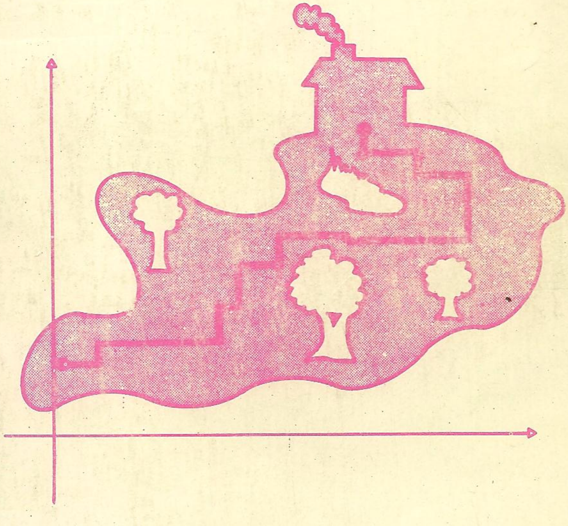
دانشگاه علم و صنعت ایران

«شمارهٔ انتشارات ۱۷۰»

آنالیز مختلط



ترجمه : دکتر ابراهیم اسرافیلیان

«عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران»

مؤلف : یان استوارت- دیوید تال

بسم الله الرحمن الرحیم

آنالیز مختلط

ترجمه : دکتر ابراهیم اسرافیلیان

«عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران»

مؤلف : یان استوارت- دیوید تال

فهرست مطالب

فصل دوم

فصل سوم

تمرین چهارم

فصل پنجم

فصل ششم

فصل هفتم

فصل هشتم

فصل نهم

فصل دهم

فصل یازدهم

فصل دوازدهم

فصل سیزدهم

فصل چهاردهم

مقدمه مترجم

بسم الله الرحمن الرحیم

طی چند سال اخیر که به تدریس دروس نظیر هندسه منیفلد ها، توپولوژی دیفرانسیل و جبر و گروه های لی در دوره فوق لیسانس اشتغال داشتم مرتب کمبود مقدماتی از سایر دروس ریاضی خصوصاً در زمینه آنالیز حقیقی و آنالیز مختلط احساس می شد، چه تدریس هندسه منیفلد های حقیقی محتاج به اطلاعاتی در مورد آنالیز توابعی از R^n به R^m می باشد که این قسمت در برنامه دوره لیسانس تحت عنوان آنالیز III قرار دارد که بعلت اختیاری بودن این درس دانشجویان عموماً از انتخاب آن سر باز می زنند. علاوه بر این کتابی هم به فارسی در این زمینه موجود نیست لذا در اینمورد مبادرت به ترجمه کتاب
Calculus on Mani~~p~~folds
تالیف آقای Spivak نمودم.

در زمینه آنالیز مختلط، که جهت بررسی منیفلد های مختلط مورد نیاز است اقدام به ترجمه کتاب حاضر نمودم. این کتاب علاوه بر برآوردن نیازهای ذکرشده می تواند برای تدریس درس آنالیز مختلط در دوره های لیسانس ریاضی و مهندسی و همچنین دوره فوق لیسانس مورد استفاده قرار گیرد.

این کتاب علاوه بر جامعیت از لحاظ مطالب و دقت وافری که در بیان و اثبات قضایا در آن بکار رفته دارای این مزیت است که مؤلف آن مبادرت به استفاده

از روشی جدید نموده که کار را بسیار آسان و ملموس نموده و آن استفاده از روش هندسی است.

این روش که در کتابهای مشابه کمتر به چشم می خورد، کتاب را در حد یک خودآموز ساده کرده است.

در اینجا لازم میدانم از کلیه خوانندگان خصوصاً اساتید محترم از جهت لغزشها و اشتباهاتی که در ترجمه این کتاب رخ داده پوزش طلبم. به امید اینکه از پیشنهادات اصلاحی و راهنمائی های خود دریغ نفرمائید تا در در چاپهای بعدی اعمال شود.

در پایان لازم است از کارکنان چاپخانه دانشگاه که در چاپ این کتاب زحمت کشیده اند خصوصاً خانم دقتی که زحمت تایپ آنرا بخود هموار کرده اند تشکر کنم.

ابراهیم اسرافیلیان

مقدمه

دانشجویانی که با درس آنالیز مختلط روبرو می شوند اکثراً آن را مشکل می یابند. البته صحیح است که اثبات بعضی از قضایای اصلی و مهم آن احتیاج به تکنیکهای متنوع و مخصوص دارد ولی در واقع در بسیاری از موارد مفهوم آن ساده تر از آنالیز حقیقی است، متنها همیشه بدین صورت تدریس نشده است.

این کتاب برای سالهای دوم و سوم دانشکده در نظر گرفته شده و براساس جمع آوری دروس مربوط به دههٔ گذشته پایه گذاری شده است. برای نشان دادن سادگی طبیعی آنالیز مختلط مطالب را حول دومحور اصلی قرار می دهیم.

۱) تعمیم آنالیز حقیقی ۲) هنگامی که با مطلب جدید روبرو شدیم، برای تفهیم آن از هندسه صفحه به طور مؤثر استفاده خواهیم کرد. هدف در طول این درس تشویق یک تفکر هندسی است که دارای پشتوانهٔ محکم تحلیلی باشد.

برای شروع، کار را براساس روند تاریخی بررسی می نماییم. تاریخ خود اشاره ایست به بعد و محرکی جزیی به حساب می آید. ما احساس می کنیم که تغییرات فرهنگی باعث تغییر مفاهیم در مسائل می گردند، زیرا مثلاً آنچه که زمانی مشکل مهمی به نظر می رسید - اگر بعد از وقوع واقعه به آن بنگریم - مطلبی ساده جلوه می کند. البته منظور این نیست که دانشجوی امروز را به مشکلات دیروز بکشانیم؛ این مطلب را که قسمت مهمی از بحث ماست در زیر به طور گسترده مورد بحث قرار خواهیم داد.

مبداء آنالیز مختلط و نقطه نظرهای جدید

اگر طبق اظهار *کرانکر* (kronecker) که گفته است «اعداد صحیح را خداوند خلق کرده و بقیه کار بشر است» باید بگوئیم که اعداد مختلط قطعاً یکی از پیچیده ترین آثار ریاضی است که بشر به آن دست یافته است. قرنها این اعداد باعث تحیّر ریاضی دانها و فلاسفه بوده است و از ظهور اوّلیهٔ آنها که در Cardaos Ars Magna آمده است تا نشر تعریف رسمی آن که در بردارندهٔ دقّت عصر حاضر نیز می باشد تقریباً ۳۰۰ سال می گذرد. ساختاری بر چنین اساسی می تواند خوانندهٔ ناوارد را، از اینکه درك او از آنالیز مختلط باید حتماً تئوری بسیار مشکلی باشد معاف می کند. ولی معمای تاریخی اینجاست که با وجود گذشتن سه قرن از دستیابی به یک طرز عمل در آنالیز مختلط فقط یک دهم این زمان لازم بود که به تکمیل قسمت اعظم آن دسترسی پیدا کنیم. البته واضح است که باید اوّل اعداد پیدا شوند و گرنه چیزی نخواهیم داشت که با آن تحلیلی انجام دهیم، ولی فاصله زمانی آن تعجب آورست. شاید توضیح آن باشد که بنیان گذاری دقیق در مسائل عمیق از نوع فلسفی بسیار وقت گیر است ولی وقتی گره گشوده شد توسعه بیشتر آن کاری آسان خواهد بود. تاریخ پیشنهادی غیر از این دارد.

۱. مبداء اعداد مختلط

آری مگنای مشهور به جیرُلا مر *کاردانُو* در سال ۱۵۴۵ دستگاه دو معادله دو مجهولی

$$\begin{cases} x + y = ۱۰ \\ xy = ۴۰ \end{cases}$$

را پاسخ و جوابهای $x = ۵ + \sqrt{-۱۵}, y = ۵ - \sqrt{-۱۵}$ که به صورت جدید نوشته ایم ارائه می دهند.

اما *کاردانو* هیچ گونه توضیحی دربارهٔ ریشهٔ منفی یک عدد نمی دهد و فقط با این فرض که چنین مقادیری تابع قوانین جبری هستند و در معادلات صدق می کنند، بسنده کرده است. البته نظر او در این امر مردود است چه این پیشرفت

در حساب به همان اندازه که ظریف است بی مصرف نیز می باشد. در همان کتاب او ملاحظه می کنید که کاربرد فرمول **تارتاگلیا** برای حل معادلهٔ، درجهٔ سوم $x^۳ = ۱۵x + ۴$ منتهی به عبارت،

$$X = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{-۱۲۱}} + \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{-۱۲۱}}$$

می گردد که بسیار از جواب ساده $x = ۴$ به دور است.

رافائل بُومبلی (۱۵۲۶-۷۳) با به کارگیری استادانهٔ این ریشه های «غیر ممکن» به طوری که انگار آنها اعداد معمولی هستند راهی را پیشنهاد می کند که این دو راه حل را با هم وفق می دهد.

یعنی چون

$$\left(۲ \pm \sqrt{-۱}\right)^۳ = \pm\sqrt{-۱۲۱}$$

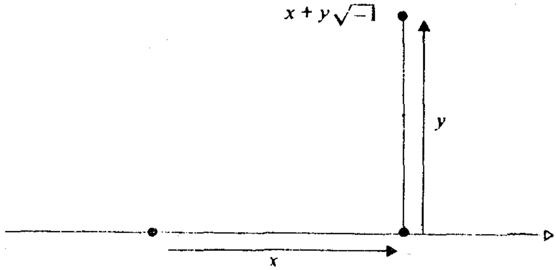
عبارت *کار دانو* تبدیل به

$$X = \left(۲ + \sqrt{-۱}\right) + \left(۲ - \sqrt{-۱}\right) = ۴$$

می گردد. ریشهٔ « غیرممکن» همان ریشهٔ آشناست منتها به صورتی دیگر. کار بومبلی اولین اشاره‌ای بود که اهمیت توانایی اعداد مختلط را در حل مسائل حقیقی ریاضی جلوه گر ساخت.

در «La Geometric» رنه دکارت بین اعداد حقیقی و موهومی تمایزی قائل شد و چنین تفسیر نمود که به میان آمدن اعداد مختلط در مساله علامت غیر قابل حل بودن آن است، نظریه ای که بعدها مورد قبول نیوتن قرار نگرفت.

جان والیس (John wallis) در کتاب جبر (۱۶۷۳) خود به طور هندسی یک عدد مختلط را به نمایش گذاشت، یعنی روی یک خط راست قسمت حقیقی عدد را در جهت علامتش و قسمت موهومی آن را روی خط قائم بر آن اندازه گیری نموده است. (شکل ۰-۱)



بعدها ظاهراً بنا به دلایلی این پیشنهاد مورد توجّه واقع نشد.

در سال ۱۷۰۲ *جان برنولی* (John Bernoulli) مشغول محاسبه انتگرالی به شکل

$$\int \frac{dx}{ax^{۲}+bx+c}$$

توسط کسرهای جزیی شد و با فلسفهٔ این که اعداد مختلط را نیز مانند اعداد حقیقی می‌توان به کار گرفت تابع زیر انتگرال را به صورت

$$\frac{۱}{ax^{۲}+bx+c}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$$

درآورد که در آن β, α را ریشه های معادلهٔ درجه دوم مخرج در نظر گرفت و انتگرال را به صورت

$$A\log(x-\alpha)+B\log(x-\beta)$$

محاسبه نمود.

این تعمیم جسورانه یعنی به کار بردن همان روش دربارهٔ معادلات درجه دومی که ریشه حقیقی نداشتند به پیدایش لگاریتم اعداد مختلط منتهی شد. امّا اینها چه بودند؟ هم *جان برنولی* و هم لایبنز (Leibniz) این روش را به کار بردند ولی در سال ۱۷۱۲ کارشان به مرافعه کشید. لایبنز اظهار می‌کرد که لگاریتم یک عدد

منفی مختلط است. در حالی که *برنولی* اصرار داشت که حقیقی است. *برنولی* می گفت که چون

$$\frac{d-(x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

بنابراین توسط انتگرال گیری

$$\log(-x) = \log(x)$$

است حال آنکه *برنولی* اصرار داشت که این انتگرال فقط در موقعی که x مثبت است صحیح می باشد.

لئوناردو اُلر (Leonard Euler) این مرافعه را در سال ۱۷۴۹ به نفع *لایبنز* چنین خاتمه داد که انتگرال مورد نظر یک عدد ثابت را اقتضا می کند یعنی:

$$\log(-x) = \log(x) + c$$

نکته ای که *برنولی* متوجه آن نشده بود.

با زیر و رو کردن و به کار گرفتن عباراتی که شامل اعداد مختلط بودند *اُلر* به گروهی از روابط تئوریک از جمله فرمول معروف (۱۷۴۸) خود یعنی:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

دست یافت.

(برای تاکید بر اینکه هیچ چیز در دنیا تازگی ندارد باید توجه کرد که نظیر این فرمول توسط *راجر کوُتس* (Roger cotes) در سال ۱۷۱۴ شناخته شده بود) با قرار دادن $\theta = \pi$ به معادلهٔ $e^{i\pi} = -1$ بر می خوریم که در این رابطهٔ بی نظیر سه علامت ریاضی π, i, e به هم مربوط می شوند، توسعه تئوری لگاریتم مختلط با تعریف

$$e^{w} = z \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \log z = w$$

به نتایج پیچیده‌تری دست می‌یابیم و با به کار گرفتن فرمولها نتیجه می گیریم :

$$e^{\log z+m\pi i} = e^{\log z}(e^{\pi i})^m = z.(-۱)^m$$

و به ازاء عدد صحیح زوج $m = ۲n$ این رابطه تبدیل به

$$e^{\log z+۲n\pi i} = z$$

می‌شود، که می‌رساند، $\log z + ۲n\pi i$ و خود لگاریتمی از z است . لگاریتم مختلط چند مقداره است و برای یک عدد صحیح فرد $m = ۲n + ۱$ خواهیم داشت :

$$e^{\log z+(۲n+۱)\pi i} = -z$$

و بنابراین $\log(-z) = \log z + (۲n + ۱)\pi i$

این خود جوابگوی مباحثه *برنولی - لایبنز* نیز می‌باشد یعنی برای عدد حقیقی و مثبت x ، $\log(-x)$ باید مختلط باشد .

تئوری اعداد مختلط روز به روز جذاب‌تر و اسرار آمیزتر می شد و کمبود آن فقط تفسیر واقعی و محکمی بود که جوهر مطلب را روشن می نماید .

در سال ۱۷۹۷ *کاسپار وسل* (Caspar wessel) در مقاله‌ای به زبان دانمارکی یک عدد مختلط را به یک نقطه در صفحه تشبیه کرد، مطلبی که تقریباً بدون توجه باقی ماند تا اینکه ترجمه فرانسوی آن یک صد سال بعد به نشر درآمد . در این مدت این نظریه به *ژان رُبرت آرگاند* (Jean Robert Argand) منسوب شده بود که خود مستقلاً در سال ۱۸۰۶ به این توجیه دست یافته بود و از آن زمان تفسیر هندسی اعداد مختلط به **دیاگرام آرگاند** موسوم شده بود .

یکی دیگر از پیشقدمان تئوری اعداد مختلط *کارل فردریک گوُس* است، او در تز دکتریش در سال ۱۷۹۹ مسأله‌ای را پیش کشید که از اوایل قرن ۱۸ مورد علاقهٔ بسیاری از ریاضی دانان بود . در آغاز باوربراین بود که همانطور که معادلات درجه دوم حقیقی منتهی به دسترسی به اعداد جدید مختلط می‌شوند ، معادلات با

ضرایب مختلط به انواع بیشتری از این اعداد جدید مختلط باید دست یابند. *ژان دالامبر* (۱۷۱۷-۸۳) تخمین زد که اعداد مختلط خود برای این امر کافی می باشند و *گوس* در کتاب اصل تئوری جبر خود این مطلب را تائید می کند، به این عنوان که هر معادله چند جمله ای دارای یک ریشهٔ مختلط است. او ابتدا این مطلب را کاملاً در شکل حقیقی یعنی اینکه، هر چند جمله ای حقیقی به فاکتورهای خطی و درجه دوّم تجزیه می شوند اثبات و از استفادهٔ صریح اعداد مختلط اجتناب می نماید و بعدها تعمیم آن را نیز به کار می برد (سال ۱۸۱۱).
منظور او از یک عدد مختلط، نقطه ای از صفحه می باشد و عیناً این نظر را در نامه ای به *بسل* Bessel اظهار می کند و در سال ۱۸۳۱ یک تعبیر هندسی با جزئیات از اعداد مختلط ارائه می دهد، این در زمانی است که به اعداد مختلط تا آن موقع اهمیت بسیاری می دادند.

در سال ۱۸۳۷ یعنی تقریباً سیصد سال بعد از استفادهٔ *کاردانو* از اعداد مختلط *ویلیام روُآن هامیلتون* (William Rowan Hamilton) تعریف اعداد مختلط را منتشر نمود و آنها را به صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی که تابع قوانین صریح عملیاتی بودند معرفی نمود. (در همین سال گوس در نامه ای به *ولف گانگ بُولی ای* Wolfgang Bolyia) خاطرنشان کرد که او خود به پرورش همین نظریه در سال ۱۸۳۱ پرداخته است) و بالاخره اعداد مختلط بر پایهٔ مستحکم جبری قرار می گیرند.

۲. مبداء آنالیز مختلط

برخلاف ظهور تدریجی مفهوم اعداد مختلط، به نظر می رسد که توسعه آنالیز مختلط نتیجهٔ مستقیم علاقهٔ ریاضی دانان به تعمیم گرائی بوده، که عمداً در مقایسه با آنالیز حقیقی جستجو شده است. همانطور که در فوق ملاحظه شد آثار اولیه ای از عملیات تحلیلی در توابع مختلط در کار *برنولی*، *لابینز* و *اُلر* و معاصرانشان دیده می شود.

گوُس در سال ۱۸۱۱ در نامه ای به بسل نشان می دهد که او از تئوری اصلی انتگرال گیری مختلط که بعداً آنالیز مختلط بر محور آن پایه ریزی شد، آگاه

بوده است. در آنالیز حقیقی وقتی انتگرال یک تابع را بین دو حد a و b

$$\int_a^b f(x)dx$$

محاسبه می کنیم این حدود، کاملاً انتگرال را مشخص می نماید امّا در حالت مختلط a و b که معرف دو نقطه در صفحه هستند لازم است که منحنی ای از a به b در نظر گرفته شود و محاسبهٔ انتگرال در طول این منحنی انجام گیرد؛ سؤال اینجاست که تا چه حد مقدار این انتگرال بستگی به منحنی انتخاب شده خواهد داشت؟

گوُس چنین می گوید «من حال تصدیق می کنم انتگرال $\int f(x)dx$، فقط دارای یک مقدار است حتی اگر روی مسیرهای مختلف گرفته شده باشد، البته به شرط آنکه $f(x)$ در فضای بین دو مسیر بی نهایت نگردد و این قضیه ای بسیار زیبا است که اثبات آن را در موقعی مناسب تر خواهم داد.» به نظر می رسد که هیچ وقت چنین موقعیتی نصیب او نگردید و مراحل حساس این اثبات در ۱۸۲۵ توسط شخصی که در آن زمان یعنی در زمان شکوفایی آنالیز مختلط در صدر بوده است به چاپ می رسد. او *آگوستین لوئیس کوشی* بود و بعد از آن این قضیه به نام **قضیهٔ کوشی** معروف شد. به دست کوشی مفاهیم اصلی آنالیز مختلط به سرعت ظاهر می شدند. یک تابع مختلط برای اینکه مشتق پذیر باشد، می باید از طبیعت خاصی برخوردار باشد و قسمت حقیقی و مختلط آن باید در شرطی صدق کند، شرطی که به نام *معادلات کوشی - ریمان* معروف است. انتگرالهای کانتوری توابع مشتق پذیر این خواص را دارا بودند و به طور خصوصی توسط گوُس ملاحَظه شده بودند.

کوُشی همچنین نشان می دهد که محاسبه یک انتگرال که در طول مسیرش به دور نقطه ای که تابع را بی نهایت می نماید بپیچد توسط قضیهٔ **رزیدو** (باقیمانده) قابل محاسبه است که البته این خود احتیاج به محاسبه عدد ثابتی موسوم به **رزیدو** که در نقاط استثنایی وجود دارد و آگاهی به اینکه مسیر در هر نقطه استثنایی چند بار به دور این نقاط خواهد پیچید، می باشد. راه دقیق مسیر در حقیقت مطرح نبوده است. اهمیت سریهای توانی در این قضیه به ثبوت رسید و علاقمندان

دیگر، این ایده را توسعه دادند.

پییر آلفانس لوران Pierre Alphanse Laurent سری *لُوران* را که شامل توانهای منفی بود، در سال ۱۸۴۳ معرفی نمود. در این فرمول در نزدیکی یک نقطه استثنایی z_0 تابعی مشتق پذیر بیان می شود، که از نوع حاصل جمع دو سری

$$F(z) = \left[a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots\ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots\right]$$

$$+\left[b_1(z - z_0)^{-1} + \ldots\ldots + b_n(z - z_0)^{-n}\right]$$

است و رزیدوی تابع در z_0 در حقیقت همان ضریب b_1 می باشد. استفاده از قضیه رزیدوها محاسبات انتگرال مخلط را بیش از حد تصور ساده نمود.

تعاریف کوشی در مورد مفاهیم تحلیلی مانند پیوستگی حد و مشتق، شبیه آن نیستند که ما امروز از آنها استفاده می کنیم. او این مطالب را بر روی مفاهیم بی نهایت کوچکها «infinitesimal» پایه ریزی می کند که بعدها از اعتبار می افتند، این تعاریف به طور مستحکمی توسط *کارل وایرستراس* Karl weierstrass (۹۷–۱۸۱۵) توسعه می یابد که تا این زمان هنوز به عنوان مفاهیم اساسی مورد نظرند. (ناگفته نماند که پیشرفتهای جدید در آنالیز غیر استاندارد که مفهوم بی نهایت کوچکها «infinitesimal» را موجه می نماید به ما می گوید که شاید دربارهٔ عقاید کوشی عجولانه قضاوت کرده ایم). *وایرستراس* تمام کارهایش را روی سریهای توان پایه گذاری می نماید، ولی در این کار ها آنچه که کمبودش (اقلاً از دیدگاه آنچه که به چاپ رسیده است) ملاحظه می شود دیدگاه هندسی است. این کمبود توسط عقاید *دوروس برنارد ریمن* Bernard Riemann (۶۶–۱۸۲۶) تصحیح می گردد، علی الخصوص نظریهٔ سطح ریمن که به سال ۱۸۵۱ برمی گردد و بر روی بسیاری از توابع چند متغیره کار می کند که صفحه مختلط در آن به لایه های مختلف که در هر کدام از آنها تابع یک متغیره می باشد. روش توپولوژیکی ای که این لایه ها به هم وصل می شوند از قاطعیتی مهم برخوردار است.

از اواسط قرن نوزدهم به این طرف ترقی آنالیز مختلط بسیار پیوسته و

قوی بوده و توسعه های دوروس را در برداشته است. اکنون مقادیر اصلی کوشی خالص تر و مجهزتر به زبان توپولوژی جدید باقی می ماند. اختراع شکل اعداد مختلط که زمانی توسط پیشقدمان ریاضی محال و بی مصرف تلقی می شد امروز به تئوری بسیاز زیبا و قانع کننده ای که در کاربرد ارُدینامیک و مکانیک سیالات و بسیاری از رشته های دیگر نقش بزرگی دارد، تبدیلَ شده است.

۳. معمّا

حال برگردیم به معمای تاریخی خود که «چرا اعداد مختلط چنین با زحمت و معطّلی توسعه پیدا کرد، در حالی که توسعه آنالیز مختلط انفجاری بود». ما یک جواب محتمل درین امر ارائه می دهیم (که البته چون یک عقیده شخصی است دربارهٔ آن باب بحث گشوده است) و پاسخی که ارائه می دهیم کمی با آنچه که در فوق بیان شد فرق دارد.

آنچه که از تاریخ اوّلیه اعداد مختلط برمی آید آن است که ریاضی دانان بی شماری از نسلهای مختلف سر خود را به دیواری آجری می زدند و به دنبال چه؟ به دنبال یک پوچی. تعریف اعداد مختلط به صورت زوجهای مرتب (x, y) یا نقاطی از صفحه بارها به دست آمده بود و حتی در کار *برنولی* صریحاً بیان شده است و در کار *والیس*Wallis این تعریف بر همه روشن است و همینطور در کار *وِسِل آرگانه* و *گوُس* دوباره این تعریف ظاهر می شود.

موریس *کلاینُ* Morris Kline یک بار چنین اظهار می کند که بسیاری از ریاضی دانان چون Cotes ، Demoivre ، اُلر و Vander monde اعداد مختلط را با نقاطی از صفحه مشخص کرده بودند چون همهٔ آنها در حل معادله $X^n - ۱ = ۰$ جوابها را رؤوس یک چند ضلعی منظم در نظر گرفته اند.

اگر جواب مساله اینقدر آسان است، چرا قبلاً این مطلب شناخته نشده است؟ ریاضی دانان قدیم زیاد، به دنبال یک تفسیر و تعبیر از اعداد مختلط واینکه از دیدگاه فلسفی اعداد مختلط چه مفهومی دارد، نبودند.

به هر حال توسعه آنالیز مختلط نشان داد که مفهوم عدد مختلط آنقدر مفید است که هیچ ریاضی دان دارای عقل سلیم نمی تواند بدان بی اعتنا باشد و این سؤال که حال با یک عدد مختلط چه می توان کرد، مطرح شد و وقتی که به این

سؤال جواب قانع کننده داده شد، سؤال فلسفی اولیه از بین رفت.

جواب برنده ای که *هامیلتن* Hamilton به این مساله ی اساسی ۳۰۰ ساله داد خوشحالی زیادی ایجاد نکرد، چه این مساله ای قدیمی بود و از زمانی که ریاضی دانان نظریه اعداد مختلط را به صورت یک تئوری منسجم و نیرومند درآورده بودند ترس از وجود اعداد مختلط کمتر شده و علاقهٔ ریاضی دانان از بین رفته بود.

با گذشت زمان دید فرهنگی تغییر می نماید و آنچه را که یک نسل به عنوان یک مساله یا جواب آن می بیند توسط نسل دیگر به آن شکل تفسیر نمی گردد و این مطلب را باید در پیشرفت تاریخی ریاضیات کاملاً مد نظر داشت. دیدگاه تاریخی را نمی توان از نظرگاه نسل حاضر ملاحظه کرد زیرا کج روی و تفسیرهای غلطی را پشت سر گذاشته است.

۴. دیدگاه جدید

برای کسانی که برای اولین بار به مطالعه آنالیز مختلط می پردازند نتیجه ای که در فوق گرفته شد قابل توجه است. با وجودی که بعضی اوقات مفید است که توسعه یک تئوری را در مضمون تاریخی آن بنگریم ولی همیشه لازم نیست که منازعات تاریخی را دوباره شروع کنیم. البته احترام کافی به پیشقدمانی که راه خود را به درون سرزمین بکر ریاضی گشودند لازم است. ولی پیشرفتهای جدید به ما اجازه می دهد که این تئوری را از دیدگاهی تازه بنگریم. آنالیز مختلط حتماً به گوش امروزی ها اسم حامل صداهایی گمراه کننده است. خود کلمهٔ مختلط، معنی اشکال و پیچیدگی را می نمایاند و شاید معنی قدیمیِ آن که **مرکب** Composite نامیده می شد، مناسب تر باشد، زیرا قسمت حقیقی یک عدد مختلط معنی کاملاً متفاوتی با قسمت مختلط آن دارد. امروزه یک عدد مختلط، عددی کامل و تمام محسوب می شود. در نظر گرفتن آنالیز مختلط به عنوان دو کپی از آنالیز حقیقی تاکید نابه جایی بر جبر به پشتوانهٔ هندسه است، که در دراز مدت، خود بسیاری موثرتر است. در حقیقت اعداد مختلط از اعداد حقیقی مشکل تر نیستند و در مواردی آسانتر نیز می باشند چه چند جمله ایها همیشه ریشه خواهند داشت. همینطور آنالیز مختلط اکثراً از آنالیز حقیقی ساده تر است زیرا مثلاً هر

تابع مشتق پذیر به دفعات دلخواه مشتق پذیر، و دارای بسط سری های توانی است.

برای آمادگی جهت دستیابی به موضوع، به انتخاب دو اصل تنظیم کننده می پردازیم، نخست، تعمیم مستقیم آنالیز حقیقی است. تعاریف حد و اتصال، مشتق، انتگرال که توسیع طبیعی این مفاهیم از حقیقی است به شرط آنکه آنها را به نحو مقتضی در نظر بگیریم. چون در حال حاضر برای دانشجویانی که درس آنالیز مختلط را دنبال می کنند، فرض بر این است که به اندازه کافی با آنالیز حقیقی آشنایی دارند بنابراین بیشتر مسائل خود به خود حل می شود و می توانیم دانشجویان را به اطلاعات جمع آوری شده توسط خودشان ارجاع دهیم (که باعث صرفه جویی در وقت می گردد) و فقط با تغییر معانی بعضی از مفاهیم با جملاتی مناسب تر برای استفادهٔ بهتر آشنا کنیم که این خود صرفه جویی در وقت و انرژی می باشد و به ما اجازه می دهد که به کنه مطلب یعنی در جایی که فرقهای جالب اتفاق می افتد بپردازیم. بی تردید این فرق پدید می آید زیرا صفحه هندسهٔ غنی تری از خط دارد و این مطلب ما را به اصل تنظیم کننده دو م رهنمون می شود، یعنی با ارزش بودن دید هندسی و اینکه باید آن را پرورش داد. البته این دید را باید به مباحث محکم و رسمی تبدیل کرد که این نیز خود با به کار بردن مفاهیم جدید توپولوژی امکان پذیر است.

با استفاده از این دو اصل دسترسی مستقیم به آنالیز مختلط حاصل می شود. اوّل اینکه اعداد مختلط را رسماً به صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی تعریف می نماییم و آنها را نقاطی از یک صفحه تفسیر می کنیم. بنابراین توپولوژی اعداد مختلط بر حسب توپولوژی صفحه به دست می آید. با تکیه بر سری های توان که در مراحل بعدی نقش محوری را خواهند داشت می توان در یک پیگیری سریع، تعمیمی مختلط از مفاهیم پیوستگی حد و مشتق ارائه داد. در مطالعه تابع توانی مختلط به صورت سریهای توانی معمولی، آشکار می شود که چه رابطهٔ نزدیکی بین این تابع و توابع مثلثاتی (که خود سریهای توانی محسوب می شوند) وجود دارد. بعد از تعمیم مفهوم انتگرال لگاریتم را می توان یا به عنوان تابع معکوس یک تابع توانی یا به صورت انتگرال

$$\log z = \int \frac{1}{z} dz$$

در نظر گرفت.

این تعبیر رابطه نزدیکی بین درك هندسی و تحلیل رسمی ارائه می دهد. در این مرحله قضیهٔ کوشی به صورتهای مختلف معرفی می گردد و مباحث انتگرال منتهی به اثبات آن می شود که هر تابع مشتق پذیر را می توان به عنوان یک سری توانی بیان نمود، عموماً در سریهای لوران (با توانهای مثبت و منفی) توجه به نقاط منفرد (یعنی نقاطی که توابع در آنها بی نهایت می گردند) را برطرف می نماید و این خود منتهی به قضیه نیرومند باقی مانده ها (residnes) می شود که در محاسبهٔ انتگرالهای مختلط به کار می روند.

در بازگشت به مفاهیم هندسی باید بگوییم که آنالیز مختلط برای تئوری پتانسیل دو بعدی گرانبهاست و بالاخره مفاهیم هندسی ریمان را می توان بر حسب توپولوژی جدید مورد امعان نظر قرار داد که به ما دیدی در توابع چند متغیره می دهد (مانند لگاریتم) و افقهای جدیدی جهت پیشرفت به روی ما می گشاید.

مبادی آنالیز مختلط و دیدگاهی تازه

اگر، آن طور که کرونکر[1] اظهار داشت، اعداد صحیح آفریدهٔ خداوند است و بقیه هر چه هست کار بشر؛ پس با اطمینان می توان گفت که اعداد مختلط یکی از شگفت آورترین ساخته های بشر است. اعداد مختلط قرنها مایهٔ حیرت ریاضی دانان و فلاسفه بوده است. از نخستین باری که اعداد مختلط در Ars Magna اثر *کاردان*[2] مطرح شدند تا انتشار یک تعریف رسمی، که جوابگوی استانداردهای جدید در میزان دقت باشد، حدود سیصد سال طول کشید. بر این اساس، اگر خوانندهٔ تازه کار آنالیز مختلط را نظریه ای پیچیده بپندارد سزاوار بخشش است. البته با معمایی تاریخی هم روبرو می شویم و آن اینکه گرچه نزدیک به سیصد سال طول کشید تا یک بررسی رضایت بخش از اعداد مختلط به عمل آید، برای تکمیل قسمتی عمده از آنالیز مختلط فقط کمتر از یکدهم آن مدت وقت صرف شد.

بدیهی است که اعداد باید به طور مقدم مطرح شوند و گرنه آنالیز چیزی ندارد که با آن به کار بپردازد، امّا سلسلهٔ رویدادها شگفت انگیز است. شرحی بر این سخن آن است که با بنیاد اصول بر پایه بسیاری مسائل عمیق فلسفی، زمانی طولانی برای درك و تسلط بر این مسائل صرف شد. اما آن زمان که «غلبه» روی داد، در مقام مقایسه، پیشرفتهای بیشتر آسان بود.

تاریخ، سخن از در دیگر می گوید.

---

1. Kronecker

2. Cardano

۱ . مبادی اعداد مختلط

در کتاب مشهور Ars Magna تالیف گیرولاما کاردانو به سال ۱۵۴۵ ، دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$x + y = ۱۰$$

و

$$xy = ۴۰$$

مورد بررسی قرار گرفته با نمادهای جدید، جوابی به صورت :

$$x = ۵ + \sqrt{-۱۵}, \quad y = ۵ - \sqrt{-۱۵}$$

به دست آمده است . *کاردان* تعبیری برای ریشهٔ دوم یک عدد منفی به دست نداد . امّا ملاحظه کرد که با فرض آنکه این مقادیر از قوانین معمولی جبری پیروی کنند، در معادلات مفروض صدق می کنند . او توجه چندانی به این کشف ننمود . «علم حساب با دقت بسیار پیش می رود، بدان سان که در انتها . . . آنچنان مهذب refined می شود که بی فایده می نماید . »

او در همان کتاب متذکر شد که به کار گرفتن فرمول *تارتاکلیا*[3] برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$x^{۳} = ۱۵x + ۴$$

منجر به عبارت :

$$x = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{-۱۲۱}} + \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{-۱۲۱}}$$

می شود، در حالی که جواب $x = ۴$ واضح است .

رافائل بامبلی[4] (۱۵۲۶-۷۳) برای تلفیق هر دو جواب راهی ارائه داد؛ به

---

3. Tartaglia

4.Raphael Bambelli

این ترتیب که ریشه های «غیرممکن» را همچون ریشه های عادی پنداشت ، مانند :

$$(۲ \pm \sqrt{-۱})^۳ = ۲ \pm \sqrt{-۱۲۱}$$

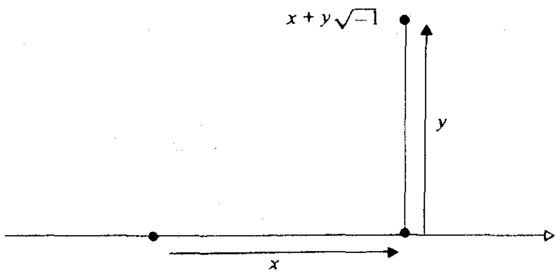
بنابراین عبارت *کاردان* می شود :

$$x = (۲ + \sqrt{-۱}) + (۲ - \sqrt{-۱}) = ۴$$

این ریشهٔ «غیرممکن» درست همان ریشهٔ معمولی اما با ظاهر متفاوت یعنی به صورت مختلط است .

رنه دکارت[5] در کتاب *هندسه* (۱۶۳۷)، بین اعداد «حقیقی» و «موهومی» (انگاری) تفاوت قائل شد ؛ به این ترتیب که پیش آمدن اعداد موهومی را دلیلی بر لاینحل بودن مساله مورد نظر دانست . این عقیده ای بود که بعدها نیوتون هم در آن سهمی داشت .

جان والیس[6] در کتاب جبر خود(۱۶۷۳) اعداد مختلط را به طریق هندسی نمایش داد . به این ترتیب که روی یک خط ثابت قسمت حقیقی عدد مختلط را جدا می کردند (در جهتی که به وسیلهٔ علامت قسمت حقیقی مشخص می شود)، سپس قسمت موهومی به زاویهٔ قائمه جدا می شد (شکل ۰-۱) .



شکل (۰-۱)

5.Rene Descartes

6.John Wallis

چنین طرحی، بنا به دلائلی، متوالیاً مورد بی توجهی قرار گرفت.

در ۱۷۰۲ *جان برنولی*[7] مشغول محاسبهٔ انتگرالهایی به صورت:

$$\int \frac{dx}{ax^۲ + bx + c}$$

با کمک کسرهای جزیی بود. با این فلسفه که با اعداد مختلط می توان مثل اعداد گویا عمل کرد، انتگران را به این صورت نوشت:

$$\frac{۱}{ax^۲ + bx + c} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

(ما نمادهای جدید را به کار برده ایم) که در آن α و β ریشه های عبارت درجهٔ دوم مخرج هستندو به این ترتیب انتگرال را به شکل:

$$A \log(x - \alpha) + B \log(x - \beta)$$

به دست آورد. تصمیم جسورانهٔ او در به کار بردن روش مشابه برای عبارت درجهٔ دوم، چه ریشهٔ حقیقی داشته و چه نداشته باشد، منجر به لگاریتم اعداد مختلط شد. اما لگاریتم عدد مختلط چیست؟ *برنولی* و *لیب نیتز*[8] هر دو همین روش را به کار بردند اما تا سال ۱۷۱۲ درگیر مباحثه بودند؛ *لیب نیتز* اظهار می داشت که لگاریتم عدد منفی مختلط است در حالی که *برنولی* تاکید بر حقیقی بودن آن داشت.

برنولی چنین استدلال می کرد که، چون:

$$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

7.John Bernoulli

8.Leibniz

پس با انتگرالگیری نتیجه می شود :

$$\log(-x) = \log(x)$$

از طرف دیگر ، *لیب نیتز* اصرار داشت که لگاریتم فقط برای x مثبت درست است .

لئونارد اویلر[9] مباحثه را به سود *لیب نیتز* در سال ۱۷۴۹ پایان داد، وی خاطر نشان ساخت که این انتگرالگیری نیاز به یک ثابت دلخواه دارد؛ (نکته ای که برنولی از آن غافل بود) .

$$\log(-x) = \log(x) + c$$

اویلر؛ با تبدیلات ماهرانه و رسمی روی عبارات، شامل اعداد مختلط گروهی از روابط نظری به دست آورد که از جمله شامل رابطهٔ مشهور :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

در سال ۱۷۴۸ بود. (با تاکید بر اینکه در این جهان هیچ چیز تازه نیست، باید متذکر شد که فرمولی معادل فرمول فوق در سال ۱۷۱۴ بر دوجر *کاوتس*[10] معلوم شده بود). با قرار دادن $\theta = \pi$ می رسیم به :

$$e^{i\pi} = -۱$$

رابطه ای که عجیب و غریب که سه سمبل ریاضی، e ، i و π را در یک معادلهٔ شگفت انگیز گرد آورده است .

9.Leonhard Euler

10.Roger Cotes

با بسط نظریهٔ لگاریتم به اعداد مختلط با این تعریف که :

$$\log z = w$$

اگر و فقط اگر $e^w = z$ باشد، نتایج شگفت انگیز دیگری به دست خواهد آمد. همین فرمول با کمی تغییر نتیجه می دهد :

$$e^{\log z + m\pi i} = e^{\log x}(e^{\pi i})^m$$

به ازاء یک عدد زوج $m = ۲n$ ، از رابطهٔ فوق نتیجه می شود :

$$e^{\log x + ۲n\pi i} = z,$$

و بنابراین $\log z + ۲n\pi i$ نیز یک لگاریتم z است. حاصل آنکه لگاریتم یک عدد مختلط چند ارزشی است. به ازاء یک عدد فرد $m = ۲n + ۱$ ، داریم :

$$e^{\log z + (۲n+۱)\pi i} = -z,$$

و در نتیجه :

$$\log(-z) = \log z + (۲n + ۱)\pi i$$

این تحلیلی بر مباحثهٔ *لیب نیتز - برنولی* است : به ازاء x مثبت حقیقی، $\log(-x)$ می بایست که مختلط باشد.

نظریهٔ اعداد مختلط با دلفریبی هر چه بیشتر در حال رشد بود و کمبود آن تعبیری قوی بود تا بتواند دقیقاً بیان کند که این اقلام چه هستند.

در سال ۱۷۹۴ *کاسپار وِسِل*[11] مقاله ای به زبان دانمارکی منتشر کرد که در

11.Caspar Wessel

آن به شرح نمایش یک عدد مختلط به عنوان یک نقطه در صفحه پرداخته بود. این موضوع کلاً به فراموشی سپرده شد، تا این که صد سال بعد یک ترجمهٔ فرانسوی از این مقاله انتشار یافت. در این احوال این نظریه را به جین--*روبرت آرگاند*[12] نسبت دادند که مستقلاً در سال ۱۸۰۶ به تفصیل در این باره مطلب نوشت. از آن زمان به بعد تعبیر هندسی اعداد مختلط به نام نمودار *آرگاند* شناخته شده است.

پیشتاز دیگر در تئوری اعداد مختلط *کارل فریدریش گاوس*[13] بود. او در رسالهٔ دکتری خود در سال ۱۷۹۹ به مساله ای پرداخت که از همان ابتدای قرن هیجدهم مورد توجه ریاضی دانان بود. در ابتدا به طور گسترده ای باور بر این بود که، همانطور که ریشه های معادلات درجهٔ دوم باضرایب حقیقی می توانند اعدادی تازه «مختلط» باشند، ریشه های معادلات درجهٔ دوم با ضرایب مختلط نیز، منجر به انواع تازه ای از اعداد می شوند. جین *دالامبر*[14] (۸۳-۱۷۱۷) حدس زد که اعداد مختلط به تنهایی کافی است. *گاوس* در «قضیهٔ اساسی جبر» این حدس را تأیید کرد که هر معادلهٔ کثیر الجمله یک ریشهٔ مختلط دارد. او ابتدا قضیه را صرفاً برای صورت «حقیقی» ثابت کرد بدین مفهوم که: هر کثیر الجمله با ضرایب حقیقی به عاملهای خطی (درجهٔ اوّل) و درجهٔ دوم (با ضرایب حقیقی) تجزیه می شود و به این ترتیب از کاربرد صریح اعداد موهوم پرهیز کرد؛ وی بعدها به حالت کلی پرداخت. تا سال ۱۸۱۱ او اعداد مختلط را به عنوان نقاطی از صفحه در نظر می گرفت و در نامه اش به *بسل*[15] همین را گفته بود. در سال ۱۸۳۱ نمایش اعداد مختلط را با تفصیل تمام انتشار داد که برایش موجب کسب احترام شد.

در سال ۱۸۳۷، تقریباً سه قرن پس از استفادهٔ *کاردان* از «اعداد موهومی» *ویلیام رووان هامیلتون*[16] تعریف اعداد مختلط را به صورت زوجهای مرتب که قوانین مشخصی برای اعمال بر آنها وضع شده بود، منتشر ساخت. (در همان

12.Jean-Robert Argand

13.Carl Friedrich Gauss

14.Jean D'Alembert

15.Bessel

16.William Rowan Hamilton

سال گاوس به *ولف گانگ بولیایی*[17] نوشت که همان نظریه را در سال ۱۸۳۱ پرورانده است). بالاخره این کار، اعداد مختلط را بر پایهٔ قوانین جبری استواری قرار داد.

۲. مبادی آنالیز مختلط

علی رغم پیدایش تدریجی مفهوم عدد *مختلط*، به نظر می رسد که توسعه *آنالیز* مختلط نتیجهٔ ابهام ریاضی دانان در تعمیم است. این گفته، در مقام مقایسه با آنالیز حقیقی، براساس اندیشه و تامل است.

همانطور که متذکر شدیم، آثار اولیه ای از اعمال تحلیلی روی توابع مختلط در نوشته های *برنولی*، *لایب نیتز*، *اویلر* و معاصرین آنها دیده می شود.

گاوس، در نامهٔ ۱۸۱۱ خود به *بسل*، نشان می دهد که از قضیهٔ بنیادی مربوط به انتگرالگیری مختلط مطلع است و همین قضیه موجب شد که بعدها آنالیز مختلط بنیان نهاده شود. در آنالیز حقیقی، وقتی که می خواهیم از تابع f بین حدود a و b انتگرال بگیریم،

$$\int_a^b f(x)dx$$

خود این، حدود انتگرال را مشخص می کند. اما در حالت مختلط هم که a و b به عنوان نقاطی از صفحه داده می شوند، لازم است منحنی مشخصی را از a تا b معرفی کنیم و از این قرار «در طول منحنی انتگرال بگیریم». سوال این است که تا چه اندازه مقدار انتگرال بستگی به منحنی انتخاب شده دارد؟

گاوس چنین می گوید: من اکنون با قطعیت می گویم که $\int f(x)dx$ فقط یک مقدار دارد. حتی اگر روی مسیرهای متفاوت اختیار شود، به شرط آنکه f(x) . . . در فضای محصور بین این مسیر نامتناهی نشود. این قضیه ای بسیار زیباست که برهان آن را . . . در موقعیتی مناسب بیان خواهم کرد.»

به نظر می آید که این موقعیت هرگز پیش نیامد. گام موثر در انتشار برهانی بر این حکم در سال ۱۸۲۵ به وسیلهٔ مردی برداشته شد که مقدر بود تا در اولین

17. Wolfgang Bolyai

مرحله از شکوفایی آنالیز مختلط مسند نشین باشد: *آگوستین لویس کوشی*[18]. پس از او این قضیه را «قضیهٔ کوشی» نامیدند. نظریه های اساسی آنالیز مختلط به سرعت از میان دستهای کوشی پدیدار می شدند. برای اینکه یک تابع مختلط دیفرانسیل پذیر باشد طبیعتاً باید ویژگیهای بسیار داشته، قسمتهای حقیقی و موهومی آن خاصیتهای معینی را دارا باشد که معادلات *کوشی-ریمان* نامیده می شود. بررسی نشان داد که انتگرالهای *کانتور*[19] از توابع دیفرانسیل پذیر دارای خاصیتی هستند که منحصراً به وسیلهٔ *گاوس* بیان شد. بعلاوهٔ، اگر منظور محاسبهٔ انتگرالی در طول یک مسیر باشد و این مسیر نقاطی را دور بزند که در آن نقاط تابع نامتناهی شود، کوشی نشان داد که چگونه این انتگرال را با کمک «تئوری مانده ها» می توان محاسبه کرد. مطلب اخیر نیاز به محاسبهٔ یک ثابت دارد که «ماندهٔ» تابع در هر نقطهٔ استثنایی نامیده می شود؛ نیز اطلاع از اینکه مسیر مورد نظر چند بار دور آن نقطه می چرخد مورد نیاز است. محل دقیق مسیر در عمل اصلاً اهمیتی ندارد.

در این نظریه سریهای توانی از اهمیت برخوردارند و دیگر کسانی که روی این نظریه کار می کردند به بسط این نظرّیات پرداختند. *پی یر-آلفونس لورانت* [20] در سال ۱۸۴۳ و سریهای لورانت، را معرفی کرد که شامل توانهای منفی است. در این فرمول بندی، که در نزدیکی یک نقطهٔ استثنایی $z_\cdot$ صورت می گیرد، یک تابع دیفرانسیل پذیر به صورت مجموعی از دو سری بیان می شود:

$$f(z) = \left[a_\cdot + a_1(z - z_\cdot) + \ldots + a_n(z - z_\cdot)^n + \ldots\right]$$

$$+\left[b_1(z - z_\cdot)^{-1} + \ldots + b_n(z - z_\cdot)^{-n}\ldots\right]$$

در این صورت ماندهٔ تابع در $z_\cdot$ همان b_1 است. با به کار بردن نظریهٔ مانده ها غالباً دیده می شود که محاسبهٔ انتگرالهای مختلط خیلی آسانتر از آن چیزی است که به

18. Augustin - Louis Cauchy

19.Contour

20.Pierre-Alphonse Laurent

نظر می رسد.

تعاریف کوشی از نظریات تحلیلی همچون پیوستگی، حدود، مشتقات و غیره درست آن چیزی نیست که ما امروز به کار می بریم. کوشی این نظریات را براساس مفاهیم اینفینی تزیمال بیان کرد که کم کم مورد بی اعتنایی قرار گرفت. پس از او *کارل وایرشتراس* [21] (۹۷-۱۸۱۵) بحث دقیق در این زمینه را، با تعاریفی که هنوز اساسی محسوب می شوند، گسترش داد (گرچه پیشرفتهای اخیر در «آنالیز غیر استاندارد» که اینفینی تزیمالها را توجیه می کند، به ما نشان می دهد که در قضاوت نسبت به طرحهای کوشی خیلی عجول بوده ایم). *وایرشتراس* بنای کار خود را کلاً بر سریهای توانی نهاد. اما اثر او فاقد دیدگاه هندسی بود (دست کم آن طور که چاپ شده بود) این نقص به وسیلهٔ ایده های دور-رس *برنهارد ریمان* [22] (۶۶-۱۸۲۶) برطرف گردید. *ریمان* بخصوص با مفهومی به عنوان «*رویهٔ ریمان*»، با آغاز از ۱۸۵۱، به بررسی تابعهای چند ارزشی می پردازد به این ترتیب که با چند لایه انگاشتن صفحهٔ مختلط، تابع چند ارزشی مفروض بر هر یک از لایه ها، تابعی یک ارزشی باشد. در این مورد مطلب عمده روشی است توپولوژیک که در آن لایه ها به هم پیوند می شوند.

از نیمهٔ قرن نوزدهم به بعد پیشرفت آنالیز مختلط سریع و پیوسته توام با گسترشهای دور - رس بوده است. آراءاساسی ریمان بر جای ماندند که اکنون تهذیب شده و به قالب زبان هر چه تازه تر توپولوژی درآمده اند. ابداع غامض اعداد مختلط، که زمانی گذشتگان ما آن را «ناممکن» و «بی مصرف» توصیف کرده بودند، هم اکنون به بخشی از یک نظریهٔ مقنّع زیبا با موارد استعمال عملی برجسته در آیرودینامیک، مکانیک سیالات و بسیاری زمینه های دیگر تبدیل شده است.

۳. معما

به «معمای تاریخی» خودمان بر می گردیم. چرا پیشرفت اعداد مختلط آنقدر پرزحمت و توام با تردید بود، در حالی که پیشرفت آنالیز ریاضی آنچنان

21.Karl Weierstrass

22.Bernhard Riemann

انفجارآمیز؟

جواب قابل قبولی را بیان می کنیم (البته این یک نظر شخصی است، بنابراین در بحث باز است)، این جواب با توضیحاتی چون «شالوده و هجوم» که قبلاً بیان شدَ قدری تفاوت دارد.

چون به تاریخ گذشتهٔ اعداد مختلط بنگریم، به طور کلی چنین برمی آید که نسلهای بی شماری از ریاضی دانان سر بر دیوار آجری می کوفتند، در جستجوی چه چیز؟ چیزی بی مایه. تعریف اعداد مختلط به صورت زوجهای مرتب (y و x)، یا به صورت نقاطی در صفحه، بارها و بارها عنوان شد. این مطلب حتی در نوشته *بامبلی* مستتر است؛ آن را در نوشتهٔ *والیس* هم می توان دید، به وسیلهٔ *وسل*، *آرگاند*، *گاوس* باز هم مطرح شد. یک بار موریس کلاین [23] متذکر شد کَهَ: این که مردان بسیاری - *کاوتس*، *دوموآور* [24] ، *اویلر*، *واندرموند* [25] - اعداد مختلط را به صورت نقاطی در صفحه می نگریستند از این واقعیت سرچشمه می گیرد که در تلاش برای حل معادلهٔ $x^n - 1 = 0$ جوابها را به عنوان رؤوس یک چند ضعلی منتظم می پنداشتند.

اگر این مسأله چنین جواب ساده ای داشت، چرا چنین چیزی زودتر شناخته نشد؟

ریاضیدانان گذشته چندان در پی یک *ساختار* برای اعداد مختلط به عنوان یک معنی نبودند، به مفهوم فلسفی این که «اعداد مختلط چه هستند؟». امّا، پیشرفت *آنالیز مختلط* نشان داد که مفهوم عدد مختلط چنان مفید بود که هیچ ریاضیدانی با فکر درست نمی توانست از آن غفلت ورزد و زمانی که جوابی قانع کننده می یافت آن سوال فلسفی از خاطر محو می شد.

خبر شادی بخش در جواب کنایه آمیز *هامیلتون* [26] به مسأله اساسی سیصد ساله مشاهده نمی شود که می گوید؛ «کلاه کهنه ای بود».

23.Morris Kline

24.de, Moivre

25.Vandermonde

26.Hamilton

آن زمان که ریاضیدانان تصور خود را از اعداد مختلط به صورت یک نظریه منسجم درآوردند واهمهٔ آنها که به وجود اعداد مختلط مربوط می شد از اهمیت افتاد و دیگر توجهی به این بیم نشد.

در تاریخ ریاضیات مواردی دیگر با چنین حالتی وجود دارد اما شاید هیچ یک به این صراحت نباشد.

با گذشت زمان، فرهنگ جهانی تغییر می کند. آنچه را که یک نسل به عنوان یک مسأله با یک راه حل می پندارد، نسل دیگر چنین تعبیری از آن ندارد. شایسته است به هنگام بررسی تاریخ ریاضیات، همواره این نکته را به خاطر داشته باشیم که تنها از دیدگاه نسل حاضر به تاریخ نگریستن، ممکن است به سردرگمی و سوء تعبیر بیانجامد.

۴. دیدگاهی تازه

نتیجه ای را که هم اکنون بیان کردیم برای کسی که اولین بار به مطالعهٔ آنالیز مختلط می پردازد اشارات ضمنی چندی را شامل است. گر چه بعضی اوقات بررسی پیشرفت این نظریه با توجه به زمینهٔ تاریخی آن مفید به نظر می رسد، امّا لزومی ندارد که هر بار در صحنهٔ نبردهای تاریخی بجنگیم. در این متن، هر جا که میسر باشد، به تجلیل از پیشتازانی می پردازیم که راه خود را به سوی خطّهٔ بکر ریاضیات گشودند امّا پیشرفتهای اخیر به ما امکان می دهد که این نظریه را با دید تازه ای بنگریم. برای شنوندهٔ جدید همان *نام* آنالیز مختلط، آوای گمراه کننده ای به همراه دارد: همین نام، مختلط بودن را به مفهوم پیچیده بودن به ذهن متبادر می کند. لفظ پیشین، «مرکب» (به جای مختلط) شاید وقتی مناسب باشد که «جزء حقیقی» از یک عدد مختلط وضعی کاملاً متفاوت با «جزء موهومی» آن داشته باشد. ولی امروزه یک عدد مختلط یک کُلّ کامل است. اما آنالیز مختلط چیست؟ دو کپیه از آنالیز حقیقی - اگر بتوان چنین چیزی گفت - با تاکید زائد بر جبر به قیمت هندسه، طوری که سرانجام به مراتب تواناتر شود. در واقع اعداد مختلط غامض تر از اعداد حقیقی نیستند؛ از بعضی جهات ساده تر ند. مثلاً، کثیر الجمله ها همیشه ریشه دارند. به طور مشابه آنالیز مختلط در بیشتر موارد ساده تر از آنالیز

حقیقی است: مثلاً، هر تابع دیفرانسیل پذیر هر چند بار بخواهیم دیفرانسیل پذیر است و یک بسط به سری توانی دارد.

برای ورود به بحث دو اصل سازمان دهندهٔ اساسی را می پذیریم: نخست تعمیم مستقیم آنالیز حقیقی به آنالیز مختلط است. تعاریف مربوط به حدود، پیوستگی، دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری تعمیم طبیعی از مفاهیم حقیقی است، به شرط آنکه در بیشتر عبارتها دقیقاً به آنها توجه کنیم. در شرایط فعلی هر دانشجویی که درسی از آنالیز مختلط انتخاب می کند، می توان فرض کرد که مطالعه ای طولانی روی آنالیز حقیقی داشته است و در نتیجه *در بسیاری از نبردها به پیروزی رسیده است*: بدین مناسبت ما دانشجو را وا می داریم که به اندوختهٔ دانش خود رجوع کند، تنها درنگی خواهیم داشت برای آنکه آنها را، برای استفادهٔ فعلی، به قالب مناسب درآورد. این کار از صرف دقت و انرژی ما می کاهد به ما اجازه می دهد که هر جا اختلافهای درخور توجه پیش آید تا عمق مطلب پیش برویم. این مورد همواره پیش می آید، زیرا صفحه، هندسه ای سرشارتر از خط دارد و همین موضوع باعث می شود که دومین اصل سازمان دهندهٔ عمدهٔ خود را بیان کنیم: دید هندسی ارزنده است و باید پرورش داده شود. مسلماً، این دید هندسی باید به بحثهای رسمی جدی ترجمه شود و این کار را با به کار گرفتن مفاهیم توپولوژی جدید می توان انجام داد.

با به کار گرفتن این دو اصل راه ورود مستقیم به آنالیز مختلط به دست می آید. ابتدا اعداد مختلط را به طور رسمی به صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی تعریف می کنیم، با این تعبیر که آنها را نقاطی از صفحه می دانیم. سپس توپولوژی اعداد مختلط را بر حسب توپولوژی صفحه بیان می کنیم. در پی آمدهای متوالی می توان تعمیم های مختلط از مفاهیم پیوستگی، حدود و دیفرانسیل گیری را با تاکید خاص بر سریهای توانی به انجام رسانید که نقشی در آینده خواهند داشت. مطالعهٔ تابع توانی مختلط، که به صورت سری توانی معمولی داده می شود، بستگی نزدیک بین این تابع و تابعهای مثلثاتی را آشکار می سازد (که خود تابعهای مثلثاتی نیز به صورت سریهای توانی بیان می شوند). پس از عمومیت دادن مفهوم انتگرال گیری، لگاریتم را می توان به صورت

معکوس یک توان، یا به صورت یک انتگرال بیان کرد. $\log z = \int 1/z\,dz$ که به وجه مناسب تعبیر شده باشد. این تعبیر بستگیهای نزدیک بین شهود هندسی و آنالیز رسمی را نشان می دهد.

در این مرحله قضیهٔ کوشی به صورتهای متفاوت و با به کار گرفتن بحث های انتگرال گیری منجر به برهانی می شود برای این قضیه که: هر تابع دیفرانسیل پذیر به صورت یک سری توانی بیان کرد. کلی تر آنکه، سری *لورانت* (با به کار گرفتن توانهای مثبت و منفی) توجه به نقاط منفرد (تکین) دارد. که در آن نقاط تابعها نامتناهی می شوند و از آن به «نظریهٔ مانده ها» هدایت می شویم که برای محاسبهٔ انتگرالهای مختلط نظریهٔ محکمی است.

با برگشت به نظرّیات هندسی، ملاحظه می شود که آنالیز مختلط در نظریهٔ پتانسیل دو بعدی بس گرانبها است. نهایتاً عقاید هندسی ریمان را از دیدگاه توپولوژی جدید می توان بررسی کرد تا بصیرتی کامل در مود تابعهای «چند ارزشی» (مثل لگاریتم) حاصل آید و زمینهٔ پیشرفتهای تازه فراهم شود.

فصل اول

جبر صفحهٔ مختلط

«روح مقدس به آستانه ای رفیع در اعجاز آنالیز، در شگفتی دنیای ایده آل، در دوگانگی بین بودن و نبودن که ما آن را ریشه های موهومی واحد می نامیم، دست یافت.» این سخن *گاتفرید لیب نیتز* در ۱۷۰۲ است - هر چند سخنوریش را با خودش به همراه برده باشد.

دید فعلی راجع به $\sqrt{-1}$ قدری ملال آور است، گرچه استفاده هایی که از آن شده لااقل به همان اندازه امید بخش است. وضع منطقی اعداد «مختلط»، که آن همه تشتت را در قرن هیجدهم سبب شد، در حال حاضر عمدتاً در تراز اعداد «حقیقی» است. آنچه که پیشینیان را سردرگم کرده بود تصنع آشکار و تجرید دستگاه اعداد مختلط در مقایسه با واقعی و طبیعی بودن دستگاه اعداد «حقیقی» بود؛ امّا ریاضیدان امروزی اعداد حقیقی را هم دارای تصنع و تجرید مشابه می داند.

در این فصل به بحث در ساختمان دستگاهی از اعداد می پردازیم که شامل همان اعداد حقیقی متعارف است. امّا امکان حل معادلهٔ $x^2 = -1$ را هم فراهم

می آورد. این دستگاه را به عنوان (دستگاه) *اعداد مختلط* می شناسیم. خوانندگان بسیاری هستند که از پیش به محتوای این فصل واقفند: با این وصف مطالعهٔ اجمالی همهٔ آن توصیه می شود تا مطالبی چون نمادگذاری را بررسی کنند و سپس به فصل بعد بپردازند.

همان طور که خط برای نمایش اعداد حقیقی به کار می رود، صفحه نیز وسیله‌ای طبیعی برای ارائه هندسی اعداد مختلط است. آزادی بیشتری که صفحه از آن برخوردار است به موضوع مورد بحث ما حالتی هندسی می دهد، که ما بر سر آنیم که در پرداختن به این نظریه همواره آن را مد نظر داشته باشیم.

۱ . ساختمان اعداد مختلط

یک عدد *مختلط* را به صورت یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی تعریف می کنیم. جمع و ضرب دو عدد مختلط چنین تعریف می شوند:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \qquad (1)$$

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2) \qquad (2)$$

مثلاً

$$(3,5)(2,7)=(3.2-5.7\ ,\ 3.7+5.2)=(-29,31)$$

این تعریف محصول قرنها تلاش برای درك اعداد مختلط است، و نشان می دهد که یک نظریهٔ ساده گاه تا چه حد می تواند گمراه کننده باشد. به هر حال، قبل از آنکه رابطهٔ این زوجهای مرتب را با $\sqrt{-1}$ بیان کنیم، به بیان چند خاصیت ساده می پردازیم.

قضیهٔ ۱.۱. مجموعهٔ اعداد مختلط، همراه اعمالی با تعریفهای فوق، یک میدان است. یعنی اکسیومهای زیر برقرارند: اگر $z_1=(x_1,y_1)$ ، $z_2=(x_2,y_2)$ ، $z_3=(x_3,y_3)$ اعدادی مختلط باشند، آنگاه

جمع و ضرب جابه جایی (تعویض‌پذیر) هستند:

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

جمع و ضرب شرکت پذیر (انجمنی) هستند:

$$\left.\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

یک عضو بی اثر عمل جمع (۰,۰) وجود دارد:

$$z_1 + (0\,,\,0) = z_1 \quad (5)$$

یک عضو بی اثر عمل ضرب (۱,۰) وجود دارد:

$$z_1 (1\,,\,0) = z_1 \quad (6)$$

هر عضوی یک معکوس جمعی دارد:

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0). \quad (7)$$

هر عضوی غیر از صفر یک معکوس ضربی دارد:

$$(x, y)\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\ ,\ \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0). \quad (8)$$

ضرب روی جمع توزیع پذیر (پخش پذیر یا پخشی) است:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (9)$$

برهان. همهٔ گفتارهای (۸) - (۳) نتایج مستقیم (۱) و (۲) هستند (البته با استفاده

از خواص میدان اعداد حقیقی R). مثلاً در (۹) داریم:

$$z_1(z_2+z_3)=(x_1,y_1)(x_2+x_3\ ,\ y_2+y_3)$$

$$=\left(x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)\ ,\ x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)\right)$$

$$=(x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3\ ,\ x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3),$$

$$z_1z_2+z_1z_3=(x_1,y_1)(x_2,y_2)+(x_1,y_1)(x_3,y_3)$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)+(x_1x_3-y_1y_3,x_1y_3+y_1x_3)$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2+x_1x_3-y_1y_3,x_1y_2+y_1x_2+x_1y_3+y_1x_3)$$

که، بنابر جبر حقیقی، همان زوج مرتب است.

بر خواننده است که دلایل مشابهی برای سایر گفتارها بیاورد.

نماد C برای میدان اعداد مختلط به کار می رود.

۲. نماد $x+iy$

نمادی که معمولاً برای یک عدد مختلط به کار می رود (x,y) نیست بلکه $x+iy$ است. این موضوع به *اویلر* برمی گردد، که i را به جای $\sqrt{-1}$ در سال ۱۷۷۷ به کار برد؛ هر چند این نماد اولین بار به وسیلهٔ *گاوس* به کار گرفته شد.

به منظور وفق این نماد، به ترتیب زیر عمل می کنیم. ابتدا توجه کنید که چون

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)\ ,$$

$$(x_1,0)(x_2,0)=(x_1x_2,0)\ ,$$

است، پس می توان عدد مختلط $(x_1,0)$ را به عنوان عدد حقیقی x_1 تعریف کرد. با

تکیهٔ بیشتر بر قواعد نظری، نگاشت

$$(x_۱,۰) \to x_۱$$

یک ایزومورفیسم بین مجموعهٔ اعداد مختلط به صورت $(x_۱,۰)$ و میدان اعداد حقیقی R تعریف می‌کند. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$i = (۰,۱)$$

آنگاه

$$x + iy = (x,۰) + (۰,۱)(y,۰)$$

$$= (x, y)$$ (طبق (۱) , (۲) فوق)

بالاخره، ملاحظه کنید که

$$\begin{aligned} i^۲ &= (۰,۱)(۰,۱) \\ &= (۰.۰ - ۱.۱\,,\ ۰.۱ + ۱.۰) \\ &= (-۱,۰) \\ &= -۱. \end{aligned}$$

به این معنی می‌توان گفت $i = \sqrt{-۱}$.

نماد $x + iy$ مناسب‌تر و محاسبات جبری با آن آسان است و ازین به بعد به کار برده می‌شود. همهٔ دستورات جبری متعارف، البته همراه با دستور $i^۲ = -۱$ ، در مورد آن به کار می‌رود. مثلاً برای ضرب کردن، اعمال را به طور کامل انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲) &= x_۱x_۲ + x_۱iy_۲ + iy_۱x_۲ + iy_۱iy_۲ \\ &= x_۱x_۲ + i(x_۱y_۲ + y_۱x_۲) + i^۲y_۱y_۲. \end{aligned}$$

اما $i^۲ = -۱$ ، پس حاصل چنین می‌شود:

$$x_۱x_۲ - y_۱y_۲ + i(x_۱y_۲ + y_۱x_۲)$$

ملاحظه می شود که این محاسبه، بیانگر فرمول ضرب (۲) است؛ فرمول (۱) نیز به همین طریق، اما ساده تر، حاصل می شود. از این قرار تعریف به وسیلهٔ (۱) و (۲) حاکی از تدبیر زیرکانه ای است.

فرمول (۸) که مربوط به معکوسها است به طریق زیر نیز به دست می آید:

$$\frac{۱}{x+iy}=\frac{۱}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^۲+y^۲}$$

مثال

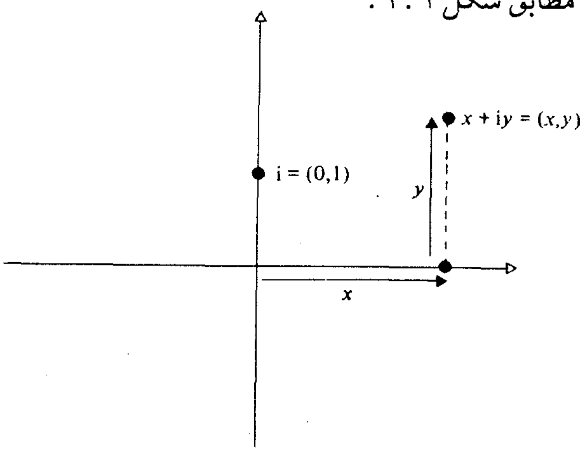
عبارت $\frac{۲+۳i}{۱+۲i}$ را به صورت $x+iy$ بنویسید.

داریم:

$$\frac{۲+۳i}{۱+۲i}=\frac{(۲+۳i)(۱-۲i)}{(۱+۲i)(۱-۲i)}=\frac{۲-۶+i(-۴+۳)}{۵}=-\frac{۴}{۵}-\frac{i}{۵}$$

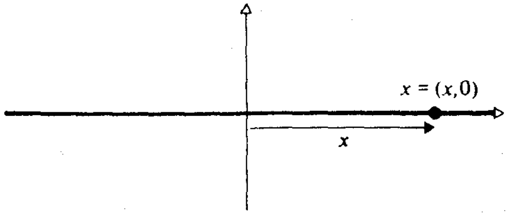
۳. تعبیری هندسی

چون زوجهای مرتب (x,y) بیانگر مختصات در صفحهٔ $R^۲$ هستند پس می توان C را به عنوان یک صفحه در نظر گرفت، طوری که عدد $x+iy$ نظیر نقطهٔ (x,y) باشد، مطابق شکل ۱ . ۱ .



شکل ۱-۱

از این قرار، تعیین هویت $(x,۰)$ به وسیله x منجر به ساختن محور حقیقی در همان صفحه به وسیلهٔ اعداد حقیقی می شود، مطابق شکل ۱-۲ .



شکل ۱-۲

محور y ها، به زاویهٔ قائم با محور حقیقی، محور موهومی نامیده می شود. این نمایش هندسی را غالباً *دیاگرام آرگاند* یا صفحهٔ *گاوس* می نامند.

از آنجا که بسیاری از ریاضیدانهای دیگر ادعاهای مقبولی بر آن دارند، ما هم برای احتراز از دادن امتیاز ناروا به احدی از آنها فقط با لفظ صفحهٔ مختلط ارجاع به آن خواهیم داشت. با اصطلاحات صرفاً هندسی باید گفت، که این همان صفحهٔ حقیقی R^2 است؛ امّا وقتی که به عنوان C تعبیر شود دارای خاصیت اضافی ساختمان جبری یک میدان خواهد بود و همین خاصیت است که به صفحهٔ مختلط ویژگیهای خاص می دهد.

۴. جزءهای حقیقی و موهومی

عدد مختلط $z = x + iy$ داده شده است. x را جزء حقیقی z، و y را جزء موهومی آن می نامیم. و نماد زیر را به کار می گیریم:

$$x = \mathrm{re}(z)$$
$$y = \mathrm{im}(z)$$

هر دو اینها اعداد حقیقی هستند: همان مختصات z در صفحهٔ مختلط.

۵. مدول

مدول، یا قدر مطلق، یک عدد حقیقی x چنین تعریف می شود:

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \quad \text{اگر} \\ -x & (x < 0) \quad \text{اگر} \end{cases}$$

از این تعریف، تعمیم واضحی به منظور تعریف قدر مطلق یا مدول اعداد مختلط به دست نمی‌آید، زیرا (بخش ۸ پائین را ببینید) در C ترتیب مفیدی وجود ندارد. امّا از نظر هندسی $|x|$ را می‌توان فاصلهٔ x تا مبداء خط حقیقی تعبیر کرد. همین یعنی، در صفحهٔ مختلط ما را به تعریف:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

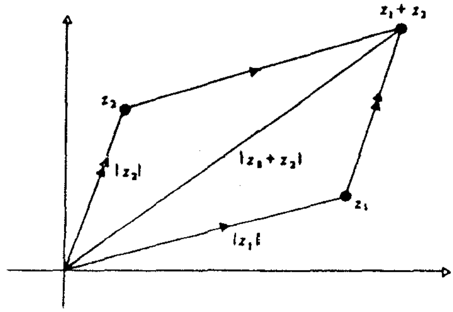
برای *مدول* عدد مختلط $z = x + iy$ هدایت می‌کند. منظور ما اینجا ریشهٔ دوم مثبت است: توجه کنید که $x^2 + y^2$ یک عدد حقیقی مثبت است، پس فرمول مذکور معنی دار است.

این مدول دارای خواص زیر است:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{۱۰}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{۱۱}$$

خاصیت (۱۱) بی درنگ از تعریف نتیجه می شود. اثبات *نامساوی مثلثی* (۱۰) به طور مستقیم قدری مشکلتر است. گرچه تعبیر هندسی آن (شکل ۱-۳) واقعیت



شکل ۱-۳

آشکار بزرگتر نبودن یک ضلع مثلثی از مجموع دو ضلع دیگر آن است.

برای اثبات (۱۰) با توجه به این که چون دو طرف آن مثبت است، پس معادل است با:

$$|z_1+z_2|^2 \le (\ |z_1|+|z_2|\ )^2$$

و به این صورت در می آید:

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 \le |z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2$$

که در آن $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ است. با ساده کردن، رابطهٔ فوق فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$x_1x_2 + y_1y_2 \le |z_1||z_2|$$

باشد. چون سمت راست این رابطه مثبت است، پس نامساوی مطلوب از نامساوی زیر حاصل می شود:

$$(\ x_1x_2 + y_1y_2\ )^2 \le |z_1|^2|z_2|^2$$

اما

$$|z_1|^2|z_2|^2 - (\ x_1x_2+y_1y_2\ )^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

که مقداری مثبت است. این، برهان را کامل می کند.

۶. مزدوج مختلط

اگر $z = x + iy$ باشد. آنگاه (بنا به تعریف) مزدوج مختلط آن عبارت است از:

$$\overline{z} = x - iy$$

از دیدگاه هندسی، مزدوج مختلط z عبارت است از: قرینهٔ z نسبت به

محور xها (شکل ۱-۴). اثبات مستقیم روابط زیر آسان است:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad (۱۲)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad (۱۳)$$

$$\mathrm{re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad (۱۴)$$

$$\mathrm{im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \qquad (۱۵)$$

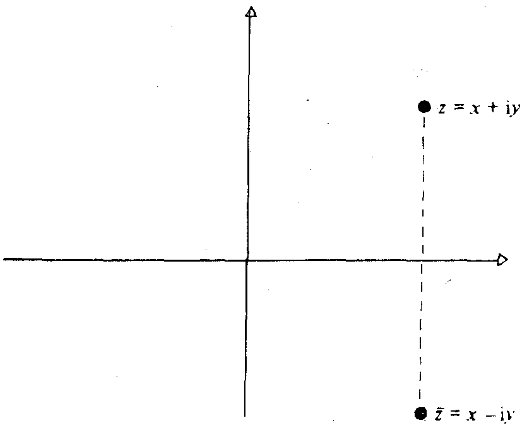
$$|z|^2 = |z\bar{z}| \qquad (۱۶)$$

(۱۷) z حقیقی است اگر و فقط اگر $z = \bar{z}$

خواص (۱۲) و (۱۳) متضمن این نکتهٔ مهم هستند که مزدوج مختلط هر عبارت چند جمله ای از عددهای مختلط z_1, z_2 و . . . و چنین به دست می آید که یک خط تیره روی هر ضریب یا هر متغیر موجود در عبارت قرار دهیم. مثلاً،

$$\overline{5z_1z_2 - z_2^7 + 2z_1} = \bar{5}\ \bar{z}_1\bar{z}_2 - \bar{z}_2^7 + \bar{2}z_1$$
$$= 5\bar{z}_1\bar{z}_2 - z_2^7 + 2\bar{z}_1$$

چون ۵ و ۲ حقیقی هستند، پس $\bar{5} = 5, \bar{2} = 2$ می شود.



شکل ۱-۴

۷. مختصات قطبی

عبارت $x + iy$ به عنوان یک عدد مختلط بستگی نزدیک با مختصات کارتزین (x,y) در صفحه دارد. به این نتیجه رسیده ایم که کار کردن با مختصات قطبی (r,θ) غالباً مفید واقع می شود، (r,θ) را به نقطه ای متناظر می کنیم که به فاصلهٔ r از مبداء است و شعاعی که این نقطه را به مبداء وصل می کند با جهت مثبت محور x ها زوایای برابر θ می سازد که جهت آن عکس جهت حرکت عقربه های ساعت است(شکل ۱-۵). ناگفته نماند که ما θ را با رادیان اندازه می گیریم. این دستگاه های مختصات با روابط زیر به هم مربوط هستند:

$$x = r\cos\theta \qquad (۱۸)$$
$$y = r\sin\theta$$

نتیجه می گیریم که:

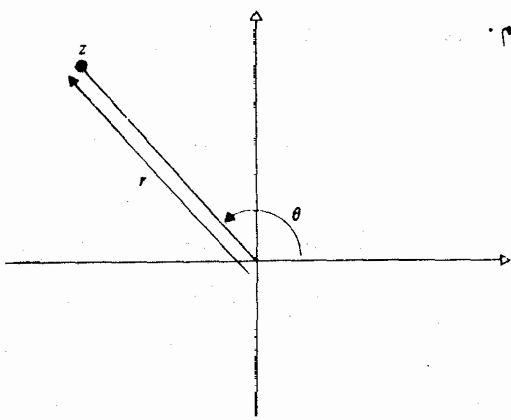
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

که در آن $z = x + iy$.

هر مقدار از θ که در روابط (۱۸) صدق کند یک *آرگومان* z نامیده می شود. حرف تعریف «یک» از آن جهت به کار گرفته می شودکه θ منحصر به فرد نیست: اگر θ یک آرگومان باشد $\theta + 2k\pi$ به ازاء هر عدد صحیح k نیز چنین است. با درك اینکه θ فقط با مضربهای صحیح از 2π منحصر به فرد است می توانیم نماد

$$\theta = \arg(Z)$$

را به کار بریم.



شکل ۱-۵

غالب اوقات با یک قرارداد می توان θ را به صورت منحصر به فرد در آورد: مثلاً می توانیم شرط کنیم که θ در فاصلهٔ $[0,2\pi)$ یا در $(-\pi,\pi]$ انتخاب شده باشد. مقدار منحصر به فرد θ در فاصلهٔ $(-\pi,\pi]$ به عنوان *مقدار اصلی* آرگومان شناخته می شود. (ما همین فاصله را به خاطر رویهٔ استاندارد می پذیریم. مزیت اصلی آن این است که در این صورت θ در حوالی محور حقیقی، که برای آن $\theta = 0$ است، رفتار خوبی دارد. باید گفت که این یک نکتهٔ فنی است که بعدها اهمیت پیدا می کند. منحصر به فرد نبودن θ پدیده ای است با جنبه های متعدد در این نظریه، آنچنان که خواهیم دید.)

با توجه به r و θ در تعریف فوق داریم:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ در آنالیز مختلط اهمیت قابل ملاحظه ای دارد. در فصل ۵ آن را به تابع توانی مختلط مربوط می کنیم.

۸. اعداد مختلط را نمی توان مرتب کرد

برای اعداد حقیقی می توان ترتیبی قائل شد (یک ترتیب معمول عبارت است از $>$) که از جمله خواص آن عبارت است از:

(۱۹) اگر $x \neq 0$، آنگاه یا $x > 0$ یا $-x > 0$، اما نه هر دو.

(۲۰) اگر $x > 0$, $y > 0$، آنگاه $xy > 0$, $x + y > 0$.

چنین ترتیبی را نمی توان بر اعداد مختلط تعریف کرد. فرض کنیم که بتوان چنین کاری کرد. آنگاه چون $i \neq 0$ از (۱۹) نتیجه می شود که یا $i > 0$ یا $-i > 0$. آنگاه (۲۰) ایجاب می کند که $-1 = i.i > 0$ یا $-1 = (-i).(-i) > 0$. در همان حال، $1 = (-1)^2 > 0$ و به این ترتیب نتیجه می گیریم که ۱، ۱- هر دو بزرگتر از صفر هستند که متناقض با (۱۹) است.

بنابراین در مورد اعداد مختلط نامساویهایی شبیه آنچه در اعداد حقیقی معمول است نمی‌توان به کار گرفت. هر نامساوی‌ای که مطرح می‌شود، باید فقط شامل حقیقیها باشد (محتملاً مربوط به اعداد مختلط مفروض). مثلاً، اگر $z \in C$، آنگاه

$$z > ۱$$

معنی ندارد؛ اما

$$|z| > ۱$$

یا

$$re(z) > ۱$$

قابل قبول است. (این دو یک چیز نیستند!). بنا به قرارداد، اگر گزاره‌ای را به صورت

$$\varepsilon > ۰$$

بنویسیم خود به خود مستلزم آن است که ε یک عدد حقیقی باشد.

تمرین های ۱

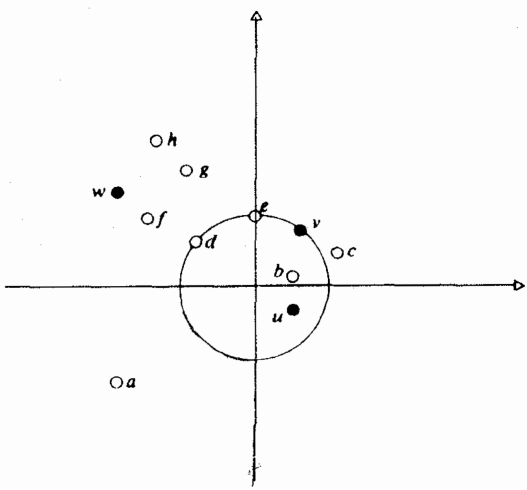
۱ . با تفصیل تمام بررسی کنید که اعداد مختلط C تحت اعمال جمع و ضرب مذکور در فوق تشکیل یک میدان می دهند .

۲ . اگر $z_1, z_2 \in C$ ، ثابت کنید :

(الف) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(ب) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$

۳ . در شکل ۶-۱ نقطه های سیاه معرف سه عدد مختلط هستند (همان طور که نشان داده شده اند) . دایره ای که مشاهده می کنید دایرهٔ واحد $|z| = 1$ است . نقطه های باز a، b، c، d، e، f، g، h (به ترتیبی) معرف u+v، u+w، v+w، u+v+w، uv، uw، vw، uvw هستند . کدام معرف کدام است .



شکل ۱-۶

۴ . با نوشتن z به صورت $z = a + bi$ همهٔ جوابهای z را از معادلات زیر به دست آورید:

(الف) $z^{۲} = -۵ + ۱۲i$

(ب) $z^{۲} = ۲ + i$

(ج) $(۷ + ۲۴i)z = ۳۷۵$

(د) $z^{۲} - (۳ + i)z + (۲ + ۲i) = ۰$

(ه) $z^{۲} - ۳z + ۱ + i = ۰$

۵ . اگر λ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید که

$$\{z \in C \,|\, |z| = \lambda |z - ۱|\}$$

یک دایره است، مگر اینکه λ یک مقدار خاص اختیار کند (کدام مقدار ؟).

۶ . این مجموعه از نقاط را رسم کنید.

$$\{z \in C \,|\, re(z + ۱) = |z - ۱|\}$$

به این ترتیب که $z = x + iy$ قرار دهید و معادلهٔ مربوط به مقادیر حقیقی x و y را به دست آورید.

اما توجه کنید که $re(z + ۱)$ عبارت است از فاصلهٔ z تا خط $y = -۱$: و $|z - ۱|$ عبارت است از: فاصلهٔ بین z و ۱ . مقایسه کنید با تعریف کلاسیک «کانون - خط هادی» برای یک سهمی: مکان هندسی نقطه ای متساوی الفاصله از یک خط ثابت (اینجا $y = -۱$) و یک نقطهٔ ثابت (اینجا $(x, y) = (۱, ۰)$).

۷ . مجموعهٔ همهٔ z های متعلق به C را که در شرایط زیر صدق می کنند رسم کنید:

(الف) $re(z) > ۲$

(ب) $۱ < im\ z < ۲$

(ج) $۱ < im(z - i) < ۲$

(د) $|z| < ۲$

(ه) $|z| > ۱$

(و) $۱ < |z| < ۲$

(ز) $|z - ۱| < ۱$

(ح) $|z - ۱| < |z + ۱|$

عبارت های $|z - ۱|, |z + ۱|$ را به عنوان فواصل بین نقـاط تعبیـر کنید و (ج) و (ه) را بر حسب فواصل z از ۱ و ۱- بیان کنید.

۸. مجموعهٔ همه z های متعلق به C را که در شرایط زیر صدق می کنند رسم کنید:

(الف) $z\bar{z} = ۱$

(ب) $z + i\bar{z} + ۱ + i = ۰$

(ج) $z + \bar{z} + ۲ = ۰$

(د) $z + \bar{z} + ۲i = ۰$

۹. فرض می کنیم r، s، θ، φ حقیقی باشند. با فرض

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

حاصلـضرب zw را تشکیل دهیـد و از فرمـولهای $\cos(\theta + \phi)$ ، $\sin(\theta + \phi)$ استفاده و ثابت کنید:

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

با استقراء بر n، قضیهٔ دوموآور

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

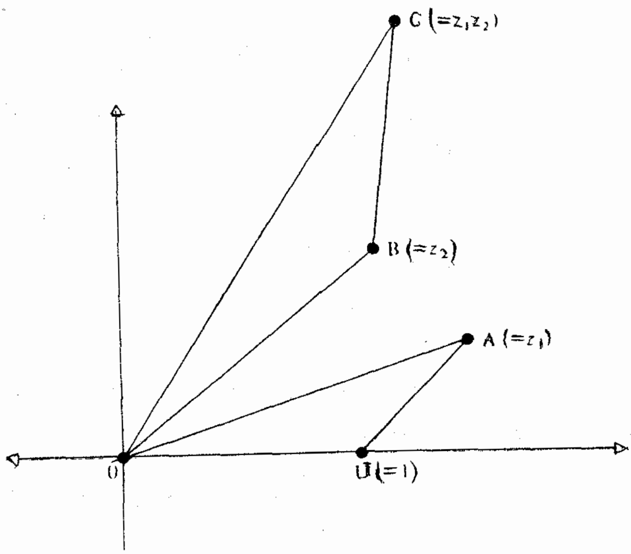
را به ازاء همهٔ اعداد طبیعی n نتیجه بگیرید.

بخصوص حالت $n=3$ را در نظر بگیرید و فرمولهای متعارف برای $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ بر حسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را بازیابی کنید.

۱۰. قضیهٔ دوموآور (تمرین ۹) و رابطهٔ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را به کار ببرید و ثابت کنید که معادلهٔ $z^3 = 1$ دارای سه ریشهٔ متمایز است. آنها را بیابید.

ریشه‌های دوم $1+\sqrt{3}i$ ، $\sqrt{3} - i$ و $1+i$ را حساب کنید؛ همچنین ریشه‌های سوم $\sqrt{3} + i$ ، $1-i$ ، i را. این نقاط را در صفحهٔ مختلط نقش کنید.

۱۱. در کتابهای درسی گذشته، حاصلضرب دو عدد مختلط غالباً چنین تعیین می‌شود. دو عدد مختلط z_1 ، z_2 مفروضند، آنها را در صفحهٔ مختلط با A و B نمایش دهید و فرض کنید o و U به ترتیب نقاط $z=0$ و $z=1$ باشند (شکل ۱.۷ را ملاحظه کنید). مثلث OBC را متشابه مثلث OUA رسم کنید (که در آن $\angle BOC = \angle UOA$ ، $\angle OBC = \angle OUA$). در این صورت z_1z_2 به وسیلهٔ نقطهٔ C که نتیجهٔ این ترسیم است نمایش داده می‌شود. با استفاده از این واقعیت که $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ ، و نتیجهٔ تمرین ۶، نشان دهید که آنچه در این تمرین آمد با تعریف فرمولی (برای ضرب دو عدد مختلط) که در این متن ذکر شد، تطبیق می‌کند.



شکل ۱-۷

۱۲ . ریشهٔ دوم یک عدد مختلط z یعنی $\sqrt{z}$ را عددی مختلط مانند w تعریف کنید به قسمی که $w^۲ = z$ باشد. ثابت کنید هر عدد مختلط دلخواه ناصفر دقیقاً دو ریشهٔ مختلط دارد، و برای آنها فرمولهایی بر حسب rez و imz ارائه دهید.

اگر $a,b,c \in C$، $a \neq ۰$، نشان دهید که جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم

$$az^۲ + bz + c = ۰$$

دقیقاً عبارت است از:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

۱۳ . قضیهٔ *دوموآور* را برای محاسبهٔ $\cos ۵\theta$ و $\sin ۵\theta$ بر حسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ به کار گیرید.

۱۴ . ثابت کنید که قضیهٔ *دوموآور* در حالتی که n عددی صحیح و منفی باشد برقرار است.

۱۵ . ریشهٔ k ام z یعنی $\sqrt[k]{z}$ را w بنامید به قسمی که $w^k = z$ شود و با استفاده از قضیهٔ *دوموآور* عبارتی برای $\sqrt[k]{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ بیابید.

۱۶ . فرض می کنیم $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$ و $\gamma \neq ۰$، و $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ باشد. تابع ϕ را چنین تعریف می کنیم:

$$\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

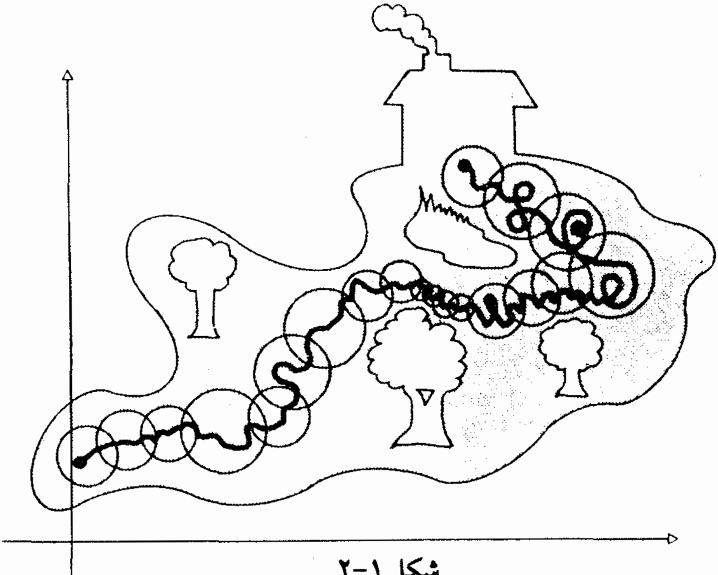
ثابت کنید که ϕ یک بیژکسیون (تابع یک به یک) بین $C \setminus \{-\delta/\delta\}$ و $C \setminus \{\alpha/\gamma\}$ تعریف می کند. نشان دهید که ϕ دوایر را به دوایر می برد. راجع به دوایری که از $-\delta/\delta$ می گذرند چه می توانید بگویید؟

فصل دوم

توپولوژی صفحه مختلط

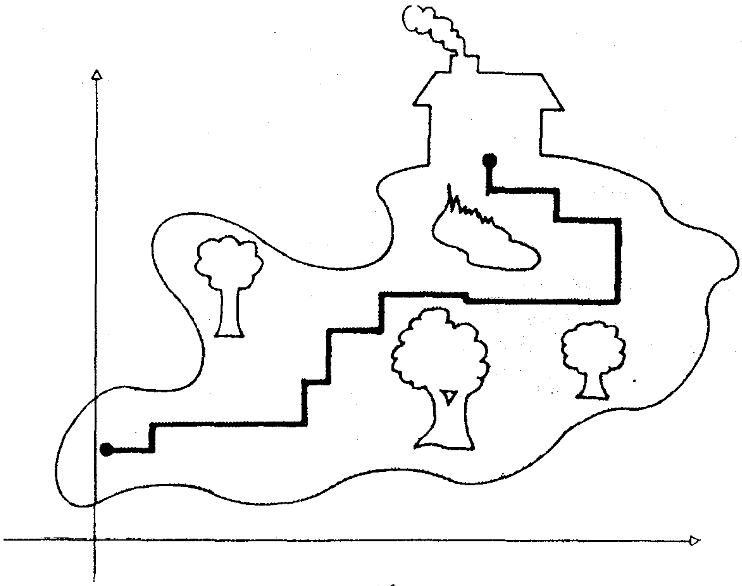
همه نظریّات اساسی توپولوژیک را که مورد نیاز ما در مطالعهٔ آنالیز مختلط است، در این فصل گرد آورده‌ایم. جزئیات این لیست چندان مورد نیاز نیست. بعضی اقلام آن برای بحث دقیق در دیفرانسیل گیری و بعضی برای انتگرال گیری مورد نیاز است. برای دیفرانسیل گیری طبیعتاً زمینه ای از حدود و پیوستگی لازم است که خود اینها را با کمک *مجموعه های باز* به بهترین وجه می توان بررسی کرد. از طرف دیگر، یک انتگرال از یک عدد مختلط تا عدد مختلط دیگر به وسیلهٔ مسیر مشخصی بین آن دو نقطه محاسبه می شود. مجموعه ای که هر دو نقطهٔ دلخواه از آن را بتوان با یک مسیر به هم پیوست یک مجموعهٔ *همبند* می نامند. برای اینکه بعدها بتوانیم به ساده ترین روش ممکن از عهدهٔ انتگرال گیری و دیفرانسیل گیری، هر دو برآییم خود را به تابعهای مختلطی محدود می کنیم که روی مجموعه های همبند تعریف شده باشند. در این حال چنین مجموعه هایی را یک *دامنه* می نامند.

دامنه ها ممکن است شکلهای عجیب به خود بگیرند و مسیرها ممکن است بسیار پیچ در پیچ باشند. برای دستیابی به یک شهود هندسی، بدون آنکه ذهن خود را مجبور به کار بسیار در مورد پیچیدگیهایی از این قبیل کرده باشیم، تدبیری فنی که به دقت متصور شده است به نام *لِمِ فرش کردن* را به کار می بریم. در این لم



شکل ۱-۲

نشان می دهیم که یک مسیر در یک مجموعهٔ باز (بخصوص در یک دامنه) را می توان به تعدادی متناهی از قطعات کوچکتر تقسیم بندی کرد به طریقی که هر قطعه در درون یک قُرص (گرده یا دیسک) مشمول در همان مجموعهٔ باز جای گیرد (از این قرار مسیر را با قرص ها «فرش» کرده ایم (شکل ۱-۲). امّا از نظر هندسی یک قرص چیز ساده ای است؛ مثلاً هر دو نقطهٔ درون آن را می توان با یک خط راست به هم وصل کرد. حال اگر نقاط انتهایی قطعات حاصله از مسیر اولیه را در هر قرص به هم وصل کنیم، مسیر تازه ای که از قطعهٔ خطهای مستقیم تشکیل یافته است، به دست می آوریم، که این مسیر تازه نیز در درون همان مجموعهٔ باز است و دو انتهای مسیر اوّلیه را به هم وصل می کند. بدین ترتیب، ملاحظه می شود که هر مسیر بین دو نقطه، در درون یک مجموعهٔ باز، هر قدر هم که پیچ و تاب داشته باشد با مسیر دیگری قابل تعویض است و این مسیر، که فقط از قطعات مستقیم به تعداد متناهی تشکیل یافته، بین همان دو نقطه و در همان مجموعهٔ باز قرار دارد. حتی می توان بر این نکته تاکید کرد که قطعات مذکور با محورهای حقیقی و موهومی موازی اند، به این ترتیب که یک مسیر-*پله ای* در مجموعهٔ باز مفروض ارائه دهیم (فقط با اختیار یک مسیر پله ای در هر قرص پوشنده). (شکل ۲-۲).



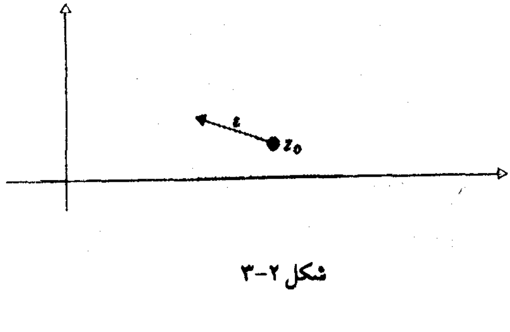
شکل ۲-۲

با تکنیکهایی از این نوع می توان لـم فرش کـردن را برای روشنگری در آنالیـز مختلط به کار گرفت . کـه حاصل آن برهانهای دقیق تحلیلی در رابطهٔ محکم با شهود هندسی است .

۱ . مجموعه های باز و بسته

برای عدد مختلط z_0 و عدد حقیقی مثبت ε ، ε- همسایگی z_0 را چنین تعریف می کنیم(شکل ۲-۳ را ببینید)

$$N_\varepsilon(z_0) = \left\{z \in C \,\middle\|\, z - z_0\right| < \varepsilon\right\}.$$

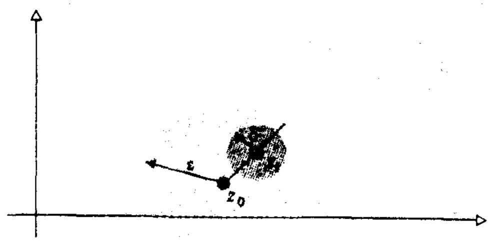


شکل ۲-۳

از نظر هندسی $N_\epsilon(z_0)$ درست همان قرص به مرکز z_0 و شامل همهٔ نقاطی است که فاصلهٔ آنها از z_0 کوچکتر از ε است.

یک زیر مجموعهٔ $S \subseteq C$ را *باز* می نامند هر گاه به ازاء هر $z_0 \in S$ یک عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که $N_\varepsilon(z_0) \subseteq S$ باشد. بر این نکته تاکید می ورزیم که ε ممکن است به z_0 وابسته باشد.

مثال. قرص $N_\epsilon(z_0)$ خود یک مجموعهٔ باز است، زیرا اگر $z_1 \in N_\varepsilon(z_0)$ ، آنگاه $\varepsilon > |z_1 - z_0|$. اکنون $\delta > 0$ را چنان اختیار کنید که $\delta \leq \varepsilon - |z_1 - z_0|$ ؛ در این حال $N_\delta(z_1) \subseteq N_\varepsilon(z_0)$. (شکل ۲-۴)



شکل ۲-۴

متمم یک زیر مجموعهٔ S عبارت است از:

$$C \setminus S = \{z \in C : z \notin S\}$$

یک زیر مجموعهٔ S را بسته گویند اگر $C \setminus S$ باز باشد.

برای بیان خاصیت مشخصه مجموعه های بسته راه دیگری وجود دارد و آن به کار بردن مفهوم یک *نقطهٔ حدی* یک زیر مجموعهٔ S است. عدد مختلط z_0 یک نقطهٔ حدی است اگر هر همسایگی $N_\varepsilon(z_0)$ شامل نقطه ای از S غیر از z_0 باشد. در این تعریف z_0 می تواند که به مجموعهٔ S متعلق باشد یا نباشد. خاصیت اساسی نقطهٔ حدی آن است که (هر همسایگی آن) شامل نقاطی است که به قدر دلخواه به آن نزدیک باشند. در واقع هر همسایگی $N_\varepsilon(z_0)$ باید شامل تعداد *نامتناهی* نقاطی

از S باشد (زیرا اگر یک $N_\varepsilon(z_\circ)$ فقط شامل تعدادی نامتناهی مانند $z_n,\dots,z_2,z_1$ از اعضای S باشد که متمایز با $z_\circ$ باشند، در این صورت با اختیار ε_1 کوچکتر از هر یک از فواصل $|z_\circ - z_r|$، دیگر $N_\varepsilon(z_\circ)$ شامل هیچ نقطه ای از S نخواهد بود).

خاصیت مشخصهٔ یک مجموعهٔ بسته را، به صورت دیگر، می توان چنین بیان کرد:

گزارهٔ ۲-۱ . مجموعهٔ S بسته است اگر و فقط اگر شامل همهٔ نقاط حدی خود باشد.

برهان. فرض می کنیم که S بسته و $z_\circ$ یک نقطهٔ حدی آن باشد. اگر $z_\circ \in C \setminus S$، که $C \setminus S$ مجموعه ای است باز، آنگاه $N_\varepsilon(z_\circ) \subseteq C \setminus S$ به ازاء یک $\varepsilon > 0$، و بنابراین $N_\varepsilon(z_\circ)$ شامل نقطه ای از S نخواهد بود، و این با فرض نقطهٔ حدی بودن $z_\circ$ متناقض است. پس $z_\circ \in S$.

به عکس، فرض کنیم S شامل همهٔ نقاط حدّیش باشد. در این صورت $z_\circ \in C \setminus S$ یک نقطهٔ حدی S نیست، بنابراین یک $N_\varepsilon(z_\circ)$ وجود دارد که هیچ نقطه از S را شامل نیست و بنابراین $N_\varepsilon(z_\circ) \subseteq C \setminus S$ می شود. پس $C \setminus S$ باز است و بنابراین S بسته است. □

البته لزومی ندارد که هر نقطه از یک مجموعهٔ بسته، یک نقطهٔ حدی آن مجموعه باشد. مثلاً، اگر

$$T=\{ z \in C \mid z = 0 \text{ یا } z = 1/n \text{ به ازاء یک عدد صحیح و مثبت } n \},$$

آنگاه تنها نقطهٔ حدی T عبارت است از ۰، که در خود T است، پس T بسته است.

نقاطی از S که نقطهٔ حدی نیستند *نقاط منفرد* S خوانده می شوند. بنابراین غیر از ۰ همهٔ نقاط دیگر T نقاط منفرد T می باشند. یک نقطهٔ منفرد $z_\circ$ از S یک همسایگی $N_\varepsilon(z_\circ)$ دارد که شامل هیچ نقطهٔ دیگری از S نیست. مثلاً در مجموعهٔ T که هم اکنون مطرح شد، اگر $\varepsilon = 1/n - 1/(n+1)$ اختیار شود، آنگاه $N_\varepsilon(1/n)$ شامل هیچ نقطهٔ دیگری از T نیست. از طرف دیگر، با توجه به تعریفهایی که بیان شد، واضح است که، هر عضو از یک مجموعهٔ *باز* یک نقطهٔ حدی (آن مجموعه) است.

۲. حدود تابعها

مفهوم $\lim_{z\to z_0} f(z)$ مشابه مورد حقیقی آن است و خواص آن با بحث های مشابه نتیجه می شود.

تعریف. اگر $f : S \to C$ یک تابع مختلط دلخواه و z_0 یک نقطهٔ حدی S باشد. آنگاه $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ اگر به ازاء هر $\varepsilon > 0$ داده شده، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که

(۱) به ازاء هر $z \in S$، از شرط $0 < |z - z_0| < \delta$ حاصل شود $|f(x) - l| < \varepsilon$.

در مورد این تعریف دو نکته را باید تذکر داد:

(الف) لزومی ندارد که z_0 نقطه ای از S باشد و بنابراین لزومی ندارد که $f(z_0)$ تعریف شده باشد: حتی اگر $z_0 \in S$، ممکن است داشته باشیم $f(z_0) \neq l$.

مثلاً، اگر

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

آنگاه $\lim_{z\to 0} f(z) = 0 \neq f(0)$.

(ب) ضرورت دارد که z_0 یک نقطهٔ حدی S باشد، در غیر این صورت $\delta > 0$ وجود خواهد داشت به قسمی که $\{z | 0 < |z - z_0| < \delta\}$ شامل هیچ نقطه از S نباشد. دراین حال شرط (۱) به صورتی بی مایه به ازاء هر $l \in C$ درست خواهد بود.

باید به خاطر داشت که، مثل حالت حقیقی، اگر z_0 یک نقطهٔ حدی S و $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$، آنگاه این حد منحصر به فرد خواهد بود. زیرا اگر $l' \neq l$ داوطلب دیگری برای این حد باشد، $\varepsilon = \frac{1}{2}|l' - l|$ اختیار می کنیم تا $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ را چنان بیابیم که

از $z \in S$ ، $0 < |z - z_0| < \delta_1$ نتیجه شود $|f(x) - l| < \varepsilon$.

از $z \in S$ ، $0 < |z - z_0| < \delta_2$ نتیجه شود $|f(x) - l| < \varepsilon$.

چون z_0 یک نقطهٔ حدی است ، $z^* \in S$ وجود دارد به قسمی که $0 < |z_0 - z^*| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. آنگاه

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - f(z^*) + f(z^*) - l'| \\ &\le |l - f(z^*)| + |f(z^*) - l'| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

که متناقض با انتخاب ε است .

خواص استاندارد حدود مختلط را با روشهایی مشابه حالت حقیقی می توان ثابت کرد :

گزارهٔ ۲-۲ . اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ ، $\lim_{z\to z_0} g(z) = k$ ، آنگاه

(الف) $\lim_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = l + k,$

(ب) $\lim_{z\to z_0} (f(z) - g(z)) = l - k,$

(ج) $\lim_{z\to z_0} (f(z)g(z)) = lk,$

(د) . (برای $k \neq 0$) $\lim_{z\to z_0} (f(z)/g(z)) = l/k$

برهان. قسمتهای (الف) ، (ب) سر راست هستند . (ج) نیز چنین ، ولی اندکی زیرکانه تر است . می نویسیم :

$$|f(z)g(z) - lk| = |f(z)g(z) - lg(z) + lg(z) - lk|$$

$$\le |f(z) - l||g(z)| + |l||g(z) - k|.$$

چون $\lim_{z\to z_0} g(z) = k$ ، پس به ازاء $\varepsilon > 0$ داده شده ، $\delta_0 > 0$ وجود دارد به قسمی که

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta_0$ مستلزم $|g(z) - k| < \varepsilon$.

و بنابراین $|g(z)| < |k| + \varepsilon$ ، که به معنی آن است که $|g|$ در حوالی z_0 از بالا محدود است (با فرض $M = |k| + \varepsilon$). چون f پیوسته است $\delta_1 > 0$ وجود دارد به قسمی که

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta_1$ مستلزم $|f(z) - l| < \varepsilon/(2M)$.

فرض کنیم N عدد حقیقی دلخواهی بیشتر از $|l|$ باشد (بخصوص، $N > 0$) آنگاه چون g پیوسته است $\delta_2 > 0$ وجود دارد به قسمی که

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta_2$ مستلزم $|g(z) - k < \varepsilon/(2N)|$.

به ازاء $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ ، خواهیم داشت:

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta$ مستلزم

$$|f(z) - l||g(z)| + |l||g(z) - k \ | < \frac{\varepsilon}{2M}M + N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

نتیجه این که به شرط $z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta_2$ داریم $|f(z)g(z) - lk| < \varepsilon$.

برای اثبات (د) فقط باید ثابت کنیم $\lim_{z \to z_0} (1/g(z) = 1/k$ ، زیرا در این صورت از (ج) به ازاء تابعهای f، $1/g$ استفاده می کنیم، نیروی کاملی به (د) خواهیم داد. چون $g(z) \to k \neq 0$ ، بنابراین می دانیم که به ازاء یک $\delta_1 > 0$ ،

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta_1$ مستلزم $|g(z) - k| < \frac{1}{2}|k|$ ،

پس $|g(z)| > \frac{1}{2}|k|$.

اکنون $\delta_2 > 0$ را چنان می یابیم که

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < \delta_2$ مستلزم $|g(z) - k| < \frac{1}{2}|k|^2\varepsilon$ ،

آنگاه به ازاء $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ،

$z \in S$ و $0 < |z - z_0| < S$ مستلزم

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{k}\right| = \frac{|k - g(z)|}{|g(z)||k|} < \frac{1}{2}|k|^2 \varepsilon / \left(\frac{1}{2}|k|^2\right) = \varepsilon.$$

جزء های حقیقی و موهومی یک تابع مختلط

$$f(z) = re(f(z) + i\ im(f(z))$$

را می توان جداگانه در نظر گرفت. اگر

$$\lim f(z)_{z \to z_0} = l = \alpha + i\beta \qquad (\alpha, \beta \in R) \tag{2}$$

آنگاه، از جهت آنکه

$$|re(f(z)) - \alpha| = |re(f(z) - l)| \leq |f(x) - l|,$$

از تعریف نتیجه می گیریم که

$$\lim_{z \to z_0} re(f(z)) = \alpha \tag{3}$$

مشابهاً،

$$\lim_{z \to z_0} im(f(z)) = \beta \tag{4}$$

به عکس، اگر (۳) و (۴) هر دو برقرار باشند، از گزارهٔ (i) ۲-۲ می توان (۲) را

نتیجه گرفت.

بحثی را که گذشت می‌توان در قالبی دیگر بیان کرد. ابتدا به یاد می‌آوریم که حد یک تابع حقیقی دو متغیره $\phi : S \to R$ یعنی حد $\phi(x,y)$ به شرط $(x,y) \in S \subseteq R^2$ چنین تعریف می‌شود:

هر گاه $(x,y) \to (a,b)$، آنگاه $\phi(x,y)\lambda$ بشرط آنکه با $\varepsilon > 0$ معلوم، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که از هر $(x,y) \in S$ با شرط $0 < \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} < \delta$ نتیجه شود $|\phi(x,y) - \lambda| < \varepsilon$. اگر مانند فصل ۱، (x,y) را به صورت $x + iy$ معرفی کنیم، به ازاء $z = x + iy$، $z_0 = a + ib$، مطلب فوق را می‌توان چنین بیان کرد:

$$z \in S \ , \ 0 < |z - z_0| < \delta \ \text{مستلزم} \ |\phi(x,y) - \lambda| < \varepsilon .$$

اکنون اگر بنویسیم:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

که در آن قسمتهای حقیقی و موهومی f به صورت تابعهای حقیقی u و v از دو متغیر حقیقی x و y در نظر گرفته شده‌اند، آنگاه ثابت کرده‌ایم که:

گزاره ۳-۲. $\lim_{z \to z_0} f(z) = l = \alpha + i\beta$ اگر و فقط اگر

$$u(x,y) \to \alpha \ , \ v(x,y) \to \beta \quad \text{هر گاه} \quad (x,y) \to (a,b)$$

که در آن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، $z = x + iy$ ، $z_0 = a + ib$

به این ترتیب حدود تابعهای مختلط مساوی حدود تابعهای حقیقی از دو متغیر حقیقی است (امّا نمادگذاری در حالت مختلط معمولاً خیلی ساده‌تر است).

۳ . پیوستگی

تابع $f : S \to C$ را در نقطهٔ $z_\circ \in S$ پیوسته گویند اگر، به ازاء $\varepsilon > \circ$ داده شده، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به قسمی که

به ازاء هر $z_\circ \in S$ که در شرط $|z - z_\circ| < \delta$ صدق کند حاصل شود $|f(z) - f(z_\circ)| < \varepsilon$.

اگر $z_\circ$ یک نقطهٔ حدی باشد، مطلب فوق معادل است با اینکه بگوییم $\lim_{z \to z_\circ} f(z)$ وجود دارد و

$$\lim_{z \to z_\circ} f(z) = f(z_\circ)$$

اگر $z_\circ$ یک نقطهٔ منفرد باشد، آنگاه یک همسایگی $N_\delta(z_\circ)$ وجود دارد که به استثنای $z_\circ$ شامل نقطهٔ دیگری از S نیست، بنابراین

به ازاء هر $z \in S$ که در شرط $|z - z_\circ| < \delta$ صدق کند حاصل می شود $z = z_\circ$ که به نوبهٔ خود از آن حاصل می شود:

$$|f(z) - f(z_\circ)| = \circ,$$

بنابراین، بر حسب تعریف، یک تابع مختلط در یک نقطهٔ منفرد همواره پیوسته به حساب می آید. در واقع، تبصرهٔ اخیر هرگز مشکلی برای ما ایجاد نمی کند، زیرا ما فقط توابعی را در نظر می گیریم که همهٔ نقاط S نقاط حدی باشند بخصوص، S معمولاً مجموعه ای باز است. تبصرهٔ اخیر در مورد نقاط منفرد از آن جهت عنوان شد که یک جنبهٔ سست را سامان ببخشد.

پیوستگی را با کمک قرصهای باز می توان در قالب دیگری تعریف کرد:

f در $z_\circ \in S$ پیوسته است اگر، $\varepsilon > \circ$ داده شده، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به قسمی که

از $z \in S$, $z \in N_\delta(z_\circ)$ نتیجه می شود $f(z) \in N_\epsilon\big(f(z_\circ)\big)$؛

یا مجمل تر

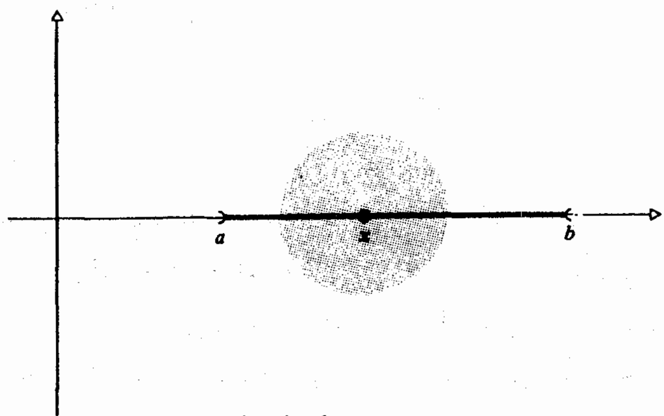
$$f\big(N_\delta(z_\circ) \cap S\big) \subseteq N_\epsilon\big(f(z_\circ)\big)$$

تابع $f : S \to C$ را پیوسته گویند اگر در هر نقطهٔ $z_\circ$ متعلق به S پیوسته باشد. پیوستگی تابعها را با به کار گرفتن مجموعه های باز به صورت دیگری می توان تعریف کرد. ابتدا نیاز به یک تعمیم داریم: یک زیر مجموعهٔ $V \subseteq S$ را بطور نسبی *باز* در S، یا به طور خلاصه، فقط *باز* در S، می نامیم اگر هر $z_\circ \in V$ یک $\sigma > \circ$ نظیر وجود داشته باشد به قسمی که $N_\sigma(z_\circ) \cap S \subseteq V$. یک مجموعهٔ به طور نسبی باز لزومی ندارد که باز باشد.

مثال. فاصله $(a,b) = \{x \in R | a < x < b\}$ در R باز است، اما در C باز نیست.
با شرط $x \in (a,b)$، فرض می کنیم $\sigma = \min\{x - a,\ b - x\}$، آنگاه

$$N_\sigma(x) \cap R = \{y \in R \mid x - \sigma < y < x + \sigma\} \subseteq (a,b),$$

اما هیچ قرص باز $N_\sigma(x)$ مشمول در بازهٔ (فاصلهٔ) حقیقی (a,b) نیست، پس (a,b) در C باز نیست. (شکل ۲-۵)



شکل (۲-۵)

با به کارگیری نمادگذاری استاندارد در نظریه مجموعه ها

$$f^{-1}(U) = \{z \in S \mid f(z) \in U\}$$

وسیلهٔ دیگری برای بیان خاصیت مشخصهٔ تابع پیوسته به دست می آوریم:

گزارهٔ ۲ - ۴ تابع مختلط $f: S \to C$ پیوسته است اگر، و فقط اگر، به ازاء هر مجموعهٔ باز U ، تصویر معکوس U یعنی $f^{-1}(U)$ در S باز باشد.

برهان. فرض می‌کنیم f پیوسته و U باز است. نیز فرض می‌کنیم $z_0 \in f^{-1}(U)$ باشد. در این صورت $f(z_0) \in U$ و بنابراین $\epsilon > 0$ وجود دارد به قسمی که $N_\epsilon(f(z_0)) \subseteq U$ شود. با توجه به پیوستگی f ، $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$f(N_\delta(z_0) \cap S) \subseteq N_\epsilon(f(z_0)) \subseteq U,$$

پس

$$(N_\delta(z_0) \cap S) \subseteq f^{-1}(U)$$

و بنابراین $f^{-1}(U)$ باز است.

بعکس، فرض می‌کنیم به ازاء هر مجموعهٔ باز U، $f^{-1}(U)$ در S باز باشد. اگر $z_0 \in S$, $\varepsilon > 0$ داده شده باشند، مجموعهٔ $N_\epsilon(f(z_0))$ باز خواهد بود، پس $f^{-1}(N_\epsilon(f(z_0)))$ نیز در S باز است و $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$N_\delta(z_0) \cap S \subseteq f^{-1}(N_\varepsilon(f(z_0)))$$

نتیجه اینکه

$$f(N_\delta(z_0) \cap S) \subseteq N_\varepsilon(f(z_0))$$

و بنابراین f پیوسته است.

گزارهٔ ۲-۴. که تعریف پیوستگی را بر حسب مجموعه های باز ارائه می دهد مورد علاقهٔ توپولوژیستها است این تعریف بخصوص موقعی مفید است که S خود یک مجموعهٔ باز باشد. زیرا در این صورت، چنانچه $V \subseteq S$ در S باز باشد و $z_0 \in V$ ، خواهیم داشت:

$$N_\epsilon(z_0) \subseteq S \qquad \text{(زیرا S باز است)}$$

$$N_\sigma(z_0) \cap S \subseteq V \qquad \text{(زیرا V در S باز است)}$$

پس، با انتخاب δ مساوی ε یا σ هر کدام که کوچکتر باشند، نتیجه می گیریم که :

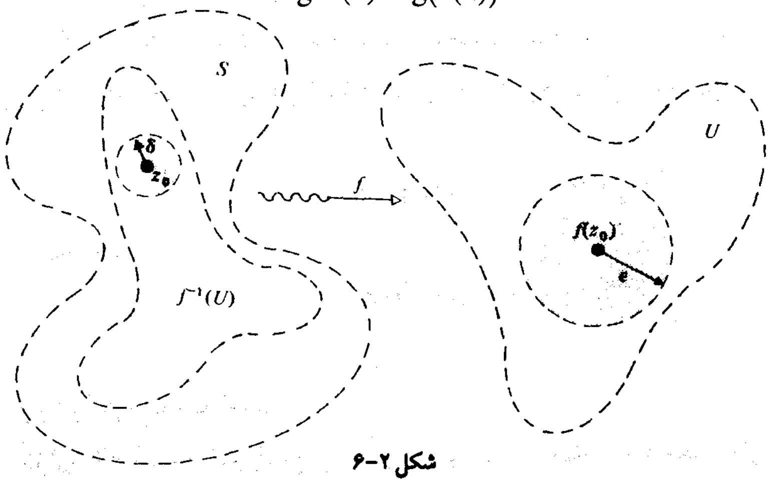
$$N_\delta(z_\circ) \subseteq V$$

و بنابراین خود V در اصل یک مجموعهٔ باز است، بنابراین داریم :

فرع ۲-۵ . اگر S یک مجموعه باز باشد، آنگاه $f : S \to C$ پیوسته است اگر، و فقط اگر به ازاء هر مجموعهٔ باز U، تصویر معکوس $f^{-1}(U)$ باز باشد. (شکل ۲-۶ گویای این مطلب است.)

ترکیب دو تابع به شیوهٔ معمول تعریف می شود: اگر $f : S \to C$, $g : T \to C$ باشد طوری که $f(S) \subseteq T$ شود، آنگاه $gof : S \to C$ چنین مشخص می شود:

$$gof(z) = g(f(z))$$



شکل ۲-۶

گزارهٔ ۲-۶ . اگر f در $z_\circ \in S$ پیوسته، نیز g در $f(z_\circ)$ پیوسته باشد، آنگاه gof در $z_\circ$ پیوسته است.

برهان. تمرین ساده ای است.

تابعهای مختلط $f_1 : S \to C$, $f_2 : S \to C$ را، روی یک مجموعهٔ مشخص S، با هم جمع و نیز در هم ضرب می کنیم تا حاصل شود

$f_1 + f_2 : S \to C$ که در آن $(f_1 + f_2)(z) = f_1(z) + f_2(z)$ $(z \in S)$

$f_1 - f_2 : S \to C$ که در آن $(f_1 - f_2)(z) = f_1(z) - f_2(z)$ $(z \in S)$

$$f_1.f_2 : S \to C \quad \text{که در آن} \quad (f_1.f_2)(z) = f_1(z)f_2(z) \qquad (z \in S)$$

$$f_1/f_2 : S \to C \quad \text{که در آن} \quad (f_1/f_2)(z) = f_1(z)/f_2(z) \qquad (z \in S')$$

اینجا $S' = \{z \in S \mid f_2(z) \neq 0\}$

گزارهٔ ۲-۷. اگر f_1, f_2 پیوسته باشند، $f_1 + f_2$ ، $f_1 - f_2$ ، $f_1.f_2$ ، f_1/f_2 نیز چنین اند.

برهان. این نتیجه گزاره ۲ . ۲ است.

این نتیجهٔ به ما امکان می دهد که به آسانی ثابت کنیم که بعضی از توابع که با کمک توابع پیوسته تشکیل می شوند خودشان پیوسته هستند. مثلاً تابع ثابت $k(z) = c$ ، و تابع همانی $I(z) = z$ ، واضح است که پیوسته هستند. (برای اثبات این مطلب $\varepsilon > 0$ اختیار کنید. در مورد تابع ثابت δ را به طور دلخواه بزرگتر از صفر اختیار کنید، و برای تابع همانی $\delta = \varepsilon$ بگیرید، تا حاصل شود:

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{مستلزم} \quad |k(z) - k(z_0)| = 0 < \varepsilon \text{ ،}$$

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad \text{مستلزم} \quad |I(z) - I(z_0)| < \varepsilon \text{ .}$$

بی درنگ گزارهٔ ۲-۷ نشانی می دهد که $\phi(z) = cz$ پیوسته است و با استقرار بر n، $\phi_n(z) = a_n z^n$ به ازای هر $a_n \in C$ پیوسته است. بار دیگر، با استقراء بر n، هر بسجملهٔ $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ پیوسته است؛ آنگاه نتیجه می گیریم که هر تابع گویای $r(z) = p(z)/q(z)$ (که در آن p و q بسجمله هایی هستند)، هر جا که $q(z) \neq 0$ ، پیوسته است.

با به کار بردن روشهایی نظیر اینها به ندرت لازم است که محاسبات پیچیدهٔ $\varepsilon - \delta$ را به کار بریم.

مثال ۱ . به ازاء هر z ، $m(z) = |z|$ پیوسته است. به ازاء هر $\in > 0$ داده شده، $\delta = \varepsilon$ اختیار کنید، آنگاه با شرط $|z - z_0| < \delta$ ،

$$|m(z) - m(z_0)| = \big||z| - |z_0|\big| < |z - z_0| < \in .$$

مثال ۲. $f(z)=\left(|z|^{۲}+۱۷z^{۳}+۱۰۶۶z\right)/(۱+z)$ پیوسته است به شرط آنکه $z\neq -۱$. می توانیم این مطلب را با محاسبات صریح (همان روش $\delta-\in$) انجام دهیم. اما برای تسریع کار باید توجه کنیم که چون $|z|^{۲}=|z||z|$ حاصلضرب دو تابع پیوسته است، پس پیوسته است، $۱۷z^{۳}+۱۰۶۶z$ یک بسجمله است. پس پیوسته است، از این قرار $۱۷z^{۳}+۱۰۶۶z+|z|^{۲}$ پیوسته است. بالاخره $۱+z$ پیوسته و با شرط $z=-۱$ ناصفر است، و بنابراین خارج قسمت یعنی $f(z)$ به شرط $z\neq -۱$ پیوسته است.

چنانچه با شرط $z=x+iy\in S$ بنویسیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن u و v تابعهای حقیقی از متغیرهای حقیقی x و y هستند، آنگاه گزارهٔ ۲-۳ چنین نتیجه می شود:

گزارهٔ ۲-۸. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در $z_{.}=x_{.}+iy_{.}$ پیوسته است و اگر و فقط اگر u و v در $(x_{.},y_{.})$ پیوسته باشند.

مثال ۳. اگر $f(z)=z^{۲}$، آنگاه $f(z)=(x+iy)^{۲}=x^{۲}-y^{۲}+۲ixy$. پس $u(x,y)=x^{۲}-y^{۲}$ و $v(x,y)=۲xy$. تابع f به ازاء هر $z\in C$ پیوسته است، فقط به این دلیل که u و v تابعهایی پیوسته از x و y به ازاء همهٔ $(x,y)\in R^{۲}$ می باشند.

یک حالت جالب توجه وقتی پیش می آید که S فاصلهٔ (بازهٔ) حقیقی

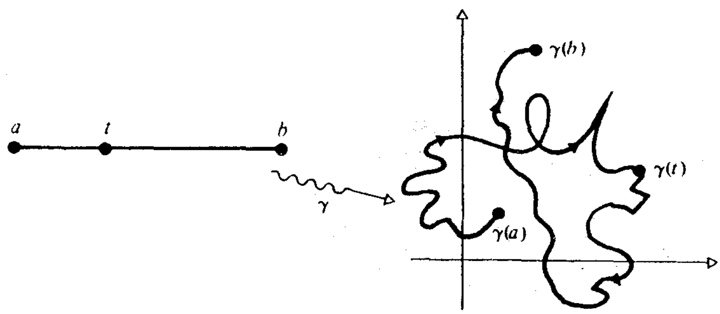
$$[a,b]=\{x\in R\ |a\leq x\leq b\}$$

به عنوان زیر مجموعه ای از C باشد. زیرا با شرط $z\in[a,b]$ داریم $z=x+io$، پس در این مورد می توانیم نمادنویسی خود را ساده کرده و بنویسیم $f(z)=f(x)=u(x)+iv(x)$. پس تابعی چون $f:[a,b]\to C$ پیوسته است اگر و فقط اگر u و v پیوسته باشند.

مثال ۴. $f:[۰,۱]\to C$، که در آن $f(x)=x^{۲}+ix^{۳}$، پیوسته است، چون $u(x)=x^{۲}$ و $v(x)=x^{۳}$ هر دو پیوسته اند.

۴ . مسیرها

یک مسیر در صفحهٔ مختلط یک تابع پیوسته $\gamma : [a,b] \to C$ است. *نقطهٔ ابتدای* آن $\gamma(a)$ و *نقطه انتهای* $\gamma(b)$ است. گاهی صحبت از یک «مسیر در C از $z_۱$ تا $z_۲$» می‌کنیم به شرط آنکه $z_۱$ نقطهٔ ابتدا و $z_۲$ نقطهٔ انتها باشد. همچنین نقطهٔ $z = \gamma(t)$ را یک «نقطهٔ روی مسیر γ» می‌نامیم. گرچه به بیان دقیق، z بر نگاره تابع γ قرار دارد. اگر t را به عنوان «زمان» فرض کنیم و t را از a تا b افزایشی فرض کنیم در این صورت نقطهٔ $\gamma(t)$ یک منحنی را در صفحه از $\gamma(a)$ تا $\gamma(b)$ طی می‌کند. در ترسیم یک نمودار جهت این حرکت را غالباً با یک پیکان نمایش می‌دهیم، اما تاکید می‌کنیم که این تدبیری است موقتی زیرا منحنی مزبور ممکن است خود را قطع کند و شکل کاملاً پیچیده شود (شکل ۲-۷).



شکل ۲-۷

در تئوری، این مسیر حتی ممکن است پیچیده‌تر شود: مثلاً ممکن است یک منحنی «فضا پرکن» شود. بنابراین باید از نمایش حالت کلی به وسیلهٔ یک شکل هندسی ساده بر حذر بود. حتی در حالات ساده ممکن است دو مسیر مختلف فقط یک منحنی نگاره داشته باشند. مثلاً:

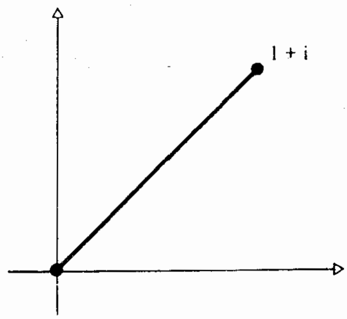
$$\gamma_۱(t) = ۲(t+it) \qquad (۰ \le t \le \frac{۱}{۲})$$

$$\gamma_۲(t) = t^۲ + it^۲ \qquad (۰ \le t \le ۱)$$

یک مجموعه از نقاط را می پیمایند که عبارت است از :

$$\{x+iy \in C \mid x=y, 0 \le x \le 1\}$$

مطابق شکل ۲-۸ .



شکل ۲-۸

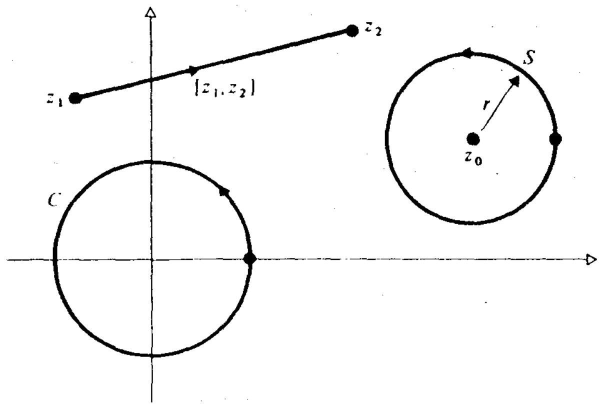
برای ساده کردن مطالب، هر گاه از پاره خطها و دایره ها، به عنوان مسیرها، صحبت به میان آید. فرض را بر این می گذاریم که به وسیلهٔ تابعهای استاندارد زیر مشخص شده باشند:

(الف) پاره خط L از z_1 تا z_2 : $L(t) = z_1(1-t)+z_2 t$ $(0 \le t \le 1)$. در این حالت L را با $[z_1, z_2]$ را نشان می دهیم. هنگامی که $z_1 = a$ و $z_2 = b$ اعداد حقیقی هستند، نگارهٔ مسیر $[z_1, z_2]$ دقیقاً بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ است .

(ب) «دایرهٔ واحد»، $C(t) = \cos t + i\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. کلی تر

(ج) دایره S، با مرکز z_0 ، شعاع $r > 0$ ،

$$S(t) = z_0 + r(\cos t + i\sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

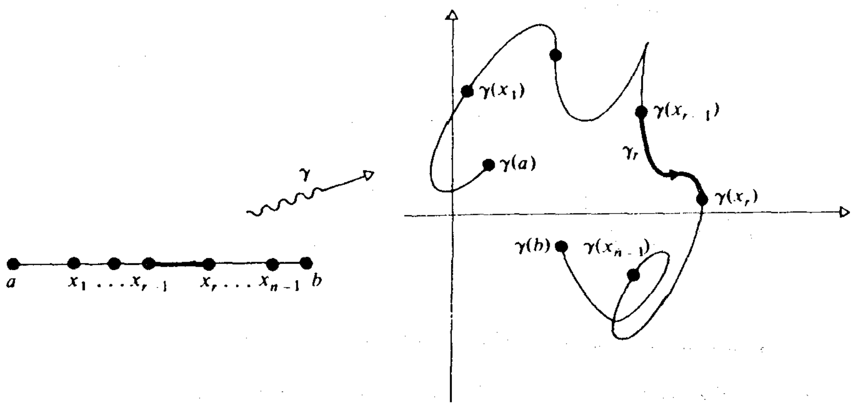


شکل(۲-۹)

در مورد یک مسیر دلخواه $\gamma : [a,b] \to C$ ، یک مسیر جزیی با مقید شدن به یک بازهٔ جزیی $[c,d]$ ، که $a \le c \le d \le b$ ، به دست می‌آید. اگر γ_r، $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ مسیر جزیی باشد که با مقید کردن γ به $[x_{r-1}, x_r]$ به دست می‌آید. آنگاه می‌توان نوشت:

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$$

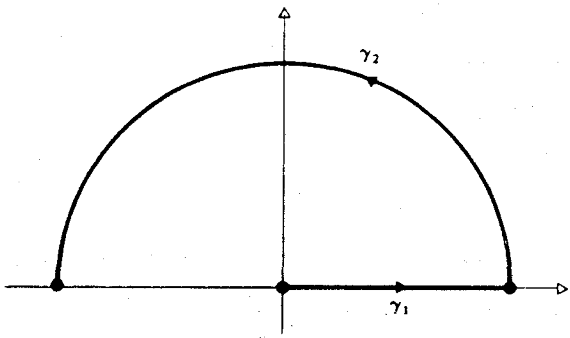
در انجام چنین کاری، γ را تشکیل یافته از مسیرها جزیی $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. با همین ترتیب تلقی می‌کنیم (شکل ۲-۱۰).



شکل(۲-۱۰)

اگر نقطهٔ انتهای مسیر چونγ_1 بر نقطهٔ ابتدای γ_2 منطبق شود، در این صورت گاهی بهتر است که آنها را سر هم کنیم تا مسیری ترکیب یافته به دست آوریم که ابتدا با طی کردن γ_1، و بعد با طی کردن γ_2 حاصل می شود. یک نکتهٔ فنی جزیی اینجا هست، و آن اینکه ممکن است γ_1 بر $[a,b]$ تعریف شود و γ_2 بر $[c,d]$ اما $b \neq c$ باشد.

مثال. $\gamma_1(t) = t(0 \leq t \leq 1)$ ، $\gamma_2(t) = \cos t + i\sin t(0 \leq t \leq \pi)$. (شکل ۲-۱۱).



شکل (۲-۱۱)

در چنین حالتی نمادگذاری خود را قدری وسعت داده ترکیب $\gamma_1 : [a,b] \to C$ با $\gamma_2 : [c,d] \to C$ را (با شرط $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ به صورت $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ تعریف می کنیم طوری که

$\gamma : [a, b+d-c] \to C$ چنین داده می شود:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & (a \leq t \leq b) \\ \gamma_2(t+c-b) & (b \leq t \leq d+b-c) \end{cases}$$

در عمل، آنچه انجام داده ایم تحویل بازهٔ پارامتری قسمت دوم از $[c,d]$ به $[b, d+b-c]$ بوده است، یعنی با افزودن b-c به همهٔ نقاط واقع در $[c,d]$ آن را در امتداد خود حرکت داده ایم.

در مثال بالا، به عنوان نمونه داریم:

$$\gamma(t)=\begin{cases} t & (0\le t\le 1)\\ \cos(t-1)+i\sin(t-1) & (1\le t\le 1+\pi),\end{cases}$$

طوری که γ شامل پاره خط γ_1 و به دنبال آن نیمدایرهٔ γ_2 است.

مسیر $\gamma_1+\gamma_2$ فقط وقتی تعریف می‌شود که نقطهٔ انتهای γ_1 درست همان نقطهٔ ابتدای γ_2 باشد. و چنین تعریفی ممکن است بهترین استفاده از علامت «+» نباشد. با این وصف هر جا که نقطه های انتهایی مناسب منطبق شوند خواهیم داشت:

$$(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_3=\gamma_1+(\gamma_2+\gamma_3)$$

بنابراین در «جمع» به این صورت پرانتزها را حذف می‌کنیم و نماد عمومی‌تر یعنی $\gamma=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ را به کار می‌بریم تا نشان دهیم که مسیر مورد نظر با پیمودن متوالی، $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ تشکیل می‌شود به شرط آنکه همه جا نقطهٔ انتهای γ_{r-1} به نقطهٔ ابتدای γ منطبق شود $(1\le r\le n)$.

با در دست داشتن مسیر $\gamma:[a,b]\to C$ ، یک مفهوم مفید دیگر مسیر *مخالف* یعنی

$-\gamma:[a,b]\to C$ است که چنین تعریف می‌شود:

$$(-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t)\qquad (a\le t\le b).$$

وقتی که t از a تا b افزایش می‌یابد $-\gamma$ همان منحنی γ را طی می‌کند اما در جهت عکس. اگر γ یک مسیر از z_1 تا z_2 باشد، $-\gamma$ مسیری از z_2 تا z_1 خواهد بود.

مثلاً، اگر L قطعه خط $[z_1,z_2]$ با ضابطهٔ

$$L(t)=z_1(1-t)+z_2t\qquad (0\le t\le 1)$$

باشد، آنگاه L - با

$$(-L)(t) = z_1 t + z_2(1-t\ ) \qquad (0 \le t \le 1)$$

مشخص می شود که همان $[z_1, z_2]$ است.
اگر S دایرهٔ به مرکز z_0 ، شعاع $r > 0$ باشد، آنگاه

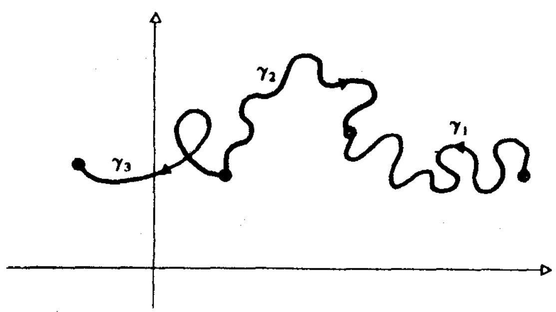
$$S(t) = z_0 + 2(\cos t + i\sin t) \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

یک بار دایرهٔ مزبور را در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت طی می کند، در حالی که مسیر مخالف

$$\begin{aligned}(-S)(t) &= z_0 + r(\cos(2\pi - t) + i\sin(2\pi - t)) \\ &= z_0 + r(\cos t - i\sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi)\end{aligned}$$

همان دایره را یک بار، در جهت عقربه های ساعت، طی می کند.

در مجموعی چون $\gamma_1 + (\gamma_2) + \gamma_3$ پرانتزها را حذف می کنیم و می نویسیم $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$. این درست مسیری است که ابتدا در طول γ_1 به پیش می رود، و بعد مسیر مخالف γ_2 را می پیماید، و بعد γ_3 را (با شرط اینکه نقاط انتهایی متناظر با هم تطبیق داشته باشند). (شکل ۲-۱۲)

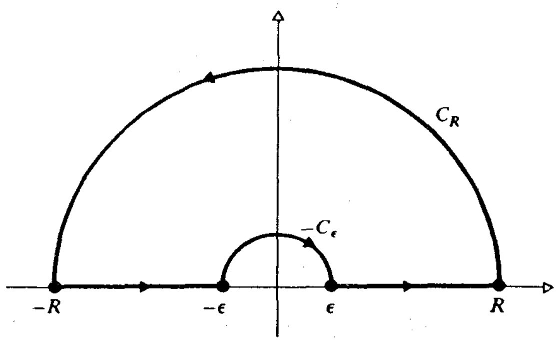


شکل (۲-۱۲)

مثلاً، اگر $0 < \varepsilon < R$ و

$$C_R = R(\cos t + i\sin t) \qquad (0 \le t \le \pi),$$
$$C_\epsilon = \epsilon\,(\cos t + i\sin t) \qquad (0 \le t \le \pi),$$
$$[-R,-\varepsilon](t) = t \qquad (-R \le t \le -\varepsilon),$$
$$[\varepsilon,R](t) = t \qquad (\varepsilon \le t \le R),$$

آنگاه $C_R + [-R,-\varepsilon] - C_\varepsilon + [\varepsilon,R]$ عبارت‌است از مسیری که منحنی شکل ۲-۱۳ را یک بار، در جهت عکس حرکت‌عقربه‌های ساعت، طی می‌کند.



شکل(۲-۱۳)

۵. لم فرش کردن

یک مسیر $\gamma : [a,b] \to C$ را یک مسیر در S می‌نامند اگر

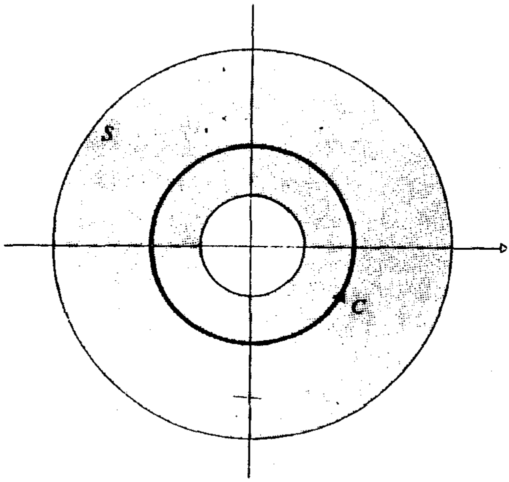
$$\{\gamma(t)\ |a \le t \le b\} \subseteq S.$$

این مطلب را با نماد $\gamma : [a,b] \to S$ نشان می‌دهیم.

مثال۱ . دایرهٔ واحد

$$C(t) = \cos t + i\sin t \qquad (۰ \le t \le ۲\pi)$$

یک مسیر در $S = \left\{z \in C \,\middle|\, \frac{۱}{۲} \le z \le ۲\right\}$ است. (شکل ۲-۱۴).



شکل (۲-۱۴)

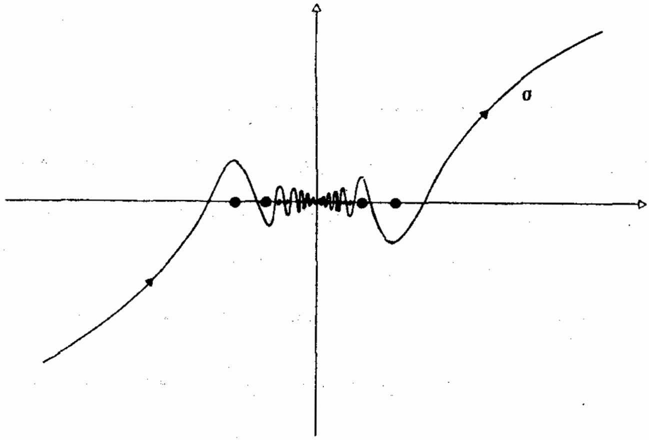
این یک مثال ساده است و نباید به آسایش خاطری غفلت‌آمیز بیانجامد. زیرا مسیرهای خیلی پیچیده هم وجود دارند.

مثال ۲ . اگر

V={ z ∈ C |z ≠ ۱/n و n عددی است صحیح و مخالف صفر}

$$\sigma(t) = t + it\cos(\pi / t) \qquad (-۱ \le t \le ۱)$$

(که $\sigma(۰) = ۰$)، در این صورت σ یک مسیر در V است. (شکل ۲-۱۵). اینجا σ بین هر دو نقطهٔ $۱/n$ ، که n عددی صحیح و ناصفر است، تاب می‌خورد، و محور x ها را هنگامی که $t = ۱/(n + \frac{۱}{۲})$ باشد قطع می‌کند (n صحیح و ناصفر است).



شکل (۲-۱۵)

درك این نکته که یک مجموعهٔ باز S ممکن است خیلی پیچیده و یک مسیر γ در S می تواند به طرزی غامض در هم پیچیده باشد نیاز به قوهٔ تصوری زیاد ندارد. به جای سعی در تصور همهٔ پیچیدگیها، ما به طریق زیر از این موضوع اجتناب می ورزیم. اگر S یک مجموعهٔ باز باشد، می توانیم γ را با تعدادی متناهی از قرصهای باز، واقع در درون S ، بپوشانیم به طریق زیر:

لِم فرش کردن (لم ۲-۹)

فرض کنیم که $\gamma : [a,b] \to S$ یک مسیر در یک مجموعهٔ باز S باشد. در این صورت یک تقسیم جزیی $a = t_۰ < t_۱ < \ldots < t_n = b$ وجود دارد به قسمی که هر مسیر جزیی γ_r ، که با تحدید γ به $[t_{r-۱}, t_r]$ داده شده است، در درون یک قرص $D_r \subseteq S$ قرار گیرد.

برهان. چون S باز است، $\varepsilon > ۰$ وجود دارد به قسمی که $N_\varepsilon(\gamma(a)) \subseteq S$. آنگاه از پیوسته بودن γ نتیجه می شود که $\delta > ۰$ وجود دارد به قسمی که $a \le t < a + \delta$ مستلزم $\gamma(t) \in N_\varepsilon(\gamma(a))$ باشد.

فرض کنیم $t_۱ = a + \frac{۱}{۲}\delta$ ، $D_۱ = N_\varepsilon(\gamma(a))$. در این صورت مسیر $\gamma_۱(t) = \gamma(t)$ $(a \le t \le t_۱)$ در درون قرص $D_۱ \subseteq S$ قرار می گیرد.

اکنون سعی می کنیم که در طول مسیر مورد نظر حرکت کرده، آن را با قرصها قطعه به قطعه بپوشانیم، آن طور که در شکل (۲-۱۶) مشاهده می شود تنها ترس ما این است که نتوانیم همهٔ راه را طی کنیم؛ مثلاً ممکن است که قرصها از

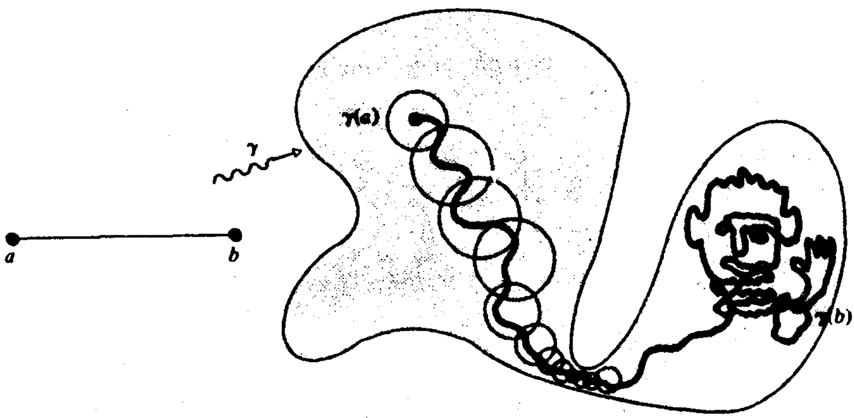
لحاظ اندازه بسیار کوچک شوند و ممکن است که هرگز به انتها نرسیم.

این ترس غیرموجه است. فرض کنیم γ که به $[a,x]$ تحدید شده است، در صورتی که بتوان آن را به مسیرهای جزیی $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ تقسیم کرد طوری که هر γ_r در درون یک قرص $D_r \subseteq S$ $(1 \le r \le m)$ جای گیرد، «بتواند فرش شود». فرض کنیم که C مجموعهٔ x های متعلق به $[a,b]$ باشد به قسمی که γی مقید به $[a,x]$ بتواند فرش شود. در این صورت می‌دانیم که $\left[a, a+\frac{1}{2}\delta\right] \in C$، پس C تهی نیست؛ نیز C از بالا با b محدود است. این بدان معنی است که C یک کوچکترین کران بالای c دارد به قسمی که $a+\frac{1}{2}\delta \le c \le b$.

چون S باز است، یک قرص باز $N_t(\gamma(c)) \subseteq S$ وجود دارد، و بنابر پیوستگی γ، به ازاء یک $K > 0$

$$\gamma(t) \in N_t(\gamma(c)) \text{ مستلزم } c-k<t<c+k \ \ldots\ , \ t \in [a,b]$$

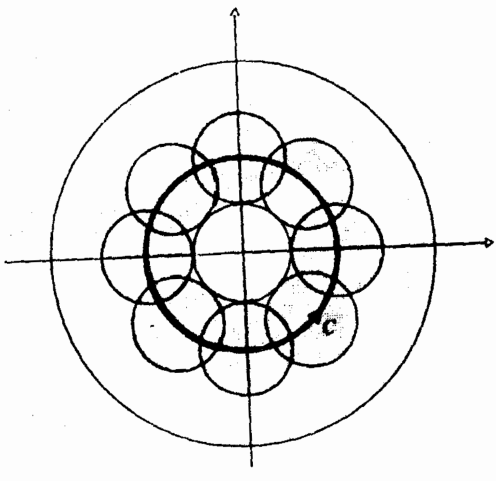
از خاصیت کوچکترین بند بالا نتیجه می شود $x \in C$ که در آن $c-k<x\le c$، و با توجه به اینکه $\gamma([x,c])$ به وسیلهٔ $D_{m+1} = N_t(\gamma(c))$ پوشیده می شود، پس داریم $c \in C$.



شکل (۲-۱۶)

نمی توانیم $c < b$ داشته باشیم، زیرا در این صورت می توانیم $\gamma([c,d])$ را با $D_{m+1} = N_1(\gamma(c))$ به ازاء $d \in C$ که در شرط $c < d < c + k$ صدق می کند بپوشانیم که متناقض با کوچکترین بند بالا بودن c است. پس c=b، و بنابراین $b \in C$ و $[a,b]$ به طور کامل به شیوهٔ مورد نظر فرش می شود.

در مثال ۱ (صفحه۷۰)، به ازاء هر نقطهٔ z بر دایرهٔ واحد C، داریم $N_{1/2}(z) \subseteq S$. واضح است که تعدادی متناهی از چنین دایره هایی C را در درون S فرش می کنند (شکل ۲-۱۷).



شکل (۲-۱۷)

مسیر σ در مثال ۲ را نمی توان با تعدادی متناهی از قرصها در V فرش کرد. هر قرصی که مبداء را بپوشاند (که مبداء روی σ است) شامل نقاطی به صورت $1/n$ خواهد بود که این نقاط خارج از V هستند. امّا همین مطلب بدان معنی است که V باز نیست، بنابراین شرایط لازم برای لم فرش کردن برقرار نیست.

۶. همبندی

زیر مجموعهٔ $S \subseteq C$ را همبند مسیری (همبند گذاری، مرتبط مسیری، . . .) می نامند اگر به ازاء z_1 و z_2 معلوم که به S متعلق باشند یک مسیر γ از z_1 به z_2 وجود داشته باشد.

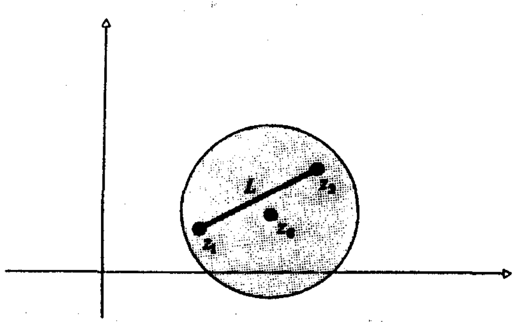
مثال ۱. هر قرص باز $N_r(z_0)$ همبند مسیری است. زیرا با معلوم بودن z_2, z_1 متعلق به $N_r(z_0)$، فرض می کنیم:

$$L(t) = z_1(1-t) + z_2 t \qquad (0 \le t \le 1);$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} |L(t) - z_0| &= \left|\{z_1(1-t) - z_0(1-t)\} + \{z_2 t - z_0 t\}\right| \\ &\le (1-t)|z_1 - z_0| + t|z_2 - z_0| \qquad (\text{با شرط } \; 0 \le t \le 1) \\ &< (1-t)r + tr \\ &= r, \end{aligned}$$

می شود. پس قطعه خط L درون $N_r(z_0)$ قرار دارد (شکل (۲–۱۸)).



شکل (۲–۱۸)

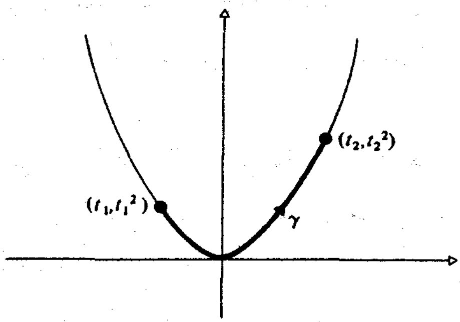
مثال ۲. مجموعهٔ $S = \{z \in C \mid z = t + it^2, t \in R\}$ همبند مسیری است زیرا اگر

$$t_1 + it_1^2, t_2 + it_2^2 \in S$$

طوری که $t_1 < t_2$ ، آنگاه

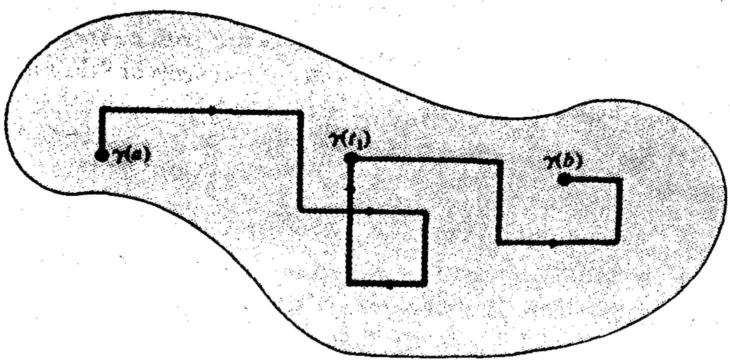
$$\gamma(t) = t + it^2 (t_1 \le t \le t_2)$$

یک مسیر در S بین نقطه های داده شده است (شکل ۲-۱۹).



شکل (۲-۱۹)

گاهی خیلی مناسب تر است که نوع ساده تری از مسیر به کار بگیریم. یک مسیر *پله ای* در S عبارت است از: مسیری چون $\gamma : [a, b] \to S$ همراه با یک تقسیم جزیی $a = t_0 < t_1 ... < t_n = b$ به قسمی که در هر فاصلهٔ جزیی $[t_{r-1}, t_r]$ از γ re و γ im یکی مقداری ثابت باشد. این بدان معنی است که نگارهٔ γ شامل تعدادی از قطعه خطهاست، که هر یک موازی با محور حقیقی یا محور موهومی است. (شکل ۲-۲۰).



شکل (۲-۲۰)

یک زیر مجموعهٔ $S \subseteq C$ همبند *پله‌ای* نامیده می شود اگر به ازاء هر $z_1, z_2 \in S$، یک مسیر پله‌ای از z_1 به z_2 در S وجود داشته باشد.

واضح است که یک مسیر پله‌ای یک مسیر همبند است. اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست، چنانکه نمودار مربوط به مثال ۲ همبند مسیری است امّا همبند پله‌ای نیست؛ برای لم فرش کردن این اولین موفقیت است (موفقیتی جزیی).

ابتدا متذکر می شویم که یک قرص باز $N_r(z_0)$ همبند پله‌ای است. این مطلب از نظر تصویری واضح است و به طور رسمی هم آن را چنین می توان ثابت کرد که نقطهٔ دلخواه $z_1 \in N_r(z_0)$ را پله پله به z_0 بپیوندیم (به این ترتیب مسیر پله‌ای دیگری ما را به نقطهٔ دلخواه دیگری چون $z_2 \in N_r(z_0)$ می برد):

اگر $z_0 = x_0 + iy_0$، $z_1 = x_1 + iy_1$ باشد، فرض می کنیم $w = x_1 + iy_0$، آنگاه

$$|w - z_0| = \sqrt{\{ (x_1 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 \}} = |x_1 - x_0| \leq |z_1 - z_0| < r$$

و بنابراین $w \in N_r(z_0)$، قطعه خطهای $[z_1, w]$، $[w, z_0]$، از این قرار، یک همبندی پله‌ای از z_1 تا z_0 فراهم می کنند.

اکنون می توانیم ثابت کنیم:

گزارهٔ ۲-۱۰. یک مجموعهٔ باز همبند مسیری، همبند پله‌ای است.

برهان. با معلوم بودن $z_1 z_2 \in S$، یک مسیر $\gamma : [a, b] \to S$ از z_1 به z_2 وجود دارد. طبق قضیهٔ فرش کردن یک تقسیم جزیی $a = t_0, t_1 \ldots < t_n = b$ و قرصهای باز $D_1, \ldots, D_n \subseteq S$ وجود دارند به قسمی که $\gamma([t_{r-1}, t_r]) \subseteq D_r$. چون یک قرص باز همبند پله‌ای است، پس یک همبندی پله‌ای π_r از $\gamma(t_{r-1})$ به $\gamma(t_r)$ در D_r و در نتیجه در S داریم. وقتی این همبندی های پله‌ای را قطعه قطعه به هم بپیوندیم یک مسیر پله‌ای $\pi = \pi_1 + \ldots + \pi_n$ از z_1 تا z_2 در S به دست می آید. $\square$

پله های دلخواه لزومی ندارد که همبند باشند. اما، برای هر مجموعهٔ دلخواه S می توان رابطهٔ

$$z_1 \approx z_2 (z_1, z_2 \in S)$$

را به معنی وجود یک مسیر از z_1 به z_2 اختیار کرد. به آسانی ثابت می شود که این یک رابطهٔ هم ارزی است (تمرین ۷) و نیز ثابت می شود که کلاسهای هم ارزی حاصل شده همبند مسیری هستند. این کلاسهای هم ارزی را **مولفه های همبند** S می نامند. مثلاً مولفه های همبند S می نامند. مثلا مولفه های همبند.

$$A = \{z\varepsilon C \| z| \neq 1\}$$

به طور وضوح عبارتند از:

$$A = \{z\varepsilon C \| z| < 1\}, A_2 = \{z\varepsilon C \| z| > 1\}.$$

اگر S باز باشد مولفه های همبند آن همگی باز هستند. (با معلوم بودن z_0 در یک مولفه همبند S چون یک $N_r(z_0), N_r(z_0) \subseteq S$ همبند است، پس باید داشته باشیم $N_r(z_0) \leq S$، و در نتیجه S باز است).

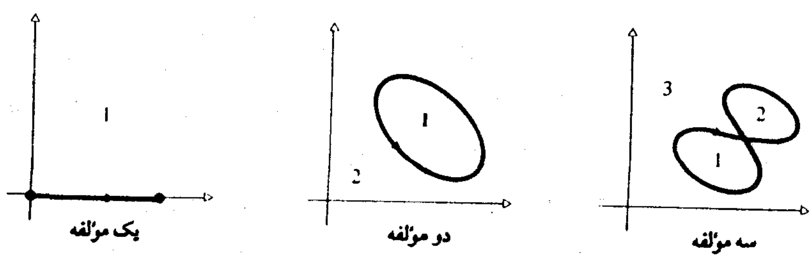
بخصوص یک حالت جالب مربوط به متمم یک مسیر $\gamma : [a,b] \to C$ است و منظورما از آن عبارت است از:

$$\{z\varepsilon C | z \neq \gamma(t)\}, t\varepsilon[a,b] \quad \text{به ازاء هر}$$

متمم γ ممکن است همبند باشد، مثلا.

$$\gamma(t) = t \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

از طرف دیگر γ ممکن است دو یا بیش از دو مولفه داشته باشد (شکل ۲-۲۱).

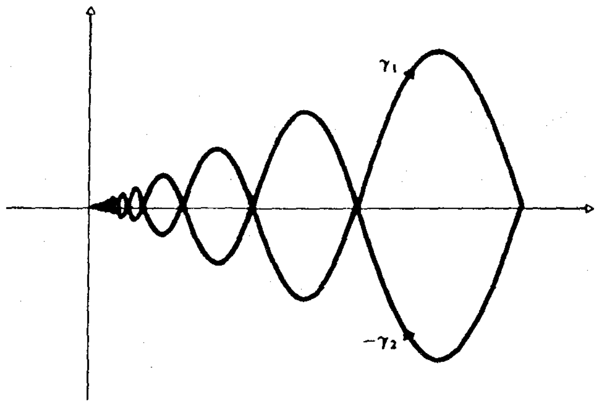


شکل (۲-۲۱)

متمم $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$ که در آن

$$\gamma_1(0)=0, \gamma_1(t)=t+it\sin(\pi/t)(0<t\le 1)$$
$$\gamma_2(0)=0, \gamma_2(t)=t-it\sin(\pi/t)(0<t\le 1),$$

به تعداد *نامتناهی* مولفه دارد . (شکل ۲-۲۲).



شکل (۲-۲۲)

در مورد این که یک مسیر تا چه اندازه ممکن است پیچیده باشد ، می توانیم ثابت کنیم :

گزارهٔ ۲-۱۱ الف . در صفحهٔ مختلط نگاره یک مسیر بسته و کران دار است .

ب- متمم یک مسیر باز است و دقیقا یک مولفهٔ بی کران دارد .

برهان الف . فرض می کنیم $\gamma:[a,b]\to C$ یک مسیر باشد . در این صورت $m(t)=|\gamma(t)|$ ، که ترکیبی است از تابعهای پیرسته یک تابع پوسته $m:[a,b]\to R$ به دست می دهد . m ، بنا بر آنالیز حقیقی، کران دار است ، مثلا $m(t)\le K$ ، و در نتیجه $|\gamma(t)|\le K$ به ازاء هر $t\varepsilon[a,b]$ و نگارهٔ γ درون قرصی که به مرکز مبداء و شعاع K است قرار می گیرد .

فقط کافی است ب را ثابت کنیم ، زیرا از این قسمت نتیجه می شود که نگارهٔ مسیر مورد نظر باید بسته باشد . فرض کنیم که $z_\circ$ در متمم γ واقع باشد . در این صورت ،

$$\mu(t) = |\gamma(t) - z_\circ|$$

یک عدد حقیقی مثبت به ازاء هر $t\varepsilon[a.b]$ است . پس μ پیوسته است و بنابراین کران دار ، و کرانهای خود را اختیار می کند :

$\mu(t) \geq k$ به ازاء هر $t\varepsilon[a.b]$ ، که در آن $(t_\circ\varepsilon[a,b])$ $k = \mu(t_\circ)$ است .

بخصوص داریم $N_k(z_\circ), k > ۰$ شامل هیچ نقطه ای که روی γ باشد نیست ؛ از این قرار متمم γ باز است . بالاخره ، چون نگارهٔ γ درون

$$A = \{z\varepsilon C \| z| \leq K\}$$

قرار می گیرد چون

$$B = \{z\varepsilon C \| z| > K\}$$

به طور وضوح همبند است ، پس تنها مولفهٔ بیکران بایستی همان باشد که شامل B است ؛ سایر مولفهٔ های کران دار در A هستند .

تبصره. یک مجموعهٔ بسته و کران دار در R^n ، بخصوص در صفحهٔ مختلط (با فرض n=۲) را فشرده می نامند. فشردگی خاصیتی بسیار مهم در توپولوژی مجموعهٔ نقاط است (تعریف فوق به صورت کلی تر داده شده است) . در این متن به بیان همهٔ خواص فشردگی نیازی نداریم زیرا در موارد ساده ای که پیش می آید ، مثلاً در گزاره ۲-۱۱ ، دست خالی با به کار بردن آنالیز حقیقی می توان با آن در گیر شد .

اکنون می پردازیم به تعریف نوع خاصی از مجموعه که برای این نظریه در این متن ضرورت اساسی دارد. منظور از یک *دامنه* یک مجموعه است که در صفحهٔ مختلط باز و ناتهی و همبند مسیری باشد. با به کار گرفتن گزارهٔ ۲-۱۰ ملاحظه

می شود که یک دامنه همبند پله ای نیز هست و این خاصیت بعدها فوق العاده مفید خواهد بود. آنچه گفتیم بدان معنی است که در صحبت راجع به همبند بودن دامنه، بنا به مناسبت می توان آن را همبند مسیری یا همبند پله ای معنی کرد.
آن سان که آنالیز مختلط می نمایاند، خواننده به اهمیت فوق العادهٔ این تعریف پی خواهد برد. تابعهای مختلط f به آنهایی محدود می شود که به صورت $f : D \to C$ باشند که در آن D یک دامنه است. باز بودن D به ما این امکان را می دهد که با حدود، پیوستگی و دیفرانسیل پذیری بخوبی کار کنیم زیرا از $z_\circ \in D$ نتیجه می شود $N_\varepsilon(z_\circ) \subseteq D$ (به ازای εی مثبت) و بنابراین $f(z)$ برای همهٔ z های نزدیک به $z_\circ$ تعریف شده است. همبندی D وجود یک مسیر (پله ای) را بین هر دو نقطهٔ دلخواه از D تضمین می کند و همین مطلب به نوبهٔ خود این امکان را به ما می دهد که انتگرال از یک نقطه به نقطهٔ دیگر را در طول چنین مسیری تعریف کنیم.
اما، محدود کردن تابعها به آنها که روی دامنه ها تعریف می شوند نتایجی، به مراتب دقیقتر از آن دارد که صرفاً آماده سازی اولیه، برای بیان یک تعریف مناسب باشد. آنها که غوامض آنالیز مختلط را عمیقاً مطالعه کرده اند، در آن غناهایی ناگفته می یابند که با مورد حقیقی کاملاً بی شباهت است. مثلاً، اگر دو تابع مختلط دیفرانسیل پذیر روی یک دامنهٔ D تعریف شوند و در یک قرص کوچک در D مساوی باشند، آنگاه این دو تابع در سراسر D مساوی خواهند بود! چنین نتیجه ای برای تابعهای دیفرانسیل پذیر کلی در حالت حقیقی برقرار نیست و این نتیجه فقط یکی از نتایج بسیاری است که در این کتاب خواهد آمد تا زیبایی و بسادگی آنالیز مختلط را نشان دهد. قبل از فصل ۱۰ به این نتایج نخواهیم رسید؛ اما اینجا متذکر می شویم که بر اهمیت بنیادی تاسیس مبانی توپولوژیک مورد نیاز برای این درس تاکید ورزیده شود.

تمرینهای ۲

۱ . فرض می‌کنیم $z_0 \in C$, $a, b, \in R$ ، دلخواه باشند. مجموعهٔ همهٔ نقاط $z \in C$ را که در شرایط زیر صدق کنند رسم کنید. در هر مورد بیان کنید که آیا مجموعهٔ مفروض باز است یا، بسته ، یا هیچ کدام؟

(الف) $1 < |z| < 2$

(ب) $re z \geq 0 \quad , \quad im z \leq re z$

(ج) $im z \geq 0 \quad , \quad 1 < |z| < 2$

(د) $re(z z_0) > 0$

(ه) $a < \arg(z - z_0) < b$ (که در آن $-\pi < a < b \leq \pi$)

(و) $|z - \bar{z}_0| = |\bar{z} - z_0|$

(ز) $|z - \bar{z}_0| < |\bar{z} - z_0|$

(ح) $|z - \bar{z}_0| \leq |\bar{z} - z_0|$

(ط) $re(z^2) > 0$

(ی) $re(z^2) \leq 0$

(ك) $re(z^2) > 1$

(ل) $re(z^2) \leq 1$

۲ . گزارهٔ ۲-۲ قسمتهای (a) و (b) را ثابت کنید.

۳ . حدهای زیر را، در صورت وجود، تعیین کنید:

(الف) $\lim_{z \to 0} |z| / z$

(ب) $\lim_{z \to 0} |z|^2 / z$

(ج) $\lim_{z\to ۰} z/|z|^{۲}$

(د) $\lim_{z\to ۰} (z - \mathrm{re}z)/\mathrm{im}z$

۴ . با کمک اصول اولیه، ثابت کنید که تابعهای زیر پیوسته هستند:

(الف) $\mathrm{re}z$

(ب) $\mathrm{im}z$

(ج) $z+|z|$

(د) $۱/z (z \neq ۰)$

(ه) $|z|^{۲}$

۵ . گزارهٔ ۲-۶ را ثابت کنید.

۶ . برای هر یک از مجموعه های زیر و زوجهای نقاط، (در صورت امکان) تعریف کنید: (الف) یک مسیر در مجموعه را که آن دو نقطه را به هم وصل می کند، (ب) یک مسیر پله ای در مجموعه را که آن دو نقطه را به هم وصل می کند.

(الف) $|z| < ۲$ ، $۱+i, \quad ۱-i$.

(ب) $|z| = ۱$ ، $-i, \quad i$.

(ج) $۱ \leq |z| < ۲$ ، $\sqrt{۲}, \quad -\sqrt{۲}$.

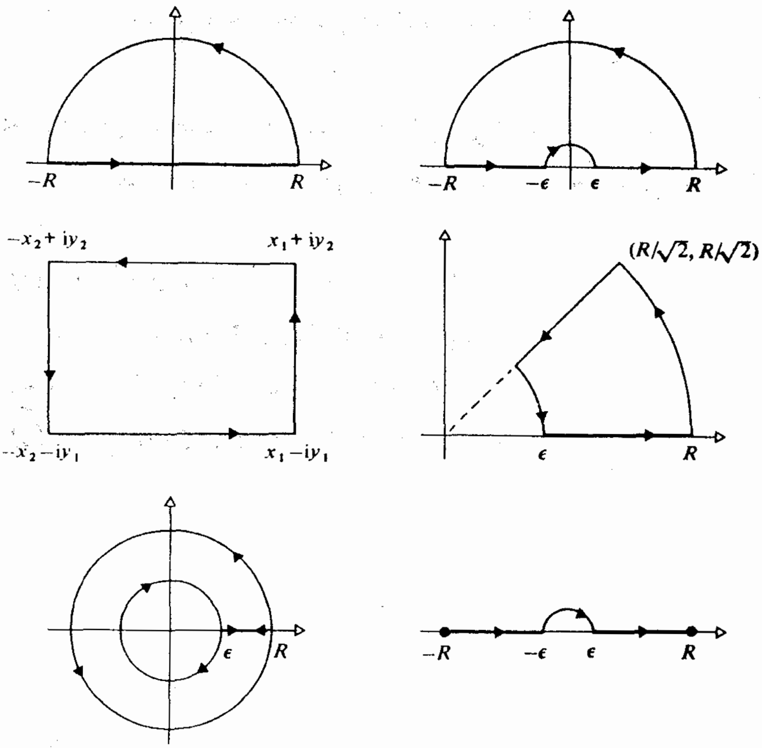
(د) $|\mathrm{re}z| > ۵$ ، $-۹+۳۷i, \quad ۱۰۶۶+i(\pi+\sqrt{۵})/۱۷$.

(ه) $\left|۱-|z|\right| > \frac{۱}{۲}$ ، $i/۳, \quad ۴۹(i+۱)$.

۷ . فرض می کنیم S زیر مجموعه ای از C باشد. اگر $z,w \in S$ باشد، تعریف می کنیم $z \approx w$ اگر و فقط اگر یک مسیر در S از z به w وجود داشته باشد. نشان دهید که $\approx$ یک رابطهٔ هم ارزی است. کلاسها ی هم ارزی را *مولفه ها* می نامیم. اگر S باز و ناتهی باشد، نشان دهید که هر مولفه از S یک دامنه است.

۸ . فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ همبند (مسیری) از C,C و $f: S \to C$ یک تابع پیوسته باشد. ثابت کنید که $f(S)$ همبند است.

۹ . تابعهایی صریح برای مسیرهایی که منحنی های شکل ۲-۲۳ را در جهت داده شده می پیمایند، ارائه دهید (همهٔ مسیرهای فرعی قسمتهایی از دوایر یا قطعه خط ها هستند؛ $R > \varepsilon > ۰$، $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲$ اعداد حقیقی مثبت هستند.)



(شکل ۲-۲۳)

۱۰ . فرض کنیم S زیر مجموعه ای از C باشد. یک نقطهٔ $z \in C$ را یک نقطهٔ مرزیS می نامند اگر z یک نقطهٔ حد ی S و نیز یک نقطهٔ حدی متمم S یعنی $C \setminus S$ باشد. مرز ∂S از S عبارت است از مجموعهٔ نقاط مرزی S. در موارد زیر ∂S را توصیف و بیان کنید که آیا ∂S همبند (مسیری) است یا نه. در هر مورد شکلی رسم کنید.

(الف) $S = \{z \in C | ۱ < |z| < ۲\}$

(ب) $S = \{z \in C | z \neq ۰\}$

(ج) $S = \{ z \in C | z = x + iy,$ اعدادی گویا هستند y ، x $\}$

(د) $S = \{ z \in C | 0 \leq rez \leq 1, 0 \leq imz \leq 1 \}$

(ه) مقطع مجموعه های در (ج) و (د) =S

(و) $S = \{ z \in C | z \neq iy, y \in R, y \leq 0 \}$

(ز) مقطع مجموعه های در (و) و(ب)=S

۱۱ . در موارد زیر مجموعهٔ S (تمرین ۱۰) را می توان به عنوان نگارهٔ یک مسیر معرفی کرد. شکل S را رسم و تابعی را که مسیر مربوطه را می دهد مشخص کنید.

(الف) $S = \{ z \in C | z \leq 1, imz \geq 0 \}$

(ب) $S = \{ z \in C | 1 \leq |z| \leq 2, imz \geq 0 \}$

(ج) $S = \{ z \in C | 0 \leq rez \leq 1, 0 \leq imz \leq 1 \}$

(د) $S = \{ z \in C | 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq imz \leq rez \}$.

فصل سوم

سریهای توانی

بسیاری از توابع که از اهمیت بیشتری برخوردارند و در آنالیز حقیقی مورد مطالعه قرار می گیرند. مانند تابعهای توانی یا مثلثاتی، با به کار بردن سریهای توانی به مناسبترین وجهی تعریف می شوند. سریهای توانی برای سینوس و کسینوس که با آنها آشنا هستید. از لحاظ تاریخی حداقل به *نیوتون* در سال ۱۶۷۶ بر می گردد: این سریها مجدداً به وسیله *دوموآور* در سال ۱۶۹۸ به دست آمدند، همچنین به وسیلهٔ *برنولی* در ۱۷۰۲ و در سالهای ۱۷۳۰ *اویلر* آنها را به طور گسترده ای به کار گرفت.

سریهای توانی در مطالعهٔ تابعهای مختلط از اهمیت بیشتری برخوردارند (اگر مهمتر از آن وجود داشته باشد).

درسالهای ۱۸۲۰، کوشی از سری توانی $\sum a_n z^n$، که برحسب یک متغیر مختلط z است، استفادهٔ شایانی نمود. بخصوص هر تابع حقیقی که یک بسط به سری توانی داشته باشد سبب به وجود آوردن یک تابع مختلط با سری توانی مختلط متناظر می شود و این امر روشی طبیعی برای تعمیم تابعها از حقیقی به مختلط فراهم می آورد. در سالهای ۱۸۴۰ نیز *وایرشتراس* نشان داد که چگونه می توان تمامی نظریهٔ آنالیز مختلط را با به کار بردن روشهای مربوط به سریهای توانی بنا نهاد.

در این فصل به بیان خواص مقدماتی دنباله ها و سریهای اعداد مختلط، غالباً با استفاده از شباهت مستقیم با موارد حقیقی می پردازیم و بعد خود را به مطالعه عمیقتر سریهای توانی محدود می کنیم.

۱ . دنباله ها

دنباله ها، برای منظور ما، فقط به عنوان سنگ زیر پا برای رسیدن به سریها مورد نیازند. یک *دنبالهٔ* (مختلط) تابعی مانند:

$$f : /N \to C$$

است که در آن $/N$ دلالت بر اعداد طبیعی $\{۰,۱,۲,...\}$ دارد. معمول و مناسب آن است که بنویسیم:

$$z_n = f(n)$$

و اعداد z_n را، که *جمله های* دنباله نامیده می شوند، در یک خط مرتب کنیم:

$$z_۰, z_۱, z_۲, ...$$

نماد دیگر عبارت است از:

$$\{z_n\}(n \geq ۰)$$

یا فقط

$$\{z_n\}$$

که معمولاً برای اختصار مفید هستند، نیز گاهی اوقات بهتر است که دنباله را با جملهٔ یکم شروع کنیم نه با جملهٔ شماره صفر؛ به این صورت:

$$z_۱, z_۲, z_۳, ...$$

چنانچه n به ∞ میل کند می گوییم حد $\{z_n\}$ عدد z است اگر با معلوم بودن عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$ یک عدد طبیعی $V(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به قسمی که از $n > N(\varepsilon)$ نتیجه شود $|z_n - z| < \varepsilon$.

توجه داشته باشید که این تعریف با تعریف معمولی برای دنباله های حقیقی یکی است ، جز آنکه z, z_n می توانند مختلط باشند و قدر مطلق $| z_n - z |$ طبق ۵-۱ تعریف می شود.

می نویسیم :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$

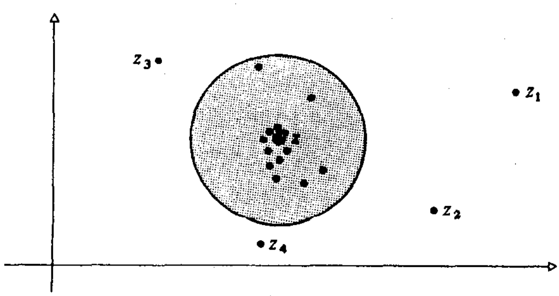
یا

$$z_n \to z \quad \text{هنگامی که} \quad n \to \infty$$

محتوای هندسی این تعریف آن است که برای n های به اندازهٔ کافی بزرگ ، جمله های z_n ، همه درون یک دایرهٔ به دلخواه کوچک با مرکز z قرار می گیرند ، مطابق شکل ۳-۱ . خود این هم یادآور حالت حقیقی است .

دنباله ای که به حدی میل کند *همگرا (متقارب)* نامیده می شود .

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$



(شکل ۳-۱)

مسأله تعیین حدود دنباله ها مختلط را می توان مستقیماً به حالت حقیقی تبدیل کرد:

لم ۳-۱. فرض کنیم $\{z_n\}$ یک دنباله باشد و فرض می کنیم $z_n = x_n + iy_n$ است طوری که $x_n, y_n \in R$ باشد. نیز فرض می کنیم $z = x + iy$ است طوری که $x, y \in R$ باشد. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

می شود اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

باشد.

برهان. فرض می کنیم $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. نیز فرض می کنیم $\varepsilon > ۰$ است. در این صورت $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که $|z_n - z| < \varepsilon$ به شرط آنکه $n > N$ شود. به ازاء هر $w = u + iv \in C$ داریم:

$$|u| \le \sqrt{u^۲ + v^۲} = |w|,\ |v| \le \sqrt{u^۲ + v^۲} = |w|,$$

بنابراین، با اختیار $w = z_n - z$ با شرط $n > N$ داریم:

$$|x_n - x| \le |z_n - z| < \varepsilon,$$
$$|y_n - y| \le |z_n - z| < \varepsilon,$$

بنابراین $y_n \to y, x_n \to x$.

بعکس، فرض می کنیم که $y_n \to y, x_n \to x$. با دادن $\varepsilon > ۰$ وجود دارند $M, N \in \mathbb{N}$ به قسمی که

$|x_m - x| < \varepsilon/۲$ به ازاء هر $M > m$.

$|y_n - y| < \varepsilon/۲$ به ازاء هر $n > N$.

فرض می کنیم $R = \max(M,N)$ ، اگر $n > R$ ، آنگاه

$$|z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/۲ + \varepsilon/۲ = \varepsilon$$

پس $z_n \to z$.

توجه داشته باشید که $\{y_n\},\{x_n\}$ دنباله هایی حقیقی هستند، و بنابراین حدود آنها را می توان با تکنیکهای آنالیز حقیقی پیدا کرد.

مثال. فرض می کنیم $z_n = (n + in^۲ + ۱)^{-۱}$. آیا z_n متقارب است؟ اگر چنین است، به چه؟

جزءهای حقیقی و موهومی را جدا کنید، از این قرار با به کار بردن معادلهٔ (۸-۱) داریم: $z_n = ((n+۱) + in^۲)^{-۱} = (x+۱)[(n+۱)^۲ + n^۴]^{-۱} - in^۲[(n+۱)^۲ + n^۴]$ و بعد ملاحظه می شود که:

$$x_n = \frac{n+۱}{(n+۱)^۲ + n^۴} \to ۰ \qquad \text{وقتی که } n \to \infty$$

و

$$y_n = \frac{-n^۲}{(n+۱)^۲ + n^۴} \to ۰ \qquad \text{وقتی که } n \to \infty$$

بنابراین

$$z_n \to o + io = ۰$$

ایدهٔ مشابهی نوع مختلط مربوط به *اصل کلی همگرایی* را ارائه می دهد:

قضیهٔ ۳-۲ . دنبالهٔ $\{z_n\}$ وقتی که $n \to \infty$ به حد z میل می‌کند اگر و فقط اگر به ازاء هر $\varepsilon > ۰$ ، $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که:

$$(۱) \qquad m, n > N(\varepsilon) \quad \text{مستلزم} \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $z_n \to z$. پس $N = N(\varepsilon)$ وجود دارد به قسمی که $|z_n - z| < \varepsilon/۲$ هر چه باشد $n > N$. در این صورت اگر $m, n > N$ ، آنگاه

$$|z_m - z_n| \le |z_m - z| + |z - z_n| < \varepsilon/۲ + \varepsilon/۲ = \varepsilon$$

پس (۱) برقرار است.
بعکس، فرض کنیم (۱) برقرار باشد. نیز فرض می‌کنیم $x_n = \mathrm{re}(z_n), y_n = \mathrm{im}(z_n)$. اگر $m, n > N(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$|x_m - x_n| \le |z_m - z_n| < \varepsilon$$
$$|y_m - y_n| \le |z_m - z_n| < \varepsilon$$

براساس اصل *کلی همگرایی* برای سریهای حقیقی (یعنی، این واقعیت که دنباله های کوشی همگرا هستند)، نتیجه می‌شود که $x_n \to x, y_n \to y$ به ازاء x و y متعلق به R . حال طبق لم ۳-۱ داریم:

$$z_n \to z = x + iy$$

مثال. اصل کلی همگرایی را به کار برده ثابت می‌کنیم دنبالهٔ با تعریف زیر همگرا است:

$$z_n = i\sqrt{۲} + \left(\frac{۳ - ۴i}{۶}\right)^n$$

به محاسبه می پردازیم :

$$|z_m - z_n| = \left|\left(\frac{۳-۴i}{۶}\right)^m - \left(\frac{۳-۴i}{۶}\right)^n\right|$$
$$\le \left|\left(\frac{۳-۴i}{۶}\right)^m\right| + \left|\left(\frac{۳-۴i}{۶}\right)^n\right|$$
$$= \left(\frac{۵}{۶}\right)^m + \left(\frac{۵}{۶}\right)^n$$
$$\le ۲.\left(\frac{۵}{۶}\right)^r$$

که در آن $r = \min(m,n)$. چون $\frac{۵}{۶} < ۱$ می توان $۲.\left(\frac{۵}{۶}\right)^r$ را از هر عـدد دلخـواه ε کوچکتر کرد به این ترتیب که r به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم .

توجه کنید که برای پاسخ به این پرسش به کار بردن لم ۳-۱ موجب سهولت کـار نخـواهـد شـد (گـرچه خـواننده ای کـه بـی باك است با تبـدیل $(۳-۴i)/۶$ به مختصات قطبی شانس بهتری دارد) . البته با کمک تعریف فوق می توان ثابت کرد که $z_n \to i\sqrt{۲}$

۲ . سریها

با در دست داشتن دنبـالهٔ $\{z_n\}$ می توان دنبـالهٔ دیگری از *مـجـمـوعـهـای جزیی* با تعریف ،

$$s_n = \sum_{r=۰}^{n} z_r = z_۰ + z_۱ + \ldots + z_n$$

تشکیل داد . اگر s_n به یک حد $s \in C$ میل کند در آن صورت تعریف می کنیم .

$$\sum_{r=۰}^{\infty} z_r = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=۰}^{n} z_r ,$$

و می گویم سری

$$\sum_{r=0}^{\infty} z_r$$

همگرا به s است. وقتی که یک سری به عددی چون s می گراید می گویند *همگرا* است. نیز می توان نوشت:

$$s = z_0 + z_1 + \dots$$

که ساده و راحت است (اما توجه داشته باشید که این یک تعریف برای عبارت $z_0 + z_1 + \dots$ است زیرا مجموعهای متناهی معنی خاصی ندارند مگر اینکه به آنها یک معنی بدهیم).

اگر یک سری همگرا نباشد آن را *واگرا* می نامند.

مطابق این تعریف، هر سؤالی دربارهٔ همگرایی یک سری را می توان به سوالی دربارهٔ دنبالهٔ $\{s_n\}$ از مجموعهای جزیی برگرداند. مثلاً، چون قضیهٔ ۲ . ۳ را در مورد $\{s_n\}$ به کار بگیریم حاصل می شود:

لم ۳ . ۳. سری $\sum_{r=0}^{\infty} z_r$ همگرا است اگر و فقط اگر، به ازاء هر $\varepsilon > 0$، یک $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$m, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{r=m+1}^{n} z_r \right| < \varepsilon$$

(بدین معنی که از شرط $m, n > N(\varepsilon)$، حاصل شود $\left| \sum_{r=m+1}^{n} z_r \right| < \varepsilon$).

برهان. توجه کنید که $\sum_{r=m+1}^{n} z_r = s_n - s_m$. اکنون قضیهٔ ۳ . ۲ را به کار بگیرید. □

مثال. فرض می کنیم $z_n = \left(\frac{3 - 4i}{6} \right)^n$ باشد. آیا $\sum_{r=1}^{\infty} z_r$ همگرا است؟

داریم :

$$\left|\sum_{r=m}^{n}\left(\frac{۳-۴i}{۶}\right)^{r}\right| \le \sum_{r=m}^{n}\left|\left(\frac{۳-۴i}{۶}\right)^{r}\right| \quad \text{(نامساوی مثلثی!)}$$

$$=\sum_{r=m}^{n}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{r}.$$

اما این یک سری تصاعد هندسی (متناهی) است و می دانیم که مجموع آن عبارت است :

$$\left[\left(\frac{۵}{۶}\right)^{m}-\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n+۱}\right]\left(۱-\frac{۵}{۶}\right)^{-۱}$$

که به طور واضح می توان آن را از هر عدد مثبت ε کوچکتر کرد به شرط آنکه m و n به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شوند، زیرا که $\frac{۵}{۶} < ۱$ است.

اخطار. لطیفه ای است قدیمی و احترام آمیز دربارهٔ دو روستایی که هر یک اسبی خریدند و می خواستند که اسبهایشان با هم اشتباه نشود. یکی از آنها دم اسبش را برید. روز بعد، مردی دم اسب دیگر را برید. این بار یکی از آنها گوش اسبش را برید . . . و باز وضع قبلی پیش آمد. عاقبت با نا امیدی یکی از آنها به دیگری گفت: «به تو می گویم که چکار کنیم؛ تو سیاه را بردار و من سفید را»

به دلایلی چند، بسیاری از دانشجویان دنباله ها و سریها را با هم اشتباه می کنند، اما برای افتادن به این اشتباه دلایلی وجود ندارد، زیرا **سریها، آنهایی هستند که با $\sum_{r=۰}^{\infty}$ شروع می شوند.**

این ملاحظه در عمل، همهٔ راههای افتادن به اشتباه را برطرف نمی کند، اما شروع خوبی است.

همانند دنباله ها، گاهی ترجیح می دهیم که با ۱ شروع کنیم نه با ۰. این کار

سری ها را به صورت

$$\sum_{r=1}^{\infty} z_r$$

یا

$$z_1 + z_2 + \ldots$$

در می‌آورد که تعریف دقیق آن را به عهدهٔ خواننده می گذاریم. تغییراتی، از قبیل

$$\sum_{r=3}^{\infty} z_r ,$$

نیز پذیرفته می شوند. اما، باید توجه داشت که این چیزی نیست جز همان $\sum_{r=0}^{\infty} z_r$

که در آن $z_0 = z_1 = z_2 = 0$. به قصد ساده مختصر نویسی غالباً به جای $\sum_{r=0}^{\infty} z_r$ می نویسیم:

$$\sum z_r .$$

جمع کردن سریهای مختلط را، در صورت تمایل، می توان به جمع کردن سریهای حقیقی معادل تبدیل کرد. با به کار گرفتن لم ۳-۱ برای مجموعه های جزیی، بی درنگ برهانی به دست می آید برای:

لم ۳-۴. فرض می کنیم $z_r = x_r + iy_r$ است که در آن $x_r, y_r \in R$. در این صورت $\sum z_r$ همگرا است اگر و فقط اگر سریهای حقیقی $\sum x_r, \sum y_r$ همگرا باشند، که در این صورت:

$$\sum z_r = \sum x_r + i \sum y_r . \qquad \square$$

مثال. فرض می کنیم $z_n = (i)^n / n^2$. آیا $\sum z_r$ همگرا است؟
داریم :

$$x_n = re(z_n) = \begin{cases} \cdot & \text{(اگر } n \text{ فرد باشد)} \\ \dfrac{(-1)^{n/2}}{n^2} & \text{(اگر } n \text{ زوج باشد)} \end{cases}$$

اکنون ملاحظه می شود که $\sum x_r$ یک سری متناوب است (با نادیده گرفتن جمله های صفر آن) که جملهٔ nام آن به صفر میل می کند، پس متقارب است.
مشابهاً $y_n = im(z_n)$ منجر به یک سری همگرایی $\sum y_r$ می شود. پس $\sum z_r$ همگرا است.
به طریق مشابه، چه با در نظر گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی و چه با تقلید مستقیم از برهانهای مربوط به سریهای حقیقی، حاصل می شود:
لم ۳-۵. فرض کنیم که $\sum a_r, \sum b_r$ سریهایی متقارب باشند، نیز فرض می کنیم که c یک عدد مختلط باشد. در این صورت $\sum(a_r + b_r), \sum(ca_r)$ همگرا هستند و مجموعهای آنها عبارتند از: (چنین تعریف می شوند)

$$\sum(a_r + b_r) = \sum a_r + \sum b_r$$
$$\sum(ca_r) = c\sum ar$$

□

هنگامی که در پی آن هستیم که ثابت کنیم یک سری مختلط همگرا است بدون آنکه مجموع واقعی آن را حساب کرده باشیم، غالباً بهتر است روی مدول آن تکیه کنیم تا روی قسمتهای حقیقی و موهومی آن. دو مشابهت با مورد حقیقی، می گوییم که سری $\sum z_r$ *همگرای مطلق* (مطلقاً همگرا) است اگر و فقط اگر $\sum |z_r|$ همگرا باشد.
قضیهٔ ۳-۶. یک سری مطلقاً همگرا، همگرا است.
برهان. فرض می کنیم $\sum z_r$ مطلقاً همگرا است و نیز فرض می کنیم

$z_r = x_r + iy_r$. آنگاه $|x_r| \le |z_r|$, $|y_r| \le |z_r|$. امـــا $\sum |z_r|$ همـگرا اسـت، بنابراین از آزمـون مقـایسه برای سـریهـای حقیقی نتیجـه می شود کـه $\sum |x_r|$ و $\sum |y_r|$ همگرا هستند. نتیجهٔ مطلوب به وسیلهٔ لم ۳-۴ حاصل می شود.

مثـال. $\sum z_n = \sum (i^n / n^2)$ همگرا است زیراً $\sum |z_n| = \sum 1/n^2$ همگرا است (این برهان را با برهان مثال قبلی مقایسه کنید.)

قضیهٔ ۳-۶ از این جهت مفید است کـه به ما امکان می دهد که همگرایی بسیاری از سـریـهـای مـخـتـلط $\sum z_r$ را با کـمـک سـری حـقـیـقی $\sum |z_r|$ ثابت کنیم. چـون جمله های $\sum |z_r|$ مثبت‌هستند، توجـه شمـا را به وجـود نوع مخـتلطی از آزمـون مقایسه جلب می کنیم:

آزمون مقایسه. فرض می کنیم $\sum a_r, \sum b_r$ سریهایی مختلط، و $\sum a_r$ همگرای مطلق باشد. اگر به ازای kای مثبت و N صحیح داشته باشیم:

$$|b_r| < K|a_r| \quad (r > N),$$

آنگاه $\sum b_r$ هم همگرای مطلق است، و بنابراین همگرا است.

برهان. $\sum |a_r|$ همگرا است و بنـابراین، طبق آزمـون مـقـایسـهٔ حـقـیـقی، $\sum |b_r|$ متقارب است و طبق قضیهٔ ۳-۶، $\sum b_r$ هم متقارب است. □

نوع مختلطی از *آزمون نسبت* وجود دارد.

فرض می کنیم $\sum a_r$ یک سری مختلط با جمله های ناصفر باشد به قسمی که

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|a_r|}{|a_{r-1}|} = \lambda$$

اگر $\lambda < 1$ باشـد، آنگاه سـری $\sum a_r$ همگرای مطلق است؛ اگـر $\lambda > 1$، $\sum a_r$ واگرا است؛ و به ازای $\lambda = 1$، $\sum a_r$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

برهان. برای $\lambda < 1$ ، فرض می کنیم $\rho = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$ ، در این صورت $\lambda < P < 1$ و N ی وجود دارد به قسمی که

$$\text{برای } r > N \text{ داریم } |a_r|/|a_{r-1}| < \rho$$

بنابراین

$$|a_r| < \rho|a_{r-1}| < \rho^2|a_r - 2| < \ldots < \rho^{r-N}|a_N| \quad (r > N)$$

و $\sum a_r$ ، در مقایسه با $\sum \rho^r$ که در آن $\rho < 1$ و حقیقی است، همگرا است.
در حالت $\lambda > 1$ ، ملاحظه می شود که برای N ای

$$|a_r|/|a_{r-1}| > 1 \qquad (r > N)$$

بنابراین

$$|a_r| > |a_{r-1}| > |a_{r-2}| \ldots > |a_N| \qquad (r > N)$$

و بنابراین $\sum a_r$ نمی تواند همگرا باشد زیرا جمله های $\{a_r\}$ به صفر میل نمی کنند.

با توجه به اینکه برای $\sum 1/n, \sum 1/n^2$ داریم $\lambda = 1$ ، اما اولی واگرا و دومی همگرا است، برهان کامل می شود.

۳. سریهای توانی

فرض می کنیم $z_0 \in C$. یک سری به فرم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

با ضرایب $a_n \in C$ یک *سری توانی در حوالی* z_0 نامیده می شود. با تعویض متغیر

$z' = z - z_0$ می توانیم فقط حالت $z_0 = 0$ را در نظر بگیریم. اینجا، با کمک نتایج زیر همگرایی برقرار است:

لم ۳-۷. (الف) اگر یک سری توانی $\sum a_n z^n$ با شرط $z = z_1 \neq 0$ همگرا باشد، در این صورت به ازاء هر z با شرط $|z| < |z_1|$ همگرای مطلق خواهد بود. (ب) اگر $\sum a_n z^n$ در $z = z_2$ واگرا باشد در این صورت به ازاء همه zها که در شرط $|z| > |z_2|$ صدق می کنند واگرا است.

برهان. (الف) اگر $\sum a_n z_1^n$ همگرا باشد آنگاه $|a_n z_1^n| \to 0$ وقتی که $n \to \infty$، و این براساس اصل کلی همگرایی است. از این قرار $K \in R$ وجود دارد به قسمی که $|a_n z_1^n| < K$ به ازاء هر n. حال اگر $|z| < |z_1|$ آنگاه $q = |z/z_1| < 1$. اکنون داریم:

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n||z/z_1|^n < Kq^n$$

بنابراین، براساس آزمون مقایسه، $\sum |a_n z^n|$ همگرا است.

(ب) اگر $|z| > |z_2|$ و $\sum a_n z^n$ همگرا باشد آنگاه بنابر (الف)، $\sum a_n z_2^n$ نیز همگرا است، و این یک تناقض است. پس $\sum a_n z^n$ واگرا است.

این نتایج به مفهوم مهمی می انجامد. اگر فرض کنیم

$R = \sup\{|z| \mid$ zی وجود دارد به قسمی که $\sum a_n z^n$ همگرا است$\}$

(و چنانچه یک سوپرمم حقیقی وجود نداشته باشد $R = \infty$ اختیار می کنیم) آنگاه بی درنگ نتیجه می شود:

$$\sum a_n z^n \begin{cases} \text{به شرط } |z| < R \text{ همگرا است} \\ \text{به شرط } |z| > R \text{ واگرا است.} \end{cases}$$

(هنوز نمی توانیم بگوییم که در حالت $|z| = R$ چه روی می دهد). به R *شعاع همگرایی* این سری می گوییم و مجموعه

$$\{z \in C \mid |z| < R\}$$

قرص همگرایی این سری نامیده می شود. از نظر هندسی این درون یک دایره است (که ممکن است درحالتهای مفرط فقط خود مبداء، یا همهٔ C باشد).

مثال. سری $1+z+z^2+...$ برای $|z|<1$ همگرا است، زیرا با همان شرط، همگرای مطلق است؛ برای $z=1$ واگرا است و بنابراین به ازاء همهٔ z هایی که در شرط $|z|>1$ صدق می کنند نیز چنین است. پس شعاع همگرایی آن ۱ است.

وقتی که $|a_r|/|a_{r-1}|$ باشد، به شرط آنکه r به بی نهایت میل کند، دارای حدی است، شعاع همگرایی را می توان به صورت زیر حساب کرد. فرض می کنیم:

$$\lim_{r\to\infty}|a_r|/|a_{r-1}| = l$$

آنگاه

$$\lim_{r\to\infty}|a_r z^r|/|a_{r-1}z^{r-1}| = |z|l\,.$$

حالا، براساس آزمون نسبت، به شرط $|z|l<1$ سری مفروض همگرا و با شرط $|z|l>1$ واگرا است. پس شعاع همگرایی عبارت است از $1/l$. به طریق دیگر، شعاع همگرایی $\sum a_r z^r$ عبارت است از:

$$\lim_{r\to\infty}|a_{r-1}/a_r|,$$

به شرط این که این حد موجود باشد.

مثال. اگر $\sum a_n z^n = \sum z^n/n$، آنگاه

$$\lim_{r\to\infty}|a_{r-1}/a_r| = 1,$$

پس شعاع همگرایی ۱ است.

در حالت کلی ممکن است نسبت $|a_{r-1}/a_r|$ به حدی میل نکند. گاهی ممکن است شعاع همگرایی را با کمک هوش ذاتی پیدا کنیم، اما وقتی که همهٔ این موارد

کارآیی خود را از دست دهند می توانیم از تکنیکی قوی که در همهٔ حالات کارآیی دارد استفاده کنیم:

قضیهٔ ۳-۸. شعاع همگرایی $\sum a_n z^n$ با دستور زیر داده می شود:

$$1/R = \limsup |a_n|^{1/n} . \tag{۲}$$

اینجا بنا به قرارداد $1/0 = \infty$ ، $1/\infty = 0$.

برهان. R را با فرمول (۲) تعریف می کنیم.

ابتدا فرض می کنیم $|z| < R$. در این صورت می توانیم ρ را چنان انتخاب کنیم که $|z| < \rho < R$ باشد. طبق تعریف limsup ، داریم $1/\rho > |a_n|^{1/n}$ و این به ازاء همهٔ nهایی است که از N معینی بزرگتر باشند. پس $|a_n| < 1/\rho^n$ ، و بنابر این

$$|a_n z^n| = |a_n|\rho^n |z/\rho|^n < |z/\rho|^n .$$

امّا $|z/\rho| < 1$ پس $\sum_{n=0}^{\infty} |z/\rho|^n$ همگرا است. بنابراین طبق آزمون مقایسه، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$ همگرا است، پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ نیز همگرا است.

حال فرض می کنیم $|z| > R$. P را چنان اختیار می کنیم که $|z| > \rho > R$ بشود. از این قرار به ازاء همهٔ n های بزرگتر از Nی داریم $1/\rho < |a_n|^{1/n}$. اکنون مطابق آنچه در فوق گفتیم در مقایسه با $\sum |z/\rho|^n$ معلوم می شود که $\sum a_n z^n$ واگرا است.

مثال. سری $\sum \frac{z^n}{n!}$ شعاع همگرایی R دارد به قسمی که

$$1/R = \limsup (1/n!)^{1/n} = 0$$

پس $R = \infty$ ، بنابراین سری مذکور برای هر z همگرای مطلق است. مجموع این سری را به عنوان تابع توانی $\exp(z)$ یا e^z تعریف می کنند.

سریهای $\sum(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$، $\sum(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ مشابهاً دارای $R=\infty$ هستند. اینها تابعهای کسینوس و سینوس را تعریف می کنند (برای تفصیل بیشتر فصل ۵ را ملاحظه نمایید).

شعاع همگرایی برای سری $\sum \frac{z^n}{n}$ چنین تعیین می شود:

$$1/R = \limsup(\frac{1}{n})^{1/n} = 1$$

پس $R=1$. این سری به ازاء $|z|<1$ همگرا و به ازاء $|z|>1$ واگرا است. در حالت $|z|=1$، تحلیل بیشتری لازم است که برای این منظور هنوز تکنیک مورد نیاز را در دست نداریم.

در فصل بعد، برای تعریف تابعهای توانی مختلط و مثلثاتی، سریهای توانی را به کار خواهیم برد. به قصد حصول سریع بعضی از خواص اساسی آنها، از قضیه ای راجع به ضرب سریها استفاده خواهیم کرد، این قضیه، به طور غیر دقیق، می گوید که اگر جمله های دو سری را «جمله به جمله» در هم ضرب و جملات حاصل را با همان ترتیب گرد آوریم، یک سری به دست خواهیم آورد که همگرا به حاصلضرب مجموعهای آن دو سری است. دقیقتر آنکه:

قضیهٔ ۳-۹. فرض کنیم که $\sum a_n, \sum b_n$ همگرای مطلق باشند، و مجموعهای آنها به ترتیب a و b باشند، نیز فرض کنیم:

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \dots + a_r b_0$$

آنگاه $\sum c_n$ همگرا و مجموع آن ab است.

برهان. این بسط مستقیم حکم نظیر آن در آنالیز حقیقی است. برای دانش آموزانی که با این قضیه آشنا نیستند، در ضمیمهٔ مربوط به این فصل، «بخش ۵» تفصیلی ارائه خواهیم داد.

قضیهٔ ۳-۹ را فقط یک بار، آن هم در قسمت بعدی، توام با یک بحث ترکیبی برای اثبات رابطهٔ زیر به کار خواهیم برد:

$$\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)\ .$$

استدلالی ظریفتر برای این رابطه به نتایج ثابت شده و به وسیلهٔ به کار بردن خود آن نباشد (یعنی با پرهیز از استدلال دَوری) در ۵-۱ ارائه شده است.

۴. دستکاری سریهای توانی

نتایجی که تاکنون به دست آورده ایم به ما امکان محاسبه با سریهای توانی را می دهد «سریهای توانی را به عنوان بسجمله ای های نامتناهی در نظر می گیریم» *به شرط آنکه این سریها همگرای مطلق باشند*. برای بررسی این مطلب، فرض می کنیم $\sum a_n z^n, \sum b_n z^n$ دو سری توانی با شعاعهای همگرایی R_b, R_a باشند، نیز فرض می کنیم $|z|<\min(R_a,R_b)$. آنگاه طبق لِم ۳-۵ داریم:

$$\sum a_n z^n+\sum b_n z^n=\sum (a_n+b_n)z^n\ .$$

نیز طبق قضیهٔ ۳-۹،

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right)=\sum (a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\ldots+a_n b_0)z^n.$$

توجه کنید که اگر مجموع تا بی نهایت برای Σ را با یک مجموع متناهی، مثلاً $\sum_1^r$، عوض کنیم، فرمولهای فوق تبدیل به همان فرمولهای معمولی برای جمع و ضرب بسجمله ها می شوند.

همین جنبهٔ سریهای توانی است که آنها را بسیار سودمند می سازد: محاسبهٔ آنها (بالنسبه) آسان است از همین موضوع بهره می گیریم و بعضی جنبه های مهم تابعهای مثلثاتی و تابعهای توانی مختلط را نمایش می دهیم. این تابعها به وسیلهٔ

سریهای توانی چنین تعریف می شوند:

$$\exp(z) = \sum \frac{1}{n!} z^n$$

$$\cos(z) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sin(z) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

انگیزه برای تعریف این سریهای ویژه به صورت فوق همان مورد حقیقی آنها است. می دانیم که این سریها به ازای همهٔ zهای متعلق به C همگرای مطلقند. (۳-۳)

با عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ از ۷-۱ آغاز می کنیم. چون سریهای مربوطه را جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum c_r \theta^r$$

که در آن

$$c_r = \frac{(-1)^{r/2}}{r!}$$ به شرط زوج بودن n،

$$c_r = \frac{i(-1)^{(r-1)/2}}{r!}$$ به شرط فرد بودن n،

اما $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$، پس داریم:

$$(-1)^{r/2} = i^r \qquad \text{(r زوج است)}$$
$$i(-1)^{(r-1)/2} = i^r \qquad \text{(r فرد است)}$$

به این ترتیب

$$\sum c_r \theta^r = \sum \frac{i^r \theta^r}{r!} = \sum \frac{(i\theta)^r}{r!} = \exp(i\theta) .$$

می شود. بنابراین فرمول مهم زیر را داریم:

$$\cos\theta + i\sin\theta = \exp(i\theta)\ .$$

پس فرم مختصات قطبی یعنی $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ برای یک عدد مختلط را می توان به صورت $r.\exp(i\theta)$، یا ساده تر، $re^{i\theta}$ نوشت.

اکنون فرمول حاصلضرب دو سری را برای محاسبهٔ

$$\exp(z)\exp(w)$$

که در آن $z, w \in C$ باشد، به کار می بریم. ملاحظه می شود که

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum \frac{w^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\frac{1}{(n-r)!} z^r w^{n-r}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} z^r w^{n-r}\right).\end{aligned}$$

طبق قضیهٔ دو جمله ای عبارت فوق معادل است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)\ .$$

بنابراین

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$$

۵ . ضمیمه

طرحی می دهیم برای برهان:

قضیهٔ ۳-۹ فرض می کنیم $\sum b_n, \sum a_n$ همگرای مطلق باشند، و مجموعهای

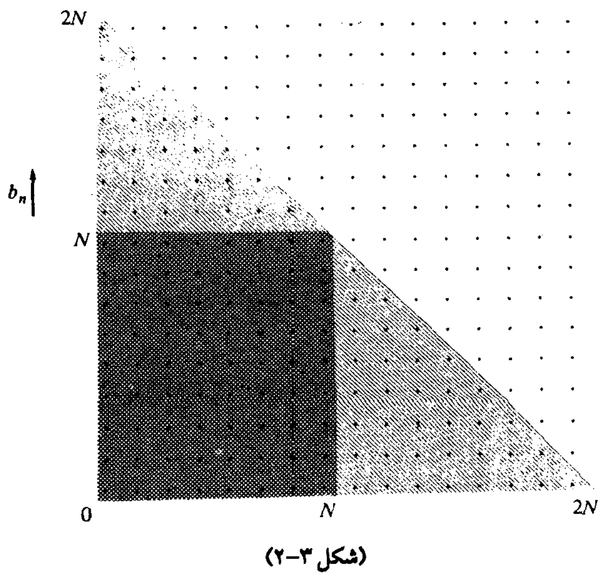
آنها به ترتیب aو b باشند. نیز فرض می کنیم

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \dots + a_r b_0$$

در این صورت $\sum c_n$ همگرا است، و مجموع آن ab است.

برهان. دنبال کردن استدلال آسانتر خواهد بود اگر از شکل ۳-۲ استفاده کنیم، زیرا همهٔ حالات ممکنهٔ ضربهای متقاطع $a_s b_t$ را در یک شبکهٔ مربعی ارائه می دهد. نظریه ای که مطرح است این است که یک مجموع جزیی از $\sum c_n$ عبارت است از مجموع جمله ها در یک ناحیهٔ مثلثی قائم الزاویه؛ در همین حال مجموعهای جزیی از $\sum a_n, \sum b_n$، چون در هم ضرب شوند، نواحی مثلثی قائم الزاویه به دست می دهند. کار اصلی ما این است که در نواحی مثلثی به تخمین مجموع جمله ها با تقریب زدن به کمک مستطیلها بپردازیم. تفصیل چنین است:

فرض می کنیم $\sum |a_n| = A$، $\sum |b_n| = B$ است. با دادن $\varepsilon > 0$ عدد Nرا چنان بزرگ انتخاب می کنیم که همهٔ شرایط زیر برقرار باشد. (برای انجام این کار، برای هر شرط یک N انتخاب کنید. سپس بیشینهٔ هر سه N انتخاب شده را در نظر بگیرید.



(شکل ۳-۲)

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{n=0}^{N} b_n - ab\right| < \varepsilon/(A+B+1) \qquad \text{(الف)}$$

$$\sum_{n=N+1}^{2N} |a_n| < \varepsilon/(A+B+1) \qquad \text{(ب)}$$

$$\sum_{n=N+1}^{2N} |b_n| < \varepsilon/(A+B+1) \qquad \text{(ج)}$$

در این صورت

$$\left|\sum_{n=0}^{2N} c_n - ab\right| \le \left|\sum_{n=0}^{2N} c_n - \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{n=0}^{N} b_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{n=0}^{N} b_n - ab\right|$$

که با توجه به شکل ۳-۲ ، کوچکتر یا مساوی است با ؛

$$\sum_{n=N+1}^{2N} |a_n| \sum_{n=0}^{N} |b_n| + \sum_{n=0}^{N} |a_n| \sum_{n=N+1}^{2N} |b_n| + \varepsilon/(A+B+1)$$

$$< \frac{\varepsilon B}{A+B+1} + \frac{A\varepsilon}{A+B+1} + \frac{\varepsilon}{A+B+1}$$

$$= \varepsilon$$

پس $\sum c_n$ همگرا به ab است .

تمرین های ۳

۱ . تعیین کنید که از دنباله های زیر کدام همگرا هستند، سپس حد هر یک را که همگرا هستند بیابید.

(الف) $\left\{(1+i)^n\right\}$

(ب) $\left\{(1+i)^n/n\right\}$

(ج) $\left\{(1+i)^n/n!\right\}$

(د) $\left\{1/(1+i)^n\right\}$

(ه) $\left\{n/(1+i)^n\right\}$

(و) $\left\{n!/(1+i)^n\right\}$

۲ . به ازاء چه مقادیری از $z \in C$ هر یک از دنباله های زیر همگرا هستند؟

(الف) $\left\{z^n\right\}$

(ب) $\left\{z^n/n\right\}$

(ج) $\left\{n!z^n\right\}$

(د) $\left\{z^n/n!\right\}$

(ه) (k یک عدد صحیح مثبت است) $\left\{z^n/n^k\right\}$

(و) (a یک عدد ثابت مختلط است) $\left\{a(a-1)\dots(a-n+1)z^n/n!\right\}$

۳. فرض می‌کنیم $a \in k$ دارای بسط اعشاری

$$a = a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

است که در آن هر a_i یک عدد صحیح و $0 \le a_n \le 9$ برای $n \ge 1$ است. همهٔ مقادیر a را که به ازاء آنها دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا است بیابید.

۴. فرض می‌کنیم $z_n = \frac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right)$. چند جملهٔ اوّل دنبالهٔ $\{z_n\}$ را بنویسید. عبارات مشابهی برای جملهٔ n ام هر یک از دنباله‌هایی که به طریق زیر شروع می‌شوند بیابید:

(الف) $1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

(ب) $1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, \ldots$

(ج) $1, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \ldots$

(د) $1, 0, 1\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, 1\frac{1}{4}, 0, \frac{4}{5}, 0, 1\frac{1}{6}, \ldots$

۵. فرض می‌کنیم $\{u_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا در C باشد، نیز فرض می‌کنیم $V_n = \left(\sum_{r=1}^{n} u_r\right)/n$. حالا می‌نویسیم:

$v_n = v'_n + v''_n$ که در آن

$$v''_n = \left(\sum_{\sqrt{n} < r \le n} u_r\right)/n, \quad v'_n = \left(\sum_{r \le \sqrt{n}} u_n\right)/n$$

ثابت کنید که $\{v_n\}$ به همان حدّی می‌گراید که $\{v_n\}$.

۶. شعاع همگرایی هر یک از سریهای زیر را تعیین کنید:

(الف) $\sum z^n / n$

(ب) $\sum z^n / n!$

(ج) $\sum n! z^n$

(د) (k عدد صحیح مثبتی است) $\sum n^k z^k$

(ه) $\sum z^{n!}$

۷. تابع مرتبهٔ ۰ بسل $J_0(z)$ با کمک سریهای توانی چنین تعریف می شود:

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{z^n}{2^n}.$$

شعاع همگرایی آن را تعیین کنید.

۸. شعاعهای همگرایی را در موارد زیر تعیین کنید:

(الف) $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$

(ب) $1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$

(ج) $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$

(د) (به ازاء $a \in C$) $1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} z^n + $

(**تبصره:** در قسمت (د)، شعاع همگرایی برای مقادیر خاصی از a متفاوت است.)

۹. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ همگرا به ازاء همهٔ $|z| < 1$ است، اما به ازاء zهای بی شمار که در شرط $|z| = 1$ صدق می کنند واگرا است.

۱۰. فرض کنیم که $\sum a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R باشد و نیز فرض می کنیم که C معرف دایرهٔ $\{z \in C \mid |z| = R\}$ باشد. آنچه را که در زیر می آید اثبات یا رد کنید

(که ممکن است درست باشد یا نباشد).

(الف) اگر $\sum a_n z^n$ در نقطه‌ای روی C همگرا باشد، در همهٔ نقاط C همگرا خواهد بود.

(ب) اگر $\sum a_n z^n$ در نقطه‌ای روی C همگرای مطلق باشد، در همهٔ نقاط C همگرای مطلق خواهد بود.

(ج) اگر $\sum a_n z^n$ در هر نقطهٔ روی C همگرا باشد، به استثنای شاید یک نقطه، در این صورت در همهٔ نقاط C همگرا خواهد بود.

(*راهنمایی:* سری $\sum z^n / n$ در این سوال می‌تواند مفید باشد.)

۱۱. اگر $\sum a_n z^n$ شعاع همگرایی R داشته باشد، فرمول $1/R = \limsup\{|a_n|^{1/n}\}$ را برای یافتن شعاع همگرایی هر یک از سریهایی زیر به کار بگیرید.

(الف) $\sum n^3 a_n z^n$

(ب) $\sum a_n z^{3n}$

(ج) $\sum a_n^3 z^n.$

۱۲. ثابت کنید که اگر هر یک از سریهای $\sum a_n z^n$، $\sum b_n z^n$ و $\sum a_n b_n z^n$ دارای شعاع همگرایی مساوی ۱ باشند، آنگاه سریهای $\sum a_n b_n^2 z^n$ و $\sum a_n^2 b_n z^n$ نیز چنین اند.

۱۳. با شرط $|a_n| \le 1$، ثابت کنید که به ازاء هر z که در شرط $|z| \le 1$ صدق کند سری $\sum a_n z^n$ همگرای مطلق است. اگر $f(z) = \sum a_n z^n$ و $|a_n| \le 1, |z| < 1$، ثابت کنید که

$$|f(z)| \le 1/(1-|z|).$$

۱۴ . ثابت کنید که با شرط $z \neq ۱$ ،

$$\sum_{n=۱}^{k} z^n / n = \frac{z}{۱-z}\left(\sum_{n=۱}^{k-۱} ۱/(n(n+۱)) - \sum_{n=۱}^{k-۱} z^n/(n(n+۱)) + \frac{۱-z^k}{k}\right)$$

نشـان دهید کـه سریهـای $\sum_{n=۱}^{\infty} z^n / n$ ، $\sum_{n=۱}^{\infty} z^n /(n(n+۱))$ دارای شعـاع همگرایی ۱ هستند؛ اما سری اخیر همه جا بر $|z| = ۱$ همگرا است در حالی که سری قبلی همه جا بر $|z| = ۱$ همگرا است به استثنای $z = ۱$.

۱۵ . فـرض می‌کنیم کـه سـری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ دارای یک دنبـاله از ضـرایب متناوب باشد، یعنی مثلاً به ازاء هر n ، $a_n = a_{n+k}$ ، که در آن k عدد صحیح مثبت و ثابتی است. ثابت کنیـد کـه با شـرط $|z| < ۱$ این سـری به یک تابع گـویای $p(z)/q(z)$ ، که در آن p و q بسجمله هایی هستند. همگرا است و همهٔ ریشه های q روی دایرهٔ واحد است. اگر به جـای رابطهٔ فوق رابطهٔ $a_{n+k} = a_{n/k}$ برقرار باشد چه روی می دهد؟

فصل چهارم

مشتق گیری

مشتق توابع حقیقی با کمک روشهای حدگیری تعریف می شود و از آنجا که ما مفاهیم مورد نیاز دربارهٔ حدود را بیان و توسعه داده ایم، می توان بدون برخورد با مشکلی خاص، مشتق گیری را برای توابع مختلط تعمیم داد. نکات اعجاب آور در این فصل کم است و نتایج مربوط به مشتق گیری از مجموعها، حاصلضربها، ترکیبهای توابع و سریهای توانی با همان حالت حقیقی مشابه است، حتی برهانها به طور اساسی بدون تغییر باقی می ماند. یک مطلب جزیی و عجیب آن است که شرط مربوط به مشتق پذیری، رابطه های خاصی را بین قسمت حقیقی و موهومی یک تابع مختلط موجب می شود، و این رابطه ها را *معادلات کوشی–ریمان* می نامند. بی درنگ از این شرایط استفاده و ثابت می کنیم که اگر تابعی با دامنهٔ همبند مشتقی برابر صفر داشته باشد، این تابع مقداری ثابت است. گرچه این نتیجه شبیه حالت حقیقی است. امّا اثبات آن چنین نیست. نظریهٔ مربوط به مشتق گیری را می توان به تابعهای هیبرید از $R \to C$ یا $C \to R$ توسعه داد، مطلب تعجب انگیز ی هم ندارد.

بر خلاف این تصور که نتایج مربوط به آنالیز حقیقی بدون تغییر در آنالیز مختلط ادامه می یابد. بخش آخر این فصل حکایت از اختلافی فاحش بین این دو نظریه دارد: از هر تابع مختلط مشتق پذیری به دفعات دلخواه می توان مشتق گرفت.

۱. نتایج اساسی

اگر f تابعی مختلط تعریف شده بر مجموعهٔ باز S باشد. مشابه با مورد حقیقی، f را در *نقطه* $z_\circ \in S$ *مشتق پذیر با مشتق* $f'(z_\circ) \in C$ می گویند اگر $\lim_{z\to z_\circ} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ} = f'(z_\circ)$ باشد.

اگر f در هر نقطه از S مشتق پذیر باشد می گویند که f در S یک *تابع مشتق پذیر* است. در این حال خود مشتق را نیز به عنوان تابعی چون $f' : S \to C$ می توان در نظر گرفت. اگر

$$\lim_{z\to z_\circ} \frac{f'(z)-f'(z_\circ)}{z-z_\circ}$$

وجود داشته باشد این حد را $f''(z_\circ)$ تعریف می کنیم و با تکرار این رویه همان مشتقهای معمولی از مراتب بالاتر $f''(z_\circ)$، $f'''(z_\circ),\ldots,f^{(n)}(z_\circ)$ حاصل می شوند که $f^{(n)}(z_\circ)$ دلالت بر مشتق nام تابع f در $z_\circ$ دارد.

مثال $f(z) = z^2$.

$$\lim_{z\to z_\circ} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ} = \lim_{z\to z_\circ} \frac{z^2-z_\circ^2}{z-z_\circ} = 2z_\circ$$

پس $f'(z_\circ) = 2z_\circ$ به ازاء هر $z_\circ \in C$. مشابهاً $f''(z_\circ) = 2$، $f^{(n)}(z_\circ) = 0$ به ازاء $n \geq 3$.

نمادهای گوناگونی برای نمایش مشتق گیری به کار می رود، که بیش از همهٔ آنها دو نماد $df(z)/dz, Df(z)$ به جای $f'(z)$ به کار می رود. لذا مشتقهای ثانی را به ترتیب با $d^2f(z)/dz^2, D^2f(z)$ نمایش می دهیم. گاهی $f(z)$ را w نامیده مشتق آن را با dw/dz نشان می دهیم. در این کتاب نمادهایی که بیشتر به کار گرفته می شوند، $Df(z), f'(z)$ خواهند بود؛ از آن جهت که وقتی مشتق را به عنوان یک تابع در نظر می گیریم آن را با f' یا Df نشان می دهیم.

در بسیاری موارد نتایج مربوط به مشتق گیری از توابع مختلط، به طور مشابه از موارد حقیقی نتیجه می شود:

گزارهٔ ۴-۱ . اگر f در $z_.$ مشتق پذیر باشد، f در $z_.$ پیوسته است.

برهان.

$$\lim_{z\to z_.}\left(f(z)-f(z_.)\right)=\lim_{z\to z_.}\frac{f(z)-f(z_.)}{z-z_.}(z-z_.)$$
$$=f'(z_.).\cdot$$
$$=\cdot.$$

پس مشتق پذیری در $z_.$ موجب (مستلزم)

$$\lim_{z\to z_.} f(z)=f(z_.)$$

است.

یادآوری می کنیم که (از فصل ۲ بخش ۴) مجموع $f+g$ ، تفاضل $f-g$ ، حاصلضرب $f.g$ ، در خارج قسمت f/g از دو تابع $f:S\to C$ و $g:S\to C$ به طریق معمول چنین تعریف می شوند:

$$(f+g)(z)=f(z)+g(z)\qquad z\in S$$

$$(f-g)(z)=f(z)-g(z)\qquad z\in S$$

$$(f.g)(z)=f(z).g(z)\qquad z\in S$$

$$(f/g)(z)=f(z)/g(z)\qquad z\in S, g(z)\neq\cdot$$

در مشتق گیری همان نتایج مورد نظر حاصل می شود:

گزارهٔ ۲-۴ . اگر f و g در $z_.$ مشتق پذیر باشند، $f/g, f.g, f-g, f+g$ نیز چنینند

(در حالت اخیر باید $g(z_.) \neq ۰$ باشد) و مشتقات عبارتند از :

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f-g)' = f' - g'$$
$$(f.g)' = f'.g' - g.f'$$
$$(f/g)' = (gf' - fg')/g^۲$$

برهان. عملیات محاسباتی شبیه حالت حقیقی است . مثلاً ،

$$(f.g)'(z_.) = \lim_{z \to z_.} \frac{f(z).g(z) - f(z_.)g(z_.)}{z - z_.}$$

$$= \lim_{z \to z_.} \frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_.) + f(z)g(z_.) - f(z_.)g(z_.)}{z - z_.}$$

$$= \lim_{z \to z_.} f(z) \lim_{z \to z_.} \frac{g(z) - g(z_.)}{z - z_.} + g(z_.) \lim_{z \to z_.} \frac{f(z) - f(z_.)}{z - z_.}$$

(با به کار گرفتن جبر مربوط به حدود)

$$= f(z_.)g'(z_.) + g(z_.)f'(z_.)$$

(زیرا که طبق قضیهٔ پیش مشتق‌پذیری f مستلزم پیوسته بودن f است .)
حالتهای دیگر به همین طریق نتیجه می رسد .
اگر حسب معمول ترکیب تابعهای $F : S \to C, g : T \to C$ ، به شرط $f(S) \subseteq T$ ، را با gof ،

$$(gof)(z) = g(f(z)),$$

نشان دهیم نتیجه می شود . . .

گزارهٔ ۴-۳ . (*قاعدهٔ زنجیری*) اگر f در $z_\circ$ مشتق پذیر، و g در $f(z_\circ)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه gof در $z_\circ$ مشتق پذیر است و

$$(gof)'(z_\circ) = g'(f(z_\circ)).f'(z_\circ)$$

برهان. یک روش معمول برای اثبات قاعدهٔ زنجیری این است که بنویسیم:

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_\circ))}{z - z_\circ} = \frac{g(f(z)) - g(f(z_\circ))}{f(z) - f(z_\circ)} . \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} \dots \qquad (۱)$$

(به شرط آنکه $f(z) \neq f(z_\circ)$. چون f در $z_\circ$ مشتق پذیر است، پس در $z_\circ$ پیوسته است (طبق گزارهٔ ۳-۱) ، پس از $z \to z_\circ$ نتیجه می شود $f(z) \to f(z_\circ)$ و از این هم نتیجه می شود:

$$\lim_{z \to z_\circ} \frac{g(f(z)) - g(f(z_\circ))}{f(z) - f(z_\circ)} = g'(f(z_\circ))$$

حال اگر در (۱)، $z \to z_\circ$ از آن نتیجه می شود: $(gof)'(z_\circ) = g'(f(z_\circ)).f'(z_\circ)$.

متاسفانه، در این استدلال نقصی عمده وجود دارد؛ زیرا ممکن است $f(z) - f(z_\circ)$ مساوی صفر باشد. اگر از پیش بدانیم که $f(z) - f(z_\circ)$ در همسایگی ای از $z_\circ$ ، به شرط $z \neq z_\circ$ ، مخالف صفر است، در این همسایگی استدلال فوق معتبر است. قضیهٔ ۱۰-۱۱ که در آتیه عنوان می شود نشان می دهد که در مورد *مختلط* همواره چنین همسایگی ای وجود دارد. این مثالی جالب با سادگی بسیار در آنالیز مختلط است، زیرا در آنالیز حقیقی چنین گزاره ای وجود ندارد. امّا، در آنالیز حقیقی استدلالی که معمولاً برای رفع نقص مذکور به کارمی رود در مورد مختلط هم به کار می آید و خیلی ابتدایی تر از قضیهٔ ۱۰-۱۱ است. این استدلال چنین است:

فرض می کنیم $u = f(z_\circ)$. تعریف می کنیم:

$$h(w) = \frac{g(w) - g(u)}{w - u} - g'(u) \quad (\text{با شرط } w \neq u)$$

$$h(u) = 0$$

واضح است که h در نزدیکی u معین و پیوسته است. همچنین هنگامی که $z \to z_0$ ملاحظه می شود که $(hof)(z) \to h(f(z_0)) = h(u) = 0$. اما با اختیار $w = f(z)$، تعریف h را می توان به این شکل نوشت:

$$g(f(z)) - g(u) = (h(f(z)) + g'(u))(f(z) - u)$$

به شرط آنکه $f(z) \neq u$ باشد. *واضح است که این رابطه درحالت* $f(z) = u$ *نیز درست است*. فرض کنیم $z \neq z_0$. دو طرف را بر $z - z_0$ تقسیم می کنیم. فرض می کنیم $z \to z_0$، . . . .

۲. معادلات کوشی - ریمان

اگر تابع مختلط f را بر حسب دو تابع حقیقی u و v از دو متغیر x و y به صورت

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

بنویسیم که در آن $z = x + iy$، در این صورت مشتق پذیری f موجب تحمیل شرایطی به مشتقات نسبی u و v می شود. نمادهای

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{k}$$

را به کار می گیریم و آنها را به صورت اختصاری $\partial u / \partial x$ و $\partial v / \partial y$، می نویسیم

که ابهامی هم ندارد. آنگاه داریم:

گـزارهٔ ۴-۴. اگـر f در $z = x + iy$ مـشـتق‌پذیر باشـد، در این صـورت $\partial u/\partial x$، $\partial v/\partial x$، $\partial u/\partial y$، $\partial v/\partial y$ همـه در (x,y) وجـود دارنـدو روابط زیر برقرارند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

برهان. به دو طریق مختلف به محاسبهٔ $f'(z)$ می‌پردازیم. ابتدا نقطه‌ای نزدیک به z را به صورت $z + h = (x + h) + iy$ که در آن h حقیقی است در نظر می‌گیریم و چنین عمل می‌کنیم:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{i(v(x+h,y) - v(x,y)}{h}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

سپس نقـطه‌ای به صورت $z + ik = x + i(y + k)$ که در آن k حقـیقی است در نظر می‌گیریم: چون این نقطه به z میل کند، k به صفر میل می‌کند، به طوری که

$$f'(z) = \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) + iv(x,y+k) - u(x,y) - iv(x,y)}{ik}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

حال اگر قسمتـهای حقیقی را با یکدیگر و قسمتهـای موهومی را با هم مساوی قرار

دهیم برهان کامل می شود.
معادلات

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

را بعد از *کوشی*(۱۸۵۲-۱۷۸۹) و *ریمان*(۶۶-۱۸۲۶) معادلات *کوشی-ریمان* می نامند. *دالامبر* به این معادلات آگاهی داشته است زیرا در ۱۷۵۲ به آنها اشاره کرده است.

از مثال زیر برمی آید که عکس گزارهٔ ۴-۴ نادرست است.

فرض می کنیم:

به شرط آنکه از y,x یکی یا هر دو مساوی صفر باشند $f(x+iy)=۰$

اگر y,x هیچ یک صفر نباشد. $f(x+iy)=۱$

در مورد این تابع مشتقهای نسبی از v,u در مبداء همه وجود دارد و همه صفر است. پس معادلات *کوشی-ریمان* مسلماً برقرار است. اما f در مبداء حتی پیوسته نیست و این بدان معنی است که f در مبداء مشتق پذیر نیست.

بار دیگر ملاحظه می شود که دخالت آنالیز حقیقی منجر به پیچیدگیهایی می شود. امّا در این حالت پیوند مطالب نسبتاً ساده است. این کار تاحدی شبیه آن است که در یک روز برفی اتومبیلی را که خوب تنظیم شده است راه بیندازیم، تا زمانی که در حال حرکت است، بنرمی پیش می رود. بر ما مدلل می شود که آنالیز مختلط همچون دستگاهی است که خوب روغنکاری شده است. امّا انتخاب آنالیز حقیقی به عنوان نقطهٔ عزیمت، نیاز به شرایط کافی برای حرکت دارد. در این قسمت از ریاضی، شرایط مناسب عبارتند از پیوسته بودن مشتقات نسبی. وقتی که این شرایط برقرار شد، این دستگاه خوب کار می کند. امّا برای اثبات این مطلب باید به اصول کار توجه بسیار دقیق داشته باشیم. کارمان را با یک لِم تکنیکی شروع می کنیم.

لِمِ ۴-۵ . اگر $\partial u/\partial y, \partial u/\partial x$ در (x,y) وجود داشته باشند و $\partial u/\partial x$ در (x,y) پیوسته باشد، آنگاه

$$u(x+h,y+k)-u(x,y)=h\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varepsilon(h,k)\right)+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\eta(h,k)\right)$$

که در آن با شرط $h,k \to 0$ خواهیم داشت $\varepsilon,\eta \to 0$.

برهان. $u(x+h,y+k)-u(x,y)$ راچنین می نویسیم:

$$u(x+h,y+k)-u(x,y+k)+u(x,y+k)-u(x,y)$$

اگر قضیهٔ *مقدار متوسط* برای یک متغیر حقیقی را برای تابع $\phi(t)=u(x+t,y+k)$ به کار بگیریم یک θ با شرط $0<\theta<1$ وجود خواهد داشت به قسمی که

$$u(x+h,y+k)-u(x,y+k)=h\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta h,y+k) \qquad (1)$$

چون $\partial u/\partial x$ پیوسته است،

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta h,y+k)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\varepsilon(h,k)$$

که در آن $\varepsilon(h,k)\to 0$ هنگامی که $h,k\to 0$. بنابراین

$$u(x+h,y+k)-u(x,y+k)=h\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varepsilon(h,k)\right) \qquad (2)$$

استفاده از این واقعیت که از $k\to 0$ نتیجه می شود:

$$\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}\to\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

کا ر را آسانتر می کند و از آن نتیجه می گیریم که اگر ،

$$\eta(h,k) = \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k} - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

باشد ، آنگاه

$$u(x,y+k)-u(x,y) = k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta(h,k)\right) \qquad (۳)$$

می شود. که در آن $\eta(h,k) \to 0$ هنگامی که $(h,k) \to 0$. (در واقع η فقط به k بستگی دارد.)

از جمع (۲) و (۳) نتیجهٔ مطلوب حاصل می شود.

قضیهٔ ۴-۶. اگر $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن f تابعی است مختلط که بر مجموعهٔ باز S تعریف شده و در نقطه ای چون $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$ همهٔ مشتقات نسبی $\partial u/\partial x$ ، $\partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ همه وجود دارند، و همه پیوسته هستند و در معادلات *کوشی- ریمان* یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

صدق می کنند در این صورت f در z_0 مشتق پذیر است.

برهان. با به کار گرفتن لِم ۴-۵ می توان نوشت:

$$f(z)-f(z_0) = u(x_0+h,y_0+k)+iv(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)$$

$$= h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon_1\right)+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\eta_1\right)+ih\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varepsilon_2\right)+ik\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\eta_2\right)$$

که در آن $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\eta_1,\eta_2 \to 0$ ، هنگامی که $h,k \to 0$.

با به کار گرفتن معادلات کوشی-ریمان داریم:

$$f(z)-f(z_۰)=(h+ik)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+h\varepsilon_۱+k\eta_۱+h\varepsilon_۲+k\eta_۲$$

$$=(z-z_۰)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\rho$$

که در آن $\rho=h\varepsilon_۱+k\eta_۱+h\varepsilon_۲+k\eta_۲$ ، و بنابراین

$$\frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\rho/(z-z_۰)$$

امّا

$$\left|\frac{\rho}{z-z_۰}\right|=\frac{\rho}{\sqrt{h^۲+k^۲}}\le\frac{|h||\varepsilon_۱|+|k||\eta_۱|+|h||\varepsilon^۲|+|k||\eta^۲|}{\sqrt{h^۲+k^۲}}$$

$$\le|\varepsilon_۱|+|\eta_۱|+|\varepsilon_۲|+|\eta_۲|$$

فرض کنیم $h,k\to ۰$ ، در این صورت $|\rho/(z-z_۰)|\to ۰$ ، و بنابراین

$$\lim_{z\to z_۰}\frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

مثال. تابع $f(z)=|z|^۲$ فقط در مبداء دیفرانسیل پذیر است، زیرا

$$u(x,y)=x^۲+y^۲,\quad v(x,y)=۰$$

بنابراین $\partial u/\partial x=۲x$ ، $\partial u/\partial y=۲y$ ، $\partial v/\partial x=۰$ ، $\partial v/\partial y=۰$ و معادلات کوشی-ریمان فقط در $x=y=۰$ برقرارند که در همین نقطه مشتقات نسبی همه پیوسته اند.

اگر $f(z)$ = مقدار ثابت باشد، آنگاه $f'(z) = 0$ می شود. امّا در مورد عکس این مطلب چه می توان گفت؟ آیا اگر مشتق تابعی صفر باشد، از آن نتیجه می شود که خود تابع مقداری است ثابت؟ جواب به شرطی مثبت است که تابع f بر مجموعه ای همبند تعریف شده باشد. یادآوری می کنیم که یک مجموعهٔ باز و همبند را یک دامنه می نامیم و اکنون ثابت می کنیم که

قضیهٔ ۴-۷. اگر f در دامنهٔ D مشتق پذیر و در سراسر D داشته باشیم $f'(z) = 0$ ، در این صورت f بر D تابعی ثابت است.

برهان. $f'(z) = \partial u/\partial x + i\partial v/\partial x = \partial v/\partial y - i\partial u/\partial y$ ، و بنابراین از $f'(z) = 0$ نتیجه می شود که همهٔ مشتقات نسبی u و v صفر هستند.

از آنالیز حقیقی به یاد داریم که اگر بر بازهٔ بسته $[a,b]$ داشته باشیم $\phi' = 0$ ، آنگاه ϕ بر $[a,b]$ ثابت است. اگر $L = \{t + iy_0 | a \le t \le b\}$ قطعه خطی در D باشد، فرض می کنیم $\phi(t) = u(t, y_0)$ ، در این صورت $\partial u/\partial x = \phi' = 0$ و بنابراین u بر L ثابت است. با بحثی مشابه نتیجه می شود که u و v هر دو بر هر قطعه خط دلخواه افقی یا قائم در D ثابت هستند. پس $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بر هر مسیر پله ای در D ثابتند. امّا هر دو نقطهٔ دلخواه از یک مجموعهٔ همبند را می توان با یک مسیر پله ای به هم پیوست، پس f در سراسر D ثابت است. □

با همین تکنیک ثابت می شود که

گزارهٔ ۴-۸. اگر f در دامنهٔ D مشتق پذیر و از $\mathrm{re}f$، $\mathrm{im}f$ ، یا $|f|$ یکی به دلخواه ثابت باشد، در این صورت f ثابت است.

برهان. اگر $f = u + iv$ ، $\mathrm{re}f = u$ مقداری ثابت باشد، در این صورت داریم: $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = 0$ و طبق بحثی که در برهان پیشین داشتیم، $f = u + iv$ در دامنهٔ D ثابت است. حالتی که در آن $\mathrm{im}f$ مقداری است ثابت، مشابه همین حالت است.

اگر $|f|$ ثابت باشد، خواهیم داشت $u^2 + v^2 = c$. به ازاء $c = 0$ داریم $f = 0$ ، پس می توانیم فرض کنیم $c \ne 0$. با مشتق گیری داریم:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$۲u\frac{\partial u}{\partial y}+۲v\frac{\partial v}{\partial y}=\cdot$$

و با کمک معادلات کوشی-ریمان حاصل می شود:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}=\cdot$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\cdot$$

با افزودن u برابر معادلهٔ اوّل به v برابر معادلهٔ دوم خواهیم داشت:

$$(u^۲+v^۲)\frac{\partial u}{\partial x}=\cdot$$

و چون $u^۲+v^۲=c\neq\cdot$ است پس حاصل می شود: $\partial u/\partial x=\cdot$. مشابهاً سایر مشتقات نسبی u و v مساوی صفرند و نتیجه این است که $f=u+iv$ در دامنهٔ D ثابت است.

۴. تابعهای هیبرید

در این مرحله به صحبت کوتاهی دربارهٔ تابعهای هیبرید می پردازیم، که منظور از آنها تابعهایی با مقادیر حقیقی از متغیرهای مختلط یا تابعهای با مقادیر مختلط از متغیرهای حقیقی است. در هر دو مورد مفاهیم روشنی برای مشتق گیری وجود دارد. مثلاً تابعی با مقدار حقیقی از یک متغیر مختلط به صورت $F:D\to R$ را که در آن D زیر مجموعه ای باز از صفحهٔ مختلط است می توان به عنوان یک تابع مختلط که جزء موهومی آن صفر است محسوب داشت. یک تابع هیبرید از این نوع مثل یک موجود کم خاصیت است، زیرا اگر دیفرانسیل پذیر باشد، از ثابت بودن قسمت موهومی آن نتیجه می شود که خود تابع باید ثابت باشد (بنابر قضیهٔ ۴-۸).

ما معمولاً تابعهای مختلط یک متغیره قدری بهتر کنار می‌آییم. جالب ترین حالت آن $f:[a,b]\to C$ است، که (در حالت پیوسته بودن) معرّف یک مسیر در صفحهٔ مختلط است. چون مشتق آن را در $t_\circ\in[a,b]$ به صورت متعارف

$$\lim_{t\to t_\circ}\frac{f(t)-f(t_\circ)}{t-t_\circ}$$

تعریف می‌کنیم (و در a و b مشتقات مناسب یک طرفه را در نظر بگیریم) همان تعمیم‌های مورد انتظار از خواص مشتق گیری حاصل می‌شود:

گزارهٔ ۴-۹. اگر $f:[a,b]\to C$ ، $g:[a,b]\to C$ در $t\in[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

$$(f\pm g)'(t)=f'(t)\pm g'(t)$$

$$(f.g)'(t)=f'(t).g'(t)+g(t)f'(t)$$

$$(f/g)'(t)=\big(g(t)f'(t)-f(t)g'(t)\big)/\big(g'(t)\big)^{2}\quad (g(t)\neq 0)$$

قاعدهٔ زنجیری که شامل تابعی مختلط چون f از یک متغیر حقیقی باشد با دو چهرهٔ مختلف مطرح می‌شود. ممکن است قبل از f تابعی حقیقی چون h بیاوریم، یا به دنبال آن تابعی مختلط چون g، تا،

گزارهٔ ۴-۱۰. اگر $h:[c,d]\to[a,b]$ ، $g:D\to C, f:[a,b]\to D$ ، آنگاه

$$(foh)'(s)=f'(h(s))h'(s)$$
$$(gof)'(t)=g'(f(t))f'(t)$$

حاصل شود، به شرط آنکه مشتقات واقع در سمت راست معادلات فوق تعریف شده باشند (معین باشند).

برهانهای مربوط به ۴-۹ و ۴-۱۰ از همان الگوهای مربوط به حالت حقیقی یا مختلط پیروی می‌کنند. در آینده که ما مسیرهایی در دامنهٔ یک تابع

مختلط در نظر می گیریم و ترکیبی از تابع هیبرید (همان مسیر) و خود تابع مختلط به عمل می آوریم ارزش بسیار نتایج فوق آشکار خواهد شد.

۵. سری های توانی

سریهای توانی ساخته هایی جالبترند، زیرا در آینده بر ما مدلل می شود که آنها پایه و اساس همهٔ توابع مختلط دیفرانسیل پذیر هستند. می دانیم که مشتق کثیر الجمله ای چون،

$$\rho(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

عبارت است از:

$$\rho'(z) = a_1 + 2a_1 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$$

این مطلب چنین القاء می کند که در مورد سری توانی

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

باید داشته باشیم:

$$f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$$

در چنین موردی است که می گویند می توان از $f(z)$ *جمله به جمله مشتق گیری* کرد. امّا چنین حالتی چه دقت پیش می آید؟ مسلماً باید $f(z)$ همگرا باشد. دو حکم دیگر که در زیر بیان می شود حاکی از آن است که این شرط تقریباً کافی است؛ در واقع مشتق گیری جمله به جمله در درون قرص همگرایی $f(z)$ همواره ممکن است.

لم ۴-۱۱. فرض می کنیم $f(z) = \sum a_n z^n$ به ازاء $|z| < R$ همگرای مطلق باشد؛ آنگاه

$$g(z) = \sum n a_n z^{n-1}$$

با شرط $|z| < R$ همگرا است.

برهان. با شـرط $|z| < R$ ، عـدد r را چنان انتـخـاب می‌کنیم کـه $|z| < r < R$ گردد. در ایـن صورت $\sum a_n r^n$ همگرای مطلق است. پـس، همانطور که در لـمِ ۳-۷ دیدیم $K \in R$ وجود دارد به قسمی که به ازاء هر n،

$$\left|a_n r^n\right| < K$$

امّا $g = |z|/r$ از ۱ کوچکتر است، بنابراین

$$\begin{aligned}\left|na_n z^{n-1}\right| &= n\left|a_n\right|\left|z/r\right|^{n-1} r^{n-1} \\ &< \frac{nk}{r} g^{n-1}\end{aligned}$$

امّا به ازاء $0 \leq q \leq 1$ سری حقیقی

$$\sum nkq^{n-1}$$

به $k(1-g)^{-2}$ همگرا است. بنابر آزمـون مقـایسه $\sum\left|na_n z^{n-1}\right|$ همگرا است. پس (طبق قضیهٔ ۳-۶) سری $\sum na_n z^{n-1}$ همگرا است.

قضیهٔ ۴-۱۲ . سری توانی $f(z) = \sum a_n z^n$ را در درون قرص همگرائیش می‌توان جمله به جمله مشتق گیری کرد، طوری که

$$f'(z) = \sum na_n z^{n-1}$$

برهان . لم ۴-۱۱ بیان می‌کند که

$$g(z) = \sum na_n z^{n-1}$$

برای $|z| < R$ همگرای مطلق است. باید نشان دهیم که با $|z_\circ| < R$،

$$f'(z) = \lim_{z \to z_\circ} \left\{ \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} \right\} = g(z_\circ)$$

یا، معادل با آن

$$\lim_{z \to z_\circ} \left\{ \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} - g(z_\circ) \right\} = \circ$$

به محاسبه می‌پردازیم:

$$\frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} - g(z_\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{z^n - z_\circ^n}{z - z_\circ} - n a_n z_\circ^{n-1}\right)$$

زیرا، طبق لِم ۳-۵، سریهای توانی را می‌توان جمله به جمله به هم افزود یا از هم کم کرد)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ z^{n-1} + z_\circ z^{n-2} + \dots + z_\circ^{n-1} - n z_\circ^{n-1} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n \left\{ z^{n-1} + z_\circ z^{n-2} + \dots + z_\circ^{n-1} - n z_\circ^{n-1} \right\}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ z^{n-1} + z_\circ z^{n-2} + \dots + z_\circ^{n-1} - n z_\circ^{n-1} \right\}$$

$$= \sum_{1} + \sum_{2} \quad , \text{(مثلاً)}$$

با یک $\varepsilon > \circ$، ابتدا r دلخواهی با شرط $|z_\circ| < r < R$ انتخاب می‌کنیم. از این قرار $\sum n a_n r^{n-1}$ همگرا است و (بنا بر لِم ۳-۳) باید $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| n a_n r^{n-1} \right| < \varepsilon / 4$$

چون داریم $|z_\circ| < r$ ، پس اگر z به اندازهٔ کافی به $z_\circ$ نزدیک باشد طوری که شرط $|z| < r$ هم تامین شود، آنگاه

$$\left|\sum_{۲}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n|a_n|r^{n-1} < \varepsilon/2 \qquad (۴)$$

علاوه بر این، $\sum_{۱}$ کثیر الجمله ای است بر حسب z و بنابراین $\sum_{۱} \to 0$ چنانچه $z \to z_\circ$. پس می توانیم $\delta > 0$ را چنان تعیین کنیم که

$$\text{از} \quad |z - z_\circ| < \delta \quad \text{نتیجه می شود} \quad \left|\sum_{۱}\right| < \varepsilon/2 \qquad (۵)$$

اکنون اطمینان داریم که z به اندازهٔ کافی به $z_\circ$ نزدیک است طوری که (۴) و (۵) هر دو برقرار باشند، و بنابراین

$$\left|\frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} - g(z_\circ)\right| = \left|\sum_{۱} + \sum_{۲}\right| \leq \left|\sum_{۱}\right| + \left|\sum_{۲}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بدین لحاظ $f'(z_\circ) = g(z_\circ)$ می شود و ادعای ما همین بود.

قضیهٔ ۴-۱۲ . فوق العاده مهم است، زیرا نه تنها دربارهٔ اولین مشتقات آگاهی می دهد، بلکه در مورد مشتقات مراتب بالاتر نیز چنین است؛ هم اکنون به دفعات لازم آن را به کار می بریم تا حاصل شود:

فرع ۴-۱۳ . همهٔ مشتقات مراتب بالا $f', f'', \ldots, f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ از یک سری توانی $f(z) = \sum a_n z^n$ همگی وجود دارند به شرط آنکه z درون قرص همگرایی باشد و در این حال داریم:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$$

برهان. استقراء بر k را به کار بگیرید.

چون در **فرع ۴-۱۳**، z را با $z - z_.$ تعویض کنیم، درمی‌یابیم که اگر سری توانی $f(z) = \sum a_n (z - z_.)^n$ دارای قرص همگرایی $|z - z_.| < R$ باشد، در درون این قرص همگرایی، همهٔ مشتقات نسبی f از هر مرتبه وجود دارد و

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_.)^{n-k}$$

چون در این سری $z = z_.$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f^{(k)}(z_.) = k! a_k$$

که از آن فرع مهم دیگری نتیجه می‌شود:

فرع ۴-۱۴. اگر $f(z) = \sum a_n (z - z_.)^n$ با شرط $|z - z_.| < R$، آنگاه

$$a_k = f^{(k)}(z_.)/k!$$

و می‌توانیم f را به عنوان یک *سری تیلور* چنین بیان کنیم:

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_.)}{n!} (z - z_.)^n \qquad \left(|z - z_.| < R\right)$$ □

مثال. به ازاء $|z| < ۱$،

$$f(z) = ۱/(۱ - z) = ۱ + z + z^۲ + \ldots + z^n + \ldots$$

از این قرار ما می‌دانیم که

$$f'(z) = ۱/(۱ - z)^۲ = ۱ + ۲z + \ldots + nz^{n-۱} + \ldots$$

$$f''(z) = ۲/(۱ - z)^۳ = ۲ + ۶z + \ldots + n(n - ۱)z^{n-۲} + \ldots$$

هستند و بر همین قیاس نیز داریم

$$. f(z) = \sum f^{(n)}(\cdot)\, z^n / n! \ , \ f^{(n)}(\cdot) = n!$$

۶. نگاهی به آینده

در آنالیز حقیقی توابعی وجود دارند که تا n بار مشتق پذیرند اما نه $n+1$ بار. مثال ساده ای که در آن $n = 1$ چنین است:

$$\phi(x) = \begin{cases} \cdot & x \leq \cdot \\ x^{2} & x \geq \cdot \end{cases}$$

واضح است که

$$\phi'(x) = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ 2x & x > \cdot \end{cases}$$

و محاسبه اي ساده نشان می دهد که

$$\phi'(\cdot) = \lim_{x\to\cdot} \frac{\phi(x) - \phi(\cdot)}{x} = \cdot$$

پس ϕ' وجود دارد و حتی در ۰ پیوسته است. امّا $\phi''(\cdot)$ وجود ندارد زیرا

$$\frac{\phi'(x) - \phi'(\cdot)}{x} = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ 2 & x > \cdot \end{cases}$$

به ازاء

به ازاء

است.

کلی تر آنکه، تابع $\phi(x) = x^{n+1}$ با شرط $\phi(z) = \cdot, x \geq \cdot$ با شرط $x \leq \cdot$ در همه جا n بار مشتق پذیر است، اما در مبداء $n+1$ بار مشتق پذیر نیست. بعدها خواهیم دید که در حالت مختلط راهی برای به هم پیوستن تابعها که به این نوع رفتار منجر شود وجود ندارد. در یک تابع حقیقی برای اینکه متغیر به یک نقطهٔ

حدی x میل کند فقط دو راه وجود دارد. از چپ و از راست. خوشبختانه باید گفت که این امکان را داریم که تابعهایی حقیقی را به هم بپیوندیم با این خاصیت که به هر وسعت که بخواهیم مشتقهای چپ و راست آنها یکسان باشند. در فوق دیدیم که تابع صفر را از طرف چپ به تابع z^{n+1} از طرف راست پیوند زدیم و از پیوند آنها تابعی به دست آوردیم که از آن می توان n بار مشتق گرفت، درست به همین گونه می‌توان تابعی چون $F(x) = ۰$ با شرط $x \leq ۰$ و تابعی چون $F(x) = e^{-۱/x}$ با شرط $x > ۰$ یافت که همهٔ مشتقهای چپ و راست آنها در مبداءمساویند (و همهٔ این مشتقات در آن نقطه صفرند: تمرین ۱۶ را ببینید). این مخلوق شبه *فرنکنشتاین* بخوبی سر هم شده است، امّا راجع به آن یک چیز غیرعادی است:

زیرا همهٔ مشتقات آن صفرند، سری تیلور آن در مبداء چنین است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} F^{(n)}(۰)x^n / n! = ۰ + ۰x + \ldots + ۰x^n \ldots = ۰$$

که به طور وضوح به ازاء هر x همگرا است. امّا این سری *تیلور مساوی* $F(x)$ نیست، زیرا برای xهای مثبت $F(x)$ مخالف صفر است. در حالت حقیقی می توانیم تابعهایی بیابیم که سری *تیلور* آنها وجود دارد امّا با خود تابع مساوی نیست (چیز اسرارآمیزی در این مورد وجود ندارد؛ معنی مطلب به طور ساده این است که عبارت باقیمانده یعنی $R_n(x)$ در

$$F(x) = a_۰ + a_۱x + \ldots + a_nx^n + R_n(x)$$

به صفر میل نمی کند. در موردی که هم اکنون متذکر شدیم، همواره داریم $R_n(x) = F(x)$.)

آنالیز حقیقی حتی مناطق تیرهٔ بیشتری دارد، که محل سکونت توابعی است که همه جا پیوسته اند امّا هیچ جا مشتق پذیر نیستند. فرض کنید $G(x)$ به معنی فاصلهٔ عدد حقیقی x از نزدیکترین عدد درست باشد. $G(x)$ نموداری مثل دندانه های اره دارد. $G(x) = x$ با شرط $۰ \leq x \leq \frac{۱}{۲}$, $G(x) = ۱ - x$ با شرط $\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱$, G به

ازاء هر n درست تناوبی است یعنی $G(n+x)=G(x)$. این تابع به ازاء هیچ n درستی در $x=\frac{۱}{۲}n$ مشتق پذیر نیست، و به ازاء هر x حقیقی داریم: $۰ \le G(x) \le \frac{۱}{۲}$. تابع $G_n(x)=\left(\frac{۱}{۴}\right)^n G(۴^n x)$ در $x=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴})^n m$ به ازاء هیچ m درستی مشتق پذیر نیست و در $۰ \le G_n(x) \le \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴})^n$ صدق می کند. اگر مجموع

$$b(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} G_n(x)$$

را بسازیم در واقع تابع خیلی بدی به دست می آوریم. ملاحظه می شود که

$$۰ \le b(x) \le \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^n = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۲}{۳},$$

و می توان ثابت کرد که b همه جا پیوسته است (این کار نسبتاً ساده است) امّا هیچ جا مشتق پذیر نیست (از حالتهای متعارف پیچیده تر است). طرحی برای مشتق پذیر نبودن در هیچ جا، چنین است: اگر $\gamma(x)=(b(x)-b(\alpha))/(x-\alpha)$ ، آنگاه برای مشتق پذیر بودن b در α باید وقتی که x به α میل می کند $\gamma(x)$ به مشتق میل کند. دنباله ای از α_n ها که به α میل کند می سازیم به قسمی که $\gamma(\alpha_n)$ نتواند به هیچ حدی میل کند. برای انجام این کار توجه کنید که زیر هر قطعه خط راست (یک نیم - دندانه) دو دندان مساوی هم از $G_{n-۱}$ به طول $\left(\frac{۱}{۴}\right)^n$ وجود دارد؛ پس می توان $\alpha_n=\alpha \pm \left(\frac{۱}{۴}\right)^n$ را چنان یافت که:

$$G_m(\alpha_n)=G_m(\alpha) \qquad (\text{برای } m \ge n+۱)$$

امّا گرادیان قطعهٔ مستقیم از دندانهٔ G_n و دندانه های بزرگتر عبارت است از:

$$\frac{G_m(\alpha_n)-G_m(\alpha)}{\alpha_n-\alpha}=۱ \quad (\text{برای } m \le n)$$

پس

$$\gamma(\alpha_n) = \frac{b(\alpha_n) - b(\alpha)}{\alpha_n - \alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_m(\alpha_n) - G_m(\alpha)}{\alpha_n - \alpha}$$

عبارت است از حاصل جمع $n+1$ جمله، که هر جمله مساوی است با ۱+ یا ۱-. بنابراین چنانچه n زوج باشد $\gamma(\alpha_n)$ یک *عدد صحیح فرد* و چنانچه n فرد باشد $\gamma(\alpha_n)$ یک *عدد صحیح زوج* است هنگامی که n به بی نهایت میل کند $\gamma(\alpha_n)$ نمی تواند به حدی متناهی میل کند.

حال که تابع بد b را به وجود آورده ایم، ملاحظه کنیم که ضد مشتق آن

$$b_1(x) = \int_0^x b(t)dt$$

یک بار و آن هم در همه جا مشتق پذیر است (با مشتق b)، امّا دوبار در هیچ جا مشتق پذیر نیست. با استقراء بر n، ملاحظه می شود که تابع b_n با ضابطهٔ $b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(t)dt$ دقیقاً n بار در همه جا مشتق پذیر است، امّا هیچ جا $n+1$ بار مشتق پذیر نیست.

آنالیز حقیقی واقعاً موضوع پرحاشیه ای است. امّا چنین تابعهای نامانوسی در آنالیز مختلط چه جایگاهی دارند؟ جواب این است که: *هیچ هر چه که باشند*. آنها را فقط یک بار متذکر شده ایم که بعداً به کناری بنهیم. خواهیم دید که امثال اینها در آنالیز مختلط وجود ندارد؛ همان طور که در فصل ۵ گفتیم (در مقایسه با آنالیز حقیقی) آنالیز مختلط *ساده* است. در آنالیز مختلط تابعهای بسیار ساده ای هستند که همه جا پیوسته اند، امّا هیچ جا مشتق پذیر نیستند. یکی از مثالها $f(z) = i|z|$ است، که اثبات پیوستگی آن آسان است و اثبات مشتق ناپذیری آن با در نظر گرفتن معادلات *کوشی-ریمان* میسر است. نیز تابعهایی وجود دارند که تنها در نقاط منفرد مشتق پذیرند، مثلاً تابع $f(z) = z^2$ در مبداء و بنابراین دو بار مشتق پذیر نیستند. امّا این دیگر آخر خط است. اگر یک تابع مختلط در دامنه ای مشتق پذیر باشد، در این صورت، آنچنان که در یکی از فصلهای بعدی ثابت خواهیم کرد، تا هر مرتبه ای مشتق پذیر خواهد بود، یک سری *تیلور* خواهد

داشت، و با سری تیلور خودش مساوی خواهد بود.
در محاسبهٔ مشتق

$$f'(z_\circ) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

متغیر z با هر جهت دلخواهی می تواند به $z_\circ$ نزدیک شود. وجود چنین حدّی، شرطی چنان قوی است که هر نوع امکان پیوند کردن تابعها را، طوری که در آنالیز حقیقی معمول است، از ما می گیرد.

کلید همهٔ این نظریه این واقعیت است که می توان نشان داد که هر تابع مختلط مشتق پذیر یک بسط به سری توانی دارد، که طبق فرع ۴-۱۴ با سری توانی خودش مساوی است. این مطلب را در فصل ۱۰ با روش چرخشی به اثبات می رسانیم امّا اینجا ارزش آن را دارد که به خاطر آن لحظه ای درنگ کنیم، و این به دلیل تاکید بیشتر ما روی سریهای توانی است. سریهای توانی مثالهای خوبی از توابع مشتق پذیر نیستند؛ به معنی بسیار اصیل ثابت می شود که مثالها *فقط* همین ها هستند.

تمرین ۴

۱ . با کمک اصول اولیه مشتق بگیرید :

(الف) $f(z) = z^2 + 2z$

(ب) $f(z) = 1/z \quad (z \neq 0)$

(ج) $f(z) = z^3 + z^2$

۲ . نشان دهید $f(z) = |z|$ پیوسته در همه جا و مشتق‌پذیر در هیچ جا است . ثابت کنید که $f(z) = |z|^2$ در مبداء مشتق‌پذیر است اما نه در جای دیگر .

۳ . مشتق بگیرید

(الف) $(z^2 + 3)/(4z^3 + 5)^2$

(ب) $(z^2 + 3)^5 (z^4 + 26z)^{12}$

۴ . فرض می‌کنیم $C_n = \{z \in C | z \neq x, x \in R, x \leq 0\}$ یعنی از صفحهٔ مختلط محور حقیقی منفی را حذف می‌کنیم . آن را «صفحهٔ بریده» می‌نامند . حال $r : C_\pi \to C$ را چنین تعریف می‌کنیم .

(الف) $(r(z))^2 = z$

(ب) $re(r(z)) > 0$

ثابت کنید که r در C_π پیوسته است و بنابراین با کمک اصول اولیه ثابت کنید : $r'(z) = \frac{1}{2} / r(z)$.

۵ . فرض می کنیم $f(z)$ کثیر الجمله ای باشدبرحسب $z \in C$ باشد . ثابت کنید که تابع با ضابطهٔ $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ همه جا مشتق پذیر است ، اما $h(z) = \overline{f(z)}$ در ۰ مشتق پذیر است اگر و فقط اگر $f'(0) = 0$

۶ . در موارد زیر که f بر دامنهٔ D تعریف شده است فرمولهای صریحی برای $v(x,y), u(x,y)$ بیابید در حالی که می دانیم $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ و $z = x + iy$ ، و u ، v ، x ، y همه حقیقی هستند .

(الف) $f(z) = 1/z, \quad D = \{z \in C | z \neq 0\}$

(ب) $f(z) = |z|, \quad D = C,$

(ج) $f(z) = \overline{z}, \quad D = C,$

ثابت کنید که u و v در (الف) همه جا در معادلات *کوشی-ریمان* صدق می کنند اما در (ب) و (ج) در هیچ جا .

۷ . در دامنهٔ تعیین شده برقراری معادلات *کوشی-ریمان* را برای تابعهای $v(x,y), u(x,y)$ ثابت کنید

(الف) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3$

(ب) $u(x,y) = \sin x \cosh y, v(x,y) = \cos x \sinh y,$

(ج) $u(x,y) = x/(x^2 + y^2), v(x,y) = -y(x^2 + y^2) \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$

(د) $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), v(x,y) = \sin^{-1}\left(y/(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (x > 0)$

در هر حالت ثابت کنید که $v(x,y), u(x,y)$ قسمتهای حقیقی و موهومی از یک تابع مختلط مشتق پذیرند .

۸ . اگر $z = x + iy$ باشد ، فرض می کنیم

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y(1-i)}{x^2 + y^2}(z \neq 0), f(0) = 0$$

ثابت کنید f در مبداء پیوسته است و معادلات کوشی-*ریمان* در مبداء برقرارند، با این وصف $f'(۰)$ وجود ندارد. چرا این مطلب با قضیهٔ ۶-۴ در تناقض نیست؟

۹. فرض کنیم $f(z)=\sqrt{|xy|}$ که در آن $z=x+iy$. ثابت کنید که معادلات کوشی-*ریمان* در مبداء برقرارند، با این وصف $f'(۰)$ وجود ندارد.

۱۰. فرض می کنیم $f(z)=\dfrac{xy^{۲}(x+iy)}{x^{۲}+y^{۲}}$ $(z=x+iy\neq ۰)$، $f(۰)=۰$.

ثابت کنید که اگر در طول خط راست $z=(a+ib)t$، $t\in R$، $z\to ۰$، آنگاه $\lim(f(z)-f(۰))/z=۰$. این مطلب به اثبات $f'(۰)=۰$ نمی انجامد، شما هم با در نظر گرفتن $z\to ۰$ در طول $z(t)=t+it$، ثابت کنید f در ۰ مشتق پذیر است. (این نشان می دهد که در محاسبهٔ f'، گرفتن حد در طول یک مسیر معین کافی نیست.)

۱۱. در هر یک از موارد زیر، مطلوب است محاسبهٔ $(f\gamma)'(t), \gamma'(t), f'(\gamma(t))$ و ثابت کنید که

$$(f\gamma)'(t)=f'\big(\gamma(t)\gamma'(t)\big)$$

(الف) $f(z)=z^{۲}, \gamma(t)=t^{۳}+it^{۴}\ \ (z\in C, t\in[۰,۱]),$

(ب) $f(z)=۱/z, \gamma(t)=\cos t+i\sin t(Z\neq ۰, t\in[۰,۲\pi]),,$

(ج) $f(z)=۱+z+z^{۲}+z^{۳}+\ldots+z^{n}+\ldots, \gamma(t)=t+it^{۲}\left(|z|<۱, t\in\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]\right)$

۱۲. فرض کنیم که $f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n z^n$ به ازاء هر $z\in C$ همگرا است و در شرایط $f'=f$ و $f(۰)=۱$ صدق می کند. مطلوب است تعیین a_n به ازاء هر $n\geq ۰$. مشتق تابع g را با توجه به رابطه

$$g(z)=f(c-z)f(z)$$

و $c\in C$ در نظر بگیرید و نتیجه بگیرید که

$$f(a+b)=f(a)f(b)$$

هر چه باشد $a, b \in C$. مطلوب است محاسبهٔ $f(1)$ تا پنج رقم اعشار. (می توان یک ماشین حساب به کاربرد، امّا لزومی ندارد!)

۱۳ . ثابت کنید که سری توانی

$$f_\alpha(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

(هر چه باشد α)با $|z| < 1$ همگرا است و مشتق آن در این دامنه عبارت است از:

$$\alpha f_\alpha(z)/(1+z)$$

آیا برای همهٔ α های متعلق به C شعاع همگرایی برابر ۱ است؟

با مشتق گیری از $f_\alpha(z) f_\beta(z) / f_{\alpha+\beta}(z)$ ، یا به طریق دیگر، نشان دهید که:

$$f_{\alpha+\beta}(z) = f_\alpha(z) f_\beta(z)$$

و بنابراین نتیجه بگیرید که با شرط $|z| < 1$ ، به ازاء هر عدد صحیح (چه مثبت و چه منفی) داریم:

$$f_n(z) = (1+z)^n$$

و به ازاء هر عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$\left(f_{1/n}(z)\right)^n = 1 + z$$

(این سری توانی برای $f_\alpha(z)$ را می توان به عنوان تعریف $(1+z)^n$ به کاربرد که در آن α مختلط است و z به دامنهٔ $|z| < 1$ تعلق دارد.)

۱۴ . فرض می کنیم که دو سری توانی $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ به ازاء همهٔ zهای مختلط همگرا باشند، و در روابط $c'(z) = -s(z), s'(z) = c(z)$

صدق کنند. اتحادهای زیر را نتیجه بگیرید:

$$a_n = -a_{n-2}/(n(n-1)), b_n = -b_{n-2}/(n(n-1))$$

با فرض $s(0) = 0$، $c(0) = 1$ تعیین $c(z), s(z)$ به طور کامل مطلوب است. با مشتق گیری، یا به طریق دیگر، ثابت کنید که:

$$(s(z))^2 + (c(z))^2 = 1$$

۱۵. با مثبت و صحیح بودن عدد n تابع بِسِل از مرتبهٔ n چنین تعریف می شود:

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2} z)^{n+2r}}{r!(n+r)!}$$

ثابت کنید که به ازاء همهٔ zهای مختلط این سری همگرا است و در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0$$

موارد آتی را ثابت کنید:

(الف) $$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z),$$

(ب) $$J'_n(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z),$$

(ج) $$J'_n(z) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right),$$

(د) $$J'_n(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z),$$

(ه) $$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{n-1}(z),$$

(و) $$J_2(z) - J_0(z) = 2J''_0(z).$$

۱۶. *(غول فرنکنشتاین)* تابع $f : R \to R$ را چنین تعریف می کنیم:

$$f(x) = 0 \quad (x \leq 0)$$
$$f(x) = e^{-1/x} \quad (x > 0).$$

ثابت کنید که f به دفعات دلخواه مشتق پذیر است و به ازاء هر n، $f^{(n)}(0) = 0$ می شود.

فصل پنجم

تابع توانی

مطالعهٔ نظریهٔ مجرد تابعها شاید از نظر فعالیتهای ذهنی، جاذبه داشته باشد، امّا موارد استعمال محسوس نظریهٔ تابعها ارزش بیشتری به آن می دهد و به همین جهت به مطالعه بعضی توابع «ویژه» که از ارزشهای خاصی برخوردارند می پردازیم. قدم اوّلی که در این راه بر می داریم مطالعهٔ نوع مختلط تابعهای توانی و مثلثاتی یعنی sin,exp و cos است (همواره با انواع سادهٔ دیگر آنها مثل cosec, tan) و آنها را به صورت سریهای توانی تعریف می کنیم. سپس با کمک همین تعریف بعضی از خواص این تابع ها را که اساسی تر هستند توسعه می دهیم.
فرمول مشهور *اویلر*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

بی درنگ از این تعریفها نتیجه می شود که در این مورد تابع exp تابع اساسی است: به این معنی که سایر توابع مذکور را می توان بر حسب آن بیان کرد.
اکثر مطالب تعمیم مستقیم همان موارد حقیقی است و به صورتی فشرده بیان خواهند شد. علاوه بر استخراج فرمولهای استاندارد، تاکید بر آن داریم که خواننده را قانع کنیم که سریهای توانی در واقع بیان کنندهٔ همان تابعهای معمولی هستند و بخصوص تعبیرهای هندسی cos,sin بخوبی محفوظ می مانند.
نوع مختلط لگاریتم نیاز به تحلیل عمیق تری دارد، و در فصل ۷ بررسی خواهد شد.

۱ . تابع توانی

قبلاً تابع توانی را به وسیلهٔ سری توانی

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (۱)$$

که برای هر $z \in C$ همگرای مطلق است تعریف کرده ایم. پس می توانیم جمله به جمله از آن مشتق بگیریم: نتیجهٔ مشتق گیری با خودسری مفروض یکی است و به همین دلیل داریم:

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z) \qquad (۲)$$

با مختصر ذکاوتی می توانیم (۲) را به کار برده فرمول

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \qquad (۳)$$

را که در فصل ۳ به سختی به دست آوردیم ثابت کنیم. رابطهٔ

$$f(z) = \exp(z)\exp(c-z)$$

را که در آن $c \in C$ در نظر و از آن مشتق می گیریم، حاصل می شود:

$$f'(z) = \exp'(z)\exp(c-z) + \exp(z)\exp'(c-z).(-1) = 0$$

بنابر قضیهٔ ۴-۷ از مطلب فوق نتیجه می شود که $f(z)$ ثابت است: این ثابت برابر است با $f(0) = \exp(c)$. از این قرار:

$$\exp(z)\exp(c-z) = \exp(c)$$

با قرار دادن $c = z_1 + z_2$ ، $z = z_1$ ، (۳) را به دست می آوریم.

معمولاً علاقه مندیم که نماد متعارف e^z را به جای $\exp(z)$ به کار بگیریم. برای پرهیز از ابهام باید نشان دهیم که به ازاء عدد گویای z رابطهٔ (۳) با همان رابطهٔ توانی حقیقی $e^{m/n} = \sqrt[n]{e^m}$ تطبیق می کند. این کار را به طریق زیر انجام می دهیم. عدد حقیقی e را چنین تعریف می کنیم:

$$e = \exp(۱) = ۲.۷۱۸۲۸۱۸... \qquad (۴)$$

با به کار بردن (۳) و استقراء بر n درمی یابیم که به ازاء هر عدد صحیح n داریم:

$$\exp(nz) = (\exp(z))^n$$

بنابراین

$$\exp(n) = \left(\exp(۱)\right)^n = e^n$$

واضح است که

$$\exp(۰) = ۱$$

پس

$$\exp(n)\exp(-n) = \exp(n-n) = \exp(۰) = ۱$$

بنابراین

$$\exp(-n) = \left(\exp(n)\right)^{-۱}$$

اما، در مورد عدد گویای $m/n\,(n > ۰)$ داریم:

$$\left(\exp(m/n)\right)^n = \exp(nm/n) = \exp(m) = e^m$$

از این قرار

$$\left(\exp(m/n)\right) = (e^m)^{۱/n} = e^{m/n}$$

می شود. بنابراین نماد

$$e^z = \exp(z)$$

با همان نماد استاندارد که برای توانهای e به کار می بریم مغایرتی ندارد. لذا می توانیم از این به بعد آن را به کار بریم (وبه کار هم می بریم). توجه کنید که اکنون (۳) را می توان چنین نوشت:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad (۵)$$

اگر $z = x + iy$ اختیار کنیم نتیجه می شود:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

اما e^x درست همان تابع توانی حقیقی است؛ پس اگر مفهوم e^x ، و تابع مختلط e^{iy} ، بر ما معلوم باشد، رفتار e^z بر ما معلوم می شود. این دو را در دو بخش بعدی بررسی می کنیم.

۲ . توانهای حقیقی و لگاریتمها

به اختصار خواص استاندارد e^x را یادآوری می نماییم.
واضح است که برای $x > 0$ داریم $e^x > 1 + x$ که با شرط $x \geq 0$ از آن نتیجه می شود $e^x > 0$ و $e^x \to \infty$ اگر $x \to \infty$. نیز $e^{-x} = 1/e^x$ ، پس به ازاء هر x حقیقی، $e^x > 0$ ، و $e^x \to 0$ هنگامی که $x \to -\infty$. مشتق e^x عبارت است از $e^x > 0$. پس e^x یک تابع یکنوای صعودی (افزایشی) است.
طبق قضیهٔ مقدار متوسط e^x تابعی است اکیداً یکنوا و پیوسته از R بر $R^+ = \{x \in R | x > 0\}$. بنابراین تابع معکوسی دارد که اکیداً یکنوا و پیوسته است که آن را *لگاریتم طبیعی* می نامند.

$$\log : R^+ \to R$$

با این خاصیت که

$$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y \quad (x > 0)$$

از (۵) نتیجه می گیریم:

$$\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2 \quad (x_1, x_2 > 0) \tag{۶}$$

فرض می‌کنیم $y = \log x$ ، $y_0 = \log x_0$ $(x, x_0 \in R^+)$. چون $\log$ پیوسته است،

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{e^y - e^{y_0}} = 1/e^{y_0} = 1/x_0$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

۳ . تابعهای مثلثاتی

در گذشته تابعهای سینوس ($\sin e$) و کسینوس ($\cos ine$) را برای عددهای مختلط به وسیلهٔ سریهای توانی زیر تعریف کردیم :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{۷}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{۸}$$

و می‌دانیم که اینها به ازاء هر $z \in C$ همگرای مطلق هستند.

با قرار دادن $-z$ به جای z در (۷) و (۸) ملاحظه می‌شود که $\cos$ تابعی است زوج و $\sin$ تابعی است فرد، یعنی

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\sin(-z) = -\sin z$$

نیز

$$\cos 0 = 1$$
$$\sin 0 = 0$$

با مشتق گیری جمله به جمله،

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \tag{9}$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z \tag{10}$$

با جمع جمله به جمله ما مطابق آنچه در فصل ۳ دیدیم، *فرمول اویلر* را خواهیم داشت:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \tag{11}$$

چون به ازاء هر عدد صحیح n، $(e^{iz})^n = e^{inz}$، از (۱۱) *فرمول دوموآور* نتیجه می شود:

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz \tag{12}$$

از این فرمول می توان استفاده کرده سریعاً فرمولهایی برای $\sin n\theta, \cos n\theta$ بر حسب $\sin\theta, \cos\theta$، هنگامی که $\theta \in R$ باشد، به دست آورد. این کار را با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی، و نیز مساوی قرار دادن قسمتهای موهومی دو طرف تساوی می توان انجام داد (تمرین ۶).

چون در (۱۱)، z را با z- عوض کنیم حاصل می شود:

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z \tag{13}$$

با کمک (۱۱) و (۱۳) حاصل می شود:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad (14)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (15)$$

از فرمول های (۱۴)، (۱۵)، و (۵) همان فرمولهای معمولی جمع برای sin و cos به دست می آید که هم اکنون برای همهٔ اعداد مختلط z_1, z_2 معتبرند.

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad (16)$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 \qquad (17)$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \qquad (18)$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \qquad (19)$$

با قرار دادن $z_1 = z_2 = z$ در (۱۹) حاصل می شود:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad (20)$$

۴. تعریف تحلیلی π

از نظر تاریخی عدد حقیقی π به عنوان نسبت محیط دایره به قطر آن تعریف شده است و بعد از آن بود که اهمیت عدد π در تابعهای مثلثاتی آشکار شد. ما بعکس این روند عمل می کنیم، یعنی π را به طریق تحلیلی تعریف می کنیم و نشان می دهیم (۱-۷) که تعریف ما با همان تعریف هندسی تطبیق می کند.

هدف این است که $\pi/2$ را به عنوان اولین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\cos x = 0$ تعریف کنیم؛ ابتدا باید مساله وجود چنین چیزی را حل کنیم.

می دانیم که cos و sin تابعهای پیوسته ای هستند. نیز،

$$
\begin{aligned}
\cos(۲) &= ۱-\frac{۲^۲}{۲!}+\frac{۲^۴}{۴!}-\dots-\frac{۲^{۴n-۲}}{(۴n-۲)!}+\frac{۲^{۴n}}{(۴n)}-\dots \\
&= ۱\text{-}۲+\frac{۲}{۳}-\dots-\frac{۲^{۴n-۲}}{(۴n)!}\left[۴n(۴n-۱)-۴\right]-\dots \\
&< ۱\text{-}۲+\frac{۲}{۳} \\
&< ۰
\end{aligned}
$$

امّا $\cos ۰ = ۱$ می شود. پس بنابر قضیهٔ مقدار متوسط، $t_۰$ ی وجود دارد به قسمی که $\cos t_۰ = ۰, t_۰ \in (۰,۲)$. فرض می کنیم که k بزرگترین کران پایین برای $\{t \in R | t > ۰,\ \cos t = ۰\}$ باشد. از پیوستگی نتیجه می شود که :

$$\cos k = ۰$$

بنا به تعریف k، اگر $۰ \le x < k$، آنگاه $\cos x < ۰$.
حال تعریف می کنیم

$$\pi = ۲k$$

پس π را با این خاصیتها تعریف کرده ایم که $\cos(\pi/۲) = ۰$، و از $۰ \le x < \pi/۲$ نتیجه می شود $\cos x > ۰$. چون $\cos(۲) < ۰$ پس نتیجه می شود که $۰ < \pi < ۴$.
این یک تقریب خام (تقریب با دقت کم) از عدد π است: در تمرینهای ۱۷ ، ۱۸ به اصلاح آن می پردازیم.

۵. رفتار تابع های مثلثاتی حقیقی

می دانیم که $\cos x$، به شرط $۰ \le x \le \pi/۲$، مثبت است. چون $D\sin x = \cos x$، نتیجه می گیریم که sin تابعی اکیداً صعودی در $[۰,\pi/۲]$

صعودی است . چون

$$\sin^۲ \frac{\pi}{۲} + \cos^۲ \frac{\pi}{۲} = ۱$$

و $\cos\pi/۲ = ۰$ ، پس باید داشته باشیم $\sin\pi/۲ = \pm۱$ ؛ امّا چون sin از ۰ به بعد در $[۰,\pi/۲]$ صعودی است نتیجه می شود :

$$\sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

حال با کمک (۱۷) حاصل می شود :

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - x) = \cos x \qquad (۲۱)$$

پس cos در $[۰,\pi/۲]$ یکنوای نزولی از ۱ تا ۰ است .

وقتی (۱۶) و (۱۸) را به دفعات به کار بگیریم، رفتار sin و cos در بازه های $[\pi/۲,\pi]$ ، $[\pi,۳\pi/۲]$، $[۳\pi/۲,۲\pi]$ بر ما معلوم می شود . داریم :

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

و بر همین قیاس، می توانیم نتایج را در جدولی گرد آوریم . قرار می گذاریم که $a \nearrow b$ به معنی «یکنوای صعودی از a تا b»، $a \searrow b$ به معنی «یکنوای نزولی از a تا b» باشد

interval	cos	sin
$\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$	۱ ↘ ۰	۰ ↗ ۱
$\left[\frac{\pi}{۲},\pi\right]$	۰ ↘ −۱	۱ ↘ ۰
$\left[\pi,\frac{۳\pi}{۲\pi}\right]$	−۱ ↗ ۰	۰ ↘ −۱
$\left[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right]$	۰ ↗ ۱	−۱ ↗ ۰

با ملاحظهٔ جدول داریم :

$$\sin ۲\pi = ۰$$

$$\cos ۲\pi = ۱$$

بنابراین

$$\cos(x+۲\pi) = \cos x \cos ۲\pi - \sin x \sin ۲\pi = \cos x$$
$$\sin(x+۲\pi) = \sin x \cos ۲\pi + \cos x \sin ۲\pi = \sin x$$

و از این هم نتیجه می شود که به ازاء هر عدد صحیح n

$$\cos(x+۲n\pi) = \cos x$$
$$\sin(x+۲n\pi) = \sin x$$

پس رفتاری را که در جدول نشان داده ایم در بازهٔ $[۲n\pi,(۲n+۲)\pi]$ تکرار می شود.

به این ترتیب بررسی های کاملاً رسمی نشان می دهد که $\cos x, \sin x$ حداقل در محدودهٔ رؤوس مطالب، وقتی که x حقیقی باشد ، همان خواص هندسی

متعارف را دارند. محاسبات دقیق‌تری از مقادیر این تابعها تا هر درجه از دقت آن می‌توان به عمل آورد. به تفتیش می‌توان دید که وقتی x حقیقی است (مثبت یا منفی) سریهای توانی مربوط به $\cos x, \sin x$ همواره دارای جمله هایی هستند که از نظر علامت متناوبند. با کمک نظریهٔ استاندارد مربوط به سریهای متناوب، می‌دانیم که حاصل جمع n جمله از این سری متناوباً تقریبهای اضافی تقریبهای نقصانی از حد این سری را به دست می‌دهد و همین مطالب است که به ما امکان می‌دهد که تقریبهای دقیق از توابع مثلثاتی به دست دهیم.

مثال

$$
\begin{aligned}
e^{i} &= \cos ۱ + i \sin ۱ \\
&= (۱ - ۱/۲! + ۱/۴! - ۱/۶! + \cdots) \\
&\quad + i(۱/۱! - ۱/۳! + ۱/۵! - ۱/۷! + \cdots)
\end{aligned}
$$

با در نظر گرفتن مجموعهای جزیی نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\cos ۱ < ۱ \\
&\cos ۱ > ۱ - ۱/۲! && = ۰/۵\ldots. \\
&\cos ۱ < ۱ - ۱/۲! + ۱/۴! && = ۰/۵۴۱۶۶\ldots. \\
&\cos ۱ > ۱ - ۱/۲! + ۱/۴! - ۱/۶! && = ۰/۵۴۰۲۷\ldots. \\
&\cos < ۱ - ۱/۲! + ۱/۴! - ۱/۶! + ۱/۸! && = ۰/۵۴۰۳۰\ldots.
\end{aligned}
$$

و بنابراین

$$\cos ۱ = ۰/۵۴۰۳ \qquad \text{(تا ۴ رقم اعشار)}$$

اعمال مشابهی نشان می‌دهد که

$$\sin ۱ = ۰/۸۴۱۵ \qquad \text{(تا ۴ رقم اعشار)}$$

و بنابراین

$$e^{i} = ۰/۵۴۳۰ + ۰/۸۴۱۵i$$

۶ . تابعهای توانی مختلط و تابعهای مثلثاتی تناوبی هستند

می گویند تابع مختلط $f : S \to C$ دارای *تناوب (دورهٔ تناوب)* ρ است اگر به ازاء

$$f(z+\rho) = f(z) \quad , \quad z \in S \text{ هر}$$

(لازمهٔ این شرط آن است که هر جا $z \in S$ ، داشته باشیم $z+\rho \in S$.) واضح است که اگر ρ یک دورهٔ تناوب f باشد $n\rho$ نیز به ازاء هر n صحیح مثبت، یک دورهٔ تناوب است. (علاوه بر این، اگر از $z \in S$ نتیجه شود $z-\rho \in S$ ، آنگاه $n\rho$ به ازاء هر عدد صحیح n یک دورهٔ تناوب است.)

در مورد توانی مختلط، ملاحظه می شود که

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

بنابراین

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z . 1 = e^z$$

پس $2\pi i$ برای exp یک دورهٔ تناوب است. و لذا $2n\pi i$ هم به ازاء هر عدد صحیح n یک دورهٔ تناوب است.

گزارهٔ ۵ . ۱ . عدد مختلط ρ یک دورهٔ تناوب برای exp است اگر و فقط اگر $(n \in Z)\rho = 2n\pi i$.

برهان. اگر ρ یک دورهٔ تناوب باشد، آنگاه $e^\rho = e^{z+\rho}/e^z = 1$. پس اگر $\rho = u+iv$ ، داریم:

$$1 = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$

با مدول گرفتن از دو طرف

$$1 = |e^u||\cos v + i \sin v| = e^u$$

اما بنا بر خواص تابع توانی حقیقی که در بخش ۲ به اثبات رسید از رابطه اخیر نتیجه می شود $u=0$. پس اکنون داریم:

$$\cos v + i \sin v = 1$$

با مقایسهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی، $\cos v = 1, \sin v = 0$. و لذا بنابر جدول بخش ۵، از اینها نتیجه می شود $v = 2n\pi \; (n \in Z)$.

اکنون تناوبی بودن cos,sin را بررسی می کنیم. مسلماً $2n\pi$ یک دورهٔ تناوب هم برای sin است و هم برای cos : محاسبات مربوط به انتهای بخش ۵، چنانچه به جای x عدد مختلط دلخواه z را قرار دهیم، کارسازی خود را از دست نخواهد داد.

گزارهٔ ۵-۲ .عدد مختلط ρ یک دورهٔ تناوب برای sin یا cos خواهد بود اگر و فقط اگر $\rho = 2n\pi \quad (n \in Z)$

برهان. چون، بنابر (۱۶)، $\sin(\pi/2 + z) = \cos z$ پس نتیجه می گیریم که ρ یک دورهٔ تناوب sin است اگر و فقط اگر ρ یک دورهٔ تناوب cos باشد. پس به ازاء همهٔ z های مختلط

$$\cos(z+\rho) = \cos z$$
$$\sin(z+\rho) = \sin z$$

امّا در این صورت داریم:

$$e^{i(z+\rho)} = \cos(z+\rho) + i\sin(z+\rho) = \cos x + i\sin z = e^{iz}$$

به طوری که

$$e^{w+i\rho} = e^{i(-iw+\rho)} = e^{i(-iw)} = e^{w}$$

بنابراین $i\rho$ یک دورهٔ تناوب برای exp است. اما طبق گزارهٔ ۵-۱، $-i\rho = 2n\pi$، پس $\rho = 2n\pi i$. به آسانی می توانیم صفرهای توابع cos,sin را تعیین کنیم.

گزارهٔ ۵-۳ .فرض می کنیم $z \in C$. در این صورت

$$\cos z = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\sin z = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad z = n\pi$$

که در آن $n \in Z$.

برهان. چون $\cos z = \sin(\pi/۲ + z)$ پس رابطهٔ دوم در فوق رابطهٔ اوّل را ایجاب می‌کند. اما $\sin z = ۰$ اگر و فقط اگر $(e^{iz}-e^{-iz})/(۲i) = ۰$. چون در $۲ie^{iz}$ (که ناصفر است) ضرب کنیم در می‌یابیم که این رابطه برقرار است اگر و فقط اگر $e^{۲iz} = ۱$ ، پس $۲iz = ۲n\pi i$. بنابراین $z = n\pi$ که ادعای ما بود.

۷ . سایر تابع‌های مثلثاتی

اگر $z \neq (n + \frac{۱}{۲})\pi$ ، خواهیم داشت $\cos z \neq ۰$ ، لذا می‌توان تعریف کرد:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

اگر $S = \left\{ z \in C \middle| z \neq (n + \frac{۱}{۲}\pi, \pi \in Z \right\}$ ، در این صورت S یک دامنه است، و

$$\tan : S \to C$$

یک تابع مشتق‌پذیر است. مشتق آن عبارت است از:

$$D\tan z = \frac{\cos z D\sin z - \sin D\cos z}{\cos^۲ z}$$

$$= \frac{\cos^2 z + \sin^۲ z}{\cos^۲ z}$$

$$= ۱ + \tan^۲ z$$

مشابهاً تعریف می‌کنیم:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} (z \neq n\pi) \qquad (۲۲)$$

$$\sec z = \frac{۱}{\cos z} (z \neq (n + \frac{۱}{۲})\pi) \qquad (۲۳)$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{۱}{\sin z} (z \neq n\pi) \qquad (۲۴)$$

همهٔ اینها تابعهای مشتق پذیرند (با دامنه های مشخص) که مشتقهای آنها را به همان طرق معمولی می‌توان حساب کرد. همهٔ فرمولهای استاندارد را که مربوط به تابعهای مثلثاتی هستند می‌توان از خواص sin ، cos استخراج کرد و بنابراین برای مقادیر متغیر مختلط هم همین نتایج حاصل می‌شود. مثلاً با استفاده از (۱۶) و (۱۸) خواهیم داشت:

$$\tan(z_۱ + z_۲) = \frac{\tan z_۱ + \tan z_۲}{۱ - \tan z_۱ \tan z_۲}$$

(به شرط آنکه $z_۱, z_۲, z_۱ + z_۲ \in S$). از این رابطه نتیجه می‌شود که $\tan(z+\pi) = \tan z$ ، پس π یک دورهٔ تناوب برای tan است. بسادگی معلوم می‌شود که دوره های تناوب tan فقط اعدادی به صورت $n\pi$ هستند $n \in Z$.

به خواننده توصیه می‌شود که همه فرمولهای مثلثاتی مورد توجه خود را برای تابعهای مثلثاتی مختلط توسعه دهد، و خواص اساسی cat، sec ، و cosec را به کار بگیرد.

۸. تابع های هیپربولیک (هُذلولَوی)

مشابه با حالت حقیقی، برای $z \in C$ تعریف می‌کنیم:

$$\sinh z = \frac{۱}{۲}(e^z - e^{-z})$$

$$\cosh z = \frac{۱}{۲}(e^z + e^{-z})$$

با مشتق گیری حاصل می شود:

$$D\sinh z = \cosh z$$
$$D\cosh z = \sinh z$$

خواص توابع هیپربولیک، مشابه خواص توابع مثلثاتی (مثل فرمول جمع برای $\sinh(z_1 + z_2)$) با محاسبهٔ مستقیم یا با استفاده از اتحادهای

$$\sin iz = i\sinh z$$
$$\cos iz = \cosh z$$

به دست می آیند. مثلاً

$$\begin{aligned}\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \cos^2 iz - (-i\sin iz)^2\\ &= \cos^2 iz + \sin^2 iz\\ &= 1\end{aligned}$$

تابعهای tanh، coth، sech، cosech به وضوح و مشابه آنچه تاکنون دیده اید تعریف می شوند: این کار را به عهدهٔ خواننده می گذاریم و انتظار داریم که خواص آنها، بخصوص صفرهایشان و دورهٔ تناوب هایشان را کشف کند.

تابعهای هیپربولیک در عبارات مربوط به قسمتهای حقیقی و موهومی $\cos z, \sin z$ ظاهر می شوند. زیرا اگر فرض کنیم $z = x + iy$، آنگاه

$$\begin{aligned}\sin z = \sin(x+iy) &= \sin x\cos iy + \cos x\sin iy\\ &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\end{aligned} \tag{۲۵}$$

مشابهاً

$$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \tag{۲۶}$$

تمرینهای ۵

۱ . عبارات زیر را به صورت $a + ib$ بنویسید که در آن a و b حقیقی هستند .

(الف) $\exp(i)$

(ب) $e^{۲+i\pi}$

(ج) $۱/\exp(۲ + i\pi)$

۲ . عبارات زیر را به صورت $a + ib$ بنویسید که در آن a و b حقیقی هستند .

(الف) $\sin i$

(ب) $\cos i$

(ج) $\sinh i$

(د) $\cosh i$

(ه) $\cos(\pi/۴ - i)$

(و) $\tan(۱ + i)$

۳ . از تابعهای با فرمولهای زیر مشتق بگیرید :

(الف) $\exp(z^۲ + ۲z)$

(ب) $۱/\exp(z)$

(ج) $\exp(z^۲)/\exp(z + ۱)$

۴ . از تابعهای با فرمولهای زیر مشتق بگیرید :

(الف) $\tan(z^۲)$

(ب) $\sinh(z + ۲)/\exp(z^۳)$

(ج) $\sin z \cosh z \exp z$

۵. اتحـاد $e^{i\theta}e^{i\varnothing} = e^{i(\theta+\varnothing)}$ را به کـار گـرفـتـه فرمـولهـای مـتـعـارف برای $\cos(\theta+\phi), \sin(\theta+\phi)$ را به دست آورید. با روشی مشابه ثابت کنید:

$$1/(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

۶. با اسـتـفـاده از $(e^{i\theta})^3 = e^{i3\theta}$ فـرمـولهـایی برای $\cos 3\theta$ ، $\sin 3\theta$ بر حـسب $\cos\theta$ ، $\sin\theta$ بـه دسـت آورید. فـرمـولهـای مـشـابهی بـرای $\sin 5\theta, \cos 5\theta, \sin 4\theta, \cos 4\theta$ بدست آورید.

۷. مسیرهای زیر را رسم کنید.

(الف) $z(t) = e^{-it} \quad (0 \le t \le \pi)$

(ب) $z(t) = 1 + i + 2e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

(ج) $z(t) = z_0 + re^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ (که در آن $r > 0, z_0 \in C$)

(د) $z(t) = t + i\cosh t \quad (-1 \le t \le 1)$

(ه) $z(t) = \cosh t + i\sinh t \quad (-1 \le t \le 1)$

۸. «*قانون اُسبُرن*» می گوید هر فرمول شـامل cosine,sine فرمـول مشـابهی دارد شـامل sinh ، cosh که از هر جهت همـان فرمول (شامل cosine,sine) است فقط با این استثناء که حـاصلضرب دو sine باید با *منهای* حاصلضرب sinh های متناظر آنهـا عوض شـوند. در مورد هر یک از فـرمولهـای زیر، فرمـول نظیر آن را با به کـار گرفتن *قانون اُسبُرن* بنویسید و بعد این فرمولها را با کمک اصول اولیه ثابت کنید:

(الف) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(ب) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(ج) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

با توجه به فرمولهای

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin z = i\sinh z$$

درباره پایه و اساس *قانون اُسبُرن* اظهار نظر کنید.

۹ . ثابت کنید که مزدوج مختلط $\cos z$ عبارت است از $\cos \bar{z}$ و برای $\sin z$ عبارت است از $\sin \bar{z}$. رابطه ها ی زیر را ثابت کنید:

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) = \sinh^2 x + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x$$

$$|\cos z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x$$

۱۰ . نشان دهید که $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$ اگر و فقط اگر z حقیقی باشد؛ نیز ثابت کنید $\cos z$ بر C نامحدود (بیکران) است (یعنی kای وجود ندارد به قسمی که $|\cos z| < k$).

۱۱ . فرمولهایی برای قسمتهای حقیقی و موهومی مربوط به موارد زیر استخراج کنید و نشان دهید که در معادلات کوشی-ریمان صدق می کنند:

(الف) $\sin z$

(ب) $\cos z$

(ج) $\exp z$

(د) $\sinh z$

(ه) $\cosh z$

۱۲ . فرمولهایی که برای قسمتهای حقیقی و موهومی مربوط به موارد زیر استخراج و دامنه ای را که بر آن معین هستند مشخص کنید و نشان دهید که در معادلات کوشی - دیمان صدق می کنند.

(الف) $\tan z$

(ب) $\tanh z$

(ج) $\operatorname{casec} z$

(د) $\operatorname{casech} z$

(ه) $\cot z$

(و) $\coth z$

۱۳ . عبارت $\tanh(x+iy)$ را به صورت قسمت حقیقی و موهومی بنویسید و نشان دهید که اگر $\tanh(x+iy)$ حقیقی باشد. خواهیم داشت $y = n\pi/۲$.

۱۴ . مطلوب است تعیین مجموعه های نقاطی که بر آنها تابعهای $\cos, \exp$ $\tanh, \sinh, \cosh, \tan, \sin$

(الف) مقادیر حقیقی هستند

(ب) فقط مقادیر موهومی هستند.

۱۵ . قسمتهای حقیقی و موهومی از

$$۱ + z + z^۲ + \dots + z^n = (۱ - z^{n+۱})/(۱ - z)$$

را در نظر گرفته سپس مجموعها زیر را بیابید:

(الف) $۱ + \cos x + \cos ۲x + \dots + \cos nx,$

(ب) $\sin x + \sin ۲x + \dots + \sin nx,$

(ج) $\cos x + \cos ۳x + \dots + \cos(۲n - ۱)x,$

(د) $\sin x + \sin ۳x + \dots + \sin(۲n - ۱)x,$

(ه) $\sin x - \sin ۲x + \dots + (-۱)^{n-۱} \sin nx,$

(و) $\cos\theta + \cos(\theta + \phi) + \dots + \cos(\theta + n\phi),$

(ز) $\sin\theta + \sin(\theta + \phi) + \dots + \sin(\theta + n\phi),$

۱۶ . اگر $z(t) = x(t) + iy(t)$ یک جواب معادلهٔ

$$\frac{d^۲z}{dt^۲} + \lambda z = k_. e^{iwt} (\lambda, k_., w \in R) \qquad (۱)$$

باشد، ثابت کنید که در این صورت $x = x(t) = re(z(t))$ یک جواب معادلهٔ

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} + \lambda x = k_. \cos t \qquad (۲)$$

است.

با در نظر گرفتن جوابهای معادلهٔ (۱) به صورت $z = ke^{iwt}$ ، جوابی از (۲) را تعیین کنید.

اگر $k_.$ مختلط باشد، مثلاً $(k_1, \varepsilon \in R)k_. = k_1 e^{i\varepsilon}$ ، و w, λ حقیقی باشند، قسمت حقیقی معادلهٔ (۱) را بنویسید تا حاصل شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = k_. \cos(wt + \lambda). \qquad (3)$$

ثابت کنید که جوابی از معادلهٔ (۳) را می توان اختیار کرد که به صورت زیر باشد:

$$x(t) = k_1 \cos(wt + \varepsilon)/(\lambda - w^2).$$

۱۷. با در نظر گرفتن حاصل جمع تصاعد هندسی

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z),$$

مطلوب است تعیین $A_n(x)$ به قسمی که

$$1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + A_n(x)$$

ثابت کنید که مشتق $\tan^{-1}x$ عبارت است از $1/(1+x^2)$ که $\tan^{-1} : R \to (-\pi/2, \pi/2)$ عبارت است از تابع معکوس تابع $\tan :\to (-\pi/2, \pi/2) \to R$. به این ترتیب نتیجه بگیرید که

$$\tan^{-1} t = \int_0^t 1/(1 + x^2)dx = t - t^3/3 + t^5/5 - \ldots + \int_0^t A_n(x)dx$$

با تقریب زدن اندازهٔ آخرین انتگرال، نشان دهید که سری توانی

$$t - t^3/3 + t^5/5 - \ldots$$

با شرط $|t| \le 1$ به $\tan^{-1} t$ همگرا است.

و بالاخره سری گری گوری را نتیجه بگیرید:

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\dots$$

۱۸ . همگرایی سری گری گوری بسیار بطئی است. روشهای بهتر برای محاسبهٔ π را شاید بتوان به وسیلهٔ اتحادهای زیر ارائه داد:

$$\frac{\pi}{۴}=\tan^{-۱}\frac{۱}{۲}+\tan^{-۱}\frac{۱}{۳}, \qquad (۱)$$

$$\frac{\pi}{۴}=۴\tan^{-۱}\frac{۱}{۵}+\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}, \qquad (۲)$$

با به کار بردن فرمول جمع برای tan اتحادهای (۱) ، (۲) را ثابت کنید. اتحاد (۲) را برای محاسبهٔ π تا ۵ رقم اعشار به کار بگیرید. (برای این کار لازم است که یک جمله از بسط $\tan^{-۱}(۱/۲۳۹)$ و پنج جمله از بسط $\tan^{-۱}(۱/۵)$ محاسبه شود.)

فصل ششم

انتگرال گیری

قسمت بعدی از طرح مفصل ما تعریف انتگرالگیری به صورتی مشابه حالت حقیقی، و برقراری رابطهٔ معکوس بین مشتق گیری و انتگرالگیری است.

تابع مختلطی چون $f : D \to C$ با دامنهٔ D در نظر گرفته فرض می کنیم $z_0, z_1 \in D$. انتگرال حقیقی $\int_a^b f(t)dt$ را نمی توان بی درنگ به انتگرال مختلط $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ تعمیم داد زیرا باید مشخص کنیم که چگونه از z_0 به z_1 می رویم. برای این کاربه انتخاب مسیری چون γ بین z_0 و z_1 می پردازیم. از این قرار نمادی مناسب برای انتگرال f در طول γ عبارت است از $\int_\gamma f(z)dz$ ، یا به صورتی خلاصه $\int_\gamma f$.

برای تعریف $\int_\gamma f$ دو راه وجود دارد . راه نخست بنا نهادن نظریهٔ حاصل جمعهای مختلط ریمان با تقلید از حالت حقیقی است؛ این کار را در بخش ۱ و ۲ انجام خواهیم داد و از آن به نتیجهٔ زیر می رسیم :

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \qquad (۱)$$

به شرط آنکه $\gamma : [a,b] \to D$ یک مشتق پیوستهٔ γ' داشته باشد. در بخش۳ طول L چنین مسیری به وسیلهٔ زیر محاسبه می شود:

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|dt \qquad (۲)$$

همین معادلات ما را به دومین راه ممکنه هدایت می کنند، در این حال فرض بر این است که خواننده با انتگرال گیری در حالت حقیقی آشنا است. چرا (۱) و (۲) را برای تعریف $\int_\gamma f$, L به کار نبریم؟ ممکن است انتگرال $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ در (۱) مختلط باشد، در این حال اگر آن را به صورت $U(t)+iV(t)$ بنویسیم آنگاه $\int_\gamma f$ را می توان از دو انتگرال حقیقی به دست آورد:

$$\int_\gamma f = \int_a^b U(t)dt + i\int_u^b V(t)dt$$

این روش را در بخش ۴ به عنوان یکی از حالتها می پذیریم، و به این ترتیب می توان بخش ۳-۱ را حذف کرد. راههای میان بری از این قبیل، در جای خود ارزشمند است، بدین معنی که در همین فصل دو برهان به شیوه ای که جنبه ی تکنیکی آن قدری بیشتر از جنبهٔ شهودی آن باشد، باید ارائه گردد. امّا چنین بهائی چندان گزاف نیست زیرا به خواننده امکان انتخابی موثق می دهد: به طور کامل با نظریه انتگرال گیری مختلط ریمان کار کند و مشابهت کامل آن را با حالت حقیقی دریابد، یا سه بخش بعدی را فرعی محسوب داشته از بخش ۴ شروع کند.

۱ . حالت حقیقی

برای خواننده ای که می خواهد کارش را بر مقایسهٔ بین انتگرال مختلط و حقیقی بنا نهد، به یادآوری حالت حقیقی می پردازیم. انتگرال ریمان $\int_a^b \phi(t)dt$ از تابع حقیقی $\phi:[a,b]\to R$ در چند مرحله تعریف می شود. ابتدا افرازی چون P از $[a,b]$، که با $a=t_۰<t_۱<\dots<t_n=b$ مشخص می شود، اختیار می کنیم و در هر زیر بازه، نقاط s_r را چنان انتخاب می کنیم که $t_{r-۱}\le s_r\le t_r$ بشود. آنگاه حاصل جمع زیر را می سازیم

$$S(P,\phi)=\sum_{r=۱}^{n}\phi(s_r)(t_r-t_{r-۱})$$

نقاط $t_m,\dots,t_\circ$ را *نقاط تقسیم* P می نامند و افراز دیگری چون Q را *ظریف‌تر* از P می نامند به شرط آنکه همهٔ نقاط تقسیم P در Q باشند.

نتیجهٔ زیر در آنالیز حقیقی مشهود است؛ آن را بدون استدلال بیان می کنیم.

لم ۶-۱. فرض می کنیم $\phi:[a,b]\to R$ پیوسته باشد. در این صورت یک عدد حقیقی A موجود است به قسمی که به ازاء هر $\varepsilon>0$ یک افراز P_ε از $[a,b]$ وجود دارد به قسمی که به ازاء هر افراز P که از P_ε ظریفتر است داریم:

$$|S(P,\phi)-A|<\varepsilon.$$

عدد حقیقی A را به صورت $\int_a^b\phi(t)dt$ نشان می دهند.

محاسبهٔ عملی $\int_a^b\phi(t)dt$ معمولاً با ضد مشتق گیری انجام می شود، آنهم با به کار گرفتن:

لم ۶-۲. *(قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)*

(اَلف) اگر ϕ بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $F'=\phi$، آنگاه

$$\int_a^b\phi(t)dt=F(b)-F(a)$$

(ب) اگر $I(x)=\int_a^x\phi(t)dt$، $(a\le x\le b)$، آنگاه $I'(x)=\phi$

(فراموش نشود که در قسمت (ب) پیوسته بودن ϕ بر $[a,b]$ لازم است.)

مثال. برای محاسبهٔ $\int_a^b t^5dt$، نیازی نداریم که حاصل جمعهای $S(P,\phi)$ را، که در آنها $\phi(t)=t^5$، حساب کنیم. چون $F(t)=\frac{1}{6}t^6$ در $F'=\phi$ صدق می کند. از لم ۶-۲ قسمت (i) بی درنگ نتیجه می شود

$$\int_a^b t^5dt=\frac{1}{6}b^6-\frac{1}{6}a^6$$

عموماً برای محاسبه $\int_a^b\phi(t)dt$ به دنبال ضد مشتق F از ϕ می گردیم و پس از یافتن آن از لم (i)۶-۲ استفاده می کنیم.

قبل از پرداختن به حالت مختلط، در نظر گرفتن یک تعمیم جزیی مفید خواهد بود: منظور ما انتگرال *ریمان - استیلیس* $\int_a^b \phi(t)d\theta$ است. که در آن θ یک تابع حقیقی است (ϕ اولین و θ دومین تابع حقیقی در این بحث است). اینجا، مطابق مطالب مذکور در فوق، با معلوم بودن یک افراز P از $[a,b]$، مجموع زیر را می‌سازیم:

$$S(P,\phi,\theta) = \sum_{r=1}^{n} \phi(s_r)\big(\theta(t_r) - \theta(t_r - 1)\big)$$

تعمیمی هم برای لم ۶-۱ در آنالیز حقیقی داریم:

لم ۶-۳. فرض کنیم ϕ، θ تابعهایی حقیقی تعریف شده (معیّن شده) بر $[a,b]$ باشند به قسمی که ϕ پیوسته و θ دارای مشتق پیوستهٔ θ' باشد. در این صورت عدد حقیقی $B = \int_a^b \phi(t)\ \theta'(t)d(t)$ در شرط زیر صدق می‌کند:

با $\varepsilon > 0$ معلوم، یک افراز P_ε وجود دارد به قسمی که برای هر افراز P که ظریفتر از P_ε است داریم:

$$|S(P, \phi, \theta - B| < \varepsilon$$ □

در لم ۶-۳ حد حاصل جمع $s(p,\phi,\theta)$ نیز با $\int_a^b \phi(t)d\ \theta$ نشان داده می‌شود. آنچه که لم ۶-۳ به ما می‌گوید این است که (برای θ ی مشتق‌پذیر) انتگرال *ریمان - استیلیس* $\int_a^b \phi(t)d\ \theta$ مساوی است با انتگرال ریمان $\int_a^b \phi(t)\theta'(t)dt$.

شرایط این لم وجود و پیوستگی انتگرال $\phi(t)\theta'(t)$ را تضمین می‌کند. البته انتگرال *ریمان - استیلیس* (و انتگرال *ریمان*) تحت شرایط خیلی کلی‌تر از آنچه برای ϕ و θ ذکر کردیم وجود دارند، امّا آنچه در لم ۶-۳ ذکر شد همهٔ آنچه را که برای تعمیم مورد نظر ما به حالت مختلط لازم است بیان می‌کند.

۲. انتگرالگیری مختلط در طول یک مسیر هموار

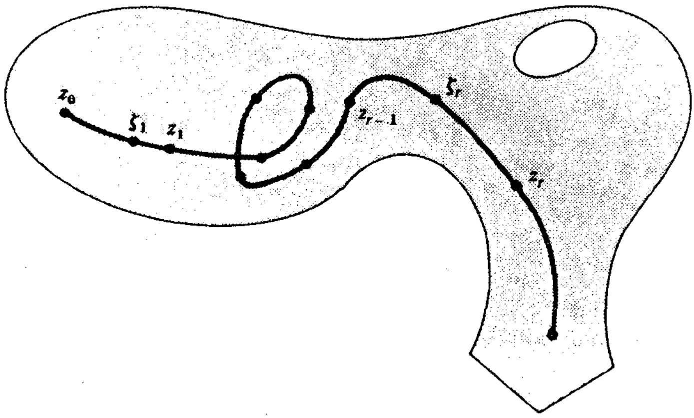
انتگرال ریمان تابع مختلط f در مقام مقایسه و مشابهت با حد حاصل جمع $\sum \phi(s_r)(t_r - t_{r-1})$ می‌شود. به طور ساده $\sum f(\xi_r)(z_r - z_{r-1})$ را که در آن

ξ_R ، z_R مختلط هستند در نظر می گیریم. ξ_R ، z_R را در طول یک مسیر γ واقع در دامنهٔ f مطابق شکل ۶-۱ در نظر می گیریم.

با توجه به این منظورها فرض می کنیم که

(الف) $f : D \to C$ پیوسته است،

(ب) $\gamma : [a,b] \to D$ یک مسیر است به قسمی که γ' وجود دارد و در سراسر $[a,b]$ پیوسته است. (این بدان معنی است که اگر $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ، آنگاه y', x' در $[a,b]$ ، به انضمام نقاط انتهایی، پیوسته اند.)



(شکل ۶-۱)

مسیری که در شرط (ب) صدق کند *هموار* نامیده می شود.

به ازاء هر افراز P که با $a = t_۰ < t_۱ < \dots < t_n = b$ و $t_{r-۱} \le s_r \le t_r$ مشخص می شود حاصل جمع

$$S(P,f,\gamma) = \sum_{r=۱}^{n} f\big(\gamma(s_r)\big)\big(\gamma(t_r) - \gamma(t_{r-۱})\big)$$

را تشکیل می دهیم. با فرض $z_r = \gamma(t_r)$ ، $\xi_r = \gamma(s_r)$ ، حاصل جمع *ریمان - استیلیس* چنین می شود:

$$S(P,f,\gamma) = \sum_{r=۱}^{n} f(\xi_r)(z_r - z_{r-۱})$$

که شباهت مستقیم با حالت حقیقی را نشان می دهد.
انتگرال f در طول γ را عدد مختلط K تعریف می کنیم به طوری که K در شرط زیر صدق کند:
با معلوم بودن $\varepsilon > 0$ ، یک افراز P_ε وجود دارد به قسمی که به ازاء هر افراز ظریفتر P،

$$|S(P,f,\gamma) - K| < \varepsilon$$

اینک تعریف می کنیم

$$\int_\gamma f(z)dz = K$$

و آن را به صورت اختصاری $\int_\gamma f$ می نویسیم.
درست مثل حالت حقیقی، به ندرت به محاسبهٔ انتگرال با این روش جمع بندی می پردازیم. یک روش این است که آن را به دو انتگرال حقیقی تبدیل کنیم به این ترتیب که تابع مختلط مفروض با یک متغیر حقیقی را که مثلاً به صورت $\psi : [a,b] \to C$ است چنین بنویسیم:

$$\psi(t) = U(t) + iV(t) \quad (a \le t \le b)$$

که بر این اساس می توانیم چنین تعریف کنیم:

$$\int_a^b \psi(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

با چنین قراردادی نوع مختلطی از لم ۶-۳ به دست می آوریم:
قضیهٔ ۶-۴ . اگر f تابع مختلط پیوسته ای باشد که بر دامنهٔ D و مسیر هموار $\gamma : [a,b] \to D$ تعریف شده باشد. آنگاه

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

برهان. فرض کنیم $a \le t \le b,\ \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ، $(z = x + iy \in D)$. اگر $u(x(t),y(t))$ ، $v(x(t),y(t))$ ، $y'(t),x'(t)$ را به

اختـصـار با u, v, x', y' نشـان مـی دهیم، در این صـورت از قـرار داد مـا در مـورد انتگرالهای مختلط حاصل می شود:

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt$$

$$= \int_a^b (ux' - vy' + i(ux' + vy')dt$$

$$= \int_a^b ux'dt - \int_a^b vy'dt + i\int_a^b ux'dt + i\int_a^b vy'dt$$

اگر $f(\gamma(s_r))$ را به صورت $u_r + iv_r$، $\gamma(t_r)$ را به صورت $x_r + iy_r$ بنویسیم، آنگاه

$$S(P,f,\gamma) = \sum_{r=1}^{n} (u_r iv_r)[(x_r + iy_r) - (x_{r-1} + iy_{r-1})]$$

$$= \sum v_r(x_r - x_{r-1}) - \sum v_r(y_r - y_{r-1}) + i\sum u_r(x_r - x_{r-1})$$

$$+ i\sum v_r(y_r - y_{r-1})$$

اکنون آن چهار انتگرال را با این چهار مجموع دو به دو مقایسه کرده و لِم ۵-۳ را به کار می گیریم. به عنوان مثال،

$$\sum u_r(x_r - x_{r-1}) = \sum_{r=1}^{n} u(x(s_r), y(s_r))(x(t_r) - x(t_{r-1}))$$

که در آن $\phi(t) = u(x(t), y(t))$ ، $x'(t)$ هر دو بر $[a,b]$ پیوسته اند. از این قـرار با $\varepsilon > 0$ معلوم، یک افراز $P_1(\varepsilon)$ وجود دارد به قسمی که از هر افراز P که ظریفتر از $P_1(\varepsilon)$ باشد نتیجه می شود:

$$\left|\sum u_r(x_r - x_{r-1}) - \int_a^b ux'dt\right| < \varepsilon/4$$

به این ترتیب افـرازهای $P_4(\varepsilon),P_3(\varepsilon),P_2(\varepsilon)$ را به دست می‌آوریـم به قسـمـی کـه از افـرازهای ظریفـتـر از آنهـا نامسـاویهـایی کـه نظیر زوجـهـای مـتنـاظر از انتگرالهـا و مجمـوعها هستند حاصـل می‌شود. چنانچه P_ε افرازی باشـد که همهٔ نقاط تقـسیم $P_1(\varepsilon)$ ، $P_4(\varepsilon),P_3(\varepsilon),P_2(\varepsilon)$ را دارا باشـد، و P ظریفـتـر از P_ε فـرض شـود، در این حال هر چهار نامساوی برقرارند و خواهیم داشت :

$$\left|S(P,f,\gamma)-\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|<\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon<\varepsilon$$

نتیجه این که

$$\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

مثال. $f(z)=z^2, \gamma(t)=t^2+it, (0\le t\le 1)$. (شکل ۶-۲)

$$\int_\gamma f=\int_0^1 (\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

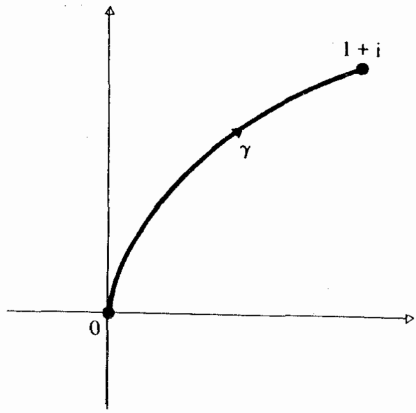
$$=\int_0^1 (t^2+it)^2(2t+i)dt$$

$$=\int_0^1 (t^4+2it^3-t^2)(2t+i)dt$$

$$=\int_0^1 (2t^5+4t^3)dt+i\int_0^1 (5t^4-t^2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^6-t^4\right]_0^1+i\left[t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$



شکل ۶-۲

۳. طول یک مسیر هموار

در مورد مسیر دلخواه $\gamma:[a,b]\rightarrow C$ ، می توان یک تقسیم بندی P از $[a,b]$ را که با $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ مشخص می شود اختیار کنیم و به محاسبهٔ طول

$$L(\pi)=\sum_{r=1}^{n}\left|\gamma(t_r)-\gamma(t_{r-1})\right|$$

از چند ضلعی π که تقریب زنندهٔ (برآورد کنندهٔ) طول γ است می پردازیم. رؤوس این چند ضلعی عبارتند از $\gamma(t_0),\gamma(t_1),\dots,\gamma(t_n)$. (شکل ۶-۳) طول $L(\gamma)$ از γ به عنوان سوپرمم (کوچکترین کران بالا) از طولهای $L(\gamma)$ از همه چند ضلعی های تقریب کننده تعریف می کنیم. طول یک مسیر دلخواه لزومی ندارد که متناهی باشد.

(شکل ۶-۳)

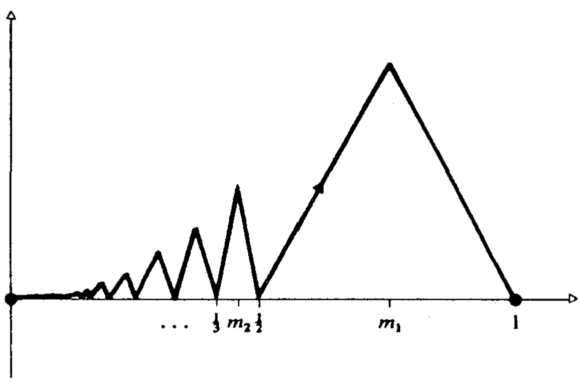
مثال۱ : $\gamma(t)\ (0 \le t \le 1)$ را چنین تعریف می کنیم که m_n وسط $[1/(n+1), 1/n]$ باشد (و بنابر این $\left(m_m = \frac{1}{1}(1/(n+1)+1/n\right) = (2+1)/(2n(n+1))$

و نمودار $y = \lambda(t)$ را در بازه $[1/(n+1), 1/n]$ رسم می کنیم که به صورت دو قطعه خط راست از $(1/(n+1), 0)$ تا $(m_n, 1/n)$ و سپس به سوی پایین تا $(1/n, 0)$. تعریف می کنیم :

$$\gamma(t) = \begin{cases} t + i\lambda(t) & (0 < t \le 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

نمودار γ در شکل ۶-۴ ترسیم شده است . طول این نمودار از $t = 1/(n+1)$ تا $t = 1/n$ بالغ بر $2/n$ است . فرض کنیم که P افراز $0 < 1/(n+1) < m_n < 1/n < \dots < \frac{1}{2} < m_1 < 1$ باشد، آنگاه طول این مسیر چند ضلعی بالغ است بر :

$$(2/n) + (2/(n-1)) + \dots + (2/1) = 2(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$$



(شکل ۶-۴)

چون سمت راست تساوی فوق دو برابر سری هارمونیک است، با افزایش n بدون حد متناهی افزایش می‌یابد، و بنابراین $L(\gamma)$ نامتناهی است.

مثال ۲. یک «مسیر نسبتاً هموار» آنچنان که در شکل ۶-۵ مشاهده می‌شود عبارت است از:

$$\gamma(t)=\begin{cases} t+it\sin(\pi/t) & (0<t\leq 1)\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

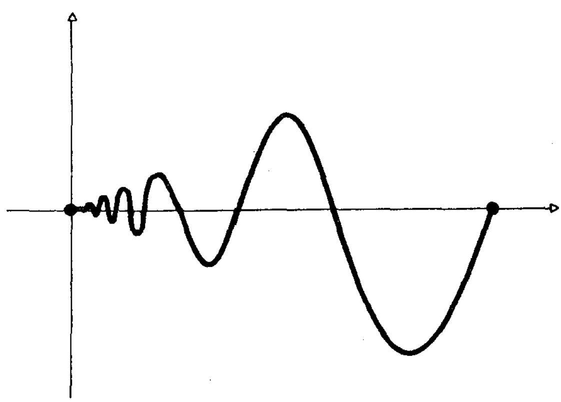
محاسبه نشان می‌دهد که گرچه

$$\gamma'(t)=1+i(\sin(\pi/t)+t\cos(\pi/t)(-\pi/t^2))$$

در $0<t\leq 1$ پیوسته است، امّا حد

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}=1+i\sin(\pi/t)$$

هنگامی که t به ۰ میل کند وجود ندارد پس γ' در $[0,1]$ پیوسته نیست و بنابراین در $[0,1]$ هموار نیست (گرچه درهر زیر بازهٔ $[k,1]$، $0<k<1$، هموار است).



شکل ۶-۵

فرض کنیم که P_n افراز

$$0 < 1/n < 1/\left(n-\frac{1}{2}\right) < 1/(n-1) < \dots < 1/2 < 1/1\frac{1}{2} < 1$$

باشد. چون

$$\gamma(1/n) = 1/n + (i/n)\sin \pi n = 1/n$$

و

$$\gamma\left(1/(n-\frac{1}{2})\right) = 1/\left(n-\frac{1}{2}\right) + i\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}$$
$$= 1/\left(n-\frac{1}{2}\right) + i(-1)^{n-1}/\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

فاصله $\gamma(1/n)$ تا $\gamma\left(1/(n-\frac{1}{2})\right)$ متجاوز از $1/(n-\frac{1}{2})$ است که آن هم متجاوز از $1/n$ است.

فقط به محاسبهٔ طولهای قطعات متناوب از چند ضلعی تقریب زنندهٔ γ_n که به وسیله P_n معین می‌شود نیاز داریم تا معلوم شود که

$$L(\gamma_n) > 1/n + 1/(n-1) + \dots + 1$$

که باز بدون حد افزایش می‌یابد.

اگر مسیری *هموار* باشد، طول آن متناهی خواهد بود و با کمک یک انتگرال قابل محاسبه است:

گزارهٔ ۶-۵. طول یک مسیر هموار $\gamma : [a,b] \to C$ از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)dt|$$

قبل از اینکه این نتیجه را ثابت کنیم، ابتدا متذکر می شویم که انتگرال $|\gamma'(t)|$ بر $[a,b]$ پیوسته است، بنابراین انتگرال حقیقی

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

مطمئناً وجود دارد. باید ثابت کنیم که L سوپرمم طولهای $L(\pi)$ از چند ضلعی های π تقریب زننده هستند. اما L را می توان به وسیلهٔ حاصل جمعهای

$$S(P,\phi) = \sum_{r=1}^{n} |\gamma'(s_r)|(t_r - t_{r-1})$$

به دقت تقریب زد (برآورد کرد)، طوری که P افراز $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ است، $t_{r-1} \le s_r \le t_r$، و $\phi(t) = |\gamma'(t)|$.

برهان گزارهٔ ۶-۵ . به وسیلهٔ لم زیر بسیار آسان می شود.

لم ۶-۶ . با نمادهای پیشین و معلوم بودن $\varepsilon > 0$، یک افزار Q_ε وجود دارد؛ به قسمی که به ازاء هر افراز P که از Q_ε ظریفتر باشد، طول $L(\pi)$ مربوط به چند ضلعی π تقریب زننده که نظیر افراز P است در

$$|S(P,\phi) - L(\pi)| < \varepsilon$$

صدق می کند.

برهان. طبق تعریف،

$$S(P,\phi) = \sum_{r=1}^{n} |\gamma'(s_r)|(t_r - t_{r-1})$$

و

$$L(\pi) = \sum_{r=1}^{n} |\gamma(t_r) - \gamma(t_{r-1})|$$

با نوشتن $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$، و استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین در آنالیز حقیقی

به ازاء σ_r ی در $t_{r-1} < \sigma_r < t_r$ داریم

$$x(t_r) - x(t_{r-1}) = x'(\sigma_r)(t_r - t_{r-1})$$

به ازاء τ_r ی در $t_{r-1} < \tau_r < t_r$ داریم

$$y(t_r) - y(t_{r-1}) = y'(\tau_r)(t_r - t_{r-1})$$

بنابراین

$$\gamma(t_r) - \gamma(t_{r-1}) = \left(x'(\sigma_r) + iy'(\tau_r)\right)(t_r - t_{r-1})$$

امّا y', x' بر $[a,b]$ پیوسته اند و (با توجه به آنالیز حقیقی) می دانیم که پیوستهٔ یکنواخت‌هستند، به این معنی که به ازاء هر $\varepsilon > ۰$ ، یک $\delta > ۰$ وجود دارد به قسمی که
از $s,t \in [a,b]$ و $|s-t| < \varepsilon$ نتیجه می شود:

$$|y'(s) - y'(t)| < \varepsilon / ۲(b-a), \quad |x'(s) - x'(t)| < \varepsilon / ۲(b-a)$$

اگر Q_ε را افراز دلخواهی اختیار کنیم با این خاصیت که هر زیر بازهٔ $[t_{r-1}, t_r]$ طولی کوچکتر از δ داشته باشد، آنگاه هر افراز P ظریفتر از Q_ε نیز همین خاصیت را دارد. از آن جهت که $s_r, \sigma_r, \tau_r \in [t_{r-1}, t_r]$ ، پس هر یک از آنها به فاصله ای کوچکتر از δ از دیگری است، بنابراین

$$\left\| \gamma'(s_r) \right| (t_r - t_{r-1}) - \left| \gamma(t_r) - \gamma(t_{r-1}) \right\|$$

$$= \left\| \gamma'(s_r) \right| - \left| x'(\sigma_r) + iy'(\tau_r) \right\| (t_r - t_{r-1})$$

$$\le \left| (x'(s_r) + iy'(s_r)) - (x'(\sigma_r) + iy'(\tau_r)) \right| (t_r - t_{r-1})$$

(از $|w-z| \geq ||w|-|z||$ استفاده کردیم)

$$\begin{aligned}
&\leq \left|x'(s_r)-x'(\sigma_r)\right|+\left|y'(s_r)-y'(\tau_r)\right|(t_r-t_{r-1}) \\
&< (\varepsilon/2(b-a)+\varepsilon/2(b-a))(t_r-t_{r-1}) \\
&= \varepsilon(t_r-t_{r-1})/(b-a)
\end{aligned}$$

حاصل آن که

$$\left|S(P,\phi)-L(\pi) \leq \sum_{r=1}^{n}\left|\left|\gamma'(s_r)\right|(t_r-t_{r-1})-\left|\gamma(t_r)-\gamma(t_{r-1})\right|\right|\right.$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{r=1}^{n}\frac{\varepsilon}{(b-a)}(t_t-t_{r-1}) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

بدان گونه که می خواستیم

اکنون آماده ایم برای

برهان قضیهٔ ۶-۵ . طبق تعریف $L=\int_a^b \phi(t)dt$ که در آن $\phi=|\gamma'|$ ، یک افراز P_ε وجود دارد به طوری که به ازاء هر افراز دلخواه P که ظریفتر از P_ε است .

$$|S(p,\phi)-L|<\varepsilon \tag{۳}$$

حال با افزودن نقاط تقسیم بیشتر به P_ε (آنقدر که لازم باشد) افراز ظریفتر چون Q_ε که طول هر زیر بازهٔ آن از δ کوچکتر باشد به دست می آوریم، آنگاه در مورد افراز P که ظریفتر از Q_ε است، با کمک لم ۶-۶ می توان نوشت

$$|S(P,\phi)-L(\pi)|<\varepsilon \tag{۴}$$

از مقایسهٔ این رابطه با (۱) حاصل می شود :

$$L-2\varepsilon<L(\pi)<L+2\varepsilon \tag{۵}$$

پس به ازاء هر k مثبت یک چند ضلعی تقریب زنندهٔ π می توان یافت به قسمی که

$$L - k < L(\pi) \qquad (۶)$$

اگر افراز دلخواهی مانند Q از $[a,b]$ با چند ضلعی تقریب زنندهٔ k در دست باشد، افزودن راس های اضافی به K نقطه طول آن را افزایش می دهد؛ چنانچه P از Q ظریفتر باشد، مطابق آنچه گفتیم داریم $L(k) \le L(\pi)$. افراز P را ظریفتر از Q_ε اختیار می کنیم تا (۵) برقرار باشد، در این صورت

$$L(K) \le L(\pi) < L + ۲\varepsilon$$

و بنابراین

$$L(K) < L + ۲\varepsilon$$

امّا ε عدد مثبت دلخواهی است، پس برای هر چند ضلعی تقریب زنندهٔ k داریم:

$$L(K) \le L \qquad (۷)$$

نامساویهای (۶) و (۷) نشان می دهند که L سوپرمم طولهای چند ضلعی های تقریب زننده است، و به این ترتیب برهان کامل می شود.

مثال ۱ . مسیر استاندارد به صورت خط راست $\gamma = [z_۱, z_۲]$

$$\gamma(t) = z_۱(۱ - t) + z_۲ t \qquad (۰ \le t \le ۱)$$

به طول

$$L(\gamma) = \int_۰^۱ |\gamma'(t)| dt = \int_۰^۱ |z_۲ - z_۱| dt = |z_۲ - z_۱|$$

است و این همان است که انتظار می رفت.

مثال ۲ . دایرهٔ

$$S(t) = z_۰ + re^{it} \quad (۰ \le t \le ۲\pi)$$

با مرکز z_0 ، شعاع $r > 0$ ، به طول

$$L(S) = \int_0^{2\pi} \left|re^{it}\right| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

است.

۴ . انتگرال گیری مسیری

در این مرحله بعضی از خوانندگان سه بخش قبلی را خوانده و بعضی نخوانده اند. برای آنها که نخوانده اند مسیر $\gamma : [a,b] \to C$ را یک مسیر *هموار* تعریف می کنیم به شرط آنکه γ' وجود داشته باشد و در بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد. انتگرال تابع پیوستهٔ $f : D \to C$ در طول مسیر هموار γ در دامنهٔ D چنین تعریف می شود:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

نیز طول γ چنین تعریف می شود:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

(توجه کنید که انتگرانهای $f(\gamma(t))\gamma'(t), |\gamma'(t)|$ هر دو پیوسته اند. دومی حقیقی است؛ اولّی را می توان به صورت قسمتهای حقیقی و موهومی $U(t) + iV(t)$ نوشت و $\int_\gamma f$ با استفاده از دو انتگرال حقیقی محاسبه می شود:

$$\int_\gamma f = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

چون همهٔ انتگرالهایی که در کار هستند پیوسته اند، پس انتگرالهای حقیقی مورد نظر همگی وجود دارند.)

اکنون برای همهٔ خوانندگان به تعمیم همین انتگرالها بر مسیرهای متشکل

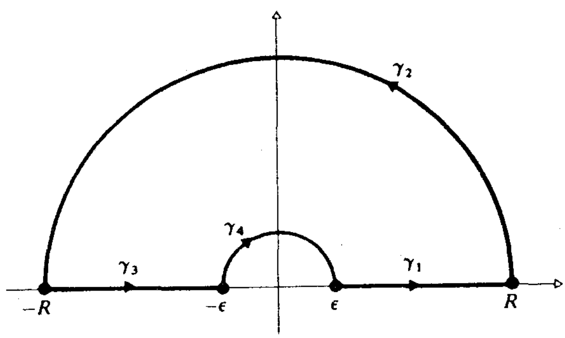
از تعدادی متناهی از قطعات هموار می پردازیم.

با به کار گرفتن علامت گذاری ۴-۲، یک *کانتور* (تراز) را چنین تعریف می کنیم:

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$$

که در آن $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ مسیرهای هموار هستند به صورتی که نقطهٔ پایانی γ_r به نقطهٔ آغازی γ_{r+1} منطبق است و $r = 1, \ldots, n-1$.

مثال: اگر $\gamma_1(t) = t(\varepsilon \le t \le R)$ ، $\gamma_2(t) = \cos t + i \sin t(0 \le t \le \pi)$ ، $\gamma_3(t) = t + (-R \le t \le -\varepsilon)$ ، $\gamma_4(t) = -\cos t + i \sin t(0 \le t \le \pi)$ ، آنگاه $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ همان کانتور (بسته) در شکل ۶-۶ است.



شکل ۶-۶

با در دست داشتن تابع پیوستهٔ $f : D \to C$ و یک کانتور $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ در دامنهٔ D، تعریف می کنیم:

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \ldots + \int_{\gamma_n} f,$$

و

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_n)$$

واضح است که اگر مسیر هموار σ به صورت $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ تقسیم بندی شود، خواهیم داشت :

$$\int_\sigma f = \int_{\sigma_1} f + \int_{\sigma_2} f,$$

و بنابراین تقسیم بندی بیشتر کانتورهای $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ در تعریفهای فوق در مقدار انتگرالها تاثیری ندارد. بنابراین انتگرالهای کانتور خوش تعریف هستند.

مشابه حالت حقیقی خواص استاندارد زیر برقرارند :

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \tag{۸}$$

$$\int_\gamma (f_1 + f_2) = \int_{\gamma_1} f_1 + \int_\gamma f_2 \tag{۹}$$

$$\int_\gamma cf = c\int_\gamma f \quad (\text{به ازاء } c \in C) \tag{۱۰}$$

شماره (۸) به سادگی از تعریفها نتیجه می شود. استدلالهای مربوط به (۹) و (۱۰) بستگی دارد به اینکه خواننده بخشهای ۳-۱ را خوانده باشد یا نه. از بخش ۲ داریم :

$$S(P, f_1 + f_2, \gamma) = S(P, f_1, \gamma) + S(P, f_2, \gamma),$$
$$S(P, cf, \gamma) = cS(P, f, \gamma)$$

هر چه باشد افراز P، که با کمک آنها (۹) و (۱۰) به آسانی نتیجه می شوند.

خواننده ای که بخش مذکور را نادیده بگیرد می تواند استدلال خود را بر مبنای خواص شناخته شده ای از آنالیز حقیقی به ترتیب زیر قرار دهد. بدواً توجه کنید که کافی است روابط فوق را در مورد یک مسیر هموار ثابت کنیم. در مورد فرمول (۹) می توان نوشت :

$$\int_\gamma (f_1 + f_2) = \int_a^b \big(f_1(\gamma(t)) + f_2(\gamma(t))\big)\gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_a^b f_2(\gamma)\gamma'(t)dt$$

(جمع پذیری انتگرالهای حقیقی را در مورد قسمتهای حقیقی و موهومی به کار گرفته ایم) بنابراین

$$\int_\gamma (f_1 + f_2) = \int_\gamma f_1 + \int_\gamma f_2$$

اثبات فرمول (۱۰) قدری طولانی تر است (به جریمهٔ خواندن جسته گریختهٔ بخشهای ۳-۱) فرض کنیم $c = \alpha + i\beta$ ، $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U(t) + iV(t)$ ، آنگاه

$$\int_a^b (\alpha + i\beta)(U(t) + iV(t))dt$$

$$= \int_a^b \left([\alpha U(t) - \beta V(t)] + i[\alpha V(t) + \beta U(t)]\right)dt$$

$$= \int_a^b \left([\alpha U(t) - \beta V(t)]dt + i\int_a^b [\alpha V(t) + \beta U(t)]\right)dt$$

$$= \alpha\int_a^b U(t)dt - \beta\int_a^b V(t)dt + i\alpha\int_a^b V(t)dt + i\beta\int_a^b U(t)dt$$

(با به کار گرفتن خاصیت متناظر در انتگرالهای حقیقی)

$$= (\alpha + i\beta)\int_a^b (U(t) + iV(t))dt,$$

که مطلوب ما بود.

در پایان به این نکته توجه کنید که اگر $\gamma : [a,b] \to D$ یک کانتور باشد، آنگاه مسیر مخالف $-\gamma : [a,b] \to D$ ، که چنین تعریف می شود:

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t) \quad (a \le t \le b),$$

نیز یک کانتور است. می پردازیم به محاسبهٔ انتگرال f در طول $-\gamma$ ،

$$\int_{-\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\frac{d}{dt}\gamma(a+b-t)dt$$
$$= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt$$

این رابطه با قرار دادن $s = a+b-t$ چنین می شود:

$$-\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)(-ds)$$
$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds$$
$$= -\int_\gamma f$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$$

۵ . قضیه اساسی انتگرال مسیری

برای محاسبهٔ انتگرالهای مختلط فقط در بعضی موارد آنها را به قسمتهای حقیقی و موهومی تفکیک می کنیم و مانند بخش اخیر به محاسبهٔ دو انتگرال حاصل شده می پردازیم. انجام چنین کاری بعضاً لازم است، امّا روشی بسیار کارآمدتر برای محاسبه $\int_\gamma f$ وجود دارد به شرط آنکه بتوانیم یک ضد مشتق f از $f : D \to C$ به دست آوریم، که منظور ما از F تابع $F : D \to C$ است به قسمی که $F' = f$ شود. ضد مشتق، در صورتی که وجود داشته باشد، منحصر به فرد است و فقط اختلاف در افزودن یک مقدار ثابت است، زیرا اگر در دامنه ای چون D، $F' = G' = f$ ، آنگاه $(F-G)' = F' - G' = 0$ و بنابراین F-G، طبق قضیهٔ ۴-۷، مقداری است ثابت. چنانچه بتوان یک ضد مشتق را پیدا کرد، انتگرال مورد نظر بی درنگ با به کار گرفتن قضیهٔ زیر محاسبه می شود:

قضیهٔ ۶-۷. *(قضیهٔ اساسی انتگرال گیری کانتور)*

اگر $f : D \to C$ پیوسته، $F : D \to C$ در $F' = f$ صدق کند و γ یک کانتور در D از z_0 تا z_1 باشد، آنگاه

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0)$$

برهان . اگر $w(t) = u(t) + iv(t)$ ، $w(t) = U(t) + iV(t)$ ، $a \le t \le b$ ، و

$W' = w$ ، آنگاه $U' = u$ ، $V' = v$ و

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

$$= U(b) - U(a) + iV(b) - iV(a)$$

$$= W(b) - W(a)$$

چون داریم $F' = f$ ، اگر فرض کنیم $w(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ، آنگاه

$$w(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = W'(t)$$

که $w(t) = F(\gamma(t))$. نتیجه این که

$$\int_\gamma f = \int_a^b w(t)dt = W(b) - W(a)$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$= F(z_2) - F(z_1)$$

که چنین انتظار می رفت .

مثال ۱ . اگر $f(z) = z^2$ و γ کانتور دلخواهی از $z_0 = 0$ تا $z_1 = 1 + i$ ، آنگاه $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ یک ضد مشتق برای f است و

$$\int_\gamma z^2 dz = \frac{1}{3}z_1^3 - \frac{1}{3}z_0^3$$

$$= \frac{1}{3}(1+i)^3$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3i}$$

واضح است که محاسبهٔ این مثال آسانتر از مثالی است که در انتهای بخش ۲ برای کانتور بخصوص

$$\gamma(t) = t^{۲} + it(۰ \le t \le ۱)$$

انجام شد.

اما، رضایت خاطری که از این پدیده به ما دست می دهد باید منطبق با واقعیت باشد، منظور این است که بر خلاف حالت حقیقی که در آن هر تابع پیوسته همواره یک ضد مشتق دارد (لم(الف)۶- ۲) ، در حالت مختلط توابعی وجود دارند که هر چه باشند برای آنها ضد مشتق وجود ندارد.

در آینده (فصل ۱۰) ثابت خواهیم کرد که اگر تابعی در دامنه ای یک بار مشتق پذیر باشد به دفعات نامتناهی مشتق پذیر خواهد بود. با دانسته فرض کردن این موضوع، ملاحظه می شود که یک ضد مشتق مثل F، با یک بار مشتق پذیر بودن باید برای *بار* دوم مشتق پذیر باشد. یعنی مشتق آن $F' = f$ هم باید مشق پذیر باشد. پس اگر تابع مشتق ناپذیری چون f داشته باشیم. جستجوی ضد مشتق برای آن بیهوده است، زیرا چنین چیزی وجود ندارد.

مثال ۲. تابع $f(z) = |z|^{۲}$ فقط در مبداء مشتق پذیر است، پس جستجوی ضد مشتق برای محاسبهٔ $\int_\gamma |z|^{۲} dz$ در طول $\gamma(t) = t^{۲} + it$, $(۰ < t < ۱)$ ، بی فایده است.

در این حالت به همان فرمول اساسی بر می گردیم

$$\int_\gamma |z|^{۲} dz = \int_{۰}^{۱} (t^{۴} + t^{۲})(۲t + i)dt$$

$$= \int_{۰}^{۱} (۲t^{۵} + t^{۳})dt + i\int_{۰}^{۱} (t^{۴} + t^{۲})dt$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}t^{۶} + \frac{۱}{۲}t^{۴}\right]_{۰}^{۱} + i\left[\frac{۱}{۵}t^{۵} + \frac{۱}{۳}t^{۳}\right]_{۰}^{۱}$$

$$= \frac{۵}{۶} + \frac{۸}{۱۵}i$$

خوشبختانه، بسیارند تابعهایی که دارای ضد مشتق هستند. مثلاً یک بسجملهٔ $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ به طور وضوح دارای ضد مشتق

$$P(z) = a_0 z + \frac{1}{2} a_1 z^2 + \dots + a_n z^n /(n+1)$$

است. کلی تر آنکه، هر سری توانی همه جا در درون قرص همگرائیش یک ضد مشتق دارد.

قضیهٔ ۶-۸ . اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ برای $|z - z_0| < R$ همگرا باشد، آنگاه

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

نیز برای $|z - z_0| < R$ همگرا است و $F' = f$.

برهان. کافی است ثابت کنیم که $F(x)$ برای $|z - z_0| < R$ همگرا است، زیرا در این صورت می توانیم از آن جمله به جمله مشتق بگیریم (قضیهٔ ۴-۱۲) تا حاصل شود $F' = f$.

(طبق لِم ۳-۷) سری توانی $\sum a_n (z - z_0)^n$ برای $|z - z_0| < R$ همگرای مطلق است و

$$\left| a_n (z - z_0)^{n+1} /(n+1) \right| / \left| a_n (z - z_0)^n \right| = |z - z_0| /(n+1)$$

به صفر میل خواهد کرد هنگامی که $n \to \infty$ ، پس بنابر آزمون مقایسه، $\sum a_n (z - z_0)^{n+1} /(n+1)$ همگرا است اگر $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ دارای قرص همگرایی D باشد، آنگاه به ازاء هر کانتور دلخواه γ در D از z_1 تا z_2 ،

$$\int_\gamma f = \sum a_n (z_2 - z_0)^{n+1} /(n+1) - \sum a_n (z_1 - z_0)^{n+1} /(n+1)$$

به خصوص، به ازاء هر کانتور دلخواه γ از z_0 تا z در D

$$\int_\gamma f = \sum a_n (z - z_0)^{n+1}/(n+1)$$

می شود.

۶. لِم برآورد

بعضی از نتایج در ریاضی، در خدمت این نظریه هستند؛ به این معنی که به خودی خود از اهمیت ذاتی کمی برخوردارند، حتی شاید کمی هم مبهم باشند، اما در عین حال در همهٔ اوقات در تصمیم های مهم کاملاً مؤثرند. «همیشه همراه عروس، اما نه خود عروس» اینجا به صورت «همیشه یک لم، نه یک قضیه» در می آید. هدف ما هم این است که هم اکنون چنین نتیجه ای را تحت عنوان یک لم به اثبات برسانیم. نظریه ای است ساده، به این معنی که یک کران به بالا برای اندازهٔ انتگرال $\left|\int_\gamma f\right|$ بر حسب یک کران بالای $|f|$ و طول γ به دست می دهد، اما این لِم بارها در این نظریه مطرح می شود و در نقاط بحرانی مربوط به استدلال قضیه های مهم تاثیری ظریف و بی سر و صدا دارد. اگر یک قضیه با پیکرهٔ عظیم به حساب نیاید، مطمئناً ارزش یک نام را دارد. این نامی است که بر آن می نهیم.

لم برآورد (لم ۶-۱۰). اگر $f : D \to C$ پیوسته، γ یک کانتور در D به طول L و $|f(z)| \le M$ به ازاء هر z واقع بر γ، آنگاه

$$\left|\int_\gamma f\right| \le M L$$

برهان. بسته به آنکه خواننده بخشهای ۳-۱ را خوانده باشد یا نه بهتر است که دو نوع استدلال ارائه دهیم. نوع A طبیعی تر است، امّا آگاهی از بخشهای ۳-۲ را لازم دارد. برای خوانندگانی که راه میان بر زده اند، نوع B را تدارك دیده ایم.

نوع A. کافی است حکم را در مورد یک مسیر هموار $\gamma : [a,b] \to D$ ثابت شود. فرض کنیم که P همان افراز

$a = t_0 < t_1 < \dots, t_n = b$ با شرط $t_{r-1} \le s_r \le t_r$ باشد. آنگاه

$$
\begin{aligned}
|S(P,f,\gamma)| &= \left| \sum_{r=1}^{n} f(\gamma(s_r))(\gamma(t_r)-\gamma(t_{r-1})) \right| \\
&\le \sum_{r=1}^{n} |f(\gamma(s_r))||\gamma(t_r)-\gamma(t_{r-1})| \\
&\le ML(\pi)
\end{aligned}
$$

که در آن π چند ضلعی برآورده کنندهٔ (تقریب زنندهٔ) γ با راسهای $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ است. امّا $L(\pi) \le L(\gamma)$ ، بنابراین به ازاء هر افراز P

$$
S(P,f,\gamma) \le ML(\gamma) \qquad (۱۱)
$$

با معلوم بودن $\varepsilon > 0$ ، می توانیم افراز P_ε را چنان بیابیم که

$$
\left| S(P_\varepsilon, f, \gamma) - \int_\gamma f \right| < \varepsilon
$$

بنابراین

$$
\left| \int_\gamma f \right| < |S(P_\varepsilon, f, \gamma)| + \varepsilon
$$

اکنون از (۱۱) نتیجه می شود که به ازاء هر ε مثبت

$$
\left| \int_\gamma f \right| < ML(\gamma) + \varepsilon
$$

پس

$$
\left| \int_\gamma f \right| \le ML(\gamma)
$$

نوع B . ابتدا ثابت می کنیم :

$$
\left| \int_a^b (u(t) + iv(t))dt \right| \le \int_a^b |u(t) + iv(t)|dt \qquad (۱۲)
$$

به شرط آنکه v,u تابعهای حقیقی پیوسته باشند.

فرض می کنیم $\int_a^b u(t)dt = X$ ، $\int_a^b v(t)dt = Y$. آنگاه

$$\int_a^b (u(t)+iv(t))dt = X+iY$$

و

$$X^2+Y^2 = (x-iy)(x+iy) = \int_a^b (x-iy)(u(t)+iv(t))dt$$
$$= \int_a^b [Xu(t)+Yv(t)]dt + i\int_a^b [Xv(t)-Yu(t)]dt$$

امّا $X^2+Y^2 \in R$ و به همین دلیل

$$\int_a^b [Xv(t)-Yu(t)]dt = 0$$

می شود و بنابراین

$$X^2+Y^2 = \int_a^b [Xu(t)-Yv(t)]dt$$

که در آن انتگرال $Xu(t)-Yv(t)$ همان قسمت حقیقی $(x-iy)(u(t)+iv(t))$ است. پس

$$Xu(t)-Yv(t) \le \left|(X-iY)(u(t)+iv(t))\right|$$

$$= \sqrt{(X^2+Y^2)}|u(t)+iv(t)|$$

از آنالیز حقیقی داریم:

$$\int_a^b [Xu(t)-Yv(t)]dt \le \int_a^b \sqrt{(X^2+Y^2)}|u(t)+iv(t)|dt$$

که از آن نتیجه می شود:

$$X^2+Y^2 \le \sqrt{(X^2+Y^2)}\int_a^b |u(t)+iv(t)|dt$$

و از این هم نتیجه می شود:

$$\sqrt{(X^{۲}+Y^{۲})} \le \int_a^b |u(t)+iv(t)|dt \qquad (۱۳)$$

اما

$$\sqrt{(X^{۲}+Y^{۲})} = |X+iY| = \left|\int_a^b (u(t)+iv(t))dt\right|$$

که، همراه با (۱۳)، رابطهٔ (۱۲) را به دست می دهد، که مطلوب ما بودن.
بنابراین داریم:

$$\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t)\gamma'(t)dt)\right|$$

$$\le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \qquad \text{(طبق (۱۲))}$$

$$\le \int_a^b M|\gamma'(t)|dt \qquad \text{(بنابر آنالیز حقیقی)}$$

$$= M\,L,$$

و برهان تمام است.

این نتیجه به گونه های مختلف به کار می رود. مثلاً فرض می کنیم که γ یک کانتور ثابت باشد اما f تغییر کند. حال اگر مقدار بیشینه $|f|$ روی γ به صفر میل کند، آنگاه $\left|\int_\gamma f\right| \le M\,L$ به صفر میل می کند. هنگامی که f به صفر میل کند ملاحظه می کنیم که $\int_\gamma f \to ۰$. کلی تر آنکه، اگر $f \to f_۰$، آنگاه $f - f_۰ \to ۰$، پس $\int_\gamma (f-f_۰) \to ۰$ و $\int_\gamma f \to \int_\gamma f_۰$.

از طرف دیگر، اگر $|f|$ کراندار بماند و طول γ به صفر میل کند، در این صورت $\int_\gamma f \to ۰$. بخصوص اگر f در $z_۰$ پیوسته باشد، در این صورت $|f|$ در یک همسایگی $z_۰$ پیوسته است. از این قرار، اگر کانتور γ به $z_۰$ مچاله شود طوری که طول γ به صفر میل کند، آنگاه $\int_\gamma f \to ۰$.

۷. نتایج قضیهٔ اساسی

در حالتی که در دامنهٔ D تابع f پیوسته و دارای یک ضد مشتق F باشد، در

بخش ۵ دیدیم که، به ازاء هر کانتور دلخواه در D از z_0 تا z_1،

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0)$$

این رابطه نتایج جالبی دارد. مثلاً اگر γ یک کانتور بسته باشد، آنگاه $z_0 = z_1$ و بنابراین $\int_\gamma f = 0$. از سوی دیگر، اگر برای z_0 و z_1 در D حالت خاصی قائل نشویم، اهمیتی نخواهد داشت که برای رسیدن از z_0 به z_1 کدام کانتور را به کار می گیریم: انتگرال به همان صورت باقی خواهد ماند. این خواص وجود یک ضد مشتق را هم مشخص می کنند:

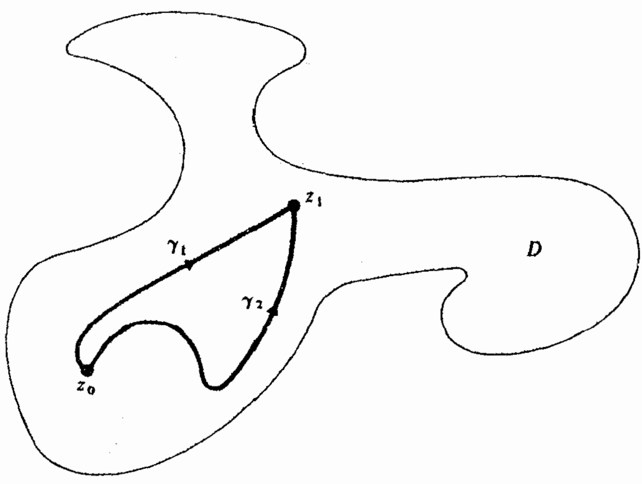
قضیهٔ ۶-۱۱. فرض کنیم که f یک تابع پیوسته تعریف شده بر دامنهٔ D باشد. در این حال شرایط زیر معادلند:

(الف) f یک ضد مشتق F دارد.

(ب) به ازاء هر کانتور بستهٔ γ در D، $\int_\gamma f = 0$

(ج) $\int_\gamma f$ فقط به نقاط پایانی γ بستگی دارد، که کانتور دلخواهی است در D.

برهان. قبلاً ثابت کرده ایم که از (الف) هم (ب) نتیجه می شود و هم (ج). برای اینکه نشان دهیم از شرط (ب) شرط (ج) نتیجه می شود، فرض می کنیم که γ_1 و γ_2 دو کانتور دلخواه در D از z_0 به z_1 باشند. (شکل ۶-۷)



(شکل ۶-۷)

در این حال $\gamma_1 - \gamma_2$ یک کانتور بسته است، پس از (ب) نتیجه می شود $\int_{\gamma_1-\gamma_2} f = 0$. اما

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

بنابراین

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

و این همان (ج) است.

بالاخره، برای اینکه ثابت کنیم که (ج) مستلزم (الف) است، z_0 را در D ثابت نگه داشته و به ازاء هر z دلخواه در D یک کانتور در D از z_0 به z_1 انتخاب کرده و تعریف می کنیم:

$$F(z_1) = \int_{\gamma} f$$

چون D باز است به ازاء یک $\varepsilon_1 > 0$ ، اگر $|h| < \varepsilon_1$ آنگاه قطعه خط $\lambda(t) = z_1 + h(t), (0 \leq t \leq 1)$ ، در D قرار دارد و

$$F(z_1 + h) = \int_{\gamma} f + \int_{\lambda} f$$

می شود از این قرار

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\lambda} f$$

می گردد. امّا می دانیم که به ازاء هر ثابت دلخواه c و کانتور γ از z_1 به z_2 ،

$$\int_{\gamma} c\,dz = c(z_2 - z_1),$$

بنابراین

$$\int_{\lambda} \left(f(z_1)/h\right) dz = f(z_1)$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_{\lambda} \frac{f(z) - f(z_1)}{h} dz$$

اکنون لم برآورد را به کار می گیریم. چون f پیوسته است، می دانیم که با شرط $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود دارد (که می توانیم آن را کوچکتر از ε_1 بگیریم) به قسمی که

از $|z - z_0| < \delta$ نتیجه می شود $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ،

آنچنان که، وقتی $|h| < \delta$ ، به ازاء هر z واقع بر قطعه خط λ انتگرال مورد نظر در شرط زیر صدق می کند:

$$\left|(f(z) - f(z_1)/h)\varepsilon/|h|\right|$$

طول λ برابر $|h|$ است، پس، هر زمان که $|h| < \delta$ ،

$$\left|\int_\lambda \frac{f(z) - f(z_1)}{h}dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{|h|}|h|,$$

که از آن نتیجه می شود:

$$\left|\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \leq \varepsilon \ \ (|h| \leq \delta)\right|$$

امّا ε دلخواه است، بنابراین

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} = f(z_1)$$

و به ازاء $z_1 \in D$ داریم $F'(z_1) = f(z_1)$ ، همان گونه که می خواستیم.

مثال. $f(z) = |z|$ مشتق پذیر نیست، پس $\int_\gamma f$ بستگی به انتخاب کانتور γ دارد که بین نقاط انتخاب می شود. مثلاً γ را با

$$\gamma(t) = it(0 \leq t \leq 1)$$

و σ از ۰ تا i را با

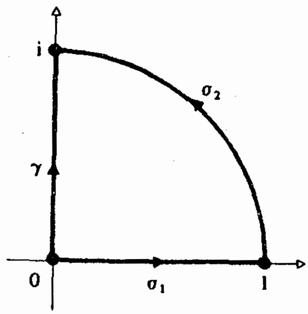
$$\sigma = \sigma_۱ + \sigma_۲$$

طوری که

$$\sigma_۱(t) = t(۰ \le t \le ۱)$$

$$\sigma_۲(t) = e^{it}(۰ \le t \le \frac{۱}{۲}\pi)$$

شود مشخص می کنیم (شکل ۶-۸) آنگاه



شکل ۶-۸

$$\int_\gamma |z|dz = \int_۰^۱ |it|.\ idt$$

$$= \left[it^۲/۲\right]_۰^۱$$

$$= \frac{۱}{۲}i,$$

امّا

$$\int_\sigma |z|dz = \int_۰^۱ |t|.\ ۱dt + \int_۰^{\pi/۲} |e^{it}|.(ie^{it})dt$$

$$= \left[t^۲/۲\right]_۰^۱ + \left[e^{it}\right]_۰^{\pi/۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} + i - ۱$$

$$= i - \frac{۱}{۲}$$

اگر چه تابعهای مختلطی که صرفاً پیوسته هستند و از آنها می توان به کمک فرمول اصلی انتگرال گرفت، چندان جلب توجه نمی کنند، امّا از هم اکنون به بعد تابعهای مشتق‌پذیر، و روشهای انتگرال گیری از آنها، کار اصلی ما خواهد بود. نظریهٔ حاصل از انتگرالگیری، مشابهی طبیعی در حالت حقیقی ندارد، از آن جهت که روی خط حقیقی امکان انتخاب مسیر دلخواه بین نقاط وجود ندارد و در حالی که این انعطاف در انتخاب، در صفحهٔ مختلط میسر است.

با استثناء هایی جزیی، در این فصل مشابهت طبیعی بین نظریه های مشتق گیری و انتگرالگیری در حالت حقیقی و مختلط کامل می شود، و از این به بعد راه به سوی امکانات تازه گشوده خواهد شد.

تمرین های ۶

۱ . کانتورهای$\gamma = [\cdot, t]$ ، $\sigma = [\cdot,\text{۱}] + [\text{۱}, i]$ رارسم کنید. مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{\gamma} \operatorname{re} z dz, \int_{\sigma} \operatorname{re} z dz$$

۲ . کانتورهای $\gamma = [-i, i]$ و σ را در نظر می گیریم که در آن

$$\sigma(t) = e^{it} \quad (-\pi/\text{۲} \le t \le \pi/\text{۲})$$

مطلوب است محاسبه $\int_{\sigma} |z| dz, \int_{\gamma} |z| dz$.

۳ . مطلوب است محاسبهٔ $\int_{\gamma} z^{\text{۴}} dz$ که در آن

$$\gamma(t) = (\text{۱} + i)t (\cdot \le t \le \text{۱})$$

با به کار گرفتن فرمول

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\cdot}^{\text{۱}} f(\gamma(t) \gamma'(t)) dt,$$

عمل ضرب را در سمت راست روی انتگرال به طور کامل انجام دهید و بعد از قسمتهای حقیقی و مختلط انتگرال بگیرید. اگر$\gamma = [\cdot,\text{۱}] + [\text{۱}, \text{۱} + i]$ ، حاصل $\int_{\gamma} f(z) dz$ چه خواهد بود؟

۴ . فرض کنیم که n عدد مثبت دلخواهی باشد. اگر $\gamma(t) = z_{\cdot} + re^{it} (\cdot \le t \le \text{۲}n\pi)$ ، کانتورهای $\gamma, -\gamma$ را توصیف هندسی کنید. مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-\gamma} \text{۱}/(z - z_{\cdot}) dz \quad , \quad \int_{\gamma} 1/(z - z_{\cdot}) dz$$

۵. اگر $\gamma(t) = e^{it} (0 \le t \le \pi)$ ، مطلوب است محاسبهٔ $\int_\gamma f$ برای هر یک از تابع های زیر

(الف) $1/z^2$

(ب) $1/z$

(ج) $\cos z$

(د) $\sinh z$

(ه) $\tan z$

(و) $(\exp(z))^3$

۶. دو مسیر هموار $\gamma : [a,b] \to C$ ، $\sigma : [c,d] \to C$ داده شده اند، گوییم γ را می توان از σ با یک تعویض مشتق پذیر در پارامتر به دست آورد به شرط آنکه یک تابع مشتق پذیر $q : [a,b] \to [c,d]$ وجود داشته باشد به قسمی که $\gamma = \sigma q$. برای مقاصد این تعریف لزومی ندارد که معکوس داشته باشد. با توجه به این نکته معنی هندسی تعویض مشتق پذیر در پارامتر را شرح دهید.
نشان دهید که اگر σ دامنهٔ تابع پیوستهٔ f قرار گیرد آنگاه

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f$$

۷. ثابت کنید که طول $L(\gamma)$ از کانتور γ در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) $L(-\gamma) = L(\gamma)$

(ب) $L(\gamma + \sigma) = L(\gamma) + L(\sigma)$

۸. فرض کنیم که $\gamma(t) = z_0 + re^{it} (0 \le t \le \theta)$ کمان به مرکز z_0 ، شعاع $r > 0$ ، و با پارامتر θ باشد. ثابت کنید که

$$\theta = L(\gamma)/r,$$

که همان تعریف متعارف برای «اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان» است.
۹. نشان دهید که طول کمان سهمی به معادلهٔ

$\gamma(t) = at^{2} + 2ait(0 \le t \le 1)$ عبارت است از :

$$a(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$$

۱۰ . فرض کنیم $\sigma : [-2,2] \to C$ کانتور دلخواهی باشد . نیز $q : [-2,2] \to [-2,2]$ با ضابطهٔ $q(t) = t^{3} - 3t$ داده شود و $\gamma = \sigma q$ ترکیب σ, q باشد . نشان دهید که $\int_{\sigma} f = \int_{\gamma} f$ که در آن f تابع پیوستهٔ دلخواهی است و σ در دامنهٔ آن قرار دارد، اما $L(\gamma) = 3L(\sigma)$. معنی هندسی این نتیجه را شرح دهید .

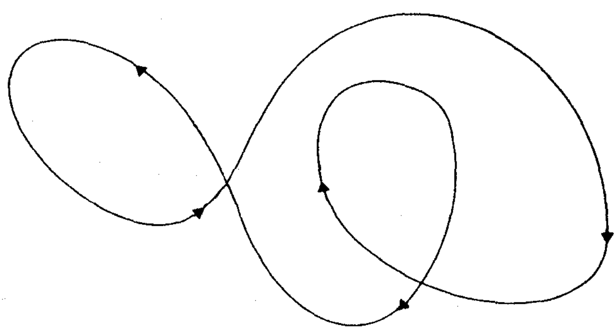
۱۱ . اگر γ به وسیله یک تعویض مشتق‌پذیر در پارامتر از σ به دست آید (به صورتی که در تمرین ۶ تعریف کرده‌ایم)، شرایط کلی برای q چه خواهد بود تا از آن رابطهٔ $L(\gamma) = L(\sigma)$ شود . برای جواب خود دلیل بیاورید .

۱۲ . اگر γ یک کانتور بسته در C باشد، *مساحت علامت داری* که به وسیلهٔ γ محصور شده باشد چنین تعریف می شود :

$$S = \frac{1}{2i}\int_{\gamma} \bar{z}\,dz$$

با نوشتن این انتگرال به صورت صریح

$\int_{a}^{b}(u - iv)(u' + iv')dt$ ، یا به صورتی دیگر، ثابت کنید S حقیقی است . ثابت کنید که مقدار S در مورد کانتورهای دایره‌ای یا مثلثی برابر $\pm$ی همان مساحت متعارف است و هر دو علامت می تواند روی دهد . معنی هندسی این علامت چیست؟ مساحت علامت دار در مورد کانتوری مثل شکل ۶-۹ ارائه دهندهٔ چه چیز است؟



شکل ۶-۹

۱۳ . ثابت کنید که مساحت علامت دار مذکور در تمرین ۱۲ را به صورتهای زیر می توان ارائه داد:

(الف) $$S = -\int_\gamma \operatorname{im} z dz$$

(ب) $$S = \frac{1}{i}\int_\gamma \operatorname{re} z dz$$

مقدار انتگرال $\int_\gamma \operatorname{im} z dz$ را در حالتی که γ مربع

$$\gamma = [0,1]+[1,1+i]+[1+i,i]+[i,0]$$

باشد حساب کنید.

۱۴ . **انتگرالگیری جزء به جزء**. فرض کنیم که f و g مشتقهای پیوسته ای در دامنهٔ D داشته باشند و γ کانتوری در D از z_1 تا z_2 باشد. ثابت کنید که

$$\int_\gamma fg' = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_\gamma f'g.$$

اگر $\gamma(t) = e^{it}(0 \le t \le \pi/2)$ ، مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $$\int_\gamma z\sin z dz$$

(ب) $$\int_\gamma z\cos z dz$$

(ج) $$\int_\gamma ze^{it} dz$$

(د) $$\int_\gamma z^2 \sin z dz$$

۱۵ . فرض کنیم $C_r(t) = z_0 + re^{it}(0 \le t \le 2\pi)$ دایرهٔ به مرکز z_0 ، و شعاع $r > 0$ باشد. اگر f در دامنهٔ D پیوسته و $z_0 \in D$ ، لم برآورد را برای اثبات موارد زیر به کار نگیرید.

(الف) $$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = 0$$

(ب) $$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)/(z-z_0)dz = 2\pi i f(z_0)$$

۱۶ . در مورد هر یک از تابعهای $f : D \to C$ یا یک ضد مشتق $F : D \to C$ ارائه دهید یا تصریح کنید که ضد مشتق نمی تواند وجود داشته باشد.

(الف) $f(z) = z^{۲}, D = C,$

(ب) $f(z) = ۱/z^{۲}, D = C \setminus \{۰\},$

(ج) $f(z) = ۱/z \;, D = C \setminus \{۰\},$

(د) $f(z) = z\sin z, D = C,$

(ه) $f(z) = |z|^{۲}, D = C,$

(و) $f(z) = \bar{z}, D = C,$

فصل هفتم

زاویه ها، لگاریتم ها و عدد پیچش

اگر لگاریتم یک عدد مختلط را به عنوان نوعی از «معکوس» تابع توانی تعریف کنیم، با این واقعیت مواجه می شویم که تابع توانی دوسویی (بیژکسیون) نیست، پس به معنای تکنیکی دارای معکوس نیست. برخلاف حالت حقیقی، به منظور مقید کردن دامنه و هم دامنهٔ تابع توانی به طوری که بتوانیم آن را دوسویی کنیم، راهی که خیلی طبیعی بنماید، به نظر نمی رسد - گرچه راههایی کم و بیش ساختگی وجود دارد (مثل «صفحه بریدهٔ» $C\pi$ که در زیر به تعریف آن می پردازیم و در واقع مفید هم هستند.)

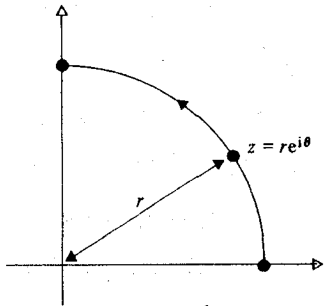
با اصطلاحات کلاسیک، لگاریتم باید «چه مقداری» باشد. این که متعدد بودن مقدارها چگونه به هم مربوط می شوند کاملا مشابه اندازه گیری یک زاویه با واحد رادیان است که نتیجه آن یک عدد حقیقی منحصر به فرد نمی شود، بلکه تعدادی نامتناهی از اعداد حاصل می شود که تفاوت آنها مضربهایی از 2π است.

در زیر به بحث دربارهٔ این نظریه ها می پردازیم و آنها را در مورد یکی از پایاهای توپولوژیک که عدد پیچش یک منحنی نسبت به یک نقطه نام گرفته است به کار می بریم. به طور خلاصه آنکه کل زاویه ای که به وسیلهٔ نقطه ای روی منحنی پیموده می شود هنگامی که به طور پیوسته از یک نقطه به نقطهٔ دیگر حرکت می کند اندازه گیری می شود: حاصل تقسیم آن بر 2π نشان می دهد که منحنی چند بار گرد نقطهٔ مورد بحث پیچیده است. این مفهوم در قسمتهای عمیق تر این نظریه، که در پی می آیند، بسیار مفید است.

۱ . اندازهٔ زاویه ها بر حسب رادیان

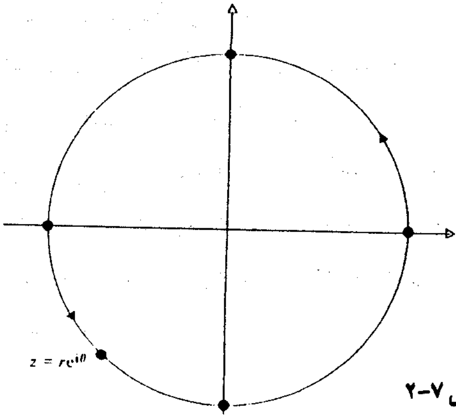
نخست تعریف «سری توانی» برای سینوس را با تعریف هندسی معمول آن مرتبط می سازیم، مشروط بر آنکه زاویهٔ مورد نظر با رادیان اندازه گیری شود.

فرض کنیم $0 \neq z \in C$ ، z را به صورت $z = re^{i\theta}$ ، $r > 0$ ، در مختصات قطبی می نویسیم. چون $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، از جدولی که در بخش ۵-۵ داریم نتیجه می شود که با ثابت ماندن r ، هنگامی که θ از ۰ تا $\pi/2$ افزایش می یابد، قسمت حقیقی z از r تا ۰ کاهش می یابد در حالی که قسمت موهومی از ۰ تا r افزایش می یابد. چون $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$ ، نتیجه می شود که، وقتی θ از ۰ تا $\pi/2$ تغییر کند، نقطهٔ z ربع اول از دایرهٔ به شعاع r را می پیماید. (شکل ۷-۱)



شکل ۷-۱

به طور مشابهی، هنگامی که θ از $\pi/2$ تا π تغییر می کند، نقطهٔ z ربع دوم از دایره را می پیماید؛ از π تا $3\pi/2$ ربع سوم، از $3\pi/2$ تا 2π ربع چهارم از دایره طی می شود: از این به بعد z به پیمودن مکرر دایره ادامه می دهد. (شکل ۷-۲)

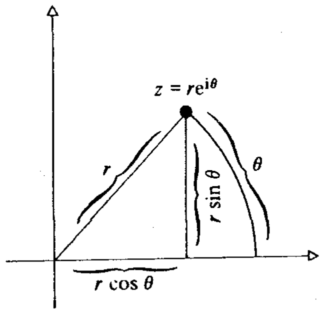


شکل ۷-۲

اکنون به محاسبهٔ طول کمان از ۱ تا z در طول دایره می پردازیم. به ازای $\theta \geq 0$ ، فرض می کنیم $\gamma(t) = 2e^{it}(0 \leq t \leq \theta)$. آنگاه γ کانتوری است که کمان مربوط به خود را می پیماید. طول γ از دستور

$$L(\gamma) = \int_0^\theta |\gamma'(t)|dt = \int_0^\theta |rie^{it}|dt = \int_0^\theta rdt = r\theta$$

بدین سان $\theta = L(\gamma)/r$ که همان تعریف استاندارد برای «زاویهٔ اندازه گیری شده با رادیان است». به این ترتیب از شکل ۷-۳ برمی آید که تعریفهای هندسی برای $\cos\theta, \sin\theta$ برای زاویه θ رادیانی با تعریف تحلیلی، به وسیلهٔ سریهای توانی سازگار است.



شکل ۷-۳

تناوبی بودن cos,sin ، که به اثبات رسیده است، نشان می دهد که سازگاری مذکور در فوق به زاویه های بزرگتر از 2π توسعه می یابد. همچنین به زاویه های منفی (که در طول دایره در جهت منفی اندازه گیری می شوند).

۲ . آرگومان یک عدد مختلط

اکنون با تفصیل بیشتری به بیان عدد مختلط z به صورت $re^{i\theta}$ می پردازیم. در این حال $r = |z|$ ، و بنابراین r منحصر به فرد است. اما برای θ مقادیر ممکنه به تعداد نامتناهی است، که تفاوت آنها فقط در مضرب صحیحی از 2π است.

یادآوری می کنیم که مقدار منحصر به فرد θ در $-\pi < \theta \leq \pi$ را *مقدار اصلی آرگومان* z می نامیم و آن را با «argz» نشان می دهیم که این، تابعی به صورت

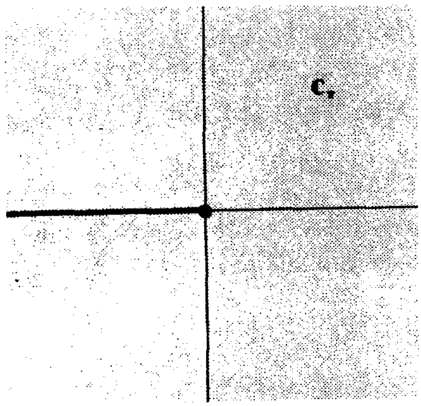
$$\arg : C \setminus \{0\} \to R$$

تعریف می کند، این تابع روی محور حقیقی منفی پیوسته نیست. همین دلیلی است بر این که θ باید به طور منحصر به فرد انتخاب شود: بالای محور مذکور θ به π نزدیک است و در زیر آن نزدیک به $-\pi$.

این مسأله را به کناری می نهیم و به تعریف صفحهٔ بریده (شکل ۷-۴)

$$C_\pi = C \setminus \{x + iy \in C \mid y = 0, x \leq 0\}$$

می پردازیم.



شکل ۷-۴

بدین سان arg در صفحهٔ بریده پیوسته است. چنین کاری از نظر هندسی موجه می نماید امّا استدلالی دقیق باید فراهم آید و یک شکل فنی نیز وجود دارد: رفتار بد تابعهای مثلثاتی معکوس. جانب احتیاط را رعایت می کنیم چند دامنهٔ متقاطع، که در هر یک از آنها رفتار به قدر کافی خوب است، در نظر می گیریم. برهانی که هم اکنون می آوریم تحویل عاری از لطافتی است از خواص توابع حقیقی: برای دستیابی به برهانی ظریفتر به بخش ۴-۸ مراجعه کنید.

فرض کنیم

$$D_1 = \{x+iy \in C | y > 0\}$$

$$D_2 = \{x+iy \in C | x > 0\}$$

$$D_3 = \{x+iy \in C | y < 0\}$$

آنگاه

$$C_\pi = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

و در هر یک از این سه دامنه راه ساده‌ای برای تعیین مقدار مطلوب argz پیدا می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$z = x+iy = re^{i\theta}$$

و می‌خواهیم معادله را برای یافتن r، θ حل کنیم، می‌بینیم که

$r^2 = x^2 + y^2$ ، و لذا $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$

و

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

از خواص cos,sin نتیجه می‌شود که در D_1 یک جواب منحصر به فرد برای θ وجود دارد طوری که $0 < \theta < \pi$ می‌شود. در این محدوده، cos اکیداً نزولی و پیوسته است؛ بنابراین یک تابع معکوس پیوسته دارد؛

$$\cos^{-1} : (-1,1) \rightarrow (0,\pi)$$

اکنون به ازای $z \in D_1$ داریم:

$$\arg z = \cos^{-1}(re(z)/|z|)$$

که چون ترکیبی است از توابع پیوسته، پس پیوسته است.

به طور مشابه در $D_۲$ داریم $-\pi/۲ < \theta < \pi/۲$. در این محدوده sin از ۱- تا ۱ افزایش می‌یابد، و بنابراین یک معکوس پیوسته دارد:

$$\sin^{-۱} : (-۱,۱) \to \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$$

بدین سان

$$\arg z = \sin^{-۱}(\operatorname{im}(z)/|z|)$$

در $D_۲$ پیوسته است.

بالاخره در $D_۳$ می‌توانیم

$$\cos^{-۱} : (-۱,۱) \to (-\pi,۰)$$

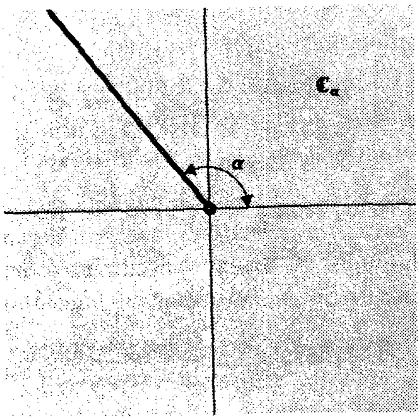
را به کار بگیریم. (این کسینوس معکوسی است متفاوت با آنچه در $D_۱$ به کار گرفته شد به دلیل آنکه اینجا معکوس cos را در بازهٔ دیگری به دست می‌آوریم، که باز هم arg پیوسته است.

چون arg در $D_۱$ ، $D_۲$ ، $D_۳$ پیوسته است پس در اجتماع آنها، یعنی همان C_π نیز، پیوسته است. گاهی مناسبت دارد که کلی‌تر عمل کنیم. فرض کنیم $\alpha \in R$ ، و R_α معرف شعاع

$$R_\alpha = \left\{re^{i\alpha} \in C \,|\, r \geq ۰\right\}$$

باشد. نیز فرض کنیم:

$$C_\alpha = C \setminus R_\alpha \quad \text{(شکل ۷-۵)}$$



شکل ۷-۵

و θ را به صورت

$$\theta = \arg_{\alpha} z (z \in C)$$

انتخاب می کنیم، مشروط بر آنکه

$$z = re^{i\theta}, r > ۰, \alpha - ۲\pi < \theta < \alpha$$

آنگاه، با روشی مشابه، می توانیم ثابت کنیم که $\arg_{\alpha}$ در C_{π} پیوسته است.

۳. لگاریتم مختلط

با این عنوان مسائل مشابهی مطرح می شود، زیرا تابع توانی یک به یک نیست.

ما می خواهیم $\log z$ را، به ازای $۰ \neq z \in C$ با ضابطهٔ

$w = \log z$ تعریف می کنیم مشروط بر آنکه $z = e^{w}$

فرض کنیم $z = re^{i\theta}$، $w = u + iv$، (اختلاط مختصات قطبی و کارتزین مسلم است!). نیز $r > ۰$، و $-\pi < ۰ \leq \pi$ فرض می کنیم طوری که $\theta = \arg z$.

بدین سان $z = e^{w}$ چنین می شود:

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} \qquad (۱)$$

با گرفتن مدول از دو طرف خواهیم داشت:

$$r = e^{u} \qquad (۲)$$

چون $r > ۰$ و $r, u \in R$، پس (۲) دارای جواب منحصر به فرد

$$u = \log r$$

است که در آن log همان لگاریتم طبیعی حقیقی است. آنگاه از (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$e^{i\theta} = e^{iv}$$

به طوری که

$$v = \theta + 2n\pi (n \in Z)$$

نتیجه این که

$$\log z = w = \log r + i(\theta + 2n\pi),$$

یا

$$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2n\pi) \qquad (3)$$

بدین سان لگاریتم مختلط «چند ارزشی» است و به معنای نظریهٔ مجموعه ها یک تابع نیست. برای به دست آوردن یک تابع اصیل (یک ارزشی) به تعریف *مقدار اصلی* لگاریتم مذکور به صورت،

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i \arg z \qquad (0 \neq z \in C)$$

(به «L» بزرگ برای مقدار اصلی توجه کنید.) این تابع روی محور حقیقی منفی نیست. با این وصف، به ازاء $z \in C_\pi$ قسمتهای حقیقی و موهومی Log به طور واضح پیوسته هستند. پس Log در صفحهٔ بریده پیوسته است.

اکنون می توانیم مشتق این لگاریتم را حساب کنیم. داریم:

$$D\mathrm{Log}z_0 = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{Log}z - \mathrm{Log}z_0}{z - z_0}$$

$$= \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}}$$

با قرار دادن $z = e^w$ ، $z_0 = e^{w_0}$ و به کار گرفتن پیوستگی exp ،

$$= 1/e^{w_0}$$

$$= 1/z_0$$

پس به طور کلی

$$D\mathrm{Log}z = 1/z \qquad (z \in C_\pi)$$

به همین طریق در صفحهٔ بریدهٔ C_α ، می توانیم تعریف کنیم :

$$\log_\alpha z = \mathrm{Log}|z| + i\arg_\alpha z$$

و این پیوسته است؛ با مشتق

$$D\log_\alpha z = ۱/z$$

هنگامی که لگاریتم تعریف شده باشد، توانهایی چون z^a را که در آن $z,a \in C$ ، می توان، در یک صفحهٔ بریده، تعریف کرد. *مقدار اصلی* z^a ، که در آن $z \neq ۰$ ، عبارت است از :

$$z^a = \exp(a \log z)$$

تمرینهای آتی به شماره های ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ به بررسی این تابع می پردازند. به منظور دستیابی به دیدگاهی فراگیرتر درباره z^a فصل ۱۴ را ببینید.

۴. عدد پیچشی

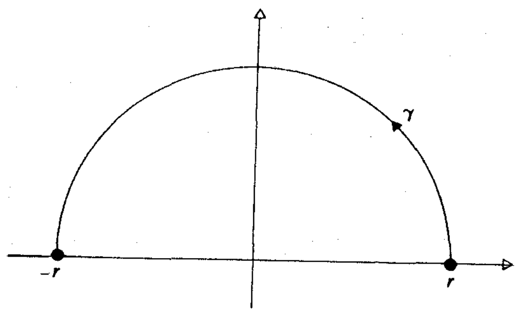
فرض کنیم $\gamma : [a,b] \to C \setminus \{۰\}$ یک مسیر بسته باشد. توجه کنید که هم دامنه طوری انتخاب شده است که این مسیر از مبداء نمی گذرد. اگر فرض کنیم که t (پارامتر)، معرف زمانی باشد که از a تا b افزایش می یابد، و آرگومان $\theta(t)$ از $\gamma(t)$ را چنان انتخاب کنیم که همراه با t به طور پیوسته تغییر کند، آنگاه هنگامی که $\gamma(t)$ به دور مسیر حرکت می کند، کل تغییر حاصل در آرگومان تعداد دفعاتی خواهد بود که γ به دور مرکز پیچیده است، ضربدر عدد ۲π . هدف ما این است که به این نظریه دقت و صراحت ببخشیم.

به این منظور، می پردازیم به تعریف *انتخاب پیوستهٔ آرگرمان* در طول مسیر $\gamma : [a,b] \to C \setminus \{۰\}$ (که به قصد عمومیت کامل، می خواهیم که دیگر یک مسیر بسته نباشد) و آن نگاشتی پیوسته چون $\theta : [a,b] \to R$ است طوری که هر چه باشد $t \in [a,b]$ شود.

$$e^{i\theta(t)} = \gamma(t)/|\gamma(t)| \qquad (۴)$$

شرط (۴) صرفاً بیان می کند که $\theta(t)$ یکی از مقادیر ممکنه برای آرگومان مربوط به $\gamma(t)$ است.

مثال ۱. فرض کنیم $\gamma(t) = re^{it} (\cdot \le t \le \pi)$، (شکل ۷–۶).
یک انتخاب پیوستهٔ آرگومان $\theta(t) = t$ است، زیرا در این حال $re^{it}|re^{it}| = e^{it} = e^{i\theta(t)}$ این تنها انتخاب ممکن نیست: $\theta(t) = t + ۲\pi$ درست همین کار را می کند؛ یا $\theta(t) = t + ۲n\pi$ به ازاء یک n ثابت.



شکل ۷–۶

آنچه *نمی توانید* انجام دهیم «عوض کردن اسب ها میان رودخانه» است، مثلاً $\theta(t)$ را به ازای $\cdot \le t \le \pi/۲$ می توان برابر t گرفت، ولی اگر به ازای $\pi/۲ < t \le \pi$، $\theta(t) = t + ۲\pi$ اختیار کنیم به ازاء این θ برابری (۴) برقرار است. امّا مسلم است که θ پیوسته نیست.

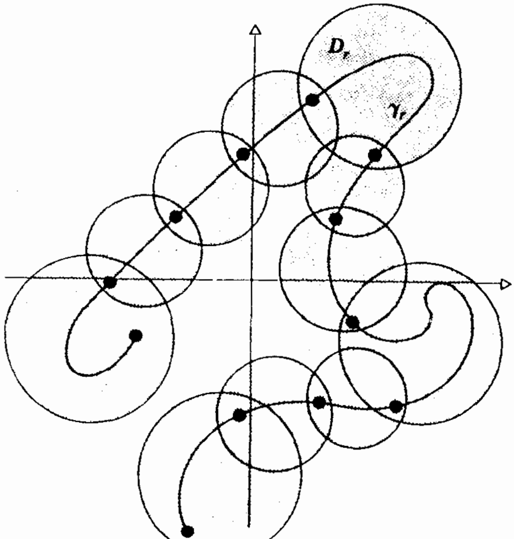
مشکلی که در انتخابهای پیوستهٔ آرگومان داریم (گرچه طولی نمی کشد که به آن خو می گیریم این است که برای انتخاب یک مقدار از آرگومان از یک دستورالعمل ساده، مثلاً فقط به کار گرفتن زاویه های بین $\cdot$، ۲π، پیروی نمی کند. چنین انتخابی، در صورت سرو کار داشتن با منحنی ای که نزدیک به یک دور در جهت عقربه های ساعت چرخیده باشد. *ناپیوسته* است، طوری که آرگومان به ۲π نزدیک می شود، و بعد سراسر محور حقیقی را در جهت عقربه های ساعت (مثل قبل) می پیماید، و پرشی در آرگومان به چیزی نزدیک به صفر را موجب می شود. در چنین حالتی است، که به قصد ابقای پیوستگی، لازم

است بپذیریم که آرگومان مقداری را که کمی بزرگتر از 2π باشد اختیار کند.

حاصل آنکه در نقطهٔ شروع a می‌توانیم آرگومان را یک مقدار دلخواه از میان مقادیر ممکنه بیشمار انتخاب کنیم، ولی این انتخاب موجب می‌شود که بقیهٔ آنچه که هست به طور منحصر به فرد تعیین شود - و لزومی هم ندارد که آنها را درون یک محدودهٔ از پیش تعیین شده بمانند، این به طور شهودی واضح است، امّا اثبات آن کمی حیله‌آمیز است: به این منظور *لمِ فرش کردن* به کار گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۷-۱. فرض کنیم $\gamma : [a,b] \to C \setminus \{0\}$ مسیری باشد که از مبداء نمی‌گذرد. آنگاه یک انتخاب پیوستهٔ آرگومان برای γ وجود دارد. هر انتخاب پیوستهٔ آرگومان دیگر اختلافش با این مضرب صحیحی است از 2π.

برهان. بنابر *لمِ فرش کردن* (لم ۲-۹) می‌توانیم γ را به مسیرهای جزیی بسیار، با تعداد متناهی، تقسیم بندی کنیم مثل $\gamma_r (r = 1,\dots,n)$ طوری که هر γ_r درون یک قرص D_r در $C \setminus \{0\}$ قرار گیرد. اگر مرکز D_r در $\rho_r e^{i\theta_r}$ باشد، آنگاه با اختیار $\alpha_r = \theta_r + \pi$، در می‌یابیم که $D_r \subseteq C_{\alpha_r}$، بنابراین $\arg_{\alpha_r}$ در D_r پیوسته است (شکل ۷-۷)



شکل ۷-۷

این یک انتخاب پیوستهٔ آرگومان در طول γ_r، به ازاء هر r است؛ ولی مسلم است که این انتخابها ممکن است با یکدیگر به طور پیوسته جفت نشوند. امّا هر انتخاب آرگومان را می توان از انتخاب دیگری با افزودن مضرب صحیح مناسبی از 2π به دست آورد. این $\arg_{\alpha_r}$ ها را با افزودن مضربهای مناسب $2n_r\pi$، به صورت زیر، می توانیم هماهنگ کنیم.

فرض کنیم γ_r در بازهٔ پارامتری $[t_{r-1}, t_r]$ معین باشد. عدد صحیحی چون n_2 وجود دارد به طوری که

$$\arg_{\alpha_1}(t_1) = \arg_{\alpha_2}(t_1) + 2n_2\pi$$

آنگاه یک عدد n_3 وجود دارد به طوری که

$$\arg_{\alpha_2}(t_2) + 2n_2\pi = \arg_{\alpha_3}(t_2) + 2n_3\pi$$

همین طور به استقراء معلوم می شود که n_{r+1} وجود دارد طوری که

$$\arg_{\alpha_r}(t_r) + 2n_r\pi = \arg_{\alpha_{r+1}}(t_r) + 2n_{r+1}\pi$$

آنگاه تعریف می کنیم:

$$\theta(t) = \arg_{\alpha_r}(t) + 2n_r\pi \text{ مشروط بر آنکه } t \in [t_{r-1}, t_r]$$

(که بنابر قرارداد n_1 برابر ۰ تعریف می شود)، و θ پیوسته است. این نشان می دهد که انتخاب پیوستهٔ آرگومان وجود دارد.

اینک، فرض کنیم θ^* انتخاب پیوستهٔ آرگومان دیگر باشد. آنگاه باید داشته باشیم

$$\theta^*(t) = \theta(t) + 2n(t)\pi$$

که $n(t)$ یک عدد صحیح است، محتملاً وابسته به t. ولی بدین سان $n(t)$ تابعی پیوستهاز t است (زیرا برابر با $(\theta^*(t) - \theta(t))/2\pi$ است) که فقط مقادیر صحیح را اختیار می کند، پس $n(t)$ یک ثابت است. این برهان را کامل می کند.

توجه کنید که یک انتخاب پیوستهٔ آرگومان روی بازهٔ پارامتری $[a,b]$ تعریف می‌شود، نه روی نگارهٔ γ. این بدان معنی است که اگر منحنی به همان نقطهٔ $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$، مشروط به $t_1 \neq t_2$، برگردد، ممکن است آرگومانهای $\theta(t_2),\theta(t_1)$ متفاوت باشند. (به طور شهودی واضح است که چنین چیزی هنگامی روی می‌دهد که مسیر مورد نظر میان t_2,t_1 به دور مبداء می‌چرخد.)

مثال ۲. $\gamma(t) = re^{4\pi it}(0 \leq t \leq 1)$

انتخاب پیوسته‌ای از آرگومان، به ازای یک n صحیح، به شرط $t \in [0,1]$، با $\theta(t) = 4\pi t + 2n\pi$ داده می‌شود. گر چه تساوی $\gamma(t) = \gamma(t + \frac{1}{2})$ به ازای $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ برقرار است. انتخابهای آرگومان یعنی $\theta(t)$ و $\theta\left(t + \frac{1}{2}\right)$ اختلافی برابر 2π دارند، زیرا که این مسیر یک بار مبداء را بین t و $t + \frac{1}{2}$ (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دور زده است. قابل توجه‌تر آنکه $\gamma(0) = \gamma(1)$، ولی اختلاف آرگومانها 4π است، زیرا مسیر مورد نظر رویهم *دو بار* مبداء را دور زده است.

از این نظریه بهره گرفته عدد پیچش $w(\gamma,0)$ مربوط به مسیر $\gamma;[a,b] \to C \setminus \{0\}$ به دور مبداء را

$$[\theta(b) - \theta(a)]/2\pi$$

که در آن θ انتخاب پیوسته‌ای از آرگومان در طول γ است تعریف می‌کنیم.

بنابر قسمت دوم قضیهٔ ۷-۱ عدد پیچش خوش تعریف است. $w(\gamma,0)$، برای مسیرهای دلخواهی چون γ، یک عدد حقیقی است؛ برای مسیرهای بسته γ یک عدد صحیح است، زیرا $\theta(b) - \theta(a)$ مضرب صحیحی است از 2π.

عدد پیچش جهت‌مسیر را مشخص می‌سازد، یعنی عدد پیچش، هنگامی که جهت چرخش مسیر عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مثبت محسوب می‌شود، و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، منفی.

مثال ۳. $\gamma(t) = e^{-it}(0 \leq t \leq 6\pi)$

یک انتخاب پیوستهٔ آرگومان $\theta(t) = -t$ است. آنگاه

$$w(\gamma,0) = [\theta(6\pi) - \theta(0)]/2\pi = -3,$$

و γ سه بار به دور مبداء در جهت حرکت عقربه های ساخت می چرخد.
به معنایی که در زیر بیان می کنیم عدد پیچش جمعی است:
قضیهٔ ۷-۲. فرض کنیم که γ_1, γ_2 دو مسیر در $C \setminus \{0\}$ باشند به طوری که نقطهٔ پایانی γ_1 نقطهٔ آغازی γ_2 باشد، آنگاه

$$w(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = w(\gamma_1, 0) + w(\gamma_2, 0)$$

برهان. می توانیم فرض کنیم که $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2$ به ترتیب دارای بازه های پارامتری $[a,b], [b,c], [a,c]$ هستند. نیز فرض می کنیم که θ یک انتخاب پیوستهٔ آرگومان روی $\gamma_1 + \gamma_2$ باشد. آنگاه

$$w(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = [\theta(c) - \theta(a)]/2\pi$$

$$w(\gamma_1, 0) = [\theta(b) - \theta(a)]/2\pi$$

$$w(\gamma_2, 0) = [\theta(c) - \theta(b)]/2\pi$$

و نتیجهٔ مطلوب حاصل است.
این نتیجه فوق العاده مهم است، زیرا به ما امکان می دهد که عدد پیچش یک مسیر پیچیده را با تقسیم آن به مسیرهای ساده و جمع عددهای پیچش آنها به دست آوریم. بسط نتیجهٔ فوق آسان است و می توان ثابت کرد

$$w(\gamma_1 + \ldots + \gamma_r, 0) = w(\gamma_1, 0) + w(\gamma_2, 0) + \ldots + w(\gamma_r, 0)$$

همچنین

$$w(-\gamma, 0) = -w(\gamma, 0)$$

۵ . عدد پیچش به عنوان یک انتگرال

نخست فرض کنیم که γ یک کانتور بسته باشد . آنگاه $w(\gamma,0)$ چنین داده می‌شود

$$w(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{z}dz$$

برای بررسی این مطلب γ را به مسیرهای فرعی $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ، مطابق با قضیهٔ ۷-۱ ، تقسیم‌بندی می‌کنیم ، و نمادهای آن قضیه را اینجا هم به کار می‌گیریم . هر γ_1 در یک صفحهٔ بریدهٔ $C\alpha_r$ واقع است . اگر γ_r روی بازه $[t_{r-1}, t_r]$ تعریف شود آنگاه

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r}\frac{1}{z}dz &= \log_{\alpha_r}\gamma(t_r) - \log_{\alpha_r}\gamma(t_{r-1}) \\ &= \log_{\alpha_r}|\gamma(t_r)| - \log_{\alpha_{r-1}}|\gamma(t_{r-1})| \\ &+ i\left(\arg_{\alpha_r}\gamma(t_r) - \arg_{\alpha-1}\gamma(t_{r-1})\right)\end{aligned}$$

می‌شود . مشابه قضیه ۷-۱ اطمینان حاصل می‌کنیم که $\arg_{\alpha_r}(t_1) = \arg_{\alpha_{r+1}}(t_r)$ ، یعنی ، هنگامی که مسیرهای فرعی به هم می‌پیوندند انتخابهای آرگومان با هم تطبیق می‌کنند . بدین سان با جمع بندی انتگرالها به ازای $r = 1, \ldots, n$ ، درمی‌یابیم که قسمتهای حقیقی حذف می‌شوند (از آن جهت که γ بسته است) و مجموع قسمتهای موهومی $2\pi w(\gamma,0)$ می‌شود ، که خواسته ما نیز همین بود .

اگر γ بسته نباشد ، فرمول مشابهی برقرار است :

$$w(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{im}\left[\int_{\gamma}\frac{1}{z}dz\right]$$

اثبات به همان صورت است که مشاهده شد ، با این استثناء که قسمتهای حقیقی حذف نمی‌شوند : قسمتهای حقیقی فقط وقتی حذف می‌شوند که قسمت موهومی انتگرال اختیار شود

۶. عدد پیچش حول یک نقطهٔ دلخواه

مطلب فوق العاده‌ای دربارهٔ مبداء وجود ندارد. اگر $\gamma : [a,b] \to C$ یک مسیر و اگر $z_\circ \in C$ نقطه‌ای غیر واقع γ بر باشد، می‌توانیم عدد پیچش مربوط به γ را حول $z_\circ$ تعریف کنیم. ساده ترین راه برای انجام این کار انتقال مبداء است، به این ترتیب که قرار می دهیم:

$$\Gamma(t) = \gamma(t) - z_\circ \qquad (t \in [a,b])$$

و تعریف می کنیم:

$$w(\gamma, z_\circ) = w(\Gamma, \circ)$$

دقیقاً مطابق بالا، اگر γ بسته باشد آنگاه

$$w(\gamma, z_\circ) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_\circ}dz, \qquad (۶)$$

این فرمولی است که با قرار دادن $z = \gamma(t)$ و به کار گرفتن (۵) به طریق زیر به آسانی ثابت می شود:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{z - z_\circ}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_\circ}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\pi \frac{1}{z}dz \\
&= w(\Gamma, \circ) \\
&= w(\gamma, z_\circ)
\end{aligned}$$

۷ . مولفه های متمم یک مسیر

می خواهیم بررسی کنیم که عدد پیچش $w(\gamma,z_0)$ مربوط به یک مسیر بسته γ ، هنگامی که z_0 تغییر می کند، به چه صورت تغییر خواهد کرد.

بنا به گزارهٔ ۲-۱۱ ، متمم S از نگارهٔ γ باز است، همچنین هر مولفهٔ همبند از S باز است. به ازاء هر $z_0 \in S$ می توانیم $w(\gamma,z_0)$ را معین کنیم، و به این ترتیب تابعی با مقادیر صحیح روی S به دست آوریم. از نظر هندسی واضح است که این تابع روی هر مولفهٔ همبند از S ثابت است: این مطلب را به طریق تحلیلی به اثبات می رسانیم به این طریق که نشان می دهیم که $w(\gamma,z_0)$ تابعی پیوسته از z_0 است. بدین سان نتیجهٔ مطلوب حاصل می شود، زیرا یک تابع پیوستهٔ با مقدار صحیح روی یک مجموعهٔ همبند ثابت است.

برهان پیوسته بودن $w(\gamma,z_0)$ در z_0 با تقریبی مستقیم نتیجه می شود. $z_0 \in S$ را ثابت می گیریم. چون S باز است، $k > 0$ وجود دارد به طوری که از $|z_1 - z_0| < k$ نتیجه می شود $z_1 \in S$. از این مطلب نتیجه می شود که اگر z بر نگارهٔ γ واقع باشد آنگاه $|z - z_0| \geq k$ ، پس اگر $|z_1 - z_0| < k/2$ ، خواهیم داشت $|z - z_1| > k/2$.

ولی

$$|w(\gamma,z_0) - w(\gamma,z_1)| = \left|\int_\gamma \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1}\right] dz\right|$$

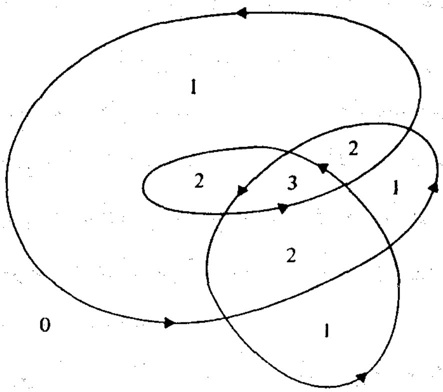
$$= \left|\int_\gamma \frac{z_1 - z_0}{(z - z_0)(z - z_1)} dz\right|$$

$$\leq \frac{|z_1 - z_0|}{\frac{1}{2}k^2} L(\gamma)$$

که قسمت اخیر با کمک لِم برآورد (۶-۱۰) نوشته شد.

با معلوم بودن $\varepsilon > 0$ ، قرار می دهیم $\delta = \min(k/2, k^2\varepsilon/2L(\gamma))$. آنگاه از $|z_1 - z_0| < \delta$ نتیجه می شود $|w(\gamma,z_0) - w(\gamma,z_1)| < \varepsilon$. پس $w(\gamma,z_0)$ در z_0 پیوسته است.

مثلاً، مسیر شکل ۷–۸ دارای اعداد پیچش نشان داده شده حول نقطه های z_0 در مولفه هایی است که این اعداد به آنها نسبت داده شده است.



شکل ۷–۸

S به عنوان متمم فقط یک مولفهٔ بیکران دارد (گزارهٔ ۲–۱۱)، که ما آن را با $U(\gamma)$ نشان می دهیم
بدانسان که شکل ۷–۸ نشان می دهد. اگر $z_0 \in U(\gamma)$ آنگاه $w(\gamma,z_0)$ می بایست که صفر باشد. این را به آسانی با کمک فرمول انتگرال (۶) می توان، به صورت زیر، ثابت کرد. فرض کنیم z_0 «دور از خط سیر γ» باشد، یعنی، فرض می کنیم به ازاء همهٔ z های واقع بر خط سیر γ، $|z-z_0| \ge k$. آنگاه از لم برآورد (۶–۱۰) نتیجه می شود که

$$w(\gamma,z_0) \le L(\gamma)/2\pi K$$

که وقتی K بزرگ است به صفر میل می کند. اما سمت چپ این نابرابری عددی است صحیح؛ پس وقتی که K بزرگ باشد برابر صفر است.

۸. محاسبهٔ عدد پیچش با کمک چشم

تعریف نسبتاً پیچیدهٔ عدد پیچش ممکن است این تصور را به وجود آورد که محاسبهٔ

آن پیچیده است. ولی، لااقل در مورد مسیرهایی که معمولاً با آنها بر خورد می کنیم، چنین نیست. معمولاً در زمینه های هندسی واضح است که عدد چرخش چقدر است (انگشت خود را دور مسیر بچرخانید و تعداد چرخشها را حساب کنید). در این بخش می خواهیم نشان دهیم که همین رویه را می توان به برهانی دقیق تبدیل کرد (و بنابراین در عمل نیازی به برهان نیست: به این معنی که آنچه در این مورد «واضح» است در ست هم هست!).

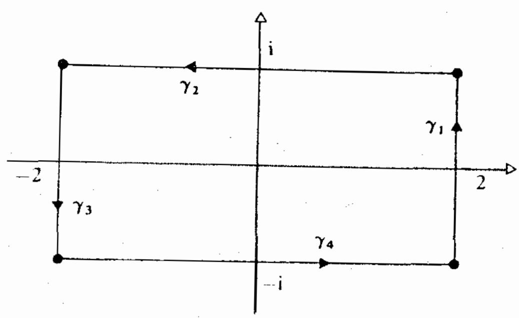
به عنوان مثالی ساده، حالتی را در نظر بگیرید که خط سیر γ مستطیلی با راسهای $\pm ۲ \pm i$ باشد. (شکل ۷-۹). اگر در جستجوی فرمولی هستید، ارائه یکی آسان است: مثلاً فرض کنیم $t \in [۰,۴]$ و قرار می دهیم

$$\gamma(t) = ۲ - i + ۲it \qquad (۰ \le t \le ۱)$$

$$\gamma(t) = ۲ + i - ۴(t-۱) \qquad (۱ \le t \le ۲)$$

$$\gamma(t) = -۲ + i - ۲i(t-۲) \qquad (۲ \le t \le ۳)$$

$$\gamma(t) = -۲ - i + ۴(t-۳) \qquad (۳ \le t \le ۴)$$



شکل ۷-۹

اولین نکته اینجا این است که چه کنیم که به محاسبه نپردازیم.

به طبیعی ترین وجه، γ را به مسیرهای فرعی $\gamma_۱, \ldots, \gamma_۴$، که با $\gamma_r = \gamma|_{[r-۱,r]}$

معین می‌شوند، تقسیم بندی می‌کنیم. آنگاه فرمول انتگرال را به کار می‌گیریم:

$$w(\gamma,۰)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma}\frac{۱}{z}dz=\frac{۱}{۲\pi i}\sum_{r=۱}^{۴}\int_{\gamma_r}\frac{۱}{z}dz$$

اکنون (فقط با انتخاب یک مسیر فرعی)

$$\int_{\gamma_۱}\frac{۱}{z}dz=\int_۰^۱\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt=\int_۰^۱\frac{۲i}{۲-i+۲it}dt$$

$$=\left[\log(۲-i+۲it\right]_۰^۱=\mathrm{Log}(۲+i)-\mathrm{Log}(۲-i)$$

زیرا $\gamma_۱$ در C_π واقع است، بنابراین مقدار اصلی log روی $\gamma_۱$ پیوسته است. آنگاه

$$\log(۲\pm i)=\log|۲\pm i|+i\arg(۲\pm i) \qquad (۷)$$

$$=\log\sqrt{۵}\pm i\sin^{-۱}(۱/\sqrt{۵})$$

بدین سان

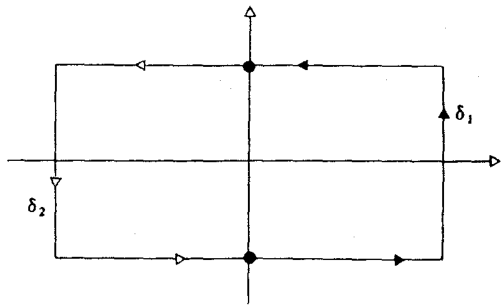
$$\int_{\gamma_۱}\frac{۱}{z}dz=۲i\sin^{-۱}(۱/\sqrt{۵})$$

که سینوس معکوس بین $+\pi/۲,-\pi/۲$ انتخاب شده است.

سه انتگرال مشابه دیگر داریم که حساب کنیم. همه را جمع کرده، بر $۲\pi i$ تقسیم می‌کنیم. و حسابرسی بسیار دقیقی روی دامنه های توابع معکوس مثلثاتی، که مطرح می‌شوند، به عمل می‌آوریم. این کار را *می‌توان* انجام داد؛ به صورتی که حتی مشکل هم نیست؛ اما به ندرت پیشنهاد می‌شود!

بهتر است (اما نه زیاد) که از تعریف «انتخاب پیوستهٔ آرگومان» شروع کنیم: این کار از مرحلهٔ (۷) بالا برای هر مسیر فرعی شروع می‌شود و در انتهای به همان موارد حسابرسی برمی‌خوریم.

اکنون روش پیشرفته‌تری ارائه می‌دهیم. γ را به مسیرهای فرعی δ_1, δ_2 تقسیم‌بندی می‌کنیم. (شکل ۷-۱۰)



شکل ۷-۱۰

امّا $w(\gamma,0) = w(\delta_1,0) + w(\delta_2,0)$. چون δ_1 به طور کامل درون صفحهٔ بریدهٔ C_π قرار دارد، arg یعنی مقدار اصلی روی δ_1 پیوسته است. بدین سان، با انجام همهٔ کارهای جزیی،

$$w(\delta,0) = [\arg(i) - \arg(-i)]/2\pi$$

$$= [\pi/2 - (-\pi/2)]/2\pi$$
$$= 1/2$$

به طور مشابه δ_1 درون $C.$ قرار دارد، پس $\arg.$ روی δ_2 پیوسته است؛ بنابراین

$$w(\delta_2,0) = [\arg.(-i) - \arg(i)]/2\pi$$
$$= [-\pi/2 - (-3\pi/2)]/2\pi$$
$$= 1/2$$

چون جمع کنیم، حاصل می‌شود $w(\gamma,0) = 1$.
واضح است که این رویه را می‌توان در هم فشرد: محاسبات مربوط به arg صرفاً

مطلب واضحی را، به صورتی قابل پیش بینی، تایید می کند.

این روش را به ترتیب زیر به اختصار بیان می کنیم:

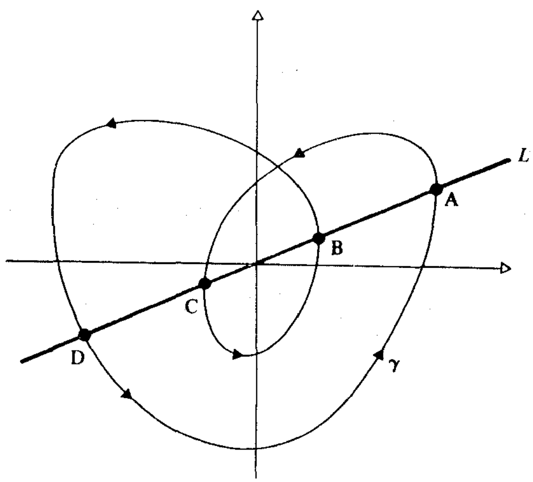
(۱) γ را به قطعات مناسب تقسیم بندی می کنیم، *طوری که هر یک در یک صفحه بریده واقع شوند.*

(۲) در مورد هر قطعه، سهمیهٔ آن را از عدد پیچش به صورت تفاضل بین آرگومانهای دو انتهای آن حساب می کنیم (با به کار گرفتن arg پیوستهٔ مربوط به آن) - یا به طریق هندسی، زاویه ای را که تحت آن مسیر فرعی از مبداء دیده می شود، با علامت مناسب، تعیین می کنیم.

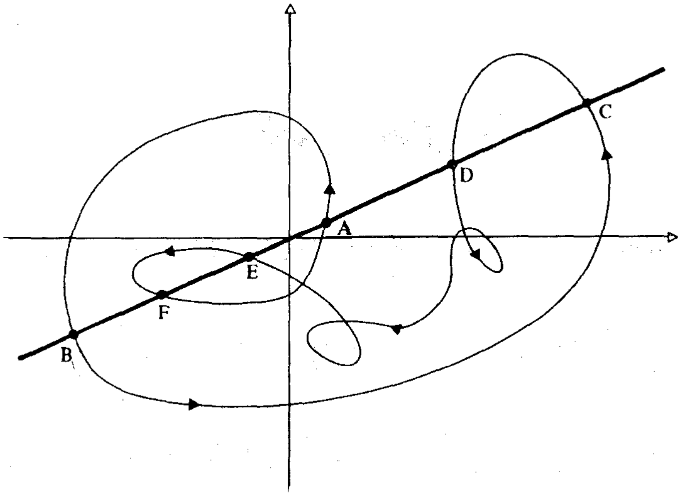
(۳) سهمیه ها را با هم جمع می کنیم.

اگر تقسیم بندی γ به مسیرهای فرعی با رسم فقط یک خط مار بر مبداء صورت پذیرد مفید خواهد بود، زیرا در این حال سهمیه ها همواره یا ۰ و یا $\pm ۱/۲$ هستند. بدین سان، در مورد مسیر γ که خط L به چهار قطعهٔ AB، BC، CD، DA تقسیم می شود، داریم (شکل ۷-۱۱)

$$\begin{aligned} w(\gamma,\cdot) &= w(AB,\cdot) + w(BC,\cdot) + w(CD,\cdot) + w(DE,\cdot) + w(EF,\cdot) + w(FA,\cdot) \\ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \cdot + \left(-\frac{۱}{۲}\right) + \cdot + \frac{۱}{۲} \\ &= ۱ \end{aligned}$$



(شکل ۷-۱۱)



(شکل ۷-۱۲)

این روش در اساس همان معادل ریاضی است برای «انگشت خود را به دور منحنی بچرخانید و نیم دورها را حساب کنید.» آنچه برای اجرای کاملاً دقیق این کار لازم است مقدار یابیهای پیچیدهٔ arg ها نیست: بحران واقعی آنجا پیش می‌آید که می‌خواهیم نشان دهیم که مسیر مورد بحث خط انتخاب شدهٔ L را در نقاط A، B، C، و غیره قطع می‌کند. که از همین نقاط به ترتیب مذکور می‌گذرد، که جهت هر مسیر فرعی (خواه همان جهت حرکت عقربه های ساعت باشد یا عکس آن) مطابق با نمودار باشد. امّا هر جا که (مثلاً در خاتمهٔ همین بحث) γ به صورتی سر راست مشخص شده است (مثلاً به وسیلهٔ یک فرمول ساده، یا به صورت یک چند ضلعی، یا ترکیبی از خط های راست و کمانهای دایره ای)، اجزاء متشکلهٔ مذکور در فوق به آسانی فراهم می‌شوند: بدین لحاظ هنگامی که عدد پیچش مقدار مشخصی را اختیار می‌کند، دیگر وارد بحث و جدل بیشتری نمی‌شویم.

مقایسهٔ اولین روش «بد» با آخرین روش «خوب» که ارائه دادیم توجیه جالب توجهی از خطرات مربوط به آنالیز «جویدن فرمول» به طور کورکورانه است. آنالیز مختلط موضوعی بسیار هندسی است، و لذا هندسه نباید دست کم گرفته شود.

تمرین های ۷

۱ . مقدار اصلی آرگومانهای هر یک از اعداد مختلط زیر را حساب کنید: $1+i$ ،

$$(\sqrt{3}/2)+i \text{ ، } (1+i)^3 \text{ ، } \left((\sqrt{3}/2)+i\right)^{243} \text{ ، } (1+i)^2\left((\sqrt{3}/2)+i\right)^3$$

۲ . فرض کنیم $\arg z$ دلالت بر مقدار اصلی آرگومان $z \neq 0$ کند، یعنی $-\pi < \arg z \leq \pi$. به ازاء y, x حقیقی طوری که $x < 0$ ، نشان دهید:

(الف) $\lim_{y\to 0} \arg(x + i|y|) = \pi$

(ب) $\lim_{y\to 0} \arg(x - i|y|) = -\pi$

حدود متناظر برای موارد $x = 0, x > 0$ را حساب کنید.

۳ . لگاریتمهای اصلی برای موارد زیر را حساب کنید:

$\log(3i), \log(2i)$ ، $\log(1+i)$ ، $\log(-1)$ ، $\log(z^{10})$ که در آن $z = 2e^{i\pi/3}$ ، $\log(x)$

به ازاء $x \neq 0$.

۴ . به ازاء $z_1 \neq 0$ ، $z_2 \neq 0$ ، نشان دهید که

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + 2n\pi i$$

که در آن n عدد صحیحی است که لزومی ندارد صفر باشد. مقادیری را که n می تواند اختیار کند مشخص کنید.

نشان دهید که یکی از لگاریتمهای $z_1 z_2$ به صورت

$$\log(z_1) + \log(z_2)$$

است به شرط آنکه مقادیر مناسب برای لگاریتمها اختیار شود.

۵. «پارادوکس برنولی» چنین است:

$$(-z)^۲ = z^۲,$$

بدین سان

$$۲\log(-z) = ۲\log(z)$$

و بنابراین

$$\log(-z) = \log(z)$$

مغالطه در چیست؟

۶. فرض می‌کنیم $f : C \to C$ به ازای θ ی ثابت حقیقی به صورت $f(z) = e^{i\theta}z$ داده شود. ثابت کنید که f صفحه مختلط را تحت زاویهٔ θ دوران می‌دهد.

نشان دهید که تبدیل $f(z) = iz$ صفحهٔ مختلط را تحت زاویهٔ قائمه دوران می‌دهد و به توصیف $f(z) = -z$ و $f(z) = iz$ به عنوان دوران بپردازید.

به ازاء هر عدد مختلط $\lambda = re^{i\theta}$ تبدیل $f(z) = \lambda z$ را بیانِ هندسی کنید.

۷. در هر یک از موارد زیر به ازاء $z = re^{i\theta}$، z و $۱/z$ را رسم کنید:

(الف) $۳e^{i\pi/۲}$

(ب) $۲e^{i\pi/۴}$

(ج) $\frac{۱}{۲}e^{i\pi/۳}$

(د) $۳e^{-i\pi}$.

تبدیل $f(z) = ۱/z$، $z \neq ۰$، را از لحاظ هندسی توصیف کنید.

۸. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. عدد مختلط ω را در ریشهٔ nام *واحد* می‌نامند اگر $\omega^n = ۱$.

(الف) همه ریشه های nام واحد را تعیین کرده و شکل رسم کنید

(ب) به ازاء n مساوی ۲، ۳، ۴، ریشه های n ام واحد را به صورت $x + iy$ بنویسید.

(ج) اگر ω_1, ω_2 ریشه های nام واحد باشند، ثابت کنید که

$$\omega_1/\omega_2 \ , \ \omega_1\omega_2 \ , \ \omega_1^n$$

نیز چنین هستند.

(د) به ازاء $r > 0, r, \theta \in R$ ، تمام zهای متعلق به C را بیابید به طوری که

$$z^n = re^{i\theta}$$

(ه) اگر $z_1^n = z_2^n$ ، نشان دهید که $z_1 = \omega z_2$ که در آن ω ریشهٔ n ام واحد است.

۹ . به ازای $z \neq 0, z, \beta \in C$ ، مقدار اصلی z^β را به صورت

$$z^\beta = \exp(\beta \log z)$$

تعریف می کنیم . مقادیر اصلی توانهای زیر را محاسبه کنید:

$$1^{\sqrt{2}}, (-2)^{\sqrt{2}}, i^i, 2^i, 1^{-i}, (3-4i)^{1+i}, (3+4i)^5$$

۱۰ . با به کار گرفتن نمادگذاری تمرین ۹ ، به ازاء $z \in C_\pi$ ، نشان دهید که $d(z^\beta)/dz = \beta z^{\beta-1}$. به ازای a ثابت و $a \in C_\pi$ ، $d(a^z)/dz$ چه خواهد بود.

۱۱ . فرض کنیم $\beta \in C, \alpha \in R$. به ازاء $z \in C_\alpha$ ، تعریف می کنیم

$$(z^\beta)_\alpha = \exp(\beta \log_\alpha^z)$$

همهٔ مقادیر ممکنهٔ $(i^i)_\alpha$ ، $(2^i)_\alpha$ ، $((3-4i)^{1-i})_\alpha$ را به ازای مقادیر ممکنهٔ α حساب کنید. z را ثابت نگه می داریم، نشان دهید، که هنگامی که α تغییر می کند، $(z^\beta)_\alpha$ ، مشروط به گویا بودن β ، فقط مقادیری به تعداد متناهی اختیار می کند.

اگر $\beta = m/n$ که در آن m و n اعداد صحیح هستند و ، نشان دهید که

$$\left((z^{m/n})_\alpha\right)^n = z^m$$

$\left((z^n)^{m/n}\right)_\alpha$ چیست؟

۱۲ . با به کـار گـرفتن نماد گـذاری تمرین ۱۱، به ازاء $z \in C_\alpha$ ، مطلوب است محـاسـبهٔ $d((a^z)_\alpha)/dz, d((z^\beta)_\alpha)dz$. رابطه ای بین $(z^\gamma)_\alpha, (z^\beta)_\alpha, (z^{\beta+\gamma})_\alpha$ بیـان کنید.

۱۳ . نگارهٔ تابعهای $f : C_\pi \to C$ را از نظر هندسی بیان کنید مشروط بر آنکه f(z) برابر باشد با مقدار اصلی

(الف) $z^{\frac{1}{2}}$

(ب) $z^{\frac{1}{3}}$

(ج) z^i

۱۴ . گیـریم $\alpha \in R$ ، $z \in C_\pi, \beta \in C$. می نویسـیم $\beta = u + iv$ ، مطلوب است تعیین

$$|(z^\beta)_\alpha|, \arg((z^\beta)_\alpha)$$

نشان دهیـد که $|(z^\beta)_\alpha|$ مستقل از α است اگر و فقط اگر β حقیقی باشـد. به ازاء عددهای صحیحی و مثبت n,m ، فرض می کنیم f(z) مقدار اصلی $z^{m/n}$ باشد. از نظر هندسی $f : C_\pi \to C$ را توصیف کنید.

۱۵ . $\log(1+z)$ را به صورت یک سری توانی بر حسب z یعنی به صورت

$$\log(1+z) = \sum a_n z^n \qquad |z| < R$$

بنویسید، طوری که ضرایب a_n و شعاع همگرایی R مشخص شود.

۱۶ . نشان دهید

(الف) $\cos(-i\log(z+\sqrt{z^2-1})) = z$

(ب) $\sin\left(-i\log(i(z+\sqrt{z^2-1}))\right) = z$

(ج) $\tan\left((i/2)\log((1+z)/(1-z))\right) = z$

این خواص را برای بیان $\cos^{-1}z$ ، $\sin^{-1}z$ ، $\tan^{-1}z$ بر حسب لگاریتم به کار بگیرید.

۱۷ . نشان دهید که همهٔ مقادیر $\cosh^{-1}z$ به صورت زیر داده می شوند:

$$\cosh^{-1}z = \log(z + \sqrt{z^{2} - 1})$$

طوری که همهٔ مقادیر ممکنهٔ لگاریتم و ریشهٔ دوم اختیار شده باشند. با همین معنی، نشان دهید:

$$\sinh^{-1}z = \log(z + \sqrt{(z^{2} - 1)})$$
$$\tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\log\big((1+z)/(1-z)\big)$$

۱۸ . فرض کنیم $D = \{z \in C \mid (i+z)/(i-z) \in C_{\pi}\}$. از نظر هندسی D را توصیف کنید. مقدار اصلی تانژانت معکوس $\tan^{-1} : D \to C$ به صورت

$$\tan^{-1}(z) = \frac{1}{2}i\log((i+z)/(i-z))$$

تعریف می کنیم (با اختیار مقدار اصلی log). نشان دهید که $\tan^{-1}$ در D مشتق پذیر و مشتق آن $1/(1+z^{2})$ است.

۱۹ . مسیرهای زیر را رسم و همهٔ انتخابهای پیوستهٔ آرگومان در طول آنها را مشخص کنید.

(الف) $\gamma(t) = 2e^{-it} \quad (0 \le t \le 4\pi)$

(ب) $\gamma(t) = t + i(1-t) \quad (0 \le t \le 1),$

(ج) $\gamma(t) = t - 1 + it^{2} \quad (-1 \le t \le 1),$

(د) $\gamma(t) = \begin{cases} t + i(1-t) & (0 \le t \le 1) \\ 1 + i(t-1) & (1 \le t \le 2) \end{cases}$

در هر حالت عدد پیچش مسیر را حول مبداء محاسبه کنید.

۲۰ . عدد پیچش $w(\gamma,z_\cdot)$ را به ازاء هر یک از انتخابهای $z_\cdot,\gamma$ تعیین کنید:

(الف) $\gamma(t) = ۲e^{-it} \quad (۰ \le t \le ۲\pi), \quad z_\cdot = ۱,۳i,$

(ب) $\gamma(t) = t + i(۱-t) \; (۰ \le t \le ۱), \quad z_\cdot = ۱+i, -i, ۱۰i$

۲۱ . در هر یک از موارد زیر، نگارهٔ مسیر را رسم کنید و روشی ملموس برای محاسبهٔ $\int_\gamma ۱/(z-z_\cdot)dz$ به کار بگیرید:

(الف) $\gamma(t) = te^{it} \quad (\pi \le t \le ۵\pi), z_\cdot = ۰,$

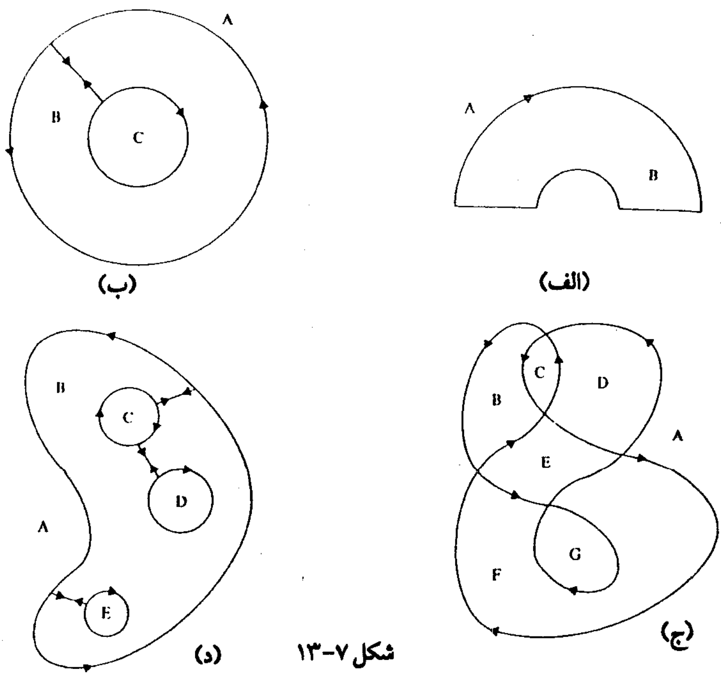
(ب) $\gamma(t) = it \quad (۰ \le t \le ۱), z_\cdot = ۱,$

(ج) $\gamma(t) = it \quad (-۱ \le t \le ۱), z_\cdot = ۱$

(د) $\gamma = \sigma + [۱,۲] + S + [-۲,-۱], \quad z_\cdot = ۰,$

که در آن $\sigma(t) = e^{i(\pi-t)}$ ، $(۰ \le t \le \pi)$ ، $S(t) = ۲e^{it}$ ، $(۰ \le t \le \pi)$.

۲۲ . (با کمک چشم) مطلوب است محاسبهٔ عدد پیچش مسیرهای بستهٔ داده شده حول یک نقطه در دامنه های A، B، C، . . . (شکل ۷-۱۳)



شکل ۷-۱۳

فصل هشتم

قضیهٔ کوشی

قضیهٔ اساسی انتگرال گیری کانتور بیان می کند که اگر f در D یک ضد مشتق داشته باشد، آنگاه می توانیم مقدار انتگرال f را در طول مسیری در D از z_0 تا z_1 به وسیله فرمول

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0)$$

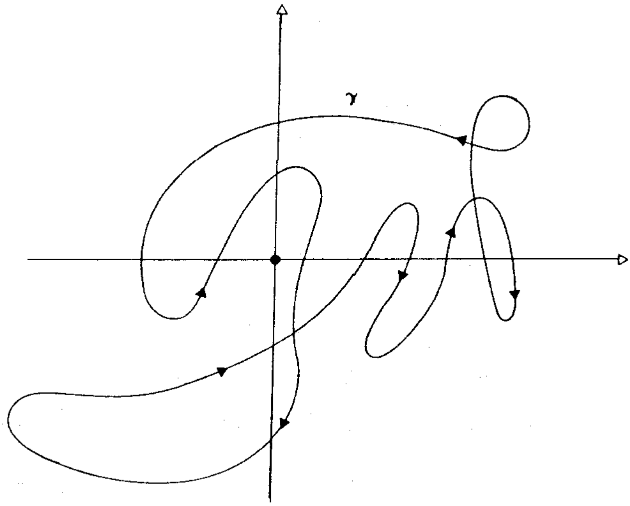
تعیین کنیم. بخصوص، اگر γ بسته باشد، آنگاه

$$\int_\gamma f = 0$$

هنگامی که از آغاز دلیلی وجود ندارد که f ضد مشتق داشته باشد قضیهٔ کوشی شرایطی را تقریر می کند که تحت آن $\int_\gamma f = 0$. گونه های مختلفی از قضیهٔ کوشی عنوان می شود، یا، دقیقتر بگوییم، قضیه های گوناگونی از این نوع که منسوب به کوشی است وجود دارد، و او بود که برای اولین بار چنین نتیجه ای (حکمی) را منتشر کرد، به این ترتیب که در ۱۸۱۳ میلادی از آن خبر داد و در ۱۸۲۵ آن را به چاپ رساند. *گاوس* در ۱۸۱۱ از اصل این نظریه مطلع بود، امّا این منصب از آن کوشی‌شد زیرا او بود که برای اولین بار آن را به اطلاع عموم رسانید.

گاوس و کوشی هر دو این واقعیت اساسی را می دانستند که اگر γ حول نقطه های

خارج از D بچرخد، آنگاه $\int_\gamma f = ۰$. مثلاً، $f(z) = ۱/z$ خارج از دامنه اش D دارای نقطهٔ منفرد ۰ است، پس اگر کانتور بسته γ مبداء را دور نزند، خواهیم داشت $\int_\gamma ۱/z dz = ۰$. (شکل ۸-۱)



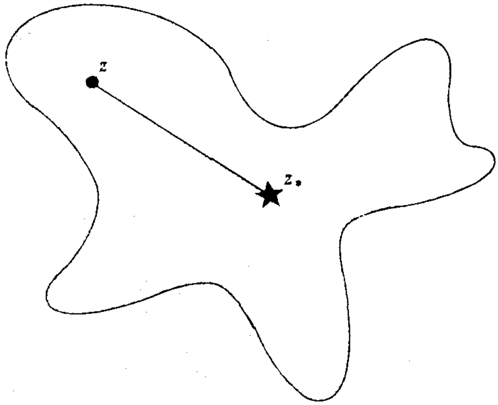
شکل ۸-۱

در این فصل هدف اصلی، اثبات قضیهٔ کوشی است به صورتی که در زیر بیان می شود:

اگر f در D مشتق پذیر و به ازاء هر z خارج از D، $w(\gamma, z) = ۰$ ، آنگاه

$$\int_\gamma f = ۰$$

این نظریه را چنین آغاز می کنیم که به طور دوری به اثبات حالت خاصی که در آن کانتور مورد نظر یک مثلث است می پردازیم. سپس به اثبات قضیه ای اقدام می کنیم که در آن لازم است به جای قیدی بر کانتور γ لازم است که قیدی بر دامنهٔ D مقرر کنیم. می گوییم D یک دامنهٔ *ستاره‌ای* است به شرط آنکه نقطه ای چون z_* در آن باشد به طوری که به ازاء هر نقطهٔ دیگر $z \in D$ قطعه خط $[z_*, z]$ در D قرار گیرد. (شکل ۸-۲) در این حال تعریف می کنیم $F(z) = \int_{[z_*, z]} f$ و نوع مثلثیِ

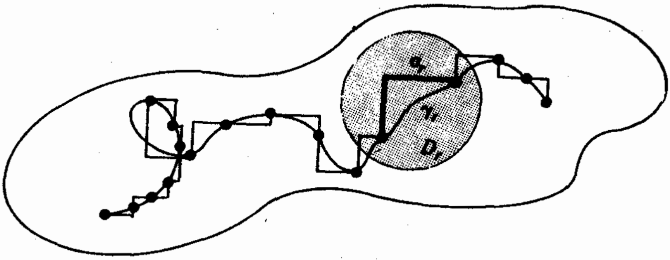


شکل ۸-۲

قضیهٔ مذکور را برای اثبات اینکه F یک ضدمشتق f است به کارمی گیریم. این بدان معنی است که درمورد هرکانتوربسته دریک دامنهٔ ستاره ای داریم $\int_\gamma f = 0$. بخصوص یک قرص (دیسک) یک دامنهٔ ستاره ای است و از این مطلب نتیجه ای بسیار مهم حاصل می شود. در مورد یک تابع دیفرانسیل پذیر f در دامنه ای کلی چون D، ممکن است نتوانیم ضد مشتقی چون $F : D \to C$ به دست آوریم. ولی اگر توجه خود را به قرص دلخواهی چون Δ در D معطوف کنیم، آنگاه ضد مشتقی چون $F : \Delta \to C$ وجود خواهد داشت. بدین سان ممکن یک ضد مشتق *سراسری* در همهٔ D وجود نداشته، باشد اما به طور موضعی در هر همسایگی دلخواه $N_r(z_\circ) \subseteq D$ به ازاء هر $z_\circ \in D$ وجود دارد.

با به کار گرفتن لم *فرش کردن*، هر کانتور دلخواه γ در دامنهٔ دلخواهی چون D را می توان به صورت $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ نوشت که در آن هر کانتور فرعی γ_1 در درون یک قرص $D_r \subseteq D$ قرار دارد. در (دامنهٔ ستاره ای) D_r می توانیم مسیری پله ای چون σ_r را با همان نقاط انتهایی γ_1 انتخاب کنیم آنگاه (بنابر وجود یک ضد مشتق در D_r)، $\int_{\sigma_r} f = \int_{\gamma_r} f$. اگر $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ آنگاه $\int_\sigma f = \int_\gamma f$. (شکل ۸-۳)

به این ترتیب بررسی $\int_\gamma f$ تحویل می شود به حالت مربوط به یک انتگرال در طول مسیری پله ای چون σ ، که با روشهایی مهم از هندسه می توان آن را مورد بررسی قرار داد.



(شکل ۸-۳)

۱ . قضیهٔ کوشی در مورد یک مثلث

در پایان قرن نوزدهم، از میان انواع گوناگونی از قضیهٔ کوشی یکی از استادانه ترین برهانها برای یک کانتور مثلثی به وسیلهٔ *ای. اچ*. مور پرورانده شد. برهانهای پیشین به طور معمول تاکید بر آن داشتند که تابع f یک مشتق پیوستهٔ f' داشته باشد. با محدود کردن کانتور مورد نظر به یک مثلث، برهان مورفقط نیاز به آن دارد که f' در تمامی D وجود داشته باشد. و بدین سان برای همهٔ تابعهای دیفرانسیل پذیر در این نظریه پایه ای فراهم می شود.

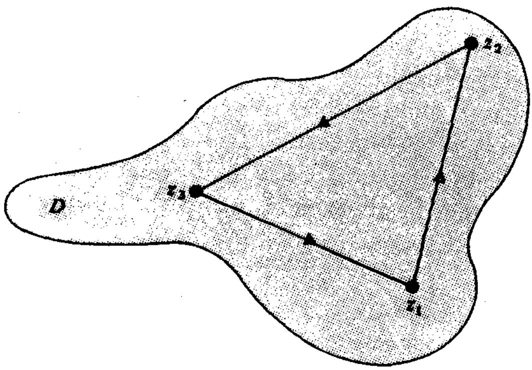
با $z_1, z_2, z_3 \in C$ ، فرض کنیم $T(z_1, z_2, z_3)$ مجموعهٔ همهٔ نقاط درون ورودی مثلثی با راسهای z_1 ، z_2 ، z_3 باشد. (به طور رسمی $T(z_1, z_2, z_3)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$ که در آن λ_1 ، λ_2 ، λ_3 اعداد حقیقی و نامنفی اند که در شرط $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ صدق می کنند). فرض کنیم $\partial T(z_1, z_2, z_3)$ کانتور مرزی تشکیل یافته از سه قطعه خط $[z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_1]$ باشد. هر جا که بیم ابهام نرود ما این مثلث را با T و مرز آن را با ∂T نشان می دهیم.

قضیهٔ ۸–۱ . (قضیهٔ کوشی در مورد مثلث) .

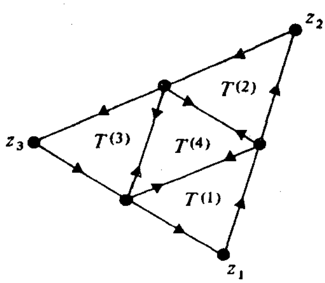
فرض کنیم f تابعی مشتق پذیر در دامنه ای چون D باشد . اگر مثلث T درون D باشد، آنگاه $\int_{\partial T} f = 0$. (شکل ۸–۴)

برهان. فرض کنیم $\left|\int_{\partial T} f\right| = c \geq 0$.

با بحثی غیر مستقیم ثابت می کنیم که $c = 0$. ابتدا با وصل کردن اوساط اضلاع، مثلث T را به چهار قسمت $T^{(1)}$ ، $T^{(2)}$ ، $T^{(3)}$ ، $T^{(4)}$ تقسیم می کنیم . (شکل ۸–۵)



(شکل ۸–۴)



(شکل ۸–۵)

آنگاه $\sum_{r=1}^{4} \int_{\partial T^{(r)}} f$ = $\int_{\partial T} f$ ،

$$c = \left|\int_{\partial T} f\right| \leq \sum_{r=1}^{4} \left|\int_{\partial T^{(r)}} \right|$$

و باید بتوانیم r را چنان انتخاب کنیم که

$$\left|\int_{\partial T^{(r)}} f\right| \geq \frac{۱}{۴} c$$

(اگر بیش از یک r در این نامساوی صدق کند، کوچکترین را انتخاب کنید.)
تعریف می کنیم $T_۱ = T^{(r)}$، آنگاه داریم:

$$L(\partial T_۱) = \frac{۱}{۲} L(\partial T) \quad , \quad \left|\int_{\partial T_1} f\right| \geq \frac{۱}{۴} c,$$

(که در آن، طبق معمول، $L(\gamma)$ دلالت بر طول γ دارد).
به تکرار رویهٔ تقسیم بندی برای به دست آوردن دنباله ای از مثلثهای $T \supseteq T_۱ \supseteq T_۲ \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$ می پردازیم که در شرایط

$$L(\partial T_n) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n L(\partial T) \quad , \quad \left|\int_{\partial T_n} f\right| \geq \left(\frac{۱}{۴}\right)^n c \tag{۱}$$

صدق کنند.

بعد هم با به کار بردن این واقعیت که f مشتق پذیر است، تخمین دیگری برای $\left|\int_{\partial T_n} f\right|$ به دست آوریم.
دنبالهٔ تو در توی $T \supseteq T_۱ \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$ شامل یک نقطهٔ $z_۰$ است. اینجا f مشتق پذیر است. بنابراین، با معلوم بودن $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$۰ < |z - z_۰| < \varepsilon \text{ نتیجه می دهد } \left|\frac{f(z) - f(z_۰)}{z - z_۰} - f'(z_۰)\right| < \varepsilon$$

پس
$|z - z_۰| < \delta$ نتیجه می دهد

$$|f(z) - f(z_۰) - f'(z_۰)(z - z_۰)| < \varepsilon |z - z_۰| \,.$$

به ازاء N صحیحی، هر چه باشد $n \geq N$ هر نقطه در T_n درون همسایگی ε از $z_{\cdot}$ قرار می گیرد. بدین سان با شرط $n \geq N$ ، $z \in T_n$ ، داریم $|f(z)-f(z_{\cdot})-f'(z_{\cdot})(z-z_{\cdot})| \leq \varepsilon|z-z_{\cdot}|$. به ازاء $z \in T_n$ ، به طور بدیهی داریم $|z-z_{\cdot}| \leq L(\partial T_n)$ ، و لذا از لِمِ تخمین نتیجه می شود:

$$\left|\int_{\partial T_n}\{f(z)-f(z_{\cdot})-f'(z_{\cdot})(z-z_{\cdot})\}dz\right| \leq \varepsilon L(\partial T_n).L(\partial T_n). \qquad (۲)$$

اما $-f(z_{\cdot})-f'(z_{\cdot})(z-z_{\cdot})$ به فرم $a+bz$ است که در آن b,a ثابت هستند. این ضد مشتقی چون $az+\frac{۱}{۲}bz^۲$ دارد، پس $\int_{\partial T_n}(a+bz)dz=۰$ ، و (۲) تحویل می شود به

$$\left|\int_{\partial T_n} f\right| \leq \varepsilon L(\partial T_n)^۲$$

چون این را با تخمین قبلی در (۱) مقایسه کنیم، حاصل می شود:

$$\left(\frac{۱}{۴}\right)^n c \leq \left|\int_{\partial T_n} f\right| \leq \varepsilon L(\partial T_n)^۲ = \left(\frac{۱}{۴}\right)^n \varepsilon L(\partial T)^۲$$

و از این حاصل می شود:

$$c \leq \varepsilon L(\partial T)^۲$$

ولی ε دلخواه است و $c \geq ۰$ ، بنابراین باید داشته باشیم $c=۰$ ، یعنی

$$\int_{\partial T} f = ۰ \qquad \square$$

این برهان در خور تفسیر است، زیرا ارائه تحلیلی آن نظریهٔ اصلی را که بسیار ساده و بسیار هندسی است محو می کند. این برهان دو واقعیت را به کار می گیرد. یکی آنکه انتگرال $f(z)$ روی *کانتورها* جمعی است - یعنی، مجموع سهمیه های

کانتورهای فرعی حاصل شده از یک کانتور برابر با سهمیهٔ همان کانتور اصلی است. دیگر آنکه یک تابع مشتق‌پذیر در حوالی یک نقطهٔ معلوم *تقریباً* خطی (یعنی، به فرم a+bz) است.

اگر امکان *دقیقاً* خطی بودن f، به طور موضعی، فراهم می‌بود، آنگاه می‌توانستیم تقسیم فرعی ظریفی انتخاب کنیم که آن را در هر کانتور فرعی خطی کند؛ روی هر کانتور فرعی مقدار صفر را برای انتگرال مذکور به دست آورید و برای این منظور محاسبه‌ای صریح روی ضد مشتق یعنی $az+\frac{1}{2}bz^2$ انجام دهید؛ سپس همهٔ این صفرها را به هم بیفزایید تا برای انتگرال اصلی هم مقدار صفر به دست آید.

متأسفانه چنین چیزی روی نمی‌دهد و ما با جمع تعداد بیشتر و هر چه بیشتر سهمیه‌ها روبرو هستیم، که هر یک به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. با تخمین نرخ رشد یا انقباض نشان می‌دهیم که خطاهای حاصل از فرض خطی بودن به طور تقریب با سرعت کافی به صفر می‌گرایند تا جبران تعداد تزاید کانتورهای فرعی را بنمایند.

تمرین جالبی خواهد بود اگر این برهان را چنان بازنویسی کنیم که این توصیف غیر رسمی به صورت یک بحث رسمی درآید به طوری که هندسه را پیش قراول داشته باشد.

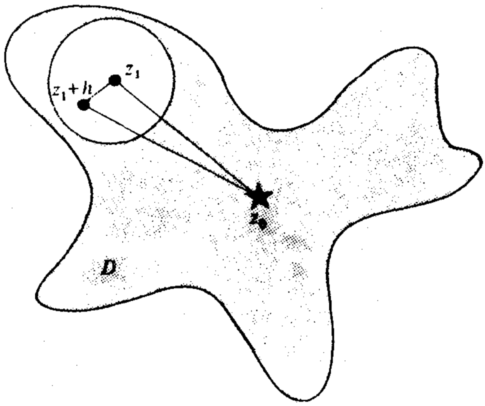
۲. وجود یک ضد مشتق در یک دامنهٔ ستاره‌ای

یادآوری می‌کنیم که D یک *دامنهٔ ستاره‌ای* است اگر یک $z_* \in D$ (به نام *مرکز ستاره‌ای*) وجود داشته باشد به طوری که خط راست $[z_*, z]$ به ازاء هر $z \in D$ درون D واقع شود. در یک دامنهٔ ستاره‌ای برای ضد مشتق تابعی چون f داوطلب مسلمی وجود دارد، یعنی همان انتگرال

$$F(z) = \int_{[z_*, z]} f$$

قضیهٔ ۸-۲. اگر f تابعی مشتق‌پذیر در دامنهٔ ستاره‌ای D با مرکز ستاره‌ای z_* باشد، آنگاه $F(z) = \int_{[z_*, z]} f$ ضد مشتقی برای f در D است.

برهان. D باز است. پس برای $z_1 \in D$ یک $\varepsilon_1 > 0$ وجود دارد به طوری که $N_{\varepsilon_1}(z_1) \subseteq D$. با شرط $|h| < \varepsilon_1$، مثلثی که راسهایش z_1, z_*، $z_1 + h$ است تماماً در Dواقع می شود. (شکل ۸-۶)



(شکل ۸-۶)

از قضیهٔ ۸-۱ نتیجه می شود:

$$\int_{[z_*,z_1]} f + \int_{[z_1,z_1+h]} f + \int_{[z_1,h,z_*]} f = 0$$

این را می توان چنین نوشت:

$$F(z_1) + \int_{[z_1,z_1+h]} f - F(z_1 + h) = 0$$

یا

$$\frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z_1,z_1+h]} f$$

از اینجا به بعد برهان مثل قضیه ۵-۱۱ به پیش می رود.

به ازاء ثابت $c \in C$،

$$\int_{[z_1,z_1+h]} c\,dz = ch,$$

و بنابراین

$$\frac{F(z_1+h)-F(z_1)}{h}-f(z_1)=\int_{[z_1,z_1+h]}\frac{f(z)-f(z_1)}{h}dz \qquad (۳)$$

از پیوسته بودن f نتیجه می شود که با معلوم بودن $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$|z-z_1|<\delta$ نتیجه می دهد: $|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon$.

برای z واقع بر قطعه خط $[z_1, z_1+h]$،

$|h|<\delta$ می دهد $|z-z_1|<\delta$ و بنابراین $|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon$.

از لِمِ تخمین نتیجه می شود:

$$\left|\int_{[z_1,z_1+h]}\frac{f(z)-f(z_1)}{h}dz\right| \le \frac{\varepsilon}{|h|}|h|,$$

و از (۳)، با شرط $|h|<\delta$، نتیجه می شود:

$$\left|\frac{F(z_1+h)-F(z_1)}{h}-f(z_1)\right|\le\varepsilon$$

چون ε دلخواه است، داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z_1+h)-F(z_1)}{h}=f(z_1)$$

بنابراین $F' = f$، و این همان است که می خواستیم.

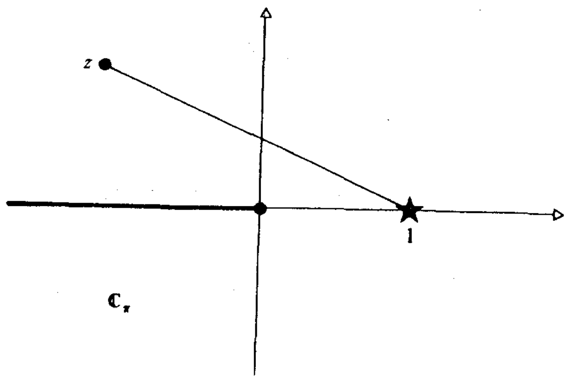
فرع ۸-۳. اگر f تابعی مشتق پذیر در یک دامنهٔ ستاره ای D باشد، آنگاه $\int_\gamma f = 0$، که در آن γ کانتور بستهٔ دلخواهی در D است. و انتگرال f بین هر دو نقطهٔ دلخواه در D مستقل از کانتور انتخابی بین این دو نقطه است.

برهان. این استنتاجی سریع از قضایای ۸-۲ و ۶-۱۱ است.

۳ . یک مثال – لگاریتم

تابع $f(z) = ۱/z$ در دامنهٔ $C \setminus \{۰\}$ مشتق‌پذیر است. $C \setminus \{۰\}$ دامنهٔ ستاره‌ای نیست، امّا اگر خود را به دامنه‌ای ستاره‌ای چون $D \subset C \setminus \{۰\}$ محدود کنیم، آنگاه نتایج بخش اخیر در D به کار می‌رود.

صفحهٔ بریدهٔ $C_\pi = C \setminus N$ که در آن $N = \{x + iy \in C | y = ۰, x \le ۰\}$ یک دامنهٔ ستاره‌ای همراه با ۱ به عنوان یک مرکز ستاره‌ای است. (شکل ۸–۷)

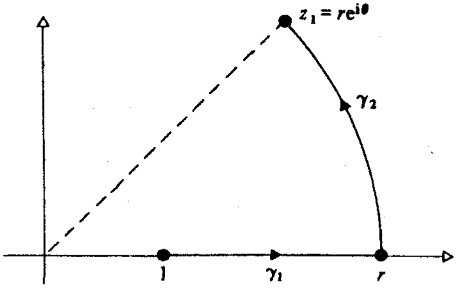


(شکل ۸–۷)

چون $۱/z$ در C_π مشتق‌پذیر است یک ضد مشتق دارد که آن را با log نشان می‌دهیم و ضابطه اش چنین است:

$$\mathrm{Log} z_۱ = \int_{[۱, z_۱]} ۱/z dz \quad (z_۱ \in C_\pi)$$

تصریح می‌کنیم که این انتگرال مستقل از مسیر مذکور است و به همین دلیل انتگرال را در طول یک کانتور انتخاب شدهٔ بخصوص می‌گیریم. فرض کنیم که $z_۱ = re^{i\theta}$ که در آن $r > ۰$ و $-\pi < \theta < \pi$ ، آنگاه تعریف می‌کنیم که $\gamma = \gamma_۱ + \gamma_۲$ که در آن $\gamma_۱$ قطعه خط $[۱, r]$ است و $\gamma_۲(t) = re^{it} (۰ < t < \theta)$. (چنانچه $r < ۱$ ، آنگاه $[۱, r]$ قطعه خط جهت‌دار از ۱ به عقب برگشته به r است چنانچه $۰ > \theta$ باشد، چنین اختیار می‌کنیم $\gamma_۲(t) = re^{-it} (۰ < t < \theta)$. (شکل ۸–۸)



(شکل ۸-۸)

آنگاه

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\, re^{i\theta} &= \int_{\gamma_1} 1/z\,dz + \int_{\gamma_2} 1/z\,dz \\ &= \int_1^r 1/t\,dt + \int_0^\theta \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt \\ &= \log r + i\theta\end{aligned}$$

و این، چنانچه خواسته باشیم، معبر دیگری به لگاریتم مختلط است که بالاخص دربارهٔ پیوستگی آرگومان در صفحهٔ بریدهٔ C_π برهانی بسی رضایت‌بخش‌تر از نوع کسل کنندهٔ آن در بخش ۲-۷ به دست می‌دهد. چون تابع log در C_π مشتق‌پذیر است، بنابراین پیوسته است. پس قسمت موهومی آن، آرگومان z ، هم در C_π پیوسته است.

۴. وجود موضعی یک ضد مشتق

فرض کنیم f در دامنهٔ دلخواهی چون D مشتق‌پذیر باشد. در این حال ممکن است f دارای ضد مشتقی که در سراسر D به کار آید نباشد. ولی D باز است. پس به ازاء هر $z_0 \in D$ یک قرص $N_r(z_0) \subseteq D$ وجود دارد. تابعی چون $F : N_r(z_0) \to C$ به طوری که به ازاء همهٔ zهای متعلق به $N_r(z_0)$ رابطهٔ

$F'(z) = f(z)$ برقرار باشد ضد مشتق موضعی f نامیده می شود. چون یک قرص یک دامنهٔ ستاره ای است، قضیهٔ ۸-۲ به ما می گوید که یک ضد مشتق موضعی f در هر قرص واقع در D وجود دارد.

این مطلب بی درنگ کار انتگرالگیری از تابعهای مشتق پذیر در طو ل یک کانتور دلخواه را آسان می کند زیرا به جای آن می توانیم در طول یک مسیر پله ای انتگرال بگیریم:

لِم ۸-۴. اگر γ کانتوری در دامنه ای مانند D از z_0 تا z_1 باشد، آنگاه مسیری پله ای مانند σ در D از z_0 به z_1 وجود دارد به طوری که در مورد هر تابع مشتق پذیر در D داریم $\int_\gamma f = \int_\sigma f$.

برهان بنابر لِم فرش کردن داریم $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$ که در آن هر γ_r در یک قرص $D_r \subseteq D$ قرار دارد. فرض کنیم σ_r یک مسیر پله ای در D_r از نقطهٔ آغازی γ_r به نقطهٔ پایانی آن باشد، آنگاه در دامنهٔ ستاره ای D_r، $\int_{\gamma_r} f = \int_{\sigma_r} f$ (فرع ۸-۳). اگر $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ آنگاه σ یک مسیر پله ای از z_0 تا z_1 در D، مطابق شکل ۸-۱۳ است و

$$\int_\gamma f = \sum_{r=1}^{n} \int_{\gamma_r} f = \sum_{r=1}^{n} \int_{\sigma_r} f = \int_\sigma f$$

۵. قضیهٔ کوشی

مرحله به مرحله پیش می رویم تا به قضیهٔ کوشی برسیم. ابتدا مستطیلی چون؛

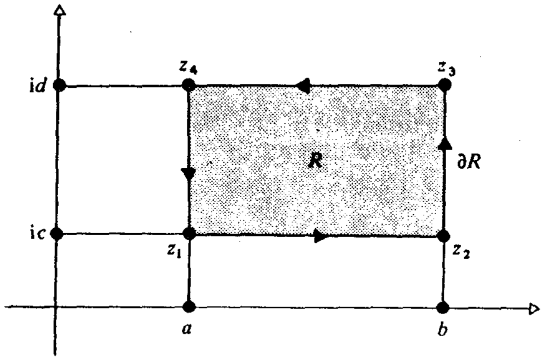
$$R = \{x + iy \in C | a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

با کانتور مرزی

$$\partial R = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_4][z_4, z_1]$$

که در آن $z_1 = a + ic$، $z_2 = b + ic$، $z_3 = b + id$، $z_4 = a + id$ باشد، در نظر

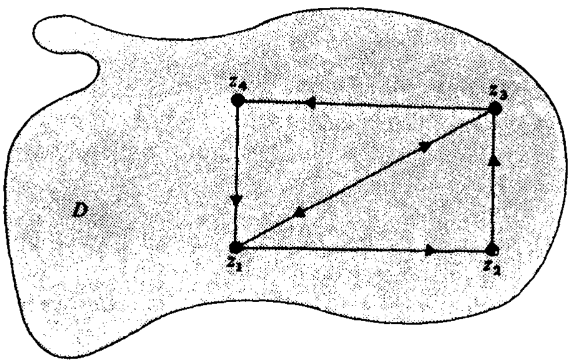
می گیریم (شکل ۸-۹)



شکل ۸-۹

لِمِ ۸-۶. اگر $R \subseteq D$ و f در D مشتق پذیر باشد، آنگاه $\int_{\partial R} f = 0$.

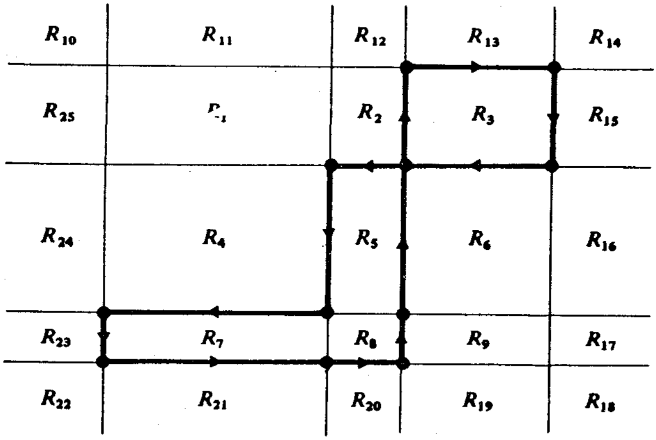
برهان . کانتورهای متقابل $[z_1, z_3]$، $[z_3, z_1]$ را درج کرده و قضیهٔ کوشی را در مورد یک مثلث دو بار به کار ببرید. (شکل ۸-۱۰)



(شکل ۸-۱۰)

حال یک مسیر پله ای بستهٔ دلخواه σ اختیار می نماییم و به درج قطعه خط های اضافی می پردازیم تا گردایه ای از مستطیلها تشکیل دهیم. برای انجام این

کار همهٔ قطعه خطهای افقی و قائم σ را تا بی نهایت امتداد می دهیم، و با این کار صفحه را به تعدادی متناهی از مستطیل ها تقسیم می کنیم: بعضی از این مستطیلها متنابهند، مثل $R_1,\ldots,R_k$ و بعضی نامتناهی مثل $R_{k+1},\ldots,R_m$. (نمونه ای در شکل ۸-۱۱ رسم شده، که در آن $m = ۲۵, k = ۹$)



شکل ۸-۱۱

در درون هر R_n، یک نقطهٔ z_n اختیار کرده و تعریف می کنیم:

$$v_n = w(\sigma, z_n)$$

(این از انتخاب z_n خاصی در درون R_n مستقل است.)

می گوییم R_n مربوط است اگر $v_n \neq ۰$ باشد. بدین سان R_n مربوط است فقط اگر σ آن را دور بزند. بخصوص مستطیل های $R_{k+1},\ldots,R_m$ همگی نامربوط هستند زیرا خارج از σ قرار دارند. (در شکل ۸-۱۱ مستطیلهای مربوط تنها عبارتند از: $R_۸, R_۷, R_۵, R_۲$.)

اکنون به اثبات این نکته می پردازیم که می توان σ را بر حسب مرزهای مستطیل های مربوط با گرفتن کپی های v_n از هر یک از مرزهای ∂R بیان داشت. (اگر v_n منفی باشد، کپی های $-v_n$ را از کانتورهای متقابل $-\partial R$ می گیریم.)

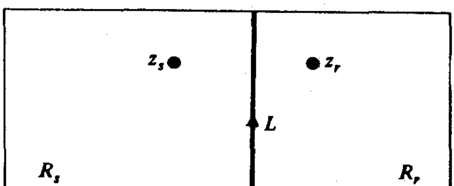
مثلاً در شکل ۸-۱۱ ، $R_۸, R_۷, R_۵, R_۳$ را در نظر می گیریم؛ با حذف قطعه خطهای روبرو که برای $R_۸, R_۷$ و برای $R_۸, R_۵$ مشترك هستند، کـا را به کانتـور پله ای σ خاتمه می دهیم.

برای این کـه نشـان دهیم کـه چنین کـاری در مـورد یک کـانتـور پله ای بسـتهٔ دلخواه σ به کـار می آیـد، جـای آن دارد کـه نماد $n\gamma$ را برای نمایش n کپی از γ به ازاء $n \geq ۰$ ؛ و $-n$ کــپی از $\gamma-$ به ازاء $n < ۰$ به کــار بگیــریم. پس از آن ســر راست ترین رویه آن است که با مجموعهٔ کانتورهای

$$A = \{v_۱\partial R_۱, v_۲\partial R_۲, \ldots, v_k\partial R_k, -\sigma\}$$

آغـاز به کار کـرده نشان دهیم کـه حـذف قطعه خط های مـتقـابل L و $-L$ ، هر جـا که روی دهند، منجر به حذف همهٔ آنها می شود.

فرض کنیم که در پایان q کپی از قطعه خطی چون L بر جای بماند. آنگاه L دست کم ضلـع یک مســتطیل مـتناهی مـانند R_s است، و به هنگام لـزوم با منفی گرفتن q، می توانیم فرض کنیم که L در همان جهتی کـشیده شده است که ∂R_s . همچنین فرض کنیم R_r مستطیلی بـاشد که در طرف دیگر L است (که R_r ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد). (شکل ۸-۱۲)



(شکل ۸-۱۲)

آنگاه مجموعهٔ کانتورهای بسته

$$B = A \cup \{-q\ \ \partial R_s\}$$

به آسانی نشان می دهد که هیچ کپی ای از L را شامل نیست. اگر اعداد پیچش برای کانتورهای B به دور z_s (درون R_s)، z_r (درون R_r) را حساب کنیم، آنگاه نبودن L در مجموعهٔ ساده شدهٔ کانتورها به ما می گوید که این دو عدد پیچش یکی هستند. اما عدد پیچش به دور z_s عبارت است از:

$$v_1 w(\partial R_1, z_r) + \ldots + v_k w(\partial R_k, z_s) - w(\sigma, z_s) - q w(\partial R_s, z_s) = -q$$

و به دور z_r عبارت است از:

$$v_1 w(\partial R_1, z_r) + \ldots + v_k w(\partial R_k, z_r) - w(\sigma, z_r) - q w(\partial R_s, z_s) = 0$$

بدین سان $q = 0$ می شود و خواسته ما نیز همین بود. این تأیید آن است که σ را می توان با اختیار کپی های v_n از هر یک از کانتورهای مستطیلی مربوط و حذف قطعه خطهای متقابل، هر جا که روی دهند، به دست آورد.

قضیهٔ ۸-۷. فرض کنیم σ یک مسیر پله ای بسته در دامنهٔ D باشد به طوری که $w(\sigma, z) = 0$ به ازاء هر $z \notin D$.

آنگاه به ازاء هر تابع دیفرانسیل پذیر f در D، $\int_\sigma f = 0$

برهان. σ را بر حسب مستطیلهای مربوط بیان می داریم و نشان می دهیم که هر مستطیل مربوط R_n تماماً باید در درون D جای گیرد. مسلماً، هنگامی که z در درون R_n است، $w(\sigma, z) = v_n \neq 0$ و بنابراین z باید که در D جای گیرد. از طرف دیگر، نقطه ای چون z واقع بر مرز ∂R_n یا بر σ واقع است (و بنابراین در D قرار دارد) و یا مثل نقاطی که در درون R_n قرار دارند بر همان مولفه از متمم σ قرار دارد، در نتیجه $w(\sigma, z) = v_n \neq 0$ و باز هم، $z \in D$.

چون سهمیه های در طول کانتورهای متقابل را حذف کنیم،

$$\int_\sigma f = \sum_{n=1}^{k} v_n \int_{\partial R_n} f$$

انتگرالهای سمت راست را فقط هنگامی باید در نظر بگیریم که $v_n \neq 0$؛ در این

حال مستطیل مربوط R_n تماماً در D قرار می گیرد: (بنابر لِمِ ۷-۶)

$$\int_{\partial R_n} f = 0$$

بدین سان، $\int_\sigma f = 0$ ، همان طور که می خواستیم.
اینک به مطلب اساسی این فصل می رسیم:

قضیهٔ کوشی (قضیهٔ ۸-۸)
فرض کنیم که f در دامنه ای چون D مشتق پذیر و γ یک کانتور بسته در D باشد که هیچ یک از نقاط خارج از D را دور نمی زند (به این معنی که به ازاء $z \notin D$، $w(\gamma,z) = 0$). آنگاه $\int_\sigma f = 0$.

برهان. یک مسیر پله ای σ در D هست به طوری که $\int_\gamma \phi = \int_\sigma \phi$ که در آن ϕ تابعی است مشتق پذیر و دلخواه در D (با به کار گیری لم ۸-۴). بخصوص $\int_\gamma f = \int_\sigma f$.
به ازاء $z_0 \notin D$ ، تابع $\phi(z) = 1/(z-z_0)$ هم در D مشتق پذیر است، و بنابراین

$$w(\sigma,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \phi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \phi = w(\gamma,z_0) = 0$$

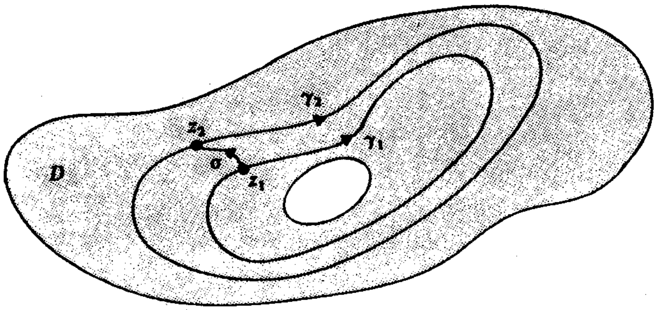
با توجه به لم ۸-۷ داریم $\int_\sigma f = 0$. بدین سان

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f = 0$$

۶. موارد استعمال قضیهٔ کوشی

قضیهٔ کوشی که هم اکنون بیان کردیم نه تنها بسادگی نشان می دهد که انتگرال به دور بعضی کانتورهای بسته برابر صفر است بلکه موارد استعمالی بسیار وسیعتر از این دارد و به ما امکان می دهد که انتگرالهای ناصفر را هم حساب کنیم.
مثلاً فرض کنیم γ_1, γ_2 دارای عددهای پیچش یکسان به دور همهٔ نقاط خارج از D باشند

(یعنی به ازاء هر $z \notin D$ ، $w(\gamma_1,z) = w(\gamma_2,z)$. فرض کنیم z_1 نقطهٔ آغاز، نقطهٔ پایان γ_1 ، z_2 نقطهٔ آغاز و پایان γ_2 باشند. کانتور دلخواهی چون σ از z_1 به z_2 در نظر بگیرید. (شکل ۸-۱۳)



(شکل ۸-۱۳)

آنگاه $\gamma = \gamma_1 - \sigma - \gamma_2 - \sigma$ (به دور γ_1 ، در طول σ ، به دور γ_1 - و برگشت در طول σ -)یک کانتور بسته در D است و $w(\gamma,z) = 0$ به ازاء $z \notin D$. با به کار گرفتن قضیهٔ کوشی. $\int_\sigma f = 0$ ، و در نتیجه

$$\int_{\gamma_1} f + \int_\sigma f - \int_{\gamma_2} f - \int_\sigma f = 0$$

و لذا

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

اگر به محاسبهٔ $\int_{\gamma_1} f$ نائل شویم. بسا که بتوانیم، مثل بالا، کانتور دیگری مثل γ_2 بیابیم، طوری که محاسبهٔ انتگرال $\int_{\gamma_2} f$ آسانتر باشد. از این واقعیت با بیان نتیجهٔ آن بعدها در همین کتاب بهره برداری خواهیم کرد. تکنیک وارد کردن کانتورهای متقابل σ,σ- که سهمیه های آنها مآلاً حذف می شوند روش مفید دیگری است که به ما امکان می دهد قضیه ای بسیار تواناتر را به اثبات برسانیم.

قضیهٔ ۸-۹ . (نوع تعمیم یافتهٔ قضیهٔ کوشی)
فرض کنیم $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ کانتورهایی بسته در دامنه ای چون D باشند به طوری که به ازاء همهٔ z هایی که به D متعلق نیستند

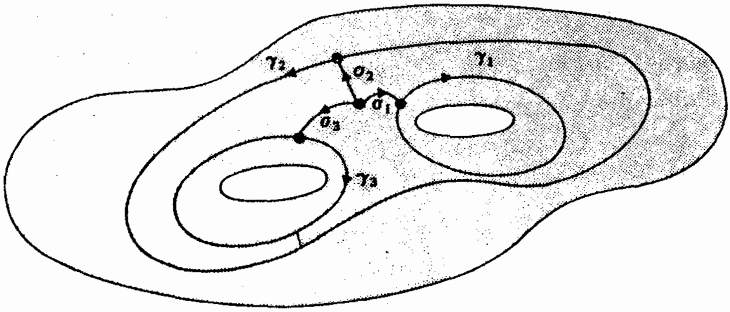
$$w(\gamma_1,z)+\dots+w(\gamma_n,z)=0$$

آنگاه، در مورد تابع مشتق پذیر f در D،

$$\int_{\gamma_1} f+\dots+\int_{\gamma_n} f=0$$

برهان. فرض کنیم γ_r در $z_r(1\le r\le n)$ آغاز می شود و پایان می یابد. نقطهٔ دلخواهی چون z_0 و کانتورهای $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ را در D انتخاب می کنیم که z_0 را به ترتیب به $z_1,\dots,z_n$ وصل می کنند. (شکل ۸-۱۴). آنگاه

$$\gamma=\sigma_1+\gamma_1-\sigma_1+\dots+\sigma_n+\gamma_n-\sigma_n$$



شکل ۸-۱۴

کانتورهای است بسته که آغاز و پایانش z_0 است و

به ازاء هر $z_0 \notin D$ ، $w(\gamma,z)=0$

بنابر قضیهٔ کوشی $\int_\gamma f=0$ ، و بنابراین

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\int_{\sigma_r} f+\int_{\gamma_r} f-\int_{-\sigma_r} f\right)=0$$

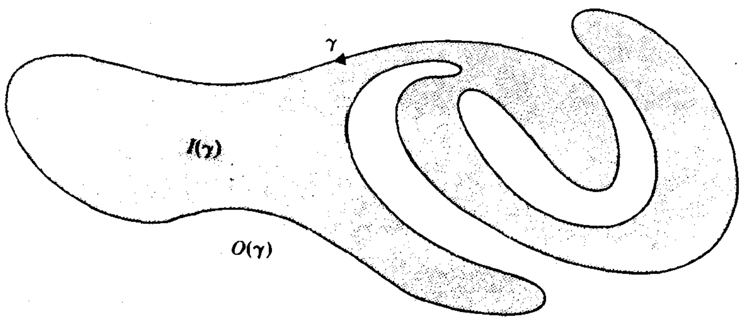
یعنی،

$$\sum_{r=1}^{n}\int_{\gamma_r} f = 0$$ □

دو کانتور بستهٔ γ_1، γ_2 و کانتوری چون σ در D که نقطه ای از γ_1 را به نقطه ای از γ_2 می پیوندد در نظر می گیریم (شکل ۸-۱۳)، آنگاه زوج کانتورهای σ و $-\sigma$ را یک قطع از γ_1 به γ_2 می‌نامند. برای این دلیلی تاریخی وجود دارد. انواع پیشین قضیهٔ کوشی بدون تغییر در مورد کانتورهای *جردن* به اثبات رسید. یک *کانتور بستهٔ جردن* کانتوری بسته چون $\gamma:[a,b]\to C$ است که خودش را قطع نمی کند، یعنی،

$a < t_1 < t_2 \le b$ نتیجه می دهد $\gamma(t_1) \ne \gamma(t_2)$.

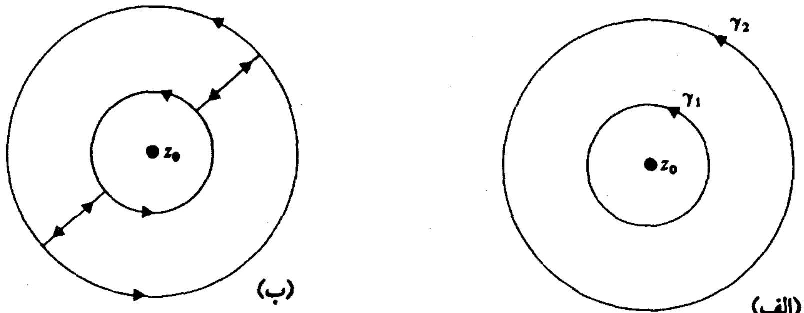
به طور شهودی واضح، ولی به طریق تحلیلی مشکل است که ثابت کنیم که هر کانتور بستهٔ *جردن* صفحه را به دو مولفه جدا می کند، $O(\gamma)$ یعنی نقاط خارج γ، و $I(\gamma)$ یعنی نقاط داخل γ، که هر دو مجموعه هایی همبند هستند. (شکل ۸-۱۵)



(شکل ۸-۱۵)

انواع پیشین قضیهٔ کوشی بیان می کردند که اگر $\gamma, I(\gamma)$ در D قرار داشته باشند، آنگاه $\int_\gamma f = 0$. در موارد استعمال لازم آمد که «قطع ها» را معرفی و وارد کنیم تا بتوانیم کانتورهای جردن را بسازیم. مثلاً، فرض کنیم f همه جا به استثنای z_0 مشتق پذیر باشد و کانتورهای جردن γ_1, γ_2 هر دو یک بار به دور z_0، مطابق

شکل ۸-۱۶a بگردند. در این شکل دو قطع ساخته شده تا دو کانتور جردن به دست بدهد به طوری که f درون هر یک از آنها مشتق پذیر باشد (شکل ۸-۱۶b . آنگاه معلوم است که انتگرال به دور هر یک از دو کانتور جردن صفر است و با حذف سهمیه های مربوط به قطعها نتیجهٔ $\int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f$ به دست می آید. روشهایی از این قبیل معمولاً متکی بر شهود هندسی هستند، که گاهی با برهان تحلیلی حمایت نمی شوند. با معرفی عدد پیچش به منظور



(شکل ۸-۱۶)

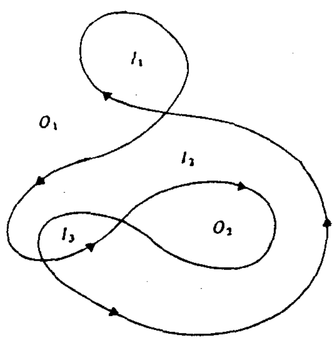
پیوند دادن آنالیز و شهود هندسی از چنین گودال های سرپوشیده ای شاید بتوان برحذر ماند، و با کمک آنها نیازی به محدود کردن این نظریه به کانتورهای جردن نیست. به جای این کار می توان درون کانتور بستهٔ *دلخواه* γ را چنین تعریف کرد

$$I(\gamma) = \{z \in C | w(\gamma, z) \neq 0\}$$

و بیرون γ را چنین

$$O(\gamma) = \{z \in C | w(\gamma, z) = 0\}$$

به طور کلی لزومی ندارد که $I(\gamma)$ ، $O(\gamma)$ همبند باشند. (در شکل ۸-۱۷ ، $O(\gamma)$ دارای دو مولفهٔ O_1, O_2 است، و در همین حال $I(\gamma)$ سه مولفه دارد، I_1, I_2, I_3 .)



(شکل ۸-۱۷)

قضیهٔ کـانتور جردن (که آن را اثبات نمی کـنیم)، با توجه به مقدمات فوق می گوید که بیرون و درون یک کانتور بستهٔ جردن هر دو همبند هستند.

در مورد کـانتور بستهٔ دلخـواهی چون γ قضـیهٔ کوشی را به صورتی که در قضیهٔ ۸-۸ آمده تجدید عبارت می کنیم

قضـیـه ۸-۱۰ . فـرض کنیم f در دامنه ای چون D مـشـتق‌پذیر بـاشـد. اگـر کـانتـور بسته ای مانند γ و درون آن $I(\gamma)$ در D واقع شوند، آنگاه $\int_\gamma f = 0$.

۷ . دامنه های همبند ساده

این نکتـه را دریـافتـه ایم (قـضـیـهٔ ۶-۱۱) کـه رابطه $\int_\gamma f = 0$ به ازاء همـهٔ کانتورهای بسته واقع در دامنهٔ D دقیقاً وقتی برقرار است که f یک ضد مشتق داشته باشـد. اکنون می توانیم شـرایط دقیـقی را بیـان کنیم که تحت آنـها چنین وضـعی در مورد همـه تابعهای مشـتق‌پذیر در دامنهٔ معلومی چون D رخ می دهد. می گوییم که دامنه ای چون D همـبند سـاده است اگـر بـه ازاء هر کـانتـور بسـتـهٔ γ در D و $z \notin D$ داشته باشیم $w(\gamma,z) = 0$. به طور هم‌ارز، اگر γ کانتوری بسته در D باشد، آنگاه $I(\gamma)$ در D قرار دارد. و بنابراین داریم:

قضیهٔ ۸-۱۱ . با دامنهٔ معلومی چون D به ازاد همهٔ کانتورهای بستهٔ γ در D و همهٔ تابعهای مشتق‌پذیر f در D رابطهٔ $\int_\gamma f = 0$ برقرار است اگر و فقط اگر D همبند ساده باشد.

برهان. اگر D همبند ساده باشـد، از قضیهٔ کوشی برمی‌آید که به ازاء هر γ در D و هر f مـشـتق‌پذیر در D داریم $\int_\gamma f = 0$. بعکس اگـر D همـبندسـاده نبـاشـد، آنگاه یک کانتور بستهٔ γ_0 در D و $z_0 \notin D$ وجود دارد به طوری که $w(\gamma_0,z_0) \neq 0$. فرض کنیم $\phi(z) = 1/2\pi i(z - z_0)$ ، آنگاه ϕ در D مشتق‌پذیر است و $\int_{\gamma_0} \phi = w(\gamma_0,z_0) \neq 0$.

تمرینهای ۸

۱ . از موارد زیر کدام یک دامنه های ستاره‌ای هستند، برای آنها که چنینند مرکز ستاره‌ای مشخص کنید و در مورد آنها که چنین نیستند جواب خود را مدلل بسازید.

(الف) $\{z \in C | z \neq x + io, x \leq ۱$ یا $x \geq ۱\}$

(ب) $\{z \in C | |z| > ۱\}$

(ج) $\{z \in C | z \neq e^{it}, ۰ \leq t \leq \pi\}$

(د) $z \in C | |z| > ۱$ ، $rez > ۰$ ویا $imz > ۰$ و یا$\}$

۲ . فرض کنیم $D = C \setminus \{۰\}$. به ازاء $z_۰ \in D$ در مورد هر یک از تابعهای زیر یک ضد مشتق در یک همسایگی از $z_۰$ مشخص کنید:

(الف) $۱/z$

(ب) $۱/z^۲$

(ج) $(z+۱)/z^۲$

(د) $(\cos z)/z$

(ه) $(\sin z)/z$

۳ . فرض کنیم:

$$\gamma_۱(t) = -۱ + \frac{۱}{۲}e^{it} \quad (۰ \leq t \leq ۲\pi)$$

$$\gamma_۲(t) = ۱ + \frac{۱}{۲}e^{it} \quad (۰ \leq t \leq ۲\pi)$$

$$\gamma(t) = ۲e^{-it} \quad (۰ \leq t \leq ۲\pi)$$

اگر $f(z)=1/(z^2-1)$ ، قضیهٔ ۸-۹ را به کار گرفته نتیجه بگیرید:

$$\int_\gamma f=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f$$

این گزاره را بر حسب عددهای پیچش $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ به دور ۱ ، ۱- تعبیر کنید.

۴. ثابت کنید $D=\{z\in C | z\neq \pm 1\}$ همبند ساده نیست. فرض کنیم

$$L_1=\{x+iy\in C | y=0, x\leq -1\}$$
$$L_2=\{x+iy\in C | y=0, x\geq 1\}$$
$$D_0=D\setminus (L_1\cup L_2)$$

نشان دهید که D_0 همبند ساده است. آیا یک دامنهٔ ستاره‌ای است؟ آیا $f(z)=1/(z^2-1)$ در D یا D_0 ضد مشتق دارد؟ در هر حالت، جواب خود را مدلل سازید.

۵. فرض کنیم $D=\{z\in C | z\neq \pm i\}$ و فرض کنیم γ یک کانتور بسته در D باشد. همهٔ مقادیر ممکنهٔ $\int_\gamma 1/(z^2+1)dz$ را بیابید. اگر σ کانتوری از ۰ تا ۱ باشد. همهٔ مقادیر ممکنهٔ $\int_\gamma 1/(z^2+1)dz$ را بیابید.

۶. فرض کنیم $\gamma_1=S_1+L-S_2-L$ ، $\gamma_2=S_1+L-S_2-L$ که در آن

$$S_1(t)=e^{it} \quad (0\leq t\leq 2\pi),$$

$$S_2(t)=2e^{it} \quad (0\leq t\leq 2\pi),$$

$$L=[1,2]$$

درون و بیرون γ_1, γ_2 را توصیف کنید.

فرض کنیم $f(z)=(\cos z)/z$. با نوشتن $\cos z$ به صورت یک سری توانی و قرار دادن $f(z)=(1/z)+g(z)$ ، یا غیر آن، به محاسبهٔ $\int_{\gamma_1} f, \int_{\gamma_2} f$ بپردازید. این محاسبات را با قضیهٔ ۸-۱۰ مقایسه کنید.

۷. فرض کنیم $D = \{z \in C | z \neq z_1, z \neq z_2, \ldots, z \neq z_k\}$ همچنین فرض می کنیم f در D مشتق پذیر است. نشان دهید که به ازاء هر کانتور بستهٔ γ در D

$$\int_{\gamma} f = \sum_{r=1}^{k} n_r \int_{S_r} f$$

که در آن S_r دایرهٔ به مرکز z_r است و n_r عددی است صحیح.
اگر $\lim_{z \to z_r} (z - z_r) f(z) = a_r \in C$ ، $r = 1, \ldots, k$ ، نشان دهید که

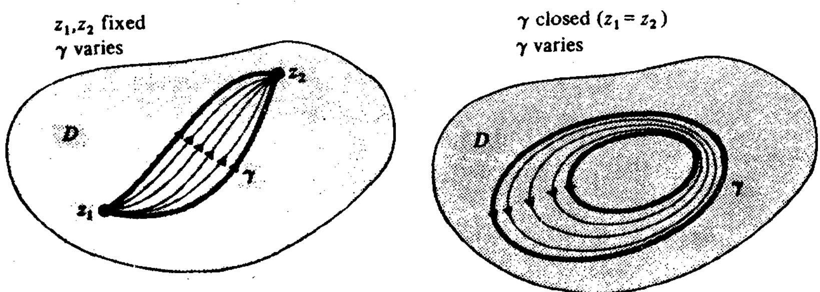
$$\int_{\gamma} f = \sum_{r=1}^{k} 2\pi i n_r a_r$$

فصل نهم

انواع هموتوپی از قضیهٔ کوشی

در این فصل به این نکته می‌پردازیم که وقتی به γ امکان تغییر می‌دهیم برای $\int_\gamma f$ چه پیش می‌آید. این مطلب برای هیچ یک از مطالب آتی در این متن ضرورت ندارد، و لذا همهٔ این فصل را می‌توان نادیده گرفت. با این وصف، شرایط دقیقی که تحت آنها γ ممکن است به طور پیوسته تغییر کند ولی $\int_\gamma f$ بدون تغییر باقی بماند در این فصل عنوان می‌شود. این کار به دو طریق انجام می‌شود. یکی آنکه نقاط منتهایی z_2, z_1 را ثابت نگه داریم و در عوض کانتور مورد نظر از z_1 تا z_2 به طور پیوسته تغییر شکل بدهد. دیگر آن که به کانتوری بسته امکان بدهیم که به طور پیوسته تغییر شکل بدهد. در هر دو حالت تغییر شکلها باید در دامنهٔ D که در آن f مشتق‌پذیر است صورت پذیرد (شکل ۹-۱)

این هر دو حالتهای خاصی از تنها یک نتیجه هستند (قضیهٔ کوشی در مورد یک مرز) که در بخش ۲ ثابت شده است. قبل از این، در بخش ۱، نشان می‌دهیم



شکل (۹-۱)

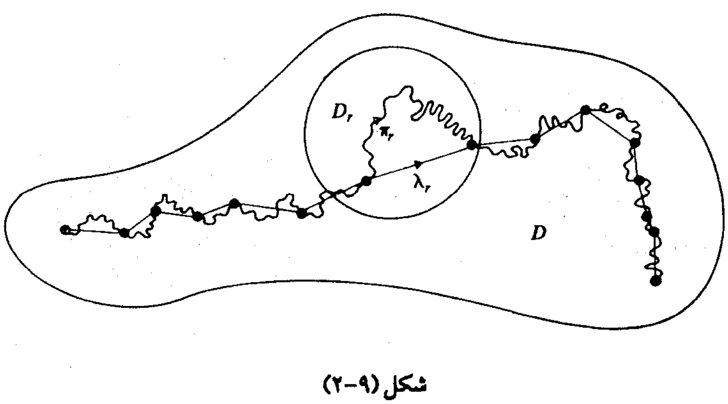
که وقتی f مشتق پذیر است برای تعریف $\int_\gamma f$ در طول یک مسیر دلخواه چگونه می توان شرایط بر γ را تخفیف داد. این کار به ما امکان می دهد که γ را آزادانه در $\int_\gamma f$ تغییر دهیم بدون آنکه نگران آن باشیم که تغییرات فیمابین همیشه کانتور هستند یا نه.

۱ . انتگرالگیری در طول مسیرهای دلخواه

فرض کنیم که f در دامنه ای چون D مشتق پذیر باشد. تاکنون همواره تاکید کرده ایم که انتگرالگیری باید در طول کانتوری در D انجام پذیرد. ولی، در مورد یک تابع مشتق پذیر، مسیری که به دقت انتخاب شده باشد چندان اهمیت ندارد. این را در لم ۷-۴ دیدیم که به ما امکان می دهد که یک کانتور را با یک مسیر پله ای تعویض کرده و همان نتیجه را بگیریم. همین تکنیک را برا ی تعریف مفهوم یک انتگرال در طول یک مسیر دلخواه به کار می گیریم. فرض کنیم $\pi : [a,b] \to D$ یک مسیر دلخواه در D باشد. آنگاه لم فرش کردن یک تقسیم جزیی $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ به دست می دهد به طوری که هر مسیر فرعی π_r تعریف شده بر $[t_{r-1}, t_r]$ در درون یک قرص $D_r \subseteq D$ واقع می شود. فرض کنیم γ چند ضلعی تقریب کننده به صورت $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ باشد که λ_r قطعه خطی است از $\pi(t_{r-1})$ به $\pi(t_r)$. آنگاه λ کانتوری است در D و می توانیم $\int_\pi f$ را چنین تعریف کنیم:

$$\int_\pi f = \int_\lambda f$$

(شکل ۹-۲ را ببینید)



شکل (۹-۲)

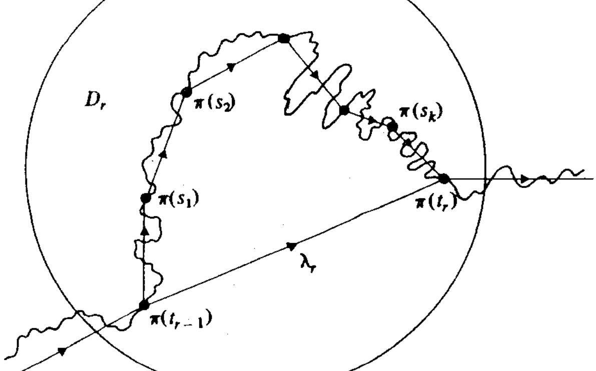
می توان ملاحظه کرد که این تعریف مستقل از انتخاب λ است، به شرط آنکه لم فرش کردن را به گونه ای که توصیف کرده ایم در آن به کار بگیریم. زیرا اگر نقاط تقسیم بیشتری بین t_{r-1}, t_r وارد کنیم:

$$t_{r-1} < s_1 < \dots < s_k < t_r,$$

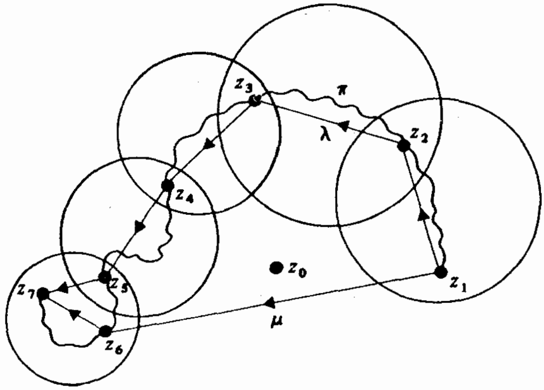
آنگاه $\pi(s_1), \dots, \pi(s_k) \in D_r$ ، آنگاه انتگرال f در طول λ_r دارای همان مقداری است که در طول چند ضلعی با راسهای $\pi(t_r), \pi(s_k), \dots, \pi(s_1), \pi(t_{r-1})$. (شکل ۹-۳).

بدین سان معلوم می شود که افراز ظریفتر انتگرال مورد نظر را تغییر نمی دهد. در چند ضلعی تقریبزن λ ، μ برای π را که با به کار گرفتنهای متفاوت لم فرش کردن به دست آمده اند در نظر می گیریم. فرض کنیم v چند ضلعی ای باشد که راسهایش با انتخاب همهٔ راسهای μ, λ حاصل شده اند. آنگاه $\int_\lambda f = \int_v f = \int_\mu f$ و تعریف $\int_\pi f$ به گونه ای که توصیف شد مستقل از انتخاب چند ضلعی تقریبزن است.

یک چند ضلعی تقریبزن دلخواه برای π به کار نمی آید. در شکل ۹-۴ فرض می کنیم $D = C \setminus \{z_0\}$. چند ضلعی λ با راسهای $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_7$ تقریبی است برای π که با به کار گرفتن لم فرش کردن به دست آمده است اما چند ضلعی μ با راسهای z_1, z_6, z_7 چنین نیست. اگر $f = 1/(z - z_0)$ $\int_\lambda f - \int_\mu f = 2\pi i$ می شود، بنابراین $\int_\lambda f \neq \int_\mu f$.



شکل (۹-۳)



شکل (۹-۴)

بررسی اینکه آیا قضیه های فصل ۸ برای مسیرهای دلخواه باز هم برقرار است کاری است سر راست، هر اندازه هم که این مسیر وحشی باشد (حتی منحنی های «فضا پرکن»). مثلاً، اگر f در D مشتق‌پذیر باشد و π به دور نقاطی خارج از D نگردد، آنگاه $\int_\pi f = \cdot$. با چنین نتایجی که در اختیار داریم می توانیم دیدگاههای خود را گسترده تر کنیم و به معرفی مفاهیم کلی از توپولوژی بپردازیم.

۲ . قضیهٔ کوشی برای یک مرز

فرض کنیم R مستطیل

$$\{x + iy \in C | a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

با کانتور مرزی ∂R باشد، (شکل ۹-۵). فرض را بر این می گذاریم که $\partial R : [o,p] \to C$ با طول کمان پارامتری شده است و در آن $P = ۲(b-a)+۲(d-c)$ محیط R است. (شکل ۹-۶)

با در دست داشتن نگاشت پیوستهٔ $\phi : R \to C$، مرز ϕ را $\partial\phi : [o,p] \to C$ تعریف می کنیم که در آن

$$\partial \phi(t) = \phi(\partial R(t)) \quad (\cdot \le t \le P)$$

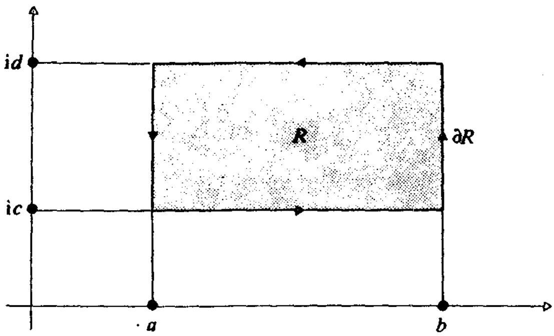
مثال ۱ . فرض کنیم:

$$\phi(z+iy) = xe^{i\pi y} \quad \{a \le x \le b,\ \cdot \le y \le 1\}$$

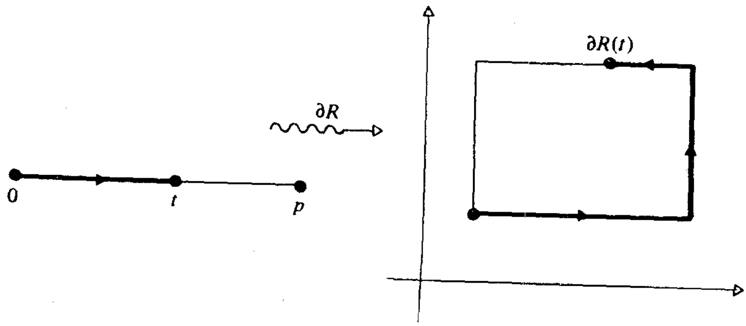
آنگاه مطابق شکل ۹-۷،

$$\partial\phi = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

مثال ۲ . فرض کنیم $R = \{x+iy \mid \cdot \le x \le 2,\ \cdot \le y \le 1\}$. به ازاء $x+iy \in R$ ، $x+y \ge 1$ ، تعریف می کنیم
آنگاه $\phi(x+iy) = x+iy$ ، و به ازاء $x+iy \in R$ ، $x+y \le 1$ ، $\phi(x+iy)$ را انعکاس $x+iy$ نسبت به خط $x+y=1$ تعریف می کنیم.



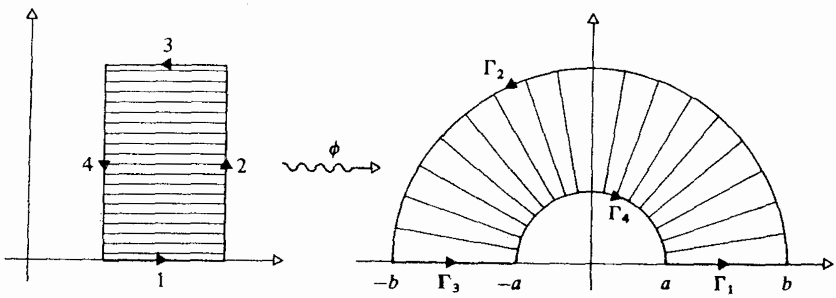
شکل (۹-۵)



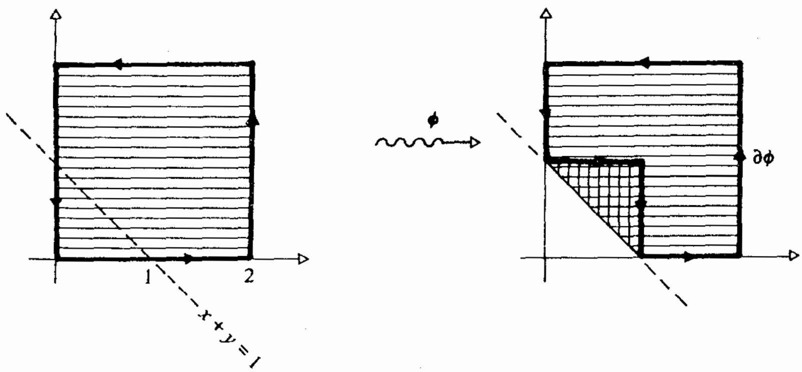
شکل (۹-۶)

آنگاه تاثیر ϕ تا کردن گوشهٔ دست چپ قاعدهٔ R است. (شکل ۹-۸) این مطلب را نشان می دهد که لزومی ندارد $\partial\phi$ مرز تصویر یعنی مرز $\phi(R)$ باشد.

ولی شکل ۹-۸ این نکته را آشکار می سازد که همهٔ نقاط داخل $\partial\phi$ درون تصویر $\phi(R)$ قرار می گیرند. اینک درست بودن این مطلب را ثابت می کنیم.



شکل (۹-۷)



شکل (۹-۸)

لم ۹-۱ . اگر $\phi : R \to C$ پیوسته باشد، آنگاه $I(\partial\phi) \subseteq \phi(R)$ که در آن

$$I(\partial\phi) = \{z \in C | w(\partial\phi, z) \neq 0\}$$

برهان. خلاف این را فرض کنید، یعنی $z_0 \notin \phi(R), z_0 \in I(\partial\phi)$ وجود دارد. فرض کنیم $D = C \setminus \{z_0\}$، آنگاه D یک دامنه است و $\phi(R) \subseteq D$. اگر

$f(z) = 1/2\pi i(z - z_.)$ ، آنگاه f در D مشتق پذیر است و

$$\int_{\partial\phi} f = w(\partial\phi, z_.)$$

عددی صحیح و ناصفر است.

مستطیل R را به چهار مستطیل مساوی $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$ تقسیم کنید، و فرض کنید $\phi^{(r)}$ تحدید ϕ به $R^{(r)}$ باشد. آنگاه به ازاء $r = 1, 2, 3, 4$ مرزهای $\partial\phi^{(r)}$ همگی مسیرهایی بسته در D هستند. چون

$$\int_{\partial\phi^{(r)}} f = w(\partial\phi^{(r)}, z_.) \ , \ \int_{\partial\phi} f = \sum_{r=1}^{4} \int_{\partial\phi^{(r)}} f$$

اقلاً یکی از این چهار انتگرال عدد صحیح و ناصفر است. مستطیل نظیر آن $R^{(r)}$ را با R_1 و تحدید ϕ به R_1 را با ϕ_1 نشان دهید. با تقسیم R_1 به چهار مستطیل مساوی و تکرار این رویه، دنبالهٔ تو در تویی از مستطیلها

$$R \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq \dots$$

به دست می آید به طوری که هر $\int_{\partial\phi_n} f$ یک عدد صحیح ناصفر است.

این دنباله از مستطیلها شامل یک نقطهٔ $z_1 \in R$ است. به ازاء $\varepsilon = |\phi(z_1) - z_.|$ ، داریم $N_\varepsilon(\phi(z_1)) \subseteq D$. بنابر پیوسته بودن ϕ یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

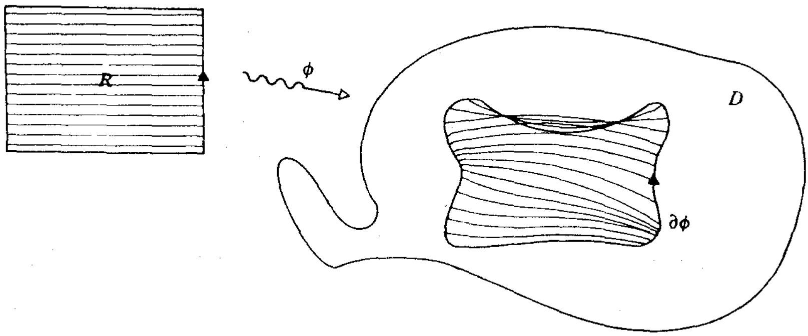
$$\phi\big(N_\delta(z_1) \cap R\big) \subseteq N_\varepsilon\big(\phi(z_1)\big)$$

به ازاء N ی به اندازهٔ کافی بزرگ، $R_N \subseteq N_\delta(z_1)$ ، بنابراین $\partial\phi_N$ مسیری است بسته در قرص $N_\varepsilon(\phi(z_1))$. ولی f در $N_\varepsilon(\phi(z_1))$ (که دامنه ای است ستاره ای) مشتق پذیر است. بنابراین $\int_{\partial\phi N} f = 0$. (فرع ۸-۳)، که متناقض با این واقعیت است که $\int_{\partial\phi N} f$ یک عدد صحیح ناصفر است.

قضیهٔ ۹-۲ . *(قضیهٔ کوشی برای یک مرز)*

اگر $\phi : R \to D$ نگاشتی پیوسته از مستطیل R بتوی دامنهٔ D (شکل ۹-۹) و f در D مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\int_{\partial\phi} f = 0$$



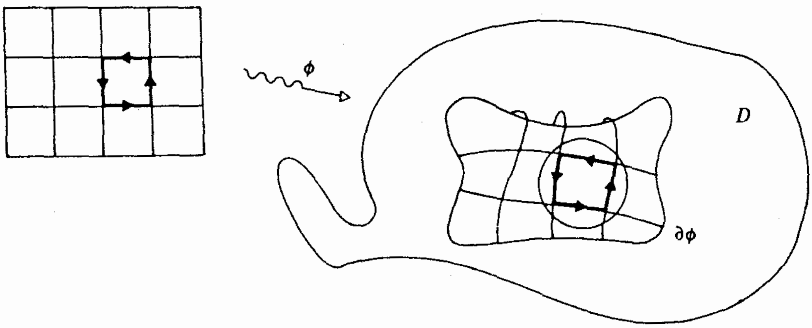
شکل (۹-۹)

برهان. R را به مستطیلهای $\{R_{pq}\}$ تقسیم کنید به طوری که $\phi(R_{pq})$ در قرص $D_{pq} \subset D$ قرار گیرد. (شکل ۹-۱۰). فرض کنیم ϕ_{pq} تحدید ϕ بر R_{pq} باشد، آنگاه مرز آن $\partial\phi_{pq}$ مسیری است بسته در قرص D_{pq} ، بنابراین

$$\int_{\partial\theta_{pq}} f = 0$$

با جمع بستن همهٔ انتگرالها به ازاء $1 \le p \le n$ ، $1 \le q \le m$. و حذف انتگرالهایی که در طول مسیرهای مخالف هستند، خواهیم داشت :

$$\int_{\partial\phi} f = 0$$ □



(شکل ۹-۱۰)

۳. هموتوپی

یک هموتوپی بین دو مسیر $\gamma_0 : [a,b] \to D$ ، $\gamma_1 : [a,b] \to D$ ، صرفنظر از جزئیات، عبارت است از: یک *خانوادهٔ به طور پیوسته در حال تغییر* از مسیرهای $\gamma_s : [a,b] \to D$ ، که در آن s بازهٔ $[0,1]$ را طی می‌کند. در آغاز $\gamma_s = \gamma_0, s = 0$ ؛ در پایان $\gamma_s = \gamma_1, s = 1$.

این تعریف را به طور دقیق چگونه بیان کنیم؟ توجه کنید که تمام این خانواده به دو متغیر بستگی دارد: پارامتر s، و متغیر اصلی t که موقعیت روی مسیر مربوطه را به دست می‌دهد. همه چیز را می‌توانیم در قالب یک تابع γ از (t,s) درآوریم به شرط آنکه قرار دهیم:

$$\gamma(t,s) = \gamma_s(t)$$

آنگاه طبیعی است که تاکید کنیم که γ ، به عنوان تابعی از دو متغیر حقیقی، پیوسته باشد. این تضمینی است بر آنکه هر γ_s فیمابین، مسیری پیوسته را معین می‌کند، و اینکه این مسیرها خود به طور پیوسته با s تغییر می‌کنند.

بدین سان به تعریف زیر هدایت می‌شویم. یک هموتوپی در D بین γ_0, γ_1 ، مطابق فوق، نگاشتی است پیوسته مانند

$$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to D$$

به طوری که

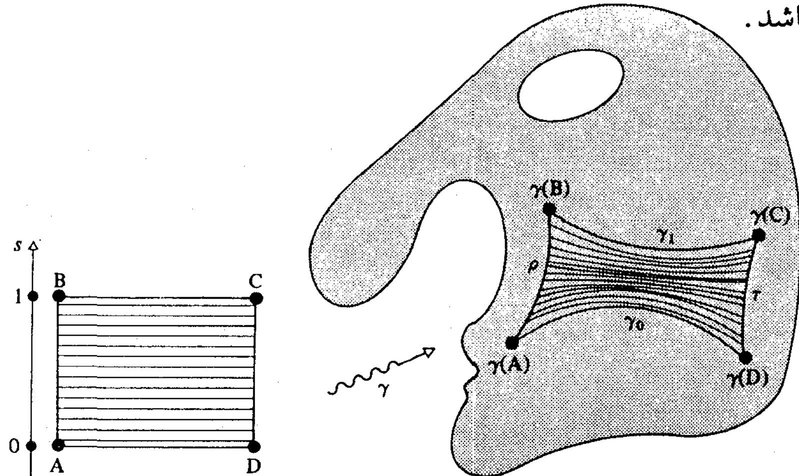
$$\gamma(t,\cdot) = \gamma_{\cdot}(t) \quad \text{به ازاء همهٔ } t \text{ های متعلق به } [a,b]$$

$$\gamma(t,1) = \gamma_{1}(t) \quad \text{به ازاء همهٔ } t \text{ های متعلق به } [a,b]$$

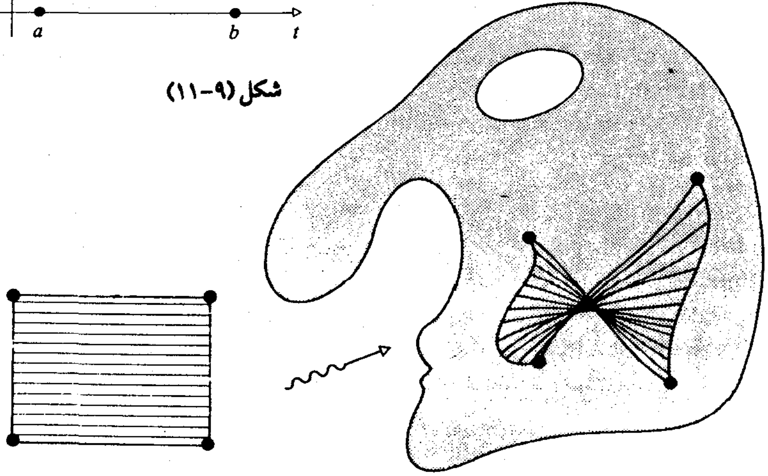
این نظریه را در شکل ۹-۱۱ توضیح داده ایم.

با شناسایی (t,s) به صورت $t+is$ مناسبت دارد که $[a,b]\times[\cdot,1]$ را به عنوان زیر مجموعه ای از D بدانیم.

شکل ۹-۱۱ به خوبی نمایانگر تغییر پیوسته در γ_s است، ولی در یک به یک بودن γ به خوبی گمراه کننده است. برای یک به یک بودن γ از نظر کلی دلیلی وجود ندارد، و یک هموتوپی کاملاً مناسب ممکن است به خوبی شبیه شکل ۹-۱۲ باشد.



شکل (۹-۱۱)



شکل (۹-۱۲)

البته از دیدگاه هندسی $[a,b]\times[0,1]$ یک مستطیل است، و مرز آن مسیری است بسته (با گوشه ها!). اگر به طریقی، چهار ضلع این مستطیل را پارامتری کنیم، و سپس γ را برای نگاشتن نتیجه بتوی D به کار بگیریم، در D مسیرهایی را به دست می آوریم که به هم می پیوندند تا مسیری بسته، مانند مثال مربوط به شکل ۹-۱۲، فراهم شود.

هدف ما این است که قضیهٔ کوشی را برای مرزی از این مجموعه از مسیرها به کار بگیریم. امّا، مساله ای در پیش است: دو ضلعی که γ_0,γ_1 را به دست می دهند آشکارا برای ما مفیدند، ولی دو ضلع دیگر (که در شکل ۹-۱۱، با τ,ρ نشان شده اند) به نظر می آیند که مایهٔ دردسر باشند. ما هم، به همین جهت، شرایطی را ضمیمه می کنیم تا آنها را حذف کنیم. برای انجام این کار دو راه آشکار وجود دارد:

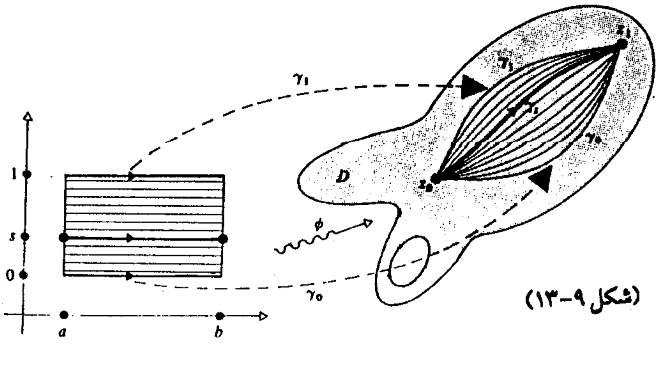
(الف) تاکید بر اینکه هر یک از τ,ρ فقط به یک نقطه در D می انجامند.

(ب) تاکید بر اینکه τ,ρ هر یک دیگری را حذف می کند.

این دو شرط به دو نوع هموتوپی مقیدتر منجر می شوند: هموتوپی نقطهٔ پایانی ثابت، و هموتوپی مسیر بسته. در دو بخش بعدی به توصیف تفصیلی این دو می پردازیم.

۴ . هموتوپی نقطهٔ پایانی ثابت

فرض کنیم مستطیل R نمایشگر $\{t+is\in C | a\le t\le b\ ,\ 0\le s\le 1\}$ باشد. دو مسیر $\gamma_0:[a,b]\to D$ ، $\gamma_1:[a,b]\to D$ را هموتوپیک *با انتهای ثابت* در D می نامند اگر نگاشت پیوسته ای چون $\phi:R\to D$ وجود داشته باشد به طوری که (شکل ۹-۱۳)



(شکل ۹-۱۳)

$$\phi(t,0) = \gamma_0(t) \qquad (a \le t \le b),$$
$$\phi(t,1) = \gamma_1(t) \qquad (a \le t \le b),$$
$$\phi(a,s) = z_0 \qquad (0 \le s \le 1),$$
$$\phi(b,s) = z_1 \qquad (0 \le s \le 1),$$

اگر فرض کنیم $\gamma_s(t) = \phi(t,s) \quad (a \le t \le b)$ ، آنگاه γ_s مسیری است در D از z_0 تا z_1 ، و چون s از ۰ تا ۱ افزایش یافته است، γ_s در D از γ_0 تا γ_1 «به طور پیوسته تغییر شکل داده» است.

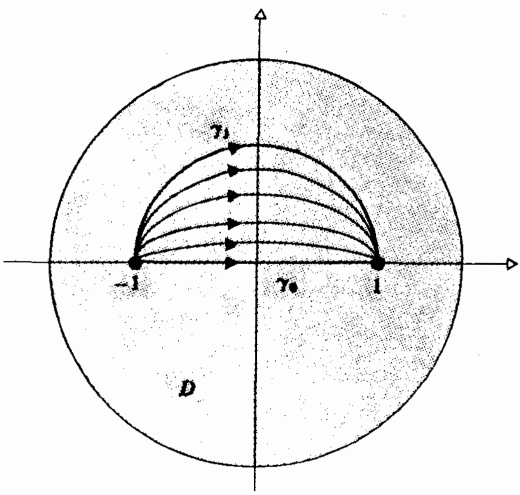
مثال. اگر

$$D = \{z \in C \mid |z| < 2\}, \gamma_0(t) = t(-1 \le t \le 1), \gamma_1(t) = e^{\frac{1}{2}\pi i(t-1)} \quad (-1 \le t \le 1)$$

آنگاه γ_0 و γ_1 در D با نقطهٔ پایانی ثابت هموتوپیک هستند طوری که

$$\phi(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)(-1 \le t \le 1, 0 \le s \le 1)$$

(شکل ۹-۱۴)



(شکل ۹-۱۴)

به عنوان فرعی بر قضیهٔ ۹-۲، نتیجه می گیریم که:

قضیهٔ ۹-۳. اگر f در دامنهٔ D مشتق‌پذیر و γ_0 نسبت به γ_1 در D با نقطهٔ پایانی ثابت هموتوپیک باشد، آنگاه $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_0} f$ می شود.

برهان. نگاشتی پیوسته چون $\phi : R \to D$ داریم که در آن

$$\phi(t,0) = \gamma_0(t) \quad (a \le t \le b),$$
$$\phi(t,1) = \gamma_1(t) \quad (a \le t \le b),$$
$$\phi(a,s) = z_0 \quad (0 \le s \le 1)$$
$$\phi(b,s) = z_1 \quad (0 \le s \le 1),$$

(مطابق شکل ۹-۱۳)

اگر $\rho_r : [0,1] \to D$ مسیر نقطه‌ای $\rho_r(t) = z_r$، به ازاء $r = 0,1$ باشد، آنگاه $\int_{\rho_r} f = 0$ و $\partial\phi = \gamma_0 + \rho_1 - \gamma_1 + \rho_0$. بنابراین قضیه کوشی د ر مورد یک مرز،

$$\int_{\partial\varnothing} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f = 0$$

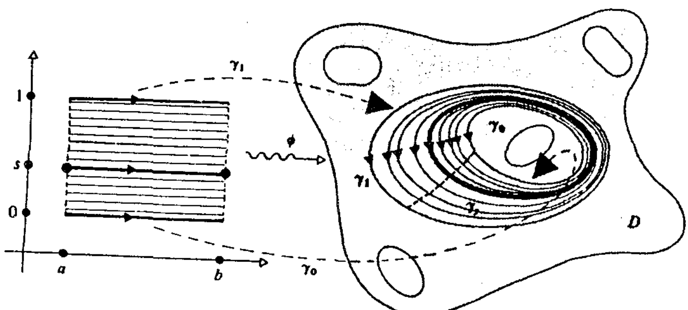
و بنابراین

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

۵. هموتوپی مسیر بسته

یک بار دیگر مستطیل R را به صورت $\{t + is \in C | a \le t \le b\,,\ 0 \le s \le 1\}$ در نظر می گیریم. در مسیر $\gamma_0 : [a,b] \to D$، $\gamma_1 : [a,b] \to D$ را هموتوپیک *از طریق مسیرهای بسته* در D می نامند اگر نگاشت پیوسته ای چون $\phi : R \to D$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\phi(t,0) = \gamma_0(t) \quad (a \le t \le b)$$
$$\phi(t,1) = \gamma_1(t) \quad (a \le t \le b)$$
$$\phi(a,s) = \phi(b,s) \quad (0 \le s \le 1)$$



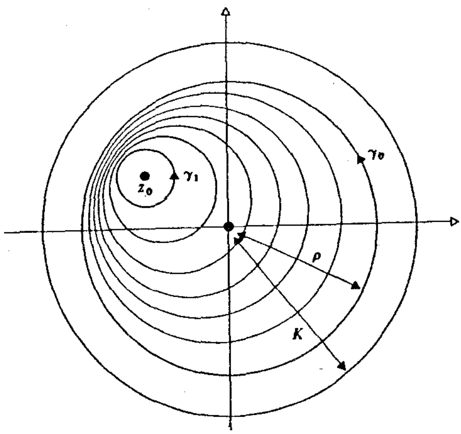
شکل (۹-۱۵)

چنانچه ، بار دیگر ، تعریف کنیم $(a \le t \le b)$ $\gamma_s(t) = \phi(t,s)$ آنگاه γ_s مسیری بسته در D است و هنگامی که s از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، γ_s از γ_0 تا γ_1 «به طور پیوسته تغییر شکل می دهد».

مثال. به ازاء $|z_0| < k$ ، فرض می کنیم $D = \{z \in C \mid |z| < K, z \ne z_0\}$ نیز به ازاء $|z_0| < \rho < k$ ، فرض می کنیم $\gamma_0(t) = \rho e^{it} (0 \le t \le 2\pi)$ ، همچنین به ازاء $0 < \varepsilon < k - |z_0|$ ، فرض می کنیم

$\gamma_1 = z_0 + \varepsilon e^{it} (0 \le t \le 2\pi)$ (شکل ۹-۱۶). آنگاه γ_0 نسبت به γ_1 از طریق مسیرهای بسته در D هموتوپیک است طوری که

$$\phi(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \quad (0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le 1)$$



شکل (۹-۱۶)

قضیهٔ ۹-۴ . اگر f در D مشتق پذیر و γ_0 و γ_1 مسیرهایی باشند بسته که از طریق مسیرهای بسته در D هموتوپیک هستند، آنگاه $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_0} f$.

برهان. نگاشت پیوسته ای چون $\phi : R \to D$ داریم به طوری که

$$\phi(t,0) = \gamma_0(t) \quad (a \le t \le b)$$
$$\phi(t,1) = \gamma_1(t) \quad (a \le t \le b)$$
$$\phi(a,s) = \phi(b,s) \quad (0 \le s \le 1)$$

فـــرض کنیم $(0 \le t \le 1)$ $\sigma(t) = \phi(a,t)$ ، آنگاه $\partial \phi = \gamma_0 + \sigma - \gamma_1 - \sigma$ (و این بدان معنی است که، به معنای بخش ۷–۸ ، σ را فیمابین γ_0 تا γ_1 بریده ایم) .
بنابر قضیهٔ کوشی برای یک مرز،

$$\int_{\partial\phi} f = \int_{\gamma_0} f + \int_{\sigma} f - \int_{\gamma_1} f - \int_{\sigma} f = 0$$

بنابراین

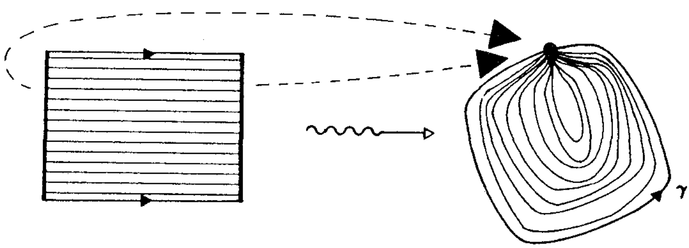
$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

□

می گوییم مسیر γ در D *با صفر هموتوپیک* است به شرط آنکه از طریق مسیرهای بستهٔ $\beta : [a,b] \to D$ هموتوپیک باشد به طوری که $\beta(t)$ به ازاء هر $t \in [a,b]$ ثابت باشد (طوری که تصویر β در D یک نقطهٔ تنها باشد) . بی درنگ نتیجه می گیریم که :

فرع ۹–۵. فرض کنیم f در D مشتق پذیر و γ مسیری بسته در D باشد که با صفر هموتوپیک است. آنگاه $\int_{\gamma} f = 0$ می شود.

معنی هندسی هموتوپیک بودن با صفر این است که γ می تواند به طور پیوسته تغییر شکل دهد به یک نقطه تبدیل شود (یا به جای آن، به مسیری که تصویرش تنها یک نقطهٔ $z_1 \in D$ است) مانند شکل ۹–۱۷ .



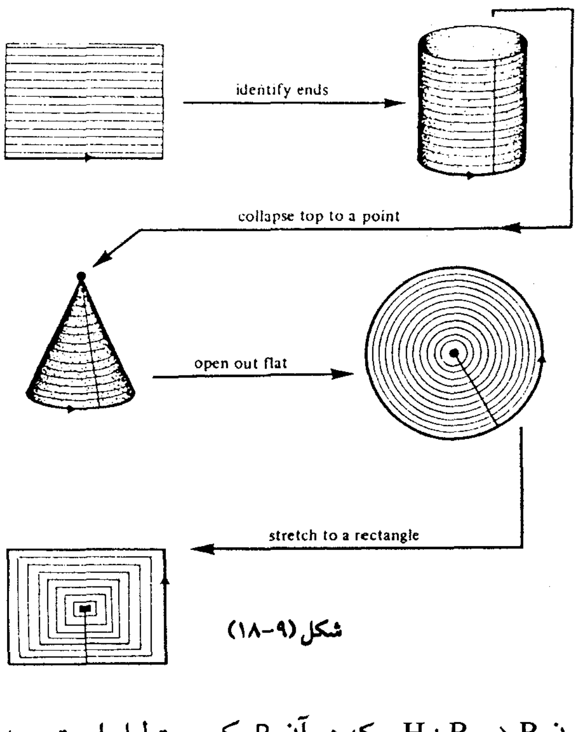
(شکل ۹–۱۷)

با قضیهٔ کوشی برای یک مرز شروع کرده ابتدا پایائی هموتوپی برای انتگرال مورد نتیجه گرفته (به ازاء هموتوپی با نقطهٔ پایانی ثابت یا هموتوپی مسیر بسته)،

براساس آن دریافته ایم که این انتگرال برای یک مسیر هموتوپیک با صفر برابر صفراست. در عین حال، می توانیم با فرع ۹-۵ شروع کرده و در صورت تمایل، با کمک گزارهٔ زیر، به بحث در طریق دیگر بپردازیم.

گزارهٔ ۹-۶ . یک کانتور بستهٔ γ در D مرزی چون $\partial\phi$ است، که به پرمایش (پارامتری کردن) وابسته است، اگر و فقط اگر γ با صفر هموتوپیک باشد.

برهان. ابتدا توجه کنید که نیاز به تجدید پرمایش بازه ای که γ روی آن تعریف شده است ممکن است پیش بیاید و این مربوط است به چگونگی انتخاب یک پرمایش مشخص برای مرزی چون $\partial\phi$. به شرط آنکه تصویر γ و تصویر $\partial\phi$ بر هم منطبق شوند می توان به تطبیق پارامتر پرداخت. این کار برهان ما را به یک بحث هندسی تحویل می کند. حال عصارهٔ برهان را در یک رشته از تصاویر ارائه می دهیم، و تعریف های تحلیلی (متعارف) و بررسیهای لازم برای دقیق ساختن برهان را به خواننده وامی گذاریم.



شکل (۹-۱۸)

نگاشتی چون $H : R \to R$ ، که در آن R یک مستطیل است، به صورتی که در شکل ۹-۱۸ نشان داده ایم، تعریف می کنیم. تعریف مورد نظر ما به مراحل زیر

تقسیم می شود:

(۱) شناسایی اضلاع قائم روبروی هم، برای به دست آوردن یک استوانه.

(۲) فشردن لبهٔ فوقانی تا تبدیل به یک نقطه، برای به دست آوردن یک مخروط.

(۳) گسترش این مخروط در یک صفحه برای به دست آوردن یک قرص.

(۴) کش دادن این قرص برای به دست آوردن یک مربع.

فرض کنیم که γ یک مرز است، مثلاً $\gamma = \partial \phi$ ، که در آن $\phi : R \to D$. آنگاه $\phi.H : R \to D$ یک هموتوپی است. ضلع پایین R ، که با خط پر در اولین نمودار مشخص شده است، به (تصویر تحت ϕ از) $\partial \phi$ نگاشته می شود. ضلع بالایی به یک نقطه نگاشته می شود. بنابراین γ با صفر هموتوپیک است.

اکنون فرض کنید γ منحنی بسته ای هموتوپیک با صفر باشد. آنگاه می توانیم نگاشتی از مخروط مزبور به توی D چنان تعریف کنیم که دایرهٔ قاعده به (تصویر) γ برود. بنابراین (با برگردان دو مرحلهٔ اخیر در تعریف H) می توانیم R را به توی D طوری بنگاریم که محیط آن به γ برود. نتیجه اینکه (در ارتباط با پرمایش) $\gamma = \partial \phi$.

۶. مقایسهٔ قضیه های کوشی

یکی از موجبات عمومی نگرانی برا ی دانشجویان آنالیز مختلط رنج حاصل از قضیه های کوشی است که فرضهای متعدد متفاوت و انواع مشابهی از نتایج دارند، در حالی که هر یک از آنها را می توان از دیگری استخراج کرد. در چنین مواردی شاید مصلحت در این باشد که مایهٔ تسلّی را جای دیگری غیر از ریاضیات جستجو کنیم (شاید میان شعرا). *رودیارد کیپلینگ* در «*در عصر حجر*» به طوری تحسین انگیز به این نکته پرداخته است:

«نُه و شصت راه برای ساختن ترانه های ایلیاتی وجود دارد.

و - یک - یک - آنها دلپذیرند.»

در مورد قضیهٔ کوشی هم اغلب همین است: همه انواع مختلف آن اصولاً یکسانند.

در قلب هر یک از انواع قضیهٔ کوشی وجود موضعی یک ضد مشتق مطرح است (بخش ۵–۸). هر یک از این قضایا خود، به عنوان مفروضات، شرایطی فراهم می‌آورند که این نتیجهٔ موضعی به طریقی به *سراسری شدن* بیانجامد.

مثلاً، در فصل ۸ نتیجهٔ موضعی به دست آمده منجر به *قضیهٔ کوشی مرکزی* شد، به این معنی که اگر f در D مشتق‌پذیر باشد و کانتوری بسته چون γ به دور نقطه‌های خارج از D بچرخد، آنگاه $\int_\gamma f = 0$. این شرط «نچرخیدن» در واقع تضمین آن است که «قطعات موضعی» ضد مشتق در تراز سراسری به خوبی برازندهٔ هم هستند. نوع تعمیم یافته، با چندین کانتور $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$، فرعی ساده بود که با زدن قطعهایی میان کانتورها به دست آمد.

در این فصل به مطالعه چگونگی رویدادها هنگامی که یک کانتور تغییر شکل می‌دهد پرداختیم. باز هم وجود موضعی یک ضد مشتق در کار است: که به ما امکان می‌دهد که انتگرال f را در طول یک مسیر دلخواه تعریف کنیم، و این همان نتیجهٔ عمدهٔ فصل ۸ است، که انتگرال f در طول یک مرز برابر صفر است. این هم یک سراسری کردن است: همراه با یک مرز دلخواه نگاشتی از تمامی یک مستطیل وجود دارد، و همهٔ ضد مشتقهای موضعی در سراسر تصویر این مستطیل دقیقاً برازندهٔ یکدیگرند. بعلاوه، دیدیم که یک مسیر یک مرز است اگر و فقط اگر با صفر هموتوپیک باشد. چون هموتوپی انتگرال مورد نظر را به دور یک کانتور بسته پایا نگه می‌دارد، همین دلیلی می‌شود که چرا آشکارا $\int_\gamma f = 0$ است.

بدین سان دو نوع متفاوت از قضیهٔ کوشی داریم: یکی برای منحنی هایی که به دور نقطه های خارج از D نمی چرخند و دیگری برای منحنی هایی که با صفر هموتوپیک هستند. ولی این دو مثل *خانم کُلُنل و جودی اُر گرادی* «زیر پوستهایشان خواهر هستند» (یک روح در دو بدن هستند.)

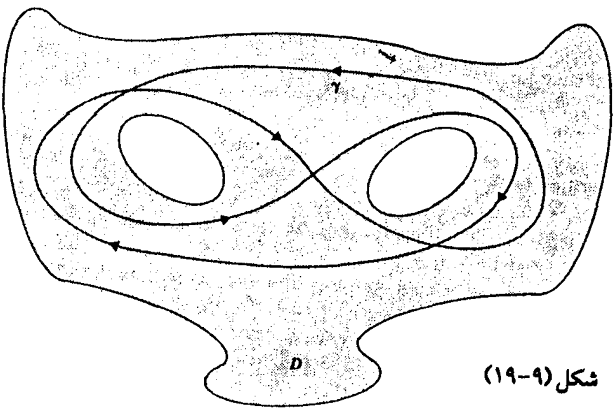
واضح است که، اگر γ هموتوپیک با صفر باشد و $z_0 \notin D$، آنگاه $w(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 0$ زیرا که $1/(z - z_0)$ در D مشتق‌پذیر است.

بنابراین نوع «نچرخیدن» قضیهٔ کوشی بسادگی متضمن نوع «هموتوپی» آن است.

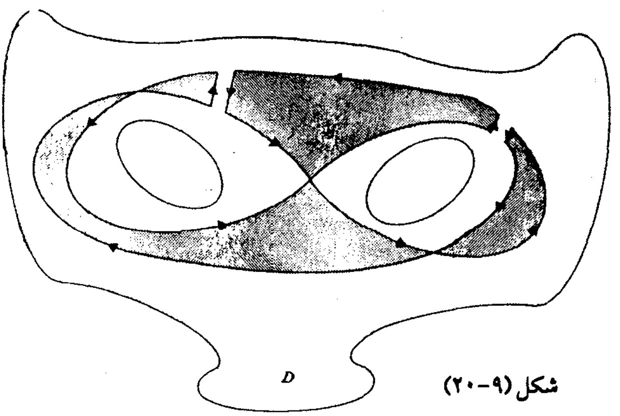
در واقع نوع «نچرخیدنی» قضیهٔ کوشی به معنای زیر اکیداً قویتر است: منحنی شکل ۹–۱۹ به دور هیچ $z_0 \notin D$ نمی چرخد، اما آشکار است که

هموتوپیک با صفر نیست. (گرچه اثبات این مطلب مشکلتر از آن است که به نظر می رسد). بنابراین فرض «نچرخیدنی» ضعیفتر است، و به همین جهت در موارد بیشتری مستقیماً به کار می آید.

ولی این اختلاف سطحی، هنگامی که عمیقتر بنگریم، محو می شود زیرا هر منحنی را که به دور $z_\cdot \notin D$ نمی چرخد به مسیری بسته (یا مجموعه ای از مسیرها) که با صفر هموتوپیک است می توان تبدیل کرد، و این کار با یک رشته از قطع ها، که سهم آنها در انتگرال مورد نظر حذف می شود، انجام پذیر است. مثلاً، شکل ۹-۱۹ به همین ترتیب به شکل ۹-۲۰ تبدیل شده است. اثبات این واقعیت هم کم بها نیست، اما نشان می دهد که نتایج عملی که از عمومیت اضافی حاصل می شوند غالباً نادرست هستند. (نتایج نظری خیل مهمترند: شرط «نچرخیدنی» قسمتی از «نظریهٔ همولوژی» است و آنچه ما اینجا داریم رابطهٔ بین همولوژی و هموتوپی است. اما آن داستان دیگری است.)



شکل (۹-۱۹)



شکل (۹-۲۰)

تمرینهای ۹

۱. فرض کنیم $D = \{z \in C | z \neq \cdot\}$ و به ازاء $r = 1, 2$ ، $S_r(t) = re^{it} (\cdot \leq t \leq 2\pi)$. نگاشت پیوسته‌ای چون $\phi : R \to D$ ، که در آن R یک مستطیل است چنان تعریف کنید که به ازاء هر تابع دلخواه مشتق‌پذیر در D

$$\int_{\partial\phi} f = \int_{S_1} f - \int_{S_2} f$$

و با استفاده از قضیهٔ ۹-۲ نتیجه بگیرید که

$$\int_{S_1} f = \int_{S_2} f$$

یک هموتوپی از طریق مسیرهای بسته در D از S_1 به S_2 توصیف کنید.

۲. فرض کنیم γ_1, γ_2 مسیرهایی بسته در D باشند که از طریق مسیرهای بسته در D هموتوپیکند. با ساختن یک قطع مناسب σ از γ_1 به γ_2 ، یک هموتوپی نقطهٔ پایانی ثابت در D از γ_1 به $\sigma + \gamma_1 - \sigma$ توصیف کنید. شکلی برای توضیح تغییر شکل پیوسته رسم کنید.

۳. فرض کنید که مرز $\partial\phi$ از یک نگاشت پیوستهٔ $\phi : R \to D$ به دو مسیر فرعی $\partial = \gamma_1 + \gamma_2$ تقسیم‌بندی شود. یک هموتوپی نقطهٔ پایانی ثابت از γ_1 به $-\gamma_2$ در D توصیف کنید و با رسم یک شکل تغییر شکل از γ_1 به γ_2 را توضیح دهید.

۴. نیمدایرهٔ $\gamma(t) = e^{it} (-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi)$ را در $D = C \setminus \{\cdot\}$ رسم کنید. دو مسیر چند ضلعی صریح γ_1 و γ_2 را از $-i$ به i در D چنان تعریف کنید که

$$\int_{\lambda} f = \int f$$

به ازاء همهٔ f های مشتق‌پذیر در D هنگامی که $\lambda = \lambda_1$ است درست و هنگامی که $\lambda = \lambda_1$ است نادرست باشد.

۵. فرض کنیم $\gamma : [0,1] \to C$ با ضابطهٔ $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ و

$$\gamma(t) = \begin{cases} t + it\sin(\pi/t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (1-t) - i(1-t)\sin(\pi/(1-t)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

داده شود. نشان دهید که γ مسیری است بسته اما یک کانتور نیست و نقشه ای هم از آن بکشید.

۶. از تابعهای زیر به دور γ انتگرال بگیرید: (γ در سوال ۵ معرفی شده است)

(الف) $\cos^3(z^2)$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n$

(ج) $1/(z - \frac{1}{3}\sqrt{2})$

۷. فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر در D باشد. به ازاء مسیر بسته ای چون γ در D، که از z_0 شروع و به خود آن ختم می‌شود، *مقدار انتگرال* I_γ عبارت است از عدد مختلط

$$I_\gamma = \int_\gamma f$$

نشان دهید که مجموعهٔ این مقادیر انتگرال یک گروه جابجایی $I(f,D)$ تحت عمل

$$I_\gamma + I_\delta = I_{\gamma+\delta}$$

تشکیل می دهد.

گروه مقادیر انتگرال را در هر یک از حالتهای زیر تعیین کنید

(الف) $f(z) = 1/z, D = C \setminus \{0\}$

(ب) $f(z) = \cos z, D = C \setminus \{0\}$

(ج) $f(z) = ۲/(z-۱) + ۳/(z+۱), D = C \setminus \{\pm ۱\}$

(د) $f(z) = ۱/(z-۱) + ۲/(z+۱), D = C \setminus \{\pm ۱\}$

۸ . **گروه اساسی** . فرض کنیم D یک دامنه باشد و $z_\circ \in D$. به ازاء مسیرهای بسته γ ، δ در D که در $z_\circ$ آغاز و به خود آن پایان می‌یابند. تعریف می‌کنیم $\gamma \simeq \delta$ به این معنی که γ ، δ در D هموتوپیک با نقطهٔ پایانی ثابت هستند. ثابت کنید که $\simeq$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. فرض کنیم $[\gamma]$ معرف کلاس هم‌ارزی شامل γ با شد و فرض می‌کنیم $\pi(D, z_\circ)$ مجموعهٔ کلاسهای هم‌ارزی باشد. عمل * را روی $\pi(D, z_\circ)$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$[\gamma]^*[\delta] = [\gamma + \delta]$$

خوش تعریف بودن * را بررسی کنید و نشان دهید که $\pi(D, z_\circ)$ تحت * یک گروه است، و عضو بی‌اثر و معکوس $[\gamma]$ رامشخص کنید.

برای هر نقطهٔ دلخواه دیگر $z_۱ \in C$ و هر مسیر دلخواه σ در D از $z_\circ$ به $z_۱$ نگاشت $g : \pi(D, z_\circ) \to \pi(D, z_۱)$ را با ضابطهٔ

$$g([\gamma]) = [-\sigma + \gamma + \sigma]$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که g یک ایزومورفیسم گروهها است و بدین سبب نتیجه بگیرید که $\pi(D, z_\circ)$ را معمولاً با $\pi(D)$ نشان می‌دهند و آن را *گروه اساسی* از D می‌نامند.)

۹ . گروه اساسی دامنه های زیر را (بدون برهان رسمی) توصیف کنید.

(الف) C

(ب) $|z| < ۱$

(ج) $۱ < |z| < ۲$

(د) $C \setminus \{\circ\}$

(ه) $C \setminus \{\pm ۱\} (vi) C \setminus z$

۱۰ . فرض کنیم f در دامنهٔ D مشتق پذیر باشد، همچنین فرض کنیم γ ، δ کانتورهایی بسته در D باشند که با $z_{\cdot}$ آغاز و به خود $z_{\cdot}$ پایان می یابند. ثابت کنید که اگر $\gamma \simeq \delta$ به معنای سوال ۸ باشد، آنگاه مقادیر انتگرال I_δ, I_γ یکسان هستند. ثابت کنید که نگاشت $h : \pi(D) \to I(f,D)$ ، که در آن $h([\gamma]) = I_\gamma$ ، یک هomomorفیسم گروه و خوش تعریف است. همومورفیسم h را برای هر f و D، مفروض در سوال ۷، توصیف کنید.

۱۱ . *انتگرال ها در طول مسیرهای دلخواه*، به ازاء $z_۲, z_۱$ ثابت و متعلق به D ، فرض می کنیم که $\gamma_{\cdot}$ مسیری ثابت، و γ مسیری متغیر، در D از $z_۱$ به $z_۲$ باشد. نشان دهید که به ازاء σای متعلق به $I(f,D)$

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_{\cdot}} f + I_\sigma$$

و اگر γ در یک هموتوپی از طریق مسیرهای بسته در D به طور پیوسته تغییر شکل دهد، آنگاه I_σ ثابت می ماند. به ازاء $z_۱ = -i$ و $z_۲ = i$ ، همهٔ مقادیر ممکنه برای $\int_\gamma f$ را به ازاء هر f ، D در سوال ۷ تعیین کنید.

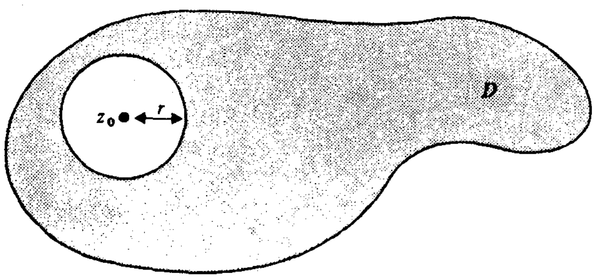
فصل دهم

سری تیلر

اکنون به مرحله ای از این نظریه رسیده ایم که می توانیم گامی بلند به جلو برداریم و ، همان طور که بارها وعده کرده ایم ، نشان دهیم که هر تابع مختلط مشتق پذیر دارای یک بسط به سری توانی موضعی است . با این فرض ضعیف که مشتق f در سراسر دامنه ای چون D وجود دارد . در می یابیم که نزدیک به هر نقطهٔ $z_\circ$ در D یک بسط به سری توانی به صورت

$$f(z_\circ + h) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n h_n \quad \text{به ازاء} \quad z_\circ + h \in N_r(z_\circ) \subset D$$

داریم که در هر قرص $N_r(z_\circ)$ در درون D برقرار است . (شکل ۱۰-۱)



(شکل ۱۰-۱)

این مطلب موجی از نتایج را به بار می آورد. مثلاً، می دانیم که از یک سری توانی می توانیم به دفعات دلخواه مشتق بگیریم و داریم

$$f(z_\circ + h) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!} h^n \quad \text{به ازاء} \quad z_\circ + h \in N_r(z_\circ) \subseteq D$$

بدین سان اگر تاکید کنیم که فقط مشتق اوّل یعنی f' در D وجود دارد، و نه بیشتر، نتیجه می شود که همهٔ مشتقهای مراتب بالاتر وجود دارند و این تابع در درون $N_r(z_\circ)$ با سری *تیلور* خودش مساوی است. نتایج دقیق و ظریف بیشتری در این فصل و فصول بعدی بیان خواهد شد. همین دنباله از نتایج است که به آنالیز مختلط حالتی خاص خود را می دهد.

۱. فرمول انتگرال کوشی

اثبات اینکه هر تابع مختلط مشتق پذیر را می توان به صورت یک سری توانی نوشت بستگی به نتیجه ای از کوشی دارد، که خود دارای ارزش ذاتی درخور توجهی است:

لِم ۱۰-۱. *(فرمول انتگرال کوشی در مورد یک دایره)*

فرض کنیم f در قرص $N_R(z_\circ) = \{z \in C \| z - z_\circ| < R\}$ مشتق پذیر باشد. به ازاء $\circ < r < R$. فرض می کنیم C_r مسیر

$$C_r(t) = z_\circ + re^{it} (\circ \le t \le 2\pi)$$

باشد، آنگاه به ازاء $|w - z_\circ| < r$ داریم:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

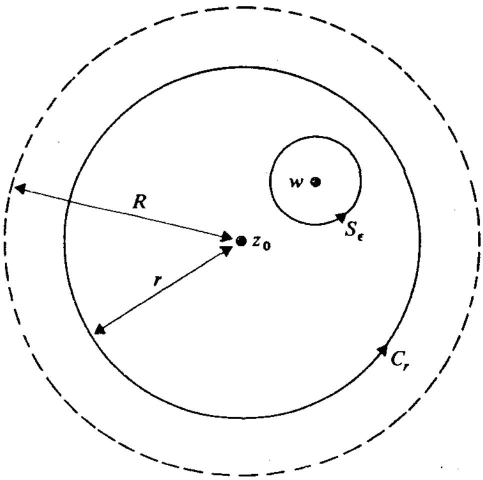
برهان. w را با شرط $|w-z_0|<r$ ثابت نگه دارید. تابع $F(z)=(f(z)-f(w))/(z-w)$ در دامنهٔ

$$D=\{z\in C \mid |z-z_0|<R, z\neq w\}$$

مشتق پذیر است. فرض کنیم $0<\varepsilon<r-|w-z_0|$. آنگاه دایرهٔ S_ε، به مرکز w، به شعاع ε ،

$$S_\varepsilon(t)=w+\varepsilon e^{it} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

درون D قرار می گیرد. نقاط درون C_r و خارج از S_ε نیز چنین هستند. (شکل ۱۰-۲)



(شکل ۱۰-۲)

بنابر قضیهٔ تعمیم یافتهٔ کوشی (قضیهٔ ۸-۹)،

$$\int_{C_r} F(x)dz=\int_{S_\varepsilon} F(z)dz \qquad (1)$$

ولی $\lim_{z\to w} F(z)=f'(w)$ ، بنابراین به ازاء یک $\delta>0$, $M\ge 0$ ، داریم:

$$0<|z-w|<\delta \Rightarrow |F(z)|\le M$$

بدین سان به ازاء $\delta > \varepsilon$ ، بنابر لم تخمین (لِم ۶-۱۰)، داریم :

$$\left|\int_{S_\varepsilon} F(z)dz\right| \leq M.۲\pi\varepsilon$$

از (۱) داریم :

$$\left|\int_{C_r} F(z)dz\right| \leq ۲\,M\,\pi\,\varepsilon$$

و، چون ε دلخواه است، از این حاصل می شود :

$$\int_{C_r} F(z)dz = ۰$$

بنابراین

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{C_r} \frac{f(w)}{z-w}dz$$

$$= f(w)\int_{C_r} \frac{dz}{z-w}$$

$$= f(w).۲\pi i$$

به بیان دیگر،

$$f(w) = \frac{۱}{۲\pi i}\int \frac{f(z)}{z-w}dz$$

۲ . سری تیلور

با به کـار گـرفتن فـرمـول انتگرال کـوشی هم اکنون می توانیم $f(z_۰+h)$ به صورت یک بسط به سری توانی (بر حسب توانهای h) بنویسیم طوری که ضرایب آن به صورت انتگرالها بیان شوند.

لِم ۱۰-۲ . فرض کنیم f در $N_R(z_۰)$ مشتق پذیر باشد. آنگاه

$$f(z_۰+h) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n h^n$$

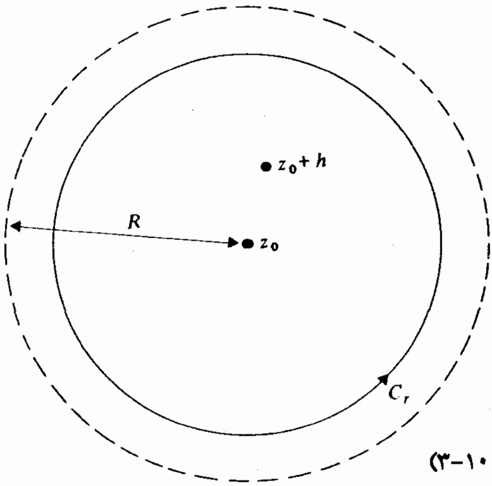
که این سری به ازاء $|h| < R$ مطلقاً همگرا است. علاوه، اگر $0 < r < R$،

$$C_r(t) = z_0 + re^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

آنگاه

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

برهان. h را چنان ثابت نگه دارید که $0 < |h| < R$ و بدواً فرض کنید که r در شرط $|h| < r < R$ صدق می کند. (شکل ۱۰-۳)



(شکل ۱۰-۳)

آنگاه از فرمول انتگرال کوشی حاصل می شود

$$f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\frac{f(x)}{(z_0 - z)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\Big\{\frac{1}{z - z_0} + \frac{h}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{h^m}{(z - z_0)^{m+1}}$$

$$+ \frac{h^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(z - z_0 - h)}\Big\}dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n + A_m$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

و

$$A_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)h^{m+1}}{(z-z_0)^{m+1}(z-z_0-h)}\,dz$$

اکنون ثابت می‌کنیم که $\lim_{m\to\infty} A_m = 0$. ابتدا توجه می‌کنیم که f مشتق‌پذیر، و لذا پیوسته است، بنابراین $\phi(t) = |f(C_r(t))|$ یک تابع پیوستهٔ حقیقی بر $[0,2\pi]$ است. از آنالیز حقیقی به یاد داریم که ϕ کراندارد است، یعنی $\phi(t) \le M$، بنابراین

$$|f(z)| \le M \text{ به ازاء } z \text{ بر } C_r$$

ولی $|z-z_0| = r, |h| < r$ و

$$|z-z_0-h| \ge |z-z_0| - |h| = r-|h|$$

بنابراین از لم برآورد به دست می‌آید:

$$|A_m| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M|h|^{m+1}}{r^{m+1}(r-|h|)}2\pi r = \frac{M|h|}{r-|h|}\left(\frac{|h|}{r}\right)^m$$

و چون $|h| < r$ اختیار کردیم، هنگامی که m به بی‌نهایت میل کند این عبارت به صفر میل خواهد کرد. بدین سان

$$\lim_{m\to\infty}\left(f(z_0+h) - \sum_{n=0}^{m} a_n h^n\right) = 0$$

که به معنی آن است که

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

این بسط برای $|h| < R$ برقرار است، و

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

و این به ازای $|h| < R$ است. هم اکنون خواهیم دید که محدودیت اخیر غیرلازم است، زیرا که انتگرال مورد نظر به ازای $0 < |z-z_0| < R$ مشتق پذیر است، و بنابراین انتگرال مذکور، به شرط آنکه r در محدودهٔ $0 < r < R$ تغییر کند، بدون تغییر خواهد ماند. این اثبات لم مورد نظر را کامل می کند. □

اکنون که می دانیم یک بسط به سری توانی وجود دارد، آگاهی خود را دربارهٔ سری توانی به کار می بریم تا حاصل شود:

قضیهٔ ۱۰-۳ . *(سری تیلر)*

اگر f در دامنهٔ D مشتق پذیر باشد، آنگاه همهٔ مشتق های بالاتر f در سراسر D وجود دارند و در هر قرص $N_R(z_0) \subseteq D$ بسط سری *تیلر*

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} h^n$$

برقرار است. علاوه بر آن، اگر $0 < r < R$ و $C_r(t) = z_0 + re^{it}\ (0 \le t \le 2\pi)$ باشد، آنگاه

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

برهان. از لم ۱۰-۲ داریم:

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n \qquad \text{به ازاء} \quad |h| < R\ .$$

به بیان دیگر، با قرار دادن $z = z_{\circ} + h$ ،

$$f(z - z_{\circ}) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_{\circ})^n \quad \text{به ازاء} \quad |z - z_{\circ}| < R .$$

امّا از یک سری توانی هر چند بار که بخواهیم می توانیم مشتق بگیریم، و بنابر فرع ۴-۱۴ ، داریم :

$$f^{(n)}(z_{\circ}) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_{\circ})^{n+1}}\,dz$$

این همان عبارت انتگرال مطلوب برای $f^{(n)}(z_{\circ})$ است و با قرار دان $a_n = f^{(n)}(z_{\circ})/n!$ در سری توانی مذکور بسط *تیلر* حاصل می شود.

قضیهٔ ۱۰-۳ . اولین بار به وسیلهٔ *کوشی* در ۱۸۳۱ ، به روشی که اینجا ارائه شد، به اثبات رسید. سری مذکور در فوق پس از *بروك تیلر* به نام او نامگذاری شد، و او بود که برای اولین بار این نظریه را که می توان یک تابع را به صورت یک سری توانی به صورت :

$$f(x + h) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n$$

نوشت در ۱۷۱۵ منتشر نمود. نظریه *تیلر* محدود به توابع حقیقی بود و برای خواننده جای تعجب نیست اگر بداند که قبل از نشریهٔ *تیلر* دیگران بر آن آگاهی داشتند. بخصوص *گریگوری* که حدود ۴۵ سال پیش از آن تاریخ از آن با خبر بود، همچنین *ایزاك نیوتون* در ۱۶۹۱ ، در خلال قرن هیجدهم اقدامات گوناگونی به عمل آمد تا آنالیز حقیقی بر سری های توانی بنا گردد، که مشهورترین آنها از آن *لاگرانژ* در ۱۷۹۷ است. *کوشی* سری های توانی را به طور وسیعی در آنالیز مختلط به کار گرفت. این از چرخشهای سوال برانگیز تقدیر است که او مثال نقض $f(x) = e^{-1/x^2}$ را در ۱۸۲۹ ارائه داد تا نشان دهد که همهٔ تابعهای به صورت نامتناهی مشتق پذیر با بسط های *تیلر* خود مساوی نیستند، و ادامه داد تا

درست دو سال بعد ثابت کرد که همهٔ تابعهای مختلط مشتق پذیر دارای بسط های به سری توانی هستند.

تابعی حقیقی چون $f: D \to R$ (که $D \subseteq R$) یا تابعی مختلط چون $f: D \to C$ (که $D \subseteq C$) را *تحلیلی* گویند اگر به ازاء هر $\alpha \in D$ دارای یک بسط به سری توانی

$$f(\alpha + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

برقرار در همسایگی از α باشد. کوشی ثابت کرد که در حالت حقیقی تابعهای وجود دارند که نامتناهیاً مشتق پذیرند اما تحلیلی نیستند. اما در حالت مختلط ثابت کرد که هر تابعی که یک *بار* در دامنه ای مشتق پذیر است لزوماً تابعی تحلیلی است. در یک حرکت او نشان داد که آنالیز مختلط آسانتر از آنالیز حقیقی است بدین سان که مطالعهٔ کلی تابعهای مختلط مشتق پذیر را به محاسبات مخصوص با سری های توانی تبدیل کرد، و برای این کار دنباله ای از قضایا را که در چند بخش بعدی گشوده می شوند بیان داشت.

توجه کنید که تابع مختلط چون f مشتق پذیر است *اگر و فقط اگر* تحلیلی باشد. این دو کلمه فقط بر دیدگاههای متفاوت تاکید دارند، و لذا می توان هر یک را به جای دیگری به کار برد.

۳. قضیهٔ موررا

ابتدا می پردازیم به یک عکس جزیی از قضیهٔ کوشی، که منسوب به موررا (۱۸۸۹) است:

قضیهٔ ۱۰-۴. اگر f در دامنه ای چون D پیوسته و $\int_{\gamma} f = 0$ به ازاء همهٔ کانتورهای بستهٔ γ در D، آنگاه f مشتق پذیر است.

برهان. از پیش می دانیم که (قضیهٔ ۶-۱۱) اگر $\int_{\gamma} f = 0$ به ازاء همهٔ کانتورهای بستهٔ γ در D، آنگاه تابعی مشتق پذیر چون F در D وجود دارد به طوری که مشتق آن f است. ولی حال می دانیم که F به شکل نامتناهی مشتق پذیر است و $F'' = f'$، و لذا f مشتق پذیر است.

قضیهٔ فوق الذکر به شرح این نکته می‌پردازد که چرا در فصل ۶ به خواننده هشدار داده شد که تلاش برای یافتن ضد مشتقی چون F برای تابعی مشتق ناپذیر چون f بیهوده است. چنین تابعی نمی‌تواند یک ضد مشتق داشته باشد. گردایه‌ای از تابعها وجود دارد، از جمله $f(z) = |z|$، که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند. در مورد چنین تابعهایی عمل انتگرالگیری را می‌توان با کمک فرمول

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

به انجام رساند و قضیهٔ اساسی انتگرالگیری کانتور هر چه که باشد به کار نمی‌آید زیرا f دارای ضد مشتق نیست (در تضادی آشکار با حالت حقیقی، که همهٔ تابعهای پیوسته یک ضد مشتق دارند.)

اطلاعات خود را دربارهٔ مشتق‌ها و ضد مشتق‌ها گردآوری و خلاصه کنیم داریم:

اگر f در دامنه‌ای چون D مشتق پذیر باشد. آنگاه همهٔ مشتقات مراتب بالاتر f وجود دارند. تابع f فقط هنگامی یک ضد مشتق می‌تواند داشته باشد که خود f مشتق پذیر، و حتی پس از آن، وجود ضد مشتق‌های موضعی تضمین شده باشند. منظور از شرط اخیر این است که اگر $D_1 \subseteq D$ همبند ساده باشد، آنگاه f باید در D_1 دارای یک ضد مشتق باشد (قضیهٔ ۸-۱۱). بخصوص وجود یک ضد مشتق را برای یک تابع مشتق پذیر در هر قرص واقع در دامنهٔ D آن تابع می‌توانیم تضمین کنیم.

۴. برآورد کوشی

قضیهٔ ۱۰-۳ متضمن تعمیمی از فرمول انتگرال کوشی است برای مشتقات مراتب بالاتر یک تابع مشتق پذیر:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

که در آن $N_R(z_0) \subseteq D$ و $0 < r < R$ با قراردادهای استاندارد $f^{(0)}(z) = f(z)$ و $0! = 1$، این فرمول به ازاء هر $n \geq 0$ درست است. با به کار گرفتن آن می‌توانیم

یک کران بالا برای $|f^{(n)}(z_\circ)|$ به دست آوریم.

لم ۱۰-۵ . (*برآورد کوشی*)

اگر f به ازاء $|z-z_\circ|<R$ ، $\circ<r<R$ مشتق پذیر باشد و به ازاء $|z-z_\circ|=r$ ، $|f(z)|\le M$ ، آنگاه

$$|f^{(n)}(z_\circ)|\le\frac{Mn!}{r^n}$$

به ازاء هر عدد صحیح $n\ge\circ$.

برهان.

$$f^{(n)}(z_\circ)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+1}}dz$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}.2\pi r$$

$$=\frac{Mn!}{r^n}$$

برآورد کوشی منجر به قضیهٔ مهمی از *لیوویل* می شود، که موارد استعمال غیر منتظره ای در مسائل صرفاً جبری دارد. ابتدا آن قضیه :

قضیهٔ ۱۰-۶ . (*قضیهٔ لیوویل*)

اگر f در همهٔ صفحهٔ مختلط کراندار و مشتق پذیر باشد، آنگاه f یک ثابت است.

برهان. فرض کنیم $|f(z)|\le M$. آنگاه از برآورد کوشی برای مشتق حاصل می شود:

$$|f'(z)|\le\frac{M}{r}$$

چون f در C مشتق پذیر است، می توان فرض کرد که $r\to\infty$ ، آنگاه M/r را می توان به اندازهٔ دلخواه کوچک اختیار کرد و، چون $f'(z)$ مستقل از r است، نتیجه می گیریم

$$|f'(z)|=\circ$$

بدین سان در سراسر C ، $f' = 0$ و بنابراین f ثابت است.

اکنون مورد استعمال:

قضیهٔ ۱۰-۷. *(قضیه اساسی جبر)*

فرض کنیم $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ یک چند جمله ای باشد که در آن $n \geq 1$ و $a_1, \dots, a_n$ متعلق به C هستند. آنگاه $w \in C$ وجود دارد به طوری که $P(w) = 0$.

برهان. اگر به ازاء همهٔ z های متعلق به C ، $P(z) \neq 0$ ، آنگاه $1/P(z)$ در سراسر C مشتق پذیر است. به ازاء $z \neq 0$

$$P(z)/z^n = 1 + (a_1/z) + \dots + (a_n/z^n) \to 1 \quad (|z| \to \infty \text{ چنانچه})$$

بنابراین $k > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geq \frac{1}{2} \qquad \text{به ازاء} \qquad |z| > k .$$

بدین سان

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq 2/|z^n| \leq 2/k^n \qquad \text{به ازاء} \qquad |z| > k .$$

همین کران برای $1/P(z)$ در سراسر صفحهٔ مختلط به کار می آید. به ازاء $|z_0| \leq k$ دایره ای چون C_R ، به مرکز z_0 ، به شعاع R، که چنان بزرگ است که به ازاء همهٔ z های روی C_R ، $|z| > k$ ، در نظر می گیریم، آنگاه

$$|1/p(z)| \leq 2/k^n \text{ به ازاء همهٔ z های روی } C_R$$

و از برآورد کوشی نتیجه می شود:

$$|1/P(z_0)| \leq 2/k^n$$

بنابر قضیهٔ *لیوویل* $1/P(z)$ ثابت است؛ بنابراین $p(z)$ ثابت است. اما این با $n \geq 1$ تناقض دارد. در نتیجه به ازاء w ای متعلق به C داریم $P(w) = 0$

چنین نتیجه می‌شود که هر بسجمله‌ای $p(z)$ با ضرایب مختلط را به طریق معمول می‌توان به صورت حاصلضربی از عبارتهای درجهٔ ۱ نوشت:

$$P(z) = (z - \alpha_۱)(z - \alpha_۲)\ldots(z - \alpha_n)$$

۵. صفرها

اکنون دیدگاه خود را نسبت به بسجمله‌ها وسعت می‌بخشیم و به صفرهای تابعهای مشتق‌پذیر دلخواه نظری می‌افکنیم. یک صفر برای تابعی چون $f : D \to C$ نقطه‌ای چون $z_. \in D$ است که به ازاء آن $f(z_.) = ۰$. چون f را حول $z_.$ (که صفر f است) بسط تیلور بدهیم، داریم:

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (z - z_.)^n \qquad \text{به ازاء} \qquad |z - z_.| < R$$

طوری که $N_R(z_.) \subseteq D$. آنگاه $a_. = f(z_.)$ برابر صفر است و دو چیز مشخصاً متمایز می‌تواند روی دهد؛ یا سایر a_i ها همه صفرند، که در چنین حالتی $f(z) = ۰$ در $N_R(z_.)$ است، و یا m ی وجود دارد به طوری که

$$a_. = a_۱ = \ldots = a_{m-۱} = ۰ \text{ ، ولی } a_m \neq ۰ \text{ .}$$

در حالت اخیر می‌گوییم $z_.$ *صفری از مرتبهٔ (متناهی)* است. به آسانی ملاحظه می‌شود که یک صفر از مرتبهٔ m با شرایط زیر نیز مشخص می‌شود:

$$f(z_.) = f'(z_.) = \ldots = f^{(m-۱)}(z_.) = ۰ \,, \; f^{(m)}(z_.) \neq ۰$$

عبارت مفید دیگری برای چنین صفری این است که بنویسیم:

$$f(z) = (z - z_.)^m g(z) \qquad \left(|z - z_.| < R\right)$$

کـه در آن $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z-z_0)^n$ به ازاء $|z-z_0|<R$ مـشـتق‌پـذیر است و $g(z_0)=a_m\neq 0$. این به یک ایدهٔ مـهم اساسی منجـر می‌شود. صفـری از یک تابع مـشتق‌پذیر f را منفـرد نامند اگـر قـرصی بـه مـرکـز وجـود داشـتـه باشـد کـه شـامل قرصهای دیگری نباشد، یعنی $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که از $0<|z-z_0|<\delta$ حاصل شود $f(z)\neq 0$.

لم ۱۰-۸ . صفری که مرتبهٔ متناهی دارد منفرد است .

برهان. می‌نویسیم $f(z)=g(z)(z-z_0)^m$ و این به ازاء $|z-z_0|<R$ است و در آن g مشتق‌پذیر است و $g(z_0)\neq 0$. آنگاه مطمئناً g در z_0 پیوسته است، بنابراین، با اختیار $\varepsilon=\frac{1}{2}|g(z_0)|$ ، یک $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$|z-z_0|<\varepsilon \Rightarrow |g(z)-g(z_0)|<\varepsilon$$

بنابراین هنگامی که $|z-z_0|<\delta$ ، داریم :

$$g(z)\geq \left||g(z_0)|-|g(z_0)-g(z)|\right|>2\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon$$

بخصـوص داریم $g(z)\neq 0$. ولی اگر $0<|z-z_0|<\delta$ ، آنگاه $|z-z_0|^m\neq 0$ ، و لذا $f(z)=g(z)(z-z_0)^m\neq 0$ ، که مطلوب ما بود.

فرع ۱۰-۹ . فرض کنیم S یک مجموعه از صفرهای تابع مشتق‌پذیری چون f در D باشد، کـه یک نقطهٔ حدی $z_0\in D$ دارد. آنگاه در هر قرص $N_R(z_0)\subseteq D$ ، تابع f متحد با صفر است.

برهان. چون z_0 یک نقطهٔ حدّی S است. می توانیم دنباله ای چون $\{z_n\}_{n\geq 1}$ در S انتخـاب کنیم که به z_0 میل می کند. آنگاه $f(z_0)=\lim_{n\to\infty} f(z_n)=0$. بنابراین z_0 صفری از f است که منفرد نیست؛ و لذا دارای مرتبهٔ متناهی نیست و

$$f(z_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

۵. صفرها

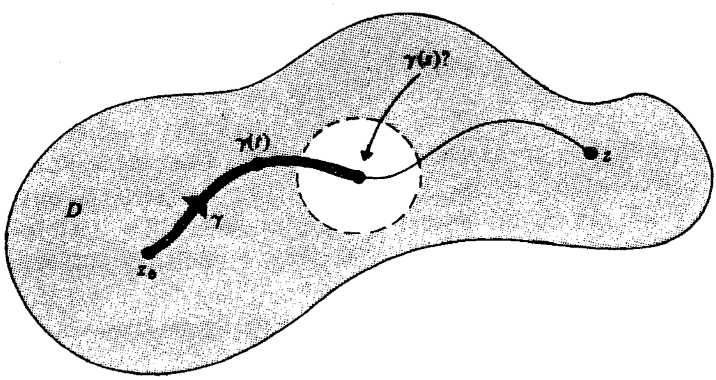
در هر قرص $N_R(z_.) \subseteq D$ همراه با همهٔ ضرایب a_n صفر هستند.

از این، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

گزارهٔ ۱۰-۱۰. اگر f در دامنه‌ای چون D مشتق‌پذیر و S مجموعه‌ای از صفرهای f با یک نقطهٔ حدی $z_.$ در D متحد با صفر است.

برهان. حاصل فرع 10.9، $f(z) = 0$ به ازاء همهٔ z های متعلق به قرص $N_R(z_.) \subseteq D$ است.

به ازاء هر $z \in D$ دیگری، مسیری چون $\gamma : [a,b] \to D$ از $z_.$ به z انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۰-۴).



(شکل ۱۰-۴)

نشان می‌دهیم $f(\gamma(t)) = 0$ به ازاء هر $t \in [a,b]$. مطمئناً $\delta > 0$ را می‌توان چنان یافت که

$$a \leq t < a + \delta \Rightarrow \gamma(t) \in N_R(z_.),$$

و در نتیجه $f(\gamma(t)) = 0$ به ازاء $a \leq t < a + \delta$. فرض کنیم که کوچکترین کران بالای همهٔ آن x های متعلق به $[a,b]$ باشد به طوری که $f(\gamma(t)) = 0$ به ازای $a \leq t < x$. آنگاه $a + \delta \leq s \leq b$.

بنابر پیوستگی، $f(\gamma(s)) = 0$. اگر s اکیداً کوچکتر از b می‌بود، آنگاه $\gamma(s)$

می بایست که یک صفر نامنفرد بوده باشد، و لذا f در همسایگی ای از $\gamma(s)$ می بایست متحد با صفر می شد و ما می توانستیم بازه ای چون $[s,s+k]$ بیابیم که در آن $f(\gamma(t))$ صفر است، و این با تعریف s در تناقض است. بنابراین $s = b$ و $f(z) = f(\gamma(b)) = 0$، که مطلوب ما بود.

به عنوان نتیجه ای مهم، داریم:

قضیهٔ ۱۰-۱۱. *(قضیهٔ همانی)*

اگر f و g در دامنه ای چون D تحلیلی و $f(z) = g(z)$ به ازاء هر $z \in S \subseteq D$ طوری که s یک نقطهٔ حدی در D داشته باشد، آنگاه $f = g$ در سراسر D.

برهان. گزارهٔ ۱۰-۹ را برای f-g به کاربگیرید.

این نکته حائز اهمیت است که نقطهٔ حدی مربوط به S در D باشد: در غیر این صورت قضیه نادرست است. زیرا اگر

$$f(z) = \sin(1/z)$$
$$g(z) = 0$$

را در $D = C \setminus \{0\}$ در نظر بگیریم، آنگاه $f(z) = g(z)$ به ازاء $z = \pm 1/(n\pi)$ خواهد بود؛ $z_0 = 0$ یک نقطهٔ حدی $S = \{\pm 1/(n\pi)\}$ است، ولی در D داریم $f \neq g$.

۶. تابعهای توسیعی

تابعی چون $f : D \to C$ را یک *تابع توسیعی* $h : S \to C$ می نامند اگر $S \subseteq D$ و $j(z) = h(z)$ به ازاء هر $z \in S$.

مثال ۱. $f(z) = 1/(1-z)$ بر $D = C \setminus \{1\}$ یک تابع توسیعی برای تابع $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ بر $S = \{z \in C \| z \,| < 1\}$.

فرض کنیم D یک دامنه و S زیر مجموعه ای از D باشد طوری که یک نقطهٔ حدی S در D است. آنگاه قضیهٔ همانی نشان می دهد که اگر تابعی چون $f : S \to C$ دارای تابعی باشد توسیعی چون $f : D \to C$ که مشتق پذیر باشد، آنگاه این توسیع منحصر به فرد است.

به عنوان یک مورد استعمال، فرض کنید $f: D \to C$ مشتق پذیر است و بسط تیلر $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ حقیقی که به تابع های مختلط مشتق پذیر توسعه می یابند تابع های تحلیلی حقیقی هستند.

حتی باز هم می توانیم S را محدودتر کنیم، به شرط آنکه حداقل یک نقطهٔ حدی در D داشته باشد.

مثال۴. اگر $f(1/n) = 1/n^2$ به ازاء هر عدد صحیح و مثبت n، آنگاه $f(z) = z^2$ توسیع تحلیلی منحصر به فرد f به همهٔ صفحهٔ مختلط است زیرا

$$S = \{1/n \mid \text{n یک عدد صحیح مثبت است}\}$$

دارای نقطهٔ حدی $0 \in C$ است.

از آنجا که بسط *تیلور* بر قرصها برقرار است (قضیهٔ ۱۰-۳)، و از این لحاظ می توان آن را برای تعریف تابعهای توسیعی به کار گرفت. به همین جهت به آسانی معلوم می شود که شعاع همگرایی بسط سری *تیلور* مربوط به تابعی چون f حول نقطه ای چون z_0 برابر است با فاصلهٔ z_0 از نزدیکترین نقطه ای چون z_1 که در آن هیچ تابع توسیعی مشتق پذیر از f نمی توان تعریف کرد. چنین نقطه ای را یک *انفراد (نقطهٔ منفرد)* f می نامند. و دربارهٔ نقاط منفرد در موارد آتی بیشتر بحث می کنیم. نقاط منفرد را به عنوان ره گیرهایی باید به حساب آوریم که تعیین کنندهٔ اندازهٔ قرص همگرایی سری *تیلور* هستند.

۷. ماکسیمم و می نیمم موضعی

از آنجا که اعداد مختلط مرتب نیستند، نمی توانیم دربارهٔ ماکسیمم و می نیمم تابع مختلط f صحبت کنیم. با این وصف، می توانیم مقادیر ماکسیمم و می نیمم مدول $|f|$ را بررسی کنیم.

در مورد تابع $f: D \to C$، می گوییم که $|f|$ یک *ماکسیمم موضعی* در $z_0 \in D$ دارد اگر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که $N_\varepsilon(z_0) \subseteq D$, $|f(z)| \le |f(z_0)|$ به ازاء هر $z \in N_\varepsilon(z_0)$. آن را یک ماکسیمم

موضعی اکید می نامند اگر

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z)| < |(z_0)|$$

به نظر می رسد که مسأله تعیین ماکسیمم $|f|$ در یک دامنه آسان باشد (یا غیر ممکن، و این بستگی به چگونگی نگرش شما نسبت به آن دارد: حتی یکی وجود ندارد!)

گزارهٔ ۱۰-۱۲ . یک تابع مشتق‌پذیر در یک دامنه برای مدول خود دارای ماکسیمم اکید نیست. اگر دارای یک ماکسیمم موضعی باشد، آنگاه این تابع ثابت است.

برهان. فرض کنیم $N_\varepsilon(z_0) \subseteq D$, $|f(z)| \le |f(z_0)|$ به ازاء هر $z \in N_\varepsilon(z_0)$. به ازاء $0 < r < \varepsilon$ ، دایرهٔ $C_r(t) = z_0 + re^{it}(0 \le t \le 2\pi)$ درون $N_\varepsilon(z_0)$ قرار می گیرد، بنابراین $|f(z_0 + re^{it})| \le |f(z_0)|$ به ازاء هر $t \in [0,2\pi]$. از فرمول انتگرال کوشی نتیجه می شود:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}ire^{it}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})|dt$$

و بنابراین

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0 + re^{it})|dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|dt \le |f(z_0)|$$

نتیجه اینکه

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0 + re^{it})|dt \qquad (2)$$

اگر قرار می بود که نامساوی اکید $|f(z_0+re^{it})|<|f(z_0)|$ به ازاء t دلخواهی متعلق به $[0,2\pi]$ برقرار باشد، بنابر پیوستگی می بایست که در یک بازهٔ کوچک برقرار می بود و از آن نامساوی اکید

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|dt<|f(z_0)|$$

حاصل می شد که با (۲) متناقض است. این رابطه برای هر r کوچکتر از ε برقرار است، بنابراین $|f|$ در $N_\varepsilon(z_0)$ ثابت است. بنا بر گزارهٔ ۴-۸ ، f در $N_\varepsilon(z_0)$ ثابت است و قضیهٔ همانی نشان می دهد که f در سراسر D ثابت است.

چنانچه ما مفهوم متمم یعنی می نیمم موضعی $|f|$ را مد نظر قرار دهیم، آنگاه واضح است که آنجا که یک تابع غیر ثابت دارای یک صفر است، این صفر منفرد است و $|f|$ در آن یک می نیمم موضعی دارد. با این وصف، اگر f ناصفر باشد، با به کار گرفتن گزارهٔ ۱۰-۱۲ در مورد تابع $1/f$ ، حاصل می شود.

گزارهٔ ۱۰-۱۳ . یک تابع مشتق پذیر ناصفر برای مدول خود در یک دامنه دارای یک می نیمم موضعی اکید نیست. اگر دارای یک می نیمم موضعی باشد آنگاه این تابع ثابت است.

۸ . قضیهٔ مدول ماکسیمم

پرسش مربوط به ماکسیمم یا می نیمم $|f|$ بر یک زیر مجموعهٔ دلخواه از دامنهٔ آن قدری متفاوت است. می گوییم $|f|$ یک ماکسیمم موضعی بر $S\subseteq D$ در نقطهٔ $z_0\in S$ دارد اگر

(الف) z_0 یک نقطهٔ حدی S باشد.

(ب) به ازاء ε ی بزرگتر از ۰ ، $|f(z)|\le f(z_0)$ هر جا که $z\in N(z_0)\cap S$.

شرط (الف) اساسی است، زیرا در غیر این صورت همسایگی ای چون $N_\varepsilon(z_0)$ وجود دارد که شامل هیچ نقطه ای از S به استثنای z_0 نخواهد بود و آنگاه شرط (ii) به صورتی بی مایه درست است.

مثال ۱ . اگر $f(z)=e^z$ و $S=\{z\in C\,|\,|z|\le 1\}$ ، آنگاه $|f(x+iy)|=e^x$ ، $|f|$ بر S در نقطهٔ $z_0=1$ دارای یک ماکسیمم موضعی است.

چون گزارهٔ ۱۰-۱۲ را به کار بگیریم، ملاحظه می کنیم که اگر $N_\varepsilon(z_\circ) \subseteq S$ ، آنگاه $|f|$ نمی تواند در $z_\circ$ دارای یک ماکسیمم باشد. نقطهٔ $z_\circ$ را یک نقطهٔ مرزی S تعریف می کنیم به شرط آنکه هر همسایگی $z_\circ$ هم شامل نقاطی از S باشد و هم شامل نقاطی غیر از نقاط S به استثنای خود $z_\circ$. به بیان دیگر یک نقطهٔ مرزی نقطه ای است که هم یک نقطهٔ حدی S است و هم یک نقطهٔ حدی مکمل آن $C \setminus S$. مرز S را مجموعهٔ نقاط مرزی آن تعریف می کنیم.

مثال ۲. مرز $S = \{z \in C \,|\, |z| \leq 1\}$ و متمم آن $\{z \in C \,|\, |z| > 1\}$ دایرهٔ $\{z \in C \,|\, |z| > 1\}$ است.

اکنون می توانیم گزارهٔ ۱۰-۱۲ را تجدید عبارت کنیم تا حاصل شود:

قضیهٔ ۱۰-۱۴. (قضیهٔ *مدول ماکسیمم*)

اگر تابعی مشتق پذیر ثابت نباشد. آنگاه مقدار ماکسیمم مدول آن بر یک مجموعهٔ دلخواه بر مرز آن مجموعه رخ می دهد.

همچنین از گزارهٔ ۱۰-۱۳ حاصل می شود

قضیهٔ ۱۰-۱۵. (قضیهٔ *مدول می نیمم*)

اگر تابع مشتق پذیری ثابت نباشد، آنگاه مقدار می نیمم آن بر یک مجموعهٔ دلخواه یا در جایی رخ می دهد که تابع صفر است و یا بر مرز آن مجموعه.

مثال ۳. اگر $f(z) = z^2$ بر مجموعهٔ $S = \{z \in C \,|\, |z| \leq 1\}$. آنگاه مقدار ماکسیمم $|f(x+iy)| = x^2 + y^2$ در طول مرز S روی می دهد در حالی که مقدار می نیمم $|f|$ در مبداء رخ می دهد.

تمرینهای ۱۰

۱ . سری تیلور را در ۰ برای تابع $f(z) = \log(1+z)$ پیدا کنید، که در آن log مقدار اصلی است. قرص همگرایی چیست؟ همین سوال را برای $g(z) = \exp(\alpha.\log(1+z))$ ، که $\alpha \in C$ ، جواب دهید.

۲ . برای $f(z) = [1+\log(1-z)]^{-1}$ در ۰ سه جمله‌ٔ اول بسط تیلور و شعاع همگرایی را تعیین کنید.

۳ . بسط تیلور موارد زیر را حول ۰ ، و همچنین شعاع همگرایی را تعیین کنید:

(الف) $\sin^2(z)$

(ب) $z^2(z+2)^{-2}$

(ج) $(az+b)^{-1} \quad (a,b \in C, b \neq 0)$

(د) $\int_0^z e^{w^2} dw$

(ه) $(\sin z)/z \quad (z \neq 0,1)(z=0)$

(و) $\int_0^z (\sin w)/w dw$

۴ . اعداد c_n را با کمک سری تیلور

$$\sec(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

تعیین کنید.

ثابت کنید

$$c_0 = 1$$

$$c_0 + c_2\binom{2n}{2} + c_4\binom{2n}{4} + \ldots + c_{2n}\binom{2n}{2n} = 0$$

نشان دهید که c_n هموار گویا است. و آن را به ازاء $n \leq 8$ محاسبه کنید.

۵. فرض کنیم

$$(1-z-z^2)^{-1} = \sum F_n z^n$$

ثابت کنید

$$F_0 = F_1 = 1 \ , \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

(این تعریف بازگشتی *اعداد فیبوناچی* ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، . . . است). با بسط $(1-z-z^2)^{-1}$ بر حسب کسرهای جزیی، ثابت کنید:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

۶. نتایجی مشابه سوال ۵ برای بسط $(1-ax-bz^2)^{-1}$ با شرط $a,b \in C$، جستجو کنید.

۷. اگر

$$\exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \sum a_n z^n$$

ثابت کنید

$$a_0 = 1 \ , \ a_n = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!}\binom{n-1}{s-1}.$$

۸. فرض کنیم $f(z)$ دارای بسط *تیلور* $\sum a_n z^n$ به ازاء $|z| < R$ است. فرض می‌کنیم $w = e^{2\pi i/3}$ و تعریف می‌کنیم

$$g(z) = \frac{1}{3}\left(f(z) + f(wz) + f(w^2 z)\right)$$

نشان دهید که

$$g(z) = \sum a_{3n} z^{3n}$$

به ازاء $|z| < R$. عبارات مشابهی برای $\sum a_{3n+1} z^{3n+1}$, $\sum a_{3n+2} z^{3n+2}$ بیابید.

[*راهنمایی:* $1+w+w^2=0$] .

۹ . سه تابع به صورتهای زیر تعریف می کنیم :

$$\alpha(z)=\sum\frac{z^{3n}}{(3n)!} \text{ و } \beta(z)=\sum\frac{z^{3n+2}}{(3n+2)!} \text{ و } \gamma(z)=\sum\frac{z^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

ثابت کنید که این سری ها به ازاء همهٔ مقادیر z همگرا هستند. با به کار گرفتن سوال ۸ ، موارد آتی را ثابت کنید :

(الف) $\gamma'(z)=\alpha(z), \beta'(z)=\gamma(z), \alpha'(z)=\beta(z)$.

(ب) $\alpha(z)=\frac{1}{3}\left[e^z+2e^{-z/2}\cos(z\sqrt{3}/2)\right]$ (عبارتهای مشابهی برای $\beta(z)$ ، $\gamma(z)$ بیابید).

(ج) $\alpha(z+w)=\alpha(z)\alpha(w)+\beta(z)\gamma(w)+\gamma(z)\beta(w)$

(د) $\alpha^3(z)+\beta^3(z)+\gamma^3(z)-3\alpha(z)\beta(z)\gamma(z)=1$

(ه) $\alpha(z)=\beta(z) \Leftrightarrow z=(3n-1).2\pi/3\sqrt{3}\,(n\in Z)$.

۱۰ . سوال ۸ را تعمیم دهید تا عبارتی برای $\sum a_{pn}z^{pn}\,(p=2,3,\ldots)$ به دست دهید و (مشکل تر) برای $\sum a_{pn+k}z^{pn+k}\,(p=2,3,\ldots,k=0,1,\ldots,p-1)$.

۱۱ . نشان دهید که برآورد کوشی یک تساوی است اگر و فقط اگر $f(z)=kz^n$ به ازاء K ای متعلق به C ، $n=1,2,3,\ldots,$

۱۲ . فرض کنیم D یک قرص به مرکز z_0 ، و f تابعی تحلیلی در دامنه ای که شامل D است باشد. ثابت کنید که «مقدار متوسط» برای f(z) هنگامی که z ، ∂D را می پیماید (∂D با یک انتگرال مناسب معین می شود) برابر است با $f(z_0)$.

۱۳ . فرض کنیم f در سراسر C تحلیلی باشد، و فرض کنیم که $|f(z)|\le K|z|^c$ به ازاء یک ثابت حقیقی K و یک عدد صحیح مثبت c باشد. ثابت کنید که f یک تابع بسجمله ای از درجه کوچکتر یا مساوی c است. در حالتی که c عدد صحیح نباشد چه نظری دارید؟

۱۴ . فرض کنیم که f و g بر $\{z \in C| -۲ < im \ z < ۲\}$ تحلیل باشند. فرض کنیم $f(z) = g(z)$ به ازاء همهٔ z هائی که $|z| \leq ۰.۰۱$. با در نظر گرفتن بسط *تیلور* ابتدا حول ۰ ، بعد ۱ ، و غیره، با استقراء ثابت کنید که در تمام این نوار $f(z) = g(z)$.

۱۵ . فرض کنیم $f(z) = \sum a_n (z - z_۰)^n$ در یک قرص D به مرکز $z_۰$ ، به شعاع R، اگر $۰ \leq r \leq R$ ، ثابت کنید که

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} \left|f(z_۰ + re^{i\theta})\right|^۲ d\theta = \sum |a_n|^۲ r^{۲n}$$

(تساوی پارسِوال) . و در نتیجه ثابت کنید:

$$\sum |a_n|^۲ r^{۲n} \leq M(r) = \sup_\theta P\left|f(z_۰ + re^{i\theta})\right|$$

با کمک همین، برهان دیگری برای قضیهٔ *مدول ماکسیمم* ارائه دهید.

۱۶ . اگر P(z) یک بسجمله ای از درجهٔ n باشد، نشان دهید که به ازاء هر $R > ۰$ «منحنی تراز» برای $|P(z)|$ ، که به صورت $\{z \in C \| P(z)| = R\}$ تعریف می شود، حداکثر دارای n مولفهٔ همبند است.

۱۷ . فرض کنیم $x^۲ + y^۲ \leq a^۲$. ثابت کنید $(۱ + x)^۲ + y^۲$ هنگامی مقدار ماکسیمم خود را اختیار می کند که x=a ، y=۰. [*راهنمایی:* قضیهٔ مدول ماکسیمم را برای ۱+z بر قرص $|z| \leq a$ به کار بگیرید.]

۱۸ . فرض کنید $x^۲ + y^۲ \leq ۱$. ثابت کنید $(x^۲ - y^۲ - ۱)^۲ + ۴x^۲y^۲$ هنگامی مقدار ماکسیمم خود را اختیار می کند که $x = ۰, y = \pm ۱$.

۱۹ . اگر f در دامنه ای چون D مشتق پذیر باشد، ثابت کنید که صفرهای f یا همه از مرتبهٔ متناهی هستند و منفردند، یا f در D متحد با صفر است.

۲۰ . فرض کنیم

$$f(x) = \int_x^\infty t^{-۱} e^{x-t} dt$$

که در آن x حقیقی و مثبت است. با انتگرالگیری جزء به جزء به طور مکرر، نشان دهید که اگر

$$h_n(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

آنگاه

$$f(x) = h_0(x) + h_1(x) + \dots + h_{n-1}(x) + (-1)^n n! \int_x^\infty e^{x-t} t^{-(n+1)} dt.$$

نشان دهید که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(x) \qquad (۳)$$

به ازاء همهٔ x ها همگرا است. همچنین ثابت کنید که

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} h_n(x) \right| < N! x^{-(N+1)}.$$

به طوری که به ازاء x های *به اندازه کافی بزرگ* سری (۳) تقریب خوبی برای $f(z)$ به دست می دهد، حتی گرچه واگرا است. (نکتهٔ درخور توجه این است که، هر چه تقریب بهتری مورد نظر باشد، x بزرگتری باید انتخاب شود: اگر N را به انداره کافی بزرگ اختیار کنیم هیچ‌انتخاب خاصی از x منجر به یک تقریب خوب کاملاً دلخواه نمی‌شود. سری با چنین خاصیتی را *سری مجانبی* می نامند.)

فصل یازدهم

سریهای توانی

بسط به سری *تیلری* در بسیاری از موارد استعمال، محدودیت فراوان دارد. تعمیم مفیدی از آن به وسیله *لوان* ارائه شد، که «سری های توانی» را که متضمن توانهای منفی و مثبت باشند، در نظر گرفت. در مثال زیر به فایده ای که از این کار حاصل می شود اشاره شده است. تابع $f(z) = e^{-۱/z^۲}$، چنانچه بسط سری تیلر را در کار آوریم، بسیار بد رفتار است. قبلاً دیده ایم که اگر خود را به محور حقیقی محدود کنیم، سری تیلر آن حول مبداء $o + ox + ox^۲ + ...$ می شود که همگرا به $f(x)$ و بر همهٔ صفحهٔ نیست؛ اگر چنین گفتاری دارای معنی باشد، حتی کمتر ظرفیت نمایش به وسیلهٔ سری تیلور دارد! نمایش طبیعی این سری با شروع از بسط e^z شروع می شود به این ترتیب که به جای z، $-۱/z^۲$ قرار دهیم، که حاصل می شود:

$$f(z) = ۱ - z^{-۲} + \frac{۱}{۲!}z^{-۴} - \frac{۱}{۳!}z^{-۶} + ...$$

و این یک نوع سری «با توان منفی» است. این سری به ازاء همهٔ z هایی که $-۱/z^۲$ معین است، یعنی به ازاء $z \neq ۰$، همگرا است.

۱ . سری هایی که متضمن توانهای منفی هستند

سری عمومی از این نوع را می توان به صورت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_۰)^n,$$

نوشت که آن را باید صورت فشرده ای از

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}\right)$$

به حساب آورد و بنابراین همگرا است اگر و فقط اگر این دو سری محصور در پرانتزها، همگرا باشند. می دانیم که سری های توانی درون یک قرص همگرا هستند. نتیجتاً سری های توانی که فقط توانهای منفی دارند باید *خارج* از یک قرص همگرا باشند (مثلاً، سری مربوط به e^{-1/z^2} خارج از قرص $|z| = 0$ همگرا است) و آنها که هم توانهای منفی دارند و هم مثبت باید در ناحیه ای *بین* دو دایرهٔ هم مرکز همگرا باشند. چنین ناحیه ای را یک *تاج دایره* می نامند: دقیقتر آنکه، اگر R_1, R_2 اعداد حقیقی یا ∞ باشند، با $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$، و اگر $z_0 \in C$، آنگاه

$$\{z \in C : R_1 \le |z-z_0| \le R_2\}$$

یک تاج دایره است.

کا را با یک قضیهٔ وجودی در مورد بسط سری ها از نوع بالا شروع می کنیم.

قضیهٔ ۱۱-۱ *(قضیهٔ لوران)*. اگر f در تاج دایرهٔ $R_1 \le |z-z_0| \le R_2$، که $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$، مشتق پذیر باشد آنگاه

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n h^{-n}$$

که $\sum a_n h^n$ به ازای $|h| < R_2$، و $\sum b_n h^{-n}$ به ازای $|h| > R_1$ همگرا است، و بخصوص هر دو سری در درون تاج دایرهٔ داده شده همگرا هستند.

بعلاوه، اگر $C_r(t) = z_0 + re^{it}$ که $R_1 < r < R_2$، $0 \le t \le 2\pi$، آنگاه

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}}\, dz,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)(z-z_0)^{n-1}\, dz,$$

{**تبصره:** با نمادگذاری فشرده‌تری، قرار می‌دهیم $c_n = a_n (n \geq ۰)$ و $c_{-n} = b_n (n \geq ۱)$ و آنگاه

$$f(z_\circ + h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h^n$$

که در درون تاج دایرهٔ مذکور همگرا است و در آن

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^{n+۱}} dz$$

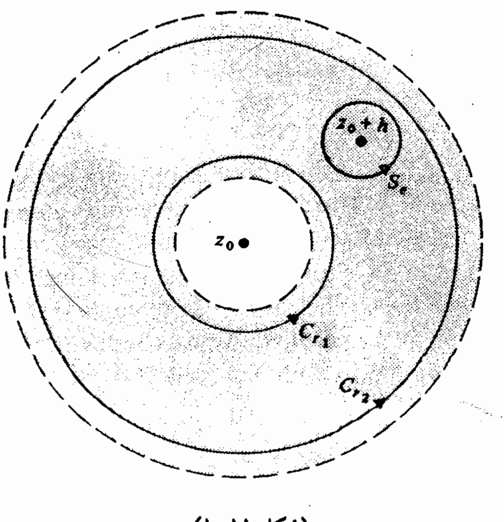
به ازاء هر $n \in Z$.}

برهان. اگر $R_۱ < |h| < R_۲$ باشد، $r_۱, r_۲$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$R_۱ < r_۱ < |h| < r_۲ < R_۲$$

شود و فرض می‌کنیم (شکل ۱۱-۱)

$$\begin{aligned} C_{r_۱}(t) &= z_\circ + r_۱ e^{it} \\ & \qquad\qquad (۰ \leq t \leq ۲\pi) \\ C_{r_۲}(t) &= z_\circ + r_۲ e^{it} \end{aligned}$$



(شکل ۱۱-۱)

ابتدا نشان می دهیم که

$$f(z_\circ + h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{f(z)}{z-(z_\circ + h)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{z-(z_\circ + h)}dx \qquad (1)$$

به این منظور، $z_\circ + h$ را در درون یک دایرهٔ کوچک

$$S_\varepsilon(t) = (z_\circ + h) + \varepsilon e^{it} (0 \le t \le 2\pi)$$

قرار دهید. آنگاه تابع

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-(z_\circ + h)}$$

در $S = \{z \in C : R_1 < |z - z_\circ| < R_2, z \neq z_\circ + h\}$

مشتق پذیر است، و کانتورهای $S_\varepsilon, C_{r_1}, C_{r_2}$ در فرضهای قضیهٔ ۸-۹ صدق می کنند. بنابراین

$$\int_{-C_{r_2}} F(z)dz + \int_{C_{r_1}} F(z)dz + \int_{S_\varepsilon} F(z)dz = 0$$

در نتیجه

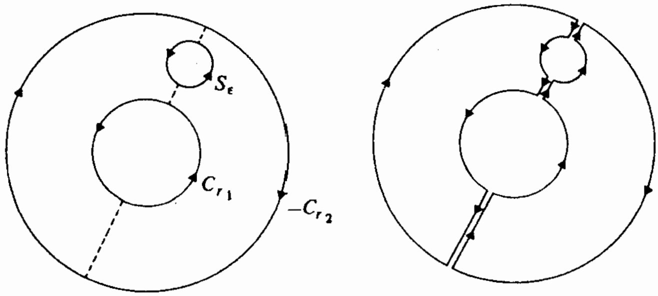
$$\int_{S_\varepsilon} F(z)dz = \int_{C_{r_2}} F(z)dz - \int_{C_{r_1}} F(z)dz$$

ولی بنابر فرمول انتگرال کوشی

$$\int_{S_\varepsilon} F(z)dz = 2\pi i . f(z_\circ + h)$$

می شود و بنابراین (۱) به دست می آید.

(به جای این کار می توانیم برشهایی بزنیم و به دور هر دو نیمه، آن طور که در شکل ۱۱-۲ نشان داده ایم، انتگرال بگیریم. به هنگام انتگرال گیری آن قسمتهایی از کانتورها که در طول برشها هستند حذف می شوند.)



(شکل ۱۱-۲)

حال کاری را که باید انجام دهیم این است که دو انتگرالی را که در (۱) هستند به صورت سری توانی بیابیم، و ضرایب را حساب کنیم. متاسفانه این قسمت طولانی تر برهان است، گرچه محاسبات مربوطه وضعیت متعارف دارند.

ابتدا ρ_1, ρ_2 را با

$$r_1 < \rho_1 < |h| < \rho_2 < r_2$$

انتخاب می کنیم و خود این منجر به تحمیل شرایط زیر می شود:

(الف) $|z-(z_0+h)| > r_2-\rho_2$ به ازای آنکه z بر C_{r_2} باشد.

(ب) $|z-(z_0+h)| > \rho_1-r_1$ به ازای آنکه z بر C_{r_1} باشد.

مشابه برهان مربوط به بسط سری تیلر (لم ۱۰-۲) به ازاء $|h| < \rho_2$ حاصل می شود:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n,$$

طوری که

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz.$$

بررسی و انجام دومین انتگرال به طریق مشابه است، اما به طور کامل ارائه

می‌شود. چون

$$\frac{1}{h}+\frac{z-z_0}{h^2}+\ldots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{h^n}-\frac{(z-z_0)^n}{h^n(z-z_0-h)}$$

$$=\frac{-1}{z-z_0-h}$$

(با جمع کردن یک تصاعد هندسی) داریم:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-z_0-h}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}f(z)\left\{\frac{1}{h}+\ldots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{h^n}-\frac{(z-z_0)^n}{h^n(z-z_0-h)}\right\}dz$$

$$=\sum_{m=1}^{n}b_m h^{-m}-B_n$$

که در آن

$$b_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}f(z)(z-z_0)^{m-1}\,dz,$$

$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)(z-z_0)^n}{h^n(z-z_0-h)}\,dz$$

بالاخره به برآورد B_n می‌پردازیم. بنابر فشردگی، یک $M>0$ وجود دارد به قسمی که $|f(z)|\le M$ بر C_{r_1}، و بنابر (ب) مذکور در فوق داریم: $|z-z_0|\le r_1, |h|>\rho_1$. همچنین $|z-z_0-h|>\rho_1-r_1$. در نتیجه

$$|B_n|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M\,r_1^n}{\rho_1^n(\rho_1-r_1)}.2\pi r_1$$

$$= \frac{M\ r_1}{(\rho_1 - r_1)}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^n$$

که به ۰ میل می کند هنگامی که $n \to \infty$ زیرا $r_1/\rho_1 < 1$. نتیجه این می شود که :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}\,dz = \sum_{m=1}^{\infty} b_m h^{-m}$$

برای پایان دادن به برهان، در عبارات مربوط به b_n, a_n باید C_r را جانشین C_{r1} و C_{r2} کنیم. چون هر سه مسیر مورد نظر در درون تاج دایرهٔ مذکور هموتوپیک هستند. یا با به کار گرفتن برشها، این مطلب بی درنگ حاصل می شود؛ و اکنون برهان قضیه کامل است.

توجه کنید که دیگر به تصریح $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ نیازی نیست زیرا لزومی ندارد که $f(z)$ به ازاء $|z-z_0| < R$ تحت فرضهایی که کرده ایم مشتق پذیر باشد.

سری لوران $f(z)$ حول z_0 عبارت است از سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h_n$$

که در آن $c_n, h = z - z_0$ مطابق فرمول فوق تعیین شده است. به عنوان *بسط لوران* $f(z)$ هم از آن نام می بریم. بسط لوران منحصر به فرد است، زیرا فرض می کنیم سری دلخواهی چون

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-z_0)^n$$

داشته باشیم. آنگاه

$$(z-z_0)^{-m-1} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-z_0)^{n-m-1}$$

$$= f_1(z) + \frac{dm}{z-z_0} + f_2(z)$$

که در آن

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} d_n (z - z_0)^{n-m-1}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n-m-1}$$

ولی هر یک از f_2, f_1 در $R_1 < |z - z_0| < R_2$ یک ضد مشتق دارند برای بررسی این مطلب، قرار می دهیم:

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} \frac{1}{n-m} d_n (z - z_0)^{n-m}$$

$$F_2(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n-m} d_n (z - z_0)^{n-m}$$

حال بررسی اینکه این سری ها به ازای $R_1 < |z - z_0| < R_2$ همگرا هستند و $F_2'(z) = f_2(z), F_1'(z) = f(z)$ کاری آسان است. نتیجه اینکه

$$\int_{C_r} f(z)(z - z_0)^{-m-1} dz = \int_{C_r} \frac{dm}{z - z_0} dz = 2\pi i d_m$$

و بنابراین مطابق با تعریف فوق $d_m = c_m$ می شود.

مثال ۱. فرض کنیم $f(z) = e^z + e^{1/z}$ باشد. داریم:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$ به ازاء همهٔ z ها

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$ به ازاء $z \neq 0$

و بنابراین

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^m$$

که در آن

$$c_m = 1/m! \quad (m \geq 1)$$
$$c_0 = 2$$
$$c_m = 1(-m)! \quad (m \leq -1)$$

و این بسط برای $z \neq 0$ برقرار است.

مثال ۲. $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$. به طریق مشابه داریم: $f(z) = \sum c_m z^m$ که در آن

$$C_m = \begin{cases} 0 & (m < -1) \\ 1 & (m \geq -1) \end{cases}$$

و این سری به ازای $0 < |z| < 1$ همگرای مطلق است.

مثال ۳. $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$. چون آن را به صورت

$$\left[1/z(1-\frac{1}{z})\right] + \left[1/2(1-\frac{z}{2})\right]$$

بنویسیم بسطی به صورت $\sum c_m z^m$ به دست می‌آوریم که در آن

$$c_m = \begin{cases} 1 & (m \leq -1) \\ 2^{-(m+1)} & (m \geq 0) \end{cases}$$

و این بسط در تاج دایرهٔ $1 < |z| < 2$ (حلقوی واقعی) برقرار است.

۲. نقطه‌های منفرد مجزا

اگر f در قرص سوراخ شدهٔ

$$0 < |z - z_0| < R$$

مشتق‌پذیر باشد گوییم که z_0 یک *نقطهٔ منفرد مجزای* f است. برای مطالعهٔ چنین

نقاط منفردی می توانیم از بسط سری لوران استفاده کنیم. یک سری لوران

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(z-z_۰)^n+\sum_{n=۱}^{\infty}b_n(z-z_۰)^{-n}$$

که در $۰<|z-z_۰|<R$ برقرار است وجود دارد؛ و این سری به سه طریق به طور اساسی متفاوت ممکن است رفتار کند. (۱) $b_n=۰$ به ازاء همهٔ b_n ها. چون $f(z_۰)=a_۰$ تعریف کنیم تابعی به دست می آوریم که در همهٔ قرص $|z-z_۰|<R$ مشتق پذیر است با بسط سری تیلر

$$\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(z-z_۰)^n$$

در این حالت $z_۰$ را نقطهٔ *منفرد حذف شدنی (حذف پذیر یا قابل رفع)* می نامند. این حالت بیشتر محصول دامنهٔ تعریف ما برای f است تا جنبهٔ ذاتی دلخواهی برای f باشد.

مثلاً

$$f(z)=\frac{\sin(z)}{z}\quad(z\neq ۰)$$

را در نظر بگیرید. حول $z_۰$ داریم:

$$f(z-z_۰)=۱-\frac{z^۲}{۳!}+\frac{z^۴}{۵!}-\dots$$

(۲) *فقط تعدادی بسیار و متناهی از* b_n *ها مخالف صفر هستند.* آنگاه

$$f(z)=\frac{b_m}{(z-z_۰)^m}+\dots+\frac{b_۱}{z-z_۰}+\sum a_n(z-z_۰)^n$$

که در آن $b_m\neq ۰$ است. در این حالت می گوییم f دارای یک قطب از مرتبه m

است. مثلاً

$$f(z) = z^{-4}\sin(z) \quad (z \neq 0)$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+5)!}$$

در $z_0 = 0$ دارای یک قطب از مرتبهٔ ۳ است.

قطبهای از مرتبهٔ ۱، ۲، ۳، . . . غالباً قطبهای *ساده*، *دوگانه*، *سه گانه* و . . . نامیده می شوند.

(۳) b_n ها به *تعداد نامتناهی ناصفرند*. پس گوییم z_0 یک *نقطهٔ منفرد مجزای اصلی* است. مثلاً

$$f(z) = \sin(1/z)(z \neq 0)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots$$

در z_0 دارای یک نقطهٔ منفرد مجزای اصلی است.

براساس سه حالت ممکنه، به بررسی رفتار یک تابع تحلیلی در حوالی یک نقطهٔ منفرد مجزا می پردازیم.

۳. رفتار در حوالی یک نقطهٔ منفرد مجزا

نقطه های منفرد حذف شدنی، کم بها و غیر جالبند - و همین خاصیت قابل حذف بودن، اهمیت آنها را، برای شناسایی، بیشتر می کند. لِم بعدی معمولاً برای این منظور کافی است.

لم ۱۱-۲. موارد زیر برای تابع مشتق پذیر f در $0 < |z - z_0| < R$ هم ارزند.

(الف) z_0 یک نقطهٔ منفرد حذف شدنی است.

(ب) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ وجود دارد و متناهی است.

(ج) $M > 0$, $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $|f(z)| < M$ به ازاء $0 < |z - z_0| < \delta$.

برهان. به سادگی (ج) $\Rightarrow$ (ب) $\Rightarrow$ (الف)، بنابر این فقط نیازمند اثبات

(الف)$\Rightarrow$(ج) هستیم. فرض کنیم (ج) برقرار است، و یک بسط لوران

$$f(z)=\sum a_n(z-z_\cdot)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_\cdot)^{-n}$$

در نظر می‌گیریم.

ولی

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z-z_\cdot)^{n-1}dz$$

که در آن $C_r(t)=z_\cdot+re^{it}(0\le t\le 2\pi)$ به ازاء $0<r<R$ است. بنابراین

$$|b_n|\le\frac{1}{2\pi}Mr^{n-1}.2\pi r=Mr^n$$

اگر $r\to 0$ نتیجه می‌شود که $|b_n|=0$ به ازاء $n\ge 1$. بدین سان $z_\cdot$ یک نقطهٔ منفرد حذف شدنی است و (الف) برقرار است.

بی‌درنگ فرع مفید زیر حاصل می‌شود:

فرع ۱۱-۳. اگر به ازاء $n\ge 1$ هر b_n دلخواه مخالف صفر باشد آنگاه f بر هر قرص باز به مرکز $z_\cdot$ بی‌کران است.

مثلاً اگر،

$$f(z)=z^2/((e^z-1)\sin z)\quad (z\ne 0)$$

آنگاه

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\left(\frac{z}{\sin z}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(1+\frac{z}{2!}+\dots\right)^{-1}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots\right)^{-1}$$

$$=1,$$

به طوری که $z_\cdot=0$ یک نقطهٔ منفرد حذف شدنی است.

برای قطبها، محکی مشابه، قدری پیچیده‌تر، وجود دارد.

گزارهٔ ۱۱-۴ . اگر f در $0 < |z - z_0| < R$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f قطبی از مرتبهٔ m در z_0 دارد اگر و فقط اگر $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \neq 0$.

برهان. اگر f دارای قطبی از مرتبهٔ m باشد آنگاه

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + \dots + b_1 (z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{m-n}$$

به طوری که

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m \neq 0$$

به عکس اگر حد $l \neq 0$، آنگاه $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ بنابر لم ۱۰-۲ یک نقطهٔ منفرد حذف شدنی در z_0 دارد و در نتیجه یک سری

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

که به ازاء $|z - z_0| < R$ برقرار است و $a_0 = l \neq 0$ وجود دارد. امّا در این حال،

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n$$

که در آن $a_0 \neq 0$ ؛ و لذا f دارای یک قطب از مرتبهٔ m در z_0 است.

مثلاً

$$f(z) = \frac{5z + 3}{(1 - z)^3 \sin^2 z} \quad (0 < |z| < 1)$$

را در نظر بگیرید. آنگاه $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 3$ ، بنابراین یک قطب مضاعف (دو گانه) در مبداء وجود دارد. همچنین، $\lim_{z\to 1} (z - 1)^3 f(z) = -8/(\sin^2(1)) \neq 0$ ، بنابراین یک قطب سه گانه در $z_0 = 1$ وجود دارد.

فرع ۱۱-۵. تابع $f(z)$ یک قطب از مرتبهٔ m در z_0 دارد اگر و فقط اگر $1/f(z)$ دارای یک صفر از مرتبهٔ m در z_0 باشد (یا دقیقتر، اگر $1/f(z)$ دارای یک *انفراد* حذف نشدنی در z_0 باشد که، هنگامی که حذف شود، صفری از مرتبهٔ m به دست دهد).

برهان. اگر $f(z)$ یک قطب از مرتبهٔ m داشته باشد آنگاه $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ یک نقطهٔ منفرد حذف شدنی در z_0 دارد. علاوه، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازاء $0 < |z - z_0| < \delta$ داریم $g(z) \neq 0$. بنابراین

$$1/f(z) = (z - z_0)^m / g(z)$$

و $1/g(z)$ به ازاء $|z - z_0| < \delta$ مشتق پذیر است. به این دلیل است که $1/f(z)$ دارای یک صفر از مرتبهٔ m در z_0 است. استنباط مطلب عکس با بحثی تقریباً یکسان به اثبات می رسد.

فرع ۱۱-۶. اگر $f(z)$ دارای قطبی از مرتبهٔ m در z_0 باشد آنگاه

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$$

برهان

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} |f(z)| &= \lim \left| g(z) / (z - z_0)^m \right| \\ &= |l| . \lim_{z \to z_0} \left| 1/(z - z_0)^m \right| \\ &= +\infty\end{aligned}$$

□

بدین سان در حوالی یک قطب رفتار f به واقع کاملاً خوب است. ولی، در حوالی یک نقطهٔ منفرد مجزای اصلی همان رفتار خیلی آشفته تر است. نتیجهٔ زیر نتیجه ای کلاسیک است:

گزارهٔ ۱۱-۷ *(وایرشتراس - کازوراتی)*. در هر همسایگی یک نقطهٔ منفرد مجزای اصلی z_0 تابعی مشتق پذیر چون f مقادیری اختیار می کند که به طور دلخواه نزدیک

به یک عدد مختلط مشخص شده است. صریحتر آنکه، با معلوم $r>0$ ، $\varepsilon>0$ ، و $w\in C$ ، یک z_1 وجود دارد به طوری که $0<|z-z_0|<r$, $|f(z_1)-w|<\varepsilon$.

برهان. داریم $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$ که در آن به تعداد نامتناهی $b_n\neq 0$.

اگر $\phi(z)=f(z)-w$ تعریف کنیم آنگاه سری لوران $\phi(z)$ با سری لوران $f(z)$ تنها در ضریب a_0 متفاوت است، که در $\phi(z)$ به اندازه w از آن کاسته شده است. در نتیجه $\phi(z)$ هم یک انفرادمجزای اصلی در z_0 دارد، و تنها لازم است که ثابت کنیم که $\phi(z_1)$ را در هر همسایگی دلخواه z_0 به قدر کافی می توانیم کوچک اختیار کنیم، یعنی z_1 وجود دارد به طوری که

$$0<|z_1-z_0|<r\ ,\ |\phi(z_1)|<\varepsilon$$

این مطلبی ساده خواهد بود اگر z_0 یک حد برای صفرهای ϕ باشد. اگر چنین حالتی نباشد، $\rho>0$ وجود دارد به طوری که به ازاء $0<|z-z_0|<\rho$ داریم $\phi(z)\neq 0$. یا z_1 با شرایط $0<|z-z_1|<r$ و $|1/\phi(z_1)|>1/\varepsilon$ وجود دارد، یا در غیر این صورت $1/\phi(z)$ به ازاء $|z-z_0|<r$ کراندار است. اگر حالت نخست روی دهد قضیه به اثبات رسیده است. در حالت بعدی، $1/\phi(z)$ بنابر قضیهٔ ۱۱-۲ یک نقطهٔ منفرد در z_0 دارد، و بنابراین طبق فرع ۱۱-۵ $\phi(z)$ در بدترین حالت یک قطب در z_0 دارد که با اصلی بودن z_0 متناقض است. بدین سان حالت اخیر روی نمی دهد، و این برهان را کامل می کند.

واقعیت این است که نتیجه ای مستدل تر و قانع کننده تر صحت دارد. پیکارد (۱۸۵۶-۱۹۴۱) ثابت کرد که در هر همسایگی یک انفراد مجزای اصلی یک تابع مشتق پذیر هر مقدار دلخواهی را، *با حداکثر یک استثناء*، اختیار می کند. مثلاً $\sin(1/z)$ هر مقداری را در $0<|z|<r$ به ازاء $r>0$ اختیار می کند، و این به آسانی قابل اثبات است. استثناء مذکور ممکن است روی دهد: $e^{1/z}$ مقدار ۰ را نمی گیرد ولی همهٔ مقادیر دیگر را در $0<|z|<r$ به ازاء هر $r>0$ اختیار می کند. اما اثبات قضیهٔ *پیکارد* نیاز به ابزاری (تابعهای هنگی بیضوی) دارد که به طور قابل ملاحظه ای ورای سطح این کتاب است.

۴ . صفحهٔ مختلط وسعت یافته، یا کره ریمان

هم اکنون راهی برای توصیف رفتار یک تابع مختلط «در بی نهایت» در پیش می گیریم. بدین طریق که به صفحهٔ مختلط C یک نقطهٔ اضافی «∞» ، بسیار شبیه به وسعت دادن خط حقیقی به وسیلهٔ ضمیمه کردن $+\infty$ و $-\infty$ ضمیمه می کنیم. این که فقط یک نقطه مورد نیاز است نکته ای است که به هندسهٔ صفحه مربوط می شود: تمیز بین دو «انتها» ی یک خط راست به هنگامی که با تمام صفحه سر و کار داریم، مبهم است. این نظریه از ریمان است و تجسم هندسی خوبی دارد. دربارهٔ C چنین تصور می کنیم که در صفحهٔ (x,y) واقع در $R^۳$ نشانده شده است، به طوری که نقطه ای چون $x+iy \in C$ به وسیلهٔ $(x,y,۰) \in R^۳$ شناسایی می شود. فرض کنیم:

$$S^۲ = \left\{(\xi,\eta,\zeta) \in R^۳ : \xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲ = ۱\right\}$$

«کرهٔ واحد» باشد. خطی که «قطب شمال» (۱، ۰، ۰) را به $(x,y,۰)$ وصل کند $S^۲$ را در نقطهٔ منحصر به فرد (ξ,η,ζ) قطع می کند، بنابراین تناظری یک به یک بین C و نقاط $S^۲$ به غیر از قطب شمال وجود دارد. (شکل ۱۱-۳). همانطور که خواننده به آسانی می تواند اثبات کند؛

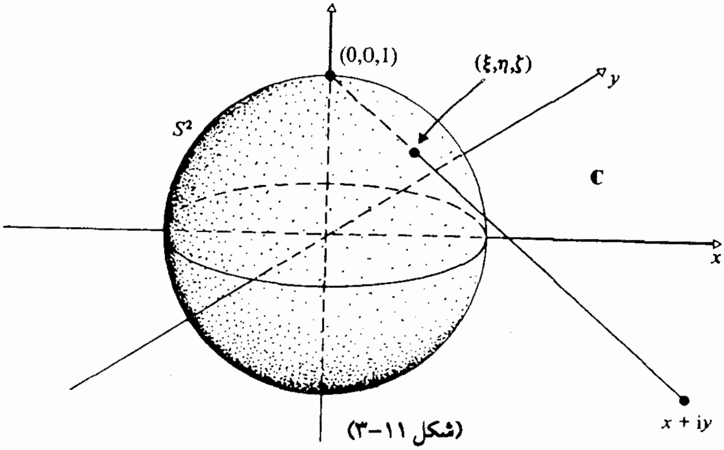
(ξ,η,ζ) متناظر است با $\left(\dfrac{\xi}{۱-\zeta}\right)+i\left(\dfrac{\zeta}{۱-\zeta}\right)$.

هنگامی که (ξ,η,ζ) به (۱ ، ۰ ، ۰) نزدیک می شود، نتیجه می گیریم که (همانطور که از لحاظ هندسی واضح است) $|x+iy|$ بسیار بزرگ می شود: بدین سان به میان آوردن نماد

$$\infty$$

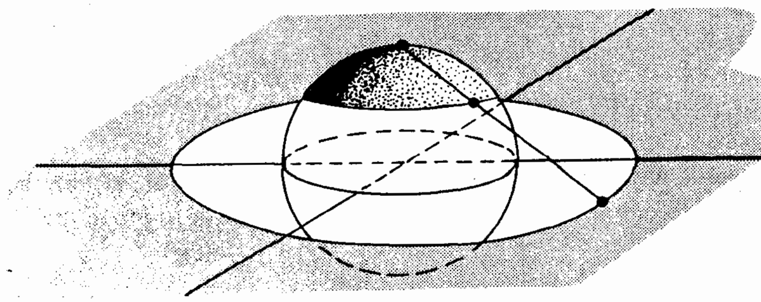
که نظیر نقطهٔ $(۰,۰,۱) \in S^۲$ باشد شایسته به نظر می رسد. آنگاه تناظری یک به یک بین $S^۲$ و $C\cup\{\infty\}$ خواهیم داشت، که ما $C\cup\{\infty\}$ را صفحهٔ مختلط وسعت یافته می نامیم. آن را می توان با $S^۲$ که بعدها *کره ریمان* نامیده شد شناسایی کرد. اکنون می توانیم $C\cup\{\infty\}$ را یا به عنوان یک صفحهٔ همراه با یک نقطهٔ

اضـافی، یا به عنوان یک کره محسـوب نمود: متناظراً C را با یک صـفـحه، یا کـره ای بدون قطب شـمـال به حسـاب می آوریم. هـر دو دیدگـاه، با در نظر گـرفتن مساله ای که در دست است، ارزش خاص خود را دارد.



(شکل ۱۱-۳)

چون مـجموعـهٔ $\{x+iy : |x+iy| > R\}$ مـتناظر است با یک «عـرقـچین کـروی» محـدود بین یک خط عرضی و قطب شـمال (شکل ۱۱-۴) از این لحاظ با معنی و بجـا خـواهد بود اگـر $\{z : |z| > R\}$ را به عنوان یک «هـمـسـایگی ∞» به حـسـاب آوریم. این همسایگی ها هنگامی که R بزرگتر گردد کـوچکتر می شود. انجام این کار به مـفهـومی از پیوسـتگی بر S^2 می انجـامد کـه با شـهـود هندسی تطبیق می کند. (آنهـا کـه با توپولوژی آشنایی دارنـد می توانند این مطلب را به طور دقیـقـتری بیـان کنند: یک تـوپولوژی بر کـرهٔ ریمـان به دسـت می آوریم کـه با توپولوژی مـعـمـولی خودش به عنوان یک زیر فضای R^3 متحد است.)


(شکل ۱۱-۴)

۵. رفتار یک تابع مشتق‌پذیر در ∞

فرض کنیم $f(z)$ در $\{z \in C \| z| > R\}$ مشتق‌پذیر باشد. در این حال می‌توانیم تعریف کنیم:

$$g(z) = f(1/z) \quad (0 < |z| < 1/R)$$

چون $g'(z) = -z^{-2}f'(1/z)$ نتیجه می‌گیریم که $g(z)$ به ازای $0 < |z| < 1/R$ مشتق‌پذیر است، و بنابراین در ۰ یک نقطهٔ منفرد مجزا دارد. گوییم f یک *انفراد حذف شدنی*، *قطب از مرتبهٔ* m، *یا انفرادی مجزای اصلی* در ∞ دارد اگر و فقط اگر $g(z)$ انفرادی متناظری در ۰ داشته باشد. (توجه کنید که این یک تعریف است، نه یک قضیه.)

مثال ۱. $f(z) = 1/z(|z| > 0)$. آنگاه $g(z) = z(|z| > 0)$ طوری که f یک انفراد حذف شدنی در ∞ دارد.

مثال ۲. $f(z) = z$. آنگاه $g(z) = 1/z(|z| > 0)$ طوری که f یک قطب ساده در ∞ دارد.

مثال ۳. $f(z) = e^z$. آنگاه $g(z) = e^{1/z}(|z| > 0)$ و f یک انفراد مجزای اصلی در ∞ دارد.

مثال ۴. $f(z) = 1/\sin(z)(z \neq n\pi, n \in Z)$. آنگاه $g(z) = 1/\sin(1/z)$. نمی‌توانیم بگوییم که f یک انفراد مجزای اصلی در ∞ دارد، زیرا f در $\{z : |z| > R\}$ به ازاء هیچ R دلخواه بزرگتر از صفر مشتق‌پذیر نیست. با این وصف مطمئناً f نوعی انفرادی در ∞ دارد! به طور کلی اگر $f(z)$ دنباله‌ای از انفرادهای $z_1, z_2, \ldots$ داشته باشد به طوری که $z_n \to \infty$ آنگاه گوییم f دارای یک *انفراد اصلی* (امّا نه مجزا) در ∞ است.

اگر f یک انفراد حذف شدنی در ∞ داشته باشد آنگاه g یک انفراد حذف شدنی در ۰ دارد، و بنابراین f به عنوان یک تابع مشتق‌پذیر در $|z| > 1/R$ ممکن است در نظر گرفته شود. بدین سان می‌توانیم بگوییم f در ∞ *مشتق‌پذیر (تحلیلی)* است، و تعریف کنیم $f(\infty) = g(0) = \lim_{z\to 0} g(z)$، به طوری که $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$.

مثلاً اگر $f(z) = 1/z$، آنگاه $g(0) = 0$ و بنابراین $f(\infty) = 0$.

بعلاوه، گوییم f دارای یک *صفر از مرتبهٔ* m در ∞ است اگر g یک صفر از مرتبهٔ m در ۰ داشته باشد. بدین سان اگر $f(z)=1/z^m (|z|>0, m\in z, m>0)$ آنگاه $g(z)=z^m$ و f دارای یک صفر از مرتبهٔ m در ∞ است.
به طور کلی هر گزاره‌ای دربارهٔ رفتار f در ∞ را می‌توانیم به گزاره‌ای مربوط به g در ۰ برگردانیم - و این همان چگونگی اثبات چنین گزاره‌ای است.

۶. تابع های مِرومورفیک

قطبها، به ناهنجاری انفرادها نیستند، و بایسته است که گردایه‌ای از تابعهایی در نظر بگیریم که از تابعهای مشتق‌پذیر کلی‌تر هستند. اگر f در همه جای دامنه‌ای چون S مشتق‌پذیر باشد به استثنای نقاطی که f در آنها قطب دارد، آنگاه f را مِرومورفیک می‌گویند.

مثلاً $f(z)=1/z$ در $C\setminus\{0\}$ مشتق‌پذیر است، و بنابراین در C مرومورفیک می‌باشد زیرا انفرادی که در ۰ هست یک قطب است. یا $f(z)=1/\sin(z)$ در $C\setminus\{n\pi : n\in Z\}$ مشتق‌پذیر و لذا در C مرومورفیک است.

از این هم می‌توانیم پیش‌تر برویم، و تابعهایی را در نظر بگیریم که در صفحهٔ مختلط وسعت یافته مرومورفیک هستند- که منظور ما از آن این است که انفرادهای f، به انضمام ∞ در صورت لزوم، قطبها هستند. لزومی ندارد که اصطلاح خاصی برای این قبیل تابعها به میان آوریم، زیرا معلوم است که توصیف ساده‌ای دارند. یادآوری می‌کنیم که تابع *گویا* تابعی است به صورت:

$$f(z)=\phi(z)/\psi(z)$$

که در آن $\phi(z)$ و $\psi(z)$ تابعهای بسجمله‌ای هستند. آنگاه داریم؛

گزارهٔ ۱۱-۸. یک تابع در صفحهٔ مختلط وسعت یافته مروموفیک است اگر و فقط اگر گویا باشد.

برهان. واضح است که یک تابع گویا مروموفیک است. بعکس فرض کنیم که f در $C\cup\{\infty\}$ مروموفیک باشد چون f در ∞ مشتق‌پذیر است یا در ∞ یک قطب

دارد، لذا $R > 0$ وجود خواهد داشت به طوری که f در

$$\{z \in C : |z| > R\}$$

مشتق‌پذیر است. بنابراین قطبهای f به استثنای ∞ در درون قرص بستهٔ

$$\{z \in C : |z| \leq R\}$$

رخ می‌دهند. چون قطبها انفرادهای مجزا هستند هر قطب یک همسایگی دارد که شامل هیچ قطب دیگر نیست. بدین لحاظ بنابر فشردگی این قرص بسته شامل تعداد متناهی از قطب‌ها، مثل $z_1, z_2, \ldots, z_k$ است. فرض کنیم که مراتب این قطبها $n_1, n_2, \ldots, n_k$ باشند. تعریف می‌کنیم:

$$g(z) = (z - z_1)^{n_1} \ldots (z - z_k)^{n_k} f(z)$$

که در سراسر C مشتق‌پذیر است، و در نتیجه تحلیلی، و دارای یک سری تیلر

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in C)$$

ولی بسجمله ای

$$(z - z_1)^{n_1} \ldots (z - z_k)^{n_k} = \psi(z)$$

دارای یک قطب از مرتبهٔ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ در ∞ است، زیرا

$$\psi\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z} - z_1\right)^{n_1} \ldots \left(\frac{1}{z} - z_k\right)^{n_k}$$
$$= 1/z^{n_1} + \ldots + n_k + \ldots$$

و چون f در بدترین وضعیت یک قطب از مرتبهٔ N، به ازاء یک Nی، دارد نتیجه می‌شود که $g(z)$ دارای یک قطب از مرتبهٔ

$$M = n_1 + \ldots + n_k + N$$

در ∞ است. حال

$$g(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (|z| > 0)$$

و چون این دارای یک قطب از مرتبهٔ M در ۰ است به ازاء $n > M$ داشته باشیم $a_n = 0$. بنابراین

$$g(z) = a_0 + \ldots + a_M z^M$$

که یک بسجمله است؛ در نتیجه $f(z) = g(z)/\psi(z)$ یک تابع گویا است.

تابعی که فقط در C مرومورفیک است لزومی ندارد که گویا باشد. مثال $1/\sin(z)$ مؤیّد آن است: $1/\sin(z)$ گویا نیست از آن جهت که به تعداد نامتناهیِ قطب دارد. ولی قبلاً متذکر شده بودیم که در C مرومورفیک است.

تمرینهای ۱۱

۱ . بسط لوران هر یک از موارد آتی را حول $z=0$ به دست آورید :

(الف) $(z-3)^{-1}$

(ب) $(z-a)^{-k} \quad (a \in C, k = 1,2,3,\ldots)$

(ج) $1/z(1-z)$

(د) $1/(z-a)(z-b) \quad (a,b \in C)$

(ه) $z^3 e^{1/z}$

(و) $\exp(z+1/z)$

(ز) $\cos 1/z$

(ح) $\exp(z^{-5})$

در هر مورد، بگویید که بسط در کدام تاج دایره برقرار است .

۲ . بسط لوران هر یک از تابعهای داده شده را در تابعهای دایرهٔ مورد نظر به دست آورید :

(الف) $(z-1)^{-2}(z-2)^{-1}$ بر $0<|z|<1$

(ب) $(z-1)^{-2}(z-2)^{-1}$ بر $1<|z|<2$

(ج) $(z-1)^{-2}(z-2)^{-1}$ بر $2<|z|<3$

(د) $\exp(-z^{-2})$ بر $|z|>0$

(ه) $(1-z+z^2)^{-1}$ بر حسب توانهای $z-1$ بر $0<|z-1|<1$

(و) $e^z/(1+z^2)$ بر $|z|>1$

۳ . کدام یک از تابعهای زیر دارای شاخه هایی با بسط لوران حول نقطهٔ معلوم z_0 هستند؟ (یعنی، بر حسب توانهایی از $z-z_0$.)

(الف) $\sqrt{z}, z_0=1$

(ب) $\sqrt{z}, z_. = ۰$

(ج) $\log z, z_. = ۰$

(د) $\log z, z_. = ۳$

(ه) $\sqrt{۱+\sqrt{z}}, z_. = ۰$

(و) $\tan^{-۱}(۱+z), z_. = ۰$

(ز) $\sin^{-۱}(z), z_. = ۰$

(ح) $\sqrt{(\pi/۲)-\sin^{-۱}(z)}\ ,\ z_. = ۱$

(ط) $z^۲ \operatorname{cosec}(۱/z)\ ,\ z_. = ۰$

(ی) $\sqrt{(\pi/۴)-\sin^{-۱}(z)}, z_. = ۱/\sqrt{۲}$

۴. برقراری بسط لوران را در مورد زیر ثابت کنید:

$$\frac{۱}{(z-۱)(z-۲)} = \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-(n+۱)} z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} z^{-n}$$

۵. سری لوران را برای $(z^۲+۱),(z^۲-۱)^{-۱}$ بر حسب توانهای $z-i, z+i$ به دست آورید و بگویید که این سری‌ها در کدام تابعهای دایره برقرارند.

۶. فرض کنیم $a,b \in C$ باشد. نشان دهید که

$$\exp(az+bz^{-۱}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

که در آن

$$a_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} e^{(a+b)\cos\theta}\cos[(a-b)\sin\theta - n\theta]d\ \theta$$

۷. فرض کنیم $a \in C$ باشد. نشان دهید که

$$\sin\left(a(z+z^{-۱})\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2a\cos\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

۸ . قطبهای این توابع را بیابید :

(الف) $1/(z^2+1)$

(ب) $1/(z^4+16)$

(ج) $1/(z^4+2z^2+1)$

(د) $1/(z^2+z-1)$

۹ . نوع انفراد در نقطهٔ ۰ را در هر یک از تابعهای زیر توصیف کنید.

(الف) $\sin(1/z) \quad (z \neq 0)$

(ب) $z^{-3}\sin^2 z$

(ج) $z\cot z \quad (z \neq n\pi)$

(د) $\operatorname{cosec}^2 z - z^{-2} \quad (z \neq n\pi)$

(ه) $(\cos z - 1)/z^2$

(و) $(\sin z - z + z^3/6)/z^7$

۱۰ . فرض کنیم D یک قرص به مرکز z_0 ، و f تابعی مشتق‌پذیر بر D غیر از z_0 باشد، و فرض کنیم $|f(z)|$ بر $D \setminus \{z_0\}$ کراندارد باشد. آنگاه ثابت کنید z_0 یک انفراد حذف شدنی f است. **(راهنمایی:** جمله های منفی سری لوران مربوطه ۰ هستند - چرا؟

۱۱ . همهٔ انفرادی های تابع های زیر را بیابید، و بگویید کدام یک قطب هستند :

(الف) $(z+z^{-1})^{-1}$

(ب) $\dfrac{\cos \pi z}{1-4z^2}$

(ج) $\exp(z+z^{-1})$

۱۲ . بر $C \cup \{\infty\}$ تابعی بسازید که فقط انفرادهای زیرین را داشته باشد:

(الف) یک قطب از مرتبهٔ ۲ در ∞

(ب) یک قطب ساده در هر یک از نقاط $e^{2\pi ikp}$، $k = 0, 1, \ldots, p-1$ ، که p عدد صحیحی بزرگتر یا مساوی ۲ است.

(ج) یک قطب ساده در z=۲ ، و یک قطب از مرتبهٔ ۵ در $z = \sqrt{2}$.

۱۳ . فرض کنیم $p(z)$ و $q(z)$ بسجمله ای هایی به ترتیب از درجه های n،m باشند. رفتار در بی نهایت را برای هر یک از اینها توصیف کنید:

(الف) $p(z) + q(z)$

(ب) $p(z)q(z)$

(ج) $p(z)/q(z)$

۱۴ . همهٔ انفرادها، رفتار در بی نهایت هر یک از اینها را تعیین کنید:

(الف) $(z - z^3)^{-1}$

(ب) $z^5/(2 - z^2)^2$

(ج) $(e^z - 1)^{-1} - 1/z$

(د) $\cot 1/z$

(ه) $(\cos z)z^{-2}$

(و) $[(\cos z) - 1]z^{-2}$

(ز) $\cot(1/z) - 1/z$

(ح) $\sin(1/\cos(1/z))$

۱۵ . فرض کنیم Γ یک دایره یا یک خط راست در صفحهٔ مختلط باشد. آیا تصویر آن در کرهٔ ریمان باز هم یک دایره است؟

۱۶ . قطب ها و صفرهای tanz را بیابید. ثابت کنید که tanz در C مرومورفیک است، ولی یک تابع گویا نیست.

۱۷ . ثابت کنید که $(z+1+z^{-1})^{-1}$ یک انفراد حذف‌پذیر در $z=0$ دارد. بسط تیلر آن، و شعاع همگرایی این بسط را بیابید.

۱۸ . در مورد تابعهای زیر قضیهٔ پیکارد را مستقیماً ثابت کنید:

(الف) e^z

(ب) $\tan^2 z$

(ج) z^2

(د) $\sin z$

(ه) $e^{(1/z)}$

(و) $\cos z$

(ز) $\tan z$

(ح) تابعی به انتخاب خودتان

۱۹ . فرض کنیم که $f(z)$ یک قطب از مرتبهٔ n در $z=a$ باشد. *جزء اصلی* $\phi(z)$ از $f(z)$ را حاصل جمع جمله های با توانهای منفی در بسط سری لوران بر حسب توانهای $z-a$ تعریف کنید. ثابت کنید که $f(z)-\phi(z)$ در $z=a$ مشتق‌پذیر است.

۲۰ . نشان دهید که، در همسایگی یک قطب، یک تابع مختلط حاصل جمع یک تابع گویا و یک تابع مشتق‌پذیر است.

۲۱ . فرض کنید که f در C به استثنای در قطبها تحلیلی باشد، و ∞ یک قطب یا یک انفراد حذف‌پذیر f باشد. نشان دهید

(الف) f فقط به تعداد متناهی قطب دارد.

(ب) $f-\sum_j P_j$ ثابت است، که در آن قطبهای f در نقاط a_j هستند و P_j ها اجزاء اصلی متناظر برای f هستند (سوال ۱۹)

(ج) f یک تابع گویا است، و $\sum_j P_j$ عبارت است از تفکیک آن به «کسرهای جزیی».

۲۲ . فرض کنیم $f: C \to C$ مشتق‌پذیر باشد، با این شرط که $f(z) \neq 0$ به ازاء هر $z \in C$. فرض کنیم $\lim_{z\to\infty} f(z)$ وجود داشته و ناصفر باشد. ثابت کنید که f ثابت است.

فصل دوازدهم

مانده ها

از جملهٔ وظایف سنگین آنالیز مختلط محاسبهٔ صریح انتگرالهای معین و به دست آوردن حاصل جمع سری ها است. گر چه چنین مسائلی به عنوان قسمتی از ریاضیات محض، در حال حاضر اهمیت خود را از دست داده اند، ولی هنوز هم در کاربردهای عملی بسیار مفیدند. بعلاوه توانایی این روش و کاربردی وسیع آن نشان دهندهٔ ارزش اصول کلی و قضایای عمیق آن در هر کار هوشمندانه است. تکنیک های پیشرفته برای چنین منظورهای دارای موارد استعمال نظری هستند، و این را در قسمت بعدی همین فصل خواهیم دید.

ایدهٔ اصلی این است که قضیهٔ کوشی‌را به کار بگیریم تا از طبیعت استثنایی جملهٔ $b_۱/(z-z_۰)$ در بسط لوران یک تابع تحلیلی استفاده کنیم.

۱ . قضیهٔ ماندهٔ کوشی

اگر f دارای یک انفراد مجزا در $z_۰$ و بسط لوران

$$f(z_۰+h)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nh^n+\sum_{n=۱}^{\infty}b_nh^{-n}\quad (۰<|h|<R)$$

باشد، *مانده* f را در z_0 چنین تعریف می کنیم:

$$\operatorname{res}(f,z_0) = b_1$$

با کمک قضیهٔ ۱۱-۱ بی درنگ نتیجه می گیریم که

$$\operatorname{res}(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)dz \qquad (1)$$

که در آن $C_r(t) = z_0 + re^{it} (0 \le t \le \pi)$ و $0 < r < R$. همین رابطهٔ (۱) است که رابطهٔ بین مانده ها را با انتگرالگیری نشان می دهد.

مسیر بسته ای چون γ را یک *لوپ(حلقه، طوق) ساده* می نامیم، اگر برای هر نقطهٔ غیر واقع بر γ داشته باشیم $w(\gamma,z) = 0$ یا $w(\gamma,z) = 1$. طبق معمول، مجموعهٔ نقاطی که در $w(\gamma,z) \neq 0$ صدق می کنند، که هم اکنون به معنی $w(\gamma,z) = 1$، گفته می شود که *درون* γ جای دارند. در موارد استعمال ها، لوپ های سادهٔ به کار رفته از پاره خط های راست و قسمت هایی از دوایر تشکیل می گردند (شکل ۱۲-۱). همهٔ لوپ های ساده ای که با آنها مواجه می شویم کانتورهای *ژردان* خواهند بود (یعنی، آنها خود را قطع نمی کنند)، ولی برای این نظریه چنین مطلبی جنبهٔ اساسی ندارد. (شکل ۱۲-۲ لوپ ساده ای را براساس تعریف ما نشان می دهد که یک کانتور ژردان نیست.) آنچه مهم است این است که نقاط درون γ همه دارای خاصیت $w(\gamma,z) = +1$ باشند.

در چنین حالت هایی، داریم:

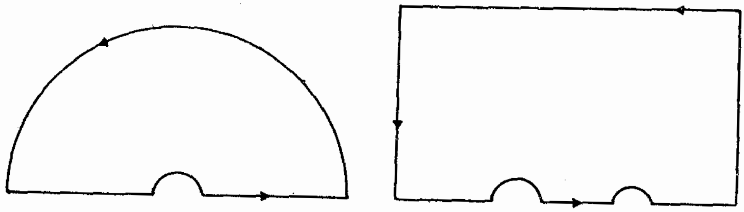
قضیهٔ ۱۲-۱. *(قضیهٔ ماندهٔ کوشی)*

فرض کنیم S دامنه ای شامل لوپ سادهٔ γ و نقاط درون γ باشد. اگر f در S به استثنای تعدادی متناهی نقاط منفرد مجزای $z_1, z_2, \ldots, z_n$ که در درون γ هستند مشتق پذیر باشد، آنگاه

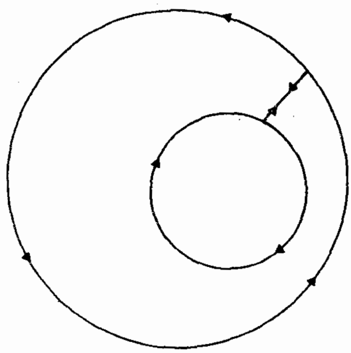
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{n} \operatorname{res}(f,z_r)$$

برهان. چون S باز است می توانیم دوایری چون $S_r(t) = z_r + \varepsilon_r e^{it} (0 \le t \le 2\pi)$

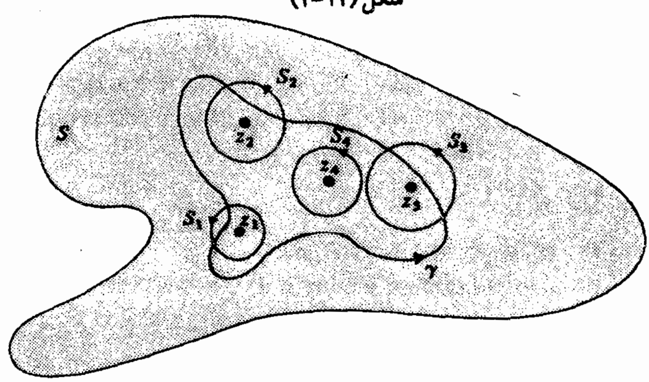
حول $z_r(r = 1,...,n)$ بیابیم به طوری که S_r و نقاط درون آن در داخل S قرار گیرند، و بطوری که S_r شامل هیچ انفراد دیگری غیر از z_r نباشد (شکل ۱۲-۳)



شکل (۱۲-۱)



شکل (۱۲-۲)



شکل (۱۲-۳)

فرض کنیم

$$S' = S \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

آنگاه گردایهٔ مسیرهای

$$-\gamma, S_1, \ldots, S_n$$

در شرایط قضیهٔ ۸-۹ صدق می‌کند. به ازاء

$$w(-\gamma, z) = w(S_r, z) = 0 \quad (z \notin S)$$

$\omega(-\gamma, x_r) = -\omega(\gamma, x_r) = 1$ زیرا z_r درون γ قرار دارد

$w(S_m, z_r) = 0$ اگر $m \neq r$. و مساوی ۱ اگر $m = r$.

بنابراین

$$w(-\gamma, z) + w(S_1, z) + \ldots + w(S_m, z) = 0$$

به ازاء هر $z \notin S'$.

در این حال بنابر قضیهٔ تعمیم یافتهٔ کوشی

$$\int_{-\gamma} f + \int_{S_1} f + \ldots + \int_{S_n} f = 0$$

به طوری که بنابر (۱)

$$\int_{\gamma} f = \int_{S_1} f + \ldots + \int_{S_n} f$$

$$= 2\pi i . \mathrm{res}(f, z_1) + \ldots + 2\pi i . \mathrm{res}(f, z_n)$$

این همان نتیجهٔ مطلوب است.

برهانی دیگر. به جای قضیهٔ تعمیم یافتهٔ کوشی می‌توانیم سری لوران را به کار بگیریم: این برهان آموزنده است امّا ظرافت کمتری دارد. حول z_j یک بسط لوران برای f داریم، که آن را سه قسمت می‌کنیم:

$$f(z) = Q_j(z) + \frac{\mathrm{res}(f, zj)}{z - zj} + P_j(z) \qquad (2)$$

که در آن

$$Q_j(z) = \sum_{n=۲}^{\infty} b_n (z - zj)^{-n}$$

$$P_j(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (z - zj)^{n}$$

ولی $P_j(z)$ در همسایگی ای از z_J مشتق پذیر است، و $Q_J(Z) + \mathrm{res}(f, z_j)/(z - z_j)$ به ازاء $z \neq z_j$ مشتق پذیر است زیرا همهٔ b_n ها به استثنای تعدادی متناهی از آنها صفر هستند. نتیجه اینکه

$$h(z) = f(z) - \sum_{j=۱}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=۱}^{n} \frac{\mathrm{res}(f, z_j)}{z - z_j} \tag{۳}$$

بر S مشتق پذیر است. به استثنای شاید در نقاط $z_۱, \ldots, z_n$ ، ولی $h(z)$، با توجه به (۲)، در همسایگی ای از هر z_J مشتق پذیر است. حاصل اینکه $h(z)$ در S مشتق پذیر است، بنابراین بنا بر قضیهٔ کوشی

$$\int_\gamma h(z)dz = ۰ \tag{۴}$$

ولی $Q_j(z) = T_j'(z)$ که در آن

$$T_j(z) = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{b_n}{-n + ۱} (z - zj)^{-n+۱}$$

به طوری که

$$\int Q_j(z)dz = ۰ \tag{۵}$$

نتیجه اینکه با انتگرالگیری از (۳) حول γ و به کار گرفتن (۴) و (۵) حاصل می شود:

$$۰ = \int_\gamma f(z)dz - ۰ - \sum_{j=۱}^{n} \mathrm{res}(f, z_j) \int_\gamma (z - z_j)^{-۱} dz$$

$$= \int_\gamma f(z)dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} res(f, z_j)$$

و این برهان اخیر را به پایان می برد.

۲. محاسبهٔ مانده ها

قضیهٔ مانده ها را می توان برای محاسبهٔ انتگرالها به کار برد (و نه فقط انتگرالهای حول لوپ های ساده). برای استفادهٔ بسیار از این کار باید راههایی برای محاسبهٔ مانده ها بیابیم. دو لم آتی برای این منظور بسیار مفید هستند.

لِم ۱۲-۲ . اگر z_0 قطب ساده ای از f باشد آنگاه

$$res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

اگر $f(z) = p(z)/q(z)$ که در آن $p(z_0) \neq 0$ ، $q(z_0) = 0$ ، $q'(z_0) = 0$ ، آنگاه

$$res(f, z_0) = P(z_0)/q'(z_0)$$

برهان. در فصل پیش بخش اوّل را انجام داده ایم (گزارهٔ ۱۱-۴) ولی به قصد مرور رؤوس مطالب داریم:

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

و بنابراین

$$(z - z_0) f(z) = b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

که به b_1 میل می کند چنانچه $z \to z_0$.

در مورد قسمت دوم، توجه کنید که

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) P(z)}{q(z)} = \lim_{z \to z_0} p(z) \Big/ \left(\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0} \right)$$

زیرا $q(z_\circ)=\circ$ ، و این برابر است با $p(z_\circ)/q'(z_\circ)$.
مثلاً ، اگر

$$f(z)=\frac{\cos(\pi z)}{1-z^{976}}$$

آنگاه

$$\text{res}(f,1)=\frac{\cos(\pi)}{-976\times 1^{975}}=\frac{1}{976}$$

لم ۱۲-۳ . اگر $z_\circ$ قطبی از مرتبهٔ m برای f باشد آنگاه

$$\text{res}(f,z_\circ)=\lim_{z\to z_\circ}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_\circ)^m f(z)\right)\right\}$$

برهان. داریم :

$$f(z)=\frac{b_m}{(z-z_\circ)^m}+\ldots+\frac{b_1}{z-z_\circ}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n$$

به طوری که

$$(z-z_\circ)^m f(z)=b_m+\ldots+b_1(z-z_\circ)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^{m+n}$$

و بنابراین

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_\circ)^m f(z)\right)=(m-1)!b_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{(n+1)!}a_n(z-z_\circ)^{n+1}$$

و نتیجهٔ مطلوب با گرفتن حد به دست می‌آید :
مثلاً،

$$f(z)=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$$

را که یک قطب سه گانه در $z_\circ=1$ دارد در نظر بگیرید . آنگاه

$$(z-1)^3 f(z)=(z+1)^3$$

و بنابراین

$$\frac{۱}{۲!}\ \frac{d^۲}{dz^۲}\left((z-۱)^۳ f(z)\right)=\frac{۶}{۲!}(z+۱)$$

که به ۶=۲ . ۳ میل می کند که هنگامی که $z \to ۱$. پس $\mathrm{res}(f,۱)=۶$

گاهی می توانیم تکنیک دیگری را به کار بریم: به انجام رساندن قسمتهای مناسب سری‌لوران(انجام همه قسمتها اتلاف وقت است، زیرا همهٔ آنچه دربارهٔ مانده‌ها لازم است چیزی نیست، جز محاسبهٔ $b_۱$). به عنوان مثال،

$$\begin{aligned} f(z) &= ۱/(z^۲\sin(z)) \\ &= ۱/\left(z^۲(z-\frac{z^۳}{۶}+\ldots)\right) \\ &= \frac{۱}{z^۳}(۱-\frac{z^۲}{۶}+\ldots)^{-۱} \\ &= \frac{۱}{z^۳}(۱+\frac{z^۲}{۶}+\ldots) \\ &= \frac{۱}{z^۳}+\frac{۱}{۶z} \end{aligned}$$

به طوری که $\mathrm{res}(f,۰)=۱/۶$.

۳ . محاسبهٔ انتگرالهای معین

اکنون به ارائه چند تکنیک برای محاسبهٔ انتگرالهای معین گوناگون می پردازیم.

$$\int_۰^{۲\pi} Q(\cos(t),\sin(t))dt$$

فرض کنیم $(۰ \le t \le ۲\pi)$ $C(t)=e^{it}$ ، همان دایرهٔ واحد. اگر

$$z=C(t)=e^{it}$$

آنگاه

$$\cos(t) = \frac{۱}{۲}(z + \frac{۱}{z})$$

$$\sin(t) = \frac{۱}{۲i}(z - \frac{۱}{z})$$

که از آن حاصل می شود:

$$\int_{۰}^{۲\pi} Q(\cos(t), \sin(t))dt = \int_C Q\left(\frac{۱}{۲}(z + \frac{۱}{z}), \frac{۱}{۲i}(z - \frac{۱}{z})\right)\frac{dz}{iz}$$

$$= ۲\pi i \sum$$

که در آن Σ حاصلجمع مانده های

$$\frac{۱}{iz}Q\left(\frac{۱}{۲}(z + \frac{۱}{z}), \frac{۱}{۲i}(z - \frac{۱}{z})\right)$$

در درون C است.

مثلاً

$$\int_{۰}^{۲\pi}\left(\cos^{۳}(t) + \sin^{۲}(t)\right)dt$$

را در نظر می گیریم. آنگاه (۶) می شود:

$$\frac{۱}{iz}\left(\frac{۱}{۸}(z + \frac{۱}{z})^{۳} - \frac{۱}{۴}(z - \frac{۱}{z})^{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۸i}z^{۲} - \frac{۱}{۴i}z + \frac{۳}{i} + \frac{۱}{۲iz} + \frac{۳}{iz^{۲}} - \frac{۱}{۴iz^{۳}} + \frac{۱}{iz^{۴}}$$

که فقط یک قطب درون C دارد، با مانده ۱/۲i. بنابراین انتگرال برابر است با $۲\pi i / ۲i = \pi$.

اگر Q کلاً پیچیده باشد محاسبات ممکن است خیلی خسته کننده شود. انتگرالهای از این نوع را گاهی این طور می‌یابیم که قسمتهای حقیقی و موهومی انتگرالی چون

$$\int_C g(z)dz$$

را، با انتخاب مناسب g، تعیین می‌کنیم. به عنوان مثال،

$$\int_C \frac{e^z}{z} = ۲\pi i$$

زیرا e^z/z دارای ماندهٔ ۱ در $z = ۰$ است. بنابراین

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{e^{\cos(t)+i\sin(t)}}{e^{it}} ie^{it}dt = ۲\pi i$$

بنابراین

$$\int_۰^{۲\pi} e^{\cos(t)+i\sin(t)}dt = ۲\pi,$$

و لذا

$$\int_۰^{۲\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t)) + i\sin(\sin(t))dt = ۲\pi$$

که با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی نتیجه می‌شود:

$$\int_۰^{۲\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t))dt = ۲\pi$$

$$\int_۰^{۲\pi} e^{\cos(t)} \sin(\sin(t))dt = ۰$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

انتگرال حقیقی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad (۷)$$

را برابر با

$$\lim_{\substack{x_۲ \to \infty \\ x_۱ \to -\infty}} \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx \tag{۸}$$

تعریف می کنند به شرط آنکه این حد وجود داشته باشد. تکنیک هایی که می خواهیم در آنها به بحث بپردازیم امکان محاسبهٔ

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \tag{۹}$$

را می دهند؛ که آن را به عنوان *مقدار اصلی کوشی* برای انتگرال مورد نظر می شناسیم، و چنین نوشته می شود:

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

اگر (۸) وجود داشته باشد. (۹) هم وجود دارد و این دو مساویند. ولی مقدار اصلی کوشی‌ممکن است وجود داشته باشد در حالی که (۸) وجود نداشته باشد. مثلاً

$$\int_{-R}^{R} xdx = \left[x^۲/۲\right]_{-R}^{+R} = ۰$$

به طوری که

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = ۰$$

ولی واضح است که چنانچه $f(x)=x$ اختیار شود (۸) وجود ندارد.
از آنچه گفتیم، چنین برمی آید که هنگام استفاده از این تکنیک در مورد زیر، باید همگرا بودن (۸) را مدّ نظر داشته باشیم. این مطلب، به جای خود، منجر به شرط (ب) می شود که در زیر می آید.
فرض کنیم (الف) f در نیم صفحهٔ بالایی $im(z) \geq ۰$ مشتق پذیر است، مگر در تعدادی متناهی از قطبها، که هیچ یک بر محور حقیقی واقع نیستند.

(ب) اگر $S_R(t) = Re^{it}(0 \le t \le \pi)$ باشـد و پس هنگامی کـه R بزرگ است ثابتی چون A وجود دارد به طوری که

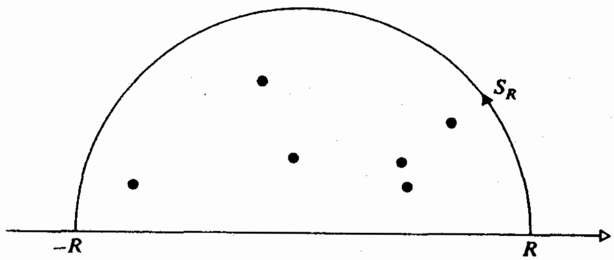
$$|f(z)| \le A/R^2$$

و این هنگامی است که z بر S_R واقع باشد.
آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum$$

که در آن $\sum$ حاصل جمع مانده‌ها در قطبهای f در نیم صفحهٔ بالایی است.

برهان. R را به اندازهٔ کـافی بزرگ اختـیار کنیـد تا (ب) برآورده شود، به طوری کـه همهٔ قطبها درون $[-R,R] + S_R$ قرار گیرند (شکل ۱۲-۴).
آنگاه بنابر قضیهٔ کوشی



شکل (۴-۱۲)

آنگاه بنابر قضیهٔ کوشی

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{S_R} f(z)dz = 2\pi i \sum$$

که $\sum$ به همان تعریف است که بیان شد. اکنون فرض کنیم $R \to \infty$. آنگاه

$$\left|\int_{S_R} f(z)dz\right| \le \frac{A}{R^2}\pi R = \pi A/R$$

که به ۰ میل می کند هنگامی که $R \to \infty$. نتیجه اینکه

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = ۲\pi i \sum$$

یعنی

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۲\pi i \sum$$

با این وصف، (ب) به ما می گوید که هنگامی که $|x|$ بزرگ است $|f(x)| \le A/x^۲$ می شود، و بنابراین از آنالیز حقیقی نتیجه می شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

وجود دارد. بنابراین، با مقدار اصلی کوشی برابر است، یعنی برابر با $۲\pi i \sum$، و همین مورد ادعا بود.

تذکر A. شرط (ب) مسلماً برآورده است چنانچه $f(z) = p(z)/q(z)$ که در آن p و q بسجمله هایی هستند به طوری که q صفر حقیقی ندارد و درجهٔ q بزرگتر یا مساوی با ۲ + درجهٔ p است.

مثلاً،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^۲+a^۲)(x^۲+b^۲)}$$

را با $a > ۰, b > ۰, a \ne b$ در نظر بگیرید. بنابر تذکر A این انتگرال در شرط (ب) صدق می کند. (الف) به وضوح درست است. حال توجه می کنیم که قطبهای $۱/(z^۲+a^۲)(z^۲+b^۲)$ در نیم صفحهٔ بالایی فقط قطبهای ساده ای هستند در ib, ia. مانده در ia عبارت است از:

$$\lim_{z\to ia} \frac{z-ia}{(z^۲+a^۲)(z^۲+b^۲)} = \frac{۱}{۲ia(b^۲-a^۲)}$$

و به طور مشابه در ib عبارت است از:

$$\frac{۱}{۲ib(a^۲-b^۲)}$$

در نتیجه مقدار انتگرال مورد نظر عبارت است از:

$$۲\pi i\left(\frac{۱}{۲ia(b^۲-a^۲)}+\frac{۱}{۲ib(a^۲-b^۲)}\right)$$
$$=\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

تذکر B. در این استدلال نیازی نبود که به ازاء z های روی محور حقیقی خود f(z) حقیقی باشد. به عنوان مثال فرض می کنیم:

$$f(z)=e^{iz}/(z^۲+a^۲)(z^۲+b^۲)$$

ملاحظه می شود که بر S_R داریم: $|e^{iz}|=|e^{-y+ix}|=e^{-y}\le ۱$ به ازاء $y\ge ۰$، به طوری که (ب) برقرار است.
مثل گذشته، قطبهای ساده‌ای در ib,ia داریم؛ ولی این بار مانده‌ها عبارتند از:

$$e^{-b}/۲ib(a^۲-b^۲)\ ,\ \ e^{-a}/۲ia(b^۲-a^۲)$$

نتیجه اینکه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^۲+a^۲)(x^۲+b^۲)}dx=\pi\left(\frac{e^{-a}}{a(b^۲-a^۲)}+\frac{e^{-b}}{b(a^۲-b^۲)}\right)$$

و با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی با هم و موهومی با هم نتیجه می شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x^۲+a^۲)(x^۲+b^۲)}dx=\frac{\pi}{b^۲-a^۲}\left(\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-b}}{b}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{(x^۲+a^۲)(x^۲+b^۲)}dx=۰$$

از این دو، دومی کاملاً واضح است (چرا؟)، ولی اوّلی نه.

سعی می کنیم این روش را (حداقل) به دو طریق تعمیم دهیم: با به دست آوردن برآوردی بهتر برای $\int_{S_R} f(z)dz$ ؛ یا با امکان دادن به f که روی محور حقیقی قطبهایی داشته باشد. اولی را در (III) و دومی را در (IV) بررسی خواهیم کرد.

$$\text{(III)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

فرض کنیم (الف) f در دامنه ای مشتق پذیر باشد که این دامنه شامل نیم صفحهٔ بالایی، به استثنای تعدادی متناهی از قطبها ست که هیچ یک بر محور حقیقی واقع نیستند.

(ب) هنگامی که R بزرگ است ثابتی چون A وجوددارد به طوری که

$$|f(z)| \le A/R \text{ به ازاء } |z| = R$$

آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{ix} = ۲\pi i \Sigma'$$

که در آن Σ' حاصل جمع مانده های $f(z)e^{iz}$ در قطبهای واقع در نیم صفحهٔ بالایی است.

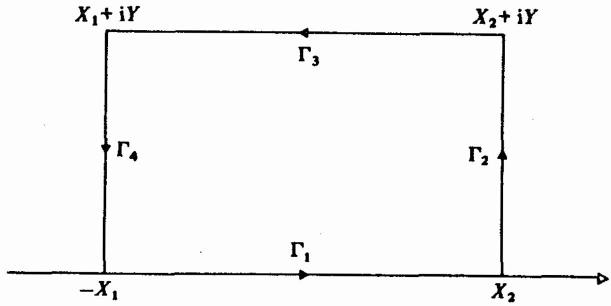
برهان. می توانیم همان کانتور مربوط به (II) را به کار گرفته و ثابت کنیم که

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)e^{iz}dz = ۰$$

امّا با این کار فقط مقدار اصلی کوشی محاسبه می شود؛ و مساله همگرایی که به همین مناسبت پیش آمد خیلی مشکلتر است زیرا آنچه که ما می دانیم این است که f به ازاء مقادیر بزرگ x مثل $۱/x$ رفتار می کند، که این به تنهایی باعث ایجاد؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$$

نمی‌شود. با بحث‌هایی مطبوع‌تر این مانع را می‌توان از سر راه برداشت. ولی آسانتر آن است که با به کار گرفتن کانتوری متفاوت، آنطور که در شکل ۱۲ – ۵ نشان داده شده است. با کل این سوال به گونهٔ دیگری برخورد کنیم.



شکل (۱۲–۵)

ثابت می‌کنیم هنگامی که $y, x_۲, x_۱$ به ∞ میل می‌کنند، هر یک از انتگرالهای

$$\int_{\Gamma_r} f(z)e^{iz}dz$$

به ازاء r مساوی ۲، ۳، ۴ به صفر میل می‌کند. آنگاه همچون گذشته نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x_۱, x_۲ \to \infty} \int_{-x_۱}^{x_۲} f(x)e^{ix}dx = ۲\pi i \sum{}'$$

و این همان است که ما می‌خواهیم.

حال

$$\left|\int_{\Gamma_۲} f(z)e^{iz}dz\right| = \left|\int_۰^Y f(X_۲ + it)e^{iX_۲ - t}dt\right|$$

$$\leq \int_۰^Y \frac{A}{X_۲} e^{-t}dt$$

$$\leq A / X_۲$$

به ازاء Y_2 ای که بزرگ باشد؛ و به طور مشابه

$\left|\int_{\Gamma_4} f(z)e^{iz}dz\right| \le A/X_1$ به ازاء X_1 بزرگ.

همچنین

$$\left|\int_{\Gamma_3} f(z)e^{iz}dz\right| = \left|-\int_{-X_1}^{X_2} f(t+iY)e^{it-y}dt\right|$$
$$\le \left|\int_{X_1}^{X_2} \frac{A}{Y}e^{-Y}dt\right|$$
$$= AY^{-1}e^{-Y}(X_1+X_2)$$

لیکن به ازاء x_2, x_1 ثابت این به ۰ میل می‌کند هنگامی که $Y \to \infty$. آنگاه با میل دادن x_2, x_1 به ∞ به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

به عنوان یک مثال،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3 e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} \qquad (a,b>0, a\neq b)$$

را در نظر می‌گیریم که نه در شرایط (II) بلکه در (III) صدق می‌کند. این انتگرال قطبهایی ساده در ib, ia واقع در نیم صفحهٔ بالایی دارد. با محاسبهٔ مانده‌ها به طریق معمول، به کار بردن نتیجهٔ بالا، و مساوی قرار دادن قسمتهای موهومی حاصل می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}(b^2e^{-b} - a^2e^{-a})$$

(مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی نشان می‌دهد که انتگرال متناظر برای کسینوس برابر صفر است. ولی با توجه به زمینه‌های دیگر باز هم می‌توان دید که این قسمت واضح است.)

(IV) قطبهایی که بر محور حقیقی واقعند

اگر f(z) قطبهایی بر محور حقیقی داشته باشد در کانتور مورد نظر به «دندانه سازی» می‌پردازیم؛ یعنی نیمدایره‌هایی کوچک مثل شکل ۱۲-۶ رسم

می کنیم. فرض کنیم این نیمدایره ها شعاعهای $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ داشته باشند. آنگاه مطابق با رویهٔ فوق پیش می‌رویم و در همین حال $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ را به صفر میل می دهیم که همزمان با آن $R, X_1, X_2, Y \to \infty$. اینجا هم مشکلی مشابه حالت (II) پیش می‌آید: همهٔ آنچه را که حساب می کنیم یک یک مقدار اصلی کوشی

$$P\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

برای یک قطب در x_0 است. این حد باز هم ممکن است وجود داشته باشد حتی اگر

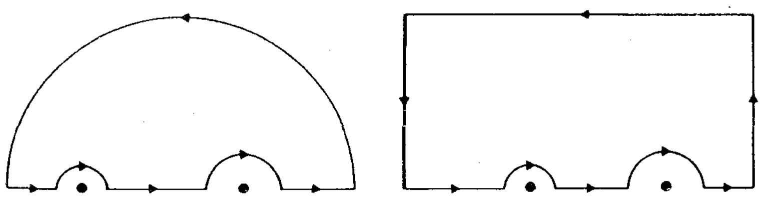
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\int_a^{x - \varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\int_{x_0 + \varepsilon_2}^b f(x)dx$$

وجود نداشته باشد. بدین سان

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

وجود ندارد، ولی

$$P\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$$



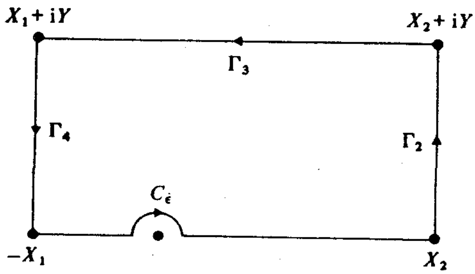
شکل (۱۲-۶)

از آنچه گفتیم برمی آید که یک مساله همگرایی برای بحث در پیش داریم. و این آن زمان است که مقدار اصلی کوشی به دست آمده باشد. جدای از این، فرض و

نتایج مربوط به (II) و (III) برقرار می مانند حتی اگر قطبها بر محور حقیقی قرار گیرند، به شرط آنکه جمع بندی Σ و جمع بندی Σ' فقط برای قطبهای غیر حقیقی ای باشند که در نیم صفحهٔ بالایی واقعند. به جای بیان یک قضیهٔ کلی کسالت بار، مثالی نوعی و متقاعد کننده می آوریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

یک قطب حقیقی در ۰ داریم، پس به انتخاب یک کانتور، آنچنان که در شکل ۱۲-۷ مشاهده می شود، می پردازیم. همانند



شکل (۱۲-۷)

قبل، انتگرالهای در طول $\Gamma_۴, \Gamma_۳, \Gamma_۲$ به صفر میل می کنند. چون در داخل این کانتور قطبی وجود ندارد،

$$\lim_{x_۱, x_۲ \to ۰} \left\{ \int_{-x_۱}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{x_۲} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \right\} = ۰$$

ولی

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{۱}{z} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{z^{n-۱}}{n!}$$
$$= \frac{۱}{z} + \phi(z)$$

که ϕ مشتق پذیر است نتیجه اینکه در یک همسایگی ۰ داریم، $|\phi(z)| \leq M$ ، و

بنابراین

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\left(\frac{1}{z}+\phi(z)\right)dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_0^{\pi}\frac{1}{\varepsilon e^{it}}i\varepsilon e^{it}dt\right\}+\lim_{\varepsilon\to 0}M\pi\varepsilon$$

$$= -i\pi$$

بنابراین

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = i\,\pi$$

چون قسمتهای حقیقی را با هم و قسمتهای موهومی را با هم مساوی قرار دهیم؛

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x}dx = 0$$

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = \pi$$

اولین انتگرال فقط به عنوان یک مقدار اصلی وجود دارد، زیرا $\cos(x)/x$ به ازاء مقادیر کوچک x مشابه $1/x$ رفتار می کند. ولی در مورد دومی داریم:

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin(x)}{x}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx\right)$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

و این حد وجود دارد، و در نتیجه بنابر تعریف مساوی است با:

$$2\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

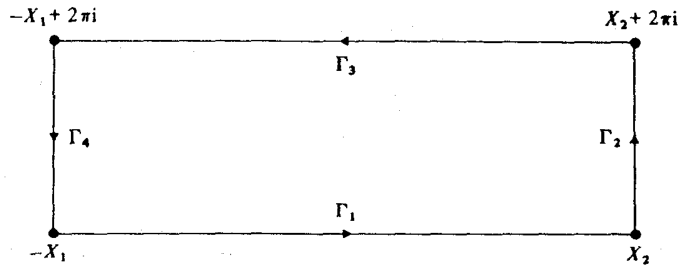
زیرا که $\sin(x)/x \to 1$ هنگامی که $x \to 0$. در نتیجه می توانیم P را از

$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$ حذف کنیم و با توجه با آنچه ثابت کردیم داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\phi(e^{x})}\,dx$$

در مورد انتگرالهایی از این نوع حول کانتوری که به فرم شکل ۱۲-۸ باشد انتگرال می گیریم.



شکل (۱۲-۸)

حال اگر بر $\Gamma_۳$ قرار دهیم $z=-t+۲\pi i$ آنگاه $-X_۲\le t\le X_۱$ ، و بنابراین

$$\int_{\Gamma_۳}\frac{e^{az}}{\phi(z)}dz=\int_{-X_۲}^{X_۱}\frac{e^{-at+۲\pi ia}}{\phi(e^{-t})}(-۱)dt$$
$$=e^{۲\pi ia}\int_{X_۱}^{-X_۲}\frac{e^{-at}}{\phi(e^{-t})}dt$$

که، با قراردادن t=-x ، برابر است با :

$$-e^{۲\pi ia}\int_{X_۱}^{X_۲}\frac{e^{ax}}{\phi(e^{x})}dx$$

اگر ϕ چنان باشد که هنگامی که $X_۱,X_۲\to\infty$ ، $\int_{\Gamma_j}\frac{e^{az}}{\phi(e^{z})}dz\to ۰$ (به ازاء

۲,۴ = j) آنگاه خواهیم داشت :

$$(۱-e^{۲\pi ai})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\phi(e^{x})}dz = ۲\pi i\sum{}''$$

که $\sum''$ عبارت است از حاصل جمع مانده های $\varepsilon^{az}/\phi(z)$ در قطب هایی که بین خطهای $im(z) = ۰$ ، $im(z) = ۲\pi$ هستند :

مثلاً، در

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^{۲x+۱}} \qquad (۰ < a < ۱)$$

انفرادهای مربوط به موضوع مورد نظر، در $۳i\pi/۲, i\pi/۲$ هستند که مانده های متناظر با آنها عبارتند از :

$$-\frac{۱}{۲}e^{۳i\pi a/۲}, -\frac{۱}{۲}e^{i\pi a/۲}$$

نتیجه اینکه مقدار این انتگرال برابر است با :

$$\frac{۲\pi i}{۱-e^{۲\pi ia}}\left(-\frac{۱}{۲}e^{i\pi a/۲}-\frac{۱}{۲}e^{۳\pi ia/۲}\right)$$

به آسانی دیده می شود که این عبارت، با اختیار $k = e^{i\pi a/۲}$. برابر است با :

$$\frac{\pi}{۲\sin(\pi a/۲)}$$

(VI) راههای کوتاه

غیر از آنچه در فوق بیان شد، متعلم باید به دنبال روشهائی باشد که کار را سریعاً به نتیجه می رساند. مثلاً، یکی از انتگرالهای با اهمیت بسیار در ریاضیات کاربردی

عبارت است از :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} e^{-x^{۲}} dx, \lambda \in R$$

تابع $e^{-z^{۲}}$ در سراسر C مشتق‌پذیر است. اگر γ مستطیل به راسهای $-R$، R، $R-(i\lambda)/۲$، $-R-(i\lambda)/۲$ باشد آنگاه

$$\int_{\gamma} e^{-z^{۲}} dz = ۰$$

هنگامی که $R \to \infty$، انتگرالهایی که روی ضلعهای عمودی مستطیل گرفته می‌شوند به صفر میل می‌کنند؛ آن دو دیگر همگرا هستند. نتیجه اینکه

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(i\lambda)/۲)^{۲}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}} e^{i\lambda x} e^{\lambda^{۲}/۴} dx$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} e - x^{-x^{۲}} dx = e^{-\lambda^{۲}/۴} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}} dx$$

انتگرال اخیر چیزی جز یک مقدار ثابت نیست؛ آن را، در واقع، با روشهای دیگر می‌توان محاسبه کرد، برابر است با: $۱/\sqrt{\pi}$. بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} e^{-x^{۲}} dx = \frac{e^{-\lambda^{۲}/۴}}{\sqrt{\pi}}$$

۴. جمع بندی سری ها

فرض کنیم که f تابعی مشتق‌پذیر در z=n باشد که n عددی است صحیح. تابعهای $\operatorname{cosec}(\pi z), \cot(\pi z)$ دارای قطبهایی ساده در $z = n$، $n \in z$، هستند؛ و می‌توان بررسی کرد که

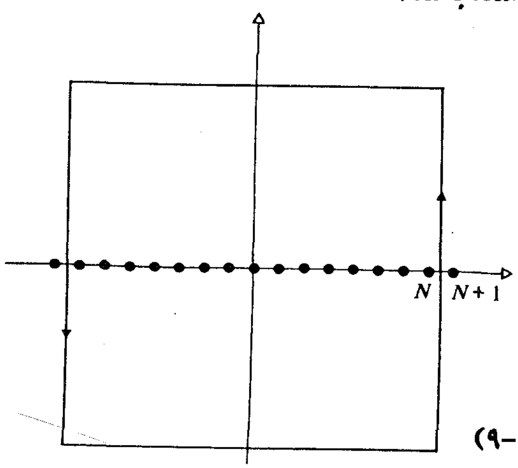
$$\operatorname{res}(f(z)\cot(\pi z), n) = \frac{f(n)}{\pi},$$

$$\operatorname{res}(f(z)\operatorname{cosec}(\pi z), n) = \frac{(-۱)^n f(n)}{\pi}$$

این مطلب روشی را برای جمع بندی سریهای خاصی القاء می کند، که در زیر بیان می شود. فرض کنیم C_N مربعی باشد که راسهایش

$$\left(N+\frac{۱}{۲}\right)(\pm ۱ \pm i)$$

طبق معمول، در جهت حرکت عقربه های ساعت آنچنان که نشان داده ایم (شکل ۱۲-۹) پارامتری شده باشد.



شکل (۱۲-۹)

ادعا می کنیم که $\cot(\pi z), \operatorname{cosec}(\pi z)$ بر C_N کران دار هستند، که این کران بستگی به N *ندارد*. نخست توجه کنید که بر دو ضلعی که موازی با محور حقیقی هستند داریم $z = x + iy$ که در آن $|y| \geq ۱/۲$ است. در این حالت

$$\begin{aligned}|\operatorname{cosec}(\pi z)| &= \left(\frac{۱}{۲}\left|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right|\right)^{-۱}\\ &\leq \left(\frac{۱}{۲}\left|e^{-\pi y} - e^{\pi y}\right|\right)^{-۱}\\ &= (\sinh|\pi y|)^{-۱}\\ &\leq (\sinh(\pi/۲))^{-۱}\end{aligned}$$

و

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right|$$

$$\leq \left|\frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}\right|$$

$$= \coth|\pi y|$$

$$= \coth|\pi y|$$

بر دو ضلع دیگر، داریم $z = \pm N + \frac{۱}{۲} + it$ ، و بنابراین

$$|\operatorname{cosec}(\pi z)| = |\sin(\pi z)|^{-۱}$$
$$= |\cos(i\pi t)|^{-۱}$$
$$= (\cosh|\pi t|)^{-۱}$$
$$\leq ۱$$

و

$$|\cot(\pi z)| = |\tan(it)|$$
$$= \left|\frac{۱ - e^{-۲t}}{۱ + e^{-۲t}}\right|$$
$$\leq ۱$$

نتیجه اینکه ثابتی چون M وجود دارد به طوری که $|\cot(\pi z)| \leq M, |\operatorname{cosec}(\pi z)| \leq M$ ، و این به ازاء z واقع بر هر C_N است.
حال فرض کنیم هنگامی که $|z|$ به اندازهٔ کافی بزرگ است داریم:

$$|f(z)| \leq A/|z|^{۲}$$

آنگاه ادعا می کنیم که

$$\sum^* = ۰$$

که در آن $\sum^*$ حاصل جمع مانده های $f(z)\cot(\pi z)$ است. بنابر قضیهٔ کوشی داریم:

$$\int_{C_N} f(z)\cot(\pi z)dz = ۲\pi i \sum_N^*$$

که در آن $\sum_N^*$ عبارت است از حاصل جمع مانده های $f(z)\cot(\pi z)$ در درون C_N. چنانچه $N \to \infty$، $\sum_N^* \to \sum^*$، بنابراین کافی است ثابت کنیم که این انتگرال ← ۰. ولی هنگامی که N به اندازهٔ کافی بزرگ است. بنابر لم برآورد، داریم:

$$\left|\int_{C_N} f(z)\cot(\pi z)dz\right| \le \frac{A}{N^۲} M(۸N + ۴)$$

هنگامی که $N \to \infty$، این به ۰ میل می کند. که موضوع ادعای ما بود.

ولی $\sum^*$ معمولاً یک سری نامتناهی تشکیل می دهد: این واقعیت که $\sum^*$ صفر است به ما امکان می دهد که حاصل جمع بعضی سریهای وابسته به این نکته را به دست آوریم. این کار با ذکر یک مثال به بهترین صورت توضیح داده می شود؛ و یک مثال واضح، برای کار بر روی آن، عبارت است از:

$$f(z) = ۱/z^۲$$

در عدد صحیح $n \neq ۰$ تابع $z^{-۲}\cot(\pi z)$ دارای یک قطب ساده با ماندهٔ $۱/(n^۲\pi)$ است، در حالی که در مبداء دارای یک قطب سه گانه با مانده $-\pi/۳$ است. نتیجه اینکه

$$o = \sum^* = -\pi/^۳ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} ۱/n^۲$$

(که در حاصل جمع نامتناهی $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ فرض بر این است که $n \neq ۰$)

$$= -\pi/۳ + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n^۲$$

نتیجه اینکه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n^۲ = \pi^۲/۶$$

و این قضیه ای است که در اصل ما به روشی متفاوت با این، به وسیلهٔ *اویلر* به اثبات رسید.

اگر به جای $\cot(\pi z)$ از $\operatorname{cosec}(\pi z)$ استفاده کنیم قضیهٔ مشابهی در کار می‌آید، و به ما امکان می دهد که حاصل جمع سریهایی به صورت $\sum(-۱)^n f(n)$ را به دست آوریم. به عنوان مثال، با به کار گرفتن $f(z) = z^{-۲}$ و با بحثی خیلی مشابه آنچه بیان شد، می توانیم ثابت کنیم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}/n^۲ = \pi^۲/۱۲$$

۵. شمارش صفرها

کاربرد نسبتاً متفاوتی از مانده ها عبارت است از: محاسبهٔ صفرهای تابعی که درون یک لوپ ساده تابعی است تحلیلی. با قضیهٔ زیر شروع می کنیم:

قضیهٔ ۱۲-۴ . فرض کنیم f، تابعی مشتق پذیر در دامنه ای چون S باشد، که S شامل یک لوپ ساده و همهٔ نقاط داخل آن به استثنای یک مجموعهٔ متناهی از قطبها است. اگر f بر γ دارای صفرها یا قطبهایی نباشد آنگاه

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

که در آن N تعداد صفرهای f است در درون γ و P تعداد قطبهای f در درون γ، که هر یک را به دفعات شمرده ایم.

برهان. این انتگرال برابر است با حاصل جمع مانده های $f'(z)/f(z)$ در قطبهایی که درون γ هستند. حال اگر $z_{\circ}$ نه یک صفر و نه یک قطب از f باشد، آنگاه f'/f در $z_{\circ}$ مشتق پذیر است. ثابت می کنیم که

(الف) اگر f دارای صفری از مرتبهٔ k در z_1 باشد آنگاه f'/f دارای یک قطب با ماندهٔ k است.

(ب) اگر f یک قطب از مرتبهٔ m در z_2 باشد آنگاه f'/f دارای یک قطب با ماندهٔ $-m$ است.

برای اثبات (الف) توجه کنید که در این حالت

$$f(z) = (z - z_1)^k \phi(z)$$

که در آن $\phi(z_1) \neq 0$ و ϕ در همسایگی ای از z_1 مشتق پذیر است. بنابراین

$$f'(z) = k(z - z_1)^{k-1} \phi(z) + (z - z_1)^k \phi'(z)$$

و در نتیجه

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_1} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

که دارای قطبی ساده با مانده k در z_1 است زیرا ϕ'/ϕ در z_1 مشتق پذیر است. این بود اثبات (الف). مشابهاً در حالت (ب)

$$f(z) = \Psi(z)/(z - z_2)^m$$

که در آن $\Psi(z_2) \neq 0$ و Ψ در همسایگی ای از z_2 مشتق پذیر است. نتیجه اینکه

$$f'(z) = \frac{-m \quad \Psi(z)}{(z - z_2)^{m+1}} + \frac{\Psi'(z)}{(z - z_2)^m}$$

و بنابراین

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_2} + \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}$$

که دارای یک قطب ساده با ماندهٔ $-m$ در z_2 است.

با جمع بندی روی همهٔ قطبهای f'/f و با کمک (الف) و (ب) بی درنگ اثبات این قضیه به پایان می رسد.

فرع ۱۲-۵ . فرض کنیم γ یک لوپ ساده در دامنه‌ای چون S باشد به طوری که همهٔ نقاط درون γ در درون S باشد. اگر f در S مشتق‌پذیر باشد و صفری روی γ نداشته باشد آنگاه تعداد صفرهای f که در درون γ هستند عبارت است از :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f'(z)/f(z)dz$$

از این، قضیهٔ مهم دیگری را نتیجه می گیریم :

قضیهٔ ۱۲-۶. (قضیهٔ روشه)

فرض کنیم f و g در دامنه‌ای چون S که شامل یک لوپ سادهٔ γ و همهٔ نقاط درون γ است مشتق‌پذیر باشند. اگر به ازاء هر $z=\gamma(t)(a\le t\le b)$

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)| \tag{10}$$

آنگاه f و g در درون γ تعداد صفرهایشان مساوی است

برهان. فرض کنیم $F(z)=g(z)/f(z)$. بنابراین از (۱۰) ، به ازاء $a\le t\le b$ ، داریم :

$$|1-F(\gamma(t))|<1 \tag{11}$$

در درون S

g دارای یک صفر است $\Leftrightarrow$ F دارای یک صفر است

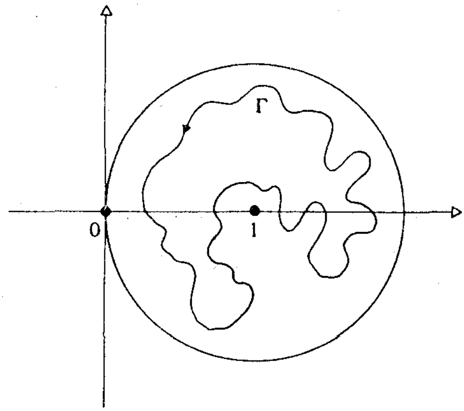
f دارای یک صفر است $\Leftrightarrow$ F دارای یک قطب است

بنابر این برای این که نشان دهیم که f و g در درون γ تعداد صفرهایشان یکسان

است. بنابر قضیهٔ ۱۱-۴ کافی است که ثابت کنیم:

$$\int_\gamma F'(z)/F(z)dz = 0$$

فرض کنیم $\Gamma(t) = F(\gamma(t))$. بنابر (۱۱) به ازاء $a \le t \le b$ داریم: $|1 - \Gamma(t)| < 1$، به طوری که Γ درون دایرهٔ به مرکز ۱ شعاع ۱ قرار می گیرد (شکل ۱۲-۱۰). اکنون



شکل (۱۲-۱۰)

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)/F(z)dz &= \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))}\gamma'(t)dt\\ &= \int_a^b \Gamma'(t)/\Gamma(t)dt\\ &= \int_\Gamma \frac{dz}{z}\\ &= w(\Gamma,0)\\ &= 0\end{aligned}$$

با کمک نموداری که مشاهده می کنید.

به عنوان مثالی از کاربرد قضیه روشه، برهان دومی برای «*قضیهٔ اساسی جبر*» (قضیهٔ ۱۰-۷) ارائه می دهیم. فرض کنیم:

$$g(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$$
$$f(z) = z^m$$

آنگاه

$$|f(z) - g(z)| = |a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m|$$

و به ازاء $z \neq 0$

$$\left|\frac{1}{z^m}\right| |f(z) - g(z)| = \left|\frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_m}{z^m}\right|$$

چون سمت راست این رابطه هنگامی که $|z| \to \infty$ به ۰ میل می کند نتیجه می گیریم که $R > 0$ وجود دارد طوری که اگر $|z| > R$ آنگاه

$$\left|\frac{a_1}{z} + \ldots \frac{a_m}{z^m}\right| < 1$$

و آنگاه

$$|f(z) - g(z)| < |z^m| = |f(z)|$$

بنابراین بنابر قضیهٔ روشه تعداد صفرهای f و g در درون $\{z \in C : |z| < R\}$ یکسان است. چون f دارای m صفر است (با شمردن دفعات)، g نیز چنین است. نتیجه اینکه هر بسجمله ای از مرتبهٔ m روی C دارای m صفر است. و این همان «*قضیهٔ اساسی جبر*» است.

تمرینهای ۱۲

۱ . ماندهٔ f را در $z_\circ$ در حالتهای زیر تعیین کنید:

(الف) $f(z) = z^{-3}\sin z (z \neq 0), z_\circ = 0$

(ب) $f(z) = e^z z^{-n-1} (z \neq 0), z_\circ = 0$

(ج) $f(z) = \exp(1/z)(z \neq 0), z_\circ = 0$

(د) $f(z) = z^2(z^2 + a^2)^{-3}(z \neq \pm ia), z_\circ = ia, -ia$

(ه) $f(z) = (1 + z^2 + z^4)^{-1}(z \neq \exp(r\pi i/3)\ ,\ r = 1, 2, 4, 5), z_\circ = \exp(\pi i/3)$

۲ . ماندهٔ تابع داده شده را در هر یک از نقاط منفرد مجزای آن به دست آوردید، به انضمام بی نهایت (به شرط آنکه این بی نهایت حد یک دنباله از انفرادهای متناهی، یعنی مجزا، نباشد):

(الف) $1/(z^3 - z^5)$

(ب) $\sin(z)\sin(1/z)$

(ج) $e^z / z^2(z^2 + 5)$

(د) $\cot^3 z$

(خ) $(z \cos z^{-2})^{-1}$

(و) $(\sin z^{-1})^{-1}$

۳ . اگر f قطبی از مرتبهٔ ۲ در $z_\circ$ داشته باشد، نشان دهید که ماندهٔ f در $z_\circ$ عبارت است از $h'(z_\circ)$ ، که $h(z) = (z - z_\circ)^2 f(z)$.

۴. فرض کنیم $\gamma(t) = e^{it}(0 \leq t \leq 2\pi)$. با کمک مانده ها، مطلوب است تعیین مقدار

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 2az+1} \quad (a > 1)$$

و با استفاده از آن به محاسبهٔ

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a - \cos t}$$

بپردازید. اگر $a < -1$ چه روی می دهد؟ اگر $-1 \leq a \leq 1$؟

۵. موارد زیر را ثابت کنید:

(الف) $$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + b\cos^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{b+1}} \quad (b > -1)$$

(ب) $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \pi / 2\sqrt{2}$$

(ج) $$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1 + x^2} dx = 0$$

(د) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{1 - x^2} dx = \pi$$

(ه) $$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1 + x^2} = \pi^3 / 8$$

۶. ثابت کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(10x)^2}{(x^2+4)^2(z^2+9)^2} dx = \pi$$

۷. ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^5 x}{x^4 + a^4} dx = \frac{\pi}{2a^3} e^{-5a\sqrt{2}} \sin\left(\frac{5a}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (a > 0)$$

۸ . مطلوب است محاسبهٔ:

(الف) $$\int_{0}^{2\pi} \cos^4 t + \sin^4 t\,dt$$

(ب) $$\int_{0}^{2\pi} \sin^3 t.\cos t + \cos^3 t + \sin t\,dt$$

(ج) $$\int_{0}^{2\pi} 2\cos^3 t + 3\cos^2 t\,dt$$

۹ . ثابت کنید:

(الف) $$\int_{0}^{2\pi} \exp(\cos t)\cos(nt - \sin t)dt = 2\pi / n!(n \in Z, n > 0)$$

(ب) $$\int_{0}^{2\pi} \exp(\cos t)\sin(nt - \sin t)dt = 0$$

۱۰ . با انتگرال گیری از تابعهای مناسب حول یک نیمدایره، حساب کنید:

(الف) $$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + x^4}$$

(ب) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos m\,x}{x^2 + a^2} dx \quad (a, m > 0)$$

۱۱ . ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \pi / 16a^3 \quad (a > 0)$$

۱۲ . با انتگرال گیری حول یک مستطیل که راسهایش در R، R + i، - R + i، -R هستند و با فرض $R \to \infty$ ، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(cx)}{\cosh(\pi x)} dx = \sec(c/2) \quad (-\pi < c < \pi)$$

۱۳ . ثابت کنید :

$$\int_{\cdot}^{\infty} t^{a-1}(t+1)^{-1}dt = \frac{\pi}{\sin \pi a}(\cdot < a < 1)$$

و این کار را با قرار دادن $t = e^z$ و انتگرالگیری از $e^z(e^z+1)^{-1}$ حول مستطیلی به راسهای $\pm R$ ، $\pm R + 2\pi i$ انجام دهید .

۱۴ . (فرمول معکوسی برای تبدیلات لاپلاس) . فرض کنیم F در $\mathbb{C}$ مشتق‌پذیر باشد به استثنای در تعدادی متناهی از قطبها ، که از میان آنها $z_1,...,z_n$ در شرط $\mathrm{re} z_r < a$ صدق می‌کنند . هیچ یک روی خط rez=a قرار ندارند .

اگر $c > \cdot, b > \cdot, M > \cdot$ وجود داشته باشند به طوری که $|F(z)| < M/|z|^c$ به ازاء $|z| < b$ ، ثابت کنید :

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{zt}F(z)dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{n} \mathrm{res}(e^{zt}F(z), z_r)$$

اگر $(\alpha > \cdot)$ ، $F(z) = \alpha(z^2+\alpha^2)^{-1}$ ، نشان دهید که $f(t) = \sin \alpha t$.

۱۵ . از **آنالیز حقیقی** برای اثبات نامساوی *ژردان* استفاده کنید : $\sin t / t \geq 2/\pi$ به شرط $\cdot < t \leq \pi/2$. و با استفاده از آن نشان دهید که اگر $S_R(t) = Re^{it}$ $(\cdot \leq t \leq \pi)$ ، آنگاه

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} e^{imz}/z dz = \cdot \qquad (m > \cdot)$$

با انتگرالگیری از e^{imz}/z در طول کانتورهای $S_R, \Gamma_2, C_\varepsilon, \Gamma_1$ با تعریفهای

$$\Gamma_1(t) = t \quad (-R \leq t \leq -\varepsilon)$$

$$C_\varepsilon(t) = e^{i(\pi - t)} \qquad (\cdot \leq t \leq \pi)$$

$$\Gamma_2(t) = t \qquad (\varepsilon \leq t \leq R)$$

فاکتور ناپیوستهٔ دیریکله را ثابت کنید :

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\begin{cases}\pi/۲ & m>۰\\ ۰ & m=۰\\ -\pi/۲ & m<۰\end{cases}$$

۱۶ . نشان دهید که

(الف) $$z/(e^{z}-۱)=۱-\frac{z}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲z^{۲}}{z^{۲}+۴n^{۲}\pi^{۲}}$$

(ب) $$\operatorname{cosec} z=\frac{۱}{z}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{z^{۲}-n^{۲}\pi^{۲}}۲z$$

(ج) $$\operatorname{cosec}^{۲} z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{۱}{(z-n\pi)^{۲}}$$

۱۷ . حاصل جمع هر یک از سری های زیر را به دست آورید ، $z\notin Z$

(الف) $$\sum_{-\infty}^{+\infty}(n+a)^{-۲}$$

(ب) $$\sum^{\infty}(n^{۲}+a^{۲})^{-۱}$$

(ج) $$\sum_{۰}^{\infty}(۲n+۱)^{-۲}$$

(د) $$\sum_{۰}^{\infty}(-۱)^{n}(۲n+۱)^{-۳}$$

۱۸ . با انتگرالگیری از

$$\frac{ze^{ibz}}{(a^{۲}-z^{۲})\sin(\pi z)}$$

حول یک کانتور مناسب، نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin bn}{a^2-n^2}=\frac{\pi}{2}.\frac{\sin bz}{\sin\pi a}(|b|<\pi)$$

۱۹ . فرض کنیم $f(z)=1/(z-\xi)+1/z$ ، نشان دهید که اگر $\xi\notin Z$ ،

$$\pi\cot\pi\xi=\frac{1}{\xi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\xi/(\xi^2-n^2)$$

۲۰ . با به کار گرفتن نتیجهٔ تمرین ۱۹ ، از $\pi\cot\pi z$ در طول یک کانتور مناسب انتگرال بگیرید تا ثابت کنید که

$$\log\sin\pi z=\log\pi z+\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-z^2/n^2)$$

که در آن log چنان انتخاب شده است که در هر جمله $\log(1)=0$ باشد. با در نظر گرفتن توانی ها، بسط ضربی نامتناهی تابع سینوس یعنی

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$$

را به دست آورید (این بسط نامتناهی به عنوان حد یک حاصلضرب جزیی مناسب، در مقایسه با حاصل جمع های نامتناهی، تعریف می شود).

۲۱ . اگر $|a|>e$ ، قضیهٔ روشه را به کار گرفته ثابت کنید معادله

$$e^z=az^n$$

دارای n ریشه در $|z|<1$ است.

۲۲ . تعداد صفرهای واقع در درون دایرهٔ واحد مربوط به هر یک از بسجمله ای های زیر را بیابید:

(الف) $z^9-2z^6+z^2-8z-2$

(ب) $$2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$$

(ج) $$z^4 - 5z + 1$$

۲۳ . چند صفر بسجمله ای $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 3$ درون دایرهٔ $|z-1| < 1$ قرار دارند؟

۲۴ . ثابت کنید که $\varepsilon > 0$ هر اندازه کوچک انتخاب شود، به ازاء همهٔ n های به اندازهٔ کافی بزرگ همهٔ صفرهای تابع

$$1 + z^{-1} + (2!z^2)^{-1} + (3!z^3)^{-1} + \ldots + (n!z^n)^{-1}$$

درون دایرهٔ $|z| < \varepsilon$ قرار دارند.

۲۵ . فرض کنیم $P(z)$ یک بسجمله ای از درجهٔ n است، و فرض کنیم $P(z_1) = P(z_2) = 0$. ثابت کنید که صفری از $p'(z)$ هست که درون دایرهٔ به مرکز $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ و شعاع $\frac{1}{2}|z_1 - z_2|\cot(\pi)/n$ است.

۲۶ . *(مانده ها به طور واژگونه)* . نشان دهید که ماندهٔ $\tan^{p-1}\pi z$ در $z = \frac{1}{2}$ عبارت است از $(-1)^{p/2}\pi^{-1}$ که p عدد صحیحی بزرگتر از صفر است.

[**راهنمایی:** از آن حول مستطیلی با راسهایی در $-iR$، $1-iR$، $1+iR$، iR انتگرال بگیرید؛ با فرض $R \to \infty$ اندازه ها را برآورد کنید.]

۲۷ . نشان دهید که

(الف) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$$

(ب) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$$

فصل سیزدهم

تبدیلات همدیس

در ریاضیات، معمولاً توابعی را مورد استفاده قرار می دهیم که آن ساختار، بخصوصی را که مورد علاقه ی ماست حفظ می کنند. مثلاً، در هندسه ی اقلیدسی، حرکتهای صلب، حافظ طول و زاویه هستند؛ تغییر مقیاس، شکل (ولی نه اندازه ی) اشکال هندسی را تغییر می دهد؛ یا همومورفیسم گروهها، ضرب گروه را حفظ می کند. بعکس، اگر خانواده ای از توابع جالب توجه در دست باشد، می توانیم از خود بپرسیم که این توابع، چه ساختاری از ریاضی را حفظ می نمایند؟ در این فصل، به خاصیتی می پردازیم که توسط تمام توابع تحلیلی (یعنی، مشتق پذیر) حفظ می شود، و آن، زاویه ی بین منحنی ها است. توابعی را که دارای این خاصیت هستند، «**همدیس**»[1] می خوانند.

خاصیت همدیس بودن را در دو جهت می توان به کار برد. می توان با مطالعه ی توابع مشتق پذیر، قضایایی را درباره ی منحنی ها اثبات کرد؛ نیز می توان با بررسی منحنی ها، احکامی را درباره ی توابع مشتق پذیر نتیجه گرفت. فن اخیر در نظریه ی پیشرفته ی «هندسی» توابع مشتق پذیر از اهمیت زیادی برخوردارد است، امّا تنها رهیافت نخست در محدوده ی بحث ما می گنجد. این روش، کاربردهای جالب توجهی در نظریه ی پتانسیل و دینامیک شاره ها دارد، و ما نیز

---

1. Conformal

نقطه ی آغاز آنها را بیان خواهیم کرد. همچنین، چند تابع همدیس خاص و جالب را، با قدری تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد؛ بخصوص « *نگاشتهای موبیوس* » را، که واجد این خاصیت جالب توجه هستند که دایره را به دایره می نگارند.

۱ . اعداد حقیقی به هنگ 2π

استفاده از اعداد حقیقی برای بیان اندازه ی یک زاویه، یک نقطه ی ضعف دارد و آن این است که اعداد مختلفی به یک زاویه ی معین متناظر می شوند. با این حال، می دانیم که اگر θ , ϕ دو عدد حقیقی باشند که π دو مبین یک زاویه واحد باشند، در این صورت $\theta-\phi$ مضرب صحیحی از 2π است، و برعکس. بنابراین، مساله خیلی هم پیچیده نیست. برای اجتناب از این مشکل، در بسیاری از موارد، کافی است قرارداد مناسبی را بپذیریم، از قبیل این که $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. در موارد دیگر، مناسب تر است که زوایا را با روشی طبیعی و واضح اندازه گیری کنیم، اگر چه این روش کمتر از اعداد حقیقی برای ما آشنا است.

اگر $x,y \in R$ ، می گوییم y,x *همنهشت به پیمانه*، 2π هستند، و می نویسیم:

$$x \equiv y \pmod{2\pi}$$

اگر عددی صحیح مانند n وجود داشته باشد به قسمی که $x-y=2n\pi$. همنهشتی به پیمانهٔ 2π یک رابطه ی هم ارزی است، لذا R را به رده های هم ارزی دو به دو مجزا افراز می کند. مجموعه ی تمام این رده های هم ارزی را با

$$R/2\pi$$

نشان می دهیم. به ازای هر $x \in R$ ، فرض کنید $P(x)$ آن رده هم ارزی ای باشد که x به آن تعلق دارد. بدین ترتیب تابعی مانند:

$$p : R \to R/2\pi$$

تعریف می شود و داریم:

$$p(x) = \{x + ۲n\pi : n \in z\}$$

اگر اندازه ی زاویه ای مفروض با عدد حقیقی θ بیان شده باشد، در این صورت اندازه ی همین زاویه را، می توان با هر عدد حقیقی به شکل $\theta + ۲n\pi (n \in z)$ ، و تنها با این اعداد، به جای آنکه یکی از این اعداد را برگزینیم، می توانیم زاویه را با همه ی این گرد آیه یعنی $p(\theta)$ نمایش دهیم. به عبارت دیگر، اندازه ی طبیعی یک زاویه، نه عضوی از R ، بلکه عضوی از $R/۲\pi$ است.

مثلاً، اعداد حقیقی

$$\ldots, -۱۱\pi/۳, -۵\pi/۳, \pi/۳, ۷\pi/۳, ۱۳\pi/۳ \ldots$$

همگی یک زاویه ی واحد را نشان می دهند، در حالی که مجموعه ی

$$\{\ \ldots, -۱۱\pi/۳, -۵\pi/۳, \pi/۳, ۷\pi/۳, ۱۳\pi/۳ \ldots\ \}$$

تنها عضو $R/۲\pi$ است که با آن زاویه متناظر است.

بهترین شیٔ هندسی برای تجسم $R/۲\pi$ ، دایره است. برای بیان واضح تر، نگاشت

$$q : R \to C$$

را با

$$q(x) = e^{ix} \qquad (x \in R)$$

تعریف می کنیم. تصویر q واحد $S \subseteq C$ است. از آنجا که $e^{۲\pi i} = ۱$ است، براحتی می توان دریافت که $q(x) = q(y)$ اگر و فقط اگر $x \equiv y \pmod{۲\pi}$ ، و لذا

$$q(x) = q(y) \Leftrightarrow p(x) = p(y) \qquad (۱)$$

بنابراین، می توانیم نگاشت

$$j:R/2\pi \to S$$

را به این صورت تعریف کنیم: اگر $r \in R/2\pi$، آنگاه به ازای xی در R، $r = p(x)$ اکنون قرار می دهیم:

$$j(r) = q(x)$$

بنابر (۱)، این تعریف مستقل از انتخاب $z \in R$ می باشد، و j دو سویی است، بدین ترتیب عناصر $R/2\pi$ در تناظری یک به یک و طبیعی با نقاط دایره قرار می گیرند.

می گوییم تابع $f : X \to R/2\pi$، که در آن $x \subseteq C$، پیوسته است، اگر و فقط اگر تابع مرکب $jf:x \to S$، به مفهوم عادی پیوسته باشد. اگر $R/2\pi$ را به مشابه ی یک دایره در نظر بگیریم، این تعریف، با نظریهٔ شهودی پیوستگی هندسی سازگار خواهد بود. (با بیان توپولوژیک: می توانیم با استفاده از q، توپولوژی معمولی را از S به $R/2\pi$ القاء کنیم، بدین ترتیب که $G \subseteq R/2\pi$ را باز بخوانیم، اگر و فقط اگر، $q(G)$ در S باز باشد. پیوستگی نگاشتی چون $f : x \to R/2\pi$ در این توپولوژی، معادل است با تعریفی که در بالا آمد.)

همچنین می توانیم جمع و تفریق اعضای $R/2\pi$ را متناظر با جمع و تفریق هندسی زوایا، تعریف کنیم. فرض کنید $r,s \in R/2\pi$. $x,y \in R$ را چنان انتخاب کنید که $P(x) = r$ و $P(y) = s$ شود. اکنون قرار دهید

$$r + s = p(x + y)$$
$$r - s = p(x - y)$$

طبق معمول، می توان تایید کرد که این تعریفها به انتخاب y,x بستگی ندارند. (با بیان نظریه گروهها: مجموعه ی $G = \{2n\pi : n \in Z\}$ زیر گروهی از گروه جمعی اعداد حقیقی است، بنابر این یک زیر گروه نرمال آن است، زیرا گروه اخیر، آبلی

است. به عنوان مقایسه، مفهوم اعداد صحیح به هنگ n ، z_n را در نظر بگیرید. Z_n ، گروه خارج قسمت Z/H است، که در آن $H = \{kn : k \in z\}$ می‌شود. در z_n می‌توانیم ضرب را نیز تعریف کنیم. خواننده باید برای خود روشن کند که این کار در $R/۲\pi$ عملی نیست، زیرا ۲π عدد صحیحی نیست.)

اکنون می‌توانیم برای هر $z \in C \setminus \{۰\}$ ، گـــونه‌ای «به هنگ ۲» ای از arg(z) را تعریف کنیم، به این ترتیب که

$$arc(z) = p(arg(z)) \in R/۲\pi$$

این نماد عمداً طوری انتخاب شده است که شبیه به «arg» باشد، و در ضمن مفهوم زاویه را به ذهن متبادر کند. «arc» از دو جنبه بر «arg» مزیت دارد. نخست آنکه هیچ ابهامی ندارد. جنبه ی دوم، و مهم‌تر، این که:

$$arc : C \setminus \{۰\} \to R/۲\pi$$

تابعی پیوسته است. این مطلب در مورد arg درست نیست، زیرا، به دلیل این قرارداد که $-\pi < arg(z) \le \pi$ ، هنگامی که z از بخش منفی محور حقیقی عبور کند، arg(z) از نزدیکی π به نزدیکی $-\pi$ می‌جهد. اما از انجا که $p(-\pi) = p(\pi)$ ، این نقص در arc دیگر وجود ندارد. در واقع، اگـــر $z = re^{i\theta}$ ، $r > ۰$ ، آنگاه $j(arc(z)) = e^{i\theta}$. چه با استفاده از این نکته، و چه به طور مستقیم می‌توان براحتی نشان داد که به ازای هر $z_۱, z_۲ \in C \setminus \{۰\}$ داریم:

$$arc(z_۱z_۲) = arc(z_۱) + arc(z_۲) \qquad (۲)$$

باز، اگر به جای arc، arg را به کار بریم، این تساوی تنها در حد مضارب صحیح ۲π درست خواهد بود.

بدین ترتیب، برای نشان دادن یک زاویه، دو راه مختلف وجود دارد:

یکی متناظر کردن زاویه با عضوی منحصر به فرد از $R/2\pi$ ، یعنی رده ی هم ارزی اعداد حقیقی به هنگ 2π ، و دیگری متناظر کردن آن با یک عدد حقیقی که از آن رده ی هم ارزی برگزیده شده است، و تنها در حد مضارب صحیح 2π منحصر به فرد است. بهتر است که در موارد مناسب، بیان خود را از یکی از این دو روش به دیگری منتقل کنیم، چنانکه در برهان نتیجه بعدی چنین خواهیم کرد.

لم ۱۳-۱. اگر $\gamma:[a,b]\to C$ یک مسیر، و به ازای یک $t_0\in[a,b]$ ، $\gamma'(t_0)$ موجود و مخالف صفر باشد، آنگاه γ در $\gamma(t_0)$ مماسی دارد که با محور حقیقی زاویه ی $\operatorname{arc}\gamma'(t_0)$ می سازد.

برهان. فرض کنید $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$. در این صورت زاویه ی مورد بحث، θ ، متعلق به رده های هم ارزی به پیمانهٔ 2π زاویه ی

$$\begin{aligned}&\tan^{-1}(y'(t_0)/x'(t_0))\\&=\arg(x'(t_0)+iy'(t_0))\\&=\arg y'(t_0)\end{aligned}$$

و لذا، با مراجعه به رده های هم ارزی، به دست می آید:

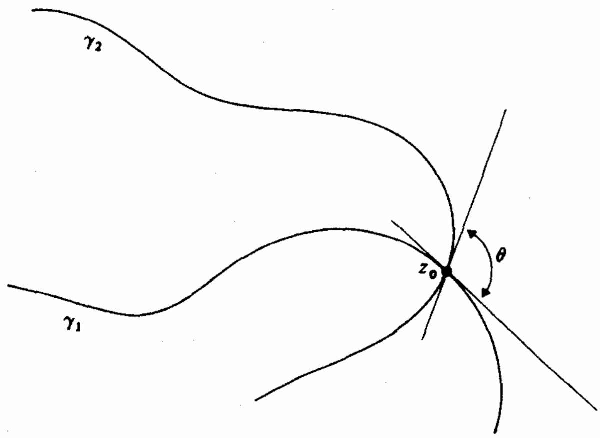
$$\theta=\operatorname{arc}y'(t_0)$$

(از این پس گذار از R به $R/2\pi$ و بالعکس را با صراحت کمتری ذکر خواهیم کرد.)

اگر γ_1,γ_2 دو مسیر باشند که در $z_0=\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)$ با هم برخورد می کنند، و $\gamma_1'(t_1)\neq 0, \gamma_2'(t_2)\neq 0$ ، *زاویه ی بین* γ_1,γ_2 (در z_0) را با عبارت

$$\theta=\operatorname{arc}\gamma_2'(t_2)-\operatorname{arc}\gamma_1'(t_1)\in R/2\pi$$

تعریف می کنیم (شکل ۱۳-۱).



شکل (۱۳-۱)

۲ . تبدیلات همدیس

در این بخش توابعی مانند $f : S \to C$ را در نظر می گیریم، که $S \subseteq C$ یک حوزه است. بجا است دو نسخه ی C را از هم تمیز دهیم. بدین منظور (x,y) را به عنوان مختصات در S، و (u, v) را به عنوان مختصات در فضای تصویر، C، به کار می بریم. مطابق معمول قرار می دهیم $z=x+iy$ و $w = u+iv$. در این صورت اگر f روی S دیفرانسیل پذیر باشد، داریم:

$$f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$$

که در آن u و v توابعی هستند با مقدار حقیقی از دو متغیر حقیقی y,x. بدین ترتیب، f تابعی از زیر مجموعه ی S صفحه ی (x,y) ، به نوی صفحه ی $(u ، v)$ تعریف می کند. مسیری مانند γ در S با ضابطه ی

$$\gamma(t) = x(t)+iy(t) \quad (a \le t \le b)$$

به وسیله ی f، به مسیر

$$f\gamma(t) = u(x(t),y(t)) + i\upsilon(x(t),y(t)) \quad (a \le t \le b)$$

در صفحه ی (u ، υ) نگاشته می شود.

فرض کنید که به ازای مقداری چون $t_\circ \in [a,b]$ ؛ $z_\circ = \gamma(t_\circ)$ و $\gamma'(t_\circ) \neq \circ$ باشد.

در این صورت

$$(f\gamma)'(t_\circ) = f'(y(t_\circ))\gamma'(t_\circ)$$
$$= f'(z_\circ)\gamma'(t_\circ)$$

می شود و لذا بنابر (۲)،

$$\operatorname{arc}\left((fy)'(t_\circ)\right) = \operatorname{arc}\left(f'(z_\circ)y'(t_\circ)\right)$$

$$= \operatorname{arc}\left(f'(z_\circ)\right) + \operatorname{arc}\left(y'(t_\circ)\right) \qquad (۳)$$

بدین ترتیب اگر $\gamma_۲,\gamma_۱$ دو مسیر باشند که از $z_\circ$ می گذرند، مثلاً $\gamma_۱(t_۱) = z_\circ = \gamma_۲(t_۲)$ ، معلوم می شود که $f\gamma_۲, f\gamma_۱$ همان زاویه ای را با هم می سازند که $\gamma_۲,\gamma_۱$ ، این حکم از لحاظ هندسی واضح است زیرا رابطه ی (۳) می گوید که هر دو خط مماس، به اندازه ای زاویه ی $\operatorname{arc}\left(f'(z_\circ)\right)$ گردش کرده اند.

به طور تحلیلی می توان چنین محاسبه کرد:

$$\operatorname{arc}\left((fy_۱)'(t_۱)\right) - \operatorname{arc}(fy_۲)'(t_۲)$$
$$= \operatorname{arc}\left(f'(z_\circ)\right) + \operatorname{arc}\left(y_۱'(t_۱)\right)$$
$$-\operatorname{arc}\left(f'(z_\circ)\right) + \operatorname{arc}\left(y_۲'(t_۲)\right)$$
$$= \operatorname{arc}\left(y_۱'(t_۱)\right) - \operatorname{arc}\left(y_۲'(t_۲)\right)$$

تابع $f: S \to C$ را که زاویه ی بین مسیرها دو نقطه ی $z_\circ$ را حفظ می کند،

همـدیس در z_0 می خـوانیم. اگـر f در تمام نقـاط $z_0 \in S$ همـدیس باشـد، آن را همدیس می خـوانیم. عـبارات *توابع همـدیس*، *نگاشـتهای همـدیس و تبـدیلات همدیس* هر سه به یک مفـهوم اشاره دارنـد. عبارت سوم، تاریخی، عـبارت دوم، سـهل، و اولی، در توافق با اصطلاحـات رایج در زمان مـا است. مـزیت اصطلاح سوم در تاکیدی است که بر چگونگی تبـدیل مسیرها و دیگر اشکال هندسی، تحت تاثیر تابع f، می کند. ثابت کردیم که:

قضـیه ی ۱۳-۱ . گیـریم $f : S \to C$ دیفـرانسـیل پذیر بـاشـد. در این صورت f در هر نقطه ای مانند $z_0 \in S$، که $f'(z_0) \neq 0$، همدیس است.

اگر $f'(z_0) = 0$، آنگاه چنین نیـست که f در z_0 همـدیس باشد. مثلاً اگـر $f(z) = z^2$، آنگاه نیمـه ی مثبت مـحور حقیـقی، و نیمه ی «مـثبت» محـور موهـومی (از ۰ به i و ادامه) محور مـوهومی، به ترتیب به نیمه ی مثبت و نیـمه ی منفی محور حقـیـقی تـبدیل می شـوند. در ابتـدا، این دو مـسیـر با زاویه ی $\pi/2$ به یکدیگر می رسند، امّا پس از تبدیل، زاویه ی بین آنها به π تغییر می کند. در واقع، اگر z_0 یک صفر مـرتبه ی m برای f' باشد، آنگاه زاویه ی بین مسیـرهایی که در z_0 به هم می رسند، پس از تبدیل تحت f، در $m+1$ ضرب می شود.

می توانیم اندکی اطلاعـات درباره ی تاثیـر f بر طول نیـز کـسب کنیم. اگـر $z \in C$ و z_0، و f در z_0 دیفرانسیل پذیر باشـد، نسبت فاصله ی بین $f(z_0), f(z)$، و فاصله ی بین z و z_0 عبارت است از:

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$

کـه با $z \to z_0$ به $|f'(z_0)|$ مـیـل می کند. بنابرایـن در نزدیکی z_0، فـواصل نـقـاط در $|f'(z_0)|$ ضـرب می شوند. ممکن است چند مـثال خاص به روشن تر شـدن تحلیل بالا کمک کند.

مثال۱ . $f(z) = z^3$

داریم:

$$u(x,y) + iv(x,y) = (x+iy)^3$$

$$= (x^۳ - ۳xy^۲) + i(۳x^۲y - y^۳)$$

بنابراین

$$u(x,y) = x^۳ - ۳xy^۲$$
$$\upsilon(x,y) = ۳x^۲y - y^۳$$

مسیرهای

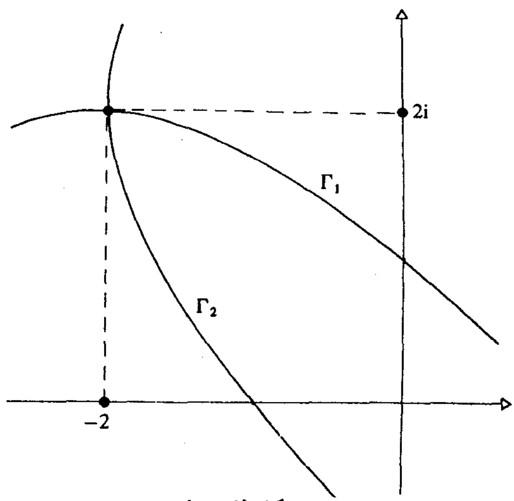
$$y_۱(t) = ۱ + it$$
$$y_۲(t) = it + ۱$$

را در نظر بگیرید، که به ترتیب خطوط x=۱ و y=۱ هستند و لذا یکدیگر را با زاویه‌ی قائمه قطع می‌کنند. مسیرهای $\Gamma_۱ = f\gamma_۱$، $\Gamma_۲ = f\gamma_۲$ با ضوابط

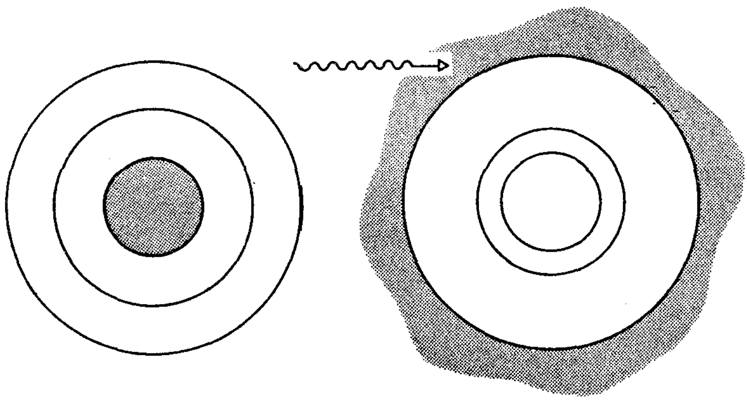
$$\Gamma_۱(t) = (۱ - ۳t^۲) + i(۳t - t^۳)$$
$$\Gamma_۲(t) = (t^۳ - ۳t) + i(۳t^۲ - ۱)$$

مشخص می‌شوند، اگر این دو منحنی را ترسیم کنیم، شکل ۱۳-۲ به دست می‌آید.

اکنون، $\Gamma_۱,\Gamma_۲$ در نقطه‌ی (z,z-) یکدیگر را با زاویه‌ی قائمه قطع می‌کنند.



شکل (۱۳-۲)



شکل (۱۳-۳)

مثال۲. $f(z) = 1/z$

این بار

$$u(x,y) = x/(x^2 + y^2)$$
$$\upsilon(x,y) = -y/(x^2 + y^2)$$

اگر c مقداری حقیقی و مثبت باشد، دایره‌ی

$$\gamma_c(t) = ce^{it} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{۴}$$

به منحنی

$$\Gamma_c(t) = c^{-1} e^{-it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{۵}$$

تبدیل می‌شود. بنابراین خانواده‌ی دوایر هم مرکز (۴) هنگامی که c تغییر می‌کند، به خانواده‌ی دوایر هم مرکز (۵) نگاشته می‌شود. با این حال، نقاط درونی دوایر (۴)، به نقاط برون دوایر (۵) نگاشته می‌شوند (شکل ۱۳-۳).

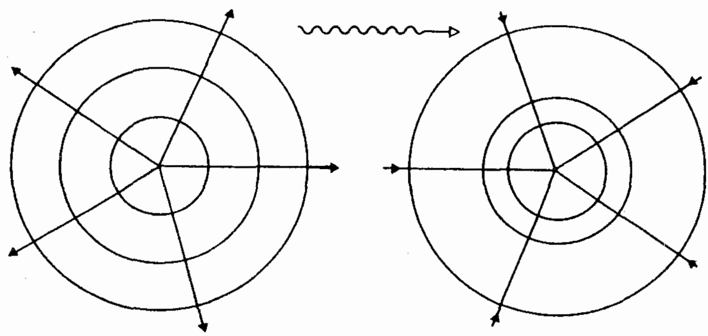
بعلاوه، خطوط $x = ky(k \in R)$ که از مبدأ می‌گذرند، با ضابطه‌ی

$$\delta_k(t) = t + kit$$

قابل بیان هستند، و به منحنی های

$$\Delta_k(t) = (t+kit)^{-۱} = \frac{۱}{۱+k^۲}\left(\frac{۱}{t}\right) + \frac{ik}{۱+k^۲}\left(\frac{۱}{t}\right)$$

تبدیل می شوند، که باز هم نشان دهنده ی خطوطی است که از مبدا می گذرند اکنون، Δ_k, Γ_c ، و نیز δ_k, γ_c یکدیگر را با زاویه ی قائمه قطع می کنند. (شکل ۱۳-۴)



شکل (۱۳-۴)

مثال ۳ . $f(z) = \sin(z)$

داریم:

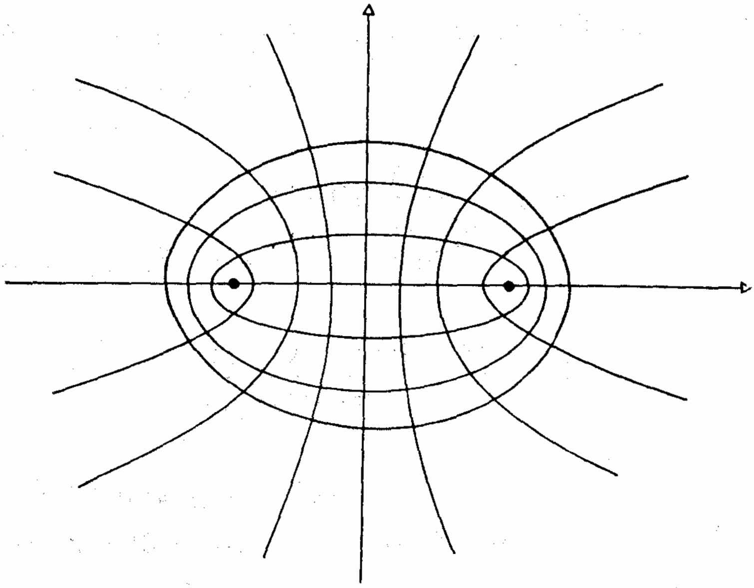
$$u(x,y) = \sin(x)\cosh(y)$$
$$\upsilon(x,y) = \cos(x)\sinh(y)$$

از تبدیل خطوط $x = c (c \in R)$ ، هذلولی های هم کانون

$$\frac{u^۲}{\sin^۲(c)} - \frac{\upsilon^۲}{\cos^۲(c)} = ۱$$

حاصل می‌شوند، و از تبدیل خطوط $y = d(d \in R)$ ، بیضی‌های هم کانون

$$\frac{u^{2}}{\cosh^{2}(d)}+\frac{\upsilon^{2}}{\sinh^{2}(d)}=1$$



شکل (۱۳-۵)

(شکل ۱۳-۵). این دو دسته خط یکدیگر را با زاویه‌ی قائمه قطع می‌کنند، بنابراین دو دسته مقاطع مخروطی نیز چنین می‌کنند (مگر در نقاطی که $f'(z) = 0$ می‌شود، یعنی در نقاطی که $f(z) = \pm 1$).

۳. نگاشتهای موبیوس[1]

اگر $a,b,c,d \in C$ اعداد ثابتی باشند و شرط $ad - bc \neq 0$ را برآورند، تابع

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

1. Mobius Mappings

را نگاشت موبیوس (دوخطی) می خوانند. این گونه نگاشتها خواص مهمی دارند، که ما برخی از آنها را ذکر می کنیم.

نخست، توجه کنید که $f(z)$ به ازای $z \neq -d/c$ مشتق پذیر است، و $f'(z) = (ad - bc)/(cz + d)^۲ \neq ۰$ می شود. صفر نبودن مشتق، با شرط $ad - bc \neq ۰$ تضمین شده است. بنابراین، f روی حوزه ی تعریف خود، یعنی $C \setminus \{-d/c\}$ همدیس است.

اکنون فرض کنید که

$$g(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}(AD - BC \neq ۰)$$

نگاشت موبیوس دیگری باشد. در این صورت تابع مرکب

$$gf(z) = \frac{(Aa + Bc)z + (Ab + Bb)}{(Ca + Dc)z + (Cb + Dd)}$$

نیز یک نگاشت موبیوس است، زیرا

$$(Aa + Bc)(Cb + Dd) - (Ab + Bb)(Ca + Dc) = (AD - BC)(ad - bc) \neq ۰$$

بنابراین از ترکیب دو نگاشت موبیوس، نگاشت موبیوس سومی حاصل می شود.

یک خاصیت قابل توجه و مهم این گونه نگاشتها این است که هر دایره (یا خط راست) را، به یک دایره (یا خط راست) می نگارند. اجازه دهید برای صرفه جویی در متن، توافق کنیم که در این بخش، واژه ی «دایره» هم بر دایره وهم بر خط راست دلالت کند. اکنون فرض کنید $p, q \in C$، $p \neq q$، $k > ۰$، معادله ی

$$\frac{|z - p|}{|z - q|} = k \qquad (۶)$$

به ازای تمام نقاطی که نسبت فاصله ی هر یک از آنها از p، k برابر فاصله از q است، از هندسهٔ اقلیدسی می دانیم، و می توان به کمک مختصات این را تصدیق کرد، که اگر $k \neq ۱$، این نقاط بر یک دایره قرار دارند، و اگر $k = ۱$، بر یک خط راست.

در اینجا برهانی سریع الوصول را ارائه می کنیم. می توانیم دستگاه مختصات را چنان در صفحه بنا کنیم که p نقطه ی (۰، ۰) و q (۰، ۱) باشد. اگر (x,y) نقطه ای باشد به فاصله ی kd از p و به فاصله ی d از q، در این صورت:

$$\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} = k\sqrt{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}$$

بنابراین

$$x^{۲}+y^{۲} = k^{۲}(x^{۲}+y^{۲}-۲x+۱)$$

که ایجاب می کند:

$$\left(x-\frac{k^{۲}}{k^{۲}-۱}\right)^{۲}+y^{۲}+\frac{k^{۲}}{k^{۲}-۱}-\left(\frac{k^{۲}}{k^{۲}-۱}\right)=۰$$

و رابطه ی اخیر، معادله ی یک دایره است.

اگر قرار دهیم:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq ۰)$$

بسادگی می توان ملاحظه کرد که

$$z = \frac{-dw+b}{cw+a}$$

اکنون رابطه ی (۶) به صورت

$$\left|\frac{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-p}{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-q}\right| = k$$

در می آید، که پس از ساده کردن، نتیجه می شود:

$$\left|\frac{w-P}{w-Q}\right| = K \qquad (۷)$$

که در آن

$$P = (b + pa)/(d + pc)$$
$$Q = (b + qa)/(d + qc)$$
$$K = k|d + qc|/|d + pc|$$

بنابراین (۷) نیز نمایش دهنده ی یک دایره است. پس ثابت شد که نگاشت موبیوس f، دایره را به دایره تبدیل می کند.

محاسبات فوق، اگر چه ادعای مورد نظر را تایید می نماید ولی به اندازه ی کافی آموزنده نیست. رهیافت ذیل این نقص را برطرف می کند. چند نوع خاص از نگاشتهای موبیوس، و بخصوص انواع ساده ی آن را در نظر می گیریم، و نشان می دهیم که هر نگاشت موبیوس دلخواهی را می توان از ترکیب این انواع ساده به دست آورد. این مطلب، با توجه به خاصیت ترکیب پذیری نگاشتهای موبیوس، که قبلاً ذکر شد، نباید عجیب به نظر برسد. این رهیافت، شبیه به این واقعیت شناخته شده است که هر تبدیل صلب در فضای اقلیدسی (دو بُعدی) را می توان ترکیبی از یک انتقال، یک دوران، و یک انعکاس دانست. اکنون کار را با بررسی انواع خاص آغاز می کنیم.

(الف) انتقال: $w = z + k (k \in C)$. این تبدیل، از لحاظ هندسی معادل است با اینکه هر نقطه ی صفحه را به اندازه ی $re(k)$ به سمت راست و به اندازه ی $im(k)$ به طرف بالا حرکت دهیم. واضح است که تحت این تبدیل، ظاهر اشکال هندسی بلا تغییر می ماند.

(ب) دوران: $w = e^{i\theta} z (\theta \in R)$. تمام نقاط صفحه، به اندازه ی زاویه ی θ حول مبدا دوران می کنند.

(پ) بزرگنمایی: $w = hz (h > ۰)$. این تبدیل موجب تغییر مقیاس می شود (اگر $h < ۱$ باشد، این تبدیل به جای بزرگ کردن اشکال آنها را کوچک می کند. امّا دقت در این نکته، بی اهمیت است)، لذا هر شکل هندسی را به شکلی متشابه با آن می نگارد.

(ت) انعکاس: $w = ۱/z$. طرفداران «هندسی ی انعکاسی»، که اکنون دیگر از مد افتاده است، این تبدیل را متناظر با «انعکاس هندسی» می یابند. یک خاصیت

معروف انعکاس هندسی این است که دایره را به دایره می نگارد. با این حال ممکن است دایره به خط، یا خط به دایره تبدیل شود. سایر خوانندگان باید این مطلب را از طریق محاسباتی، نظیر محاسبات کلی تری که قبلاً دیدیم، بیازمایند.

اکنون می توانیم بیان کنیم که:

قضیه ی ۱۳-۲. هر نگاشت موبیوسی را می توان از ترکیب یک انتقال، یک انعکاس، یک بزرگنمایی، یک دوران، و یک انتقال دیگر به دست آورد (بر حسب مورد، ممکن است برخی از این تبدیلات را حذف نمود).

برهان. با فرض $a,b,c,d \in C$، $ad-bc \neq ۰$ و $c \neq ۰$، تعریف کنید:

$$t_۱(z) = z + d/c \qquad \text{(انتقال)}$$

$$j(z) = ۱/z \qquad \text{(انعکاس)}$$

$$m(z) = \left|\frac{ad-bc}{c^۲}\right| z \qquad \text{(بزرگنمایی)}$$

$$r(z) = \frac{ad-bc\,|c^۲|}{|ad-bc|\,c^۲} z \qquad \text{(دوران)}$$

$$t_۲(z) = z + a/c \qquad \text{(انتقال)}$$

آزمون اینکه

$$t_۲ r m j t_۱(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

سر راست است، اگر $c=۰$، تعریف کنید:

$$t_۱(z) = z + b/a \qquad \text{(انتقال)}$$

$$m(z) = \left|\frac{a}{d}\right| z \qquad \text{(بزرگنمایی)}$$

$$r(z) = \frac{a}{d}\left|\frac{d}{a}\right| z \qquad \text{(انعکاس)}$$

(با توجه به اینکه $ad - bc \neq 0$ ، از $c=0$ نتیجه می شود که $ad \neq 0$ ، لذا $0 \neq b \neq 0$،) . اکنون

$$\mathrm{rmt}_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

نتیجه ۱۳-۳ . تمام نگاشتهای موبیوس ، دایره را به دایره می نگارند .
برهان. هر یک از چهار نوع تبدیل خاص ، بوضوح دایره را به دایره می نگارد . اکنون قضیه ی ۱۳-۲ را به کار برید .
نگاشتهای $f : C \to C$ دیگری هم وجود دارند که دایره را به دایره می نگارند ؛ مثلاً تزویج مختلط یکی از این نگاشتها است (و البته تحلیلی نیست) . قضیه ای از *کاراتئودوری* حاکی از این است که هر چنین نگاشتی ، یا یک یک نگاشت موبیوس است و یا حاصل ترکیب یک نگاشت موبیوس با تزویج مختلط ، در این قضیه هیچ فرضی مبنی بر مشتق پذیری مورد نیاز نیست .

۴ . نظریه ی پتانسیل

معادله ی لاپلاس دو بُعدی

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

با تابع مجهول $\phi(x,y)$ در نظریه پتانسیل اهمیت دارد. نظریه ی پتانسیل ، بخصوص در دینامیک شاره ها کاربرد دارد. همانطور که ذیلاً روشن خواهد شد، این معادله ارتباط تنگاتنگی با نظریه ی توابع مختلط دارد. فرض کنید $f : S \to C$ مشتق پذیر باشد، و $z=x+iy$،

$$f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$$

در این صورت ، همانطور که در بخش ۴ . ۲ دیدیم :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

بنابر قضیه‌ی ۱۰-۳، f'' روی تمامی S وجود دارد. اگر قرار دهیم $f'(z) = U + iV$ ، معادلات *کوشی ریمان* (بخش ۲.۴) نشان می دهند که

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \upsilon}, \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

از طرفی

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, V = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

و نتیجه می گیریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

بدین ترتیب، $u(x,y)$ در معادله‌ی لاپلاس صدق می کند. به طور مشابه، $\upsilon(x,y)$ نیز چنین می کند.

برای مثال، تابع $f(z) = ze^z$ را در نظر بگیرید. در اینجا

$$u(x,y) = xe^x \cos(y) - ye^x \sin(y)$$
$$\upsilon(x,y) = ye^x \cos(y) + xe^x \sin(y)$$

و می توان مستقیماً امتحان کرد که این دو تابع، معادله‌ی لاپلاس را بر می آورند.

هر جواب معادله‌ی لاپلاس را یک *تابع همساز* یا *پتانسیل* می خوانند. یک جفت تابع مانند u و υ ، که همانند بالا از یک تابع مشتق پذیر f به دست آیند، مزدوج *همساز* نامیده می شوند.

اکنون خطوط $u = \text{constant}$ و $\upsilon = \text{constant}$ در صفحه‌ی (u,υ) متعامد (دو به دو عمود بر هم) هستند. و لذا بنابر همدیس بودن f، خطوط

$$u(x,y) = \text{constant}$$
$$\upsilon(x,y) = \text{constant}$$

نیز در صفحه ی (x,y) متعامد اند. در نظریه ی پتانسیل، اگر u تابعی همساز باشد، خطوط $u(x,y) = constant$ ، *خطوط هم‌پتانسیل* ، و مجموعه ی منحنی های متعامد $v(x,y) = constant$ ، خطوط جریان خوانده می شوند. در صورتی که شار یک شاره را با معادله ی لاپلاس توصیف کرده باشیم، خطوط جریان، مسیرهایی را نشان می دهند که شاره در طول آنها جریان می یابد. اگر u در حوزه ای مثل S برای ما معلوم باشد و بخواهیم خطوط جریان را با یافتن υ بشناسیم، معمولاً می توانیم از انتگرال گیری مختلط استفاده کنیم. به ازای نقطه ی ثابت $z_0 \in S$ ، و نقطه ی دلخواه $z_1 \in S$ ، داریم:

$$f(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f'(z)dz$$
$$= \int_{z_0}^{z_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)dz$$

مثلاً فرض کنید $u(x,y) = x^2 - y^2$ ، که تابعی همساز است. با انتخاب $z_0 = 0$ برای سادگی، خواهیم داشت:

$$f(z_1) = \int_0^{z_1} (2x + 2iy)dz$$
$$= \int_0^{z_1} 2zdz$$
$$= z_1^2$$

بنابراین $f(x+iy) = (x+iy)^2$ ، و لذا $\upsilon(x,y) = im\big(f(x+iy)\big) = 2xy$. پس معادله ی خطوط جریان عبارت است از: $2xy = constant$ ، یا به طور معادل

$$xy = constant$$

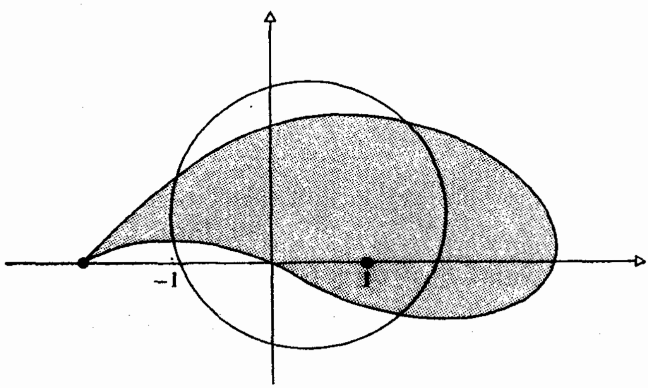
در غالب موارد، مثل همین مثال، می توان حدس زد که $\upsilon(x,y)$ چه ضابطه ای باید داشته باشد - فرآیندی که معمولاً با اصطلاح «تفتیش» به آن اشاره می شود.

نگاشتهای همدیس و نظریه ی توابع مختلط، در نخستین روزهای دوران هوانوردی، برای طراحی بخشی از هواپیما مورد استفاده قرار گرفت (و به نحوی

پیچیده تر، هنوز هم به کار می رود). بخصوص، تبدیلی از صفحه ی z به صفحه ی w با ضابطه ی

$$\frac{w-۲}{w+۲}=\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)^{۲}$$

دایره ای در صفحه ی z را که از نقطه ی ۱- بگذرد و نقطه ی ۱+ درون آن واقع باشد، به یک شکل دوکی مایل (شکل ۱۳-۶) می نگارد. شکل حاصل، به مقطع بال هواپیما شباهت دارد، و به افتخار کاشف این تبدیل به *ایروفویل یوکوفسکی*[1] معروف است. این تبدیل به نحو ذیل به کار می رود. حل معادله ی لاپلاس و یافتن خطوط جریان یک شاره در اطراف دیسک مدور بسیار آسان است. اکنون تبدیلات یوکوفسکی را به کار ببرید: دیسک به یک ایروفویل تبدیل می گردد.



شکل (۱۳-۶)

و خطوط جریان اطراف دیسک، به خطوط جریان در اطراف ایروفویل نگاشته می شوند. بدین طریق می توان خواص جریان و بخصوص مقدار «نیروی بالابر[2]» را که بر هواپیما اثر می کند، محاسبه کرد. تبدیلات ظریفتر، اطلاعات دقیق تری به دست می دهند.

---

1. Joukowski aerofoil

2. life

تمرینهای فصل ۱۳

۱ . تصویر مجموعه ی $D = \{z \in C | \text{re } z > 0, \text{im} z > 0, |z| < 1\}$ را تحت نگاشت همدیس $z \to 1/z$ بررسی کنید. تصویر خطوط واقع در D و موازی با محورهای مختصات را رسم نمایید.

۲ . نشان دهید که نگاشت

$$f(z) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b} e^{-i\left((\pi)/2+\tan^{-1} k\right)} z$$

نوار مابین خطوط y=kx و y=kx+b را به نوار مابین x=۰ و x=۱ تبدیل می کند.

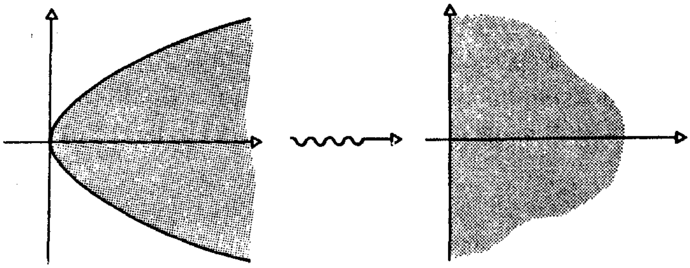
۳ . یک نگاشت همدیس مانند f از طوق $5 > |z| > z$ به روی طوق $10 > |z| > 4$ بیابید، به طوری که $f(-5) = 10$.

نگاشتی دیگر بیابید به طوری که $f(5) = -4$.

۴ . با انتخاب مناسب تابع ریشه ی دوم، نشان دهید که

$$f(z) = \sqrt{z-p} - i\sqrt{p}$$

حوزه ی خارج سهمی $y^2 = 4px (p > 0)$ را بر نیم صفحه ی راست، $x > 0$ می نگارد. (شکل ۱۳ . ۷)



شکل (۱۳-۷)

۵. یک نگاشت همدیس بیابید که حوزه ی درون شاخه ی سمت راستی هذلولی

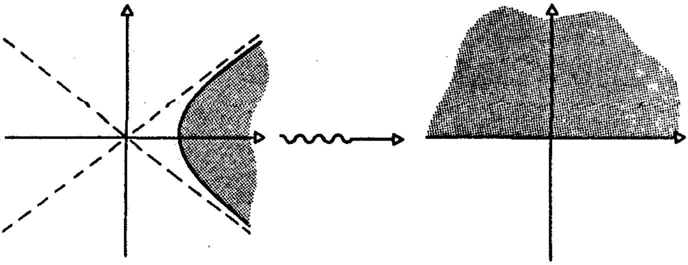
$$x^{۲} - y^{۲} = \lambda^{۲}$$

را بزنیم صفحه ی بالایی، $y > ۰$ بنگارد. (شکل ۱۳-×) (راهنمایی: $re(z^{۲})$ چیست؟

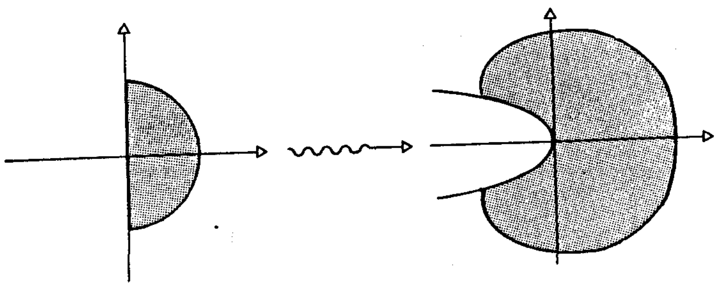
۶. نشان دهید که نیم دایره ی $|z| < ۱, re(z) > ۰$ ، با تبدیل

$$f(z) = z^{۲} + z$$

بر ناحیه ای که به سهمی $x = -y^{۲}$ و منحنی (در مختصات قطبی) $r = ۲\cos(\theta / ۳), |\theta| \le ۳\pi / ۴$ محدود است نگاشته می شود. (شکل ۱۳-۹)



شکل (۱۳-۵)

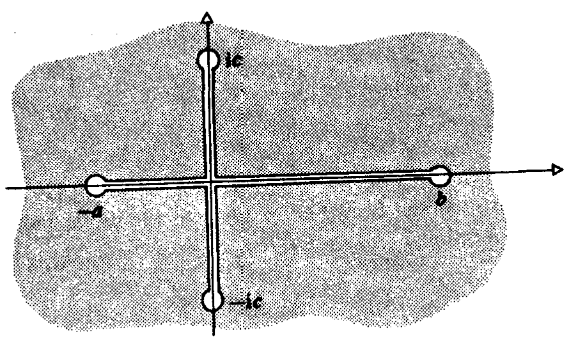


شکل (۱۳-۹)

۷. نشان دهید که (با تعریف مناسب ریشه ی دوم)، و با فرض $a,b,c>0$ ، تابع

$$f(z)=\sqrt{\frac{\sqrt{z^{2}+c^{2}}+\sqrt{a^{2}+c^{2}}}{\sqrt{b^{2}+c^{2}}-\sqrt{z^{2}+c^{2}}}}$$

صفحه ی مختلط ، که پاره خط مابین a- و b و مابین ic- و id از آن حذف شده است را بر نیم صفحه ی بالایی می نگارد . (شکل ۱۳-۱۰)

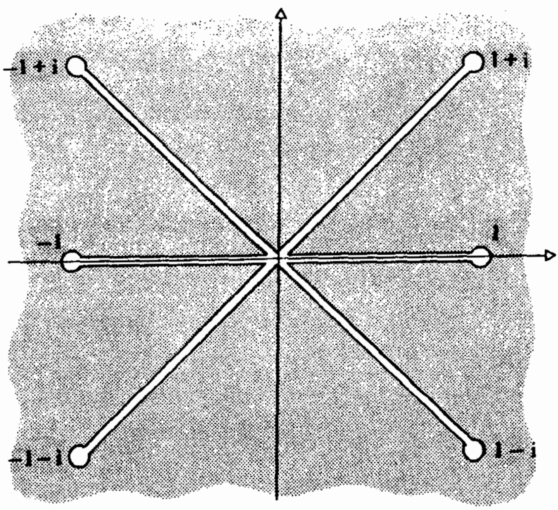


شکل-۱۳-۱۰)

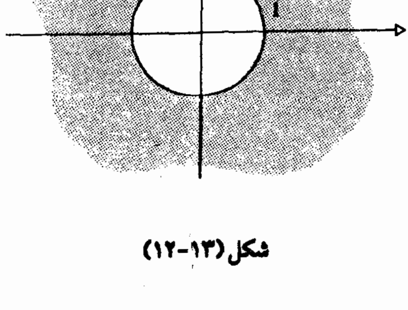
۸ . نشان دهید که تابع

$$f(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲ + \sqrt{۵}}}\left(\sqrt{(\sqrt{z^{۴} + ۴} + ۲)} + \sqrt{(\sqrt{z^{۴} + ۴} - \sqrt{۵})} \right)$$

شکل ۱۳-۱۱ را بر خارج دایره‌ی واحد، شکل ۱۳-۱۲ ، می‌نگارد.



شکل(۱۳-۱۱)



شکل(۱۳-۱۲)

۹ . یک نگاشت همــــدیس، از شکل ۱۳-۱۳ به نیم صـــفـــحــــه ی بالایی بیابید. (راهنمایی: با معادله ی ۷ مقایسه کنید.)

۱۰ . نشان دهید که تابع

$$f(z) = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h}{1 + \cos \pi z}}$$

شکل ۱۳-۱۴ را بر نیم صفحه ی بالایی می نگارد.

۱۱ . یک نگاشت همدیس بیابید که شکل ۱۳-۱۵ را بر نیم صفحه ی بالایی بنگارد.

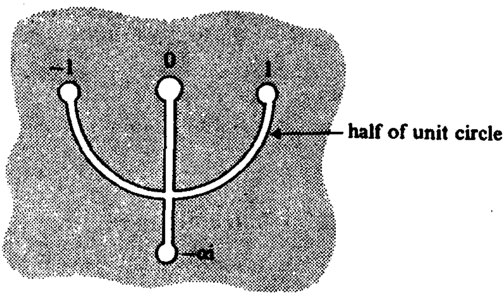
۱۲ . تبدیل موبیوسی را بیابید که سه نقطه ی ۱-، ∞ و i را به ترتیب بر

(الف) $1+i, 1, i$

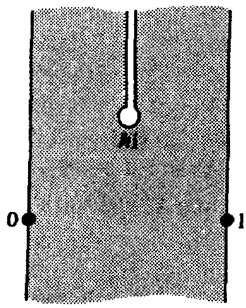
(ب) $1, i, \infty$

(ج) $1, \infty, 0$

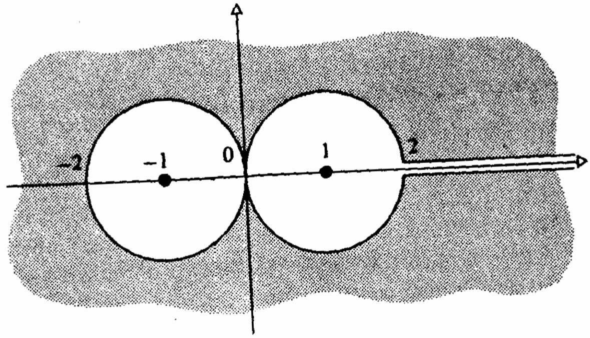
بنگارد.



شکل (۱۳-۱۳)



شکل (۱۳-۱۴)



شکل (۱۳-۱۵)

۱۳ . شکل کلی تبدیل موبیوسی را بیابید که :

(الف) نیم صفحه‌ی بالایی را بر خودش بنگارد .

(ب) نیم صفحه‌ی بالایی را بر نیم صفحه‌ی پایینی بنگارد .

(ج) نیم صفحه‌ی بالایی را بر نیم صفحه‌ی راست بنگارد .

(د) دایره‌ی واحد را بر خودش بنگارد .

(ه) محورهای مختصات را بر خودشان بنگارد .

(و) نیم صفحه‌ی بالایی را به درون دایره‌ی واحد بفرستد .

۱۴ . فرض می کنیم f یک تبدیل موبیوس باشد . یک *نقطه‌ی ثابت* f نقطه‌ای است چون z به طوری که $f(z)=z$. اگر f درست یک نقطه‌ی ثابت (از جمله ∞) داشته باشد، آن را سهموی می خوانند، نشان دهید چنین تبدیلی را می توان به شکل

$$\frac{۱}{f(z)-z_{\circ}}=\frac{۱}{z-z_{\circ}}+h \qquad (z_{\circ}\neq\infty)$$

یا

$$f(z)=z+h \quad (\text{انتقال})$$

نوشت .

اگر f دو نقطه‌ی ثابت متمایز داشته باشد، نشان دهید می‌توان آن را به شکل

$$\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2} \qquad (z_1,z_2 \neq \infty)$$

یا

$$f(z)-z_1=k(z-z_1) \qquad (z_2=\infty)$$

نوشت. می‌گوییم چنین نگاشتی *هذلولی* است، اگر $k>0$، *بیضوی* است، اگر $k=e^{i\alpha}(\alpha\neq 0)$، و *مارپیچ ثابت- زاویه* است، اگر $k=ae^{i\alpha}$ که در آن $a\neq 1$ حقیقی است، و $\alpha \neq 0$.

۱۵ . با تعاریف سؤال ۱۴ گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) هر تبدیل موبیوسی مانند $(az+b)/(cz+d)$ برابر است با تبدیلی موبیوس با این خاصیت که $ad-bc=1$.

(ب) پس از به کار بردن گزاره‌ی (الف)، در صورتی که a+d حقیقی باشد، آنگاه تبدیل بیضوی است اگر $|a+d|<2$، هذلولی است اگر $|a+d|>2$، و سهموی است اگر $|a+d|=2$.

(ج) اگر a+d حقیقی نباشد، آنگاه تبدیل، مارپیچ ثابت - زاویه است.

۱۶ . نشان دهید تابع

$$u(x,y)=x^3-3xy^2$$

همساز است، تابع همسازی مانند $U:R^2\to R$ بیابید به طوری که

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

یک تابع مختلط تحلیلی باشد. ثابت کنید که υ در حد افزایش یک مقدار ثابت، منحصر به فرد است.

۱۷ . تابع $f(z)=1/z$ را به شکل $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ بنویسید. منحنی های تراز $u(x,y)=\text{constant}$ و $\upsilon(x,y)=\text{constant}$ را رسم کنید. اگر

دو منحنی تراز u و v یکدیگر را قطع کنند، زاویه ی بین آنها چه اندازه است؟ آیا راه آسانی برای دریافتن این مطلب وجود دارد؟

۱۸ . کلی ترین شکل سه جمله ای $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ (a، b، c، d حقیقی هستند) را که همساز باشد تعیین کنید. یک تابع تحلیلی از z بیابید که u قسمت حقیقی آن باشد.

۱۹ . امتحان کنید که تبدیل یوکوفسکی، همچنان که ادعا شد، یک ایروفویل به دست می دهد. به صفحات ۴-۱۳۱ اثر *کایرالا*[1] به نام *توابع کاربردی از یک متغیر مختلط* مراجعه کنید، و ببینید چگونه خطوط جریان در اطراف ایروفویل محاسبه شده اند.

---

1. A.kyrala , Applied Functions of a Complex Vanable,
Wiley-Interscience, New York 1972

فصل چهاردهم

توسیع تحلیلی

هنگامی کـه وایرشتـراس برنـامهٔ خـود را بـرای تدقیق آنالیـز شـروع نمود آن را بر مبنای سریهای توان بنا نهاد. زیرا اینها در تقارب، دارای خواص خوشرفتار هستند و می‌توان از آنهـا جمله به جمله مـشتق گـرفت و یا انتگرال گیری کرد. آنهـا وسیله بزرگی از لحـاظ تـکنیک مـقـادیر فـراهم می سـازند. به هر حـال ایـن وسـیله دارای محدودیتی است که در بخش اول آن را توضیح خواهیم داد.

بسیاری از توابع مهم را نمی‌توان به وسیله یک سری توان منحصر به فرد بسط داد. این محدودیت را می‌توان به روش توسیع توابع تحلیلی جبران کرد، که به ما اجازه می دهد کـه تحت شرایط صـحیح دامنهٔ تعریف یک تابع مختلط را وسـعت دهیم. گـاهی اتفـاق می افـتـد که چنین توسیـعی منحـصر بـه فرد نـباشـد و مـسـألهٔ توضیح امکانات مـختلف و روابط بیـن آنها مـا را هدایت می کند به یک مفهـوم قابل توجـه هندسی که بعداً به نام مـخترع آن *رویه ریمانی* شناخته شـد. در این فصل ما دربارهٔ آنها و مباحث مربوط به آنها بحث خواهیم کرد.

در اینجـا مـا عـبارت *تحلیلی بودن* را بر *دیفـرانسـیل پذیر بودن* ترجیح می دهیم، زیرا با سریهای توان سر و کار داریم.

۱ . محدودیتهای سری توان

مـــوضـــوع را بـا بررسی تابع $f(z)=۱/(۱-z^۲)$ تشـــریح می کـنیم. (می توانستیم با مثال ساده‌تری شروع کنیم. مـانند $۱/z$، لیکن تابع f مناسبتر است.

این تابع روی $C/\{-1,1\}$ تحلیلی است و دارای قطبهای سادهٔ ۱ و ۱- می‌باشد، و بسط سری توانی آن حول $z=0$ عبارت است از:

$$1+z^2+z^4+z^6+\dots \qquad (1)$$

که بازای $|z|<1$ همگرا است. بنابراین اگر بخواهیم که تابع روی دامنه اش تعریف شود. سری (۱) بهترین نمایش برای $f(z)$ روی دیسک یکهٔ باز

$$S=\{z\in C: |z|<1\}$$

خواهد بود. معذالک (۱) فقط معرف جزیی کوچک از f است.
می توانیم نقطهٔ دیگری مانند $z_0=i$ را انتخاب کنیم. برای یافتن بسط تیلور $f(z)$ حول $z_0=i$ رابطه زیر را در نظر می گیریم:

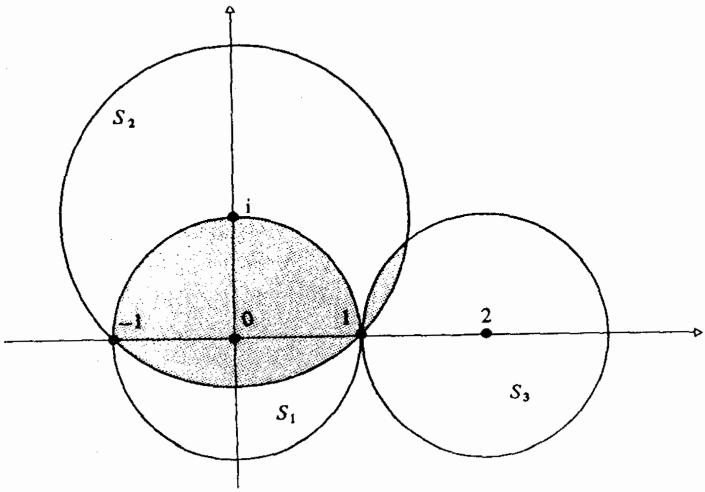
$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}\right)$$

فرض کنیم $w=z-i$، در نتیجه $z=w+i$. آنگاه:

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+w+i}+\frac{1}{1-w-i}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+i}\left(1+\frac{w}{1+i}\right)^{-1}+\frac{1}{1-i}\left(1-\frac{w}{1-i}\right)^{-1}\right\}\\&=\frac{1}{2(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{1+i}\right)^n+\frac{1}{2(1-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{1-i}\right)^n\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+i}\left(\frac{-1}{1+i}\right)^n+\frac{1}{1-i}\left(\frac{1}{1-i}\right)^n\right\}(z-i)^n \qquad (2)$$

شعاع همگرایی سری (۲)، $\sqrt{۲}$ است، زیرا فاصله $z_{\cdot} = i$ تا نزدیکترین قطب آن $\sqrt{۲}$ است. بنابراین (۲) روی $S_{۲} = \{z \in C : |z - i| < \sqrt{۲}\}$ همگرا ست.
در شکل ۱۴-۱ مشاهده می شود که (۲) بازای بعضی از مقادیر که (۱) واگراست، همگرا می باشد. (۱) یا (۲) هر یک معرف بخش کوچکی از f (یعنی تجدید f به $S_{۱}$ و $S_{۲}$)، لیکن بخشهایی متمایز، می باشند.



شکل(۱۴-۱)

به طور مشابه اگر $z_{\cdot} = ۲$ را در نظر بگیریم سری دیگری به دست می آید:

$$f(z) = \sum_{n=\cdot}^{\infty}\left\{-\frac{۱}{۲}(-۱)^{n} + \frac{۱}{۶}(-\frac{۱}{۳})^{n}\right\}(z-۲)^{n} \qquad (۳)$$

که روی دیسک $S_{۳} = \{z \in C : |z - ۲| < ۱\}$ همگراست و معرف بخش دیگری از f است. برای انتخابهای دیگر از $z_{\cdot}$ انتظار چیزی از همین نوع را خواهیم داشت:
بنا به قضیهٔ ۱۰-۳ سری تیلور

$$f(z) = \sum_{n=\cdot}^{\infty} a_{n}(z - z_{\cdot})^{n} \qquad (۴)$$

بازای z هایی که $|z-z_.| < k = \min(|z_. - 1|, |z_. + 1|)$ همگراست.
در هر حال سری به دست آمده از انتخاب یک $z_.$ ، بسط $f(z)$ روی تمامی مجموعه

$$z \in C \setminus \{-1, 1\}$$

حتی با فرض تحلیلی بودن f روی مجموعهٔ فوق، نخواهد بود. (خواننده می تواند نشان دهد که سری لورنت نیز نمی تواند جایگزینی، بهتر باشد.) این نقص بیشتر ناشی از طبیعت محدود این ابزار - سریهای توانی- می باشد، نه از توابع تحلیلی. عیب از f نیست که تلاش ناشیانهٔ ما در جهت توصیف آن به عنوان یک سری توانی ظاهراً به شکست انجامیده است. این نکته که سریها روی دیسکها همگرایند مواجهه با توابعی که روی مجموعه هایی متمایز تعریف شده اند، ایجاد *اشکال* می کند. می توانستیم با چشم پوشیدن از سریهای توانی از این معضل برهیم، لیکن عملی نامطبوع خواهد بود: در ریاضیات اصلی اساسی است که نظریات خوب را فقط دلیل خوب عمل کردنشان، کنار نگذاریم. اگر یک سری توانی کارآمد نیست، چرا از گردایه ای کامل از سریهای توانی سور نجوئیم؟
این بخشی از مساله را حل می کند. یقیناً بازای هر $z_. \in C \setminus \{-1, 1\}$ خواهیم توانست سری توانی (۴) حول $z_.$ را به دست آوریم که بازای $z = z_.$ به $f(z_.)$ همگرا باشد. بنابراین استفاده از سریهای توانی متعدد اطلاعاتی در مورد کل f به ما خواهند داد.

اما از این، مساله جدی تری ناشی می شود. در این بحث با f شروع کردیم و سری توانی آن را به دست آوردیم. وایراشتراوس نیازمند روش دیگری بود: به کار بردن سریهای توانی برای تعریف f در مثال بالا می دانستیم که سریهای (۱) و (۲) و (۳) نمایش تابع تحلیلی f هستند زیرا از روی f آنها را ساخته بودیم. اگر دو بسط برای تابع f در نقاط متمایز داشته باشیم چگونه می توانیم بدون اطلاع قبلی تشخیص دهیم که سریهای فوق بسط توانی f هستند. در واقع مساله مرکزی کار وایراشتراس همین نکته بود.

۲ . مقایسه سریها

مایلیم دو سری توانی

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (z - z_0)^n$$

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n$$

را که به ترتیب حول z_1, z_0 بسط داده شده اند و روی دیسکهای باز Q, P همگرایند را مقایسه کنید. در هر حال اگر Q, P متقاطع باشند (یعنی $P \cap Q \neq \phi$)، مثلاً در حالت (۱) و (۲) و (۳) از مثال بالا (شکل ۱۴-۲). فرض کنیم بازای هر $z \in P \cap Q$ داشته باشیم $p(z) = q(z)$ و f و q توابعی باشند که روی دامنهٔ S شامل $P \cap Q$ چنان تعریف شده باشند که بازای هر $z \in P$، $f(z) = P(z)$ و بازای هر $z \in Q$، $g(z) = q(z)$، آنگاه بازای z متعلق به مجموعهٔ ناتهی $P \cap Q$ داریم:

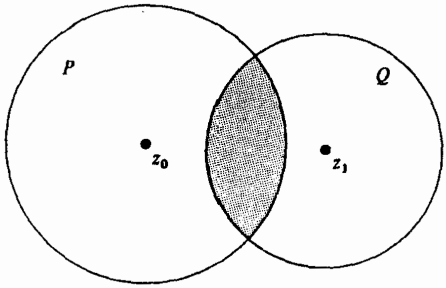
$$f(z) = p(z) = q(z) = g(z)$$

لذا بنا به قضیه ۱۱، ۱۰ بازای هر $z \in S$ خواهیم داشت $f(z) = g(z)$. در این حالت p و q نمایش تحلیلی یک تابع هستند بوضوح عکس آن نیز درست است: اگر p و q نمایش یک تابع تحلیلی باشند آنگاه روی تقاطع دامنه هایشان بر هم منطبق خواهند بود.

متقاطع بودن دامنه ها امکان مقایسه مستقیم سریها را فراهم می آورد: همهٔ کاری که باید انجام شود مقایسهٔ مقادیر دو سری است. در حالت کلی برای مقایسهٔ سریهای توانی که دامنه هایشان اشتراك ندارند (مانند: (۱) و (۳) در بالا). بایستی دنباله ای از سریها روی دیسکهای متقاطع بسازیم که همگرا بوده و روی تقاطع دیسکها بر هم منطبق باشند. مثلاً S_2, S_1 متقاطعند و (۱) و (۲) روی $S_1 \cap S_2$ بر هم منطبقند یا S_3, S_2 متقاطعند و (۲) و (۳) روی $S_2 \cap S_3$ بر هم منطبقند.

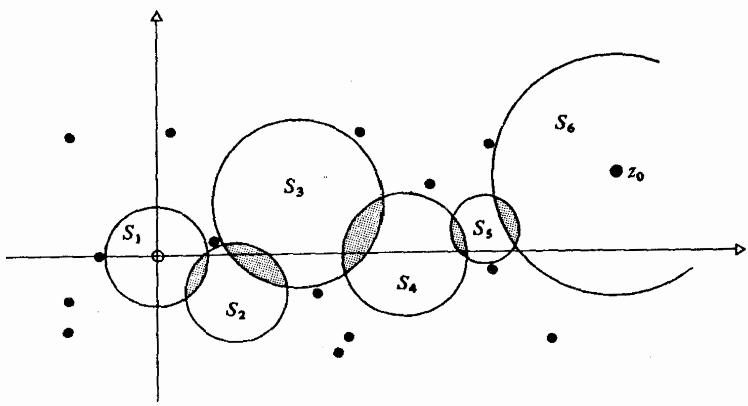
واضح است که برای $f(z)$ مثال بالا می توانیم از S_1 به هر نقطهٔ $z_0 \neq \pm 1$ توسط دنباله ای از حداکثر سه دیسک برسیم (مگر اینکه z_0 حقیقی بوده و $|z_0| > 1$ باشد).

برای تابعی پیچیده با قطبهای بیشتر (یا تکینگیهای دیگر) به دیسکهای بیشتری بیشتری نیاز خواهیم داشت (شکل۱۴-۳) زیرا دیسکها بین تکنیگی های تابع فشرده شده اند.



شکل (۱۴-۲)

این وضعیت محدودیتی برای سریهای توانی است. قرصها برای نفوذ به قلمروهای دست نخوردهٔ ماوراء تکینگی ها ابزارهای کارآمدی نیستند.

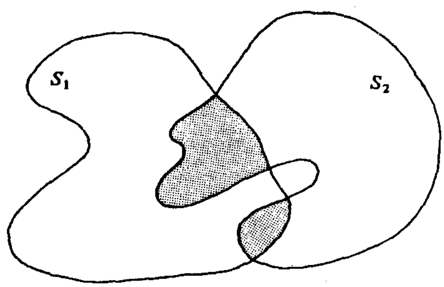


شکل (۱۴-۳)

با بررسی جدی تر این نظریه به این نتیجه می رسیم که محدود شدن به سریهای توانی و قرصها ضرورتی ندارد. در ریاضیات اغلب پیش می آید که حل مساله ای خاص در دستگاهی کلی تر کاربرد می یابد.

۳. ادامه تحلیلی

اگر f_1 روی S_1 و f_2 روی دامنهٔ S_2 تحلیلی باشد و $S_1 \cap S_2 \neq \phi$ و بازای هر $z \in S_1 \cap S_2$ ، $f_1(z) = f_2(z)$ (شکل ۱۴-۴) باشد آنگاه f_2 را ادامه تحلیلی f_1 در دامنهٔ S_2 گوییم. همانگونه که قبلاً خاطر نشان کردیم f_2 منحصر به فرد است زیرا اگر g نیز روی S_2 تحلیلی باشد و بازای همهٔ $z \in S_1 \cap S_2$ داشته باشیم. $f_1(z) = g(z)$ آنگاه به ازای همهٔ $z \in S_1 \cap S_2$ $g(z) = f_2(z)$ لذا بنا به قضیهٔ ۱۰-۱ بازای هر $z \in S_2$ داریم: $g(z) = f_2(z)$.



شکل (۱۴-۴)

بعنوان یک مثال ساده برای بخش قبلی فرض کنیم

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = 1/(1-z) \qquad z \in C \setminus \{1\}$$

آنگاه f_2 ادامهٔ تحلیلی مستقیم f_1 است. در حالی که f_1 روی قرص یکه باز تعریف شده است ولی f_2 روی همه $C \setminus \{1\}$.

پیش از بررسی حالت کلی متناظر با دو سری با دامنه های مشترک پدیدهٔ مهم دیگری را بررسی می کنیم. گاهی از اوقات S_1 به گونه ایست که f_1 دارای هیچ ادامه تحلیلی روی S_2 که مشمول در S_1 نباشد نیست. در این حالت مرز S_1 را مرز طبیعی f_1 گویند.

محدودیت پدید آمده ناشی از وسیلهٔ انتخابی ما نیست بلکه ناشی از خواص ذاتی f_1 است. این وضعیت وقتی پیش می آید که S_1 بزرگترین مجموعه ای باشد که ادامهٔ تحلیلی f_1 روی آن حائز اهمیت است.

مثال استانداردی از این وضعیت عبارت است از: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

که برای $|z| < 1$ همگرا و در نتیجه تحلیلی است. باید نشان دهیم که محیط دایرهٔ یکه مرز طبیعی f است.

اگر $z = e^{\pi i p/q}$، $p,q \in Z$، $q \geq 1$ آنگاه $z^{n!} = 1$ برای هر $n \geq q$. ابتدا نشان می دهیم که از $z \to z_0$ رابطه $f(z) \to \infty$ نتیجه می شود. فرض کنیم $z = rz_0$ که در آن $0 < r < 1$. آنگاه

$$\begin{aligned}
(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (rz_0)^{n!} \\
&= 1 + rz_0 + \ldots + r^{(q-1)} z_0^{(q-1)!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \\
&= g(r) + h(r)
\end{aligned}$$

توجه داریم که $h(r)$ به صورت بالاست زیرا برای هر $n \geq q$ داریم $z_0^{n!} = 1$.
حال برای هر عدد صحیح ثابت $N \geq 0$،

وقتی که $r \to 1$ داریم: $\sum_{n=q}^{q+N} r^{n!} \to N+1$

لذا برای بعضی $\varepsilon > 0$، اگر $1 - \varepsilon < r < 1$ آنگاه

$$\sum_{n=q}^{q+N} r^{n!} \geq \frac{۱}{۲} N$$

آنگاه

$$h(r) = \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \geq \sum_{n=q}^{q+N} r^{n!} \geq \frac{۱}{۲} N$$

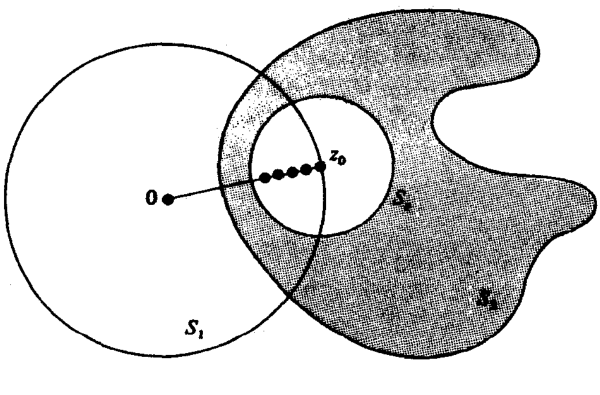
بنابراین وقتی که $r \to ۱$ ، $h(r) \to \infty$ ، لذا اگر $z \to z_۰$ آنگاه $h(r) \to \infty$.

از طرفی وقتی $z \to z_۰$ آنگاه $g(z) \to ۱ + z_۰ + \ldots + z_۰^{(n-۱)!}$

بنابراین

$$\text{him}_{z \to z_۰} f(z) = \infty \tag{۵}$$

حال فرض کنیم که F ادامه تحلیلی f روی دامنه $S_۲$ باشد که مشمول در $S_۱ = \{z \in C : |z| < ۱\}$ نباشد. آنگاه $\partial S_۱ \cap S_۲$ در $\partial S_۱$ باز است، لذا شامل نقطه‌ای مانند $z_۰ = e^{\pi i p/q}$ است که در آن $p, q \subset z$ ، $r \geq ۱$ زیرا مجموعهٔ نقاط فوق در دایرهٔ یکه چگالند. قرص کوچک $S_۳$ حول $z_۰$ چنان وجود دارد که $S_۳ \subseteq S_۲$.



شکل(۱۴-۵)

حال برای $1-\varepsilon < r < 1$ داریم $rz_0 \varepsilon S_2$ به قسمی که

$$F(rz_0) = f(rz_0)$$

بنا به (۵) وقتی $r \to 1$ خواهیم داشت:

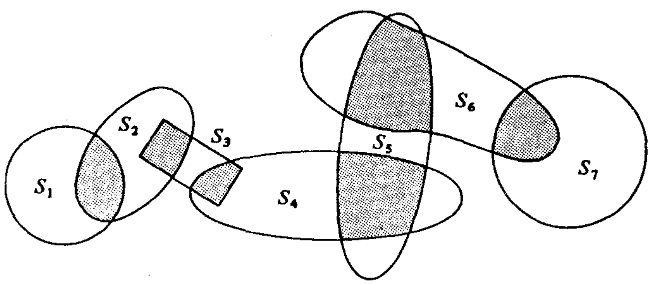
$$F(rz_0) \to \infty$$

امّا F در S_2 تحلیلی است، پس بنا به پیوستگی F، وقتی $r \to 1$ داریم:

$$F(rz_0) \to F(z_0)$$

که این تناقض است و نشان می دهد که هیچ ادامه تحلیلی برای f بیرون S_1 وجود ندارد. (به عبارتی نه چندان دقیق: تکینگی های $e^{\pi i p/q}$ چنان تنگاتنگ هم قرار گرفته اند که نمی توان فرصی را جهت ادامه تحلیلی f بین آنها قرار داد.)

حال به موضوع دنبالهٔ ادامه تحلیلی گام به گام باز می گردیم. فرض کنیم $S_1,...,S_n$ دامنه هایی باشند (شکل ۱۴-۶) که $S_r \cap S_{r+1} \neq \phi$ $(r = 1,...,n-1)$.

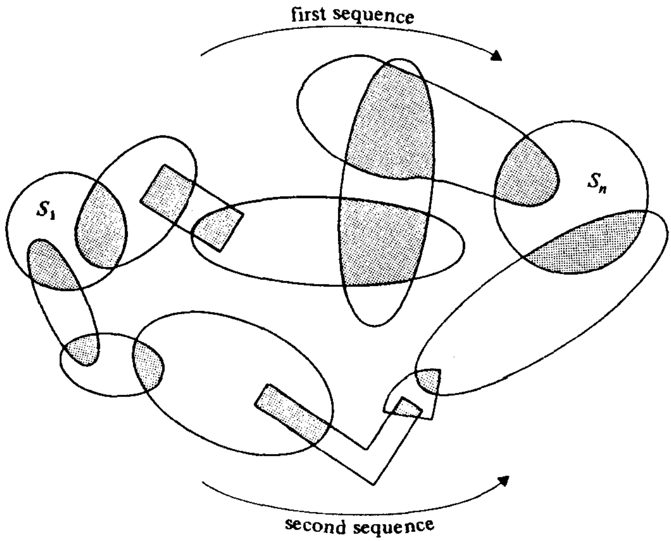


شکل (۱۴-۶)

اگر دنباله ای از توابع تحلیلی f_r تعریف شده روی S_r وجود داشته باشند که f_{r+1} ادامه تحلیلی f_r روی S_{r+1}باشد $(r = 1,...,n-1)$ آنگاه f_n را ادامهٔ تحلیلی f_1 از S_1 به S_n S_2 گوییم.

هر ادامهٔ تحلیلی که مستقیم نباشد، *ادامهٔ تحلیلی غیر مستقیم* گوئیم.

در این حالت، بر خلاف حالت مستقیم، با انتخاب دنباله های متفاوت می توان نتایج متفاوتی به دست آورد. (شکل ۱۴-۷) در واقع می توان با انتخاب دنباله ای از دامنه ها با تابع نهایی متفاوتی به نقطه آغازین بازگشت که در آن $S_1 = S_n$ ولی $f_1 \neq f_n$. این وضعیت را با مثالی در بخش بعدی روشن خواهیم کرد. اما ابتدا نظریهٔ بالا را جهت تعریف مفهومی کلی تر از یک تابع تحلیلی به کار می گیریم.



شکل (۱۴-۷)

اگر f در دامنهٔ s تحلیلی باشد زوج مرتب (f,s) را *عنصر تابعی* گویند رابطهٔ هم ارزی ~ را روی مجموعه عناصر تابعی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f_1,s_1) \sim (f_2,s_2)$$

اگر f_2 ادامهٔ تحلیلی f_1 از s_1 به s_2 باشد. بنا به تعریف ادامهٔ تحلیلی غیر مستقیم به آسانی می توان نشان داد که ~ یک *رابطهٔ هم ارزی* است. تابع تحلیلی مختلط عبارت است از: یک کلاس هم ارزی (تحت ~) از عناصر تابعی. به عبارت

دیگر، تابع تحلیلی تام بنا به این عبارت از تابعی تحلیلی در معنای قبلی، با انضمام همهٔ ادامه های تحلیلی اش؛ است.

اگر عناصر تابعی $(f_1,s_1),(f_2,s_2)$ از تابع تحلیلی تام F وجود داشته باشند به طوری که بازای بعضی z های متعلق به $S_1 \cap S_2$ داشته باشیم $f_1(z) \neq f_2(z)$ آنگاه F را چند شکلی گوییم و در غیر این صورت F را یک شکل گوییم. همهٔ مثالهایی که در این بخش آورده ایم یک شکل هستند و مثالهایی از توابع چند شکلی را در بخش بعدی خوهیم آورد یک تابع چند شکلی در اصل نسخه ای از یک تابع چند مقداری است که به قطعاتی تقسیم شده باشد با این مزیت که روی هر یک از آنها دقیقاً یک تابع یک مقداری است. چند شکلی بودن حاصل روشی است که در آن قطعات با یکدیگر متناسب باشند. نگرشی هندسی بر این موضوع ما را به نظریهٔ رویه های ریمانی نزدیک می سازد که می توان توصیفی از آن را در بخش ۵ دید.

۴. توابع چند شکلی

مثال ساده ای از تابعی چند شکلی عبارت است از:

$$f(z) = \sqrt{z}$$

اگر $z = re^{i\theta}$ آنگاه می توان هر یک از دو مقدار $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ یا $\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ به جای $\sqrt{2}$ برگزید. (که در آن $\sqrt{r}$ حقیقی و مثبت است.) با نظریهٔ قدیمی تابع تحلیلی مجاز بودیم که به طور دلخواه یکی از تصاویر فوق را انتخاب کنیم و $f(z)$ تحلیلی بود اگر برشی از صفحهٔ مختلط را در نظر می گرفتیم. از دیدگاه تازه می توان بهتر عمل نمود. چهار دامنه زیر را در نظر می گیریم:

$$H_1 = \{z \in C : re(z) > 0\}$$

$$H_2 = \{z \in C : im(z) > 0\}$$

$$H_3 = \{z \in C : re(z) < 0\}$$

$$H_4 = \{z \in C : im(z) < 0\}$$

که هر یک نیم صفحه ای باز در راست، چپ، بالا و پایین صفحهٔ مختلط است فرض کنیم $z = re^{i\theta}$ که در آن $r > 0$ و $-\pi < \theta \le \pi$ تعریف می کنیم.

$$
\begin{array}{ll}
f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} & \text{for } z \in S_1 = H_1 \\
f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} & \text{for } z \in S_2 = H_2 \\
f_3(z) = \begin{cases} \sqrt{r}e^{i\theta/2} \\ \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} \end{cases} & \begin{array}{l} \text{for } z \in S_3 = H_3, \operatorname{im}(z) \ge 0 \\ \text{for } z \in S_3 = H_3, \operatorname{im}(z) < 0 \end{array} \\
f_4(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} & \text{for } z \in S_4 = H_4 \\
f_5(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} & \text{for } z \in S_5 = H_1 \\
f_6(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} & \text{for } z \in S_6 = H_2 \\
f_7(z) = \begin{cases} \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} \\ \sqrt{r}e^{i\theta/2} \end{cases} & \begin{array}{l} \text{for } z \in S_7 = H_3, \operatorname{im}(z) \ge 0 \\ \text{for } z \in S_7 = H_3, \operatorname{im}(z) < 0 \end{array} \\
f_8(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} & \text{for } z \in S_8 = H_4
\end{array}
$$

هر یک از این هشت تابع روی دامنه شان تحلیلی اند: در f_3, f_7 مجبور بودیم که هنگام برخورد با محور موهومی مقدار $\sqrt{2}$ را تغییر دهیم زیرا با انتخاب ما از $-\pi < \theta \le \pi, \theta$ انتخابهای دیگر موجب ناپیوستگی میشدند. علاوهٔ بر آن f_{r+1} ادامهٔ تحلیلی f_r $(r = 1,...,7)$ و f_1 ادامهٔ تحلیلی مستقیم f_8 می باشد. برای هر $z \in C \setminus \{0\}$ مقادیر $f_r(z)$، تعریف شده در فوق یکی از دو مقدار ممکن اندیشه های z خواهد بود. بعلاوه بازای هر r، $f_r(z)$ یکی از دو مقدار ممکن و $f_{r+4}(z)$ مقدار دیگر را اختیار خواهد کرد (که در آن $r+4$ به هنج ۸ در نظر گرفته شده است).

بنابراین تابعی چند شکلی داریم که در هر نقطهٔ $z \neq 0$ دو مقدار اختیار می کند. با رفتن از S_1 به S_2 به S_3 به S_4 به $S_1 = S_5$ در نزدیکی مبداء مقادیر متفاوت از مقدار اصلی برای $f(z)$ به دست می آید. به هر حال در این وضعیت با ادامهٔ حرکت به دور مبداء در دور دوم دوباره به مقدار اصلی باز می گردیم. این نقص ویژگی خاص از $\sqrt{z}$ است که در مثال بعدی نشان خواهیم داد.

یک تابع چند شکل فوق العاده مهم عبارت است از :

$$f(z) = \log(z)$$

چند شکلی بودن f کشف بزرگ *اویلر* حاصل از مباحثات *برنولی*–*لایب نیتس* است که در بخش ۵ به آن اشاره شد. بر حسب مباحثات فعلی دامنه های زیر را طرح می کنیم :

$$S_{۴k+۱} = H_r \qquad (k \in Z, r = ۱,۲,۳,۴)$$

جهت اجتناب از نوع تعاریف در ضابطه ای که در $f_۳$ و $f_۷$ مثال قبلی پیش آمد به صورت زیر عمل می کنیم : برای $z \in S_n$ و $z = re^{i\theta}$ که در آن

$$\frac{n-۲}{۲}\pi < \theta \le \frac{n\pi}{۲}$$

تعریف می کنیم :

$$f_n(z) = \log(r) + i\theta$$

آنگاه f_n روی S_n تحلیلی است. روی $S_۱$ مقادیر اصلی را خواهیم داشت :

$$f_۲(z) = \log(z)$$

$$f_۵(z) = \log(z) + ۲\pi i \qquad \text{روی } S_۵$$

$$f_{۴k+۱}(z) = \log(z) + ۲k\pi i \qquad \text{روی } S_{۴k+۱}$$

بررسی این نکته که بازای هر $s \in Z$ ، $f_{s+۱}$ ادامه تحلیلی f_s بتوی $S_{s+۱}$ است، کار دشواری نخواهد بود. بازای $r = ۱,۲,۳,۴$ و $k \in Z$ مقادیر $f_{۴k+۱}(z) \quad (z \in H_r)$

$$\log|z| + (۲k\pi + \arg(z))i$$

همهٔ مقادیر ممکن لگاریتم را به طور نامتناهی به دست می دهد.

اکنون می توانیم تعریفی کلی از تکینگی را ارائه دهیم. اگر نتوان ادامهٔ تحلیلی از f در نقطه z_0 تعریف کنیم آنگاه z_0 را *نقطهٔ تکین تابع تحلیلی تام متناظر f* گوییم. قبلاً با تکینگیهای رفع شدنی مواجه شده ایم: قطبها، نقاط تنهای تکینگی اساسی. مطابق تعریف جدید تکینگی های رفع شدنی در واقع تکینگی نیستند. برای $\Sigma z^{n!}$ هر نقطه $|z| \geq 1$ یک تکینگی است. برای $\sqrt{z}$ و $\log(z)$ با نوع تازه ای از تکینگی به نام نقاط شاخه ای مواجه می شویم. : ادامهٔ تحلیلی چون این گونه نقاط مقادیر متمایزی به دست می دهد. توجه داریم که برای $\sqrt{z}$ حتی تعریفی طبیعی از $f(z)$ در نقطهٔ شاخه ای یعنی $z_0 = 0$ وجود دارد در حالی که f در آن تحلیلی نیست.

توابع چند شکلی در انتگرالگیری مسیری، وقتی که مسیرهای متفاوتی از z_0 به z_1 انتخاب شوند، مقادیر متمایزی از انتگرال

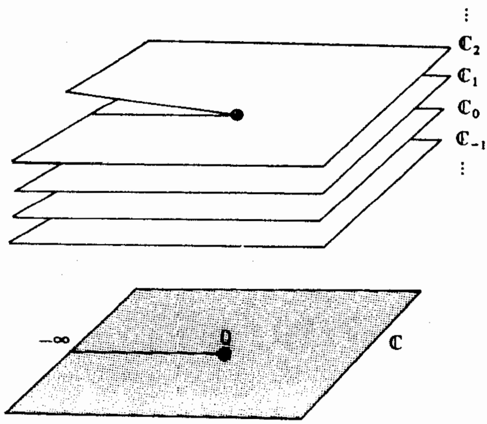
$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

را به دست می دهند. (به عنوان مثال: اگر f بین دو مسیر قطبی داشته باشد.) بنابراین وجود تکینگی های کاملاً مناسب f، مثلاً قطبها، تکینگی های بسیار نامطلوب F، یعنی نقاط شاخه ای، را نتیجه می دهند. اگر f یک شکل نیز باشد احتمال پیش آمدن این وضعیت وجود دارد: مثلاً، $1/z$ یک شکل است در حالی که انتگرال آن $\log z$ چند شکلی است؛ و قطب f در صفر نقطهٔ شاخه ای از F می باشد.

۵. رویه ی ریمان

ریمان برای بررسی توابع چند فُرمی یک روش هندسی ابداع کرد. این روش از لحاظ شهودی خیلی جذاب تر از روش رده های هم ارزی اجزاء تابع است، و در آن، C با یک فضای پیچیده تر به نام «رویه ی ریمان» جایگزین می شود. در مورد تابع لگاریتمی، می توان این روش را به طریق غیر صعودی زیر توصیف کرد. اما این توصیف را بنا به تحلیلی دقیق به حساب آورد. در اینجا ما به دنبال یک تعریف دقیق نیستیم: این توصیف غیر صعودی، اگر چه ممکن است محیلانه به نظر برسد، تعبیری دقیق از این روش ارائه می دهد.

گردآیه ای از نسخه های C به نام C_k را در نظر بگیرید، که هر یک از آنها متناظر با یک $k \in Z$ است. هر C_k را از محور حقیقی و از ۰ تا $-\infty$ ببرید. به ازای هر k، ربع بالا - چپ C_k را به ربع پایین چپ C_{k+1} در طول برش، پیوند بزنید. رویه ای که حاصل می شود (شکل ۱۴-۸) به شکل یک پلکان مارپیچ است. صفحه های C_k با ترتیب k در بالای یکدگیر ردیف شده اند. از هر C_k به هر $C_{k'}$ دیگری، مسیری پیوسته و مارپیچ وجود دارد. این مسیر پیوسته، با عبور از محل هر بریدگی، یک «پله» بالا می رود. صفحات C_k، برگه های این رویه ی ریمانی هستند، شایسته است که تصور کنیم تمام این گردآیه، همان طور که در تصویر نشان داده شده است، بر فراز C قرار گرفته است.



شکل (۱۴-۸)

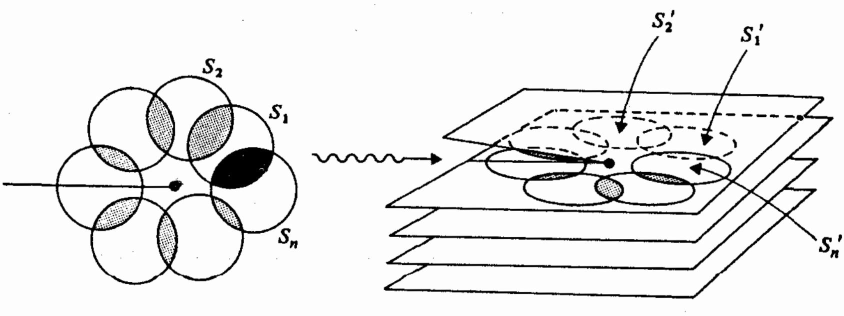
تابع لگاریتم را در نقاط واقع بر رویه ی ریمانی با

$$\log(\widehat{z}) = \log|z| + i(\arg(z) + ۲k\pi)$$

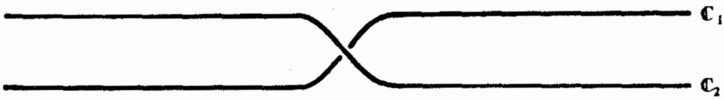
تعریف می کنیم، که در آن $\widehat{z}$ نقطه ای از C_k است که درست بالای نقطه ی $z \in C$ قرار دارد. آنچه که تعریف کردیم، یک تابع تک‌مقداری بر رویه ی ریمانی است،

این تابع پیوسته است، به این معنی که مقادیر تابع در دو طرف بریدگی ها، به نحو مطلوبی به یکدیگر می رسند. (به همین ترتیب، حتی می توانیم بگوییم که این تابع، دیفرانسیل پذیر است، زیرا مقادیر مشتق نیز به نحو مطلوب به یکدیگر می پیوندند.

اکنون خواهیم دید که چگونه فرآیند امتداد تحلیلی یک تابع روی C ، به عملی مشابه با آن روی رویه ی ریمانی مربوط می شود. متناظر با حوزه های $S_1,...,S_n \subseteq C$ ، حوزه های $S'_1,...,S'_n$ را روی رویه داریم. در C ، مقادیر توابع $f_1,...f_n$ در محل تقاطع مناسب حوزه ها، یعنی $S_1 \cap S_2,...,S_{n-1} \cap S_n$ با هم سازگار هستند، امّا به خاطر چند فرمی بودن تابع، مقادیر روی S_n,S_1 سازگار نیستند. روی رویه ی ریمانی، اگر S'_2,S'_1 را، و به همین ترتیب، می بینیم که هنگامی که به S'_n می رسیم، این حوزه یک طبقه بالاتر از S'_1 قرار می گیرد. (شکل ۱۴-۹) بدین ترتیب S'_1 و S'_n اساساً متقاطع نیستند، و اینکه f_n,f_1 مقادیر متخالف داشته باشند، کاملاً قابل قبول است. طبیعت چند مقداری بودن ادامه ی تحلیلی، خود به خود با چند لایه بودن رویه ی ریمانی تامین می شود. حتی حضور تکینگی در نقطه ی ۰ نیز از طبیعت هندسی این رویه ی ریمانی آشکار می شود، چرا که در این نقطه، تمام برگه ها به هم می رسند.



شکل (۱۴-۹)



شکل (۱۴-۱۰)

به طور مشابه برای تابع $\sqrt{z}$ نیز می توانیم یک رویه ی ریمانی بسازیم. برای این کار، دو نسخه از C به نام C_1 و C_2 اختیار می کنیم، هر یک ازآنها را از ۰ تا ∞- می بُریم، ربع بالا - چپ C_1 را به ربع پایین -چپ C_2 ، و ربع بالا- چپ C_2 را به ربع پایین -چپ C_1 پیوند می زنیم. برای انجام این کار در فضای سه بعدی، باید بگذاریم رویه خودش را قطع کند، ولی به لحاظ مفهومی هیچ مشکلی پیش نمی آید.) (شکل ۱۴-۱۰) در اینجا هم پدیده هایی که در بالا ذکر شد، از طبیعت هندسی رویه ای ریمانی ای که ساخته ایم واضح است؛ مقادیر دوتایی، $f(z)$ ، این واقعیت که با یک دور چرخش، مقدار تابع تغییر می کند، ولی با دو دور چرخش، ثابت می ماند، و بالاخره حضور نقطه ی شاخه در ۰ .

بدیهی است که در حالت کلی برای ساختن رویه ریمان نمی توان به این روش (ad hoc) ادهو متوسل شد. بلکه به همان روش مثال لگاریتمی می توان به روش عمومی دست یافت اما با ساختن رویه به طریقی متفاوت با آنچه گفته شد. دنباله نیم صفحه ای های S_n و توابع f_s که در فوق برای توسیع توابع تحلیلی به کار رفت مورد بررسی قرار می دهیم.

فرض کنیم نیم صفحه ای های S'_s ها را متناظر با S_s ها قرار داده باشیم، به قسمی که دو به دو از هم جدا باشند. (S_s ها طوری نیستند که مثلاً $S_1 = S_5$ و یا نظایر آن باشد). فرض کنیم S'_s ها را به طریق زیر به هم چسبانده باشیم، به نحوی که S_s و S_{+1} در ربع صفحه ای همپوش باشند که روی آن $f_k = f_{k+1}$ ، و ربع صفحه های متناظر S'_s, S'_{s+1} را به هم می چسبانیم. از این رو S'_2 بالای ربع سمت راست S'_1

چسبانده می‌شود، S'_3 بالای سمت S'_2 چسبانده می‌شود و S'_4 به ته سمت چپ S'_3 می‌چسبد، S'_5 به سمت راست تحتانی S'_4 چسبانده می‌شود. از این نقطه نظر S'_5 مستقیماً روی S'_1 قرار می‌گیرد، اما ما آنها را به هم نمی‌چسبانیم زیرا f_5, f_1 متفاوت می‌باشند (شکل ۱۴-۱۱) با ادامه به وسیله $S'_6, S'_7, \ldots$ (و در جهت مخالف و $S'_0, S'_{-1}, S'_{-2}, \ldots$). مجدداً رویه ریمان ساخته می‌شود. روش کلی ساختمان یک رویهٔ ریمان از یک تابع کاملاً تحلیلی همین خط و مسیر دنبال می‌شود. یادآور می‌شویم که F یک دسته هم ارز از زوجهای (f,s) است که در آن f یک تابع تحلیلی روی میدان S می‌باشد، و $(f_1,s_1) \approx (f_2,s_2)$ در صورتی که روی مجموعه غیر تهی $S_1 \cap S_2$ داشته باشیم $f_1 = f_2$. گیریم S'_λ نسخه‌های جدا از هم از میدانهای S_λ متناظر با میدانهای S_λ در (f_λ, s_λ) متعلق به F را باشد. اگر $S_\lambda \cap S_\mu \neq \phi$ و روی آن $f_\lambda = f_\mu$، در این صورت S'_λ, S'_μ را در نقاط همپوش $S'_\lambda \cap S'_\mu$ به هم می‌چسبانیم.

اجازه دهید مطلب را روشن تر سازیم. ابتدا، سؤال از «نسخه‌های» S'_λ از S_λ . یک راه توضیح این مطلب، یافتن این است که:

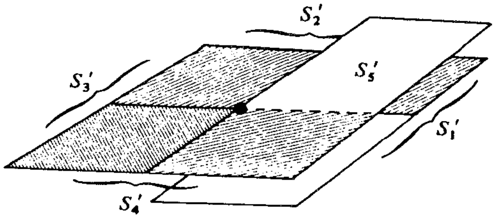
$$S'_\lambda = S_\lambda \times \{\lambda\}$$

در این صورت اگر $\lambda \neq \mu$ باشد، بدیهی است که $S'_\lambda \cap S'_\lambda = \phi$ ، و بنابراین یک تابع یک به یک طبیعی:

$$j_\lambda : S_\lambda \to S'_\lambda$$

حاصل می‌شود که با:

$$j_\lambda(s) = (s, \lambda) \qquad (s \in S)$$



شکل (۱۴-۱۱)

(به عنوان یک تمرین عملی سعی کنید که با قطعات حقیقی کاغذ و چسباندن واقعی آنها رویه ریمان را بسازید: در نتیجه، تصور روشن تری از مطلب عاید شما می شود تا یک توضیح کتبی.)

پس از این چسباندن، مطلب با یک حیله ساده به اتمام می رسد؛ نسبت هم ارزی دیگری به کار می بریم که یک حیله معین را اقتضاء می کند که از نظر خواننده خوشحال کننده است.

فرض کنیم:

$$(z_\lambda, \lambda) \approx (z_\mu, \mu)$$

بازاء $z_\lambda \in S_\lambda$ و $z_\mu \in S_\mu$ اگر

$$z_\lambda = z_\mu \qquad \text{(I)}$$

$$f_\lambda(z_\lambda) = f_\mu(z_\mu) \qquad \text{(II)}$$

در این صورت مجموعه ی دسته های هم ارز (تحت نسبت $\approx$) نقاط در اتحاد تمام S'_λ معرف رویه ریمان مربوط به F است. نسبت هم ارزی $\approx$ به عنوان همان چسباندن عمل می کند. تعریف کاملاً ظریف می باشد، اما نه از آن قبیل چیزهایی که در اولین نگاه به ذهن برسد.

برتری این ساختار ظاهراً رمزی و غیر عادی، این است که شخص می‌تواند دربارهٔ یک تابع تحلیلی به عنوان یک تابع واقعی، که روی رویه ریمان تعریف شده است، بیاندیشد. و مقادیر مختلط را نه به عنوان یک دسته هم ارز از اعضاء توابع اختیار کند. ما هنوز به طور، رضایتبخش با توابع چند فرمی سر و کار داریم و دیدی فراگیر از تابع به دست می‌آوریم تا دیدی قطعه ای.
چند بخش آخر این کتاب به جستجوی انواع بینشهایی می‌پردازد که ممکن است در این راه، در ارتباط با مطلبی که قبلاً مورد بحث واقع شد سودمند باشد.

۶. توانهای مختلط

تاکنون z^a توانهای گویای α از اعداد مختلط z، را که در آن $z^{p/q}$ ریشهٔ qام، z^p است را بررسی کرده‌ایم. اکنون باید توانهای دلخواه $a \in C$ را تعریف کنیم. مایلیم که تعریف به گونه ای باشد که قوانین، $z^a.z^b = z^{a+b}$ و $(z^a)^b = z^{ab}$ و $(zw)^a = z^a.w^a$، همچنان برقرار بمانند. نتیجهٔ مطلوب وقتی به دست می‌آید که تقریباً چنین عمل کنیم: z^a اصولاً چند شکلی است. و فرمولها فقط وقتی برقرار خواهند بود که تصاویر z^a بنحوی مناسب انتخاب شوند. طبیعتاً به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$z = re^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

که در آن $\log r \in R$ و فرض می‌کنیم

$$a = \alpha + \beta i$$

سپس به فرض اینکه قوانین بالا برقرارند، خواهیم داشت:

(۷)

$$\begin{aligned} z^a &= (re^{i\theta})^a \\ &= e^{a(\log r + i\theta)} \\ &= e^{(\alpha + i\beta)(\log r + i\theta)} \\ &= e^{\alpha \log r - \beta\theta} e^{i(\beta \log r + \alpha\theta)} \end{aligned}$$

بنابراین z^a را توسط (۷) تعریف می کنیم، که بازای هر $z \neq 0$ و $a \in C$ با معنی است. و این مستلزم برقراری رابطه

$$z^{\alpha} = e^{a \log z} \tag{۸}$$

است که رابطه ای طبیعی برای تعریف z^a است. لذا در هر دامنه ای که برای آن بتوان شاخه ای یکتا از لگاریتم را (مانند برش صفحه C_p بازای هر p) تعریف نمود، z^a را می توان به عنوان تابعی دیفرانسیل پذیر و تک مقداری تعریف نمود.

در حالت کلی بنا به چند شکلی بودن log، z^a نیز چند شکلی است. به جهت وضوح مطلب، مقدار خاصی برای θ مانند θ_0 را در نظر می گیریم. (بدیهی ترین انتخاب عبارت است از: مقدار اصلی argz). آنگاه θ هایی که در رابطه ۱ صدق می کنند به صورت زیر است:

$$\theta = \theta_0 + 2n\pi \qquad (n \in Z) \tag{۹}$$

و می نویسیم:

$$(z^a)_n = e^{a(\log r + i(\theta_0 + 2n\pi))}$$

که عبارتست از شاخه nام، z^a که با جاگذاری θ هایی که در (۹) تعریف شد، در رابطه (۷) به دست می آید. حال این پرسش مطرح می شود که بستگی $(z^a)_n$ به n چگونه است؟

با توجه به (۷) داریم:

$$(z^a)_n = (e^{-2n\pi\beta} e^{2n\pi i\alpha})(z^{\alpha})_0 \tag{۱۰}$$

که در آن $(z^a)_0$ "شاخه صفر"م است. با توجه به (۱۰) می توانیم به سؤال فوق جواب دهیم: سه حالت وجود دارد:

الف) اگر $\beta \neq 0$ آنگاه بازای هر، z^a یک مقدار می پذیرد. به عنوان مثال:

$$\left| (z^a)_n / (z^a)_0 \right| = \left(e^{-2n\alpha}\right)^n$$

که بازای nهای متمایز مقادیر متمایزی اختیار می کند. در این حالت رویه های ریمانی z^a همان رویه های لگاریتم است: پلکانی نامتناهی که طبقه nام آن تابعی است که از $(z^a)_n$ به دست می آید.

ب) اگر $\beta = 0$ آنگاه $a = \alpha \in R$ و اگر α گنگ باشد، $z^a = z^\alpha$، بازای هر n مقداری متمایز اختیار می کند. به عنوان مثال اگر

$$(z^a)_m = (z^a)_n$$

آنگاه

$$e^{2m\pi i\alpha} = e^{2n\pi i\alpha}$$

لذا

$$e^{2(m-n)\pi i\alpha} = 1$$

که نتیجه می دهد:

$$(m-n)\alpha \in Z \qquad \text{بخش } 6\text{-}5$$

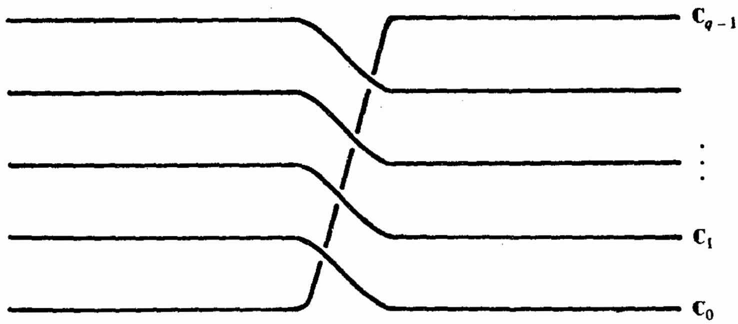
که نتیجه می دهد: m=n است، زیرا که α عددی گنگ است.
رویه های ریمان از نوع اول هستند. اما بر خلاف حالت اول، مدول شاخه های متمایز آن برابرند: فقط آرگومان آن فرق می کند.

پ) فرض کنیم $\alpha,\beta = 0$ گویا باشد. α را به صورت $\alpha = p/q$، $p,q \in Z$ بازای کمترین مقادیر q،p، در نظر می گیریم. آنگاه $z^a = \sqrt[q]{(z^p)}$.
با توجه به مطالب (ب)، دو شاخه مقادیر برابر دارند اگر و فقط اگر $(m-n)p/q \in z$ و رابطه فوق برقرار است اگر و فقط اگر q، m-n را عاد کند.
برای بررسی این موضوع فرض کنیم $m-n = qd+k$ و $0 \le k < q$، آنگاه $(m-n)(p)/q = pd + kp/q$، لذا $kP/q \in Z$. اگر $k \neq 0$ آنگاه $kP/q = L \in Z$، لذا $p/q = l/k$ که با فرض ساده بودن کسر p/q در تناقض است.

در نتیجه مقادیر $(z^\alpha)_n$ فقط مربوط به n با هنج q است. شاخه های

$$(z^\alpha)_0, (z^a)_1, \ldots, (z^a)_{q-1}$$

متمایزند، اما شاخهٔ qام تکرار می شود .$(z^a)_q = (z^a)$ و بعد از آن نیز تکرار ادامه می یابد. البته رویه ریمانی، یک q- صفحه مارپیچ است، که ابتدا و انتهای آن یکی گرفته می شود (مانند توصیفمان از $z^{۱/۲}$). برای حالت q=۵. شکل ۱۲-۱۴ را ملاحظه کنید.



شکل (۱۴-۱۲)

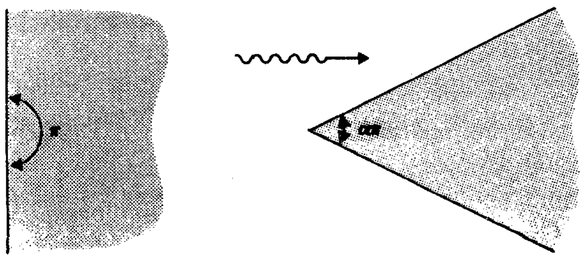
۷. نگاشت همدیس توابع چند شکلی

نگاشت همدیس با توابع چند شکلی وقتی که مقادیر آن معین شده باشد، نیازمند توجه و بررسی دقیقی است. اینجا نیز ساده ترین روش بررسی همه چیز در یک رویه ریمانی است. برای اجتناب از این پیامد فقط حالت مهم و کاربردی (نگاشت $z \to z^a$) را بررسی می کنیم.

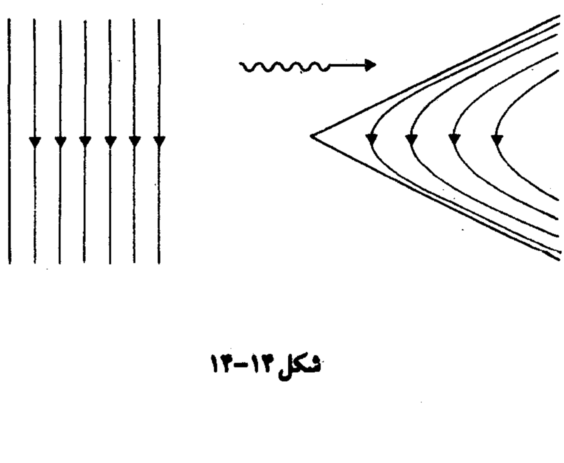
بعلاوه فرض کنیم که دامنه آن برش - صفحه C_n باشد که روی آن نگاشت فوق تک مقداری است.

بزرگترین ویژگی نگاشت فوق این است که نیم صفحه را به یک گوه، شکل ۱۴-۱۳ اما تبدیل می کند، که زاویه راس آن عبارت است از $\alpha\pi$، لذا می توانیم برای ممانعت از خود قطعی تصویر فرض کنیم که $\alpha < ۲$ است. که نتیجه همه جا مگر مبداء برقرار است.

به عنوان مثال فلوی یک شکل به دست آمده از ثابت = $re(z)$ به فلویی حول یک کنج با زاویهٔ راس α تبدیل می گردد (مانند شکل ۱۴-۱۴).
اگر ۱/۲ = α اختیار شود، کنج راست گرد می شود. سپس $z = w^2$ لذا $x = U^2 - V^2$ ، $y=2uv$؛ لذا خطوط فلوی به w- صفحه های به دست آمده از ثابت=$u^2 - v^2$ تبدیل می گردند؛ که عبارتند از: شاخه های هذلولی قائم.
نگاشت z^a در ترتیب با نگاشت همدیس استانداردی ابزار بسیار مفیدی در ریاضیات کاربردی را نتیجه می دهد.



شکل ۱۴-۱۳



شکل ۱۴-۱۴

۸. انتگرال مسیری از توابع چند شکلی

مرسوم است که انتگرال مسیری $\int_{\gamma} f$ از تابع چند شکلی f را با انتخاب تصاویری از f(z) که z بطور پیوسته طول مسیر را بپیماید، معرفی می نمایند. (معذالک، انتخاب نقطه آغازین، که باید معین گردد، را به طور دلخواه ممکن می سازد). یکی از راههای متداول، تبدیل مسیر γ به حاصل جمع مسیرها است، $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ به طوری که

الف) هر γ_j در دامنه D_j ی واقع شده باشد که f روی آن تابعی تک مقداری باشد.

ب) روی هر D_j شاخه هایی از f انتخاب می گردند که مقادیر f روی نقاط تقاطع γ_j، γ_{j+1} بر هم منطبق باشند.

فرایند فوق را می توان به عنوان تعریف انتگرال مسیری، (اگر که مسیری روی سطح ریمانی واقع باشد) در رویه های ریمانی تعبیر نمود. بالا و پایین رفتن مسیر روی مارپیچ طبعاً در مورد انتخاب مقادیر تابع حساسیت ایجاد می نماید (شکل ۱۴-۱۰). عملاً این سرراست ترین حالت ممکن است و محاسبه دشوارتر از حالت یک شکل نخواهد بود.

مثال ۱. فرض کنیم γ مسیر زیر باشد:

$$\gamma(t) = (1+t)e^{it} \qquad 0 \le t \le 6\pi$$

حال $\int_{\gamma} z^{1/5}dz$ را بیابید:

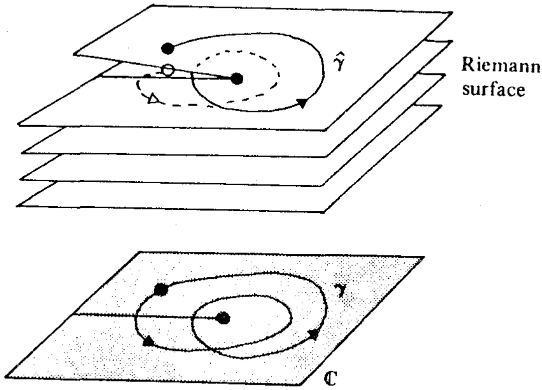
روش اول (کند) با تعریف $z^{1/5}$ به صورت

$$\left(\gamma(t)\right)^{1/5} = (1+t)^{1/5}e^{it/5}$$

$z^{1/5}$ تابع پیوسته ای از t می شود بنا به قضیه ۶-۴ داریم:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^{6\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^{6\pi}(1+t)^{1/5}e^{it/5}(ie^{it} + ite^{it} + e^{it})dt$$



شکل (۱۴-۱۵)

که حساب کنندهٔ امیدوار را به روش فرعی و جالب استفاده از انتگرالی به صورت

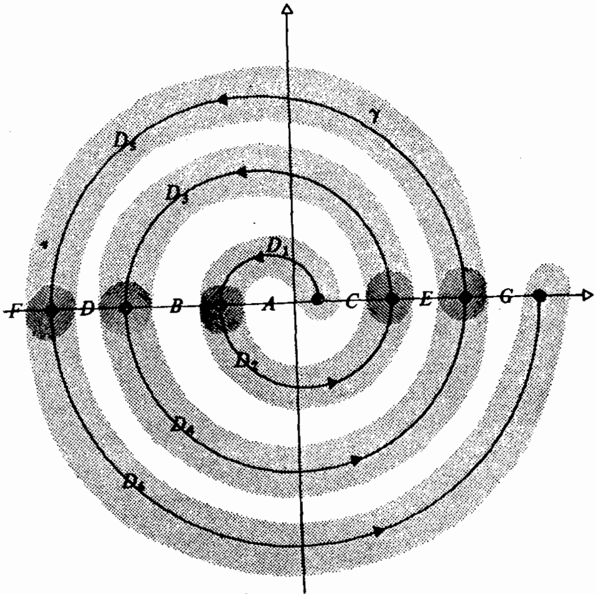
$$\int_{\cdot}^{۶\pi} t(۱+t)^{۱/۵}\text{Cos}(۶t/۵)dt$$

رهنمون می گردد.

روش دوم (دقیق اما بی روح). γ را توسط دامنه هایی که روی هر یک بتوان $z^{۱/۵}$ را بازای هر z در آنها به صورت تابعی یک مقداری و دیفرانسیل پذیر در نظر گرفت، می پوشانیم. به عنوان مثال فواصل AB، BC،CD،DE،EF،FG (شکل ۱۴-۱۶) می توانیم شش دامنه $D_۱,...,D_۶$ در نظر بگیریم. برای مطابقت مقادیر $z^{۱/۵}$ روی اشتراك دامنه ها، تعریف زیر را در نظر می گیریم. z را به صورت $re^{i\theta}$ می نویسیم که در آن θ از روی جدول زیر به دست می آید:

Domain	θ chosen interval
$D_۱$	$[-\pi/۴, ۵\pi/۴]$
$D_۲$	$[۳\pi/۴, ۹\pi/۴]$
$D_۳$	$[۷\pi/۴, ۱۳\pi/۴]$
$D_۴$	$[۱۱\pi/۴, ۱۷\pi/۴]$
$D_۵$	$[۱۵\pi/۴, ۲۱\pi/۴]$
$D_۶$	$[۱۹\pi/۴, ۲۵\pi/۴]$

روی هر یک از دامنه ها شاخهٔ $r^{1/5}e^{i\theta/5}$ از $z^{1/5}$ را انتخاب می کنیم. انتخاب مناسب θ روی اشتراکها مقادیر را بر هم منطبق می سازد.



شکل (۱۴-۱۶)

انتگرال را به صورت زیر می شکنیم:

$$\int_{\gamma} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FG}$$

تابع $z^{1/5}$ روی هر یک از دامنه های D_i دارای ضد مشتق $(5/6)z^{6/5}$ است که از شاخه متناظر آن

$$z^{6/5} = r^{6/6}e^{6i\theta/5}$$

به دست آمده است. بنا به قضیه ۶.۷، اگر PQ هر یک از کمانهای AB و BC و الی آخر باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_{PQ} z^{1/5}dz = \frac{5}{6}Q^{6/5} - \frac{5}{6}P^{6/5}$$

اگر شش مقدار به دست آمده را با هم جمع کنیم، همه مقادیر به جز دو مقدار

حذف می شوند و مقدار انتگرال برابر است با :

$$(۵/۶)G^{۶/۵}-(\frac{۵}{۶})A^{۶/۵}$$

که در آن $A=\gamma(۰)=۱$ و $G=\gamma(۶\pi)=۱+۶\pi$. مطابق نتیجه به دست آمده باید توان ۶/۵ را معین کنیم : می توان نشان داد .

$$A^{۶/۵}=(۱.e^{io})^{۶/۵}=۱$$

$$G^{۶/۵}=(۱+۶\pi)e^{i۶\pi})=(۱+۶\pi)^{۶/۵}e^{۳۶\pi i/۵}$$

$$=(۱+۶\pi)^{۶/۵}e^{i\pi/۵}$$

در نتیجه انتگرال برابر است با :

$$-(۵/۶)((۱+۶\pi)^{۶/۵}e^{i\pi/۵}+۱)$$

روش سوم (سریع). می توان شاخهٔ لازم از $z^{۱/۵}$ را بر حسب پارامتر t بنحوی تعریف کرد که اگر قرار دهیم :

$$z^{۱/۵}=(\gamma(t))^{۱/۵}=(۱+t)^{۱/۵}e^{it/۵}$$

تغییرات آن در مسیر γ پیوسته باشد.
اگر شاخه ای را انتخاب کنیم که داشته باشیم :

$$\left(\gamma(t)\right)^{۶/۵}=(۱+t)^{۶/۵}e^{۶it/۵}$$

ضد مشتق موضعی

$$\frac{۵}{۶}z^{۶/۵}$$

موجود بوده و به طور پیوسته در امتداد مسیر γ تغییر می نماید.

حال γ را با مقداری متناهی از دامنه هایی می پوشانیم که روی هر یک از آنها $z^{1/5}$ تک مقداری باشد و شاخه ها را مطابق انتخاب پیشین روی مسیر در نظر می گیریم. اگر فاصله ای را که t در آن تغییر می کند به وسیلهٔ t_j ها افراز نماییم انتگرال را مانند بالا، می توان به عنوان حاصلجمع عبارات به شکل زیر نوشت:

$$\frac{5}{6}\left((1+t_{j+1})^{6/5}e^{6it_{j+1}/5}-(1+t_j)^{6/5}e^{6it/5}\right)$$

همه جملات به جز رو عبارت حذف می شوند در نتیجه مانند قبل جواب

$$\frac{5}{6}\left((1+6\pi)^{6/5}e^{36\pi i/5}-1\right)$$

مزیت این روش این است که با انتخاب شاخه هایی برای $\gamma(t)$ بطور طبیعی می توانیم دامنه هایی روی آن با شاخه های مناسب قرار دهیم.

روش چهارم (داهیانه). فرض کنیم که بر رویه های ریمانی کار می کنیم. تجزیه و تحلیل فوق به آسانی تعمیم داده می شود تا تعبیری از قضیه ۶-۷ برای انتگرال گیری از توابع چند شکلی روی مسیری واقع بر رویهٔ ریمانی به دست آید.

با در اختیار داشتن یک ضد مشتق فراگیر برای f روی رویه ریمانی رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\int_\gamma f=F(z_1)-F(z_0)$$

که در آن z_0 نقطهٔ آغازین و z_1 نقطه پایانی و شاخه طوری انتخاب شده اند که به نقاط پایانی γ بر رویه باز می گردند (شکل ۱۵-۱۴). از مطالب فوق بالادرنگ نتیجه می شود که γ سه دور بر خلاف عقربه های ساعت می چرخد، لذا توان ۶/۵ام آن باز می چرخد، اگر برای z_0 آرگومان ۰ را انتخاب کنیم، آنگاه $F(z_1)$ دارای آرگومان $2\pi\times 18/5=36\pi/5$ خواهد بود.

بیان و اثبات و تعمیم قضیه کوشی برای انتگرال گیری از یک تابع چند شکلی در امتداد مسیری واقع بر رویه ریمان را به عنوان تمرین به خواننده واگذار

می کنیم برای کسانی که ترجیح نمی دهند از بینش ناشی از بکار بردن رویه های ریمانی استفاده کننده روش سوم را بعنوان روش نسبتاً ساده و سر راست توصیه می کنیم. البته مثال بالا تا حدودی ساختگی بود و هدف اصلی آن مسائل آموزشی بود. بیشتر انتگرالهایی که در کاربرد با آن مواجه می شویم احتمالاً از نوع زیر خواهند بود.

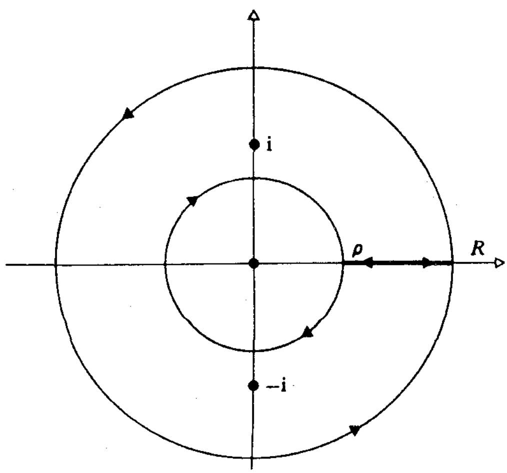
مثال ۲. فرض کنیم که a عددی حقیقی باشد و $\text{۱} < a < \text{۲}$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \frac{x^a}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}\,dx$$

ابتدا نشان می دهیم که محدود کردن a به طریق فوق موجب همگرایی انتگرال می شود تا سؤال فوق معنی داشته باشد. با تابع مختلط

$$f(z) = z^a(\text{۱}+x^{\text{۲}})^{-\text{۱}}$$

شروع می کنیم که بازای هر $z \neq \text{۰}\ ,i\ ,-i$ دیفرانسیل پذیر و چند شکلی است. برشی در امتداد مثبت محور اعداد ایجاد نموده و روی برش صفحهٔ C. کار می کنیم (با نمادهای بخش ۷.۲). روی این دامنه z^a تک مقداری خواهد بود: مجموعهٔ $(re^{i\theta})^a = r^a e^{ai\theta}$ که در آن $\text{۰} \leq \theta \leq \text{۲}\pi$ را خواهیم داشت.



شکل (۱۴-۱۷)

حال از $f(z)$ در امتداد مسیر نشان داده شده در شکل ۱۷-۱۴ انتگرال می گیریم. این مسیر از نقطه حقیقی ρ شروع و به نقطه حقیقی R، سپس یک دور بر خلاف عقربه های ساعت حول دایره به شعاع R و سپس به نقطه حقیقی ρ و سرانجام یک دور حول دایره به شعاع ρ را می پیماید.

با توجه به تعبیر باقیمانده قضیهٔ کوشی خواهیم داشت:

$$\int_\gamma f = 2\pi i(\sum \gamma \text{ باقیمانده درونی})$$

مایلیم که فرض کنیم $\rho \to 0$ و $R \to \infty$، لذا می توانیم فرض کنیم $P < 1$، $R > 1$ باشد. آنگاه تکینگی های درون γ عبارتند از: $z = \pm i$ با قیماندهٔ حول این نقاط به طریق زیر به دست می آید: در $z=i$ مقدار باقیمانده عبارتست از:

$$\lim_{z\to i} z^a/(z+i) = 1/2ie^{ia\pi/2} = \alpha$$

در $z=-i$ مقدار باقیمانده عبارت است از:

$$\lim_{z\to -i} z^a/(z+i) = -1/2ie^{ia3\pi/2} = \beta$$

فرض کنید دایرهٔ به شعاع R، γ_1 و دایره به شعاع ρ، γ_2 باشد، آنگاه

$$\int_\rho^R \frac{x^a}{1+x^2}dx + \int_{\gamma_1} \frac{z^a}{1+z^2}dz + \int_R^\rho \frac{(xe^{2\pi i})}{1+x^2}dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^a}{1+z^2} = 2\pi i(\alpha+\beta)$$

توجه دارید که در انتگرال سومی شاخه ای از z^a متناظر با آرگومان 2π انتخاب شده است. زیرا بایستی پیوستگی حفظ شود. حال فرض کنیم ρ و R به ترتیب به سمت ۰ و ∞ میل کنند. برآوردی ساده نشان می دهد که انتگرال اولی و سومی به صفر همگراست. اولی همگرا است به:

$$\int_0^\infty x^\alpha/(1+x^2)dx$$

و سومی به:

$$-e^{2\pi i a}\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2}dx$$

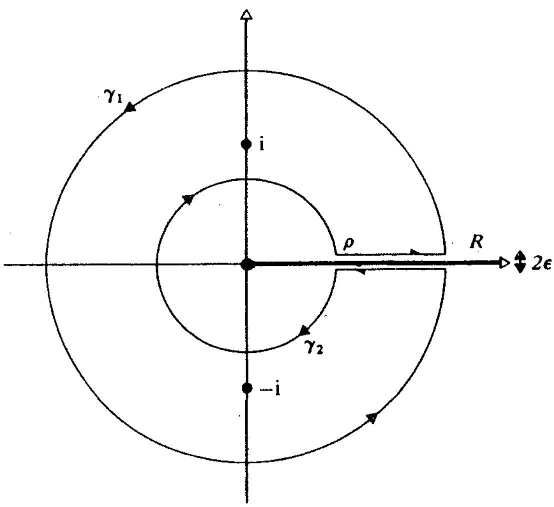
لذا خواهیم داشت :

$$(1-e^{2\pi i a})\int_0^{\infty}\frac{x^a}{1+x^2}dx = 2\pi i(\frac{1}{2i}e^{ia\pi/2}-\frac{1}{2i}e^{ia\pi 3/2})$$

که پس از کمی دست کاری نتیجه زیر به دست می‌آید :

$$\int_0^{\infty}\frac{x^a}{1+x^2}dx = \pi/(2\cos(a)/z)$$

مسیر انتخابی ممکن است واقعاً در .C قرار نداشته باشد. لیکن پاسخ به دست آمده درست است. راههای متفاوتی برای توجیه این معضل وجود دارد، مثلاً $\rho+i\varepsilon$ ، و به طور افقی به سمت R و از $R+i\varepsilon$ دایرهٔ γ_1 را تا پایین $R-i\varepsilon, R$ سپس به پایین ρ ، $\rho-i\varepsilon$ پس روی دایرهٔ γ_2 به نقطهٔ آغازش باز می گردد. (شکل ۱۴-۱۸)



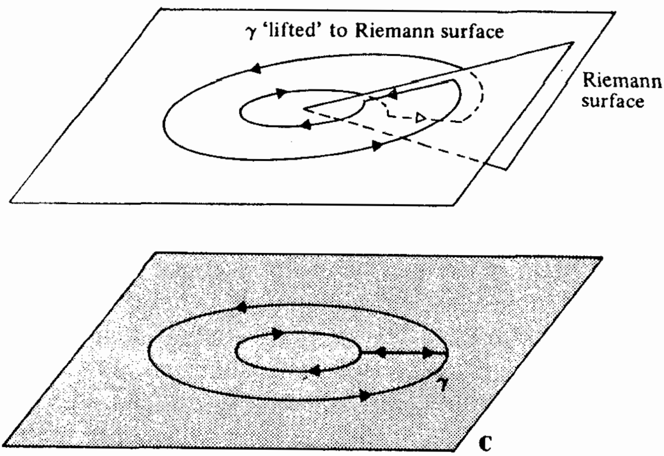
شکل(۱۴-۱۸)

حال وقتی که R,ρ به سمت ۰ و ∞ میل کنند، بنا به پیوستگی، عرض کانال (۲ε) به صفر میل می کند.

(۲) هنگام کار با دو دامنه متقاطع، قبلاً $C_{-\pi/4}, C_{\pi/4}$ و گذر از یکی به دیگری و هنگام تعریف انتگرال از R تا ρ (و اجزاء $\int_{\gamma_1}$, $\int_{\gamma_2}$) انتخاب .C دشواری ایجاد می کرد، در نتیجه آنرا انتخاب نکردیم.

(۳) همه چیز را روی یک رویه ریمانی قرار دهیم. مسیر γ پله را دور می زند و یک پله بالا می رود، سپس به عقب چرخیده پله ای پایین تر به محل شروع باز می گردد. و از آنجایی که این گونه مسیرها بوضوح مرز مستطیلهای روی رویه های ریمانی اند، شکل (۱۴-۱۹)، همه چیز را می توان تعمیم داد.

اینها معضلات توجیه روشها محاسبهٔ فوق هستند. در واقع استفاده از این روش، البته اگر بدانیم که چه چیزی رخ خواهد داد، هر بار نیازمند توجیه نیست. در واقع همه چیز بسیار خوب عمل خواهند کرد. در صورتی که بتوانیم تابع چند شکلی را به طور پیوسته در امتداد مسیر تعریف کنیم.



شکل (۱۴-۱۹)

۹ . حکایت همچنان باقی است . . .

ما به پایان کتاب نزدیک شده ایم، ولی هیچ نهایتی برای آنالیز مختلط وجود ندارد. این مبحث همچنان یکی از مقولات مهم و در حال رشد جریان اصلی ریاضیات است.

مفهوم رویه ی ریمانی با دستیابی به ساختار اساسی تابع مختلط در یک تک شیئ هندسی، به تنهایی افقهای تازه ای را پیش روی ما گسترده است. همه گونه اطلاعات، از قبیل حضور نقاط شاخه و تکینگی های را می توان از آن دریافت؛ و «صلبیت» یک تابع تحلیلی به این معنی است که خصوصیات اساسی آن را می توان از محل و طبیعت تکینگی هایش شناخت. بسیاری از پرسشهایی که بدون کمک رویه ی ریمانی، غامض هستند با استفاده از این ابزار هندسی روشن می شوند.

گسترش نظریهٔ توابع متناوب (مانند exp) منجر به مفهوم *توابع متناوب مضاعف* می شود؛ به توابعی که در شرط $f(z)+f(z+p)=f(z+q)$، به ازای دو عدد مختلف متمایز (و در نسبت مستقل) p و q صدق می کنند. با تعمیم بیشتر، به مفهوم تابع اتومورفیک می رسیم که در حوالی مرز سده های نوزده و بیست، تعداد بسیار زیادی از ریاضی دانان را به خود جلب کرد، و حاصل آن گرد آمدن شاخه های مختلفی مانند نظریه ی گروه ها، معادلات دیفرانسیل، نظریه ی جبری توابع، توپولوژی، و آنالیز مختلط، در یک مبحث واحد بود. این مقوله، هنوز حوزه ی مهمی در تحقیق به شمار می رود.

همچنین می توان توابع با چند متغیر مختلط را نیز مورد مطالعه قرار داد. معلوم می شود که رفتار این توابع خیلی پر حیله تر از آن است که به نظر می رسد، و پدیده های کاملاً بدیعی در آن رخ می نمایند. از تلفیق ایده هایی از رویه ی ریمانی، و توابع با چند متغیر مختلط، مفهوم *منفیلد مختلط* حاصل می شود.

بخش اعظم این نظریه، تا همین اواخر، از نظر غیر ریاضی دانان (ی که از وجود آن باخبر بودند)، صرفاً به عنوان تعمیمی از مفاهیم تلقی می شد: تعمیمی زیبا و بسیار هوشمندانه، ولی همچنین بسیار انتزاعی تر از آن که هرگز بتواند کاربرد ملموسی در خارج از عرصه ی ریاضیات محض بیابید. چنین قضاوت هایی، هنگامی که درباره ی جریان اصلی ریاضیات صورت گیرند، معمولاً سطحی و نابجا هستند. در این مورد نیز همین مطلب ثابت شده است. برای مثال، اخیراً معلوم شد که منفیلدهای مختلط و توابع اتومورفیک در نظریه ی کوانتومی میدان، در مطالعه ی «میدانهای پیمانه ای»[1] دارای اهمیت است.

1. Gauge Fields

آنالیز مختلط، در نخستین روزهای تولدش (تقریباً) شاخه ای از فیزیک به شمار می رفت: مثلاً، ارتباط آن با نظریه ی پتانسیل و مکانیک شاره ها به طور وسیعی به کار گرفته می شد. در اواخر قرن نوزدهم، *فلیکس کلاین* «برهانی» برای یک قضیه را با این عبارت آغاز کرد: *تصور کنید که رویه ی ریمانی مورد بحث از لایه ی نازك فلز تشکیل شده است، و جریان الکتریکی از آن عبور می کند* امروزه، این نحوه ی اثبات، از لحاظ منطقی موجه محسوب نمی شود، امّا در عین حال، شهود فیزیکی موجب آشکار شدن بسیاری از نظریات مهم ریاضی شده است. امروزه ما شاهد فرآیندی معکوس هستیم؛ فرآیندی که در آن از طریق شهود ریاضی، مفاهیم مهمی در فیزیک عرضه می شود. این تبادل مفاهیم، دو جانبه است؛ و گذشته از زیبایی ذاتی آن، حفظ و بقای این تبادل، برای سلامت ریاضیات و دانش بشری، حیاتی است.

تمرینهای فصل ۱۴

۱ . سه سری توان به طریق زیر تعریف شده اند :

$$a(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$b(z) = i - (z - i - 1) - i(z - i - 1)^2 + (z - i - 1)^3 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(z - i - 1)^n$$

$$c(z) = -1 + (z - 2) - (z - 2)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z - 2)^n$$

دیسک تقارب آنها را یافته، و آنها را رسم کنید. ثابت کنید که در قسمت همپوش دیسک های تقارب مربوط $b(z) = c(z), a(z) = b(z)$. آیا دیسک تقارب $a(z)$ و $c(z)$ همدیگر را قطع خواهند کرد؟

۲ . فرض کنیم

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_n)^n, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$$

دو سری توان باشند و فرض کنیم که مقطع دیسک تقارب آنها غیر تهی باشد. ثابت کنید که g یک توسیع تحلیلی مستقیم از f است فقط و فقط وقتی که z_0 ی متعلق به دیسک تقارب هر دو وجود داشته باشد به قسمی که بازاء $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ در رابطه زیر صدق کند

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m)\left[a_n(z_0 - z_1)^{n-m} - b_n(z_0 - z_2)^{n-m}\right] = 0$$

۳. یک تابع مشخص مفروض است. این تابع دقیقاً در نقاطی zی است که re(z) و im(z) اعداد صحیح باشند. آنرا در نزدیکی نقطه $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}i$ به صورت سری تیلور بسط می دهیم، کمترین مرحله مورد نیاز جهت توسیع تحلیلی غیر مستقیم، با سری توان، آن به میدانی که شامل $\frac{۷}{۲}+\frac{۵}{۲}i$ باشد چیست؟

۴. نشان دهید که توابع تعریف شده زیر در $|z| = ۱$ دارای بند طبیعی می باشند.

$$f(z) = ۱+z^{۲}+z^{۴}+z^{۸}+\ldots+z^{۲n}+\ldots$$

$$g(z) = ۱+z^{۳}+z^{۹}+z^{۲۷}+\ldots+z^{۳n}+\ldots$$

۵. فرض کنیم $f(z) = \sum a_n z^n$ دارای شعاع تقارب واحد باشد.

(الف) $z = w/۱+w = (w-w^{۲}+w^{۳}-w^{۴}+\ldots)$

قرار دهید و f(z) بر حسب w به صورت سری توان تبدیل کنید. مثلاً

$$\sum b_n w^n = f(w)$$

ثابت کنید که این سری اخیر دارای شعاع تقاربی $\leq \frac{۱}{۲}$ است، و اگر ۱- یک نقطه تکین f شعاع تقارب دقیقاً $\frac{۱}{۲}$ است.

اگر این شعاع مؤکداً بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ باشد، نشان دهید که معادله $f(z) = F(z/۱-z)$ یک توسیع تحلیلی از f ماوراء دیسک $|z| \leq ۱$ تعریف می کند.

۶. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left((۱-z^{n+۱})^{-۱}-(۱-z^{n})^{-۱}\right)$$

بازاء $|z| < ۱$ یا $|z| > ۱$ متقارب است. اما دو تابعی که بدین طریق تعریف می شوند توسیع تحلیلی یکدیگر نیستند.

۷. فرض کنیم f و g تعریف شده باشند و در تمام C هیچ نقطه تکینه نداشته باشند تعریف می کنیم:

$$\phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-z^{n}}{1+z^{n}}-\frac{1-z^{n-1}}{1+z^{n-1}}\right)$$

نشان دهید که:

$$\frac{1}{2}\big(f(z)+g(z)\big)+\frac{1}{2}\phi(z)\big(f(z)-g(z)\big)$$

برابر است با:

$f(z)$ وقتی که $|z|<1$

و با: $g(z)$ وقتی که $|z|>1$

۸. فرض کنیم $f(z)$ تابع چند فرمی $z\sqrt{z}$ باشد. نشان دهید که در $z=0$ یک اولین مشتقی وجود دارد که برای تمام شاخه ها یکسان است. اما یک دومین مشتق متناهی وجود ندارد. در مورد $z^{2}\log z$ چطور؟

۹. رویه های ریمان را برای چند فرمی زیر شرح دهید:

(الف) $\sqrt[7]{z+43}$

(ب) $\sqrt{1-z^{3}}$

(ج) $\cos^{-1}(z)$

(د) $\tan^{-1}(z)$

۱۰. رویه ریمانی مربوط به

$$\left((z-1)(z-2)^{-2}\right)^{1/3}+(z-3)^{1/2}$$

را شرح دهید.

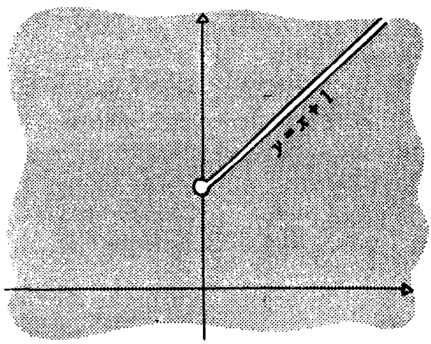
۱۱. فرض کنیم $\omega=C$ مقادیر 1^{ω} تشکیل یک زیر گروه U_{ω} از گروه ضربی اعداد مختلط غیر صفر می دهد. نشان دهید که U_{ω} دوره ای از مرتبه ی q است. به

شرطی که ω یک عدد منطق تحویل ناپذیر $\frac{p}{q}$ باشد؛ در غیر این صورت U_ω دوره‌ای نامتناهی است. نشان دهید که U_ω زیر مجموعه‌ای از دایره واحد است فقط و فقط اگر ω حقیقی باشدگ روی محور حقیقی مثبت واقع می شود فقط و فقط وقتی که $re(\omega)$ یک عدد صحیح باشد؛ و در غیر این صورت واقع بر یک هرم ارشمیدس قرار می گیرد که با $t \in R$ پارامتر شده است و به صورت $e^{\alpha t}$ ($\alpha \in C$ یک عدد ثابت است) می باشد. همچنین نشان دهید که بازاء هر $z \neq ۰$ مقادیر z^ω تشکیل یک cost از U_ω در $C \setminus \{۰\}$ می دهد.

۱۲ . نشان دهید که تابع

$$f(z) = e^{-\pi i/۸}\sqrt{z-i}$$

معرف یک نقش هم شکل از میدان شکل ۱۴-۲۰ به نیم صفحه ای بالا است.

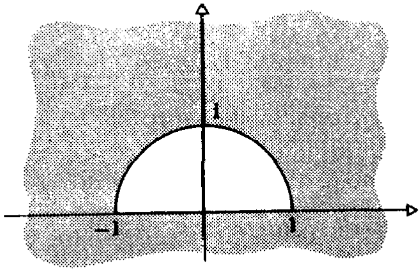


شکل (۱۴-۲۰)

۱۳ . نشان دهید که تابع

$$f(z) = e^{i\pi/۳}\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)^{۲/۳}$$

یک نقش هم شکل از میدان واقع در شکل ۱۴-۲۱ را به روی نیم صفحه ای بالا تعریف می کند.

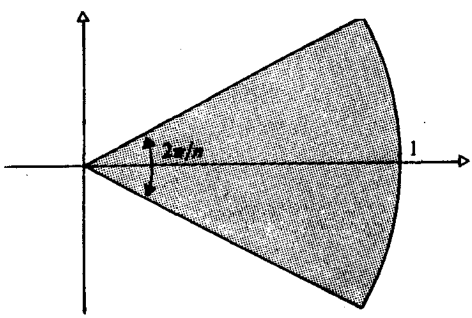


شکل (۱۴-۲۱)

۱۴ . مطلوبست تصویر قطاع $|z| < 1, -\pi/n < \arg z < \pi/n$ (شکل ۱۴.۲۲) تحت تبدیل هم شکل

$$f(z) = z(1+z^n)^{2/n}$$

در صورتی که n یک عدد صحیح مثبت باشد.

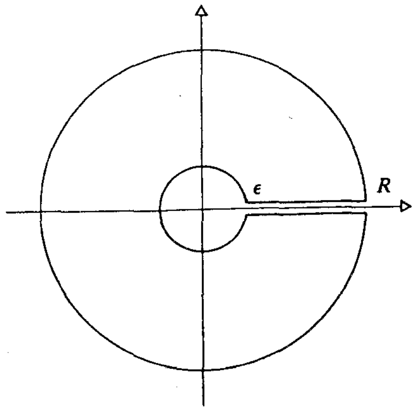


شکل (۱۴-۲۲)

۱۵ . فرض کنیم $\gamma(t) = e^{it}, \cdot \le t \le ۴\pi$ مطلوبست محاسبه $\int_\gamma \sqrt{z}dz$ در صورتی که در t=۰ داشته باشیم $\sqrt{۱} = ۱$.

۱۶ . با استفاده از طرح بیان شده در شکل ۱۴–۲۳ نشان دهید که :

$$\int_\cdot^\infty x^{-k}(۱+x)^{-۱}dx = \pi \operatorname{cosec}(k\pi) \qquad (\cdot < k < ۱)$$



شکل ۱۴–۲۳

۱۷ . به وسیله مسیر انتگرال گیری نشان دهید که

$$\int_\cdot^۱ \frac{dx}{(۱+ax^۲)\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{\pi}{۲\sqrt{۱+a}} \qquad (a > \cdot)$$

۱۸ . با استفاده از مسیر انتگرال گیری سؤال ۱۶ ، نشان دهید که

اگر $-۱ < a < ۳$ آنگاه $\int_\cdot^\infty x^a(۱+x^۲)^{-۲}dx = \dfrac{\pi(۱-a)}{۴\cos\frac{۱}{۲}\pi a}$

۱۹ . فرض کنیم، وقتی که $\cdot \le t \le ۲\pi$ داشته باشیم، $\gamma(t) = \left(۱+\frac{۱}{۲}\cos t + \sin t\right)^۵$ مطلوبست :

$$\int_{\gamma} z^{99}\log(z)-\sqrt{z}+(z-\frac{1}{4})^{5/17}dz$$

۲۰ . رویه ریمانی تابع $f(z)=\sqrt{z+z^{2}+z^{4}+\ldots+z^{2n}+\ldots}$ را بیان کنید .

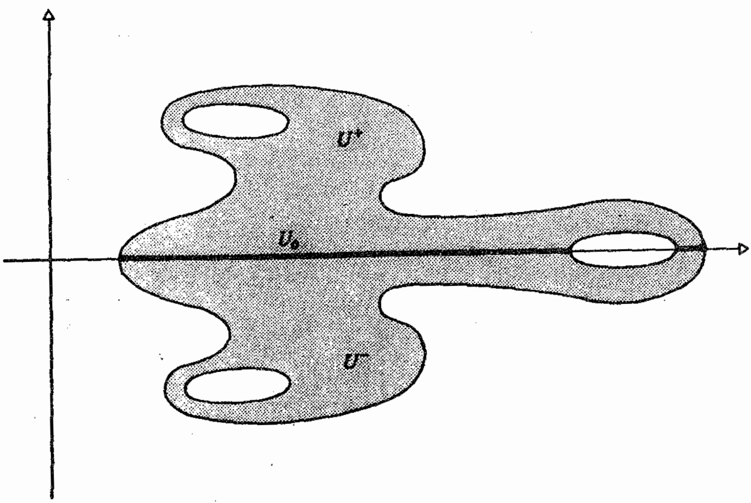
۲۱ . (اصل انعکاس شوارتز) فرض کنیم میدانی در C باشد که محور حقیقی محور تقارن آن باشد (یعنی اگر $z\in U$ آنگاه $\bar{z}\in U$) . فرض کنیم

$$U^{+}=\{z\in U|imz>0\} \text{ و } U^{-}=\{z\in U|imz<0\} \text{ و } U^{\cdot}=\{z\in U|imz=0\}$$

(شکل ۱۴-۲۴) گیریم $f:U^{+}UU^{\cdot}\rightarrow C$ متصل باشد و روی U^{+} تحلیلی و بازاء هر $z\in U^{\cdot}$ مقدار آن حقیقی باشد .

در این صورت یک تابع تحلیلی $F:U\rightarrow C$ وجود دارد به قسمی که بازاء هر $z\in U^{+}UU^{\cdot}$ داریم : $F(z)=f(z)$.

راهنمایی: بازاء $z\in U^{-}$، $F(z)=\overline{f(\bar{z})}$ تعریف می‌کنیم و قضیه مُورآ را مورد استفاده قرار می‌دهیم .



فهرست موضوعی

ف)

ق)

ن)

ی)

لغت نامه

انگلیسی به فارسی

A

absolute	مطلق
aerofoil	ایروفویل
algebra	جبر
analytic	تحلیلی
angle	زاویه
angle modulo	زاویه مدول
annulus	تاج دایره
anti- derivitive	ضد مشتق
arc	کمان
argument	آرگومان
axis	محور

B

bilinear mapping	نگاشت دوخطی
boundary	مرز
boundary point	نقطه مرزی

C

calculation	محاسبه
chain rules	قاعده زنجیره‌ای
closed	بسته
complet	تام
complex	مختلط
complex plane	صفحه مختلط
compact	فشرده
comparison	مقایسه‌ای
component	مؤلفه
conformal	همدیس
conjugate	مزدوج
connected	همبند
construction	ساختمان
continuation	ادامه ـ توسیع
continuity	اتصال
contour	مرز - مسیر (کانتور)
contour inside	درون مسیر
contour intergal	انتگرال مسیری
contour outside	بیرون مسیر
convergence	همگرائی
convergence radius	شعاع تقارب (همگرائی)
convergent	همگرا
convergent series	سری متقارب (همگرا)
convergent sequence	دنباله همگرا
coordinate	مختصات

D

derivative	مشتق
diagram	دیاگرام
differentiable	مشتق پذیر
differentiation	مشتق گیری
direct	مستقیم
disc	قرص
disc of convergence	قرص همگرائی
dis continuous	ناپیوسته
divergent	واگرا
double pole	قطب مرتبۀ دوم
doubly	مضاعف
doubly periodic function	توابع متناوب مضاعف
domain	دامنه

E

elliptic	بیضوی
endpoint	نقطه انتهائی
equation	معادله
equipotential	هم پتانسیل
equipotential line	خطوط هم پتانسیل
estimate	برآورد
estimation lemma	لم برآورد
expantion	بسط
exponential (function)	(تابع) توانی
extended plane	صفحه توسعه یافته

existence	وجود
extention	توسیع

F

factor	فاکتور
field	میدان
final	انتها
furmula	فرمول
fundamental	اساسی
function	تابع

G

generalized	تعمیم یافته
geometry	هندسه
group	گروه

H

harmonic	هارمونیک (همساز)
harmonic conjugate	مزدوج هارمونیک (همساز)
harmonic function	تابع همساز
homology	همولوژی
homotopic	هموتوپیک
hybrid function	تابع هیبرید
hyperbolic	سهموی - هیپربولیک

I

imaginary	موهومی
inequality	نامساوی
infinite	نامتناهی
initial	ابتدا
integral	انتگرال
integration	انتگرالگیری
integration by parts	انتگرالگیری جزء به جزء
integration contour	انتگرالگیری مسیری (مرزی)
inversion	انعکاس
isolated	مجزا
isolated singularity	مجزای منفرد

L

lemma	لم
limit	حد
local	موضعی
local antiderivative	ضد مشتق موضعی
local maximum	ماکزیمم موضعی
local minimum	می نیمم موضعی
logarithm	لگاریتم
loop	حلقه (طوق)
loxodromic	مارپیچ ثابت زاویه

M

manifold	منیفلد
magnification	بزرگنمائی
mapping	نگاشت
maximum	ماکزیمم
measure	اندازه
meromorphic	مروفورفیک
minimum	می نیمم
modulus	مدول
monster	غول
multiform	چند شکلی

N

natural	طبیعی
number	عدد

O

paradox	معما
partial sum	حاصلجمع جزئی
paving	فرش کردن
paving lemma	لم فرش کردن
path	مسیر
path connected	همبند مسیری
path length	طول مسیر
path oposite	مسیر مخالف
path step	مسیر پلّه ای

path sub	مسیر جزئی
paving	فرش کردن
paving lemma	لم فرش کردن
period	تناوب
periodic	متناوب
plane	صفحه
pole	قطب
potential	پتانسیل
power	توان
principle	اصل
product	حاصلضرب

R

radian	رادیان
radius	شعاع
radius of convergence	شعاع همگرائی (تقارب)
ratio	خارج قسمت
rational	گویا
ratio test	آزمون خارج قسمت
real	حقیقی
rectangle	مستطیل
reflex	انعکاس
relatively	(بطور) نسبی
relative open	باز نسبی
relevant	مربوط
removable	حذف شدنی
residue	مانده

root	ریشه
rotation	دوران
rule	قاعده

S

series	سری
sequence	دنباله
signed (area)	مساحت (محوطه) علامتدار
simply	(بطور) ساده
simple pole	قطب مرتبهٔ اول
singularity	منفرد - مجزا
singularity point	نقطه منفرد
smooth	هموار
sphere	کره
star	ستاره‌ای
star centre	مرکز ستاره‌ای
star domain	دامنه ستاره‌ای (شکل)
stream	جریان
stream lines	خطوط جریان
sum	حاصلجمع
summation	جمع بندی

T

test	آزمون
theorem	قضیه
transform	تبدیل کردن

transformation	تبدیل
translation	انتقال
triangle	مثلث
trigonometric	مثلثاتی

U

uniform	یک شکل
unity	واحد

V

value	مقدار
version	نوع

W

winding	پیچش
winding number	عدد پیچش

Z

zero	صفر

لغت نامه

فارسی به انگلیسی

ا

ابتدا	initial
اتصال	continuity
ادامه (توسیع)	continuation
آرگومان	argument
آزمون	test
آزمون خارج قسمت	ratio test
اساسی	fondamental
اصل	principle
انتگرال	integral
انتگرالگیری	integration
انتگرالگیری جزء به جزء	integration by parts
انتگرال مسیری	contour integral
اندازه	measure
برگردان – منعکس کردن	inversion
انعکاس	reflex
انتقال	translation
انتها	final
ایروفویل	aerofoil

ب

باز نسبی	relative open
برآورد	estimate
بزرگنمایی	magnification
بسته	closed
بسط	expantion
بطور نسبی	relatively
بیرون مسیر	contour outside
بیضوی	elliptic

پ

پتانسیل	potential
پیچش	winding

ت

تام	complet
تابع	function
تابع توانی	exponential function
تابع همساز	harmonic function
تابع هیبرید	hybrid function
تاج دایره	annulus
تبدیل	transformation
تبدیل کردن	transform
تحلیلی	analytic
تعمیم یافته	generalized
تناوب	period

power	توان
doubly periodic function	تابع متناوب مضاعف
extention	توسیع

ج

algebra	جبر
stream	جریان
summation	جمع بندی

چ

multiform	چند شکلی

ح

sum	حاصلجمع
partial sum	حاصلجمع های جزئی
product	حاصلضرب
limit	حد
removable	حذف شدنی
real	حقیقی
loop	حلقه (طوق)

خ

ratio	خارج قسمت
stream lines	خطوط جریان

equipotential line	خطوط هم پتانسیل

د

domain	دامنه
star domain	دامنه ستاره ای (شکل)
contour inside	درون مسیر (درون مرز)
sequence	دنباله
rotation	دوران
diagram	دیاگرام

ر

radian	رادیان
root	ریشه
angle	زاویه
angle modulo	زاویه مدول

س

construction	ساختمان - ساختار
simply	ساده (بطور)
star	ستاره ای
series	سری
convergent series	سری متقارب (همگرا)
hyperbolic	سهموی

ش

radius	شعاع
radius of convergence	شعاع همگرائی (تقارب)

ص

plane	صفحه
extended plane	صفحه توسعه یافته
complex plane	صفحه مختلط
zero	صفر

ض

anti - derivitive	ضد مشتق
local antiderivative	ضد مشتق موضعی

ط

natural	طبیعی
path length	طول مسیر

ع

number	عدد
winding number	عدد پیچش

غ

monster	غول

ف

factor	فاکتور
paving	فرش کردن
formula	فرمول
compact	فشرده

ق

rule	قاعده
chain rules	قاعده زنجیره ای
disc	قرص
disc of convergence	قرص همگرائی
theorem	قضیه
pole	قطب
simple pole	قطب ساده
double pole	قطب مرتبه دوم

ک

sphere	کره
arc	کمان

گ

گروه	group
گویا	rational

ل

لگاریتم	logarithm
لم	lemma
لم برآورد	estimation lemma
لم فرش کردن	paving lemma

م

مارپیچ ثابت زاویه	loxodromic
ماکزیمم	maximum
ماکریمم موضعی	local maximum
مانره	residue
متناوب	periodic
مثلث	triangle
مثلثاتی	trigonometric
مجزا	isolated
مجزای منفرد	isolated singularity
محاسبه	calculation
محور	axis
مختصات	coordinate
مختلط	complex
مدول	modulus
مربوط	relevant

boundary	مرز
star centre	مرکز ستاره ای
meromorphic	مرومورفیک
conjugate	مزدوج
harmonic conjugate	مزدوج هارمونیک (همساز)
signed area	مساحت(محوطه) علامتدار
rectangle	مستطیل
direct	مستقیم
contour	مسیر (کانتور)
integration contour	مسیر انتگرالگیری
path step	مسیر پلّه ای
sub path	مسیر جزئی
oposite path	مسیر مخالف
derivative	مشتق
differentiable	مشتق پذیر
differentiation	مشتق گیری
doubly	مضاعف
absolute	مطلق
equation	معادله
paradox	معما
comparison	مقایسه ای
value	مقدار
singularity	منفرد - مجزا
manifold	منفیلد
local	موضعی
component	مؤلفه
imaginary	موهومی
field	میدان

minimum	می نیمم
local minimum	می نیمم موضعی

ن

dis continuous	ناپیوسته
infinite	نامتناهی
inequality	نامساوی
end point	نقطه انتهائی
boundary point	نقطه مرزی
singularity point	نقطه منفرد
bilinear mapping	نگاشت دو خطی
mapping	نگاشت
version	نوع

و

unity	واحد
divergent	واگرا
existence	وجود

ه

harmonic	هارمونیک (همساز)
connected	همبند
path connected	همبند مسیری
equipotential	هم پتانسیل
conformal	همدیس

همگرا	convergent
همگرائی	convergence
هندسه	geometry
هموار	smooth
هموتوپیک	homotopic
همولوژی	homology
هیپربولیک	hyperbolic

ی

یک شکل	uniform