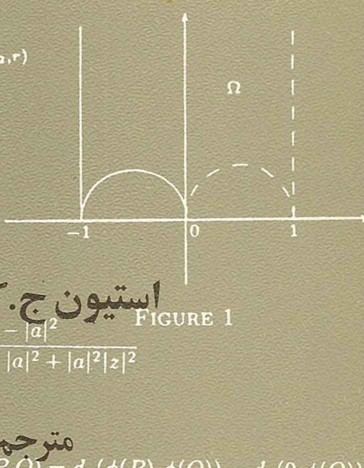
آنالیز مختلط: نگرش هندسی

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\partial D(P_1,r)}\oint_{\partial D(P_2,r)}\right.$$



$$|h'(z)| = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}$$

استیون ج. کرانتس

FIGURE 1

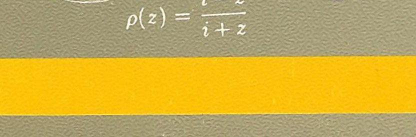
$$\frac{1-|a|^2}{1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2}$$

$$\phi(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z};$$

مترجم:

$$d_\rho(P,Q) = d_\rho(\phi(P),\phi(Q)) = d_\rho(0,\phi(Q)).$$

دکتر محمد جلوداری ممقانی



$$\rho(z) = \frac{i-z}{i+z}$$

$$S \sim \Sigma a_{j,k}(z_1)^j(z_2)^k$$

روشهای هندسی در آنالیز مختلط از دهۀ ۱۹۳۰ به بعد، با کشف قدرتمندی این روشها، در بررسی هم شوارتس به وسیله آنفرس به کار گرفته شد. از آن به بعد هندسه نقش کلیدی در تحقیقات آنالیز مختلط یک و چند متغیره داشته است. با این حال، تاکنون این روشهای مهم در کتابی در دسترس عموم قرار نگرفته‌اند.

در این کتاب استیون کرانتس، محقق برجسته و نویسندۀ معروف مقالات توصیفی ریاضی، نحوۀ مطالعۀ آنالیز مختلط را با استفاده از هندسۀ دیفرانسیل به طور مفصل بیان می‌کند. وی بدون هیچ پیشنهادی از هندسۀ ریمانی و فقط با پیشنیازی در حدّ یک ترم در آنالیز مختلط، نقش مترهای هرمیتی و خمیدگی را در درک مفاهیمی چون هم شوارتس، خانواده‌های نرمال، قضیه‌های پیکار، نگاشتهای همدیس، و مباحث بسیار دیگر بیان می‌کند. در واقع، کرانتس با استفاده از کمترین صورتبندی هندسی بیشترین اطلاعات هندسی و آنالیزی را به دست می‌آورد. بحث وی با مقدمه‌ای بر آنالیز مختلط چند متغیره از دیدگاه هندسی اوج می‌گیرد. سبک روان و جذاب وی همۀ علاقه‌مندان به آنالیز مختلط را جلب و ارضا خواهد کرد.

استیون ج. کرانتس

آنالیز مختلط: نگرش هندسی

ترجمهٔ: دکتر محمد جلوداری ممقانی

تهران ۱۳۷۹

توضیح ناشر

«مجموعه علوم ریاضی» به قصد تحقق بخشیدن به اهدافی چون غنی‌تر کردن فرهنگ علوم ریاضی، معرفی شاخه‌های جدید، و تامین کتابهای مرجع و کمک آموزشی در زمینه‌های گوناگون علوم ریاضی سازمان است. این هدفها با نشر کتابهای توصیفی ریاضی، متون کلاسیک، وکتابهای راهگشا آموزشی تحقق می‌یابد: کتابهایی که برای دانشجویان دوره‌های کارشناسی و بالاتر (بویژه در رشته‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی) و همچنین دبیران، استادان، و دیگر علاقه‌مندان به ریاضیات مفید به نظر می‌رسد.

از آقای دکتر یحیی تابش که دبیری مجموعه را بر عهده داشته‌اند و نیز از گروه تخصصی مجموعه (آقایان دکتر سیاوش شهشهانی دکتر ابوالقاسم لاله) و همچنین تمام همکاران بخشهای علمی ـ فنی و تولید شرکت که در انتشار این مجموعه نهایت همکاری را مبذول داشته‌اند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمهٔ مترجم

وقتی متن اصلی این کتاب به دستم رسید مشغول هندسهٔ هذلولوی بودم. کتاب را که ورق می‌زدم به نتیجه ۱.۳ برخوردم که : «صفحهٔ $\mathbb{C}$ و صفحه سوراخ $\mathbb{C} - \{0\}$ هیچ یک متری با خمیدگی اکیداً منفی نمی‌پذیرند.» این نتیجه آنچنان مجذوبم کرد که فکر کردم احتمالاً بسیاری دیگر را نیز مجذوب نماید. این ترجمه نتیجهٔ همین تفکر است. هر چند حین ترجمه دریافتم که نتیجهٔ مذکور یکی از نکته‌های جالب کتاب است و مثلاً قضیهٔ پوانکاره در مورد هم‌ارز نبودن گوی و دو قرص در دو متغیر مختلط دستکمی از آن ندارد.

در ترجمهٔ کتاب از معادلهای موجود در واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار مرکز نشر دانشگاهی استفاده شده، در حد بضاعت واژه‌ای مناسب پیشنهاد شده است یا، به سبک معمول، تلفظ کلمه را با حرفهای فارسی آورده‌ایم.

در خاتمه برخود لازم می‌دانم که از آقایان یحیی تابش و ابوالقاسم لاله به ترتیب به خاطر در اختیار قراردادن متن اصلی و ویرایش ترجمه تشکر کنم. همچنین از انتشارات علمی و فرهنگی به خاطر آماده‌سازی و انتشار این کتاب صمیمانه سپاسگزارم. پیشاپیش از خوانندگان گرامی نیز که با

اعـلام کاستیهـای ایـن ترجمـه من را رهیـن منـت خـود خواهنـد نمـود متشکرم.

محمد جلوداری ممقانی

سپاسگزاری

تألیف این کتاب مدیون افراد بسیاری است. از دن آلبرز[۱]، رابرت ای.گرین[۲]، و پل هالموس[۳] به خاطر متقاعد کردن من برای نوشتن آن تشکر می‌کنم. از مارکوآبیت[۴]، هارولد بوآس[۵]، رالف بواس[۶]، دیوید درازین[۷]، پل هالموس، دایووی ما،[۸] دیوید میندا[۹]، مارکو پلوزو[۱۰]، جان استیپل[۱۱]، و جیم واکر[۱۲] برای مطالعهٔ نمونه‌های مختلف دستنوشته‌ها و ارائه پیشنهادهای ارزشمند متشکرم. کمیته تکنگاری کاروس وابسته به‌جامعهٔ ریاضی امریکا کمک کرد که سطح واقعی کتاب را شناخته و بر آن متمرکز شوم.

رالف بواس، رئیس این کمیته، نقش ویژه‌ای در پیدایش کتاب داشت. علاوه بر رهبری پروژه، وی انگیزهٔ لازم را در مراحل بحرانی ایجاد می‌کرد تا پروژه مسیر خود را طی کند. به همین دلیل حقشناسی صادقانهٔ خود را نسبت به وی ابراز می‌دارم.

1) Don Albers 2) Robert E. Greene 3) Paul Halmos 4) Marco Abate 5) Harold Boas 6) Ralph Boas 7) David Drasin 8) Daowei Ma 9) David Minda 10) Marco Peloso 11) John Stapel 12) Jim Walker

از جیم میلگرام[13] برای تولید TECPRINT، اولین کلمه‌پرداز فنی جهان، تشکر می‌کنم. این کلمه‌پرداز سالها برای من ابزار ارزشمندی بوده است. از میکی وایلدراسپین[14] به‌خاطر انجام کار خسته کنندهٔ تبدیل متن از TECPRINT به T_EX سپاسگزارم. از بیورلی جوی روئدی نیز که با کار ظریف خود پروژه من را به کتاب تبدیل کرد سپاسگزارم.

به ویژه از رابرت بورکیل[15] به خاطر خواندن سطر به سطر دستنوشته‌ها و تصحیح ریاضیات و نوشته‌های من تشکر می‌کنم. بی‌شک کمکهای وی موجب بالارفتن کیفیت کتاب شده است. مسئولیت اشتباهات باقیمانده در کتاب به عهدهٔ اینجانب است.

س. ج. ک.

13) Jim Milgram 14) Micki Wilderspin 15) Robert Burckel

پیشگفتار

نگرش جدید هندسی در نظریهٔ توابع مختلط با مقالهٔ کلاسیک آلفرس[16] آغاز شد «AHL». در آن مقاله ثابت شده بود که لم شوارتس را می‌توان به عنوان یک نابرابری بین برخی کمّیتهای هندسهٔ دیفرانسیلی روی قرص تلقی کرد (بعداً خواهیم دید که آن کمّیتها، خمیدگیها هستند). این نگرش ــ که واقعیتهای تحلیلی اساسی به زبان هندسه ریمانی قابل تفسیر است ــ در پنجاه سال گذشته به طور قابل ملاحظه‌ای توسعه یافته است. این دیدگاه اثباتهای جدیدی برای بسیاری از قضیه‌های کلاسیک آنالیز مختلط ارائه داده و نیز به چشم‌اندازهای جدیدی دست‌یافته است.

هدف ما از این تکنگاری آشنا کردن خواننده با زمینهٔ یک ترمی آنالیز مختلط با روش هندسی است. همهٔ تعریفهای هندسی را از اصول اولیه و فقط تا حد نیاز این کتاب ارائه می‌دهیم هیچ پیشنیاز هندسی فرض نکرده‌ایم و لازم هم نیست.

در فصل ۰ نگاهی گذرا به نظریه کلاسیک توابع یک متغیرهٔ مختلط داریم و به مباحثی که بعداً درکتاب در سطح پیشرفته‌تری ظاهر می‌شوند، توجه ویژه‌ای مبذول می‌نماییم. همچنین در این فصل خلاصهٔ اثبات قضیه‌های اصلی را می‌آوریم، با

16) Ahlfors

این امید که خواننده قبل از مطالعهٔ روش هندسی احساسی از روش کلاسیک داشته باشد.

فصل ۱ بررسی منظمی از روشهای هندسه ریمانی متناسب با یک متغیر مختلط را آغاز می‌کند. برای درک هر چه روشن‌تر ایده‌های اصلی تنها روی چند موضوع تکیه می‌کنیم: لم شوارتس، قضیهٔ نگاشت ریمان، خانواده‌های نرمال، و قضیهٔ پیکار. شاید بسیاری از خواننده‌ها برای اولین بار باشد که با دو موضوع اخیر مواجه می‌شوند. روش هندسی به ویژه توصیف متقاعد کننده‌ای از این قضیه‌ها به دست می‌دهد، و می‌توان آنها را با اثباتهای کلاسیک مورد بحث در فصل ۰ مقابله کرد. همچنین نگاهی اجمالی به نظریهٔ فاتو ـ جولیا می‌اندازیم، این نظریه از لحاظ تحلیلی تقریباً فنی است ولی از لحاظ هندسی کاملاً طبیعی است.

در فصل ۳ مترهای کاراتئودوری و کوبایاشی را معرفی می‌کنیم، مفاهیمی که ظاهراً در دنیای یک متغیرهٔ مختلط ناشناخته‌اند. این کار موجب می‌شود که مترهای ناوردا را روی دامنه‌های مسطح بدون توسل به قضیهٔ یکنواخت سازی معرفی کنیم. به این ترتیب می‌توانیم نوعی تعبیر «هندسهٔ دیفرانسیلی» از قضیهٔ نگاشت ریمان ارائه دهیم.

فصل آخر نگاهی گذرا بر نظریهٔ توابع چند متغیرهٔ مختلط دارد. در این فصل برخی از مطالب فصلهای قبل را به بعد دو توسعه می‌دهیم. نگاشتهای دو ـ هولومرفیک را مورد بحث قرار داده هم‌ارز نبودن گوی و قرص را با استدلالی هندسی ثابت می‌کنیم.

در یک درس مقدماتی آنالیز مختلط، معمولاً زبان هندسهٔ دیفرانسیل به کار گرفته نمی‌شود. امیدوارم این کتاب به عنوان مکملی برای درسی از این نوع به کار رود، و به آشنایی بیشتر با روش مفید هندسی بینجامد.

فصل صفر

مفاهیم اصلی نظریهٔ کلاسیك توابع

۱. نگاهی به آنالیز مختلط

هدف این کتاب بیان چگونگی درک طبیعی و زیبای جنبه‌های مختلف آنالیز مختلط از دیدگاه هندسهٔ متری است. بنابراین برای آماده‌کردن زمینه، کار خود را با مرور برخی مفاهیم اصلی آنالیز مختلط آغاز می‌کنیم. یک کتاب جنبی برای این مطالب مقدماتی کتابِ «BOAS» است. همچنین کتاب «KR3» را ببینید.

مطلب اصلی این مبحث قضیهٔ انتگرال کوشی و فرمول انتگرال کوشی است. از این مطالب برآوردهای کوشی، قضیهٔ لیوویل، اصل ماکسیمم، لم شوارتس، اصل آرگومان، قضیهٔ مونتل، و بسیاری از قضیه‌های مهم و زیبای آنالیز مختلط نتیجه می‌شوند. این نتایج را به صورت مقاله مورد بحث قرار خواهیم داد. اثباتهای ارائه شده بیشتر جنبهٔ مفهومی دارند تا دقیق: هدف ما ترسیم جریانی از مفاهیم است تا ارائه دقت مطلق ریاضی.

اگر $p \in C$ و $r > ۰$، نماد استاندهٔ

$$D(P,r) = (z \in C : |z-P| < r)$$

$$\bar{D}(P,r) = (z \in C : |z-P| \leq r)$$

$$\partial D(P,r) = (z \in C : |z-P| = r)$$

را به کار می‌بریم.

مجموعهٔ باز و همبند $U \subseteq C$ را یک دامنه می‌نامیم.

آنالیز مختلط مشتمل بر مطالعهٔ توابع هولومرفیک است. فرض کنید F یک تابع مختلط ـ مقدار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به معنای حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره) روی دامنه U در صفحهٔ مختلط باشد. برای متمایز کردن قسمتهای حقیقی و موهومی F می‌نویسیم $F = u + iv$. در این صورت F هولومرفیک، یا تحلیلی نامیده می‌شود اگر در معادله‌های کوشی ـ ریمان صدق کند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

این تعریف معادل است با تعریفهای آشنای دیگر، از جمله تعریفی مبتنی بر تعریف مشتق مختلط که اکنون به بحث در مورد آن می‌پردازیم. اگر F تابعی روی دامنه U در صفحه مختلط باشد و $P \in U$، می‌گوییم F در P مشتق مختلط دارد یا مشتق‌پذیر مختلط است اگر

$$F'(P) = \frac{\partial F}{\partial z}(P) = \lim_{z \to P} \frac{F(z) - F(P)}{z - P}$$

وجود داشته باشد. F روی U هولومرفیک است اگر F در تمام نقاط U مشتق مختلط داشته باشد.

تعریف مفهوم «هولومرفیک» با استفاده از مشتق مختلط به لحاظ تاریخی بسیار جالب است. در ابتدای به وجود آمدن آنالیز مختلط تلاش زیادی به عمل آمد تا ثابت شود در واقع تابعی که در همهٔ نقاط دامنهٔ U مشتق مختلط دارد پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به معنای حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره) است، و به این لحاظ بررسی این که تابعی در رابطه‌های کوشی ـ ریمان صدق می‌کند

کاری عادی است. عکس این مطلب یک تمرین سر راست است لذا در نهایت هر یک از دو تعریف درست است. از نقطه نظر ما رابطه‌های کوشی ـ ریمان جنبهٔ مفیدتری را ارائه می‌دهند. درستی این ادعا هنگامی که مفهوم انتگرال مختلط را معرفی کنیم بیشتر روشن خواهد شد.

تعریف ۱.

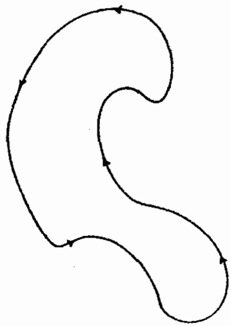
یک خم C^1 یا پیوسته ـ مشتق‌پذیر در دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ تابعی مانند $\gamma : [a,b] \to U$ از یک بازه در اعداد حقیقی به U است که γ' در همهٔ نقاط $[a,b]$ (در نقاط انتهایی مشتقهای یکطرفه) وجود داشته و پیوسته باشد. وقتی خطر اشتباهی در میان نباشد، گاه نماد γ را برای نمایش مجموعهٔ نقاط $\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ به جای نمایش دادن تابع از $[a,b]$ به U، به کار می‌بریم.

یک خم پاره ـ پیوسته ـ مشتق‌پذیر خمی پیوسته است که به صورت اجتماع تعدادی متناهی از خمهای پیوسته ـ مشتق‌پذیر نوشته شود. یک خم بسته نامیده می‌شود اگر $\gamma(a) = \gamma(b)$. این خم، بستهٔ ساده نامیده می‌شود اگر خود را قطع نکند یعنی $\gamma(s) = \gamma(t)$ و $s \neq t$ نتیجه دهد که $s = a$ و $t = b$ یا $s = b$ و $t = a$.

خم بستهٔ سادهٔ γ را مثبت ـ جهتدار می‌نامیم اگر ناحیه واقع در داخل آن وقتی خم را از $t = a$ به $t = b$ طی می‌کنیم در طرف چپ واقع شود. شکل ۱ را ببینید. در غیر این صورت خم را منفی ـ جهتدار می‌نامیم. اگر F تابعی پیوسته روی مجموعهٔ باز U باشد، انتگرال خط مختلط آن را روی خم پیوسته ـ مشتق‌پذیر γ در U مساوی با مقدار

$$\oint_\gamma F(z)dz = \int_a^b F(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

تعریف می‌کنیم.



شکل ۱

توجه کنید که مشابه مطالعهٔ خمهای جهتدار در قضیهٔ استوکس، مشتق خم را در انتگرال وارد کرده‌ایم. در حالتی که γ پاره ـ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، انتگرال

$$\oint_{\gamma} F(z)dz$$

را با انتگرال‌گیری روی هر یک از قطعه‌های پیوسته ـ مشتق‌پذیر γ و جمع آنها تعریف می‌کنیم.

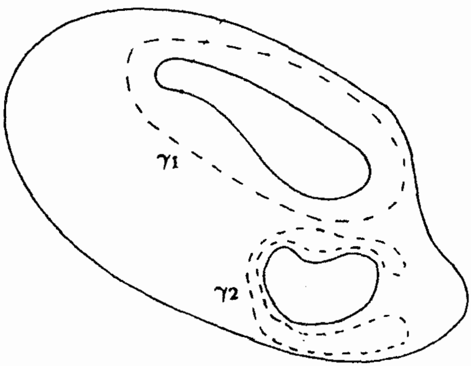
اکنون می‌توانیم قضیهٔ انتگرال کوشی را فرمول‌بندی کنیم. بررسی دقیق این قضیه نیازمند بحثی در مورد دگرشکلی خمهاست. اما، چون این قسمت جنبهٔ مرور مطالب را دارد می‌توانیم تا حدی غیر دقیق باشیم. فرض کنید γ خمی در یک دامنه مانند U باشد و بتوان آن را (به‌طور دقیق نگارهٔ آن را) به یک نقطه در U دگرشکل داد. خمی از این نوع را «بدیهی ـ توپولوژیک (نسبت به U)» می‌نامیم. در شکل ۲، $\gamma_۲$ بدیهی ـ توپولوژیک است اما $\gamma_۱$ بدیهی ـ توپولوژیک نیست. اکنون داریم:

□ **قضیهٔ ۲.** فرض کنید F یک تابع هولومرفیک روی دامنهٔ U و γ خمی بدیهی

ـ توپولوژیک، پاره ـ پیوسته ـ مشتق‌پذیر و بسته در U باشد. در این صورت

$$\oint_{\gamma} F(z)dz = 0$$

این قضیه را می‌توان با استفاده از رابطه‌های کوشی ـ ریمان با کاربرد مستقیم



شکل ۲

قضیهٔ استوکس ثابت کرد. این قضیه بیان می‌کند که یک تابع هولومرفیک در یک مجموعهٔ باز عمدتاً تحت تأثیر رفتارش روی مرز U است.

اکنون نقطهٔ P متعلق به U را تثبیت و فرض می‌کنیم γ خمی مثبت ـ جهتدار، بدیهی ـ توپولوژیک، بستهٔ سادهٔ در U بوده و P در داخل آن باشد. فرض می‌کنیم F روی U هولومرفیک باشد. اکنون با استدلالهای حدی مناسب می‌توانیم قضیه کوشی را در مورد تابع

$$G(z) \equiv \begin{cases} \frac{F(z)-F(P)}{z-P} & z \neq P \quad \text{اگر} \\ F'(P) & z = P \quad \text{اگر} \end{cases}$$

به کار ببریم. پس از اندکی محاسبه داریم

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

این فرمول، فرمول انتگرال کوشی است. این فرمول انتظار ما را مبنی بر این که یک تابع هولومرفیک در داخل γ کاملاً توسط رفتارش روی خم γ معین می‌شود برآورده می‌کند. از این فرمول اطلاعات بسیاری نتیجه می‌شود.

□ **قضیهٔ ۳.** فرض کنید تابع F روی دامنهٔ U هولومرفیک باشد و $P \in U$. همچنین فرض کنید U شامل قرص بستهٔ

$$\bar{D}(P, r) = \{z : |z - P| \leq r\}$$

باشد. در این صورت E را روی $\bar{D}(P, r)$ می‌توان به صورت سری توانی همگرای

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-p)^j$$

نوشت. همگرایی سری روی قرص $\bar{D}(P, r)$ مطلق و یکنواخت است.

بنابراین به یک معنی طبیعی مشاهده می‌کنیم که توابع هولومرفیک تعمیم چند جمله‌ایهای مختلط هستند. بسط سری توانی در حالت کلی موضعی است. اما این برای بسیاری از مقاصد کافی است.

اثبات قضیهٔ ۳.

مشاهده می‌کنیم که اگر $|z - P| < r$ و $|\zeta - P| = r$ می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - P}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-P}{\zeta-P}}$$

چون $|z-P| < r = |z-\zeta|$، داریم

$$\left|\frac{z-p}{\zeta-p}\right| < ۱ \cdot$$

بنابراین

$$\frac{۱}{\zeta-z} = \frac{۱}{\zeta-P}\sum_{j=۰}^{\infty}\left(\frac{z-P}{\zeta-P}\right)^{j} \cdot$$

اکنون با قرار دادن این سری توانی به جای هسته کوشی در فرمول انتگرال کوشی روی $\bar{D}(P,r)$ بسط سری توانی مطلوب برای تابع هولومرفیک F به‌دست می‌آید. □

این اثبات فرمول زیر را برای ضرایب a_j سری به دست می‌دهد

$$a_j = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-P)^{j+۱}}d\zeta \cdot$$

از طرف دیگر درست مانند نظریهٔ سریهای تایلور ضریب a_j را می‌توان از رابطهٔ

$$a_j = \frac{۱}{j!}\left(\frac{\partial^j F}{\partial z^j}\right)(P) \cdot$$

نیز به‌دست آورد. در نتیجه

$$\left(\frac{\partial^i F}{\partial z^i}\right)(P) = \frac{j!}{۲\pi i}\oint_{\gamma}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-P)^{j+۱}}d\zeta \qquad (*) \cdot$$

نتیجه. فرض کنید تابع $\tilde{F}$ روی قرص بدون مرکز $\tilde{D}(P,r) = D(P,r) - \{P\}$ هولومرفیک باشد. اگر $\tilde{F}$ کراندار باشد آنگاه می‌توان آن را به روی تمام قرص $D(P,r)$ توسعه داد. یعنی تابع هولومرفیک F روی $D(P,r)$ وجود دارد که $F|_{\tilde{D}(P,r)} = \tilde{F}$.

خلاصهٔ اثبات.
بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $P = 0$. تابع $G(z)$ را که برابر با $z^2\tilde{F}$ روی $\tilde{D}(P,r)$ و برابر با 0 در $P = 0$ تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. در این صورت G روی $D(p,r)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و در معادلات کوشی ـ ریمان صدق می‌کند.
جملهٔ پیشرو بسط سری توانی G حول 0 به صورت a_2z^2 است. بنابراین برای تعریف تابع هولومرفیک F روی $D(P,r)$ که برابر با $\tilde{F}$ روی $\tilde{D}(P,r)$ است، G را بر z^2 تقسیم می‌کنیم. □

بنابر نظریهٔ سریهای توانی این نکته که صفرهای تابعی که توسط یک سری توانی تعریف می‌شود در دامنهٔ آن تابع نمی‌توانند نقطهٔ تجمع داشته باشند، قضیهٔ معروفی است. بنابراین داریم:

□ **قضیهٔ ۴.** اگر تابع F روی دامنهٔ U هولومرفیک باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{z \in U : F(z) = 0\}$ نقطهٔ تجمعی در U ندارد.
این قضیه مجدداً تأییدی بر این نکته است که توابع هولومرفیک بسیار شبیه چند جمله‌ایها هستند: مجموعهٔ صفرهای چند جمله‌ای $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ گسسته و در واقع متناهی است.

برآوردهای کوشی در مورد مشتقهای یک تابع هولومرفیک از برآورد مستقیم فرمول $(*)$ حاصل می‌شوند:

□ **قضیهٔ ۵.** فرض کنید F روی دامنه‌ای مانند U که شامل قرص بستهٔ $\bar{D}(P,R)$

است، هولومرفیک باشد. در این صورت مشتقهای F در رابطه‌های

$$\left|\left(\frac{\partial^j}{\partial z^j}\right)F(P)\right| \leq \frac{j!M}{\mathbb{R}^j}.$$

صدق می‌کنند، که در آن M برابر با کوچکترین کرانهٔ بالای $|F|$ روی $\bar{D}(P, r)$ است.

توجه کنید این قضیه بیان می‌کند که اگر F روی یک قرص بزرگ کراندار باشد، آنگاه مشتقهای آن نسبتاً کوچک هستند، این حکم در قضیهٔ زیر به کار می‌رود.

□ قضیهٔ ۶ (لیوویل). فرض کنید F روی صفحهٔ مختلط هولومرفیک (یعنی تابعی تام) و کراندار باشد. در این صورت F ثابت است.

اثبات.
بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $|F|$ توسط ۱ کراندار باشد. نقطهٔ P را در صفحه تثبیت کنید. با استفاده از برآوردهای کوشی F روی قرص $D(P/R)$ داریم

$$|F'(P)| \leq \frac{۱}{R^۱}.$$

با میل دادن R به $+\infty$ نتیجه می‌شود $F' \equiv ۰$. اکنون حل یک تمرین ساده نشان می‌دهد که F باید تابعی ثابت باشد. □

یکی ازکاربردهای مهیج قضیهٔ لیوویل استفاده از آن در اثبات قضیهٔ اساسی جبر، یعنی قضیهٔ زیر است.

□ **قضیهٔ ۷.** فرض کنید $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ یک چند جمله‌ای با درجهٔ حداقل یک باشد. در این صورت نقطه z وجود دارد که P در آن صفر می‌شود.

اثبات.
فرض کنید چنین نقطه‌ای وجود ندارد. در این صورت $F(z) = \frac{1}{P(z)}$ تابعی تام است. چون یک چند جمله‌ای غیر ثابت در بینهایت بی‌کران می‌شود، F باید کراندار باشد. بنا به قضیهٔ لیوویل، F باید ثابت باشد. پس P ثابت است و لذا درجه‌اش صفر است. این تناقض اثبات را کامل می‌کند. □

فرض کنید k درجهٔ چند جمله‌ای p باشد. توجه کنید که اگر p در نقطه r_1 صفر شود، آنگاه $(z - r_1)$، p را می‌شمارد: $p(z) = (z - r_1)p_1(z)$ که در آن p یک چند جمله‌ای درجهٔ $k - 1$ است. اگر $k - 1 \geq 1$ آنگاه می‌توانیم قضیهٔ فوق را روی p_1 اعمال کنیم. با ادامهٔ این روش p را به صورت حاصلضربی از سازه‌های خطی:

$$p(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_k)$$

به‌دست می‌آوریم.

این مرور مختصر از آنالیز مختلط را با یادآوری اصل آرگومان و قضیه هورویتز به پایان می‌رسانیم.

□ **قضیهٔ ۸** (اصل آرگومان). فرض کنید تابع F روی ناحیهٔ U هولومرفیک و γ خم سادهٔ بسته‌ای باشد که بدیهی ـ توپولوژیک است و به طور مثبت جهتدار شده

است. فرض کنید F روی γ صفر نمی‌شود. با توجه به قضیهٔ ۴ روشن است که F دارای تعداد متناهی، مثلاً k، صفر (با شمارش چندگانگی) دارد. در این صورت داریم

$$\cdot k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta$$

خلاصهٔ اثبات.

با یک استدلال ساده، کافی است قضیه را به ازای $k = 1$ ثابت کنیم. استدلال دیگری γ را به یک دایره در جهت مثبت تبدیل می‌کند. پس از تبدیل مختصات فرض می‌کنیم که $p = 0$ صفر سادهٔ F در داخل دایرهٔ γ است. با نوشتن بسط سری توانی F و F' ملاحظه می‌کنیم که

$$\text{،}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{1}{\zeta} + h(\zeta)$$

که در آن h حول 0 هولومرفیک است. البته بنا به قضیهٔ انتگرال کوشی انتگرال h روی خمی حول 0 است. و به آسانی می‌توان محاسبه کرد که

$$\text{،}\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\zeta} d\zeta = 1$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

فرض کنید U یک دامنه و $\{F_j\}$ دنباله‌ای از توابع هولومرفیک روی U باشند که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به تابع حدی F همگرای یکنواخت است. این که F تابعی هولومرفیک است نتیجهٔ ساده‌ای از قضیه انتگرال کوشی است. اکنون با استفاده از اصل آرگومان چگونگی ارتباط صفرهای F و صفرهای F_jها را بررسی می‌کنیم.

□ **قضیهٔ ۹** (قضیهٔ هورویتز). اگر $\{F_j\}$ و F در شرایط فوق صدق کنند و اگر تمام F_jها بدون صفر باشند، آنگاه F بدون صفر یا متحد با صفر است.

اثبات.
فرض کنید F متحد با صفر نباشد. در این صورت مجموعهٔ صفرهای F گسسته است، بنابراین خم ساده، بسته و بدیهی ـ توپولوژیکی مانند γ در U وجود دارد که شامل هیچ عضوی از مجموعهٔ صفرها نیست. بنابراین هرگاه $j \to \infty$

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\gamma \frac{F_j'(\zeta)}{F_j(\zeta)}d\zeta \to \frac{۱}{۲\pi i}\oint_\gamma \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}d\zeta$$

چون به ازای هر j عبارت طرف چپ صفر است، پس عبارت طرف راست نیز صفر است. لذا F صفری در داخل γ ندارد. چون γ خمی «دلخواه» است که شامل هیچ صفری از F نیست، پس F بدون صفر است.

---

۲. اصل ماکسیمم، لم شوارتس، و کاربردهای آن

این بخش را با بررسی اجمالی اصل ماکسیمم آغاز می‌کنیم. فرض کنید F روی مجموعهٔ باز U که در برگیرندهٔ قرص بستهٔ $\bar{D}(P,r)$ است تحلیلی باشد. در این صورت فرمول انتگرال کوشی بیان می‌کند که

$$F(P) = \frac{۱}{۲\pi i}\oint_{\partial D(P,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - P}d\zeta،$$

اکنون مرز قرص را به صورت $\gamma(t) = P + re^{it}$ پارامتری می‌کنیم و با نوشتن تعریف انتگرال خط به دست می‌آوریم

$$F(P) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} F(P+re^{it})dt.$$

این ویژگی مقدار میانگین برای یک تابع هولومرفیک است. اکنون داریم:

□ **قضیهٔ ۱.** فرض کنید F روی مجموعهٔ باز و همبند U هولومرفیک باشد. اگر $P \in U$ وجود داشته باشد که

$$|F(P)| \geq |F(z)|, \forall z \in U$$

آنگاه F تابعی ثابت است.

خلاصه اثبات.
با ضرب F در یک عدد ثابت می‌توان فرض کرد که $M \equiv F(P)$ عددی حقیقی و نامنفی است. فرض کنید

$$S = \{z \in U : F(z) = F(P)\}$$

S ناتهی است، زیرا $P \in S$. به علاوه چون F تابعی پیوسته است، S به طور بدیهی بسته است. برای اثبات باز بودن S، فرض کنید $W \in S$ و $D(W, r) \subseteq U$. اکنون، به ازای $r > r' > ۰$ داریم

$$M = F(w) = |\frac{۱}{۲\pi} \int_{۰}^{۲\pi} F(P + r'e^{it})dt|$$

$$\leq \frac{۱}{۲\pi} \int_{۰}^{۲\pi} |F(P + r'e^{it})|dt \leq M$$

چون اعداد واقع در انتهای سمتهای چپ و راست این رابطه‌ها برابرند، پس تمام نابرابریها باید برابری باشند. لذا به ازای همهٔ tها و همهٔ r'ها با شرط $r > r' > ۰$ داریم $F(P + r'e^{it}) = |F(P + r'e^{it})| = M$، بنابراین

$$\{r'e^{it} : ۰ \leq t \leq ۲\pi, ۰ < r' < r\} \subseteq S.$$

در نتیجه S باز است.

چون S ناتهی است و بسته و باز، و U همبند است، پس $S = U$. و این چیزی است که می‌خواستیم اثبات کنیم.

مهمترین کاربرد اصل ماکسیمم برای ما در لم کلاسیک شوارتس است.

□ **قضیهٔ ۲** (لم شوارتس). اگر $f : D \to D$ هولومرفیک باشد و $F(\circ) = \circ$ آنگاه

$$|F'(\circ)| \leq \text{۱} \quad \text{و} \quad |F(z)| \leq |z|.$$

اگر به ازای $z \neq \circ$ای، $|F(z)| = |z|$ یا $|F'(\circ)| = \text{۱}$، آنگاه F یک دوران است: $\tau \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $F(z) \equiv e^{i\tau} z$.

اثبات.
تابع

$$G(z) = \begin{cases} \frac{F(Z)}{Z} & , \quad z \neq \circ \\ F'(z) & , \quad z = \circ \end{cases}$$

روی D هولومرفیک است. با استفاده از اصل ماکسیمم در مورد G روی قرص $\{z : |z| \leq | - \varepsilon\}$ به ازای $\varepsilon > \circ$ داریم

$$|G(z)| \leq (\text{۱} - \varepsilon)^{-\text{۱}}$$

هرگاه $\text{۱} - \varepsilon \leq |z|$. از این رابطه با میل دادن $\varepsilon \to \circ^+$ رابطه $|G(z)| \leq \text{۱}$ روی D که معادل حکم مورد نظر است نتیجه می‌شود. به همین ترتیب درستی $|F'(\circ)| \leq \text{۱}$ ثابت می‌شود.

در مورد یکتایی، توجه کنید که اگر $|F(z)| = |z|$ به ازای $z \neq 0$ای آنگاه $|G(z)| = 1$. بنابراین اصل ماکسیمم ایجاب می‌کند که G تکمدولی ثابت باشد. بنابراین F یک دوران است. به همین ترتیب حکم یکتایی در مورد مشتق، ثابت می‌شود.

به عنوان کاربرد ساده‌ای از لم شوارتس، خودنگاشتهای همدیس (یعنی نگاشتهای دوسویی و هولومرفیک) قرص واحد را رده‌بندی می‌کنیم. ابتدا ادعا می‌کنیم که اگر a عددی مختلط با قدر مطلق کوچکتر از ۱ باشد، آنگاه تبدیل موبیوس

$$\phi_a(\zeta) = \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}$$

$D(0,1)$ را به $D(0,1)$ می‌نگارد برای اثبات، ملاحظه می‌کنیم که ϕ_a مسلماً در یک همسایگی $\bar{D}(0,1)$ تعریف شده و هولومرفیک است و به علاوه $\phi_a(a) = 0$. اگر ثابت کنیم ϕ_a، $\partial D(0,1)$ را به $\partial D(0,1)$ می‌نگارد، آنگاه حکم از اصل ماکسیمم نتیجه می‌شود. به ازای $|\zeta| = 1$ داریم

$$|\phi_a(\zeta)| = \left|\frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}\right| = \left|\frac{1}{\bar{\zeta}} \cdot \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}\right|$$

$$= \left|\frac{\zeta - a}{\bar{\zeta} - \bar{a}}\right| = 1$$

زیرا $\zeta \cdot \bar{\zeta} = 1$. لذا $\phi_a : D(0,1) \to D(0,1)$. اثبات $(\phi_a)^{-1} = \phi_{a^{-1}} =$ سرراست است و لذا ϕ_a یک به یک و پوشاست.

علاوه بر توابع ϕ_a، دورانهای $\rho_\tau(\zeta) \equiv e^{i\tau} \cdot \zeta$ ، $\tau \in \mathbb{R}$، نیز قرص مذکور

را به صورت دوسویی بر خودش می‌نگارند. نکته مهم این است که این دو نوع نگاشت، مجموعهٔ خودنگاشتهای همدیس قرص واحد را کاملاً مشخص می‌کنند.

□ **قضیهٔ ۳.** فرض کنید F یک خود نگاشت همدیس قرص واحد باشد. در این صورت عدد مختلط a باقدر مطلق کوچکتر از ۱ و عدد حقیقی $\tau \in \mathbb{R}$ وجود دارند که

$$F(\zeta) = \phi_a o \rho_\tau(\zeta)$$

اثبات.

فرض کنید $F(\circ) = b$ و تابع $G \equiv \phi_b \circ F$ را در نظر بگیریم. در این صورت G یک خودنگاشت قرص واحد است و $G(\circ) = \circ$. بنا به لم شوارتس داریم $|G'(\circ)| \leq ۱$. همچنین با استفاده از لم شوارتس در مورد $G^{-۱}$ به دست می‌آوریم: $\left|(G^{-۱})'(\circ)\right| \leq ۱ = \left|\frac{۱}{G'(\circ)}\right|$. و لذا $|G'(\circ)| = ۱$. اکنون قسمت یکتایی لم شوارتس نتیجه می‌دهد که $G(\zeta) = \rho_\tau(\zeta)$ برای $\tau \in \mathbb{R}$ ای. و این معادله است

$$F = \phi_{-b} o \rho^\tau$$

با قراردادن $a = -b$ اثبات تکمیل می‌شود. □

تمرین.

با اثبات مشابهی نشان دهید که هر خودنگاشت همدیس قرص واحد را می‌توان به صورت $\rho_\tau o \phi_a$ نوشت.

مستقیماً نشان دهید که ترکیب دو تابع به صورت $\phi_a o \rho_\tau$ (به ترتیب $\rho_\tau o \phi_a$) تابعی از این نوع است.

قدم بعدی تعمیم لم شوارتس با حذف شرط $F(\circ) = \circ$ است. داریم:

□ **قضیهٔ ۴** (شوارتس، پیک). اگر $F : D \to D$ هولومرفیک باشد، $F(z_1) = w_1$ و $F(z_2) = w_2$ آنگاه

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\bar{w}_2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|$$

و

$$|F'(z_1)| \leq \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2}$$

اگر عبارت اول به ازای برخی $z_2 \neq z_1$ یا عبارت دوم به برابری تبدیل شود، آنگاه F باید یک خودنگاشت همدیس قرص واحد باشد.

اثبات.

تعریف می‌کنیم

$$\psi(z) = \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z} \quad , \quad \phi(z) = \frac{z + z_1}{1 + \bar{z}_1 z}.$$

در این صورت $\psi o F o \phi$ در فرضهای لم شوارتس صدق می‌کند. بنابراین

$$|(\psi o F o \phi)(z)| \leq |z| \quad ، \quad \forall z \in D.$$

اکنون قراردادن $z = \phi^{-1}(z_2)$ نابرابری اول را نتیجه می‌دهد. همچنین لم شوارتس بیان می‌کند که

$$|(\psi o F o \phi)'(\circ)| \leq 1.$$

محاسبهٔ این مشتق با استفاده از قاعدهٔ زنجیری نابرابری دوم را نتیجه می‌دهد.

حالت برابری مانند قضیه ۲ مورد تحلیل واقع می‌شود. □

۳. خانواده‌های نرمال و قضیهٔ نگاشت ریمان

یکی از مفاهیم بسیار مهم در توپولوژی، مفهوم فشردگی است. درک این مفهوم در مورد زیر مجموعه‌های فضاهای اقلیدسی با توجه به قضیهٔ هاینه ـ بورل آسان است: مجموعه‌ای فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد. در عصر جدید، ثابت شده است که فشردگی خانواده‌های توابع ابزار بسیار نیرومندی است. از نقطه نظر تاریخی مفهوم خانواده‌های نرمال و بویژه قضیهٔ مونتل یکی از نمونه‌های اولیهٔ این مفهوم‌اند. در این بخش قضیهٔ مونتل و کاربردهای آن را در قضیهٔ نگاشت ریمان بررسی می‌کنیم.

برای ساده ماندن متن، در اینجا تعریف محدود کننده‌ای از خانوادهٔ نرمال را بررسی می‌کنیم؛ در جای دیگری از کتاب، خانواده‌های نرمال را از نقطه نظر کاملاً متفاوت مورد بررسی کامل‌تری قرار خواهیم داد.

تعریف ۱.

خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از توابع روی دامنهٔ U را نرمال می‌نامیم اگر هر دنباله در $\mathcal{F}$ دارای زیر دنباله‌ای باشد که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U همگرای یکنواخت است.

قضیهٔ مونتل بیان می‌کند که

□ **قضیهٔ ۲** (مونتل). فرض کنید U دامنه‌ای در صفحهٔ مختلط و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع هولومرفیک روی U باشد. اگر عدد ثابت و مثبتی مانند M

وجود داشته باشد که

$$\forall z \in U, F \in \mathcal{F} \quad , \quad |F(z)| \leq M$$

آنگاه $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ نرمال است.

برای اثبات این قضیه به نتیجه مهمی از آنالیز حقیقی نیازمندیم. ابتدا چند اصطلاح را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع با دامنهٔ مشترک $S \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد. می‌گوییم این خانواده یکسان پیوسته است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد که از $z, w \in S$ و $|z - w| < \delta$ نتیجه شود.

$$|F(z) - F(w)| < \varepsilon$$

به ازای هر $F \in \mathcal{F}$.

توجه کنید که ویژگی یکسان ـ پیوستگی قوی‌تر از پیوستگی یکنواخت است: نه تنها δ مستقل از نقاط $z, w \in S$ است بلکه مستقل از تابع F متعلق به $\mathcal{F}$ نیز هست. اکنون مفهوم دیگری وابسته به این مفهوم را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.

خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از توابع با دامنهٔ مشترک $S \subseteq \mathbb{R}^n$ را یکسان کراندار می‌نامیم اگر عدد $M > 0$ یافت شود که وقتی $z \in S$ و $F \in \mathcal{F}$ آنگاه

$$|F(z)| \leq M.$$

با استفاده از مفاهیم یکسان پیوستگی و یکسان کرانداری قضیهٔ اساسی زیر را فرمولبندی می‌کنیم.

□ **گزارهٔ ۵** (آسکولی ـ آرتسلا). فرض کنید K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای در $\mathbb{R}^N$ باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانوادهٔ یکسان پیوسته و یکسان کرانداری از توابع روی K باشد. در این صورت $\mathcal{F}$ شامل دنباله‌ای $\{f_j\}$ است که روی K همگرای یکنواخت است.

اثبات قضیهٔ آسکولی ـ آرتسلا مشکل‌تر و فنی‌تر از آن است که در اینجا بیاید. خواننده علاقمند را به «RU1» ارجاع می‌دهیم. با این حال به مفهوم اصلی قضیهٔ توجه کنید: اگر خانواده‌ای از اشیاء نسبتاً خوب کراندار باشد، دارای زیردنباله‌ای همگراست. به بیان دیگر این قضیه، حکمی دربارهٔ فشردگی است.

اکنون با استفاده از قضیهٔ آسکولی‌ـ آرتسلا قضیهٔ مونتل را ثابت می‌کنیم:

اثبات قضیهٔ ۲.
فرض کنید U $\bar{D}(P,R) \subseteq U$، U باز و لذا ${}^cU$ بسته است. چون $\bar{D}(P,R)$ و ${}^cU$ مجزا هستند، فاصلهٔ این دو مجموعه مثبت است: یعنی، عدد $c > 0$ وجود دارد که اگر $z \in \bar{D}(P,R)$ و $u \in {}^cU$ آنگاه $|z-u| > c$. بنابراین به ازای هر $z \in \bar{D}(P,R)$ و در $F \in \mathcal{F}$ می‌توانیم فرمولهای برآورد کوشی را روی $\bar{D}(z,c)$ به کار ببریم. در نتیجه

$$|F'(z)| \le \frac{M \cdot 1!}{c^1} \equiv C.$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین به آسانی مشاهده می‌شود که به ازای

هر $z, w \in \bar{D}(P, \mathbb{R})$

$$|F(z) - F(w)| \leq C|z - w|.$$

این برآورد نشان می‌دهد که $\mathcal{F}$ روی $\bar{D}(P, R)$ یکسان پیوسته است: به ازای این $\varepsilon > ۰$، انتخاب می‌کنیم. $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$

بالاخره اگر K زیرمجموعهٔ فشردهٔ دلخواهی از U باشد، K را می‌توان به وسیلهٔ قرصهایی به صورت $\bar{D}(P, r)$ پوشاند و یکسان پیوستگی $\mathcal{F}$ روی K از نابرابری مثلث نتیجه می‌شود.

اکنون با استفاده از قضیه اسکولی ـ آرتسلا در مورد $\mathcal{F}$ روی K، زیردنباله‌ای مانند $\{F_{j_k}\}$ از دنبالهٔ مفروضی مانند $\{F_j\} \subseteq \mathcal{F}$ به دست می‌آوریم که روی K همگرای یکنواخت است. حال یک استدلال استاندارد قطری‌سازی زیردنباله‌ای مانند $\{F_{j k_l}\}$ به دست می‌دهد که روی همهٔ زیرمجموعه‌های فشرده U همگرای یکنواخت است. $\square$

توجه کنید که در آنالیز حقیقی قضیهٔ مونتل مشابه ندارد. خانوادهٔ $\mathcal{F} = \{sinjx\}_{j=۱}^{\infty}$ یکسان کراندار است اما زیردنبالهٔ همگرایی ندارد. در واقع ویژگی هولومرفیک است که ساختار عالی مطلوب را به دست می‌دهد.

اکنون به قضیهٔ نگاشت ریمان می‌پردازیم. فرض کنید U و V زیرمجموعه‌های بازی از صفحهٔ مختلط باشند. می‌گوییم U و V به طور همدیس معادل هستند اگر تابعی دو سویی و هولومرفیک (یعنی، یک نگاشت همدیس) مانند

$$\sigma : U \to V$$

وجود داشته باشد. انگیزهٔ این تعریف روشن است: هر تابع هولومرفیک F روی V به یک تابع هولومرفیک $Fo\sigma$ روی U و هر تابع هولومرفیک G روی U به یک

تابع هولومرفیک $G o \sigma^{-1}$ روی V منتهی می‌شود. بنابراین، در واقع آنالیز مختلط روی این دو دامنه یک چیز است.

چگونه می‌توان گفت که دو دامنه به طور همدیس معادل هستند؟ یک شرط لازم این است که آنها معادل توپولوژیک باشند، زیرا روشن است که هر نگاشت همدیس یک همانریختی است. قضیهٔ شگفت انگیز ریمان بیان می‌کند که اگر دامنهٔ U معادل توپولوژیک با قرص واحد باشد و برابر با همهٔ صفحهٔ نباشد. آنگاه به طور همدیس معادل قرص واحد است.

□ **قضیهٔ ۶** (قضیهٔ نگاشت ریمان). فرض کنید U یک زیردامنهٔ سرهٔ $\mathbb{C}$ با قرص واحد همانریخت باشد. در این صورت U به طور همدیس معادل قرص واحد باز $D(\circ, 1)$ است.

اثبات این قضیه بسیار دشوار است؛ در اینجا خلاصهٔ مراحل اصلی اثبات را می‌آوریم. برای ساده‌تر کردن اثبات فرض می‌کنیم U کراندار باشد.

<<< مرحله ۱

نقطه $P \in U$ را تثبیت کنید. فرض کنید

$\mathcal{F} = \{\sigma : U \to D(\circ, 1)$ یک به یک و هولومرفیک است و σ و $\sigma(P) = \circ\}$.

ادعا می‌کنیم که $\mathcal{F}$ ناتهی است در واقع چون U کراندار است، $R > \circ$ وجود دارد که $U \subset D(\circ, \bar{R})$. در این صورت روشن است که تابع

$$\sigma : \zeta \to \frac{1}{2R}(\zeta - P)$$

P را به $\circ$ می‌نگارد، هولومرفیک است و در

$$|\sigma(\zeta)| < \frac{1}{2R}(R + R) = 1.$$

صدق می‌کند. بدیهی است که σ یک به یک است. بنابراین $\sigma \in \mathcal{F}$ و لذا $\mathcal{F}$ ناتهی است.

>>> مرحلهٔ ۲

خانوادهٔ $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ نرمال است. در واقع اعضای $\mathcal{F}$ هولومرفیک و کراندارند. لذا بنا به قضیهٔ مونتل این خانواده نرمال است.

>>>مرحلهٔ ۳

M را به صورت $M = \sup\{|\sigma'(P)| : \sigma \in \mathcal{F}\}$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که M متناهی است. در واقع اگر $\bar{D}(P, r)$ قرص بسته‌ای حول P وزیر مجموعه‌ای از U باشد. آنگاه بنا به برآورد کوشی، به ازای هر $\sigma \in \mathcal{F}$، داریم

$$\cdot|\sigma'(P)| \leq \frac{۱!}{r} = \frac{۱}{r}$$

بنابراین M بزرگتر از $\frac{۱}{r}$ نیست.

>>> مرحلهٔ ۴

ادعا می‌کنیم که $\sigma_۰ \in \mathcal{F}$ وجود دارد که $\sigma'_۰(p) = M$. در اینجا خانواده‌های نرمال وارد می‌شوند. این مرحله از نظر تاریخی مهم است. زیرا ریمان درستی آن را بدون اثبات ادعا کرده است. از این‌رو مدتها درستی قضیهٔ وی مورد تردید بود تا این که با استفاده از اصل دیریکله تصحیح شد. امروزه خانواده‌های نرمال برای اثبات این ادعا به کار می‌روند. نکته در این است که فرمولبندی یک مسئله ماکسیمم یا مینیمم و فرض اینکه مسئله جواب دارد، اشتباه است.

برای اینکه ببینیم این استدلال چگونه کار می‌کند، با استفاده از تعریف سوپریموم نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ $\{\sigma_j\}$ در $\mathcal{F}$ وجود دارد که $|\sigma'_j(P)| \to M$. اما چون

بنا به مرحلهٔ ۲، $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ نرمال است زیردنبالهٔ $\{\sigma_{j_k}\}$ وجود دارد که روی زیر مجموعه‌های فشرده به تابعی مانند $\sigma_\circ$ همگرای یکنواخت است. اکنون بنا به برآوردهای کوشی $\{|\sigma'_{jk}(P)|\}$ به M همگراست. لذا $M = |\sigma'_o(P)|$. حال با ضرب $\sigma_\circ$ در یک ثابت تکمدولی تابع مطلوب به دست می‌آید.

>>> مرحلهٔ ۵

ادعا می‌کنیم که $\sigma_\circ$ روی U یک به یک است. درواقع این نکته از یک کاربرد زیرکانهٔ اصل آرگومان نتیجه می‌شود. نقاط متمایز Q و R را در U تثبیت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\circ < s < |Q-R|$. دنبالهٔ توابع $\psi_k(z) \equiv \sigma_{j_k}(z) - \sigma_{j_k}(Q)$ را روی $\bar{D}(R,s)$ در نظر می‌گیریم. چون σ_jها یک به یک هستند، هیچ یک از توابع ψ_k روی $\bar{D}(R,s)$ صفر نمی‌شود. بنا به قضیهٔ هورویتز تابع حدی $\sigma_\circ(z) - \sigma_\circ(Q)$ یا متحد با صفر است یا روی $\bar{D}(R,s)$ هیچ‌وقت صفر نیست. روشن است که این تابع متحد با صفر نیست، زیرا در مرحلهٔ ۱ ثابت کردیم که $\sigma'_\circ(P) = M > \circ$. بنابراین $\sigma_\circ(z) \neq \sigma_\circ(Q)$ به ازای هر $z \in \bar{D}(R,s)$ به ویژهٔ $\sigma_\circ(R) \neq \sigma_\circ(Q)$.
چون R و Q دلخواه‌اند، پس $\sigma_\circ$ یک به یک است.

>>> مرحلهٔ ۶

ادعا می‌کنیم که $\sigma_\circ$، U را به روی قرص واحد می‌نگارد. در این مرحله است که توپولوژی U وارد می‌شود. با استدلالی از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته، ثابت می‌شود که اگر F یک تابع هولومرفیک روی U باشد که هرگز برابر با صفر نمی‌شود، آنگاه $\log F$ یک تابع هولومرفیک خوش تعریف روی U است. در واقع این لگاریتم را می‌توان با فرمول

$$\log F(z) = \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta \cdot$$

تعریف کرد، که در آن γ_z مسیر قطعه به قطعه $C^{۱}$ ایست که P را به z وصل می‌کند. فرض توپولوژیک روی U تضمین می‌کند که $\log F$ مستقل از مسیر است.

وجود $\log F$ بی‌درنگ نتیجه می‌دهد که توانهای مختلف F نیز وجود دارند. در واقع اگر $\alpha \in C$، تعریف می‌کنیم

$$\cdot F^{\alpha}(z) = exp(\alpha \log F(z))$$

اکنون به دنبال یک تناقض می‌گردیم، فرض می‌کنیم $\sigma_{۰}$ پوشا نیست و $\beta \in D(۰, ۱)$ متعلق به نگارهٔ $\sigma_{۰}$ نباشد. اکنون $\sigma_{۰}$ را با تبدیل موبیوس معینی ترکیب می‌کنیم تا بتوانیم لم شوارتس را به کار ببریم.

تبدیل موبیوس ϕ_a مطرح شده در قسمت ۲ را به‌کار می‌بریم بنا به فرض $\phi_B o\sigma_o(\zeta)$ هیچ‌وقت روی U صفر نمی‌شود. بنابراین تابع

$$\mu(\zeta) = (\phi_\beta o\sigma_o(\zeta))^{۱/۲}$$

روی U تابع هولومرفیک خوش تعریفی است. بالاخره قرار می‌دهیم $\tau = \mu(P)$ و

$$\cdot \nu(\zeta) = \frac{|\mu'(P)|}{\mu'(P)} \cdot (\phi_\tau o\mu(\zeta))$$

در این صورت $\nu \in \mathcal{F}$. بنا به تعریف داریم $\nu|P| = ۰$ و محاسبه نشان می‌دهد

$$\cdot |\nu'(P)| = \frac{۱ + |\beta|}{۲|\beta|^{۱/۲}} \cdot M > M$$

این با انتخاب $\sigma_{۰}$ که دارای مشتق ماکسیمال در P است متناقض است. لذا $\sigma_{۰}$ پوشا است. تابع $\sigma_{۰}$ هم‌ارزی همدیس مطلوب از U به $D(۰, ۱)$ است. □

۴. تکینهای منفرد و قضیه‌های پیکار

این بخش را با بحث مختصری در مورد انواع نقاط تکینی که یک تابع هولومرفیک می‌تواند داشته باشد، آغاز می‌کنیم. فرض کنید F روی مجموعه $U = D(P,r)\setminus\{P\}$ هولومرفیک باشد. در این صورت F به سه طریق می‌تواند در نزدیکی P رفتار کند:

(الف) F نزدیک P کراندار است؛

(ب) F نزدیک P بی‌کران است، اما $k > 0$ وجود دارد که $(z-P)^k F(z)$ در نزدیکی P کراندار است؛

(ج) نه (الف) برقرار است نه (ب).

روشن است که (الف)، (ب)، و (ج) دوبه‌دو ناسازگارند و همهٔ حالتهای ممکن را می‌پوشانند.

در حالت اول. قضیهٔ تکینهای برداشتنی ریمان تضمین می‌کند که حد $\alpha = \lim_{z\to P} F(z)$ وجود دارد و تابع

$$F(z) = \begin{cases} F(z) & z \in U \\ \alpha & z = P \end{cases}$$

روی $D(P,r)$ تحلیلی است.

در حالت دوم می‌توان نشان داد

$$\lim_{z\to p} |F(z)| = +\infty \cdot$$

می‌گوییم F یک قطب در P دارد. اگر k کوچکترین عدد صحیح و مثبت باشد

که در (ب) صدق می‌کند آنگاه F را می‌توان به صورت

$$F(z) = (z - P)^{-k} h(z)$$

نوشت که در آن h روی $D(P, r)$ هولومرفیک است و در نزدیکی P صفر نمی‌شود.

حالت سوم بسیار پیچیده است و موردی است که می‌خواهیم روی آن تمرکز کنیم. با این شرایط می‌گوییم F یک نقطهٔ تکین اساسی در P دارد. ابتدا قضیهٔ کسراتی ـ وایرشتراس را که سطح پیچیدگی موجود را نشان می‌دهد ثابت می‌کنیم.

□ **قضیهٔ ۱.** فرض کنید F روی $U = D(P, r) \setminus \{P\}$ هولومرفیک بوده و در P یک نقطهٔ تکین اساسی داشته باشد. در این صورت به ازای هر $\circ < s < r$، مجموعهٔ $\{F(z) : \circ < |z - P| < s\}$ در صفحهٔ مختلط چگال است.

این قضیه بیان می‌کند که توابع تحلیلی شیوهٔ رفتاری بسیار خاصی در نزدیکی نقاط تکین اساسی خود دارند: تابع حدی متناهی یا نامتناهی دارد یا مقادیر بسیار نزدیک به همهٔ اعداد مختلط می‌گیرد.

اثبات قضیهٔ ۱.

فرض کنید حکم قضیه نادرست باشد. در این صورت عدد مختلط β و عدد مثبت $r > \circ$ وجود دارند که

$$\forall z \in U \quad , \quad |F(z) - \beta| > r$$

تعریف می‌کنیم

$$.h(z) = \frac{1}{F(z) - \beta}$$

در این صورت $|h(z)|$ در نزدیکی P با ثابت $\frac{1}{r}$ کراندار است. بنا به قضیهٔ نقطه تکین برداشتنی ریمان، h را می‌توان به P به صورت تحلیلی ادامه داد. اگر $h(P) \neq 0$ به تناقض می‌رسیم، زیرا در این صورت F را می‌توان به طور تحلیلی به P ادامه داد. اما از $h(P) = 0$ نتیجه می‌شود که F یک قطب در P دارد و این نیز نادرست است. این تناقض اثبات را کامل می‌کند. □

گاه بهتر است نقطه در بینهایت را به صورت یک نقطه معمولی صفحه مختلط در نظر بگیریم. نگاشت

$$z \rightarrow \frac{1}{z}$$

اجازه می‌دهد که همسایگیهای 0 و ∞ را مبادله کنیم. به ویژه می‌گوییم تابع هولومرفیک F روی $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \mathbb{R}\}$ در نقطه ∞ یک نقطه تکین برداشتنی، قطب یا نقطهٔ تکین، اساسی دارد اگر تابع $F(\frac{1}{z})$ در نقطه 0 به ترتیب یک نقطه تکین برداشتنی، قطب یا نقطهٔ تکین اساسی داشته باشد. اکنون چند ویژگی مهم نقاط تکین در بینهایت را بیان می‌کنیم.

□ **گزارهٔ ۲.** اگر F تابعی تام (هولومرفیک روی تمام $\mathbb{C}$) باشد و در بینهایت نقطه تکین برداشتنی داشته باشد، آنگاه F تابعی ثابت است.

خلاصهٔ اثبات.
با بررسی تابع $F(\frac{1}{z})$ مشاهده می‌کنیم که F باید در ∞ دارای حد متناهی باشد. بنابراین F کراندار است. بنابر قضیهٔ لیوویل F ثابت است. □

□ **گزارهٔ ۳.** اگر F تام باشد و در ∞ یک قطب داشته باشد آنگاه F

چندجمله‌ای است.

خلاصهٔ اثبات.
با توجه به $F(\frac{1}{z})$ ملاحظه می‌کنیم $k > 0$ وجود دارد که $z^k F(\frac{1}{z})$ حول 0 کراندار است. و لذا تابع $z^{-k}F(\frac{1}{z})$ حول ∞ کراندار است. فرض کنید P_k چند جمله‌ای درجه kام تیلور F حول 0 باشد. در این صورت تابع

$$h(z) = \frac{F(z) - P_k(z)}{z^k}$$

روی تمام صفحه هولومرفیک و در بینهایت کراندار است. لذا بنابر قضیهٔ لیوویل h ثابت است. در نتیجه F یک چندجمله‌ای است. □

از این گزاره‌ها در می‌یابیم که اگر F تابعی تام باشد آنگاه F یا یک چند جمله‌ای است یا یک نقطهٔ تکین اساسی در ∞ دارد. چون هدف اصلی نظریه توابع هولومرفیک بررسی دسته‌ای از توابع است که ویژگیهای چندجمله‌ایها را تعمیم می‌دهند، روشن است که درک ویژگیهای نقاط تکین اساسی بسیار مهم است.

قضیه‌های پیکار احکام عمیقی در مورد توزیع مقادیر توابع تام و به طور کلی توابع هولومرفیک حول نقاط تکین اساسی آنها ارائه می‌دهند. اکنون این قضیه‌ها را بیان می‌کنیم .

□ **قضیهٔ ۴** (قضیهٔ کوچک پیکار). اگر F تابع تام غیرثابتی باشد، آنگاه نگارهٔ F شامل همهٔ اعداد مختلط به استثنای احتمالاً یک عدد است. به عبارت دیگر اگر تابع تامی دو عدد مختلط را به عنوان مقادیر خود نگیرد، این تابع ثابت کند.

□ **قضیهٔ ۵** (قضیهٔ بزرگ پیکار). فرض کنید F روی مجموعهٔ باز

$U = D(P,r)\setminus\{P\}$ هولومرفیک باشد. اگر F یک نقطه تکین اساسی در P داشته باشد. در این صورت به ازای هر $r > s > ۰$ مجموعهٔ $\{F(z) : ۰ < |z-P| < s\}$ شامل همهٔ اعداد مختلط احتمالاً به جز یکی از آنهاست.

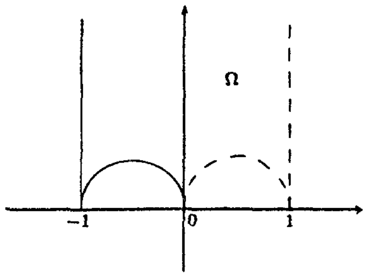
اکنون روشن است که قضیهٔ بزرگ تعمیمی از قضیهٔ کوچک است. با چند مثال این قضیه‌ها را مجسم می‌کنیم.

اگر $F(z)$ چندجمله‌ای غیرثابت و α عدد مختلط دلخواهی باشد، آنگاه بنا به قضیهٔ اساسی جبر معادله $F(z) = \alpha$ همواره جواب دارد. بنابراین هر عدد مختلطی یکی از مقادیر F است. اگر $F(z) = e^z$ آنگاه هر عدد مختلطی برابر با یکی از مقادیر F است به جز عدد ۰. قضیهٔ کوچک هر تابع تام را مجاز به حذف یک عدد از مجموعهٔ مقادیرش می‌کند. این قضیه حذف دو عدد را مجاز نمی‌کند.

اثبات هر دو قضیهٔ پیکار با روشهای کلاسیک بسیار دشوار است. اثبات اولیه مستلزم ساختن تابع هولومرفیک ویژه‌ای از نیم صفحهٔ فوقانی به $\mathbb{C}\setminus\{۰,۱\}$ است. این تابع که، تابع مدولار بیضوی نام دارد ابزار قدرتمندی در نظریهٔ توابع است. در اینجا روش ساختن تابع مدولار و کار برد آن را برای اثبات قضیهٔ کوچک به اختصار شرح می‌دهیم.

ابتدا نگاشت همدیس h را از نیمهٔ راست ناحیهٔ Ω، شکل ۱، به نیمه‌صفحهٔ فوقانی چنان تعریف می‌کنیم که $h(۰) = ۰$، $h(۱) = ۱$ و $h(\infty) = \infty$.
بنابر قضیهٔ انعکاس شوارتس h را ازکل ناحیهٔ Ω به $\mathbb{C}\setminus\{۰,۱\}$ توسعه می‌دهیم.
با استدلالهای دقیق مربوط به انعکاس می‌توانیم یک تابع تحلیلی از نیم‌صفحه فوقانی را به $\mathbb{C}\setminus\{۰,۱\}$ توسعه می‌دهیم. این تابع توسعه یافته را با $\lambda(z)$ نشان می‌دهیم.

حالا اگر F تابع تامی باشد که بُرد آن شامل دو مقدار نیست، به کمک ترکیب



شکل۳

با یک تبدیل خطی می‌توان فرض کرد که این دو مقدار ۰ و ۱ هستند. در این صورت جِرمی از $\lambda^{-1} oF$ را که اساساً روی یک قرص کوچک تعریف شده است، می‌توان به تام $\mathbb{C}$ به طور تحلیلی ادامه داد. بنابراین $\lambda^{-1} oF$ تابع تامی است که مقادیرش را در نیم‌صفحهٔ فوقانی اختیار می‌کند. بالاخره تابع هولومرفیک

$$\rho(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

نیم‌صفحهٔ فوقانی را روی قرص واحد می‌نگارد. اجمالاً، مقادیر تابع تام $\rho o \lambda^{-1} oF$ متعلق قرص واحداند، به عبارت دیگر این تابع کراندار است. بنا به قضیهٔ لیوویل این تابع مرکب ثابت است. بنابراین F تابعی ثابت است. این خلاصهٔ اثبات قضیهٔ کوچک را تکمیل می‌کند.

ساختن تابع مدولار بیضوی هم فنی و هم دشوار است. بحث ادامهٔ تحلیلی مورد نیاز برای توسعهٔ جرمی از $\lambda^{-1} oF$ به همهٔ $\mathbb{C}$ نیازمند مقدار زیادی نظریه است. منشأ اثباتهای دیگر قضیهٔ پیکار نظریهٔ نوانلینا یا نظریهٔ توزیع مقدار توابع تام است. یکی از مزایای بررسی هندسی نظریهٔ توابع مختلط ارائه اثباتی نسبتاً ساده و طبیعی برای هر دو قضیه کوچک و بزرگ پیکار است.

فصل ۱

مفاهیم اصلی هندسهٔ دیفرانسیل

---

۰ . ملاحظات مقدماتی

هندسهٔ دیفرانسیل به یکی از نیرومندترین ابزارهای ریاضی قرن بیستم تبدیل شده است. به عنوان مثال، هم اکنون هندسهٔ دیفرانسیل یکی از اجزای جدایی ناپذیر معادلات دیفرانسیل، آنالیز همساز و آنالیز مختلط است.

روشهای هندسی علیرغم اهمیتشان به دلیل پیچیدگی زبان، آنقدر که باید رشد نیافته‌اند. متأسفانه مشخص نمودن هندسهٔ دیفرانسیل به عنوان «قسمتی از ریاضیات که تحت تغییر نماد ناورداست» تاحدی درست است.

بهترین راه یادگرفتن ریاضیات نوین یادگرفتن آن در زمینه‌ای است که از قبل با آن آشناییم. در محیط یک متغیرهٔ مختلط، مفاهیم متریک ریمان، ژئودزیک و خمیدگی تا حدی ساده می‌شوند. در اینجا به ابزارهایی نظیر تانسور و بافه نیازی نیست. در نتیجه می‌توان طرحی از مطلب و تاحدودی روش هندسهٔ دیفرانسیل را بدون درگیر شدن با نمادگذاری و اعمال ماشینی یادگرفت.

بنابراین در این فصل برخی از مفاهیم اصلی هندسهٔ دیفرانسیل را تنها در صفحهٔ مختلط و نیز چند کاربرد آن را یاد می‌گیریم. در فصلهای بعدی مطالبی در مورد خمیدگی و کاربردهای پیشرفته‌تر هندسهٔ دیفرانسیل یاد خواهیم گرفت.

۱. مترهای ریمانی و مفهوم طول

در آنالیز کلاسیک، یک متر وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فاصله است. اگر X یک مجموعه باشد، یک متر γ روی X تابعی مانند

$$\gamma : X \times X \to R$$

است که به ازای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند،

(۱) $\gamma(x,y) = \gamma(y,x)$

(۲) $\gamma(x,y) \geq \circ$ و $\gamma(x,y) = \circ$ اگر و تنها اگر $x = y$.

(۳) $\gamma(x,y) \leq \gamma(x,z) + \gamma(z,y)$.

اشکال تعریف متر با این کلیت در آن است که متر ارتباطی با حساب دیفرانسیل و انتگرال ندارد. چه ارتباطی مورد نظر ماست؟

به ازای دو نقطه P و Q در X می‌خواهیم خمی با کوتاه‌ترین طول که P را به Q وصل می‌کند پیدا کنیم. هر تلاشی برای ساختن معقول این خم به یک معادلهٔ دیفرانسیل منجر می‌شود و لذا باید متر مورد نظر به مشتق‌گیری متکی باشد. با این حال موضوع قابل ملاحظهٔ دیگر خمیدگی است: به بیان کلاسیک خمیدگی عبارت است از نرخ تغییر میدان برداری قایم: مفاهیم قایم و نرخ تغییر بی‌تردید به مشتق‌گیری منجر می‌شوند.

یادآور می‌شویم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره طول خم پیوسته مشتق‌پذیری مانند $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{2}$ با فرمول

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \qquad (*)$$

تعریف می‌شود. در واقع بسیاری از کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال با روش

کاشفانه‌ای از یک مفهوم عاقلانهٔ طول به این فرمول می‌رسند. اما به بیان دقیق، (*) باید تعریف طول کمان تلقی شود.

توجه کنید که (*) به $|\dot{\gamma}(t)|$، طول بردار مماس $\dot{\gamma}(t)$ بر γ در نقطه t، که قبلاً تعریف شد وابسته است. بینش عمیق ریمان در مورد هندسهٔ دیفرانسیل آن بود که می‌توان متر جدیدی با مشخص کردن روش جدیدی برای اندازه‌گیری طول بردارهای مماس تعریف کرد. جالب‌ترین مثالها وقتی به دست می‌آیند که این روش اندازه‌گیری طول بردارهای مماس از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کند. از این‌رو معنی جدیدی به کلمهٔ «متر» می‌دهیم. البته این معنی جدید سرانجام به معنی بسیار کلاسیک آن مربوط خواهد شد.

تعریف ۱.

اگر $\Omega \subseteq C$ یک دامنه باشد، یک متر روی Ω تابع پیوسته‌ای مانند $\rho(z) \geq 0$ در Ω است که روی $\{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$ دوبار پیوسته مشتق‌پذیر است. اگر $z \in \Omega$ و $\xi \in \mathbb{C}$ یک بردار باشد، طول ξ را در z به صورت

$$\|\xi\|_{\rho,z} \equiv \rho(z) \cdot |\xi|$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $|\xi|$ طول اقلیدسی را نمایش می‌دهد.

تذکر.

معمولاً متر $\rho(z)$ اکیداً مثبت خواهد بود، اما گاه بهتر است که اجازه دهیم این متر صفرهای تنها داشته باشد. این صفرها به صورت صفرهای توابع هولومرفیک ظاهر خواهند شد. صفرهای ρ را باید نقاط تکین متر تلقی کنیم.

تنها اشاره می‌کنیم مترهایی را که در اینجا در نظر می‌گیریم حالتهای خاصی

از متر دیفرانسیلی به نام متر دیفرانسیلی هرمیتی هستند. این اصطلاح نباید موجب نگرانی شود. گاه آنالیزدانهای کلاسیک این مترها را مترهای همدیس می‌نامند و آنها را با $\rho(z) \mid dz \mid$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱.

فرض کنید Ω دامنهٔ دلخواهی در $\mathbb{C}$ باشد. به ازای همهٔ اعضای $z \in \Omega$ تعریف می‌کنیم. $\rho(z) = ۱$. توجه کنید که این متر دلخواه به ازای $z \in \Omega$ و $\xi \in \mathbb{C}$ نتیجه می‌دهند:

$$\|\xi\|_{\rho,z} \equiv \rho(z) \cdot |\xi| = |\xi|$$

به بیان کوتاه، این انتخاب متر، مفهوم اقلیدسی استاندارد طول بردار را به دست می‌دهد ــ و این مفهوم مستقل از انتخاب نقطهٔ مبنای z است. این متر را معمولاً متر اقلیدسی می‌نامند. $\square$

مثال ۲.

فرض کنید $D \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\} = \Omega$ قرص واحد باشد. قرار دهید

$$\cdot\rho(z) = \frac{۱}{۱ - |z|^{۲}}$$

این متر پوانکاره است، که برای به دست آوردن چشم‌اندازهای عمیق در آنالیز مختلط روی قرص به کار رفته است. این متر بعداً در این کتاب مفصلاً مورد بحث واقع خواهد شد. اکنون چند محاسبهٔ مقدماتی با متر پوانکاره انجام می‌دهیم.
به ازای $\xi \in \mathbb{C}$ داریم

$$;\|\xi\|_{\rho,(\frac{۱}{۲}+۰i)} = \rho(\frac{۱}{۲} + ۰i)|\xi| = \frac{۴}{۳} \cdot |\xi|$$

$$\|\xi\|_{\rho,۰} = \rho(۰)\cdot|\xi| = ۱\cdot|\xi| = |\xi|؛$$

$$\|\xi\|_{\rho,(۰+۰/۹i)} = \rho(۰/۹i)\cdot|\xi| = \frac{۱}{۰/۱۹}|\xi| = (۵/۲۶۳۱۵۷۸)\cdot|\xi|$$

□

مفهوم طول یک بردار که با تغییر نقطهٔ مبنا تغییر می‌کند، با آنچه که در حساب دیفرانسیل انتگرال یاد می‌گیریم تفاوت دارد. در حساب دیفرانسیل و انتگرال بردار دارای جهت و اندازه است اما مکان ندارد. اکنون می‌گوییم که بردار مکان دارد و روش محاسبه طول آن به این مکان بستگی دارد. مثال زیر نشان می‌دهد که بردارهای مکاندار چگونه در عمل ظاهر می‌شوند.

مثال ۳.

فرض کنید $\eta(t) = t$، $۰ \le t \le \frac{۱}{۲}$ و $\mu(t) = \frac{۱}{۲} + it$، $۰ \le t \le \frac{۱}{۲}$. مقادیر

$$\|\dot{\eta}(t)\|_{\rho,\eta(t)} \quad \text{و} \quad \|\dot{\mu}(t)\|_{\rho,\mu(t)}$$

را به ازای متر پوانکارهٔ

$$\rho(z) = \frac{۱}{۱-|z|^{۲}}$$

محاسبه می‌کنیم.

به ازای همهٔ tها داریم $\dot{\eta}(t) = ۱$. توجه کنید که طول اقلیدسی $\dot{\eta}(t)$ برابر با ۱ است. و

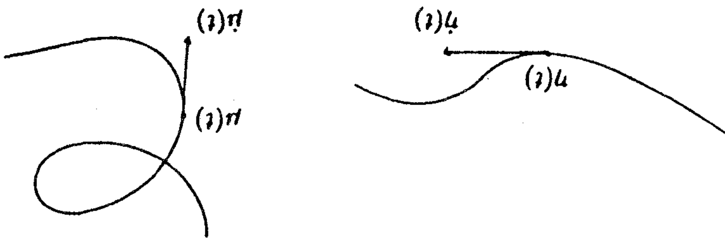
$$\|\dot{\eta}(t)\|_{\rho,\eta(t)} = \rho(\eta(t))\cdot|\dot{\eta}(t)| = \frac{۱}{۱-t^{۲}}\cdot$$

همچنین به ازای هر t داریم $\dot{\mu}(t) = 1$ و

$$\|\dot{\mu}(t)\|_{\rho,\mu(t)} = \rho(\mu(t)) \cdot |\dot{\mu}(t)| = \frac{1}{\frac{3}{4} - t^2}.$$

□

بردارهای مماس در این کتاب به صورت مماس بر خمها ظاهر خواهند شد. بردار مماس $\dot{\eta}(t)$ را مماس بر خم در نقطهٔ $\eta(t)$ و $\dot{\mu}(t)$ را مماس بر خم در نقطه $\mu(t)$ تلقی می‌کنیم. شکل ۱ را ببینید.



شکل۱

تعریف ۲.

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ یک دامنه و ρ یک متر روی آن باشد. اگر

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

یک خم پیوسته مشتق‌پذیر باشد طول آن را برحسب متر ρ به صورت

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho,\gamma(t)} dt$$

تعریف می‌کنیم. طول یک خم پاره پیوسته مشتق‌پذیر به صورت مجموع طولهای قطعه‌های پیوسته مشتق‌پذیر آن تعریف می‌شود.

توجه کنید این تعریف کاملاً مشابه تعریف اقلیدسی (حساب دیفرانسیل و انتگرال) طول خم است. با این حال در اینجا تابعی در زیر علامت انتگرال به کار می‌بریم که شامل مفهوم بسیار کلی‌تری از طول بردار است.

همچنین توجه کنید که از فرمول تغییر متغیر نتیجه می‌شود که طول یک خم مستقل از چگونگی پارامتری کردن آن است.

منابع کلاسیک طول خم را به صورت

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|$$

می‌نویسند. اما ما از این نماد استفاده نخواهیم کرد.

مثال ۴.

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{C}$ قرص واحد و $\rho(z)$ متر پوانکاره روی D باشد. $\epsilon > ۰$ را تثبیت کنید. طول خم $\gamma(t) = t$، $۰ \leq t \leq ۱ - \epsilon$ را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_۰^{۱-\varepsilon} \|\dot\gamma(t)\|_{\rho,\gamma(t)} dt = \int_۰^{۱-\varepsilon} \frac{|\dot\gamma(t)|}{۱ - |\gamma(t)|^۲} dt$$

$$= \int_۰^{۱-\varepsilon} \frac{۱}{۱ - t^۲} dt = \frac{۱}{۲} \ln \frac{۲ - \varepsilon}{\varepsilon}$$

مشاهده می‌کنیم که وقتی ε کوچک است $\ell_\rho(\gamma)$ بزرگ است. در واقع

$$\lim_{\varepsilon \to ۰^+} \ell_\rho(\gamma) = +\infty \cdot$$

یعنی ∂D در متر پوانکاره حداقل روی این مسیر خاص γ از مبدأ بینهایت دور است.

تذکر.

توجه کنید اگر $\rho(t) \equiv ۱$ را مانند مثال ۱ انتخاب کنیم، طول خم با طول اقلیدسی معمولی آن یکسان خواهد شد. □

در یک درس دقیق هندسه ریمانی ثابت می‌کنند که به ازای متر معقولی (لازم است متر کامل باشد) همواره خمهای با کمترین طول وجود دارند (زبان عادی برای فرمولبندی این مطلب زبان ژئودزیکها یعنی خمهایی که در یک معنای بینهایت کوچک کوچکترین طول را دارند، است.) در وضعیت ملموس کنونی می‌توانیم این گونه مفاهیم تجریدی را فراموش کنیم و بازهم اطلاعات مفید بسیاری به‌دست آوریم.

مثال ۵.

قرص D را با متر پوانکاره $\rho(z) = \frac{۱}{۱-|z|^۲}$ مجهز و $\epsilon > ۰$ را تثبیت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که بین همهٔ خمهای پیوسته مشتق‌پذیر

$$\mu(t) = t + iw(t) \qquad ۰ \leq t \leq ۱ - \epsilon،$$

که در شرایط $\mu(۰) = ۰$ و $\mu(۱-\varepsilon) = ۱ - \varepsilon + ۰i$ صدق می‌کنند $\gamma(t) = t$ دارای کوچکترین طول است. در اینجا $w(t)$ تابعی پیوسته مشتق‌پذیر و حقیقی مقدار است.

در واقع به ازای چنین μای داریم

$$\ell_\rho(\mu) = \int_۰^{۱-\varepsilon} \|\dot{\mu}(t)\|_{\rho,\mu(t)} dt$$

$$= \int_۰^{۱-\varepsilon} \frac{۱}{۱-|\mu(t)|^۲} |\dot{\mu}(t)| dt = \int_۰^{۱-\varepsilon} \frac{(۱ + [w'(t)^۲]^{\frac{۱}{۲}})}{۱ - t^۲ - (w(t))^۲} dt$$

اما از

$$\frac{1}{1-t^2-(w(t))^2} \geq \frac{1}{1-t^2}, (1+[w'(t)]^2)^{\frac{1}{2}} \geq 1$$

نتیجه می‌شود که

$$\ell_\rho(\mu) \geq \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t^2} dt = \ell_p(\gamma)$$

این رابطه نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد.

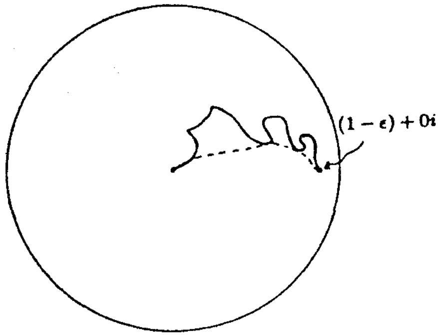
توجه کنید که با اندک تغییری این استدلال را در مورد خمهای پاره پیوسته مشتق‌پذیر $t+iw(t)$ نیز می‌توان به کار برد. □

درواقع اگر یک خم پاره پیوسته مشتق‌پذیر که $0 \in D$ را به $(1-\epsilon)+0i \in D$ وصل می‌کند به صورت

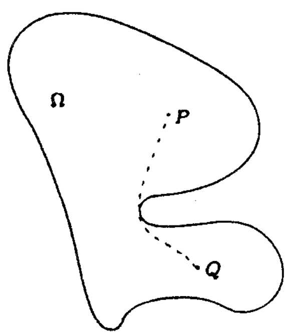
$$\mu(t) = t + iw(t) \qquad (*)$$

نباشد آنگاه با به کاربردن مقایسه‌های مقدماتی نتیجه می‌شود که طول آن از طول خمی مانند $(*)$ بزرگتر خواهد بود (شکل ۲ را ببینید). لذا نتیجه می‌گیریم خم γ دارای کوتاه‌ترین طول در میان خمهای واصل بین نقاط 0 و $(1-\epsilon)+0i$ است. در بحث فوق اگر ρ متری روی دامنهٔ مسطح Ω و P و Q دو نقطهٔ متعلق به آن باشند آنگاه فاصلهٔ بین P و Q را باید به صورت زیر تعریف کرد: فرض کنید $C_\Omega(P,Q)$ مجموعهٔ همهٔ خمهای پاره پیوسته مشتق‌پذیر $\gamma : [0,1] \to \Omega$ باشد که $P = \gamma(0)$ و $Q = \gamma(1)$. فاصله P و Q را نسبت به متر ρ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_\rho(P,Q) = \inf\{\ell_\rho(\gamma) : \gamma \in C_\Omega[P,Q]\}.$$



شکل۲



شکل۳

اکنون نشان دهید که این مفهوم در اصول متر که در ابتدای این قسمت بیان شد صدق می‌کند.

همراه با این تعریف نوعی ظرافت نیز وجود دارد. اگر $\rho(z) \equiv ۱$، متر اقلیدسی باشد و اگر Ω همهٔ صفحه، آنگاه $d_\rho(P, Q)$ فاصلهٔ اقلیدسی بین P و Q است. اما اگر Ω و P و Q مطابق شکل ۳ باشند، کوتاه‌ترین خم واصل P بین و Q وجود ندارد و فاصله بین P و Q طول خم خط‌چین پیشنهاد می‌شود اما توجه کنید که این خم در Ω واقع نیست. نکته مهم این است که آیا دامنهٔ داده شده نسبت به متر کامل است، ما بعداً مطالب بیشتری در این باره خواهیم گفت.

اکنون با استفاده از زبان و نماد فاصله معنای مثالهای ۴ و ۵ و بحث بعد از آنها را جمعبندی می‌کنیم: اگر $\rho P(z) = \frac{۱}{۱-|z|^۲}$ متر روی قرص D باشد، $P = ۰$ و $Q = R + i۰$ آنگاه

$$\cdot d\rho(P, Q) = \frac{۱}{۲} \log \frac{۱ + R}{۱ - R}$$

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال در دامنهٔ مختلط

برای اینکه بتوانیم در زمینهٔ آنالیز مختلط محاسبات را به آسانی و مؤثر انجام دهیم برخی از تعاریف اصلی را در قالبی نو بیان می‌کنیم. عملگرهای دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

را تعریف می‌کنیم. در آنالیز مختلط استفاده از این عملگرها به جای $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ راحت‌تر است. زیرا فرض کنید $f(z) = u(z) + iv(z)$ تابعی مختلط مقدار و پیوسته مشتق‌پذیر (به معنای چند متغیره) در دامنهٔ مسطحی مانند Ω باشد. توجه

کنید روی Ω

$$\frac{\partial}{\partial z}f(z) = ۰$$

اگر و تنها اگر روی Ω

$$\frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(u(z) + iv(z)) = ۰$$

با محاسبه قسمتهای حقیقی و موهومی این معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x}v = -\frac{\partial}{\partial y}u.$$

ملاحظه می‌کنیم که این معادله‌ها همان معادله‌های کوشی ـ ریمان هستند. نتیجه می‌گیریم $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = ۰$ روی Ω اگر و تنها اگر f روی Ω هولومرفیک باشد.
به‌علاوه توجه کنید

$$\frac{\partial}{\partial z}z = ۱ \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\bar{z} = ۰$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z = ۰ \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z} = ۱.$$

بنابراین $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ به روشی طبیعی با نظریهٔ توابع مختلط مناسبت دارند. اکنون ملاحظه می‌کنیم که اگر f هولومرفیک باشد آنگاه

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C}\ni h\to ۰} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mathbb{R}\ni s\to ۰} \frac{f(z+s) - f(z)}{s}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

لذا مشاهده می‌کنیم که مفهوم مشتق مختلط معرفی شده در قسمت ۱۰۰ در مورد توابع هولومرفیک با $\frac{\partial f}{\partial z}$ یکسان است

بالاخره ملاحظه می‌کنیم که عملگر لاپلاس

$$\Delta = \frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}$$

را می‌توان به صورت

$$\Delta = ۴\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = ۴\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

نوشت

اگر می‌خواهیم مشتق مختلط را به کار ببریم لازم است از ابزارهای معمولی وابسته به مشتق استفاده کنیم. روشن است که $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ دارای ویژگیهای خطی هستند (یعنی قوانین جمع و مضرب اسکالر را حفظ می‌کنند). قانون حاصلضرب تا حدی مشکل اما برقرار است و به خواننده واگذار می‌شود. با این حال قاعدهٔ زنجیری بسیار هوشمندانه است و به صورت زیر در می‌آید.

□ **گزارهٔ ۱.** اگر f و g توابع پیوسته مشتق‌پذیر باشند و اگر fog روی مجموعهٔ بازی مانند $U \subseteq \mathbb{C}$ خوش تعریف باشد، آنگاه داریم

$$\frac{\partial}{\partial z}(fog)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z))\frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fog)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z))\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z).$$

اثبات.

خلاصهٔ اثبات برابری اول را می‌آوریم و اثبات برابری دوم را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

داریم

$$\frac{\partial}{\partial z}(fog) = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(fog)$$

می‌نویسیم $g(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ که در آن α و β توابع حقیقی مقدارند و قاعدهٔ زنجیری معمولی را در مورد $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ به کار می‌بریم. ملاحظه می‌کنیم که آخرین سطر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right). \qquad (*)$$

اکنون با استفاده از اتحادهای

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}، \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

عبارت $(*)$ پس از مقداری محاسبه به فرمول مطلوب می‌انجامد. □

□ **نتیجهٔ ۱.۱.** اگر f یا g هولومرفیک باشد آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial z}(fog)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z).$$

اکنون کاربردی از این نماد را ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.

فرض کنید f تابع هولومرفیکی باشد که روی دامنه مسطح Ω غیر صفر است. در این صورت

$$\Delta(\log(|f|^۲)) = ۰$$

به عبارت دیگر تابع $\log |f|^{۲}$ همساز است.

برای اثبات، $p \in \Omega$ را تثبیت و فرض می‌کنیم $U \subseteq \Omega$ یک همسایگی از p باشد که f روی آن لگاریتم هولومرفیک دارد. در این صورت روی U داریم

$$\Delta(\log(|f|^{۲}) = \Delta(\log f + \log \bar{f}) =$$

$$۴\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\log f + ۴\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\log \bar{f} = ۰$$

---

۳. ایزومتریها

هر شاخه ریاضی ریختارهای خاص خود را دارد: توابعی که ویژگیهای مورد مطالعه را حفظ می‌کنند. این ریختارها در جبر خطی نگاشتهای خطی، در هندسهٔ اقلیدسی حرکتهای صلب و در هندسهٔ ریمانی «ایزومتری‌ها» هستند. اکنون مفهوم ایزومتری را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.

فرض کنید $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ دامنه‌های مسطح باشند و

$$f : \Omega_۱ \rightarrow \Omega_۲$$

تابعی پیوسته مشتق‌پذیر با صفرهای تنها باشند. فرض کنید که $\Omega_۲$ به متر ρ مجهز است. برگردان‌متر ρ روی $\Omega_۱$ با f را به‌صورت

$$f^*\rho(z) = \rho(f(z)) \cdot |\frac{\partial f}{\partial z}|$$

تعریف می‌کنیم.

تذکر.

روش خاص تعریف برگردان ملهم از روشی است که بر اساس آن f نگاشتهایی روی بردارهای مماسی و هم‌مماسی القا می‌کند، اما این انگیزه ارتباطی به بحث حاضر ندارد.

باید متذکر شویم که برگردان هر متر تحت یک تابع مزدوج هولومرفیک f برابر با صفر است. بنابراین تعریف برگردان را چنان طراحی کرده‌ایم که برگردانهای هولومرفیک بیشترین جذابیت را خواهند داشت این ادعا موضوع اصلی گزارهٔ ۳ در زیر است. □

تعریف ۲.

فرض کنید دامنه‌های مسطح $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ به ترتیب به مترهای $\rho_۱$ و $\rho_۲$ مجهز باشند. فرض کنید نگاشت

$$f : \Omega_۱ \to \Omega_۲$$

یک‌به یک، پوشا و پیوسته مشتق‌پذیر باشد. اگر به ازای همهٔ $z \in \Omega_۱$ها داشته باشیم

$$f^*\rho_۲(z) = \rho_۱(z)$$

آنگاه f یک ایزومتری از جفت $(\Omega_۱, \rho_۱)$ به $(\Omega_۲, \rho_۲)$ نامیده می‌شود.

تعریف دیفرانسیلی ایزومتری از نقطه نظر هندسهٔ دیفرانسیل بسیار طبیعی است، اما شهودی نیست. گزارهٔ زیر مفهوم ایزومتری را با مفاهیم آشنای دیگر پیوند می‌دهد.

گزارهٔ ۳. فرض کنید $\Omega_۱, \Omega_۲$ دو دامنه و $\rho_۱$ و $\rho_۲$ به ترتیب مترهایی روی این

دامنه‌ها باشند. اگر

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2$$

هولومرفیک و از (Ω_1, ρ_1) به (Ω_2, ρ_2) یک ایزومتری باشد آنگاه ویژگیهای زیر برقرارند:

الف) اگر $\gamma : [a, b] \to \Omega_1$ خمی پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f_*\gamma \equiv f o \gamma$ نیز خمی پیوسته مشتق‌پذیر است و

$$\ell_{\rho_1}(\gamma) = \ell_{\rho_2}(f_*\gamma).$$

ب) اگر P و Q دو نقطه در Ω_1 باشند آنگاه

$$d_{p_1}(P, Q) = d_{p_2}(f(P), f(Q)).$$

پ) f^{-1} نیز یک ایزومتری است.

اثبات.
حکم (ب) نتیجهٔ بی‌درنگ حکم (الف) است. همچنین حکم (پ)تمرینی صوری از درک تعریف است. بنابراین (الف) را ثابت می‌کنیم.

بنا به تعریف داریم.

$$\ell_{\rho_2}(f_*\gamma) = \int_a^b \|(f_*\gamma)'(t)\|_{\rho_2, f_*\gamma(t)} dt$$

$$= \int_a^b \|\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\|_{\rho_2, z f_*\gamma(t)} dt$$

اکنون قاعدهٔ زنجیری بخش قبل را به کار می‌بریم و ملاحظه می‌کنیم که تابع زیر علامت انتگرال برابر است با

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\right| \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho_۲, f_*\gamma(t)} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\right| \cdot |\dot{\gamma}(t)| \cdot \rho_۲(f(\gamma(t)))$$

$$= \|\dot{\gamma}(t)\|_{f^*\rho_۲, \gamma(t)} = \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho_۱, \gamma(t)}.$$

زیرا f یک ایزومتری است. اکنون این تابع را در تعریف طول $f_*\gamma$ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\ell_{\rho_۲}(f_*\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho_۱, \gamma(t)} dt = \ell_{\rho_۱}(\gamma).$$

این مطلب اثبات را تکمیل می‌کند. □

اثبات این که هر حرکت صلب و به طور مثبت جهتدار شدهٔ صفحهٔ اقلیدسی ــ دورانها، انتقالها و ترکیبهای آنها (اما نه انعکاسها، زیرا آنها مزدوج هولومرفیک هستند) ــ یک ایزومتری متر اقلیدسی است، آسان است. در بخش بعدی ایزومتریهای متر پوانکاره روی قرص را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر قبلاً نظریهٔ فضاهای متری یا فضاهای باناخ را مطالعه کرده‌اید با اصطلاح ایزومتری آشنا هستید. اصل مطلب این است که ایزومتری باید فاصله‌ها را حفظ کند. در واقع به عنوان تمرین می‌توانید ثابت کنید که اگر f یک نگاشت هولومرفیک از $(\Omega_۱, \rho_۱)$ به $(\Omega_۲, \rho_۲)$ باشد که فاصله را حفظ می‌کند طبق تعریف ۲ یک ایزومتری است. (f را با یک خم ترکیب کنید و مشتق بگیرید.)

۴. متر پوانکاره

متر پوانکاره در بسیاری از مثالهای قسمت قبل ظاهر شده است. این متر الگوی بسیاری از کارهایی است که در این کتاب انجام خواهیم داد. در اینجا این متر را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم. متر پوانکاره روی قرص D با

$$\rho(z) = \frac{۱}{۱ - |z|^{۲}}$$

داده می‌شود (متذکر می‌شویم که در نوشته‌های ریاضی هیچ توافقی وجود ندارد که در صورت کسر باید چه عددی باشد اغلب مرجعها ۲ را به کار می‌برند.)

از این به بعد منظور از «نگاشت همدیس» نگاشتی هولومرف از یک دامنهٔ مسطح به دامنهٔ مسطح دیگری است که یک به یک و پوشاست.

□ **گزارهٔ ۱.** فرض کنید ρ متر پوانکاره روی قرص D و $h : D \to D$ یک خود نگاشت همدیس D باشد. در این صورت h یک ایزومتری از (D, ρ) به (D, ρ) است .

اثبات.
داریم

$$h^{*}\rho(z) = \rho(h(z)) \cdot |h'(z)|$$

بنا به قضیهٔ ۳ بخش ۲۰۰ دو حالت وجود دارد:

(الف) اگر h یک دوران باشد آنگاه ثابت تکمدولی $\mu \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $h(z) = \mu \cdot z$. بنابراین $|h'(z)| = ۱$ و

$$h^{*}\rho(z) = \rho(h(z)) = \rho(\mu z) = \frac{۱}{۱ - |\mu z|^{۲}} = \frac{۱}{۱ - |z|^{۲}} = \rho(z)$$

چیزی که می‌خواستیم

(ب) اگر h یک تبدیل موبیوس باشد، آنگاه به ازای عضو ثابتی مانند $a \in D$

$$h(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

اما در این صورت داریم

$$h'(z) = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}$$

و

$$h^*\rho(z) = \rho(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}) \cdot |h'(z)|$$

$$= \frac{1}{1-|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}|^2} \cdot \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}$$

$$= \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2-|z-a|^2} = \frac{1-|a|^2}{1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2} = \rho(z)$$

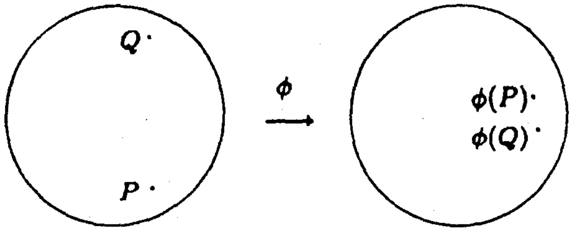
چون هر خودنگاشت همدیس D ترکیبی از نگاشتهای حالتهای (الف)و (ب) است، اثبات گزاره کامل است. □

از این گزاره و گزارهٔ ۳ در بخش ۳ می‌دانیم که خودنگاشتهای قرص، فاصلهٔ پوانکاره را حفظ می‌کنند. برای درک معنی این جمله، تبدیل موبیوس

$$\phi(z) = \frac{a+z}{1+\bar{a}z}$$

را در نظر بگیرید؛ تابع ϕ فاصلهٔ اقلیدسی را حفظ نمی‌کند اما فاصله پوانکاره را حفظ می‌کند. شکل ۴ را ببینید.

با استفاده از آنچه که قبلاً یادگرفته‌ایم می‌توانیم متر پوانکاره را صریحاً محاسبه کنیم.



شکل۴

□ گزارهٔ ۲. اگر P و Q دو نقطه در قرص D باشند آنگاه فاصلهٔ P و Q عبارت است از

$$d_\rho(P,Q) = \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۱+\left|\frac{P-Q}{۱-\bar{P}Q}\right|}{۱-\left|\frac{P-Q}{۱-\bar{P}Q}\right|}\right)$$

اثبات.

در حالت $P = ۰$ و $Q = R + i۰$ گزاره را قبلاً در قسمت ۱ ثابت کردیم. در حالت کلی برای تبدیل موبیوس

$$\phi(z) = \frac{z-P}{۱-\bar{P}z}$$

که قرص را به قرص می‌نگارد، داریم

$$.d_\rho(P,Q) = d_\rho(\phi(P),\phi(Q)) = d_\rho(۰,\phi(Q))$$

همچنین داریم

$$d_\rho(۰\,\phi(Q)) = d_\rho(۰,|\phi(Q)|) \qquad (*)$$

زیرا دورانی در قرص وجود دارد که $\phi(Q)$ را به $|\phi(Q)|$ می‌نگارد. بالاخره داریم

$$|\phi(Q)| = \left|\frac{P-Q}{۱-\bar{P}Q}\right|$$

بنابراین $(*)$ همراه با حالت خاص بررسی شده در ابتدای اثبات حکم را ثابت می‌کند. □

یکی از دلایل اهمیت زیاد متر پوانکاره آن است که این متر توپولوژی اقلیدسی معمولی را القا می‌کند. این مطلب موضوع قضیهٔ زیر است.

□ **گزارهٔ ۳.** توپولوژی القا شده روی قرص به وسیلهٔ متر پوانکاره همان توپولوژی اقلیدسی معمولی است.

اثبات.
یک پایهٔ همسایگی برای توپولوژی متر پوانکاره در مبدأ با

$$B(\circ, r) = \{z : d_\rho(\circ, z) < r\}$$

داده می‌شود. اما محاسبه‌ای با استفاده ازگزارهٔ ۲ نشان می‌دهد که این همسایگیها همان قرصهای اقلیدسی

$$\{z : |z| < \frac{e^{۲r} - ۱}{e^{۲r} + ۱}\}$$

هستند. این قرصها یک پایهٔ همسایگی برای توپولوژی اقلیدسی حول مبدأ تشکیل می‌دهند. لذا دو توپولوژی مذکور در مبدأ یکسان هستند. اکنون مبدأ را با استفاده از تبدیل موبیوس

$$z \to \frac{z-a}{۱+\bar{a}z}$$

به نقطهٔ دلخواه a منتقل می‌کنیم. چون متر پوانکاره تحت تبدیلهای موبیوس ناورداست و چون تبدیلهای موبیوس دایره‌ها را به دایره‌ها می‌نگارند، (زیرا این تبدیلها خطی کسری‌اند)، دوتوپولوژی در هر نقطهٔ دلخواه یکسان هستند. □

یکی از نکته‌های بسیار مهم در مورد متر پوانکاره روی قرص این است که قرص همراه با این متر، یک فضای متری کامل است. چگونه این امر امکان دارد؟ مرز قرص قسمتی از این فضای متری نیست! دلیل این که قرص نسبت به متر پوانکاره کامل است همان است که صفحه نسبت به متر اقلیدسی کامل است ــ مرز آن بینهایت دور است اکنون این مطلب را ثابت می‌کنیم.

□ **گزارهٔ ۴.** اگر قرص واحد به متر پوانکاره مجهز شود یک فضای متری کامل حاصل می‌شود.

اثبات.

فرض کنید p_j دنباله‌ای کوشی در D نسبت به متر پوانکاره است. لذا دنباله نسبت به متر مذکور کراندار است. بنابراین عدد مثبت M وجود دارد که به ازای هر j

$$d_\rho(\circ, p_j) \leq M$$

این رابطه بنا به گزارهٔ ۲ به ازای هر j به رابطهٔ

$$\frac{۱}{۲}\log\left(\log\frac{۱+|p_j|}{۱-|p_j|}\right) \leq M$$

تبدیل می‌شود. این نامعادله را نسبت به $|p_j|$ حل می‌کنیم:

$$\cdot|p_j| \leq \frac{e^{۲M}-۱}{e^{۲M}+۱} < ۱$$

لذا دنبالهٔ مذکور در یک زیرمجموعهٔ نسبتاً فشردهٔ قرص قرار دارد. یک محاسبهٔ مشابه نشان می‌دهد این دنباله باید نسبت به متر اقلیدسی کوشی است. بنابراین به یک نقطهٔ حدی در قرص همگراست، و این شرط کامل بودن است. □

در اثبات گزارهٔ ۲ از این واقعیت که قبلاً اثبات شده است استفاده کردیم که در واقع خم با کمترین طول (نسبت به متر پوانکاره) واصل بین نقاط $\circ$ و $R + i\circ$ یک پاره خط اقلیدسی است. اکنون «خم با کمترین طول» واصل بین دو نقطهٔ دلخواه P و Q متعلق به قرص واحد را به دست می‌آوریم.

□ **گزارهٔ ۵.** فرض کنید P و Q متعلق به قرص واحد باشند. «خم واصل بین P و Q با کوتاه‌ترین طول پوانکاره» عبارت است از :

$$\gamma_{P,Q}(t) = \frac{t\frac{Q-P}{\text{۱}-Q\bar{P}} + P}{\text{۱} + t\bar{P}\frac{Q-P}{\text{۱}-Q\bar{P}}} \quad , \quad \circ \leq t \leq \text{۱}$$

اثبات.
تبدیل موبیوس

$$\phi(z) = \frac{z - P}{\text{۱} - \bar{P}z}$$

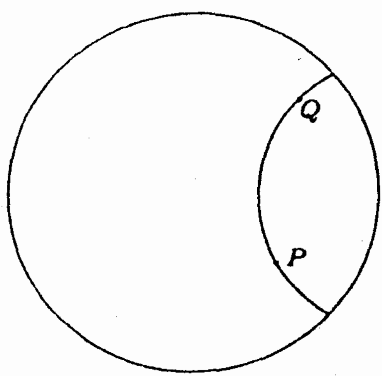
را در نظر بگیرید. می‌دانیم خم $\tau(t) \equiv t \cdot \phi(Q)$، $\circ \leq t \leq \text{۱}$ در میان خمهایی که از مبدأ خارج می‌شوند، کوتاه‌ترین خمی است که $\phi(P) = \circ$ را به $\phi(Q)$ وصل می‌کنند. اکنون با اعمال $\phi^{-\text{۱}}$ به τ ملاحظه می‌کنیم که

$$\phi^{-\text{۱}} o \tau(t) = \frac{(t\phi(Q) + P)}{\text{۱} + t\bar{P}\phi(Q))}$$

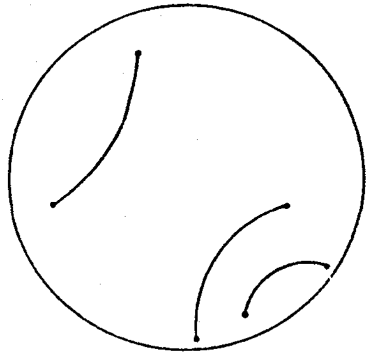
کوتاه‌ترین مسیر واصل بین P و Q است چون $\phi^{-\text{۱}} o\tau = \gamma_{P,Q}$ اثبات تمام است. □

اکنون خمهایی را که در گزارهٔ ۵ یافتیم مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. ابتدا توجه کنید که چون خم Q وγ_P تصویر پاره‌خطی تحت یک تبدیل خطی کسری است، لذا اثر این خم یا یک پاره‌خط یا کمانی از یک دایره است. در واقع اگر P، Q و ۰ هم‌خط باشد فرمول برای $\gamma_{P,Q}$ تبدیل به فرمول یک پاره‌خط می‌شود؛ در غیر این صورت $\gamma_{P,Q}$ کمانی از یک دایره اقلیدسی را طی می‌کند. این دایره کدام است؟

بهتر است t را روی همهٔ اعداد حقیقی تغییر دهیم و دنبال دایرهٔ کامل بگردیم. ملاحظه می‌کنیم که $t = \infty$ متناظر است با $\frac{1}{\bar{P}}$. اکنون با محاسبه‌ای ساده اما کسالت‌آور مرکز و شعاع اقلیدسی دایره‌ای را می‌یابیم که از سه نقطهٔ P، Q و $\frac{1}{\bar{P}}$ می‌گذرد (توجه کنید که بنا به تقارن، این دایره از نقطه $\frac{1}{\bar{Q}}$ نیز می‌گذرد). این دایره در شکل ۵ رسم شده است. توجه کنید که چون پاره‌خط $\{t + i۰ : -۱ \leq t \leq ۱\}$ در نقاط ۱− و ۱ بر ∂D عمود است، همدیسی ایجاب می‌کند که خمهای با کوچکترین طول حاصل ازگزارهٔ ۵ بر ∂D در نقاط تلاقی عمود باشند. در شکل ۶ برخی از این «کمانهای ژئودزیک» نشان داده شده‌اند. اکنون ثابت می‌کنیم که



شکل۵



شکل۶

متر پوانکاره با ویژگی ناوردایی‌اش تحت نگاشتهای همدیس مشخص می‌شود.

□ **گزاره ۶.** اگر $\tilde{\rho}(z)$ متری روی D باشد که هر نگاشت همدیس قرص یک ایزومتری از $(D, \tilde{\rho})$ به $(D, \tilde{\rho})$ است، آنگاه $\tilde{\rho}$ مضرب ثابتی از متر پوانکاره ρ است.

اثبات.

فرض قضیه تضمین می‌کند که اگر $Z_\circ \in D$ تثبیت شده باشد و

$$h(z) = \frac{z + z_\circ}{1 + \bar{z}_\circ z}$$

آنگاه

$$h^* \tilde{\rho}(\circ) = \tilde{\rho}(\circ).$$

طرف چپ این برابری را طبق تعریف می‌نویسیم

$$|h'(\circ)| \tilde{\rho}(h(\circ)) = \tilde{\rho}(\circ)$$

یا

$$\tilde{\rho}(z_\circ) = \frac{\text{۱}}{\text{۱} - |z_\circ|^{\text{۲}}} . \tilde{\rho}(\circ) = \tilde{\rho}(\circ)\rho(z_\circ)$$

بنابراین $\tilde{\rho}$ برابر است با $\tilde{\rho}(\circ)$ ضرب در ρ. □

اکنون که می‌دانیم متر پوانکاره متر مناسب برای آنالیز مختلط روی قرص است، سؤال طبیعی بعدی این است که چه نگاشتهای دیگری این متر را حفظ می‌کنند.

□ **گزارهٔ ۷.** فرض کنید $f : D \to D$ پیوسته مشتق‌پذیر و ρ متر پوانکاره باشد. اگر f از (D, ρ) به (D, ρ) یک ایزومتری باشد، آنگاه f هولومرفیک است. چون بنا به تعریف ایزومتری f یک به یک و پوشاست نتیجه می‌گیریم f ترکیبی از یک تبدیل موبیوس و یک دوران است (رک: فصل صفر).

اثبات.
ابتدا فرض کنید $f(\circ) = \circ$. به ازای $R > \circ$، فرض کنید C_R مجموعهٔ نقاطی در D باشد که فاصله پوانکارهٔ آنها از $\circ$ برابر با R است. چون متر پوانکاره تحت دوران ناورداست (زیرا دورانها، خودنگاشتهای هولومرفیک هستند)، پس C_R یک دایره اقلیدسی است (شعاع اقلیدسی این دایره برابر با $\frac{e^{\text{۲}R}-\text{۱}}{e^{\text{۲}R}+\text{۱}}$ است و نه R)، چون $f(\circ) = \circ$ و f متر را حفظ می‌کند پس $f(C_R) = C_R$ فرض کنید $P \in C_R$ داریم.

$$\frac{|f(P) - f(\circ)|}{|P - \circ|} = \frac{|f(P)|}{|P|} = \text{۱}$$

با میل دادن $R \to \circ^+$ نتیجه می‌گیریم f در مبدأ همدیس است (یعنی f طولهای

بینهایت کوچک را حفظ می‌کند).

اکنون فرض خاص $f(\circ) = \circ$ را حذف می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه $z_\circ \in D$ را انتخاب و فرض می‌کنیم $w_\circ = f(z_\circ)$. تعریف می‌کنیم.

$$\phi(z) = \frac{z + z_\circ}{\text{۱} + \bar{z}_\circ z} \quad , \quad \psi(z) = \frac{z - w_\circ}{\text{۱} - \bar{w}_\circ z}$$

و

$$g = \psi o f o \phi \cdot$$

در این صورت $g(\circ) = \circ$ و g یک ایزومتری است (زیرا ψ ، f، و ϕ ایزومتری هستند)؛ بنابراین استدلال آخرین بند را می‌توان به‌کار برد و g در مبدأ همدیس است. اما ϕ و ψ در همهٔ نقاط همدیس هستند. نتیجه می‌گیریم که f در $z_\circ$ همدیس است. در نتیجه (رک: «AHL2» صفحات ۷۳ـ۷۴)، f هولومرفیک یا مزدوج هولومرفیک است. چون f یک ایزومتری است پس $\frac{\partial f}{\partial z}$ هیچوقت $\circ$ نیست. لذا f هولومرفیک است. □

گزاره‌های ۱ و ۷ نشان می‌دهند که قرص واحد، ایزومتری‌های بسیاری در متر پوانکاره دارد. از طرف دیگر ایزومتری‌ها اشیای بسیار صلبی هستند. آنها به‌وسیلهٔ رفتار مرتبهٔ اولشان فقط در یک نقطه کاملاً معین می‌شوند. هر چند هدف ما اثبات این ادعا در حالت کلی نیست، می‌توانیم آن را برای قرص ثابت کنیم.

□ **گزارهٔ ۸.** فرض کنید ρ متر پوانکاره روی قرص واحد، f نگاشتی پیوسته مشتق‌پذیر از این قرص به خودش و f یک ایزومتری از جفت (D, ρ) به جفت (D, ρ) باشد. اگر $f(\circ) = \circ$ و $\frac{\partial f}{\partial z}(\circ) = \text{۱}$ آنگاه $f(z) \equiv z$.

اثبات.

بنا به گزارهٔ ۷، f باید هولومرفیک باشد. چون f مبدأ را حفظ می‌کند و یک به یک و پوشاست باید یک دوران باشد. چون $f'(\circ) = ۱$ پس f همانی است.□

□ **نتیجه ۱.۸.** فرض کنید f و g ایزومتری‌هایی از (D,ρ) به (D,ρ) باشند. فرض کنید $z_\circ \in D$، $f(z_\circ) = g(z_\circ)$ و $(\frac{\partial g}{\partial z})(z_\circ) = (\frac{\partial f}{\partial z})(z_\circ)$ در این صورت $f(z) \equiv g(z)$. □

اثبات.

در قسمت ۲ متذکر شدیم که $g^{-۱}$ یک ایزومتری است. اگر ψ یک تبدیل موبیوس باشد که ∘ را به $z_\circ$ می‌نگارد آنگاه $\psi^{-۱}og^{-۱}ofo\psi$ در شرایط گزاره صدق می‌کند. در نتیجه $z \equiv \psi^{-۱}og^{-۱}of\psi(z)$ یا $g(z) \equiv f(z)$. □

---

۵. لم شوارتس

یکی از مهمترین حقایق در مورد متر پوانکاره این است که این متر نه تنها برای مطالعهٔ نگاشتهای همدیس (مانند قسمت ۴.۱) به کار می‌رود بلکه از آن می‌توان برای مطالعه تمام نگاشتهای هولومرفیک قرص استفاده کرد. کلید اثبات این ادعا لم کلاسیک شوارتس است. مطلب را با ارائهٔ یک توصیف دقیق هندسی از لم شوارتس ـ پیک آغاز می‌کنیم (رک: قسمت ۲۰∘).

□ **گزارهٔ ۱.** فرض کنید $f : D \to D$ هولومرفیک باشد. در این صورت f در متر

پوانکاره طول کم کن است. یعنی، به ازای هر $z \in D$،

$$\cdot f^*\rho(z) \leq \rho(z)$$

صورت انتگرالی این حکم از این قرار است: اگر $\gamma : [\text{۰}, \text{۱}] \to D$ خمی پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\cdot l_\rho(f_*\gamma) \leq l_\rho(\gamma)$$

بنابراین، اگر P و Q نقاطی در D باشند می‌توان نتیجه گرفت

$$\cdot d_\rho(f(P), f(Q)) \leq d_\rho(P, Q)$$

اثبات.

داریم

$$f^*\rho(z) \equiv |f'(z)|\rho(f(z)) = |f'(z)|\frac{\text{۱}}{\text{۱} - |f(z)|^{\text{۲}}}$$

و

$$\rho(z) = \frac{\text{۱}}{\text{۱} - |z|^{\text{۲}}}$$

بنابراین نابرابری مورد نظر همان لم شوارتس ـ پیک است. اکنون صورت انتگرالی نابرابری از تعریف l_ρ و نابرابری مربوط به d_ρ از تعریف فاصله نتیجه می‌شوند. □

توجه کنید که اگر f خودنگاشتی همدیس از قرص باشد این نتیجه را می‌توانیم در مورد f و $f^{-\text{۱}}$ به کار بریم و نتیجه بگیریم f طول پوانکاره را حفظ می‌کند و اثبات دیگری از گزاره ۱ قسمت ۴ ارائه بدهیم.

اکنون کارآیی دیدگاه هندسی را شرح می‌دهیم. خواهیم دید که گزارهٔ بالا اثباتی بسیاری طبیعی از قضیهٔ ۲ به‌دست می‌دهد (رک: «EAH» به عنوان منبع این اثبات.)

□ **قضیه ۲**. (فرکاس، ریت) فرض کنید $f : D \to D$ هولومرفیک و بستار $M = \{f(z) : z \in D\}$ نگارهٔ f در D، فشرده باشد. در این صورت نقطه منحصر بفردی مانند $P \in D$ وجود دارد که $P \cdot f(P) = P$ را یک نقطهٔ ثابت f می‌نامیم.

اثبات.

بنا به فرض $\epsilon > ۰$ وجود دارد که اگر $m \in M$ و $|z| \geq ۱$ آنگاه $|m - z| > ۲\epsilon$.

شکل ۱ را ببینید. $z_۰ \in D$ را تثبیت کرده و تعریف می‌کنیم

$$g(z) = f(z) + \epsilon(f(z) - f(z_۰))$$

در این صورت g هولومرفیک است و D را به D می‌نگارد. همچنین داریم

$$g'(z_۰) = (۱ + \epsilon)f'(z_۰)$$

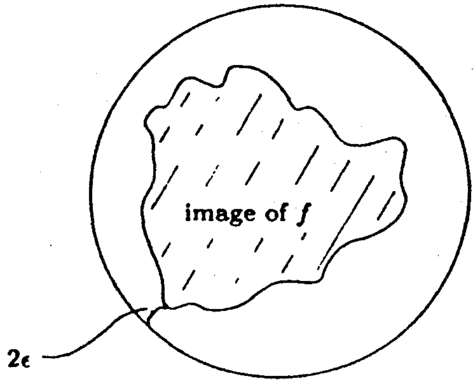
بنا به نتیجهٔ قبل، g نسبت به متر پوانکاره طول کم‌کن است. بنابراین

$$\cdot g^*\rho(z_۰) \leq \rho(z_۰)$$

با استفاده از تعریف g^* داریم

$$\cdot(۱ + \epsilon) \cdot f^*\rho(z_۰) \leq \rho(z_۰)$$

توجه کنید که این نابرابری به ازای هر $z_۰ \in D$ برقرار است. حال اگر $\gamma : [a, b] \to D$ خم پیوسته مشتق‌پذیر دلخواهی باشد آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم



شکل۷

$$\ell_\rho(f_*\gamma) \leq (۱+\epsilon)^{-۱}\ell_\rho(\gamma).$$

اگر P و Q متعلق به D و d متر پوانکاره باشد داریم

$$d(f(P), f(Q)) \leq (۱+\epsilon)^{-۱}d(P, Q).$$

ملاحظه می‌کنیم که f یک انقباض نسبت به متر پوانکاره است. یادآور می‌شویم که در قسمت ۴ ثابت کردیم D یک فضای متری کامل نسبت به متر پوانکاره است. بنا به قضیهٔ نقطه ثابت نگاشت انقباضی (رک: «LS») f یک نقطهٔ ثابت دارد. □

□ **نتیجه**. اگر f نگاشت تعریف شده در قضیهٔ فوق و P نقطهٔ ثابت یکتای آن باشد آنگاه تکرارهای f، fof، $fofof$، ... روی مجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت به تابع ثابت P همگراست.

اثبات.

فرض کنید f_n تکرار nام f باشد. اگر قرار دهیم

$$\bar{B}(P,R) = \{z \in D : d(z,P) \leq R\}،$$

آنگاه بنا به قضیهٔ فوق داریم

$$f(\bar{B}(P,R)) \subseteq \bar{B}(P, \frac{R}{(۱+\epsilon)})$$

و به طور کلی

$$f_n(\bar{B}(P,R)) \subseteq \bar{B}(P, \frac{R}{(۱+\epsilon)^n}) \cdot \qquad (*)$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\cup_{j=۱}^{\infty} B(P,j) = D \cdot$$

اکنون بنا به گزارهٔ ۲ قسمت ۴ گویهای نااقلیدسی در توپولوژی اقلیدسی بازند. بنابراین هر زیر مجموعه فشرده (اقلیدسی) K از D در یکی از $B(P,j)$ها واقع است. بنابراین از $(*)$ نتیجه می‌شود

$$f_n(K) \subseteq \bar{B}(P, \frac{j}{(۱+\epsilon)^n}) \cdot$$

و حکم نتیجه می‌شود. □

فصل ۲

خمیدگی و کاربردهای آن

۱. خمیدگی و بازهم لم شوارتس

اگر $U \subseteq C$ یک دامنهٔ مسطح و ρ یک متر روی آن باشد. خمیدگی متر ρ در نقطه $z \in U$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\kappa_{U,\rho}(z) = \kappa(z) \equiv \frac{-\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^{2}} \qquad (*)$$

(در اینجا صفرهای ρ به نقاط تکین تابع خمیدگی منجر می‌شود ــ در این نقاط κ تعریف نشده است.)

چون ρ دوبار مشتق‌پذیر است، این تعریف معنی دارد و به هر $z \in U$ یک مقدار عددی نسبت می‌دهد. مهمترین ویژگی مقدماتی κ ناوردایی همدیس آن است:

□ **گزارهٔ ۱.** فرض کنید U_1, U_2 دامنه‌های مسطح و $h : U_1 \to U_2$ نگاشتی همدیس باشد (به ویژه h' هرگز صفر نمی‌شود). اگر ρ متری روی U_2 باشد آنگاه

$$\forall z \in U_1 \quad , \quad \kappa_{U_1,h^*\rho}(z) = \kappa_{U_2,\rho}(h(z))$$

اثبات.

لازم است محاسبه کنیم:

$$\kappa_{U_1,h^*\rho}(z) \equiv \frac{-\Delta \log[\rho(h(z)), |h'(z)|]}{[\rho(h(z).|h'(z)|]^2}$$

$$= \frac{-\Delta \log[\rho(h(z))] - \Delta[\log(|h'(z)|)]}{[\rho(h(z)).|h'(z)|]^2}$$

بنا به مثال ۱ قسمت ۲.۱ جمله دوم صورت این کسر برابر با صفر است لذا صورت را برای به دست آوردن نتیجهٔ نهایی ساده می‌کنیم

$$= \frac{-[\Delta \log \rho|h_{(z)}]|h'(z)|^2}{[\rho(h(z)).|h'(z)|]^2}$$

$$\cdot = \frac{-\Delta \log \rho|h_{(z)})}{\rho(h(z))^2} = \kappa_{u_2,\rho}(h(z))$$

□

تذکّر.

در واقع اثبات فوق مطلب کلی‌تری را نتیجه می‌دهد: اگر $f : U_1 \to U_2$ تابعی هولومرفیک (و نه لزوماً یک به یک و پوشا) از دامنهٔ U_1 به دامنهٔ U_2 باشد آنگاه به ازای متر ρ روی U_2 داریم

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \kappa_\rho(f(z))$$

به ازای هر $z \in U_1$ مشروط بر این که $f'(z) \neq 0$ و $\rho(f(z)) \neq 0$. معمولاً به جز یک زیرمجموعهٔ گسسته تمام نقاط U_1 در این شرایط صدق می‌کنند. □

از دیدگاه هندسی هر کمیت دیفرانسیلی ناوردا خود به خود اهمیت فراوانی دارد. اما به چه دلیل κ را «خمیدگی» می‌نامیم ؟ چرا آن را «طول»، «رطوبت» یا

«رنگ» نمی‌نامیم ؟ جواب این است که در هندسهٔ ریمانی به هر متر ریمانی کمیتی به نام خمیدگی گاوسی منسوب می‌کنند. در هندسهٔ اقلیدسی کلاسیک این کمیت با مفهوم عینی ما از خمیدگی مطابقت دارد. در فضاهای مجردتر، معادله‌های ساختاری کارتان کمیتی به نام خمیدگی به دست می‌دهند که ناورداست اما اصلاً محتوای عینی ندارد. در صفحهٔ مختلط محاسبهٔ خمیدگی گاوسی به فرمول κ ارائه شده در تعریف منجر می‌شود. یکی از نکته‌های خوش‌آیند دربارهٔ کاربرد هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی در نظر توابع مختلط آن است که برای استفاده از κ همهٔ فرآیند ماشینی هندسی مورد نیاز نیست.

به دلیل ملاحظات فوق، تعریف ارائه شده برای k را می‌پذیریم. محاسبات هندسی که به تعریف κ منجر می‌شوند در پیوست داده شده است. درک مطالب بعدی کتاب به مطالب پیوست ربطی ندارد.

اکنون مطالعه خمیدگی را با محاسبهٔ خمیدگی متر اقلیدسی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱.

فرض کنید دامنهٔ مسطح U به متر اقلیدسی $\rho(z) \equiv ۱$ مجهز باشد. از تعریف نتیجه می‌شود $\kappa(z) \equiv ۰$. این برابری دور از انتظار نیست، زیرا متر اقلیدسی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر نمی‌کند. □

مثال ۲

متر

$$\sigma(z) = \frac{۲}{۱ + |z|^۲}$$

روی $\mathbb{C}$ را متر کروی (برای مطالب بیشتر رک: قسمت ۳) می‌نامیم. محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که خمیدگی σ متحداً برابر با ۱ است. یکی از قضیه‌های اساسی هندسهٔ ریمانی بیان می‌کند که کره، تنها خمینه‌ای است که خمیدگی ثابت مثبت دارد. در واقع مطالعهٔ خمینه‌های با خمیدگی ثابت برای خود موضوع کاملی است (رک: «WOLF»). □

حالا خمیدگی متر پوانکاره را روی قرص محاسبه می‌کنیم، این محاسبه فواید زیادی دارد. توجه کنید چون می‌توان هر نقطهٔ قرص را با استفاده از تبدیلهای موبیوس به هر نقطهٔ دیگر منتقل کرد و چون خمیدگی ناوردای همدیس است، انتظار داریم که تابع خمیدگی ثابت باشد.

□ **گزاره ۲.** قرص D مجهز به متر پوانکاره را در نظر بگیرید. به ازای هر $z \in D$ داریم $\kappa(z) = -۴$.

اثبات.
ملاحظه می‌کنیم

$$-\Delta \log \rho(z) = \Delta \log(۱ - |z|^۲)$$

اکنون می‌نویسیم $\Delta = ۴\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (رک: قسمت ۲.۱) و $|z|^۲ = z.\bar{z}$ و به دست می‌آوریم.

$$= -\frac{۴}{(۱ - |z|^۲)^۲}$$

در نتیجه $k(z) = -۴$. □

این نکته که متر پوانکاره روی قرص دارای خمیدگی منفی ثابت است ویژگی خاصی از قرص است. بعداً این موضوع را مورد بررسی قرار خواهیم داد. اکنون به لم شوارتس برمی‌گردیم.

آلفرس (رک: «AHL1») نخستین کسی بود که تشخیص داد لم شوارتس واقعاً یک نابرابری دربارهٔ خمیدگی است. در مقدمه‌ای بر مجموعه کارهایش وی متواضعانه ادعا می‌کند که «این نکته‌ای تقریباً بدیهی است و هر کس که لازم ببیند می‌تواند بی‌درنگ اثباتش کند.» با اینحال وی در ادامهٔ سخنانش (بدرستی) می‌گوید که این دیدگاه تأثیر شایانی در نظریهٔ جدید توابع داشته است. این جای خوبی برای آغاز درک خمیدگی است. قضیهٔ زیر روایت آلفرس از لم شوارتس است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید قرص $D = D(\circ, ۱)$ به متر پوانکارهٔ ρ و دامنه U به متر σ مجهز باشند. همچنین فرض کنید در همهٔ نقاط، خمیدگی‌های ρ و σ از ۴- بیشتر نباشند. اگر $f : D \to U$ تابعی هولومرفیک باشد آنگاه

$$\forall z \in D, \qquad f^*\sigma(z) \leq \rho(z)$$

اثبات. (به پیروی از «MIS»).

فرض کنید $\circ < r < ۱$. روی قرص $D(\circ, r)$ متر

$$\rho_r(z) = \frac{r}{r^۲ - |z|^۲}$$

را در نظر می‌گیریم. محاسبهٔ مستقیم (با تغییر متغیر) نشان می‌دهد که ρ_r مشابه متر پوانکاره برای $D(\circ, r)$ است: خمیدگی این متر ۴ـ است و تحت نگاشتهای همدیس ناورداست. قرار می‌دهیم

$$v = \frac{f^*\sigma}{\rho r}.$$

مشاهده می‌کنیم v روی $D(\circ,r)$ پیوسته و نامنفی است و $\nu \to \circ$ وقتی $|z| \to r$ (زیرا $f^*\sigma$ روی $\bar{D}(\circ,r) \subset\subset D$ از بالا کراندار است وقتی $P_r \to \infty$). بنابراین ν در نقطه‌ای مانند $\tau \in D(\circ,r)$ به ماکسیمم M خود می‌رسد. نشان می‌دهیم $M \leq ۱$ و لذا روی $D(\circ,r)$، $v \leq ۱$. لذا $r \to ۱^-$ اثبات را کامل خواهد کرد.

اگر $f^*\sigma(\tau) = \circ$ آنگاه $v \equiv \circ$. بنابراین فرض می‌کنیم $f^*\sigma(\tau) > \circ$. لذا $\kappa_{f*\sigma}$ در τ تعریف شده است. بنا به فرض داریم.

$$\kappa_{f_*\sigma} \leq -۴$$

چون $\log v$ در τ دارای مقدار ماکسیمم است داریم

$$\circ \geq \Delta \log v(\tau) = \Delta \log f^*\sigma(\tau) - \Delta \log \rho_r(\tau)$$

$$= -\kappa_{f*\sigma}(\tau).(f^*\sigma(\tau))^۲ + \kappa_{\rho\gamma}(\tau).(\rho_r(\tau))^۲$$

$$\geq ۴(f^*\sigma(\tau))^۲ - ۴(\rho_r(\tau))^۲$$

بنابراین

$$\frac{f^*\sigma(\tau)}{\rho_r(\tau)} \leq ۱$$

یا

$$M \leq ۱$$

چیزی که می‌خواستیم. $\square$

توجه کنید که لم شوارتس معمولی نتیجه‌ای از این لم به روایت آلفرس است: U را برابر با قرص و σ را متر پوانکاره بگیرید. فرض کنید f نگاشت هولومرفیک از D به $U = D$ باشد که $f(\circ) = \circ$. در این صورت σ در فرضهای قضیه صدق می‌کند و در نتیجه

$$f^*\sigma(\circ) \leq \rho(\circ).$$

بنا به تعریف $f^*\sigma$ داریم

$$|f'(\circ)|.\sigma(f(\circ)) \leq \rho(\circ)$$

با توجه به $\sigma = \rho$ و $f(\circ) = \circ$ این رابطه تبدیل می‌شود به

$$|f'(\circ)| \leq ۱.$$

تمرین.

ویژگی

$$d(f(P), f(Q)) \leq d(P.Q).$$

که در آن d متر پوانکاره است ویژگی کاهش فاصلهٔ متر پوانکاره نامیده می‌شود. با استفاده از این ویژگی اثباتی هندسی از دیگر نابرابری دیگر لم شوارتس را ثابت کنید.

با اندکی نمادگذاری بیشتر صورت قوی‌تری از لم آلفرس ـ شوارتس را می‌توان به دست آورد. فرض کنید $D(\circ, \alpha)$ قرص باز به مرکز $\circ$ و شعاع α باشد. به ازای $A > \circ$ متر ρ_α^A روی $D(\circ, \alpha)$ را به صورت

$$\rho_\alpha^A(z) = \frac{۲\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^۲ - |z|^۲)}$$

تعریف کنید. خمیدگی این متر برابر با $A-$ است. داریم

☐ **قضیهٔ ۴.** فرض کنید دامنهٔ مسطح U به متر σ که خمیدگی آن از بالا به عدد ثابت و منفی $B-$ کراندار است، مجهز باشد. در این صورت هر تابع هولومرفیک $f : D(\circ, \alpha) \to U$ در شرط

$$\forall z \in D(\circ, \alpha), \qquad f^*\sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z)$$

صدق می‌کند.

ارائه اثباتی برای این قضیهٔ بسیار کلی که مبتنی بر اثبات قضیهٔ ۳ باشد تمرین خوبی است.

در سه بخش بعد چندین کاربرد از قضیه‌های ۳ و ۴ را خواهیم دید.

۲. قضیهٔ لیوویل و کاربردهای دیگر آن

خمیدگی به نوبه خود معیاری به‌دست می‌دهد که چه وقت تابع هولومرفیک غیر ثابتی از دامنهٔ U_1 به دامنه U_2 وجود دارد. وجود دارد. اساسی‌ترین قضیه در این جهت به شرح زیر است:

☐ **قضیهٔ ۱.** فرض کنید مجموعهٔ باز $U \subseteq \mathbb{C}$ مجهز به متر $\sigma(z)$ باشد که خمیدگی آن $\kappa_\sigma(z)$ در شرط

$$\kappa_\sigma(z) \leq -B < \circ$$

به ازای عدد ثابتی چون B و به ازای هر $z \in U$ صدق کند. در این صورت هر

تابع هولومرفیک

$$f : \mathbb{C} \to U$$

باید تابعی ثابت باشد.

اثبات.
به ازای $\alpha > \circ$، نگاشت

$$f : D(\circ, \alpha) \to U$$

را در نظر بگیرید. در اینجا $D(\circ, \alpha)$ قرص اقلیدسی به مرکز $\circ$ و شعاع α است و مانند قسمت قبل به متر $\rho_\alpha^A(z)$ مجهز است. $A > \circ$ را تثبیت کنید بنابر قضیهٔ ۴ قسمت ۱ به ازای هر z و $\mid z \mid < \alpha$ داریم

$$f^*\sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z).$$

اکنون با میل دادن $\alpha \to +\infty$ نتیجه می‌شود

$$\cdot f^*\sigma(z) \leq \circ$$

و لذا

$$\cdot f^*\sigma(z) = \circ$$

این رابطه تنها وقتی درست است که $f'(z) = \circ$. چون z دلخواه است، نتیجه می‌گیریم f باید ثابت باشد. □

یک نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۱ قضیهٔ لیوویل است.

□ **قضیهٔ ۲.** هر تابع تام کراندار ثابت است.

اثبات.

فرض کنید f تابعی تام و کراندار باشد. پس از ضرب f در یک عدد ثابت می‌توانیم فرض کنیم که برد f زیرمجموعه‌ای از قرص واحد است. چون متر پوانکاره روی قرص واحد خمیدگی ۴ـ دارد، بنا به قضیهٔ ۱، f باید ثابت باشد. □

قضیهٔ پیکار تقویت برجسته‌ای از قضیهٔ لیوویل است. این قضیه بیان می‌کند که شرط کرانداری را می‌توان به طور قابل ملاحظه‌ای ضعیف‌تر کرد و همان نتیجه را به دست آورد.

بحث خود را با مثال ساده‌ای آغاز می‌کنیم.

مثال ۱.

فرض کنید f تابعی تام باشد که مقادیرش را در مجموعهٔ

$$S = \mathbb{C}\backslash\{x + i۰ : ۰ \leq x \leq ۱\}$$

می‌گیرد. از ترکیب f با تابع

$$\phi(z) = \frac{z}{z - ۱}$$

تابع تام $g = \phi o f$ به دست می‌آید که مقادیرش را در مجموعهٔ C منهای $\{x + i۰ : x \leq ۰\}$ می‌گیرد. اگر $r(z)$ شاخه اصلی تابع ریشهٔ دوم باشد آنگاه $h(z) = rog(z)$ تابعی تام است و مقادیرش را در نیمصفحهٔ راست می‌گیرد. چون نگاشت کیلی

$$c(z) = \frac{z - ۱}{z + ۱}$$

نیمصفحهٔ راست را به قرص واحد می‌نگارد پس $u(z) = coh(z)$ تابع تام کرانداری است. در نتیجه بنا به قضیهٔ ۱، U تابعی ثابت است و لذا f ثابت است.

□

نکتهٔ اصلی این مثال ساده آن است که برای این که تابع تامی ثابت باشد به غیر از کراندار بودن باید یک پاره خط را از مقادیرش حذف کند. و یک تغییر سادهٔ اثبات نشان می‌دهد که این پاره خط می‌تواند به‌قدر کافی کوچک باشد. پیکار اندازهٔ این پاره خط را که یک تابع تام غیر ثابت می‌تواند از مقادیرش حذف کند مورد بررسی قرار داده است.

اکنون همان مسیر مطالعه را، اما با میانه‌روی بیشتر، با این پرسش که آیا یک تابع تام غیر ثابت می‌تواند یک مقدار مختلط را از مقادیرش حذف کند، دنبال می‌کنیم. جواب «بله» است، زیرا تابع $f(z) = e^z$ همهٔ مقادیر مختلط به جز صفر را می‌گیرد. همچنین ثابت می‌شود که (رک: قسمت ۵.۳) روی صفحهٔ بدون یک نقطه، تعریف متری که خمیدگی منفی دور از صفر دارد، امکان ندارد. قدم بعدی پاسخ به این پرسش است که آیا تابع تام غیر ثابت می‌تواند دو مقدار را نگیرد. پیکار پاسخ شگفت انگیز «نه» را برای این پرسش کشف کرد. بنا به قضیهٔ ۱ کافی است قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

□ **قضیهٔ ۳**: فرض کنید U مجموعهٔ باز مسطحی باشد که $\mathbb{C}/U$ حداقل دو نقطه دارد. در این صورت U متری مانند μ می‌پذیرد که خمیدگی $\kappa_\mu(z)$ آن به ازای عدد ثابت مثبتی مانند B در

$$\kappa_\mu(z) \leq -B < ۰$$

صدق می‌کند.

اثبات.
پس از به کار بردن یک نگاشت وارونپذیر خطی روی U می‌توانیم نقاط حذف شده را ۰ و ۱ فرض کنیم (اگر بیش از دو نقطه حذف شوند، نقاط دیگر را در نظر نمی‌گیریم). بنابراین متری روی $\mathbb{C}_{۰,۱} \equiv \mathbb{C}\setminus\{۰,۱\}$ با خمیدگی اکیداً منفی به دست خواهیم آورد.

تعریف می‌کنیم

$$\mu(z) = \left[\frac{(۱+|z|^{۱/۳})^{۱/۲}}{|z|^{۵/۶}}\right]\left[\frac{(۱+|z-۱|^{۱/۳})^{۱/۲}}{|z-۱|^{۵/۶}}\right].$$

(پس از اتمام اثبات، در مورد منشأ این تعریف غیر شهودی بحث خواهیم کرد.) البته μ روی $\mathbb{C}_{۰,۱}$ مثبت و هموار است. اکنون اقدام به محاسبهٔ خمیدگی μ می‌کنیم.

ابتدا توجه کنید بنا به مثال ۱ قسمت ۲.۱، در نقاط دور از مبدأ داریم

$$\Delta(\log|z|^{۵/۶}) = \frac{۵}{۱۲}\Delta(\log|z|^{۲}) = ۰$$

بنابراین

$$\Delta\log\left[\frac{(۱+|z|^{۱/۳})^{۱/۲}}{|z|^{۵/۶}}\right] = \frac{۱}{۲}\Delta\log(۱+|z|^{۱/۳})$$

$$= ۲\frac{\partial}{\partial z\partial\bar{z}}\log(۱+[z.\bar{z}]^{۱/۶}).$$

اکنون محاسبه‌ای سر راست نتیجه می‌دهد.

$$\Delta\log\cdot\left[\frac{(۱+|z|^{۱/۳})^{۱/۲}}{|z|^{۵/۶}}\right] = \frac{۱}{۱۸}\frac{۱}{|z|^{۵/۳}(۱+|z|^{۱/۳})^{۲}}.$$

محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد

$$\Delta\log\left[\frac{(۱+|z-۱|^{۱/۳})^{۱/۲}}{|z-۱|^{۵/۶}}\right] = \frac{۱}{۱۸}\frac{۱}{|z-۱|^{۵/۳}(۱+|z-۱|)^{۱/۳})^{۲}}$$

اکنون تعریف خمیدگی نتیجه می‌دهد که

$$\kappa_\mu(z) = -\frac{۱}{۱۸}\Big[\frac{|z-۱|^{۵/۳}}{(۱+|z|^{۱/۳})^۳(۱+|z-۱|^{۱/۳})}$$

$$+\frac{|z|^{۵/۳}}{(۱+|z|^{۱/۳})(۱+|z-۱|^{۱/۳})^۳}\Big].$$

روشن است که:

الف) $\kappa_\mu(z) < ۰$ به ازای هر $z \in \mathbb{C}_{۰,۱}$؛

ب) $\lim_{z\to ۰} \kappa_\mu(z) = -\frac{۱}{۳۶}$؛

پ) $\lim_{z\to ۱} \kappa_\mu(z) = -\frac{۱}{۳۶}$؛

ت) $\lim_{z\to\infty} \kappa_\mu(z) = -\infty$

در نتیجه بی‌درنگ نتیجه می‌شود κ_μ از بالا توسط عددی منفی کراندار است.

□

تذکر.

اکنون انگیزهٔ تعریف μ را مورد بحث قرار می‌دهیم. با نگاهی به تعریف μ مشاهده می‌کنیم که عامل اول در نقطهٔ ۰ و عامل دوم در نقطهٔ ۱ منفرد است. عامل اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

چون عبارت تعریف کننده خمیدگی تحت دوران ناوردا است، عاقلانه است که متر مورد تعریف نیز تحت دوران ناوردا باشد. لذا باید تابعی از $|z|$ باشد. از این‌رو α را باید چنان انتخاب کنیم که $|z|^\alpha$ متری با خمیدگی منفی تعریف کند. با این حال محاسبه نشان می‌دهد αای که برای $|z|$های بزرگ مناسب است برای $|z|$ های کوچک مناسب نیست و به عکس. این دلیل وجود توانهایی از $|z|$ (برای

نزدیکیهای ۰) و از $(|z|+1)$ (برای نزدیکیهای ∞) در عبارت را به دست می‌دهد. بحثی مشابه در مورد عوامل $|z-1|^{\alpha}$ کار می‌کند.

لذا محاسبه نشان می‌دهد که متر را چنان انتخاب کنیم که در نزدیکیهای ∞ مانند $|z|^{-4/3}$ و در نزدیکیهای ۰ (به ترتیب ۱) مانند $|z|^{-5/6}$ (به ترتیب، $|z-1|^{-5/6}$) رفتار کند. □

اکنون قضیهٔ کوچک پیکار را به صورت نتیجه‌ای از قضیه‌های ۱ و ۳ فرمولبندی می‌کنیم.

□ **نتیجهٔ ۴.** فرض کنید f تابعی تحلیلی تام باشد که مقادیرش در مجموعهٔ U واقع‌اند. اگر $\mathbb{C}\backslash U$ دست‌کم دو نقطهٔ داشته باشد. آنگاه f ثابت است.

اثبات.

چون $C\backslash U$ شامل دست‌کم دو نقطه است، بنا به قضیهٔ ۳، متری با خمیدگی اکیداً منفی روی U وجود دارد. اما در این صورت، قضیهٔ ۱ نتیجه می‌دهد هر تابع تام که مقادیرش در U باشد ثابت است. □

توابع تام دو نوع‌اند: چند جمله‌ایها و غیر چند جمله‌ایها (توابع تام متعالی). توجه کنید که هر چند جمله‌ای قطبی در بینهایت دارد. به عکس هر تابع تام با قطبی در بینهایت یک چند جمله‌ای است (رک: قسمت ۴.۰). بنابراین یک تابع تام متعالی نمی‌تواند قطبی در بینهایت داشته باشد و چون بیکران است (بنا به قضیهٔ لیوویل) نمی‌تواند نقطهٔ تکین برداشتنی در بینهایت داشته باشد. بنابراین در بینهایت دارای نقطهٔ تکین اساسی است.

اکنون توجه کنید که بنا به قضیه اساسی جبر هر چند جمله‌ای همهٔ مقادیر

مختلط را می‌پذیرد. نقاط تکین اساسی یک تابع متعالی را با یادآوری قضیهٔ کسراتی ـ وایرشتراس (رک: قسمت ۴.۰) مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم: اگر ۰ یک نقطه تکین اساسی برای تابع هولومرفیک f روی $D'(\circ, \epsilon) \equiv D(\circ, \epsilon) \setminus \{\circ\}$ باشد در این صورت مجموعهٔ مقادیر f روی $D'(\circ, \epsilon)$ در صفحهٔ مختلط چگال است. بنابراین می‌توان حدس زد که چهرهٔ اصلی قضیهٔ پیکار این نیست که تابع مورد مطالعه تام است، بلکه این است که یک نقطه تکین اساسی در بینهایت دارد. در واقع اصل مطلب همین است و در قسمت ۴ تحت عنوان قضیهٔ بزرگ پیکار مورد بحث واقع می‌شود.

---

۳. خانواده‌های نرمال و متر کروی

یادآور می‌شویم که در قسمت ۳۰۰ مفهوم خانوادهٔ نرمال را به اختصار مورد بررسی قرار دادیم . اکنون موضوع را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم و به ویژه تعریف کلی‌تری از مفهوم خانوادهٔ نرمال ارائه می‌دهیم. خواهیم دید که مفهوم خانواده نرمال در صورتی که به طور مناسب فرمولبندی شود با مفهوم یکسان پیوستگی نسبت به متر معینی معادل است. مطلب را با تعریف جدید آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.

فرض کنید Ω یک دامنهٔ مسطح و $\{g_j\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط مقدار روی Ω باشد. می‌گوییم این دنباله همگرای نرمال به تابعی مانند g است اگر به ازای هر $\epsilon > \circ$ و هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq \Omega$ عدد مثبتی مانند J یافت شود که وقتی $j > J$ و $z \in K$ آنگاه

$$|g_j(z) - g(z)| < \epsilon$$

اجمالاً دنباله همگرای نرمال است اگر روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω همگرای یکنواخت باشد.

تعریف ۲.

فرض کنید Ω یک دامنهٔ مسطح و $\{g_j\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط مقدار روی Ω باشد. می‌گوییم این دنباله واگرای فشرده است اگر به ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq \Omega$ و هر مجموعهٔ فشردهٔ $L \subseteq \mathbb{C}$ عدد مثبت J وجود داشته باشد که اگر $j > J$ و $z \in K$ آنگاه $g_j(z) \notin L$.

به طور خلاصه، دنباله‌ای واگرای فشرده است که روی مجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت به ∞ همگرا باشد.

تعریف ۳.

فرض کنید Ω یک دامنهٔ مسطح و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع مختلط ـ مقدار روی آن باشد. می‌گوییم $\mathcal{F}$ یک یک خانوادهٔ نرمال است اگر هر دنباله از اعضای آن زیر دنباله‌ای داشته باشد که همگرای نرمال است یا زیر دنباله‌ای داشته باشد که واگرای فشرده است.

مثال ۱.

فرض کنید $\mathcal{F} = \{f_j\}$ که در آن $f_j(z) = z^j$، $j = ۱, ۲, \ldots$ در این صورت $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ نرمال روی $U_۱ = \{z : |z| < ۱\}$ است، زیرا هر زیر دنبالهٔ آن به تابع ۰ همگرای نرمال است. همچنین $\mathcal{F}$ روی $U_۲ = \{|z : |z| > ۱\}$ یک خانوادهٔ نرمال است زیرا هر زیردنبالهٔ آن واگرای فشرده است.

با این‌حال $\mathcal{F}$ روی زیر مجموعه‌ای مانند $U_۳$ که شامل نقطه‌ای از دایرهٔ واحد است نرمال نیست. زیرا $U_۳$ شامل نقاطی در داخل دایرهٔ واحد است که در آنها

$\{f_j\}$ همگراست و شامل نقاطی در خارج دایره واحد است که در آنها دنباله واگراست. □

توجه کنید که بر خلاف بسیاری از کتابهای آنالیز مختلط در تعریف خانوادهٔ نرمال قید نمی‌کنیم که اعضای خانواده توابع هولومرفیک باشند. واقعیت این است که خانواده‌های نرمال در خارج از نظریهٔ توابع مختلط کاربردهایی دارند و لذا بهتر است تا حدی انعطاف‌پذیر باشیم. با اینحال اگر قبلاً فرض کنیم توابع مورد مطالعه هولومرفیک هستند، در این صورت چنان که اکنون خواهیم دید چند قضیهٔ زیبا در مورد خانواده‌های نرمال وجود دارد.

نتیجهٔ استاندارد در مورد خانواده‌های نرمال توابع هولومرفیک قضیهٔ مونتل است:

□ **قضیهٔ ۴.** فرض کنید Ω یک دامنهٔ مسطح و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع هولومرفیک روی آن باشد. اگر به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq \Omega$ عدد M_K وجود داشته باشد که

$$|f(z)| \leq M_K \quad , \quad \forall z \in K, f \in \mathcal{F} \quad (*)$$

آنگاه $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است.

□ **نتیجهٔ ۱.۴.** اگر Ω و $\mathcal{F}$ در شرایط قضیهٔ فوق صدق کنند و اگر عدد ثابتی چون M وجود داشته باشد که به جای $(*)$ داشته باشیم.

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega, f \in \mathcal{F}$$

آنگاه $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است.

تذکّر.

توجه کنید که هیچ خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از توابع هولومرفیک که در فرضهای قضیهٔ مونتل صدق کند نمی‌تواند یک زیردنبالهٔ واگرای فشرده داشته باشد. لذا این خانوادهٔ $\mathcal{F}$ دارای این ویژگی است که هر دنباله از اعضای آن یک زیر دنبالهٔ همگرای نرمال دارد.

پس ازکاربرد مقداری هندسه برای مطالعهٔ خانواده‌های نرمال می‌توانیم صورتی از قضیهٔ مونتل را به دست آوریم که بسیار کلی است و واگرایی فشرده را نیز می‌پذیرد. $\square$

اثبات قضیهٔ مونتل در قسمت ۳۰۰ مورد بحث واقع شد به علاوه جزئیات اثبات را می‌توان در (رک: «AHL2» صفحهٔ ۲۱۶) پیدا کرد. اکنون چند مثال می‌آوریم.

مثال ۲.

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانوادهٔ همهٔ توابع هولومرفیک روی دامنهٔ Ω باشد که مقادیرشان را در نیم‌صفحه راست می‌گیرند. قرار می‌دهیم

$$\phi(z) = \frac{z-۱}{z+۱}$$

در این صورت $\mathcal{G} \equiv \{\phi o f \,:\, f \in \mathcal{F}\}$ خانواده‌ای از توابع تحلیلی است که مقدارشان را در قرص واحد می‌گیرند. بنا به نتیجهٔ قضیهٔ مونتل $\mathcal{G}$ نرمال است. لذا $\mathcal{F}$ نرمال است. $\square$

مثال ۳.

قرار دهید

$$U_۰ = \mathbb{C} \setminus \{x + i۰ \,:\, ۰ \leq x \leq ۱\}.$$

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع هولومرفیک روی دامنه‌ای مانند U باشد که مقادیرشان را در $U_\circ$ می‌گیرند. ادعا می‌کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است.

درواقع در مثال ۱ قسمت ۲ نگاشتی هولومرفیک و یک مقداری از $U_\circ$ به قرص واحد پیدا کردیم . این نگاشت را μ می‌نامیم. بنابراین $\mathcal{G} = \{\mu o f : f \in \mathcal{F}\}$ خانواده‌ای نرمال است در نتیجه $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است. □

با این مثالها سعی ما این است که بگوییم مفهوم خانواده‌های نرمال به قضیهٔ لیوویل و قضیهٔ پیکار مرتبط است (گاه این مطلب را «اصل بلاخ» می‌نامند). در واقع این مطلب درست است و می‌توانیم با نگاه هندسی به اشیاء، شروع به اثبات آن بکنیم. مطلب را با مفهوم مترکروی آغاز می‌کنیم.

تصویر گنجنگاری p نگاشتی از صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ به کرهٔ ریمانی $\hat{\mathbb{C}}$ به دست می‌دهد (رک: «AHL2» صفحهٔ ۱۹). این نگاشت در شکل ۱ داده شده است. به هر نقطهٔ z در صفحهٔ مختلط نقطه $p(z)$ محل تلاقی خط واصل بین «قطب شمال» و z با کره را نسبت می‌دهیم.

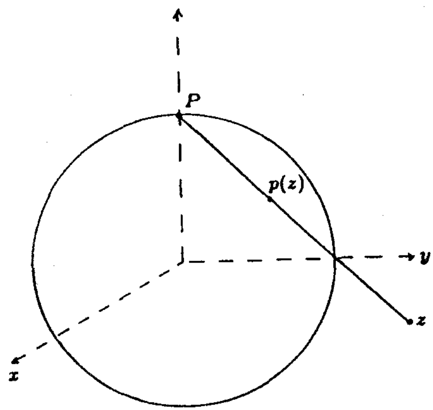
اگر فضای سه‌بعدی اقلیدسی را با مختصاتی مجهز کنیم که در شکل نشان داده شده است آنگاه نگاشت p صریحاً به صورت

$$p(x, y) = (\frac{۲x}{۱ + x^۲ + y^۲}, \frac{۲y}{۱ + x^۲ + y^۲}, ۱ - \frac{۲}{۱ + x^۲ + y^۲})$$

داده می‌شود. اکنون به عنوان تمرینی جالب در حساب دیفرانسیل می‌توان نشان داد متر

$$\sigma(z) = \frac{۲}{۱ + |z|^۲}$$

روی $\mathbb{C}$ دارای ویژگیهای زیر است: اگر $z, w \in \mathbb{C}$ آنگاه $d_\sigma(z, w)$ برابر است با



شکل۱

فاصلهٔ (روی دایرهٔ عظیمه) $p(z)$و $p(w)$ است. در واقع محاسبه نشان می‌دهد

$$d_\sigma(z,w) = ۲arctan(|\frac{z-w}{۱+\bar{w}z}|) \quad (*)$$

مشتق‌گیری از فرمول $(*)$ روی خطی در صفحه به تعریف σ منجر می‌گردد. (مجدداً اطمینان می‌دهیم σ را می‌توان برگردان متر اقلیدسی رویه‌ای τ روی کره با نگاشت p دانست. با اینحال فرمولبندی دقیق آن ما را از هدف دور می‌کند، لذا از این کار صرفنظر می‌کنیم.) خواننده به عنوان تمرین می‌تواند فرمول $d_\sigma(z,w)$ را به تقلید از روش به دست آوردن فرمولی برای فاصله پوانکاره بیابد : ابتدا حالت خاص $z = ۰$، $w = r + ۰i$ را محاسبه کنید، سپس ناوردایی متر را تحت دورانهای $\hat{\mathbb{C}}$ به کار ببرید (یعنی، تحت تبدیلهای خطی کسری).

اکنون فرض کنید به جای مطالعه خانواده‌های نرمال توابع هولومرفیک مختلط، مقدار خانواده‌های توابع مرومرفیک را مطالعه کنیم. یک تابع مرومرفیک تابعی

هولومرفیک است که مقادیرش را در کرهٔ ریمان $\hat{\mathbb{C}}$ می‌گیرد. برای این که این نکتهٔ اخیر را روشن‌تر کنیم فرض کنید $m(z)$ روی دامنهٔ U مرومرفیک و $P \in U$ یک قطب آن باشد. قرار دهید $I(z) = \frac{1}{z}$. در این صورت Iom در یک همسایگی از P هولومرفیک است. این دقیقاً تعریف ویژگی «هولومرفیک» برای تابعی $\hat{\mathbb{C}}$ مقدار است. با این افزایش کلیت اکنون می‌توانیم تعریف بسیار زیبایی از «خانوادهٔ نرمال» ارائه دهیم. این تعریف جدید روح تعریف اول را در خود دارد اما بسیار کلی است.

تعریف ۳′

خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از توابع هولومرفیک $\hat{\mathbb{C}}$ ـ مقدار روی دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ خانوادهٔ نرمال نامیده می‌شود اگر هر دنباله از اعضای $\mathcal{F}$ زیر دنباله‌ای همگرای نرمال داشته باشد.

تذکّر.

نکتهٔ این تعریف جدید که باید خودتان اثباتش کنید آن است که در واقع یک دنباله واگرای فشرده (بنا به تعریف ۲ در بالا) همگرای فشرده به نقطهٔ $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ است. به ویژه باید توجه کنید که اگر خود را به توابع هولومرفیک محدود کنیم، قضیهٔ هورویتز تضمین می‌کند که اگر خانواده‌ای بر حسب تعریف ۳ نرمال باشد بر حسب تعریف ۳′ نیز نرمال است.

به عنوان تمرین دوم مثال ۱ را با توجه به این تعریف جدید بررسی کنید.

اکنون توصیف مارتی از خانواده‌های نرمال را بر حسب مترکروی بیان می‌کنیم.

□ **قضیهٔ ۵.** فرض کنید U یک دامنهٔ مسطح و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع $\hat{\mathbb{C}}$ ـ مقدار روی U (معادلاً، توابع هولومرفیک) باشد. فرض کنید τ متر اقلیدسی استاندارد

بر رویهٔ کرهٔ ریمان باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ نرمال است اگر و تنها اگر خانوادهٔ مترهای برگردان

$$\{f^*\tau : f \in \mathcal{F}\}$$

روی زیر مجموعه‌های فشردهٔ U یکسان کراندار باشد.

یک روش بیان معادل و دقیق‌تر این مطلب آن است که $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است اگر و تنها اگر به ازای هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq U$ ثابت M_K وجود داشته باشد که به ازای هر $z \in K$ و هر $f \in \mathcal{F}$ داشته باشیم.

$$\frac{۲|f'(z)|}{۱ + |f(z)|^۲} \leq M_K$$

□

تذکّر.

در اینجا یادآور می‌شویم که اگر g تابعی مرومرفیک با قطبی در P باشد، آنگاه مشتق g در P با مشتق‌گیری از $\frac{۱}{g}$ به دست می‌آید. یعنی تعریف می‌کنیم

$$.g'(P) = \lim_{z \to p}(-g^۲(z).(\frac{۱}{g})'(z)) \qquad □$$

اثبات.

هم‌ارزی دو گزاره از بحث مربوط به متر کروی و تعریف متر برگردان نتیجه می‌شود. اکنون فرمول‌بندی دوم قضیه را اثبات می‌کنیم.

ابتدا مجموعهٔ فشردهٔ K را تثبیت می‌کنیم و فرض می‌کنیم نابرابری

$$\forall f \in \mathcal{F}, z \in K, \qquad \frac{۲|f'(z)|}{۱ + |f(z)|^۲} \leq M_K \qquad (*)$$

برقرار باشد. بدون از دست رفتن کلیت می‌توانیم فرض کنیم K بستار مجموعهٔ باز همبندی مانند V است. اگر $\gamma : [a, b] \to V$ خمی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد،

آنگاه طول کروی $fo\gamma$ عبارت است

$$\cdot \int_a^b \|(fo\gamma)'(t)\|_{\tau, fo\gamma(t)}^{dt}$$

از $(*)$ نتیجه می‌شود که این مقدار از

$$\int_a^b M_K \cdot |\gamma'(t)| dt$$

بزرگتر نیست. اما این عدد، M_K برابر طول اقلیدسی γ است. توجه کنید که این برآورد مستقل از $f \in \mathcal{F}$ است. از تعریف فاصله نتیجه می‌شود $\mathcal{F}$ خانواده‌ای یکسان پیوسته از توابع از K به $\hat{\mathbb{C}}$ است که اولی به متر اقلیدسی و دومی به متر کروی مجهزاند. اکنون از قضیه آسکولی‌ـآرتسلا (رک: قسمت ۳.۰) نتیجه می‌شود که $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است.

اکنون عکس قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است. قرار می‌دهیم

$$f^\sharp(z) = \frac{۲|f'(z)|}{۱ + |f(z)|^۲}$$

و زیرمجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K \subseteq U$ را تثبیت می‌کنیم. فرض می‌کنیم مجموعهٔ $\{f^\sharp : f \in \mathcal{F}\}$ روی K یکسان کراندار نیست. دنبالهٔ $f_j \in \mathcal{F}$ وجود دارد که ماکسیمم $(f_j)^\sharp$ روی K همراه با j به بینهایت میل می‌کند. بنا به فرض نرمال بودن خانواده، می‌توان فرض کرد هر نقطهٔ $P \in U$ همسایگی‌ای مانند N_P دارد که روی آن $\{f_j\}$ همگرای نرمال به تابع $\hat{C}$، مقدار هولومرفیکی مانند fاست. اما در این صورت $(f_j)^\sharp$ روی هر یک از N_Pها همگرای نرمال است (توجه کنید $(\frac{۱}{f_j})^\sharp = (f_j)^\sharp$). چون K فشرده است پس با تعدادی متناهی از N_P پوشانده می‌شود. در نتیجه $(f_j)^\sharp$ روی K کراندار است و این متناقض با فرض است. □

معنای اصلی قضیهٔ مارتی (و اثبات آن) این است که شرط نرمال بودن یک خانواده واقعاً یک شرط یکسان پیوستگی روی خانواده است، اگر اندازه‌گیری نسبت به متر مناسبی انجام گیرد. این متر وقتی که توابع $\hat{C}$ مقدارند بدیهی می‌شود.

در قسمت بعد دو نتیجهٔ مهم از مطالب این قسمت به دست می‌آوریم.

۴. تعمیمی از قضیهٔ مونتل و قضیهٔ بزرگ پیکار

اکنون مزد زحمات خود را دریافت می‌کنیم. اثباتهای ساده‌ای برای دو قضیه بزرگ نظریه کلاسیک توابع به دست می‌آوریم، قضیه‌هایی که اثباتهای قدیمی آنها (مثلاً مستلزم استفاده از توابع مدولار بیضوی‌اند) بسیار دشوار هستند. ابزارهای اصلی این کار، لم تعمیم یافته شوارتس و مطالب قسمت ۳ است. مطلب را با صورت تعمیم یافته‌تر قضیهٔ مونتل (که باز هم از مونتل است) آغاز می‌کنیم.

□ قضیهٔ ۱. فرض کنید U دامنه‌ای در صفحهٔ مختلط و P، Q، و R سه نقطهٔ متمایز در $\hat{\mathbb{C}}$ باشند. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع هولومرفیک باشد که مقادیرشان را در $\hat{\mathbb{C}}\backslash\{P, Q, R\}$ می‌گیرند. در این صورت $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال به مفهوم تعریف $3'$ قسمت ۳ است.

اثبات.

با استفاده از یک تبدیل خطی کسری می‌توان فرض کرد $P = 0$، $R = \infty$ و $Q = 1$. بنابراین باید ثابت کنیم که خانواده‌ای از توابع هولومرفیک که مقادیرشان را در $\hat{\mathbb{C}}_{0,1} = \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ می‌گیرند، نرمال است.

البته کافی است ثابت کنیم $\mathcal{F}$ روی هر یک از قرصهای $D(z_0, \alpha) = \{z : |z - z_0| < \alpha\} \subseteq U$ نرمال است. فرض می‌کنیم

$z_\circ = \circ$.

فرض می‌کنیم μ متر با خمیدگی اکیداً منفی باشد که در قضیه ۳ قسمت ۲ روی $\mathbb{C}_{\circ,1}$ ساخته شد. با ضرب μ در عددی ثابت و مثبت می‌توان فرض کرد که خمیدگی از بالا به -۴ کراندار است. بنا به قضیهٔ ۴ قسمت ۱ (تعمیم لم شوارتس) به ازای $A = ۴$، $B = ۴$ و به ازای هر $f \in \mathcal{F}$ داریم.

$$f^*\mu(z) \leq \rho_\alpha^A(z) \quad , \quad \forall z \in D(\circ, \alpha)$$

اکنون متر کروی محدود شده به $C_{\circ,1}$ را با متر μ مقایسه می‌کنیم. توجه کنید وقتی z به $\circ$، ۱ یا ∞ میل کند $\frac{\sigma(z)}{\mu(z)}$ به $\circ$ میل می‌کند، در نتیجه ثابت $M > \circ$ وجود دارد که

$$\sigma(z) \leq M\mu(z).$$

و لذا روی $D(\circ, \alpha)$ داریم

$$f^\sharp \equiv f^*\sigma \leq M \cdot f^*\mu \leq M f^* \cdot \rho_\alpha^A$$

عدد ثابت M مستقل از $f \in \mathcal{F}$ است. بنابراین $f^\sharp$ روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $D(\circ, \alpha)$ کراندار است و این کران به $f \in \mathcal{F}$ بستگی ندارد. اکنون از قضیه مارتی نتیجه می‌شود که $\mathcal{F}$خانواده‌ای نرمال است. □

مرحلهٔ اول اثبات را به صورت نتیجه‌ای جدا می‌کنیم.

□ **نتیجه ۱.۱.** اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع تحلیلی مختلط مقدار روی U باشد که همهٔ آنها دو عدد مختلط را از مقادیرشان حذف کنند در این صورت $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است.

اکنون با استفاده از این قضیهٔ تعمیم یافتهٔ مونتل صورت بهبود یافته‌ای از قضیهٔ پیکار را که در انتهای قسمت ۲ وعده دادیم می‌آوریم. این قضیه به قضیهٔ بزرگ پیکار موسوم است.

□ **قضیهٔ ۲.** فرض کنید $U = D'(\circ, \alpha) \equiv D(\circ, \alpha)\backslash\{\circ\}$ یک قرص بدون مرکز و f تابعی هولومرفیک روی U باشد که در $\circ$ یک نقطهٔ تکین اساسی دارد. در این صورت تحدید f به هر همسایگی محذوف $\circ$ حداکثر یک مقدار مختلط را از مقادیرش حذف می‌کند.

اثبات.
عکس نقیض قضیه را ثابت می‌کنیم. با تجدید مقیاس می‌توان فرض کرد تابعی مانند f روی $D' \equiv (\circ, ۱)\backslash\circ$ وجود دارد که مقادیر $\circ$ و ۱ را حذف می‌کند. بنابراین ثابت خواهیم کرد که $\circ$ یک قطب یا تکین برداشتنی برای f است و این یک تناقض است

فرض کنید $f_n(z) = f(\frac{z}{n})$، $\circ < |z| < ۱$ و قرار دهید $\mathcal{F} = \{f_n\}$. چون مقادیر همهٔ اعضای $\mathcal{F}$ در $\mathbb{C}_{\circ,۱}$ هستند، پس $\mathcal{F}$ نرمال است. چون خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از توابع هولومرفیک تشکیل یافته است در نتیجه زیر دنباله‌ای چون f_{n_κ} وجود دارد که همگرای نرمال یا واگرای فشرده است.

در مورد اول زیر خانوادهٔ $\{f_{n_\kappa}\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ D' کراندار است. به ویژه این خانواده روی مجموعهٔ $\{z : |z| = \frac{۱}{۲}\}$ به وسیلهٔ عدد ثابتی مانند M کراندار است. و بنابراین f روی هر یک از دایره‌های $\{z : |z| = \frac{۱}{۲n\kappa}\}$ کراندار است. بنا به اصل ماکسیمم f روی $\{z : \circ < |z| < \frac{۱}{۲}\}$ به وسیلهٔ M کراندار است. بنابراین $\circ$ یک نقطهٔ تکین برداشتنی f است.

در حالت دوم استدلالی مشابه در مورد $\frac{1}{f}$ نشان می‌دهد وقتی $z \to 0$، f به ∞ میل می‌کند. بنابراین 0 یک قطب f است.

نشان دادیم که اگر f دو مقدار را در یک همسایگی محذوف 0 بگیرد آنگاه f در 0 یا دارای تکین برداشتنی یا قطب است. به این ترتیب اثبات عکس نقیض قضیه تکمیل می‌شود. $\square$

فصل ۳

چند متر جدید ناوردا

۰ . ملاحظات مقدماتی

برای بیان حکم و خلاصهٔ اثبات قضیهٔ نگاشت ریمان به قسمت ۳.۰ مراجعه کنید. قضیهٔ نگاشت ریمان حل مسئلهٔ اکستریمم معینی است: یافتن نگاشتی یک به یک از دامنهٔ مفروض U به D که نقطه داده شدهٔ P را به ۰ می‌نگارد و در نقطهٔ P دارای بزرگترین مشتق λ_p است. وجود تابع اکستریمال که یک به یک هم باشد با استدلال روی خانواده‌های نرمال ثابت می‌شود، این نکته که این تابع پوشاست با استدلالی اضافی انجام می‌گیرد و در واقع تنها مرحله‌ای از اثبات است که در آن از فرضهای توپولوژیک روی U استفاده می‌شود.

نکتهٔ بحث حاضر توجه به این مطلب است که برنامهٔ فوق حتی اگر U معادل توپولوژیک D نباشد، قابل اجراست. نظر برجسته کنستانتین کاراتئودوری این بود که با استفاده از λ_p می‌توان یک متر ساخت، این متر هم اکنون متر کارتئودوری نامیده می‌شود. مشتق نگاشتهای ϕ از U به D با شرط $\phi(P) = 0$ را که در آن ϕ لزوماً یک به یک نیست ماکسیمم می‌کنیم. البته اثبات قضیهٔ نگاشت ریمان در مرحله‌ای که می‌خواهیم پوشا بودن تابع حدی را ثابت کنیم در هم می‌ریزد؛ همچنین نمی‌توانیم یک به یک بودن این تابع را ثابت کنیم. سایر مراحل اثبات، از

جمله وجود تابع اکستریمال صحیح‌اند و به متر روی دامنه منجر می‌گردد (قسمت ۱.۳ زیر).

یک ساختمان دوگان، با استفاده از نگاشتهای $\phi : D \to U$ متری به نام متر کوبایاشی یا کوبایاشی - رویدن را به‌دست می‌دهد. مترهای کاراتئودوری و کوبایاشی - رویدن که هر دو از مسئله اکستریمال ناشی شده‌اند و این مسئله نیز از قضیهٔ نگاشت ریمان الهام گرفته شده است اهمیت زیادی دارند، زیرا آنها هر دامنهٔ دلخواه را به متری مجهز می‌کنند. به علاوه این مترها تحت نگاشتهای همدیس ناوردا هستند. اما بیشترین فایده از مطالعهٔ ارتباط این دو متر به دست می‌آید.

در این فصل مطالبی در مورد مترهای کاراتئودوری و کوبایاشی و تأثیر آنها بر نظریهٔ نگاشتهای هولومرفیک یاد می‌گیریم. همچنین شروع به کشف مطالبی خواهیم کرد که از مقایسهٔ دو متر مذکور به دست می‌آیند.

---

۱. متر کاراتئودوری

دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ را تثبیت می‌کنیم. یادآور می‌شویم که $D \subseteq \mathbb{C}$ قرص واحد است.

تعریف ۱.

اگر $P \in U$، تعریف می‌کنیم.

$$(D,U)_P = \{ f : \text{توابع هولومرفیک } f \text{ از } U \text{ به } D : f(P) = 0\}$$

متر کاراتئودوری U در P به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_C^U(P) = \sup\{|\phi'(P)| : \phi \in (D,U)_P\}$$

تذکّر

چنان که در قسمت ۰ پیش بینی کردیم به ازای هر P، F_C^U مقدار اکستریمم مطرح در قضیهٔ نگاشت ریمان را به دست می‌دهد. در آن اثبات دانستن این که مقدار اکستریمم وجود دارد و متناهی است ضروری بود. اکنون اطلاعات بسیاری با مقایسهٔ این مقدار و مقادیر دیگر به دست می‌آوریم. □

روشن است که $F_C^U(P) \geq \circ$. (به علاوه فرمولهای برآورد کوشی نتیجه می‌دهند که $F_C^U(P) < \infty$.) آیا به ازای هر P، $F_C^U(P) > \circ$؟ اگر U کراندار باشد جواب این سؤال مثبت است زیرا در این صورت $R > \circ$ وجود دارد که

$$U \subseteq D(\circ, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

اما در این صورت نگاشت

$$\phi : \zeta \to \frac{\zeta - P}{۲R}$$

متعلق است به $\phi \in (D, U)_P$. لذا

$$\cdot F_C^U(P) \geq |\phi'(P)| = \frac{۱}{۲R} > \circ$$

اما اگر U بیکران باشد، ممکن است $F_{\mathbb{C}}^U$ تباهیده باشد. مثلاً اگر $U = \mathbb{C}$ آنگاه هر $f \in (D, U)_P$ تابعی ثابت است و لذا $F_{\mathbb{C}}^U \equiv \circ$. همین مورد در حالتی که U برابر است با $\mathbb{C}$ منهای یک مجموعهٔ گسسته از نقاط نیز درست است (بنا به قضیهٔ نقاط تکین برداشتنی ریمان). کدام دامنه‌ها دارای متر کاتئودوری ناتباهیده هستند؟ ظرفیت تحلیلی وسیلهٔ خوبی برای پاسخ به این سؤال است (رک: «GAR»)، اما این مبحث را نمی‌توانیم در اینجا دنبال کنیم.

مهمترین فایدهٔ متر کاراتئودوری آن است که گزاره ۱ قسمت ۵.۱ را به دامنه‌های دلخواه تعمیم می‌دهد.

□ **گزارهٔ ۲.** فرض کنید U_1 و U_2 دو دامنه در $\mathbb{C}$ باشند. فرض کنید ρ_j متر کاراتئودوری روی U_j باشد. اگر $h : U_1 \to U_2$ نگاشتی هولومرفیک باشد، آنگاه h از (U_1, ρ_1) به (U_2, ρ_2) طول کوتاه کن است. به عبارت دیگر

$$h^*\rho_2(z) \leq \rho_1(z) \quad , \quad \forall z \in U_1$$

□ **نتیجهٔ ۱.۲.**اگر $\gamma : [0, 1] \to U_1$ خمی پاره پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$.\ell_{\rho_2}(h_*\gamma) \leq \ell_{\rho_1}(\gamma)$$

□ **نتیجه ۲.۲.**اگر P_1 و $P_2 \in U_1$ آنگاه

$$d_{\rho_2}(h(P_1), h(P_2)) \leq d_{\rho_1}(P_1, P_2)$$

□ **نتیجه ۳.۲.** اگر h همدیس باشد آنگاه h از (U_1, ρ_1) به (U_2, ρ_2) یک ایزومتری است.

این نتیجه‌ها دقیقاً مانند مورد متر پوانکاره در فصل ۱ ثابت می‌شوند. لذا به اثبات گزاره می‌پردازیم.

اثبات گزارهٔ ۲.
$P \in U_1$ را تثبیت می‌کنیم و قرار می‌دهیم $Q = h(P)$. توجه کنید اگر

$\phi \in (D, U_۲)_Q$ آنگاه $\phi o h \in (D, U_۱)_P$. بنابراین

$$F_C^{U_۱}(P) \geq |(\phi o h)'(P)| = |\phi'(Q)| \cdot |h'(P)|$$

با محاسبه سوپریموم روی همهٔ $\phi \in (D, U_۲)$ها به دست می‌آوریم

$$F_C^{U_۱}(P) \geq F_C^{U_۲}(Q) \cdot |h'(P)|$$

یا

$$\rho_۱(P) \geq h^* \rho_۲(P)$$

اکنون متر کاراتئودوری قرص را پیدا می‌کنیم.

□ **گزارهٔ ۳.** متر کاراتئودوری قرص با متر پوانکاره یکی است.

اثبات.
ابتدا این متر را در مبدأ محاسبه می‌کنیم. اگر $\phi \in (D, D)_۰$ آنگاه بنا به لم شوارتس، $|\phi'(۰)| \leq ۱$. بنابراین

$$F_{\mathbb{C}}^D(۰) \leq ۱$$

اما چون نگاشت

$$\phi(\zeta) = \zeta$$

متعلق به $(D, D)_۰$ است و $\phi'(۰) = ۱$، داریم

$$F_{\mathbb{C}}^D(۰) = ۱.$$

چون هر نگاشت همدیس قرص یک ایزومتری متر کاراتئودوری است، گزارهٔ ۶ قسمت ۴.۱ نتیجه می‌دهد که مترهای کاراتئودوری و پوانکاره برابراند. □

با توجه به آنچه که قبلاً یاد گرفتیم ممکن است فکر کنیم که هر ایزومتری متر کاراتئودوری باید نگاشتی همدیس باشد. این مطلب در واقع درست است ــ در واقع حکم بسیار قوی‌تری برقرار است ــ مشروط بر این که دامنه‌های تحت بررسی متر کاراتئودوری ناتباهیده داشته باشند. بحث در این مورد را به بعد از معرفی متر کوبایاشی موکول می‌کنیم.

---

۲. متر کوبایاشی

دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ را تثبیت می‌کنیم.

تعریف ۱.

اگر $P \in U$، قرار می‌دهیم

$$(U, D)_P = \{f(\circ) = P :\text{توابع هولومرفیک } f \text{ از } D \text{ به } U\}.$$

متر کوبایاشی (یا کوبایاشی ـ رویدن) U در P به صورت

$$F_K^U(P) = \inf \{\frac{1}{|\phi'(\circ)|} : \phi \in (U, D)_\rho\}$$

تعریف می‌شود.

تذکر.

چنان که در مورد مترکاراتئودوری در بخش قبل متذکر شدیم، متر کوبایاشی یک مسئله اکستریمال معین را در نظر می‌گیرد و برای مقاصد مقایسه مفید است.

صورت خاص تعریف متر کوبایاشی موجب می‌شود که با متر کاراتئودوری قابل مقایسه باشد، به ویژه این دو متر بخوبی با قضیهٔ کلاسیک شوارتس در رابطه‌اند.□

روشن است که $F_K^U(P) \geq ۰$. برای کسب اطلاع بیشتر در مورد F_K^U آن را با متر کاراتئودوری مقایسه می‌کنیم.

□ **گزارهٔ ۲.** به ازای هر $P \in U$ داریم

$$.F_C^U(P) \leq F_K^U(P)$$

اثبات.

فرض کنید $\phi \in (D,U)_P$ و $\psi \in (U,D)_P$. در این صورت $\phi o \psi : D \to D$ و $\phi o \psi(۰) = ۰$. از لم شوارتس نتیجه می‌شود

$$|(\phi o \psi)'(۰)| \leq ۱$$

یا

$$|\phi'(P)| \leq \frac{۱}{|\psi'(۰)|}$$

با محاسبهٔ سوپریموم روی همهٔ ϕها نتیجه می‌شود:

$$F_C^U(P) \leq \frac{۱}{|\psi'(۰)|}$$

اکنون روی همهٔ ψهای سوپریموم می‌گیریم، داریم □

$$F_C^U(P) \leq F_K^U(P)$$

از این گزاره بی‌درنگ نتیجه می‌شود که اگر U کراندار باشد، آنگاه F_K^U ناتباهیده است (زیرا در این صورت F_C^U ناتباهیده است). از طرف دیگر اگر $U = \mathbb{C}$ آنگاه

$F_K^U \equiv 0$، زیرا به ازای $P \in \mathbb{C}$ نگاشت

$$\phi_R(\zeta) = P + R\zeta$$

به ازای هر $R > 0$ به $\phi_R \in (U, D)_P$ تعلق دارد. بنابراین

$$F_K^U(P) \leq \frac{1}{|\phi'_R(o)|} = \frac{1}{R}؛$$

اکنون با میل دادن $R \to \infty$ به‌دست می‌آوریم $F_K^U(P) = 0$.

اکنون مانند گزارهٔ ۲ قسمت قبل داریم:

□ **گزارهٔ ۳.** فرض کنید دامنه‌های U_1 و U_2 به مترهای کوبایاشی ρ_1 و ρ_2 مجهز باشند. اگر $h : U_1 \to U_2$ هولومرفیک باشد، آنگاه h از (U_1, ρ_1) به (U_2, ρ_2) طول کم کن است. یعنی

$$h^* \rho_2(z) \leq \rho_1(z) \quad , \quad \forall z \in U_1$$

□ **نتیجه ۱.۳.** اگر $\gamma : [0, 1] \to U_1$ خمی پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\ell_{\rho_2}(h_* \gamma) \leq \ell_{\rho_1}(\gamma)\cdot$$

□ **نتیجهٔ ۲.۳.** اگر P_1 و $P_2 \in U_1$ آنگاه

$$d_{\rho_2}(h(P_1), h(P_2)) \leq d_{\rho_1}(P_1, P_2)$$

□ **نتیجهٔ ۳.۳.** اگر h همدیس باشد آنگاه h از (U_1, ρ_1) به (U_2, ρ_2) یک ایزومتری است.

اثبات گزارهٔ ۳.

$P \in U_1$ را تثبیت و فرض کنید $Q = h(P)$. فرض کنید $\phi \in (U_1, D)_P$

در این صورت $ho\phi \in (U_2, D)_Q$. داریم

$$F_K^{U_2}(Q) \leq \frac{1}{|(ho\phi)'(0)|} = \frac{1}{|h'(P)||\phi'(0)|}$$

روی همهٔ $\phi \in (U_1, D)_P$ اینفیموم می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$F_K^{U_2}(Q) \leq \frac{1}{|h'(P)|} F_K^{U_1}(P)$$

یا

$$(h^* F_K^{U_2})(P) \leq F_K^{U_1}(P)$$

□

با استفاده از گزارهٔ ۳، می‌توانیم دامنه‌های دیگر $U \subseteq \mathbb{C}$ با متر کوبایاشی تباهیده مثال بزنیم. فرض کنید $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. در این صورت

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_0$$

$$\zeta \to e^\zeta$$

هولومرفیک است. نگاشت h طول کوتاه‌کن مترهای کوبایاشی است. چون F_K روی $\mathbb{C}$ متحداً ۰ است. پس روی $\mathbb{C}_0$ نیز متحداً ۰ است.

به عنوان تمرین، ثابت کنید که این شیوه استدلال را نمی‌توان ادامه داد و نتیجه گرفت که F_K^U به ازای $U = \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$ تباهیده است. در واقع در آینده خواهیم دید که F_K^U روی $U \equiv \mathbb{C} \backslash \{P_1, P_2, \cdots, P_\kappa\}$ که در آن $\kappa \geq 2$ و P_jها

متمایزند، ناتباهیده است (توجه کنید این مطالب با آنچه که در قسمت ۱ در مورد متر کاراتئودوری بحث شد مغایرت دارد). این مطلب را در قسمت ۵ مورد بحث قرار خواهیم داد و خواهیم دید که به نحو ظریفی به خانواده‌های نرمال وابسته است — نقش ویژهٔ $\mathbb{C}_{۰,۱}$ را در آن نظریه گوشزد می‌کنیم. حالا توجه خود را به مطالب مقدماتی در مورد متر کوبایاشی معطوف می‌داریم.

□ **گزاره ۴.** اگر $U = D \subseteq \mathbb{C}$ آنگاه متر کوبایاشی با متر پوانکاره برابر است.

اثبات.
به ازای $P \in D$ داریم

$$F_K^D(P) \geq F_C^D(R) = \rho(P)،$$

که در آن ρ متر پوانکاره روی قرص است. برای به دست آوردن نابرابری در جهت عکس، ابتدا اقرار می‌دهیم $P = ۰$ و فرض می‌کنیم $\phi \in (D, D)$ به وسیلهٔ

$$\phi(\zeta) = \zeta$$

داده شده باشد. در این صورت

$$F_K^D(۰) \leq \frac{۱}{|\phi'(۰)|} = ۱ = \rho(۰)$$

بنابراین داریم

$$F_K^D(۰) = ۱ = \rho(۰)$$

از گزاره ۳ در بالا و گزارهٔ ۶ در قسمت ۴.۱ نتیجه می‌شود.

$$\forall P \in D \quad , \quad F_K^D(P) = \rho(P). \qquad \square$$

اولین قضیهٔ مهم این فصل توصیفی از قرص بر حسب مترهای کاراتئودوری و کوبایاشی است (اکنون با مراجعه به قسمت. بگویید چرا این قضیه صورت متری قضیهٔ نگاشت ریمان است:

□ **قضیهٔ ۵.** دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ به طور همدیس معادل قرص است اگر و تنها اگر نقطه $P \in U$ وجود داشته باشد که

$$F_C^U(P) = F_K^U(P) \neq \circ$$

اثبات.
فرض کنید U به طور همدیس معادل قرص واحد و $h : U \to D$ یک نگاشت همدیس باشد. به ازای هر $P \in U$ داریم

$$F_C^U(P) = (h^* F_C^D)(P)$$

و بنا به گزارهٔ ۲ قسمت ۱

$$= (h^* \rho)(P)$$

و بنا به گزارهٔ ۲

$$= (h^* F_K^D)(P)$$

بنا به نتیجهٔ ۳ گزارهٔ ۳ این مقدار با $F_K^U(P)$ برابر است. و لذا قسمت آسان قضیه اثبات می‌شود.
برای اثبات عکس قضیهٔ نگاشت $\phi_j \in (D, U)_P$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$|\phi_j'(P)| \to F_C^U(P)$$

و نگاشت $\psi_j \in (U, D)_P$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\frac{۱}{|\psi_j'(۰)|} \to F_K^U(P)$$

چون $\{\phi_j\}$ از بالا به ۱ کراندار است، زیر دنباله‌ای مانند $\{\phi_{j_\kappa}\}$ وجود دارد که همگرای نرمال به $\phi_۰$ است. اکنون با تعریف

$$h_{j_\kappa} = \phi_{j_\kappa} o \psi_{j_\kappa}$$

زیردنبالهٔ جدیدی را در نظر می‌گیریم و با $\{h_{j\ell}\}$ نشان می‌دهیم، می‌توانیم فرض کنیم $h_{j\ell}$ همگرای نرمال به حدی چون $h_۰$ است. توجه کنید که $h_۰(۰) = ۰$ و لذا $h_۰$ ثابتی تکمدولی نیست؛ بنابراین $h_۰$، D را به D می‌نگارد. پس از تجدید نامگذاری آخرین دنباله را با

$$h_\ell = \phi_\ell o \psi_\ell$$

نشان می‌دهیم. یادآور می‌شویم که وقتی دنباله‌ای از توابع هولومرفیک همگرای نرمال باشد، آنگاه دنبالهٔ مشتقهای آنها نیز همگرای نرمال است (رک: برآوردهای کوشی قسمت ۱.۰). در نتیجه

$$\begin{aligned} |h_۰'(۰)| &= \lim_{\ell\to\infty} |(\phi_\ell o \psi_\ell)'(۰)| = \lim_{\ell\to\infty} |\phi_\ell'(P)|.|\psi_\ell'(۰)| \\ &= F_C^U(P).\frac{۱}{F_K^U(P)} = ۱ \qquad (۶.۰) \end{aligned}$$

بنا به لم شوارتس $h_o(\zeta) = \mu.\zeta$ که در آن μ ثابتی تکمدولی است. بنابراین داریم

$$\mu.\zeta = h_۰(\zeta) = \lim_{\ell\to\infty} (\phi_\ell o \psi_\ell(\zeta)) \qquad (*)$$

پس از ترکیب توابع $\phi - \ell$ با یک دوران می‌توانیم فرض کنیم $\mu = ۱$.

اکنون $\mathbb{C}/U$ باید حداقل دو نقطه داشته باشد (در غیر این صورت F_K^U متحداً صفر خواهد شد و این با فرض متناقض است). از این رو طبق قضیهٔ ۱ قسمت ۴.۲، $\{\psi_\ell\}$ یک خانوادهٔ نرمال تشکیل می‌دهد. و لذا زیر دنباله‌ای مانند $\{\psi_{\ell_m}\}$ از آن به تابعی مانند $\psi_\circ$ همگراست. پس از تجدید شماره‌گذاری $(*)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\zeta = h_\circ(\zeta) = \lim_{m\to\infty} (\phi_m o \psi_m(\zeta)) = \phi_\circ o \psi_\circ(\zeta) \qquad (**)$$

چون $h_\circ$ پوشاست در نتیجه $\phi_\circ$ نیز پوشاست.

تابع $\psi_\circ$ هولومرفیک و غیر ثابت است (زیرا $\acute{\psi}_\circ(\circ) \neq \circ$) و لذا نگارهٔ آن باز است. ادعا می‌کنیم این نگاره بسته هم هست (در توپولوژی نسبی U). برای اثبات، فرض کنید $\psi_\circ(\zeta_j)$ دنباله‌ای از اعضای این نگاره باشد که به نقطهٔ $q \in U$ همگراست. چون $\phi_\circ$ پیوسته است پس $\phi_\circ(\psi_\circ(\zeta_j))$ به حدی مانند r همگراست. لذا بنا به $(**)$ داریم $\zeta_j \to r$. از پیوستگی $\psi_\circ$ نتیجه می‌شود $\psi_\circ(r) = q$، لذا q متعلق به نگارهٔ $\psi_\circ$ است. بنابراین نگاره $\psi_\circ$ باز و بسته و ناتهی است. چون U همبند است پس نگارهٔ $\psi_\circ$ برابر با U است، یعنی $\psi_\circ$ پوشاست. حال چون $h_\circ$ یک به یک است $\phi_\circ$ باید یک به یک باشد. در نتیجه $\phi_\circ$ نگاشت همدیس مطلوب از U به D است. □

توجه کنید که اگر مترها تباهیده باشند، قضیه نادرست است. مثلاً اگر $U = \mathbb{C}\backslash\circ$ آنگاه $F_{\mathbb{C}}^u = F_k^u \equiv \circ$ اما U معادل همدیس قرص نیست.

چنانکه در قسمت قبل پیش بینی کردیم اکنون ثابت می‌کنیم که تنها ایزومتری‌های مترهای کاراتئودوری یا کوبایاشی که نقطه‌ای را ثابت نگاه می‌دارند نگاشتهای همدیس‌اند. در واقع مطلبی قوی‌تر از این ثابت خواهیم کرد.

□ **قضیهٔ ۶.** فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}$ دامنه‌ای با متر کوبایاشی ناتباهیده باشد و $P \in U$ را تثبیت کنید. فرض کنید تابع

$$f : U \to U$$

هولومرفیک است و $f(P) = P$. فرض کنید f ایزومتری متر کاراتئودوری یا کوبایاشی در P باشد، یعنی فرض کنید

$$f^* F_{\mathbb{C}}^U(P) = F_{\mathbb{C}}^U(P)$$

یا

$$f^* F_K^U(P) = F_K^U(P)$$

و این که متر در P صفر نیست. در این صورت f نگاشتی همدیس از U به U است.

تذکر.

این قضیه حکم قابل ملاحظه‌ای دربارهٔ صلبیّت است : شرط سرتاسری که f، U را به U می‌نگارد همراه با شرط مشتق در P، ایجاب می‌کند که f یک به یک و پوشا باشد. □

اثبات قضیه.

چون U متر کوبایاشی ناتباهیده دارد، $\mathbb{C} \setminus U$ باید حداقل دو نقطه داشته باشد. در نتیجه هر خانواده از توابع هولومرفیک $\{g_\alpha\}$ که مقادیرشان در U باشد نرمال است (بنا به قضیهٔ ۱ قسمت ۴.۲) این مطلب را مکرراً به کار خواهیم برد.

اکنون شرط

$$f^* F_{\mathbb{C}}^U(P) = F_{\mathbb{C}}^U(P) \quad \text{یا} \quad f^* F_K^U(P) = F_K^U(P)$$

نتیجه می‌دهد

$$\cdot|f'(P)| = ۱$$

تعریف می‌کنیم

$$f^{۱} = f$$
$$f^{۲} = fof$$
$$\cdots$$
$$f^{j} = f^{j-۱}of \quad \text{و} \quad j \geq ۲$$

$\{f^{j}\}$ خانواده‌ای نرمال است. چون قدر مطلق هر یک از $(f^{j})'(P)$ها برابر با ۱ است، زیردنباله‌ای مانند $\{f^{j_\ell}\}$ وجود دارد که $۱ \to (f^{j_\ell})'(P)$. (تمرین: اگر آرگومان $f'(P)$ مضرب گویایی از π باشد، حکم واضح است، اگر این آرگومان مضرب اصم π باشد، آنگاه مجموعهٔ $(f^{j})'(\ell)$ زیرمجموعهٔ چگالی از دایرهٔ واحد است). با عبور به زیردنبالهٔ دیگری که آن را نیز با $\{f^{j_\ell}\}$ نمایش می‌دهیم فرض می‌کنیم $\{f^{j_\ell}\}$ به تابع هولومرفیکی مانند $\tilde{f}$ همگرای نرمال است. در نتیجه $\tilde{f}'(P) = ۱$. ادعا می‌کنیم که در واقع $\tilde{f}(z) \equiv z$.

برای اثبات این ادعا، فرض کنید چنین نباشد. برای سادگی فرض می‌کنیم $P = ۰$. در این صورت به‌ازای z نزدیک به ۰ داریم

$$\tilde{f}(z) = ۰ + z + \text{(جمله‌های مرتبه بالاتر)}$$

فرض کنید $a_m z^m$، $m \geq ۲$ اولین جملهٔ غیر صفر بعد از z باشد (چون فرض

می‌کنیم که $\tilde{f}$ برابر با تابع z نیست، این فرض درست است). ملاحظه می‌کنیم

$$\tilde{f}^{۲} = \tilde{f} o \tilde{f} = z + ۲a_m z^m + \cdots$$
$$\tilde{f}^{۳} = \tilde{f} o \tilde{f} o \tilde{f} = z + ۳a_m z^m + \cdots \qquad (*)$$
$$\cdots$$
$$\tilde{f}^{\kappa} = \tilde{f} o \tilde{f} o \cdots o \tilde{f} = z + \kappa a_m z^m + \cdots$$

چون $\{\tilde{f}^{\kappa}\}$ یک خانوادهٔ نرمال است، پس زیر دنباله‌ای مانند $\{\tilde{f}^{\kappa_q}\}$ از آن روی U همگرای نرمال است. بنابراین

$$(\frac{\partial}{\partial z})^m \tilde{f}^{\kappa_q}(P)$$

همگراست. اما $(*)$ به روشنی نشان می‌دهد

$$(\frac{\partial}{\partial z})^m \tilde{f}^{\kappa}(P) = m!.\kappa.a_m$$

که با افزایش κ ، افزایش می‌یابد. این تناقض وقتی از بین می‌رود که $a_m = ۰$. بنابراین $\tilde{f}(z) \equiv z$.

اکنون با توجه به همگرایی نرمال $f^{j_\ell}(z) \to z$، ادعا می‌کنیم که f نگاشتی همدیس است. در واقع خانوادهٔ $\{f^{j_\ell - ۱}\}$ نرمال است. بنابراین زیردنباله‌ای مانند $\{f^{j_r - ۱}\}$ دارد که به تابعی مانند g همگرای نرمال است. توجه کنید g ثابت نیست، زیرا $g^{'}(P)$ صفر نیست. در این صورت

$$fog(z) = f o \lim_{r \to \infty} f^{j_r - ۱}(z) = \lim_{r \to \infty} f^{j_r}(z) \equiv z.$$

به همین ترتیب

$$(gof)(z) \equiv z$$

لذا f یک به یک و پوشاست. مسلماً f هولومرفیک نیز هست، بنابراین f همدیس است. □

در نظر گرفتن قضیهٔ ۶ به عنوان تعمیمی از قسمت یکتایی لم شوارتس آموزنده است. برای سادگی U را دامنه‌ای کراندار می‌گیریم. در این صورت U زیر مجموعه‌ای از یک قرص است و قرص، متر کوبایاشی ناتباهیده دارد. بنابراین اگر ویژگی طول کوتاه کنی متر کوبایاشی را در مورد نگاشت شمول اعمال کنیم ملاحظه می‌کنیم که U نیز دارای متر کوبایاشی ناتباهیده است. فرض کنید f نگاشتی هولومرفیک از U به U باشد و $P \in U$ را ثابت نگاه دارد. ویژگی طول کوتاه کنی متر کوبایاشی نتیجه می‌دهد $|f'(P)| \leq 1$. اکنون قضیهٔ ۶ بیان می‌کند که در این رابطه برابری برقرار است اگر و تنها اگر f یک به یک و پوشا باشد. □

۳. کامل بودن مترهای کاراتئودوری و کوبایاشی

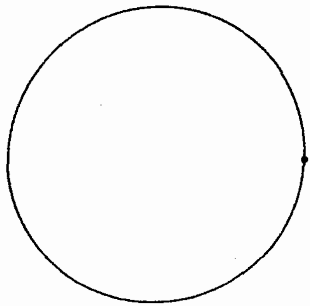
در این قسمت ثابت می‌کنیم که دامنهٔ U که مرزی به قدر کافی مناسب دارد همراه با متر کاراتئودوری یا کوبایاشی یک فضای متری کامل است. در اینجا تذکری ضروری است: این قسمت غنی‌ترین و در عین حال مشکل‌ترین قسمت کتاب است، زیرا هم زبان فضاهای متری و هم ساختنیهای زیرکانه از آنالیز را به کار می‌برد. با این همه خود کفاست و مقدمه‌ای بر مطالب بسیار مهم و زیبا ارائه می‌نماید. به علاوه پاداش بالای این کار در قسمت حاضر و قسمت بعدی بخوبی پاسخگوی تلاش صرف شده است.

اکنون به بررسی کامل بودن مترهای یاد شده روی رده‌ای از دامنه‌های مناسب می‌پردازیم. کافی است این مطلب را در مورد متر کاراتئودوری ثابت کنیم، زیرا هر

دنباله که نسبت به متر کوبایاشی کوشی باشد نسبت به متر کاراتئودوری نیز کوشی است (تمرین : جزئیات را بنویسید). مطلب را با تعریف مفهوم «مرز به قدر کافی مناسب» آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.

خم $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ را دوبار پیوسته مشتق‌پذیر بسته می‌نامیم اگر γ دو بار پیوسته مشتق‌پذیر بوده (طبق معمول در نقاط انتهایی مشتقهای یکطرفه منظور می‌شوند) و $\gamma(a) = \gamma(b)$، و مشتقهای یکطرفهٔ γ تا مرتبهٔ ۲ در نقطه a برابر این مشتقها در نقطهٔ b باشند.



شکل۱

مثال ۱.

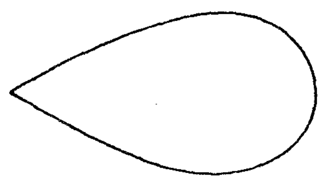
خم $\gamma(t) = e^{it}, \circ \leq t \leq ۲\pi$ خم دو بار پیوسته مشتق‌پذیر بسته است. شکل ۱ را ببینید. توجه کنید که برابری مشتقهای مراتب اول و دوم در نقاط انتهایی موجب انتقال هموار در نقطهٔ $۱ + \circ i$ شکل می‌شود که در آن دو نقطه انتهایی

به هم می‌رسند.

خم

$$\mu(t) = (\cos 2t \cos t) + i(\cos 2t \sin t), \frac{-\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

بسته است اما دوبار پیوسته مشتق‌پذیر نیست (زیرا مشتقها در $t = -\frac{\pi}{4}, t = \frac{\pi}{4}$ برابر نیستند). این خم در شکل ۲ نمایش داده شده است.



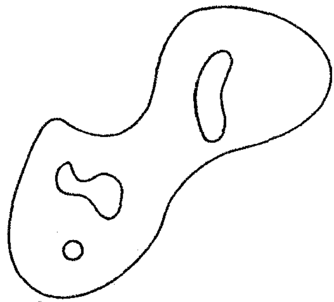
شکل۲

تعریف ۲.

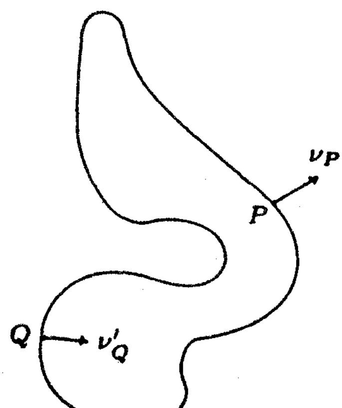
می‌گوییم ناحیهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ دارای مرز دوبار پیوسته مشتق‌پذیر (یا C^2) است اگر این مرز از تعدادی متناهی خمهای دو به دو مجزا، بستهٔ سادهٔ دوبار پیوسته مشتق‌پذیر تشکیل شده باشد. شکل ۳ را ببینید.

توجه کنید که بنا به ساختنیهای معمولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره دامنه‌ای که دارای مرز دو بار پیوسته مشتق‌پذیر است در هر نقطه p از این مرز یک بردار نرمال یکهٔ خوش تعریف ν_P به طرف داخل و نیز یک بردار یکه خوش تعریف ν'_P به طرف خارج دارد. شکل ۴ را ببینید. و لذا توابع

$$\partial U \ni P \to \nu_P \in \mathbb{R}^2$$



شکل۳



شکل۴

و

$$\partial U \ni P \to \nu'_P \in \mathbb{R}^2$$

پیوسته مشتق‌پذیرند.

به دو قضیه از آنالیز در مورد دامنه‌هایی که مرز C^2 دارند احتیاج خواهیم داشت. این دو در گزاره‌های ۳ و ۴ فرمولبندی شده‌اند.

□ **گزارهٔ ۳.** اگر U دامنه‌ای با مرز C^2 باشد در این صورت یک همسایگی باز W از ∂U وجود دارد که به ازای هر $z \in U \cap W$ نقطهٔ یکتای $P = P(z) \in \partial U$ وجود دارد که (در متر اقلیدسی) نزدیک‌ترین نقطهٔ مرز به z است. به عبارت دیگر

$$\inf\{|z - Q| : Q \in \partial U\} = |z - P|$$

W را یک همسایگی تیوبی ∂U می‌نامیم (برای مطالب بیشتر در این مورد رک: «MUN»).

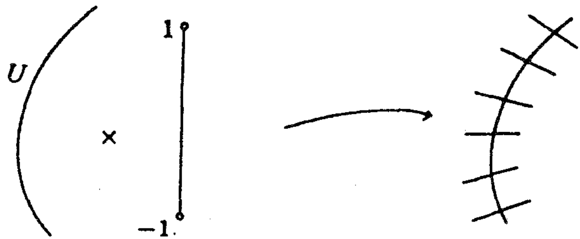
اثبات.

تعریف می‌کنیم

$$T : \partial U \times (-1, 1) \to \mathbb{C}$$

$$\cdot(Q, t) \to Q + t\nu_Q$$

T را به عنوان نگاشتی از فضای دوبعدی حقیقی $\partial U \times (-1, 1)$ به فضای دوبعدی حقیقی $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. شکل ۵ را ببینید.



شکل۵

نقطهٔ $\partial U \ni Q_\circ$ را تثبیت می‌کنیم. بدون از دست رفتن کلیت فرض می‌کنیم خط مماس بر ∂U در $Q_\circ$ افقی است (با دوران دادن محورهای مختصات به این منظور می‌رسیم). در این صورت ژاکوبین T در نقطهٔ $(Q_\circ, \circ)$ برابر است با ماتریس وارون‌پذیر

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

بنا به قضیهٔ تابع وارون (رک: «RU1» یا «MUN») همسایگی $V_\circ$ از $(Q_\circ, \circ)$ در $\partial U \times (-۱, ۱)$ وجود دارد که T روی آن وارون‌پذیر است. و لذا $T(V_\circ) \equiv W(Q_\circ)$ همسایگی‌ای از $Q_\circ$ با این ویژگی است که اگر $z \in W(Q_\circ)$ آنگاه نقطه یکتای $Q \in \partial U$ و عدد منحصر به فرد $t \in (-۱, ۱)$ وجود دارند که

$$z = Q + t\nu_Q$$

در این صورت Q نزدیک‌ترین نقطه به z در ∂U است و فاصلهٔ z تا Q برابر با $|t|$ است. قرار می‌دهیم

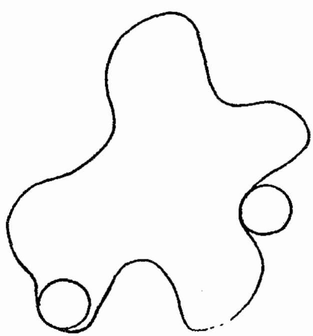
$$W = U_{Q_\circ \in \partial U} W(Q_\circ)$$

و اثبات تمام است. □

تذکّر.

در این قضیه فرض C^2 بودن مرز برای استفاده از قضیهٔ تابع ضمنی ضروری است. توضیح دهید. □

□ **گزارهٔ ۴.** فرض کنید مرز دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$، C^2 باشد. در این صورت $r_0 > 0$ وجود دارد که به ازای هر $P \in \partial U$ قرص $D(C(P), r_0)$ با شعاع r_0 وجود دارد که از خارج بر ∂U در P مماس است. همچنین قرص $D(C'(P), r_0)$ وجود دارد که از داخل بر ∂U در P مماس است. به علاوه این قرصها دارای ویژگی $\bar{D}'(C(P), r_0) \cap \partial U = \{P\}$ و $\bar{D}(\mathbb{C}'(p), r_0) \cap \partial U = \{P\}$ نیز هستند.



شکل۶

تذکّر.

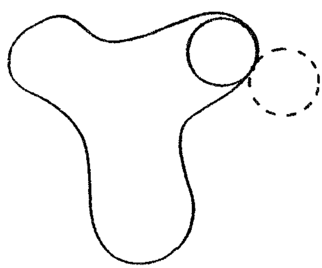
به شکل مراجعه کرده و توجه کنید که قرص d مماس داخل بر ∂U در P است اگر $d \subseteq U$، $P \in \bar{d}$ و ∂d و ∂U یک خط مماس در P داشته باشند.

تذکّری مشابه در مورد مماس خارج قابل بیان است. □

اثبات گزاره.

از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که : به هر $P \in \partial U$ یک شعاع خمیدگی $r(P)$ و یک مرکز خمیدگی $c(P)$ (کلمهٔ خمیدگی را به معنی کلاسیک و اقلیدسی آن به کار می‌بریم) متناظر است. نقطه $c(P)$ روی قائم اصلی و به فاصلهٔ $r(P)$ از آن است.

دایره‌ای با این مرکز و شعاع دایرهٔ خمیدگی نامیده می‌شود. برای جزئیات بیشتر «THO» را ببینید. اگر دایرهٔ خمیدگی در داخل دامنه باشد، قرار می‌دهیم $C'(P) = c(P)$ و $C(P)$ را منعکس آن نسبت به ∂U می‌گیریم. شکل ۷ را ببینید. اگر دایرهٔ خمیدگی در خارج دامنه باشد قرار می‌دهیم $C(P) = c(P)$ و $C'(P)$ را منعکس آن نسبت به ∂U می‌گیریم. اکنون با مراجعه به «THO»

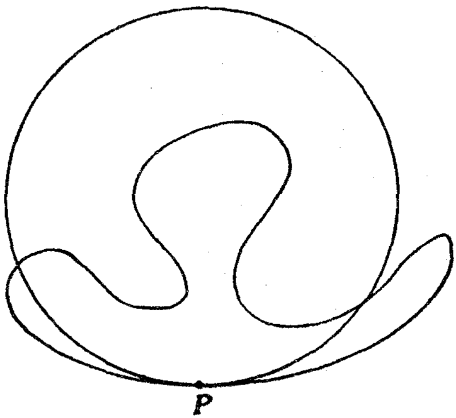


شکل۷

مشاهده می‌کنیم که که $r(P)$ به مشتق دوم خم مرزی γ بستگی دارد به ویژه $r(P)$ تابع پیوسته‌ای از P است. $r_\circ$ را مینیمم (مثبت) r می‌گیریم. شاید بخواهیم اثبات را تمام شده تلقی کنیم.

متأسفانه علی‌رغم حُسن نیت ما ممکن است مواردی مانند شکلهای ۸ و ۹

پیش آیند: رفتار دایرهٔ خمیدگی در P درست است اما به رفتار سراسری U کاری ندارد.



شکل۸

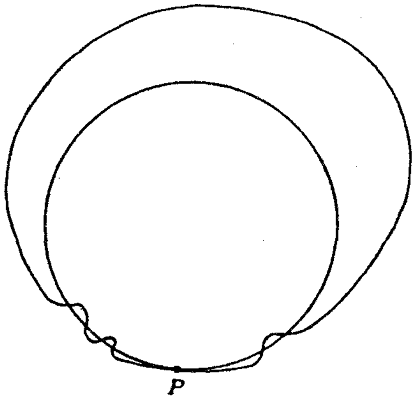
بنابراین ممکن است نه کاملاً داخل U و نه کاملاً خارج آن واقع باشد. بنابراین توجیه زیر را ارائه می‌کنیم. فرض می‌کنیم W همسایگی تیوبی ∂U باشد و $\epsilon > ۰$ را چنان انتخاب می‌کنیم که اگر فاصلهٔ اقلیدسی $z \in \mathbb{C}$ در ∂U کمتر از ϵ باشد در این صورت $z \in W$.

اکنون تعریف می‌کنیم

$$r^*(P) = min\{\frac{\epsilon}{۲}, r(P)\}.$$

$r^*(P)$ مثبت و تابع پیوسته‌ای از $P \in \partial U$ است. بنابراین عدد $r_۰ > ۰$ وجود دارد که

$$r^*(P) > r_۰ \quad , \quad \forall P \in \partial U.$$



شکل۹

این همان $r_\circ$ای است که دنبالش بودیم. مجدداً تعریف می‌کنیم

$$C(P) = P + r_\circ \nu_P \quad , \quad C^{'}(P) = P + r_\circ \nu^{'}_P$$

اکنون تعریف همسایگی تیوبی تضمین می‌کند که قرص با مرکز $C(P)$ یا $C'(P)$ و شعاع $r_\circ$ تنها می‌تواند ∂U را در P قطع کند. □

اکنون به بحث مربوط به مترها باز می‌گردیم. قضیهٔ اصلی این قسمت عبارت است از:

□ **قضیهٔ ۵.** اگر مرز دامنه $U \subseteq \mathbb{C}$ ، $C^{۲}$ باشد، آنگاه U همراه با مترکاراتئودوری یک فضای متری کامل است.

□ **نتیجه ۱.۵.** همچنین دامنهٔ U یک فضای متری کامل همراه با متر کوبایاشی است.

اثبات قضیه.
فرض کنید $z \in U$ متعلق به همسایگی تیوبی W از ∂U باشد که از گزارهٔ ۳ به دست می‌آید. فرض‌کنید P نزدیک‌ترین نقطهٔ مرزی به z بوده و $D(C(P), r_\circ)$ قرص مماس خارجی باشد که از گزارهٔ ۴ به دست می‌آید. نگاشت

$$\dot{j}_P : U \to D(C(P), r_\circ)$$

$$\xi \to C(P) + \frac{r_\circ^{\text{۲}}}{\xi - C(P)}$$

U را به داخل قرص $D(C(P), r_\circ)$ منعکس می‌کند. نگاشت

$$j_P : D(C(P), r_\circ) \to D(\circ, \text{۱})$$

$$\xi \to \frac{\xi - C(P)}{r_\circ}$$

هولومرفیک است. برای برآورد متر کاراتئودوری در z از ویژگی طول کوتاه‌کنی متر کاراتئودوری استفاده می‌کنیم:

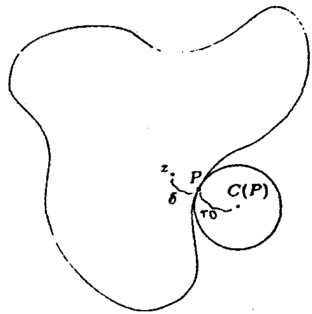
$$F_U^{\mathbb{C}}(z) \geq ((j_P o i_P)^* F_C^{D(\circ,\text{۱})})(z) \qquad (*)$$

$$\equiv |(j_P o i_P)'(z)| F_{\mathbb{C}}^{D(\circ,\text{۱})}(j_P(i_P(z)))$$

اکنون جمله‌های مختلف عبارت آخر را برآورد می‌کنیم.

$$(j_P o i_P)'(z) = \frac{\text{۱}}{r_\circ}(i_P)'(z)$$

$$= \frac{\text{۱}}{r_\circ} . \frac{-r_\circ^{\text{۲}}}{(z - C(P))^{\text{۲}}} = \frac{-r_\circ}{(z - (CP))^{\text{۲}}} = \frac{-r_\circ}{(\delta + r_\circ)^{\text{۲}}}$$



شکل ۱۰

که در آن δ فاصله z تا P است. شکل ۱۰ را ببینید.

همچنین

$$j_P o i_p(z) = \dot{J}_P(\frac{r_\circ^{\text{۲}}}{z - C(P)} + C(P) = \frac{r_\circ}{z - C(P)}$$

$$j_p(\frac{r_\circ^{\text{۲}}}{z - C(P)} + C(P)$$

بنابراین

$$|j_P o i_p(z)| = \frac{r_\circ}{\delta + r_\circ} = \text{۱} - \frac{\delta}{r_\circ + \delta}$$

متذکر می‌شویم که روی قرص واحد متر کاراتئودوری و متر پوانکاره یکی هستند. از محاسبهٔ مربوط به متر پوانکاره در گزارهٔ ۲ قسمت ۳.۱ نتیجه می‌شود

$$F_C^{D(\circ,\text{۱})}(\dot{J}_P o i_P(z)) = \frac{\text{۱}}{(\frac{\delta}{r_\circ + \delta})(\text{۲} - \frac{\delta}{r_\circ + \delta})} \qquad (***)$$

$$\geq \frac{r_\circ + \delta}{\text{۲}\delta} \geq \frac{r_\circ}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{۱}}{\delta}$$

خلاصه با استفاده از $(*)$، $(**)$، $(***)$ داریم

$$F_C^U(z) \geq \frac{r_\circ}{(\delta + r_\circ)^۲} \cdot \frac{r_\circ}{۲} \cdot \frac{۱}{\delta} \geq C_\circ \cdot \frac{۱}{\delta}$$

که در آن $C_\circ$ عدد ثابت و مثبتی است که تنها به $r_\circ$ بستگی دارد.

اما این همان برآوردی است که با استفاده از آن در قسمت ۴.۱ توانستیم ثابت کنیم که متر پوانکاره روی قرص کامل است. اکنون اثبات جزئیات این مطلب را که فاصلهٔ کاراتئودوری هر نقطهٔ ثابت و داخلی $P_\circ \in U$ از نقطه‌ای به فاصلهٔ اقلیدسی δ از مرز، برابر است با $C \log(\frac{۱}{\delta})$، و نیز نتیجه‌گیری کامل بودن U همراه با متر کاراتئودوری را به عنوان تمرین رها کنیم. □

تمرین.

با استفاه از قرص مماس داخلی در هر نقطه از مرز ثابت کنید ثابت $C_۱$ وجود دارد که

$$F_C^U(z) \leq C_۱ \cdot \frac{۱}{\delta}$$

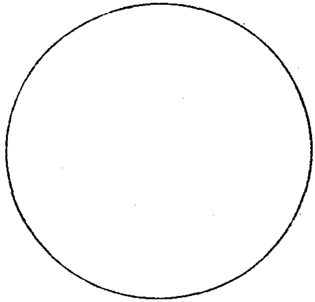
(راهنمایی: از نگاشت شمول قرص مماس داخلی به دامنه و ویژگی طول کم‌کنی متر کاراتئودوری استفاده کنید.) □

تمرین.

فرض کنید

$$U = D \setminus \{\circ\},$$

قرص بدون مرکز باشد. شکل ۱۱ را ببینید. مرز این دامنهٔ $C^۲$ نیست. با استفاده از قضیهٔ تکینهای برداشتنی ریمان و برآوردهای کوشی رفتار متر کاراتئودوری را در



شکل۱۱

نزدیکیهای ۰ معین کنید. نتیجه بگیرید U نسبت به متر کاراتئودوری کامل نیست.
در مورد متر کوبایاشی چه می‌توانید بگویید؟ □

□ **نتیجه قضیهٔ ۵.** فرض کنید U ناحیه‌ای همبند متناهی در $\mathbb{C}$ باشد (یعنی مکمل U تعدادی متناهی مؤلفهٔ همبندی دارد). به علاوه فرض کنید هر مؤلفهٔ $\hat{\mathbb{C}}\backslash U$ یک پیوستار باشد. در این صورت U همراه با متر کاراتئودوری کامل است.

اثبات.
چون متر کاراتئودوری ناوردای همدیس است، کافی است نشان دهیم U معادل همدیس با دامنه‌ای مانند U' با این ویژگی است که $\partial U'$، $C^{۲}$ است. اگر ∂U دارای k مؤلفه باشد آنگاه با به کار بردن k بار متوالی قضیهٔ نگاشت ریمان، نگاشت همدیسی از U به قرص واحد که از آن $(k-۱)$ زیر قرص مجزا حذف شده است، به‌دست می‌آید. لذا اثبات کامل است. □

اکنون با استفاده از کامل بودن متر کاراتئودوری حالتی از اصل لیندولف را با

به کار بردن دیدگاه هندسی ثابت می‌کنیم. ابتدا به چند اصطلاح نیازمندیم.

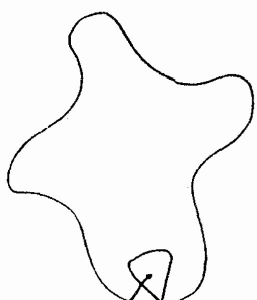
فرض کنید مرز دامنهٔ U، $C^{۲}$ باشد. نقطهٔ $P \in \partial U$ را در نظر بگیرید و فرض کنید ν_P بردار قائم خارجی باشد. اگر f روی U تابعی پیوسته باشد، می‌گوییم f دارای حد مرزی شعاعی ℓ در P است به شرطی که

$$\lim_{r \to ۰^+} f(P - r\nu_p) = \ell \cdot$$

اگر $\alpha > ۱$، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_\alpha(P) = \{z \in U : |z - P| < \alpha . dist(z, \partial U)\} \cdot$$

در اینجا $dist(z, \partial U)$ به معنای فاصلهٔ اقلیدسی z تا ∂U است. Γ_α را یک ناحیهٔ استولتز یا ناحیهٔ رهیافت غیر مماسی در نقطهٔ P می‌نامیم. شکل ۱۲ را ببینید.



شکل ۱۲

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ P دارای حد غیر مماسی ℓ است اگر به ازای هر $\alpha > ۱$ داشته باشیم

$$\lim_{\Gamma_\alpha(P) \ni z \to P} f(z) = \ell$$

روشن است که داشتن حد غیر مماسی در P قوی‌تر از داشتن حد شعاعی در این نقطه است. مثلاً روی قرص واحد تابع پیوستهٔ

$$f(z) = \frac{y}{۱ - x}$$

دارای حد شعاعی ۰ در نقطهٔ مرزی $P = ۱ + i۰$ است. اما دارای حد غیرمماسی در نقطهٔ P نیست (تمرین ـ $P_j = (۱ - \frac{۱}{j}) + \frac{i}{j}$ را به ازای $j = ۱, ۲, \cdots$ امتحان کنید). لذا این بیان از اصل لیندولف که در مورد توابع هولومرفیک این دو مفهوم حد مرزی یکی‌اند، شگفت‌انگیز است:

□ **قضیهٔ ۶.** فرض کنید دامنه‌های کراندار $U_۱$ و $U_۲$ مرز $C^۲$ داشته باشند و

$$f : U_۱ \to U_۲$$

هولومرفیک باشد. اگر $P \in \partial U_۱$، $Q \in \partial U_۲$ و حد شعاعی f در P، Q باشد آنگاه حد غیر مماسی f در P برابر با Q است.

اثبات.
اگر z عضوی از یکی از دامنه‌های U_j باشد و $s > ۰$. فرض می‌کنیم $B(z, s)$ گویی به مرکز z و شعاع s در متر کاراتئودوری در U_j باشد. به ازای $P \in \partial U_۱$ و عدد ثابت $\beta > ۰$ تعریف می‌کنیم

$$M_\beta(P) = \bigcup_{۰<r<۱} B(P - r\nu_p, \beta).$$

با استفاده از برآورد

$$F_C^U(z) \approx \frac{C}{dist(z, \partial U)} \qquad (*)$$

مقایسهٔ ناحیه‌های M_β و Γ_α کار آسانی است، یعنی

$$\forall\alpha > ۱ \quad , \quad \lim_{\Gamma_\alpha(P)\ni z\to P} f(z) = \ell$$

اگر و تنها اگر

$$\forall\beta > ۰ \quad , \quad \lim_{M_\beta(P)\ni z\to P} f(z) = \ell \quad (**)$$

بنابراین کافی است $(**)$ را ثابت کنیم.

چون

$$M_\beta(P) = \bigcup_{۰<r<۱} B(P - r\nu_P, \beta)$$

ویژگی طول کم‌کنی f نسبت به متر کاراتئودوری نتیجه می‌دهد

$$f(M_\beta(P) \subseteq \bigcup_{۰<r<۱} B(f(P - r\nu_P), \beta).$$

$\epsilon > ۰$ را انتخاب می‌کنیم. بنا به فرض وجود حد شعاعی، $\delta > ۰$ وجود دارد که اگر $۰ < t < \delta$ آنگاه

$$|f(P - t\nu_P) - Q| < \epsilon.$$

به ازای این t، اگر $z \in B(P - t\nu_p, \beta)$ آنگاه

$$f(z) \in B(f(P - t\nu_P), \beta).$$

اما داریم

$$dist(f(P - t\nu_p), \partial U_۲) \leq dist(f(P - t\nu_P), Q) < \epsilon.$$

بنابراین برآورد $(*)$ نتیجه می‌دهد که شعاع اقلیدسی گوی متری $B(f(P - t\nu_p), \beta)$ از $C \cdot \epsilon$ بزرگتر نیست. در اینجا C به β بستگی دارد و β از اول تا پایان تثبیت شده بود. بنابراین

$$|f(z) - f(P - t\nu_P)| < C\epsilon \quad , \quad \forall z \in B(P - t\nu_P, \beta).$$

در نتیجه

$$|f(z) - Q| \leq |f(z) - f(P - t\nu_P)| + |f(P - t\nu_P) - Q|$$

$$\leq C\epsilon \to +\epsilon = C'\epsilon.$$

و این نتیجه مورد نظر است. □

مشاهدهٔ این که روش غیر مماسی وسیع‌ترین روش ممکن برای محاسبهٔ حدهای مرزی توابع هولومرفیک کراندار است، مشکل نیست. برای مشاهدهٔ مثالهایی در مورد قدرت روش غیر مماسی به «PRJ» مراجعه کنید همچنین این مرجع شامل مبحث کاملی از نتایج مثبت و تاریخ نظریهٔ رفتار مرزی توابع هولومرفیک است.

۴. کاربردی از کامل بودن: گروه خودریختیهای یک دامنه

این قسمت مقدمه‌ای بر مبحثی در نظریهٔ رویه‌های ریمانی است. (رک : «FK» برای بررسی جالب این مبحث از دیدگاه رویه‌های ریمانی) هیچ بخشی از این نظریه را به کار نخواهیم برد و به رویه‌های ریمانی ارجاعی نخواهیم داد، بلکه از هندسه استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.

فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}$ یک دامنه و $Aut(U)$ خانوادهٔ خود نگاشتهای همدیس U باشد (یعنی توابع هولومرفیک یک به یک و پوشا از U به U).

□ **گزاره ۲.** $Aut(U)$ با عمل ترکیب توابع یک گروه است. این گروه را گروه خودریختیهای U می‌نامیم.

اثبات.

نخست، تابع همانی $id : U \to U$ ، $id(z) = z$ عضو خنثی گروه است. اکنون اگر $\phi \in Aut(U)$ چون ϕ یک به یک و پوشاست، پس $\phi^{-۱}$ معنی دارد، هولومرفیک، یک به یک و پوشاست. داریم $\phi o \phi^{-۱} = \phi^{-۱} o \phi = id$. بنابراین $\phi^{-۱}$ عضو وارون ϕ در $Aut(U)$ است.

سپس فرض کنید $\phi, \psi \in Aut(U)$ در این صورت بنا به تعریف، $\phi : U \to U$ و $\psi : U \to U$ و لذا مسلماً $\psi o \phi : U \to U$. چون ϕ و ψ یک به یک و پوشا هستند. پس $\psi o \phi$ یک به یک و پوشاست. بنابراین $Aut(U)$ تحت عمل گروه بسته است.

بالاخره عمل گروه شرکت‌پذیر است، زیرا عمل ترکیب توابع شرکت‌پذیر است. در نتیجه $Aut(U)$ یک گروه است.

مثال ۱.

فرض کنید U برابر با قرص باشد. بنا به تمرین بعد از قضیهٔ ۳ در قسمت ۲.۰، $Aut(U)$ متشکل از همهٔ نگاشتهای به صورت

$$\zeta \to \mu \frac{\zeta - a}{۱ - \bar{a}\zeta}$$

است، که در آن $a, \mu \in \mathbb{C}$، $|a| < ۱$ و $|\mu| = ۱$. □

مثال ۲.

فرض کنید $\infty > R > r > \circ$ و

$$A_{r,R} = \{z : r < |z| < R\}.$$

در این صورت $Aut(A_{r,R})$ تنها متشکل از دورانهای

$$z \to \mu \cdot z (\mu \text{ به ازای عدد ثابت و تکمدولی })،$$

انعکاس

$$\sigma : z \to \frac{R.r}{z}$$

و ترکیب این نوع توابع است.

روشن است که هر یک از این دو نوع توابع عضوی از $Aut(A_{r,R})$ است. برای اثبات عکس مطلب، فرض کنید $\phi \in Aut(A_{r,R})$. توجه کنید که بنا به اصل انعکاس شوارتس ϕ به طور تحلیلی به بیرون از $\partial A_{r,R}$ ادامه می‌یابد. اصل ماکسیمم (یا می‌نیمم) تضمین می‌کند $\partial A_{r,R}$ به وسیلهٔ ϕ به $\partial A_{r,R}$ نگاشته می‌شود. پس از ترکیب با انعکاس δ، می‌توان فرض کرد که ϕ مجموعه‌های $\{z : |z| = r\}$ و $\{z : |z| = R\}$ را به خودشان می‌نگارد. ادعا می‌کنیم ϕ باید یک دوران باشد.

می‌توانیم ϕ را نسبت به هر دو مرز $A_{r,R}$ منعکس کرده و خودریختی‌ای از حلقهٔ بزرگتر $\{z : \frac{r^۲}{R} < |z| < \frac{R^۲}{r}\}$ به دست آوریم. با ادامهٔ این روش به تعداد متناهی بار، می‌توانیم ϕ را به یک خودریختی تحلیلی $\mathbb{C}' \equiv \mathbb{C}\setminus\{\circ\}$ ادامه می‌دهیم. بنا به قضیه نقطهٔ تکین برداشتنی ریمان ϕ به تابعی تحلیلی روی $\mathbb{C}$ که مبدأ را ثابت

نگاه می‌دارد ادامه می‌یابد. بنابراین ثابت α وجود دارد که $\phi(z) \equiv \alpha z$. چون ϕ ادامهٔ خودریختی حلقهٔ $A_{r,R}$ است قدر مطلق α باید ۱ باشد. بنابراین ϕ یک دوران است. □

به ازای دامنهٔ U ، $Aut(U)$ را به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده مجهز می‌کنیم. یعنی

$$Aut(U) \ni \phi_j \to \phi \in Aut(U)$$

به شرطی که ϕ_j همگرای نرمال به ϕ باشد. به ویژه علاقه‌مندیم بدانیم چه موقعی $Aut(U)$ فشرده است. در توپولوژی مذکور $Aut(U)$ فشرده است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ $Aut(U) \supseteq \{\phi_j\}$ زیر دنباله‌ای داشته باشد که همگرای نرمال به عضوی از $Aut(U)$ است.

مثال ۳.

فرض کنید $\infty > R > r > ۰$ و فرض کنید

$$A_{r,R} = \{z : r < |z| < R\}$$

حلقهٔ متناظر باشد. در این صورت $Aut(A_{r,R})$ فشرده است. برای اثبات فرض کنید α_j دنباله‌ای از خودریختیهای $A_{r,R}$ باشد. هر α_j یک دوران، یا انعکاس σ یا ترکیبی از این دو است. بنابراین بینهایت α_j یکی از این سه نوع هستند. اگر تعداد نامتناهی از آنها برابر با انعکاس σ باشند آنگاه زیر دنباله‌ای که از این اعضا تشکیل می‌یابد که (یک زیردنبالهٔ ثابت) به σ همگراست. اگر این تعداد نامتناهی دوران باشند می‌نویسیم

$$\alpha_{j_\kappa}(z) = \mu_{j\kappa} \cdot z،$$

که در آن μ_j ثابتی تکمدولی است. چون دایرهٔ واحد فشرده است، زیردنباله‌ای ــ مثلاً μ_m ــ از μ_{j_κ} وجود دارد که به ثابت تکمدولی $\mu_\circ$ همگراست. اما در این صورت خودریختیهای متناظر

$$\alpha_m(z) = \mu_m z$$

همگرای نرمال به خودریختی $\alpha_\circ(z) = \mu_\circ z$ است. امکان سوم این است که تعداد نامتناهی α_j ترکیب σ با دورانها هستند. اینها را به صورت

$$\alpha_{j\kappa}(z) = \sigma(\mu_{j\kappa} z)،$$

می‌نویسیم، که در آن $\mu_{j\kappa}$ها ثابتهای تک مدولی هستند. از این اعداد زیردنبالهٔ همگرا مانند $\{\mu_m\}$ با حد $\mu_\circ$ به دست می‌آوریم و تعریف می‌کنیم

$$\alpha_\circ(z) = \sigma(\mu_\circ z).$$

در این صورت زیردنباله

$$\alpha_m(z) = \sigma(\mu_m z)$$

همگرای نرمال به $\alpha_\circ(z)$ است.

با در نظر گرفتن این سه امکان نتیجه می‌گیریم $Aut(A_{r,R})$ فشرده است.

□

تذکر.

یک نکتهٔ جالب توجه این است که اگر تعداد مؤلفه‌های همبند دامنهٔ مسطحی متناهی و بزرگتر از ۲ باشد آنگاه گروه خود ریختیهای آن متناهی است (رک: «FK»). این که گروه خود ریختیهای کدام دامنه‌ها متناهی است یک مسئلهٔ باز است.
□

مثال ۴.

فرض کنید $U = D$ قرص واحد باشد. در این صورت توابع

$$\beta_j(\xi) = \frac{\xi + (۱ - \frac{۱}{j})}{۱ + (۱ - \frac{۱}{j})\xi}$$

اعضای $Aut(D)$ هستند. با این حال $\{\beta_j\}$ همگرای نرمال به تابع

$$\beta_{\circ}(\xi) \equiv ۱$$

است. توجه کنید $\beta_{\circ} \notin Aut(D)$ ــ در واقع $\beta_{\circ}$ تابعی ثابت است. بنابراین $Aut(D)$ فشرده نیست. □

تذکر.

توجه کنید که مسئلهٔ فشردگی $Aut(U)$ دستکم وقتی که U کراندار است، به همگرایی زیردنباله‌ای $\{\phi_j\} \subseteq Aut(U)$ ربطی ندارد؛ زیرا بنا به مطالب مربوط به خانواده‌های نرمال همگرایی حتمی است. بلکه مسئلهٔ این است که آیا این زیردنباله به عضوی از $Aut(U)$ همگراست. این پدیدهٔ آخری است که در مورد قرص برقرار نیست و در مورد حلقه برقرار است. □

قضیهٔ اصلی این قسمت آن است که قرص توسط نافشردگی گروه خودریختیهای خود مشخص می‌شود. دقیقاً داریم:

□ **قضیهٔ ۳.** فرض کنید مرز دامنهٔ کراندار $U \subseteq \mathbb{C}$، $C^۲$ باشد. اگر $Aut(U)$ فشرده نباشد آنگاه U معادل همدیس قرص واحد است.

این قضیهٔ را به وسیلهٔ دنباله‌ای از لم‌ها که خود ذاتاً جالب هستند، اثبات می‌کنیم.

□ **لم ۴.** اگر $U \subseteq C$ کراندار باشد، آنگاه گروه $Aut(U)$ فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر $P \in U$ زیرمجموعهٔ فشرده $K_P \in U$ یافت شود که به ازای هر $\phi \in Aut(U)$، $\phi(P) \in K_P$.

اثبات.

فرض می‌کنیم $Aut(U)$ فشرده باشد. $P \in U$ را تثبیت می‌کنیم. اگر زیر مجموعهٔ K_P با شرایط مذکور وجود نداشته باشد، آنگاه دنبالهٔ $\phi_j \in Aut(U)$ وجود دارد که $\phi_j(P)$ به عضوی مانند $\omega \in \partial U$ همگراست. امّا U کراندار است و لذا $\{\phi_j\}$ خانواده‌ای نرمال است. بنابراین زیردنبالهٔ ϕ_{j_κ} و تابع حدی $\phi_\circ$ وجود دارد که ϕ_{j_κ} همگرای نرمال به $\phi_\circ$ است.

توجه کنید که نگارهٔ هر ϕ_j زیرمجموعه‌ای از U است. بنابراین نگارهٔ $\phi_\circ$ زیرمجموعه‌ای از بستار U یعنی $\bar{U}$ است. اگر $\phi_\circ$ ثابت نباشد، در اصل نگاشت باز صدق می‌کند. اما

$$\phi_\circ(P) = \lim_{\kappa\to\infty} \phi_{j_\kappa}(P) = w،$$

پس نگارهٔ $\phi_\circ$ شامل نقطهٔ تجمع $\omega \in \partial U$ و لذا شامل یک همسایگی از ω است. این غیرممکن است زیرا ω یک نقطهٔ مرزی نگاره $\phi_\circ$ است. بنابراین $\phi_\circ$ باید ثابت و برابر با ω باشد، یعنی $\phi \notin Aut(U)$. بنابراین دنباله ϕ_{j_κ} فشردگی $Aut(U)$ را به هم می‌زند. در نتیجه K_P باید وجود داشته باشد.

به عکس، $P \in U$ را تثبیت کرده و فرض می‌کنیم K_P زیر مجموعهٔ فشرده متناظر با P بر طبق فرض باشد. فرض می‌کنیم $\{\phi_j\} \subseteq Aut(U)$ دنباله‌ای دلخواه باشد. چون U کراندار است، زیردنباله‌ای چون $\{\phi_{j_\kappa}\}$ از این دنباله وجود دارد که به تابعی چون $\phi_\circ$ همگرای نرمال است. مانند قسمت اول اثبات، اگر نگاره $\phi_\circ$ شامل نقطه‌ای مرزی مانند w باشد، آنگاه $\phi_\circ$ باید به طور ثابت برابر با w باشد.

اما چون نگارهٔ P باید متعلق به K_P باشد، این موضوع منتفی است. در نتیجه نگارهٔ $\phi.$ زیرمجموعه‌ای از U است.

سپس توجه می‌کنیم که هر ϕ_{j_κ} دارای وارونی مانند ψ_{j_κ} است. با گذر به زیردنباله‌ای دیگر می‌توانیم فرض کنیم $\psi_{j\kappa}$ به تابعی مانند $\psi.$ همگراست. برای راحتی این زیردنبالهٔ آخری را با ψ_m که متناظر است با ϕ_m نمایش می‌دهیم. دقیقاً مانند مورد $\phi.$ اطمینان داریم که نگارهٔ $\psi.$ زیرمجموعه‌ای از U است. حالا داریم

$$\cdot z \equiv \lim_{m\to\infty} \phi_m o \psi_m(z) = \phi. o \psi.(z)$$

چون $z \equiv \mathrm{i}(z)$ پوشاست، پس $\phi.$ پوشاست. همچنین مانند اثبات قضیهٔ ۵ قسمت ۲، نگارهٔ $\psi.$ باز، بسته و ناتهی است. پس $\psi.$ پوشاست. چون $\mathrm{i}(z)$ یک به یک است، در نتیجه $\phi.$ یک به یک است. و لذا $\phi. \in Aut(U)$. نتیجه می‌گیریم که

$$Aut(U) \ni \phi_m \to \phi. \in Aut(U)$$

و $Aut(U)$ فشرده است. □

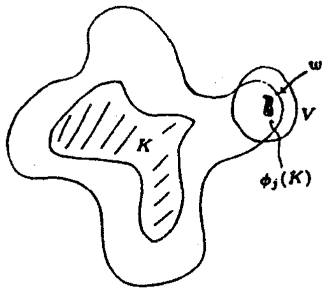
لم ۵. فرض کنید مرز ناحیه کراندار $U \subseteq \mathbb{C}$، C^2 باشد. فرض کنید $P \in U$، $\{\phi_j\}$ دنباله‌ای از نگاشتهای هولومرفیک از U به U باشند، و

$$\cdot \phi_j(P) \to \omega \in \partial U$$

اگر k زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از U و V یک همسایگی از ω باشد، عدد مثبت j وجود دارد که اگر $J \geq j$ آنگاه

$$\cdot \phi_j(K) \leq V$$

شکل ۱۳ را ببینید.



شکل۱۳

اثبات.

چون وقتی U به متر کاراتئودوری مجهز شود فضایی متری است و چون K فشرده است، عدد مثبت R وجود دارد که گوی متری $B(P,R)$ شامل K است. قرار می‌دهیم $Q_j = \phi_j(P)$. چون هر یک از ϕ_jها و نسبت به متر کاراتئودوری طول کوتاه‌کن است نتیجه می‌گیریم $\phi_j(B(P,R)) \subseteq B(Q_j,R)$. ادعا می‌کنیم عدد مثبت J وجود دارد که اگر $j \geq J$ آنگاه $B(Q_j,R) \subseteq V$. با فرض درستی این ادعا داریم

$$\phi_j(K) \subseteq \phi_j(B(P,R)) \subseteq B(Q_j,R) \subseteq V،$$

چیزی که مورد نظر بود.

برای اثبات ادعا، بنا به اثبات قضیهٔ ۵ قسمت قبل یادآور می‌شویم که شعاعهای اقلیدسی گویهای متری $B(Q_g,R)$ باید به ۰ میل کنند. $\epsilon > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که قرص به مرکز w و شعاع 2ϵ زیر مجموعه‌ای از V باشد. اکنون J را چنان بزرگ انتخاب می‌کنیم که وقتی $j > J$ فاصله اقلیدسی ϕ_j از w کمتر از ϵ و شعاع اقلیدسی $B(Q_j,R)$ نیز کمتر از ϵ باشد. اکنون درستی ادعا از نابرابری

مثلث نتیجه می‌شود. □

اثبات قضیهٔ ۳.

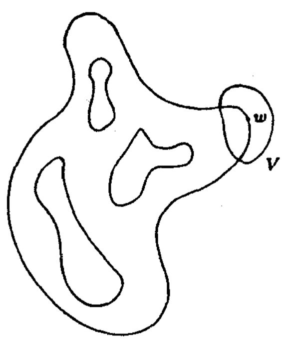
اگر $Aut(U)$ فشرده نباشد، بنا بر لم ۴، دنباله $\phi_j \in Aut(U)$، نقطهٔ $P \in U$ و نقطه $\omega \in \partial U$ وجود دارند که

$$\phi_j(P) \to \omega \in \partial U \cdot$$

فرض می‌کنیم

$$\gamma : [\circ, \backslash] \to U$$

خم پیوسته و بستهٔ دلخواهی باشد. چون ∂U، $C^{\text{۲}}$ است همسایگی V از ω وجود دارد که $U \cap V$ همبند ساده است (شکل ۱۴ را ببینید ـ درستی این حکم بنا به وجود دایرهٔ خمیدگی که گزارهٔ ۳ قسمت ۳ آن را تضمین می‌کند روشن است).



شکل۱۴

مجموعهٔ

$$K = \{\gamma(t) : \circ \leq t \leq \backslash\}$$

فشرده است. بنا به لم ۵، $J \geq \circ$ وجود دارد که $j \geq J$ نتیجه می‌دهد $\phi_j(K) \subseteq U \cap V$.

لذا $\phi_j o\gamma$ خمی پیوسته و بسته در $U \cap V$ است. چون $U \cap V$ همبند ساده است پس $\phi_j or$ را می‌توان به‌طور پیوسته به‌نقطهٔ $\phi_j o\gamma(\circ)$ دگر شکل کرد، یعنی هموتوپی

$$\Psi : [\circ, \backslash] \times [\circ, \backslash] \rightarrow U \cap V$$

وجود دارد که

$$\forall t \in [\circ, \backslash] \quad , \quad \Psi(\circ, t) = \phi_j o\gamma(t)$$

و

$$\forall t \in [\circ, \backslash], \quad \Psi(\backslash, t) = \phi_j o\gamma(\circ)$$

اما در این صورت

$$(\phi_j)^{-\backslash} o\Psi$$

یک هموتوپی خم γ به نقطهٔ $\gamma(\circ)$ است. درنتیجه U همبند ساده است. بنا به قضیهٔ نگاشت ریمان U به طور همدیس معادل با قرص است. □

تذکّر.

این قضیه را می‌توان بدون توسل به قضیهٔ نگاشت ریمان اثبات کرد. به جای استفاده ازاین قضیه یک استدلال ظریف تقریب روی دنباله‌ای نزولی از همسایگیهای $V_j \cap U$ از نقطهٔ w را به کار برده و ثابت می‌کنیم

$$F_C^U(P) = F_K^U(P) \cdot$$

اکنون از قضیه ۵ قسمت ۲ نتیجه می‌شود U به طور همدیس معادل با قرص است. به همین نحو، قضیهٔ نگاشت ریمان را می‌توان با استفاده از F_C^U و F_K^U ثابت کرد. چون ایده‌های مورد نیاز پیچیده‌اند و ما را از موضوع دور می‌کنند، از آوردن این اثباتها صرفنظر می‌کنیم. □

مفهوم گروه خودریختی فشرده تا حدی مجرد است، لذا این قسمت را با توصیفی از قضیهٔ ۳ که ملموس‌تر است به پایان می‌بریم. می‌گوییم $Aut(U)$ روی U به طور ترایا عمل می‌کند اگر به ازای هر دو نقطهٔ P و Q در U خودریختی $\phi \in Aut(U)$ وجود داشته باشد که $\phi(P) = Q$. به عبارت دیگر گروه خودریختیها به طور ترایا عمل می‌کند اگر از نظر اعضا به قدری غنی باشد که هر نقطهٔ U را به نقطهٔ دیگری از آن بنگارد.

مثال ۵.

فرض کنید $U = D$ قرص واحد باشد. اگر P نقطه دلخواهی در D باشد، آنگاه خودریختی

$$\phi_P(\xi) = \frac{\xi - P}{۱ - \bar{P}\xi}$$

دارای ویژگی $\phi_P(P) = ۰$ است. حال اگر P و Q دو نقطهٔ دلخواه D باشند آنگاه $(\phi_Q)^{-۱} o \phi_P$ خودریختی‌ای از D است که P را به Q می‌برد. بنابراین گروه خودریختیهای D روی آن به طور ترایا عمل می‌کند. □

مثال ۶.

فرض کنید $A_{r,R}$ حلقهٔ

$$\{z : r < |z| < R\}$$

را نمایش دهد. در این صورت $Aut(A_{r,R})$ روی $A_{r,R}$ به طور ترایا عمل نمی‌کند. در واقع اگر $P, Q \epsilon A_{r,R}$ و $|P| \neq |Q|$ و $|P| \neq r.\frac{R}{|Q|}$. مثال ۲ نشان می‌دهد که خودریختی‌ای متعلق به $A_{r,R}$ وجود ندارد که P را به Q ببرد. □

اکنون با استفاده از مفهوم عمل ترایا می‌توانیم نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳ را بیان کنیم.

□ **نتیجهٔ ۶.** فرض کنید U دامنه‌ای کراندار با مرز $C^۲$ باشد. اگر $Aut(U)$ روی U به طور ترایا عمل کند آنگاه U به طور همدیس معادل با قرص است.

اثبات.
نقطهٔ P را در U تثبیت می‌کنیم. چون عمل $Aut(U)$ روی U ترایا است P را به وسیلهٔ عضوی از $Aut(U)$ به هر عضو دیگر U می‌توان نگاشت. بنابراین مجموعهٔ $\{\phi(P) : \phi \in Aut(U)\}$ زیرمجموعهٔ هیچ مجموعهٔ فشردهٔ $K_P \subseteq U$ نیست. لذا بنا به لم ۴، $Aut(U)$ فشرده نیست. بنابراین طبق قضیهٔ فوق U باید به طور همدیس معادل قرص باشد. □

طبیعی است که در مورد ضرورت فرض مرز $C^۲$ برای به دست آوردن نتایج این بخش دچار شگفتی شویم. توجیه مطلب، چنان که مثال زیر نشان می‌دهد، نیاز به مقداری نظم در مرز است.

مثال ۷.

می‌دانیم نگاشت

$$\phi(z) = \frac{z + \frac{۱}{۲}}{۱ + (\frac{۱}{۲})z}$$

یک خودریختی قرص است. تعریف می‌کنیم $\phi^۲ = \phi o \phi$، $\phi^۳ = \phi o \phi o \phi$، و غیره، اگر $\phi^{-۱}$ وارون ϕ باشد قرار می‌دهیم $\phi^{-۲} = \phi^{-۱} o \phi^{-۱}$، $\phi^{-۳} = \phi^{-۱} o \phi^{-۱} o \phi^{-۱}$، و غیره. همچنین قرار می‌دهیم $\phi^۰(z) \equiv z$.
به ازای $j \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$D_j = \{\phi^j(z) : |z| \leq \frac{۱}{۴}\}\cdot$$

بالاخره قرار می‌دهیم

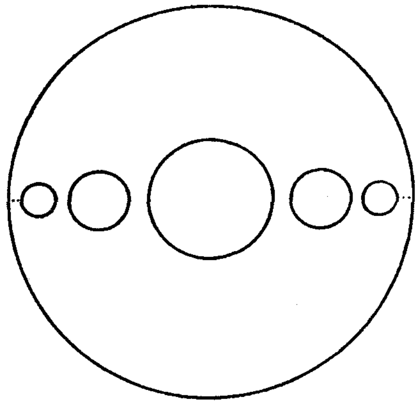
$$U = D(۰, ۱) \setminus \cup_{j \in \mathbb{Z}} D_j\cdot$$

دامنهٔ U در شکل ۱۵ نمایش داده شده است.
بررسی این که $Aut(U)$ دقیقاً متشکل است از نگاشتهای ϕ^j، $j \in \mathbb{Z}$، مشکل نیست. بنابراین $Aut(U)$ فشرده نیست (تمرین). با این حال روشن است که U به طور همدیس معادل قرص نیست.

توجه کنید که مرز U، $C^۲$ نیست، بنابراین تناقضی با قضیه ۳ ندارد. □

۵. فضای متری هذلولوی و خمیدگی

در این قسمت مفاهیم خمیدگی و خانواده‌های نرمال را به ویژگی ناتباهیدگی متر کوبایاشی مربوط می‌کنیم. در نتیجه ثابت می‌کنیم که صفحه و $\mathbb{C} \setminus \{۰\}$ نمی‌توانند



شکل۱۵

متری با خمیدگی اکیداً منفی بپذیرند. لذا دلیل هندسی حذف دو نقطه از دامنه تابع تام در قضیهٔ پیکار را برای این که تابع لزوماً ثابت باشد به دست می‌آوریم.

ابتدا تعمیمی از این نکته که متر کاراتئودوری هیچ وقت از متر کوبایاشی بزرگتر نیست ارائه می‌دهیم. یادآور می‌شویم که در اینجا ρ متر پوانکاره روی قرص D است.

□ **گزاره ۱.** اگر دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ به متر σ مجهز باشد و اگر هر تابع هولومرفیک $f : D \to U$ از (D,ρ) به (U,σ) طول کوتاه کن باشد آنگاه

$$\sigma \leq F_K^U.$$

اثبات.

F_K^U را با نماد μ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $z \in U$ اگر $\phi : D \to U$ و

$z = \phi(\circ)$ آنگاه، بنا به فرض،

$$\phi^*\sigma(\circ) \le \rho(\circ)$$

یا

$$\frac{1}{|\acute{\phi}(\circ)|} \ge \frac{\sigma(z)}{\rho(\circ)} = \sigma(z).$$

با محاسبهٔ inf روی همهٔ ϕها به ازای هر $\xi \in \mathbb{C}$ نتیجه می‌گیریم

$$\|\xi\|_{\mu,z} = \inf_{\phi\in(U,D)_z} \frac{|\xi|}{|\acute{\phi}(\circ)|} \ge |\xi|.\sigma(z) = \|\xi\|_{\sigma,z}$$

چیزی که مورد نظر است. □

تعریف ۲.
دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ را هذلولوی می‌نامیم اگر فاصلهٔ کوبایاشی روی U واقعاً یک فاصله باشد، یعنی اگر نابرابری

$$d_{Kob}(P,Q) > \circ$$

به ازای هر دو نقطهٔ متمایز P و Q در U برقرار باشد.

□ **گزارهٔ ۳.** فرض کنید دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}$ مجهز به متر σ با این ویژگی باشد که خمیدگی $\kappa = \kappa_\sigma$ به ازای عددی ثابت و مثبت مانند B در شرط

$$k \le -B < \circ$$

صدق کند. در این صورت U هذلولوی است.

اثبات.

فرض کنید f نگاشتی از D به U باشد. بنا به روایت آلفرس از لم شوارتس داریم

$$f^*\sigma \leq \frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{B}}\rho،$$

که در آن ρ متر پوانکاره روی قرص است. σ را با $\tilde{\sigma} \equiv \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{۴}}\sigma$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت نابرابری فوق به صورت

$$f^*\tilde{\sigma} \leq \rho$$

در می‌آید. لذا f از (D, ρ) به $(U, \tilde{\sigma})$ طول کوتاه کن است. بنابه گزارهٔ ۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\tilde{\sigma} \leq F_K^U$$

یا

$$C.\sigma \leq F_K^U$$

که در آن $C = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{۴}}$ عدد ثابت مثبتی است. بنابرین متر کوبایاشی از پایین به مضرب ثابت و مثبتی از σ کراندار است. چون بنا به فرض σ ناتباهیده است، F_K^U نیز ناتباهیده است. □

□ **نتیجه ۱.۳.** صفحه $\mathbb{C}$ و صفحه سوراخ $\mathbb{C}\setminus\{۰\}$، هیچ یک متری با خمیدگی اکیداً منفی نمی‌پذیرند.

اثبات.

$\mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus\{۰\}$ هیچ یک هذلولوی نیستند. □

□ **نتیجهٔ ۲.۳.** اگر $U = \mathbb{C}\backslash\{P_1, \cdots, P_k\}$ که در آن P_jها متمایزند و $k \geq 2$، آنگاه U هذلولوی است.

اثبات.

چنان که در فصل ۲ دیدیم U دارای متری با خمیدگی اکیداً منفی است. □

تذکّر.

اثبات دیگری از نتیجه ۲.۳ را با توجه به این که U با شرایط مذکور در $\mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ نشانده می‌شود و سپس با استفاده از ویژگی طول کم‌کنی مترکوبایاشی می‌توان به دست آورد. □

اکنون مفهوم فضای متری هذلولوی را با مفهوم خانواده‌های نرمال مرتبط می‌کنیم. ابتدا معرفی چند اصطلاح ضروری است.

تعریف ۴.

دامنهٔ U منتظم است اگر خانوادهٔ توابع هولومرفیک $\mathcal{F}$ از D به U نرمال باشد.

مثال ۱.

قرص D منتظم است. زیرا اگر $\mathcal{F}$ خانوادهٔ توابع هولومرفیک از D به D باشد آنگاه اعضای $\mathcal{F}$ یکسان کراندار به وسیلهٔ ۱ هستند. بنابراین دنباله $\{f_j\} \subseteq \mathcal{F}$ وجود دارد که به تابع حدی f_0 همگراست. مسلماً f_0 هولومرفیک است و دو امکان وجود دارد: (الف) نگارهٔ f_0 شامل عضوی مرزی مانند w است، در این حالت از اصل نگاشت باز نتیجه می‌شود f_0 ثابت است. (این حالت واگرای فشرده است)؛

(ب) نگارهٔ $f_\circ$ کاملاً داخل D قرار می‌گیرد، در این حالت $f_\circ \in \mathcal{F}$ (این حالت همگراست). □

مثال ۲.

دامنهٔ $U = \mathbb{C}\backslash\{\circ\}$ منتظم نیست. زیرا دنبالهٔ توابع

$$f_n(z) = e^{nz}$$

قرص را به روی U می‌نگارد اما نه زیر دنبالهٔ همگرایی و نه زیر دنباله واگرای فشرده‌ای دارد (هر f_n مبدأ را به ۱ می‌نگارد اما $f_n(\frac{1}{2}) \to \infty$ وقتی $n \to \infty$).

□

□ **گزارهٔ ۵.** دامنهٔ مسطح U هذلولوی است اگر و تنها اگر منتظم باشد. □

اثبات.

می‌دانیم که اگر U هذلولوی باشد آنگاه $\mathbb{C}\backslash\{U\}$ باید حداقل دو نقطه داشته باشد لذا بنابر حالت کلی قضیه مونتل در قسمت ۴.۲، U باید منتظم باشد.

به عکس فرض کنیم U منتظم باشد در این صورت بنا به مثال ۲، $\mathbb{C}\backslash U$ باید حداقل دو نقطه داشته باشد اما در این صورت U هذلولوی است.

□

تذکّر.

نتیجهٔ حاصل از این قسمت آن است که تنها فضاهای غیر هذلولوی، $\mathbb{C}$ یا$\mathbb{C}\backslash\{\circ\}$ هستند. هرگاه از یک دامنه دو نقطه حذف شوند ویژگیهای مورد نظر را خواهد شد. در نظریهٔ رویه‌های ریمان نشان داده می‌شود دامنه‌ای منتظم است

اگر و تنها اگر هذلولوی باشد (رک: «FK»). با وجود این در مبحث چند متغیر مختلط اوضاع این‌قدر هم ساده نیست. در این مبحث بینهایت دامنهٔ متمایز وجود دارند که یکی از ویژگیها (منتظم، هذلولوی) را دارد و ویژگی دیگر را ندارد. □

تمرین.
دامنهٔ

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱|\}\backslash\{x + i۰ : ۰ \leq x < ۱\}$$

منتظم و هذلولوی است. □

فصل ۴

نگاهی گذرا به چند متغیرهٔ مختلط

۰. توابع چند متغیرهٔ مختلط

در سطحی طبیعی، آنالیز چند متغیرهٔ حقیقی بسیار شبیه آنالیز یک متغیره است؛ هرچند به جای اسکالرها با $n-$ تاییهای مرتب اعداد حقیقی سروکار داریم و به ماتریس‌ها جهت تداوم اطلاعات نیازمندیم. البته مطالعهٔ عمیق‌تر، پیچیدگی و غنای بیشتری را در آنالیز چند متغیرهٔ حقیقی آشکار می‌کند. قابل ذکر است که در بسیاری قسمتها این غنا در تاریخ این موضوع تا حدی دیرتر و بیشتر در چهل سالهٔ اخیر کشف شده است.

تاریخ آنالیز چند متغیرهٔ مختلط از مقولهٔ کاملاً متفاوتی است. در اوان شروع این موضوع، در دههٔ اول این قرن، دو کشف قابل ملاحظه نشان داد که این شاخه عمق و تنوعی باور نکردنی دارد که حتی آنالیز مختلط یک متغیره اشاره‌ای به آن نمی‌کند. تا به امروز تنها برخوردی سطحی با آنالیز مختلط چند متغیره کرده‌ایم.

در اینجا به اختصار دو مورد پیشرفت را که موجب تثبیت متغیرهای چند متغیرهٔ مختلط به عنوان موضوعی برای خودش شد مورد بحث قرار می‌دهیم. مورد اول به قضیهٔ نگاشت ریمان مربوط است. چنان که در سرتاسر این کتاب مورد بحث قرار داده‌ایم، این قضیه بیان می‌کند به استثنای صفحه، هر دامنه که معادل توپولوژیک با قرص باشد معادل همدیس آن است. ممکن است انتظار داشته

باشیم که این قضیه مشابهی در دو متغیره مختلط داشته باشد. اما، مشابه قرص در $\mathbb{C}^2$ چیست؟ دو امکان به ذهن خطور می‌کند: گوی

$$\{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

و دو قرص

$$\{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

کدام یک از این دو مجموعه باید به عنوان دامنهٔ الگو برای قضیهٔ نگاشت ریمان چند متغیره عمل کند؟ قبل از پاسخ به این پرسش، شاید پرسیده شود که آیا بین گوی و چند قرص هم ارزی هولومرفیک وجود دارد؟ اگر این هم‌ارزی وجود داشته باشد، سؤال اول نیازی به پاسخ ندارد؛ اگر هم‌ارزی‌ای وجود نداشته باشد بعید نیست که قضیهٔ نگاشت ریمان هم وجود نداشته باشد.

چنان که پوانکاره کشف کرد، بین گوی و چند قرص هیچ‌گونه هم‌ارزی وجود ندارد. در دههٔ گذشته ثابت شده است که دو دامنه در $\mathbb{C}^2$ نوعاً هم‌ارز هولومرفیک نیستند: بدین معنی که به ازای دامنه‌ای مانند U_1 احتمال این که دامنه U_2 که با U_1 هم‌ارز توپولوژیک است با U_1 هم‌ارز هولومرفیک نیز باشد ۰ است. بنابراین کل مسئلهٔ قضیه نگاشت ریمان به موضوعی پیچیده در نوع خود تبدیل می‌شود یعنی، رده‌بندی دامنه‌ها بر حسب هم‌ارزی هولومرفیک. یکی از کارهای مهم این فصل فرمولبندی دقیق و اثبات قضیهٔ پوانکاره در مورد عدم هم‌ارزی گوی و دو قرص است.

پیشرفت بزرگ دوم که تقریباً هنگام تغییر قرن رخ داد قضیهٔ هارتگس در مورد ادامهٔ تحلیلی است. هر چند در اینجا نمی‌توانیم این مبحث را به تفصیل مورد بررسی قرار دهیم. آن را برای توضیح مفصلتر مشخصات چند متغیرهٔ مختلط مورد بحث قرار می‌دهیم. بنابراین مطلب را به قدر امکان ساده گرفته و از تعریفهای صوری در این بحث اجتناب می‌کنیم.

دامنهٔ U در فضای مختلط را دامنه هولومرفی می‌نامیم اگر تابع هولومرفیکی روی آن تعریف شده باشد که نتواند به هیچ مجموعهٔ بازی که U زیرمجموعهٔ سرهٔ آن است به طور تحلیلی ادامه یابد. ثابت می‌شود که (رک: «$KR1$») با استفاده از قضیهٔ میتاگ ـ لفلر در نظریه کلاسیک توابع هر مجموعهٔ باز در $\mathbb{C}$ یک دامنهٔ هولومرفی است. چیزی که هارتگس ثابت کرد این است که در ابعاد ۲ به بالا برخی دامنه‌ها دامنهٔ هولومرفی هستند و برخی دیگر نیستند. مثلاً وی ثابت کرد دامنهٔ

$$U = \{(z_۱, z_۲) : |z_۱| < ۲, |z_۲| < ۲\} \backslash \{(z_۱, z_۲) : |z_۱| \leq ۱, |z_۲| \leq ۱\}$$

این ویژگی را دارد که در هر تابع هولومرفیک روی آن را می‌توان به دامنه

$$\hat{U} = \{(z_۱, z_۲) : |z_۱| < ۲, |z_۲| < ۲\}$$

به طور تحلیلی ادامه داد. چنان که قبلاً متذکر شدیم، این قضیه مشابهی در یک متغیرهٔ مختلط ندارد و این سؤال را مطرح می‌کند که «کدام دامنه‌ها در چند متغیرهٔ مختلط ویژگی نشان داده شده توسط هارتگس را دارند؟» یک شرط لازم هندسی روی مرز U توسط ای. لوی کشف شده و مسئله اثبات کفایت آن به مسئله لوی معروف است. در سالهای ۱۹۵۰ مسئله لوی با کلیت قابل ملاحظه‌ای ثابت شد، اما چند سؤال وابسته به آن هنوز بدون پاسخ مانده‌اند.

نکته‌ای که در این مقالهٔ مختصر سعی به اثبات آن داریم آن است که بسیاری از سؤالهای چند متغیره مختلط هیچ‌وقت در یک متغیرهٔ مختلط مطرح نمی‌شوند. زیرا در این زمینه بی‌معنی هستند. تنها چیزی که می‌توانیم به انجامش امیدوار باشیم ارائه چشم‌اندازی از موضوع و چند روش کارآمد است. یکی از کارهایی که انجام خواهیم داد. ارائه اثباتی تقریباً ساده و دقیق از قضیهٔ پوانکاره است.

۱. مفاهیم بنیادی

در این قسمت چند تعریف و نماد را که برای مقاصد آتی خود احتیاج داریم معرفی می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با چند متغیر مختلط به «KR1»، «KR2» و «KR4» مراجعه کنید. برای سادگی نمادگذاری به دو متغیر مختلط اکتفا می‌کنیم. $U \subseteq \mathbb{C}^۲$ را که در آن

$$\mathbb{C}^۲ \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $(z_۱, z_۲)$ عضوی از آن را نمایش دهد. یادآور می‌شویم $\mathbb{C}^۲$ را می‌توان با $R^۴$ توسط

$$\mathbb{C}^۲ \ni (z_۱, z_۲) \longleftrightarrow (x_۱ + iy_۱, x_۲ + iy_۲) \longleftrightarrow (z_۱, y_۱, x_۲, y_۲) \in \mathbb{R}^۴$$

یکی گرفت. بنابراین یک تابع دو متغیر مختلط پیوسته یا پیوسته مشتق‌پذیر است اگر به عنوان یک تابع چهار متغیرهٔ حقیقی پیوسته یا پیوسته مشتق‌پذیر باشد، والی آخر.

فرض کنید $U \subseteq C^۲$ یک دامنه، یعنی مجموعه‌ای باز و همبند باشد. اگر z و ω دو عدد مختلط باشند تعریف می‌کنیم

$$U_w = \{z_۱ \in \mathbb{C} : (z_۱, w) \in U\}$$

و

$$U^z = \{z_۲ \in \mathbb{C} : (z, z_۲) \in U\}.$$

تعریف ۱.

تابع پیوسته مشتق‌پذیر f را روی دامنه U هولومرفیک می‌نامیم اگر، وقتی $z \in \mathbb{C}$ در رابطهٔ $U^z \neq \phi$ صدق می‌کند، آنگاه تابع $f(z, ۰)$ روی U^z هولومرفیک باشد (به عنوان یک تابع یک متغیرهٔ مختلط) و وقتی $w \in \mathbb{C}$ در $U_w \neq \phi$ صدق کند تابع $f(۰, w)$ روی U_w هولومرفیک باشد (به عنوان یک تابع یک متغیرهٔ مختلط).

مثال ۱.

تابع

$$f(z_۱, z_۲) = \frac{z_۱}{z_۲ + ۱}$$

روی دامنهٔ

$$U_۱ = \{(z_۱, z_۲) : z_۲ \neq -۱\}$$

هولومرفیک است.

تابع

$$g(z_۱, z_۲) = z_۱(\bar{z}_۲)^۲$$

روی هیچ دامنه‌ای هولومرفیک نیست.

تابع

$$h(z_۱, z_۲) = \sum (z_۱)^j (z_۲)^j$$

روی

$$U_۲ = \{(z_۱, z_۲) : |z_۱ z_۲| < ۱\}$$

هولومرفیک است. □

در چند متغیرهٔ مختلط دو مفهوم طبیعی «همسایگی» وجود دارد: گوی و دو قرص. اگر $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{C}^2$ و $r > 0$ مجموعه‌های

$$B(P,r) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - P_1|^2 + |z_2 - P_2|^2 < r^2\}$$

و

$$D^2(P,r) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - P_1| < r, |z_2 - P_2| < r\}$$

را به ترتیب گوی باز و دو قرص باز به مرکز $P = (P_1, P_2)$ و شعاع r می‌نامیم. همچنین $\bar{B}(P,r)$ و $\bar{D}^2(P,r)$ را (که با قرار دادن $\leq$ به جای $>$ تعریف می‌شوند) به ترتیب گوی بسته و دو قرص بسته می‌نامیم.

یکی از ابزارهای مهم آنالیز مختلط صورتهای مختلف فرمول انتگرال کوشی است. اکنون یکی از این صورتها را به دست می‌آوریم.

□ **گزارهٔ ۲.** اگر f در $D^{-2}(P,r)$ هولومرفیک باشد آنگاه به ازای همهٔ $(z_1, z_2) \in D^2(P,r)$ داریم

$$\cdot f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\partial D(P_1,r)} \oint_{\partial D(P_2,r)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_2 d\zeta_1$$

اثبات.

تابع $f(0, z_2)$ در یک همسایگی $\bar{D}(P_1, r)$ هولومرفیک است. بنابراین فرمول انتگرال کوشی یک متغیره به ازای هر مقدار تثبیت شده z_2 برقرار است.

$$\cdot f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(P_1,r)} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{(\zeta_1 - z_1)} d\zeta_1$$

اکنون فرمول انتگرال کوشی در یک متغیر مختلط را در مورد تابع $f((\zeta_1, z_2))$ که متغیر آن مؤلفه دوم است به کار می‌بریم: فرمول مورد نظر به‌دست می‌آید. □

□ **نتیجهٔ ۱.۲**. یک تابع تحلیلی دو متغیرهٔ مختلط به عنوان تابع چهار متغیرهٔ حقیقی بینهایت بار مشتق‌پذیر است.

اثبات.
دقیقاً مانند حالت یک متغیرهٔ مختلط از تابع زیر علامت انتگرال مشتق بگیرید. □

□ **نتیجهٔ ۲.۲**.تابع f که در شرایط گزاره فوق صدق می‌کند بسط سری توانی به صورت

$$f(z_1, z_2) = \sum a_{j\kappa}(z_1 - P_1)^j(z_2 - P_2)^\kappa$$

دارد که روی $\bar{D}(P, r)$ همگرای مطلق و همگرای یکنواخت است. ضرایب این بسط به وسیلهٔ

$$a_{j,k} = \frac{1}{j!k!}(\frac{\partial}{\partial z_1})^j(\frac{\partial}{\partial z_2})^k f(P)$$

داده می‌شوند.

اثبات.
اثبات این نتیجه خطوط آشنای یک متغیرهٔ مختلط را دنبال می‌کند. چون f در یک همسایگی $\bar{D}(P, r)$ هولومرفیک است $r' > r$ را چنان انتخاب می‌کنیم که f روی $\bar{D}(P, r^2)$ هولومرفیک باشد. می‌نویسم

$$\cdot f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\partial D(P_1, r')} \oint_{\partial D(P_2, r')} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_2 d\zeta_1$$

$(*)$

داریم

$$\frac{1}{\zeta_1 - z_1} = \frac{1}{(\zeta_1 - P_1) - (z_1 - p_1)}$$

$$= \frac{1}{\zeta_1 - P_1}\frac{1}{1 - \frac{z_1 - P_1}{\zeta_1 - P_1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_1 - P_1)^j}{(\zeta_1 - P_1)^{j+1}} \qquad (**)$$

به همین نحو

$$\cdot\frac{1}{\zeta_2 - z_2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_2 - P_2)^j}{(\zeta_2 - P_2)^{j+1}} \qquad (***)$$

که درآن سریها به ترتیب روی $\{z_1 : |z_1 - P_1| \leq r\}$ و $\{z_2 : |z_2 - P_2| \leq r\}$ همگرای مطلق و یکنواخت هستند. بنابراین می‌توانیم $(**)$ و $(***)$ را در $(*)$ قرار دهیم و ترتیب جمع و انتگرال را عوض کرده به دست بیاوریم

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\partial D(P_1,r)}\oint_{\partial D(P_2,r)}$$

$$\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_2 d\zeta_1}{(\zeta_1 - P_1)^{j+1}(\zeta_2 - P_2)^{\kappa+1}}\Bigg](z_1 - P_1)^j (z_2 - P_2)^\kappa$$

$$\equiv \sum_{j,\kappa=0}^{\infty} a_{j,\kappa}(z_1 - P_1)^j (z_2 - P_2)^\kappa$$

که در آن

$$a_{j,\kappa} =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\partial D(P_1,r)}\oint_{\partial D(P_2,r)}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_2 d\zeta_1}{(\zeta_1 - P_1)^{j+1}(\zeta_2 - P_2)^{\kappa+1}}$$

اکنون فرمول کوشی در حالت یک متغیره نشان می‌دهد

$$a_{j,\kappa} = \frac{۱}{j!\kappa!}(\frac{\partial}{\partial z_۱})^j(\frac{\partial}{\partial z_۲})^\kappa f(P)$$

□

اکنون برای سادگی سری توانی

$$S \sim \sum a_{j,\kappa}(z_۱)^j(z_۲)^\kappa$$

را که حول $(۰,۰)$ بسط یافته است در نظر می‌گیریم. توجه کنید اگر S در نقطهٔ $(z_۱, z_۲)$ همگرای مطلق باشد آنگاه روی مجموعهٔ نقاط $(\mu_۱ z_۱ . \mu_۲ z_۲)$ با $|\mu_۱| \leq ۱$، $|\xi_۲| \leq ۱$ همگرای مطلق و یکنواخت است. از این مطلب تعریف زیر را الهام می‌گیریم.

تعریف ۳.

دامنهٔ U را دایره‌ای کامل می‌نامیم اگر وقتی $U \ni (z_۱ . z_۲)$ و $|\mu_۱| \leq ۱$، $|\mu_۲| \leq ۱$) آنگاه $(\mu_۱ z_۱, \mu_۲ z_۲) \in U$. در ضمن توجه کنید هر دامنهٔ دایره‌ای کامل شامل ۰ است.

□ **گزارهٔ ۴.**سری توانی

$$S \sim \sum aj.k(z_۱)^j(z_۲)^\kappa$$

را در نظر بگیرید. مجموعهٔ

$$C = \{z \quad \text{: است همگرای مطلق } z \text{ در یک همسایگی } S\}$$

دامنه‌ای باز و دایره‌ای کامل است. C را دامنهٔ همگرایی S می‌نامیم.

اثبات.
تعریف C را با تعریف دامنه دایره‌ای کامل و تذکر قبل از آن در نظر بگیرید. □

هرچند ادعا نمی‌کنیم عکس این گزاره درست است اما این گزاره بیان می‌کند گوی و دو قرص هر یک می‌تواند دامنهٔ همگرایی یک سری توانی باشد. در واقع سری

$$S \sim \sum (z_1)^j (z_2)^k$$

درست روی $D^2(0\,,1)$ همگراست و روی هیچ مجموعهٔ باز بزرگتری همگرا نیست. سری توانی

$$T \sim \sum_j ((z_1)^2 + (z_2)^2)^j$$

(وقتی به صورت مجموعی از تک جمله‌ایها در نظر گرفته شود) روی گوی باز همگراست و روی هیچ مجموعهٔ باز بزرگتری همگرا نیست. (تمرین: جزئیات این ادعا را ثابت کنید.)

یکی از موضوعهای این کتاب در نظر گرفتن خودنگاشتهای همدیس دامنه‌ها بوده است. ثابت می‌شود «همدیس» مفهوم نادرستی در مورد توابع چند متغیر مختلط است: اگر یک تابع با حداقل سه متغیر مختلط همدیس باشد (به این معنا که در بینهایت کوچک حافظ زاویه‌ها و طولها است) در این صورت باید خطی باشد (تمرین: این ادعا را ثابت کنید. رک: «DFN»). نگاشتهای مناسب مقاصد ما در تعریف زیر داده شده‌اند:

تعریف ۵.

دامنه‌های $U_۱, U_۲$ را در نظر بگیرید. تابع

$$f : U_۱ \to U_۲$$

نگاشتی دو هولومرفیک نامیده می‌شود اگر

$$f = (f_۱(z_۱, z_۲), f_۲(z_۱, z_۲))$$

زوجی از توابع هولومرفیک، f یک به یک، پوشا و $f^{-۱}$ هولومرفیک باشد.

تذکر.

ثابت می‌شود که شرط هولومرفیک بودن $f^{-۱}$ در تعریف فوق زاید است؛ اما این اثبات دشوار است. لذا برای راحتی شرط را در تعریف می‌آوریم. □

مثال ۲.

فرض می‌کنیم $U = D^۲(۰, ۱)$. تابع

$$f(z_۱, z_۲) = \left(\frac{z_۲ - \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}z_۲}, i \cdot z_۱\right)$$

از U به U نگاشتی دو هولومرفیک است. □

مانند حالت یک متغیره، فرض می‌کنیم $Aut(U)$ مجموعهٔ خودنگاشتهای دو هولومرفیک U است.

مثال.

فرض کنید $U = B(۰, ۱)$ در این صورت

$$f(z_۱, z_۲) = \left(\frac{z_۱ - \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}z_۱}, \frac{\sqrt{\frac{۳}{۲}}z_۲}{۱ - \frac{۱}{۲}z_۱}\right)$$

یک نگاشت دو هولومرفیک از U است البته هر دوران یکانی نیز یک نگاشت دو هولومرفیک U است.

تمرین.

به ازای دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}^۲$، $Aut(U)$ تحت عمل ترکیب توابع یک گروه است.

□

۲. گروههای خودریختیهای گوی و دو قرص

دراین قسمت گروههای خودریختیهای $B(۰, ۱)$ و $D^۲(۰, ۱)$ را محاسبه می‌کنیم. این کار را با معرفی چند مطلب مقدماتی آغاز می‌کنیم.

□ لم ۱.اگر f_j دنباله‌ای از توابع هولومرفیک روی U باشد و f_j به f روی زیرمجموعه‌های فشرده U همگرای یکنواخت باشد، آنگاه هر یک از مشتقهای

$$(\frac{\partial}{\partial z_۱})^l(\frac{\partial}{\partial z_۲})^\kappa f_j$$

روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به

$$(\frac{\partial}{\partial z_۱})^l(\frac{\partial}{\partial z_۲})^\kappa f،$$

همگرای یکنواخت است.

اثبات.

ابتدای مشابه اثبات قضیه در حالت یک متغیرهٔ مختلط است. $P \in U$ را تثبیت و $r > \circ$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\bar{D}(P,r) \subseteq U$. f_j را روی $D^{\text{۲}}(P,r)$ به صورت انتگرال کوشی f_j روی $\partial D^{\text{۲}}(P,r)$ بیان می‌کنیم. در این صورت حکم بی‌درنگ از مشتق‌گیری تابع زیر علامت انتگرال به دست می‌آید. □

□ **لم ۲.** اگر f روی دامنهٔ $U \subseteq \mathbb{C}^{\text{۲}}$ هولومرفیک باشد و روی زیرمجموعهٔ بازی مانند $W \subseteq U$ صفر شود، آنگاه $f \equiv \circ$ روی U.

اثبات.

قرار می‌دهیم.

$$C = \{z \in U \text{ :در یک همسایگی نقطهٔ } f(z) = \circ\}$$

در این صورت روشن است که f باز و ناتهی است. از طرف دیگر اگر $z \in \partial C \cap U$ آنگاه f همهٔ مشتقهای آن در z صفر می‌شوند. بنابراین بسط سری توانی f در یک همسایگی متحداً صفر است لذا C در U نقطهٔ مرزی ندارد. لذا باید داشته باشیم $C = U$. □

□ **لم ۳.** اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع هولومرفیک روی دامنه‌ای مانند $U \subseteq \mathbb{C}^{\text{۲}}$ باشد که

$$\forall f \in \mathcal{F}, \qquad |f(z)| \leq M < \infty$$

آنگاه $\mathcal{F}$ خانواده‌ای نرمال است.

اثبات.

کافی است ثابت کنیم $\mathcal{F}$ روی چند قرص بسته و دلخواه $\bar{D}^{2}(P,r) \subseteq U$ نرمال است. فرض کنید $\bar{D}^{2}(P,r') \subseteq U$ چندقرصی کمی بزرگتر باشد. از فرمول انتگرال کوشی روی $D^{2}(P,r')$ مشتق می‌گیریم؛ در این صورت برآوردهای استاندارد یک متغیره نتیجه می‌دهند

$$\forall z \in \bar{D}^{2}(P,r), f \in \mathcal{F}, |\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)| \leq \frac{M}{r'-r}.$$

بنابراین $\mathcal{F}$ خانواده‌ای یکسان پیوسته روی $\bar{D}(P,r)$ است. لذا حکم از قضیهٔ آسکولی ـ آرتسلا نتیجه می‌شود. □

تعریف ۴.
اگر $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^2$ و

$$f : U_1 \to U_2$$

هولومرفیک باشد $Jac_{\mathbb{C}} f(z)$، $z \in U_1$ (ماتریس ژاکوبین f در z) را به صورت $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z) \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم.

تذکر.

توجه کنید $Jac_{\mathbb{C}} f(z)$ و ژاکوبین $Jac_{\mathbb{R}} f$ مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال تفاوت دارند: ژاکوبین اخیر ماتریس ۴ × ۴ است و از تلقی f به صورت تابعی از دامنه‌ای در $\mathbb{R}^4$ به دامنهٔ دیگری در $\mathbb{R}^4$ به دست می‌آید.

اکنون لم شوارتس را در حالت دو متغیره مختلط ثابت می‌کنیم. هرچند این لم را با روشی خاص می‌توان برای گوی و دو قرص ثابت کرد، اثبات در حالت کلی نیز مشکل نیست، این اثبات استدلال جالبی از قسمت ۲.۳ را نیز به یاد می‌آورد.

□ **گزارهٔ ۵.** فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}^{۲}$ دامنه‌ای کراندار باشد و $P \in U$. فرض کنید $f : U \to U$ هولومرفیک باشد و $f(P) = P$. اگر

$$Jac_{\mathbb{C}} f(P) = id$$

آنگاه

$$\cdot f(z) \equiv z$$

اثبات.

بدون از دست رفتن کلیت فرض می‌کنیم $P = ۰$. فرض می‌کنیم حکم نادرست است و به تناقض می‌رسیم. در یک همسایگی $۰ \in U$، f را به صورت یک سری توانی بسط می‌دهیم. فرض روی f نشان می‌دهد این سری توانی به صورت

$$f(z_{۱}, z_{۲}) = ۰ + z + A_m(z) + \cdots$$

است، که $A_m(z)$ اولین تک جمله‌ای غیر صفر بعد از z است، درجهٔ A_m، $m \geq ۲$ است. مشاهده می‌کنیم $f = (f_{۱}, f_{۲})$ جفتی مرتب است و هر یک از جمعوندهای معادلهٔ فوق یک جفت مرتب می‌باشد. تعریف می‌کنیم

$$f^{۱}(z_{۱}, z_{۲}) = f$$

$$f^{۲}(z_{۱}, z_{۲}) = fof$$

$$\cdot \forall j \geq ۲, f^{j}(z_{۱}, z_{۲}) = f^{j-۱} of$$

چون U کراندار است، خانوادهٔ $\{f^j\}$ یک خانواده نرمال است (لم ۳) . بنابراین زیردنباله‌ای مانند f^{j_ℓ} دارد که به تابع حدی $\tilde{f}$ همگراست. بنا به لم ۱ مشتق mام

$f^{j\ell}$ در p نیز به مشتق mام $\tilde{f}$ در P همگراست. از طرف دیگر محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد

$$f^{۲} = z + ۲A_m + \cdots$$

$$f^{۳} = z + ۳A_m + \cdots$$

$$\cdots$$

و مشاهده می‌کنیم که در واقع مشتق mام f^j در نقطهٔ $P = ۰$ از کنترل خارج می‌شود. تنها راه از بین بردن این تناقض این است که در نزدیکیهای P داشته باشیم $A_m = ۰$ و لذا $A_m = ۰$ روی U. نتیجه می‌گیریم $f(z) \equiv z$ رابطه‌ای که باید ثابت می‌شد. □

□ **گزارهٔ ۶.** فرض کنید U دامنه‌ای کراندار و دایره‌ای کامل باشد. اگر

$$f : U \to U$$

نگاشتی دو هولومرفیک باشد و $f(۰) = ۰$ آنگاه f خطی است.

تذکّر.

این گزاره تعمیمی به دو متغیر مختلط از این مطلب است که اگر نگاشتی همدیس از قرص به قرص مبدأ را ثابت نگاه دارد یک دوران است. □

اثبات گزاره.

فرض کنید $\theta \in [۰, ۲\pi)$ و

$$\cdot\rho_\theta(z_۱, z_۲) = (e^{i\theta} z_۱, e^{i\theta} z_۲)$$

نگاشت

$$g = \rho_{-\theta} o f^{-1} o \rho_\theta o f$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$\cdot Jac_{\mathbb{C}} g(0) = \rho_{-\theta} o (Jac_{\mathbb{C}} f(0))^{-1} o \rho_\theta o (J_{ac_{\mathbb{C}}}(f(0))$$

در اینجا $\rho_{\pm\theta}$ را تابعی خطی تلقی می‌کنیم که با ماتریس $\begin{pmatrix} e^{\pm i\theta} & 0 \\ 0 & e^{\pm i\theta} \end{pmatrix}$ داده می‌شود، بنابراین $\rho_{\pm\theta}$ ژاکوبین خودش برابر است. چون $\rho_{\pm\theta}$ قطری است با همهٔ ماتریس‌های 2×2 جابجا می‌شود. بنابراین

$$\cdot Jac_{\mathbb{C}} g(o) = id$$

اکنون با استفاده از گزارهٔ قبل نتیجه می‌گیریم

$$\cdot g(z) \equiv z$$

در نتیجه

$$f o \rho_\theta = \rho_\theta o f \qquad (*)$$

f را به صورت یک سری توانی همگرا در یک همسایگی 0 می‌نویسم:

$$f(z) = \sum a_{j,\kappa} (z_1)^j (z_2)^\kappa$$

در این صورت بنا به $(*)$ به ازای هر θ داریم

$$\cdot \sum a_{j,\kappa} e^{i(j+\kappa)\theta} (z_1)^j (z_2)^\kappa = \sum a_{j,\kappa} e^{i\theta} (z_1)^j (z_2)^\kappa$$

با مساوی قرار دادن تک جمله‌ایهای متشابه به دست می‌آوریم

$$a_{j,\kappa} = ۰$$

مگر در حالت $j + \kappa = ۱$ در نتیجه f در نزدیکیهای ۰ خطی است. بنابر یکتایی ادامه تحلیلی (لم ۲) f خطی است.

□ **گزارهٔ ۷.** فرض کنید $\phi \in Aut(D^۲(۰, ۱))$. در این صورت $a_۱, a_۲ \in D(۰, ۱)$، $\theta_۱, \theta_۲ \in (۰, ۲\pi)$ و جایگشت σ از مجموعهٔ $\{۱, ۲\}$ وجود دارد که

$$\phi(z) = \left(e^{i\theta_۱} \cdot \frac{z_{\sigma(۱)} - a_۱}{۱ - \bar{a}_۱ z_{\sigma(۱)}}, e^{i\theta_۲} \cdot \frac{z_{\sigma(۲)} - a_۲}{۱ - \bar{a_۲} z_{\sigma(۲)}}\right).$$

اثبات.

قرار می‌دهیم

$$\phi(۰) = \alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲)$$

و تابع

$$\psi(z) = \left(\frac{z_۱ - \alpha_۱}{۱ - \bar{\alpha}_۱ z_۱}, \frac{z_۲ - \alpha_۲}{۱ - \bar{\alpha}_۲ z_۲}\right)$$

را در نظر می‌گیریم. دراین صورت $g \equiv \psi_o\phi \in Aut(D^۲(۰, ۱))$ و $g(۰) = ۰$. کافی است ثابت کنیم.

$$g(z_۱, z_۲) = (e^{i\theta_۱} z_{\sigma(۱)}, e^{i\theta_۲} z_{\sigma(۲)}).$$

بنا به گزارهٔ ۶، g خطی است. بنابراین

$$g(z) = \begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_۱ \\ z_۲ \end{pmatrix}$$

که در آن g_{ij}ها اعدادی مختلط و ثابت‌اند و قدرمطلق آنها از ۱ بیشتر نیست. به ازای $\kappa = 2, 3, \cdots$ نقاط $z^{2,\kappa} \in D^2(0, 1)$ و $z^{1,\kappa}$ را به صورت

$$z^{1,\kappa} = \left((1 - \frac{1}{\kappa})\overline{sgn(g_{11})}, (1 - \frac{1}{\kappa})\overline{sgn(g_{12})}\right),$$

$$z^{2,\kappa} = \left((1 - \frac{1}{\kappa})\overline{sgn(g_{21})}, (1 - \frac{1}{\kappa})\overline{sgn(g_{22})}\right)$$

تعریف می‌کنیم. در اینجا اگر $w \in \mathbb{C}$ قرار می‌دهیم

$$sgnw = \begin{cases} \dfrac{w}{|w|} & w \neq 0 \\ 0 & w = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم مؤلفهٔ اول $g(z^{1,\kappa})$ برابر با $(1 - \frac{1}{\kappa})(|g_{11}| + |g_{12}|)$ و مؤلفهٔ دوم $g(z^{2,\kappa})$ برابر با $(1 - \frac{1}{\kappa})(|g_{21}| + |g_{22}|)$ است. با میل دادن $\kappa \to +\infty$ خواهیم داشت

$$|g_{11}| + |g_{12}| \leq 1$$

$$(*)$$

$$|g_{21}| + |g_{22}| \leq 1.$$

ازطرف دیگر با محاسبهٔ مقدار g در نقطهٔ $\alpha^\kappa = (1-\frac{1}{\kappa}, 0)$ و $\beta^\kappa = (0, 1-\frac{1}{\kappa})$ و میل دادن $\kappa \to \infty$ نتیجه می‌گیریم.

$$\left((1 - \frac{1}{\kappa})g_{11}, (1 - \frac{1}{\kappa})g_{21}\right) \to \partial D^2(0, 1)$$

و

$$\left((1 - \frac{1}{\kappa})g_{12}, (1 - \frac{1}{\kappa})g_{22}\right) \to \partial D^2(0, 1).$$

و

$$\cdot\Big((1-\frac{1}{\kappa})g_{12},(1-\frac{1}{\kappa})g_{22}\Big)\to\partial D^2(0,1)$$

بنابراین

$$\max\{|g_{11}|,|g_{21}|\}=1$$

$$(**)$$

$$\cdot\max\{|g_{12}|,|g_{22}|\}=1$$

تنها راهی که $(*)$و $(**)$ هر دو بتوانند برقرار باشند آن است که قدرمطلق یکی از درآیه‌های هر یک از ستونهای (g_{ij}) یک و در آیهٔ دیگر برابر با ۰ باشد. مثلاً به ازای $\kappa=1,2$، $|g_{\eta(k),k}|=1$، که η جایگشتی از $\{1,2\}$ است. قرار می‌دهیم $\sigma=\eta^{-1}$ و به ازای $j=1,2$ به دست می‌آوریم

$$|g_{j,\sigma(j)}|=1$$

و اگر $\kappa\neq\sigma(j)$ داریم

$$\cdot g_{j,\kappa}=0$$

به ازای $j=1,2$ فرض کنیم $g_{j,\sigma(j)}=e^{i\theta j}$، در این صورت

$$\cdot g(z_1,z_2)=(e^{i\theta_1}z_{\sigma(1)},e^{i\theta_2}z_{\sigma(2)})$$

و چیزی که مطلوب بود. □

بررسی زیبایی از خود نگاشتهای دو هولومرفیک گوی واحد را می‌توان در «RU2» یافت. در اینجا یک بررسی بسیار مقدماتی ارائه می‌دهیم.

□ گزارهٔ ۸.اگر $a \in \mathbb{C}$ و $|a| < ۱$ آنگاه نگاشت

$$\phi_a(z_۱, z_۲) = (\frac{z_۱ - a}{۱ - \bar{a}z_۱}, \frac{(۱ - |a|^۲)^{۱/۲} z_۲}{۱ - \bar{a}z_۱})$$

خودنگاشتی دو هولومرفیک از $B(۰, ۱)$ است.

تذکّر.

نگاشتهای ϕ_a تعمیهای طبیعی تبدیلهای موبیوس هستند که از آنها در قسمت اول کتاب به نحو گسترده‌ای استفاده کردیم. □

اثبات گزاره.

داریم

$$|\phi_a(z)| < ۱$$

اگر و تنها اگر

$$\left|\frac{z_۱ - a}{۱ - \bar{a}z_۱}\right|^۲ + \left|\frac{(۱ - |a|^۲)^{۱/۲} z_۲}{۱ - \bar{a}z_۱}\right|^۲ < ۱$$

اگر و تنها اگر

$$|z_۱ - a|^۲ + (۱ - |a|^۲)|z_۲|^۲ < |۱ - \bar{a}z_۱|^۲$$

اگر و تنها اگر

$$|z_۱|^۲ + |a|^۲ + (۱ - |a|^۲)|z_۲|^۲ < ۱ + |a|^۲|z_۱|^۲$$

اگر و تنها اگر

$$(۱ - |a|^۲)|z_۱|^۲ + (۱ - |a|^۲)|z_۲|^۲ < ۱ - |a|^۲$$

اگر و تنها اگر

$$z \in B(\circ, ۱) \qquad \square$$

تمرین.
وارون نگاشت ϕ_a برابر با ϕ_{-a} است. □

یاد آور می‌شویم که ماتریس ۲ × ۲ای مانند

$$M : \mathbb{C}^۲ \to \mathbb{C}^۲$$

یکانی است اگر وارون آن برابر با مزدوج ترانهادهٔ آن باشد. به لحاظ هندسی M یکانی است، اگر و تنها اگر هر پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbb{C}^۲$ را (روی میدان $\mathbb{C}$ـ) به پایهٔ متعامد یکهٔ دیگری بنگارد.

□ **گزارهٔ ۹.** اگر $g : B(\circ, ۱) \to B(\circ, ۱)$ دو هولومرفیک باشد و $g(\circ) = \circ$ آنگاه g دورانی یکانی است.

اثبات.
چون $B(\circ, ۱)$ دایره‌ای کامل است نگاشت g باید خطی باشد (گزارهٔ ۶). چون g باید مرز $B(\circ, ۱)$ را حفظ نماید (چرا؟)، g بردارهای واحد اقلیدسی را به بردارهای واحد اقلیدسی می‌نگارد. بنابراین g یکانی است. □

اکنون می‌توانیم خودریختیهای گوی واحد را مشخص کنیم.

□ **گزارهٔ ۱۰.** اگر $f : B(\circ, ۱) \to B(\circ, ۱)$ نگاشتی دو هولومرفیک باشد آنگاه f ترکیبی از حداکثر دو نگاشت یکانی و یک نگاشت به‌صورت ϕ_a است.

فرض کنید $w = f(\circ)$. دوران یکانی α وجود دارد که

$$\cdot\alpha(w) = (|w|, \circ)$$

بنابراین نگاشت

$$g = \phi_{|w|} o \alpha o f$$

نگاشتی دو هولومرفیک از $B(\circ\,,\,\text{۱})$ به $B(\circ\,,\,\text{۱})$ است و ∘ را به ∘ می‌برد. بنا به گزارهٔ ۹ g باید برابر با عملگری یکانی مانند β باشد. لذا

$$\cdot f = \alpha^{-\text{۱}} o (\phi_{|w|})^{-\text{۱}} o \beta$$

تمرین.
گروه $Aut(D^{\text{۲}}(\circ\,,\,\text{۱}))$ روی $D^{\text{۲}}(\circ\,,\,\text{۱})$ به طور ترایا عمل می‌کند. گروه $Aut(B(\circ\,,\,\text{۱}))$ روی $B(\circ\,,\,\text{۱})$ به طور ترایا عمل می‌کند. □

گوی و دو قرص دو دامنه بنیادی بسیار مهم در $\mathbb{C}^{\text{۲}}$هستند. هر دو انقباض پذیرند، گروههای خودریختیهای هر دو ترایاست، و هر دو دامنه‌های همگرایی سریهای توانی هستند. بنابراین وقتی پوانکاره ثابت کرد نگاشتی دو هولومرفیک مانند

$$\Phi : D^{\text{۲}}(\circ\,,\,\text{۱}) \to B(\circ\,,\,\text{۱})$$

وجود ندارد بسیار باعث تعجب شد. وی برای اثبات این مطلب ابتدا نشان داد که اگر چنین Φ وجود داشته باشد، نگاشت القایی

$$Aut(D^{\text{۲}}(\circ\,,\,\text{۱})) \ni h \to \Phi o h o \Phi^{-\text{۱}} \in Aut(B(\circ\,,\,\text{۱}))$$

یک یکریختی بین گروهها خواهد شد. وی سپس گروههای $Aut(D^{۲}(۰,۱))$ و $Aut(B(۰,۱))$ را مورد تجزیه و تحلیل قرار و نشان داد که نمی‌توانند یکریخت باشند. در واقع مؤلفه همبندی عضو خنثی در $AutB(۰,۱)$ جابه جایی نیست اما در $Aut(D^{۲}(۰,۱))$ جابه جایی است. ما توصیفی با جزئیات کافی از گروههای خودریختی ارائه داده‌ایم که با استفاده از آنها خوانندهٔ علاقه‌مند بتواند جزئیات اثبات پوانکاره را ارائه نماید.

در عوض مسئله هم ارزی دو هولومرفیکی را با استفاده از ایده‌های هندسی ارائه شده در این تک‌نگاری بررسی خواهیم کرد. قسمت بعدی اختصاص به این موضوع دارد.

۳. مترهای ناوردا و هم ارز نبودن گوی و دو قرص

قرص واحد در $\mathbb{C}$ را بازهم با D نمایش می‌دهیم. فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}^{۲}$ یک دامنه باشد و $P \in U$. فرض کنید $(D,U)_P$ مجموعهٔ توابع هولومرفیکی مانند $f : U \to D$ باشد که $f(P) = ۰$. همچنین $(U,D)_P$ را مجموعهٔ توابع هولومرفیک $f : D \to U$ با $f(۰) = P$ تعریف کنید. اکنون مترهای کارتئودوری وکوبایاشی را تعریف می‌کنیم. چون در فضای دوبعدی کار می‌کنیم. دیگر نمی‌توانیم متر را به صورت تابعی اسکالر ـ مقدار روی ناحیه تعریف کنیم. در واقع متر طول بردار را در یک نقطه اندازه می‌گیرد.

تعریف ۱.

اگر $P \in U$ و $\xi \in \mathbb{C}^{۲}$ طول کاراتئودوری ξ را در P به صورت

$$F_{\mathbb{C}}^{U}(P,\xi) = \sup\{|Jac_{\mathbb{C}} f(P)\xi| : f \in (D,U)_P\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.

اگر $P \in U$ و $\xi \in \mathbb{C}^۲$ طول کوبایاشی ξ را در P به صورت

$$F_K^U(P,\xi) = \inf\{\frac{|\xi|}{|g'(\circ)|} : g \in (U,D)_P,$$

$$g'(\circ)\}$$ مضرب اسکالری از ξ است

تعریف می‌کنیم.

در اینجا و همه جا | | طول اقلیدسی را نمایش می‌دهد.

روش تعریف این مترها هنوز از فلسفهٔ ریمان الهام می‌گیرد. اگر $\gamma : [\circ, ۱] \to U$ خمی پیوسته مشتق‌پذیر باشد، طول کوبایاشی آن را با

$$l_K(\gamma) = \int_\circ^۱ F_K^U(\gamma(t), \gamma'(t))dt$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که از طولهای کوبایاشی بردارهای مماس بر خم انتگرال می‌گیریم. طول کاراتئودوری خم نیز به همین نحو تعریف می‌شود.

یکی از ویژگیهای اساسی که اثبات خواهیم کرد آن است که نگاشتهای هولومرفیک فاصله را در مترهای کوبایاشی و کاراتئودوری کم می‌کنند. این ادعا را در چند متغیره به صورت زیر بیان می‌کنیم.

□ **گزارهٔ ۳.** فرض کنید.

$$f : U_۱ \to U_۲$$

نگاشتی هولومرفیک از دامنهٔ $U_۱$ به دامنهٔ $U_۲$ باشد. اگر $P \in U_۱$ و $\xi \in \mathbb{C}^۲$، تعریف می‌کنیم

$$f_*(P)\xi = Jac_{\mathbb{C}} f(P)\xi.$$

در این صورت داریم

$$F_C^{U_۱}(P,\xi) \geq F_C^{U_۲}(f(P), f_*(P)\xi).$$

و

$$F_K^{U_۱}(P,\xi) \geq F_K^{U_۲}(f(P), f_*(P)\xi).$$

اثبات.
گزاره را در مورد متر کاراتئودوری ثابت می‌کنیم. اثبات برای متر کوبایاشی مشابه این اثبات است.

$\phi \in (D, U_۲)_{f(P)}$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت $\phi o f \in (D, U_۱)_P$. لذا

$$F_C^{U_۱}(P,\xi) \geq |(Jac_{\mathbb{C}}(\phi o f)(P)\xi| = |Jac_{\mathbb{C}}\phi(f(P))o(Jac_{\mathbb{C}f(P))\xi}|$$

$$= |Jac_{\mathbb{C}}\phi(f(P))(f_*(P))\xi|$$

با محاسبه سوپریموم روی همهٔ ϕها مشاهده می‌کنیم

$$F_C^{U_۱}(P,\xi) \geq F_C^{U_۲}(f(P), f_*(P)\xi).$$

□ **نتیجهٔ ۱.۳.** اگر f نگاشتی دو هولومرفیک باشد آنگاه مترهای کوبایاشی و کاراتئودوری را حفظ می‌کند، یعنی نابرابریهای موجود در گزارهٔ فوق به برابری تبدیل می‌شوند.

اثبات.

روشن است. □

تمرین.

نشان دهیم که ازگزارهٔ فوق نتیجه می‌شود f طولهای خمها را کاهش می‌دهد. یعنی، اگر γ خمی پیوسته مشتق‌پذیر در $U_۱$ و $f * \gamma \equiv f o \gamma$ خم متناظر با آن در $U_۲$ باشد، نشان دهید که

$$.\ell_k(f_*\gamma) \leq \ell_K(\gamma), \qquad \ell_C(f_*\gamma) \leq \ell_C(\gamma)$$

با استفاده از گزارهٔ ۳ دو ناوردای جدید و جالب تعریف می‌کنیم این ناورداها در یک متغیر مختلط بدیهی بودند اما اکنون اطلاعات مهمی به دست می‌دهند.

تعریف ۴.

فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}^۲$ دامنه‌ای باشد و $P \in U$. شاخص کاراتئودوری U در P عبارت است از

$$i_P^C(U) = \{\xi \in \mathbb{C} : F_C^U(P, \xi) < ۱\}$$

شاخص کوبایاشی U در P برابر است با

$$\cdot i_P^k(U) = \{\xi \in \mathbb{C} : F_K^U(P, \xi) < ۱\}$$

می‌توان گفت که «شاخص» عبارت است از «گوی واحد» بردارها با مبدأ P نسبت به متر مورد نظر.

□ **گزارهٔ ۵.** فرض کنید $f : U_۱ \to U_۲$ نگاشتی دو هولومرفیک بین دامنه‌ها در

$\mathbb{C}^{۲}$ باشد. قرار دهید $f(P) = Q$. در این صورت

$$Jac_{\mathbb{C}} f(P) : i_P^C(U_۱) \to i_Q^C(U_۲)$$

و

$$Jac_{\mathbb{C}} f(P) : i_P^K(U_۱) \to i_P^K(U_۲)$$

یکریختیهای خطی‌اند.

اثبات.

چون f نسبت به متر کوبایاشی طول کوتاه کن است، $Jac_{\mathbb{C}} f(P)$ مجموعهٔ $i_P^K(U_۱)$ را به $i_Q^K(U_۲)$ می‌نگارد. این دیدگاه را در مورد

$$Jac_{\mathbb{C}}(f^{-۱})(Q) = (Jac_{\mathbb{C}} f(P))^{-۱}$$

نیز می‌توان به کار برد؛ که $i_Q^K(U_۲)$ را به $i_P^K(U_۱)$ می‌نگارد. بنابراین $Jac_{\mathbb{C}} f(P)$ یک یکریختی خطی از i_P^K به i_Q^K است.

اثبات در مورد i_P^C به همین نحو است. □

□ **گزارهٔ ۶.** به ازای $B = B(۰, ۱)$ داریم

$$i_۰^K(B) = B$$

اثبات.

فرض کنید $\phi \in (B, D)$. اگر η یک بردار واحد اقلیدسی در $\mathbb{C}^۲$ باشد تابع

$$h(\zeta) \equiv \phi(\xi) \cdot \eta.$$

را که در آن «∘» حاصلضرب داخلی معمولی بردارهای دوبعدی را نمایش می‌دهد، در نظر بگیرید. h قرص را به قرص می‌نگارد و $h(\circ) = \circ$. بنا به لم شوارتس در یک متغیر داریم

$$\cdot|h'(\circ)| \leq 1$$

چون این نابرابری به ازای هر انتخاب η برقرار است نتیجه می‌گیریم

$$\cdot|\phi'(\circ)| \leq 1$$

حال اگر ξ بردار دلخواهی در $\mathbb{C}^2$ باشد، از محاسبات فوق نتیجه می‌شود

$$\cdot F_K^B(\circ, \xi) = \inf\left\{\frac{|\xi|}{|\phi'(\circ)|} : \phi \in (B, D).\right\} \geq |\xi|$$

از سوی دیگر نگاشت

$$\phi_\circ(\zeta) \equiv \frac{\zeta}{|\xi|}\xi$$

متعلق است به $\phi_\circ \in (B, D)$. و $\phi'_\circ(\circ)$ مضرب مثبتی از ξ است. بنابراین

$$\cdot F_K^B(\circ, \xi) \leq \frac{|\xi|}{|\phi'_\circ(o)|} = |\xi|$$

نتیجه می‌گیریم که

$$،F_K^U(\circ, \xi) = |\xi|$$

در نتیجه

$$.i_\circ^K(B) = \mathbb{B} \qquad \square$$

□ **گزارهٔ ۷.** اگر $\Omega = D^{۲}(\circ, ۱)$ آنگاه

$$i_{\circ}^{K}(\Omega) = \Omega.$$

اثبات.
افکنشهای

$$\pi_{۱}(z_{۱}, z_{۲}) = z_{۱} \quad \text{و} \quad \pi_{۲}(z_{۱}, z_{۲}) = z_{۲}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $\eta = (\eta_{۱}, \eta_{۲}) \in \mathbb{C}^{۲}$ برداری دلخواه باشد. بنا به گزارهٔ ۳ داریم

$$F_{K}^{\Omega}(\circ, \eta) \geq F_{K}^{\pi_{۱}(\Omega)}(\pi_{۱}(\circ), (\pi_{۱})_{*}\eta) = F_{K}^{D}(\bullet, \eta_{۱}).$$

اما لم شوارتس یک متغیره بیان می‌کند که آخرین کمیت برابر است با $|\eta_{۱}|$ استدلالی مشابه نشان می‌دهد.

$$F_{K}^{\Omega}(\circ, \eta) \geq |\eta_{۲}|\cdot$$

از این دو نابرابری نتیجه می‌گیریم.

$$F_{K}^{\Omega}(\circ, \eta) \geq \max\{|\eta_{۱}|, |\eta_{۲}|\}$$

بنابراین

$$i_{\circ}^{K}(D^{۲}) \subseteq D^{۲}$$

برای اثبات شمول در جهت عکس، η را تثبیت کرده و تابع

$$\phi(\zeta) = \left(\frac{\zeta\eta_{۱}}{\max\{|\eta_{۱}|, |\eta_{۲}|\}}, \frac{\zeta\eta_{۲}}{\max\{|\eta_{۱}|, |\eta_{۲}|\}}\right)$$

را در نظر می‌گیریم. روشن است که $\phi \in (\Omega, D)$. و $\phi'(0)$ مضرب مثبتی از η است. بنابراین

$$F_K^{\Omega}(0, \eta) \leq \frac{|\eta|}{|\phi'(0)|} = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|\}$$

و لذا شمول در جهت عکس نتیجه می‌شود. □

تمرین.

تحقیق کنید که $i_0^C(B) = B$ و $i_0^C(D^2) = D^2$ □

□ **قضیهٔ ۸ (پوانکاره)** . نگاشتی دو هولومرفیک از دو قرص D^2 به گوی B وجود ندارد.

اثبات.

فرض می‌کنیم

$$\Phi : D^2 \to B$$

دو هولومرفیک باشد. قرار می‌دهیم $\Phi^{-1}(0) = \alpha \in D^2$. عضوی مانند $\psi \in Aut(D^2(0, 1))$ وجود دارد که $\psi(0) = \alpha$. نگاشت $g \equiv \psi o \phi$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت نگاشت

$$g : D^2 \to B$$

دو هولومرفیک است و $g(0) = 0$. نشان می‌دهیم که g نمی‌تواند وجود داشته باشد.

بنا به گزارهٔ ۵، $Jac_{\mathbb{C}}g(\circ)$ یک یکریختی خطی از $i_{\circ}^{K}(D^{\text{۲}})$ به $i_{\circ}^{K}(B)$ است. اما بنا به گزاره‌های ۶ و ۷ این دو به ترتیب با $D^{\text{۲}}$ و B برابراند بنابراین

$$Jac_{\mathbb{C}}g(\circ) : D^{\text{۲}} \to B$$

یک یکریختی خطی است. اما این غیر ممکن است. زیرا پاره‌خط $i = \{t + i\circ, \text{۱}) : \circ \leq t \leq \text{۱}\}$ در $\partial D^{\text{۲}}$ واقع است. یکریختی خطی، i را به پاره‌خطی نابدیهی از ∂B می‌نگارد. اما B اکیداً محدب است (همهٔ نقاط مرزی نقاط فرین هستند) بنابراین مرز آن شامل پاره‌خطی نیست. و این تناقض مورد نظر است. □

تذکّر.

ارزیابی منطق این اثبات دارای اهمیّت است. فرض نشده است که نگاشت Φ و (لذا g نیز) به مرز $\partial D^{\text{۲}}$ توسعه یابد. در واقع با توجه به ماهیتهای بسیار متفاوت $\partial D^{\text{۲}}$ و ∂B، انتظار داریم رفتار Φ در مرز بسیار ناهنجار باشد. روش هندسی امکان می‌دهد که نگاشت خطی $Jac_{\mathbb{C}}g(\circ)$ را که در سراسر فضا تعریف شده است در نظر بگیریم بنابراین می‌توانیم مرزهای دامنه‌ها را مورد تحلیل قرار داده و به تناقض برسیم. □

برنامه مهمی را که در اوایل این قرن به وسیلهٔ پوانکاره شروع شد می‌توان به صورت زیر بیان کرد: اگر $\Phi : \Omega_{\text{۱}} \to \Omega_{\text{۲}}$ نگاشتی دو هولومرفیک بین دو دامنه با مرزهای هموار باشد، فرض کنید Φ و $\Phi^{-\text{۱}}$ را بتوان به ترتیب چنان به مرزهای $\Omega_{\text{۱}}$ و $\Omega_{\text{۲}}$ به‌طور هموار توسعه داد که توابع حاصل و ابر ریختیهایی بین بستاره‌های دامنه‌های باشند. تنها با استفاده از نظریهٔ بُعد (درجهٔ آزادی Φ در مقابل درجه آزادی دو فضای مشخصه کننده دو مرز $(\text{۲}n - \text{۱})$ ـ بعدی حقیقی)، می‌توان نشان

داد که چند رابطهٔ جبری باید بین مشتقهای توابعی که $\partial\Omega_1$ و $\partial\Omega_2$ را پارامتری می‌کنند، وجود داشته باشد. این رابطه‌ها به ناورداهای دیفرانسیلی منجر می‌شوند که نقش مهمی در رده‌بندی دو هولومرفیکی دامنه‌ها ایفا می‌کنند.

تنها از سال ۱۹۷۴ به بعد کار مهمی برای مطالعهٔ برنامهٔ پوانکاره آغاز شده است. زیرا در آن زمان ففرمن با روشی بسیار مشکل ثابت کرد به ازای ردهٔ وسیعی از دامنه‌های Ω_1 و Ω_2 باید نگاشتهای دو هولومرفیک بین آنها به طور هموار به مرز توسعه یابند «FEF». (در یک متغیر مختلط این یک قضیهٔ کلاسیک است و در پایان‌نامهٔ پین لو ثابت شده است). تقریباً در همان زمان، چرن و موزر «CHM» و تاناکا «TAN» دستگاههایی برای محاسبه ناورداهای دیفرانسیلی مرز بوجود آوردند.

در همین اواخر س. ر. بل «BEL» و دیگران به اثبات ساده‌ای از قضیهٔ ففرمن من برای دسته بسیار بزرگی از دامنه‌ها دست یافتند. با این حال هنوز اعتقاد بر این است که نگاشتی دو هولومرفیک بین دو دامنه با مرزهای هموار باید به طور هموار به مرزهای مربوطه توسعه یابد. هنوز تا اثبات این ادعا راه درازی در پیش است.

پایان سخن

در آنالیز مختلط روشهای هندسی برای بررسی و طرح مجدد مسائل کلاسیک، زبانی طبیعی و نیز سرفصلی برای طرح مسائل نوین است. رابطهٔ متقابل بین روشهای کلاسیک و نوین غنی و پرسود است.

بسیاری از وجوه این همزیستی تعاونی باید کشف شوند. به ویژه، دربارهٔ محاسبه صریح و برآورد ناورداهای دیفرانسیلی مذکور در این کتاب اطلاعات اندکی در دست است. امیدوارم که این کتاب علاقهٔ جدیدی را به این مطالب برانگیزد.

پیوست در مورد معادله‌های ساختاری و خمیدگی

۱. مقدمه

در این پیوست شرح مختصری از رابطهٔ بین مفهوم حساب دیفرانسیلی خمیدگی (رک: «THO») و مفهوم بسیار مجرد خمیدگی که به تعریف κ در فصل ۲ می‌انجامد ارائه می‌دهیم. بررسی مفصل‌تر برخی از این مطالب را می‌توان در «ONE» پیدا کرد.

ابتدا، سخنی در مورد نمادگذاری. در این پیوست همواره زبان فرمهای دیفرانسیلی را به کار می‌بریم. از یک طرف آنالیزدانهایی که آموزش کلاسیک دارند معمولاً با این زبان راحت نیستند. از طرف دیگر بهترین راه یادگرفتن زبان به کاربستن آن است. و در واقع زمینهٔ محاسبات خمیدگی دامنه‌های مسطح ساده‌ترین زمینهٔ نابدیهی است که در آن فرمهای دیفرانسیلی را می‌توان به راحتی به کار برد. در هر حال، اگر از فرمها استفاده نکنیم این پیوست بسیار ملال‌آور خواهد شد. بنابراین تصمیم به استفاده از آنها اساساً مقاومت ناپذیر است. تمام پیشنیازهای لازم در مورد فرمهای دیفرانسیل را می‌توان در «RU1» یا «ONE» پیدا کرد.

۲. توصیف ذاتی خمیدگی

ابتدا مفهوم خمیدگی یک رویهٔ هموار و دو بعدی $M \subseteq \mathbb{R}^۳$ را یادآوری می‌کنیم. همهٔ محاسبات موضعی هستند، بنابراین بهتر است فکر کنیم که M با دو تابع مختصات روی مجموعهٔ بازهمبند $U \subseteq \mathbb{R}^۲$ پارامتری شده است:

$$U \ni (U, \nu) \xrightarrow{p} (x_۱(u,\nu), x_۲(u,\nu), x_۳(u,\nu)) \in M.$$

فرض می‌کنیم که مرتبهٔ ماتریس

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_۱}{\partial u} & \frac{\partial x_۲}{\partial u} & \frac{\partial x_۳}{\partial u} \\ \frac{\partial x_۱}{\partial \nu} & \frac{\partial x_۲}{\partial \nu} & \frac{\partial x_۳}{\partial \nu} \end{pmatrix}$$

در هر یک از نقاط U برابر با ۲ است. بردارهای سطری این ماتریس فضای مماس بر M در هر نقطه را تولید می‌کنند. با استفاده از فرایند گرام ــ اشمیت برای متعامد یکه ساختن این بردارهای سطری و در صورت لزوم فروریختن U و M میدانهای برداری

$$E_۱ : M \to \mathbb{R}^۳$$

$$E_۲ : M \to \mathbb{R}^۳$$

را چنان تعریف می‌کنیم که در هر نقطه $P = (x_۱, x_۲, x_۳) \in M$ بردارهای $E_۱(x_۱, x_۲, x_۳)$ و $E_۲(x_۱, x_۲.x_۳)$ متعامد یکه بوده و بر M مماس باشند. مجموعهٔ ترکیبهای خطی

$$aE_۱(x_۱, x_۲, x_۳) + bE_۲(x_۱, x_۲, x_۳), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

را با $T_P(M)$ نمایش می‌دهیم. $T_P(M)$ را فضای مماس بر M در P می‌نامیم.

فرض کنید $E_3(P)$ برداریکهٔ قائم بر M در P و برابر با $E_1(P) \times E_2(P)$ باشد. توابع E_1، E_2، E_3 میدانهای برداری هموار روی M هستند: به هر $P \in M$ یک سه تایی از بردارهای متعامد یکه نسبت می‌دهند.

فرض کنید δ_3، δ_2 ، δ_1 پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^3$ باشد:

$$\delta_1 = (1, 0, 0),$$

$$\delta_2 = (0, 1, 0),$$

$$\delta_3 = (0, 0, 1).$$

(بسیاری ازکتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال این بردارها را i و j و k می‌نامند) در این صورت می‌توان نوشت

$$E_i = \sum_j a_{i,j}(x_1, x_2, x_3)\delta_j \qquad i = 1, 2, 3.$$

ماتریس

$$\mathcal{A} \equiv (a_{i,j})_{i,j=1}^{3},$$

را که در آن $a_{i,j}$ها توابع سه متغیر هستند، ماتریس ارتفاع سه پایهٔ E_1، E_2 ، E_3 می‌نامیم. چون $\mathcal{A}$ یک سه‌پایهٔ متعامد را به پایه‌ای دیگر منتقل می‌کند، ماتریسی متعامد است. بنابراین

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^t.$$

تعریف ۱.

اگر $P \in M$، $\nu \in T_P(M)$ و f تابعی هموار روی M باشد، تعریف می‌کنیم

$$D_\nu f(P) = \frac{d}{dt} f o\phi(t)|_{t=\circ}،$$

که در آن ϕ خم هموار دلخواهی در M است که $\phi'(\circ) = P$ و $\phi'(\circ) = \nu$.
می‌توان دید که این تعریف مستقل از انتخاب ϕ است.

تعریف ۲.
اگر

$$\alpha : M \to \mathbb{R}^{۳}$$

یک میدان برداری روی M باشد،

$$\alpha(P) = \alpha_{۱}(P)\delta_{۱} + \alpha_{۲}(P)\delta_{۲} + \alpha_{۳}(P)\delta_{۳}$$

و $\nu \in T_P(M)$ تعریف می‌کنیم

$$\nabla_\nu \alpha(P) = (D_\nu \alpha_{۱})(P)\delta_{۱} + (D_\nu \alpha_{۲})(P)\delta_{۲} + (D_\nu \alpha_{۳})(P)\delta_{۳} \cdot$$

عملگر ∇_ν را مشتق‌گیری هموردای میدان برداری α می‌نامیم.

تعریف ۳.
اگر $P \in M$، $\nu \in T_P(M)$، عملگر شکل (یا نگاشت و اینگارتن) را برای M در P به صورت

$$S_P(\nu) = -\nabla_\nu E_{۳}(P)$$

تعریف می‌کنیم.

□ **لم ۴.** داریم $S_P(\nu) \in T_P(M)$.

اثبات.

داریم $E_۳.E_۳ \equiv ۱$، بنابراین

$$\circ = D_\nu(E_۳.E_۳)\Big|_p = (۲ \nabla_\nu E_۳).E_۳\Big|_P = -۲S_P(\nu).E_۳(P)$$

بنابراین $S_P(\nu) \perp E_۳(P)$ و لذا $S_P(\nu) \in T_P(M)$. □

توجه کنید که عملگر شکل به هر $P \in M$ یک عملگر خطی S_P روی فضای مماس ۲ـ بعدی $T_{P(M)}$ نسبت می‌دهد.

این عملگر خطی را می‌توان به صورت ماتریسی نسبت به پایهٔ $E_۱(P), E_۲(P)$ نوشت. بنابراین S به هر $P \in M$ ماتریس۲×۲ای مانند $\mathcal{M}_P$ نسبت می‌دهد.

عملگر خطی S_P سرعت تغییر $E_۳$ را در جهت هر بردار مماس ν به‌دست می‌دهد. می‌توان نشان داد که $\mathcal{M}_p$ قطری شدنی است. ویژه بردارهای (حقیقی) $\mathcal{M}_P$ متناظرند با خمیدگیهای اصلی M در P (اینها جهتهای بزرگترین وکوچکترین خمیدگی هستند) و ویژه مقدارهای متناظر اندازهٔ خمیدگی را در این جهتها بدست می‌دهد.

مشاهدهٔ فوق در مورد $\mathcal{M}_P$ انگیزهٔ تعریف زیر است.

تعریف ۵.

خمیدگی گاوسی $\kappa(P)$ رویهٔ M در نقطهٔ $P \in M$ برابر با دترمینان $\mathcal{M}_p$ است، یعنی حاصلضرب دو ویژه مقدار.

هدف این است که $\kappa(P)$ را بر حسب هندسهٔ ذاتی M ، بدون مراجعه به $E_۳$ ـــ یعنی بدون در نظر گرفتن طریقهٔ قرارگرفتن M در فضا، بیان کنیم.

برای این منظور میدانهای همبرداری θ_i، یعنی دوگانهای میدانهای برداری E_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$.\theta_i E_j(P) = \delta_{ij}$$

در این صورت θ_i را می‌توان به صورت ترکیب خطی همبردارهای پایهٔ استاندارد dx_1، dx_2، dx_3 نوشت. در واقع اگر $A = (a_{i,j})$ ماتریس ارتفاع باشد، آنگاه

$$\theta_i = \sum a_{i,j} dx_j$$

(به‌یاد داشته باشید که $A^{-1} = {}^t A$). بنابراین به ازای هر i، θ_i یک فرم دیفرانیسل است؛ و حساب دیفرانیسل و انتگرال فرمهای دیفرانسیل، از جمله مشتق‌گیری بیرونی را می‌توان در مورد آنها به کار برد.

از این به بعد، خود را به ۱ـ فرمها و ۲ـ فرمهایی که روی بردارهای مماس M عمل می‌کنند، مقید می‌کنیم. بنابراین هر ۱ـ فرم α را می‌توان به صورت

$$\alpha = \alpha(E_1)\theta_1 + \alpha(E_2)\theta_2$$

و هر ۲ـ فرم β را می‌توان به صورت

$$\beta = \beta(E_1, E_2)\theta_1 \wedge \theta_2$$

نوشت. اکنون میدانهای همبرداری $w_{i,j}$ را با $i, j \in \{1, 2, 3\}$ به‌ازای

$$w_{i,j}(\nu) = (\nabla_\nu E_i).(E_j(P))$$

تعریف می‌کنیم. در اینجا «$\circ$» نشانهٔ حاصلضرب داخلی اقلیدسی است. $w_{i,j}$ را به عنوان یک ۱ـ فرم دیفرانسیل تلقی می‌کنیم. توجه می‌کنیم که چون $E_i.E_j = \delta_{i,j}$

به ازای $\nu \in T_P(M)$ داریم

$$\circ = D_\nu(E_i.E_j) = (\nabla_\nu E_i).E_j + E_i(\nabla_\nu E_j)$$

$$\cdot = w_{i,j}(\nu) + w_{j,j}(\nu)$$

لذا

$$w_{i,j} = -w_{j,i}.$$

به ویژه

$$w_{i,i} = \circ.$$

اگر $\nu \in T_P(M)$ آنگاه تنها با استفاده از جبر خطی به آسانی دیده می‌شود

$$۱ \leq i \leq ۳, \qquad \nabla_\nu E_i = \sum_j w_{i,j}(\nu) E_j \cdot$$

$w_{i,j}$ها را فرمهای التصاق برای M می‌نامیم. اکنون می‌توانیم عملگر شکل را بر حسب فرمهای التصاق بیان کنیم.

□ **گزارهٔ ۶.** فرض کنید $P \in M$ و $\nu \in T_P M$. در این صورت

$$S_P(\nu) = w_{۱,۳}(\nu)E_۱(P) + w_{۲,۳}(\nu)E_۲(P).$$

اثبات.

داریم

$$S_P(\nu) = -\nabla_\nu E_۳ = -\sum_{j=۱}^{۳}(\nabla_\nu E_۳ \cdot E_j)E_j،$$

$$= -\sum_{j=۱}^{۳} w_{۳,j}(\nu)E_j = w_{۱,۳}(\nu)E_۱ + w_{۲,۳}(\nu)E_۲$$

زیرا $w_{۳,۳} = ۰$. □

اکنون می‌توانیم خمیدگی گاوسی را بر حسب $w_{i,j}$ ها بنویسیم.

□ **گزارهٔ ۷.** داریم

$$w_{۱,۳} \wedge w_{۲,۳} = \kappa\theta_۱ \wedge \theta_۲ \cdot$$

اثبات.

لازم است که $\mathcal{M}_P$ را بر حسب $w_{i,j}$ها محاسبه کنیم. بنابر گزارهٔ ۶ داریم

$$S_P(E_۱) = w_{۱,۳}(E_۱)E_۱ + w_{۲,۳}(E_۱)E_۲$$

و

$$S_P(E_۲) = w_{۱,۳}(E_۲)E_۱ + w_{۲,۳}(E_۲)E_۲$$

بنابراین ماتریس S_P نسبت به پایهٔ $E_۲$ و $E_۱$ عبارت است از

$$\mathcal{M}_P = \begin{pmatrix} w_{۱,۳}(E_۱) & w_{۲,۳}(E_۱) \\ w_{۱,۳}(E_۲) & w_{۲,۳}(E_۲) \end{pmatrix} \cdot$$

می‌دانیم که $w_{۱,۳} \wedge w_{۲,۳}$ را می‌توانیم به عنوان یک ۲ـ فرم به صورت $\lambda \cdot \theta_۱ \wedge \theta_۲$ بنویسیم. از طرف دیگر

$$\kappa = det\mathcal{M}_P = w_{۱,۳}(E_۱)w_{۲,۳}(E_۲) - w_{۱,۳}(E_۲)w_{۲,۳}(E_۱)$$

$$= (w_{۱,۳} \wedge w_{۲,۳})(E_۱, E_۲) = \lambda$$

بنابراین

$$\cdot w_{۱,۳} \wedge w_{۲,۳} = \lambda\theta_۱ \wedge \theta_۲ = \kappa\theta_۱ \wedge \theta_۲$$

اکنون هدف این است که κ را بر حسب $w_{i,j}$هایی بنویسیم که در آنها $i \neq ۳$ و $j \neq ۳$. برای این منظور به یک لم فنی در مورد ماتریس ارتفاع نیازمندیم.

□ لم ۸. داریم

$$\cdot w_{i,j} = \sum_k a_{j,k} da_{i,k} \qquad ۱ \leq i,j \leq ۳$$

اثبات.

اگر $\nu \in T_P(M)$ آنگاه

$$\cdot w_{i,j}(\nu) = \nabla_\nu E_i \cdot E_j(P)$$

داریم

$$\cdot E_i = \sum_\kappa a_{i,\kappa}\delta_\kappa$$

بنابراین

$$\cdot \nabla_\nu E_i = \sum_\kappa (D_\nu a_{i,k})\delta_\kappa$$

و لذا

$$w_{i,j}^{(\nu)} \equiv \nabla_\nu E_i \cdot E_j = (\sum_\kappa (D_\nu a_{i,\kappa})\delta_\kappa) \cdot (\sum_\kappa a_{j,\kappa}\delta_\kappa)$$

$$= \sum_\kappa (D_\nu a_{i,\kappa}) a_{j,\kappa} = \sum_\kappa da_{i,\kappa}(\nu) a_{j,\kappa}$$

در نتیجه

$$\cdot\, w_{i,j} = \sum_{\kappa} a_{j,\kappa} da_{i,\kappa}$$ □

اکنون به مرحلهٔ مهمی رسیده‌ایم و می‌توانیم معادله‌های ساختاری کارتان را که کلید فرمولهای ذاتی خمیدگی هستند به دست آوریم.

□ **قضیهٔ ۹.** داریم

$$d\theta_i = \sum_j w_{i,j} \wedge \theta_j, \qquad (۱)$$

$$dw_{i,j} = \sum_{\kappa} w_{i,\kappa} \wedge w_{\kappa,j}\cdot \qquad (۲)$$

اثبات.
داریم

$$\theta_i = \sum_j a_{i,j} dx_j$$

بنابراین

$$d\theta_i = \sum da_{i,j} \wedge dx_j\cdot$$

چون ماتریس ارتفاع $\mathcal{A}$ متعامد است، معادله‌های لم ۸ را می‌توانیم نسبت به $da_{i,\kappa}$ حل کنیم بنابراین

$$da_{i,j} = \sum_k W_{i,k} a_{k,j}\cdot$$

با قرار دادن این مقدار در فرمول اخیر نتیجه می‌گیریم

$$d\theta_i = \sum_j [(\sum_\kappa w_{i,\kappa} a_{\kappa,j}) \wedge dx_j]$$

$$\cdot = \sum_\kappa [w_{i,\kappa} \wedge \sum_j a_{\kappa,j}.dx_j] = \sum_\kappa w_{i,\kappa} \wedge \theta_\kappa$$

این معادلهٔ ساختاری اول است.

در مورد معادلهٔ دوم توجه می‌کنیم که فرمول

$$w_{i,j} = \sum da_{i,\kappa} a_{j,\kappa}$$

فرمول

$$dw_{i,j} = \sum da_{i,\kappa} \wedge da_{j,\kappa}$$

را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}
\sum_\kappa w_{i,\kappa} \wedge w_{\kappa,j} &= \sum_\kappa (\sum_\ell da_{i,\ell} a_{\kappa,\ell}) \wedge (\sum_m da_{\kappa,m} a_{j,m}) \\
&= \sum_\kappa (\sum_\ell da_{i,\ell} a_{\kappa,\ell}) \wedge (-\sum_m da_{j,m} a_{\kappa,m}) \\
&= -(\sum_\kappa a_{\kappa,\ell} a_{\kappa,m}) \cdot (\sum_{\ell,m} da_{i,\ell} \wedge da_{j,m}
\end{aligned}$$

$$\cdot = -\sum_m da_{i,m} \wedge da_{j,m}$$

در معادلهٔ ماقبل آخر از $A^{-1} = {}^t A$ استفاده کرده‌ایم. اکنون حکم قضیه به‌دست می‌آید. □

نتیجه زیر بسیار مهم است.

□ **نتیجه.** داریم

$$\cdot dw_{1,2} = -\kappa\theta_1 \wedge \theta_2$$

اثبات.
معادلهٔ ساختاری دوم نتیجه می‌دهد

$$dw_{1,2} = \sum w_{1,\kappa} \wedge w_{\kappa,2}$$

$$\cdot = w_{1,1} \wedge w_{1,2} + w_{1,2} \wedge w_{2,2} + w_{1,3} \wedge w_{3,2}$$

در مجموع فوق تنها عامل سوم صفر نیست. در گزارهٔ ۷ دیدیم که این عامل برابر با $-\kappa\theta_1 \bigwedge \theta_2$ است. □

این نتیجه هدف اساسی ما در این زیرقسمت بود. این نتیجه یک روش ذاتی برای محاسبهٔ خمیدگی گاوسی در محیط کلاسیک و لذا راهی برای تعریف خمیدگی در محیطی بسیار مجرد به دست می‌دهد. اکنون به بررسی این دیدگاه بسیار مجرد می‌پردازیم.

۳. محاسبهٔ خمیدگی در دامنه‌های مسطح

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ دامنه‌ای مجهز به متر ρ باشد. برای سادگی فرض می‌کنیم که در همهٔ نقاط Ω، $\rho(z) > 0$. تعریف می‌کنیم

$$\cdot E_1 \equiv \frac{(1,0)}{\rho} \quad \text{و} \quad E_2 \equiv \frac{(0,1)}{\rho}$$

در این صورت

$$\theta_1 = \rho \quad dx \qquad \text{و} \qquad \theta_2 = \rho \quad dy$$

میدانهای همبردار دوگان هستند. $w_{i,j}$ را، بنا به معادلهٔ ساختاری اول، تعریف می‌کنیم:

$$d\theta_1 = w_{1,2} \wedge \theta_2،$$

$$d\theta_2 = w_{2,1} \wedge \theta_1.$$

خمیدگی گاوسی را طبق نتیجه قضیهٔ ۹ تعریف می‌کنیم:

$$dw_{1,2} = -\kappa\theta_1 \wedge \theta_2.$$

می‌توان دید که این تعریفها مستقل از انتخاب دو پایه E_1, E_2اند، اما این کار به مقاصد ما ارتباطی ندارد. این قسمت را با اثبات این که تعریف خمیدگی ناشی از معادله‌های ساختاری منطبق بر تعریف ارائه شده در قسمت ۱.۲ است، به پایان می‌بریم. ابتدا بنا به روش تعریف θ_1 و θ_2 داریم

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= d\rho \wedge dx \\ &= (\rho_x dx + \rho_y dy) \wedge dx \\ &= \rho_y dy \wedge dx \\ &= -\frac{\rho_y}{\rho} dx \wedge \rho \qquad dy \\ &= -\frac{\rho_y}{\rho} dx \wedge \theta_2 \end{aligned}$$

به همین نحو

$$\begin{aligned} d\theta_۲ &= d\rho \wedge dy \\ &= (\rho_x dx + \rho_y dy) \wedge dy \\ &= \rho_x dx \wedge dy \\ &= -\frac{\rho_x}{\rho} dy \wedge \rho \quad dx \\ &= -\frac{\rho_x}{\rho} dy \wedge \theta_۱ \end{aligned}$$

مقایسه با معادله ساختاری اول نتیجه می‌دهد

$$w_{۱,۲} = -\frac{\rho_y}{\rho} dx + \tau dy$$

و

$$w_{۱,۲} = -w_{۲,۱} = -(-\frac{\rho_x}{\rho} dy) + \sigma \quad dx$$

که τ و σ توابعی مجهول هستند.

تنها راهی که این معادله‌ها می‌توانند سازگار باشند عبارت است از

$$.w_{۱,۲} = -\frac{\rho_y}{\rho} dx + \frac{\rho x}{\rho} dy$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
dw_{۱,۲} &= -\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\rho_y}{\rho})dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\rho_x}{\rho})dx \wedge dy \\
&=(-\frac{\rho_{yy}}{\rho} + \frac{\rho_y \rho_y}{\rho^۲})dy \wedge dx + (\frac{\rho_{xx}}{\rho} - \frac{\rho_x \rho_x}{\rho^۲})dx \wedge dy \\
&=\frac{۱}{\rho^۲}(\rho \Delta \rho - (\rho_y)^۲ - (\rho_x)^۲)dx \wedge dy \\
&= \frac{۱}{\rho^۴}(\rho \Delta \rho - (\rho_y)^۲ - (\rho_x)^۲)\theta_۱ \wedge \theta_۲ \cdot
\end{aligned}
$$

اکنون معادلهٔ ساختاری دوم نتیجه می‌دهد

$$\kappa = -\frac{۱}{\rho^۴}(\rho \Delta \rho - |\nabla_\rho|^۲) \cdot$$

از طرف دیگر در قسمت ۱.۲ تعریف کرده‌ایم

$$\kappa = -\frac{\Delta \log \rho}{\rho^۲} \cdot$$

داریم

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \rho = \frac{۱}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}$$

و

$$
\begin{aligned}
\Delta \log \rho &= ۴ \frac{\partial^۲}{\partial z \partial \bar{z}} \log \rho \\
&= ۴(-\frac{۱}{\rho^۲} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} + \frac{۱}{\rho} \frac{\rho^۲ \rho}{\partial z \partial \bar{z}}) \\
&= -\frac{۱}{\rho^۲} |\nabla \rho|^۲ + \frac{۱}{\rho} . \Delta \rho
\end{aligned}
$$

لذا بر طبق تعریف قسمت ۱.۲ داریم.

$$\kappa = -\frac{۱}{\rho^{۴}}(\rho\Delta\rho - |\nabla\rho|^{۲})$$

بنابراین تعریف خمیدگی در قسمت ۲ همان است که از معادله‌های ساختاری به دست می‌آید.

مراجع

"AHL_1" L. Ahlfors, An extension of Schwarz's lemma Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938). 359 -364.

"AHL_2"—, *Complex Analysis*, 3rd. ed. McGraw-Hill, New York, 1979.

"BEL" S. R. Bell, Biholomorphic mappings and the $\bar{\partial}$-problem, Ann. *Math.*, 114 (1981), 103-112.

"BOAS" R. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis*, Random House, New York, 1987.

"DFN" B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications*, Springer - Verlag, New York and Berlin, 1984.

"EAH" C. Earle and R. Hamilton, A fixed point theorem for holomorphic mappings, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. XVI, 1968, 61-65.

"FK" H. Farkas and I.Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1979.

"FEF" C.Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings, *Invent. Math.*, 26 (1974), 1-65.

"GAR" J. Garnett, *Analytic Capacy and Measure*, Springer Lecture Notes ≠ 297 Springer - Verlag, 1972.

"KOB" S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings* Marcel Dekker, New York, 1970.

"K*R*1" S. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

"KR2" —, What is several complex variables? , *Amer. Math. Monthly,* 94 (1987), 236-256.

"KR3" —, Functions of one complex variable, *The Encyclo pedia of Physical Science and Technology*, Academic Press, New York , 1987.

"KR4" —, Functions of several complex variables, *The Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Academic Press, New York, 1987.

"LS" L. Loomis and S.Sternberg, *Advanced Calculus*, Addison - Wesley, Reading, 1969.

"MIS" D.Minda and G. Schober, Another elementary approach to the theorems of Landau, Montel, Picard and Schottky, *Complex Variables*, 2 (1983), 157 -164.

"MUN" J. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

"ONE" B.O' Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.

"PRI" I. Privalov, *Randeigenschaften Analytischer Functionen*, Deutsch Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

"RU1" W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed.*, McGraw -Hill, New York, 1976.

"RU2" —, *Function Theory in the Unit Ball of* C^n, Springer - Verlag, Berlin, 1981.

"THO" G. Thomas, and R.Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison -Wesley, Reading, 1984.

"WOL" K. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, 4th ed., Publish or Perish Press, Berkeley, 1977.

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

الف

ادامهٔ تحلیلی	Analytic continuation
اصل آرگومان	Argument principle
اصل بلاخ	Bloch's principle
اصل لیندولف	Lindelöf principle
اصل ماکسیمم	Maximun principle
انتگرال‌گیری مختلط	Complex integration
ایزومتری‌ها	Isometries

ب

برآوردهای کوشی	Cauchy estimates
بردار قائم خارجی	Unit outward normal
بردار قائم داخلی	Unit inward normal
برگردان	Pullback

پ

پدیدهٔ هارتگس	Hartoges phenomenon
پیوسته ـ مشتق‌پذیر	Continuously differentiable

ت

تابع تحلیلی	Analytic function
تابع متعالی	Transcendental function
تابع مدولار بیضوی	Elliptic modular function
تابع نگاشت ریمان	Riemann mapping function
تبدیل موبیوس	Möbius trans formation
تکین اساسی	Essential singularity
توابع هولومرفیک	Holomorphic function
توپولوژی	Topology
توپولوژی در یک همسایگی بینهایت	Topology in a neighberhood of Infinity

چ / ح

چندجمله‌ای‌های مختلط	Complex polynomials
حد غیرمماسی	Non tangential limit
حد مرزی شعاعی	Radial boundary limit

خ

خانوادهٔ نرمال	Normal familiy
خم با کوتاه‌ترین طول	Curve of least length

piecewise Continuausly differentiable	خم پاره پیوسته مشتق‌پذیر
Principal curvature	خمیدگی اصلی
Constant curvature	خمیدگی ثابت
Gaussian curvature	خمیدگی گاوسی
Conformal self - map	خودنگاشت همدیس

د

Complete circular domain	دامنهٔ دایره‌ای کامل
Non - taut Domain	دامنهٔ غیرمنتظم
Domain of convergence	دامنهٔ همگرایی
Domain of holomarphy	دامنهٔ هولومرفی
Twice continuously differentiabel	دوبار پیوسته ـ مشتق‌پذیر
Unitary rotation	دوران یکانی
Bidisc	دو قرص
Biholomorphic	دوهولومرفیک

ر/ ژ

Behavior at infinity of entire function	رفتار در بینهایت تابع تام
Morphism	ریختار
Geodesic	ژئودزیک

س، ش

سری توانی	Power series
شاخص کاراتئودوری	Carathe'odory indicatrix
شاخص کوبایاشی	Kobayashi indicatrix

ط، ظ

طول بردار اقلیدسی	Euclidean vector length
طول کاراتئودوری	Carathe'odory length
طول کوبایاشی	Kobayashi length
طول یک بردار مماس	Length of a tangent vector
ظرفیت تحلیلی	Analytic capacity

ع، غ

عملگر شکل	Shape operator
عملگر لاپلاس	Laplace operator
غیر مماسی	Nontangential

ف

فاصله متر پوانکاره	Distance of the Poincare' metric
فاصله متر کاراتئودوری	Distance of the Carathe'odory metric
فاصله متر کوبایاشی	Distance of the Kobayashi metric
فرمول استوکس	Stokes formula
فرمول انتگرال کوشی	Cauchy integral formula
فرمهای التصاق	Connection forms

Differential forms	فرمهای دیفرانسیلی
Shrink	فروریختن
Compactness	فشردگی
Tangent disc space	فضای مماس قرص

ق

Chain rule	قاعدهٔ زنجیری
Open disc	قرص باز
Closed disc	قرص بسته
Targent disc	قرص مماس
Real part	قسمت حقیقی
Imaginary part	قسمت موهومی
Fundamental theorem of algebra	قضیهٔ اساسی جبر
Ascoli - Arzela theorem	قضیهٔ اسکولی ـ آرتسلا
Cauchy integral theorem	قضیهٔ انتگرال کوشی
Picard great theorem	قضیهٔ بزرگ پیکار
Poincaŕe theorem	قضیهٔ پوانکاره
Inverse function theorem	قضیهٔ تابع معکوس
Fefferman's theorem	قضیهٔ ففرمن
Casorati - Weierstrass theorem	قضیهٔ کسراتی ـ وایرشتراس
Picard little theorem	قضیهٔ کوچک پیکار
Liouville's theorem	قضیهٔ لیوویل
Marty's theorem	قضیهٔ مارتی
Montel's theorem	قضیهٔ مونتل

قضیهٔ میتاک ـ لفلر	Mittag - Leffler theorem
قضیهٔ نقطهٔ تکین برداشتی	Removable Singularity theorem
قضیهٔ نگاشت ریمان	Riemann mapping theorem
قضیهٔ هارتگس	Hartogs theorem
قضیهٔ هاینه ـ بورل	Heine - Borel theorem
قضیهٔ هورویتز	Hurwitz's theorem

گ

گروه خودریختیها	Automorphism group
گروه خودریختیهای ترایا	Transitive automorphism group
گروه خودریختیهای حلقه	Automophism group of annulus
گروه خودریختیهای دامنه‌های مسطح	Automophism group of planar domains
گروه خودریختیهای دو قرص	Automphism group of bidisc
گروه خودریختیهای فشرده	Compact automophism group
گروه خودریختیهای قرص	Automophism group of disc
گروه خودریختیهای گوی	Automophism group of ball

ل

لم شوارتس	Schwarz lemma
لم شوارتس ـ آلفرس	Ahlfors - Schwarz lemma
لم شوارتس ـ پیک	Schwarz - Pick lemma

م

ماتریس ارتفاع	Attitude matrix
ماتریس ژاکوبین	Jacobian matrix
متر اقلیدسی	Euclidean metric
متر پوانکاره	Poincaŕe metric
متر کاراتئودوری	Carathéodary metric
متر کامل	Complete metric
متر کروی	Spherical metric
متر کوبایاشی ـ رویدن	Kobayashi - Royden metric
متر هرمیتی	Hermitian metric
متر همدیس	Conformal metric
مشتق مختلط	Complex derivative
معادله‌های ساختاری کارتان	Cartan structural equations
معادله‌های کوشی ـ ریمان	Cauchy - Riemann equations
مفهوم مجرد خمیدگی	Abstract notion of curvature
مماس	Tangent
منتظم	Taut
میدان برداری	Vector field
میدان همبرداری	Covector field

ن

ناتباهیدگی متر کوبایاشی	Nondegeneracy of the Kobayashi metric
ناحیهٔ استولتز	Stolz region

Differential invariants	ناورداهای دیفرانسیل
Singular point	نقطهٔ تکین
Biholomarphic mapping	نگاشت دو هولومرفیک
Weingarten map	نگاشت واینگارتن

و

Diffeomorphism	وابرریختی
Compactly divergent	واگرای فشرده
Distance decreasing property	ویژگی کاهش فاصله
Mean value property	ویژگی مقدار میانی
Isometries main properties	ویژگیهای اصلی ایزومتری‌ها
Hyperbolicity	ویژگی هذلولوی

ه

Conformal	همدیس
Tubular neighborhood	همسایگی تیوبی
Normally convergent	همگرای نرمال
Holomorphic	هولومرفیک

ی

Uniqueness of analytic continuation	یکتایی ادامهٔ تحلیلی
Linear isomorphism	یکریختی خطی
Equicontinuaus	یکسان پیوسته
Equibounded	یکسان کراندار

واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

A

Abstract notion of curvature	مفهوم مجرد خمیدگی
Ahlfors Schwarz lemma	لم شوارتس آلفرس
Analytic capacity	ظرفیت تحلیلی
Analytic continuation	ادامهٔ تحلیلی
Analytic function	تابع تحلیلی
Argument principle	اصل آرگومان
Ascoli - Arzela theorem	قضیهٔ اسکولی ـ آرتسلا
Attitude mafrix	ماتریس ارتفاع
Automorphism group	گروه خودریختیها
Automorphism group of annulus	گروه خودریختیهای حلقه
Automorphism group of ball	گروه خودریختیهای گوی
Automorphism group of bidisc	گروه خودریختیهای دو قرص
Automorphism group of disc	گروه خودریختیهای قرص
Automorphism group of planar	گروه خودریختیهای

domains — دامنه‌های مسطح

B

Behavior at infinity of entire function — رفتار در بینهایت تابع تام
Bidisc — دو قرص
Biholomorphic — دو هولومرفیک
Biholomorphic mapping — نگاشت دو هولومرفیک
Bloch's principle — اصل بلاخ

C

Cartan structural equations — معادله‌های ساختاری کارتان
Carathéodory indicatrix — شاخص کاراتئودوری
Carathéodory length — طول کاراتئودوری
Carathéodory metric — متر کاراتئودوری
Casorati - Weierstrass theorem — قضیهٔ کسراتی ـ وایرشتراس
Cauchy estimates — برآوردهای کوشی
Cauchy integral formula — فرمول انتگرال کوشی
Cauchy integral theorem — قضیهٔ انتگرال کوشی
Cauchy - Riemann equations — معادله‌های کوشی ـ ریمان
Chain rule — قاعدهٔ زنجیری
Closed disc — قرص بسته
Compact automorphism group — گروه خودریختیهای فشرده
Compactly divergent — واگرای فشرده
Compactness — فشردگی

Complete circular domain	دامنهٔ دایره‌ای کامل
Complete metric	متر کامل
Complex derivative	مشتق مختلط
Complex integration	انتگرال‌گیری مختلط
Complex polynomials	چندجمله‌ایهای مختلط
Conformal	همدیس
Conformal metric	متر همدیس
Conformal self-map	خودنگاشت همدیس
Connection forms	فرمهای التصاق
Continuosly differetiable	پیوسته ـ مشتق‌پذیر
Covector fields	میدان همبرداری
Constant curvature	خمیدگی ثابت
Curve of least length	خم با کوتاه‌ترین طول
Curve	خم
Curve-piecewise continuously differentiabel	خم پیوسته مشتق‌پذیر

D

Diffeomorphism	وابرریختی
Differential forms	فرمهای دیفرانسیلی
Differential invariants	ناورداهای دیفرانسیلی
Distance decreasing property	ویژگی کاهش فاصله
Distance of the Carathéodory metric	فاصله متر کاراتئودوری

Distance of the Kobayashi metric	فاصله متر کوبایاشی
Distance of the Poincare′ metric	فاصله متر پوانکاره
Domain of convergence	دامنهٔ همگرایی
Domain of holomorphy	دامنهٔ هولومرفی

E

Elliptic modular function	تابع مدولار بیضوی
Equibounded	یکسان کراندار
Equicontinuous	یکسان پیوسته
Essential singularity	تکین اساسی
Euclidean metric	متر اقلیدسی
Euclidean vector length	طول بردار اقلیدسی

F/G

Fefferman's theorem	قضیهٔ ففرمن
Fundamental theorem of algebra	قضیهٔ اساسی جبر
Gaussian curvature	خمیدگی گاوسی
Geodesic	ژئودزیک

H

Hartoges phenomenon	پدیدهٔ هارتگس
Hartoges theorem	قضیهٔ هارتگس
Heine Borel theorem	قضیهٔ هاینه ـ بورل
Hermitian metric	متر هرمیتی

Holomorphic	هولومرفیک
Holomorphic functions	توابع هولومرفیک
Hurwitz's theorem	قضیهٔ هورویتز
Hyperbolicity	ویژگی هذلولوی

I/J

Imaginary part	قسمت موهومی
Inverse function theorem	قضیهٔ تابع معکوس
Isometries	ایزومتری‌ها
Isometries main properties	ویژگیهای اصلی ایزومتری‌ها
Jacobian matrix	ماتریس ژاکوبین

K

Kobayashi indicatrix	شاخص کوبایاشی
Kobayashi length	طول کوبایاشی
Kobayashi - Royden metric	متر کوبایاشی ـ رویدن

L

Laplace operator	عملگر لاپلاس
Length of a tangent vector	طول یک بردار مماس
Lindelöf principle	اصل لیندولف
Linear isomorphism	یکریختی خطی
Liouville's theorem	قضیهٔ لیوویل

M

Marty's theorem	قضیهٔ مارتی
Maximum principle	اصل ماکسیمم
Mean value property	ویژگی مقدار میانی
Mittag - Leffler theorem	قضیهٔ میتاگ ـ لفلر
Möbius transformation	تبدیل موبیوس
Montel's theorem	قضیهٔ مونتل
Morphism	ریختار

N

Nondegeneracy of the Kobayashi metric	ناتباهیدگی متر کوبایشی
Nontangential	غیرمماسی
Nontangetial limit	حد غیرمماسی
Non - taut domain	دامنهٔ غیرمنتظم
Normal family	خانوادهٔ نرمال
Normally convergent	همگرای نرمال

O/P

Open disc	قرص باز
Picard great theorem	قضیهٔ بزرگ پیکار
Picard little theorem	قضیهٔ کوچک پیکار
Poincaré metric	متر پوانکاره
Poincaré theorem	قضیهٔ پوانکاره

Power series	سری توانی
Principal curvature	خمیدگی اصلی
Pullback	برگردان

R

Radial boundary limit	حد مرزی شعاعی
Real part	قسمت حقیقی
Removabel singularities theorem	قضیهٔ نقاط تکین برداشتنی
Riemann mapping function	تابع نگاشت ریمان
Riemann mapping theorem	قضیهٔ نگاشت ریمان

S

Schwarz lemma	لم شوارتس
Schwarz - Pick lemma	لم شوارتس - پیک
Shape operator	عملگر شکل
Shrink	فروریختن
Singular point	نقطهٔ تکین
Spherical metric	متر کروی
Stokes formula	فرمول استوکس
Stolz region	ناحیهٔ استولتز

T

Tangent	مماس
Tangent disc	قرص مماس

Tangent disc space	فضای قرص مماس
Taut	منتظم
Topology	توپولوژی
Topology in a neighborhood of infinity	توپولوژی در یک همسایگی بینهایت
Transcendental function	تابع متعالی
Transitive automorphism group	گروه خودریختیهای ترایا
Tubular neighborhood	همسایگی تیوبی
Twice continuously differentiable	دوبار پیوسته ـ مشتق‌پذیر

U

Uniqueness of analytic continuation	یکتایی ادامهٔ تحلیلی
Unitary rotation	دوران یکانی
Unit inward normal	بردار قائم داخلی
Unit outward normal	بردار قائم خارجی

V/W

Vector field	میدان برداری
Weingarten map	نگاشت واینگارتن