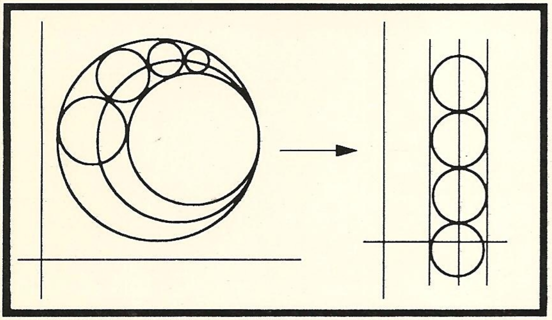
آنالیز مختلط

جوزف بک - دونالد جی. نیومن



ترجمه :

دکتر علیرضا مدقالچی - سید محمود طالبیان

Complex Analysis

Joseph Bak Donald J. Newman

این کتاب متفاوت و نشاط آور، که یک کتاب درسی در زمینهٔ متغیرهای مختلط است، به معرفی توابع تحلیلی و تشریح کاربردهای گستردهٔ آنها می‌پردازد و نشان می‌دهد که خواننده از فنون قوی موجود در آن چگونه استفاده کند.

در این کتاب انگیزه‌های جالب و جدیدی در مورد احکام کلاسیک درس توابع مختلط فراهم وبه همین منظور مباحثی مطرح شده است که در گذشته هرگز به این صورت ظاهر نشده‌اند.

با بیان این انگیزه‌ها و فنون وتکمیل آن با مجموعه‌های مسائل، این مجلد هم به عنوان یک کتاب درسی اساسی می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد هم به عنوان یک مرجع.

ژوزف بک ـ دونالد جی. نیومن

آنالیز مختلط

ترجمه

دکتر علیرضا مدقالچی ـ سیدمحمود طالبیان

پیشگفتار مؤلفان

یکی از اهداف نگارش کتاب حاضر این بوده است که نظریهٔ توابع تحلیلی را با حداقل وابستگی ممکن به مفاهیم پیشرفتهٔ توپولوژی و حسابان چندمتغیره ارائه کنیم. این کار نه تنها به این دلیل صورت گرفت که این کتاب برای محصّلینی که مراحل اوّلیهٔ مطالعات ریاضی خود را طی می‌کنند بیشتر مفید واقع شود بلکه بر کارایی روشها و احکام دقیق آنالیز مختلط در مقایسه با سایر شاخه‌های ریاضی تأکید شده باشد. در فصل اوّل حداقل اطلاعات اوّلیهٔ مورد نیاز همراه با معرفی اعداد و توابع مختلط عرضه شده است.

در فصل ۲ یک تعریف نسبتاً تازه، ولی بسیار شهودی، از تحلیلی بودن ذکر شده است که بالاخص در مورد چندجمله‌ایها به کار می‌رود. این تعریف، در فصل ۳، به معادلات کوشی ـ ریمان و مفهوم مشتق‌پذیری مربوط می‌شود. در فصل ۴و۵، خواننده با دنباله‌ای از قضایا در مورد توابع تام آشنا می‌شود که بعداً در فصول ۶ تا ۸ به صورت کلیتر بسط داده می‌شوند. امیدواریم که این راهکار دو مرحله‌ای به محصلین کمک کند که دنبالهٔ بحث را به صورت ساده‌تری پی‌گیری کنند. در فصل ۵ چندین حکم که منحصراً به توابع تام مربوط می‌شوند نیز آمده است.

حکم کلیدی فصول ۹ و ۱۰ قضیهٔ مشهور مانده است که متعاقب آن چندین کاربرد استاندارد و نه چندان استاندارد در فصول ۱۱ و ۱۲ ذکر می‌شوند.

در فصل ۱۳ نگاشت همدیس معرفی می‌شود که فی‌نفسه جالب است و برای درک مفاهیم سه فصل بعدی نیز ضروری است. دینامیک آبی در فصل ۱۴ به عنوان پُلی بین فصل ۱۳ و قضیهٔ نگاشت ریمان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. دینامیک آبی، از یک طرف، کاربرد زیبایی از نظریه‌ای محسوب می‌شود که در فصل قبلی، بالاخص در فصل ۱۳، بسط داده شده است؛ از طرف دیگر، سبب درک معنای فیزیکی گزاره و برهان قضیهٔ نگاشت ریمان می‌شود.

در فصل ۱۵، با استفاده از روش بررسی «نگاشتها» بعضی از احکام قبلی را تعمیم می‌دهیم. در فصل ۱۶ خواص توابع همساز و نظریهٔ هدایت گرما مورد بحث قرار می‌گیرد.

هدف دیگر کتاب این است که خواننده دریابد که روشهای آنالیز مختلط کاربردهای فراوان دارند حتی در مورد مسائلی که بدواً متعلق به حوزهٔ مختلط به نظر نمی‌رسند. به این ترتیب، می‌کوشیم که در احساسات مشهود در این سخن مشهور هاداماد سهیم شویم که: «کوتاهترین راه بین هر دو واقعیت حوزهٔ حقیقی از قلمرو مختلط می‌گذرد.» کاربردهای فیزیکی فصول ۱۴ و ۱۶ از این لحاظ مثالهای خوبی به شمار

می‌آیند، همچنین است نتایج فصل ۱۱. محتوای سه فصل آخر برای این منظور مطرح شده است که زمینهٔ ادراک حتی قویتری از وسعت کاربردهای ممکن فراهم شود. در فصل ۱۷ در مورد صور مختلف یک تابع تحلیلی بحث می‌شود، که مستقیماً به توابع گاما و زتا می‌انجامد که در فصل ۱۸ معرفی می‌شوند. سرانجام، در فصل ۱۹، مجدداً مسائل متنوعی، که بعضی کلاسیک و بعضی تازه هستند، مطرح می‌شوند و با روشهای آنالیز مختلط مورد بررسی قرار می‌گیرند.

محتوای کتاب عمدةً به دو قسمت تقسیم می‌شود: درس اوّل که متشکل از محتوای فصول ۱ تا ۱۱ است (و شاید قسمتهایی از فصل ۱۳)، و درس دوّم که بقّیهٔ کتاب است. به عبارت دیگر، اگر بخواهیم که کاربردهای فیزیکی فصول ۱۴ و ۱۶ را در یک درس یک نیمسالی بگنجانیم لازم است که بعضی از مباحث نظری فصول ۸، ۱۲، ۱۴، و ۱۵ را حذف کنیم؛ و همینها را همراه با بقّیهٔ کتاب در درس نیمسال بعدی بیاوریم.

مؤلفان از سرکار خانم باربارا براون، که ساعیانه دستنوشته را مرور و اصلاحات بسیار مفیدی پیشنهاد نمودند، تشکر می‌کنند؛ همچنین، خود را مدیون قاطبهٔ کارکنان بنگاه انتشاراتی اشپرینگر ـ ورلاگ می‌دانند که با کار دقیق و حوصلهٔ زیاد خود دستنوشته را به شکل حاضر درآوردند.

ژوزف بک
دونالد جی نیومن

فهرست مطالب

فصل اول

اعداد مختلط

۱۰۱ مقدمه

اعداد به شکل $a + b\sqrt{-1}$، که در آن a و b اعداد حقیقی هستند ـ که اعداد مختلط نامیده شده‌اند ـ در قرن شانزدهم ظاهر شدند. کاردان (۱۵۰۱-۱۵۷۶) برای حّل معادلات درجه‌های دو و سه از اعداد مختلط استفاده می‌کرد. در قرن هیجدهم، توابعی شامل اعداد مختلط به وسیلهٔ اویلر کشف شد که به حل معادلات دیفرانسیل منجر شد. همین که تدریجاً کار بیشتری با اعداد مختلط صورت می‌گرفت، مسلم می‌شد که بسیاری از مسایل نظریهٔ توابع حقیقی ـ مقدار را می‌توان با استفاده از اعداد و توابع مختلط به سادگی حل کرد. معذالک، علیرغم این همه سودمندی، اعداد مختلط از اعتبار ضعیفی برخوردار بودند و به طور کلی تا اواسط قرن نوزدهم اعدادی قانونی محسوب نمی‌شدند. مثلاً، دکارت ریشه‌های مختلط معادلات را رد و اصطلاح «موهومی» را بر این ریشه‌ها اطلاق کرد. اویلر، نیز احساس می‌کرد که اعداد مختلط «فقط در تصور وجود دارند» و ریشهٔ مختلط یک معادله را فقط وقتی مفید می‌دانست که نشان

بدهد که معادله در واقع جواب ندارد.

مقبولیت وسیع اعداد مختلط بیشتر مدیون نمایش هندسی این اعداد است که به طور کامل به وسیلهٔ گاوس ابداع و به طور مفصل بیان گشت. او تشخیص داد که اشتباه است که فرض کنیم که «جای ابهامی در این اعداد وجود دارد». او نوشت: «مفهوم شهودی اعداد مختلط در نمایش هندسی این اعداد به طور کامل احراز شده و چیز بیشتری لازم نیست تا این کمیتها را در قلمرو حساب قرار دهیم.

کارهای گاوس، در واقع، برای تأسیس دستگاه اعداد مختلط بر اساس پایه‌های محکم جلوتر رفت. ولی، اولین تعریف کامل و رسمی به وسیلهٔ معاصر او، ویلیام هامیلتون، عرضه شد. بحث را با تعریف او شروع می‌کنیم و سپس هندسهٔ اعداد مختلط را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۱ میدان اعداد مختلط

خواهیم دید که هر عدد مختلط به صورت $a + bi$ نوشته می‌شود که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و i یک ریشهٔ دوم ۱− است. این، به خودی خود، یک تعریف رسمی نیست؛ زیرا مستلزم فرض دستگاهی از پیش است که در آن ریشهٔ دوّم ۱− مفهوم پیدا می‌کند. وجود چنین دستگاهی دقیقاً آن چیزی است که در پی اثبات آن هستیم. بعلاوه، اعمال جمع و ضربی که در عبارت $a + bi$ ظاهر شده‌اند تعریف نشده است. تعریف رسمی زیر، تعریف این مفاهیم برحسب زوجهای مرتب است.

۱.۱ تعریف. میدان مختلط $\mathbb{C}$ تشکیل شده است از مجموعهٔ زوجهای مرتب اعداد حقیقی (a, b) با جمع و ضرب زیر

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

قوانین شرکت‌پذیری، تعویض‌پذیری و همچنین توزیع‌پذیری از خوّاص مشابه در اعداد حقیقی به دست می‌آیند. عنصر همانی جمع، یا صفر، عدد $(۰, ۰)$ است. از این رو، قرینهٔ (a, b) عدد $(-a, -b)$ است. عنصر همانی ضرب $(۱, ۰)$ است. برای تعیین وارون ضربی هر عدد ناصفر (a, b)، قرار می‌دهیم

$$(a,b)(x,y) = ۱$$

که معادل دستگاه معادلات

$$ax - by = 1$$
$$bx + ay = 0$$

با جوابهای زیر است

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

از این رو، اعداد مختلط یک میدان می‌سازند.

حال، فرض کنید که هر عدد مختلط به صورت $(a, 0)$ را با عدد حقیقی a متناظر قرار دهیم. نتیجه می‌شود که $(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$ متناظر است با $a_1 + a_2$ و $(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0)$ متناظر است با a_1a_2. به این ترتیب، تناظر بین $(a, 0)$ و a تمام اعمال حسابی را حفظ می‌کند و هیچ ابهامی از جایگزینی $(a, 0)$ با a ایجاد نمی‌شود. از این نظر، می‌گوییم که مجموعهٔ اعداد مختلط به شکل $(a, 0)$ با مجموعهٔ اعداد حقیقی یکریخت است، و از این به بعد بین آنها تمایزی قایل نمی‌شویم. به این طریق، اکنون می‌توانیم بگوییم که $(0, 1)$ یک ریشهٔ دوم -1 است؛ زیرا

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

از این پس، $(0, 1)$ با i نمایش داده می‌شود. همچنین، توجه کنید که

$$a(b, c) = (a, 0)(b, c) = (ab, ac)$$

از این رو، هر عدد مختلط را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$$

در این کتاب شکل اخیر را به کار خواهیم برد.

به مسألهٔ ریشهٔ دوم که برگردیم ملاحظه می‌کنیم که، در واقع، -1 دارای دو ریشهٔ دوم مختلط i و $-i$ است. بعلاوه، هر عدد مختلط $a + bi$ دارای دو ریشهٔ مختلط است. برای حل

$$(x + iy)^2 = a + bi$$

قرار می‌دهیم

$$x^2 - y^2 = a$$
$$2xy = b$$

که معادل است با

$$۴x^۴ - ۴ax^۲ - b^۲ = ۰$$
$$y = \frac{b}{۲x}$$

که اگر ابتدا معادله را بر حسب $x^۲$ حل کنیم، دو جواب

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^۲ + b^۲}}{۲}}$$

را می‌یابیم. سپس، دو جواب

$$y = \frac{b}{۲x} = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^۲ + b^۲}}{۲}}.(\operatorname{sign} b)$$

را به دست می‌آوریم که در آن

$$\operatorname{sign} b = \begin{cases} ۱ & b \geq ۰ \\ -۱ & b < ۰ \end{cases}$$

امثله

(i) دو ریشهٔ دوّم $۲i$ عبارتند از $۱ + i$ و $-۱ - i$.

(ii) ریشه‌های دوم $-۵ - ۱۲i$ عبارتند از $۲ - ۳i$ و $-۲ + ۳i$.

نتیجه می‌شود که هر معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب مختلط در میدان مختلط دارای جواب است؛ زیرا، با دستکاری معمولی دیده می‌شود که

$$az^۲ + bz + c = ۰ \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq ۰$$

معادل است با

$$(z + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}$$

که دارای جوابهای زیر است

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \tag{۱}$$

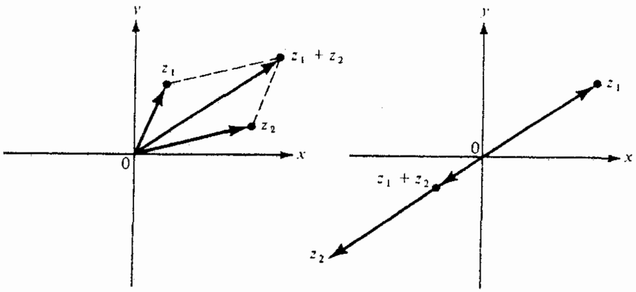
در فصل ۵ خواهیم دید که معادلات درجهٔ دوّم تنها معادلاتی نیستند که این ویژگی را دارند: هر چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب مختلط دارای یک صفر در صفحهٔ مختلط است.

یکی از خوّاص اعداد حقیقی که به صفحهٔ مختلط منتقل نمی‌شود مفهوم ترتیب است. این را به عنوان تمرین به خوانندگانی که با اصول موضوع ترتیب آشنایند واگذار می‌کنیم تا بررسی کنند که هر فرضی که در آن i مثبت یا منفی در نظر گرفته شود به تناقض می‌انجامد.

۳.۱ صفحهٔ مختلط

تصور اعداد مختلط به عنوان زوجهای مرتب (a, b) از اعداد حقیقی با تعبیر هندسی میدان مختلط ارتباط بسیار نزدیک دارد، که به وسیلهٔ والیس ابداع شد و سپس به وسیلهٔ آرگان و گاوس توسعه یافت. هر عدد مختلط $a + bi$ را متناظر نقطهٔ (a, b) در صفحهٔ دکارتی قرار می‌دهیم. از این رو، اعداد حقیقی با نقاط روی محور xها متناظر می‌شوند که **محور حقیقی** نامیده می‌شود در حالی که اعداد موهومی محض bi با نقاط روی محور yها متناظر می‌شوند که **محور موهومی** نامیده می‌شود.

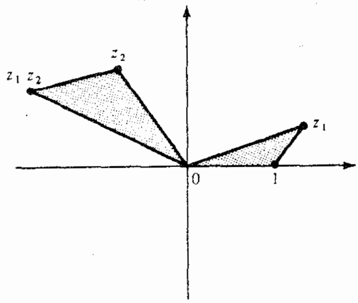
جمع و ضرب هم تعبیر هندسی دارد. جمع z_1 و z_2 متناظر با جمع برداری است: اگر بردار از O به z_2 به موازات محورهای x و y طوری منتقل شود که ابتدایش بر z_1 منطبق شود انتهایش نقطهٔ $z_1 + z_2$ است؛ که اگر O، z_1 و z_2 بر یک امتداد نباشند، قانون متوازی‌الاضلاع نامیده می‌شود. اشکال زیر را ببینید.

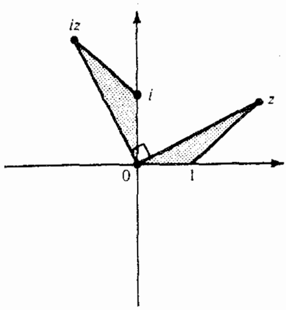


روش هندسی تعیین حاصل ضرب $z_1 z_2$ تا اندازه‌ای پیچیده‌تر است. اگر مثلثی بسازیم که دو ضلعش بردارهای (از مبداء تا) ۱ و z_1 باشند و سپس مثلثی متشابه با آن با دو بردار در جهت خروج از مبداء بسازیم که بردار z_2 متناظر با بردار ۱ باشد، آن گاه بردار متناظر با z_1 همان $z_1 z_2$ است.

این را می‌توان به طور هندسی تحقیق کرد ولی با معرفی مختصات قطبی در این بخش بسیار شفافتر خواهد بود. در حال حاضر، ملاحظه می‌کنیم که ضرب در i از نظر هندسی معادل است با دوران به اندازهٔ

90° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.





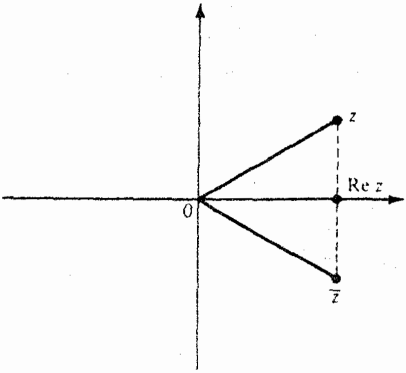
با فرض $z = x + iy$ و بنابر تعریف،

$\operatorname{Re} z$، جزء حقیقی z، x است،

$\operatorname{Im} z$، جزء موهومی z، y است (توجه کنید که $\operatorname{Im} z$ یک عدد حقیقی است)؛

$\bar{z}$، مزدوج z، $x - iy$ است.

از نقطهٔ نظر هندسی، $\bar{z}$ تصویر آئینه‌ای z نسبت به محور حقیقی است.

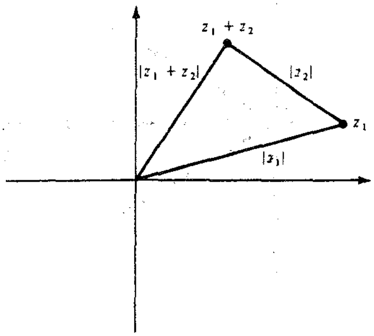


$|z|$، قدر مطلق یا هنگ z، برابر است با $\sqrt{x^2 + y^2}$؛ که طول بردار z است. همچنین، توجه کنید که $|z_1 - z_2|$ فاصلهٔ (اقلیدسی) بین z_1 و z_2 است. بنابراین، می‌توانیم $|z_2|$ را به عنوان فاصلهٔ $z_1 + z_2$ و z_1 تصور کنیم و، در نتیجه، برهانی برای نامساوی مثلث

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

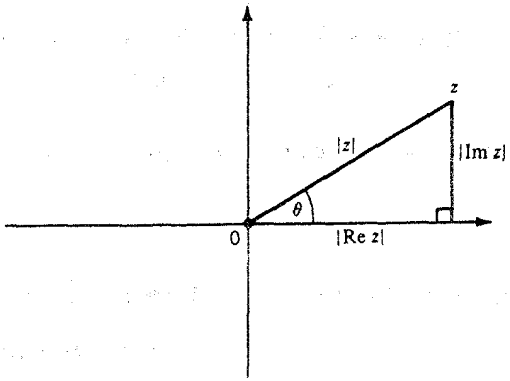
به دست می‌آید.

برهان جبری این نامساوی به اختصار در تمرین ۸ آمده است.



$\operatorname{Arg} z$، شناسهٔ z، به ازای $z \neq ۰$ زاویهٔ بین بردار z (ابتدا از مبداء) و محور xهای مثبت است. از این رو، $\operatorname{Arg} z$ (به پیمانهٔ ۲π) عدد θ است که به ازای آن

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \qquad \cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$



امثله

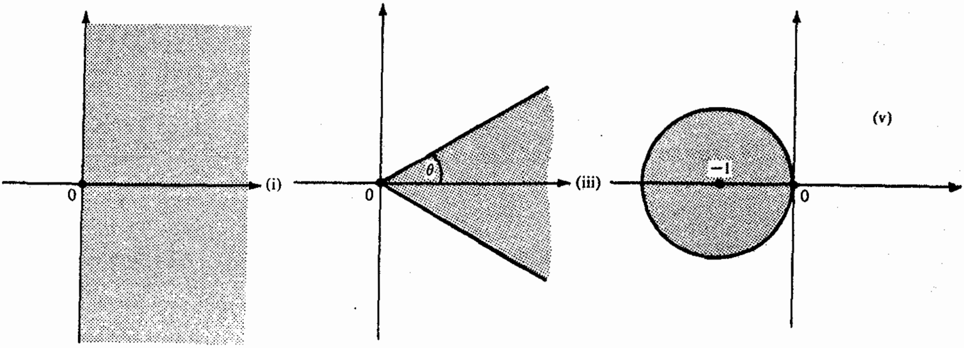
(i) مجموعهٔ نقاطی که در نامعادلهٔ $\operatorname{Re} z > ۰$ صدق می‌کنند با نیم صفحهٔ راست نمایش داده می‌شوند.

(ii) $\{z : z = \bar{z}\}$ خط حقیقی است.

(iii) $\{z : -\theta < Arg z < \theta\}$ قطاع زاویه‌ای (گُوه) به زاویهٔ ۲θ است.

(iv) $\{z : |\operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{۲}| < \frac{\pi}{۲}\} = \{z | \operatorname{Im} z > ۰\}$.

(v) $\{z | \ |z + ۱| < ۱\}$ قرص به مرکز ۱− و شعاع ۱ است.



یک عدد مختلط ناصفر را می‌توان کاملاً با هنگ و شناسه‌اش معین کرد. اگر $z = x + iy$، $|z| = r$ و $\operatorname{Arg} z = \theta$، نتیجه می‌شود که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\cos\theta + i\sin\theta$ را به اختصار به $\operatorname{cis}\theta$ نشان می‌دهیم. در این مورد، r و θ مختصات قطبی z و $r\operatorname{cis}\theta$ صورت قطبی عدد مختلط z نامیده می‌شوند. این صورت، بالاخص، برای تعیین حاصلضرب مفید است. فرض کنید که $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ و $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$. آن گاه

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

زیرا

$$\begin{aligned}
(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}$$

از این رو، اگر z حاصلضرب دو عدد مختلط باشد، $|z|$ حاصلضرب هنگهای آنها و $\arg z$ مجموع شناسه‌های آنها (به پیمانهٔ 2π) است. (از این نتیجه می‌توان برای بررسی ساختمان هندسی $z_1 z_2$، که در آغاز این بخش ذکر شد، استفاده کرد.) به طریق مشابه، z_1/z_2 را می‌توان با تقسیم هنگها و تفاضل شناسه‌ها به دست آورد:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

به استقرا نتیجه می‌شود که اگر $z = r\operatorname{cis}\theta$ و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta \qquad (۱)$$

اتحاد (۱) برای حل معادلات «محض» به شکل $z^n = z_\circ$ مخصوصاً مفید است.

مثال. برای پیدا کردن ریشه‌های سوّم ۱، $z^۳ = ۱$ را به شکل قطبی می‌نویسیم:

$$r^۳ \operatorname{cis} ۳\theta = ۱ \operatorname{cis} \circ$$

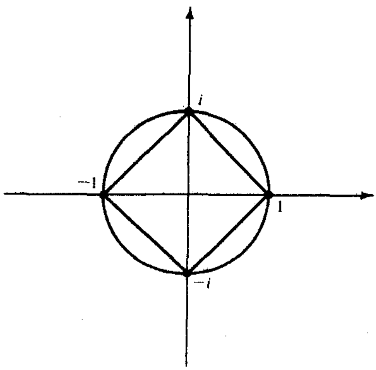
رابطهٔ فوق فقط و فقط وقتی برقرار است که $r = ۱$ و $۳\theta = \circ \pmod{۲\pi}$. بنابراین، سه جواب عبارتند از

$$z_۱ = \operatorname{cis}\circ, \qquad z_۲ = \operatorname{cis}\frac{۲\pi}{۳}, \qquad z_۳ = \operatorname{cis}\frac{۴\pi}{۳}$$

یا، در مختصات دکارتی (x, y)،

$$z_۱ = ۱, \qquad z_۲ = -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \qquad z_۳ = -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

صورت قطبی سه ریشهٔ سوم این نکته را آشکار می‌سازد که این ریشه‌ها رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ واحدند. به طور مشابه، ریشه‌های nام ۱ در رأسهای یک n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد واقعند که یکی از رئوس $z = ۱$ است. مثلاً، ریشه‌های چهارم ۱ عبارتند از ± ۱، $\pm i$.



۴.۱ سیمای توپولوژیک صفحهٔ مختلط

الف) دنباله‌ها و سریها. مفهوم قدر مطلق را می‌توان برای تعریف مفهوم حدّ دنباله‌های اعداد مختلط به کار برد.

۲.۱ تعریف. دنبالهٔ $z_۱$، $z_۲$، ... به z همگرا است اگر دنبالهٔ اعداد حقیقی $|z_n - z|$ به ۰ همگرا باشد. یعنی، $z_n \to z$ اگر $|z_n - z| \to ۰$.

از نظر هندسی، $z_n \to z$ اگر هر قرص حول z شامل همهٔ اعضای دنبالهٔ $\{z_n\}$، جز تعدادی متناهی، باشد. چون

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$z_n \to z$ اگروفقطاگر $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.

امثله

۱) اگر $|z| < ۱$ آن گاه $z^n \to ۰$؛ زیرا $|z^n - ۰| = |z|^n \to ۰$.

۲) $\frac{n}{n+i} \to ۱$؛ زیرا $\left|\frac{n}{n+i} - ۱\right| = \left|\frac{-i}{n+i}\right| = \frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}} \to ۰$.

۳.۱ تعریف. $\{z_n\}$ دنبالهٔ کوشی نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که $n, m > N$ ایجاب کند که $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

۴.۱ قضیه. $\{z_n\}$ همگرا است اگروفقطاگر $\{z_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی باشد.

برهان. اگر $z_n \to z$، آن‌گاه $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$. بنابراین، $\{\operatorname{Re} z_n\}$ و $\{\operatorname{Im} z_n\}$ دنباله‌های کوشی هستند؛ ولی چون

$$\begin{aligned}|z_n - z_m| &\leq |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| + |\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \\ &= |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_m| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_m|.\end{aligned}$$

$\{z_n\}$ نیز کوشی است.

برعکس، اگر $\{z_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی باشد، دنباله‌های $\{\operatorname{Re} z_n\}$ و $\{\operatorname{Im} z_n\}$ نیز چنین هستند. بنابراین، $\{\operatorname{Re} z_n\}$ و $\{\operatorname{Im} z_n\}$ همگرا هستند؛ از این رو، $\{z_n\}$ نیز همگرا است.

سری $\sum_{k=۱}^{\infty} z_k$ همگرا است اگر دنبالهٔ $\{s_n\}$ متشکل از مجموعهای جزئی با تعریف $s_n = z_۱ + z_۲ + \cdots + z_n$ همگرا باشد. در این حالت، حد این دنباله را مجموع سری می‌نامیم. خواص اساسی سریها که در زیر آمده است نظیر نظریهٔ سریهای حقیقی است.

(i) مجموع و حاصلضرب دو سری همگرا، همگرا است.

(ii) شرط لازم برای همگرایی $\sum_{k=۱}^{\infty} z_k$ آن است که $z_n \to ۰$ وقتی که $n \to \infty$.

(iii) شرط کافی برای همگرایی $\sum_{k=۱}^{\infty} z_k$ آن است که $\sum_{k=۱}^{\infty} |z_k|$ همگرا باشد. وقتی که $\sum_{k=۱}^{\infty} |z_k|$ همگرا است، می‌گوییم $\sum_{k=۱}^{\infty} z_k$ مطلقاً همگرا است.

خاصیت (iii) که اهمیت آن در فصول بعدی ظاهر خواهد شد، از قضیهٔ ۴.۱ نتیجه می‌شود به این صورت که اگر $\sum_{k=۱}^{\infty} |z_k|$ همگرا باشد و $t_n = |z_۱| + |z_۲| + \cdots + |z_n|$، آن گاه $\{t_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی است. ولی در این صورت $\{s_n\}$ با ضابطهٔ $s_n = z_۱ + z_۲ + \cdots + z_n$ نیز چنین است؛ زیرا، به استناد نامساوی مثلث،

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &\le |z_{n+۱} + z_{n+۲} + \cdots + z_m| \\ &\le |z_{n+۱}| + |z_{n+۲}| + \cdots + |z_m| = |t_m - t_n| \end{aligned}$$

بنابراین، $\sum_{k=۱}^{\infty} z_k$ همگرا است.

امثله

۱) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{i^k}{k^۲+i}$ همگرا است؛ زیرا $\left|\frac{i^k}{k^۲+i}\right| = \frac{۱}{\sqrt{k^۲+۱}}$ و $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{k^۲+۱}}$ همگرا است.

۲) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k+i}$ واگرا است؛ زیرا $\frac{۱}{k+i} = \frac{k-i}{k^۲+۱}$ که نشان می‌دهد که $\sum_{k=۱}^{\infty} \mathrm{Re}(\frac{۱}{k+i})$ واگراست.

ب) رده‌بندی مجموعه‌ها در صفحهٔ مختلط.

چند تعریف در مورد مجموعه‌های واقع در صفحه ارائه می‌کنیم.

۵.۱ تعاریف.

$D(z_۰; r)$ نمایش قرص باز به شعاع $r > ۰$ و مرکز $z_۰$ است؛ یعنی، $D(z_۰; r) = \{z : |z - z_۰| < r\}$.
$D(z_۰; r)$ یک همسایگی (یا $r-$ همسایگی) از $z_۰$ نامیده می‌شود.

$C(z_۰; r)$ دایرهٔ به شعاع $r > ۰$ به مرکز $z_۰$ است.

مجموعهٔ S باز نامیده می‌شود اگر به ازای هر $z \in S$ عدد مثبتی مانند δ بتوان یافت که $D(z; \delta) \subset S$.
به ازای هر مجموعهٔ S، $\tilde{S} = \mathbb{C} - S$ متمم S نامیده می‌شود؛ یعنی $\tilde{S} = \{z \in \mathbb{C} : z \notin S\}$.
یک مجموعه بسته نامیده می‌شود اگر متمم آن باز باشد.

∂S، مرز S، مجموعه‌ای از نقاط است به طوری که هر δـ همسایگی از آنها دارای اشتراک غیرخالی با S و $\tilde{S}$ باشد.

$\bar{S}$، بستار S، با $\bar{S} = S \cup \partial s$ تعریف می‌شود.

S کراندار است اگر به ازای $M > 0$ی در $D(0\,; M)$ قرار گیرد.

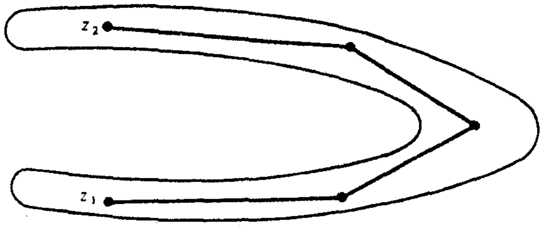
مجموعه‌های بسته و کراندار فشرده نامیده می‌شوند.

S ناهمبند نامیده می‌شود اگر دو مجموعهٔ جدا از هم باز مانند A و B وجود داشته باشد به طوری که اجتماع آنها شامل S باشد ولی هیچ یک به تنهایی شامل S نباشد. اگر S ناهمبند نباشد همبند نامیده می‌شود.

$[z_1, z_2]$ نمایش پاره‌خط با نقاط انتهایی z_1 و z_2 است.

یک خط چند ضلعی اجتماعی متناهی از پاره‌خطها به شکل $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots [z_{n-1}, z_n]$ است.

اگر هر دو نقطهٔ S را بتوان به وسیلهٔ یک خط چندضلعی در S به هم وصل کرد، S همبند چند ضلعی نامیده می‌شود.



می‌توان نشان داد که مجموعه‌های همبند چندضلعی همبند هستند؛ ولی عکس این حکم درست نیست. مثلاً مجموعهٔ نقاط $z = x + iy$ با شرط $y = x^2$ همبند است ولی همبند چندضلعی نیست؛ زیرا این مجموعه شامل هیچ پاره‌خطی نیست. در واقع، حتی مجموعه‌های همبندی وجود دارد که نقاط هر یک از این مجموعه‌ها را حتی با یک منحنی نمی‌توان به یکدیگر وصل کرد (تمرین ۱۷). از طرف دیگر، در مورد مجموعه‌های باز، همبندی و همبندی چند ضلعی معادلند.

۶.۱ تعریف. مجموعهٔ باز و همبند یک ناحیه نامیده می‌شود[1].

۱) توجه کنید که «ناحیه» و «حوزه» در این کتاب به طور مترادف به کار رفته‌اند. (م)-

۷.۱ قضیه. هر ناحیهٔ S همبند چند ضلعی است.

برهان. فرض کنید $z_\circ \in S$. فرض کنید A مجموعهٔ نقاطی از S باشد که بتوان با یک چندضلعی در S به $z_\circ$ وصل کرد و B بقیهٔ نقاط باشد. چون هر نقطهٔ z از $D(z;\delta)$ را می‌توان به نقطهٔ دیگری در آن وصل کرد، نتیجه می‌شود که A باز است. به طریق مشابه، B باز است، برای این که اگر هر نقطه درگویی به مرکز z را بتوان به $z_\circ$ وصل کرد، آن گاه z را نیز می‌توان به $z_\circ$ وصل کرد. حال، چون S همبند است، $S = A \cup B$ و A غیرتهی است؛ از این رو، B باید تهی باشد. بالاخره، چون هر نقطهٔ S را می‌توان به $z_\circ$ وصل کرد هر زوج از نقاط S را می‌توان به وسیلهٔ یک چندضلعی به هم وصل کرد.

ج) توابع پیوسته

۸.۱ تعریف. تابع مختلط ـ مقدار $f(z)$ که بر همسایگی η به مرکز $z_\circ$ تعریف شده است پیوسته نامیده می‌شود اگر $z_n \to z_\circ$ مستلزم $f(z_n) \to f(z_\circ)$ باشد. به طریق معادل، f در $z_\circ$ پیوسته است اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که اگر $|z - z_\circ| < \delta$ آن گاه $|f(z) - f(z_\circ)| < \varepsilon$. f در قلمرو D پیوسته نامیده می‌شود اگر به ازای هر دنبالهٔ $\{z_n\} \subset D$ و $z \in D$ اگر $z_n \to z$ آن گاه $f(z_n) \to f(z)$.

اگر f را به اجزای حقیقی و موهومی تجزیه کنیم

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

که در آن u و v حقیقی ـ مقدار هستند، واضح است که f پیوسته است اگروفقط‌اگر u و v توابع پیوسته‌ای از (x,y) باشند. از این رو، مثلاً، هر چندجمله‌ای

$$P(x,y) = \sum_{j=\text{۱}}^{m} \sum_{k=\text{۱}}^{n} a_{kj} x^k y^j$$

درکل صفحه پیوسته است. به طریق مشابه،

$$\frac{\text{۱}}{z} = \frac{x}{x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}} - i\frac{y}{x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}}$$

در «صفحهٔ سفته» $\{z | z \neq \circ\}$ پیوسته است. همچنین، نتیجه می‌شود که مجموع، حاصلضرب، و خارج قسمت (با مخرج ناصفر) توابع پیوسته، پیوسته‌اند.

دنبالهٔ $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f همگرا است اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که اگر $n > N$ آن گاه به ازای هر $z \in D$، $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. مجدداً، با

ارجاع به اجزای حقیقی و موهومی $\{f_n\}$، واضح است که حد یکنواخت دنباله‌ای از توابع پیوسته، پیوسته است. نگاه کنید به [رودین، صفحهٔ ۱۳۷].

۹.۱ آزمون M. فرض کنید f_k $(k = ۱, ۲, ۳, \dots)$ در D پیوسته باشد. اگر نامساوی $|f_k(z)| \leq M_k$ در D برقرار و $\sum_{k=۱}^{\infty} M_k$ همگرا باشد، آن گاه $\sum_{k=۱}^{\infty} f_k(z)$ به تابعی مانند f همگرا است که در D پیوسته است.

برهان. همگرایی $\sum_{k=۱}^{\infty} f_k(z)$ فوری است. بعلاوه، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند N وجود دارد که به ازای هر $n \geq N$

$$|f(z) - \sum_{k=۱}^{n} f_k(z)| = |\sum_{n+۱}^{\infty} f_k(z)| \leq M_{n+۱} + M_{n+۲} + \cdots < \varepsilon$$

بنابراین، همگرایی f یکنواخت است و f پیوسته است.

مثال. $f(z) = \sum_{k=۱}^{\infty} kz^k$ در $|z| \leq \frac{۱}{۲}$ پیوسته است؛ زیرا در این قلمرو،

$$|kz^k| \leq \frac{k}{۲^k}$$

و $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{k}{۲^k}$ همگرا است. (به تمرین ۱۵ نگاه کنید.)

یادآوری می‌کنیم که نگاشتهای پیوسته مجموعه‌های فشرده، همبند را به مجموعه‌های فشرده / همبند می‌نگارند [رودین، صفحهٔ ۸۰]. ولی هیچ یک از خواص دیگر بالا تحت نگاشتهای پیوسته حفظ نمی‌شوند. مثلاً $f(z) = \operatorname{Re} z$ مجموعه‌های باز $\mathbb{C}$ را به خط حقیقی می‌نگارد که باز نیست. تابع $g(z) = \frac{۱}{z}$ مجموعهٔ کراندار $۰ < |z| < ۱$ را به مجموعهٔ بی‌کران $۱ < |z|$ می‌نگارد.

بسیاری از احکام اساسی فصول بعدی مربوط به خواص (ردهٔ مشخصی) از توابعی است که بر یک ناحیه تعریف شده‌اند. توجه می‌کنیم که، با بحثی نظیر برهان قضیهٔ ۷.۱، هر دو نقطه در یک ناحیه را می‌توان به وسیلهٔ یک خط چند ضلعی به هم وصل کرد که فقط از پاره‌خط‌های عمودی و افقی تشکیل شده است. در مراجعات آتی، از هر چنین خطی با عنوان مسیر چند ضلعی یاد می‌کنیم.

یکی از احکام جالب دربارهٔ توابع حقیقی ـ مقدار بر یک ناحیه در قضیهٔ زیر آمده است.

۱۰.۱ قضیه. فرض کنید $u(x, y)$ دارای مشتقات جزئی u_x و u_y باشد که در هر نقطهٔ ناحیهٔ D صفرند. در این صورت، u بر D ثابت است.

برهان. فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه از D باشد. در این صورت، به طوری که در بالا تذکر داده شد، می‌توان این دو نقطه را به وسیلهٔ یک مسیر چندضلعی در ناحیهٔ D به هم وصل کرد. هر دو رأس متوالی این مسیر دو نقطهٔ انتهایی یک پاره‌خط افقی یا عمودی است. بنابراین، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین برای توابع حقیقی ـ مقدار، تغییر u بین این دو رأس برابر است با حاصل ضرب مقدار مشتق جزئی u در نقطه‌ای بین نقاط انتهایی و تفاضل مختصات نابرابر نقاط انتهایی. چون u_x و u_y بر ناحیهٔ D متحد با صفر هستند، تغییر u بین هر زوج از رأسهای متوالی صفر است؛ از این رو $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$.

۵.۱ تصویر گنج نگاری؛ نقطهٔ در بینهایت

اعداد مختلط را می‌توان به وسیلهٔ نقاط واقع بر سطح یک کرهٔ سفته هم نشان داد. فرض کنید

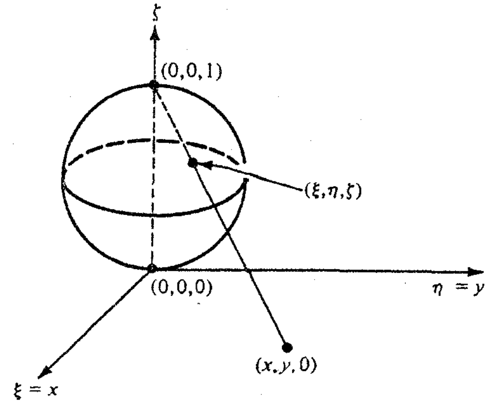
$$\sum = \{(\xi, \eta, \zeta) : \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\} \qquad (1)$$

یعنی، فرض کنید که $\sum$ کره‌ای از فضای اقلیدسی (ξ, η, ζ) باشد که به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ از $(0, 0, \frac{1}{2})$ واقع است. بعلاوه، فرض کنید که صفحهٔ $\zeta = 0$ بر صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ منطبق باشد و محورهای ξ و η، به ترتیب، محورهای x و y باشند. به هر نقطهٔ (ξ, η, ζ) از $\sum$ عدد مختلط z ی را نسبت می‌دهیم که محل تقاطع شعاع مار از $(0, 0, 1)$ و (ξ, η, ζ) با صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ است. این رابطه یک تناظر ۱-۱ است که به تصویر گنج نگاری بین نقاط $\mathbb{C}$ و نقاط $\sum$ به غیر از $(0, 0, 1)$ معروف است. فرمولهای حاکم بر این تناظر را می‌توان به صورت زیر به دست آورد: چون $(0, 0, 1)$، (ξ, η, ζ) و $(x, y, 0)$ بر یک خط قرار دارند،

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1 - \zeta}$$

که در این صورت

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}; \qquad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \qquad (2)$$



به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد که از معادلات (۱) و (۲) می‌توان ξ، η و ζ را برحسب x و y به صورت زیر به دست آورد:

$$\xi = \frac{x}{x^۲ + y^۲ + ۱}, \quad \eta = \frac{y}{x^۲ + y^۲ + ۱}, \quad \zeta = \frac{x^۲ + y^۲}{x^۲ + y^۲ + ۱} \qquad (۳)$$

حال، فرض کنید که $\{\sigma_k\} = \{\xi_k, \eta_k, \zeta_k\}$ دنباله‌ای از نقاط $\sum$ باشد که به $(۰, ۰, ۱)$ همگرا است و فرض کنید $\{z_k\}$ دنبالهٔ متناظر در $\mathbb{C}$ باشد. بنابه (۲)،

$$x^۲ + y^۲ = \frac{\xi^۲ + \eta^۲}{(۱ - \zeta)^۲} = \frac{\zeta}{۱ - \zeta}$$

که از این رو $|z_k| \to \infty$ وقتی که $\sigma_k \to (۰, ۰, ۱)$. بالعکس، از (۳) نتیجه می‌شود که اگر $|z_k| \to \infty$ آن گاه $\sigma_k \to (۰, ۰, ۱)$. به بیان عامیانه، بحث بالا اشاره بر این دارد که نقطهٔ $(۰, ۰, ۱)$ واقع بر $\sum$ متناظر با ∞ در صفحهٔ مختلط است. این بیان را می‌توانیم با الحاق رسمی یک «نقطه در بینهایت» به $\mathbb{C}$ دقیقتر کنیم و همسایگیهای آن را مجموعه‌هایی از $\mathbb{C}$ تعریف کنیم که با همسایگیهای کروی $(۰, ۰, ۱)$ متناظر قرار می‌گیرند. (تمرین ۱۸ را ببینید.) در حالی که «صفحهٔ توسعه یافته» حاصل از این بحث را با جزئیات بیشتر مورد آزمایش قرار نخواهیم داد، قرارداد زیر را قبول خواهیم کرد.

۱۱.۱ تعریف. گوییم $\{z_k\} \to \infty$ هرگاه $|z_k| \to \infty$؛ یعنی، $\{z_k\} \to \infty$ در صورتی که به ازای هر $M > ۰$ عددی طبیعی مانند N یافت شود به طوری که اگر $k > N$ آن گاه $|z_k| > M$. به طریق مشابه، $f(z) \to \infty$ هرگاه $|f(z)| \to \infty$.

برای مراجعات بعدی، به ارتباط بین دوایر واقع در $\sum$ و $\mathbb{C}$ توجه می‌کنیم. منظور از یک دایره در $\sum$ اشتراک $\sum$ با صفحه‌ای به صورت $A\xi + B\eta + C\zeta = D$ است. مطابق (۳)، اگر S یک چنین دایره‌ای

و T مجموعهٔ متناظر در $\mathbb{C}$ باشد، آن گاه به ازای هر $(x,y) \in T$

$$(C-D)(x^{۲}+y^{۲})+Ax+By=D \qquad (۴)$$

توجه کنید که اگر $C \neq D$، (۴) معادلهٔ یک دایره است. اگر $C = D$، (۴) نمایش یک خط است. چون $C = D$ اگروفقط‌اگر S از $(۱, ۰, ۰)$ بگذرد، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

۱۲.۱ قضیه. فرض کنید S یک دایره بر $\sum$ و T تصویرش بر $\mathbb{C}$ باشد. آن گاه

الف) اگر S شامل $(۱, ۰, ۰)$ باشد، T یک خط است؛

ب) اگر S شامل $(۱, ۰, ۰)$ نباشد، T یک دایره است.

عکس قضیهٔ ۱۲.۱ نیز درست است. اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. (تمرین ۱۹ را ببینید.)

تمرینات

۱) اعداد مختلط زیر را به صورت $a+bi$ بنویسید:

(الف) $\frac{۱}{۶+۲i}$ (ب) $\frac{(۲+i)(۳+۲i)}{۱-i}$

(ج) $(-\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۴}$ (د) $i^{۲}, i^{۳}, i^{۴}, i^{۵}, \ldots$

۲) دو مقدار $\sqrt{-۸+۶i}$ را (در مختصات دکارتی) بیابید.

۳) معادلهٔ $z^{۲}+\sqrt{۳۲}iz-۶i=۰$ را حل کنید.

۴) اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\overline{z_۱+z_۲}=\bar{z}_۱+\bar{z}_۲$.

ب) $\overline{z_۱ z_۲}=\bar{z}_۱\bar{z}_۲$.

ج) به ازای هر چندجمله‌ای P با ضرایب حقیقی، $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$.

د) $\bar{\bar{z}}=z$.

۵) فرض کنید که P یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید که $P(z)=۰$ اگروفقط‌اگر $P(\bar{z})=۰$. [یعنی، صفرهای چندجمله‌ایهای «حقیقی» به صورت زوجهای مزدوج می‌باشند].

۶) ابتدا با استفاده از مختصات دکارتی و سپس مختصات قطبی، ثابت کنید که $|z|^{۲}=|z^{۲}|$.

۷) نشان دهید که

الف) $|z^n| = |z|^n$.

ب) $|z|^۲ = z\bar{z}$.

ج) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ (تحت چه شرایطی تساوی برقرار می‌شود؟)

۸) (الف) جزئیات برهان زیر از نامساوی مثلث را تکمیل کنید:

$$\begin{aligned}|z_۱ + z_۲|^۲ &= (z_۱ + z_۲)(\bar{z}_۱ + \bar{z}_۲)\\ &= |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ + z_۱\bar{z}_۲ + \bar{z}_۱ z_۲\\ &= |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ + ۲\operatorname{Re}(z_۱\bar{z}_۲)\\ &\leq |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ + ۲|z_۱||z_۲|\\ &= (|z_۱| + |z_۲|)^۲\end{aligned}$$

(ب) تحت چه شرایطی تساوی اتفاق می‌افتد؟

(ج) نشان دهید که $|z_۱ - z_۲| \geq |z_۱| - |z_۲|$.

۹) فرض کنید $z = x + iy$. ارتباط بین $\operatorname{Arg} z$ و $\tan^{-۱} y/x$ را بیان کنید (اخطار: این دو با هم یکی نیستند.)

۱۰) معادلات زیر را در مختصات قطبی حل کنید و جوابها را در صفحهٔ مختلط مشخص کنید.

الف) $z^۶ = ۱$.

ب) $z^۴ = -۱$.

ج) $z^۴ = -۱ + \sqrt{۳}i$.

*۱۱) نشان دهید که ریشهٔ nام واحد (غیر از واحد) در معادلهٔ «دایره بری» زیر صدق می‌کند

$$z^{n-۱} + z^{n-۲} + \cdots + z + ۱ = ۰$$

[راهنمایی: از اتحاد $z^n - ۱ = (z - ۱)(z^{n-۱} + z^{n-۲} + \cdots + z + ۱) = ۰$ استفاده کنید.]

*۱۲) $n - ۱$ قطر یک n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد را که از اتصال یک رأس به بقیهٔ رأسها به دست می‌آیند در نظر بگیرید. نشان دهید که حاصلضرب طولهای آنها n است.
[راهنمایی: فرض کنید همهٔ رأسها به ۱ وصل شده است و تمرین قبلی را به کار برید.]

۱۳) مجموعه‌هایی را که نقاط آنها در روابط زیر صدق می‌کنند توصیف کنید. کدام یک از این مجموعه‌ها ناحیه هستند؟

(الف) $|z-i| < ۱$ (ب) $\left|\frac{z-۱}{z+۱}\right| = ۱$

(ج) $|z-۲| > |z-۳|$ (د) $\operatorname{Im} z > ۰, |z| < ۱$

(هـ) $\frac{۱}{z} = \bar{z}$ (و) $|z|^۲ = \operatorname{Im} z$

(ز) $|z^۲ - ۱| < ۱$ [راهنمایی: مختصات قطبی]

*۱۴) فرض کنید $\operatorname{Arg} w$ مقدار شناسه بین $-\pi$ و π باشد (شامل $-\pi$ و π). نشان دهید که

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}, & \text{اگر } \operatorname{Im} z > ۰ \\ -\frac{\pi}{۲}, & \text{اگر } \operatorname{Im} z < ۰ \end{cases}$$

که در آن z نقطه‌ای بر دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ است.

۱۵) نشان دهید که

الف) $f(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} kz^k$ بر $|z| < ۱$ پیوسته است.

ب) $g(z) = \sum_{k=۱}^{\infty} ۱/(k^۲ + z)$ بر نیم صفحهٔ راست $\operatorname{Re} z > ۰$ پیوسته است.

۱۶) ثابت کنید هر مجموعهٔ همبند چند ضلعی، همبند است.

۱۷) فرض کنید

$$S = \{x + iy : y = \sin\frac{۱}{x}, x > ۰ \text{ یا } x = ۰\}$$

نشان دهید S همبند است، اگر چه نقاطی در S موجودند که آنها را نمی‌توان به کمک هیچ منحنی در S به هم وصل کرد.

۱۸) فرض کنید $S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \sum : \zeta \geq \zeta_۰\}$، که در آن $۰ < \zeta_۰ < ۱$ و فرض کنید T مجموعهٔ متناظر در $\mathbb{C}$ باشد. نشان دهید که T خارج دایرهٔ به مرکز o است.

۱۹) فرض کنید $T \subset \mathbb{C}$. نشان دهید که مجموعهٔ متناظر $S \subset \sum$

الف) یک دایره است اگر T دایره باشد.

ب) یک دایره منهای $(۰, ۰, ۱)$ است اگر T یک خط باشد.

۲۰) فرض کنید P یک چندجمله‌ای غیرثابت برحسب z باشد. نشان دهید $P(z) \to \infty$ وقتی که $z \to \infty$.

۲۱) فرض کنید z تصویر گنج نگاری (ξ, η, ζ) و $\frac{1}{z}$ تصویر (ξ', η', ζ') باشد.

الف) نشان دهید که $(\xi', \eta', \zeta') = (\xi, -\eta, 1 - \zeta)$.

ب) نشان دهید که تابع $\frac{1}{z}$، $z \in \mathbb{C}$ ، روی $\sum$ با دورانی به اندازهٔ 180° درجهٔ حول قطر با نقاط انتهایی $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ و $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ نشان داده می‌شود.

*۲۲) با استفاده از تمرین (۲۱)، نشان دهید که $f(z) = \frac{1}{z}$ دوایر و خطوط در $\mathbb{C}$ را به دوایر و خطوط دیگر می‌نگارد.

فصل دوم

توابع متغیر مختلط z

۱.۲ مقدمه

می‌خواهیم مفهوم «تابعی از z» را، که در آن z یک متغیر مختلط است، مورد بررسی قرار دهیم. برای اطمینان خاطر، هر متغیر مختلط چیزی نیست جز زوجی از متغیرهای حقیقی که از این رو، به یک معنی، تابعی از z صرفاً تابعی‌از دو متغیر حقیقی است. این نقطهٔ نظری بود که در آخرین بخش فصل اوّل در بحث توابع پیوسته داشتیم. ولی می‌توان گفت که این نقطهٔ نظر خیلی کلی است. توابعی هستند که مستقیماً تابعی از $z = x + iy$ هستند و نه صرفاً تابعی از دو قسمت مجزای x و y.

مثلاً، تابع $x^۲ - y^۲ + ۲ixy$ را در نظر بگیرید. این تابعی از $x + iy$ است، زیرا $x^۲ - y^۲ + ۲ixy = (x + iy)^۲$؛ در واقع، تابع مجذور کامل است. از سوی دیگر، با مختصر تغییری تابع $x^۲ + y^۲ - ۲ixy$ را خواهیم داشت که به صورت یک چندجمله‌ای از $x + iy$ قابل بیان نیست. از این رو، ما به این سمت رهنمون می‌شویم که ردهٔ خاصی از توابع را مشخص کنیم، آنهایی که مستقیماً یا

صریحاً یا به طور تحلیلی بر حسب $x + iy$ بیان می‌شوند. زمانی که سرانجام یک تعریف دقیق عرضه شود، خواهیم دید که این توابع را «توابع تحلیلی» می‌نامند. در حال حاضر، بحث خود را به چندجمله‌ایها محدود می‌کنیم.

۲.۲ چندجمله‌ایهای تحلیلی

۱.۲ تعریف. چندجمله‌ای $P(x, y)$ را تحلیلی می‌نامند در صورتی که ثابتهایی (مختلط) مانند α_k بتوان یافت که

$$P(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1(x+iy) + \alpha_2(x+iy)^2 + \cdots + \alpha_N(x+iy)^N$$

در این صورت می‌گوییم که P یک چندجمله‌ای برحسب z است و می‌نویسیم

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_N z^N$$

درواقع، $x^2 - y^2 + 2ixy$ تحلیلی است. از سوی دیگر، به طوری که در بالا ذکر شد، $x^2 + y^2 - 2ixy$ تحلیلی نیست، و حالا این ادعا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که

$$x^2 + y^2 - 2ixy \equiv \sum_{k=0}^{N} \alpha_k (x+iy)^k$$

اگر قرار دهیم $y = 0$، خواهیم داشت

$$x^2 \equiv \sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^k$$

یا

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + (\alpha_2 - 1)x^2 + \cdots + \alpha_N x^N \equiv 0$$

با انتخاب $x = 0$ نتیجه می‌شود $\alpha_0 = 0$؛ از تقسیم بر x و مجدداً انتخاب $x = 0$ نتیجه می‌شود $\alpha_1 = 0$، و هکذا. نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_N = 0$$

$$\alpha_2 = 1$$

لهذا، فرض

$$x^۲ + y^۲ - ۲ixy = \sum_{k=۰}^{N} \alpha_k (x+iy)^k$$

به تساوی

$$x^۲ + y^۲ - ۲ixy = (x+iy)^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲ixy$$

می‌انجامد که مسلماً نادرست است.

مختصری تجربه و استفاده از روش فوق (قرار دادن $y = ۰$ و «مقایسهٔ ضرایب») نشان می‌دهد که چندجمله‌ایهای تحلیلی بسیار کمیاب هستند. یک چندجمله‌ای $P(x,y)$، که به طور تصادفی انتخاب شده باشد، به ندرت می‌تواند تحلیلی باشد.

مثال. به ازای هیچ انتخاب چندجمله‌ای حقیقی ـ مقدار $v(x,y)$، چندجمله‌ای $x^۲ + iv(x,y)$ تحلیلی نیست. زیرا، یک چندجمله‌ای از z فقط وقتی می‌تواند دارای یک قسمت حقیقی از درجهٔ ۲ برحسب x باشد که به صورت $az^۲ + bz + c$ باشد و $a \neq ۰$. معذالک، در این حالت، قسمت حقیقی شامل یک جملهٔ $y^۲$ نیز باید باشد.

روش دیگر تشخیص چندجمله‌ایهای تحلیلی. روش مقایسهٔ ضرایب روش کاملاً مناسبی بود برای تحقیق در این که چندجمله‌ای مفروضی تحلیلی هست یا نه. این روش را، که به آن اشاره کردیم، می‌توان در یک جمله خلاصه کرد: $P(x,y)$ تحلیلی است اگروفقط‌اگر $P(x,y) = P(x+iy, ۰)$. معذالک، انتظار داریم دردسر زمانی شروع شود که بخواهیم مفهوم «تحلیلی» را به ماورای چندجمله‌ایها تعمیم دهیم. آنچه در مورد چندجمله‌ایها خیلی ساده است در مورد توابع کلیتر بسیار دشوار است. می‌توانیم $P(x+iy, ۰)$ را با اعمال سادهٔ حسابی محاسبه کنیم، ولی منظور از $f(x+iy, ۰)$ چیست؟ مثلاً، اگر $f(x,y) = \cos x + i \sin y$ آن‌گاه $f(x, ۰) = \cos x$. امّا منظور از $\cos(x+iy)$ چیست؟ آنچه لازم است ابزار دیگری برای تشخیص چندجمله‌ایهای تحلیلی است. برای این منظور، به یک وضعیت آشنا از متغیرهای حقیقی برمی‌گردیم. فرض کنید سؤال ما این است که چندجمله‌ای $P(x,y)$ کی تابع متغیر $x + ۲y$ است؟ مجدداً، جواب سؤال می‌تواند در جوهر روش قبلی نهفته باشد، یعنی: $P(x,y)$ تابعی از $x + ۲y$ است اگروفقط‌اگر $P(x,y) = P(x+۲y, ۰)$. ولی جواب را برحسب مشتقات جزئی نیز می‌توان ارائه کرد! اگر x به اندازهٔ ε تغییر کند، تابع $x + ۲y$ دستخوش همان تغییر است که y به اندازهٔ $\varepsilon/۲$ تغییر کند و این دقیقاً بدان معنی است که مشتق جزئی این تابع نسبت به y دو برابر مشتق جزئی آن نسبت به x باشد. یعنی $P(x,y)$ تابعی از $x + ۲y$ است اگروفقط‌اگر $P_y = ۲P_x$.

البته، «۲» را می‌توانیم با هر عدد حقیقی دیگر تعویض کنیم و گزارهٔ کلیتری را نتیجه بگیریم: $P(x,y)$ تابعی از $x+\lambda y$ است اگروفقط‌اگر $P_y = \lambda P_x$.

در واقع، در مورد چندجمله‌ایها، می‌توان محدودیت حقیقی بودن λ را نادیده گرفت، که به قضیهٔ زیر منجر می‌شود.

۲.۲ تعریف. فرض کنید $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ که در آن u و v توابع حقیقی ـ مقدار هستند. مشتقات جزئی f_x و f_y، به ترتیب، $u_x + iv_x$ و $u_y + iv_y$ تعریف می‌شوند؛ مشروط بر این که موجود باشند.

۳.۲ قضیه. چندجمله‌ای $P(x,y)$ تحلیلی است اگروفقط‌اگر $P_y = iP_x$.

برهان. لزوم شرط را می‌توان مستقیماً ثابت کرد. جزئیات را به عنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم. برای اثبات کفایت، توجه می‌کنیم که اگر

$$P_y = iP_x$$

آن گاه این شرط باید جداگانه برای هر جمله با درجهٔ ثابت برقرار باشد. فرض کنید P دارای جمله درجهٔ nـم به شکل زیر باشد

$$Q(x,y) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1}y + c_2 x^{n-2}y^2 + \cdots + c_n y^n$$

چون

$$Q_y = iQ_x$$

آن گاه

$$\begin{aligned} c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2}y + \cdots + nc_n y^{n-1} \\ = i[nc_0 x^{n-1} + (n-1)c_1 x^{n-1}y + \cdots + c_{n-1}y^{n-1}] \end{aligned}$$

با مقایسهٔ ضرایب، خواهیم داشت

$$c_1 = inc_0 = i\binom{n}{1}c_0$$
$$c_2 = \frac{i(n-1)}{2}c_1 = i^2\frac{n(n-1)}{2}c_0 = i^2\binom{n}{2}c_0,$$

و به طور کلّی

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_\circ$$

و در نتیجه

$$Q(x,y) = \sum_{k=\circ}^{n} c_k x^{n-k} y^k = c_\circ \sum_{k=\circ}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(iy)^k$$
$$= c_\circ (x+iy)^n$$

که نشان می‌دهد که P تحلیلی است. □

شرط $f_y = if_x$ گاهی برحسب اجزای حقیقی و موهومی f بیان می‌شود. یعنی، اگر $f = u + iv$ آن گاه

$$f_x = u_x + iv_x$$
$$f_y = u_y + iv_y$$

و معادلهٔ $f_y = if_x$ معادل معادلات زیر است

$$u_x = v_y; \qquad u_y = -v_x \tag{۱}$$

این معادلات را معمولاً معادلات کوشی ـ ریمان می‌نامند.

مثال ۱. یک چندجمله‌ای غیرثابت تحلیلی نمی‌تواند حقیقی ـ مقدار باشد، زیرا اگر P حقیقی ـ مقدار باشد آن گاه P_x و P_y حقیقی ـ مقدارند و معادلات کوشی ـ ریمان برقرار نخواهد بود.

مثال ۲. با استفاده از معادلات کوشی ـ ریمان، می‌توان نشان داد که $x^۲ - y^۲ + ۲ixy$ تحلیلی است در حالی که $x^۲ + y^۲ - ۲ixy$ تحلیلی نیست.

بالاخره، توجه می‌کنیم که چندجمله‌ایهای برحسب z دارای خاصیت دیگری هستند که آنها را به عنوان تابعی از z متمایز می‌سازد: از آنها می‌توان مستقیماً برحسب z مشتق گرفت. ذیلاً این جمله را دقیقتر بیان می‌کنیم.

۴.۲ تعریف. تابع مختلط ـ مقدار f، که در یک همسایگی از z تعریف شده است، در z مشتق‌پذیر نامیده می‌شود در صورتی که

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

موجود باشد. در این صورت، حد موجود را با $f'(z)$ نشان می‌دهند.

اهمیّت دارد که توجه کنیم که در تعریف ۴.۲، h ضرورتاً حقیقی نیست. بنابراین، وجود حد باید مستقل از نحوهٔ میل کردن h به 0 در صفحهٔ مختلط باشد. مثلاً، $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطهٔ z مشتق‌پذیر نیست، زیرا

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\bar{h}}{h}$$

که اگر h حقیقی باشد ۱ است و اگر h موهومی محض باشد ۱− است.

۵.۲ قضیه. اگر f و g هر دو در z مشتق‌پذیر باشند، آن گاه

$$h_1=f+g$$
$$h_2=fg$$

نیز در z مشتق‌پذیرند؛ و اگر $g(z)\neq 0$ آن گاه

$$h_3=\frac{f}{g}$$

هم در z مشتق‌پذیر است.

به ترتیب مذکور،

$$h_1'(z)=f'(z)+g'(z)$$
$$h_2'(z)=f'(z)g(z)+g'(z)f(z)$$
$$h_3'(z)=[f'(z)g(z)-f(z)g'(z)]/g^2(z)$$

برهان. تمرین ۵.

۶.۲ قضیه. اگر $P(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_N z^N$، آن گاه P در هر نقطهٔ z مشتق‌پذیر است و

$$P'(z)=\alpha_1+2\alpha_2 z+\cdots+N\alpha_N z^{N-1}$$

برهان. تمرین ۶ را ببینید.

۳.۲ سریهای توانی

اکنون ردهٔ وسیعتری از توابع z را که با «سریهای توانی» برحسب z تعریف می‌شوند مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۷.۲ تعریف. هر سری نامتناهی به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ یک سری توانی برحسب z است.

برای مطالعهٔ همگرایی سریهای توانی، مفهوم حد اعلی را برای دنباله‌های حقیقی ـ مقدار مثبت یادآوری می‌کنیم. یعنی،

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_k)$$

چون $\sup_{k\geq n} a_k$ تابعی نانزولی از n است، حداعلی همواره موجود یا $+\infty$ است. خواّصی از حداعلی که مورد علاقهٔ ما هستند ذیلاً ذکر می‌شوند.

اگر $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$ آن گاه

الف) به ازای هر N و هر $\varepsilon > 0$، $k > N$یی وجود دارد که $a_k \geq L - \varepsilon$؛

ب) به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، Nی وجود دارد که به ازای هر $k > N$ داشته باشیم $a_k \leq L + \varepsilon$.

۸.۲ قضیه. فرض کنید $\overline{\lim} |C_k|^{\frac{1}{k}} = L$.

۱) اگر $L = 0$، سری $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ به ازای هر z همگرا است.

۲) اگر $L = \infty$، سری $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z_k$ فقط به ازای $z = 0$ همگرا است.

۳) اگر $0 < L < \infty$، قرار دهید $R = \frac{1}{L}$. آن گاه $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ به ازای $|z| < R$ همگرا و به ازای $|z| > R$ واگرا است. (R شعاع همگرایی سری توانی نامیده می‌شود.)

برهان.

۱) $L = 0$

به ازای هر $z \neq 0$، Nی وجود دارد که اگر $k > N$ آن گاه

$$|C_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{2|z|}$$

که در این صورت،

$$|C_k z^k| \le \frac{۱}{۲^k}$$

و نتیجه می‌شود که سری $\sum_{k=۰}^{\infty} |C_k z^k|$ همگرا است؛ از این رو، بنابه آزمون همگرایی مطلق، $\sum_{k=۰}^{\infty} C_k z^k$ همگرا است.

۲) $L = \infty$

به‌ازای هر $z \ne ۰$، بی‌نهایت بار

$$|C_k|^{\frac{۱}{k}} \ge \frac{۱}{|z|}$$

بنابراین، بی‌نهایت بار $|C_k z^k| \ge ۱$؛ یعنی، دنبالهٔ جمل سری به صفر میل نمی‌کند و لذا سری واگرا است. (این که سری به ازای $z = ۰$ همگرا است واضح است.)

۳) $۰ < L < \infty$. قرار می‌دهیم $R = ۱/L$.

ابتدا فرض کنید که $|z| < R$ و قرار دهید $|z| = R - ۲\delta$. آن گاه، چون

$$\overline{\lim}|C_k|^{\frac{۱}{k}} = \frac{۱}{R}$$

به ازای k به اندازهٔ کافی بزرگ

$$|C_k|^{\frac{۱}{k}} \le \frac{۱}{R-\delta}$$

بنابراین

$$|C_k z^k| \le \left(\frac{R-۲\delta}{R-\delta}\right)^k$$

که در این صورت، مانند حالت (۱)، می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{k=۰}^{\infty} C_k z^k$ همگرا است.

از طرف دیگر، اگر $|z| > R$ فرض کنید $|z| = R + \delta$. آن گاه، چون بی‌نهایت بار

$$|C_k|^{\frac{۱}{k}} \ge \frac{۱}{R+\delta}$$

$C_k z^k$ به ۰ همگرا نیست و لذا سری واگرا است. □

توجه کنید که اگر $\sum_{k=۰}^{\infty} C_k z^k$ دارای شعاع همگرایی R باشد، این سری در قرص کوچکتر $|z| \le R-\delta$ به طور یکنواخت همگرا است؛ زیرا، در این صورت،

$$\sum_{k=۰}^{\infty} |C_k z^k| \le \sum_{k=۰}^{\infty} |C_k|(R-\delta)^k$$

که همگرا است. بنابراین، هر سری توانی در حوزهٔ همگرایی خود پیوسته است. (قضیهٔ ۹.۱ را ببینید.)

هر سه شرط بالا را می‌توان به این صورت ترکیب کرد که هر سری توانی در داخل قرصی به شعاع

$$R = ۱/\overline{\lim}|C_k|^{\frac{۱}{k}}$$

همگرا است. در این جا $R = ۰$ به این معنی است که سری فقط در $z = ۰$ همگرا است و $R = \infty$ به این معنی است که این سری به ازای هر z همگرا است. در حالتی که $۰ < R < \infty$، اگرچه این قضیه ما را مطمئن می‌کند که سری به ازای $|z| > R$ واگرا است، چیزی در مورد رفتار سری بر روی دایرهٔ همگرایی $|z| = R$ بیان نمی‌کند. چنان که مثالهای زیر نشان می‌دهند، امکان دارد که سری مفروض در هر یا بعضی از نقاط واقع بر دایرهٔ همگرایی‌اش همگرا باشد یا اصلاً در هیچ یک از این نقاط همگرا نباشد.

امثله

۱) چون $n^{\frac{۱}{n}} \to ۱$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} nz^n$ به ازای $|z| < ۱$ همگرا و به ازای $|z| > ۱$ واگرا است. این سری به ازای $|z| = ۱$ واگرا است؛ زیرا، در این صورت، $|nz^n| = n \to \infty$. (تمرین ۷ را ببینید.)

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{z^n}{n^۲}$ نیز دارای شعاع همگرایی مساوی ۱ است. در این مثال، این سری به ازای هر z واقع بر دایرهٔ همگرایی‌اش همگرا است؛ زیرا، به ازای $|z| = ۱$،

$$\left|\frac{z^n}{n^۲}\right| = \frac{۱}{n^۲}$$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ دارای شعاع همگرایی ۱ است. در این مثال، این سری در تمام نقاط دایرهٔ همگرایی‌اش همگرا است مگر در $z = ۱$. (تمرین ۱۱ را ببینید.)

۴) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ به ازای هر z همگرا است، زیرا

$$\frac{۱}{(n!)^{\frac{۱}{n}}} \to ۰$$

(تمرین ۱۲ را ببینید.)

۵) $\sum_{n=۰}^{\infty} [۱ + (-۱)^n] z^n$ دارای شعاع همگرایی $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا $\overline{\lim}[۱ + (-۱)^n] = ۲$.

۶) سری $\sum_{n=۰}^{\infty} z^{n^۲} = ۱ + z + z^۴ + z^۹ + z^{۱۶} + \ldots$ دارای شعاع همگرایی ۱ است. در این حالت، $\overline{\lim}|C_n|^{\frac{۱}{n}} = ۱$.

۷) هر سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ با این شرط که همواره $C_n = \pm 1$ دارای شعاع همگرایی ۱ است.

به سهولت دیده می‌شود که مجموع دو سری توانی همگرا، همگرا است. در واقع، از تعریف سریهای توانی مستقیماً نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

به طریق مشابه، اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = B$ ، حاصلضرب کوشی این دو، که با $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ تعریف می‌شودکه در آن $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$، به ازای مقادیر مناسب z به AB همگرا است. اثبات این احکام مانند اثبات احکام مشابه در مورد سریهای توانی «حقیقی» است که در تمرینات ۱۴ و ۱۵ به اجمال آمده است.

۴.۲ مشتق پذیری و یکتایی سریهای توانی

حال نشان می‌دهیم که سریهای توانی، نظیر چند جمله‌ایها، توابعی مشتق‌پذیر از z هستند. فرض کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ در قرصی مانند $D(0; R)$ با $R > 0$ همگرا باشد. آن گاه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1}$ که از مشتق‌گیری جمله‌به‌جملهٔ سری $\sum C_n z^n$ به دست آمده است در $D(0; R)$ همگرا است؛ زیرا

$$\overline{\lim}|nC_n|^{\frac{1}{n-1}} = \overline{\lim}(|nC_n|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim}|C_n|^{\frac{1}{n}}$$

۹.۲ قضیه. فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ به ازای $|z| < R$ همگرا باشد. آن گاه $f'(z)$ در سرتاسر $|z| < R$ موجود و برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1}$.

برهان. این قضیه را در دو مرحله ثابت خواهیم کرد. اوّلاً، فرض خواهیم کرد که $R = \infty$؛ سپس، حالت کلیتر را مورد بررسی قرار خواهیم داد. البته، حالت دوم شامل حالت اول نیز می‌شود. از این رو، خوانندهٔ مشتاق می‌تواند برهان اول را نادیده بگیرد. ما این برهان را می‌آوریم، زیرا شامل ایده‌های کلیدی است و جزئیات کسل کنندهٔ کمتری دارد.

حالت (۱). فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ به ازای هر z همگرا است. در این صورت،

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{[(z+h)^n - z^n]}{h}$$

و

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} C_n b_n$$

که وقتی $|h| \leq 1$

$$\begin{aligned} |b_n| &= |\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}| \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k}| \leq |h| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \\ &= |h|(|z|+1)^n \end{aligned}$$

بنابراین، به ازای $|h| \leq 1$،

$$\begin{aligned} |\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1}| &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|(|z|+1)^n \\ &\leq A|h| \end{aligned}$$

چون $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| z^n$ به ازای هر z همگرا است. وقتی $h \to 0$، نتیجه می‌گیریم که

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1}$$

حالت (۲). می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} C_n b_n$$

که در آن

$$b_n = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k}$$

اگر $z = 0$ آن گاه $b_n = h^{n-1}$ و حکم مطلوب به‌آسانی نتیجه می‌شود. در غیر این صورت، برای تعیین تخمین مفیدی برای b_n دقت بیشتری لازم است. توجه می‌کنیم که به ازای $k \geq 2$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \leq n^2 \binom{n}{k-2}$$

بنابراین، به ازای $z \neq 0$،

$$\begin{aligned}|b_n| &\leq \frac{n^2|h|}{|z|^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k-2}|h|^{k-2}|z|^{n-(k-2)}\\ &\leq \frac{n^2|h|}{|z|^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}|h|^{j}|z|^{n-j}\\ &= \frac{n^2|h|}{|z|^2}(|z|+|h|)^n\\ &\leq \frac{n^2|h|}{|z|^2}(R-\delta)^n\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\sum_{n=0}^{\infty}nC_nz^{n-1}\right| &\leq \frac{|h|}{|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}n^2|C_n|(R-\delta)^n\\ &\leq A|h|\end{aligned}$$

زیرا $z \neq 0$ ثابت است و $\sum_{n=0}^{\infty} n^2|C_n|z^n$ به ازای $|z| < R$ نیز همگرا است. دوباره، با فرض $h \to 0$، نتیجه می‌گیریم که $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nC_nz^{n-1}$.$\square$

مثال. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ به ازای هر z همگرا است و، مطابق قضیهٔ ۹.۲،

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = f(z)$$

۱۰.۲ نتیجه. سریهای توانی در قلمرو همگرایی خود بی‌نهایت بار مشتق پذیرند.

برهان. با اعمال نتایج بالا در مورد $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nC_nz^{n-1}$، که دارای شعاع همگرایی سری همگرا به f است، می‌بینیم که f دوبار مشتق‌پذیر است. به استقرا دیده می‌شود که $f^{(n)}$ به ازای هر n موجود است.

۱۱.۲ نتیجه. اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_nz^n$ دارای شعاع همگرایی ناصفر باشد، آن گاه

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{به ازای هر } n،$$

برهان. بنا به تعریف، $f(\circ) = C_\circ$، مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله از سری توانی نتیجه می‌دهد

$$f'(z) = C_1 + 2C_2 z + 3C_3 z^2 + \dots$$

که مستلزم

$$f'(\circ) = C_1$$

است. به طور مشابه،

$$f^{(n)}(z) = n!C_n + (n+1)!C_{n+1}z + \frac{(n+2)!}{2!}C_{n+2}z^2 + \dots$$

که اگر قرار دهیم $z = \circ$ حکم مطلوب به دست می‌آید. □

به استناد نتیجهٔ ۱۱.۲، اگر یک سری توانی در یک همسایگی مبداء صفر باشد، باید متحد با صفر باشد؛ زیرا، در این صورت، همهٔ مشتقاتش در مبداء و، از این رو، تمام ضرایب سری مساوی ∘ خواهند بود. به همین دلیل، اگر یک سری توانی دربازه‌ای شامل مبداء صفر باشد متحد با صفر خواهد بود. حتی حکم قویتری در زیر ثابت خواهد شد.

۱۲.۲ قضیهٔ یکتایی سریهای توانی. فرض کنید $\sum_{n=\circ}^{\infty} C_n z^n$ در تمام نقاط دنبالهٔ ناصفر $\{z_k\}$ که به صفر همگرا است صفر باشد. در این صورت، سری توانی متحد با صفر است.

[توجه: اگر قرار دهیم $f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} C_n z^n$ ، از پیوستگی سری توانی نتیجه می‌شود که $f(\circ) = \circ$. با بحث مشابه نتیجه می‌شود که $f'(\circ) = \circ$؛ البته، بحث مختصر متفاوتی لازم است تا نشان دهیم که ضرایب دیگر نیز ∘ هستند.]

برهان. فرض کنید

$$f(z) = C_\circ + C_1 z + C_2 z^2 + \dots$$

بنا به پیوستگی f در مبداء،

$$C_\circ = f(\circ) = \lim_{z \to \circ} f(z) = \lim_{k \to \infty} f(z_k) = \circ$$

ولی، در این صورت، تابع

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \dots$$

نیز در مبداء پیوسته است و

$$C_1 = g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k} = 0$$

به طریق مشابه، اگر به ازای $n > j > 0$ داشته باشیم $C_j = 0$، آن گاه

$$C_n = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^n} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k^n} = 0$$

از این رو، سری توانی متحد با صفر است. □

۱۳.۲ نتیجه. اگر یک سری توانی در تمام نقاط مجموعه‌ای با یک نقطهٔ انباشتگی در مبداء صفر باشد، سری توانی متحد با صفر است.

برهان. تمرین ۱۷ را ببینید.

قضیهٔ یکتایی نام خود را از نتیجهٔ زیر اخذ می‌کند.

۱۴.۲ نتیجه. اگر $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ بر مجموعه‌ای با یک نقطهٔ انباشتگی در مبداء همگرا و یکسان باشند، آن گاه همواره $a_n = b_n$.

برهان. ۱۳.۲ را در مورد

$$\sum (a_n - b_n) z^n$$

به کار برید. □

بسط سری توانی حول $z = \alpha$. همهٔ نتایج قبلی در مورد سری‌های توانی را می‌توان به سری توانی به شکل زیر تعمیم داد

$$\sum C_n (z_n - \alpha)^n.$$

مثلاً، با جایگزینی سادهٔ $w = z - \alpha$ در می‌یابیم که این سری در قرصی به مرکز $z = \alpha$ و شعاع R، که $R = 1/\overline{\lim}|C_n|^{\frac{1}{n}}$، همگرا و در سرتاسر $|z - \alpha| < R$ مشتق‌پذیر است. (تمرینات ۱۹ و ۲۰).

تمرینات

۱) برهان قضیهٔ ۳.۲ را با اثبات این حکم تکمیل کنید که اگر P یک چندجمله‌ای تحلیلی باشد آن گاه $P_y = iP_x$.

[راهنمایی: ابتدا این حکم را در مورد تک جمله‌ایها ثابت کنید.]

۲) با مقایسهٔ ضرایب یا استفاده از معادلات کوشی ـ ریمان، مشخص کنید که کدام یک از چندجمله‌ایهای زیرتحلیلی هستند.

الف) $P(x+iy) = x^۳ - ۳xy^۲ - x + i(۳x^۲y - y^۳ - y)$

ب) $P(x+iy) = x^۲ + iy^۲$

ج) $P(x+iy) = ۲xy + i(y^۲ - x^۲)$

۳) نشان دهید که هیچ چندجمله‌ای تحلیلی غیر ثابت وجود ندارد که فقط مقادیر موهومی را اختیار کند.

۴) مشتق $P'(z)$ از چندجمله‌ایهای تحلیلی در (۲) را بیابید. نشان دهید که در هر حالت $P'(z) = P_x$ توضیح دهید.

۵) قضیهٔ ۵.۲ را با بحثی نظیر حالت حقیقی ـ مقدار ثابت کنید.

۶) قضیهٔ ۶.۲ را ثابت کنید. [راهنمایی: آن را در مورد تک جمله‌ایها ثابت و قضیهٔ ۵.۲ را اعمال کنید.]

۷) با بررسی $\log S_n$، نشان دهید که $S_n = n^{\frac{۱}{n}} \to ۱$ وقتی که $n \to \infty$.

۸) شعاع همگرایی سریهای توانی زیر را بیابید

الف) $\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۲^n)z^n$ ب) $\sum_{n=۰}^{\infty} z^{n!}$

۹) فرض کنید $\sum C_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R باشد. شعاع همگرایی سریهای زیر را بیابید.

الف) $\sum n^p C_n z^n$ ب) $\sum |C_n| z^n$ ج) $\sum C_n^۲ z^n$

۱۰) فرض کنید $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$، به ترتیب، دارای شعاع همگرایی $R_۱$ و $R_۲$ باشند. در مورد شعاع همگرایی $\sum(a_n+b_n)z^n$ چه می‌توان گفت؟ با یک مثال، نشان دهید که شعاع همگرایی این سری می‌تواند بزرگتر از $R_۱$ و $R_۲$ باشد.

۱۱) نشان دهید که $\sum_{n=۱}^{\infty} z^n/n$ در تمام نقاط روی دایرهٔ واحد همگرا است مگر در $z = ۱$. [راهنمایی: فرض کنید $z = \operatorname{cis}\theta$ و اجزای حقیقی و موهومی را به طور جداگانه تحلیل کنید.]

۱۲) الف) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = L$$

نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{۱}{n}} = L$.

ب) با استفاده از (الف)، ثابت کنید که $\left(\frac{۱}{n!}\right)^{\frac{۱}{n}} \to ۰$.

۱۳) با استفاده از حکم (الف) تمرین ۱۲، شعاع همگرایی سریهای زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$ د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$

۱۴) فرض کنید $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ و $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$. بعلاوه، فرض کنید که هر یک از سریها به طور مطلق همگرا باشد. نشان دهید که اگر

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

آن گاه

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = AB$$

چکیدهٔ برهان. از همگرایی $\sum |a_k|$ و $\sum |b_k|$ نتیجه بگیرید که $\sum d_k$ با

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|$$

همگرا است. بالاخص، $d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots \to 0$ وقتی که $n \to \infty$. سپس، توجه کنید که اگر

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$

$$C_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$$

آن گاه $A_n B_n = C_n + R_n$، که در آن $|R_n| \le d_{n+1} + d_{n+2} + \cdots + d_{2n}$؛ و نتیجهٔ مطلوب از حدگیری، وقتی که $n \to \infty$، به دست می‌آید.

۱۵) فرض کنید $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$، به ترتیب، دارای شعاع همگرایی R_1 و R_2 باشند. نشان دهیدکه سری حاصلضرب کوشی $\sum C_n z^n$ به ازای $|z| < \min(R_1, R_2)$ همگرا است.

۱۶) الف) با استفاده از اتحاد

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^N) = 1 - z^{N+1}$$

نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad (|z| < 1)$$

ب) با تعیین حاصل ضرب کوشی سری $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ در خودش، مقدار $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ را بیابید.

۱۷) نتیجهٔ ۱۳.۲ را به این طریق ثابت کنید که نشان دهید که اگر مجموعهٔ S یک نقطهٔ انباشتگی در ۰ داشته باشد، شامل دنباله‌ای از جمل ناصفر است که به ۰ میل می‌کند.

۱۸) نشان دهید که هیچ سری توانی $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ وجود ندارد که

الف) $f(z)=1$ وقتی که $z=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$؛

ب) $f'(0)>0$.

۱۹) فرض کنید $\overline{\lim}|C_n|^{\frac{1}{n}}<\infty$. نشان دهید که اگر قرار دهیم

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-\alpha)^n$$

آن گاه

$$C_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

۲۰) ناحیهٔ همگرایی سریهای زیر را پیدا کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} n(z-i)^n$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(z+1)^n$

ج) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n$

فصل سوم

توابع تحلیلی

۱.۳ تحلیلی بودن و معادلات کوشی ـ ریمان

نشان داده شد که توابع مستقیم از z که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند ـ چندجمله‌ایها و سریهای توانی همگرا ـ توابعی مشتق‌پذیر از z هستند. حال به خاصیت مشتق‌پذیری و رابطهٔ آن با معادلات کوشی ـ ریمان به طور دقیقتر نظر می‌کنیم.

چنان که قبلاً ذکر کردیم (بعد از تعریف ۴.۲)، اگر f مشتق‌پذیر باشد آن گاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

باید موجود باشد بدون توجه به طریقهٔ میل کردن h به 0 در میان اعداد مختلط. نتیجهٔ فوری وجود این حد این است که مشتقات نسبی باید در معادلات کوشی ـ ریمان صدق کنند.

۱.۳ قضیه. اگر $f = u + iv$ در z مشتق‌پذیر باشد، f_x و f_y در این نقطه موجودند و در معادلات کوشی ـ ریمان

$$f_y = if_x$$

یا، به طور معادل،

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

صدق می‌کنند.

برهان. ابتدا فرض کنید که h با مقادیر حقیقی به ۰ میل کند. آن گاه

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \to f_x$$

از سوی دیگر، اگر h در امتداد محور موهومی به صفر میل کند آن گاه $h = i\eta$ و

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x,y+\eta)-f(x,y)}{i\eta} \to \frac{f_y}{i}$$

(تمرین ۱ را ببینید.) چون دو حد باید برابر باشند،

$$f_y = if_x$$

به طوری که در فصل ۲ ذکر کردیم، اگر قرار دهیم $f = u + iv$ آن گاه $f_y = if_x$ به صورت

$$u_y + iv_y = i(u_x + iv_x)$$

درمی‌آید و از این رو

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x. \qquad \square$$

عکس قضیهٔ فوق درست نیست. توابعی وجود دارند که در هیچ نقطه مشتق ندارند علیرغم این که مشتقات جزئی موجودند و در معادلات کوشی ـ ریمان صدق می‌کنند.

مثلاً، تابع

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^{۲}+y^{۲}} & z \neq ۰ \\ ۰ & z = ۰ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. f در نقاط واقع بر دو محور صفر است و از این رو در مبداء $f_x = f_y = ۰$، ولی

$$\lim_{z\to ۰} \frac{f(z)-f(۰)}{z} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^{۲}+y^{۲}}$$

موجود نیست؛ زیرا بر خط $y = \alpha x$

$$\frac{f(z)-f(۰)}{z} \equiv \frac{\alpha}{۱+\alpha^{۲}} \qquad (z \neq ۰)$$

از این رو، حد به α بستگی دارد!

معذالک، عکس گونه‌ای از این قضیه درست است.

۲.۳ قضیه. فرض کنید f_x و f_y در یک همسایگی از z موجود باشند. اگر f_x و f_y در z پیوسته باشند و در این نقطه $f_y = if_x$، آن گاه f در z مشتق‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $f = u + iv$، $h = \xi + i\eta$.

نشان می‌دهیم که وقتی $h \to ۰$،

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \to f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z)$$

به استناد قضیهٔ مقدار میانگین (برای توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی)، اعدادی مانند $\theta_۱$، $\theta_۲$، $\theta_۳$ و $\theta_۴$ با شرط

$$۰ < \theta_k < ۱, \qquad k = ۱,۲,۳,۴$$

موجودند به طوری که

$$\begin{aligned}\frac{u(z+h)-u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta)-u(x,y)}{\xi+i\eta}\\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta)-u(x+\xi,y)}{\xi+i\eta}\\ &\quad+\frac{u(x+\xi, y)-u(x,y)}{\xi+i\eta}\\ &= \frac{\eta}{\xi+i\eta}u_y(x+\xi, y+\theta_۱\eta)\\ &\quad+\frac{\xi}{\xi+i\eta}u_x(x+\theta_۲\xi, y)\end{aligned}$$

و

$$\frac{v(z+h)-v(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi+i\eta}v_y(x+\xi, y+\theta_۳\eta)+\frac{\xi}{\xi+i\eta}v_x(x+\theta_۴\xi, y)$$

از این رو،

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi+i\eta}[u_y(z_۱)+iv_y(z_۲)]+\frac{\xi}{\xi+i\eta}[u_x(z_۳)+iv_x(z_۴)]$$

که در آن $|z_k-z|\to ۰$ وقتی که $h\to ۰$ و $k=۱,۲,۳,۴$. چون در نقطهٔ z رابطهٔ $f_y=if_x$ برقرار است، $f_x(z)$ را به صورت

$$\frac{\eta}{\xi+i\eta}f_y+\frac{\xi}{\xi+i\eta}f_x$$

از کسر بالا کم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi+i\eta}[(u_y(z_۱)-u_y(z))+i(v_y(z_۲)-v_y(z))]\\ &\quad+\frac{\xi}{\xi+i\eta}[(u_x(z_۳)-u_x(z))+i(v_x(z_۴)-v_x(z))]\end{aligned}$$

بالاخره، چون

$$\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right|\le ۱,\qquad \left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right|\le ۱$$

و هر یک از عبارات داخل کروشه به ۰ میل می‌کند وقتی که $h\to ۰$، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f_x(z).\qquad\square$$

مثال. فرض کنید که $f(z) = |z|^{2} = x^{2} + y^{2}$. آن گاه $f_x = 2x$ و $f_y = 2y$. از این رو، f در هر نقطهٔ z دارای مشتقات جزئی پیوسته است. پس، بنا به قضیهٔ قبلی، f مشتق‌پذیر است اگروفقط‌اگر $f_y = if_x$. بنابراین، f فقط در $z = 0$ مشتق‌پذیر است.

اینک مفاهیم اساسی این مبحث را در قالب تعریف زیر می‌آوریم.

۳.۳ تعریف. f در z تحلیلی است اگر در یک همسایگی z مشتق‌پذیر باشد. به طریق مشابه، f بر مجموعهٔ S تحلیلی است اگر f در تمام نقاط یک مجموعهٔ باز شامل S مشتق‌پذیر باشد.

توجه کنید که این تعریف با تعریف ۱.۲ در مورد چندجمله‌ایهای تحلیلی سازگار است؛ زیرا قبلاً تذکر دادیم (قضیهٔ ۶.۲) که «چندجمله‌ایهای برحسب z» همه جا مشتق‌پذیرند. برعکس، اگر یک چندجمله‌ای P در نقطه‌ای مانند z تحلیلی باشد، لازم است که مشتقات جزئی P در سرتاسر یک همسایگی z در معادلات کوشی ـ ریمان صدق کنند. بنابراین، مانند قضیهٔ ۳.۲، نتیجه می‌شود که P باید یک «چندجمله‌ای برحسب z» باشد.

توابعی نظیر چندجمله‌ایها یا سریهای توانی همه جا همگرا، که همه جا مشتق‌پذیرند، توابع تام نامیده می‌شوند. به طوری که در قضایای ۵.۲ و ۶.۲ دیدیم، بسیاری از خواص مشتق‌پذیری شبیه خواص مشابه از توابع مشتق‌پذیر یک متغیر حقیقی است. همین طور، ترکیب توابع مشتق‌پذیر تابعی مشتق‌پذیر است (تمرین ۳). مانند حالت «حقیقی»، امکان دارد که معکوس یک تابع مشتق‌پذیر حتی پیوسته هم نباشد. معذالک، تحت شرایط مناسب، می‌توانیم مشتق‌پذیری توابع معکوس را بررسی کنیم.

۴.۳ تعریف. فرض کنید که S و T دو مجموعهٔ باز باشند و f تابعی ۱-۱ بر S باشد با $f(S) = T$. g معکوس f بر T است در صورتی که به ازای هر $z \in T$ داشته باشیم $f(g(z)) = z$. g معکوس f در z_0 است هرگاه g معکوس f در یک همسایگی z_0 باشد.

توجه کنید که هر تابع معکوس باید ۱-۱ باشد، زیرا اگر $f^{-1}(z) = f^{-1}(z_0)$ آن گاه $f(f^{-1}(z)) = f(f^{-1}(z_0))$؛ یعنی، $z = z_0$.

۵.۳ قضیه. فرض کنید g معکوس f در z_0 باشد و g در z_0 پیوسته باشد. اگر f در $g(z_0)$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(g(z_0)) \neq 0$، آن گاه g در z_0 مشتق‌پذیر است و

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}$$

برهان. به ازای هر $z \neq z_\circ$ از یک همسایگی $z_\circ$،

$$\frac{g(z)-g(z_\circ)}{z-z_\circ} = \frac{1}{\frac{f(g(z))-f(g(z_\circ))}{g(z)-g(z_\circ)}}$$

چون g در $z_\circ$ پیوسته است، $g(z) \to g(z_\circ)$ وقتی که $z \to z_\circ$؛ پس، بنابه مشتق‌پذیری f

$$\lim_{z\to z_\circ} \frac{g(z)-g(z_\circ)}{z-z_\circ} = \frac{1}{f'(g(z_\circ))}. \qquad \square$$

چنان که در فصول آینده خواهیم دید، خاصیّت تحلیلی بودن بسیار دور از دسترس است. ذیلاً بعضی از نتایج فوری ثابت می‌شود.

۶.۳ قضیه. اگر $f = u + iv$ در ناحیهٔ D تحلیلی و u ثابت باشد، آن گاه f ثابت است.

برهان. اگر $|f| = \circ$، حکم مطلوب فوراً نتیجه می‌شود. در غیر این صورت،

$$u^2 + v^2 \equiv C \neq \circ$$

با گرفتن مشتقات جزئی نسبت به x و y، می‌بینیم که

$$uu_x + vu_x \equiv \circ$$
$$vu_y + uu_y \equiv \circ$$

با استفاده از معادلات کوشی ـ ریمان، روابط زیر را به دست می‌آوریم

$$uu_x - vu_y \equiv \circ$$
$$vu_x + uu_y \equiv \circ$$

که نتیجه می‌شود

$$(u^2 + v^2)u_x = \circ$$

و $u_x = v_y \equiv \circ$. به طریق مشابه، u_y و v_x صفر هستند. بنابراین، f ثابت است. $\square$

۲.۳ توابع e^z، $\sin z$، $\cos z$

می‌خواهیم یک تابع نمایی برحسب متغیر z تعریف کنیم؛ یعنی، می‌خواهیم یک تابع تحلیلی مانند f بیابیم که

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2) \tag{۱}$$

$$\text{به ازای هر عدد حقیقی } x،\quad f(x)=e^x \tag{۲}$$

به استناد (۱) و (۲)، باید داشته باشیم

$$f(z)=f(x+iy)=f(x)f(iy)=e^x f(iy)$$

اگر قرار دهیم $f(iy)=A(y)+iB(y)$، نتیجه می‌شود که

$$f(z)=e^x A(y)+ie^x B(y)$$

برای این که f تحلیلی باشد، باید معادلات کوشی ـ ریمان برقرار باشند؛ از این رو، $A(y)=B'(y)$ و $A'(y)=-B(y)$. در این صورت، $A''=-A$. به این ترتیب، روابط زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$A(y)=\alpha\cos y+\beta\sin y$$

$$B(y)=-A'(y)=-\beta\cos y+\alpha\sin y$$

چون $f(x)=e^x$، و $A(0)=\alpha=1$ و $B(0)=-\beta=0$، سرانجام به این نتیجه می‌رسیم که تابع زیر را بیازماییم

$$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

در واقع، به سهولت می‌توان تحقیق کرد که f یک تابع تام با خواصّ مطلوب (۱) و (۲) است. (تمرین ۱۱). بنابراین، f «توسیع» تام تابع نمایی حقیقی است و می‌نویسیم $f(z)=e^z$.

خواص زیر در مورد e^z به سهولت ثابت می‌شود:

(i) $|e^z|=e^x$.

(ii) $e^z\neq 0$.

(ii) از (i) نتیجه می‌شود، زیرا $e^x\neq 0$. همچنین، مطابق (۱)، $e^z e^{-z}=e^0=1$.

(iii) $e^{iy}=\operatorname{cis} y$.

(iv) $e^z=\alpha$ به ازای $\alpha\neq 0$ دارای بی‌نهایت جواب است.

برهان. قرار دهید $\alpha = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$، $r > ۰$. چون $e^z = e^x e^{iy}$، اگر $x = \log r$ و $e^{iy} = e^{i\theta}$، خواهیم داشت $e^z = \alpha$. بنابراین: به ازای هر $z = x + iy$ که $x = \log r$، $y = \operatorname{Arg}\alpha = \theta \pm ۲k\pi$، $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$، داریم $e^z = \alpha$.

(v) $(e^z)' = e^z$

به یاد بیاورید که

$$(e^z)' = (e^z)_x = e^z$$

برای تعریف $\sin z$ و $\cos z$، توجه کنید که به ازای y حقیقی

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

از این رو

$$\sin y = \frac{۱}{۲i}(e^{iy} - e^{-iy})$$
$$\cos y = \frac{۱}{۲}(e^{iy} + e^{-iy})$$

به این ترتیب، تعمیمهای تام $\sin x$ و $\cos x$ را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد.

$$\sin z = \frac{۱}{۲i}(e^{iz} - e^{-iz})$$
$$\cos z = \frac{۱}{۲}(e^{iz} + e^{-iz})$$

بسیاری از خواص آشنای توابع سینوس و کسینوس برای این توابع در صفحهٔ مختلط نیز برقرار می‌مانند. به عنوان مثال،

$$\sin ۲z = ۲\sin z\cos z$$

$$\sin^۲ z + \cos^۲ z = ۱$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

این اتحادها به آسانی محقق می‌شوند و اثبات آنها به عنوان تمرین واگذار می‌شود. بعلاوه، در بخش ۳.۶ ملاحظه خواهیم کرد که، به طور کلی، معادلات به شکل بالا، که بر محور حقیقی برقرارند، در سرتاسر صفحهٔ مختلط نیز معتبرند.

از طرف دیگر، برخلاف $\sin x$، قدرمطلق $\sin z$ به عدد ۱ کراندار نیست. مثلاً، $|\sin ۱۰i| = \frac{۱}{۲}(e^{۱۰} - e^{-۱۰}) > ۱۰٬۰۰۰$.

تمرین.

۱) نشان دهید که

$$f_x = \lim_{\substack{h\to 0 \\ \text{حقیقی } h}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}; \qquad f_y = \lim_{\substack{h\to 0 \\ \text{حقیقی } h}} \frac{f(z+ih)-f(z)}{h}$$

مشروط به این که حدود موجود باشند.

۲) **الف)** نشان دهید که $f(z) = x^2 + iy^2$ در تمام نقاط خط $y = x$ مشتق‌پذیر است.

ب) نشان دهید که f هیچ جا تحلیلی نیست.

۳) ثابت کنید که ترکیب دو تابع مشتق پذیر تابعی مشتق‌پذیر است؛ یعنی، اگر f در z مشتق‌پذیر باشد و g در $f(z)$، آن گاه $g \circ f$ در z مشتق‌پذیر است. [راهنمایی: از رابطهٔ زیر شروع کنید

$$g(f(z+h)) - g(f(z)) = [g'(f(z)) + \varepsilon][f(z+h) - f(z)]$$

که در آن $\varepsilon \to 0$ وقتی که $h \to 0$.]

۴) فرض کنید g یک تابع پیوستهٔ $\sqrt{z}$ (یعنی $g^2(z) = z$) در یک همسایگی z باشد. مستقیماً ثابت کنید که $g'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

راهنمایی: از رابطهٔ $\frac{g^2(z)-g^2(z_0)}{z-z_0} = 1$ برای محاسبهٔ حد زیر استفاده کنید:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

۵) فرض کنید f در ناحیه‌ای تحلیلی باشد و در این ناحیه $f' \equiv 0$. نشان دهید که f ثابت است.

۶) فرض کنید که f در ناحیه‌ای تحلیلی باشد و در هر نقطه $f = 0$ یا $f' = 0$. نشان دهید که f ثابت است.

[راهنمایی: f^2 را در نظر بگیرید.]

۷) نشان دهید که یک تابع تحلیلی غیرثابت نمی‌تواند یک ناحیه را به یک خط راست یا یک قوس مستدیر بنگارد.

۸) تمام توابع تحلیلی $f = u + iv$ را پیدا کنید که $u(x,y) = x^2 - y^2$.

۹) نشان دهید که هیچ تابع تحلیلی $f = u + iv$ با شرط $u(x,y) = x^2 + y^2$ وجود ندارد.

۱۰) فرض کنید f یک تابع تام به شکل

$$f(x,y) = u(x) + iv(y)$$

باشد. نشان دهید که f یک چندجمله‌ای است.

۱۱) **الف)** با بررسی معادلات کوشی ـ ریمان در مورد اجزای حقیقی و موهومی، نشان دهید که e^z تام است.

۱۲) نشان دهید $|e^z| = e^x$.

۱۳) در رفتار e^z وقتی که z در امتداد شعاعهای مختلف خروجی از مبداء به ∞ میل کند تحقیق کنید.

۱۴) جوابهای معادلات

الف) $e^z = ۱$ ب) $e^z = i$

ج) $e^z = -۳$ د) $e^z = ۱ + i$.

را بیابید.

۱۵) در صحّت برقراری اتحادهای زیر تحقیق کنید.

الف) $\sin ۲z = ۲ \sin z \cos z$.

ب) $\sin^۲ z + \cos^۲ z = ۱$.

ج) $(\sin z)' = \cos z$.

۱۶) $(\cos z)'$ را بیابید.

۱۷) $\sin^{-۱} ۲$ را بیابید ـ یعنی، جوابهای $\sin z = ۲$ را پیدا کنید. [راهنمایی: ابتدا قرار دهید $w = e^{iz}$ و سپس w را پیدا کنید.]

۱۸) نشان دهید $\sin(x+iy) = \sin x \cos hy + i \cos x \sin hy$.

۱۹) نشان دهید که سری توانی

$$f(z) = ۱ + z + \frac{z^۲}{۲!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

برابر است با e^z. راهنمایی: ابتدا نشان دهید که $f(z)f(w) = f(z+w)$. سپس، با استفاده از نمایش سری توانی توابع حقیقی e^x، $\cos x$، $\sin x$ نشان دهید که

$$f(x) = e^x$$

$$f(iy) = \cos y + i \sin y$$

۲۰) نشان دهید سری زیر برابر است با $\sin z$:

$$g(z) = z - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - + \dots$$

راهنمایی: با استفاده از نمایش سری توانی e^z مذکور در (۱۹)، نشان دهید که

$$g(z) = \frac{۱}{۲i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

۲۱) نمایش سری توانی $\cos z$ را پیدا کنید.

فصل چهارم

انتگرالهای خط و توابع تام

مقدمه

یادآوری می‌کنیم که، مطابق قضیهٔ ۹.۲، هر سری توانی‌همه جا همگرا یک تابع تام را نمایش می‌دهد. هدف اصلی ما در دو فصل آینده عکس تقریباً شگفت‌انگیز این حکم است: یعنی، هر تابع تام را می‌توان به یک سری توانی همه جا همگرا بسط داد. به عنوان یک نتیجهٔ فوری، می‌توانیم ثابت کنیم که هر تابع تام بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. معذالک، برای رسیدن به این نتایج، لازم است‌که بحث را، به جای مشتق، از انتگرال شروع کنیم.

۱.۴ خواص انتگرال خط

۱.۴ تعریف. فرض کنید $f(t) = u(t) + iv(t)$ یک تابع مختلط ـ مقدار پیوسته از متغیر حقیقی t باشد که $a \leq t \leq b$. آن گاه

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

۲.۴ تعریف.

الف) فرض کنید $z(t) = x(t) + iy(t)$، $a \leq t \leq b$. منحنی‌ای که با $z(t)$ معین می‌شود قطعه قطعه مشتق‌پذیر نامیده می‌شود و قرار می‌دهیم

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

در صورتی که x و y بر $[a, b]$ پیوسته باشند و افرازی از $[a, b]$ بتوان یافت که x و y بر هر زیربازهٔ $[a, x_۱]$، $[x_۱, x_۲]$، $\ldots$ ، $[x_{n-۱}, b]$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند.

ب) این منحنی را هموار می‌نامند در صورتی که $z'(t) \neq ۰$ (یعنی، $x'(t)$ و $y'(t)$ با هم صفر نشوند.) مگر در تعدادی متناهی نقطه.

در باقیماندهٔ این کتاب همهٔ منحنیها هموار فرض می‌شوند، مگر این که خلاف آن تصریح شود. بالاخره، به تعریف مفهوم مهم انتگرال خط می‌پردازیم.

۳.۴ تعریف. فرض کنید C یک منحنی هموار باشد که با $z(t)$ در محدودهٔ $a \leq t \leq b$ داده شده است. فرض کنید f در تمام نقاط $z(t)$ پیوسته است. آن‌گاه، انتگرال f در طول C به صورت زیر است

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt$$

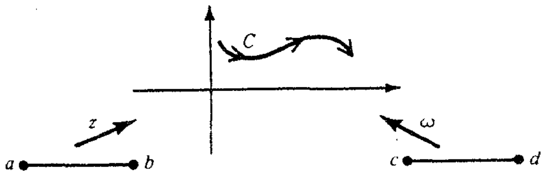
توجه کنید که این انتگرال در طول منحنی C نه فقط به نقاط C بلکه به جهت C نیز بستگی دارد، ولی نشان خواهیم داد که مستقل از یک نحوهٔ خاص پارامتردار کردن است. به طور شهودی، اگر

$$z(t), \qquad a \leq t \leq b$$
$$w(t), \qquad c \leq t \leq d$$

یک منحنی را در یک جهت یکسان رسم کنند آن گاه $\lambda = z^{-1} \circ w$ یک نگاشت ۱-۱ از $[c,d]$ بر روی $[a,b]$ است به طوری که

$$w(t) = z(\lambda(t)) \qquad (1)$$

ولی، اگر z یک‌به‌یک نباشد، تعریف z^{-1} دشوار می‌شود. در عوض، خمهای معادل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



۴.۴ تعریف. دو منحنی

$$C_1 : z(t) \qquad a \le t \le b$$

و

$$C_2 : \omega(t) \qquad c \le t \le d$$

به طور هموار معادلند در صورتی که یک نگاشت C^1 یک‌به‌یک مانند $\lambda(t) : [c,d] \to [a,b]$ موجود باشد به طوری که $\lambda(c) = a$ و $\lambda(d) = b$ و

$$\omega(t) = z(\lambda(t))$$

(به سهولت می‌توان تحقیق کرد که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ هم ارزی است. تمرین ۱ را ببینید.)

۵.۴ قضیه. اگر C_1 و C_2 به طور هموار معادل باشند، آن گاه

$$\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$$

برهان. فرض کنید $f(z) = u(z) + iv(z)$، C_1 و C_2 همانند فوق باشند. آن گاه، بنابه تعریف،

$$(1) \quad \int_{C_1} f = \int_a^b u(z(t))x'(t)dt - \int_a^b v(z(t))y'(t)dt + i\int_a^b u(z(t))y'(t)dt + i\int_a^b v(z(t))x'(t)dt$$

در حالی که

$$(2) \quad \int_{C_2} f = \int_c^d [u(z(\lambda(t))) + iv(z(\lambda(t)))][x'(\lambda(t) + iy'(\lambda(t))]\lambda'(t)dt$$

با بسط انتگرالده در (۲) و تحلیل جداگانهٔ چهار جمله، درمی‌یابیم که دقیقاً برابر با چهار جملهٔ متناظر در (۱) هستند. مثلاً، بنا به قضیهٔ تغییر متغیر در مورد انتگرالهای حقیقی،

$$\int_c^d u(z(\lambda(t)))x'(\lambda(t))\lambda'(t)dt = \int_a^b u(z(t))x'(t)dt$$

و برهان کامل است. □

قضیهٔ زیر وابستگی انتگرال خط را به جهت منحنی بیان می‌کند.

۶.۴ تعریف. فرض کنید که C با $z(t)$، $a \le t \le b$ داده شده‌ا ست. آن گاه $-C$ با $z(b+a-t)$، $a \le t \le b$ تعریف می‌شود. (به طور شهودی، $-C$ مجموعهٔ نقاط C است که در خلاف جهت C پیموده می‌شود.)

۷.۴ قضیه.

$$\int_{-C} f = -\int_C f.$$

برهان.

$$\int_{-C} f = -\int_a^b f(z(b+a-t))\dot{z}(b+a-t)dt$$

دوباره، با بسط انتگرال به قسمتهای حقیقی و موهومی و استفاده از قضیهٔ تغییر متغیر در مورد هر انتگرال (حقیقی)، درمی‌یابیم که

$$\int_{-C} f = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt = -\int_C f. \qquad \square$$

مثال ۱. فرض می‌کنیم که $f(z) = x^{۲} + iy^{۲}$ (که در آن x و y، به ترتیب، نمایش اجزای حقیقی و موهومی z است) و

$$C : z(t) = t + it \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\dot{z}(t) = ۱ + i$$

و

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_۰^۱ (t^۲ + it^۲)(۱ + i)dt \\ &= (۱ + i)^۲ \int_۰^۱ t^۲ dt = \frac{۲i}{۳} \end{aligned}$$

مثال ۲. فرض کنید

$$f(z) = \frac{۱}{z} = \frac{x}{x^۲ + y^۲} - i\frac{y}{x^۲ + y}$$

و قرار دهید

$$C : z(t) = R\cos t + iR\sin t \quad ۰ \leq t \leq ۲\pi, R \neq ۰$$

آن گاه

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_۰^{۲\pi} \left(\frac{cost}{R} - i\frac{\sin t}{R}\right)(-R\sin t + iR\cos t)dt \\ &= \int_۰^{۲\pi} idt = ۲\pi i \end{aligned}$$

(تمرین ۸ را ببینید.) یعنی، انتگرال $\frac{۱}{z}$ حول هر دایره به مرکز مبداء (که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شود) $۲\pi i$ است.

مثال ۳. فرض کنید $f(z) \equiv ۱$، و C یک منحنی هموار باشد. آن گاه

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \dot{z}(t)dt = z(b) - z(a)$$

انتگرال‌های فوق تعمیم طبیعی از انتگرال معین هستند و، تعجب‌آور نیست که، در بسیاری از خواص شریکند.

۸.۴ قضیه. فرض کنید C یک منحنی هموار باشد؛ فرض کنید f و g توابع پیوسته‌ای بر C باشند، و فرض کنید α یک عدد مختلط باشد. آن گاه

$$\int_C [f(z)+g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz \tag{I}$$

$$\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz \tag{II}$$

برهان. تمرین ۴.

نمادگذاری. اگر α و β اعداد مختلطی باشند، نماد $\alpha \ll \beta$ برای نمایش $|\alpha| \leq |\beta|$ به کار می‌رود.

۹.۴ لم. فرض کنید $G(t)$ یک تابع مختلط پیوسته از t باشد. آن گاه

$$\int_a^b G(t)dt \ll \int_a^b |G(t)|dt$$

برهان. فرض کنید

$$\int_a^b G(t)dt = \mathrm{Re}^{i\theta}, \qquad R \geq ۰ \tag{۱}$$

آن گاه، بنابه قضیهٔ ۸.۴،

$$\int_a^b e^{-i\theta} G(t)dt = R \tag{۲}$$

بعلاوه، فرض کنید $e^{-i\theta}G(t) = A(t) + iB(t)$ که در آن A و B حقیقی ـ مقدارند. در این صورت، بنابه (۲)،

$$R = \int_a^b A(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}G(t))dt$$

ولی $\mathrm{Re}\, z \leq |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$، بنابراین

$$R \leq \int_a^b |G(t)|dt \tag{۳}$$

مقایسهٔ (۱) و (۳) نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد. □

۱۰.۴ فرمول $M-L$. فرض کنید C یک منحنی (هموار) به طول L باشد، f بر C پیوسته باشد، و بر سرتاسر C داشته باشیم $f \ll M$. آن گاه

$$\int_C f(z)dz \ll ML$$

برهان. فرض کنید C با فرمول $z(t) = z(t) + iy(t)$ که $a \leq t \leq b$ داده شده باشد. آن گاه، بنابه لم قبل،

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt \ll \int_a^b |f(z(t))\dot{z}(t)|dt$$

بنابه قضیهٔ مقدار میانگین در مورد انتگرالها [رودین، صفحهٔ ۱۲۳] که در مورد توابع مثبت $|f(z(t))|$ و $|\dot{z}(t)|$ به کار برده شود،

$$\int_C f(z)dz \ll \max_{z\in C}|f(z)|\int_a^b |\dot{z}(t)|dt \qquad (۴)$$

بالاخره، یادآوری می‌کنیم که به ازای هر خمی که به صورت پارامتری $(x(t), y(t))$ در محدودهٔ $a \leq t \leq b$ داده شده باشد، طول قوس L از فرمول زیر به دست می‌آید

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^۲ + (y'(t))^۲}dt = \int_a^b |\dot{z}(t)|dt$$

از این رو، بنابه (۴)، $\int_C f(z)dz \leq ML$.$\square$

مثال. فرض کنید C دایرهٔ واحد باشد و بر C داشته باشیم $f \ll ۱$. آن گاه $M = ۱$، $L = ۲\pi$، و

$$\int_C f(z)dz \ll ۲\pi$$

برای ملاحظهٔ این که کران بالای ۲π واقعاً قابل حصول است، مثال ۲ بالا را در نظر بگیرید.

۱۱.۴ قضیه. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد و بر منحنی هموار C به طور یکنواخت به f میل کند. آن گاه

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz$$

برهان. بنابه قضیهٔ ۸.۴،

$$\int_C f(z)dz - \int_C f_n(z)dz = \int_C (f(z) - f_n(z))dz$$

به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، n را به قدری بزرگ اختیار می‌کنیم که به ازای هر $z \in C$ داشته باشیم $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. آن گاه، با اعمال قضیهٔ ۱۰.۴، ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_C f(z)dz - \int_C f_n(z)dz \ll \varepsilon.(\text{طول } C)$$

از این رو،

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz \qquad \square$$

تعمیم زیر از قضیهٔ اساسی حسابان در شکل گیری این فصل نقشی تعیین کننده دارد.

۱۲.۴ قضیه. فرض کنید f مشتق تابع تحلیلی F باشد؛ یعنی، $f(z) = F'(z)$، که در آن F روی منحنی هموار C تحلیلی است. آن گاه

$$\int_C f(z)dz = F(z(b) - F(z(a))$$

برهان. برهان این قضیه به همتای مختلط قاعدهٔ زنجیری در مورد مشتق‌گیری وابسته است. با فرض

$$\gamma(t) = F(z(t)), \qquad a \le t \le b$$

می‌خواهیم نشان بدهیم که

$$\dot\gamma(t) = f(z(t))\dot z(t)$$

در تمام نقاط، مگر در تعدادی متناهی، که $\dot z(t)$ موجود و ناصفر است.

ابتدا توجه کنید که به ازای هر منحنی هموار $\lambda(t)$، با ملاحظهٔ اجزای حقیقی و موهومی λ به طور جداگانه، به سادگی دیده می‌شود که

$$\dot\lambda(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ \text{حقیقی } h}} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\dot\gamma(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{z(t+h) - z(t)} \times \frac{z(t+h) - z(t)}{h}\end{aligned}$$

[چون $\dot{z}(t) \neq 0$، می‌توانیم $\delta > 0$ی پیدا کنیم که $|h| < \delta$ ایجاب کند که $z(t+h) - z(t) \neq 0$.] از این رو،

$$\dot{\gamma}(t) = f(z(t))\dot{z}(t)$$

سپس قضیهٔ ۱۲.۴ با توجه به رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt = \int_a^b \dot{\gamma}(t)dt \\ &= \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)). \qquad \square\end{aligned}$$

۲.۴ قضیهٔ منحنی بسته برای توابع تام

۱۳.۴ تعریف. منحنی C بسته است در صورتی که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند؛ یعنی، اگر C با $z(t)$ در محدودهٔ $a \le t \le b$ داده شده است داشته باشیم $z(a) = z(b)$. C یک منحنی سادهٔ بسته است در صورتی که هیچ دو نقطهٔ دیگر بر هم منطبق نشوند؛ یعنی، هرگاه $z(t_1) = z(t_2)$ و $t_1 < t_2$، آن گاه $t_1 = a$ و $t_2 = b$.

قضیهٔ زیر اولین قضیه از قضایایی است که نشان می‌دهد که تحت شرایط نسبتاً عمومی، انتگرال یک تابع تحلیلی در طول یک منحنی بسته صفر است. البته، مثال ۲ نشان می‌دهد که این قضیه در هر شرایطی برقرار نیست. با احتیاط، از توابع تام شروع می‌کنیم.

تذکر. در سرتاسر کتاب، منظور از مرز یک مستطیل یک منحنی سادهٔ بسته است که طوری پارامتردار شده است که وقتی منحنی در جهت افزایش t پیموده شود مستطیل در سمت چپ قرار گیرد.

۱۴.۴ قضیهٔ مستطیل. فرض کنید f یک تابع تام و Γ مرز مستطیل R باشد. آن گاه

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

لم. اگر f یک تابع خطی و Γ مرز مستطیل R باشد، آن گاه

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

برهان لم. فرض کنید $f(z) = \alpha + \beta z$ و Γ به وسیلهٔ

$$\Gamma : z(t), \qquad a \le t \le b$$

داده شده باشد. چون $f(z)$ همه جا مشتق تابع تحلیلی $F(z) = \alpha z + \beta z^{۲}/۲$ است، بنابه قضیهٔ ۱۲.۴ و این که Γ یک منحنی بسته است،

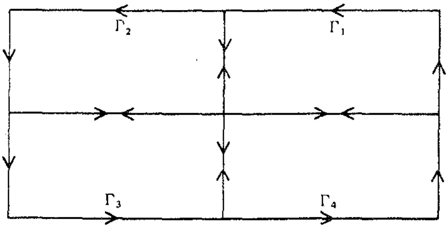
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma F'(z)dz = F(z(b)) - F(z(a)) = ۰$$

(برهان مستقیم دیگر به اجمال در تمرین ۷ آمده است.)

برهان قضیهٔ ۱۴.۴. فرض کنید $\int_\Gamma f(z)dz = I$. برای اثبات $I = ۰$ ، روش تنصیفات متوالی را به کار می‌بریم. یعنی، مستطیل R را با تنصیف هر ضلع به چهار مستطیل همنهشت تقسیم می‌کنیم. اگر $\Gamma_۱$، $\Gamma_۲$، $\Gamma_۳$، و $\Gamma_۴$ مرز چهار مستطیل جزئی باشند، آن گاه

$$\int_\Gamma f = \sum_{i=۱}^{۴} \int_{\Gamma_i} f$$

زیرا انتگرالهای روی خطوط داخلی در جهت مخالف هم هستند و، بنا به قضیهٔ ۷.۴، حذف می‌شوند.



بنابراین، Γ_kیی، به ازای یک $۱ \le k \le ۴$ وجود دارد، که آن را به $\Gamma^{(۱)}$ نشان می‌دهیم، به طوری که

$$\int_{\Gamma^{(۱)}} f(z)dz \gg \frac{I}{۴}$$

فرض کنید $R^{(۱)}$ مستطیل با مرز $\Gamma^{(۱)}$ باشد. با ادامهٔ این روش، تقسیم $R^{(k)}$ به چهار مستطیل همنهشت، دنباله‌ای از مستطیلهای

$$R^{(۱)} \supset R^{(۲)} \supset R^{(۳)} \supset \dots$$

با مرزهای $\Gamma^{(1)}$، $\Gamma^{(2)}$، $\Gamma^{(3)}$، ... می‌یابیم که $\operatorname{diam} R^{(k+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{diam} R^{(k)}$ و

$$\int_{\Gamma^{(k)}} f(z)dz \gg \frac{I}{4^k} \tag{1}$$

فرض کنید $z_\circ \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R^{(k)}$. اگر ثابت کنیم که f در $z_\circ$ تحلیلی است، برهان قضیه نتیجه می‌شود. چون

$$\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ} \to f'(z_\circ)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = f(z_\circ) + f'(z_\circ)(z-z_\circ) + \varepsilon_z(z-z_\circ)$$

که در آن $\varepsilon_z \to 0$ وقتی که $z \to z_\circ$.

سپس، توجه می‌کنیم که، بنابه لم،

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^{(n)}} f(z)dz &= \int_{\Gamma^{(n)}} [f(z_\circ) + f'(z_\circ)(z-z_\circ) + \varepsilon_z.(z-z_\circ)]dz \\ &= \int_{\Gamma^{(n)}} \varepsilon_z.(z-z_\circ)dz\end{aligned}$$

برای برآورد این انتگرال، فرض کنید که طول بزرگترین ضلع Γ اصلی s است. پس، با ملاحظات هندسی مقدماتی،

$$\int_{\Gamma^{(n)}} |dz| = \text{طول } \Gamma^{(n)} \leq \frac{4s}{2n}$$

و به ازای هر $z \in \Gamma^{(n)}$،

$$|z-z_\circ| \leq \frac{\sqrt{2}.s}{2n}$$

به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، N را طوری انتخاب می‌کنیم که $|z-z_\circ| \leq \frac{\sqrt{2}.s}{2N}$ ایجاب کند که $\varepsilon_z \ll \varepsilon$. در این صورت، بنا به فرمول $M-L$ (قضیهٔ ۴.۱۰)، به ازای $n \geq N$

$$\int_{\Gamma^{(n)}} f(z)dz \ll \varepsilon.\frac{4\sqrt{2}s^2}{4n} \tag{2}$$

ترکیب (۱) و (۲) نشان می‌دهد که به ازای $n \geq N$

$$\frac{I}{4n} \ll \varepsilon.\frac{4\sqrt{2}s^2}{4n}$$

یا

$$I \ll \varepsilon \cdot 4\sqrt{2}s^2$$

چون این رابطه به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که $I = 0$.$\square$

تذکر. گرچه جهت Γ پاد ساعتگرد انتخاب شده است، همین نتیجه در جهت ساعتگرد هم برقرار است. این ادعا از قضیهٔ ۷.۴ نتیجه می‌شود. جهت حرکت پادساعتگرد مقدمةً برای تثبیت جهت انتخاب شد. در فصول بعدی، خواهیم دید که جهت دوران پادساعتگرد در امتداد مرز به لحاظی یک جهت بسیار «طبیعی» برای توابعی است که در داخل یک ناحیه تحلیلی هستند. بنابراین، انتگرالهای مورد بحث در امتداد هر منحنی محدب همیشه در جهت پادساعتگرد خواهد بود، مگر این که خلاف آن تصریح شود.

۱۵.۴ قضیهٔ انتگرال. اگر f تام باشد، آن گاه f همه جا مشتق یک تابع تحلیلی است؛ یعنی، تابعی تام مانند F وجود دارد به طوری که به ازای هر z داشته باشیم $F'(z) = f(z)$.

برهان. $F(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

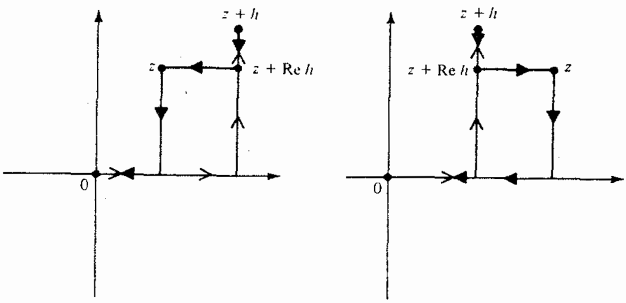
$$\int_0^z f(\xi)d\xi$$

که در آن $\int_0^z$ نمایش انتگرال در امتداد خطوط مستقیمی است که از ۰ به $\operatorname{Re} z$ و از $\operatorname{Re} z$ به z می‌روند.

توجه کنید که

$$F(z+h) = F(z) + \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi$$

که در آن انتگرال در امتداد پاره‌خطهایی است که از z به $z + \operatorname{Re} h$ و از $z + \operatorname{Re} h$ به $z + h$ کشیده می‌شوند؛ زیرا تفاضل انتگرال f در امتداد دو مسیر مذکور برابر است با انتگرال f در امتداد یک مستطیل بسته و، از این رو، برابر صفر است. (شکل زیر را ببینید.)



بنابراین

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi$$

و چون

$$\frac{1}{h}\int_z^{z+h} 1 dz = \frac{1}{h}(z+h-z) = 1$$

(مثال ۳ بعد از قضیهٔ ۷.۴ را ببینید.)

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h}[f(\xi)-f(z)]d\xi$$

بالاخره، به ازای هر $\varepsilon > 0$، اگر h به اندازهٔ کافی کوچک باشد، در طول مسیر انتگرالگیری $f(\xi)-f(z) \ll \varepsilon$. با استفاده از فرمول $M - L$، خواهیم داشت:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \ll \frac{1}{h}\cdot 2h\varepsilon = 2\varepsilon$$

بنابراین،

$$F'(z) = f(z). \quad \square$$

قضیهٔ منحنی بسته. اگر f تام و C یک منحنی بستهٔ (هموار) باشد،

$$\int_C f(z)dz = 0$$

برهان. چون f تام است، بنابه قضیهٔ انتگرال، به ازای تابع تامی مانند F، $F' = f$. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۱۲.۴،

$$\int_C f(z)dz = \int_C F'(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

چون C بسته است، $z(b) = z(a)$، $F(z(b)) = F(z(a))$ ، و

$$\int_C f(z)dz = 0. \quad \square$$

ملاحظات. اگرچه قضیهٔ ۱۶.۴ برای توابع تام ثابت شد، تنها واقعیت مورد نیاز این بود که f مشتق یک تابع تحلیلی بر C باشد. از این رو، مثلاً

$$\int_C \frac{1}{z^2}dz = 0$$

هرگاه C یک منحنی بستهٔ هموار باشد که از مبداء نمی‌گذرد. گرچه $\frac{1}{z^2}$ تام نیست، ولی مشتق F با ضابطهٔ $F(z) = -1/z$ است که همه جا، غیر از مبداء، تحلیلی است. به طریق مشابه، اگر k عدد صحیحی غیر از -1 باشد، آن گاه

$$\int_C z^k dz = 0$$

مثال ۲ را یادآوری می‌کنیم که نشان می‌دهد که $k = -1$ استثنایی برای حالت فوق است. (تمرین ۸ را ببینید.)

تمرینات

۱) نشان دهید که هم‌ارزی منحنیهای هموار دارای خّواص بازتابی، تقارن، تعدّی یک رابطهٔ هم ارزی است.

۲) اگر $f(z) = x^2 + iy^2$ مانند مثال ۱ باشد ولی C با $z(t) = t^2 + it^2$ دربازهٔ $0 \le t \le 1$ داده شده باشد، $\int_C f$ را محاسبه کنید.

۳) اگر $f(z) = 1/z$ مانند مثال ۲ باشد ولی C با $z(t) = \sin t + i\cos t$ دربازهٔ $0 \le t \le 2\pi$ داده شود، $\int_C f$ را محاسبه کنید. چرا این نتیجه با نتیجهٔ محاسبهٔ مثال ۲ متفاوت است؟

۴) قضیهٔ ۸.۴ را ثابت کنید. [راهنمایی: انتگرال را به قسمتهای حقیقی و موهومی تقسیم کنید.]

۵) یکتایی انتگرال را ثابت کنید؛ یعنی، نشان دهید که $F' \equiv 0$ مستلزم F ثابت است. [راهنمایی: قضیهٔ ۱۲.۴ را به کار برده عبارتی برای $F(b) - F(a)$ بیابید.]

۶*) نشان دهید که اگر f یک تابع حقیقی ـ مقدار پیوسته باشد و $f \ll 1$، آن گاه

$$\int_{|z|=1} f \ll 4$$

[راهنمایی: نشان دهید $\int f \ll \int_0^{2\pi} |\sin t| dt$.]

۷) یک برهان مستقیم برای لم قضیهٔ ۱۴.۴ ارائه کنید. یعنی، به ازای مستطیل مفروضی به رئوس (a, c)، (b, c)، (b, d) و (a, d)، مرز Γ را پارامتری کنید و مستقیماً ثابت کنید که

$$\int_\Gamma dz = \int_\Gamma z dz = 0$$

۸) به یکی از دو طریق زیر، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح $k \neq -۱$ و

$$C : z = \mathrm{Re}^{i\theta}, \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

$\int_C z^k dz = ۰$؛

الف) با اثبات این که z^k مشتق یک تابع تحلیلی در امتداد C است،

ب) مستقیماً، با استفاده از پارامتری سازی C.

۹) $\int_C (z - i) dz$ را محاسبه کنید که در آن C قطعهٔ سهموی زیر است:

$$z(t) = t + it^۲ \qquad -۱ \leq t \leq ۱$$

الف) با استفاده از قضیهٔ ۱۲.۴،

ب) با انتگرالگیری در امتداد خط مستقیم از $-۱ + i$ به $۱ + i$ و به کار بردن قضیهٔ منحنی بسته.

فصل پنجم

خوّاص توابع تام

۱.۵ فرمول انتگرال کوشی و بسط تیلور توابع تام

حال نشان می‌دهیم که اگر f تام باشد و

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z\neq a\\ f'(a) & z=a\end{cases}$$

آن گاه قضیهٔ انتگرال (۱۵.۴) و قضیهٔ منحنی بسته (۱۶.۴) را می‌توان در مورد f و g به کار برد. (توجه کنید که چون f تام است، g پیوسته است؛ ولی تام بودن g واضح نیست.) بحث را با اثبات این که قضیهٔ مستطیل در مورد g قابل اعمال است آغاز می‌کنیم.

۱.۵ قضیهٔ دوم مستطیل. اگر f تام باشد و

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z\neq a\\ f'(a) & z=a\end{cases}$$

آن گاه $\int_\Gamma g(z)dz=0$، که در آن Γ مرز مستطیل R است.

برهان. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

(I) $a\in \operatorname{ext} R$

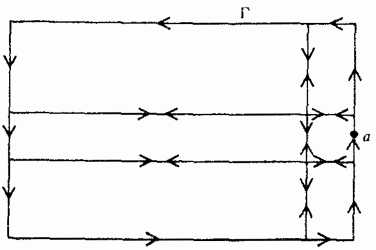
در این حالت، g بر R تحلیلی است و برهان دقیقاً برهان قضیهٔ ۱۴.۴ است. توجه کنید که تنها چیزی که برای اثبات قضیه مورد نیاز است این است که انتگرالده بر R و Γ تحلیلی باشد.

(II) $a\in\Gamma$

R را به شش مستطیل جزء به شکل زیر تقسیم و توجه می‌کنیم که به دلیل حذف عواملی که ناشی از انتگرالگیری بر مسیری در دو جهت مخالف است، می‌توان نوشت

$$\int_\Gamma g=\sum_{k=1}^{6}\int_{\Gamma_k} g \qquad (1)$$

که در آن Γ_k، $1\leq k\leq 6$، مرز مستطیلهای جزئی است. چون g بر حوزهٔ فشردهٔ $\bar R$ پیوسته



است، عددی مثبت مانند M می‌توان یافت که $f\ll M$. اگر مرز مستطیل شامل a (آن را Γ_1 بنامید) دارای طول کمتر از ε باشد، بنابه فرمول $M-L$،

$$\int_{\Gamma_1} g\ll M\varepsilon$$

در حالی که مانند حالت (I)،

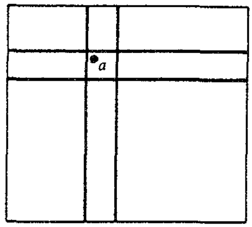
$$\int_{\Gamma_k} g = ۰ \qquad k \neq ۱.$$

از این رو، بنابه (۱)، به ازای هر $\varepsilon > ۰$،

$$\int_{\Gamma} g \ll M\varepsilon$$

و برهان تمام است.

(III) $a \in \operatorname{Int} R$



در این حالت، مانند حالت قبلی، R را ـ این بار به نه مستطیل جزء ـ تقسیم می‌کنیم. در امتداد مرزهای هشت مستطیل (که شامل a نیستند)،

$$\int_{\Gamma_k} g = ۰$$

در حالی که انتگرال در امتداد مرز مستطیل جزء مانده می‌تواند به قدر دلخواه کوچک باشد وقتی که طول آن را به قدر کافی کوچک اختیار کرده باشیم. مانند حالت قبلی، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{\Gamma} g = \sum_{k=۱}^{۹} \int_{\Gamma_k} g = ۰. \qquad \square$$

۲.۵ نتیجه. فرض کنید g همان تابع بالا است. آن گاه قضیهٔ انتگرال و قضیهٔ منحنی بسته را می‌توان در مورد g به کار برد. □

برهان. توجه می‌کنیم که g پیوسته است، برهانهای قضیه‌های ۱۵.۴ و ۱۶.۴ را بدون هیچ تغییری می‌توان در مورد g به کار برد.

۳.۵ فرمول انتگرال کوشی. فرض کنید که f تام، a یک عدد مختلط، و C منحنی زیر باشد

$$C : \mathrm{Re}^{i\theta}, \quad \circ \leq \theta \leq ۲\pi; \quad R > |a|$$

آن‌گاه

$$f(a) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

برهان. بنابه نتیجهٔ ۲.۵،

$$\int_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \circ$$

پس

$$f(a) \int_C \frac{dz}{z-a} = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

و با اثبات رابطهٔ زیر برهان تمام است

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = ۲\pi i$$

ذیلاً این لم با کلیّت بیشتری ثابت می‌شود.

۴.۵ لم. فرض کنید a در داخل دایرهٔ C_ρ قرار دارد: یعنی، C_ρ دارای مرکز α و شعاع ρ است، و $|a-\alpha| < \rho$. آن‌گاه

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-a} = ۲\pi i$$

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_\circ^{۲\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = ۲\pi i$$

در حالی که

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{(z-\alpha)^{k+۱}} = \circ \qquad k = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

تساوی دوّم نه تنها از محاسبهٔ مستقیم انتگرال زیر به دست می‌آید بلکه از این واقعیت نیز نتیجه می‌شود که $۱/(z-\alpha)^{k+۱}$ مشتق تابع تحلیلی $-۱/k(z-\alpha)^k$ است:

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{(z-\alpha)^{k+۱}} = \frac{i}{\rho^k} \int_\circ^{۲\pi} e^{-ik\theta} d\theta = \circ$$

برای محاسبهٔ انتگرال $\int_{C_\rho}(۱/(z-\alpha))dz$، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{z-a} &= \frac{۱}{(z-\alpha)-(a-\alpha)} = \frac{۱}{(z-\alpha)[۱-\frac{a-\alpha}{z-\alpha}]}\\ &= \frac{۱}{z-\alpha}\cdot\frac{۱}{۱-\omega}\end{aligned}$$

که در آن

$$\omega = \frac{a-\alpha}{z-\alpha} \qquad (۱)$$

دارای قدر مطلق ثابت $\frac{|a-\alpha|}{\rho} < ۱$ بر C_ρ است.

بنا به (۱) و این که $\frac{۱}{۱-\omega} = ۱ + \omega^۲ + \omega^۲ + \dots$، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{z-a} &= \frac{۱}{z-\alpha}\left[۱ + \frac{a-\alpha}{z-\alpha} + \frac{(a-\alpha)^۲}{(z-a)^۲} + \dots\right]\\ &= \frac{۱}{z-\alpha} + \frac{a-\alpha}{(z-\alpha)^۲} + \frac{(a-\alpha)^۲}{(z-\alpha)^۳} + \dots\end{aligned}$$

چون همگرایی بر C_ρ یکنواخت است،

$$\int_{C_\rho}\frac{۱}{z-a}dz = \int_{C_\rho}\frac{۱}{z-\alpha}dz + \sum_{k=۱}^{\infty}\int_{C_\rho}\frac{(a-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+۱}}dz = ۲\pi i. \quad \square$$

۵.۵ بسط تیلور یک تابع تام. اگر f تام باشد، دارای نمایشی به صورت یک سری توانی است. در واقع، $f^{(k)}(۰)$ به ازای $k = ۱, ۲, ۳, \dots$ موجود است و

$$f(z) = \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{f^{(k)}(۰)}{k!}z^k \qquad \text{به ازای هر } z\text{،}$$

برهان. فرض کنید $a \neq ۰$، $R = |a| + ۱$ و C دایرهٔ $R = |\omega|$ باشد. بنابه فرمول انتگرال کوشی، به ازای هر z که $a \gg z$،

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega$$

همانند گذشته، توجه کنید که

$$\frac{۱}{\omega - z} = \frac{۱}{\omega(۱-\frac{z}{\omega})} = \frac{۱}{\omega} + \frac{z}{\omega^۲} + \frac{z^۲}{\omega^۳} + \dots$$

و چون همگرایی در طول C یکنواخت است،

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\omega)[\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}+\frac{z^2}{\omega^3}+\ldots]d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega}d\omega + \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega^2}d\omega\right) z + \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega^3}d\omega\right) z^2 + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k
\end{aligned}
$$

که در آن

$$C_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}}d\omega \tag{1}$$

چون به ازای هر z عدد مختلطی مانند a وجود دارد که $z \ll a$، به نظر می‌رسد که برهان قسمت اول قضیه تمام است. معذالک، یک مشکل وجود دارد. مرز C و، از این رو، ضرایب سری توانی به a بستگی دارند؛ زیرا شعاع R باید طوری انتخاب شود که از $|a|$ بزرگتر باشد تا مطمئن شویم که سری $\frac{1}{z-\omega}$ به طور یکنواخت همگرا است. از سوی دیگر، اگر a را ثابت در نظر بگیریم، نشان داده‌ایم که ضرایب $C_0(a)$ ، $C_1(a)$، $C_2(a)$، ... موجودند به طوری که به ازای هر $a \gg z$

$$f(z) = \sum C_k(a)z^k \tag{2}$$

برای این که نشان بدهیم که همین کفایت می‌کند توجه می‌کنیم که اگرچه وقتی که اعداد مختلط a را طوری در نظر بگیریم که از لحاظ قدرمطلق سیر صعودی داشته باشند قاعدةً ضرایب باید تغییر کنند، ولی، در واقع، ثابت هستند.

زیرا، به طوری که در فصل ۲ (نتیجهٔ ۱۱.۲) دیده‌ایم، از (۲) نتیجه می‌شود که f بی‌نهایت بار در ۰ مشتق‌پذیر است و

$$C_k(a) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

بنابراین، ضرایب از a مستقل می‌باشند. سرانجام، توجه می‌کنیم که اگرچه همگرایی سری

$$\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

در همهٔ نقاط به طور صریح ثابت نشده است، همگرایی در این نهفته است که سری به ازای هر z برابر $f(z)$ است. □

۶.۵ نتیجه. یک تابع تام بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.

برهان. چون f دارای بسط سری توانی است، از نتیجهٔ ۲.۱۰- هر سری توانی همگرا بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است ـ استمداد می‌کنیم.

۷.۵ نتیجه. اگر f تام و a عددی مختلط باشد، آن گاه

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(z-a)^{۲} + \dots \qquad \text{به ازای هر } z،$$

برهان. $g(\xi) = f(\xi + a)$ را در نظر بگیرید که این نیز تام است. بنابه ۵.۵،

$$g(\xi) = g(\circ) + g'(\circ)\xi + \frac{g''(\circ)}{۲!}\xi^{۲} + \dots$$

در این صورت،

$$f(\xi + a) = f(a) + f'(a)\xi + \frac{f''(a)}{۲!}\xi^{۲} + \dots$$

که با انتخاب $\xi = z - a$ نتیجه به دست می‌آید. □

۸.۵ قضیه. اگر f تام باشد و

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

آن‌گاه g تام است.

برهان. بنابه نتیجهٔ قبلی، به ازای $z \neq a$،

$$g(z) = f'(a) + \frac{f''(a)}{۲!}(z-a) + \frac{f^{(۳)}(a)}{۳!}(z-a)^{۲} + \dots \qquad (۱)$$

و، بنابه تعریف g، (۱) در $z = a$ نیز برقرار است. حال، چون g با یک سری توانی همه‌جا همگرا برابر است، g تام است.□

۹.۵ نتیجه. فرض کنید که تابع تام f دارای صفرهایی در a_1، a_2، ...، a_N باشد. اگر g را به صورت

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_N)}, z \neq a_k$$

تعریف کنیم، آن گاه $\lim_{z\to a_k} g(z)$ به ازای $k = 1, 2, \dots, N$ موجود است و اگر $g(a_k)$ را مساوی این حدود تعریف کنیم، g تام است.

برهان. فرض کنید $f_0(z) = f(z)$ و فرض کنید

$$f_k(z) = \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z - a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z - a_k}, \qquad z \neq a_k$$

با این فرض که f_{k-1} تام باشد، از قضیهٔ ۸.۵ نتیجه می‌شود که حد $f_k(z)$ وقتی که $z \to a_k$ موجود است و اگر $f_k(a_k)$ را مساوی این حد تعریف کنیم، f_k تام است. چون، بنابه فرض، f_0 تام است، حکم قضیه به استقرا نتیجه می‌شود. □

۲.۵ قضایای لیوویل و قضیهٔ اساسی جبر

۱۰.۵ قضیهٔ لیوویل. هر تابع تام کراندار ثابت است.

برهان. فرض کنید که a و b دو عدد مختلط باشند و C یک دایره در جهت مثبت به مرکز O و شعاع $R > \max(|a|, |b|)$ باشد. آن گاه، بنابه فرمول انتگرال کوشی (۳.۵)،

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-b}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)(b-a)}{(z-a)(z-b)}dz \\ &\ll \frac{M|b-a|.R}{(R-|a|)(R-|b|)} \qquad (1) \end{aligned}$$

که در آن M یک کران بالای مفروض برای $|f|$ است. چون R را می‌توان به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کرد و چون عبارت مذکور در (۱) به صفر میل می‌کند وقتی که $R \to \infty$، $f(b) = f(a)$ و f ثابت است. □

۱۱.۵ قضیهٔ لیوویل تعمیم یافته. اگر f تام باشد و، به ازای یک عدد صحیح $k \geq \circ$، اعداد ثابت و مثبتی مانند A و B موجود باشند به طوری که

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

آن گاه f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ k است.

برهان. توجه کنید که حالت $k = \circ$ قضیهٔ لیوویل اولّیه است. حالت کلّی به استقرا نتیجه می‌شود. از این رو، تابع

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\circ)}{z}, & z \neq \circ \\ f'(\circ) & z = \circ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. بنابه ۸.۵، g تام است و بنابه فرض روی f،

$$|g(z)| \leq C + D|z|^{k-1}$$

بنابراین، g یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $k - 1$ است و f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر k است.□

۱۲.۵ قضیهٔ اساسی جبر. هر چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب مختلط دارای یک صفر در $\mathbb{C}$ است.

برهان. فرض کنید $P(z)$ یک چندجمله‌ای باشد. اگر به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $P(z) \neq \circ$، آن گاه $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ یک تابع تام است. بعلاوه، اگر P غیرثابت باشد، $P \to \infty$ وقتی که $z \to \infty$؛ و نتیجه می‌گیریم که f کراندار است. ولی، در این صورت، بنابه قضیهٔ لیوویل، f و آن گاه P ثابت است، که با فرض متناقض است.

ملاحظات

۱) اگر α یک صفر چندجمله‌ای درجهٔ nـم P_n باشد آن‌گاه $P_n(z) = (z-\alpha)P_{n-1}(z)$، که در آن P_{n-1} یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n - 1$ است. این را می‌توانیم از الگوریتم اقلیدسی معمولی نتیجه بگیریم یا توجه کنیم که

$$\left|\frac{P_n(z)}{z-\alpha}\right| < A + B|z|^{n-1}$$

و به استناد قضیهٔ لیوویل تعمیم یافته نتیجه بگیریم که $P_n(z)/(z-\alpha)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n - ۱$ است.

۲) α یک صفر با مرتبهٔ تکرار k نامیده می‌شود در صورتی که $P(z) = (z-\alpha)^k Q(z)$، که در آن Q یک چندجمله‌ای با شرط $Q(\alpha) \neq ۰$ است. به طور معادل، α یک صفر با مرتبهٔ تکرار k است در صورتی که $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-۱)}(\alpha) = ۰$، $P^{(k)}(\alpha) \neq ۰$. معادل بودن دو تعریف را به آسانی می‌توان ثابت نمود و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۳) گرچه قضیهٔ اساسی جبر فقط وجود یک صفر را تضمین می‌کند ولی یک بحث استقرایی نشان می‌دهد که یک چندجمله‌ای درجهٔ nـم دارای n صفر (با احتساب مرتبهٔ تکرار) است. زیرا، با این فرض که هر چندجمله‌ای درجهٔ kـم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_k(z) = A(z-\alpha_۱)\dots(z-\alpha_k)$$

نتیجه می‌شود که

$$P_{k+۱}(z) = A(z-\alpha_۰)(z-\alpha_۱)\dots(z-\alpha_k)$$

۴) قضیهٔ اساسی جبر را به معنی زیر می‌توان یک «قضیهٔ عدم وجود» در نظر گرفت. یادآوری می‌کنیم که اعداد مختلط وقتی به صحنه آمدند که مجموعهٔ اعداد حقیقی برای حل معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ توسیع داده شد. ممکن است تصور شود که در جستجوی صفرهای سایر چندجمله‌ایها با ضرایب حقیقی یا مختلط توسیعهای دیگری مورد نیاز است. به استناد قضیهٔ اساسی جبر، همهٔ این جوابها در میدان اعداد مختلط یافت می‌شوند، و از این رو توسیع دیگری ممکن نیست. این معنی را معمولاً با این عبارت بیان می‌کنند که میدان اعداد مختلط از نظر جبری بسته است.

تمرینات

۱) سری توانی بسط $f(z) = z^۲$ را حول $z = ۲$ پیدا کنید.

۲) سری توانی بسط $f(z) = e^z$ را حول نقطه‌ای مانند a بیابید.

۳) f را یک تابع فرد می‌نامند اگر به ازای هر z داشته باشیم $f(z) = -f(-z)$، f زوج نامیده می‌شود اگر $f(z) = f(-z)$.

الف) نشان دهید که هر تابع تام فرد دارای فقط جمل فرد در بسط سری توانی حول $z = \circ$ خود است. راهنمایی: نشان دهید اگر f فرد باشد، آن گاه f' زوج است، ... یا از اتحاد

$$f(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{۲}$$

استفاده کنید.

ب) یک حکم مشابه برای توابع زوج ثابت کنید.

۴) با مقایسهٔ عبارات مختلف بسط سری توانی یک تابع تام، ثابت کنید که به ازای هر دایرهٔ C به مرکز مبداء

$$f^{(k)}(\circ) = \frac{k!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega^{k+۱}}d\omega, \qquad k = \circ, ۱, ۲, \ldots$$

۵) (تعمیمی از فرمول انتگرال کوشی). نشان دهید که اگر f تام و C حول نقطهٔ a باشد آن گاه

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{k+۱}}d\omega, \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

۶) الف) فرض کنید تابع تام f بر $|z| = R$ به M کراندار باشد. نشان دهید که ضرایب C_k در بسط سری توانی آن حول $\circ$ در شرط زیر صدق می‌کنند

$$|C_k| \leq \frac{M}{R^k}$$

ب) فرض کنید یک چندجمله‌ای در قرص واحد به ۱ کراندار باشد. نشان دهید که تمام ضرایب آن به ۱ کراندارند.

۷) (برهان دیگری از قضیهٔ لیوویل). فرض کنید $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ و f تام باشد. نشان دهید که، در این صورت، تمام ضرایب C_j بسط سری توانی f به ازای $j > k$ برابر صفرند (تمرین ۶ ـ الف را ببینید.)

۸) فرض کنید f تام باشد و $|f(z)| \leq A + B|z|^{\frac{۳}{۲}}$. نشان دهید که f یک چندجمله‌ای خطی است.

۹) فرض کنید که f تام باشد و به ازای هر z داشته باشیم $|f'(z)| \leq |z|$. نشان دهید که $f(z) = a + bz^۲$ با $|b| \leq \frac{۱}{۲}$.

۱۰) نشان دهید یک تابع تام غیرثابت نمی‌تواند به ازای هر z در دو معادلهٔ زیر صدق کند

$$f(z + ۱) = f(z) \quad \textbf{(i)}$$

$f(z+i)=f(z)$ (ii)

[راهنمایی: نشان دهید که هر تابعی که در دو معادله صدق کند کراندار است.]

۱۱) یک چندجمله‌ای حقیقی چندجمله‌ای است که تمام ضرایب آن حقیقی باشند. ثابت کنید که یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ فرد حتماً یک صفر حقیقی دارد. (تمرین ۵ فصل اوّل را ببینید.)

۱۲) نشان دهید که هر چندجمله‌ای حقیقی حاصلضربی از چندجمله‌ایهای حقیقی خطی و درجهٔ دوم است.

*۱۳) فرض کنید P یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $P(z)$ حقیقی است اگروفقط‌اگر z حقیقی باشد. ثابت کنید که P خطی است. [راهنمایی: قرار دهید $P=u+iv$، $z=x+iy$، و توجه کنید که $v=\circ$ اگروفقط‌اگر $y=\circ$.]
نتیجه بگیرید که

الف) در طول محور حقیقی $v_y\geq\circ$ یا $v_y\leq\circ$؛

ب) به ازای هر مقدار حقیقی $u_x\geq\circ$ یا $u_x\leq\circ$ و بنابراین u در طول محور xها یکنوا است.

ج) به ازای مقدار حقیقی α، $P(z)=\alpha$ فقط دارای یک جواب است.

۱۴) نشان دهید که α یک صفر با مرتبهٔ تکرار k است اگروفقط‌اگر

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(k-۱)}(\alpha)=\circ$$
$$P^{(k)}(\alpha)\neq\circ$$

۱۵) فرض کنید که f تام باشد و به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)|\leq ۱$ یا $|f'(z)|\leq ۱$. ثابت کنید که f یک چندجمله‌ای خطی است. [راهنمایی: با استفاده از انتگرال خط، نشان دهید که $|f(z)|\leq A+|z|$ که در آن $A=\max(۱,|f(\circ)|)$.]

فصل ششم

خواصی از توابع تحلیلی

مقدمه

در دو فصل پیشین، ارتباط بین سریهای همه جا همگرا و توابع تام را مورد بررسی قرار دادیم. حال توجه خود را به رابطهٔ کلّی بین سریهای توانی و توابع تحلیلی معطوف می‌کنیم. بنا به قضیهٔ ۹.۲، هر سری توانی یک تابع تام را در داخل دایرهٔ همگرایی خود نمایش می‌دهد. اوّلین هدف ما عکس این قضیه است: نشان می‌دهیم که هر تابع تحلیلی در یک قرص را می‌توان به وسیلهٔ یک سری توانی نمایش داد. سپس، برمی‌گردیم به مسألهٔ توابع تحلیلی بر مجموعه‌های باز دلخواه و رفتار موضعی این توابع را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۶ نمایش سری توانی برای توابع تحلیلی بر یک قرص

۱.۶ قضیه. فرض کنید f در $D = D(\alpha; r)$ تحلیلی باشد. اگر مستطیل بستهٔ R و نقطهٔ a هر دو در D باشند و Γ مرز R باشد، آن گاه

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0$$

برهان. برهان قضیه دقیقاً همان برهان قضایای ۱۴.۴ و ۱.۵ است. تنها شرط مورد نیاز در آن قضایا این بود که f بر سرتاسر R تحلیلی باشد، و این شرط برقرار است زیرا $R \subset D$.

برای ساده کردن نمادگذاری، قرارداد زیر را می‌پذیریم. اگر $f(z)$ در ناحیهٔ D شامل a تحلیلی باشد، تابع

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

نمایش تابع زیر است

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \in D, z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

این واقعیت که g در a تحلیلی است در قضیهٔ ۷.۶ ثابت شده است. (با قضیهٔ ۸.۵ مقایسه کنید.)□

۲.۶ قضیه. اگر f بر $D(\alpha; r)$ تحلیلی باشد و $a \in D(\alpha; r)$، توابعی مانند F و G موجودند که بر D تحلیلی می‌باشند و

$$F'(z) = f(z), \qquad G'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

برهان. تعریف می‌کنیم

$$F(z) = \int_\alpha^z f(\xi)d\xi$$

و

$$G(z) = \int_\alpha^z \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} d\xi$$

که در آن مسیر انتگرالگیری از قطعه خطهای افقی و سپس عمودی از α تا z تشکیل شده است. توجه کنید که به ازای هر $z \in D(\alpha; r)$ و هر h به اندازهٔ کافی کوچک، $z + h \in D(\alpha; r)$. در این صورت، مانند

۱۵.۴، می‌توانیم قضیهٔ مستطیل را به ترتیب در مورد خارج قسمتهای تفاضلی به کار برده نتیجه بگیریم که

$$F'(z) = f(z)$$

و

$$G'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}. \qquad \square$$

۳.۶ قضیه. اگر f و a مانند بالا باشند و C یک خم بستهٔ (هموار) در $D(\alpha; r)$ باشد،

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \circ$$

برهان. مطابق قضیهٔ ۲.۶، تابعی مانند G موجود است که در $D(\alpha; r)$ تحلیلی است و

$$G'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

بنابراین،

$$\int_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \int_C G'(z)dz = G(z(b)) - G(z(a)) = \circ$$

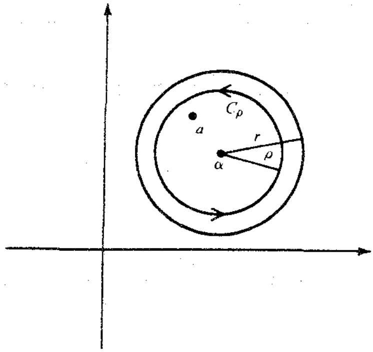
زیرا نقاط ابتدا و انتهای $z(a)$ و $z(b)$ بر هم منطبق می‌باشند. به طریق مشابه، $\int_C f(z)dz = \circ$. $\square$

۴.۶ فرمول انتگرال کوشی. فرض کنید f در $D(\alpha; r)$ تحلیلی باشد، $\circ < \rho < r$، و $\rho > |a - \alpha|$. آن گاه

$$f(a) = \frac{\Upsilon}{\Upsilon \pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

که در آن C_ρ دایرهٔ زیر است:

$$\alpha + \rho e^{i\theta}, \qquad \circ \le \theta \le \Upsilon \pi$$



برهان.

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = ۰$$

در این صورت،

$$f(a)\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-a} = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

بعلاوه، بنابه لم ۴.۵،

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-a} = ۲\pi i$$

و برهان کامل است. □

۵.۶ نمایش سری توانی برای توابع تحلیلی در یک قرص. اگر f در $D(\alpha;r)$ تحلیلی باشد، ثابتهای C_k وجود دارند به طوری که به ازای هر $z \in D(\alpha;r)$

$$f(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} C_k(z-\alpha)^k$$

برهان. $a \in D(\alpha;r)$ و $\rho > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|a-\alpha| < \rho < r$. بنا به فرمول انتگرال پیشین، اگر $|z-\alpha| < |a-\alpha|$، آن گاه

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega$$

با استفاده از این واقعیت که سری

$$\frac{۱}{\omega-\alpha}+\frac{z-\alpha}{(\omega-\alpha)^۲}+\frac{(z-\alpha)^۲}{(\omega-\alpha)^۳}+\dots$$

بر C_ρ به طور یکنواخت به $۱/(\omega-z)$ همگرا است (لم ۴.۵)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_\rho} f(\omega)\left[\frac{۱}{\omega-\alpha}+\frac{z-\alpha}{(\omega-\alpha)^۲}+\frac{(z-\alpha)^۲}{(\omega-\alpha)^۳}+\dots\right]d\omega \\ &= C_۰(\rho)+C_۱(\rho)(z-\alpha)+C_۲(\rho)(z-\alpha)^۲+\dots \qquad (۱) \end{aligned}$$

که در آن

$$C_k(\rho)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{k+۱}}d\omega$$

سپس، توجه می‌کنیم که ضرایب $C_k(\rho)$ در واقع مستطیل از ρ می‌باشند. زیرا، مجدداً مانند ۵.۵، می‌توانیم (۱) را به کار بریم تا نتیجه بگیریم که f بی‌نهایت بار در α مشتق‌پذیر است و

$$C_k(\rho)=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \qquad \text{به ازای هر } \rho \text{ که } ۰<\rho<r \text{، و هر } k.$$

بنابراین، به ازای هر $z\in D(\alpha;r)$

$$f(z)=\sum_{k=۰}^{\infty}C_k(z-\alpha)^k$$

که در آن

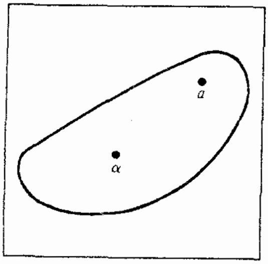
$$C_k=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+۱}}dz. \qquad \square$$

۲.۶ تحلیلی بودن در یک مجموعهٔ باز دلخواه

روشهای بالا را نمی‌توان برای تعیین یک سری توانی منحصربه‌فردی که مساوی تابع تحلیلی مفروضی در یک مجموعهٔ باز دلخواه باشد تعمیم داد. در واقع چنین تعمیمی حتی برای حوزه‌های خیلی مقدماتی مانند مربع امکان‌پذیر نیست. شکست استراتژی پیشین موقعی پیش می‌آید که، به ازای یک نقطهٔ مفروض a در مربع به مرکز α، سعی کنیم مسیری مانند C حول a و α بیابیم که

$$\left|\frac{a-\alpha}{\omega-\alpha}\right|<۱ \qquad \text{به ازای هر } \omega\in C\text{،}$$

(نمودار را ببینید). چنان که بزودی خواهیم دید، این مسأله صرفاً یک مشکل تکنیکی نیست بلکه انعکاس این واقعیت است که در حالت کلی چنین سری توانی موجود نیست! ولی می‌توانیم نتایج پیشین را به کار بریم تا قضیهٔ کلی زیر را به دست آوریم.



۶.۶ قضیه. اگر f در یک حوزهٔ دلخواه تحلیلی باشد، آن‌گاه به ازای هر $\alpha \in D$ ثابتهایی مانند C_k موجودند به طوری که به ازای هر z در درون بزرگترین قرص به مرکز α و مشمول در D

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-\alpha)^k$$

برهان. این فرمول‌بندی مجددی از قضیهٔ ۵.۶ است. □

امثله

(i) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ در $z = 2$ و در داخل قرص به شعاع ۱ و مرکز $z = 2$ تحلیلی است. برای تعیین سری توانی نمایش f در این قرص، می‌نویسیم

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = 1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\dots \qquad (1)$$

که در $|z-2| < 1$ همگرا است.

توجه کنید که این سری توانی بر $|z-2| > 1$ واگرا است علیرغم این واقعیت که $f(z) = \frac{1}{z-1}$ همه جا تحلیلی است مگر در $z = 1$.

بعلاوه، مطابق قضیهٔ ۱۴.۲، هر سری توانی دیگر $\sum a_k (z-2)^k$ که در داخل قرصی به مرکز ۲ برابر $\frac{1}{z-1}$ باشد باید بر سری توانی (۱) منطبق باشد. بنابراین، هیچ سری توانی $\sum a_k (z-2)^k$ وجود ندارد که در سرتاسر حوزه‌ای که $1/(z-1)$ در آن تحلیلی است با این تابع برابر باشد.

(ii) برای دستیابی به یک سری توانی برای $\frac{۱}{z^{۲}}$ حول $z = ۳$، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{z^{۲}} &= \left[\frac{۱}{۳+(z-۳)}\right]^{۲} = \frac{۱}{۹}\left[\frac{۱}{۱+\frac{z-۳}{۳}}\right]^{۲} \\ &= \frac{۱}{۹}\left[۱ - \frac{۲(z-۳)}{۳} + \frac{۳(z-۳)^{۲}}{۹} - \frac{۴(z-۳)^{۳}}{۲۷} + - \dots\right] \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{k}}{۹} . \frac{(k+۱)}{۳^{k}}(z-۳)^{k}\end{aligned}$$

دوباره توجه کنید که شعاع همگرایی زیر بزرگترین قرص به مرکز $z = ۳$ را نمایش می‌دهد که در آن $\frac{۱}{z^{۲}}$ تحلیلی است

$$۱/\limsup |C_k|^{\frac{۱}{k}} = \lim\left(\frac{۹\,.\,۳^{k}}{k+۱}\right)^{\frac{۱}{k}} = ۳$$

(iii) برای تعیین سه جملهٔ اول سری توانی تابع $f(z) = \sin(\frac{۱}{z})$ حول $z = ۱$، چون هیچ فرمول بی‌واسطه‌ای دیده نمی‌شود، ضرایب را مستقیماً با استفاده از فرمول

$$C_k = \frac{f^{(k)}(۱)}{k!}$$

محاسبه می‌کنیم. از این رو، خواهیم داشت:

$$f(z) = \sin\frac{۱}{z} = \sin ۱ - (\cos ۱)(z-۱) + \frac{(۲\cos ۱ - \sin ۱)}{۲}(z-۱)^{۲} + \dots$$

۳.۶ قضایای یکتایی، مقدار میانگین، ماکسیمم قدر مطلق

حال بعضی از نتایج نمایش سریهای توانی را که در قضیهٔ ۶.۶ بحث شد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۷.۶ قضیه. اگر f در α تحلیلی باشد، تابع

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

نیز چنین است.

برهان. بنابه قضیهٔ ۶.۶، در یک همسایگی α،

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \dots$$

از این رو، g در همان همسایگی دارای نمایش سری توانی

$$g(z) = f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha) + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!}(z-\alpha)^2 + \dots$$

است و، بنابه ۹.۲، g در α تحلیلی است. □

۸.۶ قضیه. اگر f در z تحلیلی باشد، آن گاه f بی‌نهایت بار در z تحلیلی است.

برهان. فقط نیاز به این یادآوری داریم که، بنابه تعریف، f در z تحلیلی است اگر f در یک مجموعهٔ باز شامل z تحلیلی باشد. در این صورت، بنابه ۶.۶، در یک قرص شامل z، f را می‌توان به صورت یک سری توانی بسط داد. در این جا برهان کامل می‌شود، زیرا سریهای توانی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیرند (نتیجهٔ ۱۰.۲).□

۹.۶ قضیهٔ یکتایی. فرض کنید f در حوزهٔ D تحلیلی باشد و $f(z_n) = 0$ که در آن $\{z_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز است و $z_n \to z_0 \in D$. آن گاه $f \equiv 0$ بر D.

برهان. چون f دارای نمایش سری توانی حول z_0 است، بنابه قضیهٔ یکتایی سریهای توانی، f در سرتاسر یک قرص شامل z_0 صفر است. برای این که نشان بدهیم که f در تمام حوزهٔ D متحد با صفر است، D را به دو مجموعهٔ زیر تقسیم می‌کنیم

$$A = \{z \in D: \quad \text{یک نقطهٔ حدی صفرهای } f \text{ است } z\}$$

$$B = \{z \in D: \quad z \notin A\}$$

بنا به تعریف، $A \cap B = \phi$. بنابه قضیهٔ یکتایی سریهای توانی، A باز است: اگر z یک نقطهٔ حدی صفرهای f باشد، در داخل قرصی حول z تابع f متحد با صفر است و این قرص در A قرار دارد. B باز است، زیرا به ازای هر $z \in B$، بنابه پیوستگی f، باید یک $\delta > 0$ موجود باشد که بر $D(z;\delta)$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$. قرص $D(z;\delta)$ مشمول در B خواهد بود. در این صورت، بنابه همبندی D، باید A یا B تهی باشد. ولی، بنابه فرض، $z_0 \in A$. از این رو، B تهی است و هر $z \in D$ یک نقطهٔ حدی صفرهای f است. پس، بنابه پیوستگی f، $f \equiv 0$ بر D.□

۱۰.۶ نتیجه. اگر دو تابع f و g در یک حوزه تحلیلی باشند و بر مجموعه‌ای که یک نقطهٔ انباشتگی در D دارد برابر باشند، آن گاه $f \equiv g$ بر D.

برهان. $f - g$ را در نظر بگیرید. □

توجه کنید که یک تابع تحلیلی غیربدیهی ممکن است دارای بی‌نهایت صفر باشد. مثلاً، $\sin z$ که تام است در تمام نقاط $z = n\pi$ با $n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$ ، صفر است. در واقع، $\sin(۱/z)$ بر مجموعهٔ

$$\{\frac{۱}{n\pi} : n = \pm ۱, \pm ۲, \ldots\}$$

صفر است که دارای یک نقطهٔ انباشتگی در ۰ است! معذالک، چون این نقطهٔ انباشتگی در حوزه‌ای که $\sin(۱/z)$ در آن تحلیلی است قرار ندارد، $\sin(۱/z)$ در مفروضات قضیهٔ ۹.۶ صدق نمی‌کند.

۱۱.۶ قضیه. اگر f تام باشد و $f(z) \to \infty$ وقتی که $z \to \infty$، آن‌گاه f یک چندجمله‌ای است.

برهان. بنابه فرض، Mی هست که $|z| > M$ نتیجه می‌دهد که $|f(z)| > ۱$. نتیجه می‌گیریم که f حداکثر دارای تعداد متناهی صفر مانند $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\ldots$، α_N است. در غیر این صورت، مجموعهٔ صفرهای f دارای یک نقطهٔ انباشتگی در $D(۰\,; M)$ خواهد بود و، بنابه قضیهٔ یکتایی، f متحد با صفر خواهد بود که متناقض با فرض اولیه است. اگر صفرهای f را از آن جدا کنیم،

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha_۱)(z-\alpha_۲)\ldots(z-\alpha_N)}$$

تام است (نتیجهٔ ۹.۵) و هرگز صفر نیست؛ بنابراین

$$h(z) = \frac{۱}{g(z)} = (z-\alpha_۱)(z-\alpha_۲)\ldots(z-\alpha_N)/f(z)$$

نیز تام است. چون $f \to \infty$ وقتی $z \to \infty$، $|h(z)| \leq A + |z|^N$؛ از این رو، بنابه قضیهٔ ۱۱.۵، h یک چندجمله‌ای است. ولی $h = \frac{۱}{g} \neq ۰$، پس، بنابه قضیهٔ اساسی جبر، h برابر ثابتی مانند k است. از این رو،

$$f(z) = \frac{۱}{k}(z-\alpha_۱)(z-\alpha_۲)\ldots(z-\alpha_N). \qquad \square$$

قضیهٔ یکتایی اغلب برای اثبات درستی معادلات تابعی در صفحهٔ مختلط به کار می‌رود که صحّت آنها روی خط حقیقی محرز است. مثلاً، برای اثبات اتحاد

$$e^{z_۱+z_۲} = e^{z_۱}e^{z_۲} \qquad (۱)$$

ابتدا z_2 را یک عدد حقیقی ثابت می‌گیریم. آن گاه $e^{z_1+z_2}$ و $e^{z_1}.e^{z_2}$ دو تابع تام از z_1 خواهند بود که در همهٔ نقاط حقیقی بر هم منطبق می‌باشند و بنابراین، بنا به قضیهٔ یکتایی، به ازای هر عدد مختلط z_1 نیز برهم منطبق خواهند بود. بالاخره، به ازای هر z_1 ثابت، دو طرف (۱) را به عنوان توابع تحلیلی از z_2 در نظر می‌گیریم که به ازای z_2 حقیقی برابرند و، با اعمال مجدد قضیهٔ یکتایی، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر عدد مختلط z_2 نیز برقرار است. بنابراین، (۱) به ازای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 برقرار است. به طریق مشابه، معادلاتی نظیر

$$\tan^2 z = \sec^2 z - 1$$

که به طور مسلم به ازای z حقیقی برقرارند، در سرتاسر حوزهٔ تحلیلی خود برقرارند.

در حالت کلی، اگر یک رابطهٔ «تحلیلی» بین توابع تحلیلی برقرار باشد: یعنی، اگر تابع تحلیلی $F(f,g,h,\dots)$ در یک معادلهٔ تابعی به شکل

$$F(f,g,h,\dots)=0$$

بر مجموعه‌ای صدق کند که یک نقطهٔ انباشتگی در ناحیه‌ای دارد که F در آن تحلیلی است، آن گاه این معادله در سرتاسر این ناحیه برقرار خواهد بود.

اکنون رفتار موضعی توابع تحلیلی را مورد آزمایش قرار می‌دهیم.

۱۲.۶ قضیهٔ مقدار میانگین. اگر f بر D تحلیلی باشد و $\alpha \in D$، آن گاه $f(\alpha)$ برابر است با میانگین مقادیر f بر مرز هر قرص دلخواه به مرکز α و مشمول در D. یعنی،

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{i\theta})d\theta$$

که در آن $D(\alpha;r)\subset D$.

برهان. این حکم یک فرمولبندی مجدد از فرمول انتگرال کوشی (۴.۶) با $a=\alpha$ است. یعنی،

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

و با معرفی پارامتر θ که $z=\alpha+re^{i\theta}$، در می‌یابیم که

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{i\theta})d\theta. \quad \square$$

شبیه حالت حقیقی، z یک نقطهٔ ماکسیمم نسبی f نامیده می‌شود اگر به ازای هر ω در یک همسایگی از z، $|f(z)|\geq|f(\omega)|$. مینیمم نسبی نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود.

۱۳.۶ قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق. هر تابع f که در یک ناحیهٔ D تحلیلی و غیرثابت باشد هیچ نقطهٔ ماکسیمم درونی ندارد: به ازای هر $z \in D$ و هر $\delta > 0$ نقطه‌ای مانند ω در $D(z;\delta) \cap D$ می‌توان یافت که $|f(\omega)| > |f(z)|$.

برهان. این واقعیت که به ازای ωهای نزدیک z،

$$|f(\omega)| \geq |f(z)|$$

بلافاصله از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود. چون به ازای هر $r > 0$ که $D(z;r) \subset D$ داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta$$

نتیجه می‌شود که

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{i\theta})|d\theta \leq \max_\theta |f(z+re^{i\theta})| \tag{۱}$$

به طریق مشابه، می‌توانیم نتیجه بگیریم که به ازای ωهای واقع در $D(z;r)$، $|f(\omega)| > |f(z)|$. زیرا، برقراری تساوی در (۱) ایجاب می‌کند که $|f|$ در سرتاسر دایرهٔ $C(z;r)$ ثابت باشد و چون این نتیجه به ازای هر $r > 0$ به قدر کافی کوچک برقرار است، لازم می‌آید که $|f|$ در یک قرص ثابت باشد. ولی، در این صورت، بنابه قضیهٔ ۷.۳، f در آن قرص ثابت خواهد بود و از قضیهٔ یکتایی نتیجه می‌گیریم که f بر D ثابت است. □

قضیهٔ ماکسیمم قدر مطلق قطعاً بیان می‌کند که یک تابع تحلیلی دارای ماکسیمم نسبی نیست. این واقعیت را با ظرافت بیشتری به صورت زیر بیان می‌کنند.

فرض کنید که تابع f در یک ناحیهٔ کراندار D تحلیلی و بر $\bar{D}$ پیوسته باشد. (از این به بعد، به جای فرض مذکور، این عبارت را به کار خواهیم برد که f در D پ‍ـ تحلیلی است.) در جایی از ناحیهٔ فشردهٔ $\bar{D}$، تابع پیوستهٔ $|f|$ باید مقدار ماکسیمم خود را بگیرد. از قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق می‌توان استمداد جسته بیان کرد که این ماکسیمم همواره بر مرز ناحیه اختیار می‌شود.

۱۴.۶ قضیهٔ مینیمم قدر مطلق. اگر f یک تابع تحلیلی و غیرثابت در ناحیهٔ D باشد، آن گاه هیچ نقطهٔ $z \in D$ نمی‌تواند یک نقطهٔ مینیمم نسبی f باشد مگر این که $f(z) = 0$.

برهان. فرض کنید $f(z) \neq 0$ و $g = 1/f$ را در نظر بگیرید. اگر z یک نقطهٔ مینیمم برای f باشد، یک نقطهٔ ماکسیمم برای g خواهد بود. در این صورت، g بر D ثابت خواهد بود که با مفروضات ما در مورد f متناقض است. □

تبصره. قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق را می‌توان با تحلیل نمایش سری توانی موضعی یک تابع تحلیلی ثابت کرد. یعنی، به ازای هر نقطهٔ α، سری توانی زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(z) = C_0 + C_1(z-\alpha) + C_2(z-\alpha)^2 + \dots$$

که در قرصی به مرکز α همگرا است. برای تعیین ω در نزدیکی α به طوری که $|f(\omega)| > |f(\alpha)|$، ابتدا فرض کنید که $C_1 \neq 0$ و قرار دهید $\omega = \alpha + \delta e^{i\theta}$، که در آن $\delta > 0$ «کوچک» است و θ طوری انتخاب می‌شود که C_0 و $C_1\delta e^{i\theta}$ دارای شناسه‌های یکسان باشند. آن گاه

$$\begin{aligned}
|f(\alpha)| &= |C_0| \\
|f(\omega)| &\geq |C_0 + C_1(\omega-\alpha)| - |C_2(\omega-\alpha)^2 + C_3(\omega-\alpha)^3 + \dots| \\
&\geq |C_0| + |C_1\delta| - \delta^2|C_2 + C_3(\omega-\alpha) + \dots|
\end{aligned}$$

چون آخرین عبارت یک سری همگرا را نمایش می‌دهد، اگر $\delta < |C_1|/2A$ آن گاه

$$\begin{aligned}
|f(\omega)| &\geq |C_0| + |C_1\delta| - A\delta^2 \\
&> |f(\alpha)|
\end{aligned}$$

بنابراین، α نمی‌تواند یک نقطهٔ ماکسیمم باشد. توجه کنید که اگر $C_1 = 0$، همان بحث را می‌توان با تمرکز روی اوّلین ضریب ناصفر C_k تکرار کرد.

این روش مطالعهٔ رفتار موضعی یک تابع تحلیلی را، که از طریق بررسی اولین جمل بسط سری توانی انجام می‌شود، می‌توان برای نتیجه‌گیری حکم زیر اعمال کرد.

یادآوری می‌کنیم که در حسابان، نقاط ماکسیمم نسبی در بین نقاط بحرانی یک تابع مشتق‌پذیر پیدا می‌شوند (یعنی نقاطی که در آنها $f' = 0$). گزارهٔ زیر رفتار نسبتاً شگفت‌آور متفاوتی از یک تابع تحلیلی در نقطه‌ای را نشان می‌دهد که در آن نقطه ماکسیمم قدرمطلق خود را می‌گیرد.

۱۵.۶ قضیهٔ پاد ـ حسابان (اردوش). فرض کنید f در قرص بسته‌ای تحلیلی باشد و ماکسیمم قدرمطلق خود را در یک نقطهٔ مرزی α اختیار کند. در این صورت، $f'(\alpha) \neq 0$، مگر این که f ثابت باشد.

برهان. چون f در نقطهٔ α تحلیلی است، دارای بسط سری توانی به صورت زیر است

$$f(z) = C_۰ + C_۱(z-\alpha) + C_۲(z-\alpha)^۲ + \dots$$

اگر فرض کنیم که $f'(\alpha) = C_۱ = ۰$، آن گاه

$$f(z) = C_۰ + C_۲(z-\alpha)^۲ + C_۳(z-\alpha)^۳ + \dots \qquad (۱)$$

حال، فرض کنید $C_۲ \neq ۰$. می‌خواهیم $\omega = \alpha + \delta e^{i\theta}$ را در داخل قرص بالا طوری انتخاب کنیم که $C_۰$ و $C_۲\delta^۲e^{۲i\theta}$ دارای شناسه‌های یکسان باشند. چنین θای همواره متناظر با نقطهٔ ω در داخل قرص است مگر آن که هر دو جهت $\pm\frac{۱}{۲}\arg C_۰$ زوایای مماس بر دایره در نقطهٔ α باشند. ولی، حتی در این حالت، با اندک تغییری در θ، می‌توانیم ω را در درون قرص انتخاب کنیم به طوری که

$$\begin{aligned} |C_۰ + C_۲(\omega-\alpha)^۲| &= |C_۰ + C_۲\delta^۲e^{۲i\theta}| \\ &\geq |C_۰| + \frac{۱}{۲}|C_۲\delta^۲| \end{aligned}$$

(تمرین ۱۲ را ببینید.)

چون جمل باقیماندهٔ سری توانی (۱) از مرتبهٔ $\delta^۳$ است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که، به ازای δ به اندازهٔ کافی کوچک،

$$|f(\omega)| \geq |C_۰| + \frac{۱}{۴}|C_۲\delta^۲| > |f(\alpha)|$$

که متناقض است با این فرض که α یک نقطهٔ ماکسیمم در قرص بود.

مجدداً، گرچه برای سهولت فرض کردیم $C_۲ \neq ۰$، تنها شرط ضروری این است که به ازای یک $k > ۱$ داشته باشیم $C_k \neq ۰$. اگر این اتفاق نیفتد، آن گاه f ثابت است. □

تمرینات

۱) یک بسط سری توانی برای $۱/z$ حول $z = ۱ + i$ پیدا کنید.

۲) با استفاده از اتحاد $\frac{۱}{۱-z} = ۱ + z + z^۲ + \dots$ به ازای $|z| < ۱$، مقادیر $\sum nz^n$ و $\sum n^۲z^n$ را بیابید.

۳) نشان دهید که اگر f در $|z| \leq ۱$ تحلیلی باشد، باید عدد مثبتی مانند n باشد به طوری که $f(\frac{۱}{n}) \neq \frac{۱}{n+۱}$.

۴) ثابت کنید که $\sin(z_۱ + z_۲) = \sin z_۱ \cos z_۲ + \cos z_۱ \sin z_۲$.

۵) فرض کنید که تابع تحلیلی f به ازای $۰ \le x \le ۱$ بر $\tan x$ منطبق باشد. نشان دهید که $f(z) = i$ دارای جواب نیست. آیا f می‌تواند تام باشد؟

۶) فرض کنید که f تام باشد و به ازای zهای به قدر کافی بزرگ، $|f(z)| \ge |z|^N$. نشان دهید که f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداقل N است.

۷) فرض کنید که f بر $|z| \le ۱$ پ- تحلیلی باشد، $f \ll ۲$ وقتی که $|z| = ۱$ و $\operatorname{Im} z \ge ۰$، $f \ll ۳$ وقتی که $|z| = ۱$ و $\operatorname{Im} z \le ۰$. نشان دهید که $|f(۰)| \le \sqrt{۶}$. [راهنمایی: $f(z).f(-z)$ را در نظر بگیرید.]

۸) مستقیماً نشان دهید که ماکسیمم و مینیمم قدرمطلق e^z همواره بر مرز یک حوزهٔ فشرده اختیار می‌شود.

۹) ماکسیمم و مینیمم قدر مطلق $z - z^۲$ را بر قرص $|z| \le ۱$ پیدا کنید.

۱۰) فرض کنید که f و g بر ناحیهٔ فشردهٔ D تحلیلی باشند. نشان دهید که $|f(z)| + |g(z)|$ ماکسیمم خود را در مرز می‌گیرد. [راهنمایی: به ازای α و β مناسب، $f(z)e^{i\alpha} + g(z)e^{i\beta}$ را در نظر بگیرید.]

۱۱) نشان دهید که قضیهٔ اساسی جبر را از اصل مینیمم قدرمطلق می‌توان نتیجه گرفت.

۱۲) الف) قضیهٔ ۱۵.۶ را به این طریق کامل کنید که نشان دهید که به‌ازای هر دو عدد ناصفر $z_۱$ و $z_۲$ اگر شناسه‌های آنها به اندازهٔ کافی نزدیک باشند، آن‌گاه

$$|z_۱ + z_۲| > |z_۱| + \tfrac{۱}{۲}|z_۲|$$

ب) توضیح دهید که چرا قضیهٔ ۱۵.۶ در یک حوزهٔ دلخواه کارگر نیست.

۱۳) فرض کنید $P_n(z) = a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_n z^n$، و به‌ازای $|z| \le ۱$ داشته باشیم $|P_n(z)| \le ۱$. نشان دهید که به ازای هر $z \gg ۱$، $|P_n(z)| \le |z|^n$. [راهنمایی: با استفاده از تمرین ۶ فصل ۵، نشان دهید که $|a_n| \le ۱$؛ سپس، $P_n(z)/z^n$ را در طوق $۱ \le |z| \le R$ به ازای R «بزرگ» در نظر بگیرید.]

فصل هفتم

خواص دیگر توابع تحلیلی

۱.۷ قضیهٔ نگاشت باز، لم شوارتز

قضیهٔ یکتایی (۹.۶) بیان می‌کند که یک تابع تحلیلی غیرثابت نمی‌تواند بر یک مجموعهٔ باز ثابت باشد. به طریق مشابه، مطابق قضیهٔ ۷.۳، $|f|$ نمی‌تواند ثابت باشد. از این رو، یک تابع تحلیلی غیرثابت نمی‌تواند یک مجموعهٔ باز را بر یک نقطه یا یک قوس مستدیر بنگارد. با استفاده از قضیهٔ ماکسیمم قدر مطلق، حکم دقیقتر زیر را در خواص نگاشتهای توابع تحلیلی می‌توانیم نتیجه بگیریم.

۱.۷ قضیهٔ نگاشت باز. تصویر یک مجموعهٔ باز تحت یک نگاشت تحلیلی غیرثابت، مجموعه‌ای باز است.

برهان (منسوب به کاراتئودری). نشان می‌دهیم که اگر f غیرثابت و در α تحلیلی باشد، تصویر قرصی (کوچک) شامل α تحت f شامل قرصی به مرکز $f(\alpha)$ است. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید،

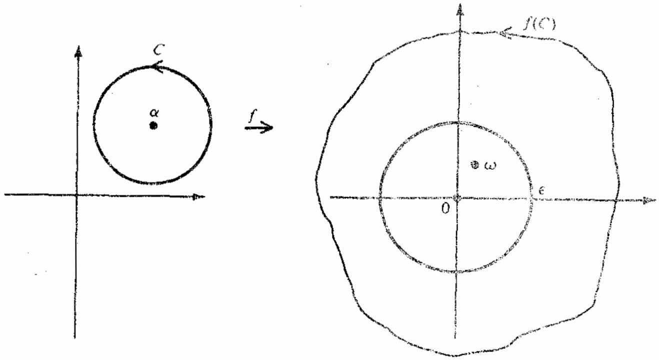
فرض کنید $f(\alpha) = ۰$. (در غیر این صوت، $f(z) - f(\alpha)$ را در نظر بگیرید.) بنابه قضیهٔ یکتایی، دایره‌ای مانند C به مرکز α وجود دارد به طوری که هرگاه $z \in C$ داشته باشیم $f(z) \neq ۰$. فرض کنید $۲\varepsilon = \min_{z\in C} |f(z)|$. نتیجه می‌شود که تصویر قرص محدود به C شامل قرص $D(۰;\varepsilon)$ است. زیرا، فرض کنید $\omega \in D(۰;\varepsilon)$ و $f(z) - \omega$ را در نظر بگیرید.

$$\text{به ازای } z \in C, \quad |f(z) - \omega| \geq |f(z)| - |\omega| \geq \varepsilon$$

در حالی که در α،

$$|f(\alpha) - \omega| = |-\omega| < \varepsilon$$

از این رو، $|f(z) - \omega|$ مینیمم خود را در نقطه‌ای در درون C اختیار می‌کند و، به استناد قضیهٔ مینیمم قدر مطلق، $f(z) - \omega$ باید در نقطه‌ای در داخل C مساوی صفر باشد. بنابراین، ω در برد f است. □



قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق همراه با سایر اطلاعات مفروض یک تابع می‌تواند در تعیین تخمین قویتری از قدرمطلق f در حوزه‌ای که f در آن تحلیلی است به کار برده شود. مثال زیر از این نوع است.

۲.۷ لم شوارتز. فرض کنید که f در قرص واحد تحلیلی باشد و در این قرص $f \ll ۱$ و $f(۰) = ۰$. آن گاه

(i) $|f(z)| \leq |z|$

(ii) $|f'(۰)| \leq ۱$

در هر حالت، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $f(z) = e^{i\theta}z$.

برهان. قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق را در مورد تابع تحلیلی زیر به کار می‌بریم

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z} & ۰<|z|<۱\\ f'(۰) & z=۰\end{cases}$$

(قضیهٔ ۷.۶ را ببینید.)

چون بر دایرهٔ به شعاع r داریم $g\ll\frac{۱}{r}$، با این فرض که $r\to ۱$ و با اعمال قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، درمی‌یابیم که بر قرص واحد $|g(z)|\leq ۱$ که (i) و (ii) ثابت می‌شود. بعلاوه، اگر به ازای نقطه‌ای مانند $z_۰$ که $|z_۰|<۱$ داشته باشیم $|g(z_۰)|=۱$، آن گاه، بنابه قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، g باید ثابت (با قدر مطلق ۱) باشد و $f(z)=e^{i\theta}z$. □

دسته‌ای از توابع که بر قرص واحد تحلیلی و به ۱ کراندارند با مجموعهٔ زیر از تبدیلات دو خطی

$$B_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{۱-\bar{\alpha}z}$$

ارائه می‌شوند که در آنها $|\alpha|<۱$. توجه کنید که

$$|\frac{۱}{\bar{\alpha}}|>۱$$

که در این صورت B_α بر $|z|\leq ۱$ تحلیلی است. بر $|z|=۱$،

$$|B_\alpha|^۲=\left(\frac{z-\alpha}{۱-\bar{\alpha}z}\right)\left(\frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{۱-\alpha\bar{z}}\right)=\frac{|z|^۲-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+|\alpha|^۲}{۱-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+|\alpha|^۲|z|^۲}=۱$$

و لذا بر مرز، $|B_\alpha|=۱$. به این دلیل، با استفاده از توابع B_α در قالب لم شوارتز، مسائل اکسترمال متنوعی را در مورد توابع تحلیلی می‌توان حل کرد.

مثال ۱. فرض کنید که f بر قرص واحد تحلیلی و به ۱ کراندار باشد و $f(\frac{۱}{۲})=۰$. می‌خواهیم $f(\frac{۳}{۴})$ را برآورد کنیم. چون $f(\frac{۱}{۲})=۰$،

$$g(z)=\begin{cases}f(z)/\frac{z-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}z} & z\neq\frac{۱}{۲}\\ \frac{۳}{۴}f'(\frac{۱}{۲}) & z=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بر $|z|<۱$ تحلیلی است. اگر فرض کنیم که $|z|\to ۱$، درمی‌یابیم که $|g|\leq ۱$؛ در این صورت، در سرتاسر قرص،

$$|f(z)|\leq\left|\frac{z-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}z}\right|$$

بالاخص،

$$|f(\tfrac{۳}{۴})| \leq \tfrac{۲}{۵}$$

توجه کنید که مقدار ماکسیمم، $\frac{۲}{۵}$، از

$$B_{\frac{۱}{۲}}(z) = \frac{z - \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}z}$$

به دست می‌آید.

مثال ۲. حال، نشان می‌دهیم که در بین همهٔ توابع f که در قرص واحد تحلیلی و به ۱ کراندار هستند، $\max|f'(\frac{۱}{۳})|$ موقعی به دست می‌آید که $f(\frac{۱}{۳}) = ۰$.

فرض کنید $f(\frac{۱}{۳}) \neq ۰$ و

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\frac{۱}{۳})}{۱ - \overline{f(\frac{۱}{۳})}f(z)}$$

را در نظر بگیرید. دوباره، چون

$$\left|\frac{\omega - f(\frac{۱}{۳})}{۱ - \overline{f(\frac{۱}{۳})}\omega}\right| = ۱$$

وقتی که $|\omega| = ۱$، در حالی که $|f| < ۱$ وقتی که $|z| < ۱$، به استناد قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق مطمئن می‌شویم که g، مانند f، نیز به ۱ کراندار است. یک محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که

$$g'(\tfrac{۱}{۳}) = f'(\tfrac{۱}{۳})/(۱ - |f(\tfrac{۱}{۳})|^{۲})$$

در این صورت:

$$|g'(\tfrac{۱}{۳})| > |f'(\tfrac{۱}{۳})|$$

توجه می‌کنیم که مقدار $\max|f'(\frac{۱}{۳})|$ به وسیلهٔ $B_{۱/۳}(z)$ اختیار می‌شود. [تمرینات ۸ و ۹ را ببینید].

مثال ۲ دارای تعبیر فیزیکی جالبی است. با اعمال این قید روی f که قرص واحد را الزاماً بر قرص واحد بنگارد، روش ماکسیمم کردن $|f'(\frac{۱}{۳})|$ چنین است.

الف) $\frac{۱}{۳}$ را به ۰ بنگاریم، و

ب) مرز قرص واحد را بر خودش بنگاریم.

این روش مثل این است که با تجویز بیشترین فضا به بسط حول $f(\frac{۱}{۲})$، ماکسیمم $|f'(\frac{۱}{۲})|$ را به دست آوریم. در مطالعهٔ قضیهٔ نگاشت ریمان، پدیدهٔ مشابهی را ملاحظه خواهیم کرد.

با بازگشت مجدد به توابع تام، از قضیهٔ ماکسیمم قدر مطلق می‌توان برای استنتاج توسیعهای دیگری از قضیهٔ لیوویل استفاده کرد.

۳.۷ قضیه. اگر f یک تابع تام باشد که به ازای هر z در رابطهٔ زیر صدق کند

$$|f(z)| \leq ۱/|\operatorname{Im}(z)|$$

آن گاه $f \equiv ۰$.

برهان. بنابه فرض، $f \ll ۱$ وقتی که $|\operatorname{Im} z| > ۱$؛ ولی f می‌تواند در نزدیکی محور حقیقی بی‌کران باشد. برای تخمین $|f|$ بر دایرهٔ $|z| = R$، تابع کمکی

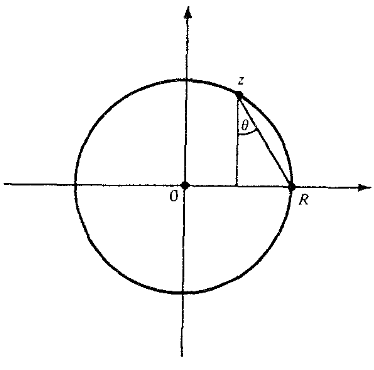
$$g(z) = (z^۲ - R^۲) f(z)$$

را معرفی می‌کنیم. به ازای هر z که $|z| = R$ و $\operatorname{Re} z \geq ۰$ یک θ می‌توان یافت که $۰ \leq \theta \leq \pi/۴$ و

$$|(z - R) f(z)| \leq |z - R|/|\operatorname{Im} z| = \sec\theta$$

(نمودار را ببینید)؛ در این صورت،

$$|(z - R) f(z)| \leq \sqrt{۲}$$



به طریق مشابه، اگر $|z| = R$ و $\operatorname{Re} z \leq ۰$، آن گاه

$$|(z + R) f(z)| \leq \sqrt{۲}$$

از این رو، به ازای هر z که $|z| = R$،

$$|g(z)| \leq |z+R||z-R||f(z)| \leq ۳R$$

بنابه قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، همان کران بالا برای $|z| > R$ نیز برقرار است. بنابراین،

$$|g(z)| = |z^۲ - R^۲||f(z)| \leq ۳R$$

و اگر $z \gg R$،

$$|f(z)| \leq \frac{۳R}{|z^۲ - R^۲|}$$

با فرض $R \to \infty$، درمی‌یابیم که $f(z) = ۰$. چون این رابطه به ازای هر z برقرار است، قضیه ثابت می‌شود. □

۲.۷ عکس قضیهٔ کوشی: قضیهٔ موررا؛ اصل بازتابی شوارتز

تاکنون، حکم کلیدی در مطالعهٔ توابع تحلیلی قضیهٔ مستطیل (۱.۶) بوده است. از این رو، شگفت‌آور نخواهد بود که بگوییم که خاصیت وصف شده در آنجا تقریباً معادل تحلیلی بودن است.

۴.۷ قضیهٔ موررا. فرض کنید که f بر قرص باز D پیوسته باشد. هرگاه که Γ مرز یک مستطیل بسته در D است،

$$\int_\Gamma f(z)dz = ۰$$

آن گاه f بر D تحلیلی است.

چون انتگرالهای خط تحت تأثیر مقدار انتگرالده در یک نقطه نیستند، شرط پیوستگی f فرضی ضروری است. همچنین، توجه کنید که در اثبات، در واقع، فقط لازم است که شرط $\int_\Gamma f \equiv ۰$ را برای مستطیلهایی درنظر بگیریم که اضلاع آنها موازی محورهای افقی و عمودی است.

برهان. در قرص کوچکی حول نقطهٔ $z_۰ \in D$، می‌توانیم تابع اولیهٔ زیر را تعریف کنیم

$$F(z) = \int_{z_۰}^{z} f(\xi)d\xi$$

که در آن مسیر انتگرالگیری متشکل از یک پاره‌خط افقی و یک پاره‌خط قائم است که از $z_\circ$ به z می‌روند. پس، اگر خارج‌قسمت تفاضلی F را در نظر بگیریم و توجه کنیم که بر هر مرز مستطیلی $\int_\Gamma f = \circ$، می‌توانیم (مانند قضایای ۱۵.۴ و ۲.۶) نتیجه بگیریم که وقتی که $h \to \circ$،

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{\text{۱}}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)d\xi \to f(z)$$

(در این جا از پیوستگی f استفاده می‌کنیم.) بنابراین، F در یک همسایگی $z_\circ$ تحلیلی است. چون توابع تحلیلی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیرند و $F'(z) = f(z)$، f در $z_\circ$ تحلیلی است. بالاخره، چون $z_\circ$ دلخواه بود، f بر D تحلیلی است. □

قضیهٔ موررا غالباً در اثبات تحلیلی بودن توابعی به کار می‌رود که به شکل انتگرال ارائه می‌شوند. مثلاً، در نظر بگیرید

$$f(z) = \int_\circ^\infty \frac{e^{zt}}{t+\text{۱}}dt$$

اگر $\operatorname{Re} z = x < \circ$،

$$\int_\circ^\infty \frac{|e^{zt}|}{t+\text{۱}}dt < \int_\circ^\infty e^{xt}dt = -\frac{\text{۱}}{x}$$

لذا این انتگرا به طور مطلق همگرا است و $|f(z)| \leq \text{۱}/|x|$. برای این که نشان دهیم که f بر نیم صفحهٔ چپ D : $\operatorname{Re} z < \circ$ تحلیلی است، رابطهٔ زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \left(\int_\circ^\infty \frac{e^{zt}}{t+\text{۱}}dt\right)dz$$

که در آن Γ مرز یک مستطیل بسته در D است.

چون

$$\int_\Gamma \int_\circ^\infty \frac{|e^{zt}|}{t+\text{۱}}dtdz$$

همگرا است، می‌توانیم ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم؛ و چون $e^{zt}/(t+\text{۱})$ به عنوان تابعی از z تحلیلی است،

$$\int_\Gamma f = \int_\circ^\infty \int_\Gamma \frac{e^{zt}}{t+\text{۱}}dzdt = \int_\circ^\infty \circ\, dt = \circ$$

پس، بنابه قضیهٔ موررا، f بر D تحلیلی است.

۵.۷ تعریف. فرض کنید که $\{f_n\}$ و f بر D تعریف شده باشند. می‌گوییم که f_n بر فشرده‌ها به طور یکنواخت همگرا است در صورتی که f_n بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $K \subset D$ به طور یکنواخت به f همگرا باشد. قضیهٔ زیر حاکی از این است که تحلیلی بودن تحت همگرایی یکنواخت حفظ می‌شود، که مغایر خاصیت مشتق‌پذیری روی خط حقیقی است. بر خط حقیقی، امکان دارد که حد یکنواخت توابع مشتق‌پذیر هیچ جا مشتق‌پذیر نباشد.

۶.۷ قضیه. فرض کنید $\{f_n\}$ نمایش دنباله‌ای از توابع باشد که در حوزهٔ باز D تحلیلی‌اند و $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر فشرده‌ها. آن گاه f بر D تحلیلی است.

برهان. در همسایگی فشرده‌ای مانند K از نقطهٔ دلخواهی مانند $z_\circ$، f حد یکنواخت توابع پیوسته است؛ بنابراین، f بر D پیوسته است. بعلاوه، به ازای هر مستطیل $\Gamma \subset K$،

$$\int_\Gamma f = \int_\Gamma \lim f_n = \lim \int_\Gamma f_n = \circ,$$

زیرا $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر Γ. بنابراین، بنابه قضیهٔ موررا، f بر D تحلیلی است. □

۷.۷ قضیه. فرض کنید که f بر مجموعهٔ باز D پیوسته باشد و در D تحلیلی باشد مگر احتمالاً در نقاط پاره‌خط L. آن گاه f بر D تحلیلی است.

برهان. بی‌آنکه به کلیت قضیه خللی وارد شود، می‌توانیم نقاط استثنایی را نقاط روی محور xها در نظر بگیریم. در غیر این صورت، می‌توانیم برهان را با بررسی $g(z) = f(Az + B)$ آغاز کنیم که در آن $Az + B$ محور حقیقی را بر خط شامل L می‌نگارد. (تمرین ۱۳ را ببینید.) البته، تحلیلی بودن f بر D معادل تحلیلی بودن g در حوزهٔ متناظر است. بعلاوه، چون تحلیلی بودن یک خاصیّت موضعی است، می‌توان فرض کرد که D یک قرص است.

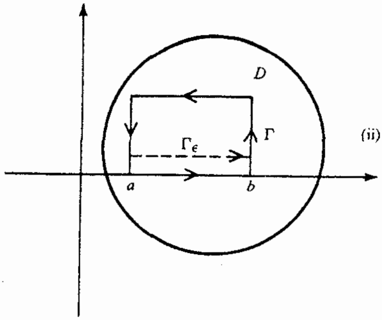
برای این که نشان دهیم که به ازای هر مستطیل بسته در D با مرز Γ (و اضلاع موازی محورهای حقیقی و موهومی) داریم $\int_\Gamma f = \circ$، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

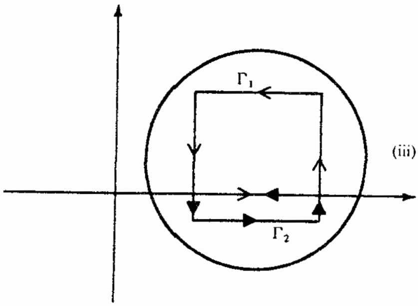
(i) مستطیل محدود به Γ خط L را قطع نکند.

در این حالت، چون f در درون Γ تحلیلی است، $\int_\Gamma f = \circ$ (قضیهٔ ۱.۶).

(ii) یک ضلع Γ منطبق بر L باشد.

در این حالت، فرض کنید که Γ_ε مستطیلی باشد مرکب از اضلاع Γ که ضلع پایین (بالای) آن به اندازهٔ ε در جهت y مثبت (منفی) به طرف بالا (پایین) منتقل شده باشد.





آن گاه

$$\int_\Gamma f = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f$$

زیرا، بنابه پیوستگی f،

$$\int_a^b f(x+i\varepsilon)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

بنابراین،

$$\int_\Gamma f = 0$$

(iii) اگر Γ محاط بر L باشد، می‌نویسیم

$$\int_\Gamma f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$$

که در آن Γ_1 و Γ_2 مانند (ii) هستند. دوباره نتیجه می‌گیریم که

$$\int_\Gamma f = 0$$

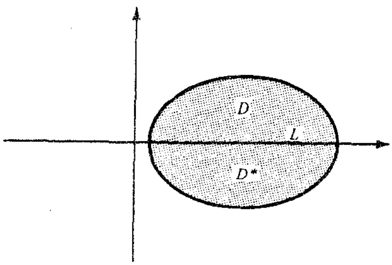
بالاخره، بنابه قضیهٔ مورِرا، f بر D تحلیلی است.□

دستهٔ وسیعی از نتایج، که همهٔ آنها به اصل بازتابی شوارتز معروفند، به صورت نمونه در قضیهٔ زیر ملاحظه می‌شود.

۸.۷ اصل بازتابی شوارتز. فرض کنید که f تابعی پ- تحلیلی در ناحیهٔ D باشد که این ناحیه در نیم‌صفحهٔ بالایی یا پایینی واقع است و مرزش شامل قطعهٔ L از محور حقیقی است، و فرض کنید که f حقیقی باشد وقتی که z حقیقی است. در این صورت، یک «توسیع» تحلیلی g از f بر ناحیهٔ $D \cup L \cup D^*$ می‌توان تعریف کرد که نسبت به محور حقیقی متقارن باشد که به قرار زیر است:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D \cup L \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in D^* \end{cases}$$

که در آن $D^* = \{z | \bar{z} \in D\}$.



برهان. در نقاط D، $f = g$؛ بنابراین، g بر D تحلیلی است. اگر $z \in D^*$ و h به اندازهٔ کافی کوچک باشد به طوری که $z + h \in D^*$،

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(z)}}{h} = \overline{\left[\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right]}$$

که وقتی که h به ۰ میل کند به $\overline{f'(\bar{z})}$ میل می‌کند. بنابراین، g بر D^* تحلیلی است. چون f بر محور حقیقی پیوسته است، g نیز چنین است و با اعمال قضیهٔ ۷.۷ می‌توانیم نتیجه بگیریم که g بر ناحیهٔ $D \cup L \cup D^*$ تحلیلی است.□

با استمداد از قضیه‌ی یکتایی، می‌توانیم نتیجهٔ فوری زیر را به دست آوریم:

۹.۷ نتیجه. اگر f در یک حوزه که نسبت به محور xها متقارن است تحلیلی باشد و اگر f حقیقی باشد وقتی که z حقیقی است، آن گاه

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

تمرینات

۱) نشان دهید که اگر f بر یک قلمرو فشرده تحلیلی و غیرثابت باشد، $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ ماکسیمم و مینیمم خود را بر مرز اختیار می‌کنند.

۲) نشان دهید که تصویر یک حوزه تحت یک تابع تحلیلی غیرثابت نیز یک حوزه است.

۳) فرض کنید f غیرثابت و بر S تحلیلی باشد و $f(S) = T$. نشان دهید که اگر $f(z)$ یک نقطهٔ مرزی T باشد، z یک نقطهٔ مرزی S است.

*۴) فرض کنید f بر $D(۰, ۱)$ تابعی پ- تحلیلی است و دایرهٔ واحد را به روی خود می‌نگارد. در این صورت، نشان دهید که f قرص کامل را به روی خود می‌نگارد. [راهنمایی: با استفاده از قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، نشان دهید که f قرص $D(۰; ۱)$ را به جزئی از خودش می‌نگارد. سپس، به استناد مسألهٔ پیشین، نتیجه بگیرید که f پوشاست.]

۵) فرض کنید f تام است و $|f| = ۱$ وقتی که $|z| = ۱$. ثابت کنید که $f(z) = Cz^n$. راهنمایی: ابتدا قضیهٔ ماکسیمم و مینیمم قدرمطلق را به کار برده نشان دهید که

$$f(z) = C\prod_{i=۱}^{N} \frac{z - \alpha_i}{۱ - \bar{\alpha}_i z}.$$

۶) فرض کنید f بر طوق $۱ \le |z| \le ۲$ تحلیلی باشد، $|f| \le ۱$ وقتی که $|z| = ۱$ و $|f| \le ۴$ هرگاه $|z| = ۲$. ثابت کنید که در سرتاسر این طوق $|f(z)| \le |z|^۲$.

۷) فرض کنید f بر $|z| < ۲$ تحلیلی و به ۱۰ کراندار باشد و $f(۱) = ۰$. بهترین کران بالای ممکن $|f(\frac{۱}{۲})|$ را بیابید.

۸) فرض کنید f تحلیلی است و بر قرص واحد به ۱ کراندار است و نقطه‌ای مانند $\alpha \ll ۱$ موجود است که $f(\alpha) \neq ۰$. نشان دهید که تابعی مانند g وجود دارد که تحلیلی و بر قرص واحد به ۱ کراندار است و $|g'(\alpha)| > |f'(\alpha)|$.

۹) $\max_f |f'(\alpha)|$ پیدا کنید که در آن f ردهٔ تمام توابع تحلیلی را طی می‌کند که بر قرص واحد به ۱ کراندارند و α نقطهٔ ثابتی از $|z| < ۱$ است. [راهنمایی: بنابه تمرین پیشین، می‌توان فرض کرد که $f(\alpha) = ۰$.]

نشان دهید که
$$f'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{z-\alpha} \ll \lim_{z\to\alpha} \frac{B_\alpha(z)}{z-\alpha} = B'_\alpha(z)$$

۱۰) فرض کنید f تام باشد و همواره $|f(z)| \leq ۱/|\operatorname{Re} z|^۲$. نشان دهید که $f \equiv ۰$.

۱۱) نشان دهید که
$$f(z) = \int_۰^۱ \frac{\sin zt}{t} dt$$
تام است

الف) با استناد به قضیهٔ موررا،

ب) با تعیین یک بسط سری توانی برای f.

۱۲) در مورد تابع f مسألهٔ ۱۱، نشان دهید که
$$f'(z) = \int_۰^۱ \cos zt dt$$

الف) به کمک
$$\begin{aligned} f(z) &= \int_۰^۱ \int_۰^z \cos zt dz dt \\ &= \int_۰^z \left(\int_۰^۱ \cos zt \right) dt dz, \ldots \end{aligned}$$

ب) با استفاده از سری توانی f.

۱۳) نشان دهید که $g(z) = z_{\circ} + ze^{i\theta}$، که در آن $\theta = \operatorname{Arg}(z_{1} - z_{\circ})$، محور حقیقی را بر خط L از $z_{\circ}$ به z_{1} می‌نگارد.

۱۴) فرض کنید که f بر $\operatorname{Im} z \geq \circ$ تحلیلی و کراندار باشد و بر محور حقیقی دارای مقادیر حقیقی باشد. ثابت کنید که f ثابت است.

۱۵) تابع تامی مفروض است که بر محور حقیقی مقادیر حقیقی دارد و بر محور موهومی مقادیرش موهومی است. ثابت کنید که این تابع فرد است: یعنی، $f(z) = -f(-z)$.

۱۶) فرض کنید که f بر نیم قرص $|z| \leq 1$، $\operatorname{Im} z > \circ$ تحلیلی و بر نیم دایرهٔ $|z| = 1$، $\operatorname{Im} z > \circ$ حقیقی است. نشان دهید که اگر قرار دهیم

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & |z| \leq 1, \operatorname{Im} z > \circ \\ \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})} & |z| > 1, \operatorname{Im} z > \circ \end{cases}$$

آن گاه g بر نیم‌صفحهٔ بالایی تحلیلی است.

۱۷) نشان دهید که هیچ تابع غیرثابت وجود ندارد که بر قرص واحد تحلیلی ولی بر دایرهٔ واحد حقیقی‌ـمقدار باشد.

فصل هشتم

حوزه‌های همبند ساده

۱۰۸ قضیهٔ منحنی بستهٔ کوشی در حالت کلی

چنان که مشاهده کرده‌ایم، امکان دارد که تابعی مانند f بر منحنی بسته‌ای مانند C تحلیلی باشد و معذالک $\int_C f \neq \text{۰}$. نمونهٔ زیر شاید ساده‌ترین مثال از این نوع باشد:

$$\int_{|z|=\text{۱}} \frac{\text{۱}}{z} dz = \text{۲}\pi i$$

از طرف دیگر، قضیهٔ منحنی بسته ـ ۳.۶ـ نشان داد که اگر f در سرتاسر یک قرص تحلیلی باشد، انتگرال این تابع حول هر منحنی بسته‌ای صفر است. اینک درصدد‌یم که کلی‌ترین نوع حوزه‌ای را تعیین کنیم که قضیهٔ منحنی بسته در آن معتبر است. توجه کنید که حوزه‌ای که $f(z) = \text{۱}/z$ در آن تحلیلی است صفحهٔ سفته است. ملاحظه خواهیم کرد که دقیقاً وجود یک «حفره» در $z = \text{۰}$ سبب مثال نقض بالا شده است. حوزه‌ای با این خاصیت که فاقد حفره باشد همبند ساده نامیده می‌شود.

۱.۸ تعریف. ناحیهٔ D را همبند ساده می‌نامند در صورتی که مکملش «به فاصلهٔ کمتر از ε همبند تا ∞» باشد. یعنی، به ازای هر $z_\circ \in \tilde{D}$ و هر $\varepsilon > \circ$ منحنی پیوسته‌ای مانند $\gamma(t)$، که $\circ \leq t < \infty$، موجود باشد به طوری که

الف) به ازای هر $t \geq \circ$، $d(\gamma(t), \tilde{D}) < \varepsilon$؛

ب) $\gamma(\circ) = z_\circ$؛

ج) $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$.

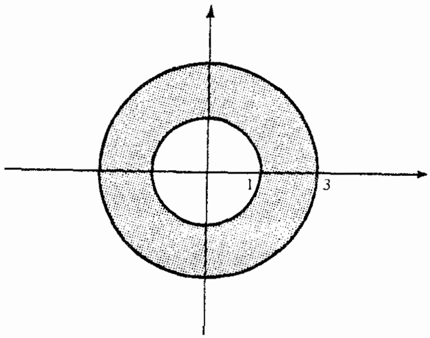
اگر منحنی γ در خواص (ب) و (ج) صدق کند، می‌گویند که «$z_\circ$ را به ∞ وصل می‌کند.»

مثال ۱. صفحه منهای محور حقیقی همبند ساده نیست، زیرا یک ناحیه نیست؛ یعنی، هر حوزهٔ همبند ساده الزاماً باید همبند باشد.

مثال ۲. طوق

$$A = \{z:\ ۱ < |z| < ۳\}$$

همبند ساده نیست.

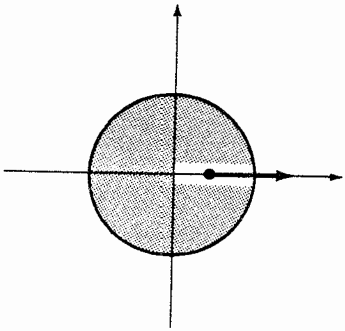


برای اثبات، توجه کنید که $\circ \in \tilde{A}$ ولی هیچ γیی وجود ندارد که به فاصلهٔ کمتر از $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$ از $\tilde{A}$ باقی بماند و $\circ$ را به ∞ وصل کند. اگر چنین γیی موجود می‌بود، به موجب پیوستگی $|\gamma(t)|$، باید نقطه‌ای مانند $t_۱$ وجود می‌داشت به طوری که $|\gamma(t_۱)| = ۲$، ولی آن گاه $d(\gamma(t_۱), \tilde{A}) = ۱$.

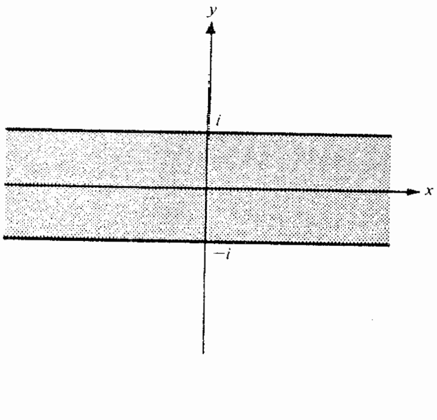
مثال ۳. قرص واحد منهای محور حقیقی مثبت همبند ساده است زیرا به ازای هر z، واقع در مکمل آن

$$\gamma : \gamma(t) = (t+1)z،$$

z، را به ∞ وصل می‌کند و مشمول در مکمل است.



مثال ۴. نوار نامتناهی $S = \{z : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ همبند ساده است. توجه کنید که، در این حالت، مکمل $\tilde{S}$ همبند نیست.



مثال ۵. هر مجموعهٔ محدب باز همبند ساده است. به تمرینهای ۱و۲ مراجعه کنید.

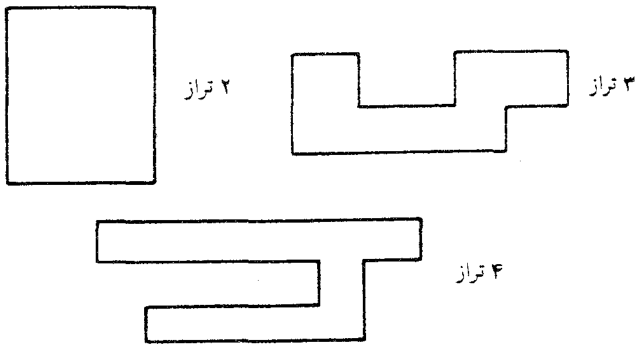
لازم است که توضیحی در مورد تعریف ۱.۸ داده شود. ممکن است تا حدودی ساده‌تر به نظر آید که ناحیه‌ای مانند D را همبند ساده بنامیم در صورتی که بتوانیم هر نقطه از مکملش را با یک منحنی واقع در مکمل به ∞ وصل کنیم. معذالک، اگرچه این حالت در همهٔ مثالهای بالا مشاهده شده است، این تصور بسیار محدود کننده است. به عنوان مثال، فرض کنید که مکمل ناحیه‌ای حوزهٔ (همبند)

$$\tilde{D} = \left\{ x + iy : \begin{array}{c} 0 < x \leq 1 \\ y = \sin \frac{1}{x} \end{array} \right\} \bigcup \{ iy : -1 < y < \infty \}$$

باشد. به استناد تعریف ۱.۸، D همبند ساده است اگرچه نمی‌توانیم نقاط منحنی $y = \sin(1/x)$ را به کمک یک منحنی واقع در $\tilde{D}$ به ∞ وصل کنیم.

قبل از اثبات قضیهٔ منحنی بسته در حالت کلی، نخست حکم مشابهی را در مورد مسیرهای چندضلعی بستهٔ ساده ثابت می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که هر مسیر چندضلعی زنجیری متناهی از قطعه خطهای افقی و قائم است.

۲.۸ تعریف. فرض کنید که Γ یک مسیر چندضلعی باشد. تعداد ترازهای Γ را تعداد مقادیر مختلفی مانند y، تعریف می‌کنیم که به ازای آن خط $\operatorname{Im} z = y$، شامل قطعه‌ای افقی از Γ باشد.

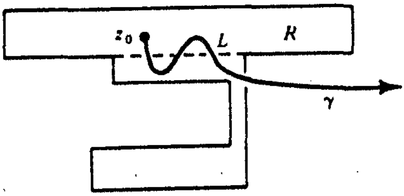


۳.۸ لم. فرض کنید که Γ یک مسیر چندضلعی بستهٔ ساده باشد که مشمول در یک حوزهٔ همبند ساده مانند D است. فرض کنید که بالاترین تراز Γ از نقاط $y = y_1$، $x \in X_1$ تشکیل شده باشد و تراز بعدی از نقاط $y = y_2$، $x \in X_2$. آن گاه مجموعهٔ

$$R = \left\{ z = x + iy : \begin{array}{c} y_2 \leq y \leq y_1 \\ x \in X_1 \end{array} \right\}$$

مشمول در D است.

برهان. توجه کنید که R اجتماعی متناهی از مستطیلهای بستهٔ جدا از هم است. نشان می‌دهیم که به ازای هر $z_\circ \in R$ و هر منحنی γ که $z_\circ$ را به ∞ وصل کند $\gamma \cap \Gamma \neq \phi$. آن گاه، چون $\tilde{D}$ بسته و Γ فشرده است، $d(\Gamma, \tilde{D}) = \delta > \circ$ و γ به فاصلهٔ کمتر از $\varepsilon = \delta/۲$ از $\tilde{D}$ باقی نمی‌ماند. لذا $z_\circ \in D$.



برای این که نشان بدهیم که $\gamma \cap \Gamma \neq \phi$، به استقرا بر حسب تعداد ترازهای Γ عمل می‌کنیم. اگر Γ فقط دو تراز داشته باشد، مرز فقط یک مستطیل و برهان ساده است (جزئیات در تمرین ۵ داده شده است). در غیر این صورت،

$$L = \{x + iy : y = y_۲, x \in X_۱ - X_۲\}$$

را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $z_\circ$ مشمول در یکی از مستطیلهای R است و لذا γ باید مرز R را قطع کند. به این ترتیب، اگر γ نتواند $R \cap \Gamma$ را قطع کند، باید L را قطع کند. اگر قرار دهیم

$$t_\circ = \sup\{t : \gamma(t) \in R\}$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازای $h > \circ$ به قدر کافی کوچک، $\gamma(t_\circ + h)$ بین دو تراز بالای یک منحنی چندضلعی بستهٔ ساده واقع می‌شود که یک مؤلفهٔ همبند

$$\Gamma' = (\Gamma \cap \tilde{R}) \cup \bar{L}$$

است که یک تراز کمتر از Γ دارد. امّا در این صورت، بنابه استقرا، به ازای مقداری از t که $t > t_\circ + h$، $\gamma(t) \in \Gamma'$. سرانجام، چون $\gamma(t) \notin R$ وقتی که $t > t_\circ$ و چون $L \subset R$، $\gamma(t) \in \Gamma$ و برهان تمام است.□

۴.۸ قضیه. فرض کنید f در ناحیهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد و Γ یک مسیر چندضلعی بستهٔ ساده مشمول در D باشد. آن گاه $\int_\Gamma f = \circ$.

برهان. مجدداً اثبات به استقرا بر حسب تعداد ترازهای Γ خواهد بود. L، R، و Γ' را مطابق لم تعریف می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\partial R} f + \int_{\Gamma'} f$$

که انتگرالگیری بر L در جهتهای مخالف صورت می‌گیرد. چون ∂R از مرز مستطیلها تشکیل شده است و f بر این مستطیلها تحلیلی است (به استناد لم)، به موجب قضیهٔ مستطیل ۱.۶، $\int_{\partial R} f = 0$.

اگر به استقرا بر حسب تعداد ترازهای Γ عمل کنیم، می‌توانیم فرض کنیم که

$$\int_{\Gamma'} f = 0$$

زیرا Γ' یک تراز کمتر از Γ دارد. از این رو، $\int_{\Gamma} f = 0$ و برهان تمام است. □

۵.۸ قضیه. اگر f در ناحیهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، تابع «اولیه»ای مانند F موجود است که در D تحلیلی است و $F' = f$.

برهان. $z_0 \in D$ انتخاب و تعریف کنید

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

که در آن مسیر انتگرالگیری یک مسیر چندضلعی مشمول در D است.

به استناد قضیهٔ پیشین، F خوش‌تعریف است، زیرا اگر Γ_1 و Γ_2 دو مسیر چندضلعی از این نوع از z_0 به z باشند،

$$\int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = \int_{\Gamma} f$$

که در آن Γ یک منحنی چندضلعی بسته است. به عنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم که نشان داده شود که هر منحنی چندضلعی بسته قابل تجزیه به تعدادی متناهی منحنی چندضلعی بستهٔ ساده است و قطعه خطها در دو جهت مخالف پیموده می‌شوند. به این ترتیب، از لم ۳.۸ نتیجه می‌شود که $\int_{\Gamma} f = 0$ و $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.

برای این که نشان بدهیم که $F' = f$،

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\xi)d\xi$$

را در نظر می‌گیریم که در آن (با انتخاب h به قدر کافی کوچک) ساده‌ترین مسیر انتگرالگیری را اختیار می‌کنیم: افقی و سپس قائم از z تا $z + h$. در این صورت، چنان که در قضایای ۲.۵ و ۲.۶ دیدیم، نتیجه می‌شود که $F'(z) = f(z)$.□

۶.۸ قضیهٔ منحنی بسته در حالت کلی. فرض کنید f در ناحیهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد و C یک منحنی بستهٔ هموار مشمول در D باشد. آن گاه

$$\int_C f = \circ$$

برهان.

$$\int_C f = \int_C F'(z)dz$$

که در آن F تابع اولیه‌ای است که وجود آن به استناد قضیهٔ ۵.۸ تضمین شده است؛ از این رو

$$\int_C f = F(z(b)) - F(z(a)) = \circ$$

زیرا نقاط انتهایی منحنی بسته بر هم منطبق‌اند.□

باید توجه کنیم که اگرچه قضیهٔ ۶.۸ در مورد نواحی همبند ساده بیان شده است، به حوزه‌های دیگر نیز دلالت دارد. مثلاً، اگر f در صفحهٔ سوراخ شدهٔ $z \neq \circ$ تحلیلی باشد و C منحنی بسته‌ای در نیم‌صفحهٔ بالایی باشد آن گاه $\int_C f = \circ$، زیرا C را می‌توان منحنی بسته‌ای در زیرمجموعهٔ همبند سادهٔ $\operatorname{Im} z > \circ$ دانست که در آن f تحلیلی است. به طور کلی، اگر f در D تحلیلی باشد و C مشمول در زیرمجموعهٔ همبند سادهٔ D باشد آن گاه $\int_C f = \circ$.

مثال ۱. فرض کنید C دایرهٔ $\alpha + re^{i\theta}$، $\circ \leq \theta \leq ۲\pi$ باشد و $r < |a - \alpha|$. آن گاه

$$\int_C \frac{dz}{z - a} = \circ$$

زیرا $۱/(z - a)$ در قرص همبند سادهٔ $|z - \alpha| < |a - \alpha|$، که شامل C است، تحلیلی می‌باشد. (با لم ۴.۵ مقایسه شود.)

قضیهٔ کوشی نیز سبب می‌شود که انتگرالی را از یک مسیر بسته به مسیر بستهٔ دیگر منتقل کنیم.

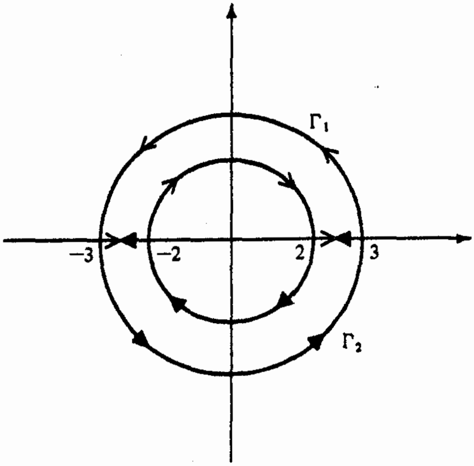
مثال ۲. فرض کنید f در طوق $1 \le |z| \le 4$ تحلیلی باشد. آن گاه

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z|=3} f(z)dz$$

زیرا، اگر انتگرالهای در امتدا محور حقیقی از ۲ تا ۳ و از ۲− تا ۳− در دو جهت را به انتگرالهای موجود بیفزاییم، می‌توان نوشت:

$$\int_{|z|=3} f(z)dz - \int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

که در آن Γ_1 و Γ_2 منحنی‌های بسته‌ای مشمول در زیرمجموعه‌های همبند ساده‌ای از طوق می‌باشند. (شکل زیر)



۲.۸ تابع تحلیلی $\operatorname{Log} z$

۷.۸ تعریف. f را یک شاخهٔ تحلیلی $\log z$ در حوزهٔ D می‌نامیم در صورتی که

۱) f در D تحلیلی باشد، و

۲) f یک معکوس تابع نمایی در D باشد؛ یعنی، $\exp(f(z)) = z$.

البته، اگر f یک شاخهٔ تحلیلی $\log z$ باشد آن گاه به ازای هر عدد صحیح ثابت k

$$g(z) = f(z) + 2\pi ki$$

نیز یکی از این شاخه‌هاست.

چون همواره $e^w \neq 0$، $\log 0$ تعریف نمی‌شود. معذالک، به ازای هر $z = Re^{i\theta}$ که $R \neq 0$، اگر قرار دهیم

$$f(z) = \log z = u(z) + iv(z)$$

شرط (۲) بالا به صورت

$$\exp(f(z)) = e^{u(z)}.e^{iv(z)} = Re^{i\theta}$$

درمی‌آید که فقط و فقط وقتی ممکن می‌شود که

$$e^{u(z)} = |z| = R \tag{۳}$$

و

$$v(z) = \operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi \tag{۴}$$

از این رو، هر تابعی که در شرط (۲) صدق کند همیشه از طریق زیر قابل حصول است:

$$f(z) = u(z) + iv(z) = \log|z| + iArgz \tag{۵}$$

معذالک، $\operatorname{Arg} z$ تابع خوش تعریفی نیست [بخش ۲ فصل ۱ را ببینید]، حتی اگر قرارداد خاصی برای $\operatorname{Arg} z$ وضع کنیم واضح نیست که تابعی که در (۵) تعریف شده است در D تحلیلی (یا حتی پیوسته) باشد. با این وجود، اگر D یک حوزهٔ همبند ساده باشد که شامل 0 نیست، می‌توانیم یک شاخهٔ تحلیلی از $\log z$ را در آن جا تعریف کنیم. (یادآوری می‌کنیم که مطابق قضیهٔ ۵.۳ اگر یک معکوس تحلیلی از e^z موجود باشد، مشتق آن الزاماً $1/z$ است. از این رو، به صورت زیر عمل می‌کنیم.)

۸.۸ قضیه. فرض کنید که D همبند ساده باشد و $0 \notin D$. $z_0 \in D$ انتخاب کنید، مقدار ثابتی از $\log z_0$ اختیار کنید، و قرار دهید

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi} + \log z_0. \tag{۶}$$

آن گاه f یک شاخهٔ تحلیلی $\log z$ در D است.

برهان. f خوش‌تعریف است زیرا $1/\xi$ یک تابع تحلیلی از ξ در D است و لذا انتگرال بالا در امتداد هر دو مسیری که از z_0 به z برود به یک مقدار می‌انجامد (قضیهٔ ۵.۸). بعلاوه، $f'(z) = 1/z$؛ از این رو f در D تحلیلی است.

برای این که نشان دهیم که $\exp(f(z)) = z$، تابع

$$g(z) = ze^{-f(z)}$$

را در نظر می‌گیریم. چون $g'(z) = e^{-f(z)} - zf'(z)e^{-f(z)} = 0$، g ثابت است و

$$g(z) = g(z_0) = z_0 e^{-f(z_0)} = 1. \qquad \square$$

از این رو،

$$e^{f(z)} = z$$

به طریق مشابه، شاخه‌ای تحلیلی از $\log f(z)$ را در هر حوزهٔ همبند ساده که در آن f تحلیلی و مخالف 0 است می‌توانیم تعریف کنیم. فقط یک z_0 ثابت و مقداری از $\log f(z_0)$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم

$$\log f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + \log f(z_0)$$

در یک وضعیت دیگر از این نوع، فرض کنید D تمام صفحه منهای محور حقیقی نامثبت باشد: $x \leq 0$. در (۶)، اگر $z_0 = 1$ و $\log 1 = 0$ اختیار کنیم، تابع حاصل

$$f(z) = \int_{1}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$$

یک شاخهٔ تحلیلی $\log z$ است با

$$-\pi < \operatorname{Im}(\log z) = \operatorname{Arg} z < \pi$$

(نامساوی دوم را با انتگرال‌گیری از ۱ تا $|z|$ و از $|z|$ تا z می‌توان دید.)

به طور مشابه، اگر D صفحهٔ مختلط باشد با شکافی در امتداد محور حقیقی نامنفی و ما آن شاخه‌ای از $\log z$ را اختیار کنیم که $\log(-1) = \pi i$، شاخه‌ای تحلیلی از $\log z$ را خواهیم داشت با $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$. [تمرین ۸ را ببینید.]

با کاربرد مناسبی از لگاریتم، شاخه‌هایی تحلیلی از $\sqrt{z}$، $z^{1/3}$، و امثال آنها را در حوزه‌های مناسبی نیز می‌توان تعریف کرد.

به عنوان مثال، $\sqrt{z}$ در هر حوزه‌ای که $\log z$ تعریف شده باشد به صورت

$$\sqrt{z} = \exp(\frac{۱}{۲}\log z) \qquad (۷)$$

قابل تعریف است. چون

$$(\exp(\frac{۱}{۲}\log z))^{۲} = \exp(\log z) = z$$

این رابطه شاخه‌ای از $\sqrt{z}$ را تعریف می‌کند که تحلیلی است در جایی که لگاریتم تحلیلی باشد. توجه کنید که امکان دارد که شاخه‌های مختلف $\log z$ به شاخه‌های متفاوتی از $\sqrt{z}$ بیانجامد. معذالک، برخلاف $\log z$، که بی‌نهایت شاخهٔ متفاوت به صورت

$$\log z + ۲\pi k i$$

به ازای اعداد صحیح k دارد، $\sqrt{z}$ فقط دارای دو شاخهٔ متفاوت است که از این واقعیت ناشی می‌شود که معادلهٔ $w^{۲} = z$ به ازای هر $z \neq ۰$ دقیقاً دو جواب متمایز دارد. این نکته از (۷) نیز نتیجه می‌شود، زیرا اگر k زوج باشد

$$\exp(\frac{۱}{۲}\log z) = \exp(\frac{۱}{۲}[\log z + ۲\pi k i])$$

همین روش را برای تعریف قوای دلخواه اعداد مختلط ناصفر می‌توان به کار برد. به عنوان مثال،

$$i^{i} \equiv e^{i\log i} = \{\ldots, e^{۳\pi/۲}, e^{-\pi/۲}, e^{-۵\pi/۲}, \ldots\}$$

تمرینات.

۱) مجموعهٔ S را ستاره شکل می‌نامند در صورتی که نقطه‌ای مانند α در S موجود باشد به طوری که به ازای هر $z \in S$ قطعه خط واصل α و z مشمول در S باشد. ثابت کنید که هر ناحیهٔ ستاره شکل همبند ساده است. [راهنمایی: نشان دهید که به ازای هر z از مکمل S منحنی

$$\gamma : \gamma(t) = tz + (۱ - t)\alpha, \qquad t \geq ۱$$

مشمول در مکمل است.]

۲) ثابت کنید که هر ناحیهٔ محدب همبند ساده است.

۳) فرض کنید که ناحیهٔ S همبند ساده و شامل دایرهٔ $C = \{z : |z-\alpha| = r\}$ باشد. نشان دهید که S شامل تمامی قرص $D = \{z : |z-\alpha| \leq r\}$ است. [راهنمایی: نشان دهید که (بنابر تعریف) S باز است، C فشرده است، و S طوق $B = \{z : r-\delta \leq |z-\alpha| \leq r+\delta\}$ را به ازای $\delta > ۰$ی دربر دارد.]

۴) نشان دهید که اگر

$$\tilde{S} = \left\{x+iy : \begin{array}{c} ۰ < x \leq ۱ \\ y = \sin\frac{1}{x} \end{array}\right\} \bigcup \{iy : -۱ \leq y < \infty\}$$

آن گاه S همبند ساده است.

۵) نشان دهید که هر خط چندضلعی γ که z را به ∞ وصل کند مرز هر مستطیل R شامل z را قطع می‌کند. [راهنمایی: $t_\circ = \sup\{t : \gamma(t) \in R\}$ را در نظر بگیرید.]

۶) «درون» یک مسیر چندضلعی بستهٔ ساده را تعریف کنید. نشان دهید که اگر چنین مسیری مشمول در یک حوزهٔ همبند ساده باشد، درون آن نیز در این حوزه است.

۷) نشان دهید که هر مسیر چندضلعی بسته را به اجتماعی متناهی از مسیرهای چندضلعی بستهٔ ساده می‌توان تجزیه کرد و قطعه خطها دوبار در جهتهای مخالف پیموده شوند.

۸) نشان دهید که $\pi i + \int_{-۱}^{z} d\xi/\xi$ شاخه‌ای تحلیلی از $\log z$ در صفحهٔ مختلط تعریف می‌کند که شکافی در امتداد محور حقیقی نامنفی دارد و $۰ < \operatorname{Im}\log z = \operatorname{Arg} z < ۲\pi$.

۹) تابعی تحلیلی مانند f در صفحه منهای محور حقیقی نامثبت تعریف کنید به طوری که $f(x) = x^x$ بر محور مثبت برقرار باشد. $f(i)$ و $f(-i)$ را بیابید.

فصل نهم

نقاط تکین تنهای توابع تحلیلی

۱.۹ رده‌بندی نقاط تکین تنها

اصل ریمان و قضیهٔ کازوراتی ـ وایراشتراس

مقدمه. اگرچه تاکنون مطالعات خود را بر روی خواص عمومی توابع تحلیلی متمرکز کرده‌ایم، اینک رفتارهای خاص توابع تحلیلی در همسایگی «نقاط تکین تنها» را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

نام همسایگی سفتهٔ $z_\circ$ را برای اشاره به مجموعه‌ای به شکل $\{z : \circ < |z - z_\circ| < d\}$ به کار می‌بریم.

۱.۹ تعریف. می‌گوییم f یک تکینی تنها در $z_\circ$ دارد در صورتی که f در یک همسایگی سفتهٔ D از $z_\circ$ تحلیلی باشد ولی در $z_\circ$ تحلیلی نباشد.

توجه کنید که، به استناد قضیهٔ ۷.۷، f در یک تکنیکی تنها باید ناپیوسته باشد.

امثله

$$f(z)=\begin{cases}\sin z & z\neq ۲\\ ۰ & z=۲\end{cases} \qquad (۱)$$

یک تکینی تنها در $z=۲$ دارد.

(۲) $g(z)=۱/(z-۳)$ یک تکینی تنها در $z=۳$ دارد.

(۳) $\exp(۱/z)$ یک تکینی تنها در $z=۰$ دارد.

چنان که بزودی خواهیم دید، مثالهای بالا انواع مختلفی از تکینیهای تنها را نشان می‌دهند. این تکینیها را به صورت زیر می‌توان رده‌بندی کرد.

۲.۹ تعریف. فرض کنید f یک تکینی تنها در $z_۰$ داشته باشد.

الف) اگر تابعی مانند g موجود باشد به طوری که در $z_۰$ تحلیلی باشد و تساوی $f(z)=g(z)$ به ازای هر z از یک همسایگی سفتهٔ $z_۰$ برقرار باشد، می‌گوییم f یک تکینی برداشتنی در $z_۰$ دارد (یعنی، اگر مقدار f در نقطهٔ $z_۰$ «اصلاح» شود، f در آن نقطه تحلیلی می‌شود.)

ب) اگر، به ازای $z\neq z_۰$، f را به صورت $f(z)=A(z)/B(z)$ بتوان نوشت که در آن A و B در $z_۰$ تحلیلی باشند، $A(z_۰)\neq ۰$، و $B(z_۰)=۰$، می‌گوییم f یک قطب در $z_۰$ دارد. (اگر B یک صفر مرتبهٔ k در $z_۰$ داشته باشد، می‌گوییم f یک قطب مرتبهٔ k دارد.)

ج) اگر تکینی f در $z_۰$ برداشتنی یا قطب نباشد، می‌گوییم f یک تکینی اساسی در $z_۰$ دارد.

قضایای زیر نشان می‌دهند که طبیعت تکینی یک تابع چگونه از طریق رفتار تابع در یک همسایگی سفتهٔ تکینی تعیین می‌شود.

۳.۹ اصل ریمان در مورد تکینیهای برداشتنی. اگر f یک تکینی تنها در $z_۰$ داشته باشد و $\lim_{z\to z_۰}(z-z_۰)f(z)=۰$، آن تکینی برداشتنی است.

برهان. تابع

$$h(z)=\begin{cases}(z-z_۰)f(z) & z\neq z_۰\\ ۰ & z=z_۰\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به استناد فرض، h در $z_\circ$ پیوسته است. چون h، مانند f، در یک همسایگی سفتهٔ $z_\circ$ تحلیلی است، نتیجه می‌شود که h در $z_\circ$ تحلیلی است. (قضیهٔ ۷.۷) چون $h(z_\circ) = \circ$، تابع g که $g(z) = h(z)/(z - z_\circ)$ نیز در $z_\circ$ تحلیلی است و مساوی f است وقتی که $z \neq z_\circ$. □

۴.۹ . اگر f در یک همسایگی سفتهٔ یک تکینی تنها کراندار باشد، این تکینی برداشتنی است.

۵.۹ قضیه. اگر f در یک همسایگی سفتهٔ $z_\circ$ تحلیلی باشد و عدد صحیح مثبتی مانند k موجود باشد به طوری که $\lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ)^k f(z) \neq \circ$ ولی $\lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ)^{k+1} f(z) = \circ$ آن گاه f یک قطب مرتبهٔ k در $z_\circ$ دارد.

برهان. اگر قرار دهیم

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_\circ)^{k+1} f(z) & z \neq z_\circ \\ \circ & z = z_\circ \end{cases}$$

آن گاه g پیوسته و، از این رو، در $z_\circ$ تحلیلی است. بعلاوه، چون $g(z_\circ) = \circ$،

$$A(z) = \frac{g(z)}{z - z_\circ} = (z - z_\circ)^k f(z)$$

نیز در $z_\circ$ تحلیلی است و، به استناد فرض، $A(z_\circ) \neq \circ$. چون

$$f(z) = \frac{A(z)}{(z - z_\circ)^k} \qquad \text{به ازای } z \neq z_\circ،$$

برهان تمام است. □

توجه کنید که مطابق دو قضیهٔ پیشین، هیچ تابع تحلیلی وجود ندارد که مانند قوای کسری $1/(z - z_\circ)$ در همسایگی سفتهٔ تکینی تنهایی مانند $z_\circ$ به ∞ میل کند. به عنوان مثال، اگر f در یک همسایگی سفتهٔ $\circ$ تحلیلی باشد و $|f(z)| \leq 1/\sqrt{|z|}$، آن گاه قضیهٔ ۳.۹ ایجاب می‌کند که f کراندار باشد؛ زیرا تکینی برداشتنی خواهد بود. به طور مشابه، از فرض

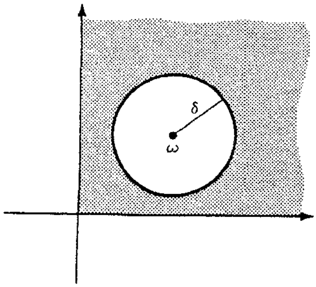
$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{5/2}}$$

نتیجه می‌گیریم که $z^2 f(z)$ یک تکینی برداشتنی در $\circ$ دارد. از این رو، f قطبی حداکثر از مرتبهٔ ۲ در مبداء دارد و، در واقع، $|f(z)| \leq A/|z|^2$.

همچنین، نتیجه می‌شود که در همسایگی یک تکینی اساسی، تابع f نه تنها بی‌کران است بلکه در چنین حالتی به ازای هر عدد صحیح N حد $(z-z_۰)^N f(z)$ در $z_۰$ برابر صفر نیست. معذالک، نتیجه می‌شود که $f(z) \to \infty$ وقتی که $z \to z_۰$. در واقع، قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مجموعهٔ مقادیری که تابعی در همسایگی یک تکینی تنها اختیار می‌کند در تمامی صفحهٔ مختلط «چگال» است. یعنی، برد f هر قرصی از $\mathbb{C}$ را قطع می‌کند.

۶.۹ قضیهٔ کازوراتی ـ وایرشتراس. اگر f یک تکینی اساسی در $z_۰$ داشته باشد و D یک همسایگی سفتهٔ $z_۰$ باشد، آن گاه برد $R = \{f(z) : z \in D\}$ در صفحهٔ مختلط چگال است.

برهان. فرض کنید قرصی به مرکز ω و شعاع δ موجود باشد که R را قطع نکند.



آن گاه $|f(z)-\omega| > \delta$ و

$$\text{بر } D، \quad \left|\frac{۱}{f(z)-\omega}\right| < \frac{۱}{\delta}$$

به استناد اصل ریمان، نتیجه می‌شود که $۱/(f(z)-\omega)$ (حداکثر) یک تکینی برداشتنی در $z_۰$ دارد. از این رو،

$$\frac{۱}{f(z)-\omega} = g(z)$$

که در آن g در $z_۰$ تلحیلی است. امّا، در این صورت،

$$f(z) = \omega + \frac{۱}{g(z)}$$

و لذا f یا قطبی در $z_\circ$ دارد (اگر $g(z_\circ) = \circ$) یا یک تکینی برداشتنی در $z_\circ$ دارد (اگر $g(z_\circ) \neq \circ$).□

در واقع، صورت بسیار قویتری از قضیهٔ کازوراتی ـ وایرشتراس ـ به نام قضیهٔ پیکارد ـ وجود دارد که بیان می‌کند که هر تابع تحلیلی کلیهٔ مقادیر را با حداکثر یک استثناء در همسایگی یک تکینی اساسی اختیار می‌کند. برهانی از قضیهٔ پیکارد را در [کارا تئودری، صفحهٔ ۲۰۳] می‌توان یافت.

۹.۲ بسط لوران

در فصل ۶ دیدیم که توابعی که در قرصی تحلیلی هستند قابل نمایش به سریهای توانی می‌باشند. نمایش نسبتاً مشابهی را ـ به کمک «سریهای توانی دوطرفه» به صورت $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_\circ)^k$ـ برای توابعی که در طوقی مانند $R_\1 < |z-z_\circ| < R_\2$ تحلیلی هستند می‌توان نتیجه گرفت. این سریهای توانی دو طرفه، موسوم به بسطهای لوران، ابزار ارزشمندی در مطالعهٔ تکینیهای تنها محسوب می‌شوند.

۷.۹ تعریف. می‌گوییم $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = L$ در صورتی که هر دو سری $\sum_{k=\circ}^{\infty} \mu_k$ و $\sum_{k=\1}^{\infty} \mu_{-k}$ همگرا باشند و حاصل جمع مجموعهای آنها برابر L باشد.

۸.۹ قضیه. $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ همگرا است در حوزهٔ

$$D = \{z : R_\1 < |z| \;\&\; |z| < R_\2\}$$

که در آن

$$R_\2 = \1/\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\1/k}$$
$$R_\1 = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{\1/k}$$

اگر $R_\1 < R_\2$، D یک طوق است و f در آن تحلیلی است.

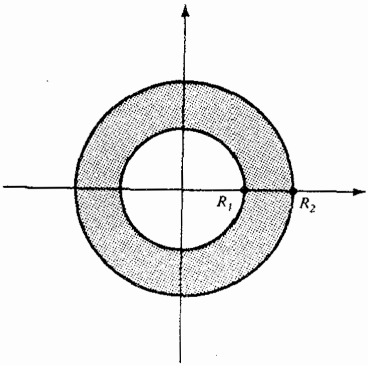
برهان. به استناد قضیهٔ ۸.۲، $f_\1(z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k z^k$ به ازای $|z| < R_\2$ همگراست و

$$f_\2(z) = \sum_{-\infty}^{-\1} a_k z^k = \sum_{\1}^{\infty} a_{-k}\left(\frac{\1}{z}\right)^k$$

به ازای

$$|z| > R_۱ \quad \text{یا} \quad |\frac{۱}{z}| < R_۱$$

همگراست. از این رو، $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ به ازای همهٔ zهای واقع در اشتراک همگراست. همچنین، چون $f_۱$ یک سری توانی است و $f_۲(z) = g(۱/z)$، که در آن g یک سری توانی است، $f_۱$ و $f_۲$ هر دو در حوزه‌های همگرایی خود تحلیلی‌اند. از این رو، f در اشتراک این دو حوزه تحلیلی است.□



۹.۹ قضیه. اگر f در طوق $A : R_۱ < |z| < R_۲$ تحلیلی باشد، آن گاه f یک بسط لوران $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ در A دارد.

برهان. فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دوایری به مرکز O و به شعاعهای $r_۱$ و $r_۲$ باشند و $R_۱ < r_۱ < r_۲ < R_۲$. z را نقطهٔ ثابتی بگیرید که $r_۱ < |z| < r_۲$. آن گاه

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

در A تحلیلی است و، به استناد قضیهٔ کوشی،

$$\int_{C_۲ - C_۱} g(w)dw = ۰$$

(مثال ۲ بعد از قضیهٔ ۶.۸ را ملاحظه کنید.) به این ترتیب،

$$\int_{C_۲ - C_۱} \frac{f(z)}{w - z} dw = \int_{C_۲ - C_۱} \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{۱}$$

سپس، توجه می‌کنیم که، به استناد لم ۴.۵، $\int_{C_2} dw/(w-z) = 2\pi i$، در حالی که به استناد قضیهٔ کوشی، $\int_{C_1} dw/(w-z) = 0$، که در این صورت

$$\int_{C_2 - C_1} \frac{f(z)}{w-z} dw = 2\pi i f(z) \tag{2}$$

از ترکیب (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \tag{3}$$

حال، بر C_2، $|w| > |z|$، که در این صورت

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w(1-\frac{z}{w})} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots$$

در حالی که بر C_1، چون $|w| < |z|$،

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-w} = -\frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} - \frac{w^2}{z^3} - \dots$$

و همگرایی در هر دو حالت یکنواخت است. آن گاه، با جایگزینی در (۳)، به نتیجهٔ زیر می‌انجامد

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w) z^k}{w^{k+1}} \right) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left(\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{f(w) z^k}{w^{k+1}} \right) dw$$

که با تغییر ترتیب جمعبندی و انتگرالگیری نتیجهٔ زیر عاید می‌شود که به ازای هر $z \in A$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw$$

که در آن C دایرهٔ دلخواهی در A به مرکز O است. زیرا گرچه ضمن برهان داشتیم که

$$C = \begin{cases} C_2, & k \geq 0 \quad \text{به ازای} \\ C_1, & k < 0 \quad \text{به ازای} \end{cases}$$

در واقع C هر دایره‌ای در A به مرکز O می‌تواند باشد. این نکته مجدداً از این واقعیت که

$$g(w) = \frac{f(w)}{w^{k+1}}$$

در A تحلیلی است و از قضیهٔ منحنی بستهٔ کوشی نتیجه می‌شود.□

توجه کنید که بسط لوران منحصربه‌فرد است. یعنی، اگر در طوقی

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

آن گاه

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \tag{۴}$$

که در آن C مانند بالاست. زیرا اگر $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ در A همگرا باشد آن گاه این سری در امتداد C به طور یکنواخت همگراست و از این رو

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C a_n z^{n-k-1} dz \tag{۵}$$

چون

$$\int_C z^p dz = \begin{cases} 2\pi i, & p = -1 \\ 0, & p \neq -1 \text{ هر عدد صحیح } \end{cases}$$

نتیجه می‌شود که

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = 2\pi i a_k$$

که (۴) ثابت می‌شود.

۱۰.۹ نتیجه. اگر f در طوق $R_1 < |z - z_0| < R_2$ تحلیلی باشد، آن گاه f نمایشی منحصربه‌فردی به صورت

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

دارد که در آن

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

و $C = C(z_0; R)$ با $R_1 < R < R_2$.

برهان. فقط کافی است که نتایج قبلی را در مورد $g(z) = f(z + z_\circ)$، که در طوقی به مرکز O تحلیلی است، به کار ببریم.□

اگر قرار دهیم $R_\backslash = \circ$، حکم زیر به دست می‌آید:

۱۱.۹ نتیجه. اگر f یک تکینی تنها در $z_\circ$ داشته باشد، آن گاه به ازای عدد مثبتی مانند δ و $\circ < |z - z_\circ| < \delta$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_\circ)^k$$

که در آن ضرایب a_k مانند نتیجهٔ ۱۰.۹ تعریف می‌شوند.

امثله

۱) به ازای هر $z \neq \circ$، $\frac{(z+\backslash)^\text{۲}}{z} = \frac{\backslash}{z} + \text{۲} + z$.

۲) به ازای $\circ < |z| < \backslash$،

$$\begin{aligned}\frac{\backslash}{z^\text{۲}(\backslash - z)} &= \frac{\backslash}{z^\text{۲}}(\backslash + z + z^\text{۲} + \dots) \\ &= \frac{\backslash}{z^\text{۲}} + \frac{\backslash}{z} + \backslash + z + \dots\end{aligned}$$

۳) به ازای $\circ < |z - \backslash| < \backslash$،

$$\begin{aligned}\frac{\backslash}{z^\text{۲}(\backslash - z)} &= \frac{-\backslash}{z^\text{۲}(z - \backslash)} = \frac{-\backslash}{[\backslash + (z - \backslash)]^\text{۲}(z - \backslash)} \\ &= \frac{-\backslash}{z - \backslash} + \text{۲} - \text{۳}(z - \backslash) + \text{۴}(z - \backslash)^\text{۲} - + \dots\end{aligned}$$

۴) به ازای $z \neq \circ$، $\exp(\backslash/z) = \backslash + \frac{\backslash}{z} + \frac{\backslash}{\text{۲}z^\text{۲}} + \dots$.

۱۲.۹ تعریف. اگر $f(z) = \sum a_k (z - z_\circ)^k$ بسط لوران f حول تکینی تنهای $z_\circ$ باشد، آن گاه $\sum_{-\infty}^{-\backslash} a_k (z - z_\circ)^k$ را جزء اصلی f در $z_\circ$ و $\sum_\circ^\infty a_k (z - z_\circ)^k$ را جزء تحلیلی f در $z_\circ$ می‌نامند.

به دلیل یکتایی بسط لوران، مشخصه‌های زیر را برای اجزای اصلی حول انواع مختلف تکینی می‌توان نتیجه گرفت.

الف) اگر f یک تکینی برداشتنی در $z_\circ$ داشته باشد، همهٔ ضرایب C_{-k} بسط لوران حول $z_\circ$، به ازای $k > \circ$، $\circ$ هستند.

برهان. چون $f(z) = g(z)$ وقتی که $z \neq z_\circ$، بسط لوران f باید بر بسط تیلور g حول $z_\circ$ منطبق شود. □

مثال.

$$\frac{\sin z}{z} = ۱ - \frac{z^۲}{۳!} + \frac{z^۴}{۵!} - + \dots$$

ب) اگر f یک قطب مرتبهٔ k در $z_\circ$ داشته باشد، $C_{-k} \neq \circ$ ولی $C_{-N} = \circ$ به ازای هر $N > k$.

برهان. چون $f(z) = A(z)/B(z)$، که در آن $A(z_\circ) \neq \circ$ و B یک صفر مرتبهٔ k در $z_\circ$ دارد،

$$f(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_\circ)^k}$$

که در آن Q تحلیلی و در $z_\circ$ ناصفر است. از این رو، اگر $Q(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n$، آن گاه

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \frac{(z - z_\circ)^n}{(z - z_\circ)^k} = \sum_{j=-k}^{\infty} C_j(z - z_\circ)^j$$

که در آن $C_j = a_{j+k}$. به این ترتیب، $C_{-k} = a_\circ = Q(z_\circ) \neq \circ$.□

ج) اگر f یک تکینی اساسی در $z_\circ$ داشته باشد، باید دارای بی‌نهایت جملهٔ ناصفر در جزء اصلی باشد.□

برهان. در غیر این صورت، می‌بایست $(z - z_\circ)^N f(z)$ به ازای Nهای به قدر کافی بزرگ در $z_\circ$ تحلیلی و f صاحب یک قطب در $z_\circ$ باشد.

تجزیهٔ توابع گویای سره به کسرهای جزئی را می‌توان از نظریهٔ بسطهای لوران نتیجه گرفت.

۱۳.۹ تجزیهٔ توابع گویا به کسرهای جزئی. هر تابع گویای سره مانند

$$\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z - z_۱)^{k_۱}(z - z_۲)^{k_۲} \dots (z - z_n)^{k_n}}$$

که در آن P و Q دو چندجمله‌ای هستند که $\deg P < \deg Q$، قابل بسط به مجموع چندجمله‌ایهایی بر حسب $۱/(z - z_k)$ است که $k = ۱, ۲, \dots, n$.

برهان. چون $\mathcal{R}$ قطبی از مرتبهٔ حداکثر $k_۱$ در $z_۱$ دارد،

$$\mathcal{R}(z) = P_۱(\frac{۱}{z - z_۱}) + A_۱(z)$$

که در آن $P_۱(۱/(z - z_۱))$ جزء اصلی $\mathcal{R}$ حول $z_۱$ است و $A_۱$ جزء تحلیلی است. بعلاوه،

$$A_۱(z) = \mathcal{R}(z) - P_۱(\frac{۱}{z - z_۱})$$

یک تکینی برداشتنی در $z_۱$ دارد و دارای همان اجزای اصلی $\mathcal{R}$ در $z_۲$، $\ldots$، z_n است. به این ترتیب، اگر $P_۲(۱/(z - z_۲))$ را جزء اصلی $\mathcal{R}$ حول $z_۲$ بگیریم و به استقرا عمل کنیم، درمی‌یابیم که

$$A_n(z) = \mathcal{R}(z) - \left[P_۱(\frac{۱}{z - z_۰}) + P_۲(\frac{۱}{z - z_۲}) + \cdots + P_n(\frac{۱}{z - z_n})\right]$$

یک تابع تام است. بعلاوه، A_n کراندار است زیرا $\mathcal{R}$ و همهٔ اجزای اصلی آن به صفر میل می‌کنند وقتی که $z \to \infty$. به این ترتیب، به استناد قضیهٔ لیوویل (۱۰.۵)، A_n ثابت است؛ در واقع، $A_n \equiv ۰$. از این رو،

$$\mathcal{R}(z) = P_۱(\frac{۱}{z - z_۱}) + P_۲(\frac{۱}{z - z_۲}) + \cdots + P_n(\frac{۱}{z - z_n}). \quad \square$$

تمرینات

۱) فرض کنید $f(z) \to \infty$ وقتی که $z \to z_۰$، که $z_۰$ یک تکینی تنهاست. نشان دهید که f یک قطب در $z_۰$ دارد.

۲) آیا تابعی مانند f با یک تکینی تنها در ۰ وجود دارد به طوری که در نزدیکی $z = ۰$، $|f(z)| \sim \exp(۱/|z|)$؟

۳) فرض کنید f در صفحهٔ سوراخ شدهٔ $z \neq ۰$ تحلیلی باشد و در $|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + ۱/\sqrt{|z|}$ صدق کند. ثابت کنید که f ثابت است.

۴) مستقیماً تحقیق کنید که $e^{۱/z}$ هر مقداری را (با یک استثناء) در طوق $۰ < |z| < ۱$ اختیار می‌کند. این مقدار استثنایی چیست؟

۵) فرض کنید که f و g دارای قطبهایی، به ترتیب، از مراتب m و n در $z_۰$ باشند. دربارهٔ تکینی $f + g$، $f.g$، f/g در $z_۰$ چه می‌توان گفت؟

۶) تکینیهای توابع زیر را رده‌بندی کنید.

(الف) $\dfrac{۱}{z^۴+z^۲}$ (ب) $\cot z$ (ج) $\csc z$ (د) $\dfrac{\exp(۱/z^۲)}{z-۱}$

۷) بسط لوران توابع زیر را بیابید.

(الف) $\dfrac{۱}{z^۴+z^۲}$ حول $z=۰$ (ب) $\dfrac{\exp(۱/z^۲)}{z-۱}$ حول $z=۰$

(ج) $\dfrac{۱}{z^۲-۴}$ حول $z=۲$

۸) نشان دهید که اگر f فرد باشد (یعنی، $f(-z)=-f(z)$) و در $z\neq ۰$ تحلیلی باشد، آن گاه همهٔ جمل زوج بسط لوران f حول ۰ صفرند.

۹) به کسرهای جزئی تجزیه کنید:

(الف) $\dfrac{۱}{z^۴+z^۲}$ (ب) $\dfrac{۱}{z^۲+۱}$

۱۰) فرض کنید که f در همسایگی سفتهٔ D از $z_۰$ تحلیلی باشد جز در نقاط دنبالهٔ $\{z_n\}$، که همگی قطب هستند و $\{z_n\}\to z_۰$. (توجه کنید که $z_۰$ تکینی تنها نیست.) نشان دهید که $f(D)$ در صفحهٔ مختلط چگال است. [راهنمایی: چنان که در برهان قضیهٔ کازوراتی ـ وایرشتراس ملاحظه کردید، فرض کنید که $|f(z)-w|>\delta$ و $f(z)=۱/(f(z)-w)$ را در نظر بگیرید.]

۱۱) نشان دهید که تصویر قرص واحد منهای مبداء تحت

$$f(z)=\csc(۱/z)$$

در صفحهٔ مختلط چگال است.

الف) با توجه به این که $\sin(۱/z)$ یک تکینی اساسی در $z=۰$ دارد.

ب) با اعمال تمرین ۱۰ در مورد $f(z)$.

۱۲) ثابت کنید که تصویر صفحه تحت یک نگاشت تام نا ثابت در صفحه چگال است. [راهنمایی: اگر f یک چندجمله‌ای نباشد، $f(۱/z)$ را در نظر بگیرید.]

فصل دهم

قضیهٔ مانده

۱۰.۱ اعداد چرخش و قضیهٔ ماندهٔ کوشی

اینک درصددیم که قضیهٔ منحنی بستهٔ کوشی (۶.۸) را در مورد توابعی که تکینیهای تنها دارند تعمیم دهیم. توجه کنید که، به استناد ۹.۱۰ و ۹.۱۱، اگر γ دایره‌ای حول فقط یک تکینی تنها مانند $z_\circ$ باشد و در یک همسایگی سفتهٔ $z_\circ$ که شامل γ است داشته باشیم $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(z-z_\circ)^k$، آن گاه

$$\int_\gamma f = 2\pi i C_{-1}$$

بنابراین، ضریب C_{-1} از اهمیت خاصی در این بحث برخوردار است.

۱.۱۰ تعریف. اگر در یک همسایگی سفتهٔ $z_\circ$ داشته باشیم $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(z-z_\circ)^k$، C_{-1} را ماندهٔ f در $z_\circ$ می‌نامند. نماد $C_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_\circ)$ را برای نمایش این مانده به کار می‌بریم.

محاسبهٔ مانده‌ها

الف) اگر f یک قطب ساده در $z_\circ$ داشته باشد؛ یعنی، اگر

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

که در آن A و B در $z_\circ$ تحلیلی می‌باشند و B یک صفر ساده در $z_\circ$ دارد، آن گاه

$$C_{-1} = \lim_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)f(z) = \frac{A(z_\circ)}{B'(z_\circ)} \tag{1}$$

برهان. چون

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-z_\circ} + C_\circ + C_1(z-z_\circ) + \dots$$

پس

$$(z-z_\circ)f(z) = C_{-1} + C_\circ(z-z_\circ) + C_1(z-z_\circ)^2 + \dots$$

و

$$\lim_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)f(z) = C_{-1}$$

تساوی دوّم از (۱) هم نتیجه می‌شود زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)f(z) &= \lim_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)\frac{A(z)}{B(z)}\\ &= \lim_{z\to z_\circ} A(z)\Big/\frac{B(z)-B(z_\circ)}{z-z_\circ} = \frac{A(z_\circ)}{B'(z_\circ)}. \quad \square\end{aligned}$$

ب) اگر f قطبی از مرتبهٔ k در $z_\circ$ داشته باشد،

$$C_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_\circ)^k f(z)]_{z=z_\circ}$$

برهان. اگر قرار دهیم

$$f(z) = C_{-k}(z-z_\circ)^{-k} + \dots + C_{-1}(z-z_\circ)^{-1} + C_\circ + C_1(z-z_\circ) + \dots$$

خواهیم داشت:

$$g(z) = (z-z_\circ)^k f(z) = C_{-k} + \dots + C_{-1}(z-z_\circ)^{k-1} + C_\circ(z-z_\circ)^k + \dots$$

$$\frac{d^{k-1}g(z)}{dz^{k-1}} = (k-1)!C_{-1} + k!C_\circ(z-z_\circ) + \dots$$

و تساوی نتیجه می‌شود. □

ج) در اغلب حالاتی که قطبهایی از مراتب بالاتر موجودند، چنان که در مورد تکینیهای اساسی ملاحظه کردیم، مناسبترین راه تعیین مانده این است که مستقیماً از بسط لوران استفاده کنیم.

امثله.

$$\operatorname{Res}(\csc z; ۰) = \frac{۱}{\cos ۰} = ۱ \tag{۱}$$

$$\operatorname{Res}(\frac{۱}{z^۴ - ۱}; i) = \frac{۱}{۴i^۳} = \frac{i}{۴} \tag{۲}$$

$$\operatorname{Res}(\frac{۱}{z^۳}; ۰) = ۰ \tag{۳}$$

$$\operatorname{Res}(\sin \frac{۱}{z - ۱}; ۱) = ۱ \tag{۴}$$

زیرا

$$\sin \frac{۱}{z-۱} = \frac{۱}{z-۱} - \frac{۱}{۳!(z-۱)^۳} + \frac{۱}{۵!(z-۱)^۵} - + \dots$$

عدد چرخش. برای محاسبهٔ $\int_\gamma f$، که در آن γ یک منحنی بستهٔ کلی است (و f احتمالاً دارای تکینی تنهاست)، مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

۲.۱۰ تعریف. فرض کنید که γ یک منحنی بسته باشد و $a \notin \gamma$. آن گاه

$$n(\gamma, a) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

را عدد چرخش γ حول a می‌نامیم.

توجه کنید که اگر γ مرز یک دایره باشد (که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شود)،

$$n(\gamma, a) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } a \text{ داخل دایره باشد،} \\ ۰ & \text{اگر } a \text{ خارج دایره باشد،} \end{cases}$$

حکم اوّل در لم ۴.۵ ثابت شد. حکم دوّم در مثال ۱ بعد از قضیهٔ منحنی بسته کوشی ثابت شد. همچنین، اگر γ نقطهٔ a را kبار دور بزند ـ یعنی، اگر $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ که $۰ \leq \theta \leq ۲k\pi$ ـ آن گاه

$$n(\gamma, a) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_۰^{۲k\pi} i d\theta = k$$

که اصطلاح «عدد چرخش» را توجیه می‌کند.

۳.۱۰ قضیه. به ازای هر منحنی بستهٔ γ که $a \notin \gamma$، $n(\gamma, a)$ عددی صحیح است.

برهان. فرض کنید که $\gamma(t) = z(t)$ با $\circ \leq t \leq \text{۱}$، و قرار دهید

$$F(s) = \int_{\circ}^{s} \frac{\dot{z}(t)}{z(t) - a} dt, \qquad \circ \leq s \leq \text{۱}$$

آن گاه، چنان که در تعریف تابع لگاریتم دیدیم (بخش ۲.۸)، از

$$\dot{F}(s) = \frac{\dot{z}(s)}{z(s) - a}$$

نتیجه می‌شود که

$$(z(s) - a)e^{-F(s)}$$

یک ثابت است، و اگر قرار دهیم $s = \circ$ متوجه می‌شویم که

$$(z(s) - a)e^{-F(s)} = z(\circ) - a$$

از این رو،

$$e^{F(s)} = \frac{z(s) - a}{z(\circ) - a}$$

و

$$e^{F(\text{۱})} = \frac{z(\text{۱}) - a}{z(\circ) - a}$$

زیرا γ بسته است و لذا $z(\circ) = z(\text{۱})$. به این ترتیب،

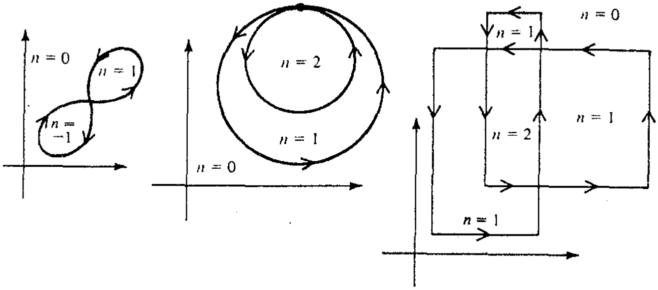
به ازای عدد صحیحی مانند k، $F(\text{۱}) = \text{۲}\pi k i$

و

$$n(\gamma, a) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi i} F(\text{۱}) = k. \qquad \square$$

از تعریف ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که اگر γ را ثابت بگیریم و a تغییر کند، $n(\gamma, a)$ تابع پیوسته‌ای از a است (مادام که $a \notin \gamma$). چون مقادیر این تابع همیشه اعداد صحیح می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که $n(\gamma, a)$ در مؤلفه‌های همبند مکمل γ ثابت است. بعلاوه، $n(\gamma, a) \to \circ$ وقتی که $a \to \infty$. از این رو، در مؤلفهٔ

بی‌کران γ (مجموعهٔ نقاطی که بدون اشتراک با γ به ∞ وصل می‌شوند) $n(\gamma,a)=\circ$. چند مثال متنوع در زیر تشریح می‌شوند.



قضیهٔ منحنی ژردان بیان می‌کند که هر منحنی بستهٔ ساده صفحه را دقیقاً به دو مؤلفه تقسیم می‌کند: یکی کراندار، دیگری بی‌کران (در این مورد، ضروری نیست که منحنی هموار باشد.) به طوری که اگر γ یک چنین منحنی «ژردان» باشد (و، بعلاوه، هموار) آن گاه

$$n(\gamma,a)=\begin{cases}۱, & \text{اگر } a \text{ در مؤلفهٔ کراندار باشد}\\ \circ, & \text{اگر } a \text{ در مؤلفهٔ بی‌کران باشد}\end{cases}$$

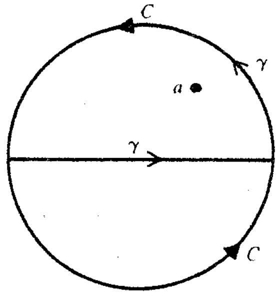
اثبات قضیهٔ منحنی ژردان ما را از بحث اصلی بسیار دور می‌کند. معذالک، در مثالهای آتی که با منحنیهای بستهٔ ساده سروکار خواهیم داشت قادر خواهیم بود که مستقیماً تحقیق کنیم که همواره اگر $a\notin\gamma$ آن‌گاه $n(\gamma,a)$ مساوی $\circ$ یا ± ۱ است. در واقع، با انتخاب جهت «درست» خواهیم توانست که نشان بدهیم که همواره اگر $a\notin\gamma$ آن گاه $n(\gamma,a)$ مساوی $\circ$ یا ۱ است. (جهت «درست» را به آسانی می‌توان تشخیص داد که همان جهتی است که مؤلفه کراندار $\tilde{\gamma}$ درست چپ γ واقع می‌شود.)

مثال. فرض کنید γ نیم‌دایره‌ای باشد که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شود. آن گاه

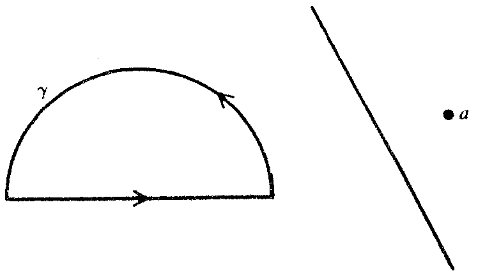
$$n(\gamma,a)=\begin{cases}۱, & \text{اگر } a \text{ داخل نیم‌دایره باشد}\\ \circ, & \text{اگر } a \text{ خارج نیم‌دایره باشد}\end{cases}$$

حکم اوّل از استناد به قضیهٔ منحنی بسته نتیجه می‌شود که نشان بدهیم که

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_C \frac{dz}{z-a}$$



که در آن C دایرهٔ تکمیل شدهٔ شامل $z = a$ است. حکم دوّم از این طریق به دست می‌آید که $1/(z-a)$ در نیم‌صفحه‌ای که شامل γ است ولی شامل a نیست تحلیلی می‌باشد.



برای تسهیل در به کارگیری اصطلاحات، تعریف زیر را می‌آوریم.

۴.۱۰ تعریف. γ را یک منحنی بستهٔ منظم می‌نامیم در صورتی که γ یک منحنی بستهٔ ساده باشد با این ویژگی که همواره اگر $a \notin \gamma$ آن‌گاه $n(\gamma, a)$ مساوی ۰ یا ۱ باشد. در این حالت، مجموعهٔ $\{a : n(\gamma, a) = 1\}$ را درون γ می‌نامیم. مجموعهٔ نقاطی مانند a که $n(\gamma, a) = 0$ بیرون γ نامیده می‌شود.

۵.۱۰ قضیهٔ ماندهٔ کوشی. فرض کنید که f در یک حوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد جز در تکینیهای تنهای $z_1, z_2, \ldots, z_m$. فرض کنید γ منحنی بسته‌ای باشد که هیچ یک از تکینیها را قطع نکند.

آن‌گاه

$$\int_\gamma f = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{m} n(\gamma, z_k)\,\mathrm{Res}(f; z_k)$$

برهان. (توجه کنید که چون γ یک منحنی «کلی» است، نمی‌توانیم آن را با اجتماعی متناهی از منحنیهای «آشنا» تعویض کنیم. در عوض، مانند بخش ۲.۹ عمل می‌کنیم.)

اگر اجزای اصلی

$$P_۱\left(\frac{۱}{z-z_۱}\right), \ldots, P_m\left(\frac{۱}{z-z_m}\right)$$

را از f کم کنیم، تفاضل

$$g(z) = f(z) - P_۱\left(\frac{۱}{z-z_۱}\right) - P_۲\left(\frac{۱}{z-z_۲}\right) - \cdots - P_m\left(\frac{۱}{z-z_m}\right)$$

(با تعریفهای مناسبی در $z_۱$،...،z_m) یک تابع تحلیلی در D است. از این رو، به استناد قضیهٔ منحنی بستهٔ (۶.۸)،

$$\int_\gamma g = ۰$$

و

$$\int_\gamma f = \sum_{k=۱}^{m} \int_\gamma P_k\left(\frac{۱}{z-z_k}\right) dz \qquad (۲)$$

بعلاوه، به ازای هر k،

$$\int_\gamma \frac{۱}{(z-z_k)^n} = ۰ \qquad \text{هرگاه } n \neq ۱،$$

زیرا $(z-z_k)^{-n}$ مشتق

$$\frac{(z-z_k)^{۱-n}}{۱-n}$$

است که در امتداد منحنی بستهٔ γ تحلیلی است. از این رو، اگر

$$P_k\left(\frac{۱}{z-z_k}\right) = \frac{C_{-۱}}{z-z_k} + \frac{C_{-۲}}{(z-z_k)^۲} + \cdots$$

آن گاه، به استناد (۲)،

$$\int_\gamma P_k\left(\frac{۱}{z-z_k}\right) dz = C_{-۱}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_k} = ۲\pi i\, n(\gamma, z_k)\,\mathrm{Res}(f; z_k)$$

و برهان تمام است. □

۶.۱۰ نتیجه. اگر f مانند بالا باشد و γ یک منحنی بستهٔ منظم در حوزه‌ای باشد که f در آن تحلیلی است، آن گاه $\int_\gamma f = ۲\pi i \sum_k \mathrm{Res}(f; z_k)$ ، که در آن مجموع به ازای همهٔ تکینیهای f واقع در درون γ محاسبه می‌شود.

۲.۱۰ کاربردهای قضیهٔ مانده

۷.۱۰ تعریف. f را در حوزهٔ D برخه‌ریخت می‌نامیم در صورتی که f در این حوزه به استثنای قطبهای تنها تحلیلی باشد.

۸.۱۰ قضیه. فرض کنید که γ یک منحنی بستهٔ منظم باشد. اگر f در داخل γ و بر روی آن برخه‌ریخت باشد و هیچ صفر یا قطبی بر γ نداشته باشد و

$\mathbb{Z} =$ تعداد صفرهای f واقع در داخل γ (هر صفر مرتبهٔ k، k بار شمرده می‌شود)،

$\mathbb{P} =$ تعدا قطبهای f واقع در داخل γ (مجدداً با احتساب مرتبهٔ تکرار)،

آن گاه

$$\mathbb{Z} - \mathbb{P} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}$$

برهان. توجه کنید که f'/f تحلیلی است جز در صفرها یا قطبهای f. اگر f یک صفر مرتبهٔ k در $z = a$ داشته باشد، یعنی، اگر

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \quad \text{با} \quad g(a) \neq ۰$$

آن گاه

$$f'(z) = (z-a)^{k-۱}[kg(z) + (z-a)g'(z)]$$

یک صفر مرتبهٔ $k - ۱$ در $z = a$ دارد و

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

از این رو، در هر صفر f با مرتبهٔ k، f'/f یک قطب ساده با ماندهٔ k دارد. به طور مشابه، اگر

$$f(z) = (z-a)^{-k} g(z)$$

که در آن $g(a) \neq \circ$، آن گاه

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

که نشان می‌دهد که در هر قطب f از مرتبهٔ k، f'/f یک قطب ساده با ماندهٔ $k-$ دارد. در این صورت، به استناد نتیجهٔ ۶.۱۰،

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}\right) = \mathbb{Z} - \mathbb{P}. \qquad \square$$

اگر f تحلیلی باشد، خواهیم داشت:

۹.۱۰ نتیجه (اصل شناسه). اگر f در داخل و برروی یک منحنی بستهٔ منظم γ تحلیلی باشد (و بر γ صفر نشود)، آن گاه

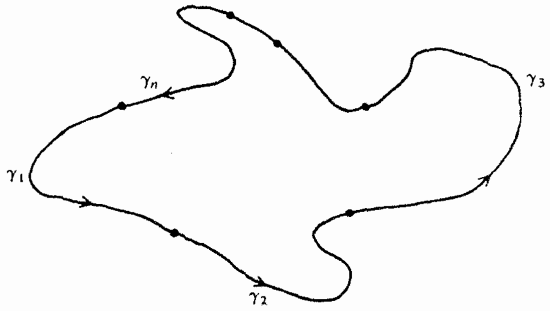
$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \text{تعداد صفرهای } f \text{ واقع در داخل}\gamma = \mathbb{Z}(f)$$

برهان. حکم بالا «اصل شناسه» نامیده شده است زیرا اگر $\gamma(t) = z(t)$ با $\circ \leq t \leq ۱$، آن گاه

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \log f(z(۱)) - \log f(z(\circ)) = \frac{۱}{۲\pi}\Delta\,\mathrm{Arg}\, f(z) \qquad (۱)$$

وقتی که z حول γ از نقطهٔ شروع $z(\circ)$ تا نقطهٔ پایان $z(۱) = z(\circ)$ پیموده شود. برای اثبات (۱)، γ را به تعدادی متناهی کمانهای ساده می‌شکنیم:

$$\begin{aligned}
\gamma_۱ &: \quad z(t), \quad \circ \leq t \leq t_۱\\
\gamma_۲ &: \quad z(t), \quad t_۱ \leq t \leq t_۲\\
&\quad \dots\\
\gamma_n &: \quad z(t), \quad t_{n-۱} \leq t \leq t_n = ۱
\end{aligned}$$



چون یک شاخهٔ تحلیلی $\log f$ در یک حوزهٔ همبند سادهٔ شامل γ_1 قابل تعریف است،

$$\int_{\gamma_1} \frac{f'}{f} = \log f(z(t_1)) - \log f(z(0))$$

به طور مشابه،

$$\int_{\gamma_k} \frac{f'}{f} = \log f(z(t_k)) - \log f(z(t_{k-1})), \qquad k = 2, 3, \ldots, n$$

توجه می‌کنیم که

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \cdots + \int_{\gamma_n}$$

و تساوی اوّل (۱) نتیجه می‌شود. همچنین، توجه می‌کنیم که چون $z(0) = z(1)$ و

$$\log w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w$$

خواهیم داشت:

$$\log f(z(1)) - \log f(z(0)) = i[\operatorname{Arg} f(z(1)) - \operatorname{Arg} f(z(0))]$$

و تساوی دوّم نتیجه می‌شود. □

همچنین، می‌توانیم $\int_\gamma f'/f$ را عدد چرخش منحنی $f(\gamma(z))$ حول $z = 0$ بدانیم. (تعریف ۲.۱۰ را ببینید.) این نقطهٔ نظر ما را به برهان نسبتاً ساده‌ای از قضیهٔ مهم زیر هدایت می‌کند.

۱۰.۱۰ قضیهٔ روشه. فرض کنید که f و g در داخل و بر روی منحنی بستهٔ منظم γ تحلیلی باشند و به ازای هر $z \in \gamma$ داشته باشیم $|g(z)| < |f(z)|$. آن گاه

$$\text{در داخل } \gamma، \quad \mathbb{Z}(f+g) = \mathbb{Z}(f)$$

برهان. نخست توجه می‌کنیم که اگر $f(z) = A(z)B(z)$،

$$\frac{f'}{f} = \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}$$

که لهذا

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = \int_\gamma \frac{A'}{A} + \int_\gamma \frac{B'}{B}$$

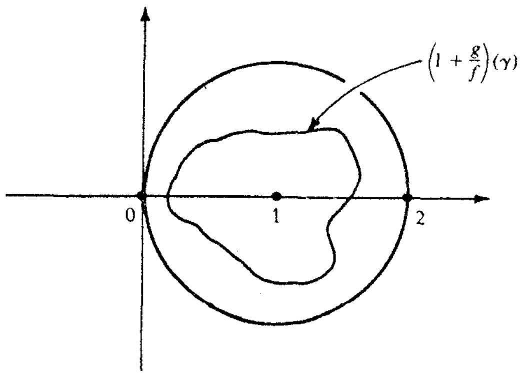
به این ترتیب، اگر بنویسیم

$$f + g = f\left(۱ + \frac{g}{f}\right)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}(f+g) &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} + \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{(۱+\frac{g}{f})'}{۱+\frac{g}{f}} \\ &= \mathbb{Z}(f) + \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{(۱+\frac{g}{f})'}{۱+\frac{g}{f}}\end{aligned}$$

امّا انتگرال اخیر صفر است زیرا، به استناد فرض، $(۱ + g/f)(\gamma)$ داخل قرص به شعاع واحد حول $z = ۱$ باقی می‌ماند. از این رو، عدد چرخش $(۱ + g/f)(\gamma)$ حول O صفر است [یعنی، اگر قرار دهیم $w = ۱ + g/f$، نتیجه می‌شود که $w(z)$ به ازای $z \in \gamma$ در نیم‌صفحهٔ راست باقی می‌ماند و لذا $\int_\gamma dw/w = ۰$]. $\square$



مثال. چون $|۱ + ۲z^{۱۰}| < |۴z^۲|$ وقتی که $|z| = ۱$، هر یک از چندجمله‌ایهای

$$۲z^{۱۰} + ۴z^۲ + ۱ \quad \text{و} \quad ۲z^{۱۰} - ۴z^۲ + ۱$$

دقیقاً دو صفر در $|z| < ۱$ دارد.

یادآوری می‌کنیم که مطابق فرمول انتگرال کوشی (۴.۶)

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw$$

که در آن C دایره‌ای شامل z است. با استفاده از قضیهٔ مانده، این حکم را به صورت زیر می‌توان تعمیم داد.

۱۱.۱۰ فرمول انتگرال کوشی تعمیم یافته. فرض کنید که f در حوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد و γ منحنی بستهٔ منظمی مشمول در D باشد. آن گاه به ازای هر z در داخل γ و $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$،

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+۱}}dw$$

برهان. ملاحظه می‌کنیم که چون در سرتاسر یک همسایگی z،

$$f(w) = f(z) + f'(z)(w-z) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(w-z)^k + \ldots$$

خواهیم داشت:

$$\text{Res}\left(\frac{f(w)}{(w-z)^{k+۱}}; z\right) = \frac{f^{(k}(z)}{k!}$$

چون $f(w)/(w-z)^{k+۱}$ هیچ تکینی در D ندارد، حکم مطلوب از نتیجهٔ ۶.۱۰ به دست می‌آید. □

اکنون تعمیمی از قضیهٔ ۶.۷ را در مورد حد توابع تحلیلی نتیجه می‌گیریم.

۱۲.۱۰ قضیه. فرض کنید که دنباله‌ای از توابع f_n، که هر یک در حوزهٔ D تحلیلی است، بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ D به طور یکنواخت به f همگرا باشد. آنگاه f تحلیلی است، $f'_n \to f'$ بر D، و همگرایی f'_n نیز بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ D یکنواخت است.

برهان. در قضیهٔ ۶.۷ ثابت کردیم که f تحلیلی است. به موجب فرمول انتگرال ۱۱.۱۰، اگر $z_۰$ دلخواهی در D انتخاب و فرض کنیم که $C = C(z_۰; r)$ به‌ازای یک $r < ۱$، آنگاه به ازای هر z در $D(z_۰; r)$،

$$f'_n(z) - f'(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^۲}dw$$

بعلاوه، اگر n را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم که در سرتاسر مجموعهٔ فشردهٔ $\overline{D(z_\circ;r)}$ داشته باشیم $|f_n - f| < \varepsilon r^۲/۴$، نتیجه می‌شود که نامساوی

$$|f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon$$

به ازای هر z در $D(z_\circ; r/۲)$ برقرار است. به این ترتیب، برای این که ببینیم که همگرایی بر فشرده‌ها یکنواخت است، فقط لازم است توجه کنیم که هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ D با تعدادی متناهی قرص به شکل $|z - z_\circ| < r/۲$ می‌تواند پوشیده شود. □

۱۳.۱۰ قضیهٔ هرویتس. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع تحلیلی بر ناحیه‌ای مانند D باشند که هیچ گاه صفر نمی‌شوند و فرض کنید که f_n بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ D به طور یکنواخت به f همگرا باشد. آن گاه یا $f \equiv \circ$ بر D یا $f(z) \neq \circ$ به ازای هر $z \in D$.

برهان. فرض کنید zی در D یافت شود که $f(z) = \circ$. اگر $f \not\equiv \circ$، دایره‌ای مانند C به مرکز z وجود دارد به طوری که بر C داشته باشیم $f(z) \neq \circ$؛ از این رو،

$$\frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f} \quad \text{به طور یکنواخت بر } C$$

معذالک،

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f'}{f} = \mathbb{Z}(f) \geq ۱$$

در حالی که

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f_n'}{f_n} = \mathbb{Z}(f_n) = \circ$$

از این رو،

$$f \equiv \circ. \qquad \square$$

[توجه کنید که ممکن است داشته باشیم $f \equiv \circ$ برخلاف این واقعیت که به ازای هر n، $f_n(z) \neq \circ$، به عنوان مثال، $f_n(z) = (۱/n)e^z$ را در نظر بگیرید.]

مثال. چون $\sin \pi = \circ$، باید $n_\circ$ی موجود باشد به طوری که

$$z - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - + \cdots \frac{z^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

به‌ازای هر $n > n_\circ$ یک صفر در $|z - \pi| < ۱$ داشته باشد.

۱۴.۱۰ نتیجه. فرض کنید که $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع تحلیلی در ناحیه‌ای مانند D باشد که بر فشرده‌ها در D به طور یکنواخت به f همگرا باشد و همواره $a \neq f_n$. آنگاه یا $f \equiv a$ در D یا $f \neq a$ در D.

برهان. $g_n(z) = f_n(z) - a$ را در نظر بگیرید. □

۱۵.۱۰ قضیه. فرض کنید $\{f_n\}$ بر فشرده‌ها در ناحیه‌ای مانند D به طور یکنواخت به f همگرا باشد. اگر همواره f_n در D تابعی ۱-۱ باشد، آن گاه یا f ثابت است یا f در D یک‌به‌یک است.

برهان. فرض کنید $f(z_۱) = f(z_۲) = a$ و قرصهای متمایز $D_۱$ و $D_۲$ (در D) را، به ترتیب، محاط بر $z_۱$ و $z_۲$ بگیرید. اگر $f \not\equiv a$، به استناد ۱۳.۱۰، لازم می‌آید که وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد $f_n(z) = a$ جوابی در $D_۱$ داشته باشد. (در غیر این صورت، باید زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ همگرا به f می‌یافتیم که هیچ aـ مقداری در $D_۱$ نداشته باشد.) ولی، آن‌گاه، چون f_n یک‌به‌یک است، به ازای همهٔ nهای بزرگ در سرتاسر $D_۲$ خواهیم داشت $f_n(z) \neq a$ و، از این رو، $f(z_۲) \neq a$؛ که با فرض متناقض است. □

تمرینات

۱) تکینیهای توابع زیر و مانده‌های متناظر را تعیین کنید.

(الف) $\frac{۱}{z^۴+z^۲}$ (ب) $\cot z$ (ج) $\csc z$ (د) $\frac{\exp(۱/z^۲)}{z-۱}$

(ه) $\frac{۱}{z^۲+۳z+۲}$ (و) $\sin \frac{۱}{z}$ (ز) $ze^{۳/z}$

۲) انتگرالهای زیر را با استفاده از قضیهٔ مانده محاسبه کنید.

(الف) $\int_{|z|=۱} \cot z dz$ (ب) $\int_{|z|=۲} \frac{dz}{(z-۴)(z^۲-۱)}$

(ج) $\int_{|z|=۱} \sin \frac{۱}{z} dz$ (د) $\int_{|z|=۲} ze^{۳/z} dz$

۳) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $\text{Res}((۱-e^{-z})^{-n}; ۰) = ۱$.

راهنمایی: انتگرال $\int_C \frac{dz}{(۱-e^{-z})^n}$ را در نظر بگیرید و با تغییر متغیر $w = ۱ - e^{-z}$ نشان دهید که

$$\text{Res}((۱-e^{-z})^{-n}; ۰) = \text{Res}\left(\frac{۱}{w^n(۱-w)}; ۰\right)$$

۴) فرض کنید که f با

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\phi(w)dw}{w-z}$$

تعریف شده باشد که در آن γ یک منحنی فشرده است، ϕ بر γ پیوسته است، و $z \notin \gamma$. مستقیماً از طریق بررسی

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

نشان دهید که

$$f'(z)=\int_\gamma \frac{\phi(w)dw}{(w-z)^۲}$$

برهان دیگری از قضیهٔ ۱۱.۱۰ ارائه کنید.

*۵) فرض کنید که f تام است و $f(z)$ حقیقی است فقط و فقط وقتی که z حقیقی باشد. با استفاده از اصل شناسه نشان دهید که f حداکثر یک صفر می‌تواند داشته باشد. (این را با تمرین ۱۳ فصل ۵ مقایسه کنید.)

۶) تعداد صفرهای توابع زیر را در محدودهٔ مفروض تعیین کنید.

الف) $f_۱(z)=۳e^z-z$ در $|z|\le ۱$.

ب) $f_۲(z)=\frac{۱}{۳}e^z-z$ در $|z|\le ۱$.

ج) $f_۳(z)=z^۴-۵z+۱$ در $۱\le |z|\le ۲$.

د) $f_۴(z)=z^۶-۵z^۴+۳z^۲-۱$ در $|z|\le ۱$.

۷) فرض کنید f در داخل و بر روی منحنی بستهٔ منظم γ تحلیلی باشد و هیچ صفری بر γ نداشته باشد. نشان دهید که اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد آن گاه

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma z^m\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_k (z_k)^m$$

که در آن مجموع سمت راست مجموع همهٔ صفرهای f واقع در داخل γ می‌باشد.

۸) نشان دهید که به ازای هر $R>۰$ اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، تابع

$$P_n(z)=۱+z+\frac{z^۲}{۲!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}$$

هیچ صفری در $|z|\le R$ ندارد.

۹) قضیهٔ اساسی جبر را به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ روشه ثابت کنید.

۱۰) جزئیات برهان زیر از قضیهٔ روشه را (که منسوب به کاراتئودری است) عرضه کنید. قرار دهید

$$J(\lambda)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{(f+\lambda g)'}{f+\lambda g}, \qquad ۰\leq \lambda \leq ۱$$

توجه کنید که $J(\lambda)$ به ازای همهٔ λهایی که $۱ \leq \lambda \leq ۰$ تعریف می‌شود. بعلاوه، $J(\lambda)$ تابع پیوسته‌ای از λ است و همیشه صحیح ـ مقدار است. از این رو، J ثابت است؛ بالاخص $J(۱)=J(۰)$ که در این صورت

$$\mathbb{Z}(f)=\mathbb{Z}(f+g)$$

۱۱) یادآوری می‌کنیم که، چنان که در ۲.۸ دیدیم،

$$\log(z^۲-۱)=\int_{\sqrt{۲}}^{z}\frac{۲\xi}{\xi^۲-۱}d\xi$$

در صفحه منهای بازهٔ $[۱,\infty-)$ تحلیلی است. لذا، همچنین است

$$\sqrt{z^۲-۱}=\exp(\frac{۱}{۲}\log(z^۲-۱)) \qquad (۱)$$

نشان دهید که $\sqrt{z^۲-۱}$ (به صورتی که در (۱) تعریف شد) در تمامی صفحه منهای بازهٔ $[۱,۱-]$ تحلیلی است. [راهنمایی: با استفاده از اصل شناسه نشان دهید که $\sqrt{z^۲-۱}$ در امتداد بازهٔ $(۱,\infty-)$ پیوسته است و آن گاه قضیهٔ مورِرا را اعمال کنید.]

۱۲) نشان دهید که یک شاخهٔ تحلیلی از $\sqrt[۳]{(z-۱)(z-۲)(z-۳)}$ در تمامی صفحه منهای $[۱,۳]$ قابل تعریف است.

فصل یازدهم

کاربردهای قضیهٔ مانده در محاسبهٔ انتگرالها و مجموعها

مقدمه

در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه انواع مختلف انتگرالهای معیّن (حقیقی) به‌انتگرالهای حول منحنیهای بسته در صفحهٔ مختلط مربوط می‌شوند، به طوری که قضیهٔ مانده ابزار سودمندی در انتگرالگیری معین خواهد بود.

۱۰۱۱ محاسبهٔ انتگرالهای معین به روش انتگرال مسیری

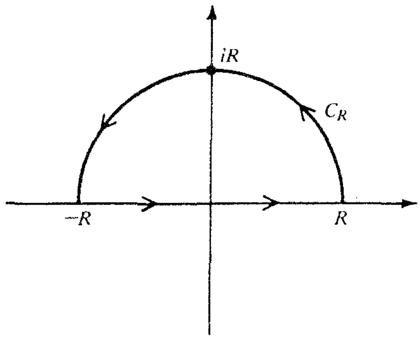
(یک) انتگرالهای به صورت $\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))dx$، که در آن P و Q دو چندجمله‌ای می‌باشند. از حسابان متغیر حقیقی می‌دانیم که انتگرالی از این نوع در صورتی همگرا خواهد بود که $Q(x) \neq 0$ و

$\deg Q - \deg P \geq ۲$. با این مفروضات، توجه می‌کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

و ما درصددیم که انتگرال دوم را به ازای مقادیر بزرگ R تخمین بزنیم.

فرض کنید C_R مسیر بسته‌ای باشد متشکل از قطعه خط حقیقی از $-R$ تا R و نیم‌دایرهٔ بالایی Γ_R به مرکز مبداء و شعاع R که به قدری بزرگ است که همهٔ صفرهای Q واقع در نیم‌صفحهٔ بالایی را در برمی‌گیرد.



به استناد قضیهٔ مانده

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = ۲\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right)$$

که در آن نقاط z_k صفرهای Q در نیم‌صفحهٔ بالایی می‌باشند.

به این ترتیب

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(x)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = ۲\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right) \qquad (۱)$$

برای تخمین $\int_{\Gamma_R} P/Q$، ملاحظه می‌کنیم که چون $\deg Q - \deg P \geq ۲$، به موجب قاعدهٔ معمول تخمین $M - L$،

$$\int_{\Gamma_R} \frac{P}{Q} \ll \pi . R . \frac{A}{R^۲}$$

و لذا

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = ۰ \qquad (۲)$$

از ترکیب (۱) و (۲) دیده می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right)$$

مثال.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; z_k\right)$$

که در آن $z_1 = e^{i\pi/4}$ و $z_2 = e^{3\pi i/4}$ قطبهای $1/(z^4+1)$ در نیم‌صفحهٔ بالایی هستند. چون هرکدام یک قطب ساده است، مانده‌ها مقادیر $1/4z^3$ در نقاط قطب می‌باشند. به این ترتیب،

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; e^{i\pi/4}\right) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{-z_1}{4} = -\frac{1}{8}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$$

و

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; e^{i3\pi/4}\right) = \frac{1}{8}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$

که در این صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

(دو) انتگرالهای به صورت $\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{R}(x)\cos x\,dx$ یا $\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{R}(x)\sin x\,dx$. با این فرض که

$$\mathcal{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

که در آن P و Q دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x) \neq 0$ (جز احتمالاً در صفر $\cos x$ یا $\sin x$)، این انتگرالها مادام که $\deg Q > \deg P$ همگرایند.

انتگرالگیری $\mathcal{R}(z)\cos z$ در همان مسیر انتگرال نوع (یک) مناسب نیست، زیرا

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\Gamma_M}\mathcal{R}(z)\cos z\,dz \neq 0$$

معذالک، اگر

$$\int_{C_M}\mathcal{R}(z)e^{iz}dz$$

را در نظر بگیریم، خواهیم توانست که نشان بدهیم که

$$\int_{\Gamma_M}\mathcal{R}(z)e^{iz}dz \to 0$$

که در این صورت

$$\int_{C_M} \mathcal{R}(z)e^{iz}dz \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)e^{ix}dx \qquad (۳)$$

و، آن گاه، انتگرالهای

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)\sin x dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)\cos x dx$$

اجزای حقیقی و موهومی حد (۳) خواهند بود. از این رو، با اعمال قضیهٔ مانده در (۳)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)\cos x dx = \mathrm{Re}[۲\pi i \sum_k \mathrm{Res}(\mathcal{R}(z)e^{iz}; z_k)]$$

و

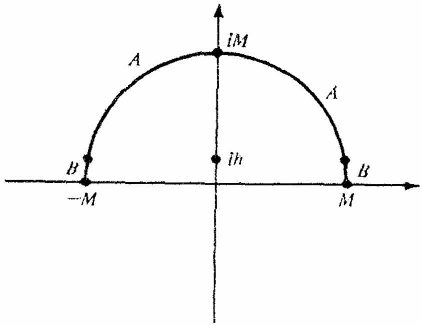
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)\sin x dx = \mathrm{Im}[۲\pi i \sum_k \mathrm{Res}(\mathcal{R}(z)e^{iz}; z_k)]$$

که در آن نقاط z_k قطبهای $\mathcal{R}(z)$ در نیم‌صفحهٔ بالایی می‌باشند.

برای این که نشان بدهیم که $\int_{\Gamma_M} \mathcal{R}(z)e^{iz}dz \to ۰$ و بحث را کامل کنیم، Γ_M را به دو زیرمجموعه تجزیه می‌کنیم:

$$A = \{z \in \Gamma_M : \mathrm{Im}\, z \geq h\}$$

$$B = \{z \in \Gamma_M : \mathrm{Im}\, z < h\}$$



با استفاده از این واقعیات که $\mathcal{R}(z) \ll K/|z|$ و $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$، خواهیم داشت:

$$\int_A \mathcal{R}(z)e^{iz}dz \ll K.\frac{e^{-h}}{M}.\pi M = C_۱ e^{-h}$$

ولی

$$\int_B \mathcal{R}(z)e^{iz}dz \ll \frac{K}{M}۴h = C_۲\frac{h}{M}$$

بنابراین،

$$\int_{\Gamma_M} \mathcal{R}(z)e^{iz}dz \ll C_۱e^{-h} + C_۲\frac{h}{M}$$

حال، اگر به‌عنوان مثال $h = \sqrt{M}$ اختیار کنیم، در می‌یابیم که

$$\int_{\Gamma_M} \mathcal{R}(z)e^{iz}dz \ll C_۱e^{-\sqrt{M}} + \frac{C_۲}{\sqrt{M}}$$

و

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\Gamma_M} \mathcal{R}(z)e^{iz}dz = ۰$$

مثال. برای محاسبهٔ $\int_{-\infty}^{\infty}(\sin x/x)dx$، می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

قطب e^{ix}/x در $x = ۰$ ما را وادار می‌کند که روش محاسبه را قدری اصلاح کنیم؛ در عوض، می‌نویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-۱}{x}dx$$

توجه می‌کنیم که

$$\int_{C_M}\frac{e^{iz}-۱}{z}dz = \int_{-M}^{M}\frac{e^{ix}-۱}{x}dx + \int_{\Gamma_M}\frac{e^{iz}-۱}{z}dz$$

و، مطابق قضیهٔ کوشی،

$$\int_{C_M}\frac{eiz-۱}{z}dz = ۰$$

زیرا انتگرالده فاقد قطب است؛ به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M}\frac{e^{ix}-۱}{x}dx &= \int_{\Gamma_M}\frac{۱-e^{iz}}{z}dz\\ &= \int_{\Gamma_M}\frac{۱}{z}dz - \int_{\Gamma_M}\frac{e^{iz}}{z}dz\\ &= \pi i - \int_{\Gamma_M}\frac{e^{iz}}{z}dz\end{aligned}$$

چون $\int_{\Gamma_M}(e^{iz}/z)dz \to 0$ وقتی که $M \to \infty$،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x}dx = \pi i$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$$

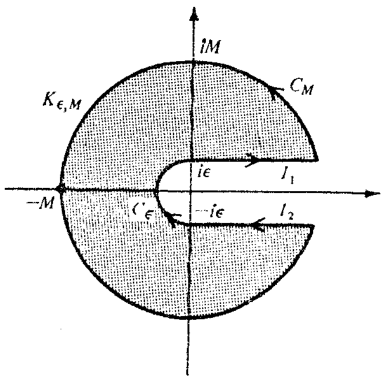
(سه) الفـ انتگرالهای به صورت $\int_0^{\infty}(P(x)/Q(x))dx$. مانند (یک)، برای حصول اطمینان از همگرایی انتگرال، فرض می‌کنیم که $\deg Q - \deg P \geq 2$ و $Q(x) \neq 0$ وقتی که $x \geq 0$. البته، اگر انتگرالده زوج باشد، انتگرال مفروض به عنوان $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))dx$ محاسبه می‌شود. در سایر حالات، قرار می‌دهیم $\mathcal{R}(z) = P(z)/Q(z)$ و انتگرال $\log z.\mathcal{R}(z)$ را در نظر می‌گیریم حول مسیر به شکل جاکلید $K_{\varepsilon,M}$ متشکل از

(i) قطعه خط افقی I_1 از $i\varepsilon$ تا $\sqrt{M^2-\varepsilon^2}+i\varepsilon$،

(ii) کمان مستدیر C_M به شعاع M که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت از $\sqrt{M^2-\varepsilon^2}+i\varepsilon$ تا $\sqrt{M^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon$ پیموده شود.

(iii) قطعه خط افقی I_2 از $\sqrt{M^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon$ تا $-i\varepsilon$،

(iv) نیم‌دایرهٔ C_ε به شعاع ε که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت از $-i\varepsilon$ تا $i\varepsilon$ پیموده شود.



داخل $K_{\varepsilon,M}$ یک حوزهٔ همبند ساده است که شامل صفر نیست و لذا $\log z$ را می‌توان به عنوان تابعی تحلیلی در آن جا تعریف کرد. (محض سهولت، اختیار می‌کنیم $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$.)

به استناد قضیهٔ مانده

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to ۰\\ M\to\infty}} \int_{K_{\varepsilon,M}} \mathcal{R}(z)\log z dz = ۲\pi i \sum_k \mathrm{Res}(\mathcal{R}(z)\log z; z_k) \tag{۴}$$

بعلاوه، با این فرض که ε به قدرکافی کوچک و M به قدرکافی بزرگ باشد که همهٔ صفرهای Q در داخل $K_{\varepsilon,M}$ واقع شوند، انتگرال مسیری مربوط به $\int_۰^\infty \mathcal{R}(x)dx$ به صورت زیر است

$$\int_{C_\varepsilon} \mathcal{R}(z)\log z dz \ll \pi\varepsilon \mathrm{Max}|\mathcal{R}(z)\log z| \ll A\varepsilon|\log\varepsilon| \tag{i}$$

زیرا $\mathcal{R}$ در ۰ پیوسته است و $|\log z| < \log|z| + ۲\pi$. به این ترتیب،

$$\lim_{\varepsilon\to ۰} \int_{C_\varepsilon} \mathcal{R}(z)\log z dz = ۰$$

$$\int_{C_M} \mathcal{R}(z)\log z dz \ll ۲\pi M.\mathrm{Max}_{C_M}|\log z||\mathcal{R}(z)| \ll AM\log M/M^۲ \tag{ii}$$

زیرا $\mathcal{R}(z) \ll B/M^۲$، به این ترتیب

$$\lim_{M\to\infty} \int_{C_M} \mathcal{R}(z)\log z dz = ۰$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to ۰\\ M\to\infty}} \int_{I_۱} \mathcal{R}(z)\log z dz = \int_۰^\infty \mathcal{R}(x)\log x dx \tag{iii}$$

و

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to ۰\\ M\to\infty}} \int_{I_۲} \mathcal{R}(z)\log z dz = -\int_۰^\infty \mathcal{R}(x)(\log x + ۲\pi i)dx$$

از ترکیب همهٔ نتایج بالا درمی‌یابیم که

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to ۰\\ M\to\infty}} \int_{K_{\varepsilon,M}} \mathcal{R}(z)\log z dz = -۲\pi i \int_۰^\infty \mathcal{R}(x)dx$$

در این صورت، به استناد (۴)،

$$\int_۰^\infty \mathcal{R}(x)dx = -\sum_k \mathrm{Res}(\mathcal{R}(z)\log z; z_k)$$

که مجموع براساس همهٔ قطبهای موجود در $\mathcal{R}$ محاسبه می‌شود.

مثال. برای محاسبهٔ $\int_۰^\infty dx/(۱+x^۳)$، توجه می‌کنیم که در $z_۱ = e^{i\pi/۳}$،

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{۱+z^۳}; z_۱\right) = -\frac{i\pi}{۹}\left(\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

در $z_۲ = -۱ = e^{i\pi}$،

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{۱+z^۳}; z_۲\right) = \frac{i\pi}{۳}$$

و در $z_۳ = e^{i۵\pi/۳}$،

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{۱+z^۳}; z_۳\right) = \frac{-۵\pi i}{۹}\left(\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

در این صورت

$$\sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{۱+z^۳}; z_k\right) = \frac{-۲\pi}{۹}\sqrt{۳}$$

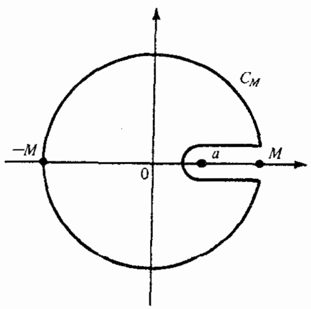
و

$$\int_۰^\infty \frac{dx}{۱+x^۳} = \frac{۲}{۹}\pi\sqrt{۳}$$

ب- انتگرالهای به صورت $\int_a^\infty (P(x)/Q(x))dx$ به طور مشابه با بررسی

$$\int_{C_M} \log(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

که C_M در شکل



نشان داده شده است محاسبه می‌شوند. در واقع، چون

$$\int_۰^\infty - \int_a^\infty = \int_۰^a$$

این روش را می‌توان در تعیین انتگرالهای نامعین توابع گویا به کار برد.

ج- از انتگرالگیری حول مسیر «جاکلید» برای محاسبهٔ انتگرالهای به صورت

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{\alpha-\text{۱}}}{P(x)} dx$$

نیز می‌توان استفاده کرد که در آنها $\circ < \alpha < \text{۱}$ و P یک چندجمله‌ای با $\deg P \geq \text{۱}$ است.

در داخل مسیر $K_{\varepsilon,M}$، $z^{\alpha-\text{۱}} = \exp[(\alpha - \text{۱})\log z]$ را به عنوان تابعی تحلیلی می‌توان تعریف کرد (مجدداً، به عنوان مثال، با $\circ < \arg z < \text{۲}\pi$)

اگر در امتداد $I_\text{۱}$ انتگرال بگیریم (که $\varepsilon \to \circ$)،

$$z^{\alpha-\text{۱}} = \exp((\alpha - \text{۱})\log x) = x^{\alpha-\text{۱}}$$

و حال آن که در امتداد $I_\text{۲}$،

$$z^{\alpha-\text{۱}} = e^{(\alpha-\text{۱})(\log x + \text{۲}\pi i)} = x^{\alpha-\text{۱}} e^{\text{۲}\pi i(\alpha-\text{۱})}$$

چون، مانند قبل، انتگرالها در امتداد دو قطعهٔ مستدیر به صفر میل می‌کنند، انتگرال حول $K_{\varepsilon,M}$ از جمع انتگرالهای در امتداد $I_\text{۱}$ و $I_\text{۲}$ به دست می‌آید؛ از این رو

$$[\text{۱} - e^{\text{۲}\pi i(\alpha-\text{۱})}] \int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{\alpha-\text{۱}}}{P(x)} dx = \text{۲}\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-\text{۱}}}{P(z)}; z_k\right)$$

که مجموع براساس صفرهای P محاسبه می‌شود.

مثال. برای محاسبهٔ $\int_{\circ}^{\infty} dx/\sqrt{x}(\text{۱} + x)$، توجه می‌کنیم که

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\text{۱}}{\sqrt{z}(\text{۱} + z)}; -\text{۱}\right) = -i$$

و

$$(\text{۱} - e^{-\pi i}) \int_{\circ}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(\text{۱} + x)} = \text{۲}\pi$$

در این صورت

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(\text{۱} + x)} = \pi$$

(چهار) $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$، که در آن $\mathcal{R}$ یک تابع گویا می‌باشد. در این مورد دیدگاه نسبتاً متفاوتی اختیار می‌کنیم. قبلاً انتگرالهای معین را در امتداد قطعه خطهای حقیقی در نظر می‌گرفتیم که بعداً با تبدیل به مسیرهای بسته کامل شدند. در این حالت، انتگرال حقیقی را نمایش پارامتری یک انتگرال خط حول دایرهٔ واحد می‌دانیم.

یادآوری می‌کنیم که انتگرال

$$\int_{|z|=1} f(z)dz$$

با انتخاب $ze^{i\theta}$، که $0 \leq \theta \leq 2\pi$، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta$$

به طور واضحتر، انتگرال $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ برابر است با

$$\int_{|z|=1} \mathcal{R}\left[\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right]\frac{dz}{iz} \qquad (5)$$

زیرا با $z = e^{i\theta}$،

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$

و

$$\sin\theta = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2i} = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

انتگرال مسیری (۵) را، مانند همیشه، می‌توان به کمک قضیهٔ مانده محاسبه کرد.

مثال.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}\\ &= 4\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}; \sqrt{3}-2\right)\\ &= \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}\end{aligned}$$

۲.۱۱ کاربرد روشهای انتگرال مسیری در محاسبه و تخمین مجموعها

یک. برای محاسبهٔ مجموعهای به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$، تابعی مانند g جستجو می‌کنیم که مانده‌هایش عبارت باشند از $\{f(n) : n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots\}$.

فرض کنید که قرار دهیم $g(z) = f(z)\varphi(z)$. آن گاه تابع φ باید یک قطب ساده با ماندهٔ ۱ در هر عدد صحیح داشته باشد. چنین تابعی با ضابطهٔ

$$\varphi(z) = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

تعریف می‌شود، زیرا $\sin \pi z$ یک صفر ساده در هر عدد صحیح دارد و

$$\operatorname{Res}\left(\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z};\ \ n\right) = \frac{\pi \cos \pi n}{\pi \sin \pi n} = ۱$$

(توجه کنید که $\sin z$ هیچ صفر دیگری در صفحهٔ مختلط ندارد.)

نخست قضیهٔ مانده را در مورد انتگرال

$$\int_{C_N} f(z).\pi \cot \pi z dz \tag{۱}$$

به کار می‌بریم که در آن C_N یک مسیر بستهٔ ساده است که اعداد صحیح ۰، ± ۱ ، ± ۲، ...، $\pm N$ و قطبهای f (که تعداد آنها متناهی فرض می‌شود) را در بر دارد. به این ترتیب،

$$\int_{C_N} \pi f(z) \cot z dz = ۲\pi i \left[\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq z_k}}^{n} f(n) + \sum_k \operatorname{Res}(f(z)\pi \cot \pi z; z_k)\right] \tag{۲}$$

که در آن $\{z_k\}$ قطبهای f هستند.

بعلاوه، برای حصول اطمینان از همگرایی $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$، فرض می‌کنیم که

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = ۰ \tag{۳}$$

و با انتخاب درست C_N قادر خواهیم بود که نشان دهیم که

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} f(z)\pi \cot \pi z dz = ۰ \tag{۴}$$

آن گاه، به استناد (۲)،

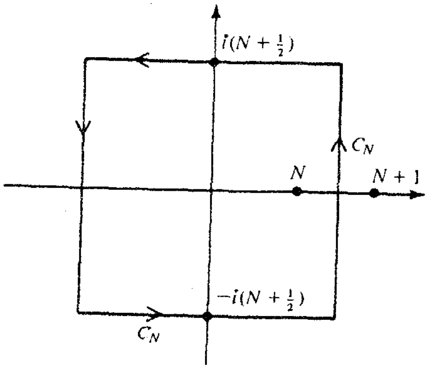
$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq z_k}} f(n) = -\sum_k \operatorname{Res}(f(z)\pi\cot\pi z; z_k) \tag{۵}$$

برای اثبات وجود مسیری مانند C_N که در (۴) صدق کند، فرض می‌کنیم که C_N مربع به رئوس $\pm(N+\frac{۱}{۲}) \pm (N+\frac{۱}{۲})i$ باشد. به این ترتیب با اجتناب از قطبهای $\cot\pi z$، می‌توانیم نشان بدهیم که نامساوی $|\cot\pi z| < ۲$ بر C_N برقرار است. مثلاً، اگر $\operatorname{Re} z = x = N+\frac{۱}{۲}$ و $\operatorname{Im} z = y$ آن‌گاه

$$\cot\pi z = i\frac{e^{۲\pi iz}+۱}{e^{۲\pi iz}-۱} = i\frac{e^{\pi i-۲\pi y}+۱}{e^{\pi i-۲\pi y}-۱}$$

و

$$|\cot\pi z| = \frac{۱-e^{-۲\pi y}}{۱+e^{۲\pi y}} < ۱$$



به طور مشابه، اگر $\operatorname{Im} z = y = N+\frac{۱}{۲}$ آن‌گاه

$$|\cot\pi z| \leq \frac{۱+e^{-\pi(۲N+۱)}}{۱-e^{-\pi(۲N+۱)}} < ۲$$

زیرا که عبارت اخیر در $N = ۰$ به ماکسیمم می‌رسد. (همین کرانها در اضلاع دیگر C_N نیز اعمال می‌شوند، زیرا که $\cot z$ تابعی فرد است.)

چون طول C_N برابر $۸N+۴$ است، به استناد قواعد معمول تخمین،

$$\int_{C_N} f(z)\pi\cot\pi z dz \ll (۸N+۴)۲\pi \max_{z\in C_N}|f(z)|$$
$$\ll A\max_{C_N}|zf(z)|$$

بنابراین، به استناد (۳)،

$$\int_{C_N} f(z)\pi \cot \pi z dz \to ۰$$

مثال. برای تعیین

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{۱}{۲} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq ۰}}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

از این رو، به استناد (۵)،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = -\frac{۱}{۲} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^۲}; ۰\right)$$

مانده را می‌توانیم با استفاده از بسط لوران $\cot z$ تعیین کنیم:

$$\cot z = \frac{۱}{z} - \frac{z}{۳} - \frac{۱}{۴۵}z^۳ + \dots$$

در این صورت،

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z^۲} = \frac{۱}{z^۳} - \frac{\pi^۲}{۳z} - \frac{\pi^۴ z}{۴۵} - \dots$$

به این ترتیب،

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^۲}; ۰\right) = -\frac{\pi^۲}{۳}$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$$

دو. برای محاسبهٔ مجموعهای به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-۱)^n f(n)$، که در آن $f(z)$ تعدادی متناهی قطب دارد، مجدداً حول مربع C_N انتگرال می‌گیریم، این بار با استفاده از تابع کمکی $\pi f(z) \csc \pi z$. ملاحظه می‌کنیم که

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}; n\right) = \frac{۱}{\cos \pi n} = (-۱)^n$$

و چون

$$\csc^{۲} \pi z = ۱ + \cot^{۲} \pi z$$

$\csc \pi z$ (مانند $\cot \pi z$) بر C_N کراندار است. به این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} \pi f(z) \csc \pi z dz = ۰$$

و، به استناد قضیهٔ مانده،

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq z_k}}^{\infty} (-۱)^n f(n) = -\sum_k \operatorname{Res}(\pi f(z) \csc \pi z; z_k)$$

که در آن z_kها قطبهای f می‌باشند.

مثال.

$$۱ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۶} + - \ldots = -\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}} = -\frac{۱}{۲} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq ۰}}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}}$$
$$= \frac{۱}{۲} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \csc \pi z}{z^{۲}}; ۰\right) = \frac{\pi^{۲}}{۱۲}$$

زیرا

$$\frac{\pi \csc \pi z}{z^{۲}} = \frac{۱}{z^{۳}} + \frac{\pi^{۲}}{۶z} + \frac{۷\pi^{۴} z}{۳۶۰} + \ldots$$

سه. مجموعهای شامل ضرایب دوجمله‌ای. رابطهٔ بین ضرایب دوجمله‌ای و انتگرالگیری مسیری یک نتیجهٔ بدیهی قضیهٔ مانده است زیرا

$$\binom{n}{k} = (۱+z)^n \text{ در } z^k \text{ ضریب}$$

و، از این رو،

$$\binom{n}{k} = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{(۱+z)^n}{z^{k+۱}} dz \qquad (۶)$$

که در آن C مسیر بستهٔ سادهٔ دلخواهی حول مبداء است. اتحاد (۶) بعضی نتایج بدیهی دارد. به عنوان مثال،

$$\binom{۲n}{n} = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{(۱+z)^{۲n}}{z^{n+۱}} dz$$

و اگر C را دایرهٔ واحد اختیار کنیم، درمی‌یابیم که

$$\binom{۲n}{n} \le ۴^n$$

همین اتحاد (۶) را برای محاسبه (یا تخمین) مجموعهای شامل ضرایب دوجمله‌ای می‌توان به کار برد.

مثال ۱. برای تعیین

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۲n}{n} \frac{۱}{۵^n} = ۱ + \frac{۲}{۵} + \frac{۶}{۲۵} + \dots$$

قرار می‌دهیم

$$\binom{۲n}{n} = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{(۱+z)^{۲n}}{z^{n+۱}} dz$$

که در آن C یک مسیر سادهٔ دلخواه حول مبداء است؛ در این صورت

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۲n}{n} \frac{۱}{۵^n} = \frac{۱}{۲\pi i} \sum_{n=۰}^{\infty} \int_C \frac{(۱+z)^{۲n}}{(۵z)^n} \frac{dz}{z} \tag{۷}$$

اگر می‌توانستیم که ترتیب جمعبندی و انتگرالگیری را عوض کنیم، نتیجه می‌گرفتیم که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۲n}{n} \frac{۱}{۵^n} = \frac{۵}{۲\pi i} \int_C \frac{dz}{۳z - ۱ - z^۲}$$

معذالک، باید مسیری مانند C (حول مبداء) نشان بدهیم که بر آن جمعبندی زیر علامت انتگرال مجاز باشد. [بدون رعایت این احتیاط، ممکن بود که C دایرهٔ دلخواهی حول مبداء باشد، و اگر شعاع R به قدر کافی بزرگ اختیار می‌شد اشتباهاً نتیجه می‌گرفتیم که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۲n}{n} \frac{۱}{۵^n} = ۰$$

یک طریق حصول اطمینان از درستی تعویض ترتیب این است که سری $\sum_{n=۰}^{\infty}[(۱+z)^۲/۵z]^n$ بر سرتاسر C به طور یکنواخت همگرا باشد. از این رو، C را دایرهٔ واحد اختیار می‌کنیم که در این صورت نامساوی

$$\left|\frac{(۱+z)^۲}{۵z}\right| \le \frac{۴}{۵}$$

بر سرتاسر C برقرار و همگرایی یکنواخت خواهد بود. لذا،

$$\begin{aligned}\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{۲n}{n}\frac{۱}{۵^n} &= \frac{۵}{۲\pi i}\int_{|z|=۱}\frac{dz}{۳z-۱-z^۲}\\ &= ۵\,\mathrm{Res}\left(\frac{۱}{۳z-۱-z^۲};\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)\\ &= \sqrt{۵}\end{aligned}$$

مثال ۲. برای محاسبهٔ

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^۲$$

ملاحظه می‌کنیم که $\binom{n}{k}$ در دو نقش ظاهر می‌شود:

الف) $\binom{n}{k}$ = ضریب z^k در $(۱+z)^n$،

ب) $\binom{n}{k}$ = ضریب z^{-k} در $(۱+۱/z)^n$؛

در این صورت

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^۲ = \text{جملهٔ ثابت } (۱+z)^n(۱+۱/z)^n$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^۲ &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_C(۱+z)^n\left(۱+\frac{۱}{z}\right)^n\frac{dz}{z}\\ &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{(۱+z)^{۲n}}{z^{n+۱}}dz\end{aligned}$$

که همان ضریب z^n در $(۱+z)^{۲n}$ و برابر است با

$$\binom{۲n}{n}$$

مثال ۳. برای تخمین

$$۱-\binom{n}{۱}\binom{۲n}{۱}+\binom{n}{۲}\binom{۲n}{۲}-+\cdots+(-۱)^n\binom{n}{n}\binom{۲n}{n}$$

مجدداً ملاحظه می‌کنیم که چون

$$\binom{n}{k} = \text{ضریب } z^k \text{ در } (۱+z)^n$$

و

$$\binom{۲n}{k}(-۱)^k = \text{ضریب } \frac{۱}{z^k} \text{ در } \left(۱-\frac{۱}{z}\right)^{۲n},$$

جملهٔ ثابت حاصل ضرب این دو یک جملهٔ مجموع مفروض است و

$$\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}\binom{۲n}{k} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{[(z-۱)^۲(z+۱)]^n}{z^{۲n+۱}}dz$$

معذالک، در این حالت هیچ روش ساده‌ای برای محاسبهٔ انتگرال وجود ندارد و، در عوض، می‌خواهیم که آن را تخمین بزنیم. اگر فرض کنیم که C دایرهٔ واحد باشد، آن گاه بر سرتاسر C

$$|(z-۱)^۲(z+۱)| \le \frac{۱۶}{۹}\sqrt{۳}$$

[تمرین ۹ را ببینید]؛ از این رو،

$$|\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^n\binom{n}{k}\binom{۲n}{k}| \le (\frac{۱۶}{۹}\sqrt{۳})^n$$

توجه کنید که این تخمین بسیار کوچکتر از آن است که از طریق تخمین مقادیر جمل مختلف حدس زده شود.

یک سری آشنای دیگر که مجموعش بسیار کوچکتر از بزرگی یکایک جمل می‌باشد عبارت است از

$$e^{-x} = ۱ - x + \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۳}{۳!} + - \dots$$

این واقعیت که $e^{-x} \to ۰$ وقتی که $x \to \infty$، اختلاف فاحشی با رشد یکایک جمل سری دارد. با بهره‌گیری از روش انتگرال مسیری، رفتار مشابهی از سری

$$B(x) = ۱ - \frac{x}{۱} + \frac{x^۲}{(۲!)^۲} - \frac{x^۳}{(۳!)^۲} + - \dots$$

می‌توان نشان داد که به تابع بسل مربوط می‌شود. چون

$$\frac{۱}{n!} = \text{ضریب } z^n \text{ در بسط } e^z،$$

و

$$\frac{(-x)^n}{n!} = \text{ضریب } z^{-n} \text{ در بسط } e^{-x/z}،$$

$$B(x) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{e^z e^{-x/z}}{z} dz$$

که در آن C مسیر سادهٔ دلخواهی حول O است.

مسیری مانند C جستجو می‌کنیم که بر آن

$$|e^{z-x/z}| = e^{\mathrm{Re}(z-x/z)}$$

کوچک باشد. اگر قرار دهیم $z = \mathrm{Re}^{i\theta}$، درمی‌یابیم که

$$\mathrm{Re}(z - \frac{x}{z}) = R\cos\theta - \frac{x}{R}\cos\theta$$

از این رو، به نظر می‌رسد که $R = \sqrt{x}$ انتخاب خوبی باشد و C را دایرهٔ $|z| = \sqrt{x}$ برمی‌گزینیم. در این صورت،

$$B(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} e^{۲i\sqrt{x}\sin\theta} d\theta$$

و چون انتگرالده به ازای همهٔ مقادیر θ به ۱ کراندار است، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x \geq ۰$

$$|B(x)| \leq ۱$$

(در واقع، یک بررسی دقیقتر نشان می‌دهد که $B(x) \to ۰$ وقتی که $x \to \infty$، امّا این بررسی ما را از هدف دور می‌کند.)

تمرینات

۱) انتگرالهای معین زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲ dx}{(۱+x^۲)^۲}$ (ب) $\int_۰^{\infty} \frac{x^۲ dx}{(x^۲+۴)^۲(x^۲+۹)}$

(ج) $\int_۰^{\infty} \frac{dx}{x^۲+x+۱}$ (د) $\int_۰^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(۱+x^۲)}$

(ه) $\int_۰^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{۱+x^۲}$ (و) $\int_۰^{\infty} \frac{dx}{x^۳+۸}$

(ز) $\int_۰^{\infty} \frac{x^{\alpha-۱}}{۱+x} dx, ۰ < \alpha < ۱$ (ح) $\int_۰^{۲\pi} \frac{dx}{(۲+\cos x)^۲}$

(ط) $\int_۰^{۲\pi} \frac{\sin^۲ x}{۵+۳\cos x} dx$ (ی) $\int_۰^{۲\pi} \frac{dx}{a+\cos x}, a \in \mathbb{R}, |a| > ۱$

جوابها

(الف) $\frac{\pi}{۲}$ (ب) $\frac{\pi}{۲۰۰}$ (ج) $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۶}$

(د) $\frac{\pi(e-۱)}{۲e}$ (ه) $\frac{\pi}{۲e}$ (و) $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۱۸}$

(ز) $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ (ح) $\frac{۴\sqrt{۳}\pi}{۹}$ (ط) $\frac{۲\pi}{۹}$

(ی) $\frac{۲\pi}{\sqrt{a^۲-۱}}$

۲) مطلوب است محاسبهٔ

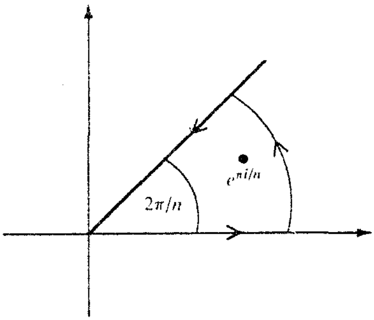
$$\int_۰^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}dx$$

[راهنمایی: از $(e^{۲iz}-۱-۲iz)/z^۲$ حول یک نیم‌دایرهٔ بزرگ انتگرال بگیرید.]

۳) مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_۰^\infty \frac{dx}{۱+x^n}$$

که در آن $n \geq ۲$ یک عدد صحیح مثبت است. [راهنمایی: مسیر زیر را در نظر بگیرید.]



۴) (الف) نشان دهید که $\int_{C_R} e^{iz^۲}dz \to ۰$ وقتی که $R \to \infty$، که در آن C_R قطاع مستدیر زیر است: $z = Re^{i\theta}$ با $۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۴}$.

(ب) محاسبه کنید: $\int_۰^\infty \cos x^۲ dx$، $\int_۰^\infty \sin x^۲ dx$.

تذکر: همگرایی انتگرالها را می‌توان، به عنوان مثال، از طریق جایگزینی $u = x^۲$ و اعمال آزمون دیریکله ثابت کرد.

۵) فرض کنید که f تابع گویایی به صورت P/Q باشد با $\deg Q - \deg P \geq ۲$. نشان دهید که مجموع مانده‌های f صفر است.

۶) محاسبه کنید:

(الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲ + ۱}$ (ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ (ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲ + ۱}$

۷) محاسبه کنید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۳n}{n} \frac{۱}{(۲۷)^n}$$

۸) نشان دهید که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۲n}{n} x^n = \frac{۱}{\sqrt{۱ - ۴x}}$$ مادام که $|x| < \frac{۱}{۴}$،

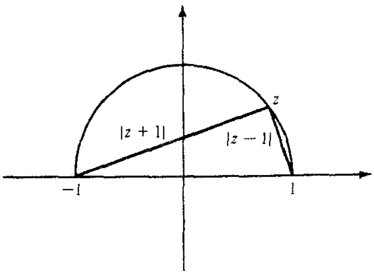
تذکر: این سری مجموع درایه‌های ستون میانی مثلث پاسکال متشکل از قوای $x + ۱$ است.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & ۱ & & & & \\ & & & ۱ & & x & & & \\ & & ۱ & & ۲x & & x^۲ & & \\ & ۱ & & ۳x & & ۳x^۲ & & x^۳ & \\ ۱ & & ۴x & & ۶x^۲ & & ۴x^۳ & & x^۴ \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

صحّت برقراری این معادله را از طریق اعمال بسط دوجمله‌ای در مورد $(۱ - ۴x)^{-۱/۲}$ نیز می‌توان

بررسی کرد.

۹) مثال ۳ از قسمت سوم بخش ۲ را با اثبات $|(z - ۱)^۲(z + ۱)| < (۱۶/۹)\sqrt{۳}$ بر سرتاسر $|z| = ۱$ کامل کنید. [راهنمایی: $a^۲b$ را با فرض $a^۲ + b^۲ = ۴$ مینیمم سازی کنید.]



۱۰) (الف) نشان دهید که

$$\left|\frac{(z-۱)^{۲}(z+۱)}{z}\right| \leq ۲\sqrt{۲} \qquad \text{به ازای } |z| = ۱/\sqrt{۲}،$$

و از این طریق تخمین بهتری برای مثال مذکور در (۹) بیابید.

*(ب) نشان دهید که به ازای هر $R > ۰$،

$$\max_{|z|=R}\left|\frac{(z-۱)^{۲}(z+۱)}{z}\right| \geq ۲\sqrt{۲}$$

(به این ترتیب، از یک جهت، تخمین (الف) بهترین تخمین ممکن است.)

فصل دوازدهم

روشهای دیگر انتگرالگیری مسیری

۱۰۱۲ انتقال مسیر انتگرالگیری

قبلاً دیده‌ایم که چگونه می‌توانیم قضیهٔ مانده را در محاسبهٔ انتگرالهای خط حقیقی به کار ببریم. معذالک، روشهای جاری به هیچ وجه محدود به انتگرالهای حقیقی نیستند. برای محاسبهٔ انتگرال مفروضی در امتدا مسیری دلخواه، همیشه می‌توانیم مسیر را به مسیری «مناسب» تغییر دهیم که مانده‌های مقتضی انتگرالده محاسبه شوند.

مثال ۱. انتگرال

$$\int_I \frac{e^z\,dz}{(z+۲)^۳}$$

را در نظر بگیرید که در آن I خط

$$z(t) = ۱ + it, \qquad -\infty < t < \infty$$

است. فرض کنید C_R نیمهٔ سمت چپ دایرهٔ به مرکز $z = ۱$ و شعاع $R > ۳$ باشد. آن گاه

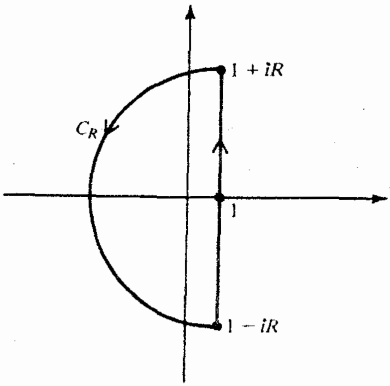
$$\int_{۱-iR}^{۱+iR} \frac{e^z\,dz}{(z+۲)^۳} + \int_{C_R} \frac{e^z\,dz}{(z+۲)^۳} = ۲\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+۲)^۳}; -۲\right)$$

چون e^z در نیم‌صفحهٔ $x \leq ۱$ به e کراندار است،

$$\int_{C_R} \frac{e^z\,dz}{(z+۲)^۳} \to ۰ \qquad \text{وقتی که } R \to \infty$$

و

$$\int_I \frac{e^z\,dz}{(z+۲)^۳} = ۲\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+۲)^۳}; -۲\right)$$



برای محاسبهٔ مانده، می‌نویسیم

$$e^z = e^{-۲}e^{z+۲} = e^{-۲}\left(۱ + (z+۲) + \frac{(z+۲)^۲}{۲} + \dots\right)$$

در این صورت ،

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+۲)^۳}; -۲\right) = \frac{۱}{۲e^۲}$$

و

$$\int_I \frac{e^z\,dz}{(z+۲)^۳} = \frac{\pi i}{e^۲}$$

مثال ۲. انتگرال

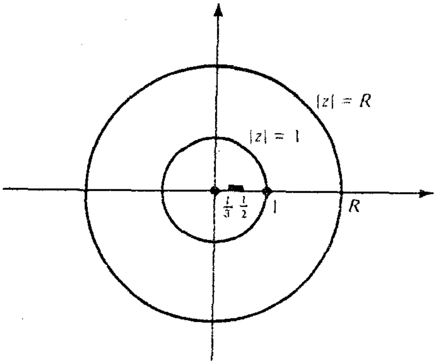
$$\int_{|z|=۱} \frac{dz}{\sqrt{۶z^۲ - ۵z + ۱}}$$

را محاسبه کنید با این فرض که ریشهٔ دوّم در نقطهٔ $z = ۱$ ریشهٔ مثبت $\sqrt{۲}$ باشد.

یادآوری می‌کنیم که (به تمرین ۱۰ فصل ۱۱ مراجعه کنید) چون $۶z^۲ - ۵z + ۱$ دو صفر در نقاط $z = \frac{۱}{۲}$ و $z = \frac{۱}{۳}$ دارد، $\sqrt{۶z^۲ - ۵z + ۱}$ در صفحهٔ منهای بازهٔ $\frac{۱}{۳} \le z \le \frac{۱}{۲}$ تحلیلی است.

برای محاسبهٔ انتگرال، به مسیر $|z| = R$ می‌رویم. آن‌گاه، چون به ازای zهای بزرگ، $\sqrt{۶z^۲ - ۵z + ۱} \sim \sqrt{۶}z$، نتیجه می‌شود که

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{\sqrt{۶z^۲ - ۵z + ۱}} \to \frac{۱}{\sqrt{۶}} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = \frac{۲\pi i}{\sqrt{۶}}$$



برای این که صحت مرحلهٔ اخیر را رسماً بررسی کنیم، فرض می‌کنیم (به طور کلی) که $f(z) = z + \varepsilon(z)$، که در آن $\varepsilon(z)/z \to ۰$ وقتی که $z \to \infty$. در این صورت،

$$\int_{|z|=R} \frac{۱}{f(z)} dz - \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = -\int_{|z|=R} \frac{\varepsilon(z)}{z(z + \varepsilon(z))} dz$$

$$\ll ۲\pi \max_{|z|=R} \left| \frac{\varepsilon(z)}{z + \varepsilon(z)} \right| \to ۰$$

وقتی که $R \to \infty$.

مثال ۳. براساس شواهد عددی، حدس زده می‌شود که

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \sqrt{\binom{n}{k}} \to ۰ \quad \text{وقتی که} \quad n \to \infty$$

برهان این حدس را به صورت زیر می‌توان اقامه‌کرد:

توجه می‌کنیم که

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z(۱ - z)(۱ - z/۲)\ldots(۱ - z/n)}$$

به ازای هر عدد صحیح k در

$$f(k) = \binom{n}{k}$$

صدق می‌کند. چون $f(z)$ در $-۱ < \operatorname{Re} z < n + ۱$ فاقد صفر است، $\sqrt{f(z)}$ (که در مبداء مثبت در نظرگرفته شود) در آن جا تحلیلی است. در این صورت، به موجب قضیهٔ مانده

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\sqrt{\binom{n}{k}} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \sqrt{f(z)}\frac{\pi}{\sin \pi z}dz \qquad (۱)$$

که در آن C مسیر دلخواهی در $-۱ < \operatorname{Re} z < n + ۱$ است که حول هر عدد صحیح ۰، ۱، ...، n یک بار می‌چرخد و حول هیچ عدد صحیح دیگری هرگز نمی‌چرخد.

فرض کنید $C = C_M$ مستطیلی باشد که از خطوط $\operatorname{Re} z = -۱/۲$، $\operatorname{Re} z = n + ۱/۲$، و $\operatorname{Im} z = \pm M$ تشکیل می‌شود. آن گاه

$$\int_{C_M} \sqrt{f(z)}\frac{\pi}{\sin \pi z}dz = \int_{C_M} \frac{\sqrt{\pi}dz}{\sqrt{z(۱ - z)(۱ - z/۲)\ldots(۱ - z/n)\sin \pi z}}$$

و وقتی $M \to \infty$، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\sqrt{\binom{n}{k}} = \frac{۱}{۲\pi i}\left[\int_{-۱/۲+i\infty}^{-۱/۲-i\infty} + \int_{n+۱/۲-i\infty}^{n+۱/۲+i\infty} \sqrt{f(z)}\frac{\pi}{\sin \pi z}dz\right]$$

چون انتگرالده تحت جانشینی $z \to n - z$ (جدای از علامت $\pm$) بدون تغییر باقی می‌ماند، لازم است که فقط اولین انتگرال را تخمین بزنیم. حال، وقتی که $\operatorname{Re} z = -\frac{۱}{۲}$،

$$\begin{aligned}|z(۱ - z)(۱ - z/۲)\ldots(۱ - z/n)| &\geq \frac{۱}{۲}(۱ + \frac{۱}{۲})(۱ + \frac{۱}{۴})\ldots(۱ + \frac{۱}{۲n}) \\ &\geq \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۱}\sqrt{۱ + \frac{۱}{۲}}\ldots\sqrt{۱ + \frac{۱}{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n + ۱}}{۲}\end{aligned}$$

بنابراین، انتگرال اوّل به

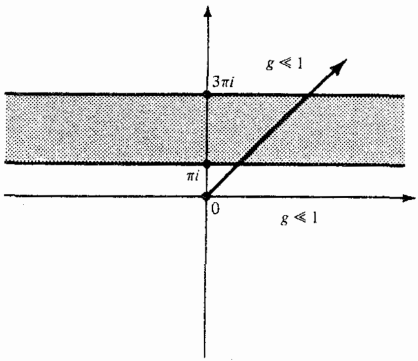
$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sqrt[۴]{n+۱}}\int_{\operatorname{Re} z=-۱/۲}\left|\frac{dz}{\sqrt{\sin \pi z}}\right| \leq \frac{A}{\sqrt[۴]{n}}$$

کراندار است. از این رو،

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\sqrt{\binom{n}{k}} \to ۰ \qquad \text{وقتی که} \qquad n \to \infty.$$

۲.۱۲ تابع تامی که در تمام جهات کراندار است.

یادآوری می‌کنیم که، براساس قضیهٔ لیوویل، هر تابع تام که ثابت نباشد بی‌کران است. معذالک، می‌توان پرسید که آیا تابع تام ناثابتی وجود دارد که در امتداد هر شعاع خروجی از مبداء کراندار باشد؟ جواب این پرسش آری است! معذالک، به نظر می‌رسد که هیچ راهی برای توصیف چنین تابعی به صورت بسته وجود ندارد. در عوض، این تابع به صورت انتگرال تعریف می‌شود و سپس تخمین قاطعی از طریق تغییر مسیر انتگرالگیری به دست خواهد آمد.



روش کار به این صورت است: تابع تام ناثابتی مانند f می‌یابیم که در خارج نوار $|\operatorname{Im} z| \leq \pi$ به ۱ کراندار باشد. سپس، اگر تابع

$$g(z) = f(z - ۲\pi i)$$

را در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود که $g \ll 1$ در خارج نوار $\pi \leq \operatorname{Im} z \leq 3\pi$؛ از این رو، g بر هر شعاعی کراندار است. به عنوان آخرین تدبیر، تابع

$$h(z) = \frac{g(z) - g(0)}{z}$$

را می‌توان در نظر گرفت که تابع تامی است که در امتداد هر مسیری به صفر میل می‌کند!

بنای f: تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} dt$$

این انتگرال مطلقاً همگرا است، زیرا به ازای هر $z = x + iy$

$$\int_0^\infty |\frac{e^{zt}}{t^t}| dt = \int_0^\infty \frac{e^{xt}}{t^t} dt < \infty$$

بعلاوه، f پیوسته است و به ازای هر مستطیل R

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R} \left(\int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} dt \right) dz = \int_0^\infty \left(\int_{\partial R} \frac{e^{zt}}{t^t} dz \right) dt = \int_0^\infty 0\, dt = 0$$

همگرایی مطلق انتگرال مجوّزی برای تعویض ترتیب انتگرالگیری است. از این رو، به استناد قضیهٔ مورِرا، f تام است.

از تعریف f متوجه می‌شویم که f در امتداد محور حقیقی، حقیقی ـ مقدار است. بنابراین، به استناد اصل انعکاس شوارتز، $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ و فقط لازم است که نشان بدهیم که f به ازای $z = x + iy$ با $y > \pi$ کراندار است. در واقع، نشان می‌دهیم که به ازای $zx + iy$ با $y = \pi/2 + c$، $|f(z)| \leq 1/c$.

برای نتیجه‌گیری کران بالای مذکور برای

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} dt$$

توجه می‌کنیم که انتگرالده در نیم‌صفحهٔ راست یک تابع تحلیلی از t است و از این رو می‌توانیم انتگرال

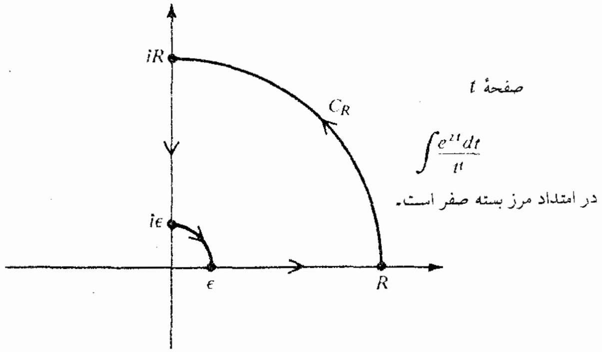
$$\int_\varepsilon^R \frac{e^{zt}}{t^t} dt$$

در امتداد محور مثبت را تعویض کنیم با حاصل‌جمع انتگرال در امتداد یک چهارم دایره از ε تا $i\varepsilon$ و انتگرال در امتداد محور موهومی از $i\varepsilon$ تا iR و انتگرال در امتداد یک چهارم دایرهٔ C_R به شعاع R با علامت

منفی. (به شکل زیر نگاه کنید.) چون انتگرالده در $t = ۰$ به ۱ میل می‌کند، انتگرال در امتداد یک چهارم دایرهٔ به شعاع ε قابل اغماض است. وقتی که $\varepsilon \to ۰$ و $R \to \infty$،

$$f(z) = \int_{۰}^{\infty} \frac{e^{zt}}{t^t} dt = -\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{zt}}{t^t} dt + \int_I \frac{e^{zt}}{t^t} dt$$

که در آن I محور موهومی مثبت است. (به نمودار زیر توجه کنید.)



سرانجام، نشان می‌دهیم که انتگرال آخر به $۱/c$ کراندار است و حد سمت راست برابر ۰ است. با استفاده از پارامتر مناسب $t = iv$ با $۰ \leq v < \infty$،

$$\int_I \frac{e^{zt}}{t^t} dt = i\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{ivz}}{(iv)^{iv}} dv \ll \int_{۰}^{\infty} \left|\frac{e^{ivz}}{(iv)^{iv}}\right| dv$$

امّا به ازای $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{۲} + c$،

$$\left|\frac{e^{ivz}}{(iv)^{iv}}\right| = \frac{e^{-v(\pi/۲+c)}}{|e^{iv\log iv}|} = \frac{e^{-v(\pi/۲+c)}}{e^{-v\pi/۲}} = e^{-cv}$$

از این رو،

$$\int_I \frac{e^{zt}}{t^t} dt \ll \int_{۰}^{\infty} e^{-cv} dv = \frac{۱}{c}$$

برای تخمین

$$\int_{C_R} \frac{e^{zt}}{t^t} dt$$

فرض کنید $t = \mathrm{Re}^{i\theta}$ که در آن $۰ \leq \theta \leq \pi/۲$. آن گاه $\log t = \log R + i\theta$ و

$$\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right| = \left|\frac{\exp[(x+iy)(R\cos\theta + iR\sin\theta)]}{\exp[(\log R + i\theta)(R\cos\theta + iR\sin\theta)]}\right|$$

$$= \exp -[(\log R - x)R\cos\theta + (y-\theta)R\sin\theta]$$

اگر R را به قدر کافی بزرگ بگیریم که $\log R - x > y > y - \theta$،

$$\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right| \leq \exp -[(y-\theta)R] \leq e^{-cR}$$

و

$$\int_{C_R} \frac{e^{zt}}{t^t} dt \ll \frac{\pi}{۲} R.e^{-cR}$$

که به ۰ میل می‌کند وقتی که $R \to \infty$.

توجه می‌کنیم که به ازای هر تابع تام که ثابت نباشد، همیشه خط شکسته‌ای وجود دارد که در امتدادش این تابع نه تنها بی‌کران است بلکه در واقع به بی‌نهایت میل می‌کند. این حکم را در فصل ۱ ثابت می‌کنیم. (تمرین ۶ را نیز ببینید.)

تمرینات

۱) مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_I \frac{e^z}{(z+۱)^۴} dz$$

که در آن I محور موهومی است (از $-i\infty$ تا $+i\infty$).

۲) مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{|z|=۲} \frac{dz}{\sqrt{۴z^۲ - ۸z + ۳}}$$

۳) انتگرال $\int_\gamma e^z \log z dz$ را محاسبه کنید که در آن $\log z$ شاخه‌ای است که به ازای آن $\log ۱ = ۰$ و γ سهمی زیر است:

$$\gamma(t) = ۱ - t^۲ + it, \qquad -\infty < t < \infty$$

۴) نشان دهید که

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \binom{n}{k}^{۱/۳} \to ۰$$

وقتی که $n \to \infty$.

۵) (الف) با انتگرالگیری در امتداد خطوط $\operatorname{Re} z = -۳/۴$ و $\operatorname{Re} z = n + ۳/۴$، تخمین دقیقتری از آنچه که در درس برای

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^n \sqrt{\binom{n}{k}}$$

مطرح شده بود بیابید.

(ب)*

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\sqrt{\binom{n}{k}}$$

را با انتگرالگیری در امتداد $\operatorname{Re} z = -۱ + \delta$ و $\operatorname{Re} z = n + ۱ - \delta$ تخمین بزنید. یک بهین δ بیابید.

توجه: از شواهد عددی چنین برمی‌آید که

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^n\sqrt{\binom{n}{k}} \sim \frac{۱}{\sqrt{n}} \qquad \text{به ازای } n \text{ زوج،}$$

۶) فرض کنید که g تابع تام (کراندار بر هر شعاعی) باشد که در بخش اخیر توصیف شد. نشان دهید که $g(x + ۲\pi i) \to \infty$ وقتی که $x \to \infty$.

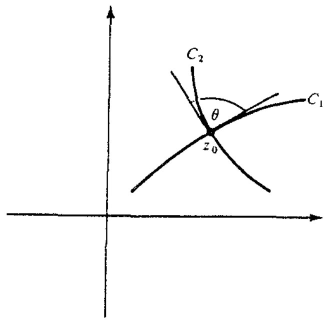
فصل سیزدهم

آشنایی با نگاشتهای همدیس

در این فصل، خواص توابع تحلیلی را به عنوان نگاشت مورد بررسی دقیقتر قرار می‌دهیم. در سرتاسر این فصل فرض بر این است که همهٔ منحنیهای $z(t)$ با این ویژگی مطرح می‌شوندکه همواره $\dot{z}(t) \neq 0$.

۱.۱۳ همدیس ـ هم ارزی

۱.۱۳ تعریف. فرض کنید که دو منحنی هموار C_1 و C_2 در z_0 متقاطع باشند. در این صورت، زاویهٔ از C_1 تا C_2 در z_0، $< C_1, C_2$، زاویه‌ای تعریف می‌شود که از خط مماس بر C_1 در z_0 تا خط مماس بر C_2 در z_0 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری شود.



۲.۱۳ تعریف. فرض کنید f در یک همسایگی از $z_\circ$ تعریف شده باشد. f را در $z_\circ$ همدیس می‌نامند در صورتی که f در این نقطه زوایا را حفظ کند؛ یعنی، در صورتی که به ازای هر زوج منحنیهای هموار $C_۱$ و $C_۲$ متقاطع در $z_\circ$، $<\Gamma_۱, \Gamma_۲> = <C_۱, C_۲>$، که در آن $\Gamma_۱ = f(C_۱)$ و $\Gamma_۲ = f(C_۲)$. به طور مشابه، f را در ناحیهٔ D همدیس می‌نامند در صورتی که f در هر نقطهٔ $z \in D$ همدیس باشد.

توجه کنید که $f(z) = z^۲$ در $z = \circ$ همدیس نیست. به عنوان مثال، محورهای حقیقی مثبت و موهومی مثبت، به ترتیب، بر محورهای حقیقی مثبت و حقیقی منفی نگاشته می‌شوند. معذالک، چنان که ذیلاً ملاحظه خواهیم کرد، این تابع در سایر نقاط صفحهٔ مختلط همدیس است.

۳.۱۳ تعریف.

الف) f را در $z_\circ$ یک‌به‌یک موضعی می‌نامند در صورتی که عدد مثبتی مانند δ بتوان یافت که به ازای هر دو نقطهٔ متمایز $z_۱, z_۲ \in D(z_\circ; \delta)$ داشته باشیم $f(z_۱) \neq f(z_۲)$.

ب) f در سرتاسر ناحیه‌ی D یک‌به‌یک موضعی است در صورتی که f در هر $z \in D$ یک‌به‌یک موضعی باشد.

ج) f را در ناحیهٔ D یک‌به‌یک یا تک‌ارز می‌نامند در صورتی که به ازای هر دو نقطهٔ متمایز $z_۱, z_۲ \in D$، $f(z_۱) \neq f(z_۲)$.

مجدداً، توجه کنید که $f(z) = z^۲$ در $z = \circ$ یک‌به‌یک موضعی نیست؛ زیرا همواره $f(z) = f(-z)$.

۴.۱۳ قضیه. فرض کنید که f در $z_\circ$ تحلیلی باشد و $f'(z_\circ) \neq \circ$. آن گاه، f همدیس و در $z_\circ$ یک‌به‌یک موضعی است.

برهان. (همدیسی) فرض کنید که $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ یک منحنی هموار باشد با $z(t_\circ) = z_\circ$. آن گاه خط مماس بر C در $z_\circ$ در جهت $\dot{z}(t_\circ) = x'(t_\circ) + iy(t_\circ)$ است به طوری که زاویهٔ میل مماس با محور حقیقی مثبت عبارت است از $\arg \dot{z}(t_\circ)$. اگر قرار دهیم $\Gamma = f(C)$، آن گاه Γ با معادلهٔ $\omega(t) = f(z(t))$ است و زاویهٔ میل خط مماس بر آن در $f(z_\circ)$ برابر است با

$$\arg \dot{\omega}(t_\circ) = \arg[f'(z_\circ)\dot{z}(t_\circ)] = \arg f'(z_\circ) + \arg \dot{z}(t_\circ)$$

از این رو، تابع f همهٔ منحنیهای مار بر $z_\circ$ را به طریقی می‌نگارد که زوایای میل آنها به مقدار ثابت $\arg f'(z_\circ)$ افزایش یابد. به این ترتیب، اگر $C_۱$ و $C_۲$ از $z_\circ$ بگذرند و $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$، به ترتیب، تصاویر آنها تحت f باشد، نتیجه می‌شود که $< C_۱, C_۲ >=< \Gamma_۱, \Gamma_۲$.

برای این که نشان بدهیم که f در یک همسایگی $z_\circ$ یک‌به‌یک است، فرض می‌کنیم $f(z_\circ) = \alpha$ و $\delta' > \circ$ را به قدری کوچک اختیار می‌کنیم که $f(z) - \alpha$ هیچ صفر دیگری در $D(z_\circ; \delta')$ نداشته باشد. این δ' را همیشه می‌توان یافت، زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم $f'(z_\circ) = \circ$ (نتیجهٔ ۶.۱۰).

اگر فرض کنیم که $C = C(z_\circ; \delta')$ و $\Gamma = f(C)$، از اصل شناسه (۹.۱۰) نتیجه می‌شود که به ازای هر β از یک قرص به قدر کافی کوچک $D(\alpha; \varepsilon)$،

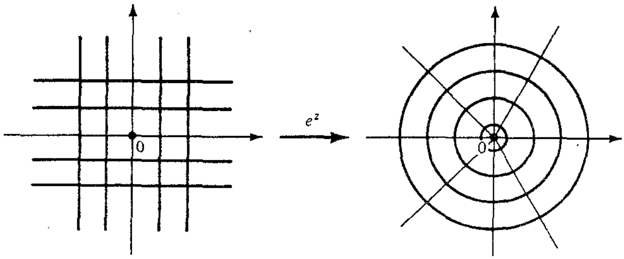
$$۱ = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{d\omega}{\omega - \alpha} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{d\omega}{\omega - \beta}$$

زیرا که عدد چرخش ثابت موضعی است (پیامد ۳.۱۰ را ملاحظه کنید). آن گاه، اگر $\delta \leq \delta'$ را طوری اختیار کنیم که $D(z_\circ; \delta) \subseteq f^{-۱}(D(\alpha; \varepsilon))$، نتیجه می‌شود که به ازای هر $z_۱, z_۲ \in D(z_\circ; \delta)$

$$\begin{aligned} ۱ &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{\omega - f(z_۱)} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{d\omega}{\omega - f(z_۲)} \\ &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_۱)} dz = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_۲)} dz \end{aligned}$$

یعنی، هر یک از مقادیر $f(z_۱)$ و $f(z_۲)$ یک بار در داخل C اختیار می‌شوند که در این صورت $f(z_۱) \neq f(z_۲)$ هرگاه $z_۱ \neq z_۲$.□

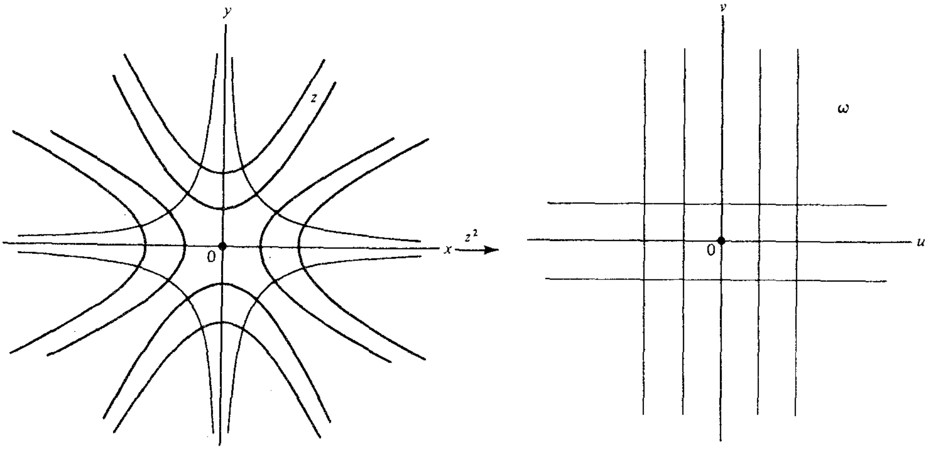
مثال ۱. $f(z) = e^z$ در همهٔ نقاط مشتق ناصفر دارد، از این رو همه جا همدیس و یک‌به‌یک موضعی است. (توجه کنید که کلاً یک‌به‌یک نیست زیرا $f(z+2\pi i) = f(z)$.) چون f همدیس است، تصاویر خطوط متعامد x ثابت و y ثابت تحت نگاشت f نیز متعامدند. به خواننده واگذار می‌کنیم تا ثابت کند که f خطوط قائم x ثابت را بر دوایری به مرکز مبداء می‌نگارد و خطوط افقی y ثابت را بر شعاعهای منشعب از مبداء می‌نگارد.



مثال ۲. فرض کنید $f(z) = z^2$. چون $f'(z) = 2z \neq 0$ جز در $z = 0$، f در سرتاسر $z \neq 0$ همدیس است. به این ترتیب، اگر قرار دهیم $f = u + iv$ نتیجه می‌شود که پیشنگارهٔ منحنیهای $u = c_1$، $v = c_2$ به ازای $c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$ الزاماً متعامدند. در واقع، چون $u(z) = x^2 - y^2$ و $v(z) = 2xy$، این پیشنگاره‌ها دستگاههای متعامدی از هذلولیهای به معادلات

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad 2xy = c_2$$

می‌باشند. (شکل صفحهٔ بعد را ببینید.)



برای بررسی خواص تابع f به عنوان یک نگاشت در نقطه‌ای چون z که در آن $f'(z) = 0$ ، نخست حالت خاص زیر را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۵.۱۳ تعریف. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد. f را نگاشتی k به یک از D_1 بر D_2 می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $\alpha \in D_2$ معادلهٔ $f(z) = \alpha$ تعداد k ریشه (با احتساب مرتبهٔ تکرار) در D_1 داشته باشد.

۶.۱۳ لم. فرض کنید $f(z) = z^k$، که در آن k یک عدد صحیح مثبت است. آن گاه، f زوایای به مبداء O را با ضریب k بزرگ می‌کند و قرص $D(0;\delta)$ با $\delta > 0$ را به صورت k به یک بر قرص $D(0;\delta^k)$ می‌نگارد.

برهان. چون $f(re^{i\theta}) = r^k e^{ik\theta}$، f شعاع منتشره از O با شناسهٔ θ را بر شعاع منتشره از O با شناسهٔ $k\theta$ می‌نگارد. از این رو، زاویهٔ به مبداء O بین هر دو شعاع با ضریب k بزرگ می‌شود. برای این که ببینیم

که $f(z) = \alpha$ با $\alpha \in D(\circ;\delta^k)$ دارای k ریشه است، یادآوری می‌کنیم که اگر $\alpha \neq \circ$، k ریشهٔ متمایز وجود دارد که همگی بر دایرهٔ $|z| = |\alpha|^{1/k}$ واقعند. اگر $\alpha = \circ$، معادلهٔ $z^k = \alpha$ یک ریشه در مبداء با مرتبهٔ تکرار k دارد. □

اکنون قادریم که قضیهٔ ۴.۱۳ را «کامل» کنیم.

۷.۱۳ قضیه. فرض کنید که f در $z_\circ$ تحلیلی باشد و $f'(z_\circ) = \circ$. آن گاه، سوای حالتی که f ثابت است، در یک مجموعهٔ باز به قدر کافی کوچک شامل $z_\circ$، f نگاشتی k به یک است و زوایای به مبداء $z_\circ$ را با ضریب k بزرگ می‌کند، که در آن k کوچکترین عدد صحیح مثبت است که $f^{(k)}(z_\circ) \neq \circ$.

برهان. بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که $f(z_\circ) = \circ$. [در غیر این صورت، نخست $f(z) - f(z_\circ)$ را بررسی می‌کردیم.] در این صورت، به استناد فرض، بسط f به یک سری توانی حول $z_\circ$ به صورت

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k(z - z_\circ)^k + a_{k+1}(z - z_\circ)^{k+1} + a_{k+2}(z - z_\circ)^{k+2} + \dots \\ &= (z - z_\circ)^k[a_k + a_{k+1}(z - z_\circ) + a_{k+2}(z - z_\circ)^2 + \dots] \end{aligned}$$

است با $a_k = f^{(k)}(z_\circ)/k! \neq \circ$.

اگر سری توانی داخل کروشه را به $g(z)$ نشان دهیم، ملاحظه می‌کنیم که $g(z_\circ) \neq \circ$ و g یک ریشهٔ kـم تحلیلی در قرصی مانند $D(z_\circ;\delta)$ دارد (به توضیحات بعد از قضیهٔ ۸.۸ توجه کنید). به این ترتیب، در این قرص،

$$f(z) = [h(z)]^k$$

که در آن h تابعی تحلیلی است با تعریف

$$h(z) = (z - z_\circ)g^{1/k}(z)$$

و

$$h(z_\circ) = \circ, \qquad h'(z_\circ) = g^{1/k}(z_\circ) \neq \circ$$

از این رو، در یک همسایگی به قدر کافی کوچک D از $z_\circ$، f ترکیبی از نگاشت z^k و نگاشت یک به‌یک و همدیس h است. چون z^k زوایای به مبداء O را با ضریب k بزرگ می‌کند، نتیجه می‌شود که f زوایای

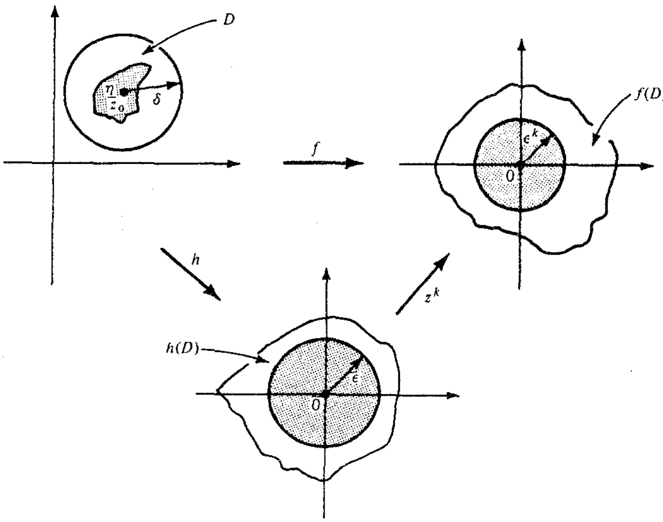
به مبداء .z را k برابر می‌کند. همچنین، چون z^k بر قرصهای حول O نگاشتی k به‌یک است، نتیجه می‌شود که اگر

$$D(\circ;\varepsilon)\subset h(D)$$

و

$$\eta=h^{-\text{۱}}(D(\circ;\varepsilon))$$

آن گاه f بر η نگاشتی k به یک است. □



از ترکیب احکام قبلی، خواص زیر از توابع تحلیلی ۱-۱ نتیجه می‌شود.

۸.۱۳ قضیه. فرض کنید که f در ناحیهٔ D یک تابع تحلیلی ۱-۱ باشد. آن‌گاه

الف) $f^{-\text{۱}}$ موجود و در $f(D)$ تحلیلی است.

ب) f و $f^{-\text{۱}}$، به ترتیب، در D و $f(D)$ همدیس می‌باشند.

برهان. چون f یک‌به‌یک است، $f' \neq 0$. از این رو، f^{-1} نیز تحلیلی است (قضیهٔ ۵.۳). بعلاوه، $(f^{-1})' = 1/f'$ که نشان می‌دهد که f^{-1} نیز مشتقی ناصفر دارد. بنابراین، f و f^{-1} هر دو همدیس می‌باشند. □

قضیهٔ بالا تعاریف زیر را سبب می‌شود.

۹.۱۳ تعاریف.

الف) هر نگاشت تحلیلی ۱-۱ را یک نگاشت همدیس می‌نامند.

ب) دو ناحیهٔ D_1 و D_2 را همدیس ـ هم‌ارز می‌نامند در صورتی که نگاشت همدیسی از D_1 برروی D_2 موجود باشد.

به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم که تحقیق شود که «همدیس ـ هم‌ارزی» در اصول موضوع معمول روابط هم‌ارزی صدق می‌کند. بالاخص، توجه می‌کنیم که خاصیت تعدی از این واقعیت ناشی می‌شود که ترکیب هر دو نگاشت همدیس باز هم نگاشتی همدیس است، و از این واقعیت در بقیهٔ این فصل استفاده خواهیم کرد.

قضیهٔ نگاشت ریمان، که در فصل دیگر ثابت خواهد شد، بیان می‌کند که هر دو حوزهٔ همبند ساده (علاوه بر تمامی صفحه) همدیس ـ هم‌ارز می‌باشند. در بخش بعد، چند تبدیل خاص را مورد بررسی قرار می‌دهیم که ما را قادر می‌سازند که نگاشتهای همدیسی بین بسیاری از نواحی همبند ساده به طور صریح تعریف کنیم.

۲.۱۳ نگاشتهای خاص

یک ـ تبدیلات مقدماتی

الف) $\omega = az + b$

نگاشت خطی $\omega = az + b$ یک نگاشت تحلیلی ۱-۱ از تمامی صفحه است بر روی خودش. اثر این نگاشت را بر حوزهٔ مفروضی می‌توان با نظر به آن به عنوان ترکیب $\omega = \omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3$ از نگاشتهای زیر مورد مطالعه قرار داد:

$$\omega_1 = kz, \qquad k = |a|$$

$$\omega_2 = e^{i\theta} z, \qquad \theta = \arg a$$

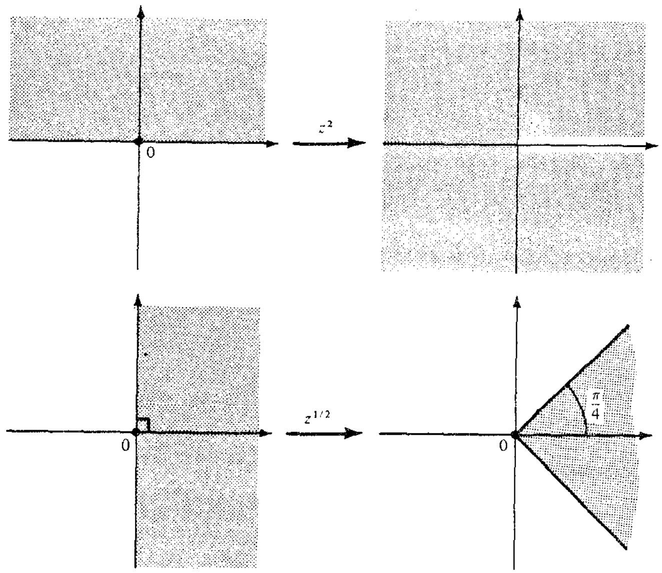
$$\omega_3 = z + b.$$

نگاشتی به صورت $\omega = kz$ با $k > 0$ را «بزرگنمایی» می‌نامند. این نگاشت هر نقطه از یک شعاع منتشره از مبداء را به نقطهٔ دیگری از همان شعاع می‌نگارد در حالی که اندازه‌اش را در k ضرب می‌کند. نگاشت $\omega = e^{i\theta} z$ دورانی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ زاویهٔ θ است. سرانجام، $\omega = z + b$ را یک انتقال می‌نامند زیرا این نگاشت هر نقطه را به اندازهٔ عدد مختلط b، یا بردار b، منتقل می‌کند.

ب) $\omega = z^\alpha$، که در آن α حقیقی است.

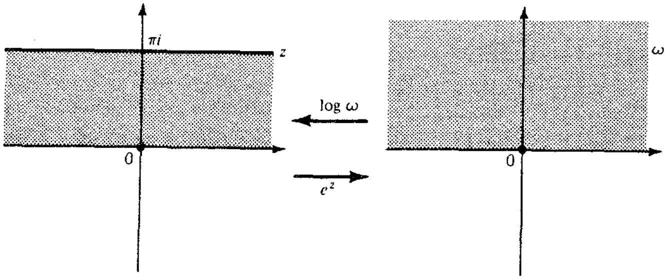
چنان که در فصل ۸ ملاحظه کردیم، تابع $\omega = z^\alpha$، که با $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ تعریف می‌شود، در هر حوزهٔ همبند ساده که شامل مبداء نباشد تحلیلی است. اگر شاخه‌ای از $\log z$ را اختیار کنیم که بر محور مثبت با مقادیر مثبت است، آن گاه z^α نیز محور مثبت را بر خودش می‌نگارد. نقطهٔ $z = re^{i\theta}$ بر $r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ نگاشته می‌شود و، از این رو، $\omega = z^\alpha$ گوهٔ $S = \{z : \theta_1 < \operatorname{Arg} z < \theta_2\}$ را بر گوهٔ $T = \{\omega : \alpha\theta_1 < \operatorname{Arg} \omega < \alpha\theta_2\}$ می‌نگارد. بعلاوه، اگر $\alpha\theta_2 - \alpha\theta_1 \leq 2\pi$، یعنی اگر $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi/\alpha$، این نگاشت یک نگاشت همدیس از S بر روی T است.

بعضی نمونه‌ها در زیر رسم شده‌اند:



ج) $\omega = e^z$.

چون $e^z = e^x e^{iy}$، تابع $\omega = e^z$ نوار $y_۱ < y < y_۲$ را برگوۀ $y_۱ < \operatorname{Arg}\omega < y_۲$ می‌نگارد. اگر $y_۲ - y_۱ \leq ۲\pi$، این نگاشت ۱-۱ است. به عنوان مثال، نوار $۰ < y < \pi$ به طور همدیس بر نیمۀ بالایی صفحه نگاشته می‌شود.



دو ـ تبدیل دو خطی $\omega = (az+b)/(cz+b)$. نگاشتی را که با

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq ۰ \tag{۱}$$

تعریف می‌شود تبدیل دو خطی می‌نامند. با شرط $ad - bc \neq ۰$ اطمینان حاصل می‌شود که f نه ثابت است نه بی‌معنی. چون

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^۲} \neq ۰$$

f یک‌به‌یک موضعی و همدیس است. در واقع، هر تبدیل دو خطی کلاً یک‌به‌یک است زیرا

$$\frac{az_۱+b}{cz_۱+d} = \frac{az_۲+b}{cz_۲+d}$$

ایجاب می‌کند که

$$(ad-bc)(z_۱ - z_۲) = ۰$$

که مستلزم

$$z_۱ = z_۲$$

است.

تبدیل دو خطی (۱) تمام صفحهٔ منهای نقطهٔ $-d/c$ را بر تمام صفحه منهای نقطهٔ a/c می‌نگارد، زیرا معادلهٔ

$$\frac{az+b}{cz+d} = \omega$$

به ازای هر $\omega \neq a/c$ دارای جواب صریح

$$z = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}$$

است. در واقع، اگر مقادیر حدی $f(\infty) = (a/c)$ و $f(-d/c) = \infty$ را در نظر بگیریم، می‌توان گفت که f نگاشتی یک‌به‌یک از کرهٔ ریمان بر روی خود است. (به بخش ۴ فصل ۱ مراجعه کنید.)

مجموعهٔ تبدیلات دو خطی با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد. به آسانی دیده می‌شود که معکوس هر تبدیل دو خطی نیز یک تبدیل دو خطی است، زیرا

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d}$$

دارای جواب

$$z = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}$$

است که در آن $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$. بررسی سایر خواص این گروه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

یکی از خواص بسیار مفید تبدیلات دو خطی این است که این تبدیلات دوایر و خطوط را بر دوایر و خطوط دیگر می‌نگارند. این خاصیت را نخست در حالت خاص $f(z) = 1/z$ ثابت می‌کنیم.

۱۰.۱۳ لم. اگر S دایره یا خط باشد و $f(z) = 1/z$، آن گاه $f(S)$ نیز دایره یا خط است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که $S = C(\alpha; r)$ و قرار می‌دهیم

$$f(S) = \{\omega = \frac{1}{z} : z \in S\}$$

اگر معادلهٔ S را به صورت

$$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = r^2$$

بنویسیم، خواهیم داشت:

$$z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2$$

یا، بر حسب ω،

$$\frac{۱}{\omega\bar{\omega}} - \frac{\alpha}{\bar{\omega}} - \frac{\bar{\alpha}}{\omega} = r^{۲} - |\alpha|^{۲} \tag{۱}$$

آن گاه، توجه می‌کنیم که اگر $r = |\alpha|$، یعنی، اگر S از مبداء بگذرد، (۱) معادل

$$۱ - \alpha\omega - \bar{\alpha}\bar{\omega} = ۰$$

یا

$$\operatorname{Re} \alpha\omega = \frac{۱}{۲}$$

است. در این حالت، اگر $\alpha = x_۰ + iy_۰$ و $\omega = u + iv$، معادلهٔ برحسب ω به صورت

$$ux_۰ - vy_۰ = \frac{۱}{۲}$$

درمی‌آید؛ یعنی، $f(S)$ یک خط در صفحهٔ ω است.

از طرف دیگر، اگر $r \neq |\alpha|$ آن گاه (۱) معادل

$$\omega\bar{\omega} - \left(\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha^{۲}| - r^{۲}}\right)\bar{\omega} - \left(\frac{\alpha}{|\alpha^{۲}| - r^{۲}}\right)\omega = -\frac{۱}{|\alpha|^{۲} - r^{۲}}$$

می‌شود که اگر قرار دهیم

$$\beta = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^{۲} - r^{۲}}$$

خواهیم داشت:

$$\omega\bar{\omega} - \beta\bar{\omega} - \bar{\beta}\omega + |\beta|^{۲} = \frac{r^{۲}}{(|\alpha|^{۲} - r^{۲})}$$

به این ترتیب،

$$|\omega - \beta|^{۲} = \left(\frac{r}{|\alpha|^{۲} - r^{۲}}\right)^{۲}$$

که نشان می‌دهد که $f(S)$ یک دایره به مرکز β و شعاع $|r/(|\alpha|^{۲} - r^{۲})|$ است.

سرانجام، اگر S یک خط مستقیم باشد، آن گاه سه عدد حقیقی a، b، و c موجودند به طوری که هرگاه $z = x + iy \in S$،

$$ax + by + c = ۰ \tag{۲}$$

اگر قرار دهیم $\alpha = a - bi$، (۲) معادل می‌شود با

$$\operatorname{Re} \alpha z = c$$

یا

$$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = ۲c$$

آن گاه، مانند بالا، نتیجه می‌شود که $f(S)$ دایره یا خط است. □

۱۱.۱۳ قضیه.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq ۰$$

دایره و خط را بر دایره یا خط می‌نگارد.

برهان. اگر $c = ۰$، f نگاشتی خطی و حکم قضیه بدیهی است. در غیر این صورت، می‌توان نوشت

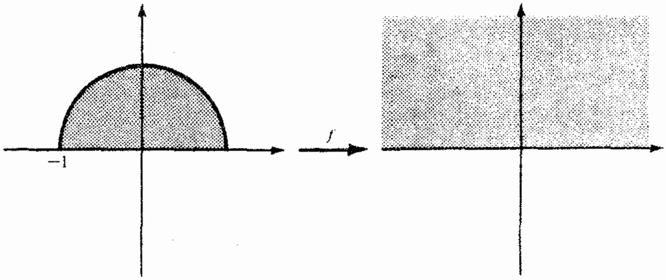
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{۱}{c}\left[\frac{acz + ad - ad + bc}{cz+d}\right] = \frac{۱}{c}\left[a - \left(\frac{ad-bc}{cz+d}\right)\right]$$

به این ترتیب، f ترکیب $f = f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱$ است که در آن

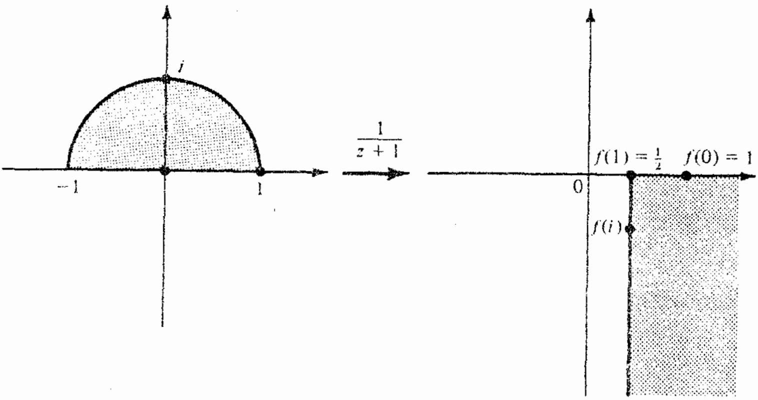
$$\begin{aligned} f_۱(z) &= cz + d \\ f_۲(z) &= \frac{۱}{z} \\ f_۳(z) &= \frac{a}{c} - \left(\frac{ad-bc}{c}\right) z \end{aligned}$$

$f_۱$ و $f_۳$ خطی هستند؛ از این رو، دایره و خط را بر دایره یا خط می‌نگارند. به استناد لم ۱۰.۱۳، $f_۲$ هم این خاصیت را دارد، و نتیجه می‌شود که f دارای خاصیت مطلوب است.

مثال ۱. یک نگاشت همدیس f بیابید که نیم قرص $S = \{z : |z| < ۱, \operatorname{Im} z > ۰\}$ را بر نیم‌صفحهٔ بالایی بنگارد.



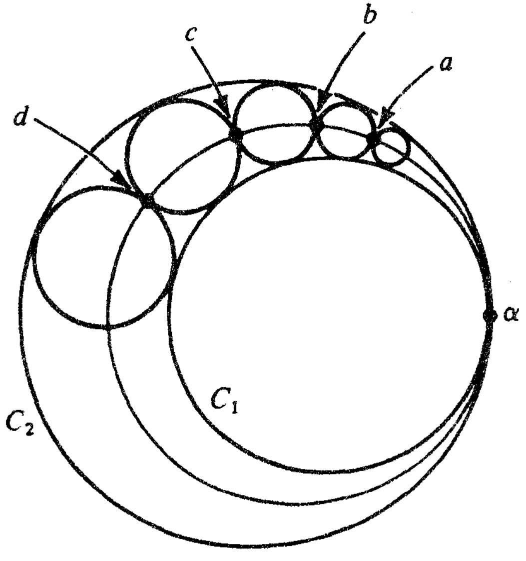
توجه کنید که چون $g(z) = ۱/(z + ۱)$ یک قطب در ۱− دارد، پاره‌خط $[−۱, ۱]$ و نیم‌دایرهٔ بالایی را بر شعاعهای نامتناهی می‌نگارد. بعلاوه، دو شعاع باید یکدیگر را در $g(۱) = \frac{۱}{۲}$ قطع کنند، و چون g همدیس است، این دو شعاع یکدیگر را متعامداً قطع می‌کنند. آن گاه، از طریق بررسی چندنقطه، می‌توان دید که g پاره‌خطها را بر خطوطی می‌نگارد که در شکل زیر نشان داده شده‌اند و نیم‌قرص را بر چارکی که به شعاعهای متعامد کراندارند می‌نگارد.



به این ترتیب، نگاشت مطلوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

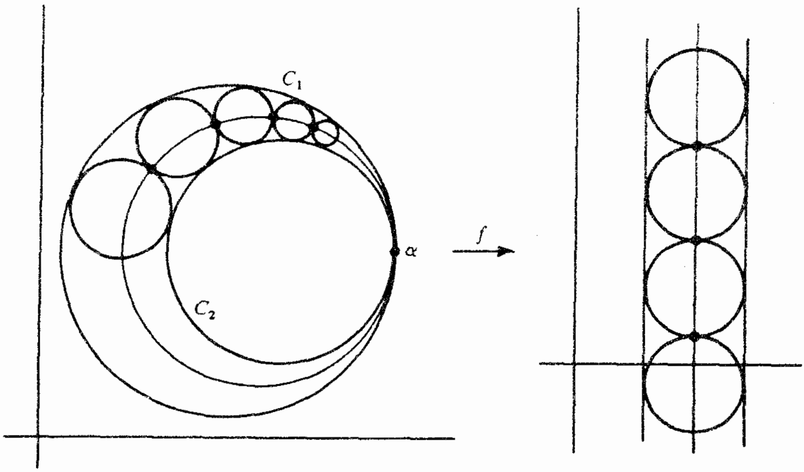
$$f(z) = [i(g(z) - \tfrac{۱}{۲})]^{۲} = \frac{-(z - ۱)^{۲}}{۴(z + ۱)^{۲}}$$

مثال ۲. فرض کنید که دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ در نقطهٔ α بر یکدیگر مماس باشند و زنجیری از دوایر، با ساختاری که در شکل زیر نشان داده شده‌است، بر $C_۱$ و $C_۲$ و بر یکدیگر مماس باشند. ثابت کنید که نقاط مماس a،b، c،... که به این ترتیب پدید می‌آیند همگی بر یک دایره قرار دارند.



تصویر نمودار بالا را تحت نگاشت $f(z) = ۱/(z-\alpha)$ در نظر بگیرید. چون این نگاش ۱-۱ است و قطبی در α دارد، $C_۱$ و $C_۲$ به یک زوج خط موازی نگاشته می‌شوند. بعلاوه، همهٔ دوایر دیگر به دوایری نگاشته می‌شوند و، مجدداً چون f یک‌به‌یک است، این دوایر بر آن دو خط موازی و بر یکدیگر مماس می‌باشند.

واضح است که نقاط $f(a)$،$f(b)$،$f(c)$، . . . بر یک خط مستقیم (بین $f(C_۱)$ و $f(C_۲)$) واقعند. در این صورت، a، b، c، . . . همگی بر تصویر این خط تحت تبدیل وارون $f^{-۱}$ قرار دارند. چون $f^{-۱}$ نیز دو خطی است، این تصویر یک دایره و حکم ثابت است.



واضح است که نقاط $f(a)$،$f(b)$،$f(c)$، ... بر یک خط مستقیم (بین $f(C_۱)$ و $f(C_۲)$) واقعند. در این صورت، a، b، c، ... همگی بر تصویر این خط تحت تبدیل وارون $f^{-۱}$ قرار دارند. چون $f^{-۱}$ نیز دو خطی است، این تصویر یک دایره و حکم ثابت است.

با عنایت به قضیهٔ ۱۱.۱۳، جای شگفتی نیست که به‌کمک توابع دو خطی بتوانیم نیم‌صفحه‌ها و قرصها را به طور همدیس بر نیم‌صفحه‌ها و قرصهای دیگر بنگاریم. در واقع، چنان که ذیلاً خواهیم دید، همهٔ این نگاشتها از ترکیب تبدیلات دو خطی به دست می‌آیند.

۱۲.۱۳ تعریف. هر نگاشت همدیس از یک ناحیه بر روی خودش را یک خودریختی از آن ناحیه می‌نامند.

۱۳.۱۳ لم. فرض کنید که $f : D_۱ \to D_۲$ یک نگاشت همدیس باشد. آن گاه

الف) هر نگاشت همدیس دیگری چون $h : D_۱ \to D_۲$ به صورت $g \circ f$ است.

ب) هر خودریختی مانند h از $D_۱$ به صورت $f^{-۱} \circ g \circ f$ است، که در آن g یک خودریختی از $D_۲$ است.

برهان.

الف) اگر f و h هر دو نگاشتهای همدیسی از $D_۱$ بر روی $D_۲$ باشند، آن‌گاه $h \circ f^{-۱}$ یک خودریختی از $D_۲$ است؛ یعنی، $h \circ f^{-۱} = g$ و $h = g \circ f$.

ب) اگر h یک خودریختی از $D_۱$ باشد، $f \circ h \circ f^{-۱}$ یک خودریختی از $D_۲$ است. به این ترتیب، $f \circ h \circ f^{-۱} = g$ و $h = f^{-۱} \circ g \circ f$.$\square$

حال، مسألهٔ تعیین همهٔ خودریختیهای قرص واحد را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱۴.۱۳ لم. تنها خودریختیهای قرص واحد با $f(\circ) = \circ$ به صورت $f(z) = e^{i\theta} z$ می‌باشند.

برهان. اگر f قرص واحد را یک‌به‌یک بر خودش بنگارد و $f(\circ) = \circ$، آن گاه، به استناد لم شوارتس (۲.۷)،

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{به‌ازای } |z| < ۱، \tag{۳}$$

بعلاوه، چون $f^{-۱}$ نیز این قرص را بر خودش می‌نگارد و $f^{-۱}(\circ) = \circ$، به همان دلیل

$$|f^{-۱}(z)| \leq |z| \quad \text{به‌ازای } |z| < ۱، \tag{۴}$$

معذالک، (۳) و (۴) فقط وقتی با هم برقرارند که $|f(z)| = |z|$ و، یک بار دیگر به استناد لم شوارتس، نتیجه می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta} z. \quad \square$$

حال، فرض کنید که بخواهیم یک خودریختی مانند f از قرص واحد بیابیم با $f(\alpha) = \circ$ ، به ازای یک α ثابت که $\circ < |\alpha| < ۱$. اگر فرض کنیم که f دوخطی باشد، آن گاه به دلیل این که f کلاً یک‌به‌یک است الزاماً باید قرص واحد را بر خودش بنگارد و به این ترتیب با اعمال اصل بازتابش شوارتس (۸.۷) (تمرین ۱۶ فصل ۷ را نیز ببینید) نتیجه بگیریم که $f(۱/\bar{\alpha}) = \infty$. از این رو، f باید به صورت

$$f(z) = c\left(\frac{z-\alpha}{z-۱/\bar{\alpha}}\right)$$

باشد. اگر قرار دهیم

$$|f(۱)| = |ca| = ۱$$

خواهیم داشت $|c| = (۱/|\alpha|)$، و f به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{۱-\bar{\alpha}z}\right)$$

این نتیجه ما را به قضیهٔ زیر هدایت می‌کند.

۱۵.۱۳ قضیه. خودریختیهای قرص واحد به صورت زیر می‌باشد:

$$g(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{۱-\bar{\alpha}z}\right), \qquad |\alpha| < ۱$$

برهان. فرض کنید $g(z) = (z-\alpha)/(۱-\bar{\alpha}z)$. آن گاه، چنان که قبلاً ملاحظه کردیم (پیامد ۲.۷)، $|g(z)| = ۱$ وقتی که $|z| = ۱$. چون $g(\alpha) = \circ$، نتیجه می‌شود که g در واقع یک خودریختی از قرص واحد است. حال، فرض کنید که f یک خودریختی از قرص واحد باشد با $f(\alpha) = \circ$. آن گاه، $h = f \circ g^{-۱}$ یک خودریختی است با $h(\circ) = \circ$؛ در این صورت، بنابر لم قبل،

$$h(z) = e^{i\theta} z$$

یا

$$f(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right). \quad \square$$

سپس، فرض کنید که بخواهیم یک نگاشت همدیس مانند h بیابیم که نیم‌صفحهٔ بالایی را بر قرص واحد بنگارد. مجدداً، نخست فرض کنید که h دو خطی باشد و $h(\alpha) = 0$ به ازای یک α ثابت که $\operatorname{Im}\alpha > 0$. آن گاه، چون محور حقیقی بر دایرهٔ واحد نگاشته می‌شود، از اصل بازتابش شوارتس نتیجه می‌شود که $h(\bar{\alpha}) = \infty$؛ در این صورت

$$h(z) = c\left(\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right)$$

۱۶.۱۳ قضیه. نگاشتهای همدیس که نیم‌صفحهٔ بالایی را بر قرص واحد می‌نگارند به صورت زیر می‌باشند:

$$h(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right), \qquad \operatorname{Im}\alpha > 0$$

برهان. فرض کنید که $f(z) = (z-\alpha)/(z-\bar{\alpha})$. چون به ازای z حقیقی $|z-\alpha| = |z-\bar{\alpha}|$، f محور حقیقی را بر دایرهٔ واحد می‌نگارد. همچنین، چون $f(\alpha) = 0$ و $\operatorname{Im}\alpha > 0$، نتیجه می‌شود که f نیم‌صفحهٔ بالایی را بر قرص واحد می‌نگارد. حال، فرض کنید که h یک نگاشت همدیس دلخواه باشد که نیم‌صفحهٔ بالایی را بر قرص واحد بنگارد و $h(\alpha) = 0$. به استناد لم ۱۳.۱۳، h به صورت

$$h = g \circ f$$

است که در آن g یک خودریختی قرص است. معذالک، چون $h(\alpha) = g(0) = 0$، نتیجه می‌شود که $g(z) = e^{i\theta}z$ (لم ۱۴.۱۳)، و

$$h(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right). \quad \square$$

۱۷.۱۳ قضیه. خودریختیهای نیم‌صفحهٔ بالایی به صورت

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

می‌باشند با a، b، c، d حقیقی و $ad - bc > 0$.

برهان. فرض کنید که f به صورت بالا باشد. آن گاه، واضح است که f محور حقیقی را بر خودش می‌نگارد. همچنین،

$$\operatorname{Im} f(i) = \frac{ad - bc}{c^۲ + d^۲} > ۰$$

که نشان می‌دهد که i به نقطه‌ای در نیم‌صفحهٔ بالایی نگاشته می‌شود و بنابراین f یک خودریختی از نیم‌صفحهٔ بالایی است. برای این که نشان بدهیم که هیچ خودریختی دیگری وجود ندارد، می‌توانیم با اعمال لم ۱۳.۱۳ و قضیهٔ ۱۵.۱۳ نشان بدهیم که هر چنین خودریختی مانند h باید به صورت $h = f^{-۱} \circ g \circ f$ باشد با

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}, \qquad g(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z - \alpha}{۱ - \bar{\alpha} z} \right), |\alpha| < ۱$$

به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم که تحقیق شود که چنین نگاشتی به صورت

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

نوشته می‌شود که در آن a، b، c، d حقیقی می‌باشند و $ad - bc > ۰$ (تمرین ۱۳ را ببینید).□

در احکامی که ذیلاً می‌آید، خواهیم دید که یک نگاشت دو خطی منحصربه‌فرد وجو دارد که هر سه نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ را، به ترتیب، بر سه نقطهٔ دلخواه دیگر $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$ بنگارد.

۱۸.۱۳ تعریف. $z_۰$ را یک نقطهٔ ثابت تابع f می‌نامند در صورتی که $f(z_۰) = z_۰$.

۱۹.۱۳ قضیه. هر تبدیل دو خطی (به استثنای نگاشت همانی $f(z) = z$) حداکثر دو نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. فرض کنید که $f(z) = (az + b)/(cz + d)$. اگر $c \neq ۰$، معادلهٔ $f(z) = z$ با معادلهٔ مربعی $az + b = cz^۲ + dz$ معادل است و از این رو حداکثر دو جواب دارد. (همچنین، توجه کنید که در این حالت $f(\infty) = a/c \neq \infty$.) اگر $c = ۰$، f خطی است و $f(z) = z$ یک جواب در صفحهٔ مختلط متناهی دارد؛ مگر این که $a/d = ۱$. در این حالت، چون $f(\infty) = \infty$، نقطهٔ در بی‌نهایت به عنوان نقطهٔ ثابت دوم در نظر گرفته می‌شود. سرانجام، اگر $f(z) = z + b$، هیچ نقطهٔ ثابتی در $\mathbb{C}$ وجود ندارد.□

۲۰.۱۳ لم. نگاشت دو خطی یکتایی که z_1، z_2، z_3 را، به ترتیب، به ∞، ۰، ۱ بنگارد به صورت زیر است:

$$T(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}$$

برهان. مطمئناً T دارای خواص مطلوب است. اگر S تبدیل دو خطی دیگری باشد که z_1، z_2، z_3 را به ∞، ۰، ۱ بنگارد، آن گاه $T \circ S^{-1}$ یک نگاشت دو خطی با سه نقطهٔ ثابت است؛ لذا $T \circ S^{-1}$ نگاشت همانی است و $T \equiv S$.$\square$

توجه کنید که این لم، با اصلاحات مقتضی، در حالتی که یکی از نقاط مفروض ∞ باشد نیز برقرار است. اگر $z_1 = \infty$، T با

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z_3 - z_2}$$

تعریف می‌شود؛ اگر $z_2 = \infty$، به صورت

$$T(z) = \frac{z_3 - z_1}{z - z_1}$$

تعریف می‌شود؛ سرانجام، اگر $z_3 = \infty$، با

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

تعریف می‌شود.

۲۱.۱۳ تعریف. نسبت ناهمساز چهار عدد مختلط z_1، z_2، z_3 ، z_4 ـ که به (z_1, z_2, z_3, z_4) نشان داده می‌شود ـ تصویر z_4 تحت نگاشت دو خطی است که z_1، z_2، z_3 را به ترتیب، به ∞، ۰، ۱ می‌نگارد.

به استناد لم قبل،

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}\right)\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right)$$

۲۲.۱۳ قضیه. نسبت ناهمساز چهار نقطه تحت تبدیلات دوخطی ثابت می‌ماند؛ یعنی، اگر S دوخطی باشد، $(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

برهان (آلفورس). فرض کنید که T نگاشت دوخطی باشد که $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ را به ∞، ۰، ۱ می‌برد. آنگاه $T \circ S^{-۱}$ نقاط $Sz_۱$، $Sz_۲$ ، $Sz_۳$ را بر ∞، ۰، ۱ می‌نگارد و، به استناد تعریف،

$$(Sz_۱, Sz_۲, Sz_۳, S_۴) = T \circ S^{-۱}(Sz_۴) = T(z_۴) = (z_۱, z_۲, z_۳, z_۴). \quad \square$$

۲۳.۱۳ قضیه. تبدیل دو خطی منحصربه‌فرد $\omega = f(z)$ که $z_۱$،$z_۲$، $z_۳$ را، به ترتیب، بر $\omega_۱$، $\omega_۲$، $\omega_۳$ بنگارد با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{(\omega - \omega_۲)(\omega_۳ - \omega_۱)}{(\omega - \omega_۱)(\omega_۳ - \omega_۲)} = \frac{(z - z_۲)(z_۳ - z_۱)}{(z - z_۱)(z_۳ - z_۲)} \tag{۵}$$

برهان. وجود نگاشت f به آسانی ثابت می‌شود. اگر فرض کنیم که $T_۱$، $T_۲$ نگاشتهای دو خطی باشند که

$$T_۱ : z_۱, z_۲, z_۳ \to \infty, ۰, ۱$$
$$T_۲ : \omega_۱, \omega_۲, \omega_۳ \to \infty, ۰, ۱$$

آن گاه $f = T_۲^{-۱} \circ T_۱$. برای این که نشان بدهیم که $\omega = f(z)$ باید در (۵) صدق کند، فقط لازم است که به قضیهٔ ۲۲.۱۳ استناد کنیم که نسبت ناهمساز هر چهار نقطه تحت نگاشتهای دو خطی محفوظ می‌ماند و نتیجه بگیریم که

$$(\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳, \omega_۴) = (z_۱, z_۲, z_۳, z_۴)$$

(اصلاحات مقتضی (۵) در صورتی که یکی از نقاط z یا یکی از نقاط ω نقطهٔ ∞ باشد به عنوان تمرین واگذار می‌شود.) $\square$

توجه کنید که (۵) یک روش مستقیم برای تعیین نگاشت مطلوب عرضه می‌کند که صرفاً از حل آن برحسب ω عاید می‌شود.

مثال. برای این که $z_۱ = ۱$، $z_۲ = ۲$، $z_۳ = ۷$ بر $\omega_۱ = ۱$، $\omega_۲ = ۲$، $\omega_۳ = ۳$ نگاشته شود، قرار می‌دهیم

$$\frac{(\omega - ۲)(۳ - ۱)}{(\omega - ۱)(۳ - ۲)} = \frac{(z - ۲)(۷ - ۱)}{(z - ۱)(۷ - ۲)}$$

که، پس از حل برحسب ω، خواهیم داشت:

$$\omega = \frac{۷z - ۴}{۲z + ۱}$$

تمرینات

۱) مستقیماً تحقیق کنید که تابع $f(z) = z^k$، که k عدد صحیح ناصفر دلخواه است، به ازای $z \neq ۰$ یک‌به‌یک موضعی است.

۲) تصویر خطوط x ثابت و y ثابت را تحت تبدیل $\omega = e^z$ بیابید.

۳) یک نگاشت همدیس مانند f بین نواحی S و T در هر یک از حالات زیر بیابید.

الف) $S = \{z = x + iy : -۲ < x < ۱\}$، $T = D(۰; ۱)$.

ب) S و T نیم‌صفحهٔ بالایی هستند، $f(-۲) = -۱$، $f(۰) = ۰$، و $f(۲) = ۲$.

ج) $S = \{re^{i\theta} : r > ۰, ۰ < \theta < \pi/۴\}$، $T = \{x + iy : ۰ < y < ۱\}$.

۴) تحقیق کنید که «همدیس ـ هم‌ارزی» دارای خواص بازتابی، تقارن، و تعدّی یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۵) الف) ثابت کنید که هر تابع خطی چند ضلعی را بر چند ضلعی می‌نگارد.

ب) فرض کنید که f تام باشد و، به ازای مستطیلی مانند R، $f(R)$ یک مستطیل باشد. ثابت کنید که f خطی است.

۶) ثابت کنید که نگاشتهای دو خطی با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهند.

۷) تصویر دایرهٔ $|z| = ۱$ را تحت نگاشتهای زیر بیابید:

(الف) $\omega = \frac{۱}{z}$، (ب) $\omega = \frac{۱}{z - ۱}$، (ج) $\omega = \frac{۱}{z - ۲}$

۸) نشان دهید که تنها خودریختی قرص واحد با $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) > ۰$ نگاشت همانی $f(z) \equiv z$ است.

۹) فرض کنید که $f_۱$ و $f_۲$ دو نگاشت همدیس از ناحیهٔ D بر قرص واحد باشند و به ازای نقطه‌ای مانند $z_۰$ از D، $f_۱'(z_۰) > ۰$ و $f_۲'(z_۰) > ۰$ و $f_۱(z_۰) = f_۲(z_۰) = ۰$. ثابت کنید که $f_۱ \equiv f_۲$.

۱۰) نشان دهید که همهٔ نگاشتهای همدیسی که نیم‌صفحه یا قرص را بر نیم‌صفحه یا قرص می‌نگارند با تبدیلات دو خطی تعریف می‌شوند.

۱۱) تصویر نیم‌صفحهٔ بالایی تحت نگاشتی به صورت زیر چیست؟
$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$، که در آن a، b، c، و d حقیقی هستند، و $ad - bc < 0$.

۱۲) فرمولی برای همهٔ خودریختیهای چارک اوّل بیابید.

۱۳) قضیهٔ ۱۷.۱۳ را با اثبات این که h به صورت زیر است کامل کنید:
$h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$، a، b، c، و d حقیقی هستند، $ad - bc > 0$.
راهنمایی: بنویسید $h = h_1 \circ h_2$، که در آن

$$h_1(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-1} \circ e^{i\theta} z \circ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$
$$h_2(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-1} \circ \left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}\right) \circ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

سپس، نشان دهید که

$$h_1(z) = \frac{(2 + 2\cos\theta)z + 2\sin\theta}{(-2\sin\theta)z + (2 + 2\cos\theta)}$$

$$h_2(z) = \frac{(2 - 2\operatorname{Re}\alpha)z + 2\operatorname{Im}\alpha}{(2\operatorname{Im}\alpha)z + (2 + 2\operatorname{Re}\alpha)}$$

۱۴) نقاط ثابت نگاشتهای زیر را بیابید:

(الف) $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$، (ب) $\omega = \dfrac{z}{z+1}$

۱۵) ثابت کنید که (z_1, z_2, z_3, z_4) فقط و فقط وقتی حقیقی ـ مقدار است که چهار نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4 بر یک دایره یا خط واقع باشند.

۱۶) نگاشتی دو خطی بیابید که

الف) ۱، i، ۱− را، به ترتیب، بر ۱−، i، ۱ بنگارد.

ب) $-i$، ۰، i را، به ترتیب، بر ۰، i، $2i$ بنگارد.

ج) $-i$، i، $2i$ را، به ترتیب، بر ∞، ۰، $\frac{1}{2}$ بنگارد.

۱۷) یک نگاشت همدیس مانند f بیابید که ناحیهٔ بین دو دایرهٔ $|z| = ۱$ و $|z - \frac{۱}{۴}| = \frac{۱}{۴}$ را بر طوق $a < |z| < ۱$ بنگارد.

[راهنمایی: یک نگاشت دو خطی بیابید که به طور همزمان $|z| < ۱$ را بر $|z| < ۱$ بنگارد و $|z - \frac{۱}{۴}| < \frac{۱}{۴}$ را بر قرصی به صورت $|z| < a$.]

جواب: $f(z) = \frac{z-(۲-\sqrt{۳})}{۱-(۲-\sqrt{۳})z}$.

فصل چهاردهم

قضیهٔ نگاشت ریمان

۱۰۱۴ نگاشتهای همدیس و دینامیک آبی

قبل از اثبات قضیهٔ نگاشت ریمان، رابطهٔ بین نگاشتهای همدیس و نظریهٔ شارش شاره را مورد آزمایش قرار می‌دهیم. مقصود اصلی ما نیل به بعضی از نتایج بخش آتی است و این بحث نسبت به بقیهٔ کتاب فرعی است.

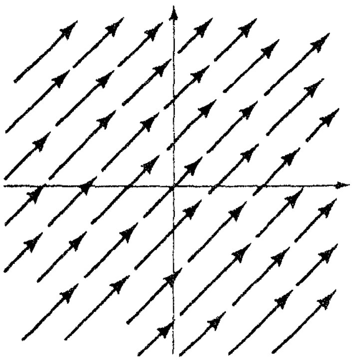
شارش شاره‌ای را در نظر بگیرید که مستقل از زمان است و با یک صفحهٔ مفروض موازی است که آن را صفحهٔ مختلط می‌گیریم. در این صورت، تابع شارش (سرعت) g تابعی دو بعدی یا مختلط از دو متغیر است که آن را به صورت $g(z) = u(z) + iv(z)$ می‌توانیم بنویسیم که در آن u و v حقیقی ـ مقدار هستند. اگر σ و τ را، به ترتیب، گردش حول و شار از میان منحنی بستهٔ C در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که (پیوست الف را ملاحظه کنید.)

$$\int_C \overline{g(z)}dz = \sigma + i\tau$$

ما توجه خود را به شاره‌های تراکم‌ناپذیر و شارشهای موضعاً بی‌گردش و بدون منبع معطوف می‌کنیم. یعنی، فرض می‌کنیم که به ازای هر نقطهٔ z در حوزهٔ D یک $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که گردش حول و شارهٔ از میان هر منحنی بستهٔ C واقع در $D(z;\delta)$ صفر است. از این رو، به ازای همهٔ این منحنیها، اگر $f(z) = \overline{g(z)}$ بگیریم آن گاه از (۱) نتیجه می‌شود که $\int_C f(z)dz = ۰$. بعلاوه، فرض می‌کنیم که g (و بنابراین f) پیوسته است؛ در این صورت، بنابه قضیهٔ موررا، f تحلیلی است. برعکس، اگر تابع تحلیلی $f = u - iv$ در یک حوزهٔ D مفروض باشد، مزدوج آن $g = u + iv$ را می‌توان به عنوان شارشی موضعاً بی‌گردش و بدون منبع در D در نظر گرفت.

امثله

(i) فرض کنید $f(z) = k$. آن گاه $g(z) = \bar{k}$ یک شارش ثابت در صفحهٔ مختلط است.



(ii) فرض کنید $f(z) = z$ آن گاه $g(z) = \bar{z}$ شارشی است که بر محورهای حقیقی و موهومی مماس است.

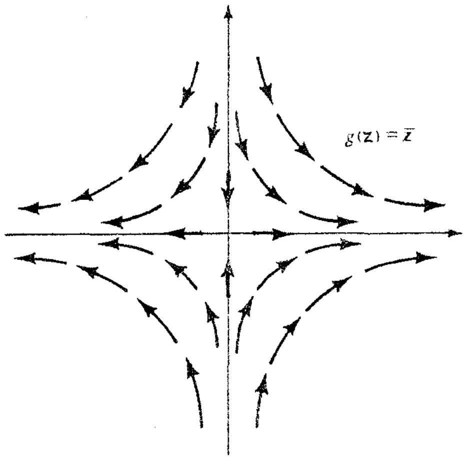
(iii) فرض کنید $f(z) = \frac{۱}{z}$، $z \neq ۰$. آن گاه

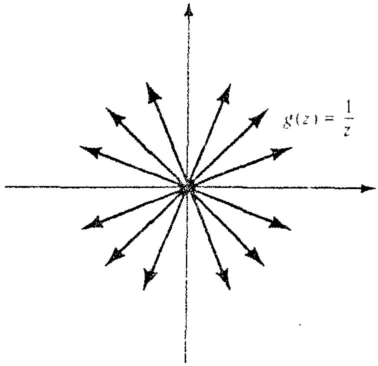
$$g(z) = \overline{f(z)} = \frac{x + iy}{x^۲ + y^۲}$$

شارشی است که جهت آن در z همان جهت بردار (از o) به z است. در این حالت،

$$\int_{|z|=\delta} f(z)dz = ۲\pi i$$

بنابراین: یک شار ناصفر از میان دایره‌ای به مرکز o وجود دارد. معذالک، شارش مفروض در $z \neq 0$ موضعاً بی‌گردش و بدون منبع است. (گفته می‌شود که این شارش دارای یک «منبع» در مبداء است.)





چنان که مثالهای بالا نشان می‌دهند، شارشهای ممکن شاره از انواعی که مورد بحث قرار گرفتند به فراوانی توابع تحلیلی در یک حوزهٔ مفروض می‌باشند. برای این که بحث خود را به شارش خاص یک نگاشت همدیس طبیعی حوزه‌ای مانند D متمرکز کنیم، مفروضات اضافی زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف ۱) $\tilde{D}$ بستار یک حوزهٔ همبند سادهٔ کراندار است. (در مراجعات بعدی، $\tilde{D}$ را «حصار» می‌نامیم.)

(الف ۲) در ∞، $g(z) = ۱$. یعنی، $\lim_{z\to\infty} g(z) = ۱$

(الف ۳) g دارای جهت مماس بر مرز D است (مگر نقاط تکین، که در این نقاط احتمالاً صفر یا نامتناهی است.)

(الف ۴) شار کلاً بی‌گردش و بدون منبع است؛ یعنی، به ازای هر منحنی بستهٔ C واقع در D داریم $\int_C f(z)dz = ۰$.

تحت شرایط فوق، فرض کنید $z_۰ \in D$ و قرار دهید $F(z) = \int_{z_۰}^{z} f(\xi)d\xi$. بنابه (الف ۴)، F خوش تعریف و، بنابراین، بر D تحلیلی است. بعلاوه، مطابق (الف ۲)، در ∞، $F(z) \sim z$. بالاخره، فرض کنید مرز D با $z(t)$ در محدودهٔ $a \le t \le b$ ارائه شود. آن گاه

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t) = \overline{g(z(t))}\dot{z}(t)$$

که، بنابه (الف ۳)، حقیقی ـ مقدار است. بنابراین F مرز D را به پاره خطی افقی می‌نگارد.

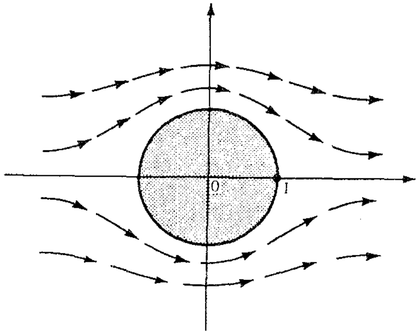
عکس این حکم نیز برقرار است. اگر F حوزهٔ D را به طور همدیس به خارج یک بازهٔ افقی بنگارد و در ∞ داشته باشیم $F(z) \sim z$، آن گاه $g(z) = \overline{F'(z)}$ یک شارش شاره در D خواهد بود که در مفروضات (الف ۱) تا (الف ۴) صدق می‌کند.

امثله

(i) $F(z) = z + \frac{۱}{z}$ خارج قرص واحد را به طور همدیس به داخل بازهٔ $[-۲, ۲]$ می‌نگارد و، به وضوح، در بی‌نهایت $F(z) \sim z$. از این رو،

$$g(z) = \overline{F'(z)} = ۱ - \frac{۱}{z^۲}$$

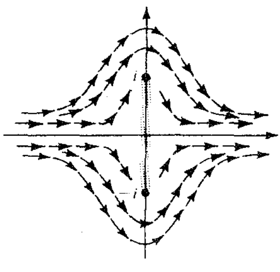
یک شارش شاره در حوزهٔ مفروض است که در (الف ۱) تا (الف ۴) صدق می‌کند. توجه کنید که $g(-۱) = g(۱) = ۰$ و سرعت ماکسیمم در $\pm i$ رخ می‌دهد که در این نقاط $|g(z)| = ۲$.



(ii) فرض کنید D متمم بازهٔ I از $-i$ تا i باشد. در این صورت، یک شاخهٔ تحلیلی از $\sqrt{۱ + z^۲}$ را می‌توان در D تعریف کرد. (فصل ۱۰، تمرین ۱۱ را ببینید.) توجه کنید که اگر $\sqrt{۱ + z^۲}$ را طوری تعریف کنیم که بر محور مثبت دارای مقادیر مثبت باشد، آن گاه بر محور منفی مقادیرش منفی خواهد بود و D را بر خارج $[-۱, ۱]$ می‌نگارد. همچنین در ∞، $z \sim \sqrt{۱ + z^۲}$؛ لذا $F(z) = \sqrt{۱ + z^۲}$ نگاشت همدیس مطلوب است و شارش با

$$g(z) = -\overline{\left(\frac{z}{\sqrt{۱ + z^۲}}\right)}$$

ارائه می‌شود. در این حالت (ایده‌آلی)، $g(۰) = ۰$ و $g(\pm i) = \infty$.



مثالهای فوق نشان می‌دهد که چگونه تابع نگاشت مناسب ما را قادر می‌سازد تا شارش شاره را در یک حوزه به دست آوریم. از سوی دیگر، بعضی از خواص فیزیکی شارش به دیدگاههای زیر در مورد نگاشتهای همدیس می‌انجامد.

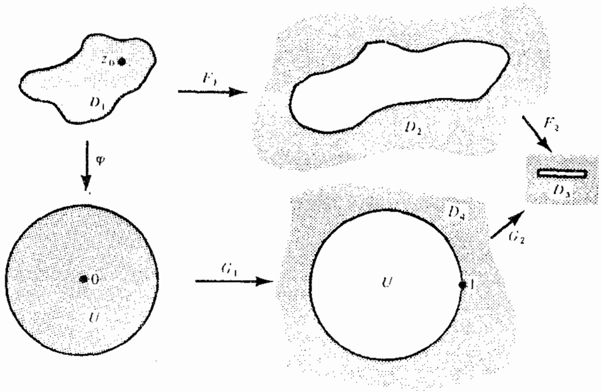
I **وجود و یکتایی نگاشتهای همدیس.** به طوری که دیده‌ایم، وجود یک نگاشت همدیس از یک حوزه‌ی «تک حصار» به خارج یک بازهٔ افقی معادل وجود یک تابع شارش است که در (الف ۱) تا (الف ۴) صدق کند. معهذا، معلوم شده است که شارشی که در این مفروضات صدق کند موجود و منحصربه‌فرد است. بنابه قضیهٔ کلوین [میلنه ـ تامسون، صفحهٔ ۹۵]، شارهٔ کلاً بی‌گردش شارهٔ موجود در یک حوزه از نوع مورد بحث (با شرایطی در ∞ و در امتداد مرز) شارش منحصربه‌فردی با حداقل انرژی جنبشی است. از این رو، برهان وجود شارش منحصربه‌فرد را می‌توان برحسب معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر شارش ادامه داد. ما این بحث را دنبال نخواهیم کرد که به فیزیک مربوط می‌شود، ولی راهنمای ما این اندیشه است که نگاشتهای همدیس مورد نظر با مسایل اکسترمال ارائه می‌شوند. ما این مسأله را در قالب ریاضی می‌ریزیم و جزئیات را در بخش آتی کامل خواهیم کرد.

II **نگاشتهای همدیس انواع دیگر حوزه‌ها.** با بررسی شارش شاره از میان انواع دیگر حوزه‌ها، می‌توانیم حوزه‌های طبیعی را با حوزه‌هایی که به طور همدیس بر آنها نگاشته می‌شوند یکسان بگیریم. در واقع، استدلال فوق نشان می‌دهد که همهٔ حوزه‌های با n «حصار» را می‌توان به طور همدیس به روی صفحه‌ای نگاشت که در طول n پاره‌خط افقی دارای شکاف است.

در حالت حوزه همبند سادهٔ D_1، حوزهٔ طبیعی استاندارد قرص واحد است. زیرا، نگاشتی که با $F_1(z) = 1/(z - z_0)$ ارائه شود D_1 را بر حوزهٔ تک حصاری D_2 می‌نگارد که z_0 را به ∞ می‌برد. در این صورت، می‌توانیم به کمک یک نگاشت F_2، حوزهٔ D_2 را به طور همدیس بر D_3، خارج یک بازهٔ افقی، بنگاریم. به طور مشابه، قرص واحد U به کمک $G_1(z) = 1/z$ بر D_4، خارج دایرهٔ واحد، نگاشته می‌شود. چون D_4 یک حوزهٔ تک حصاری است، یک نگاشت همدیس G_2 از D_4 بر روی D_3 وجود دارد. سرانجام، نگاشت

$$\varphi = G_1^{-1} \circ G_2^{-1} \circ F_2 \circ F_1$$

حوزهٔ همبند سادهٔ D_1 را به طور همدیس بر قرص واحد U می‌نگارد. توجه کنید که در تعویض حوزهٔ طبیعی خود از خارج یک بازه به قرص واحد، شرط $F(\infty) = \infty$ با $\varphi(z_0) = 0$ جایگزین می‌شود.



$\varphi = G_1^{-1} \circ G_2^{-1} \circ F_2 \circ F_1$

۲.۱۴ قضیهٔ نگاشت ریمان

قضیهٔ نگاشت ریمان، به شکل بسیار معمولی خود، بیان می‌کند که هر دو حوزهٔ سره و همبند سادهٔ صفحه همدیس ـ هم‌ارزند. یعنی، اگر $R_۱ \neq \mathbb{C}$ و $R_۲ \neq \mathbb{C}$ حوزه‌های همبند ساده باشند، یک نگاشت یک‌به‌یک تحلیلی از $R_۱$ به روی $R_۲$ وجود دارد.

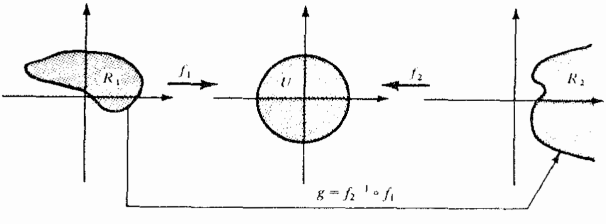
توجه کنید که شرط $R_۱ \neq \mathbb{C}$ و $R_۲ \neq \mathbb{C}$، به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ لیوویل، ضروری است. تمرین ۸ را ببینید.

برای اثبات این قضیه، کافی است نشان دهیم که به ازای هر حوزهٔ همبند سادهٔ $R \neq \mathbb{C}$ یک نگاشت همدیس از R به روی U وجود دارد. زیرا، در این صورت، اگر $R_۱$ و $R_۲$ دو حوزهٔ سره و همبند ساده باشند، نگاشتهای همدیس زیر را داریم

$$f_۱ : R_۱ \to U$$

$$f_۲ : R_۲ \to U$$

و $g = f_۲^{-۱} \circ f_۱$ یک نگاشت همدیس از $R_۱$ به روی $R_۲$ است.



تمرین ساده‌ای است که نشان دهیم که به ازای نگاشت همدیس f از R به U و $z_\circ \in R$ می‌توان f را با یک تابع خودریخت مناسب از U ترکیب کرد به طوری که تابع مرکب φ حوزهٔ R را به طور همدیس به روی U بنگارد با خوّاص اضافی $\varphi(z_\circ) = \circ$ و $\varphi'(z_\circ) > \circ$. [تمرین ۶ را ببینید.]
در واقع، اگر φ یک نگاشت همدیس از R به روی U با دو خاصیت اضافی مذکور باشد، این نگاشت منحصر به‌فرد است. ابتدا یکتایی را ثابت می‌کنیم، سپس قضیهٔ نگاشت ریمان را ثابت خواهیم کرد به این صورت که چنین نگاشت یکتایی وجود دارد.

قضیهٔ نگاشت ریمان. به ازای هر حوزهٔ همبند سادهٔ $R \neq \mathbb{C}$ و $z_\circ \in R$، نگاشت همدیس منحصر به‌فردی مانند φ از R به روی U وجود دارد به طوری که $\varphi(z_\circ) = \circ$ و $\varphi'(z_\circ) > \circ$.

برهان (یکتایی). فرض کنید φ_1 و φ_2 دو نگاشت با خواص فوق باشند. آن گاه $\Phi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ یک خودریختی از قرص واحد است با شرط $\Phi(\circ) = \circ$ و $\Phi'(\circ) > \circ$. در این صورت، به استناد ۱۴.۱۳، $\Phi(z) = e^{i\theta} z$ و چون $\Phi'(\circ) = e^{i\theta} > \circ$، نتیجه می‌شود که Φ نگاشت همانی است. لذا $\varphi_2 = \varphi_1$.
(وجود). به طوری که در فصل پیشین ذکر کردیم، φ را به عنوان جواب یک مسأله اکسترمال پیدا خواهیم کرد. بعضی از جوابهای مسایل اکسترمال برای نگاشتهای تحلیلی از U به U را که در فصل ۷ به دست آورده‌ایم یادآوری می‌کنیم. دریافتیم که به ازای $\alpha \in U$ ثابت، نگاشتهای ۱-۱ تحلیلی φ که $|\varphi'(\alpha)|$ را ماکسیمم می‌کنند دقیقاً به صورت زیر هستند

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$$

یعنی، نگاشتهای φ که

(i) α را به $\circ$ می‌نگارد و

(ii) U را به روی U می‌نگارد.

(مثال ۲ بعد از ۲.۷ و تمرینات ۸ و ۹ فصل ۷ را ببینید.)

این کار یک استراتژی برای اثبات وجود نگاشت همدیس φ از یک حوزهٔ همبند سادهٔ دلخواه $R \neq \mathbb{C}$ به روی U را پیشنهاد می‌کند. یعنی، به ازاء R و $z_\circ \in R$ مفروض، گردایهٔ $\mathcal{F}$ از همهٔ توابع ۱-۱ و تحلیلی $f : R \to U$ را در نظر می‌گیریم که در $f'(z_\circ) > \circ$ صدق کنند و φ را طوری می‌گیریم که $\varphi'(z_\circ) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_\circ)$. جزئیاتی را که باید نشان دهیم به صورت زیر است.

الف) $\mathcal{F}$ ناتهی است.

ب) $\sup_{f\in\mathcal{F}} f'(z_\circ) = M < \infty$ و تابعی مانند $\varphi \in \mathcal{F}$ موجود است که $\varphi'(z_\circ) = M$.

ج) φ در (ب) نگاشت همدیس از R به روی U است به طوری که $\varphi(z_\circ) = \circ$ و $\varphi'(z_\circ) > \circ$. [با شرط (ب)، $\varphi(z_\circ) = \circ$ و پوشا بودن φ تضمین نمی‌شود.]

برهان (الف). چون $R \neq \mathbb{C}$، نقطه‌ای مانند $l_\circ \in \tilde{R}$ وجود دارد. [اگر $\tilde{R}$ شامل قرص $D(l_\circ;\delta)$ باشد صرفاً می‌توانیم $f(z) = \dfrac{\delta}{z-l_\circ}$ بگیریم و به وضوح نتیجه می‌شود که بر R، $|f| < ۱$. معهذا، ممکن است $\tilde{R}$ اصلاً شامل هیچ قرصی نباشد؛ از این رو باید رهیافت متفاوتی را به کار بریم.] چون R همبند ساده است، تابع تحلیلی

$$g(z) = \sqrt{\frac{z-l_\circ}{z_\circ - l_\circ}}$$

موجود است به طوری که $g(z_\circ) = ۱$. در این صورت، نتیجه می‌شود که g باید کراندار ولی دور از -۱ باقی بماند. زیرا، اگر

$$g(\xi_n) = \sqrt{\frac{\xi_n - l_\circ}{z_\circ - l_\circ}} \to -۱$$

آن‌گاه

$$\frac{\xi_n - l_\circ}{z_\circ - l_\circ} \to ۱$$

و لذا $\xi_n \to z_\circ$. در این صورت، بنابه پیوستگی g در $z_\circ$، نتیجه می‌شود که $g(\xi_n) \to +۱$؛ و تناقض آشکار می‌شود. بنابراین، یک $\eta > \circ$ موجود است که بر سرتاسر R، $|g(z) + ۱| > \eta$. از این رو، اگر قرار دهیم $f(z) = \eta/(g(z)+۱)$، خواهیم داشت $|f| < ۱$. چون f ترکیبی از توابع ۱-۱ است، خود نیز بر R یک‌به‌یک است. بالاخره، چون تمام خوّاص فوق با ضرب در $e^{i\theta}$ پایدار می‌مانند، می‌توانیم فرض کنیم که $f'(z_\circ) > \circ$. بنابراین $f \in \mathcal{F}$.

برهان (ب). ابتدا توجه کنید که، چون R باز است، قرصی مانند $D(z_\circ; ۲\delta) \subset R$ وجود دارد؛ لذا، بنابر تخمین معمول $M - L$، به ازای هر $f \in \mathcal{F}$

$$|f'(z_\circ)| = |\frac{۱}{۲\pi i}\int_{C(z_\circ;\delta)} \frac{f(z)}{(z-z_\circ)^۲}dz| \le \frac{۱}{\delta}$$

سپس، فرض کنید که $M = \sup_{f\in\mathcal{F}} f'(z_\circ)$ و $f_۱$، $f_۲$، $\ldots$ ، طوری انتخاب شوند که $f_n'(z_\circ) \to M$ وقتی که $n \to \infty$. برای این که نشان بدهیم که تابعی مانند $\varphi \in \mathcal{F}$ وجود دارد به طوری که $\varphi'(z_\circ) = M$،

زیردنباله‌ای از $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به دست می‌آوریم که بر فشرده‌های R به طور یکنواخت همگرا باشد. برای این منظور، فرض کنید ξ_1، ξ_2، ...، یک زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر R باشد. (مثلاً، ξها می‌توانند نقاط با مختصات گویای R باشند.) چون $\{f_n(\xi_1)\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کراندار است، زیردنباله‌ای مانند $\{f_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که $\{f_{1n}(\xi_1)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به حدی مانند $\varphi(z_1)$ است. به طریق مشابه، $\{f_{1n}\}$ دارای زیردنباله‌ای مانند $\{f_{2n}\}$ است که $\{f_{2n}(\xi_2)\}$ همگرا است که ما آن را به $\varphi(z_2)$ نمایش می‌دهیم. با ادامهٔ این روش، دنباله‌ای از زیردنباله‌های تودرتو مانند $\{\{f_{kn}\}_{n=1}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ می‌یابیم به طوری که $\{f_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ در ξ_1، ξ_2، ...، ξ_k همگرا است. پس، اگر زیردنبالهٔ «قطری» $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ را با $\varphi_n = f_{nn}$ اختیار کنیم، نتیجه می‌شود که $\varphi_n(z)$ به ازای $z = \xi_1, \xi_2, \ldots$ همگرا به تابعی است که آن را به φ نشان می‌دهیم.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که $\{\varphi_n\}$ بر R همگرا و بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $K \subset R$ به طور یکنواخت همگرا است. اثبات این حکم را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $K \subset R$ مشمول در یک اجتماع متناهی از قرصهای بستهٔ جزء R است. بنابراین، بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که خود K یک قرص فشرده در R است. توجه کنید که $d(K, \tilde{R})$ ـ فاصلهٔ K و مجموعهٔ بستهٔ $\tilde{R}$ ـ مثبت است و می‌توانیم قرار دهیم $d(K, \tilde{R}) = 2d > 0$. بنابراین، چون $|\varphi_n| \leq 1$،

$$|\varphi_n'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z;d)} \frac{\varphi_n(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi}.\frac{2\pi d}{d^2} = \frac{1}{d}, \qquad (z \in K)$$

و

$$|\varphi_n(z_1) - \varphi_n(z_2)| = |\int_{z_1}^{z_2} \varphi_n'(z)dz| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{d}$$

از این رو، $\{\varphi_n\}$ یک دنبالهٔ همپیوسته از توابع بر K است. یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر n،

$$|\varphi_n(z_1) - \varphi_n(z_2)| \leq \varepsilon$$

مادام که $|z_1 - z_2| \leq \varepsilon d$. پس، اگر $z \in K$ و $\varepsilon > 0$ بگیریم، می‌توانیم بنویسیم

$$|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| \leq |\varphi_n(z) - \varphi_n(\xi_k)| + |\varphi_n(\xi_k) - \varphi_m(\xi_k)| + |\varphi_m(\xi_k) - \varphi_m(z)|$$

با انتخاب ξ_k به طوری که $|\xi_k - z| < \varepsilon d/3$، نتیجه می‌شود که

$$|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| < \varepsilon$$

همین که m و n به قدری بزرگ انتخاب شوند که

$$|\varphi_n(\xi_k) - \varphi_m(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

از این رو، $\{\varphi_n(z)\}_{n=۱}^{\infty}$ در قاعدهٔ کوشی صدق می‌کند و به ازای هر $z \in K$ همگرا است. بعلاوه، تابع حد φ پیوسته است؛ زیرا، اگر $|z_۱ - z_۲| < \varepsilon d$ آن گاه

$$|\varphi(z_۱) - \varphi(z_۲)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(z_۱) - \varphi_n(z_۲)| < \varepsilon, \qquad (z_۱, z_۲ \in K)$$

سرانجام، برای این که نشان بدهیم که φ_n بر فشرده‌ها به طور یکنواخت به φ همگرا است، بحث استاندارد زیر را به کار می‌بریم. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد و قرار دهید

$$S_j = \{z \in K : |\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon \quad \text{،}n > j \text{ به ازای}\}$$

به وضوح $K \subset \bigcup_{j=۱}^{\infty} S_j$. بنابراین، چون مجموعه‌های S_j باز و K فشرده است، می‌توانیم N را طوری انتخاب کنیم که $K \subset \bigcup_{j=۱}^{N} S_j$. از این رو، به ازای هر $z \in K$ و هر $n > N$، $|\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$ و همگرایی یکنواخت است.

چون φ_n بر فشرده‌ها به طور یکنواخت به φ میل می‌کند، φ تحلیلی است (قضیهٔ ۶.۷). همچنین، بنابه قضیهٔ ۱۲.۱۰،

$$\varphi'(z_۰) = \lim_{n\to\infty} \varphi'_n(z_۰) = M > ۰$$

که بنابراین φ ثابت نیست. چون φ حد یکنواخت توابع ۱-۱ است، φ بر R یک‌به‌یک است. (قضیهٔ ۱۵.۱۰)

برهان (ج). فقط باقی می‌ماند این که نشان دهیم $\varphi(z_۰) = ۰$ و این که φ حوزهٔ R را به روی U می‌نگارد. برای اثبات اولی، فرض کنید $\varphi(z_۰) = \alpha$، $۰ < |\alpha| < ۱$. آن گاه

$$f(z) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{۱ - \bar{\alpha}\varphi(z)}$$

نیز یک نگاشت تحلیلی ۱-۱ از R به U است و

$$f'(z_۰) = \frac{\varphi'(z_۰)}{۱ - |\alpha|^۲}$$

از این رو، $f'(z_۰) > \varphi'(z_۰)$، که غیرممکن است.

حال، فرض کنید که $\varphi(z) \neq w$، $w = -t^۲ e^{i\theta}$، $۰ < t < ۱$. اگر قرار دهید $g(z) = e^{i\theta}\varphi(z)$، g نیز R را به U می‌نگارد، $g(z_۰) = ۰$ و $|g'(z_۰)| = \varphi'(z_۰)$. بعلاوه، به ازای هر $z \in R$، $g(z) \neq -t^۲$. سپس، اگر قرار دهیم

$$f_۱(z) = \frac{g(z) + t^۲}{۱ + t^۲ g(z)}$$

نتیجه می‌شود که f_1 حوزهٔ R را به U با شرط $f_1(z_0) = t^2$ می‌نگارد. چون $g(z) = -t^2$، $f_1(z) \neq 0$ و یک ریشهٔ دوم تحلیلی

$$f_2(z) = \sqrt{f_1(z)}$$

با شرط $f_2(z_0) = t$ وجود دارد. حال، فرض کنید

$$f_3(z) = \frac{f_2(z) - t}{1 - t f_2(z)}$$

بالبداهه f یک‌به‌یک است و محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که

$$f_1'(z_0) = g'(z_0)(1 - t^4)$$
$$f_2'(z_0) = \frac{f_1'(z_0)}{2\sqrt{f_1(z_0)}} = \frac{f_1'(z_0)}{2t}$$
$$f_3'(z_0) = \frac{f_2'(z_0)}{1 - t^2}$$

در این صورت، از ترکیب معادلات فوق نتیجه می‌شود که

$$f_3'(z_0) = \frac{g'(z_0)(1 + t^2)}{2t} \gg g'(z_0)$$

زیرا، به ازای $0 < t < 1$، $1 + t^2 > 2t$. اگر قرار دهیم $f(z) = e^{i\theta} f_3(z)$، خواهیم داشت $f \in \mathcal{F}$ به طوری که $f'(z_0) > \varphi'(z_0)$؛ که غیرممکن است. بنابراین، φ باید پوشا باشد و برهان تمام است.□

تذکر. دنبالهٔ اولیهٔ f_1،f_2، ... را طوری در نظر بگیرید که $f_n'(z) \to M$ وقتی که $n \to \infty$. اگرچه تابع نگاشت ریمان φ را به‌عنوان حد زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ به دست آوردیم، می‌توان نتیجه گرفت که دنبالهٔ اولیهٔ کامل $\{f_n\}$ نیز به φ همگرا است. زیرا، فرض کنید که یک زیردنبالهٔ f_{n_1}،f_{n_2}، ... موجود باشد به طوری که به ازای یک $z \in R$ ثابت و $\varepsilon > 0$،

$$|f_{n_k}(z) - \varphi(z)| > \varepsilon \qquad (1)$$

آن گاه، چون $f_{n_k}'(z_0) \to M$ وقتی که $k \to \infty$، می‌توانیم برهان قبلی را به کار بریم تا نشان دهیم که زیردنباله‌ای دارد که به نگاشت منحصربه‌فرد φ همگرا است. ولی، در این صورت، (۱) غیرممکن است.

تمرین

۱) فرض کنید g یک شارش موضعاً بی‌گردش و بی‌منبع در حوزهٔ همبند سادهٔ D باشد و $F(z) = \int_{z_\circ}^{z} \bar{g}(\xi)d\xi$. نشان دهید که g بر منحنیهای: ثابت $= \operatorname{Re} F(z)$ عمود است.

۲) اگر F و C همانند (۱) باشند، نشان دهید که منحنیهای: ثابت $= \operatorname{Im} F(z)$ «خطوط جریان» g می‌باشند؛ یعنی، نشان دهید که شارش مفروض بر این منحنیها مماس است.

۳) خطوط جریان توابع شارش مفروض زیر را بیابید.

الف) $g(z) = z$.

ب) $g(z) = \dfrac{1}{z}$، $z \neq 0$.

*۴) مستقیماً تحقیق کنید که $F(z) = z + 1/z$ نگاشت همدیس منحصربه‌فرد (با اختلاف یک ثابت جمعی) از $|z| > 1$ بر خارج یک بازهٔ افقی است با شرط $F(z) \sim z$ در ∞. [راهنمایی: از بسط لوران

$$F(z) = z + A_\circ + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

شروع و از این واقعیت استفاده کنید که ثابت$= \operatorname{Im} F(e^{i\theta})$ (مارکو شویچ، صفحهٔ ۱۸۹).]

۵) الف) نشان دهید که $w = 2z + 1/z$ خارج دایرهٔ واحد را به طور همدیس بر خارج بیضی:

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

می‌نگارد.

ب) نگاشتی همدیس از خارج بیضی $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ بر خارج یک پاره‌خط حقیقی پیدا کنید.
جواب: $F(z) = (3z + \sqrt{z^2 + 8})/4$.

۶) به ازای نگاشت همدیس مفروض f از R به روی U (قرص واحد) و $z_\circ \in R$، نگاشت همدیسی مانند g از R به روی U بیابید که $g(z_\circ) = 0$ و $g'(z_\circ) > 0$.

۷) فرض کنید R همبند ساده باشد و $z_1, z_2 \in R$. نشان دهید که نگاشتی همدیس از R به روی خود وجود دارد که z_1 را به z_2 می‌برد. (دو حالت در نظر بگیرید: $R \neq C$ و $R = C$.)

۸) فرض کنید R یک حوزهٔ همبند ساده باشد و $R \neq C$. نشان دهید که هیچ نگاشت همدیس از $\mathbb{C}$ به روی R وجود ندارد.

۹) فرض کنید R یک حوزهٔ همبند ساده باشد و $z_\circ \in R$. G را مجموعهٔ همهٔ توابع تحلیلی $g : R \to U$ تعریف کنید که $g'(z_\circ) > \circ$. (لازم نیست که g یک‌به‌یک باشد.)

الف) نشان دهید که

$$\sup_{g \in G} g'(z_\circ) = M^* < \infty$$

ب) فرض کنید $\phi'(z_\circ) = M^*$، نشان دهید ϕ بر R یک‌به‌یک است.

[راهنمایی: نشان دهید که ϕ تابع نگاشت ریمان است.]

فصل پانزدهم

قضایای ماکسیمم قدرمطلق برای حوزه‌های بی‌کران

۱۵.۱ قضیهٔ کلی ماکسیمم قدرمطلق

قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق (۱۳.۶) نشان می‌دهد که هر تابعی که بر یک حوزهٔ فشردهٔ D پ- تحلیلی باشد، ماکسیمم قدرمطلق خود را در مرز می‌گیرد. در حالت کلی، اگر حوزه‌های بی‌کران را مورد بررسی قرار دهیم، این قضیه برقرار نیست. مثلاً، $f(z) = e^z$ در نیم‌صفحهٔ راست تحلیلی و بی‌کران است؛ علی‌رغم این که بر مرز این ناحیه $|e^z| = |e^{iy}| = ۱$. معهذا، با تحمیل بعضی از محدودیتها بر رشد یک تابع، می‌توانیم نتیجه بگیریم که این تابع ماکسیمم قدرمطلق خود را در مرز می‌گیرد. طبیعی‌ترین این شرایط این است که این تابع بر D کراندار بماند.

۱.۱۵ قضیه. فرض کنید که f بر حوزهٔ مفروض D پ- تحلیلی باشد. اگر اعداد ثابتی مانند M_1 و M_2 بتوان یافت که

$$|f(z)| \leq M_1 \qquad z \in \partial D \qquad \text{به ازای هر}$$

$$|f(z)| \leq M_2 \qquad z \in D \qquad \text{به ازای هر}$$

آن گاه، در واقع،

$$|f(z)| \leq M_1 \qquad z \in D \qquad \text{به ازای هر}$$

برهان. بدون آن که به کلیت خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که بر ∂D، $|f(z)| \leq 1$. در این صورت، فرض کنید که بر D، $|f(z)| \leq M$. می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای هر $z_0 \in D$، $|f(z_0)| \leq 1$. ابتدا قضیه را در حالت خاصی که D نیم‌صفحهٔ راست است ثابت می‌کنیم و سپس برهان را به حوزه‌های کلی توسیع می‌دهیم.

در حالت نیم‌صفحهٔ راست، $z_0 \in D$ را ثابت بگیرید و تابع کمکی

$$h(z) = \frac{f^N(z)}{z+1}$$

را در نظر بگیرید که در آن N یک عدد صحیح مثبت است. بنابه فرض، بر محور موهومی $|h(z)| \leq 1$ و به ازای هر $z \in D$ که $|z| = R$، $|h(z)| \leq \frac{M^N}{R}$. از این رو، بر مرز نیم‌دایرهٔ راست $D_R = \{z \in D : |z| \leq R\}$ داریم $|h(z)| \leq \max(1, \frac{M^N}{R})$. با انتخاب $R > M^N$ و به اندازهٔ کافی بزرگ به طوری که $z_0 \in D_R$، نتیجه می‌گیریم که بر مرز حوزهٔ فشردهٔ D_R، $|h(z)| \leq 1$؛ از این رو، بنابر قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، $|h(z_0)| \leq 1$. به این ترتیب، به ازای هر $z_0 \in D$

$$\left|\frac{f^N(z_0)}{z_0+1}\right| \leq 1$$

یا

$$|f(z_0)| \leq |z_0+1|^{\frac{1}{N}}$$

حال، اگر $N \to \infty$ ملاحظه می‌کنیم که $|f(z_0)| \leq 1$ که مطلوب ما است.

در حالت کلی، در حالی که D یک ناحیهٔ دلخواه است، باید $1/(z+1)$ را با یک تابع g تعویض کنیم که در D تحلیلی است و $g(z) \to 0$ وقتی که $z \to \infty$. چنین تابعی به صورت

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

تعریف می‌شود که در آن a نقطهٔ ثابتی در D است. واضح است که g، مانند f، در D پ‌ـ تحلیلی است (قضیهٔ ۷.۶). از کرانداری f مطمئن می‌شویم که $g(z) \to 0$ وقتی که $z \to \infty$ و این، به نوبهٔ خود، ایجاب می‌کند که به ازای ثابتی مانند K در سرتاسر $\bar{D}$ داشته باشیم $|g(z)| \le K$.

دوباره، قرار دهید $D_R = \{z \in D : |z| \le R\}$. اگر فرض کنیم $h(z) = f^N(z)g(z)$، به این دلیل که $g \to 0$ وقتی که $z \to \infty$، می‌توانیم R را به قدری بزرگ اختیار کنیم که بر مرز D_R داشته باشیم $|h(z)| \le K$. از این رو، بنابه قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، به ازای هر $z_0 \in D$، $|h(z_0)| \le K$. سپس، با این فرض که $g(z_0) \neq 0$، می‌توانیم بنویسیم

$$|f(z_0)| \le \left|\frac{K}{g(z_0)}\right|^{\frac{1}{N}}$$

و فرض $N \to \infty$ نتیجه می‌دهد که $|f(z_0)| \le 1$. بالاخره، توجه کنید که صفرهای g یک مجموعهٔ گسسته می‌سازند مگر آنکه f ثابت باشد (قضیهٔ ۹.۶)؛ بنابراین، بنابه پیوستگی،

$$|f(z_0)| \le 1 \qquad \text{به ازای هر } z_0 \in D \qquad \square$$

قضیهٔ فوق را می‌توان برای استنتاج قضیهٔ زیر که شکل قویتر قضیهٔ لیوویل است به کار برد.

۲.۱۵ تعریف. فرض کنید γ مسیری باشد که به وسیلهٔ $\gamma = \gamma(t)$، $0 \le t \le \infty$ پارامتری شده است. گوییم f بر γ به بی‌نهایت میل می‌کند در صورتی که به ازای هر عدد طبیعی N نقطه‌ای مانند t_0 موجود باشد به طوری که

$$|f(\gamma(t))| \ge N \qquad \text{به ازای هر } t \ge t_0$$

۳.۱۵ قضیه. اگر f یک تابع تام غیرثابت باشد یک منحنی وجود دارد که بر آن f به بی‌نهایت میل می‌کند.

توجه: یک فرمولبندی معادل قضیهٔ لیوویل (۱۰.۵) این است که، به ازای هر تابع تام غیرثابت f، دنباله‌ای از نقاط z_1، z_2، ... وجود دارد که $f(z_n) \to \infty$ وقتی که $n \to \infty$؛ ولی وجود یک منحنی که بر

آن $f \to \infty$ بلافاصله نتیجه می‌شود. اگر نقاط $z_۱$، $z_۲$، ... را به طور متوالی به هم وصل کنیم، هیچ کنترلی بر رفتار f در نقاط میانی نداریم. برهان قضیه به انتخاب منصفانهٔ نقاط z_k و خطوط ارتباطی بستگی دارد به طوری که بتوانیم تضمین کنیم که بر مسیری که این گونه ساخته می‌شود $f \to \infty$.

برهان قضیهٔ ۳.۱۵. فرض کنید $T_۱ = \{z : |f(z)| > ۱\}$ و $S_۱$ را یک مؤلفهٔ همبند ثابت $T_۱$ بگیرید. به واقعیتهای زیر در مورد $S_۱$ نیاز داریم:

الف) $S_۱$ یک مجموعهٔ باز است.

ب) به ازای هر $z \in \partial S_۱$، $|f(z)| = ۱$.

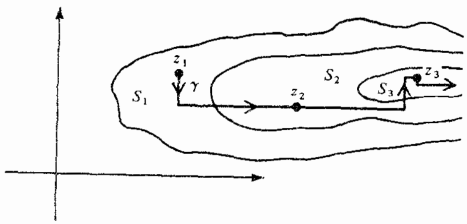
ج) f بر $S_۱$ کراندار است.

(الف) بدیهی است. برای اثبات (ب)، ابتدا توجه می‌کنیم که، بنابه پیوستگی، بر مرز $S_۱$ داریم $|f(z)| \geq ۱$. اگر $z \in \partial S_۱$ی یافت شود که $|f(z)| > ۱$، آن گاه به ازای هر w از یک همسایگی z، $|f(w)| > ۱$ و، به این ترتیب، z یک نقطهٔ داخلی خواهد بود نه یک نقطهٔ مرزی. بالاخره، اگر f بر $S_۱$ کراندار باشد، با اعمال (ب) و قضیهٔ ۱.۱۵ می‌توانیم نشان بدهیم که بر سرتاسر $S_۱$، $|f(z)| \leq ۱$؛ که با تعریف متناقض است.

حال، قرار دهید $T_۲ = \{z \in S_۱ : |f(z)| > ۲\}$ و یک مؤلفهٔ همبند $S_۲$ را انتخاب کنید. (توجه کنید که، بنابه (ج)، $T_۲$ غیرخالی است.) مانند بحث فوق، می‌توانیم ثابت کنیم که f بر $S_۲$ بی‌کران است. با عمل به استقرا، دنباله‌ای از ناحیه‌های

$$S_۱ \supseteq S_۲ \supseteq S_۳ \supseteq \dots$$

به دست می‌آوریم که به ازای هر $z \in S_k$، $|f(z)| > k$.



بالاخره، نقطهٔ $z_k \in S_k$ را به ازای $k = ۱, ۲, \ldots$ انتخاب می‌کنیم. چون هر مجموعهٔ S_k ناحیه‌ای است که همهٔ نقاط z_n به ازای $n \geq k$ را در بر می‌گیرد، می‌توانیم z_k را با یک مسیر چندضلعی γ_k واقع در S_k به $z_{k+۱}$ وصل کنیم. از این رو، به ازای هر $z \in \gamma_k$، $|f(z)| > k$. اگر مسیر $\gamma = \bigcup_{k=۱}^{\infty} \gamma_k$ را بسازیم، نتیجه می‌شود که f بر γ به ∞ میل می‌کند و قضیه ثابت می‌شود.□

۲.۱۵ قضیهٔ فراگمن ـ لیندلف

اکنون به قضایای ماکسیمم قدرمطلق برمی‌گردیم.

قضیهٔ ۱.۱۵ نسبتاً کلی است به این دلیل که در مورد هر ناحیه‌ای به کار می‌رود. از طرف دیگر، اگر خود را به چند ناحیهٔ خاص D محدود کنیم، قادر خواهیم بود که نتیجهٔ مشابهی را با یک فرض بسیار ضعیفتر در مورد f نیز استنتاج کنیم. مانند گذشته، بحث خود را با بررسی نیم‌صفحهٔ راست آغاز می‌کنیم. چنان که قبلاً ملاحظه کردیم، تابع e^z در این حوزه کراندار است، بر خلاف این واقعیت که این تابع بر محور موهومی به ۱ کراندار است. البته، همین حکم در مورد تابع $e^{\delta z}$ به ازای هر $\delta > ۰$ نیز برقرار است. معذالک، اگر $f(z)$ رشدی آهسته‌تر از $e^{\delta z}$ داشته باشد، تعمیم زیر از قضیهٔ ۱.۱۵ را داریم.

۲.۱۵ قضیهٔ فراگمن ـ لیندلف فرض کنید D نیم‌صفحهٔ راست و f تابعی پ‌ـ تحلیلی بر D باشد. اگر بر محور موهومی داشته باشیم

$$|f(z)| \leq ۱ \qquad (۱)$$

و به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک ثابت A_ε موجود باشد به طوری که بر سرتاسر D داشته باشیم

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |z|} \qquad (۲)$$

آن گاه (۱) به ازای هر $z \in D$ برقرار است.

قبل از اقامهٔ برهان، لم زیر که یک شکل نسبتاً ضعیفی از قضیه محسوب می‌شود مورد نیاز است.

لم ۱. فرض کنید که f در نیم‌صفحهٔ راست D تابعی پ‌ـ تحلیلی باشد. اگر بر محور موهومی داشته باشیم

$$|f(z)| \leq ۱ \qquad (۳)$$

و به ازای یک $\delta > ۰$ ثابتهایی مانند A و B موجود باشند به طوری که به ازای هر $z \in D$ داشته باشیم

$$|f(z)| \le A \exp(B|z|^{۱-\delta}) \tag{۴}$$

آن گاه (۳) بر D برقرار است.

برهان لم. تابع کمکی

$$h(z) = \frac{f^N|z|}{\exp(z^{۱-\delta/۲})}$$

را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر $z_۰ \in D$، $|h(z_۰)| \le ۱$. ابتدا مخرج $g(z) = \exp(z^{۱-\frac{\delta}{۲}})$ را تحلیل می‌کنیم. در نیم‌صفحهٔ راست باز، $z^{۱-\frac{\delta}{۲}}$ را می‌توان به عنوان تابعی تحلیلی تعریف کرد (به توضیح بعد از قضیه ۸.۸ نگاه کنید). برای ثابت نگه داشتن مقدار تابع، آن را روی محور حقیقی مثبت، مثبت می‌گیریم. در این صورت، به ازای $z = re^{i\theta}$ که $-\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$،

$$z^{۱-\frac{\delta}{۲}} = r^{۱-\frac{\delta}{۲}} e^{i\theta(۱-\frac{\delta}{۲})}, \qquad -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$$

که آن نیز تا مرز پیوسته است.

بالاخره،

$$g(z) = \exp(z^{۱-\delta}) = \exp(r^{۱-\delta} e^{i\theta(۱-\frac{\delta}{۲})})$$

از این رو، به ازای $z = iy$،

$$|g(z)| = \exp\left(|y|^{۱-\delta} \cos(۱-\frac{\delta}{۲})\frac{\pi}{۲}\right) \ge e^۰ = ۱ \tag{۵}$$

و به ازای $z \in D$ و $|z| = R$،

$$|g(z)| = \exp(R^{۱-\frac{\delta}{۲}} \cos(۱-\frac{\delta}{۲})\theta) \ge \exp(R^{۱-\frac{\delta}{۲}} m) \tag{۶}$$

که در آن m مینیمم مقدار

$$\cos(۱-\frac{\delta}{۲})\theta, \qquad -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$$

است.

حال، $|h(z)|$ را بر مرز D_R مورد بررسی قرار می‌دهیم. به استناد (۳) و (۵)، بر محور موهومی، $|h(z)| \le ۱$. به ازای $|z| = R$، بنابر (۴) و (۶)،

$$|h(z)| \le A^N \exp(NBR^{۱-\delta} - mR^{۱-\frac{\delta}{۲}})$$

چون عبارت داخل پرانتز به $-\infty$ میل می‌کند وقتی که $R \to \infty$، به ازای R به قدر کافی بزرگ، بر مرز D_R داریم $|h(z)| \leq ۱$. دوباره، با توسل به قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق، متوجه می‌شویم که به ازای $z_\circ \in D$،

$$|h(z_\circ)| \leq ۱$$

و به این ترتیب،

$$|f(z_\circ)| \leq \exp(z_\circ^{۱-\frac{\delta}{۲}})|^{\frac{۱}{N}}$$

بالاخره، فرض $N \to \infty$، نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد. □

تبصره. اگرچه این لم در نیم‌صفحهٔ راست بیان شد، واضح است که در هر نیم‌صفحهٔ دیگری نیز برقرار است. مثلاً، اگر f در نیم‌صفحهٔ بالایی در شرایط رشد (۳) و (۴) صدق کند، $g(z) = f(-iz)$ در مفروضات لم صدق خواهد کرد. بنابراین، در نیم‌صفحهٔ راست $g \ll ۱$ و در نیم‌صفحهٔ بالایی $f \ll ۱$.

به طریق مشابه، با نگاشت سایر حوزه‌ها به طور تحلیلی به نیم‌صفحهٔ راست، می‌توانیم احکامی شبیه احکام لم ۱ را در مورد توابعی که در ناحیهٔ مفروض پ۔ تحلیلی می‌باشند نتیجه بگیریم. مثالی می‌آوریم که لم دیگری برای قضیهٔ ۴.۱۵ محسوب می‌شود.

لم ۲. فرض کنید f بر یک ربع صفحه پ ـ تحلیلی باشد. اگر بر مرز این ناحیه $|f(z)| \leq ۱$ و اگر به ازای یک $\delta > \circ$ ثابتهایی مانند A و B موجود باشند به طوری که به ازای هر z از این ربع صفحه

$$|f(z)| \leq A\exp(B|z|^{۲-\delta})$$

آن گاه بر سرتاسر این ربع صفحه، $|f(z)| \leq ۱$.

برهان لم ۲. بی‌آنکه خللی بر کلیت وارد شود، ربع اول را در نظر می‌گیریم. قرار دهید $g(z) = f(\sqrt{z})$. آن گاه g در نیم‌صفحهٔ بالایی پ۔ تحلیلی است. بعلاوه، بنابر مفروضات روی f، بر مرز نامساوی $|g(z)| \leq ۱$ و بر نیم‌صفحه نامساوی

$$|g(z)| \leq A\exp(B|z|^{۱-\frac{\delta}{۲}})$$

برقرار است. بنابر لم ۱، بر سرتاسر نیم‌صفحه $|g(z)| \leq ۱$ و، از این رو، به ازای هر نقطهٔ z از ربع صفحهٔ مفروض $|f(z)| \leq ۱$.□

برهان قضیهٔ ۴.۱۵. تابع

$$h(z) = \frac{f^N(z)}{e^z}$$

را در نظر بگیرید. مانند قبل، قضیه ثابت خواهد شد در صورتی که بتوانیم نشان بدهیم که بر سرتاسر نیم‌صفحهٔ راست $|h(z)| \leq ۱$. برای انجام این کار، چارکهای اول و چهارم را جداگانه بررسی می‌کنیم. برای برآورد $h(z)$ در مرز ربع اول، توجه کنید که $|e^{iy}| = ۱$ و بنابراین، به استناد (۱)،

$$|h(z)| \leq ۱ \qquad \text{بر محور موهومی مثبت،}$$

همچنین، بنابه (۲)، $|f(z)| \leq A_{\frac{۱}{N}} e^{(\frac{۱}{N})|z|}$. از این رو، اگر قرار دهیم $B_N = (A_{\frac{۱}{N}})^N$، متوجه می‌شویم که بر این نیم‌صفحه $|f^N(z)| \leq B_N e^{|z|}$. ولی بر محور x مثبت، $|e^z| = e^{|z|}$ و بنابراین به ازای $z > ۰$، $|h(z)| \leq B_N$. از این رو، بر مرز ربع اوّل $|h(z)| \leq \max(۱, B_N)$. بعلاوه، در ربع اوّل

$$|h(z)| \leq |f^N(z)| \leq B_N e^{|z|}$$

لذا می‌توانیم با اعمال لم ۲ نتیجه بگیریم که در ربع اوّل

$$|h(z)| \leq \max(۱, B_N)$$

دقیقاً به همین دلیل، در ربع چهارم

$$|h(z)| \leq \max(۱, B_N)$$

بنابراین $h(z)$ یک تابع پ- تحلیلی کراندار بر نیم‌صفحهٔ راست است و بر محور موهومی به ۱ کراندار است. بنابه قضیهٔ ۱.۱۵، بر نیم‌صفحهٔ راست، $|h(z)| \leq ۱$ و برهان تمام است. □

با نگاشت یک گوه به زاویهٔ α بر نیم‌صفحهٔ راست، نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

۵.۱۵ نتیجه. فرض کنید

$$D = \{z : -\frac{\alpha}{۲} < \arg z < \frac{\alpha}{۲}\}, \qquad ۰ < \alpha \leq ۲\pi$$

و فرض کنید که f بر D یک تابع پ- تحلیلی باشد. اگر بر مرز D،

$$|f(z)| \leq ۱ \tag{۱}$$

و به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عدد ثابتی مانند A_ε موجود باشد به طوری که

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon \exp(\varepsilon |z|^{\pi/\alpha}) \qquad (۲)$$

آن گاه (۱) بر سرتاسر D برقرار است.

برهان. به ازای f بالا، $g(z) = f(z^{\alpha/\pi})$ را بر نیم‌صفحهٔ راست در نظر بگیرید و قضیهٔ ۴.۱۵ را به کار برید. □

حالت خاص جالب این نتیجه وقتی پیش می‌آید که یک گوه به زاویهٔ ۲π را انتخاب کنیم (کل صفحه در امتداد یک شعاع شکاف برمی‌دارد.) در این حالت، مرز ناحیه یک شعاع است و، به استناد نتیجهٔ‌بالا، اگر f بر این شعاع کراندار باشد و به ازای هر $\varepsilon > \circ$ دارای رشدی کمتر از $e^{\varepsilon\sqrt{|z|}}$ باشد، بر سرتاسر این گوه کراندار است. حال، می‌توانیم هر تابع تام را یک تابع پ- تحلیلی بر گوه‌ای به زاویهٔ ۲π بدانیم. این بحث به قضیهٔ زیر منجر می‌شود.

۶.۱۵ قضیه. اگر f یک تابع تام غیرثابت باشد و به ازای هر $\varepsilon > \circ$ یک عدد ثابت A_ε موجود باشد به طوری که

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{\sqrt{|z|}}$$

آن گاه $f(z)$ در روی هر شعاع بی‌کران است.

برهان. اگر f بر یک شعاع R کراندار باشد، بنابه نتیجهٔ ۵.۱۵، برگوهٔ $\mathbb{C} - R$ نیزکراندار است؛ یعنی f در تمام صفحه کراندار خواهد بود. ولی، بنابه قضیهٔ لیوویل، f به تابع ثابت تقلیل می‌یابد، که متناقض با مفروضات قضیه است. □

مثال. $\cos z$ دارای سری توانی با جمل زوج است. از این رو، $\cos\sqrt{z}$ یک تابع تام است که بر محور x مثبت کراندار است. بنابراین، بنابه قضیهٔ فوق، باید به ازای یک $\varepsilon > \circ$ دارای رشد $e^{\varepsilon\sqrt{|z|}}$ باشد. اگر قرار دهیم

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲}$$

دیده می‌شود که این واقعاً اتفاق می‌افتد. (z را در طول محور منفی x در نظر بگیرید.)

کاربردقضیهٔ ۶.۱۵. معادلهٔ دیفرانسیل $f'(z) = -f(z)$ دارای جواب صریح $f(z) = Ae^{-z}$ است ولی اگر معادلهٔ خیلی شبیه زیر را در نظر بگیریم

$$f'(z) = -f(\frac{z}{۲}) \tag{۱}$$

چنین جواب صریحی را نمی‌توان به دست آورد. معهذا، می‌توانیم رفتار یک جواب $f(z)$ را وقتی که z در امتداد محور x مثبت به ∞ میل کند بررسی کنیم. برای انجام این کار، جواب را برحسب سری توانی پیدا می‌کنیم که، در واقع، یک تابع تام است. بعلاوه، نشان می‌دهیم که جواب دارای رشد «کوچک» است که در این صورت قضیهٔ ۶.۱۵ قابل اعمال و f بر هر شعاع بی‌کران است. از این رو، برخلاف Ae^{-z}، جواب (۱) وقتی که $z \to +\infty$ دارای حد نیست. جزئیات به صورت زیر است.

۷.۱۵ قضیه. فرض کنید f یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $f'(z) = -f(\frac{z}{۲})$ باشد که در $z = ۰$ تحلیلی است. آن گاه تابع f تام و بر هر شعاع بی‌کران است.

برهان. فرض کنید f دارای نمایشی به یک سری توانی به صورت زیر باشد

$$f(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k z^k$$

بنابه (۱)، باید داشته باشیم

$$\sum_{k=۱}^{\infty} k a_k z^{k-۱} = -\sum_{k=۱}^{\infty} a_k (\frac{z}{۲})^k$$

یا

$$a_k = -\frac{a_{k-۱}}{۲^{k-۱} k}$$

در این صورت، به استقرا، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{(-۱)^n a_۰}{n! ۲^{n(n-۱)/۲}}$$

از این رو، f به وسیلهٔ

$$f(z) = A \sum_k b_k z^k$$

تعریف می‌شود که در آن

$$b_k = \frac{(-۱)^k}{k!۲^{k(k-۱)/۲}} \qquad (۲)$$

و یک بررسی ساده نشان می‌دهد که (۲) نمایش یک جواب تام برای (۱) است.

حال، نشان می‌دهیم که f در مفروضات ۶.۱۵ صدق می‌کند. برای این منظور، ε را ثابت می‌گیریم و نشان می‌دهیم که به ازای z به اندازهٔ کافی بزرگ،

$$|f(z)| < \exp(|z|^\varepsilon)$$

فرض کنید که $|z| = R = ۲^N$ و $N > ۲$، و قرار دهید

$$M = M(۱), \qquad M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$$

مطابق (۱)،

$$f(z) - f(۰) = \int_۰^z f'(\rho)d\rho = \int_۰^z -f(\frac{\rho}{۲})d\rho$$
$$\ll RM(\frac{R}{۲})$$

که در این صورت

$$|f(z)| \ll ۲RM(\frac{R}{۲})$$

اگر به ازای یک $z_۱ \in D(۰\,; R/۲)$ قرار دهیم $|f(z_۱)| = M(R/۲)$ و به استقرا عمل کنیم، خواهیم داشت

$$|f(z)| \leq MR^N = M|z|^{|\log z|/\log ۲} \qquad (۳)$$

طرف راست (۳) به ازای هر z به اندازهٔ کافی بزرگ از بالا به $\exp(|z|^\varepsilon)$ کراندار است؛ از این رو، $R_۰ = R_۰(\varepsilon)$ به دست می‌آوریم به طوری که به ازای هر z با $|z| \geq R_۰$،

$$|f(z)| < \exp(|z|^\varepsilon)$$

که همان مطلوب ما است. □

تمرین

۱) نشان دهید که نتایج قضیهٔ ۱.۱۵ برقرار است اگر ما فقط تأکید کنیم که بر مرز حوزه $1 \gg f$ و در سرتاسر حوزه $f(z) \ll \log z$.

۲) «کوچکترین» تابع تحلیلی غیر ثابت در ربع $D = \{x + iy : x, y < 0\}$ که بر مرز کراندار باشد چیست؟

۳) نشان دهید که بر مرز ناحیهٔ
$$D = \{x + iy : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$$
$1 \gg e^{e^z}$. نشان دهید که این تابع «کوچکترین» تابع تحلیلی با این ویژگی است.

۴) فرض کنید g تابع تام غیر ثابت باشد که بر هر شعاع کراندار است. (۲.۱۲ را ببینید.). نشان دهید که به ازای هر A و B نقطه‌ای مانند z موجود است که $|g(z)| > A\exp(|z|^B)$. [راهنمایی: اگر چنین نباشد، صفحه را به تعداد متناهی از گوه‌های خیلی کوچک تقسیم کنید و قضیهٔ ۵.۱۵ و لیوویل را به کار برید تا نشان دهید که g ثابت است.]

فصل شانزدهم

توابع همساز

۱۰۱۶ فرمولهای پواسن و مسألهٔ دیریکله

در این فصل توجه خود را بر قسمتهای حقیقی توابع تحلیلی و ارتباط آنها با توابع همساز متمرکز می‌کنیم.

۱.۱۶ تعریف. تابع حقیقی ـ مقدار $u(x, y)$ را بر D همساز می‌نامند در صورتی که u در سرتاسر D به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد و در معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

صدق کند.

گرچه می‌توان از توابع همساز مختلط ـ مقدار صحبت کرد، در این فصل جملهٔ «همساز» همواره به توابع حقیقی ـ مقدار اطلاق می‌شود.

۲.۱۶ قضیه. اگر $f = u + iv$ بر D تحلیلی باشد، u و v بر D همسازند.

برهان. چون f تحلیلی است، u و v دارای مشتقات جزئی پیوسته از همهٔ مراتب هستند. بنابه معادلات کوشی ـ ریمان،

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

در این صورت،

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

بنابراین، u همساز است. بنابه همان بحث، v نیز همساز است چون قسمت حقیقی تابع تحلیلی $-if$ است. □

عکس حکم بالا درست نیست. مثلاً

$$u(x,y) = \log(x^۲ + y^۲)$$

در صفحهٔ بدون مبداء همساز است ولی قسمت حقیقی هیچ تابع تحلیلی در آنجا نیست. (تمرین ۴ را ببینید.) عکس گونهٔ زیر را داریم:

۳.۱۶ قضیه. اگر u بر D همساز باشد، آن گاه

الف) u_x جزء حقیقی یک تابع تحلیلی بر D است؛

ب) اگر D همبند ساده باشد، u جزء حقیقی یک تابع تحلیلی در D است.

برهان.

الف) فرض کنید $f = u_x - iu_y$. چون $u \in C^۲$، f دارای مشتق جزیی مرتبهٔ اول پیوسته است. بعلاوه، چون u همساز است،

$$f_y = u_{xy} - iu_{yy} = u_{yx} + iu_{xx} = if_x$$

در این صورت، f در معادلات کوشی ـ ریمان صدق کند. بنابراین، f بر D تحلیلی است.

ب) اگر D همبند ساده باشد، بنابه قضیهٔ انتگرال (۵.۸)، $f = u_x - iu_y$ مشتق تابعی تحلیلی مانند F است. اگر فرض کنیم $F = A + iB$، خواهیم داشت:

$$F'(z) = A_x + iB_x = A_x - iA_y = u_x - iu_y$$

در این صورت،

$$A(x, y) = u(x, y) + C$$

بنابراین، $u(x, y)$ جزء حقیقی تابع تحلیلی $F(z) - C$ است. □

مثال. $u(x, y) = x - e^x \sin y$ بر کل صفحه همساز است. بنابراین

$$f(z) = u_x(z) - iu_y(z) = 1 - e^x \sin y + ie^x \cos y$$

یک تابع تام است. در واقع، $f(z) = 1 + ie^z$ و اگر قرار دهیم

$$F(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi = z + ie^z - i$$

آن گاه

$$u(z) = \operatorname{Re} F(z)$$

این واقعیت که یک تابع همساز، حداقل به صورت موضعی، جزء حقیقی یک تابع تحلیلی است ما را مجاز می‌کند که قسمتی از نظریهٔ توابع تحلیلی را در مورد توابع همساز به کار بریم.

۴.۱۶ قضیهٔ مقدار میانگین برای توابع همساز اگر f بر $D(z_0; R)$ همساز باشد، به ازای هر $0 < r$ که $r < R$،

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

برهان. فرض کنید $u = \operatorname{Re} f$. بنابه ۱۲.۶،

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

و حکم مطلوب از تساوی قسمتهای حقیقی رابطهٔ بالا به دست می‌آید. □

۵.۱۶ قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق برای توابع همساز اگر u یک تابع همساز غیرثابت بر حوزهٔ D باشد، u دارای نقاط ماکسیمم و مینیمم در D نیست.

برهان. این قضیه را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ میانگین بالا به دست آورد. معهذا، حتی بسیار سریعتر از آن از قضیهٔ نگاشت باز (۱.۷) نتیجه می‌شود. زیرا، در گوی $D(z_\circ;\delta) \subseteq D$ به مرکز نقطهٔ دلخواه $z_\circ \in D$، u جزء حقیقی یک تابع تحلیلی f است. چون f قرص $D(z_\circ;\delta)$ را به روی یک مجموعهٔ باز می‌نگارد، u مقادیر بیشتر و کمتر از $u(z_\circ)$ را در این گوی می‌گیرد.□

توجه کنید که قضیهٔ ماکسیمم قدرمطلق برای توابع تحلیلی فقط بیان می‌کند که $|f|$ دارای نقطهٔ ماکسیمم درونی نیست. $|f|$ می‌تواند مینیمم موضعی داشته باشد اگر برابر صفر باشد. در مقابل، قضیهٔ ۵.۱۶ نشان می‌دهد که یک تابع همساز غیرثابت دارای نقاط ماکسیمم و مینیمم در درون یک حوزه نیست.

ما اصطلاح پ- همساز را به توابعی اطلاق می‌کنیم که در درون یک حوزه همساز باشند و بر بستار آن حوزه پیوسته باشند. در این صورت، قضیهٔ پیشین نتیجه می‌دهد که هر تابع که در یک حوزهٔ فشرده پ-همساز باشد مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را بر مرز این حوزه اختیار می‌کند.

۶.۱۶ نتیجه. اگر دو تابع پ- همساز u_1 و u_2 بر مرز یک حوزهٔ فشردهٔ D با هم برابر باشند، آن‌گاه بر سرتاسر D، $u_1 = u_2$.

برهان. $u = u_1 - u_2$ بر D پ- همساز است؛ بنابراین ماکسیمم و مینیمم خود را در مرز می‌گیرد. چون بر مرز $u \equiv 0$، نتیجه می‌شود که $u \equiv 0$ بر سرتاسر D و $u_1 \equiv u_2$.

نتیجهٔ ۶.۱۶ نشان می‌دهد که یک تابع پ- همساز در یک حوزهٔ فشرده به وسیلهٔ مقادیرش در مرز مشخص می‌شود. ولی این نتیجه دارای یک طبیعت کاملاً نظری است. این که چگونه می‌توان مقدار تابع را در یک نقطهٔ درونی از مقادیر u در مرز به دست آورد موضوع قضیهٔ آتی است.

بحث خود را با توابع پ- همساز بر گوی واحد شروع می‌کنیم.

۷.۱۶ قضیه. فرض کنید که u در $D(0;1)$ پ- همساز باشد. آن گاه

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})K(\theta,z)d\theta$$

که در آن $K(\theta,z)$ «هستهٔ پواسن» است:

$$K(\theta,z) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right]$$

در شکل قطبی،

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} \frac{u(e^{i\theta})(۱-r^۲)}{۱-۲r\cos(\theta-\varphi)+r^۲}d\theta$$

برهان. [برای سهولت نمادگذاری، فرض کنید که $u = \operatorname{Re} f$ که در آن f بر گوی واحد بسته تحلیلی است. برای تحقق فرض قضیه، ابتدا می‌توانیم قضیه را در مورد $u^*(z) = u(rz)$ که $r < ۱$ ثابت کنیم و سپس حد بگیریم وقتی که $r \to ۱$؛ زیرا u بر $\overline{D(۰\,;۱)}$ به طور یکنواخت پیوسته است.]

بنا به فرمول انتگرال کوشی(۴.۶)،

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|z|=۱} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

یا

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(e^{i\theta})\left[\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right]d\theta \qquad (۱)$$

اگر به جای z نقطهٔ متقارن $۱/\bar{z}$ را قرار دهیم که در خارج گوی واحد قرار دارد، آن گاه بنابه قضیهٔ منحنی بستهٔ (۶.۸)،

$$۰ = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|\zeta|=۱} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{۱}{\bar{z}}}d\zeta$$

یا

$$۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(e^{i\theta})\left[\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-\frac{۱}{\bar{z}}}\right]d\theta \qquad (۲)$$

توجه کنید که

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-\frac{۱}{\bar{z}}} = \frac{\bar{z}e^{i\theta}}{\bar{z}e^{i\theta}-۱} = \frac{-\bar{z}}{e^{-i\theta}-\bar{z}}$$

$$= ۱ - \frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}-\bar{z}} = \overline{\left[۱ - \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right]}$$

در این صورت، تفریق (۲) از (۱) نتیجه می‌دهد که

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(e^{i\theta})\left[\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} + \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right)} - ۱\right]d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(e^{i\theta})\left[۲\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right) - ۱\right]d\theta$$

یا

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(e^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right] d\theta \qquad (۳)$$

بالاخره، از تساوی قسمتهای حقیقی، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$u(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} u(e^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right] d\theta \qquad \square \qquad (۴)$$

با نگاشت گوی واحد به روی حوزه‌های دیگر، می‌توانیم نتیجهٔ مشابهی را در مورد هر حوزهٔ همبند ساده به دست آوریم. مثلاً، اگر u در $D(۰\,;R)$ همساز باشد و $u = \operatorname{Re} f$ ، می‌توانیم نتایج فوق را در مورد $g(\zeta) = f(R\zeta)$ به کار بریم. از این رو،

$$f(R\zeta) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(Re^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\right] d\theta$$

و اگر قرار دهیم $R\zeta = z$، خواهیم داشت:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(Re^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right] d\theta \qquad (۵)$$

$$u(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} u(Re^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right] d\theta \qquad (۶)$$

فرمول بالا به فرمول انتگرال پواسن در مورد یک قرص مشهور است. فرمول پواسن در مورد یک تابع همساز کراندار در یک نیم‌صفحه،

$$u(x+iy) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t)}{(t-x)^۲ + y^۲} dt \qquad (۷)$$

در تمرین ۶ استنتاج می‌شود.

مسألهٔ دیریکله. مسألهٔ دیریکله مسألهٔ اثبات وجود تابع u است که در یک حوزه پ- همساز است و مقادیر مرزی مفروضی را می‌گیرد. این با وضعیتی که در بخش اخیر ملاحظه کردیم متفاوت است که در آن یک تابع u در حوزه‌ای پ- همساز بود و در جستجوی فرمولی برای u برحسب مقادیر مرزی بودیم. معذالک، قضایای قبلی یک نقطهٔ شروع پیشنهاد می‌کنند. مثلاً، فرض کنید که D گوی واحد باشد. در این صورت، اگر u یک تابع همساز بر D با مقادیر حدی $u(e^{i\theta})$ بر مرز باشد، u الزاماً به صورت

$$u(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} u(e^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right] d\theta$$

یا

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

است.

این واقعیت که انتگرال پواسن در واقع جوابی برای مسألهٔ دیریکله فراهم می‌کند ذیلاً ثابت می‌شود.

۸.۱۶ قضیه. فرض کنید $u(e^{i\theta})$ بر $C(0;1)$ پیوسته باشد. آن گاه

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})K(\theta,z)d\theta$$

تحدید به $D(0;1)$ یک تابع پ- همساز در قرص واحد بسته با مقادیر مرزی $u(e^{i\theta})$ است.

برهان. فرض کنید

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right]d\theta, \qquad |z|<1$$

چون به ازای هر θ تابع $\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}$ یک تابع تحلیلی از z است و g پیوسته است، بنابه قضیهٔ موررا، g بر $D(0;1)$ تحلیلی است. بعلاوه، $u(z) = \operatorname{Re} g(z)$؛ که از این رو u همساز است. برای این که نشان بدهیم که u دارای حد $u(^{i\theta})$ است وقتی که $z \to e^{i\theta}$، به خوّاص زیرین از هستهٔ پواسن توجه می‌کنیم:

$$K(\theta,z) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}, \qquad z = re^{i\varphi} \tag{8}$$

(i) $K(\theta,z) > 0$.

صورت کسر با لبداهه مثبت است و مخرج بزرگتر از $(1-r)^2$ است.

(ii) $(\frac{1}{2\pi})\int_0^{2\pi} K(\theta,z)d\theta = 1$.

این خاصیت با استفاده از فرمول پواسن (۷.۱۶) با شرط $u \equiv 1$ نتیجه می‌شود.

(iii) به ازای هر $\delta > 0$، $[\int_0^{\varphi-\delta} K(\theta,z)d\theta + \int_{\varphi+\delta}^{2\pi} K(\theta,z)d\theta] \to 0$ وقتی که $z \to e^{i\varphi}$.

توجه کنید که مخرج (۸) به ازای $|\theta-\varphi| > \delta$ دور از صفر است در حالی که صورت به صفر میل می‌کند وقتی که z به مرز نزدیک شود.

مطابق (ii) می‌توان نوشت:

$$u(re^{i\varphi}) - u(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(e^{i\theta}) - u(e^{i\varphi})]K(\theta,z)d\theta$$

فرض کنید $M = \max_\theta |e^{i\theta}|$. بنابه پیوستگی u، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض یک $\delta > 0$ می‌توان یافت به طوری که هرگاه $|\theta - \varphi| < \delta$ آن گاه $|u(e^{i\theta}) - u(e^{i\varphi})| < \varepsilon$. از این رو، بنابه (ii) و (iii)،

$$\begin{aligned}|u(e^{i\theta}) - u(e^{i\varphi})| \leq & \frac{M}{\pi}\left[\int_0^{\varphi-\delta} K(\theta,z)d\theta + \int_{\varphi+\delta}^{2\pi} K(\theta,z)d\theta\right] \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \varepsilon K(\theta,z)d\theta \\ \leq & \frac{M}{\pi}\left[\int_0^{\varphi-\delta} K(\theta,z)d\theta + \int_{\varphi+\delta}^{2\pi} K(\theta,z)d\theta\right] + \varepsilon\end{aligned}$$

و وقتی که $r \to 1$،

$$\overline{\lim}|u(re^{i\varphi}) - u(e^{i\varphi})| \leq \varepsilon$$

بنابراین،

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\varphi}) = u(e^{i\varphi}) \tag{9}$$

چون u بر دایرهٔ واحد پیوسته فرض شده است و u بر قرص مفروض همساز (و لذا پیوسته) است، از (۹) نتیجه می‌شود که u بر $\bar{D}$ پیوسته است و بر مرز مقادیر مفروض را می‌گیرد. □

ملاحظات.

۱) بنابه نتیجهٔ ۶.۱۶ جواب بالا برای مسألهٔ دیریکه منحصربه‌فرد است.

۲) بحث فوق نشان می‌دهد که به ازای هر تابع انتگرالپذیر u بر دایرهٔ واحد، تابعی همساز در $D(0;1)$ با حدّ $u(e^{i\varphi})$ در تمام نقاط پیوستگی u در مرز وجود دارد.

۳) با بررسی نگاشت همدیس مناسب f از D به روی U، می‌توانیم مسألهٔ دیریکه را در هر حوزهٔ همبند ساده حل کنیم. برای تعیین تابع همساز u_1 در D با مقادیر مرزی مفروض، ابتدا تابع همساز u_2 را در U با مقادیر مرزی $u_1(f^{-1}(z))$ مشخص می‌کنیم. چون u_2 جزء حقیقی تابع تحلیلی g است،

$$u_1(z) = u_2(f(z)) = \operatorname{Re} g(f(z))$$

تابع تحلیلی مطلوب در D است.

۴) در بسیاری از حالات ساده، جواب صریح مسألهٔ دیریکه را می‌توان (بدون ارجاع به انتگرال پواسن) با مشخص کردن یک تابع تحلیلی با جزء حقیقی مناسب به دست آورد.

امثله

(i) برای تعیین تابع پ- همساز u در $D(\circ\,;\,۱)$ با مقادیر مرزی $u(x,y)=x^۲$ ، توجه کنید که

$$\operatorname{Re} z^۲ = x^۲ - y^۲$$

همه جا همساز است و بر مرز با $۲x^۲ - ۱$ مساوی است. بنابراین،

$$u(x,y) = \frac{۱}{۲}(x^۲ - y^۲) + \frac{۱}{۲}$$

با انتخاب ترکیبات خطی تابع فوق با چندجمله‌ای همساز ۱، x، y و xy می‌توانیم یک تابع پ-همساز در $D(\circ\,,\,۱)$ با مقادیر مرزی مساوی با چندجمله‌ای مربعی مفروضی در $C(\circ\,;\,۱)$ پیدا کنیم.

(ii) $\log r = \operatorname{Re}\log z$ یک تابع همساز در صفحهٔ بدون مبداء $z \neq \circ$ است که فقط به قدرمطلق بستگی دارد [اگرچه $\log z$ فقط در صفحهٔ شکافدار تحلیلی است، $\operatorname{Re}\log z = \log|z|$ پیوسته است و لذا در صفحهٔ بدون مبداء تام است.] به این ترتیب، اگر A طوق $r_۱ \leq |z| \leq r_۲$ باشد، می‌توانیم یک تابع همساز در A با مقادیر ثابت دلخواه در دایره‌های درونی و بیرونی با فرض $u(re^{i\varphi}) = a\log r + b$ به ازای a و b مناسب پیدا کنیم.

کاربردی در مسایل حرارت. فرض کنید یک جسم صلب را در نظر بگیریم که درجهٔ حرارت u آن در یک جهت ثابت باشد (این نمونهٔ قابل قبولی برای جسم صلب استوانه‌ای عایق‌دار یا یک جسم صلب استوانه‌ای «خیلی دراز» است.) اگر فرض کنیم که درجهٔ حرارت از زمان مستقل است، آن گاه با این تصور که جسم صلب مفروض در حوزه‌ای از صفحهٔ z قرار دارد، حرارت فقط به وضعیت x و y وابسته است و می‌توان نشان داد که یک تابع همساز است. (پیوست الف را ببینید.) به این دلیل، معادلهٔ لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = \circ$ بعضی از مواقع معادلهٔ گرما نامیده می‌شود و مسایل دیریکه را مسایل مقادیر مرزی حرارت می‌توان در نظر گرفت. ازاین رو، چنین مسایلی را می‌توان با روشهای بحث شده حل کرد. غالباً این تدبیر مؤثر واقع می‌شود که ابتدا حوزهٔ مفروض را به حوزهٔ ساده‌تری بنگاریم که در آن یک جواب مسألهٔ مفروض معلوم است.

امثله

۱) فرض کنید که طوق $۱ \leq |z| \leq ۲$ مقطع یک جسم صلب استوانه‌ای «نامتناهی» باشد که با درجهٔ حرارت ۱۰۰° در لبهٔ بیرونی و درجهٔ حرارت $\circ^\circ$ در لبهٔ درونی نگهداری می‌شود. در این صورت،

مانند مثال قبل، درجهٔ حرارت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$u(re^{i\phi}) = \left(\frac{\log r}{\log ۲}\right) ۱۰۰^\circ$$

به‌ویژه، خط تک دما با دمای ۵۰° دایرهٔ به شعاع $\sqrt{۲}$ است.

۲) حال تابع حرارت «حالت پایا» در قرص واحد را با مقدار مرزی ۱ در نیم‌دایرهٔ بالا و ۰ در نیم‌دایرهٔ پایین پیدا می‌کنیم. توجه کنید که $w = (z-۱)/(z+۱)$ این قرص را بر نیم‌صفحهٔ چپ می‌نگارد به طوری که نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی، به ترتیب، بر محورهای موهومی مثبت و منفی نگاشته می‌شوند. در نیم‌صفحهٔ چپ، $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Im} \log z$ همساز با مقادیر مرزی $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ است که در این صورت

$$\frac{۳}{۲} - \frac{\operatorname{Arg} z}{\pi}$$

دارای مقادیر مرزی مطلوب است. از این رو، جواب مسأله عبارت است‌از

$$\varphi(z) = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{\pi} \operatorname{Arg}\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)$$

۲.۱۶ قضایای لیوویل در مورد $\operatorname{Re} f$؛ صفرهای توابع تام از مرتبهٔ متناهی

قضیهٔ‌زیر فرمولی بسیار شبیه فرمول انتگرال پواسن برای مقدار یک تابع پ- تحلیلی در $D(۰\,;R)$ برحسب جزء حقیقی‌اش معرفی می‌کند. این قضیه، به نوبهٔ خود، ما را قادر می‌سازد که برآوردهایی از مقادیر یک تابع تام از طریق محدودیتهایی که فقط بر جزء حقیقی تابع اعمال شده‌اند به دست آوریم.

۹.۱۶ قضیه. اگر $f = u + iv$ در $D(۰\,;R)$ پ- تحلیلی باشد آن گاه

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} u(\mathrm{Re}^{i\theta}) \left[\frac{\mathrm{Re}^{i\theta} + z}{\mathrm{Re}^{i\theta} - z}\right] d\theta + iv(۰)$$

برهان. قبلاً (در تعقیب قضیهٔ ۷.۱۶) ثابت کرده‌ایم که اگر $f = u + iv$ پ- تحلیلی در $D(۰\,;R)$ باشد آن‌گاه

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(\mathrm{Re}^{i\theta}) \operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{Re}^{i\theta} + z}{\mathrm{Re}^{i\theta} - z}\right] d\theta \qquad (۱)$$

بعلاوه، به طوری که در برهان ۸.۱۶ (به‌ازای $R = ۱$) توجه کردیم،

$$g(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(\mathrm{Re}^{i\theta})\left[\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z}\right]d\theta \tag{۲}$$

نیز در $D(۰;R)$ تحلیلی است. ولی مقایسهٔ (۱) و (۲) نشان می‌دهد که f و g دارای قسمتهای حقیقی یکسان هستند:

$$\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, g(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(\mathrm{Re}^{i\theta})\,\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z}\right]d\theta$$

بنابراین

$$f(z) = g(z) + i\lambda$$

یا

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(\mathrm{Re}^{i\theta})\left[\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z}\right]d\theta + i\lambda$$

برای تعیین λ، قرار دهید $z = ۰$. آن گاه، بنابه قضیهٔ مقدار میانگین (۴.۱۶)، انتگرال طرف راست برابر است با $u(۰)$، که در این صورت

$$f(۰) = u(۰) + i\lambda$$

و

$$\lambda = v(۰). \qquad \square$$

مشابه قضایای لیوویل در مورد $\mathrm{Re}f$. قضیهٔ اصلی لیوویل (۱۰.۵) بیان می‌کند که هر تابع تام کراندار ثابت است. توجه کنید شرط $|f| \le M$ مستلزم چهار نامساوی زیر است:

$$-M \le \mathrm{Re}\, f \le M$$

$$-M \le \mathrm{Im}\, f \le M$$

معهذا، بنابه قضیهٔ وایرشتراس (۶.۹)، هر یک از نامساویهای فوق برای اثبات ثابت بودن f کافی است. زیرا اگر هر یک از این نامساویها برقرار باشد، مجموعهٔ مقادیر f در صفحه چگال نیست و f باید ثابت باشد. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که همان تقلیل در مفروضات در مورد قضیهٔ لیوویل تعمیم یافتهٔ (۱۱.۵) نیز ممکن است.

۱۰.۱۶ قضیه. اگر f تام باشد و هر یک از چهار نامساوی

$$-A|z|^n \leq \operatorname{Re} f(z) \leq A|z|^n$$
$$-A|z|^n \leq \operatorname{Im} f(z) \leq A|z|^n$$

به ازای z به قدر کافی بزرگ برقرار باشد، آن گاه f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n است.

برهان. بی‌آن که خللی به کلیت وارد شود، می‌توان فرض کرد که به ازای z به قدر کافی‌بزرگ $\operatorname{Re} f(z) \leq A|z|^n$. (در حالات دیگر، $-f$ یا if را می‌توانیم مورد بررسی قرار دهیم.) در این صورت، با اعمال ۹.۱۶ به ازای $R = ۲|z|$، خواهیم داشت

$$\left|\frac{\mathrm{R}e^{i\theta}+z}{\mathrm{R}e^{i\theta}-z}\right| \leq ۳$$

و

$$|f(z)| \leq \frac{۳}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} |u(\mathrm{R}e^{i\theta})|d\theta + |f(\circ)| \quad \text{که در آن} \quad u = \operatorname{Re} f$$

برای برآورد انتگرال فوق، قرار می‌دهیم

$$u^+(\zeta) = \begin{cases} u(\zeta) & \text{اگر } u(\zeta) > \circ \text{،} \\ \circ & \text{اگر } u(\zeta) \leq \circ \text{،} \end{cases}$$

آن گاه، مطابق مفروضات، اگر $|z|$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد،

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u^+(\mathrm{R}e^{i\theta})d\theta \leq AR^n = A۲^n|z|^n$$

و بنابه قضیهٔ مقدار میانگین (۴.۱۶)،

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u(\mathrm{R}e^{i\theta})d\theta = u(\circ)$$

بنابه لم زیر،

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} |u(\mathrm{R}e^{i\theta})|d\theta \leq A۲^{n+۱}|z|^n + |u(\circ)|$$

در این صورت،

$$|f(z)| \leq A_۱|z|^n + A_۲$$

بنابه قضیهٔ لیوویل تعمیم یافته، f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n است. □

۱۱.۱۶ لم. فرض کنید g بر $[a,b]$ حقیقی ـ مقدار و پیوسته باشد. اگر $\alpha = \int_a^b g(x)dx$ و

$$\int_a^b g^+(x)dx \leq \beta$$

آن‌گاه

$$\int_a^b |g(x)|dx \leq ۲\beta + |\alpha|$$

برهان. یادآوری می‌کنیم که

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x) & \text{اگر } g(x) > ۰\text{،} \\ ۰ & \text{اگر } g(x) \leq ۰\text{،} \end{cases}$$

قرار می‌دهیم

$$g^-(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{اگر } g(x) < ۰\text{،} \\ ۰ & \text{اگر } g(x) \geq ۰\text{،} \end{cases}$$

آن گاه

$$g = g^+ - g^-$$

و

$$|g| = g^+ + g^-$$

بنابه فرض،

$$\int_a^b g^+(x)dx \leq \beta$$

و

$$\int_a^b g^-(x)dx = \int_a^b g^+(x)dx - \alpha \leq \beta - \alpha$$

در این صورت،

$$\int_a^b |g(x)|dx \leq ۲\beta - \alpha \leq ۲\beta + |\alpha| \qquad \square$$

۱۲.۱۶ تعریف. تابع تام f از مرتبهٔ متناهی نامیده می‌شود در صورتی که یک k و یک $R > ۰$ بتوان یافت به طوری که نامساوی $|f(z)| \leq \exp(|z|^k)$ به ازای هر z با $|z| \geq R$ برقرار باشد.

قضیهٔ ۱۰.۱۶ را می‌توان برای اثبات وجود صفرهای بسیاری از توابع تام از مرتبهٔ متناهی به کار برد. مثلاً، برای این که نشان بدهیم که $e^z - z$ دارای حداقل یک صفر است، نخست فرض می‌کنیم که $e^z - z \neq ۰$. آن گاه، $g(z) = \log(e^z - z)$ تام است و

$$\operatorname{Re} g(z) = \log|e^z - z| \leq |z| + ۱ \qquad (|z| \geq e)$$

ولی، در این صورت، بنابه قضیهٔ ۱۰.۱۶، g یک چندجمله‌ای خطی است؛ یعنی

$$\log(e^z - z) = az + b$$

یا

$$e^z - z = e^{az+b}$$

بسط دو طرف برحسب سریهای توانی به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود

$$۱ + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۳}{۳!} + \cdots = e^b(۱ + az + a^۲\frac{z^۲}{۲} + \ldots)$$

که غیرممکن است.

به طریق مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که $e^z - z$ دارای بی‌نهایت صفر است. زیرا اگر $e^z - z$ دارای تعداد متناهی صفر $\alpha_۱$،$\alpha_۲$، ...، α_N باشد، می‌توانیم بحث فوق را در مورد

$$(e^z - z)/(z - \alpha_۱)\ldots(z - \alpha_N)$$

تکرار کنیم و نتیجه بگیریم که

$$e^z - z = (z - \alpha_۱)(z - \alpha_۲)\ldots(z - \alpha_N)e^{az+b} \qquad (۳)$$

ولی با بررسی رشد هر دو طرف وقتی که $z \to \infty$ به سادگی دیده می‌شود که (۳) نمی‌تواند برقرار باشد.

۱۳.۱۶ قضیه. فرض کنید f یک تابع تام از مرتبهٔ متناهی باشد. در این صورت، f دارای تعداد متناهی صفر است یا

$$f(z) = Q(z)e^{P(z)}$$

که در آن Q و P چندجمله‌ای هستند.

برهان. فرض کنید f دارای تعداد متناهی صفر α_1، α_2، ...، α_k باشد. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$f(z) = Q(z)g(z)$$

که در آن $Q(z) = (z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_k)$ و g یک تابع تام است که هرگز صفر نیست. حال، می‌توان تابع تام زیر را تعریف کرد

$$P(z) = \log g(z)$$

که به ازای آن یک k و R می‌توان یافت به طوری که

$$|\operatorname{Re} P(z)| \le |z|^k, \quad |z| \ge R \text{ به ازای}$$

بنابراین، P یک چندجمله‌ای است و $f(z) = Q(z)e^{P(z)}$ که همان مطلوب است. □

تمرین

۱) فرض کنید $f = u + iv$ تحلیلی است. نشان دهید که $u + v$ و uv همسازند.

۲) نشان دهید که هر مشتق جزئی یک تابع همساز نیز همساز است.

۳) نشان دهید که u هر تابع همساز غیرثابت باشد، u^2 نمی‌تواند همساز باشد.

۴) نشان دهید که‌تابع $\log(x^2+y^2)$ به ازای $z \ne 0$ همساز است ولی جزء حقیقی هیچ تابعی نیست که در $z \ne 0$ تحلیلی باشد.

۵) الف) نشان دهید که اگر $u(r,\theta)$ فقط وابسته به r باشد، معادلهٔ لاپلاس به صورت

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$$

درمی‌آید.

ب) با استفاده از (الف)، نشان دهید که هر تابع همساز که فقط وابسته به r باشد به شکل $u(r,\theta) = a\log r + b$ است.

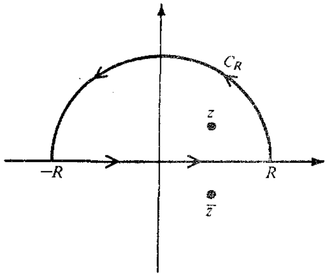
۶) فرمول پواسن زیر را برای تابعی که در نیم‌صفحهٔبالا پ- همساز و کراندار است به دست آورید:

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t)dt}{(t-x)^2+y^2} \qquad \text{(I)}$$

[راهنمایی: فرض کنید C_R مسیر تعیین شدهٔ زیر باشد و قرار دهید

$$۲\pi i f(z) = \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta$$

که در آن $\operatorname{Re} f = u$. سپس با فرض $R \to \infty$ فرمول (I) را برای $f(x+iy)$ به دست آورید.



۷) یک تابع همساز بر $D(\circ\,;۱)$ با مقادیر مرزی $u(x,y) = x^۳$ به دست آورید.

۸) فرض کنید u همساز باشد بر $D(\circ\,;۱)$ با مقادیر مرزی: ۱ بر نیم‌دایرهٔ بالایی و ∘ بر نیم‌دایرهٔ پایینی. نشان دهید که تمام منحنیهای تراز $u(x,y) = k$ که $\circ \le k \le ۱$ مستدیرند.

۹) تابع همساز u را بر $y > \circ$ با شرایط زیر پیدا کنید

$$\lim_{y \to \circ} u(x,y) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ ۱ & x > \circ \end{cases}$$

۱۰) تابع حرارت $u(x,y)$ را در مورد جسم صلبی که به وسیلهٔ نوار

$$-\frac{\pi}{۲} \le x \le \frac{\pi}{۲}, \qquad y \ge \circ$$

نمایش داده شده است با مفروضات زیر بیابید:

$u(x,\circ) = \circ$ وقتی که $-\frac{\pi}{۲} \le x \le \frac{\pi}{۲}$ و $u(-\frac{\pi}{۲},y) = u(\frac{\pi}{۲},y) = ۱$ وقتی که $y > \circ$.

۱۱) ثابت کنید که به ازای هر چندجمله‌ای ناصفر P توابع $e^z - P(z)$ و $\sin z - P(z)$ بی‌نهایت صفر دارند.

۱۲) گوییم تابع تام از مرتبهٔ متناهی f دارای مرتبهٔ j است اگر

$$j = \inf\{k : \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{\exp(|z|^k)} = \circ\}$$

ثابت کنید که تنها توابع تام غیرصفر از مرتبهٔ j به شکل $f(z) = e^{P_j(z)}$ هستند که در آن P_j یک چندجمله‌ای از درجهٔ j است.

فصل هفدهم

صور مختلف توابع تحلیلی

مقدمه

توابعی تحلیلی که تاکنون با آنها مواجه شده‌ایم عموماً به کمک سریهای توانی تعریف شده‌اند یا به صورت ترکیبی از چندجمله‌ایهای مقدماتی، توابع نمایی و مثلثاتی، و توابع معکوس آنها. در این فصل، به نمایش توابع تحلیلی به صورت حاصلضربهای نامتناهی اشاره می‌کنیم. همچنین، از توابعی تحلیلی که با انتگرالهای معین تعریف می‌شوند بررسی دقیقتری به عمل می‌آوریم، بحثی که قبلاً در فصل ۷ (متعاقب قضیهٔ موررا) و در بخش دوّم فصل ۱۲ مطرح شد.

۱۰۱۷ حاصلضربهای نامتناهی

۱.۱۷ تعریف.

الف) فرض کنید که $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصفر باشد. حاصلضرب نامتناهی $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ را همگرا می‌نامیم در صورتی که دنبالهٔ حاصلضربهای جزئی $P_N = u_1 u_2 \ldots u_N$ به حدی ناصفر همگرا باشد وقتی که $N \to \infty$. اگر $P_N \to 0$، می‌گوییم که حاصلضرب نامتناهی واگرا به ۰ است.

ب) اگر تعدادی متناهی از جمل u_k مساوی صفر باشند، می‌گوییم که حاصلضرب همگرا به صفر است مشروط به این که $\prod_{\substack{k=1 \\ u_k \neq 0}}^{\infty} u_k$ همگرا باشد.

امثله

۱)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + 1/k) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots$$

واگرا (به ∞) است، زیرا $P_N = N + 1 \to \infty$.

۲) $\prod_{k=2}^{\infty}(1 - 1/k)$ واگرا به صفر است.

۳) $\prod_{k=2}^{\infty}(1 - 1/k^2) = \prod_{k=2}^{\infty}(k-1)(k+1)/k^2$ همگرا است. (تمرین ۱ را ببینید.)

اثبات این حکم را، از طریق تعیین یک فرمول صریح برای P_N، به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۴) $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - 1/k^2)$ همگرا به ۰ است، زیرا $\prod_{k=2}^{\infty}(1 - 1/k^2)$ همگرا است.

تبصره.

الف) اگر $P_{N-1} \neq 0$ آن گاه

$$u_N = \frac{P_N}{P_{N-1}}$$

از این رو، اگر $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ همگرا باشد، $u_N \to 1$ وقتی که $N \to \infty$. به این دلیل، معمولاً حاصلضربهای نامتناهی را به صورت $\prod_k (1 + z_k)$ می‌نویسیم با عنایت به این که $z_k \to 0$ هرگاه حاصلضرب همگرا باشد.

ب) اگر $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد، $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$ فقط‌وفقط وقتی همگرا است که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد. این حکم از نامساویهای

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N \leq \prod_{k=1}^{N}(1 + a_k) \leq e^{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}$$

نتیجه می‌شود. نامساوی سمت راست نتیجهٔ مستقیمی از این واقعیت است که به ازای هر عدد حقیقی x، $e^x \geq x + ۱$. معذالک، این حکم در مورد اعداد مختلط z_k برقرار نیست (تمرین ۴)، ولی قضیهٔ زیرا را داریم:

۲.۱۷ قضیه. فرض کنید که به ازای $k = ۱, ۲, \ldots$، $z_k \neq -۱$. $\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+z_k)$ فقط‌وفقط وقتی همگرا است که $\sum_{k=۱}^{\infty}\log(۱+z_k)$ همگرا باشد. (در این جا، $\log z$ به معنای شاخهٔ اصلی لگاریتم است؛ یعنی، $-\pi < \operatorname{Im}\log z = \arg z < \pi$.)

برهان. فرض کنید که $S_N = \sum_{k=۱}^{N}\log(۱+z_k)$. آن گاه $P_N = e^{S_N}$ و اگر $S_N \to S$، $P_N \to P = e^S$. از طرف دیگر، فرض کنید که $P_N \to P \neq ۰$. در این صورت، شاخه‌ای از لگاریتم (که آن را به $\log^*$ نشان می‌دهیم) در P پیوسته است و $\log^* P_N \to \log^* P$ وقتی که $N \to \infty$. فرض کنید که اعداد صحیح n_k را به استقرا طوری تعریف کنیم که

$$\sum_{k=۱}^{N}(\log(۱+z_k) + ۲\pi i n_k) = \log^* P_N$$

آن گاه، چون $\log^* P_N$ همگراست،

$$\sum_{k=۱}^{N}(\log(۱+z_k) + ۲\pi i n_k)$$

همگراست؛ بنابراین، $\log(۱+z_k) + ۲\pi i n_k \to ۰$ وقتی که $k \to \infty$. چون $z_k \to ۰$ و $\log^*$ به معنی شاخهٔ اصلی است، نتیجه می‌شود که به ازای k به قدر کافی بزرگ $n_k = ۰$.

از این رو، $\sum_{k=۱}^{\infty}\log(۱+z_k)$ همگراست. □

۳.۱۷ قضیه. اگر $\sum_{k=۱}^{\infty}|z_k|$ همگرا باشد، $\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+z_k)$ همگراست.

برهان. فرض کنید که $\sum_{k=۱}^{\infty}|z_k|$ همگرا باشد و N را طوری اختیار کنید که به ازای $k > N$ داشته باشیم $|z_k| < \frac{۱}{۲}$. آن گاه، به ازای $k > N$،

$$|\log(۱+z_k)| = |z_k - \frac{z_k^۲}{۲} + \frac{z_k^۳}{۳} - + \ldots| \leq |z_k|(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots) \leq ۲|z_k|$$

ازاین رو، $\sum_{k=N+۱}^{\infty}\log(۱+z_k)$ همگراست و، به استناد قضیهٔ قبل، $\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+z_k)$ نیز همگراست.□

۴.۱۷ تعریف. $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ را مطلقاً همگرا می‌نامند در صورتی که $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_k|)$ همگرا باشد.

۵.۱۷ قضیه. هر حاصلضرب مطلقاً همگرا، همگرا است.

برهان. مطابق تبصرهٔ (ب) (متعاقب تعریف ۱.۱۷)، همگرایی $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_k|)$ معادل همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ است. از این رو، اگر $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_k|)$ همگرا باشد، $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ نیز همگرا می‌شود و، به استناد قضیهٔ قبل، $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ هم همگرا خواهد بود. □

می‌خواهیم توابعی تحلیلی را مورد بررسی قرار دهیم که با حاصلضربهای نامتناهی تعریف می‌شوند؛ یعنی، به صورت

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k(z))$$

یادآوری می‌کنیم که f تحلیلی است در صورتی که هر تابع u_k، $k=1,2,\ldots$، تحلیلی باشد و حاصلضربهای جزئی به طور یکنواخت بر فشرده‌ها به تابع حد خود همگرا باشند (قضیهٔ ۶.۷).

۶.۱۷ قضیه. فرض کنید که $u_k(z)$، به ازای $k=1,2,\ldots$، در ناحیه‌ای مانند D تحلیلی باشد و $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(z)|$ به طوریکنواخت بر فشرده‌ها همگرا باشد. در این صورت، حاصلضرب $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k(z))$ به طور یکنواخت بر فشرده‌ها همگرا است و تابعی تحلیلی در D را نمایش می‌دهد.

برهان. فرض کنید که A یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ D باشد. چون $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(z)|$ بر A به طور یکنواخت همگراست، به ازای k به قدر کافی بزرگ، در این زیرمجموعه $|u_k(z)|<1$. از این رو، می‌توان فرض کرد که همواره $1+u_k\neq 0$. آن‌گاه، اگر N را به قدری بزرگ بگیریم که $\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_k(z)|<\varepsilon/2$، مانند برهان قضیهٔ ۳.۱۷، نتیجه می‌شود که

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\log(1+u_k(z))\right|\leq\varepsilon \qquad A \text{ بر}$$

یعنی، $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+u_k(z))$ بر A به طور یکنواخت به تابع حدی مانند $S(z)$ همگرا است. نتیجه می‌شود که $S(A)$ کراندار است. سرانجام، چون تابع نمایی بر هر قلمرو کرانداری به طور یکنواخت پیوسته است:

$$P_N(z)=\exp\left(\sum_{k=1}^{N}\log(1+u_k(z))\right)$$

به تابع حد خود $e^{S(z)}$ به طور یکنواخت همگراست.□

امثله

۱) $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k)$ بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ قرص واحد به طور یکنواخت همگراست؛ زیرا هر چنین زیرمجموعهٔ فشرده‌ای مشمول در قرصی به شعاع $\delta < 1$ است. از این رو،

$$\sum_{k=1}^{\infty}|z^k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\delta^k = \frac{\delta}{1-\delta}$$

و، به استناد آزمون M، $\sum_{k=1}^{\infty}|z^k|$ به طور یکنواخت همگراست.

۲)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^z})$$

تابعی تحلیلی را در نیم‌صفحهٔ D: $\operatorname{Re} z > 1$ نمایش می‌دهد. در هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ D، $\operatorname{Re} z \geq 1+\delta$، که در این صورت

$$|\frac{1}{k^z}| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{k^{1+\delta}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

از این رو،

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\frac{1}{k^z}|$$

و، نتیجتاً،

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^z})$$

به‌طور یکنواخت همگراست.

قضیهٔ حاصلضرب وایرشتراس. مطابق قضیهٔ یکتایی (۹.۶)، مجموعهٔ صفرهای یک تابع تام نابدیهی هیچ نقطهٔ انباشتگی ندارد. به این ترتیب، اگر $\{\lambda_k\} \to \lambda$ و اگر f تابع تامی با صفرهای واقع در نقاط λ_k باشد، آنگاه $f \equiv 0$. از طرف دیگر، امکان دارد که یک تابع تام در همهٔ نقاط دنباله‌ای که واگرا به ∞ است صفر باشد. به عنوان مثال، $\sin z$ در همهٔ مضارب صحیح π صفر است. به طور مشابه، $1 - e^z$ در همهٔ مضارب صحیح $2\pi i$ صفر است. قضیهٔ حاصلضرب وایرشتراس نشان می‌دهد که این نمونه‌ها به هیچ وجه استثنایی نیستند.

۷.۱۷ قضیه (وایرشتراس). فرض کنید که $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \to \infty$. آن گاه تابع تامی مانند f موجود است به طوری که $f(z) = 0$ فقط‌وفقط وقتی که $z = \lambda_k$، $k = 1, 2, \ldots$.

تبصره. برای تعریف یک تابع تام با صفرهای واقع در نقاط λ_k، طبیعی به نظر می‌رسد که بنویسیم

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(z - \lambda_k)$$

معذالک، چون $\lambda_k \to \infty$، جمل حاصلضرب (به ازای z ثابت) به ۱ میل نمی‌کنند و ازاین رو حاصلضرب واگرا می‌شود. در عوض، حاصلضرب نامتناهی

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

از توابع خطی را در نظر می‌گیریم با فرض $\lambda_k \neq 0$. در واقع، اگر $\sum_{k=1}^{\infty} |1/\lambda_k|$ همگرا باشد، $\sum_{k=1}^{\infty} |z/\lambda_k|$ بر هر مجموعهٔ فشرده‌ای به طور یکنواخت همگرا می‌شود که در این صورت حاصلضرب بر فشرده‌ها به طور یکنواخت همگراست و تابع تام مطلوب نتیجه می‌شود. معذالک، اگر $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|$ واگرا باشد ولی $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^2$ همگرا باشد، ساختار بالا را با ملاحظهٔ

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)e^{z/\lambda_k}\right]$$

می‌توان اصلاح کرد. با «عوامل همگرایی» e^{z/λ_k}، حاصلضرب بر فشرده‌ها به طور یکنواخت همگرا می‌شود؛ زیرا به ازای $|\lambda_k| > 2|z|$،

$$\begin{aligned}\left|\log\left[\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)e^{z/\lambda_k}\right]\right| &= \left|\left(-\frac{z}{\lambda_k} - \frac{z^2}{2\lambda_k^2} - \frac{z^3}{3\lambda_k^3} - \ldots\right) + \frac{z}{\lambda_k}\right| \\ &\leq \left|\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = \left|\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|\end{aligned}$$

از این رو، سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log[(1 - z/\lambda_k)e^{z/\lambda_k}], \qquad z \neq \lambda_k$$

به طور یکنواخت همگرا است و حاصلضرب بر فشرده‌ها به طور یکنواخت همگراست.

به دلیل مشابه، اگر $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^{m+1}$ به ازای عدد صحیح مثبتی مانند m همگرا باشد و عوامل همگرایی

$$E_k(z) = \exp(z/\lambda_k + z^2/2\lambda_k^2 + \cdots + z^m/m\lambda_k^m)$$

را در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود که حاصلضرب نامتناهی

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{\lambda_k})E_k(z)$$

بر فشرده‌ها به طور یکنواخت همگراست و تابع تامی با صفرهای مطلوب را نشان می‌دهد. معذالک دنباله‌هایی مانند $\{\lambda_k\}$ موجودند به طوری که $\lambda_k \to \infty$ ولی $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^N$ به ازای هر N واگرا است. (به عنوان مثال، $\{\lambda_k\} = \{\log k\}_{k=2}^{\infty}$.) بنابراین، در حالت کلی، لازم است که ساختار متفاوتی اختیار کنیم.

برهان. نخست فرض کنید که $\lambda_k \neq 0$ و قرار دهید

$$E_k(z) = \exp\left(\frac{z}{\lambda_k}+\frac{z^2}{2\lambda_k^2}+\cdots+\frac{z^k}{kz_k^k}\right)$$

بعلاوه، فرض کنید که $|z| < M$. آن گاه، چون $\lambda_k \to \infty$، به ازای k به قدر کافی بزرگ، $2|z| < |\lambda_k|$، و

$$\left|\log\left[(1-\frac{z}{\lambda_k})E_k(z)\right]\right| \le \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|\frac{z^j}{j\lambda_k^j}\right| \le \left|\frac{z}{\lambda_k}\right|^k \le \frac{1}{2^k}$$

از این رو، هر دو تای

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\left[(1-\frac{z}{\lambda_k})E_k(z)\right], \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left[(1-\frac{z}{\lambda_k})E_k(z)\right]$$

بر فشرده‌ها به طور یکنواخت همگرایند. همچنین، توجه کنید که عوامل موجود فقط در نقاط λ_k صفر می‌شوند و، به استناد تعریف همگرایی، حاصلضرب نامتناهی فقط در این نقاط صفر می‌شود. سرانجام، اگر تابع تامی با صفرهایی واقع در مبداء بخواهیم، کافی است فقط قرار دهیم

$$f(z) = z^p\prod_{k=1}^{\infty}\left[(1-\frac{z}{\lambda_k})E_k(z)\right] \qquad \square$$

امثله

۱) برای تعیین تابع تامی مانند f با صفر تنهایی در هر عدد صحیح منفی $\lambda_k = -k$، توجه می‌کنیم که $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|$ واگرا است ولی $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^2$ همگرا می‌باشد و، بنابراین، می‌توانیم چنین تعریف کنیم که

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})e^{-z/k}$$

۲) هر تابع تام با صفرهای واقع در تمامی نقاط $\lambda_k = \log k$، که $k = ۱, ۲, \ldots$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(z) = z\prod_{k=۲}^{\infty}\left[(۱-\frac{z}{\log k})\exp(\frac{z}{\log k}+\frac{z^۲}{۲\log^۲ k}+\cdots+\frac{z^k}{k\log^k k})\right]$$

۳) هر تابع تام با صفر تنهایی در هر عدد صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(z) = z\prod_{k=۱}^{\infty}\left[(۱-\frac{z}{k})e^{z/k}(۱+\frac{z}{k})e^{-z/k}\right] = z\prod_{k=۱}^{\infty}(۱-\frac{z^۲}{k^۲})$$

۸.۱۷ قضیه. فرض کنید

$$f(z) = z\prod_{k=۱}^{\infty}(۱-\frac{z^۲}{k^۲})$$

آن گاه $f(z) = (\sin\pi z)/\pi$.

برهان. خارج قسمت

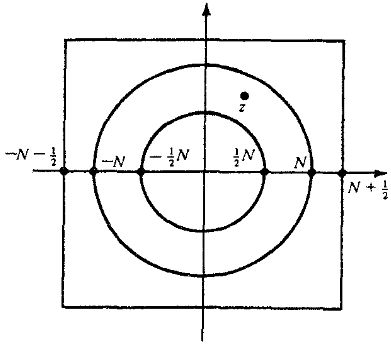
$$Q(z) = z\prod_{k=۱}^{\infty}(۱-\frac{z^۲}{k^۲})/\sin\pi z$$

را در نظر بگیرید. Q تام و خالی از صفر است. برای این که نشان بدهیم که Q ثابت است رشد آن را به ازای zهای بزرگ ارزیابی می‌کنیم. پس، فرض می‌کنیم که $\frac{۱}{۲}N \le |z| \le N$. آن گاه، $|Q(z)|$ به بیشترین مقداری که Q بر مربعی به ضلع $۲N+۱$ به مرکز مبداء اختیار می‌کند کراندار می‌شود (قضیهٔ ۱۳.۶). معذالک، قبلاً ثابت کرده‌ایم (بخش ۲ فصل ۱۱) که در امتداد این مربع (که هیچ صفری از $\sin\pi z$ بر آن نیست)، $|۱/\sin\pi z| \le ۴$. بعلاوه،

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=۱}^{\infty}(۱-\frac{z^۲}{k^۲})\right| &= \left|\prod_{k=۱}^{N}(۱-\frac{z}{k})(۱+\frac{z}{k})\prod_{k=N+۱}^{\infty}(۱-\frac{z^۲}{k^۲})\right|\\ &\le \prod_{k=۱}^{N}e^{۲|z/k|}\prod_{k=N+۱}^{\infty}e^{|z^۲/k^۲|}\\ &\le \exp(۲|z|(۱+\log N)+\frac{|z^۲|}{N})\end{aligned}$$

زیرا

$$\sum_{k=N+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲} < \frac{۱}{N} \quad \text{و} \quad \sum_{k=۱}^{N}\frac{۱}{k} < ۱+\log N$$



اگر مجدداً ملاحظه کنیم که به ازای N بزرگ، $\sqrt{N/۲} \le |z|^{۱/۲}$ $۲(۱ + \log N) <$ در حالی که $|z^۲|/N \le |z|$، نتیجه می‌شود که

$$|Q(z)| = \left|\frac{z\prod_{k=۱}^{\infty}(۱ - \frac{z^۲}{k^۲})}{\sin \pi z}\right| \le A\exp(|z|^{۳/۲})$$

آن گاه، به استناد قضیهٔ ۱۲.۱۶، باید داشته باشیم

$$\frac{z\prod_{k=۱}^{\infty}(۱ - \frac{z^۲}{k^۲})}{\sin \pi z} = Ae^{Bz}$$

معذالک، Q تابعی زوج است که ایجاب می‌کند که $B = ۰$، و ثابت A از طریق

$$A = Q(۰) = \lim_{z\to ۰} \frac{z}{\sin \pi z} = \frac{۱}{\pi}$$

به دست می‌آید. □

بعضی از نتایج قضیهٔ بالا:

(i) اگر قرار دهیم $z = \frac{۱}{۲}$، خواهیم داشت:

$$۱ = \frac{\pi}{۲}\prod_{k=۱}^{\infty}[۱ - \frac{۱}{(۲k)^۲}]$$

در این صورت،

$$\frac{۲}{\pi} = \left(\frac{۱\cdot ۳}{۲\cdot ۲}\right)\left(\frac{۳\cdot ۵}{۴\cdot ۴}\right)\left(\frac{۵\cdot ۷}{۶\cdot ۶}\right)\cdots$$

یا

$$\pi = ۲\cdot\left(\frac{۲\cdot ۲}{۱\cdot ۳}\right)\left(\frac{۴\cdot ۴}{۳\cdot ۵}\right)\left(\frac{۶\cdot ۶}{۵\cdot ۷}\right)\cdots$$

(ii) فرض کنید که جمل حاصلضرب را بسط دهیم تا یک سری نامتناهی به دست آید. آن گاه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sin\pi z &= \pi z\prod_{k=۱}^{\infty}(۱-\frac{z^۲}{k^۲})\\ &= \pi z\left[۱-\left(\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}\right)z^۲+۲\left(\sum_{k,j}\frac{۱}{k^۲j^۲}\right)z^۴-+\ldots\right]\end{aligned}$$

مقایسه با سری آشنای

$$\sin\pi z = \pi z-\frac{\pi^۳z^۳}{۶}+\frac{\pi^۵z^۵}{۱۲۰}-+\ldots$$

نشان می‌دهد که

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}=\frac{\pi^۲}{۶}$$

(برای ملاحظهٔ برهان اولیه از این اتحاد، به بخش ۲ فصل ۱۱ مراجعه کنید.)

۲.۱۷ توابع تحلیلی که با انتگرالهای معین تعریف می‌شوند.

قبلاً ملاحظه کردیم که قضیهٔ موررا (۴.۷) در اثبات تحلیلی بودن بعضی توابع که به صورت انتگرال داده شده‌اند به کار می‌رود. اکنون این مفهوم را با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار می‌دهیم.

۹.۱۷ قضیه. فرض کنید که $\varphi(z,t)$ تابع پیوسته‌ای از t باشد وقتی که z ثابت است و $a\le t\le b$ و تابعی تحلیلی از z باشد وقتی که z در D تغییر می‌کند و t ثابت است. آن‌گاه

$$f(z)=\int_a^b\varphi(z,t)dt$$

در D تحلیلی است و

$$f'(z)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,t)dt \qquad (۱)$$

برهان. چون f تابع پیوسته‌ای از z است، مطابق قضیهٔ موررا (۴.۷)، لازم است فقط ثابت کنیم که به ازای هر مستطیل $\Gamma \subset D$، $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. معذالک، می‌توانیم ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم و بنویسیم

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \left(\int_a^b \varphi(z,t)dt\right) dz = \int_a^b \left(\int_\Gamma \varphi(z,t)dz\right) dt$$

زیرا φ برحسب t و z پیوسته است. به این ترتیب، چون φ برحسب z تحلیلی است،

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b 0\, dt = 0$$

به عنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم تا ثابت شود که f' از فرمول (۱) به دست می‌آید. □

امثله

۱) $f(z) = \int_0^1 dt/(t-z)$ بر $D = \mathbb{C} - [0,1]$ تحلیلی است.

درواقع، انتگرالگیری مستقیم نشان می‌دهد که $f(z) = \log(1 - 1/z)$، و با استفاده از قضیهٔ ۸.۱۰ می‌توانیم نشان بدهیم که f در D تحلیلی است. سپس، یادآوری می‌کنیم که وقتی z یک منحنی بسته را بپیماید $\Delta \operatorname{Arg}(1 - 1/z)$ برابر است با تفاضل تعداد صفرها و تعداد قطبهای $1 - 1/z$ که درون منحنی واقع می‌شوند. معذالک، اگر این منحنی یک منحنی بستهٔ سادهٔ محیط بر $[0,1]$ باشد، چون $1 - 1/z$ یک صفر و یک قطب درون این منحنی دارد، $\Delta \operatorname{Arg}(1 - 1/z) = 0$. یک بحث مشابه نشان می‌دهد که اگر z با گذر از هر نقطهٔ x، که $0 < x < 1$، از نیم‌صفحهٔ بالایی به نیم‌صفحهٔ پایینی برود، f یک ناپیوستگی جهشی با جهش $2\pi i$ دارد.

۲) $g(z) = \int_0^\infty dt/(e^t - z)$ در $\mathbb{C} - [1, \infty)$ تحلیلی است. اگرچه g با یک انتگرال ناسره تعریف شده است، g حد یکنواخت

$$g_N(z) = \int_0^N \frac{dt}{e^t - z}$$

بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbb{C} - [1, \infty)$ است و، از این رو، g تحلیلی است. چنان که ذیلاً خواهیم دید، g «جهش» $2\pi i/x$ دارد وقتی که z با گذر از هر نقطهٔ $1 < x$ از نیم‌صفحهٔ بالایی به نیم‌صفحهٔ پایینی برود.

۱۰.۱۷ قضیه. فرض کنید که f و g توابع حقیقی ـ مقدار پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشند و $f' > ۰$ نیز پیوسته باشد. آن‌گاه

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(t)}{f(t)-z}dt$$

بیرون بازه $[\alpha,\beta]$ با $\alpha = f(a)$ و $\beta = f(b)$ تحلیلی است و

به ازای هر $x \in (\alpha,\beta)$،
$$\lim_{y\to ۰+}[F(x+iy) - F(x-iy)] = ۲\pi i \frac{g(f^{-۱}(x))}{f'(f^{-۱}(x))}$$

برهان. تحلیلی بودن F در قضیهٔ ۹.۱۷ ثابت شد. اگر مخرج را گویا کنیم، خواهیم داشت:

$$F(x+iy) = \int_a^b \frac{[f(t)-x]g(t)}{[f(t)-x]^۲+y^۲}dt + iy\int_a^b \frac{g(t)}{[f(t)-x]^۲+y^۲}dt$$

از این رو،

$$F(x+iy) - F(x-iy) = ۲iy\int_a^b \frac{g(t)}{[f(t)-x]^۲+y^۲}dt$$

که با فرض $t = f^{-۱}(u)$، $\alpha = f(a)$، $\beta = f(b)$، به صورت

$$F(x+iy) - F(x-iy) = ۲i\int_\alpha^\beta \frac{yg(f^{-۱}(u))du}{f'(f^{-۱}(u))[(u-x)^۲+y^۲]}$$

درمی‌آید. تکمیل برهان را به عنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم از این طریق که نشان داده شود که به ازای هر تابع پیوستهٔ h بر $[\alpha,\beta]$ و $\alpha < x < \beta$،

$$\int_\alpha^\beta \frac{h(u)y}{(u-x)^۲+y^۲}du \to \pi h(x) \qquad \square$$

تمرینات

۱) از طریق تعیین یک فرمول صریح برای P_N، ثابت کنید که

$$\prod_{k=۲}^{\infty}(۱-\frac{۱}{k^۲})$$

همگراست.

۲) مانند مسألهٔ بالا، ثابت کنید که
$$\prod_{k=۲}^{\infty}[۱+\frac{(-۱)^k}{k}]$$
همگراست.

۳) نشان دهید که اگر $\sum_{k=۱}^{\infty} z_k$ و $\sum_{k=۱}^{\infty}|z_k|^۲$ همگرا باشند، آن گاه $\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+z_k)$ همگراست.

۴) نشان دهید که
$$\prod_{k=۲}^{\infty}[۱+\frac{(-۱)^k}{\sqrt{k}}]$$
واگرا می‌باشد اگرچه
$$\sum_{k=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{\sqrt{k}}$$
همگراست.

۵) ثابت کنید که $\prod_{k=۰}^{\infty}(۱+z^{۲^k})=(۱+z)(۱+z^۲)(۱+z^۴)\dots$ در $|z|<۱$ به طور یکنواخت به $۱/(۱-z)$ همگرا است. [راهنمایی: P_N را بیابید.]

۶) تابع تامی مانند g بیابید که دارای تک صفرهایی در «مربعات» $\lambda_k=k^۲$، به ازای $k=۱,۲,\dots$ باشد و صفرها فقط در همین نقاط باشند.

۷) نشان دهید که یک جواب مسألهٔ (۶) عبارت است از $\sin\pi\sqrt{z}/\pi\sqrt{z}$.

۸) ثابت کنید که
$$\cos\pi z=\prod_{k=۰}^{\infty}\left[۱-\frac{۴z^۲}{(۲k+۱)^۲}\right]$$

۹) الف) تابعی مانند f تعریف کنید که در $|z|<۱$ تحلیلی باشد و
$f(z)=۰$ فقط‌وفقط وقتی که $z=۱-\frac{۱}{k}$؛ $k=۱,۲,\dots$.
[راهنمایی: تابع تامی مانند g بیابید با صفرهایی در $\lambda_k=k$، که $k=۱,۲,\dots$، و $f(z)=g(۱/(۱-z))$ را در نظر بگیرید.]

ب) احکام بالا را تعمیم دهید.

۱۰) فرض کنید $F(z)=\int_a^b\varphi(z,t)dt$. با ملاحظهٔ
$$F'(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^۲}d\zeta=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\left(\int_a^b\frac{\varphi(\zeta.t)}{(\zeta-z)^۲}dt\right)d\zeta$$

و تغییر ترتیب انتگرالگیری، فرمولی برای $F'(z)$ بیابید.

۱۱) قضیهٔ ۱۰.۱۷ را با تجزیهٔ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{h(u)y\,du}{(u-x)^{۲}+y^{۲}} \quad \text{به} \quad \int_{\alpha}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\beta}$$

کامل کنید.

۱۲) نشان دهید که

$$f(z) = \int_{۰}^{۱} \frac{dt}{۱-zt}$$

خارج $[۱, \infty)$ تحلیلی است. ناپیوستگی f را وقتی که z از نقطه‌ای چون $۱ < x$ «می‌گذرد»، بیابید.

فصل هجدهم

ادامهٔ تحلیلی، توابع گاما و زتا

مقدمه

فرض کنید که تابع f در ناحیهٔ D تحلیلی باشد. می‌گوییم که f را می‌توان به طور تحلیلی به ناحیهٔ $D_۱$، که D را قطع می‌کند، ادامه داد در صورتی که تابعی مانند g که در $D_۱$ تحلیلی است موجود باشد به طوری که در سرتاسر $D_۱ \cap D$ داشته باشیم $g = f$. به استناد قضیهٔ یکتایی (۹.۶) ، هر چنین ادامه‌ای از f به طور منحصربه‌فرد تعیین می‌شود. (معذالک، امکان دارد که تابعی مانند f دارای دو ادامهٔ تحلیلی $g_۱$ و $g_۲$، به ترتیب، در نواحی $D_۱$ و $D_۲$ باشد با $g_۱ \neq g_۲$ در سرتاسر $D_۱ \cap D_۲$. تمرین ۱ را ببینید.)

اصل بازتاب شوارتز (۸.۷) مثالی است حاکی از این که، در بعضی حالات، چگونه می‌توان تابعی تحلیلی را به ماورای قلمرو اصلی، که در آن تحلیلی است، به طور تحلیلی ادامه داد. در این فصل، نخست امکان چنین «تعمیمی» را در مورد توابعی که با سریهای توانی تعریف شده‌اند بررسی می‌کنیم. سپس، توابع کلاسیک گاما و زتا را که، به ترتیب، به صورت انتگرال معین و سری نامتناهی تعریف شده‌اند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱۰۱۸ سریهای توانی

چنان که در فصل ۲ ملاحظه کردیم، امکان دارد که یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در همهٔ نقاط یا بعضی از نقاط دایرهٔ همگرایی خود همگرا باشد یا اصلاً در هیچ یک از این نقاط همگرا نباشد. چنان که مثالهای زیر نشان می‌دهند، از همگرایی یا واگرایی سری توانی مفروضی در نقطه‌ای نمی‌توان فهمید که آیا می‌توان تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ را به ماورای آن نقطه ادامه داد یا خیر.

الف)

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \qquad \text{به ازای } |z| < 1$$

اگرچه این سری توانی در هر نقطهٔ دایرهٔ واحد واگرا می‌باشد، f در سرتاسر صفحهٔ سوراخدار $z \neq 1$ تحلیلی است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^2)$ در همهٔ نقاط دایرهٔ واحد همگرا است؛ معذالک، اگر g تابع حد این سری باشد، g را نمی‌توان به حوزه‌ای شامل $z = 1$ به طور تحلیلی ادامه دارد؛ زیرا

$$g''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{n+2} \to \infty \qquad \text{وقتی که } z \to 1^-$$

۱.۱۸ تعریف. فرض کنید که f در قرص D تحلیلی باشد و $z_0 \in \partial D$. آن‌گاه، می‌گوییم که f در z_0 منظم است در صورتی که بتوان f را به طور تحلیلی به ناحیه‌ای مانند D_1 ادامه داد که $z_0 \in D_1$. در غیر این صورت، گوییم که f یک تکینی در z_0 دارد.

۲.۱۸ قضیه. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی مثبت R باشد، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ حداقل یک تکینی بر دایرهٔ $|z| = R$ دارد.

برهان. اگر f در هر نقطهٔ دایرهٔ همگرایی منظم باشد، آن‌گاه، به ازای هر z با $|z| = R$، یک ε_z ماکسیمال وجود دارد به طوری که f را می‌توان به ناحیه‌ای شامل $D(z;\varepsilon_z)$ ادامه داد. به وضوح، ε_z به طور پیوسته به z بستگی دارد و، چون دایرهٔ $|z| = R$ فشرده است،

$$\min_{|z|=R} \varepsilon_z = \varepsilon > 0$$

از این رو، یک تابع g وجود دارد که در $D(0\,; R+\varepsilon)$ تحلیلی است و $g = f$ در $D(0\,; R)$ برقرار است. امّا، در این صورت، g باید دارای نمایشی به یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ باشد که به ازای $|z| < R+\varepsilon$

همگرا است. معذالک، چون تساوی $g(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به ازای $|z| < R$ برقرار است، به استناد قضیهٔ یکتایی سریهای توانی (۱۲.۲)، $a_n \equiv b_n$. به این ترتیب، شعاع همگرایی برابر R می‌شود و به تناقض می‌رسیم. □

به طور کلی، مشکل است که بتوانیم تعیین کنیم که تابع مفروضی در کدام نقطهٔ خاص دایرهٔ همگرایی سری توانی خود دارای یک تکینی است. قضیهٔ زیر یکی از معدود احکامی است که در این مورد داریم.

۳.۱۸ قضیه. فرض کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی $R < \infty$ باشد و همواره $a_n \geq 0$. در این صورت، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یک تکینی در $z = R$ دارد.

برهان. به استناد قضیهٔ ۲.۱۸، f یک تکینی در نقطه‌ای مانند $Re^{i\alpha}$ دارد. اگر سری توانی مفروضی را برای f حول نقطهٔ $\rho e^{i\alpha}$ با $0 < \rho < R$ در نظر بگیریم،

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \rho e^{i\alpha})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho e^{i\alpha})}{n!} (z - \rho e^{i\alpha})^n$$

ملاحظه می‌کنیم که شعاع همگرایی این سری عبارت است از $R - \rho$. (اگر بزرگتر می‌بود، لازم می‌آمد که f یک تعمیم تحلیلی به ماورای $Re^{i\alpha}$ داشته باشد.) معذالک، توجه کنید که به ازای هر عدد صحیح نامنفی j

$$f^{(j)}(\rho e^{i\alpha}) = \sum_{n=j}^{\infty} n(n-1)\dots(n-j+1) a_n (\rho e^{i\alpha})^{n-j}$$

که، چون $a_n \geq 0$، لازم می‌آید که

$$|f^{(j)}(\rho e^{i\alpha})| \leq f^{(j)}(\rho)$$

از این رو، بسط f به سری توانی حول ρ،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho)}{n!} (z - \rho)^n$$

باید دارای شعاع همگرایی $R - \rho$ باشد. از طرف دیگر، اگر f در $z = R$ منظم باشد، لازم می‌آید که سری بالا در قرصی به شعاع بزرگتر از $R - \rho$ همگرا باشد. بنابراین، f یک تکینی در $z = R$ دارد.□

۴.۱۸ تعریف. اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یک تکینی در هر نقطهٔ دایرهٔ همگرایی خود داشته باشد، این دایره را مرز طبیعی f می‌نامند.

مثال.

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

دارای شعاع همگرایی واحد است. معذالک، اگر z_0 یک ریشهٔ 2^nـم واحد باشد و $z \to z_0$، همهٔ جمل این سری توانی از مرتبهٔ 2^n به بعد به ۱ میل می‌کنند که، در این صورت، $f(z) \to \infty$. بنابراین، f یک تکینی در هر ریشهٔ 2^nـم واحد دارد. چون این ریشه‌ها در دایرهٔ واحد چگال می‌باشند، این دایره یک مرز طبیعی سری توانی مفروض است.

۵.۱۸ قضیه. فرض کنید که

$$\underline{\lim}_{\,k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1 \qquad \text{با} \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k}$$

آن‌گاه، دایرهٔ همگرایی این سری توانی یک مرز طبیعی f است.

برهان. چون این حکم از c_k مستقل است، بدون آن که به کلیّت استدلال خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که شعاع همگرایی ۱ باشد. همچنین، صرف‌نظر از تعدادی متناهی جمله (در صورتی که ضروری باشد)، فرض می‌کنیم که به ازای یک $\delta > 0$ و هر k داشته باشیم $n_{k+1}/n_k > 1 + \delta$. سرانجام، کافی است نشان دهیم که f یک تکینی در نقطهٔ $z = 1$ دارد. با همین برهان، که در مورد سری $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (ze^{-i\theta})^{n_k}$ اعمال شود، دیده می‌شود که f یک تکینی در هر نقطهٔ $z = e^{i\theta}$ دارد.

عدد صحیح $m > 0$ را چنان اختیار می‌کنیم که $(m+1)/m < 1 + \delta$ و سری توانی $g(w)$ را که از تغییر متغیر

$$z = \frac{w^m + w^{m+1}}{2}$$

به دست می‌آید در نظر می‌گیریم و جمل

$$\left(\frac{w^m + w^{m+1}}{2}\right)^{n_k}$$

در سری توانی f را بسط می‌دهیم:

$$g(w) = f\left(\frac{w^m + w^{m+1}}{2}\right) = \frac{c_0 w^{mn_1}}{2^{n_1}} + \frac{c_0 n_1 w^{mn_1+m}}{2^{n_1}} + \dots + \frac{c_0}{2^{n_1}} w^{mn_1+n_1}$$
$$+ \frac{c_1}{2^{n_2}} w^{mn_2} + \frac{c_1 n_2}{2^{n_2}} w^{mn_2+m} + \dots + \frac{c_1}{2^{n_2}} w^{mn_2+n_2} + \dots.$$

توجه می‌کنیم که هیچ دوجمله‌ای از این بسط شامل توان یکسانی از w نیستند، زیرا نامساوی $mn_{k+1} > mn_k + n_k$ برقرار است هرگاه که $n_{k+1}/n_k > (m+1)/m$.

اگر $|w| < 1$ آن گاه

$$\frac{|w|^m + |w|^{m+1}}{2} < 1$$

و چون $f(z)$ به ازای $|z| < 1$ مطلقاً همگرا است، سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \left(\frac{|w|^m + |w|^{m+1}}{2}\right)^{n_k}$$

همگرا می‌باشد. از این رو، $g(w)$ به ازای $|w| < 1$ همگراست. از طرف دیگر، اگر w را حقیقی و بزرگتر از واحد اختیار کنیم، آن‌گاه

$$\frac{w^m + w^{m+1}}{2} > 1$$

که در این صورت

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{w^m + w^{m+1}}{2}\right)^{n_k}$$

واگراست. معذالک، ملاحظه می‌کنیم که مجموعهای جزئی jـ‌م S_j سری بالا دقیقاً مجموعهای جزئی $(m+1)n_j$ـ‌م سری توانی g می‌باشند. از این رو، سری $g(w)$ واگرا است و g نیز دارای شعاع همگرایی واحد است. مطابق قضیهٔ ۲.۱۸، g باید یک تکینی در نقطه‌ای مانند w_0 داشته باشد که $|w_0| = 1$. اگر $w_0 \neq 1$ آن‌گاه

$$\left|\frac{w_0^m + w_0^{m+1}}{2}\right| < 1$$

و چون f در $|z| < 1$ تحلیلی است، g در w_0 منظم است. به این ترتیب، g باید یک تکینی در $w_0 = 1$ داشته باشد و چون

$$g(w) = f\left(\frac{w^m + w^{m+1}}{2}\right)$$

$f(z)$ باید یک تکینی در $z = 1$ داشته باشد. □

روش گشتاورها. فرض کنید که یک سری توانی مانند $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ مفروض باشد که در آن ضرایب c_n «گشتاورهای» تابع پیوستهٔ مفروضی باشند. به عنوان مثال، فرض کنید که تابع پیوسته‌ای مانند g موجود باشد به طوری که

$$c_n = \int_0^1 g(t).t^n dt$$

آن‌گاه

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 g(t)t^n dt\right] z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 g(t)(tz)^n dt\right]$$

و، با تعویض ترتیب جمعبندی و انتگرالگیری، درمی‌یابیم که

$$f(z) = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} g(t)(tz)^n\right] dt$$
$$= \int_0^1 \frac{g(t)}{1 - tz} dt$$

(در صورتی که $|z| < 1$، بررسی تعویض ترتیب جمعبندی و انتگرالگیری به آسانی میسر است.) بعلاوه، با این صورت انتگرالی یک تعمیم تحلیلی از سری توانی اولیه می‌توان تعریف کرد.

امثله

(i) فرض کنید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}, \qquad |z| < 1$$

چون

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$$

و $g(t) = 1$

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1 - tz}, \qquad |z| < 1$$

این انتگرال بر سرتاسر صفحهٔ مختلط منهای $[1, \infty)$ تحلیلی است. مطابق قضیهٔ ۱۷.۱۰، این تعمیم f یک ناپیوستگی در هر نقطهٔ بازهٔ $[1, \infty)$ دارد.

(ii) چون

$$\int_0^\infty e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = c \int_0^\infty e^{-nt^2} dt$$

که در آن c یک ثابت مثبت است. (در بخش دیگر نشان خواهیم داد که مقدار c عبارت است از $\sqrt{\pi}/۲$.) از این رو،

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n}} &= c\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}(ze^{-t^2})^n dt\right]\\ &= c\int_0^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(ze^{-t^2})^n\right]dt, \qquad |z|<1\\ &= c\int_0^{\infty}\frac{z}{e^{t^2}-z}dt\end{aligned}$$

مجدداً، در حالی که تعویض ترتیب جمعبندی و انتگرالگیری فقط در حوزهٔ اصلی $|z| < 1$ معتبر است، این انتگرال یک تعمیم تحلیلی به ناحیهٔ بزرگتر $\mathbb{C}-[1,\infty)$ تعریف می‌کند. مجدداً، به استناد۱۷.۱۰، این انتگرال در هر نقطهٔ $[1,\infty)$ یک ناپیوستگی دارد.

مسائل بسیاری از این نوع را می‌توان با بیان ضرایب c_n به صورت

$$c_n = \int_0^{\infty} e^{-nt}g(t)dt$$

حل کرد. (در این حالت، c_n به صورت «تبدیل لاپلاس» g در عدد صحیح n به دست می‌آید.) چند نمونهٔ مشهور از این تبدیلات را در زیر می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+a} &= \int_0^{\infty} e^{-nt}e^{-at}dt\\ \frac{a}{n^2+a^2} &= \int_0^{\infty} e^{-nt}\sin at\,dt\\ \frac{n}{n^2+a^2} &= \int_0^{\infty} e^{-nt}\cos at\,dt\\ \frac{1}{n^p} &= c_p\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{p-1}dt, \qquad p>0\end{aligned}$$

(ثابتهای c_p برحسب تابع Γ، که در بخش بعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، تعیین می‌شوند. تمرین ۴ را ببینید.)

مثال. فرض کنید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}z^n$$

آن‌گاه

$$f(z) = z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{n^2+1}\right)$$

به استناد یکی از فرمولهای بالا،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} (e^{-nt}\cos t) z^n dt\right]$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{e^t \cos t}{e^t - z} dt, \qquad |z| < 1$$

بنابراین،

$$f(z) = z\int_0^{\infty} \frac{e^t \cos t}{(e^t - z)^2} dt$$

به عنوان یک راه حل دیگر، می‌توان نوشت:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{z^2+1}) z^n = \frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} z^n$$

وهکذا.

۲.۱۸ توابع گاما و زتا

تابع گاما. انتگرال

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

را در نظر بگیرید. انتگرالگیری جزءبه‌جزء نشان می‌دهد که

$$I_n = n\int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = nI_{n-1}$$

چون $I_0 = 1$، رابطهٔ بازگشتی بالا ایجاب می‌کند که تساوی

$$I_n = n!$$

به ازای هر عدد صحیح مثبت n برقرار باشد. بعلاوه، انتگرال بالا انگیزه‌ای می‌شود که این تابع «فاکتوریل» را به صفحهٔ مختلط تعمیم دهیم. توجه کنید که

$$|t^z| = |e^{z\log t}| = e^{(\mathrm{Re}\, z)\log t} = t^{\mathrm{Re}\, z}, \qquad t \geq 0$$

در این صورت، اگر متغیر مختلط z را جایگزین n کنیم، تابع حاصل $f(z) = \int_\circ^\infty e^{-t}t^z\,dt$ به ازای $\operatorname{Re} z > -۱$ به طور یکنواخت همگرا است. با یک انتقال، تابع کلاسیک گاما

$$\Gamma(z) = \int_\circ^\infty e^{-t}t^{z-۱}\,dt \tag{۱}$$

حاصل می‌شود. به این ترتیب، Γ در نیم‌صفحهٔ راست $\operatorname{Re} z > \circ$ تحلیلی است و به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $\Gamma(n) = (n-۱)!$.

واضح است که Γ یک تکینی در $z = \circ$ دارد؛ زیرا

$$\Gamma(\varepsilon) = \int_\circ^\infty \frac{e^{-t}}{t^{۱-\varepsilon}}dt \to \infty \qquad \text{وقتی که} \qquad \varepsilon \to \circ^+$$

از طرف دیگر، اگرچه (۱) تابع Γ را فقط در نیم‌صفحهٔ راست تعریف می‌کند، این تابع به تمامی صفحه به استثنای قطبهای تنها قابل تعمیم است. این تعمیم را به چند طریق می‌توان انجام داد.

روش اول. انتگرالگیری جزءبه‌جزء نشان می‌دهد که

$$\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z), \qquad \operatorname{Re} z > \circ \qquad \text{به ازای}$$

یا، به طور معادل،

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+۱)}{z}, \qquad \operatorname{Re} z > \circ \qquad \text{به ازای} \tag{۲}$$

به استناد اتحاد (۲) می‌توانیم تعمیمی از تابع Γ را به نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re} z > -۱$ به استثنای $z = \circ$ تعریف کنیم. این تعمیم به‌ازای $-۱ < \operatorname{Re} z < \circ$ تحلیلی است و در امتداد محور y، به استثنای $y = \circ$، پیوسته است؛ زیرا Γ «اصلی» بر خط $\operatorname{Re} z = ۱$ پیوسته است. یعنی،

$$\lim_{z\to iy}\Gamma(z) = \lim_{z\to iy}\frac{\Gamma(z+۱)}{z} = \frac{\Gamma(iy+۱)}{iy} = \Gamma(iy), \qquad y \neq \circ$$

از این رو، به استناد قضیهٔ موررا، تابع تعمیم یافته در سرتاسر $\operatorname{Re} z > -۱$ که $z \neq \circ$ تحلیلی است. اتحاد (۲) طبیعت تکینی در $z = \circ$ را نیز آشکار می‌سازد، زیرا وقتی که $z \to \circ$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+۱)}{z} \sim \frac{\Gamma(۱)}{z} = \frac{۱}{z}$$

از این رو، Γ در $z = \circ$ یک قطب ساده با ماندهٔ ۱ دارد.

با ادامهٔ بحث به طریق مشابه، می‌توان تعریف کرد:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \qquad \text{به ازای } \operatorname{Re} z > -2،$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} \qquad \text{به ازای } \operatorname{Re} z > -3،$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{z(z+1)\dots(z+k)}, \qquad \text{به‌ازای } \operatorname{Re} z > -k-1 \tag{۳}$$

سپس، توجه می‌کنیم که تنها تکینیهای تابع قطبهای تنهای ساده در نقاط صحیح غیرمثبت می‌باشند، و وقتی که $z \to -k$

$$\Gamma(z) \sim \frac{\Gamma(1)}{(-k)(-k+1)\dots(-1)(z+k)} = \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}$$

از این رو،

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z); -k) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

روش دوّم. قرار می‌دهیم $\Gamma(z) = \Gamma_1(z) + \Gamma_2(z)$، که در آن

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma_2(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

چون $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}$، Γ_2 به ازای همهٔ zها به طور یکنواخت همگرا است و تابعی تام را نمایش می‌دهد. بنابراین، برای تعمیم Γ، لازم است که فقط Γ_1 را تعمیم دهیم. امّا، به ازای $\operatorname{Re} z > 0$،

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - + \dots\right) t^{z-1} dt$$

$$= \int_0^1 t^{z-1} dt - \int_0^1 t^z dt + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{2!} dt - + \dots$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!(z+2)} - + \dots$$

با سری بالا یک تعمیم تحلیلی از Γ_1 به تمامی صفحه تعریف می‌شود به استثنای قطبهای تنها در ۰، ۱−، ۲−، . . . . مجدداً، توجه می‌کنیم که

$$\operatorname{Res}(\Gamma; -k) = \operatorname{Res}(\Gamma_1; -k) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

روش سوم. با استفاده از این واقعیت که $(1-t/n)^n$ به e^{-t} همگراست وقتی که $n\to\infty$، می‌توان نشان داد که

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n dt$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}\int_0^n t^{z-1}(n-t)^n dt,\qquad \operatorname{Re} z>0$$

(تمرین ۶ را ببینید.)

با انتگرالگیری جزءبه‌جزء دیده می‌شود که

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}.\frac{n}{z}\int_0^n t^z(n-t)^{n-1}dt$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}.\frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\int_0^1 t^{z+n-1}dt$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z}\left(\frac{1}{z+1}\right)\left(\frac{2}{z+2}\right)\dots\left(\frac{n}{z+n}\right)$$

به این ترتیب،

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}zn^{-z}(1+z)(1+\frac{z}{2})\dots(1+\frac{z}{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}zn^{-z}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})$$

برای بررسی حد بالا، «عوامل همگرایی» $e^{-z/k}$ را قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}zn^{-z}e^{z(1+1/2+\dots+1/n)}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})e^{-z/k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{z(1+1/2+\dots+1/n-\log n)}\left[z\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})e^{-z/k}\right]$$

به استناد لم زیر، $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n$ به حد مثبتی مانند γ (موسوم به ثابت اویلر) میل می‌کند. در این صورت،

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})e^{-z/k}$$

با استفاده از اتحاد بالا برای تعریف تعمیمی از Γ به نیم‌صفحهٔ چپ، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}=-z^2\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{k^2})=-z\frac{\sin\pi z}{\pi}$$

به این ترتیب،

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z}$$

و چون $\Gamma(۱-z) = -z\Gamma(z)$،

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (۴)$$

دو نتیجهٔ بدیهی اتحاد (۴) عبارتند از:

(i) Γ فاقد صفر است،

(ii) $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$. با استفاده از اتحاد $\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z)$، همچنین داریم $\Gamma(۳/۲) = \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$، $\Gamma(۵/۲) = ۳\sqrt{\pi}/۴$، ... .

۶.۱۸ لم. اگر $S_n = ۱ + ۱/۲ + \cdots + ۱/n - \log n$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} S_n$ وجود دارد. این حد را ثابت اویلر می‌نامند و به γ نشان می‌دهند.

برهان. $t_n = ۱ + ۱/۲ + \cdots + ۱/(n-۱) - \log n$ با n صعود می‌کند. این خاصیت از لحاظ هندسی بدیهی است، زیرا t_n برابر مساحت $n-۱$ ناحیهٔ بین مجموع ریمان بالایی و مقدار واقعی $\int_۱^n (۱/x)dx$ می‌باشد. می‌توان نوشت:

$$t_n = \sum_{k=۱}^{n-۱} \left[\frac{۱}{k} - \log(\frac{k+۱}{k})\right]$$

و

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=۱}^{\infty} \left[\frac{۱}{k} - \log(۱+\frac{۱}{k})\right]$$

این سری به یک ثابت مثبت همگراست، زیرا

$$۰ < \frac{۱}{k} - \log(۱+\frac{۱}{k}) = \frac{۱}{۲k^۲} - \frac{۱}{۳k^۳} + \frac{۱}{۴k^۴} - + \ldots \leq \frac{۱}{۲k^۲}$$

و لم ثابت می‌شود، زیرا $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} t_n$.$\square$

تابع زتا. تابع زتای $\zeta(z)$ با سری نامتناهی

$$\zeta(z) = ۱ + \frac{۱}{۲^z} + \frac{۱}{۳^z} + \dots, \qquad \operatorname{Re} z > ۱$$

تعریف می‌شود. این تابع در نظریهٔ اعداد مورد توجه خاص است، زیرا این تابع رابطه‌ای بین نظریهٔ اعداد اول و نظریهٔ توابع تحلیلی برقرار می‌کند. برای ملاحظهٔ این پیوند، توجه می‌کنیم که

$$\frac{۱}{۲^z}\zeta(z) = \frac{۱}{۲^z} + \frac{۱}{۴^z} + \frac{۱}{۶^z} + \dots$$

و

$$(۱ - \frac{۱}{۲^z})\zeta(z) = ۱ + \frac{۱}{۳^z} + \frac{۱}{۵^z} + \dots$$

به طور مشابه،

$$(۱ - \frac{۱}{۲^z})(۱ - \frac{۱}{۳^z})\zeta(z) = ۱ + \frac{۱}{۵^z} + \frac{۱}{۷^z} + \frac{۱}{۱۱^z} + \dots$$

به دلیل یکتایی تجزیهٔ اعداد صحیح به عوامل اوّل، این کار را می‌توانیم بی‌نهایت بار ادامه دهیم و (در حد) نتیجه بگیریم که

$$\prod_{p\ \text{اول است}} (۱ - \frac{۱}{p^z})\zeta(z) = ۱$$

یعنی،

$$\zeta(z) = ۱/\prod_{p\ \text{اول است}} (۱ - \frac{۱}{p^z}), \qquad \operatorname{Re} z > ۱ \tag{۵}$$

برای بهره‌برداری بهینه از اتحاد (۵)، لازم است که تابع ζ را به بیرون حوزهٔ $\operatorname{Re} z > ۱$ تعمیم دهیم. توجه می‌کنیم که ζ یک تکینی در $z = ۱$ دارد، زیرا $\zeta(۱+\varepsilon) \to \infty$ وقتی که $\varepsilon \to ۰^+$. ذیلاً نشان خواهیم داد که این تکینی تنها تکینی تابع ζ است.

ζ را به روش گشتاورها تعمیم می‌دهیم. توجه می‌کنیم که

$$\int_۰^\infty e^{-nt}t^{z-۱}dt = \frac{۱}{n^z}\int_۰^\infty e^{-t}t^{z-۱}dt = \frac{\Gamma(z)}{n^z}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^z} &= \int_۰^\infty t^{z-۱}\left(\sum_{n=۱}^{\infty} e^{-nt}\right)dt \\ &= \int_۰^\infty \frac{t^{z-۱}}{e^t - ۱}dt\end{aligned}$$

یعنی،

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

یا

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \right] \qquad (6)$$

یادآوری می‌کنیم که $1/\Gamma(z)$ (با مقدار حدی مناسبی در قطبهای Γ) تام است، همچنان که $\int_1^\infty (t^{z-1}/(e^t - 1))dt$. بعلاوه، بسط لوران $1/(e^t - 1)$ حول $t = 0$،

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$$

به ازای $t = 1$ مطلقاً همگراست که از این رو

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt &= \int_0^1 (t^{z-2} + A_0 t^{z-1} + A_1 t^z + \ldots) dt \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z+1} + \ldots \end{aligned} \qquad (7)$$

یک تعمیم تحلیلی از $\int_0^1 (t^{z-1}/(e^t - 1))dt$ به استثنای قطبهای تنها فراهم می‌کند. در این صورت، مطابق (۶)،

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[\left(\frac{1}{z-1} + \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z+1} + \ldots \right) + g(z) \right] \qquad (8)$$

که در آن $g(z)$ تام است. توجه کنید که اگرچه عبارت داخل کروشهٔ بالا یک قطب ساده در $z = 1$ و هر عدد صحیح نامثبت دارد، همهٔ این قطبها به وسیلهٔ صفرهای $1/\Gamma(z)$ حذف می‌شوند مگر $z = 1$. از این رو، ζ یک قطب (سادهٔ) تک در $z = 1$ دارد با ماندهٔ ۱.

مطابق (۵)، ζ به ازای $\operatorname{Re} z > 1$ فاقد صفر است. فرضیهٔ مشهور ریمان حاکی از این است که همهٔ صفرهای مختلط تابع ζ بر خط $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ واقعند. اگرچه این فرضیه هنوز ثابت یا رد نشده است، قضیهٔ زیر تعمیم مهمی از تابع ζ به ناحیهٔ فاقد صفر فراهم می‌سازد.

۷.۱۸ قضیه. ζ در سرتاسر $\operatorname{Re} z \geq 1$ فاقد صفر است.

برهان. این برهان متکی به نامساوی

$$|\zeta^{3}(x)\zeta^{4}(x+iy)\zeta^{2}(x+2iy)| \geq 1, \qquad x > 1 \tag{9}$$

است. برای اثبات توجه می‌کنیم که، به استناد فرمول اویلر (۵)، کافی است نشان دهیم که به ازای هر p (اوّل):

$$\left|\left(1-\frac{1}{p^{x}}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{p^{x+iy}}\right)^{4}\left(1-\frac{1}{p^{x+i2y}}\right)^{2}\right| \leq 1, \qquad x > 1$$

فرض کنید که

$$\frac{1}{p^{x}} = r, \qquad \frac{1}{p^{iy}} = e^{i\theta}$$

در این صورت، $1 > r > 0$ و باید نشان دهیم که

$$|(1-r)^{3}(1-re^{i\theta})^{4}(1-re^{2i\theta})^{2}| \leq 1$$

یا، به طور معادل،

$$f(\theta) = |(1-re^{i\theta})^{4}(1-re^{2i\theta})^{2}| \leq \frac{1}{(1-r)^{3}}$$

توجه می‌کنیم که

$$f(\theta) = (1+r^{2}-2r\cos\theta)^{2}(1+r^{2}-2r\cos 2\theta)$$

یا، اگر قرار دهیم $u = \cos\theta$،

$$f(\theta) = g(u) = (1+r^{2}-2ru)^{2}(1+r^{2}+2r-4ru^{2})$$

(حال، می‌توانیم $(d/du)\log g(u)$ را بررسی کنیم و نشان دهیم که $\max g(u)$ در $u = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید. معذالک، بحث زیر جذّابتر است.)

به استناد نامساوی

$$a^{2}b \leq \left(\frac{2a+b}{3}\right)^{3}$$

که بین میانگینهای حسابی و هندسی اعداد a، a، b، برقرار است، به ازای $a = 1+r^{2}-2ru$ و $b = 1+r^{2}+2r-4ru^{2}$، خواهیم داشت:

$$g(u) \leq h(u) = [3+3r^{2}-2r(2u^{2}+2u-1)]^{3}/27$$

بدیهی است که $h(u)$ در $u = -\frac{۱}{۲}$ ماکسیمم است. بعلاوه، به ازای $u = -\frac{۱}{۲}$، $a = b$ می‌شود که همان $g(-\frac{۱}{۲}) = h(-\frac{۱}{۲})$ است. از این رو،

$$\max_u g(u) = g(-\frac{۱}{۲})$$

که سرانجام نتیجه می‌شود که

$$\max_\theta f(\theta) = g(-\frac{۱}{۲}) = (۱ + r + r^۲)^۳ < (۱ + r + r^۲ + \ldots)^۳ = \frac{۱}{(۱ - r)^۳}$$

و (۹) ثابت می‌شود.

حال، فرض کنید که ζ یک صفر در $z = ۱ + iy_۰$ داشته باشد. چون ζ فقط یک قطب ساده در $z = ۱$ دارد و در $۱ + ۲iy_۰$ تحلیلی است، نتیجه می‌شود که

$$\zeta^۳(x)\zeta^۴(x + iy_۰)\zeta^۲(x + ۲iy_۰) \to ۰ \quad \text{وقتی که} \quad x \to ۱^+$$

که با (۹) متناقض است و قضیه ثابت می‌شود.□

تمرینات

۱) فرض کنید که $f(z) = \log z$، $\operatorname{Re} z > ۰$، $\operatorname{Im} z > ۰$. فرض کنید که $g_۱$ ادامهٔ f به صفحه باشد منهای محور حقیقی منفی (و ۰) و $g_۲$ ادامهٔ f به صفحه باشد منهای محور موهومی منفی (و ۰). نشان دهید که در سرتاسر چارک سوّم، $g_۱ \neq g_۲$.

۲) ثابت کنید: اگر $\sum_{n=۰}^\infty (-۱)^n a_n z^n$، که در آن $a_n \geq ۰$، دارای یک شعاع همگرایی متناهی باشد، آن‌گاه یک تکینی بر روی محور حقیقی منفی دارد.

۳) یک ادامهٔ تحلیلی برای هر یک از توابر زیر تعریف کنید:

(الف) $\sum_{n=۱}^\infty \frac{z^n}{\sqrt[۲]{n}}$ (ب) $\sum_{n=۰}^\infty \frac{z^n}{n^۲ + ۱}$

۴) نشان دهید که

به ازای $p > ۰$، $$\int_۰^\infty e^{-nt}t^{p-۱}dt = \frac{\Gamma(p)}{n^p}$$

۵) با استفاده از تابع Γ نشان دهید که

$$\int_۰^\infty e^{-t^۲}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

۶) ثابت کنید که

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n dt, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

راهنمایی: نخست نشان دهید که به ازای $t \le n$،

$$0 \le e^{-t/n} - (1-\frac{t}{n}) \le \frac{t^2}{2n^2}$$

و سپس با استفاده از اتحاد

$$a^n - b^n \le na^{n-1}(a-b), \qquad a > b$$

نشان دهید که

$$|e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n| \le e^{-t}(\frac{et^2}{2n})$$

۷) نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + - \dots$$

را می‌توان به طور تحلیلی به صفحهٔ کامل ادامه داد. یعنی، نشان دهید که این سری یک تابع تام را نمایش می‌دهد.

۸) با استفاده از اتحاد (۵) ثابت کنید که $\sum(1/p)$، وقتی که p در مجموعهٔ اعداد اول تغییر کند، واگراست.

فصل نوزدهم

کاربردهایی در زمینه‌های دیگر ریاضیات

مقدمه

قبلاً، بالاخص در فصل ۱۱، دیده‌ایم که چگونه می‌توان روشهای آنالیز مختلط را در حل مسائلی از سایر زمینه‌های ریاضیات به کار برد. هدف این فصل این است که وسعت این کاربردها را نشان بدهیم. مباحثی که برای تشریح این نکته انتخاب شده‌اند چندان ارتباطی به یکدیگر ندارند. اولین مبحث مستلزم اطلاعات مقدماتی از سریهای هندسی است؛ سایر مباحث عمدةً متکی به نظریهٔ توابع تحلیلی است. دو مثال آخر ـ قضیهٔ یکتایی فوریه و قضیهٔ اعداد اول ـ متضمن نتایجی مقدماتی از قلمرو آنالیز حقیقی و نظریهٔ اعداد است. اینها به دو دلیل در بحث گنجانیده شده‌اند: یکی به خاطر طبیعت کلاسیک خود و دیگری به این دلیل که راه‌حلهای عرضه شده «نسبتاً» ساده‌اند.

۱۰.۱۹ مسأله‌ای از افراز

مسأله. آیا مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\{1, 2, 3, \ldots\}$ را می‌توانیم به تعدادی متناهی مجموعهٔ S_1،S_2،...،S_k افراز کنیم به طوری که عناصر هر یک از این مجموعه‌ها یک تصاعد حسابی تشکیل بدهند؟ یعنی،

$$S_1 = \{a_1, a_1 + d_1, a_1 + 2d_1, \ldots\}$$
$$S_2 = \{a_2, a_2 + d_2, a_2 + 2d_2, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$S_k = \{a_k, a_k + d_k, a_k + 2d_k, \ldots\}$$

و هیچ تفاضل مشترک مساوی موجود نباشد؟ یعنی، $d_i \neq d_j$ وقتی که $i \neq j$.

توجه کنید که اگر تفاضل مشترک مساوی مجاز می‌بود، جواب مسأله (به طور بدیهی) آری بود. به عنوان مثال، می‌توانستیم چنین اختیار کنیم: S_1 = مجموعهٔ اعداد فرد و S_2 = مجموعهٔ اعداد زوج. با فرض مسأله، چنان که خواهیم دید، جواب منفی است.

حل. فرض کنید که S_1،S_2،...،S_k (به صورت بالا) مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت را افراز کنند. آن گاه، به ازای $|z| < 1$، می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n\in S_1} z^n + \sum_{n\in S_2} z^n + \cdots + \sum_{n\in S_k} z^n$$

یا

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \cdots + \frac{z^{a_k}}{1-z^{a_k}} \qquad (1)$$

چون $d_i \neq d_j$، می‌توان فرض کرد که $d_1 > d_j$ وقتی که $j \neq 1$. نتیجه می‌شود که وقتی $z \to e^{2\pi i/d_1}$ اوّلین جملهٔ سمت راست (۱) به بی‌نهایت میل می‌کند در حالی که سایر جمل به یک حد متناهی میل می‌کنند؛ که این بالبداهه با (۱) متناقض است و لذا افرازی از نوع مطلوب ممکن نیست.

۲.۱۹ یک دستگاه نامتناهی از معادلات

دستگاه نامتناهی زیر از معادلات

$$a_1 + b_1 = 2$$
$$a_2 + 2a_1b_1 + b_2 = 4$$
$$a_3 + 3a_2b_1 + 3a_1b_2 + b_3 = 8$$
$$a_n + \binom{n}{1}a_{n-1}b_1 + \binom{n}{2}a_{n-2}b_2 + \cdots + b_n = 2^n$$

را در نظر بگیرید.

مسأله. با این فرض که $a_1 = b_1 = 1$ و همواره $a_k \geq 0$ و $b_k \geq 0$ ، آیا دستگاه بالا جوابی غیر از $a_n \equiv 1$، $b_n \equiv 1$ دارد؟

توجه کنید که اگر بر فرض $a_k \geq 0$، $b_k \geq 0$ اصرار نمی‌بود، مسأله بی‌نهایت جواب داشت؛ زیرا در هر معادله دو مجهول جدید معرفی می‌شود. امّا، با کمی تعجّب، جواب مسأله منفی است.

حل. فرض کنید که دنباله‌های $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ جوابی از دستگاه بالا باشند. آن‌گاه، چون همهٔ جمل نامنفی هستند و نابیشتر از 2^n، با فرض $a_0 = b_0 = 1$ توابع تام

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n z^n}{n!}$$

را معرفی می‌کنیم. توجه کنیدکه

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

که در آن

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{n-j}b_j}{(n-j)!j!} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a_{n-j}b_j}{n!}$$

در این صورت، مطابق فرض،

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!} = e^{2z}$$

بنابراین، f و g توابع تامی هستند که فاقد صفرند و هر دو خطی مرتبه‌اند. از این رو، مطابق قضیهٔ ۱۲.۱۶،

$$f(z) = e^{\alpha z+\beta}, \qquad g(z) = e^{\gamma z+\delta}$$

چون

$$f(\circ) = g(\circ) = a_\circ = b_\circ = ۱$$

نتیجه می‌شود که $f(z) = e^{\alpha z}$ و $g(z) = e^{\gamma z}$. از بسطهای

$$\begin{aligned} f(z) = e^{\alpha z} &= ۱ + \alpha z + \frac{\alpha^۲ z^۲}{۲!} + \cdots = ۱ + z + \frac{a_۲ z^۲}{۲!} + \dots \\ g(z) = e^{\alpha z} &= ۱ + \gamma z + \frac{\gamma^۲ z^۲}{۲!} + \cdots = ۱ + z + \frac{b_۲ z^۲}{۲!} + \dots \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که $\alpha = \gamma = ۱$ و لذا $a_n \equiv b_n \equiv ۱$.

۳.۱۹ مسأله‌ای در مورد تغییر

مسأله. تغییر کل $\sin^۲ x/x^۲$ را بر $(-\infty, \infty)$ محاسبه کنید.

تبصره. $(\sin^۲ x/x^۲)$ مثبت و مقعر است و بنابراین یک ماکسیمم موضعی بین هر زوج صفر متوالی دارد. از این رو، تغییر کل تابع دو برابر حاصل جمع مقادیر ماکسیممهای موضعی است. این مسأله به مجموعهایی مربوط می‌شود که در ۲.۱۱ با آنها مواجه شدیم. در این مورد، تازگی بحث در این واقعیّت نهفته است که اگرچه ما به طور صریح به تعیین نقاط ماکسیمم x_k، $k = ۱, ۲, \dots,$، نمی‌پردازیم ولی قادر خواهیم بود که حاصل جمع مطلوب

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin^۲ x_k}{x_k^۲}$$

را بیابیم.

حل. نقاط ماکسیمم $\sin^۲ x/x^۲$ همان صفرهای مشتق هستند که صفرهای $\sin x/x$ نباشند و این نقاط جوابهای (حقیقی) $x\cos x - \sin x = \circ$ یا $\tan x = x$ می‌باشند. به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم که معادلهٔ $\tan z = z$ جواب غیرحقیقی ندارد. به این ترتیب فقط لازم است که مجموع مقادیر $\sin^۲ x/x^۲$ را در صفرهای $\tan z - z$ بیابیم.

غیر از $z = 0$، سایر صفرهای $\tan z - z$ ساده‌اند. یادآوری می‌کنیم که f'/f در هر صفر سادهٔ f دارای ماندهٔ ۱ است، بنابراین ملاحظه می‌کنیم که

$$\sum \frac{\sin^2 x_k}{x_k^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} f_1(z)dz - \operatorname{Res}(f_1; 0)$$

که در آن

$$f_1(z) = \frac{\sin^2 z \tan^2 z}{z^2(\tan z - z)}$$

و مجموع بالا به ازای همهٔ نقاط ماکسیمم ناصفر x_k محاسبه می‌شود که در درون C_N واقع می‌شوند. معذالک، باید دنباله‌ای از مسیرهای مناسب C_N بیابیم که (در حد) شامل همهٔ نقاط x_kباشند و $\lim_{N\to\infty}\int_{C_N} f_1(z)dz$ قابل محاسبه باشد.

اگر C_N را مربع به ضلع $2\pi N$ به مرکز $z = 0$ بگیریم، نتیجه می‌شود که در سرتاسر C_N، $|\tan z| < 2$. (به بخش ۲.۱۱ رجوع و از این واقعیّت استفاده کنیدکه $\tan z = \cot(\pi/2 - z)$.) معذالک، چندین مشکل وجود دارد. نه فقط $\sin z$ بر سرتاسر C_N بی‌کران است بلکه $f_1(z)$ بی‌نهایت مانده در قطبهای $\tan z$ دارد. برای غلبه بر این مشکلات، به جای

$$\frac{\sin^2 z \tan^2 z}{z^2}$$

تابع تحلیلی دیگری جایگزین می‌کنیم با همان مقادیر در صفرهای $\tan z - z$. به این ترتیب، z^2 را جانشین $\tan^2 z$ می‌کنیم و چون

$$\sin^2 z = \frac{\tan^2 z}{1 + \tan^2 z}$$

تابع

$$f_2(z) = \frac{z^2}{(1 + z^2)(\tan z - z)}$$

را در نظر می‌گیریم. معذالک، مجدداً یک مشکل وجود دارد. در حالی که درامتداد C_N، $f_2(z) \to 0$ (وقتی که $N \to \infty$)، این صحّت ندارد که $\int_{C_N} f_2(z)dz \to 0$؛ زیرا به ازای zهای بزرگ، $f_2(z) \sim -1/z$ (تمرین ۴). از این رو، یک تعدیل دیگر انجام می‌دهیم و بالاخره

$$f_3(z) = \frac{z \tan z}{(1 + z^2)(\tan z - z)}$$

را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که f_3 در قطبهای $\tan z$ تحلیلی است و نامساوی $|f_3(z)| \leq A/|z|^2$ در سرتاسر C_N برقرار است. بنابراین، نتیجه می‌شود که

$$\int_{C_N} f_3(z)dz \to 0 \quad \text{وقتی که} \quad N \to \infty \tag{2}$$

در حالی که، از طرف دیگر،

$$\int_{C_N} f_3(z)dz \to 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f_3(z))$$

$$= 2\pi i \left[\sum_{\substack{k=1 \\ x_k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin^2 x_k}{x_k^2} + \mathrm{Res}(f_3; 0) + \mathrm{Res}(f_3; i) + \mathrm{Res}(f_3; -i) \right] \tag{3}$$

یک محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که $\mathrm{Res}(f_3; i) = \mathrm{Res}(f_3; -i) = (1 - e^2)/4$. با بسط

$$f_3(z) = \frac{z \sin z}{(1 + z^2)(\sin z - z \cos z)}$$

حول $z = 0$ ملاحظه می‌کنیم که $\mathrm{Res}(f_3; 0) = 3$. چون $\sin^2 x/x^2 = 1$ وقتی که $x = 0$، مقایسهٔ (۲) و (۳) نشان می‌دهد که

$$\mathrm{Var}(\frac{\sin^2 x}{x^2}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x_k}{x_k^2} = e^2 - 5$$

۴.۱۹ قضیهٔ یکتایی فوریه

فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ باشد. در این صورت، به استناد تعریف، $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ و انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$ به ازای هر عدد حقیقی x موجود است. تابع $\hat{f}$ با ضابطهٔ $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$ را تبدیل فوریهٔ f می‌نامند. سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که آیا f به وسیلهٔ $\hat{f}$ به طور منحصر به‌فرد تعیین می‌شود؟ یعنی، آیا $\hat{f} \equiv 0$ ایجاب می‌کند ک تقریباً همه جا $f \equiv 0$؟ جواب مثبت است و معمولاً از طریق توسل به فرمول وارونی به دست می‌آید که به کمک آن می‌توان f را از $\hat{f}$ بازیافت. برهان تحلیلی زیر از صراحت بیشتری برخوردار است. معذالک، دو حکم مقدماتی از نظریهٔ لبگ مورد نیاز می‌باشد.

۱.۱۹ لم. فرض کنید $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که نامساوی $|g_n(x)| \leq G(x)$، که در آن G انتگرالپذیر است، به ازای هر x و n برقرار باشد و به ازای همهٔ مقادیر x داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

آن گاه

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{a} g(x)dx$$

برهان. رجوع کنید به: تیچمارش، صفحهٔ ۳۴۵.□

۲.۱۹ لم. اگر f انتگرالپذیر باشد و به ازای هر a داشته باشیم $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = ۰$، آن‌گاه تقریباً همه جا $f = ۰$.

برهان. رجوع کنید به: تیچمارش، صفحهٔ ۳۶۰.□

۳.۱۹ قضیهٔ یکتایی فوریه. اگر f انتگرالپذیر باشد و

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt = ۰$$

آن‌گاه تقریباً همه جا $f = ۰$.

برهان. بنابر فرض، به ازای هر عدد حقیقی a،

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)e^{ix(t-a)}dt = -\int_{a}^{\infty} f(t)e^{ix(t-a)}dt \qquad (۴)$$

اگر قرار دهیم

$$L(z) = \int_{-\infty}^{a} f(t)e^{iz(t-a)}dt, \qquad R(z) = -\int_{a}^{\infty} f(t)e^{iz(t-a)}dt$$

آن‌گاه $L(z)$ به ازای $\operatorname{Im} z \leq ۰$ تعریف می‌شود در حالی که $R(z)$ به ازای $\operatorname{Im} z \geq ۰$. بعلاوه، هر یک در داخل حوزهٔ تعریف خود تحلیلی است، بر مرز پیوسته است (مطابق لم ۱.۱۹)، و به $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$

کراندار است. چون، به استناد (۴)، این دو بر مرز توافق دارند، می‌توانیم از قضیهٔ ۷.۷ استمداد کرده ثابت کنیم که تابع

$$F(z) = \begin{cases} L(z), & \operatorname{Im} z \leq 0 \\ R(z), & \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$

تام است. به استناد قضیهٔ لیوویل (۱۰.۵)، فرض کرانداری F ایجاب می‌کند که F ثابت باشد. سرانجام، با فرض $z = Ni$ ملاحظه می‌کنیم که $F(Ni) = R(Ni) = \int_a^\infty -f(t)e^{-N(t-a)}dt$ که، به موجب لم ۱.۱۹،به ۰ میل می‌کند وقتی که $N \to \infty$. از این رو، $F(z) \equiv 0$. بالاخص، فرض $z = 0$ ایجاب می‌کند که

$$F(0) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = 0$$

چون این تساوی به ازای هر عدد حقیقی a برقرار است، از لم ۲.۱۹ نتیجه می‌شود که تقریباً همه جا $f = 0$. □

۵.۱۹ قضیهٔ اعداد اول

در این بخش، از رابطهٔ بین تابع ζ و اعداد اول استفاده می‌کنیم تا یک فرمول مجانب برای $\pi(N)$، تعداد اعداد اول نابیشتر از N، بیابیم. خواص کلیدی ζ ، که از فصل ۱۸ به خاطر می‌آوریم، عبارتند از

$$\zeta(z) = \frac{1}{\prod\limits_{p \text{ اول}} (1 - 1/p^z)}, \qquad \operatorname{Re} z > 1 \tag{1}$$

(۲) $(z-1)\zeta(z)$ به ازای $\operatorname{Re} z \geq 1$ تحلیلی و فاقد صفر است.

مطابق (۱)،

$$\log \zeta(z) = -\sum_{p \text{ اول}} \log(1 - \frac{1}{p^z}) = \sum_{p \text{ اول}} \left[\frac{1}{p^z} + \frac{1}{2p^{2z}} + \frac{1}{3p^{3z}} + \dots\right]$$
$$= \sum_{\substack{p \text{ اول} \\ n \geq 1}} \frac{1}{np^{nz}}$$

بعلاوه، توجه کنید که

$$\sum_{\substack{p \text{ اول} \\ n \geq 2}} \frac{1}{np^{nz}} = \sum_{p \text{ اول}} \left[\frac{1}{2p^{2z}} + \frac{1}{3p^{3z}} + \dots\right]$$

در $\operatorname{Re} z > \frac{۱}{۲}$ تحلیلی است (تمرین ۶). بنابراین، تابع

$$L(z) = \log \zeta(z) - \sum_{\substack{p \text{ اول} \\ n \geq ۲}} \frac{۱}{np^{nz}}$$

در $\operatorname{Re} z > ۱$ تحلیلی است، و چون

$$L(z) = \sum_{p \text{ اول}} \frac{۱}{p^z}, \qquad \operatorname{Re} z > ۱ \tag{۳}$$

تابع

$$L(z) + \log(z - ۱) \tag{۴}$$

در $\operatorname{Re} z \geq ۱$ تحلیلی است.

۴.۱۹ قضیهٔ اعداد اول. فرض کنید که $\pi(N)$ تعداد اعداد اول نابیشتر از N باشد. آنگاه $\pi(N) \sim N/\log N$. یعنی،

$$\frac{\pi(N)\log N}{N} \to ۱ \qquad \text{،}N \to \infty \text{ وقتی که}$$

برهان. چون $L(z) + \log(z - ۱)$ در $\operatorname{Re} z \geq ۱$ تحلیلی است، به ازای هر $R > ۲$ عددی مثبت مانند $\delta = \delta(R)$ موجود است که $۰ < \delta < \frac{۱}{۲}$ و $L(z)$ به ازای $۰ < |\operatorname{Im} z| \leq R$ و $\operatorname{Re} z \geq ۱ - \delta$ تحلیلی است ولی $L(z) + \log(z - ۱)$ به ازای $\operatorname{Re} z \geq ۱ - \delta$ و $|\operatorname{Im} z| \leq R$ تحلیلی است.

فرض کنید که C_R مسیر بستهٔ متشکل از قسمتهای زیر باشد:

A : نیم‌دایرهٔ راست به شعاع R و مرکز $z = ۱$، (از $۱ - iR$ تا $۱ + iR$)؛

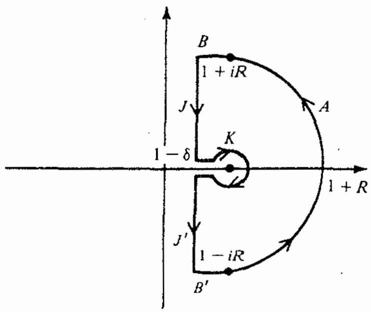
B : ادامهٔ A به ازای $۱ - \delta < \operatorname{Re} z < ۱$؛

J : قطعه خط قائم $\operatorname{Re} z = ۱ - \delta$ از $\operatorname{Im} z = \sqrt{R^۲ - \delta^۲}$ تا محور xها؛

K : «سوراخ کلید» از $۱ - \delta$ تا ۱^-، حول $z = ۱$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و بازگشت به ۱^-، بازگشت از ۱^- تا $۱ - \delta$؛

J' : بازتاب J نسبت به محور xها؛

B' : بازتاب B نسبت به محور xها.



به استناد قضیهٔ کوشی، به ازای هر تابع f که در درون و بر C_R تحلیلی باشد،

$$\int_{C_R} L(z) f(z) dz = ۰$$

f را تابع $f(z) = N^z \mathcal{K}(z)$ اختیار می‌کنیم که در آن $\mathcal{K}$ تابع «هسته» است با ضابطهٔ

$$\mathcal{K}(z) = \frac{۱}{z} + \frac{z - ۱}{R^۲ + ۱}$$

به طور خلاصه، برهان قضیه مبتنی بر این واقعیت است که جمل

$$L(z) N^z = \sum_{\text{اول } p} \frac{N^z}{p^z}$$

بر سرتاسر A دارای قدرمطلقی نسبتاً بزرگ هستند هرگاه $N > p$ و دارای قدرمطلقی نسبتاً کوچک می‌باشند هرگاه $N < p$. با استفاده از نماد $\doteq$ که مترادف است با «برابری به‌جز به ازای جمل قابل

اغماض»، نشان خواهیم داد که

$$\int_A L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz \doteq ۲\pi i.\pi(N)$$

در حالی که با همان انتگرالده

$$\int_B \doteq \int_{B'} \doteq \int_J \doteq \int_{J'} \doteq ۰$$

و

$$\int_K \doteq -۲\pi i\frac{N}{\log N}$$

به این ترتیب، حکم مطلوب از قضیهٔ کوشی نتیجه می‌شود.

برای دستیابی به تخمینهای مطلوب، ابتدا لازم است که احکام زیر را ثابت کنیم:

$(E۱)$ عدد مثبتی مانند $M = M(R)$ موجود است به طوری که نامساوی $|L(z)| \leq M$ بر سرتاسر C_R برقرار باشد.

$(E۲)$ بر سرتاسر دایرهٔ $|z-۱| = R$، $\mathcal{K}(z) = \dfrac{۲(x-۱)(z-۱)}{(R^۲+۱)z}$

$$\sum_{\substack{p \text{ اول} \\ p>N}} \frac{۱}{p^x} \leq \frac{e\log ۴x}{(x-۱)N^{x-۱}\log N}, \qquad x>۱ \qquad (E۳)$$

$$\sum_{\substack{p \text{ اول} \\ p\leq N}} \frac{۱}{p^x} = O\left[\frac{N^{x-۱}\log(۲+|x|)}{(۱-x)\log N} + N^{(۱-x)/۲}\log N\log(۲+|x|)\right], \; x<۱ \qquad (E۴)$$

$(E۱)$ از این که $L(z)$ بر C_R تحلیلی است نتیجه می‌شود. $(E۲)$ بدیهی است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. معذالک، $(E۳)$ و $(E۴)$ بدیهی نیستند. در واقع، این احکام ناشی از تخمینهایی است که چبیشف ضمن مطالعاتش در دنبالهٔ اعداد اول به دست آورده است. معذالک، این احکام فقط به بعضی ملاحظات نسبتاً ساده بستگی دارند و در پیوست «ب» مورد بحث قرار می‌گیرند. ضمناً، جالب است بدانیم که گرچه این طور به نظر می‌رسد که این تخمینها به برهانی صرفاً ناشی از نظریهٔ اعداد برای قضیهٔ اعداد اول نمی‌انجامند، ولی از دقت کافی برای یک برهان «تحلیلی» برخوردارند.

اینک برهان را با بررسی قسمتهای مختلف $\int_{C_R}$ کامل می‌کنیم.

در امتداد A،

$$\int_A L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = \int_A \left(\sum_{p \text{ اول}} \frac{N^z}{p^z}\right)\mathcal{K}(z)dz$$

که آن را به دو انتگرال زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\int_A \left(\sum_{p\le N} \frac{N^z}{p^z}\right) \mathcal{K}(z)dz \quad (ii) \qquad \text{و} \qquad \int_A \left(\sum_{p>N} \frac{N^z}{p^z}\right) \mathcal{K}(z)dz \quad (i)$$

برای تخمین (i)، از فرمولهای $(E۲)$، $(E۳)$، و فرمول معمول $M-L$ استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$\int_A \left(\sum_{p>N} \frac{N^z}{p^z}\right) \mathcal{K}(z)dz = O\left(\frac{N\log R}{R\log N}\right) \tag{۵}$$

برای تخمین (ii)، فرض کنید که A' نیم‌دایرهٔ سمت چپ متناظر A باشد. چون $\mathcal{K}(z)$ در $z=۰$ یک قطب ساده با ماندهٔ ۱ دارد، به ازای هر تابع تام g

$$\int_{A\cup A'} g(z)\mathcal{K}(z)dz = ۲\pi i g(۰)$$

اعمال این نتیجه در انتگرالده (ii) نشان می‌دهد که

$$\int_A \left(\sum_{p\le N} \frac{N^z}{p^z}\right) \mathcal{K}(z)dz = ۲\pi i.\pi(N) - \int_{A'} \left(\sum_{p\le N} \frac{N^z}{p^z}\right) \mathcal{K}(z)dz$$

آن‌گاه، توجه می‌کنیم که به استناد $(E۲)$ و $(E۴)$

$$\int_{A'} \left(\sum_{p\le N} \frac{N^z}{p^z}\right) \mathcal{K}(z)dz \le C_۱ \int_{A'} \frac{N\log(۲+|x|)}{(R^۲+۱)\log N}dz + C_۲ \int_{A'} \frac{(۱-x)N^{(۱-x)/۲}\log N\log(۲+|x|)}{(R^۲+۱)}dz$$

می‌توان دید که، به استناد فرمول $M-L$، انتگرال اول عبارت است از

$$O\left(\frac{N\log R}{R\log N}\right)$$

در حالی که انتگرال دوم (با بررسی حالتهای $|x|<۱$ و $x<-۱$ به طور جداگانه) عبارت است از

$$O\left(\frac{N}{R^۲\log N} + \log R\log N\right)$$

در این صورت، همه با هم به نتیجهٔ زیر می‌انجامد

$$\int_A L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = ۲\pi i.\pi(N) + O\left(\frac{N\log R}{R\log N}\right) + O(\log R\log N) \tag{۶}$$

در امتداد B (و B'): به استناد $(E1)$ و $(E2)$،

$$\int_B L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz \ll \frac{2M(R)}{R^2+1}\int_B N^x(1-x)dx$$
$$\leq \frac{4M(R)}{R^2+1}\int_{1-\delta}^{1} N^x(1-x)dx$$

از این رو، انتگرالگیری مستقیم نشان می‌دهد که

$$\int_B L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = O\left(\frac{NM(R)}{R^2\log^2 N}\right) \qquad (7)$$

البته، همین تخمین در مورد B' برقرار است.

در امتداد J (و J'): در این مورد، به آسانی دیده می‌شود که $\mathcal{K}(z)$ به ۳ کراندار است که بنابراین

$$\int_J L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz \ll 3M(R)\int_0^R N^{1-\delta}dy$$

از این رو،

$$\int_J L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = O(RM(R)N^{1-\delta}) \qquad (8)$$

مجدداً، همین تخمین برای $\int_{J'}$ قابل حصول است.

در امتداد K: چون $L(z)+\log(z-1)$ در سرتاسر $\operatorname{Re} z \geq 1-\delta$ تحلیلی است،

$$\int_K L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = -\int_K \log(z-1)N^z\mathcal{K}(z)dz$$
$$= -2\pi i\int_{1-\delta}^{1} N^x\left(\frac{1}{x}+\frac{x-2}{R^2+1}\right)dx$$

فرض کنید $t = x-1$. آن‌گاه، با استفاده از بسط $1/(1-t) = 1+t+t^2+\ldots$ و نامساویهای

الف)

$$\int_0^\delta N^{-t}dt = \frac{1}{\log N} - \frac{1}{N^\delta \log N} \leq \frac{1}{\log N}$$

ب)

$$\int_0^\delta tN^{-t}dt \leq \int_0^\infty tN^{-t}dt = \frac{1}{\log^2 N}$$

خواهیم داشت:

$$\int_K L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = -۲\pi i\frac{N}{\log N} + O\left(\frac{N^{۱-\delta}}{\log N}\right) + O\left(\frac{N}{\log^۲ N}\right) + O\left(\frac{N}{R^۲\log N}\right) \quad (۹)$$

از ترکیب (۶)، (۷)، (۸) و (۹) همراه با این واقعیت که

$$\int_{C_R} L(z)N^z\mathcal{K}(z)dz = ۰$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{\pi(N)\log N}{N} - ۱ = O\left(\frac{\log R}{R}\right) + O\left(\frac{۱}{R^۲}\right) + O\left(\frac{\log R\log^۲ N}{N}\right) + O\left(\frac{M(R)}{R^۲\log N}\right) + O\left(\frac{RM(R)\log N}{N^\delta}\right) + O\left(\frac{۱}{\log N}\right)$$

در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، R را می‌توانیم به قدری بزرگ اختیار کنیم که هر یک از دو جملهٔ اول سمت راست کوچکتر از $\varepsilon/۶$ شود. پس از انتخاب R به این صورت (و تثبیت $M(R)$ و δ)، می‌توانیم N را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم تا هر یک از جمل باقیمانده از $\varepsilon/۶$ کوچکتر و قضیه ثابت شود. □

تمرینات

۱) نشان دهید که مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت را نمی‌توان به تعدادی متناهی مجموعه متشکل از جمل تصاعدهایی حسابی افراز کرد به گونه‌ای که یکی از قدرنسبتها با سایرین متباین باشد.

۲) همهٔ جوابهای دستگاه معادلات ۲.۱۹ را در حالتی بیابید که به ازای هر k، $a_k \geq ۰$ و $b_k \geq ۰$.

۳) نشان دهید که $\tan z = z$ فقط جواب حقیقی دارد.

۴) با انتخاب C_N مانند ۳.۱۹، و با استفاده از این واقعیت که

$$f_۲(z) = \frac{z^۲}{(۱+z^۲)(\tan z - z)} \sim -\frac{۱}{z}$$

نتیجه بگیرید که $\int_{C_N} f_۲(z)dz \to -۲\pi i$. (این را با مثال ۳ بخش ۱.۱۲ مقایسه کنید.) نتیجه بگیرید که

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\sin^۲ x}{x^۲}\right) = e^۲ - ۵$$

(قسمتهای مختلف $\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} f_۲(z)dz$ را بررسی کنید.)

۵) یادآوری می‌کنیم که (به استناد ۲.۱۶) $e^z = z$ بی‌نهایت جواب z_k دارد که $k = ۱, ۲, \ldots$. $\sum_{k=۱}^{\infty} ۱/z_k^۲$ را بیابید.

۶) ثابت کنید که

$$\sum_{\substack{p \text{ اول} \\ n \geq ۲}} \frac{۱}{np^{nz}}$$

در $\mathrm{Re}\, z > \frac{۱}{۲}$ تحلیلی است.

راهنمایی: نشان دهید که

$$\sum_{\substack{p \text{ اول} \\ n \geq ۲}} \left|\frac{۱}{np^{nz}}\right| < \sum_{p \text{ اول}} \frac{۲}{p^{۲x}}$$

۷) ثابت کنید که

هرگاه $|z-۱| = R$،
$$K(z) = \frac{۱}{z} + \frac{z-۲}{R^۲+۱} = \frac{۲(x-۱)(z-۱)}{(R^۲+۱)z}$$

پیوست الف

I گردش و شار به صورت انتگرالهای مسیری

فرض کنید که C یک منحنی بسته به معادلهٔ $z(t) = x(t) + iy(t)$ باشد. آن‌گاه، بردار مماس بر C عبارت است از

$$\dot{z}(t) = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

و بردار قائم بر C عبارت است از

$$\frac{dy}{dt} - i\frac{dx}{dt}$$

(اگر C طوری پارامتردار شده باشد که مماس بر منحنی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، بردار قائم بالا در جهت «خارج» منحنی است.) فرض کنید که $g = u + iv$ تابع شارش از میان C باشد. در این صورت، گردش حول C از انتگرالگیری مؤلفهٔ مماس g بر حسب طول قوس به دست می‌آید و شار از میان C برابر انتگرال متناظر مؤلفهٔ قائم g است. اگر σ و τ، به ترتیب، گردش و شار باشند و به خاطر بیاوریم که مؤلفهٔ یک بردار $\vec{\alpha}$ در جهت $\vec{\beta}$ عبارت است از $\vec{\alpha}.\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$، خواهیم داشت:

$$\sigma = \int_C (u\frac{dx}{dt} + v\frac{dy}{dt})dt = \int_C udx + vdy$$

و

$$\tau = \int_C (u\frac{dy}{dt} - v\frac{dx}{dt})dt = \int_C udy - vdx$$

سرانجام، توجه کنید که اگر $f = \bar{g} = u - iv$ آن‌گاه

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u - iv)(dx + idy) = \sigma + i\tau$$

II دمای حالت پایا؛ معادلهٔ گرما

فرض کنید که تابع u معرف دمای نقاط یک حوزهٔ D باشد و فرض کنید که u مستقل از زمان باشد. در این صورت، $u = u(x, y)$ یک تابع حقیقی ـ مقدار از (x, y) است، و می‌خواهیم ثابت کنیم که همساز است. برای این منظور، به دو نکتهٔ اساسی توجه می‌کنیم:

۱) شارش گرما در جهت دماهای پایین‌تر است و مقدار گرمایی که از منحنی در واحد زمان عبور می‌کند متناسب با طول منحنی و تفاضل دمای دو طرف منحنی است. بنابراین، گرمایی که از یک خط افقی به طول Δx عبور می‌کند برابر است با $Ku_y\Delta x$، و مقدار گرمایی که از یک خط قائم به طول Δy عبور می‌کند عبارت است از $Ku_x\Delta y$.

۲) افزایش کلی گرما (تفاضل مقدار گرمایی که وارد می‌شود و مقدار گرمایی که باقی می‌ماند) در هر سطح $S \subset D$ باید صفر باشد. در غیر این صورت، دما در نقاطی از S تغییر خواهد کرد که با فرض استقلال u از زمان متناقض است.

براساس این دو نکته و با این فرض که $u \in C^2$، به صورت زیر می‌توانیم ثابت کنیم که u همساز است. فرض کنید که S مربعی در D با اضلاع قائم و افقی به طول h باشد و، بی‌آنکه از کلیّت کاسته شود، فرض کنید که رأس پایین و چپ این مربع نقطهٔ $(0, 0)$ باشد. توجه کنید که به ازای هر تابع $f(x, y)$ با مشتقات جزئی پیوسته در مبداء، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= f(x,y) - f(x,0) + f(x,0) - f(0,0) \\ &= yf_y(x,\xi) + xf_x(\eta,0) \end{aligned}$$

که در این صورت

$$f(x,y) - f(0,0) = y(f_y(0,0) + \varepsilon_1) + x(f_x(0,0) + \varepsilon_2) \tag{۳}$$

که در آن ε_1 و ε_2 به صفر میل می‌کنند وقتی که $(x, y) \to (0, 0)$. برای تحصیل یک فرمول تغییر مقدار گرما در S در واحد زمان، ابتدا تفاضل اتلاف گرما در ضلع بالا و افزایش گرما در ضلع پایین را محاسبه می‌کنیم. مطابق (۱)، این اختلاف، بر هر زیربازهٔ Δx عبارت است از

$$[Ku_y(x, h) - Ku_y(x, 0)]\Delta x$$

ولی، مطابق (۳)،

$$u_y(x, h) = u_y(0, 0) + xu_{yx}(0, 0) + hu_{yy}(0, 0) + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 h$$
$$u_y(x, 0) = u_y(0, 0) + xu_{yx}(0, 0) + \varepsilon_3 x$$

و لذا

$$u_y(x, h) - u_y(x, 0) = hu_{yy}(0, 0) + \varepsilon_4 h$$

که در آن $\varepsilon_4 \to 0$ وقتی که $h \to 0$. از این رو، کاهش خالص گرما از دو زیربازه برابر است با $K[hu_{yy}(0, 0) + \varepsilon_4 h]\Delta x$، و اتلاف خالص گرما در فاصلهٔ دو ضلع بالا و پایین عبارت است از

$$K[h^2 u_{yy}(0, 0) + \varepsilon_4 h^2]$$

به طور مشابه، اتلاف خالص گرما در طول ضلع قائم عبارت است از

$$K[h^2 u_{xx}(0, 0) + \varepsilon_5 h^2]$$

و چون کل کاهش باید صفر باشد،

$$u_{xx}(0, 0) + u_{yy}(0, 0) + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = 0$$

سرانجام، چون h را می‌توان به قدر کافی کوچک اختیار کرد، نتیجه می‌گیریم که

$$u_{xx}(0, 0) + u_{yy}(0, 0) = 0$$

و چون مبداء به هیچ وجه یک نقطهٔ خاص محسوب نمی‌شود، لازم می‌آید که u در سرتاسر D همساز باشد.

پیوست ب

تخمینهای چبیشف

تخمینهای مقدماتی

توجه کنید که به ازای $2m \leq n$ عدد $\binom{n}{m}$ شامل همهٔ عوامل اول بین m و n است؛ از این رو، $\prod_{m<p\leq n} p$ عدد $\binom{n}{m}$ را عاد می‌کند و

$$\prod_{m<p\leq n} p < \binom{n}{m} \tag{۱}$$

بعلاوه،

$$\binom{n}{m} m^m (n-m)^{n-m} \leq [m + (n-m)]^n = n^n$$

که ایجاب می‌کند که

$$\binom{n}{m} \leq \frac{n^n}{m^m (n-m)^{n-m}}$$

بالاخص، اگر قرار دهیم $n = (1+\varepsilon)m$ و $0 < \varepsilon \leq 1$، خواهیم داشت

$$\binom{n}{m} \leq \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{m\varepsilon}$$

که مستلزم نامساوی زیر است:

$$\sum_{m<p\leq m(1+\varepsilon)} \log p \leq m\varepsilon \log \frac{4}{\varepsilon} \qquad (2)$$

تخمین $(E3)$:

$$\sum_{p>N} \frac{1}{p^x} \leq \frac{e \log 4x}{(x-1)N^{x-1}\log N}, \qquad x > 1$$

برهان.

$$\sum_{m<p\leq m(1+\varepsilon)} \frac{1}{p^x} \leq \frac{1}{m^x} \sum_{m<p\leq m(1+\varepsilon)} \frac{\log p}{\log m} \leq \frac{1}{m^x \log m} \sum_{m<p\leq m(1+\varepsilon)} \log p$$

که، به استناد (۲)، به نامساوی

$$\sum_{m<p\leq m(1+\varepsilon)} \frac{1}{p^x} \leq \varepsilon \log \frac{4}{\varepsilon} \Big/ m^{x-1} \log m$$

می‌انجامد. اگر فرض کنیم که m متوالیاً مقادیر N، $N(1+\varepsilon)$، $N(1+\varepsilon)^2$، ... را اختیار کند و نامساویهای حاصل از تخمینهای بالا را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{p>N} \frac{1}{p^x} &\leq \frac{\varepsilon \log(4/\varepsilon)}{N^{x-1}\log N}\left[1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)^{x-1}} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2(x-1)}} + \dots\right] \\ &= \frac{\varepsilon \log(4/\varepsilon)}{N^{x-1}\log N}\left[\frac{(1+\varepsilon)^x}{(1+\varepsilon)^x - (1+\varepsilon)}\right]\end{aligned}$$

سرانجام، با انتخاب $\varepsilon = 1/x$ و استفاده از این واقعیت که $e \leq (1+1/x)^x \leq 2$ ، در می‌یابیم که

$$\sum_{p>N} \frac{1}{p^x} \leq \frac{e \log 4x}{(x-1)N^{x-1}\log N}, \qquad x > 1$$

تخمین $(E۴)$:

$$\sum_{p\leq N}\frac{۱}{p^x}=O\left[\frac{N^{۱-x}\log(۲+|x|)}{(۱-x)\log N}+N^{(۱-x)/۲}\log N\log(۲+|x|)\right],\qquad x<۱$$

برهان. (حالتهای $|x|<۱$ و $x<-۱$ را جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.)
حالت اول: $|x|<۱$. با انتخاب $\varepsilon=۱$ در نامساوی (۲)، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{m<p\leq ۲m}\log p \;\leq\; m\log ۴$$

و

$$\sum_{m<p\leq ۲m}\frac{۱}{p^x}\;\leq\;\sum_{m<p\leq ۲m}\frac{\log p}{p^x\log m}\;\leq\;\frac{۲}{m^x\log m}\sum_{m<p\leq ۲m}\log p\;\leq\;\frac{۲\log ۴}{m^{x-۱}\log m}$$

اگر قرار دهیم $m=[[N/۲^k]]$ که در آن k مقادیر $۰,۱,\ldots,[[\log_۲ N]]$ را اختیار کند و نامساویهای حاصل را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{p\leq N}\frac{۱}{p^x}\leq C_۱N^{۱-x}\sum_{k=۰}^{[[\log_۲ N]]}\frac{۲^{(x-۱)k}}{\log(N/۲^k)}$$
$$\leq C_۱N^{۱-x}\left\{\sum_{k=۰}^{[[(۱/۲)\log_۲ N]]}+\sum_{k=[[(۱/۲)\log_۲ N]]+۱}^{[[\log_۲ N]]}\right\}$$

معذالک، توجه می‌کنیم که اولین جملهٔ سمت راست به

$$\frac{C_۲}{\log N}\sum_{k=۰}^{\infty}۲^{(x-۱)k}$$

کراندار است و سری هندسی $\sum_{k=۰}^{\infty}۲^{(x-۱)k}$ مجانب است با

$$\frac{۱}{(۱-x)}\log ۲\qquad \text{وقتی که}\qquad x\to ۱^-.$$

به آسانی می‌توان دید که جملهٔ دوم سمت راست به

$$\frac{C_۳\log N}{N^{(۱-x)/۲}}$$

کراندار است که، چنان که گفته شد، به ازای $|x| < ۱$

$$\sum_{p\leq N}\frac{۱}{p^x}=O\left[\frac{N^{۱-x}}{(۱-x)\log N}+N^{(۱-x)/۲}\log N\right]$$

حالت دوم: $x < -۱$. در این حالت، اگر قرار دهیم $\varepsilon = ۱/(x-۱)$ و مانند بالا عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{p\leq N}\frac{۱}{p^x} \leq \left(۱+\frac{۱}{۱-x}\right)^{-x}\frac{۱}{۱-x}\log(۴-۴x)N^{۱-x}\sum_{k=۰}^{[[\log_{۱+\varepsilon}N]]}\frac{(۱+\varepsilon)^{k(x-۱)}}{\log[N(۱+\varepsilon)^{-k}]}$$

اگر این مجموع را در $k=[[\frac{۱}{۲}\log_{۱+\varepsilon}N]]$ به دو مجموع تجزیه کنیم، مانند حالت اول، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{p\leq N}\frac{۱}{p^x}=O\left[\frac{N^{۱-x}\log(۲+|x|)}{(۱-x)\log N}+N^{(۱-x)/۲}\log N\log(۲+|x|)\right]$$

و برهان تمام است.

فهرست راهنما