_{\nu} a_n \leqslant \sum_{\nu} b_n, \qquad (*)$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که همواره

$$a_n = b_n \qquad (n \geqslant \nu).$$

II. اگر $\sum_\nu a_n$ متباعد باشد $\sum_\nu b_n$ نیز متباعد است.

برهان. فرض کنیم همواره اگر $n \geqslant \nu$ آنگاه $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (۱).

قسمت اول. اگر $\sum_\nu b_n$ متقارب به عدد B باشد، بنا بر (۱) و ۳.۲.۰۲، همواره اگر $n \geqslant \nu$ آنگاه $A_n \leqslant B_n \leqslant B$ (۲). بالنتیجه، بنا بر ۳.۰۲، سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب است. پس، بنا بر ۲.۳.۰۷، نامساوی (*) و شرط لازم و کافی مذکور برای برقراری تساوی در آن برقرار است.

قسمت دوم. قضیه به عکس نقیض از قسمت اول نتیجه میشود. ▲

۴.۲.۱. مثال. سلسله‌ی نامنفی $\sum \left(1/\sqrt{n(1+n^2)}\right)$ را اختیار میکنیم. واضح است که همواره

$$\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} < \frac{1}{n^{3/2}} = n^{-3/2}.$$

سلسله‌ی $\sum n^{-3/2}$ بنا بر ۳.۲.۵ متقارب است. پس، سلسله‌ی مورد بحث نیز متقارب است. ضمناً، بین مقادیر دو سلسله نامساوی اکید ذیل برقرار میباشد:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} < \sum \frac{1}{n^{3/2}}.$$

۴.۲.۲. قرارداد. برای احتراز از تکرار، سلسله‌ای نامنفی را که متقارب فرض شده است $\sum_\nu c_n$ و آن را که متباعد فرض شده است $\sum_\nu d_n$ مینامیم[1].

بنا بر قضیه‌ی ۴.۰۲،

۴.۲.۳. قضیه. فرض کنیم $\sum_\nu a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد.

I. اگر سلسله‌ای مانند $\sum_\nu c_n$ و عدد ثابتی مانند λ باشد که، از اندیسی ببعد، $a_n \leqslant \lambda c_n$، آنگاه سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب است.

II. اگر سلسله‌ای مانند $\sum_\nu d_n$ و عدد ثابتی مثبت مانند λ باشد که، از اندیسی ببعد، $a_n \geqslant \lambda d_n$ آنگاه، سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متباعد است.

بالاخص،

III. اگر سلسله‌ای مانند $\sum_\nu c_n$ باشد که $\lim\,(a_n/c_n) = 0$ آنگاه سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ متقارب است.

---

(۱) به مناسبت کلمات convergent [= متقارب] و divergent [= متباعد].

IV. اگر سلسله‌ای مانند $\sum\limits_{\nu} d_n$ باشد که $\lim\,(a_n/d_n) = \infty$ آنگاه سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} a_n$ متباعد است.

برهان. برای اثبات I و II کافی است ملاحظه کنیم که اگر N اندیس مذکور باشد، بنا بر ۲.۴.۱ و ۴.۲، سلسله‌ی $\sum\limits_{N} a_n$ در حالت اول متقارب و در حالت ثانی متباعد است. در دو قسمت دیگر، ملاحظه کنید که بنا بر خواص عمومی حد، در حالت اول (دوم)، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n/c_n < 1$ $(a_n/d_n > 1)$. ▲

۴.۲.۳.۱. امثله

(آ). اگر $\sum\limits_{\nu} c_n$ سلسله‌ای مفروض و $\{\gamma_n\}_\nu$ رشته‌ای محدود از اعداد مثبت باشد سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} c_n\gamma_n$ متقارب است.

زیرا، بنا بر فرض، عددی مثبت مانند λ هست که همواره اگر $n \geqslant \nu$ آنگاه $\gamma_n < \lambda$، و لهذا، $0 \leqslant \gamma_n c_n \leqslant \lambda c_n$. پس، بنا بر ۴.۲.۳ : I، سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} \gamma_n c_n$ متقارب است. ▲

(ب). اگر $\sum\limits_{\nu} d_n$ سلسله‌ای مفروض باشد، و $\{\delta_n\}_\nu$ رشته‌ای از اعداد مثبت و دارای بند پایین مثبتی باشد سلسله‌ی $\sum\limits_{\nu} \delta_n d_n$ متباعد است. (چرا؟)

آیا حکم فوق در صورتی که، بجای «مثبتی»، «نامنفی» قرار دهیم برقرار میماند؟

(پ). فرض کنیم $\sum\limits_{\nu} a_n$ و $\sum\limits_{\nu} a'_n$ دو سلسله‌ی نامنفی باشند، و دو عدد ثابت مثبت مانند α و α' و عددی صحیح مانند N موجود باشد که همواره اگر $n > N$ آنگاه

$$a_n > 0, \qquad 0 < \alpha \leqslant a'_n/a_n \leqslant \alpha'.$$

در این صورت، دو سلسله‌ی مذکور همرفتارند.

۴.۲.۴ تعریف . رشته‌ی $\{b_n\}_\nu$ را با رشته‌ی $\{a_n\}_\nu$ معادل خوانیم در صورتی که، بازاء هر عدد مثبت دلخواه مانند ε، از مرتبه‌ای ببعد،

$$|\, b_n - a_n \,| < \varepsilon \,|\, a_n \,|.$$

در این صورت مینویسیم

$$b_n \sim a_n.$$

بر متعلم است اثبات اینکه اگر از مرتبه‌ای ببعد $a_n \neq 0$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $b_n \sim a_n$ آنست که $\lim\,(b_n/a_n) = 1$.

مثلاً، $(2n^2 - 1)/(3n + 2) \sim 2n/3$ و $\sqrt{n^2+1} \sim n$.

۴.۲.۵. قضیه. اگر $\sum\limits_{\nu} a_n$ و $\sum\limits_{\nu} a'_n$ دو سلسله‌ی نامنفی باشند، و $a'_n \sim a_n$، آنگاه دو سلسله همرفتارند.

---

(۱) این تعریف همان است که در ۱۰.۴ : ۷ گفته شد بدون در کار آوردن o.

برهان. بنا بر فرض، از مرتبه‌ای ببعد، $|a'_n - a_n| < a_n/2$، و از آنجا، $a_n/2 < a'_n < 3a_n/2$؛ و بنا بر ۴.۲.۳ حکم برقرار است. ▲

مثلاً، سلسله‌ی $\sum (1/\sqrt{1+n^2})$ متباعد است، زیرا

$$1/\sqrt{1+n^2} \sim 1/n,$$

و سلسله‌ی $\sum (1/n)$ متباعد میباشد.

۴.۲.۶. قضیه (دومین قاعده‌ی مقایسه). فرض کنیم جمل سلسله‌های $\sum a_n$، $\sum c_n$، و $\sum d_n$ از مرتبه‌ای ببعد مثبت باشند.

I. اگر از مرتبه‌ای ببعد

$$a_{n+1}/a_n \leqslant c_{n+1}/c_n$$

آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

II. اگر از مرتبه‌ای ببعد

$$a_{n+1}/a_n \geqslant d_{n+1}/d_n$$

آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

برهان. بنا بر فرض قضیه، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n \geqslant N$ جمله‌های سلسله‌های مورد بحث مثبت‌اند، و یکی از نامساویها برقرار است، و کافی است تقارب یا تباعد سلسله‌ی $\sum_N a_n$ را ثابت کنیم. در حالت اول، اگر $\gamma_n = a_n/c_n$ آنگاه رشته‌ی $\{\gamma_n\}_N$ نزولی است، و چون جمله‌هایش مثبت‌اند، محدود میباشد. پس، بنا بر آ: ۴.۲.۳.۱، سلسله‌ی $\sum_N \gamma_n c_n$ متقارب است. اثبات قسمت دوم به متعلم محول میشود. ▲

۴.۲.۷. فایده. به وسیله‌ی مقایسه‌ی سلسله‌ها با سلسله‌های خاصی که رفتار آنها معلوم است میتوان قواعد عملی مفیدی بدست آورد. نتایج حاصل از مقایسه با تصاعد هندسی در ۴.۳ خواهد آمد. برای اینکه متعلمین با روش استخراج این گونه قواعد آشنا شوند مثالی از مقایسه با سلسله‌ی ریمان میآوریم.

فرض کنیم $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد، و دو عدد مانند α و λ باشد که $\alpha > 1$، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant \lambda/n^\alpha$. در این شرایط، سلسله‌ی $\sum (1/n^\alpha)$ متقارب است، و بالنتیجه، سلسله‌ی $\sum a_n$ هم متقارب میباشد. اما، اگر دو عدد مانند α و λ باشد که $\alpha \leqslant 1$، و $\lambda > 0$، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n \geqslant \lambda/n^\alpha$، آنگاه سلسله‌ی $\sum (1/n^\alpha)$ و، بالنتیجه، سلسله‌ی $\sum a_n$ نیز متباعد میباشد. بالاخص، فرض کنیم $l = \lim n^\alpha a_n$ موجود باشد. اگر $l \in \mathbf{R}$ و $\alpha > 1$ آنگاه، از مرتبه‌ای ببعد، $n^\alpha a_n < l + 1$، و بنا بر آنچه گذشت، سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است؛ و اگر $\alpha \leqslant 1$ و $l \neq 0$ آنگاه، اگر λ عددی کوچکتر از l باشد، از مرتبه‌ای ببعد، $n^\alpha a_n > \lambda$، و سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد میباشد.

مثلاً، سلسله‌ی $\sum \frac{1}{(2n+1)^\alpha}$ را اختیار میکنیم. معلومست که

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{(2n+1)^\alpha} = \frac{1}{[2+(1/n)]^\alpha} \to \frac{1}{2^\alpha} \neq 0.$$

پس، اگر $1 < \alpha$ سلسله متقارب است، و اگر $1 \leqslant \alpha$ متباعد.

نظر به فواید نتایج فوق، آنها را در قضیه‌ی ذیل خلاصه میکنیم:

۴.۲.۸. قضیه. فرض کنیم $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد.

I. اگر دو عدد مانند α و λ باشد که $1 < \alpha$ و، از مرتبه‌ای ببعد، $n^\alpha a_n \leqslant \lambda$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است. بالاخص، اگر عددی مانند α باشد که $1 < \alpha$ و $\lim n^\alpha a_n$ عددی حقیقی باشد سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

II. اگر دو عدد مانند α و λ باشد که $1 \geqslant \alpha$ و $0 < \lambda$ و، از مرتبه‌ای ببعد $n^\alpha a_n \geqslant \lambda$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است. بالاخص، اگر عددی مانند α باشد که $1 \geqslant \alpha$ و $\lim n^\alpha a_n$ موجود و غیر از 0 باشد سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

۴.۲.۹. تمرین

۱. در رفتار سلسله‌ی $\sum_\nu a_n$ با مقادیر ذیل از a_n تحقیق کنید:

(آ) $\dfrac{n}{(3n+2)^3}$.

(ب) $\dfrac{1}{3n-1}$.

(پ) $\dfrac{1}{3n^2-1}$.

(ت) $\dfrac{1}{1-3n}$.

(ث) $\dfrac{1}{n^2-1000}$.

(ج) $\dfrac{n}{(4n-1)^2}$.

(چ) $\dfrac{n+1}{n^3+2}$.

(ح) $\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

(خ) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

(د) $\dfrac{n^2-n+1}{1000n^3+100n^2}$.

(ذ) $\sqrt{\dfrac{2n^2+n}{3n^5-1}}$.

(ر) $\sqrt{\dfrac{2n^2+n}{3n^3-1}}$.

(ز) $(2n^2-3n+1)/(n^3-10)^\alpha$.

(ژ) $(2^n+1)/(4^n+1)$.

۲. بنا بر آنکه $x \geqslant 0$ در رفتار سلسله‌ی $\sum \dfrac{1}{1+x^n}$ بازاء مقادیر مختلف x تحقیق کنید.

۳. بنا بر آنکه $p_0 \neq 0$، $q_0 \neq 0$، و μ و ν دو عدد طبیعی مفروض باشند، و

$$a_n = (p_0 n^\mu + p_1 n^{\mu-1} + \cdots + p_\mu)/(q_0 n^\nu + q_1 n^{\nu-1} + \cdots + q_\nu),$$

ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب باشد آنست که ν حد اقل دو واحد از μ بزرگتر باشد.

۴. مطلوبست تحقیق در رفتار سلسله‌های ذیل:

$$\sum_2 \frac{1}{n+(-1)^n}. \qquad \sum_1 \frac{1}{3n+(-1)^n n}. \qquad \sum_6 \frac{1}{n[n+4(-1)^n]}.$$

$$\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}. \qquad \sum \frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}.$$

۵. ثابت کنید که $1 \leqslant \sum_2^\infty \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{2}$.

۶. اگر $0 < a < b < 1$ سلسله‌ی ذیل متقارب است:

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots.$$

۷ اگر $0 < p < 1$ سلسله‌ی $\sum \sqrt[n]{n}\, p^n$ متقارب است.

۸. اگر $\sum (1/n^2) = A$ آنگاه

(آ) $\quad 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=\frac{3}{4}A.$

(ب) $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=\frac{15}{16}A.$

(پ) $\quad 1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots=\frac{2}{3}A.$

† **۹.** فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سلسله‌ی نامنفی باشند.

(آ). اگر $\sum b_n$ متقارب باشد و $a_n = O(b_n)$ آنگاه $\sum a_n$ نیز متقارب است.

(ب). اگر $\sum b_n$ متباعد باشد و $b_n = O(a_n)$ آنگاه $\sum a_n$ نیز متباعد است.

۴.۳. قواعد ریشه و نسبت. از طریق مقایسه با سلسله‌ی تصاعد هندسی، دو قاعده‌ی ساده و مهم (۴.۳.۱ و ۴.۳.۲) حاصل میشود که در مورد بسیاری از سلسله‌ها کارآمد میباشند.

۴.۳.۱. قضیه (قاعده‌ی ریشه یا قاعده‌ی کوشی*). فرض کنیم $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد.

I. اگر عددی ثابت مانند α باشد که $0 \leqslant \alpha < 1$، و از مرتبه‌ای ببعد، $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \alpha$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

II. اگر از مرتبه‌ای ببعد $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

III. بالاخص، وقتی که $l = \lim \sqrt[n]{a_n}$ موجود باشد، اگر $l < 1$ سلسله متقارب است، و اگر $l > 1$ متباعد.

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که، در حالت I، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n \leqslant \alpha^n$، و سلسله‌ی تصاعد هندسی $\sum \alpha^n$، بنا بفرض، متقارب است. در حالت ثانی، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n \geqslant 1$، و لهذا، a_n به 0 میل نتواند کرد. پس، بنا بر ۱.۴.۸، سلسله متباعد است. بالاخره فرض کنیم $l = \lim \sqrt[n]{a_n}$. اگر $0 \leqslant l < 1$ آنگاه عددی مانند α هست که $l < \alpha < 1$. پس، بنا بر خواص عمومی حد، از مرتبه‌ای ببعد، $\sqrt[n]{a_n} < \alpha$. بنا بر این، به موجب I، سلسله متقارب است. و قس علیهذا در حالتی که $l > 1$. ▲

۴.۳.۲. قضیه (قاعده‌ی نسبت یا قاعده‌ی دالامبر*). فرض کنیم $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد، و از مرتبه‌ای ببعد جمله‌هایش مثبت باشند.

I. اگر عددی ثابت مانند α باشد که $0 < \alpha < 1$، و از مرتبه‌ای ببعد $a_{n+1}/a_n \leqslant \alpha$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

II. اگر از مرتبه‌ای ببعد $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

III. بالاخص، وقتی که $l = \lim\ (a_{n+1}/a_n)$ موجود باشد، اگر $l < 1$ سلسله متقارب است، و اگر $l > 1$ متباعد.

برهان. برای اثبات قسمت I ملاحظه میکنیم که، بنا بر مفروضات، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $a_n > 0$ و $a_{n+1}/a_n \leqslant \alpha$. فرض کنیم $c_n = \alpha^n$. چون $0 < \alpha < 1$، سلسله‌ی $\sum c_n$ متقارب است، و چون $a_{n+1}/a_n \leqslant c_{n+1}/c_n$، بنا بر دومین قاعده‌ی مقایسه، $\sum a_n$ متقارب است. از طرف دیگر، اگر از مرتبه‌ای مانند $N+1$ ببعد، $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ آنگاه، بازاء هر n که $n \geqslant N+1$ خواهیم داشت $a_n \geqslant a_{N+1} > 0$. پس، a_n به 0 میل نتواند کرد، و لهذا، سلسله متباعد است. اثبات حالت خاص به همان قیاس است که در قاعده‌ی کوشی گذشت. ▲

۴.۳.۳. تبصره. در استعمال قواعد ریشه و نسبت، نکات ذیل را باید مد نظر داشت.

I. صِرفِ علم به اینکه از مرتبه‌ای ببعد $a_n^{1/n} \leqslant 1$ یا $a_{n+1}/a_n \leqslant 1$ اطلاعی از رفتار سلسله بدست نمیدهد، و همچنین است، در صورتی که $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ یا $\lim\ (a_{n+1}/a_n) = 1$.[1]

مثلاً، در سلسله‌های $\sum (1/n)$ و $\sum (1/n^2)$، همواره

$$\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} < 1, \qquad \frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1,$$

و حال آنکه سلسله‌ی اول متباعد و سلسله‌ی دوم متقارب است. در همین دو سلسله،

$$\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n} \to 1, \qquad \frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2} \to 1,$$

$$(1/n)^{1/n} \to 1, \qquad (1/n^2)^{1/n} \to 1.$$

II. چنانکه میدانیم (۷ : ۸.۱.۳)، اگر $\lim\ (a_{n+1}/a_n)$ موجود باشد $\lim a_n^{1/n}$ نیز موجود و مساوی آنست. اما، ممکن است حد دوم موجود باشد ولی a_{n+1}/a_n حد نداشته باشد (ج : ۴.۳.۴).

بنا بر این، اگر $\lim\ (a_{n+1}/a_n) = 1$ نباید وقت صرف تعیین $\lim a_n^{1/n}$ کرد.

III. بطور کلی، قاعده‌ی کوشی تواناتر از قاعده‌ی دالامبر است[2]، اگر چه قاعده‌ی

---

(۱) در این صورت، باید به تدابیر دیگر یا قواعد تواناتر متوسل شد مانند قاعده‌ی رابه (۴.۳.۸).

(۲) ۴.۳.۵ ملاحظه شود.

دالامبر، هر جا گره گشا باشد، آسانتر میباشد، زیرا، تعیین حد کسر a_{n+1}/a_n عموماً از تعیین حد $a_n^{1/n}$ اسهل است.

۴.۳.۴. امثله و فواید

(آ). اگر $x > 0$ سلسله‌ی $\sum \frac{x^n}{n^n}$ متقارب است، زیرا

$$(x^n/n^n)^{1/n} = x/n \to 0 < 1.$$

(ب). سلسله‌ی $\sum \frac{n!}{n^n}$ متقارب است، زیرا، اگر $a_n = \frac{n!}{n^n}$ آنگاه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1.$$

(پ). تحقیق در رفتار سلسله‌ی $\sum (nx)^n$، که در آن x عدد ثابتی نامنفی است.
فرض کنیم $a_n = (nx)^n$. اگر $x = 0$ آنگاه همواره $a_n = 0$، و سلسله متقارب است. اگر $x > 0$ آنگاه $a_n^{1/n} = nx$. پس، اگر $n > 1/x$ آنگاه $a_n^{1/n} > 1$؛ بالنتیجه، سلسله متباعد است.

(ت). سلسله‌ی $\sum_{n=1} n^k x^n$ که در آن $k \in \mathbf{N}$ و $x > 0$.

$$(n+1)^k\, x^{n+1}/n^k x^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k x \to x.$$

پس، اگر $x < 1$ سلسله متقارب است، و اگر $x > 1$ متباعد. بازاء $x = 1$ قاعده‌ی دالامبر جوابی نمیدهد، اما در این حالت سلسله بالبداهه متباعد میباشد.

(ث). تحقیق در رفتار سلسله‌ی $\sum a_n$ با

$$a_n = (p_0 n^k + p_1 n^{k-1} + \cdots + p_k)x^n \qquad (0 \leqslant x,\ p_0 \neq 0,\ k \in \mathbf{N}).$$

اگر $x = 0$ سلسله بالبداهه متقارب است. پس، فرض میکنیم $x > 0$. به آسانی دیده میشود که $\lim_n (a_n/p_0 n^k x^n) = 1$.

حالت اول: $p_0 > 0$. پس، از مرتبه‌ای ببعد $a_n > 0$ (چرا؟)، و رفتار سلسله‌ی $\sum a_n$ همان رفتار سلسله‌ی $\sum n^k x^n$ است (مثال قبل).

حالت دوم: $p_0 < 0$. از مرتبه‌ای ببعد، $a_n < 0$ (چرا؟). رفتار سلسله‌ی $\sum a_n$ همان رفتار سلسله‌ی $\sum(-a_n)$ است، که ــ بنا بر حالت قبل ــ همان رفتار سلسله‌ی $\sum n^k x^n$ میباشد.

(ج). تحقیق در رفتار سلسله‌ی

$$\sum a_n = a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \cdots$$

با مفروضات $0 < a < 1$، $b > 1$، و $ab < 1$.
نسبت یک جمله به جمله‌ی قبل متناوباً a یا b است، و لهذا، $\lim (a_{n+1}/a_n)$ موجود نیست. بعلاوه، بینهایت‌بار $a_{n+1}/a_n = b > 1$ و بینهایت‌بار $a_{n+1}/a_n = a < 1$. چنانکه دیده میشود، قاعده‌ی دالامبر در مورد این سلسله کارگر نیست. حال به اعمال قاعده‌ی کوشی میپردازیم. برای این منظور ملاحظه میکنیم که

$$a_{2n} = a^n b^n, \qquad a_{2n-1} = a^n b^{n-1},$$
$$(a_{2n})^{1/2n} = \sqrt{ab} \to \sqrt{ab}, \qquad (a_{2n-1})^{1/(2n-1)} = a^{n/(2n-1)} b^{(n-1)/(2n-1)} \to \sqrt{ab}.$$

بنا بر این، $\lim a_n^{1/n}$ موجود و مساوی $\sqrt{ab}$ است. پس، چون $ab < 1$، سلسله متقارب میباشد.

(چ). تحقیق در رفتار سلسله‌ی $\sum\limits_0 a_n$ که در آن

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \binom{\alpha + n - 1}{n} x^n \qquad (n \geqslant 1)$$

بفرض آنکه α عددی ثابت باشد و $x \geqslant 0$.

بازاء $x = 0$ سلسله بالبداهه متقارب است. پس، فرض کنیم $x > 0$.

حالت اول: $\alpha > 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha + n}{1 + n} x \to x.$$

پس اگر $x < 1$ سلسله متقارب است، و اگر $1 < x$ متباعد. بازاء $x = 1$، قاعده‌ی دالامبر از کار می‌افتد. در این حالت، ملاحظه میکنیم که

$$a_n > \frac{\alpha \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{n!} = \frac{\alpha}{n}.$$

پس، چون سلسله‌ی $\sum (\alpha/n)$ متباعد است، سلسله‌ی مورد بحث نیز متباعد میباشد.

حالت دوم: $\alpha \in \mathbf{I}$ و $\alpha \leqslant 0$. در این حالت، همواره اگر $n > -\alpha$ آنگاه $a_n = 0$. پس، سلسله بازاء هر مقدار x متقارب است.

حالت سوم: $\alpha < 0 \ \& \ \alpha \notin \mathbf{I}$. در این حالت، بازاء $n > 1 - \alpha$ جمل سلسله متحدالعلامه‌اند. مانند حالت اول معلوم میشود که اگر $0 < x < 1$ سلسله متقارب و اگر $1 < x$ متباعد است. تحقیق در حالتی که $x = 1$ در این مختصر نمیگنجد.

(ح). اگر عددی مانند α باشد که $0 < \alpha < 1$ و از مرتبه‌ای ببعد $a_{n+1}/a_n \leqslant \alpha$ آنگاه عددی مانند β هست که $0 < \beta < 1$ و از مرتبه‌ای ببعد $a_n^{1/n} \leqslant \beta$.

زیرا، فرض کنیم از مرتبه‌ی N ببعد

$$a_n > 0, \qquad a_{n+1}/a_n \leqslant \alpha < 1, \qquad (1)$$

و β عدد دلخواهی بین α و 1 باشد. از (۱) به استقراء معلوم میشود که همواره اگر $n \geqslant N$ آنگاه $a_n/a_N \leqslant \alpha^{n-N}$، و از آنجا،

$$a_n^{1/n} \leqslant (a_N \alpha^{-N})^{1/n} \alpha. \qquad (۲)$$

چون $a_N \alpha^{-N}$ عددی ثابت است، $\lim_n (a_N \alpha^{-N})^{1/n} = 1$. پس، چون $\beta/\alpha > 1$، از مرتبه‌ای ببعد، $(a_N \alpha^{-N})^{1/n} < \beta/\alpha$. بالنتیجه، بنا بر (۲)، از مرتبه‌ای ببعد،

$$a_n^{1/n} \leqslant (\beta/\alpha) \cdot \alpha = \beta. \ \blacktriangle$$

۴.۳.۵. تبصره. بنا بر مثال (ج) فوق و قضیه‌ی دوم حد کوشی (۸.۱.۳ : ۷)، قاعده‌ی کوشی از قاعده‌ی دالامبر تواناتر است.

۴.۳.۶. تبصره. ممکن است جمله‌های یک سلسله از جمله‌های یک تصاعد هندسی متقارب

نظیر به نظیر کمتر باشند، و معذلک، تقارب آن سلسله را نتوان با قاعده‌ی دالامبر ثابت کرد؛ مانند سلسله‌ی

$$\sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

با ضابطه‌ی

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2 \nmid n); \qquad a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (2 \mid n).$$

چون همواره $a_n \leqslant (1/2)^n$، سلسله متقارب است، ولی هیچ یک از قواعد کوشی و دالامبر در تشخیص تقارب آن کارگر نیست.

۴.۳.۷. تخمین مانده‌ها. وقتی که تقارب سلسله‌ای به وسیله‌ی قواعد کوشی یا دالامبر محقق شود، در عین حال، میتوان تخمینی از مانده‌های سلسله بدست آورد[۱].

اولاً، اگر از مرتبه‌ی $N+1$ ببعد $a_n \leqslant \alpha^n$ آنگاه

$$R_N \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \alpha^n = \alpha^{N+1} \sum_{0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha}.$$

ثانیاً، اگر از مرتبه‌ی $N+1$ ببعد $a_{n+1}/a_n \leqslant \alpha$ به آسانی به استقراء معلوم میشود که، بازاء هر n، اگر $n \geqslant N+1$ آنگاه $a_{n+1} \leqslant a_{N+1}\alpha^{n-N}$، و بالنتیجه،

$$R_N \leqslant a_{N+1} \sum_{N}^{\infty} \alpha^{n-N} = \frac{a_{N+1}}{1-\alpha}.$$

چنانکه دانسته شد، اگر $\lim (a_{n+1}/a_n) = 1$ قواعد دالامبر و کوشی از کار می‌افتند. در این حالت، در بسیاری از موارد، قاعده‌ی مذکور در قضیه‌ی ذیل مشکل‌گشا است.

۴.۳.۸. قضیه (قاعده‌ی رابه[۲]). فرض کنیم جمله‌های سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n$ از مرتبه‌ای بیعد مثبت باشند.

I. اگر عدد ثابتی بزرگتر از 1 مانند α باشد که از مرتبه‌ای بیعد

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant \alpha$$

آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

II. اگر از مرتبه‌ای بیعد

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1}{n}$$

آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد به ∞ است.

III. بالاخص، اگر

(۱) این گونه تخمینها در محاسبه‌ی مقدار تقریبی سلسله‌ها بسیار بکار میآیند.
(۲) J. L. Raabe (۱۸۰۱ ـ ۱۸۵۹).

$$l = \lim_n n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

موجود باشد آنگاه

اگر $1 < l$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است؛

اگر $1 > l$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد به ∞ است.

برهان. قسمت اول. بنا بر مفروضات، عددی طبیعی مانند k هست که همواره اگر $n > k$ آنگاه $a_n > 0$ و

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant \alpha > 1,$$

و از آنجا،

$$(\alpha - 1)a_n \leqslant (n - 1)a_n - na_{n+1}.$$

چون $\alpha - 1 > 0$، بازاء هر n، اگر $n > k$ آنگاه

$$A_n = \sum_1^n a_i = \sum_1^k a_i + \sum_{k+1}^n a_i \leqslant \sum_1^k a_i + \frac{1}{\alpha - 1}\sum_{k+1}^n [(i-1)a_i - ia_{i+1}]$$
$$= \sum_1^k a_i + \frac{1}{\alpha - 1}\left(ka_{k+1} - na_{n+1}\right) \leqslant \sum_1^k a_i + \frac{ka_{k+1}}{\alpha - 1}.$$

پس، رشته‌ی $\{A_n\}$ از بالا محدود است، و لهذا، سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب میباشد.

قسمت دوم. بنا بر مفروضات، عددی طبیعی مانند k $(k > 1)$ هست که همواره اگر $n \geqslant k$ آنگاه $a_n > 0$ و $na_{n+1} \geqslant (n-1)a_n$. پس اگر $n \geqslant k$ آنگاه $na_{n+1} \geqslant (k-1)a_k$؛ و یا، اگر عدد ثابت $(k-1)a_k$ را λ بنامیم، $a_{n+1} \geqslant \lambda/n$. پس، چون سلسله‌ی $\sum (1/n)$ متباعد است، سلسله‌ی $\sum a_n$ نیز متباعد است.

قسمت سوم. این قسمت نتیجه‌ی دو قسمت دیگر است. اگر $1 < l$ آنگاه عددی مانند α هست که $1 < \alpha < l$. از مرتبه‌ای ببعد $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > \alpha$. پس، بنا بر قسمت I، سلسله متقارب است. اگر $1 > l$ آنگاه، از مرتبه‌ای ببعد، $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$، و بنا بر قسمت II، سلسله متباعد میباشد. ▲

۴.۳.۸.۱. تبصره. اگر $\lim_n n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$ قاعده‌ی رابه از کار می‌افتد.

۴.۴. سلسله‌های نامنفی با رشته‌ی مولد نزولی. این گونه سلسله‌ها خواصی قابل توجه دارند؛ از جمله

۴.۴.۱. قضیه (قاعده‌ی تراکم کوشی*). فرض کنیم $\sum_1 a_n$ سلسله‌ای نامنفی و رشته‌ی مولد

آن نزولی باشد، و μ عدد طبیعی ثابتی بزرگتر از 1 باشد. در این شرایط، دو سلسله‌ی[1]

$$\sum_1 a_n, \qquad \sum_0 \mu^n a_{\mu^n}$$

همرفتارند.

برهان[2]. اولاً، فرض میکنیم سلسله‌ی $\sum_0 \mu^n a_{\mu^n}$ متقارب به عدد C باشد، و ثابت میکنیم که رشته‌ی $\{A_n\}$ (رشته‌ی جمعکهای سلسله‌ی $\sum_1 a_n$) رشتکی متقارب دارد. فرض کنیم

$$B_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\mu-1}, \qquad B_2 = a_1 + \cdots + a_{\mu^2-1},$$

و بطور کلی،

$$B_n = a_1 + \cdots + a_{\mu^n-1} \qquad (n \geqslant 1).$$

رشته‌ی $\{B_n\}$ رشتکی است از رشته‌ی $\{A_n\}$، و با توجه به نزولی بودن رشته‌ی $\{a_n\}$،

$$\begin{aligned} B_n &= (a_1 + \cdots + a_{\mu-1}) + (a_\mu + \cdots + a_{\mu^2-1}) + \cdots \\ &\quad + (a_{\mu^{n-1}} + \cdots + a_{\mu^n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{\mu^k} + \cdots + a_{\mu^{k+1}-1}) \\ &\leqslant \sum_0^{n-1} (\mu^{k+1} - \mu^k) a_{\mu^k} = (\mu - 1) \sum_0^{n-1} \mu^k a_{\mu^k} \leqslant (\mu - 1)C. \end{aligned}$$

پس، رشته‌ی $\{B_n\}$ محدود و، بنا بر ۳.۲.۰۱، سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

ثانیاً، فرض کنیم سلسله‌ی $\sum_0 \mu^n a_{\mu^n}$ متباعد باشد، و

$$B_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\mu^n} \qquad (n \geqslant 1).$$

به آسانی دیده میشود که

$$\begin{aligned} B_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} (a_{\mu^{k-1}+1} + \cdots + a_{\mu^k}) &\geqslant a_1 + \sum_{k=1}^{n} (\mu^k - \mu^{k-1}) a_{\mu^k} \\ &\geqslant \frac{\mu - 1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \mu^k a_{\mu^k}. \end{aligned}$$

بالنتیجه، بنا بر مفروضات، رشته‌ی $\{B_n\}$، که رشتکی از رشته‌ی $\{A_n\}$ است، از بالا نامحدود است. پس، رشته‌ی اخیر نیز از بالا نامحدود، و لهذا، سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد میباشد.

بالاخره، بنا بر آنچه ثابت شد، اگر سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب (متباعد) باشد سلسله‌ی دیگر هم ناچار متقارب (متباعد) است. ▲

قاعده‌ی تراکم کوشی مخصوصاً در تحقیق در بعضی سلسله‌های متضمن لگاریتم مفید است.

---

(۱) مثلاً، بازاء $\mu = 2$، سلسله‌ی دوم عبارتست از

$$\sum_0 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

(۲) اثبات قضیه، مانند اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۵، به استناد ۳.۲.۱ است.

۴.۴.۲. امثله

(آ). اگر $a_n = 1/n$ و $\mu = 2$ آنگاه $\mu^n a_{\mu^n} = 1$. چون سلسله‌ی $\sum_0 1$ متباعد است سلسله‌ی $\sum_1 (1/n)$ هم متباعد است.

(ب). به وسیله‌ی قضیه‌ی تراکم، رفتار سلسله‌ی ریمان را به آسانی میتوان تحقیق کرد. بازاء $a_n = n^{-\alpha}$ و $\mu = 2$،

$$\sum_0 2^n(2^n)^{-\alpha} = \sum_0 \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

سلسله‌ی اخیر تصاعدی است هندسی با قدر نسبت $2^{1-\alpha}$، و اگر $1 < \alpha$ متقارب و اگر $1 \leqslant \alpha$ متباعد است.

(پ). سلسله‌ی $\sum_2 \frac{1}{n \log n}$ متباعد است.

کافی است ملاحظه کنیم که

$$\mu^n a_{\mu^n} = \mu^n \cdot \frac{1}{\mu^n \log \mu^n} = \frac{1}{\log \mu} \cdot \frac{1}{n}.$$

سابقاً دیدیم که شرط لازم برای تقارب سلسله‌ای دلخواه مانند $\sum a_n$ اینست که $\lim a_n = 0$. در مورد سلسله‌های نامنفی حادث از رشته‌های نزولی حکم قویتر ذیل برقرار است:

۴.۴.۳. قضیه. در سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n$، اگر رشته‌ی جمله‌ها نزولی باشد شرط لازم برای تقارب سلسله آنست که

$$\lim na_n = 0$$

ولی این شرط کافی نیست.

برهان. فرض کنیم شرایط مذکور برقرار و سلسله متقارب و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنا بر ضابطه‌ی کلی تقارب، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $m \geqslant N$ و $k \in \mathbf{N}$ آنگاه

$$a_{m+1} + \cdots + a_{m+k} < \varepsilon/2.$$

اگر $n > 2N$ آنگاه $p = [n/2] \geqslant N$، و بالنتیجه،

$$a_{p+1} + \cdots + a_n < \varepsilon/2.$$

پس، چون رشته‌ی $\{a_n\}$ نزولی است، $(n-p)a_n < \varepsilon/2$، و به طریق اولی، $\frac{n}{2} a_n < \frac{\varepsilon}{2}$، و از آنجا، $na_n < \varepsilon$. بالنتیجه، $\lim na_n = 0$.

برای اثبات عدم کفایت، ملاحظه کنید که سلسله‌ی مثال پ: ۴.۴.۲ تابع شرط مذکور هست، ولی متباعد میباشد. ▲

۴.۵ تمرین

۱. در رفتار سلسله‌های ذیل تحقیق کنید. هر جا x آمده است فرض کنید $x \geqslant 0$.

(الف) $\sum \left(\frac{n+200}{2n+7}\right)^n$. (آ) $\sum \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$.

(ب) $\sum \frac{x^n}{n}$. (پ) $\sum \frac{n^2}{2^n}$.

(ت) $\sum \frac{n+1}{n+2}\, x^n$. (ث) $\sum (n+1)x^n$.

(ج) $\sum \frac{nx^n}{(n+1)!}$. (چ) $\sum \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\, x^n$.

(ح) $\sum \frac{n}{1+x^n}$. (خ) $\sum \frac{(n^2+1)x^n}{(n+1)!}$.

(د) $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n$. (ذ) $\sum \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\, x^n$.

(ر) $\sum \frac{(2n)!}{n!}\, x^n$. (ز) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$.

(ژ) $\sum \frac{x^n}{n^{n+1}}$. (س) $\sum \frac{n!}{(2n)!}\, x^n$.

(ش) $\sum x^{n^2}$. (ص) $\sum x^{2n^2/(n+1)}$.

(ض) $\sum_2 \frac{1}{(\log n)^n}$. (ط) $\sum n!x^n$.

۲. در رفتار سلسله‌ی $\sum \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$ تحقیق کنید.

۳. بنا بر آنکه $a > 0$، $\alpha > 0$، $x \geqslant 0$، و μ و ν دو عدد طبیعی مفروض باشند در رفتار سلسله‌ی ذیل تحقیق کنید:

$$\sum \frac{an^\mu + bn^{\mu-1} + \cdots + l}{\alpha n^\nu + \beta n^{\nu-1} + \cdots + \lambda}\, x^n.$$

۴. اگر $0 < p < 1$ سلسله‌های $\sum np^n$ و $\sum n^2p^n$ متقاربند.

۵. اگر $0 < \alpha < \beta < 1$ این سلسله متقارب است:

$$\alpha + 2\beta + 3\alpha^2 + 4\beta^2 + \cdots + (2n-1)\alpha^n + 2n\beta^n + \cdots.$$

۶. سلسله‌ی $\sum_2 \frac{1}{(\log n)^\beta}$ متباعد است.

۷. سلسله‌ی $\sum_2 \frac{1}{n(\log n)^\beta}$ اگر $\beta > 1$ متقارب و اگر $\beta \leqslant 1$ متباعد است.

۸. سلسله‌ی $\sum_\nu \frac{1}{n \log n\, (\log\log n)^\beta}$ اگر $\beta > 1$ متقارب و اگر $\beta \leqslant 1$ متباعد است.

۵ § ملاحظات اجمالی در رفتار سلسله‌ها بطور کلی

۵.۱. مقدمه. در ۱ : ۱۰ : ۵، بازاء عدد حقیقی دلخواه x، x^+ و x^- را چنین تعریف کردیم:

$$x^+ = \begin{cases} x & (x \geqslant 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} -x & (x \leqslant 0), \\ 0 & (x > 0). \end{cases}$$

واضح است که همواره

$$x^+ = \frac{1}{2}\left(|x| + x\right). \tag{۵.۱.۱}$$

$$x^- = \frac{1}{2}\left(|x| - x\right). \tag{۵.۱.۲}$$

$$x = x^+ - x^-. \tag{۵.۱.۳}$$

$$|x| = x^+ + x^-. \tag{۵.۱.۴}$$

همچنین، همواره

$$0 \leqslant x^+ \leqslant |x|, \tag{۵.۱.۵}$$

$$0 \leqslant x^- \leqslant |x|, \tag{۵.۱.۶}$$

و در هر یک از این دو رابطه، یا یکی از نامساویها اکید و دیگری تساوی است یا $x = 0$ و هر دو نامساوی تساوی است.

اگر $\sum a_n$ سلسله‌ای دلخواه باشد از آن میتوان دو سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ را ساخت. مثلاً، اگر

$$\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

آنگاه

$$\sum a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \cdots,$$

$$\sum a_n^- = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \cdots.$$

باید توجه داشت که سلسله‌ی $\sum a_n^+$ با سلسله‌ی حاصل از اسقاط جمل منفی سلسله‌ی $\sum a_n$ متفاوت است، اگرچه، بنا بر ۲.۶.۱، رفتار دو سلسله یکسان میباشد؛ و قس علیهذا در مورد $\sum a_n^-$.

۵.۱.۷. قضیه. اگر سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متقارب باشد هر یک از سلسله‌های $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متقاربند، و

$$\sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^-.$$

برهان. فرض کنیم سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متقارب باشد. بنا بر ۵.۱.۵ و ۵.۱.۶، سلسله‌های نامنفی

$\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متقارب‌اند. اینک تساوی مطلوب از قاعده‌ی جمع سلسله‌های متقارب بدست می‌آید. ▲

۵.۱.۸. قضیه. اگر سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متقارب باشد، آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ نیز متقارب است، و بعلاوه،

$$\text{I.} \qquad \sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-;$$

$$\text{II.} \qquad \left|\sum a_n\right| \leqslant \sum |a_n|;$$

و در رابطه‌ی اخیر تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که جمله‌های سلسله‌ی $\sum a_n$ یا جملگی نامنفی باشند یا جملگی نامثبت.

برهان. فرض کنیم سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متقارب باشد. اثبات تقارب $\sum a_n$ و اثبات رابطه‌ی I به همان قیاس است که در برهان ۵.۱.۷ گذشت. بعلاوه، با توجه ۵.۱.۳،

$$\left|\sum a_n\right| = \left|\sum a_n^+ - \sum a_n^-\right| \leqslant \sum a_n^+ + \sum a_n^- = \sum |a_n|.$$

اثبات شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی بر متعلم است. ▲

۵.۱.۹. تبصره. عکس حکم مربوط به تقارب در ۵.۱.۸ برقرار نیست. مثلاً، سلسله‌ی $\sum ((-1)^{n-1}/n)$ (سلسله‌ی توافقی متناوب) متقارب است، اما سلسله‌ی $\sum |(-1)^{n-1}/n|$ سلسله‌ی توافقی $\sum (1/n)$ میباشد، که متباعد است. این نکته منشأ طبقه‌بندی سلسله‌ها بر طبق تعریف مهم ذیل است:

۵.۲. تعریف

I. سلسله‌ی $\sum a_n$ را مطلقا متقارب خوانیم در صورتی که سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متقارب باشد.

II. سلسله‌ی متقارب $\sum a_n$ را متقارب مشروط نامیم در صورتی که سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متقارب نباشد.

بنا بر ۵.۱.۸،

۵.۲.۱. قضیه. هر سلسله‌ی مطلقا متقارب متقارب است.

۵.۲.۲. امثله

(آ). سلسله‌ی توافقی متناوب متقارب مشروط است.

(ب). سلسله‌ی $\sum ((-1)^n/n^2)$ مطلقا متقارب (و لهذا، متقارب) است، زیرا سلسله‌ی قدر مطلق جمله‌های آن سلسله‌ی $\sum (1/n^2)$ است، که متقارب میباشد.

(پ). هر سلسله‌ی نامنفی متقارب مطلقا متقارب است. بالنتیجه، هر سلسله‌ی متقارب که جمله‌هایش از مرتبه‌ای ببعد یا نامثبت یا نامنفی باشند مطلقا متقارب است (چرا؟).

۵.۲.۳. تبصره. بنا بر مثال (پ) فوق، تمیز بین تقارب مطلق و تقارب مشروط فقط در

باره‌ی سلسله‌هائی مورد دارد که جمله‌هایشان بینهایت‌بار مثبت و بینهایت‌بار منفی باشند.

رفتار سلسله‌ی $\sum a_n$ بستگی تام بـا رفتار سلسله‌های $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ دارد، چنانکه از قضیه‌ی ذیل معلوم میشود.

۵.۲.۴. قضیه.

I. شرط لازم و کافی برای آنکه سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب باشد آنست که هر یک از سلسله‌های $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متقارب باشد.

II. اگر سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب مشروط باشد هر یک از سلسله‌هـای $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متباعد است.

III. اگر یکی و تنها یکی از سلسله‌هـای $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متباعد باشد سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

IV. اگر هـر دو سلسله‌ی $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متباعد باشند سلسلـه‌ی $\sum a_n$ ممکـن است متباعد یا متقارب مشروط باشد.

برهان. قسمت اول با توجه به ۵.۱.۰۷ و تعریف تقارب مطلق بدیهی است.

بـرای اثبات قسمت دوم، فرض کـنیم سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب مشروط باشد. اگـر یکی از دو سلسله‌ی $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ متقارب بـاشد، بنا بر ۵.۱.۰۳، لازم میآیـد کـه دیگری هـم متقارب باشد. پس، بنا بـر قسمت اول قضیه، $\sum a_n$ مطلقا متقارب خواهد بـود، و ایـن خلاف فرض است.

قسمت سوم به آسانی از ۵.۱.۰۳ بدست میآید. اثبات قسمت چهارم با آوردن مثال است، و به متعلم محول میشود. ▲

۵.۳. تغییر نظم در سلسله‌های مطلقا متقارب. سلسلـه‌های مطلقا متقارب خـواصی شبیه سلسله‌های نامنفی دارند. از جمله،

۵.۳.۱. قضیه. اگر سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب باشد هر سلسله‌ی حاصل از تغییر نظـم آن نیز مطلقا متقارب و مقدارش مساوی $\sum a_n$ است.

برهان. فرض کنیم سلسلـه‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب و سلسله‌ی $\sum b_n$ سلسله‌ای حـاصل از تغییر نظم آن باشد. در این صورت، سلسلـه‌ی $\sum | b_n |$ سلسله‌ای است حاصل از تغییر نظم سلسله‌ی نامنفی $\sum | a_n |$ که، بنا بفرض، متقارب است. پس، بنا بر قضیه‌ی دیریکله، سلسله‌ی $\sum | b_n |$ متقارب است، و لهذا، سلسلـه‌ی $\sum b_n$ مطلقـا متقـارب میباشد. بـالاخره، بالبداهه سلسله‌هـای نامنفی $\sum b_n^+$ و $\sum b_n^-$ بترتیب از تغییر نظـم سلسله‌هـای نامنفی $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ حـاصل میشوند، و لهذا،

$$\sum b_n^+ = \sum a_n^+, \qquad \sum b_n^- = \sum a_n^-.$$

پس،

$$\sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^- = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n. \blacktriangle$$

۵.۳.۲. فایده. بنا بر قضیه‌ی فوق، برای اثبات تقارب مطلق یک سلسله کافی است تقارب مطلق سلسله‌ای حاصل از تغییر نظم مناسبی در آن را ثابت کنیم.

۵.۳.۳. تبصره. ثابت میشود که در یک سلسله‌ی متقارب مشروط میتوان چنان تغییر نظمی ایجاد کرد که سلسله‌ی جدید متباعد باشد. ریمان* حکمی جالبتر ثابت کرده است، و آن اینکه در یک سلسله‌ی متقارب مشروط میتوان چنان تغییر نظمی ایجاد کرد که سلسله‌ی جدید به عددی دلخواه متقارب یا به ∞ یا به ∞ — متباعد باشد.

۵.۴. تحقیق در رفتار سلسله‌ها. برای تحقیق در رفتار سلسله‌ی $\sum a_n$، ابتدا به سلسله‌ی $\sum |a_n|$ میپردازیم. اگر این سلسله متقارب باشد سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است. اما، ممکن است سلسله‌ی $\sum |a_n|$ متباعد ولی سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب (مشروط) باشد. بدین جهت، عموماً از متباعد بودن سلسله‌ی قدر مطلقها نمیتوان مستقیماً رفتار خود سلسله را تشخیص داد، مگر در بعضی حالات خاص، مانند آنکه قاعده‌ی سلسله‌های متناوب (۱.۵.۷) قابل اعمال باشد. در حالاتی که متباعد بودن سلسله‌ی قدر مطلقها بر طبق قواعد ریشه یا نسبت ثابت شده باشد، دو قضیه‌ی ذیل فواید عملی بسیار دارند.

۵.۴.۱. قضیه. فرض کنیم جمله‌های سلسله‌ی $\sum a_n$ از مرتبه‌ای بعد ناصفر باشند.

I. اگر عددی مانند α باشد که $0 < \alpha < 1$، و از مرتبه‌ای بعد $|a_{n+1}/a_n| \leqslant \alpha$ سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است.

II. اگر از مرتبه‌ای بعد $|a_{n+1}/a_n| \geqslant 1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

III. بالاخص، اگر $l = \lim |a_{n+1}/a_n|$ موجود باشد آنگاه

اگر $l < 1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است.

اگر $l > 1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

برهان. قسمت I نتیجه‌ی بدیهی I : ۴.۳.۰۲ و تعریف تقارب مطلق است. برای اثبات قسمت II ملاحظه میکنیم که، بر طبق مفروضات، از مرتبه‌ای مانند N بعد،

$$|a_n| > 0, \qquad |a_{n+1}/a_n| \geqslant 1$$

پس، رشته‌ی $\{|a_n|\}_N$ صعودی و از پایین به عدد مثبت $|a_N|$ محدود است. بالنتیجه، $\lim |a_n| \neq 0$، و بنا بر ۱.۰۴.۸، سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد میباشد. اثبات حالات خاص بر متعلم است. ▲

۵.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\sum a_n$ سلسله‌ای باشد.

I. اگر عددی مانند α باشد که $0 < \alpha < 1$ و از مرتبه‌ای بعد $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \alpha$ سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است.

II. اگر از مرتبه‌ای بعد $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

III. بالاخص، اگر $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ موجود باشد آنگاه
اگر $l < 1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است.
اگر $l > 1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.
(چرا؟)

۵.۴.۳. مثال. تحقیق در رفتار سلسله‌ی $\sum \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2} x^n$ بازاء مقادیر مختلف x.
اگر $x = 0$ سلسله بالبداهه متقارب (و مطلقا متقارب) است. پس، فرض کنیم

$$x \neq 0, \qquad a_n = \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2} x^n.$$

به آسانی دیده میشود که

$$|a_{n+1}/a_n| \to |x|.$$

حالت اول: $|x| < 1$. سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است.
حالت دوم: $|x| > 1$. سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.
حالت سوم: $|x| = 1$. بر حسب آنکه $x = 1$ یا $x = -1$، دو حالت تشخیص میدهیم:
I. $x = 1$. در این حالت $a_n \sim 1/n$، و لهذا، سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد میباشد.
II. $x = -1$. سلسله به صورت $\sum (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2}$ در میآید، که متناوب و حد جمله‌ی عمومی آن صفر است. به آسانی دیده میشود که، از مرتبه‌ای ببعد، رشته‌ی قدر مطلق جمل نزولی است. پس، سلسله متقارب مشروط میباشد.

۵.۵. تمرین

۱. در رفتار سلسله‌های ذیل بر حسب مقادیر x تحقیق کنید:

(آ) $\sum (n+1)x^n$. (ب) $\sum \frac{n+1}{n+2} x^n$.

(پ) $\sum \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} x^n$. (ت) $\sum \frac{n-1}{n^2+1} x^n$.

(ث) $\sum \frac{n}{n^3 - 1} x^n$. (ج) $\sum \frac{x^n}{n^3}$.

(چ) $\sum n! x^n$.

۲. ثابت کنید که سلسله‌های ذیل بازاء جمیع مقادیر x متقاربند:

(آ) $$1 + \frac{a}{2} x + \frac{a+1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{a+2}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots.$$

(ب) $$1 + \frac{a}{2} x + \frac{2(a+1)}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{3(a+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots.$$

۳. اگر $b \neq 0$ سلسله‌ی ذیل بازاء $|x| < |b|$ متقارب است:

$$1+\frac{a}{b}x+\frac{2(a+1)}{b^2}x^2+\frac{3(a+2)}{b^3}x^3+\cdots.$$

۶ § ضرب سلسله‌ها

۶.۱. مقدمه. میدانیم که اگر سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب و λ عدد ثابتی باشد سلسله‌ی $\sum \lambda a_n$ نیز متقارب است، و

$$\lambda\cdot\sum a_n=\sum \lambda a_n.$$

این حکم را میتوان توزیعپذیری عمل ضرب نسبت به «عمل جمع» در مورد سلسله‌ها شمرد. در جمع به معنی واقعی، چنانکه میدانیم، به استناد خاصیت توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع، میتوان حاصلضرب $\sum_1^n a_i\cdot\sum_1^n b_i$ یا

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \qquad (*)$$

را بسط داد. جمله‌های بسط عبارتند از اعداد مندرج در جدول ذیل:

$$\begin{array}{llll}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots\; a_1b_n\\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots\; a_2b_n\\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \ldots\; a_3b_n\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \ldots\; a_nb_n.
\end{array} \qquad (\text{آ})$$

عبارت $(*)$ مساوی حاصلجمع اعداد مندرج در این جدول است، و آن عبارتست از حاصلجمع جمیع جمله‌هائی به صورت a_ib_j بازاء جمیع ازواج مرتب اعداد طبیعی مانند i و j که $1\leqslant i\leqslant n$ و $1\leqslant j\leqslant n$. در این حاصلجمع، میتوان ترتیب جمله‌ها را به دلخواه تغییر داد، و آنها را به دلخواه دسته‌بندی کرد. از آن جمله است:

I. طریقه‌ی قطری (دسته کردن جمله‌های واقع بر هر قطر به طریقی که در جدول نمایش داده شده است). در این صورت، بسط $(*)$ به صورت

$$a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)+\cdots$$

بدست میآید. خصوصیت این دسته‌بندی اینست که، در جمله‌های هر دسته، حاصلجمع اندیسهای a و b عددی ثابت است. بعلاوه، از a_1b_1 تا با قطری که از a_nb_1 شروع میشود، حاصلجمع جمله‌های واقع بر هر قطر مساوی است با

$$c_k=a_kb_1+a_{k-1}b_2+\cdots+a_1b_k \qquad (1\leqslant k\leqslant n).$$

II. طریقه‌ی مربعی (دسته کردن جمله‌های واقع بر خطچین‌های نازک در جدول). در این صورت، بسط (*) به صورت

$$a_1b_1+(a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2)+(a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3+a_2b_3+a_1b_3)+\cdots$$

در میآید، که جمله‌های آن عبارتند از

$$d_1=a_1b_1,\qquad d_2=(a_1+a_2)(b_1+b_2)-d_1,$$
$$d_3=(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)-(d_1+d_2),\ \ldots.$$

اینک این سؤال مطرح میشود که احکام مذکور را تا چه حد میتوان در مورد سلسله‌ها تعمیم داد.

فرض کنیم $\sum_1^\infty a_n$ و $\sum_1^\infty b_n$ دو سلسله باشند. از ضرب کردن جمل آنها به قیاس کثیرالجمله‌ها میتوان جدول ذیل را ساخت:

$$\begin{array}{lll} a_1b_1 & a_1b_2\ldots a_1b_n\ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2\ldots a_2b_n\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2\ldots a_nb_n\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\qquad (ب)$$

اولین سؤالی که پیش میآید اینست که آیا اعداد مندرج در این جدول را میتوان شماره‌گذاری کرده رشته‌ای از آنها ترتیب داد (اگر چنین باشد میتوان آن رشته را رشته‌ی مولد قرار داده سلسله‌ای از آن ساخت). ظاهراً به نظر میآید که اگر از اعداد جدول (ب) یکی را انتخاب کرده x_1 بنامیم، و سپس یکی دیگر را اختیار کرده x_2 بنامیم، و «هکذا» ــ و خلاصه، این اعداد را شماره‌گذاری کنیم ــ رشته‌ی $\{x_n\}$ از این اعداد پدید میآید، که سلسله‌ی حادث از آن سلسله $\sum_1^\infty x_n$ است، و آن را میتوان سلسله‌ی حاصلضرب جمله‌به‌جمله‌ی دو سلسله‌ی $\sum_1^\infty a_n$ و $\sum_1^\infty b_n$ نامید. خلاصه، این سلسله بدین گونه ساخته میشود که اعداد مندرج در جدول (ب) را به طریقی دلخواه به دنبال هم بنویسیم و هر دو جمله‌ی متوالی را با علامت «+» از هم جدا کنیم. این طریق کلی سلسله‌سازی از اعداد مندرج در جدول نامحدود (ب) مانند آنست که قبلاً (بعد از جدول آ) در مورد جداول متناهی گذشت. البته، بیان فوق برای امکان شماره‌گذاری اعداد جدول (ب) مقنع نیست. بیان دقیق مطلب از این قرار است. چنانکه میدانیم (ث : ۷.۴.۶ : ۳)، بین N و مجموعه‌ی ازواج مرتب اعداد طبیعی تناظری 1ــ1 وجود دارد. به مقتضای این تناظر، میتوان مجموعه‌ی ازواج مرتب اعداد طبیعی را شماره‌گذاری کرده رشته‌ای مانند

$$(\alpha_1,\beta_1),\qquad(\alpha_2,\beta_2),\qquad\ldots,\qquad(\alpha_n,\beta_n),\qquad\ldots$$

از آنها ساخت، که در آن (α_n, β_n) یگانه زوج مرتب نظیر عدد طبیعی n است. حال اگر رشته‌ی $\{x_n\}$ را با ضابطه‌ی $x_n = a_{\alpha_n} b_{\beta_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ تعریف کنیم، این رشته رشته‌ی اعداد جدول (ب) است. اینک، سلسله‌ی حاصلضرب جمله به‌جمله‌ی دو سلسله‌ی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ را میتوان چنین تعریف کرد:

۶.۱.۱. تعریف. فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سلسله باشند، و $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دو رشته از اعداد طبیعی باشند بطوری که هر زوج مرتب از اعداد طبیعی بازاء یک و تنها یک مقدار از n مساوی (α_n, β_n) باشد. در این صورت، سلسله‌ی $\sum\limits_{n=1} a_{\alpha_n} b_{\beta_n}$ را یک حاصلضرب جمله‌به‌جمله‌ی دو سلسله‌ی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نامیم.

اگر در حاصلضرب جمله‌به‌جمله‌ی دو سلسله‌ی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ ترتیب جمله‌ها را تغییر دهیم و آنها را دسته‌بندی کنیم سلسله‌های دیگر بدست میآید. مثلاً، اگر جمله‌هائی را که حاصلجمع اندیسهای a و b در آنها یکسان است به ترتیب ترقی اندیس b دسته کنیم، و دسته‌ها را نیز بر حسب ترقی حاصلجمع اندیسهای a و b در آنها مرتب نمائیم سلسله‌ی $\sum\limits_1 c_n$ با جمله‌ی عمومی

$$c_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n$$

حاصل میشود که «حاصلجمع قطری» اعداد جدول (ب) است. با توجه به آنچه در باب جدول متناهی (آ) صفحه‌ی ۵۵۷ گذشت، سلسله‌ی مذکور را نیز نوعی حاصلضرب دو سلسله‌ی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ میشماریم، و برای آن اسم خاصی میآوریم:

۶.۱.۲. تعریف. اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سلسله باشند سلسله‌ی $\sum c_n$ را با جمله‌ی عمومی

$$c_n = a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$$

حاصلضرب کوشی* سلسله‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نامیم.

در مورد سلسله‌های[1] $\sum\limits_0 a_n$ و $\sum\limits_0 b_n$، حاصلضرب کوشی آنها، بنا بر تعریف، سلسله‌ی $\sum\limits_0 c_n$ است با جمله‌ی عمومی

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

۶.۱.۳. طرح مسئله. فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سلسله‌ی متقارب باشند. در باب سلسله‌های حاصل از ضرب آنها مسائلی چند مطرح میشود؛ از جمله

---

(۱) در بیانات سابق‌الذکر، سلسله‌ها را به صورت $\sum\limits_1 a_n$ و $\sum\limits_1 b_n$ گرفتیم. این مطلب مخل کلیت نیست، منتها، چون در بسیاری از موارد استعمال ضرب سلسله‌ها، سلسله‌ها با اندیس 0 شروع میشوند، لازم دیدیم که در تعریف مذکور در متن توجه محصلین را به این حالت جلب کنیم.

(آ) آیا یک سلسله‌ی حاصلضرب جمله‌به‌جمله‌ی آنها (یا حاصلضرب کوشی آنها) متقارب است؟

(ب) در صورت تقارب، آیا مقدار آن مساوی $\sum a_n \cdot \sum b_n$ است؟

(پ) در صورت تقارب یک سلسله‌ی حاصلضرب جمله‌به‌جمله، آیا تغییر ترتیب و دسته‌بندی جمل این سلسله (مثلاً به طریقه‌ی قطری یا مربعی) مقدار آن را تغییر نمیدهد؟

موضوع مبحث ضرب سلسله‌ها پاسخ گفتن به این سؤالات است.

۶.۲. قضیه. هر سلسله‌ی حاصلضرب جمله‌به‌جمله‌ی دو سلسله‌ی مطلقا متقارب مطلقا متقارب و مقدارش مساوی حاصلضرب مقادیر آنها است.

برهان. با علامات مذکور در ۶.۱.۱، فرض کنیم سلسله‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ مطلقا متقارب و A و B، بترتیب، مقادیر آنها باشند. باید ثابت کرد که سلسله‌ی $\sum_{n=1} a_{\alpha_n} b_{\beta_n}$ مطلقا متقارب است، و

$$\sum_{n=1} a_{\alpha_n} b_{\beta_n} = \sum_1 a_n \cdot \sum_1 b_n = AB. \qquad (*)$$

فرض کنیم A' و B'، بترتیب، مقادیر دو سلسله‌ی $\sum | a_n |$ و $\sum | b_n |$ باشند، و $\sum_{k=1}^{n} | a_{\alpha_k} b_{\beta_k} |$ جمعک دلخواهی از سلسله‌ی $\sum_1^\infty | a_{\alpha_n} b_{\beta_n} |$ باشد. اگر

$$\mu = \operatorname{Max} \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \qquad \nu = \operatorname{Max} \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$$

آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} | a_{\alpha_k} b_{\beta_k} | \leqslant \sum_{k=1}^{\mu} | a_k | \cdot \sum_{k=1}^{\nu} | b_k | \leqslant A'B'.$$

پس، رشته‌ی جمعکهای سلسله‌ی $\sum | a_{\alpha_n} b_{\beta_n} |$ از بالا محدود است، و لهذا این سلسله متقارب، و سلسله‌ی $\sum a_{\alpha_n} b_{\beta_n}$ مطلقا متقارب است. فرض کنیم C مقدار این سلسله باشد. میدانیم که هر سلسله‌ی حاصل از تغییر ترتیب و دسته‌بندی جمل این سلسله‌ی مطلقا متقارب نیز مطلقا متقارب و حاصلجمع آن مساوی C است.

اینک، برای اثبات (*)، سلسله‌ی $\sum a_{\alpha_n} b_{\beta_n}$ را بر طبق جدول ب (صفحه‌ی ۵۵۸) و به طریق مربعی تنظیم میکنیم تا سلسله‌ی $\sum d_n$ حاصل شود، که در آن،

$$d_1 = a_1 b_1, \qquad d_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - d_1, \ldots,$$

$$d_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}), \ldots.$$

بنا بر آنچه گذشت، $\sum d_n = C$. اما، بنا بر رابطه‌ی فوق،

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) = A_n B_n.$$

پس

$$\sum_1^\infty d_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} d_k = AB,$$

و بالنتیجه، $C = AB$. ▲

از استدلال فوق ضمناً معلوم میشود که اگر در جدول (ب) جملهها را به طریق قطری تنظیم کنیم سلسلهی حاصل، که حاصلضرب کوشی دو سلسله است، مطلقا متقارب و مقدارش مساوی AB میباشد. پس،

۶.۲.۱. قضیه. حاصلضرب کوشی دو سلسلهی مطلقا متقارب مطلقا متقارب و مقدارش مساوی حاصلضرب مقادیر آنهاست.

چنانکه خواهیم دید (ب: ۶.۲.۵)، حاصلضرب کوشی دو سلسلهی متقارب ممکن است متقارب نباشد؛ اما

۶.۲.۲. قضیه (آبل*). اگر حاصلضرب کوشی دو سلسلهی متقارب متقارب باشد[۱] مقدارش حاصلضرب مقادیر آنهاست.

برهان. فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقارب باشند، و سلسلهی $\sum c_n$ (حاصلضرب کوشی آنها)، نیز متقارب باشد، و A، B، و C، بترتیب، مقادیر سه سلسله باشند. به آسانی دیده میشود که

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1,$$

و از آنجا،

$$\frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) = \frac{1}{n}(A_1B_n + A_2B_{n-1} + \cdots + A_nB_1).$$

پس، بنا بر مفروضات و قضیهی اول حد کوشی و قضیهی چزارو (۸.۱.۱ و ۸.۳ فصل ۷)، $C = AB$. ▲

۶.۲.۳. تبصره. در ضمن برهان قضیهی قبل معلوم شد که اگر سلسلههای $\sum a_n$ و $\sum b_n$، بترتیب، به اعداد A و B متقارب باشند ــ اعم از اینکه $\sum c_n$ متقارب باشد یا نه ــ

$$\lim \frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) = AB.$$

از اینجا، بنا بر قضیهی اول حد کوشی، معلوم میشود که حاصلضرب کوشی دو سلسلهی متقارب، اگر متقارب نباشد، متباعد مشخص نتواند بود، بلکه نوسانی است.

از جملهی حالاتی که حاصلضرب کوشی دو سلسلهی متقارب متقارب است حالتی است که یکی از این دو سلسله مطلقا متقارب باشد:

۶.۲.۴. قضیه (مرتنس[۲]). اگر سلسلهی $\sum a_n$ مطلقا متقارب و سلسلهی $\sum b_n$ متقارب باشد

---

(۱) از جملهی حالاتی که چنین است حالتی است که یکی از دو سلسلهی متقارب مطلقا متقارب باشد (۶.۲.۴).

(۲) F. Mertens

حاصلضرب کوشی آنها متقارب است، و لهذا، مقدارش مساوی حاصلضرب مقادیر دو سلسله میباشد.

اثبات مانند اثبات قضیه‌ی آبل است، الا اینکه، بجای قضیه‌ی چزارو، ۳۶ : ۹ : ۷ را بکار میبریم. تفصیل بر متعلم است.

۶.۲.۵. امثله و فواید

(آ). سلسله‌های $\sum_0 \frac{x^n}{n!}$ و $\sum_0 \frac{y^n}{n!}$ بازاء هر مقدار x مطلقا متقاربند. جمله‌ی عمومی حاصلضرب کوشی آنها عبارتست از

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

بالنتیجه،

$$\sum_0 \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_0 \frac{y^n}{n!} = \sum_0 \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

(ب). حاصلضرب کوشی دو سلسله‌ی متقارب ممکن است متباعد باشد.

مثلاً، فرض کنیم

$$a_0 = b_0 = 0, \qquad a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \qquad (n \geqslant 1).$$

بنا بر قضیه‌ی سلسله‌های متناوب، سلسله‌ی $\sum_0 \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ متقارب است. اگر $\sum_0 c_n$ حاصلضرب کوشی سلسله‌های $\sum_0 a_n$ و $\sum_0 b_n$ باشد، اولاً، $c_0 = c_1 = 0$، و ثانیاً، اگر $n \geqslant 2$ آنگاه

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

اما، اگر $1 \leqslant k \leqslant n-1$ آنگاه $1 \leqslant n-k \leqslant n-1$، و لهذا

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} = 1.$$

پس، c_n به صفر میل نتواند کرد. بنابر این، سلسله‌ی $\sum_0 c_n$ متباعد است.

(پ). حاصلضرب کوشی یک سلسله‌ی مطلقا متقارب در یک سلسله‌ی متقارب ممکن است مطلقا متقارب نباشد. مثلاً، فرض کنیم $a_n = (-1)^n/n^{5/4}$ و $b_n = (-1)^n/n^{1/4}$.

$$|c_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{5/4}(n-k+1)^{1/4}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

چون سلسله‌ی $\sum (1/\sqrt{n})$ متباعد است، سلسله‌ی $\sum |c_n|$ نیز متباعد میباشد.

۶.۲.۶. تمرین

۱. به وسیله‌ی ضرب سلسله‌ها ثابت کنید که اگر $|x| < 1$ آنگاه

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^n+\cdots) = 1. \qquad (\text{آ})$$

$$(\text{د}) \qquad (1 + x + \cdots + x^n + \cdots)^2 = \sum_0 (n+1)x^n.$$

۲. (تعمیم دستور دوجمله‌ای نیوتن برای قوای صحیح منفی). به استقراء ثابت کنید که اگر $|x| < 1$ آنگاه

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!r!} x^n \quad (r \in \mathbf{I}_0).$$

۳. فرض میکنیم سلسله‌ی $\sum_0 a_n x^n$ بازاء $|x| < 1$ مطلقا متقارب باشد، و $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. ثابت کنید که اگر $|x| < 1$ آنگاه

$$(1-x)^{-1} \sum_0 a_n x^n = \sum_0 A_n x^n.$$

۴. با توجه به رابطه‌ی

$$(1-x)^{-r-s-2} = (1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1},$$

ثابت کنید که بازاءِ هر دو عدد صحیح نامنفی r و s،

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+r}{k}\binom{n+s-k}{n-k} = \binom{n+r+s+1}{n}.$$

۷ § بعضی از خواص عدد e

چنانکه در ۷.۶.۴ : ۷ دیدیم، بازاء عدد حقیقی دلخواه x،

$$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

اگر x عدد دلخواهی باشد سلسله‌ی $\sum_0 (x^n/n!)$ مطلقا متقارب است. قضیه‌ی مهم این مبحث اینست که مقدار این سلسله مساوی e^x میباشد.

۷.۱ لم. بازاء هر عدد دلخواه x و هر عدد طبیعی دلخواه p، اگر $|x| < p+2$ آنگاه

$$\left| e^x - \sum_{r=0}^{p} \frac{x^r}{r!} \right| \leqslant \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{|x|}{p+2}}.$$

برهان. مقدمةً تذکر میدهیم که

$$(1) \qquad \left| \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r \right| \leqslant \frac{|x|^r}{r!} \quad (r \geqslant 2).$$

اینک فرض کنیم p عدد طبیعی مفروضی باشد بطوری که $|x| < p+2$ (۲). اگر n عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از p باشد آنگاه

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \sum_{r=0}^{p} \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r \right| = \left| \sum_{r=p+1}^{n} \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r \right|$$

$$\leqslant \sum_{r=p+1}^{n} \left| \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r \right| [1] \leqslant \sum_{r=p+1}^{n} \frac{|x|^r}{r!}$$

$$\leqslant \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\left(1+\frac{|x|}{p+2}+\frac{|x|^2}{(p+2)^2}+\cdots+\frac{|x|^{n-p-1}}{(p+2)^{n-p-1}}\right) \quad [۲]$$
$$\leqslant \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{|x|}{p+2}}.$$

از اینجا به حد گیری و با توجه به ۲۱ : ۳.۵.۲۲ : ۷ نامساوی مطلوب بدست میآید. ▲

۷.۲. قضیه. بازاء هر عدد حقیقی مانند x،

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}.$$

برهان. عبارت طرف دوم نامساوی لم ۷.۱ را ξ_p و $\sum_{r=0}^{p}\frac{x^r}{r!}$ را X_p مینامیم. با توجه به ب : ۸.۱.۴ : ۷ دیده میشود که رشتهی $\{\xi_p\}$ هیچرشته است. اینک فرض کنیم x عددی دلخواه و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عددی طبیعی مانند N هست که اگر $p > N$ آنگاه $|\xi_p| < \varepsilon$. پس، اگر N را بزرگتر از $|x| - 2$ بگیریم،

$$|e^x - X_p| \leqslant \xi_p < \varepsilon.$$

بالنتیجه، $\lim_p X_p = e^x$، و یا

$$e^x = \lim_p \sum_{r=0}^{p}\frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}. ▲$$

از قضیهی فوق بالاخص نتیجه میشود،

$$e = \sum_0 \frac{1}{n!}. \qquad (۷.۲.۱)$$

$$e^{-1} = \sum_0 \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (۷.۲.۲)$$

۷.۲.۳. قضیه. همواره

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < e < \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

برهان. نامساوی اول با توجه به ۳.۲.۲ بدیهی است، و نامساوی دوم نتیجهی مستقیم ۷.۱ است. ▲

۷.۲.۴. قضیه. عدد e اصم است.

برهان. و الا، دو عدد طبیعی مانند m و n هست که $e = m/n$. پس، بنا بر ۷.۲.۳،

$$0 < \frac{m}{n} - \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \frac{1}{n\cdot n!},$$

و از آنجا،

$$0 < \left(\frac{m}{n} - \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\right) \cdot n! < \frac{1}{n},$$

و این ممتنع است، زیرا، عدد بین دو علامت نامساوی عددی است صحیح ▲

۸ § مسائل مختلفه

۰۱ اگر $q > 0$ و $q \neq 1$ سلسله‌ی $\sum \frac{q^n}{(1+q^n)^2}$ متقارب است.

۰۲ آیا سلسله‌ی $\sum (1/n \sqrt[n]{n})$ متقارب است؛

۰۳ آیا سلسله‌ی $\sum_2 \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ متقارب است؛

۰۴ سلسله‌ی

$$(a - b) + (a^2 - b^2) + (a^3 - b^3) + \cdots$$

فقط و فقط وقتی متقارب است که $a = b$ یا $\text{Max}\,\{|a|, |b|\} < 1$.

۰۵ سلسله‌ی

$$x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^3} + \cdots$$

بازاء $x \geqslant 0$ یا $x < -2$ متقارب و بازاء $-2 \leqslant x < 0$ متباعد است.

۰۶ سلسله‌ی

$$\sum_0 \frac{n^4 + 6(-1)^n n - 2}{|n^2 - 7|^\alpha}$$

بازاء $\alpha > 5/2$ متقارب و بازاء $\alpha \leqslant 5/2$ متباعد است.

۰۷ ثابت کنید که سلسله‌های ذیل بازاء $0 \leqslant x \leqslant 2$ متقارب و بازاء $x > 2$ متباعدند:

(آ) $$\sum \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{5 \cdot 7 \ldots (2n+3)}\, x^n;$$

(ب) $$\sum \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{7 \cdot 9 \ldots (2n+3)}\, x^n$$

۰۸ ثابت کنید که، از سلسله‌های ذیل، (آ) بازاء $0 \leqslant x < 3$ متقارب و بازاء $x \geqslant 3$ متباعد است، و (ب) بازاء $0 \leqslant x \leqslant 3$ متقارب و بازاء $x > 3$ متباعد است.

(آ) $$\sum \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{4 \cdot 7 \ldots (3n+1)}\, x^n.$$

(ب) $$\sum \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{7 \cdot 10 \ldots (3n+4)}\, x^n.$$

۰۹ سلسله‌ای بسازید که

(آ) بازاء $0 \leqslant x < 4$ متقارب و بازاء $x \geqslant 4$ متباعد باشد.

(ب) بازاء $0 \leqslant x \leqslant 4$ متقارب و بازاء $x > 4$ متباعد باشد.

۰**10** در رفتار سلسله‌هائی که جمله‌ی عمومی آنها ذیلاً میآید بازاء مقادیر مختلف α و β

تحقیق کنید:

(آ) $n^{\beta/n}/n^{\alpha}$.

(ب) $n^{-\alpha}[\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}]$.

(پ) $n^{\alpha}/n!$.

(ت) $n^{-\alpha}[\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}]$.

۱۱. ثابت کنید که سلسله‌های ذیل متقاربند:

(آ) $\sum_0 (-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

(ب) $\sum_0 (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

۱۲. در رفتار این سلسله‌ها تحقیق کنید:

(آ) $\sum \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n n}$.

(ب) $\sum \frac{(-1)^n}{3n+6(-1)^n}$.

(پ) $\sum_2 \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

(ت) $\sum_2 \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

راهنمائی: برای اولی میتوان ملاحظه کرد که

$$\frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n n}=\frac{(-1)^n}{3n}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+(-1)^n n}.$$

۱۳. در رفتار سلسله‌ی ذیل بازاءِ مقادیر مختلف x تحقیق کنید:

$$1-\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)(x-2)}{2!}-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}+-\cdots$$

۱۴. در رفتار سلسله‌ی $\sum_1 \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n-1}$ تحقیق کنید.

۱۵. سلسله‌ی ذیل متباعد است:

$$\sum_1 n^{-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}.$$

راهنمائی: میتوان ملاحظه کرد که

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\right)<n.$$

۱۶. اگر همواره $a_n>0$ و $a_{n+2}/a_n\leqslant\alpha<1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

۱۷. اگر $\{a_n\}$ هیچ‌رشته باشد سلسله‌های $\sum a_n$ و $\sum(a_n+a_{n+1})$ همرفتارند.

۱۸. بازاءِ هر عدد طبیعی n، $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<1\Big/\left(n-\frac{1}{2}\right)$.

۱۹. بنا بر آنکه $\alpha\neq\beta$ و سلسله‌های $\sum(a_{2n}+\alpha a_{2n-1})$ و $\sum(a_{2n}+\beta a_{2n-1})$ متقارب باشند سلسله‌ی $\sum a_n$ نیز متقارب است.

۲۰. سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقا متقارب است. و همواره $(1 + a_n)(1 - b_n) = 1$. ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum b_n$ نیز مطلقا متقارب است.

۲۱. اگر سلسله $\sum | a_n |$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum a_n^2$ نیز متقارب است. و بعلاوه. اگر همواره $a_n \neq 1$ آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n/(1 - a_n)$ نیز متقارب است.

۲۲. اگر سلسله‌ی $\sum | a_n |$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum_2 | a_n - a_{n-1} |$ نیز متقارب است.

۲۳. اگر $a_n > 0$ و سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب باشد سلسله‌ی $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ نیز متقارب است.

۲۴. اگر سلسله‌های نامنفی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقارب باشند سلسله‌ی $\sum a_n b_n$ نیز متقارب است.

۲۵. اگر همواره $a_n \neq 0$، و $\lim a_n = a \neq 0$، دو سلسله‌ی ذیل همرفتارند:

$$\sum | a_{n+1} - a_n |, \qquad \sum \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|.$$

۲۶ (قاعده‌ی کومر*). فرض کنیم از مرتبه‌ای ببعد $a_n > 0$، $d_n > 0$، و سلسله‌ی $\sum d_n$ متباعد باشد.

(آ). اگر عدد مثبتی مانند σ باشد که از مرتبه‌ای ببعد

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \geqslant \sigma$$

آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب است.

(ب). اگر از مرتبه‌ای ببعد

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leqslant 0$$

آنگاه سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

(پ). بالاخص، اگر

$$l = \lim \left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \right)$$

موجود باشد آنگاه، بر حسب اینکه $l > 0$ یا $l < 0$، سلسله‌ی $\sum a_n$ متقارب یا متباعد است.

راهنمائی: برای اثبات (آ) ملاحظه کنید که از فرض معلوم میشود که رشته‌ی $\{a_n/d_n\}$ متقارب است. سپس به سلسله‌ی ذیل توجه کنید:

$$\sum \frac{1}{\sigma} \left(\frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \right).$$

۲۷ (صورت دیگر قاعده‌ی رابه). در سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n$، از مرتبه‌ای ببعد $a_n > 0$، و عددی ثابت مانند β و هیچرشته‌ای مانند $\{\varepsilon_n\}$ هست که از مرتبه‌ای ببعد،

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

به وسیله‌ی قاعده‌ی کومر ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum a_n$ اگر $\beta > 1$ متقارب و اگر $\beta < 1$

متباعد است. مثال بیاورید.

۲۸ (قاعده‌ی گاوس*). در سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n$، از مرتبه‌ای ببعد $a_n > 0$، و دو عدد ثابت مانند β و λ و رشته‌ای مانند $\{\theta_n\}$ هست که $\lambda > 0$ و $\{\theta_n\}$ محدود است، و از مرتبه‌ای ببعد

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\lambda}}.$$

ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum a_n$ اگر $\beta > 1$ متقارب و اگر $\beta \leqslant 1$ متباعد است.

راهنمائی: در حالتی که $\beta = 1$، قاعده‌ی کومر را بازاء $d_n = 1/n \log n$ بکار بندید.

۲۹. در سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \cdots + b_p},$$

که در آن p عدد طبیعی ثابتی است. ثابت کنید که اگر $b_1 - a_1 > 1$ سلسله متقارب است، و اگر $b_1 - a_1 \leqslant 1$ متباعد.

۳۰. سلسله‌ی

$$1 + \sum_1 \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n,$$

که در آن α، β، و γ سه عدد ثابتند و $\gamma \neq 0$ و $\gamma \notin \mathbf{I}^-$، به سلسله‌ی هیپرژئومتریک[۱] معروفست. ثابت کنید که این سلسله در حالات ذیل متقارب است:

(آ) $|x| < 1$.

(ب) $x = 1$ و $\alpha + \beta - \gamma < 0$.

---

(۱) hypergeometric

فصل ۹

عدد نویسی و محاسبه

در این فصل، همه‌جا، g عـدد طبیعـی مفروضی بزرگتر از 1 است.

۱ § اعداد صحیح

۱.۱.مقدمه. چون هر عدد صحیح منفی متقابل یک عدد طبیعی است، کافی است نامگذاری اعداد طبیعی را مـورد بحث قـرار دهیم. در عددنویسی عـادی، هر عدد طبیعی بـه صـورت $\sum_0^n c_i \cdot 10^i$ نـوشته میشود کـه در آن cها اعدادی صحیح و نامنفی و کـوچکتر از 10 اند، و $c_n \neq 0$. مانند

$$2\,506 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6.$$

در این طریقه، عدد 10 را مبنای شُـمار نامند. موضوع این قسمت اثبات امکان نمایش اعداد طبیعی به صورتهائی از این قبیل و منحصر بفرد بودن این نمایش است. قبلاً لم ذیل را ثابت میکنیم:

۱.۱.۱. لـم. فرض کنیم g عدد طبیعی ثابتی بزرگتر از 1 و $\{a_i\}_0^n$ رشته‌ای از اعداد صحیح باشد، و

$$(۱) \qquad |a_i| \leqslant g - 1, \qquad i = (0, 1, \ldots, n),$$

$$(۲) \qquad a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0 = 0.$$

در این صورت، $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

برهان. بنا بر (۲)، $g \mid a_0$. پس، اگر $a_0 \neq 0$ آنگاه، بنا بر ۱۱ : ۹.۱.۱، ۵، $|a_0| \leqslant g$. اما، بنا بر (۱)، $|a_0| \leqslant g - 1 < g$. از این تناقض نتیجه میشود، $a_0 = 0$. بطور کلی، اگر $0 \leqslant i < n$ و $a_0 = a_1 = \cdots = a_i = 0$ آنگـاه $a_{i+1} = 0$. زیـرا، در شرایـط مذکور، از (۲) حاصل میشود،

$$a_n g^{n-i-1} + \cdots + a_{i+2} g + a_{i+1} = 0,$$

و از این رابطه به همان قیاس که گذشت نتیجه میشود، $a_{i+1} = 0$. ▲

۱.۲. قضیه. فـرض کنیم g عـددی طبیعی و بزرگتر از 1 بـاشد (این عدد را مبنای شُـمار خوانیم). بازاء هر عدد طبیعی a یک و تنها یک دستگاه عدد صحیح مانند

$$n, \qquad c_0, \qquad c_1, \qquad \ldots, \qquad c_n$$

هست که، در عین حال،

$$(۱)\quad n \geqslant 0, \qquad (۲)\quad c_n \neq 0,$$
$$(۳)\qquad 0 \leqslant c_i \leqslant g-1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$(۴)\qquad a = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

(طرف دوم رابطه‌ی اخیر را نمایش عدد a در مبنای g خوانیم).

برهان. اثبات وجود. اثبات وجود بـه استقراء قوی است. بازاء $a = 1$ حکم بالبداهه برقرار است ($c_n = 1, n = 0$). حال فرض میکنیم حکم بازاء هر عدد طبیعی نابیشتر از عدد طبیعی a برقرار باشد، و ثابت میکنیم که بازاء عدد $a + 1$ نیز برقرار است. بنا بر ۳.۶ : ۶، عددی صحیح مانند n هست که

$$(\text{آ})\qquad g^n \leqslant a + 1 < g^{n+1} \quad (n \geqslant 0).$$

بعلاوه، بنا بر قضیه‌ی تقسیم، اعدادی صحیح و نامنفی مانند q و r هست که

$$(\text{ب})\quad a + 1 = qg^n + r, \qquad (\text{پ})\quad 0 \leqslant r < g^n.$$

بنا بر روابط فوق

$$qg^n = (a+1) - r > g^n - g^n = 0, \qquad qg^n \leqslant a + 1 < g^{n+1}.$$

بـالنتیجـه، $0 < q < g$، و از آنجـا، $0 < q \leqslant g - 1$ (ت). اینک دو حالت تشخیص میدهیم. حالت اول: $r = 0$. بنا بر (ب)،

$$a + 1 = qg^n = qg^n + 0 \cdot g^{n-1} + \cdots + 0 \cdot g + 0.$$

پـس، بـنـا بـر (ت)، حـکـم ثـابـت است. حـالـت دوم: $r \neq 0$. بنا بـر (پ) و (آ)، $0 < r < g^n \leqslant a + 1$. پس، بنا بر فرض استقراء، عدد r نمایشی به صورت

$$r = b_m g^m + b_{m-1} g^{m-1} + \cdots + b_1 g + b_0$$

دارد که در آن bها اعداد صحیحی نامنفی و نابیشتر از $g - 1$ هستند، و $b_m > 0$. چون

$$g^m \leqslant b_m g^m \leqslant r \,[\text{پ}] < g^n,$$

m کوچکتر از n است. اینک، بنا بر (ب)،

$$a + 1 = qg^n + 0 \cdot g^{n-1} + \cdots + 0 \cdot g^{m+1} + b_m g^m + \cdots + b_1 g + b_0.$$

پس، اثبات وجود تمام است.

اثبات یکتائی. فرض کنیم عدد طبیعـی a، علاوه بر نمایش مذکور در قضـیه، دارای نمـایشی مانند

$$a = d_m g^m + d_{m-1} g^{m-1} + \cdots + d_1 g + d_0$$

با شرایط

$$m \geqslant 0, \qquad d_m \neq 0,$$
$$(\text{ث})\qquad 0 \leqslant d_i \leqslant g - 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

باشد. گوئیم

$$m = n, \qquad d_i = c_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

زیرا، اگر $n \neq m$ آنگاه $n < m$ یا $m < n$. اگر $m < n$ خواهیم داشت،

$$(\text{ج})\; 0 = (c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)g + \cdots + (c_m - d_m)g^m +$$

$$c_{m+1}g^{m+1} + \cdots + c_n g^n.$$

اما، بنا بر (۳) و (ث)، قدر مطلق هر یک از ضرایب در طرف دوم این رابطه نابیشتر از $g - 1$ است. پس، بنا بر لم سابق، $c_n = 0$، و این با (۲) متناقض است. ابطال $n < m$ به همین قیاس است. بالنتیجه، $m = n$. اینک از (ج) به موجب همان لم نتیجه میشود که، بازاء هر i از 0 تا با n، $c_i = d_i$. ▲

۱.۲.۱. تبصره. بر طبق قضیه‌ی مذکور، هر عدد طبیعی را میتوان با کثیرالجمله‌ای صحیح بر حسب g و دارای درجه‌ی معین n نمایش داد که ضرایب آن از اعداد 0، 1، . . .، و $g - 1$ هستند. این اعداد را ارقام شمار در مبنای g نامند. در شمار عادی، که مبنای آن 10 است ($g = 10$)، ارقام شمار عبارتند از 0، 1، . . .، و 9.

شمار با مبنای 2 ($g = 2$) را شمار ثُنائی خوانند. ارقام این شمار 0 و 1 میباشند. پس، در شمار ثنائی، همه‌ی اعداد به وسیله‌ی دو رقم 0 و 1 نوشته میشوند. شمار ثنائی، علاوه بر فوایدی که در بعضی مسائل ریاضی دارد، در این زمان، به سبب فوایدش در حسابگرهای الکترونی، اهمیت فوق‌العاده یافته است.

حل مسائل مربوط به شمار با مبانی گوناگون از موضوع بحث ما خارج است. خواستاران آن باید به کتب مقدماتی علم حساب رجوع کنند.

۲ § کسور ژِئی

۲.۱. مقدمه. ما همه عباراتی بسیار مانند

$$\frac{13}{4} = 3{,}25, \qquad \frac{13}{4} = 3{,}249\,99\ldots,$$

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots, \qquad \pi = 3{,}141\,59\ldots$$

دیده‌ایم. در هر یک از این روابط، عبارت طرف راست را بسط اعشاری یا نمایش اعشاری عدد واقع در طرف چپ میخوانند. در حقیقت، معنی هر یک از این روابط اینست که علامات واقع در چپ و راست علامت تساویْ در آن اسامی یک عدد هستند. در معنی «3,25» مشکلی نیست؛ عدد 3,25 به معنی $3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}$ است. اما، در فهم معنی سایر «اعداد اعشاری» فوق باید به مفهوم حد توسل جست. مثلاً، $3{,}249\,9\ldots$ به معنی مقدار سلسله‌ی

$$3 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots$$

و $1{,}414\ldots$ به معنی مقدار سلسله‌ی

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots$$

است. پس، هر یک از سه تساویی که در طرف راست آنها کسر اعشاری نامختومی آمده

است حکم میکند به اینکه سلسله‌ای نامتناهی متقارب و مقدارش مساوی عددی است که در طرف چپ نمایش داده شده. ضمناً ملاحظه میکنیم که عدد $13/4$ دو نمایش اعشاری نامختوم دارد:

$$3{,}250\,000\ldots, \qquad\qquad 3{,}249\,999\ldots$$

تفاوت این دو نمایش نامختوم در اینست که در یکی از آنها، از مرتبه‌ای ببعد، همه‌ی ارقام مساوی $10 - 1$ هستند، و حال آنکه، در دیگری، بینهایت‌بار ارقام از $10 - 1$ کوچکترند.

بطور کلی، کسر اعشاری مثبت علامتی است به صورت

$$c_0{,}c_1c_2c_3\ldots, \qquad (*)$$

که در آن، c_0 عددی صحیح و نامنفی است، و c_1، c_2، ... یکی از ارقام 0، 1، ...، و 9 میباشند. عبارت $(*)$ به معنی سلسله‌ی نامتناهی

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots = c_0 + \sum_1^\infty \frac{c_n}{10^n} \qquad (\dagger)$$

است، و مقصود از اینکه $(*)$ یا $(\dagger)$ یک عدد حقیقی را نمایش میدهد اینست که سلسله‌ی $(\dagger)$ متقارب و مقدارش مساوی آن عدد حقیقی است. در این باب، مسائلی چند مطرح میشود، از جمله،

(آ) آیا سلسله‌ای مانند $(\dagger)$ در شرایط مذکور متقارب است؟

(ب) آیا هر عدد حقیقی نامنفی را میتوان با چنین سلسله‌ای نمایش داد؟

(پ) آیا این نمایش، در صورت وجود، منحصر بفرد است؟

ما این مسائل را به صورتی کلیتر مطرح میکنیم، و آن اینکه، بجای عدد 10، عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از 1 مانند g را به عنوان مبنا اختیار، و در نمایش دادن اعداد حقیقی نامنفی با سلسله‌ای به صورت $c_0 + \sum_1^\infty (c_n/g^n)$ که در آن $c_0 \in \mathbf{I}_0$ و سایر cها از ارقام شمار در مبنای g (۱.۲.۱)، یعنی از اعداد 0، 1، ...، و $g - 1$، هستند بحث میکنیم. پاسخ گفتن به سؤال (آ) آسان است. ابتدا ثابت میکنیم که

۲.۱.۱. قضیه. اگر $\{c_n\}$ رشته‌ای از اعداد صحیح باشد و همواره $0 \leqslant c_n \leqslant g - 1$ آنگاه

I. سلسله‌ی $\sum_1^\infty (c_n/g^n)$ متقارب به عددی حقیقی و نامنفی و نابیشتر از 1 است.

II. بازاء هر عدد طبیعی m،

$$0 \leqslant \sum_{m+1} \frac{c_n}{g^n} \leqslant \frac{1}{g^m}.$$

برهان. در شرایط مذکور، $0 \leqslant c_n/g^n \leqslant (g - 1)/g^n$. چون سلسله‌ی $\sum [(g - 1)/g^n]$ متقارب به 1 است، قسمت اول بر قرار میباشد. بعلاوه، در شرایط مذکور،

$$0 \leqslant \sum_{m+1} \frac{c_n}{g^n} \leqslant \sum_{m+1} \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g^{m+1}} \cdot \sum_0 \frac{1}{g^n} = \frac{1}{g^m}. \blacktriangle$$

از قسمت I قضیه‌ی فوق معلوم است که

۲.۱.۲. قضیه. اگر $c_0 \in \mathbf{I}_0$، و $\{c_n\}_1$ رشته‌ای از اعداد صحیح باشد که همواره $0 \leqslant c_n \leqslant g-1$، آنگاه سلسله‌ی $c_0 + \sum_1 (c_n/g^n)$ یک عدد حقیقی نامنفی را نمایش میدهد.

در باب سؤال (پ)، چنانکه در حالت خاصی که $g = 10$ دیدیم، ممکن است دو سلسله از نوع مذکور یک عدد حقیقی را نمایش دهند. همچنین، در مبنای 2،

$$1 = 1 + \sum \frac{0}{2^n} = \sum \frac{1}{2^n}.$$

اما، بزودی خواهیم دید که، با قائل شدن قیود مناسب برای c_1، . . .، c_n، . . .، میتوان یکتائی نمایش را تأمین کرد. برای اختصار در بیان، تعریف موقت ذیل را میآوریم:

۲.۱.۳. تعریف. رشته‌ی $\{c_n\}$ از اعداد صحیح را تابع شرایط ش خوانیم در صورتی که، در عین حال، (آ) همواره $0 \leqslant c_n \leqslant g-1$، و (ب) بینهایت‌بار $c_n < g-1$.

اگر رشته‌ی $\{c_n\}$ تابع شرایط ش باشد، بازاء هر عدد طبیعی m، عددی طبیعی مانند n هست که $n > m$ و نامساوی اکید $c_n < g-1$ بر قرار است. از اینجا، با مراجعه به برهان قضیه‌ی ۲.۱.۱ و با توجه به ۴.۲ : ۸ نتیجه میشود:

۲.۱.۴. قضیه. اگر رشته‌ی $\{c_n\}$ تابع شرایط ش باشد آنگاه

$$0 \leqslant \sum_1 \frac{c_n}{g^n} < 1, \qquad \sum_{m+1} \frac{c_n}{g^n} < \frac{1}{g^m} \quad (m \in \mathbf{N}).$$

۲.۱.۵. فایده. فرض کنیم $\{c_n\}$ رشته‌ای تابع شرایط ش باشد، و $c_0 \in \mathbf{I}_0$. بنا بر ۲.۱.۲، سلسله‌ی $c_0 + \sum (c_n/g^n)$ متقارب به عددی حقیقی مانند ξ است، یعنی

$$\xi = c_0 + \sum \frac{c_n}{g^n}.$$

از این رابطه، بنا بر ۲.۱.۴، معلوم میشود که c_0 جزء صحیح ξ است ($c_0 = [\xi]$)، و $\sum (c_n/g^n)$ جزء کسری آن. بالعکس، اگر ξ عدد نامنفی دلخواهی و x جزء کسری آن باشد آنگاه $[\xi] + x = \xi$. پس، اگر x را بتوان با سلسله‌ای به صورت $\sum (c_n/g^n)$ نمایش داد، که در آن، cها تابع شرایط ش باشند آنگاه سلسله‌ی $[\xi] + \sum (c_n/g^n)$ عدد ξ را نمایش میدهد. بنا بر این، مسئله‌ی نمایش دادن اعداد حقیقی نامنفی با سلسله‌هائی از نوع مذکور به مسئله‌ی نمایش دادن اعداد حقیقی نامنفی کوچکتر از 1 بدین صورت باز میگردد. این مسئله موضوع قضیه‌ی اصلی آتیه است:

۲.۲. قضیه. بازاء هر عدد حقیقی مانند x که $0 \leqslant x < 1$، یک و تنها یک رشته از اعداد صحیح مانند $\{c_n\}$ هست که تابع شرایط ش است، و

$$x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}. \qquad (*)$$

برهان. قبلاً توضیحاتی برای روشن ساختن روش اثبات قضیه میآوریم. فرض کنیم $0 \leqslant x < 1$، و رشته‌ی مطلوب حاصل شده باشد، و

$$x = \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{c_n}{g^n} + \cdots.$$

پس

$$\gamma_1 = gx = c_1 + \sum_2 \frac{c_n}{g^{n-1}}.$$

بنا بر ۲.۱.۴، $1 > \sum_2 (c_n/g^{n-1}) \geqslant 0$. بالنتیجه، $c_1 = [\gamma_1]$. سپس،

$$\gamma_1 - c_1 = \frac{c_2}{g} + \frac{c_3}{g^2} + \cdots.$$

و از آنجا،

$$\gamma_2 = g(\gamma_1 - c_1) = c_2 + \sum_3 \frac{c_n}{g^{n-2}},$$

و مانند سابق معلوم میشود که $c_2 = [\gamma_2]$. به همین قیاس دیده میشود که اگر $\gamma_3 = g(\gamma_2 - c_2)$ آنگاه $c_3 = [\gamma_3]$، و «هکذا». بالاخره، اگر ــ برای حفظ تقارن ــ فرض کنیم $\gamma_0 = x$ و $c_0 = 0$، خواهیم داشت، $\gamma_1 = g(\gamma_0 - c_0)$. از این ملاحظات، راه تعریف استقرائی رشته‌ی γها و cها بدست میآید. اینک به اثبات قضیه میپردازیم.

اولاً، اثبات وجود. فرض کنیم $0 \leqslant x < 1$. دو رشته‌ی $\{\gamma_n\}_0$ و $\{c_n\}_0$ را چنین تعریف میکنیم:

$$\gamma_0 = x, \qquad c_0 = [\gamma_0] = 0, \qquad (۱)$$

$$\gamma_n = g(\gamma_{n-1} - c_{n-1}), \qquad c_n = [\gamma_n], \quad (n \in \mathbf{N}). \qquad (۲)$$

اینک ثابت میکنیم که، اولاً، بازاء هر عدد طبیعی n، $0 \leqslant c_n < g$؛ ثانیاً، رابطه‌ی $(*)$ حکم بر قرار است؛ و ثالثاً، بینهایت‌بار $c_n < g - 1$. به آسانی معلوم میشود که

$$0 \leqslant \gamma_n < g \quad (n \in \mathbf{N}). \qquad (۳)$$

بالنتیجه،

$$0 \leqslant c_n < g \quad (n \in \mathbf{N}). \qquad (۴)$$

از طرف دیگر، بنابر (۲)،

$$\frac{c_{n-1}}{g^{n-1}} = \frac{\gamma_{n-1}}{g^{n-1}} - \frac{\gamma_n}{g^n} \quad (n \in \mathbf{N}). \qquad (۵)$$

پس،

$$\sum_1^n \frac{c_k}{g^k} = \sum_1^n \left(\frac{\gamma_k}{g^k} - \frac{\gamma_{k+1}}{g^{k+1}}\right) = \frac{\gamma_1}{g} - \frac{\gamma_{n+1}}{g^{n+1}} = x - \frac{\gamma_{n+1}}{g^{n+1}}, \qquad (۶)$$

و از آنجا، با توجه به (۳)،

$$\left|x - \sum_1^n \frac{c_k}{g^k}\right| = \frac{\gamma_{n+1}}{g^{n+1}} < \frac{g}{g^{n+1}} = \frac{1}{g^n}.$$

پس، چون $\{g^{-n}\}$ هیچرشته است،

$$x = \lim_n \sum_1^n \frac{c_k}{g^k} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}.$$

بالاخره، برای اثبات اینکه بینهایت‌بار $c_n < g - 1$، گوئیم، اگر چنین نباشد، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n > N$ آنگاه $c_n = g - 1$. پس،

$$x = \sum \frac{c_n}{g^n} = \sum_1^N \frac{c_n}{g^n} + \sum_{N+1} \frac{c_n}{g^n}$$
$$= \sum_1^N \frac{c_n}{g^n} + \sum_{N+1} \frac{g-1}{g^n} = \sum_1^N \frac{c_n}{g^n} + \frac{1}{g^N}.$$

پس، بنا بر (۶)، $\gamma_{N+1}/g^{N+1} = 1/g^N$، و از آنجا، $\gamma_{N+1} = g$، و این با (۳) متناقض میباشد. پس، اثبات وجود تمام است.

ثانیاً اثبات یکتائی. فرض کنیم دو رشته‌ی $\{c_n\}$ و $\{c'_n\}$ تابع شرایط ش باشند، و

$$x = \sum \frac{c_n}{g^n} = \sum \frac{c'_n}{g^n} \qquad (۷)$$

گوئیم

(+) بازاء هر عدد طبیعی n، $c_n = c'_n$.

فرض کنیم چنین نباشد، و m کوچکترین عدد طبیعیی باشد که $c_m \neq c'_m$. بی آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، میتوان فرض کرد $c'_m < c_m$. بنا بر (۷)،

$$0 = \frac{c_m - c'_m}{g^m} + \sum_{m+1} \frac{c_n - c'_n}{g^n}. \qquad (۸)$$

اینک از طرفی

$$c_m - c'_m \geqslant 1, \qquad (۹)$$

و از طرف دیگر، بنا بر روابط $g > c_n \geqslant 0$ و $g > c'_n \geqslant 0$، همواره

$$c_n - c'_n \geqslant 1 - g. \qquad (۱۰)$$

حال گوئیم حد اقل یک عدد طبیعی مانند n هست که $n > m$ و نامساوی (۱۰) اکید است. زیرا، اگر چنین نباشد آنگاه همواره اگر $n > m$ آنگاه

$$c_n - c'_n = 1 - g.$$

پس، بازاء هر n، اگر $n > m$ آنگاه

$$c'_n = c_n + g - 1 \geqslant g - 1,$$

و این با شرایط ش، که رشته‌ی $\{c'_n\}$ تابع آنها فرض شده است، منافی است. بنا بر این، عددی طبیعی مانند n هست که $n > m$ و نامساوی (۱۰) اکید است. پس، بنا بر ۲.۳.۷ : ۸،

$$\sum_{m+1} \frac{c_n - c'_n}{g^n} > \sum_{m+1} \frac{1-g}{g^n} = -\frac{1}{g^m}.$$

بالنتیجه، بنا بر (۸) و (۹)،

$$0 > \frac{1}{g^m} - \frac{1}{g^m} = 0,$$

و این ممتنع است. ▲

از قضیه‌ی فوق با توجه به مندرجات ۲.۱.۵ معلوم میشود که

۲.۲.۱. قضیه. بازاء هر عدد حقیقی نامنفی مانند ξ یک و تنها یک رشته از اعداد صحیح نامنفی مانند

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

هست که رشته‌ی $\{c_n\}_1$ تابع شرایط ش است، و

$$\xi = c_0 + \sum_1 \frac{c_n}{g^n}.$$

۲.۲.۲. تعریفات. فرض کنیم $c_0 \in \mathbf{I}_0$ و $\{c_n\}_1$ رشته‌ای از اعداد صحیح باشد بطوری که همواره، بازاء $n \geqslant 1$، $0 \leqslant c_n \leqslant g-1$، و ξ مقدار سلسله‌ی $c_0 + \sum (c_n/g^n)$ باشد.

I. ξ را به هر یک از اسامی

$$c_0 + 0{,}c_1c_2 \ldots c_n \ldots_g, \qquad c_0{,}c_1c_2 \ldots c_n \ldots_g$$

میخوانند (در صورتی که بیم ابهام نرود، «g» را نمینویسند)، و آنها را کسر ژئی نمایش ξ و اگر $\{c_n\}$ تابع شرایط ش باشد، کسر استانده‌ی ژئی نمایش ξ، مینامند. اگر $g = 10$، بجای «ژئی»، «اعشاری» گویند.

II. اگر عددی طبیعی مانند m باشد که، بازاء هر n، اگر $n > m$ آنگاه $c_n = 0$، کسر ژئی را به صورت

$$c_0{,}c_1c_2 \ldots c_m$$

مینویسند، و آن را کسر ژئی مختوم خوانند. واضح است که این کسر نمایش عدد حقیقی (منطق) $c_0 + \sum_1^m (c_n/g^n)$ است.

III. اگر ξ منفی و $c_0{,}c_1c_2 \ldots c_n \ldots$ کسر ژئی نمایش ξ — باشد، بنا بر تعریف، کسر ژئی نمایش ξ عبارتست از

$$-\,c_0{,}c_1c_2 \ldots c_n \ldots.$$

۲.۲.۳. تبصره. در آنچه میآید، علامات همانهاست که در ۲.۲ و برهان آن گذشت.

I. بنا بر رابطه‌ی (۶) در برهان ۲.۲،

$$x = 0{,}c_1c_2 \ldots c_n + \frac{\gamma_{n+1}}{g^{n+1}}, \qquad (\text{آ})$$

$$0 \leqslant x - 0{,}c_1c_2 \ldots c_n < \frac{1}{g^n}. \qquad (\text{ب})$$

نامساوی اخیر در محاسبات تقریبی (۳ §) اهمیت دارد.

II. اگر

$$x = \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{c_n}{g^n} + \cdots = 0,c_1c_2\ldots c_n\ldots$$

آنگاه

$$\gamma_1 = gx = c_1 + \frac{c_2}{g} + \cdots = c_1,c_2\ldots \qquad (\text{ب})$$

چون cهای بعد از ممیز تابع شرایط ش هستند، نظر به یکتا بودن بسط ژئـی، طرف دوم تساوی فوق بسط γ_1 است به کسر استاندهٔی ژئی.

بطور کلی، اگر $n > 1$ آنگاه، بنا بر (آ)،

$$\frac{\gamma_n}{g^n} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n} - \sum_1^{n-1} \frac{c_k}{g^k} = \sum_n^\infty \frac{c_k}{g^k} = \frac{1}{g^n}\Big(c_n + \frac{c_{n+1}}{g} + \frac{c_{n+2}}{g^2} + \cdots\Big).$$

و از آنجا،

$$\gamma_n = c_n,c_{n+1}c_{n+2}\ldots \quad (n \geqslant 1), \qquad (\text{ت})$$

و طرف دوم بسط γ_n است به کسر استاندهٔی ژئی.

III. در کسر ژئی $c_0,c_1c_2\ldots c_n\ldots$، اعداد c_1، ...، c_n، ... از ارقام شمار در مبنای g (یعنی از اعداد 0، 1، ...، $g-1$) هستند. عدد صحیح c_0 را نیز معمولاً در مبنای g مینویسند. از موارد استثنائی، حساب زوایا است بر حسب درجه، که معمولاً اجزای درجه را به شمار سِتّینی یا شستی ($g = 60$) ولی عدهٔی درجات را به حساب اعشاری مینویسند، مانند $250°\ 21'\ 17''$، که بدین معنی است:

$$2\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 + \frac{21}{60} + \frac{17}{60^2} + \frac{0}{60^3} + \frac{0}{60^4} + \cdots.$$

ارقام حساب ستینی اعداد 0، 1، ...، و 59 هستند، که 10، 21، و 17 از آن جمله میباشند، و اگر آنها را، بترتیب، α، β، و γ بنامیم، عدد مذکور در شمار ستینی محض به صورت $4\alpha,\beta\gamma$ نوشته میشود.

۲.۲.۴. تبصره. برای نمایش دادن عدد نامنفی ξ با کسر استاندهٔی ژئی، ابتدا $c_0 = [\xi]$ را حساب میکنیم، و سپس به نمایش دادن عدد $x = \xi - c_0$ با کسر استاندهٔی ژئی میپردازیم. برای این منظور، جملههای دو رشتهٔی $\{\gamma_n\}_0$ و $\{c_n\}$ مذکور در برهان قضیهٔی ۲.۲ را حساب میکنیم. در عمل، جز در بعضی حالات خاص، به ندرت میتوان دستوری کلی برای محاسبهٔی c_n بر حسب n بدست آورد.

۲.۲.۴.۱. امثله

(آ). نمایش عدد $83/40$ با کسر استاندهٔی اعشاری ($g = 10$).

چون $2 < 83/40 < 3$، $2 = [83/40]$. حال به نمایش عدد

$$x = \frac{83}{40} - \left[\frac{83}{40}\right] = \frac{3}{40}$$

میپردازیم.

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = 3/40, && c_0 = [3/40] = 0,\\
&\gamma_1 = g\gamma_0 = 3/4, && c_1 = [3/4] = 0,\\
&\gamma_2 = 10(\gamma_1 - c_1) = 15/2, && c_2 = [15/2] = 7,\\
&\gamma_3 = 10(\gamma_2 - c_2) = 5, && c_3 = [5] = 5,\\
&\gamma_n = 0 \quad (n > 3), && c_n = 0 \quad (n > 3).
\end{aligned}$$

پس، $3/40 = 0{,}075\,000\ldots$، و

$$\frac{83}{40} = 2{,}075\,000\ldots = 2{,}075.$$

(ز). نمایش عدد $2/3$ با کسر استاندهی دوئی ($g = 2$).

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = 2/3, && c_0 = 0,\\
&\gamma_1 = 2 \cdot (2/3) = 4/3, && c_1 = 1,\\
&\gamma_2 = 2/3, && c_2 = 0,\\
&\gamma_3 = 4/3, && c_3 = 1.
\end{aligned}$$

به آسانی دیده میشود که اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه $c_{2n} = 0$ و $c_{2n-1} = 1$. پس،

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \cdots = 0{,}101\,010\,1\ldots.$$

(ح). بسط اعشاری $\sqrt{2}$.

چون $1 < \sqrt{2} < 2$، $[\sqrt{2}] = 1$، و کافی است عدد $x = \sqrt{2} - 1$ را بسط دهیم.

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \sqrt{2} - 1, \qquad c_0 = 0,\\
&\gamma_1 = 10(\gamma_0 - c_0) = 10(\sqrt{2} - 1) = \frac{10}{\sqrt{2} + 1}.
\end{aligned}$$

چون $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$، $10/3 < \gamma_1 < 5$، و بالنتیجه، $c_1 = 4$.

$$\gamma_2 = 10(\gamma_1 - c_1) = \frac{20}{5\sqrt{2} + 7},$$

و از آنجا، $c_2 = 1$.

بنا بر این، بسط اعشاری $\sqrt{2}$ با $1{,}41$ آغاز میگردد، و بنا بر فرمول (د) در I : ۲.۲.۳،

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

۲.۲.۵. مقایسه. مقایسهی دو عدد حقیقی که با کسر استاندهی ژئی نمایش داده شدهاند آسان است. کافی است مطلب را در مورد اعداد نامنفی توضیح دهیم. فرض کنیم $\xi \geqslant 0$ و $\eta \geqslant 0$، و

$$\xi = c_0, c_1 \dots c_n \dots, \qquad \eta = d_0, d_1 \dots d_n \dots$$

نمایش ξ و η با کسور استاندهی ژئی باشند. اگر همواره $c_n = d_n$ آنگاه، بالبداهه، $\eta = \xi$. پس، فرض کنیم رابطهی $c_n = d_n$ همواره برقرار نباشد. در این صورت، مجموعهی اعضائی از $\mathbf{I}_0$ که بازاء آنها $c_n \neq d_n$ عضو اقل دارد. فرض کنیم m عضو اقل آن باشد. بر حسب اینکه $c_m < d_m$ یا $c_m > d_m$، عدد ξ کوچکتر از عدد η یا بزرگتر از آنست. زیرا، اگر $m = 0$، و مثلاً $c_0 < d_0$، آنگاه $c_0 + 1 \leqslant d_0$، و

$$\xi = c_0 + \sum_1 \frac{c_n}{g^n} [۲\cdot۱\cdot۴] < c_0 + 1 \leqslant d_0 \leqslant \eta.$$

اثبات حکم در حالتی که $m > 0$ به همین قیاس است، و به متعلم محول میشود.

۲.۲.۶. تبصره. بنا بر قضیهی ۲.۲، بازاء هر رشته مانند $\{c_n\}$ از اعداد صحیح که تابع شرایط ش باشد یک عدد حقیقی از بازهی $[0, 1)$ هست، و بالعکس. پس، بین رشتههای مذکور و این بازه تناظری 1ـ1 موجود است. به عبارت دیگر، بین کسور استاندهی ژئی $0, c_1 \dots c_n \dots$ و بازهی مذکور تناظری 1ـ1 برقرار است. ملاحظه کنید که اگر قید «استانده» را برداریم این تناظر برقرار نمیماند. خلاصه،

۲.۲.۷. قضیه. مجموعهی کسور استاندهی ژئی به صورت $0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ (و به عبارت دیگر، مجموعهی رشتههای اعداد صحیح تابع شرایط ش) با مجموعهی اعداد حقیقی متعلق به بازهی $[0, 1)$ همعدد است.

۲.۳. کسور ژئی مختوم. چنانکه سابقاً اشاره کردیم، کسر ژئی مختوم $c_0, c_1 \dots c_m$ عدد منطق $c_0 + \sum_1^m (c_n/g^n)$ را نمایش میدهد.

کسور مختوم از دو جهت حائز اهمیت هستند. یکی اینکه اعمال جمع، تفریق، و ضرب را بر آنها به آسانی (به طریقی که در حساب مقدماتی دیدهاید) میتوان انجام داد، و حاصل این اعمال کسور مختوم میباشند، و دیگر اینکه این کسور را میتوان به عنوان مقادیر تقریبی اعداد حقیقی (و از جمله اعداد اصم) بکار برد، چنانکه در ۳ § خواهیم دید.

۲.۳.۱. تبصره. فرض کنیم $c_0, c_1 \dots c_m$ یک کسر ژئی مختوم باشد، و $c_m \neq 0$. با توجه به رابطهی

$$\sum_{m+1} \frac{g-1}{g^n} = \frac{1}{g^m},$$

میتوان کسری نامختوم و مساوی کسر مختوم مذکور تعریف کرد. مثلاً، اگر $m > 1$ و رشتهی $\{c'_n\}$ را با ضابطهی

$$c'_n = c_n \quad (n < m), \qquad c'_m = c_m - 1, \qquad c'_n = g - 1 \quad (n > m)$$

تعریف کنیم کسر نـامختوم $c_0,c'_1 \ldots c'_n \ldots$ مساوی کسر مختوم $c_0,c_1 \ldots c_m$ است، زیـرا

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty \frac{c'_n}{g^n} &= \sum_1^{m-1} \frac{c'_n}{g^n} + \frac{c'_m}{g^m} + \sum_{m+1}^\infty \frac{c'_n}{g^n} \\ &= \sum_1^{m-1} \frac{c_n}{g^n} + \frac{c_m - 1}{g^m} + \sum_{m+1}^\infty \frac{g-1}{g^n} \\ &= \sum_1^{m-1} \frac{c_n}{g^n} + \frac{c_m}{g^m} - \frac{1}{g^m} + \frac{1}{g^m} = \sum_1^m \frac{c_n}{g^n}.\end{aligned}$$

به همین طریق میتوان حالتی را که $m = 1$ مورد بحث قـرار داد. البته، کسر نامختوم مذکـور استانده نیست، زیرا، از مرتبه‌ای ببعد، $c'_n = g - 1$. مثلاً، در مبنای 10،

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}199\,999\ldots, \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}249\,999\ldots.$$

۲.۴. خاصیت مشخصه‌ی کشور ژئی نمایش اعداد منطق. دیدیـم که کسور ژئـی مختــوم نمایش اعـداد منطق‌اند. اما نمایش یک عددِ منطق با کسر ژئی ممکن است نـامختوم باشد، مثلاً،

$$\frac{1}{3} = 0{,}33\ldots3\ldots, \qquad \frac{212}{990} = 0{,}214\,141\ldots.$$

پیش از بیان خاصیت مشخصه‌ی کسور ژئی نمایش اعداد منطق، تعریفی میآوریم.

۲.۴.۱. تعریف. کسر ژئی $c_0,c_1 \ldots c_n \ldots$ را متناوب خـوانند در صورتی که دو عــدد طبیعی مـانند h و k باشد که همواره اگــر $n \geqslant h$ آنگاه $c_n = c_{n+k}$. اگــر $h = 1$ کسر را متناوب بسیط و الا آن را متناوب مرکب نامند.

اگــر کسر ژئـی $c_0,c_1 \ldots c_n \ldots$ متناوب باشد، بـا علامات مـذکـور در تعریف، به آسانـی دیده میشود که همواره

$$c_{h+\nu+nk} = c_{h+\nu} \qquad (0 \leqslant \nu,\, n \in \mathbf{N}).$$

فرض کـنیم کسر ژئی $c_0,c_1 \ldots c_n \ldots$ متناوب بــاشد. اگر ایــن کسر متناوب بسیــط بــاشد $(h = 1)$ به صورت

$$c_0,c_1 \ldots c_k\, c_1 \ldots c_k \ldots \tag{$*$}$$

و اگر متناوب مرکب باشد به صورت

$$c_0,c_1 \ldots c_{h-1}\, c_h \ldots c_{h+k-1}\, c_h \ldots c_{h+k-1} \ldots \tag{$\dagger$}$$

خواهد بود. در هر حال، دسته‌ی مرتب اعداد

$$c_h,\, c_{h+1},\, \ldots\, c_{h+k-1}$$

را که بعد از ممیز، بلافاصله یا از مرتبه‌ای ببعد، متوالیاً تکرار میشود دوره‌ی گـردش خـوانند، و در مورد کسر متناوب مرکب، دسته‌ی مرتب اعداد

$$c_1,\, \ldots\, c_{h-1}$$

را دوره‌ی منفرد نامند.
بالاخره، برای اختصار، کسر متناوب بسیط (*) را به صورتهای

$$c_0,\overline{c_1 \dots c_k}, \qquad c_0,\dot{c}_1 \dots \dot{c}_k$$

و کسر متناوب مرکب (†) را به صورتهای ذیل مینویسند:

$$c_0,c_1 \dots c_{h-1} \overline{c_h \dots c_{h+k-1}}, \qquad c_0,c_1 \dots c_{h-1} \dot{c}_h \dots \dot{c}_{h+k-1}.$$

واضح است که هر کسر ژئی مختوم متناوب است. مثلاً،

$$0{,}25 = 0{,}25\,000 \dots = 0{,}25\,\dot{0}.$$

۲.۴.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه یک عدد حقیقی منطق باشد آنست که نمایش آن با کسر استانده‌ی ژئی متناوب باشد.

برهان. لـزوم. کافی است حکم را در باره‌ی اعداد ناکمتر از 0 و کوچکتر از 1 ثابت کنیم. پس، فرض کنیم $0 \leqslant x < 1$ و $x \in \mathbf{Q}$. دو عدد صحیح مانند a و b هست که $0 \leqslant a < b$ و $x = a/b$. با علامات مذکور در برهان قضیه‌ی ۲.۲،

$$\gamma_n = c_n + \frac{\gamma_{n+1}}{g} \quad (n \geqslant 1).$$

به آسانی دیده میشود که جمل رشته‌ی $\{\gamma_n\}_1$ کسوری منطق با مخرج b هستند، و صورت هر یک بر g قابل قسمت است (به استقراء ثابت کنید). پس، چون $0 \leqslant \gamma_n < g$ $(n \geqslant 1)$، جمله‌های رشته‌ی $\{\gamma_n\}_1$ از اعداد

$$0, \frac{g}{b}, \frac{2g}{b}, \dots, \frac{(b-1)g}{b}$$

هستند. بالنتیجه، در میان جمله‌های آن رشته دو جمله‌ی متساوی وجود دارد[1]. فرض کنیم γ_h و γ_{h+k} چنین دو جمله‌ای باشند. بنا بر فرمول (ت) مذکور در II : ۲.۲.۳،

$$\gamma_h = c_h,c_{h+1}c_{h+2} \dots = \gamma_{h+k} = c_{h+k},c_{h+k+1}c_{h+k+2} \dots .$$

پس، به موجب یکتائی نمایش با کسر استانده‌ی ژئی،

$$c_h = c_{h+k}, \qquad c_{h+1} = c_{h+k+1}, \qquad \dots,$$

و بطـور کلی،

$$c_{h+\nu} = c_{h+k+\nu} \quad (\nu \geqslant 0).$$

اینک، اگر n عدد طبیعی دلخواهی ناکمتر از h باشد، و $n - h = \nu$ آنگاه، بنا بر رابطه‌ی فوق، $c_n = c_{n+k}$. پس، نمایش x متناوب است.

کفـایـت. کافی است حکم را در مورد کسر متناوب بسیط $0,\dot{c}_1 \dots \dot{c}_k$ ثابت کنیم (چرا؟).

---

(۱) این مطلب ناشی از این اصل است که اگر m عددی طبیعی باشد، و A مجموعه‌ای نامتناهی یـا مجموعه‌ای متناهی و دارای بیش از m عضو باشد آنگـاه اگر اعضای A را بین m مجموعه تقسیم کنیم حد اقل یکی از این مجموعه‌ها مشتمل بر دو عضو از اعضای A خواهد بود (اصل دیریکله*).

اگر x مقدار این کسر باشد، بنا بر قضیه‌ی درج پرانتز در سلسله‌ها و تعریف تناوب،

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1} \frac{c_n}{g^n} = \sum_{n=1} \left(\frac{c_{(n-1)k+1}}{g^{(n-1)k+1}} + \cdots + \frac{c_{nk}}{g^{nk}}\right) \\ &= \sum \left(\frac{c_1}{g^{(n-1)k+1}} + \cdots + \frac{c_k}{g^{nk}}\right) \\ &= \sum \left(\frac{c_1}{g} + \cdots + \frac{c_k}{g^k}\right) \cdot \frac{1}{g^{(n-1)k}} \\ &= \left(\frac{c_1}{g} + \cdots + \frac{c_k}{g^k}\right) \sum \frac{1}{g^{(n-1)k}} \\ &= \left(\frac{c_1}{g} + \cdots + \frac{c_k}{g^k}\right) \cdot \frac{g^k}{g^k - 1}, \end{aligned}$$

و عدد اخیر بالبداهه منطق است. ▲

۲.۴.۳. فایده. قضیه‌ی ۲.۴.۲ وسیله‌ای برای تمیز دادن اعداد منطق از اعداد اصم به وسیله‌ی بسط استانده‌ی ژئی آنها بدست میدهد.

۲.۴.۳.۱. مثال. بسط عدد x در مبنای 10 عبارتست از

$$\xi = 0{,}123456789101112\ldots,$$

که در آن، بعد از ممیز، اعداد طبیعی ابتدا از 1 متوالیاً میآیند. ثابت کنید که ξ عددی اصم است. کافی است ثابت کنیم که کسر اعشاری فوق متناوب نیست، و این واضح است، زیرا، n هر عددی طبیعی باشد، وقتی که در این کسر به حد کافی پیش رویم، به گروهی از n صفر متوالی میرسیم. تفصیل استدلال بر متعلم است.

۲.۵. تمرین

۱. مطلوبست

(آ) بسط ثنائی $(g = 2)$ عدد $1/8$.

(ب) بسط هفتی $2/3$.

(پ) بسط اعشاری $17/360$ و بسط دوازدهی $5/260$.

(ت) بسط $1/10$ در مبنای 2 و در مبنای 3.

۲. ثابت کنید که در مبنای g،

$$0{,}c_1c_2\ldots c_{h-1}\dot{c}_h\ldots\dot{c}_{h+k-1} = \frac{\overline{c_1c_2\ldots c_{h+k-1}} - \overline{c_1\ldots c_{h-1}}}{g^{h-1}(g^k-1)}.$$

در صورت کسر اخیر، جمله‌ی اول به معنی عدد صحیح $\overline{c_1c_2\ldots c_{h+k-1}}$ است در مبنای g، و هکذا در مورد جمله‌ی دوم.

۳. ثابت کنید که در مبنای g،

(آ) $\dfrac{1}{g-1} = 0{,}\dot{1}.$

(ب) $\dfrac{1}{g+1} = 0{,}\dot{0}\dot{g}_1 \quad (g_1 = g-1).$

۴. مطلوبست بسط ژئی عدد $1/(g^2+g+1)$ در مبنای g.

۵. بنا بر آنکه $g > 2$، $g_1 = g-1$، و $g_2 = g-3$، ثابت کنید که
$$\frac{1}{(g-1)^2} = 0{,}\overline{012\ldots g_2 g_1}.$$

۶. عدد $1/(99)^2$ را با کسر اعشاری نمایش دهید.

۷. m عدد طبیعی مفروضی بزرگتر از 1 است، و $q = 1/m$. ثابت کنید که سلسله‌ی
$$q + q^4 + q^9 + \cdots = \sum_{n=1} q^{n^2}$$
به عدد اصمی متقارب است[1].

۳ § مقادیر تقریبی

۳.۱. کلیات. در صفحات گذشته بعضی از اعداد حقیقی را به وسیله‌ی حدود مشخص کردیم ــ مانند
$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad e = \sum_0 \frac{1}{n!},$$
و روابطی بین اعدادی که بدین طریق مشخص میشوند برقرار نمودیم. در حقیقت، قسمت اعظم آنالیز ریاضی مصروف به برقرار کردن روابطی است بین اعدادی که به وسیله‌ی حدود تعریف میشوند. اما، در محاسبات و در ریاضیات کاربسته، احتیاج به مقادیر عددی اعداد داریم، که معمولاً به صورت اعشاری نوشته میشوند. مقادیری که در محاسبه در کار میآیند اغلب تقریبی هستند. مثلاً، کسور اعشاری نمایش اعداد $\sqrt{2}$ و e پایان ندارند، و در محاسبه، ناچار باید به قسمتی از این کسور اکتفا کرد. بعلاوه، در علوم و فنون مختلف اعدادی در کار میآیند که حاصل اندازه‌گیری هستند، و اگر چه ممکن است به اندازه‌های واقعی نزدیک باشند، ناچار با این اندازه‌ها متفاوتند. در این گونه موارد، اطلاعی که مثلاً از عدد a داریم با نامساویی مانند

$$a' < a < a'' \qquad (*)$$

بیان میشود که، در آن، a' و a'' معلومند، مانند $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ یا $2{,}5 < e < 3$.

نامساوی (*)، و نیز صورتهای غیر اکید آن را یک تحدید a، و عدد مثبت $a'' - a'$ را عرض تحدید نامیم. هر قدر تحدید a «تنگتر»، یعنی، عرض آن کوچکتر باشد اطلاعی که از a میدهد دقیقتر است. مثلاً، از دو تحدید

---

(۱) سلسله‌ی مذکور در تئوری توابع بیضوی پیش میآید.

$$1{,}41 < a < 1{,}42, \qquad 1{,}414 < a < 1{,}415,$$

اولی نشان میدهد که a به بازه‌ی $(1{,}41, 1{,}42)$ به طول $0{,}01$ تعلق دارد، و حال آنکه، بنا بر دومی، a به بازه‌ی $(1{,}414, 1{,}415)$، به طول $0{,}001$، متعلق است.

اینک دو مسئله‌ی مهم محاسبه را میتوان چنین بیان کرد:

مسئله‌ی اول. تحدیدهائی از هر یک از اعدادی که در یک عبارت آمده‌اند در دست است. میخواهیم تحدیدی از مقدار عددی آن عبارت بدست آوریم.

مسئله‌ی دوم. هر یک از اعدادی را که در یک عبارت آمده‌اند با چه عرضهائی تحدید کنیم تا عرض تحدیدی که برای مقدار عددی آن عبارت بدست میآید از مقدار معینی کمتر باشد.

حل این مسائل مبتنی بر قواعد محاسبه با نامساویها است. ما بعضی حالات بسیار ساده و مقدماتی را مورد بحث قرار میدهیم[۱].

۳.۲. تعریفات. فرض کنیم ξ عددی حقیقی و ε عدد مثبتی باشد.

I. هر عضو بازه‌ی بسته‌ی $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ را یک مقدار تقریبی ξ با ε تقریب خوانند.

II. هر عضو بازه‌ی باز $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ را یک مقدار تقریبی ξ با کمتر از ε تقریب نامند.

III. هر مقدار تقریبی ξ را که از آن نابیشتر (ناکمتر) باشد یک مقدار تقریبی نقصانی (اضافی) ξ نامند.

خلاصه‌ی این تعریفات در جدول ذیل مندرج است:

مقداری تقریبی برای ξ	با ε تقریب			با کمتر از ε تقریب		
		نقصانی	اضافی		نقصانی	اضافی
هر عضو بازه‌ی	$[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$	$[\xi-\varepsilon, \xi]$	$[\xi, \xi+\varepsilon]$	$(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$	$(\xi-\varepsilon, \xi]$	$[\xi, \xi+\varepsilon)$

IV. اگر x یک مقدار تقریبی ξ با (کمتر از) ε تقریب باشد مینویسند

$x = \xi$ با ε تقریب،

($x = \xi$ با کمتر از ε تقریب).

این گونه تساویهای تقریبی را، که در محاسبات تقریبی بسیار دیده میشود، با تساوی به معنی منطقی خلط نکنید.

۳.۲.۱. مقادیر تقریبی به معنی اخص. فرض کنیم ξ عددی حقیقی و ε عدد مثبت مفروضی باشد. چنانکه میدانیم، عددی صحیح مانند n هست که

$$n\varepsilon \leqslant \xi < (n+1)\varepsilon. \tag{۱}$$

(۱) محاسبات عددی مبحثی مفصل و جداگانه است، و خواستاران آن باید به کتابهای مخصوص به این موضوع رجوع کنند.

اصطلاحاً، $n\varepsilon$ را مقدار تقریبی ξ با ε تقریب نقصانی و $(n+1)\varepsilon$ را مقدار تقریبی ξ با ε تقریب اضافی خوانند.

از رابطه‌ی (۱) معلومست که $n = [\xi/\varepsilon]$.

برای احتراز از سوء تفاهم، توجه کنید که در اصطلاح اخیر از مقدار تقریبی صحبت میکنیم، و حال آنکه، در ۳.۲، صحبت از یک مقدار تقریبی یا مقداری تقریبی است.

۳.۲.۲. تعریف. اگر x یک مقدار تقریبی ξ باشد تفاضل $x - \xi$ را معمولاً خطای (مطلق) این مقدار تقریبی خوانند. خطای نسبی نسبت $(x - \xi)/\xi$ یا قدر مطلق آنست. خطایِ درصد خطای نسبی است که به درصد بیان شده باشد.

مثلاً، اگر حاصل اندازه‌گیری یک طول ده متری 10,3 باشد خطای مطلق 0,3، خطای نسبی 0,03، و خطای درصد $0{,}03 \times 100$ درصد یا 3% است.

معمولاً مقدار خطا نامعلوم است، و باید به بند بالائی از قدر مطلق آن اکتفا کرد.

۳.۲.۳. امثله و فواید

(آ). اگر تحدیدهای

$$a' < a < a'', \qquad b' < b < b''$$

از a و b در دست باشد تحدیدهای ذیل برای $a + b$ و $a - b$ حاصل میشود:

$$a' + b' < a + b < a'' + b'', \qquad a' - b'' < a - b < a'' - b'.$$

بعلاوه، اگر a' و b' مثبت باشند این تحدیدها حاصل است:

$$a'b' < ab < a''b'', \qquad a'/b'' < a/b < a''/b'.$$

بالاخره، اگر $a' > 0$ آنگاه

$$\sqrt{a'} < \sqrt{a} < \sqrt{a''}.$$

(ب). اگر عدد 3 857,2 یک مقدار تقریبی اضافی عدد ξ با کمتر از 0,04 تقریب باشد،

$$\xi \leqslant 3\,857{,}2 < \xi + 0{,}04.$$

از اینجا تحدید ذیل برای ξ بدست میآید:

$$3\,857{,}16 < \xi \leqslant 3\,857{,}2.$$

(پ). بنابر آنکه

$a = 2{,}718$ با 0,000 3 تقریب نقصانی،

$b = 3{,}142$ با 0,000 5 تقریب اضافی،

تحدیدی از a/b مطلوبست.

$$2{,}718 \leqslant a \leqslant 2{,}718\,3,$$
$$3{,}141\,5 \leqslant b \leqslant 3{,}142.$$

پس:

$$\frac{2{,}718}{3{,}142} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{2{,}718\,3}{3{,}141\,5},$$

و از آنجا،

$$0{,}865\,054 < \frac{a}{b} < 0{,}865\,288.$$

و این تحدیدی است از a/b. ضمناً،

$$0 < \frac{a}{b} - 0{,}865 < 0{,}000\,288,$$

و میتوان نتیجه گرفت که

$a/b = 0{,}865$ با کمتر از $0{,}000\,288$ تقریب نقصانی.

در محاسبات تقریبی، برای بدست آوردن نتایج ساده‌تر، اغلب بر عرض تحدید می‌افزایند. اگر چه از این راه از دقت کاسته میشود، اختصاری که حاصل میشود تأثیر معتنابه در تسهیل محاسبات دارد. در مثال مورد بحث، میتوان نوشت،

$a/b = 0{,}865$ با کمتر از $0{,}000\,3$ تقریب نقصانی.

۳.۲.۴. بعضی دستورات تقریبی مفید. دستورات مندرج در جدول آتیه در بسیاری از محاسبات تقریبی ساده مفید است. اثبات این دستورات سهل است، و به متعلم محول میشود.

$$0 < \delta < 1$$

اسمنمای موضوع محاسبه	مقدار تقریبی	جهت تقریب	حد اعلای قدر مطلق خطا
$(1+\delta)^2$	$1+2\delta$	نقصانی	δ^2
$(1-\delta)^2$	$1-2\delta$	نقصانی	δ^2
$1/(1+\delta)$	$1-\delta$	نقصانی	δ^2
$1/(1-\delta)$	$1+\delta$	نقصانی	$\delta^2/(1-\delta)$
$\sqrt{1+\delta}$	$1+(\delta/2)$	اضافی	$\delta^2/8$
$\sqrt{1-\delta}$	$1-(\delta/2)$	اضافی	$\delta^2/2$

امثله:

$\sqrt{1{,}02} = 1{,}01$ با کمتر از $0{,}000\,05$ تقریب اضافی.

$\sqrt{0{,}9} = 0{,}95$ با کمتر از $0{,}005$ تقریب اضافی.

۳.۲.۵. تبصره. رعایت نظم و ترتیب در محاسبات کمال اهمیت را دارد. در این باب، نکات ذیل را خاطرنشان میسازیم:

I. در نوشتن اعداد، آنها را از طرفین ممیز تا میشود به قطعات سه رقمی تقسیم میکنیم، و بین دو قطعه‌ی متوالی کمی فاصله میگذاریم، مانند

$$52\,913{,}031\,700\,4,$$

نه مثلاً بدین صورتها

$$52913{,}0317004, \qquad 52‘913{,}031‘7004.$$

II. در اعدادی که از جداول لگاریتم نقل میشوند ترتیب مذکور در I را معمولاً رعایت نمیکنند، بلکه این اعداد را به همان صورت که در جدول مضبوط است نقل مینمایند، مثلاً

$\log 2 = 0{,}30\,103$ (نه $0{,}301\,03$).

III. از عادت ناپسند نوشتن «نقطه» بجای «0» و نوشتن «/» بجای ممیز جداً احتراز کنید.

IV. در ممالک انگلیسی‌زبان، بجای ممیز، نقطه میگذارند، و اگر عددی با «صفر و ممیز» شروع شود صفر را نمینویسند («مثلاً»، «.31» بجای «0,31»). این روش در نزد ما معمول نیست، و از تقلید از آن باید اجتناب کرد.

۳.۲.۶. تمرین

۱. $\{\xi_i\}_1^n$ و $\{x_i\}_1^n$ دو رشته از اعدادند، و بازاء هر i از 1 تا با n، x_i مقداری تقریبی از ξ_i است با خطائی که قدر مطلقش از ε_i کمتر است. ثابت کنید که اگر $\sum_1^n x_i$ را یک مقدار تقریبی $\sum_1^n \xi_i$ بگیریم قدر مطلق خطائی که مرتکب میشویم از $\sum_1^n \varepsilon_i$ کمتر است.

۲ (اصل جمع خطاها). اگر x_1 یک مقدار تقریبی x_0 با کمتر از ε_1 تقریب و x_2 یک مقدار تقریبی x_1 با کمتر از ε_2 تقریب باشد آنگاه x_2 یک مقدار تقریبی x_0 است با کمتر از $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ تقریب.

۳. بنا بر آنکه بر طبق تعریفات ۳.۲،

$193/71 = 2{,}718\,3$ با کمتر از $5/10^5$ تقریب،

$e = 193/71$ با کمتر از $3/10^5$ تقریب،

بهترین تحدیدی را که میتوانید برای e بدست آورید.

۴. در هر یک از روابط تقریبی ذیل، جهت تقریب[1] و حداکثر قدر مطلق خطا را معلوم کنید:

$$(1{,}002)^2 = 1{,}004. \qquad 1/1{,}03 = 0{,}97.$$

$$1/0{,}99 = 1{,}01. \qquad \sqrt{0{,}98} = 0{,}99.$$

۵. ثابت کنید که $12/7$ مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ است با کمتر از $1/7$ تقریب نقصانی، و $17/10$ مقدار تقریبی آنست با کمتر از $1/10$ تقریب نقصانی.

۶. بنا بر آنکه $\varepsilon > \varepsilon' > 0$، آیا ضرورةً مقدار تقریبی یک عدد با ε' تقریب نقصانی (اضافی) از مقدار تقریبی آن با ε تقریب نقصانی (اضافی) بیشتر (کمتر) است؟

جواب خود را با ذکر مثال توضیح دهید، و سپس در حالت خاصی که ε مضرب صحیحی از ε' باشد تحقیق کنید.

---

(۱) اضافی یا نقصانی بودن آن.

۰۷ اگر $m, n \in \mathbf{N}$ و m/n یک مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ باشد $(m+2n)/(m+n)$ مقدار تقریبی بهتری (با خطائی از حیث قدر مطلق کمتر) از $\sqrt{2}$ است (۸ ۱ : ۱ ۱ : ۶ دیده شود).

۳.۳. مقادیر تقریبی اعشاری. از این ببعد بحث ما در مقادیر تقریبی اعشاری خواهد بود.

۳.۳.۱. تعریف.

I. عدد اعشاری یعنی عددی حقیقی که به صورت اعشاری نمایش داده شده است.

II. اگر $n \in \mathbf{I}_0$، عدد اعشاری مرتبه‌ی n یعنی عدد اعشاری مختومی که n رقم در سمت راست ممیز دارد.

واضح است که اگر p عدد صحیحی بزرگتر از n باشد هر عدد اعشاری مرتبه‌ی n عدد اعشاری مرتبه‌ی p نیز هست (کافی است $p-n$ صفر در طرف راست عدد اول قرار دهیم. مثلاً، عدد 2,05 یک عدد اعشاری مرتبه‌ی 2 است، و مساوی 2,050 00 میباشد، که یک عدد اعشاری مرتبه‌ی 5 است.)

بنا بر ۳.۲.۰۱،

۳.۳.۲. قضیه. فرض کنیم ξ عددی حقیقی باشد و $n \in \mathbf{I}_0$.

I. مقدار تقریبی ξ با $1/10^n$ تقریب نقصانی مساوی است با $[\xi \times 10^n]/10^n$، که چون عدد اعشاریی از مرتبه‌ی n است، آن را مقدار تقریبی اعشاری نقصانی مرتبه‌ی n عدد ξ هم میخوانند.

II. مقدار تقریبی ξ با $1/10^n$ تقریب اضافی، که آن را مقدار تقریبی اعشاری اضافی مرتبه‌ی n عدد ξ هم میخوانند، عدد اعشاری مرتبه‌ی n حاصل از جمع کردن مقدار تقریبی اعشاری نقصانی مرتبه‌ی n عدد ξ است با $1/10^n$.

۳.۳.۳. تبصره. چون

$$\frac{[\xi \times 10^n]}{10^n} \leqslant \xi < \frac{[\xi \times 10^n]}{10^n} + \frac{1}{10^n},$$

مقادیر تقریبی اعشاری مرتبه‌ی n عدد ξ تحدیدی از این عدد به عرض $1/10^n$ بدست میدهند. قدر مطلق خطائی که از اختیار کردن یکی از این دو مقدار بجای ξ مرتکب میشویم از $1/10^n$ تجاوز نمیکند.

۳.۳.۴. امثله

(آ). اگر $\xi = 3{,}141\,59$ آنگاه

$$\xi \times 10^2 = 314{,}159; \qquad [\xi \times 10^2] = 314; \qquad [\xi \times 10^2]/10^2 = 3{,}14.$$

پس، تقریبات اعشاری مرتبه‌ی 2 عدد ξ عبارتند از 3,14 (نقصانی) و $3{,}14 + 0{,}01$ یا 3,15

(اضافی).

(ب). فرض کنیم $1{,}732\,05 - = ع$. مقدار تقریبی اعشاری نقصانی (اضافی) مرتبه‌ی 4 عدد ع عبارتست از $1{,}732\,1 - \ (-1{,}732\,0)$.

(پ). مقادیر تقریبی $\sqrt{2}$ با 1، $1/10$، $1/10^2$، . . . تقریب.

برای محاسبه‌ی $\sqrt{2}$ با $1/10^n$ تقریب نقصانی باید عددی صحیح مانند a_n یافت که

$$a_n/10^n < \sqrt{2} < (a_n+1)/10^n. \tag{۱}$$

این نامساوی معادل نامساوی

$$a_n^2 < 2 \cdot 10^{2n} < (a_n+1)^2 \tag{۲}$$

است، که از مقایسه‌ی آن با نامساوی

$$a_{n+1}^2 < 2 \cdot 10^{2(n+1)} < (a_{n+1}+1)^2 \tag{۳}$$

چنین نتیجه میشود:

$$10a_n \leqslant a_{n+1} < a_{n+1}+1 \leqslant 10a_n + 10. \tag{۴}$$

پس، اختلاف $10a_n$ و a_{n+1} منتها در رقم آحاد است. بدین گونه، ارقام a_1، a_2، . . . را میتوان متدرجاً حساب کرد: توضیح آنکه، بنا بر آنچه گذشت، میتوان نوشت،

$$a_{n+1} = 10a_n + r_{n+1} \qquad (0 \leqslant r_{n+1} \leqslant 9).$$

پس، بنا بر (۳)، r_{n+1} بزرگترین عددی از 0 تا با 9 است که در نامساوی

$$2 \cdot 10^{2(n+1)} > a_{n+1}^2 = 100a_n^2 + 20a_n r_{n+1} + r_{n+1}^2$$

صدق میکند. این نامساوی معادل نامساوی

$$2 \cdot 10^{2(n+1)} - 100a_n^2 > (20a_n + r_{n+1})r_{n+1} \tag{۵}$$

است، که اساس طریق ابتدائی استخراج جذر تقریبی $\sqrt{2}$ میباشد.

چون $2 > 1$، $1 < \sqrt{2} < 2$، $a_0 = [\sqrt{2}] = 1$. پس، بنا بر (۵)،

$$100 > (20 + r_1)r_1.$$

به امتحان معلوم میشود که بزرگترین عدد صحیح r_1 که در این نامساوی صدق کند 4 است. پس،

$$a_1 = 10a_0 + r_1 = 14,$$

و مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ با $1/10$ تقریب نقصانی برابر $14/10$ یا $1{,}4$ میباشد. اینک، بنا بر (۵)،

$$2 \cdot 10^4 - 100 \cdot (14)^2 > (280 + r_2)r_2,$$

و یا $400 > (280 + r_2)r_2$، و از آنجا، $r_2 = 1$. پس،

$$a_2 = 10a_1 + r_2 = 141,$$

و مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ با $1/100$ تقریب نقصانی برابر $141/100$ یا $1{,}41$ است. مقادیر تقریبی اضافی با $1/10$ و $1/100$ تقریب بترتیب عبارتند از

$$1{,}4 + 0{,}1 = 1{,}5, \qquad 1{,}41 + 0{,}01 = 1{,}42.$$

۳.۳.۵. قاعده‌ی عملی تعیین مقادیر تقریبی اعشاری. اگر

$$c_0{,}c_1c_2 \ldots c_nc_{n+1} \ldots \tag{*}$$

نمایش اعشاری استانده‌ی عدد مثبت ع باشد، بنا بر فرمول (ب) در I : ۲.۲.۳،

$$0 \leqslant \xi - c_0,c_1 \dots c_n < 1/10^n.$$

پس، اگر در (*) ارقام بعداز ممیز را از مرتبه‌ی $n+1$ ببعد اسقاط کنیم مقدار تقریبی ξ با $1/10^n$ تقریب (نقصانی) بدست میآید. بعلاوه، واضح است که عدد

$$-c_0,c_1 \dots c_n$$

مقدار تقریبی $\xi-$ است با $1/10^n$ تقریب اضافی، مگر اینکه نامساوی اول تساوی باشد.

۳.۳.۶. امثله

مقدار تقریبی	$\xi = 3{,}141\,592\dots$		$\xi = -1{,}732\,050$	
	نقصانی	اضافی	نقصانی	اضافی
مرتبه‌ی 2	3,14	3,15	− 1,74	− 1,73
مرتبه‌ی 3	3,141	3,142	− 1,733	− 1,732
مرتبه‌ی 4	3,141 5	3,141 6	− 1,732 1	− 1,732 0

۳.۴. بهترین تقریب اعشاری. بنا بر آنچه گذشت، قدر مطلق خطای یک مقدار تقریبی مرتبه‌ی n عدد ξ از $1/10^n$ تجاوز نمیکند. چنانکه ذیلاً خواهیم دید، از نمایش اعشاری یک عدد میتوان مقداری تقریبی از مرتبه‌ی n از آن عدد بدست آورد که خطایش از نصف مقدار فوق (یعنی از $5/10^{n+1}$) تجاوز نکند.

۳.۴.۱. تعریف. عدد اعشاری

$$x = c_0,c_1c_2 \dots c_n$$

را بهترین تقریب اعشاری مرتبه‌ی n عدد ξ یا مقدار تقریبی (درست) ξ تا n رقم اعشار خوانند در صورتی که

$$|\,\xi - c_0,c_1 \dots c_n\,| \leqslant 5/10^{n+1}. \qquad (*)$$

در این صورت مینویسند

$x = \xi$ (درست) تا n رقم اعشار.

معمولاً قید درست را در عبارات فوق ذکر نمیکنند.

۳.۴.۲. تبصره در باب تعریف. بهترین تقریب اعشاری مرتبه‌ی n یک عدد بر طبق تعریف فوق ممکن است نامشخص باشد، مثلاً، اگر $\xi = 205/2000$ آنگاه $\xi = 0{,}102\,5$.
از نامساویهای

$$|\,\xi - 0{,}102\,| = 5/10^4, \qquad |\,\xi - 0{,}103\,| = 5/10^4$$

معلوم است که هر یک از 0,103 و 0,102 یک مقدار تقریبی عدد 205/2000 است تا 3 رقم اعشار. برای رهائی از این ابهام دو قرارداد متداول است:

(آ) قرارداد معروف به قرارداد گاوس*، و آن اینکه از دو مقدار تقریبی مذکور آن را که رقم آخرش زوج است اختیار میکنند.

(د) بکار بردن نامساویهای ذیل بجای نامساویهای (*):

$$-5/10^{n+1} \leqslant \xi - c_0,c_1 \ldots c_n < 5/10^{n+1}.$$

مقدار تقریبی عدد 205/2000 تا 3 رقم اعشار بر طبق قرارداد گاوس 0,102 و بر طبق قرارداد اخیر 0,103 میباشد.

۳.۴.۳. تبصره. چنانکه از توضیحات مذکور در ۳.۴.۲ معلوم است[۱]، مفهوم «بهترین تقریب اعشاری» متضمن مشکلاتی است. بدین جهت، بعضی تعریف کلی ۳.۲ را ملاک قرار میدهند، و هر دو عدد اعشاری مختوم مانند a و b را که، در عین حال، در شرایط

$$a \leqslant \xi \leqslant b, \qquad b - a \leqslant 1/10^n$$

صدق کنند مقادیر تقریبی ξ تا n رقم اعشار خوانند. در این صورت،

ξ را تا n رقم اعشار حساب کنید

یعنی دو عدد اعشاری مختوم a و b را چنان تعیین کنید که در نامساویهای فوق صدق کنند.

۳.۴.۴. تبصره. اگر $|\xi - x| \leqslant 5/10^{n+1}$ آنگاه

$$|(-\xi) - (-x)| \leqslant 5/10^{n+1}.$$

بنا بر این، اگر ξ مثبت باشد آنگاه بهترین تقریب مرتبه‌ی n عدد ξ — متقابل بهترین تقریب مرتبه‌ی n عدد ξ است. بدین جهت، در مطالب آتیه بحث را به بهترین تقریب اعداد مثبت منحصر میکنیم.

پیش از ذکر طریق عملی تعیین بهترین تقریب یک عدد از نمایش اعشاری آن، تعریف ذیل را میآوریم.

۳.۴.۵. تعریف. فرض کنیم

$$u,c_1c_2 \ldots c_nc_{n+1} \ldots \qquad (*)$$

عددی اعشاری، c_0 رقم آحاد u[۲]، و n عددی صحیح و نامنفی باشد. گرد کردن عدد اعشاری (*) به n رقم یعنی

I. اسقاط ارقام از c_{n+1} ببعد در صورتی که $c_{n+1} < 5$؛

II. اسقاط ارقام از c_{n+1} ببعد با تصرفات ذیل در صورتی که $c_{n+1} \geqslant 5$:

II′. «تقویت» c_n (افزودن یک واحد بدان) در صورتی که $c_{n+1} > 5$، یا $c_{n+1} = 5$ ولی همه‌ی ارقام بعد از c_{n+1} صفر نباشند،

---

(۱) ۳.۴.۸ نیز ملاحظه شود.

(۲) ملاحظه کنید که، برای تعمیم، c_0 را به معنائی جز آنچه تا کنون بکار رفته است تعریف کرده‌ایم.

II''. (قاعده‌ی گاوس). تقویت c_n اگر c_n فرد باشد، و $c_{n+1} = 5$، و بعد از c_{n+1} رقمی جز 0 نیامده باشد.

طریق تعیین بهترین تقریب مرتبه‌ی n یک عدد مثبت از نمایش اعشاری آن از قضیه‌ی ذیل استنباط میشود:

۳.۴.۶. قضیه. اگر

$$u,c_1\dots c_nc_{n+1}\dots \tag{$*$}$$

نمایش اعشاری استانده‌ی عدد مثبت ξ، و x عدد حاصل از گرد کردن $(*)$ به n رقم باشد، آنگاه

$$|\xi - x| \leqslant 5/10^{n+1}. \tag{I}$$

بعلاوه، اگر $c_{n+1} < 5$ آنگاه نامساوی فوق اکید است، و

$$0 \leqslant \xi - x < (c_{n+1}+1)/10^{n+1}; \tag{II}$$

و اگر c_n تقویت شده باشد آنگاه

$$0 < x - \xi \leqslant (10 - c_{n+1})/10^{n+1}, \tag{III}$$

و در I تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $c_{n+1} = 5$ و بعد از c_{n+1} در $(*)$ رقمی جز 0 نیامده باشد.

برهان. در گرد کردن عدد $(*)$، سه حالت ممکن است اتفاق افتد.

حالت اول: $c_{n+1} < 5$، و لهذا، $c_{n+1} \leqslant 4$. پس، $x = u,c_1\dots c_n$، و بالنتیجه، با توجه به ۲.۱.۴،

$$x \leqslant \xi = x + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \sum_{n+2}\frac{c_k}{10^k} < x + \frac{c_{n+1}+1}{10^{n+1}} \leqslant x + \frac{5}{10^{n+1}}.$$

پس، نامساویهای (I) و (II) برقرارند.

حالت دوم: $c_{n+1} > 5$، یا $c_{n+1} = 5$ و بعداز c_{n+1} ارقامی غیر از 0 در $(*)$ آمده است. پس،

$$x = u,c_1\dots c_n + \frac{1}{10^n}.$$

واضح است که $x > \xi$. بعلاوه،

$$x - \xi = \frac{1}{10^n} - \sum_{n+1}\frac{c_k}{10^k} = \frac{1}{10^n} - \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} - \sum_{n+2}\frac{c_k}{10^k} \leqslant \frac{10 - c_{n+1}}{10^{n+1}},$$

و این نامساوی (III) است. بعلاوه، اگر $c_{n+1} > 5$ آنگاه کسر اخیر از $5/10^{n+1}$ کوچکتر است. اما، اگر $c_{n+1} = 5$ آنگاه، بنا بر فرض، $\sum_{n+2}(c_k/10^k) > 0$، و

$$x - \xi < \frac{1}{10^n} - \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} = \frac{5}{10^{n+1}}.$$

حالت سوم: $c_{n+1} = 5$، و همواره اگر $m > n+1$ آنگاه $c_m = 0$. پس، اگر c_n زوج باشد $x = u,c_1\dots c_n$ و تقویت در کار نیست، و اگر c_n فرد باشد

$x = u,c_1 \ldots c_n + (1/10^n)$، و

$$x - \xi = \frac{1}{10^n} - \frac{5}{10^{n+1}} = \frac{5}{10^{n+1}}. \blacktriangle$$

۳.۴.۷. امثله

(آ). بهترین مقدار تقریبی مرتبه‌ی 4 عدد $2/3$.

چون $\ldots 0{,}666\,666 = 2/3$، مقدار تقریبی مطلوب $0{,}666\,7$ است، و میتوان نوشت، $2/3 = 0{,}666\,7$ تا 4 رقم اعشار.

(ب). فرض کنیم $\xi = -128{,}810\,458$. مقدار تقریبی ξ

تا 1 رقم اعشار $-128{,}8$ است،

تا 2 رقم اعشار $-128{,}81$ است،

تا 3 رقم اعشار $-128{,}810$ است،

تا 4 رقم اعشار $-128{,}810\,5$ است،

تا 5 رقم اعشار $-128{,}810\,46$ است،

تا 6 رقم اعشار $-128{,}810\,458$ است.

(پ). (قاعده‌ی گاوس). مقدار تقریبی 49,975 تا 2 رقم اعشار 49,98 است.
مقدار تقریبی 49,985 0 تا 2 رقم اعشار 49,98 است، و مقدار تقریبی 49,985 0 — تا 2 رقم اعشار 49,98 — میباشد.

۳.۴.۸. تبصره. در باب مقادیر تقریبی با بعضی ناهنجاریها مواجه میشویم، که از جمله مبهم بودن بهترین تقریب است، که توضیح آن در ۳.۴.۲ گذشت. دیگر اینکه از بهترین تقریب مرتبه‌ی n یک عدد ممکن است نتوان بهترین تقریب آن عدد را با مرتبه‌ای کمتر از n بدست آورد. مثلاً، فرض کنیم ξ تا چهار رقم اعشار مساوی 1,250 0 باشد. از این اطلاع نمیتوان مقدار ξ را تا 1 رقم اعشار دانست!

اتخاذ تعریف کلی مذکور در ۳.۴.۳ به مناسبت این گونه مشکلات است.

۳.۴.۹. تمرین

۱. بهترین مقدار تقریبی هر یک از اعداد 4,59 و 59,997 18 را تا 1، 2، 3، 4، و 5 رقم اعشار تعیین و نامساویهای قضیه‌ی ۳.۴.۶ را در مورد هر یک تحقیق کنید.

۲. مطلوبست مقدار تقریبی هر یک از اعداد ذیل تا 2 رقم اعشار، و تحقیق نامساویهای قضیه‌ی ۳.۴.۶ یا نظایر آنها در مورد هر یک از آنها:

$$\pm\, 49{,}975; \qquad \pm\, 49{,}985\,0; \qquad \pm\, 49{,}995\,00.$$
$$\pm\, 50{,}005; \qquad \pm\, 50{,}015\,000.$$

۳. میدانیم که $|\xi - 3{,}125| < 10^{-10}$. مقدار تقریبی ξ تا 2 رقم اعشار چیست؟

۴. بنا بر آنکه $\xi = 6{,}699\,500$ تا 6 رقم اعشار، مطلوبست مقادیر تقریبی ξ تا 5، 4، 3، 2، و 1 رقم اعشار.

۵. همان مسئله را در صورتی که ξ تا 6 رقم اعشار مساوی 6,688 355 باشد حل کنید.

۳.۵. مقدار درست تا m رقم با معنی. تعریف. فرض کنیم c_0 عددی صحیح و $q+1$ رقمی و n عددی طبیعی باشد، و $1 \leqslant m \leqslant q+1+n$. عبارت

$\xi = c_0{,}c_1 \dots c_n$ (درست) تا m رقم با معنی

بدین معنی است که، در عین حال،

(آ) $\xi = c_0{,}c_1 \dots c_n$ تا n رقم اعشار؛

(ب) از $q+1+n$ رقمی که در عدد $c_0{,}c_1 \dots c_n$ آمده‌اند $q+1+n-m$ رقم اول از سمت چپ صفر و رقم بعد غیر از صفر است.

مثلاً، $1/150 = 0{,}006\,667$ تا 6 رقم اعشار و تا 4 رقم با معنی.

۳.۶. تبصره و تنبیهات.

۳.۶.۱. چنانکه قبلاً تذکر دادیم، «تساویهای تقریبی» از قبیل

$$\sqrt{2} = 1{,}414,$$

$x = \xi$ تا n رقم اعشار

را نباید با تساوی به معنی منطقی خلط کرد.

رابطه‌ای مانند $\sqrt{2} = 1{,}414$ اساساً نادرست است. معمولاً، وقتی چنین عبارتی نوشته میشود مقصود اینست که طرف دوم مقدار تقریبی طرف اول است با عده‌ی ارقام بعداز ممیز. مثلاً، در مثال مذکور، تساوی را باید بدین معنی گرفت که 1,414 مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ است تا 3 رقم اعشار.

۳.۶.۲. در محاسبات تقریبی، گاه به روابطی به صورت

$$\sqrt{0{,}3} = 0{,}547 \pm 10^{-3}$$

بر میخوریم. مقصود از این رابطه اینست که

$$0{,}547 - 0{,}001 \leqslant \sqrt{0{,}3} \leqslant 0{,}547 + 0{,}001,$$

یا $0{,}548 \geqslant \sqrt{0{,}3} \geqslant 0{,}546$ — . همچنین، رابطه‌ی

$$\pi = 3{,}142 - 0{,}41 \times 10^{-3}$$

یعنی $3{,}142 - 0{,}41 \times 10^{-3} \leqslant \pi \leqslant 3{,}142$.

۳.۶.۳. جداول ریاضی (جداول لگاریتم، خطوط مثلثاتی، جذر و کعب، معکوسات اعداد، و غیره) عموماً مقادیر تقریبی را بدست میدهند. معمولاً مقادیر مندرج در یک جدول nرقمی بهترین مقدار تقریبی مرتبه‌ی n را بدست میدهند. متأسفانه، عموماً در جداول جهت تقریب را معین نمیکنند. اگر جدولی برای جذر 2 عدد 1,4142 را بدهد معلوم نیست که این عدد از گرد کردن کدام یک از اعداد

$1{,}414\,19\dots;\quad 1{,}414\,18\dots;\quad 1{,}414\,17\dots;\quad 1{,}414\,16\dots;\quad 1{,}414\,15\dots;$

$$1{,}414\,21\ldots;\quad 1{,}414\,22\ldots;\quad 1{,}414\,23\ldots;\quad 1{,}414\,24\ldots$$

حاصل شده است، بلکه، آنچه میتوان نتیجه گرفت اینست که

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,2 \pm 5\cdot 10^{-5},$$

و یا

$$1{,}414\,15 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}414\,25.$$

در بعضی جداول، این گونه نامساویها در طرف راست اکید هستند. مثلاً، رابطهی

$$\log 2 = 0{,}30\,103$$

به معنی

$$\log 2 = 0{,}301\,03 \pm 5\cdot 10^{-6}$$

است، که خود بدین معنی است:

$$0{,}301\,025 \leqslant \log 2 < 0{,}301\,035.$$

۳.۶.۴. (ممیز سَیّار). در نوشتن اعدادی که از حیث قدر مطلق بسیار بزرگ هستند، خاصه وقتی که ارقام اواخر آنها (در سمت راست) همگی صفر باشند، و نیز در نوشتن اعدادی که از حیث قدر مطلق بسیار کوچکند، روش عادی عددنویسی بکار نمیرود، بلکه این اعداد را به صورت حاصلضرب قوهای از 10 در ضریب مناسبی مینویسند. چون در این صورت وضع ممیز بر حسب قوهای از ده که اختیار میشود متغیر است، ممیز را در این گونه اعداد ممیز سیار خوانند. «عدد سیار» نمایش یک عدد است با ممیز سیار. معمولاً جزء صحیح ضریب قوهی 10 را در یک عدد سیار از 1 تا 10 میگیرند.

مثلاً، سرعت نور را بر حسب سانتیمتر در ثانیه، بجای

$$29\,977\,600\,000$$

به صورت $2{,}997\,76 \times 10^{10}$ مینویسند. همچنین، بار برقی الکترون بر حسب کولن عبارت است از

$$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,160\,2$$

ولی، به جای این عدد، $1{,}602 \times 10^{-19}$ مینویسند. بالاخره، عدد $0{,}004\,602$ — را با ممیز سیار به صورت $4{,}602 \times 10^{-3}$ — میتوان نوشت.

۳.۶.۵. در محاسبات تقریبی، بعضی نسبتها بکار میرود که از جنبهی ریاضی مبهم است. از آن جمله است نسبتهای $\#$ (یا $\approx$)، $\gg$ و $\ll$.

$a \# b$ و $a \approx b$ یعنی اختلاف a و b خیلی کم است.

$a \ll b$ یعنی a خیلی کمتر از b است، و $a \gg b$ یعنی a خیلی بیشتر از b است.

۳.۷. مقدار تقریبی سلسلههای متقارب. چون بسیاری از اعداد حقیقی به وسیلهی سلسلههای متقارب تعریف میشوند، در پایان این قسمت، توضیحات مختصری در محاسبهی مقدار تقریبی اعدادی که بدین گونه تعریف شدهاند میآوریم.

فرض کنیم عدد A با سلسله‌ی متقارب $\sum a_n$ تعریف شده باشد، یعنی

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n.$$

در عمل، ندرةً میتوان مقدار دقیق[۱] A را حساب کرد، بلکه اغلب باید به مقداری تقریبی از آن اکتفا نمود. برای این منظور، جمعکی مانند A_N از سلسله را مقدار تقریبی A میگیرند. چون بر طبق علامات معمول

$$A = A_N + R_N,$$

قدر مطلق خطائی که در این روش (اختیار کردن A_N بجای A) مرتکب میشویم $|A - A_N|$ یا $|R_N|$ است، که آن را خطای روش میخوانند. بعلاوه، برای محاسبه‌ی A_N، باید a_1، a_2، . . .، و a_N را حساب کرده با هم جمع نمود. محاسبه‌ی a_1، . . .، و a_N نیز اغلب تقریبی است، و این امر منشأ خطای دیگری (خطای محاسبه) میباشد. اگر A'_N مقدار تقریبی A_N باشد، در واقع، A'_N است که به عنوان مقدار تقریبی A اختیار میشود. قدر مطلق خطائی که بدین گونه مرتکب میشویم $|A - A'_N|$ است. چون

$$|A - A'_N| = |(A - A_N) + (A_N - A'_N)| \leqslant |A_N - A'_N| + |R_N|,$$

قدر مطلق خطا از حاصلجمع قدر مطلق خطاهای محاسبه و روش تجاوز نمیکند.

اینک فرض کنیم مقدار تقریبی A درست تا r رقم اعشار مطلوب باشد. پس از تعیین N (بر طبق راهنمائیهای آتیه)، هر یک از a_1، . . .، و a_N را تا بیش از r رقم اعشار ـ مثلاً تا m رقم اعشار $(m > r)$ ـ حساب میکنیم. از جمع کردن حاصلها، عددی اعشاری و از مرتبه‌ی m مانند A'_N بدست میآید. سپس، این عدد را به r رقم اعشار گرد میکنیم. بدین گونه، عددی اعشاری و از مرتبه‌ی r مانند A''_N حاصل میشود. برای اینکه این عدد مقدار تقریبی A تا r رقم اعشار باشد کافی است اعداد N و m چنان انتخاب شوند که

$$|A - A''_N| < 5/10^{r+1},$$

و برای برقراری این نامساوی کافی است که

$$(۱) \quad |A'_N - A''_N| + |A_N - A'_N| + |A - A_N| < 5/10^{r+1};$$

یعنی، حاصلجمع قدر مطلق خطاهای گرد کردن، محاسبه، و روش از $5/10^{r+1}$ کمتر باشد.

برای تعیین N و m بطوری که (۱) برقرار شود نمیتوان قاعده‌ای کلی ذکر کرد. توجه به توضیحات آتیه در این زمینه مفید است. در شرایط مذکور،

$$|A_N - A'_N| \leqslant 5N/10^{m+1}$$

بعلاوه، در اغلب حالات مهم، میتوان رابطه‌ای به صورت

$$|R_N| < \varepsilon_N$$

برای تحدید مانده‌ها ثابت کرد. در این صورت، برای برقراری (۱) کافی است که

$$|\text{خطای گرد کردن}| + \frac{5N}{10^{m+1}} + \varepsilon_N < \frac{5}{10^{r+1}}.$$

در عمل، ابتدا خطای گرد کردن را نادیده میگیرند، و N را چنان تعیین میکنند که ε_N از کسری

---

(۱) در واقع، «مقدار دقیق A» همان A است. منتها، در محاسبات تقریبی، این اصطلاح در مقابل مقدار تقریبی بکار میرود.

از $5/10^{r+1}$ (مثلاً از $1/10^{r+1}$) کوچکتر شود. سپس به تعیین m میپردازند، و بعد از محاسبه‌ی A'_N، خطای گرد کردن را محسوب میدارند. اگر سلسله‌ی $\sum a_n$ سریع‌التقارب[۱] باشد مقادیر نسبةً کوچکی از N و $r - m$ وافی به مقصود است.

بالاخره، بطور کلی، اگر تحدیدهائی به صورت

$$b_i < a_i < c_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant N)$$
$$S_N < R_N < T_N$$

در دست باشد، و

$$B_N = \sum_1^N b_i, \qquad C_N = \sum_1^N c_i,$$

آنگاه

$$B_N + S_N < A < C_N + T_N.$$

در این شرایط، عدد

$$\frac{1}{2}(B_N + C_N) + \frac{1}{2}(S_N + T_N)$$

از هر یک از $B_N + S_N$ و $C_N + T_N$ به A نزدیکتر است.

چنانکه دیده میشود، اساس محاسبه‌ی مقدار تقریبی سلسله‌های متقارب قواعد محاسبه با نامساویها است. کلی‌گوئی بیش از این در این باب مفید فایده‌ای نیست. مثالهای ۳.۷.۲ و ۳.۷.۳ موضح نکات سابق‌الذکر است.

۳.۷.۱. تحدید مانده‌ها. از حالات خاصی که میتوان رابطه‌ای به صورت $|R_N| < \varepsilon_N$ ثابت کرد حالات ذیل است، که در فصل ۸ دانسته شد.

I. اگر $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد و، بازاء عدد طبیعی N، از مرتبه‌ی $N + 1$ ببعد، $a_{n+1}/a_n \leqslant \alpha < 1$ آنگاه

$$0 \leqslant R_N \leqslant \frac{a_{N+1}}{1 - \alpha}. \qquad (۱)$$

II. اگر $\sum a_n$ سلسله‌ای نامنفی باشد و، بازاء عدد طبیعی N، از مرتبه‌ی $N + 1$ ببعد، $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \alpha < 1$ آنگاه

$$0 \leqslant R_N \leqslant \frac{\alpha^{N+1}}{1 - \alpha}. \qquad (۲)$$

III. در سلسله‌ی متناوب $\sum (-1)^{n-1} a_n$، اگر همواره $a_n > 0$، و رشته‌ی $\{a_n\}$ اکیداً نزولی باشد و به 0 میل کند، و A مقدار سلسله باشد، آنگاه

$$A_2 < A_4 < \cdots < A_{2n} < \cdots < A < \cdots < A_{2n+1} < \cdots < A_3 < A_1, \qquad (۳)$$
$$|R_N| = |A - A_N| < a_{N+1}. \qquad (۴)$$

---

(۱) ۳.۷.۴ دیده شود.

پس، A_{2n} یک مقدار تقریبی نقصانی A است با کمتر از a_{2n+1} تقریب، و A_{2n+1} یک مقدار تقریبی اضافی A است با کمتر از a_{2n+2} تقریب. بالاخره، چون همواره $A_{2n} < A < A_{2n+1}$ میتوان عدد $(A_{2n} + A_{2n+1})/2$ را مقدار تقریبی A گرفت، اما، در این صورت، جهت تقریب (یعنی اضافی یا نقصانی بودن آن) نامعلوم خواهد بود.

۳.۷.۲. مثال ۱. محاسبهٔ $A = \sum (10^{-n}/n^2)$ تا 5 رقم اعشار.

$$0 < R_N = \sum_{N+1} \frac{1}{10^n \cdot n^2} < \frac{1}{10^{N+1}(N+1)^2} \sum_0 \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9 \cdot 10^N (N+1)^2} = \varepsilon_N.$$

فرض کنیم

$$\varepsilon_N < \frac{1}{10^6}, \qquad \frac{5N}{10^{m+1}} < \frac{4}{10^6} \qquad (m > 5).$$

به امتحان معلوم میشود که نامساوی اول بازاء $N = 4$ برقرار است. بازاء $N = 4$، نامساوی دوم بازاء $m = 6$ برقرار است. پس، 4 جمله از آغاز سلسله را اختیار و هر یک را درست تا 6 رقم اعشار حساب میکنیم:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}100\,000 \\ a_2 &= 0{,}002\,500 \\ a_3 &= 0{,}000\,111 \\ a_4 &= 0{,}000\,006 \\ \hline A_4 &= 0{,}102\,617. \end{aligned}$$

از گرد کردن این عدد به 5 رقم اعشار عدد 0,102 62 حاصل میشود. اگر این عدد را بجای A اختیار کنیم قدر مطلق خطای گرد کردن نابیشتر از $3/10^6$ است (۳.۳.۵ ملاحظه شود). بعلاوه، چون مقادیر a_1 و a_2 دقیق است، قدر مطلق خطای محاسبه نابیشتر از $(5/10^7) \times 2$ یا $1/10^6$ میباشد. پس، قدر مطلق خطای ناشی از اختیار کردن 0,102 62 بجای A نابیشتر است از

$$\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{3}{10^6} = \frac{5}{10^6}.$$

بالنتیجه،

$A = 0{,}102\,62$ تا 5 رقم اعشار.

پس از تعیین N و m، میتوان محاسبه را چنین ادامه داد:

$$\begin{aligned} 0{,}100\,000 &= a_1 = 0{,}100\,000 \\ 0{,}002\,500 &= a_2 = 0{,}002\,500 \\ 0{,}000\,111 &< a_3 < 0{,}000\,112 \\ 0{,}000\,006 &< a_4 < 0{,}000\,007 \\ \hline 0{,}102\,617 &< A_4 < 0{,}102\,619 \end{aligned}$$

بعلاوه،

$$0 < R_4 < \frac{1}{9 \times 10^4 \times 5^2} < 0{,}000\,001.$$

پس،

$$0{,}102\,617 < A < 0{,}102\,620. \qquad (۱)$$

از اینجا معلوم است که

$$| A - 0{,}102\,62 | < 5/10^6. \qquad (۲)$$

البته، اطلاعی که (۱) از A میدهد بیش از اطلاعی است که (۲) از آن میدهد، زیرا، آنچه از (۲) میتوان نتیجه گرفت اینست که $0{,}102\,615 < A < 0{,}102\,625$.

۳.۷.۳. مثال ۲. محاسبه‌ی مقدار تقریبی درست e تا 5 رقم اعشار.

سلسله‌ی $\sum\limits_0 a_n = \sum\limits_0 (1/n!)$ را، که مقدارش مساوی e است، اختیار میکنیم. بنا بر ۷.۲.۳ : ۸،

$$0 < R_N < \frac{1}{N \cdot N!}.$$

اینک، اولاً، N را چنان اختیار میکنیم که $1/(N \cdot N!) < 1/10^6$. این کار آسان است:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1; & a_1 &= 1;\\
a_2 &= a_1/2 = 0{,}5; & a_3 &= a_2/3 < 0{,}2;\\
a_4 &= a_3/4 < 0{,}05; & a_5 &= a_4/5 < 0{,}01;\\
a_6 &= a_5/6 < 0{,}002; & a_7 &= a_6/7 < 0{,}000\,3;\\
a_8 &= a_7/8 < 0{,}000\,04; & a_9 &= a_8/9 < 0{,}000\,005.
\end{aligned}$$

چنانکه دیده میشود، اگر $N = 9$ آنگاه

$$R_N < \frac{1}{N \cdot N!} = \frac{a_9}{9} < 0{,}000\,000\,6.$$

پس، 10 جمله از آغاز سلسله را اختیار میکنیم. اینک باید مقادیر تقریبی مناسبی از این جمله‌ها را اختیار کرد. چون $a_0 + a_1 + a_2$ دقیقاً مساوی 2,5 است، تقریب متوجه 7 جمله‌ی دیگر خواهد بود. اسهل آنست که برای هر یک از این جمله‌ها مقادیری تقریبی تا 7 رقم اعشار بر طبق تعریف ۳.۴.۳ بدست آوریم. صورت محاسبه در قسمت فوقانی صفحه‌ی ۶۰۰ آمده است. چنانکه دیده میشود،

$$2{,}718\,281\,2 < e < 2{,}718\,282\,5. \qquad (۱)$$

چون تفاضل اعداد واقع در طرفین مساوی 0,000 001 3 است، به اصطلاح مذکور در ۳.۴.۳ عمل تمام است. از طرف دیگر، از نامساوی (۱) معلوم است که

$e = 2{,}718\,28$ درست تا 5 رقم اعشار.

۳.۷.۴. تبصره. مقداری از N که بازاء آن $| R_N |$ از عدد مثبت معینی کمتر باشد بستگی به «سرعت» تقارب سلسله دارد. اگر سلسله «سریع‌التقارب» باشد، یعنی جمله‌هایش به سرعت کوچک شوند[1] (مانند سلسله‌های امثله‌ی ۳.۷.۲ و ۳.۷.۳) مقداری نسبةً کوچک از N وافی به مقصود است، و به عبارت دیگر، با اختیار کردن تعدادی نسبةً قلیل از جمله‌های آغاز سلسله

(۱) این اصطلاحات توصیفی و خالی از دقت است، و مفاهیم «سریع‌التقارب» و «بطیءالتقارب» جنبه‌ی نسبی دارند.

$$\begin{aligned}
1{,}000\,000\,0 &= a_0 = 1{,}000\,000\,0\\
1{,}000\,000\,0 &= a_1 = 1{,}000\,000\,0\\
0{,}500\,000\,0 &= a_2 = 0{,}500\,000\,0\\
0{,}166\,666\,6 &< a_3 < 0{,}166\,666\,7\\
0{,}041\,666\,6 &< a_4 < 0{,}041\,666\,7\\
0{,}008\,333\,3 &< a_5 < 0{,}008\,333\,4\\
0{,}001\,388\,8 &< a_6 < 0{,}001\,388\,9\\
0{,}000\,198\,4 &< a_7 < 0{,}000\,198\,5\\
0{,}000\,024\,8 &< a_8 < 0{,}000\,024\,9\\
0{,}000\,002\,7 &\underline{< a_9 <} 0{,}000\,002\,8\\
2{,}718\,281\,2 &< A_9 < 2{,}718\,281\,9.\\
0{,}000\,000\,0 &\underline{< R_9 <} 0{,}000\,000\,6\\
2{,}718\,281\,2 &< \;e\; < 2{,}718\,282\,5
\end{aligned}$$

میتوان مقداری از آن را با تقریب کافی بدست آورد. در غیر این صورت، مقدار N کما بیش بزرگ است، و حتی ممکن است به حدی بزرگ باشد که عملاً محاسبه‌ی مقدار سلسله را به طریق مذکور غیر ممکن سازد. تأمل در جدول صفحه‌ی ۶0۱ برای توجه یافتن به رفتار سلسله‌های متقارب از لحاظ سرعت و بطؤ تقارب آنها مفید است.

مثلاً، از جدول معلوم است که سلسله‌ی $\sum (1/n^{100})$ در آغاز بسیار سریع‌التقارب است: برای محاسبه‌ی مقدار سلسله تا 10 رقم اعشار جمله‌ی اول آن و تا 100 رقم اعشار 10 جمله‌ی آن کافی است. اما، پس از آن، تقاربش بطیء میشود، چنانکه اگر مقدار آن را تا 1 000 رقم اعشار بخواهیم باید $1{,}213 \times 10^{10}$ جمله از آن را حساب کنیم.

۳.۸. تمرین

۱. مطلوبست مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ با 1/7 تقریب.

۲. بنا بر آنکه $\text{ع} = (4a^2/b) - \sqrt{a^2+b^2}$ و تحدیدهای

$$3{,}17 < a < 3{,}18, \qquad 1{,}31 < b < 1{,}32$$

در دست باشد تحدیدی از ع بدست آورید.

۳. در سلسله‌ی

$$\sum_0 a_n = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots,$$

ثابت کنید که

$$R_n < 2q^{n^2}/(1 - q^{2n+1}).$$

بازاء $q = 0{,}1$ مقدار سلسله را تا 24 رقم اعشار بدست آورید[1].

---

(1) بازاء $q = 0{,}1$، سلسله سریع‌التقارب است. پنج جمله‌ی اول آن مقدارش را تا 24 رقم اعشار میدهند. اما، بازاء $q = 0{,}9$، هفت جمله‌ی آن مقدارش را تا 2 رقم اعشار میدهند.

جدولی برای نمایاندن سرعت و بطؤ تقارب سلسله‌ها[1]

(آ) $\sum_{3} \frac{1}{n \log n\, (\log \log n)^2}$. (ب) $\sum_{2} \frac{1}{n\, (\log n)^2}$. (پ) $\sum_{1} \frac{1}{n^s}$. (ت) $\sum_{0} x^n$.

(ث) $\sum_{0} \frac{1}{n!}$. (ج) $\sum_{1} \frac{1}{n^n}$. (چ) $\sum_{0} x^{n^2}$. (ح) $\sum_{1} n^{-n^n}$.

سلسله	مقدار	عده‌ی تقریبی جمله‌های لازم برای محاسبه‌ی مقدار سلسله تا n رقم اعشار			
		$n = 2$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1\,000$
آ	38,43	$10^{3,14\times10^{86}}$	—	—	—
ب	2,11	$7,23 \times 10^{86}$	$10^{8,6\times10^{9}}$	—	—
پ $(s = 1,1)$	10,58	10^{33}	10^{113}	10^{1013}	10^{10013}
پ $(s = 1,5)$	2,612	160 000	16×10^{20}	16×10^{200}	16×10^{2000}
پ $(s = 2)$	$\pi^2/6 = 1,64\,493$	200	2×10^{10}	2×10^{100}	2×10^{1000}
پ $(s = 10)$	1,000 984 6	1	11	$1,093 \times 10^{11}$	$1,093 \times 10^{111}$
پ $(s = 100)$	$1 + (1,27 \times 10^{-30})$	1	1	10	$1,213 \times 10^{10}$
ت $(x = 0,9)$	10	73	247	2 214	21 883
ت $(x = 0,3)$	2	9	36	336	3 325
ت $(x = 0,1)$	10/9	3	11	101	1 001
ث	$e = 2,718\,282$	5	13	70	440
ج	1,291 286	3	10	57	386
چ $(x = 0,9)$	3,234 989	8	15	46	148
چ $(x = 0,5)$	1,564 468	3	6	19	58
چ $(x = 0,1)$	1,100 100	2	4	11	32
ح	1,062 500	2	2	3	4

(۱) مستخرج از کتاب مراتب بینهایت، تألیف هاردی. نام و نشان کتاب اینست:
Hardy, G. H., *Orders of Infinity*, Cambridge (University Press), 1924.

۴. در سلسله‌ی متناوب $\sum_0 (-1)^n a_n$، همواره $a_n > 0$ و $a_{n+1} \leqslant a_n$، و $\lim a_n = 0$.
ثابت کنید که

$$\left| R_n - \frac{1}{2}(-1)^{n+1} a_{n+1} \right| < \frac{1}{2} a_{n+1}.$$

۵. سلسله‌ی متناوب $\sum_0 a_n$ چنین تعریف شده است:

$$a_0 = 0; \qquad a_n = (-1)^{n+1}/n^2 \qquad (n \geqslant 1).$$

مقدار سلسله را تا 3 رقم اعشار حساب کنید.

۶. مطلوبست مقدار تقریبی سلسله‌ی $\sum (-1)^{n-1}/n^4$ درست تا 3 رقم اعشار.

۷. ثابت کنید که بازاء هر عدد طبیعی k،

$$\sum_1^k \frac{1}{n^2} + \frac{1}{k+1} < \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < \sum_1^k \frac{1}{n^2} + \frac{1}{k}.$$

۸. در سلسله‌ی لگاریتمی، ثابت کنید که بازاء هر عدد طبیعی n،

$$A_{2n-1} - \frac{1}{4n-1} < A < A_{2n} + \frac{1}{4n+1},$$

و مقدار سلسله را تا 3 رقم اعشار حساب کنید.

۹. مقدار سلسله‌ی $\sum_0 \frac{(-1)^n}{n!}$ را تا ده رقم اعشار حساب کنید (مقدار سلسله $1/e$ است).

۱۰. در سلسله‌ی $1 + \sum \frac{2^n - 1}{n \cdot n!}$، ثابت کنید که

$$0 < R_{10} < 5{,}8 \times 10^{-6}.$$

فصل ۱ ض

زبان منطق

در فصل ۱ با بعضی از اصول منطقی آشنا شدیم، ولی، تا کنون ـ گذشته از بعضی مواردی که $\sim$، $\&$، $\vee$، و $\equiv$ را بکار بردیم ـ از استعمال زبان منطق احتراز کردیم. نظر به فواید بیشمار این زبان، در فصل حاضر اصول آن را میآوریم.

منطق مقدماتی را میتوان به دو مبحث تقسیم کرد: حساب گزاره‌ها، که از خواص رابطهای گزاره‌ای بحث میکند، و حساب محمولات، که از تحلیل گزاره‌ها به اجزائی بسیطتر از گزاره بحث مینماید. مندرجات فصل حاضر به همین طریق تقسیم شده است.

۱ § حساب گزاره‌ها: کلیات

۱.۱. رابطهای گزاره‌ای و فرمولها. حروف p، q، r، و غیره را برای نامیدن گزاره‌های دلخواه بکار میبریم، و آنها را متغیرهای گزاره‌ای نامیم. در مسائل، گزاره‌های مشخص را به حروف بزرگ اوایل الفبای لاتینی نمایش میدهیم.

رابطهای گزاره‌ای و ترکیبات منطقی را در ۲ § فصل ۱ شناختیم. در منطق

$\sim$ (ناقض)　　بجای　　چنین نیست که

$\&$ (عاطف)　　بجای　　و

$\vee$ (فاصل)　　بجای　　یا (منطقی)

بکار میرود، و ترکیب دوشرطی با $\equiv$ بیان میشود. برای نوشتن ترکیبات شرطی، علامت $\supset$، موسوم به نعل، را بکار میبریم، و عبارت

اگر p آنگاه q

را به صورت

$$p \supset q$$

مینویسیم[1] (ملاحظه کنید که مقدم در طرف چپ و تالی در سمت راست نعل نوشته میشود).

از رابطهای گزاره‌ای، $\sim$ علامت یک عمل یکتائی است؛ گزاره‌ای را که $\sim$ در آن عمل میکند دامنه‌ی عمل آن خوانند. هر یک از سایرین علامت یک عمل دوتائی است، و دو گزاره‌ای را که در آنها عمل میکند دامنه‌های عمل آن نامند. متغیرهای گزاره‌ای را و نیز حاصلهای اعمال مذکور را بر این متغیرها فرمولهای حساب گزاره‌ها یا، مختصراً (تا در حساب گزاره‌ها هستیم) فرمولها میخوانیم. فرمولهای دلخواه را به حروف P، Q، R، و S نمایش

---

(۱) علامات «$p \to q$» و «$p \Rightarrow q$» نیز به همین معنی بکار میروند.

میدهیم. مثلاً، هر یک از p، $q \vee p$، r ~، و $r \supset p$ یک فرمول است. بر طبق اصول کلی مربوط به اعمال (۸۰۲۰۲ : ۳)، دامنه‌های اعمال را در یک فرمول، عنداللزوم باید با پرانتز مشخص کرد تا از ورود عبارات بیمعنی در بحث جلوگیری شود. مثلاً، عبارت $\sim p \vee q \supset r$ بیمعنی است، زیرا، دامنه‌های اعمال ~، $\vee$، و $\supset$ در آن مشخص نیست، اما، عبارت $(\sim p) \vee (q \supset r)$ یک فرمول است.

فرمول اخیر سه متغیر گزاره‌ای سازا دارد که عبارتند از p، q، و r، و فرمول مذکور متدرجاً، با طی مراحل ذیل، از متغیرهای سازایش ساخته شده است:

(۱) ساختن نقیض p، یا $\sim p$،

(۲) ساختن ترکیب شرطی q با r، یا $q \supset r$،

(۳) ساختن ترکیب فصلی فرمولهای حاصل در مراحل (۱) و (۲).

رابطی را که در آخرین مرحله‌ی ساختن یک فرمول از متغیرهای گزاره‌ای سازای آن بکار میرود (فاصل در مثال فوق) رابط اصلی آن فرمول نامیم. تشخیص دادن رابط اصلی یک فرمول در فهم ساختمان آن اهمیت تمام دارد.

۱۰۱۰۱. نمونه‌ها. در یک فرمول، اگر متغیرهای گزاره‌ای سازای آن را یکنواخت[۱] به گزاره‌های مشخص تبدیل کنیم گزاره‌ای حاصل میشود که آن را یک نمونه‌ی آن فرمول نامند. مثلاً، گزاره‌ی ذیل یک نمونه‌ی فرمول $(\sim p) \vee (q \supset r)$ است:

حسن نمیآید یا اگر باران بیاید 5 فرد است.

جمیع نمونه‌های یک فرمول دارای یک ساختمان یا، به اصطلاح، یک صورت منطقی هستند، که با آن فرمول مشخص میشود.

۱۰۱۰۲. تمرین

۰۱ در هر یک از فرمولهای ذیل، اولاً مراحل ساختن فرمول را از متغیرهای گزاره‌ای سازای آن توضیح دهید، و رابط اصلی فرمول را تعیین کنید؛ ثانیاً سه نمونه از هر فرمول بیاورید، و یکسان بودن ساختمان آنها را توضیح دهید:

(آ) $(\sim p) \,\&\, r.$ (ب) $\sim (p \,\&\, r).$

(پ) $(\sim p) \supset q.$ (ت) $\sim (p \supset q).$

(ث) $p \supset (\sim q).$ (ج) $(\sim p) \supset (\sim q).$

(چ) $p \,\&\, (q \equiv r).$ (ح) $(p \,\&\, q) \equiv r.$

(خ) $(\sim p) \,\&\, (q \supset r).$ (د) $((\sim p) \,\&\, q) \supset r.$

۱۰۲. اختصار در تحریر. در منطق، تدابیر و قراردادهائی برای مشخص کردن دامنه‌های اعمال بدون نیاز به پرانتز هست. قراردادهای ساده‌ی ذیل برای حاجت ما کافی است.

I. دامنه‌ی یک عمل یکتائی را فقط و فقط وقتی در پرانتز قرار میدهیم که حاصل یک

---

(۱) ذیل صفحه‌ی ۱۸ ملاحظه شود.

عمل دوتائی باشد.

پس، نقیض $p \,\&\, q$ را باید $\sim (p \,\&\, q)$ نوشت، اما نقیض $\sim p$ را، بجای $\sim (\sim p)$، مختصراً $\sim \sim p$، و نقیض $\sim (p \,\&\, q)$ را، بجای $\sim (\sim (p \,\&\, q))$، مختصراً $\sim \sim (p \,\&\, q)$ مینویسیم.

II. اگر دامنه‌ی عمل یک رابط دوتائی در طرفی حاصل یک عمل یکتائی باشد آن را در پرانتز قرار نمیدهیم.

پس ترکیب عطفی $\sim p$ را با q، بجای $(\sim p) \,\&\, q$، مختصراً $\sim p \,\&\, q$ مینویسیم[1]؛ و ترکیب عطفی $\sim p$ را با $\sim q$، بجای $(\sim p) \,\&\, (\sim q)$، $\sim p \,\&\, \sim q$؛ و بالاخره، ترکیب شرطی $\sim (p \,\&\, q)$ را با r بجای $(\sim (p \,\&\, q)) \supset r$، $\sim (p \,\&\, q) \supset r$ مینویسیم.

III. عباراتی از قبیل $P \,\&\, Q \,\&\, R$ و $P \vee Q \vee R$ را، که به خودی خود بیمعنی هستند، بر طبق قرارداد الحاق به چپ (۸.۲.۳ : ۳)، بترتیب به معنی $(P \,\&\, Q) \,\&\, R$ و $(P \vee Q) \vee R$ بکار میبریم. تعمیم آسان است.

۱.۲.۱. تمرین

۱. در هر زوج از فرمولهای ذیل، فرمول دوم صورت اختصاری فرمول اول است. چگونگی تبدیل اولی را به دومی بر طبق قراردادهای سه‌گانه توضیح دهید.

(آ) $\begin{cases}(\sim p) \supset (q \equiv r),\\ \sim p \supset (q \equiv r).\end{cases}$

(ب) $\begin{cases}(\sim p) \,\&\, (q \supset (\sim r)),\\ \sim p \,\&\, (q \supset \sim r).\end{cases}$

(پ) $\begin{cases}((p \supset q) \,\&\, (p' \supset q')) \,\&\, (p'' \supset q''),\\ (p \supset q) \,\&\, (p' \supset q') \,\&\, (p'' \supset q'').\end{cases}$

(ت) $\begin{cases}(((\sim p) \vee (\sim q)) \vee (\sim r)) \vee (\sim s),\\ \sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s.\end{cases}$

(ث) $\begin{cases}((\sim p) \supset (q \,\&\, r)) \supset (\sim (r \vee (\sim s))),\\ (\sim p \supset (q \,\&\, r)) \supset \sim (r \vee \sim s).\end{cases}$

(ج) $\begin{cases}(((\sim p) \,\&\, (\sim p)) \,\&\, (\sim q)) \supset ((p' \vee q') \vee (\sim r')),\\ (\sim p \,\&\, \sim p \,\&\, \sim q) \supset (p' \vee q' \vee \sim r').\end{cases}$

۱.۳. ترجمه‌ی ترکیبات منطقی فارسی به زبان منطق. به وسیله‌ی نکات سابق‌الذکر میتوان ترکیبات منطقی گزاره‌های فارسی را به زبان منطق ترجمه کرد. برای این منظور، باید گزاره‌های سازای ترکیب مورد نظر و رابط اصلی آن را تشخیص داد، و از رابط

---

(۱) با $-a+b$ در جبر مقایسه کنید.

اصلی شروع کرده آن ترکیب را متدرجاً به روابط گزاره‌ای و گزاره‌های سازایش تحلیل نمود، و به وسیله‌ی حروف و علامات نوشت. در تحلیل به گزاره‌های سازا، باید اختصارات متداول در زبان فارسی را از میان برداشت.

۱.۳.۱. امثله

(آ). گزاره‌ی

(۱) شرط لازم و کافی برای آنکه $\alpha = \beta$ آنست که $\alpha \subseteq \beta$ و $\beta \subseteq \alpha$

ترکیبی است دوشرطی (رابط اصلی آن $\Leftrightarrow$ است)، که یک مؤلفه‌اش $\alpha = \beta$ است، و مؤلفه‌ی دیگرش «$\alpha \subseteq \beta$ و $\beta \subseteq \alpha$». گزاره‌های سازای (۱) عبارتند از گزاره‌های $\alpha = \beta$، $\alpha \subseteq \beta$، و $\beta \subseteq \alpha$؛ برای اختصار، آنها را، بترتیب، A، B، و C میخوانیم. در این صورت، گزاره‌ی (۱) ترکیب دوشرطی A با $B \& C$ خواهد بود، و به زبان منطق چنین نوشته میشود:

$$A \Leftrightarrow (B \& C). \qquad (۲)$$

معمولاً، گزاره‌های ریاضی را به صورت علامتی خود باقی میگذاریم. در این صورت، گزاره‌ی (۲) چنین نوشته میشود:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow (\alpha \subseteq \beta \& \beta \subseteq \alpha).$$

(ب). گزاره‌ی

(۱) اگر چنین نیست که حسن کچل و احول است حسن کچل نیست یا احول نیست.

ترکیبی است شرطی با مقدم

(۲) چنین نیست که (حسن کچل است و حسن احول است)

و تالی

(۳) چنین نیست که حسن کچل است یا چنین نیست که حسن احول است.

گزاره‌های سازای (۱) عبارتند از گزاره‌های «حسن کچل است» و «حسن احول است»، که آنها را، بترتیب، A و B مینامیم. در این صورت، (۲) به صورت $\sim (A \& B)$ و (۳) به صورت $\sim A \vee \sim B$ نوشته میشود. پس، ترجمه‌ی (۱) چنین است:

$$\sim (A \& B) \supset (\sim A \vee \sim B).$$

(پ). گزاره‌ی

(۱) در مثلث KLM، اگر $KL = KM$ آنگاه $\angle M = \angle L$، و بالعکس.

چنانکه میدانیم (۲.۵.۳ : ۱) بدین معنی است.

(۲) اگر KLM مثلث است آنگاه (اگر $KL = KM$ آنگاه $\angle M = \angle L$ و اگر $\angle M = \angle L$ آنگاه $KL = KM$)

اگر گزاره‌ی «KLM مثلث است» را A بنامیم، گزاره‌ی (۲) را میتوان به هر یک از دو صورت ذیل ترجمه کرد:

$$A \supset [(KL = KM \supset \angle M = \angle L) \& (\angle M = \angle L \supset KL = KM)];$$

$$A \supset (KL = KM \Leftrightarrow \angle M = \angle L).$$

۱.۳.۲. تمرین

۱. گزاره‌های ذیل را به زبان منطق ترجمه کنید:

(آ). حسن نمیآید ولی حسین میآید.

(ب). ترسم که اشک در غم ما پرده در شود؛ وین راز سر به مهر به عالم سمر شود.

(پ). اگر باران بیاید حسن نمیآید.

(ت). کتابش را میدهم به شرط آنکه قلم مرا بدهد.

(ث). اگر A مجموعک حقیقی B باشد A مساوی B نیست.

(ج). اگر a فرد و اول باشد از 2 بزرگتر است.

(چ). اگر زوایای α و β قائمه باشند با هم متساویند (راهنمائی: اگر α قائمه باشد و β قائمه باشد آنگاه. . .).

(ح). او را نمیبخشم مگر اینکه عذرخواهی کند[1].

(خ). خواه علی بیاید یا نیاید 5 فرد است (راهنمائی: اگر علی بیاید یا علی نیاید آنگاه. . .).

(د). گرم تو زهر دهی چون عسل بیاشامم، بشرط آنکه بدست رقیب نسپاری.

(ذ). اگر a مساوی b نباشد a کوچکتر از b یا b کوچکتر از a است.

(ر). اگر a کوچکتر از b باشد نه مساوی b است نه بزرگتر از آن.

(ز). در دو دایره‌ی مساوی O و O'، شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{AB} = \overline{CD}$ آنست که $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

(ژ). هوا سرد است و باران میآید، ولی اگر باران قطع شود و حسن بیاید به سینما یا به تئاتر خواهیم رفت.

۲ § حساب گزاره‌ها: روش جداول ارزش

۲.۱. ارزشدهی در یک فرمول. ارزشهای نقیض و ترکیبات دوتائی چهارگانه را در ۲ § فصل ۱ گفتیم، و آن مطالب اساسی را باید حاضرالذهن داشت. برای اختصار، «راست» را «t» و «دروغ» را «f» میخوانیم. بطور کلی، اگر P فرمول دلخواهی باشد، مقصود از ارزشدهی در P یا ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای سازای P قائل شدن به ارزشهای معینی است برای جمیع متغیرهای گزاره‌ای سازای آن. مثلاً، در فرمول $p \,\&\, q$، اگر برای p ارزش t و برای q ارزش f قائل شویم، دستگاه «t, f»، یک ارزشدهی در $p \,\&\, q$ خواهد بود.

تعیین اقسام ممکنه‌ی ارزشدهی در یک فرمول آسان است. این اقسام را با نظم و ترتیبی خاص در سطور متوالی جدولی ضبط میکنند. اگر فرمولی فقط یک متغیر گزاره‌ای سازا، مثلاً p، داشته باشد دو ارزشدهی در آن ممکن است و بس: یکی اینکه p ارزش t داشته باشد (یعنی راست باشد)، و دیگر اینکه p ارزش f داشته باشد. این ارزشدهیها، چنانکه در جدول مقابل دیده میشود، در دو سطر جدول، تحت عنوان p، ضبط شده‌اند.

p	$\sim p$
t	f
f	t

اگر فرمولی دارای دو متغیر گزاره‌ای سازا، مثلاً p و q، باشد، اقسام

---

(۱) «P مگر آنکه Q» یعنی $P \supset \sim Q$ (۲.۵.۶ : ۱ ملاحظه شود).

ممکنه‌ی ارزشدهی در آن ــ چنانکه با رسم نمودار شجری معلوم میشود ــ 2^2 یا 4 است، که عبارتند از چهار دستگاه

$$t, t; \qquad t, f; \qquad f, t; \qquad f, f;$$

که آنها را، به طریقی که در جداول ذیل ملاحظه میشود، در چهار سطر جدول، تحت عناوین

p	q	$p \vee q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

p	q	$p \,\&\, q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

p	q	$p \equiv q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

p	q	$p \supset q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

p و q، درج میکنند. همچنین، اگر فرمولی دارای سه متغیر گزاره‌ای سازای p، q، و r باشد، 2^3 یا 8 ارزشدهی در آن ممکن است، که طریق ضبط آنها در جدول بالای صفحه‌ی ۶۱۰ مشاهده میشود.

۲.۲. جدول ارزش یک فرمول. در جدول صفحه‌ی ۶۵۷ و جداول فوق، در ستون آخر، ارزشهای راستی فرمولهای $\sim p$، $p \,\&\, q$، $p \vee q$، $p \supset q$، و $p \equiv q$ بر طبق تعریفات مذکور در فصل ۱ مندرج است. به خاطر دارید که ارزشها را چنان تعریف کردیم که ارزش راستی ترکیبات مذکور بر حسب ارزش راستی گزاره یا گزاره‌های سازای این ترکیبات و بدون **مداخله‌ی معنی این گزاره‌ها** مشخص است. از اینجا با اندک تأملی معلوم میشود که ارزش راستی هر فرمول صرفاً با ارزشهای راستی متغیرهای گزاره‌ای سازای آن مشخص میشود (مثال آتیه چگونگی این حکم ساده را به خوبی آشکار میسازد).

بطور کلی، به روشی ساده و ماشینی میتوان جدولی مشتمل بر ارزشهای یک فرمول بازاء اقسام ممکنه‌ی ارزشدهیها در آن تنظیم کرد. این جدول را، که ارزشهای فرمول مورد نظر

---

(۱) ذیل صفحه‌ی ۱۳۶ ملاحظه شود.

در ستون آخر آن میآیند، جدول ارزش آن فرمول نامند.

۲.۲.۱. امثله

(آ). فرمول ذیل را، که دو متغیر سازا دارد، اختیار میکنیم:

$$P: \qquad \sim (p \,\&\, q) \supset \sim q.$$

دو ستون اول (تحت عناوین p و q) به طریقی که گفته شد تنظیم میشود. اینک ملاحظه میکنیم که P ترکیبی است شرطی با مقدم $\sim (p \,\&\, q)$ و تالی $\sim q$. برای تعیین ارزش P باید قبلاً ارزش این دو فرمول را تعیین کرد. ارزش $p \,\&\, q$ را در هر سطر جدول، بر طبق قاعده‌ی تعیین ارزش ترکیب عطفی، تعیین و در ستون سوم درج میکنیم (مثلاً، در سطر اول، که p ارزش t و q نیز ارزش t دارد، $p \,\&\, q$ نیز ارزش t دارد؛ این ارزش را در سطر اول جدول، زیر $p \,\&\, q$، درج کرده‌ایم). اینک ارزش $\sim (p \,\&\, q)$ را از روی ارزشهای مندرج

p	q	$p \,\&\, q$	$\sim (p \,\&\, q)$	$\sim q$	P
t	t	t	f	f	t
t	f	f	t	t	t
f	t	f	t	f	f
f	f	f	t	t	t

در ستون سوم، بر طبق قاعده‌ی تعیین ارزش نقیض تعیین و در ستون چهارم ضبط مینمائیم. ستون پنجم به همین قیاس از روی ستون دوم تنظیم میشود. حال، ارزشهای مقدم P (در ستون چهارم) و تالی آن (در ستون پنجم) در دست است. پس، در هر سطر جدول، ارزش P را بر طبق تعریف ارزش ترکیب شرطی تعیین و در ستون ششم ضبط میکنیم. جدول حاصل جدول ارزش P است.

بر طبق سطر اول این جدول، اگر در فرمول P بجای p گزاره‌ای راست (معنی آن هرچه باشد) و بجای q نیز گزاره‌ای راست قرار دهیم P به گزاره‌ای راست مبدل میشود. همچنین، بر طبق سطر سوم، فرمول P بازاءِ هر گزاره‌ی دروغ بجای p و هر گزاره‌ی راست بجای q دروغ است، و غیره.

(ب). بسا حاجت می‌افتد به تعیین ارزشهای راستی چند فرمول بر حسب اقسام ممکنه‌ی ارزشدهیها به جمیع متغیرهای گزاره‌ای سازای آنها. برای این منظور، کافی است جدولی (جدول مشترک ارزش آن فرمولها) بسازیم، و ارزشهای هر فرمول را به شرح سابق‌الذکر در آن درج کنیم. مثلاً، اگر جدول مشترک ارزش فرمولهای $p \supset q$، $q \supset r$، و $p \supset r$ مطلوب باشد سه ستون‌اول را با متغیرهای گزاره‌ای p، q، و r تنظیم میکنیم، و سپس ارزشهای راستی هر یک از سه فرمول مذکور را در آن درج مینمائیم (صفحه‌ی ۶۱۰). بدیهی است که، در مورد هر فرمول، متغیرهائی که در آن نیامده‌اند تأثیری در ارزش راستی آن ندارند، بلکه فقط جدول

ارزش خاص آن را منشعب میکنند.

p	q	r	$p\supset q$	$q\supset r$	$p\supset r$
t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	f
t	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	f
f	t	t	t	t	t
f	t	f	t	f	t
f	f	t	t	t	t
f	f	f	t	t	t

۲.۲.۲. تبصره. در فصل ۲ ض خواهیم دید که اگر ارزشهای یک فرمول بر حسب جمیع ارزشدهیها در آن در دست باشد میتوان آن فرمول (و به عبارت اصح، فرمولی معادل آن) را نوشت.

۲.۲.۳. تمرین

۱. جدول ارزش هر یک از فرمولهای مذکور در ۱ : ۱.۱.۲ را تنظیم کنید.

۲. جدول ارزش هر یک از فرمولهای ذیل را تنظیم کنید:

(آ) $p \vee \sim p.$
(ب) $p \;\&\sim p.$
(پ) $(p \;\&\; p) \supset\!\subset p.$
(ت) $(p \vee p) \supset\!\subset p.$
(ث) $p \supset\!\subset [p \;\&\; (q \vee \sim q)].$
(ج) $p \supset\!\subset [p \vee (q \;\&\sim q)].$

۳. بهرام و جواد و سعید، که متهم به تقلب در مواد غذائی هستند، به شرح ذیل در دادگاه شهادت داده‌اند:

بهرام: جواد مقصر است و سعید بی تقصیر است.
جواد: اگر بهرام مقصر است سعید هم مقصر است.
سعید: من بی تقصیرم ولی حد اقل یکی از بهرام و جواد مقصر است.

گزاره‌های «بهرام بی تقصیر است»، «جواد بی تقصیر است»، و «سعید بی تقصیر است» را بترتیب به A، B، و C نمایش میدهیم، و مثلاً «جواد مقصر است» را نقیض «جواد بی تقصیر است» میشماریم.

(آ). جدول مشترک ارزش سه شهادت را تنظیم کنید.

(ب). اگر هر سه شاهد بی تقصیر باشند کدام یک از آنها شهادت دروغ داده است؟

(پ). اگر آنکه مقصر است شهادت دروغ و آنکه بی تقصیر است شهادت راست داده باشد مقصر کیست و بی تقصیر کدام؟

۳ § حساب گزاره‌ها: راستگوها

۳۰۱. فرمولهای راستگو و دروغگو. فرمولی را که همواره ـ یعنی بازاء اقسام ممکنه‌ی ارزشدهیها در آن ـ راست باشد راستگو، و فرمولی را که همواره دروغ باشد دروغگو خوانیم. مثلاً، فرمول $p \vee \sim p$ راستگو، و فرمول $p \,\&\, \sim p$ دروغگو است، زیرا، اعم از اینکه p راست یا دروغ باشد، یکی از p و $\sim p$ راست و دیگری دروغ است. در تمرین ۲ : ۲۰۲۰۳، فرمولهای (پ) ـ (ج) راستگو هستند. واضح است که نقیض هر راستگو دروغگو است، و بالعکس.

بنا بر تعریف مذکور، برای تشخیص اینکه فرمول P راستگو هست یا نه کافی است جدول ارزش P را تنظیم کنیم؛ اگر در ستون آخر جز t نیاید فرمول P راستگو است، و الا فلا.

راستگوها از ساده‌ترین و مهمترین قوانین منطق[1] و از ارکان استنتاج هستند، و دروغگوها از تناقضات منطقی میباشند. دروغگوی $p \,\&\, \sim p$ تناقض معروف به اجتماع نقیضین است.

چون ارزش راستی یک راستگو از ارزشهای راستی متغیرهای گزاره‌ای سازای آن مستقل است، بدیهی است که

۳۰۱۰۱. قاعده‌ی تبدیل متغیرهای گزاره‌ای در راستگوها (علامت اختصاری: تبمغ). در یک راستگو، اگر متغیرهای گزاره‌ای سازای آن را یکنواخت به فرمولهای دلخواهی تبدیل کنیم فرمول جدید نیز راستگو است.

به وسیله‌ی این قاعده، از هر راستگو میتوان راستگوهای بیشمار استخراج کرد. مثلاً، به وسیله‌ی جدول ارزش میتوان معلوم کرد که فرمول $(p \vee q) \supset p$ راستگو است. پس، اگر P و Q دو فرمول دلخواه باشند، فرمول $(P \vee Q) \supset P$ نیز راستگو است.

به عنوان تمرین، ثابت کنید که فرمولهای ۳۰۱۰۲ ـ ۳۰۱۰۱۰ ذیل راستگو هستند.

(۳۰۱۰۲) $\sim\sim P \equiv P.$

(۳۰۱۰۳) $(P \vee Q) \equiv (\sim P \supset Q).$

(۳۰۱۰۴) $(P \supset Q) \equiv (\sim P \vee Q).$

(۳۰۱۰۵) $\sim (P \supset Q) \equiv (P \,\&\, \sim Q).$

(۳۰۱۰۶) $(P \equiv Q) \equiv [(P \supset Q) \,\&\, (Q \supset P)].$

(۳۰۱۰۷) $(P \equiv Q) \equiv (\sim P \equiv \sim Q).$

(۳۰۱۰۸) $(P \supset Q) \equiv (\sim Q \supset \sim P)$ (قانون عکس نقیض).

(۳۰۱۰۹) $\sim (P \,\&\, Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$ (قانون د مورگن).

(۳۰۱۰۱۰) $\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P \,\&\, \sim Q)$ (قانون د مورگن).

---

(۱) فرمولهائی (اعم از فرمولهای حساب گزاره‌ها یا فرمولهائی که بعداً در حساب محمولات خواهیم آموخت) که همیشه راست هستند.

۳.۲. استلزام و معادله‌ی منطقی. فرمول P را مستلزم فرمول Q خوانیم در صورتی که فرمول $P \supset Q$ راستگو باشد، و در این حال، گوئیم Q از P لازم میآید. مثلاً، دیدیم که فرمول $p \supset (p \vee q)$ راستگو است؛ پس، p مستلزم $p \vee q$ است. واضح است که اگر فرمول P مستلزم فرمول Q باشد هرگاه P راست باشد[1] Q نیز راست است.

فرمول P را معادل فرمول Q نامیم در صورتی که فرمول $P \mathbin{\supset\!\subset} Q$ راستگو باشد، و در این صورت مینویسیم

$$P \text{ هـــع } Q$$

(بخوانید «P معادل Q است»). مثلاً، بنا بر راستگوی ۳.۱.۲، $P \sim \sim$ معادل P است. بطور کلی، هر یک از راستگوهای ۳.۱.۲ ـ ۳.۱.۱۰ یک زوج فرمول معادل بدست میدهد. با بعضی از این معادلات، مانند معادله‌ی عکس نقیض و معادلات د مورگن، در فصل ۱ آشنا شده‌ایم.

بنا بر تعریف معادله و استلزام، تشخیص اینکه فرمول P معادل فرمول Q یا مستلزم آنست به وسیله‌ی جداول ارزش میسر است، منتها، در اثبات احکام کلی در باب معادله و استلزام، چون ساختمان فرمولها دلخواه است، باید به تصور ذهنی جدول اکتفا و بدان وسیله استدلال کرد، چنانکه در اثبات قضیه‌ی ذیل دیده میشود.

۳.۲.۱. قضیه. هر فرمول که از یک فرمول راستگو لازم آید راستگو است.

برهان. فرض کنیم P راستگو باشد، و Q از P لازم آید، یعنی $P \supset Q$ نیز راستگو باشد. نیز فرض کنیم جدول مشترك ارزش سه فرمول P، Q، و $P \supset Q$ ساخته شده باشد، و س سطر دلخواهی از این جدول باشد. چون P و $P \supset Q$ راستگو هستند، در سطر س ارزش t دارند. پس، بنا بر تعریف ارزش ترکیب شرطی، Q نیز در سطر س ارزش t دارد. بالنتیجه، چون س سطر دلخواهی از جدول فرض شده بود، Q در هر سطر جدول ارزش t دارد، و لهذا، راستگو است. ▲

به همین قیاس میتوان ثابت کرد که

۳.۲.۲. قضیه. هر فرمول که معادل یک راستگو یا راستگوئی معادل آن باشد خود راستگو است.

۳.۲.۳. قضیه. اگر P معادل Q باشد $P \sim$ معادل $Q \sim$ است.

برهان. اگر P معادل Q باشد فرمول $P \mathbin{\supset\!\subset} Q$ راستگو است. اما، بنا بر ۳.۱.۷،

$$P \mathbin{\supset\!\subset} Q \text{ هـــع } \sim P \mathbin{\supset\!\subset} \sim Q.$$

پس، بنا بر ۳.۲.۲، فرمول $\sim P \mathbin{\supset\!\subset} \sim Q$ راستگو است. ▲

---

(۱) یعنی بازاءِ هر ارزشدهی در P و Q که P راست باشد.

اثبات قضیه‌ی مهم ذیل با تصور ذهنی جدول ارزش بسیار سهل است، و به متعلم محول میشود:

۳.۲.۴. قضیه. نسبت هـع در فرمولها یک نسبت هم ارزی است، یعنی،
I. همواره P معادل P است؛
II. اگر P معادل Q باشد Q معادل P است (بنا بر این، و با توجه به ۳.۵.۵ : ۳، اگر فرمول P معادل فرمول Q باشد گوئیم P و Q معادل یکدیگرند)؛
III. اگر P معادل Q و Q معادل R باشد P معادل R است.

قضیه‌ی فوق حاکی از مشابهت فراوان بین خواص نسبت معادله‌ی منطقی (هـع) با نسبت تساوی منطقی است، اما این مشابهت به همین اندازه ختم نمیشود: فرض کنیم P فرمولی باشد، و S فرمولی جزء ساختمان آن، و S' فرمولی معادل S. اگر همه یا بعضی از موارد S را در P به S' تبدیل کنیم فرمولی مانند Q حاصل میشود. از تأمل در جدول مشترک ارزش فرمولهای S، P، S'، و Q معلوم میشود که فرمولهای P و Q معادل یکدیگرند. این حکم مهم، که نظیر اصل تعویضپذیری عبارات مساوی است، موسوم است به قاعده‌ی تبدیل عبارات معادل (علامت اختصاری: تبعم).

چنانکه در ۱ : ۵۰۱ و آ : ۸.۲.۵ : ۳ گفتیم، از ارکان هر دستگاه ریاضی نوعی «تساوی» (نسبت هم‌ارزی) است. در دستگاههائی که تا کنون در این کتاب از آنها سخن رفته است تساوی همواره دارای معنی منطقی بوده است. در میان گزاره‌ها، نسبت هـع نقش تساوی را دارد، و مجموعه‌ی گزاره‌ها با اعمالی که در آن تعریف کردیم و با این نسبت تساوی یک دستگاه ریاضی است، و میتوان در آن محاسبه کرد. قبل از ذکر امثله از محاسبه، چند «تساوی» مهم دیگر، که از قوانین این حساب میباشند، در ضمن یک قضیه میآوریم:

۳.۲.۵. قضیه (خواص اعمال & و V).
I. اعمال & و V شرکتپذیرند، یعنی همواره

$$P \,\&\, (Q \,\&\, R) \text{ هـع } (P \,\&\, Q) \,\&\, R.$$
$$P \vee (Q \vee R) \text{ هـع } (P \vee Q) \vee R.$$

II. اعمال & و V تعویضپذیرند، یعنی، همواره

$$P \,\&\, Q \text{ هـع } Q \,\&\, P. \qquad P \vee Q \text{ هـع } Q \vee P.$$

اثبات این احکام بسیار سهل است و به متعلم محول میشود. بنا بر قسمتهای I و II، خواص ناشی از شرکتپذیری و تعویضپذیری در دستگاه گزاره‌ها با اعمال & و V برقرار است.

۳.۲.۶. تبصره. از آنچه گذشت، مشابهت نمایانی بین خواص اعمال & و V در گزاره‌ها با اعمال $\cap$ و $\cup$ در مجموعه‌ها به چشم میخورد. این مشابهت منشأ عمیقی دارد که در § ۲ فصل ۲ ض (جبر بولی) آشکار خواهد شد.

۳.۲.۷. امثله

(آ). به وسیله‌ی راستگوهای ۳.۱.۶ و ۳.۱.۴، میتوان هر فرمول را به صورتی معادل آن ولی عاری از نعل و دونعل بیان کرد. به عنوان مثال، فرمول $p \supset (q \supset r)$ را اختیار میکنیم:

$p \supset (q \supset r)$	بنا بر ۳.۱.۴
مع $p \supset (\sim q \vee r)$	بنا بر ۳.۱.۴
مع $\sim p \vee (\sim q \vee r)$	بنا بر تعریف
مع $\sim p \vee \sim q \vee r.$	

در این روابط مسلسل، «مع» جایگزین «=» در محاسبات جبری است. توضیح مرحله‌ی اول محاسبه اینست که بنا بر ۳.۱.۴،

$q \supset r$ مع $\sim q \vee r.$

پس، بنا بر تبعم،

$p \supset (q \supset r)$ مع $p \supset (\sim q \vee r).$

معمولاً، این گونه تصرفات را، که بر طبق اصل تعویض‌پذیری عبارات «مساوی» صورت میگیرد، بدون تذکر انجام میدهیم.

(ب). قوانین د مورگن (۳.۱.۹ و ۳.۱.۱۰) از وسایل حرکت دادن ناقض است، که در فصل ۱ با آن و با اهمیت آن آشنا شدیم، و در ۶.۵ با تفصیل کافی از آن صحبت خواهیم کرد. این قوانین را میتوان تعمیم داد. مثلاً

$\sim (P \& Q \& R)$	بنا بر تعریف
مع $\sim [(P \& Q) \& R]$	بنا بر ۳.۱.۹
مع $\sim (P \& Q) \vee \sim R$	بنا بر ۳.۱.۹
مع $(\sim P \vee \sim Q) \vee \sim R$	بنا بر تعریف
مع $\sim P \vee \sim Q \vee \sim R.$	

۳.۲.۸. تمرین

۱. هر دروغگو مستلزم هر فرمول است.

۲. هر فرمول که معادل یک دروغگو باشد دروغگو است.

۳. اگر Q مع P آنگاه هر یک از P و Q مستلزم دیگری است.

(بنا بر این حکم، از هر راستگوی دوشرطی دو راستگوی شرطی بدست میآید.)

۴. اگر Q راستگو و P فرمولی دلخواه باشد $P \& Q$ مع P.

(این حکم و حکم آتیه در اختصار در محاسبات اهمیت تمام دارند.)

۵. اگر Q دروغگو و P فرمولی دلخواه باشد $P \vee Q$ مع P.

۶. فرمولهای ذیل راستگو هستند (با قوانین خودنمائی و جذب در مجموعه‌ها مقایسه کنید):

(آ) $(P \& P) \equiv P.$ (ب) $(P \vee P) \equiv P.$

(پ) $P \equiv [P \vee (P \& Q)].$ (ت) $P \equiv [P \& (P \vee Q)].$

۳.۳. آزمودن درستی استنتاجات. در فصل ۱، بعضی از قواعد استنتاجی را آموختیم. وقتی گفته میشود که قاعده‌ی

از P نتیجه میشود $P \vee Q$ (ادخال فاصل)

یک قاعده‌ی استنتاجی است مقصود اینست که هرگاه P راست باشد $P \vee Q$ هم راست است. بطور کلی، اگر

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$$

فرمولهائی از حساب گزاره‌ها باشند فرمول Q را نتیجه‌ی منطقی (یا مختصراً نتیجه‌ی) Pها (مقدمات) خوانیم در صورتی که هرگاه Pها راست باشند Q هم راست باشد؛ به عبارت دقیقتر، در صورتی که، بازاء هر ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای سازای Pها و Q، **اگر** Pها جملگی ارزش t داشته باشند Q هم ارزش t داشته باشد. اگر چنین باشد گویند استنتاج Q از Pها درست است، و الا استنتاج را نادرست نامند[1].

تعریف فوق وسیله‌ای برای آزمودن درستی استنتاجات بدست میدهد: جدول مشترک ارزش مقدمات و فرمولی را که نتیجه قلمداد شده است تنظیم میکنیم؛ اگر در هر سطر جدول که جملگی مقدمات ارزش t دارند نتیجه هم ارزش t داشته باشد استنتاج درست و الا نادرست است.

از اینجا ضمناً معلوم میشود که

۳.۳.۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه فرمول Q نتیجه‌ی فرمولهای P_1، P_2، ...، و P_n باشد آنست که فرمول

$$(P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n) \supset Q$$

راستگو باشد، یعنی Q از $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n$ لازم آید[2].

۳.۳.۲. امثله

(آ). آیا این استنتاج درست است؟

(*) از p و $p \vee q$ نتیجه میشود $\sim q$.

جدول مشترک ارزشها از این قرار است:

p	q	$p \vee q$	$\sim q$
t	t	t	f
t	f	t	t
f	t	t	f
f	f	f	t

چنانکه دیده میشود، در سطر اول جدول، مقدمات راست هستند، ولی فرمولی که نتیجه قلمداد شده است دروغ است. پس، استنتاج (*) نادرست میباشد.

---

(۱) پس، استنتاج نادرست، در واقع استنتاج نیست.

(۲) این قضیه بستگی مهم استنتاج و استلزام منطقی را آشکار میسازد.

(ز). ثابت کنید که قاعده‌ی تعدی (۴.۲.۴ : ۱) در حساب گزاره‌ها درست است، به عبارت دیگر،

(*) از $P \supset Q$ و $Q \supset R$ نتیجه میشود $P \supset R$.

روش استدلال اینست: کافی است درستی استنتاج

(۱) از $p \supset q$ و $q \supset r$ نتیجه میشود $p \supset r$

را ثابت کنیم، زیرا، اگر این استنتاج درست باشد، بنا بر ۳.۳.۱، فرمول

$$[(p \supset q) \,\&\, (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$

راستگو خواهد بود. پس، بنا بر تبمغ، فرمول

$$[(P \supset Q) \,\&\, (Q \supset R)] \supset (P \supset R)$$

نیز راستگو است. بالنتیجه، بنا بر ۳.۳.۱، استنتاج (*) درست است. اینک که کار به تحقیق در درستی استنتاج (۱) بازگشت میتوان مسئله را به یاری جدول ارزش حل کرد. جدول مندرج در ضمن ب : ۲.۲.۱ نشان میدهد که استنتاج (۱)، و لهذا، (*) درست است.

۴ § حساب محمولات: سورها

۴.۱. مقدمه. در فصل اول کتاب با متغیرهای فردی و گزاره‌نماها آشنا شدیم. اگر F خاصیتی باشد گزاره‌نمای $F(x)$ به معنی «x خاصیت F دارد» است. اگر در این گزاره‌نما، بجای x، اسم فرد مشخصی قرار دهیم گزاره‌نمای مذکور به یک گزاره تبدیل میشود. اما دو طریق بسیار مهم دیگر برای تبدیل کردن گزاره‌نمای $F(x)$ به یک گزاره هست. اول مقدم ساختن پیشوند

(۱) x هر چه باشد

است بر آن. بدین گونه، عبارت

(۲) x هر چه باشد $F(x)$

حاصل میشود که به معنی

(۳) هر چیز خاصیت F دارد

است، و این یک گزاره است. طریق دیگر مقدم ساختن پیشوند

(۴) xی هست که[1]

بر $F(x)$ است. در این صورت، عبارت

(۵) xی هست که $F(x)$

حاصل میگردد که به معنی

(۶) چیزی هست که خاصیت F دارد

میباشد، و این نیز گزاره است.

خلاصه، از عمل پیشوند (۱) در گزاره‌نمای $F(x)$ گزاره‌ی کلی (۳)، و از عمل پیشوند (۴) در آن گزاره‌ی وجودی (۶) حاصل میگردد. بالاخره، بر طبق اصطلاحات مذکور در ۳.۸ : ۱، مورد x در گزاره‌نمای $F(x)$ آزاد است، اما، موارد x در هر یک از عبارات (گزاره‌های) (۲) و (۵) پابند میباشند. بعلاوه، به خاطر داریم که اگرچه در $F(x)$ مورد x (که آزاد است)

---

(۱) یعنی چیزی مانند x هست که.

قابل تبدیل به اسامی خاص است، تبدیل موارد x در (۲) به اسم خاص معنی ندارد، زیرا (۲) به معنی (۳) است که x موردی در آن ندارد.

توضیحات مذکور را میتوان در مورد گزاره‌نماهائی که بیش از یک متغیر فردی دارند تکرار کرد. مثلاً، گزاره‌نمای $F(x, y)$ بدین معنی است که x نسبت F به y دارد. عبارت

(۷) yی هست که $F(x, y)$

بدین معنی است:

(۸) چیزی هست که x بدان نسبت F دارد.

این عبارت یک گزاره‌نما است (مـورد x در آن آزاد است). با مقدم ساختن پیشوند (۱) بـر گزاره‌نمای (۷)، عبارت

(۹) x هر چه باشد yی هست که $F(x, y)$

حاصل میشود که، با توجه به (۸)، بدین معنی است:

(۱۰) x هر چه باشد چیزی هست که x بدان نسبت F دارد،

یا

(۱۱) بازاء هر چیز، چیزی هست کـه اولی به دومـی نسبت F دارد،

یا، به عبارت ساده‌تر،

(۱۲) هر چیز به چیزی نسبت F دارد.

خلاصه عبارت (۹) به معنی (۱۲) است، که یک گزاره میباشد.

چنانکه دیده میشود، با مقدم ساختن پیشوند

(۱۳) x هر چه باشد yی هست که

بر گـزاره‌نمای $F(x, y)$، این گـزاره‌نما مبدل به یک گزاره میشود.

پیشوندهای «x هر چه باشد» و «xی هست که»، و نظایر آنها با متغیرهای فردی دیگـر، هر یک علامت یک عمل یکتائی منطقی است. نظر بـه اهمیت فوق‌العاده‌ی این اعمال، اسامی خاصی برای آنها میآوریم.

۴.۲. سورها. علامت

$$\forall$$

را سور عمومی، و علامت

$$\exists$$

را سور وجودی میخـوانیم[۱].

پیشوند «x هر چه باشد» و صورتهای مترادف آن (از قبیل «بازاء هر x») را به صورت

$$\forall x$$

مینویسیم، و این علامت را سـورِ عمومـیِ هـمنـامِ x خـوانیم. پیشونـد «xی هست کـه» و

---

(۱) علامت «$\forall$» مأخوذ از حرف اول کلمه‌ی انگلیسی All [= همه]، و عـلامت «$\exists$» مأخوذ از حرف اول کلمه‌ی انگلیسی Exists [= وجود دارد] میباشد.

صورتهای مترادف آن (از قبیل «حد اقل یک مقدار از x هست که» یا «حد اقل یک چیز مانند x هست که») را به صورت

$$\exists x$$

مینویسیم، و آن را سور وجودی همنام x خوانیم.
چنانکه در گزارهی (۹) قسمت ۴.۱ دیدیم، ممکن است سورها متوالیاً به دنبال یکدیگر آیند، مانند

$\forall x\, \forall y$ به معنی «بازاء هر x و بازاء هر y» یا (مختصراً) «بازاء هر x و y». این ترکیب برای بیان بازاء هر دو چیز بکار میرود.

$\exists x\, \exists y$ به معنی «xی هست و yی هست که» یا (مختصراً) «xی و yی هست که». این ترکیب برای بیان حد اقل دو چیز هست که بکار میرود.

$\forall x\, \exists y$ به معنی «x هر چه باشد yی هست که».

$\exists x\, \forall y$ به معنی «xی هست که y هر چه باشد».

تعمیم در مورد بیش از دو سور آسان است.

۴.۲.۱. امثله

(آ). به عبارات مذکور در ۴.۱ باز میگردیم. گزارهی (۲) را به صورت $\forall x F(x)$ مینویسیم. این گزاره حاصل عمل سور عمومی $\forall x$ است در گزارهنمای $F(x)$.
گزارهی (۵) را به صورت $\exists x F(x)$ مینویسیم، و آن حاصل عمل سور وجودی $\exists x$ است در $F(x)$.
گزارهنمای (۷) به صورت $\exists y F(x, y)$ نوشته میشود، که حاصل عمل سور وجودی $\exists y$ است در گزارهنمای $F(x, y)$. بالاخره، گزارهی (۹) حاصل عمل سور عمومی $\forall x$ است در گزارهنمای $\exists y F(x, y)$، و لهذا، به صورت $\forall x(\exists y F(x, y))$ نوشته میشود.

۴.۲.۲. دامنهی عمل سورها. اختصار در تحریر. چنانکه از مثالهای گذشته معلوم است، هر سور در یک گزارهنما عمل میکند. این گزارهنما را دامنهی عمل آن سور نامیم، و آن را بلافاصله در سمت راست سور مینویسیم.

در حساب گزارهها، متغیرهای گزارهای و ترکیبات منطقی حاصل از آنها را به وسیلهی رابطهای گزارهای فرمولهای حساب گزارهها خواندیم. اینک تعریف فرمولها را تعمیم میدهیم، و علاوه بر فرمولهای سابق، گزارهنماها و ترکیبات منطقی آنها و نیز حاصل عمل سورها را در فرمولها فرمولهای حساب محمولات یا (مختصراً) فرمولها میخوانیم.

چون سورها علامات اعمال یکتائی هستند، از لحاظ اختصار در تحریر، آنها را تابع قراردادهای I و II مذکور در ۱.۲ قرار میدهیم.

۴.۲.۳. امثله

(آ). $F(x)$، $\sim F(x)$، و $G(x, y)$ هر یک یک فرمول است. حاصل عمل $\forall x$ را در اولی

و سومی، چنانکه دیده شد، $\forall xF(x)$ و $\forall xG(x, y)$ مینویسیم. همچنین، چون $\sim F(x)$ حاصل یک عمل یکتائی است، فرمول حاصل از عمل سور وجودی $\exists x$ را در آن، بجای $\exists x(\sim F(x))$، مختصراً $\exists x \sim F(x)$ مینویسیم. اگر F خاصیت فانی بودن باشد، $\exists xF(x)$ یعنی چیزی هست که فانی است، و $\exists x \sim F(x)$ یعنی چیزی هست که فانی نیست. بالاخره، فرمول $\sim \exists xF(x)$ جایگزین $\sim (\exists xF(x))$ است، و بدین معنی است که چنین نیست که چیزی هست که فانی است.

(ب). در مثال اخیر ۴.۲.۱، گزاره‌ی $\forall x(\exists yF(x, y))$ را، که حاصل عمل سور عمومی $\forall x$ در فرمول $\exists yF(x, y)$ است، مختصراً، $\forall x\, \exists yF(x, y)$ مینویسیم.

(پ). فرمول $\forall yF(y) \supset \sim \forall xG(x)$ به معنی

$$[\forall yF(y)] \supset [\sim \forall xG(x)]$$

است، که ترکیبی است شرطی با مقدم $\forall yF(y)$ و تالی $\sim \forall xG(x)$، و معنی آن اینست:

اگر هر چیز خاصیت F دارد چنین نیست که هر چیز خاصیت G دارد.

۴.۲.۴. تمرین

۱. بنا بر آنکه F صفت فانی بودن باشد، هر یک از فرمولهای ذیل را به زبان فارسی ترجمه کنید:

$\sim F(y).$	$F(y).$	$\sim F(x).$	$F(x).$
$\exists yF(y).$	$\exists xF(x).$	$\forall yF(y)$	$\forall xF(x).$
$\exists x \sim F(x).$	$\sim \forall x \sim F(x).$	$\sim \forall xF(x).$	$\forall x \sim F(x).$
		$\sim \exists x \sim F(x).$	$\sim \exists xF(x).$

۲. بنا بر آنکه F نسبت «شبیهِ» باشد، هر یک از فرمولهای ذیل را به فارسی ترجمه کنید:

$\sim F(x, y).$	$F(y, x).$	$F(x, y).$
$\sim \forall xF(x, y).$	$\forall x \sim F(x, y).$	$\forall xF(x, y).$
$\sim \exists x \sim F(y, x).$	$\exists x \sim F(y, x).$	$\exists xF(y, x).$
$\exists x\, \forall yF(x, y).$	$\forall x\, \exists yF(x, y).$	$\forall x\, \forall yF(x, y).$
$\exists x \sim \forall yF(x, y).$	$\sim \forall x \sim \exists y \sim F(x, y).$	$\sim \forall x\, \exists yF(x,y).$

۴.۳. متغیرهای آزاد و پابند. در فصل ۱، توجه متعلمین را به اهمیت فوق‌العاده‌ی تشخیص موارد آزاد و پابند متغیرهای فردی جلب کردیم. اینک میتوانیم آزادی و پابندی را دقیقتر از گذشته تعریف کنیم:

۴.۳.۱. تعریفات.

I. در یک فرمول، موردی از یک متغیر فردی را پابند به یک سور همنام آن نامیم در صورتی که همراه این سور باشد، یا در دامنه‌ی عمل این سور باشد و این سور نزدیکترین سور همنام آن به آن باشد.

II. موردی از یک متغیر فردی را در یک فرمول پابند یا ظاهری نامیم در صورتی که به سوری همنام خود در این فرمول پابند باشد.

III. موردی از یک متغیر فردی را در یک فرمول آزاد نامیم در صورتی که در این فرمول پابند نباشد.

۴.۳.۲. امثله

(آ). مورد x در فرمول $F(x)$، و نیز موارد x و y در فرمول $F(x, y)$ آزادند.

(ب). موارد x در فرمولهای $\forall xF(x)$، $\forall x \sim F(x)$، و $\sim \forall xF(x)$ پابند بـه سور عمومی هستند، و در فرمولهای $\exists xF(x)$، $\exists x \sim F(x)$، و $\sim \exists xF(x)$ پابند به سور وجودی.

(پ). در فرمول $\exists yF(x, y)$، مورد x آزاد است، اما موارد y پابند به سور وجودی هستند. در فرمول $\forall x \exists yF(x, y)$، موارد x پابند به سور عمومی و موارد y پابند به سور وجودی هستند. این بستگیها را میتوان چنین نمایش داد:

$$\exists yF(x, y) \qquad\qquad \forall x \exists yF(x, y)$$

(ت). فرمول $\forall xF(x) \supset F(x)$ به معنی $[\forall xF(x)] \supset F(x)$ است، که معنی فارسی آن اینست:

اگر هر چیز خاصیت F دارد x خاصیت F دارد.

در فرمول مذکور، موارد[1] اول و دوم x پابند به سور عمومی هستند، ولی سومین مورد x آزاد است. طرح ذیل این مطلب را مجسم میسازد:

$$\forall xF(x) \supset F(x)$$

۴.۴. بعضی خواص ابتدائی سورها

۴.۴.۱. چنانکه میدانیم، و از مثال ت : ۴.۳.۲ به خوبی آشکار است، معنی یک فرمول از متغیرهای فردی پابند آن مستقل است، ولی به متغیرهای آزاد آن بستگی دارد.

۴.۴.۲. معنی دو گزاره‌نمای $F(x)$ و $F(y)$ متفاوت است، اما، فرمولهای $\forall xF(x)$ و $\forall yF(y)$ هر دو به معنی

هر چیز خاصیت F دارد

میباشند. همچنین، اگر در فرمول $\exists xF(x)$ همه‌ی موارد پابند x را به z تبدیل کنیم فرمول $\exists zF(z)$ حاصل میشود که مترادف با فرمول اولیه است. بالاخره، فرمولهای

$$\forall xF(x) \supset F(x), \qquad\qquad \forall yF(y) \supset F(x)$$

---

(۱) موارد یک حرف یا یک علامت در یک فرمول از چپ به راست محسوب میشوند.

هر دو بدین معنی است:

اگر هر چیز خاصیت F دارد x خاصیت F دارد.

چنانکه دیده میشود، در یک فرمول، اگر جمیع موارد یک متغیر فردی پابند به یک سور را به متغیر فردی دیگری که در آن فرمول نیامده است تبدیل کنیم فرمول جدید با فرمول اولیه مترادف است.

۴.۴.۳. کار کردن با فرمولهائی که یک متغیر فردی در آنها، در عین حال، موارد آزاد و موارد پابند دارد (مانند فرمول $\forall x F(x) \supset F(x)$ مثال ت : ۴.۳.۲) مخصوصاً برای مبتدیان متضمن مشکلاتی است. بر طبق قاعده‌ی مذکور در ۴.۴.۲، همواره میتوان چنین فرمولی را تبدیل کرد به فرمولی مترادف آن، که هیچ یک از متغیرهای فردی آن در عین حال دارای موارد پابند و آزاد در آن نباشد (بازنویسی متغیرهای پابند).

۴.۴.۴. تبصره. در محاسبات منطقی، گاه با فرمولهائی به صورت $\forall xP$ و $\exists xP$ مواجه میشویم، که در آنها، P فرمولی خالی از موارد آزاد x است. در این حالت، فرمولهای $\forall xP$ و $\exists xP$ را به معنی P میگیریم. مثلاً، اگر P به معنی «5 فرد است» باشد $\forall xP$ بدین معنی است:

x هر چه باشد 5 فرد است،

و این مترادف «5 فرد است» میباشد. همچنین، در فرمول $\exists x\, \forall x(P \supset Q)$، دامنه‌ی سور وجودی فرمول $\forall x(P \supset Q)$ است، که مورد آزاد x ندارد، و لهذا، فرمول مذکور مترادف فرمول اخیر شمرده میشود.

۵ § حساب محمولات: ترجمه به زبان منطق

۵.۱. ترجمه‌ی گزاره‌های کلی و جزئی. بر طبق اصولی که آموختیم میتوان گزاره‌های کلی و جزئی را به زبان منطق ترجمه کرد. این کار را با چهار گزاره‌ی ساده‌ای که در ۴.۱.۵ : ۱ به عنوان مثال آوردیم آغاز میکنیم. تحلیل و ترجمه‌ی این گزاره‌ها سرمشق کار در موارد پیچیده‌تر خواهد بود، و لهذا، باید توجه خاص بدان مبذول داشت. در هر حالت، روش تحلیل اینست که الفاظ هر و بعض را با حفظ ارتباطشان با سایر اجزای گزاره از این اجزا جدا کنیم، و سپس، گزاره‌ی تحلیل‌شده را به زبان منطق بنویسیم.

۵.۱.۱. گزاره‌ی کلی

(۱) هر انسان حیوان است

بدین معنی است که هر چیز که انسان است حیوان است، یا

(۲) بازاء هر چیز، اگر آن انسان است آن حیوان است،

یا، با بکار بردن متغیری فردی، مثلاً x، بجای «چیز» و ضمایر راجع به آن،

(۳) بازاء هر x، اگر x انسان است x حیوان است.
اگر صفات انسان بودن و حیوان بودن را، بترتیب، F و G بنامیم، گزاره‌نمای
اگر x انسان است x حیوان است
به صورت $F(x) \supset G(x)$، و (۳) به صورت
$$\forall x(F(x) \supset G(x)) \tag{۴}$$
نوشته میشود، و این ترجمه‌ی گزاره‌ی (۱) است به زبان منطق.

۵.۱.۲. گزاره‌ی کلی
(۱) هیچ انسان جماد نیست
بدین معنی است:
(۲) بازاء هر چیز، اگر آن انسان است آن جماد نیست
یا
(۳) بازاء هر x، اگر x انسان است x جماد نیست.
گزاره‌نمای
اگر x انسان است x جماد نیست
چنین تحلیل میشود:
اگر x انسان است چنین *نیست* که x جماد است،
یا، اگر F و H بترتیب صفات انسان بودن و جماد بودن باشند، $F(x) \supset \sim H(x)$. پس،
(۳) بدین صورت نوشته میشود:
$$\forall x(F(x) \supset \sim H(x)). \tag{۴}$$
و این ترجمه‌ی (۱) است به زبان منطق.

۵.۱.۳. گزاره‌ی وجودی
(۱) بعض انسان جماد است،
چنانکه میدانیم، بدین معنی است:
چیزی هست که انسان است و جماد است
یا
(۲) xی هست که x انسان است و x جماد است.
با علامات مذکور در ۵.۱.۲، گزاره‌نمای
x انسان است و x جماد است
به صورت $F(x) \& H(x)$ نوشته میشود. پس، (۲) بدین صورت در میآید:
$$\exists x(F(x) \& H(x)), \tag{۳}$$
و این ترجمه‌ی گزاره‌ی (۱) است به زبان منطق.
بالاخره، اگر G صفت حیوان بودن باشد، ترجمه‌ی گزاره‌ی
بعض انسان حیوان نیست

چنین خواهد بود:

$$\exists x(F(x) \& \sim G(x)).$$

۵.۱.۴. امثله

(آ) (تعریف نسبت جزئیت). بنا بر تعریف، $A \subseteq B$ یعنی هر چیز که عضو A است عضو B است، و این گزاره‌ای است کلی و، بر طبق الگوی ۵.۱.۱، چنین تحلیل میشود:

بازاءِ هر x، اگر $x \in A$ آنگاه $x \in B$

یا $\forall x(x \in A \supset x \in B)$، و این تعریف نسبت جزئیت است به زبان منطق.

(ب). گزاره‌ی

(۱) هر عدد فرد یا زوج است

بر طبق الگوی ۵.۱.۱ چنین تحلیل میشود:

(۲) بازاءِ هر x، اگر x عدد است x فرد است یا x زوج است.

اگر صفات عدد بودن، فرد بودن، و زوج بودن را، بترتیب، F، G، و H بنامیم، دامنه‌ی عمل «بازاءِ هر x» در (۲) چنین است: $F(x) \supset (G(x) \vee H(x))$. پس، (۲)، یعنی (۱)، چنین نوشته میشود:

$$\forall x[F(x) \supset (G(x) \vee H(x))].$$

در این فرمول، دامنه‌ی عمل سور عمومی تمام فرمول داخل کروشه است. بالاخره، با استعمال علامات ریاضی، ترجمه‌ی گزاره‌ی (۱) را میتوان چنین نوشت:

$$\forall x(F(x) \supset (2 \nmid x \vee 2 \mid x)).$$

(پ). در ۲.۳ : ۲ فواید استعمال متغیرهای مقید را توضیح دادیم. در مثال قبل، اگر متغیرهای فردی را به مجموعه‌ی اعداد مقید سازیم، گزاره‌ی (۱) چنین تحلیل میشود:

بازاءِ هر x، x فرد است یا x زوج است

یا $\forall x(G(x) \vee H(x))$، و این ترجمه گزاره‌ی (۱) است، و به مراتب از ترجمه‌ی سابق ساده‌تر میباشد.

(ت). گزاره‌ی

(۱) هر کس از حسن مسنتر است از تقی مسنتر است

گزاره‌ای است کلی، و تحلیلش بر طبق الگوی ۵.۱.۱ میباشد. برای تسهیل، متغیرهای فردی را به مجموعه‌ی آدمیان مقید میکنیم، و حسن را a و تقی را b مینامیم. تحلیل (۱) چنین خواهد بود:

(۲) بازاءِ هر x، اگر x از a مسنتر است x از b مسنتر است.

اینک نسبت مسنتری را F مینامیم. گزاره‌نماهای «x از a مسنتر است» و «x از b مسنتر است»، بترتیب، به صورت $F(x, a)$ و $F(x, b)$، و (۲) به صورت ذیل نوشته میشود:

$$\forall x(F(x, a) \supset F(x, b)). \tag{۳}$$

بر طبق قراردادهای مربوط به نسب، (۳) را بدین صورت هم میتوان نوشت:

$$\forall x(xFa \supset xFb). \tag{۴}$$

(ث). گزاره‌ی

(۱) اگر حسن از تقی مسنتر است هر کس از حسن مسنتر باشد از تقی مسنتر است

ترکیبی است شرطی که مقدمش گزاره‌ی «حسن از تقی مسنتر است» میباشد، و تالیش گزاره‌ی (۱) مثال (ت). با علامات مذکور در آن مثال، مقدم $F(a, b)$ یا aFb است. پس، (۱) چنین ترجمه میشود:

$$aFb \supset \forall x(xFa \supset xFb).$$

(ج). گزاره‌ی

(۱) بعضی زنان شاعر و ریاضیدانند

را اختیار میکنیم. بر طبق الگوی ۵.۱.۳، تحلیل (۱) چنین است:

(۲) y ی هست که y زن است و y شاعر است و y ریاضیدان است.

اگر F، G، و H صفات زن بودن، شاعر بودن، و ریاضیدان بودن باشند گزاره‌ی (۲) چنین نوشته میشود:

$$\exists y(F(y) \ \& \ G(y) \ \& \ H(y)).$$

بالاخره، اگر متغیرهای فردی را به مجموعه‌ی زنان مقید کنیم ترجمه‌ی (۱) به صورت ساده‌ی $\exists y(G(y) \ \& \ H(y))$ در میآید.

(چ). بیان حکم قضیه ۲.۵.۱ : ۵.

حکم قضیه اینست که

اگر، بازاءِ هر عدد حقیقی x، اگر $x > b$ آنگاه $a \leqslant x$، آنگاه $a \leqslant b$.

این گزاره ترکیبی است شرطی با مقدم

بازاءِ هر عدد حقیقی x، اگر $b < x$ آنگاه $a \leqslant x$

یا

$$\forall x(x \in \mathbf{R} \supset (b < x \supset a \leqslant x)).$$

پس، حکم مذکور به زبان منطق چنین نوشته میشود:

$$\forall x[x \in \mathbf{R} \supset (b < x \supset a \leqslant x)] \supset a \leqslant b. \qquad (۱)$$

بالاخره، اگر x را مقید به $\mathbf{R}$ سازیم (۱) به صورت ساده‌تر ذیل در میآید:

$$\forall x(b < x \supset a \leqslant x) \supset a \leqslant b.$$

۵.۱.۵. تمرین

۱. گزاره‌های ذیل را به زبان منطق ترجمه کنید[۱]:

(آ) هر کلاغ سیاه است. (ب) هیچ عضو مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعلق ندارد. (پ) مجموعه‌های A و B عضو مشترکی دارند. (ت) بعضی اعداد اولند. (ث) بعضی اعداد فرد و اولند. (ج) بعضی اعداد فرد هستند ولی اول نیستند. (چ) هر عدد طبیعی اول یا مرکب است. (ح) اگر عدد a از عدد b کوچکتر باشد هیچ عدد نیست که از a کمتر و از b بیشتر باشد. (خ) اگر بهرام برادر پروین باشد هر کس خواهر پروین باشد خواهر بهرام است. (د) اگر هیچ انسان حیوان نیست 5 زوج است (گزاره‌ی «5 زوج است» را A بنامید). (ذ) اگر عدد a نامنفی باشد و از هر عدد مثبت نابیشتر باشد مساوی 0 است. (ر) اگر هر عدد بزرگتر از b از عدد a ناکمتر باشد b از a ناکمتر است.

۲. احکام قضایای ۲.۵.۲ : ۵، ۲.۵.۳ : ۵، و ۲.۵.۴ : ۵ را به زبان منطق بنویسید.

---

(۱) پس از ترجمه‌ی هر گزاره، سعی کنید گزاره‌ای را که به زبان منطق نوشته شده است رأساً به زبان فارسی ترجمه کنید.

۵.۲. ترجمه‌ی گزاره‌های مختلط. این مقصود با استعمال مکرر الگوهای مندرج در ۵.۱ حاصل میشود. در این باب باید تذکرات مذکور در باب سورهای مکرر را، که در ۴.۲ گذشت، به خاطر داشت.

۵.۲.۱. امثله

(آ). گزاره‌ی

(۱) هیچ عدد طبیعی از همه‌ی اعداد حقیقی بزرگتر نیست

بر طبق الگوی ۵.۱.۲ چنین تحلیل میشود:

(۲) بازاءِ هر x، اگر x عدد طبیعی است چنین نیست که x از همه‌ی اعداد حقیقی بزرگتر است.

دامنه‌ی عمل ناقض بر طبق الگوی ۵.۱.۱ چنین تحلیل میشود:

(۳) بازاءِ هر y، اگر y عدد حقیقی است $x > y$.

اگر $x \in \mathbf{N}$ و $y \in \mathbf{R}$ را به معنی معمول بکار بریم، (۳) به صورت $\forall y(y \in \mathbf{R} \supset x > y)$ در میاید. پس، ترجمه‌ی (۲) چنین است:

$$\forall x(x \in \mathbf{N} \supset \sim \forall y(y \in \mathbf{R} \supset x > y)). \qquad (۴)$$

(ب). در مثال قبل، اگر متغیر فردی n را مقید به $\mathbf{N}$ و متغیر فردی x را مقید به $\mathbf{R}$ بگیریم، تحلیل (۱) چنین میشود:

(۲) بازاءِ هر n، چنین نیست که n از همه‌ی اعداد حقیقی بزرگتر است.

تحلیل دامنه‌ی ناقض چنین است:

(۳) بازاءِ هر x، $n > x$

یا $\forall x(n > x)$. پس، ترجمه‌ی گزاره‌ی (۱) بدین صورت حاصل میشود:

$$\forall n \sim \forall x(n > x), \qquad (۴)$$

که بالبداهه به مراتب از ترجمه‌ی سابق ساده‌تر است.

(پ). گزاره‌ی

(۱) بازاءِ هر دو عدد عددی هست که حاصلجمعش با اولی مساوی دومی است.

چنین تحلیل میشود:

(۲) بازاءِ هر x و y، اگر x عدد است و y عدد است آنگاه عددی هست که حاصلجمعش با x مساوی y است.

گزاره‌نمای بعد از «آنگاه» چنین تحلیل میشود

(۳) zی هست که z عدد است و $z + x = y$،

یا $\exists z(z \in \mathbf{R} \,\&\, z + x = y)$. پس، ترجمه‌ی (۲) چنین است:

$$\forall x \forall y[(x \in \mathbf{R} \,\&\, y \in \mathbf{R}) \supset \exists z(z \in \mathbf{R} \,\&\, z + x = y)]. \qquad (۴)$$

در این گزاره، دامنه‌ی عمل سور وجودی $\exists z$ فرمول $z \in \mathbf{R} \,\&\, z + x = y$ است؛ دامنه‌ی عمل سور عمومی $\forall y$ همه‌ی فرمول داخل کروشه است؛ دامنه‌ی عمل سور عمومی $\forall x$ همه فرمول $\forall y[\ldots]$ میباشد.

بالاخره، اگر متغیرهای فردی مقید به $\mathbf{R}$ باشند ترجمه‌ی (۱) به صورت ساده‌ی ذیل خواهد بود:

$$\forall x\, \forall y\, \exists z(z + x = y).$$

۵.۲.۲. تمرین

۱. این گزاره‌ها را به زبان منطق ترجمه کنید:
(آ) هر عضو باشگاه A از هر عضو باشگاه B مسنتر است. (ب). بعضی از اعضای باشگاه A از همه‌ی اعضای باشگاه B مسنترند. (پ) بعضی از اعضای باشگاه A از بعضی از اعضای باشگاه B مسنترند. (ت) باشگاه A عضوی مسنتر از همه‌ی اعضای باشگاه B ندارد.
۲. گزاره‌های مسئله‌ی قبل را با متغیرهای مقید به زبان منطق ترجمه کنید (مثلاً، x را برای عضوی از A و y را برای عضوی از B بکار برید).
۳. عالم سخن مجموعه‌ی آدمیان است، و متغیرهای فردی بدان مقیدند. F نسبت «پدرِ یا مادرِ» و G و H، بترتیب، صفات مؤنث بودن و مذکر بودن میباشند. گزاره‌های ذیل را به وسیله‌ی نسب و صفات مذکور بیان کنید:
(آ) a پدر بزرگ y است. (ب) a نوه‌ی ذکور b است. (پ) هر کس مادری دارد. (ت) هر کس پدر بزرگی دارد. (ث) هیچ کس پدر بزرگ خود نیست. (ج) a و b خواهرند، و از یک پدر و مادر.

۵.۳. فواید مختلفه. بسیاری از مجموعه‌ها و مفاهیمی را که در فصول گذشته با عبارات دراز فارسی تعریف کردیم به آسانی میتوان به زبان صریح منطق و بر طبق قراردادهای نامگذاری مجموعه‌ها تعریف کرد.

۵.۳.۱. امثله

(آ). تعریف حوزه‌ی یک نسبت. اگر f نسبتی باشد، بنا بر تعریف، fح یعنی
(۱) مجموعه‌ی اشیائی که هر یک به چیزی نسبت f دارد.
یا، بنا بر آنچه در نامگذاری مجموعه‌ها دیده‌ایم،
(۲) مجموعه‌ی xهائی که x به چیزی نسبت f دارد.
گزاره‌نمای
(۳) x به چیزی نسبت f دارد
بدین معنی است:
(۴) yی هست که x به y نسبت f دارد
یا $\exists y(xfy)$. پس، بر طبق قرارداد نامگذاری مجموعه‌ها، تعریف fح، یعنی مجموعه‌ی (۲)، چنین است:

fح یعنی $\{x \mid \exists y(xfy)\}$.

شرط لازم و کافی برای عضویت x در fح آنست که (۳) برقرار باشد. به عبارت دیگر،

$x \in$ حf $\;\boxed{\equiv}\; \exists y(xfy)$.

(ب). تعریف حاصلضرب نسبی دو نسبت. اگر f و g دو نسبت باشند $g \circ f$ یعنی
(۱) مجموعه‌ی ازواج مرتب (x, y) که x به چیزی نسبت f دارد که آن به y نسبت g دارد.
گزاره‌نمای

(۲) x به چیزی نسبت f دارد که آن به y نسبت g دارد

یعنی

(۳) zی هست که xfz و zgy

یا $\exists z(xfz \,\&\, zgy)$. پس، (۱) چنین نوشته میشود:

$$\{(x, y) \mid \exists z(xfz \,\&\, zgy)\}.$$

و این تعریف $g \circ f$ است به زبان منطق.

(پ). خواص نسب. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A باشد. تعریف متعدی بودن f اینست:

بازاءِ هر x و y و z از A، اگر xfy و yfz آنگاه xfz.

یا

$$\forall x\, \forall y\, \forall z[x, y, z \in A \supset ((xfy \,\&\, yfz) \supset xfz))].$$

همچنین، تعریف مرتبط بودن f در A اینست:

$$\forall x\, \forall y[(x \in A \,\&\, y \in A) \supset (xfy \vee yfx)].$$

۵.۳.۲. تمرین

۱. این اشیاء را به زبان منطق تعریف کنید:

(آ) حوزه‌ی عکس نسبت f.

(ب) دامنه‌ی نسبت f.

(پ) تصویر مجموعه‌ی E به وسیله‌ی نسبت f.

(ت) تصویر عکس مجموعه‌ی E به وسیله‌ی نسبت f.

(ث) $f \mid E$ (تحدید نسبت f به E).

۲. f نسبتی است در مجموعه‌ی A. تعریف منعکس بودن، تقارن، نامتقارن بودن، و قناسی f را به زبان منطق بنویسید.

۶§ حساب محمولات: محاسبه

۶.۱. کلیات. مقصود از قوانین منطق فرمولهای همیشه‌برقرار است، یعنی آن دسته از فرمولهای منطق که همیشه راست هستند. در حساب گزاره‌ها، دسته‌ای از قوانین اساسی منطق، یعنی راستگوها، را معرفی کردیم. اما، قوانین کارآمد منطق قوانین حساب محمولات هستند، که در این مختصر به هیچوجه مجال بحث منظم از آنها نیست، و طالبین این موضوع باید به کتب منطق رجوع کنند. معذلک، بعضی قوانین مهم هستند که با اندک تأملی میتوان آنها را دریافت. مثلاً، واضح بنظر میرسد که اگر دو فرمول S و S' از لحاظ معنی مترادف باشند فرمول $S \;\underline{\supset\!\subset}\; S'$ همیشه راست است؛ زیرا، در این صورت، هر وقت یکی از دو فرمول راست (دروغ) باشد دیگری هم راست (دروغ) است. از اینجا، با توجه به آنچه در ۴.۴.۲ و ۴.۴.۴ گفته شد معلوم میشود که

۶.۱.۱. قضیه. اگر فرمول Q از بازنویسی متغیرهای پابند در P حاصل شده باشد فرمول $P \;\underline{\supset\!\subset}\; Q$ همیشه‌برقرار است.

۶.۱.۲. قضیه. اگر فرمول P خالی از موارد آزاد x باشد هر یک از فرمولهای ذیل همیشه‌برقرار است:

$$\forall x P \equiv P; \qquad \exists x P \equiv P.$$

مثلاً، بنا بر ۶.۱.۰۱، فرمول $\forall x\, \forall y F(x, y) \equiv \forall x\, \forall z F(x, z)$ همیشه‌برقرار است؛ و اگر A گزاره‌ی «5 فرد است» باشد، بنا بر ۶.۱.۰۲، فرمولهای $\forall x A \equiv A$ و $\exists x A \equiv A$ همیشه‌برقرار میباشند.

۶.۲. قوانین بیان سورها بر حسب یکدیگر. از قوانین مهم دوشرطی قوانین بیان سورها است بر حسب یکدیگر. مقدمةً ملاحظه میکنیم که فرمول $\forall x F(x)$ بدین معنی است که هر چیز خاصیت F دارد، و این مترادف با اینکه

چیزی وجود ندارد که خاصیت F نداشته باشد.

گزاره‌ی اخیر به صورت $\sim \exists x \sim F(x)$ نوشته میشود. پس، فرمول $\forall x F(x) \equiv \sim \exists x \sim F(x)$ یک قانون منطق است. بطور کلی، اگر P فرمول دلخواهی باشد، $\forall x P$ یعنی x هرچه باشد در P صدق میکند، و این مترادف است با $\sim \exists x \sim P$، و لهذا، فرمول $\forall x P \equiv \sim \exists x \sim P$ همیشه‌برقرار میباشد. سه قانون دیگر از این قبیل هست که در محاسبه و استدلال بسیار بکار میآیند؛ ذیلاً هر چهار را میآوریم:

$$\forall x P \equiv \sim \exists x \sim P. \tag{۶.۲.۱}$$

$$\sim \forall x P \equiv \exists x \sim P. \tag{۶.۲.۲}$$

$$\exists x P \equiv \sim Ax \sim P. \tag{۶.۲.۳}$$

$$\sim \exists x P \equiv \forall x \sim P. \tag{۶.۲.۴}$$

۶.۳. قوانین مشتق از راستگوها. حساب گزاره‌ها جزء حساب محمولات، و قوانین آن، یعنی راستگوها، از قوانین منطق‌اند. ارزش راستی راستگوئی مانند $(p \,\&\, q) \supset p$ از ارزشهای متغیرهای گزاره‌ای p و q مستقل میباشد. از اینجا، معلوم میشود که اگر در یک راستگو، بجای متغیرهای گزاره‌ای، یکنواخت فرمولهای دلخواه (اعم از فرمولهای حساب گزاره‌ها یا فرمولها به معنی وسیع کنونی این کلمه) قرار دهیم فرمول جدید همیشه‌برقرار یعنی قانون منطق است. این قاعده را، که تعمیم تبمغ است، به همان علامت اختصاری نمایش میدهیم.

بنا بر این، فرمول $(F(x) \,\&\, G(x)) \supset F(x)$ یک قانون منطق میباشد[1].

۶.۴. معادله. به قیاس آنچه در حساب گزاره‌ها گذشت، اگر فرمول دوشرطی $P \equiv Q$

---

(۱) برای اینکه مطلب را بهتر دریابید، در فرمول مذکور، بجای x اسامی افراد مشخص و بجای F و G خواص مشخص مربوط به آنها قرار دهید، و تحقیق کنید که گزاره‌های حاصل جملگی راست میباشند.

همیشه‌برقرار باشد گوئیم فرمول P معادل فرمول Q است (Q مع P). مثلاً، بنا بر ۶.۲.۱ و ۶.۲.۲،

$$\forall xP \text{ مع } \sim \exists x \sim P, \qquad \sim \forall xP \text{ مع } \exists x \sim P.$$

میتوان ثابت کرد که فرمولهای معادل دارای همان خواص مذکور در مورد فرمولهای معادل حساب گزاره‌ها هستند.

هر یک از راستگوهای ۳.۱.۲ — ۳.۱.۱۰، بنا بر تبمغ (۶.۳)، یک جفت فرمول معادل بدست میدهند. مثلاً، P و Q هر دو فرمول باشند، فرمول $P \supset Q$، بنا بر ۳.۱.۴، معادل فرمول $\sim P \vee Q$ میباشد.

۶.۴.۱. امثله و فواید

(آ). به همان شرح که در آ : ۳.۲.۷ گفته شد، میتوان هر فرمول را به فرمولی معادل آن ولی عاری از $\supset$ و $\equiv$ تبدیل کرد. به عنوان مثال، فرض کنیم F و G صفات انسان بودن و حیوان بودن باشند. گزاره‌ی $\forall x(F(x) \supset G(x))$ به معنی

(۱) هر انسان حیوان است

میباشد. اما

بنا بر ۳.۱.۴

$$\forall x(F(x) \supset G(x))$$
$$\text{ مع } \forall x(\sim F(x) \vee G(x)).$$

و معنی گزاره‌ی اخیر اینست:

(۲) هر چیز انسان نیست یا حیوان است.

پس، گزاره‌های (۱) و (۲) معادل یکدیگرند.

(ب). سه قانون اخیر بیان سورها را بر حسب یکدیگر میتوان از ۶.۲.۱ استخراج کرد. مثلاً، برای استخراج ۶.۲.۲، گوئیم

$\sim \forall xP$	بنا بر ۶.۲.۱ و ۳.۲.۳
$\text{ مع } \sim \sim \exists x \sim P$	بنا بر ۳.۱.۲
$\text{ مع } \exists x \sim P.$ ▲	

(پ). در ۴.۱.۵ : ۱، نقیض گزاره‌ی

(۱) بعض انسان حیوان نیست

را به صورت

(۲) هر انسان حیوان است

بدست آوردیم. اینک یافتن این گونه نتایج با محاسبات ساده انجامپذیر است. اگر F و G صفات انسان بودن و حیوان بودن باشند، (۱) به صورت $\exists x\,(F(x) \,\&\, \sim G(x))$ نوشته میشود، که نقیض آن را متدرجاً میتوان چنین نوشت:

$\sim \exists x(F(x) \,\&\, \sim G(x))$	بنا بر ۶.۲.۴
$\text{ مع } \forall x \sim (F(x) \,\&\, \sim G(x))$	بنا بر ۳.۱.۹
$\text{ مع } \forall x(\sim F(x) \vee \sim\sim G(x))$	بنا بر ۳.۱.۲
$\text{ مع } \forall x(\sim F(x) \vee G(x))$	بنا بر ۳.۱.۴
$\text{ مع } \forall x(F(x) \supset G(x)),$	

و گزاره‌ی اخیر ترجمه‌ی (۲) میباشد.

در موارد پیچیده‌تر، یافتن نقیض به طریق مذکور در فصل ۱ واقعاً خالی از مشکلات نیست. محاسباتی که تا کنون آموختیم این مشکلات را بکلی بر طرف میکنند، چنانکه ذیلاً خواهیم دید.

۶.۵. نقیض یک فرمول. قبلاً تعریفی میآوریم:

۶.۵.۱. تعریف. فرض کنیم S فرمولی عاری از موارد $\subset$ و $\equiv$ باشد. اگر در S تبدیلات ذیل را انجام دهیم فرمولی مانند S^* حاصل میشود که آن را جُفت فرمول S نامیم:

I. تبدیل هر مورد & به $\vee$ و هر مورد $\vee$ به &؛

II. تبدیل هر مورد $\forall$ به $\exists$ و هر مورد $\exists$ به $\forall$؛

III. اسقاط هر مورد $\sim$ که بلافاصله در سمت چپ یک متغیر گزاره‌ای یا یک حرف محمولی[1] است، و درج $\sim$ بلافاصله در سمت چپ هر یک از این حروف که $\sim$ بلافاصله بر آن مقدم نیست.

مثلاً، اگر S فرمول $\forall x \sim \exists y(p \vee \sim F(x, y))$ باشد جفت S، یا S^*، عبارتست از فرمول

$$\exists x \sim \forall y(\sim p \,\&\, F(x, y)).$$

خاصیت مهم جفت در حکم ذیل، موسوم به «اصل جفت»، آمده است.

۶.۵.۲. قضیه (اصل جفت). اگر فرمول S عاری از موارد $\subset$ و $\equiv$ باشد نقیض S معادل جفت آنست.

اثبات قضیه به وسیله‌ی قوانین بیان سورها بر حسب یکدیگر و قانون ۳.۱.۰۲ و معادلات د مورگن است. ما وارد اثبات کلی آن نمیشویم ولی روش استدلال را در مورد فرمول S سابق‌الذکر توضیح میدهیم:

$\sim \forall x \sim \exists y(p \vee \sim F(x, y))$	بنا بر ۶.۲.۲
$\exists x \sim [\sim \exists y(p \vee \sim F(x, y))]$ مع	بنا بر ۶.۲.۴
$\exists x \sim [\forall y \sim (p \vee \sim F(x, y))]$ مع	بنا بر ۳.۱.۱۰
$\exists x \sim \forall y(\sim p \,\&\, \sim\sim F(x, y))$ مع	بنا بر ۳.۱.۰۲
$\exists x \sim \forall y(\sim p \,\&\, F(x, y)),$ مع	

و فرمول اخیر همان S^* است. ▲

۶.۵.۳. تبصره. اگر فرمول S دارای موارد $\subset$ و $\equiv$ باشد، چنانکه میدانیم، همواره میتوان فرمولی معادل آن مانند S_1 یافت که خالی از موارد $\subset$ و $\equiv$ باشد. در این صورت،

---

(۱) حروف F، G، و غیره.

$S\sim$ معادل $S_1\sim$ است، که فرمول اخیر، بنا بر ۶.۵.۲، معادل S_1^* (جفت S_1) میباشد. پس، $S\sim$ معادل S_1^* است. بدین گونه، اصل جفت را در هر مورد میتوان بکار برد. بالاخص، چون

$$\forall x(P \supset Q) \text{ هم } \forall x(\sim P \vee Q),$$

و جفت فرمول اخیر $\exists x(P \;\&\; \sim Q)$ است، خواهیم داشت:

۶.۵.۴. قضیه. نقیض فرمول $\forall x(P \supset Q)$ معادل فرمول $\exists x(P \;\&\; \sim Q)$ است.

۶.۵.۵. امثله

(آ). گزارهی

(۱) بعضی زنان شاعر و ریاضیدانند

را در ج: ۵.۱.۴ به صورت $\exists y(F(y) \;\&\; G(y) \;\&\; H(y))$ ترجمه کردیم. نقیض این گزاره بر طبق اصل جفت عبارتست از

$$\forall y(\sim F(y) \vee \sim G(y) \vee \sim H(y)), \quad (۲)$$

که معنی آن اینست:

بازاء هر چیز، آن زن نیست یا شاعر نیست یا ریاضیدان نیست.

برای یافتن ترجمهای ملایمتر با زبان فارسی، دامنهی سور را در (۲) چنین مینویسیم

$\sim F(y) \vee (\sim G(y) \vee \sim H(y))$ بنا بر ۳.۱.۴

هم $F(y) \supset (\sim G(y) \vee \sim H(y))$ بنا بر ۳.۱.۹

هم $F(y) \supset \sim (G(y) \;\&\; H(y))$.

پس، (۲)، یعنی نقیض (۱)، معادل است با

$$\forall y[F(y) \supset \sim (G(y) \;\&\; H(y))], \quad (۳)$$

که معنی آن به فارسی اینست:

(۴) هیچ زن در عین حال شاعر و ریاضیدان نیست.

(ب). گزارهی

(۱) هر عدد فرد یا زوج است

را در ب: ۵.۱.۴ چنین ترجمه کردیم:

$$\forall x[F(x) \supset (G(x) \vee H(x))]. \quad (۲)$$

نقیض این گزاره، بنا بر ۶.۵.۴، عبارتست از

$$\exists x[F(x) \;\&\; \sim (G(x) \vee H(x))]. \quad (۳)$$

مؤلفهی راست عاطف، بنا بر اصل جفت، معادل $\sim G(x) \;\&\; \sim H(x)$ است. پس، (۳) معادل است با

$$\exists x[F(x) \;\&\; \sim G(x) \;\&\; \sim H(x)], \quad (۴)$$

و این نقیض (۱) و معنی فارسیش اینست:

چیزی هست که عدد است و فرد نیست و زوج نیست

یا

(۵) عددی هست که نه فرد است و نه زوج است،

و این همانست که در مثال آ: ۴.۱.۵.۱ فصل ۱ بدست آوردیم.

در تعیین نقیض گزاره‌ی (۱) عمداً راه درازی رفتیم تا تمرینی از محاسبه برای متعلم باشد. چنانکه در پ: ۵.۱.۴ دیدیم، با استعمال متغیرهای مقید به مجموعه‌ی اعداد، گزاره‌ی (۱) به صورت $\forall x(G(x) \vee H(x))$ ترجمه میشود، که نقیض آن، بر طبق اصل جفت اینست:

$$\exists x(\sim G(x) \,\&\, \sim H(x)),$$

و، البته، در آن متغیر x مقید به همان مجموعه میباشد، و بالبداهه معنی فارسی آن همان (۵) است.

(پ). مطلوبست نقیض گزاره‌ی

(۱) بازاء هر عضو باشگاه A عضوی از باشگاه B هست که بازاء هر عضو باشگاه C نسبت F بین این سه عضو برقرار است.

اگر متغیرهای x، y، و z را، بترتیب، مقید به A، B، و C نمائیم گزاره‌ی (۱) چنین تحلیل میشود:

(۲) بازاء هر x، yی هست که، بازاء هر z، نسبت F بین x، y، و z بر قرار است،

یا

$$\forall x\, \exists y\, \forall z F(x, y, z). \qquad (۳)$$

پس، بنا بر اصل جفت، نقیض (۱) عبارتست از

$$\exists x\, \forall y\, \exists z \sim F(x, y, z), \qquad (۴)$$

و معنی فارسی آن اینست:

عضوی از A هست که، بازاء هر عضو B، عضوی از C هست که نسبت F بین این سه عضو بر قرار نیست.

و این همان است که در ۴.۱.۵.۲ : ۱ ذکر شد.

۶.۵.۶. تمرین

۱. در تمرین ۱ : ۱.۳.۲ نقیض گزاره‌های (آ) ـ (چ) را بنویسید، و به فارسی معنی کنید.
۲. نقیض هر یک از فرمولهای مسائل ۱ و ۲ تمرین ۴.۲.۴ را بنویسید.
۳. نقیض هر یک از گزاره‌های ۱ : ۵.۱.۵ را بنویسید، و به فارسی معنی کنید.
۴. همان مسئله را در مورد گزاره‌های ۱ : ۵.۲.۲ حل کنید.

۶.۶. فواید مختلفه. در پایان این فصل، بعضی از مفاهیم و احکامی را که در فصل ۷ آموختیم به زبان منطق بیان میکنیم تا محصلین بهتر به این زبان و قدرت آن در بیان مطالب وقوف یابند.

۶.۶.۱. تعریف هیچ‌رشته. متغیرهای فردی n و N را مقید به $\mathbf{N}$ و متغیر ε را مقید به $\mathbf{R}^+$ میگیریم. تعریف هیچرشته بودن رشته‌ی $\{a_n\}$ که در صفحه‌ی ۳۸۸ با عبارت + ـ ۲.۲ بیان شده است به زبان منطق چنین بیان میشود:

$$\forall \varepsilon\, \exists N\, \forall n(n \geqslant N \supset |a_n| < \varepsilon). \qquad (۱)$$

نقیض این عبارت را به یک نظر میتوان بر طبق اصل جفت و با توجه به ۶.۵.۴ نوشت:

$$(۲) \qquad \exists\varepsilon\ \forall N\ \exists n(n \geqslant N\ \&\ \sim(|a_n| < \varepsilon)).$$

بالاخره، چون ـ بر طبق خواص اعداد حقیقی ـ عبارت $\sim(|a_n| < \varepsilon)$ معادل $|a_n| \geqslant \varepsilon$ است، (۲) معادل است با

$$(۳) \qquad \exists\varepsilon\ \forall N\ \exists n(n \geqslant N\ \&\ |a_n| \geqslant \varepsilon),$$

و این همان گزاره‌ی مذکور در ۲۰۲۰۵ : ۷ (صفحه‌ی ۳۸۹) میباشد.

۶.۶.۲. تعریف حد. تعریف «$\lim a_n = \alpha$»، به شرح مذکور در ۳۰۲۰۱۰۱ : ۷ (صفحه‌ی ۳۹۹) به زبان منطق چنین بیان میشود،

$$(۱) \qquad \forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n(n \geqslant N \supset |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

نقیض (۱) چنین است:

$$(۲) \qquad \exists\varepsilon\ \forall N\ \exists n(n \geqslant N\ \&\ |a_n - \alpha| \geqslant \varepsilon).$$

همچنین، تعریف «$\lim a_n = \infty$» (۳۰۳۰۲ : ۷) اینست:

$$(۳) \qquad \forall u\ \exists N\ \forall n(n \geqslant N \supset u < a_n).$$

۶.۶.۳. رشته‌ی اساسی. تعریف ۴۰۷۰۱ : ۷ به زبان منطق چنین بیان میشود:

$$(۱) \qquad \forall\varepsilon\ \exists N\ \forall p\ \forall q[(p \geqslant N\ \&\ q \geqslant N) \supset |a_p - a_q| < \varepsilon).$$

و نقیض آن اینست:

$$(۲) \qquad \exists\varepsilon\ \forall N\ \exists p\ \exists q(p \geqslant N\ \&\ q \geqslant N\ \&\ |a_p - a_q| \geqslant \varepsilon).$$

بنا بر ۴۰۷۰۲ : ۷ و ۴۰۷۰۳ : ۷، (۱) با هر یک از عبارات ذیل معادل است،

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall p(p > N \supset |a_p - a_N| < \varepsilon),$$
$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall p\ \forall k(p > N \supset |a_{p+k} - a_p| < \varepsilon).$$

بدون استعمال متغیرهای مقید، گزاره‌ی (۱) چنین نوشته میشود:

$$\forall\varepsilon\Big\{\varepsilon \in \mathbf{R}^+ \supset \exists N\big[N \in \mathbf{N}\ \&\ \forall p\ \forall q\{(p \in \mathbf{N}\ \&\ q \in \mathbf{N}\ \&\ p \geqslant N\ \&\ q \geqslant N) \supset |a_p - a_q| < \varepsilon\}\big]\Big\}.$$

فصل ۲ ض

متمم مبحث مجموعه‌ها و نسب

نظر به اهمیت تئوری مجموعه‌ها[۱]، در این فصل اطلاعاتی زاید بر آنچه در مقاله‌ی اول گذشت در این باب میآوریم.

۱ § جبرهای مجموعه‌ها

۱.۱. کلیات. در ۳ § فصل ۲، بعضی از قوانین حساب مجموعه‌ها را با توسل به اعضای مجموعه‌ها ثابت کردیم. این روش، که میتوان آن را روش اعضا نامید، بارآور نیست، و ارتباط قضایا را با یکدیگر، و قابل استنتاج بودن بعضی را از برخی آشکار نمیسازد. در حساب مجموعه‌ها میتوان روش دیگری پیش گرفت، و آن روش محاسبه و استدلال با خود مجموعه‌ها است. این روش موضوع قسمت حاضر است.

فرض کنیم V یک مجموعه‌ی عمومی و $\mathcal{P}(V)$ مجموعه‌ی مجموعکان آن باشد. اعمال $\cup$، $\cap$، و $^{-}$ اعمالی در $\mathcal{P}(V)$ هستند بدین معنی که همواره

(آ) اگر $A, B \in \mathcal{P}(V)$ آنگاه

$$A \cup B \in \mathcal{P}(V), \qquad A \cap B \in \mathcal{P}(V);$$

(ب) اگر $A \in \mathcal{P}(V)$ آنگاه $\overline{A} \in \mathcal{P}(V)$.

در فصل ۲، بعضی از قوانین مربوط به دستگاه

$$(\mathcal{P}(V);\ \cup,\ \cap,\ ^{-}) \qquad (*)$$

را آموختیم. از میان این قوانین، قوانین آتیه را به عنوان قوانین اولیه اختیار میکنیم. دستگاه $(*)$ با این قوانین جبر مجموعه‌ی مجموعکان V است[۲].

---

(۱) اهمیت تئوری مجموعه‌ها در فهم مبانی ریاضیات در مقاله‌ی اول کما بیش آشکار گردید. گذشته از این، تئوری مجموعه‌ها در قرن حاضر در رشته‌های بسیار متنوع ــ از قبیل تئوری احتمالات، الکترونیک، تئوری کوانتا، سیبرنتیک، تئوری بازیها، و بسیاری از مسائل علمی و صنعتی دیگر ــ مورد استعمال فراوان یافته است.

سیبرنتیک (cybernetics) علمی است که در کنترل و ارتباط در ماشینها و در جانوران بحث میکند.

تئوری بازیها از تئوریهای ریاضی است، و در باب بهترین رفتار در مسائلی که رقابت و منافع متعارض در کار است بحث میکند.

(۲) تعریف کلی جبرهای مجموعه‌ها در ۱.۶.۱ خواهد آمد.

قوانین اولیه‌ی حساب مجموعه‌ها[1]

(۱) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$ (۱′) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

(۲) $A \cup B = B \cup A.$ (۲′) $A \cap B = B \cap A.$

(۳) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(۳′) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

(۴) $A \cup \varnothing = A.$ (۴′) $A \cap V = A.$

(۵) $A \cup \overline{A} = V.$ (۵′) $A \cap \overline{A} = \varnothing.$

بنا بر (۱)، (۱′)، (۲)، و (۲′)، اعمال $\cup$ و $\cap$ شرکتپذیر و تعویضپذیرند، و بنا بر (۳) و (۳′)، هریک از آنها نسبت به دیگری توزیعی است. پس، این اعمال واجد خواص عمومی اعمال شرکتپذیر، تعویضپذیر، و توزیعی میباشند.

برای اینکه در بحث از نسبت جزئیت و تفریق از توسل به اعضا بینیاز شویم، با توجه به قضایای ۳.۲.۲ و ۳.۲.۶ فصل ۲، تعریفات ذیل را میآوریم:

۱.۱.۱. تعریف. $A \subseteq B$ یعنی $A \cup B = B$.

۱.۱.۲. تعریف. $A - B$ یعنی $A \cap \overline{B}$.

به عنوان اولین مثال از استدلال، ثابت میکنیم که

۱.۱.۳. قضیه (قوانین خودنمائی).

(آ) $A \cup A = A.$ (ب) $A \cap A = A.$

برهان. اولاً،

$A \cup A$	بنا بر ۴′
$= (A \cup A) \cap V$	بنا بر ۵
$= (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A})$	بنا بر ۳
$= A \cup (A \cap \overline{A})$	بنا بر ۵′
$= A \cup \varnothing$	بنا بر ۴
$= A.$ ▲	

ثانیاً،

$A \cap A$	بنا بر ۴
$= (A \cap A) \cup \varnothing$	بنا بر ۵′
$= (A \cap A) \cup (A \cap \overline{A})$	بنا بر ۳′

(۱) دو قانون شرکتپذیری (۱ و ۱′) را میتوان از سایر قوانین اولیه استخراج کرد (۲.۳ ملاحظه شود).

$$= A \cap (A \cup \overline{A})$$ بنا بر ۵
$$= A \cap V$$ بنا بر $'$۴
$$= A. \blacktriangle$$

مقایسه‌ی برهان دو قسمت قضیه‌ی فوق خاصیت جالب و مهمی را آشکار میسازد. برای بیان آن، قبلاً تعریفی میآوریم.

۱.۱.۴. تعریف. اگر در سراسر گزاره‌نما یا اسمنمائی از حساب مجموعه‌ها که بر حسب $\cup$، $\cap$، $\overline{}$، V، $\varnothing$، و حروف A، B، و غیره بیان شده است هر مورد ناو را به طاق، هر مورد طاق را به ناو، هر مورد V را به $\varnothing$، و هر مورد $\varnothing$ را به V تبدیل کنیم گزاره‌نما یا اسمنمای دیگری بدست میآید که آن را جفت گزاره‌نما یا اسمنمای اولیه خوانند.
مثلاً، اسمنمای $A \cup (V \cap \overline{B})$ جفت اسمنمای $A \cap (\varnothing \cup \overline{B})$ است، و جفت گزاره‌نمای $A = A \cup \varnothing$ گزاره‌نمای $A \cap V = A$ میباشد.

اینک به قضیه‌ی ۱.۱.۳ و برهان دو قسمت آن باز میگردیم. اولاً، مشاهده میکنیم که دو حکم قضیه ($A = A \cup A$ و $A = A \cap A$) جفت یکدیگرند. ثانیاً، ملاحظه میشود که هر مرحله از برهان یکی جفت مرحله‌ی نظیر آن از برهان دیگری است. این مطلب غیر منتظره نیست، زیرا، اگر به قوانین اولیه‌ی دهگانه باز گردیم میبینیم که هر دو قانون که شماره‌هایشان به صورت n و n' است جفت یکدیگرند. بنا بر این، مرحله‌ی اول برهان رابطه‌ی اول، یعنی رابطه‌ی

$$A \cup A = (A \cup A) \cap V,$$

که به استناد ($'$۴) حاصل شده است، جفتش، یعنی رابطه‌ی

$$A \cap A = (A \cap A) \cup \varnothing,$$

به استناد (۴) بر قرار است، و این نیست مگر مرحله‌ی اول برهان رابطه‌ی دوم قضیه؛ و هکذا در مراحل بعد. از تأمل در این نکات نتیجه‌ی بسیار مهمی عاید میشود، و آن اینکه

۱.۱.۵. اصل جفت. اگر $\mathscr{C}$ قضیه‌ای از حساب مجموعه‌ها باشد که صرفاً به استناد قوانین اولیه‌ی دهگانه‌ی حساب مجموعه‌ها ثابت شده است، و $\mathscr{C}'$ جفت $\mathscr{C}$ باشد، $\mathscr{C}'$ نیز قضیه‌ی حساب مجموعه‌ها است.

برای اثبات، قبلاً ملاحظه میکنیم که، چون $\mathscr{C}'$ جفت $\mathscr{C}$ است، مفروضات و حکم قضیه‌ی $\mathscr{C}'$، بترتیب، جفتهای مفروضات و حکم قضیه‌ی $\mathscr{C}$ میباشند. حال فرض کنیم دلیل $\mathscr{C}$ از مفروضاتش مرحله به مرحله نوشته شده باشد. هر یک از این مراحل یا از مفروضات $\mathscr{C}$ است و یا به استناد یکی از ده قانون اولیه حاصل شده است. پس، اگر بجای هر یک از این مراحل جفت آن را قرار دهیم مراحل دلیل $\mathscr{C}'$ بدست میآید، زیرا، از مراحل جدید، آنهائی که جفت مقدمات $\mathscr{C}$ هستند مقدمات $\mathscr{C}'$ میباشند، و آنهائی که جفت یکی از قوانین

اولیه هستند خود از قوانین اولیه‌اند. ▲

۱.۱.۶. فایده. بر طبق اصل جفت، از هر قضیه‌ی حساب مجموعه‌ها که از قوانین دهگانه استخراج شده باشد، بدون نیاز به استدلال مجدد، قضیه‌ی دیگری از این حساب عاید میشود، چنانکه در آتیه خواهیم دید.

۱.۲. استخراج قضایای دیگر. اینک بـه استخراج بعضی دیگـر از قضایـای حساب مجموعه‌ها، که با آنها آشنا هستید، میپردازیم.

۱.۲.۱. قضیه.

(آ) $A \cup V = V.$ (ب) $A \cap \varnothing = \varnothing.$

برهان. بنا بر اصل جفت، کافی است رابطه‌ی (آ) را ثابت کنیم. اثبات از این قرار است:

$A \cup V$	بنا بر ′۴
$= (A \cup V) \cap V$	بنا بر ′۲
$= V \cap (A \cup V)$	بنا بر ۵
$= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup V)$	بنا بر ۳
$= A \cup (\bar{A} \cap V)$	بنا بر ′۴
$= A \cup \bar{A}$	بنا بر ۵
$= V.$ ▲	

۱.۲.۲. قضیه (قوانین جذب).

(آ) $A \cup (A \cap B) = A.$ (ب) $A \cap (A \cup B) = A.$

برهان آ.

$A \cup (A \cap B)$	بنا بر ′۴
$= (A \cap V) \cup (A \cap B)$	بنا بر ′۳
$= A \cap (V \cup B)$	بنا بر ۲
$= A \cap (B \cup V)$	بنا بر آ: ۱.۲.۱
$= A \cap V$	بنا بر ′۴
$= A.$ ▲	

۱.۲.۳ قضیه (یکتائی متمم). اگر

$$A \cap B = \varnothing \qquad A \cup B = V,$$

آنگاه

$$A = \bar{B}. \qquad B = \bar{A}$$

برهان. فرض کنیم $A \cup B = V$ (آ) و $A \cap B = \varnothing$ (ب).

B	بنا بر ′۴
$= B \cap V$	بنا بر ۵
$= B \cap (A \cup \overline{A})$	بنا بر ′۳
$= (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$	بنا بر ′۲ و ب
$= \varnothing \cup (B \cap \overline{A})$	بنا بر ۲ و ۴
$= B \cap \overline{A}$	بنا بر ۴
$= (B \cap \overline{A}) \cup \varnothing$	بنا بر ′۵
$= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A})$	بنا بر ′۲
$= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap A)$	بنا بر ′۳
$= \overline{A} \cap (B \cup A)$	بنا بر ۲ و آ
$= \overline{A} \cap V$	بنا بر ′۴
$= \overline{A}.$	

خلاصه، $\overline{A} = B$. برای اثبات اینکه $A = \overline{B}$ کافی است ملاحظه کنیم که از (آ) و (ب) بنا بر (۲) و (′۲) نتیجه میشود، $B \cup A = V$ و $B \cap A = \varnothing$. پس، بنا بر آنچه ثابت شد، $A = \overline{B}$. ▲

از ۵ و ′۵ بنا بر ۱.۲.۳ نتیجه میشود،

۱.۲.۴. قضیه. $A = \overline{\overline{A}}$.[۱]

۱.۲.۵. قضیه.

(آ) $\overline{\varnothing} = V$. (ب) $\overline{V} = \varnothing$.

برهان. بنا بر ۴، $V \cup \varnothing = V$؛ و بنا بر ′۴ و ′۲، $V \cap \varnothing = \varnothing$. پس، بنا بر ۱.۲.۳، حکم برقرار است. ▲

۱.۲.۶. قضیه (قوانین د مورگن).

(آ) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. (ب) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

راهنمائی. برای اثبات (آ)، به موجب ۱.۲.۳، کافی است ثابت کنیم که

$$(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = V \qquad (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing.$$

۱.۲.۷. قضیه (خواص نسبت جزئیت).

---

(۱) چرا این قضیه یک قسمت دارد؟

(آ) $A \subseteq B \equiv A \cap B = A.$

(ب) $A \subseteq B \equiv \overline{A} \cup B = V.$

(پ) $A \subseteq B \equiv A \cap \overline{B} = \varnothing.$

(ت) $A \subseteq B \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}.$

(ث) $\varnothing \subseteq A.$

(ج) $A \subseteq A.$

(چ) $(A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C) \supset A \subseteq C.$

برهان. (آ)، (ب)، و (چ) را ثابت میکنیم.

اثبات (آ). اولاً، فرض کنیم $A \subseteq B$. بنا بر ۱.۱.۱، $A \cup B = B$. پس، بنا بر قانون جذب،

$$A = A \cap (A \cup B) = A \cap B.$$

بالعکس، اگر تساوی اخیر برقرار باشد، بنا بر قانون جذب،

$$B = B \cup (B \cap A) \; [\text{۲}'] = B \cup (A \cap B) = B \cup A = A \cup B.$$

پس، بنا بر ۱.۱.۱، $A \subseteq B$. ▲

اثبات (ب). اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$، و بالنتیجه،

$$\overline{A} \cup B = \overline{A} \cup (A \cup B) = (\overline{A} \cup A) \cup B$$
$$= (A \cup \overline{A}) \cup B = V \cup B = B \cup V = V.$$

بالعکس، اگر $\overline{A} \cup B = V$ آنگاه

$$A = A \cap V = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$$
$$= \varnothing \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup \varnothing = A \cap B.$$

پس، بنا بر قسمت (آ)، $A \subseteq B$. ▲

اثبات (چ). فرض کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. بنا بر قسمت (آ)، $A = A \cap B$ و $B = B \cap C$. پس،

$$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B = A.$$

بالنتیجه، بنا بر قسمت (آ)، $A \subseteq C$. ▲

۱.۲.۸. تبصره. اصل جفت را میتوان در مورد قضایای مشتمل بر $\subseteq$ تعمیم داد. بنا بر ۱.۱.۱، $A \subseteq B$ به معنی $A \cup B = B$ است، که جفتش $A \cap B = B$ میباشد، که معادل $B \subseteq A$ است. پس، اصل جفت را میتوان در مورد قضایای مشتمل بر $\subseteq$ بکار بست مشروط بر اینکه هر عبارتی به صورت $A \subseteq B$ را به $B \subseteq A$ تبدیل کنیم.

۱.۲.۹. تبصره. بعضی از اصطلاحات جبر عادی را میتوان در جبر مجموعهها تعریف کرد. مثلاً،

I. هر یک از متغیرهای A، B، و غیره را ــ با خط علامت متمم یا بدون آن ــ و نیز

هر عبارت را که به صورت مقطع تعدادی متناهی از عباراتی از این قبیل باشد یک یکجمله‌ای خوانیم. مثلاً، هر یک از عبارات ذیل یک یکجمله‌ای است:

$$A, \qquad \overline{B}, \qquad A \cap \overline{B} \cap C.$$

II. اتحادیه‌ی چند یکجمله‌ای را کثیرالجمله و هر یک از آن یکجمله‌ایها را یک جمله‌ی آن کثیرالجمله نامیم.

III. در هر عبارت که به صورت مقطع چند مجموعه باشد، هر یک از این مجموعه‌ها را یک عامل آن مقطع خوانیم. مثلاً، هر یک از مجموعه‌های $\overline{A}$ و $B \cup C$ یک عامل عبارت $\overline{A} \cap (B \cup C)$ است. عامل خطی عاملی است که یکی از متغیرها (با خط متمم یا بدون آن) یا اتحادیه‌ی چند جمله از این قبیل باشد. مثلاً، $A \cap \overline{B}$ یک عامل خطی تواند بود. بر خلاف، عاملی مانند $\overline{A \cup B}$ یا $A \cup (B \cap C)$ عامل خطی نیست.

۱.۲.۱۵. امثله از محاسبه

(آ). مثال از بسط. بسط، مانند جبر عادی، به وسیله‌ی قوانین توزیعپذیری صورت میگیرد. مثلاً،

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C \cup D) &= A \cap (B \cup (C \cup D)) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap (C \cup D)) \\ &= (A \cap B) \cup [(A \cap C) \cup (A \cap D)] \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D). \end{aligned}$$

ضمناً، از اینجا بنا بر اصل جفت نتیجه میشود:

$$A \cup (B \cap C \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D).$$

(ب). فاکتورگیری به وسیله‌ی قوانین توزیعپذیری میسر است. مثلاً،

$$\begin{aligned} &(A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (B \cap C) \\ &= [(A \cap C) \cup (A \cap D)] \cup [(B \cap D) \cup (B \cap C)] \\ &= [A \cap (C \cup D)] \cup [B \cap (D \cup C)] \\ &= [(C \cup D) \cap A] \cup [(C \cup D) \cap B] \\ &= (C \cup D) \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap (C \cup D). \end{aligned}$$

(پ). این عبارت را مختصر کنید:

$$E = [A \cap (\overline{A} \cup B)] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B.$$

$$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

پس، با توجه به قانون جذب،

$$\begin{aligned} E &= (A \cap B) \cup B \cup B \ [\text{خودنمائی}] \\ &= (A \cap B) \cup B = (A \cap B) \cup (B \cap B) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap B) = B \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

$$= B \cap (B \cup A) = B.$$

(ز). بسط $\overline{A \cup B \cup C}$ و $\overline{A \cap B \cap C}$.

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A \cup (B \cup C)} = \overline{A} \cap \overline{B \cup C}$$
$$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

پس، بر طبق اصل جفت،

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

۱.۳. تمرین

۱. ثابت کنید که

(آ) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

(ب) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

(پ) $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}.$

(ت) $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$

(ث) $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B.$

(ج) $A \cap B = (A \cup \overline{B}) \cap B.$

۲. این عبارات را مختصر کنید

(آ) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$

(ب) $(A \cup B) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B).$

(پ) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$

۳. عبارت

$$[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{X} \cap Y)] \cap \overline{[(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (\overline{A} \cap B \cap Y)]}$$

را مختصر کرده به صورت ذیل درآورید:

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cap Y).$$

۴. ثابت کنید که

(آ) $A \cup B \neq \varnothing \supset (A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing).$

(ب) $A \cap B \neq \varnothing \supset (A \neq \varnothing \,\&\, B \neq \varnothing).$

(پ) $(A \cup B = A \cup C \,\&\, A \cap B = A \cap C) \supset B = C$

(راهنمائی: بنا بر قانون جذب، $B = B \cap (B \cup A)$.)

(ت) $(A \cup B = A \cup C \,\&\, \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C) \supset B = C.$

(راهنمائی: $B = B \cup (A \cap \overline{A})$.)

(ث) $(A \cap B = A \cap C \,\&\, \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C) \supset B = C.$

(ج) $A \cup B = A \cap B \supset A = B.$

۵. ثابت کنید که

(آ) $A \subseteq A \cup B.$ (ب) $B \subseteq A \cup B.$

(پ) $A \cap B \subseteq A.$ (ت) $A \cap B \subseteq B.$

(ث) $A \subseteq B \supset (A \cup C \subseteq B \cup C \ \&\ A \cap C \subseteq B \cap C).$

(ج) $(A \subseteq B \ \&\ C \subseteq D) \supset A \cup C \subseteq B \cup D.$

(چ) $(A \subseteq B \ \&\ C \subseteq D) \supset A \cap C \subseteq B \cap D.$

(ح) $(A \subseteq C \ \&\ B \subseteq C) \mathrel{\underline{\supset\subset}} A \cup B \subseteq C.$

(خ) $(A \subseteq B \ \&\ A \subseteq C) \mathrel{\underline{\supset\subset}} A \subseteq B \cap C.$

(د)[1] $A \cup B \subset C \supset (A \subset C \ \&\ B \subset C).$

(ذ) $A \subset B \cap C \supset (A \subset B \ \&\ A \subset C)$

۶. ثابت کنید که

(آ) $(A - B) \cap B = \varnothing$ (ب) $A - B \subseteq A.$

(پ) $A - A = \varnothing.$

(ت) $A - V = \varnothing$ (ث) $V - A = \bar{A}.$

(ج) $A - \varnothing = A.$ (چ) $\varnothing - A = \varnothing.$

۷. ثابت کنید که

(آ) $A \cup B = (A - B) \cup B.$

(ب) $A \cap B = A - (A - B).$

(پ) $A - B = A - (A \cap B).$

تبصره. بنا بر روابط (آ) و (ب) مسئله‌ی ۶، $A - B$ از B جدا و مجموعک A است، و بنا بر رابطه‌ی (پ) مسئله‌ی ۵، $A \cap B$ مجموعک A است. پس، رابطه‌ی (آ) مسئله‌ی ۷ اتحادیه‌ی دو مجموعه را به اتحادیه‌ی دو مجموعه‌ی جدا از هم تبدیل میکند، و روابط (ب) و (پ)، بترتیب، مقطع و تفاضل دو مجموعه را به تفاضل دو مجموعه که دومی جزء اولی است تبدیل مینمایند.

۸. ثابت کنید که

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

۹. ثابت کنید که

(آ) $(A \cup B = C \ \&\ A \cap B = \varnothing) \supset A = C - B.$

راهنمائی: $A = A \cup (B \cap \bar{B})$.

(ب) $A = (A \cup B) - B \mathrel{\underline{\supset\subset}} A \cap B = \varnothing.$

(پ) $A \subseteq B \mathrel{\underline{\supset\subset}} A - B = \varnothing.$

(ت) $A \subseteq B \mathrel{\underline{\supset\subset}} (B - A) \cup A = B.$

۱۰. بنا بر تعریف، تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B (به همین ترتیب)، که $A + B$ نامیده میشود. عبارتست از

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

---

(۱) $A \subset B$ یعنی $A \subseteq B \ \&\ A \neq B$.

(تعریف را از روی تصویر ون توضیح دهید). ثابت کنید که

(آ) $A+B=B+A.$

(ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(پ) $A\cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C).$

(ت) $A+\varnothing=A.$

(ث) $A+A=\varnothing.$

(ج) $A+C=B+C \supset A=B.$

(چ) $A=B \;\Xi\; A+B=\varnothing.$

۱.۴. بعضی فواید منطقی حساب مجموعه‌ها. گزاره‌های شخصی، کلی، و جزئی را میتوان به وسیله‌ی مفاهیم مربوط به مجموعه‌ها بیان کرد. گزاره‌ی شخصی

(۱) سعدی شاعر است

بدین معنی است که

(۲) سعدی عضو مجموعه‌ی شعرا است.

پس، اگر سعدی و مجموعه‌ی شعرا را، بترتیب، a و A بنامیم گزاره‌ی (۱) به صورت

$$a\in A$$

نوشته میشود. چنانکه ملاحظه میکنیم، گزاره‌ی شخصی (۱) به وسیله‌ی نسبت عضویت بیان میشود.

اینک به گزاره‌های چهارگانه‌ی مذکور در ۴۰۱۰۵ : ۱ میپردازیم. برای احتراز از تکرار، فرض کنیم،

A = مجموعه‌ی انسانها، B = مجموعه‌ی حیوانات،

C = مجموعه‌ی جمادات.

گزاره‌ی (آ) («هر انسان حیوان است») بدین معنی است که هر عضو A عضو B است، و یا $A\subseteq B$، و گزاره‌ی اخیر با هر یک از گزاره‌های

$$A\cup B=B,\quad A\cap B=A,\quad \overline{B}\subseteq\overline{A},\quad A\cap\overline{B}=\varnothing,\quad \overline{A}\cup B=V$$

معادل میباشد.

گزاره‌ی (ب) («هیچ انسان جماد نیست») بدین معنی است که مجموعه‌های A و C عضو مشترک ندارند؛ یعنی $A\cap C=\varnothing$. رابطه‌ی اخیر با هر یک از روابط $A\subseteq\overline{C}$ و $C\subseteq\overline{A}$ معادل است.

گزاره‌ی (پ) («بعض انسان جماد است») بدین معنی است که حد اقل یک عضو A متعلق به C است، یعنی، $A\cap C\neq\varnothing$.

بالاخره، برای ترجمه‌ی گزاره‌ی (ت) («بعض انسان حیوان نیست») ملاحظه میکنیم که مجموعه‌ی اشیائی که حیوان نیستند مجموعه‌ی $\overline{B}$ است. پس، گزاره‌ی (ت) بدین معنی است که $A\cap\overline{B}\neq\varnothing$.

۱.۴.۱. تبصره در معانی «است». پیش از ترجمه‌ی یک گزاره به زبان علامتی[۱]، باید معنی آن را بر خود روشن سازیم. این کار، بسبب تعدّد معنی الفاظ زبانهای طبیعی (مثلاً فارسی)، و ابهاماتی که احیاناً در بیان گزاره‌ها به این زبانها هست، ضرورت دارد. به عنوان مثال، به استعمال لفظ \است در این چهار گزاره توجه کنید:

(۱) تهران پایتخت ایران \است.

(۲) حسن حیوان \است.

(۳) هر انسان حیوان \است.

(۴) بعض انسان حیوان \است.

اگر تهران، پایتخت ایران، و حسن را، بترتیب، a، b، و c بنامیم، با حروفی که در ۱.۴ اختیار شد، گزاره‌های مذکور بترتیب به معنی $a = b$، $c \in B$، $A \subseteq B$، و $A \cap B \neq \varnothing$ میباشند. چنانکه ملاحظه میشود، لفظ «است» در گزاره‌ی اول برای بیان تساوی منطقی، در دومی برای بیان عضویت، در سومی برای بیان جزئیت، و در چهارمی برای بیان وجود حداقل یک شیء بکار رفته است.

۱.۴.۲. فایده در استنتاج. برای ارائه‌ی فایده‌ی حساب مجموعه‌ها در استنتاج، مثالهائی میآوریم.

۱.۴.۲.۱. امثله از استنتاج

(آ). درستی این استنتاج را ثابت کنید[۲]:

هر انسان حیوان است.
سقراط انسان است.
―――――――――
سقراط حیوان است.

ابتدا مقدمات و نتیجه را به زبان مجموعه‌ها ترجمه میکنیم. فرض کنیم

$A =$ مجموعه‌ی انسانها، $B =$ مجموعه‌ی حیوانها،

$a =$ سقراط.

بدین گونه، استنتاج مذکور بدین صورت در میآید:

$$\begin{array}{ll} (۱) & A \subseteq B \\ (۲) & a \in A \\ \hline & a \in B \end{array}$$

---

(۱) مانند زبان مجموعه‌ها یا زبان منطق.

(۲) در ارائه‌ی یک استنتاج، معمولاً مقدمات و نتیجه را بترتیب زیر هم مینویسند، و نتیجه را با خطی افقی از مقدمات جدا میکنند؛ یا آنکه مقدمات و نتیجه را دنبال هم مینویسند، و نتیجه را با الفاظی مانند «پس» یا «بنا بر این» از مقدمات جدا میسازند. مثلاً، استنتاج مذکور در متن را میتوان چنین نوشت:

هر انسان حیوان است. سقراط انسان است. پس، سقراط حیوان است.

درستی این استنتاج بدیهی است، زیرا، از (۱) و (۲)، بنا بر تعریف جزئیت، نتیجه میشود، $a \in B$.

(د). این دو استنتاج را اختیار میکنیم:

هر انسان حیوان است.
هر حیوان نامی است.
———
هر انسان نامی است.

هر انسان حیوان است.
بعض انسان شاعر است.
———
بعض حیوان شاعر است.

اگر A، B، C، و D، بترتیب، مجموعه‌ی انسانها، مجموعه‌ی حیوانها، مجموعه‌ی اشیاء نامی، و مجموعه‌ی شعرا باشند، صورت دو استنتاج چنین خواهد بود:

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \\ \hline A \subseteq C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ A \cap D \neq \varnothing \\ \hline B \cap D \neq \varnothing \end{cases}$$

برای اثبات استنتاج طرف راست، گوئیم از $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، بنا بر تعدی نسبت جزئیت، نتیجه میشود، $A \subseteq C$. ▲ برای اثبات دومی، گوئیم از $A \subseteq B$ نتیجه میشود، $A \cap D \subseteq B \cap D$ (۱). اما همواره $\varnothing \subseteq A \cap D$، و بنا بفرض، $A \cap D \neq \varnothing$. پس $\varnothing \subset A \cap D$. از این و (۱) نتیجه میشود، $\varnothing \subset B \cap D$. پس، $B \cap D \neq \varnothing$. ▲

(ه). از مقدمات ذیل چه نتیجه‌ای در باب رمالان میتوان گرفت؟

(I) همه‌ی رمالان ریشو کچل یا چرب‌زبانند.

(II) همه‌ی رمالان ریشوی جوان چرب‌زبانند.

(III) هیچ رمال کچل که چرب‌زبان نباشد ریشو نیست.

مجموعه‌ی جمیع رمالان را مجموعه‌ی عمومی میگیریم، و سایر مجموعه‌ها را چنین تعریف میکنیم:

A: مجموعه‌ی رمالان ریشو، B: مجموعه‌ی رمالان کچل،

C: مجموعه‌ی رمالان چرب‌زبان، D: مجموعه‌ی رمالان جوان.

گزاره‌های I ــ III بترتیب چنین نوشته میشوند:

(۱) $A \subseteq B \cup C$ (یا $A \cap \overline{B \cup C} = \varnothing$ یا $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing$).

(۲) $A \cap D \subseteq C$ (یا $A \cap D \cap \overline{C} = \varnothing$).

(۳) $B \cap \overline{C} \cap A = \varnothing$.

اینک به استنتاج از این گزاره‌ها میپردازیم. از (۱) و (۳) نتیجه میشود:

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) = \varnothing. \quad (۴)$$

از (۴) به فاکتورگیری نتیجه میشود:

$$(A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup B) = \varnothing. \quad (۵)$$

پس،

$$(A \cap \overline{C}) \cap V = \varnothing. \quad (۶)$$

از (۶) نتیجه میشود، $A \cap \overline{C} = \varnothing$ و بالنتیجه، $A \subseteq C$، و این بدین معنی است: «همه‌ی رمالان ریشو چرب‌زبانند».

۱.۴.۳. تمرین

۱. با علامات تمرین ۳ : ۵ : ۲، این گزاره‌ها را به زبان مجموعه‌ها ترجمه کنید:
(آ) بعضی از ایرانیان شراب‌نوشنده فیلسوفند.
(ب) هیچ ایرانی هندی نیست.
(پ) کسانی که شراب و قهوه مینوشند چای هم مینوشند.
(ت) همه‌ی شعرای هندی چای، قهوه، و شراب مینوشند.
(ث) بعضی از شعرای ایرانی چای و قهوه مینوشند اما شراب نمینوشند.
(ج) بعضی از شعرای هندی که شراب مینوشند نه قهوه مینوشند نه چای.
(چ) هیچ فیلسوف چای یا قهوه نمینوشد.
(ح) بعضی از هندیان شاعر یا فیلسوفند.
(خ) هر کس قهوه بنوشد چای یا شراب هم مینوشد.

۲. این استنتاجها را به وسیله‌ی مجموعه‌ها ثابت کنید:
(آ) هر انسان حیوان است. پس، هر چیز که حیوان نباشد انسان نیست.
(ب) هر انسان حیوان است. هیچ حیوان جماد نیست. پس، هیچ انسان جماد نیست.
(پ) هر عضو این باشگاه که کچل است احول هم هست. هر عضو این باشگاه که احول است ابکم هم هست. پس، هر عضو این باشگاه که کچل است ابکم است.
(راهنمائی: مجموعه‌ی عمومی را مجموعه‌ی جمیع اعضای باشگاه مورد بحث بگیرید).
(ت) هر عدد صحیح فرد یا زوج است. پس، هر عدد صحیح که فرد نباشد زوج است.
(ث)[1] هیچ بچه‌گربه‌ی ماهیخوار شاعر نیست. هیچ بچه‌گربه‌ی بی‌دم بندباز نیست. هر بچه‌گربه‌ی سبیل‌دار ماهیخوار است. هیچ بچه‌گربه که شاعر نباشد سبزچشم نیست. هر بچه‌گربه‌ی دم‌دار سبیل دارد. پس، هیچ بچه‌گربه‌ی سبزچشم بندباز نیست. (عالم سخن: مجموعه‌ی جمیع بچه‌گربه‌ها.)

۳. این اطلاعات در دست است:
(آ) همه‌ی بومیان میندانائو مردم سفیدپوست را میخورند.
(ب) همه‌ی بومیان بورنئو مردم سیاه‌پوست را میخورند.
(پ) هیچ کس هم مردم سفیدپوست و هم مردم سیاه‌پوست را نمیخورد.
(ت) حسن مردم سیاه‌پوست را میخورد.
کدام یک از گزاره‌های ذیل نتیجه‌ی مقدمات (آ)، (ب)، (پ)، و (ت) است:
حسن بومی بورنئو است. حسن بومی میندانائو نیست.
(مجموعه‌ی آدمیان را مجموعه‌ی عمومی بگیرید.)

۱.۵. بعضی مسائل ابتدائی در شمردن. در این قسمت، بعضی مسائل ابتدائی مربوط به عده‌ی اعضای مجموعه‌های متناهی میآید. بر خلاف قرارد مذکور در ۳ : ۷.۳.۳ عده‌ی اعضای مجموعه‌ی متناهی A را

$$\nu(A)$$

(۱) مقتبس از لویس کارل*.

مینامیم.
بر طبق دستور مذکور در ۷.۳.۷ : ۳، اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند،

$$(۱.۵.۱) \quad \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B).$$

تعمیم این دستور در مورد سه مجموعه آسان است:

$$(۱.۵.۲) \quad \nu(A \cup B \cup C) = \nu(A) + \nu(B) + \nu(C) - \nu(A \cap B) - \nu(B \cap C) - \nu(C \cap A) + \nu(A \cap B \cap C).$$

(ثابت کنید). در مورد بیش از سه مجموعه نیز میتوان دستوراتی از این قبیل بدست آورد، اما دستورات حاصل برای چهار مجموعه یا بیشتر بسیار طولانی میباشند.

دستورات مذکور در حل مسائل گوناگون ــ از جمله مسائل آماری ــ بسیار بکار میآیند. رسم تصویر ون در هر مورد مفید است. باید توجه داشت که استعمال تصویر ون در اینجا با آنکه در ۱.۶.۱ : ۲ گفته شد متفاوت است. در آنجا ناحیه‌ای محدود به یک خط منحنی را نمایش یک مجموعه شمردیم، اما، در استعمال کنونی، چنین ناحیه‌ای را نمایش یک عدد (عده‌ی اعضای یک مجموعه) میشماریم.
نکته‌ی دیگر در بکار بردن تصویر ون اینست که باید تصویر را به کلیترین صورتی که سازگار با مفروضات مسئله باشد رسم کرد. وقتی که هیچ قیدی (مثلاً جدا بودن از هم یا جزئیت مجموعه‌ای نسبت به دیگری) در کار نباشد، دو مجموعه‌ی A و B را بر طبق قسمت (۱) شکل ۷ صفحه‌ی ۶۶، سه مجموعه‌ی A، B، و C را بر طبق شکل ۸ صفحه‌ی ۶۷، و چهار مجموعه‌ی A، B، C، و D را بر طبق تصاویر صفحه‌ی ۷۴ نمایش میدهیم.

۱.۵.۳. امثله

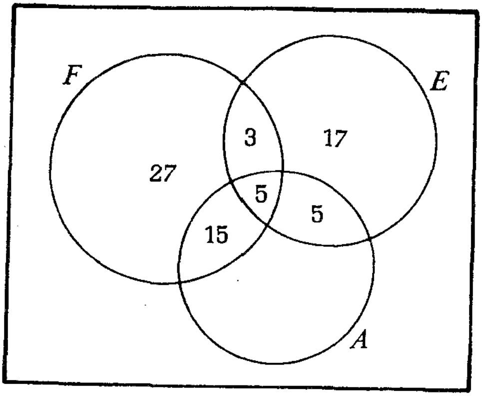
(آ). بازرسی در باره‌ی 100 نفر محصل که در مدرسه‌ای به تحصیل السنه اشتغال دارند چنین گزارش داده است که 5 نفر از آنها زبان آلمانی و فرانسوی و انگلیسی، 10 نفر آلمانی و انگلیسی، 8 نفر فرانسوی و انگلیسی، 20 نفر آلمانی و فرانسوی، 30 نفر انگلیسی، 23 نفر آلمانی، و 50 نفر فرانسوی میخوانند. آیا این گزارش ممکن است درست باشد؟
اگر A، E، و F بترتیب مجموعه‌ی محصلینی باشند که آلمانی، انگلیسی، و فرانسوی تحصیل میکنند، بنا بر مفروضات مسئله،

$$\nu(A \cup E \cup F) = 100, \qquad \nu(A \cap E \cap F) = 5,$$
$$\nu(A \cap E) = 10, \qquad \nu(F \cap E) = 8, \qquad \nu(A \cap F) = 20,$$
$$\nu(E) = 30, \qquad \nu(A) = 23, \qquad \nu(F) = 50.$$

پس، بنا بر ۱.۵.۲،

$$\nu(A \cup E \cup F) = 100 = 23 + 30 + 50 - 10 - 8 - 20 + 5 = 70.$$

چنانکه دیده میشود، اطلاعات داده‌شده ناسازگارند، و گزارش بازرس نادرست میباشد.
تصویر ون مربوط به مسئله در شکل ۴۵ آمده است. مجموعه‌ی عمومی مجموعه‌ی محصلین مورد بحث است، و مجموعه‌های A، E، و F در آن نمایش داده شده‌اند. پس از درج 5 در $A \cap E \cap F$، به وسیله‌ی مفروضات سطر دوم فوق، اعداد 5، 3، و 15 را در نواحی مناسب درج میکنیم. سپس، عده‌ی اعضای مانده‌ی نواحی A، E، و F را بوسیله‌ی مفروضات در آنها مینویسیم. چون 5 + 5 + 15 از $\nu(A)$ بیشتر است داده‌ها با هم سازگار نیستند.



شکل ۴۵

(د).[1] پس از نبردی معلوم شده است که حد اقل 90٪ از جنگندگان یک چشم، دست کم 95٪ آنان حد اقل یک دندان، دست کم 80٪ آنان حد اقل یک دست، و حد اقل 75٪ آنان دست کم یک پای خود را از دست داده‌اند. حد اقل چند نفر در عین حال یک چشم، یک دندان، یک دست، و یک پا از دست داده‌اند؛

فرض کنیم مجموعه‌ی جنگندگان (مجموعه‌ی عمومی) 100 تن باشد و،

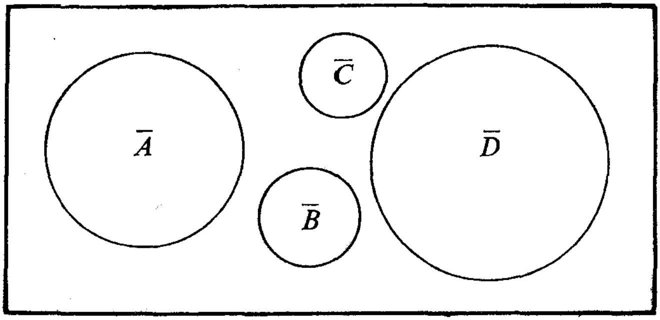
A = مجموعه‌ی کسانی که یک چشم از دست داده‌اند.

B = مجموعه‌ی کسانی که یک دندان از دست داده‌اند.

C = مجموعه‌ی کسانی که یک دست از دست داده‌اند.

D = مجموعه‌ی کسانی که یک پا از دست داده‌اند.

اگر در تصویر ون متممهای این مجموعه‌ها را رسم کنیم (شکل ۴۶)، قسمتی از V (مجموعه‌ی



شکل ۴۶

عمومی) که میماند نمایش مجموعه‌ی کسانی خواهد بود که گرفتار هر چهار نقص شده‌اند. واضحست که این ناحیه وقتی کمترین وسعت را دارد که نواحی $\bar{A}$، $\bar{B}$، $\bar{C}$، و $\bar{D}$ دو بدو از هم جدا باشند. چون

(۱) از لویس کارل*.

$$\nu(\bar{A}) = 10, \qquad \nu(\bar{B}) = 5, \qquad \nu(\bar{C}) = 20, \qquad \nu(\bar{D}) = 25,$$

در حالت مذکور عده‌ی کسانی که هر چهار عضو را از دست داده‌اند برابر است با

$$100 - (10 + 5 + 20 + 25) = 40.$$

پس، حد اقل 40% هر چهار عضو را از دست داده‌اند.

۱.۵.۴. تمرین

۱. بازاء هر سه مجموعه‌ی متناهی A، B، و C،

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) - \nu(C) + \nu(B \cap C) - \nu(B \cap A) + \nu(B \cup C).$$

۲. همه‌ی مردم شهری به زبان فارسی یا اردو تکلم میکنند. اگر 64% آنها به زبان فارسی و 58% به زبان اردو تکلم کنند چند درصد به هر دو زبان تکلم میکنند؟

۳. مجموعه‌های A، B، و C اجزای مجموعه‌ای دارای 200 عضو هستند، و این اطلاعات در باب آنها در دست است:

$$\nu(A) = 70, \qquad \nu(B) = 120, \qquad \nu(C) = 90,$$
$$\nu(A \cap B) = 50, \qquad \nu(B \cap C) = 40, \qquad \nu(C \cap A) = 30,$$
$$\nu(A \cap B \cap C) = 20.$$

مطلوبست تعیین

$$\nu(A \cup B), \qquad \nu(A \cup B \cup C), \qquad \nu(\bar{A} \cap B \cap C), \qquad \nu(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

۴. این اطلاعات در باب 100 تن از محصلین یک مدرسه‌ی مختلط بدست آمده است: همه‌ی محصلین ذکور بیش از 20 سال دارند. عده‌ی محصلین اناث 50 است. عده‌ی محصلینی که بیش از 20 سال دارند 60 است. عده‌ی محصلین اناث شوهردار 25 است. عده‌ی محصلینی که متأهلند و بیش از 20 سال دارند 15 است. 10 نفر از محصلین اناث متأهل بیش از 20 سال دارند. تعیین کنید که (آ) چند نفر از محصلین مذکور متأهلند. (ب) در میان آنان چند تن محصل اناث مجرد دارای بیش از 20 سال وجود دارد. (پ) چند تن از محصلین ذکور مجرد کمتر از 20 سال سن دارند. (ت) چند تن از محصلین ذکور متأهلند. (ث) چند تن از محصلین کمتر از 20 سال سن دارند.

۵. از 100 نفر محصل، 28 نفر انگلیسی، 30 نفر آلمانی، 42 نفر فرانسوی، 8 نفر آلمانی و انگلیسی، 10 نفر انگلیسی و فرانسوی، 5 نفر آلمانی و فرانسوی، و 3 نفر آلمانی و انگلیسی و فرانسوی میخوانند. معلوم کنید، اولاً، چند نفر از محصلین مذکور تحصیل زبان نمیکنند. ثانیاً، چند نفر فرانسوی میخوانند، ثالثاً، چند نفر هستند که هم آلمانی و فرانسوی میخوانند یا نه آلمانی و نه فرانسوی میخوانند.

۶. در بررسی مجددی که از همان محصلین مذکور در مسئله‌ی قبل بعمل آمد معلوم شد که 18 نفر فقط آلمانی میخوانند، 23 نفر آلمانی میخوانند، اما انگلیسی نمیخوانند، 8 نفر آلمانی و فرانسوی میخوانند، 26 نفر آلمانی میخوانند، و 48 نفر فرانسوی و 8 نفر فرانسوی و انگلیسی میخوانند، و 24 نفر هیچ یک از سه زبان را نمیخوانند. معلوم کنید، اولاً، چند نفر انگلیسی میخوانند. ثانیاً، چند نفر آلمانی و انگلیسی میخوانند اما فرانسوی نمیخوانند. ثالثاً، چند نفر در این شرط صدق میکنند که اگر فرانسوی میخوانند انگلیسی نمیخوانند، و بالعکس.

۷. در طالاری ۱۲۰ نفر مرد و زن مجتمع‌اند. عده‌ی زنان مساوی عده‌ی مردان است. نیمی

از مردان عینک دارند. عده‌ی عینکداران مساوی عـده‌ی زنان بی عینک است. عـده‌ی زنان عینکدار را تعیین کنید.

۸. در بررسی 100 مجلد کتاب ریاضی، فیزیک، و شیمی اطلاعات مندرج در جدول زیر بدست آمده است:

	خوش چاپ و دقیق	بد چاپ و دقیق	خوش چاپ و مغلوط	بد چاپ و مغلوط
ریاضی	6	9	10	20
فیزیک	7	11	15	9
شیمی	2	3	8	0

بنا بر آنکه

$A =$ مجموعه‌ی کتب ریاضی، $B =$ مجموعه‌ی کتب فیزیک،

$C =$ مجموعه‌ی کتب شیمی، $D =$ مجموعه‌ی کتب خوش چاپ،

$E =$ مجموعه‌ی کتب مغلوط،

مطلوبست عده‌ی اعضای هر یک از مجموعه‌های $A \cap D \cap E$ و $(B \cup C) \cap (D \cup \bar{E})$.

۹. در نبردی، هر یک از سربازان یک دست، یک پا، یا یک چشم از دست داده‌اند. میدانیم که 75% آنان یک دست، 40% یک پا، و 50% یک چشم از دست داده‌اند. بعلاوه، 20% یک دست و یک پا، 30% یک دست و یک چشم، و 15% یک پا و یک چشم از دست داده‌اند. چند درصد آنان هم یک دست، هم یک پا، و هم یک چشم از دست داده‌اند؟

۱.۶. جبرهای مجموعه‌ها. در صفحات قبل، جبر مجموعه‌ی مجموعکان مجموعه‌ای عمومی مانند V (۱.۱ ملاحظه شود) را آموختیم. بطور کلی،

۱.۶.۱ تعریف. مجموعه‌ی غیر خالی $\mathcal{A}$ از مجموعکهای مجموعه‌ی V را یک جبر مجموعه‌ها بر اساس V خوانیم در صورتی که

(آ) بازاء هر A و B از $\mathcal{A}$،

$$A \cup B \in \mathcal{A}, \qquad A \cap B \in \mathcal{A}.$$

(ب) بازاء هر A از $\mathcal{A}$، $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

مثلاً، $\mathcal{P}(V)$ یک جبر مجموعه‌ها است بر اساس V، اما ممکن است جزئی حقیقی مانند $\mathcal{A}$ از $\mathcal{P}(V)$ یک جبر مجموعه‌ها بر اساس V باشد (تمرین ۱.۶.۳ ملاحظه شود). در هر حال،

۱.۶.۲. قضیه. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر مجموعه‌ها بر اساس مجموعه‌ی V باشد آنگاه

$$\varnothing \in \mathcal{A}, \qquad V \in \mathcal{A}.$$

برهان. بنا بر فرض، $\mathcal{A}$ عضوی مانند A دارد. بنا بر ۱.۶.۱، $\bar{A} \in \mathcal{A}$. پس، بنا بر

۱.۶.۰۱،

$$A \cup \overline{A} \in \mathcal{A}, \qquad A \cap \overline{A} \in \mathcal{A}. \blacktriangle$$

چون قوانین اولیه‌ی حساب مجموعه‌ها (صفحه‌ی ۶۳۵) از خـواص عمومی مجموعه‌ها هستند، قوانین هر جبر مجموعه‌ها میباشند، و همچنین است نتایج مستخرج از آنها.

۱.۶.۳. تمرین

۱. مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ چنین تعریف شده است:

$$\mathcal{A} = \{X \mid X \subseteq \mathbf{N} \,\&\, (\text{متناهی است } \overline{X} \text{ یا } X)\}.$$

ثابت کنید که $\mathcal{A}$ یک جبر مجموعه‌ها بر اساس $\mathbf{N}$ است.

۲ § جبر بولی

۲.۱. مقدمه. محصلینـی که مقاله‌ی اول کتاب حاضر را آموخته‌اند با تعریف کلـی عمل آشنائی دارند، و میدانند که در هر مجموعه‌ای از اشیـاء میتوان اعمالی یکتـائی یا دوتـائـی تعریف کرد، و بدین گونه، دستگاههای جبری مجرد ساخت. نمونه‌ای از این گونه دستگـاههـا گروه آبلی است، که در پایان فصل ۳ مختصری از آن صحبت کردیم، و در همان جا به بعضـی از فوایـد دستگـاههای مجرد اشاره نمودیـم، و سپس، در آغاز تئوری اعداد حقیقی، بالاخص فواید گروههای آبلی را دیدیم.

دستگاههای مجرد معمولاً بر اساس اطلاعاتی که از بعضی مباحث ریاضی داریم ساختـه میشوند، و این مطلب از توضیحاتی که در فصل ۴ گـذشت آشکـار است. در مبحث حـاضر، میخواهیم بر اساس آنچه در جبرهای مجموعه‌ها آموختیم دستگاه مجردی بسازیم. این دستگاه، که به جبر بولی (بنام بول*) معروف است مـورد تحقیقات بسیـار فراوان قرار گـرفته است، و امروزه در رشته‌های مختلف ریاضیات و علوم وابسته به آن اهمیتی زایدالوصف دارد.

برای آماده ساختن ذهن جهت تعریف جبر بولی، قبلاً مثالی میآوریم.

۲.۱.۱. مثال. فـرض کنیم V مـجـمـوعـه‌ای دارای سه عـضو و $\mathcal{B} = \mathcal{P}(V)$ مـجموعـه‌ی مجموعکـان آن بـاشد. دستگـاه $\{\mathcal{B}; \cup, \cap\}$ دارای ایـن خـصوصیات است: (آ) اعمال دوتائی آن ($\cap$ و $\cup$) تعویضپذیرند، و هر یک نسبت به دیگری توزیعی است. (ب) دو عـضو متمـایـز $\varnothing$ و V در دستـگـاه وجـود دارد کـه، بازاءِ هـر X از $\mathcal{B}$، $X \cup \varnothing = X$ و $X \cap \overline{X} = \varnothing$. (پ) بـازاءِ هـر X از $\mathcal{B}$ عضوی از $\mathcal{B}$، که آن را $\overline{X}$ نامیـده‌ایـم، هست که $X \cup \overline{X} = V$ و $X \cap \overline{X} = \varnothing$.

مجملاً میتوان گفت که هر دستگاهی که دارای خصوصیات مذکور باشد یـک جبر بولی است. پیش از اینکه به تعریف کلی و دقیق جبر بولی بپردازیم تـذکـر میدهیم که در دستـگاه مثال فوق (و بطور کلی در مجموعه‌ها) تساوی به معنی منطقی است. بطـور کلی، در هر دستگاه

ریاضی، باید نوعی تساوی (نسبت هم‌ارزی) تعریف شده باشد تا معین باشد که دو عضو دلخواه از دستگاه مانند a و b از جهتی که مورد نظر است یکسان هستند یا نه (۵.۴ : ۳ ملاحظه شود). این نسبت هم‌ارزی را معمولاً «نسبت تساوی» میخوانند، و به علامت «$=$» نمایش میدهند. چنین نسبتی را نباید با نسبت تساوی به معنی منطقی خلط کرد.

اینک تعریف جبر بولی:

۲.۲. تعریف. دستگاه $(\mathscr{B}; +, \cdot)$ را، که در آن، $\mathscr{B}$ مجموعه‌ای است غیر خالی و یک نسبت تساوی (که آن را «$=$» میخوانیم) در آن تعریف شده است، و $+$ و $\cdot$ دو عمل دوتائی در $\mathscr{B}$ است، یک جبر بولی نامیم در صورتی که تابع اصول موضوعه‌ی ذیل باشد.

B_1. اعمال $+$ و $\cdot$ تعویضپذیرند، یعنی، بازاء هر a و b از $\mathscr{B}$،

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba.^{1}$$

B_2. $\mathscr{B}$ دارای دو عضو متمایز، موسوم به 0 و 1 هست[۲] که بازاء هر a از $\mathscr{B}$،

$$a + 0 = a, \qquad a1 = a.$$

B_3. هر یک از اعمال $+$ و $\cdot$ نسبت به دیگری توزیعی است، یعنی، بازاء هر a، b، و c از $\mathscr{B}$،

$$a + bc = (a + b) \cdot (a + c),$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

B_4. بازاء هر a از $\mathscr{B}$ عضوی مانند a' از $\mathscr{B}$ هست[۳] که

$$a + a' = 1, \qquad aa' = 0$$

B_5[۴]. بازاء هر a، b، و c از $\mathscr{B}$، اگر $a = b$ آنگاه

$$c + a = c + b, \qquad ca = cb.$$

B_6[۴]. بازاء هر a و b از $\mathscr{B}$، اگر $a = b$، و a' و b' اعضای نظیر آنها بر طبق B_4 باشند، آنگاه $a' = b'$.

اولین نتیجه‌ی اصول موضوعه‌ی جبر بولی اینست که

۲.۲.۱. قضیه. اعضای 0 و 1 مذکور در B_2 منحصر بفردند.

زیرا، بنا بر B_2، 0 عضو خنثای دستگاه است نسبت به عمل $+$، و 1 عضو خنثای آنست نسبت

---

(۱) بر طبق معمول، «$a \cdot b$» را «ab» مینامیم.

(۲) ملاحظه کنید که B_2 حکم به یکتا بودن این دو عضو نمیکند.

(۳) ملاحظه کنید که B_4 حکم به وجود میکند نه به وجود یکتا.

(۴) B_5 و B_6، تا حدی که مطلوب است، تعویضپذیری «مقادیر مساوی» را تأمین میکنند (آ ۸.۲.۵ : ۳ ملاحظه شود). این گونه تعویضها را، بدون اشاره به B_5 و B_6 در استدلال و محاسبه بکار میبریم.

به عمل $\cdot$. ▲

۲.۳. بعضی قضایای جبر بولی. فرض کنیم $(\mathcal{B}; +, \cdot)$ یک جبر بولی باشد. برای اختصار، این جبر را جبر $\mathcal{B}$ مینامیم. از مقایسه‌ی اصول موضوعه‌ی جبر $\mathcal{B}$ با قوانین اولیه‌ی جبرهای مجموعه‌ها (صفحه‌ی ۶۳۵)، معلوم است که، گذشته از قانون شرکتپذیری، اصول موضوعه‌ی جبر $\mathcal{B}$ با قواعد اولیه‌ی حساب مجموعه‌ها اختلافی جز در علامات ندارند. بنا بر این، نظیر قضایائی از حساب مجموعه‌ها که بدون توسّل به قوانین شرکتپذیری ثابت کردیم در جبر $\mathcal{B}$ برقرارند، و حاجت به اثبات آنها نیست، زیرا، اثبات آنها در جبر $\mathcal{B}$ تکرار استدلالی است که در جبر مجموعه‌ها آورده شد با اختلاف علامات. از جمله، اصل جفت در جبر $\mathcal{B}$ برقرار میباشد (البته، با تغییر بدیهی تعریف جفت یک فرمول). همچنین، قوانین خودنمائی، نظیر قضیه‌ی ۱.۲.۱، و قوانین جذب در جبر $\mathcal{B}$ برقرارند. به عبارت دیگر، همواره

$$(۲.۳.۱)\quad a + a = a; \qquad (۲.۳.۲)\quad aa = a.$$

$$(۲.۳.۳)\quad a + 1 = 1; \qquad (۲.۳.۴)\quad a0 = 0.$$

$$(۲.۳.۵)\quad a + ab = a; \qquad (۲.۳.۶)\quad a(a + b) = a.$$

اینک ثابت میکنیم که اعمال + و $\cdot$ شرکتپذیرند، یعنی، همواره

$$(۲.۳.۷)\quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$(۲.۳.۸)\quad a(bc) = (ab)b.$$

بنا بر اصل جفت، کافی است ۲.۳.۸ را ثابت کنیم. برای این منظور، قبلاً ثابت میکنیم که

$$(*)\quad a + a(bc) = a + (ab)c.$$

$$(\dagger)\quad a' + a(bc) = a' + (ab)c.$$

اثبات از این قرار است:

$a + a(bc)$	جذب
$= a$	جذب
$= a(a + c)$	جذب
$= (a + ab)(a + c)$	B_3
$= a + (ab)c.$	

$a' + a(bc)$	B_3
$= (a' + a)(a' + bc)$	B_4
$= 1(a' + bc)$	B_1
$= (a' + bc)1$	B_2
$= a' + bc$	B_3

$$
\begin{aligned}
&= (a' + b)(a' + c) && B_2\\
&= [(a' + b)1](a' + c) && B_1\\
&= [1(a' + b)](a' + c) && B_4\\
&= [(a + a')(a' + b)](a' + c) && B_1\\
&= [(a' + a)(a' + b)](a' + c) && B_3\\
&= (a' + ab)(a' + c) && B_3\\
&= a' + (ab)c.
\end{aligned}
$$

پس، (*) و (†) برقرار است. از آنها نتیجه میشود،

$$(**)\quad [a + a(bc)][a' + a(bc)] = [a + (ab)c][a' + (ab)c].$$

اما،

$$
\begin{aligned}
&(**)\ \text{طرف اول} && B_1\\
&= [a(bc) + a][a(bc) + a'] && B_3\\
&= (a(bc))(a + a') && B_4\\
&= (a(bc))1 && B_2\\
&= a(bc).
\end{aligned}
$$

به همین قیاس معلوم میشود که طرف دوم (**) مساوی $(ab)c$ است. ▲

بنا بر خاصیت شرکتپذیری، $(a + b) + c$ و $a + (b + c)$ را $a + b + c$ مینامیم، و $a(bc)$ و $(ab)c$ را abc.

نظیر ۱.۲.۳ اینست که عضو a' مذکور در B_4 منحصر بفرد است. این عضو را متمم a میخوانیم.

بالاخره، اینک بدون اینکه نیاز به اقامه‌ی برهان مجدد باشد معلوم است که قضایائی نظیر ۱.۲.۴ ـ ۱.۲.۶ در جبر $\mathcal{B}$ برقرارند، یعنی، همواره

(۲.۳.۹) $(a')' = a.$

(۲.۳.۱۰) $0' = 1,$ (۲.۳.۱۱) $1' = 0.$

(۲.۳.۱۲) $(a + b)' = a'b',$ (۲.۳.۱۳) $(ab)' = a' + b'.$

۲.۳.۱۴. تعریف. بازاء هر a و b از $\mathcal{B}$، $a \subseteq b$ یعنی $a + b = b$.
اینک میتوان قضایائی نظیر احکام مربوط به جزئیت در مجموعه‌ها در جبر $\mathcal{B}$ برقرار کرد.

۲.۳.۱۵. تبصره. در یک دستگاه مجرد، اگر مفاهیم اولیه‌ی دستگاه را تعبیر کنیم ـ یعنی، برای آنها قائل به معنی شویم ـ به نحوی که اصول موضوعه‌ی دستگاه با این معانی برقرار

باشند دستگاهی حاصل میشود که آن را یک مُـدل[1] آن دستگاه مجـرد نامند. مثلاً، در جبر بولی $(\mathcal{B};\ +,\ \cdot)$، اگر $\mathcal{B}$ را مجموعه‌ی مجموعکَان مجمـوعـه‌ای غیر خالی مانند V، + و · را، بترتیب، به معنی $\cup$ و $\cap$، و 0 و 1 را، بتـرتیب، به معنی $\varnothing$ و V بگیریم، مدلی از جبر $\mathcal{B}$ حاصل میشود، و آن عبارتست از جبر مجموعه‌ی مـجموعکان V (آ : ۲.۳.۱۶ نیـز مـلاحـظه شود). بعداً خواهیم دید که حساب گزاره‌ها و نیـز جبر کـلیدهای بـرق از مدلهای جـبر بولی میباشند.

مدلهای یک دستگاه مجرد معمولاً خواصی مشهـود دارند، و از این لحـاظ، خـواصی از آن دستگاه مجرد را به ذهن القا میکنند، و راهنمای کشف و اثبات قضایای آن میباشند.

۲.۳.۱۶. امثله

(آ). هر جبر مجموعه‌ها یک جبر بولی است.

معنی حکمی که معمولاً با عبارت کوتاه فوق بیـان میشود اینست کـه اگـر $\mathcal{A}$ یـک جـبـر مجموعه‌ها بر اساس مجموعه‌ای مانند V باشد آنگاه دستگاه

$$(\mathcal{A};\ \cup,\ \cap) \qquad (*)$$

با قوانین اولیه‌ی حساب مجموعه‌ها یک مدل جبر بولی است، و این واضح است، زیرا، $\varnothing$ و V، که از اعضـای $\mathcal{A}$ هستند، بترتیب، عضـو خنثـای دستگـاه (*) نسبت بـه اعمال $\cup$ و $\cap$ میباشند؛ B_1، B_2، و B_3 بر طبق قوانین اولیه‌ی جبر مجموعه‌ها برقرارند؛ بعلاوه، بازاء هـر A از $\mathcal{A}$، $\bar{A}$ در B_4 صـدق میکند؛ بالاخره، چون در مجموعه‌ها تساوی به مـعنی منطقی است، B_5 و B_6 خود بخود برقرارند.

(ب). فرض کنیم 0 و 1 دو شیء متمایز باشند، و $A = \{0, 1\}$، و اعمـال $\oplus$ و $\odot$ در A بـا جداول

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

تعریف شده باشند. بعلاوه، $0'$ را 1 و $1'$ را 0 میگیریم. در این صورت، دستگاه $(A;\ \oplus,\ \odot)$ یک جبر بولی است.

باید ثابت کرد که این دستگاه تابع اصول موضوعه‌ی جبر بولی است. تحقیق بدان قیاس است که در ب : ۸.۵.۴ : ۳ دانسته شد. روش منظمتر تحقیق از این قرار است:

اولاً، باید ثابت کرد که بازاء هـر a و b از A، $a \oplus b = b \oplus a$. بـرای این منـظور، اقسام ممکنه‌ی ترکیبات a و b را به وسیله‌ی عمل $\oplus$، که عده‌ی آنها $2 \cdot 2$ است، با دو ستون

---

[1] model

اول جدولی مانند جدول ارزش ترکیبات دوتائی دو گزاره نمایش میدهیم، و در ستونهای بعد، حاصل $a \oplus b$ و $b \oplus a$ را به وسیلهٔ جداول عمل محاسبه و در جدول ضبط میکنیم. مقایسهٔ ستونهای سوم و چهارم نشان میدهد که همواره $a \oplus b = b \oplus a$.

a	b	$a \oplus b$	$b \oplus a$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

تحقیق در برقراری نیمهٔ دیگر B_1 و در برقراری B_2 و B_3 به همین قیاس است، و به متعلم محول میگردد. جداول تحقیق در برقراری B_4 ذیلاً دیده میشود.

a	a'	$a \odot a'$
1	0	0
0	1	0

a	a'	$a \oplus a'$
1	0	1
0	1	1

(پ). در جبر $\mathcal{B}$، اگر $ab' = cc'$ آنگاه $ab = a$.

فرض کنیم $ab' = cc'$. پس، بنا بر B_4، $ab' = 0$ (۱). بالنتیجه،

$$
\begin{aligned}
ab \quad & & B_2\\
&= ab + 0 & (1)\\
&= ab + ab' & B_3\\
&= a(b + b') & B_4\\
&= a1 & B_2\\
&= a. \blacktriangle
\end{aligned}
$$

(ت). به همان قیاس معلوم میشود که، در جبر $\mathcal{B}$، اگر $ab = a$ آنگاه بازاء هر c از $\mathcal{B}$، $ab' = cc'$.

۲.۴. توابع بولی. فرض کنیم $(\mathcal{B}; +, \cdot)$ یک جبر بولی (جبر $\mathcal{B}$) باشد. اعمال $+$ و $\cdot$ را، بترتیب، اعمال جمع و ضرب جبر $\mathcal{B}$ میخوانیم.

اینک به تعریف توابع بولی میپردازیم. مختصراً میتوان گفت که تابع بولی n متغیر تابعی است بر $\mathcal{B}^n$ (حاصلضرب مستقیم n مجموعهٔ مساوی با $\mathcal{B}$) بتوی $\mathcal{B}$ که مقدارش در عضو دلخواه $(x_1, \ldots, x_n)$ از $\mathcal{B}^n$ اسمنمائی است که از ترکیب تعدادی متناهی از متغیرهای x_1، ...، x_n، و ثابتها، و علامات جمع و ضرب و $'$ ساخته شده باشد. مثلاً، اگر a عضو ثابتی

از $\mathscr{B}$ باشد، هر یک از توابعی که با ضوابط ذیل تعریف شده‌اند یک تابع بولی است:

$$f(x) = a, \quad [\text{تابع ثابت}] \qquad (۱)$$
$$f(x) = x, \quad [\text{تابع همانی}] \qquad (۲)$$
$$f(x) = x + ax', \qquad (۳)$$
$$f(x, y, z) = (xy' + xz)' + x'. \qquad (۴)$$

سه تابع اول توابع یک متغیرند، و تابع چهارم تابع سه متغیر. واضح است که تابع بولی نظیر (۳) را میتوان با اجرای اعمال $+$، $\cdot$ و $'$ بر توابع ثابت و همانی ساخت. تعریف کلی توابع بولی تدریجی و از این قرار است:

۲.۴.۱. تعریف. تابع f بر $\mathscr{B}^n$ بتوی $\mathscr{B}$ را فقط و فقط وقتی یک تابع بولی n متغیر نامیم که ساختمانش بر طبق یکی از قواعد ذیل باشد:

I. f تابعی ثابت باشد، یعنی عضو ثابتی مانند a از $\mathscr{B}$ باشد که، بازاء هر nتائی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعضای $\mathscr{B}$،

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a.$$

II. عدد طبیعی ثابتی مانند i از 1 تا با n باشد که، بازاء هر nتائی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعضای $\mathscr{B}$،

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

III. تابعی بولی از n متغیر مانند g باشد، که، بازاء هر nتائی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعضای $\mathscr{B}$،

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (g(x_1, \ldots, x_n))'.$$

IV. دو تابع بولی از n متغیر مانند g و h باشد که، بازاء هر nتائی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعضای $\mathscr{B}$، $f(x_1, \ldots, x_n)$ یا حاصلجمع یا حاصلضرب مقادیر g و h در این nتائی باشد.

V. تابع f با اِعمال قواعد فوق به دفعات متناهی ساخته شده باشد.

۲.۴.۲. تبصره. بر طبق اصول موضوعه و قضایای جبر بولی، به آسانی میتوان مقدار یک تابع بولی را بازاء مقادیر 0 و 1 از متغیرهای آن تعیین کرد. مثلاً، در تابع مثال (۴) سابق،

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (10' + 10)' + 1' \, [\mathrm{B}_1] \\ &= (0'1 + 01)' + 1' \, [\mathrm{B}_2] \\ &= (0' + 0)' + 1' \, [\mathrm{B}_2] \\ &= (0')' + 1' \, [۲.۳.۹,\ ۲.۳.۱۱] \\ &= 0 + 0 \, [\mathrm{B}_2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

بطور کلی، با تنظیم جدولی شبیه جدول ارزش میتوان مقادیر یک تابع بولی را بازاء جمیع دستگاههای مقایر 0 و 1 از متغیرهای آن تابع حساب کرد. به عنوان تمرین، جدول مقادیر تابع

f فوق را تنظیم کنید.

۲.۴.۳. تبصره. یک تابع بولی را میتوان با ضوابط گوناگون تعریف کرد. مثلاً، ضوابط

$$f(x, y) = x'y' \qquad\qquad f(x, y) = (x + y)',$$

یک تابع بولی را مشخص میسازند. بنا بر این، برای اینکه تشخیص یکی بودن یا یکی نبودن دو تابع بولی میسر گردد، ضابطه‌ی تعریف توابع بولی را به صورتی معروف به صورت قانونی در میآورند، چنانکه در قضیه‌ی ذیل و توضیحات دنبال آن خواهد آمد.

۲.۴.۴. قضیه. اگر f تابعی بولی از یک متغیر باشد، بازاء هر x از $\mathscr{B}$،

$$f(x) = f(1)x + f(0)x'.$$

برهان. کافی است ثابت کنیم که اگر ساختمان تابع f بر طبق یکی از قواعد I ـ IV مذکور در ۲.۴.۰۱ باشد این تابع در رابطه‌ی حکم صدق میکند.

حالت اول: f تابعی ثابت است؛ مثلاً، همواره $f(x) = a$. در این صورت،

$$f(1)x + f(0)x' = ax + ax' = a(x + x') = a1 = a = f(x).$$

حالت دوم: همواره $f(x) = x$.

$$f(1)x + f(0)x' = 1x + 0x' = x + 0 = x.$$

حالت سوم: فرض کنیم تابع g از یک متغیر در حکم صدق کند، و همواره $f(x) = (g(x))'$.

$$\begin{aligned} f(x) = (g(x))' &= (g(1)x + g(0)x')' \\ &= (g(1)x)'(g(0)x')' \\ &= ((g(1))' + x')((g(0))' + x) \\ &= (g(1))'(g(0))' + (g(1))'x + (g(0))'x' + xx' \\ &= (g(1))'(g(0))'(x + x') + (g(1))'x + (g(0))'x' \\ &= (g(1))'(g(0))'x + (g(1))'(g(0))'x' + \\ &\qquad + (g(1))'x + (g(0))'x' \\ &= (g(1))'x + (g(1))'x(g(0))' + (g(0))'x' \\ &\qquad + (g(0))'x'(g(1))' \\ &= (g(1))'x + (g(0))'x' \\ &= f(1)x + f(0)x'. \end{aligned}$$

حالت چهارم: فرض کنیم توابع g و h از یک متغیر در حکم صدق کنند، و همواره $f(x) = g(x) + h(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ &= g(1)x + g(0)x' + h(1)x + h(0)x' \\ &= (g(1) + h(1))x + (g(0) + h(0))x' \\ &= f(1)x + f(0)x'. \end{aligned}$$

حالت پنجم: فرض کنیم توابع g و h از یک متغیر در حکم صدق کنند، و همواره $f(x) = g(x)h(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)h(x) \\ &= (g(1)x + g(0)x')(h(1)x + h(0)x') \\ &= g(1)h(1)xx + g(1)h(0)xx' + g(0)h(1)x'x + \\ &\qquad + g(0)h(0)x'x' \\ &= g(1)h(1)x + g(0)h(0)x' \\ &= f(1)x + f(0)x'. \blacktriangle \end{aligned}$$

به همین قیاس میتوان ثابت کرد که اگر f تابعی بولی از دو متغیر باشد، بازاء هر x و y از $\mathcal{B}$،

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1,0)xy' + f(0, 1)x'y + f(0, 0)x'y'.$$

بطور کلی، به استقراء معلوم میشود که اگر f تابعی بولی از n متغیر باشد، بازاء هر nتائی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعضای $\mathcal{B}$،

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum f(e_1, \ldots, e_n)x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n}$$

که در آن هر e_i 1 یا 0 است، و x^{e_i}، بر حسب اینکه e_i 1 یا 0 باشد به معنی x یا x' گرفته میشود؛ و طرف دوم به معنی حاصلجمع جمیع عبارات حاصل از عبارت تحت $\sum$ است بازاء جمیع مقادیر ممکنه‌ی 1 و 0 از eها.

از آنچه گذشت این نتیجه‌ی بسیار مهم حاصل میشود که هر تابع بولی با مقادیرش بازاء جمیع اقسام ممکنه‌ی مقادیر 0 و 1 برای متغیرهای آن مشخص میگردد. بالنتیجه، برای اثبات تساوی دو تابع بولی n متغیره کافی است ثابت کنیم که، بازاء هر یک از دستگاههای ممکنه‌ی مقادیر 0 و 1 برای متغیرها، مقادیر دو تابع یکسان است.

۲.۴.۵. تبصره. دو دسته از اسمنماها هست که در جبر بولی اهمیت تمام دارند، و به همین جهت، اسامی خاصی برای آنها وضع شده است. فرض کنیم $\mathcal{E}$ اسمنمائی از جبر $\mathcal{B}$ باشد، که از متغیوهای x_1، . . .، و x_n ساخته شده است.

I. $\mathcal{E}$ را به صورت نرمال[1] فصلی خوانند در صورتی که مجموع حاصلضربهائی دارای n عامل از

$$x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$$

باشد. بعلاوه، 0 و 1 بر حسب هر n متغیر به صورت نرمال فصلی محسوب میشوند. یک صورت نرمال فصلی بر حسب n متغیر را کامل نامند در صورتی که 2^n جمله داشته باشد.

II. $\mathcal{E}$ را به صورت نرمالِ عطفی نامند در صورتی که حاصلضرب مجموعهائی دارای n جمله از

---

normal (۱)

$$x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$$

باشد. بقیه‌ی تعریف مانند I است با تبدیل لفظ «فصلی» به عطفی.

۲.۴.۶. امثله

(آ). اسمنمای $\xi = (xy' + xz)' + x'$ را به صورت نرمال فصلی تحویل کنید[1].

قاعده‌ی کلی اینست که ابتدا، به وسیله‌ی قانون د مورگن، هر جا علامت $'$ جز بر حرفی قرار دارد، آن را به حروف منتقل میکنیم. سپس، به وسیله‌ی قوانین توزیعپذیری، عبارت مفروض را به صورت یک کثیرالجمله در میآوریم. بالاخره، اگر بازاء مقداری از i جمله‌ای فاقد x_i و x'_i موجود باشد آن را در $x_i + x'_i$ ضرب مینمائیم. صورت عمل در مثال فوق از این قرار است:

$$\begin{aligned}
\xi &= (xy')'(xz)' + x' \\
&= (x' + (y')')(x' + z') + x' \\
&= (x' + y)(x' + z') + x' \\
&= x'x' + x'y + x'z' + yz' + x' \\
&= (x' + x'y) + yz' + (x' + x'z') \\
&= x' + yz' + x' \\
&= x' + yz' \\
&= x'(y + y')(z + z') + yz'(x + x') \\
&= x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz' + x'yz'. \\
&= x'yz + xyz' + x'yz' + x'y'z + x'y'z'.
\end{aligned}$$

(ب). چنانکه گفته شد، هر تابع بولی با مقادیر خود بازاء جمیع دستگاههای مقادیر 1, 0 برای متغیرهایش مشخص میشود. اگر این مقادیر در دست باشند به آسانی میتوان تابع را تعیین کرد. به عنوان مثال، فرض کنیم جدول مقادیر تابع f بر $\mathcal{B}^3$ بتوی $\mathcal{B}$ به صورت ذیل در دست باشد:

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

(۱) ξ همان اسمنمائی است که در ضابطه‌ی تعریف چهارمین تابع مذکور در صفحه‌ی ۶۵۷ بکار رفته است.

برای تعیین ضابطه‌ی تابع f، دو طریق میتوان بکار برد که یکی ضابطه را به صورت نرمال فصلی و دیگری آن را به صورت نرمال عطفی بدست میدهد.
طریق اول. سطر دوم جدول را که در آن f مقدار 1 دارد مورد نظر قرار میدهیم. به آسانی میتوان تابعی مانند φ_2 نوشت که در این سطر مقدار 1 و در سایر سطور مقدار 0 بگیرد. برای این منظور، کافی است متغیرهای x و y را که در سطر مورد بحث مقدار 1 دارند و متمم متغیر z را که در این سطر مقدار 0 دارد در هم ضرب کنیم. تابع φ_2 با ضابطه‌ی

$$\varphi_2(x, y, z) = xyz'$$

تابع مطلوب است. همچنین، بازاء سطر سوم، که در آن f مقدار 1 دارد، تابع φ_3 را با ضابطه‌ی

$$\varphi_3(x, y, z) = xy'z$$

میسازیم. این تابع در سطر سوم مقدار 1 و در سایر سطور مقدار 0 دارد. به همین قیاس،

$$\varphi_7(x, y, z) = x'y'z.$$

اینک واضح است که

$$f(x, y, z) = xyz' + xy'z + x'y'z.$$

طریق دوم. سطوری را که f در آنها مقدار 0 دارد مورد توجه قرار میدهیم، و بازاء هر چنین سطر، تابعی میسازیم که فقط در آن سطر مقدار 0 و در سایر سطور مقدار 1 بگیرد. اگر تابع نظیر سطر iم را ψ_i بنامیم توابع مذکور چنین تعریف میشوند:

$$\psi_1(x, y, z) = x' + y' + z', \qquad \psi_4(x, y, z) = x' + y + z,$$
$$\psi_5(x, y, z) = x + y' + z', \qquad \psi_6(x, y, z) = x + y' + z$$
$$\psi_8(x, y, z) = x + y + z;$$
$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & (x' + y' + z')(x' + y + z)(x + y' + z') \\ & (x + y' + z)(x + y + z). \end{aligned}$$

بدیهی است که در مثال مورد بحث، اتخاذ طریق اول که تابع مطلوب را به صورت ساده‌تری بدست میدهد انسب است.

عموماً هیچ یک از دو طریق مذکور تابع f را به ساده‌ترین صورت آن بدست نمیدهد. مثلاً، در طریق اول،

$$\begin{aligned} xyz' + xy'z + x'y'z &= xyz' + y'z(x + x') \\ &= xyz' + y'z. \end{aligned}$$

بر متعلم است که تابع حاصل در طریق دوم را به همین صورت درآورد.

۲.۴.۷. تمرین

۱. هر یک از اسمنماهای ذیل را به صورت نرمال فصلی با حد اقل متغیرهائی که میشود تحویل کنید:

(آ) $x + x'y.$ (ب) $xy' + xz + xy.$

(پ) $(x + y + z)(xy + x'z)'.$ (ت) $xyz + (x + y)(x + z).$

۲. هر یک از اسنماهای مسئله‌ی قبل را به صورت نرمال عطفی با حد اقل متغیرهائی که میشود تحویل کنید.
۳. جدول مقادیر هفت تابع f_1، f_2، f_3، g_1، . . . ، g_4 ذیلاً داده شده است. فرمولی برای تعریف هر یک از این توابع بیابید و آن را مختصر کنید:

x	y	z	f_1	f_2	f_3	g_1	g_2	g_3	g_4
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

۴. $\mathcal{B}$ یک جبر بولی با مجموعه‌ی $\{1, 0, a, a', b, b', c, c'\}$ است، و f تابعی بولی بر $\mathcal{B}^3$ بتوی $\mathcal{B}$. با معلومات ذیل، $f(a', c, b)$ را تعیین کنید:

$$f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) = a,$$
$$f(0, 1, 0) = 0, \qquad f(0, 1, 1) = 1,$$
$$f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = c', \qquad f(1, 1, 1) = b.$$

۲.۵. تعریف دیگر جبر بولی. جبر بولی را میتوان به طرقی غیر از آنچه گذشت تعریف کرد. برای این منظور، بعضی از مفاهیم اولیه‌ی مناسب دستگاه سابق را اختیار کرده مفاهیم اولیه قرار میدهند، و بعضی از قضایای مناسب دستگاه سابق را اختیار کرده اصول موضوعه قرار میدهند. البته این انتخابات باید چنان باشد که دستگاه جدیدی که تعریف میشود با دستگاه اولیه معادل باشد. برای اثبات این مطلب کافی است ثابت کنیم که مفاهیم اولیه‌ی هر یک از دو دستگاه بر حسب مفاهیم اولیه‌ی دستگاه دیگر قابل تعریف است، و اصول موضوعه‌ی هر یک از دو دستگاه از اصول موضوعه‌ی دستگاه دیگر قابل استنتاج است. زیرا، در این صورت، هر مفهوم مربوط به یکی از دو دستگاه در دستگاه دیگر قابل تعریف، و هر قضیه‌ی یکی از دو دستگاه قضیه‌ای از دستگاه دیگر خواهد بود[1].

ذیلاً جبر بولی را به صورتی ساده‌تر و با مفاهیم اولیه‌ی کمتر تعریف میکنیم.

۲.۵.۱. تعریف. دستگاه $(\mathcal{B}; \cdot, ')$ را، که در آن، $\mathcal{B}$ مجموعه‌ای حد اقل دارای دو عضو

(۱) زیرا، هر قضیه‌ی هر یک از دو دستگاه نتیجه‌ای از اصول موضوعه‌ی آنست.

است و یک نسبت تساوی («$=$») در آن تعریف شده است، و $\cdot$ عملی دوتائی و $'$ یک عمل یکتائی در آنست یک جبر بولی نامیم در صورتی که تابع اصول موضوعه‌ی ذیل باشد:

B_1'. عمل $\cdot$ تعویضپذیر است (نیمی از B_1).

B_2'. عمل $\cdot$ شرکتپذیر است (۲.۳.۸).

B_3'[1]. باذاء هر a و b از $\mathscr{B}$، اگر عضوی مانند c از $\mathscr{B}$ باشد که $ab' = cc'$ آنگاه $ab = a$.

B_4'[2]. باذاء هر a و b از $\mathscr{B}$، اگر $ab = a$ آنگاه، باذاء هر c از $\mathscr{B}$، $ab' = cc'$.

B_5'. باذاء هر a، b، و c از $\mathscr{B}$، اگر $a = b$ آنگاه $ac = bc$ (نیمی از B_5).

B_6'. باذاء هر a و b از $\mathscr{B}$، اگر $a = b$ آنگاه $a' = b'$. (بجای B_6).

اینک ثابت میکنیم که تعریفات ۲.۲ و ۲.۵.۱ یک دستگاه ریاضی را مشخص میسازند. واضح است که هر جبر بولی بر طبق تعریف ۲.۲ در اصول موضوعه‌ی دستگاه جدید صدق میکند. بعلاوه، اصول موضوعه‌ی دستگاه جدید از اصول موضوعه و قضایای دستگاه سابق هستند. پس، باقی میماند اثبات اینکه در جبر بولی به معنی جدید میتوان مفاهیمی نظیر سایر مفاهیم دستگاه سابق تعریف کرد به نحوی که دستگاه جدید در اصول موضوعه‌ی دستگاه سابق صدق کند. ذیلاً به این کار نسبةً دراز میپردازیم. در احکام و تعریفات آتیه جبر بولی $(\mathscr{B};\ \cdot,\ ')$ به معنی مذکور در ۲.۵.۱ موضوع بحث میباشد، و حروف کوچک الفبای لاتینی اسامی اعضای مجموعه‌ی $\mathscr{B}$ میباشند.

۲.۵.۲. قضیه. همواره $aa = a$.

برهان. چون نسبت $=$ منعکس است، $aa' = aa'$. پس، بنا بر B_3'، $aa = a$. ▲

۲.۵.۳. قضیه. همواره $aa' = bb'$.

برهان. بنا بر قضیه‌ی قبل، $aa = a$ و $bb = b$. پس، اگر c عضو دلخواهی از $\mathscr{B}$ باشد، بنا بر B_4'، $aa' = cc'$ و $bb' = cc'$. بالنتیجه، $aa' = bb'$. ▲

بنا بر قضیه‌ی فوق، تعریف ذیل موجه است:

۲.۵.۴. تعریف. اگر a عضو دلخواهی از $\mathscr{B}$ باشد aa' را، که عضو مشخصی از $\mathscr{B}$ است، «0»، و $0'$ را «1» مینامیم. (رابطه‌ی $aa' = 0$ نیمی از B_4 است.)

برای تسهیل اثبات قضایا، تعریف ذیل را نیز میآوریم:

۲.۵.۵ تعریف. $a \subseteq b$ یعنی $ab = a$.

---

(۱) پ: ۲.۳.۱۶ ملاحظه شود.

(۲) ت: ۲.۳.۱۶ ملاحظه شود.

۲.۵.۶ قضیه. $ab' = 0 \equiv a \subseteq b$.
نتیجه‌ی مستقیم ۲.۵.۳، B'_3، و B'_4 است.

۲.۵.۷. قضیه. همواره $a \subseteq a$.
نتیجه‌ی مستقیم ۲.۵.۲ و ۲.۵.۵ است.

۲.۵.۸. قضیه. $(a \subseteq b \;\&\; b \subseteq c) \supset a \subseteq c$.
برهان. فرض کنیم $a \subseteq b$ و $b \subseteq c$. بنا بر ۲.۵.۵، $ab = a$ (۱) و $bc = b$ (۲). پس،

$$ac\,[۱] = (ab)c\,[B'_2] = a(bc)\,[۲] = ab\,[۱] = a.$$

پس، بنا بر ۲.۵.۵، $a \subseteq c$. ▲

۲.۵.۹. قضیه. $ab \subseteq a$.
نتیجه‌ی مستقیم B'_1، B'_2، و ۲.۵.۲ است.

۲.۵.۱۰. قضیه. $(a \subseteq b \;\&\; b \subseteq a) \supset a = b$. (چرا؟)

۲.۵.۱۱. قضیه. $0 \subseteq a$.
برهان. بنا بر ۲.۵.۴، $aa' = 0$. بنا بر ۲.۵.۹، $aa' \subseteq a$. پس، $0 \subseteq a$. ▲

۲.۵.۱۲. قضیه. $a0 = 0$.
نتیجه‌ی مستقیم ۲.۵.۱۱، ۲.۵.۵، و B'_1 است.

۲.۵.۱۳. قضیه. $(a')' = a$.
برهان. اگر x عضو دلخواهی از $\mathscr{B}$ باشد،

$$(x')'x'\,[B'_1] = x'(x')'\,[۲.۵.۴] = 0.$$

پس، بنا بر ۲.۵.۶، $(x')' \subseteq x$. بالنتیجه،

(۱) $(a')' \subseteq a$; (۲) $((a')')' \subseteq a'$; (۳) $(((a')')')' \subseteq (a')'$.

اینک گوئیم،

(۴) $(((a')')')' \subseteq a$. (۱)، (۳)، ۲.۵.۸

(۵) $(((a')')')'a' = 0$. (۴)، ۲.۵.۶

(۶) $a'(((a')')')' = 0$. (۵)، B'_1

(۷) $a' \subseteq ((a')')'$. (۶)، ۲.۵.۶

(۸) $a' = ((a')')'$. (۲)، (۷)، ۲.۵.۱۰

(۹) $a((a')')' = 0$. (۸)، ۲.۵.۳

(۱۰) $a \subseteq (a')'$. (۹)، ۲.۵.۶

(۱۱) $(a')' = a$. ▲ (۱)، (۱۰)، ۲۰۵۰۱۰

۲.۵.۱۴.قضیه. $a = b \Leftrightarrow a' = b'$.
برهان. اگر $a = b$ آنگاه، بنا بر B'_6، $a' = b'$. بالعکس، اگر $a' = b'$ آنگـاه، بنا بـر B'_6، $(a')' = (b')'$. پس، بنا بر ۲۰۵۰۱۳، $a = b$. ▲

۲.۵.۱۵. قضیه. $a \subseteq b \Leftrightarrow b' \subseteq a'$.
برهان. فـرض کنیم $a \subseteq b$. بـنـا بـر ۲۰۵۰۶، $ab' = 0$. پس، بنـا بـر B'_1 و ۲۰۵۰۱۳، $b'(a')' = 0$. بالنتیجه، بنا بر ۲۰۵۰۶، $b' \subseteq a'$. بالعکس، اگر $b' \subseteq a'$ آنگاه، بنا بـر قسمتی که ثابت شد، $(a')' \subseteq (b')'$، و از آنجا، $a \subseteq b$. ▲

۲.۵.۱۶. تعریف. بازاء هر a و b از $\mathscr{B}$، $(a'b')'$ را $a + b$ مینامیم.

۲.۵.۱۷. قضیه. $a + b = b + a$ (نیمه‌ی دوم B_1).
برهان. بنا بر B'_1، $a'b' = b'a'$. پس، بنا بر ۲۰۵۰۱۴، $(a'b')' = (b'a')'$. بالنتیجه، بنـا بر ۲۰۵۰۱۶، $a + b = b + a$. ▲

۲.۵.۱۸. قضیه. $ab = (a' + b')'$.
برهان.

$$(a' + b')' \, [۲۰۵۰۱۶] = (((a')'(b')')')' \, [۲۰۵۰۱۳] = ab. \blacktriangle$$

۲.۵.۱۹. قضیه. $a \subseteq b \Leftrightarrow a + b = b$.
برهان.

$$\begin{aligned}
& a \subseteq b \, [۲۰۵۰۱۵] \\
& \quad \Leftrightarrow b' \subseteq a' \, [۲۰۵۰۵] \\
& \quad \Leftrightarrow b'a' = b' \, [۲۰۵۰۱۴] \\
& \quad \Leftrightarrow (b'a')' = (b')' \, [۲۰۵۰۱۳, ۲۰۵۰۱۶] \\
& \quad \Leftrightarrow b + a = b \, [۲۰۵۰۱۷] \\
& \quad \Leftrightarrow a + b = b. \blacktriangle
\end{aligned}$$

۲.۵.۲۰. قضیه. $(a + b) + c = a + (b + c)$. (چرا؟)

۲.۵.۲۱. قضیه. $a + a = a$.
برهان.

$$a + a \, [۲۰۵۰۱۶] = (a'a')' \, [۲۰۵۰۲] = (a')' \, [۲۰۵۰۱۳] = a. \blacktriangle$$

اثبات دو قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود:

۲.۵.۲۲. قضیه. $a + a' = 1$ (نیمه‌ی دیگر B_4).

۲.۵.۲۳. قضیه. $a \subseteq a + b$.

۲.۵.۲۴. قضیه. $a + ab = a(a + b) = a$.

برهان. بنا بر ۲.۵.۹، $ab \subseteq a$. پس، بنا بر ۲.۵.۱۹، $ab + a = a$. اتمام بر متعلم است. ▲

۲.۵.۲۵. قضیه. اگر $a \subseteq b$ آنگاه، بازاء هر c،

$$ac \subseteq bc, \qquad a + c \subseteq b + c.$$

برهان. فرض کنیم $a \subseteq b$. بنا بر ۲.۵.۵، $ab = a$ (۱). اینک با استعمال مکرر B_2' دیده میشود که

$$(ac)(bc) = (ab)(cc)[(۱), ۲.۵.۲] = ac.$$

پس، $ac \subseteq bc$. اثبات قسمت دیگر به همین قیاس و به وسیله‌ی ۲.۵.۱۹ است. ▲

۲.۵.۲۶. قضیه.

$$\text{I.} \qquad (a \subseteq c \;\&\; b \subseteq c) \supset a + b \subseteq c$$

$$\text{II.} \qquad (c \subseteq a \;\&\; c \subseteq b) \supset c \subseteq ab.$$

برهان. قسمت اول را ثابت میکنیم. فرض کنیم $a \subseteq c$ و $b \subseteq c$. بنا بر ۲.۵.۱۹،

$$(۱) \quad a + c = c, \qquad\qquad (۲) \quad b + c = c.$$

بالنتیجه،

$$(a + b) + c\,[۲.۵.۲۰] = a + (b + c)\,[(۲)] = a + c\,[(۱)] = c.$$

پس، به موجب ۲.۵.۱۹، $a + b \subseteq c$. ▲

۲.۵.۲۷. قضیه. $a(a' + b) = ab$.

برهان.

$$a(a' + b)\,[۲.۵.۱۶] = a((a')'b')' = a(ab')'.$$

پس،

$$[a(a' + b)]b' = [a(ab')']b' = (ab')(ab')' = 0.$$

بالنتیجه، بنا بر ۲.۵.۶، $a(a' + b) \subseteq b$. پس، بنا بر ۲.۵.۵،

$$a(a' + b) = [a(a' + b)]b = a[b(b + a')]\,[۲.۵.۲۴] = ab. \;▲$$

۲.۵.۲۸. قضیه. $a(b + c) = ab + ac$ (نیمی از B_3).

برهان. بنا بر ۲.۵.۲۳، $b \subseteq b + c$ و $c \subseteq b + c$. پس، بنا بر ۲.۵.۲۵،

$$ab \subseteq a(b+c), \qquad ac \subseteq a(b+c).$$

از آنجا، بنا بر I : ۲.۵.۲۶،

$$ab + ac \subseteq a(b+c). \tag{۱}$$

پس، کافی است ثابت کنیم که

$$a(b+c) \subseteq ab + ac. \tag{۲}$$

اثبات به وسیله‌ی ۲.۵.۶ است:

$$\begin{aligned}
[a(b+c)](ab+ac)' \ [۲.۵.۱۶, ۲.۵.۱۳] \\
&= a(b+c)[(ab)'(ac)'] \\
&= a(b+c)(a'+b')(a'+c') \\
&= a(a'+b')(a'+c')(b+c) \ [۲.۵.۲۷] \\
&= ab'(a'+c')(b+c) \\
&= a(a'+c')b'(b+c) \\
&= ac'b'(b+c) \\
&= a(b'c')(b'c')' = 0. \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

از قضیه‌ی فوق به آسانی معلوم میشود که

۲.۵.۲۹. قضیه. $a + bc = (a+b)(a+c)$ (نیمه‌ی دیگر B_3).

اثبات سه قضیه‌ی ذیل بر متعلم است.

۲.۵.۳۰. قضیه. $a = a + 0$ (نیمی از B_2).

۲.۵.۳۱. قضیه. $a + 1 = 1$.

۲.۵.۳۲. قضیه. $a = a1$ (نیمه‌ی دیگر B_2).

بدین گونه، اثبات معادل بودن دو دستگاه تمام است.

۲.۶. نمایش جبرهای بولی. از مقایسه‌ی جبرهای مجموعه‌ها با نتایجی که در باب جبرهای بولی حاصل شد معلومست که اگر V یک مجموعه‌ی عمومی و $\mathscr{A}$ یک جبر مجموعه‌ها بر اساس V باشد دستگاه $(\mathscr{A};\ \cup,\ \cap)$ یک جبر بولی است. از طرف دیگر، دستگاه مثال ب: ۲.۳.۱۶ مثالی است از یک جبر بولی که جبر مجموعه‌ها نیست.
اینک این سؤال پیش میآید که آیا یک جبر بولی دلخواه را میتوان با یک جبر مجموعه‌ها نمایش داد یا نه. جواب این سؤال مثبت است، ولی اثبات آن خارج از موضوع کتاب حاضر

میباشد[۱]. اما، فهم معنی حکم مذکور مفید است. چون این منظور بستگی تام با یکی از مفاهیم مهم ریاضی، یعنی مفهوم ایزومورفی[۲] دستگاههای ریاضی، دارد، به تعریف این مفهوم میپردازیم، تا وقتی که میشنویم که دو دستگاه ریاضی دارای یک «ریخت» یا «هیئت» یا «ساختمان» هستند دقیقاً دانسته شود که مقصود چیست.

چنانکه میدانیم، یک دستگاه ریاضی مجموعه‌ای است که اعمال و نسبتهائی در آن تعریف شده‌اند. اعمال ممکن است یکتائی یا دوتائی باشند[۳]. گاه در یک دستگاه ریاضی بعضی از اعضای خاص دستگاه (یعنی اعضای خاص مجموعه‌ی آن) نیز مورد نظر میباشند.

۲.۶.۱. تعریف. جبر عمومی یعنی مجموعه‌ای غیر خالی مانند A به انضمام اعمالی یکتائی یا دوتائی در آن مانند $\bigcirc_1$، . . .، و $\bigcirc_n$، به انضمام اعضای خاصی از A، مانند α_1، . . .، و α_m[۴]. چنین جبر عمومی را به صورت

$$(A;\ \bigcirc_1, \ldots, \bigcirc_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

نمایش میدهیم، و اغلب، این دستگاه را به نام مجموعه‌ی آن میخوانیم.

۲.۶.۲. تعریف. دو جبر عمومی را از یک نوع یا همنوع خوانند در صورتی که بتوان تناظری 1ـ1 بین اعمال و اعضای خاص آنها برقرار کرد به نحوی که هر عمل nتائی هر یک از دو دستگاه نظیر یک عمل nتائی دستگاه دیگر، و هر عضو خاص یکی از دو دستگاه نظیر یک عضو خاص دستگاه دیگر باشد. در دو دستگاه همنوع مانند A و A'، بازاء عملی مانند $\bigcirc$ از A، معمولاً عمل نظیر آن را از A' به $\bigcirc'$ نمایش میدهیم.

۲.۶.۲.۱. امثله

(آ). هر یک از دستگاههای ذیل یک جبر عمومی است:

(۱) $(\mathbf{N};\ +)$، (۲) $(\mathbf{R};\ +, \times)$،

(۳) $(\mathbf{R}^+;\ \times, +)$، (۴) $(\mathbf{R};\ \times;\ 0)$،

(۵) $(\mathcal{P}(V);\ \cup, \cap)$، (۶) $(\mathcal{P}(V);\ \cup;\ V)$.

(در دو دستگاه اخیر، V مجموعه‌ی عمومی مفروضی است.)

---

(۱) برای اثبات حکم در مورد جبرهای بولی متناهی، ۱۱ : ۲.۶.۶ ملاحظه شود.

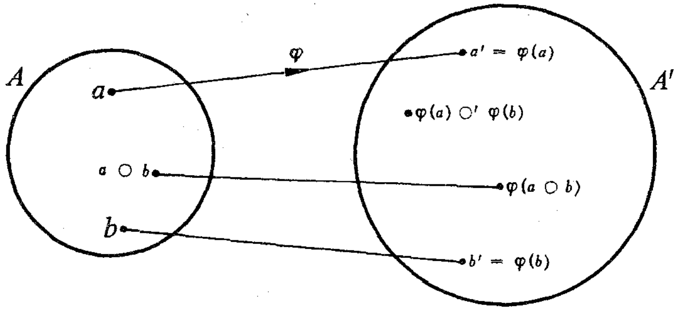
(۲) isomorphy.

(۳) اعمال «nتائی» $(n > 2)$ را هم میتوان ملحوظ داشت. به قیاس آنچه در ۸.۲ : ۳ گفته شد، اگر A مجموعه‌ای غیر خالی باشد هر تابع بر A^n بتوی A را یک عمل nتائی در A نامند. اگر $\bigcirc$ یک عمل nتائی در A باشد حاصل این عمل را بر nتائی مرتب $(a_1, \ldots, a_n)$ از اعضای A به نام «$a_1 a_2 \ldots a_n \bigcirc$» میخوانند.

(۴) گاه هر عضو خاص دستگاه (یعنی هر یک از αها) را حاصل یک عمل هیچتائی میخوانند.

(ب). از جبرهای عمومی مثال (آ)، (۱) با هیچ یک از سایرین از یک نوع نیست. (۲) و (۳) و (۵) دو بدو از یک نوعند، ولی هیچ یک از آنها با (۴) و (۶) از یک نوع نیست. (۴) و (۶) از یک نوعند.

(پ). فرض کنیم $(A; \bigcirc)$ $(A'; \bigcirc')$ دو جبر عمومی با اعمال دوتائی $\bigcirc$ و $\bigcirc'$ (و بالنتیجه، از یک نوع) باشند، و بعلاوه، مجموعه‌های دو دستگاه همعدد باشند، یعنی، تناظری 1ـ1 مانند φ بین A و A' موجود باشد. تابع φ اعضای دلخواه a و b از A را به اعضای $a' = \varphi(a)$ و $b' = \varphi(b)$ از A'، و عضو $a \bigcirc b$ از A را به عضو $\varphi(a \bigcirc b)$ از A' تبدیل میکند.(شکل ۴۷). چون a' و b' به A' تعلق دارند، و $\bigcirc'$ عملی در A' است، $a' \bigcirc' b'$ یا $\varphi(a) \bigcirc' \varphi(b)$



شکل ۴۷

عضو مشخصی از A' میباشد، و آن عموماً غیر از $\varphi(a \bigcirc b)$ است؛ مگر در بعضی حالات خاص که، بازاء هر a و b از A:

$$\varphi(a \bigcirc b) = \varphi(a) \bigcirc' \varphi(b).$$

در این حالت، تابع φ حاصل عمل $\bigcirc$ را بر هر دو عضو A به حاصل عمل $\bigcirc'$ بر نظایر آن دو عضو مبدل میسازد. این مطلب را مختصراً بدین عبارت بیان میکنند که تابع φ اعمال $\bigcirc$ و $\bigcirc'$ را محفوظ میدارد (یا حافظ آنهاست). در این حالت مهم گوئیم دو جبر $(A; \bigcirc)$ و $(A'; \bigcirc')$ همریخت یا ایزومورف هستند. پیش از ذکر تعریف کلی، مثالی دیگر میآوریم.

(ت). فرض کنیم a شیء دلخواهی باشد، $V = \{a\}$، و $A = \{\varnothing, V\}$.

دستگاه $\{A; \cap, -\}$ با عمل دوتائی $\cap$ و عمل یکتائی $-$ یک جبر عمومی است، و اعمال آن را میتوان با جداول ذیل تعریف کرد:

$\cap$	$\varnothing$	V
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
V	$\varnothing$	V

$-$	
$\varnothing$	V
V	$\varnothing$

همچنین، فرض کنیم 0 و 1 دو شیء دلخواه باشند، و $B = \{0, 1\}$، و عمل دوتائی $\odot$ و عمل

یکتائی $\complement$ را در B با جداول ذیل تعریف میکنیم:

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\complement$	
0	1
1	0

دو جبر عمومی $(A;\ \cap,\ ^{-})$ و $(B;\ \odot,\ \complement)$ همنوعند. اینک تابع φ را چنین تعریف میکنیم:

$$\varphi = \{(\varnothing, 0), (V, 1)\}.$$

واضح است که φ تناظری 1ــ1 بین A و B است، و

$$(۱) \qquad \varphi(\varnothing) = 0, \qquad \varphi(V) = 1$$

به وسیله‌ی جداول اعمال $\cap$ و $\odot$ به آسانی دیده میشود که، بازاء هر a و b از A،

$$\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \odot \varphi(b).$$

تناظر یکبیک φ اعمال یکتائی $^{-}$ و $\complement$ را نیز حفظ میکند، یعنی حاصل عمل $^{-}$ را بر هر عضو A به حاصل عمل $\complement$ بر نظیر آن عضو تبدیل مینماید، و به عبارت دیگر، بازاء هر a از A،

$$\varphi(\overline{a}) = \complement\ \varphi(a).$$

زیرا، بنا بر جداول اعمال یکتائی و روابط (۱)،

$$\varphi(\overline{\varnothing}) = \varphi(V) = 1, \qquad \complement\ \varphi(\varnothing) = \complement\ 0 = 1,$$
$$\varphi(\overline{V}) = \varphi(\varnothing) = 0, \qquad \complement\ \varphi(V) = \complement\ 1 = 0.$$

وجود تناظر یکبیک φ بین جبرهای A و B که حافظ اعمال این جبرها نیز هست نتیجه‌ای عمیق دارد، و آن اینکه، در مورد هر عمل دستگاه A، اگر، در جدول آن عمل، هر a از A را به $\varphi(a)$ تبدیل کنیم جدول عمل نظیر آن عمل از دستگاه B حاصل میشود. به عبارت دیگر، اگر چه دو جبر عمومی A و B از لحاظ ماهیت اعضا و اعمالشان متفاوت هستند، در واقع، جز در علاماتی که برای نامیدن اعضا و اعمالشان بکار رفته است، تفاوتی ندارند، و بالنتیجه، هر دو معرّف یک موجود (دستگاه) مجرد ریاضی میباشند.[۱]

اینک تعریف کلی ایزومورفی:

۲.۶.۳. تعریف. فرض کنیم A و A' دو جبر عمومی همنوع باشند.

I. جبر A را با جبر A' ایزومورف[۲] (همریخت) خوانند در صورتی که تناظری 1ــ1

---

(۱) ملاحظه کنید که هر یک از جبرهای عمومی A و B یک جبر بولی است.

isomorphic (۲)

مانند φ بین مجموعه‌های A و A' موجود باشد که هر دو عمل متناظر دو دستگاه و نیز هر دو عضو خاص متناظر دو دستگاه را محفوظ بدارد، یعنی،

I'. در مورد هر عمل دوتائی $\bigcirc$ از دستگاه A و عمل دوتائی $\bigcirc'$ نظیر آن از دستگاه A'، بازاء هر a و b از A،

$$\varphi(a \bigcirc b) = \varphi(a) \bigcirc' \varphi(b)$$

I''. در مورد هر عمل یکتائی $☾$ از دستگاه A و عمل یکتائی $☾'$ نظیر آن از دستگاه A'، بازاء هر a از A،

$$\varphi(☾\, a) = ☾'\, \varphi(a).$$

I'''. بازاء هر عضو خاص مانند α_k از A و عضو خاص نظیر آن α'_k از A'،

$$\varphi(\alpha_k) = \alpha'_k.$$

II. تناظری 1ــ1 مانند φ را که واجد خواص مذکور باشد یک ایزومورفیسم[1] (همریختی) جبر A بر جبر A' (یا یک ایزومورفیسم این دو جبر) یا یک نگاشت ایزومورف[2] نامند.

III. نسبت ایزومورف بودن جبرها را ایزومورفی[3] (نسبت همریختی) خوانند.

۲.۶.۴. قضیه. نسبت ایزومورفی در جبرهای عمومی یک نسبت هم‌ارزی است. (پس بالاخص، نسبت ایزومورفی متقارن است، و لهذا، بجای اینکه بگوئیم جبر A با جبر A' ایزومورف است، معمولاً میگوئیم جبرهای A و A' ایزومورف هستند.)

برهان. اولاً، اگر A مجموعه‌ی جبر عمومی A و I نسبت همانی در A باشد، بالبداهه، I یک ایزومورفیسم بین جبر A با جبر A است. ثانیاً، فرض کنیم جبر A با جبر A' ایزومورف و φ یک ایزومورفیسم جبر A بر جبر A' باشد. واضح است که φ^- تناظری 1ــ1 بین مجموعه‌های A' و A است. اگر $\bigcirc'$ عملی دوتائی از جبر A' و $\bigcirc$ عمل نظیر آن از جبر A باشد، بازاء هر a و b از A'،

$$\varphi^-(a \bigcirc' b) = \varphi^-(a) \bigcirc \varphi^-(b).$$

زیرا، چون a و b به A' تعلق دارند، $\varphi^-(a)$ و $\varphi^-(b)$ به A تعلق دارند. پس، به مناسبت ایزومورف بودن جبرهای A و A' و با توجه به ۶.۱.۲ : ۳،

$$\varphi(\varphi^-(a) \bigcirc \varphi^-(b)) = \varphi(\varphi^-(a)) \bigcirc' \varphi(\varphi^-(b)) = a \bigcirc' b,$$

و از آنجا،

$$\varphi^-(a \bigcirc' b) = \varphi^-\varphi(\varphi^-(a) \bigcirc \varphi^-(b)) = \varphi^-(a) \bigcirc \varphi^-(b).$$

اثبات در مورد اعمال یکتائی و اعضای خاص به همین قیاس است، و به متعلم محول میشود. اثبات تعدی نسبت ایزومورفی نیز آسان و بر عهده‌ی متعلم است (مراجعه به اثبات حکم III در ۷.۲.۲ : ۳ مفید است). ▲

---

isomorphy (۳) isomorphic (۲) isomorphism (۱)

اینک حکم مربوط بـه نمایش جبرهای بولی را که در آغاز ۲.۶ بدان اشاره کـردیم میتوان چنین بیان کرد:

۲.۶.۵. قضیه. هر جبر بولی با یک جبر مجموعه‌ها ایزوموروف است.
این گونه قضایا که مبین ایزوموروف بودن دستگاهی مجرد با دستگاهی که خواص مشهـود دارد میباشند فوق‌العاده اهمیت دارند، زیرا دستگاههای دارای خواص مشهود خواصی از دستگاههای ایزومورف خود را به ذهن القا میکنند، و راهنمای کشف خواص این دستگاهها میباشند.

۲.۶.۶. تمرین

۱. ثابت کنید که دستگاههای $(\mathbf{R};\ +)$ و $(\mathbf{R}^+;\ \cdot)$ ایزومورف هستند.

راهنمائی: تابع φ با ضابطه‌ی $\varphi(x) = 2^x$.

۲. ایزومورفیسم یک جبر عمومی را با خودش اوتومورفیسم[1] (خودریختی) میخـوانـند. مثلاً بنا بر برهان ۲.۶.۴، اگر A یک جبر عمومی با مجموعه‌ی A و I نسبت همانی در A بـاشد I یک اوتومورفیسم جبر A است (اوتـومورفیسم بیمایـه). بعضی دستگاهها اوتومورفیسمهای دیگر نیز دارند. مثلاً فرض کنیم

$$A = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbf{I}\}.$$

ثابت کنید که تابع φ با ضابطه‌ی

$$\varphi(x + y\sqrt{3}) = x - y\sqrt{3}$$

یک اوتومورفیسم دستگاه $(A;\ +, \cdot)$ است.

۳. ثابت کنید که اگر دو گروه ایزومورف باشند، اولاً، اعضای خنثای آنها نظیر یکدیگرند؛ ثانیاً، قرینه‌های دو عضو متناظر متناظرند؛ ثالثاً، ایزومورفیسم بین آنهـا عمـل تفـریق را محفوظ میدارد.

۴. ثابت کنید که دستگاههای $(\mathbf{R};\ +)$ و $(\mathbf{R};\ \times)$ ایزومورف نیستند.

۵. در تعریف ایزومورفیسم (۲.۶.۳)، اگر φ تابعی بر مجموعه‌ی A بتوی مجموعـه‌ی A' (نه ضرورةً تابعی 1ـ1) باشد این تابع را یک هومومورفیسم[2] جبر A بتوی جبر A' یا یک نگاشت هومومورف[3] جبر A بتوی جبر A' خوانند. در حالت خاصی که $A' = \varphi$ح، بجای بـتـوی، بروی، گفته میشود، و در این حالت، جبر A' را هومومورف جبر A یا نـگاره‌ی (یا تصـویر) هومومورف جبر A خوانند. بالاخره، اگر φ یک هومومورفیسم جبر A بتوی جبـر A' باشد، و $A' \subseteq A$، آنگاه هومومورفیسم را آندومورفیسم[4] نامند.

بنا بر آنکه $A = \{x^2 \mid x \in \mathbf{I}\}$ و تابع φ بر $\mathbf{I}$ بروی A با ضابطه‌ی $\varphi(x) = x^2$ تـعریف شود، ثابت کنید کـه φ یک آندومورفیسم دستگاه $(\mathbf{I};\ \times)$ بر دستگاه $(A;\ \times)$ است.

---

(۱) automorphism
(۲) homomorphism
(۳) homomorphic
(۴) endomorphism

۶. اگر φ یک هومومورفیسم جبر A بتوی جبر A' و ψ یک هومومورفیسم جبر A' بتوی جبر A'' باشد آنگاه $\psi \circ \varphi$ یک هومومورفیسم جبر A بتوی جبر A'' است.

۷. تصویر هوموموروف یک گروه گروه است.

۸. در مجموعه‌ی $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$، اعمال $\cdot$ و $'$ چنین تعریف شده‌اند: بازاء هر a و b از $\mathcal{B}$،

ab یعنی کمم a و b؛ a' یعنی $30/a$.

ثابت کنید که دستگاه $(\mathcal{B}; \cdot, ')$ یک جبر بولی است.

معانی 0، 1، $a \subseteq b$، و $a + b$ در این جبر چیست؟

۹. در جبر بولی $(\mathcal{B}; \cdot, ')$، عضو a از $\mathcal{B}$ را یک اتم خوانند در صورتی که، در عین حال،

(۱) $a \neq 0$

(۲) همواره اگر $b \subseteq a$ آنگاه $b = 0$ یا $b = a$.

اتمهای جبر مسئله‌ی ۸ را تعیین کنید.

۱۰. فرض کنیم $(\mathcal{B}; \cdot, ')$ یک جبر بولی متناهی باشد (یعنی مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ متناهی باشد)، و بازاء هر x از $\mathcal{B}$، $A(x)$ مجموعه‌ی جمیع اتمهائی مانند a باشد که $a \subseteq x$. ثابت کنید که

I. اگر $x \neq 0$ آنگاه اتمی مانند a هست که $a \subseteq x$.

II. بازاء هر اتم مانند a و هر x، یا $a \subseteq x$ یا $a \subseteq x'$.

III. همواره $A(xy) = A(x) \cap A(y)$

IV. همواره $A(x') = A(1) - A(x)$

V. شرط لازم و کافی برای آنکه $A(x) = A(y)$ آنست که $x = y$.

VI. اگر a_1، a_2، . . .، و a_n اتمهائی دو بدو متمایز باشند آنگاه

$$A(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

۱۱. اگر $(\mathcal{B}; \cdot, ')$ یک جبر بولی متناهی و دارای n عضو باشد (یعنی مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ دارای n عضو باشد)، و V مجموعه‌ی اتمهای جبر $\mathcal{B}$ باشد. آنگاه جبر $\mathcal{B}$ با جبر مجموعه‌ی مجموعکان V ایزومورف است[1].

راهنمائی: تابع $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(V)$، بنا بر قسمت V مسئله‌ی قبل، 1ـ1، و بنا بر قسمت VI آن، بروی $\mathcal{P}(V)$ است.[2]

۱۲. مجموعه‌ای مانند V تعیین کنید که جبر بولی مسئله‌ی ۸ با جبر مجموعه‌ی مجموعکان V ایزومورف باشد.

۲.۷. حساب گزاره‌ها به عنوان جبر بولی.

فرض کنیم

$$\mathcal{B} = \{p, q, r, \ldots\}$$

---

(۱) تحقیق در شرط لازم و کافی برای آنکه یک جبر بولی نامتناهی همریخت با جبر مجموعه‌ی مجموعکان یک مجموعه باشد آسان نیست.

(۲) به آسانی میتوان ثابت کرد که اگر m عده‌ی اتمهای جبر $\mathcal{B}$ باشد $n = 2^m$. (۳.۳.۲ فصل ۳ ض ملاحظه شود.)

مجموعه‌ای از گزاره‌ها باشد بطوری کـه نقیض هر عضو $\mathscr{B}$ و نیز ترکیب عطفی هـر دو عضو $\mathscr{B}$ به $\mathscr{B}$ متعلق باشد. نسبت معادله را در $\mathscr{B}$ (۳.۲ فصل ۱ ض)، کـه یک نسبت هم‌ارزی است، نسبت تساوی در $\mathscr{B}$ میگیریم، و به «$=$» نمایش میدهیم.
دستگاه

$$(\mathscr{B};\ \&,\ \sim)$$

یک جبر بولی است. برای اثبات این مطلب، کافی است ثابت کنیم که این دستگاه در اصول موضوعه‌ی $\mathrm{B}_1' - \mathrm{B}_6'$ (صفحه‌ی ۶۶۳) صدق میکند.
اولاً، چـون $p \,\&\, q$ با $q \,\&\, p$ و $(p \,\&\, q) \,\&\, r$ بـا $p \,\&\, (q \,\&\, r)$ مـعـادل است، B_1' و B_2' برقرار میباشند.
ثانیاً، برای تحقیق در B_3'، فرض کنیم p و q دو عضـو دلـخواه $\mathscr{B}$ بـاشند، و بـازاء عضوی مانند r از $\mathscr{B}$،

$$p \,\&\, \sim q = r \,\&\, \sim r.$$

معنی این عبارت اینست که $p \,\&\, \sim q$ با $r \,\&\, \sim r$ معادل است. پس، چون $r \,\&\, \sim r$ همواره دروغ است، $p \,\&\, \sim q$ نیز همواره دروغ میباشد. بالنتیجـه، اگر p راست باشد q هـم راست است، و لهذا، $p \,\&\, q$ نیز راست است؛ و اگـر p دروغ باشد $p \,\&\, q$ نـیز دروغ است. پس، $p \,\&\, q$ با p معادل است؛ و به عبارت دیگر $p \,\&\, q = p$. تحقیق در برقراری B_4' بـه همین قیاس است.
ثالثاً، B_5' و B_6' بنا بر تعویضپذیری عبارات معادل برقرار میباشند.

اینک که معلوم شد که دستگاه $(\mathscr{B};\ \&,\ \sim)$ یک جبر بولـی است میتوان سایر مفاهیـم مربوط به جبر بولی را در آن تعریف کرد، و احکام و محاسبات جبر بـولی را در آن بـکـار انداخت. مثلاً، بر طبق ۲.۵.۴،

تعریف ۱. اگر p عضو دلخواهی از $\mathscr{B}$ باشد،

$$0 = p \,\&\, \sim p, \qquad\qquad 1 = \sim 0.$$

پس، 0 هر دروغگو و 1 هر راستگو است[1].
نظیر تعریف ۲.۵.۱۶ این است که $p + q$ را بـه معنـی $\sim(\sim p \,\&\, \sim q)$ بـگیریـم. در اینجا، بجای «$p + q$»، «$p \vee q$» مینویسیم. پس،

تعریف ۲. $p \vee q$ یعنی $\sim(\sim p \,\&\, \sim q)$.

بالاخره، ترکیب شرطی را، که در حساب مورد بحث اهمیت خاصی دارد، میتوان بـا تعـریف ذیل وارد دستگاه کرد:

تعریف ۳. $p \supset q$ یعنی $\sim p \vee q$.

۲.۷.۱. به روش مذکـور در ۲.۴.۲، میتوان مقـادیـر یک تابع بولی (در اینجـا، تـرکیب

---

(۱) اگر بخواهیم میتوانیم اعضای خنثای دستگـاه را f (بجـای 0) و t (بجـای 1) بنامیم.

منطقی) را بازاء جمیع دستگاههای مقادیر 0 و 1 برای متغیرهـای آن حساب کـرد؛ و این کار همان تنظیم جدول ارزش تابـع مذکـور بر طبق مندرجات فصـل ۱ ض میباشد. بـالعکس، اگر جدول ارزش یک ترکیب منطقـی در دست باشد به طـرق مذکـور در ب: ۲.۴.۶ میتـوان آن ترکیب را تعیین نمود. مثلاً، در جدول صفحه‌ی ۶۶۵، اگر x و y و z را به p، q، و r تبدیل کنیم، فرمولی از حساب گزاره‌ها که این جدول جدول ارزش آن باشد عبارتست از

$$(p \,\&\, q \,\&\, \sim r) \vee (p \,\&\, \sim q \,\&\, r) \vee (\sim p \,\&\, \sim q \,\&\, r),$$

و آن معادل با فرمول ساده‌تر $(p \,\&\, q \,\&\, \sim r) \vee (\sim q \,\&\, r)$ میباشد.

۲.۷.۲. مثال. منطقیی اسیر قبیله‌ای از آدمخواران گـردید. او را در اطاقـی دارای دو در محبوس کردند، و دو نگهبان بر او گماشتند. رئیس قبیله، که مردی راستگو بود، به جهتی که از این بحث خارج است، بر او رحمت آورد، و به وی چنین گفت: ـ

«یکی از این دو در منتهی به مطبخ من میشود، و در آنجا دیگی برای جوشانیدن تـو آماده است، و دیگری راه نجـات است. تو مخیـّر هستی که از هر یک از دو در که بخواهی خارج شوی، و اجـازه داری که فقط یک سؤال از یکی از نگهبانان بکنی، و دستور داده‌ام که هر نگهبان که طرف سؤال قرار گیرد بدان جواب آری یا نه گوید. این را هم بدان کـه یکی از نگهبانان همواره راست میگوید، و دیگری همواره دروغ».

مرد اسیر پس از اندک تأملی سؤالی کرد که بدان وسیله راه نجـات را یافت. سؤال وی چـه بوده است؟

درها را A و B مینامیم. فرض کنیم p گـزاره‌ی «در A راه نجـات است» و q گـزاره‌ی «تو راستگو هستی» باشد. سعی میکنیم گـزاره‌ای مرکب از p و q بیابیـم که ـ خواه از نـگهبان راستگو سؤال شود خواه از نگهبان دروغگو ـ اگـر جواب «آری» داده شـود p راست باشد، و اگر جواب «نه» داده شود p دروغ باشد. برای یافتن ایـن گزاره، به تعیین سـتـون آخـر جدول ارزش آن میپردازیـم. این کار آسان است. ستونهای اول و دوم جـدول را به طریـق عادی تنظیـم و در ستون سوم جوابهای مطلوب را درج کرده‌ایم. ارزشهای مندرج در سطر اول نشان میدهنـد کـه، در این حالت، در A راه نجات است، و نگهبـان مخاطب راستگـو است. پس، در ایـن حـالت، ارزش گزاره‌ی مطلوب باید 1 باشد. سطر دوم نظیـر حالتی است که در A راه نجـات است، و مخاطب دروغگـو است. پس، در این حـالت، ارزش گـزاره‌ی مطلوب باید 0 باشد. به همین طریق ارزشهای گزاره‌ی مطلوب در سطور سوم و چهارم بدست میآید.

p	q	جـواب مـطلوب	ارزش راستی سؤال
t	t	آری	1
t	f	آری	0
f	t	نه	0
f	f	نه	1

پس، گزاره‌ی مطلوب عبارتست از

$$(\sim p \vee q) \,\&\, (p \vee \sim q), \tag{1}$$

و سؤال منطقی چنین است:

آیا در A راه نجات نیست یا تو راستگو هستی
و در A راه نجات است یا تو دروغگو هستی؟

این سؤال را میتوان به صورتی معادل آن ولی ساده‌تر درآورد. فرمول (۱) معادل فرمول

$$(p \supset q) \,\&\, (q \supset p)$$

است، که به معنی $p \,\underline{\supset\subset}\, q$ میباشد. پس سؤال منطقی چنین خواهد بود:

آیا در A فقط و فقط وقتی راه نجات است که تو راستگو باشی؟

۲.۷.۳. تمرین

۱. اگر فرمولی فقط یک متغیر گزاره‌ای سازا، مثلاً p، داشته باشد، ستون آخر جدول ارزش آن را به دو طریق میتوان پر کرد، از این قرار:

p	
t	t
f	f

p	
t	f
f	t

فرمولی را که با هر یک از این جداول نمایش داده میشود بنویسید.

۲. فرمولی فقط دو متغیر گزاره‌ای سازا، مثلاً p و q، دارد. ستون آخر جدول ارزش آن را به چند طریق میتوان پر کرد؟ بازاء هر یک از این جداول فرمولی بنویسید که آن جدول جدول ارزش این فرمول باشد.

۳. چهار شیشه‌ی A، A'، B، و B' محتوی مایعی آبگون هستند. یکی از A و A' محتوی آب و دیگری محتوی زهر است، و نیز، یکی از B و B' محتوی آب و دیگری محتوی زهر دیگری است، ولی دو زهر اثر یکدیگر را خنثی میکنند.

اسیری مجبور است که یکی از دو شیشه‌ی A و A' و یکی از دو شیشه‌ی B و B' را انتخاب کرده محتوی آنها را بنوشد. منتها، به وی اجازه داده شده است که از مستحفظ خود، که مردی راستگو است، یک سؤال بکند، و جواب مستحفظ منحصر به «آری» یا «نه» است. چه سؤالی بکند که جان بدر برد؟

۲.۸. جبر کلیدهای برق[۱]

. کلید برق از اسبابهای «دوحالته» است، یعنی فقط با دو حالت کار میکند: باز (وقتی که برق را راه ندهد) و بسته (وقتی که برق را راه دهد).

در بحث مختصر آتیه، مقصود از مدار قطع و وصل یا، مختصراً، مدار، سیمهائی است که دو نقطه (محل ورود و محل خروج جریان برق) را به هم وصل میکنند، و کلیدهائی با اتصال زنجیری یا موازی بر آنها قرار دارند.

چنانکه خواهیم دید، با مداراتی از نوع مذکور میتوان یک جبر بولی ساخت.

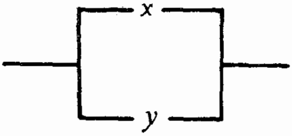
---

(۱) جبر بولی در طراحی و ساده کردن مدارهای پیچیده‌ی حسابگرهای الکترونی، تلفون، و بسیاری از وسایلی که با لوله‌های الکترونی یا ترانزیستور کار میکنند موارد استعمال بسیار مهم دارد، و از این جهت سخت مورد توجه ریاضیدانها و مهندسین بوده و هست.

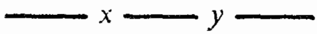
۲.۸.۱. علامات. کلیدهای دلخواه را با حروف کوچک الفبای لاتینی نمایش میدهیم. اگر دو کلید چنان باشند که با هم باز و با هم بسته شوند آنها را با یک حرف نمایش میدهیم. اگر دو کلید چنان باشند که هر گاه اولی باز است دومی بسته باشد، و هر گاه اولی بسته است دومی باز باشد یکی از دو کلید را مثلاً x، و در این صورت، دیگری را x' مینامیم.
ساده‌ترین مدارات آنست که مشتمل بر یک کلید باشد (شکل ۴۸. صورت اختصاری در طرف راست).

شکل ۴۸

مدار متشکل از دو کلید x و y را با اتصال موازی (شکل ۴۹) $x + y$، و مدار متشکل از آنها را با اتصال زنجیری (شکل ۵۰) xy (بجای $x \cdot y$) مینامیم.

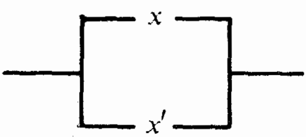


شکل ۴۹

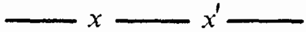


شکل ۵۰

مداری را که همواره جریان بتواند از آن بگذرد به 1 و مداری را که هیچگاه جریان از آن نگذرد به 0 نمایش میدهیم؛ مدار شکل ۵۱ از نوع اول و مدار شکل ۵۲ از نوع دوم میباشد.



شکل ۵۱

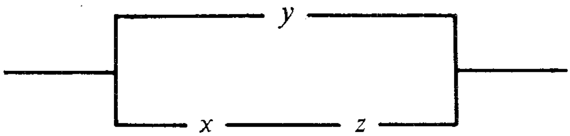


شکل ۵۲

۲.۸.۲. مدارات و عبارات جبری. با حروف x، x'، y، y'، و غیره، و علامات $+$، $\cdot$، و $'$ میتوان عبارات جبری بامعنی ساخت، مانند $x + yz$ و $z(xy' + x'y)$. به هر مداری یک چنین عبارتی تعلق میگیرد، و بالعکس، هر چنین عبارتی نظیر یک مدار میباشد. بستگی مدارات و عبارات متناظر را چنین بیان میکنند که گویند یک عبارت جبری مدار نظیر خود را نمایش میدهد، و یک مدار تحققِ عبارت جبری نظیر خود میباشد یا آن را تحقق میدهد.

به عنوان مثال، مدار شکل ۵۳ از اتصال موازی مدار y با مدار حاصل از اتصال

زنجیری مدارات x و z ساخته شده است. مدار اخیر تحقق xz است، و لهذا، مداری که در شکل دیده میشود تحقق عبارت $y + xz$ میباشد.

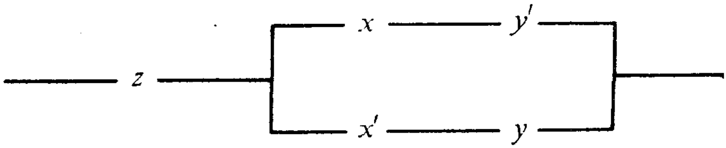


شکل ۵۳

بالعکس، عبارت

$$z(xy' + x'y) \qquad (۱)$$

نشانه‌ی اتصال زنجیری مدار z است با مدار نظیر $xy' + x'y$. مدار اخیر اتصال موازی مدارات نظیر xy' و $x'y$ میباشد، که اولی حاصل از اتصال زنجیری x با y' و دومی حاصل از اتصال زنجیری x' با y است. پس، تحقق عبارت (۱) مدار شکل ۵۴ میباشد.



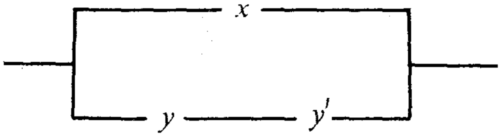
شکل ۵۴

۲.۸.۳. مدارات معادل و عبارات مساوی. دو مدار متضمن کلیدهای a، b، . . .، و l را معادل خوانیم در صورتی که، بازاء هر دستگاه از حالات این کلیدها، شرایط بَستِ آنها یکسان باشد، یعنی، یا هر دو مدار باز باشند (جریان نتواند از آنها عبور کند) یا هر دو بسته باشند.

دو عبارت جبری را مساوی مینامیم در صورتی که مداراتی که با آنها نمایش داده میشوند معادل باشند.

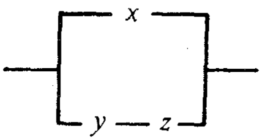
۲.۸.۴. جبر کلیدهای برق به عنوان جبر بولی. اینک به آسانی میتوان تحقیق کرد که مدارات قطع و وصل با اعمالی که در آنها تعریف کردیم در اصول موضوعه‌ی $\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_6$ (صفحه‌ی ۶۵۲) جبر بولی صدق میکنند. به عنوان مثال، برقراری بعضی از این اصول موضوعه را توضیح میدهیم.

(آ). رابطه‌ی $x + 0 = x$ (نیمی از B_2) بدین معنی است که مدار حاصل از اتصال موازی مدار x با مداری که همواره باز باشد (یعنی هیچگاه جریان را راه ندهد) معادل مدار x است، و این بدیهی است (شکل ۵۵).

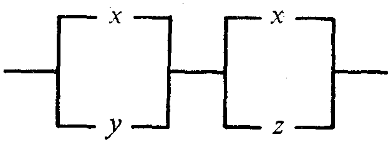


شکل ۵۵

(د). رابطه‌ی $x + yz = (x + y)(x + z)$ (نیمی از B_3) بدین معنی است که مدارات نظیر عبارات $x + yz$ و $(x + y)(x + z)$ معادل یکدیگرند. این مدارات در اشکال ۵۶ و ۵۷ دیده میشوند. از بررسی این اشکال معلوم است که اگر x بسته باشد یا هم y و هم z بسته باشند آنگاه هر دو مدار بسته‌اند، و الا، هر دو باز میباشند.



شکل ۵۶

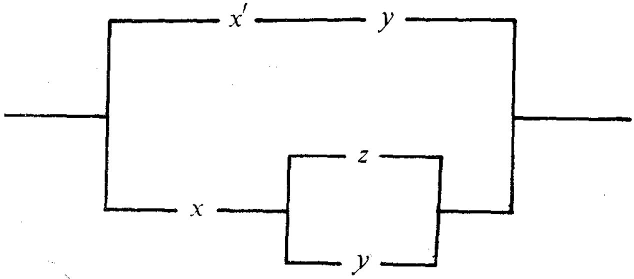


شکل ۵۷

۲.۸.۵. نتیجه. اینک که محقق گردید که دستگاه مدارات قطع و وصل با اعمال سابق‌الذکر در آنها یک جبر بولی است، میتوان همه‌ی وسایل جبر بولی را در این دستگاه ــ و از جمله در حل دو مسئله‌ی بنیادی آن، یکی «مختصر کردن مدارات» و دیگری طرح مدارات واجد خواص معین ــ بکار گرفت. حل مسئله‌ی اول به وسیله‌ی قواعد عمومی محاسبه در جبر بولی است. در حل مسئله‌ی دوم، قبلاً تابع بولی نظیر مدار مطلوب را تعیین، و سپس، مدار را طرح میکنند[1].

۲.۸.۶. امثله

(آ). مدار شکل ذیل را مختصر کنید.



شکل ۵۸

(۱) حل این مسئله معمولاً پیچیده است، و از موضوع این کتاب خارج میباشد.

مقصود تعیین مداری است معادل مدار فوق که تعداد کلیدهایش کمتر باشد. مدار فوق با عبارت

$$x'y + x(y+z)$$

نمایش داده میشود. اینک این عبارت را مختصر میکنیم:

$$x'y + x(y+z) = x'y + xy + xz$$
$$= y(x'+x) + xz = y + xz.$$

پس، مدار فوق معادل مدار نظیر $y + xz$ است (شکل ۵۳).

(د). کمیسیونی متشکل از سه عضو میخواهد یک مدار برق بکار برد که در مسائلی که در باب آنها اعضا رأی محرمانه میدهند رأی اکثریت را به وسیله‌ی لامپی نشان دهد، بدین طریق که هر یک از اعضا موافقت خود را با فشار دادن دگمه‌ای ابراز دارد، و وقتی که موضوع مورد موافقت اکثریت است لامپ روشن شود. مداری حائز این شرط طرح کنید.

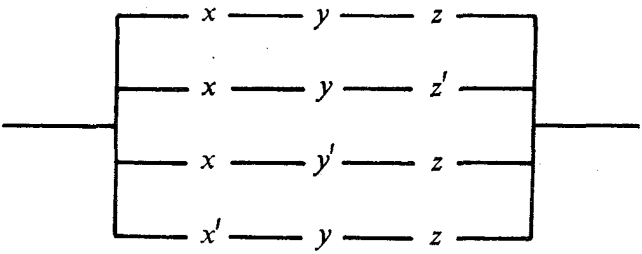
قبلاً به تعیین تابع بولی نمایش‌دهنده‌ی مدار مطلوب میپردازیم. اگر x، y، و z سه دگمه باشند تابع مطلوب f باید فقط و فقط وقتی مقدار 1 بگیرد که حد اقل دو متغیر از سه متغیر x، y، و z مقدار 1 داشته باشند. پس، باید این تابع بازاء دستگاههای مقادیر

$$(1, 1, 1), \qquad (1, 1, 0), \qquad (1, 0, 1), \qquad (0, 1, 1)$$

مقدار 1 و بازاء سایر دستگاهها مقدار 0 بگیرد. بنا بر این، تابع مطلوب با ضابطه‌ی

$$f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz$$

مشخص میشود. مدار تحقق این تابع (شکل ۵۹) مدار مطلوبست.



شکل ۵۹

۲.۸.۷. تمرین

۱. مدار تحقق هر یک از عبارات ذیل را بدون مختصر کردن این عبارات رسم کنید:

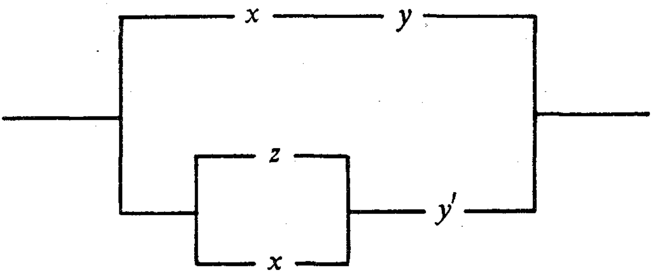
(آ) $x + y + z'$.

(ب) $xyz' + x'(y+z)$.

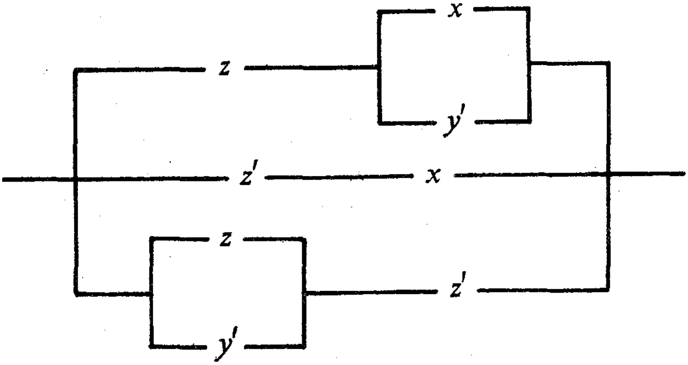
(پ) $xyz + xy(tz + uv)$.

(ت) $xy + xy'z + y(x'+z) + y'z'$

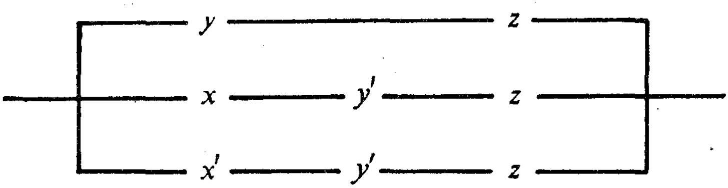
۲. عبارت جبری نمایش‌دهنده‌ی مدارات ذیل را تعیین کنید، و در مورد هر یک از مدارات، مداری معادل آن ولی ساده‌تر بسازید.



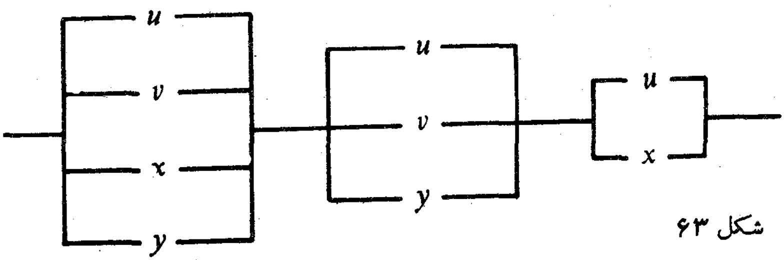
شکل ۶۰



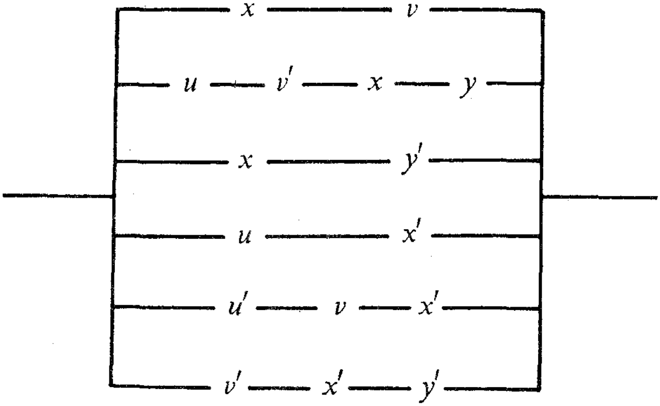
شکل ۶۱



شکل ۶۲



شکل ۶۳



شکل ۶۴

۳. (مداری که یک چراغ را با دو کلید کنترول میکند). مداری مشتمل بر دو کلید، یکی در طبقه‌ی پایین و دیگری در طبقه‌ی بالای یک خانه، طرح کنید که به وسیله‌ی هر یک از دو کلید، مستقل از دیگری، بتوان چراغی را که در راهرو بین دو طبقه است روشن یا خاموش کرد.
راهنمائی: هر تغییری در حالت یکی از کلیدها باید چراغ را اگر روشن است خاموش و اگر خاموش است روشن کند.

۴. مداری برای کنترول یک چراغ با سه کلید طرح کنید.

۵. کمیته‌ای متشکل از دو زن و دو مرد است. بر طبق مقررات کمیته، تصویب یک مطلب موقوف به اینست که هر دو مرد یا هر دو زن و یکی از مردان به آن رأی موافق بدهند. مداری طرح کنید که تصویب یک موضوع را با به صدا در آوردن زنگ اخبار اطلاع دهد.

۳ § نسب و توابع

۳.۱. زوج مرتب. به روشی که در فصل دوم در تعریف نسبت اتخاذ کردیم ایرادی وارد است، و آن اینکه، در این تعریف، مفهوم زوج مرتب را بکار بردیم، که خود متضمن مفهوم «ترتیب» است، و سپس نسبت ترتیبی را بدان وسیله تعریف کردیم. بدین گونه، مفهوم ترتیب در حقیقت تعریف نشده است. بنا بر این، مطلوب آنست که مفهوم زوج مرتب را مستقل از مفهوم ترتیب تعریف کنیم. برای این منظور قبلاً ملاحظه میکنیم که آنچه از جنبه‌ی ریاضی از شیء موسوم به «(x,y)» یا «زوج مرتب x و y» میخواهیم اینست که واجد این دو خاصیت باشد: اولاً، با x و y مشخص شود؛ و ثانیاً، (x, y) و (u, v) فقط و فقط وقتی اسامی یک چیز باشند که $u = x$ و $v = y$. اینک، به وسیله‌ی مفاهیم مربوط به مجموعه‌ها، چنین شیئی عرضه میکنیم، و نام زوج مرتب بر آن مینهیم.

۳.۱.۱. تعریف[1]. اگر x و y دو شیء باشند مجموعه‌ی

---

(۱) این تعریف از کوراتوفسکی (C. Kuratowski)، ریاضیدان معاصر لهستانی، است.

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \qquad (*)$$

را یک زوج مرتب خوانیم. از اشیاء مذکور، آن را که منفرده‌اش در زوج مرتب آمده است مختص اول آن زوج مرتب و دیگری را مختص دوم آن زوج مرتب خوانیم. زوج مرتبی را که مختص اولش x و مختص دومش y باشد (x, y) مینامیم.

چون مجموعه‌ی $(*)$ با مشخص بودن x و y مشخص است، هر زوج مرتب با مختصات خود مشخص است. بعلاوه

۳.۱.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه $(x, y) = (u, v)$ آنست که $x = u$ و $y = v$.

برهان. کفایت شرط بدیهی است. برای اثبات لزوم، قبلاً این دو لم را یادآوری میکنیم[۱]:

I. $a = b$ $\Leftrightarrow$ $\{a\} = \{b\}$.

II. $(a = b = c)$ $\Leftrightarrow$ $\{a\} = \{b, c\}$.

حال فرض کنیم

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}, \qquad (۱)$$

و دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $u = v$. مجموعه‌ی طرف دوم تساوی (۱) مساوی $\{\{u\}\}$ است، و (۱) به صورت $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}\}$ در میآید. پس، بنا بر II، $\{x\} = \{u\}$ و $\{x, y\} = \{u\}$، و بالنتیجه، بنا بر I و II، $x = u$ و $u = x = y$، و حکم برقرار است.

حالت دوم: $u \neq v$. بالنتیجه، $\{u\} \neq \{u, v\}$، و لهذا $\{x\} \neq \{u, v\}$ (۲) (چرا؟). چون $\{x\}$ عضو مجموعه‌ی طرف راست تساوی (۱) است، بنا بر اصل گسترش، $\{x\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\}$، و لهذا $\{x\} = \{u, v\} \vee \{x\} = \{u\}$، و از آنجا، بنا بر (۲)، $\{x\} = \{u\}$، و بالنتیجه، $x = u$ (۳). همچنین، چون $\{u, v\}$ عضو مجموعه‌ی طرف چپ تساوی (۱) است، بنا بر اصل گسترش، $\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$، و از آنجا، $\{u, v\} = \{x, y\} \vee \{u, v\} = \{x\}$. پس بنا بر (۲)، $\{u, v\} = \{x, y\}$ (۴)، و از اینجا بنا بر (۲)، $\{x\} \neq \{x, y\}$، و بالنتیجه، $x \neq y$. از اینجا، با توجه به (۳) لازم میآید که $u \neq y$، و از این و (۴) بنا بر اصل گسترش نتیجه میشود، $y = v$. ▲

۳.۱.۳. تمرین

۱. (x, x) یعنی چه؟

۲. در تعریف ۳.۱.۱، اگر بجای مجموعه‌ی $(*)$ مجموعه‌ی $\{x, \{x, y\}\}$ را بکار بریم آیا انتظاراتی که در ۳.۱ گفته شد بر آورده میشود؟

۳.۲. در تعریف نسبت. در فصل ۳، نسبت را مجموعه‌ای از ازواج مرتب تعریف کردیم. همین تعریف را در مورد نسب عادی میتوان بکار بست. برای توضیح ملاحظه کنید که اگر

---

(۱) ۱.۳.۱ و ۱ : ۲.۷ در فصل ۲ ملاحظه شود.

چه همه‌ی ما معنی عبارتی مانند

صغرا مادر پرویز است

را میفهمیم، اگر از ما بپرسند نسبت مادری چیست شاید نتوانیم جوابی به این سؤال بدهیم. اما، در پرتو مفاهیمی که در مقاله‌ی اول آموختیم، جواب گفتن به سؤال مذکور آسان است. اگر صغرا را «a»، پرویز را «b»، و نسبت مادری را f بنامیم، گزاره‌ی فوق را میتوان چنین بیان کرد:

a نسبت f به b دارد،

یا

$$(a, b) \in f.$$

پس، برقراری نسبت مادری بین دو چیز به ترتیب معیّن معادل است با عضویت زوج مرتب آنها در آن نسبت. بالعکس، اگر زوج مرتب (x, y) متعلق به f باشد آنگاه x به y نسبت f دارد. خلاصه، شرط لازم و کافی برای آنکه x مادر y باشد آنست که زوج مرتب (x, y) متعلق به f باشد. پس، نسبت مادری را چنین تعریف میکنیم:

$$\text{نسبت مادری} = \{(x, y) \mid x \text{ مادر } y \text{ است}\}.$$

تعریف نسبت به شرح مذکور ممکن است عرفاً مورد پسند نباشد، اما، اولاً ــ چنانکه مکرر اشاره کرده‌ایم ــ پسند عرفی مورد اعتنای ما نیست. ثانیاً، نه فقط اصطلاحات عرفی، بلکه منطق قدیم هم از تعریف نسبت عاجز بوده است. ثالثاً، وقتی که نسبت را مجموعه شمردیم، بنا بر آنچه در آغاز فصل ۲ در باب مشخص بودن مجموعه‌ها گذشت، یک نسبت فقط و فقط وقتی مشخص خواهد بود که، بازاء هر دو شیء مانند x و y، زوج مرتب (x, y) یا متعلق به آن نسبت باشد یا متعلق به آن نباشد، یعنی، یا x نسبت مورد بحث را به y داشته باشد یا نه، و این معنی برای مشخص بودن یک نسبت البته معقول و قابل قبول است. رابعاً، چنانکه در فصل ۳ ملاحظه کردید، تعریف مذکور آنچه را از جنبه‌ی ریاضی از نسبت میخواهیم بدست میدهد. بنا بر این، تعریف ما برای نسبت از هر جهت قابل قبول است، مگر آنکه روزی تعریفی بهتر از آن عرضه شود.

بنا بر تعریف مذکور، گزاره‌نمای

z عضو نسبت f است

معادل است با اینکه z زوج مرتبی است که مختص اول آن به مختص دومش نسبت f دارد. به عبارت دیگر،

$$z \in f \;\Omega\; [x f y \text{ و } z = (x, y) \text{ که } \text{هست } y \text{ و ی } x \text{ی}]$$

یا

$$z \in f \;\Omega\; \exists x\, \exists y (z = (x, y) \;\&\; x f y).$$

این معادله‌ی اصلی را در استدلال و محاسبه با نسب باید همواره مد نظر داشت.

۳.۲.۱. تبصره در اعمال بر نسب. چون هر نسبت مجموعه‌ای است میتوان نسبتها را با اعمال مربوط به مجموعه‌ها با هم ترکیب کرد، و نسبتهای جدید ساخت. واضح است که اگر

f و g دو نسبت باشند هر یک از $f \cup g$، $f \cap g$، و $f - g$ مجموعه‌ای از ازواج مرتب، و لهذا، یک نسبت است. همچنین، اگر f نسبتی جزء یک نسبت عمومی باشد $\bar{f}$ (متمم f نسبت به آن نسبت عمومی) نیز یک نسبت است.

فرض کنیم f و g دو نسبت باشند. شرط لازم و کافی برای آنکه x نسبت $f \cup g$ به y داشته باشد، یعنی برای آنکه $(x, y) \in f \cup g$، آنست که

$$(x, y) \in f \vee (x, y) \in g,$$

و این معادل است با اینکه

$$xfy \vee xgy.$$

خلاصه،

$$x(f \cup g)y \;\Xi\; (xfy \vee xgy).$$

بر متعلم است که نظیر این معادله را در مورد $f \cap g$، $f - g$، و $\bar{f}$ بنویسد.

۳.۲.۲. تبصره در مفاهیم خاص نسب. در فصل سوم، اهم مفاهیم خاص نسب را تعریف کردیم، و بعضی از خواص مهم آنها را آوردیم. در فصل ۱ ض، تعریف بعضی از این مفاهیم را با توضیحات کافی به زبان منطق نوشتیم (۵.۳.۱). برای تسهیل مراجعه، تعریف مفاهیم مذکور و شرایط لازم و کافی مربوط به عضویت را در اینجا گرد میآوریم[۱]:

I. $\quad$ ح$f = \{x \mid \exists y(xfy)\}$.

I′. $\quad x \in$ ح$f \;\Xi\; \exists y(xfy)$.

II. $\quad$ حح$f = \{y \mid \exists x(xfy)\}$.

II′. $\quad y \in$ حح$f \;\Xi\; \exists x(xfy)$.

III. $\quad f(E) = \{y \mid \exists x(x \in E \;\&\; xfy)\}$.

III′. $\quad y \in f(E) \;\Xi\; \exists x(x \in E \;\&\; xfy)$.

IV. $\quad f^{\vee}(E) = \{x \mid \exists y(y \in E \;\&\; xfy)$.

IV′. $\quad x \in f^{\vee}(E) = \exists y(y \in E \;\&\; xfy)$.

V. $\quad g \circ f = \{(x, y) \mid \exists z(xfz \;\&\; zgy)\}$.

V′. $\quad x(g \circ f)y \;\Xi\; \exists z(xfz \;\&\; zgy)$.

۳.۲.۳. امثله

(آ). f نسبت پدری و g نسبت مادری در افراد انسانی است. نسبت $f \cup g$ را به زبان

---

(۱) تسلط بر صورتهای علامتی آتیه برای فهم مطالب آینده ضرورت ندارد.

فارسی تعریف کنید.
در حل این گونه مسائل بهتر آنست که شرط لازم و کافی را برای اینکه نسبت مورد نظر بین دو چیز بر قرار باشد بنویسیم. بنا بر ۳.۲.۱، x فقط وقتی نسبت $f \cup g$ به y دارد که پدر y یا مادر y باشد. پس، $f \cup g$ نسبت «پدرِ یا مادرِ» یا نسبت «یکی از والدینِ» میباشد[1].

(ب). f نسبت «پدرِ یا مادرِ» در افراد انسانی است. fح و fحع را به زبان فارسی تعریف کنید.

بنا بر تعریف، fح مجموعه‌ی آدمیانی است که هر یک به کسی نسبت f دارد، یعنی پدر کسی یا مادر کسی است. پس، fح مجموعه‌ی آدمیان صاحب فرزند است. fحع مجموعه‌ی آدمیانی است مانند y که xی هست که x پدر یا مادر اوست. پس، fحع مجموعه‌ی جمیع آدمیان است به استثنای آدم و حوا.

(پ). f نسبت پدری و g نسبت مادری در مجموعه‌ی آدمیان است. نسبت $g \circ f$ را به زبان فارسی تعریف کنید.

بنا بر تعریفِ $g \circ f$، فقط و فقط وقتی x نسبت $g \circ f$ به y دارد که zی باشد که xfz و zgy؛ یعنی، x پدر کسی باشد که او مادر y است؛ یا، x پدر بزرگ مادری y باشد. پس، نسبت $g \circ f$ نسبت پدر بزرگ مادری است.

(ت). E مجموعه‌ی کتب منطق است، و f نسبت «مؤلفِ» بین افراد انسانی و کتابها. تصویر عکس E را به وسیله‌ی f به زبان فارسی تعریف کنید[2].

تصویر عکس E به وسیله‌ی f، یا $\breve{f}(E)$، مجموعه‌ی کسانی است که هر یک به عضوی از E نسبت f دارد، یعنی مؤلف عضوی از E است. پس، $\breve{f}(E)$ مجموعه‌ی مؤلفین کتب منطق میباشد.

۳.۲.۴. تمرین

۱. بنا بر آنکه در افراد انسانی

پ = نسبت پدری	م = نسبت مادری
ف = نسبت فرزندی،	ب = نسبت برادری،
خ = نسبت خواهری،	ش = نسبت شوهری،

ز = نسبت زوجه بودن

باشد هر یک از نسبتهای ذیل را به فارسی تعریف کنید:

ب ∪ پ؛ ب̆؛ ش̆؛ ز ∪ ش؛
پ ∘ (ز ∪ ش)؛ ب ∘ ف̆؛ م ∘ ف̆؛
(ش ∘ (خ ∘ ف̆)) ∪ (ب ∘ ف̆).

۲. هر یک از نسبتهای ذیل را بر حسب نسبتهای سابق‌الذکر (هر کدام که مناسب است) بیان کنید:

---

(۱) ۱.۴.۴ : ۳ ملاحظه شود.

(۲) فرض میکنیم هر کتاب منطق یک مؤلف دارد.

(آ) یکی از والدینِ، (ب) برادرِ یا خواهرِ، (پ) نوه‌ی، (ت) عروسِ، (ث) مادر زنِ، (ج) مادر شوهرِ.

۳. با علامات مسئله‌ی ۱، هر یک از فرمولهای ذیل را به فارسی معنی کنید:

فˇ = م ∩ پ؛ خ = بˇ؛ م ⊆ پ؛

خ ⊆ (ف ∘ فˇ). پ ⊆ (ب ∘ خ)؛ پ = ش ∘ م؛

۳.۳. در مفهوم تابع. نظر به اهمیت حیاتی مفهوم تابع در ریاضیات و منطق، نظری به تحول این مفهوم می‌افکنیم.

۳.۳.۱. تحول مفهوم تابع[۱]**.** مفهوم تابع همراه با بسط ریاضیات تکامل یافته است. دکارت* (۱۶۵۰ - ۱۵۹۶) قوای طبیعی یک متغیر را «تابع» میخوانند، و لایبنیتز* (۱۷۱۶ - ۱۶۴۶) هر کمیتی وابسته به یک منحنی را (مانند مختصات نقاط منحنی، شیب منحنی، و غیره) تابع مینامید. یوهان برنویی* (۱۷۴۸ - ۱۶۶۷) عبارتی مشتمل بر متغیرها و ثابتها را تابع مینامید. اویلر* (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷) تعریفی بدین مضمون برای تابع آورده است:

(۱) تابعِ x یعنی فرمولی مشتمل بر x.

بنا بر این تعریف، $x+1$ و $\log x$ توابع x اند. با تحقیقات فوریه* (۱۸۳۰ - ۱۷۶۸) در سلسله‌های مثلثاتی، روابطی بین متغیرها در کار آمد که تعریف اویلر شامل آنها نمیشود، مانند توابعی که در سراسر حوزه‌ی تعریف خود با یک ضابطه مشخص نمیشوند. برای رهائی از این مشکل، دیریکله* (۱۸۵۹ - ۱۸۰۵) تعریفی بدن مضمون آورد:

(۲) متغیر علامتی است که هر یک از اعداد دسته‌ای از اعداد را نمایش میدهد. اگر دو متغیر x و y چنان با یکدیگر بستگی داشته باشند که هر گاه مقداری به x داده شود، بر طبق ضابطه یا تناظر معینی، یک مقدار برای y مشخص شود گوئیم y تابع x است. متغیر x را که به دلخواه به آن مقادیری داده میشود متغیر مطلق، و متغیر y را، که مقادیرش وابسته به x است، متغیر وابسته خوانیم.

این تعریف یا تعریفهائی قریب به آن هنوز هم در بسیاری از کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده میشود، ولی این تعریف هم روشن نیست، زیرا اگر مقصود از «بستگی» بستگی

---

(۱) بعضی از اطلاعات تاریخی مندرج در **۳.۳.۱** مقتبس است از کتاب مدخلی بر مبادی و مفاهیم بنیادی ریاضیات، تألیف ایوز و نیوسم. نام و نشان اصلی کتاب اینست،

Eves, H. and Newsom, C. V., *An introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, New York, 1960.

به وسیله‌ی فرمولی باشد، این تعریف همان تعریف اویلر است، و اگر مقصود بستگیی از نوع دیگر باشد باید این بستگی را تعریف کرد. تعریف جدیدتری از تابع اینست:

(۳) تابع ضابطه‌ای است که، بر طبق آن، به هر عضو از مجموعه‌ای یک عضو از مجموعه‌ای تعلق میگیرد.

این تعریف مزیت عمده‌ای بر تعریفات سابق‌الذکر دارد، و آن اینست که، در آن، بین خود تابع («ضابطه‌ی» مذکور در تعریف) و مقدار تابع تمیز گذاشته شده است. تعریف ذیل، که هنوز هم در بعضی کتابها دیده میشود، همین مزیت را دارد:

(۴) تابع f عبارتست از دو مجموعه مانند X و Y و ضابطه‌ای که، بر طبق آن، به هر عضو X مانند x یک و تنها یک عضو از Y مانند y تعلق میگیرد.

بالاخره، برای روشن ساختن تعریفات مذکور و در آوردن آنها به صورتی قابل بحث دقیق ریاضی، تعریف تابع به عنوان مجموعه‌ای از ازواج مرتب با خصوصیتی که با آن آشنا هستید در کار آمد.

۳.۳.۲. اصطلاحاتی در باب توابع. اخیراً اصطلاحاتی برای بعضی از مفاهیمی که در فصل ۳ آموخته‌اید وضع شده است که، اگرچه در این کتاب بدانها چندان‌نیازی نیست، باید با آنها آشنائی یافت. این اصطلاحات، که تعریفشان خواهد آمد، مجملاً عبارتند از سورژکسیون، برای توابع بر یک مجموعه بروی یک مجموعه؛ انژکسیون، برای توابع 1ـ1؛ و بیژکسیون، برای تناظر 1ـ1 بین دو مجموعه.

اگر A و B دو مجموعه باشند، و f تابعی بر A بتوی B باشد، عموماً تصویر A با تابع (نگاشت) f مجموعکی از B است. اگر f بروی B باشد آنگاه $B = f(A)$؛ یعنی، تصویر A بر B منطبق است. بدین ملاحظه، تابع f بر A بروی B را میتوان تابعی توصیف کرد که A را بر B «مینهد». اینک تعریف رسمی:

۳.۳.۲.۱. تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. عبارات

سورژکسیون[1] (یا بَرنَهاد) A به B،

تابع یا نگاشت سورژکتیو[2] (یا برنهادی) از A به B

یعنی تابعی بر A بروی B.

اگر f یک سورژکسیون A به B باشد گوئیم f مجموعه‌ی A را بر مجموعه‌ی B سورژکسیون میکند.

۳.۳.۲.۲. تعریف. عبارات

انژکسیون[3] (یا دَرنهاد)

---

(۱) surjection   (۲) surjective   (۳) injection

تابع یا نگاشت انژکتیو[۱] (یا درنهادی)

یعنی تابع 1ــ1.

اگر تابع f بر A بتوی B انژکتیو باشد گوئیم مجموعه‌ی A را در B انژکسیون میکند.

مثلاً، اگر $A = \{0, 1, 2\}$، $B = \{1, 4, 5, 3\}$، و

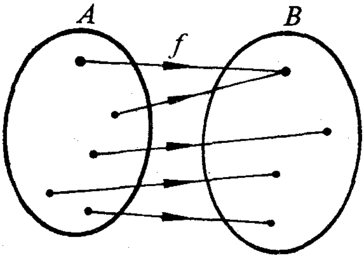
$$f = \{(0, 1), (2, 5), (1, 4)\}$$

f تابعی بــر A بتوی B است، و بــروی B نیست. تابع f سورژکتیو نیست، ولـی انژکتیو هست. f یک انژکسیون A است در B، و A را در B انژکسیون میکند.

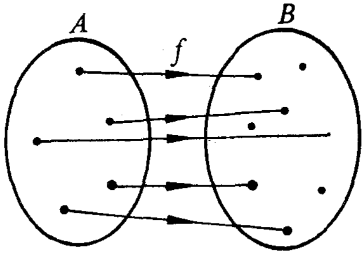
بنـا بر ۶.۱.۰۳ : ۳، شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f انژکتیو باشد آنست که، بازاء هر x و y از fح، اگر $f(x) = f(y)$ آنگاه $x = y$.

۳.۳.۲.۳. تعریف. تابع f بر A بتوی B را یک بیژکسیون[۲] (یا همنهاد) یا یک تابع (یا نگاشت) بیژکتیو[۳] (یا همنهادی) خوانیم در صورتی که، در عین حال، سورژکتیو و انژکتیو باشد.

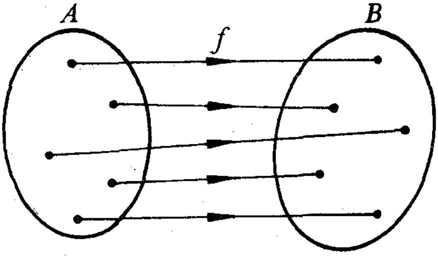
خصوصیت هر یک از نگاشتهای سورژکتیو، انژکتیو، و بیژکتیو A به B از تصاویر ۶۵، ۶۶، و ۶۷ استنباط میشود.



شکل ۶۵. سورژکسیون



شکل ۶۶. انژکسیون



شکل ۶۷. بیژکسیون

---

injective (۱) bijection (۲) bijective (۳)

۳.۴. امثله از استدلال

۳.۴.۱. اگر A، B، و C سه مجموعه باشند آنگاه

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C). \qquad (*)$$

برهان. فرض کنیم

$$(1)\quad f = (A \cap B) \times C, \qquad (۲)\quad g = A \times C, \qquad (۳)\quad h = B \times C.$$

باید ثابت کرد که $f = g \cap h$. چون هر یک از مجموعه‌های f، g، و h یک حاصلضرب مستقیم، و لهذا، یک نسبت است، بنا بر ۵ : ۱.۲.۸ : ۳، کافی است ثابت کنیم که $xfy \Leftrightarrow x(g \cap h)y$، و چون طرف دوم معادل $xgy \;\&\; xhy$ است، کافی است ثابت کنیم که

$$xfy \Leftrightarrow (xgy \;\&\; xhy). \qquad (\dagger)$$

اولاً، فرض کنیم xfy. بنا بر (۱)، $x \in A \cap B$ (۴) و $y \in C$ (۵). از (۴) نتیجه میشود، $x \in A$ و $x \in B$. پس، بنا بر (۲)، (۳)، و (۵)، xgy و xhy.
ثانیاً، اگر xgy و xhy آنگاه $x \in A$ و $x \in B$ (و بالنتیجه، $x \in A \cap B$) و $y \in C$.
پس، $(x, y) \in (A \cap B) \times C$. بالنتیجه، xfy. ▲

۳.۴.۲. اگر f و g دو نسبت باشند،

$$\text{ح}(f \cap g) \subseteq \text{ح}f \cap \text{ح}g.$$

برهان. فرض کنیم $x \in$ ح$(f \cap g)$. پس، y ی هست که $x(f \cap g)y$. بالنتیجه، xfy و xgy، و از آنجا، $x \in$ حf و $x \in$ حg. پس، $x \in$ ح$f \cap$ حg. ▲

۳.۴.۳. مفاهیم تصویر و تصویر عکس مجموعه‌ها با نسب در مسائل گوناگون حائز اهمیت فراوانند. در مثالهای آتیه بعضی از اهم خواص آنها خواهد آمد. اثبات این خواص بنا بر تعریف تصویر و تصویر عکس است. به خاطر بسپارید که

I. از $y \in f(E)$ نتیجه میشود که x ی هست که، در عین حال، $x \in E$ و xfy.
II. بالعکس، از مقدمات $x \in E$ و xfy نتیجه میشود، $y \in f(E)$.
III. از $x \in f^{\smallsmile}(E)$ نتیجه میشود که y ی هست که، در عین حال، $y \in E$ و xfy.
IV. بالعکس، از مقدمات $y \in E$ و xfy نتیجه میشود، $x \in f^{\smallsmile}(E)$.

۳.۴.۴. اگر f نسبتی باشد، و X و Y مجموعه‌هائی باشند،

$$f(X) = f(X \cap \text{ح}f); \qquad (\text{آ})$$

$$f^{\smallsmile}(Y) = f^{\smallsmile}(Y \cap \text{حع}f). \qquad (\text{ب})$$

(چون ح$f \subseteq$ ح$f \cap X$ و حع$f \subseteq$ حع$f \cap Y$، بنا بر روابط فوق، در بحث از تصویر (تصویر عکس) مجموعه‌ها با یک نسبت میتوان به مجموعه‌هائی که مجموعک حوزه‌ی (حوزه‌ی عکس) آن نسبت هستند اکتفا کرد.)
برهان قسمت (ب). فرض کنیم $E = Y \cap$ حعf.

اولاً، اگر $x \in f^{\vee}(Y)$ آنگاه yی هست که

$$(۱) \quad y \in Y \qquad\qquad (۲) \quad xfy.$$

بنا بر (۲)، fحع $y \in$. پس، بنا بر (۱)، $y \in E$ (۳). از (۲) و (۳)، $x \in f^{\vee}(E)$.
ثانیاً، اگر $x \in f^{\vee}(E)$ آنگاه yی هست که در (۳) و (۲) صدق میکند. بنا بر (۳)، $y \in Y$. پس، بنا بر (۲)، $x \in f^{\vee}(Y)$. ▲

۳.۴.۵. اگر f نسبتی باشد، و X_1 و X_2 مجموعه‌هائی باشند آنگاه

$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2), \qquad (\text{آ})$$

و اگر f تابع باشد آنگاه

$$f^{\vee}(X_1 \cap X_2) = f^{\vee}(X_1) \cap f^{\vee}(X_2). \qquad (\text{ب})$$

برهان. برای اثبات (آ)، فرض کنیم $y \in f(X_1 \cap X_2)$. پس، xی هست که، در عین حال،

$$(۱) \quad x \in X_1 \cap X_2, \qquad\qquad (۲) \quad xfy.$$

بنا بر (۱)، $x \in X_1$ و $x \in X_2$. پس، بنا بر (۲)، $y \in f(X_1)$ و $y \in f(X_2)$، و از آنجا، $x \in f(X_1) \cap f(X_2)$.
ثابت کنید که اگر هم f تابع باشد ممکن است در (آ) تساوی برقرار نباشد. بنا بر این، به موجب (ب)، میتوان گفت که عکس یک تابع، ولو تابع نباشد، از آن تابع «خوشرفتارتر» است.
برای اثبات (ب)، گوئیم، بنا بر قسمت اول قضیه،

$$f^{\vee}(X_1 \cap X_2) \subseteq f^{\vee}(X_1) \cap f^{\vee}(X_2).$$

پس، کافی است ثابت کنیم که اگر f تابع باشد آنگاه

$$f^{\vee}(X_1) \cap f^{\vee}(X_2) \subseteq f^{\vee}(X_1 \cap X_2).$$

فرض کنیم f تابع باشد، و x عضوی از طرف اول باشد. پس، $x \in f^{\vee}(X_1)$ و $x \in f^{\vee}(X_2)$. بالنتیجه، yی و zی هست که، در عین حال،

$$(۱) \quad y \in X_1, \qquad\qquad (۲) \quad xfy,$$
$$(۳) \quad z \in X_2, \qquad\qquad (۴) \quad xfz.$$

بنا بر (۲) و (۴) و فرض تابع بودن f، $z = y$. پس، بنا بر (۱) و (۳)، $y \in X_1 \cap X_2$.
از این و (۲) نتیجه میشود، $x \in f^{\vee}(X_1 \cap X_2)$. ▲

۳.۴.۶. اگر f تابعی باشد و X و Y دو مجموعه باشند، و $Y \subseteq f(X)$ آنگاه

$$Y = f(f^{\vee}(Y) \cap X). \qquad (*)$$

برهان. فرض کنیم f تابع باشد، و $Y \subseteq f(X)$ (۱). اولاً، اگر $y \in Y$ (۲) آنگاه، بنا بر (۱)، $y \in f(X)$. پس، xی هست که $x \in X$ (۳) و xfy (۴). بنا بر (۲) و (۴)، $x \in f^{\vee}(Y)$. پس، بنا بر (۳)، $x \in f^{\vee}(Y) \cap X$. بالنتیجه، بنا بر (۴)، $y \in f(f^{\vee}(Y) \cap X)$. اثبات نیمه‌ی دیگر به متعلم محول میشود. ▲

۳.۴.۷. تمرین

۰۱ بنا بر آنکه $C \neq \varnothing$، ثابت کنید که

(آ) اگر $A \times C = B \times C$ آنگاه $A = B$.
(ب) اگر $C \times A = C \times B$ آنگاه $A = B$.
(پ) اگر $A \times C \subseteq B \times C$ آنگاه $A \subseteq B$.
(ت) اگر $C \times A \subseteq C \times B$ آنگاه $A \subseteq B$.

آیا این احکام بدون شرط $C \neq \varnothing$ برقرارند؟

۲. بنا بر آنکه $C \neq \varnothing$، ثابت کنید که

$$A \subset B \Leftrightarrow A \times C \subset B \times C. \qquad \text{(آ)}$$
$$A \subset B \Leftrightarrow C \times A \subset C \times B. \qquad \text{(ب)}$$

۳. ثابت کنید که اگر $A \neq \varnothing$، $B \neq \varnothing$، و

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$$

آنگاه $A = B = C$.

در تمرینات آتیه، حروف کوچک اسامی نسب دلخواه و حروف بزرگ اسامی مجموعه‌های دلخواهند مگر آنکه منظور دیگری تصریح شود[1].

۴. ثابت کنید که

$$\text{ح}(f \cup g) = \text{ح}f \cup \text{ح}g. \qquad \text{(آ)}$$
$$\text{حع}(f \cup g) = \text{حع}f \cup \text{حع}g. \qquad \text{(ب)}$$
$$\text{ح}(f \cap g) \subseteq \text{ح}f \cap \text{ح}g. \qquad \text{(پ)}$$
$$\text{حع}(f \cap g) \subseteq \text{حع}f \cap \text{حع}g. \qquad \text{(ت)}$$

۵. این احکام را باطل کنید:

$$\text{ح}f \cap \text{ح}g \subseteq \text{ح}(f \cap g). \qquad \text{(آ)}$$
$$\text{حع}f \cap \text{حع}g \subseteq \text{حع}(f \cap g). \qquad \text{(ب)}$$

۶. ثابت کنید که

$$(g \cap h) \circ f \subseteq (g \circ f) \cap (h \circ f). \qquad \text{(آ)}$$
$$(g \cup h) \circ f = (g \circ f) \cup (h \circ f). \qquad \text{(ب)}$$
$$f \subseteq g \supset f \circ f \subseteq g \circ g. \qquad \text{(پ)}$$

۷. ثابت کنید که

$$X \subseteq Y \supset f(X) \subseteq f(Y). \qquad \text{(آ)}$$
$$\text{ح}f = f^{\vee}(\text{حع}f). \qquad \text{(ب)}$$
$$\text{حع}f = f(\text{ح}f). \qquad \text{(پ)}$$
$$f(X) = f(X \cap \text{ح}f). \qquad \text{(ت)}$$
$$f^{\vee}(Y) = f^{\vee}(Y \cap \text{حع}f). \qquad \text{(ث)}$$
$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2). \qquad \text{(ج)}$$
$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2). \qquad \text{(چ)}$$
$$f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2). \qquad \text{(ح)}$$

---

(۱) برای تسهیل مراجعه، بعضی از احکامی را که در ضمن امثله‌ی سابق ثابت کرده‌ایم در اینجا در محل مناسب آورده‌ایم.

(خ) $$(g \circ f)(X) = g(f(X))$$[1].

۸. ثابت کنید که، ولو نسبت f تابع باشد، روابط ذیل بطور کلی برقرار نیستند:

(آ) $$f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2).$$

(ب) $$f(X_1 - X_2) = f(X_1) - f(X_2).$$

۹. اگر نسبت f تابع باشد آنگاه

(آ) $$f^{\smallsmile}(Y_1 \cap Y_2) = f^{\smallsmile}(Y_1) \cap f^{\smallsmile}(Y_2).$$

(ب) $$f^{\smallsmile}(Y_1 - Y_2) = f^{\smallsmile}(Y_1) - f^{\smallsmile}(Y_2).$$

(پ) $$f(f^{\smallsmile}(Y)) = Y \cap \text{حع} f.$$

(ت) $$Y \subseteq f(X) \supset Y = f(f^{\smallsmile}(Y) \cap X).$$

۱۰. اگر f تابع باشد، و $X \subseteq$ حf و $Y \subseteq$ حعf آنگاه

$$f(f^{\smallsmile}(Y) \cap X) = Y \cap f(X).$$

۱۱. f هر نسبتی باشد

$$\text{ح}(f \circ f^{\smallsmile}) = \text{حع}(f \circ f^{\smallsmile}) = \text{حع} f,$$

و اگر f تابع باشد آنگاه $f \circ f^{\smallsmile}$ نیز تابع است، و همواره اگر $y \in$ حعf آنگاه

$$y = (f \circ f^{\smallsmile})(y).$$

۱۲. شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f انژکتیو باشد آنست که تابعی مانند g موجود باشد که $g \circ f$ تابع همانی بر حf باشد.

۱۳. فرض کنیم f تابعی بر A بتوی B باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه f بیژکتیو باشد آنست که تابعی مانند g بر B بتوی A موجود باشد که $g \circ f$ تابع همانی بر A و $f \circ g$ تابع همانی بر B باشد.

۱۴. در تکمیل شرح مختصری که در ۳.۳ : ۳ در تحدید نسب و توابع گفته شد، فرض کنیم f نسبتی و A و B دو مجموعه باشند. بنا بر تعریف،

$A \mid f$ یعنی $\{x, y) \mid x \in A \,\&\, xfy\}$؛

$f \mid B$ یعنی $\{(x, y) \mid y \in B \,\&\, xfy\}$؛

$A \mid f \mid B$ یعنی $\{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B \,\&\, xfy\}$.

اولاً، مثالی در توضیح هر یک از این تعریفات بیاورید، و شرط لازم و کافی را برای آنکه چیزی مانند x به چیزی مانند y یکی از سه نسبت $A \mid f$، $f \mid B$، و $A \mid f \mid B$ داشته باشد بنویسید. ثانیاً، ثابت کنید که همواره

(آ) $$\text{ح}(A \mid f) = A \cap \text{ح} f.$$

(ب) $$\text{حع}(f \mid B) = B \cap \text{حع} f.$$

(پ) $$\text{ح} f \subseteq A \Leftrightarrow f = A \mid f.$$

(ت) $$\text{حع} f \subseteq B \Leftrightarrow f = f \mid B.$$

(ث) $$(A_1 \cap A_2) \mid f \Leftrightarrow (A_1 \mid f) \cap (A_2 \mid f).$$

---

(۱) در این رابطه، طرف اول به معنی تصویر X است با نسبت $g \circ f$. به زبان تبدیلات، معنی (خ) اینست که مبدل X در صورتی که ابتدا تبدیل f و سپس تبدیل g اعمال شود همانست که از اعمال تبدیل $g \circ f$ بر X بدست میآید.

(ج) $f \upharpoonright (B_1 \cap B_2) = (f \upharpoonright B_1) \cap (f \upharpoonright B_2).$
(چ) $(A_1 \cup A_2) \upharpoonleft f = (A_1 \upharpoonleft f) \cup (A_2 \upharpoonleft f).$
(ح) $f \upharpoonright (B_1 \cup B_2) = (f \upharpoonright B_1) \cup (f \upharpoonright B_2).$
(خ) $(A \upharpoonleft f)^{\check{}} = f^{\check{}} \upharpoonright A.$
(د) $(f \upharpoonright B)^{\check{}} = B \upharpoonleft f^{\check{}}.$
(ذ) $(A \upharpoonleft f \upharpoonright B)^{\check{}} = B \upharpoonleft f^{\check{}} \upharpoonright A.$
(ر) $g \circ (A \upharpoonleft f) = A \upharpoonleft (g \circ f).$
(ز) $(g \upharpoonright B) \circ f = (g \circ f) \upharpoonright B.$
(ژ) $f^{\check{}}(B) = \text{ح}(f \upharpoonright B).$
(س) $(A \upharpoonleft f) \cap (B \upharpoonleft g) = (A \cap B) \upharpoonleft (f \cap g).$

۱۵. اگر f تابع باشد هر یک از نسبتهای $A \upharpoonleft f$، $f \upharpoonright B$، و $A \upharpoonleft f \upharpoonright B$ نیز تابع است، و اگر f تناظری 1ــ1 باشد هر یک از نسب مذکور نیز تناظری 1ــ1 است.

۱۶. فرض کنیم f تابعی بر A_1 بتوی A_2 و g تابعی بر B_1 بتوی B_2 باشد. تابع h را بر $A_1 \times B_1$ بتوی $A_2 \times B_2$ با ضابطه‌ی

$$h((a_1, b_1)) = (f(a_1), g(b_1)) \quad (a_1 \in A_1, b_1 \in B_1)$$

تعریف میکنیم. ثابت کنید که

(آ). اگر f و g هر دو انژکتیو باشند h نیز چنین است.
(ب). اگر f و g هر دو سورژکتیو باشند h نیز چنین است.
(پ). اگر f و g هر دو بیژکتیو باشند h نیز چنین است.

۴ § تعمیم اعمال بر مجموعه‌ها

مقصود از این قسمت اینست که مقدمات کافی به دست محصلین بدهیم تا در مواجهه با مسائل مربوط به تعمیم اعمال درنمانند.

۴.۱. یادآوری. در ۴ § فصل ۱، و نیز در ۶.۴.۱ : ۵، از تعمیم اعمال بر مجموعه‌ها سخن گفتیم. چنانکه میدانیم، اگر $\mathscr{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد $\bigcup \mathscr{M}$ مجموعه‌ی اشیائی است که حد اقل به یک عضو $\mathscr{M}$ تعلق دارند. به عبارت دیگر،

$\bigcup \mathscr{M}$ یعنی مجموعه‌ی اشیائی مانند x که Xی از $\mathscr{M}$ هست که $x \in X$.

یا

$$\bigcup \mathscr{M} = \{x \mid \exists X(X \in \mathscr{M} \ \& \ x \in X)\}. \qquad (۴.۱.۱)$$

به همین قیاس دیده میشود که

$$\bigcap \mathscr{M} = \{x \mid \forall X(X \in \mathscr{M} \supset x \in X)\}. \qquad (۴.۱.۲)$$

تعریف اتحادیه و مقطع خانواده‌ای از مجموعه‌ها را نیز میتوان به همین طریق بیان کرد. اگر

$\{X_i\}_{i \in I}$

خانواده‌ای از مجموعه‌ها با مجموعه‌ی اندیسگذار I باشد اتحادیه‌ی این خانواده، یا $\bigcup_{i\in I} X_i$، یعنی مجموعه‌ی xهائی که حد اقل به یک جمله‌ی خانواده تعلق دارد (یعنی، عضوی مانند i از I هست که $x \in X_i$). همچنین، مقطع خانواده، یا $\bigcap_{i\in I} X_i$، یعنی مجموعه‌ی xهائی که، بازاء هر i از I، $x \in X_i$. به عبارت دیگر،

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \mid \exists i(i \in I \ \&\ x \in X_i)\}; \qquad (۴.۱.۳)$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \mid \forall i(i \in I \supset x \in X_i)\}. \qquad (۴.۱.۴)$$

بسیاری از خواص اتحادیه و مقطع مجموعه‌ای (یا خانواده‌ای) از مجموعه‌ها تعمیم خواصی است که در ۳ § فصل ۲ گذشت. اثبات این خواص آسان و به استناد تعریفات سابق‌الذکر میباشد. برای توضیح چند مثال میآوریم.

۴.۱.۵. امثله

(آ). ثابت کنید که اگر $\mathscr{M}$ و $\mathscr{N}$ دو مجموعه از مجموعه‌ها باشند،

$$(\bigcap \mathscr{M}) \cap (\bigcap \mathscr{N}) = \bigcap(\mathscr{M} \cup \mathscr{N}). \qquad (*)$$

قبلاً ملاحظه کنید که، در طرف اول، هر یک از $\bigcap\mathscr{M}$ و $\bigcap\mathscr{N}$ یک مجموعه است، و طرف اول مقطع این دو مجموعه میباشد. در طرف دوم، $\mathscr{M} \cup \mathscr{N}$ مجموعه‌ی اشیائی (مجموعه‌هائی) است که عضو $\mathscr{M}$ یا عضو $\mathscr{N}$ هستند. پس، $\mathscr{M} \cup \mathscr{N}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها است، و طرف دوم مقطع این مجموعه‌ی مجموعه‌ها میباشد. اینک اولاً، فرض کنیم x عضو دلخواهی از طرف اول $(*)$ باشد. پس،

(۱) $x \in \bigcap \mathscr{M}$, (۲) $x \in \bigcap \mathscr{N}$.

باید ثابت کرد که $x \in \bigcap(\mathscr{M} \cup \mathscr{N})$. فرض کنیم X عضو دلخواهی از $\mathscr{M} \cup \mathscr{N}$ باشد. پس، $X \in \mathscr{M}$ یا $X \in \mathscr{N}$. در حالت اول بنا بر (۱) و در حالت ثانی بنا بر (۲)، $x \in X$. بالنتیجه، x به هر عضو $\mathscr{M} \cup \mathscr{N}$ تعلق دارد، و لهذا، $x \in \bigcap(\mathscr{M} \cup \mathscr{N})$.

ثانیاً، فرض کنیم x عضو دلخواهی از مجموعه‌ی طرف دوم $(*)$ باشد. اگر X عضو دلخواهی از $\mathscr{M}$ باشد آنگاه $X \in \mathscr{M} \cup \mathscr{N}$. پس، بنا بر فرض، $x \in X$. بالنتیجه، $x \in \bigcap \mathscr{M}$. به همین طریق معلوم میشود که $x \in \bigcap \mathscr{N}$. پس، $x \in \bigcap \mathscr{M} \cap \bigcap \mathscr{N}$. ▲

(ب). ثابت کنید که

$$(\bigcap_{i\in I} X_i) \cup Y = \bigcap_{i\in I}(X_i \cup Y). \qquad (*)$$

اولاً، فرض میکنیم

$$x \in (\bigcap_{i\in I} X_i) \cup Y; \qquad (۱)$$

و ثابت میکنیم که

$$x \in \bigcap_{i\in I}(X_i \cup Y).$$

بنا بر ۴.۱.۴، رابطه‌ی اخیر معادل است با

(†) بازاء هر i، اگر $i \in I$ آنگاه $x \in X_i \cup Y$،

و کافی است این حکم را ثابت کنیم. برای این منظور، فرض کنیم i عضو دلخواهی از I باشد. بنا بر (۱)

$$(x \in \bigcap_{i \in I} X_i) \vee (x \in Y). \qquad (۲)$$

حال اگر $x \in \bigcap X_i$ آنگاه، بنا بر ۴.۱.۴، $x \in X_i$، و لهذا، $x \in X_i \cup Y$؛ و اگر $x \in Y$ آنگاه $x \in X_i \cup Y$. پس، (†) بر قرار است.

ثانیاً، فرض میکنیم x عضو دلخواهی از مجموعه‌ی طرف دوم (*) باشد، و به قیاس آنچه گذشت، (۱) را نتیجه میگیریم (چگونه؟). ▲

(پ). فرض کنیم $\mathscr{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد. مجموعه‌ی متممهای اعضای $\mathscr{M}$ مجموعه‌ی

$$\mathscr{N} = \{\bar{X} \mid X \in \mathscr{M}\}.$$

است. اینک، قوانین د مورگن را میتوان بدین صورت تعمیم داد:

$$\overline{\bigcup \mathscr{M}} = \bigcap \mathscr{N} = \bigcap \{\bar{X} \mid X \in \mathscr{M}\}; \qquad (*)$$

$$\overline{\bigcap \mathscr{M}} = \bigcup \mathscr{N} = \bigcup \{\bar{X} \mid X \in \mathscr{N}\}. \qquad (\dagger)$$

اثبات (†) از این قرار است. اگر $x \in \overline{\bigcap \mathscr{M}}$ آنگاه $x \notin \bigcap \mathscr{M}$. پس، $\mathscr{M}$ عضوی مانند X دارد که $x \notin X$، و بالنتیجه، $x \in \bar{X}$. اما $\bar{X} \in \mathscr{N}$. پس، $x \in \bigcup \mathscr{N}$. بالعکس، فرض کنیم x عضو دلخواهی از $\bigcup \mathscr{N}$ باشد. پس، عضوی مانند $\bar{X}$ از $\mathscr{N}$ هست که $x \in \bar{X}$، و از آنجا، $x \notin X$. اما، بنا بر تعریف $\mathscr{N}$، $X \in \mathscr{M}$. پس $x \notin \bigcap \mathscr{M}$، و بالنتیجه، $x \in \overline{\bigcap \mathscr{M}}$. ▲

(ت). فرض کنیم $\{X_i\}_{i \in I}$ و $\{Y_j\}_{j \in J}$ دو خانواده از مجموعه‌ها باشند. اگر $K = I \times J$ آنگاه هر عضو K مانند k زوج مرتبی است مانند (i, j) که $i \in I$ و $j \in J$، و اگر Z_k را با ضابطه‌ی

$$Z_k = X_i \cap Y_j$$

تعریف کنیم خانواده‌ی $\{Z_k\}$ با مجموعه‌ی اندیسگذار K تعریف میشود. اینک گوئیم

$$(\bigcup_{i \in I} X_i) \cap (\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{k \in K} Z_k = \bigcup_{(i,j)} (X_i \cap Y_j).$$

ذیلاً ثابت میکنیم که هر عضو مجموعه‌ی طرف اول تعلق به مجموعه‌ی طرف دوم دارد. اثبات نیمه‌ی دیگر را به متعلم محول میکنیم. فرض کنیم

$$x \in (\bigcup_{i \in I} X_i) \cap (\bigcup_{j \in J} Y_j). \qquad (۱)$$

باید ثابت کرد که $x \in \bigcup_{k \in K} Z_k$. بنا بر ۴.۱.۳، این رابطه معادل است با

(*) kی هست که $k \in K$ و $x \in Z_k$.

پس، به اثبات (*) میپردازیم. بنا بر (۱)،

$$(۲) \quad x \in \bigcup_{i \in I} X_i, \qquad (۳) \quad x \in \bigcup_{j \in J} Y_j.$$

بنا بر (۲)، (۳)، و ۴.۱.۳،

(۳) عضوی از I مانند i هست که $x \in X_i$؛

(۴) عضوی از J مانند j هست که $x \in Y_j$.

حال اگر فرض کنیم $k = (i, j)$ آنگاه، اولاً، $k \in K$، و ثانیاً، بنا بر (۳) و (۴)،

$$x \in X_i \cap Y_j = Z_k. \blacktriangle$$

(ژ). f تابعی است بر A بتوی B و $\{Y_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعکهای B است. ثابت کنید که

$$f^{\vee}(\bigcup_{i\in I} Y_i) = \bigcup_{i\in I} f^{\vee}(Y_i).$$ [1]

ثابت میکنیم که هر عضو مجموعه‌ی طرف دوم تعلق به مجموعه‌ی طرف اول دارد. اتمام برهان بر متعلم است. فرض کنیم

$$x \in \bigcup_{i\in I} f^{\vee}(Y_i). \quad (۱)$$

پس، عضوی مانند i از I هست که

$$x \in f^{\vee}(Y_i). \quad (۲)$$

بنا بر (۲)، yی هست که

$$(۳) \quad y \in Y_i, \qquad (۴) \quad xfy.$$

بنا بر (۳)، $y \in \bigcup_{i\in I} Y_i$. پس، بنا بر (۴)،

$$x \in f^{\vee}(\bigcup_{i\in I} Y_i). \blacktriangle$$

۴.۱.۶. تمرین

۱. اگر $\mathscr{M}$ و $\mathscr{N}$ دو خانواده از مجموعه‌ها باشند،

$$(\bigcup \mathscr{M}) \cup (\bigcup \mathscr{N}) = \bigcup (\mathscr{M} \cup \mathscr{N}).$$

۲. ثابت کنید که

(آ) $$(\bigcup_{i\in I} X_i) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(X_i \cap Y)$$

(ب) $$Y - \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(Y - X_i).$$

(پ) $$Y - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(Y - X_i).$$

(ت) $$(\bigcap_{i\in I} X_i) \cup (\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(X_i \cup Y_j).$$

۳. اگر f تابعی بر A بتوی B، $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعکهای A، و $\{Y_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعکهای B باشد آنگاه

(آ) $$f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i).$$

(ب) $$f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i).$$

(پ) $$f^{\vee}(\bigcap_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I} f^{\vee}(Y_i).$$

۴. $\{f_i\}$ خانواده‌ای است از توابع با مجموعه‌ی اندیسگذار I، و $\text{ح} f_i = A_i$. ثابت کنید که

(آ) شرط لازم و کافی برای آنکه $g = \bigcup_{i\in I} f_i$ تابع باشد آنست که

---

(۱) قسمت (ج) از ۷ : ۳.۴.۷ ملاحظه شود.

(*) بازاء هر i و j از I، اگر x عضو دلخواهی از $A_i \cap A_j$ بـاشد آنگاه
$$f_i(x) = f_j(x),$$
و یا، به زبان علامتی،
$$\forall i\, \forall j(i, j \in I \supset \forall x(x \in A_i \cap A_j \supset f_i(x) = f_j(x))).$$
(ب) واضح است که تابع g یک توسیع مشترک fها است (یعنی توسیع جملگی آنها است). ثابت کنید که اگر تابع h توسیع مشترک دلخواهی از fها باشد $g \subseteq h$.
(پ) ثابت کنید که
$$\text{ح}g = \bigcup_{i\in I} \text{ح}f_i, \qquad \text{حح}g = \bigcup_{i\in I} \text{حح}f_i.$$
تبصره. بنا بر نتایج حاصل در این مسئله، تابع $\bigcup_{i\in I} f_i$ را میتوان کوچکتریـن توسیـع مشترک fها شمرد. مسئله‌ی فوق وسیله‌ای است بـرای یافتن کوچکترین توسیع مشترک خانواده‌ای از توابع، و در این زمینه فواید متعدد دارد.

۴.۲. حاصلضرب مستقیم خانواده‌ها. تعریف.

حـاصلضرب مستقیـم خـانـواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I}$ از مجموعه‌ها، که به اسامی
$$\mathop{\times}_{i\in I} X_i, \qquad \mathop{\times}_{i} X_i, \qquad \prod_{i\in I} X_i, \qquad \prod_{I} X_i$$
خوانده میشود، عبارتست از مجموعه‌ی جمیع توابعی مانند f بر I بتوی $\bigcup_{i\in I} X_i$ که بازاء هر i از I، $f(i) \in X_i$.

۴.۲.۱. مثال. فرض کنیم
$$I = \{1, 2, 3\}, \qquad X_1 = \{a, b\}, \qquad X_2 = \{c, d\}, \qquad X_3 = \{e\}.$$
در اینجا،
$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{a, b, c, d, e\}.$$
باید جمیع توابعی را مانند f بر I بتوی $\bigcup X_i$ اختیار کرد که
$$f(1) \in \{a, b\}, \qquad f(2) \in \{c, d\}, \qquad f(3) \in \{e\}.$$
و از آنجا،
$$f(1) = a \vee f(1) = b, \qquad f(2) = c \vee f(2) = d, \qquad f(3) = e.$$
مجموعه‌ی جمیع توابعی که در این شرایط صدق کنند عبارتست از
$$\mathop{\times}_{i\in I} X_i = \{\{(1, a), (2, c), (3, e)\}, \{(1, a), (2, d), (3, e)\}, \{(1, b), (2, c), (3, e)\}, \{(1, b), (2, d), (3, e)\}\}.$$

۴.۲.۲. تبصره. اگر خانواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I}$ ثابت باشد، یعنی مجموعه‌ای مانند A مستقل از i موجود باشد که، بازاء هر i از I، $X_i = A$، آنگـاه $\bigcup X_i = A$، و حـاصلضرب مستقیـم خانواده مجموعه‌ی جمیع توابع بر I بتوی A خواهد بود. این مجموعه‌ی اخیر را به عـلامت
$$A^I$$

نمایش میدهند.

به قیاس تعریف سابق، حاصلضرب مستقیم مجموعه‌ای از مجموعه‌ها را چنین تعریف میکنیم:

۴.۲.۳. تعریف. فرض کنیم $\mathscr{M}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب مستقیم $\mathscr{M}$، که به علامات

$$\prod \mathscr{M}, \qquad \bigtimes \mathscr{M},$$

نمایش داده میشود، عبارتست از مجموعه‌ی جمیع توابعی مانند f بر $\mathscr{M}$ بتوی $\bigcup \mathscr{M}$ که، بازاء هر A از $\mathscr{M}$، $f(A) \in A$.

۴.۲.۴. تمرین

۱. بنا بر آنکه $I = \{2, 3\}$ و خانواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I}$ با ضابطه‌ی

بازاء هر i از I، $X_i = \{i\}$

تعریف شده باشد حاصلضرب مستقیم این خانواده را تعیین کنید.

۲. مطلوبست حاصلضرب مستقیم خانواده‌ی $\mathscr{M} = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$.

۳. بنا بر آنکه $I = \{1, 2\}$ و خانواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I}$ با ضابطه‌ی

$$X_2 = B \qquad X_1 = A,$$

تعریف شده باشد حاصلضرب مستقیم این خانواده را تعیین کنید. چه رابطه‌ای بین حاصلضرب مستقیم این خانواده و حاصلضرب مستقیم $A \times B$ موجود است؟

۴. اگر $\varnothing$ جمله‌ای از خانواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I}$ باشد چه حکمی در باب حاصلضرب مستقیم این خانواده برقرار است؟

۵. اگر $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد بطوری که $\bigcup_{i\in I} X_i \subseteq A$ (A مجموعه‌ی ثابتی است) آنگاه

$$\bigtimes_{i\in I} X_i \subseteq A^I.$$

۵ § نسب ترتیبی

اهمیت نسبتهای ترتیبی به حدی است که جا دارد با تفصیلی بیش از آنچه در ۴ § فصل ۳ گذشت از آنها بحث کنیم.

۵.۱. ملاحظاتی در خواص نسب. در ۳ : ۳.۵.۱ خواصی مربوط به نسب را در یک مجموعه تعریف کردیم؛ از قبیل منعکس بودن در A، متقارن بودن در A، و غیره. مفید است که خواص مربوط به نسبتها را بی در کار آوردن مجموعه‌ای مانند A تعریف کنیم. این کار آسان است: کافی است، به جای A، دامنه‌ی نسبت را ملحوظ داریم. بدین گونه به تعریف ذیل میرسیم:

۵.۱.۱. تعریف. فرض کنیم f نسبتی باشد.

f $\left\{\begin{array}{r}\text{منعکس}\\ \text{نامنعکس}\\ \vdots\\ \text{مرتبط}\\ \text{تابع اصل تثلیث}\end{array}\right.$ است یعنی f در دf $\left\{\begin{array}{r}\text{منعکس}\\ \text{نامنعکس}\\ \vdots\\ \text{مرتبط}\\ \text{تابع اصل تثلیث}\end{array}\right.$ است.

تعریف فوق مناسبات خواص مذکور را با سایر مفاهیم مربوط به نسب به صورتهای ساده‌ای آشکار میسازد (۵.۱.۳ ملاحظه شود).

۵.۱.۲. یادآوری. نکات آتیه را، که در فصل ۳ دیده‌ایم، باید به خاطر داشت.

I. اگر f نسبتی در مجموعه‌ی A و در A منعکس باشد آنگاه

$A =$ ح$f =$ حح$f =$ دf.

پس، در مورد نسبتهای منعکس، مفاهیم «منعکس بودن» و « منعکس بودن در A» تفاوت اساسی ندارند.

II. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A و I نسبت همانی در A باشد، یعنی،

I. $$I = \{(x, y) \mid x, y \in A \;\&\; x = y\}.$$

پس، بازاء هر x و y از A،

II. $$xIy \Leftrightarrow x = y.$$

نسبتهای $f \cup I$ و $f - I$ در مطالب آتیه بسیار در کار میآیند. با توجه به آنچه در ۳.۲.۱ گذشت، بازاء هر x و y از A،

III. $$x(f \cup I)y \Leftrightarrow (xfy \vee x = y).$$

IV. $$x(f - I)y \Leftrightarrow (xfy \;\&\; x \neq y).$$

۵.۱.۳. تمرین

۱. شرط لازم و کافی برای آنکه نسبت f

(آ) متقارن باشد آنست که $f^{\smallsmile} = f$.

(ب) نامتقارن باشد آنست که $f \cap f^{\smallsmile} = \varnothing$.

(پ) متعدی باشد آنست که $f \circ f \subseteq f$

۲. فرض کنیم f نسبتی و I نسبت همانی در دf باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه نسبت f

(آ) منعکس باشد آنست که $I \subseteq f$.

(ب) نامنعکس باشد آنست که $f \cap I = \varnothing$.

(پ) قناس باشد آنست $f \cap f^{\smallsmile} \subseteq I$.

۳. اگر نسبت f قناس و I نسبت همانی در دf باشد آنگاه

(آ) اگر $x(f-I)y$ آنگاه $\sim(yfx)$.

(ب) اگر xfy و $y(f-I)z$ آنگاه $x\neq z$.

(پ) اگر $x(f-I)y$ و yfz آنگاه $x\neq z$.

۴. در مسئلهٔ قبل، یک بار f را نسبت قناس $\leqslant$ در اعداد حقیقی و یک بار نسبت قناس $\subseteq$ در مجموعهٔ مجموعکان مجموعه‌ای عمومی بگیرید، و احکام قضیه را با علامات معمول در این موارد بیان کنید.

۵. مثالی بیاورید از نسبتی که در یک مجموعه متقارن و متعدی هست ولی منعکس نیست.

۵.۲. مقدمه در تعریف نسب ترتیبی. در مجموعهٔ اعداد حقیقی، دو نسبت $>$ و $\leqslant$ را میشناسیم. بعضی از ریاضیدانها نسبت $>$ را الگوی نسبتهای ترتیبی میگیرند؛ تعریف نسبت ترتیبی به شرح مذکور در ۴.۲ : ۳ به مقتضای این الگو است. بدین معنی، هر نسبت ترتیبی نامنعکس، نامتقارن، متعدی، و تابع اصل تثلیث است. برخی نیز نسبت $\leqslant$ را الگوی نسبتهای ترتیبی میگیرند؛ در این صورت، نسبت ترتیبی نسبتی است که منعکس، متعدی، قناس و مرتبط باشد (۲.۲.۵ : ۵ ملاحظه شود). در تئوری اعداد حقیقی، نسبت $>$ را اساس قرار دادیم، و نسبت $\leqslant$ را بر حسب آن تعریف کردیم. بالعکس، اگر $\leqslant$ را اساس قرار دهیم میتوان نسبت $>$ را با گزاره‌نمای

$$x<y \text{ یعنی } x\leqslant y \;\&\; x\neq y$$

تعریف کرد، و ثابت نمود که نسبت $>$ که بدین گونه تعریف میشود نامنعکس، نامتقارن، متعدی، و تابع اصل تثلیث است (ثابت کنید). چنانکه معلوم خواهد شد (۵.۳.۲ و ۵.۶.۲)، این تناظر بین نسبتهای ترتیبی به معانی مذکور بطور کلی برقرار است، و بنا بر این، قائل شدن به مزیتی برای یکی از دو تعریف بر دیگری خالی از وجه است، منتها، ممکن است در مورد خاصی اختیار کردن یکی از دو الگو انسب باشد.

اگر f یک نسبت ترتیبی (به هر یک از معانی سابق یا معانی آتی) در مجموعهٔ A باشد دو عضو مانند x و y از مجموعهٔ A را بر حسب نسبت f قابل مقایسه نامند در صورتی که xfy یا yfx. پس، در دستگاه $(\mathbf{R},\leqslant)$ هر دو عضو $\mathbf{R}$ و در دستگاه $(\mathbf{R},<)$ هر دو عضو متمایز $\mathbf{R}$ با یکدیگر قابل مقایسه‌اند. این خاصیت ناشی از قیودی است که در تعریف سابق نسبت ترتیبی آمده است. با سست کردن بعضی از این قیود مفاهیم وسیعتری از نسبت ترتیبی حاصل میشود که ذیلاً به تعریف اهم آنها میپردازیم.

۵.۳. تعریف. فرض کنیم f نسبتی در مجموعهٔ A باشد.

I. f را یک نسبت ترتیبی جزئی (یا ضعیف) در A یا یک ترتیب جزئیِ (ضعیف) A خوانیم در صورتی که در A منعکس، متعدی، و قناس باشد.

II. f را یک نسبت ترتیبی قوی در A یا یک ترتیب قویِ A نامیم در صورتی که در A نامنعکس و متعدی باشد.

III. در هر حال، زوج مرتب (A, f) را یک مجموعه‌ی مرتب (به ترتیب ضعیف یا جزئی، یا قوی) نامیم، و گوئیم نسبت f مجموعه‌ی A را (به ترتیب ضعیف یا قوی) مرتب میکند.

۵.۳.۱. امثله
(آ). در $\mathbf{R}$، نسبت $\leqslant$ یک نسبت ترتیبی جزئی و نسبت $>$ یک نسبت ترتیبی قوی است.
(ب). نسبت $\subseteq$ در مجموعه‌ی مجموعکان مجموعه‌ی عمومی V یک نسبت ترتیبی جزئی است.
به وسیله‌ی این نسبت نمیتوان همه‌ی اعضای $\mathcal{P}(V)$ را دو بدو با هم مقایسه کرد. مثلاً، اگر $V = \{1, 2, 3\}$ آنگاه $\{1, 2\}$ و $\{2, 3\}$ با هم قابل مقایسه (بر حسب $\subseteq$) نیستند.
(پ). نسبت «عادکننده‌ی» در $\mathbf{N}$ یک نسبت ترتیبی جزئی است.
(ت). فرض کنیم a، b، و c اسامی اشیاء دو بدو متمایز باشند، و $A = \{a, b, c\}$. هر یک از نسبتهای ذیل مجموعه‌ی A را به ترتیب جزئی مرتب میکند:

$$f_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\ (c, c)\}, \qquad f_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}.$$

همچنین، عکس هر یک از این نسبتها یک نسبت ترتیبی جزئی در A است.
چنانکه دیده میشود، **ترتیب جزئی یک مجموعه عموماً منحصر بفرد نیست.**
(ث). رجوع به مسائل ۲، ۴، و ۵ تمرین ۳.۵.۶ : ۳ مفید است.

۵.۳.۲. تبصره. سابقاً در $\mathbf{R}$ نسبت ترتیبی قوی $>$ را اساس قرار دادیم، و نسبت ترتیبی ضعیف $\leqslant$ را بدان وسیله تعریف کردیم. از طرف دیگر، در مجموعه‌ها نسبت ترتیبی ضعیف $\subseteq$ را اساس قرار دادیم، و نسبت ترتیبی ضعیف $\subset$ را بدان وسیله تعریف نمودیم. قضیه‌ی ذیل نشان میدهد که این گونه تناظر بین نسبتهای ترتیبی قوی و ضعیف کلیت دارد:

۵.۳.۳. قضیه. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A و I نسبت همانی در A باشد.
I. اگر نسبت f مجموعه‌ی A را به ترتیب جزئی مرتب کند نسبت $f - I$ آن را به ترتیب قوی مرتب میکند.
II. اگر نسبت f مجموعه‌ی A را به ترتیب قوی مرتب کند نسبت $f \cup I$ آن را به ترتیب جزئی مرتب میکند.
اثبات قضیه به وسیله‌ی معادلات III و IV مذکور در ۵.۱.۲ به آسانی انجام میگیرد، و آن را به متعلم محول میکنیم.

۵.۳.۴. تبصره. معمولاً یک نسبت ترتیبی ضعیف را به علامت $\leqslant$ و نسبت ترتیبی قوی نظیر آن $(\leqslant - I)$ را به علامت $<$ نمایش میدهند. در این صورت،

$$x < y \ \underline{\Omega}\ (x \leqslant y \ \&\ x \neq y).$$

نسبتهای $\breve{\leqslant}$ و $\breve{<}$ را، بترتیب، $\geqslant$ و $>$ مینامند. بالعکس، اگر $>$ یک نسبت ترتیبی قوی باشد نسبت ترتیبی جزئی نظیر آن $(> \cup I)$ را $\geqslant$ مینامند.
برای تسهیل بیان، رابطه‌ی $x < y$ را اغلب با عباراتی مانند «x پیش از y است»،

«x کوچکتر از y است»، و غیره میخوانند، و هکذا در موارد دیگر.

۵.۳.۵. تبصره. چون در مجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی $(A, \leqslant)$، بازاء هر x از A، رابطه‌ی $x \leqslant x$ برقرار است، برای نمایش دادن مجموعه‌ی $(A, \leqslant)$، گاه A را با اعضایش نمایش میدهند، و نسبت ترتیبی $\leqslant$ را با روابطی به صورت $x < y$ بین اعضای متمایز A معرفی میکنند. مثلاً، اگر حروف کوچک متمایز اسامی اشیاء متمایز باشند نسبت ترتیبی جزئی

$$\leqslant = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (d, d)\}$$

در مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را میتوان با ضوابط

$$a < b, \qquad a < c, \qquad a < d, \qquad b < d$$

معرفی کرد، و سومی را هم، به مناسبت تعدی، میتوان اسقاط نمود.

طریق ساده‌ی دیگر که از لحاظ اختصار مفید است اینست که دستگاه مرتب $(A, \leqslant)$ را به صورت

$$(*) \quad \{\ldots, (\ldots; a; b; \ldots; c; \ldots), (\ldots; m; n; \ldots), \ldots\}$$

نمایش میدهند. در اینجا، اولاً، A مجموعه‌ی

$$\{\ldots a, b, \ldots, c, \ldots, m, n, \ldots\}$$

است؛ ثانیاً، اعضائی که با هم قابل مقایسه‌اند در یک پرانتز آمده‌اند؛ ثالثاً، بازاء هر x و y واقع در یک پرانتز، $x \leqslant y$ معادل است با اینکه x در طرف راست y نیست. همچنین، عبارت $(*)$ را میتوان نمایش دستگاه مرتب $(A, <)$ شمرد مشروط بر اینکه، در داخل هر پرانتز، $x < y$ را به معنی «x در طرف چپ y است» بگیریم.

مثلاً، «دستگاه مرتب $\{(a; b), (c; d)\}$» یعنی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ با نسبت ترتیبی

$$\leqslant = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}.$$

همچنین،

$$(\dagger) \qquad \{(0; 3; 6; 9; \ldots; 1; 4; 7; 10; \ldots; 8; 5; 2)\}$$

یعنی دستگاه $(\mathbf{I}_0, \leqslant)$ که در آن فقط و فقط وقتی $x \leqslant y$ که یکی از این شرایط برقرار باشد:

(۱) x و y هر دو به صورت $3k$ یا هر دو به صورت $3k+1$ باشند و $x \leqslant y$؛

(۲) x و y هر دو به صورت $3k-1$ باشند و $y \leqslant x$،

(۳) x به صورت $3k$ و y به صورت $3k \pm 1$ باشد؛

(۴) x به صورت $3k+1$ و y به صورت $3k-1$ باشد.

۵.۳.۶. تعریف. اگر $(A, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی باشد، و $a < b$ و $\{x \mid a < x < b\} = \varnothing$ گویند b a را میپوشاند یا a با b پوشیده میشود.

۵.۳.۷. نمودار هاسه[1]. اگر دامنه‌ی یک نسبت ترتیبی جزئی مجموعه‌ای متناهی باشد این نسبت را میتوان به طریق ساده‌ای نمایش داد. فرض کنیم $\leqslant$ یک نسبت ترتیبی جزئی در مجموعه‌ی A باشد. اعضای A را با دوایر کوچکی نمایش میدهند بطوری که اگر $a < b$ دایره‌ی نمایش b در بالای دایره نمایش a قرار گیرد (وضع جانبی دوایر خالی از اهمیت است). بعلاوه، بازاء هر x و y از A، اگر y x را بپوشاند دایره‌های نمایش x و y را با خط مستقیمی به هم وصل میکنند. شکل حاصل نمودار هاسه برای دستگاه مرتب $(A, \leqslant)$ است. نمودار هاسه نه فقط برای نمایش دادن یک نسبت ترتیبی مفروض مفید است، بلکه میتوان آن را برای تعریف نسبتهای ترتیبی نیز بکار برد.

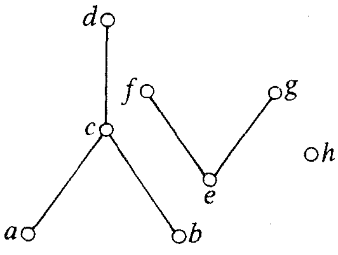
۵.۳.۷.۱. مثال. فرض کنیم حروف کوچک متمایز نمایش اشیاء متمایز باشند، و

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

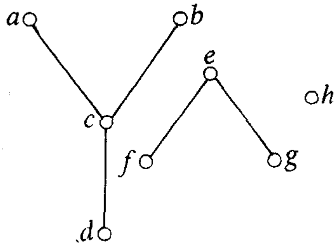
و نسبت ترتیبی جزئی $\leqslant$ با این ضوابط تعریف شده باشد:

$$a < c, \quad a < d, \quad b < c, \quad b < d, \quad c < d, \quad e < f, \quad e < g.$$

بر طبق دستورالعمل مذکور، دایره‌ی نمایش c باید بالای دوایر نمایش a و b قرار گیرد، و دایره‌ی نمایش d بالای دایره‌ی نمایش c. دوایر نمایش a و b را میتوان در یک تراز یا در دو تراز متفاوت قرار داد (برای حفظ تقارن، روش اول اتخاذ شده است). وضع دوایر نمایش e، f، و g از دوایر سابق مستقل است، ولی دوایر نمایش f و g باید بالای دایره‌ی نمایش e قرار داده شوند. دایره‌ی نمایش h را در هر موضع دلخواه میتوان قرار داد. بالاخره، چون a با c، b با c، c با d، و e با f و g پوشیده میشود، خطوط را بر طبق دستورالعمل مذکور وصل میکنیم. شکل حاصل (شکل ۶۸) نمودار دستگاه مرتب $(A, \leqslant)$ است.



شکل ۶۸



شکل ۶۹

اگر نمودار را وارونه کنیم (شکل ۶۹)، نمودار دستگاه $(A, \geqslant)$ حاصل میگردد.

۵.۳.۸. تمرین

۰۱ اگر f یک نسبت ترتیبی جزئی و B مجموعه‌ای باشد نسبتهای $\check{f}$ و $B \mid f \mid B$ نیز نسبتهای ترتیبی جزئی‌اند.

Hasse (۱)

۲. در مجموعه‌ی اعداد مثبت، نسبت $<$ با ضابطه‌ی «$x < y$ یعنی $x \leqslant y/2$» تعریف شده است. آیا این نسبت آن مجموعه را مرتب میکند؟

۳. فرض کنیم $\leqslant$ یک نسبت ترتیبی جزئی باشد. ثابت کنید که

(آ) اگر $x \leqslant y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$.

(ب) اگر $x < y$ و $y \leqslant z$ آنگاه $x < z$.

(پ) اگر $x < y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$.

۴. یگانه نسبتی در مجموعه‌ی A که هم یک نسبت ترتیبی و هم یک نسبت هم‌ارزی است قطر A است.

۵. نسبتهای ترتیبی مثال ت ۵.۳.۱ و عکس هر یک را با نمودار هاسه نمایش دهید.

۶. A مجموعه‌ای از سه شیء است. دستگاه $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ را با نمودار هاسه نمایش دهید.

۷. $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ و f نسبت «قابل قسمت بر» در A است. دستگاه (A, f) را با نمودار هاسه نمایش دهید.

از مقایسه‌ی نمودار هاسه‌ی این دستگاه با نمودار هاسه‌ی دستگاه مسئله‌ی ۶ چه نتیجه‌ای میتوانید بگیرید؟

۸. در قاموسها، کلمات را به ترتیب قاموسی یا بر طبق اصل اولین اختلاف بر حسب ترتیب حروف الفبا مرتب میکنند. بدین گونه، مثلاً، «کلمه‌ی[۱]» aab پیش از کلمه‌ی aac میآید.

فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع سه‌تائیهای اعداد طبیعی باشد. نسبت f را در A بر طبق اصل اولین اختلاف بدین گونه تعریف میکنیم: فرض کنیم (a, b, c) و (α, β, γ) دو عضو دلخواه A باشند.

$$(a, b, c) f (\alpha, \beta, \gamma)$$

یعنی

$$a \leqslant \alpha \text{ یا } a = \alpha \,\&\, b \leqslant \beta \text{ یا } a = \alpha \,\&\, b = \beta \,\&\, c \leqslant \gamma.$$

ثابت کنید که نسبت f مجموعه‌ی A را به ترتیب جزئی مرتب میکند (این ترتیب حالت خاصی از ترتیب قاموسی یا ترتیب بر طبق اصل اولین اختلاف است).

۹. $(A, \leqslant)$ و $(A', \leqslant')$ دومجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی‌اند. نسبت f را در مجموعه‌ی $A \times A'$ با ضابطه‌ی

$$(a, a') f (b, b') \text{ یعنی } a \leqslant b \,\&\, a' \leqslant' b'$$

تعریف میکنیم. ثابت کنید که مجموعه‌ی $(A \times A', f)$ مرتب است (این مجموعه‌ی مرتب را حاصلضرب مستقیم مجموعه‌های مرتب A و A' خوانند).

۵.۴. تعمیم بعضی مفاهیم. مفاهیم اساسی وابسته به ترتیب را، که سابقاً در مورد دستگاه $(\mathbf{R}, <)$ تعریف کردیم، میتوان در هر مجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی تعریف کرد.

۵.۴.۱. تعریف. فرض کنیم f نسبتی، B مجموعه‌ای، و a شیئی باشد.

I. a را یک عضو اقل یا عضو مینیموم یا ابتدای B بر حسب نسبت f خوانیم در

---

(۱) مقصود ما از «کلمه» رشته‌ای متناهی از حروف الفبا است.

صورتی که، در عین حال، $a \in B \cap$ د f، و بازاء هر x از $B \cap$ د f، afx.

II. a را یک عضو اکثر یا عضو ماکزیموم یا انتهای B بر حسب نسبت f نامیم در صورتی که، در عین حال، $a \in B \cap$ د f، و بازاء هر x از $B \cap$ د f، xfa.

۵.۴.۲. قضیه. اگر نسبت f قناس باشد (و بالاخص، اگر f یک نسبت ترتیبی جزئی باشد) اعضای اقل و اکثر یک مجموعه بر حسب این نسبت، در صورت وجود، منحصر بفرد هستند. (چرا؟)

مفاهیم بندها و سوپرموم و اینفیموم را نیز به آسانی میتوان تعمیم داد:

۵.۴.۳. تعریف. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی باشد، و $B \subseteq A$.

I. اگر a ئی از A باشد که، بازاء هر x از B، $x \leqslant a$ $(a \leqslant x)$ آنگاه a را یک بند بالای (بند پایین) B بر حسب نسبت $\leqslant$ خوانیم. اگر B بند بالا (بند پایین) داشته باشد گوئیم از بالا (از پایین) محدود است.

II. اگر a یک بند بالای B بر حسب نسبت $\leqslant$ باشد، و بازاء هر بند بالای B بر حسب این نسبت مانند b، $a \leqslant b$، آنگاه a را سوپرموم B بر حسب این نسبت (یا در مجموعه‌ی مرتب A) خوانیم، و به علامات

$$\sup_A B, \qquad \sup_{\leqslant} B,$$

و هرجا بیم ابهام نرود، به علامت $\sup B$ نمایش میدهیم.

III. اگر a یک بند پایین B بر حسب نسبت $\leqslant$ باشد، و بازاء هر بند پایین B بر حسب این نسبت مانند b، $b \leqslant a$، آنگاه a را اینفیموم B بر حسب این نسبت (یا در مجموعه‌ی مرتب A) خوانیم، و به علامات

$$\inf_A B, \qquad \inf_{\leqslant} B,$$

و هر جا بیم ابهام نرود، به علامت $\inf B$ نمایش میدهیم.

به آسانی دیده میشود که

۵.۴.۴. قضیه. با علامات مذکور در ۵.۴.۳، $\sup_A B$ و $\inf_A B$، در صورت وجود، منحصر بفردند.

۵.۴.۵. امثله

(آ). در دستگاه مرتب

$$A = \{(a_1; a_2; a_3; \ldots; b_1; b_2; b_3; \ldots; c_3, c_2, c_1)\},$$

فرض کنیم

$$C = \{a_3, a_4, a_5, \ldots\}; \qquad B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\};$$

$$E = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}; \qquad D = \{c_2, b_1, b_2, \ldots\};$$

$$F = \{b_2, a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

در این صورت، $\sup_A C = b_1$، ولی C در B سوپرموم ندارد؛
$\sup_D E = c_2$، ولی E در A سوپرموم ندارد؛
بالاخره، $\sup_F B = b_2$، ولی $\sup_A B = b_1$.

(ب). مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ را با نسبت | (عاد کننده‌ی) اختیار میکنیم. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند، و $B = \{m, n\}$.

هر مقسوم‌علیه مشترک m و n مانند d یک بند پایین B است بر حسب نسبت | (زیرا، $d \mid m$ و $d \mid n$)؛ و نیز، هر مضرب مشترک m و n یک بند بالای B است بر حسب نسبت |. بنا بر خواص بمعم و کمم، بمعم m و n اینفیموم B و کمم آنها سوپرموم آن است. خلاصه،

$$\inf \{m, n\} = (m, n), \qquad \sup \{m, n\} = [m, n].$$

(پ). فرض کنیم A مجموعه‌ای دلخواه (مجموعه‌ی عمومی) باشد، و مجموعه‌ی مرتب $\{\mathcal{P}(A), \subseteq\}$ را اختیار میکنیم، و فرض میکنیم $X \in \mathcal{P}(A)$ و $Y \in \mathcal{P}(A)$. به آسانی میتوان ثابت کرد که مجموعه‌ی $\{X, Y\}$ سوپرموم و اینفیموم دارد، و

$$\sup \{X, Y\} = X \cup Y, \qquad \inf \{X, Y\} = X \cap Y.$$

۵.۴.۶. تبصره. دستگاههای دو مثال اخیر، مثالهائی هستند از دستگاههای مرتب به ترتیب جزئی مانند $(A, \leqslant)$ که، بازاء هر a و b از A، مجموعه‌ی $\{a, b\}$ سوپرموم و اینفیموم دارد. چنین دستگاهی را یک مُشَبَّکه میخوانند، و در مشبکه‌ی دلخواه $(A, \leqslant)$، بازاء هر a و b از A، $\sup \{a, b\}$ را $a \vee b$ و $\inf \{a, b\}$ را $a \wedge b$ مینامند. تئوری مشبکه‌ها از دهه‌ی سوم قرن بیستم توسعه‌ی فراوان و موارد استعمال متعدد یافته است.

۵.۴.۷. تمرین

۱. نسبت f و مجموعه‌ی A را چنان بسازید که A بر حسب f بیش از یک عضو اقل و بیش از یک عضو اکثر داشته باشد.

۲. K مجموعه‌ی دوایر واقع در صفحه‌ی مفروضی است[1]، و نسبت f در K چنین تعریف شده است:

$$f = \{(k, k') \mid k, k' \in K \;\&\; (\text{نیست } k' \text{ خارج از } k)\}.$$

(آ) آیا نسبت f مجموعه‌ی K را به ترتیب جزئی مرتب میکند؟

(ب) فرض کنیم A مجموعه‌ی جمیع اعضائی از K باشد که بر خط مفروضی واقع در صفحه‌ی دوایر مورد بحث مماس‌اند. آیا A بند بالا یا بند پایین دارد؟

۳. شکل ۷۰ (صفحه‌ی ۷۵۸) نمودار هاسه‌ی مجموعه‌ی A با ترتیب جزئی $\leqslant$ است.

(آ) جمیع بندهای بالا و پایین مجموعه‌های $\{c, e, f\}$ و $\{c, d\}$ را تعیین کنید.

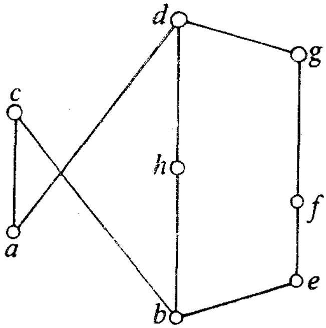
(ب) آیا مجموعه‌ی $\{a, b\}$ در این دستگاه سوپرموم دارد؟

۴. در دستگاه مرتب مثال ۵.۳.۷.۱، سوپرموم مجموعه‌ی $\{a, b\}$ را تعیین کنید.

۵. B و C دو مجموعه‌اند، f نسبتی است، و $C|f|C = g$. ثابت کنید که شرط لازم و کافی

---

(۱) هر نقطه دایره‌ای (با شعاع صفر) محسوب میشود.



شکل ۷۰

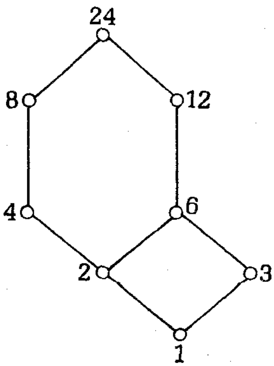
برای آنکه a ابتدای مجموعه‌ی $B \cap C$ بر حسب نسبت f باشد آنست که a ابتدای مجموعه‌ی B بر حسب نسبت g باشد.

۶. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای مرتب باشد، و $B \subseteq A$.

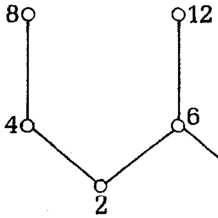
(آ). عضو a از A را یک عضو مینیمال[1] مجموعه‌ی B (بر حسب نسبت $\leqslant$) خوانند در صورتی که $a \in B$ و هیچ عضو B بر حسب $<$ پیش از a نباشد (به عبارت دیگر، در صورتی که، بازاء هر x از B، اگر $x \leqslant a$ آنگاه $x = a$)؛

(ب). عضو a از A را یک عضو ماکزیمال[2] B (بر حسب نسبت $\leqslant$) نامند در صورتی که $a \in B$ و هیچ عضو B بر حسب نسبت $<$ بعد از a نباشد (به عبارت دیگر، در صورتی که، بازاء هر x از B، اگر $a \leqslant x$ آنگاه $a = x$).

واضح است که عضو اقل (اکثر) یک عضو مینیمال (ماکزیمال) میباشد. به عنوان مثال، مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ را با نسبت | اختیار میکنیم. نمودار هاسه برای دستگاه $(A, |)$ در شکل ۷۱ دیده میشود. 1 یک عضو اقل A و یگانه عضو مینیمال آنست. فرض کنیم $B = A - \{1, 24\}$. نمودار هاسه برای دستگاه $(B, |)$ در شکل ۷۲



شکل ۷۱



شکل ۷۲

(۱) minimal

(۲) maximal

ملاحظه میشود. واضح است که هر یک از 2 و 3 یک عضـو مینیمال B است، ولی هیچ یک از آنها عضو اقل B نیست.

۷. اعضای اقل، اکثر، مینیمال، و ماکزیمال هر یک از دستگاههای مرتب ذیل را، در صورت وجود، تعیین کنید:

(آ) $\{(a)\}$؛ (ب) $\{(7; 1), (2; 5)\}$؛

(ج) $\{(\ldots; 5; 3; 1; 2; 4; 6; \ldots)\}$.

۸. در دستگاه مسئلهی ۲، اعضای ماکزیمال و مینیمال مجموعهی K را تعیین کنید.

۹. بنا بر آنکه $A = \{2k - 1 \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{2, 4\}$، در دستگاه $(A, |)$ اعضای ماکزیمال و ماکزیموم A را تعیین کنید.

۱۰. در هر یک از دستگاههای ذیل، اعضای ماکزیمال و مینیمال مجموعهی دستگاه را تعیین کنید.

(آ) $\{(\ldots; a_2; a_1; \ldots; b_2; b_1; c_1; c_2; \ldots; d_2; d_1), (a; b; c)\}$

(ب) $\{(a; b), (c; \ldots; d_2; d_1; e_1; e_2; \ldots; h), (\ldots; m_2; m_1)\}$.

(ج) $\{(\ldots; a_2; a_1; b_1; b_2; \ldots), (\ldots; c_2; c_1; e_1; e_2; \ldots)\}$.

۱۱. مجموعهای مرتب به ترتیب جزئی بسازید که سه عضو مینیمال و دو عضو ماکزیمال داشته باشد، ولی نه عضو ماکزیموم داشته باشد نه عضو مینیموم.

۱۲. بنا بر آنکه I_A نسبت همانی در مجموعهی A باشد، اولاً، مطلوبست تعیین جمیع اعضای ماکزیمال A بر حسب نسبت I_A. ثانیاً، فرض میکنیم مجموعـک B از A حداقل دو عضو داشته باشد. آیا B بر حسب نسبت I_A بند بالا دارد؟

۱۳. دستگاه $(A, \leqslant)$ مرتب به ترتیب جزئی است، و بعلاوه، نسبت $\leqslant$ مرتبط است. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه a عضو مینیموم (ماکزیموم) A باشد آنست که عضو مینیمال (ماکزیمال) A باشد.

۱۴. فرض کنیم $\leqslant$ یک نسبت ترتیبی جزئی در مجموعهی A باشد و $B \subseteq A$، و $\sup B$ و $\inf B$ موجود باشند. حکم

$$\inf B < \sup B \tag{1}$$

را باطل کنید. چه شرط اضافی برای برقراری (۱) لازم است؟

۱۵. A مجموعهی جمیع اعداد فرد و اعداد 2 و 4 است. ثابت کنید که، بر حسب نسبت قابلیت قسمت در $\mathbf{N}$، 4 یگانه عضو ماکزیمال A است، ولی A عضو ماکزیموم ندارد.

۱۶. مجموعهی $(A, <)$ مرتب به ترتیب قوی است، و $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$، و $\sup B$ و $\sup C$ موجودند. ثابت کنید که

(آ) اگر $B \subseteq C$ آنگاه $\sup B < \sup C$

(ب) اگر بازاء هر x از B ی y از C باشد که $x < y$ آنگاه $\sup B < \sup C$.

۱۷. با علامات مذکور در ۵.۴.۶، ثابت کنید که در مشبکهی $(A, \leqslant)$، همواره این روابط برقرارند:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

$$a \vee b = b \vee a; \qquad a \wedge b = b \wedge a.$$

$$a \wedge (b \vee c) \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$a \vee (b \wedge c) \geqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

ثابت کنید که اگر $\vee$ نسبت به $\wedge$ توزیعپذیر باشد $\wedge$ هم نسبت به $\vee$ توزیعپذیر است، و بالعکس (مشبکه‌ای را که در آن قوانین توزیعپذیری برقرار باشند **مشبکه‌ی توزیعپذیر** نامند).

۱۸. ثابت کنید که در هر مشبکه مانند $(A, \leqslant)$ اگر $a \leqslant b$ آنگاه $a \wedge b = a$ و $a \vee b = b$.

۵.۴.۷. تعریف. یک مجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی را **تمام** خوانیم در صورتی که هر مجموعک غیر خالی آن که بند بالا دارد سوپرموم داشته باشد.

تمامیت، چنانکه در دستگاه اعداد حقیقی دیده‌اید، خاصیتی بسیار توانا است.

۵.۴.۸. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی مرتب $(A, \leqslant)$ تمام باشد آنست که هر مجموعک غیر خالی آن که بند پایین دارد اینفیموم داشته باشد.

برهان. فرض کنیم مجموعه‌ی مرتب $(A, \leqslant)$ تمام باشد، و B مجموعکی از A و دارای بند پایین باشد، و C مجموعه‌ی جمیع بندهای پایین B باشد. در این صورت، C غیر خالی است، و هر عضو B یک بند بالای آنست. پس، بنا بر فرض قضیه، $\gamma = \sup C$ موجود است. اینک به آسانی میتوان ثابت کرد که γ اینفیموم B است. اثبات عکس به همین قیاس است. ▲

۵.۴.۹. تمرین

۱. اگر A مجموعه‌ای باشد مجموعه‌ی $\mathcal{P}(A)$ با نسبت $\subseteq$ تمام است.

۵.۵. نگاشتهای مجموعه‌های مرتب

۵.۵.۱. تعریف. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ دو دستگاه مرتب به ترتیب جزئی، و $<$ و $<'$ نسبتهای ترتیبی قوی نظیر $\leqslant$ و $\leqslant'$ باشند، و φ تابعی بر A بتوی B باشد.

I. تابع φ را حافظ ترتیب ضعیف (جزئی) خوانند در صورتی که، بازاء هر a_1 و a_2 از A، اگر $a_1 \leqslant a_2$ آنگاه $\varphi(a_1) \leqslant' \varphi(a_2)$.

II. تابع φ را حافظ ترتیب قوی خوانند در صورتی که، بازاء هر a_1 و a_2 از A، اگر $a_1 < a_2$ آنگاه $\varphi(a_1) <' \varphi(a_2)$.

III. اگر φ تناظری 1ـ1 بین A و B باشد، و بازاء هر a_1 و a_2 از A،

$$a_1 \leqslant a_2 \;\text{ا‌ا}\; \varphi(a_1) \leqslant' \varphi(a_2)$$

آنگاه φ را یک **ایزومورفیسم**[1] بین **مجموعه‌های مرتب** A و B نامند، و گویند A و B از لحاظ ترتیب جزئی **ایزومورف** هستند.

۵.۵.۲. تبصره. تعریف «قلب‌کننده‌ی» ترتیب از آنچه گذشت بدیهی است. اصطلاح

(۱) در اینجا «همریختی» ، ایزومورفیسم از لحاظ ترتیب مراد است.

یکنواخت به معنی حافظ ترتیب یا قلب‌کننده‌ی ترتیب است، و اصطلاح ایزوتون[1] به معنی حافظ ترتیب.

۵.۵.۳. تمرین

۱. آیا دستگاههای مسائل ۶ و ۷ تمرین ۵.۳.۸ ایزومورف هستند؟

۲. سه مجموعه‌ی

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \qquad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\},$$
$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

به طریق ذیل به ترتیب جزئی مرتب شده‌اند:

$$a_1 < a_2, \quad a_1 < a_3, \quad a_1 < a_4, \quad a_3 < a_4,$$
$$b_1 <' b_2, \quad b_1 <' b_3, \quad b_1 <' b_4, \quad b_3 <' b_4,$$
$$c_1 <'' c_2 \leqslant'' c_3 \leqslant'' c_4.$$

توابع φ، ψ، و σ را بر A چنین تعریف میکنیم:

$$\varphi(a_i) = b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$
$$\psi(a_2) = b_2, \qquad \psi(a_i) = b_1 \qquad (i = 1, 3, 4),$$
$$\sigma(a_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

کدام یک از این توابع حافظ ترتیب است؟

۵.۵.۴. نقطه‌ی ثابت تبدیلات. فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر خالی و f تابعی بر A بتوی A باشد ($A = $ حf، $f \subseteq A$ حع). تبدیل f هر عضو A مانند x را بـه عضوی از A که عبارت از $f(x)$ است تبدیل میکند. اگر، بازاء xی از A،

$$f(x) = x$$

آنگاه تبدیل f عضو x از A را ثابت نگاه میدارد. بدین مناسبت، در این حالت، x را یک نقطه‌ی ثابتِ f نامند.

مثلاً، در اعداد حقیقی، اگر $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$، و تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in A)$$

تعریف شود، f تابعی بر A بتوی A است، و چون $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$، هر یک از 0 و 1 یک نقطه‌ی ثابت تابع f میباشد. در این مثال، بازاء هر x و y از A، اگر $x \leqslant y$ آنگاه $f(x) \leqslant f(y)$، و به عبارت دیگر، f حافظ ترتیب است. بطور کلی،

۵.۵.۵. قضیه (قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کناستر[2]). فرض کنیم $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای مرتب به ترتیب جزئی و تمام و دارای اعضای اقل و اکثر باشد، و f تابعی بر A بتوی A و حافظ ترتیب جزئی باشد. در این صورت، تابع f نقطه‌ی ثابت

(۱) isotone (۲) Knaster

برهان. فرض کنیم $B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \leqslant f(x)\}$ (۱). اگر m عضو اقل A باشد آنگاه $m \in A$، و لهذا، $f(m) \in A$. پس، $m \leqslant f(m)$، و بالنتیجه، $m \in B$، و لهذا $B \neq \varnothing$. بعلاوه، عضو اکثر A یک بند بالای B است. پس، $\beta = \sup B$ (۲) موجود است. حال اگر b عضو دلخواهی از B باشد، بنا بر (۱)، $b \leqslant f(b)$ (۳)، و بنا بر (۲)، $b \leqslant \beta$ (۴). چون f حافظ ترتیب است، بنا بر (۴)، $f(b) \leqslant f(\beta)$. پس، بنا بر (۳)، $b \leqslant f(\beta)$. بالنتیجه، $f(\beta)$ یک بند بالای B است. پس، بنا بر (۲)، $\beta \leqslant f(\beta)$ (۵). از طرف دیگر، چون f حافظ ترتیب است، $f(\beta) \leqslant f(f(\beta))$. پس، بنا بر (۱)، $f(\beta) \in B$، و لهذا، بنا بر (۲)، $f(\beta) \leqslant \beta$. از این و (۵) نتیجه میشود، $f(\beta) = \beta$. پس، β نقطه‌ی ثابت f است. ▲

۵.۵.۵.۱. مثال (اثبات وجود جذر عدد نامنفی a). فرض کنیم

$$B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 + a\}.$$

بالبداهه B مجموعه‌ای مرتب و تمام دارای اعضای اقل و اکثر است. اینک تابع f را بر B با ضابطه‌ی

$$f(x) = x + \frac{a - x^2}{2(1+a)}$$

تعریف میکنیم. اگر $0 \leqslant x < y \leqslant 1 + a$ آنگاه

$$f(x) - f(y) = (x - y)\left(1 - \frac{x+y}{2(1+a)}\right) < 0.$$

پس، f حافظ ترتیب است. بعلاوه،

$$0 \leqslant f(0) < f(1+a) = 1 + a - \frac{1 + a + a^2}{2(1+a)} < 1 + a.$$

بالنتیجه، f تابعی بتوی B است. پس، بنا بر قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کناستر، عددی مانند β هست که $f(\beta) = \beta$، و یا

$$\beta + \frac{a - \beta^2}{2(1+a)} = \beta,$$

و از آنجا، $\beta^2 = a$. ▲

۵.۵.۶. تمرین

۱. قضیه‌ی وجود ریشه‌ی nم عدد نامنفی a را به وسیله‌ی قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کناستر ثابت کنید.

راهنمائی: $f(x) = x + \dfrac{a - x^n}{n(1+a)^{n-1}}$.

۵.۶. اقسام دیگر ترتیب. نسبت $\leqslant$ در $\mathbf{R}$، علاوه بر اینکه این مجموعه را به ترتیب جزئی مرتب میکند، مرتبط هم هست؛ و نسبت $<$ در $\mathbf{R}$، علاوه بر اینکه این مجموعه را به ترتیب قوی مرتب میکند، تابع اصل تثلیث ضعیف هم میباشد. این دو نسبت الگوی نسبتهای

ترتیبی خطی هستند:

۵.۶.۱ تعریف.
I. نسبت ترتیبی ضعیف f در مجموعه‌ی A را خطی یا ساده یا کامل یا کلّی خوانیم در صورتی که مرتبط باشد.
II. نسبت ترتیبی قوی f در مجموعه‌ی A را خطی یا ساده خوانیم در صورتی که تابع اصل تثلیث ضعیف باشد.
قضیه‌ی ذیل نشان میدهد که تناظر موجود بین نسبتهای ترتیبی خطی $\leqslant$ و $>$ بطور کلی برقرار است:

۵.۶.۲. قضیه. فرض کنیم f نسبتی در مجموعه‌ی A و I نسبت همانی در A باشد.
I. اگر نسبت f مجموعه‌ی A را به ترتیب خطی ضعیف مرتب کند نسبت $f - I$ آن را به ترتیب خطی قوی مرتب میکند.
II. اگر نسبت f مجموعه‌ی A را به ترتیب خطی قوی مرتب کند نسبت $f \cup I$ آن را به ترتیب خطی ضعیف مرتب میکند.
اثبات قضیه بر متعلم است.

۵.۶.۳. خوشترتیبی و استقراء ترانسفینی. فرض کنیم $(A, <)$ مجموعه‌ای مرتب به ترتیب خطی قوی باشد. چنانکه در ۴.۶.۱ : ۵ گفته شد، مجموعه‌ی A را خوشترتیب خوانند در صورتی که هر مجموعک غیر خالی آن ابتدا داشته باشد.
خوشترتیبی از اقسام بسیار مهم نسبتهای ترتیبی است. اصل استقراء را در مجموعه‌های خوشترتیب میتوان تعمیم داد:

۵.۶.۴. قضیه (استقراء ترانسفینی). فرض کنیم $(A, <)$ مجموعه‌ای خوشترتیب و F خاصیتی باشد بطوری که

(*) بازاء هر a از A، اگر هر x از A که $a > x$ خاصیت F داشته باشد آنگاه a خاصیت F دارد.

در این صورت، هر عضو A خاصیت F دارد.
برهان. اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم

$$B = \{x \mid x \in A \,\&\, \sim F(x)\}.$$

اگر حکم برقرار نباشد این مجموعه خالی نیست، و لهذا ابتدا دارد. اگر a ابتدای آن باشد آنگاه، بازاء هر x از A که $a > x$، x خاصیت F دارد. پس، بنا بر فرض، $F(a)$، و بالنتیجه، $a \notin B$. ▲
ملاحظه کنید که شرط (*) برقراری خاصیت F را برای ابتدای A تضمین میکند، زیرا، اگر a_0 ابتدای A باشد مجموعه‌ی xهائی از A که $a_0 > x$ خالی است.

در باب تفاوت دامنه‌ی استعمال اصل استقراء ترانسفینی و اصل استقراء باید توجه داشت که اصل استقراء مربوط به دستگاه مرتب $(\mathbf{N}, <)$ است، و مثلاً، اگر مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ را با ترتیب

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2, 4, 6, \ldots$$

خوشترتیب کنیم (چرا $\mathbf{N}$ با این ترتیب خوشترتیب است؟)، در دستگاه خوشترتیب حاصل، اصل استقراء بکار نمی‌آید، و حال آنکه اصل استقراء ترانسفینی این حالت را فرا میگیرد.

۵.۶.۵. تبصره. بر طبق قضیه‌ی مشهور و مهمی در تئوری مجموعه‌ها ــ معروف به قضیه‌ی خوشترتیبی یا قضیه‌ی تسرملو* ــ هر مجموعه را میتوان خوشترتیب کرد. به عبارت واضحتر، اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد نسبتی ترتیبی مانند f هست که مجموعه‌ی مرتب (A, f) خوشترتیب است. این قضیه بین ریاضیون سخت مختلف‌فیه میباشد.

۶ § بعضی از مجموعه‌های نامتناهی

این مبحث متمم ملاحظات اجمالی مذکور در فصل ۳ (صفحات ۱۱۹ ــ ۱۲۸) در باب مجموعه‌های همعدد و مجموعه‌های شمارا و ناشمارا است، و در ضمن آن احکامی مهم در باب عده‌ی اعضای مجموعه‌های اساسی ریاضیات ثابت خواهد شد. تسلط بر مندرجات فصل ۳ (صفحات مذکور) و امثله و تمرینات مندرج در آنجا برای فهم مطالب آتیه ضروری است.

۶.۱. مقایسه‌ی مجموعه‌ها از لحاظ عده‌ی اعضا. بعضی از مطالب آتیه سابقاً در فصل ۳ آمده است. تکرار آنها برای یادآوری و تسهیل مراجعه میباشد.

۶.۱.۱. تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند.

I. $A \leqslant B$ یعنی A با مجموعکی از B همعدد است.

II. $A < B$ یعنی A با مجموعکی از B همعدد است، ولی B با هیچ مجموعک A همعدد نیست.

اینک به اثبات قضیه‌ی هم‌ارزی، که در فصل ۳ بدون ذکر دلیل آمده است، میپردازیم. مبتدیان میتوانند این قضیه را، مانند گذشته، بدون دلیل بپذیرند.

۶.۱.۲. قضیه (قضیه‌ی هم‌ارزی یا قضیه‌ی کانتور و برنشتاین[1] یا قضیه‌ی شرودر* و برنشتاین یا قضیه‌ی برنشتاین). اگر $A \leqslant B$ و $B \leqslant A$ آنگاه $A \cong B$.

برهان. فرض کنیم $A \leqslant B$ و $B \leqslant A$. پس، تناظری 1ــ1 مانند f بر A بتوی B و تناظری 1ــ1 مانند g بر B بتوی A موجود است. بنا بر ۱ : ۵.۴.۰۹، مجموعه‌ی $\mathcal{P}(A)$ با نسبت $\subseteq$ مجموعه‌ای مرتب و تمام است، و بعلاوه، دارای عضو اقل $(\varnothing)$ و عضو اکثر (A) میباشد. اگر

Félix Bernstein (۱)

X عضو دلخواهی از $\mathcal{P}(A)$ (یعنی مجموعک دلخواهی از A) باشد آنگاه $f(X) \subseteq B$، و $B - f(X)$ مجموعکی از B است، و لهذا، $g(B - f(X)) \subseteq A$. حال، تابع φ را بر $\mathcal{P}(A)$ بتوی $\mathcal{P}(A)$ با ضابطه‌ی

$$\varphi(X) = A - g(B - f(X)) \qquad (X \in \mathcal{P}(A))$$

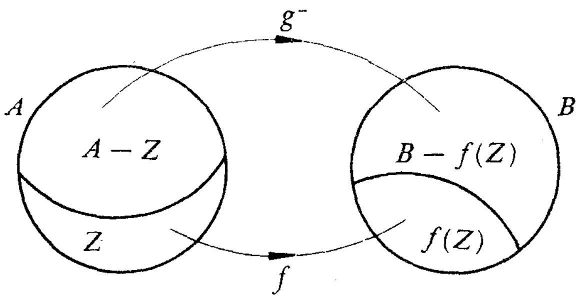
تعریف میکنیم. این تابع حافظ ترتیب است، یعنی، اگر $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ و $X \subseteq Y$ آنگاه $\varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$ (چرا؟). پس، بنا بر قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کناستر، Zی از $\mathcal{P}(A)$ هست که $\varphi(Z) = Z$، و یا

$$Z = A - g(B - f(Z)),$$

و از آنجا، $g(B - f(Z)) = A - Z$. پس، $B - f(Z) = g^{-}(A - Z)$ (شکل ۷۳). اینک اگر تناظر h را با ضابطه‌ی

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \in Z \\ g^{-}(x) & \text{اگر } x \in A - Z \end{cases}$$

تعریف کنیم با اندک تأملی دیده میشود که h تناظری 1ـ1 بین A و B است (چرا؟). ▲



شکل ۷۳

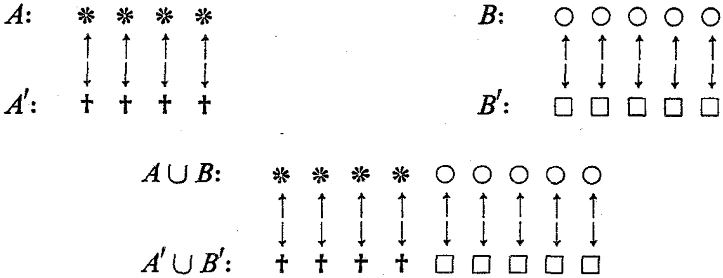
در دنباله‌ی این قسمت احکامی چند در باب مجموعه‌ها همعدد میآید. در بعضی موارد، همعدد بودن مجموعه‌های مورد بحث «بدیهی» است. معنی این گفته این نیست که این احکام را باید، به استناد «بداهت» آنها، بی‌دلیل پذیرفت، بلکه مقصود این است که اثبات آنها «سرراست» است، و بدون تأمل یا با اندک تأملی حاصل میگردد. مثلاً،

۶.۱.۳. قضیه. اگر

$$A \cap B = \varnothing, \qquad A' \cap B' = \varnothing, \qquad A \cong A', \qquad B \cong B'$$

آنگاه $A \cup B \cong A' \cup B'$.

در اینجا از تناظرهای 1ـ1 بین A با A' و B با B'، بالبداهه، تناظری 1ـ1 بین $A \cup B$ و $A' \cup B'$ نتیجه میشود (شکل ۷۴). عرضه کردن این تناظر به صورت ریاضی آسان است (۶.۱.۵ : ۱).



شکل ۷۴

تعمیم حکم فوق آسان است:

۶.۱.۴. قضیه. اگر $\mathscr{M}$ و $\mathscr{N}$ دو مجموعه از مجموعه‌ها باشند، و اعضای $\mathscr{M}$ دوبدو و اعضای $\mathscr{N}$ نیز دوبدو از هم جدا باشند، و تناظری 1ـ1 مانند f بین $\mathscr{M}$ و $\mathscr{N}$ موجود باشد که، بازاء هر X از $\mathscr{M}$، $f(X) \cong X$ آنگاه

$$\bigcup \mathscr{M} \cong \bigcup \mathscr{N}.$$

۶.۱.۵. تمرین

۱. با مفروضات ۶.۱.۳، فرض کنیم f تناظری 1ـ1 بین A و A' و g تناظری 1ـ1 بین B و B' باشد، و $h = f \cup g$. ثابت کنید که h تناظری 1ـ1 است، و

$$\text{ح}h = A \cup A', \qquad \text{حع}h = B \cup B'.$$

۲. ثابت کنید که

(آ) $A \leqslant A$.

(ب) $(A \leqslant B \;\&\; B \leqslant C) \supset (A \leqslant C)$.

۳. ثابت کنید که $\sim(A < A)$.

۴. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \leqslant B$.

۵. بنا بر آنکه $A \cong A'$ و $B \cong B'$، ثابت کنید که

(آ) اگر $A \leqslant B$ آنگاه $A' \leqslant B'$.

(ب)[1] اگر $A < B$ آنگاه $A' < B'$.

۶. ثابت کنید که $A \times B \cong B \times A$.

۷. ثابت کنید که اگر $A \cong B$ و $C \cong D$ آنگاه $A \times C \cong B \times D$.

۶.۲. مجموعه‌های شمارا. چنانکه میدانیم، مجموعه‌ی A را شمارا خوانند در صورتی که با $\mathbf{N}$ همعدد باشد. چنین مجموعه‌ای را میتوان، با شماره‌گذاری اعضایش با $\mathbf{N}$، به صورت

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

(۱) ب: ۷.۲.۳: ۳.

نوشت، که در آن، aها دوبدو متمایزند. اگر A مجموعه‌ای متناهی و، مثلاً، دارای n عضو باشد آن را میتوان به صورت

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

با همان شرط برای aها نمایش داد. در آتیه، هر جا مجموعه‌ای شمارا یا متناهی را به صورتهای فوق مینویسیم، شرط مذکور را برای aها مستتر میگیریم، تا حاجت به تکرار نیفتد. از مجموعه‌های شمارائی که در فصل ۳ دیده‌اید اینها را یادآوری میکنیم:

(آ) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد؛ (ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج؛

(پ) $\mathbf{I}$؛ (ت) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

چنانکه میدانیم، مجموعه‌های شمارا دوبدو همعدد میباشند. نخستین قضیه‌ی مهم این مبحث اینست که مجموعه‌های شمارا «کم‌وسعت‌ترین» مجموعه‌های نامتناهی‌اند، بدین معنی که

۶.۲.۱. قضیه. هر مجموعه‌ی نامتناهی مجموعکی شمارا دارد.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. با انتخابات متوالی، مجموعکی شمارا از A تعریف میکنیم. عضو دلخواهی از A را انتخاب کرده a_1 مینامیم. بنا بر فرض، مجموعه‌ی $A - \{a_1\}$ خالی نیست. عضو دلخواهی از آن را اختیار کرده a_2 مینامیم. پس $a_1 \neq a_2$. بطور کلی، اگر بازاء عدد طبیعی n اعضای دوبدو متمایز a_1، a_2، ...، و a_n انتخاب شده باشند، عضو دلخواهی از مجموعه‌ی غیر خالی $A - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ اختیار کرده آن را a_{n+1} مینامیم. بالبداهه، مجموعه‌ی $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ شمارا است، و مجموعکی از A نیز هست. ▲

۶.۲.۲. قضیه. هر مجموعک یک مجموعه‌ی شمارا منتها شمارا است (یعنی، متناهی یا شمارا است).

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارا باشد و $E \subseteq A$. اگر E متناهی باشد فبها. در غیر این صورت، بنا بر قضیه‌ی قبل، E مجموعکی مانند E' دارد که $A \cong E'$. از طرف دیگر، $A \subseteq E \cong E$. پس، هر یک از مجموعه‌های A و E مجموعکی همعدد با دیگری دارد. بالنتیجه، بنا بر قضیه‌ی هم‌ارزی، $E \cong A$. ▲

۶.۲.۳. امثله و فواید

(آ). هر مجموعک نامتناهی از یک مجموعه‌ی شمارا شمارا است. بالاخص، هر مجموعک نامتناهی از $\mathbf{N}$ شمارا است.

(ب). بازاء عدد طبیعی n، فرض کنیم P_n مجموعه‌ی قوای nم اعداد اول باشد. چون مجموعه‌ی اعداد اول (P_1) نامتناهی است، هر یک از مجموعه‌های P_1، P_2، ...، P_n، ... شمارا است. همچنین، مجموعه‌ی

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n \cup \cdots,$$

که آن نیز مجموعکی نامتناهی از $\mathbf{N}$ است، شمارا میباشد.

(پ). اگر مجموعه‌ی A شمارا و E مجموعکی متناهی از آن بـاشد مجموعـه‌ی $A - E$ شمارا است.

۶.۲.۴. قضیه. اتحادیه‌ی مجموعه‌ای منتها شمارا از مجموعه‌هائی منتها شمـارا منتها شمارا است. بالاخص، اتحادیه‌ی هر مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی شمارا شمارا است.

برهان. فرض کنیم $E = \{A_1, A_2, \ldots\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد، و E و هـر یک از Aها منتها شمارا باشد. ابتدا فرض میکنیم Aها دوبدو از هم جـدا باشند. با علامات مذکور در ب: ۶.۲.۳، اگر، بازاء عضو A_n از E، A_n را با P_n جفت کـنیم تناظری 1ـ1 بین مجموعه‌ی E با مجموعه‌ی $\{P_1, P_2, \ldots\}$ یا با مجموعکی از این مجموعه بـرقرار میشود. بعلاوه، چون P_n شمارا و A_n منتها شمارا است، تناظری 1ـ1 بین A_n با P_n یا با مجموعکی متناهی از P_n وجود دارد. از اینجا، با توجه به اینکه Aها دوبدو از هم جدا هستند، معلوم میشود که تناظـری 1ـ1 بین اتحادیه‌ی Aها با مجموعه‌ی $P_1 \cup P_2 \cup \cdots$ یا بـا مجموعـکی از این مجموعـه موجود است. پس، بنا بر ب: ۶.۲.۳، اتحادیه Aها منتها شمارا است.

اگر Aها دوبدو از هم جدا نباشند مجموعه‌های

$$A'_1 = A_1,\ A'_2 = A_2 - A'_1,\ \ldots,\ A'_n = A_n - (A'_1 \cup A'_2 \cup \cdots \cup A'_{n-1})$$

را تعریف میکنیم. چون همواره $A'_n \subseteq A_n$، بنا بر ۶.۲.۲، مجموعـه‌های A'_1، A'_2، ... منتها شمارا هستند. اما، به آسانی دیده میشود که این مجموعه‌ها دوبدو از هم جدا میباشنـد. پس، بنا بر حالتی که ثابت شد، مجموعه‌ی $A'_1 \cup A'_2 \cup \cdots$ منتها شمارا است. بالاخره، چون

$$A'_1 \cup A'_2 \cup \cdots = A_1 \cup A_2 \cup \cdots,$$

(چرا؟)، مجموعه‌ی $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ نیز منتها شمارا است. ▲

۶.۲.۵. امثله و تمرین

(آ). اگـر $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ و $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$، و $A \cap B \neq \varnothing$، بـنـا بر قضیه‌ی فوق، مجموعه‌ی $A \cup B$ شمارا است. به عنوان تمرین، تناظری 1ـ1 بین $A \cup B$ و $\mathbf{N}$ تعریف کنید.

(ب). همچنین، اگر $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ آنگاه مجـموعه‌ی $A \cup B$ شمارا است. بفرض آنکه $A \cap B = \varnothing$، تناظری 1ـ1 بین $A \cup B$ و $\mathbf{N}$ تعریف کنید.

(پ). اتحادیه‌ی تعدادی متناهی از مجموعه‌های شمارا شمـارا است. مثـلاً، اتحادیه‌ی مجموعه‌های ذیل شمارا است:

$$A_1 = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}, \qquad A_2 = \{1, 6, 11, 16, \ldots\},$$
$$A_3 = \{2, 7, 12, 17, \ldots\}, \qquad A_4 = \{3, 8, 13, 18, \ldots\}.$$

(ت). مثالی برای اتحادیه‌ی مجموعه‌ای شمارا از مجموعه‌های متناهی بیاورید.

(ث). مثالی برای اتحادیه‌ی مجموعه‌ای شمارا از مجموعه‌های شمارا بیاورید.

(ج). شمارا بودن $\mathbf{I}$ را به وسیله‌ی قضیه‌ی ۶.۲.۴ بـه آسانی میتوان ثابت کـرد. کافـی است ملاحظه کنیم که $\mathbf{I}$ اتحادیه‌ی سه مجموعه‌ی

$$\{1, 2, 3, \ldots\}, \qquad \{0\}, \qquad \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

است، که اولی و سومی شمارا هستند، و دومـی متناهی. پس، بنا بـر آن قضیه، $\mathbf{I}$ منتها شمارا

است. چون مجموعه‌ی نامتناهی $\mathbf{N}$ مجموعک $\mathbf{I}$ است، $\mathbf{I}$ نامتناهی است. بالنتیجه، $\mathbf{I}$ شمارا است. ▲

۶.۲.۶. قضیه. اگر A مجموعه‌ای شمارا و B مجموعه‌ای منتها شمارا و غیر خالی باشد مجموعه‌ی $A \times B$ شمارا است.

برهان. فرض کنیم مجموعه‌ی A شمارا باشد. حکم را در حالتی که B نیز شمارا باشد ثابت و اثبات آن را در حالتی که B متناهی باشد به متعلم محول میکنیم. بنا بفرض، $A \cong \mathbf{N}$ و $B \cong \mathbf{N}$. پس، بنا بر ۷ : ۶.۱.۵، $A \times B \cong \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. اما، $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$. پس، بنا بر تعدی نسبت $\cong$، $A \times B \cong \mathbf{N}$. ▲

(به عنوان تمرین، تناظری 1ـ1 بین $A \times B$ و $\mathbf{N}$ بنویسید.)

در پایان این قسمت چند قضیه‌ی کلی در باب مجموعه‌های نامتناهی میآوریم.

۶.۲.۷. قضیه. اگر E مجموعه‌ای نامتناهی و A مجموعه‌ای منتها شمارا باشد آنگاه $A \cup E \cong E$.

برهان. بنا بر ۶.۲.۱، مجموعه‌ی E مجموعکی شمارا مانند B دارد. اگر $C = E - B$ آنگاه

$$E = B \cup C, \qquad A \cup E = (A \cup B) \cup C.$$

بنا بر ۶.۲.۴، $A \cup B \cong B$. بعلاوه، $C \cong C$. پس،

$$A \cup E = (A \cup B) \cup C \cong B \cup C = E. \blacktriangle$$

۶.۲.۸. قضیه. اگر E مجموعه‌ای ناشمارا و A مجموعکی منتها شمارا از آن باشد آنگاه $E - A \cong E$.

برهان. بنا بر مفروضات، مجموعه‌ی $E - A$ متناهی نیست (چرا؟). پس، بنا بر قضیه‌ی قبل $(E - A) \cup A \cong E - A$، و از آنجا $E \cong E - A$. ▲

چنانکه میدانیم، هیچ مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعک حقیقی خود همعدد نیست. بر خلاف،

۶.۲.۹. قضیه. هر مجموعه‌ی نامتناهی با یک مجموعک حقیقی خود همعدد است.

برهان. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی، و B مجموعکی متناهی و غیر خالی از آن باشد آنگاه $A - B \subset A$ و، بنا بر پ: ۶.۲.۳ یا ۶.۲.۸، $A - B \cong A$. ▲

۶.۲.۱۰. تمرین

۱. به وسیله‌ی تناظر f با ضابطه‌ی

$$f(n) = [n/2] \cdot (-1)^n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

ثابت کنید که $\mathbf{I} \cong \mathbf{N}$.

۲. در جدول

$$\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

بازاءِ زوج مرتب (m, n) عدد ν را با ضابطه‌ی $\nu = \frac{1}{2}k(k-1) + n$ $(*)$، که در آن $k = m + n - 1$، تعریف میکنیم. آیا بدین وسیله میتوان تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ و $\mathbf{N}$ برقرار کرد؟

راهنمائی: اگر $k = m + n - 1$ و $k' = m' + n' - 1$ و $\frac{1}{2}k(k-1) + n = \frac{1}{2}k'(k'-1) + n'$ آنگاه $1 \leqslant n \leqslant k$ و $1 \leqslant n' \leqslant k'$. بر حسب اینکه $k = k'$ & $n \neq n'$ یا $k \neq k'$ تناقضی استخراج کنید. برای اثبات اینکه هر عدد طبیعی ν را میتوان به صورت $(*)$ درآورد، عدد طبیعی k را با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{2}k(k-1) + 1 \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{2}(k+1)$ تعیین کنید.

۳. هر مجموعه‌ی شمارا اتحادیه‌ی مجموعه‌ای شمارا از مجموعه‌های شمارای دوبدو جدا از هم است.

۶.۳. بعضی از مجموعه‌های شمارا. در ۶.۲ بعضی از مجموعه‌های شمارا را ذکر کردیم. اینک بعضی دیگر از مجموعه‌های شمارای مهم را میآوریم. در این ضمن، نتایجی متعارض با آنچه عرفاً بدیهی به نظر میرسد بدست میآید. مثلاً، ذیلاً ثابت خواهیم کرد که مجموعه‌ی اعداد منطق با مجموعه‌ی اعداد طبیعی همعدد است. این مطلب شگفت‌آور است، زیرا، نه فقط $\mathbf{N}$ مجموعکی حقیقی از $\mathbf{Q}$ است، بلکه، با ترتیب عادی، بین هر دو عدد طبیعی متوالی «تعدادی بیشمار» از اعداد منطق قرار دارد. معذلک، دو مجموعه همعددند، یعنی تناظری 1ـ1 بین آنها وجود دارد، و به عبارت دیگر، $\mathbf{Q}$ را میتوان به وسیله‌ی $\mathbf{N}$ شماره‌گذاری کرد. برای اینکه امکان این امر آشکار شود، اعداد منطق را با کسوری که مخرجشان عددی طبیعی است، نمایش میدهیم، و آنها را به طریقی که در جدول ذیل دیده میشود تنظیم میکنیم:

$$\begin{tikzcd}
\frac{0}{1} \arrow[d] & \frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{-1}{1} \arrow[dl] & \frac{2}{1} \arrow[r] & \frac{-2}{1} \arrow[dl] & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{0}{2} \arrow[ur] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{-1}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{-2}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{0}{3} \arrow[d] & \frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{-1}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{0}{4} \arrow[ur] & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{tikzcd}$$

اینک به نظر میرسد که میتوان از $0/1$ شروع کرده این اعداد را همراه سهمها، و با اسقاط هر کسری که قبلاً آمده است، شماره‌گذاری کرد. بدین گونه، اعداد منطق به صورت «رشته‌ی»

$$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ -\frac{1}{3},\ \ldots$$

تنظیم میشوند. اثبات اینکه واقعاً شماره گذاری $\mathbf{Q}$ با $\mathbf{N}$ ممکن است ذیلاً میآید:

۶.۳.۱. قضیه. مجموعه‌ی اعداد منطق شمارا است.

برهان. چون $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$، $\mathbf{Q}$ نامتناهی است. پس، برای اثبات شمارا بودن آن، کافی است ثابت کنیم که منتها شمارا است (چرا کافی است؟). این مطلب را به دو دلیل ساده میتوان ثابت کرد:

دلیل اول. هر عضو $\mathbf{Q}$ را میتوان به صورت کسری تحویلناپذیر مانند p/q با شرایط $p \in \mathbf{I}$ و $q \in \mathbf{N}$ نوشت. حال اگر عدد p/q را با زوج مرتب (p, q) نظیر یکدیگر قرار دهیم دیده میشود که $\mathbf{Q}$ با مجموعکی از $\mathbf{I} \times \mathbf{N}$ همعدد است. اما، بنا بر ۶.۲.۶، $\mathbf{I} \times \mathbf{N}$ شمارا است. پس، بنا بر ۶.۲.۲، $\mathbf{Q}$ منتها شمارا است. ▲

دلیل دوم. هر عضو $\mathbf{Q}$ را به صورت p/q با شرایط $p \in \mathbf{I}$ و $q \in \mathbf{N}$ مینویسیم. بازاء هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ی $A_n = \{p/q \mid |p| + q \leqslant n\}$[1] متناهی است (چرا؟). بعلاوه، $\mathbf{Q} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ (چرا؟). پس، بنا بر ۶.۲.۴، $\mathbf{Q}$ منتها شمارا است. ▲

تعبیر هندسی قضیه‌ی فوق اینست که مجموعه‌ی نقاط منطق یک محور (نقاطی که طولشان منطق است) با مجموعه‌ی نقاط صحیح آن (نقاطی که طولشان عدد صحیح است) همعدد میباشد (زیرا، $\mathbf{I} \cong \mathbf{N}$). علی‌الظاهر، نقاط منطق صفحه‌ی اقلیدسی (نقاط دارای مختصات منطق) «به مراتب بیشتر» از نقاط منطق یک محور است. معذلک، نه فقط مجموعه‌ی نقاط منطق صفحه‌ی اقلیدسی شمارا است، بلکه

۶.۳.۲. قضیه. مجموعه‌ی نقاط منطق $\mathbf{R}^n$ (فضای اقلیدسی nبعدی) شمارا است. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی جمیع nتائیهای مرتب اعداد منطق مجموعه‌ای است شمارا.

برهان. مجموعه‌ی مورد بحث مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^n$ است. بنا بر ۶.۳.۱، حکم بازاء $n = 1$ برقرار است. بعلاوه، اگر $\mathbf{Q}^n$ شمارا باشد، بنا بر ۶.۲.۶، مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}$، که همان $\mathbf{Q}^{n+1}$ است، شمارا میباشد. ▲

قضیه‌ی ذیل نشان میدهد که اگر مجموعه‌ی جمیع اعداد جبری اصم (۶ : ۵.۶) را هم به مجموعه‌ی اعداد منطق ملحق کنیم مجموعه‌ای شمارا حاصل میگردد.

۶.۳.۳. قضیه. مجموعه‌ی جمیع اعداد جبری شمارا است.

---

(۱) مثلاً، $A_2 = \{0/1, 0/2, 1/1, -1/1\}$.

برهان. هر عدد جبری ریشه‌ی کثیرالجمله‌ای مانند

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

با ضرایب منطق میباشد. بعلاوه، به آسانی دیده میشود که هر چنین کثیرالجمله‌ای منتها دارای n جواب است. پس، اگر ثابت کنیم که مجموعه‌ی جمیع این گونه کثیرالجمله‌ها شمارا است، بنا بر ۶.۲.۴، معلوم میشود که مجموعه‌ی جمیع اعداد جبری منتها شمارا است، و چون این مجموعه نامتناهی است (زیرا $\mathbf{Q}$ مجموعکی از آنست)، شمارا خواهد بود. پس، فرض کنیم

$$P_n = \{x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}\}.$$

بازاء هر عدد طبیعی معین n، اگر کثیرالجمله‌ای را که در داخل ابرو است با nتائی مرتب $(a_1, \ldots, a_n)$ جفت کنیم دیده میشود که مجموعه‌ی P_n با مجموعه‌ی جمیع nتائیهای مرتب اعداد منطق همعدد است. پس، بنا بر ۶.۳.۲، P_n مجموعه‌ای شمارا است. لهذا، بنا بر ۶.۲.۴، مجموعه‌ی $P_1 \cup P_2 \cup \ldots$ (مجموعه‌ی جمیع کثیرالجمله‌های صحیح بر حسب x، که دارای ضرایب منطقند) نیز شمارا است. ▲

۶.۳.۴. تمرین

۱. مجموعه‌ی جمیع خطوطی از صفحه‌ی اقلیدسی که هر یک بر دو نقطه‌ی منطق متمایز میگذرد شمارا است.

۲. بازه‌ی (a, b) را منطق نامند در صورتی که دو انتهایش اعداد منطق باشند. ثابت کنید که مجموعه‌ی جمیع بازه‌های منطق شمارا است.

۳. چگونه میتوان مسئله‌ی ۲ را در صفحه‌ی اقلیدسی یا در فضای اقلیدسی سه‌بعدی تعمیم داد؟

۴. A مجموعه‌ای است از بازه‌های باز دو بدو جدا از هم. ثابت کنید که مجموعه‌ی A شمارا است.

راهنمائی: فرض کنید $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. هر عضو A را با کوچکترین عدد طبیعی n که r_n بدان عضو تعلق دارد جفت کنید.

۵. مجموعه‌ی جمیع رشته‌های متناهی اعداد منطق مجموعه‌ای است شمارا.

راهنمائی: فرض کنیم $\{u_i\}_1^n$ رشته‌ای متناهی از اعداد منطق باشد، و $u_i = p_i/q_i$ $(p_i \in \mathbf{I}, q_i \in \mathbf{N})$. بازاء هر عدد طبیعی N، مجموعه‌ی جمیع رشته‌هائی که $\sum_1^n | p_i | + \sum_1^n q_i = N$ متناهی است.

۶.۴. قوت مُتَّصِلَه.

قضیه‌ی اصلی این مبحث اینست که مجموعه‌ی اعداد حقیقی ناشمارا است (۶.۴.۴).

۶.۴.۱. تعریف. اگر مجموعه‌ی A با $\mathbf{R}$ همعدد باشد گویند A قوت متصله[1] دارد.

---

(۱) $\mathbf{R}$ را، از این لحاظ که مرتبط است، «متصله‌ی اعداد حقیقی» خوانند. قوت یک مجموعه به معنی «عده‌ی اعضای آن» یعنی عدد اصلی آن (§ ۷) میباشد.

بیشتر مجموعه‌های مهم آنالیز شمارا هستند یا قوت متصله دارند. مثلاً، قضیه‌ی ذیل نشان میدهد که هر بازه‌ی محدود از اعداد حقیقی با مجموعه‌ی جمیع اعداد حقیقی همعدد است.

۶.۴.۲. قضیه. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $a < b$ آنگاه هر یک از بازه‌هائی که مبداءشان a و منتهایشان b است قوت متصله دارد.

برهان. فرض کنیم $a < b$. تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = a + (b - a)x \qquad (0 < x < 1)$$

تناظری 1ـ1 بین بازه‌های $(0, 1)$ و (a, b) است (چرا؟)، و تابع g با ضابطه‌ی

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x(1 - x)} \qquad (0 < x < 1)$$

تناظری 1ـ1 بین بازه‌ی $(0, 1)$ و $\mathbf{R}$ (چرا؟). بالنتیجه،

$$(a, b) \cong (0, 1) \cong \mathbf{R}.$$

اینک، بنا بر ۶.۲.۷، معلومست که هر یک از بازه‌های $(a, b]$، $[a, b)$، و $[a, b]$ نیز با $\mathbf{R}$ همعدد است. ▲

۶.۴.۳. امثله و تمرین

(آ). $\mathbf{R}^+$ قوت متصله دارد.

کافی است ملاحظه کنیم که تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = x/(1 - x) \qquad (0 < x < 1)$$

تناظری است 1ـ1 بین $(0, 1)$ و $\mathbf{R}^+$.

(ب). مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی قوت متصله دارد. (چرا؟)

(پ). بازاءِ هر عدد حقیقی a، بازه‌های (a, ∞) و $(-\infty, a)$ قوت متصله دارند. (چرا؟)

(ت). به وسیله‌ی رابطه‌ی

$$y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}x - a_1\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} + b_1$$

ثابت کنید که بازه‌های $[a_1, a_2]$ و $[b_1, b_2]$ همعددند.

(ث). به وسیله‌ی تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1 + |x|}\right) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

ثابت کنید که $\mathbf{R}$ با بازه‌ی $(0, 1)$ همعدد است.

(ج). ثابت کنید که تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = x/(1 - |x|) \qquad (-1 < x < 1)$$

تناظری 1ـ1 بین بازه‌ی $(-1, 1)$ و $\mathbf{R}$ است.

۶.۴.۴. قضیه. $\mathbf{R}$ ناشمارا است.

برهان. بنا بر قضیه‌ی قبل، کافی است ثابت کنیم که بازه‌ی $I = [0, 1)$ ناشمارا است.

اثبات به طریقه‌ی معروف به دومین طریقه‌ی قطری کانتور[1] است، و قبلاً آن را با مثالی توضیح میدهیم. اگر I شمارا باشد اعضای آن را میتوان با $\mathbf{N}$ شماره‌گذاری کرد. پس، اگر هر یک از اعضا را با بسط اعشاری استانده‌ی آن نمایش دهیم، رشته‌ای از اعداد مانند

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1 = 0, & 3 & 0 & 1 & 4 & 5 & . & . & . \\
x_2 = 0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\
x_3 = 0, & 1 & 2 & 9 & 4 & 8 & . & . & . \\
x_4 = 0, & 5 & 1 & 0 & 0 & 8 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

حاصل میشود که، بنا بر فرض خلف، شامل جمیع اعداد حقیقی متعلق به I است. اینک، عدد

$$\xi = 0{,}2159\ldots$$

را، که بازاء هر n، رقم nم آن غیر از رقم nم x_n است میسازیم. بالبداهه، $\xi \in I$، ولی ξ با یکایک اعداد جدول فوق متفاوت است، زیرا، با هر یک از آنها، حد اقل در یک رقم اعشار متفاوت میباشد؛ و این با فرض خلف متناقض است.

برای اثبات قضیه، گوئیم اگر $I = [0, 1)$ شمارا باشد میتوان نوشت،

$$I = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\},$$

که در آن xها دو بدو متمایزند. فرض کنیم

$$0, c_{n,1}\, c_{n,2}\, c_{n,3} \ldots, c_{n,n} \ldots \quad (n \in \mathbf{N})$$

بسط x_n به کسر استانده‌ی اعشاری باشد. رشته‌ی $\{u_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } c_{n,n} \neq 0 \\ 1 & \text{اگر } c_{n,n} = 0 \end{cases}$$

تعریف میکنیم. رشته‌ی $\{u_n\}$ عدد حقیقی

$$\xi = 0{,}u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

را مشخص میکند، و $\xi \in I$. اما، ξ با هر یک از اعداد x_1، x_2، ...، x_n، ... در یک رقم اعشاری متفاوت است، و لهذا، مساوی هیچ یک از xها نیست. پس، I عضوی غیر از x_1، x_2، ...، x_n، ... دارد، و این خلاف فرض است. ▲

---

(۱) «اولین طریقه‌ی قطری» آنست که در ۶.۳ در «تبدیل کردن مجموعه‌ی اعداد منطق به یک رشته» بکار برده شد.

۶.۴.۵. قضیه. مجموعه‌ی اعداد اصم قوت متصله دارد.
برهان. مجموعه‌ی اعداد اصم مجموعه‌ی $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ است. پس، بنا بر ۶.۴.۴ و ۶.۲.۸، قوت متصله دارد. ▲
از اینجا بنا بر ۶.۳.۳،

۶.۴.۶. قضیه. مجموعه‌ی اعداد متعالی قوت متصله دارد.

۶.۴.۷. قضیه. اتحادیه‌ی مجموعه‌ای منتها شمارا از مجموعه‌هائی دو بدو جدا از هم که هر یک قوت متصله دارد قوت متصله دارد.
برهان. ابتدا فرض کنیم $E=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ مجموعه‌ای شمارا از مجموعه‌های دو بدو جدا از هم A_1، A_2، ... باشد، و هر یک از این مجموعه‌ها قوت متصله داشته باشد. بنا بر ۶.۴.۲، بازاء هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ی A_n با بازه‌ی $(1/(n+1), 1/n]$ همعدد است. پس، اتحادیه‌ی Aها با اتحادیه‌ی بازه‌های

$$(1/2, 1], \qquad (1/3, 1/2], \qquad (1/4, 1/3], \ldots$$

همعدد میباشد، و به آسانی دیده میشود که اتحادیه‌ی این بازه‌ها بازه‌ی $(0, 1]$ است، که قوت متصله دارد.
اثبات در حالتی که E متناهی باشد به همین قیاس است. ▲

۶.۴.۸. قضیه. اگر مجموعه‌ی A شمارا و مجموعه‌ی B دارای قوت متصله باشد مجموعه‌ی $A\times B$ قوت متصله دارد.
برهان. بنا بر مفروضات، $A\cong\mathbf{N}$ و $B\cong[0, 1)$. پس، بنا بر ۷ : ۶.۱.۵، کافی است ثابت کنیم که مجموعه‌ی $\mathbf{N}\times[0, 1)$ قوت متصله دارد. برای این منظور تابع f را با ضابطه‌ی

$$f(n, x)=n+x \qquad (n\in\mathbf{N}, x\in[0, 1))$$

اختیار میکنیم. به آسانی دیده میشود که f تناظری 1ـ1 بین $\mathbf{N}\times[0, 1)$ و بازه‌ی $[1, \infty)$ است (ثابت کنید). پس، بنا بر پ : ۶.۴.۳ حکم برقرار است. ▲

چنانکه از قضایای سابق استنباط میشود، مجموعه‌های دارای قوت متصله «بسیار پرعضو» هستند. حاصلجمع تعدادی شمارا از آنها قوت متصله دارد، و حاصلضرب مجموعه‌ای دارای قوت متصله در مجموعه‌ای شمارا قوت متصله دارد. مجموعه‌ی جمیع نقاط یک محور با $\mathbf{R}$ همعدد، و لهذا، دارای قوت متصله است. شهوداً، عده‌ی نقاط صفحه‌ی اقلیدسی به مراتب بیشتر از عده‌ی نقاط یک محور است، و عده‌ی نقاط مربع $0<{x \atop y}\leqslant 1$ به مراتب بیشتر از عده‌ی نقاط بازه‌ی $[0, 1)$ و به مراتب کمتر از عده‌ی نقاط صفحه‌ی اقلیدسی است. معذلک، همه‌ی این مجموعه‌ها قوت متصله دارند. بطور کلی،

۶.۴.۹. قضیه. اگر مجموعه‌های A و B قوت متصله داشته باشند مجموعه‌ی $A \times B$ هم قوت متصله دارد.

برهان. چون هر مجموعه‌ی دارای قوت متصله با بازه‌ی $(0, 1]$ همعدد است، کافی است ثابت کنیم که

$$(0, 1] \times (0, 1] \cong (0, 1].$$

مربع طرف چپ مجموعه‌ی $A = \{(x, y) \mid 0 < x \leqslant 1 \,\&\, 0 < y \leqslant 1\}$ است، و مجموعه‌ی طرف راست مجموعه‌ی $\{t \mid 0 < t \leqslant 1\}$. به آسانی میتوان تناظری 1ـ1 بین این دو مجموعه برقرار کرد. برای این منظور به بسطهای اعشاری متوسل میشویم؛ منتها، در مواردی که یک عدد دو بسط اعشاری دارد، آن را که بینهایت‌بار ارقامش ناصفر هستند میگیریم (مثلاً، بسط $2/5$ را $0{,}3\,999\ldots$ میگیریم نه $0{,}4\,000\ldots$، و بسط 1 را $0{,}999\ldots$ میگیریم نه $1{,}000\ldots$). اینک فرض کنیم (x, y) نقطه‌ی دلخواهی از مربع A باشد، و

$$x = 0{,}x_1x_2x_3\ldots, \qquad y = 0{,}y_1y_2y_3\ldots.$$

نقطه‌ی (x, y) را با عدد

$$t = 0{,}x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots,$$

که متعلق به بازه‌ی $(0, 1]$ است، جفت میکنیم. بالعکس، اگر $t \in (0, 1]$ و

$$0{,}c_1c_2c_3c_4c_5\ldots$$

بسط اعشاری t باشد، و فرض کنیم

$$x = 0{,}c_1c_3c_5\ldots, \qquad y = 0{,}c_2c_4\ldots,$$

زوج مرتب (x, y) متعلق به مربع مذکور خواهد بود. با اندک تأملی معلوم میشود که تناظری که به شرح فوق بین A و $(0, 1]$ برقرار شد 1ـ1 است. ▲

۶.۴.۱۰. قضیه. اگر $I = \{0, 1\}$ مجموعه‌ی $I^{\mathbf{N}}$ قوت متصله دارد.

برهان. مجموعه‌ی $I^{\mathbf{N}}$ مجموعه‌ی جمیع توابع بر $\mathbf{N}$ بتوی I است، یعنی مجموعه‌ی جمیع رشته‌هائی که جمله‌هایشان 0 یا 1 است. از این رشته‌ها، مجموعه‌ی جمیع آنهائی را که بینهایت‌بار 1 در آنها میآید A و مجموعه‌ی سایرین را B مینامیم. واضح است که

$$I^{\mathbf{N}} = A \cup B, \qquad A \cap B = \varnothing. \tag{۱}$$

اینک هر رشته مانند

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad (a_i = 0 \vee a_i = 1) \tag{۲}$$

را با عدد

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots \tag{۳}$$

جفت میکنیم. سلسله‌ی اخیر نمایش عددی است مانند a، که $0 \leqslant a \leqslant 1$. اگر رشته‌ی (۲) متعلق به B باشد کسر ثنائی (۳) مختوم است، و a عددی منطق میباشد. بعلاوه، به دو رشته‌ی متمایز متعلق به B دو عدد منطق متمایز تعلق میگیرد. پس، مجموعه‌ی B همعدد با مجموعکی از

مجموعه‌ی اعداد منطق متعلق به بازه‌ی $[0, 1]$ میباشد. بنا بر این، B منتها شمارا است، و چون نامتناهی است (چرا؟)، شمارا میباشد. خلاصه،

$$B \cong \mathbf{N}. \tag{۴}$$

اینک فرض کنیم رشته‌ی (۲) عضو دلخواهی از A باشد. در این صورت، عدد (۳) نظیر آن متعلق به بازه‌ی $[0, 1)$ است، و بالعکس، اگر a عضو دلخواهی از این بازه باشد یک و تنها یک بسط ثنائی به صورت (۳) دارد، که در آن، بینهایت بار $a_i = 1$. پس، اگر عضو (۲) از A را با عضو (۳) از بازه‌ی $[0, 1)$ جفت کنیم تناظری 1ـ1 بین این دو مجموعه برقرار میشود. بالنتیجه، چون بازه‌ی مذکور قوت متصله دارد،

$$A \cong \mathbf{R}. \tag{۵}$$

از (۱)، (۴)، و (۵)، به موجب ۶.۲.۷، خواهیم داشت:

$$I^{\mathbf{N}} = A \cup B \cong A \cong \mathbf{R}. \blacktriangle$$

مجموعه‌ی $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$، و بطور کلی، مجموعه‌ی $\{0, 1\}^{A}$، خاصیت مهمی دارد، و آن اینکه

۶.۴.۱۱. قضیه. اگر $I = \{0, 1\}$ و A مجموعه‌ای باشد

$$I^{A} \cong \mathcal{P}(A).$$

برهان. ثابت میکنیم که تناظری 1ـ1 بین I^{A} و $\mathcal{P}(A)$ وجود دارد. فرض کنیم f عضو دلخواهی از I^{A} باشد. بالنتیجه،

$$\text{ح}f = A, \qquad f(x) = 0 \vee f(x) = 1 \qquad (x \in A).$$

حال تابع φ را بر I^{A} با ضابطه‌ی

$$\varphi(f) = \{x \mid x \in A \,\&\, f(x) = 1\} \tag{۱}$$

تعریف میکنیم. بالبداهه، $\varphi(f)$ مجموعکی از A، و لهذا، عضوی از $\mathcal{P}(A)$ است. پس، φ تابعی است بر I^{A} بتوی $\mathcal{P}(A)$. اینک ثابت میکنیم که این تابع 1ـ1 و بروی $\mathcal{P}(A)$ است.

اولاً، فرض کنیم $f, g \in I^{A}$ و $\varphi(f) = \varphi(g)$ (۲). گوئیم $f = g$. چون $A = \text{ح}g = \text{ح}f$، کافی است ثابت کنیم که، بازاء هر x از A، $f(x) = g(x)$، و این واضح است، زیرا، بنا بر (۱) و (۲)،

$$\{x \mid x \in A \,\&\, f(x) = 1\} = \{x \mid x \in A \,\&\, g(x) = 1\}.$$

پس، بازاء هر x از A، $g(x) = 1 \;\text{ت}\; f(x) = 1$. اینک فرض کنیم x عضو دلخواهی از A باشد. اگر $f(x) = 1$ آنگاه، بنا بر معادله‌ی فوق، $g(x) = 1$، و اگر $f(x) \neq 1$ آنگاه $f(x) = 0$، و بعلاوه، بنا بر معادله‌ی فوق، $g(x) \neq 1$، و لهذا، $g(x) = 0$. پس، در هر حال، $f(x) = g(x)$. بالنتیجه، $f = g$.

ثانیاً، φ تابعی است بروی $\mathcal{P}(A)$. برای اثبات فرض کنیم X عضو دلخواهی از $\mathcal{P}(A)$ باشد. تابع f_X را بر A با ضابطه‌ی

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \text{ اگر} \\ 0 & x \in A - X \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف میکنیم . بالبداهه، $f_X \in I^A$ و $\varphi(f_X) = X$. ▲

۶.۴.۱۲. تمرین

۱. به دومین طریقه‌ی قطری ثابت کنید که مجموعه‌ی جمیع توابع بر **N** بتوی **N** ناشمارا است.

۲. بازاءِ هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ی جمیع نقاط فضای اقلیدسی nبعدی قوت متصله دارد.

۳. اگر A مجموعه‌ای متناهی و غیر خالی و B مجموعه‌ای دارای قوت متصله باشد مجموعه‌ی $A \times B$ قوت متصله دارد.

۴. a، b، و c دو بدو متمایزند، و $A = \{a, b, c\}$، و $I = \{1, 0\}$. تناظر 1ـ1 بین I^A و $\mathfrak{P}(A)$ مذکور در برهان ۶.۴.۱۱ را با ازواج مرتب آن مشخص کنید.

۵. آیا مجموعه‌ای سراغ دارید که **R** از آن ضعیفتر باشد؟

۷ § حساب اعداد اصلی

۷.۱. کلیات. در ۷.۵ : ۳ با مفهوم عدد اصلی (عده‌ی اعضا) آشنا شدیم. عدد اصلی مجموعه‌ی A را

$$\text{card } A^{[2]}$$

مینامیم. عدد اصلی هر مجموعه‌ی متناهی عده‌ی اعضای آنست به معنی عادی، مثلاً،

$$\text{card }\{1\} = \text{card }\{a\} = 1, \qquad \text{card }\{0, 1\} = 2,$$

$$\text{card }\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = n^{[3]}$$

عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی اعداد ترانسفینی میباشند. بالاخص، عدد اصلی **N** را $\aleph_0$ و عدد اصلی **R** را $\aleph$ میخوانیم.

چنانکه در ۷.۵ : ۳ گفته شد،

$$A \cong B \;\underline{\overline{\text{ID}}}\; \text{card } A = \text{card } B. \qquad (۷.۱.۱)$$

اگر a یک عدد اصلی باشد هر مجموعه مانند A را که a عضو داشته باشد (یعنی عدد اصلیش a باشد) یک نماینده‌ی عدد a میخوانیم. بنا بر ۷.۱.۱، واضح است که هر دو نماینده‌ی یک عدد اصلی همعدد میباشند.

چنانکه خواهیم دید، با اعداد اصلی میتوان بر طبق قواعد معین حساب کرد، و بسیاری از نتایج حاصل در ۶ § را به صورتهائی ساده و زیبا بیان نمود.

---

(۱) این تابع را تابع مُشخِص مجموعه‌ی X خوانند.

(۲) از حروف اوایل کلمه‌ی cardinal، به معنی «اصلی»

(۳) حروف m و n همه جا به عنوان عدد اصلی متناهی بکار میروند.

۷.۲۰. مقایسه. در میان اعـداد اصلی میتوان نسبتهائی تـرتیبی نظیر نسبتهای کـوچکتری و نابیشتری تعریف کرد. بطور کلی، تعریفات اساسی در حساب اعداد اصلی معمولاً به وسیله‌ی نماینده‌ها است. منتها، تعریف یک مفهوم باید چنان باشد که از نماینده‌هائی کـه اختیار میشوند مستقل باشد. این امـر مستلزم اینست کـه، قبل از تعریف یک مفهوم، حکمی کـه استقلال آن مفهوم را از نماینده‌ها تضمین کند ثابت نمائیم. مثلاً، فرض کنیم a و b دو عدد اصلی باشند، و A نمـاینده‌ای از a ($\text{card } A = \text{a}$) و B نمـاینده‌ای از b ($\text{card } B = \text{b}$) بـاشـد. بنا بـر تعریف، $\text{a} < \text{b}$ را به معنی $A < B$ میگیریم. این تعریف فقط وقتی قابل قبول است که اگر، بجای A و B، نماینده‌های دیگری مانند A' و B' از a و b اختیار کنیم آنگاه $A < B$ معادل $A' < B'$ باشد. چون این شرط، بنا بر قسمت (ب) از ۵ : ۶.۱.۵، بـرقـرار است، قسمت اول تعریف ذیل موجه است. قسمت دوم بر طبق روش کلی در تعریف نسبتهای ترتیبی است.

۷.۲.۱. تعریف. فرض کنیم a و b دو عدد اصلی باشند.
I. $\text{a} < \text{b}$ یعنی نماینده‌ای از a از نماینده‌ای از b ضعیفتر است.
II. $\text{a} \leqslant \text{b}$ یعنی $\text{a} < \text{b} \vee \text{a} = \text{b}$
III. نسبتهای $>$ و $\geqslant$، بترتیب، عکس نسبتهای $<$ و $\leqslant$ هستند.

به آسانـی دیـده میشود کـه نسبت $<$ یـک نسبت ترتیبی است. اولاً، بنا بـر ۳ : ۶.۱.۵ و ۸ : ۷.۲.۶ : ۳، این نسبت نامنعکس و متعدی است. ثـانیاً، فـرض کنیم a و b دو عـدد اصلی باشند، و A نماینده‌ای از a و B نمـاینده‌ای از b باشد. بنا بـر ۷.۲.۴ : ۳، سه حـالت ممکـن است اتفاق افتد: (آ) A با مجموعکی از B و B با مجموعکـی از A همعـدد است؛ در ایـن صورت، بنا بر قضیه‌ی هم‌ارزی، $A \cong B$، و بالنتیجه، $\text{a} = \text{b}$. (ب) $A < B$، و بـالنتیجه، $\text{a} < \text{b}$. (پ) $B < A$، و بـالنتیجه، $\text{b} < \text{a}$. خلاصه، نسبت $<$ مجموعه‌ی اعـداد اصلی را مرتب میکند. ضمناً، ملاحظه کنید که اگر اعداد اصلی a و b متنـاهـی باشند تعـریف نسبت $<$ بر طبق ۷.۲.۱ با تعریف عادی این نسبت مطابقت دارد.

بنا بر خواص عمومی نسب ترتیبی، نسبت $\leqslant$ در اعداد اصلی منعکس، متعدی، قناس، و مرتبط است. بالاخره، بیان نسبت $\leqslant$ بر حسب نماینده‌ها آسان است. فرض کنیم a و b دو عدد اصلی باشند، و A نماینده‌ای از a و B نماینده‌ای از b باشد. شرط لازم و کافی برای آنـکه $\text{a} \leqslant \text{b}$ آنست که $A \leqslant B$.

۷.۲.۲. امثله

(آ). بنا بر ۴ : ۶.۱.۵، اگر $A \subseteq B$ آنگاه

$$\text{card } A \leqslant \text{card } B.$$

(ب). اگر n یک عدد اصلی متناهی باشد آنگاه

$$n < \aleph_0.$$

بـرای اثبات، نمـاینده‌ای از n، مثلاً $\mathbf{N}_n$، و نـمـاینده‌ای از $\aleph_0$، مثلاً $\mathbf{N}$، اختیار میکنیم. بالبداهه، $\mathbf{N}_n < \mathbf{N}$ (چرا؟). بالنتیجه، بنا بر ۷.۲.۱، $n < \aleph_0$.

(پ). گزاره‌ی

(۱) A منتها شمارا است

یعنی A متناهی یا شمارا است. اگـر A متناهی باشد، بنا بـر مثال (آ)، $\text{card } A < \aleph_0$؛ و اگر A شمارا باشد $\text{card } A = \aleph_0$. پس، (۱) معادل است با

$$\text{card } A \leqslant \aleph_0.$$

(ت). گزاره‌ی

A ناشمارا است

نقیض گزاره‌ی (۱) مثال قبل است، و معادل

$$\aleph_0 < \text{card } A$$

میباشد. بالاخص،

$$\aleph_0 < \aleph.$$

(ث). بنا بر مثالهای (ب) و (ت)،

$$1 < 2 < \cdots < n \cdots < \aleph_0 < \aleph.$$

(ج). قضیه‌ی ۶.۲.۲ با اعداد اصلی چنین بیان میشود:

$$(A \subseteq B \ \& \ \text{card } B = \aleph_0) \supset \text{card } A \leqslant \aleph_0.$$

۷.۳. جمع. در اعداد اصلی متناهی، حاصلجمع دو عدد m و n را میتوان چنین بدست آورد که دو مجموعه‌ی جدا از هم مانند A و B، کـه اولی m عضو و دومـی n عضو داشته بـاشد، اختیار کنیم. $m+n$ عدد اصلی مجموعه‌ی $A \cup B$ خواهد بود، و آن از مجموعه‌های A و B (نماینده‌های m و n) مستقل است، و فقط با عده‌ی اعضای آنها مشخـص میشود. اینک فـرض کـنیم a و b دو عـدد اصلـی باشند، و A نمـاینده‌ای از a و B نمـاینده‌ای از b بـاشد، و $A \cap B = \varnothing$. مجموعه‌ی $A \cup B$ عدد اصلی مشخصی دارد، و ما میخواهیم این عدد اصلی را حاصلجمع اعـداد a و b بنـامیم. این تعریف در صورتی قابل قبول است کـه اگـر A' و B' نماینده‌های دیگری از a و b و از هم جدا باشند اعداد اصلی مجموعه‌های $A \cup B$ و $A' \cup B'$ یکی باشند، یعنـی مجموعه‌های $A \cup B$ و $A' \cup B'$ همعدد باشند. قضیه‌ی ۶.۱.۳ بـرقـراری این شرط را تضمین میکند. پس، تعریف ذیل قابل قبول است:

۷.۳.۱. تعریف. فـرض کـنیم a و b دو عـدد اصلـی باشند. $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ یعنی عـدد اصلی مجموعه‌ی $A \cup B$، که در آن، A نماینده‌ای دلخواه از a و B نماینده‌ای دلخـواه از b است، و $A \cap B = \varnothing$.

خواص اساسی جمع در قضیه‌ی ذیل آمده است:

۷.۳.۲. قضیه. بازاء هر سه عدد اصلی a، b، و c،

I. $\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{b}+\mathrm{a}.$

II. $\mathrm{a}+(\mathrm{b}+\mathrm{c})=(\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{c}.$

III. $\mathrm{a} \leqslant \mathrm{b} \supset \mathrm{a}+\mathrm{c} \leqslant \mathrm{b}+\mathrm{c}.$

جملگی این روابط بدیهی هستند. مثلاً، برای اثبات دومی، کافی است ملاحظه کنیم که اگر A، B، و C نمایندههائی دو بدو جدا از هم از a، b، و c باشند، $\mathrm{a} + (\mathrm{b} + \mathrm{c})$ عدد اصلی مجموعهی $A \cup (B \cup C)$ است، و $(\mathrm{a} + \mathrm{b}) + \mathrm{c}$ عدد اصلی مجموعهی $(A \cup B) \cup C$، و چون این دو مجموعه با هم متساویند، همعدد میباشند. ضمناً، بر طبق معمول، طرفین II را $\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ مینامیم.

با توجه به ۶.۱.۴، تعریف عمل جمع را میتوان در مورد هر مجموعه از اعداد اصلی تعمیم داد:

۷.۳.۳. تعریف. فرض کنیم $\mathrm{K} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots\}$ مجموعهای از اعداد اصلی باشد. اگر A، B، C، ... مجموعههائی دو بدو جدا از هم باشند، و

$$\operatorname{card} A = \mathrm{a}, \qquad \operatorname{card} B = \mathrm{b}, \qquad \operatorname{card} C = \mathrm{c}, \ldots,$$

آنگاه، بنا بر تعریف،

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + \cdots$$

عدد اصلی مجموعهی $A \cup B \cup C \cup \cdots$ میباشد. (چون اتحادیهی چند مجموعه از ترتیب و دستهبندی جمل مستقل است، حاصلجمع $\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + \cdots$ نیز چنین میباشد.)

۷.۳.۴. امثله

(آ). اگر $A \cap B = \varnothing$ آنگاه

$$\operatorname{card} (A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

حکم نتیجهی مستقیم تعریف است.

(ب). $n + \aleph_0 = \aleph_0$.

طرف اول به معنی $\operatorname{card} (A \cup B)$ است، که در آن $A \cap B = \varnothing$، A نمایندهای از n (مجموعهای دارای n عضو)، و B نمایندهای از $\aleph_0$ (مجموعهای شمارا) است. در این شرایط، بنا بر ۶.۲.۴، مجموعهی $A \cup B$ شمارا است، یعنی، $A \cup B \cong \mathbf{N}$. پس،

$$n + \aleph_0 = \operatorname{card} (A \cup B) = \operatorname{card} \mathbf{N} = \aleph_0.$$

اثبات مستقیم آسان است. نمایندهی n را $\{1, 2, \ldots, n\}$ و نمایندهی $\aleph_0$ را $\{n+1, n+2, \ldots\}$ میگیریم. این دو نماینده از هم جدا هستند، و اتحادیه آنها $\mathbf{N}$ است، که عدد اصلیش $\aleph_0$ میباشد.

(پ). این قضیه که اتحادیهی دو مجموعهی شمارای جدا از هم شمارا است با رابطهی

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,$$

و این قضیه که اتحادیهی مجموعهای شمارا از مجموعههای شمارای دو بدو جدا از هم شمارا است با رابطهی ذیل بیان میشود:

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0.$$

(ت).

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \aleph_0. \tag{۱}$$

زیرا، مجموعههای

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, \ldots, A_n = \{n\}, \ldots$$

نمایندههائی دو بدو از هم جدا از اعداد اصلی واقع در طرف اول رابطهی (۱) میباشند. بنا بر ۷.۳.۳، طرف اول (۱) عدد اصلی مجموعهی

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

است، که همان $\mathbf{N}$، و عدد اصلیش $\aleph_0$ میباشد.

۷.۳.۵. تمرین

۰۱ ثابت کنید که

(آ) $\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots (\text{جمله } n) = \aleph_0.$

(ب) $n + \aleph = \aleph.$

(پ) $\aleph_0 + \aleph = \aleph.$

(ت) $\aleph + \aleph + \cdots (\text{جمله } n) = \aleph.$

(ث) $\aleph + \aleph + \cdots + \aleph + \cdots = \aleph.$

۰۲ روابط ذیل را توضیح دهید و ثابت کنید:

(آ) $2 + 2 + \cdots + 2 + \cdots = \aleph_0.$

(ب) $1 + 2 + \cdots + n + \cdots = \aleph_0.$

(پ) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + \cdots = \aleph_0.$

۰۳ این حکم را باطل کنید که همواره اگر $a < b$ آنگاه

$$a + c < b + c.$$

۰۴ اگر $\{a_i\}$ رشتهای اکیداً صعودی از اعداد اصلی باشد $(a_i < a_{i+1})$ و $m = a_1 + a_2 + \cdots$ آنگاه

$$a_i < m \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

۰۵ بازاء هر دو عدد اصلی a و b،

$$a + b \geqslant a, \qquad a + b \geqslant b.$$

۷.۴. ضرب. تعریف ذیل بنا بر ۷ : ۶.۱.۵ موجه است:

۷.۴.۱. تعریف. اگر a و b دو عدد اصلی باشند ab عدد اصلی مجموعهی $A \times B$ است، که در آن، A نمایندهای از a و B نمایندهای از b میباشد. (تعمیم در مورد تعدادی متناهی از اعداد اصلی آسان است.)

۷.۴.۲. قضیه. همواره

I. $\quad ab = ba.$

II. $\quad a(bc) = (ab)c.$

III. $\quad a(b + c) = ab + ac.$

IV. $\quad a \leqslant b \supset ac \leqslant bc.$

اثبات این خواص با توسل به نمایندەها بدیهی است. مثلاً، اولی ناشی از ۶ : ۶.۱.۵ میباشد.

۷.۴.۳. امثله

(آ). بنا بر ۶.۲.۶،

$$n\aleph_0 = \aleph_0. \qquad (۱)$$

$$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0. \qquad (۲)$$

(ب). بنا بر ۶.۴.۸،

$$\aleph_0\aleph = \aleph.$$

(پ). بنا بر ۶.۴.۹،

$$\aleph\aleph = \aleph.$$

قضیه‌ی ذیل مبین بستگی «جمع مکرر» با ضرب در $\aleph_0$ است:

۷.۴.۴. قضیه. بازاء هر عدد اصلی a،

$$\mathrm{a}\aleph_0 = \mathrm{a}+\mathrm{a}+\mathrm{a}+\cdots.$$

برهــان. فرض کنیم A نمایندەای از a باشد، و

$$A_n = \{(x, n) \mid x \in A\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

بالبداهه A_nها دو بدو از هم جدا هستند، و بازاء هر n، $\mathrm{card}\ A_n = \mathrm{a}$. پس، اگر

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

آنگاه

$$\mathrm{card}\ B = \mathrm{a}+\mathrm{a}+\mathrm{a}+\cdots.$$

از طرف دیگر، بنا بر تعریف A_nها، $B \cong A \times \mathbf{N}$، و بالنتیجه،

$$\mathrm{card}\ B = \mathrm{card}\ A \cdot \mathrm{card}\ \mathbf{N} = \mathrm{a}\aleph_0. \ \blacktriangle$$

۷.۴.۵. تمرین

۱. بازاء هر دو عدد ترانسفینی a و b،

$$\mathrm{ab} \geqslant \mathrm{a}+\mathrm{b}$$

۲. بازاء هر عدد اصلی متناهی ناصفر n،

$$n\aleph = \aleph.$$

۷.۵. قوه. مقدمةً قضایائی برای موجه ساختن تعریف قوه و تسهیل اثبات احکام آن میآوریم.

۷.۵.۱. قضیه. اگر

$$A \cong C, \qquad B \cong D$$

آنگاه

$$A^B \cong C^D.$$

برهان. فرض کنیم $A \cong C$ و $B \cong D$. پس، تناظری 1ـ1 مانند φ بین A و C و تناظری 1ـ1 مانند ψ بین B و D هست. اینک ثابت میکنیم که تناظری 1ـ1 بین A^B و C^D وجود دارد. اگر f عضو دلخواهی از A^B باشد

$$f = \{(b, a), (b', a'), \ldots\}, \qquad \text{ح} f = B, \qquad \text{حع} f \subseteq A.$$

فرض کنیم

$$g = \{(\psi(b), \varphi(a)), (\psi(b'), \varphi(a')), \ldots\}.$$

به آسانی دیده میشود که g تابعی است بر D بتوی C (ثابت کنید)، یعنی، $g \in C^D$. بدین گونه، بازاء عضو دلخواه f از A^B عضو g از C^D مشخص میشود. اینک تابع θ را بر A^B بتوی C^D با ضابطه‌ی

$$\theta(f) = g$$

تعریف میکنیم. به آسانی دیده میشود که اولاً، θ یکبیک است، و ثانیاً، θ تابعی است بروی C^D (به تفصیل توضیح دهید). بالنتیجه، θ تناظری است 1ـ1 بین A^B و C^D.

صورت رسمی برهان اینست. فرض کنیم f عضو دلخواهی از A^B باشد. چون f تابعی بر B بتوی A و φ تابعی بر A بروی C است، بنا بر ۳.۴.۹ : ۳، $\varphi \circ f$ تابعی است بر B بتوی C($\varphi \circ f \in C^B$)، و چون ψ^- تابعی بر D بروی B است، $\varphi \circ f \circ \psi^-$ تابعی بر D بتوی C میباشد. خلاصه،

$$\varphi \circ f \circ \psi^- \in C^D.$$

بعلاوه، اگر g عضو دلخواهی از C^D باشد یک و تنها یک تابع مانند f هست که $f \in A^B$ و $g = \varphi \circ f \circ \psi^-$، و آن $\varphi^- \circ g \circ \psi$ است. پس، اگر تابع θ را بر A^B با ضابطه‌ی

$$\theta(f) = \varphi \circ f \circ \psi^- \qquad (f \in A^B)$$

تعریف کنیم این تابع 1ـ1 است و حوزه‌ی مقادیرش C^D میباشد. ▲

۷.۵.۲. قضیه.

I. $\quad B \cap C = \varnothing \supset A^B \times A^C \cong A^{B \cup C}$

II. $\quad (A \times B)^C \cong A^C \times B^C.$

III. $\quad (A^B)^C \cong A^{B \times C}.$

برهان. اثبات هر سه حکم آسان است. برای I، باید ملاحظه کرد که اگر $B \cap C = \varnothing$ آنگاه هر تابع بر $B \cup C$ بتوی A اتحادیه‌ی دو تابع است که یکی بر B بتوی A است و دیگری بر C بتوی A؛ و بالعکس، اتحادیه‌ی دو تابع که یکی بر B بتوی A و دیگری بر C بتوی A باشد تابعی است بر $B \cup C$ بتوی A. تفصیل استدلال از این قرار است: فرض کنیم $B \cap C = \varnothing$. اگر f عضو دلخواهی از $A^{B \cup C}$ باشد آنگاه $\text{ح} f = B \cup C$ و $\text{حع} f \subseteq A$. فرض کنیم

$$f_B = f \mid B, \qquad f_C = f \mid C^{1}.$$

---

[1] $f \mid E$ تحدید f است به E (۳.۳.۲ : ۳).

اینک تابع φ را بر $A^{B\cup C}$ با ضابطه‌ی
$$\varphi(f) = (f_B, f_C)$$
تعریف میکنیم. اولاً، این تابع 1ـ1 است. زیرا، اگر $f, g \in A^{B\cup C}$ و $\varphi(f) = \varphi(g)$ آنگاه $(f_B, f_C) = (g_B, g_C)$، و بالنتیجه، $f_B = g_B$ و $f_C = g_C$. پس،
$$f = f_B \cup f_C = g_B \cup g_C = g.$$
ثانیاً، φ تابعی است بروی $A^B \times A^C$. زیرا، عضو دلخواهی از این حاصلضرب مستقیم به صورت (g, h) است که $g \in A^B$ و $h \in A^C$. اینک اگر $f = g \cup h$، به مناسبت اینکه $B \cap C = \varnothing$، f تابع است. بعلاوه، $\text{ح}f = \text{ح}g \cup \text{ح}h = B \cup C$ و $\text{حع} f \subseteq A$. پس، $f \in A^{B\cup C}$. بالاخره، $\varphi(f) = (g, h)$.
برای اثبات II باید ملاحظه کرد که اگر $f \in (A \times B)^C$ آنگاه بازاء هر x از C، $f(x) \in A \times B$. حال اگر
$$g = \{(x, y) \mid x \in C \;\&\; (\text{است } f(x) \text{ مختص اول } y)\},$$
$$h = \{(x, y) \mid x \in C \;\&\; (\text{است } f(x) \text{ مختص دوم } y)\},$$
آنگاه g تابعی بر C بتوی A و h تابعی بر C بتوی B میباشد، و $f(x) = (g(x), h(x))$.
به آسانی دیده میشود که تناظر $\varphi : f \to (g, h)$ تناظری 1ـ1 بین $(A \times B)^C$ و $A^C \times B^C$ است.
بالاخره، برای اثبات III، ملاحظه میکنیم که هر تابعی بر $B \times C$ بتوی A را میتوان خانواده‌ای از توابع بر B بتوی A با مجموعه‌ی اندیسگذار C شمرد، و بالعکس. ▲

۷.۵.۳. تمرین

۱. ثابت کنید که
$$A \leqslant B \supset A^C \leqslant B^C.$$
۲. ثابت کنید که
$$A \leqslant B \supset C^A \leqslant C^B.$$

بنا بر ۷.۵.۱، تعریف ذیل موجه است:

۷.۵.۴. تعریف. اگر a و b دو عدد اصلی باشند a^{b} یعنی عدد اصلی مجموعه‌ی A^B، که در آن، A نماینده‌ای از a و B نماینده‌ای از b است.
بالاخص، 2^{a} عدد اصلی مجموعه‌ی $\{0, 1\}^A$ است، که در آن، $\operatorname{card} A = \mathrm{a}$.

۷.۵.۵. قضیه. همواره

I. $\mathrm{a}^{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}^{\mathrm{b}+\mathrm{c}}.$

II. $(\mathrm{ab})^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}^{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{b}^{\mathrm{c}}.$

III. $(\mathrm{a}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}^{\mathrm{bc}}.$

IV. $\quad a^1 = a.$

V. $\quad 1^a = 1.$

VI. $\quad a \leqslant b \supset c^a \leqslant c^b.$

VII. $\quad a \leqslant b \supset a^c \leqslant b^c.$

سه قسمت اول نتایج مستقیم ۷.۵.۲ و دو قسمت اخیر نتایج مستقیم مسائل ۷.۵.۳ است. مثلاً، برای اثبات I، فرض کنیم A، B، و C نمایندههائی از اعداد مورد بحث باشند، و $B \cap C = \varnothing$. بنا بر I : ۷.۵.۲،

$$A^B \times A^C \cong A^{B \cup C}$$

پس،

$$a^{b+c} = \text{card } A^{B \cup C} = \text{card } (A^B \times A^C) \; [\text{۷.۴.۱}]$$
$$= \text{card } A^B \cdot \text{card } A^C = a^b \cdot a^c. \blacktriangle$$

چون $2 = \text{card } \{0, 1\}$، بنا بر ۶.۴.۱۰ و تعریف قوه،

۷.۵.۶. قضیه. $2^{\aleph_0} = \aleph$.

همچنین، بنا بر ۶.۴.۱۱،

۷.۵.۷. قضیه. اگر A مجموعهای باشد

$$\text{card } \mathcal{P}(A) = 2^{\text{card } A}$$

بالاخره، بنا بر ۷.۴.۸ : ۳،

۷.۵.۸. قضیه. بازاء هر عدد اصلی مانند a،

$$a < 2^a.$$

۷.۵.۹. پارادوکس کانتور. فرض کنیم V مجموعهی جمیع مجموعهها و $A = \mathcal{P}(V)$ مجموعهی مجموعکان آن باشد. بنا بر تعریف V، $A \subseteq V$، و بالنتیجه،

$$\text{card } A \leqslant \text{card } V \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، بنا بر ۷.۵.۸ و ۷.۵.۷،

$$\text{card } V < 2^{\text{card } V} = \text{card } A$$

و این با (۱) متناقض است.

این یکی از پارادوکسهای تئوری شهودی مجموعهها است، که در ۲.۸ : ۲ از آنها نام بردیم.

۷.۵.۱۰. مسئلهی متصله. چنانکه دانسته شد، $\aleph_0$ سرسلسلهی اعداد اصلی ترانسفینی است، بدین معنی که، بازاء هر عدد ترانسفینی مانند a، $a > \aleph_0$. از طرف دیگر،

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

آیا بین $\aleph_0$ و $\aleph$ عددی اصلی وجود دارد؟ ایـــن مسئله، کـه به مسئلهٔی متصله معروف است، علی‌رغم کوششهای ریاضیدانها، تا کنون حل نشده است.

۷.۶. امثله از محاسبه با اعداد اصلی. به وسیلهٔی قواعد سابق‌الذکر میتوان با اعــداد اصلی محاسبه کرد، و بعضی از احکامــی را که در ۶ § مستقیماً ثابت کــردیم به وسیلـهٔی این قواعد استخراج نمود.

۷.۶.۱. مجموعهٔی نقاط $\mathbf{R}^n$ قوت متصله دارد.
باید ثابت کرد که $\aleph = {}^n\aleph$. گوئیم

$$\aleph^n\ [۷\cdot۵\cdot۶] = (2^{\aleph_0})^n = 2^{n\aleph_0}\ [۷\cdot۴\cdot۳] = 2^{\aleph_0} = \aleph. \ \blacktriangle$$

۷.۶.۲. ثابت کنید که

$$\aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0}\ [۷\cdot۴\cdot۳:\text{آ}] = 2^{\aleph_0} = \aleph. \ \blacktriangle$$

بنا بر این، مجموعهٔی نقاط فضای $\aleph_0$بعدی همعدد با مجموعهٔی نقاط بازهٔی $(0, 1)$ است.

۷.۶.۳. $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0}$، زیرا، چون $\aleph \leqslant \aleph_0 \leqslant 2$،

$$\aleph = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \aleph^{\aleph_0} = \aleph. \ \blacktriangle$$

فصل ۳ ض

ترکیبیّات

۱ § مقدمه

۱.۰۱ ترکیبیّات یا آنالیز (یا ریاضیات) ترکیبیاتی را بالاجمال میتوان شاخه‌ای از ریاضیات تعریف کرد که موضوعش تعدید دسته‌هائی از اشیاء است که، در شرایط معین، از تعدادی از اشیاء ساخته شوند.
ترکیبیات اساساً بسیار قدیمی است، و زیبائی خاص آن همواره مورد توجه ریاضیدانها بوده است. در زمان حاضر، این مبحث در مسائل بسیار متعدد ریاضیات محض و ریاضیات کاربسته مورد استعمال یافته است، و از رشته‌هائی مانند جبر نوین، توپولوژی، تئوری بازیها، برنامه‌ریزی خطی، و غیره مسائلی تازه در آنالیز ترکیبیاتی برخاسته‌اند.
ترکیبیات موضوع کتابهای مفصل است. اطلاعات مختصری از این مبحث که در فصل حاضر میآید منحصر است به بعضی از حالات اساسی و بسیار مهم تعیین عده‌ی دسته‌هائی مشتمل بر تعدادی متناهی از اشیاء و واجد شرایط معین، که از تعدادی متناهی از اشیاء میتوان ساخت.
پیش از پرداختن بدین کار، اصل ساده و مهم معروف به اصل ضرب را، که اساس کار است، توضیح میدهیم.

۲ § اصل ضرب

۲.۰۱ بنا بر ۷.۳۰۷ : ۳، اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند آنگاه

$$\nu(A \times B) = \nu(A) \times \nu(B).$$

به عبارت دیگر، عده‌ی ازواج مرتبی مانند (a, b) که $a \in A$ و $b \in B$ مساوی حاصلضرب عده‌ی اعضای A است در عده‌ی اعضای B. این حکم را به آسانی میتوان به استقراء تعمیم داد:

۲.۱.۰۱ قضیه (اصل ضرب). اگر $n \geqslant 2$، و مجموعه‌های A_1، A_2، . . .، و A_n متناهی باشند، آنگاه

$$\nu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \nu(A_1) \cdot \nu(A_2) \ldots \nu(A_n).$$

به عبارت دیگر، عده‌ی nتائیهای مرتبی مانند $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ که

$$a_i \in A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

مساوی حاصلضرب عده‌ی اعضای مجموعه‌های A_1، A_2، . . .، و A_n است.

بالاخره، اصل ضرب را بدین صورت نیز میتوان بیان کرد:

۲.۱.۲. قضیه. (صورت دیگر اصل ضرب). فرض کنیم W_1، W_2، . . .، و W_k کارهائی باشند. اگر W_1 به n_1 طریق متمایز انجامپذیر باشد و، پس از انجام یافتن آن، W_2 به n_2 طریق متمایز مستقل از نتیجه‌ی انجام دادن کار اول انجامپذیر باشد، و هکذا، و بالاخره، W_k به n_k طریق متمایز مستقل از نتایج انجام دادن کارهای سابق انجامپذیر باشد، آنگاه k کار مذکور به ترتیب

$$(*) \qquad W_1, W_2, \ldots, W_k$$

به $n_1 n_2 \ldots n_k$ طرین متمایز انجامپذیرند. دو طریق انجام دادن رشته‌ی کارهای $(*)$ فقط و فقط وقتی متمایز محسوب میشوند که حد اقل در یک مرحله متضمن دو طریق متمایز در انجام دادن یکی از کارها باشند.

برهان. اگر طرق متمایز انجام دادن k کار مذکور را چنین نمایش دهیم:

$$\begin{array}{ll} W_1: & a_1, a_2, \ldots, a_{n_1} \\ W_2: & b_1, b_2, \ldots, b_{n_2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_k: & l_1, l_2, \ldots, l_{n_k} \end{array}$$

آنگاه هر یک از طرق متمایز انجام دادن کارهای $(*)$ را با nتائی مرتبی مانند $(a_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, l_{i_k})$، که در آن

$$1 \leqslant i_1 \leqslant n_1, \qquad 1 \leqslant i_2 \leqslant n_2, \qquad \ldots, \qquad 1 \leqslant i_k \leqslant n_k,$$

میتوان نمایش داد، و بالعکس. بدین گونه، تناظری 1ـ1 بین طرق متمایز انجام دادن رشته‌ی کارهای $(*)$ و حاصلضرب مستقیم مجموعه‌های

$$\{a_1, \ldots, a_{n_1}\}, \qquad \{b_1, \ldots, b_{n_2}\}, \qquad \ldots, \qquad \{l_1, \ldots, l_{n_k}\}$$

برقرار میشود (چرا این تناظر 1ـ1 است؟). پس، با توجه به اصل ضرب، حکم برقرار است. ▲

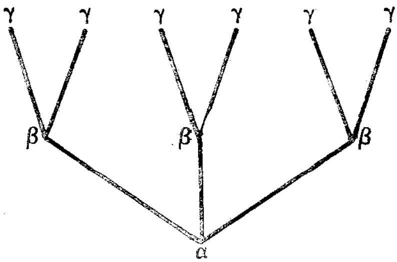
صورتهای مختلف اصل ضرب در حل مسائل گوناگون مربوط به شمردن بسیار بکار میآیند.

۲.۱.۳. امثله

(آ). از نقطه‌ی α به سه طریق میتوان به نقطه‌ی β رفت، و از نقطه‌ی β به دو طریق به نقطه‌ی γ. به چند طریق میتوان از نقطه‌ی α به نقطه‌ی γ رفت؟

بنا بر اصل ضرب، عده‌ی طرق مطلوب 3×2 است.

برای مزید توضیح، ملاحظه کنید که برای رفتن از α به β میتوان سه طریق متمایز ـ مثلاً، a_1، a_2، و a_3 ـ اختیار کرد، و پس از رسیدن به β، میتوان دو طریق متمایز ـ مثلاً، b_1 و b_2 ـ برای رفتن به γ اختیار نمود. تناظر 1ـ1 بین مجموعه‌ی طرق ممکنه‌ی رفتن از α به γ با مجموعه‌ی $\{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2\}$ بدیهی است. بنا بر اصل ضرب، این مجموعه دارای 3×2 عضو میباشد. رسم نمودار شجری (ذیل صفحه‌ی ۱۳۶) این تناظر را واضحتر میسازد. (شکل ۷۵).



شکل ۷۵

(ب). انجمنی که 35 عضو دارد میخواهد یک رئیس، یک منشی، و یک خزانه‌دار از میان اعضای خود انتخاب کند، و مقررات انجمن اجازه نمیدهد که یک عضو متصدی بیش از یکی از این سه سمت باشد. به چند طریق انتخاب مذکور انجامپذیر است؟
رئیس را به 35 طریق مختلف میتوان انتخاب کرد. پس از انتخاب رئیس، انتخاب منشی به 34 طریق ممکن است، و پس از آن، انتخاب خزانه‌دار به 33 طریق. پس، عده‌ی طرق ممکنه عبارتست از

$$35 \cdot 34 \cdot 33 = 39\,270.$$

(پ). چند عدد طبیعی چهاررقمی وجود دارد؟
رقم مرتبه‌ی اُلوف یکی از اعداد 1، . . .، و 9 است، و رقم هر یک از مراتب دیگر یکی از اعداد 0، 1، . . .، و 9. پس، انتخاب اولی به 9 طریق و انتخاب هر یک از سایرین به 10 طریق ممکن میباشد. بالنتیجه، عده‌ی انتخابات ممکنه مساوی $9 \times 10 \times 10 \times 10$ است، و این عده‌ی اعداد طبیعی چهاررقمی میباشد.
(ت). بنا بر آنکه $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ تجزیه‌ی استانده‌ی عدد طبیعی بزرگتر از واحد n به عوامل اول باشد، به چند متمایز میتوان n را به حاصلضرب دو عامل متباین تجزیه کرد؟
اگر p_i در یکی از عوامل متباین بیاید ناچار $p_i^{a_i}$ در آن میآید، و الا این عامل با عامل دیگر متباین نخواهد بود. پس، حل مسئله باز میگردد به اینکه k عدد $p_1^{a_1}$، . . .، و $p_k^{a_k}$ را در حجره‌های قالب «□ □» قرار دهیم. عدد $p_1^{a_1}$ را به 2 طریق میتوان در حجره‌های این قالب قرار داد. پس از آن، عدد $p_2^{a_2}$ را به 2 طریق میتوان در حجره‌های این قالب قرار داد، و هکذا. پس، k عدد مذکور را به 2^k طریق میتوان در حجرات قالب قرار داد. بالنتیجه، چون دو تجزیه‌ی n به صورتهای $n_1 n_2$ و $n_2 n_1$ نامتمایز محسوب میشوند، عده‌ی طرق تجزیه‌ی n به حاصلضرب دو عامل متباین مساوی $2^k/2$ یا 2^{k-1} است.

۲.۱.۴. تمرین

۱. بین دو نقطه‌ی A و B پنج اتوبوس رفت و آمد دارند. به چند طریق میتوان از A به B رفت و از آنجا به A بازگشت؟

۲. همان مسئله را حل کنید در صورتی که بخواهیم بازگشت به A با اتوبوسی غیر از آنکه در عزیمت از A سوارش شده‌ایم صورت گیرد.

۳. دو طاس نرد را بر زمین میریزیم. چند ترکیب خالها از نشستن آنها ممکن است پدید آید؟

راهنمائی: ملاحظه کنید که عدد مطلوب مستقل است از اینکه هر دو طاس را با هم بریزیم یا یکی را بعد از دیگری.

۴. چند عدد چهاررقمی هست که ارقامشان فرد باشند؟ (625)

۵. چند عدد چهاررقمی هست که مجموع دو رقم سمت چپ آنها 10 و مجموع دو رقم سمت راستشان نیز 10 باشد؟ (81)

۶. چند عدد چهاررقمی هست که ارقام هر یک دو به دو متمایز باشند؟ (4 536)

۷. سه مسافر با هم به آبادیی که چهار مسافرخانه دارد وارد میشوند. در صورتی که هیچ دو از آنها نخواهند در یک مسافرخانه منزل کنند به چند طریق میتوانند در آن مسافرخانه‌ها سکنی گزینند؟ (24)

۸. چهار سکه‌ی دو بدو متمایز را که یک روی هر یک شیر و روی دیگرش خط است با هم بر زمین می‌اندازیم. به چند طریق مختلف ممکن است بر زمین بنشینند؟

۹. به چند طریق میتوان دو کتاب را به عنوان جایزه به یک یا دو تن از ده نفر محصل داد در صورتی که

(آ) هر دو جایزه به یک نفر داده نشود.

(ب) دادن دو جایزه به یک محصل جایز باشد.

۱۰. از نه جفت کفش متمایز به چند طریق میتوان یک لنگه‌ی چپ و یک لنگه‌ی راست انتخاب کرد که یک جفت کفش حاصل نشود؟ (72)

۱۱. چند عدد زوج سه رقمی با ارقام 1، 8، 6، و 5 میتوان ساخت که ارقام هر عدد دو به دو متمایز باشند؟

۱۲. عده‌ی اقطار یک کثیرالاضلاع n ضلعی چیست؟

۱۳. به چند طریق میتوان از میان 5 کتاب فارسی، 7 کتاب عربی، و 10 کتاب روسی دو کتاب انتخاب کرد که به یک زبان نباشند؟ (155)

۱۴. در پانسیونی 12 زن و 10 مرد زندگی میکنند، که از آن جمله سه تن از زنان با دو تن از مردان خواهر و برادر هستند، ولی سایرین نسبتی با هم و با اینان ندارند. به چند طریق ازدواج بین ساکنین پانسیون مجاز است؟ (114)

۱۵. به چند طریق میتوان هفت a، یک b، و یک c را بر یک سطر نوشت؟ (72)

راهنمائی: ابتدا aها را بر یک سطر بنویسید.

۱۶. به چند طریق میتوان چهار نامه را در چهار پاکت قرار داد مشروط بر اینکه در یک پاکت بیش از یک نامه نگذاریم؟ (24)

۱۷. به چند طریق میتوان کلمه‌ای چهار حرفی از حروف ا، ح، م، د ساخت مشروط بر اینکه ا نه در اول افتد و نه در آخر؟

۱۸. به چند طریق میتوان اشیاء ذیل را بین دو نفر تقسیم کرد به طوری که هیچ یک بی بهره نماند؟

✻ ✻ ✻ ✻ † † † ○ ○ □

(118)

۱۹. هر یک از رؤوس واقع بر قاعده‌ی مثلثی را به n نقطه‌ی واقع بر ضلع مقابل وصل میکنیم. این $2n$ خط مثلث را به چند جزء تقسیم میکنند؟ $((n+1)^2)$

۲۰. همه‌ی اقطار یک کثیرالاضلاع محدب n ضلعی را رسم میکنیم. بنا بر آنکه هر دو قطر نامتوازی و هر سه قطر نامتقارب باشند مطلوبست عده‌ی نقاط تقاطع اقطار، اعم از داخلی یا خارجی. $(n(n-3)(n^2-7n+14)/8)$

۳ § کلمات و ترکیبات

اینک اجرای برنامه‌ای را که در پایان ۱.۱ بدان اشاره کردیم آغاز میکنیم.

۳.۱. کلیات در باب دسته‌های مورد نظر. معمولاً، بجای اشیائی که دسته‌هائی از آنها میسازیم، حروف الفبای لاتینی را بکار میبریم، و دسته‌ای از حروف را با نوشتن آنها به دنبال یکدیگر نمایش میدهیم، مانند «دسته‌ی a»، «دسته‌ی ab»، «دسته‌ی ba»، و «دسته‌ی $caaabba$».

از n حرف a، b، . . .، و l، بر حسب اینکه ترتیب ملحوظ باشد یا نه و تکرار جایز باشد یا نه، دسته‌های (متناهی) گوناگون میتوان ساخت. اهم این دسته‌ها بر طبق تعریفات مذکور در کتب سابق از این قرار است:

(آ) منظومه‌های[1] n حرف r به r یعنی جمیع دسته‌هائی متمایز ــ خواه از لحاظ نوع حروف یا از لحاظ ترتیب آنها ــ که از قرار دادن r حرف از این حروف به دنبال یکدیگر حاصل میشود. (ترتیب ملحوظ است، ولی تکرار جایز نیست.)
تعریف فوق فقط وقتی معنی دارد که $r \leqslant n$. مثلاً، هر یک از $abcd$ و $abdc$ یک منظومه‌ی n حرف a، b، c، d، . . .، و l است 4 به 4، و این دو منظومه متمایزند. دسته‌ای مانند $aabc$ منظومه‌ی آن n حرف نیست.

(ب) منظومه‌های با تکرار n حرف r به r یعنی جمیع دسته‌هائی متمایز ــ خواه از لحاظ نوع حروف یا از لحاظ ترتیب آنها ــ که از قرار دادن r حرف از این حروف به دنبال یکدیگر، با تجویز اینکه یک حرف منتها r بار تکرار شود، حاصل میگردد. (ترتیب ملحوظ و تکرار جایز است.)
مثلاً، هر یک از $aaaaa$، $bbbdd$، و $bdcdd$ یک منظومه‌ی با تکرار چهار حرف a، b، c، و d است 5 به 5.

(پ) جایگشتهای[2] n حرف یعنی منظومه‌های آنها n به n.
مثلاً، هر یک از abc و bac یک جایگشت سه حرف a، b، و c است. (وجه تسمیه‌ی جایگشت از همین مثال معلوم است.)

(ت) ترکیبات n حرف r به r یعنی جمیع دسته‌هائی متمایز از لحاظ نوع حروف که از قرار دادن r حرف از این حروف به دنبال یکدیگر حاصل میشود. (نه ترتیب ملحوظ است، و نه تکرار جایز.)

---

(۱) بعضی آنچه را ما «منظومه» نامیده‌ایم ترتیب خوانده‌اند. چنانکه میدانید، ترتیب در ریاضیات معنی مشخصی دارد، و لهذا، ما این لفظ را جز در همین معنی مشخص اصطلاح نمیکنیم.

(۲) بعضی آنچه را ما «جایگشت» خوانده‌ایم تبدیل نامیده‌اند.

تعریف فوق فقط وقتی معنی دارد که $r \leqslant n$. مثلاً، هر یک از abc، bca، و abd یک ترکیب 4 حرف a، b، c، و d است 3 به 3؛ اولی و دومی نامتمایزند (یک ترکیب محسوب میشوند) ولی هر یک از آنها از سومی متمایز است.

(ژ) ترکیبات با تکرار n حرف r به r یا ترکیبات کامل n حرف r به r یعنی جمیع دستههائی متمایز از لحاظ نوع حروف که از قراردادن r حرف از این حروف به دنبال یکدیگر، با تجویز اینکه یک حرف منتها r مرتبه تکرار شود، حاصل میگردد. (ترتیب ملحوظ نیست، ولی تکرار جایز است.)

مثلاً، هر یک از $ddbcc$، $dbccd$، و $dbcbc$ یک ترکیب با تکرار n حرف a، b، c، d، . . .، و l است 5 به 5؛ اولی و دومی یک ترکیب محسوب میشوند، اما هر یک از آنها از سومی متمایز است.

با در دست داشتن مفاهیم مجموعه و بستائی مرتب، دستههای مورد نظر را میتوان دقیقاً تعریف کرد، بی آنکه شرط اضافی برای تمایز دستهها لازم باشد، از قرار:

I. کلمات rحرفی (یا به طول r) از n حرف یعنی rتائیهای مرتبی که از آن حروف میتوان ساخت.

کلمات rحرفی از n حرف مطابق منظومههای با تکرار آن حروف هستند r به r.

II. منظومههای rتائی n حرف $(r \leqslant n)$ یعنی کلمات rحرفی ساختهشده از آنها با مختصات دو به دو متمایز. عدهی منظومههای rتائی n حرف را $P(n, r)$ مینامیم[۲].

III. جایگشتهای n حرف یعنی منظومهی nتائی آنها. عدهی آنها را $P(n)$ میخوانیم.

IV. هر ترکیب n حرف r به r $(r \leqslant n)$ را میتوان مجموعکی rعضوی از مجموعهی این حروف شمرد.

V. فرض کنیم در مجموعهی nعضوی $A = \{a, b, \ldots, l\}$ نسبتی ترتیبی، مثلاً با ضابطهی

$$a < b < \cdots < l,$$

تعریف شده باشد. کلمهی $uv \ldots z$ از حروف A را یک کلمهی صعودی خوانیم در صورتی که

$$u \leqslant v \leqslant \cdots \leqslant z.$$

با اندک تأملی معلوم میشود که ترکیبات کامل n حرف r به r، که در (ژ) مذکور شد، مطابق کلمات صعودی rحرفی این حروف میباشند، زیرا، آن n حرف را میتوان به طریقی دلخواه (مثلاً، بر حسب ترتیب الفبائی) مرتب کرد، و هر ترکیب کامل را ــ چون در آن ترتیب بی تأثیر است ــ به صورت کلمهای صعودی درآورد.

چنانکه ملاحظه میشود، دستههای مذکور مجموعهها یا بستائیهای مرتب میباشند. معذلک، برای تسهیل بیان، اصطلاحات کلمات، منظومهها، و ترکیبات را به معانی دقیقی که ذکر شد

---

(۱) دوتائی، سهتائی، . . .، rتائی.

(۲) از علامات دیگری که بدین منظور بکار میروند A_n^r، $(n)_r$، و ${}_nP_r$ است.

بکار خواهیم برد.

۳.۱.۰۱. تبصره. در استعمال دستورات ترکیبیات، که خواهد آمد، باید به دقت تعیین کرد که دسته‌های قابل قبول از کدام نوع هستند تا شرایط متمایز بودن دسته‌ها مشخص و تعیین عده‌ی دسته‌های متمایز ممکن گردد.[1]
برای توضیح این نکته‌ی مهم، مثالهائی میآوریم.

۳.۱.۰۲. امثله

(آ). چند دسته‌ی دوحرفی از سه حرف a، b، و c میتوان ساخت؛
مسئله به صورتی که فوقاً طرح شده است مبهم است، زیرا، شرایط دسته‌ها معلوم نیست. جواب مسئله بر حسب شرایط مختلف بکلی متفاوت است، چنانکه ذیلاً ملاحظه میشود.

حالت اول: تکرار جایز و ترتیب ملحوظ است.

در این صورت، دسته‌ای مانند aa قابل قبول است، و دسته‌هائی مانند ab و ba دو دسته‌ی متمایز میباشند. پس، دسته‌های مطلوب دوتائیهای (ازواج) مرتب سه حرف a، b، و c ــ یعنی، کلمات دوحرفی ساخته‌شده از آنها ــ میباشند، و عبارتند از نه دسته‌ی

$$\begin{matrix} aa, & ba, & ca, \\ ab, & bb, & cb, \\ ac, & bc, & cc. \end{matrix}$$

حالت دوم: تکرار جایز نیست، ولی ترتیب ملحوظ است.

در این حالت، دسته‌ای مانند aa قابل قبول نیست، اما دسته‌هائی مانند ab و ba قابل قبول و متمایزند. دسته‌های مطلوب منظومه‌های دوتائی سه حرف a، b، و c میباشند، و عبارتند از $P(3, 2) = 6$ دسته‌ی

$$ab, \quad ac, \quad ba, \quad bc, \quad ca, \quad cb.$$

حالت سوم: تکرار جایز نیست، و ترتیب ملحوظ نیست.

در این حالت، دسته‌های ab و ba متمایز نیستند. دسته‌های مطلوب ترکیبات دوتائی سه حرف a، b، و c میباشند، و عبارتند از

$$ab, \quad ac, \quad bc.$$

حالت چهارم: تکرار جایز است، ولی ترتیب ملحوظ نیست.

در این حالت، دسته‌ای مانند aa قابل قبول است، ولی دسته‌ای مانند ab از دسته‌ی ba متمایز نیست. دسته‌های مطلوب عبارتند از

$$aa, \quad ab, \quad ac, \quad bb, \quad bc, \quad cc.$$

اگر برای حروف a، b، و c ترتیبی، مثلاً با ضابطه‌ی $c \prec a \prec b$، قائل شویم، و توجه کنیم که ــ به سبب ملحوظ نبودن ترتیب ــ دسته‌های فوق همان دسته‌های

$$aa, \quad ba, \quad ac, \quad bb, \quad bc, \quad cc$$

هستند، دیده میشود که دسته‌های مطلوب عبارتند از کلمات صعودی دوحرفی که از سه حرف

---

(۱) تعیین دقیق این شرایط همیشه به آسانی مقدور نیست.

a، b، و c میتوان ساخت.
(ب). اگر پنج نفر بخواهند دو نماینده از میان خود انتخاب کنند انتخاب حسن و حسین متمایز از انتخاب حسین و حسن نیست، بلکه، «دستهی حسن و حسین» همان «دسته حسین و حسن» است. پس، در دستههای قابل قبول، تکرار جایز نیست، و ترتیب اعضا هم ملحوظ نیست. هر دسته یک ترکیب دوتائی پنج نفر مذکور است (مجموعکی دو عضوی از مجموعهی آن پنج نفر). اما، اگر همان پنج نفر بخواهند یک رئیس و یک منشی از میان خود انتخاب کنند، و انتخاب یک نفر برای هر دو سمت ممنوع باشد، انتخاب حسن به عنوان رئیس و حسین به عنوان منشی غیر از انتخاب حسن به عنوان منشی و حسین به عنوان رئیس است. در اینجا، تکرار جایز نیست، ولی ترتیب ملحوظ است. دستههای قابل قبول منظومههای دوتائی آن پنج نفر میباشد.

۳.۲. عدهی کلمات.

۳.۲.۱. کلمات و نگاشتها. عدهی کلمات rحرفی ساخته شده از n حرف با نگاشتهای مجموعهای rعضوی در مجموعهای nعضوی بستگی تام دارد.
فرض کنیم $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ مجموعهای rعضوی و $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعهای nعضوی باشد، و f یک نگاشت I بتوی A (تابعی بر I بتوی A) باشد. چنانکه در فصل ۳ دانسته شد، نگاشت f را میتوان با جدولی تعریف کرد. تعریف به صورت ذیل جایگزین تعریف با جدول است:

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \ldots & \alpha_r \\ a_{i_1}, & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & \ldots & a_{i_r} \end{pmatrix}.$$

در اینجا، بازاء هر α_k از I، $f(\alpha_k)$ در زیر α_k درج شده است:

$$f(\alpha_k) = a_{i_k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

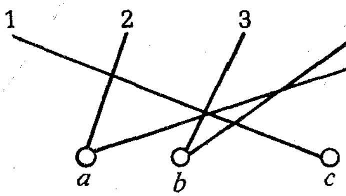
نگاشت f را به دو طریق میتوان تعبیر نمود:

(آ). فرض کنیم I مجموعهای از حُجرههای شمارهدار و A مجموعهای از علامات باشد. نگاشت f طریقهای برای پر کردن آن حجرات با این علامات (در هر حجره یک علامت) بدست میدهد، و آن عبارتست از قرار دادن a_{i_1} در حجرهی α_1، قرار دادن a_{i_2} در حجرهی α_2، و غیره (ممکن است در دو حجرهی متفاوت یک علامت قرار داده شود). بدین گونه، کلمهی $a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ تشکیل میگردد.

(ب). فرض کنیم I مجموعهای از اشیاء (مثلاً، گویها) باشد، و A مجموعهای از حجرات. نگاشت f طریقهای برای چیدن آن گویها در این حجرات بدست میدهد.
این تناظر بین کلمهسازی و چیدن گویها در حجرهها در آنالیز ترکیبیاتی فواید بسیار دارد. مثلاً، فرض کنیم $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، $A = \{a, b, c\}$، و

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & a & b & b & a \end{pmatrix}$$

f تابعی است بر I بتوی A. به تعبیر اول، f نمایش کلمهی $cabba$ است. به تعبیر دوم، f نمایش طریقهای برای چیدن اعضای I است در حجرههای a، b، و c (شکل ۷۶).



شکل ۷۶

۳.۲.۲. قضیه (عده‌ی کلمات). عده‌ی کلمات rحرفی ساخته‌شده از n حرف (rتائیهای مرتب آنها) n^r است.

برهان. اگر $A = \{a, b, \ldots, l\}$ مجموعه‌ای از n حرف باشد کلمات ساخته‌شده از حروف A همان اعضای حاصل‌ضرب اقلیدسی A^r میباشند که، بنا بر اصل ضرب، عده‌ی آنها $n \cdot n \ldots n$ (r عامل) است. ▲

بیان دیگر استدلال فوق اینست: فرض کنیم r حجره بر خط مستقیمی واقع باشند، و بخواهیم آنها را با n علامت a، b، . . .، و l پر کنیم. در حجره‌ی اول، یکی از n علامت را میتوان قرار داد؛ به عبارت دیگر، پر کردن حجره‌ی اول به n طریق ممکن است. پس از پر کردن حجره‌ی اول به هر یک از این طرق، حجره‌ی دوم را به n طریق میتوان پر کرد، و هکذا. پس، حجرات مذکور را به $\prod_{k=1}^{r} n$ طریق میتوان پر کرد. ▲

۳.۲.۳. قضیه. اگر $r \leqslant n$ آنگاه عده‌ی منظومه‌های rتائی n حرف (کلمات rحرفی با حروف دو به دو متمایز) عبارتست از

$$P(n, r) = n(n-1) \ldots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

برهان. اثبات مانند دومین طریق اثبات ۳.۲.۲ است. اگر r حجره بر خط مستقیمی تصور کنیم حجره‌ی اول را به n طریق میتوان پر کرد. پس از آن، چون تکرار جایز نیست، حجره‌ی دوم را با هر یک از $n-1$ حرف دیگر میتوان پر کرد، و هکذا. در آخرین مرحله، حجره‌ی rم را با $n-r+1$ حرفی که پس از پر کردن حجره‌ی $r-1$م مانده است میتوان پر کرد. پس، بنا بر اصل ضرب، حکم برقرار است. ▲

از قضیه‌ی فوق بازاء $r = n$ نتیجه میشود:

۳.۲.۴. قضیه. عده‌ی جایگشتهای n شیء عبارتست از

$$P(n) = n!.$$

۳.۲.۵. امثله و فواید

(آ). به آسانی میتوان جدول کلمات یک‌حرفی، دوحرفی، . . .، rحرفی ساخته شده از n حرف را متدرجاً تنظیم کرد. بطور کلی، اگر جدول کلمات $r-1$ حرفی آنها در دست باشد، و، به دنبال هر یک از کلمات این جدول، یکایک n حرف را بنویسیم، جدول کلمات rحرفی حاصل میشود (ثابت کنید). تنظیم جدول منظومه‌های rحرفی به همین قیاس است: اگر جدول منظومه‌های $r-1$ حرفی ساخته شده باشد، چون به دنبال هر یک از این منظومه‌ها یکایک حروفی را که در آن نیامده است بنویسیم، جدول منظومه‌های rحرفی حاصل میشود.
مثلاً، فرض کنیم مقصود تنظیم جدول منظومه‌های سه‌تائی چهار حرف a، b، c، و d باشد. جدول منظومه‌های یکتائی اینست:

$$a,\qquad b,\qquad c,\qquad d.$$

بر طبق شرح فوق، جدول منظومه‌های دوتائی چنین است:

$$\begin{array}{lll} ab, & ac, & ad, \\ ba, & bc, & bd, \\ ca, & cb, & cd, \\ da, & db, & dc. \end{array}$$

به همین قیاس جدول منظومه‌های سه‌تائی حاصل میشود:

$$\begin{array}{llllll} abc, & abd, & acb, & acd, & adb, & adc, \\ bac, & bad, & bca, & bcd, & bda, & bdc, \\ cab, & cad, & cba, & cbd, & cda, & cdb, \\ dac, & dab, & dba, & dbc, & dca, & dcb. \end{array}$$

(ب). عده‌ی اعداد سه‌رقمی دارای ارقام دو به دو متمایز و غیر از 0 چیست؟
هر یک از این اعداد از سه رقم دو به دو متمایز از ارقام 1، 2، . . .، و 9 ساخته میشود. ترتیب ملحوظ است، ولی تکرار جایز نیست. پس، عده‌ی اعداد مذکور مساوی عده‌ی منظومه‌های سه‌تائی نه رقم سابق‌الذکر میباشد، و آن مساوی است با

$$P(9,3)=\frac{9!}{(9-3)!}=7\cdot 8\cdot 9=504.$$

(پ). سفره‌ای دوازده‌نفری بر میز گردی چیده شده است. به چند طریق 12 میهمان میتوانند گرد این سفره بنشینند؟
عده‌ی طرق مطلوب عبارتست از عده‌ی جایگشتهای 12 شیء، یعنی

$$P(12)=12!=479\,001\,600.$$

اگر 12 نفر مذکور هر جایگشت را در یک دقیقه انجام دهند، و سالی ۳۶۰ روز و روزی 12 ساعت مشغول این کار باشند، ۱۸۴۸ سال طول میکشد تا به جمیع اقسام ممکنه دور میز بنشینند.

۳.۲.۶. تمرین

۰۱ همه‌ی نگاشتهای مجموعه‌ی $I=\{1,2,3\}$ را در مجموعه‌ی $\{a,b\}$ بنویسید. بطور کلی،

ثابت کنید که عده‌ی نگاشتهای یک مجموعه‌ی rعضوی در یک مجموعه‌ی nعضوی برابر n^r است.

۲. با علامات مذکور در ۳.۲.۱، بر حسب اینکه نگاشت f سورژکتیو، انژکتیو، یا بیژکتیو باشد، در خصوصیات هر یک از دو تعبیر (آ) و (ب) مذکور در آن قسمت (کلمه‌سازی و چیدن گویها در حجرات) تحقیق کنید.

۳. همه‌ی انژکسیونهای مجموعه‌ی $\{1, 2\}$ را در مجموعه‌ی $\{a, b, c, d\}$ بنویسید. بطور کلی، ثابت کنید که عده‌ی انژکسیونهای مجموعه‌ای rعضوی در مجموعه‌ای nعضوی برابر $P(n, r)$ است.

۴. به چند طریق یک گروه ۱۲ نفری میتواند از میان اعضای خود یک رئیس، یک نایب رئیس، و یک منشی انتخاب کنند؟ (1320)

۵. عده‌ی جایگشتهای حروف کلمه‌ی دبیرستان را تعیین کنید. چند عدد از این جایگشتها با ت آغاز و به ن منتهی میشوند؟

۶. از میان جایگشتهای حروف a، b، c، d، e، و f عده‌ی آنهائی که با ab آغاز میشود چیست؟

۷[1]**.** به چند طریق 8 طفل میتوانند دست بدست داده حلقه‌ای بسازند؟ (5040)

۸. به چند طریق میتوان 8 مهره را به ریسمان کرده دستبندی ساخت؟ (2520)

۹. n نقطه‌ی A_1، A_2، . . .، و A_n در یک صفحه قرار دارند، و هیچ سه از آنها بر یک استقامت نیست. چند کثیرالاضلاع nضلعی از وصل کردن آنها به یکدیگر میتوان ساخت؟ $((n-1)!/2)$

۱۰. عده‌ی اعداد سه‌رقمی که ارقام هر یک دو بدو متمایز باشند چیست؟ (648)

۱۱. به چند طریق میتوان 5 جایزه را به 4 محصل اعطا کرد مشروط بر اینکه اعطای بیش از یک جایزه به یک محصل جایز باشد؟ (1024)

۳.۳. عده‌ی مجموعکها (ترکیبات)

۳.۳.۱. قضیه. اگر $r \leqslant n$ آنگاه عده‌ی مجموعکهای rعضوی یک مجموعه‌ی nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

---

(۱) این مسئله و مسئله‌ی آتیه را به دقت با یکدیگر و با مسئله‌ی پ: ۳.۲.۵ مقایسه کنید. در قرار دادن n شیء بر یک دایره، ممکن است اوضاع آنها نسبت به دایره مشخص باشد یا نه، و در حالتی که وضع نسبی ملحوظ نیست، ممکن است جهت حرکت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن در تمایز دسته‌ها ملحوظ باشد (مسئله‌ی ۷) یا نه (مسئله‌ی ۸). در مسئله‌ی اخیر، دو طریق چیدن که در شکل ذیل دیده میشود نامتمایزند، زیرا، یکی از این دو «دستبند» از برگردانیدن دیگری حاصل میشود.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & \\ h & & & c \\ g & & & d \\ & f & e & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & a & h & \\ b & & & g \\ c & & & f \\ & d & e & \end{array}$$

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای از n شیء باشد. منظومه‌های rتائی این اشیاء را در نظر میآوریم. این منظومه‌ها را میتوان به دسته‌هائی منقسم کرد که اختلاف دو منظومه‌ی متعلق به یک دسته فقط بسبب اختلاف در ترتیب اعضا باشد نه نوع اعضا. پس، همه‌ی منظومه‌های یک دسته از اقسام ممکنه‌ی جایگشتهای یکی از این منظومه‌ها حاصل میگردد، و لهذا، عده‌ی منظومه‌های هر دسته $r!$ است، و اگر از این منظومه‌ها یکی را حفظ و بقیه را اسقاط کنیم آن مجموعکی از A حاصل میشود که اعضایش همان اعضای این منظومه هستند. بالعکس، اگر اقسام ممکنه‌ی جایگشتهای یکی از مجموعکهای rعضوی A را، که تعدادشان $r!$ است، بنویسیم، همه‌ی منظومه‌های متعلق به یکی از دسته‌های مذکور بدست میآید. پس، اگر x عده‌ی مجموعکهای مورد بحث باشد، $x \cdot r! = P(n, r)$، و از آنجا،

$$x = \frac{P(n, r)}{r!} = \binom{n}{r}.$$

بالاخره، چون $\binom{n}{0} = 1$ و A یک مجموعک خالی دارد، دستور بازاء $r = 0$ نیز برقرار است. ▲

۳.۳.۲. قضیه. عده‌ی جمیع مجموعکهای یک مجموعه‌ی nعضوی برابر 2^n است.
برهان. بنا بر قضیه‌ی قبل، بازاء هر r از 0 تا با n، عده‌ی مجموعکهای rعضوی یک مجموعه‌ی nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است. پس، عده‌ی جمیع مجموعکها عبارتست از

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

که، بنا بر ت: ۸.۳.۳ : ۵، مساوی 2^n میباشد. ▲

۳.۳.۳. امثله و فواید

(آ). تنظیم جدول ترکیبات به همان قیاس است که در آ : ۳.۲.۵ در باب منظومه‌ها گفته شد با توجه به اینکه، در اینجا، ترتیب ملحوظ نیست.
به عنوان مثال، 5 حرف a، b، c، d، و e را اختیار میکنیم. ترکیبات یکتائی آنها عبارتند از

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e.$$

برای ساختن جدول ترکیبات دوتائی (مجموعکهای دوعضوی مجموعه‌ی پنج حرف مذکور) میتوان پنج حرف را مثلاً با ترتیب الفبائی ملحوظ داشت، و به دنبال هر یک از ترکیبات یکتائی، هر یک از حروف بعد از آن را نوشت:

$$\begin{array}{cccc} ab, & ac, & ad, & ae, \\ & bc, & bd, & be, \\ & & cd, & ce, \\ & & & de. \end{array}$$

به همین قیاس، جدول ترکیبات سه‌تائی چنین است:

$$\begin{array}{lll} abc, & abd, & abe, \\ & acd, & ace, \\ & & ade, \\ & bcd, & bce, \\ & & bde, \\ & & cde. \end{array}$$

(ب). به چند طریق میتوان از میان 14 نفر یک هیئت 11نفری انتخاب کرد.
در انتخاب هیئت، ترتیب اعضا ملحوظ نیست، و تکرار جایز نمیباشد. پس، عدهی طرق مطلوب عدهی مجموعکهای 11عضوی مجموعهای دارای 14 عضو (یا عدهی ترکیبات 14 شیء 11 به 11) میباشد، و مساوی است با

$$\binom{14}{11} = \frac{14!}{11!\,3!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

(پ). چند دست متفاوت در بازی بریج[1] ممکن است؟
هر دست مجموعهای شامل 13 ورق از 52 ورق گنجفه است (ترتیب اوراق در یک دست بیتأثیر است). پس، عدهی دستهای متمایز برابر است با

$$\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600.$$

(ت). هر مجموعک rعضوی از مجموعهای nعضوی مجموعک $n-r$عضوی (متمم آن مجموعک) را مشخص میسازد، و بالعکس. پس، عدهی مجموعکهای rعضوی n شیء برابر عدهی مجموعکهای $n-r$عضوی آنهاست. به عبارت دیگر

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

(۸.۲.۴ : ۵ ملاحظه شود). این مثال فایدهی ترکیبیات را در کشف خواص ضرایب دوجملهای آشکار میسازد.

(ث). حاصلضرب r عدد طبیعی متوالی بر $r!$ قابل قسمت است.
r عدد طبیعی متوالی را میتوان به

$$n, n-1, \ldots, n-r+1$$

نمایش داد. حاصلضرب این اعداد مساوی $r! \cdot \binom{n}{r}$ است. چون $\binom{n}{r}$ عدهی مجموعکهای rعضوی مجموعهای nعضوی است عددی طبیعی میباشد. ▲

۳.۳.۴. تبصره. در مسائل آنالیز ترکیبیاتی اصطلاحات «ورقه گنجفه»، «بریج»، و «پوکر» کمابیش بکار میرود، و لهذا، توضیح معانی اصطلاحی آنها مفید است. یک «دست» ورق گنجفه عبارتست از 52 ورق، که از لحاظ نوع خال و ارزش اسمی طبقهبندی میشوند. از لحاظ خال، یک دست ورق به چهار «ردیف»، که هر ردیف مشتمل بر ۱۳ ورق است، تقسیم میشود:

---

(۱) ۳.۳.۴ ملاحظه شود.

پیک، ترفل یا گشنیزی، دل، و خشتی. خالهای پیک و ترفل سیاه، و خالهای دل و خشتی قرمز هستند. از لحاظ ارزش اسمی، 13 ورق هر ردیف عبارتند از 2، 3، ...، 9، 10، سرباز، بی‌بی، شاه، و آس. اوراق هم‌ارزش را از یک نوع خوانیم. مثلاً، 2 ترفل و 2 خشتی از یک نوعند، و شاههای پیک، ترفل، دل، و خشتی از یک نوع میباشند. برای منظور ریاضی ما، بریج بازی کردن یعنی توزیع یک دست ورق گنجفه بین چهار بازیکن ــ که معمولاً شمال (N)، جنوب (S)، شرق (E)، و غرب (W) نامیده میشوند ــ به نحوی که به هر یک از آنان 13 ورق برسد. پوکر بازی کردن یعنی انتخاب 5 ورق از یک دست ورق. 13 ورقی که در بریج یا 5 ورقی که در پوکر به دست یک بازیکن میآید یک «دست» است.

۳.۳.۵. تمرین

۱. میخواهیم 5 نفر از 12 نفر انتخاب کنیم. به چند طریق میتوان این انتخاب را انجام داد مشروط بر اینکه (آ) فرد معینی از آن افراد عضو دسته‌ی منتخب باشد؛ (ب) فرد معینی از آن افراد از منتخبین نباشد؟ (330؛ 462)

۲. شخصی میخواهد یک یا بیشتر از 6 فرزند خود را به اروپا بفرستد. به چند طریق این کار ممکن است؟ (63)

۳. به چند طریق میتوان از میان 60 تن که 12 تن از آنان شاعرند هیئتی شش‌نفری انتخاب کرد که رئیس هیئت شاعر باشد؟ $\left(12\cdot\binom{59}{5}\right)$

۴. به چند طریق میتوان $m+n\ (m\neq n)$ شیء را به دو دسته تقسیم کرد که یکی شامل m شیء و دیگری شامل n شیء باشد؟

۵. همان مسئله را در حالتی که $m=n$ حل کنید.

$\left(\dfrac{(2m)!}{2\cdot(m!)^2}\right)$

۳.۴. عده‌ی کلمات صعودی (ترکیبات کامل).

۳.۴.۱. قضیه. اگر $K(n, r)$ عده‌ی کلمات صعودی rحرفی از n حرف باشد آنگاه

$$K(n, r)=\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}.$$

برهان. تساوی اخیر بنا بر خواص ضریب دوجمله‌ای بدیهی است، و کافی است ثابت کنیم که عده‌ی کلمات صعودی به طول r که از اعضای مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{N}_n, <)$ ساخته شود مساوی $\binom{n+r-1}{r}$ است. برای این منظور ثابت میکنیم که بین مجموعه‌ی این کلمات و مجموعه‌ی مجموعکهای rعضوی مجموعه‌ی

$$E=\{1, 2, \ldots, n+r-1\}$$

تناظری 1ـ1 وجود دارد.

اولاً، هر کلمه‌ی صعودی به طول r از اعضای $\mathbf{N}_n$ را میتوان به صورت $a_1a_2\ldots a_r$

نوشت، که در آن،

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant a_r.$$

به آسانی دیده میشود (چگونه؟) که در مجموعه‌ی

$$B = \{a_1 + 0, a_2 + 1, \ldots, a_i + i - 1, a_{i+1} + i, \ldots, a_r + r - 1\}$$

اعضا دو به دو متمایزند، و هر عضو این مجموعه از 1 ناکمتر و از $n + r - 1$ نابیشتر است. پس، B مجموعکی rعضوی از مجموعه‌ی E است، و با کلمه‌ی مذکور مشخص میشود.

ثانیاً، فرض کنیم

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\} \qquad (1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant n + r - 1)$$

مجموعکی r عضوی از E باشد، و

$$a_i = b_i - (i - 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

به آسانی دیده میشود که $a_1 a_2 \ldots a_r$ کلمه‌ای صعودی به طول r از اعضای $\mathbf{N}_n$ است (چرا؟). پس، وجود تناظر 1ـ1 مذکور مسلم است. اینک، برای اثبات حکم، کافی است ملاحظه کنیم که، بنا بر ۳.۳.۱، مجموعه‌ی E دارای $\binom{n+r-1}{r}$ مجموعک rعضوی است. ▲

۳.۴.۲. امثله و فواید

(آ). تنظیم جدول کلمات صعودی rحرفی از مجموعه‌ای از n حرف آسان است. مثلاً، فرض کنیم

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad a < b < c < d.$$

اگر به هر یک از حروف a، b، c، و d هر یک از حروف A را که پیش از آن حرف نیست ملحق کنیم کلمات صعودی دوحرفی حاصل میشود:

$$\begin{array}{llll} aa, & ab, & ac, & ad, \\ & bb, & bc, & bd, \\ & & cc, & cd, \\ & & & dd. \end{array}$$

عده‌ی کلمات صعودی سه‌حرفی برابر است با

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20,$$

و جدول آنها چنین است:

$$\begin{array}{llll} aaa, & abb, & acc, & add, \\ aab, & abc, & acd, & \\ aac, & abd, & & \\ aad, & & & \\ bbb, & bcc, & bdd, & \\ bbc, & bcd, & & \\ bbd, & & & \\ ccc, & cdd, & & \\ ccd, & & & \\ ddd. & & & \end{array}$$

بر طبق اصطلاحات سابق، این کلمات عبارتند از ترکیبات با تکرار (یا ترکیبات کامل) چهار حرف مذکور سه به سه.

(ب). مطلوبست عده‌ی جمل کثیرالجمله‌های صحیح کامل درجه‌ی r از n متغیر u، v، . . .، و z.

عده‌ی یکجمله‌ایهای درجه‌ی r از n متغیر مساوی عده کلمات صعودی rحرفی ساخته‌شده از این n حرف است، زیرا، هر چنین یکجمله‌ای به صورت $Au^{k_1}v^{k_2}\ldots z^{k_n}$ میباشد، که در آن، $k_1+k_2+\cdots+k_n=r$، و اگر فرض کنیم $u<v<\cdots<z$، و یکجمله‌ای مذکور را با کلمه‌ای صعودی که k_1 مختص اولش u است، k_2 مختص پس از آن v، . . . و غیره جفت کنیم تناظری 1ـ1 بین یکجمله‌ایهای مذکور و کلمات صعودی rحرفی ساخته شده از n حرف u، v، . . .، و z برقرار میشود.

در مورد کثیرالجمله‌ی کامل درجه‌ی r از n متغیر، کافی است عده‌ی جمل درجات r، $r-1$، . . .، 2، و 1 را بر طبق توضیح فوق تعیین و حاصلجمع آنها را با 1 (بازاء جمله‌ی معلوم کثیرالجمله) جمع کنیم. پس، عده‌ی جمل مساوی است با

$$\binom{n+r-1}{r}+\binom{n+r-2}{r-1}+\cdots+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{0}=\binom{n+r}{r}.$$

مثلاً، کثیرالجمله‌ی کامل درجه‌ی دوم از سه متغیر x، y، و z به صورت

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

است، و عده‌ی جمله‌های آن مساوی است با

$$\binom{3+2}{2}=\binom{5}{2}=10.$$

۳.۴.۳. افراز مرتب یک عدد طبیعی. مقصود از افراز مرتب عدد طبیعی n به r جزء در آوردن این عدد است به صورت حاصلجمع r عدد صحیح نامنفی مشروط بر اینکه دو حاصلجمع را فقط و فقط وقتی متمایز بشماریم که اختلافشان در جمله‌ها یا در ترتیب جمل باشد.

فرض کنیم

$$(۱)\quad n=n_1+n_2+\cdots+n_r\qquad (n_i\in \mathbf{I}_0,\ i=1,2,\ldots,r),$$
$$s_i=n_1+n_2+\cdots+n_i\qquad (1\leqslant i\leqslant r).$$

واضح است که افراز (۱) با کلمه‌ی $s_1s_2\ldots s_{r-1}$ با شرایط

$$0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_{r-1}\leqslant n$$

مشخص میشود، و بالعکس، هر چنین کلمه افرازی از n را به r جزء مشخص میکند. پس، عده‌ی افرازها مساوی است با عده‌ی کلمات صعودی به طول $r-1$ که از 0، 1، . . .، n میتوان ساخت، و آن، بنا بر ۳.۴.۱، مساوی است با $\binom{n+r-1}{r-1}$.

مثلاً، عده‌ی افرازهای 5 به 3 جزء مساوی $\binom{7}{2}$ یا 21 است. برای یافتن این افرازها ملاحظه میکنیم که اگر (۱) افراز معینی از عدد n باشد همه‌ی حاصلجمعهای حاصل از تعویض

n_iها با یکدیگر در طرف دوم (۱) نیز افرازهائی از n به r جزء میباشند. بنا بر این، برای حل معادلهی (۱)، کافی است جوابهائی از آن را که در شرایط $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_r$ صدق میکنند تعیین کرده تعویضهای مذکور را اعمال کنیم. در مثال مورد بحث، فرض میکنیم

$$n_1 + n_2 + n_3 = 5, \qquad n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3.$$

بازاء $n_1 = 5$ خواهیم داشت، $n_2 = n_3 = 0$.

بازاء $n_1 = 4$ خواهیم داشت، $n_2 + n_3 = 1$، و از آنجا، $n_2 = 1$ و $n_3 = 0$.

بازاء $n_1 = 3$ نتیجه میشود، $n_2 + n_3 = 2$، و از آنجا، $n_2 = 2 \;\&\; n_3 = 0$ یا $n_2 = n_3 = 1$.

بازاء $n_1 = 2$ نتیجه میشود $n_2 + n_3 = 3$، و از آنجا، $n_2 = 2$ و $n_3 = 1$.

مقادیر 1 و 0 برای n_1 ممتنع است.

پس، 21 افراز مرتب 5 به سه جزء عبارتند از

5 + 0 + 0	**4 + 1 + 0**	**3 + 2 + 0**	**3 + 1 + 1**	**2 + 2 + 1**
0 + 5 + 0	4 + 0 + 1	3 + 0 + 2	1 + 3 + 1	2 + 1 + 2
0 + 0 + 5	1 + 4 + 0	2 + 3 + 0	1 + 1 + 3	1 + 2 + 2
	1 + 0 + 4	2 + 0 + 3		
	0 + 4 + 1	0 + 3 + 2		
	0 + 1 + 4	0 + 2 + 3		

۳.۴.۴. تمرین

۱. بازاء $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, 4\}$ و $r = 2$، تناظر 1ـ1 مذکور در برهان قضیهی ۳.۴.۱ را با ازواج مرتب آن بنویسید.

۲. در بوستانی، عدهی گلهای محمدی، گلایول، شقایق، و مریم از حساب بیرون است. به چند طریق میتوان دسته گلی مشتمل بر n گل از این گلها ترتیب داد؟

$((n+1)(n+2)(n+3)/6)$

۳. مطلوبست جمیع افرازهای عدد 3 به 3 جزء.

۳.۵. ضرایب بَسْجملهای.

۳.۵.۱. تعریف. اگر

$$n_i \in \mathbf{I}_0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

آنگاه، بنا بر تعریف،

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

عبارت طرف چپ را یک ضریب بسجمله‌ای[1] نامند.
رابطه‌ی بدیهی ذیل در آتیه بسیار بکار میآید:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}.$$

۳.۵.۲. قضیه (توزیع مرتب). اگر A مجموعه‌ای از n حرف باشد، و n_1، n_2، . . .، و n_r اعدادی صحیح و نامنفی باشند، و

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_r,$$

و A_1، A_2، . . .، A_r حجره‌هائی باشند آنگاه عده‌ی طرق چیدن اعضای A در r حجره‌ی مذکور به نحوی که بازاء $1 \leqslant i \leqslant r$ درست n_i عضو A در حجره‌ی A_i قرار داده شود مساوی $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ است (ترتیب حجرات ملحوظ است، ولی در اشیائی که در یک حجره چیده میشوند ترتیب ملحوظ نیست).

برهان. هر n_1 حرف از حروف A که در حجره‌ی A_1 قرار داده میشود یک مجموعک n_1 عضوی از اعضای A است. پس، حجره‌ی A_1 را به $\binom{n}{n_1}$ طریق میتوان پر کرد. پس از پر کردن A_1 به هر یک از این طرق، $n-n_1$ حرف میماند، که از آن جمله، باید n_2 حرف در حجره‌ی A_2 قرار داد؛ پس، حجره‌ی A_2 را به $\binom{n-n_1}{n_2}$ طریق میتوان پر کرد. بطور کلی، پس از پر کردن A_{i-1}، $n-n_1-\cdots-n_{i-1}$ حرف میماند، که از آن جمله، باید n_i حرف در A_i قرار داد، و این کار به

$$\binom{n-n_1-\cdots-n_{i-1}}{n_i}$$

طریق امکانپذیر است. پس، بر طبق اصل ضرب و رابطه‌ی مذکور در پایان ۳.۵.۱، حکم برقرار میباشد. ▲

۳.۵.۳. جایگشت با تکرار. ضرایب بسجمله‌ای تعبیر دیگری نیز دارند که در ترکیبیات مفید است.

فرض کنیم $A=\{a_1, \ldots, a_r\}$ مجموعه‌ای از r حرف باشد، و n_1، . . .، و n_r اعداد طبیعی مفروضی باشند، و

$$n=n_1+\cdots+n_r.$$

جمیع کلمات nحرفی اعضای A را که، در هر کلمه، بازاء هر i از 1 تا با r، حرف a_i درست n_i بار در آن کلمه بیاید مورد نظر قرار میدهیم. عده‌ی جمیع این کلمات چیست؟
مثلاً، اگر $A=\{a, b, c\}$ آنگاه کلمات پنج‌حرفی از حروف A که a دو بار، b دو بار، و c یک بار در هر یک از آنها بیاید عبارتند از 30 کلمه‌ی

---

(۱) دوجمله‌ای، سه‌جمله‌ای، و غیره. وجه تسمیه در ۴.۲ معلوم خواهد شد.

aabbc	*aabcb*	*aacbb*	*ababc*	*abacb*
abbac	*abbca*	*abcab*	*abcba*	*acabb*
acbab	*acbba*	*baabc*	*baacb*	*babac*
babca	*bacab*	*bacba*	*bbaac*	*bbaca*
bbcaa	*bcaab*	*bcaba*	*bcbaa*	*caabb*
cabab	*cabba*	*cbaab*	*cbaba*	*cbbaa*

اینک به مسئله‌ی کلی باز میگردیم. برای یافتن جواب مسئله، n موضع متوالی با شماره‌های 1، 2، . . .، و n بر خط مستقیمی در نظر میگیریم. عده‌ی کلمات مورد نظر مساوی است با عده‌ی طرق قرار دادن a_1 در n_1 نقطه از این نقاط، a_2 در n_2 نقطه از آنها، و غیره. عده‌ی طرق قرار دادن a_1 در n_1 نقطه از نقاط مذکور مساوی عده‌ی ترکیبات n_1تائی n حرف است، که $\binom{n}{n_1}$ میباشد. پس از قرار دادن a_1 در n_1 نقطه به یکی از طرق مذکور، $n - n_1$ موضع میماند که باید در n_2موضع از آنها a_2 را قرار داد، و این کار به $\binom{n - n_1}{n_2}$ طریق انجامپذیر است. ادامه‌ی استدلال بدیهی است، و از آن معلوم میشود که عده‌ی کلمات برابر $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ میباشد.

کلمات مذکور را جایگشتهای با تکرار n حرف، که از آن میان، n_1 حرف مساوی a_1، n_2 حرف مساوی a_2، . . .، و n_r حرف مساوی a_r هستند میخوانند.

۳.۵.۴. امثله

(آ). a، b، c، d، و e پنج دوست صمیمی بوده‌اند. اینک e در گذشته است، و چهارتن دیگر میخواهند به تشییع جنازه‌ی او بروند. برای این منظور سه وسیله‌ی نقلیه دارند که اولی جای دو مسافر دارد، و سایرین هر یک جای یک مسافر. به چند طریق میتوانند به تشییع بروند؟ فرض کنیم A_1، A_2، A_3 سه وسیله‌ی مذکور باشند. باید تعیین کرد که اعضای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را به چند طریق میتوان در A_1، A_2، و A_3 قرار داد بطوری که دو نفر در A_1، یک نفر در A_2، و یک نفر در A_3 سوار شود. پس، عده‌ی طرق مطلوب عبارتست از

$$\frac{4!}{2!1!1!} = 12.$$

طرق ممکنه در جدول ذیل نمایش داده شده است:

E_1	*ab*	*ab*	*ac*	*ac*	*ad*	*ad*	*bc*	*bc*	*bd*	*bd*	*cd*	*cd*
E_2	*c*	*d*	*b*	*d*	*b*	*c*	*a*	*d*	*a*	*c*	*a*	*b*
E_3	*d*	*c*	*d*	*b*	*c*	*b*	*d*	*a*	*c*	*a*	*b*	*a*

مسئله‌ی فوق در حقیقت مسئله‌ی افراز مجموعه‌ی A است به سه مجموعه، که یکی از آنها دارای

دو عضو و هر یک از سایرین دارای یک عضو باشد. اگر اعضای دو مجموعه‌ی مجاور را در این افراز با خطی مورب از هم جدا کنیم جدول افرازها را میتوان به صورت مختصر ذیل عرضه کرد:

$$\begin{matrix} ab/c/d & ab/d/c & ac/b/d & ac/d/b & ad/b/c & ad/c/b \\ bc/a/d & bc/d/a & bd/a/c & bd/c/a & cd/a/b & cd/b/a. \end{matrix}$$

(ب). در توزیع اوراق در بازی بریج (۳.۳.۴) چند حالت متمایز ممکن است پیش آید؟ در اینجا، 52 ورق به چهار نفر به تساوی تقسیم میشود. ترتیب اوراق در چهار دست ملحوظ نیست، ولی افراز اوراق مرتب است، زیرا، پس از یک توزیع، اگر مثلاً اوراق نفر «شمال» را به نفر «مشرق» و اوراق بازیکن «جنوب» را به بازیکن «مغرب» بدهیم دو توزیع متفاوت حاصل میشود. پس، تعداد حالات مختلف مساوی است با

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = (5{,}364\,5\ldots) \times 10^{28}.$$

۳.۵.۵. تمرین

۱. میخواهیم 12 گلابی با اندازه‌های دو به دو متفاوت را بین سه طفل به تساوی تقسیم کنیم. به چند طریق این کار ممکن است؟ (34 650)

۲. همان گلابیها را میخواهیم بین آن سه طفل چنان تقسیم کنیم که به ارشد آنها 5، به دومین آنها 4، و به کوچکترین آنها 3 گلابی برسد. به چند طریق این کار ممکن است؟ (27 720)

۳. به چند طریق میتوان 12 کتاب دو به دو متمایز را در سه دسته بسته‌بندی کرد به طریقی که بسته‌ی اول مشتمل بر 3 کتاب، دیگری مشتمل بر 4 کتاب، و سومی مشتمل بر 5 کتاب باشد؟ (27 720)

§ ۴ دستور بسجمله‌ای

۴.۱. مقدمه. دستور دوجمله‌ای را برای بسط قوای طبیعی دوجمله‌ای $a+b$ میتوان برای بسط قوای طبیعی بسجمله‌ایها (کثیرالجمله‌ها) تعمیم داد. قبلاً دستور

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

را به صورتی متقارن در میآوریم. نماینده‌های a و b در جمله‌های طرف دوم ازواج مرتب

$$(n, 0), (n-1, 1), \ldots, (n-r, r), \ldots, (0, n)$$

از اعداد صحیح نامنفی میباشند، که جمیع افرازهای مرتب عدد طبیعی n را به دو جزء (۳.۴.۳) تشکیل میدهند. بعلاوه، اگر فرض کنیم $n = n_1 + n_2$ و $r = n_2$ خواهیم داشت:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!}.$$

پس، دستور دوجمله‌ای را میتوان به صورت متقارن

$$(a+b)^n = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} a^{n_1} b^{n_2}$$

نوشت، که طرف دوم آن به معنی حاصلجمع عبارات حاصل از قرار دادن کـلیه‌ی دستگاهـهای جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی $n_1 + n_2 = r$ است بـجای n_1 و n_2 در عبارت تحت $\sum$. اینک گوئیم

۴.۲. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n و هر عدد طبیعی و ناکمتر از 2 مانند k،

$$(*)\quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k},$$

که طرف دوم آن به معنی حاصلجمع عبارات حاصل از قرار دادن کلیه‌ی دستگاههای جوابـهای صحیح نامنفی معادلـه‌ی $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ است بجای n_1، . . .، و n_k در عبارت تحت $\sum$.

بـرهان. طرف اول $(*)$ مساوی حاصلضرب n عامل

$$(۱)\quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

است. بر طبق خواص شرکتپذیـری و توزیعپذیری، بسط این حـاصلضرب بدین گونه حاصـل میشود که، به اقسام ممکنه، یک و تنها یک جمله از داخل هر پرانتز اختیار کرده این جملـه‌ها را در هم ضرب کنیم، و جمیع حاصلضربهائی را که بدین گونه حاصل میشود با یکدیگر جمع نمائیم. حاصلضربی از آن قبیل که گفته شد به صورت

$$(۲)\quad a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}$$

است، که در آن، n_iها اعدادی صحیح و نامنفی‌اند، و

$$(۳)\quad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

اینک باید تعیین کـرد کـه بازاء مقـادیر مفـروض n_1، . . .، و n_k کـه در (۳) صـدق کنند یکجمله‌ای (۲) چند بار در بسط (۱) میآید. واضح است که (۲) بدین گونه حاصل میشود که n_1 بار a_1 را، n_2 بار a_2 را، . . .، و n_k بار a_k را از n عامل (۱) اختیار کرده در هـم ضرب کنیم. انتخـاب n_1 a_1 از عوامل حاصلضرب (۱) به $\binom{n}{n_1}$ طریق ممکـن است. پس از هـر یک از این انتخابات، $n - n_1$ عامل از (۱) میماند کـه باید از آنها n_2 a_2 اختیار کـرد، و این کار به $\binom{n-n_1}{n_2}$ طریق ممکن میباشد. با ادامه‌ی این استدلال معلـوم میشود کـه ضریب یکجمله‌ای (۲) در بسط (۱) مساوی $n!/(n_1!\ldots n_k!)$ است. ▲

۴.۲.۱. امثله و فواید

(آ). برای بسط $(a + b + c)^3$، قبلاً 3 را بـه حـاصـلـجـمع سه جـزء افـراز مـیکنیم (۳.۴.۴ : ۳). ده افـراز مرتب ممکن در جدول بـالای صفحه‌ی ۷۵۹ مندرج است، و از آن نتیجه میشود:

$$(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + a^2c + b^2a + c^2a + b^2c + c^2b) + 6abc.$$

چنانکه ملاحـظه میشود، اگـر قـرار بگذاریم که نماینده‌ها را در هر جمله‌ی بسط بـه ترتیب

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3$$

n_1	**3**	0	0	**2**	2	1	1	0	0	**1**
n_2	**0**	3	0	**1**	0	2	0	2	1	**1**
n_3	**0**	0	3	**0**	1	1	2	1	2	**1**
$\dfrac{3!}{n_1!n_2!n_3!}$	1	1	1	3	3	3	3	3	3	6

نزولی مرتب کنیم، در مورد هر یک از نوارهای قائم جدول، کافی است اعداد ستون اول («3, 0, 0» در نوار اول، «2, 1, 0» در نوار دوم، و غیره) را تعیین کنیم، و جملهی حاصل از آن را با جمیع جمل متمایز حاصل از تعویض حروف a، b، و c در آن به اقسام ممکنه با هم جمع نمائیم. مثلاً، عبارت واقع در پرانتز دوم طرف راست را میتوان بدین گونه از a^2b بدست آورد.

(ب). بطور کلی، برای بسط قوهی nم kجملهای $a + b + \cdots + l$، باید جمیع دستگاههای جوابهای صحیح نامنفی معادلهی

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n \qquad (۱)$$

را بدست آورد. برای اینکه عمل با نظم و ترتیب انجام گیرد، فرض میکنیم، در هر جملهی بسط، نمایندهها به ترتیب نزولی مرتب شده باشند، و معادلهی (۱) را با این فرض حل میکنیم، و سپس، در جملهی حاصل از جوابی تابع شرایط

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k, \qquad (۲)$$

حروف a، b، ...، و l را به اقسام ممکنه با هم تعویض میکنیم.

بنا بر این، ابتدا فرض میکنیم[1] $n_1 = n$. از (۱) نتیجه میشود، $n_2 = \cdots = n_k = 0$.

از این جواب نوع اول از جمل بسط (a^n، b^n، ...، و l^n) حاصل میشود، که حاصلجمع آنها را معمولاً، به اختصار، $\sum a^n$ مینامند، و ضریب آنها عبارتست از

$$\frac{n!}{n!0!\ldots0!} = 1.$$

ثانیاً، فرض میکنیم $n_1 = n - 1$. از (۱) با توجه به شرایط (۲) نتیجه میشود،

$$n_2 = 1, \qquad n_3 = \cdots = n_k = 0.$$

از این جواب نوع دوم از جمل بسط ($a^{n-1}b$، $a^{n-1}c$، ...، $a^{n-1}l$، $b^{n-1}a$، $b^{n-1}c$، ...) حاصل میشود، که مجموع آنها را $\sum a^{n-1}b$ مینامیم، و ضریب آنها عبارتست از

$$\frac{n!}{(n-1)!1!0!\ldots0!} = n.$$

و هکذا.

(پ). بسط $(a + b + \cdots + l)^2$.

باید دستگاه

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 2, \qquad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k$$

(۱) توضیحات مذکور در پایان ۳.۴.۳ ملاحظه شود.

را حل کرد. بالبداهه، $n_1 = 2$ یا $n_1 = 1$.
از $n_1 = 2$ نتیجه میشود، $n_2 = \cdots = n_k = 0$.
از $n_1 = 1$ نتیجه میشود، $n_3 = \cdots = n_k = 0,\ n_2 = 1$.
پس،

$$(a+b+\cdots+l)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab,$$

که در آن، $\sum a^2$ به معنی مجموع مربعات a، b، ...، و l است، و $\sum ab$ به معنی مجموع حاصلضربهای دو به دوی آنها.

(ت). بسط $(a+b+\cdots+l)^3$.
باید دستگاه ذیل را حل کرد:

$$n_1+n_2+\cdots+n_k = 3, \qquad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k.$$

اولاً، از $n_1 = 3$ نتیجه میشود، $n_2 = \cdots = n_k = 0$. از اینجا دستهی $\sum a^3$ از جمل بسط، با ضریب 1، بدست میآید.
ثانیاً، از $n_1 = 2$ نتیجه میشود، $n_2 = 1$ و $n_3 = \cdots = n_k = 0$. از اینجا دستهی جمل $\sum a^2 b$ با ضریب

$$\frac{3!}{2!1!0!\ldots0!} = 3.$$

حاصل میشود.
ثالثاً، از $n_1 = 1$ نتیجه میشود، $n_2 = n_3 = 1$ و $n_4 = \cdots = n_k = 0$. از اینجا دستهی جمل $\sum abc$ با ضریب

$$\frac{3!}{1!1!1!0!\ldots0!} = 6.$$

حاصل میگردد. پس،

$$(a+b+\cdots+l)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2 b + 6\sum abc.$$

(ث). مطلوبست ضریب x^5 در بسط $(a+bx+cx^2)^9$
جملهی عمومی بسط

$$\frac{9!}{n_1!n_2!n_3!}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}x^{n_2+2n_3}$$

است، که در آن،

$$n_1+n_2+n_3 = 9. \tag{۱}$$

مطلوب اینست که

$$n_2+2n_3 = 5. \tag{۲}$$

از حل معادلهی سیالهی (۲) مقادیر n_2 و n_3، و سپس، از معادلهی (۱) مقدار n_1 بدست میآید:

$$\begin{cases} n_3 = 0, \\ n_2 = 5, \\ n_1 = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} n_3 = 1, \\ n_2 = 3, \\ n_1 = 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} n_3 = 2, \\ n_2 = 1, \\ n_1 = 6. \end{cases}$$

پس، ضریب x^5 در بسط مذکور عبارتست از

$$\frac{9!}{4!5!0!}a^4b^5c^0+\frac{9!}{5!3!1!}a^5b^3c^1+\frac{9!}{6!1!2!}a^6b^1c^2$$
$$=126a^4b^5+504a^5b^3c+252a^6bc^2.$$

(ج). فرض کنیم p عددی اول و $a+b+\cdots+l$ یک kجمله‌ای باشد. بنا بر دستور بسط kجمله‌ای،

$$(1)\quad (a+b+\cdots+l)^p=\sum a^p+\sum\frac{p!}{n_1!\ldots n_k!}a^{n_1}\ldots l^{n_k},$$

که در آن، سیگمای دوم ناظر به انواع تجزیه‌های مرتب p است به حاصلجمع k عدد طبیعی n_1، . . . و n_k. چون هر عدد اول با هر عدد طبیعی کوچکتر از خود متباین است، و $p!/(n_1!\ldots n_k!)$ عددی است صحیح، این عدد اخیر به p قابل قسمت است. اینک اگر در (۱) فرض کنیم $a=b=\cdots=l=1$، بنا بر (۱) و نکته‌ی مذکور، معلوم میشود که

$$p\mid k^p-k.$$

به عبارت دیگر، اگر k عددی طبیعی و p عددی اول باشد این عدد k^p-k را عاد میکند. چون $k^p-k=k(k^{p-1}-1)$، بالاخص، اگر $(p,k)=1$ آنگاه $p\mid k^{p-1}-1$؛ و این قضیه‌ی معروف فرما* است در حساب عالی:

اگر p عددی اول و k عددی طبیعی و متباین با p باشد آنگاه $k^{p-1}-1$ بر p قابل قسمت است.

۵ § مسائل مختلفه

۱. عده‌ی منظومه‌های rتائی n حرف که

(آ) شامل حرف معینی از آن حروف باشند $rP(n,r)/n$ است.

(ب) شامل دو حرف معین از آن حروف باشند مساوی است با $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}P(n,r)$

(پ) که حد اقل شامل یکی از دو حرف معین از آن حروف باشند مساوی است با $P(n,r)-P(n-2,r)$.

۲. چند عدد منتها سه‌رقمی با سه رقم ناصفر دو به دو متمایز میتوان نوشت؟

۳. چند منظومه‌ی شش‌حرفی از سه حرف بزرگ A، B، و C، و سه حرف کوچک p، q، و r میتوان ساخت که

(آ) هر منظومه با یک حرف بزرگ آغاز شود؛

(ب) هر منظومه با یک حرف بزرگ آغاز و به یک حرف بزرگ منتهی شود؟

(144 ؛ 360)

۴. به چند طریق میتوان 5 کتاب فارسی، 6 کتاب عربی، و 8 کتاب آلمانی را در طبقه‌ای از یک قفسه قرار داد بطوری که همه‌ی کتابهائی که به یک زبان هستند کنار یکدیگر قرار گیرند؟ (20 901 888 000)

۵. به چند طریق دو نفر میتوانند 30 کتاب را بین خود تقسیم کنند بطوری که یکی دو برابر دیگری داشته باشد؟ (30 045 015)

۶. به چند طریق میتوان یک حرف نقطه‌دار و یک حرف بی نقطه از حروف الفبای فارسی اختیار کرد؟

۷. به چند طریق میتوان یک کلمه‌ی دوحرفی از حروف الفبای فارسی ساخت که یک حرفش نقطه‌دار و یک حرفش بی‌نقطه باشد؟

۸. چند کلمه‌ی 12حرفی از 4 م، 4 ی، 2 الف، و 2 س میتوان ساخت؟ (207 900)

۹. چند کلمه‌ی پنج‌حرفی از حروف a، b، و c میتوان ساخت که هر کلمه منتها دو a، منتها یک b، و منتها سه c داشته باشد؟ (60)

۱۰. هفت کتاب عربی و 3 کتاب فارسی داریم. به چند طریق میتوان 4 کتاب عربی و یک کتاب فارسی از آن جمله را در یک ردیف چید بطوری که کتاب فارسی همواره در وسط قرار گیرد؟ (2 520)

۱۱. به چند طریق میتوان گروهی از 3 مرد و 3 زن از میان 6 زن و 20 مرد انتخاب کرد؟ (22 800)

۱۲. از همان 6 زن و 20 مرد میخواهیم 6 نفر برای تصدی 6 شغل متفاوت انتخاب کنیم. سه تن از متصدیان باید از مردان باشند و سه تن دیگر از زنان. به چند طریق میتوان متصدیان این مشاغل را انتخاب کرد؟ (820 800)

۱۳. به چند طریق میتوان از 7 نفر اصفهانی و 4 نفر اهوازی هیئتی شش‌نفری انتخاب کرد مشروط بر اینکه

(آ) درست دو اهوازی عضو هیئت باشند.

(ب) حد اقل دو اهوازی عضو هیئت باشند.

(210؛ 371)

۱۴. از 7 حرف بی‌نقطه و 4 حرف نقطه‌دار الفبای فارسی چند کلمه میتوان ساخت که هر یک مشتمل بر 3 حرف بی‌نقطه و 2 حرف نقطه‌دار باشد؟ (25 200)

۱۵. مطلوبست عده‌ی کلمات ساخته شده از حروف کلمه‌ی **همینالد** که در هیچ یک از آنها حروف نقطه‌دار از هم جدا نباشند. (1440)

۱۶. چند نوع خال مختلف از ریختن n طاس ممکن است پدید آید؟ $\left(\binom{n+5}{5}\right)$

۱۷. شش طاس را بر تخته نرد میریزیم. به چند طریق ممکن است دو 6، سه 5، و یک 1 بیاید. (60)

۱۸. چند عدد بزرگتر از 2 000 با ارقام 0، 1، 2، 3، و 4 میتوان ساخت که ارقام هر عدد دو به دو متمایز باشند؟

۱۹. چند عدد بزرگتر از یک میلیون با ارقام 2، 2، 3، 3، 4، 4، و 0 میتوان ساخت؟ (360)

۲۰. چند عدد کوچکتر از 10 000 با ارقام 0، 1، . . .، و 7 میتوان ساخت؟ (4 095)

۲۱. چند عدد با ارقام 1، 2، 3، 4، 3، 2، و 1 میتوان ساخت که در هر یک از آنها ارقام فرد در مواضع مرتبه‌ی فرد آیند؟ (18)

۲۲. حاصلجمع جمیع اعداد nرقمی ساخته شده از n رقم متمایز a، b، . . .، و l برابر است با

$$\frac{10^n-1}{9}\cdot(a+b+\cdots+l)\cdot(n-1)!.$$

۲۳. ضریب $a^2b^3c^4d$ را در بسط $(a-b-c+d)^{10}$ تعیین کنید.

۲۴. ضریب x^3 را در بسط $(1+3x-2x^2)^3$ تعیین کنید.

۲۵. ضریب x^8 در بسط $(1-2x+3x^2-4x^3)^4$ مساوی 1095 است.

۲۶. در رابطه‌ی

$$(1+x+\cdots+x^r)^n = a_0+a_1x+\cdots+a_{nr}x^{nr},$$

طرف دوم بسط طرف اول است بر حسب قوای صعودی x. ثابت کنید که

$$a_0+a_1+\cdots+a_{nr} = (r+1)^n, \qquad (\text{آ})$$

$$a_1+2a_2+\cdots+nr\cdot a_{nr} = \frac{1}{2}nr(r+1)^n. \qquad (\text{ب})$$

۲۷. دستور بسط kجمله‌ای را به استقراء ثابت کنید.

۲۸. مطلوب است ضریب x^2 در بسط عبارت

$$(\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2\cdots-2)^2,$$

که در آن، kبار «$2-$» آمده است.

تبصره و راهنمائی. این گونه مسائل معمامانند را باید قبلاً به دقت بیان کرد. اگر رشته‌ی $\{u_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$u_1=(x-2)^2, \qquad u_n=(u_{n-1}-2)^2 \quad (n>1)$$

تعریف کنیم مقصود از عبارت مورد بحث همان u_n است، و مطلوب مسئله ضریب x^2 است در بسط u_n پس از تحویل جمل متشابه در آن.

جواب: $((4^{2k-1}-4^{k-1})/3)$

فصل ٤ ض

حدود اعلی و اسفل رشته‌ها

۱ § سوپرموم و اینفیموم در $\mathbb{R}^*$

۱.۱. کلیات. در ۷.۳ : ۶ بعضی از مفاهیم ناشی از ترتیب را در $\mathbf{R}^*$ تعریف کردیم، و تذکر دادیم که این تعمیم با تصرفات جزئی لفظی در تعریفات مربوط به $\mathbb{R}$ صورت میگیرد. البته، باید بین مفاهیم مربوط به $\mathbf{R}$ و مفاهیم مربوط به $\mathbf{R}^*$ تمیز گذاشت (مثلاً، عنداللزوم، با قیود «در $\mathbf{R}$» و «در $\mathbf{R}^*$»). به وسیله‌ی تعمیم مذکور، مفاهیم سوپرموم و اینفیموم مجموعکهای $\mathbf{R}$ را تعمیم دادیم (صفحه‌ی ۳۳۲)، ولی، در این تعمیم از $\mathbf{R}$ خارج شدیم، زیرا، هیچ یک از ∞ و $-\infty$ به $\mathbf{R}$ تعلق ندارد. بعلاوه، در آن جا، سوپرموم و اینفیموم را در مورد مجموعکهای $\mathbb{R}^*$ بطور کلی تعریف نکردیم. اینک تعمیم مذکور را کنار میگذاریم، و به طریقی اساسیتر وارد آن میشویم.

۱.۲. تعریف[1]**.** فرض کنیم A مجموعکی از $\mathbf{R}^*$ باشد. عضو α از $\mathbf{R}^*$ را سوپرموم (اینفیموم) A در $\mathbf{R}^*$ خوانیم در صورتی که بند بالای[2] (بند پایین) A در $\mathbf{R}^*$ باشد، و بعلاوه، از هر بند بالای (بند پایین) A در $\mathbf{R}^*$ نابیشتر (ناکمتر) باشد.
سوپرموم و اینفموم A را در $\mathbf{R}^*$ موقتاً به $\sup^* A$ و $\inf^* A$ نمایش میدهیم، و علامات $\sup A$ و $\inf A$ را در مورد مجموعکهای $\mathbf{R}$ به معنی مذکور در ۱.۲.۱ : ۶ بکار میبریم.

۱.۲.۱. امثله

(آ). ∞ یک بند بالای هر مجموعک $\mathbf{R}^*$ است در $\mathbf{R}^*$، و $-\infty$ یک بند پایین هر مجموعک $\mathbf{R}^*$ است در $\mathbf{R}^*$.

(ب). اگر A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد ($A \subseteq \mathbf{R}$)، چون $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^*$، $A \subseteq \mathbf{R}^*$. پس، ∞ یک بند بالا و $-\infty$ یک بند پایین A است در $\mathbf{R}^*$ (اما نه در $\mathbf{R}$).

(پ). فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}^*$. اگر $\infty \in A$ آنگاه، اولاً، ∞ یک بند بالای A است، و ثانیاً، A بند بالائی بزرگتر از ∞ ندارد؛ پس $\sup^* A = \infty$.
به همین قیاس معلوم میشود که اگر $-\infty \in A$ آنگاه $\inf^* A = -\infty$.

(ت). میدانیم که $\varnothing$ در $\mathbf{R}$ نه سوپرموم دارد نه اینفیموم؛ اما

$$\sup^* \varnothing = -\infty, \qquad \inf^* \varnothing = \infty.$$

زیرا اگر ξ عضو دلخواهی از $\mathbf{R}^*$ باشد گزاره‌نماهای

---

(۱) با ۱.۲.۱ : ۶ مقایسه کنید.

(۲) تعریف بندهای بالا و پایین در $\mathbf{R}^*$ در ۷.۳ : ۶ گفته شد.

بازاءِ هر x از $\varnothing$، $x \leqslant \xi$

بازاءِ هر x از $\varnothing$، $\xi \leqslant x$

به انتفای مقدم راست هستند، و لهذا، ξ یک بند بالای $\varnothing$ و هم یک بند پایین آنست. پس، مجموعه‌ی بندهای بالای $\varnothing$ و نیز مجموعه‌ی بندهای پایین آن همان $\mathbb{R}^*$ است، که عضو اقل آن $-\infty$ و عضو اکثرش ∞ میباشد.

(ڈ). فرض کنیم A مجموعکی غیر خالی از $\mathbf{R}$ باشد. اگر A از بالا محدود باشد، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $\sup A$ موجود است. اگر A از بالا محدود نباشد در $\mathbf{R}$ بند بالا ندارد، و لهذا، $\sup A$ موجود نیست، اما A، به عنوان مجموعک $\mathbf{R}^*$، در $\mathbf{R}^*$ سوپرموم دارد، و $\sup^* A = \infty$، زیرا، ∞ یگانه بند بالای A است در $\mathbf{R}^*$ (چرا؟).

به همین قیاس معلوم میشود که اگر $\varnothing \neq A \subseteq \mathbf{R}$ و A از پایین نامحدود باشد $\inf^* A = -\infty$.

۱۰۲۰۲. تمرین

۱. بنا بر آنکه $A \subseteq \mathbf{R}^*$، مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه $\sup^* A = -\infty$.

۲. بنا بر آنکه $A \subseteq \mathbf{R}^*$، مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه $\inf^* A = \infty$.

۳. (خاصیت مشخصه‌ی سوپرموم). فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}^*$. شرط لازم و کافی برای آنکه عضو α از $\mathbf{R}^*$ سوپرموم A در $\mathbf{R}^*$ باشد آنست که، در عین حال،

I. بازاءِ هر ξ از A، $\xi \leqslant \alpha$؛

II. بازاءِ هر u از $\mathbf{R}^*$، اگر $u < \alpha$ آنگاه عضوی مانند ξ از A باشد که $u < \xi$.

۴. نظیر حکم مسئله‌ی ۳ را در مورد اینفیموم در $\mathbf{R}^*$ بیان و ثابت کنید.

اگر A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد $\sup A$ ممکن است موجود باشد یا نه (وقتی که A خالی یا از بالا نامحدود باشد). قضیه‌ی ذیل نشان میدهد که $\sup^* A$ همواره موجود است، و بعلاوه، در صورت وجود $\sup A$، سوپرموم A در $\mathbf{R}$ با سوپرموم آن در $\mathbf{R}^*$ یکی است.

۱۰۳. قضیه. اگر $A \subseteq \mathbf{R}$ آنگاه، اولاً، $\sup^* A$ موجود است، و ثانیاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $\sup A$ موجود باشد آنست که $\sup^* A \in \mathbf{R}$، و در این صورت، $\sup^* A = \sup A$.

برهان. برای اثبات، دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $\alpha = \sup A$ (۱) موجود است. به آسانی دیده میشود که α یک بند بالای A در $\mathbf{R}^*$ و از هر بند بالای A در $\mathbf{R}^*$ نابیشتر است. پس، بنا بر ۱۰۲، $\alpha = \sup^* A$.

حالت دوم: $\sup A$ موجود نیست. پس، $A = \varnothing$ یا A از بالا نامحدود است. در صورت اول، $\sup^* A = -\infty$، و در صورت ثانی، $\sup^* A = \infty$. پس، در هر دو صورت، $\sup^* A$ موجود است، ولی $\sup^* A \notin \mathbf{R}$. ▲

نظیر قضیه‌ی فوق در مورد اینفیموم به شرح ذیل و اثباتش بر متعلم است:

۱.۳.۱. قضیه. اگـر $A \subseteq \mathbf{R}$ آنگاه، اولاً، $\inf^* A$ موجود است، و ثانیاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $\inf A$ موجود باشد آنست که $\inf^* A \in \mathbf{R}$، و در این صورت $\inf^* A = \inf A$.

۱.۳.۲. فایده. فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}$. بنا بر قضایای فوق، $\sup A$ $(\inf A)$، در صورت وجود، با $\sup^* A$ $(\inf^* A)$ یکسان است. بنا بر این، ضرورتی برای اینکه علامات خاصی برای سوپرموم و اینفیموم در $\mathbf{R}^*$ بکار بریم باقی نمیماند، و از این بعد سوپرموم و اینفیموم مجموعکهای $\mathbf{R}^*$ را نیز به $\sup$ و $\inf$ نمایش میدهیم.

۱.۴. قضیه. هر مجموعک $\mathbf{R}^*$ سوپرموم و اینفیموم دارد.
برهان (در مورد سوپرموم). فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}^*$. اگر $\infty \in A$ آنگاه $\sup A = \infty$. پس، فرض کنیم $\infty \notin A$. اگر $B = A \cap \mathbf{R}$ آنگاه، بنا بر ۱.۳، $\beta = \sup B$ موجود است، و به آسانی دیده میشود که $\beta = \sup A$ (چرا؟). ▲

در پایان این قسمت، چند رابطهی مفید در باب سوپرموم و اینفیموم رشتههای اعداد حقیقی میآوریم.

۱.۵. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد حقیقی باشند هر یک از نامساویهای ذیل که طرفینش بامعنی باشند برقرار است:

$$\inf a_n + \inf b_n \leqslant \inf (a_n + b_n) \leqslant \begin{matrix} \inf a_n + \sup b_n \\ \sup a_n + \inf b_n \end{matrix}$$
$$\leqslant \sup (a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n.$$

بالاخص، بازاء هر عدد حقیقی λ،

$$\inf (a_n + \lambda) = \lambda + \inf a_n,$$
$$\sup (a_n + \lambda) = \lambda + \sup a_n.$$

برهان. فرض کنیم $c_n = a_n + b_n$. با اندک تأملی دیده میشود که کافی است نامساویهای ذیل را با فرض معنی داشتن طرفین آنها ثابت کنیم:

$$\text{I.} \qquad \sup c_n \leqslant \sup a_n + \sup b_n,$$
$$\text{II.} \qquad \sup a_n + \inf b_n \leqslant \sup c_n.$$

برای اثبات I، گوئیم، بازاء هر n،

$$a_n \leqslant \sup a_n, \qquad b_n \leqslant \sup b_n.$$

پس، چون $\sup a_n + \sup b_n$ بامعنی فرض شده است، بازاء هر n،

$$c_n \leqslant \sup a_n + \sup b_n.$$

بالنتیجه، $\sup a_n + \sup b_n$ یک بند بالای رشتهی $\{c_n\}$، و لهذا، از $\sup c_n$ ناکمتر است.
اثبات II اندکی مفصلتر است. قبلاً ملاحظه میکنیم که، چون $\{b_n\}$ رشتهای از اعداد حقیقی

است، $\inf b_n < \infty$. پس، دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $\inf b_n = -\infty$. با توجه به فرض معنی داشتن طرف اول نامساوی II، این نامساوی معادل نامساوی $\sup c_n \geqslant -\infty$ است، که بالبداهه برقرار میباشد.

حالت دوم: $\inf b_n \in \mathbf{R}$. چون همواره $\inf b_n \leqslant b_n$، معلوم میشود که، بازاء هر n،

$$a_n + \inf b_n \leqslant c_n \leqslant \sup c_n.$$

پس، بازاء هر n،

$$a_n \leqslant \sup c_n - \inf a_n,$$

و لهذا،

$$\sup a_n \leqslant \sup c_n - \inf a_n,$$

و از آنجا،

$$\sup a_n + \inf a_n \leqslant \sup c_n. \blacktriangle$$

۱.۶. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد حقیقی نامنفی باشند هر یک از نامساویهای ذیل که طرفینش بامعنی باشند برقرار است:

$$\inf a_n \cdot \inf b_n \leqslant \inf (a_n b_n) \leqslant \begin{matrix} \inf a_n \cdot \sup b_n \\ \sup a_n \cdot \inf b_n \end{matrix}$$

$$\leqslant \sup (a_n b_n) \leqslant \sup a_n \cdot \sup b_n.$$

بالاخص، بازاء هر عدد حقیقی نامنفی λ،

$$\inf \lambda a_n = \lambda \inf a_n,$$
$$\sup \lambda a_n = \lambda \sup a_n.$$

برهان. فرض کنیم $c_n = a_n b_n$. نامساوی $\sup c_n \leqslant \sup a_n \cdot \sup b_n$، مانند قضیهٔ قبل، به آسانی بدست میآید. اینک به اثبات نامساوی

$$\sup a_n \cdot \inf b_n \leqslant \sup c_n \tag{*}$$

میپردازیم. اگر $\inf b_n = 0$ این نامساوی بدیهی است. باقی میماند حالتی که $\inf b_n \in \mathbf{R}^+$. چون همواره $\inf b_n \leqslant b_n$، بازاء هر n،

$$a_n \inf b_n \leqslant c_n \leqslant \sup c_n.$$

بالنتیجه، بازاء هر n،

$$a_n \leqslant \sup c_n / \inf b_n.$$

از اینجا به سهولت (*) بدست میآید. ▲

۱.۷. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشتهای از اعداد حقیقی نامنفی باشد، و چنین قرارداد کنیم که

$$1/\infty = 0, \qquad 1/0 = \infty,$$

آنگاه

$$\inf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sup a_n}, \qquad \sup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\inf a_n}.$$

برهان. رابطه‌ی دوم را ثابت میکنیم. قبلاً ملاحظه میکنیم که، بر طبق قراردادهای مذکور، اگر $\infty \leqslant y \leqslant x \leqslant 0$ آنگاه $\infty \leqslant 1/x \leqslant 1/y \leqslant 0$. اینک گوئیم، بازاء هر n،

$$\inf a_n \leqslant a_n, \qquad 1/a_n \leqslant \sup (1/a_n).$$

پس، بازاء هر n،

$$\frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{\inf a_n}, \qquad \frac{1}{\sup (1/a_n)} \leqslant a_n.$$

بالنتیجه،

$$\sup \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{\inf a_n}, \qquad \frac{1}{\sup (1/a_n)} \leqslant \inf a_n,$$

و از آنجا،

$$\sup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\inf a_n}. \blacktriangle$$

۲ § قضیه‌ی بولتسانو* و وایرشتراس*

۲.۱. مقدمه. قبل از اینکه به اثبات این قضیه‌ی شگفت‌انگیز بپردازیم، قضیه‌ی شگفت‌آور دیگری ثابت میکنیم، و آن اینکه هر رشته رشتکی یکنواخت دارد (قضیه‌ی ۲.۲). قبلاً چند لم میآوریم.

۲.۱.۱. لم ۱. اگر رشته‌ای از اعداد حقیقی عضو اکثر نداشته باشد هر رشتکی از آن که از اسقاط تعدادی متناهی از جمله‌های آن حاصل شود نیز فاقد عضو اکثر است.
اثبات به برهان خلف است، و به متعلم محول میشود.

۲.۱.۲. لم ۲. هر رشته از اعداد حقیقی که فاقد عضو اکثر باشد رشتکی اکیداً صعودی دارد.
برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و فاقد عضو اکثر باشد. به استقراء، رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی مانند رشته‌ی $\{k_n\}$ تعریف میکنیم که رشتک $\{a_{k_n}\}$ اکیداً صعودی باشد. جمله‌ی دلخواهی از رشته‌ی $\{a_n\}$ را اختیار کرده اندیس آن را k_1 میگیریم. اگر همه‌ی جمله‌های پیش از a_{k_1} را از رشته‌ی $\{a_n\}$ اسقاط کنیم رشتکی از این رشته حاصل میشود که، بنا بر لم ۱، فاقد عضو اکثر است، و لهذا، جمله‌ای بزرگتر از a_{k_1} دارد. از میان این گونه جمله‌ها، آن را که دارای کوچکترین اندیس است اختیار میکنیم، و اندیسش را k_2 مینامیم. پس، $k_1 < k_2$ و $a_{k_1} < a_{k_2}$. بطور کلی، فرض کنیم اعداد طبیعی k_1، k_2، ...، و k_n چنان تعریف شده باشند که

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n, \qquad a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_n}.$$

اگر از رشته‌ی $\{a_n\}$ همه‌ی جمله‌های پیش از a_{k_n} را اسقاط کنیم رشتکی از این رشته حاصل

میشود که، بنا بر لم ۱، فاقد عضو اکثر است، و بالنتیجه، جمله‌ای بزرگتر از a_{k_n} دارد. از میان این گونه جمله‌ها، آن را که دارای کوچکترین اندیس است اختیار میکنیم، و اندیس آن را k_{n+1} مینامیم. بنا بر این،

$$k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1}, \qquad a_{k_1} < \cdots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}}.$$

پس، تعریف رشته‌ی $\{k_n\}$ به استقراء تمام است، و رشته‌ی $\{a_{k_n}\}$ رشتکی اکیداً صعودی از رشته‌ی $\{a_n\}$ میباشد. ▲

۲.۱.۳. لم ۳. اگر رشته‌ای از اعداد حقیقی هیچ رشتک اکیداً صعودی نداشته باشد هر رشتک آن عضو اکثر دارد.
برهان. فرض کنیم رشته‌ی $\{a_n\}$ هیچ رشتک اکیداً صعودی نداشته باشد، ولی رشتکی مانند $\{b_n\}$ از آن فاقد عضو اکثر باشد. بنا بر لم ۲، $\{b_n\}$ رشتکی اکیداً صعودی دارد. بالبداهه، این رشتک رشتکی از $\{a_n\}$ نیز هست، و این با فرض متناقض است. ▲

۲.۲. قضیه. هر رشته از اعداد حقیقی رشتکی یکنواخت دارد.
برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد. اگر این رشته رشتکی اکیداً صعودی داشته باشد فبها. پس، فرض میکنیم چنین نباشد و، به استقراء، رشتکی نزولی از $\{a_n\}$ تعریف میکنیم. بنا بر فرض و لم ۳، هر رشتک $\{a_n\}$ عضو اکثر دارد. بالاخص، رشته‌ی $\{a_n\}$ خود عضو اکثر دارد. اندیس اولین جمله‌ای از این رشته را که عضو اکثر آنست k_1 مینامیم. اگر a_{k_1} و همه‌ی جمله‌های پیش از آن را از $\{a_n\}$ اسقاط کنیم رشتکی از این رشته حاصل میشود، که آن نیز عضو اکثر دارد. اندیس اولین جمله‌ای از این رشتک را که عضو اکثر آنست k_2 مینامیم. بالنتیجه،

$$k_1 < k_2, \qquad a_{k_1} \geqslant a_{k_2}.$$

اتمام تعریف به همان قیاس است که در اثبات لم ۲ گذشت، و به متعلم محول میشود. ▲

۲.۳. قضیه (بولتسانو* و وایرشتراس*). هر رشته‌ی نامتناهی[1] از اعداد حقیقی رشتکی حددار دارد. بالاخص، هر رشته‌ی محدود از اعداد حقیقی رشتکی متقارب دارد.
برهان. رشته‌ی دلخواه $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی، بنا بر ۲.۲، رشتکی یکنواخت دارد. پس، به موجب قضیه‌ی اصلی ۴.۴ : ۷، قسمت اول حکم ثابت است. برای اثبات قسمت دوم کافی است ملاحظه کنیم که اگر رشته‌ی $\{a_n\}$ محدود باشد هر رشتک آن، و بالاخص رشتک یکنواخت مذکور، نیز محدود است، و لهذا، این رشتک متقارب میباشد. ▲

۲.۳.۱. تبصره. استدلال مذکور در اثبات قضیه‌ی ۲.۳ نباید این گمان باطل را به ذهن

---

(۱) قید «نامتناهی» برای تأکید است. بر طبق قراری که گذاشته‌ایم، «رشته» بطور مطلق به معنی رشته‌ی نامتناهی است.

القا کند که رشتکهای متقارب یک رشته‌ی محدود منحصر به رشتکهای یکنواخت آن هستند. مثلاً، رشته‌ی

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

دارای رشتک نایکنواخت

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

است، که متقارب به 0 میباشد.

۳ § نقاط حد رشته‌های اعداد حقیقی

۳.۱. تعریف. عضو α از $\mathbf{R}^*$ را یک نقطه‌ی حد یا نقطه‌ی اجتماع رشته‌ی $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی خوانیم در صورتی که α حد رشتکی از این رشته باشد.

با این تعریف، قضیه‌ی بولتسانو و وایرشتراس را میتوان چنین بیان کرد:

۳.۱.۱. قضیه (بولتسانو و وایرشتراس). هر رشته‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی حد اقل یک نقطه‌ی حد دارد. بالاخص، هر نقطه‌ی حد یک رشته‌ی محدود از اعداد حقیقی عددی حقیقی است.

۳.۱.۲. قضیه. اگر رشته‌ای از اعداد حقیقی حد داشته باشد حد آن یگانه نقطه‌ی حد آنست.
برهان. زیرا، هر رشته یک رشتک خود میباشد، و هر رشتک یک رشته‌ی حددار حدی مساوی حد رشته‌ی اصلی دارد. ▲

۳.۱.۳. امثله

(آ). 1، ∞، و $-\infty$، بترتیب، نقطه‌ی حد (و یگانه نقطه‌ی حد) رشته‌های ذیل هستند:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots.$$

(ب). یگانه نقطه‌ی حد رشته‌ی ثابت $\{c\}$ عدد c است.

(پ). هر یک از 1 و -1 یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{(-1)^n\}$ است، زیرا، اولی حد رشتک $\{(-1)^{2n}\}$ و دومی حد رشتک $\{(-1)^{2n-1}\}$ از این رشته است.

(ت). رشته‌ی

$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots \qquad (1)$$

را اختیار میکنیم. رشتکهای

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \qquad\qquad 2, 3, 4, \ldots$$

از این رشته، اولی به 0 و دومی به ∞ میل میکند. پس، هر یک از 0 و ∞ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی (۱) است.

(ث). هر یک از ∞ و $-\infty$ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی ذیل است:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots.$$

(ج). رشته‌ی

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

مثالی است از رشته‌ای که مجموعه‌ی نقاط حد آن نامتناهی است: هر یک از اعداد 0، 1، $1/2$، $1/3$، ... یک نقطه‌ی حد این رشته است.

چون هر رشتک یک رشتک رشته‌ی $\{a_n\}$ رشتکی از این رشته است،

۳.۱.۴. قضیه. هر نقطه‌ی حد یک رشتک یک رشته یک نقطه‌ی حد این رشته است.

۳.۲. خاصیت مشخصه‌ی نقاط حد. چنانکه میدانیم، اگر رشته‌ای حد داشته باشد جمله‌های آن سرانجام در اطراف حدش «متمرکز» یا «مجتمع» میشوند. چون هر نقطه‌ی حد یک رشته حد رشتکی از این رشته است، به زبان عامیانه میتوان گفت که هر نقطه‌ی حد یک رشته مرکز اجتماع تعدادی بیشمار از جمله‌های رشته است. بیان دقیق و جامع این مطلب اینست که

۳.۲.۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عضو α از $\mathbf{R}^*$ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی باشد آنست که، بازاء هر حومه‌ی α مانند U، بینهایت‌بار $a_n \in U$.

برهان. لزوم. فرض کنیم α یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ باشد. بنا بر تعریف، رشتکی مانند $\{b_n\}$ از این رشته هست که $\lim b_n = \alpha$ (۱). اگر U حومه‌ی دلخواهی از α باشد، بنا بر (۱)، از مرتبه‌ای ببعد، $b_n \in U$. پس، بینهایت‌بار $a_n \in U$.

کفایت. فرض کنیم بازاء هر حومه‌ی α بینهایت‌بار a_n متعلق به این حومه باشد. گوئیم $\{a_n\}$ رشتکی دارد که حدش α است. برای اثبات، رشته‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی مانند رشته‌ی k تعریف میکنیم که رشتک $\{a_{k_n}\}$ از رشته‌ی $\{a_n\}$ متقارب به α باشد. بدین منظور، سه حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $\alpha \in \mathbf{R}$. بنا بر فرض، مجموعه‌ی مقادیری از n که $a_n \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$ نامتناهی است. یکی از این مقادیر را k_1 میگیریم. پس،

$$b_1 = a_{k_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1).$$

بنا بر فرض، مجموعه‌ی مقادیری از n که $a_n \in \left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right)$ نامتناهی است. پس، بعضی از این مقادیر از k_1 بزرگترند. یکی از آنها را k_2 میگیریم. بالنتیجه،

$$k_1 < k_2, \qquad b_2 = a_{k_2} \in \left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right).$$

بطور کلی، فرض کنیم عدد k_n چنان تعریف شده باشد که

$$k_{n-1} < k_n, \qquad b_n = a_{k_n} \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right).$$

بنا بر فرض، مجموعه‌ی مقادیری از n که $a_n \in \left(\alpha - \frac{1}{n+1}, \alpha + \frac{1}{n+1}\right)$ نامتناهی است. یکی از این مقادیر را که از k_n بزرگتر باشد k_{n+1} مینامیم. پس،

$$k_n < k_{n+1}, \qquad b_{n+1} = a_{k_{n+}} \in \left(\alpha - \frac{1}{n+1}, \alpha + \frac{1}{n+1}\right).$$

پس، تعریف رشتک $\{b_n\}$ تمام است. اینک ملاحظه میکنیم که، بازاء هر n، $|b_n - \alpha| < \frac{1}{n}$. پس، $\lim b_n = \alpha$، و لهذا، α یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است.

حالت دوم: $\alpha = \infty$. بنا بر فرض، مجموعه‌ی مقادیری از n که $a_n \in (1, \infty)$ نامتناهی است. یکی از این مقادیر را k_1 مینامیم. پس، $b_1 = a_{k_1} > 1$. بنا بر فرض، مجموعه‌ی مقادیری از n که $a_n \in (2, \infty)$ نامتناهی است. یکی از این مقادیر را که از k_1 بزرگتر باشد k_2 مینامیم. پس، $k_1 < k_2$ و $b_2 = a_{k_2} > 2$. اتمام تعریف آسان است. رشتک $\{b_n\}$ از $\{a_n\}$ که بدین گونه تعریف میشود بازاء هر n در شرط $b_n > n$ صدق میکند. بالنتیجه، $\lim b_n = \infty$، و لهذا، ∞ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است.

حالت سوم: $\alpha = -\infty$. اثبات به همان قیاس است که در حالت دوم گذشت. ▲

بنا بر قضیه‌ی فوق،

۳.۲.۲. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد، و عضو α از $\mathbf{R}^*$ حومه‌ای مانند U داشته باشد که مجموعه‌ی $\{n \mid a_n \in U\}$ متناهی باشد آنگاه α نقطه‌ی اجتماع رشته‌ی $\{a_n\}$ نیست.

۳.۲.۳. امثله و فواید

برای آنکه روش استفاده از قضیه‌ی مهم ۳.۲.۱ و نتیجه‌ی آن (۳.۲.۲) آشکار گردد مثالهائی میآوریم.

(آ). فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی، A مجموعه‌ی نقاط حد آن، و c عضو ثابتی از $\mathbf{R}^*$ باشد.

I. اگر از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant c$ آنگاه c یک بند بالای A است.

II. اگر بینهایت‌بار $a_n \geqslant c$ آنگاه A عضوی ناکمتر از c دارد.

III. اگر از مرتبه‌ای ببعد $a_n \geqslant c$ آنگاه c یک بند پایین A است.

IV. اگر بینهایت‌بار $a_n \leqslant c$ آنگاه A عضوی نابیشتر از c دارد.

برهان. قسمتهای I و II را ثابت میکنیم.

در قسمت I، حکم اگر $c = -\infty$ به انتفای مقدم و اگر $c = \infty$ بالبداهه برقرار است. پس، فرض کنیم $c \in \mathbf{R}$. کافی است ثابت کنیم که A عضوی بزرگتر از c ندارد، و به عبارت دیگر، هیچ عضو $\mathbf{R}^*$ که بزرگتر از c باشد نقطه‌ی اجتماع $\{a_n\}$ نیست، و این معلوم است. زیرا، فرض کنیم $c < \alpha$؛ پس، $\alpha = \infty$ یا $\alpha \in \mathbf{R}$. اگر $\alpha = \infty$ آنگاه بازه‌ی $U = (c, \infty)$ حومه‌ای است از ∞. چون از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant c$، مجموعه‌ی $\{n \mid a_n \in U\}$ متناهی است. اگر $\alpha \in \mathbf{R}$ آنگاه $\varepsilon = \alpha - c > 0$. پس، بازه‌ی $(c, \alpha + \varepsilon)$ حومه‌ای است از α، و چون از مرتبه‌ای ببعد $a_n \leqslant c$، مجموعه‌ی $\{n \mid a_n \in (c, \alpha + \varepsilon)\}$ متناهی است. پس، در هر حال، بنا بر ۳.۲.۲، $\alpha \notin A$. ▲

در قسمت II، گوئیم، چون بینهایت‌بار $a_n \geqslant c$، رشته‌ی جملی از رشته‌ی $\{a_n\}$ که در این نامساوی صدق میکنند رشتکی مانند $\{b_n\}$ از رشته‌ی $\{a_n\}$ است. رشته‌ی $\{b_n\}$ نقطه‌ی حدی مانند β دارد، و این نقطه نقطه‌ی حد $\{a_n\}$ نیز هست. بعلاوه، بنا بر تعریف نقطه‌ی حد، $\{b_n\}$ رشتکی دارد مانند $\{b'_n\}$ که $\lim b'_n = \beta$. پس، چون همواره $b'_n \geqslant c$، $\beta \geqslant c$. ▲

(ز). سابقاً دیدیم که هر یک از اعداد 1 و 1 − یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{(-1)^n\}$ است. اینک میخواهیم ثابت کنیم که این رشته نقطه‌ی حد دیگری ندارد. قبلاً ملاحظه میکنیم که، چون همواره $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$، بنا بر قسمتهای I و III مثال قبل، اگر رشته‌ی مذکور نقطه‌ی حد دیگری، مثلاً α داشته باشد آنگاه $-1 < \alpha < 1$. اما، چنانکه از رسم شکل معلوم میشود، هر عدد مانند α که بین 1 − و 1 باشد حومه‌ای دارد که هیچ جمله‌ی رشته بدان تعلق ندارد. به عبارت دقیق، فرض کنیم $-1 < \alpha < 1$. بالنتیجه، $d = \min\{|1 + \alpha|, |1 - \alpha|\} > 0$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی کوچکتر از d باشد مجموعه‌ی $\{n \mid (-1)^n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\}$ خالی است (چرا؟). پس، α نقطه‌ی اجتماع رشته‌ی مورد بحث نتواند بود.

۳.۳. تمرین

۱. جمیع نقاط حد هر یک از رشته‌هائی را که ذیلاً میآیند تعیین کنید:

(آ) $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$

(ب) $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots$

(پ) $a_n = n,$ (ت) $a_n = -n.$

(ث) $a_n = (-1)^n \cdot n.$ (ج) $a_n = 7 + \frac{(-1)^n}{n}.$

(چ) $a_n = 1 + n^{(-1)^n}$ (ح) $a_n = 2 - (n)^{(-1)^n}.$

(خ) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

۲. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ای از اعداد حقیقی متقارب باشد آنست که فقط یک نقطه‌ی حد داشته باشد و این نقطه‌ی حد عددی حقیقی باشد. در این صورت، نقطه‌ی حد رشته همان حد آنست.

۳. یک رشته‌ی محدود از اعداد حقیقی یا متقارب است یا دو رشتک متقارب به دو حد متمایز دارد.
۴. (اثبات قسمت کفایت در قضیه‌ی ۴.۷.۵ : ۷). هر رشته‌ی اساسی متقارب است.
راهنمائی: رشته‌ی اساسی $\{a_n\}$ محدود است. پس، اگر متقارب نباشد دو رشتک متقارب به دو عدد α و β دارد که $\delta = \beta - \alpha > 0$. بنا بر فرض، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $p > N$ آنگاه $|a_p - a_N| < \delta/4$. بعلاوه، دو عدد طبیعی مانند q و r هست که

$$r > N, \qquad q > N, \qquad |\alpha - a_q| < \delta/4, \qquad |\beta - a_r| < \delta/4.$$

اینک از رابطه‌ی ذیل تناقضی حاصل میشود:

$$|\delta| = |(\beta - a_r) + (a_r - a_N) + (a_N - a_q) + (a_q - \alpha)|.$$

۴ § حدود اعلی و اسفل رشته‌ها

۴.۱. مقدمه. قید حد داشتن سخت محدودکننده است، و بسیاری از رشته‌های جالب را از بحث خارج میسازد. برای رفع این محدودیت، مفاهیمی پردامنه‌تر و بسیار مهم وارد کار میکنیم.

چنانکه از توضیحات سابق معلوم است، مجموعه‌ی نقاط حد یک رشته ممکن است مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی از اعداد حقیقی باشد یا آنکه ∞ یا $-\infty$ بدان تعلق داشته باشد. پس، بطور کلی، مجموعه‌ی نقاط حد یک رشته مجموعکی است از $\mathbf{R}^*$. نکته‌ی جالب و مهم اینست که

۴.۱.۱. قضیه. مجموعه‌ی نقاط حد هر رشته از اعداد حقیقی عضو اکثر و عضو اقل دارد.
برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ی دلخواهی از اعداد حقیقی و A مجموعه‌ی نقاط حد آن باشد. ثابت میکنیم که A عضو اکثر دارد، و اثبات حکم را در مورد عضو اقل به متعلم محول میکنیم.

چون $A \subseteq \mathbf{R}^*$، $\alpha = \sup A$ (۱) موجود است. حال ثابت میکنیم که

$$\alpha = \operatorname{Max} A.$$

برای این منظور، با توجه به (۱)، کافی است ثابت کنیم که $\alpha \in A$ (یعنی، α یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است). لهذا، سه حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $\alpha = -\infty$. در این صورت، $A = \{-\infty\}$، و حکم بالبداهه برقرار است.

حالت دوم: $\alpha = \infty$. فرض کنیم (فرض خلف) $\alpha \notin A$. حومه‌ی دلخواه (u, ∞)

---

(۱) چون مجموعه‌ی مذکور مجموعکی از $\mathbf{R}^*$ است، عضو اکثر و عضو اقل در $\mathbf{R}^*$ مراد است.

از α را اختیار میکنیم. چون $\sup A = \infty$ و $\infty \notin A$، بنا بر ۳ : ۱.۲.۲، عضوی مانند ξ از A هست که $u < \xi < \infty$. چون $\xi \in A$، ξ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است، و لهذا، بینهایت‌بار $a_n \in (u, \xi + 1)$. اما $(u, \xi+1) \subset (u, \infty)$. پس، بینهایت‌بار $a_n \in (u, \infty)$. بالنتیجه، ∞ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است، و لهذا، $\infty \in A$، و این با فرض خلف متناقض است.

حالت سوم: $\alpha \in \mathbf{R}$. اثبات مانند حالت دوم است. فرض کنیم $\alpha \notin A$ و (u, v) حومه‌ی متناهی دلخواهی از α باشد. چون $u < \alpha$ و $\sup A = \alpha$، عضوی مانند ξ از A هست که $u < \xi$. اینک برهان را مانند حالت قبل تمام میکنیم. ▲

بنا بر قضیه‌ی فوق، تعریف ذیل را میآوریم:

۴.۲. تعریف. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی، و A مجموعه‌ی نقاط حد این رشته باشد.

I. عضو اکثر A را حد اعلای رشته‌ی $\{a_n\}$[1] یا به نام ذیل میخوانیم[2]:

$$\overline{\lim}_n\, a_n.$$

II. عضو اقل A را حد اسفل رشته‌ی $\{a_n\}$ یا به نام ذیل میخوانیم:

$$\underline{\lim}_n\, a_n.$$

III. هر جا بیم ابهام نرود «n» تحتانی را نمینویسند.

اگر $\{a_n\}$ رشته‌ی دلخواهی از اعداد حقیقی و A مجموعه‌ی نقاط حد آن باشد، بنا بر قضیه‌ی ۴.۱.۱، $\operatorname{Max} A$ و $\min A$ موجود میباشند. پس،

۴.۲.۱. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد، اولاً، $\overline{\lim}\, a_n$ و $\underline{\lim}\, a_n$ موجودند، و ثانیاً،

$$\underline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n.$$

(چنانکه ملاحظه میشود، در باب حدود اعلی و اسفل رشته‌ها، مسئله‌ی وجود آنها مطرح نیست.)

۴.۲.۲. تبصره. بنا بر ۴.۲، حد اعلای رشته‌ای از اعداد حقیقی نقطه‌ی حدی از آنست که در طرف راست آن نقطه‌ی حدی از آن رشته وجود ندارد؛ و حد اقل یک رشته از اعداد

---

(۱) یا حد اعلای a_n (۳.۲.۱۶ : ۷ ملاحظه شود)، و هکذا در مورد حد اسفل.

(۲) علامات

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n,$$

نیز متداول است، و هکذا در مورد حد اسفل.

حقیقی نقطه‌ی حدی از آنست که در طرف چپ آن نقطه‌ی حدی از آن رشته وجود ندارد. به عبارت مختصرتر، حد اعلای یک رشته بزرگترین نقاط حد آن و حد اسفل یک رشته کوچکترین نقاط حد آن میباشد.

۴.۲.۳. امثله
در مثالهای آتیه، A مجموعه‌ی نقاط حد رشته‌ی مورد بحث است.
(آ). اگر $\lim a_n = \alpha$، بنا بر ۳.۱.۲، $A = \{\alpha\}$. پس،
$$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \alpha.$$
مثلاً،
$$\underline{\lim}\, [n/(n+1)] = \overline{\lim}\, [n/(n+1)] = 1;$$
$$\underline{\lim}_n \frac{n}{n+k} = \overline{\lim}_n \frac{n}{n+k} = 1;$$
$$\underline{\lim}_k \frac{n}{n+k} = \overline{\lim}_k \frac{n}{n+k} = 0;$$
$$\underline{\lim}\, n = \overline{\lim}\, n = \infty, \qquad \underline{\lim}\,(-n) = \overline{\lim}\,(-n) = -\infty.$$
(ب). در ب : ۳.۲.۳ دیدیم که نقاط حد رشته‌ی
$$-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$
منحصرند به 1 و 1 −. پس، $A = \{-1, 1\}$، و
$$\underline{\lim}\,(-1)^n = \min A = -1, \qquad \overline{\lim}\,(-1)^n = \mathrm{Max}\, A = 1.$$
(پ). در رشته‌ی
$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots$$
مذکور در ۱ : ۳.۳، $A = \{0, \infty\}$. پس، اگر جمله‌ی عمومی رشته را a_n بنامیم،
$$\underline{\lim}\, a_n = 0, \qquad \overline{\lim}\, a_n = \infty.$$
(ت). در رشته‌ی $\{(-1)^n n\}$ (۱ : ۳.۳)، $A = \{-\infty, \infty\}$. پس،
$$\underline{\lim}\,(-1)^n n = -\infty, \qquad \overline{\lim}\,(-1)^n n = \infty.$$
(ث). در رشته‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی
$$a_n = 2 - n^{(-1)^n},$$
$A = \{-\infty, 2\}$. پس،
$$\underline{\lim}\,(2 - n^{(-1)^n}) = -\infty, \qquad \overline{\lim}\,(2 - n^{(-1)^n}) = 2.$$
(ج). در رشته‌ی
$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$
$A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. پس،
$$\underline{\lim}\, a_n = 0, \qquad \overline{\lim}\, a_n = 1.$$
قضیه‌ی ذیل نتیجه‌ی مستقیم تعریف و احکام چهارگانه‌ی آ : ۳.۲.۳ است، و اثبات آن

به متعلم محول میشود:

۴.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و c عضو ثابتی از $\mathbf{R}^*$ باشد.
I. اگر **از مرتبه‌ای ببعد** $a_n \leqslant c$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n \leqslant c$.
II. اگر **بینهایت‌بار** $a_n \geqslant c$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n \geqslant c$.
III. اگر **از مرتبه‌ای ببعد** $a_n \geqslant c$ آنگاه $\underline{\lim}\, a_n \geqslant c$.
IV. اگر **بینهایت‌بار** $a_n \leqslant c$ آنگاه $\underline{\lim}\, a_n \leqslant c$.

۴.۳. خواص مشخصه‌ی حدود اعلی و اسفل.

۴.۳.۱. قضیه (خواص مشخصه‌ی حد اعلی). فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و $\overline{\alpha}$ عضوی از $\mathbf{R}^*$ باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{\alpha} = \overline{\lim}\, a_n$ آنست که، در عین حال،
I. بازاء هر عدد u که $u < \overline{\alpha}$، بینهایت‌بار $u < a_n$؛
II. بازاء هر عدد v که $\overline{\alpha} < v$، از مرتبه‌ای ببعد $a_n < v$.

برهان. بر حسب مقادیر $\overline{\alpha}$ سه حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $\overline{\alpha} = \infty$. II به انتفای مقدم برقرار است. پس، لزوم و کفایت I را ثابت میکنیم. اولاً، فرض کنیم $\overline{\lim}\, a_n = \infty$ و u عدد حقیقی دلخواهی باشد. چون ∞ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است، بینهایت‌بار $a_n \in (u, \infty)$، و به عبارت دیگر، بینهایت‌بار $u < a_n$. ثانیاً، اگر بازاء عدد حقیقی دلخواه u رابطه‌ی $u < a_n$ بینهایت‌بار برقرار باشد آنگاه، بنا بر II : ۴.۲.۴، $u \leqslant \overline{\lim}\, a_n$، و چون این رابطه بازاء هر u برقرار است، $\overline{\lim}\, a_n = \infty$.

حالت دوم: $\overline{\alpha} = -\infty$. I به انتفای مقدم برقرار است. اینک، اولاً، فرض کنیم $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$. پس، $-\infty$ یگانه نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است (چرا؟). حال اگر بازاء عددی مانند v نامساوی $a_n < v$ از مرتبه‌ای ببعد برقرار نباشد آنگاه بینهایت‌بار $a_n \geqslant v$. پس، بنا بر II : ۴.۲.۴، $\overline{\lim}\, a_n \geqslant v$، و یا، $-\infty \geqslant v$، و این ممتنع است. اثبات کفایت II به متعلم محول میشود.

حالت سوم: $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}$. اولاً، فرض کنیم $\overline{\lim}\, a_n = \overline{\alpha}$. برای اثبات I، فرض کنیم $u < \overline{\alpha}$ (۱). اگر نامساوی $u < a_n$ بینهایت‌بار برقرار نباشد آنگاه، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n \leqslant u$، و از آنجا، $\overline{\lim}\, a_n \leqslant u$، و این با (۱) متناقض است. اثبات II به همین قیاس است. ثانیاً، فرض کنیم عدد حقیقی $\overline{\alpha}$ در I و II صدق کند. با اندک تأملی معلوم میشود که $\overline{\alpha}$ یک نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ است، زیرا، اگر (u, v) حومه‌ی متناهی دلخواهی از $\overline{\alpha}$ باشد، بنا بر I و II، بینهایت بار $a_n \in (u, v)$. بعلاوه، رشته‌ی مذکور نقطه‌ی حدی بزرگتر از $\overline{\alpha}$ ندارد. زیرا، فرض کنیم $\overline{\alpha} < \beta$. بنا بر II، اگر $\beta = \infty$ بازه‌ی $(\overline{\alpha} + 1, \beta)$ و اگر $\beta \in \mathbf{R}$ بازه‌ی $\left(\dfrac{\overline{\alpha} + \beta}{2}, \beta + 1\right)$ منتها شامل تعدادی متناهی از جمله‌های رشته است. پس، β

نقطه‌ی حد رشته‌ی $\{a_n\}$ نتواند بود. ▲
قضیه‌ی فوق را میتوان به صورت تفصیلی ذیل بیان کرد:

۴.۳.۱.۱. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد.
اولاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{\lim}\, a_n = \infty$ آنست که، بازاء هر عدد مانند u، بینهایت‌بار $u < a_n$.
ثانیاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$ آنست که، بازاء هر عدد مانند v، از مرتبه‌ای ببعد $a_n < v$.
ثالثاً، اگر $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{\lim}\, a_n = \overline{\alpha}$ آنست که شرایط I و II قضیه‌ی ۴.۳.۱ برقرار باشند.
اثبات قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود.

۴.۳.۲. قضیه (خواص مشخصه‌ی حد اسفل). فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی و $\underline{\alpha}$ عضوی از $\mathbf{R}^*$ باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه $\underline{\alpha} = \underline{\lim}\, a_n$ آنست که، در عین حال،

I. بازاء هر عدد u که $u < \underline{\alpha}$، از مرتبه‌ای ببعد $u < a_n$؛

II. بازاء هر عدد v که $\underline{\alpha} < v$، بینهایت‌بار $a_n < v$.

یا، به صورت تفصیلی،

۴.۳.۲.۱. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد.
اولاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $\underline{\lim}\, a_n = \infty$ آنست که، بازاء هر عدد مانند u، از مرتبه‌ای ببعد، $u < a_n$.
ثانیاً، شرط لازم و کافی برای آنکه $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$ آنست که، بازاء هر عدد مانند v، بینهایت‌بار $a_n < v$.
ثالثاً، اگر $\underline{\alpha} \in \mathbf{R}$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $\underline{\lim}\, a_n = \underline{\alpha}$ آنست که شرایط I و II قضیه‌ی ۴.۳.۲ برقرار باشند.
بالاخره، بنا بر قسمت سوم ۴.۳.۱.۱ و ۴.۳.۲.۱،

۴.۳.۳. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد.

I. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد حقیقی $\overline{\alpha}$ حد اعلای این رشته باشد آنست که بازاء هر عدد مثبت ε، در عین حال، از مرتبه‌ای ببعد $a_n < \overline{\alpha} + \varepsilon$ و بینهایت‌بار $\overline{\alpha} - \varepsilon < a_n$.

II. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد حقیقی $\underline{\alpha}$ حد اسفل رشته‌ی $\{a_n\}$ باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت ε، در عین حال، از مرتبه‌ای ببعد $\underline{\alpha} - \varepsilon < a_n$ و بینهایت‌بار $a_n < \underline{\alpha} + \varepsilon$.

خواص مشخصه‌ی حدود اعلی و اسفل رشته‌ها در اثبات احکام مربوط به آنها اهمیت تمام دارند، چنانکه در آتیه معلوم خواهد شد.
اثبات دو قضیه‌ی ذیل به متعلم محول میشود:

۴.۳.۴. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد

$$\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\,a_n, \qquad \overline{\lim}\,(-a_n) = -\underline{\lim}\,a_n.$$

۴.۳.۵. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه

I. $\overline{\lim}\,a_n < \infty$ آنست که رشته از بالا محدود باشد.
II. $\underline{\lim}\,a_n > -\infty$ آنست که رشته از پایین محدود باشد.

۴.۳.۶. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی دارای حد باشد آنست که

$$\overline{\lim}\,a_n = \underline{\lim}\,a_n,$$

و در این صورت،

$$\overline{\lim}\,a_n = \underline{\lim}\,a_n = \lim a_n.$$

برهان. لزوم بدیهی است؛ زیرا، اگر $\lim a_n$ موجود باشد یگانه نقطه‌ی حد رشته است. برای اثبات کفایت، فرض کنیم

$$\overline{\lim}\,a_n = \underline{\lim}\,a_n = \alpha. \qquad (۱)$$

اگر $\alpha = \infty$ آنگاه، بنا بر قسمت اول ۴.۳.۲.۱، بازاء هر عدد حقیقی u، از مرتبه‌ای ببعد $u < a_n$، و بالنتیجه، $\lim a_n = \infty$. اثبات در حالتی که $\alpha = -\infty$ به همین قیاس است. بالاخره، فرض کنیم $\alpha \in \mathbf{R}$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، بنا بر (۱) و ۴.۳.۳، از مرتبه‌ای ببعد $a_n < \alpha + \varepsilon$ و از مرتبه‌ای ببعد $a_n > \alpha - \varepsilon$. پس، از مرتبه‌ای ببعد $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$. ▲

در پایان این قسمت، قضیه‌ی مهم و مفیدی میآوریم که حکم آن در بعضی از کتابها به عنوان تعریف حدود اعلی و اسفل میآید.

۴.۳.۷. قضیه. بازاء هر رشته از اعداد حقیقی مانند $\{a_n\}$،

I. $$\overline{\lim}_n\,a_n = \inf_{k\in\mathbf{N}}\sup_{n\geqslant k} a_n = \lim_k \sup_{n\geqslant k} a_n.$$

II. $$\underline{\lim}_n\,a_n = \sup_{k\in\mathbf{N}}\inf_{n\geqslant k} a_n = \lim_k \inf_{n\geqslant k} a_n.$$

برهان. رابطه‌ی I را توضیح میدهیم و ثابت میکنیم. بنا بر تعریف، $\sup_{n\geqslant k} a_n$ یعنی سوپرموم

رشته‌ی $\{a_n\}_{n=k}$ یا

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots. \qquad (1)$$

این سوپرموم را α_k مینامیم. بازاء هر عدد طبیعی k، رشته‌ی (۱) و سوپرموم آن تعریف میشود. رشته‌ی سوپرمومها رشته‌ی $\{\alpha_k\}$ است، و معنی رابطه‌ی I این است که این رشته حد دارد، و

$$\overline{\lim}\, a_n = \inf \alpha_k = \lim \alpha_k.$$

برای اثبات این روابط، ملاحظه میکنیم که رشته‌ی $\{\alpha_k\}$ رشته‌ای است نزولی، زیرا، α_{k+1} سوپرموم رشته‌ی

$$a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$$

میباشد، و لهذا، $\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1}$. پس، بنا بر خواص رشته‌های یکنواخت، $\alpha = \lim \alpha_k$ موجود است، و

$$\alpha = \inf \alpha_k. \qquad (2)$$

حال باید ثابت کرد که

$$\alpha = \overline{\lim}\, a_n.$$

اثبات به وسیله‌ی خواص مشخصه (۴.۳.۰۱) است.

اولاً، فرض کنیم $u < \alpha$. چون همواره $\alpha \leqslant \alpha_k$،

$$\text{بازاء هر } k\text{،}\ u < \alpha_k. \qquad (3)$$

بنا بر این، $u < \alpha_1$، و لهذا، رشته‌ی $\{a_n\}_1$ جمله‌ای بزرگتر از u دارد. از میان این جمله‌ها، آن را که دارای کوچکترین اندیس است a_{m_1} مینامیم. پس، $u < a_{m_1}$. بنا بر (۳)، $u < \alpha_{m_1+1}$. پس، رشته‌ی $\{a_n\}_{n=m_1+1}$ جمله‌ای بزرگتر از u دارد. از میان این جمله‌ها، آن را که دارای کوچکترین اندیس است a_{m_2} مینامیم. پس، $u < a_{m_2}$ و $m_1 < m_1 + 1 \leqslant m_2$. اتمام تعریف رشته‌ی صعودی $\{m_p\}_{p=1}$ از اعداد طبیعی با شرط

$$u < a_{m_p} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

به متعلم محول میشود. ضمناً بنا بر (۴)، بینهایت‌بار $u < a_n$.

ثانیاً، فرض کنیم $\alpha < v$. چون $\alpha = \lim \alpha_k$، از مرتبه‌ای ببعد، $\alpha_k < v$. پس، با توجه به تعریف α_k، از مرتبه‌ای ببعد، $a_n < v$.

بنا بر «اولاً» و «ثانیاً»، $\alpha = \overline{\lim}\, a_n$. ▲

۴.۳.۷.۱. مثال. رشته‌ی $\{a_n\}$ را با ضابطه‌ی

$$a_n = (-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$$

اختیار میکنیم. رشته‌ی $\{a_n\}_{n=k}$ رشته‌ی

$$(-1)^{k-1}\Big(1 + \frac{1}{k}\Big), (-1)^{k}\Big(1 + \frac{1}{k+1}\Big), \ldots, (-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big), \ldots$$

است، و واضح است که اگر k فرد باشد جملهی اول و اگر k زوج باشد جملهی دوم این رشته عضو اکثر آن میباشد. پس،

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 + (1/k) & (2 \nmid k), \\ 1 + [1/(k+1)] & (2 \mid k). \end{cases}$$

بالنتیجه،

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim \alpha_k = 1.$$

به همین قیاس معلوم میشود که $\underline{\lim}\, a_n = -1$.

مقادیر $\sup\limits_{n \geqslant k} a_n$ و $\inf\limits_{n \geqslant k} a_n$ بازاء چند مقدار k در جدول ذیل آمده است:

k	$\{a_n\}_{n=k}$						$\sup\limits_{n\geqslant k} a_n$	$\inf\limits_{n\geqslant k} a_n$
1	2,	$-\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{3}$,	$-\frac{5}{4}$,	$\frac{6}{5}$,	$\cdots$	2	$-\frac{3}{2}$
2		$-\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{3}$,	$-\frac{5}{4}$,	$\frac{6}{5}$,	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2}$
3			$\frac{4}{3}$,	$-\frac{5}{4}$,	$\frac{6}{5}$,	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$
4				$-\frac{5}{4}$,	$\frac{6}{5}$,	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{5}{4}$
5					$\frac{6}{5}$	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	.
.							.	.
.							.	.
.						$\cdots$	.	.

۴.۴. قواعد محاسبه.

۴.۴.۱. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد حقیقی باشند، و از مرتبهای ببعد $a_n \leqslant b_n$، آنگاه

$$\underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n, \qquad \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n.$$

برهان. بنا بر ۴.۳.۴، کافی است رابطهی دوم را ثابت کنیم. فرض کنیم از مرتبهی N ببعد $a_n \leqslant b_n$. پس، بازاء هر k، اگر $k \geqslant N$ آنگاه

$$\sup_{n \geqslant k} a_n \leqslant \sup_{n \geqslant k} b_n.$$

پس، به حدگیری،

$$\lim_k \sup_{n \geqslant k} a_n \leqslant \lim_k \sup_{n \geqslant k} b_n,$$

و این، بنا بر ۴.۳.۷، همان نامساوی مطلوبست. ▲

۴.۴.۲. قضیه. اگر $\{b_n\}$ رشتکی از رشته‌ی $\{a_n\}$ باشد

$$\underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n.$$

بالاخص، اگر $\{b_n\}$ از اسقاط تعدادی متناهی از جمل از $\{a_n\}$ حاصل شده باشد آنگاه

$$\underline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, b_n, \qquad \overline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, b_n.$$

برهان. بنا بر ۳.۱.۴، $\overline{\lim}\, b_n$ و $\underline{\lim}\, b_n$ از نقاط حد رشته‌ی $\{b_n\}$، و لهذا، از نقاط حد رشته‌ی $\{a_n\}$ میباشند. پس، بنا بر ۴.۲، نامساویهای حکم برقرارند.
اثبات حالت خاص به متعلم محول میشود. ▲

۴.۴.۳. قضیه. بازاء هر دو رشته‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از اعداد حقیقی، هر یک از نامساویهای ذیل که طرفینش با معنی باشند برقرار است:

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leqslant \underline{\lim}\, (a_n + b_n) \leqslant \begin{matrix} \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \end{matrix}$$
$$\leqslant \overline{\lim}\, (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$$

برهان. حکم نتیجه‌ی ساده‌ی ۱.۵ و ۴.۳.۷ است. مثلاً، اگر $c_n = a_n + b_n$، و k عدد طبیعی دلخواهی باشد، از قضیه‌ی ۱.۵ در مورد رشته‌های $\{a_n\}_k$، $\{b_n\}_k$، و $\{c_n\}_k$ نتیجه میشود،

$$\sup_{n \geqslant k} c_n \leqslant \sup_{n \geqslant k} a_n + \sup_{n \geqslant k} b_n.$$

از اینجا، به حدگیری و به استناد ۴.۳.۷، آخرین نامساوی حکم بدست میآید. ▲
اثبات قضایای آتیه به متعلم محول میشود:

۴.۴.۴. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای دلخواه و $\{b_n\}$ رشته‌ای حددار باشد، به شرط بامعنی بودن،

$$\underline{\lim}\, (a_n + b_n) = \underline{\lim}\, a_n + \lim b_n, \qquad \overline{\lim}\, (a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \lim b_n.$$

۴.۴.۵. قضیه. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو رشته از اعداد حقیقی نامنفی باشند هر یک از نامساویهای ذیل که طرفینش بامعنی باشند برقرار است:

$$\underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n \leqslant \underline{\lim}\, a_n b_n \leqslant \begin{matrix} \underline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n \end{matrix}$$
$$\leqslant \overline{\lim}\, a_n b_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n.$$

بالاخص، اگر رشته‌ی $\{b_n\}$ رشته‌ای حددار باشد، به شرط بامعنی بودن،

$$\underline{\lim}\, a_n b_n = \underline{\lim}\, a_n \cdot \lim b_n, \qquad \overline{\lim}\, a_n b_n = \overline{\lim}\, a_n \cdot \lim b_n.$$

۴.۴.۶. قضیه. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد، و از مرتبه‌ای ببعد $a_n \geqslant 0$، آنگاه، با قرارداد مذکور در ۱.۷،

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = 1/\overline{\lim}\, a_n, \qquad \overline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = 1/\underline{\lim}\, a_n.$$

۴.۵. فواید. حدود اعلی و اسفل از وسایل بسیار توانای آنالیز است. به وسیله‌ی آنها، بسیاری از احکام مربوط به رشته‌ها و سلسله‌ها را میتوان به صورتهای کلی بیان و ثابت کرد، چنانکه از امثله‌ی آتیه معلوم میشود.

۴.۵.۱. قضیه (قاعده‌ی ریشه یا قاعده‌ی کوشی). در سلسله‌ی نامنفی $\sum a_n$،
I. اگر $\overline{\lim}\, a_n^{1/n} < 1$ سلسله متقارب است.
II. اگر $\overline{\lim}\, a_n^{1/n} > 1$ سلسله متباعد است.
برهان. فرض کنیم $\alpha = \overline{\lim}\, a_n^{1/n}$. چون همواره $a_n \geqslant 0$، $\alpha \geqslant 0$. حال اگر $\alpha < 1$ آنگاه عددی مانند q هست که $\alpha < q < 1$. پس، بنا بر خواص مشخصه‌ی حد اعلی، از مرتبه‌ای بعد، $a_n^{1/n} < q$، و لهذا سلسله متقارب است. اگر $\alpha > 1$ آنگاه بینهایت‌بار $a_n > 1$. پس، a_n به 0 میل نمیکند، و سلسله متباعد است. ▲

۴.۵.۲. قضیه (قاعده‌ی نسبت یا قاعده‌ی دالامبر). فرض کنیم جمل سلسله‌ی $\sum a_n$ مثبت[۱] باشند.
I. اگر $\overline{\lim}\, (a_{n+1}/a_n) < 1$ سلسله متقارب است.
II. اگر $\underline{\lim}\, (a_{n+1}/a_n) > 1$ سلسله متباعد است.
اثبات به متعلم محول میشود.

۴.۵.۳. قضیه (مقایسه‌ی قواعد نسبت و ریشه). اگر جمله‌های سلسله‌ی $\sum a_n$ مثبت باشند آنگاه

$$\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\, a_n^{1/n} \leqslant \overline{\lim}\, a_n^{1/n} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

بالاخص، اگر $\lim\, (a_{n+1}/a_n)$ موجود باشد $\lim\, a_n^{1/n}$ موجود و با آن مساوی است.
برهان. کافی است نامساویهای اول و آخر را ثابت کنیم. دومی را ثابت و اثبات اولی را به متعلم محول مینمائیم. فرض کنیم

$$(۱)\quad \alpha = \overline{\lim}\, a_n^{1/n}, \qquad (۲)\quad \alpha' = \overline{\lim}\, (a_{n+1}/a_n).$$

بنا بر مفروضات، $\alpha \geqslant 0$ و $\alpha' \geqslant 0$. اگر $\alpha' = \infty$ حکم بالبداهه برقرار است. پس، فرض کنیم $\alpha' < \infty$. عدد مثبت دلخواه ε را اختیار میکنیم. بنا بر (۲)، عددی طبیعی مانند N هست که همواره اگر $n \geqslant N$ آنگاه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(۱) این قید خللی به کلیت وارد نمیسازد.

از اینجا به طریقی که به کرات دیده‌ایم معلوم میشود که اگر $m > N$ آنگاه

$$a_m < A\left(\alpha' + \frac{\varepsilon}{2}\right)^m \qquad \left(A = a_N\left(\alpha' + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-N}\right)$$

پس،

$$0 < a_m^{1/m} < A^{1/m}\left(\alpha' + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

بالنتیجه، بنا بر ۴.۴.۱ و ۴.۴.۵،

$$\alpha \leqslant \overline{\lim}\, A^{1/m} \cdot \overline{\lim}\left(\alpha' + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

اما

$$\lim A^{1/m} = 1, \qquad \lim\left(\alpha' + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \alpha' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

پس، بنا بر ۴.۳.۶،

$$\alpha \leqslant \alpha' + \frac{\varepsilon}{2} < \alpha' + \varepsilon.$$

چون ε عدد مثبت دلخواهی فرض شده بود، $\alpha \leqslant \alpha'$. ▲

۴.۶. تمرین

۱. جمیع نقاط حد و حدود اعلی و اسفل رشته‌هائی را که ذیلاً معرفی شده‌اند تعیین کنید:

(آ) $a_n = 1 - n.$

(ب) $a_n = c^{1/n} \quad (c > 0)$

(پ) $a_n = n^{1/n}.$

(ت) $a_n = n!/n^n.$

(ث) $a_n = \log n/n.$

(ج) $a_n = (-1)^n/n.$

(چ) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots.$

(ح) $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

(خ) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{2n - 1}.$

(د) $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}.$

(ذ) $a_n = 4 + (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}.$

(ر) $a_n = (-n)^n(1+n)^{-n}.$

(ز) $a_n = \left(\frac{3}{2} + (-1)^n\right)^n.$

(ژ) $a_n = n + (-1)^n(2n+1).$

(س) $a_n = 2n + 1 + (-1)^n n.$

(ش) $a_n = [n + (-1)^n n^2]/(n^2 + 1).$

(ص) $a_n \doteq \left(-\frac{1}{2}\right)^{[n/2]} \cdot \left(1-(-1)^n+\frac{1}{2}\right).$

۲. نامساویهای قضیه‌ی ۴.۴.۳ را در مورد رشته‌هائی که به طریق ذیل تعریف شده‌اند ، بیازمائید:

$$a_{3n}=1, \qquad a_{3n-1}=-1, \qquad a_{3n-2}=0, \qquad (n\in\mathbf{N});$$
$$b_{3n}=-1, \qquad b_{3n-1}=0, \qquad b_{3n-2}=1, \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

چه نتیجه‌ای از این آزمایش حاصل میشود؟

۳. نامساویهای قضیه‌ی ۴.۴.۵ را در مورد رشته‌های ذیل بیازمائید:

$$a_{3n}=1, \qquad a_{3n-1}=2, \qquad a_{3n-2}=-2, \qquad (n\in\mathbf{N});$$
$$b_{3n}=2, \qquad b_{3n-1}=-2, \qquad b_{3n-2}=1, \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

۴. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضوابط $a_{2n}=1$ و $a_{2n-1}=2$ تعریف شده است. ثابت کنید که

$$\overline{\lim}\,(a_na_{n+1})=\underline{\lim}\,(a_na_{n+1}).$$

۵. رشته‌ی $\{a_n\}$ با ضوابط ذیل تعریف شده است:

$$a_{3n}=1, \qquad a_{3n-1}=2, \qquad a_{3n-2}=2.$$

ثابت کنید که

$$\overline{\lim}\,(a_na_{n+1}a_{n+2})=\underline{\lim}\,(a_na_{n+1}a_{n+2}).$$

۶. $\{a_n\}$ رشته‌ای محدود از اعداد حقیقی است، و

$$A=\{x \mid x\leqslant a_n \text{ بینهایت‌بار}\}.$$

ثابت کنید که $\overline{\lim}\,a_n=\sup A$.

۷. رشته‌ی محدود $\{a_n\}$ در این شرایط صدق میکند:

$$\lim|a_n|=a, \qquad \overline{\lim}\,a_n\neq\underline{\lim}\,a_n.$$

ثابت کنید که $a\neq 0$ و $\overline{\lim}\,a_n=-\underline{\lim}\,a_n$.

۸. ثابت کنید که

I. اگر $\overline{\lim}\,a_n=-\infty$ آنگاه $\lim a_n=-\infty$.

II. اگر $\underline{\lim}\,a_n=\infty$ آنگاه $\lim a_n=\infty$.

۹. $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد حقیقی است. ثابت کنید که

I. اگر $\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}<1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ مطلقاً متقارب است.

II. اگر $\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}>1$ سلسله‌ی $\sum a_n$ متباعد است.

۱۰. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای محدود باشد

$$\underline{\lim}\,(a_n-a_{n+1})\leqslant 0\leqslant\overline{\lim}\,(a_n-a_{n+1}).$$

۱۱. ثابت کنید که اگر $0<x\leqslant y<1$ آنگاه

$$x(1-y)\leqslant 1/4.$$

نتیجه بگیرید که اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد متعلق به بازه‌ی $(0,1)$ باشد آنگاه

$$\underline{\lim}\,a_n(1-a_{n+1})\leqslant 1/4.$$

۱۲. $\{b_n\}$ رشته‌ای محدود از اعداد حقیقی است. میدانیم که بازاء هر رشته‌ی محدود از اعداد

حقیقی مانند $\{a_n\}$،

$$\overline{\lim}\,(a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

ثابت کنید که رشته‌ی $\{b_n\}$ متقارب است.

۱۳. رشته‌ی $\{b_n\}$ رشته‌ای محدود از اعداد مثبت است. میدانیم که بازاء هر رشته‌ی محدود از اعداد مثبت مانند $\{a_n\}$،

$$\overline{\lim}\, a_n b_n = \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n.$$

ثابت کنید که رشته‌ی $\{b_n\}$ متقارب است.

۱۴. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای محدود از اعداد حقیقی باشد،

$$\underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \overline{\lim}\, a_n.$$

۱۵. اگر $\{a_n\}$ رشته‌ای محدود از اعداد مثبت باشد، و $r > 0$ آنگاه

$$\overline{\lim}\, a_n^r = (\overline{\lim}\, a_n)^r, \qquad \underline{\lim}\, a_n^r = (\underline{\lim}\, a_n)^r.$$

فصل ۵ ض[1]

چند نامساوی مهم

۱ § مقدمه

۱.۱. چند نامساوی بسیار مهم هست که در ریاضیات شهرت و اهمیت فراوان دارند، و بعضی از آنها در حالات خاص از قدیم‌الایام شناخته بوده‌اند. از آن جمله است نابیشتر بودن واسطه‌ی هندسی دو عدد نامنفی از واسطه‌ی عددی آنها، که در کتاب اصول هندسه‌ی اقلیدس (ح ۳۰۰ قم) آمده است؛ و نامساوی

$$(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

که محصلین جبر ابتدائی با آن آشنا هستند، و نامساوی مهم کوشی (۷.۸.۹ : ۵) صورت کلی آنست.

در این فصل، بعضی از مهمترین نامساویهائی که در مباحث گوناگون ریاضی مورد استفاده هستند خواهد آمد.

اصطلاحات مذکور در ۷.۸.۸ : ۵ و نکات مندرج در ۷.۸.۸.۱ : ۵ در این فصل همواره بکار می‌آیند، و باید آنها را حاضرالذهن داشت. همچنین، احکام کلی مذکور در جزء قسمت ۷.۸ از فصل ۵ و شرایط برقراری تساویهای مذکور در آنها در صفحات آتیه همواره مورد استفاده خواهند بود.

قضیه‌ی ذیل در استدلال بکار می‌آید. اثبات آن بر متعلم است.

۱.۲. قضیه (استقراء قهقرائی). اگر خاصیت F تابع شرایط ذیل باشد همه‌ی اعداد طبیعی واجد خاصیت F هستند:

I. مجموعه‌ی اعداد طبیعی واجد خاصیت F نامتناهی است؛

II. بازاء هر عدد طبیعی n، اگر $n > 1$ و $F(n)$ آنگاه $F(n-1)$.

۱.۲.۱. فایده. اگر ثابت شود که خاصیت F تابع شرط (II) قضیه‌ی فوق هست، و جملگی قوای طبیعی 2 نیز خاصیت F دارند، نتیجه میشود که هر عدد طبیعی خاصیت F دارد، زیرا، مجموعه‌ی $\{2^1, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$ مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی است.

---

(۱) در تهیه‌ی این فصل، از فصل دوم کتاب مشهور نامساویها، اثر هاردی، لیتلوود، و پولیا، استفاده‌ی فراوان بعمل آمده است، و تنظیم مطالب و براهین بر اساس مندرجات این کتاب موجز نفیس است. نام و نشان کتاب اینست:

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G., *Inequalities*. Cambridge (University Press), 1934.

۱.۳. قراردادها. قراردادهای ذیل در سراسر این فصل بکار خواهد رفت.

۱.۳.۱. رشته‌هائی که در این فصل از آنها سخن میرود رشته‌های nجمله‌ای به صورت $\{a_i\}_1^n$ از اعداد حقیقی نامنفی هستند. اغلب، چنین رشته‌ای را رشته‌ی a میخوانیم.
اگر a رشته‌ای و k عدد مفروضی باشد، رشته‌های $\{ka_i\}_1^n$ و $\{a_i^k\}_1^n$ را، بترتیب، رشته‌ی ka و رشته‌ی a^k مینامیم. همچنین، اگر a، b، . . .، و l m رشته باشند رشته‌ی $a+b+\cdots+l$ یعنی رشته‌ی $\{a_i+b_i+\cdots+l_i\}_1^n$ با جمله‌ی عمومی $a_i+b_i+\cdots+l_i$، و رشته‌ی $ab\ldots l$ یعنی رشته‌ی $\{a_ib_i\ldots l_i\}_1^n$ با جمله‌ی عمومی $a_ib_i\ldots l_i$.

۱.۳.۲. در بسیاری از نامساویهای مورد بحث رشته‌ای مانند p (یا، بر طبق قرارداد مذکور در ۱.۳.۱، رشته‌ی $\{p_i\}_1^n$) از اعداد مثبت میآید، که اغلب آن را یک رشته از اوزان مینامیم.

۱.۳.۳. در این فصل، «$\sum$» به معنی «$\sum\limits_1^n$» است. هر جا خلاف این منظور اراده شود تصریح خواهد شد.

۱.۳.۴. مقصود از جدول (آ) جدول $n\times m$ (n سطر و m ستون)

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1\\
a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2\\
. & . & . & \ldots & .\\
. & . & . & \ldots & .\\
. & . & . & \ldots & .\\
a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n
\end{array}$$

است، که از جمله‌های m رشته‌ی a، b، . . .، و l تشکیل یافته است. هر جا از یک ستون (یا سطر) جدول (آ) سخن میگوئیم مقصود رشته‌ی اعداد واقع در آن ستون (سطر) است. مثلاً، اگر گفته شود که ستون اول جدول (آ) صفر است مقصود اینست که اعداد واقع در ستون اول آن جملگی صفرند، و به عبارت دیگر، رشته‌ی a صفر است.

۱.۴. وسایط. اگر a رشته‌ای باشد عدد

$$A(a)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad (۱.۴.۱)$$

را واسطه‌ی عددی aها (یعنی a_1، a_2، . . .، و a_n) خوانیم[۱]، و عدد

---

(۱) تعریف واسطه‌ی عددی وقتی که شرط نامنفی بودن را از aها برداریم نیز همین است.

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{۱۰۴۰۲}$$

را واسطه‌ی هندسی آنها.

اگر aها جملگی مثبت باشند عدد

$$H(a) = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \tag{۱۰۴۰۳}$$

موسوم به واسطه‌ی توافقی آنهاست.

اگر p رشته‌ای از اوزان باشد واسطه‌ی عددی وزندار و واسطه‌ی هندسی وزندار aها، بترتیب، چنین تعریف میشود:

$$A(a, p) = \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n}, \tag{۱۰۴۰۴}$$

$$G(a, p) = (a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n})^{1/(p_1 + \cdots + p_n)}. \tag{۱۰۴۰۵}$$

بطور کلی، اگر r عدد حقیقی ثابتی و p رشته‌ای از اوزان باشد $M_r(a, p)$، معروف به واسطه‌ی قوه‌ای aها، چنین تعریف میشود:

$$M_r(a, p) = \begin{cases} \left(\dfrac{p_1 a_1^r + p_2 a_2^r + \cdots p_n a_n^r}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{1/r} & (r > 0 \text{، یا } r < 0 \text{ و } \\ & (a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0 \\ G(a, p) & (r = 0). \end{cases} \tag{۱۰۴۰۶}$$

ملاحظه کنید که اگر $r > 0$ و یکی از aها صفر باشد $M_r(a, p)$ بیمعنی است (۱).

برای احتراز از تکرار، قرار میگذاریم که در روابطی که $M_r(a, p)$ و نظایر آن در کار میآیند همواره این شرط را مستتر بگیریم که اگر $r < 0$ آنگاه $a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0$ (و لهذا، همواره $a_i > 0$).

اگر p رشته‌ی ثابت $\{1\}$ باشد، بجای $M_r(a, p)$، $M_r(a, 1)$ مینویسیم.

اثبات روابط بدیهی ذیل، مشروط به بامعنی بودن جمل، به متعلم محول میشود:

$$M_1(a, 1) = A(a). \tag{۱۰۴۰۷}$$

$$M_{-1}(a, 1) = H(a) \quad (a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0). \tag{۱۰۴۰۸}$$

$$M_r(a, p) = [A(a^r, p)]^{1/r} \tag{۱۰۴۰۹}$$

$$M_{-r}(a, p) = \frac{1}{M_r(1/a, p)} \quad (a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0). \tag{۱۰۴۰۱۰}$$

$$M_{rs}(a, p) = [M_s(a^r, p)]^{1/r} \tag{۱۰۴۰۱۱}$$

$$A(a + b, p) = A(a, p) + A(b, p). \tag{۱۰۴۰۱۲}$$

$$G(ab, p) = G(a, p) G(b, p). \tag{۱۰۴۰۱۳}$$

$$M_r(ka, p) = k \cdot M_r(a, p). \tag{۱۰۴۰۱۴}$$

$$G(ka, p) = k \cdot G(a, p). \tag{۱۰۴۰۱۵}$$

---

(۱) میتوان در این حالت $M_r(a, p)$ را مساوی 0 تعریف کرد.

(۱.۴.۱۶). اگر $a_i \leqslant b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$، و $r > 0$، آنگاه
$$\mathrm{M}_r(a, p) \leqslant \mathrm{M}_r(b, p).$$

۱.۵. تبصره. اسمنمای $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را نسبت به متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n متجانس نامند در صورتی که عددی ثابت مانند m باشد که، بازاء هر λ که $\lambda \neq 0$ و $F(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$ معنی داشته باشد،
$$F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, \ldots, x_n).$$
در این صورت، عدد m را درجه‌ی تجانس F خوانند.
مثلاً، واسطه‌ی قوه‌ای
$$\left(\frac{p_1 a_1^r + \cdots + p_n a_n^r}{p_1 + \cdots + p_n}\right)^{1/r} \qquad (*)$$
نسبت به pها متجانس و از درجه‌ی 0 است، و طرفین گزاره‌نمای
$$(\dagger) \quad (a_1^s + \cdots + a_n^s)^{1/s} \leqslant (a_1^r + \cdots + a_n^r)^{1/r} \quad (0 < r < s)$$
نسبت به aها متجانس و از درجه‌ی 1 میباشند.
نامساویهائی که در آتیه با آنها سر و کار داریم عموماً طرفینشان نسبت به دسته‌هائی از متغیرها متجانس میباشند. به وسیله‌ی این تجانس، اغلب میتوان این متغیرها را تابع شرایطی خاص قرار داد، و از این طریق، استدلال را تسهیل کرد. مثلاً، اگر فرض کنیم
$$P = p_1 + \cdots + p_n, \qquad p_i' = p_i/P \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$(*)$ به صورت
$$(p_1' a_1^r + \cdots + p_n' a_n^r)^{1/r}$$
در میآید، که در آن، حاصلجمع اوزان مساوی 1 است. همچنین، برای اثبات $(\dagger)$، کافی است آن را در حالت خاصی که $\sum a_i^r = 1$ ثابت کنیم. توضیح آنکه اگر aها جملگی صفر باشند $(\dagger)$ بالبداهه برقرار است، و الا، $\alpha = a_1^r + \cdots + a_n^r > 0$، و $(\dagger)$ معادل نامساوی
$$\frac{(\sum a_i^s)^{1/s}}{\alpha^{1/r}} = \frac{(\sum a_i^s)^{1/s}}{(\alpha^{s/r})^{1/s}} = \left[\sum\left(\frac{a_i}{\alpha^{1/r}}\right)^s\right]^{1/s} \leqslant 1$$
میباشد، که به صورت $(\dagger)$ است در حالت خاصی که $\sum a_i^r = 1$.

۲ § نامساوی وسایط عددی و هندسی

اینک به یکی از مشهورترین و مهمترین نامساویها میپردازیم.

۲.۱. مقدمه. اگر a_1 و a_2 دو عدد نامنفی باشند از رابطه‌ی
$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$
معلومست که، اولاً، $\sqrt{a_1 a_2} \leqslant (a_1 + a_2)/2$، یعنی واسطه‌ی هندسی دو عدد از واسطه‌ی

عددی آنها نابیشتر است؛ و ثانیاً، در نامساوی اخیر، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $0 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$، که معادل رابطه‌ی $a_1 = a_2$ میباشد.

برای اینکه روش تعمیم این حکم آشکار گردد، به استناد آنچه در مورد دو عدد ثابت شد، در مورد رشته‌ی 2^2جمله‌ای دلخواه $\{a_i\}_1^4$ از اعداد نامنفی، ثابت میکنیم که اولاً،

$$(*)\qquad \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

و ثانیاً، در $(*)$ فقط و فقط وقتی تساوی بر قرار است که aها دو بدو با هم متساوی باشند. گوئیم، بنا بر حالت دو عدد،

$$(۱)\qquad \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^{1/2} \leqslant \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

$$(۲)\qquad (a_1a_2)^{1/2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad (a_3a_4)^{1/2} \leqslant \frac{a_3 + a_4}{2}.$$

از ضرب روابط (۲) با توجه به (۱) نتیجه میشود،

$$(۳)\qquad (a_1a_2)^{1/2}(a_3a_4)^{1/2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2,$$

و این رابطه معادل $(*)$ است. برای تحقیق در برقراری تساوی ملاحظه میکنیم که برقراری تساوی در $(*)$ معادل برقراری تساوی بین طرف اول و آخر (۳) است، و این خود معادل است با اینکه، در عین حال،

$$(۴)\qquad (a_1a_2)^{1/2}(a_3a_4)^{1/2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2},$$

$$(۵)\qquad \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} = \left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)^2.$$

بنا بر حالت دو عدد، (۵) معادل است با

$$(۶)\qquad \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_3 + a_4}{2}.$$

بنا بر (۲) و ۷.۸.۶ : ۵، (۴) معادل است با برقراری تساوی در هر دو رابطه‌ی (۲)، و این خود، بنا بر حالت دو عدد، معادل است با اینکه در عین حال،

$$(۷)\qquad a_1 = a_2, \qquad a_3 = a_4.$$

خلاصه، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در $(*)$ آنست که، در عین حال، (۶) و (۷) برقرار باشند، یعنی a_1، a_2، a_3، و a_4 دوبدو با هم متساوی باشند.

اینک حکم کلی:

۲.۲. قضیه (نامساوی وسایط عددی و هندسی). بازاء هر رشته مانند $a = \{a_i\}_1^n$ از اعداد نامنفی،

$$(*) \qquad \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

و در این رابطه تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

برهان[1] . اثبات به استقراء قهقرائی است: ابتدا ثابت میکنیم که حکم بازاء هر رشته‌ای که عده‌ی جمل آن قوه‌ای از 2 باشد برقرار است، و سپس ثابت میکنیم که اگر حکم بازاء رشته‌های n جمله‌ای $(n > 1)$ برقرار باشد بازاء رشته‌های $n - 1$ جمله‌ای هم برقرار است.

I. میخواهیم ثابت کنیم که، بازاء هر عدد طبیعی k، حکم بازاء هر رشته‌ی 2^kجمله‌ای برقرار است. اثبات بر طبق اصل استقراء است. قبلاً حکم را بازاء $k = 1$ (رشته‌ی 2جمله‌ای) ثابت کردیم. اتمام برهان مانند آنست که در اثبات حکم بازاء $k = 2$ (رشته‌ی 4جمله‌ای) گفتیم: فرض کنیم حکم بازاء هر رشته‌ی دارای 2^k جمله برقرار باشد، و $\{a_n\}$ رشته‌ای دارای 2^{k+1} جمله‌ی نامنفی باشد. برای اختصار، 2^k را m مینامیم. چون رشته‌ی a دارای $2m$ جمله است، عده‌ی اعداد

$$\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_3+a_4}{2}, \ldots, \frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}$$

برابر m میباشد. پس، بنا بر فرض استقراء، حکم در مورد این اعداد برقرار است. بقیه‌ی استدلال به همان قرار است که در حالت خاص سابق (رشته‌ی چهارجمله‌ای) گذشت.

II. میخواهیم ثابت کنیم که اگر حکم بازاء هر رشته‌ی nجمله‌ای $(n > 1)$ برقرار باشد بازاء هر رشته $n - 1$جمله‌ای نیز برقرار است. مقدم را مفروض میگیریم، و فرض میکنیم a رشته‌ای $n - 1$جمله‌ای باشد، و رشته‌ی nجمله‌ای b را چنین تعریف میکنیم:

$$b_i = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$b_n = (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})/(n-1).$$

بنا بر فرض استقراء،

$$(\text{آ}) \qquad (b_1b_2\ldots b_n)^{1/n} \leqslant (b_1+b_2+\cdots+b_n)/n.$$

این نامساوی معادل است با نامساوی

$$(\text{ب}) \qquad (a_1a_2\ldots a_{n-1})^{1/(n-1)} \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})/(n-1),$$

که همان نامساوی مطلوب است. بعلاوه، بسبب معادل بودن (آ) با (ب)، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در (ب) آنست که

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

پس، بنا بر قاعده‌ی استقراء قهقرائی، حکم ثابت است. ▲

نامساوی وسایط عددی و هندسی را میتوان در مورد وسایط عددی و هندسی وزندار تعمیم داد. بطور کلی،

۲.۳. قضیه (قضیه‌ی نامساوی وسایط وزندار). همواره

---

(۱) قضیه‌ی نامساوی وسایط براهین متعدد دیگر هم دارد.

$$\mathrm{G}(a, p) \leqslant \mathrm{A}(a, p),$$

و به عبارت دیگر،

$$(*) \qquad (a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n})^{1/(p_1+\dots+p_n)} \leqslant \frac{p_1a_1 + \dots + p_na_n}{p_1 + \dots + p_n},$$

یا (به صورت معادل آن)

$$a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \leqslant \left(\frac{p_1a_1 + \dots + p_na_n}{p_1 + \dots + p_n}\right)^{p_1+\dots+p_n}$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که aها دوبدو با هم متساوی باشند.

برهان. قبلاً روش اثبات حکم را، به مناسبت فواید آن در مواردی مشابه، توضیح میدهیم.

(آ). کافی است $(*)$ را در حالتی که مجموع اوزان 1 باشد ثابت کنیم (۱.۵). به عبارت دیگر، حکم را به صورت

$$(\dagger) \qquad a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \leqslant p_1a_1 + \dots + p_na_n \quad \left(\sum p_i = 1\right)$$

ثابت میکنیم.

(ب). حکم اخیر را ابتدا در حالتی که اوزان منطق باشند ثابت میکنیم.

(پ). نامساوی را در مورد اوزان دلخواه ثابت میکنیم. برای این منظور، اوزان را با حد رشته‌هائی متقارب از اعداد منطق نمایش میدهیم، و به استناد (ب) و به حدگیری، نامساوی را بدست میآوریم.

(ت). چون در حدگیری «$<$» به «$\leqslant$» تبدیل میشود، در (پ) شرط اکید بودن نامساوی بدست نمیآید. رسیدن به نتیجه‌ی مطلوب در این باب مستلزم اتخاذ تدبیر خاصی است که خواهد آمد.

I. pها منطق‌اند.

کافی است $(\dagger)$ و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی را در آن ثابت کنیم. پس از تحویل pها به یک مخرج میتوان نوشت:

$$(۱) \qquad p_i = m_i/m \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

که در آنها، m و m_iها اعداد طبیعی‌اند، و

$$(۲) \qquad 1 \leqslant m_i \leqslant m - 1 \qquad (i = 1, \dots, n),$$

$$(۳) \qquad \sum m_i = m.$$

حال رشته‌ای اختیار میکنیم دارای m جمله، که m_1 جمله‌ی آن مساوی a_1، m_2 جمله‌ی آن مساوی a_2، ...، و m_n جمله‌ی آن مساوی a_n باشد، و قضیه‌ی ۲.۲ را در مورد این رشته بکار میبندیم. معلوم میشود که

$$a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_ia_i,$$

و این همان نامساوی مطلوبست، و بنا بر ۲.۲، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آن اینست که aها دوبدو با هم متساوی باشند.

II. pها اعداد دلخواهند، و $\sum p_i = 1$. بازاء هر i، رشته‌ای از اعداد منطق

مثبت مانند $\{q_j^{(i)}\}_{j=1}$ هست که $\lim_j q_j^{(i)} = q_i$. بنا بر حالت اوزان منطق،

$$a_1^{q_j^{(1)}} \ldots a_n^{q_j^{(n)}} \leqslant \left(\frac{q_j^{(1)}a_1 + \cdots + q_j^{(n)}a_n}{q_j^{(1)} + \cdots + q_j^{(n)}}\right)^{q_j^{(1)}+\cdots+q_j^{(n)}}.$$

از اینجا به حدگیری نامساوی (*) بدست میآید.

III. برای تحقیق در اکید بودن نامساوی در حالت کلی (حالت II)، ابتدا فرض میکنیم چنین نباشد که aها دوبدو با هم متساویند. بازاء هر i، عددی منطق مانند p_i' بین 0 و p_i هست. اگر $p_i'' = p_i - p_i'$ و

$$r' = \sum_{i=1}^{n} p_i', \qquad\qquad r'' = \sum_{i=1}^{n} p_i''$$

آنگاه r' منطق است، و $r' + r'' = 1$. بنا بر حالت اوزان منطق،

$$a_1^{p_1'} \ldots a_n^{p_n'} < \left(\frac{p_1'a_1 + \cdots + p_na_n}{p_1' + \cdots + p_n'}\right)^{r'},$$

و بنا بر قسمت II،

$$a_1^{p_1''} \ldots a_n^{p_n''} \leqslant \left(\frac{p_1''a_1 + \cdots + p_n''a_n}{p_1'' + \cdots + p_n''}\right)^{r''}.$$

از ضرب این دو نامساوی نتیجه میشود،

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} < \left(\frac{1}{r'} \sum p_i'a_i\right)^{r'} \cdot \left(\frac{1}{r''} \sum p_i''a_i\right)^{r''}.$$

طرف دوم، بنا بر قسمت II، نابیشتر است از

$$\left(\frac{\sum p_i'a_i + \sum p_i''a_i}{r' + r''}\right)^{r'+r''}.$$

پس،

$$a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n} < \sum p_i'a_i + \sum p_i''a_i = \sum p_ia_i.$$

IV. خلاصه، ثابت شد که نامساوی حکم برقرار است؛ و بعلاوه، اگر aها دوبدو با هم متساوی نباشند این نامساوی اکید است. چون وقتی که aها دوبدو با هم متساوی باشند در نامساوی حکم بالبداهه تساوی برقرار است، برهان تمام میباشد. ▲

۲.۳.۱. تبصره. بنا بر ۲.۳، اگر

$$a \geqslant 0, \qquad b \geqslant 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0, \qquad \alpha + \beta = 1$$

آنگاه

$$a^\alpha b^\beta \leqslant a\alpha + b\beta, \qquad (۲.۳.۱.۱)$$

و اگر $a \neq b$ نامساوی فوق اکید است.

حکم مهم دیگری که اغلب به چشم میخورد اینست که اگر

$$a \geqslant 0, \qquad b \geqslant 0, \qquad p > 0, \qquad q > 0, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

آنگاه

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad (۲.۳.۱.۲)$$

برای اثبات آن، کافی است نامساوی قبل را با $1/p$ و $1/q$ بجای α و β در مورد اعداد a^p و b^q بکار بریم. شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در (۲.۳.۱.۲) آنست که $a^p = b^q$، و یا $b = a^{p-1}$.

۲.۳.۲. امثله. نظر به اهمیت فراوان نامساویهای وسایط عددی و هندسی، امثلهٔ متعدد از موارد استعمال آنها میآوریم، و نیز در ۲.۴ بعضی از نامساویهای مهم آنالیز مقدماتی را به وسیلهٔ آنها ثابت میکنیم.

(آ). اگر r عددی حقیقی باشد همواره

$$(1^r + 2^r + \cdots + n^r)^n \geqslant n^n(n!)^r. \qquad (*)$$

زیرا، بنا بر نامساوی وسایط عددی و هندسی،

$$1^r \cdot 2^r \ldots n^r = (n!)^r \leqslant \left(\frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n}\right)^n,$$

و این معادل نامساوی حکم است. بعلاوه، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آن آنست که $n = 1$ یا $r = 0$. به عبارت دیگر، نامساوی (*) اکید است مگر آنکه $n = 1$ یا $r = 0$.

(ب). اگر اعداد a_1، a_2، . . .، و a_n مثبت باشند آنگاه

$$\mathrm{H}(a) \leqslant \mathrm{G}(a),$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که aها با هم مساوی باشند.

نامساوی مورد بحث به معنی

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

است، و برای اثبات حکم کافی است قضیهٔ وسایط عددی و هندسی را در مورد رشتهٔ $\{1/a_i\}_1^n$ بکار بندیم.

(پ). اگر aها مثبت باشند

$$\sum_1^n a_i \cdot \sum_1^n (1/a_i) \geqslant n^2,$$ [1]

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که aها دوبدو متساوی باشند.

حکم نتیجهٔ مستقیم ب: ۲.۳.۲ و ۲.۲ است.

(ت). از میان مثلثهائی که محیطشان ثابت است سطح مثلث متساوی‌الاضلاع اعظم است.

با علامات متداول، بر طبق قضیهٔ وسایط عددی و هندسی،

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{p}{3}; \qquad (۱)$$

---

(۱) ۵۸ : ۱۰ : ۵ ملاحظه شود.

و بالنتیجه،

$$s \leqslant p^2/3\sqrt{3}.$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در نامساوی اخیر آنست که در (۱) تساوی برقرار باشد، یعنی

$$p-a=p-b=p-c,$$

و از آنجا، $a=b=c$. ▲

۲.۴. بعضی نامساویهای مهم در آنالیز مقدماتی. قضیه‌ی ذیل بعضی از نامساویهائی را که سابقاً در این کتاب آمده است در بر دارد.

۲.۴.۱. اگر $x>0$ و $0<\alpha<\beta$ آنگاه

$$\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}<\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{\beta}, \qquad (۲.۴.۱.۱)$$

و اگر، بعلاوه، $x<\alpha$ آنگاه

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}>\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{\beta}. \qquad (۲.۴.۱.۲)$$

زیرا، بنا بر ۲.۳.۱.۱،

$$\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha/\beta}\cdot 1^{(\beta-\alpha)/\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\beta-\alpha}{\beta}=1+\frac{x}{\beta},$$

از اینجا نامساوی اول بدست میآید. اگر $x<\alpha$ میتوان، به جای x، $-x$ نوشت.

۲.۴.۲. اگر $0<x$، $x\neq 1$، و $0<\alpha<\beta$ آنگاه

$$\beta(x^{1/\beta}-1)<\alpha(x^{1/\alpha}-1).$$

مثلاً، اگر $x>1$ کافی است ۲.۴.۱.۱ را در مورد $\alpha(x^{1/\alpha}-1)$ به جای x بکار بندیم. بالاخص، اگر m عدد طبیعی مفروضی بزرگتر از 1 باشد آنگاه، بازاء هر عدد طبیعی n که $m<n$،

$$n(x^{1/n}-1)<m\,(x^{1/m}-1)<x-1. \qquad (۱)$$

پس،

$$\lim_n n(x^{1/n}-1)\leqslant m(x^{1/m}-1).$$

از آنجا، بنا بر ۷.۶.۵ : ۷،

$$\log x\leqslant m(x^{1/m}-1)<x-1.$$

۲.۴.۳. اگر r عددی حقیقی باشد، و

$$x>0, \qquad y>0, \qquad x\neq y$$

آنگاه نامساویهای ذیل برقرارند:

$$rx^{r-1}(x-y) < x^r - y^r < ry^{r-1}(x-y) \quad (0 < r < 1); \qquad (۲.۴.۳.۱)$$

$$rx^{r-1}(x-y) > x^r - y^r > ry^{r-1}(x-y) \quad (r < 0 \vee r > 1). \qquad (۲.۴.۳.۲)$$

اثبات اولی آسان است. بنا بر ۲.۳.۱.۱،

$$x^r y^{1-r} \leqslant rx + (1-r)y \qquad (0 < r < 1),$$

و این نیمه‌ی راست ۲.۴.۳.۱ است. نیمه‌ی چپ با تعویض x و y در نیمه‌ی راست حاصل میشود. برای اثبات نامساویهای مربوط به حالاتی کـه $1 < r$ یا $0 > r$، اولاً، فـرض کنیم $r > 1$، و از آنجا، $s = 1/r < 1$. بنا بر آنچه ثابت شد،

$$s(x^r)^{s-1}(x^r - y^r) < (x^r)^s - (y^r)^s < s(y^r)^{s-1}(x^r - y^r),$$

و ایـن همان نامساوی ۲.۴.۳.۲ است. ثـانیاً، فرض کنیم $r < 0$. پس، $s = -r > 0$، و $s + 1 > 1$. بنا بر حالتی که ثابت شد،

$$\begin{aligned} x^r - y^r = x^{-s} - y^{-s} &= x^{-s}y^{-s-1}(y^{s+1} - x^s y) \\ &= x^{-s}y^{-s-1}\{y^{s+1} - x^{s+1} - x^s(y-x)\} \\ &> x^{-s}y^{-s-1}sx^s(y-x) \\ &= ry^{r-1}(x-y). \end{aligned}$$

اثبات نیمه‌ی دیگر به همین قیاس است. ▲

بالاخص،

$$x^r - 1 > r(x-1) \quad (0 < x,\ x \neq 1,\ r > 1); \qquad (۲.۴.۳.۳)$$

$$x^r - 1 < r(x-1) \quad (0 < x,\ x \neq 1,\ 0 < r < 1). \qquad (۲.۴.۳.۴)$$

۳ § نامساوی هولدر* و نامساویهای وابسته

۳.۱. قضیه. با جدول (آ)[1]، اگر m عدد مثبت α، β، . . .، و λ در رابطه‌ی

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$$

صدق کنند آنگاه

$$\begin{aligned} &a_1^\alpha b_1^\beta \ldots l_1^\lambda + a_2^\alpha b_2^\beta \ldots l_2^\lambda + \cdots + a_n^\alpha b_n^\beta \ldots l_n^\lambda \\ &\leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^\alpha (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^\beta \ldots (l_1 + l_2 + \cdots + l_n)^\lambda, \end{aligned}$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که ستونهای جدول (آ) دوبدو متناسب باشند یا در یکی از ستونها جمله‌ها همگی صفر باشند.

برهان. اگر یکی از ستونهای جدول صفر باشد رابطه‌ی مورد بحث بـه صـورت $0 \leqslant 0$ در میآید. پس، فرض کنیم هیچ یک از ستونها صفر نباشد. اگر

$$A = a_1 + \cdots + a_n, \quad B = b_1 + \cdots + b_n, \quad \ldots, \quad L = l_1 + \cdots + l_n$$

آنگاه A، B، . . .، و L مثبت‌اند، و هر گاه خارج قسمت طرف اول نـامساوی حکم را بـر طرف دوم آن S بنامیم، این نامساوی معادل نامساوی $S \leqslant 1$ خواهد بود. اما، بنـا بـر قضیه‌ی

---

(۱) ۱.۳.۴ ملاحظه شود.

وسایط عددی و هندسی وزندار،

$$(۱)\quad \left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\cdots\left(\frac{l_i}{L}\right)^{\lambda} \leqslant \alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}+\cdots+\lambda\frac{l_i}{L} \qquad (1\leqslant i\leqslant n).$$

از جمع این نامساویها معلوم میشود که $S \leqslant 1$. بعلاوه، شرط لازم و کافی برای آنکه $S = 1$ آنست که در همه‌ی نامساویهای (۱) تساوی برقرار باشد، و این بنا بر ۲.۳، معادل است با اینکه، در عین حال،

$$\frac{a_i}{A}=\frac{b_i}{B}=\cdots=\frac{l_i}{L} \qquad (1\leqslant i\leqslant n). \blacktriangle$$

۳.۱.۱. امثله.

(آ). اگر

$$x>0, \qquad y>0, \qquad z>0, \qquad x+y+z=1$$

آنگاه

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 64.$$

اگر قضیه‌ی ۳.۱ را در مورد جدول

$\alpha = 1/3$	$\beta = 1/3$	$\gamma = 1/3$
1	1	1
$1/x$	$1/y$	$1/z$

بکار بریم خواهیم داشت،

$$1+\left(\frac{1}{xyz}\right)^{1/3}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1/3}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1/3}.$$

اما

$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}.$$

اینک نامساوی مطلوب به آسانی بدست میآید.

(ب). بنا بر ۳.۱،

I. اگر $\alpha>0$، $\beta>0$، و $\alpha+\beta=1$ آنگاه

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\leqslant(a_1+a_2)^{\alpha}(b_1+b_2)^{\beta}.$$

II. اگر α، β، ...، و λ مثبت باشند، و مجموعشان 1 باشد آنگاه

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\ldots l_1^{\lambda}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\ldots l_2^{\lambda}\leqslant(a_1+a_2)^{\alpha}(b_1+b_2)^{\beta}\ldots(l_1+l_2)^{\lambda},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$a_1/a_2=b_1/b_2=\cdots=l_1/l_2.$$

یا یکی از رشته‌ها صفر باشد.

(پ). اگر رشته‌های سازنده‌ی جدول (آ) را به ترتیب سطری بنویسیم، و قضیه‌ی ۳.۱ را در مورد جدول جدید بکار بندیم، با اندک تأملی معلوم میشود که

۳.۲. قضیه. با جدول (آ)، اگر p رشته‌ای از n وزن باشد، و
$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$
آنگاه
$$G(a, p)+G(b, p)+\cdots+G(l, p) \leqslant G(a+b+\cdots+l, p)$$
و یا
$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n}+b_1^{p_1}b_2^{p_2}\ldots b_n^{p_n}+\cdots+l_1^{p_1}l_2^{p_2}\ldots l_n^{p_n}$$
$$\leqslant (a_1+b_1+\cdots+l_1)^{p_1}(a_2+b_2+\cdots+l_2)^{p_2}\cdots(a_n+b_n+\cdots+l_n)^{p_n},$$
و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که ستونهای جدول (آ) دوبدو متناسب باشند یا یکی از سطور آن صفر باشد.

اگر p رشته‌ای از اوزان باشد، و $\sum p_i = P$، و ۳.۱ را در مورد m رشته‌ی
$$\left\{\frac{p_i}{P}a_i^{r/\alpha}\right\}, \quad \left\{\frac{p_i}{P}b_i^{r/\beta}\right\}, \quad \ldots, \quad \left\{\frac{p_i}{P}l_i^{r/\lambda}\right\}$$
بکار بندیم چنین نتیجه میشود:

۳.۳. قضیه. با جدول (آ)، فرض کنیم m عدد α، β، . . .، و λ مثبت باشند، و $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$، و r عددی حقیقی و ناصفر باشد. در این شرایط، اگر $r>0$ آنگاه
$$M_r(ab\ldots l, p) \leqslant M_{r/\alpha}(a, p)\cdot M_{r/\beta}(b, p)\ldots M_{r/\lambda}(l, p),$$
و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که رشته‌های $a^{1/\alpha}$، $b^{1/\beta}$، . . .، و $l^{1/\lambda}$ متناسب باشند یا آنکه یکی از عوامل طرف دوم صفر باشد. اگر $r<0$ نامساوی در جهت عکس برقرار است.

۳.۴. تعریف. اگر $k \in \mathbf{R}$ و $k \neq 1$ آنگاه عدد
$$k'=\frac{k}{k-1}$$
را مزدوج k نامیم.
واضح است که
$$(k-1)(k'-1)=1 \qquad (k\neq 1), \tag{۳.۴.۱}$$
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1 \qquad (k\neq 0, k\neq 1). \tag{۳.۴.۲}$$

۳.۵. قضیه. (نامساوی هولدر). اگر $k>1$ و k' مزدوج k باشد آنگاه
$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{1/k'},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که رشته‌های a^k و $b^{k'}$ متناسب باشند یا رشته‌ی ab صفر باشد.

برهان. اگر $k > 1$ آنگاه $k' > 0$. حال اگر $\alpha = 1/k$ و $\beta = 1/k'$ آنگاه $\alpha + \beta = 1$، و از قضیه‌ی ۳.۱ در مورد جدول دو ستونی متشکل از دو رشته‌ی nجمله‌ای a^k و $b^{k'}$ نامساوی مطلوب و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آن بدست میآید. ▲

در حالتی که $k \neq 0$ و $k < 1$ قضیه‌ی ذیل برقرار است:

۳.۵.۱. قضیه. اگر $k \neq 0$ و $k < 1$، و k' مزدوج k باشد آنگاه، به شرط بامعنی بودن جمل،

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^k)^{1/k} (\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'})^{1/k'},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که رشته‌های a^k و $b^{k'}$ متناسب باشند یا رشته‌ی ab صفر باشد.

برهان. بر حسب اینکه $0 < k < 1$ یا $k < 0$ دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $0 < k < 1$. در این صورت، $k' < 0$، و شرط بامعنی بودن اقتضا میکند که bها مثبت باشند. پس، فرض میکنیم چنین باشد. اگر $l = 1/k$ و l' مزدوج l باشد آنگاه

$$l > 1, \qquad\qquad k' = -kl'.$$

اینک رشته‌های u و v را با ضوابط

$$u_i = (a_i b_i)^k, \qquad\qquad v_i = b_i^{-k}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

تعریف میکنیم. بنا بر نامساوی هولدر،

$$\sum u_i v_i \leqslant (\sum u_i^l)^{1/l} (\sum v_i^{l'})^{1/l'}.$$

از اینجا نامساوی مطلوب و بقیه‌ی حکم بدست میآید.

حالت دوم: $k < 0$. در این صورت، $0 < k' < 1$، و بحث به حالتی که گذشت باز میگردد.

قضایای ۳.۵ و ۳.۵.۱ را میتوان به صورت واحد ذیل بیان کرد:

۳.۵.۲ قضیه. اگر $k \neq 0$ و $k \neq 1$ آنگاه

$$(\sum a_i b_i)^{kk'} \leqslant (\sum a^k)^{k'} (\sum b^{k'})^k,$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی مانند ۳.۵ است.

۳.۵.۳. تبصره. بازاء هر دو رشته مانند $\{a_i\}_1^n$ و $\{b_i\}_1^n$، اگر $k > 1$ و k' مزدوج k باشد آنگاه

$$|\sum_1^n a_i b_i| \leqslant (\sum_1^n |a_i|^k)^{1/k} (\sum_1^n |b_i|^{k'})^{1/k'}.$$

برای اثبات، کافی است ملاحظه کنیم که $|\sum_1^n a_ib_i| \leqslant \sum_1^n(|a_i|\cdot|b_i|)$، و نامساوی هولدر را در مورد رشته‌های $\{|a_i|\}_1^n$ و $\{|b_i|\}_1^n$ بکار بندیم.

اگر $k = 2$ آنگاه $k' = 2$، و نامساوی کوشی به عنوان حالت خاص نامساوی هولدر بدست میآید. برای تسهیل مراجعه، آن نامساوی را در اینجا تکرار میکنیم:

۳.۶. قضیه (نامساوی کوشی*). همواره

$$(\sum_1^n a_ib_i)^2 \leqslant (\sum_1^n a_i^2)(\sum_1^n b_i^2),$$

و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که رشته‌های a و b متناسب باشند.

از قضیه‌ی فوق نتیجه میشود،

۳.۷. قضیه. اگر $r > 0$ آنگاه

$$\mathrm{M}_r(a, p) \leqslant \mathrm{M}_{2r}(a, p),$$

و به عبارت دیگر،

$$(\sum_1^n p_ia_i^r)^2 \leqslant \sum_1^n p_i \cdot \sum_1^n p_ia_i^{2r},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که aها با هم مساوی باشند.

برهان. با توجه به رابطه‌ی $p_ia_i^r = \sqrt{p_i}\cdot\sqrt{p_i}\,a_i^r$، از قضیه‌ی ۳.۶ در مورد رشته‌های $\{\sqrt{p_i}\}$ و $\{\sqrt{p_i}\,a_i^r\}$ نتیجه‌ی مطلوب بدست میآید. ▲

۴ § بعضی از خواص وسایط قوه‌ای

۴.۱. قضیه. اگر $r < s$ آنگاه

$$\mathrm{M}_r(a, p) \leqslant \mathrm{M}_s(a, p)$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که aها دوبدو متساوی باشند، یا $s = 0$ و یکی از aها صفر باشد.

(۲.۳ حالت خاص این قضیه بازاء $r = 0$ و $s = 1$ است، و ۳.۷ حالت خاصی از آن بازاء $s = 2r$).

برهان. اولاً فرض کنیم $0 < r < s$. اگر $\alpha = r/s$ آنگاه $0 < \alpha < 1$. فرض کنیم

$$p_ia_i^s = u_i, \qquad p_i = v_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

واضح است که $v_i > 0$ و $p_ia_i^{s\alpha} = u_i^\alpha v_i^{1-\alpha}$. پس، بنا بر ۳.۰۱،

$$(۱) \quad u_1^\alpha v_1^{1-\alpha} + u_2^\alpha v_2^{1-\alpha} + \cdots + u_n^\alpha v_n^{1-\alpha} \leqslant (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^\alpha (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)^{1-\alpha},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که رشته‌های $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$ با هم متناسب باشند یا (چون

همواره $0 < v_i$) رشته‌ی $\{u_i\}$ صفر باشد. از (۲) نامساوی حکم و از نکته‌ی اخیر شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آن بدست می‌آید.

ثانیاً، فرض کنیم $r = 0$. اگر یکی از aها صفر باشد حکم بدیهی است. اگر همه‌ی aها مثبت باشند آنگاه

$$[\mathrm{M}_0(a, p)]^s\ [۱.۴.۶] = [\mathrm{G}(a, p)]^s = \mathrm{G}(a^s, p)\ [۲.۳]$$
$$\leqslant \mathrm{A}(a^s, p)\ [۱.۴.۹] = [\mathrm{M}_s(a, p)]^s.$$

بالاخره، حالتی که $r < s < 0$ و $r < s = 0$، به موجب ۱.۴.۱۰، به حالاتی که گذشت باز میگردد (توجه کنید که در حالات مذکور aها مثبت فرض میشوند). ▲

۴.۱.۱. مثال. اگر aها نامنفی باشند و $r > 1$ آنگاه

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^r \leqslant \frac{a_1^r + a_2^r + \cdots a_n^r}{n}.$$

اگر $0 < r < 1$ همین نامساوی در جهت عکس برقرار است. در هر حال، نامساوی اکید است مگر آنکه aها دوبدو متساوی باشند.

۴.۲. قضیه. اگر $0 < r < s < t$ آنگاه

$$[\mathrm{M}_s(a, p)]^s \leqslant ([\mathrm{M}_r(a, p)]^r)^{\frac{t-s}{t-r}}([\mathrm{M}_t(a, p)]^t)^{\frac{s-r}{t-r}},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که aهائی که صفر نیستند با هم متساوی باشند.

برهان. فرض کنیم $\alpha = (t - s)/(t - r)$ و $q_i = p_i/\sum p_i$. پس،

$$s = r\alpha + t(1 - \alpha), \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad \sum q_i = 1,$$

و نامساوی مورد بحث بدین صورت در می‌آید:

$$q_1a_1^s + \cdots + q_na_n^s \leqslant (q_1a_1^r + \cdots + q_na_n^r)^\alpha\,(q_1a_1^t + \cdots + q_na_n^t)^{1-\alpha}.$$

اینک نتیجه‌ی مطلوب از ۳.۱ حاصل میگردد. ▲

۵ § نامساوی ینسن[۱]

۵.۱. تعریف. فرض کنیم a رشته‌ای باشد، و $r > 0$. بنا بر تعریف،

$$\mathrm{S}_r(a) = (\sum_{i=1}^{n} a_i^r)^{1/r}.$$

از قضیه‌ی ۴.۲ به آسانی معلوم میشود که

۵.۱.۱. قضیه. اگر $0 < r < s < t$ آنگاه

$$(\mathrm{S}_s(a))^s \leqslant ([\mathrm{S}_r(a)]^r)^{\frac{t-s}{t-r}}([\mathrm{S}_t(a)]^t)^{\frac{s-r}{t-r}},$$

---

(۱) J. L. W. V. Jensen (۱۸۵۹ـ۱۹۲۵).

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که aهائی که صفر نیستند با هم متساوی باشند.

۵.۲. قضیه (نامساوی ینسن). اگر $0 < r < s$ آنگاه

$$\mathrm{S}_s(a) \leqslant \mathrm{S}_r(a),$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که منتها یکی از aها ناصفر باشد.
برهان. اگر همه‌ی aها صفر باشند حکم بدیهی است. اگر چنین نباشد، بنا بر ۱۰.۵، کافی است حکم را در حالتی که $\sum a_i^r = 1$ ثابت کنیم. در این صورت، $\mathrm{S}_r(a) = 1$، و نامساوی حکم به صورت $\mathrm{S}_s(a) \leqslant 1$ در می‌آید. بنا بر فرض، همواره $a_i \leqslant 1$، و لهذا، $a_i^s \leqslant a_i^r$، و بالنتیجه،

$$\sum a_i^s \leqslant \sum a_i^r = 1. \tag{۱}$$

بعلاوه، اگر بیش از یکی از aها مثبت باشد حد اقل یکی از نامساویهای $a_i \leqslant 1$ اکید خواهد بود، و لهذا، نامساوی (۱) هم اکید است. ▲
از تلفیق قضایای ۵.۲ و ۳.۱ نتیجه میشود:

۵.۳. قضیه (قضیه‌ی ینسن). با جدول (آ)، اگر m عدد α، β، . . .، و λ مثبت باشند، و $1 < \alpha + \beta + \cdots + \lambda$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha b_i^\beta \ldots l_i^\lambda \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i)^\alpha (\sum_{i=1}^{n} b_i)^\beta \ldots (\sum_{i=1}^{n} l_i)^\lambda,$$

و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که یکی از ستونهای جدول صفر باشد یا در هر ستون منتها یک جمله ناصفر باشد.
برهان. فرض کنیم

$$r = \alpha + \beta + \cdots + \lambda > 1, \qquad \alpha' = \alpha/r,\ \beta' = \beta/r,\ \ldots,\ \lambda' = \lambda/r,$$
$$A_i = a_i^r, \qquad B_i = b_i^r, \qquad \ldots, \qquad L_i = l_i^r.$$

واضح است که $\alpha' + \beta' + \cdots + \lambda' = 1$، و

$$\begin{aligned}\sum a_i^\alpha b_i^\beta \ldots l_i^\lambda &= \sum A_i^{\alpha'} B_i^{\beta'} \ldots L_i^{\lambda'}\\ &\leqslant (\sum A_i)^{\alpha'} (\sum B_i)^{\beta'} \ldots (\sum L_i)^{\lambda'}\\ &= (\sum a_i^r)^{\alpha/r} (\sum b_i^r)^{\beta/r} \ldots (\sum l_i^r)^{\lambda/r}\\ &\leqslant (\sum a_i)^\alpha (\sum b_i)^\beta \ldots (\sum l_i)^\lambda,\end{aligned}$$

و این همان نامساوی مطلوب است. شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آن از شرایط تساوی در ۳.۱ و ۵.۲ بدست میآید.

۶ § نامساوی مینکوفسکی* و نامساویهای وابسته

۶.۱. قضیه. با جدول (آ) و رشته‌ای مانند p از اوزان، اگر r عددی غیر از 1 باشد، و

برای اختصار، $\mathrm{M}_r(x, p)$ را $\mathrm{M}_r(x)$ بنامیم، آنگاه

$$\mathrm{M}_r(a) + \mathrm{M}_r(b) + \cdots + \mathrm{M}_r(l) \geqslant \mathrm{M}_r(a+b+\cdots+l) \qquad (r>1),$$
$$\mathrm{M}_r(a) + \mathrm{M}_r(b) + \cdots + \mathrm{M}_r(l) \leqslant \mathrm{M}_r(a+b+\cdots+l) \qquad (r<1),$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که ستونهای جدول دوبدو متناسب باشند یا آنکه $r = 0$ و یکی از سطور جدول صفر باشد.

(قضیه‌ی ۳.۲ حالت خاص این قضیه است بازاء $r = 0$.)

برهان. کافی است حکم را در حالتی که $\sum p_i = 1$ ثابت کنیم. برای اختصار، فرض میکنیم

$$a+b+\cdots+l = s, \qquad \mathrm{M}_r(s) = \mathrm{M}_r(s, p) = S$$

حالت اول: $r > 1$. اگر همه‌ی ستونهای جدول صفر باشند نامساوی حکم بالبداهه برقرار است. فرض میکنیم چنین نباشد. در این صورت $S > 0$. حال گوئیم،

$$\begin{aligned} S^r &= \sum p_i s_i^r = \sum p_i s_i^{r-1}(a_i + b_i + \cdots + l_i) \\ &= \sum p_i a_i s_i^{r-1} + \cdots + \sum p_i l_i s_i^{r-1} \\ &= \sum (p_i^{1/r} a_i)(p_i^{1/r} s_i)^{r-1} + \cdots + \sum (p_i^{1/r} l_i)(p_i^{1/r} s_i)^{r-1} \end{aligned}$$

پس، به موجب نامساوی هولدر،

$$\begin{aligned} S^r &\leqslant \left(\sum p_i a_i^r\right)^{1/r}\left(\sum p_i s_i^r\right)^{1/r'} + \cdots + \left(\sum p_i l_i^r\right)^{1/r}\left(\sum p_i s_i^r\right)^{1/r'} \\ &= S^{r-1}\left[\left(\sum p_i a_i^r\right)^{1/r} + \cdots + \left(\sum p_i l_i^r\right)^{1/r}\right]. \end{aligned}$$

از اینجا نامساوی مطلوب بدست میآید. بعلاوه، بنا بر نامساوی هولدر، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که رشته‌های pa^r، pb^r، ...، و pl^r با رشته‌ی ps^r متناسب باشند، و این معادل با شرط مذکور در قضیه است.

حالت دوم: $r < 1$. اگر $r = 0$ حکم همان حکم قضیه‌ی ۳.۲ است. باقی میماند حالاتی که $0 < r < 1$ یا $r < 0$.

اولاً، فرض کنیم $0 < r < 1$. اگر همه‌ی ستونهای جدول صفر باشند حکم بالبداهه برقرار است. در غیر این صورت مقداری از i هست که $s_i > 0$. بعلاوه، اگر s_i بازاء مقدار معینی از i صفر باشد آنگاه $a_i = b_i = \cdots = l_i = 0$، و اثبات حکم به اثبات آن در مورد جدولی حاصل از اسقاط سطر iم جدول (آ) باز میگردد. بنا بر این، کافی است حکم را در حالتی که همواره $s_i > 0$ ثابت کنیم. اثبات به وسیله‌ی ۳.۵.۱ و به قیاس حالت سابق است.

ثانیاً، $r < 0$. در این صورت، فرض اینست که همه‌ی اعداد مندرج در جدول مثبت میباشند، و اثبات مانند حالت اول و به استناد ۳.۵.۱ است.

اگر در قضیه‌ی فوق p را رشته‌ی ثابت $\{1\}$ بگیریم دو قضیه‌ی ذیل حاصل میشود:

۶.۲. قضیه (نامساوی مینکوفسکی). با جدول (آ)، اگر $r > 1$ آنگاه

$$\left[\sum_i (a_i + b_i + \cdots + l_i)^r\right]^{1/r} \leqslant \left(\sum_i a_i^r\right)^{1/r} + \cdots + \left(\sum l_i^r\right)^{1/r},$$

و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که ستونهای جدول دوبدو متناسب باشد.

۶.۲.۱. قضیه. با جدول (آ)، اگر $r < 1$ آنگاه نامساوی قـضیه‌ی قـبل در جهت عـکس برقرار است، و شرط لازم و کافی برای تساوی مانند آن قضیه میباشد.

۶.۲.۲. امثله

(آ). بنا بر نامساوی مینکوفسکی، اگر $r > 1$ آنگاه

$$[(a_1+b_1)^r+(a_2+b_2)^r]^{1/r} \leqslant (a_1^r+a_2^r)^{1/r}+(b_1^r+b_2^r)^{1/r}.$$

(ب). اگر $r > 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}&[(a_1+b_1+c_1)^r+(a_2+b_2+c_2)^r]^{1/r}\ [\text{آ}]\\ &\leqslant (a_1^r+a_2^r)^{1/r}+[(b_1+c_1)^r+(b_2+c_2)^r]^{1/r}\ [\text{آ}]\\ &\leqslant (a_1^r+a_2^r)^{1/r}+(b_1^r+b_2^r)^{1/r}+(c_1^r+c_2^r)^{1/r}.\end{aligned}$$

(پ). اگر $r > 1$ آنگاه

$$[\sum_i (a_i+b_i)^r]^{1/r} \leqslant (\sum_i a_i^r)^{1/r}+(\sum_i b_i^r)^{1/r}.$$

بطور کلی، اگر قید نامنفی بودن جمله‌های دو رشتـه‌ی a و b را بـرداریم، با توجه به اینکـه $|a_i+b_i| \leqslant |a_i|+|b_r|$، خواهیم داشت:

$$(\sum|a_i+b_i|^r)^{1/r} \leqslant [\sum(|a_i|+|b_i|)^r]^{1/r} \leqslant (\sum|a_i|^r)^{1/r}+(\sum|b_i|^r)^{1/r}.$$

۶.۳. قضیه. با جدول (آ)، اگر $r > 0$ و $r \neq 1$ آنگاه

$$\sum_i (a_i+\cdots+l_i)^r \geqslant \sum_i a_i^r+\cdots+\sum_i l_i^r \qquad (r>1),$$

$$\sum_i (a_i+\cdots+l_i)^r \leqslant \sum_i a_i^r+\cdots+\sum_i l_i^r \qquad (0<r<1),$$

و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که در هر سطر جدول منتها یک جمله ناصفر باشد.

برهان. این قضیه نتیجه‌ی مستقیم نامساوی ینسن است. مثلاً، اگر $r > 1$ آنگاه

$$a_i^r+\cdots+l_i^r \leqslant (a_i+\cdots+l_i)^r \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

و، بازاء هر i، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که منتها یکی از a_i، b_i، . . .، و l_i ناصفر باشد. از جمع نامساویهای فوق حکم مطلوب بدست میآید. ▲

از نامساوی مینکوفسکی و قسمت دوم قضیه‌ی فوق معلوم میشود که

۶.۴. قضیه. با جدول (آ)، اگر $r > 0$، و ρ را چنین تعریف کنیم

$$\rho = \begin{cases} 1 & (0<r\leqslant 1),\\ 1/r & (r>1),\end{cases}$$

آنگاه

$$[\sum (a_i+\cdots+l_i)^r]^{\rho} \leqslant (\sum a_i^r)^{\rho}+\cdots+(\sum l_i^r)^{\rho}.$$

۶.۵. فایده. در فصل ۶ دیدیم که مجموعه‌ی $\mathbf{R}^n$ را با تعریف فاصله‌ی دو نقطه‌ی

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad P_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

بر طبق رابطه‌ی

$$\rho(P_1, P_2) = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{1/2}$$

میتوان به یک فضای متری تبدیل کرد (فضای اقلیدسی nبعدی). تابع ρ تابع فاصله‌ی اقلیدسی است.

مجموعه‌ی $\mathbf{R}^n$ را به طرق دیگر نیز میتوان به فضای متری تبدیل نمود (فضاهای nبعدی نااقلیدسی). مثلاً، اگر تابع ρ را با ضابطه‌ی

$$\rho(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$$

تعریف کنیم به آسانی دیده میشود که این تابع در شرایط سه‌گانه‌ی متریک صدق میکند. پس، زوج مرتب $(\mathbf{R}^n, \rho)$ یک فضای متریک است. در این فضا، مکان هندسی نقاطی که جملگی از مبدأ مختصات به فاصله‌ی 1 باشند مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای

$$| x_1 | + | x_2 | + \cdots + | x_n | = 1$$

میباشد. مثلاً، در فضای متری $(\mathbf{R}^2, \rho)$، مکان مذکور عبارتست از مجموعه‌ی صدق گزاره‌نمای

$$| x | + | y | = 1,$$

که نمایش آن در صفحه‌ی عادی اقلیدسی دوره‌ی مربعی است که رؤوسش بر محورهای مختصات به فاصله‌ی 1 از مبدأ قرار دارند.

بطور کلی، فرض کنیم r عدد ثابتی ناکمتر از 1 باشد، و

$$\rho(P_1, P_2) = [\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^r]^{1/r}$$

بالبداهه، اولاً، $\rho(P_1, P_2) \geqslant 0$ و شرط لازم و کافی برای آنکه $\rho(P_1, P_2) = 0$ آنست که P_1 و P_2 بر هم منطبق باشند. ثانیاً، $\rho(P_1, P_2) = \rho(P_2, P_1)$. برای اثبات نامساوی مثلث باید ثابت کرد که

$$(\sum | x_i - y_i |^r)^{1/r} + (\sum | y_i - z_i |^r)^{1/r} \geqslant (\sum | x_i - z_i |^r)^{1/r},$$

یا، اگر $x_i - y_i = a_i$ و $y_i - z_i = b_i$،

$$(\sum | a_i |^r)^{1/r} + (\sum | b_i |^r)^{1/r} \geqslant (\sum | a_i + b_i |^r)^{1/r},$$

و این به موجب پ: ۶.۲.۲ برقرار است. پس، زوج مرتب $(\mathbf{R}^n, \rho)$ یک فضای متری است.

۷ § نامساوی چبیچف*

۷.۱. تعریف. دو رشته‌ی a و b را متشابه‌الترتیب خوانیم در صورتی که همواره

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0 \qquad (i, j \in \mathbf{N}),$$

و آنها را متقابل‌الترتیب گوئیم در صورتی که همواره

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leqslant 0 \qquad (i, j \in \mathbf{N}).$$

با اندک تأملی معلوم میشود که شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌های a و b متشابه‌الترتیب (متقابل‌الترتیب) باشند آنست که تغییر نظمی از آنها موجود باشد که رشته‌های حاصل از این تغییر نظم هر دو صعودی (یکی صعودی و دیگری نزولی) باشند.

۷.۲. قضیه (نامساوی چبیچف). فرض کنیم r عددی مثبت، a و b دو رشته از اعداد نامنفی، و p رشته‌ای از اوزان باشد.

I. اگر دو رشته متشابه‌الترتیب باشند آنگاه

$$\mathrm{M}_r(a,\ p)\mathrm{M}_r(b,\ p) \leqslant \mathrm{M}_r(ab,\ p),$$

و شرط لازم و کافی برای تساوی آنست که همه‌ی aها با هم یا همه‌ی bها با هم متساوی باشند.

II. اگر دو رشته متقابل‌الترتیب باشند نامساوی فوق در جهت عکس برقرار است.

برهان. بنا بر ۱.۴.۹، کافی است حکم را در حالتی که $r = 1$ ثابت کنیم. در این حالت، نامساوی مورد بحث معادل است با نامساوی

$$\sum p_i \sum p_i a_i b_i - \sum p_i a_i \sum p_i b_i \geqslant 0.$$

اگر طرف اول را A بنامیم،

$$\begin{aligned} A &= \sum_i p_i \sum_j p_j a_j b_j - \sum_i p_i a_i \sum_j p_j b_j \ [۵ : ۷.۶.۶] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j a_j b_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j a_i b_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (a_j b_j - a_i b_j). \end{aligned}$$

به همین قیاس معلوم میشود که

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (a_i b_i - a_j b_i)$$

پس،

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (a_j b_j - a_i b_j + a_i b_i - a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j). \end{aligned}$$

پس، چون دو رشته متشابه‌الترتیب‌اند، $A \geqslant 0$. کشف شرط تساوی، و اثبات قسمت II به متعلم محول میشود.

نامساوی چبیچف را به آسانی میتوان به صورت ذیل تعمیم داد:

۷.۳. قضیه. اگر $r > 0$ و ستونهای جدول (آ) دوبدو متشابه‌الترتیب باشند آنگاه

$$\mathrm{M}_r(a,\ p)\mathrm{M}_r(b,\ p) \cdots \mathrm{M}_r(l,\ p) \leqslant \mathrm{M}_r(ab \cdots l,\ p).$$

بالاخص،

۷.۳.۱. قضیه. اگر $r > 0$، و k عددی طبیعی و بزرگتر از 1 باشد، آنگاه
$$M_r(a, p) \leqslant M_{kr}(a, p).$$

۸ § وسایط متقارن

۸.۱. علامات و تعریفات. فرض کنیم $a = \{a_i\}_1^n$ رشته‌ای از اعداد مثبت و r عددی طبیعی و نابیشتر از n باشد.

I. مجموع جمیع حاصلضربهای متمایز دارای r عامل متمایز را که از n حرف a_1، a_2، . . .، و a_n میتوان ساخت c_r میخوانیم.

عده‌ی حاصلضربهای مذکور $\binom{n}{r}$ است.

II. واسطه‌ی عددی حاصلضربهای مذکور در I را p_r میخوانیم. به عبارت دیگر،
$$p_r = c_r \Big/ \binom{n}{r} = \frac{r!(n-r)!}{n!} c_r.$$

III. برای تعمیم، چنین قرار میدهیم:
$$c_0 = p_0 = 1.$$

IV. $\sqrt[r]{p_r}$ را واسطه‌ی متقارن مرتبه‌ی r aها نامیم.

۸.۱.۱. امثله

(آ). در مورد رشته‌ی $a = \{a_i\}_1^2$، حاصلضربهای دارای یک عامل a_1 و a_2، و یگانه حاصلضرب دارای دو عامل a_1a_2 است. پس،
$$c_0 = 1, \qquad c_1 = a_1 + a_2, \qquad c_2 = a_1a_2,$$
$$p_0 = 1, \qquad p_1 = (a_1 + a_2)/2 \qquad p_2 = a_1a_2.$$

(ب). بطور کلی،
$$c_1 = a_1 + \cdots + a_n, \qquad c_n = a_1 \cdots a_n,$$
$$p_1 = \mathrm{A}(a), \qquad p_n = (\mathrm{G}(a))^n.$$

۸.۲. قضیه (نیوتن*). اگر $r, n \in \mathbf{N}$ و $1 \leqslant r < n$ آنگاه
$$p_{r-1}p_{r+1} \leqslant p_r^2,$$
و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که aها دوبدو متساوی باشند.

برهان. اگر $n = 2$ آنگاه $r = 1$، و با توجه به آ: ۸.۱.۱، نامساوی حکم به صورت $a_1a_2 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$ در میآید، که بالبداهه برقرار است. پس، فرض میکنیم $n > 2$ و حکم

بازاء رشته‌ی

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \tag{۱}$$

برقرار باشد، و ثابت میکنیم که بازاء رشته‌ی

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \tag{۲}$$

نیز برقرار است. برای این منظور ملاحظه میکنیم کـه اگر اعداد (۲) بـا هـم مساوی باشند، بالبداهه، $p_{r-1}p_{r+1} = p_r^2$. پس، فرض میکنیم چنین نبـاشد، و مجموع و واسطـه‌ی عـددی مربوط به رشته‌ی (۱) را بر طبق تـعریفات مذکور در بندهای I و II از ۸.۱، بتـرتیب، c'_r و p'_r مینامیم. اگر در c_r جمله‌هائی را که فاقد a_n هستند از سایـرین تفکیک کنیم دیده میشود که

$$c_r = c'_r + a_n c'_{r-1},$$

و از آنجا،

$$p_r = \frac{n-r}{n}\, p'_r + \frac{r}{n} a_n p'_{r-1}.$$

به محاسبه‌ی ساده‌ای معلوم میشود که

$$n^2(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2, \tag{۳}$$

که در آن،

$$A = [(n-r)^2 - 1]p'_{r-1}p'_{r+1} - (n-r)^2 p'^2_r,$$
$$B = (n-r+1)(r+1)p'_{r-1}p'_r + (n-r-1)(r-1)p'_{r-2}p'_{r+1} - 2r(n-r)p'_{r-1}p'_r,$$
$$C = (r^2-1)p'_{r-2}p'_r - r^2 p'^2_{r-1}.$$

بنا بر فرض استقراء،

$$p'_{r-1}p'_{r+1} \leqslant p'^2_r, \qquad p'_{r-2}p'_r \leqslant p'^2_{r-1}, \tag{۴}$$

و بالنتیجه، $p'_{r-2}p'_{r+1} \leqslant p'_{r-1}p'_r$ (۵). پس،

$$A \leqslant -p'^2_r, \qquad B \leqslant 2p'_{r-1}p'_r, \qquad C \leqslant -p'^2_{r-1}. \tag{۶}$$

پس، بنا بر (۳)،

$$n^2(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2) \leqslant -(p'_r - a_n p'_{r-1})^2. \tag{۷}$$

حال گوئیم اگر همه‌ی اعداد (۱) با هم مساوی نباشند، بنا بر فرض استقراء، نـامساویهای (۴) اکید هستند، و لهذا، نامساویهای (۵) و (۶) و (۷) نیز اکـید میباشند، و بـالنتیجه، نـامساوی حکم اکیداً برقرار است. اما اگر

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$$

آنگاه $a_n \neq a_1 = p'_r/p_{r-1}$، و لهذا، طرف دوم (۷) منفی است، و باز نـامساوی حـکـم اکیداً برقرار است. ▲

مقایسه‌ی وسایط متقارن به وسیله‌ی قضیه‌ی ذیل انجام میگیرد:

۸.۳. قضیه (ماکلورن*). اگر $r, s, n \in \mathbf{N}$ و $r < s \leqslant n$ آنگاه

$$p_s^{1/s} \leqslant p_r^{1/r},$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که aها دوبدو متساوی باشند.
برهان. کافی است ثابت کنیم که

$$p_{r+1}^{1/(r+1)} \leqslant p_r^{1/r}.$$

گوئیم، بنا بر ۸۰۲،

$$\prod_{k=1}^{r}(p_{k-1}p_{k+1})^k \leqslant \prod_{k=1}^{r} p_k^{2k},$$

و از آنجا، $p_{r+1}^r \leqslant p_r^{r+1}$. ▲

۹ § مسائل مختلفه

در مسائل آتیه حروف k، m، و n نمایش اعداد طبیعی و سایر حروف نمایش اعداد حقیقی نامنفی هستند مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

۱. اگر $n > 1$ آنگاه

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n) < (n+1)^n.$$

۲. اگر $n > 1$ آنگاه

$$n^n > 1 \cdot 3 \ldots (2n-1).$$

۳. همواره

$$(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz.$$

۴. اگر $n > 2$ آنگاه

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}.$$

۵. اگر $n > 1$ آنگاه

$$(n!)^3 < n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}; \qquad n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

۶. اگر $m > 1$ و $n > 1$ آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)^m}{n} > (n+1)^m.$$

۷. اگر $2 \leqslant x \leqslant 7$ — بزرگترین مقدار $(7-x)^4(2+x)^5$ چیست؟

۸. همواره

$$27(a^4+b^4+c^4) \geqslant (a+b+c)^4.$$

۹. از میان چهاروجهیهائی که سه وجه از آنها دو بدو بر هم عمود باشند، و حاصلجمع طول سه یالی که از نقطه‌ی تقاطع این وجوه میگذرد ثابت باشد، حجم کدام یک اعظم است؟

۱۰. همواره

$$a_1a_2^2a_3^3a_4^4 \leqslant \left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{10}\right)^{10}.$$

۱۱. اگر $n > 1$ آنگاه

$$1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdots \frac{1}{n^n} < \left[\frac{2}{n+1}\right]^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}; \qquad \text{(آ)}$$

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n < \left[\frac{2n+1}{3}\right]^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} \qquad (د)$$

۱۲. اگر $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ آنگاه

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}.$$

۱۳. همواره

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdots \sqrt[2^n]{2^n} \leqslant n+1.$$

۱۴. بازاء چه مقدار x اسمنمای $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$ بزرگترین مقدار خود را میگیرد، و این مقدار چیست؟

۱۵. اگر aها مثبت باشند و $n > 1$ آنگاه

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_3} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

۱۶. بازاء هر دو عدد مثبت a و b،

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a = b$.

۱۷. همواره

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \qquad (0 < x < y),$$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} > \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} \qquad (1 < x < y).$$

۱۸. اگر n عدد a، b، . . .، و l مثبت باشند

$$\left(\frac{a^2+b^2+\cdots+l^2}{a+b+\cdots+l}\right)^{a+b+\cdots+l} \geqslant a^a b^b \ldots l^l \geqslant \left(\frac{a+b+\cdots+l}{n}\right)^{a+b+\cdots+l}$$

۱۹. حاصلجمع سه عدد مثبت مساوی 6 است. مطلوبست

(آ) کمترین مقدار مجموع مربعات آنها.

(ب) کمترین مقدار مجموع مکعبات آنها.

۲۰. مجموع مربعات سه عدد مثبت 18 است. مطلوبست

(آ) کمترین مقدار مجموع مکعبات آنها.

(ب) کمترین مقدار مجموع آنها.

۲۱. همواره

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{6}c^2.$$

۲۲. همواره

$$\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2} + \cdots + \sqrt{x_ny_n} \leqslant \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}.$$

۲۳. همواره

$$\left(\sum_1^n a_ib_ic_id_i\right)^4 \leqslant \sum_1^n a_i^4 \sum_1^n b_i^4 \sum_1^n c_i^4 \sum_1^n d_i^4.$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی چیست؟

۲۴. اگر همواره $a_i > -1$ و aها یا همه منفی یا همه مثبت باشند آنگاه

$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^n a_i.$$

(در حالتی که aها با هم مساوی باشند نامساوی برنویی بدست میآید.)

۲۵. اگر A_n و G_n وسایط عددی و هندسی a_1، . . .، و a_n، و A_{n+1} و G_{n+1} وسایط عددی و هندسی a_1، . . .، a_n، و a_{n+1} باشند آنگاه

$$n(A_n - G_n) \leqslant (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}).$$

۲۶. اگر $p > 0$، $u > 0$، و $v > -1/p$ آنگاه

$$uv \leqslant \frac{u(u^p-1)}{p} + \left(\frac{1+pv}{1+p}\right)^{(1+p)/p}.$$

۲۷. اگر $u > 0$ و $v > 0$ آنگاه

$$uv \leqslant u \log u + e^{v-1}.$$

۲۸. اگر aها مثبت باشند، و g واسطه‌ی هندسی آنها باشد،

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant (1+g)^n.$$

۲۹. اگر aها و bها مثبت باشند و $p > 1$ یا $p < 0$ آنگاه

$$\sum_1^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}} \geqslant \left(\sum a_i\right)^p \Big/ \left(\sum b_i\right)^{p-1}.$$

۳۰. حاصلجمع شش حاصلضرب دو بدوی چهار عدد 24 است. مطلوبست

(آ) کمترین مقدار ممکن برای حاصلجمع آن چهار عدد.

(ب) بیشترین مقدار ممکن برای حاصلضرب آنها.

۳۱ (لویلید[1]). از میان هرمهای مثلث‌القاعده‌ای که ارتفاع، سطح قاعده، و محیط قاعده‌ی آنها یکسان باشد سطح جانبی کدام یک کمترین مقدار ممکن را دارد؟

مسئله را در مورد هرمهائی که قاعده‌ی آنها کثیرالاضلاعی nضلعی باشد تعمیم دهید.

(فرض کنید b_i یکی از اضلاع قاعده و p_i فاصله‌ی موقع ارتفاع هرم از b_i باشد.)

۳۲. aها و bها مثبت‌اند، و

$$m_1 = \min\{a_1, \dots, a_n\}, \qquad M_1 = \operatorname{Max}\{a_1, \dots, a_n\},$$
$$m_2 = \min\{b_1, \dots, b_n\}, \qquad M_2 = \operatorname{Max}\{b_1, \dots, b_n\}.$$

ثابت کنید که کسر

$$A = \frac{(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2)}{(a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2}$$

همواره بین 1 و عدد

$$\mu = 1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{M_1M_2/m_1m_2} - \sqrt{m_1m_2/M_1M_2}\right)^2$$

---

(۱) Lhuilier (۱۷۵۰ ـ ۱۸۴۰)، استاد ریاضیات آکادمی سلطنتی ژنو.

قرار دارد. در چه صورت $A = \mu$؛

۳۳. بنا بر آنکه $x > 0$، $n \in \mathbf{N}$، و $m = 2^n$ ثابت کنید که

(آ). رشته‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با ضوابط ذیل یکنواخت و متقارب به یک حد هستند؛

$$a_n = m(x^{1/m} - 1), \qquad b_n = m(1 - x^{1/m}).$$

(ب). اگر $x \neq 1$ آنگاه

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1,$$

$$2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) < \log x < 2(\sqrt{x} - 1)$$

(پ). $\lim_n (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ موجود و عددی حقیقی است. (این عدد را ثابت اویلر نامند، و به c یا γ نمایش میدهند.)

(ت). مقدار سلسله‌ی توافقی متناوب مساوی $\log 2$ است.

ملحقات

فصل ۶ ض

میدان اعداد مختلط

در این فصل مفهوم عدد را وسعت میدهیم، بدین طریق که دستگاه جدیدی از اعداد، موسوم به دستگاه اعداد مختلط، تعریف میکنیم که دستگاه اعداد حقیقی را، به معنائی که معلوم خواهد شد، در بر دارد. دستگاههای اعداد حقیقی و اعداد مختلط دستگاههای اساسی اعداد در آنالیز میباشند.

در دستگاه اعداد حقیقی، اعداد منفی جذر ندارند. این حکم معادل امتناع معادلهی $x^2 = a \ (a < 0)$ در این دستگاه میباشد، و بالاخص، معادلهی $x^2 + 1 = 0$ در این دستگاه ممتنع است. اما، چنانکه خواهد آمد، این معادله در دستگاه اعداد مختلط دارای دو جواب میباشد.[1]

پیش از اینکه به دستگاه اعداد مختلط بپردازیم، مقدمةً ملاحظاتی در باب یکی از دستگاههای مهم ریاضی، موسوم به میدان، میآوریم.

۱ § میدان

۱.۱. اصول موضوعه. در ۱۰۷ : ۴، دستگاه جبری مهم معروف به میدان را تعریف کردیم. برای تسهیل کار، یاد آوری میکنیم که دستگاه $(K; +, \cdot)$ را، که در آن K مجموعهای حد اقل دارای دو عضو است، و $+$ («عمل جمع») و «$\cdot$» («عمل ضرب») دو عمل دوتائی در آن میباشند یک میدان نامیم در صورتی که تابع اصول موضوعهی ذیل باشد:

(۱۰۱۰۱) دستگاه $(K; +)$ یک گروه آبلی است.

عضو خنثای این گروه را θ (موسوم به «صفر میدان») مینامیم.

(۱۰۱۰۲) دستگاه $(K - \{\theta\}, \cdot)$ یک گروه آبلی است.

عضو خنثای این گروه را e (موسوم به «واحد میدان») میخوانیم.

(۱۰۱۰۳) عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیعی است.

این اصول موضوعه همانند آنهائی هستند که تحت عنوان حم ۱ ـ حم ۱۱ در صفحهی ۱۵۶

---

(۱) تاریخچهی مختصری از اعداد مختلط در ۴.۴ آمده است.

در تعریف دستگاه اعداد حقیقی آمده‌اند، و چون در استخراج قضایای کلی مذکور در ۱ § فصل ۵، و در تعریف اعمال تفریق و تقسیم، فقط صور حم ۱ ـ حم ۱۱ مورد استناد بوده‌اند، چنانکه در ۱.۶.۱ : ۵ اشاره کردیم، آن قضایا و تعریفات در هر میدان برقرار میباشند.

۱.۱.۴. تبصره. بنا بر آنچه در ۲.۶.۳ فصل ۲ ض گفته شد، دو میدان $(K; +, \cdot)$ و $(L; \oplus, \odot)$ را ایزومورف خوانیم در صورتی که تناظری 1ـ1 مانند φ بین مجموعه‌های K و L موجود باشد که حافظ اعمال باشد، یعنی، بازاء هر a و b از K،

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b).$$

و نیز، در همان مقام مشروحاً توضیح دادیم که دستگاههای ایزومورف نماینده‌ی یک موجود ریاضی هستند، و در واقع، تفاوت چنین دو دستگاه در علامات میباشد. اگر دستگاهی از اصول موضوعه فقط یک دستگاه ریاضی را مشخص سازد ـ بدین معنی که هر دو دستگاه که در آن اصول موضوعه صدق میکنند ایزومورف باشند ـ آن اصول موضوعه را جازم گویند. بدین معنی است که میگوئیم اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی دستگاه اعداد حقیقی را مشخص میکنند. اینک واضح است اصول موضوعه‌ی میدان یک دستگاه ریاضی را مشخص نمیسازند؛ مثلاً، هر یک از دستگاههای $(\mathbf{R}; +, \cdot)$ و $(\mathbf{Q}; +, \cdot)$ یک میدان است، ولی این دو میدان ایزومورف نیستند. همچنین، اگر $m \neq n$ و $K = \{m, n\}$، و در K اعمال $+$ و $\cdot$ را با جداول

$+$	m	n
m	m	n
n	n	m

$\cdot$	m	n
m	m	m
n	m	n

تعریف کنیم به آسانی دیده میشود که دستگاه $(K; +, \cdot)$ یک میدان است، و این میدان دوعضوی با هیچ یک از میدانهای سابق‌الذکر ایزومورف نیست.

۱.۲. دستگاههای جزء یا دستگاهک‌ها. فرض کنیم $(G; \bigcirc)$ دستگاهی متشکل از مجموعه‌ی غیر خالی G و عمل دوتائی $\bigcirc$ در آن، و H مجموعه‌کی غیر خالی از G باشد. عمل $\bigcirc$، چنانکه میدانیم، تابعی است بر $G \times G$ بتوی G. در حالتی که مجموعه‌ی H نسبت به عمل $\bigcirc$ بسته باشد (۸.۲.۷ : ۳)، میتوان عمل $\bigcirc'$ را با ضابطه‌ی

$$a \bigcirc' b = a \bigcirc b \qquad (a, b \in H) \qquad (۱.۲.۱)$$

در H تعریف کرد. این عمل را عمل القائی دستگاه $(G; \bigcirc)$ به مجموعه‌ی H، و مجموعه‌ی H را با عملی که دستگاه $(G; \bigcirc)$ بدان القا میکند یک دستگاه جزء یا یک دستگاهک این دستگاه خوانیم. نظر به رابطه‌ی (۱.۲.۱)، عمل القائی $\bigcirc'$ را معمولاً به همان نام $\bigcirc$ میخوانند. تعمیم در مورد دستگاههای دارای چند عمل بدیهی است.

ممکن است دستگاهکی از یک دستگاه از جنس آن دستگاه نباشد. مثلاً، دستگاه $(\mathbf{I}; +)$ یک

گروه آبلی است، و حال آنکه دستگاه $(\mathbf{N}; +)$، که دستگاهکی از آن است، گروه نیست. بالاخص، اگر دستگاهکی از یک گروه (میدان) گروه (میدان) باشد آن را گروهک (میدانک) دستگاه اولیه نامیم. به عبارت صریحتر،

۱.۲.۲. تعریف. اگر G یک گروه و H مجموعکی غیر خالی از مجموعه‌ی G باشد آنگاه مجموعه‌ی H را با عملی که گروه G بدان القا میکند یک گروهک گروه G خوانیم در صورتی که H با این عمل یک گروه باشد.

۱.۲.۳. تعریف. اگر K یک میدان و H مجموعکی غیر خالی از مجموعه‌ی K باشد آنگاه مجموعه‌ی H را با اعمال جمع و ضربی که میدان K بدان القا میکند یک میدانک میدان K خوانیم در صورتی که مجموعه‌ی H با این اعمال یک میدان باشد.
مثلاً، گروه $(\mathbf{I}; +)$ گروهکی از گروه $(\mathbf{R}; +)$ است، و میدان $(\mathbf{Q}; +, \cdot)$ میدانکی از میدان $(\mathbf{R}; +, \cdot)$. همچنین، اگر $(G; \bigcirc)$ یک گروه و e عضو خنثای آن باشد، هر یک از دستگاههای $(G; \bigcirc)$ و $(\{e\}; \bigcirc)$ یک گروهک گروه $(G; \bigcirc)$ است.

فرض کنیم $(G; \bigcirc)$ یک گروه و H مجموعکی غیر خالی از G باشد. در بادی امر چنین به نظر میرسد که، برای تحقیق در اینکه دستگاه $(H; \bigcirc)$ گروهک گروه G هست یا نه، باید تحقیق کرد که H نسبت به عمل $\bigcirc$ بسته هست یا نه و، اگر بسته است، در اصول موضوعه‌ی گروه صدق میکند یا نه. اما، اندک تأملی نشان میدهد که این کار دراز ضرورت ندارد، بلکه

۱.۲.۴. قضیه. فرض کنیم $(G; \bigcirc)$ یک گروه[1] و H مجموعکی غیر خالی از مجموعه‌ی G باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی H با عمل $\bigcirc$ گروهک گروه G باشد آنست که نسبت به عمل $\bigcirc$ بسته باشد، و بعلاوه، بازاء هر a از H، a' (قرینه‌ی a در G) نیز متعلق به H باشد.
برهان. لزوم. فرض کنیم H مجموعکی غیر خالی از مجموعه‌ی G و دستگاه $(H; \bigcirc)$ گروهکی از گروه G باشد. بالنتیجه، مجموعه‌ی H نسبت به عمل $\bigcirc$ بسته است. بعلاوه، عضو خنثای گروه H همان عضو خنثای گروه G است، زیرا، اگر این اعضا را، بترتیب، e' و e بنامیم، در گروه H، $e' \bigcirc e' = e'$، و در گروه G، $e \bigcirc e' = e'$. پس، $e \bigcirc e' = e' \bigcirc e'$، و از آنجا، بنا بر قاعده‌ی اسقاط در گروه G، $e = e'$. حال فرض کنیم a عضو دلخواهی از H، a' قرینه‌ی آن در گروه G، و a_1 قرینه‌ی آن در گروه H باشد. پس، در گروه G،

---

(۱) اگر چه بحث مختصر ما در ۹ : ۳ منحصر به گروههای آبلی بوده است، قاعده‌ی اسقاط و یکتائی قرینه را به آسانی میتوان در هر گروه ثابت کرد.

$a \bigcirc a' = e$، و در گروه H، $a \bigcirc a_1 = e'$. بالنتیجه، بنا بر آنچه ثابت شد، $a \bigcirc a_1 = a \bigcirc a'$. پس، به قاعده‌ی اسقاط در G، $a_1 = a'$، و از آنجا، $a' \in H$.
کفایت. فرض کنیم $\varnothing \neq H \subseteq G$، و مجموعه‌ی H نسبت به عمل گروه $(G; \bigcirc)$ بسته باشد، و بعلاوه، بازاء هر a از H، اگر a' قرینه‌ی a در گروه G باشد آنگاه $a' \in H$. اولاً، دستگاه $(H; \bigcirc)$ شرکتپذیری را از گروه G «به ارث میبرد»، بدین معنی که، اگر $a, b, c \in H$ آنگاه $a, b, c \in G$، و لهذا، $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$. ثانیاً، دستگاه $(H; \bigcirc)$ عضو خنثا دارد. زیرا، فرض کنیم e عضو خنثای گروه G و a عضو دلخواهی از H باشد. بنا بر فرض، $a' \in H$، و لهذا، بنا بر فرض، $a \bigcirc a' \in H$. اما، در گروه G، $a \bigcirc a' = e$. پس، $e \in H$. بالنتیجه، اگر a عضو دلخواهی از H باشد، در G، و لهذا در H، رابطه‌ی $a \bigcirc e = e \bigcirc a = a$ برقرار است. پس، e عضو خنثای دستگاه H میباشد. ثالثاً، اینک واضح است که اگر a عضو دلخواهی از H باشد a' قرینه‌ی آن در دستگاه $(H; \bigcirc)$ نیز هست. پس، دستگاه H تابع اصول موضوعه‌ی گروه میباشد. ▲

۱.۲.۵. قضیه. در گروه $(G; \bigcirc)$، شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعک غیر خالی H از G با عمل $\bigcirc$ گروهک گروه G باشد آنست که، بازاء هر a و b از H، اگر b' قرینه‌ی b در G باشد آنگاه $a \bigcirc b' \in H$.

برهان. لزوم شرط بدیهی است. برای اثبات کفایت، فرض کنیم مجموعک غیر خالی H از G در شرط مذکور در قضیه صدق کند. اگر a عضو دلخواهی از H باشد، بنا بر فرض، $a \bigcirc a' \in H$. اما، اگر e عضو خنثای گروه G باشد، در گروه G، $a \bigcirc a' = e$. پس، $e \in H$. بالنتیجه، بازاء هر a از H، بنا بر فرض، $e \bigcirc a' \in H$، و از آنجا، $a' \in H$. بالاخره، اگر $a, b \in H$ آنگاه، بنا بر آنچه ثابت شد، $b' \in H$. پس، بنا بر فرض، $a \bigcirc (b')' \in H$، و از آنجا، $a \bigcirc b \in H$. پس، مجموعه‌ی H نسبت به عمل $\bigcirc$ بسته است، و بنا بر ۱.۲.۴، دستگاه H گروهک گروه G است. ▲

از قضیه‌ی فوق با توجه به اصول موضوعه‌ی میدان معلوم میشود که

۱.۲.۶. قضیه. فرض کنیم $(K; +, \cdot)$ یک میدان، θ صفر آن، و H مجموعکی از K و حد اقل دارای دو عضو باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی H با اعمال جمع و ضربی که میدان K بدان القا میکند میدانک میدان K باشد آنست که، در عین حال،

(آ) بازاء هر a و b از H، $a - b \in H$ («$-$» عمل تفریق میدان K است)؛

(ب) بازاء هر a و b از H که $b \neq \theta$، $ab^{-1} \in H$.

۱.۳. میدانهای مرتب. در فصل ۴، میدان اعداد حقیقی را میدانی مرتب خواندیم. مجموعه‌ی $\mathbf{R}$ مجموعکی ممتاز دارد، و آن مجموعه‌ی $\mathbf{R}^+$ است، که هر عدد حقیقی غیر از 0 یا متقابلش بدان تعلق دارد، و بعلاوه، حاصلجمع و حاصلضرب هر دو عضو آن نیز بدان تعلق دارند. بطور کلی،

۱۰۳۰۱. تعریف. میدان $(K; +, \cdot)$ را یک میدان مرتب خوانیم در صورتی که مجموعکی مانند P از K باشد که در اصول موضوعه‌ی ذیل صدق کند:

I. بازاء هر a از K همواره یکی و تنها یکی از روابط

$$a = \theta, \qquad a \in P, \qquad -a \in P$$

برقرار باشد؛

II. بازاء هر a و b از P، $a + b \in P$؛

III. بازاء هر a و b از P، $ab \in P$.

خواننده ملاحظه میکند که این اصول موضوعه با آنهائی که در باب میدان مرتب اعداد حقیقی آوردیم (حتۀ ۱ ـ حتۀ ۵، صفحه‌ی ۱۵۶) متفاوتند، ولی بـه آسانی میتوان معادل بـودن این دو دستگاه اصول موضوعـه را ثابت کرد، از این قـرار: در میدان مـرتب K، نسبت $<$ را چنین تعریف میکنیم:

$$< \; = \{(a, b) \mid b - a \in P\} \qquad (۱۰۳۰۲)$$

(متغیرهای فردی a، b، . . . مقید به K میباشند). بالنتیجه،

$$a < b \;\underline{\sqcap}\; b - a \in P. \qquad (۱۰۳۰۳)$$

اگـــر $a < b$ و $b < c$ آنـــگـــاه $b - a \in P$ و $c - b \in P$، و بـــنـــا بـــر II، $(b - a) + (c - b) = c - a \in P$. پس، بنا بر ۱۰۳۰۳، $a < c$. بـالنتیجه، نسبت $<$ متعدی است. به همین قیاس معلوم میشود که نسبت $<$ تابع اصل تثلیث است. اگر $a < b$ آنگاه $b - a \in P$. امـا $b - a = (b + c) - (a + c)$. پس $a + c < b + c$. بـالاخـره، فرض کنیم $a < b$ و $\theta < c$. پس، $b - a \in P$ و $c \in P$، و بنا بـر III، $c(b - a) \in P$، و این معادل $ac < bc$ است. پس، معلوم شد که اگر میدانـی بر طبق تـعـریف ۱۰۳۰۱ مرتب باشد بر طبق تعریف مذکور در مورد اعداد حقیقی نیز مرتب است. بالعکس، در میدان K، اگر نسبتی دوتائی مانند $<$ و واجد خواصی همانند آنچه در حتۀ ۲ ـ حتۀ ۵ آمده است موجود باشد، و مجموعـه‌ی $\{x \mid \theta < x\}$ را P بنامیم، بنا بر آنچه در باب اعـداد حقیقی دانسته شد، P در شرایط I ـ III صدق میکند.

بالاخره، اینک معلوم است که احکام عمومی مذکور در ۲ : ۵ در هر میدان مرتب برقرار میباشند.

۲ § دستگاه اعداد مختلط

اعـداد مختلط را بـه چند طـریق میتوان وارد بـحث کـرد. ساده‌تریـن آنها ـ کـه مـا آن را برگزیده‌ایم ـ تعریف کردن این اعداد است به عنوان ازواج مرتب اعداد حقیقی.

۲۰۱. تعریف. عدد مختلط یعنی زوج مرتبی از اعداد حقیقی. مجموعـه‌ی اعداد مختلط را $\mathbf{C}$ مینامیم.

برای احتراز از تکرار، حروف u، v، w، و z را برای نامیدن اعداد مختلط دلخواه، و حروف اوایل الفبای لاتینی را برای نامیدن اعداد حقیقی دلخـواه بکار میبریم، مگر آنکه خـلاف این

منظور تصریح یا صریحاً از سیاق مطلب استنباط شود.
در عدد مختلط $z = (a, b)$، مختص اول (a) را جزء حقیقی و مختص دوم (b) را جزء موهومی این عدد مختلط خوانیم. اجزای حقیقی و موهومی عدد مختلط z را، بترتیب، $\mathrm{Re}\, z$[1] و $\mathrm{Im}\, z$[2] مینامیم.
مثلاً، $\mathrm{Re}\,(0, -1) = 0$ و $\mathrm{Im}\,(0, -1) = -1$.
بنا بر تعریف فوق، تساوی دو عدد مختلط همان تساوی ازواج مرتب است: دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) فقط و فقط وقتی متساویند که $a = c \;\&\; b = d$. به عبارت دیگر،

$$z = w \;\underline{\overline{\bigcirc}}\; (\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w \;\&\; \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w). \tag{۲.۱.۱}$$

در مجموعه‌ی اعداد مختلط، دو عمل «جمع» ($+$) و «ضرب» ($\cdot$) را چنین تعریف میکنیم:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \tag{۲.۱.۲}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{۲.۱.۳}$$

توجه کنید که، در این روابط، علامات $+$ و $\cdot$ در طرف اول علامات اعمال بر اعداد مختلط میباشند، و علامات اعمال در طرف دوم مربوط به اعداد حقیقی‌اند.
بنا بر روابط فوق،

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b), \tag{۲.۱.۴}$$

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b). \tag{۲.۱.۵}$$

پس، عدد مختلط $(0, 0)$ عضو خنثای دستگاه $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ است نسبت به عمل جمع، و عدد مختلط $(1, 0)$ عضو خنثای آن دستگاه است نسبت به عمل ضرب. اولی را صفر دستگاه $\mathbf{C}$ و دومی را واحد آن خوانیم.

۲.۱.۶. تمرین
۱. به استناد تعریف دستگاه $(\mathbf{C}; +, \cdot)$، ثابت کنید که، بازاء هر دو عدد مختلط z و w، zw فقط و فقط وقتی «صفر» است که حد اقل یکی از z و w صفر باشد.

۲.۲. قضیه. دستگاه $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ یک میدان است.
برهان. اولاً، اعمال جمع و ضرب دستگاه شرکتپذیر و تعویضپذیرند، و عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیعپذیر میباشد. به عبارت دیگر، بازاء هر سه عدد مختلط u، v، و w،

$$u + v = v + u, \qquad uv = vu,$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \qquad u(vw) = (uv)w,$$

$$u(v + w) = uv + uw.$$

اثبات جملگی این احکام به وسیله‌ی محاسبه است. مثلاً، برای اثبات رابطه‌ی اخیر، گوئیم، بنا بر تعریف، هر یک از اعداد u و v و w زوج مرتبی است از اعداد حقیقی؛ مثلاً،

---

(۱) از حروف اوایل کلمه‌ی real [= حقیقی].
(۲) از حروف اوایل کلمه‌ی imaginary [= موهومی].

$$u = (a, b), \qquad v = (c, d), \qquad w = (e, f).$$

پس،

$$\begin{aligned} u(v + w) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] && \text{بنا بر ۲.۱.۲} \\ &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) && \text{بنا بر ۲.۱.۳} \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= uv + uw. \end{aligned}$$

ثانیاً، چنانکه قبلاً دیدیم، دستگاه $\mathbf{C}$ نسبت به اعمال جمع و ضرب عضو خنثا دارد.

ثالثاً، اگر (a, b) عدد مختلط دلخواهی باشد، بنا بر ۲.۱.۲،

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

پس، عدد مختلط $(-a, -b)$ متقابل عدد مختلط (a, b) است نسبت به عمل جمع.

رابعاً، هر عدد مختلط غیر از صفر دستگاه $\mathbf{C}$ نسبت به عمل ضرب دستگاه قرینه دارد. زیرا، فرض کنیم (a, b) عدد مختلط دلخواهی باشد و $(a, b) \neq (0, 0)$ (۱). گوئیم عدد مختلطی مانند (c, d) هست که

$$(a, b) \cdot (c, d) = (1, 0).$$

زیرا، بنا بر ۲.۱.۳ و تعریف تساوی اعداد مختلط، رابطه‌ی فوق معادل دستگاه

$$ac - bd = 1, \qquad ad + bc = 0$$

است. بنا بر (۱)، $a \neq 0 \vee b \neq 0$، و لهذا، $a^2 + b^2 \neq 0$. پس، دستگاه فوق دارای جوابهای

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

میباشد، و عدد مختلط $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ عکس عدد مختلط (a, b) است.

بنا بر آنچه ثابت شد، دستگاه $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ تابع اصول موضوعه‌ی میدان است. ▲

ضمناً، اگر، بر طبق معمول، متقابل عدد مختلط z را $-z$ و عکس آن را z^{-1} بنامیم، بنا بر آنچه ثابت شد،

$$-(a, b) = (-a, -b). \tag{۲.۲.۱}$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \quad ((a, b) \neq (0, 0)). \tag{۲.۲.۲}$$

بنا بر قضیه‌ی ۲.۲، دستگاه $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ واجد خواص ناشی از اصول موضوعه‌ی میدان میباشد، و بالاخص، قواعد اسقاط در آن برقرارند، یعنی، بازاء هر سه عدد مختلط u و v و w،

(آ) اگر $u + w = v + w$ آنگاه $u = v$؛

(ب) اگر $uw = vw$ و $w \neq (0, 0)$ آنگاه $u = v$.

همچنین، در دستگاه $\mathbf{C}$ میتوان اعمال تفریق و تقسیم را تعریف کرد:

$$u - v = u + (-v); \qquad (۲.۲.۳)$$

$$u/v = uv^{-1} \quad (v \neq (0, 0)). \qquad (۲.۲.۴)$$

بنا بر این تعریفات و روابط (۲.۲.۱) و (۲.۲.۲)،

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d); \qquad (۲.۲.۵)$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \quad ((c, d) \neq (0, 0)). \qquad (۲.۲.۶)$$

از قواعد اعمال، قواعد آتیه را یادآوری میکنیم:

$$u - v = -(v - u). \qquad (۲.۲.۷)$$

$$u(v - w) = uv - uw. \qquad (۲.۲.۸)$$

$$(-u) \cdot v = u \cdot (-v) = -(uv). \qquad (۲.۲.۹)$$

$$(-u) \cdot (-v) = uv. \qquad (۲.۲.۱۰)$$

$$u^{-1} = (1, 0)/u \qquad (u \neq (0, 0)). \qquad (۲.۲.۱۱)$$

۲.۳. ترتیبناپذیری میدان اعداد مختلط. میدان اعداد مختلط ترتیب‌پذیر نیست، زیرا، فرض کنیم P مجموعکی از $\mathbf{C}$ و واجد خواص سه‌گانه‌ی نظیر آنها که در ۱.۳.۱ مذکور شد باشد. چون $(0, 0) \neq (1, 0)$ و $(1, 0) = -(-1, 0)$، یکی و تنها یکی از اعداد مختلط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ تعلق به P دارد. اینک ثابت میکنیم که $(-1, 0) \notin P$ (*). زیرا، فرض کنیم $(-1, 0) \in P$ (۱)، و بالنتیجه، $(1, 0) \notin P$ (۲). بنا بر (۱) و سومین خاصیت P، $(-1, 0) \cdot (-1, 0) \in P$، و از آنجا، $(1, 0) \in P$، و این با (۲) متناقض است. پس، (*) برقرار میباشد. اینک ملاحظه میکنیم که $(0, 0) \neq (0, 1)$ و $(0, -1) = -(0, 1)$. پس، یا $(0, 1) \in P$ یا $(0, -1) \in P$. اما،

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0), \qquad (0, -1) \cdot (0, -1) = (-1, 0).$$

پس، بنا بر سومین خاصیت P، در هر حال، $(-1, 0) \in P$، و این با (*) متناقض است. خلاصه، فرض مرتب بودن میدان $\mathbf{C}$ منجر به تناقض میشود.

۲.۳.۱. تمرین

۱. نسبت $\{(z, w) \mid \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re} w\}$ در $\mathbf{C}$ منعکس و متعدی است.

۲. نسبت

$$\{(z, w) \mid \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} w \vee (\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w \;\&\; \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re} w)\}$$

مجموعه‌ی $\mathbf{C}$ را به ترتیب خطی مرتب میکند، یعنی، در این مجموعه منعکس، متعدی، قناس، و مرتبط است.

۲.۴. بستگی میدانهای اعداد مختلط و اعداد حقیقی. مجموعه‌ی اعداد مختلطی را که جزء موهومی آنها صفر است مورد نظر قرار میدهیم. فرض کنیم

$$H = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

بنا بر ۱.۲.۶، دستگاه $(H; +, \cdot)$ میدانک میدان $\mathbf{C}$ است. زیرا، اولاً، اگر $(a, 0)$ و $(b, 0)$ دو عضو دلخواه H باشند، بالبداهه،
$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \in H.$$
ثانیاً، فرض کنیم $(a, 0)$ و $(b, 0)$ دو عضو دلخواه H باشند، و $(b, 0) \neq (0, 0)$، و از آنجا، $b \neq 0$. با توجه به (۲.۲.۲)،
$$(a, 0) \cdot (b, 0)^{-1} = (a, 0) \cdot (1/b, 0) = (a/b, 0) \in H. \blacktriangle$$
میدان $(H; +, \cdot)$ با میدان $(\mathbf{R}; +, \cdot)$ ایزومورف است. زیرا، اگر تابع φ را بر H با ضابطه‌ی
$$\varphi((a, 0)) = a \tag{۱}$$
تعریف کنیم این تابع تناظری 1ـ1 بین H و $\mathbf{R}$ خواهد بود. چون
$$\varphi((a, 0) + (b, 0)) = \varphi((a + b, 0)) = a + b,$$
$$\varphi((a, 0) \cdot (b, 0)) = \varphi((ab, 0)) = ab,$$
بنا بر (۱)، تابع φ حافظ اعمال نیز هست.

نظر به ایزومورفی مذکور، دستگاههای $(H; +, \cdot)$ و $(\mathbf{R}; +, \cdot)$ معرف یک موجود ریاضی میباشند. بدین مناسبت، بین عدد مختلط $(a, 0)$ و عدد حقیقی a تمیز نمیگذاریم (به عبارت دیگر، هر عضو $\mathbf{C}$ را که به صورت $(a, 0)$ است از این مجموعه بیرون میریزیم، و به جای آن a را میآوریم). بدین گونه، دستگاه $(\mathbf{R}; +, \cdot)$ میدانکی از میدان $\mathbf{C}$ خواهد بود، و دستگاه اعداد مختلط توسیعی از میدان $(\mathbf{R}; +, \cdot)$.

بالاخص، به جای اعداد مختلط $(1, 0)$، $(-1, 0)$، و $(0, 0)$، بترتیب، 1، -1، و 0 مینویسیم.

در محاسبه با اعداد مختلط و حقیقی باید به تناظر مذکور توجه داشت؛ مثلاً،
$$a + (b, c) = (a, 0) + (b, c) = (a + b, c); \tag{۲.۴.۱}$$
$$a \cdot (b, c) = (a, 0) \cdot (b, c) = (ab, ac). \tag{۲.۴.۲}$$

۳ § صورت استانده‌ی اعداد مختلط

نظر به نقش مهم عدد $(0, 1)$، برای آن اسم خاصی میآوریم:

۳.۱. تعریف. عدد مختلط $(0, 1)$ (موسوم به واحد موهومی) را i مینامیم[۱].

۳.۱.۱. قضیه. $i^2 = -1$ (i^2 به معنی $i \cdot i$ است).

برهان.
$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \blacktriangle$$

---

(۱) به مناسبت کلمه‌ی imaginary [= موهومی]. ۴.۴ ملاحظه شود.

۳.۱.۲. قضیه.
$$(a, b) = a + bi. \qquad (0, b) = bi;$$
برهان.
$$bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b);$$
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi. \blacktriangle$$

۳.۱.۳. قضیه.
$$a + 0 \cdot i = a. \qquad 0 + bi = bi;$$
برهان.
$$0 + bi = (0, 0) + (0, b) = (0, b) = bi;$$
$$a + 0 \cdot i = (a, 0) = a. \blacktriangle$$

۳.۱.۴. قضیه. $(a = c \;\&\; b = d)$ ⇔ $a + bi = c + di$.
برهان. بنا بر ۳.۱.۲، $a + bi = c + di$ معادل $(a, b) = (c, d)$ است. ▲

۳.۱.۵. قضیه. هر عدد مختلط را به یک و تنها به یک طریق میتوان به صورت $a + bi$ نوشت که در آن $a, b \in \mathbf{R}$.
برهان. عدد مختلط دلخواه z زوج مرتبی است از اعداد حقیقی مانند (a, b). پس، بنا بر ۳.۱.۲، $z = a + bi$. بعلاوه، اگر در عین حال $z = c + di$ آنگاه، بنا بر ۳.۱.۴، $a = c$ و $b = d$. ▲

۳.۱.۶. تعریف. عبارت $a + bi$ یا $a + ib$ $(a, b \in \mathbf{R})$ را صورت استاندهی عدد مختلط $z = (a, b)$ نامیم. اگر $z = a + bi$ آنگاه، بنا بر ۲.۰۱،
$$\operatorname{Im} z = b. \qquad \operatorname{Re} z = a,$$
اگر جزء حقیقی یک عدد مختلط 0 باشد آن عدد را موهومی محض نامیم. بنا بر ۳.۱.۳، چنین عددی به صورت bi است.

۳.۲. تحویل حاصل اعمال به صورت استانده. به آسانی میتوان حاصل چهار عمل اصلی را بر اعداد مختلط به صورت استانده تحویل کرد.

۳.۲.۱. جمع و ضرب. در مورد جمع،
$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a, b) + (c, d)\\ &= (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i.\end{aligned}$$
تعمیم به استقراء آسان است. همچنین
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$-(a+bi) = -(a, b) = (-a, -b) = -a - bi.$$

مشابهت این اعمال با نتایج حاصل از جمع جبری اعداد مورد بحث به عنوان کثیرالجمله‌هائی بر حسب i بالعیان دیده میشود.

در مورد ضرب،

$$(a+bi)(c+di) = (a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

از طرف دیگر، اگر $a+bi$ و $c+di$ را به عنوان کثیرالجمله‌هائی بر حسب i در یکدیگر ضرب کنیم حاصل میشود،

$$ac+(ad+bc)i+bdi^2 \; [۳.۱.۱] = (ac-bd)+(ad+bc)i,$$

و این همان نتیجه سابق‌الذکر است.

۳.۲.۲. قوه. تعریف قوای صحیح اعداد مختلط به همان قیاس است که در اعداد حقیقی دانسته شد: اگر $z \in \mathbf{C}$ آنگاه z^n $(n \in \mathbf{I}_0)$ را به استقراء میتوان چنین تعریف کرد:

$$z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z \qquad (n \in \mathbf{I}_0);$$

و اگر $z \in \mathbf{C} - \{0\}$ و $n \in \mathbf{I}^-$ آنگاه

$$z^n = 1/z^{-n}.$$

قواعد محاسبه، با قید «بامعنی بودن»، همانهاست که در باب اعداد حقیقی دانسته شد، و اثبات آنها به متعلم محول میشود.

۳.۲.۳. فایده. از تأمل در توضیحات سابق‌الذکر معلوم میشود که در جمع و ضرب اعداد مختلطی به صورت استانده کافی است این اعداد را کثیرالجمله‌هائی از i تلقی کنیم، و اعمال را برطبق قواعد مربوط به کثیرالجمله‌ها بجا آوریم، و برای تفکیک اجزای حقیقی و موهومی حاصل عمل، رابطه‌ی $i^2 = -1$ را بکار بندیم.

۳.۲.۴. امثله

(آ). محاسبه‌ی قوای طبیعی i به وسیله‌ی رابطه‌ی $i^2 = -1$ است. مثلاً،

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i; \qquad i^4 = i^3 \cdot i = (-i)\cdot i = -i^2 = 1.$$

بطور کلی، اگر n عددی طبیعی و q خارج قسمت و r باقیمانده‌ی اصلی تقسیم آن بر 4 باشد آنگاه $n = 4q + r$، و

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}\cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = i^r \qquad (0 \leqslant r \leqslant 3).$$

چنانکه دیده میشود، قوای طبیعی i یکی از چهار مقدار 1، -1، i، و $-i$ را دارند.

(ب). چنانکه خواهد آمد، دو عدد مختلط $a+bi$ و $a-bi$ را مزدوج یکدیگر خوانند. حاصلضرب دو عدد مزدوج عددی حقیقی و نامنفی است، زیرا

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

(پ).

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$$

$$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$$

(ت). اگر $z = x + iy$ و $n \in \mathbf{N}$ آنگاه z^n را میتوان به صورت $X + iY$ نوشت، که در آن، X و Y کثیرالجمله‌هائی صحیح از x و y با ضرایب حقیقی‌اند.
اثبات به استقراء است و به متعلم محول میشود.

(ث). از مثال (ت) معلوم است که هر کثیرالجمله‌ی صحیح مانند $P(z)$ از متغیر مختلط z را، که در آن، $z = x + iy$، میتوان به صورت $X + iY$ نوشت، که در آن، X و Y کثیرالجمله‌هائی صحیح از x و y با ضرایب حقیقی میباشند.

۳.۲.۵. تقسیم. در مورد تقسیم عدد مختلط $a + bi$ بر عدد مختلط $c + di$ به فرض اینکه $c + di \neq 0$، بر طبق قواعد محاسبه با کسور در میدانها، مقسوم و مقسوم‌علیه را در مزدوج مقسوم‌علیه (ب : ۳.۲.۴) ضرب میکنیم:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i.$$

(۲.۲.۶ ملاحظه شود.)

۳.۲.۶. امثله

(آ). $1/i = i/i^2 = i/(-1) = -i$.

(ب).

$$\frac{(2+3i)^2}{2+i} = \frac{-5+12i}{2+i} = \frac{(-5+12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2}{5} + \frac{29}{5}i.$$

(پ). فرض کنیم $z = x + iy$. کسر $R(z)$ را یک کسر منطق خوانند در صورتی که صورت و مخرج آن کثیرالجمله‌های صحیحی از z باشند. چنین کسری را میتوان به صورت $X + iY$ درآورد، که در آن، X و Y کسوری منطق از x و y با ضرایب حقیقی هستند.
زیرا، بنا بر ث : ۳.۲.۴، صورت (مخرج) کسر $R(z)$ را میتوان به صورت $A + Bi$ $(C + Di)$ درآورد، که در آن، A و B (C و D) کثیرالجمله‌هائی صحیح از x و y با ضرایب حقیقی میباشند. پس،

$$R(z) = \frac{A+Bi}{C+Di} = \frac{AC+BD}{C^2+D^2} + \frac{BC-AD}{C^2+D^2}\, i.$$

۳.۲.۷. تمرین

۱. اعداد ذیل را به صورت استانده درآورید:

(آ) $(1-i)^3$. (ب) $(1+i)^3$.

(پ) $(3-4i)^2$. (ت) $[2a(1 \pm i)]^4$.

(ج) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}$ (د) $\dfrac{3+5i}{2-3i}$.

(ح) $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$. (چ) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

(خ) $\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi}-\dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}$.

۲. اعداد $\sum_{k=0}^{n} i^k$ و $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k i^k$ را بر حسب مقادیر مختلف n به صورت استانده درآورید.

۳. جوابهای دستگاه ذیل را به صورت استانده درآورید:

$$(1+i)z-iu=2+i, \qquad (2+i)z+(2-i)u=2i.$$

۴. بنا بر آنکه $z=x+iy$، احکام ۵ : ۳.۲.۴ و پ : ۳.۲.۶ را در مورد عبارات ذیل مستقیماً تحقیق کنید:

(ب) z^3. (آ) z^2.

(ت) $1/z$. (پ) z^5-z^3.

(ج) $\dfrac{az+b}{cz+d}$. (ث) $z+(1/z)$.

(چ) $\dfrac{z}{z^2+1}$.

۵. چه رابطه‌ای بین ضرایب دو کثیرالجمله‌ی حقیقی

$$P=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f,$$
$$P'=a'x^2+2b'xy+c'y^2+2d'x+2e'y+f'$$

برقرار باشد تا $P+iP'$ کثیرالجمله‌ای از $z=x+iy$ باشد؟

۶. فرض کنیم $A(z)$ و $B(z)$ دو کثیرالجمله‌ی صحیح از z با ضرایب حقیقی یا مختلط باشند، و $A(z)\neq 0$. در این صورت، یک و تنها یک دستگاه کثیرالجمله‌ی صحیح از z مانند $Q(z)$ و $R(z)$ هست که $R(z)$ صفر یا درجه‌اش از درجه‌ی $A(z)$ کمتر است، و

$$B(z)=A(z)Q(z)+R(z).$$

($Q(z)$ را خارج قسمت و $R(z)$ را باقیمانده‌ی تقسیم $B(z)$ بر $A(z)$ خوانند.)

راهنمائی در اثبات وجود: فرض کنیم m درجه‌ی $A(z)$ باشد. حکم بازاء هر $B(z)$ که درجه‌اش از m کمتر باشد واضح است. فرض کنیم $m\leqslant n$ و حکم بازاء هر $B_1(z)$ که درجه‌اش از n کمتر است برقرار باشد، و $B(z)$ کثیرالجمله‌ای از درجه‌ی n باشد.

۷. فرض کنیم

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0\neq 0,\ n\in\mathbf{N})$$

کثیرالجمله‌ای از z با ضرایب حقیقی یا مختلط، و ζ عدد مختلط مفروضی باشد. ثابت کنید که

(آ) باقیمانده‌ی تقسیم $P(z)$ بر $z-\zeta$ مساوی $P(\zeta)$ است.

(ب) اگر ζ ریشه‌ی $P(z)$ باشد (یعنی $P(\zeta)=0$) آنگاه $P(z)$ بر $z-\zeta$ قابل قسمت است.

۸. ثابت کنید که کثیرالجمله‌ی $P(z)$ مسئله‌ی قبل بیش از n ریشه ندارد.

۳.۳. جذر. بر خلاف میدان اعداد حقیقی، که در آن بعضی از اعداد جذر ندارند، در میدان اعداد مختلط، هر عدد مختلط مانند w جذر دارد، یعنی، عددی مانند z هست که $w = z^2$. (چنانکه خواهد آمد، هر عدد غیر از صفر دارای دو جذر است، که با یکدیگر متقابل‌اند). جذر w را به $\sqrt{w}$ نمایش میدهیم.

برای اثبات وجود جذر، فرض میکنیم $w = a + bi$، و میپردازیم به تحقیق در وجود عددی مانند $z = x + yi$ که در معادله‌ی

$$(x + yi)^2 = a + bi \tag{۱}$$

صدق کند. از بسط طرف اول معلوم میشود که معادله‌ی (۱) معادل دستگاه ذیل است:

$$x^2 - y^2 = a, \qquad 2xy = b, \tag{۲}$$

و از آنجا،

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{۳}$$

که در آن، طرف دوم جذر حسابی عدد نامنفی $a^2 + b^2$ است. اینک از (۲) و (۳) نتیجه میشود:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ y^2 = \dfrac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{cases} \tag{۴}$$

واضحست که، علامت a هرچه باشد، مقادیر واقع در طرف دوم این روابط نامنفی هستند. پس، مقادیر ممکن برای x و y منحصرند به

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ x_2 = -x_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y_2 = -y_1. \end{cases}$$

اینک، بر حسب اینکه w حقیقی باشد ($b = 0$) یا نه ($b \neq 0$)، دو حالت تشخیص میدهیم.

حالت اول: $b = 0$. در این حالت، اگر $a \geqslant 0$ آنگاه

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_2 = -\sqrt{a}, \qquad y_1 = y_2 = 0.$$

بالنتیجه،

$$z = \sqrt{w} = \pm\sqrt{a} \qquad (w = a \geqslant 0), \tag{۳.۳.۱}$$

که در آن، $\sqrt{a}$ رادیکالی حسابی است. بالاخص، اگر $w = 0$ آنگاه

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{0} = 0. \tag{۳.۳.۲}$$

اما، اگر $a < 0$ آنگاه

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad y_1 = \sqrt{-a}, \qquad y_2 = -\sqrt{-a},$$

و بالنتیجه،

$$z = \sqrt{w} = \pm\sqrt{-a}\,i \qquad (w = a < 0). \tag{۳.۳.۳}$$

حالت دوم: $b \neq 0$. در این صورت، با توجه به دومین معادلهٔ دستگاه (۲)، مقادیر x و y را باید چنان انتخاب کرد که xy با b متحدالعلامه باشد. پس، اگر b مثبت باشد مقادیر $x_1 + y_1 i$ و $-(x_1 + y_1 i)$ برای $x + yi$ حاصل میشود، و اگر b منفی باشد مقادیر $x_1 - y_1 i$ و $-(x_1 - y_1 i)$. بنا بر این، بطور کلی

$$(۳.۳.۴)\quad \sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \operatorname{sgn} b \cdot \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\, i\right) \qquad (b \neq 0).$$

۳.۳.۵. امثله

(آ). تعیین جذرهای -1 به حل معادلهٔ $(x+iy)^2 = -1$ باز میگردد. از اینجا (یا، بنا بر دستور ۳.۳.۳)،

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

(به همین مناسبت، گاه i را به معنی $\sqrt{-1}$ تعریف میکنند.)

(ب). اگر $z = i$ آنگاه $a = 0$ و $b = 1$. پس،

$$\sqrt{i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\, i\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

(پ). $\sqrt{-7-24i} = \pm(3-4i)$.

(ت). معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(۱)\qquad az^2 + 2bz + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

را، که در آن $a, b, c \in \mathbf{R}$، اختیار میکنیم. معادلهٔ (۱) معادل با معادلهٔ

$$(۲)\qquad \left(z + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\Delta}{a^2} \qquad (\Delta = b^2 - ac)$$

میباشد. اگر $\Delta > 0$ آنگاه، بنا بر ۳.۳.۱، دو جواب

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

برای معادله حاصل میشود؛ و اگر $\Delta = 0$، بنا بر ۳.۳.۲، معادلهٔ (۲) دارای یک جواب $(z = -b/a)$ است، که جواب مضاعف این معادله (یا معادلهٔ (۱)) محسوب میشود. بالاخره، اگر $\Delta < 0$ آنگاه (۲) معادل است با

$$\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{-\Delta}{a^2}$$

و، بنا بر ۳.۳.۳،

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}\, i}{a}.$$

از اینجا با توجه به مسئلهٔ ۸ : ۳.۲.۷ معلوم میشود که، در $\mathbf{C}$، معادلهٔ (۱) همواره دارای دو جواب است نه بیش.

۳.۳.۶. تبصره. چنانکه دیدیم، معادلهٔ $z^2 + 1 = 0$ در میدان اعداد مختلط دارای دو جواب $\pm i$ است. پس، ادعای مذکور در آغاز این فصل قبل از § ۱ مقرون به واقع میباشد، و بطور کلی، هر عدد، اعم از حقیقی یا مختلط، در میدان اعداد مختلط دو جذر (احیاناً متساوی) دارد. اینک این سؤال پیش میآید که آیا دستگاه اعداد مختلط در مورد ریشههای برتر از ریشهٔ دوم هم کافی است یا آنکه در مورد این ریشهها محتاج به توسیعهای دیگر دستگاه $\mathbf{R}$ هستیم. بطور کلی، مسئلهٔ تعیین ریشهٔ nم عدد a معادل حل معادلهٔ $z^n = a$ است. بعدها ثابت خواهیم کرد که هر معادلهٔ درجهٔ nم مانند

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

اعم از اینکه ضرایب آن اعداد حقیقی یا مختلط باشند، دارای n ریشه به صورت $x + iy$ است. بالنتیجه، دستگاه اعداد مختلط، نه فقط برای استخراج ریشههای اعداد حقیقی یا مختلط کافی است، بلکه جوابهای هیچ معادلهٔ جبری از $\mathbf{C}$ خارج نیستند.

۳.۳.۷. تبصره. به همان قیاس که در ۳.۳ گذشت، تعیین کعب عدد مختلط $w = a + bi$ به حل معادلهٔ

$$z^3 = (x + iy)^3 = a + bi$$

باز میگردد، که معادل دستگاه

$$x^3 - 3xy^2 = a, \qquad 3x^2y - y^3 = b \tag{۱}$$

است. عملاً، در حالت کلی، تعیین x و y از این دستگاه به حل معادلهای از درجهٔ سوم باز میگردد، که هنوز وارد بحث آن نشدهایم. فقط در بعضی حالات خاص میتوان دستگاه فوق را به معادلهای از درجهٔ پایینتر تحویل کرد. مثلاً، اگر $w = 1$ آنگاه $a = 1$ و $b = 0$. از اینجا سه دستگاه جواب

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1/2, \\ y = \sqrt{3}/2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1/2, \\ y = -\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

برای دستگاه (۱) حاصل میشود. پس، بنا بر مسئلهٔ ۸ : ۳.۲.۷، عدد 1 فقط و فقط سه کعب دارد، که عبارتند از

$$1, \qquad (-1 + \sqrt{3}\,i)/2, \qquad (-1 - \sqrt{3}\,i)/2.$$

اگر فرض کنیم

$$\omega = (-1 + \sqrt{3}\,i)/2,$$

به آسانی دیده میشود که

$$\omega^2 = (-1 - \sqrt{3}\,i)/2.$$

پس، کعبهای 1 عبارتند از

$$1, \qquad \omega, \qquad \omega^2.$$

بعدها طریق کلی استخراج ریشهٔ nم اعداد را، اعم از حقیقی یا مختلط، خواهیم آموخت.

۳.۳.۸. تمرین

۱. مطلوبست جذرهای هر یک از اعداد ذیل:

(آ) $-i.$ (ب) $-8i.$

(پ) $-5+12i.$ (ت) $1+i.$

(ث) $-11-60i.$ (ج) $1+4i\sqrt{3}.$

(چ) $46-14i\sqrt{3}.$ (ح) $\sqrt{-64}.$

(خ) $\sqrt{i}.$ (د) $a^2-1+2ai.$

۲. ثابت کنید که معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$Az^2+2Bz+C=0 \qquad (A\neq 0),$$

که در آن A، B، و C اعداد مختلط مفروضی هستند، همواره دو جواب (متمایز یا متساوی) دارد، که صورةً از همان دستور تعیین جوابها در صورتی که ضرایب اعداد حقیقی باشند بدست میآیند.

۳. جوابهای معادلات ذیل را به صورت استانده تعیین کنید:

(آ) $z^2+2iz-5=0.$

(ب) $z^2+(4-2iz)-i=0.$

(پ) $(1+i)z^2-(7+13i)z+2+60i=0.$

(ت) $z^2+2iz\sqrt{2}-2(1+i)=0.$

۴. ثابت کنید که

(آ) $\omega^2+\omega+1=0.$ (ب) $(1+\omega^2)^4=\omega.$

(پ) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4.$

(ت) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9.$

(ث) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

۵. ثابت کنید که هر عدد مختلط مانند $z=a+bi$ را میتوان به صورت $x+\omega y$ درآورد که در آن $x, y\in \mathbf{R}$؛ و اگر $z=0$ آنگاه $x=y=0$.

۶. عدد $1/z$ را به صورت مذکور در مسئله‌ی قبل تحویل کنید.

۷. مطلوبست استخراج کعبهای اعداد ذیل:

(آ) $i.$ (ب) $-i.$ (پ) $(1+i)/\sqrt{2}.$

۴§ ازدواج و هنگ

۴.۱. تعریف. مزدوج عدد مختلط $a+bi$ یعنی عدد $a-bi$. تبدیلی که $a+bi$ را به $a-bi$ مبدل میکند موسوم است به ازدواج (مختلط).

معمولاً، مزدوج یک عدد مختلط را با قرار دادن خطی افقی بر بالای نام آن عدد نمایش میدهند؛ مانند $\overline{a+bi}$ (مزدوج $a+bi$)، $\overline{z}$ (مزدوج z)، $\overline{z+w}$ (مزدوج $z+w$)، و $\overline{\overline{z}}$ (مزدوج $\overline{z}$).

چنانکه سابقاً دیدیم، حاصلضرب دو عدد مختلط مزدوج عددی حقیقی و نامنفی است:

$$(۴.۱.۱) \qquad (a+bi)\cdot\overline{a+bi} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2.$$

ذیلاً اهم احکام مربوط به مزدوج را میآوریم. جملگی این احکام نتایج بدیهی تعریفند، و اثباتشان به متعلم محول میشود:

$$(۴.۱.۲) \qquad \overline{\overline{z}} = z.$$

$$(۴.۱.۳) \qquad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}.$$

(حکم اخیر را به آسانی میتوان، بـه استقراء، در مورد هر تعداد متناهی از اعداد مختلط تعمیم داد.)

$$(۴.۱.۴) \qquad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}.$$

$$(۴.۱.۵) \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

(حکم اخیر را به آسانی میتوان، به استقراء، در مورد هر تعداد متناهی از اعداد مختلط تعمیم داد.)

$$(۴.۱.۶) \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

$$(۴.۱.۷) \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w} \qquad (w \neq 0).$$

$$(۴.۱.۸) \qquad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}).$$

$$(۴.۱.۹) \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}).$$

$$(۴.۱.10) \qquad z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}.$$

$$(۴.۱.۱۱) \qquad \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0.$$

۴.۲. فواید. اگر $z = x + iy$ و $n \in \mathbf{N}$، چنانکه سابقاً دیدیم، z^n را میتوان بـه صورت $X + iY$ نوشت، کـه در آن، X و Y کثیرالجملههای صحیحی از x و y بـا ضرایب حقیقی هستند. به آسانی معلوم میشود که، در این شرایط،

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n = X - iY.$$

پس، اگر A عددی حقیقی باشد، بنا بر ۴.۱.۵ و ۴.۱.10،

$$\overline{Az^n} = A\cdot\overline{z^n} = A(X-iY).$$

از اینجا، بنا بر ۴.۱.۳ و ۴.۱.۷، معلوم است که

۴.۲.۱. قضیه. فرض کنیم $z = x + iy$، و $R(z)$ کسری منطق بر حسب z و بـا ضرایب حقیقی باشد، و $X + iY$ نمایش آن به صورت مذکور در پ: ۳.۲.۶ باشد. در این صورت،

$$R(\overline{z}) = X - iY.$$

بالاخص، فرض کنیم $R(z)$ کثیرالجملهی صحیحی از z با ضرایب حقیقی باشد، و $z = x + iy$ یـک جواب آن بـاشد. در ایـن صـورت، $X = Y = 0$، و بـالنتیجـه،

$R(\overline{z}) = 0$. پس،

۴.۲.۲. قضیه. اگر

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

معادله‌ای با ضرایب حقیقی باشد مزدوج هر ریشه‌ی غیر حقیقی این معادله نیز ریشه‌ی آنست.

۴.۲.۳. تبصره. اگر A عددی حقیقی باشد مزدوج یکجمله‌ای $Az^n(\overline{z})^m$ عبارتست از

$$\overline{A z^n (\overline{z})^m} = A\, \overline{z^n}\, \overline{(\overline{z})^m} = A (\overline{z})^n z^m.$$

عبارت اخیر حاصل تعویض z و $\overline{z}$ است در عبارت اولیه. از اینجا با توجه به ۴.۱.۳ و ۴.۱.۷ معلوم میشود که اگر $R(z, \overline{z})$ کسری منطق بر حسب z و $\overline{z}$ با ضرایب حقیقی باشد مزدوج آن از تعویض z و $\overline{z}$ در آن حاصل میگردد. پس، بالاخص، اگر $R(z, \overline{z})$ بر حسب z و $\overline{z}$ متقارن باشد آنگاه

$$\overline{R(z, \overline{z})} = R(z, \overline{z}),$$

و لهذا، بنا بر ۴.۱.۱۰، مقادیر $R(z, \overline{z})$ حقیقی‌اند.

اگر $R(z, \overline{z})$ دارای ضرایب مختلط باشد، برای یافتن مزدوج آن باید، علاوه بر تعویض z و $\overline{z}$، ضرایب آن را نیز به مزدوجشان تبدیل کرد.

مثلاً، اگر $z = x + iy$ آنگاه

$$z + \overline{z} = 2x, \qquad (z + \overline{z})^2 = 4x^2, \qquad z\overline{z} = x^2 + y^2.$$

عبارت $z - \overline{z}$ بر حسب z و $\overline{z}$ متقارن نیست، و

$$z - \overline{z} = 2iy,$$

اما

$$(z - \overline{z})^2 = -4y^2$$

(ملاحظه کنید که طرف اول بر حسب z و $\overline{z}$ متقارن است.)

۴.۲.۴. تمرین

۱. مستقیماً به محاسبه تحقیق کنید که مقادیر کسر $z/(z^2+1)$ بازاء $z = x + iy$ و $z = x - iy$ مزدوج یکدیگرند.

۲. بدون محاسبه، چه اطلاعی در باب مقدار عبارات

$$(1 + ai)^4 + (1 - ai)^4, \qquad \frac{a + bi}{c + di} + \frac{a - bi}{c - di}$$

میتوانید بدهید؟ جواب خود را با محاسبه تحقیق کنید.

۳. مطلوبست محاسبه‌ی $(1+i)^n + (1-i)^n \;\; (n \in \mathbf{N})$.

۴. آیا اعداد مختلط ثابتی مانند u_1، u_2، u_3، و u_4 هست که بازاء هر عدد مختلط z،

$$\overline{z} = (u_1 z + u_2)/(u_3 z + u_4)?$$

۴.۳. هنگ. تعریف. هَنْگ یا قدر مطلق عدد مختلط z، که به $|z|$ نموده میشود، عبارتست از

$$|z| = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}. \qquad (۴.۳.۱)$$

توجه کنید که، در این رابطه، رادیکال یک رادیکال حسابی است، و بالنتیجه، همواره

$$|z| \geqslant 0. \qquad (۴.۳.۲)$$

بنا بر تعریف فوق،

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}. \qquad (۴.۳.۳)$$

اثبات خواص ساده و اساسی مندرج در قضیهٔ ذیل بر متعلم است:

۴.۳.۱. قضیه.

I. $|z|^2 = z\bar{z}$.

II. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.

III. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

IV. $-|z| \leqslant \text{Re } z \leqslant |z|$، و تساوی در طرف چپ (راست) فقط و فقط وقتی برقرار است که $z \leqslant 0$[1] ($z \geqslant 0$).

V. $|\text{Re } z| \leqslant |z|$.

VI. $|\text{Im } z| \leqslant |z|$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $\text{Re } z = 0$ و $\text{Im } z \geqslant 0$.

VII. اگر $z \neq 0$ و $|z|^2 = z^2$ آنگاه $z \in \mathbf{R}$، و بر حسب آنکه z مثبت یا منفی باشد، $|z| = z$ یا $z = -|z|$.

VIII. $|zw| = |z| \cdot |w|$.

بالنتیجه، به استقراء،

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|.$$

IX. اگر $n \in \mathbf{N}$ آنگاه $|z^n| = |z|^n$.

X. اگر $w \neq 0$ آنگاه $|z/w| = |z|/|w|$.

XI. $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re }(\bar{z}w)$.

(برای اثبات قسمت XI، قسمت I را بکار برید.)

۴.۳.۲. قضیه. بازاء هر دو عدد مختلط z و w،

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|,$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که دو عدد حقیقی نامنفی مانند α و β باشد که $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$ و $\alpha z = \beta w$.

---

(۱) چون نسبت $\leqslant$ در $\mathbf{C}$ معنی ندارد، رابطهٔ $z \leqslant 0$ خود حاکی از حقیقی بودن z است.

برهان. بنا بر XI : ۴.۳.۱،

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}\,(z\bar{w})\ [۴.۳.۱ : \mathrm{IV}] \\ &\leqslant |z|^2+|w|^2+2|z\bar{w}|\ [۴.۳.۱ : \mathrm{II}] \\ &= |z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|w| \\ &= (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

پس، نامساوی حکم برقرار است. بنا بر روابط فوق، شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آنست که $\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$، و این، بنا بر IV : ۴.۳.۱، فقط و فقط وقتی برقرار است که $z\bar{w} \geqslant 0$. حال اگر $z = 0$ آنگاه $1\cdot z = 0\cdot w$، و اگر $w = 0$ آنگاه $0\cdot z = 1\cdot w$. اگر $z \neq 0$ و $w \neq 0$ آنگاه $\beta = z\bar{w} > 0$. فرض کنیم $\alpha = |w|^2 (>0)$. در این صورت،

$$\beta w = z\bar{w}w = z|w|^2 = \alpha z.$$

بالعکس، فرض کنیم $\alpha \geqslant 0$، $\beta \geqslant 0$، $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$، و $\alpha z = \beta w$. اگر $\alpha \neq 0$ آنگاه $z = \beta w/\alpha$، و

$$z\bar{w} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot w\bar{w} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot|w|^2 \geqslant 0,$$

و هکذا در صورتی که $\beta \neq 0$. ▲

۴.۳.۳. قضیه. بازاء هر دو عدد مختلط z و w،

$$|z-w| \geqslant ||z|-|w||,$$

و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی مانند قضیه‌ی قبل است.

برهان. بنا بر قضیه‌ی قبل،

$$\begin{aligned} |z| &= |(z-w)+w| \leqslant |z-w|+|w|, \\ |w| &= |(w-z)+z| \leqslant |z-w|+|z|. \end{aligned}$$

پس،

$$-|z-w| \leqslant |z|-|w| \leqslant |z-w|.$$

از اینجا نامساوی مطلوب بدست می‌آید.

اینک به شرط برقراری تساوی میپردازیم. برای اثبات لزوم، گوئیم اگر در نامساوی حکم قضیه تساوی برقرار باشد آنگاه

$$(۱)\quad |z|-|w| = -|z-w| \qquad \text{یا} \qquad (۲)\quad |z|-|w| = |z-w|.$$

در حالت اول،

$$|(w-z)+z| = |w| = |z|+|z-w|.$$

پس، بنا بر قضیه‌ی قبل، دو عدد نامنفی مانند α' و β' هست که $\alpha' \neq 0 \vee \beta' \neq 0$ و $\beta'(w-z) = \alpha' z$، و از آنجا، $\beta' w = (\alpha'+\beta')z$. اگر فرض کنیم $\alpha = \alpha'+\beta'$ و $\beta = \beta'$ شرط مذکور برقرار خواهد بود. اثبات در حالت (۲) به همین قیاس است. برای اثبات کفایت، فرض کنیم

$$\alpha \geqslant 0, \qquad \beta \geqslant 0, \qquad \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0, \qquad \alpha z = \beta w.$$

اگر $\alpha = 0$ آنگاه $w = 0$، و اگر $\beta = 0$ آنگاه $z = 0$، و در این حالات بالبداهه تساوی برقرار است. اگر $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ آنگاه $\lambda = \alpha/\beta > 0$ و $w = \lambda z$. پس،

$$||z| - |w|| = ||z| - \lambda|z|| = |1 - \lambda| \cdot |z| = |z - \lambda z| = |z - w|. \blacktriangle$$

قضیه‌ی ۴.۳.۲ را میتوان به صورت ذیل تعمیم داد:

۴.۳.۴. قضیه. بازاء هر عدد طبیعی n،

$$(*) \quad |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که نسبت هر دو جمله‌ی ناصفر از z_1، ... و z_n مثبت باشد.

برهان. اثبات نامساوی بر متعلم است. برای اتمام برهان، اولاً، فرض کنیم در $(*)$ تساوی برقرار باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
&|z_1| + \cdots + |z_i| + \cdots + |z_j| + \cdots + |z_n| \\
&\quad = |(z_i + z_j) + z_1 + \cdots + z_{i-1} + z_{i+1} + \cdots + z_{j-1} \\
&\qquad\qquad + z_{j+1} + \cdots + z_n| \\
&\quad \leqslant |z_i + z_j| + |z_1| + \cdots + |z_{i-1}| + |z_{i+1}| + \cdots + \\
&\qquad\qquad |z_{j-1}| + |z_{j+1}| + \cdots + |z_n| \\
&\quad \leqslant |z_1| + \cdots + |z_i| + \cdots + |z_j| + \cdots + |z_n|.
\end{aligned}$$

پس، $|z_i + z_j| = |z_i| + |z_j|$. بالنتیجه، بنا بر ۴.۳.۲، دو عدد نامنفی مانند α و β هست که حد اقل یکی از آنها ناصفر است، و $\alpha z_i = \beta z_j$. حال اگر $z_i \neq 0$ و $z_j \neq 0$ آنگاه $\alpha > 0$ و $\beta > 0$، و $z_i/z_j = \beta/\alpha > 0$.

ثانیاً، و بالعکس، فرض کنیم نسبت هر دو جمله‌ی ناصفر از zها مثبت باشد. اگر همه‌ی zها صفر باشند بالبداهه در $(*)$ تساوی برقرار است. اما، اگر، مثلاً $z_i \neq 0$، آنگاه

$$|z_1 + \cdots + z_i + \cdots + z_n| = |z_i| \cdot \left|\frac{z_1}{z_i} + \cdots + \frac{z_{i-1}}{z_i} + 1 + \frac{z_{i+1}}{z_i} + \cdots + \frac{z_n}{z_i}\right|.$$

پس، چون کسور واقع در «| |» طرف دوم مثبت یا صفرند،

$$\begin{aligned}
|z_1 + \cdots + z_n| &= |z_i| \cdot \left(\frac{z_1}{z_i} + \cdots + \frac{z_{i-1}}{z_i} + 1 + \frac{z_{i+1}}{z_i} + \cdots + \frac{z_n}{z_i}\right) \\
&= |z_i| \cdot \left(\frac{|z_1|}{|z_i|} + \cdots + \frac{|z_i|}{|z_i|} + \cdots + \frac{|z_n|}{|z_i|}\right) \\
&= |z_1| + \cdots + |z_i| + \cdots + |z_n|. \blacktriangle
\end{aligned}$$

۴.۳.۵. تمرین

۱. ثابت کنید که $|z| \geqslant (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)/\sqrt{2}$.

۲. ثابت کنید که

$$(\text{آ})\qquad |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w});$$

$$(\text{ب})\qquad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

۳. معادلهٔ $|z| - z = 1 + 2i$ را حل کنید.

۴. عدد z را چنان تعیین کنید که سه عدد z، $1/z$، و $z - 1$ دارای یک هنگ باشند.

۵. بازاء هر دو عدد مختلط z و w،

$$|z+w| \geqslant ||z| - |w||.$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی چیست؟

۶. اگر $|u+v+w| = |u| + |v| + |w|$ و $u \neq 0$، بدون استعانت از قضیهٔ ۴.۳.۴ ثابت کنید که دو عدد نامنفی مانند r و s هست که $v = ru$ و $w = su$.

۷. عدد z را یِکْهَنْگ نامیم در صورتی که هنگ آن مساوی 1 باشد. ثابت کنید که

(آ) اعداد $z/\bar{z}$ $(z \neq 0)$ و $(1+ai)/(1-ai)$ یکهنگ هستند.

(ب) مجموعهٔ اعداد یکهنگ با عمل ضرب یک گروه است.

۸. هر عدد یکهنگ غیر از -1 را میتوان به صورت $(1+ai)/(1-ai)$ درآورد.

۴.۴. ملاحظات تاریخی در باب اعداد مختلط[۱]. ادعای «امتناع استخراج جذر از اعداد منفی» و «بیمعنی بودن جذر اعداد منفی» نسبةً قدیمی است، و سابقاً، هر گاه حل مسئلهای منجر به استخراج جذر یک عدد منفی میشد مسئله را «ممتنع» و «مُحال» میشمردند. کاردان* (۱۵۰۱ ـ ۱۵۷۶)، ریاضیدان ایتالیائی، نخستین کسی است که جذر عددی منفی را در محاسبه بکار برده، و در حل مسئلهٔ تقسیم عدد 10 به دو جزء که حاصلضرب آنها 40 باشد، اعداد مطلوب را $5 + \sqrt{-15}$ و $5 - \sqrt{-15}$ یافته، و نتیجه را با ضرب کردن این اعداد در یکدیگر امتحان کرده است. پس از وی، ریاضیدان ایتالیائی دیگری به نام بومبلی[۲]، در حل معادلهٔ

$$(۱)\qquad x^3 - 15x - 4 = 0$$

جواب معادله را بر طبق دستور معروف به دستور کاردان به صورت

(۱) اطلاعات تاریخی آتیه عمدةً مستخرج است از جلد دوم کتاب تاریخ ریاضیات، از سمیث، و جلد اول کتاب طرق طبیعی و مبانی ریاضیات، از کوگبتلیانتز. نام و نشان اصلی کتابها این است:

Smith, D. E., *History of Mathematics*, Vol II, New york (Ginn and Company), 1925.

Kogbetliantz, E. G., *Voies Naturelles et Bases des Mathématiques*, Tome I, Paris (Gauthier-Villars), 1959.

(۲) Bombelli

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \qquad (۲)$$

بدست آورده است (اثر بومبلی در ۱۵۷۲ انتشار یافت). از طرف دیگر، چنانکه به امتحان معلوم میشود، معادلهٔ (۱) دارای جواب 4 است. بومبلی، برای اینکه این جواب را از صورت «بیمعنی» (۲) بدست آورد، به استخراج کعب اعداد $2+\sqrt{-121}$ و $2-\sqrt{-121}$ پرداخته، و به محاسبه معلوم کرده است که اولی مکعب $2+\sqrt{-1}$ و دومی مکعب $2-\sqrt{-1}$ است، که حاصلجمع آنها مساوی 4 میباشد. کار بومبلی فواید توجه به جذر اعداد منفی و محاسبه با آنها را آشکار ساخت، ولی وی توجه نیافت که این امر متضمن توسیع مفهوم عدد است، و علامت $\sqrt{-a}$ $(a>0)$ را ــ در مقابل اعداد مثبت و منفی، که به زعم وی وجود حقیقی داشتند ــ «عدد موهومی» خواند. معذلک، محاسبه با این گونه «مقادیر موهومی» شدیداً مورد انتقاد معاصرین وی و آیندگان واقع شد، و حتی لایبنیتز (۱۶۴۶ ــ ۱۷۱۶)، که خود مقادیر موهومی را بکار برده، و در ۱۶۷۶ رابطهٔ

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = 6$$

را، و در ۱۷۰۲ تساوی $x^4 + a^4$ را با حاصلضرب

$$(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})$$

ثابت کرده است، در باب این اعداد میگوید: ــ «اعداد موهومی نوعی موجود ذوحیاتین بین وجود و عدم هستند. . .».

ژیرار[۱] (۱۵۹۵ ــ ۱۶۳۲)، برای اینکه حکم مربوط به عدهٔ ریشههای معادلات جبری درست در آید، بالضروره قائل به ریشههای مختلط گردید. در ۱۷۰۲، یوهان برنوییٔ* اعداد مختلط را وارد آنالیز کرد. از نخستین کسانی که اعداد موهومی را بکار برند باید مواوز* و اویلر* را نام برد. اویلر علامت i را برای $\sqrt{-1}$ معمول ساخت (۱۷۴۸)، و فرمول مشهور

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

که بعدها آن را خواهید شناخت، به نام اوست. معذلک، همو در کتاب جبر خود، که در ۱۷۷۰ انتشار یافت، میگوید: ــ «هر عبارتی از قبیل $\sqrt{-1}$، $\sqrt{-2}$، . . . نه هیچ است، نه بزرگتر از هیچ، نه کوچکتر از هیچ، و بنا بر این، این گونه عبارات بالضروره موهومی و غیر ممکن‌اند».

معذلک، اعداد موهومی متزایداً در ریاضیات بکار گرفته شدند، و راه تکامل پیمودند. بیشتر ریاضیدانهای قرون ۱۷م و ۱۸م عبارت $a+b\sqrt{-1}$ را «مقدار موهومی» میخواندند. گاوس*، که نخستین تقریر منظم اعداد مختلط از اوست، در ۱۸۳۲ مطلوب دانست که اعداد $b\sqrt{-1}$ و $a+b\sqrt{-1}$ به یک نام خوانده نشوند، و اصطلاح «عدد مختلط» را برای دومی وضع کرد. اصطلاح «مزدوج» از کوشیٔ* است، و همو $\sqrt{a^2+b^2}$ را «هنگ» عدد $a+bi$ نام نهاد. وایرشتراس*، به جای هنگ، اصطلاح «قدر مطلق» را بکار میبرد، و

---

(۱) Albert Girard.

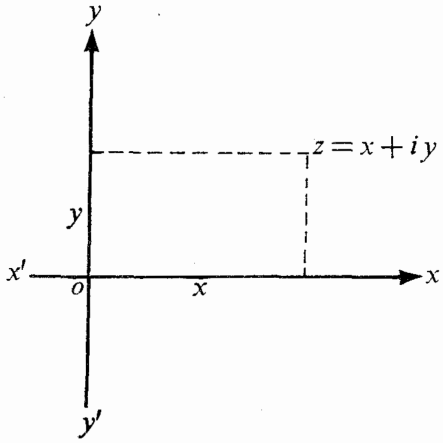
قدر مطلق $a+bi$ را به $|a+bi|$ نمایش داد.

نمایش هندسی اعداد مختلط به صورت کنونی، که در ۵ § خواهد آمد، اساساً از یک نفر نقشه‌بردار نروژی به نام کاسپار وسل[۱] است (۱۷۹۷)، اگرچه آن را به آرگان[۲] و گاوس نسبت داده‌اند، و نام «نمودار آرگان» برای آن رایج میباشد.

چنانکه ملاحظه شد، ریاضیدانهای گذشته به اعداد موهومی با سوءظن مینگریستند، و افکاری سقیم در باره‌ی آنها داشتند، و از اینکه این اشیاء را به نام عدد بخوانند اکراه و بلکه تحاشی داشتند، و به همین جهت، این موجودات ریاضی را به صفت «موهومی» متصف کردند، و در مقابل، اعدادی را که قائل به وجود واقعی برای آنها بودند «اعداد حقیقی» خواندند. حقیقت این است که همه‌ی اعداد مخلوق ذهن آدمی هستند. عدد i یا $\sqrt{-1}$ نه مرموز است نه موهومی، و از جنبه‌ی منطقی صرف، بین «عددی» که در معادله‌ی $x^2-2=0$ صدق کند با «عددی» که در معادله‌ی $x^2+1=0$ صدق کند تفاوتی نیست. اهمیت و فواید توسیع مفهوم عدد با در کار آوردن اعداد مختلط در ریاضیات محض و کاربسته از حساب بیرون است.

۵ § نمایش هندسی اعداد مختلط

۵.۱. نمودار آرگان. چون مجموعه‌ی $\mathbf{C}$ همان $\mathbf{R}^2$ یا $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (صفحه‌ی اقلیدسی) است، میتوان نمایش هندسی $\mathbf{R}^2$ را برای نمایش دادن اعداد مختلط بکار برد. در صفحه‌ی دو محور متعامد $x'x$ و $y'y$، عدد مختلط $z=x+iy$ را با نقطه‌ی (x,y) به مختصات x و y نمایش میدهیم (شکل ۷۷). نقطه‌ی نمایش عدد z را نگار این عدد میخوانند، و اغلب آن را



شکل ۷۷

---

(۱) Caspar Wessel

(۲) ژان روبر آرگان (Jean Robert Argand)، ۱۷۶۸ ــ ۱۸۲۲، ریاضیدان فرانسوی.

به همان حرف z نمایش میدهند. در این نمایش، اعـداد حقیقی با نقاط محور طول و اعداد موهومی محض با نقاط محور عرض نمایش داده میشوند. بدین مناسبت، محور طول را محور حقیقی و محور عرض را محور موهومی نامند.

شکل حاصل از نمایش اعداد مختلط به طریق مذکور بـه نمودار آرگان[1] موسوم است. صفحه‌ی دو محور حقیقی و مختلط را صفحه‌ی مختلط یا صفحه‌ی گاوسی (به نام گاوس*) میخوانند، و این صفحه را صفحه‌ی (مختلطِ) z یا صفحه‌ی $z = x + iy$ نیز مینامند.

۵.۲. بعضی از فواید نمایش هندسی اعداد مختلط. فواید عمده‌ی نمایش هندسی اعداد مختلط ناشی از نمایش مثلثاتی این اعداد است که، پس از آنکه توابع مثلثاتی را دقیقاً شناختیم، خواهد آمد. در این مقام به بعضی فواید ابتدائی اکتفا میکنیم.

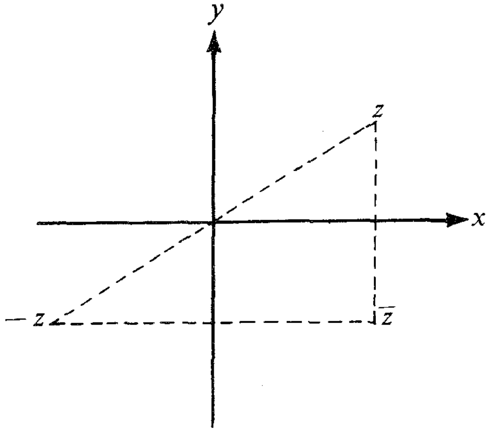
اگر r فاصله‌ی نقطه‌ی $z = x + iy$ از مبدأ مختصات باشد،

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \qquad (۵.۲.۱)$$

بطور کلی، اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط باشند فاصله‌ی هندسی نقاط z_1 و z_2 عبارتست از

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|. \qquad (۵.۲.۲)$$

اگر z نگار عدد مختلط z باشد اعداد $-z$ و $\bar{z}$، بترتیب، با قرینه‌های نقطـه‌ی z نسبت به مبدأ و به محور حقیقی نمایش داده میشوند (شکل ۷۸).



شکل ۷۸

جمع اعداد مختلط در نمایش هندسی صورتی جالب دارد. اگر

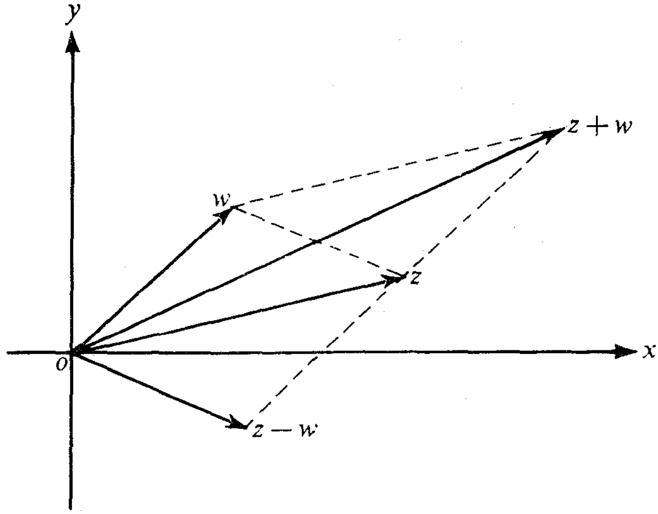
$$z = a + bi, \qquad w = c + di$$

(۱) ۴.۴ (صفحه‌ی ۸۴۱) ملاحظه شود.

آنگاه a و b مؤلفه‌های حامل $\overrightarrow{oz}$ و c و d مؤلفه‌های حامل $\overrightarrow{ow}$ نسبت بـه دو محور ox و oy خواهند بود، و از رابطه‌ی

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

معلومست که نگار عدد $z + w$ منتها الیه منتجه‌ی دو حـامل $\overrightarrow{oz}$ و $\overrightarrow{ow}$ میباشد (شکل ۷۹). بـه همین قیاس معلوم میشود که نگار عدد $z - w$ منتها الیه حاملی است که از o همسنگ حامل $\overrightarrow{wz}$ رسم شود (شکل ۷۹).



شکل ۷۹

از نمایش هندسی فوق، بنا بر خواص مثلث، معلومست که

$$||z| - |w|| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|,$$

و اگر $z \neq 0$ و $w \neq 0$ آنگاه، در نامساوی دوم، تساوی فقـط و فقط وقتی برقرار میشود کـه حاملهای $\overrightarrow{oz}$ و $\overrightarrow{ow}$ دارای یـک جهت و یک امتداد بـاشند، یعنـی، بازاء عـدد مثبتی مـانند λ، $w = \lambda z$.

۵.۲.۳. فوایدی در هندسه‌ی تحلیلی. معادله‌ی بعضی از مکانهای هندسی به وسیله‌ی اعداد مختلط به صورتهائی ساده در میآیند. مثلاً، دایره‌ای به مرکز ζ و شعاع r مکـان هندسی نقاطی است مانند z که فاصله‌اش از ζ مساوی r باشد، یعنی

$$|z - \zeta| = r, \tag{۱}$$

و این معادله‌ی دایره‌ی مذکور است، و آن را به صورت

$$(z - \zeta)(\overline{z} - \overline{\zeta}) = r^2 \tag{۲}$$

نیز میتوان نوشت.

بالعکس، مجموعه‌ی نگارهای اعداد مختلطی که در معادله‌ی معینی صدق کنند معمولاً یک خط

منحنی است، و این معادله معادلهی آن منحنی میباشد. مثلاً، نمایش مجموعهی $\{z \mid |z-\zeta|=r\}$ همان دایرهی سابقالذکر است.

به عنوان مثال دیگر، خط مستقیم را اختیار میکنیم. معادلهی چنین خطی به صورت

$$ax+by+c=0 \qquad (a\neq 0 \vee b\neq 0) \tag{۳}$$

میباشد. اگر نقطهی (x, y) را نگار عدد مختلط $z=x+iy$ بگیریم، به وسیلهی ۴.۱.۸ و ۴.۱.۹، معادلهی فوق به صورت

$$Az-\overline{A}\overline{z}+C=0 \qquad (A\neq 0) \tag{۴}$$

در میآید، که در آن، A عددی مختلط و C یک عدد موهومی محض است. بالعکس، به آسانی دیده میشود که نمایش مجموعهی صدق گزارهنمای (۴) با شرایط مذکور خط مستقیم است. پس، معادلهی (۴) با شرایط مذکور معادلهی کلی خط مستقیم میباشد. اگر معادلهی خط به صورت پارامتری

$$x=a+pt, \qquad y=b+qt \qquad (p\neq 0 \vee q\neq 0) \tag{۵}$$

در دست باشد آنگاه

$$z=x+iy=(a+bi)+(p+qi)t,$$

و این معادله به صورت

$$z=A+Bt \qquad (B\neq 0, t\in \mathbf{R}) \tag{۶}$$

است، که در آن A و B دو عدد مختلطاند. بالعکس، معادلهی (۶) با شرایط مذکور معادلهی یک خط مستقیم میباشد. زیرا، اگر $A=a+bi$، $B=c+di$، و $B\neq 0$، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهی $z=x+iy$ متعلق به مجموعهی صدق گزارهنمای (۶) باشد آنست که

$$x+iy=(a+bi)+(c+di)t,$$

و از آنجا، $x=a+ct$، $y=b+dt$، و شرط $c\neq 0 \vee d\neq 0$ بنا بر فرض $B\neq 0$ برقرار میباشد.

خط مستقیم (۶) بر نقطهی A (نگار عدد A)، که نظیر مقدار 0 از پارامتر t است، و نیز بر نقطهی $A+B$ میگذرد. شرط لازم و کافی برای اینکه این خط با خط

$$z=A'+B't \qquad (B'\neq 0)$$

منطبق باشد آنست که، بازاء مقادیری مانند t_1 و t_2 از پارامتر،

$$A=A'+B't_1, \qquad A+B=A'+B't_2.$$

و این دستگاه معادل دستگاه

$$A-A'=B\cdot\frac{t_1}{t_2-t_1}, \qquad B'=B\cdot\frac{1}{t_2-t_1}.$$

است، که به موجب آن، $A-A'$ و B' مضارب حقیقی عدد B میباشند.

۵.۲.۴. تمرین

۰۱ u، v، و w نگارهای سه عدد مختلط u، v، و w و رؤوس مثلثی میباشند. ثابت کنید که

(آ) محل تلاقی میانه‌های مثلث نگار عدد $(u+v+w)/3$ است.
(ب) مرکز دایره‌ی محیطی مثلث مذکور (z) با معادلات ذیل مشخص میشود:

$$|z-u| = |z-v| = |z-w|.$$

۲. نگارهای کعبهای 1 رؤوس مثلثی منتظم و محاط در دایره‌ی $|z| = 1$ میباشند.
۳. اگر نقطه‌ی z قطعه خط z_1z_2 را به نسبت r/s تقسیم کند آنگاه

$$z = \frac{s}{r+s} \cdot z_1 + \frac{r}{r+s} \cdot z_2.$$

۴. اگر نقاط u، v، و w بر یک خط مستقیم واقع باشند سه عدد حقیقی مانند a، b، و c هست که حد اقل یکی از آنها ناصفر است، و

$$au + bv + cw = 0.$$

۵. مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط

$$z = A + Bt, \qquad z = A' + B't$$

متوازی باشند.
۶. مطلوبست نمایش مجموعه‌ی صدق هر یک از گزاره‌نماهای ذیل

(آ) $|z - z_1| = |z - z_2|.$
(ب) $|z-2| + |z+2| = 5.$
(پ) $|z| = \operatorname{Re} z + 1.$
(ت) $z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) = 6.$
(ث) $|z - z_1|/|z - z_2| = \lambda \qquad (z_1 \neq z_2, \lambda > 0).$

۷. ζ عدد مختلط مفروضی است، و $r > 0$. مطلوبست نمایش مجموعه‌ی صدق هر یک از گزاره‌نماهای

$$|z-\zeta| < r, \qquad |z-\zeta| \leqslant r, \qquad |z-\zeta| > r, \qquad |z-\zeta| \geqslant r.$$

۶ § مسائل مختلفه

۱. مطلوبست تعیین جمیع اعداد مختلطی مانند z به طوری که عدد

$$(n + \frac{1}{2} + z)/(n + \frac{1}{2} - \bar{z})$$

بازاء جمیع مقادیر صحیح n حقیقی و مثبت باشد.
۲. بازاء هر عدد یکهنگ مانند z، حد اقل یکی از نامساویهای

$$|1+z| \geqslant 1, \qquad |1+z^2| \geqslant 1$$

برقرار است.
۳. اگر $|1+z| \geqslant 1$ آنگاه، بازاء هر عدد حقیقی a که $a \geqslant 1$،

$$|1+az| \geqslant 1.$$

۴. بازاء هر چهار نقطه‌ی واقع در یک صفحه مانند A، B، C، و D،

$$AD \cdot BC \leqslant BD \cdot CA + CD \cdot AB.$$

۵. اگر $u^2 = zz'$ آنگاه

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|.$$

۶. اعداد حقیقی a و b را چنان تعیین کنید که عدد $i+1$ جواب معادلهی $z^5+az^3+b=0$ باشد.

۷. معادلهی درجهی دوم

$$z^2+2(b+Bi)z+(c+Ci)=0,$$

که در آن b، B، c، و C اعدادی حقیقیاند مفروض است. ثابت کنید که

(آ). اگر $z=x+iy$ جواب این معادله باشد، و فرض کنیم

$$x+b=\xi, \qquad y+B=\eta, \qquad b^2-B^2-c=h, \qquad 2bB-C=k,$$

آنگاه

$$\xi=\pm\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{h^2+k^2}+h)\right\}^{1/2}, \qquad \eta=\pm\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{h^2+k^2}-h)\right\}^{1/2},$$

که در آنها، اگر $k>0$ علامات یکسان و اگر $k<0$ علامات متفاوت اختیار میشوند.

(ب). شرط وجود ریشهی مضاعف را بر حسب ضرایب معادله تعیین کنید.

(پ). شرط اینکه معادله دارای یک ریشهی حقیقی باشد آنست که

$$C^2-4bBC+4cB^2=0.$$

(ت). شرط اینکه معادله یک ریشهی موهومی محض داشته باشد آنست که

$$C^2-4bBC-4b^2c=0.$$

(ث). شرط اینکه معادله دارای دو ریشهی مزدوج باشد آنست که

$$B=C=0, \qquad b^2<c.$$

۸. اعداد u و v و w دو به دو متمایزند و

$$u^2+v^2+w^2-uv-vw-wu=0.$$

ثابت کنید که نگارهای این اعداد بر رؤوس مثلثی متساویالاضلاع قرار دارند.

۹. اگر $|z|<1$ و $0\leqslant|w|\leqslant 1$ آنگاه

$$\frac{||z|-|w||}{1-|z||w|}\leqslant\frac{|z-w|}{|1-\bar{z}w|}\leqslant\frac{|z|+|w|}{1+|z||w|}\leqslant 1.$$

۱۰. اگر $|u_k|<2 \ (1\leqslant k\leqslant n)$ آنگاه معادلهی

$$1+u_1z+\cdots+u_nz^n=0$$

ریشهای که هنگش کمتر از $1/3$ نباشد ندارد.

۱۱. (تعمیم اتحاد لاگرانژ[1]). ثابت کنید که

$$\left|\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|u_i\bar{v}_j-u_j\bar{v}_i|^2.$$

۱۲. (تعمیم نامساوی کوشی). همواره

$$\left|\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2.$$

---

(۱) ۷۲ : ۱۰ : ۵ ملاحظه شود.

۷ § رشته‌ها و سلسله‌های اعداد مختلط

۷.۱. کلیات. با توجه به تعریف کلی رشته، تابعی بر $\mathbf{N}$ بتوی $\mathbf{C}$ را رشته‌ای از اعداد مختلط نامیم. علامات و اصطلاحات همان است که در باب رشته‌ها بطور کلی گذشت. مثلاً،

۷.۱.۱. تعریف. رشته‌ی $\{z_n\}$ از اعداد مختلط را محدود نامیم در صورتی که عددی مثبت مانند λ باشد که همواره $|z_n| < \lambda$.

۷.۱.۲. تعریف. رشته‌ی $\{z_n\}$ از اعداد مختلط را هیچرشته نامیم در صورتی که، بازاء هر عدد مثبت مانند ε، از مرتبه‌ای ببعد، $|z_n| < \varepsilon$.

۷.۱.۳. تعریف. رشته‌ی $\{z_n\}$ از اعداد مختلط را متقارب به عدد مختلط ثابت ζ نامیم در صورتی که، بازاء هر عدد مثبت مانند ε، عددی طبیعی مانند N باشد که همواره اگر $n > N$ آنگاه

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon.$$

رشته‌ی $\{z_n\}$ را متقارب نامیم در صورتی که به عددی متقارب باشد، و آن را متباعد خوانیم در صورتی که متقارب نباشد.

۷.۱.۴. قضیه. اگر رشته‌ی $\{z_n\}$ متقارب باشد متقارب به بیش از یک عدد نتواند بود.
برهان. اثبات مانند آنست که در اعداد حقیقی دانسته شد. فرض کنیم رشته‌ی $\{z_n\}$ متقارب به ζ و نیز متقارب به η باشد، و $\eta \neq \zeta$. پس، $\varepsilon = |\zeta - \eta|/2 > 0$. بنا بفرض، از مرتبه‌ای مانند N_1 ببعد، $|z_n - \zeta| < \varepsilon/2$، و از مرتبه‌ای مانند N_2 ببعد، $|z_n - \eta| < \varepsilon/2$. پس، از مرتبه‌ی $\text{Max}\,\{N_1, N_2\}$ ببعد، هر دو نامساوی در عین حال برقرارند، و

$$\begin{aligned}|\zeta - \eta| = |(\zeta - z_n) + (z_n - \eta)| &\leqslant |\zeta - z_n| + |z_n - \eta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

و این ممتنع است. ▲

۷.۱.۵. تبصره. علامات نشان دادن حد یک رشته‌ی متقارب همانهاست که در باب اعداد حقیقی دانسته شد، و به همان قیاس به آسانی معلوم میشود که

۷.۱.۶. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{z_n\}$ هیچرشته باشد آنست که $\lim z_n = 0$.

۷.۱.۷. قضیه. $\lim (z_n - \zeta) = 0 \Leftrightarrow \lim z_n = \zeta$.

۷.۱.۸. امثله

(آ). ثابت کنید که $\lim\left(\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n^2}i\right)=1$.

باید ثابت کرد که رشته‌ی $\{z_n\}$ با جمله‌ی عمومی

$$z_n=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n^2}i$$

متقارب به 1 است. فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. نامساوی $|z_n-1|<\varepsilon$ معادل نامساوی

$$\left|\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n^2}i\right|<\varepsilon$$

است. اما، بنا بر ۴.۳.۲،

$$\left|\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n^2}i\right|\leqslant\left|\frac{-1}{n+1}\right|+\left|\frac{1}{n^2}i\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}.$$

نامساوی $2/n<\varepsilon$ از مرتبه‌ی $N=[2/\varepsilon]+1$ برقرار است. پس، از مرتبه‌ی N ببعد، $|z_n-1|<\varepsilon$. ▲

(ب). رشته‌ی $\left\{\frac{n+2}{n^2-in}\right\}$ هیچرشته است.

اگر جمله‌ی nم رشته را z_n بنامیم،

$$|z_n|=\left|\frac{n+2}{n^2-in}\right|=\frac{n+2}{|n^2-in|}=\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n^2}}<\frac{n+2n}{\sqrt{n^4}}=\frac{3}{n}.$$

بازاء عدد مثبت مفرض ε، از مرتبه‌ی $N=[\varepsilon/3]+1$ ببعد، $|z_n|<\varepsilon$. پس، $\lim z_n=0$. ▲

به عنوان تمرین، ثابت کنید که

۷.۱.۹. قضیه. هر رشته‌ی متقارب از اعداد مختلط محدود است.

قضیه‌ی ذیل تحقیق در تقارب رشته‌های اعداد مختلط را به رشته‌های اعداد حقیقی باز میگرداند:

۷.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{z_n\}$ متقارب باشد آنست که هر یک از رشته‌های $\{\mathrm{Re}\ z_n\}$ و $\{\mathrm{Im}\ z_n\}$ متقارب باشد، و در این صورت

$$\lim z_n=\lim\left(\mathrm{Re}\,z_n\right)+i\cdot\lim\left(\mathrm{Im}\ z_n\right). \qquad (*)$$

برهان. فرض کنیم $\mathrm{Re}\ z_n=x_n$ و $\mathrm{Im}\ z_n=y_n$. اولاً، فرض کنیم رشته‌ی $\{z_n\}$ متقارب به عدد $\zeta=a+bi$ باشد. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، از مرتبه‌ای مانند N بعد،

$$|z_n-\zeta|=|(x_n-a)+i(y_n-b)|<\varepsilon.$$

اما، همواره $|x_n-a|<|z_n-\zeta|$ و $|y_n-b|<|z_n-\zeta|$. پس، از مرتبه‌ی N

بعد، $|x_n - a| < \varepsilon$ و $|y_n - b| < \varepsilon$. بالنتیجه، $\lim x_n = a$ و $\lim y_n = b$، و رابطه‌ی (*) بالبداهه برقرار است. بالعکس، فرض کنیم رشته‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به اعدادی مانند a و b متقارب باشند، و $\zeta = a + bi$، و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. پس، از مرتبه‌ای بعد، $|x_n - a| < \varepsilon/2$، و از مرتبه‌ای بعد، $|y_n - b| < \varepsilon/2$. بالنتیجه، از مرتبه‌ای بعد،

$$|z_n - \zeta| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon. \ \blacktriangle$$

۷.۲.۱. قضیه. اگر رشته‌ی $\{z_n\}$ متقارب باشد رشته‌های $\{\bar{z}_n\}$ و $\{|z_n|\}$ متقاربند، و

$$\lim \bar{z}_n = \overline{\lim z_n}, \qquad \lim |z_n| = |\lim z_n|.$$

برهان. فرض کنیم $z_n = x_n + iy_n$ و $\zeta = a + bi$ و $z_n \to \zeta$. بنا بر قضیه‌ی قبل، $\lim x_n = a$ و $\lim y_n = b$. اما، $\bar{z}_n = x_n - iy_n$. پس،

$$\lim (\operatorname{Re} \bar{z}_n) = \lim x_n = a, \qquad \lim (\operatorname{Im} \bar{z}_n) = \lim (-y_n) = -b.$$

بالنتیجه، بنا بر قضیه‌ی قبل، $\lim \bar{z}_n = a - bi = \bar{\zeta}$. اثبات قسمت دوم بنا بر ۴.۳.۱ و بر متعلم است. $\blacktriangle$

۷.۲.۲. تبصره. از تقارب رشته‌ی $\{|z_n|\}$ عموماً تقارب رشته‌ی $\{z_n\}$ لازم نمیآید، اما اگر رشته‌ی اول هیچرشته باشد دومی نیز هیچرشته است.

به عنوان آخرین مثال از استخراج خواص رشته‌های اعداد مختلط از خواص رشته‌های اعداد حقیقی، یکی از صور ضابطه‌ی کلی تقارب را میآوریم:

۷.۲.۳. قضیه (ضابطه‌ی کلی تقارب یا ضابطه‌ی کوشی*). شرط لازم و کافی برای آنکه رشته‌ی $\{z_n\}$ متقارب باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت مانند ε، عددی طبیعی مانند N باشد، که بازاء هر عدد طبیعی n که $n > N$ و هر عدد طبیعی p،

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که اگر $z_n = x_n + iy_n$ آنگاه

$$\left.\begin{array}{l} |x_{n+p} - x_n| \\ |y_{n+p} - y_n| \end{array}\right\} \leqslant |z_{n+p} - z_n| \leqslant |x_{n+p} - x_n| + |y_{n+p} - y_n|,$$

و ضابطه‌ی کوشی را در مورد رشته‌های اعداد حقیقی بکار بندیم. $\blacktriangle$

۷.۲.۴. تمرین

۰۱ اگر دو رشته‌ی $\{z_n\}$ و $\{w_n\}$ از اعداد مختلط متقارب باشند، اولاً، رشته‌های $\{z_n + w_n\}$، $\{z_n - w_n\}$، و $\{z_n w_n\}$ نیز متقاربند و

$$\lim (z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n;$$
$$\lim (z_n - w_n) = \lim z_n - \lim w_n;$$
$$\lim (z_n w_n) = \lim z_n \cdot \lim w_n;$$

و ثانیاً، اگر بعلاوه $\lim w_n \neq 0$ آنگاه رشته‌ی $\{z_n/w_n\}$ نیز متقارب است، و

$$\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim z_n}{\lim w_n}$$

راهنمائی: اثبات سه قسمت اول به وسیله‌ی ۷.۲ است. برای قسمت اخیر میتوان ملاحظه کرد که $z_n/w_n = (z_n\overline{w}_n)/|w_n|^2$.

۲. کدام یک از رشته‌هائی که ذیلاً با جمله‌ی عمومی خود معرفی شده‌اند متقارب است؟

(آ) $\dfrac{n^2+in+1}{n+i+in^2}$. (د) $\dfrac{n^3+3i}{n^2+i^n}$.

(ب) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^n$. (ت) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)^n$.

۳. بازاء چه مقادیر z رشته‌ی $\{z^n\}$ محدود است؟ بازاء چه مقادیری متقارب است؟

۴. z عدد مختلطی ناصفر است. بازاء چه مقادیر z رشته‌ی $\{z^n - z^{-n}\}$ متقارب است؟

۷.۳ سلسله‌های اعداد مختلط. تعریفات به همان قیاس است که در اعداد حقیقی دانسته شد. اگر $\{z_n\}$ رشته‌ای از اعداد مختلط باشد، و

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k,$$

رشته‌ی $\{s_n\}$ را سلسله‌ی $\sum_1^\infty z_n$ یا

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

خوانیم.

اگر رشته‌ی $\{s_n\}$ متقارب به عدد مختلط s باشد گوئیم سلسله‌ی $\sum z_n$ متقارب و s مقدار یا مجموع یا حاصلجمع آنست، و در این صورت، مینویسیم

$$\sum z_n = s.$$

سلسله‌ای را که متقارب نباشد متباعد نامیم.

اگر $z_n = x_n + iy_n$ آنگاه

$$s_n = \sum_1^n x_k + i\sum_1^n y_k.$$

پس، اگر قضیه‌ی ۷.۲ را در مورد رشته‌ی $\{s_n\}$ بکار بندیم دیده میشود که

۷.۳.۱. قضیه. با علامات مذکور در تعریفات فوق، شرط لازم و کافی برای آنکه سلسله‌ی $\sum z_n$ متقارب باشد آنست که هر یک از سلسله‌های

$$\sum \operatorname{Re} z_n, \qquad \sum \operatorname{Im} z_n.$$

متقارب باشد، و در صورت تقارب،

$$\sum z_n = \sum \operatorname{Re} z_n + i\sum \operatorname{Im} z_n.$$

بـه همین قیاس، با تـوجه به ۷.۲.۳، میتوان صور مختلف ضابطه‌ی کلـی تقارب را در

مورد سلسله‌های اعداد مختلط بیان و ثابت کرد. مثلاً،

۷.۳.۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه سلسله‌ی $\sum z_n$ متقارب باشد آنست که، بازاء هر عدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند N باشد که بازاء هر عدد طبیعی n که $n > N$ و هر عدد طبیعی p،

$$| z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p} | < \varepsilon.$$

بالاخص،

۷.۳.۳. قضیه. شرط لازم برای تقارب سلسله‌ی $\sum z_n$ آنست که $\lim z_n = 0$.

مانند سلسله‌های اعداد حقیقی،

۷.۳.۴. تعریف. سلسله‌ی $\sum z_n$ را مطلقا متقارب خوانیم در صورتی که سلسله‌ی نامنفی $\sum | z_n |$ متقارب باشد.

از روابط

$$\left.\begin{array}{l} | \operatorname{Re} z_n | \\ | \operatorname{Im} z_n | \end{array}\right\} \leqslant | z_n | \leqslant | \operatorname{Re} z_n | + | \operatorname{Im} z_n |$$

معلوم است که

۷.۳.۵. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه سلسله‌ی $\sum z_n$ مطلقا متقارب باشد آنست که هر یک از سلسله‌های $\sum \operatorname{Re} z_n$ و $\sum \operatorname{Im} z_n$ مطلقا متقارب باشد.

قواعد ذیل در تشخیص تقارب مطلق مفید است:

۷.۳.۶. قضیه. اگر سلسله‌ی $\sum a_n$ از اعداد حقیقی نامنفی متقارب باشد، و همواره $| z_n | \leqslant a_n$ آنگاه سلسله‌ی $\sum z_n$ مطلقا متقارب است.

برهان. حکم نتیجه‌ی ضابطه‌ی کوشی است. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، بنا بر ضابطه‌ی کوشی در مورد سلسله‌های حقیقی، عددی طبیعی مانند N هست که بازاء هر عدد طبیعی n که $n > N$ و هر عدد طبیعی p،

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

پس، چون همواره $| z_n | \leqslant a_n$، بازاء هر n که $n > N$ و هر p،

$$| z_{n+1} | + \cdots + | z_{n+p} | < \varepsilon.$$

بالنتیجه، بنا بر ضابطه‌ی کلی تقارب، سلسله‌ی $\sum | z_n |$ متقارب، و سلسله‌ی $\sum z_n$ مطلقا متقارب است. ▲

۷.۳.۷. قضیه (قاعده‌ی نسبت). در سلسله‌ی $\sum z_n$، فرض کنیم از مرتبه‌ای ببعد $z_n \neq 0$.

I. اگر $\lim | z_{n+1}/z_n | < 1$ سلسله‌ی $\sum z_n$ مطلقا متقارب است.

II. اگر $\lim |z_{n+1}/z_n| > 1$ سلسله‌ی $\sum z_n$ متباعد است.

برهان. در حالت اول، بنا بر قاعده‌ی نسبت در سلسله‌های نامنفی، سلسله‌ی $\sum |z_n|$ متقارب است. در حالت ثانی $|z_n|$ به صفر میل نمیکند. پس، با توجه به ۷.۲.۲، z_n به صفر میل نمیکند، و بنا بر ۷.۳.۳، سلسله‌ی $\sum z_n$ متباعد میباشد. ▲

بالاخره با تفکیک به اجزای حقیقی و مختلط و به استناد ۷.۳.۵، میتوان استقلال مقدار یک سلسله‌ی مطلقا متقارب را از نظم جمل، و قضیه‌ی ضرب سلسله‌های مطلقا متقارب را بطور کلی در اعداد مختلط ثابت کرد. اثبات آنها را به عنوان تمرین به متعلم واگذار میکنیم.

۷.۳.۸. امثله

(آ). سلسله‌ی $\sum \frac{z^n}{n!}$ بازاء جمیع مقادیر z مطلقا متقارب است. زیرا، بازاء هر مقدار دلخواه z،

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1.$$

(ب). به همان طریق که در سلسله‌های اعداد حقیقی دیدیم،

$$\sum_0 \frac{z^n}{n!}\cdot\sum_0 \frac{w^n}{n!} = \sum_0 \frac{(z+w)^n}{n!}.$$

۷.۳.۹. تمرین

۱. به استناد ۷.۳.۶ ثابت کنید که سلسله‌ی $\sum \frac{n+1+i}{n^3+(2+i)n}$ متقارب است.

۲. ثابت کنید که سلسله‌های ذیل بازاء جمیع مقادیر z مطلقا متقاربند:

(آ) $\sum_0 \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; (ب) $\sum_0 \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

۳. در رفتار سلسله‌ی تصاعد هندسی $\sum z^n$ بازاء مقادیر مختلف z تحقیق کنید.

۴. ثابت کنید که سلسله‌ی

$$1+\frac{z}{1+z}+\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\cdots$$

بازاء هر مقدار z که $\operatorname{Re} z > -1/2$ متقارب است، و در این حالت حاصلجمع آن را تعیین کنید.

۵. سلسله‌ی $\sum \frac{[(2n)!]^2}{(n!)^4} z^n$ بازاء هر مقدار z که در شرط $|z| < 1/16$ صدق کند مطلقا متقارب، و بازاء هر مقدار حقیقی z که $z > 1/16$ متباعد است.
به وسیله‌ی مقایسه‌ی این سلسله با سلسله‌ی توافقی، ثابت کنید که بازاء $z = 1/16$ نیز سلسله متباعد میباشد.

۶. سلسله‌ی $\sum \sqrt[n]{n!}\, z^n$ بازاء $|z| < 1$ مطلقا متقارب، و بازاء $|z| \geqslant 1$ متباعد است.

زندگینامه

در این قسمت، بعضی از ریاضیدانهائی که نامشان در صفحات گذشته آمده است بـا کمال اختصار، بـه ترتیب الفبائی شهرتشان، معرفی میشونـد. ریاضیدانهای بـزرگ ائمه‌ی علوم ریاضی هستند، و البته کسی که ریاضیات میخوانـد باید امامهای این علـم را، حد اقل به اجمال، بشناسد.

چون اشخاص با نامشان شناخته میشوند، آمـوختن تلفظ صحیح اعلام تا حدی که با زبـان فارسی ملایم بـاشد ضروری است. متأسفانه، این مقصود با علامات موسوم به «الفبای فـارسی» حـاصل نمیشود. بدین جهت، تلفظ اسامـی را بـا صورت مختـصرشده‌ای از الفبـای صوتی دایرةالمعارف فارسی ضبط کرده‌ایم. این الفبای مختصر در صفحـه‌ی ۸۵۴ معرفی شده است[۱].

---

(۱) الفبای صوتی دایرةالمعارف فارسی با توضیحـات و امثلـه‌ی فراوان در صـفحات ۱۸ ـ ۲۲ مدخل جلد اول آن دایرةالمعارف آمده است.

الفبای صوتی

(مختصرشدهٔ الفبای صوتی دایرةالمعارف فارسی)

I. صامِتها

حرف	معادل فارسی	حرف	معادل فارسی	حرف	معادل فارسی
b	ب	k	ک	ŝ	ش
c	چ	l	ل	t	ت، ط، ة
d	د	m	م	v	و
f	ف	n	ن	x	خ
g	گ	p	پ	y	ی
h	ح، ه	q	غ، ق	z	ذ، ز، ض، ظ
j	ج	r	ر	ʿ	عین و همزه در وسط یا در آخر
ĵ	ژ	s	ث، س، ص		

II. مُصَوّتها

a = اَ　　ā = آ　　ă = اَوْ　　e = اِ

i = ای　　o = اُ　　ŏ (در اوج)　　u = او (در ضمیر او)

اگر مصوتی در طرف چپ مصوت دیگر بیاید دنبالهٔ صدای آنکه در طرف چپ است از دیگری «حرکت میگیرد»، مانند حرکتی که ـِ در کلمهٔ سیاه از ا میگیرد (siāh).

III. امثله

ـ اسب (asb)، عمل (amal)، امل (amal)،

ـ آباد (ābād)، عار (ār)، یار (yār)، آبیاری (ābyāri)

ـ اولاد (ălād) و قوم (qăm) با تلفظ عربی

ـ اسم (esm)، عشق (eŝq)، رشته (reŝte)، یکتا (yektā)، اره (arre)،

ـ این (in)، ایران (irān)، عیلام (ilām)

ـ دو (do)، بز (boz)، عمر (omr)، شما (ŝomā)

ـ اولاد (ŏlād) در تلفظ فارسی، جو (jŏ)

ـ بودن (budan)، ورود (vorud)، عود (ud)

ـ بیابان (biābān)، حاشیه (hāŝie)، ایرانیان (irāniān)

ـ شعر (ŝeʿr)، معاش (maʿāŝ)، شیء (ŝeyʿ)، تشعشع (taŝaʿŝoʿ)

راهنما

(۱) بعد از صورت فارسی نام هر کس، تلفظ اسم وی (در داخل کروشه) و، (معمولاً) پس از آن، تاریخ تولد و وفات وی آمده است. صورت اصلی نام در ذیل صفحه مندرج است، مگر در مورد نامهای یونانی، که صورت لاتینی ضبط شده، و در مورد نامهای روسی، که با الفبای لاتینی، به طریقی که در نقل اسامی روسی بدین الفبا معمول است، نقل گردیده.

(۲) تواریخ همه میلادی و بعد از میلاد مسیح است، مگر آنکه مقید به «قم» (= قبل از میلاد) باشد.

(۳) زندگینامه‌های مختصری که خواهد آمد همه ناظر به کارهای ریاضی اشخاص است، و در آنها، سایر فعالیتهای احتمالی آنان مورد نظر نیست. طول نسبی زندگینامه حاکی از اهمیت نسبی نیست.

*****

ائودوکسوس[1] [eudoksus]

حدود ۴۰۸ ــ حدود ۳۵۵ قم

ریاضیدان و منجم یونانی، و یکی از بزرگترین ریاضیدانهای جهان. علاوه بر ریاضیات، طب نیز میدانست، و فلسفه را نزد افلاطون تحصیل کرد. تئوری تناسب را در مورد کمیات ناهتوافق تعمیم داد، و تقسیم به نسبت ذات وسط و طرفین را تکمیل کرد. روش افناء [efnāʿ] را در محاسبه‌ی سطوح و احجام بکار برد. اول کسی است که به اثبات احکام مربوط به حجم هرم و مخروط نائل آمد. در نجوم، نظریه و تحقیقاتی دارد.

توضیح اصطلاحات کمیات متوافق و روش افناء به شرح ذیل است.

دو کمیت را متوافق خوانند در صورتی که مقیاس مشترکی داشته باشند، یعنی کمیتی باشد که به دفعات صحیح در هر یک از آنها بگنجد. مثلاً، خطی به طول 50 سانتیمتر با خطی بطول 6,5 سانتیمتر متوافق است. دو عدد حقیقی را متوافق نامند در صورتی که نسبت آنها عددی منطق باشد.

دو کمیت را ناهتوافق نامند در صورتی که متوافق نباشند، و دو عدد را ناهتوافق خوانند در صورتی که مضارب صحیح یک عدد نباشند. مثلاً به آسانی میتوان ثابت کرد که اعداد $\sqrt{3}$ و 2 نامتوافقند.

از روش افناء، ائودوکسوس و ارشمیدس در تعیین سطوح و احجام استفاده‌ی فراوان برده‌اند. روش افناء در محاسبه‌ی سطوح اینست که رشته‌ای صعودی (یا نزولی) از اشکالی که مساحتشان معلوم و کمتر (یا بیشتر) از سطح مطلوبست تعریف میکنند، و ثابت میکنند که تفاوت مساحت جمله‌های رشته و سطح مطلوب متدرجاً «از میان میرود» (به اصطلاح کنونی، مساحت جمله‌های رشته به مساحت مطلوب میل میکند). روش افناء در محاسبه‌ی احجام به همین قیاس است. روش افناء شبیه است به روش خام محاسبه‌ی انتگرال در قرن ۱۷م.

---

(۱) Eudoxus

آبل، نیلس هنریک[1] [nils henrik ābel]
۱۸۰۲ – ۱۸۲۹

ریاضیدان شهیر نروژی، و از پیشوایان ریاضیات نوین. وی دومین فرزند کشیش تهی‌دستی بود، و به سبب تنگدستی، مبتلا به بیماری سل گردید، و در ۲۷ سالگی وفات یافت. اما، تهی‌دستی و بیماری خللی در همت و کوشش وی وارد نکرد. یکی از عمده‌ترین اکتشافات او اثبات این حکم است که حل معادلات از درجه‌ی پنجم به بالا به وسایل جبری ممتنع است. آبل تحقیقات مهمی در توابع بیضوی و بعضی توابع عالی دیگر (که بعدها، به نام وی، به توابع آبلی معروف گردید) نیز دارد.

ارشمیدس[2] [تلفظ عادی فارسی arasmidos]
حدود ۲۸۷ – ۲۱۲ قم

بزرگترین ریاضیون و فیزیکدانان و مهندسین قدیم. در شهر سیراکوز (در جزیره‌ی سیسیل) متولد شد. داستان قتلش در تاراج این شهر به دست رومیان معروف است. ارشمیدس ابتکارات و اکتشافات فراوان در ریاضیات دارد. مساحت بعضی سطوح منحنی را به روش افناء (مذکور در زندگینامه‌ی ائودوکسوس) حساب کرد. در سطوح درجه‌ی دوم تحقیقاتی دارد. مجموع بعضی سلسله‌ها را به طریق هندسی تعیین نمود. برای نسبت محیط دایره به قطر آن مقادیر 22/7 و 223/71 را بدست آورد. در علم حساب، برای شمار طرحی ریخت. علم تعادل قوا و تعادل مایعات را تأسیس کرد. تألیفات متعدد دارد.

اقلیدس[3] [oqlides]

ریاضیدان و فیزیکدان یونانی حوزه‌ی علمی اسکندریه، که احتمالاً در ۳۲۳ – ۲۸۵ قم، در عهد سلطنت بطلمیوس I، رونق داشت.

وی اطلاعات ریاضی زمان خود را به صورت علمی در کتاب مشهور خود، معروف به «اصول»، تنظیم کرد. این کتاب دارای سیزده مقاله است، و بعداً دو مقاله‌ی دیگر بر آن افزوده شده است. بسیاری از مطالب مندرج در «اصول» از ریاضیدانهای پیشین است، ولی تنظیم علمی و تفصیل آنها از اقلیدس میباشد، و این کتاب از لحاظ روش اصل موضوعی که اقلیدس در تنظیم آن اتخاذ کرده است تا قریب دو هزار سال بعد از وی بیمانند بوده است. بعلاوه، بعضی از قضایای اولیه‌ی علم حساب را، که از اکتشافات خود اوست، در این کتاب آورده است، و اصل موضوع معروف به نام وی نیز در کتاب «اصول» مندرج میباشد. کتاب «اصول» تا زمان حاضر مبنای تعلیم هندسه‌ی مقدماتی بوده است، و به زبانهای مختلف ترجمه شده، و ریاضیدانهای بعد از اقلیدس حواشی و شروحی بر آن نوشته‌اند. معروفترین تحریر عربی آن، به نام «تحریر اقلیدس»، از خواجه نصیرالدین طوسی است (چاپ تهران، ۱۲۹۸ هجری قمری).

از آثار دیگر اقلیدس کتاب مُعْطیات است در هندسه‌ی مسطحه، و وی تألیفاتی در نورشناخت

(۱) Niels Henrik Abel (۲) Archimedes (۳) Euclid

هندسی و در موسیقی نیز دارد.

اویلر، لئونهارد[۱] [leonhārd oyler]
۱۷۸۳ — ۱۷۰۷

ریاضیدان بزرگ سویسی، و یکی از بارآورترین ریاضیدانهای جهان، و محیط بر همه‌ی شعبه‌های ریاضیات زمان خود. در دانشگاه بال با خاندان برنویی ارتباط یافت. به دعوت کاترین، ملکه‌ی روسیه، به سن پطرزبورگ رفت، و در آنجا در ۱۷۳۰ استاد فیزیک گردید، و بعداً در آکادمی علوم جایگزین دانیل برنویی شد. در ۱۷۴۰ ــ ۱۷۶۶ استاد آکادمی علوم دانشگاه برلین بود. در ۱۷۶۶ به سن پطرزبورگ باز گشت، و در همانجا درگذشت.
اویلر در حیات خود، علاوه بر کتابهای مفصل، قریب ۶۰۰ رساله‌ی مهم نوشته است. سه اثر عظیم در آنالیز دارد که در آنها «حساب تحلیلی را از هر گونه قید هندسی خارج ساخته است، و بدینگونه، آنالیز را به صورت علمی مستقل در آورده است». در جبر، حساب عالی، مکانیک، و موسیقی تألیفات و مقالات دارد. عبارات ریاضی متعدد (ثابت اویلر، معادله‌ی اویلر، و غیره) به نام وی میباشند.
قدرت وی در محاسبه شگفت انگیز بوده است، و در کشف فرمولهای عملی برای محاسبه شاید هیچ کس تا کنون به پایه‌ی او نرسیده است. وی در ۱۷۳۵ چشم راست خود را از دست داد، و در ۱۷۶۶ از نعمت بینائی به کلی محروم گردید، و محاسبات مفصل خود را ذهناً انجام میداد.

برنویی[۲] [bernuyyi]

نام خاندان مشهوری از علما و ریاضیدانها. خاندان برنویی اصلاً از بلژیک بود، ولی، برای فرار از مظالم کاتولیکها، به سویس مهاجرت کرد، و در بال سکنی گزید. در سه نسل از این خاندان چند تن ریاضیدان عالیمقام برخاستند.
یاکوب برنویی [yākob]، ۱۶۵۴ ــ ۱۷۰۵، که در فرانسه به ژاک برنویی [jāk] و در انگلستان به جیمز برنویی [jeymz] معروفست، نخستین عضو این خاندان بود که در ریاضیات شهرت یافت. وی حساب جدید دیفرانسیل و انتگرال را به روش لایبنیتز فرا گرفت. در ۱۶۸۷ در بال استاد ریاضیات شد. حساب دیفرانسیل وانتگرال را بسط داد، و آن را در مسائلی مهم به کار بست. در هندسه‌ی تحلیلی، حساب احتمالات، و حساب تغییرات تحقیقات عمده کرد. نامساوی برنویی، معادله‌ی دیفرانسیل معروف به معادله‌ی برنویی، و اعداد مشهور به اعداد برنویی (ضرایب $\frac{x^2}{2!}$، $\frac{x^4}{4!}$، ...، $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$، ... در بسط تابع $\frac{x}{1-e^{-x}}$ بر حسب قوای صعودی x) بدو منسوبند. اصطلاح «انتگرال» را او وارد ریاضیات کرد. پس از وفات وی، برادرش **یوهان برنویی** [yohān]، ۱۶۶۷ ــ ۱۷۴۸، به استادی دانشگاه بال رسید. وی،

(۱) Leonhard Euler
(۲) Bernoulli

علاوه بر ریاضیات، در نجوم، شیمی، و فیزیک نیز دست داشت. در رشته‌های متنوع ریاضی آثار متعدد نوشته است.

سه پسر یوهان جملگی ریاضیدان بودند. **نیکولاوس برنویی** [nikolăs]، ۱۶۹۵ ـ ۱۷۲۶، با پسر دیگر، **دانیل برنویی** [dāniel]، ۱۷۰۰ ـ ۱۷۸۲، در سن پطرزبورگ استاد ریاضیات بودند. پسر سوم، **یوهان برنویی**، ۱۷۱۰ ـ ۱۷۹۰، در بال جایگزین پدر گردید. معروفترین این سه پسر دانیل برنویی است که از دوستان نزدیک اویلر و گاه از رقبای او بود. دانیل در ۱۷۳۲ از روسیه به بال باز گشت. وی سهم مهمی در پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال، معادلات دیفرانسیل، و تئوری احتمالات، و نیز در بعضی مباحث ریاضیات کاربسته دارد. کثیرالجمله‌های معروف به کثیرالجمله‌های برنویی ــ که ضرایب بسط $\frac{te^{zt}}{e^t - 1}$ بر حسب قوای t میباشند ــ بدو منسوبند.

بورالی-فورتی، چزاره[1] [cezāre burāliforti]

۱۸۶۱ ـ ۱۹۳۱

ریاضیدان ایتالیائی، که در پیشرفت هندسه‌ی تصویری و منطق ریاضی سهیم بود. پارادوکس معروف به پارادوکس بورالی-فورتی را در تئوری اعداد ترتیبی در ۱۸۹۷ کشف کرد.

بورباکی، نیکولا[2] [nikolā burbāki]

نام مستعار گروهی از ریاضیدانان فرانسوی که، به پیروی از افکار هیلبرت، از سال ۱۹۳۹ آغاز به نوشتن کتابی در ریاضیات به عنوان یک علم واحد کردند. در ۱۹۶۰، ۲۴ مجلد از آثار بورباکی انتشار یافته بود، و این مجلدات ظاهراً قسمتی از جزء اول کتاب است، که موضوعش ساختمانهای اساسی آنالیز میباشد. عضویت در گروه محرمانه است، ولی عموماً معتقدند که ریاضیدانهای معروفی مانند کارتان[3] [kārtān]، شواله[4] [ŝovāle]، دیودونه[5] [diodone]، و ویل[6] [veyl] از رهبران اولیه‌ی آن بوده‌اند. بر طبق مقررات گروه، اعضائی که به سن پنجاه سالگی میرسند استعفا میکنند، و ریاضیدانهای جوان جایگزین آنها میشوند، و همین تغییر در عضویت این گروه را با فکر جوان نگاه داشته است.

بورباکی در آثار خود سخت به روش اصل موضوعی، ترتیب صرفاً منطقی، و منتهای کلیت و تعمیم پایبند است. آثار بورباکی در تعیین خط مشی بسیاری از تحقیقات ریاضی معاصر نفوذ قاطع داشته است.

---

(۱) Cesare Burali-Forti
(۲) Nicolas Bourbaki
(۳) H. Cartan
(۴) C. Chevalley
(۵) J. Dieudonné
(۶) A. Weil

بول، جورج[1] [jorj bul]

۱۸۱۵ ــ ۱۸۶۴

ریاضیدان و منطقی انگلیسی. مقالات و کتابهای مهمی در معادلات دیفرانسیل و حساب تفاضلات متناهی منتشر کرد، ولی معروفترین اثرش کتاب تحقیقی در قوانین فکر (۱۸۵۴) است، در منطق ریاضی و تئوری احتمالات. این کتاب مشتمل بر یکی از اقدامات اولیه در بحث از منطق گزاره‌ها و حساب مجموعه‌ها به وسیله‌ی علامات میباشد.

بولتسانو، برنهارد[2] [bernhārd boltsāno]

۱۷۸۱ ــ ۱۸۴۸

فیلسوف و ریاضیدان اتریشی. یکی از آثارش، بـه نام پارادوکسهای بینهایت، پس از مـرگ وی در ۱۸۵۱ انتشار یـافت، و آن حـاکـی از اینست که وی در تئوری اعداد تـرانسفینی از جهاتی بر کانتور تقدم داشته است.

بونیاکوفسکی، ویکتور یاکوولویچ[3] [viktor yākovlevic bunyākofŝki]

۱۸۰۴ ــ ۱۸۸۹

ریاضیدان روسی. در سن پـطرزبـورگ کار میکـرد. تحـقیقاتش در تـئوری اعـداد، تئوری احتمالات، و حساب انتگرال بوده است.

پئانو، جوزپه[4] [juzeppe peāno]

۱۸۵۸ ــ ۱۹۳۲

ریاضیدان ایتالیائـی، و از مـؤسسین منطق جدیـد، کـه او را پدر این علم خـوانده‌انـد. اصول موضوعه‌ی او برای تئوری اعداد طبیعی (معروف به اصول موضوعه‌ی پئانو) در کتاب وی بـه نام اصول حساب (۱۸۸۹) انتشار یـافت. کتاب فرمـولـر ریاضیات (۱۸۹۴ ــ ۱۹۰۸) را بـا همکاری بعضی دیگر تألیف کرد. هدف این کتاب اینست که تمام ریاضیات را با زبانی علامتی بیان کند. بعضی از علاماتی کـه پئانو در منطق ریاضی وضع کرده است هنـوز رواج دارد. از اکتشافات دیگر پئانو منحنیی است (منحنی پئانو) که سطحی را پـر میکند. پئانو طرفدار زبان بین‌المللی بود، و زبانی اختراع کرد.

پاسکال، بلز[5] [blez pāskāl]

۱۶۲۳ ــ ۱۶۶۲

عالم و ادیب فرانسوی، فیلسوف دینی، و یکی از مشاهیر متفکرین جهان. استعداد فوق‌العاده‌اش

---

(۱) George Boole
(۲) Bernhard Bolzano
(۳) Victor Jakowlewich Bunyakowski
(۴) Giuseppe Peano
(۵) Blaise Pascal

در ریاضیات منشأ اخباری افسانه‌مانند در باب طفولیت او بوده است. تأسیس نظریه‌ی احتمالات، مثلث حسابی پاسکال، و کشف خواص سیکلوئید به او منسوب است. در پیدایش حساب دیفرانسیل سهیم بود.

تارتاگلیا (tārtāgliā)
حدود ۱۵۰۶ ــ ۱۵۵۷
به زندگینامه‌ی کاردان رجوع شود.

تئودوروس[۱] [teodorus]
ریاضیدان یونانی که در اواخر قرن پنجم ق‌م در آتن رونق داشت. وی از فیثاغوریان (پیروان فیثاغورس) و استاد افلاطون در ریاضیات بود. ثابت کرد که جذر 3 و نیز جذر سایر اعداد غیر مجذور کامل تا 17 اصم است. بعضی منشأ مفهوم اصمیت را بدو منسوب کرده‌اند، ولی ظاهراً این مفهوم از فیثاغورس است.

تسرملو، ارنست[۲] [ernst tsermelo]
۱۸۷۱ ــ ۱۹۵۳
ریاضیدان آلمانی. در ۱۹۱۰ ــ ۱۹۱۶ در مونیخ و از ۱۹۲۶ ببعد در فرایبورگ استاد ریاضیات بود. سهم مهم او در مبانی ریاضیات طرحی اصل موضوعی برای تئوری مجموعه‌ها و تقریر اصل موضوع معروف به اصل انتخاب است، و اثبات اینکه این اصل معادل است با امکان خوشترتیب ساختن هر مجموعه.

چبیچف، پافنوتی لووویچ[۳] [pāfnuty lvovic cebicef]
۱۸۲۱ ــ ۱۸۹۴
یکی از بزرگترین ریاضیدانهای روسی، که به سبب نتایجی که در تئوری اعداد اول بدست آورد معروفست. در ۱۸۳۲ خانواده‌ی وی به مسکو انتقال یافت، و وی در دانشگاه آنجا تحصیل کرد. در ۱۸۴۷ به سن پطرزبورگ رفت؛ مدت ۳۵ سال در دانشگاه آنجا استاد بود. تحقیقات مهمی در نمایش توابع با سلسله‌های کثیرالجمله‌ها نیز دارد.

چزارو، ارنستو[۴] [ernesto cezāro]
۱۸۵۹ ــ ۱۹۰۶
ریاضیدان ایتالیائی. چندصد مقاله در حساب عالی، هندسه، مثلثات کروی، آنالیز، و بلورشناسی دارد.

---

(۱) Theodorus
(۲) Ernst Zermelo
(۳) Pafnuti Lvovich Tchebychef (Chebyshev)
(۴) Ernesto Cesaro

دالامبر، ژان لو رون[1] [jān lo ron dālāmber]
۱۷۸۳ – ۱۷۱۷

ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی. پس از تحصیل حقوق و طب، هم خود را صرف ریاضیات کرد. از ۱۷۴۱ عضو آکادمی علوم پاریس بود. در کتاب مشهور خود، به نام دوره‌ی دینامیک (۱۷۴۳)، اصل معروف به اصل دالامبر را تقریر نمود. سپس این اصل را در حرکت سیالات و تئوری تعادل به کار بست. در حساب انتگرال تحقیقات مهم دارد. دالامبر از اصحاب دایرةالمعارف معروف دیدرو (didero) بود.

ددکیند، یولیوس[2] [yulius dedekind]
۱۹۱۶ – ۱۸۳۱

ریاضیدان آلمانی که به جهت کارهایش در تئوری اعداد معروفست. آثارش به حد اعلی ابتکاری است، و از آن جمله سه اثر مشهور اوست به اسامی اتصال و اعداد اصم (۱۸۷۲)، اعداد چه هستند و چه باید باشند (۱۸۸۸)، و در تئوری اعداد صحیح جبری (۱۸۷۹، ۱۸۹۴). این آثار در ریاضیات زمان وی تأثیری عظیم یافتند. تفصیل برش معروف به برش ددکیند در رساله‌ی اول آمده است.

دکارت، رنه[3] [rene dekārt]
۱۶۵۰ – ۱۵۹۶

فیلسوف و ریاضیدان و دانشمند فرانسوی. نام لاتینی او کارتزیوس[4] [kārtezius] است، و اصطلاح کارتزین در ریاضیات بدین کلمه منسوب میباشد.

دکارت ریاضیات را نمونه‌ی کامل علم میشمرد، و میخواست روش ریاضی را در همه‌ی علوم دیگر بکار برد. در ریاضیات، هدفش این بود که نوعی «ریاضیات عمومی» تأسیس کند، که حساب، جبر، و هندسه اجزای مرتبط آن باشند. رساله‌ی کوچک او به نام هندسه مشتمل بر نخستین اثر مکتوب در هندسه‌ی تحلیلی است. این رساله دارای سه مقاله است. در مقاله‌ی اول، چهار عمل اصلی حساب را با هندسه مرتبط میسازد. مقاله‌ی دوم در طبقه‌بندی منحنیات و تعیین مماس و قائم آنهاست. مقاله‌ی سوم مشتمل بر طریقه‌ی معروف به طریقه‌ی دکارت یا طریقه‌ی علامات است در حل معادلات.

اثر فلسفی مشهور او گفتار در روش است. تأثیر دکارت در فلسفه از حساب بیرون است.

د مورگن، اوگاستس[5] [ogāstes de morgen]
۱۸۷۱ – ۱۸۰۶

ریاضیدان و منطقی انگلیسی. وی از کسانی است که به اصلاح منطق قدیم اقدام نمودند. طرح

---

(۱) Jean le Rond d'Alembert
(۲) Julius Dedekind
(۳) René Descartes
(۴) Cartesius
(۵) Augustus De Morgan

جدیدی برای منطق نِسَب اندیشید، که خلاصه‌ی آن را در کتاب خلاصه‌ی یک دستگاه پیشنهادی منطق (۱۸۶۰) آورده است.

دیریکله، پتر گوستاو لوژون[1] [peter gustāv loĵon dirikle]
۱۸۰۵ – ۱۸۵۹

ریاضیدان آلمانی که تحقیقات گرانبها در تئوری اعداد، آنالیز، و مکانیک دارد. در ۱۸۵۵ در دانشگاه گوتینگن جانشین گاوس گردید. در بسیاری از رشته‌های ریاضیات کار کرد، و در همه‌ی آنها به اکتشافاتی نایل شد، که به نام وی معروف است («سلسله‌ی دیریکله»، «انتگرال دیریکله»، و غیره).

راسل، برتراند[2] [bertrānd rāsel]
۱۸۷۲ –

فیلسوف و ریاضیدان مشهور معاصر بریتانیائی، و یکی از بارآورترین نویسندگان و متفکرین عصر حاضر. در ۱۹۵۰ به دریافت جایزه‌ی ادبی نوبل نایل گردید.
مقام جاودانی راسل در دنیای فکر بسبب سهمی است که در تأسیس منطق جدید و در موضوع معرفت انسانی دارد. کتاب اصول ریاضیات (*Principia Mathematica*) که آن را در سه مجلد با همکاری وایتهد[3] [vāythed] (۱۸۶۱ – ۱۹۴۷)، ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی، تألیف کرده است، در تاریخ منطق و ریاضیات یکی از مهمترین و بدیعترین آثار است، و مستقیماً یا بالواسطه الهامبخش بیشتر کارهائی است که در نیم قرن اخیر در منطق جدید انجام گرفته است. هدف کتاب اثبات این مدعا است که ریاضیات و منطق دستگاهی واحد هستند.

ریمان، گئورگ فریدریش برنهارد[4] [georg fridriŝ bernhārd rimān]
۱۸۲۶ – ۱۸۶۶

ریاضیدان بزرگ آلمانی که تأثیری عمیق در چند رشته‌ی ریاضیات، خاصه در هندسه و تئوری توابع، داشته است. در رساله‌ی دکتری خود (۱۸۵۱)، به نام تأسیس یک تئوری عمومی توابع متغیرهای مختلط، این تئوری را بر اصولی کلی و افکار هندسی بنا نهاد. در رساله‌ی معروف خود، به نام در باب فرضهائی که اساس هندسه را تشکیل میدهند (۱۸۵۴)، طرحی برای هندسه آورد که هندسه‌ی اقلیدسی و هندسه‌های نااقلیدسی را فرا میگیرد. ریمان در سال ۱۸۵۹، پس از دیریکله، به استادی دانشگاه گوتینگن رسید. از اوایل دهه‌ی ۱۸۶۰ ببعد، بیماری سل که بدان مبتلی بود شدت یافت، و وی بدان بیماری در ایتالیا درگذشت.
روشها، قضایا، و مفاهیم متعددی که به نام وی معروفند شاهدی گویا بر اهمیت و نفوذ تحقیقات او میباشند.

---

(۱) Peter Gustav Lejeune Dirichlet (۲) Bertrand Russell
(۳) A. N. Whitehead (۴) Georg Friedrich Bernhard Riemann

سترلینگ، جیمز[1] [jeymz sterling]

۱۶۹۲ — ۱۷۷۰

ریاضیدان اسکاتلندی. در ۱۸ سالگی وارد دانشگاه آکسفرد شد، ولی، به سبب اختلافات مذهبی، در ۱۷۱۵ از آنجا طرد گردید. سپس به ونیز رفت، و در آنجا به تدریس ریاضیات پرداخت. در حدود ۱۷۲۵ به لندن باز گشت. از تألیفاتش کتابی در حساب دیفرانسیل است. فرمول سترلینگ (ذیل صفحه‌ی ۴۴۸) بدو منسوب است.

شرودر، ارنست[2] [ernst ŝroder]

۱۸۴۱ — ۱۹۰۲

ریاضیدان آلمانی. کتاب جبر منطق (۳ جلد، ۱۸۹۰ — ۱۸۹۵) وی مجموعه‌ای وسیع و دارای نظم علمی از کارهای پیشینیان شرودر و تحقیقات شخصی اوست، و حساب نِسَب را در بر دارد.

شوارتس، هرمان آماندوس[3] [hermān āmāndus ŝvārts]

۱۸۴۳ — ۱۹۲۱

ریاضیدان آلمانی، که مخصوصاً به سبب کارهایش در هندسه‌ی دیفرانسیل و تئوری توابع معروفست. استاد دانشگاههای هاله، زوریخ، گوتینگن، و برلین بود. نامساوی شوارتس به نام اوست.

فرما، پیر دو[4] [pier do fermā]

۱۶۰۱ — ۱۶۶۵

ریاضیدان فرانسوی و مؤسس تئوری مُدِرن اعداد و نظریه‌ی احتمالات. ظاهراً پیش از دکارت اصول هندسه‌ی تحلیلی را اختراع کرد. روشهائی در حل بعضی مسائل به کار برده است که تا حدی مانند روش حساب دیفرانسیل است. از آن جمله است روشی که در رسم مماس بر یک منحنی ابتکار کرده است، و آن را برای تعیین نقاط ماکزیموم و مینیموم منحنیات بکار برده. اما، شهرت فرما بسبب تحقیقات وی در خواص اعداد صحیح است. فرما در این باب قضایای متعدد بیان کرده است که اگر چه برهان آنها را نیاورده، ریاضیدانهای بعد از وی آنها را به ثبوت رسانیده‌اند. از موارد استثنا قضیه‌ی معروف به آخرین قضیه‌ی فرما (امتناع معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$، که در آن، n عددی طبیعی و بزرگتر از 2 است، و $(x, y, z \in \mathbf{I} - \{0\}$ است، که تا کنون نه دلیلی بر اثبات آن کشف شده است و نه بر ابطال آن.

---

(۱) James Stirling

(۲) Ernst Schröder

(۳) Hermann Amandus Schwarz

(۴) Pierre de Fermat

فوریه، ژان باتیست ژوزف[1] [jān bātist jozef furie]

۱۷۶۸ — ۱۸۳۰

ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی، که به سبب کارهای پیشاهنگش در نمایش توابع با سلسله‌های مثلثاتی مشهور است. از آغاز تأسیس دارالمعلمین عالی پاریس (۱۷۹۵)، در آنجا مدرس بود، و در کار خود چندان موفقیت یافت که به کرسی آنالیز ریاضی در پولیتکنیک پاریس دعوت شد. در ۱۷۹۸ این مقام را رها کرد، و همراه ناپلئون به مصر رفت، و به مؤسسه‌ای که ناپلئون در آنجا دایر کرد خدمات بسیار نمود. در ۱۸۰۱ به فرانسه بازگشت. در ۱۸۱۶ در پاریس سکنی گزید، و در ۱۸۱۷ به عضویت آکادمی علوم انتخاب شد. شاهکار وی تئوری ریاضی هدایت حرارت است، که آن را در کتاب تئوری تحلیلی حرارت (۱۸۲۲) عرضه کرده است، و آن یکی از مهمترین آثاری است که در قرن ۱۹م انتشار یافته. انتشار این کتاب آغاز مرحله‌ای مهم در تاریخ ریاضیات محض و کاربسته میباشد، زیرا، در کتاب مذکور، فوریه تئوری سلسله‌هائی را که به نام وی معروف است عرضه کرده و آنها را در حل بعضی مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی بکار برده، و نشان داده است که تقریباً همه‌ی توابع یک متغیر حقیقی را میتوان به وسیله‌ی سلسله‌های فوریه نمایش داد.

فیبوناتچی، لئوناردو[2] (leonārdo fibonātci)

حدود ۱۱۷۰ — حدود ۱۲۵۰

نخستین ریاضیدان بزرگ قرن سیزدهم. در شهر پیسا (pisa) از بلاد ایتالیا متولد شد، و به لئوناردو دا پیسا[3] نیز معروف است. کلمه‌ی فیبوناتچی به معنی «پسر بوناتچی» یا از اعقاب اوست. فیبوناتچی در مصر، شام، یونان، سیسیل، و جنوب فرانسه سفر کرد، و به دیدار فضلای ممالک مختلف نایل آمد، و با دستگاههای مختلف حساب معمول بین تجار ملل گوناگون آشنا شد. کتابهای ریاضی یونانی و عربی را فرا گرفت. آثارش حاکی از مهارت او در علم حساب است. بر طبق تحقیقات وُپکه، مستشرق معروف، کارهای فیبوناتچی در حل معادلات سیاله، که معمولاً بدیع شمرده میشود، مأخوذ از کارهای ریاضیون مسلمان و مخصوصاً از کتاب فخری است.

کتاب فخری از آثار مشهور ابوبکر محمد کرخی (karxi) (متوفی بین ۴۱۰ و ۴۲۰ هجری قمری، یا بین ۱۰۱۹ و ۱۰۲۹ میلادی) میباشد، که بعضی او را «کرجی» (منسوب به کرج، نزدیک تهران کنونی) خوانده‌اند. کتاب فخری در جبر و حل معادلات سیّاله و از مهمترین آثار علمای اسلامی در این مباحث میباشد.

---

(۱) Jean Baptiste Joseph Fourier

(۲) Leonardo Fibonacci

(۳) Leonardo da Pisa

فیثاغورس[۱] (fisāqures)

در حدود ۵۷۲ ــ ۴۹۷ یا ۴۹۶ یا در حدود ۵۰۱ قم

ریاضیدان و فیلسوف بزرگ یونانی. احتمالاً در جزیره‌ی ساموس[۲] از جزایر دریای اژه متولد شد. گویند بــه مصر، ایران، و هندوستان سفر کــرد. پس از بازگشت، در شهر کروتــونا[۳] در ایتالیای جنوبی جمعیتی سِرّی تأسیس نمود، کـه به کوشش وی و فیثاغوریان[۴] (پیروان او) از حوزه‌های علمی معتبر ایام قدیم گردید، و تا نیمه‌ی دوم قرن چهارم قبل از میلاد دوام داشت.

فیثاغورس عدد را اصل وجـود میدانست، و همین فلسفه‌ی وی از یــک طرف منجر به پیدایش اعتقاد به خواص غریبه برای اعداد گردید، و از طرف دیگر، منجر به تحقیق کمّی در طبیعت شد. کشف بسیاری از قضایای هندسی منسوب به حوزه‌ی علمی فیثاغوری است، ولــی تفکیک اکتشافات شخصی فیثاغــورس از آثــار پیروان او ممکن نیست. ظاهراً مفهــوم کمیات اصم از فیثاغورس یا از فیثاغوریان است.

کاردان[۵] [kārdān]

۱۵۰۱ ــ ۱۵۷۶

ریــاضیدان و طبیب ایتالیائــی و عــالم احکام نجوم. نام ایتالیائــی او جرونیمــو کــاردانــو[۶] [jeronimo kārdāno] است. از جنبه‌ی ریاضی شاخصترین شخصیت زمان خود بــود. در ایــن زمان، ریاضیدانها یکدیگر را در حل مسائلی که به معادله‌ی درجه‌ی سوم بــاز میگردد بــه مبارزه میطلبیدند. کاردان اطلاع یافت که ریاضیدان ایتالیائی دیگری، به نــام نیکولو فونتانا[۷] [nikolo fontānā] (حدود ۱۵۰۶ ــ ۱۵۵۷) و معروف به تارتــاگلیا[۸] [tārtāgliā]، دستوری کلــی برای حل این معادلات یافته است. کاردان از وی اجازه‌ی چاپ آن را خواست، ولی تارتــاگلیا امتناع نمود، اما حاضر شد که آن را در اختیار کاردان بگــذارد مشروط بر اینکـه وی آن را محرمانــه تلقی کند. کاردان، که مردی بی‌بند و بار و سست‌پیمان بود، پس از آنکه بــه دستور تــارتاگلیا دست یافت، آن را در کتاب معروف خود به نام کتاب کبیر چاپ کرد (۱۵۴۵). این کتــاب در تاریخ جبر یکی از آثار بسیار مهم است.

دستور تــارتــاگلیا، کــه به دستور کــاردان معــروف است، جــواب معــادلــه‌ی درجــه‌ی سوم $x^3+px+q=0$ را به صورت ذیل بدست میدهد:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

---

(۱) Pythagoras (۲) Samos (۳) Crotona
(۴) Pythagoreans (۵) Cardan (۶) Geronimo Cardano
(۷) Nicolo Fontana (۸) Tartaglia

کارل، لویس[1] [luis kārol]
۱۸۹۸ — ۱۸۳۲

نام مستعار چارلز لاتویج داجسن[2] [cārlz lātvij dājsen]، ریاضیدان و منطقی و نویسنده‌ی انگلیسی که، با استفاده از رشته‌ی تخصصی خود، هنر «چرندنویسی» را در زبان انگلیسی به اوج رسانید (داستان آلیس در سرزمین عجایب وی مشهور است). کتابی به نام منطق علامتی (۱۸۹۶) دارد که مثالهائی از آن در بسیاری از کتابهای منطق نقل میشود.

کانتور، گئورگ[3] [georg kāntor]
۱۹۱۸ — ۱۸۴۵

ریاضیدان آلمانی که به سبب تأسیس تئوری مجموعه‌ها و تئوری اعداد اصلی و ترتیبی ترانسفینی و سهمش در تنقیح مبانی آنالیز ریاضی معروف است. وی در سن پطرزبورگ (لنینگراد) در روسیه متولد شد، و خانداش در طفولیت وی به آلمان مهاجرت کرد. در ۱۸۷۲ — ۱۹۱۳ استاد ریاضیات دانشگاه هاله بود. آثار عمیق وی در مدت حیاتش چندان مورد استقبال واقع نشد.

تحقیقات اولیه‌ی کانتور در سلسله‌ی فوریه بود، و این تحقیقات منجر به تئوری وی در اعداد اصم گردید، که رواج تام یافت. تئوری مجموعه‌ها، که به وسیله‌ی کانتور تأسیس شد، در تحقیقات متأخر در مبانی ریاضیات و منطق ریاضی تأثیری عظیم داشته است.

کانتور در ۱۸۹۵ — ۱۸۹۷ رساله‌ی مشهور خود را به نام مُساهَمَت در تأسیس تئوری اعداد ترانسفینی منتشر ساخت. در آخر عمر اعصابش مختل شد، و در بیمارستان امراض روانی در هاله درگذشت.

کلاین، فلیکس[4] (feliks klāyn)
۱۹۲۵ — ۱۸۴۹

ریاضیدان آلمانی که در دوره‌ی حیات خود یکی از مؤثرترین و متنفذترین ریاضیون در برنامه‌های ریاضی بود، و نظر وی در هندسه که درخطابه‌ی مشهور او به نام برنامه‌ی ارلانگن[5] (erlāngen)، آمده است در بسط ریاضیات تأثیری عمیق داشته است. این خطابه را کلاین در سال ۱۸۷۲ به مناسبت انتخابش به استادی ریاضیات دانشگاه ارلانگن ایراد کرد. برنامه‌ی ارلانگن منشأ نخستین نهضت بزرگ در برنامه‌های ریاضی بود، و در آلمان، از زمان کلاین، برنامه‌های ریاضی در حال تحول دائمی بوده است، و این تحول به دوره‌ی ریاضیات مدرن پیوسته است. کلاین بسیار مسافرت کرد، و در ریاضیات در ممالک متحده‌ی امریکا تأثیری عظیم داشت، و معلمین بسیار در آنجا تربیت کرد.

کلاین بعدها استاد دانشگاههای لایپزیگ و گوتینگن گردید. وی در معادلات دیفرانسیل

---

(۱) Lewis Carroll (۲) Charles Lutwidge Dodgson
(۳) Georg Cantor (۴) Felix Klein (۵) Erlangen

هیپرژئومتریک و توابع آبلی تحقیقات مهم دارد، و مفهوم توابع هَنْگی ازوست.
کلاین عالمی پرنویس بود، و آثار متعدد در ریاضیات مقدماتی و ریاضیات عالی دارد. دروس و خطابه‌هایش که تحت عنوان ریاضیات مقدماتی از دیدگاه عالی منتشر شده است، مشهور است. در سال ۱۸۹۵، دایرة‌المعارف بزرگ و معروف دایرة‌المعارف علوم ریاضی را تأسیس نمود.

کنوپ، کونراد[۱] [konrād knop]
۱۹۵۷ — ۱۸۸۲

ریاضیدان آلمانی و مؤلف کتابهائی روشن و رایج در رشته‌هائی از ریاضیات. از آن جمله است کتاب تئوری و موارد استعمال سلسله‌های نامتناهی، تئوری توابع (۲ مجلد)، و حل‌المسائل تئوری توابع (۲ مجلد)، که جملگی به زبان انگلیسی ترجمه شده است.

کوشی، اوگوستن لوئی[۲] [ogustan lui kosi]
۱۸۵۷ — ۱۷۸۹

یکی از بزرگترین ریاضیدانهای فرانسوی، که در همه‌ی رشته‌های ریاضیات محض و کاربسته اکتشافاتی دارد، ولی خدمت بزرگ وی اینست که آنالیز ریاضی را بر مبانی محکم استوار ساخت. از ۱۸۱۶ استاد پولیتکنیک («دارالفنون») پاریس، دانشگاه پاریس، و کولژ دو فرانس بود، تا آنکه در انقلاب ۱۸۳۰، به سبب اینکه حاضر نشد نسبت به لوئی فیلیپ سوگند وفاداری یاد کند، این مشاغل را از دست داد، و در ۱۸۳۰ — ۱۸۳۸ در تورن (ایتالیا) استاد فیزیک ریاضی گردید. در ۱۸۳۸ به فرانسه بازگشت، و کرسی سابق خود را در پولیتکنیک باز یافت.
کوشی ریاضیات را — مخصوصاً آنالیز را — نسبت به قرن گذشته سخت دگرگون ساخت. ریاضیدانهای پیشین حسابهای دیفرانسیل و انتگرال را بسط فراوان داده بودند، و آنها را در حل مسائل بسیار متنوع بکار بسته بودند، ولی — پیش از طلوع کوشی — مفاهیم اساسی این مبحث به دقت تقریر نشده بود. کوشی، با روشهای روشن و دقیق خود، که آنها را در سه کتاب معروفش — دوره‌ی آنالیز مدرسه‌ی پولیتکنیک (۱۸۲۱)، حساب بینهایَتْیک (۱۸۲۳)، و دروس موارد استعمال حساب بینهایتیک در هندسه (۱۸۲۶ — ۱۸۲۸) — بکار بسته است، آنالیز ریاضی را منقلب ساخت، و مبانی این علم را، به وسیله‌ی حد و اتصال، تنقیح کرد، و نخستین کسی بود که قضیه‌ی تیلر را دقیقاً به ثبوت رسانید.

کومر، ارنست ادوارد[۳] [ernst eduārd kumer]
۱۸۹۳ — ۱۸۱۰

ریاضیدان آلمانی، که به سبب کارهایش در حساب عالی و هندسه معروف است. در ۱۸۵۵،

---

(۱) Konrad Knopp
(۲) Augustin Louis Cauchy
(۳) Ernst Eduard Kummer

پس از وفات دیریکله، استاد ریاضیات دانشگاه برلین گردید. بزرگترین اکتشاف او، که آن را از لحاظ اهمیت همتراز کشف هندسه‌های نااقلیدسی شمرده‌اند، تئوری اعدادی است که وی آنها را اعداد ایدآل خوانده است، و در تحقیق در آخرین قضیه‌ی فرما به کشف آنها نایل گردید، و بدین مناسبت، جایزه‌ی بزرگ آکادمی علوم پاریس در سال ۱۸۵۷ به وی اعطا شد.

گاوس، کارل فریدریش[1] [kārl fridriŝ gǎs]
۱۷۷۷ – ۱۸۵۵

ریاضیدان آلمانی، که تحقیقات مشهور و اساسی در حساب عالی، جبر، آنالیز ریاضی، هندسه، نجوم، زمینسنجی، و فیزیک ریاضی دارد. در برونسویک متولد شد. معمولاً، گاوس، نیوتن، و ارشمیدس را بزرگترین ریاضیدانها در طی تاریخ میشمارند. نبوغ ریاضی گاوس پیش از سه‌سالگی آشکار شد. دوکِ برونسویک (متوفی در ۱۸۰۶) بر حسب تصادف از نبوغ وی اطلاع یافت، و او را تحت حمایت خود قرار داد، و گاوس تا آخر عمر وی از این حمایت برخوردار بود. گاوس در ادبیات یونان و روم قدیم نیز استعدادی قرین استعدادش در ریاضیات داشت، و چندی در این اندیشه بود که زبانشناسی را رشته‌ی کار خود قرار دهد، اما کشفی که در ۳۰ مارس ۱۷۹۶ بدان نایل شد راه او را مشخص کرد: در این روز، که در تاریخ ریاضیات فراموش‌نشدنی است، گاوس به حل مسئله‌ی محاط کردن کثیرالاضلاعهای منتظم در دایره با پرگار و ستاره، که از زمان اقلیدس ببعد، یعنی قریب ۲۲۰۰ سال، ریاضیدانها با آن زورآزمائی میکردند، نایل آمد. از این ببعد، ریاضیات را رشته‌ی کار خود قرار داد، و به السنه فقط برای تفنن میپرداخت، اما قدرتش در این رشته زایل نشد، چنانکه در ۶۰ سالگی به زبان روسی تسلط یافت. اکتشافات و تحقیقات ذیل حاکی از فکر پیشرس او در ریاضیات است: در ۱۲ سالگی هندسه‌ی اقلیدسی را مورد انتقاد قرار داد، و در ۱۳ سالگی اندیشه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی در وی پدید آمد؛ در ۱۵ سالگی برهانی دقیق برای قضیه‌ی معروف به دوجمله‌ای نیوتن آورد؛ در ۱۷ سالگی به نقصی در برهان لژاندر[2] [loĵāndr]، ۱۷۵۲ – ۱۸۳۳، ریاضیدان شهیر فرانسوی، برای قضیه‌ای در علم حساب عالی برخورد، و در ۱۹ سالگی نخستین برهان خود را برای این قضیه آورد؛ در ۱۸ سالگی طریقه‌ی معروف به کمترین مربعات را اختراع کرد؛ در حدود ۲۲ سالگی توابع بیضوی و تناوب مضاعف آنها را کشف کرده بود. در ۱۸۰۱ کتاب مشهور وی به نام تحقیقات در علم حساب انتشار یافت؛ این شاهکار وی پایه‌ای بیسابقه برای دقت در استدلال برقرار کرد. در اواسط عمر گفته است که پیش از ۲۰ سالگی چندان فکر تازه به ذهنش هجوم آورده بود که مجالی برای تنظیم آنها نداشت، و فقط جزء مختصری از آنها را ضبط کرده. بعضی از آنها را بعدها با سبک و انشاء متینی که از خصوصیات آثار اوست تدوین و منتشر کرد، و بعضی دیگر پس از مرگ وی در میان یادداشتهایش یافت شد. گاوس در ۱۸۰۷ به مدیریت رصدخانه و استادی علم نجوم در دانشگاه گوتینگن منصوب شد. از کارهای مهم وی در ریاضیات محض،

---

(۱) Carl Friedrich Gauss

(۲) Legendre

جز آنچه ذکر شد، دگرگون ساختن علم حساب عالی، و وارد کردن مفهوم همنهشتی در این علم، و تأسیس تئوری اعداد جبری را باید نام برد. کار نهائی او در باب سلسلهی معروف به سلسلهی هیپرژئومتریک نخستین کار دقیق در باب سلسلههای نامتناهی است. به اهمیت توپولوژی واقف بود. «قضیهی اساسی آنالیز» را، که امروز به نام کاشف مجدد آن، کوشی، معروف است، کشف کرد (۱۸۱۱)، ولی آنرا منتشر نساخت. گاوس در ریاضیات کاربسته نیز دستی توانا داشت.

لاگرانژ، ژوزف لوئی[1] [ĵozef lui lāgrānĵ]

۱۸۱۳ – ۱۷۳۶

ریاضیدان فرانسوی که تحقیقات بسیار مهم در تئوری اعداد و در مکانیک سماوی دارد. در شهر تورن (ایتالیا) متولد شد. در حدود ۱۶ سالگی به استادی هندسه در آکادمی توپخانه منصوب گردید. در ۱۷۶۱ به عنوان بزرگترین ریاضیدان عصر شناخته شد. در ۱۷۷۶، به توصیهی دالامبر و اویلر و به دعوت فردریک کبیر، به برلین رفت، و ۲۰ سال در آنجا زیست، و علاوه بر اکتشافاتی در جبر، مکانیک، و نجوم، اثر نامدار خود، مکانیک تحلیلی (۱۷۸۸) را فراهم ساخت. بعد از وفات فردریک، به دعوت لوئی XVI به فرانسه رفت. در ۱۷۹۳ به ریاست کمیسیون اوزان و مقیاسات منصوب شد. در ۱۷۹۷ استاد مدرسهی جدیدالتأسیس پولیتکنیک پاریس گردید.

لاگرانژ سخت مورد تحسین ناپلئون بود. از آثار مشهور دیگرش تئوری توابع تحلیلی (۱۷۹۷) و دروسی در حساب توابع (۱۸۰۱) است.

لامبرت، یوهان هاینریش[2] [yohān hāynriŝ lāmbert]

۱۷۷۷ – ۱۷۲۸

ریاضیدان، فیزیکدان، و منجم آلمانی، که مخصوصاً به سبب ثابت کردن اصم بودن π معروف است. تئوری توابع هذلولوی [hozlulavi] را منظماً بسط داد، و علاماتی را که امروز برای این توابع بکار میرود وضع کرد. در باب خطوط موازی، تئوری تصاویر برای ساختن نقشههای جغرافیائی، و نیز در طرق تعیین مدارات ستارگان دنبالهدار تحقیق کرد.

لانداو، ادموند[3] [edmund lāndă]

۱۹۳۸ – ۱۸۷۷

ریاضیدان آلمانی که کارهای اساسی وی در تئوری اعداد و تئوری توابع است. در ۱۹۰۹ – ۱۹۳۳ استاد دانشگاه گوتینگن بود. از آثار مشهورش کتاب توزیع اعداد اول (۲ جلد)، دروس تئوری اعداد (۳ جلد)، و مبانی آنالیز است.

---

(۱) Joseph Louis Lagrange
(۲) Johann Heinrich Lambert
(۳) Edmund Landau

لایبنیتز، گوتفرید ویلهلم[1] [gotfrid vilhelm lāybnitz]

۱۶۴۶ — ۱۷۱۶

فیلسوف و ریاضیدان آلمانی. اغلب، او و نیوتن را بزرگترین متفکرین قرن ۱۷م محسوب میدارند. لایبنیتز حقوقدان، سیاستمدار، مورخ، و عالم الاهیات نیز بود، و از لحاظ وسعت فکر کم‌نظیر است.

خدمت بزرگ وی به ریاضیات کشف حسابهای دیفرانسیل و انتگرال است، و او مستقل از نیوتن به این اکتشاف نایل آمد. شرح مشاجرات تلخی که، مخصوصاً بین طرفداران این دو دانشمند، بر سر تقدم یکی بر دیگری در این اکتشاف واقع شده است از صفحات اسف‌انگیز تاریخ ریاضیات است.

لایبنیتز معتقد بود که باید در همه‌ی علوم به دو وسیله ــ یکی یک زبان عمومی و دیگری حساب استدلال ــ تجدید نظر به عمل آید. زبان عمومی علمی باید شامل علاماتی برای نمایش دادن مفاهیم ساده باشد به نحوی که بیان کردن سایر مفاهیم با ترکیب این علامات ممکن باشد. در حساب استدلال، برای بعضی مفاهیم (مانند «و»، «یا»، و نسبت جزئیت در مجموعه‌ها) علاماتی وضع کرد. از این جهت، باید او را از پیشروان قدیم منطق علامتی شمرد.

لیندمان، فردیناند فون[2] [ferdinānd fon lindemān]

۱۸۵۲ — ۱۹۳۹

ریاضیدان آلمانی که مخصوصاً به جهت اثبات متعالی بودن عدد π معروفست. در آلمان، فرانسه، و انگلستان تحصیل کرد. به استادی دانشگاههای فرایبورگ و مونیخ رسید. اثبات متعالی بودن عدد π امتناع تربیع دایره را با پرگار و ستاره محقق ساخت.

لیوویل، ژوزف[3] [ĵozef liuvil]

۱۸۰۹ — ۱۸۸۲

ریاضیدان فرانسوی که به جهت تحقیقاتش در آنالیز، تئوری اعداد، و هندسه‌ی دیفرانسیل معروف است. در ۳۰ سالگی به عضویت آکادمی علوم انتخاب شد، و کمی بعد به استادی دانشگاه پاریس و مؤسسه‌ی معروف کولژ دو فرانس[4] [koleĵ do frāns] رسید. در ۱۸۳۶ نشریه‌ی معروف مجله‌ی ریاضیات محض و کاربسته را تأسیس کرد. آثارش مشتمل بر قریب چهارصد مقاله و یادداشت است، که بیش از نیمی از آنها موقوف به تئوری اعداد میباشد. نخستین کسی است که وجود اعداد متعالی را ثابت کرد، و مجموعه‌ای نامتناهی از این اعداد ساخت (۱۸۴۴). روش وی در مبحث معادلات دیفرانسیل و مسائل مرزی وابسته به آنها، در قرن بیستم، در فیزیک ریاضی و در تئوری معادلات انتگرال اهمیت فراوان یافته است.

---

(۱) Gottfried Wilhelm Leibniz
(۲) Ferdinand von Lindemann
(۳) Joseph Liouville
(۴) Collège de France

ماکلورن، کالین[1] [kālin mākloran]

۱۷۴۶ – ۱۶۹۸

ریاضیدان و فیزیکدان اسکاتلندی. در حساب دیفرانسیل و انتگرال و مخصوصاً در مسائل ماکزیموم و مینیموم تحقیقات عمده دارد. دستور معروف به نام وی برای بسط $f(x)$ بر حسب قوای x در یکی از آثارش به نام کتاب نرخ تغییرات (۱۷۴۲) آمده است.

ماکلورن یکی از تواناترین ریاضیدانهای قرن ۱۸م بود، ولی نفوذ او پیشرفت آنالیز را در انگلستان به تأخیر انداخت، زیرا وی سخت متمسک به «روش نرخ تغییرات» نیوتن بود، و این امر ورود روشهای تواناتر آنالیز را در کارهای ریاضیدانهای انگلیسی مدتها معوق ساخت.

مره. اوگ شارل[2] [ug ŝārl mere]

۱۹۱۱ – ۱۸۳۵

ریاضیدان فرانسوی. مستقل از کانتور، تعریف اعداد حقیقی را به وسیلهی رشتههای اساسی اعداد منطق بسط داد (۱۸۷۲). مهمترین اثرش کتاب دروس جدید در آنالیز بینهایتیک و موارد استعمال هندسی آن (۴ جلد، ۱۸۹۴ – ۱۸۹۸) است. به اصلاح روش تدریس هندسه توجه داشت، و دو کتاب در هندسهی مقدماتی تألیف کرد.

مواور، آبراهام دو[3] [ābrāhām do muāvr]

۱۷۵۴ – ۱۶۶۷

ریاضیدان فرانسوی. از ۱۸ سالگی عمر خود را در لندن گذرانید. تألیفاتی در حساب نرخ تغییرات (۱۶۹۵) و نظریهی احتمالات (به نام اصول شانس، ۱۷۱۸، که آن را به نیوتن تقدیم کرد) و غیره دارد. در تحقیقات خود در مثلثات، فرمول

$$(\sin\alpha + i\cos\alpha)^n = \sin n\alpha + i\cos n\alpha$$

را، که به فرمول مواور معروف است، کشف کرد. در قضیه تقدم نیوتن و لایبنیتز در کشف حساب بینهایتیک به عنوان حکم انتخاب شد (۱۷۱۲).

مینکوفسکی، هرمان[4] [hermān minkofski]

۱۹۰۹ – ۱۸۶۴

ریاضیدان آلمانی. وی واضع هندسهی اعداد است، و تحقیقاتش در اجسام محدب، هندسهای چهاربعدی، و مبانی ریاضی تئوری *نسبیت* اینشتین معروف میباشد.

---

(۱) Colin Maclaurin
(۲) Hughues Charles Meray
(۳) Abraham de Moivre
(۴) Hermann Minkowski

نیوتن، آیزک[۱] [āyzek niuton]

۱۷۲۷ — ۱۶۴۲

فیزیکدان و ریاضیدان انگلیسی و یکی از بزرگترین شخصیتها در سراسر تاریخ علم. در آغاز استعداد خاصی ازو بروز نکرد، ولی در ۱۶۶۸ مسلم بود که در ریاضیات و فیزیک آتیه‌ی درخشانی دارد. در ۱۶۶۴ به تحقیق در سلسله‌های نامتناهی پرداخت، و قریب به همین ایام بود که قاعده‌ی معروف بسط $(a+b)^n$ را کشف کرد. در ۱۶۶۵ تحقیقات خود را در حساب دیفرانسیل و انتگرال ـ که وی آن را تئوری نرخ تغییرات[۲] میخواند ـ آغاز نمود؛ او و لایبنیتز، مستقل از یکدیگر، این حساب را کشف کردند. در ۱۶۶۶ مشغول تحقیق در تئوری نور بود، و کارهای خود را در تئوری گرانش آغاز نمود. در ۱۶۶۹ به استادی ریاضیات در دانشگاه کیمبریج رسید. گویند در نشر اکتشافات خود تزلزل داشت. بزرگترین اثر وی کتاب اصول[۳] (اصول ریاضی فلسفه‌ی طبیعی) است.

واندرموند، آلکساندر تئوفیل[۴] [āleksāndr teofil vāndermond]

۱۷۹۶ — ۱۷۳۵

ریاضیدان فرانسوی. در تئوری معادلات و مبحث حرارت تحقیق کرد. شهرت وی به سبب کارهایش در تئوری دترمینانها است.

وایرشتراس، کارل تئودور ویلهلم[۳] [kārl teodor vilhelm vāyerŝtrās]

۱۸۹۷ — ۱۸۱۵

ریاضیدان آلمانی و یکی از مؤسسین تئوری مدرن توابع. از ۱۸۵۶ استاد دانشگاه برلین بود. علاوه بر کارهای بدیعش در تئوری توابع متغیرهای مختلط، در تئوری توابع متغیرهای حقیقی و تقارب سلسله‌ها و حاصلضربهای نامتناهی تحقیقات مهم دارد. مثالی که از تابع متصلی آورده است که در هیچ نقطه‌ی حوزه‌ی تعریف خود مشتق ندارد در تاریخ ریاضیات مشهور است. همه‌ی آثار ریاضی وی از جهت تأکید در روشنی و دقت منطقی ممتاز میباشد.

در اواسط قرن ۱۹م، توسل به مشهودات، و فقدان مبانی محکم برای شاخه‌های مختلف ریاضیات، آشفتگی فراوان در این علم پدید آورده بود، به حدی که بسیاری از نتایج آن با تردید تلقی میشد، و مخصوصاً این امر در حسابهای دیفرانسیل و انتگرال ـ که در آن مفهوم بینهایت نقش عمده‌ای دارد ـ بسیار جالب بود. بهمین جهت، تنقیح مبانی آنالیز مورد توجه قرار گرفت. پس از اینکه وایرشتراس تابع متصل سابق‌الذکر را عرضه کرد، لزوم تنقیح اصولیتر و عمیقتری محسوس گردید، و معلوم شد که، در آنالیز، استناد به مشهودات قابل قبول نیست، زیرا، بر طبق تعبیر هندسی مشتق، این مثالی که وایرشتراس آورد در حکم منحنی متصلی

---

(۱) Isaac Newton　(۲) Theory of Fluxions　(۳) Principia

(۴) Alexandre Théophile Vandermonde

(۵) Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

است که در هیچ یک از نقاط خود مماس نـدارد. از تحقیقات عمیقتری که در این باب بعمل آمد آشکار شد که پایه‌ای کـه همه‌ی آنالیز بـر آن استوار است دستگاه اعداد حقیقی است، و لهذا باید بــه کنه این دستگاه پی برد. بنا بر این، وایرشتراس برنامه‌ای برای طرح دقیق ایــن دستگـاه و، سپس، استـوار ساختن سایر مفاهیم آنالیز بر این دستگاه در نظر گرفت. این برنامه، که بـه «حسابیدن آنالیز» [hesābidan] [مصدر ساخته‌شده از «حسـاب»] (مقصود از «حسابیدن» یک رشتـه‌ی ریاضیات تـأسیس آنست بر اساس اصــول موضوعـه‌ی تئوری اعـداد حقیــقی) معروفست، در عمل مشکلتر و پیچیـده‌تر بود از آنچـه در بادی امر بنظر میرسید، امـا سرانجام وایرشتراس و پیروانش آنرا جامه‌ی عمل پوشانیدند.

ون، جان[1] [jān ven]

۱۹۲۳ ــ ۱۸۳۴

منطقی و ادیب انگـلیسی، و مـدرس منطق. آثـارش مشتمل است بر منطـق شانس (۱۸۶۶)، منطق علامتی (۱۸۸۱)، و اصول منطق اختـباری (۱۸۸۹).

هرمیت، شارل[2] [šārl hermit]

۱۹۰۱ ــ ۱۸۲۲

ریاضیدان فرانسوی. در ۲۰ سالگی قوه‌ی خلاقه‌ی وی در ریاضیات بارز شد. در ۱۸۶۹ استاد دارالمعلمین عالی پاریس، و در ۱۸۷۰ استاد دانشگاه پاریس گردید. هرمیت از پیشقدمان بسط تئوری فرمهای جبری و تئوریهای تـوابع بیضوی و آبـلی بود. از کارهـای وی که حاکـی از قوه‌ی ابداع و قـدرت اوست یکـی حـل معادله‌ی کلی درجـه‌ی پنجم است بـه وسیله‌ی تـوابع بیضوی هَـنگی، و دیگری اثبات متعالی بودن عدد e. بیشتر آثـارش، بـه سبب زیبائی سبک وی، کیفیت هنری دارد. هـرمیت سعه‌ی صدر داشت، و بسیاری از ریاضیدانـان جوان به تشویق او بر آمدند.

هولدر، اوتو[3] [oto holder]

۱۹۳۷ ــ ۱۸۵۹

ریاضیدان آلمانــی، که تحقیقــات اساسی در جبر، تئوری پتانسیـل، تئوری تــوابـع، تئوری سلسله‌های متباعد، و حساب عالی دارد.

هیلبرت، داوید[4] [dāvid hilbert]

۱۹۴۳ ــ ۱۸۶۲

ریاضیدان آلمانی کـه در ریـاضیات جدید تـأثیر عظیمی داشته است. در ۱۸۹۵ استاد ریاضیات

---

(۱) John Venn (۲) Charles Hermite (۳) Otto Hölder
(۴) David Hilbert

دانشگاه گوتینگن گردید، و تا آخر عمر در آنجا ماند. پس از وفات هانری پوانکاره در ۱۹۱۲، عموماً هیلبرت را بزرگترین ریاضیدان جهان میشمردند. شاگردان بسیار از اطراف و اکناف جهان به دور او گرد میآمدند، و دروس وی برای آنان الهامبخش بود. در بسیاری از رشتههای ریاضیات اکتشافات مهم دارد. در ۱۸۹۸ ـ ۹۹ تحلیل عمیقی از هندسهی اقلیدسی به عمل آورد، و اصول موضوعهای برای هندسهی اقلیدسی تدوین کرد که فاقد نواقص اصول موضوعهی اقلیدس بود، و راهنمای روش اصل موضوعی جدید گردید. مفهوم «فضای هیلبرت» از تحقیقات وی در معادلات انتگرال ناشی شد. در مبانی منطقی ریاضیات تحقیقات فراوان نمود، و فلسفهای صوری برای رهانیدن این علم از ناسازگاریها پیشنهاد کرد، ولی تحقیقاتی که از ۱۹۳۰ ببعد به وسیلهی منطقیون و ریاضیدانها به عمل آمد ثابت کرد که این برنامه به سامان نمیرسد.

فهرست علامات

قسمتهای I و II جلد اول

شمارهها معمولاً مربوط به صفحهای است که علامتی برای نخستین بار رسماً وارد کار شده است. علامتی که به معانی متفاوت خاص بکار رفته است در هر مورد در جای خود معرفی شده است.

فهرست تفصیلی الفبائی مندرجات کتاب

قسمتهای I و II جلد اول

(۱) شماره‌های لاتینی مربوط به صفحات مقدمه (آغاز قسمت I) و شماره‌های فارسی مربوط به متن دو قسمت کتاب است. حرف «ذ» نشانه‌ی ذیل صفحه است.

(۲) ذکر همه‌ی مواردی که اصطلاحی در کتاب آمده است فهرست را بسیار طولانی، و به همان نسبت، بیفایده میسازد. بدین جهت، معمولاً مواردی که اطلاع مهمی (تعریف یا خواص اساسی) بدست میدهند در فهرست آتیه ذکر شده است. شماره‌ای که احیاناً بر خلاف ترتیب در ابتدا، بعد از عنوانی، آمده و از سایر شماره‌ها با علامت «؛» جدا شده حاکی از موردی است که اطلاع اساسی را بدست میدهد.

(۳) اگرچه در این گونه فهرستها اصل بر این است که عناوین مرکب را در ردیف جزء خاص عنوان بجویند (مثلاً، «نامساوی مثلث» را در ردیف «مثلث»، «مجموعه‌ی یکانی» را در ردیف «یکانی»، و «ضرب سلسله‌ها» را در ردیف «سلسله»)، برای تسهیل کار مراجعه کنندگان، خود را سخت بدین اصل پایبند نساخته‌ایم، بلکه، به وسیله‌ی عناوین مستقل و ارجاعات، فهرست را چنان تنظیم کرده‌ایم که جوینده به مطلب مورد نظر خود، ولو مطلبی جزئی، دست یابد.

(۴) علامت «←» به معنی «رجوع شود به» است. به مطالبی که در فهرست تحت عنوان مستقل آمده‌اند، عنداللزوم با ذکر عبارت «عنوان مستقل»، اشاره شده است.

مآخذ امثله و تمرینات

بعضی از امثله و بسیاری از تمرینات کتاب حاضر از آثار خارجی مـأخوذ است. فهرست آتیه مشتمل بر نام و نشان اهـمّ مآخذی است که در این باب کما بیش مورد استفاده بوده‌اند.

Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic,* Philadelphia (Saunders), 1965.

Aubert, P. et Papelier, G., *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie,* 2 vol., Paris (Vuibert), 1961.

Beckenbach, E. and Bellmann, R., *An Introduction to Inequalities,* New York (Random House), 1961.

Blank, A. A., *Problems in Calculus and Analysis,* New York and London (John Wiley), 1966.

Burkill, J. C. and Cundy, H. M., *Mathematical scholarship problems,* Cambridge (University Press), 1962.

Dumas de Rauly, D., *Problèmes de mathématiques,* Paris (Gauthier-Villars), 1963.

Eggleston, H. G., *Elementary Real Analysis,* Cambridge (University Press), 1962.

Falckenberg, H., *Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen,* Berlin (Walter de Gruyter), 1931.

Ferrar, W. L., *A Text-Book of Convergence,* Oxford (Clarendon Press), 1938.

Gleason, A. M., *Fundamentals of Abstract Analysis,* Reading, Massachusetts (Addison-Wesley), 1966.

Hardy, G. H., *A course of Pure Mathematics,* Cambridge (University Press), 1948.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G., *Inequalities,* Cambridge (University Press), 1934.

Knopp, K. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen,* Berlin (Springer), 1931.

Kurschak, J., *Hungarian Problem Book,* 2 vols., New York (Random House), 1963.

Lovaglia, A. R. and Preston, G. C., *Foundations of Algebra and Analysis,* New York (Harper & Row), 1966.

Matematika b Shkole, Moskva, 1964-1967.

Novoselov, S. I., *Spetsialnyi kurs elementarnoi Algebri,* Moskva, 1965.

Ostrowski, A., *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung,* I, Basel (Birkhauser), 1964.

Rankin, R. A., *An Introduction to Mathematical Analysis,* London (Pergamon Press), 1963.

Rivaud, J., *Exercices d'Algèbre,* I, Paris (Vuibert), 1964.

Rosser, J. B., *Logic for Mathematicians,* New York (McGraw-Hill), 1953.

Scott, D. B. and Tims, R. S., *Mathematical Analysis,* Cambridge (University Press), 1966.

Shklarsky, D. O., Chentzov, N. N., and Yaglom, I, M., *The USSR Olympiad Problem Book,* San Francisco and London (Freeman), 1962.

Whitesitt, J. E., *Boolean Algebra,* Reading, Massachusetts (Addison-Wesley), 1961.

Whitworth, W. A., *Choice and Chance,* New York and London (Hafner), 1965.

Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M., *Challenging Mathematical Problems,* 2 vols., San Francisco and London (Holden-Day), 1964.

فرهنگ اصطلاحات

انگلیسی ـ فارسی

Abelian — آبلی
　— group — گروه ـ
abscissa — طول [مختص]
absolute — مطلق
absolute convergence — تقارب مطلق
absolutely convergent — مطلقا متقارب
absolute value — قدر مطلق
absorption — جذب
abstract — مجرد
　— mathematics — ریاضیات ـ
　— system — دستگاه ـ
abstraction — تجرید
　intuitive principle of — اصل شهودی ـ
absurd relation — نسبت ممتنع
accumulation point — نقطه‌ی اجتماع
addition — جمع
additive — اضافی؛ جمعی
　— group — گروه جمعی
affirmative — موجب [گزاره]
affix — نگار
Aleph — الف [א]
algebra — جبر
　Boolean — — ـ بولی
　— of sets — ـ مجموعه‌ها
　universal — — ـ عمومی
algebraic — جبری
　— number — عدد ـ
alternating — متناوب
　— series — سلسله‌ی ـ
analysis — تحلیل
　(mathematical) — — آنالیز (ریاضی)
and — و
«and so on» — «و غیره»
antecedent — مقدم [ترکیب شرطی]
antisymmetric — قناس
antisymmetry — قناسی
applied mathematics — ریاضیات کاربسته
approximate — تقریبی
approximation — تقریب
　best — — بهترین ـ
　decimal — — ـ اعشاری
arbitrary — دلخواه
Archimedean — ارشمیدسی
　— property — خاصیت ـ
argument — شناسه
arithmetic — حساب (علم)
　— mean — واسطه‌ی عددی
　— progression — تصاعد عددی
　higher — — حساب عالی
ascending powers — قوای صعودی
associate to the left — الحاق به چپ
associative — شرکتپذیر
associativity — شرکتپذیری
assymmetric — نامتقارن
asymptote — مجانب
asymptotic — مجانبی؛ مجانبوار
at most countable (یا denumerable یا enumerable) — منتهاشمارا
　برای توضیح به countable رجوع کنید.
atom — اتم
attribute — صفت
automorphic — اوتومورف
automorphism — اوتومورفیسم
axiom — اصل موضوع
　—s — بدیهیات اولیه؛ علوم

transfinite _ — ترانسفینی
cartesian — کارتزین
_ product — حاصلضرب _
case — حالت
proof by _s — دلیل به طریقه‌ی حالات
categorical — جازم
category — کاتگوری
Cauchy sequence — رشته‌ی کوشی
Cauchy's product of series — حاصلضرب کوشی سلسله‌ها
cell — حجره
characteristic function — تابع مشخّص
circuit — مدار (برق)
class — طبقه [برش]
upper _ — _ی بالا
lower _ — _ی پایین
closed — بسته
closure — بست
coefficient — ضریب
binomial _ — _ دوجمله‌ای
multinomial _ — _ بسجمله‌ای
combination — ترکیب
_ with repetition — _ با تکرار
combinatorial analysis — آنالیز ترکیبیاتی
combinatorial mathematics — ریاضیات ترکیبیاتی
combinatorics — ترکیبیات
commensurable — متوافق
common difference — قدرنسبت [تصاعد عددی]
common divisor — مقسوم‌علیه مشترک
highest _ — بزرگترین _
common multiple — مضرب مشترک
least _ — کوچکترین _
common ratio — قدر نسبت [تصاعد هندسی]
commutative — تعویضپذیر
commutativity — تعویضپذیری
comparable — قابل مقایسه
comparison tests — قواعد مقایسه

متعارفه [اصطلاحات سابق]
axiomatic — اصل موضوعی
axis — محور
axes of coordinates — _های مختصات
imaginary _ — _ موهومی
real — _ حقیقی

backward induction — استقراء قهقرائی
base — پایه [در قوه]؛ مبنا [شمار، لگاریتم]
behaviour — رفتار
best approximation — بهترین تقریب
betweenness — بینیت
biconditional — ترکیب دوشرطی
bijection — بیژکسیون
bijective — بیژکتیو
binary — ثنائی [شمار]؛ دوتائی [نسبت، عمل]
binomial — دوجمله‌ای
_ coefficient — ضریب _
bisection — تنصیف
repeated _s — تنصیفات متوالیه
Boolean — بولی
_ algebra — جبر _
_ function — تابع _
bound — بند [رشته، مجموعه]؛ پابند [متغیر]
_ occurrence — مورد پابند
_ variable — متغیر پابند
bounded — محدود
_ above — از بالا _
_ below — از پایین _
boundedly — محدوداً
brace — ابرو
bracket — کروشه
bridge — بریج [بازی]

calculus — حساب دیفرانسیل و انتگرال
cancellation — اسقاط [قاعده]
cap — طاق [$\cap$]
cardinal (number) — عدد اصلی
finite _ — _ متناهی
infinite _ — _ نامتناهی

complement متمم
complete تمام
— set مجموعه‌ی —
completeness تمامیت
— axiom اصل موضوع —
complex مختلط
— number عدد —
— plane صفحه‌ی —
component مؤلفه
composite مرکبه [نسب و توابع]
composite function تابع مضاف
composite number عدد مرکب
composite sentence گزاره‌ی مرکب
composition ترکیب [نسب و توابع]
compound مرکب [گزاره]
conclusion حکم [قضیه]
condensation test قاعده‌ی تراکم
condition شرط
necessarary — لازم —
necessary and sufficient — لازم و کافی
sufficient — کافی —
conditional ترکیب شرطی
— connective رابط —
conditional convergence تقارب مشروط
conditionally convergent متقارب مشروط
conditional sentence گزاره‌ی شرطی
congruence همنهشتی
congruent همنهشت
conjecture حدس
conjugate مزدوج
conjugation ازدواج
conjunction ترکیب عطفی
conjunctive normal form صورت نرمال عطفی
connected مرتبط
connectedness ارتباط
connective رابط [منطق]
consequence نتیجه
consequent تالی [ترکیب شرطی]
consistent سازگار
constant ثابت
— function تابع —
Euler's — — اویلر
constituent سازا
continuum متصله
contradiction تناقض
contradictory متناقض
contrapositive عکس نقیض
convergence تقارب
absolute — — مطلق
conditional — — مشروط
dominated — — مغلوب
general principle of — ضابطه‌ی کلی —
convergent متقارب
converse عکس [نسبت، گزاره]
converse domain حوزه‌ی عکس
coordinate مختص
first — — اول
second — — دوم
coordinates مختصات
correct to n places درست تا n رقم
correspondence تناظر
one-to-one — — یکبیک
countable شمارا؛ منتهاشمارا

استعمال این اصطلاح متشتت است. کسانی که آن را به معنی شمارا بر طبق تعریف ما بکار میبرند منتهاشمارا را با finite or یا at most countable یا countable بیان میکنند؛ و کسانی که آن را به معنی منتهاشمارا میگیرند معنی شمارا را با عبارت countably infinite بیان میکنند. اصطلاحات denumerable و enumerable نیز مانند countable بکار میروند.

در هر نوشته‌ی انگلیسی که این اصطلاحات در آنها میآید باید قبلاً تعریف هر اصطلاح را بدان گونه که مؤلف بکار برده است تشخیص داد تا سوء تفاهم روی ندهد.

countably infinite شمارا
برای توضیح به countable رجوع کنید.
counterdomain حوزه‌ی عکس
counter example مثال نقض
counterimage تصویر عکس
counting شمردن
counting number عدد شمارنده
cover پوشاندن
cube مکعب
perfect – – کامل
cube root کعب
cut برش
Dedekind – – ددکیند
cybernetics سیبرنتیک

decimal اعشاری
– expansion بسط –
– representation نمایش –
decimal point ممیز
deck دست [ورق گنجفه]
decreasing نزولی [رشته؛ تابع]
strictly – اکیداً نزولی –
deduction استنتاج
definite مشخص
definition تعریف
– by induction – به استقراء
inductive – – استقرائی
degenerate تبهگن
degree درجه
dense چگال
denumerable شمارا؛ منتهاشمارا
برای توضیح به countable رجوع کنید.
denumerably infinite شمارا
برای توضیح به countable رجوع کنید.
dependent variable متغیر تابع
descending powers قوای نزولی
description شرح [منطق]
definite – – مشخص
indefinite – – نامشخص
diagonal قطر [نسبت]
diagonal process طریقه‌ی قطری

diagram نمودار؛ تصویر
Argand – نمودار آرگان
Euler – تصویر اویلر
tree – نمودار شجری
Venn تصویر ون
difference تفاضل
symmetric – – متقارن
digit رقم
direct product حاصلضرب مستقیم
discriminant مبین
disjoint sets مجموعه‌های از هم جدا
disjunction ترکیب فصلی
disjunctive normal form
صورت نرمال فصلی
dissimilar نامتشابه
distance فاصله
– function تابع –
distributive توزیعی؛ توزیعپذیر
distributivity توزیعپذیری
divergence تباعد
divergent متباعد
properly – – مشخص
divide عاد کردن
divisibility قابلیت قسمت
divisible قابل قسمت
division تقسیم
divisor مقسوم‌علیه
prime – – اول
domain حوزه [نسبت]
– of definition
حوزه‌ی تعریف (تابع)
dominated مغلوب
– convergence تقارب –
double مضاعف [رشته؛ حاصلجمع]
– sequence رشته‌ی –
– sum حاصلجمع –
dual دوگان؛ جفت
دوگان در قسمت فارسی–انگلیسی دیده شود.
duality دوگانی
دوگان در قسمت فارسی–انگلیسی دیده شود.
principle of – اصل دوگانی (جفت)

dummy variable متغیر ظاهری
duodecimal دوازدهی [شمار]
dyadic ثنائی [شمار]

element عضو [مجموعه، دستگاه]
identity – – خنثا
neutral – – خنثا
elimination حذف
empty set مجموعه‌ی خالی
endomorphism آندومورفیسم
endpoint انتها [بازه]
entire صحیح [کثیرالجمله‌ها، توابع]
enumerable شمارا؛ منتهاشمارا
برای توضیح به countable رجوع کنید.
enumerably infinite شمارا
برای توضیح به countable رجوع کنید.
equality تساوی
equation معادله
linear– –ی خطی
quadratic – –ی درجه‌ی دوم
equimultiple همضریب
equinumerous همعدد
equipotential همقوت
equivalence
هم‌ارزی [نسبت]؛ معادله [منطق]
equivalence class دسته‌ی هم‌ارز
equivalence relation نسبت هم‌ارزی
equivalent معادل [منطق؛ رشته‌ها]
Euclidean اقلیدسی
– line خط –
– plane صفحه‌ی –
Euler's constant ثابت اویلر
Euler's diagram تصویر اویلر
even زوج [عدد]
exclusive «or» یاء به معنی منع جمع
exhaustion افناء
existence وجود
proof of – اثبات –
existential quantifier سور وجودی
expansion بسط
decimal – – اعشاری

exponent نما؛ نماینده؛ قوه
در a^x، x نما یا نماینده است، ولی
آن را قوه (power) هم میخوانند،
اگرچه، a^x خود قوه‌ی xم a است، و
به عبارت دیگر، حاصل رسانیدن a
به نمای x میباشد.
expression عبارت
extended real number system
دستگاه منبسط اعداد حقیقی
extension توسیع [نسب و توابع]؛ گسترش
principle of – اصل گسترش
extremes طرفین [تناسب]

face value ارزش اسمی [اوراق گنجفه]
factor عامل
linear – – خطی
factorial فاکتوریل
factorization تجزیه به عوامل
false دروغ
family خانواده
field میدان
ordered – – مرتب
figure رقم
significant – – بامعنی
finite متناهی
– cardinal عدد اصلی –
– number عدد –
– set مجموعه‌ی –
first coordinate مختص اول
first difference, principle of the
اصل اولین اختلاف
fixed point نقطه‌ی ثابت
fluxion نرخ تغییر
اصطلاحی که نیوتن برای مشتق بکار برده است.
for all values of بازاء جمیع مقادیرِ
formal صوری
formula فرمول
recurrence – – تراجعی
for sufficiently large values of
بازاء مقادیر بقدر کافی بزرگِ

fraction	کسر
fractional	کسری
_ part	جزء _
free	آزاد
_ occurrence	مورد _
_ variable	متغیر _
function	تابع
composite _	_ مضاف
composition of _s	ترکیب توابع
identity _	_ همانی
inverse _	_ معکوس
many-valued _	_ چندمقداری
propositional _	_ گزاره‌نما
single-valued _	_ یکمقداری
fundamental theorm of arithmetic	قضیه‌ی اصلی علم حساب
games	بازیها
theory of _	تئوری _
gap	رخنه
Gaussian	گاوسی [به نام گاوس]
_ plane	صفحه‌ی _
generalization	تعمیم
general principle of convergence	ضابطه‌ی کلی تقارب
geometric	هندسی
_ mean	واسطه‌ی _
_ progression	تصاعد _
_ series	سلسله‌ی تصاعد _
graph	گراف
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک
greatest lower bound	اینفیموم
group	گروه
Abelian _	_ آبلی
commutative _	_ تعویضپذیر
grouping	دسته‌بندی
groupoid	گروهوار
half-closed	نیمبسته

half-line	نیمخط
half-open	نیمباز
harmonic	توافقی
_ mean	واسطه‌ی _
_ series	سلسله‌ی _
higher arithmetic	حساب عالی
homogeneity	تجانس
homogeneous	متجانس
homomorphic	هوموموروف
homomorphism	هومومورفیسم
homomorphy	هومومورفی
hypergeometric	هیپرژئومتریک
hypothesis	فرض
ideal	ایدآل
idempotence	خودنمائی
idempotent	خودنما
identity	همانی؛ اتحاد
_ element	عضو خنثا
_ function	تابع همانی
_ relation	نسبت همانی
if and only if	فقط و فقط وقتی که
if . . . then	اگر . . . آنگاه
image	تصویر
inverse _	تصویر عکس
imaginary	موهومی
_ axis	محور _
_ number	عدد _
_ part	جزء _
_ quantity	مقدار _
_ unit	واحد _
pure _	_ محض
immediate predecessor	سابق بلافصل
immediate successor	تالی بلافصل
implication	استلزام
imply	مستلزم بودن
in	در [در بیان نسب و اعمال]
inclusion	جزئیت
proper _	_ حقیقی
inclusive «or»	یاء به معنی منطقی
inconsistency	ناسازگاری

inconsistent	ناسازگار
increasing	صعودی
strictly —	— اکیداً
indefinite	نامشخص
independence	استقلال
linear —	— خطی
independent	مستقل
linearly —	دارای استقلال خطی
independent variable	متغیر مطلق
index	اندیس

اندیس عبارتست از عدد یا علامت یا عبارتی که در سمت چپ یا راست و در بالا یا در پایین عدد یا علامت یا عبارتی برای مقصودی خاص نوشته میشود؛ مانند نمایش دادن مرتبه یا مراتب، مثلاً در x_1، x_{ij}، و x^i_j؛ یا نمایش دادن یک عمل، مثلاً در x^2، $x^{1/3}$، و $\sqrt[n]{x}$؛ یا در نامگذاری، مثلاً، در C^r_n.

چنانکه دیده میشود، اندیس از نما یا نماینده (exponent, power) و از اندیس تحتانی (که نزد ما اندیس به این معنی اخیر بکار میرود) اعم است. اندیس تحتانی را به انگلیسی subscript یا suffix و اندیس فوقانی را superscript میخوانند.

کلمه‌ی index به معنی نما (نماینده) و عدد واقع در فرجه‌ی رادیکال هم بکار میرود، و بدین معنی جمع آن indices است.

index of summation	اندیس جمع
index set	مجموعه‌ی اندیسگذار
indices	نماینده‌ها

index دیده شود.

individual variable	متغیر فردی
induced	القائی
— operation	عمل —
— order	ترتیب —
induction	استقراء
backward —	— قهقرائی
definition by —	تعریف به —
mathematical —	— ریاضی
strong —	— قوی
transfinite —	— ترانسفینی
weak —	— ضعیف
inductive	استقرائی
— definition	تعریف —
— proof	دلیل —
inequality	نامساوی
strict —	— اکید
triangle —	— مثلث
inferior limit	حد اسفل
infimum	اینفیموم
infinite	نامتناهی
— cardinal	عدد اصلی —
— sequence	رشته‌ی —
— series	سلسله‌ی —
— set	مجموعه‌ی —
infinitely many	بینهایت‌بار
infinitesimal	بینهایتیک

برای توضیح، عنوان فوق در قسمت فارسی-انگلیسی دیده شود.

infinity	بینهایت
minus —	منهای —
plus —	باضافه‌ی —
initial suffix	اندیس مبدأ
injection	انژکسیون
injective	انژکتیو
insertion	درج
integer	عدد صحیح
integral	صحیح
— part	جزء —
interior point	نقطه‌ی داخلی
interpretation	تعبیر
intersection	مقطع
interval	بازه
nested —s	بازه‌های تودرتو
into	بتوی [در بیان نسب و توابع]
invalid	نادرست [منطق]
inverse function	تابع معکوس
inverse image	تصویر عکس
irrational	اصم

_ number عدد _
irrationality اصمیت
irreflexive نامنعکس
isomorphic ایزومورف
isomorphism ایزومورفیسم
isomorphy ایزومورفی
isotone ایزوتون

judgment حکم

lattice مشبکه
leading term جملهٔ پیشرو
least absolute remainder
کوچکترین باقیماندهٔ مطلق
least common multiple
کوچکترین مضرب مشترک
least member عضو اقل
least upper bound سوپرموم
lemma لم
lexicographic ordering
ترتیب قاموسی
limit حد
inferior _ _ اسفل
_ point نقطهٔ _
lower _
_ اسفل؛ _ پایین [Σ و Π]
superior _ _ اعلی
upper _ [Π و Σ] _ اعلی؛ حد بالا
line خط
Euclidean _ _ اقلیدسی
real _ _ حقیقی
linear خطی
_ equation معادلهٔ _
_ factor عامل _
_ independence استقلال _
linearly independent
دارای استقلال خطی
locus مکان هندسی
logarithm لگاریتم
natural _ _ طبیعی
logarithmic series سلسلهٔ لگاریتمی

logic منطق
logical connective رابط منطقی
lower bound بند پایین
lower limit
حد اسفل؛ حد پایین [Σ و Π]

many_valued function
تابع چندمقداری
map نگاره
map [مصدر] نگاشتن
map [= mapping] نگاشت
mapping نگاشت
mathematical analysis
آنالیز؛ آنالیز ریاضی
mathematical induction
استقراء ریاضی
mathematics ریاضیات
abstract _ _ مجرد
applied _ _ کاربسته
combinatorial _ _ ترکیبیاتی
pure _ _ محض
maximal ماکزیمال
maximum ماکزیموم
mean واسطه
arithmetic _ _ی عددی
geometric _ _ی هندسی
harmonic _ _ی توافقی
weighted _ _ی وزندار
means وسطین [تناسب]
member
عضو [مجموعه]؛ طرف [تساوی یا نامساوی]
membership عضویت
metric متریک
_ space فضای متری
minimal مینیمال
minimum مینیموم
minus infinity منهای بینهایت
mixed recurring متناوب مرکب[کسر]
model مدل
modulus هنگ
monic تکین

monomial	یکجمله‌ای
monotonic	یکنواخت
strictly —	— اکیداً
multinomial	بسجمله‌ای
— coefficient	ضریب —
multiple	مضرب
common —	— مشترک
least common —	کوچکترین — مشترک
multiplication	ضرب
multiplicative	ضربی
mutually disjoint	دوبدو از هم جدا
n-ary operation	عمل *n* تائی
natural logarithm	لگاریتم طبیعی
natural number	عدد طبیعی
n-dimensional	*n* بعدی
— Euclidean space	فضای اقلیدسی *n* بعدی
necessary and sufficient condition	شرط لازم و کافی
necessary condition	شرط لازم
negation	نفی
negative	منفی؛ سالب [گزاره]
neighbourhood	حومه
nested intervals	بازه‌های تودرتو
neutral element	عضو خنثی
non-Euclidean	نااقلیدسی
non-negative	نامنفی
non-null	ناصفر
non-positive	نامثبت
normal form	صورت نرمال
not	چنین نیست که
n-th partial sum	جمعک *n* م
nullary operation	عمل هیچتائی
null set	مجموعه‌ی خالی
number	عدد
algebraic —	— جبری
complex —	— مختلط
composite —	— مرکب
counting —	— شمارنده

finite —	— متناهی
imaginary —	— موهومی
irrational —	— اصم
natural —	— طبیعی
prime —	— اول
rational —	— منطق
real —	— حقیقی
transcendental —	— متعالی
transfinite —	— ترانسفینی
number theory	تئوری اعداد
numeration	شمار
numerical value	مقدار عددی
O, *o*	اُ
obvious	بدیهی
occurrence	مورد
odd	فرد [عدد]
one-to-one	یکبیک
— correspondence	تناظر —
only if	فقط وقتی که
onto	بروی [در بیان نسب و توابع]
open	باز
operation	عمل
binary —	— دوتائی
n-ary —	— *n* تائی
nullary —	— هیچتائی
— symbol	علامت —
unary —	— یکتائی
or	یا
order	ترتیب؛ مرتب‌کردن؛ مرتبه
order of multiplicity	مرتبه‌ی تکرار (یا بستائی) [ریشه‌ی معادله]
ordered	مرتب
— field	میدان —
— *n*-tuple	*n* تائی —
— *n*-uple	*n* تائی —
— pair	زوج —
ordered set	مجموعه‌ی مرتب
linearly —	— به ترتیب خطی
partially —	— به ترتیب جزئی
simply —	— به ترتیب ساده

ordering ترتیب
lexicographic — — قاموسی
ordering (یا order) relation
نسبت ترتیبی
induced — — القائی
linear — — خطی
partial — — جزئی
simple — — ساده
strong — — قوی
total — — کلی
weak — — ضعیف
order-preserving حافظ ترتیب
strongly — — قوی
weakly — — ضعیف
order-reversing قلب‌کننده‌ی ترتیب
ordinate عرض
oscillate boundedly
دارای نوسان محدود بودن
oscillate unboundedly
دارای نوسان نامحدود بودن
oscillating نوسانی
oscillation نوسان

paradox پارادوکس
paranthesis پرانتز
partially ordered set
مجموعه‌ی مرتب به ترتیب جزئی
partial order ترتیب جزئی
partial sum جمعک
n-th — — nم
particular جزئی [گزاره]
partition افراز
Pascal triangle مثلث پاسکال
perfect cube مکعب کامل
permutation منظومه؛ جایگشت
در ترکیبیات، لفظ فوق به طور مطلق به معنی منظومه است؛ جایگشت n شیء را با عبارت permutation of n things taken all at a time بیان میکنند. جایگشت به معنی عملی که دسته‌ای از n شیء را به طریق یکبیک با خود آنها تعویض میکند نیز permutation خوانده میشود.

permutation with repetition
منظومه‌ی با تکرار؛ جایگشت با تکرار
permutaion دیده شود.
pigeonhole principle اصل دیریکله
placeholder جایبان
plane صفحه
complex — —ی مختلط
Euclidean — —ی اقلیدسی
Gaussian — —ی گاوسی
z-plane —ی z
point نقطه
accumulation — —ی اجتماع
fixed — —ی ثابت
interior — —ی داخلی
limit — —ی حد
poker پوکر [بازی]
polynomial کثیرالجمله
positive مثبت
— part جزء —
postulate اصل موضوع
power
قوه؛ نما یا نماینده؛ قوت [مجموعه‌ها]
در باب دو معنی اول به index و exponent نیز رجوع شود.
ascending —s قوای صعودی
descending —s قوای نزولی
power set مجموعه‌ی قوه‌ای
predecessor سابق
immediate — — بلا فصل
predicate محمول
— calculus حساب محمولات
prefix پیشوند
premiss مقدمه [استنتاج]
prime divisor مقسوم‌علیه اول
prime number عدد اول
primitive statements احکام اولیه
principal remainder
باقیمانده‌ی اصلی [تقسیم]
principle اصل

product	حاصلضرب
cartesian –	– کارتزین
direct –	– مستقیم
relative –	– نسبی
progression	تصاعد
arithmetic –	– عددی
geometric –	– هندسی
projection	تصویر
	تصویر در قسمت فارسی–انگلیسی دیده شود.
proof	دلیل
inductive –	– استقرائی
– by cases	– به طریقه‌ی حالات
– by descent	– به طریقه‌ی نزول
– of existence	– وجود
– of uniqueness	– یکتائی
proper inclusion	جزئیت حقیقی
properly divergent	متباعد مشخص
proper subset	مجموعک حقیقی
property	خاصیت
proportion	تناسب
proposition	گزاره
propositional calculus	حساب گزاره‌ها
propositional function	گزاره‌نما
propositional variable	متغیر گزاره‌ای
pure	محض
– imaginary	موهومی –
– mathematics	ریاضیات –
– quadratic surd	عدد اصم مربعی –
pure recurring	متناوب بسیط [کسور]
Pythagorians	فیثاغوریان
quadratic equation	معادله‌ی درجه‌ی دوم
quadratic surd	عدد اصم مربعی
pure –	عدد اصم مربعی محض
quadrature	تربیع
quantification	تسویر
quantifier	سور
existential –	– وجودی
universal –	– عمومی
quotient	خارج قسمت
range	راسته [متغیر]؛ حوزه‌ی عکس [نسبت]؛ حوزه‌ی مقادیر [تابع]
ratio	نسبت [دو عدد]
rational	مُنطق
– number	عدد –
ratio test	قاعده‌ی نسبت؛ قاعده‌ی دالامبر
real	حقیقی
– axis	محور –
– line	خط –
– number	عدد –
– part	جزء –
realization	تحقق
real number	عدد حقیقی
– system	دستگاه اعداد حقیقی
extended – system	دستگاه منبسط اعداد حقیقی
rearrangement	تغییر نظم
reciprocal	عکس [یک عدد]
recurrence	تراجع
– formula	دستور تراجعی
recurring	متناوب [کسر]
mixed –	– مرکب
pure –	– بسیط
recursive	تراجعی
reductio ad absurdum	برهان خلف
reflexive	منعکس
relation	نسبت
absurd –	– ممتنع
binary –	– دوتائی
equivalence –	– هم‌ارزی
identity –	– همانی
ordering –	عنوان جداگانه دیده شود
ternary –	– سه‌تائی
universal –	– عمومی

relatively prime متباین
relative product حاصلضرب نسبی
remainder باقیمانده؛ مانده [سلسله]
least absolute –
کوچکترین باقیماندهی مطلق
principal – باقیماندهی اصلی
renumbering تجدید شمارهگذاری
repeated bisections تنصیفات متوالیه
representation نمایش
decimal – – اعشاری
tabular – – جدولی
restriction تحدید [نسب و توابع]
root ریشه [عدد، معادله]
multiple – –ی مکرر
– test قاعدهی –؛ قاعدهی کوشی
simple – –ی بسیط
square – جذر
cube – کعب
round–off گرد کردن
rule of signs قاعدهی علامات

satisfy صدق کردن
second coordinate مختص دوم
segment قطعه خط
semi–group نیمگروه
sentence گزاره
sentential calculus حساب گزارهها
sentential connective رابط گزارهای
sequence رشته
series سلسله
set مجموعه
complete – –ی تمام
disjoins –s –های از هم جدا
empty – –ی خالی
index – –ی اندیسگذار
null – –ی خالی
ordered – عنوان جداگانه دیده شود
power – مجموعهی قوهای
– of all subsets –ی مجموعکان
truth – –ی صدق
unit – –ی یکانی
universal – –ی عمومی
sexagesimal ستینی
sign علامت
rule of –s قاعدهی علامات
significant figure رقم بامعنی
similar متشابه
– terms جمل متشابه
similarity تشابه
similarly ordered متشابه الترتیب
simple
بسیط [گزاره؛ ریشهی معادله]؛ ساده [ترتیب]
simple order(ing) ترتیب ساده
– relation نسبت ترتیبی ساده
simple root ریشهی بسیط
simply ordered set
مجموعهی مرتب به ترتیب ساده
singleton منفرده
single–valued یکمقداری
singular شخصی [گزاره]
space فضا
Euclidean – –ی اقلیدسی
metric – –ی متری
n–dimensional – –ی *n* بعدی
non–Euclidean –
–ی نااقلیدسی
vector – –ی حاملی
square root جذر
squaring the circle تربیع دایره
standard استانده
statement گزاره
primitive –s احکام اولیه
– calculus حساب گزارهها
– variable متغیر گزارهای
strict اکید
– inequality نامساوی –
strictly decreasing اکیداً نزولی
strictly increasing اکیداً صعودی
strictly monotonic اکیداً یکنواخت
strict monotony یکنواختی اکید
strong قوی
– induction استقراء –

_ order relation
نسبت ترتیبی _
strongly order_preserving
حافظ ترتیب قوی
structure ساختمان
subfield میدانک
subgroup گروهک
subscript اندیس (تحتانی)
subsequence رشتک
subset مجموعک
proper _ _ حقیقی
substraction تفریق
subsystem دستگاه جزء؛ دستگاهک
successive approximations
تقریبات متوالیه
successor تالی
immediate _ _ بلا فصل
sufficient condition شرط کافی
suffix اندیس (تحتانی)
suit ردیف [اوراق گنجفه]
sum حاصلجمع؛ مجموع
double _ حاصلجمع مضاعف
partial _ جمعک [سلسله]
summation جمع [حاصلجمع‌یابی]
index of _ اندیس _
superior limit حد اعلی
superscript اندیس فوقانی
supremum سوپرموم
surd اصم
pure quadratic _
عدد اصم مربعی محض
quadratic _ عدد اصم مربعی
surjection سورژکسیون
surjective سورژکتیو
symbol علامت؛ نماد
operation _ علامت عمل
symmetric متقارن
_ difference تفاضل _
symmetry تقارن
system دستگاه

abstract _ _ مجرد
tabular representation
نمایش جدولی
tautology راستگو
telescope ادغام
tend میل کردن
term جمله [رشته، سلسله، معادله]؛ حد [در منطق، به معنی اسم خاص یا اسمنما]
leading _ جمله‌ی پیشرو [معادله]
primitive _s حدود اولیه
similar _s جمل متشابه
undefined _s حدود تعریف‌نشده
terminating decimal کسر اعشاری مختوم
ternary سه‌تائی
_ relation نسبت _
theorem قضیه
theory تئوری
axiomatic _ _ اصل موضوعی
deductive _ _ قیاسی
there is an x such that
xی (ایکسی) هست که
topology توپولوژی
total ordering ترتیب کلی
transcendental number عدد متعالی
transfinite ترانسفینی
_ induction استقراء _
_ number عدد _
transformation تبدیل
transitive متعدی
transitivity تعدی
tree diagram نمودار شجری
triangle مثلث
Pascal _ _ پاسکال
_ inequality نامساوی
trichotomy تثلیث
trivial بیمایه
truth set مجموعه‌ی صدق
truth table جدول ارزش
truth value ارزش راستی

tuple تائی

unary یکتائی
– operation عمل –
unbounded نامحدود
–ly بطور نامحدود
uncountable ناشمارا
undefinable تعریفناپذیر
undefined تعریف‌نشده
– terms حدود –
unimodular یکهنگ
union اتحادیه
unique factorization theorem
قضیه‌ی یکتائی تجزیه به عوامل اول
uniqueness یکتائی
proof of – دلیل –
unit element واحد [دستگاه]
unit set مجموعه‌ی یکانی
universal کلی [گزاره]؛ عمومی
– algebra جبر عمومی
– quantifier سور عمومی
– relation نسبت عمومی
– set مجموعه‌ی عمومی
universally valid همیشه برقرار
universe of discourse عالم سخن
unknown مجهول
upper bound بند بالا
upper limit حد اعلی؛
حد بالا [در Σ و Π]

valid درست [استنتاج]
validity درستی [استنتاج]
value مقدار
absolute – قدر مطلق
numerical – مقدار عددی
truth – ارزش راستی
variable متغیر
bound – – پابند
dependent – – تابع
dummy – – ظاهری
free – – آزاد
independent – – مطلق
individual – فردی
propositional – – گزاره‌ای
vector حامل
– space فضای حاملی
Venn diagram تصویر ون

weak ضعیف
– induction استقراء –
– order relation
نسبت ترتیبی –
weakly order-preserving
حافظ ترتیب ضعیف
weight وزن
weighted mean واسطه‌ی وزندار
well-ordered خوشترتیب
well-ordering خوشترتیبی

zero صفر

فرهنگ اصطلاحات

فارسی ـ انگلیسی

اُ	O, o
ابتدا [مجموعه‌ی مرتب]	first element
ابرو	brace
آبلی [منسوب به آبل]	Abelian
اتحاد	identity
اتحادیه	union
اتم	atom
احکام اولیه	primitive statements
ادغام	telescope
ارتباط	connectedness
ارزش اسمی [اوراق گنجفه]	face value
ارزش راستی	truth value
ارشمیدسی	Archimedean
از [در بیان نسب]	from
آزاد [متغیر]	free
از بالا محدود	bounded above
از پایین محدود	bounded below
ازدواج	conjugation
از هم جدا [مجموعه‌ها]	disjoint
اساسی [رشته]	fundamental
استانده	standard
استقراء	induction
ـ ترانسفینی	transfinite ـ
ـ ریاضی	mathematical ـ
ـ ضعیف	weak ـ
ـ قوی	strong ـ
ـ قهقرائی	backward
استقرائی	inductive
استقلال	Independence
ـ خطی	linear ـ
استلزام	implication
استنتاج	deduction
اسقاط [قاعده]	cancellation
اصل	principle
ـ اولین اختلاف	ـ of the first difference
ـ جفت: دوگان دیده شود.	
ـ دوگانی: دوگان دیده شود.	
ـ دیریکله	pigeonhole ـ
ـ شهودی تجرید	intuitive ـ of abstraction
ـ گسترش	ـ of extension
اصل موضوع	axiom, postulate
بدیهیات اولیه و علوم متعارفه هم دیده شود.	
اصل موضوعی	axiomatic
اصلی	cardinal
عدد اصلی هم دیده شود.	
اصم	irrational
عدد اصم هم دیده شود.	
اصمیت	irrationality
اضافی	additive
جمعی هم دیده شود.	
اعشاری	decimal
افراز	partition
افناء	exhaustion
اقلیدسی	Euclidean
اکید	strict
اکیداً صعودی	strictly increasing
اکیداً نزولی	strictly decreasing
اکیداً یکنواخت	strictly monotonic
اگر ... آنگاه	if ... then
الحاق به چپ	associate to the left
الف [א]	Aleph
القائی	induced
آنالیز [= آنالیز ریاضی]	analysis [= mathematical ـ]
آنالیز ترکیبیاتی	combinatorial analysis

آنالیز ریاضی	mathematical analysis
انتها [بازه]	endpoint
انتها [مجموعه‌ی مرتب]	last element
آندومورفیسم	endomorphism
اندیس (تحتانی)	subscript; suffix
کلمه‌ی index در قسمت انگلیسی‌ـ فارسی نیز دیده شود.	
اندیس جمع	index of summation
اندیس فوقانی	superscript
اندیس مبدأ	initial suffix
انژکتیو	injective
انژکسیون	injection
انعکاسی [نسبت]	reflexive
اوتومورف	automorphic
اوتومورفیسم	automorphism
اولین اختلاف، اصل	first difference, principle of the
اُی بزرگ	O
ایدآل	ideal
ایزوتون	isotone
ایزومورف	isomorphic
ایزومورفی	isomorphy
ایزومورفیسم	isomorphism
ایکسی هست که	there is an x such that
اُی کوچک	o
اینفیموم	infimum; greatest lower bound
باز [بازه]	open
بازاءِ بعضی	for some
بازاءِ جمیع مقادیرِ	for all values of
بازاءِ مقادیر بقدر کافی بزرگ	for sufficiently large values of
بازاءِ هر	for all
بازنویسی	rewriting
بازه	interval
بازه‌های تودرتو	nested intervals
بازیها	games
باضافه‌ی بینهایت	plus infinity
باقیمانده	remainder
ـــی اصلی	principal —
بتوی [در توابع]	into
بدیهی	obvious
بدیهیات اولیه [اصطلاحات سابق]	axioms
بر [در توابع]	on
برش	cut
ـ ددکیند	Dedekind —
بروی [در توابع]	onto
برهان خلف	reductio ad absurdum
بریج [بازی]	bridge
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک	greatest common divisor
بست	closure
بسته [بازه؛ نسبت به یک عمل]	closed
بسجمله‌ای	multinomial
بسط	expansion
ـ اعشاری	decimal —
بطور نامحدود	unboundedly
بعض	some
بقدر کافی بزرگ	sufficiently large
بند	bound
ـ بالا	upper —
ـ پایین	lower
بولی [منسوب به بول]	Boolean
بهترین تقریب	best approximation
بیژکتیو	bijective
بیژکسیون	bijection
بیمایه	trivial
بینهایت	infinity
بینهایت‌بار	infinitely many times
بینهایَتْیک	infinitesimal
کلمه‌ی بینهایتیک به قیاس ده‌یک و صدیک ساخته شده است، و ساختمان اصطلاحات خارجی آن نیز به همین قیاس است.	
بینیت	betweenness
پابند [متغیر]	bound

پارادوکس	paradox
پایه [در قوه]	base
پرانتز	paranthesis
پوشاندن	cover
پوکر [بازی]	poker
پیشرو [جمله‌ی معادله]	leading
پیشوند	prefix
تائی	tuple
تابع	function
ـ بولی	Boolean ـ
ـ ثابت	constant ـ
ـ چندمقداری	many-valued ـ
ـ فاصله	distance ـ
ـ مشخص	characteristic ـ
ـ مضاف	composite ـ
ـ معکوس	inverse ـ
ـ همانی	identity ـ
ـ یکمقداری	single-valued ـ
تالی [ترکیب شرطی]	consequent
تالی	successor
ـ بلافصل	immediate ـ
تئوری	theory
ـ اصل موضوعی	axiomatic ـ
ـ اعداد	number ـ
ـ بازیها	ـ of games
ـ قیاسی	deductive ـ
تباعد	divergence
تبدیل	transformation
تبهگن	degenerate
تثلیث	trichotomy
تجانس	homogeneity
تجدید شماره‌گذاری	renumbering
تجرید	abstraction
تجزیه [به عوامل]	factorization
تحدید [نسب و توابع]	restriction
تحقق	realization
تحلیل	analysis
آنالیز هم دیده شود.	
تراجع	recurrence
تراجعی	recursive

تراکم، قاعده‌ی	condensation test
ترانسفینی	transfinite
تربیع	quadrature
تربیع دایره	squaring the circle
ترتیب	order, ordering
ـ القائی	induced ـ
ـ قاموسی	lexicographic ـ
ترکیب	combination
ـ با تکرار	ـ with repetition
ترکیب [نسب و توابع]	composition
ترکیب دوشرطی	biconditional
ترکیب شرطی	conditional
ترکیب عطفی	conjunction
ترکیب فصلی	disjunction
ترکیبیات	combinatorics
تساوی	equality
تسویر	quantification
تشابه	similarity
تصاعد	progression
ـ عددی	arithmetic ـ
ـ هندسی	geometric ـ
تصویر [مجموعه با یک نسبت؛ نقطه با یک تابع]	image
تصویر [به معنی image، یعنی تصویر یک مجموعه با یک نسبت یا تصویر یک نقطه با یک تابع؛ و نیز تصویر مصطلح هندسه]	projection
تصویر [شکل]	diagram
تصویر اویلر	Euler diagram
تصویر عکس	inverse image; counterimage
تصویر ون	Venn diagram
تعبیر	interpretation
تعدی	transitivity
تعریف	definition
ـ استقرائی	inductive ـ
ـ به استقراء	ـ by induction
تعریف‌ناپذیر	undefinable
تعریف‌نشده	undefined
تعمیم	generalization
تعویض‌پذیر	commutative

تعویضپذیری	commutativity
تغییر نظم	rearrangement
تفاضل	difference
ـ متقارن	symmetric ـ
تفریق	substraction
تقارب	convergence
ـ مشروط	conditional ـ
ـ مطلق	absolute ـ
ـ مغلوب	dominated ـ
(موضوع اخیر در کتاب حاضر نیامده است.)	
تقریب	approximation
تقریبات متوالیه	successive approximations
تقریب اعشاری	decimal approximation
تقریبی	approximate
تقسیم	division
تکین	monic
تمام	complete
تمامیت	completeness
تناسب	proportion
تناظر	correspondence
ـ یکبیک	one-to-one ـ
تناقض	contradiction
تنصیف	bisection
تنصیفات متوالیه	repeated bisections
توافقی	harmonic
ـ متناوب	alternating ـ
توپولوژی	topology
توزیعپذیر	distributive
توزیعپذیری	distributivity
توزیعی	distributive
توسیع	extension
ثابت	constant
ـ اویلر	Euler's ـ
ثنائی [شمار]	binary; dyadic
جازم	categorical
جایبان	placeholder
جایگشت	permutation
ـ با تکرار	ـ with repetition
برای رفع ابهام، کلمه‌ی permutation در قسمت انگلیسی‌ـفارسی دیده شود.	
جبر	algebra
ـ بولی	Boolean ـ
ـ عمومی	universal ـ
ـ مجموعه‌ها	ـ of sets
جبری	algebraic
جدول ارزش	truth table
جذب	absorption
جذر	square root
جزء حقیقی	real part
جزء صحیح	integral part
جزء کسری	fractional part
جزء مثبت	positive part
جزء موهومی	imaginary part
جزئیت [نسبت]	inclusion
ـ حقیقی	proper ـ
جفت	dual
دوگان دیده شود.	
جمع [عمل]	addition
جمع [حاصلجمع‌یابی]	summation
جمعک	partial sum
جمعی	additive
وصف گروهی که عمل آن جمع نامیده شده است (گروه جمعی).	
جمل متشابه	similar terms
جمله	term
جمله‌ی پیشرو	leading term
چگال	dense
چنین نیست که	not
حاصلجمع	sum
ـ مضاعف	double ـ
حاصلضرب	product
ـ کارتزین	cartesian ـ
ـ کوشی سلسله‌ها	Cauchy's ـ of series
ـ مستقیم	direct ـ
ـ نسبی	relative ـ

حافظ ترتیب	order-preserving
ـ ضعیف	weakly —
ـ قوی	strongly —
حالت	case
حامل	vector
حجره	cell
حد	limit
حد [در منطق، بـه معنی اسم خـاص یا اسمنما]	term
حد اسفل	inferior limit, lower limit
حد اعلی	superior limit, upper limit
حد اولیه	primitive term
حد بالا [Σ و Π]	upper limit
حد پایین [Σ و Π]	lower limit
حد تعریف‌نشده	undefined term
حدس	conjecture
حذف	elimination
حساب (علم)	arithmetic
حساب دیفرانسیل وانتگرال	calculus
حساب عالی	higher arithmetic
حسابگر	computer
ـ الکترونی	electronic —
حساب گزاره‌ها	sentential calculus; statement calculus; propositional calculus
حساب محمولات	predicate calculus
حسابیدن	arithmetization
حکم [قضیه]	conclusion
حکم	judgment
حوزه [نسبت]	domain
حوزه(ی تعریف) [تابع]	domain of definition
حوزه‌ی عکس [نسبت]	converse domain; counterdomain; range
حوزه‌ی مقادیر [تابع]	range
حومه	neighbourhood

خارج قسمت	quotient
خاصیت	property
ـ ارشمیدسی	Archimedean —
خانواده	family
خط	line
ـ اقلیدسی	Euclidean —
ـ حقیقی	real —
خطا	error
ـی درصد	percent —
ـی نسبی	relative —
خطی	linear
خودنما	idempotent
خودنمائی	idempotence
خوشترتیب	well-ordered
خوشترتیبی	well-ordering

دارای استقلال خطی	linearly independent
دارای نوسان محدود بودن	oscillate boundedly
دارای نوسان نامحدود بودن	oscillate unboundedly
دامنه [نسبت]	field
در [در بیان نسب و اعمال]	in
درج	insertion
درجه	degree
درست [استنتاج]	valid
درست تا n رقم	correct to n places
درستی [استنتاج]	validity
دروغ	false
دست [اوراق گنجفه]	deck
دستگاه	system
دستگاه اعداد حقیقی	real number system
دستگاه جزء	subsystem
دستگاهک	sbsystem
دستگاه مجرد	abstract system
دستگاه منبسط اعداد حقیقی	extended real number system
دستور تراجعی	recurrence formula
دسته‌بندی	grouping
دسته‌ی هم‌ارز	equivalence class
دلخواه	arbitrary
دلیل	proof
ـ استقرائی	inductive —

ـ به طریقه‌ی حالات	— by cases
ـ به طریقه‌ی نزول	— by descent
ـ وجود	— of existence
ـ یکتائی	— of uniqueness
دوازدهی [شمار]	duodecimal
دو بدو از هم جدا	mutually disjoint
دوتائی [عمل، نسبت]	binary
دوجمله‌ای	binomial
دوگان	dual

سابقاً و در کتاب حاضر، در مقابل کلمه‌ی dual اصطلاح جفت را بکار برده‌ایم. اما اینک کلمه‌ی دوگان را در مقابل dual و دوگانی را در مقابل duality (در همه‌ی معانی آنها) ترجیح میدهیم.

دوگانی	duality

دوگان دیده شود.

رابط [منطق]	connective
ـ ترکیب شرطی [اگر، ⊃]	conditional —
ـ گزاره‌ای	sentential —
ـ منطقی	logical —
راستگو	tautology
راسته(ی یک متغیر)	range (of a variable)
رخنه	gap
ردیف [اوراق گنجفه]	suit
رشتک	subsequence
رشته	sequence
ـی کوشی	Cauchy —
ـی مضاعف	double —
رفتار	behaviour
رقم	digit; figure
رقم بامعنی	significant figure
ریاضیات	mathematics
ـ ترکیبیاتی	combinatorial —
ـ کاربسته	applied —
ـ مجرد	abstract —
ـ محض	pure —

ریشه [عدد، معادله]	root
ریشه، قاعده‌ی	root test
ریشه‌ی بستائی	multiple root
ریشه‌ی بسیط	simple root

زوج [عدد]	even
زوج	pair
زوج مرتب	ordered pair

سابق	predecessor
ـ بلافصل	immediate —
ساختمان	structure
سازا	constituent
سازگار	consistent
ستینی	sexagesimal
سلسله	series
ـی تصاعد هندسی	geometric —
ـی توافقی	harmonic —
ـی لگاریتمی	logarithmic —
ـی متناوب	alternating —
ـی نامتناهی	infinite —
سوپرموم	supremum; least upper bound
سور	quantifier
ـ عمومی	universal —
ـ وجودی	existential —
سورژکتیو	surjective
سورژکسیون	surjection
سه‌تائی [نسبت]	ternary
سیبرنتیک	cybernetics

شرح [منطق]	description
ـ مشخص	definite —
ـ نامشخص	indefinite —
شرط	condition
ـ کافی	sufficient —
ـ لازم	necessary —
ـ لازم و کافی	necessary and sufficient —
شرکتپذیر	associative
شرکتپذیری	associativity

شمار numeration
شمارا. در باب این اصطلاح بـه countable در قسمت انگلیسی-فارسی رجوع شود.
شمردن counting
شناسه argument

صحیح [کثیرالجمله؛ تابع] entire
صحیح integral
صدق کردن satisfy
صعودی increasing
صفت attribute
صفحه plane
ـِی اقلیدسی Euclidean —
ـِی گاوسی Gaussian —
ـِی مختلط complex —
ـِی z z-plane
صفر zero
صورت منطقی logical form
صورت نرمال normal form
— عطفی conjunctive —
— فصلی disjunctive —
صوری formal

ضابطه‌ی کلی تقارب general principle of convergence
ضرب multiplication
ضربی multiplicative
ضریب coefficient
— بسجمله‌ای multinomial —
— دوجمله‌ای binomial —
ضعیف weak

طاق [$\cap$] cap
طبقه [برش] class
ـِی بالا upper —
ـِی پایین lower —
طرف [تساوی، نامساوی] member
طرفین [تناسب] extremes
طریقه‌ی قطری diagonal process
طول [مختص] abscissa

عاد کردن divide
عالم سخن universe of discourse
عامل factor
— خطی linear —
عبارت expression
عدد number
عدد اصلی cardinal (number)
— متناهی finite —
— نامتناهی infinite —
عدد اصم irrational number
عدد اصم مربعی quadratic surd
— محض pure —
عدد اول prime number
عدد ترانسفینی transfinite number
عدد جبری algebraic number
عدد حقیقی real number
عدد شمارنده counting number
عدد صحیح integer
عدد طبیعی natural number
عدد متعالی transcendental number
عدد متناهی finite number
عدد مختلط complex number
عدد مرکب composite number
عدد منطق rational number
عدد موهومی imaginary number
عدد واقع در فرجه‌ی یک رادیکال index of a radical
به index در قسمت انگلیسی-فارسی رجوع شود.
عرض [مختص] ordinate
عضو member; element
عضو اقل least member
عضو خنثا neutral element; identity element
عضویت membership
عکس [یک عدد] reciprocal
عکس [نسبت، گزاره] converse
عکس نقیض contrapositive
علامات، قاعده‌ی rule of signs
علامت sign; symbol
علامت [یک عدد] sign

علامت عمل	operation symbol
عمل	operation
ـ دوتائی	binary —
ـ nتائی	n-ary —
ـ هیچتائی	nullary —
ـ یکتائی	unary
عمومی [مجموعه، نسبت، سور]	universal
فاصله	distance
فاکتوریل	factorial
فرد [عدد]	odd
فرض	hypothesis
فرمول	formula
ـ تراجعی	recurrence —
فضا	space
ـی اقلیدسی	Euclidean —
ـی اقلیدسی nبعدی	n-dimensional Euclidean —
ـی حاملی	vector —
ـی متری	metric —
ـی نااقلیدسی	non-Euclidean —
فقط و فقط وقتی که	if and only if
فقط وقتی که	only if
فیثاغوریان	Pythagorians
قابل قسمت	divisible
قابل مقایسه [بر حسب نسبت ترتیبی]	comparable
قابلیت قسمت	divisibility
قدر مطلق	absolute value
قدر نسبت [تصاعد عددی]	common difference
قدر نسبت [تصاعد هندسی]	common ratio
قضیه	theorem
قضیه‌ی اصلی علم حساب	fundamental theorem of arithmetic
قضیه‌ی یکتائی تجزیه به عوامل اول	unique factorization theorem
قطر [نسبت]	diagonal
قطعه خط	segment
قلب‌کننده‌ی ترتیب	order-reversing
قناس	antisymmetric
قناسی	antisymmetry
قوای صعودی	ascending powers
قوای نزولی	descending powers
قوت [مجموعه]	potency; power
ـ متصله	power of the continuum
قوه	exponent; power
کلمه‌ی اول در قسمت انگلیسی‌ـفارسی دیده شود.	
قوه‌ی حقیقی	real power
قوه‌ی کامل	perfect power
قوه‌ی کسری	fractional power
قوی	strong
کاتگوری	category
کارتزین	cartesian
کثیرالجمله	polynomial
کروشه	bracket
کسر	fraction
کسر اعشاری مختوم	terminating decimal
کسری	fractional
کعب	cube root
کوچکترین باقیمانده‌ی مطلق	least absolute remainder
کوچکترین مضرب مشترک	least common multiple
گراف	graph
گرد کردن	round-off
گروه	group
ـ آبلی	Abelian
ـ تعویضپذیر	commutative —
گروهک	subgroup
گروهوار	groupoid
گزاره	sentence; statement; proposition
ـی بسیط	simple —
ـی جزئی	particular —
ـی دوشرطی	biconditional —

negative _	ـی سالب
singular _	ـی شخصی
conditional _	ـی شرطی
univrsal _	ـی کلی
composite _; compoud _	ـی مرکب
affirmative _	ـی موجب
propositional function	گزاره‌نما
extension	گسترش
logarithm	لگاریتم
natural _	ـ طبیعی
lemma	لم
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیموم
remainder	مانده [سلسله]
base	مبنا [لگاریتم؛ شمار]
discriminant	مبین
divergent	متباعد
properly _	ـ مشخص
relatively prime	متباین [حساب]
homogeneous	متجانس
metric	متریک
similar	متشابه
similarly ordered	متشابه‌الترتیب
continuum	متصله
transitive	متعدی
variable	متغیر
free _	ـ آزاد
bound _	ـ پابند
dependent _	ـ تابع
dummy	ـ ظاهری
individual _	ـ فردی
statement (یا pro_ positional) _	ـ گزاره‌ای
independent _	ـ مطلق
convergent	متقارب
conditionally _	ـ مشروط
absolutely _	ـ مطلق
symmetric	متقارن

complement	متمم
contradictory	متناقض
alternating	متناوب [سلسله]
recurring	متناوب [کسر]
pure _	ـ بسیط
mixed _	ـ مرکب
finite	متناهی
commensurable	متوافق
counter example	مثال نقض
positive	مثبت
triangle	مثلث
Pascal _	ـ پاسکال
asymptote	مجانب
asymptotic	مجانبوار
asymptotic	مجانبی
square	مجذور
perfect _	ـ کامل
abstract	مجرد
sum	مجموع
subset	مجموعک
proper _	ـ حقیقی
set	مجموعه
disjoint _s	ـهای از هم جدا
index _	ـی اندیسگذار
empty _; null _	ـی خالی
well_ordered _	ـی خوشترتیب
truth _	ـی صدق
universal _	ـی عمومی
power _	ـی قوه‌ای
finite _	ـی متناهی
_ of all subsets	ـی مجموعکان
	ـی مرتب. عنوان مستقل دیده شود.
infinite _	ـی نامتناهی
unit _	ـی یکانی
ordered set	مجموعه‌ی مرتب
partially _	ـ به ترتیب جزئی
linearly _	ـ به ترتیب خطی
simply _	ـ به ترتیب ساده
complete	ـ تمام
unkonwn	مجهول
bounded	محدود

محدوداً	boundedly
محض	pure
محمول	predicate
محور	axis
— حقیقی	real —
— موهومی	imaginary —
—های مختصات	axes of coordinates
مختص	coordinate
— اول	first —
— دوم	second —
مختصات	coordinates
مختلط [عدد]	complex
مدار (برق)	circuit
مدل	model
مربع. مجذور دیده شود.	
مربعی [عدد اصم]	quadratic
مرتب	ordered
مرتبط	connected
مرتب کردن	order [مصدر]
مرتبه [در o, O]	order
مرتبه‌ی تکرار (یا بستائی) [ریشه‌ی معادله]	order of multiplicity
مرکبه [نسب و توابع]	composite
مزدوج	conjugate
مستقل	independent
مستلزم بودن	imply
مشبکه	lattice
—ی توزیعپذیر	distributive —
مشخَّص	definite
مشخِّص	characteristic
مضاعف [رشته؛ حاصلجمع]	double
مضرب	multiple
— مشترک	common —
مطلق	absolute
مطلقا متقارب	absolutely convergent
معادل [گزاره‌نماها؛ رشته‌ها]	equivalent
معادله [مَنطق]	equivalence
معادله	equation
—ی خطی	linear —
—ی درجه‌ی دوم	quadratic —
مغلوب	dominated
مقایسه، قواعد	comparison tests
مقدار	value
— تقریبی	approximate —
— عددی	numerical —
مقدار موهومی	imaginary quantity
مقدم [ترکیب شرطی]	antecedent
مقدمه [استنتاج]	premiss
مقسوم‌علیه	divisor
— اول	prime —
— مشترک	common —
مقطع	intersection
مکان هندسی	locus
مکعب	cube
— کامل	perfect —
ممیز	decimal point
منتهاشمارا. در باب این اصطلاح به countable در قسمت انگلیسی-فارسی رجوع شود.	
مَنطق	logic
مُنطق	rational
منظومه	permutation
—ی با تکرار	— with repetition
برای رفع ابهام، کلمه‌ی permutation در قسمت انگلیسی-فارسی دیده شود.	
منعکس	reflexive
منفرده	singleton
منفی	negative
منهای بینهایت	minus infinity
مورد	occurrence
— آزاد	free —
— پابند	bound —
مؤلفه	component
موهومی	imaginary
— محض	pure —
میدان	field
— مرتب	ordered —
میدانک	subfield
میل‌کردن	tend
مینیمال	minimal

مینیموم	minimum
نااقلیدسی	non-Euclidean
نادرست	invalid
ناسازگار	inconsistent
ناسازگاری	inconsistency
ناشمارا	uncountable
ناصفر	non-null
نامتشابه	dissimilar
نامتقارن	assymmetric
نامتناهی	infinite
نامتوافق	incommensurable
نامثبت	non-positive
نامحدود	unbounded
نامساوی	inequality
ــ اکید	strict ــ
ــ مثلث	triangle ــ
نامشخص	indefinite
نامنعکس	irreflexive
نامنفی	non-negative
ناو [∪]	cup
نتیجه	consequence
نرخ تغییر	fluxion

قسمت انگلیسی-فارسی دیده شود.

نزولی	decreasing
نسبت [دو عدد]	ratio
قاعده‌ی ــ	ــ test
نسبت	relation

ــ ترتیبی: عنوان جداگانه دیده شود.

ــ دوتائی	binary ــ
ــ سه‌تائی	ternary ــ
ــ عمومی	universal ــ
ــ ممتنع	absurd ــ
ــ هم‌ارزی	equivalence
ــ همانی	identity ــ
نسبت ترتیبی	order (relation); ordering (relation)
ــ القائی	induced ــ
ــ جزئی	partial ــ
ــ خطی	linear ــ
ــ ساده	simple ــ
ــ ضعیف	weak ــ
ــ قوی	strong ــ
ــ کلی	total ــ
نفی	negation
نقطه	point
ــی اجتماع	accumulation ــ
ــی ثابت	fixed ــ
ــی حد	limit ــ
ــی داخلی	interior ــ
نگار	affix
نگاره	map
نگاشت [تابع]	mapping; map
ــ ایزومورف	isomorphic ــ
ــ هومومورف	homomorphic ــ
نگاشتن	map [مصدر]
نما	exponent; index; power

کلمات اول و دوم در قسمت انگلیسی-فارسی دیده شود.

نماد	symbol
نمایش	representation
ــ اعشاری	decimal ــ
ــ جدولی	tabular ــ
نماینده	exponent; index; power

کلمات اول و دوم در قسمت انگلیسی-فارسی دیده شود.

نمودار	diagram
ــ آرگان	Argand ــ
ــ شجری	tree ــ
نوسان	oscillation
نوسانی	oscillating
نیمباز [بازه]	half-open
نیمبسته [بازه]	half-closed
نیمخط	half-line
نیمگروه	semi-group
و	and
واحد [یک دستگاه]	unit element
واحد موهومی	imaginary unit
واسطه	mean
ــی توافقی	harmonic ــ
ــی عددی	arithmetic ــ

ــِی وزندار	weighted —
ــِی هندسی	geometric —
وجود	existence
وزن	weight
وسطین [تناسب]	means
«و غیره»	«and so on»
همارزی [نسبت]	equivalence
همانی	identity
همضریب	equimultiple
همعدد	equinumerous
همقوت	equipotential
همنهشت	congruent
همنهشتی	congruence
همیشه برقرار	universally valid
هنگ	modulus
هومومورف	homomorphic
هومومورفی	homomorphy
هومومورفیسم	homomorphism
هیپرژئومتریک	hypergeometric
هیچرشته	null sequence
یا	or
یاءِ به معنی منع جمع	exclusive «or»
یاءِ منطقی	inclusive «or»
یکبیک	one_to_one
یکتائی	uniqueness
یکتائی [عمل]	unary
یکجملهای	monomial
یکمقداری	single_valued
یکنواخت	monotonic
یکنواختی اکید	strict monotony
یکهنگ	unimodular