کتابهای

موضوعی

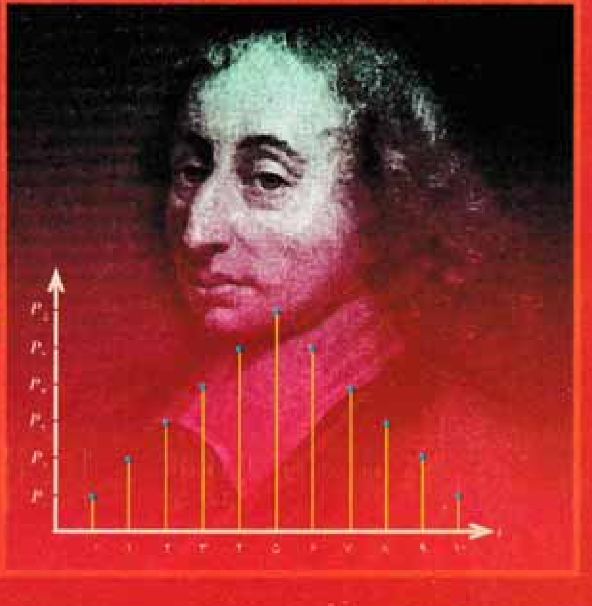
ریاضی

احتمال

جلد اول

روح الله جهانی پور

$$P_k = \frac{C(n,k)}{۲^n}$$



انتشارات فاطمی

کتابهای

موضوعی

ریاضی

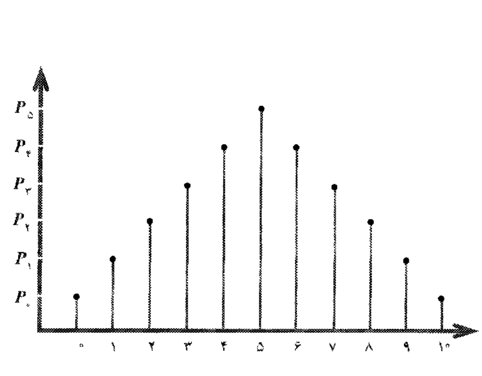
احتمال

جلد اول

روح‌الله جهانی پور

$$P_k = \frac{C(n,k)}{2^n}$$

انتشارات فاطمی



کتابهای موضوعی ریاضی
احتمال / جلد ۱

مؤلف: روح‌الله جهانی‌پور
ناشر: مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
چاپ اول، ۱۳۷۷
شابِک ۱ـ۲۶۸ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-268-1
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
ـ مدیر تولید: فرید مصلحی
ـ طراح جلد: نینا وحیدی
ـ حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): فرشته فرنژاد
ـ صفحه‌آرا: حسین ابراهیمی
ـ نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

لیتوگرافی: گرافیک گستر
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه الزهرا

انتشارات فاطمی
تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲ ـ ۶۵۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۶۶۲۵۸

جهانی‌پور، روح‌الله
احتمال / روح‌الله جهانی‌پور. ـ تهران: فاطمی، ۱۳۷۷.
ده، ۱۰۲ ص.: مصور، جدول، نمودار. ـ (کتابهای موضوعی ریاضی)
ISBN 964-318-268-1
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
بالای عنوان: کتابهای موضوعی ریاضی.
کتابنامه: ص. ۱۰۲.
۱. احتمالات ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. عنوان. ب. عنوان: کتابهای موضوعی ریاضی.
QA۲۷۳/۲۵/ج۹الف۱۳ ۵۱۹/۲۰۷۶
م۷۷ـ۱۰۰۸۴

فهرست

به‌نام خدا

سخن ناشر

سالها پیش **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به‌منظور ارتقاء سطح علمی علاقه‌مندان به‌ویژه دانش‌آموزان دبیرستانها اقدام به انتشار مجموعه کتابهایی با عنوان **گنجینهٔ دانش** در زمینهٔ مباحث فیزیک، شیمی، و ریاضی کرد که با استقبال فراوان علاقه‌مندان روبه‌رو شد. اگر چه این مؤسسه در خلال این سالها مجدّانه در ترجمه و نشر بسیاری از کتابهای مهمِ درسیِ آموزشِ علوم در کشورهای پیشرفته کوشیده است ولی همواره در صدد بازنگری و روزآمد کردن کتابهای تألیفی در انطباق با نظام جدید آموزش و پرورش بوده است. اکنون این تلاش به انتشار مجموعه‌ای از کتابهای **تألیفی موضوعی** در مباحث فیزیک، شیمی، ریاضی و زیست‌شناسیِ دبیرستانی و پیشدانشگاهی انجامیده است. منظور از موضوعی بودنِ این کتابها این است که مطالب هر کتاب شامل مبحث خاصی از یک شاخهٔ علمی است.

تألیف این کتابها با همکاری مدرسان دانشگاهی و دبیرستانی و براساس نیاز و اظهار نظرهای دانش‌آموزان دبیرستانها به عمل آمده است. مؤلفان علاوه بر شرح مبسوط مطالب به بالا بردن سطح فهم علمی دانش‌آموزان و آماده‌سازی آنان برای توفیق در امتحانات و آزمونهای ورودی دانشگاهها و داوطلبان المپیادها نیز توجه داشته‌اند. به‌علاوه مطالب این کتابها در مواردی فراتر از سطح کتابهای درسی است و تمرینها و پرسشهای آن حاوی نکات جدیدی است که می‌تواند برای دبیران ارجمند نیز قابل استفاده باشد.

پیشگفتار مؤلف

در جستجوی قانونهایی که بر پدیده‌های طبیعی حاکم‌اند، اغلب با «پیشامدهایی» روبه‌رو می‌شویم که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند. آزاد شدن یک اتم رادیم نمونه‌ای از این نوع پیشامدهاست، زیرا در یک بازهٔ زمانی مشخص، ممکن است یک اتم رادیم آزاد بشود یا نشود. قرارگرفتن یک ماهوارهٔ فضایی در نقطهٔ معینی از مدارش، نمونهٔ دیگری از این پیشامدهاست. رخ دادن زمینلرزه در منطقه‌ای مشخص در یک سال معین نیز از همین قبیل است، زیرا ممکن است متخصصان بتوانند حدس بزنند به‌سبب وجود برخی شرایط در منطقه‌ای خاص زمینلرزه روی خواهد داد. ولی هنوز روشی برای تعیین زمان وقوع زمینلرزه ابداع نشده است. در هر تجربه، چه طبیعی و چه ساختگی، پیشامدی که ممکن است رخ بدهد یا رخ ندهد، پیشامدِ تصادفی نامیده می‌شود. اگر پیشامدی هرگز رخ ندهد، پیشامد غیرممکن و اگر بدون تردید رخ بدهد پیشامد حتمی نامیده می‌شود. مثلاً این پیشامد که ذره‌ای با سرعت بیشتر از سرعت نور حرکت کند غیرممکن است و این پیشامد که در هنگام رعدوبرق، نور زودتر از صدا به ما برسد، حتمی است.

دانستن اینکه یک پیشامد تصادفی است فقط مشخص می‌کند که شرایطی که تحت آن، آزمایش مربوط به آن پیشامد انجام شده است، وقوع آن پیشامد را تضمین نمی‌کند. از این رو اطلاعاتی که صرفاً از تصادفی بودن به‌دست می‌آیند، قطعیت ندارند. مطلوب این است که مقادیر دقیق یا تخمینی شانس رخ دادن آن پدیدهٔ تصادفی را معین کنیم. نظریهٔ احتمال ازکوشش برای پرداختن به این مسأله سرچشمه گرفته است. در بسیاری از شاخه‌های مختلف علوم و صنعت ملاحظه می‌شود که تحت یک رشتهٔ طولانی از آزمایشها، گویی نسبت دفعاتی که یک پیشامد تصادفی رخ می‌دهد به یک ثابت مشخص نزدیک می‌شود. بررسی این ثابتها به‌عنوان تخمین اندازه‌های کمّی شانس وقوع پیشامدها، هدف نظریهٔ احتمال و آمار را تشکیل می‌دهد. مثلاً اگر یک سکهٔ سالم را پیاپی پرتاب کنیم نسبت «رو»های ظاهر شده به‌سمت عدد $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود. بنابراین نظریهٔ احتمال می‌گوید که احتمال ظاهر شدن«رو» در آزمایش پرتاب سکهٔ سالم، برابر با $\frac{1}{2}$ است.

از نظر تاریخی، از دورهٔ رنسانس تاکنون بازیهای شانسی رواج داشته‌اند. اما پیشرفت نظریهٔ احتمال به‌عنوان یک شاخهٔ ریاضی سابقهٔ چندان طولانی ندارد. روشن است که مردم در خلال بازیهای شانسی ایده‌های شهودی دربارهٔ فراوانی وقوع پیشامدهای معین و در نتیجه احتمال وقوع آنها به‌دست می‌آوردند، ولی مطالعات سازمان یافته دربارهٔ شانس وقوع پیشامدها تا قرن پانزدهم هنوز آغاز نشده بود. نیکولو تارتاگلیا[۱] (۱۵۵۷-۱۴۹۹)، جیرولامو کاردانو[۲] (۱۵۷۶-۱۵۰۱) و به‌ویژه گالیلئو گالیله [۳]

1. Niccolo Tartaglia 2. Girolamo Cardano 3. Galileo Galilei

◁ نیکولو تارتاگلیا

جیرولامو کاردانو ◁

(۱۶۴۲-۱۵۶۴) از نخستین ریاضیدانانی بودند که احتمالهای مربوط به انواع مختلف بازیهای شانس را محاسبه کردند. آنها تلاش کردند که مبانی ریاضی نظریهٔ احتمال را وضع کنند. با این حال پیشرفت واقعی این نظریه در سال ۱۶۵۴ در فرانسه و در زمانی آغاز شد که بلز پاسکال[1] (۱۶۶۲-۱۶۲۳) و پیر دو فرما[2] (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، دو تن از ریاضیدانان بزرگ، نامه‌هایی رد وبدل کردند که در آنها روشهای کلی محاسبهٔ احتمالها بررسی شده بود. در سال ۱۶۵۵، کریستیان هویگنس (۱۶۹۵-۱۶۲۹) نیز به آنها ملحق شد و همکاری سودمندی را با آنها آغاز نمود. در سال ۱۶۵۷ هویگنس اولین کتاب دربارهٔ احتمال را با نام دربارهٔ محاسبات مربوط به بازیهای شانس[3] منتشر کرد. زمان تولد واقعی نظریهٔ احتمال، انتشار همین کتاب بود. هر کس این کتاب را مطالعه کند، خود را با یک نظریهٔ عمیق مواجه می‌بیند. بررسی مسائل حل شده و حل نشده و بسیاری از ایده‌های جدید، در این کتاب، علاقمندان به این حوزهٔ علمی جدید را افزایش داد.

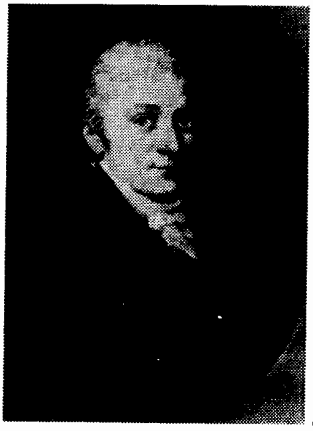
پیر دو فرما

1. Blaise Pascal 2. Pierre de Fermat 3. De Ratiocinates in Aleae Ludo

بعد از کار پاسکال، فرما و هویگنس، کتابهایی که جیمز برنولی[1] (۱۶۵۴-۱۷۰۵) در سال ۱۷۱۳ و آبراهام دومواور[2] (۱۶۶۷-۱۷۵۴) در سال ۱۷۳۰ نوشتند ازکارهای مهم در این زمینه به شمار می‌رود. در قرن هیجدهم، مطالعاتی که ریاضیدانان بزرگی چون لاپلاس[3] (۱۷۴۹-۱۸۲۷) و پواسن (۱۷۸۱-۱۸۴۰) و کارل گاوس[4] (۱۷۷۷-۱۸۵۵) انجام دادند، به رشد سریع نظریهٔ احتمال و کاربردهای آن، در جهتهای گوناگون منجر شد. هر چند تا اوایل قرن بیستم، نظریهٔ احتمال در حال رشد و توسعه بود، اما مبانی آن هنوز محکم و استوار نشده بود. از آن پس، هدف این بود که آن‌را بر مبنای ریاضی محکمی استوار سازند. تا قبل از این کار، شاید تعبیر فراوانی نسبی برای احتمال مورد پسندتر از بقیهٔ تعبیرها بود. براساس این تعبیر، برای تعریف احتمال وقوع یک پیشامد A در یک آزمایش، P، به رشته‌ای از آزمایشهای پیاپی یا همزمان نگاه می‌کنیم، و مشاهده می‌کنیم که نسبت دفعات رخ دادن A، به چه عددی نزدیک می‌شود. در واقع در n بار انجام آزمایش، $n(A)$ یعنی تعداد دفعات رخ دادن A را می‌شماریم و تعریف می‌کنیم $P = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$. این تعریف از نظر ریاضی مشکل‌زاست و نمی‌تواند پایه‌ای برای نظریهٔ دقیق احتمال باشد. بعضی از مشکلات ناشی از این تعریف عبارت‌اند از:

۱. در عمل، حد $\lim_{n\to\infty} n(A)/n$ را نمی‌توان محاسبه کرد، زیرا بی‌نهایت بار تکرار یک آزمایش غیرممکن است. به‌علاوه اگر برای مقادیر بزرگ n، عدد $n(A)/n$ را به‌عنوان تقریب احتمال A به‌کار ببریم هیچ راهی برای تحلیل خطای حاصل از این تقریب وجود ندارد.

۲. هیچ دلیلی ندارد که باور کنیم حد $n(A)/n$ وقتی $n \to \infty$ وجود دارد. همچنین اگر وجود این حد را به‌عنوان یک اصل بپذیریم مشکلات متعددی پیش می‌آیند که نمی‌توان آنها را حل کرد. مثلاً اینکه آیا در دو رشته دفعات انجام آزمایش برای یک پیشامد A، نسبت اخیر به یک حد میل می‌کند یا نه. از این رو یکتایی احتمال پیشامد A مورد تردید است.



کارل گاوس

1. James Bernoulli
2. Abraham de Moivre
3. Pierre Simon Laplace
4. Karl Gauss

۳. براساس این تعریف، دیگر احتمالهایی که بر مبنای باورها و اطلاعات شخصی استوارند، منطقی نخواهند بود. در نتیجه عبارتهایی از قبیل«احتمال اینکه قیمت نفت در ماه آینده افزایش بیابد، ۶۰ درصد است» یا «احتمال اینکه رقم اعشاری ۵۰۰۰۰ ـام عدد π برابر با ۷ باشد از ۱۰ درصد بیشتر است» بی‌معنی خواهند بود.

در سال ۱۹۰۰ در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس، داوید هیلبرت[1] (۱۹۴۳-۱۸۶۲) ۲۳ مسأله ارائه کرد که به‌نظر او حل آن مسائل می‌بایست دغدغهٔ اصلی ریاضیدانان آینده باشد. یکی از این مسائل بررسی اصل موضوعی نظریهٔ احتمال بود. داوید هیلبرت در سخنرانی خود از وایرشتراس[2] نقل می‌کند که گفته بود «هدف نهایی که همواره باید به‌خاطر سپرد، رسیدن به درک صحیح مبانی علم است». هیلبرت افزود که درک کامل نظریه‌های علمی خاص، برای بررسی موفقیت‌آمیز مبانی آنها لازم است. نظریهٔ احتمال به این نقطه رسیده بود و آنقدر مطالعه شده بود که جواز ایجاد یک مبنای ریاضی محکم برای آن صادر شود.

هر چند افرادی مثل امیل بُرل[3] (۱۹۵۶-۱۸۷۱)، سرج برنشتاین[4] (۱۹۶۸-۱۸۸۰) و ریچارد فون‌میزس[5] (۱۹۵۳-۱۸۸۳) کارهایی در جهت رسیدن به این مقصود انجام دادند ولی در سال ۱۹۳۳ بود که ریاضیدان برجستهٔ روسی، آندره کلموگرف[6] (۱۹۸۷-۱۹۰۳) نظریهٔ احتمال را با موفقیت اصل موضوعی کرد. در کار کلموگرف سه ویژگی بدیهی و تردیدناپذیر احتمال به‌عنوان اصل در نظر گرفته می‌شود و تمام نظریهٔ احتمال دقیقاً بر مبنای این سه اصل توسعه می‌یابد. به‌ویژه وجود ثابت P، به‌عنوان حد فراوانی نسبی دفعات رخ دادن پیشامد A، به‌معنای خاصی، نشان داده می‌شود. احتمالهایی را که از اطلاعات شخصی، احساسها و باورهای ما سرچشمه می‌گیرند نیز می‌توان در چارچوب نظریهٔ اصل موضوعی، مدل‌سازی کرد.

در فصل اول مفهوم پدیدهٔ تصادفی و فضای نمونه‌ای مربوط به آن‌را معرفی می‌کنیم. پیشامد را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای تعریف کرده به‌کمک اعمال مجموعه‌ای از پیشامدهای داده شده، پیشامدهای جدید می‌سازیم. از آنجا که محاسبهٔ احتمال در فضاهای نمونه‌ای هم‌شانس یا احتمال کلاسیک، به محاسبهٔ تعداد اعضای مجموعه‌های متناهی منجر می‌شود و اگر تعداد عضوهای این مجموعه‌ها زیاد باشد، کار شمارش مستقیم، مشکل خواهد بود، در فصل دوم چند مفهوم و دستور مقدماتی شمارش را که به حوزهٔ آنالیز ترکیبیاتی مربوط می‌شود، ارائه می‌کنیم. فصل سوم و چهارم به محاسبهٔ احتمال در فضاهای نمونه‌ای مختلف و اثبات قوانین احتمال اختصاص دارد. در این فصل تأکید بر نحوهٔ به‌دست آوردن احتمال در فضاهای غیر هم شانس، محاسبهٔ احتمال هندسی و اثبات قوانین احتمال به‌کمک اصول موضوع آن است. همچنین احتمالهای دو جمله‌ای را با انتزاع از احتمال آمدن k «رو» در n بار پرتاب یک سکهٔ سالم ($k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$) و به‌عنوان یک تخصیص احتمال مهم برای یک فضای احتمال گسستهٔ غیر هم شانس، معرفی می‌کنیم.

---

1. David Hilbert 2. Weierstrass 3. Emile Borel 4. Serge Bernstein
5. Richard Von Mises 6. Andrei Kolmogorov

۱ پدیده‌های تصادفی

ممکن است این گفتهٔ لاپلاس که «گرچه علم احتمال در آغاز برای بررسی بازیهای شانسی ابداع شده ولی امروز باید مهمترین دانش بشری به‌حساب آید» مبالغه‌آمیز به نظر آید ولی این موضوع واقعیت دارد که امروزه علم احتمال ابزار اساسی و مهم تحقیق برای همهٔ دانشمندان، مهندسان، پزشکان، صنعتگران و ... در آمده است، و به‌جای صحبت از «درستی یک چیز» باید دربارهٔ «احتمال درستی آن» سخن گفت. نظریهٔ احتمال ابزار بررسی و شناخت پدیده‌های متعددی در طبیعت و صنعت از قبیل زلزله، سیل، تعداد مکالمات تلفنی در یک شهر در ساعتهای مشخصی از روز، اندازهٔ قطعه‌ای که طی یک فرایند معین در کارخانه‌ای ساخته می‌شود یا تعداد تصادفهای خودروها که هر روز در یک بزرگراه مشخص رخ می‌دهند و بسیاری پدیده‌های دیگر از این دست است که **پدیده‌های تصادفی** نامیده می‌شوند. ویژگی پدیده‌های تصادفی این است که در مشاهدهٔ پیاپی آنها تحت شرایط مشخص، نتایج یکسانی به‌دست نمی‌آید، بلکه ممکن است هر بار نتیجه‌ای متفاوت از بقیهٔ نتیجه‌ها به‌دست آید.

برای اینکه منظورمان را از پدیدهٔ تصادفی با جزئیات بیشتری شرح دهیم، یک پدیدهٔ تصادفی خاص و در عین حال آشنا، یعنی تصادف خودروها را در نظر می‌گیریم. روشن است اینکه یک تصادف خاص کجا، چه وقت و چگونه رخ دهد، به عوامل متعددی بستگی دارد که تغییر اندکی در هر کدام از آنها ممکن است ماهیت تصادف را به میزان زیادی تغییر دهد یا حتی از رخ دادن آن جلوگیری کند. مثلاً در تصادف دو خودرو اگر یکی از راننده‌ها ده دقیقه زودتر یا ده دقیقه دیرتر حرکت کرده بود، یا در بین راه برای نوشیدن یک نوشابه توقف می‌کرد، یا سرعت خود را کم کرده بود تا به گربه‌ای که ناگهان به میان جاده دویده بود، برخورد نکند یا به دلایل متعدد دیگری مسیر حرکت خود را عوض کرده بود، این تصادف خاص اصلاً رخ نمی‌داد. همچنین گردش بیشتر یا کمتر فرمان خودرو می‌توانست در چگونگی تصادف در جهت بهتر یا بدتر، تغییر زیادی بدهد. بنابراین نمی‌توان پیش‌بینی کرد که شخصی که مشغول رانندگی در یک بزرگراه مشخص است، تصادف خواهد کرد یا نه. به‌همین دلیل تصادف کردن یا تصادف نکردن راننده‌ای که در یک بزرگراه مشغول رانندگی است، یک پدیدهٔ تصادفی است و ممکن است راننده یک‌بار هنگام رانندگی در آن بزرگراه، تصادف کند و بار دیگر تصادف نکند.

نمونهٔ دیگری از پدیده‌های تصادفی، بیرون‌آوردن توپ از یک جعبه است. فرض کنید در جعبه‌ای شش توپ وجود دارد که ۴تای آنها سفید و ۲تای دیگر قرمز است و تفاوت توپها تنها در رنگ آنهاست. بدون نگاه کردن به داخل جعبه، توپی را از آن بیرون می‌آوریم. آیا می‌توان پیش از بیرون آوردن توپ به این سؤال پاسخ داد که «رنگ توپ چیست؟» روشن است که نه. در این آزمایش ممکن است توپ سفید، یا توپ قرمز بیرون آید. بنابراین بیرون‌آوردن توپ از جعبه یک پدیدهٔ تصادفی است؛ به این معنا که نمی‌توان رنگ توپی را که بیرون خواهد آمد پیش‌بینی کرد.

شما نیز در زندگی به پدیده‌هایی از این گونه برخورده‌اید. شاید دو کودک را در حال این بازی دیده باشید که یکی سنگ‌ریزه‌ای را در یکی از مشتهای خود مخفی می‌کند و از دیگری می‌خواهد که بگوید سنگ‌ریزه در کدام‌یک از دو مشت او قرار دارد. کودک دوم به یکی از دو دست اشاره می‌کند، اما واقعاً معلوم نیست که انتخاب او درست باشد؛ یعنی ممکن است سنگ‌ریزه در مشتی که او انتخاب کرده است باشد یا نباشد.

در شروع بازی فوتبال، توپ باید در اختیار یکی از دو تیم قرار گیرد. داور بازی برای اینکه مشخص کند توپ در اختیار کدام تیم قرار گیرد از یک پدیدهٔ تصادفی کمک می‌گیرد به این ترتیب که سکهٔ سالمی را پرتاب می‌کند و مثلاً قرار می‌گذارد که اگر سکه به «رو» نشست،[1] توپ در اختیار تیم اول و اگر به «پشت» نشست، توپ در اختیار تیم دوم قرار گیرد. ولی قبل از پرتاب سکه و آگاهی از نتیجه، معلوم نمی‌شود که توپ باید به کدام تیم داده شود، زیرا هیچکس نمی‌داند بعد از پرتاب، سکه «رو» خواهد آمد یا «پشت». به همین دلیل پرتاب سکه یک پدیدهٔ تصادفی است.

در مشاهده‌های مختلف یک پدیدهٔ تصادفی نتیجه‌های متفاوتی حاصل می‌شود، بنابراین پیش از رخ دادن آن پدیده نمی‌توان به‌طور قطع معلوم کرد که چه نتیجه‌ای به‌دست خواهد آمد.

> پدیده‌هایی که نمی‌توان نتیجهٔ آنها را پیش از رخ دادن به‌طور قطع معلوم کرد، پدیده‌های تصادفی نامیده می‌شوند.

در نگاه اول ممکن است به‌نظر برسد که به‌دلیل غیرقابل پیش‌بینی بودن نتیجهٔ پدیده‌های تصادفی، حرف قابل ملاحظه‌ای نمی‌توان دربارهٔ آنها زد. ولی این‌طور نیست. هر چند در هر بار مشاهدهٔ یک پدیدهٔ تصادفی، نتیجهٔ آن مشخص نیست اما از مشاهدهٔ پیاپی آن آگاهیهای مفیدی به‌دست می‌آید. در جدول ۱ نتایج حاصل از ۶۰۰ بار انجام آزمایش بیرون‌آوردن توپ از جعبه‌ای محتوی ۴ توپ سفید و ۲ توپ قرمز ثبت شده است. در این آزمایش توپها را خوب مخلوط و توپی را از آن خارج کرده‌ایم. آنگاه پس از ثبت رنگ توپ آن‌را به درون جعبه بازگردانده‌ایم و این کار را ۶۰۰ بار پیاپی انجام داده‌ایم.

۱. آن طرفی از سکه را که عدد روی آن نوشته شده است، «رو» و طرف دیگر را «پشت» می‌نامیم.

جدول ۱

نسبت توپهای سفید بیرون‌آمده به تعداد کل آزمایشها	در آزمایشهای شمارهٔ	تعداد توپهای سفید بیرون‌آمده	در آزمایشهای شمارهٔ
۰٫۶۹	۱-۱۰۰	۶۹	۱-۱۰۰
۰٫۶۹۵	۱-۲۰۰	۷۰	۱۰۱-۲۰۰
۰٫۶۶۰	۱-۳۰۰	۵۹	۲۰۱-۳۰۰
۰٫۶۵۳	۱-۴۰۰	۶۳	۳۰۱-۴۰۰
۰٫۶۷۴	۱-۵۰۰	۷۶	۴۰۱-۵۰۰
۰٫۶۶۸	۱-۶۰۰	۶۴	۵۰۱-۶۰۰

مشاهده می‌کنیم که در این ۶۰۰ آزمایش نسبت آزمایشهایی که در آنها توپ سفید بیرون‌آمده به تعداد کل آزمایشهای انجام شده، تقریباً $\frac{۲}{۳}$ است. پس می‌توان گفت که اگر آزمایش بیرون‌آوردن توپ از جعبه‌ای محتوی ۴ توپ سفید و ۲ توپ قرمز را به دفعات زیاد تکرار و رنگ توپ بیرون آمده را مشاهده کنیم، تقریباً $\frac{۲}{۳}$ توپهای خارج شده سفید خواهد بود؛ به‌عبارت دیگر اگر از جعبه‌ای که محتوی ۴ توپ سفید و ۲ توپ قرمز است، بدون نگاه کردن به درون آن، توپی را بیرون بیاوریم، با احتمال $\frac{۲}{۳}$، این توپ سفید خواهد بود.

اکنون مثالی را درنظر می‌گیریم که در آن به‌خوبی می‌توان از نتیجهٔ حاصل از ۶۰۰ بار انجام آزمایش بیرون آوردن توپ به‌خوبی استفاده کرد. فرض کنید به‌تجربه معلوم شده است که از میان دانشجویانی که برای ادامهٔ تحصیل در یک دانشگاه پذیرفته می‌شوند، تقریباً $\frac{۲}{۳}$ آنها واقعاً ثبت‌نام می‌کنند، یعنی احتمال اینکه فردِ پذیرفته‌شده برای ادامه تحصیل در این دانشگاه، منصرف نشود و ثبت‌نام کند، $\frac{۲}{۳}$ است. بر این اساس اگر این دانشگاه بخواهد مطمئن شود که تقریباً ۲۰۰ نفر از پذیرفته‌شدگان ثبت‌نام خواهند کرد، باید از میان متقاضیان ادامهٔ تحصیل در آنجا ۳۰۰ نفر را بپذیرد.

این نمونهٔ ساده نشان می‌دهد که از آگاهیهایی که از مشاهدهٔ یک پدیدهٔ تصادفی به‌دست می‌آید می‌توان در وضعیتهای عملی استفاده نمود.

تمرین

۱. دربارهٔ پدیده‌هایی که معمولاً در اطراف شما رخ می‌دهند یا رخ خواهند داد، فکر کنید. سه‌تای آنها را که ماهیت تصادفی دارند، مثال بزنید. آیا می‌توانید سه پدیده را مثال بزنید که بتوان نتیجهٔ آنها را پیش از رخ دادن به‌طور قطع معلوم کرد. اینها، **پدیده‌های قطعی** نامیده می‌شوند.

۲. برای آشنایی بیشتر با پدیده‌های تصادفی، دربارهٔ هر کدام از پیشامدهای زیر فکر کنید. ببینید وقوع کدام‌یک محتملتر است و شانس وقوع کدام‌یک اندک است. به هر پیشامد، عددی را برحسب درصد، به‌عنوان احتمال رخ دادن آن نسبت دهید.

الف) طی این هفته دست‌کم یک روز در مدرسه غیبت خواهید داشت؛

ب) در ماه تیر در شهر شما برف می‌بارد؛
پ) در این هفته یک روز برای صبحانه کره و عسل خواهید خورد؛
ت) اولین بچه‌ای که در لحظهٔ بعدی به دنیا می‌آید، پسر است.

۳. دوست دارید به یک آزمایش تصادفی دست بزنید؟ سکهٔ سالمی را بردارید و آن‌را ۵۰ بار روی یک سطح هموار پرتاب و هر بار نتیجه را یادداشت کنید. در این ۵۰ بار پرتاب سکه، نسبت دفعاتی را که سکه، «رو» می‌آید و نسبت دفعاتی را که سکه به «پشت» می‌نشیند به‌دست آورید. با استفاده از این عددها حدس بزنید که اگر سکه را ۲۰۰ بار پرتاب کنید، چند بار «رو» خواهد آمد؟

۱.۱ نظریهٔ احتمال، مطالعهٔ الگوهای ریاضی پدیده‌های تصادفی

در گفت‌وشنودهای روزمره از **شانس** یا **احتمال** وقوع بعضی از پیشامدها سخن می‌گوییم. مثلاً می‌گوییم: «هوا ابری است؛ احتمال دارد باران ببارد» یا «احتمالاً جمعهٔ آینده برای شنا به استخر خواهم رفت» و یا «احتمالاً این فیلم تماشاچی چندانی نخواهد داشت». به‌کار بردن کلمهٔ احتمال در توصیف پیشامدها ناشی از تصادفی بودن آنهاست. یکی از کاربردهای تفکر احتمالاتی کمک به تصمیم‌گیریها در جریان زندگی است: اگر احتمال زیادی بدهید که باران خواهد بارید و قصد بیرون رفتن از منزل را داشته باشید، یک چتر یا بارانی همراه خواهید برد. نوسانات قیمت کالاها و عرضه و تقاضای آنها در بازار، تصادفی است و مدیر یک شرکت تولیدی اگر احتمال بدهد که میزان تقاضای کالای معینی که آن شرکت تولید می‌کند در ماه‌های آینده اندک خواهد بود، ممکن است تصمیم بگیرد که میزان تولید را کاهش دهد تا ضرری متوجه شرکت نشود.

به‌کار بردن احتمال در سطح باریدن یا نباریدن باران حساسیت چندانی ندارد ولی برای مدیر یک شرکت تولیدی که مسائل مالی برای او اهمیت دارد، درست فکرکردن و درست تصمیم گرفتن حساسیت زیادی پیدا می‌کند. همین روشهای تفکر دربارهٔ پدیده‌های تصادفی هستند که موضوع **نظریهٔ احتمال** را تشکیل می‌دهند.

یکی از دیدگاه‌هایی که در مقایسه با علوم دیگر، نسبت به نظریه احتمال وجود دارد این است که همان‌طورکه علومی چون فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی، هرکدام بخشی از آگاهیهای ما را از طبیعت تشکیل می‌دهند، نظریه احتمال نیز همین‌طور است. هر یک از علوم فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی را می‌توان مطالعهٔ پدیده‌های معینی که به‌ترتیب پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی و زیست‌شناختی نامیده می‌شوند، تعریف کرد. به‌همین صورت نظریهٔ احتمال مطالعهٔ پدیده‌های معینی به‌نام پدیده‌های تصادفی است. اما پدیدهٔ تصادفی به‌طورکلی خود پدیده‌ای از نوع دیگر است؛ مثلاً پدیدهٔ فیزیکی تصادفی، پدیدهٔ شیمیایی تصادفی و غیره. بنابراین گسترهٔ پدیده‌های تصادفی آن‌قدر وسیع است که مطالعهٔ همهٔ آنها به‌عنوان علم احتمال، بلند پروازانه به‌نظر می‌رسد. نظریهٔ احتمال مستقیماً به مطالعهٔ پدیده‌های تصادفی نمی‌پردازد بلکه راه‌های تفکر دربارهٔ این پدیده‌ها را بررسی می‌کند. یعنی در نظریهٔ احتمال به آن دسته

ویژگیهای پدیده‌های تصادفی توجه می‌شود که اساساً به خصلت تصادفی بودن آن پدیده بستگی دارند نه به جنبهٔ دیگری از آن. به بیان دقیقتر مفاهیمی چون تصادفی بودن، پدیدهٔ تصادفی و احتمال را نمی‌توان روشن و شهودی تعریف کرد؛ در نتیجه یکی از اهداف اصلی نظریهٔ احتمال روشن کردن معنای این مفاهیم و فراهم آوردن زمینه برای درک آنها است درست به همان‌صورت که علم حساب ما را قادر می‌سازد تا اشیاء محسوس اطراف خود را بشماریم.

> **نظریهٔ احتمال** مطالعهٔ روشهای تحلیل مشترک در بررسی همهٔ پدیده‌های تصادفی موجود در شاخه‌های گوناگون علم است.

نظریهٔ احتمال بخشی از ریاضی است و همان‌طور که در فصل چهارم خواهیم دید، همچون دیگر بخشهای ریاضی، به **روش اصل موضوعی** ساخته می‌شود. در این روش، کار را با مفاهیم تعریف‌نشدهٔ معینی آغاز و آنگاه گزاره‌های معینی دربارهٔ ویژگیهایی که آن مفاهیم دارند و رابطهٔ بین آنها بیان می‌کنیم. این گزاره‌ها همان اصول موضوع نظریه‌اند. سپس به‌کمک استدلال منطقی و بدون توسل به‌تجربه، و فقط از آن اصول موضوع گزاره‌هایی را به‌نام **قضیه** نتیجه‌گیری می‌کنیم. گرچه قضیه‌ها مستقیماً به دنیای واقعی مربوط نمی‌شوند، و صرفاً نتایج منطقی اصول موضوع‌اند، با این حال مبین احکامی دربارهٔ پدیدهای واقعی هستند؛ یعنی آن پدیده‌هایی که می‌خواهیم واجد ویژگیهای بیان شده در اصول موضوع باشند. به این‌ترتیب به مفهوم **الگوی ریاضی** پدیدهٔ واقعی می‌رسیم. نظریهٔ ریاضی که به روش اصل موضوعی ساخته می‌شود، در صورتی الگوی یک پدیدهٔ واقعی خوانده می‌شود که بتوان قانونی برای تبدیل قضیه‌های آن نظریه به احکامی دربارهٔ پدیده‌های واقعی، ارائه کرد.

این تعریف مبهم است، زیرا ماهیت قانون تبدیل مشخص نیست. اما منظور ما بیان تعریف دقیق نیست، بلکه فقط می‌خواهیم خواننده درکی شهودی از مفهوم الگوی ریاضی به‌دست آورد. به‌عنوان مثالی از ساختن الگوی ریاضی برای یک پدیدهٔ تصادفی مسألهٔ خارج کردن توپ از جعبه‌ای که محتوی ۴ توپ سفید و ۲ توپ قرمز است و نتایج ۶۰۰ بار انجام این آزمایش را که در جدول ۱ ثبت شده است، در نظر بگیرید. بر اساس این ۶۰۰ بار آزمایش نتیجه گرفتیم که نسبت تعداد دفعاتی که توپ سفید از جعبه خارج می‌شود، $\frac{2}{3}$ است. حال بیایید توپها را با شماره‌های ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کنیم طوری‌که ۴ توپ سفید دارای شمارهٔ ۱ تا ۴ باشند. وقتی توپی از درون جعبه بیرون آورده می‌شود، ۶ نتیجهٔ ممکن وجود دارد: توپ اول خارج شود یا توپ دوم خارج شود و غیره. از این ۶ نتیجه، فقط چهار تا هستند که با پیشامد خارج شدن توپ سفید متناظرند. بنابراین نسبت تعداد نتیجه‌هایی که توپ سفید خارج می‌شود به تعداد کل نتیجه‌های ممکن آزمایش برابر است با $\frac{2}{3}$. در نتیجه برای توضیح اینکه چرا اگر آزمایش خارج کردن توپ از جعبه را به دفعات زیاد انجام دهیم، در $\frac{2}{3}$ دفعات توپ سفید خارج خواهد

شد، فرض می‌کنیم (فعلاً غیررسمی) که احتمال یک پیشامد (یعنی فراوانی نسبی مشاهدهٔ آن در دنبالهٔ طولانی انجام آزمایش) برابر است با نسبت نتیجه‌هایی که پیشامد در آنها مشاهده می‌شود به تعداد کل نتیجه‌های ممکن آن آزمایش. در فصل سوم دربارهٔ این الگوی ریاضی به تفصیل سخن خواهیم گفت.

۲.۱ آزمایشهای تصادفی

نظریهٔ احتمال را الگوی ریاضی پدیده‌های تصادفی معرفی کردیم. در دنیای واقعی پدیده‌های تصادفی زیادی وجود دارد. برای مثال زمان وقوع زلزله یا سیل با وجودی که بشر دانش زیادی دربارهٔ آنها دارد، هنوز به‌طور دقیق قابل پیش‌بینی نیستند و در نتیجه تصادفی‌اند. یک متخصص نظریهٔ احتمال برای اینکه از ابزارهای این الگو برای بررسی و شناخت پدیده‌های تصادفی کمک بگیرد، آنها را در قالب **آزمایش‌های تصادفی** **شبیه‌سازی** می‌کند. تاکنون با چند نمونه از آزمایشهای تصادفی آشنا شده‌اید. داور بازی فوتبال وقتی برای تعیین اینکه توپ در شروع بازی در اختیار کدام‌یک از دو تیم قرار گیرد، از نتیجهٔ پرتاب سکه استفاده می‌کند، یک آزمایش تصادفی انجام داده است؛ یعنی آزمایشی که نتیجهٔ آن‌را پیش از انجام، به‌طور قطع نمی‌توان معلوم کرد. خارج کردن توپ از جعبه‌ای که محتوی ۴ توپ سفید و ۲ توپ قرمز است، نمونهٔ دیگری از یک آزمایش تصادفی است.

شبیه‌سازی فرایندی است برای پاسخ دادن به سؤالات مربوط به دنیای واقعی، به‌کمک انجام آزمایشهایی که خیلی شبیه وضعیتهای واقعی هستند. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم احتمال این‌را که یک خانوادهٔ سه فرزندی، دقیقاً یک دختر داشته باشد بیابیم. به این سؤال، همان‌طور که در فصلهای بعد خواهیم دید، هم می‌توان پاسخ نظری داد و هم می‌توان با مشاهدهٔ تعداد زیادی خانواده‌های سه فرزندی و شمردن تعداد آنهایی که دقیقاً یک دختر دارند، تخمینی از این احتمال به‌دست آورد. اما اگر نتوانیم به این سؤال پاسخ نظری بدهیم و وقت کافی برای انتخاب و مشاهدهٔ تعداد زیادی خانواده‌های سه فرزندی نیز نداشته باشیم، آن وقت بهترین تصمیم می‌تواند این باشد که خانواده‌های سه فرزندی را شبیه‌سازی کنیم. در این مورد یک راه انجام این‌کار این است که سه سکه را به نشانهٔ سه تولد پرتاب کنیم و «رو» آمدن را نشانهٔ تولد دختر بگیریم. در این‌صورت مشاهدهٔ دقیقاً یک «رو» در پرتاب سه سکهٔ سالم مشابه خواهد شد با مشاهدهٔ دقیقاً یک دختر در یک خانوادهٔ سه فرزندی. سه سکه را به‌راحتی می‌توانیم به دفعات زیاد پرتاب کنیم و احتمال مشاهدهٔ دقیقاً یک «رو» را تخمین بزنیم.

شبیه‌سازی همچنین تلاشی است برای یافتن راه‌های پاسخ به سؤالهای مربوط به رفتار فرایندهای پیچیده تحت شرایط متغیر. برای مثال، در فرایند طراحی دستگاه‌های هدایت‌کنندهٔ الکترونیکی سفینه‌های فضایی، دانشمندان علاقه‌مندند که در طراحیهای مختلف، احتمال ازکار افتادن دستگاه را حساب کنند. یک راه محاسبهٔ این احتمال این است که دستگاه را بسازند و آن‌را در شرایط پروازی واقعی قرار دهند و امتحان کنند، ولی این‌کار وقت و هزینهٔ زیادی می‌گیرد. روش دیگر این است که عمل دستگاه هدایت

کنندهٔ الکترونیکی را روی رایانه شبیه‌سازی کنند. به این‌ترتیب می‌توان دستگاه را تحت شرایط آزمایشی گوناگون مشاهده و احتمالهای از کار افتادن را به‌خوبی محاسبه کرد. در اینجا شبیه‌سازی به دانشمندان کمک می‌کند تا طرحی را برگزینند که در آن کمترین احتمال از کار افتادن و خرابی وجود دارد.

با توجه به آنچه در مورد بررسی پدیده‌های تصادفی واقعی به‌کمک شناخت نتایج آزمایشهای تصادفی گفتیم، نظریهٔ احتمال بررسی روشهای تحلیل مشترک در همهٔ آزمایشهای تصادفی است. از این رو ما نیز در این کتاب فقط به آزمایشهای تصادفی خواهیم پرداخت.

در یک آزمایش تصادفی نمی‌توان نتیجه را قبل از وقوع تعیین کرد ولی معمولاً می‌توان تمام نتایج ممکن آن آزمایش را فهرست نمود.

مثال ۱. آزمایش پرتاب یک سکه، یک آزمایش تصادفی است. چون سکه دو طرف دارد: «رو» و «پشت»، پس این آزمایش تصادفی فقط دو نتیجهٔ ممکن دارد: «رو» و «پشت».

مثال ۲. آزمایش پرتاب «تاس» یک آزمایش تصادفی است. تاس مکعبی همگن است که روی وجه‌های آن اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نوشته شده است. پیش از پرتاب تاس نمی‌توان به‌طور قطع تعیین کرد که کدام‌یک از این اعداد ظاهر خواهد شد به‌همین دلیل این، یک آزمایش تصادفی است. این آزمایش تصادفی شش نتیجهٔ ممکن دارد و اینها همان اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ هستند.

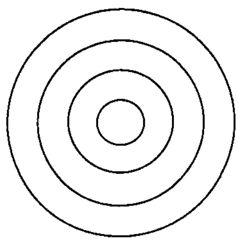
مثال ۳. اگر برای دیدن فرزندان یک خانوادهٔ دو فرزندی به منزل آنها بروید، یک آزمایش تصادفی در مورد شناخت جنس فرزندان خانواده انجام داده‌اید، زیرا پیش از دیدن فرزندان نمی‌توان جنس آنها را تعیین کرد. اما می‌توان از پیش، تمام نتایج ممکن را فهرست کرد. یا هر دو فرزند پسر هستند، یا یکی از فرزندان پسر و دیگری دختر است و بالاخره ممکن است هر دو فرزند دختر باشند.

مثال ۴. در مثال ۳ اگر علاوه بر جنس فرزندان، ترتیب سنی آنها نیز مدنظر باشد در این‌صورت، چهار نتیجه برای این آزمایش تصادفی وجود خواهد داشت: هر دو فرزند پسر هستند، فرزند بزرگتر پسر و فرزند کوچکتر دختر است، فرزند بزرگتر دختر و فرزند کوچکتر پسر است و بالاخره ممکن است هر دو دختر باشند.

مثال ۵. کیسه‌ای محتوی ۵ مهرهٔ قرمز و ۱۰ مهرهٔ سفید است. مهره‌ای به تصادف از درون کیسه خارج می‌کنیم و رنگ آن‌را می‌بینیم. این نیز یک آزمایش تصادفی است، زیرا پیش از خارج کردن مهره نمی‌توانیم به یقین بگوییم آیا مهرهٔ قرمز خارج می‌شود یا مهرهٔ سفید، ولی می‌دانیم که این آزمایش تصادفی دو نتیجهٔ ممکن دارد: «سفید» و «قرمز». فرض کنید حرف R نشان دهندهٔ «قرمز» و حرف W نشان دهندهٔ «سفید» باشد. این‌بار مهره‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. مهره‌های قرمز را با شماره‌های ۱ تا ۵ و مهره‌های سفید را با شماره‌های ۱ تا ۱۰. سپس آنها را به درون کیسه بازمی‌گردانیم و مهره‌ای را به تصادف انتخاب و این‌بار علاوه بر رنگ به شمارهٔ مهره نیز توجه می‌کنیم. در این آزمایش تمام نتایج

ممکن به‌جای دوتا، ۱۵ تا است. اینها عبارتند از ۵ مهرهٔ قرمز که آنها را با R_1، R_2، ...، R_5 نشان می‌دهیم و ۱۰ مهرهٔ سفید که آنها را با W_1، W_2، ...، W_{10} نشان می‌دهیم.

مثال ۶. تیراندازی به صفحهٔ هدف که ورزش مورد علاقهٔ افراد بسیاری است، یک آزمایش تصادفی است. صفحهٔ هدف از تعدادی دایره‌های هم‌مرکز با شعاعهای مختلف تشکیل شده است. هر چه تیر به سطح دایره‌های درونی‌تر برخورد کند، امتیاز بیشتری به تیرانداز داده می‌شود. شکل ۱، یک صفحهٔ هدف با چهار دایره را نشان می‌دهد. سطح بزرگترین دایره در واقع کل صفحهٔ هدف را تشکیل می‌دهد. در تیراندازی به یک صفحهٔ هدف نمی‌توان پیش از تیراندازی به‌طور قطع تعیین کرد که تیر به کدام نقطهٔ صفحه خواهد خورد ولی تمام نقاط صفحهٔ هدف، یعنی تمام نقاط سطح بزرگترین دایره، همهٔ نتایج ممکن این آزمایش تصادفی است.



شکل۱

مثال ۷. فرض کنید طول عمر یک لامپ بیشتر از یک ساعت (۶۰ دقیقه) نباشد، یعنی این لامپ در لحظه‌ای در طول صفر دقیقه تا ۶۰ دقیقه خواهد سوخت. نمی‌دانیم در کدام لحظه می‌سوزد ولی به‌هرحال این زمان دقیقه‌ای از دقایقِ بین صفر تا ۶۰ است. پس تمام نتایج ممکن برای آزمایش مشاهدهٔ لحظهٔ سوختن لامپ، تمام لحظات بین صفر و ۶۰ است.

هر نتیجه از یک آزمایش تصادفی یک برآمد[1] و مجموعهٔ همهٔ برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای آن آزمایش نامیده می‌شود.

۳.۱ فضای نمونه‌ای و پیشامد

فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی مجموعه‌ای است که عضوهای آن، همهٔ برآمدهای ممکن هستند. یکی از راه‌های نمایش مجموعه‌ها که معمولاً در مورد مجموعه‌هایی با تعداد عناصر کم به‌کار می‌رود، نوشتن صریح عضوهای آن داخل دو علامت «ابرو» است. ولی این روش برای نمایش بسیاری از مجموعه‌ها مناسب و شدنی نیست. روش بهتر و کوتاهتر، مشخص کردن ویژگی است که اعضای

1. Outcome

مجموعه در آن صدق می‌کنند. فرض کنید P یک ویژگی باشد و اگر x در ویژگی P صدق کند، بنویسیم $P(x)$. در این‌صورت مجموعهٔ همهٔ اشیایی را که در ویژگی P صدق می‌کنند به‌صورت $\{x : P(x)\}$ نشان می‌دهیم.[1] به‌کمک این دو روش نمایش می‌توان فضاهای نمونه‌ای مثالهای بند قبل را مجدداً بازنویسی کرد. فضای نمونه‌ای را معمولاً با علامت S[2] نشان می‌دهیم. تعداد عناصر فضاهای نمونه‌ای آزمایش پرتاب سکه و آزمایش پرتاب تاس، کم است و به‌راحتی می‌توان فضای نمونه‌ای را با نوشتن صریح اعضای آن در داخل دو علامت ابرو نمایش داد. مثلاً فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک سکه عبارت است از $S = \{\text{ر}, \text{پ}\}$ و فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک تاس عبارت است از

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}.$$

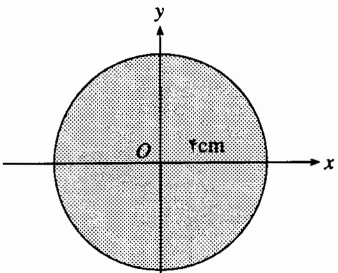
مثال ۸. فضای نمونه‌ای آزمایش انتخاب مهره از درون کیسه‌ای حاوی ۱۰ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ قرمز با در نظر گرفتن رنگ و شمارهٔ مهره‌ها عبارت است از

$$S = \{R_۱, R_۲, R_۳, R_۴, R_۵, W_۱, W_۲, W_۳, W_۴, W_۵, W_۶, W_۷, W_۸, W_۹, W_{۱۰}\}.$$

مثال ۹. آزمایش پرتاب تیر به صفحهٔ هدف را در نظر بگیرید. فرض کنید چهار دایره در صفحهٔ هدف به‌ترتیب با شعاعهای ۱، ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر وجود دارند. پس فضای نمونه‌ای، همهٔ نقاط سطح دایرهٔ به شعاع ۴ سانتی‌متر است. این نقاط، نقاط صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ هستند که فاصلهٔ آنها تا مبدأ مختصات کوچکتر یا مساوی ۴ است، یعنی

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leqslant ۱۶\}.$$

(شکل ۲ را ببینید).



شکل۲

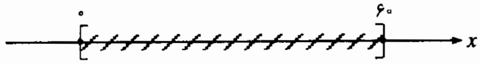
مثال ۱۰. در آزمایش مشاهدهٔ زمان سوختن لامپ که لحظه‌ای بین صفر و ۶۰ دقیقه است، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S = \{t \in \mathbb{R} : ۰ \leqslant t \leqslant ۶۰\}$$

(شکل ۳ را ببینید).

۱. توجه کنید که در اینجا همهٔ مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ مرجع هستند.

2. Sample Space



شکل۳

مثال ۱۱. یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا «رو» بیاید. در اینجا آزمایش، پرتاب متوالی یک سکه و هر بار مشاهدهٔ این است که «رو» آمده است یا نه. چون قبل از انجام پرتاب دقیقاً نمی‌دانیم که در پرتابِ چندم «رو» می‌آید. پس این، یک آزمایش تصادفی است. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی بر اساس دفعهٔ آمدن «رو» نوشته می‌شود. چون «رو» می‌تواند در پرتاب اول، یا پرتاب دوم یا پرتاب سوم یا ... ظاهر شود پس می‌توان فضای نمونه‌ای را به‌صورت

$$S = \{\text{ر}, \text{رپ}, \text{رپ پ}, \text{رپ پ پ}, \dots\}$$

نوشت. مثلاً عضو «ر پ پ» به این معنی است که در دو پرتاب اول و دوم «پشت» و در پرتاب سوم «رو» آمده است. ملاحظه می‌کنید که فضای نمونه‌ای این آزمایش بی‌نهایت عضو دارد و می‌توان عناصر آن‌را در تناظر با اعداد طبیعی قرار داد؛ به این‌صورت که به‌جای «ر» عدد ۱، به‌جای «رپ» عدد ۲، به‌جای «ر پ پ» عدد ۳ و ... قرار دهیم. بنابراین صورت دیگر نمایش این فضای نمونه‌ای

$$S = \{1, 2, 3 \cdots\},$$

یعنی همان مجموعهٔ اعداد طبیعی است. این قبیل مجموعه‌ها که در تناظر با اعداد طبیعی قرار می‌گیرند، مجموعه‌های **شمارا** خوانده می‌شوند.

اگر به مثالهایی که تا اینجا ارائه کرده‌ایم، دقت کنید، دو نوع متفاوت از فضای نمونه‌ای را می‌توانید تشخیص دهید. فضاهای نمونه‌ای نوع اول به مثالهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱۱ مربوط هستند و نوع دوم به مثالهای ۶ و ۷ مربوط می‌شوند که البته آنها را در مثالهای ۹ و ۱۰ بازنویسی کرده‌ایم. فضاهای نمونه‌ای نوع اول **گسسته** و فضاهای نمونه‌ای نوع دوم **پیوسته** نامیده می‌شوند.

> اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی منتها شمارا[1] باشد، فضای نمونه‌ای **گسسته** و فضای نمونه‌ای که مانند مثالهای ۱۱ و ۱۲ از جنس طول و سطح است، **پیوسته** نامیده می‌شود.

مثال ۱۲. یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. این آزمایش چهار نتیجهٔ ممکن دارد: در هر دو پرتاب «رو» می‌آید، پرتاب اول «رو» و پرتاب دوم «پشت» می‌آید، پرتاب اول «پشت» و پرتاب دوم «رو» می‌آید و بالاخره در هر دو پرتاب «پشت» می‌آید. بنابراین می‌توان فضای نمونه‌ای آزمایش دو بار پرتاب

۱. یک مجموعه منتها شمارا نام دارد اگر متناهی یا شمارا باشد.

سکه را به‌صورت

$$S = \{(\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{پ})\},$$

نوشت. در این نمایش مثلاً زوج مرتب (پ , ر) به این معنی است که در پرتاب اول «رو» و در پرتاب دوم «پشت» آمده است. اگر فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه را با $S_1 = \{\text{ر},\text{پ}\}$ نشان دهیم، ملاحظه می‌کنید که S حاصلضرب دکارتی[1] S_1 در خودش است، یعنی

$$S = S_1 \times S_1$$

اگر به‌جای دو بار پرتاب یک سکه، دو سکه با شماره‌های ۱ و ۲ را با هم پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای همان مجموعهٔ S فوق می‌شود، منتها فرق آنها این است که در حالت اخیر به‌جای «بار»، «شمارهٔ سکه» قرار می‌گیرد.

مثال ۱۳. در ادامهٔ آزمایش قبل، سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. با توجه به اینکه هر پرتاب دو نتیجهٔ «رو» و «پشت» دارد، روی‌هم $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$ نتیجهٔ ممکن برای این آزمایش وجود دارد. پس می‌توان فضای نمونه‌ای این آزمایش را به این‌صورت نوشت:

$$S = \{(\text{ر},\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{ر},\text{پ}),(\text{ر},\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ})\},$$

در این نمایشِ S، برای مثال عضو (ر،پ،پ) به این معنی است که در پرتابهای اول و دوم «پشت» و در پرتاب سوم «رو» آمده است.

مثال ۱۴. دو تاس یکی سبز و دیگری قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. پرتاب هر تاس ۶ نتیجهٔ ممکن دارد. در ازای هر نتیجه‌ای که برای یک تاس به‌دست می‌آید، ۶ نتیجه برای تاس دیگر وجود دارد. اگر نتایج تاس سبز را ابتدا و نتایج تاس قرمز را به دنبال آن یادداشت کنیم، فضای نمونه‌ای از مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x,y) که هر کدام از x و y می‌تواند اعداد ۱ تا ۶ باشد، تشکیل یافته است، یعنی

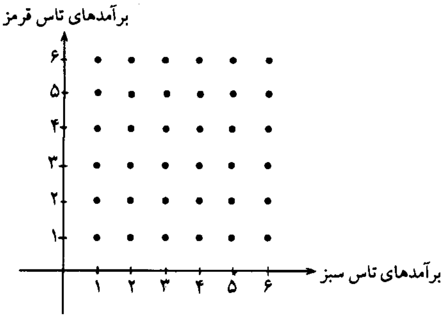
$$S = \{(x,y) : x = ۱,۲,۳,۴,۵,۶ \quad \text{و} \quad y = ۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

این فضا را می‌توان به‌صورت نموداری نیز نشان داد. دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم. نتایج تاس سبز را روی محور افقی و نتایج تاس قرمز را روی محور قائم ثبت می‌کنیم. در این‌صورت اعضای این فضای نمونه‌ای ۳۶ نقطهٔ موجود در شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۴ است.

اگر $S_2 = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس باشد، فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس سبز و قرمز حاصلضرب دکارتی S_2 در خودش است، یعنی $S = S_2 \times S_2$.

فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی، زیربنای الگوی ریاضی است که قرار است برای بررسی پدیده‌های تصادفی ساخته شود. اهمیت فضای نمونه‌ای به‌خاطر خود نقاط آن‌که نتیجه‌های ممکن

۱. حاصلضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B، $A \times B$، مجموعهٔ همهٔ زوج مرتبهای (a,b) است که $a \in A$ و $b \in B$.



شکل۴

آزمایش تصادفی‌اند، نیست بلکه به این دلیل است که پیشامدهایی که در یک پدیدهٔ تصادفی واقعی رخ می‌دهند و به محاسبهٔ احتمال آنها علاقه‌مندیم، با زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای در تناظر قرار می‌گیرند. پس باید بتوانیم در الگوی ریاضی که ساخته می‌شود، احتمال این زیرمجموعه‌ها را حساب کنیم؛ از این رو اصول موضوع نظریه احتمال برای زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای بیان می‌شود.

پیشامد[1] زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است.[2]

مثال ۱۵ . در آزمایش دوبار پرتاب یک سکه، «دورو آمدن» یک پیشامد است و عبارت است از زیرمجموعهٔ تک عضوی

$$E = \{(ر, ر)\}$$

از فضای نمونه‌ای S.

مثال ۱۶ . در آزمایش پرتاب تاس، «ظاهر شدن عدد زوج» یک پیشامد است و عبارت است از زیرمجموعهٔ سه عضوی

$$E = \{۲, ۴, ۶\}$$

از فضای نمونه‌ای S مربوط به پرتاب تاس.

مثال ۱۷ . در آزمایش پرتاب یک تاس سبز و یک تاس قرمز، اینکه «مجموع اعداد آمده روی دو تاس برابر ۶ باشد» یک پیشامد است و می‌توان آن‌را به‌صورت

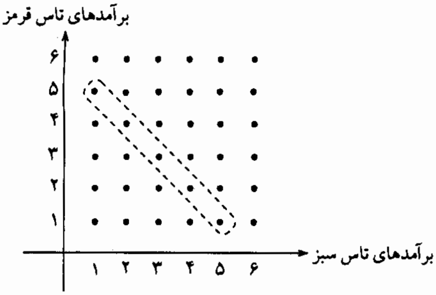
$$E = \{(۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۵, ۱)\},$$

---

1. Event

۲. توجه کنید که به هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای نمی‌توان احتمال نسبت داد یعنی هر زیرمجموعهٔ S پیشامد نیست.

نشان داد. این پیشامد را بر روی نمودار شبکه‌ای که فضای نمونه‌ای این آزمایش را نمایش می‌دهد نیز می‌توان مشخص کرد (شکل ۵).



شکل۵

مثال ۱۸ . در آزمایش تیراندازی به صفحهٔ هدف، اگر شعاع‌های چهار دایره‌ای که در صفحهٔ هدف قرار دارند، به‌ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد، «برخورد تیر به درون دایرهٔ به شعاع ۱» یک پیشامد است و مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ است که فاصلهٔ آنها تا مبدأ کوچکتر یا مساوی ۱ است، یعنی

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leqslant ۱\}.$$

مثال ۱۹ . نقطه‌ای به تصادف از فاصلهٔ

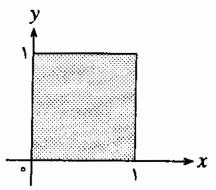
$$(۰\,,۱) = \{x \in \mathbb{R} : ۰ < x < ۱\},$$

انتخاب می‌کنیم. این یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه‌ای $S = (۰\,,۱)$ است. زیرمجموعهٔ $(۰\,,\frac{۱}{۲})$ یک پیشامد برای این آزمایش است و عبارت است از این که «نقطهٔ انتخاب شده در فاصلهٔ بین صفر و $\frac{۱}{۲}$ قرار گیرد.»

مثال ۲۰ . دو نقطه را به تصادف از درون فاصلهٔ $(۰\,,۱)$ انتخاب می‌کنیم. این نیز یک آزمایش تصادفی است که فضای نمونه‌ای آن عبارت است از

$$S = \{(x,y) : ۰ < x < ۱ \quad \text{و} \quad ۰ < y < ۱\}.$$

S زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ متشکل از نقاط داخل مربع واحد است (شکل ۶) و مجموعهٔ همهٔ

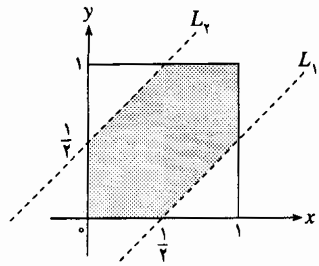


شکل۶

نقاطی از S که در رابطهٔ $|x-y| < \frac{1}{2}$ صدق می‌کنند، یعنی

$$E = \{(x,y) \in S : |x-y| < \tfrac{1}{2}\},$$

یک پیشامد در این فضا است. قسمت سایه زده شده در شکل ۷، این پیشامد را نشان می‌دهد.



شکل۷

برای مشخص کردن نقاط تشکیل دهندهٔ E، آن‌را به‌صورت

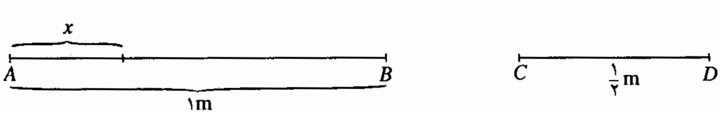
$$E = \{(x,y) \in S : y - \tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} + y\},$$

بازنویسی می‌کنیم. حال خطوط به معادلات

$$L_1 : y = x - \tfrac{1}{2} \quad \text{و} \quad L_2 : y = x + \tfrac{1}{2}$$

را رسم می‌کنیم. E از همهٔ نقاطی از S تشکیل شده است که هم در نابرابری $y > x - \frac{1}{2}$ و هم در نابرابری $y < x + \frac{1}{2}$ صدق می‌کنند. این‌ها نقاط بالای خط L_1 و زیر خط L_2 در S هستند که دقیقاً همان نقاط سایه زده شده در شکل ۷ است.

مثال ۲۱. دو قطعه چوب به طولهای ۰٫۵ و ۱ متر در اختیار داریم. قطعه چوب بلندتر را از نقطه‌ای به تصادف می‌شکنیم. این یک آزمایش تصادفی است، زیرا نمی‌دانیم چوب بلندتر در کدام نقطه خواهد شکست. فرض کنید AB در شکل ۸ قطعه چوب به‌طول یک متر باشد. اگر سر A را متناظر با صفر و سر B را متناظر با یک قرار دهیم، نقاط قطعه چوب بلندتر در تناظر با فاصلهٔ $(0,1)$ از اعداد حقیقی قرار می‌گیرند. در نتیجه می‌توانیم فضای نمونه‌ای را فاصلهٔ $(0,1)$ بگیریم. می‌خواهیم پیشامد اینکه «این سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند» را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از $(0,1)$ به‌دست آوریم. اگر نقطهٔ شکست به فاصلهٔ x از سر A (صفر) باشد، سه قطعه چوب حاصل دارای طولهای x، $1-x$



شکل۸

و $\frac{۱}{۲}$ هستند (شکل ۸). برای اینکه این سه قطعه یک مثلث درست کنند، باید سه شرط زیر برقرار باشند:

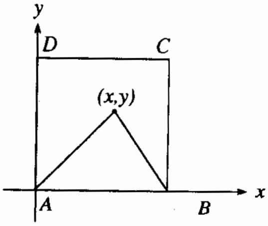
$$\frac{۱}{۲}+x>۱-x \qquad (۱)$$

$$\frac{۱}{۲}+(۱-x)>x \qquad (۲)$$

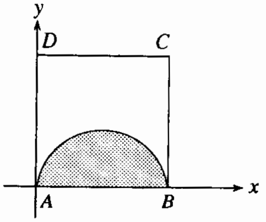
$$(۱-x)+x>\frac{۱}{۲} \qquad (۳)$$

این شرطها از ویژگی مثلث، یعنی مجموع طولهای هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر است، نتیجه می‌شوند. بنابراین (۳) به نابرابری واضح $\frac{۱}{۲}<۱$، نابرابری (۲) به $x<\frac{۳}{۴}$ و نابرابری (۱) به $x>\frac{۱}{۴}$ تبدیل می‌شود. بنابراین اگر نقطهٔ شکست در فاصلهٔ $(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴})$ قرار گیرد، سه قطعهٔ حاصل یک مثلث درست می‌کنند. در نتیجه پیشامد مطلوب زیر فاصلهٔ $E=(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴})$ از فاصلهٔ $S=(۰,۱)$ است.

مثال ۲۲. نقطه‌ای را به تصادف از درون مربع واحد انتخاب می‌کنیم. سپس مطابق **شکل** ۹ (الف)، آن نقطه را با دو پاره‌خط به دو رأس مجاور وصل می‌کنیم. در این آزمایش، فضای نمونه‌ای مجموعهٔ همهٔ نقاط درون مربع واحد است. با وصل کردن نقطهٔ انتخاب شده به دو رأس مربع یک زاویه ایجاد می‌شود. به‌کمک این زاویه می‌توان پیشامدهایی ساخت. مثلاً پیشامد اینکه «زاویه به‌وجود آمده قائمه باشد» دقیقاً مجموعهٔ همهٔ نقاط روی نیمدایرهٔ به قطرِ ضلع AB در **شکل** ۹ (ب) است، زیرا در یک دایره، زاویهٔ روبه‌رو به قطر، ۹۰° است. یا پیشامد اینکه «زاویهٔ ایجاد شده منفرجه باشد» مجموعهٔ همهٔ نقاط زیر نیمدایرهٔ فوق است و در **شکل** ۹ (ب) سایه زده شده است. نقاط بالای این نیمدایره این پیشامد را که «زاویهٔ ایجاد شده حاده باشد» نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

شکل۹

تمرینهای ۳.۱

۱. جعبه‌ای حاوی سه توپ قرمز و پنج توپ آبی است. سه توپ، یکی‌یکی و با جایگذاری به تصادف از درون جعبه خارج و رنگ آنها را یادداشت می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را توصیف کنید.

۲. فضای نمونه‌ای آزمایش انتخاب تصادفی یک عدد از فاصلهٔ $(۰,۲۰)$ را توصیف کنید. پیشامد اینکه عدد انتخاب شده، عدد صحیح باشد را مشخص کنید.

۳. فضای نمونه‌ای قرار دادن تصادفی سه کتاب مختلف روی قفسهٔ کتابها را توصیف کنید. اگر دو کتاب از این سه کتاب دو جلد از یک عنوان باشند، پیشامد اینکه این جلدها به‌ترتیب صعودی و پهلوی هم قرارگیرند (یعنی اول جلد ۱، بعد جلد ۲) را معین کنید.

۴. یک تماس تلفنی از طرف فرد معینی، در زمانی بین ۷ صبح و ۱۰ : ۹ صبح دریافت می‌شود. فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی و پیشامد اینکه تماس در ۱۵ دقیقهٔ اول یک ساعت دریافت شود را توصیف کنید.

۵. یک تاس همگن را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا عدد ۶ ظاهر شود. این عدد درکدام پرتاب ظاهر خواهد شد؟ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را توصیف کنید.

۶. در آزمایش پرتاب دو تاس همگن یکی سبز و دیگری قرمز، پیشامد اینکه مجموع اعداد آمده روی تاسها (الف) ۱۰ باشد، (ب) عدد اول باشد، را مشخص کنید.

۷. در آزمایش پرتاب تیر به صفحهٔ هدف، فرض کنید صفحهٔ هدف از چهار دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۲، ۴، ۶ و ۸ تشکیل شده است. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامد برخورد تیر به سطح درون دایره به شعاع ۶ را به‌طور تحلیلی توصیف کنید.

۸. از بین همهٔ خانواده‌های سه فرزندی، خانواده‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش و پیشامد اینکه این خانواده دقیقاً دو دختر داشته باشد را مشخص کنید.

۹. دو عدد به تصادف از فاصلهٔ (۱ ,۰) انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامد اینکه فاصلهٔ این دو عدد از $\frac{1}{4}$ کوچکتر باشد، چیست؟

۱۰. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و تعداد اعضای آن‌را معین کنید. پیشامد اینکه تاس عدد ۵ و سکه «رو» بیاید چیست؟

۴.۱ جبر پیشامدها

عددهایی که به‌عنوان احتمال، به پیشامدها نسبت داده می‌شوند، در واقع احتمال رخ دادن آن پیشامدها هستند.

> اگر نتیجهٔ (برآمد) حاصل از یک آزمایش تصادفی، عضوی از یک پیشامد باشد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.

اگر پس از پرتاب تاس عدد ۲ ظاهر شود، پیشامد «ظاهر شدن عدد زوج» رخ داده است. اگر در پرتاب دو سکه، سکهٔ اول «رو» و سکهٔ دوم «پشت» بیاید، آنگاه پیشامد (پ ، ر) رخ داده است.

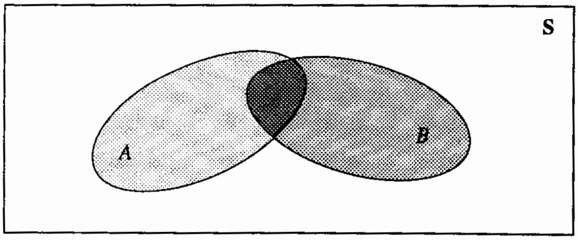
با در اختیار داشتن پیشامدهایی از یک آزمایش تصادفی، می‌توان پیشامدهای جدیدی از آنها ساخت. همان‌طور که گفتیم، پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است؛ پس پیشامدها، مجموعه

هستند. از این‌رو به‌دست آوردن پیشامدهای جدید از پیشامدهای داده شده معادل است با به‌دست آوردن مجموعه‌های جدید به‌کمک مجموعه‌های داده شده و این‌کار نیز از طریق به‌کار بردن اعمال مجموعه‌ایِ اجتماع، اشتراک و تفاضل امکان‌پذیر است. این اعمال را، هم می‌توان روی تعداد متناهی پیشامد و هم روی تعداد نامتناهی پیشامد انجام داد و پیشامدهای جدید به‌دست آورد. در این بند ابتدا آنها را برای دو پیشامد تعریف می‌کنیم و سپس به تعداد متناهی بیش از دو تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید طبق معمول S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و A و B دو پیشامد باشند. پس A و B زیرمجموعه‌های S هستند.

> **پیشامد اجتماع**، $A \cup B$ ، از همهٔ برآمدهایی تشکیل یافته است که یا در A هستند یا در B. (ممکن است در هر دو باشند.)

در واقع پیشامد $A \cup B$ رخ می‌دهد، در صورتی‌که یا A رخ دهد یا B. پیشامد اجتماع $A \cup B$ را با نمودار ون می‌توان نشان داد. در روش نمایش پیشامدها با نمودار ون، فضای نمونه‌ای را که پیشامدها زیرمجموعه‌های آن هستند نقاط درون یک مستطیل بزرگ و پیشامدها را نقاط درون شکلهایی مثل دایره و بیضی داخل آن مستطیل درنظر می‌گیریم. در شکل ۱۰، ناحیهٔ سایه زده شده، پیشامد $A \cup B$ است.

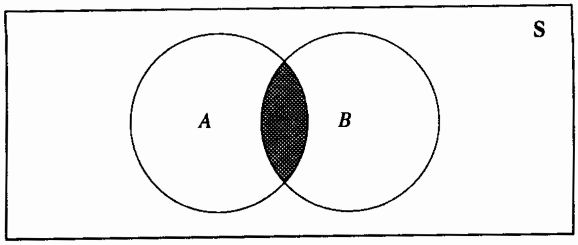


شکل ۱۰

> **پیشامد اشتراک**، $A \cap B$، از همهٔ برآمدهایی تشکیل شده است که هم در A هستند و هم در B.

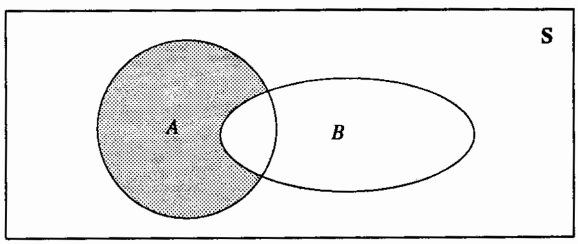
در واقع پیشامد $A \cap B$ رخ می‌دهد اگر هر دوی A و B رخ دهند. در شکل ۱۱، پیشامد $A \cap B$ با نمودار ون نشان داده شده است.

> **پیشامد مکملِ** B نسبت به A، $A - B$، از همهٔ برآمدهایی تشکیل شده است که در A هستند ولی در B نیستند.



شکل۱۱

یعنی $A - B$ رخ می‌دهد اگر A رخ دهد ولی B رخ ندهد. در شکل ۱۲، پیشامد $A - B$ با نمودار ون نشان داده شده است. در صورتی‌که A کل فضای نمونه‌ای باشد، یعنی $A = S$ آنگاه پیشامد $A - B = S - B$ را مکمل B می‌نامیم و با B^c نشان می‌دهیم. پس پیشامد B^c رخ می‌دهد اگر پیشامد B رخ ندهد.

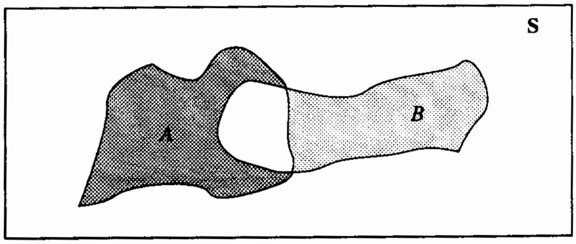


شکل۱۲

مثال ۲۳. اگر A و B دو پیشامد داده شده باشند، پیشامد

$$(A - B) \cup (B - A)$$

مرکب از همهٔ برآمدهایی است که **فقط** در A یا **فقط** در B هستند. به‌عبارت دیگر این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که یا «A رخ دهد و B رخ ندهد» یا «B رخ دهد و A رخ ندهد». در نمودار ون شکل ۱۳ ناحیهٔ سایه زده شده، این پیشامد را نشان می‌دهد. این پیشامد **تفاضل متقارن** A و B نامیده و با نماد $A \triangle B$ نشان داده می‌شود.



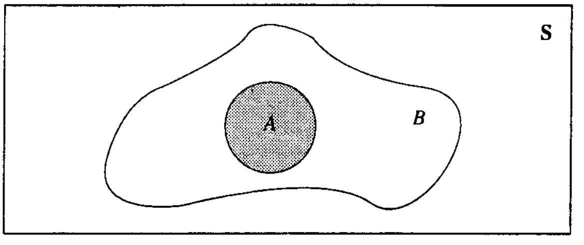
شکل۱۳

پیشامدی که هیچ برآمدی در آن قرار ندارد، پیشامد **غیرممکن** نامیده شده با نماد $\varnothing$ نشان داده می‌شود. پیشامد S یعنی کل فضای نمونه‌ای پیشامد **حتمی** نامیده می‌شود.

در واقع پیشامد غیرممکن هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد در حالی که پیشامد حتمی همواره رخ می‌دهد.

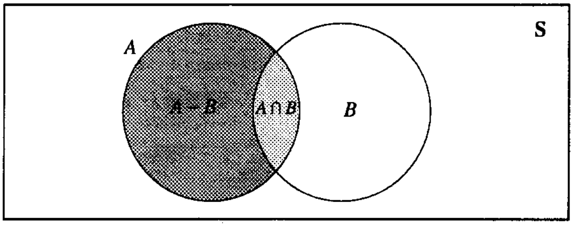
می‌گوییم پیشامد A **زیرپیشامد** B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر هر برآمدی که در A است، در B نیز باشد.

بنابراین اگر $A \subseteq B$ آنگاه رخ دادن A، رخ دادن B را نتیجه می‌دهد. در شکل ۱۴، این وضعیت را با نمودار ون نشان داده‌ایم.



شکل۱۴

مثال ۲۴. پیشامد A را می‌توان به‌صورت اجتماع دو پیشامد $A - B$ و $A \cap B$ نوشت (شکل ۱۵)، یعنی $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. این مثال نشان می‌دهد که می‌توان با اعمال مجموعه‌ای، خود پیشامدهای اولیه را مجدداً از روی پیشامدهای جدید، به‌دست آورد.



شکل۱۵

مثال ۲۵. آزمایش تصادفیِ پرتاب یک تاس را به‌یاد بیاورید. دو پیشامد

A : ظاهر شدن عدد زوج

و

B : ظاهر شدن عدد اول[1]

۱. عدد طبیعی p اول است اگر بجز خودش و عدد ۱ هیچ مقسوم‌علیه دیگری نداشته باشد.

را در نظر بگیرید. این دو پیشامد به شکل مجموعه‌ای عبارتند از

$$A = \{۲,۴,۶\} \quad \text{و} \quad B = \{۲,۳,۵\}$$

به این‌ترتیب پیشامد اشتراک A و B عبارت است از $A \cap B = \{۲\}$. اگر به‌جای B، پیشامد «ظاهر شدن عدد فرد»، یعنی

$$C = \{۱,۳,۵\},$$

را در نظر بگیریم آنگاه هیچ برآمدی از این آزمایش وجود ندارد که در هر دو پیشامد A و C قرار گیرد، یعنی A و C نمی‌توانند همزمان رخ دهند. به عبارت دیگر پیشامد اشتراک $A \cap C$، پیشامد غیرممکن است: $A \cap C = \varnothing$.

دو پیشامد A و B را در فضای نمونه‌ای S **ناسازگار** می‌گوییم اگر $A \cap B = \varnothing$، یعنی پیشامد اشتراک، غیرممکن باشد.

با در دست داشتن بیش از دو پیشامد، باز هم می‌توان با به‌کار بردن اعمال مجموعه‌ای، پیشامدهای جدیدی ساخت. اگر تعداد پیشامدها زیاد باشد معمولاً به‌جای استفاده از حروف متفاوت برای نشان دادن آنها، از یک حرف همراه با زیرنویس استفاده می‌شود. فرض کنید $n \geqslant ۲$ و $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$، A_n، n پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند. در این‌صورت پیشامد

$$A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$$

زمانی رخ می‌دهد که دست‌کم یکی از A_kها، $۱ \leqslant k \leqslant n$، رخ داده باشد. تعمیم عمل تفاضل به بیش از دو پیشامد بیان تعمیم یافتهٔ قوانین دمورگان [1] است. اگر B یک پیشامد و $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$، A_n مطابق فوق باشند، آنگاه

$$(B - A_۱) \cup \cdots \cup (B - A_n) = B - (A_۱ \cap \cdots \cap A_n),$$
$$(B - A_۱) \cap \cdots \cap (B - A_n) = B - (A_۱ \cup \cdots \cup A_n).$$

اگر $B = S$، در این‌صورت روابط فوق به شکل زیر در می‌آیند:

$$A_۱^c \cup A_۲^c \cup \cdots \cup A_n^c = (A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n)^c,$$
$$A_۱^c \cap A_۲^c \cap \cdots \cap A_n^c = (A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n)^c.$$

نمایش بیش از دو مجموعه و اعمال روی آنها از طریق نمودار ون مشکل است. در واقع این روش برای دو و سه مجموعه به‌خوبی کارساز و راهنمای درک بهتر است. سعی کنید برای سه پیشامد A، B و C، پیشامدهای اجتماع، اشتراک و تفاضلهای مختلف را با نمودار ون نشان دهید.

1. De' Morgan

مثال ۲۶. در آزمایش دو بار پرتاب سکه سه پیشامد زیر را در نظر می‌گیریم:

A : پرتاب اول «رو» بیاید ;

B : پرتاب دوم «رو» بیاید ;

C : فقط یک «رو» و یک «پشت» بیاید ;

این سه پیشامد به شکل مجموعه‌ای عبارتند از

$$A = \{(\text{ر}, \text{ر}), (\text{ر}, \text{پ})\};$$
$$B = \{(\text{ر}, \text{ر}), (\text{پ}, \text{ر})\};$$
$$C = \{(\text{ر}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{ر})\};$$

ملاحظه می‌کنید که

$A \cap B = \{(\text{ر}, \text{ر})\}$ و $A \cap C = \{(\text{ر}, \text{پ})\}$ و $B \cap C = \{(\text{پ}, \text{ر})\}$

در حالی‌که $A \cap B \cap C = \varnothing$ یعنی سه پیشامد نمی‌توانند همزمان رخ دهند.

تمرینهای ۴.۱

۱. دو تاس همگن یکی سبز و دیگری قرمز را پرتاب می‌کنیم. فرض کنید E پیشامد این باشد که مجموع اعداد آمده فرد و F پیشامد این باشد که دست‌کم یکی از اعداد آمده، یک است. پیشامدهای $E \cap F$، $E^c \cap F$ و $E^c \cap F^c$ را توصیف کنید.

۲. فرض کنید E، F و G سه پیشامد باشند، معنای هر یک از روابط

$E \cup F \cup G = G$ و $E \cap F \cap G = G$

چیست؟

۳. هر یک از پیشامدهای زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن در آورید.

الف) $(E \cup F) \cap (F \cup G)$؛

ب) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$.

۴. ثابت کنید که پیشامد B غیرممکن است اگر و فقط اگر برای هر پیشامد A،

$$A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A).$$

۵. به‌کمک نمودار ون برای نمایش پیشامدها نشان دهید که برای هر دو پیشامد A و B

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

۶. فرض کنید E، F و G سه پیشامد باشند. به‌کمک اعمال مجموعه‌ای برای هر یک از پیشامدهای زیر عبارتهایی برحسب E، F و G بسازید:

الف) فقط E رخ دهد؛

ب) هر دوی E و G رخ دهند اما F رخ ندهد؛

پ) دست‌کم یکی از این سه پیشامد رخ دهد؛

ت) هر سه پیشامد رخ دهند؛

ث) هیچ‌کدام از این سه رخ ندهند؛

ج) حداکثر یکی از آنها رخ دهد.

۷. در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس، اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای ظاهر شدن عدد اول، و ظاهر شدن عددی کوچکتر از ۴ باشند، هر یک از پیشامدهای

الف) $A \cup B$؛ ب) $A \cap B$؛ پ) $A \triangle B$؛

را با اعضایش نمایش دهید و توصیف کنید.

۸. یک صفحهٔ هدف از ده دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای $r_۱$، $r_۲$، $\cdots$، $r_{۱۰}$ تشکیل شده است که

$$r_۱ < r_۲ < \cdots < r_{۱۰}$$

فرض کنید برای $k = ۱, ۲, \cdots, ۱۰$، A_k پیشامد برخورد تیر به درون دایره به شعاع r_k باشد. دو پیشامد $B = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_۶$ و $C = A_۵ \cap A_۶ \cap \cdots \cap A_{۱۰}$ را توصیف کنید.

۹. کارخانه‌ای قطعه‌ای الکترونیکی را تولید می‌کند. سه تا از این قطعات را که از کارخانه خارج شده است به تصادف انتخاب و فرض می‌کنیم A پیشامد این باشد که «دست‌کم یکی از این سه قطعه خراب است» و B پیشامد «سالم بودن هر سه قطعه» باشد. برای این مسأله هر یک از پیشامدهای $A \cup B$، $A \cap B$، A^c و B^c را توصیف کنید.

۱۰. عددی را به تصادف از مجموعهٔ اعداد طبیعی انتخاب می‌کنیم. فرض کنید E پیشامد «بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۵» و F پیشامد «ختم شدن عدد انتخاب شده به صفر» باشد. در این مسأله معنی هر یک از پیشامدهای $E - F$ و $E \cap F$ چیست؟

۱۱. اگر A و B دو پیشامد باشند، پیشامد X را از تساوی $(X \cup A)^c \cup (X \cup A^c)^c = B$ بیابید.

۱۲. دو تاس یکی سبز و دیگری قرمز را پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای

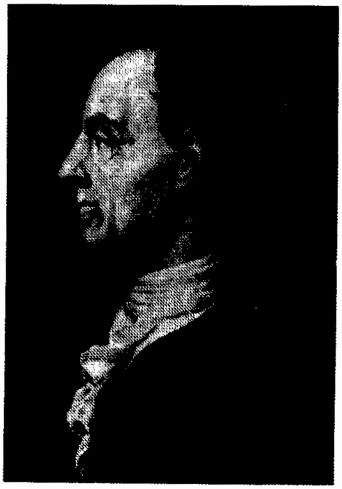
مجموع اعداد ظاهر شده روی دو تاس زوج است : A

لااقل روی یکی از تاسها عدد یک ظاهر شود : B

را در نظر می‌گیریم. پیشامدهای $A \cap B$، $A \cup B$ و $A \cap B^c$ را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

۲ روشهای مقدماتی شمارش

همان‌طورکه در فصل بعد خواهیم دید محاسبه احتمال کلاسیک، به شمردن اعضای پیشامد و فضای نمونه‌ای منجر می‌شود. روشهای شمارش به شاخه‌ای از ریاضی به‌نام آنالیز ترکیبیاتی مربوط می‌شوند، که شاخهٔ وسیعی است و تقریباً در هر بخشی از ریاضی کاربردی و محض کاربرد دارد. آنالیز ترکیبیاتی، علاوه بر احتمال و آمار، در نظریهٔ اطلاع رسانی، کدگذاری و کدگشایی برنامه‌ریزی خطی، مسائل حمل و نقل، تصمیم‌گیریهای صنعتی، و مبانی هندسه، مورد استفاده دارد. تاریخ آنالیز ترکیبیاتی به‌عنوان یک شاخهٔ صوری از ریاضی به زمان تارتاگلیا در قرن شانزدهم میلادی باز می‌گردد. بعد از تارتاگلیا ریاضیدانان بزرگی چون پاسکال، فرما، جیمز برنولی، گاتفرید لایب‌نیتز[1] (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و لئونارد اویلر[2](۱۷۸۳-۱۷۰۷) آن‌را به پیش بردند تا قرن بیستم که به واسطهٔ کاربردهای متعدد و فراوان آن، به‌سرعت روبه رشد نهاد.



لئونارد اویلر

1. Gattfried Leibniz 2. Leonhart Euler

شمردن تعداد اعضای مجموعه‌های متناهی که تعداد کمی عضو دارند و می‌توان همهٔ آنها را به‌راحتی و در مدت کوتاهی نوشت، ساده است. برای مثال تعداد اعداد اول کوچکتر از ۱۰، یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ

$$\{۲, ۳, ۵, ۷\}$$

۴ است؛ یا مثلاً تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴، یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ

$$\{۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴\}$$

۷ است. اما با زیاد شدن تعداد اعضای مجموعه، شمردن تعداد عضوها از طریق نوشتن صریح آنها کاری دشوار و وقت‌گیر می‌شود. ریاضیدانان همواره در پی یافتن روشهایی برای شمارش تعداد عضوهای این‌گونه مجموعه‌ها بدون نیاز به نوشتن صریح آنها، بوده‌اند. این روشها بر روی هم، شاخه‌ای از ریاضیات را به‌نام آنالیز ترکیبیاتی تشکیل می‌دهند. در این فصل به بعضی از این روشها که در فصل بعد برای محاسبهٔ احتمال کلاسیک در فضاهای نمونه‌ای متناهی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، اشاره می‌کنیم.

۱.۲ اصل اساسی شمارش

فرض کنید برای خوردن یک ساندویچ و یک نوشابه به ساندویچ فروشی می‌روید. فروشنده چهار نوع ساندویچ: سوسیس، کالباس، مرغ و مغز و سه نوع نوشابه: زمزم، پارسی کولا و ماءالشعیر به شما پیشنهاد می‌کند. باید از بین چهار نوع ساندویچ یک نوع و نیز از میان سه نوع نوشابه، یک نوع را برای خوردن برگزینید. به‌ازای هر انتخاب برای ساندویچ، سه انتخاب برای نوشابه دارید، بنابراین ترکیبهای مختلف ساندویچ ـ نوشابه را که می‌توانید برای خوردن انتخاب کنید عبارتند از

(ماءالشعیر و سوسیس)، (پارسی‌کولا و سوسیس)، (زمزم و سوسیس)

(ماءالشعیر و کالباس)، (پارسی‌کولا و کالباس)، (زمزم و کالباس)

(ماءالشعیر و مرغ)، (پارسی‌کولا و مرغ)، (زمزم و مرغ)

(ماءالشعیر و مغز)، (پارسی‌کولا و مغز)، (زمزم و مغز)

پس بر روی‌هم ۱۲ انتخاب برای ساندویچ و نوشابه وجود دارد. این مسأله را می‌توان به محاسبهٔ تعداد زوج مرتبهای (x, y) که x نشان‌دهندهٔ ساندویچ و y نشان‌دهندهٔ نوشابه است، تبدیل کرد. برای x، ۴ انتخاب و در مقابل هر انتخاب برای x، ۳ انتخاب برای y وجود دارد، بنابراین بر روی‌هم ۱۲ = ۴ × ۳ زوج مرتب (x, y) وجود خواهد داشت.

در این مثال قرار بود دو عمل انجام شود. یکی انتخاب ساندویچ و دیگری انتخاب نوشابه. ۴ امکان برای انجام عمل اول و ۳ امکان برای انجام عمل دوم و درنتیجه روی‌هم ۱۲ = ۳ × ۴ امکان برای انجام هر دو عمل باهم وجود داشت. این حالت خاصی از **اصل اساسی شمارش** یا **اصل ضرب** است.

اصل اساسی شمارش: قرار است چند عمل باهم انجام شود. اگر برای انجام عمل اول m_1 امکان، برای انجام عمل دوم m_2 امکان، برای انجام عمل سوم m_3 امکان و ... وجود داشته باشد آنگاه همهٔ اعمال را به $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times$ طریق مختلف می‌توان انجام داد.

مثال ۱. قرار است یک تیم کوهنوردی چهار نفری از میان ۳ نفر دانش‌آموزان سال اول، ۴ نفر دانش‌آموزان سال دوم، ۶ نفر دانش‌آموزان سال سوم و ۱۰ نفر دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی، از هر کلاس یک نفر، برگزیده شود. به چند صورت می‌توان این تیم کوهنوردی را سازمان داد؟

حل. در اینجا چهار عمل قرار است انجام شود: عمل اول انتخاب دانش‌آموز از سال اول است که ۳ امکان دارد،عمل دوم انتخاب دانش‌آموز از سال دوم است که ۴ امکان دارد، عمل سوم انتخاب دانش‌آموز از سال سوم است که ۶ امکان دارد و بالاخره عمل چهارم انتخاب دانش‌آموز از دورهٔ پیش‌دانشگاهی است که ۱۰ امکان دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش این چهار عمل را به $۷۲۰ = ۱۰ \times ۶ \times ۴ \times ۳$ طریق مختلف می‌توان انجام داد.

مثال ۲. اگر قرار باشد پلاکهای اتومبیلها از یک عدد پنج رقمی و یکی از حروف الفبا تشکیل شده باشد، چند اتومبیل را به این‌صورت می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

حل. در اینجا ۶ عمل قرار است انجام شود. ۵ عمل، انتخاب یک عدد یک‌رقمی است که برای هر کدام ۱۰ امکان وجود دارد و یک عمل، انتخاب یکی از ۳۲ حرف الفبا است که برای آن ۳۲ امکان وجود دارد. پس تعداد ماشینهایی که می‌توان به این صورت شماره‌گذاری کرد برابر است با ۳۲×۱۰^۵.

مثال ۳. چند mتایی مرتب از اعداد ۰ و ۱ وجود دارد؟

حل. می‌خواهیم تعداد mـتاییهای $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ را که هر یک از a_kها، $۱ \leqslant k \leqslant m$، می‌تواند ۰ یا ۱ باشد، بیابیم. در اینجا قرار است m عمل انجام شود که برای هر عمل دو امکان (۰ و ۱) وجود دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش

$$\underbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{\text{بار } m} = ۲^m$$

امکان برای انجام همهٔ آنها، یعنی ۲^m تا mـتایی مرتب وجود دارد. توجه کنید که در حالت $m = ۳$، تعداد ۳ـتاییهای مرتب که همان تعداد برآمدهای آزمایش سه بار پرتاب یک سکه است به‌دست می‌آید. این تعداد، $۸ = ۲^۳$ است که آن‌را در مثال ۱۳ فصل ۱ نیز به‌دست آورده بودیم.

مثال ۴. یک تاس و یک سکه را باهم پرتاب می‌کنیم. این آزمایش تصادفی چند برآمد دارد؟

حل. در اینجا دو عمل باهم انجام می‌شود: پرتاب سکه و پرتاب تاس. پرتاب سکه دو نتیجهٔ ممکن و پرتاب تاس ۶ نتیجهٔ ممکن دارد. پس طبق اصل ضرب $۱۲ = ۶ \times ۲$ برآمد برای این آزمایش تصادفی وجود دارد.

مثال ۵. با حروف کلمهٔ «پیشامد» چند کلمهٔ ۶ حرفی بامعنی یا بدون معنی می‌توان ساخت؟

حل. فرض کنید شش خانهٔ زیر نشان‌دهندهٔ هرکدام از این کلمات شش حرفی باشد:

می‌خواهیم هر خانه را با یکی از حروف کلمهٔ «پیشامد» پر کنیم. در این مثال ۶ عمل قرار است انجام شود. هرکدام از این اعمال که انتخاب یکی از ۶ حرف کلمهٔ «پیشامد» است، به ۶ طریق می‌تواند انجام شود. بنابراین طبق اصل اساسی شمارش می‌توان

$$\underbrace{۶ \times ۶ \times \ldots \times ۶}_{\text{۶ بار}} = ۶^۶$$

کلمهٔ مختلف با حروف کلمهٔ «پیشامد» ساخت.

تمرینهای ۱.۲

۱. اگر قرار باشد، پلاک اتومبیلها، هفت مکانی باشند به‌طوری‌که هر یک از سه مکان اول از حروف الفبا و هر یک از چهار مکان بعدی از ارقام ۰، ۱، . . .، ۹ تشکیل شده باشند، با این روش برای چند اتومبیل می‌توان پلاک تهیه کرد؟

۲. در مسألهٔ ۱، اگر تکرار حروف الفبا و تکرار ارقام مجاز نباشد، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

۳. چند عدد شش رقمی وجود دارد؟ در چند تا از آنها رقم ۵ وجود دارد؟

۴. به‌کمک حروف آ، ب، پ، ت، ث چند کد پنج حرفی می‌توان ساخت؟ چند تا از آنها با «آب» شروع می‌شوند؟ شروع را از سمت راست می‌گیریم و تکرار حروف نیز مجاز است.

۵. با ۴ رنگ مختلف به چند طریق می‌توان ۱۵ اتاق را نقاشی کرد؟

۶. از یک کیسه محتوی ۳۰ مهره به چند طریق می‌توان پنج مهره را

الف) با جایگذاری، و

ب) بدون جایگذاری، خارج نمود.

۷. چند آرایهٔ مستطیل شکل شامل $m \times n$ تا عنصر که هرکدام می‌تواند ۰ یا ۱ باشد وجود دارد؟

۸. فقط با استفاده از ارقام ۲، ۴، ۶، ۸ و ۹ چند عدد دو رقمی می‌توان ساخت؟ چند تا از این اعداد، شامل رقمی تکراری هستند؟

۹. با سه جفت کفش و دو نوع کت ـ شلوار، به چند ترکیب مختلف می‌توان لباس پوشید؟

۱۰. یک امتحان «تستی» شامل ۱۲ سؤال است. اگر دانشجویی تصمیم بگیرد به ۶ سؤال به تصادف جواب دهد، به چند طریق می‌تواند این‌کار را انجام دهد؟

۱۱. فرض کنید رقمهای شماره تلفن بتواند هر یک از اعداد ۰، ۱، ۲، ...، ۹ باشد، تعداد شماره تلفنهای شش رقمی را که

الف) رقمهای آن متمایز باشند؛

ب) رقمهای آن همگی فرد باشند، به‌دست آورید.

۲.۲ تبدیل و جایگشت

فرض کنید می‌خواهیم با حروف a، b، c و d، کلمات سه حرفی بدون تکرار حروف بسازیم. سه خانهٔ زیر را نشان‌دهندهٔ جای هر کدام از این کلمات تلقی می‌کنیم:

در اینجا قرار است سه عمل باهم انجام شود. برای عمل اول که پر کردن خانه اول است، ۴ امکان وجود دارد. چون تکرار حروف جایز نیست عمل دوم یعنی پر کردن خانهٔ دوم به ۳ طریق انجام می‌شود، یعنی خانهٔ دوم را باید با هر یک از سه حرف باقیمانده پر کرد. بالاخره عمل سوم یعنی پر کردن خانهٔ سوم به ۲ طریق انجام می‌شود، زیرا بعد از پر کردن خانه‌های اول و دوم، دو حرف برای پر کردن خانهٔ سوم باقی می‌ماند. پس طبق اصل اساسی شمارش $۲۴ = ۲ \times ۳ \times ۴$ کلمهٔ سه حرفی می‌توان با چهار حرف a، b، c و d ساخت.

> فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و $m \leqslant n$. تعداد راه‌های انتخاب m شیء از میان n شیء بدون تکرار برابر است با $n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times (n-m+۱)$.
> این عدد تعداد **تبدیلهای** m شیء از n شیء نامیده و با $P(n,m)$ نشان داده می‌شود.

در حالت خاص $n = ۴$ و $m = ۳$ در مثال فوق تعداد تبدیلها ۲۴ تا است. اگر $m = n$ آنگاه تعداد راه‌های انتخاب n شیء از میان n شیء بدون تکرار برابر است با

$$P(n,n) = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

این عدد تعداد **جایگشتهای** n شیء است و با نماد $n!$[1] نشان داده می‌شود.

مثال ۶. با حروف کلمهٔ «پیشامد» چند کلمهٔ ۶ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت؟

حل. شش خانهٔ مثال ۵ را به‌یاد بیاورید. خانهٔ اول را به ۶ طریق می‌توان پر کرد. چون تکرار جایز

۱. قرارداد می‌کنیم که $۰! = ۱$

نیست، خانه‌های بعدی را به‌ترتیب به ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ طریق می‌توان پر کرد، بنابراین طبق اصل اساسی شمارش، با حروف کلمهٔ «پیشامد»

$$۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶!$$

کلمهٔ مختلف بدون تکرار حروف می‌توان ساخت. این همان تعداد جایگشتهای ۶ شیء است.

مثال ۷. نتیجهٔ به‌دست آمده در مثال قبل را می‌توان به‌صورت

$$۶ \times (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۶ \times ۵!$$

نیز نوشت، یعنی $۶! = ۶ \times ۵!$. به‌طور کلی برای هر عدد طبیعی n

$$n! = n \times (n - ۱) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱ = n \times (n - ۱)!$$

باز $۶!$ را به‌صورت دیگری هم می‌توان نوشت:

$$۶! = (۶ \times ۵ \times ۴) \times (۳ \times ۲ \times ۱) = (۶ \times (۶ - ۱) \times (۶ - ۲))(۶ - ۳)!$$

و کلی‌تر اگر $m \leqslant n$،

$$n! = n \times (n - ۱) \times \ldots \times (n - m + ۱) \times (n - m)!$$

به این‌ترتیب $P(n,m)$ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(n,m) &= n(n-۱)\ldots(n-m+۱)\frac{(n-m)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{n(n-۱)\ldots(n-m+۱)(n-m)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}, \end{aligned}$$

در حالت $n = m$، به‌دست می‌آوریم $P(n,n) = \frac{n!}{۰!} = n!$ که با قرارداد ما مبنی بر اینکه $۰! = ۱$ سازگار است.

مثال ۸. تعداد جایگشتهای حروف کلمهٔ «احتمال» چند تا است؟

حل. در اینجا حرف «ا» دوبار تکرار شده است. اگر این دو «ا» را متفاوت فرض کنیم، روی‌هم $۶!$ جایگشت برای حروف وجود خواهد داشت. ولی در هر جایگشت دو حرف متفاوت «ا» به $۲! = ۲$ طریق می‌توانند جابه‌جا شوند، که در هر دو مورد یک کلمه به‌وجود می‌آید. بنابراین با فرض متفاوت بودن دو (الف)، هر کلمه دوبار به‌حساب آمده است. درنتیجه تعداد کل جایگشتهای حروف کلمهٔ «احتمال» برابر است با

$$\frac{۶!}{۲!} = \frac{۷۲۰}{۲} = ۳۶۰$$

مثال ۹. به چند طریق می‌توان ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۴ توپ قرمز را در یک سطر چید، در صورتی‌که توپهای همرنگ، کاملاً یکسان باشند.

حل. اگر توپهای همرنگ را متفاوت فرض کنیم، تعداد راه‌های چیدن این توپها، تعداد جایگشتهای ۱۱ شیء است که برابر است با !۱۱. در هر یک از این جایگشتها ۳ توپ سفید به !۳ طریق، ۴ توپ سیاه به !۴ طریق و ۴ توپ قرمز نیز به !۴ طریق می‌توانند بین خودشان جابه‌جا شوند، که در هر مورد باز همان جایگشت اول به‌دست می‌آید. بنابراین $\frac{11!}{4!4!3!}$ طریق برای چیدن این ۱۱ توپ وجود دارد.

> اگر m شیء از k نوع مختلف داشته باشیم که m_1تای آنها از نوع اول، m_2تای آنها از نوع دوم و بالاخره m_kتای آنها از نوع kام باشد طوری‌که $m_1+m_2+\cdots+m_k=m$، آنگاه $\frac{m!}{m_1!\dots m_k!}$ جایگشت برای این m شیء وجود دارد.

تمرینهای ۲.۲

۱. قرار است از سه نفری که برای دریافت شغل در یک شرکت ثبت‌نام کرده‌اند، مصاحبه‌ای به عمل آید، به چند طریق می‌توان این‌کار را انجام داد؟

۲. نخستین n عدد طبیعی یعنی اعداد ۱، ۲، ...، n را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم نوشت؟

۳. چند جایگشت از حروف آ، ب، پ، ت، ث با «آ» شروع و به «پ» ختم می‌شود؟

۴. در پیامهایی که توسط دستگاه مرس فرستاده می‌شوند، فقط از خط تیره (-) و نقطه (.) استفاده می‌شود. با پنج خط تیره و سه نقطه چند پیام مرس می‌توان فرستاد؟

۵. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ ۱۲تاییهای مرتب باشد که از ارقام ۰، ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند،

الف) مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

ب) در چند تا از عناصر A دقیقاً شش تا ۰ و شش تا یک وجود دارد؟

پ) در چند تا از عناصر A، دقیقاً سه تا ۰، چهار تا ۱ و پنج تا ۲ وجود دارد؟

۶. با سه تا «آ»، سه تا «ب» و چهار تا «پ» چند کد ده حرفی می‌توان ساخت؟

۷. با چهار رنگ مختلف به چند طریق می‌توان ۱۱ اتاق را رنگ کرد طوری‌که چهار تا از آنها سبز، سه تا زرد، و دو تا سفید و دوتای باقیمانده صورتی رنگ شوند؟

۸. به چند طریق می‌توان ۳ توپ سفید، ۴ توپ قرمز و ۴ توپ سیاه را در یک ردیف چید در صورتی‌که توپهای هم‌رنگ کاملاً یکسان باشند.

۹. از درون کیسه‌ای حاوی m مهره با شماره‌های ۱، ۲، ...، m به چند طریق می‌توان n مهره $(n \leqslant m)$ را بدون جایگذاری خارج کرد؟

۱۰. ده نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند، طوری‌که سه نفر خاص از آنها همواره کنار هم باشند؟

۱۱. k توپ متمایز $b_1, b_2, \ldots, b_k$ را در n جعبهٔ مختلف قرار می‌دهیم، طوری‌که در هیچ جعبه‌ای بیشتر از یک توپ قرار نگیرد. $(k \leqslant n)$ تعداد راه‌های قرار دادن این k توپ در n جعبه را بیابید اگر

الف) توپ b_1 در جعبهٔ اول قرار گیرد؛

ب) توپهای b_1 و b_2 به‌ترتیب در جعبه‌های اول و دوم قرار گیرند؛

پ) توپهای b_1 و b_2 در جعبه‌های اول و دوم قرار گیرند.

۳.۲ ترکیب

در پایان دور دوم مسابقهٔ هفته که در آن ۱۵ شرکت‌کننده وجود دارد، ۳ نفر برای انجام دور نهایی انتخاب می‌شوند. می‌خواهیم ببینیم این سه نفر به چند طریق می‌توانند از بین ۱۵ نفر انتخاب شوند. نفر اول به ۱۵ طریق، نفر دوم به ۱۴ طریق و نفر سوم به ۱۳ طریق ممکن است انتخاب شود، اما پاسخ، عدد $۱۵ \times ۱۴ \times ۱۳$ نیست؛ زیرا فرض کنید سه نفری را که به دور نهایی راه پیدا می‌کنند با A، B و C نشان دهیم. اینکه بگوییم «A، B و C به دور نهایی راه پیدا کرده‌اند» با اینکه بگوییم «B، A و C به دور نهایی راه یافته‌اند» فرقی ندارد. بنابراین در شمارش فوق تمام $۶ = ۳!$ حالت ممکن برای ترتیب ۳ نفر را باید یک حالت حساب کرد. پس تعداد راه‌های ممکن انتخاب این سه نفر از میان ۱۵ نفر برابر است با

$$\frac{۱۵ \times ۱۴ \times ۱۳}{۳!} = ۴۵۵$$

این عدد تعداد ترکیبهای سه شیء از ۱۵ شیء نامیده می‌شود.

در حالت کلی می‌توان تعداد گروه‌های متشکل از r شیء از n شیء را با استدلال مشابهی به‌دست آورد. برای انتخاب r شیء از میان n شیء، بدون تکرار، شیء اول را به n طریق، شیء دوم را به $n-۱$ طریق و بالاخره شیء rـام را به $n-r+۱$ طریق می‌توان انتخاب کرد. لذا برای انتخاب r شیء بدون تکرار از میان n شیء

$$n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱) = P(n,r),$$

راه وجود دارد. در هر گروه r عضوی ترتیب اشیاء اهمیت ندارد و این r شیء می‌توانند به $r!$ حالت جابه‌جا شوند که همهٔ آنها را یک حالت درنظر می‌گیریم، بنابراین تعداد گروه‌های r شیئی که با این n شیء می‌توان تشکیل داد برابر است با

$$\frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-۱)\ldots(n-r+۱)}{r!},$$

اگر صورت و مخرج کسر فوق را در $(n-r)!$ ضرب کنیم، عبارت دیگری برای تعداد گروه‌های r شیئی به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{P(n,r)(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

تعداد ترکیبهای r شیء از میان n شیء، $r \leqslant n$، تعداد گروه‌های r عضوی است که می‌توان با این n شیء تشکیل داد. این عدد با نماد $C(n,r)$ نشان داده می‌شود و برابر است با

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۱۰. از میان ۲۰ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان یک گروه پنج نفری برای تیم مسابقهٔ درسی انتخاب کرد؟

حل. در اینجا $n = ۲۰$ و $r = ۵$، پس تعداد راه‌های انتخاب این تیم ۵ نفری برابر است با

$$C(۲۰,۵) = \frac{۲۰!}{۵!۱۵!} = ۱۵۵۰۴$$

مثال ۱۱. می‌خواهیم یک گروه ۵ نفری از دانش‌آموزان انتخاب کنیم، به‌طوری‌که ۲ نفر از آنها از میان ۵ دانش‌آموز سال اول و ۳ نفر دیگر از میان ۸ دانش‌آموز سال دوم انتخاب شوند. این‌کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

حل. ۲ نفر از میان ۵ نفر را به $C(۵,۲) = \frac{۵!}{۲!۳!} = ۱۰$ طریق و ۳ نفر از میان ۸ نفر را به $C(۸,۳) = \frac{۸!}{۳!۵!} = ۵۶$ طریق می‌توان انتخاب نمود. پس برای تشکیل گروه ۵ نفری دو عمل را باید همزمان انجام دهیم که برای انجام عمل اول ۱۰ امکان و برای انجام عمل دوم ۵۶ امکان وجود دارد. پس بنابر اصل اساسی شمارش، روی‌هم

$$C(۵,۲)C(۸,۳) = ۱۰ \times ۵۶ = ۵۶۰$$

راه برای انجام این‌کار وجود دارد.

هنگام صحبت از تبدیل، قرارداد کردیم که $۰! = ۱$. در اینجا قرارداد می‌کنیم که برای $r > n$ و برای $r \leqslant ۰$، $C(n,r) = ۰$، یعنی $C(n,r)$ را فقط برای $۰ \leqslant r \leqslant n$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۱۲. ثابت کنید برای $۱ \leqslant r \leqslant n$

$$C(n+۱,r) = C(n,r) + C(n,r-۱).$$

حل. کافی است دو طرف را به‌کمک تعریف تعداد ترکیبها بسط دهیم. طرف چپ عبارت است از $\frac{(n+۱)!}{r!(n+۱-r)!}$ و طرف راست برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-۱)!(n-r+۱)!} &= \frac{n!(n-r+۱)}{r!(n-r)!(n-r+۱)} + \frac{n!r}{r(r-۱)!(n-r+۱)!}\\ &= \frac{n![(n-r+۱)+r]}{r!(n-r+۱)!} = \frac{n!(n+۱)}{r!(n-r+۱)!}\\ &= \frac{(n+۱)!}{r!(n+۱-r)!}\end{aligned}$$

پس بسط طرفهای چپ و راست به یک عبارت منتهی می‌شود. درنتیجه تساوی ثابت می‌گردد.

۴.۲ بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتون

با استفاده از ویژگی توزیع‌پذیری ضرب اعداد حقیقی به‌راحتی می‌توان عبارت $(x+y)^2$ را برحسب x و y بسط داد:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x^2+xy+yx+y^2\\ &= x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

این، بسطِ توان دوم دو جمله‌ای $x+y$ از دو متغیر حقیقی x و y است. بسطِ توان سوم این دو جمله‌ای یعنی $(x+y)^3$ را نیز می‌توان با ضرب کردن بسط توان دوم در $(x+y)$ و مجدداً استفاده از ویژگی توزیع‌پذیری ضرب اعداد حقیقی به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y)\\ &= x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+y^2x+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

به‌همین صورت با انجام عمل ضرب، بسط توانهای چهارم، پنجم و ... دو جمله‌ای $x+y$ به‌دست می‌آیند، ولی با زیاد شدن توان، به‌دست آوردن بسط از طریق ضرب مستقیم مشکل است. به جستجوی الگویی در این بسطها می‌پردازیم تا بتوانیم رابطه‌ای کلی برای بسط توان nـام دو جمله‌ای $x+y$ بیابیم. برای اینکه الگوی مورد نظر را بهتر درک کنیم، توان چهارم مجموع $x+y$ را نیز بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= (x+y)^3(x+y) = (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x+y)\\ &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\end{aligned}$$

ضرایب بسطهایی را که به‌دست آوردیم به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

ضرایب بسط توان اول   ۱   ۱

ضرایب بسط توان دوم   ۱   ۲   ۱

ضرایب بسط توان سوم   ۱   ۳   ۳   ۱

ضرایب بسط توان چهارم   ۱   ۴   ۶   ۴   ۱

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، شکل صفحهٔ قبل که شبیه مثلث[1] است دارای دو ویژگی است: اولاً در دو طرف هر سطر عدد ۱ قرار دارد و ثانیاً هر عدد میانی در یک سطر با جمع کردن اعداد دو طرف آن در سطر بالایی به‌دست می‌آید. مثلاً دو طرف عدد ۶ در سطر بالای آن اعداد ۳ و ۳ قرار دارند. با کمک این الگو می‌توان اعداد سطر پنجم را که ضرایب بسط توان پنجم $(x+y)$ هستند به‌دست آورد؛ سطر پنجم عبارت است از

$$۱ \quad ۵ \quad ۱۰ \quad ۱۰ \quad ۵ \quad ۱$$

در نتیجه

$$(x+y)^{۵} = x^{۵} + ۵x^{۴}y + ۱۰x^{۳}y^{۲} + ۱۰x^{۲}y^{۳} + ۵xy^{۴} + y^{۵}\cdot$$

به این‌ترتیب می‌توان ضرایب بسط هر توانی از دو جمله‌ای را از روی مثلث به‌دست آورد و بسط آن‌را نوشت. اعداد موجود در سطرهای مثلث را به‌صورت دیگری نیز می‌توان نوشت و آن استفاده از رابطهٔ ترکیب r شیء از n شیء است. برای مثال اعداد سطر پنجم عبارتند از

$$۱ = C(۵,۰)\ ,۵ = C(۵,۱)\ ,۱۰ = C(۵,۲)\ ,۱۰ = C(۵,۳)$$
$$۵ = C(۵,۴)\ ,\ \ ۱ = C(۵,۵)\cdot$$

یا ضرایب بسط توان چهارم را می‌توان به‌صورت

$$۱ = C(۴,۰), ۴ = C(۴,۱), ۶ = C(۴,۲), ۴ = C(۴,۳), ۱ = C(۴,۴)\cdot$$

نوشت. بنابراین حدس می‌زنیم که برای هر عدد طبیعی n ضرایب بسط توان nـام دو جمله‌ای $x+y$ به‌صورت $C(n,k)$، برای $۰ \leqslant k \leqslant n$، باشند. درنتیجه با توجه به توالی توانهای x و y در بسط دو جمله‌ای

به‌ازای هر عدد طبیعی n، و اعداد حقیقی x و y داریم

$$\begin{aligned}(x+y)^n =& C(n,۰)x^n + C(n,۱)x^{n-۱}y + C(n,۲)x^{n-۲}y^{۲} + \dots \\ &+ C(n,n-۲)x^{۲}y^{n-۲} + C(n,n-۱)xy^{n-۱} + C(n,n)y^n\end{aligned}$$

می‌توان این قضیه را با استقرای ریاضی ثابت کرد ولی ما یک اثبات ترکیبیاتی برای آن ارائه می‌کنیم. برای یافتن بسط $(x+y)^n$ باید دو جمله‌ای $x+y$ را n بار در خودش ضرب کنیم، یعنی باید حاصلضرب

$$\underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n\text{ بار}}$$

۱. این مثلث به مثلث خیام ـ پاسکال موسوم است.

را به‌دست آوریم. در انجام این عملِ ضرب، از هر پرانتز یک جمله (x یا y) انتخاب و جملات درهم ضرب می‌شوند. پس هر جملهٔ حاصلضرب به شکل

$$x^{n-r}y^r \qquad ; \qquad 0 \leqslant r \leqslant n$$

است. برای به‌دست آوردن یک چنین جمله‌ای، باید از r پرانتز، y و از $n-r$ پرانتز، x انتخاب شود. چند جمله از این نوع وجود دارد؟ این تعداد، دقیقاً تعداد جایگشتهای n شیء است که rتای آنها از نوع اول (نوع y) و $n-r$تای دیگر از نوع دوم (نوع x) هستند که طبق مطالب بند ۲ ۰ ۲ برابر است با

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

پس $C(n,r)$ جمله به شکلِ $x^{n-r}y^r$ داریم. اگر برای $0 \leqslant r \leqslant n$ تمام این جملات را جمع کنیم بسط $(x+y)^n$ که در قضیهٔ دو جمله‌ای ادعا شده است، به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳. ثابت کنید $C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n$.

حل. در قضیهٔ بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتون قرار می‌دهیم $x = 1$ و $y = 1$. آنگاه

$$\begin{aligned}(1+1)^n =& C(n,0)1^n + C(n,1)1^{n-1} \times 1 + C(n,2)1^{n-2} \times 1^2 + \dots \\ &+ C(n,n-1)1 \times 1^{n-1} + C(n,n)1^n\end{aligned}$$

در نتیجه $2^n = C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n)$.

مثال ۱۴. نشان دهید که $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \cdots + (-1)^n C(n,n) = 0$.

حل. در قضیهٔ بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتون قرار می‌دهیم $x = 1$ و $y = -1$. آنگاه

$$\begin{aligned}(1-1)^n =& C(n,0)1^n + C(n,1)1^{n-1}(-1) + C(n,2)1^{n-2}(-1)^2 + \dots \\ &+ C(n,n-1)1(-1)^{n-1} + C(n,n)(-1)^n\end{aligned}$$

در نتیجه $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \cdots + (-1)^n C(n,n) = 0$.

طبق تعریف برای $0 \leqslant r \leqslant n$ داریم $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. از طرف دیگر

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

در نتیجه $C(n,r) = C(n,n-r)$. حال در قضیهٔ بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتون قرار می‌دهیم $y = 1$. آنگاه به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم

$$\begin{aligned}(x+1)^n =& C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1} + C(n,2)x^{n-2} + \dots \\ &+ C(n,n-1)x + C(n,n),\end{aligned}$$

همچنین اگر m عدد صحیح نامنفی دیگری باشد، به‌صورت مشابه داریم

$$\begin{aligned}(x+1)^m =& C(m,0)x^m + C(m,1)x^{m-1} + C(m,2)x^{m-2} + \dots \\ &+ C(m,m-1)x + C(m,m),\end{aligned}$$

فرض کنید $0 \leqslant r \leqslant n$ و $0 \leqslant r \leqslant m$. طبق قضیهٔ بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتون ضریب x^r در بسط $(x+1)^{m+n}$ برابر است با $C(m+n,r)$. این ضریب را با روش دیگری نیز می‌توان محاسبه کرد. طبق قانون نماها

$$(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n$$

چون برای $0 \leqslant k \leqslant r$، داریم $x^r = x^k x^{r-k}$، بنابراین با ضرب کردن ضریب جملهٔ x^k از بسط $(x+1)^m$ در ضریب جملهٔ x^{r-k} در بسط $(x+1)^n$ و سپس جمع کردن اعداد حاصل به‌ازای $0 \leqslant k \leqslant r$، ضریب x^r به‌دست می‌آید. ضریب x^k در بسط $(x+1)^m$ برابر است با $C(m,k)$ و ضریب x^{r-k} در بسط $(x+1)^n$ برابر است با $C(n,r-k)$. پس ضریب x^r به شکل دیگر عبارت است از مجموع

$$\begin{aligned}&C(m,0)C(n,r) + C(m,1)C(n,r-1) + C(m,2)C(n,r-2) \\ &\qquad + \cdots + C(m,r-1)C(n,1) + C(m,r)C(n,0),\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن این مجموع با $C(m+n,r)$ که قبلاً به‌دست آوردیم به اتحادِ

$$\begin{aligned}&C(m,0)C(n,r) + C(m,1)C(n,r-1) + \dots + C(m,r-1)C(n,1) \\ &\qquad + C(m,r)C(n,0) = C(m+n,r),\end{aligned}$$

می‌رسیم. در حالت خاصِ $r = n$ و $m = n$ با توجه به اینکه $C(n,r) = C(n,n-r)$ برای $0 \leqslant r \leqslant n$، نتیجه می‌گیریم:

$$C(2n,n) = (C(n,0))^2 + (C(n,1))^2 + (C(n,2))^2 + \cdots + (C(n,n))^2.$$

تمرینهای ۴.۲

۱. بابک می‌خواهد از میان ۲۰ تن از دوستانش، ۶ نفر را برای جشن تولدش دعوت کند، به چند طریق می‌تواند این‌کار را انجام دهد؟

۲. دانش‌آموزی باید به ۷ سؤال از یک آزمون ۱۰ سؤالی پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۷ سؤال را انتخاب کند؟ اگر قرار باشد سه سؤال را از میان ۵ سؤال نخست و چهار تای بعدی را از ۵ سؤال دیگر برگزیند، این‌کار را به چند حالت می‌تواند انجام دهد؟

۳. احمد می‌خواهد از میان ۸ تن از دوستانش ۵ نفر را به مهمانی دعوت کند. اگر دو تن از دوستان احمد باهم اختلاف داشته باشند و نخواهند باهم در مهمانی حضور داشته باشند، احمد به چند طریق می‌تواند این ۵ نفر را انتخاب کند؟

۴. یک مجموعهٔ ۵ عضوی چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟ کلی‌تر اگر n و r اعداد صحیح نامنفی باشند و $r \leqslant n$، یک مجموعهٔ n عضوی چند زیرمجموعهٔ r عضوی دارد؟

۵. در هر یک از دو معادلهٔ زیر برحسب عدد طبیعی n، n را پیدا کنید:

الف) $C(n,1) = C(n,7)$ ؛ ب) $C(18,n) = C(18,n-2)$.

۶. اگر n عدد صحیح مثبت باشد، مجموع زیر را پیدا کنید:

$$C(n,1) + 2C(n,2) + 3C(n,3) + \cdots + nC(n,n).$$

۷. پنج عدد از اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۲۰ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در چند حالت کمترینِ این پنج عدد از ۴ بزرگتر است؟

۸. ثابت کنید که برای عدد صحیح نامنفی n،

$$C(n,0) + C(n+1,1) + \cdots + C(n+r,r) = C(n+r+1,r).$$

۹. مجموع زیر را به‌دست آورید:

$$C(n,0) + \frac{1}{2}C(n,1) + \frac{1}{3}C(n,2) + \cdots + \frac{1}{n+1}C(n,n).$$

۱۰. عبارت $(3x^2+y)^5$ را به‌کمک فرمول بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتن بسط دهید. در این بسط ضریب x^6y^2 چقدر است؟

۱۱. به‌کمک بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتن، عبارت $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^3$ را بسط دهید.

۱۲. ۴ کفش به تصادف از بین ۵ جفت کفش برداشته می‌شوند. در چند حالت حداقل یک جفت هماهنگ در بین این ۴ کفش وجود دارد؟

۵.۲ مدلهای توپ و جعبه

مسائل مربوط به شمارش و روشهای شمارش را که در بندهای قبل مطالعه کردیم می‌توان به زبان توپ و جعبه تبدیل کرد. n توپ یکسان به شماره‌های ۱، ۲، ۳، ...، n درون جعبه‌ای قرار دارد. m توپ، $m \leqslant n$، را با شرایط متفاوت از جعبه خارج می‌کنیم، اینکه چه شرایطی بر نحوهٔ استخراج این توپها قرار دهیم، در هر مورد تعداد حالتهای مختلف استخراج m توپ به شکل یکی از دستورهای ترکیبیاتی بندهای قبل درمی‌آید.

مثال ۱۵ . m توپ را یکی پس از دیگری از درون جعبه خارج می‌کنیم با این شرط که قبل از استخراج بعدی، توپ قبلی را مجدداً به درون جعبه باز می‌گردانیم. این یک مسألهٔ **نمونه‌گیری با جایگذاری** است.

تعداد راههای استخراج m توپ با این شرط، همان تعداد همهٔ mتاییهای مرتب $(a_۱, a_۲, \ldots, a_m)$ است که هر a_k، $۱ \leqslant k \leqslant m$، می‌تواند یکی از اعداد ۱ تا n باشد. لذا n^mتا از این mـتاییها وجود دارد. مثال ۳ حالت خاصی از این نمونه‌گیری به‌ازای $n = ۲$ است.

مثال ۱۶ . m توپ را یکی پس از دیگری از درون جعبه خارج می‌کنیم با این شرط که جایگذاری انجام نمی‌شود. این، مسألهٔ **نمونه‌گیری بدون جایگذاری** است. برای استخراج توپ اول n انتخاب، برای استخراج توپ دوم $n - ۱$ انتخاب، برای استخراج توپ سوم $n - ۲$ انتخاب، ... و برای استخراج توپ mـام، تعداد $n - m + ۱$ انتخاب وجود دارد. پس تعداد راه‌های مختلف این‌گونه نمونه‌گیری برابر است با $n(n - ۱)(n - ۲)\ldots(n - m + ۱) = P(n, m)$.

در حالت خاصِ $m = n$، همهٔ n توپ یکی بعد از دیگری و بدون جایگذاری خارج می‌شوند که برای انجام این‌کار $P(n, n) = n!$ راه وجود دارد و این همان تعداد جایگشتهای n شیء است.

مثال ۱۷ . m توپ را باهم از درون جعبه خارج کنیم با این شرط که ترتیب این m توپ اهمیت نداشته باشد. تعداد طرق مختلف استخراج m توپ از میان n توپ، همان تعداد گروه‌های متشکل از m شیء از میان n شیء است و برابر است با

$$C(n, m) = \frac{n!}{m!(n - m)!}.$$

این، یک مسألهٔ **نمونه‌گیری بدون جایگذاری و بدون ترتیب** است.

از بیان روابط ترکیبیاتی به زبان استخراج توپ از درون جعبه، در محاسبهٔ احتمال پیشامدها در فضای نمونه‌ای متناهی استفاده می‌شود.

۳ احتمال

در فصل ۱ گفتیم احتمال، عددی است که به هر یک از پیشامدهای فضای نمونه‌ای که مربوط به یک آزمایش تصادفی است، نسبت داده می‌شود. این عدد چگونه نسبت داده می‌شود؟ در زندگی روزمره به پیشامدها (اتفاقها)یی که عوامل تصادفی در آن دخالت دارند براساس نوعی احساس شخصی، عددی را به‌عنوان شانس یا احتمال رخ دادن آن پیشامد نسبت می‌دهید. برای مثال ممکن است براساس شواهدی از قبیل سردی بیش از حد هوا و متراکم و زیاد بودن ابرهایی که آسمان را پوشانده‌اند، احتمال زیادی بدهید که به‌جای باران، برف خواهد بارید و عددی را به‌عنوان احتمال بارش برف به این پیشامد نسبت دهید. یک پزشک براساس مشاهدات و تجربیات متعدد خود در مورد اینکه بروز نشانه‌های مشخصی، دلیل بر مثلاً ابتلا به بیماری سل است، اگر در یک مورد جدید همان نشانه‌ها را مشاهده کند با احتمال زیاد، بیمار را مسلول اعلام می‌کند و عددی را نیز به‌عنوان احتمال مسلول بودن بیمار به این پیشامد نسبت می‌دهد. این قبیل احتمالها را **احتمال شخصی** می‌نامند. بر این نحوهٔ نسبت دادن احتمال، استنباط و احساس شخصی حاکم است و پایهٔ محکم ریاضی ندارد. در نظریهٔ احتمال دو نوع تعریف برای احتمال یک پیشامد وجود دارد که یکی منشأ آماری و دیگری منشأ **اصل موضوعی** دارد و این دو توسط قانونی، به‌نام **قانون قوی اعداد بزرگ** به یکدیگر پیوند می‌خورند. یک راه تعریف احتمال پیشامد که منشأ آماری دارد، تعریف آن برحسب **فراوانی نسبی** است. فرض کنید یک آزمایش تصادفی که فضای نمونه‌ای آن S است، تحت شرایط کاملاً یکسان، پیاپی تکرار شود. برای پیشامد E از فضای نمونه‌ای S، عدد $n(E)$ را تعداد دفعاتی می‌گیریم که در n بار نخست انجام آزمایش، پیشامد E رخ می‌دهد. عدد $\frac{n(E)}{n}$ **فراوانی نسبی یا تخمین احتمال** پیشامد E نامیده می‌شود. با زیاد کردن n یعنی زیاد کردن تعداد دفعات انجام آزمایش، فراوانی نسبی $\frac{n(E)}{n}$ به عددی نزدیک می‌شود که آن‌را، احتمال رخ دادن پیشامد E تعریف می‌کنیم. هر چند این تعریف از نظر شهودی، خوشایند و معقول به نظر می‌رسد ولی مشکلات منطقی متعددی در آن نهفته است. همین مشکلات باعث شد که ریاضیدانان این تعریف را کنار بگذارند و به‌جای آن، ویژگیهای اساسی را که می‌توان از این تعریف برای احتمال پیشامدها نتیجه گرفت به‌عنوان نقطهٔ شروع (اصول موضوع) قرار دهند و همان‌طور که در

رهیافت اصل موضوعی هندسهٔ اقلیدسی، نقطه و خط مفاهیم تعریف نشده به حساب آورده می‌شوند، احتمال را نیز مفهومی تعریف نشده در نظر بگیرند که فقط با ویژگیهای آن که در قالب اصول موضوع آمده‌اند، شناخته می‌شود. با این نحوهٔ بنیانگذاری نظریهٔ احتمال و پیش بردن آن توانستند بین دیدگاه فراوانی نسبی و دیدگاه اصل موضوعی ارتباط برقرار کنند و به‌این‌ترتیب حد **فراوانی نسبی** به‌عنوان احتمال یک پیشامد به **معنای خاصی**[۱] پذیرفته شد. به هر صورت فراوانی نسبی به‌عنوان تخمین احتمال در آمار و استنباطهای تجربی رواج دارد.

مثال ۱. برای به‌دست آوردن تخمین احتمال آمدن «رو» در پرتاب یک سکه، سکه‌ای را ۱۰۰ بار پرتاب می‌کنیم. در آزمایش پرتاب سکه $S=\{$پ ,ر$\}$ و می‌خواهیم تخمین احتمال پیشامد تک عضوی $E=\{$ر$\}$ را پیدا کنیم. اگر در این ۱۰۰ بار پرتاب، ۴۲ بار «رو» مشاهده شود، فراوانی نسبی یا تخمین احتمال «آمدن رو» برابر است با $\frac{n(E)}{n}=\frac{۴۲}{۱۰۰}=\frac{۲۱}{۵۰}$.

مثال ۲. برای یافتن تخمین احتمال آمدن عدد زوج در پرتاب تاس، تاسی را ۶۰۰ بار پرتاب می‌کنیم. در آزمایش پرتاب تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و می‌خواهیم تخمین احتمال پیشامد $E=\{۲,۴,۶\}$ را بیابیم. اگر در این ۶۰۰ بار پرتاب تاس، ۲۵۶ بار عدد زوج، یعنی یکی از اعداد ۲، ۴ و ۶ مشاهده شود، تخمین احتمال «آمدن عدد زوج در پرتاب تاس» برابر است با

$$\frac{n(E)}{n}=\frac{۲۵۶}{۶۰۰}=\frac{۳۲}{۷۵}.$$

از تخمین احتمال یک پیشامد می‌توان استفاده نمود و تعیین کرد که اگر تعداد دفعات انجام آزمایش افزایش یابد، چند بار مشاهدهٔ آن پیشامد انتظار می‌رود. این کار را می‌توان با حل کردن یک تناسب ساده انجام داد. مثلاً با توجه به نتیجهٔ مثال ۱، اگر سکه را به‌جای ۱۰۰ بار، ۱۰۰۰ بار پرتاب کنیم انتظار می‌رود که ۴۲۰ بار پیشامد «رو» مشاهده شود، زیرا $\frac{۴۲۰}{۱۰۰۰}=\frac{۴۲}{۱۰۰}$.

مثال ۳. اگر از هر ۵۰ ماشینی که به یک تقاطع می‌رسند، ۲۰ تای آنها از سمت چپ وارد شوند، تخمین احتمال ورود ماشین از سمت چپ به این تقاطع برابر است با $\frac{۲۰}{۵۰}=\frac{۲}{۵}$. حال اگر در طول یک روز ۵۰۰ ماشین به آن تقاطع برسند انتظار داریم که ۲۰۰ تای آنها از سمت چپ وارد شوند، زیرا $\frac{۲۰۰}{۵۰۰}=\frac{۲}{۵}$.

۱.۳ احتمال کلاسیک[۲]

یکی از عوامل به‌وجود آمدن پارادوکسها در نظریهٔ احتمال در ابتدای پیدایش آن، به‌کار بردن اصطلاحات تعریف نشده‌ای از قبیل «هم‌شانس» و «غیر هم‌شانس» بود، زیرا «شانس» و «احتمال» هر دو به یک معنا هستند و استفاده کردن از یکی برای تعریف دیگری، منجر به دور می‌شود. به همین‌صورت در حالی‌که هنوز خود «احتمال» تعریف نشده است، عبارتهایی از قبیل **فضای نمونه‌ای هم‌شانس**

۱. این معنا چیزی است که محتوای قانون قوی اعداد بزرگ را تشکیل می‌دهد.

۲. مطالب این بند به فضاهای نمونه‌ای گسستهٔ متناهی مربوط می‌شود.

بی‌معنی است. یکی از انگیزه‌های اصل موضوعی کردن نظریهٔ احتمال و وضع «احتمال» به‌عنوان یک مفهوم تعریف نشده، رهایی از این مشکلات منطقی بود. در این بند **احتمال کلاسیک** یعنی احتمال در فضاهای هم‌شانس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هر چند در بندهای بعد با بیان اصل موضوعی احتمال و به‌دست آوردن قوانین احتمال به‌کمک اصول موضوع، معنای هم‌شانس بودن و نحوهٔ تعریف احتمال یک پیشامد در فضاهای هم‌شانس کاملاً روشن خواهد شد، ولی در اینجا به درک شهودی که خواننده از هم‌شانس بودن به معنی یکسان بودن شانس رخ دادن برآمدها، دارد اکتفا می‌کنیم و براساس همین درک شهودی احتمال پیشامد در فضاهای نمونه‌ای با این ویژگی را محاسبه می‌کنیم.

آزمایش پرتاب یک سکهٔ سالم (سکه‌ای که «رو آمدن» و «پشت آمدن» در آن هم‌شانس هستند) دو نتیجه دارد: «رو» و «پشت». پس فضای نمونه‌ای این آزمایش $S=\{\text{ر}, \text{پ}\}$ است. چون یک سکهٔ سالم دو طرف دارد و ظاهر شدن هر طرف در پرتاب سکه با ظاهر شدن طرف دیگر هم‌شانس است، طبیعی است که به رخ دادن هرکدام از پیشامدهای

$$E_۱ = \{\text{ر}\} \qquad , \qquad E_۲ = \{\text{پ}\}$$

احتمال $\frac{۱}{۲}$ را نسبت دهیم. در پرتاب یک تاس همگن (تاسی که شانس ظاهر شدن هر وجه آن با دیگر وجوه یکسان است) شش نتیجه وجود دارد: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶. پس فضای نمونه‌ای این آزمایش عبارت است از $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$. چون تاس همگن است، طبیعی است به رخ دادن هرکدام از پیشامدهای $E_k = \{k\}$، $۱ \leqslant k \leqslant ۶$، عدد $\frac{۱}{۶}$ را نسبت دهیم. در پیشامد «ظاهر شدن عدد زوج»، یعنی

$$E = \{۲, ۴, ۶\},$$

سه عضو از فضای نمونه‌ای وجود دارد، پس احتمال رخ دادن پیشامد E برابر است با $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$. در هرکدام از موارد فوق احتمالهای نسبت داده شده به پیشامدها، **احتمال کلاسیک** رخ دادن آن پیشامد نامیده می‌شود.

> اگر S یک فضای نمونه‌ای متناهی هم‌شانس شامل n عضو و E پیشامدی در S و دارای m عضو $(m \leqslant n)$ باشد، **احتمال کلاسیک** پیشامد E را با $P(E)$[1] نشان داده با کسر
>
> $$P(E) = \frac{E \text{ تعداد اعضای }}{S \text{ تعداد اعضای }} = \frac{m}{n}$$
>
> تعریف می‌کنیم.

مثال ۴. فضای نمونه‌ای آزمایش دوبار پرتاب یک سکهٔ سالم عبارت است از

$$S = \{(\text{ر}, \text{ر}), (\text{ر}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{ر}), (\text{پ}, \text{پ})\}$$

1. Probability

چون سکه، سالم است، همهٔ برآمدها هم‌شانس هستند. در پیشامد «رو آمدن در پرتاب اول»، یعنی $E=\{(\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ})\}$ دو عضو از فضای نمونه‌ای S قرار دارد. در اینجا $m=۲$ و $n=۴$. در نتیجه

$$P(E)=\tfrac{۲}{۴}=\tfrac{۱}{۲}.$$

در پیشامد «آمدن لااقل یک رو»، یعنی پیشامد

$$F=\{(\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر})\},$$

سه عضو از فضای نمونه‌ای قرار دارد، پس $m=۳$ و $n=۴$. در نتیجه $P(F)=\tfrac{۳}{۴}$.

مثال ۵. در آزمایش پرتاب دو تاس همگن، یکی سبز و دیگری قرمز، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S=\{(x,y):x,y=۱,۲,۳,۴,۵,۶\},$$

به‌علت همگن بودن تاسها، این برآمدها همگی هم‌شانس هستند. در پیشامد «مجموع اعداد آمده روی دو تاس ۶ باشد»، یعنی پیشامد

$$E=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\},$$

۵ عضو از فضای نمونه‌ای وجود دارد، بنابراین $m=۵$ و $n=۳۶$. درنتیجه $P(E)=\tfrac{۵}{۳۶}$. در همین آزمایش، پیشامد «مجموع اعداد آمده روی دو تاس برابر ۷ باشد»، یعنی پیشامد

$$F=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\},$$

شامل ۶ عضو از فضای نمونه‌ای است. لذا $P(F)=\tfrac{۶}{۳۶}=\tfrac{۱}{۶}$.

مثال ۶. یک سکهٔ سالم و یک تاس همگن را باهم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی عبارت است از

$$S=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۴),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),(\text{پ},۳),(\text{پ},۴),(\text{پ},۵),(\text{پ},۶)\},$$

چون سکه، سالم و تاس، همگن است، تمام برآمدهای این آزمایش هم‌شانس هستند. در پیشامد «سکه رو و تاس عدد زوج بیاید»، یعنی پیشامد

$$E=\{(\text{ر},۲),(\text{ر},۴),(\text{ر},۶)\},$$

سه عضو فضای نمونه‌ای وجود دارند. بنابراین $n=۱۲$ و $m=۳$ پس

$$P(E)=\tfrac{۳}{۱۲}=\tfrac{۱}{۴}.$$

مثال ۷. یک تاس همگن را شش‌بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعهٔ همهٔ شش تاییهای مرتب $(a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵,a_۶)$ است که هر کدام از a_iها، $۱\leqslant i\leqslant ۶$، می‌تواند اعداد ۱، ۲، ...، ۶ باشد. پس طبق اصل اساسی شمارش، فضای نمونه‌ای، $۶^۶$ عضو دارد. پیشامد

اینکه در این شش‌بار اعداد متفاوتی ظاهر شود، از همهٔ آن شش‌تاییهای مرتب فوق تشکیل شده است که همهٔ a_iها متفاوت هستند، به عبارت دیگر مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، که برابر است با !۶. لذا با توجه به اینکه تاس، همگن است و درنتیجه برآمدها هم‌شانس هستند، احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۶!}{۶^۶}$.

مثال ۸. یک سکهٔ سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعهٔ همهٔ سه‌تاییهای مرتب (x, y, z) است که هر یک از x، y و z می‌تواند «رو» یا «پشت» باشد، یعنی

$$S =\{(\text{ر},\text{ر},\text{ر}), (\text{پ},\text{ر},\text{ر}), (\text{ر},\text{پ},\text{ر}), (\text{پ},\text{پ},\text{ر}), (\text{ر},\text{ر},\text{پ})$$
$$, (\text{پ},\text{ر},\text{پ}), (\text{ر},\text{پ},\text{پ}), (\text{پ},\text{پ},\text{پ})\},$$

چون سکه سالم است و پرتابها در شرایط کاملاً یکسان انجام می‌شوند، برآمدهای این آزمایش تصادفی، هم‌شانس و احتمال هر پیشامد تک عضوی $\frac{۱}{۸}$ است. پیشامد «ظاهر شدن دقیقاً دو رو» عبارت است از

$$A = \{(\text{ر},\text{پ},\text{ر}), (\text{پ},\text{ر},\text{ر}), (\text{ر},\text{ر},\text{پ})\},$$

که شامل سه عضو از فضای نمونه‌ای است، درنتیجه $P(A) = \frac{۳}{۸}$. پیشامدهای «ظاهر شدن دقیقاً یک رو» و «ظاهر شدن دقیقاً سه رو» به‌ترتیب عبارتند از

$$B = \{(\text{ر},\text{پ},\text{پ}), (\text{پ},\text{ر},\text{پ}), (\text{پ},\text{پ},\text{ر})\}$$

و

$$C = \{(\text{ر},\text{ر},\text{ر})\},$$

که به‌ترتیب دارای احتمالهای $P(B) = \frac{۳}{۸}$ و $P(C) = \frac{۱}{۸}$ هستند.

مثال ۹. یک سکهٔ سالم را m بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعهٔ همهٔ m تاییهای مرتب $(a_۱, a_۲, \ldots, a_m)$ است که هر a_i، $۱ \leqslant i \leqslant m$، می‌تواند «رو» یا «پشت» باشد. اگر به‌جای «رو» عدد ۱ و به‌جای «پشت» عدد صفر قرار دهیم، فضای نمونه‌ای مجموعهٔ همهٔ m تاییهای مرتب از صفر و یک خواهد شد که بنابر آنچه در فصل ۲ مثال ۳ دیدیم تعداد اعضای آن برابر است با ۲^m. چون همهٔ برآمدها هم‌شانس هستند، احتمال رخ دادن هر پیشامد تک عضوی

$$\{(a_۱, a_۲, \ldots, a_m)\}$$

$\frac{۱}{۲^m}$ است.

با دقت در مثالهای فوق ملاحظه می‌کنید که در همهٔ آنها برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد سه مرحلهٔ زیر را طی کرده‌ایم:

الف) تعیین فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی؛

ب) نوشتن پیشامدی که در جستجوی احتمال رخ دادن آن هستیم به‌صورت زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای؛

پ) محاسبهٔ احتمال آن پیشامد.

این سه مرحله در واقع سه مرحلهٔ مدلسازی برای حل مسائل احتمالات هستند. البته لزومی ندارد که این مراحل به‌ترتیب فوق طی شوند، می‌توان بعضی از مراحل را جابه‌جا یا حذف کرد. همچنین انجام دادن این سه مرحله صورت یکتایی ندارد، مثلاً ممکن است فضای نمونه‌ای را برحسب نوع پیشامد به شکلهای گوناگون نوشت. در مثال ۸ فضای نمونه‌ای آزمایش سه بار پرتاب یک سکهٔ سالم را با ۸ عضو نوشتیم؛ این فضا را برحسب تعداد «رو» هایی که در هر برآمد وجود دارد نیز می‌توان نوشت. چون تعداد «رو» ها می‌تواند ۰، ۱، ۲ یا ۳ تا باشد، مجموعهٔ

$$S = \{۰, ۱, ۲, ۳\},$$

نمایش دیگری از فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی است.

در بندهای آینده سعی می‌کنیم مسائل احتمالات را با طی‌کردن سه مرحلهٔ فوق مدلسازی و حل کنیم.

تمرینهای ۱.۳

۱. گاتفرید ویلهلم لایب‌نیتز ریاضیدان و فیلسوف آلمانی معتقد است که در پرتاب کردن یک جفت تاس سالم، احتمال اینکه مجموع اعداد آمده ۱۱ باشد با احتمال اینکه این مجموع ۱۲ باشد، برابر است. آیا شما با لایب‌نیتز موافقید؟

گاتفرید ویلهلم لایب‌نیتز

۲. یک عدد به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱، ۲، ...، ۱۰۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد:

الف) بر ۳ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

ب) هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

۳. دو عدد به تصادف، به‌ترتیب و با جایگذاری از مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱، ۲، ...، ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این را به‌دست آورید که عدد اول بزرگتر از عدد دوم باشد.

۴. دو تاس همگن را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه تاس اول عدد ۶ و تاس دوم عدد فرد بیاید، چقدر است؟

۵. در یک امتحان «تستی» چهار گزینه‌ای، ۱۵ سئوال وجود دارد، که در هر سئوال فقط یکی از گزینه‌ها درست است. اگر سئوالها به تصادف پاسخ داده شوند، احتمال اینکه همهٔ سئوالها درست جواب داده شوند چقدر است؟

۶. چهار تاس همگن را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر یک ۳ (یعنی یا هیچی یا یکی) ظاهر شود چقدر است؟

۷. یک عدد به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱، ۲، ...، ۱۰۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد شامل رقم ۵ باشد را بیابید.

۸. دو عدد طبیعی m و n را **نسبت به‌هم اول** گوییم اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد. مثلاً دو عدد ۵ و ۸ نسبت به‌هم اولند، ولی ۶ و ۸ نسبت به‌هم اول نیستند، زیرا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۲ است. عددی را به تصادف از مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۶۳\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد نسبت به ۶۳ اول باشد چقدر است؟

۹. در یک کلاس، ۱۲ دانش‌آموز وجود دارد. احتمال اینکه روزهای تولد آنها در ۱۲ ماه مختلف سال واقع باشند چقدر است؟ فرض کنید ماه‌های سال با احتمال یکسان شامل روز تولد هر کدام از این دانش‌آموزان باشد.

۱۰. n عدد توپ را به تصادف در n جعبه یکسان قرار می‌دهیم. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد چقدر است؟

۱۱. ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + bx + c = ۰$ براساس پرتاب دو تاس همگن تعیین می‌شوند. (b عدد روی تاس اول و c عدد روی تاس دوم است) احتمال اینکه ریشه‌های این معادله حقیقی باشند چقدر است؟

۱۲. از کیسه‌ای محتوی N مهره به شماره‌های ۱، ۲، ...، N، n $(n \leqslant N)$ مهره به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این n مهره شامل یک مهرهٔ خاص (مثلاً مهرهٔ شمارهٔ ۲) باشد چقدر است؟

۱۳. یک تاس همگن را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دقیقاً دو ۶ ظاهر شود چقدر است؟

۱۴. از کیسه‌ای محتوی ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه، دو توپ به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه یکی از این توپها سفید و دیگری سیاه باشد چقدر است؟

۱۵. دو تاس همگن متمایز را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد آمده روی تاسها مضرب ۳ باشد، احتمال اینکه هر دوی آنها ۳ باشند چقدر است؟

۱۶. پنج قطعه چوب با طولهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ واحد وجود دارد. سه تا از آنها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این سه قطعه یک مثلث تشکیل بدهند را به‌دست آورید.

۱۷. تاس همگنی را n بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده در این n بار پرتاب از $6n - 1$ کمتر نباشد چیست؟

۱۸. دو تاس همگن متمایز را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حاصلضرب اعداد ظاهر شده، زوج باشد چقدر است؟

۱۹. ده کتاب به تصادف در یک قفسه کتاب قرار داده می‌شوند. احتمال این را به‌دست آورید که (الف) دو کتاب خاص کنار یکدیگر قرار گیرند، (ب) k کتاب خاص، $2 \leqslant k \leqslant 10$، کنار یکدیگر قرار گیرند.

۲۰. n تاس همگن و m سکهٔ سالم را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه همهٔ سکه‌ها «رو» و همهٔ تاسها «شش» بیاید چیست؟

۲.۳ تخصیص احتمال

تمام بحث بند ۱، دربارهٔ احتمال پیشامدها در فضاهای نمونه‌ای هم‌شانس بود. حال اگر فضای نمونه‌ای هم‌شانس نباشد، یعنی شانس رخ دادن برآمدهای آن یکسان نباشد، چگونه می‌توان احتمال پیشامدها را حساب کرد؟

> فرض کنید $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ یک فضای نمونه‌ای گسسته باشد. دنبالهٔ اعداد p_1، p_2، p_3، ... را یک تخصیص احتمال برای S می‌نامیم اگر دارای دو ویژگی زیر باشد:
>
> الف) برای هر $i \geqslant 1$، $p_i \geqslant 0$؛
>
> ب) $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$.

اگر یک تخصیص احتمال به‌صورت بالا برای فضای نمونه‌ای گسستهٔ S موجود باشد آنگاه برای محاسبهٔ احتمال پیشامد E از فضای نمونه‌ای S، اعداد p_i را که به اعضای موجود در E نسبت داده شده است باهم جمع می‌کنیم. به‌ویژه خود فضای نمونه‌ای به‌عنوان یک پیشامد شامل همهٔ برآمدها است و بنابر ویژگی (ب) تخصیص احتمال، احتمال کل فضای نمونه‌ای برابر با یک خواهد شد.

مثال ۱۰. برای فضای نمونه‌ای سه عضوی $S = \{a, b, c\}$، دنبالهٔ اعداد $p_1 = \frac{1}{3}$، $p_2 = -\frac{2}{3}$ و $p_3 = \frac{3}{4}$، یک تخصیص احتمال نیست، زیرا $p_2 < 0$. همچنین برای فضای نمونه‌ای چهار عضوی $S = \{a, b, c, d\}$، دنبالهٔ اعداد $p_1 = \frac{1}{4}$، $p_2 = \frac{1}{2}$، $p_3 = \frac{1}{8}$ و $p_4 = \frac{1}{4}$ یک تخصیص احتمال نیست، زیرا

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 + \frac{1}{8} > 1$$

و این ویژگی (ب) تخصیص احتمال را نقض می‌کند. ولی برای فضای نمونه‌ای دو عضوی $\{x, y\}$، دنبالهٔ اعداد $p_۱ = \frac{۱}{۳}$ و $p_۲ = \frac{۲}{۳}$ یک تخصیص احتمال است، زیرا $p_i \geqslant ۰$ برای $i = ۱, ۲$ و نیز $p_۱ + p_۲ = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} = ۱$.

گرچه هر مجموعه‌ای از اعداد $p_۱$، $p_۲$، ... را که در ویژگیهای (الف) و (ب) صدق کند می‌توان به‌عنوان یک تخصیص احتمال برای محاسبهٔ احتمال پیشامدها در فضای نمونه‌ای S به‌کاربرد، اما در یک فضای نمونه‌ای خاص، این اعداد براساس شرایط مسألهٔ داده شده و ویژگی فضای نمونه‌ای از نظر شانس رخ دادن برآمدهای آن، تعیین می‌شوند. در واقع به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \ldots$، p_i احتمال رخ دادن برآمد s_i، یعنی احتمال رخ دادن پیشامد تک عضوی $\{s_i\}$ است.

مثال ۱۱. یک سکه در پرتاب خود طوری سنگینی می‌کند که شانس آمدن «رو» در آن دوبرابر شانس آمدن «پشت» است. تخصیص احتمال برای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به این‌صورت به‌دست می‌آید که اگر p احتمال آمدن پشت باشد، طبق فرض احتمال آمدن رو، $۲p$ است. بنابر ویژگی (ب) تخصیص احتمال باید $p + ۲p = ۱$. درنتیجه $p = \frac{۱}{۳}$، یعنی احتمال آمدن «پشت» برابر با $\frac{۱}{۳}$ و احتمال آمدن «رو» $\frac{۲}{۳}$ است.

مثال ۱۲. در یک مسابقهٔ اسب دوانی قرار است سه اسب a، b و c باهم مسابقه بدهند. اگر شانس بردن اسبِ a دو برابر شانس بردن اسبِ b و شانس بردن اسب b دو برابر شانس بردن اسب c باشد، تخصیص احتمال برای فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c\}$ به‌این‌صورت به‌دست می‌آید که اگر احتمال بردن اسب c برابر با p باشد، طبق فرض احتمال بردن اسب b، برابر با $۲p$ و احتمال بردن اسب a، برابر با $۴p = ۲(۲p)$ است. طبق ویژگی (ب) تخصیص احتمال باید $p + ۲p + ۴p = ۷p = ۱$. درنتیجه $p = \frac{۱}{۷}$، یعنی احتمال بردن اسبِ $c = \frac{۱}{۷}$؛ احتمال بردن اسبِ $b = \frac{۲}{۷}$ و احتمال بردن اسبِ $a = \frac{۴}{۷}$.

مثال ۱۳. یک تاس ناهمگن در پرتاب خود طوری سنگینی می‌کند که ظاهر شدن اعداد زوج هم‌شانس، ظاهر شدن اعداد فرد نیز هم‌شانس ولی شانس آمدن عدد زوج دو برابر شانس آمدن عدد فرد است. می‌خواهیم با معرفی یک تخصیص احتمال برای فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی پرتاب این تاس، احتمال اینکه در پرتاب این تاس عدد زوج ظاهر شود را بیابیم.

اگر p احتمال آمدن عدد فرد باشد، بنابر فرض احتمال آمدن هر عدد زوج $۲p$ است. پس به ۱، ۳ و ۵ عدد p و به ۲، ۴ و ۶ عدد $۲p$ نسبت داده می‌شود. طبق ویژگی (ب) تخصیص احتمال باید

$$p + ۲p + p + ۲p + p + ۲p = ۹p = ۱$$

درنتیجه $p = \frac{۱}{۹}$، یعنی احتمال آمدن هرکدام از اعداد ۱، ۳ و ۵ برابر $\frac{۱}{۹}$ و احتمال آمدن هرکدام از اعداد ۲، ۴ و ۶ برابر با $\frac{۲}{۹}$ است. حال اگر E پیشامد ظاهر شدن عدد زوج باشد، یعنی $E = \{۲, ۴, ۶\}$ آنگاه

$$P(E) = \frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۹} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}.$$

مثال ۱۴. یک تاس ناهمگن در پرتاب خود طوری سنگینی می‌کند که شانس آمدن هر عدد با خود آن عدد متناسب است. برای اینکه ببینیم احتمال ظاهر شدن عدد اول در پرتاب این تاس چقدر است، ابتدا تخصیص احتمالی را که براساس فرض این مسأله به فضای نمونه‌ای پرتاب تاس نسبت داده می‌شود، به‌دست می‌آوریم. فرض کنید p احتمال ظاهر شدن عدد ۱ باشد. در این‌صورت بنابر فرض احتمال ظاهر شدن هرکدام از اعداد ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به‌ترتیب برابر است با $۲p$، $۳p$، $۴p$، $۵p$ و $۶p$. طبق ویژگی (ب) تخصیص احتمال باید

$$p + ۲p + ۳p + ۴p + ۵p + ۶p = ۲۱p = ۱,$$

در نتیجه $p = \frac{۱}{۲۱}$. پیشامدی که می‌خواهیم احتمال آن‌را بیابیم عبارت است از

$$E = \{۲, ۳, ۵\},$$

لذا $P(E) = ۲p + ۳p + ۵p = \frac{۲}{۲۱} + \frac{۳}{۲۱} + \frac{۵}{۲۱} = \frac{۱۱}{۲۱}$.

مثال ۱۵. آزمایش پرتاب یک سکهٔ سالم تا آمدن «رو» را در نظر بگیرید. فضای نمونه‌ای این آزمایش به‌صورت

$$S = \{\text{ر, ر پ, ر پ پ, ر پ پ پ}, \ldots\}$$

بود. اگر به عضو «ر» عدد $\frac{۱}{۲}$، به عضو «رپ» عدد $\frac{۱}{۲^۲} = \frac{۱}{۴}$، به عضو «رپ پ» عدد $\frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$، به عضو «رپ پ پ» عدد $\frac{۱}{۲^۴} = \frac{۱}{۱۶}$ و ... را نسبت دهیم دنبالهٔ هندسی

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲^۲}, \frac{۱}{۲^۳}, \frac{۱}{۲^۴}, \ldots$$

را به‌عنوان اعداد p_i در تخصیص احتمال برای این فضای نمونه‌ای به‌دست می‌آوریم. این اعداد واقعاً یک تخصیص احتمال تشکیل می‌دهند، زیرا اولاً برای هر $۱ \leqslant i$، $p_i \geqslant ۰$، ثانیاً بنابر فرمول حد مجموع جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی داریم

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۲^۴} + \cdots = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱.$$

فرض کنید $S = \{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\}$ یک فضای نمونه‌ای گسستهٔ متناهی با n عضو و اعدادِ $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n یک تخصیص احتمال برای این فضا باشد. اگر همهٔ p_iها، $۱ \leqslant i \leqslant n$، با هم برابر و مقدار مشترک آنها $p \geqslant ۰$ باشد، آنگاه بنابر ویژگی (ب) تخصیص احتمال

$$p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n\ \text{بار}} = np = ۱,$$

درنتیجه مقدار مشترک p برابر است با $\frac{۱}{n}$. حال اگر $E \subseteq S$ یک پیشامد باشد که m عضو، $m \leqslant n$، از فضای نمونه‌ای در آن قرار دارد، احتمال E از جمع کردن احتمالهای نسبت داده شده به اعضای E، یعنی از جمع کردن mتا $\frac{۱}{n}$ به‌دست می‌آید، درنتیجه

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{تعداد اعضای } E}{\text{تعداد اعضای } S}.$$

و این همان تعریف احتمال کلاسیک پیشامدها است که در بند ۱ به آن اشاره شد. پس احتمال کلاسیک را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از تخصیص احتمال به‌دست آورد. بنابراین اگر در یک فضای نمونه‌ای گسستهٔ متناهی احتمال هر برآمد را بدون توجه به معنای شهودی آن، همان عددهایی بدانیم که درتخصیص احتمال به هر برآمد نسبت می‌دهیم آنگاه هم‌شانس بودن فضا دقیقاً به معنای مساوی بودن این عددها برای همهٔ برآمدها است و سپس احتمال یک پیشامد را به‌صورت بالا به‌دست می‌آوریم. به این‌ترتیب می‌توان از مشکل ایجاد دور در به‌کار بردن کلمات شانس و احتمال رهایی یافت.

تمرینهای ۲.۳

۱. دالامبر[1] (۱۷۸۳-۱۷۱۷) ریاضیدان و فیلسوف بزرگ فرانسوی معتقد بود که آزمایش تصادفی پرتاب دو سکه، سه نتیجه دارد: هر دو سکه «رو» می‌آیند، هر دو سکه «پشت» می‌آیند، یا یک سکه «رو» و سکهٔ دیگر «پشت» می‌آید؛ بنابراین احتمال رخ دادن هر نتیجه $\frac{۱}{۳}$ است. آیا شما با نظر دالامبر موافقید؟ توضیح دهید.

دالامبر

۲. کیسه‌ای محتوی ۵ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ قرمز است. اگر مهرهٔ سفید را با حرف W و مهرهٔ قرمز را با حرف R نشان دهیم، آیا مجموعهٔ $S = \{W, R\}$ می‌تواند فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی خارج کردن تصادفی یک مهره از درون کیسه باشد؟

۳. کدام‌یک از مجموعه اعداد زیر یک تخصیص احتمال (برای یک فضای نمونه‌ای مناسب) تشکیل می‌دهند؟

الف) $p_۱ = \frac{۱}{۲}$، $p_۲ = \frac{۱}{۳}$، $p_۳ = \frac{۱}{۴}$؛

ب) $p_۱ = -۰/۴$، $p_۲ = ۰/۶$، $p_۳ = ۰/۸$؛

پ) $p_۱ = ۰/۲$، $p_۲ = ۰/۳$، $p_۳ = ۰/۵$.

1. d'Alembert

۴. فرض کنید دو مجموعه اعداد $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ و $Q = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ تشکیل دو تخصیص احتمال بدهند و a و b نیز اعداد حقیقی نامنفی باشند که $a + b = 1$. نشان دهید مجموعهٔ اعداد

$$R = \{ap_1 + bq_1, ap_2 + bq_2, ap_3 + bq_3, \dots\},$$

یک تخصیص احتمال است.

۵. فرض‌کنید $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{3}{4}$، $P(\{a_1, a_3\}) = \frac{3}{4}$ و $P(\{a_1, a_2\}) = \frac{1}{2}$. به‌کمک این اطلاعات $P(\{a_1\})$، $P(\{a_2\})$ و $P(\{a_3\})$ را حساب کنید.

۶. اگر مجموعهٔ اعداد $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ یک تخصیص احتمال باشد، $p_1 = \frac{1}{6}$ و $p_2 = p_3 = p_4$، هر یک از p_iها را به‌دست آورید.

۷. اگر مجموعهٔ اعداد $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ یک تخصیص احتمال باشد، آیا مجموعهٔ $\{p_1^2, p_2^2, p_3^2, \dots\}$ نیز یک تخصیص احتمال است؟ اگر آری چرا و اگر نه مثال نقض بیاورید.

۸. یک تاس در پرتاب خود طوری سنگینی می‌کند که احتمال ظاهر شدن هر عدد با توان دومِ همان عدد متناسب است. با این فرض احتمال ظاهر شدن هر عدد را به‌دست آورید.

۹. تاس همگنی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. چگونه می‌توانید به این فضا یک تخصیص احتمال نسبت دهید؟ به‌کمک این تخصیص، احتمال اینکه عدد ۶ در دفعهٔ با شمارهٔ زوج بیاید را حساب کنید.

۱۰. در تمرین ۸ احتمال این را حساب کنید که در پرتاب این تاس عدد اول ظاهر شود.

۱۱. در تیراندازی به یک صفحهٔ هدف که از پنج دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ اینچ تشکیل شده است، احتمال برخورد تیر به سطح درون هر دایره با مساحت آن دایره متناسب است. احتمال برخورد تیر به ناحیهٔ بین دایره‌های دوم و سوم را به‌دست آورید.

۱۲. فرض کنید دو مجموعهٔ اعداد $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ و $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ تخصیص احتمال باشند. ثابت کنید مجموعهٔ اعداد

$$\{p_i q_j \ : i = 1, 2, \dots, n \ , j = 1, 2, \dots, m\},$$

نیز یک تخصیص احتمال است.

۳.۳ احتمال هندسی

یک دسته از فضاهای نمونه‌ای که معرفی کردیم از جنس طول و سطح بودند که آنها را فضاهای نمونه‌ای پیوسته نامیدیم. تا اینجا نحوهٔ محاسبهٔ احتمال در فضاهای گسستهٔ هم‌شانس و غیر هم‌شانس را معرفی

کرده‌ایم. اگر فضاهای نمونه‌ای و پیشامد هر دو از جنس طول یا هر دو از جنس سطح باشند، دیگر نمی‌توان از روشهای گذشته برای محاسبهٔ احتمال استفاده نمود.

فرض کنید S یک فضای نمونه‌ای و $E \subseteq S$ پیشامدی در S باشد که هر دو از جنس طول باشند. آنگاه احتمال E را به‌صورت

$$P(E) = \frac{\text{طول}\, E}{\text{طول}\, S}$$

تعریف می‌کنیم و اگر فضای نمونه‌ای S و پیشامد E هر دو از جنس سطح باشند، احتمال E را به‌صورت

$$P(E) = \frac{\text{سطح}\, E}{\text{سطح}\, S}$$

تعریف می‌کنیم. در هر دو مورد فرض بر این است که طول و سطح به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند.[1]

احتمالهایی که به‌این‌ترتیب در فضاهای نمونه‌ای پیوسته محاسبه می‌شوند، **احتمال هندسی** نامیده می‌شوند.

مثال ۱۶. نقطه‌ای را به تصادف از فاصلهٔ $(۰, ۱)$ انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، فاصلهٔ $S = (۰, ۱)$ و از جنس طول است. پیشامد اینکه طول نقطه کمتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد، زیر فاصلهٔ $(۰, \frac{۱}{۲})$ و باز از جنس طول است. بنابراین احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۱}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲} - ۰}{۱ - ۰} = \frac{\text{طول پیشامد}}{\text{طول فضا}}$.

مثال ۱۷. دو قطعه چوب به‌طولهای ۱ و ۰٫۵ متر در اختیار داریم. قطعه چوب بلندتر را به تصادف از نقطه‌ای می‌شکنیم. می‌خواهیم احتمال این پیشامد را به‌دست آوریم که سه قطعه چوب حاصل یک مثلث درست کنند.

در مثال ۲۱ فصل ۱ دیدید که فضای نمونه‌ای این آزمایش را می‌توان فاصلهٔ $(۰, ۱)$ در نظر گرفت که در این‌صورت پیشامد اینکه بتوان با سه قطعهٔ حاصل یک مثلث درست کرد، با زیر فاصلهٔ $(\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴})$ متناظر می‌شد. پس احتمال این پیشامد برابر است با

$$\frac{\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴}}{۱ - ۰} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}.$$

مثال ۱۸. اتوبوسهای شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به‌کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یکبار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۷ تا ۷ : ۳۰ به یک ایستگاه وارد شود، احتمال اینکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال اینکه بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

---

۱. به‌طور مشابه اگر S و E هر دو از جنس حجم با توزیع یکنواخت باشند، تعریف می‌کنیم $P(E) = \frac{\text{حجم}\, E}{\text{حجم}\, S}$. ولی در این کتاب این قبیل احتمالها را حساب نمی‌کنیم.

چون شخص در لحظه‌ای بین ۷ تا ۷ : ۳۰ به ایستگاه می‌رسد، فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفیِ رسیدن به ایستگاه اتوبوس، فاصلهٔ (۷ , ۷ : ۳۰) است. برای اینکه شخص کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس شود باید در یکی از لحظات بین ۷ : ۱۰ تا ۷ : ۱۵ یا ۷ : ۲۵ تا ۷ : ۳۰ به ایستگاه برسد. بنابراین پیشامد مورد نظر از دو فاصلهٔ زمانی (۷ : ۱۰ , ۷ : ۱۵) و (۷ : ۲۵ , ۷ : ۳۰) تشکیل یافته است. لذا احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۵+۵}{۳۰} = \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$. برای اینکه شخص بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند، باید در یکی از لحظات بین ۷ تا ۷ : ۰۵ یا ۷ : ۱۵ تا ۷ : ۲۰ به ایستگاه برسد، لذا در این حالت پیشامد مطلوب عبارت است از اجتماع دو فاصلهٔ (۷ , ۷ : ۰۵) و (۷ : ۱۵ , ۷ : ۲۰). درنتیجه، احتمال آن برابر است با $\frac{۵+۵}{۳۰} = \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$. ملاحظه می‌کنید که احتمالهای هر دو پیشامد مساوی هستند. این مطلب، عجیب نیست؟

مثال ۱۹ . یک صفحهٔ هدف تیراندازی با چهار دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تقسیم شده است. می‌خواهیم احتمال برخورد تیر به درون دایرهٔ به شعاع ۲ را حساب کنیم.

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی سطح دایرهٔ به شعاع ۴، یعنی سطح بزرگترین دایرهٔ تشکیل دهندهٔ صفحهٔ هدف است. پیشامد مورد نظر نیز سطح دایرهٔ به شعاع ۲ است. در اینجا هر دوی فضای نمونه‌ای و پیشامد از جنس سطح هستند. پس احتمال پیشامد مطلوب برابر است با $\frac{\text{مساحت پیشامد}}{\text{مساحت فضای نمونه‌ای}} = \frac{\pi(۲)^۲}{\pi(۴)^۲} = \frac{۱}{۴}$.

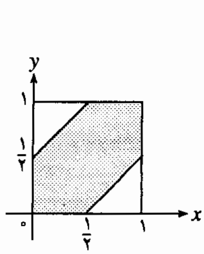
مثال ۲۰. دو نقطهٔ x و y به تصادف از درون فاصلهٔ (۰,۱) انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، مربع واحد یعنی مجموعهٔ

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ :\ ۰ < x < ۱, ۰ < y < ۱\},$$

است. در مثال ۲۰ فصل ۱، نحوهٔ مشخص کردن پیشامد اینکه فاصلهٔ دو نقطهٔ انتخاب شده کمتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد، یعنی پیشامد

$$E = \{(x,y) \in S :\ |x-y| < \tfrac{۱}{۲}\},$$

را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از S بیان کردیم. این فضای نمونه‌ای و پیشامد (قسمت سایه زده شده) را مجدداً در شکل ۱ نشان داده‌ایم.



شکل۱

مساحت هر یک از دو مثلث کناری عبارت است از $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$. پس مساحت قسمت سایه زده شده، یعنی مساحت پیشامد برابر است با

$$۱ - (۲ \times \frac{۱}{۸}) = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}.$$

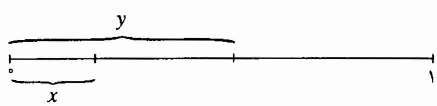
درنتیجه احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۳}{۴} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱} = \frac{\text{مساحت ناحیهٔ سایه زده}}{\text{مساحت مربع}}$.

مثال ۲۱. قطعه چوبی به‌طول یک متر را در دو نقطه به تصادف می‌شکنیم. می‌خواهیم احتمال اینکه بتوان با سه قطعه چوب حاصل یک مثلث درست کرد را بیابیم.

با متناظرکردن یک سر این قطعه چوب با صفر و سر دیگر آن با یک، می‌توان نقاط قطعه چوب را با فاصلهٔ $(۰,۱)$ و انتخاب دو نقطهٔ شکست را با انتخاب دو نقطه به تصادف از درون فاصلهٔ $(۰,۱)$ متناظر کرد. پس فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعهٔ

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : ۰ < x < ۱, ۰ < y < ۱\},$$

یعنی مربع واحد است. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، اگر $x < y$ سه قطعه چوب



شکل۲

حاصل دارای طولهای x، $y - x$ و $۱ - y$ هستند. برای اینکه این سه قطعه یک مثلث ایجاد کنند باید نابرابری‌های زیر که همان شرط بزرگتر بودن مجموع طولهای دو ضلع از طول ضلع سوم در یک مثلث هستند، برقرار باشند:

$$x + (y - x) > ۱ - y \qquad (۱)$$

$$x + (۱ - y) > y - x \qquad (۲)$$

$$(۱ - y) + (y - x) > x \qquad (۳)$$

نابرابری (۱) به $۲y > ۱$ یا $y > \frac{۱}{۲}$، نابرابری (۲) به $y < x + \frac{۱}{۲}$ و نابرابری (۳) به نابرابری $x < \frac{۱}{۲}$ تبدیل می‌شود. درنتیجه اگر طول نقاط شکست در این سه نابرابری به‌اضافهٔ فرض $x < y$ صدق کنند، سه قطعه یک مثلث درست می‌کنند. اگر $y < x$ آنگاه همان نابرابریهای فوق را داریم منتها این‌بار جای x و y عوض می‌شود.

این دو حالت در شکل ۳ـ(الف) و ۳ـ(ب) نشان داده شده‌اند. مساحت ناحیهٔ سایه زده شده در شکل ۳ـ(الف)، برابر است با $\frac{۱}{۸}$ و در شکل ۳ـ(ب) نیز برابر است با $\frac{۱}{۸}$. درنتیجه مساحت پیشامد

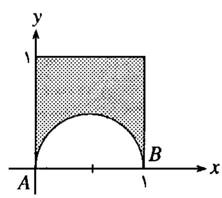
مطلوب، E، برابر است با $\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}$. پس

$$P(E)=\frac{\text{مساحت پیشامد}}{\text{مساحت } S}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۴}.$$

(ب) (الف)

شکل۳

مثال ۲۲. نقطه‌ای به تصادف از درون مربع واحد انتخاب و آن‌را به دو رأس مجاور مربع وصل می‌کنیم (شکل ۴). احتمال اینکه زاویهٔ تشکیل شده بین دو پاره خطی که آن نقطه را به دو رأس مجاور وصل می‌کنند حاده باشد، چقدر است؟



شکل۴

حل. همان‌طور که در مثال ۲۲ فصل ۱ دیدید فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی همهٔ نقاط سطح مربع واحد است. اگر نقطهٔ انتخاب شده، روی نیمدایره‌ای به قطرِ ضلع AB در شکل ۴ باشد، آنگاه زاویهٔ تشکیل شده در آن نقطه قائمه است و اگر نقطهٔ انتخاب شده خارج این نیمدایره باشد، زاویهٔ تشکیل شده حاده است. بنابراین پیشامد مطلوب مجموعه نقاط خارج این نیمدایره است. قطر این نیمدایره برابر با ۱ و درنتیجه شعاع آن $\frac{۱}{۲}$ است. پس مساحت نیمدایره برابر است با $\frac{۱}{۲}\pi(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{\pi}{۸}$. از این رو احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

$$\frac{\text{مساحت پیشامد}}{\text{مساحت فضای نمونه‌ای}}=\frac{۱-\frac{\pi}{۸}}{۱}=۱-\frac{\pi}{۸}.$$

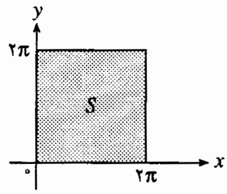
مثال ۲۳. سه نقطه به تصادف از محیط دایرهٔ واحد انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم احتمال اینکه این سه نقطه روی یک نیمدایره قرار گیرند را به‌دست آوریم.

برای حل این مسأله مراحل مدلسازی مسائل احتمالات را طی می‌کنیم. در مرحلهٔ اول باید فضای نمونه‌ای را مشخص کنیم. سه نقطه‌ای که به تصادف از دایرهٔ واحد انتخاب می‌شوند را با A، B و C نشان می‌دهیم. برای تعیین مکان این سه نقطه روی دایرهٔ واحد یکی از آنها مثلاً A را ثابت فرض

می‌کنیم. دو نقطهٔ دیگرِ B و C را با طول قوس آنها از A به‌عنوان مبدأ مشخص می‌کنیم. اگر طول قوس از B تا A را با x[1] و طول قوس از C تا A را با y نشان دهیم، هرکدام از x و y مقادیر بین $\circ$ و $\text{۲}\pi$ را می‌گیرد، زیرا محیط دایرهٔ واحد که حداکثرِ طول قوس هرکدام از B و C تا A است برابر با $\text{۲}\pi$ است؛ پس $\text{۲}\pi \leqslant x \leqslant \circ$ و $\text{۲}\pi \leqslant y \leqslant \circ$. به‌این‌ترتیب با ثابت گرفتن A می‌توان انتخاب نقاط B و C را همانند انتخاب دو نقطه با طولهای x و y از فاصلهٔ $[\circ, \text{۲}\pi]$ دانست. درنتیجه فضای نمونه‌ای را می‌توان مربع به‌طول ضلع $\text{۲}\pi$، یعنی

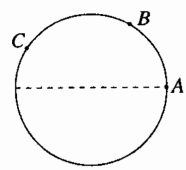
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\text{۲}} :\ \circ \leqslant x \leqslant \text{۲}\pi, \circ \leqslant y \leqslant \text{۲}\pi\},$$

در نظر گرفت. (شکل ۵)

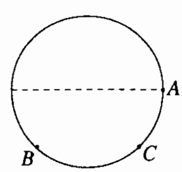


شکل۵

مرحلهٔ دوم تعیین پیشامد به‌صورت زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای S است. ببینیم با ثابت گرفتن A، در چه حالتهایی A، B و C روی یک نیمدایره قرار می‌گیرند. یک حالت این است که هر سهٔ A، B و C روی نیمدایرهٔ بالایی قرار داشته باشند که از رسم قطر گذرنده از A به‌وجود می‌آید. (شکل ۶)، حالت دوم زمانی است که A، B و C روی نیمدایرهٔ پایینی که از رسم قطر گذرنده از A به‌وجود می‌آید، واقع باشند. (شکل ۷) و بالاخره حالتهای سوم و چهارم زمانی است که B و C طوری در دو طرف A قرار



شکل ۶



شکل ۷

گرفته باشند که هر سه نقطه روی یک نیمدایره باشند. (شکلهای ۸ـ(الف) و ۸ـ(ب)). این چهار حالت را به زبان مجموعه‌ها به‌صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$E_{\text{۱}} = \{(x,y) \in S :\ \circ \leqslant x \leqslant \pi, \circ \leqslant y \leqslant \pi\}$$

$$E_{\text{۲}} = \{(x,y) \in S :\ \pi \leqslant x \leqslant \text{۲}\pi, \pi \leqslant y \leqslant \text{۲}\pi\}$$

$$E_{\text{۳}} = \{(x,y) \in S :\ x - y > \pi\}$$

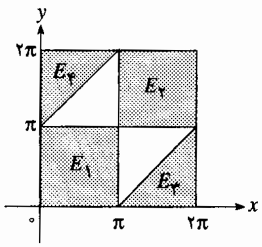
$$E_{\text{۴}} = \{(x,y) \in S :\ y - x > \pi\}$$

۱. طول قوسها را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم.

شکل۸

این ناحیه‌ها روی شکل ۹ به‌صورت بخشهایی از مربع به‌طول ضلع ۲π سایه‌زده شده‌اند. پیشامدی که در جستجوی احتمال آن هستیم در واقع اجتماع این چهار مجموعه است، یعنی $E = E_۱ \cup E_۲ \cup E_۳ \cup E_۴$. برای محاسبهٔ احتمال E کافی است مساحت ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۹ را به‌دست آوریم و بر مساحت S تقسیم کنیم. چون

$$\begin{aligned} E\text{مساحت} &= E_۱\text{مساحت} + E_۲\text{مساحت} + E_۳\text{مساحت} + E_۴\text{مساحت} \\ &= \pi^۲ + \pi^۲ + \tfrac{۱}{۲}\pi^۲ = \tfrac{۱}{۲}\pi^۲ = ۳\pi^۲ \\ S\text{مساحت} &= (۲\pi)(۲\pi) = ۴\pi^۲ \end{aligned}$$



شکل۹

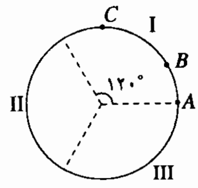
بنابراین $P(E) = \frac{۳\pi^۲}{۴\pi^۲} = \frac{۳}{۴}$.

مثال ۲۴. مجدداً سه نقطه به تصادف از دایرهٔ واحد انتخاب می‌کنیم. این بار می‌خواهیم احتمال این را که سه نقطه روی کمانی به‌طول $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره باشند به‌دست آوریم. به این منظور اگر مانند مثال قبل یکی از این نقاط را ثابت بگیریم و دو نقطهٔ دیگر را با طول کمان از آن نقاط تا نقطهٔ ثابت و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت مشخص کنیم، فضای نمونه‌ای مربع

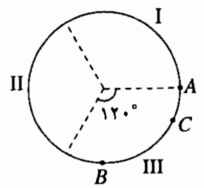
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲;\ ۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi, ۰ \leqslant y \leqslant ۲\pi\},$$

خواهد شد. حالتهایی را که سه نقطهٔ انتخاب شده روی کمانی به‌طول $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره واقع می‌شوند، می‌یابیم. سه نقطه را با A، B و C نشان داده، A را ثابت فرض می‌کنیم. با درنظر گرفتن A به‌عنوان

مبدأ، دایره را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. زاویهٔ مرکزی مربوط به هر قسمت، $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ است. حالت اول زمانی است که A، B و C در قسمت I قرار گیرند (شکل ۱۰). اگر A، B و C در قسمت III قرار گیرند باز پیشامد رخ داده است. (شکل ۱۱) بالاخره حالتهای سوم و چهارم وقتی رخ



شکل ۱۰



شکل ۱۱

می‌دهند که B و C طوری در دو طرف A قرارگرفته باشند که تفاضل طول قوسهای آنها از $\frac{4\pi}{3}$ بیشتر باشد. (شکلهای ۱۲ـ(الف) و ۱۲ـ(ب))

(الف) (ب)

شکل۱۲

مجموعه‌های نقاط مربع به‌طول ضلع 2π را که به‌ترتیب به حالتهای اول، دوم، سوم و چهارم مربوط می‌شوند با E_1، E_2، E_3 و E_4 نشان می‌دهیم. این زیرمجموعه‌های S عبارتند از

$$E_1 = \{(x,y) \in S:\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{2\pi}{3}\};$$

$$E_2 = \{(x,y) \in S:\ \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi, \frac{4\pi}{3} \leqslant y \leqslant 2\pi\};$$

$$E_3 = \{(x,y) \in S:\ y - x > \frac{4\pi}{3}\};$$

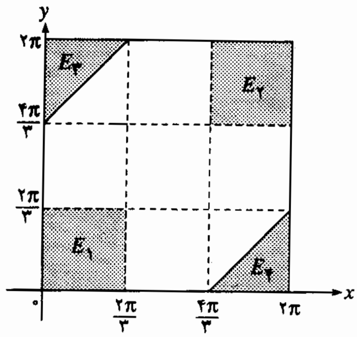
$$E_4 = \{(x,y) \in S:\ x - y > \frac{4\pi}{3}\},$$

در شکل ۱۳ این نقاط بر روی مربع S سایه زده شده‌اند. اگر E پیشامدی باشد که در جستجوی احتمال آن هستیم آنگاه چون $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ برای محاسبهٔ احتمال E باید مجموع مساحتهای E_1، ...، E_4، یعنی مساحت ناحیهٔ سایه خورده در شکل ۱۳، را بر مساحت مربع S تقسیم کنیم:

$$\text{مساحت}\, E = \text{مساحت}\, E_1 + \text{مساحت}\, E_2 + \text{مساحت}\, E_3 + \text{مساحت}\, E_4$$

$$= \frac{4\pi^2}{9} + \frac{4\pi^2}{9} + 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{4\pi^2}{9}\right)$$

$$= 3\left(\frac{4\pi^2}{9}\right) = \frac{4\pi^2}{3}$$



شکل۱۳

و نیز $4\pi^2 = (2\pi)(2\pi) =$ مساحت S . درنتیجه

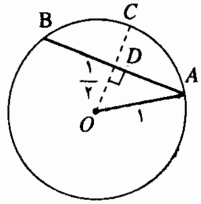
$$P(E) = \frac{\frac{4\pi^2}{3}}{4\pi^2} = \frac{1}{3}.$$

مثال ۲۵ . (**پارادوکس برتران**[1]) همان‌طور که گفتیم نظریهٔ احتمال در ابتدای تولد خود به‌علت کم‌دقتیهایی که در تعریف مفاهیم و نحوهٔ به‌کار بردن آنها در محاسبات وجود داشت با پارادوکسها و تناقضهای متعددی روبرو شده بود. کسانی که تعریف لاپلاس از احتمال (یعنی درآوردن مسأله در قالب یک مسأله با فضای نمونه‌ای هم‌شانس در حالت گسسته و یکنواخت در حالت پیوسته) را پذیرفته بودند و از آن در محاسبهٔ احتمال پیشامدها سود می‌جستند، می‌پنداشتند برای هر مسألهٔ احتمالاتی فقط یک راه حل و درنتیجه فقط یک جواب وجود دارد. ولی جوزف برتران ریاضیدان فرانسوی، در کتاب خود، حساب احتمالات[2]، یک مسألهٔ احتمال را با چند راه حل و جواب متفاوت مطرح کرد و در نتیجه، این مسأله به‌عنوان یک پارادوکس در مقابل ریاضیدانانی که در زمینه احتمالات فعالیت می‌کردند قرار گرفت. ولی بعدها با پیشرفتِ نظریهٔ احتمال و معرفی شدن مفهوم توزیع، مشخص شد که این مسأله پارادوکس نیست. هرچند مدلسازیهای گوناگون منجر به جوابهای متعدد می‌گردد، ولی شرایط مربوط به این مدلسازیها همزمان نمی‌توانند برقرار باشند. درنتیجه هر مدلسازی، هر راه حل و جواب حاصل از آن درست و پذیرفتنی است.

مسألهٔ برتران. وتری را به تصادف از درون دایرهٔ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال این را بیابید که طول این وتر از $\sqrt{3}$ بیشتر باشد.

راه‌حل اول. در راه حل اول، مسأله را طوری مدلسازی می‌کنیم که به محاسبهٔ احتمال در فضاهای نمونه‌ای که از جنس طول هستند، تبدیل شود. در شکل ۱۴ وتر AB همان وتر تصادفی است و طوری رسم شده است که نقطهٔ D درست در وسط OC (شعاع عمود بر کمان AB) قرار گیرد. بنابر قضیهٔ

1. Bertrand 2. Calcul des probabilites



شکل۱۴

فیثاغورس

$$AD^۲ = AO^۲ - OD^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴},$$

درنتیجه $AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. پس طول وتر AB برابر است با $\sqrt{۳}$. حال اگر مسألهٔ انتخاب این وتر تصادفی را به انتخاب نقطه‌ای (وسط وتر) به تصادف از روی شعاع OC تبدیل کنیم، نقاط OC فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی را تشکیل می‌دهند. اگر نقطهٔ انتخاب شده درست در وسط شعاع باشد، طول وتر $\sqrt{۳}$ و اگر به مرکز دایره نزدیکتر از محیط آن باشد، طول وتر از $\sqrt{۳}$ بیشتر خواهد بود. پس در این مدلسازی، با متناظر کردن نقطهٔ O با صفر و نقطهٔ C با یک،

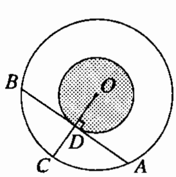
$$S = (۰, ۱) \quad , \quad E = (۰, \tfrac{۱}{۲})$$

بنابراین $P(E) = \frac{۱/۲}{۱} = \frac{۱}{۲}$.

راه‌حل دوم. این‌بار مسأله را طوری مدلسازی می‌کنیم که به محاسبهٔ احتمال در یک فضای نمونه‌ای از جنس سطح تبدیل شود. دایرهٔ به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و هم‌مرکز با دایره واحد را رسم می‌کنیم. اگر وتر تصادفی انتخاب شده، مطابق شکل ۱۵ بر دایرهٔ کوچکتر مماس باشد، طبق قضیهٔ فیثاغورس

$$AD^۲ = AO^۲ - OD^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴},$$

و مجدداً جواب $AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $AB = \sqrt{۳}$ را به‌عنوان طول وتر AB به‌دست می‌آوریم. حال اگر نقطهٔ وسط کمان AB در داخل دایرهٔ به شعاع $\frac{۱}{۲}$ واقع شود طول وتر از $\sqrt{۳}$ بیشتر و اگر خارج آن قرار گیرد طول وتر از $\sqrt{۳}$ کمتر خواهد بود. پس اگر E پیشامدی باشد که در جستجوی احتمال آن هستیم، در این مدلسازی که هر وتر تصادفی را با نقطهٔ وسط آن مشخص می‌کنیم، تمام نقاط سطح دایرهٔ واحد،

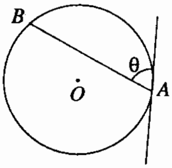


شکل۱۵

فضای نمونه‌ای و نقاط داخل دایرهٔ به شعاع $\frac{۱}{۲}$، پیشامد را تشکیل می‌دهند. بنابراین

$$P(E) = \frac{E\text{ مساحت}}{S\text{ مساحت}} = \frac{\pi(\frac{۱}{۲})^۲}{\pi(۱)^۲} = \frac{۱}{۴}.$$

راه‌حل سوم. بالاخره در راه حل سوم موضع وتر تصادفی را با زاویه‌ای که با خط مماس بر دایره می‌سازد، مشخص می‌کنیم. فرض کنید وتر تصادفی AB را در انتهای A لولا کرده‌ایم و θ زاویهٔ AB با خط مماس بر دایره در نقطهٔ A باشد. (شکل ۱۶) اگر وتر AB را حول نقطهٔ A دوران دهیم، نقطهٔ B از انتهای A شروع به حرکت می‌کند و در نهایت مجدداً به A برمی‌گردد. درنتیجه، طی این دوران زاویهٔ θ از صفر تا ۱۸۰° تغییر می‌کند. اگر θ برابر با ۶۰° یا ۱۲۰° باشد، وتر AB ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره خواهد بود و درنتیجه طول آن همانند دو راه حل قبلی، $\sqrt{۳}$ است.



شکل۱۶

اگر $۶۰^\circ < \theta < ۱۲۰^\circ$ آنگاه طول وتر از $\sqrt{۳}$ بیشتر است. پس در این مدلسازی، مسأله به محاسبهٔ احتمال در حالتی که هم فضای نمونه‌ای و هم پیشامد از جنس طول هستند، تبدیل می‌شود. در واقع

$$S = \{\theta :\ ۰^\circ \leqslant \theta \leqslant ۱۸۰^\circ\} \quad \text{و} \quad E = \{\theta \in S :\ ۶۰^\circ < \theta < ۱۲۰^\circ\},$$

لذا $P(E) = \frac{۱۲۰ - ۶۰}{۱۸۰ - ۰} = \frac{۶۰}{۱۸۰} = \frac{۱}{۳}$.

مشاهده می‌کنید که سه راه حل مختلف منجر به سه جواب متفاوت $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳})$ برای یک مسأله شدند، ولی این نشان دهندهٔ یک پارادوکس نیست. زیرا در مدلسازی اول توزیع طول، در مدلسازی دوم توزیع سطح و در مدلسازی سوم توزیع زاویه را یکنواخت گرفتیم و مسأله را به محاسبهٔ احتمال در فضاهای نمونه‌ای پیوسته برگرداندیم. در نظریهٔ پیشرفتهٔ احتمال ثابت می‌شود که اگر توزیع نقاط روی شعاع یکنواخت فرض شود، توزیع نقاط روی سطح دایرهٔ واحد یکنواخت نخواهد بود و با فرض یکنواخت بودن توزیع نقاط روی شعاع یا سطح دایرهٔ واحد، توزیع زاویهٔ بین وتر و مماس بر دایره یکنواخت نیست؛ از این‌رو شرایط فرض شده در این مدلسازیها همزمان نمی‌توانند برقرار باشند. درنتیجه هر راه حل به‌طور جداگانه صحیح است و پاسخ درستی را به‌دست می‌دهد.

تمرینهای ۳.۳

۱. زمان لازم برای واکنش حیوانی به یک محرک مشخص، عددی تصادفی بین ۲ و ۴٫۳ دقیقه است. احتمال این را پیدا کنید که زمان واکنش بیشتر از ۳٫۲۵ دقیقه نشود.

۲. قطر یک قرص فلزی مسطح عددی تصادفی بین ۴ و ۴٫۵ سانتی‌متر است. احتمال اینکه مساحت این قرص مسطح که به تصادف انتخاب شده است، دست‌کم $۴٫۴۱\pi$ سانتی‌متر مربع باشد چقدر است؟

۳. عددی را به تصادف از فاصلهٔ $(\circ, \frac{\pi}{۲})$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که سینوس این عدد ازکسینوس آن بزرگتر باشد را پیدا کنید.

۴. طول ضلع یک تاس پلاستیکی که در یک کارخانه ساخته شده است، عددی بین ۱ و $\frac{۱}{۴}$ سانتی‌متر است. احتمال اینکه حجم تاسی که به‌طور تصادفی انتخاب شده است، از ۱٫۴۲۴ سانتی‌متر مکعب بیشتر باشد چیست؟

۵. اگر x به تصادف از فاصلهٔ $(\circ, ۳)$ انتخاب شده باشد، احتمال اینکه $x^۲ - ۵x + ۶ > \circ$ را حساب کنید.

۶. بین ۲۰ تا ۲۷ دقیقه (به‌طور تصادفی) طول می‌کشد تا یک معلم، از منزلش به مدرسه برسد. اگر او ساعت ۹ صبح کلاس داشته باشد و ساعت ۸ : ۳۷ صبح از منزل خارج شود، احتمال اینکه سروقت به کلاس برسد چقدر است؟

۷. عدد b را به تصادف از فاصلهٔ $(-۳, ۳)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + bx + ۱ = \circ$ دارای ریشهٔ حقیقی باشد، چیست؟

۸. نقطه‌ای را به تصادف از پاره‌خطی به‌طول l انتخاب می‌کنیم. احتمال این را بیابید که طول قطعهٔ بزرگتر دست‌کم دو برابر طول قطعهٔ کوچکتر باشد.

۹. نقطه‌ای را به تصادف از پاره‌خطی به‌طول l انتخاب می‌کنیم. احتمال این را بیابید که طول هیچ کدام از دو قطعه از $\frac{l}{۴}$ کمتر نباشد.

۱۰. نقطه‌ای را به تصادف از درون مربع واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این نقطه، درون مثلث محدود به خطوط $x = \circ$، $y = \circ$ و $x + y = ۱$ واقع شود، چقدر است؟

۱۱. نقطه‌ای را به تصادف از درون دایرهٔ به شعاع واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این نقطه درون قطاع ۰ رادیان و $\frac{\pi}{۴}$ رادیان واقع شود را حساب کنید.

۱۲. نقطه‌ای را به تصادف از درون مربع واحد برمی‌گزینیم. اگر بدانیم که این نقطه درون مثلث محدود به خطوط $y = \circ$، $x = \circ$ و $x + y = ۱$ قرار دارد، احتمال اینکه درون مثلث محدود به خطوط $y = \circ$، $x = ۱$ و $y = x$ باشد را حساب کنید.

۱۳. دو نفر قرار می‌گذارند که در زمانی تصادفی بین ساعت ۱۲ و ۱ بعدازظهر، یکدیگر را ملاقات کنند. احتمال این‌را بیابید که یکی از دونفر بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر بماند تا دیگری به محل ملاقات برسد.

۱۴. یک صفحهٔ هدف شامل چهار دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۱، ۲، ۳ و ۴ اینچ است. گلوله‌ای به تصادف به‌سمت این صفحهٔ هدف شلیک می‌شود. احتمال اینکه این گلوله به نقطه‌ای بین دایرهٔ به شعاع ۲ اینچ و دایرهٔ به شعاع ۳ اینچ برخورد کند، چقدر است؟

۱۵. فرض کنید u به تصادف از فاصلهٔ $[۰, ۲]$ و v به تصادف از فاصلهٔ $[۱, ۲]$ انتخاب می‌شود. احتمال این را به‌دست آورید که دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = u^۲$ هذلولی $xy = v^۲$ را قطع کند.

۱۶. دو نقطه به تصادف از فاصلهٔ $[۰, s]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این را محاسبه کنید که فاصلهٔ دو نقطهٔ انتخاب شده از مقدار $x(۰ \leqslant x \leqslant s)$ بیشتر نباشد.

۱۷. از یک پاره‌خط به‌طول واحد، دو نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه طول هیچ‌کدام از سه قطعهٔ حاصل از مقدار a، $۰ \leqslant a \leqslant \frac{۱}{۳}$، کوچکتر نباشد چقدر است؟

۱۸. سه نقطهٔ A، B و C را به تصادف از محیط دایرهٔ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مثلث ABC محاط در دایره، یک مثلث حادالزاویه باشد، یعنی هر سه زاویهٔ آن حاده باشد چیست؟

۱۹. سه نقطه به تصادف از محیط دایرهٔ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال این را به‌دست آورید که این سه نقطه روی کمانی به‌طول α رادیان قرار گیرند. $(۰ \leqslant \alpha \leqslant ۲\pi)$

۲۰. سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب روی یک خط راست قرار دارند. نقطهٔ M را به تصادف از پاره خط AB به طول a و نقطهٔ N را به تصادف از پاره خط BC به‌طول b انتخاب می‌کنیم. $(a < b)$ احتمال اینکه سه قطعهٔ AM، MN و NC یک مثلث تشکیل بدهند چقدراست؟

$\boxed{۴.۳}$ احتمال دو جمله‌ای

تاکنون بارها از آزمایش پرتاب سکه سخن گفته‌ایم. هربار به یک جنبه از این آزمایش تصادفی توجه داشته‌ایم. این‌بار می‌خواهیم به‌کمک ویژگیهای تصادفی خاصی از این آزمایش (تکرار آن و مشاهدهٔ تعداد «رو» های ظاهر شده)، الگوی **احتمال دو جمله‌ای** را مطرح کنیم. آزمایش پرتاب یک سکه دو نتیجه دارد و فضای نمونه‌ای آن

$$S = \{\text{ر}, \text{پ}\},$$

است. پس با توجه به هم‌شانس بودن برآمدها، احتمال ظاهر شدن «رو»، $\frac{۱}{۲}$ و احتمال ظاهر شدن «پشت» هم $\frac{۱}{۲}$ است. اگر سکه را دو بار پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای

$$S = \{(\text{ر}, \text{ر}), (\text{ر}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{ر}), (\text{پ}, \text{پ})\},$$

است و احتمال ظاهر شدن «فقط یک رو»، یعنی احتمال پیشامد

$$E_۱ = \{(\text{ر}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{ر})\},$$

برابر است با $\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$. احتمالهای ظاهر شدن به‌ترتیب «هیچ رو» و «دو رو» یعنی احتمالهای پیشامدهای

$$E_۰ = \{(\text{پ}, \text{پ})\} \quad \text{و} \quad E_۲ = \{(\text{ر}, \text{ر})\}$$

هر دو برابرند با $\frac{1}{4}$. اگر سکه را سه بار پرتاب کنیم آنگاه فضای نمونه‌ای که $8 = 2^3$ عضو دارد، عبارت است از

$S = \{$(ر، ر، ر)، (ر، ر، پ)، (ر، پ، ر)، (ر، پ، پ)، (پ، ر، ر)، (پ، ر، پ)، (پ، پ، ر)، (پ، پ، پ)$\}$.

در سه بار پرتاب سکه تعداد روهایی که ظاهر می‌شود می‌تواند ۰، ۱، ۲ یا ۳ تا باشد. احتمال ظاهر شدن «صفر رو»، یعنی احتمال پیشامد

$E_0 = \{$(پ، پ، پ)$\}$،

برابر است با $\frac{1}{8}$. احتمالهای ظاهر شدن به‌ترتیب ۱، ۲ و ۳ رو یعنی احتمالهای پیشامدهای

$E_1 = \{$(ر، پ، پ)، (پ، ر، پ)، (پ، پ، ر)$\}$;

$E_2 = \{$(ر، ر، پ)، (ر، پ، ر)، (پ، ر، ر)$\}$;

$E_3 = \{$(ر، ر، ر)$\}$،

برابر هستند با

$$P(E_1) = \frac{3}{8}\ ,\ P(E_2) = \frac{3}{8}\ ,\ P(E_3) = \frac{1}{8}.$$

پرتاب سکه را ادامه می‌دهیم. اگر سکه را چهار بار پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای $16 = 2^4$ عضو دارد. این بار تعداد «رو»های ظاهر شده می‌تواند ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ تا باشد. اگر E_0، E_1، E_2، E_3 و E_4 به‌ترتیب عبارت باشند از پیشامدهای ظاهر شدن ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ رو آنگاه

$E_0 = \{$(پ، پ، پ، پ)$\}$;

$E_1 = \{$(ر، پ، پ، پ)، (پ، ر، پ، پ)، (پ، پ، ر، پ)، (پ، پ، پ، ر)$\}$;

$E_2 = \{$(ر، ر، پ، پ)، (ر، پ، ر، پ)، (ر، پ، پ، ر)، (پ، ر، ر، پ)،
(پ، ر، پ، ر)، (پ، پ، ر، ر)$\}$;

$E_3 = \{$(ر، ر، ر، پ)، (ر، ر، پ، ر)، (ر، پ، ر، ر)، (پ، ر، ر، ر)$\}$;

$E_4 = \{$(ر، ر، ر، ر)$\}$.

چون مجدداً فضای نمونه‌ای هم‌شانس است،

$$P(E_0) = P(E_4) = \frac{1}{16}\ ,\ P(E_2) = \frac{6}{16}\ ,\ P(E_1) = P(E_3) = \frac{4}{16}.$$

نتایجی را که تاکنون دربارهٔ تعداد «رو»ها در آزمایش پرتاب سکه و احتمال «رو آمدن» به‌دست آورده‌ایم، در جدولی گردآوری می‌کنیم.

یک بار پرتاب	تعداد روها	۰	۱			
	احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$			
دوبار پرتاب	تعداد روها	۰	۱	۲		
	احتمال	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$		
سه بار پرتاب	تعداد روها	۰	۱	۲	۳	
	احتمال	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	
چهاربار پرتاب	تعداد روها	۰	۱	۲	۳	۴
	احتمال	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

صورتهای احتمالهای آمدن «رو» در این آزمایشها را به شکل دیگری نیز می‌توان نوشت. در یک بار پرتاب سکه داریم

$$P(E_۰) = C(۱,۰)/۲\ ,\ P(E_۱) = C(۱,۱)/۲.$$

در آزمایش دو بار پرتاب یک سکه

$$P(E_۰) = C(۲,۰)/۲^۲\ ,\ P(E_۱) = C(۲,۱)/۲^۲\ ,\ P(E_۲) = C(۲,۲)/۲^۲.$$

در آزمایش سه بار پرتاب سکه صورتهای احتمالهای آمدن «رو» عبارتند از

$$۱ = C(۳,۰)\ ,\ ۳ = C(۳,۱)\ ,\ ۳ = C(۳,۲)\ ,\ ۱ = C(۳,۳).$$

این نتایج را به‌راحتی می‌توان به آزمایش n بار پرتاب سکه تعمیم داد. فرض کنید سکهٔ سالمی را n بار پرتاب می‌کنیم. تعداد «رو»هایی که می‌تواند در این n بار ظاهر شود، ۰، ۱، ۲، ... یا n تا است. فضای نمونه‌ای این آزمایش عبارت است از مجموعهٔ همهٔ n تاییهای $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ که هر a_i می‌تواند «رو» یا «پشت» باشد و همان‌طورکه قبلاً دیدیم تعداد این n تاییها برابر است با ۲^n، یعنی فضای نمونه‌ای ۲^n عضو دارد. پیشامد «ظاهر شدن k رو»، $۰ \leqslant k \leqslant n$، در این n بار پرتاب از همهٔ آن n تاییهایی تشکیل شده است که k تا از مؤلفه‌های آن «رو» و $n-k$ تای دیگر «پشت» است. تعداد این n تاییها، تعداد راه‌های انتخاب k شیء از میان n شیء است که برابر است با $C(n,k)$. چون همهٔ برآمدها هم‌شانس هستند، بنابراین اگر E_k پیشامد ظاهر شدن «k رو» در n بار پرتاب سکه باشد،

$$P(E_k) = \frac{C(n,k)}{۲^n}.$$

چون صورتهای احتمالهای فوق ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن هستند، آنها را **احتمالهای دو جمله‌ای** می‌نامند. آزمایش n بار پرتاب یک سکهٔ سالم که در واقع تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی است که فقط دو نتیجهٔ ممکن دارد، نمونه‌ای از الگوی احتمال دو جمله‌ای است. در حالت کلی آزمایشی که تکرار می‌شود ممکن است پرتاب سکه نباشد، ولی برای به‌دست آوردن یک الگوی احتمال دو جمله‌ای لازم است که این آزمایش فقط دو نتیجه داشته باشد. همچنین لزومی ندارد مانند پرتاب سکه، برآمدهای این آزمایش هم‌شانس باشند. برای رسیدن به یک الگوی احتمال دو جمله‌ای کلی، از

تخصیص احتمال و قیاس با آزمایش پرتاب سکه کمک می‌گیریم. یک آزمایش تصادفی را که فقط دو نتیجه (۰و۱) دارد، n بار در شرایط یکسان و به‌طور مستقل تکرار می‌کنیم. فضای نمونه‌ای مربوط به n بار تکرار این آزمایش عبارت است از مجموعهٔ همهٔ n تاییهای $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ که هر a_i، $۰ \leqslant i \leqslant n$، یا صفر است یا یک. تعداد یکهایی که در این n بار می‌تواند ظاهر شود، ۰، ۱، ۲، ...، n است. برای $۰ \leqslant k \leqslant n$، پیشامد k بار رخ دادن نتیجهٔ «یک» از همهٔ nـتاییهایی تشکیل شده است که k تا از مؤلفه‌های آن «یک» و $n-k$ تای دیگر «صفر» هستند. تعداد عضوهای این پیشامد، تعداد راه‌های انتخاب k شیء از میان n شیء، یعنی $C(n,k)$ است. اگر احتمال وقوع نتیجهٔ «یک»، p و احتمال وقوع نتیجهٔ «صفر»، $q = ۱ - p$ باشد، به پیشامدِ «وقوع k تا یک و $n-k$ تا صفر» عدد

$$p_k = C(n,k)p^k q^{n-k}$$

را نسبت می‌دهیم. چون $۱ \geqslant p \geqslant ۰$ و $۱ \geqslant q \geqslant ۰$ پس برای هر $۰ \leqslant k \leqslant n$، داریم $p_k \geqslant ۰$. از طرفی بنابر بسط دو جمله‌ای خیام ـ نیوتن

$$\begin{aligned} p_۰ + p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n &= C(n,۰)p^۰ q^n + C(n,۱)pq^{n-۱} + \cdots + C(n,n)p^n q^۰ \\ &= (p+q)^n = (p + (۱-p))^n = ۱ \end{aligned}$$

یعنی p_kها یک تخصیص احتمال برای این آزمایشی تصادفی است. مشاهده می‌کنید که هر p_k یک جمله از بسط $(p+q)^n$ است، به همین دلیل p_kها را **احتمالهای دو جمله‌ای** می‌نامند.

مثال ۲۶. تاس همگنی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در این ۵ بار پرتاب، ۲ بار عدد ۶ ظاهر شود چقدر است؟

حل. آزمایش تصادفی که تکرار می‌شود، پرتاب تاس همگن است. در هر بار پرتاب تاس همگن عدد ۶ یا ظاهر می‌شود یا ظاهر نمی‌شود. اگر ظاهر شدن عدد ۶ را با «یک» و ظاهر شدن عدد غیر از ۶ را با «صفر» متناظر کنیم، هر بار پرتاب تاس همگن دو نتیجه دارد: یک و صفر. چون تاس، همگن است احتمال ظاهر شدن عدد ۶، یعنی وقوع نتیجهٔ «یک»، برابر است با $\frac{۱}{۶}$ و احتمال ظاهر نشدن آن $۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$ است. پس در اینجا یک الگوی احتمال دو جمله‌ای با $q = \frac{۵}{۶}$، $p = \frac{۱}{۶}$، $k = ۲$ و $n = ۵$ داریم. لذا احتمال اینکه در این ۵ بار پرتاب تاس دو بار عدد ۶ ظاهر شود برابر است با

$$C(۵,۲)(\tfrac{۱}{۶})^۲(\tfrac{۵}{۶})^۳.$$

مثال ۲۷. یک سکه در پرتاب خود طوری سنگینی می‌کند که احتمال آمدن «رو» برابر با $\frac{۲}{۳}$ و احتمال آمدن «پشت» برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. اگر این سکه را ۱۰ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه ۳ بار «رو» ظاهر شود چقدر است؟

حل. اگر آمدن «رو» در پرتاب این سکه را با «یک» و آمدن «پشت» را با «صفر» متناظر کنیم یک الگوی احتمال دو جمله‌ای با $n = ۱۰$، $k = ۳$، $p = \frac{۲}{۳}$ و $q = \frac{۱}{۳}$ به‌دست می‌آوریم. درنتیجه احتمال

ظاهر شدن «سه رو» در این ۱۰ بار پرتاب برابر است با

$$C(۱۰,۳)(\tfrac{۲}{۳})^{۳}(\tfrac{۱}{۳})^{۷}.$$

مثال ۲۸. سکهٔ سالمی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه لااقل یک «رو» در این ۵ بار پرتاب ظاهر شود، چقدر است؟

حل. فرض کنید

E : لااقل یک «رو» در ۵ بار پرتاب ظاهر شود

برای محاسبهٔ $P(E)$، احتمال مکمل E را حساب و آن‌را از «یک» کم می‌کنیم.

E^c : در این ۵ بار، هیچ «رو» ظاهر نشود

پس $E^c = \{($پ, پ, پ, پ, پ$)\}$. بنابراین یک الگوی احتمال دو جمله‌ای با $p = q = \frac{۱}{۲}$، $n = ۵$ و $k = ۰$ داریم. درنتیجه

$$P(E^c) = C(۵,۰)(\tfrac{۱}{۲})^{۵} = \tfrac{۱}{۲^{۵}}.$$

لذا $P(E) = ۱ - \frac{۱}{۲^{۵}}$.

مثال ۲۹. یک هواپیما در صورتی که دست‌کم نیمی از موتورهای آن مشغول به‌کار باشند، یک سفر بی‌خطر انجام می‌دهد. با چه احتمالی سفر با یک هواپیمای چهار موتوری مطمئن‌تر از سفر با یک هواپیمای دو موتوری است؟

حل. فرض کنیم p احتمال مشغول به‌کار بودن هر موتور هواپیما تا انتهای سفر باشد. برای یک هواپیمای چهار موتوری احتمال اینکه دست‌کم نیمی از موتورها مشغول به‌کار باشند برابر است با

$$x = C(۴,۲)p^{۲}(۱-p)^{۲} + C(۴,۳)p^{۳}(۱-p) + C(۴,۴)p^{۴}$$

این احتمال برای یک هواپیمای دوموتوری برابر می‌شود با

$$y = C(۲,۱)p(۱-p) + C(۲,۲)p^{۲}$$

برای اینکه سفر با هواپیمای چهار موتوری مطمئن‌تر از سفر با هواپیمای دو موتوری باشد، باید $x \geqslant y$، یعنی احتمال بی‌خطر بودن پرواز با هواپیمای چهار موتوری از احتمال بی‌خطر بودن پرواز با هواپیمای دو موتوری کمتر نباشد. پس

$$C(۴,۲)p^{۲}(۱-p)^{۲} + C(۴,۳)p^{۳}(۱-p) + C(۴,۴)p^{۴} \geqslant C(۲,۱)p(۱-p) + C(۲,۲)p^{۲}$$

با بازکردن ترکیبها و ساده کردن عبارتهای بالا به‌دست می‌آوریم

$$۶p^{۲}(۱-۲p+p^{۲}) + ۴p^{۳}(۱-p) + p^{۴} \geqslant ۲p(۱-p) + p^{۲}$$

یا

$$۶p^{۲} - ۸p + ۳p^{۴} \geqslant ۲p - p^{۲}$$

درنتیجه، p باید در نابرابری

$$۳p^۴ - ۸p^۳ + ۷p^۲ - ۲p \geqslant ۰$$

صدق کند. این نابرابری معادل است با نابرابری

$$(۳p - ۲)(p^۲ - ۲p + ۱) = (۳p - ۲)(p - ۱)^۲ \geqslant ۰$$

لذا باید $۳p - ۲ \geqslant ۰$ یعنی $p \geqslant \frac{۲}{۳}$. پس اگر احتمال مشغول به‌کار بودن هر موتور هواپیما لااقل $\frac{۲}{۳}$ باشد، آنگاه سفر با هواپیمای چهار موتوری مطمئن‌تر از سفر با هواپیمای دو موتوری است!

مثال ۳۰. در یک خانوادهٔ ۱۰ فرزندی، احتمال اینکه ۴ فرزند پسر و ۶ فرزند دختر وجود داشته باشد، چقدر است؟

حل. اگر وجود فرزند پسر را با «یک» و وجود فرزند دختر در این خانواده را با «صفر» متناظر کنیم، یک الگوی احتمال دو جمله‌ای به‌دست می‌آوریم که در آن $n = ۱۰$، $k = ۴$، و $p = q = \frac{۱}{۲}$؛ زیرا شانس تولد پسر و دختر با هم برابر است. پس احتمال وجود ۴ فرزند پسر در میان ۱۰ فرزند این خانواده برابر است با

$$C(۱۰, ۴)(\tfrac{۱}{۲})^۴(\tfrac{۱}{۲})^۶ = \frac{C(۱۰, ۴)}{۲^{۱۰}}.$$

تمرینهای ۴.۳

۱. در یک کارخانهٔ تولید لامپ، احتمال خراب بودن یک لامپ ساخته شده، ۰٫۰۱ است. این کارخانه لامپها را در بسته‌های ده‌تایی به بازار عرضه و تضمین می‌کند که حداکثر یک لامپ در هر بسته ممکن است خراب باشد و در صورتی‌که بیش از یک لامپ خراب باشد بسته را باز پس می‌گیرد. چند درصد از بسته‌ها باید به کارخانه برگردانده شود؟

۲. تاس همگنی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در این پنج بار، سه بار عدد زوج ظاهر شود چقدر است؟

۳. هر مشتری که در طی یک روز به یک دفتر پست مراجعه می‌کند، با احتمال $\frac{۱}{۳}$ زن و با احتمال $\frac{۲}{۳}$ مرد است. از بین ۱۰۰ مشتری که در طول یک روز به این دفتر پست می‌آیند، احتمال اینکه ۴۰ نفر زن باشند را به‌دست آورید.

۴. دو تاس همگن را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که در دقیقاً پنج‌تا از این ده بار پرتاب لااقل یک ۶ ظاهر شود (فرقی ندارد روی کدام تاس باشد) چقدر است؟

۵. پنج نقطه را به تصادف از فاصلهٔ $(۰, ۱)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه لااقل دو نقطه از این پنج نقطه از $\frac{۱}{۳}$ کوچکتر باشند چقدر است؟

۶. در یک آزمون سه گزینه‌ای، ۵ سئوال داده شده است. احتمال اینکه دانش‌آموزی به‌دست‌کم چهار تا از این پنج سؤال پاسخ درست بدهد را حساب کنید.

۷. شخصی ادعا می‌کند که تیز هوشی خارق‌العاده‌ای دارد. برای امتحان کردن او یک سکهٔ سالم، ۱۰ بار پرتاب و از او خواسته می‌شود تا نتیجه را پیش از انجام آزمایش حدس بزند. او در ۷ مورد از ۱۰ بار، نتیجه را درست حدس می‌زند. احتمال اینکه او بدون داشتن خصوصیت تیز هوشی نیز بتواند چنین کاری انجام دهد را حساب کنید.

۸. از میان ۶ تن از دانش‌آموزان یک کلاس احتمال اینکه دقیقاً سه تا از آنها در یکی از ماه‌های فروردین یا اردیبهشت به دنیا آمده باشند چقدر است؟

۹. یک سکهٔ سالم را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. تعداد «رو» های ظاهر شده می‌تواند ۰، ۱، ۲، ...، ۱۰ باشد. برای $i = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰$، احتمال ظاهر شدن i تا «رو» در این ۱۰ بار پرتاب را حساب کرده با رسم دو محور عمود برهم و انتخاب نقاط $i = ۰, ۱, \ldots, ۱۰$ روی محور افقی و احتمالهای فوق روی محور عمودی، نمودار این احتمالها را رسم کنید. این نمودار چه شکلی به‌نظر می‌آید؟

۴ اصول موضوع و قوانین احتمال

در ریاضیات، هدف محققین به‌دست آوردن نتایج جدید و اثبات درستی آنها، خلق اثباتهای ساده‌تر برای نتایجی که قبلاً ثابت شده‌اند، کشف و آفرینش ارتباطها بین شاخه‌های مختلف ریاضی، ساختن و حل کردن الگوهای ریاضی برای پدیده‌های دنیای واقعی و کارهای دیگری از این دست است. ریاضیدانان برای کشف نتایج جدید از آزمون و خطا، شهود و حدس، استدلال استقرایی، بررسی حالتهای خاص و روشهای دیگر استفاده می‌کنند. اما هر وقت نتیجهٔ جدیدی کشف می‌شود، صحت آن، تا زمانی که به‌دقت اثبات شود، مورد تردید است. گاهی تلاش برای اثبات یک مطلب به شکست منجر و مثالی که درستی حکم ادعا شده را نقض می‌کند یافت می‌شود. این مثالها مثال نقض نامیده می‌شوند. هیچ گزاره ریاضی پا برجا نمی‌شود، مگر آنکه یا اثبات و یا با یک مثال نقض رد شود. اگر حکم ادعا شده در آن گزاره نادرست باشد، مثال نقضی وجود دارد که آن را رد کند و اگر درست باشد، باید اثباتی برای آن یافت شود هر چند ممکن است یافتن این اثبات سالها، دهه‌ها یا حتی قرنها طول بکشد.

در نظریهٔ احتمال (و در واقع در هر نظریهٔ دیگری) اثباتها در چارچوب **روش اصل موضوعی** انجام می‌شوند. در این روش اگر بخواهیم شخص عاقلی را متقاعد کنیم که گزارهٔ L_1 درست است، به او نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان L_1 را با استدلال منطقی از گزارهٔ دیگر L_2 که ممکن است برای او پذیرفتنی باشد، به‌دست آورد. اگر L_2 را نپذیرفت به او نشان می‌دهیم که چگونه L_2 با استدلال منطقی از گزارهٔ L_3 نتیجه می‌شوند. اگر L_3 را هم نپذیرفت، باید این کار را آنقدر تکرار کنیم تا به گزاره‌ای برسیم که بدون استدلال برای او پذیرفتنی باشد. به این‌ترتیب این گزاره مبنای استدلال ما قرار خواهد گرفت. بنابراین در روش اصل موضوعی ابتدا چند گزارهٔ ساده که در صحت آنها شکی نیست و احتیاج به استدلال ندارد انتخاب می‌کنیم. اینها **اصول موضوعِ** نظریه هستند. آنگاه بر سر اینکه چه وقت و چگونه یک گزاره نتیجهٔ منطقی گزارهٔ دیگر است توافق می‌کنیم و در نهایت با استفاده از اصطلاحاتی که معنای آنها قبلاً روشن شده است، تعریفها و اصول موضوع، نتایج جدید را به‌دست می‌آوریم. نتایجی که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند. قضیه‌ها گزاره‌هایی هستند که باید ثابت شوند و پس از اثبات برای یافتن قضیه‌های دیگر به‌کار می‌روند و بدین سان نظریه شکل می‌گیرد.

نظریهٔ احتمال را به روش اصل موضوعی بنیانگذاری می‌کنیم. سه اصل موضوع بیان می‌کنیم و به‌کمک آنها حکمهای دیگر را ثابت می‌کنیم.

۱.۴ اصول موضوع نظریهٔ احتمال

فرض کنید S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد. به هر پیشامد A از S عددی به‌نام احتمال رخ دادن A که با $P(A)$ نشان داده می‌شود، نسبت می‌دهیم طوری که اصول موضوع زیر برقرار باشند:

اصل موضوع ۱: برای هر پیشامد A، $P(A) \geqslant 0$؛

اصل موضوع ۲: $P(S) = 1$؛

اصل موضوع ۳: اگر A_1، A_2 دو پیشامد جدا از هم باشند، یعنی همزمان رخ ندهند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)\cdot$$

اصل موضوع اول حاکی است که احتمال هر پیشامدی یک عدد نامنفی است، اصل موضوع دوم صرفاً این واقعیت بدیهی را بیان می‌کند که احتمال کل فضا یعنی احتمال پیشامد حتمی برابر یک یا صددرصد است و اصل موضوع سوم بیان می‌کند که احتمال اجتماع دو پیشامد جدا از هم، یعنی احتمال اینکه فقط یکی از آن پیشامدها رخ دهد، برابر است با مجموع احتمالهای آنها. این اصل موضوع با تعبیر احتمال یک پیشامد به‌عنوان فراوانی نسبی رخ دادن آن پیشامد در دفعات زیادی انجام آزمایش تصادفی، هماهنگی دارد. فرض کنید یک آزمایش تصادفی را n بار انجام می‌دهیم و E پیشامدی در این آزمایش تصادفی باشد. اگر $n(E)$ تعداد دفعاتی در این n بار باشد که پیشامد E رخ داده است، عدد $\frac{n(E)}{n}$ را که می‌خواهیم تخمین احتمال رخ دادن E تلقی کنیم، فراوانی نسبی رخ دادن E نامیدیم. روشن است که این عدد نامنفی است و چون در هر بار انجام آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای S مربوط به این آزمایش تصادفی رخ می‌دهد، تعداد دفعات رخ دادن S در این n بار برابر با خود n است؛ بنابراین، $\frac{n(S)}{n} = 1$ که این نتیجه با اصل موضوع ۲، سازگار است. بالاخره اگر E و F دو پیشامد جدا از هم باشند، $n(E \cup F) = n(E) + n(F)$ در نتیجه

$$\frac{n(E \cup F)}{n} = \frac{n(E)}{n} + \frac{n(F)}{n}.$$

پس هر حکمی که به‌کمک سه اصل موضوع نظریهٔ احتمال ثابت شود، در مورد تعبیر فراوانی نسبی برای احتمال نیز برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به‌کمک اصلهای موضوع ۱ تا ۳ بعضی از ویژگیهای مهم احتمال را ثابت کرد. به‌ویژه خواهید دید که اصل موضوع ۳ کافی است تا احتمال پیشامدهایی را که با مکمل و اجتماع گرفتن از پیشامدهای دیگر به‌دست می‌آیند، برحسب احتمالهای آن پیشامدها نوشت. پیش از بیان قضیه‌هایی که می‌خواهیم ثابت کنیم و **قوانین احتمال** نامیده می‌شوند، تأکید می‌کنیم که احتمال یک پیشامد را تنها زمانی می‌توان حساب کرد که زیرمجموعه‌ای از یک فضای

نمونه‌ای مشخص باشد. بنابراین یک گزاره دربارهٔ دو پیشامد E و F باید به این‌صورت آغاز شود: «فرض کنید S یک فضای نمونه‌ای باشد که احتمال P روی زیرمجموعه‌های آن تعریف شده است و فرض کنید E و F دو پیشامد در این فضا باشند.» ولی برای سادگی و رعایت ایجاز چنین عبارتی را به‌صورت: «فرض کنید E و F دو پیشامد (دلخواه) باشند» می‌نویسیم و به فضای نمونه‌ای S و احتمال P اشاره نمی‌کنیم.

۲.۴ قوانین احتمال

اصل موضوع ۳ را می‌توان به بیش از دو پیشامد تعمیم داد. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 سه پیشامد دوبه‌دو جدا از هم باشند. در این صورت دو پیشامد A_1 و $A_2 \cup A_3$ جدا از هم‌اند، زیرا

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing,$$

پس بنابر اصل موضوع ۳، احتمال اجتماع دو پیشامد A_1 و $A_2 \cup A_3$ برابر است با مجموع احتمالهای آنها:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup A_3), \end{aligned}$$

و چون A_2 و A_3 جدا از هم‌اند، با یک‌بار دیگر استفاده از اصل موضوع ۳، به‌دست می‌آوریم

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)\cdot$$

کلی‌تر اگر به‌ازای هر عدد طبیعی $n \geqslant 2$، پیشامدهای A_1، A_2، $\cdots$، A_n دوبه‌دو جدا از هم باشند، یعنی برای هر $i \neq j$ دو پیشامد A_i و A_j هم زمان رخ ندهند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot$$

در تمرین ۱۳ انتهای همین بند، اثبات این مطلب که با استقراء ریاضی انجام می‌شود، از شما خواسته شده است.

اگر $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد، اعداد p_1، p_2، $\cdots$، p_n را یک تخصیص احتمال برای این فضا نامیدیم اگر برای هر $i = 1, 2, \cdots, n$، $p_i \geqslant 0$ و $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. در چنین فضایی برای محاسبهٔ احتمال رخ دادن پیشامد A، اعداد p_i نسبت داده شده به عضوهای A را با هم جمع می‌کردیم. تعریف تخصیص احتمال و این روش برای محاسبهٔ احتمال در یک فضای نمونه‌ای متناهی را می‌توان در چارچوب اصول موضوع نظریهٔ احتمال توضیح داد. در واقع احتمال p_i برآمد s_i، یعنی احتمال رخ دادن پیشامد تک عضوی $\{s_i\}$ است. اکنون اگر $A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots, s_{i_k}\}$ پیشامدی با kعضو، $k \leqslant n$، در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه A اجتماع k پیشامد دوبه‌دو جدا از هم $\{s_{i_1}\}$، $\{s_{i_2}\}$، $\cdots$، $\{s_{i_k}\}$ است. پس بنابر شکل تعمیم یافتهٔ اصل موضوع ۳ که در ابتدای این بند به

آن اشاره شد

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{s_{i_1}\}) + P(\{s_{i_2}\}) + \cdots + P(\{s_{i_k}\}) \\ &= p_{i_2} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k} \end{aligned}$$

به‌ویژه فضای نمونه‌ای S اجتماع n پیشامد دوبه‌دو جدا از هم $\{s_1\}$، $\{s_2\}$، $\cdots$، $\{s_n\}$ است؛ بنابراین

$$\begin{aligned} P(S) &= P(\{s_1\}) + P(\{s_2\}) + \cdots + P(\{s_n\}) \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n. \end{aligned}$$

پس ویژگی دوم تخصیص احتمال بیان دیگری از اصل موضوع ۲ است. ویژگی اول تخصیص احتمال نیز از اصل موضوع ۱ نتیجه می‌شود.

فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از خودش، پیشامد حتمی نامیدیم و طبیعی است که احتمال صددرصد یا یک را به وقوع پیشامد حتمی نسبت دهیم. نقطهٔ مقابل پیشامد حتمی، پیشامد غیرممکن، $\varnothing$، است. پس طبیعی است که احتمال پیشامد $\varnothing$، صفر باشد.

> **قضیهٔ ۱.** $P(\varnothing) = 0$.

اثبات. چون پیشامد $\varnothing$ از خودش جدا است و $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$، بنابر اصل موضوع ۳

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing)$$

با کم کردن عدد $P(\varnothing)$ از دو طرف به‌دست می‌آوریم $P(\varnothing) = 0$. ▲

مثال ۱ . در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس همگن، فرض کنید A پیشامد «بخش‌پذیر بودن عدد ظاهر شده بر ۴» و B پیشامد «بخش‌پذیر بودن عدد ظاهر شده بر ۲» باشد، آنگاه

$$A = \{4\} \quad \text{و} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

پس $A \subseteq B$. چون برآمدهای این آزمایش تصادفی هم شانس هستند، $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
در نتیجه $P(A) = \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{2} = P(B)$.

به طورکلی

> **قضیهٔ ۲.** اگر A و B دو پیشامد باشند که $A \subseteq B$ آنگاه
>
> $$P(A) \leqslant P(B).$$

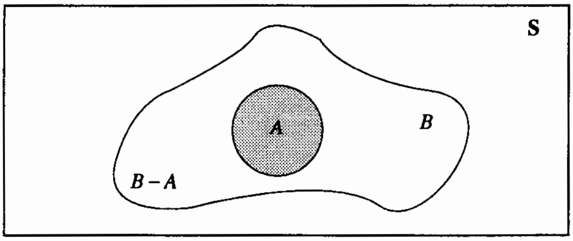
اثبات. همان‌طورکه در نمودار ون شکل ۱ نشان داده شده است، پیشامد B اجتماع دو پیشامد A و $B - A$ است که این دو جدا از هم هستند، یعنی

$$B = A \cup (B - A),$$

پس بنابر اصل موضوع ۳، $P(B) = P(A) + P(B - A)$. ولی چون طبق اصل موضوع ۱ $P(B - A) \geqslant 0$، به‌دست می‌آوریم

$$P(A) \leqslant P(A) + P(B - A)$$

یا $P(A) \leqslant P(B)$. ▲



شکل۱

توجه کنید که در قضیهٔ ۲ شرط $A \subseteq B$ لازم است. در حالت کلی برای دو پیشامد A و B رابطهٔ $P(B - A) = P(B) - P(A)$ برقرار نیست.

مثال ۲. در آزمایش تصادفی پرتاب تاس همگن فرض کنید $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ آنگاه $B - A = \{3, 4, 5\}$، $P(A) = \frac{1}{3}$، $P(B) = \frac{1}{2}$ و $P(B - A) = \frac{1}{2}$ و می‌بینید که $P(B - A) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6} = P(B) - P(A)$.

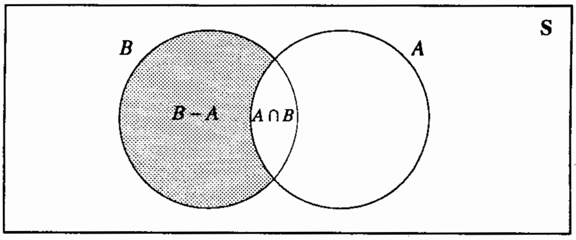
ولی در حالت کلی

قضیهٔ ۳. برای هر دو پیشامد A و B داریم

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B).$$

اثبات. با توجه به نمودار ون شکل ۲، پیشامد B را می‌توان به‌صورت اجتماع دو پیشامد $B - A$ و $A \cap B$ نوشت، یعنی

$$B = (B - A) \cup (A \cap B),$$



شکل۲

چون $B-A$ و $A \cap B$ جدا از هم هستند، طبق اصل موضوع ۳

$$P(B) = P(B-A) + P(A \cap B),$$

و با کم کردن $P(A \cap B)$ از دو طرف تساوی اخیر، حکم ثابت می‌شود. ▲

مثال ۳. عددی را به تصادف از مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. از هر k عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا N، یکی بر k بخش‌پذیر است. پس تعداد اعداد بین ۱ تا N که بر k بخش‌پذیرند با تقسیم کردن N بر k و سپس گرد کردن عدد حاصل به‌دست می‌آید. در مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, \cdots, ۱۰۰۰\}$ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳ برابر با ۳۳۳ و تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۵، برابر با ۲۰۰ است. پس احتمال اینکه عددی که به تصادف از این مجموعه اعداد انتخاب می‌شود بر ۳ بخش‌پذیر باشد، $\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$ و احتمال اینکه بر ۵ بخش‌پذیر باشد، $\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$ است. در شمارش تعداد اعدادی که بر ۳ یا بر ۵ بخش‌پذیرند، آنهایی که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر هستند دو بار به حساب آمده‌اند. پس باید تعداد آنها را یک بار کم کنیم. اما یک عدد بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد (زیرا ۳ و ۵ نسبت به‌هم اول هستند). تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵ در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, ۱۰۰۰\}$ برابر است با ۶۶. در نتیجه احتمال اینکه عدد انتخاب شده از این مجموعه بر ۳ یا بر ۵ بخش‌پذیر باشد برابر است با

$$\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} + \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} - \frac{۶۶}{۱۰۰۰} = \frac{۴۶۷}{۱۰۰۰}.$$

قضیهٔ ۴. برای هر دو پیشامد A و B

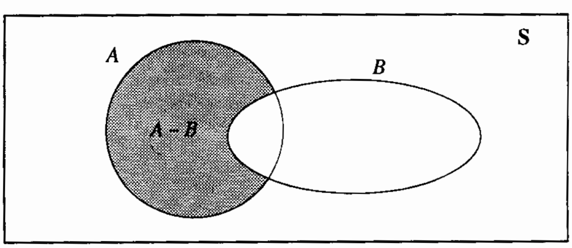
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

اثبات. همان‌طور که در نمودار ون شکل ۳ دیده می‌شود، پیشامد $A \cup B$ را می‌توان به‌صورت اجتماع دو پیشامد $A-B$ و B نوشت:

$$A \cup B = (A-B) \cup B,$$

چون $A-B$ و B جدا از هم هستند، بنابر اصل موضوع ۳

$$P(A \cup B) = P(A-B) + P(B),$$



شکل۳

طبق قضیهٔ ۳، $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\cdot \ \blacktriangle$$

قضیهٔ ۴ را برای سه پیشامد نیز می‌توان بیان کرد:

قضیهٔ ۵. برای هر سه پیشامد دلخواه A، B و C

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)\cdot$$

اثبات. این قضیه با چند بار استفاده از قضیهٔ ۴ ثابت می‌شود. فرض می‌کنیم $B\cup C=D$ و ابتدا قضیهٔ ۴ را برای دو پیشامد A و D به‌کار می‌بریم:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(D)-P(A\cap D), \qquad (۱)$$

از طرفی مجدداً بنابر قضیهٔ ۴،

$$P(D)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C) \qquad (۲)$$

و چون

$$A\cap D=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

با به‌کار بردن قضیهٔ ۴ برای دو پیشامد $A\cap B$ و $A\cap C$ داریم

$$P(A\cap D)=P((A\cap B)\cup(A\cap C))$$
$$=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C), \qquad (۳)$$

با جاگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در تساوی (۱)، حکم قضیه ثابت می‌شود. ▲

مثال ۴ . فرض کنید گزارشهای ایستگاه هواشناسی نشان می‌دهد که در ۱۲۰ روز، ۸۹ بار پیش‌بینیهای وضع هوا درست بوده است. در نتیجه احتمال اینکه پیش‌بینی بعدی این ایستگاه درست باشد $\frac{۸۹}{۱۲۰}$ است. چون از این ۱۲۰ روز، در ۳۱ = ۸۹ − ۱۲۰ روز پیش‌بینی وضع هوا درست نبوده است، احتمال اینکه پیش‌بینی بعدی این ایستگاه درست نباشد، یعنی احتمال مکمل پیشامد قبلی برابر است با $\frac{۳۱}{۱۲۰}$ و می‌بینید که $۱=\frac{۸۹}{۱۲۰}+\frac{۳۱}{۱۲۰}$.

قضیهٔ ۶. برای هر پیشامد A در یک فضای نمونه‌ای

$$P(A)+P(A^c)=۱\cdot$$

اثبات. اگر A پیشامد دلخواهی باشد، A و A^c، از هم جدا هستند و

$$A \cup A^c = S,$$

پس طبق اصول موضوع ۱ و ۳

$$۱ = P(S) = P(A) + P(A^c) \cdot \blacktriangle$$

گاهی محاسبهٔ احتمال مکمل یک پیشامد ساده‌تر از محاسبهٔ احتمال خود پیشامد است. در این مورد، احتمال مکمل را محاسبه و سپس آن را از یک کم می‌کنیم تا احتمال خود پیشامد به‌دست آید.

> **قضیهٔ ۷.** احتمال یک پیشامد، از یک بیشتر نیست، یعنی اگر A پیشامد دلخواهی باشد، $۰ \leqslant P(A) \leqslant ۱$.

اثبات. اگر A پیشامد دلخواه باشد، $A \subseteq S$. پس طبق اصل موضوع ۱، اصل موضوع ۲ و قضیهٔ ۳،

$$۰ \leqslant P(A) \leqslant P(S) = ۱ \cdot \blacktriangle$$

مثال ۵. (**مسألهٔ روز تولد**) می‌خواهیم احتمال اینکه از n نفر، لااقل دو نفر در یک روز سال متولد شده باشند را به‌دست آوریم. سال را ۳۶۵ روز می‌گیریم، یعنی سالهای کبیسه را که ۳۶۶ روز دارند به حساب نمی‌آوریم. واضح است که اگر $n > ۳۶۵$ آنگاه لااقل دو نفر از این n نفر در یک روز سال به دنیا آمده‌اند. پس در این حالت احتمال مطلوب برابر است با ۱. اگر $n \leqslant ۳۶۵$ برای حل مسأله احتمال مکمل پیشامدِ

E : لااقل دو نفر از n نفر در یک روز سال متولد شده باشند

را حساب و آن‌را از یک کم می‌کنیم تا احتمال E به‌دست آید. داریم

E^c : هیچ کدام از n نفر در یک روز سال متولد نشده باشند

چون هر نفر به‌طور هم شانس در یکی از ۳۶۵ روز سال به دنیا می‌آید، پس این n نفر به $(۳۶۵)^n$ حالت می‌توانند در ۳۶۵ روز سال متولد شده باشند. حال باید ببینیم در چند حالت روزهای تولد آنها متفاوت است. روز تولد نفر اول می‌تواند هر یک از ۳۶۵ روز سال باشد. چون روز تولد نفر دوم باید متفاوت از روز تولد نفر اول باشد، ۳۶۴ انتخاب برای روز تولد نفر دوم می‌ماند. برای روز تولد نفر سوم که باید با روزهای تولد نفرات اول و دوم متفاوت باشد، ۳۶۳ انتخاب و بالاخره برای روز تولد نفر n ـ ام، $(۳۶۵ - n + ۱)$ انتخاب وجود دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش تعداد عناصر E^c برابر است با

$$۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \cdots \times (۳۶۵ - n + ۱)\cdot$$

در نتیجه $P(E^c) = \dfrac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \cdots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{(۳۶۵)^n}$. پس بنابر قضیهٔ ۶

$$P(E) = ۱ - \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \cdots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{(۳۶۵)^n}.$$

مثال ۶. می‌خواهیم ثابت کنیم برای هر n پیشامد دلخواه A_1، A_2، $\cdots$، A_n

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

برای اثبات از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. به‌ازای $n = 1$ نامساوی بدیهی

$$P(A_1) \leqslant P(A_1)$$

را به‌دست می‌آوریم. پس برای $n = 1$ حکم ثابت می‌شود. برای $n = 2$، بنابر قضیهٔ ۴ می‌دانیم که $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. چون احتمال یک پیشامد یک عدد نامنفی است، پس $-P(A_1 \cap A_2) \leqslant 0$ و در نتیجه

$$P(A_1 \cup A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2).$$

حال فرض کنیم حکم به‌ازای $n = k \geqslant 2$ درست باشد، درستی آن را به‌ازای $n = k + 1$ ثابت می‌کنیم. قرار دهید $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ و $A = A_{k+1}$. طبق حالت $n = 2$، $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}) = P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ و بنابر فرض استقراء $P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$ لِذا

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}) \leqslant P(A_1) + \cdots + P(A_k) + P(A_{k+1}).$$

و حکم ثابت می‌شود.

مثال ۷. در قضیه‌های ۴ و ۵، دیدید که چگونه می‌توان احتمال اجتماع دو و سه پیشامد را برحسب احتمالهای خود پیشامدها و اشتراکهای آنها حساب کرد. برای محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد، احتمالهای تک‌تک آنها را جمع و سپس احتمال اشتراک آن دو را کم کردیم. در محاسبهٔ احتمال اجتماع سه پیشامد، ابتدا احتمالهای تک‌تک آنها را جمع، سپس احتمالهای اشتراک دوبه‌دو را از آن کم و در نهایت احتمال اشتراک هر سه پیشامد را به حاصل افزودیم. با توجه به این الگو حدس می‌زنیم که برای محاسبهٔ احتمال اجتماع n پیشامدِ A_1، A_2، $\cdots$، A_n، $n \geqslant 2$، ابتدا باید احتمالهای تک‌تک آنها را جمع سپس احتمالهای اشتراک دوبه‌دوی آنها را کم، آنگاه احتمالهای اشتراک سه تا سه تا را اضافه کنیم و $\cdots$ تا بالاخره به احتمال اشتراک همهٔ n پیشامد برسیم که برحسب زوج یا فرد بودن n، از مجموع حاصل کم یا به آن افزوده می‌شود. به زبان نمادی برای n پیشامد A_1، A_2، $\cdots$، A_n، $n \geqslant 2$، داریم

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ &\quad - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

($\sum$ علامت مجموع است و برای مثال عبارت $\sum_{i<j}$ به این معنی است که روی همهٔ اندیسهای i و j که $i < j$ از جملات داخل علامت سیگما مجموع می‌گیریم.)

این رابطه را با استقراء ریاضی می‌توان ثابت کرد ولی به‌علت پیچیده بودن اثبات، از آوردن آن در این کتاب خودداری می‌کنیم. تلاش برای اثبات این رابطه به روش استقراء (همانند مثال ۶) تمرین خوبی برای تقویت مهارتهای ریاضی خواننده خواهد بود.

مثال ۸. (**مسألهٔ تطابق**) اعداد ۱، ۲، $\cdots$، n را در n جعبه به شماره‌های ۱، ۲، $\cdots$، n به تصادف می‌چینیم. می‌خواهیم احتمال این را که هیچ عددی در مکان هم شمارهٔ خود قرار نگیرد به دست آوریم.

برای حل این مسأله از احتمال مکمل و مثال ۷ استفاده می‌کنیم. فرض کنید

E: پیشامد اینکه هیچ عددی در جعبهٔ هم شمارهٔ خود نباشد

در این صورت

E^c: لااقل یک عدد از اعداد ۱، $\cdots$، n در جعبهٔ هم شماره با خود باشد

پیشامدهای E_k را نیز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

E_k: عدد k در جعبهٔ به شمارهٔ k قرار گیرد

به این ترتیب $E^c = E_۱ \cup E_۲ \cup \cdots \cup E_n$. ابتدا با استفاده از مثال ۷، $P(E^c)$ را محاسبه و سپس آن را از ۱ کم می‌کنیم. پیشامد E_k، $n \leqslant k \leqslant ۱$، را در نظر بگیرید. چون اعداد ۱ تا n به‌طور هم‌شانس می‌توانند در جعبه‌های ۱، $\cdots$، n قرار گیرند، فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی این مثال گسسته و هم شانس است. پس برای محاسبهٔ احتمال پیشامدها باید تعداد اعضای آنها را بشماریم و بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای که همان تعداد جایگشتهای n شیء، یعنی $n!$ است تقسیم کنیم. اگر قرار باشد عدد k در جعبهٔ kـ ام قرار گیرد، $n-۱$ عدد دیگر به $(n-۱)!$ طریق می‌توانند در $n-۱$ خانهٔ دیگر جابه‌جا شوند. در نتیجه تعداد اعضای E_k برابر است با $(n-۱)!$ و $P(E_k) = \frac{(n-۱)!}{n!}$.

حال برای $i < j$، پیشامد $E_i \cap E_j$ را در نظر می‌گیریم. اگر دو عدد i و j در جعبه‌های هم شماره با خود واقع باشند، $n-۲$ عدد دیگر به $(n-۲)!$ طریق می‌توانند در جعبه‌های دیگر جابه‌جا شوند. پس برای هر دو اندیس i و j که $i < j$ داریم

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-۲)!}{n!},$$

به همین‌ترتیب برای هر سه اندیس i، j و k که $i < j < k$ استدلال مشابهی نشان می‌دهد که

$$P(E_i \cap E_j \cap E_k) = \frac{(n-۳)!}{n!},$$

و بالاخره

$$P(E_۱ \cap E_۲ \cap \cdots \cap E_n) = \frac{(n-n)!}{n!} \,.$$

تعداد کل پیشامدها $n = C(n, ۱)$ تا است. تعداد اشتراکهای دوبه‌دو به‌صورت $E_i \cap E_j$، $i < j$، تعداد راه‌های انتخاب دو شیء بدون ترتیب از میان n شیء است که برابر است با $C(n, ۲)$، و بالاخره به

$E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ می‌رسیم که $C(n,n) = 1$ جمله است. در نتیجه بنابر رابطهٔ مثال ۷،

$$P(E^c) = P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = C(n,1)\frac{(n-1)!}{n!} - C(n,2)\frac{(n-2)!}{n!} + $$
$$+ C(n,3)\frac{(n-3)!}{n!} - \cdots + (-1)^{n+1}C(n,n)\frac{(n-n)!}{n!}.$$

با بازکردن ترکیبهای $C(n,k)$، به‌دست می‌آوریم

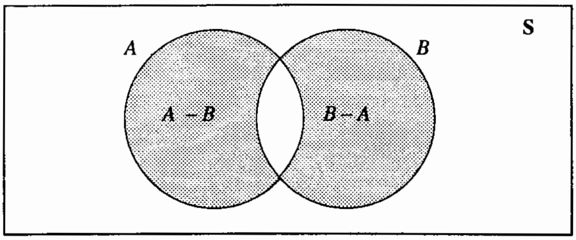
$$P(E^c) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

بنابر قضیهٔ ۶ برای یافتن $P(E)$ کافی است عدد بالا را از یک کم کنیم:

$$P(E) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}.$$

مثال ۹. تفاضل متقارن دو پیشامد A و B را که در فصل ۲ معرفی کردیم به‌یاد بیاورید. برای دو پیشامد A و B، تفاضل متقارن آنها، از همهٔ برآمدهایی تشکیل یافته است که در A هستند و در B نیستند یا در B هستند و در A نیستند، یعنی $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$. دو پیشامد $A-B$ و $B-A$ به وضوح جدا از هم‌اند (این را در نمودار ون شکل ۴ نیز مشاهده می‌کنید). پس طبق اصل موضوع ۳ و قضیهٔ ۳:

$$\begin{aligned}P(A\triangle B) &= P(A-B) + P(B-A)\\ &= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)\\ &= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B).\end{aligned}$$



شکل۴

مثال ۱۰. در آزمایش پرتاب تاس فرض کنید A پیشامد آمدن عدد کوچکتر از ۴ و B پیشامد آمدن عدد زوج باشد. با استفاده از قضیهٔ ۴، $P(A\cup B)$ را به‌دست می‌آوریم. پیشامدهای A و B با نمایش مجموعه‌ای عبارتند از

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{و} \quad B = \{2,4,6\}$$

چون تاس همگن است، پس فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی هم شانس است و داریم

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

چون $A \cap B = \{2\}$ بنابراین $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$. اکنون بنابر قضیهٔ ۴

$$P(A\cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

تمرینهای ۲.۴

۱. یک عدد را به تصادف از مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر ۳ یا بر ۵ بخش‌پذیر باشد (یعنی بر ۳ یا بر ۵ یا هر دو) چقدر است؟

۲. فرض کنید در یک شهر ۲۵٪ مردم روزنامهٔ A، ۲۰٪ مردم روزنامهٔ B، ۱۳٪ مردم روزنامهٔ C، ۱۰٪ مردم هر دو روزنامهٔ A و B، ۸٪ مردم هر دو روزنامهٔ A و C و ۵٪ مردم هر دو روزنامهٔ B و C و ۴٪ مردم هر سه روزنامه را می‌خوانند. اگر شخصی به تصادف از مردم این شهر انتخاب شود، احتمال اینکه لااقل یکی از این سه روزنامه را بخواند، چقدر است؟

۳. فرض کنید A و B دو پیشامد باشند. ثابت کنید

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - ۱ \cdot$$

۴. برای پیشامدهای $E_۱$، $E_۲$، $\cdots$، E_n، اگر $P(E_k) = ۱$، $k = ۱, ۲, \cdots, n$، ثابت کنید

$$P(E_۱ \cap E_۲ \cdots \cap E_n) = ۱ \cdot$$

۵. یک عدد به تصادف از مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۱, ۲, \cdots, ۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه

الف) این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد؛

ب) این عدد نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۵، چقدر است؟

۶. در هر یک از موارد زیر، رابطهٔ داده شده برای هر دو پیشامد A و B همیشه برقرار نیست. در هر مورد یک مثال نقض برای رد رابطهٔ داده ارائه کنید:

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$؛

ب) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

۷. در یک آزمایش تصادفی می‌دانیم که اگر پیشامد A رخ دهد، آنگاه پیشامد B حتماً رخ می‌دهد. کدامیک از عبارتهای زیر درست است و چرا؟

الف) اگر A رخ ندهد آنگاه مطمئناً B نیز رخ نخواهد داد.

ب) اگر B رخ ندهد آنگاه مطمئناً A نیز رخ نخواهد داد.

۸. دو ظرف در اختیار داریم که در اولی ۳ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه و در دومی ۴ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ سیاه وجود دارد. اگر از هر ظرف یک مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند، چقدر است؟

۹. الف) فرض کنید A و B دو پیشامد باشند که $P(A) = \frac{۲}{۵}$، $P(B) = \frac{۲}{۵}$ و $P(A \cup B) = \frac{۱}{۲}$. $P(A \cap B)$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $P(A) = \frac{۱}{۲}$، $P(A \cup B) = \frac{۱}{۲}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۴}$، مقدار $P(B)$ را محاسبه کنید.

۱۰. نقطه‌ای را به تصادف از درون مربع واحد انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد این باشد که این نقطه درون مثلث محدود به خطوط $y = ۰$، $x = ۱$ و $x = y$ قرار گیرد و B پیشامد این

باشد که نقطه درون مستطیل با رأسهای $(\circ,\circ)$، $(\text{۱},\circ)$، $(\text{۱},\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$، $(\circ,\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ قرار گیرد. $P(A\cup B)$ و $P(A\cap B)$ را محاسبه کنید.

۱۱. دو تاس همگن یکی سبز و دیگری قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این را به‌دست آورید که مجموع عددهای ظاهر شده روی تاسها زوج باشد.

۱۲. فرض کنید A، B و C سه پیشامد باشند. ثابت کنید

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\circ$.

۱۳. با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید اصل موضوع ۳ را می‌توان به تعداد متناهی پیشامد $A_\text{۱}$، $A_\text{۲}$، $\cdots$، A_n، $n\geqslant \text{۲}$، تعمیم داد؛ یعنی اگر $A_\text{۱}$، $A_\text{۲}$، $\cdots$، A_n دوبه‌دو جدا از هم باشند، آنگاه

$$P(A_\text{۱}\cup A_\text{۲}\cup\cdots\cup A_n)=P(A_\text{۱})+P(A_\text{۲})+\cdots+P(A_n)\cdot$$

۳.۴ پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A و B را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

جمعه باران می‌بارد : A

جمعه به سینما می‌روید : B

آیا پیشامدهای A و B روی هم اثر می‌گذارند؟ اگر تصمیم بگیرید که در هر صورت، جمعه به سینما بروید، دو پیشامد فوق اثری بر هم ندارند و بنابراین **مستقل** از هم هستند. دو پیشامد دیگر C و D را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

بعد از ظهر جمعه به سینما می‌روید : C

بعد از ظهر جمعه به استخر شنا می‌روید : D

اگر شرط کنید چنانچه نتوانید به استخر شنا بروید، به سینما خواهید رفت، آنگاه دو پیشامد C و D به‌هم وابسته خواهند بود و در نتیجه احتمال پیشامد C به پیشامد D بستگی خواهد داشت. در آزمایش دو بار پرتاب یک سکه، «رو» آمدن یا «پشت» آمدن در پرتاب دوم ربطی به برآمد پرتاب اول ندارد، از این رو برآمدهای دو بار پرتاب سکه **مستقل** از هم هستند.

مثال ۱۱ . در آزمایش دو بار پرتاب یک سکهٔ سالم که برآمدهای آن هم شانس هستند، احتمال اینکه «در هر دو بار پرتاب، رو ظاهر شود»، یعنی احتمال پیشامد

$$E=\{(\text{ر},\text{ر})\},$$

برابر است با $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$. از طرفی احتمال «رو آمدن» در هر پرتاب برابر با $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ است. پس

$$\frac{\text{۱}}{\text{۴}}=P(E)=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\times\frac{\text{۱}}{\text{۲}}=P(\text{ر})\times P(\text{ر})$$ [1]

---

۱. معمولاً به‌جای نوشتن $P(\{\cdot\})$ و $P(\{\cdot,\cdot\})$ می‌نویسیم $P(\cdot)$ و $P(\cdot,\cdot)$.

اگر یک سکهٔ سالم را به‌جای دو بار، سه بار پرتاب کنیم، مجدداً چون برآمدهای این سه بار پرتاب به یکدیگر ارتباطی ندارند، پس مستقل از هم هستند. چون همان‌طور که قبلاً دیده‌اید فضای نمونه‌ای این آزمایش ۸ عضو هم شانس دارد، احتمال اینکه «در پرتابهای اول و دوم، رو و در پرتاب سوم پشت بیاید» یعنی احتمال پیشامد

$$E = \{(\text{ر}, \text{ر}, \text{پ})\},$$

برابر است با $\frac{۱}{۸}$. از طرفی احتمال ظاهر شدن «رو» یا «پشت» در هر پرتاب $\frac{۱}{۲}$ است، در نتیجه $P(\text{پ}) \times P(\text{ر}) \times P(\text{ر}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = P(E) = \frac{۱}{۸}$.

مثال ۱۲. یک تاس سبز و یک تاس قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اینکه در پرتاب تاس سبز چه عددی ظاهر شود به برآمد تاس قرمز ارتباطی ندارد، یعنی برآمدهای این دو تاس مستقل از هم هستند. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی ۳۶ عضو هم شانس هر یک با احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ دارد. احتمال اینکه «تاس سبز ۲ و تاس قرمز ۴ بیاید»، یعنی احتمال پیشامد

$$E = \{(۲, ۴)\},$$

برابر است با $\frac{۱}{۳۶}$. از طرفی احتمال هر برآمد در پرتاب تاس $\frac{۱}{۶}$ است. در نتیجه

$$\frac{۱}{۳۶} = P(E) = P(۲) \times P(۴).$$

اگر پیشامد «تاس سبز ۲ بیاید» را با A و پیشامد «تاس قرمز ۴ بیاید» را با B نشان دهیم آنگاه $E = A \cap B$ و تساوی بالا به این معنی است که

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

دو پیشامد A و B را **مستقل** گوییم اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

دو پیشامد که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند. کاربرد مهم پیشامدهای مستقل در محاسبهٔ احتمال در فضای احتمالِ مربوط به آزمایشهای تکراری مستقل است، که در احتمال و آمار کاربرد زیادی دارد. نمونهٔ آشنای آزمایش تصادفی تکراری مستقل که تاکنون چندین بار با آن برخورد داشته‌اید، آزمایش پرتاب متوالی سکه است. اگر سکهٔ سالمی را n بار متوالی پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش که از همهٔ nـتاییهای مرتب با مؤلفه‌های «رو» یا «پشت» تشکیل شده است، ۲^n برآمد دارد و احتمال وقوع هر یک، $\frac{۱}{۲^n}$ است؛ زیرا پرتابهای سکه مستقل از هم هستند و احتمال رو یا پشت آمدن در هر پرتاب نیز $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۱۳. در آزمایش پرتاب دو تاس سبز و قرمز، دو پیشامد

A : مجموع اعداد آمده روی تاسها ۷ باشد

B : تاس سبز (اول) عدد ۴ بیاید

را در نظر بگیرید. این دو پیشامد با نمایش مجموعه‌ای عبارت‌اند از

$$A = \{(۱,۶), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲), (۶,۱)\},$$
$$B = \{(۴,۱), (۴,۲), (۴,۳), (۴,۴), (۴,۵), (۴,۶)\},$$

چون برآمدها هم‌شانس هستند، در نتیجه $P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$ و $P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$.
همچنین $A \cap B = \{(۴,۳)\}$؛ بنابراین $P(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶}$ و داریم

$$\frac{۱}{۳۶} = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶}.$$

پس A و B مستقل‌اند. به‌طور شهودی نیز می‌توان دلیل استقلال A و B را بیان کرد. هر یک از اعداد ۱ تا ۶ می‌تواند برآمد پرتاب تاس سبز باشد. در مقابل هر برآمد پرتاب تاس سبز، برآمدی از تاس قرمز وجود دارد، که مجموع آن با برآمد تاس سبز برابر با ۷ می‌شود. در نتیجه «آمدن مجموع ۷» به برآمد تاس سبز بستگی ندارد. پس این دو از هم مستقل هستند. حال فرض کنید به‌جای A، پیشامد

مجموع اعداد آمده روی تاسها برابر است با ۶

را در نظر بگیریم، آنگاه نمایش مجموعه‌ای پیشامد C عبارت است از

$$C = \{(۵,۱), (۴,۲), (۳,۳), (۲,۴), (۱,۵)\}$$

و داریم $P(C) = \frac{۵}{۳۶}$. از طرفی $C \cap B = \{(۴,۱)\}$ لذا $P(C \cap B) = \frac{۱}{۳۶}$. ولی این بار

$$\frac{۱}{۳۶} = P(C \cap B) \neq P(C) \times P(B) = \frac{۵}{۳۶} \times \frac{۱}{۶}.$$

پس دو پیشامد B و C مستقل نیستند. مجدداً به‌طور شهودی می‌توان دلیل وابستگی B و C را بیان کرد: آمدن مجموع ۶ در پرتاب دو تاس به برآمد تاس سبز وابسته است. مثلاً اگر تاس سبز ۶ بیاید، آنگاه مجموع اعداد آمده نمی‌تواند برابر با ۶ باشد، پس فقط وقتی می‌توانیم «مجموع = ۶» را داشته باشیم که برآمد تاس سبز یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد.

مثال ۱۴. فرض کنید دو پیشامد A و B ناسازگار و مستقل باشند. آنگاه $A \cap B = \varnothing$ و نیز طبق **تعریف استقلال** $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. بنابر قضیهٔ ۱، $P(\varnothing) = ۰$ پس

$$۰ = P(\varnothing) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

در نتیجه $P(A) = ۰$ یا $P(B) = ۰$. این نشان می‌دهد که اگر دو پیشامد A و B ناسازگار و مستقل باشند، آنگاه یا A پیشامد **تقریباً غیرممکن** است یا B.

مثال ۱۵. اگر پیشامد A از خودش مستقل باشد، آنگاه طبق تعریف اِستقلال داریم

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A) = (P(A))^{۲},$$

اگر فرض کنیم $x = P(A)$، آنگاه $x^{۲} - x = ۰$ که نتیجه می‌دهد

$$x = ۰ \text{ یا } x = ۱$$

یعنی $P(A) = ۰$ یا $P(A) = ۱$. پس پیشامد A یا **تقریباً غیرممکن** است یا **تقریباً حتمی**.

مثال ۱۶. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند. جفت پیشامدهای A^c و B؛ A و B^c؛ A^c و B^c نیز مستقل هستند. برای اثبات این مطلب ابتدا نشان می‌دهیم که استقلال A و B استقلال A^c و B را نتیجه می‌دهد. طبق تعریف استقلال باید ثابت کنیم $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$. داریم:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(۱ - P(A)) = P(B)P(A^c). \end{aligned}$$

با عوض کردن جای B و A به همین‌صورت نتیجه می‌شود که B^c و A نیز مستقل‌اند. حال برای اثبات استقلال A^c و B^c ملاحظه کنید که

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = ۱ - P(A \cup B) \\ &= ۱ - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= (۱ - P(A)) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= (۱ - P(A)) - P(B)(۱ - P(A)) \\ &= (۱ - P(A))(۱ - P(B)) = P(A^c)P(B^c). \end{aligned}$$

پا را قدری جلوتر می‌گذاریم و تلاش می‌کنیم استقلال سه پیشامد A، B و C را به زبان احتمالات بیان کنیم. سه آزمایش پی در پی انجام می‌دهیم. ابتدا سکهٔ سالمی را پرتاب می‌کنیم، سپس تاس همگنی را می‌ریزیم و در نهایت از یک دسته کارت متشکل از یک کارت سبز، یک کارت قرمز و یک کارت آبی، کارتی را به تصادف بر می‌گزینیم. سه پیشامد زیر را در نظر بگیرید:

A : در پرتاب سکه، «رو» بیاید

B : تاس عدد «زوج» بیاید

C : کارت سبز بیاید

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی که خود از سه آزمایش تشکیل شده است، طبق اصل اساسی شمارش، $۲ \times ۶ \times ۳ = ۳۶$ عضو دارد. چون

$$A = \{\text{ر}\} \quad \text{و} \quad B = \{۲, ۴, ۶\} \quad \text{و} \quad C = \{\text{سبز}\}$$

پس $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{1}{2}$ و $P(C)=\frac{1}{3}$. از طرفی مجدداً بنابر اصل اساسی شمارش، پیشامد $A\cap B$، $9=3\times3\times1$ عضو، پیشامد $A\cap C$، $6=6\times1\times1$ عضو و پیشامد $B\cap C$، $6=2\times1\times3$ عضو دارد. بنابراین

$$P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4} ،P(A\cap C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} ،P(B\cap C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

به‌سادگی ملاحظه می‌کنید که

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) ،P(A\cap C)=P(A)P(C) ،P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

یعنی پیشامدهای A، B و C دوبه‌دو مستقل هستند. همچنین $A\cap B\cap C$ دارای $3=1\times3\times1$ عضو است و لذا $P(A\cap B\cap C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ و می‌بینید که

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)\cdot$$

سه پیشامد A، B و C را مستقل گوییم اگر شرایط زیر همزمان برقرار باشند:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$

$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)\cdot$$

در آزمایش اخیر، استقلال پیشامدهای یاد شده از نظر شهودی واضح است. نتیجهٔ پرتاب تاس به برآمد پرتاب سکه یا رنگ کارت کشیده شده بستگی ندارد. همین‌طور اینکه کارت از کدام رنگ کشیده شده است به نتایج پرتاب تاس و سکه بستگی ندارد. در واقع علاوه بر اینکه سه پیشامد، دوبه‌دو مستقل هستند، هر پیشامد از هر ترکیبی از پیشامدهای دیگر مستقل است. تعریف استقلال سه پیشامد به‌صورت بالا طوری است که هر پیشامد از تمام ترکیبهای مجموعه‌ای (اجتماع، اشتراک و مکمل) دیگر پیشامدها، مستقل است.

توجه کنید که از سه تساوی اول، تساوی چهارم نتیجه نمی‌شود، یعنی برای استقلال سه پیشامد برقراری همزمان چهار تساوی لازم است. برای مثال در آزمایش دو بار پرتاب یک سکهٔ سالم سه پیشامد

A : در پرتاب اول رو بیاید

B : در پرتاب دوم رو بیاید

C : فقط یک رو و یک پشت بیاید

را در نظر بگیرید. این سه پیشامد به‌صورت مجموعه‌ای عبارتند از

$$A = \{(\text{ر}, \text{ر}), (\text{ر}, \text{پ})\};$$
$$B = \{(\text{ر}, \text{ر}), (\text{پ}, \text{ر})\};$$
$$C = \{(\text{ر}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{ر})\},$$

چون سکه سالم است، فضای نمونه‌ای این آزمایش، هم شانس است. پس

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

از طرفی $A \cap B = \{(\text{ر}, \text{ر})\}$ پس $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ و $A \cap C = \{(\text{ر}, \text{پ})\}$ درنتیجه $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$. بالاخره $B \cap C = \{(\text{پ}, \text{ر})\}$ و مجدداً $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. بنابراین

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{4} = P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

این روابط نشان می‌دهند که سه پیشامد A، B و C دوبه‌دو مستقل‌اند. از طرفی $A \cap B \cap C = \varnothing$ بنابراین

$$0 = P(A \cap B \cap C) \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

هر چند این سه پیشامد دوبه‌دو مستقل هستند، ولی با تعریفی که از استقلال سه پیشامد کردیم، مستقل نیستند.

مثال ۱۷ . اگر سه پیشامد A، B و C مستقل باشند، A و $B \cup C$ دو پیشامد مستقل‌اند. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم $P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C)$؛ داریم

$$\begin{aligned}
P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
&= P(A)(P(B) + P(C) - P(B)P(C)) \\
&= P(A)(P(B) + P(C) - P(B \cap C)) \\
&= P(A)P(B \cup C).
\end{aligned}$$

مثال ۱۸ . اگر سه پیشامد A، B و C مستقل باشند، پیشامدهای A، B^c و C^cمستقل‌اند. زیرا از اینکه A، B و C دوبه‌دو مستقل‌اند و مثال ۱۶، نتیجه می‌شود که A، B^c و C^c نیز دوبه‌دو مستقل‌اند. پس برای اثبات استقلال A، B^c و C^c، می‌ماند نشان می‌دهیم که $P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A)P(B^c)P(C^c)$.

طبق مثال ۱۷، دو پیشامد A و $B \cup C$ مستقل‌اند و مجدداً بنابر مثال ۱۶ دو پیشامد A و $(B \cup C)^c$ مستقل هستند، یعنی

$$P(A \cap (B \cup C)^c) = P(A)P((B \cup C)^c)$$

در نتیجه بنابر قانون دمورگان

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c \cap C^c) &= P(A)P(B^c \cap C^c) \\ &= P(A)P(B^c)P(C^c). \end{aligned}$$

تمرینهای ۳.۴

۱. در آزمایش انتخاب تصادفی یک عدد از مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰\}$ ثابت کنید دو پیشامد

A : بخش‌پذیری بر عدد ۲

B : بخش‌پذیری بر عدد ۵

مستقل هستند.

۲. یک تاس همگن را دو بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد این باشد که مجموع اعداد ظاهر شده فرد است و B پیشامد اینکه در پرتاب اول عدد ۲ ظاهر می‌شود. آیا A و B مستقل هستند؟

۳. دو عدد به تصادف از فاصلهٔ $(۰, ۱)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد اول کوچکتر از $\frac{۳}{۴}$ و عدد دوم بزرگتر از $\frac{۱}{۴}$ باشد، چقدر است؟

۴. مثالی از دو پیشامد A و B بیاورید که $P(A \cap B) < P(A)P(B)$. این دو پیشامد لزوماً چه ویژگی باید داشته باشند؟

۵. الف) ثابت کنید اگر $P(A) = ۱$، آنگاه $P(A \cap B) = P(B)$؛

ب) اگر پیشامد A دارای این ویژگی باشد که $P(A) = ۰$ یا $P(A) = ۱$، ثابت کنید A از هر پیشامد دیگری مثل B مستقل است.

۶. ثابت کنید اگر A و B مستقل باشند و $A \subseteq B$ آنگاه $P(A) = ۰$ یا $P(B) = ۱$.

۷. شخصی هر روز صبح در یک زمان تصادفی بین ۸ و ۹ صبح به محل کار خود می‌رسد. فرض کنید A پیشامد این باشد که فردا صبح بین ۸ : ۱۵ و ۸ : ۴۵، B پیشامد این باشد که بین ۸ : ۳۰ تا ۹ و C پیشامد این باشد که بین ۸ : ۴۵ و ۹ صبح به محل کار خود برسد. آیا سه پیشامد A، B و C مستقل‌اند؟

۸. ثابت کنید اگر A، B و C مستقل باشند، آنگاه $A - B$ و C نیز مستقل‌اند.

۹. اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند و دو پیشامد B و C نیز مستقل باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت که دو پیشامد A و C نیز مستقل‌اند؟ اگر بلی چرا و اگر نه مثال نقض بیاورید.

راهنمایی و حل تمرینها

تمرینهای ۳.۱

۱. فضای نمونه‌ای، از همهٔ سه‌تاییهای$(a_۱, a_۲, a_۳)$ تشکیل شده است که هر کدام از a_iها می‌تواند یکی از سه توپ قرمز یا یکی از پنج توپ آبی باشد.

۲. فضای نمونه‌ای، فاصلهٔ $(۰, ۲۰)$ است. پیشامد صحیح بودن عدد انتخاب شده، مجموعهٔ اعداد صحیح موجود در فاصلهٔ $(۰, ۲۰)$ (اعداد حقیقی) است، یعنی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, \cdots, ۱۹\}$.

۳. فضای نمونه‌ای عبارت است از مجموعهٔ همه روشهای مختلف قرارگرفتن این سه کتاب درکنار یکدیگر. اگر دو جلد آن کتاب دو جلدی را با $d_۱$ و $d_۲$ وکتاب سوم را با a نشان دهیم، آنگاه

$$S = \{d_۱d_۲a, d_۱ad_۲, d_۲d_۱a, d_۲ad_۱, ad_۱d_۲, ad_۲d_۱\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از $\{d_۱d_۲a, ad_۱d_۲\}$.

۴. فضای نمونه‌ای، فاصلهٔ $(۷, ۹ : ۳۰)$ است و پیشامد مطلوب عبارت است از

$$(۷, ۷ : ۱۵) \cup (۸, ۸ : ۱۵) \cup (۹, ۹ : ۱۵).$$

۵. چون معلوم نیست که عدد ۶ درکدام پرتاب ظاهر می‌شود، فضای نمونه‌ای راکه شمارا است می‌توان برحسب اینکه عدد ۶ درکدام پرتاب ظاهر می‌شود، در تناظر با اعداد طبیعی قرار داد.

۶. الف) پیشامد اینکه مجموع اعداد ظاهر شده روی تاسها ۱۰ باشد، E، عبارت است از

$$E = \{(۴, ۵), (۵, ۵), (۶, ۴)\},$$

ب) پیشامد اول بودن مجموع اعداد آمده روی تاسها، F عبارت است از

$$F = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۱, ۴), (۴, ۱), (۲, ۳), (۳, ۲),$$
$$(۱, ۶), (۶, ۱), (۵, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۳)\}.$$

۷. فضای نمونه‌ای سطح دایره به شعاع ۸ است:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leqslant ۶۴\}.$$

۸. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعهٔ سه‌تاییهای مرتب (a_1, a_2, a_3) است که هر a_i بسته به دختر یا پسر بودن فرزند i ـ ام، g یا b است. پیشامد مطلوب عبارت است از

$$A = \{(b, g, g), (g, b, g), (g, g, b)\}.$$

۹. فضای نمونه‌ای، مربع واحد $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ است و پیشامد مطلوب را به‌طور تحلیلی می‌توان به‌صورت $B = \{(x, y) \in S : |x - y| < \frac{1}{4}\}$ نشان داد.

۱۰.

$$S = \{(1, \text{ر}), (2, \text{ر}), (3, \text{ر}), (4, \text{ر}), (5, \text{ر}), (6, \text{ر}), (1, \text{پ}), (2, \text{پ}), (3, \text{پ}), (4, \text{پ}), (5, \text{پ}), (6, \text{پ})\}.$$

تعداد اعضای S، $12 = 2 \times 6$ است. پیشامد اینکه تاس عدد ۵ و سکه «رو» بیاید، پیشامد تک عضوی $\{(5, \text{ر})\}$ است.

تمرینهای ۴.۱

۱. $E \cap F$ پیشامد این است که مجموع اعداد ظاهر شده فرد و برآمد دست‌کم یکی از تاسها یک باشد. $E^c \cap F$ پیشامد این است که مجموع اعداد ظاهر شده فرد باشد و برآمد هیچ‌کدام از دو تاس یک نباشد. $E^c \cap F^c$ پیشامد این است که مجموع اعداد ظاهر شده فرد نباشد و برآمد هیچ کدام از دو تاس هم یک نباشد.

۲. $E \cup F \cup G = G$ یعنی رخ دادن دست کم یکی از E، F یا G همان رخ دادن G است و $E \cap F \cap G = G$ یعنی رخ دادن هم زمان E، F و G معادل با رخ دادن G است.

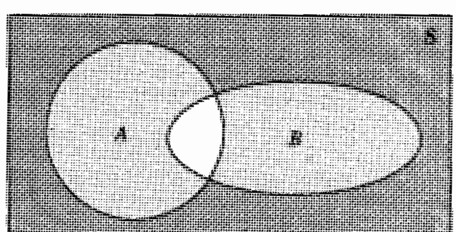
۳. الف) $F \cup (E \cap G)$ ، ب) $E \cap F$.

۴. اگر برای هر پیشامد A، داشته باشیم $A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A)$ آنگاه به‌ویژه برای $A = B$ داریم $B = (B \cap B^c) \cup (B^c \cap B) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. برعکس اگر $B = \varnothing$، برای هر پیشامد A

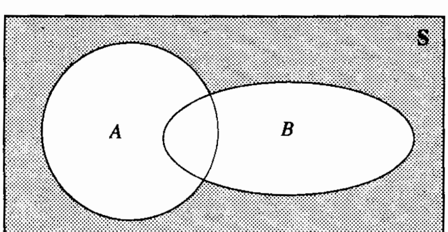
$$A = \varnothing \cup A = (\varnothing \cap A) \cup (S \cap A) = (B \cap A) \cup (B^c \cap A)$$

زیرا $B^c = \varnothing^c = S$.

۵. در شکل (الف) پیشامد $A^c \cap B^c$ و در شکل (ب) پیشامد $(A \cup B)^c$ نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

۶. الف) $E \cap F^c \cap G^c$ ب) $E \cap F^c \cap G$ پ) $E \cup F \cup G$

ت) $E \cap F \cap G$ ث) $E^c \cap F^c \cap G^c$

ج) $(E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$

۷. الف) $A \cup B$ یعنی عدد اول یا عددی کوچکتر از ۴ ظاهر شود، پس $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$.

ب) $A \cap B$یعنی عدد ظاهر شده اول و از ۴ کوچکتر باشد، پس $A \cap B = \{۲, ۳\}$.

پ) $A \triangle B$ یعنی عدد ظاهر شده اول باشد و از ۴ کوچکتر نباشد یا از ۴ کوچکتر باشد ولی اول نباشد، پس

$$A \triangle B = \{۵\} \cup \{۱\} = \{۱, ۵\}.$$

۸. B پیشامد این است که تیر به سطح دست‌کم یکی از دایره‌های به شعاع $r_۱$ تا $r_۶$ برخورد کند. در واقع $B = A_۶$. C پیشامد این است که تیر به سطح همه دایره‌های به شعاع $r_۵$ تا $r_{۱۰}$ برخورد کند. در واقع $C = A_۵$.

۹. $A \cup B$ یعنی دست‌کم یکی از سه قطعه خراب باشد یا هر سه قطعه سالم باشند. در واقع $A \cup B = S$. $A \cap B$ یعنی دست‌کم یکی از سه قطعه خراب باشد و هر سه قطعه سالم باشند و واضح است که $A \cap B = \varnothing$. A^c پیشامد سالم بودن هر سه قطعه و B^c پیشامد خراب بودن دست‌کم یکی از سه قطعه است.

۱۰. $E - F$ یعنی عدد انتخاب شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی رقم سمت راست آن صفر نباشد و $E \cap F$ یعنی عدد انتخاب شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد و رقم سمت راست آن نیز صفر باشد.

۱۱.

$$\begin{aligned}(X \cup A)^c \cup (X \cup A^c)^c &= (X^c \cap A^c) \cup (X^c \cap A) \\ &= X^c \cap (A \cup A^c) \\ &= X^c \cap S = X^c\end{aligned}$$

پس $X = B^c$.

۱۲.

$$\begin{aligned}A \cap B =& \{(۱, ۱), (۱, ۳), (۱, ۵), (۳, ۱), (۵, ۱)\}, \\ A \cap B^c =& \{(۲, ۲), (۲, ۴), (۴, ۲), (۳, ۳), (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴), (۵, ۳), (۶, ۲)\}, \\ A \cup B =& \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۵), (۱, ۶), (۲, ۱), (۳, ۱), (۴, ۱), (۵, ۱), \\ & (۶, ۱), (۲, ۲), (۲, ۴), (۴, ۲), (۳, ۳), (۲, ۶), (۳, ۵), (۵, ۳), (۶, ۲), \\ & (۴, ۶), (۵, ۵), (۶, ۴), (۶, ۶)\}.\end{aligned}$$

تمرینهای ۱.۲

۱. $۱۰^۴ \times (۳۳)^۳$ اتومبیل.

۲. این بار به تعداد $۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۳۰ \times ۳۱ \times ۳۲$ اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد.

۳. تعداد اعداد ۶ رقمی $= ۹^۵ \times ۱۰$. در $۸^۵ \times ۹$ تا از این اعداد رقم ۵ وجود ندارد پس در $۸^۵ \times ۹ - ۹^۵ \times ۱۰$ تا از آنها رقم ۵ وجود دارد.

۴. $۵^۵$ کد پنج حرفی می‌توان ساخت. $۵^۳$ تا از آنها با «آب» شروع می‌شود.

۵. $۴^{۱۵}$

۶. الف) $۳۰^۵$ طریق و ب) $۲۶ \times ۲۷ \times ۲۸ \times ۲۹ \times ۳۰$ طریق.

۷. $۲^{m \times n}$

۸. با اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ و ۹، می‌توان $۵^۴$ عدد چهار رقمی ساخت که $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵$ تای آنها شامل هیچ رقم تکراری نیست. پس در $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ - ۵^۴$ تای آنها رقمی تکراری وجود دارد.

۹. به $۶ = ۲ \times ۳$ ترکیب مختلف.

۱۰. به $۷/۶! \times ۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۲$ طریق.

۱۱. الف) $۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$، ب) $۵^۶$.

تمرینهای ۲.۲

۱. $۳! = ۶$

۲. $n!$

۳. $۳! = ۶$

۴. $۸!$

۵. الف) $۳^{۱۲}$؛ ب) $\frac{۱۲!}{۶!۶!}$؛ پ) $\frac{۱۲!}{۳!۴!۵!}$.

۶. $\frac{۱۰!}{۳!۳!۴!}$

۷. $\frac{۱۱!}{۴!۳!۲!۲!}$

۸. $\frac{۱۱!}{۴!۴!۳!}$

۹. $\frac{m!}{(m-n)!}$ طریق.

۱۰. به $۸! \times ۳!$ طریق.

۱۱. الف) $\frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!}(k-۱)!$؛ ب) $\frac{(n-۲)!}{(k-۲)!(n-k)!}(k-۲)!$؛ پ) $\frac{(n-۲)!}{(k-۲)!(n-k)!}(k-۲)!۲$.

تمرینهای ۴.۲

۱. $C(۲۰,۶)$

۲. ۷ سؤال را به $C(۱۰,۷)$ طریق می‌تواند انتخاب کند. به $C(۵,۳) \times C(۵,۴)$ طریق می‌تواند سه سؤال از ۵ سؤال اول و ۴ سؤال از ۵ سؤال دوم برگزیند.

۳. $C(۶,۵) + ۲C(۷,۵)$

۴. یک مجموعهٔ n عضوی، $C(n,r)$ تا زیرمجموعهٔ r عضوی دارد.

۵. الف) $n = ۱۸$؛ ب) $n = ۱۰$

۶. چون برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ ، داریم $iC(n,i) = nC(n-۱, i-۱)$ پس مجموع داده شده عبارت است از $n(C(n-۱,۰) + C(n-۱,۱) + \cdots + C(n-۱,n-۱)) = n۲^{n-۱}$.

۷. اگر قرار باشد کمترین این پنج عدد از ۴ بزرگتر باشد، این کمترین باید از میان اعداد ۵ تا ۱۶ انتخاب شود. پس در $C(۱۶,۴) + C(۱۵,۴) + C(۱۴,۴) + \cdots + C(۴,۴)$ حالت این وضعیت رخ می‌دهد.

۸. داریم $C(n+k+۱,k) = C(n+k,k) + C(n+k,k-۱)$ بنابراین

$$\sum_{k=۱}^{r}[C(n+k+۱,k) - C(n+k,k-۱)] = \sum_{k=۱}^{r} C(n+k,k)$$

در نتیجه $C(n+۱,۱) + C(n+۲,۲) + \cdots C(n+۲,r) = C(n+r+۱,r) - C(n+۱,۰)$.
چون $C(n+۱,۰) = C(n,۰)$ حکم ثابت می‌شود.

۹. چون $\frac{۱}{k}C(n,k-۱) = \frac{۱}{n+۱}C(n+۱,k)$ پس مجموع داده شده برابر است با

$$\frac{۱}{n+۱}(C(n+۱,۰) + C(n+۱,۱) + \cdots + C(n+۱,n+۱)) = \frac{۲^{n+۱}}{n+۱}.$$

۱۰. $(۳x^۲ + y)^۵ = \sum_{k=۰}^{۵} C(۵,k)(۳x^۲)^k y^{۵-k}$. ضریب $x^۶y^۲$ برابر است با $۱۰ \times ۳^۳ = ۲۷۰$.

۱۱. ابتدا $(x_۱ + ۲x_۲)$ را یک جمله می‌گیریم و از بسط دو جمله‌ای خیام-نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$(x_۱+۲x_۲+۳x_۳)^۳ = (x_۱+۲x_۲)^۳ + ۳(x_۱+۲x_۲)^۲(۳x_۳) + ۳(x_۱+۲x_۲)(۳x_۳)^۲ + (۳x_۳)^۳$$

$$= x_۱^۳ + ۶x_۲x_۱^۲ + ۱۲x_۱x_۲^۲ + ۸x_۲^۳ + ۹x_۱^۲x_۳ + ۳۶x_۱x_۲x_۳ + ۳۶x_۲^۲x_۳$$

$$+ ۲۷x_۱x_۳^۲ + ۵۴x_۲x_۳^۲ + ۲۷x_۳^۳.$$

۱۲. تعداد راه‌های انتخاب ۴ کفش از پنج جفت کفش، $C(۱۰,۴)$ است. در

$$C(۱۰,۴) - [C(۵,۴) + C(۵,۳)C(۲,۱) + C(۵,۲) + C(۵,۱)C(۴,۳) + C(۵,۴)]$$

حالت، لااقل یک جفت هماهنگ در این ۴ کفش وجود دارد.

تمرینهای ۱.۳

۱. نه؛ زیرا احتمال اینکه مجموع اعداد آمده ۱۱ باشد، $\frac{۱}{۱۸}$ و اینکه مجموع اعداد آمده ۱۲ باشد، $\frac{۱}{۳۶}$ است.

۲. الف) $\frac{۶۶۷}{۱۰۰۰}$ ؛ ب) $\frac{۶۶}{۱۰۰۰}$

۳. $\dfrac{\frac{۹۹ \times ۱۰۰}{۲}}{۱۰۰ \times ۱۰۰} = \frac{۹۹}{۲۰۰}$

۴. $\frac{۱}{۱۲} = \frac{۳}{۳۶}$

۵. $\frac{۱}{۴^{۱۵}}$

۶. $(\frac{۵}{۶})^{۴} + ۴\frac{۵^{۳}}{۶^{۴}}$

۷. $\frac{۹۹}{۱۰۰۰}$

۸. $\frac{۳۶}{۶۳} = \frac{۴}{۷}$

۹. $\frac{۱}{۱۲^{۱۲}}$

۱۰. $\frac{n!}{n^{n}}$

۱۱. پیشامد مطلوب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$E = \{(b,c) : b,c = ۱,۲,\cdots,۶ \text{ و } b^{۲} - ۴c \geqslant ۰\}$$

به‌این‌ترتیب

$$\begin{aligned} E = \{&(۲,۱),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۵,۱),(۵,۲),\\ &(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}\end{aligned}$$

پس $P(E) = \frac{۱۹}{۳۶}$.

۱۲. تعداد عناصر فضای نمونه‌ای $= C(N,n)$ و تعداد عناصر پیشامد داده شده $C(N-۱, n-۱)$ است، پس احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{C(N-۱,n-۱)}{C(N,n)} = \frac{n}{N}$.

۱۳. $C(۶,۲)\frac{۵^{۴}}{۶^{۶}}$

۱۴. $\frac{C(۶,۱)C(۵,۱)}{C(۱۱,۲)}$

۱۵. در این آزمایش فضای نمونه‌ای به مجموعهٔ

$$S' = \{(x,y) : x,y = ۱,۲,\cdots,۶ \text{ و } x+y \text{ مضرب ۳ است}\}$$

کاهش می‌یابد و می‌خواهیم در فضای نمونه‌ای جدید S'، احتمال اینکه $x = y = ۳$ را بیابیم. چون

$$\begin{aligned} S' = \{&(۱,۲),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۲),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۴),\\ &(۶,۳),(۶,۶)\}\end{aligned}$$

از ۱۲ برآمد هم شانس تشکیل شده است که فقط یکی از آنها زوجِ $(۳,۳)$ است، احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۱}{۱۲}$.

۱۶. $\frac{۳}{۱۰} = \frac{۳}{C(۵,۳)}$

۱۷. $\frac{n+۱}{۶^{n}}$

۱۸. برای زوج بودن حاصلضرب باید دست‌کم یکی از اعداد ظاهر شده زوج باشد. پس پیشامد ما عبارت است از

$$E = \{(x,y) \in S : x \text{ یا } y \text{ زوج است}\}.$$

تعداد اعضای E برابر است با $۲۷ = ۳\times۳ - ۶\times۳ + ۶\times۳$ پس $P(E) = \frac{۲۷}{۳۶} = \frac{۳}{۴}$.

۱۹. الف) $\frac{۲\times ۹!}{۱۰!}$؛ ب) $\frac{k!(۱۰-k+۱)!}{۱۰!}$

۲۰. $\frac{۱}{۲^{m}\times ۶^{n}}$

تمرینهای ۲.۳

۱. خیر، زیرا این سه برآمد هم‌شانس نیستند. برآمد (یک سکه «رو» بیاید و یک سکه «پشت») برحسب اینکه سکهٔ اول به «رو» بنشیند یا سکهٔ دوم، به دو نتیجه تقسیم می‌شود.

۲. بلی

۳. الف) نیست زیرا $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$؛ ب) نیست زیرا $p_1<0$؛ پ) هست زیرا هر $p_i \geqslant 0$ و $0/5+0/3+0/2=1$.

۴. چون برای $i=1,2,3,\cdots$، $p_i \geqslant 0$ و $q_i \geqslant 0$ و طبق فرض a و b هر دو نامنفی‌اند، $ap_i+bq_i \geqslant 0$. پس ویژگی اول تخصیص احتمال برقرار است. همچنین

$$(ap_1+bq_1)+(ap_2+bq_2)+(ap_3+bq_3)+\cdots=a(p_1+p_2+p_3+\cdots)$$
$$+b(q_1+q_2+q_3+\cdots)=a+b=1$$

بنابراین مجموعهٔ R یک تخصیص احتمال است.

۵. فرض کنید $P(\{a_1\})=x$، $P(\{a_2\})=y$ و $P(\{a_3\})=t$. طبق فرض $x+y=\frac{1}{2}$، $x+t=\frac{3}{4}$ و $y+t=\frac{3}{4}$. از اینکه x، y و t یک تخصیص احتمال هستند داریم $x+y+t=1$ پس $t=\frac{1}{2}$، $y=\frac{1}{4}$ و $x=\frac{1}{4}$.

۶. فرض کنید مقدار مشترک p_2، p_3 و p_4 مثلاً p باشد. طبق ویژگی دوم و تخصیص احتمال $\frac{1}{6}+3p=1$، بنابراین $p_4=p_3=p_2=p=\frac{5}{18}$.

۷. خیر، مثلاً بگیرید $p_i=\frac{1}{2^i}$، آنگاه مجموع p_i برابر با یک است ولی $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2^i})^2=\frac{1}{3}$.

۸. اگر احتمال ظاهر شدن عدد یک را p بگیریم، آنگاه برای $i=1,2,\cdots,6$، احتمال ظاهر شدن i، i^2p است. بنابر ویژگی دوم تخصیص احتمال $(1^2+2^2+\cdots+6^2)p=1$ پس $\frac{6\times 7\times 13}{6}p=1$ یا $p=\frac{1}{91}$. در نتیجه احتمال ظاهر شدن i، $\frac{i^2}{91}$ است.

۹. احتمال اینکه ۶ در دفعهٔ i ـام بیاید برابر است با $(\frac{5}{6})^{i-1}\frac{1}{6}$ پس $p_i=(\frac{5}{6})^{i-1}\frac{1}{6}$ها تخصیص احتمال برای این فضای نمونه‌ای هستند. احتمال اینکه ۶ در پرتاب با شمارهٔ زوج ظاهر شود برابر است با $\frac{1}{6}((\frac{5}{6})^1+(\frac{5}{6})^3+(\frac{5}{6})^5+\cdots)=\frac{1}{6}\frac{5/6}{1-\frac{25}{36}}=\frac{5}{11}$.

۱۰. $\frac{38}{91}=\frac{2^2+3^2+5^2}{91}=p_2+p_3+p_5$؛ زیرا پیشامد ما عبارت است از $\{2,3,5\}$.

۱۱. اگر احتمال برخورد به سطح دایره به شعاع ۱، p باشد، برای $i=1,2,3,4,5$، احتمال برخورد تیر به سطح دایره به شعاع i، $p\pi i^2$ است. چون $p\pi(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=1$ بنابراین $p=\frac{1}{55\pi}$. در نتیجه احتمال برخورد تیر به ناحیهٔ بین دایره‌های دوم و سوم $\frac{1}{55}(9-4)=\frac{1}{11}$ است.

۱۲. برای $n ,\cdots ,i = ۱, ۲$ و $m ,\cdots ,j = ۱, ۲$، $p_i q_j \geqslant ۰$. همچنین

$$\sum_{i,j} p_i q_j = (p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n)(q_۱ + q_۲ + \cdots + q_m) = ۱,$$

پس $p_i q_j$ها یک تخصیص احتمال هستند.

تمرینهای ۳.۳

۱. $\frac{۱/۲۵}{۲/۳} = \frac{۳/۲۵ - ۲}{۴/۳ - ۲}$

۲. $\frac{۰/۶۵۲۵}{۱/۰۶۲۵}$

۳. $S = (۰, \frac{\pi}{۲})$ و پیشامدی که می‌خواهیم احتمال آن‌را بیابیم فاصلهٔ $(\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$ است. پس احتمال مطلوب $= \frac{۱}{۲}$.

۴. $\frac{۰/۵۳۰}{۰/۹۵۳}$

۵. چون $x^۲ - ۵x + ۶ = (x - ۲)(x - ۳)$ پس $x^۲ - ۵x + ۶ > ۰$ اگر فقط اگر $۲ > x > ۰$. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۲}{۳}$.

۶. اگر مدت زمان رسیدن او به مدرسه بین ۲۰ تا ۲۳ دقیقه باشد، سر وقت به کلاس درس خواهد رسید. پس احتمال سر وقت رسیدن برابر است با $\frac{۳}{۷} = \frac{۲۳ - ۲۰}{۲۷ - ۲۰}$.

۷. احتمال اینکه معادلهٔ $x^۲ + bx + ۱ = ۰$ ریشه داشته باشد، برابر است با احتمال اینکه $b^۲ \geqslant ۴$ که معادل است با $b \geqslant ۲$ یا $b \leqslant -۲$. پس پیشامد ریشه داشتن این معادله اجتماع دو بازهٔ $(-۳, -۲)$ و $(۲, ۳)$ است. بنابراین احتمال آن $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶}$ خواهد شد.

۸. اگر طول نقطه‌ای که به تصادف انتخاب می‌شود، x باشد، دو حالت وجود دارد: x طول قطعهٔ بزرگتر است که در این‌صورت پیشامد ما زمانی رخ می‌دهد که $x \geqslant ۲(۱ - x)$ یا $x \geqslant \frac{۲}{۳}$. و دوم اینکه $۱ - x$ طول قطعهٔ بزرگتر است که در این‌صورت پیشامد ما رخ خواهد داد اگر و فقط اگر $۱ - x \geqslant ۲x$ یا $x \leqslant \frac{۱}{۳}$. پس احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}$.

۹. اگر طول نقطهٔ انتخابی x باشد، شرط مسأله معادل است با اینکه $x \geqslant \frac{l}{۳}$ و $l - x \geqslant \frac{۱}{۳}$ یا $\frac{l}{۳} \leqslant x \leqslant \frac{۲l}{۳}$. پس احتمال مورد نظر $\frac{۱}{۳} = \frac{\frac{۲l}{۳} - \frac{l}{۳}}{l}$ خواهد شد.

۱۰. $\frac{۱}{۲}$؛ زیرا مساحت این مثلث نصف مساحت مربع واحد است.

۱۱. $\frac{۱}{۴} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}$

۱۲. $\frac{۱/۲(۱)^۲(\frac{\pi}{۴})}{(۱)^۲\pi} = \frac{۱}{۸}$

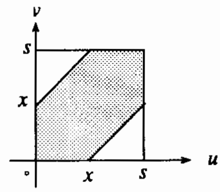
۱۳. اگر زمان رسیدن این دو نفر را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم، x و y دو نقطه هستند که به تصادف از فاصلهٔ $(۰, ۶۰)$ انتخاب می‌شوند. پیشامد مورد نظر زمانی رخ می‌دهد که $y > x + ۱۰$

یا $x > y + 10$. مساحت این پیشامد برابر است با $\frac{1}{2}(50)^2 + \frac{1}{2}(50)^2 = (50)^2$ که در نتیجه احتمال آن $\frac{(50)^2}{(60)^2} = \frac{25}{36}$ خواهد شد.

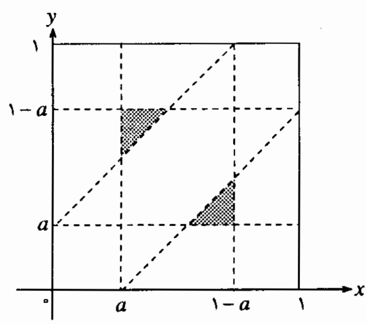
۱۴. $\frac{\pi(9-4)}{\pi(4)^2} = \frac{5}{16}$

۱۵. از $xy = v^2$ به‌دست می‌آوریم $y = \frac{v^2}{x}$ که با جاگذاری در $x^2 + y^2 = u^2$ به معادلهٔ $x^2 + \frac{v^4}{x^2} = u^2$ یا $x^4 - u^2x^2 + v^4 = 0$ می‌رسیم. شرط وجود جواب برای این معادله این است که $u^4 - 4v^4 \geqslant 0$ یا $u \geqslant v\sqrt{2}$ که احتمال آن برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}$.

۱۶. اگر طول این دو نقطه را u و v بنامیم باید احتمال $|u - v| \leqslant x$ را بیابیم. با توجه به شکل، مساحت پیشامد، $s^2 - (s-x)^2 = 2sx - x^2$ و در نتیجه احتمال آن $\frac{2sx - x^2}{s^2}$ است.



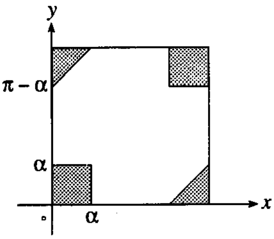
۱۷. اگر طولهای دو نقطه‌ای که به تصادف انتخاب می‌شوند x و y باشد، پیشامد ما زمانی رخ می‌دهد که $x \geqslant a$، $y - x \geqslant a$ و $1 - y \geqslant a$ و $y \geqslant x$ یا $y \geqslant a$، $x - y \geqslant a$ و $1 - x \geqslant a$ و $x \geqslant y$. با توجه به شکل زیر مساحت پیشامد، $2 \times \frac{1}{2}(1 - 3a)^2$ و در نتیجه احتمال رخ دادن آن $(1 - 3a)^2$ است.



۱۸. $\frac{1}{4}$

۱۹. $\frac{3\alpha^2}{4\pi^2}$؛ زیرا اگر این سه نقطه را A، B و C بنامیم و نقطهٔ A را به‌عنوان مبدأ انتخاب و B و C را با طول کمان از A تا B و از A تا C در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت مشخص کنیم آنگاه فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مربع $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \text{ و } 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$ خواهد شد. پیشامد اینکه سه نقطه روی کمانی به‌طول α رادیان باشد، زمانی رخ می‌دهد که

$۰ \leqslant y \leqslant \alpha$ و $۰ \leqslant x \leqslant \alpha$ یا $۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi - \alpha$ و $۰ \leqslant y \leqslant ۲\pi - \alpha$ یا $y - x \geqslant ۲\pi - \alpha$ یا $x - y \geqslant ۲\pi - \alpha$ که این چهار حالت در شکل زیر سایه زده شده‌اند. مساحت قسمت سایه زده شده برابر است با $۳\alpha^۲$.



۲۰. $۱ - \frac{a}{۲b} - \frac{b}{۴a}$. زیرا اگر طول قطعهٔ AM را x و طول قطعهٔ BN را y بنامیم، پیشامد مورد نظر رخ می‌دهد اگر و فقط اگر سه نابرابری $۲y + x \geqslant b - a$ و $۲y - x \leqslant b - a$ و $a + b \geqslant x$ همزمان رخ دهند که پس از رسم شکل و محاسبهٔ مساحت پیشامد، همان عدد فوق به‌عنوان احتمال پیشامد به‌دست می‌آید.

تمرینهای ۴.۳

۱. احتمال اینکه در یک بستهٔ ده‌تایی از لامپها حداکثر یک لامپ، خراب باشد برابر است با

$$۰/۹۹۵ = C(۱۰, ۰)(۰/۰۱)^۰(۰/۹۹)^{۱۰} + C(۱۰, ۱)(۰/۰۱)^۱(۰/۹۹)^۹$$

پس تقریباً یک درصد لامپها باید برگردانده شود.

۲. احتمال ظاهر شدن عدد زوج، $\frac{۱}{۲}$ است. پس احتمال مورد نظر $C(۵, ۳)(\frac{۱}{۲})^۳(\frac{۱}{۲})^۲$ است.

۳. $C(۱۰۰, ۴۰)(\frac{۱}{۳})^{۴۰}(\frac{۲}{۳})^{۶۰}$

۴. احتمال اینکه در پرتاب دو تاس همگن لااقل یک ۶ ظاهر شود، $۱ - (\frac{۵}{۶})^۲ = \frac{۱۱}{۳۶}$ است. پس احتمال اینکه در ده بار پرتاب دو تاس، دقیقاً در پنج بار لااقل یک ۶ ظاهر شود برابر است با $C(۱۰, ۵)(\frac{۱۱}{۳۶})^۵(\frac{۲۵}{۳۶})^۵$.

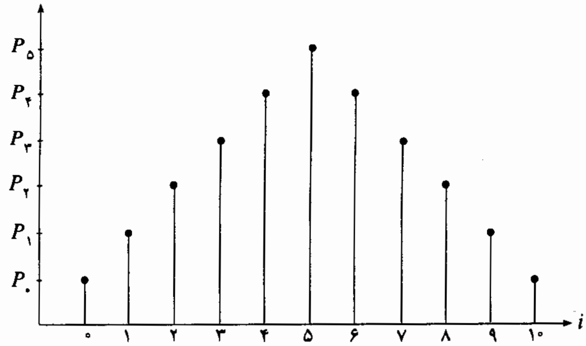
۵. $C(۵, ۲)(\frac{۱}{۳})^۲(\frac{۱}{۳})^۳ + C(۵, ۳)(\frac{۱}{۳})^۳(\frac{۲}{۳})^۲ + C(۵, ۴)(\frac{۱}{۳})^۴(\frac{۲}{۳})^۱ + C(۵, ۵)(\frac{۱}{۳})^۵$

۶. $C(۵, ۴)(\frac{۱}{۳})^۴(\frac{۲}{۳})^۱ + C(۵, ۵)(\frac{۱}{۳})^۵$

۷. $C(۱۰, ۷)(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$

۸. $C(۶, ۳)(\frac{۱}{۶})^۳(\frac{۵}{۶})^۳$

۹. احتمال ظاهر شدن i رو در ده بار پرتاب سکه $\frac{C(۱۰, i)}{۲^{۱۰}}$ است. نمودار احتمالهای ظاهر شدن i رو به صورت صفحهٔ بعد است:



تمرینهای ۲.۴

۱. این مسأله، مثال ۳ همین فصل است. احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۴۶۷}{۱۰۰۰}$.

۲.

$$P(A\cup B\cup C)=٪۲۵+٪۲۰+٪۱۳-٪۱۰-٪۸-٪۵+٪۴=٪۳۹$$

۳. طبق قضیهٔ ۴، $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$. چون $P(A\cup B)\leqslant ۱$ پس $-P(A\cup B)\geqslant -۱$ بنابراین $P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-۱$.

۴. چون $P(E_k)=۱$، برای $k=۱,۲,\cdots,n$ داریم $P(E_k^c)=۰$. حال طبق نابرابری که در مثال ۶ این فصل ثابت کردیم، $P(E_۱^c\cup\cdots\cup E_n^c)\leqslant P(E_۱^c)+\cdots+P(E_n^c)=۰$ در نتیجه $P((E_۱\cap\cdots\cap E_n)^c)=P(E_۱^c\cup\cdots\cup E_n^c)=۰$ یا $P(E_۱\cap\cdots\cap E_n)=۱$.

۵. فرض کنید E_k پیشامد بخش‌پذیری بر k باشد آنگاه

الف) $P(E_۳\cap E_۵^c)=P(E_۳)-P(E_۳\cap E_۵)=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}-\frac{۶۶}{۱۰۰۰}=\frac{۲۶۷}{۱۰۰۰}$

ب) $P(E_۳^c\cap E_۵^c)=۱-P(E_۳\cup E_۵)=۱-\frac{۴۶۷}{۱۰۰۰}=\frac{۵۳۳}{۱۰۰۰}$

۶. الف) برقرار نیست. به مثال ۳ همین فصل رجوع کنید.

ب) برقرار نیست. فرض کنید عددی به تصادف از مجموعه اعداد $\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$ انتخاب می‌کنیم. اگر A پیشامد بخش‌پذیری بر ۲ و B پیشامد بخش‌پذیری بر ۴ باشد، آنگاه

$$P(A\cap B)=\tfrac{۱}{۵},P(A)=\tfrac{۱}{۲},P(B)=\tfrac{۱}{۵},\tfrac{۱}{۵}\neq\tfrac{۱}{۲}\times\tfrac{۱}{۵}.$$

۷. الف) درست نیست. ب) درست است، زیرا اگر $A\subseteq B$ آنگاه $B^c\subseteq A^c$.

۸. $\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

۹. الف) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۱۰}$

ب) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۲}$

۱۰. $P(A)=\frac{1}{8}$، $P(B)=\frac{1}{2}$، $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$، $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

۱۱. این پیشامد، اجتماع پیشامدهای A_2، A_4، A_6، A_8، A_{10} و A_{12} است که به‌ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری بر ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ هستند. پس احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس زوج باشد برابر است با مجموع احتمالهای پیشامدهای فوق که $\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$ است.

۱۲. واضح است که اگر $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=0$، بنابر قضیهٔ ۵، تساوی $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$ برقرار است. برعکس فرض کنید تساوی اخیر برقرار باشد. آنگاه

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C) \qquad *$$

پس $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=P(A\cap B\cap C)$ و از (*) نتیجه می‌شود که هر چهارتای اینها صفرند.

۱۳. برای $n=2$، حکم، همان اصل موضوع (۳) است. فرض کنید حکم برای $n=k\geqslant 2$ برقرار باشد آنگاه با فرض $A=A_1\cup A_2\cup\cdots A_k$ و $B=A_{k+1}$ و با استفاده از برقراری حکم برای $n=2$ و $n=k$ و با توجه به اینکه $B\cap A=\varnothing$،

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_k\cup A_{k+1})&=P(A_1\cup\cdots\cup A_k)+P(A_{k+1})\\&=P(A_1)+\cdots+P(A_k)+P(A_{k+1})\cdot\end{aligned}$$

تمرینهای ۳.۴

۱. $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{1}{5}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=P(A)\times P(B)$.

۲. نه. چون اگر مجموع = ۹ را در نظر بگیریم، در مقابل برآمد ۲ در تاس اول، هیچ عددی برای تاس دوم وجود ندارد، که مجموعش با ۲ برابر با ۹ شود.

۳. چون انتخاب دو نقطه از هم مستقل‌اند، احتمال مطلوب برابر است با $(\frac{3}{4})^2$.

۴. در پرتاب یک تاس همگن بگیرید $A=\{1,2,3\}$، $B=\{3,4,5,6\}$. آنگاه $A\cap B=\{3\}$ و

$$\frac{1}{6}=P(A\cap B)<\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot$$

A و B لزوماً وابسته‌اند.

۵. الف) $P(A\cap B)\leqslant P(B)$ و $P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-1=P(B)$

پس $P(A\cap B)=P(B)$.

ب) اگر $P(A)=0$، آنگاه $P(A\cap B)=0=P(A)P(B)$ و اگر $P(A)=1$، بنابر (الف)، $P(A\cap B)=P(B)P(A)$.

۶. A و B مستقل‌اند، پس $P(A \cap B) = P(A) = P(A)P(B)$ بنابراین

$$P(A)(1 - P(B)) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \text{ یا } P(B) = 1.$$

۷. $P(B) = P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(C) = \frac{1}{4}$، $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$، $P(A \cap C) = 0$، $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$.
پس این سه پیشامد مستقل نیستند.

۸. داریم:

$$P(C \cap A \cap B^c) = P(C \cap A) - P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C)(1 - P(B))$$
$$= P(A \cap C)P(B^c)$$

۹. خیر. در پرتاب تاس همگن بگیرید: $C = \{4, 5\}$، $B = \{2, 3, 4\}$ و $A = \{1, 2\}$.

مراجع

1. Ghahramani, Saeed., "*Fundamentals of Probability*", Prentice Hall, Inc. 1996.
2. Ross, Sheldon., "*A First course in Probability*", Macmillan Pub. Co., Inc. 1976.
3. Parzen, Emanuel., "*Modern Probability Theory and Its Applications*", John Wiley & Sons. 1960.
4. Feller, William., "*An Introduction to Probability Theory and Its Applications*", 3th. ed. John Wiley & Sons. 1968.
5. Itô, Kiyosi., "*Introduction to Probability Theory*", Cambridge University Press. 1978.
6. Hoel, Paul G., Port, Sidney C., Stone, Charles J. "*Introduction to Probability Theory*", Houghton Mifflin, Co. 1972.

۷. بیژن ظهوری زنگنه و دیگران، «جبر و احتمال»، سال سوم نظام جدید آموزش متوسطه، آموزش و پرورش.

۸. بیژن ظهوری زنگنه و دیگران، «ریاضی پایه»، دورهٔ پیش‌دانشگاهی نظام جدید آموزش متوسطه، علوم انسانی، آموزش و پرورش.

۹. کای لای چانگ، «نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی»، ترجمهٔ ابوالقاسم میامئی و محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۴، تهران.

۱۰. شلدون راس، «مبانی احتمال»، ترجمهٔ علی همدانی و احمد پارسیان، نشر شیخ بهایی، ۱۳۷۵، اصفهان.

کتابهای
موضوعی
ریاضی

موضوع احتمال همواره در زندگی عادی مردم دخالت داشته است و به همین دلیل واژهٔ احتمال، واژه‌ٔ جدیدی نیست.

امّا امروزه موضوع احتمال در علم و تکنولوژی نقش مهمی پیدا کرده و بحث در بارهٔ مفهوم دقیق و محاسبات آن ضروری شده و به صورت شاخه‌ای از ریاضیات گسترش یافته است؛ به طوری که آشنایی هرچند مقدماتی با مبانی آن حتی برای دانش‌آموزان لازم به نظر می‌رسد.

در این کتاب سعی شده است مبانی احتمال در سطحی بیان شود که برای دانش آموزان دبیرستان مفید باشد و مورد توجه دبیران محترم قرارگیرد.

این کتاب جلد اول از مجموعهٔ دوجلدی احتمال است که در چهار فصل تنظیم شده و زمینه را برای مطالب جلد دوم که مشتمل بر متغیرهای تصادفی و توابع توزیع احتمال است، فراهم می‌آورد.

در هر فصل تمرینهایی آورده شده است تا خواننده، با حل آنها تواناییهای آموزشی خود را محک بزند.

راهنمایی وحل تمرینها نیز در انتهای کتاب گنجانده شده است.

تصویر روی جلد: بلز پاسکال

بها ۵۵۰ تومان

شابک ۱-۲۶۸-۳۱۸-۹۶۴
ISBN 964-318-268-1