

# ارتعاشات و امواج

نوشته: ا.پ. فرنچ

ترجمه: دکتر محمود ملاحی  
از ویرایش چهاردهم



دانشگاه علم و فناوری ایران

چاپ نهم

به نام خدا

# ارتعاشات و امواج

نویسنده : ا. پ. فرنچ  
استاد فیزیک ، انستیتو تکنولوژی ماساچوست  
مترجم : دکتر محمود ملباشی  
ویراستار : محمود اسراری

## فهرست مطالب

«و»	سخنی از مترجم
«ز»	مقدمه (مؤلف)
۱	۱- حرکات تناوبی
۲	ارتعاشات سینوسی
۴	شرح حرکت هماهنگ ساده
۶	نمایش بردار چرخشی
۱۲	آشنایی با تابع نمایی مختلط
۱۴	استفاده از تابع نمایی مختلط
۱۶	مسائل
۱۹	۲- برهم‌نهی حرکات تناوبی
۱۹	برهم‌نهی ارتعاشات یک بُعدی
۲۰	برهم‌نهی دو ارتعاش با بسامدهای مساوی
۲۳	برهم‌نهی ارتعاشات با بسامدهای متفاوت، زنشها
۲۸	برهم‌نهی چند ارتعاش با بسامدهای یکسان
۳۰	ترکیب دو ارتعاش عمود بر هم
۳۲	حرکات عمود بر هم با بسامدهای مساوی
۳۸	حرکات عمود بر هم با بسامدهای متفاوت؛ شکلهای لیسازو
۴۰	مقایسه برهم‌نهی (ارتعاشات) موازی و عمود بر هم
۴۳	مسائل

۴۵	..... ارتعاشات آزاد سیستمهای فیزیکی
۴۵	..... سیستم پایه ای وزنه - فنر
۴۷	..... حل معادله نوسانگر هماهنگ با استفاده از توابع نمایی مختلط
۵۰	..... الاستیسیته و مدول یانگ
۵۵	..... اجسام شناور
۵۷	..... آونگها
۶۰	..... آب در لوله U شکل
۶۱	..... نوسانات پیچشی
۶۴	..... فنر هوا [= ارتعاش فنری ستون هوا]
۶۸	..... نوسانهای فنرهای سنگین
۷۱	..... میرایی ارتعاشات آزاد
۷۸	..... آثار میرایی بسیار بزرگ
۸۰	..... مسائل

۸۹	..... ۴- ارتعاشات واداشته و تشدید
۹۰	..... نوسانگر نامیرا با اعمال نیروی هماهنگ
۹۴	..... روش تابع نمایی مختلط برای نوسانهای واداشته
۹۶	..... نوسانهای واداشته با وجود میرایی
۱۰۲	..... اثر گوناگون بخش مقاوم
۱۰۷	..... پدیده های زود گذر
۱۱۲	..... توان جذب شده در نوسانگر واداشته
۱۱۷	..... نمونه های تشدید
۱۱۸	..... تشدید الکتریکی
۱۲۲	..... تشدید اُپتیکی
۱۲۵	..... تشدید هسته ای
۱۲۷	..... تشدید مغناطیسی هسته ای

۱۲۸ ..... نوسانگرهای ناهماهنگ

۱۳۰ ..... مسائل

۱۳۹ ..... ۵- نوسانگرهای جفت شده و وجوه عادی

۱۴۱ ..... دو آونگ جفت شده

۱۴۳ ..... موارد تقارن

۱۴۵ ..... برهمنهی وجوه عادی

۱۴۸ ..... مثال های دیگری از نوسانگرهای جفت شده

۱۵۱ ..... بسامدهای عادی: روش تحلیلی کلی

۱۵۵ ..... ارتعاش واداشته و تشدید برای دو نوسانگر جفت شده

۱۵۹ ..... چند نوسانگر جفت شده

۱۶۰ .....  $N$  نوسانگر جفت شده

۱۶۳ ..... یافتن وجوه عادی برای  $N$  نوسانگر جفت شده

۱۶۶ ..... خواص مُدهای طبیعی برای  $N$  نوسانگر جفت شده

۱۷۰ ..... نوسانهای طولی

۱۷۴ .....  $N$  خیلی بزرگ

۱۷۹ ..... یک شبکه بلورین

۱۸۱ ..... مسائل

۱۹۱ ..... ۶- مُدهای طبیعی دستگاههای پیوسته تحلیل فوریه

۱۹۲ ..... ارتعاشهای آزاد تارهای کشیده شده

۱۹۸ ..... برهمنهی وجوه (مُدها) بر روی یک تار

۱۹۹ ..... ارتعاش هماهنگ واداشته یک تار کشیده

۲۰۲ ..... ارتعاشهای طولی یک میله

۲۰۶ ..... ارتعاشهای ستونهای هوا

۲۰۸ ..... کشسانی یک گاز

۲۱۲ ..... طیفی کامل از مُدهای طبیعی

۲۱۴	مدهای طبیعی یک دستگاه دو بُعدی
۲۲۳	مدهای طبیعی یک دستگاه سه بُعدی
۲۲۴	تحلیل فوریه
۲۲۷	تحلیل فوریه در عمل
۲۳۲	وجه عادی و توابع راست گوشه
۲۳۳	مسائل

#### ۷- امواج پیشرونده

۲۳۹	موج چیست؟
۲۴۰	مدهای طبیعی و امواج رونده
۲۴۶	امواج پیشرونده در یک جهت
۲۴۹	سرعت (انتشار) موج در محیطهای خاص
۲۵۳	برهمنهی
۲۵۷	پالس (تپ) های موج
۲۶۵	حرکت پالسهای موج با شکل ثابت
۲۷۲	برهمنهی پالسهای موج
۲۷۴	پاشیدگی، فاز و سرعتهای گروه (موج)
۲۷۹	پدیده برش
۲۸۴	انرژی در یک موج مکانیکی
۲۸۸	انتقال انرژی توسط یک موج
۲۹۱	شارش اندازه حرکت (تکانه) و فشار تابش مکانیکی
۲۹۲	امواج دو و سه بُعدی
۲۹۵	مسائل

#### ۸- آثار مرزی و تداخل

۳۰۵	بازتاب پالسهای موج
۳۱۲	امپدانس (پاگیری) ها: پایانه های ناباز تابنده

۳۱۹	.....	امواج طولی در مقابلِ عرضی : قطبش (پلاریزاسیون)
۳۲۰	.....	امواج دو بُعدی
۳۲۱	.....	اصل هویگنس - فرنل
۳۲۵	.....	بازتاب و شکست امواج تخت
۳۳۰	.....	اثر دوپلر و پدیده های مربوط به آن
۳۳۷	.....	تداخل با دو شکاف
۳۴۲	.....	تداخل با چند شکاف ( شبکه پراش)
۳۴۸	.....	پراش با یک تک شکاف
۳۵۳	.....	الگوهای تداخلی از دستگاههایی با شکاف حقیقی
۳۵۸	.....	مسائل
۳۶۵	.....	پاسخهای مسائل

کتاب ارتعاشات و امواج یکی از چهار کتابی است که انستیتو تکنولوژی ماساچوست یا به اختصار (M. I. T) تحت عنوان سری کتابهای فیزیک مقدماتی به تدوین آنها همت گماشته است. آقای A. P. French علاوه بر نوشتن کتابهای: ارتعاشات و امواج، نسبت خاص، در نگارش دو کتاب دیگر این سری با نامهای: مقدمه ای بر فیزیک کوانتومی و آشنایی با مکانیک کلاسیک، به عنوان نویسنده ارشد با آقایان: E. F. Taylor و M. G. Eibison همکاری داشته است. ناگفته نماند که متن اصلی این کتاب برای نخستین بار در ۱۹۶۵ و نخستین ویرایش آن در ۱۹۷۱ به چاپ رسیده است. پس از آن استقبال دانشجویان رشته های فنی- مهندسی از این کتاب به حدی چشمگیر بود که طی ۱۷ سال ۱۲ بار در سالهای: ۱۹۷۴، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۴ (دو بار)، ۱۹۸۶، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱ (دو بار) چاپ و منتشر شد.

ناشر این کتاب: CHAPMAN & HALL که از معتبرترین شرکتهای انتشاراتی زنجیره ای جهانی است و شعب آن در انگلستان، امریکا، ژاپن، استرالیا و هند فعالند، بهترین کتابها را در زمینه فنی- مهندسی و علوم پایه از اساتید سرشناس دانشگاههای معتبر جهان برای چاپ و انتشار می پذیرد. در هر حال کتاب اگر از لحاظ محتوا نیاز علمی مخاطبان را در حال و آینده برآورده سازد، و از نظر سبک نگارش روان و بی پیرایه باشد بدون شک مانند متن اصلی همین کتاب تا چند دهه مورد توجه همگان قرار خواهد گرفت. برای برگردان کتاب به فارسی نیز چنین کتابهای ناب و پر تیراژ باید در اولویت گزینش قرار گیرند. خدا را شکر می کنم که این توفیق نصیب این حقیر شد تا بتوانم سهم ناچیزی در نشر کتابهای با ارزش داشته باشم.

**چاپ اول ترجمه کتاب حاضر در سال ۱۳۷۴ انجام شه که بسیار مورد استقبال قرار گرفت و در فرصت کمی به فروش رفت بطوریکه مترجم فرصت بازنگری اساسی کتاب را برای چاپ دوم نیافت.** اما خوشبختانه در چاپ سوم بسیاری از اشتباهات چاپی تصحیح شد. **در چاپ چهارم کتاب که تقدیم استفاده کنندگان ارجمند شد سعی وافر بر این بود که عاری از هر گونه غلط علمی یا چاپی باشد تا باز هم انشاا... مورد استقبال قرار گیرد.**

اکنون متن کتاب، قبل از چاپ پنجم از لحاظ محتوایی و فنی به طور دقیق ویرایش گردیده و با جمله پردازی ها سعی شده است، فارسی روان تری ارائه گردد. ضمناً به دانشجویان محترم این نوید داده می شود که در آینده نزدیک آخرین متن فارسی با آخرین ویرایش متن انگلیسی، قابل دسترس مقابله و مطابقت داده شود، و تغییرات احتمالی آخرین ادیت انگلیسی در چاپ ششم اعمال گردد.

در خاتمه لازمست از ویراستار کتاب جناب آقای محمود اسراری عضو هیئت علمی دانشکده فیزیک همچنین از اعضای محترم شورای انتشارات و همکاران چاپخانه دانشگاه علم و صنعت ایران برای زحماتی که در پیشبرد علم متحمل شده و می شوند تشکر نمایم. از خداوند اجر جمیل برای همه عاشقان دانش خواستارم.

محمود ملامبشی

دانشیار دانشکده فیزیک



## مقدمه (مؤلف)

رسالت مرکز آموزشی پژوهشی، M.I.T. (مرکز آموزشی علوم سابق) بالا بردن کیفیت آموزش در دوره های تحصیلی است. به همین جهت سعی می نماید تا فرایند آموزش و یادگیری دانشجویان آموزش دیده ها یا دانشگاهها در سطح مطلوبی حفظ شود. این مرکز را در سال ۱۹۶۰ M.I.T. تاسیس نمود و مدیریت آن از همان سال به عهده پروفیسور Francis L. Friedman قرار گرفت. مؤسسه ملی علوم نیز از سال ۱۹۶۱ تاکنون از این مرکز پشتیبانی می کند، علاوه بر این از کمکهای مالی مؤسسات نظیر Kettering، کمپانیهای Shell، Victoria، W.T. Grant، و Bing بهره مند می شود.

انتشار دوره های فیزیک مقدماتی M.I.T.، به صورت یک مجموعه مختصر و مفید، نتیجه تلاش مستقیم این مرکز است و ناگفته نماند که در تدوین و تهیه این کتابها حتی الامکان سعی شده است بین فیزیک نظری و کاربردی یک ارتباط منطقی وجود داشته باشد. کتابهای انتشار یافته این مرکز شامل مبانی گوناگون دروس مقدماتی است و در زمینه فیزیک کلاسیک، به فیزیک اتمی و فیزیک کوانتومی بیشتر اهمیت داده شده است. نشریات گوناگون این مجموعه از لحاظ سطح علمی و سبک نگارش در چهار چوب خاصی تدوین نشده، بلکه سعی شده است محتوای هر کتاب شامل بسیاری از مباحث مختلف درسی باشد و به طور نسبتاً مستقلی طراحی شود. تا برای دانشجویان بیشتر رشته های فنی، مهندسی قابل استفاده باشد.

متن کتاب حاضر به عنوان یک مقدمه عمومی برای مطالعه ارتعاشات و امواج در نظر گرفته شده است، ولی بحث در این باره منحصرأ به دستگاههای مکانیکی اختصاص یافته است. بنابراین، به استثنای چند مورد اطلاعات کارآمد خوبی در زمینه سینماتیک و دینامیک مقدماتی ارائه شده است. محدودیتی که برای کتاب از لحاظ ارائه نوع مطلب، قائل شده ایم به این دلیل است که جنبه های کمی و تحلیلی، بیشتر از جنبه تشریحی مورد توجه بوده است. برای پیش کشیدن بحث دستگاههای الکتریکی و اپتیکی همواره به شدت وسوسه می شدیم، ولی احساس می کردیم با این کار بخش بزرگی از موضوعات را باید به جا به جاییهای مکانیکی و معادلات عددی موج اختصاص دهیم، و فقط به یک اشاره ضمنی به دستگاههای دیگر اکتفا کنیم.

فرض بر این است که دانشجو زمینه ریاضی دارد و با محاسباتی نظیر حل قانون نیوتن برای یک نوسانگر هماهنگ و با معادلات دیفرانسیل کاملاً آشناست، و به آسانی می تواند حل آنها را بر حسب توابع سینوسی توسعه دهد. در این کتاب از توابع نمایی برای تحلیل دستگاههای نوسانگر و از معادلات دیفرانسیل جزئی، هر جا ضرورت داشته، استفاده شده است. در بعضی موارد از تجربه‌های قبلی، همراه نمونه های عددی که در آنها معادلات دیفرانسیل مورد بحث قرار گرفته، استفاده شده است زیرا نظر اصلی مؤلف نبوده و مطمئناً ضرورت داشته است.

در دروس مقدماتی به مفهوم مدهای طبیعی بیش از حد معمول اهمیت داده شده است. به اعتقاد مؤلف همان گونه که در متن آمده است با این کار فهم دانشجو در این زمینه به مقدار زیاد بالا می رود و می داند که چگونه باید بین دینامیک ذرات پیوسته و دینامیک چند ذره تلفیقی به وجود آورد. آنچه گفته نشده ولی به ذهن خطور می کند، آن است که استفاده از چنین شکل‌های راست گوشه ای و تمامی مجموعه مدهای طبیعی این مزیت را دارد که وقتی دانشجو آنها را در مکانیک کوانتومی مشاهده می کند، برایش نامانوس نیست.

در یک بحث تحلیلی سعی شده است که بین نظریه و نمونه های واقعی پدیده ها، پیوند برقرار شود، و حتی الامکان تصویرها بر اساس داده های اصلی و عکسها کشیده شود. قرار است شیوه « ارائه اسناد و مدارک » موجود در همه کتابهای مجموعه به نمایش گذاشته شود.

مؤلف این کتاب مانند مؤلفان دیگر این مجموعه از دریافت نظریه ها، انتقادات و پیشنهادهای خوانندگان به ویژه دانشجویان و استادان استقبال می کند. از پروفیسور Jack R. Tessman (استاد دانشگاه) که در تدوین برنامه فیزیک مقدماتی با مؤلف همکاری نموده اند صمیمانه سپاسگزاری می گردد، مؤلف، این کتاب را در سالهای ۱۹۶۳-۱۹۶۴ تدوین نموده و مطالب آن را پس از بحث و تجزیه و تحلیل بازنویسی کرده است. در کتاب حاضر، چهار چوب اصلی فصل ۵ شامل مقدمه ای بر نوسانگر های جفت شده و مدهای طبیعی است.

در پایان از اعضای مرکز آموزشی پژوهشی که در آماده سازی این کتاب کمک کرده اند و از خانم Martha Ransohff برای تایپ آخرین دستنویس، و از Jon, Rosenfeld برای تهیه عکسها و تصاویر سپاسگزارم.

A.P. FRENCH

کمبریج، ماساچوست

جولای ۱۹۷۰

# فصل اول

## ۱- حرکات تناوبی

ارتعاشات یا نوسانات دستگاههای مکانیکی یکی از مهمترین مباحث مطالعه در علوم فیزیک است. هر دستگاهی القوه قادر است مرتعش شود، و بیشتر دستگاهها می توانند آزادانه و به روشهای بسیار گوناگون به ارتعاش در آیند. به طور کلی می توان گفت ارتعاشات طبیعی بیشتر اجسام کوچک تند است و ارتعاشات طبیعی غالب اجسام بزرگ احتمالاً به کندی صورت می گیرد. مثلاً بالهای یک پشه صدها بار در ثانیه مرتعش می شود و صدایی تولید می کند که قابل شنیدن است. تمام زمین که بر اثر زمین لرزه تکان می خورد ممکن است پس از زمین لرزه (تا مدت کوتاهی) با آهنگ حدود یک نوسان در ساعت به ارتعاش خود ادامه دهد. خود بدن انسان نیز جایگاه بسیاری از پدیده های ارتعاش است چنانکه نویسنده ای آن<sup>۱</sup> را مطرح کرده است:

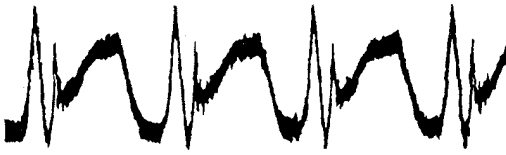
رویهمرفته ، قلبهایمان می زند، ششهایمان نوسان دارد، وقتی سردمان می شود می لرزیم ، گهگاه خرناس می کشیم، ما می توانیم بر اثر به ارتعاش درآمدن پرده صماخ و تارهای صوتی مان بشنویم و سخن بگوییم. امواج نور که دیدن اشیاء را برای ما ممکن می سازد لازمه اش ارتعاش است. ما وقتی راه می رویم پاهایمان دارای حرکت نوسانی است. ما حتی نمی توانیم بدون حرکت نوسانی نوک زبان ، کلمه « ارتعاش » را به طور صحیح بگوییم. حتی اتمهایی که پیکرما را تشکیل می دهند ارتعاش می کنند.

عامل مشترك در همه این پدیده ها تناوبی بودن آنها است. در اینجا الگو، حرکت یا جابه جایی است که عیناً و به گرات تکرار می شود. این الگوی حرکت ممکن است ساده یا پیچیده باشد. (شکل ۱-۱ نمونه ای از هر کدام را نشان می دهد). چرخه پیچیده تر مربوط به ارتعاشات فشار داخلی قلب یک گربه است و چرخه تقریباً ساده سینوسی، منحنی

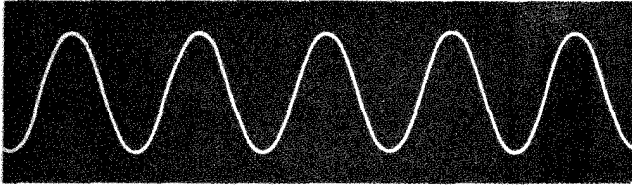
---

۱- R.E.D. Bishop، ارتعاش ، نشریه دانشگاهی کمبریج ، نیویورک ، ۱۹۶۵ ، جالبترین و شیواترین کتابی است که اطلاعات جامعی را با ارجاعات ویژه در زمینه ارتعاشات برای مسائل مهندسی ارائه می دهد.

ارتعاشات یک دیاپازون است. در هر حال محور افقی گذشت یکنواخت زمان را نشان می دهد، و از روی آن می توانیم زمان - دوره تناوب -  $T$  - مربوط به یک چرخه کامل را که ارتعاش در آن زمان واقع شده است مشخص کنیم.



(الف)



(ب)

شکل ۱-۱ (الف) تغییرات فشار در داخل قلب یک گربه (از روی Straub، در E.H. Starling، مبادی فیزیولوژی انسان، چرچیل، لندن ۱۹۰۷). (ب) ارتعاشات یک دیاپازون

در این کتاب چشم انداز چند حرکت تناوبی را بررسی خواهیم کرد و به رابطه موجود بین شکل حرکات تناوبی و پدیده امواج پیشرو بدقت پی می بریم. ما بررسی چند حرکت ارتعاشی را صرفاً از بُعد سینماتیک آغاز خواهیم کرد. سپس وارد پاره ای از خواص دینامیکی دستگاههای مرتعش می شویم. به کمک این طرحهای دینامیکی است که می توانیم به حرکت نوسانی به عنوان یک مساله فیزیک کاربردی بنگریم، و نباید همانند یک تمرین ریاضی با آن مواجه شویم.

## ارتعاشات سینوسی

توجه ما عمیقاً به نوع ساده ارتعاشات سینوسی شکل ۱-۱ (ب) معطوف خواهد

شد. برای این امر دو دلیل یکی فیزیکی و دیگری ریاضی وجود دارد، و هر دو دلیل بر چگونگی ارتعاشات مبتنی است. دلیل فیزیکی آن است که ارتعاشات کاملاً سینوسی انجام می گیرد، در حقیقت این ارتعاش در بسیاری از دستگاههای گوناگون مکانیکی روی می دهد و در همه آنها نیرویی که موجب باز گرداندن جسم مرتعش می شود با جابه جایی آن از وضع تعادل

متناسب است. چنین حرکتی تقریباً همیشه ممکن است اتفاق بیفتد به شرط آنکه جابه جایی به اندازه کافی کوچک باشد. به عنوان مثال هرگاه جسمی را به انتهای فنری بیایوزیم نیروی مؤثر موجب می شود که انتهای فنر به اندازه  $X$  از وضع تعادل منحرف شود، رابطه بین نیرو و جابجایی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots)$$

که در آن  $k_1$ ،  $k_2$ ،  $k_3$  و ... مجموعه ضرایب است، و برای  $X$  همواره می توان یک دسته مقادیر یافت که در بین آنها مجموع عباراتی که با  $x^2$ ،  $x^3$  و ... همراه است قابل چشم پوشی باشد. این مجموع طبق بعضی معیارهای معین (مثلاً  $10^{-3}$  یا  $10^{-6}$ ) در مقایسه با عبارت  $-k_1x$ ، به جز خود  $k_2$ ، صفر است. اگر جرم جسم (آویخته به فنر)  $m$  و جرم فنر ناچیز باشد معادله حرکت جسم به صورت زیر در می آید:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x$$

و به آسانی می توان ثابت کرد که  $x(t)$  در معادله زیر صدق می کند.

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (1-1)$$

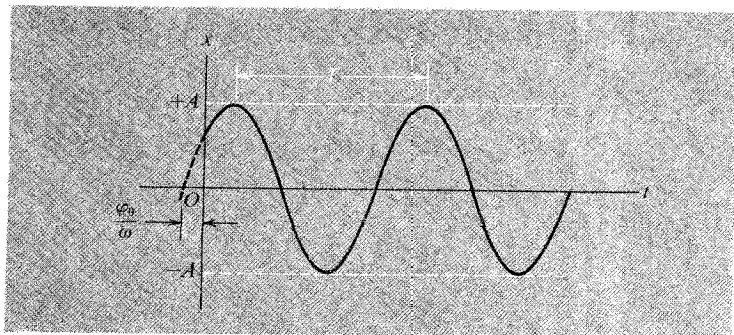
که در آن  $\omega = \left(\frac{k_1}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$  است. از این بحث مختصر می توان نتیجه گرفت و یادآور شد که ارتعاش سینوسی - حرکت هماهنگ ساده - در ارتعاشات کوچک امکانات ممتازی دارد. ولی از این گذشته، به طور کلی حرکت ارتعاشی تقریباً (شاید با تقریب بسیار تنگاتنگ) همان حرکت حقیقی است.

دومین دلیل - دلیل ریاضی - برای اثبات اهمیت حرکات صرفاً ارتعاشی آن است که در قالب قضیه مشهوری که از سوی ریاضیدان فرانسوی ژ. ب. فوریه در ۱۸۰۷ ارائه شده بگنجد. طبق قضیه فوریه، هر آشفتگی که عیناً و به طور منظم با دوره تناوب  $T$  تکرار شود می تواند ترکیبی از (قابل تجزیه به) مجموعه ای از ارتعاشات کاملاً سینوسی، با دوره های تناوب  $T$ ،  $\frac{T}{2}$ ،  $\frac{T}{3}$  و غیره، و با دامنه هایی که به طور مناسب انتخاب شده اند، باشد. مثلاً ردیفهای نامحدود (در دستگاههای موسیقی) شامل یک بسامد اصلی و همه هماهنگهای آن

است. ما در صفحات بعد دربارهٔ این موضوع بیشتر سخن خواهیم گفت. ولی اکنون توجه خواننده را به قضیهٔ فوریه جلب می‌کنیم و در آغاز روشن خواهیم ساخت که حوزه یا دامنه کاربرد بحث ما فقط منحصر به حرکت هماهنگ ساده نیست. بر عکس، آشنایی کامل ما با حرکات سینوسی موجب خواهد شد که به هر حرکت قابل تصور در زمینهٔ پدیده‌های تناوبی با دید بازتری نگاه کنیم.

## شرح حرکت هماهنگ ساده

حرکتی که نمونهٔ آن به کمک معادلهٔ (۱-۱) شرح داده شد، حرکت هماهنگ ساده (SHM)<sup>۳</sup> است و ما آن را نمودار  $x-t$  همان طور که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است نمایش می‌دهیم.



شکل ۱-۲ حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب  $T$  و دامنهٔ  $A$

مادر ذیل با مشخصات چنین آشفته‌گی سینوسی آشنا می‌شویم:

۱- این آشفته‌گی در داخل دو حد  $x = \pm A$  محصور است. مقدار ثابت  $A$  دامنهٔ حرکت است.

۲- حرکت، دورهٔ تناوبی مانند  $T$  دارد که با زمان بین دو بیشینهٔ متوالی مساوی است، یا به عبارت جامعتر  $T$  با زمان بین دو نقطهٔ متوالی، که جابجایی هر دو  $x$  باشد و سرعت  $\frac{dx}{dt}$  در هر دو نقطه عیناً تکرار شود، مساوی است. با توجه به معادله پایه ای (۱-۱) یعنی

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

۳- این علامت اختصاری مناسب که در بسیاری از موارد استفاده می‌شود، از جمله علائمی است که غالباً به کار خواهیم بُرد.

در شناسه تابع سینوسی دوره تناوب با افزایش  $2\pi$  مطابقت دارد. بنابراین داریم.

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi$$

از آنجا

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2-1)$$

اگر اندازه های  $x$  و  $\frac{dx}{dt}$  هر دو در لحظه  $t = 0$  (یا در هر زمان معین دیگر) کاملاً مشخص باشد وضعیت حرکت ارتعاشی در آن لحظه مشخص خواهد شد. در زمان ویژه  $t = 0$  این مقادیر را به ترتیب با  $x_0$  و  $v_0$  نشان می دهیم. آنگاه روابط زیر را خواهیم داشت:

$$x_0 = A \sin \varphi_0$$

$$v_0 = \omega A \cos \varphi_0$$

اگر حرکت به کمک معادله (1-1) مشخص باشد، با استفاده از این دو رابطه اخیر دامنه  $A$  و زاویه  $\varphi_0$  (زاویه فاز اولیه حرکت) را می توان حساب کرد:

$$\varphi_0 = \text{Tan}^{-1} \left[ \frac{\omega x_0}{v_0} \right] \quad A = \left[ x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

اندازه بسامد زاویه ای حرکت یعنی  $\omega$  در اینجا آزادانه معلوم فرض می شود.

معادله (1-1) تغییرات سینوسی  $x$  را بر حسب  $t$  بیان می کند،  $t$  می تواند دقیقاً مانند یک متغیر ریاضی که از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می کند، در نظر گرفته شود. چون هر ارتعاش واقعی آغاز و پایانی دارد، بنابراین هنگامی که حرکت ارتعاشی ادامه پیدا کند حتی اگر کاملاً سینوسی باشد، تنها معادله (1-1) نمی تواند بیانگر آن باشد. مثلاً اگر یک ارتعاش هماهنگ ساده در  $t = t_1$  شروع شود و در  $t = t_2$  متوقف گردد. شرح کامل این حرکت از نظر ریاضی جمعاً

مستلزم سه مرحله خواهد بود:

$$x = 0 \quad -\infty < t < t_1$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$x = 0 \quad t_2 < t < \infty$$

معادله (۱-۱) که این حدود در آن صدق کند از نظر فیزیکی کاملاً بیانگر یک ارتعاش هماهنگ واقعی است و بیانگر یک نکته ظریف ریاضی نیست. چون مسأله بر اساس معیارهای کاملاً فیزیکی ارزیابی می شود، به نظر نمی رسد که یک ارتعاش به صورت یک حرکت سینوسی واقعی باشد، مگر آنکه به ازای تعداد بسیار زیادی از دوره های تناوب ادامه پیدا کند. مثلاً اگر گوش فقط به دریافت یک چرخه کامل صدای یک دیپازون در حال ارتعاش نظیر شکل (۱-۱) (ب) مجاز بود تأثیر شنوایی آن مانند یک آهنگ بی پیرایه و بسامد مشخص دیپازون نخواهد بود بلکه به جای آن مخلوطی از آهنگهای ناهنجار<sup>۳</sup> شنیده می شد. بحث درباره این پدیده و تجزیه و تحلیل بیشتر آن در اینجا مناسب ندارد، لذا آن را به فرصت دیگری موکول می کنیم، این مسأله در مبحث آنالیز فوریّه دوباره بررسی خواهد شد. آنچه در این مرحله حائز اهمیت است و باید مورد توجه قرار گیرد. ارتعاشات هماهنگ ساده یک سیستم فیزیکی واقعی است که باید تا مدتی طولانی ادامه پیدا کند باید آنچه را که بیشتر اوقات حالت پایدار ارتعاش نامیده می شود نمایش داد- از معادله (۱-۱) به عنوان یک معیار سنجش قابل قبول برای ارتعاشات استفاده می شود.

### نمایش بردار چرخشی

یکی از متداولترین راههای آشنایی با حرکت هماهنگ ساده آن است که تصویر حرکت دورانی یکنواخت را (بر روی قطر مسیر) در نظر گیریم. به عنوان مثال قرصی را در نظر بگیرید که با شعاع  $A$  با آهنگ  $\omega \text{ rad. sec}^{-1}$  حول محور قائمی بچرخد. اگر نشانه ای چوبی روی لبه قرص متصل باشد و یک باریکه نور موازی افقی، همان طور که در شکل ۱-۳ (الف) نشان داده شده است، سایه ای از نشانه چوبی بر روی پرده ای قائم بیندازد، در آن صورت این سایه بر روی پرده، در طول یک خط افقی، حرکت هماهنگ ساده ای با دوره تناوب  $\frac{2\pi}{\omega}$  و دامنه  $A$  خواهد داشت.

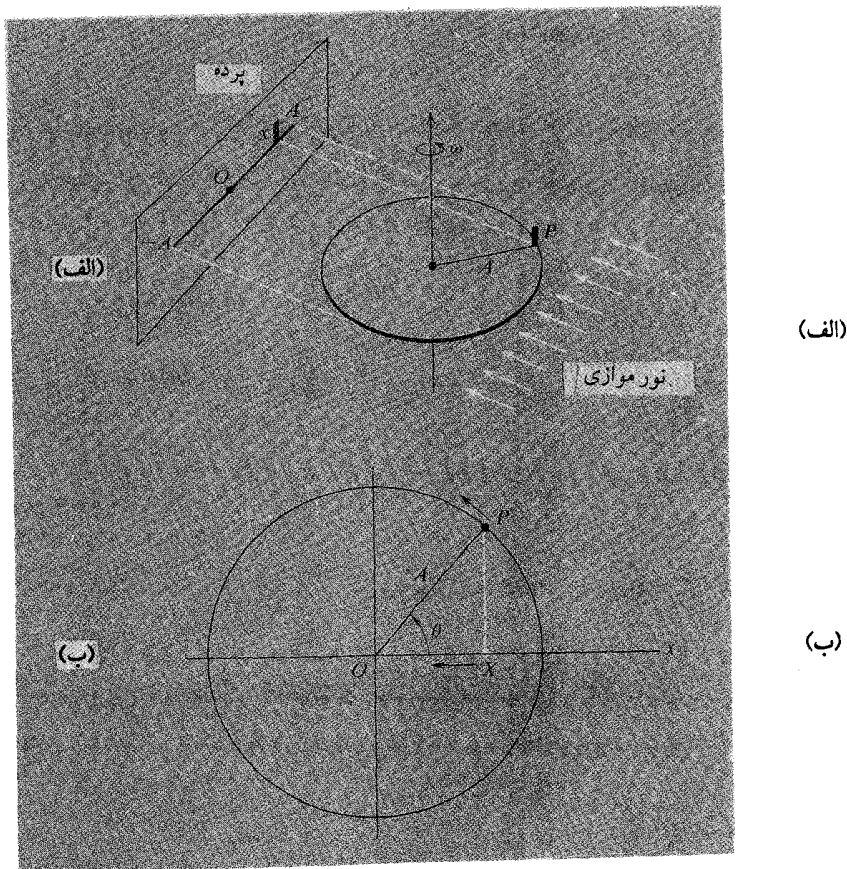
به طور خلاصه، می توانیم فرض کنیم که حرکت هماهنگ ساده (SHM)، تصویر هندسی

---

۴- آمیختگی صدا را غالباً می توان به طور قاطع با یک تجزیه کننده خودکار (اتوماتیک) موج از بین برد و صداهای درهم آمیخته را به تفکیک شنید، زیرا مشخص شده است که آنچه ما می شنویم عیناً صدای موجی نیست که وارد گوش می شود، بلکه گوش هم تحریفهایی به آن می افزاید. برای مثال به J.R.Pierce, W.A. Van Bergeijk و E.A.David امواج و گوش (Anchor Book) Doubleday، نیویورک، ۱۹۶۰ مراجعه کنید.



حرکت دورانی یکنواخت است (به وسیله تصویر هندسی فرایند، بسادگی می توان تصور کرد که میخ چوبی P در هر لحظه بر خطی معین عمود است)



شکل ۳-۱ حرکت هماهنگ ساده تصویر حرکت دورانی یکنواخت است.

در شکل ۳-۱ (ب) نشان می دهیم که انتهای بردار چرخشی OP را می توان بر روی یک قطر دایره تصویر نمود. در حالت مخصوص محور افقی Ox را انتخاب می کنیم که حرکت نوسانی در طول آن انجام می شود. بنابراین وضعیت نقطه P در هر لحظه به وسیله طول ثابت A و زاویه متغیر  $\theta$  معین می شود. اگر جهت پادساعت گرد را مثبت بگیریم، طبق قرارداد، این دو کمیت در مختصات قطبی صدق می کند، و اندازه  $\theta$  در هر لحظه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\theta = \omega t + \alpha$$

در اینجا  $\alpha$  اندازه  $\theta$  در مبدأ زمان، به ازاء  $t = 0$  است.  
در حرکت فوق الذکر جابه جایی  $x$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (3-1)$$

ظاهراً این معادله با معادله (1-1) که حرکت هماهنگ ساده از آن پیروی می کند، تفاوت دارد. ولی براحتی می توان اثبات نمود که آنها مساوی یکدیگرند، زیرا به ازاء زاویه  $\theta$  داریم:

$$\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

از مساوی قراردادن معادلات (1-1) و (3-1) خواهیم داشت:

$$A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

به عبارت دیگر

$$\sin(\omega t + \varphi_0) = \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

اگر دو زاویه مساوی باشند یا اگر تفاضلشان مضرب صحیحی از  $2\pi$  باشد سینوسهای دو زاویه مساویند. ساده ترین حالت را در نظر می گیریم، در نتیجه می توان نوشت:

$$\varphi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (4-1)$$

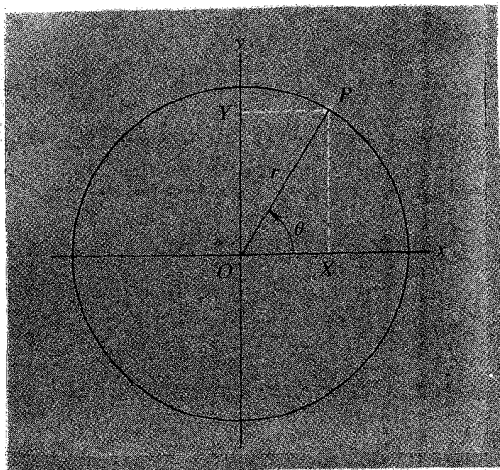
از هم ارزی معادلات (1-1) و (3-1) با رعایت شرط بالا می توان نتیجه گرفت که هر ارتعاش هماهنگ ساده را هم به صورت یک تابع سینوسی و هم به شکل یک تابع کسینوسی می توان بیان کرد. با اینهمه، در تحلیلهای آینده بیشتر توضیح خواهیم داد که چرا تابع کسینوسی بیشتر قابل استفاده است، و اثبات خواهیم کرد که تصویر جابه جایی یک بردار چرخشی بر روی یک محور مرجع در مختصات قطبی چرا بر حسب یک تابع کسینوسی است. بالاخره، شرح پاره ای از جنبه های ریاضی مطالب فوق را به مباحث بعدی موکول می کنیم. استفاده از حرکت دورانی یکنواخت برای بیان حرکت هماهنگ ساده در بیشتر

مواردی که تاکنون سروکار داشته ایم کاملاً مبنای هندسی دارد. همزمان با شروع این حرکت دورانی، حرکت هماهنگ ساده ای با دامنه  $A$  و بسامد زاویه ای  $\omega$  در راستای خط مستقیمی در سطح دایره نمایان می شود. در حالت مخصوص، اگر محور  $y$  را بر محور  $x$  که از نظر فیزیکی محور حرکت محسوب می شود، عمود در نظر گیریم، بردار چرخشی  $OP$  علاوه بر نوسانات حقیقی در راستای  $x$ ، نوساناتی در راستای  $y$  و عمود بر آن نیز رسم می کند، به طوری که خواهیم داشت:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (5-1)$$

این حرکت در راستای  $y$  وجود ندارد، در نتیجه می توانیم طوری عمل کنیم که همیشه با حرکت یک نقطه در دو بُعد رفتار می کردیم و با معادلات (5-1) آن حرکات را مشخص می نمودیم. وقتی انتهای بردار چرخشی روی دایره مسیر جابه جا می شود، ما فقط مولفه  $x$  را در نظر می گیریم. زیرا نتیجه این حرکت از نظر فیزیکی پرمعنی و حائز اهمیت است، به همین جهت به شرح آن مبادرت می شود.



شکل ۴-۱ نمایش یک بردار چرخشی در مختصات قائم و قطبی.

در اینجا روشی پایدار، همیشگی و بدون ابهام وجود دارد به طوری که می توان تشخیص داد که بین مولفه های حرکت کدام یک از نظر فیزیکی واقعیت دارد و کدامیک ندارد. فرض

می کنیم مختصات قطبی بردار OP (شکل ۱-۴) در صفحه  $(r, \theta)$  باشد. البته مولفه های قائم (دکارتی) این بردار  $(y, x)$  خواهند بود که از معادلات زیر به دست می آید:

$$y = r \sin \theta \quad x = r \cos \theta$$

بنابراین بردار کامل  $\mathbf{r}$  را می توان به صورت جمع برداری این دو مولفه عمود بر هم نشان داد. اگر در به کاربردن جمع برداری مفهوم معمولی تجزیه بردار را انتخاب کنیم در آن صورت برداریکای  $\mathbf{i}$  را برای نشان دادن جابه جایی در طول  $x$  و برداریکای  $\mathbf{j}$  را برای نشان دادن جابجایی در طول  $y$  دخالت خواهیم داد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{r} = i\mathbf{x} + j\mathbf{y}$$

ولی بدون داشتن هرگونه اطلاعات قانع کننده ای می توانیم بردار مورد نظر را با معادله زیر تعریف کنیم:

$$\mathbf{r} = x + jy \quad (1-6)$$

در هر حال دستورالعمل اولیه ای لازم است که معادله بر اساس آن شامل حالات زیر باشد:

۱- یک جابه جایی نظیر  $X$ ، بدون عوامل تعیین کننده در راستایی موازی با محور  $X$  انجام خواهد گرفت.

۲- از اصطلاح  $jz$  دستوری استنباط می شود که جابه جایی  $jz$  را در راستایی موازی با محور  $y$  قرار می دهد. در حقیقت، برای نشان دادن بردار معمولی رویهمرفته از به کار بردن علائم صرفنظر می شود، با معرفی یک کمیت  $Z$ ، بدیهی است نتیجه ای که از افزودن  $jz$  با  $X$  مثلاً (برای  $Z$ ) به دست می آید همانند  $\mathbf{r}$  است که در بالا تعریف شد. بنابراین مقدار قرار می دهیم.

$$z = x + jy \quad (1-7)$$

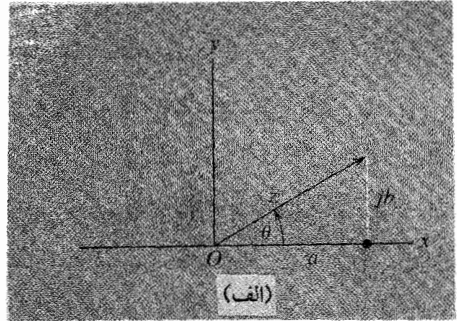
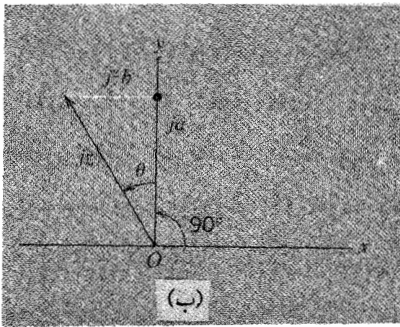
ما اکنون درباره نشانه زیبشتر توضیح می دهیم و آن را دستورالعملی تلقی می کنیم که به بردار چرخشی دستور می دهد تا (نسبت به وضع موجود)  $90^\circ$  در جهت پادساعت گرد بچرخد. مثالهای ویژه زیر را در نظر بگیرید:

الف. برای رسم  $jz$  خطی به طول  $b$  در راستای محور  $x$  می کشیم و سپس آن را  $90^\circ$  می چرخانیم. برای این جابه جایی کافی است خطی به طول  $b$  (نسبت به  $O$ ) در راستای  $y$  رسم کنیم.

ب. برای رسم کمیت  $j^2 b$ ، نخست  $b$  را، مانند دستور بالا، می کشیم، سپس این کمیت  $b$  را  $90^\circ$  دیگر می چرخانیم تا  $j^2 b$  مانند  $j(Jb)$  مشخص شود. ولی این بار از این کمیت (جدید) نکته مهمی استنباط می شود. دوبار چرخش  $90^\circ$  متوالی در یک جهت جابه جایی  $b$  را (که در جهت مثبت  $x$  است) به جابه جایی  $-b$  تبدیل می کند. در نتیجه هویت جبری ( $j^2$ ) آشکار می شود.

$$j^2 = -1 \quad (1-8)$$

بنابراین کمیت  $z$  را از نظر جبری می توان یکی از ریشه های مربعی  $-1$  در نظر گرفت (و  $z$ -ریشه مربعی دیگر آن است که در معادله بالا صدق می کند)<sup>۵</sup>.



شکل ۱-۵ (الف) نمایش یک بردار در صفحه مختلط.

(ب) ضرب کردن  $z$  در  $j$  یا یک چرخش  $90^\circ$  معادل و هم ارز است.

ج. برداری مانند  $z$  را در نظر می گیریم که طول مولفه های  $x$  و  $y$  آن به ترتیب  $a$  و  $b$  باشد (شکل ۱-۵ (الف)).  $z$  چه اندازه است؟ داریم:

$$z = a + jb$$

$$jz = ja + j^2 b$$

$$jz = ja + (-b)$$

۵- استفاده از نشانه  $\sqrt{-1}$  به جای  $j$  غالباً برای نشان دادن تقریبهای هندسی است. برای بیان همین مفهوم در متون ریاضی در بیشتر موارد از نشانه  $i$  استفاده می شود. فیزیکدانها و مهندسان ترجیح می دهند از همان مفهوم  $j$  استفاده کنند و نشانه  $i$  را به نمایش جریان الکتریکی اختصاص دهند. رعایت این نکته کاری بیهوده است، چرا که با گسترش اصول و قواعد ریاضی، استفاده از این نشانه ( $i$ ) در ریاضی نسبت به مسائل مدارهای الکتریکی بیشتر حائز اهمیت است.

جمع بندی مولفه های بردار جدید، که در طرف راست معادله بالاست، در شکل ۱-۵ (ب) نشان داده شده است. دستورالعمل (ترسیم با محاسبه) سازگار است! بردار براینند  $z$ ، درست از چرخش اضافی  $90^\circ$  بردار اصلی  $z$  به دست می آید.

چه این نوع تحلیل را قبلاً دخالت داده باشند یا نه، در هر حال شما می توانید تصور کنید که در طول یک خط تقسیم - یا به عبارت صحیحتر در طول یک پل - بین هندسه و جبر قدم می زنید. اگر کمیتهای  $a$  و  $b$ ، همانگونه که در مثال (ج) فرض شد، اعداد حقیقی باشند، در آن صورت ترکیب  $z = a + jb$  (از نظر جبری) به صورت یک عدد مختلط خواهد بود، ولی از نظر هندسی این ترکیب می تواند مانند یک جابه جایی در طول محوری در نظر گرفته شود که با محور  $x$  زاویه  $\theta$  می سازد. برای به دست آوردن  $\theta$ ، همانگونه که در شکل ۱-۵ (الف) روشن شده است. می توان از  $\tan \theta = \frac{b}{a}$  استفاده کرد.

در نمایش یک بردار با عدد مختلط، روشی پیش رو داریم که از نظر فیزیکی بخش مناسبی را به منظور تحلیل حرکت هماهنگ ساده به طور خودکار گزینش می کند. اگر یک مساله حرکت نوسانی با این روش حل شود و پاسخ نهایی به صورت  $z = a + jb$  به دست آید که در آن  $a$  و  $b$  هر دو اعداد حقیقی باشند در آن صورت  $a$  کمیّت مطلوب است و از  $b$  می توان چشم پوشید.

کمیّتی به شکل  $jb$  به تنهایی (با  $b$  حقیقی) صرفاً موهومی (انگاری) نامیده می شود. به همین جهت شاید دلیل این اصطلاح از لحاظ ریاضی نامناسب باشد، زیرا در بسط مفهوم عدد از حقیقی تا مختلط، یک عدد « موهومی » مانند  $jb$  وجود دارد که با عدد حقیقی  $a$  هم موقعیت است. این اصطلاح همان گونه که در تحلیل نوسانات یک بعدی به کار برده شده است، از نظر فیزیکی در مورد بخشهای حقیقی و غیر حقیقی یک حرکت دو بُعدی قابل تصور نیز - همچنانکه قبلاً هم دیده ایم - مصداق دارد.

## آشنایی با تابع نمایی مختلط

بحث پیشین ظاهراً نکته چندان مهمی به تحلیل سابق ما نیفزوده است. ولی اکنون در صددیم نکته مهمی را، در مورد نوعی تابع ریاضی که این بسط متوجه آن است، بیان کنیم. منظور از نوعی تابع، تابع نمایی مختلط است - یا اگر بخواهیم بیشتر مشخص نماییم، تابع نمایی را در حالتی در نظر می گیریم که نما، عددی موهومی باشد. البته در پایان

آخرین مبحثی که گذشت به جنبهٔ ریاضی عدد موهومی اشاره شده است. پس از آشنایی با این نوع تابع، در صورتی که با دقت بیشتری به حل چند مساله ریاضی در زمینهٔ حرکت ارتعاشی اقدام کنیم، تسلط پیدا خواهیم کرد و مسائل بعدی را براحتی حل می‌کنیم. بدیهی است این تسلط و اشراف بر حل مسائل را فوراً پیدا نخواهیم کرد، بلکه هر قدر بیشتر و بیشتر مساله در این زمینه حل کنیم، بیش از پیش به عمق مطلب پی می‌بریم. ما تفسیر بیشتر در این باره را با بسط توابع سینوسی و کسینوسی شروع می‌کنیم:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \quad (9-1)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots \quad (10-1)$$

اگر با این بسطها آشنایی قبلی ندارید، بسط آنها با استفاده از قضیه تیلور راحت است. اکنون می‌توان بسط مرکب زیر را تشکیل داد:

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (11-1)$$

دیدیم که  $(-1)$  را می‌توان با  $j$  نشان داد، بنابراین معادله بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(j\theta)^m}{m!} + \dots \quad (12-1)$$

۶ - با استفاده از قضیه تیلور

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{\theta^2}{2!} f''(0) + \dots$$

می‌توان نوشت:

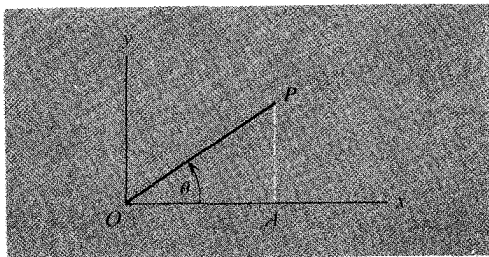
$$\sin \theta = \sin 0 + \theta \cos 0 + \frac{\theta^2}{2!} (-\sin 0) + \frac{\theta^3}{3!} (\cos 0) \dots$$

$$\cos \theta = \cos 0 + \theta (-\sin 0) + \frac{\theta^2}{2!} (-\cos 0) + \frac{\theta^3}{3!} (\sin 0) \dots$$

از آنجا که طرف راست این معادل دقیقاً شکل سریهای نمایی را دارد، لذا می توانیم همانند آن را ذیلاً بنویسیم:

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \quad (1-13)$$

این نتیجه از نظر ریاضی بسیار چشمگیر و معنی دار است، زیرا بین هندسه صفحه ای (که با توابع مثلثاتی نمایش داده شده) و جبر (که با تابع نمایی مشخص شده) ارتباطی روشن برقرار می کند. ر. پ. فینمن<sup>۷</sup> آن را «که شاخص ترین فرمول در ریاضیات است گوهر گرانبها و تحسین بر انگیز» نامیده است. این نتیجه در سال ۱۷۴۸ توسط لئونارد اولر<sup>۸</sup> به صورت مدون در آمده است.



شکل ۱-۶ تفسیر هندسی رابطه اولر،  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

اکنون این نتیجه را به صورت هندسی نمایش می دهیم. با استفاده از محورهای Ox «حقیقی» و Oy «موهومی» در شکل (۱-۶)، OA را با طولی مساوی با  $\cos \theta$ ، و AP را با طولی مساوی با  $\sin \theta$  رسم می کنیم. روشن است که جمع برداری این دو کمیت یعنی Op، به طول واحد، با محور x زاویه  $\theta$  می سازد. با بیان جامعتر، ضرب هر عدد مختلط z در  $e^{j\theta}$  با زبان هندسی قابل توصیف است، به این ترتیب که بردار z بدون آنکه در طولش تغییری داده شود - در جهت مثبت چرخش به اندازه زاویه  $\theta$  چرخانده شود. (تمرین: آن را ثابت کنید.)

### استفاده از تابع نمایی مختلط

چرا وارد کردن معادله (۱-۱۳) در تحلیل ارتعاشات سهم بسزایی خواهد داشت؟

7.R.P.Feynman,R.B. Leighton, and M.L. Sands, Feynman Lectures on Physics, Vol. I. Addison \_ Wesley, Reading, Mass. , 1963

8.Leonard Euler



نخستین دلیل خاصیت ویژه ای است که تابع نمایی دارد. این تابع پس از هر بار که دیفرانسیل یا انتگرال گرفته شود به صورت اول در می آید. در مورد مسائلی که با مسائل جابه جاییهای تناوبی و مشتقهای زمانی این جابه جاییها ارتباط پیدا خواهند کرد. اگر، همان طور که غالباً اتفاق می افتد، سرعت و شتاب با خود معادله اصلی حرکت، که شامل دوره تناوب است، متناسب باشد، در آن صورت استفاده از یک تابع مثلثاتی ساده برای بیان حرکت به یک ترکیب دو جمله ای از سینوس و کسینوس منجر خواهد شد که مطلوب نیست. مثلاً:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{اگر}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{باشد، آنگاه}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{و}$$

از طرف دیگر، اگر ما با ترکیب  $x + jy$  سر و کار داشته باشیم، با دانستن  $x$  و  $y$  که در معادلات (۱-۵) داده شده است، ذیلاً خواهیم داشت:

$$z = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{در مثال.}$$

$$z = Ae^{j(\omega t + \alpha)} \quad \text{اگر } x = \text{جزء حقیقی } z^9 \text{ باشد. آنگاه}$$

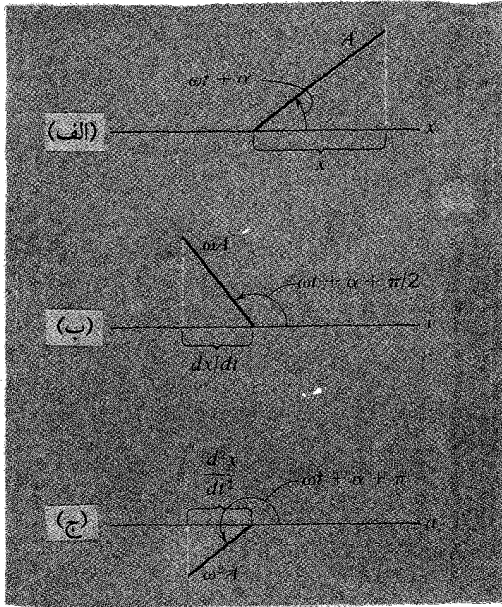
$$\frac{dz}{dt} = j\omega Ae^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega z$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (j\omega)^2 Ae^{j(\omega t + \alpha)} = -\omega^2 z$$

این سه بردار (با استفاده از سه نمودار جداگانه، زیرا از لحاظ فیزیکی بیانگر سه نوع کمیت متفاوت - جابه جایی، سرعت، شتاب - اند)، در شکل ۱-۷ نشان داده شده است. در هر

۹- جزء حقیقی  $z$  غالباً به صورت  $\text{Re}(z)$  خلاصه می شود.

حال جزیی که به فیزیک مربوط می شود مشخصاً جزء حقیقی بردار مورد سؤال است. این جزء و فاز روابط با یک نظر اجمالی (در شکل) نمایانند (موضع هر عامل  $z$ ، با افزودن زاویه  $\frac{\pi}{4}$  به فاز قبلی مشخص می شود). این مثال خیلی سطحی است به طوری که توان و کارآیی روش را واقعاً به نمایش نمی گذارد، ولی در عوض ما را با کاربردهای اساسی بیشتری در این زمینه که با اختصار کامل مطرح شده است آشنا می کند.



شکل ۷-۱ الف) بردار جابه جایی  $Z$  و تصویر حقیقی اش  $x$ . ب) بردار سرعت  $\frac{dz}{dt}$  و تصویر حقیقی اش  $\frac{dx}{dt}$ .

ج) بردار شتاب  $\frac{d^2z}{dt^2}$  و تصویر حقیقی اش  $\frac{d^2x}{dt^2}$ .

## مسائل

۱-۱ برداری مانند  $Z$  را در نظر بگیرید که با معادله  $Z = z_1 z_2$  معین می شود و در آن

$$z_2 = c + jd, \quad z_1 = a + jb$$

الف) نشان دهید که طول  $Z$  با حاصلضرب طولهای  $z_1$  و  $z_2$  مساوی است.

(ب) نشان دهید که زاویه بین  $Z$  و محور  $X$  با مجموع زوایایی که  $Z_1$  و  $Z_2$  جداگانه با  $X$  می سازند مساوی است.

۲-۱ برداری مانند  $Z$  را در نظر بگیرید که با معادله  $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$  مشخص شده است ( $Z_2 \neq 0$ )، در این رابطه  $Z_1 = a + jb$  و  $Z_2 = c + jd$ .

(الف) نشان دهید که طول  $Z$  مساوی نسبت طولهای  $Z_1$  به  $Z_2$  است.

(ب) نشان دهید که زاویه بین  $Z$  و محور  $X$  با تفاضل زوایایی که  $Z_1$  و  $Z_2$  جداگانه با  $X$  می سازند مساوی است.

۳-۱ نشان دهید که ضرب هر عدد مختلط  $Z$ ، در  $e^{j\theta}$  در شکل هندسی قابل توصیف است بگونه ای که  $Z$  به اندازه زاویه  $\theta$  در جهت مثبت چرخانده شود ولی طولش تغییر نکرده باشد.

۴-۱ (الف) اگر  $Z = Ae^{j\theta}$  باشد، نتیجه بگیرید که  $dz = jz d\theta$ ، و معنی این رابطه را در یک نمودار بردار بیان کنید.

(ب) اندازه ها و راستاهای بردارهای  $(2 + j\sqrt{3})^2$  و  $(2 - j\sqrt{3})^2$  را پیدا کنید.

۵-۱ پس از گرفتن مشتقهای متوالی  $e^{j\theta}$  بر حسب  $\theta$ ، فقط یک بار در  $Z$  ضرب می شود:

$$\frac{d}{d\theta}(Ae^{j\theta}) = jAe^{j\theta}$$

نشان دهید که این دستور هنگامی کارایی دارد که از نمایش سینوسی  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$  استفاده شود.

۶-۱ رابطه اولر به صورت  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$  داده شده است، پیدا کنید:

(الف) نمایش هندسی  $e^{-j\theta}$ ،

(ب) نمایش نمایی  $\cos\theta$ ،

(ج) نمایش نمایی  $\sin\theta$  را.

۷-۱ (الف) درستی فرمولهای  $\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$  و  $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$  را با استفاده از

سریهای مناسب اثبات کنید.

(ب) روابط بالا را به طور هندسی به وسیله نمودارهای برداری در صفحه  $xy$

نمایش دهید.

۸-۱ با استفاده از نمایشهای نمایی برای  $\sin\theta$  و  $\cos\theta$ ، درستی تساویهای مثلثاتی زیر را

اثبات کنید:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ (الف)}$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \text{ (ب)}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \text{ (ج)}$$

۹-۱ آیا شما راضی هستید برای شیئی که از دید یک ریاضیدان لژی\$ ارزش دارد ۲۰ سنت

پردازید؟ (یادآور می شویم که  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ )

۱۰-۱ تحقیق کنید که حل معادله دیفرانسیل  $-k^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}$  به صورت زیر است؛

$$y = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

A و B ثابتهای اختیاری هستند. هم چنین نشان دهید که این حل را می توان به صورت زیر

نوشت:

$$y = C \cos(kx + \alpha) = \text{Re}[e^{j(kx + \alpha)}] = \text{Re}[(e^{j\alpha})e^{jkx}]$$

C و  $\alpha$  را به صورت توابعی از A و B در آورید.

۱۱-۱ جرم آویخته به انتهای یک فنر با دامنه ۵cm و بسامد یک Hz (سیکل در ثانیه) نوسان

می کند. این جرم در  $t = 0$  در وضعیت تعادل است ( $x = 0$ ).

(الف) با استفاده از شکل کلی  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ ، معادلاتی را به دست آورید

که بیانگر وضعیت جرم بر حسب زمان باشد، اندازه های عددی A،  $\omega$  و  $\alpha$  داده شده

است.

$$\text{(ب) } x, \frac{dx}{dt}, \text{ و } \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ در } t = \frac{\pi}{3} \text{ ثانیه چه اندازه اند؟}$$

۱۲-۱ نقطه ای با تندی ثابت ۵۰ cm/sec روی دایره ای حرکت می کند. دوره تناوب

این نقطه بر روی محیط دایره ۶ ثانیه است. در لحظه  $t = 0$  خطی که از مرکز دایره به نقطه

وصل می شود با محور X زاویه  $30^\circ$  می سازد.

(الف) معادله مختصات X نقطه را بر حسب زمان، که به شکل  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$

است، به دست آورید، اندازه های عددی A،  $\omega$  و  $\alpha$  داده شده است.

$$\text{(ب) اندازه های } x, \frac{dx}{dt}, \text{ و } \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ را در لحظه } t = 2 \text{ ثانیه تعیین کنید.}$$

## برهم نهی حرکات تناوبی

### برهم نهی ارتعاشات یک بعدی

بسیاری از موقعیتهای فیزیکی ایجاب می کند که دو یا چند ارتعاش هماهنگ در یک دستگاه همزمان به کار برده شوند. در این باره مثالهایی مخصوصاً متداول در آکوستیک (صوت) وجود دارد. وقتی یک سوزن گرامافون یا دیافراگم میکروفون و یا پرده صماخ گوش انسان تحت تاثیر ترکیب چنین ارتعاشات پیچیده ای قرار می گیرند کمابیش جابه جایهایی پیدا می کنند که تابع زمان است. ما ذیلاً به شرح چند مورد خاص از این فرایند ترکیب (ارتعاشات) خواهیم پرداخت که همیشه از این فرض بسیار اساسی پیروی می کنند: بر آیند دو یا چند ارتعاش هماهنگ با مجموع آن چند ارتعاش مساوی است. در تحلیل حاضر این فرایند مانند یک مساله ریاضی محض رفتار می کند. ولی سرانجام به صورت این پرسش فیزیکی در می آید: آیا جابه جایی حاصل از دو آشفتگی که با هم اثر کنند با برهم نهی جابه جایهای مستقیم الخط آنها که به طور جداگانه روی می دهد یکسان است؟ پاسخ این پرسش ممکن است آری یا نه باشد. پاسخ چه آری باشد یا نه، در هر حال، جابه جایی با نیروی مؤثر دقیقاً متناسب است. اگر این برهم نهی شامل جمع ساده باشد در این صورت دستگاه را خطی گویند؛ و بیشتر بحث ما نیز چنین دستگاههایی است. برای یک لحظه فرض می کنیم با یک مساله ریاضی محض سرو کار داریم بنابراین دو (یا چند) جابه جایی را که هر کدام یک تابع سینوسی بر حسب زمان است با هم جمع می کنیم. البته فعلاً نتایج کاربرد فیزیکی برهم نهی را در اینجا مطرح نمی کنیم.

## برهم نهی دو ارتعاش با بسامدهای مساوی

فرض کنید دو حرکت هماهنگ ساده با معادلاتی به شرح زیر داریم:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

ممکن است این جابه جایی را به صورت یک ارتعاش هماهنگ منفرد به شکل زیر در آوریم:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

با استفاده از بردار چرخان و مشخصات حرکت هماهنگ ساده (SHM) می توان همین نتیجه را با روش بسیار دقیق هندسی به دست آورد. در شکل ۱-۲ (الف)، فرض کنید بردار  $OP_1$  بردار چرخان به طول  $A_1$  با محور  $x$  ها که بر حسب زمان  $t$  است، زاویه  $(\omega t + \alpha_1)$  بسازد. در این صورت جمع این دو بردار، بردار  $OP$  است که با استفاده از قانون متوازی الاضلاع تعیین می شود. از آنجا که  $OP_1$  و  $OP_2$  با سرعت زاویه ای یکسان  $\omega$  می چرخند، می توان تصور کرد که متوازی الاضلاع  $OP_1 P P_2$  مانند یک جسم صلب (بدون تغییر شکل)، با همان سرعت زاویه ای  $(\omega)$  می چرخد. بردار  $OP$  را می توان از جمع برداری  $OP_1$  و  $OP_2$  (که مساوی  $OP_2$  است) به دست آورد. چون  $\angle N_1 OP_1 = \omega t + \alpha_1$  و  $\angle KP_1 P = \omega t + \alpha_2$  لذا زاویه بین  $OP_1$  و  $PP_2$  درست مساوی  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  می شود و می توان نوشت:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

و فاز ثابت  $\alpha$  مربوط به ارتعاش مرکبی است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\alpha = \alpha_1 + \beta$$

با استفاده از توابع نمایی مبهم مستقیماً می توان به همین نتایج رسید. در این حالت برداری چرخان  $OP_1$  و  $OP_2$  با معادلات زیر مشخص می شوند:

$$z_1 = A_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)}$$

$$z_2 = A_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)}$$

و برآیند آنها به صورت زیر نوشته می شود:

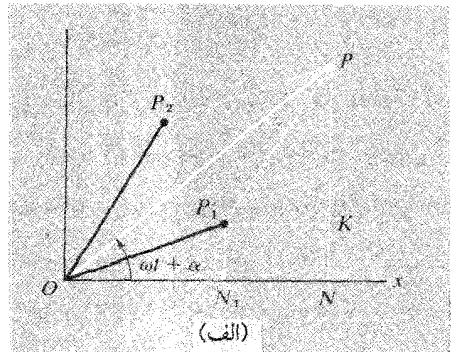
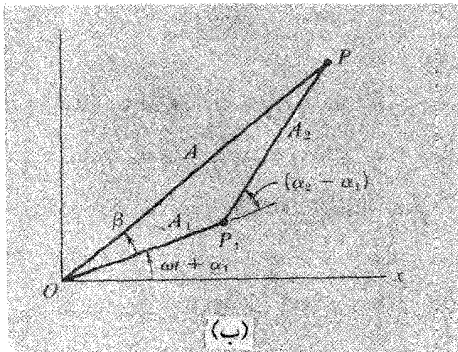
$$z = z_1 + z_2 = A_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)}$$

استفاده از شکل نمایی این مزیت را دارد که به ما اجازه می دهد بردار مشترك را به صورت  $\exp j(\omega t + \alpha_1)$  در می آوریم:

$$z = e^{j(\omega t + \alpha_1)} [ A_1 + A_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} ] \quad (2-2)$$

یادآور می شویم که از  $e^{j\theta}$  دقیقاً می توان فهمید که چرخش زاویه  $\theta$  در جهت مثبت است. با دیدن ترکیب جمله های داخل کروشه مشخص می شود که بردار به طول  $A_2$  و بردار به طول  $A_1$  که با هم زاویه  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  می سازند، با یکدیگر جمع شده اند، و ضریب  $\exp[j(\omega t + \alpha_1)]$  در جلوی کروشه بیانگر آن است که تمام نمودار در جهت مشخص شده در شکل ۲-۱ (ب) می چرخد. اگر این نکته به عنوان مزیت این فنون هندسی در نظر گرفته نشود در این صورت ترکیب دو جمله مجزای معادله (۲-۱) کاری بیهوده و غیر آموزنده است، و اطلاعات کافی را نیز در اختیار نخواهد گذاشت.

به طور کلی اندازه  $A$  و  $\alpha$  برای آشفستگی برآیند بیش از این نمی تواند ساده و مختصر شود. البته در حالت مخصوص دو حرکت ارتعاشی با دامنه های مساوی این ساده کردن ارزشی ندارد.



شکل ۲-۱ (الف) برهم نهی دو بردار چرخان با بسامدهای یکسان.

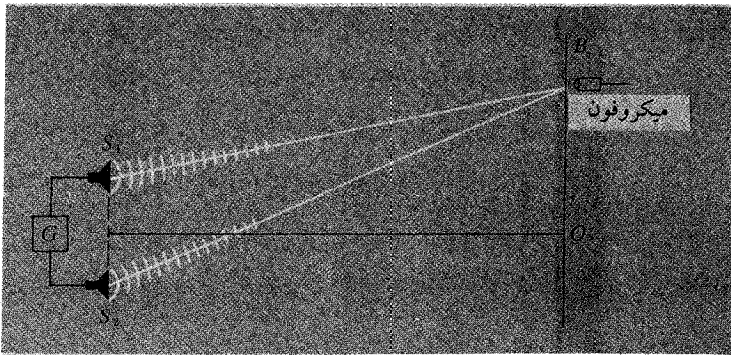
(ب) تشکیل مثلث برداری برای به دست آوردن بردار چرخان برآیند.

اگر اختلاف فاز  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  بین دو ارتعاش هم دامنه را  $\delta$  بنامیم. با استفاده از قواعد هندسی در مساله برداری شکل ۲-۱ (ب) نتایج زیر کمابیش استنباط می شود:

$$\beta = \frac{\delta}{2}$$

$$A = 2A_1 \cos \beta = 2A_1 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

اگر دو بلندگوی مشابه، سیگنال معینی را که از یک مولد به آنها داده می شود به طور سینوسی پخش کنند، ارتعاشات صوتی حاصل توسط یک میکروفون در نقطه ای به فاصله نسبتاً دور به طور واضح دریافت و ترکیب می شوند (در شکل ۲-۲) نشان داده شده است). بدیهی است این نوع ترکیب خیلی زیاد اتفاق می افتد. اگر میکروفون در طول خط



شکل (۲-۲) تنظیم دستگاهها برای آشکار ساختن اختلاف فاز در بر هم نهی سیگنالها که از دو بلندگو پخش می شود. تابع وضعیت میکروفون است.

OB (از O به طرف B) حرکت داده شود اختلاف فاز  $\delta$  از اندازه اولیه اش در نقطه O که صفر است، به طور پیوسته و یکنواخت زیاد می شود. و اگر طول موج امواج صوتی از فاصله دو بلندگو خیلی کوتاهتر باشد ممکن است دامنه برآیند A در چند نقطه واقع، بین O و B به اندازه ای کم شود که به صفر برسد. و اندازه بیشینه دامنه (برآیند) در نقاط دیگری که در وسط دو صفر واقعند احتمالاً به  $2A$  خواهد رسید. (در باره جزئیات این مبحث در فصل ۸ توضیح خواهیم داد.)



## برهم نهی ارتعاشات با بسامدهای متفاوت: زنش

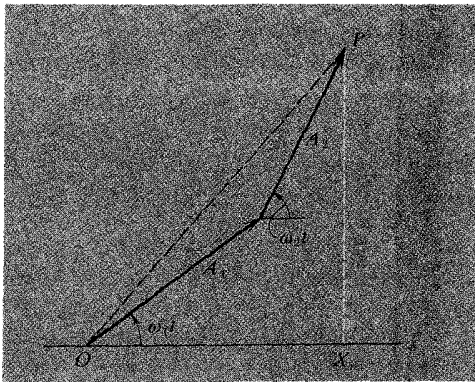
اکنون دو ارتعاش با دامنه های مختلف  $A_1$  و  $A_2$  و بسامدهای زاویه ای متفاوت  $\omega_1$  و  $\omega_2$  را در نظر می گیریم. به روشنی دیده می شود که این حالت با حالت قبلی تفاوت دارد. زیرا در این حالت صفر نشدن اختلاف فاز بین ارتعاشات دائماً در حال تغییر است. به طور کلی در این حالت صفر نشدن اختلاف، اهمیت چندانی ندارد. برای ساده شدن محاسبات ریاضی، فاز اولیه هر یک از ارتعاشات را صفر فرض می کنیم به همین جهت معادلات آنها به صورت زیر می باشد:

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

در این حالت جابه جایی برآیند دو ارتعاش، در یک لحظه اختیاری در شکل (۲-۳) به صورت (OX) نشان داده شده است.

طول OP بردار برآیند همواره باید بین مجموع و تفاضل  $A_1$  و  $A_2$  باشد، و مقدار جابه جایی خود OX می تواند از صفر تا  $A_1 + A_2$  تغییر کند.



شکل ۲-۳ برهم نهی بردار های چرخان با دوره های تناوب مختلف

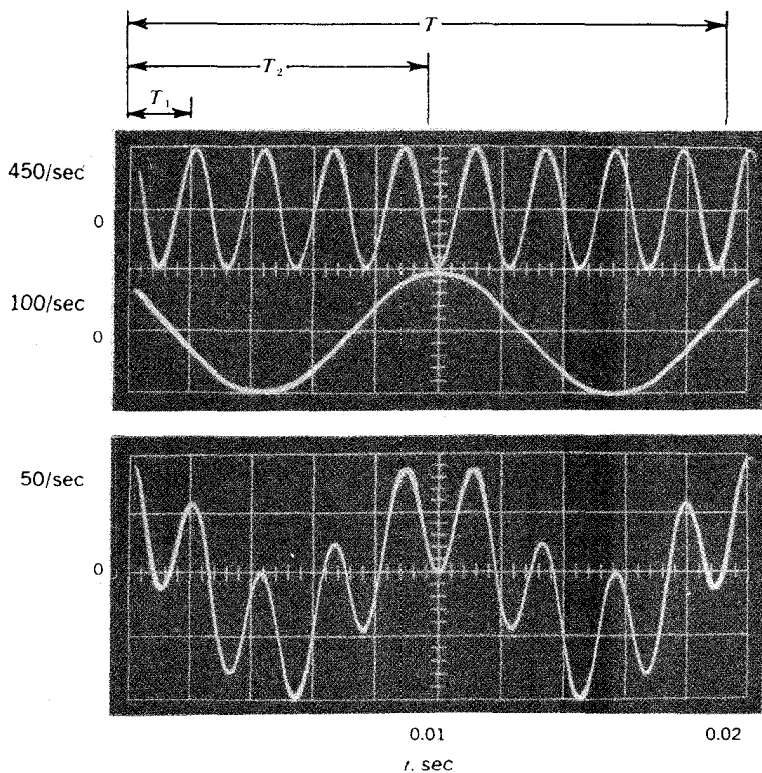
معمولاً بین  $\omega_1$  و  $\omega_2$  رابطه تقریباً ساده ای وجود دارد، مگر آنکه جابه جایی برآیند تابع پیچیده ای نسبت به زمان باشد، که در آن صورت شاید آن حرکت پیچیده و در نتیجه جابه جایی ناشی از آن در همان نقطه هرگز تکرار نشود. در حرکت مرکب، شرط اصلی تناوبی بودن، آن است

که دوره های تناوب مؤلفه حرکات متوافق باشند، یعنی به صورت دو عدد صحیح  $n_2$  و  $n_1$  در رابطه زیر صدق کند:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad (4-2)$$

از این رابطه اندازه  $T$  یعنی دوره تناوب حرکت برآیند با استفاده از کوچکترین اعداد صحیح  $n_1$  و  $n_2$  به دست خواهد آمد<sup>۱</sup>.

اگر دوره های تناوب با بسامدها مانند نسبت دو عدد صحیح کوچک کاملاً مشخص باشند باز هم مخصوصاً ظاهر کلی حرکت شکل ساده ای ندارد. شکل (۲-۴) دو مؤلفه حرکت ارتعاش سینوسی را با بسامدهای  $450 \text{ Hz}$  و  $100 \text{ Hz}$  نشان می دهد. زمانی که حرکت متناوباً



شکل ۲-۴ برهم نهی دو حرکت سینوسی با دوره های تناوب متوافق (ثانیه  $T_1 = \frac{1}{450}$  ثانیه  $T_2 = \frac{1}{100}$ ) (عکس از جان روز

نفلد (Jon Rosenfeld)، مرکز آموزشی پژوهشی . M.I.T.)

۱- مثلاً اگر نسبت  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  یک عدد گنگ (مانند  $\sqrt{2}$ ) باشد، الگوی جابجایی قبلی پس از مدتی نه چندان طولانی تکرار خواهد شد.

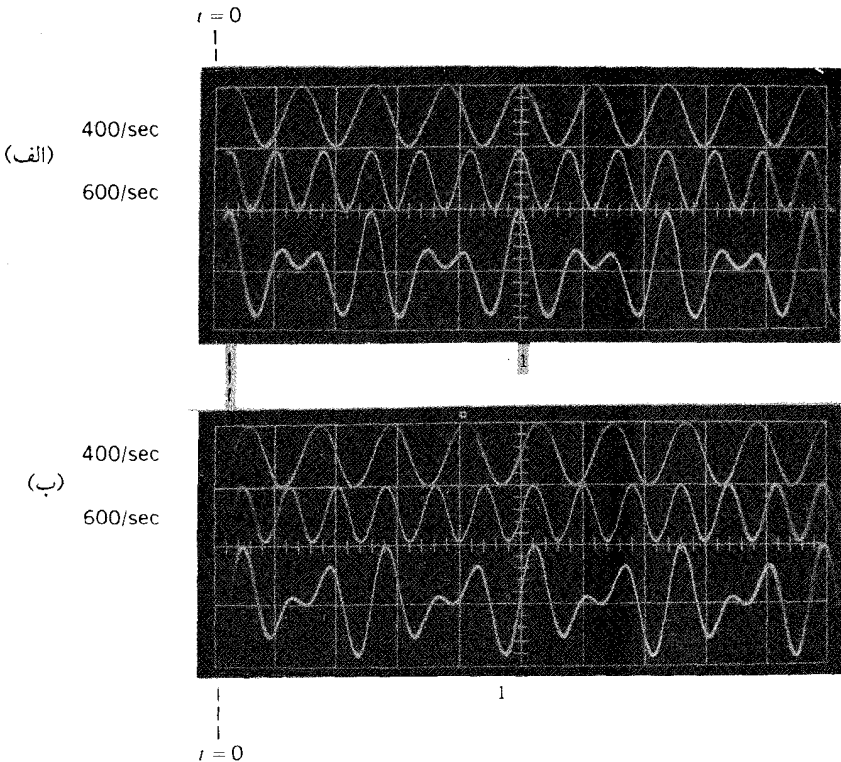
تکرار می شود ۰/۰۲ ثانیه است.

$$T = \frac{n_1}{450} = \frac{n_2}{100}$$

از شرط

می توان نتیجه گرفت که طبق معادله  $(4-2)$   $n_1 = 9$  و  $n_2 = 2$  باید باشد.

در حالات فوق الذکر که یک ارتعاش مبتنی بر دو دوره تناوب متوافق است، شکل ظاهری ارتعاش برآیند ممکن است به طور محسوسی به فاز اولیه نسبی دو حرکت ارتعاشی ترکیب شونده بستگی داشته باشد. این تأثیر در شکل  $(2-5)$  (الف) و (ب) نشان داده شده است. چگونگی ترکیب ارتعاشات با دامنه ها و بسامدهای معین در هر دو شکل بنحوی نمایان است. فقط رابطه فاز در دو حالت متفاوت است. جالب آنکه اگر این ارتعاشات هوا به پرده صماخ گوش برخورد کند، تأثیر شنوایی هر یک از دو ارتعاش ترکیب شونده به تنهایی تقریباً



شکل ۲-۵ (الف) برهم نهی دو حرکت سینوسی متوافق با بسامدهای  $400 \text{ s}^{-1}$  و  $600 \text{ s}^{-1}$  که بیشینه (ماکزیمم) ها بر  $t = 0$  منطبقند.

(ب) برهم نهی همان دو حرکت سینوسی اگر صفرهایشان بر  $t = 0$  منطبق باشد. (عکس از جان روز

نفلد، مرکز آموزشی پژوهشی. M.I.T.)

غیر قابل تشخیص است. به نظر می‌رسد که گوش انسان به هنگام شنیدن آمیزه‌ای از ارتعاشات هماهنگ نسبت به فاز حساستر است، دامنه‌ها و بسامدهای حاکم بر وضعیت ارتعاش گرچه از جهات مختلف در شنوایی مؤثرند ولی این تاثیر منوط به رابطه‌ی فازها است که به طور محسوس بر روی شکل موج اثر می‌گذارد. اگر تعداد ارتعاشات ترکیب شونده که بیش از دو ارتعاش است رابطه‌ی فاز معینی داشته باشند، باز هم اثر چند جانبه‌ی شنوایی محسوس و تغییر شکل موج کاملاً مشهود است.

اگر بسامدهای دو حرکت هماهنگ ساده خیلی نزدیک به هم باشند، از ترکیب آشفستگی آنها ارتعاشی به نام زنش<sup>۲</sup> ظاهر خواهد شد. این پدیده بیانگر آن است که ارتعاش مرکب اساساً یک آشفستگی تلقی می‌شود. بسامد آن به میانگین دو بسامد ارتعاشات ترکیب شونده مساوی است و دامنه‌اش متنوباً نسبت به زمان تغییر می‌کند. چرخه‌ی این ارتعاش شامل چند چرخه ارتعاش اصلی است.

هرگاه جمع دو حرکت هماهنگ ساده با دامنه‌های مساوی را در نظر بگیریم. تاثیر زنش، آسانتر تجزیه و تحلیل می‌شود:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

با جمع این دو معادله به دست می‌آید<sup>۳</sup>:

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (5-2)$$

## 2-Beat

۳- با در نظر گرفتن دو رابطه مثلثاتی زیر:

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi$$

و جمع دو طرف روابط بالا - نظیر به نظیر - به دست خواهد آمد:

$$\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) = 2\cos\theta \cos\varphi$$

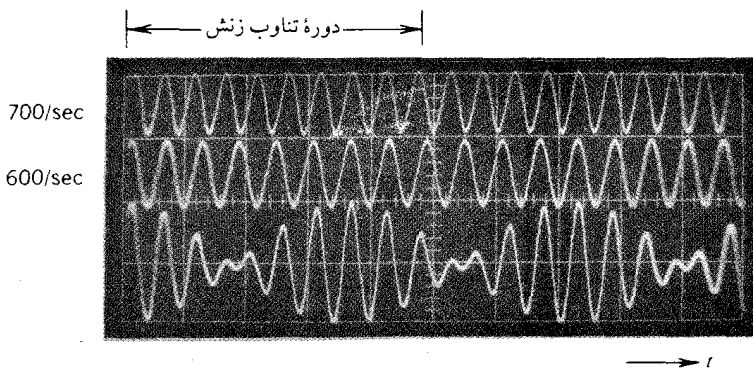
با مساوی قرار دادن  $\theta + \varphi = \alpha$  و  $\theta - \varphi = \beta$  رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

در این حالت که مورد بحث است به جای  $\alpha$  اندازه  $\omega_1 t$  و به جای  $\beta$  اندازه  $\omega_2 t$  را قرار می‌دهیم تا رابطه (5-2) به دست آید.

این جمع به روشنی نشان می دهد که اندازه های  $\omega_1$  و  $\omega_2$  هر چه باشد نتیجه اش از بعد ریاضی دقیق خواهد بود ولی تحقق آن به عنوان یک پدیده زنش از بعد فیزیکی فقط هنگامی ممکن است که  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$  باشد؛ یعنی اگر تعداد چرخه های اصلی اندکی بیشتر باشد، ارتعاش منتجه تقریباً به صورت یک ارتعاش سینوسی با دامنه ثابت و بسامد زاویه ای  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  در می آید.

شکل ۶-۲ نمودار مربوط به ترکیب دو حرکت ارتعاشی را با نسبت بسامد  $\frac{7}{6}$  نشان می دهد.



شکل ۶-۲ برهم نهی حرکات سینوسی با بسامدهای تقریباً مساوی ( $700 \text{ s}^{-1}$  و  $600 \text{ s}^{-1}$ ) موجب زنش می شود (عکس از جان روز نفلد، مرکز آموزشی پژوهشی .M.I.T.).

این نسبت تقریباً به اندازه کافی بزرگ است و می تواند موجب ترکیب دو ارتعاش و تشکیل ارتعاش زنش گردد.

جابه جایی برآیند ممکن است در قالب یک جفت معادله به شرح زیر تعریف و تعیین شود:

$$x = \pm 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (6-2)$$

چون عامل نوسان کننده در معادله (۵-۲) یعنی  $\cos(\omega_1 + \omega_2) \frac{t}{T}$  بسرعت کم و زیاد می شود ولی همیشه بین دو حد  $\pm 1$  قرار دارد. به این ترتیب معادله (۶-۲) با تعدیل (مدولاسیون) نسبتاً کند دامنه این نوسان رسم می شود. اگر به شکل (۶-۲) مراجعه کنیم می بینیم که زمان بین دو صفر متوالی مربوط به دو آشفتگی تعدیل کننده نصف دوره تناوب

عامل تعدیل کننده ای است که با معادله (۲-۶) رسم شده است. یعنی با زمان  $\frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$  مساوی است. نتیجه آنکه بسامد زنش ارتعاشات در دیپازون که اختلاف بسامدهایشان همین اندازه است و نصف این بسامد نیست با شنیدن تشخیص داده می شود. ممکن است با نخستین نظر اجمالی به معادله (۲-۵) همین نتیجه نیز به دست آید. بنابراین در حالت مخصوص اگر دو دیپازون با بسامدهای ۲۵۵، ۲۵۷ ارتعاش در هر ثانیه در کنار هم به ارتعاش درآیند. بر اثر ترکیب آنها صدایی شنیده می شود که ارتعاش متوسط آن C (۲۵۶) ارتعاش در هر ثانیه) است و در هر ثانیه دو بار به بیشینه می رسد.

### بر هم نهی چند ارتعاش با بسامدهای یکسان<sup>۲</sup>

روشهایی را که تا کنون شرح داده ایم به آسانی می توانیم در مورد ترکیب هر چند ارتعاش که بخواهیم گسترش دهیم. حالت کلی گرچه اهمیت چندانی ندارد ولی حالت خاصی است که بسیار جالب است و در سطح وسیعی کاربرد دارد. در این -نالت که چند حرکت هماهنگ ساده بر هم نهی دارند بسامد و دامنه همه آنها یکسان است. و اختلاف فاز هر حرکت نسبت به حرکت بعدی نیز مقدار ثابتی است وقتی این مسأله با آثار تداخلی چند چشمه در اپتیک و سایر فرایندهای موج به دقت بررسی و مقایسه شود به وجود ارتباط ویژه ای بین آنها پی می بریم.

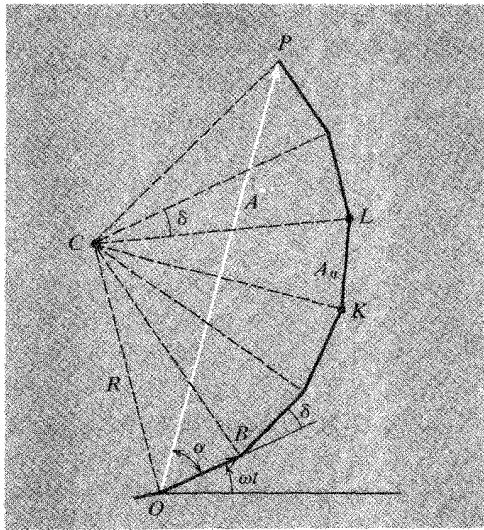
این وضعیت در شکل (۲-۷) نمایش داده شده است. فرض می کنیم، N ارتعاش در شرایطی با هم ترکیب می شوند که دامنه هر کدام  $A_0$  و اختلاف فاز هر یک نسبت به دیگری مساوی زاویه  $\delta$  باشد. در این صورت معادله حرکت ارتعاشی نخستین مولفه<sup>۳</sup> به صورت ساده زیر نوشته می شود:

$$x = A_0 \cos \omega t$$

و آشفتگی برآیند با معادله زیر معین خواهد شد:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

۴- این قسمت ممکن است حذف شود بدون آنکه به تسلسل مطالب لطمه وارد آید.



شکل (۷-۲) برهم نهی چند بردار چرخان با دوره تناوب یکسان و رشد ثابت اختلاف فاز.

در شکل هندسی (۷-۲) می بینیم که بردارهای ترکیب شونده، پهلوهای (اضلاع) به دنبال هم یک چند وجهی منظم (ناقص) را تشکیل داده اند. علاوه بر این می توان تصور کرد که این چند وجهی در داخل دایره ای به شعاع  $R$  و به مرکز  $C$  محاط شده است و همه گوشه هایش (از جمله نقاط  $L$  و  $K$ ) روی دایره قرار گرفته اند. به این ترتیب زاویه ای که راس آن  $C$  و روبروی دامنه  $A_0$  (یعنی  $KL$ ) است مساوی  $\delta$  و بین دو بردار مجاور واقع است. از اینرو زاویه کل  $OCP$  که راس آن  $C$  و روبروی بردار برابند  $A$  است مساوی  $N\delta$  خواهد بود. با در نظر گرفتن این نکات روابط هندسی زیر را می توان نوشت:

$$A = 2R \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$A_0 = 2R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

در نتیجه

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (7-2)$$

همچنین برای به دست آوردن زاویه فاز  $\alpha$  که برآیند A باید به همان اندازه نسبت به نخستین بردار مولفه بچرخد تا بر آن منطبق شود داریم:

$$\alpha = \angle \text{coB} - \angle \text{cop}$$

$$\angle \text{coB} = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$$

$$\angle \text{coP} = 90^\circ - \left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

نتیجه می شود:

$$\alpha = \frac{(N-1)\delta}{2} \quad (8-2)$$

از این رو ارتعاش برآیند در طول محور X ها با معادله زیر بیان می شود:

$$x = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \cos\left[\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right] \quad (9-2)$$

با این معادله رفتار توری پراش به طور اساسی بررسی می شود. این توری برای آنکه از یک باریکه نور به تنهایی بتواند تعداد بسیار زیادی آشفته‌گی‌های همانند با اختلاف فازهای مساوی تهیه کند، به شیوه دقیقی عمل می کند.

### ترکیب دو ارتعاش عمود بر هم

هر مطلبی که تاکنون مورد بحث و بررسی قرار گرفته به گونه ای با حرکت هماهنگ ارتباط داشته و از نظر فیزیکی فقط یک بعدی بوده است. حتی هنگامی که در تحلیل خود به مفهوم یک بردار چرخان در صفحه استناد می کنیم، باز هم حرکت مورد نظر را با تصویر بردار بر روی یک راستای معین نمایش می دهیم. اکنون دربارهٔ اختلاف اساسی مساله ترکیب دو ارتعاش هماهنگ واقعی عمود بر هم بحث خواهیم کرد. در این حالت حرکت برآیند در حقیقت یک حرکت دو بعدی است. این مساله از نظر فیزیکی جالب است. به همین دلیل آن را در اینجا مورد بررسی قرار می دهیم. این نوع حرکت را که درباره اش بحث می کنیم در مورد نوسانات سه بعدی به آسانی می توان گسترش داد. به طور کلی باید فرض کنیم که چنین حرکاتی امکان پذیر است. مثلاً در ساختار سه بعدی یک شبکه بلور



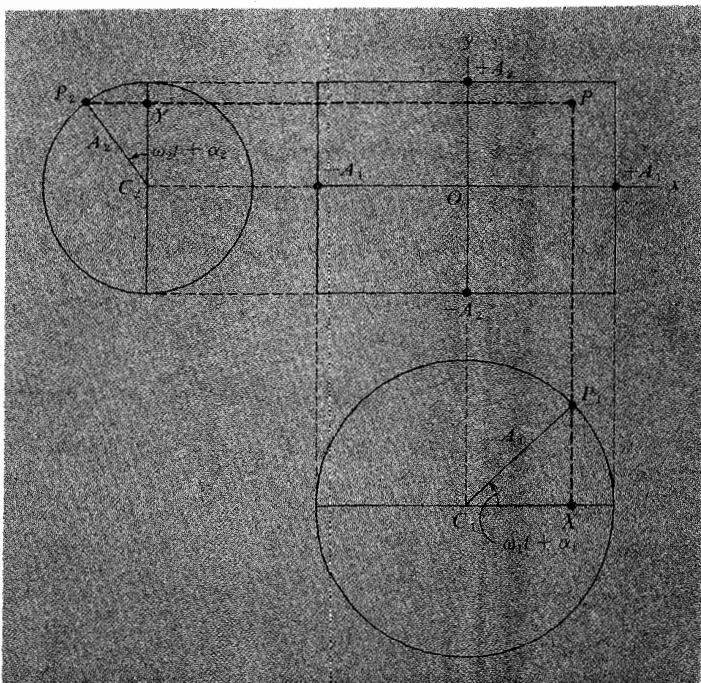
حالت کشسانی کرانه اتم یک امر ذاتی است. برای روشن شدن مطلب فرض می کنیم نقطه ای به طور همزمان دو جابه جایی زیر را تحمل کند:

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

(۱۰-۲)

$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

برای نمایان ساختن این حرکت از بردار چرخان می توان استفاده کرد. روش کار در شکل (۸-۲) نشان داده شده است. ابتدا دو دایره به شعاعهای  $A_1$  و  $A_2$  رسم می کنیم.



شکل (۸-۲) نمایش هندسی برهم نهی ارتعاشات هماهنگ ساده با زوایای قائمه.

از نخستین دایره برای تعیین جابه جایی نقطه  $p_1$  در راستای  $X$  یعنی  $C_1 X$  استفاده می کنیم. و جابه جایی نقطه  $p_2$  در راستای  $Y$  یعنی  $C_2 Y$  را با استفاده از دومین دایره به دست می آوریم. این دو جابه جایی با هم وضعیت لحظه ای نقطه  $P$  را نسبت به مبدا  $O$  که در مرکز راست گوشه ای با پهلوهای  $2A_1$  و  $2A_2$  واقع است، مشخص می سازد.

با دیدن شکل ظاهری حرکت چگونگی آن فوراً آشکار می شود. زیرا رابطه بین بسامدها و فازهای دو حرکت ترکیب شونده هر چه باشد، حرکت نقطه P همواره در محدوده راست گوشه واقع است و پهلوی این راست گوشه نیز در هر نقطه ای که مسیر با خطوط مرزی<sup>۵</sup> تماس پیدا کند، بر مسیر مماس است. بیش از این درباره بسامدها و فازها بدون ذکر خواص آنها نمی توان چیزی گفت مگر هنگامی که  $\omega_1$  و  $\omega_2$  متناسب نباشد که در آن صورت با اظهار نظر کلی تا حدودی می توان گفت که چه اتفاق خواهد افتاد. در چنین حالتی وضعیت P خودبه خود هرگز تکرار نخواهد شد و مسیر اگر ادامه یابد و به اندازه کافی طولانی شود، از لحاظ فیزیکی به پر شدن تمام پهنه راست گوشه منجر خواهد شد، حتی اگر (این پر شدن پهنه از مسیر) از نظر ریاضی محض قابل قبول نباشد.

جالبترین مثالهای مربوط به این حرکات ترکیبی در مواردی است که بسامد به صورت یک نسبت عددی ساده است، و اختلاف فازهای اولیه کسر ساده ای از  $2\pi$  است. بنابراین یکی از آن موارد، حرکتی است که مسیرش به شکل یک منحنی بسته دو بعدی است؛ و دوره تناوبش مساوی کوچکترین مضرب مشترک دوره های تناوب هر یک از حرکات ترکیب شونده است. در هر حال، این مسأله با ارائه مثالهای مخصوصی به بهترین وجهی مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت، فعلاً به ذکر چند مورد می پردازیم.

### حرکات عمود بر هم با بسامدهای مساوی

با انتخاب لحظه مناسبی که ما آن را  $t = 0$  می نامیم معادله هر یک از ارتعاشات ترکیب شونده را به شکل ساده زیر می توان نوشت:

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

در اینجا  $\delta$  اختلاف فاز اولیه بین حرکات است (در این حالت اختلاف فاز در زمانهای بعدی نیز همین مقدار است). اکنون اگر به  $\delta$  اندازه های مخصوصی نسبت دهیم، مسیر نیز شکلهای ویژه ای پیدا می کند. به این ترتیب تصویر کیفی همه حرکات ممکن را که با بسامدهای مساوی ترکیب می شوند، می توان سرعت تشکیل داد:

---

۵- استثناء، هنگامی که حرکت برابند به درون گوشه های راست گوشه نفوذ می کند، به علت شرایط هندسی گوشه ها، شاید نتوان حالت تماس مسیر با پهلوی راست گوشه را به روشنی تشخیص داد.

(الف)  $\delta = 0$  در این حالت:

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos \omega t$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

در نتیجه

حرکت مستقیم الخط و در راستای قطر راست گوشه است، و  $x$  و  $y$  همواره هم علامتند، یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی اند. این خط همان مسیری را نشان می دهد که در اپتیک ارتعاش خطی قطبیده نامیده می شود.

$$(ب) \delta = \frac{\pi}{4} \text{ اکنون داریم}$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = -A_2 \sin \omega t$$

شکل این مسیر با استفاده از رابطه  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$  و با به دست آوردن معادله زیر به آسانی مشخص می شود.

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

این رابطه معادله یک بیضی است و محورهای اصلی آن در راستای  $x$  و  $y$  واقع است. توجه داشته باشید که برای ما معادلات بیش از این حائز اهمیتند. در اینجا ما با سینماتیک سروکار داریم، نه هندسه، و بیضی در جهت معینی رسم می شود. مثلاً وقتی  $t$  از صفر شروع به زیاد شدن می کند،  $x$  از بزرگترین اندازه مثبت خود شروع به کم شدن می کند و  $y$  به طور همزمان از صفر شروع به منفی شدن می کند و پیش می رود. این بدان معناست که مسیر بیضوی در جهت ساعت گرد است.

(ج)  $\delta = \pi$  اکنون داریم:

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos \omega t$$

در نتیجه

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

این حرکت نظیر حالت (الف) است، با این تفاوت که در راستای قطر دیگر راست گوشه است.

(د)  $\delta = \frac{3}{4}\pi$  در این حالت داریم

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right) = A_2 \sin \omega t$$

در این حالت نیز مسیر یک بیضی است با همان شکلی که در حالت (ب) داشتیم، با این تفاوت که اکنون حرکت در جهت پادساعت گرد<sup>۷</sup> است.

(ه)  $\delta = \frac{\pi}{4}$  توجه داشته باشید که در اینجا ما به عقب بر می گردیم و حالتی را مطرح

می کنیم که اختلاف فاز بین  $0$  و  $\frac{\pi}{4}$ ، یعنی متوسط حالات (الف) و (ب) است. این حالت نسبت به مواردی که تاکنون بحث و بررسی شد کمتر پیش می آید، و فقط برای تکمیل ساختار نموداری شکل (۲-۸) مفید است. روش کاربردی این حالت مخصوص در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. اوضاع نقاط  $P_1$  و  $P_2$  روی دو دایره مرجع در چند لحظه به فواصل زمانی یک هشتم دوره تناوب (یعنی  $\frac{\pi}{4\omega}$ ) به ترتیب شماره گذاری و مشخص شده است. در لحظه شروع که  $t = 0$  است،  $P_1$  و  $P_2$  [به شکل (۲-۸) مراجعه شود] موازی محور  $x$  ها است

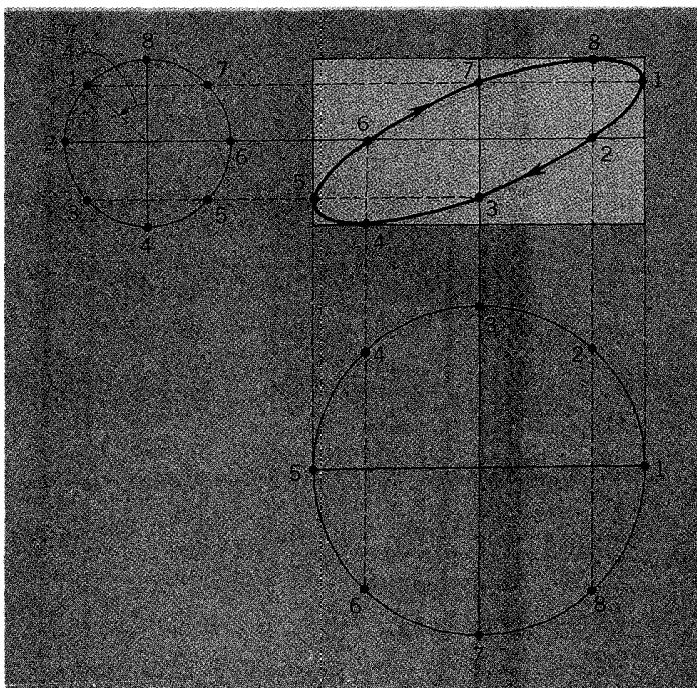
---

7- Counterclockwise = Anticlockwise

و  $C_1 P_2$  در جهت پادساعت گرد با محور  $y$  های مثبت زاویه  $\delta$  یعنی  $45^\circ$  درجه تشکیل می دهد. از تصاویر این اوضاع (هشتگانه) که مربوط به  $P_1$  و  $P_2$  است مجموعه نقاط تقاطع (تصاویر  $P_1$  و  $P_2$ ) به دست می آید که در شکل (۲-۹) می بینیم. این نقاط اوضاع لحظه به لحظه نقطه  $P$  را ضمن حرکت در داخل راست گوشه نمایش می دهند. مکان (هندسی) این نقاط به شکل یک بیضی است. قطرهای این بیضی نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  مایل است و  $p$  در جهت ساعت گرد بر روی بیضی حرکت می کند. اگر بخواهیم می توانیم معادله این بیضی را با حذف  $t$  از معادلات  $x$  و  $y$ ، به دست آوریم:

$$x = A_1 \cos \omega t$$

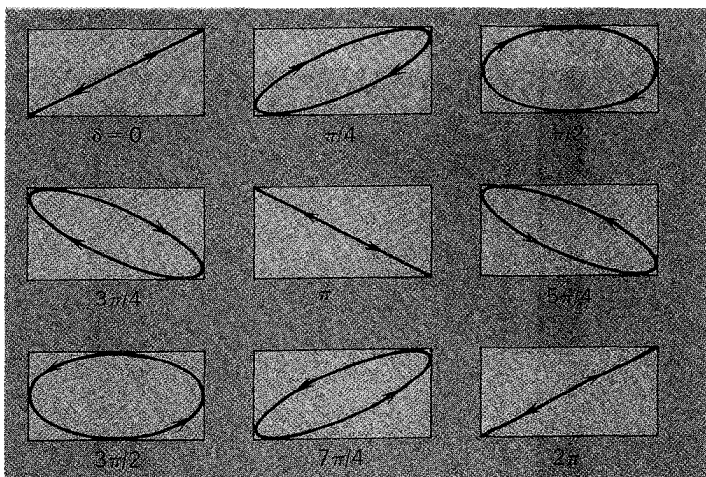
$$y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos \omega t - \frac{A_2}{\sqrt{2}} \sin \omega t$$



شکل (۲-۹) برهم نهی ارتعاشات هماهنگ ساده با زوایای قائمه و با اختلاف فاز اولیه  $\frac{\pi}{4}$

به کمک این مثال آخر، می توان دید که با زیاد شدن اختلاف فاز  $\delta$ ، از  $0$  تا  $2\pi$ ، الگوی این حرکت ترکیبی چگونه و به چه شکلهایی ظاهر می شود. مسیر حرکت در آغاز به ازای

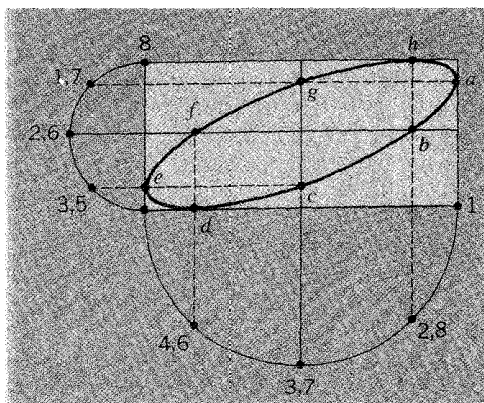
$\delta = 0$  خطی و در راستای قطر راست گوشه است، پس از آن حرکت ساعت گرد و در مسیر بیضوی است. این بیضی به ازای  $\delta = \frac{\pi}{4}$  باز می شود و پهنایش به بیشینه می رسد، در مرحله بعدی بیضی بسته می شود تا اینکه به ازای  $\delta = \pi$  به یک مسیر خطی در راستای قطر دیگر راست گوشه تبدیل می شود. از این لحظه به بعد که اختلاف فاز مرتباً  $(\frac{\pi}{4})$  زیاد می شود، شکل‌های مشابهی به همان ترتیب دوباره ظاهر خواهد شد (هر چند، جهت حرکت در همه آنها اکنون پادساعت گرد است)، سرانجام به ازای  $\delta = 2\pi$  مسیر حرکت به همان وضع اولیه در می آید که به ازای  $\delta = 0$  ظاهر شده بود. مسیر این حرکات در شکل (۲-۱۰) به ترتیب رسم شده است.



شکل (۲-۱۰) برهم نهی در حرکت هماهنگ ساده عمود برهم یا بسامدهای یکسان و با اختلاف فازهای اولیه متفاوت.

در تمام این قبیل مسایل، برای ترسیم حرکت بر ایند روش نموداری یک روش عالی است. همان طور که در آخرین مثال مطرح شد، در این روش ابتدا مجموعه‌ای از نقاط مربوط به فواصل زمانی مساوی و متوالی را روی دو دایره مرجع مشخص می کنیم. هر فاصله زمانی باید جزء مناسبی از دوره تناوب مثلاً یک هشتم، یک دوازدهم یا یک شانزدهم آن باشد. اگر شخصی با فرآیند پیچیده (برهم نهی) آشنا باشد به آسانی می تواند با در نظر گرفتن ابعاد

راست گوشه نمودار فشرده تری رسم کند. برای این منظور بر روی دو پهلوی مجاور فقط یک نیمدایره بنا می کند. و برای رسم این نمودار حالتی را در نظر می گیرد که  $\omega_1 = \omega_2$  و  $\delta = \frac{\pi}{4}$  باشد. با تقسیم دایره های مرجع به اجزاء مناسب  $2\pi$ ، اندازه جابه جایی هر دو نقطه مجاور روی دایره یکسان خواهد بود. بنابراین با رسم یک نیمدایره دقیق می توان اطلاعات (اندازه های) روی دایره کامل را بر روی این نیمدایره منتقل کرد. البته همان طور که در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده است. کنار هر نقطه مشخص شده روی نیمدایره ها دو اندازه متفاوت دیده می شود.



شکل (۲-۱۱) رسم هندسی ساده ای از برهم نهی ارتعاشات با زاویه های قائمه.

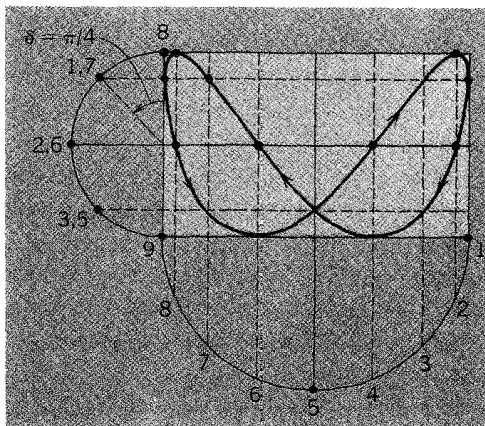
وقتی نقاط روی دایره های مرجع به ترتیب زمان شماره گذاری شده باشند نقاط تقاطع از انطباق مختصه حرکت فعلی و حرکت قبلی به دست خواهد آمد. (برای آنکه در برگردان این نمودار که با اعداد زیاد مواجهیم، دچار سردرگمی نشویم از حروف استفاده نموده ایم - مثال  $a=1$ ،  $b=2$  و غیره.)

هم چنین اگر لحظه های انتخاب شده با اجزای کل دوره تناوب مطابقت نداشته باشند (حتی برای آنکه اجزاء مساوی باشند)، باز هم می توان ترتیب صحیح نقاط مربوط به یک دوره کامل از محیط دایره مرجع را بر روی نیمدایره نشان داد. به طور کلی باید دقیقاً چنین تصور کرد که دایره در امتداد قطر اصلی یعنی در امتداد قطری که با مؤلفه حرکت موازی است تا خورده و درست به یک نیمدایره تبدیل شده است. در هر حال از نظر صرفه جویی همان طور که روی شکل مشاهده می شود سعی کرده ایم نقاط را جفت جفت روی نیمدایره مشخص

## حرکات عمود بر هم با بسامدهای متفاوت ؛ شکل‌های لیسازو<sup>۸</sup>.

شکل‌های لیسازو به عنوان یک تمرین ساده و سرگرم کننده در ادامه تحلیلهایی آورده می شود که پیش از این درباره حرکات با بسامدهای مختلف مطرح شده بود. برای روشن شدن نوع نتایج به دست آمده چند مثال ارائه می شود.

در شکل (۲-۱۲) رسم هندسی یکی از شکل‌های لیسازو را به ازای  $\omega_2 = 2\omega_1$  و  $\delta = \frac{\pi}{4}$  می بینیم.

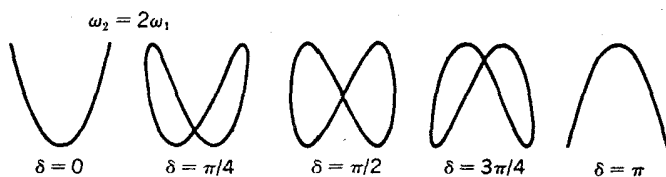


شکل (۲-۱۲) رسم هندسی شکل لیسازو

در مورد حرکت با بسامد  $\omega_2$  دایره مرجع را به هشت بازه زمانی مساوی، یعنی به کمانهای ۴۵ درجه تقسیم می کنیم. در خلال یک چرخه کامل با (بسامد زاویه ای)  $\omega_2$ ، فقط نیم چرخه با بسامد  $\omega_1$  پیموده می شود و در دایره های مرجع نقاط منطبق برهم مشخص شده اند. ضمناً اختلاف فاز اولیه را ۴۵ درجه فرض می کنیم. البته برای به دست آوردن دوره تناوب کامل حرکت بر اینند لازم است چرخه کامل مربوط به  $\omega_1$  را در نظر بگیریم؛ برای این کار پس از رسیدن به نقطه مشخص «۹» مراحل مورد نظر را در طول پیرامون نیمدایره زیرین نشانه گذاری می کنیم و برای بار دوم پیشروی را ادامه می دهیم. تا نقاط مربوط به دور کامل

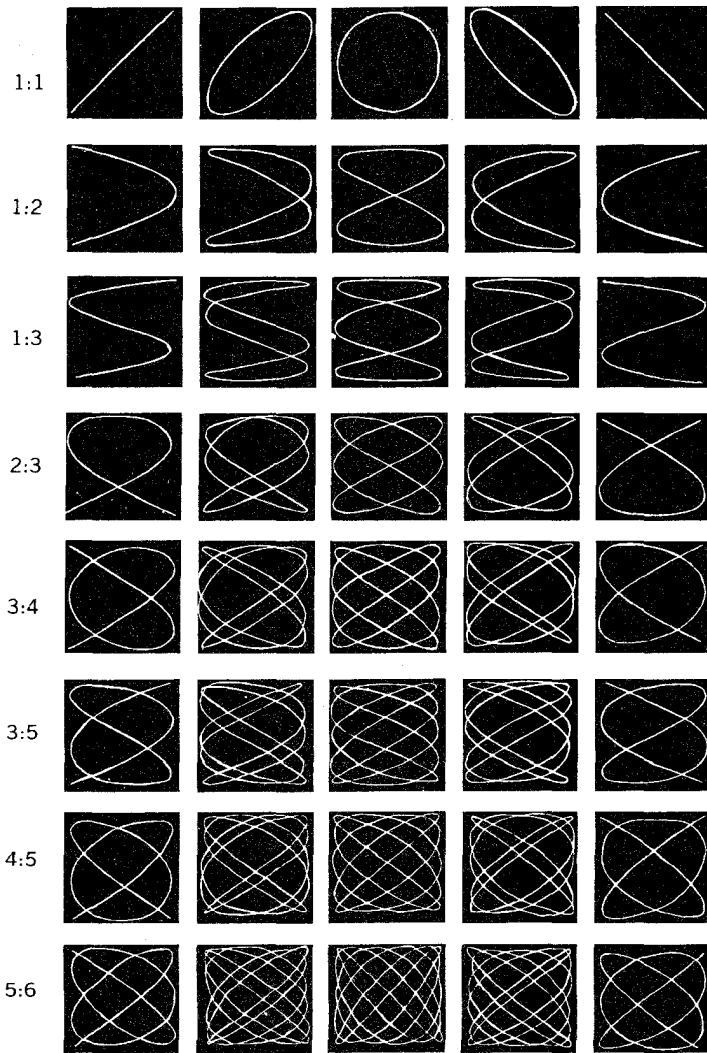


بر روی چرخه با حرکت  $\omega_2$  مشخص شود. در این روش تا پایان حرکت با یک مسیر بسته سروکار داریم و حرکت برای مدتی نامحدود تکرار خواهد شد. جی. ا. لیسازو (۱۸۲۲-۱۸۸۵)، با انجام مطالعات همه جانبه ای دربارهٔ این حرکات منحنیهای آنها را تشکیل داد. لذا چنین منحنیهایی به نام شکلهای لیسازو شناخته شد. اگر (در این حرکات) کاهش تدریجی دامنه را نسبت به زمان در نظر بگیریم، الگوها بازهم بیشتر نامانوس می شوند. در آن صورت برای همه آنها زیبایی مطرح است. در شکل (۲-۱۳) مجموعه ای از این قبیل منحنیهای نشان داده شده است. در مورد همه آنها  $\omega_2 = 2\omega_1$  و اندازه اختلاف فازهای اولیه متفاوت است.



شکل (۲-۱۳) شکلهای لیسازو به ازای  $\omega_2 = 2\omega_1$  با اختلاف فازهای اولیه متفاوت.

بدیهی است هر اندازه نسبت بسامدها پیچیده تر باشد برای منحنیهای شکلهای عجیب تری به دست می آید. شکل (۲-۱۴) مجموعه ای از چند نمونه رده بندی شده را نشان می دهد. چنین الگوهایی را با کنترل تغییر دامنه ها، بسامدها و فازها و با به کار بردن ولتاژهای سینوسی مختلف که به صفحات منحرف کننده X و Y در اسیلوسکوپ پرتوکاتودی اعمال می شود، به آسانی می توان ظاهر ساخت. البته به استثنای حالاتی که شکل لیسازو دقیقاً در درون گوشه های راست گوشه محیطی نفوذ کند. در هر حال با تحقیق و بررسی می توان نسبت بسامد حرکات ترکیب شونده را به دست آورد. اندازه آن از روی نسبت تعداد نقاط تماس شکل با پهلوهای مجاور راست گوشه تعیین می شود. با اثبات درستی این نتیجه نظری قانع خواهید شد و می توانید با به کار بردن مفهوم این نظریه در مورد منحنیهای گوناگون شکل (۲-۱۴) صحت آن را بررسی کنید.

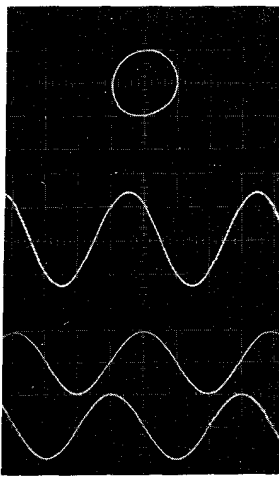


شکل (۲-۱۴) شکلهای لیسازو؛ با نسبت بسامدهای مختلف و اختلاف فازهای متفاوت. (اقتباس از کارهای جمعی<sup>۱</sup> از پژوهشگران، لندن، ۱۹۴۹).

### مقایسه برهم نهی های موازی و عمود برهم

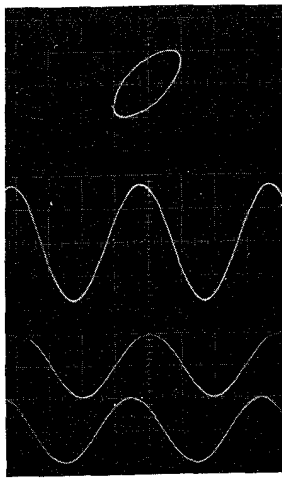
مقایسه مستقیم برهم نهی دو ارتعاش هماهنگ و هم راستا با برهم نهی همان ارتعاشات ولی در راستاهای عمود برهم، از روی شکلهای لیسازوی مربوط به آنها شاید

9- J.H.Poynting, J.J.Thomson, W.S. Tucker



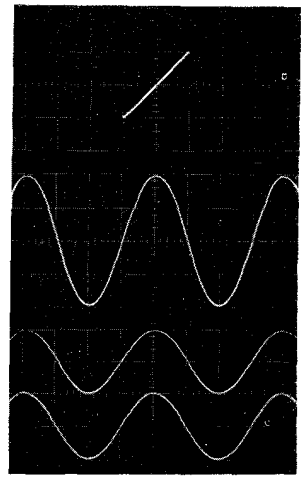
$$\delta = \pi/2$$

(ج)



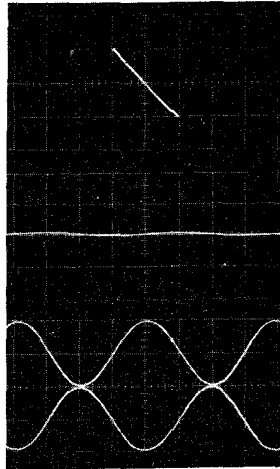
$$\delta = \pi/4$$

(د)



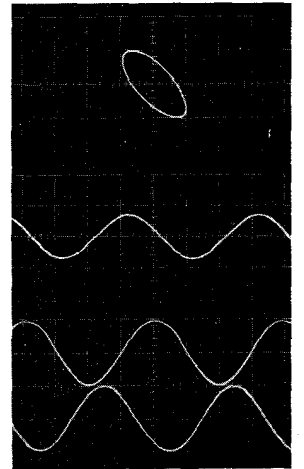
$$\delta = 0$$

(الف)



$$\delta = \pi$$

(هـ)



$$\delta = 3\pi/4$$

(د)

شکل (۲-۱۵) مقایسه نتایج جمع دو ارتعاش هماهنگ (الف) در طول یک خط ؛ (ب) با زاویه های قائمه، با شکل نمونه های لیسازو. (عکسها از جان روزنفلد، مرکز آموزشی پژوهشی - M.I.T.)

آموزنده باشد. ماسعی کرده ایم رابطه این دو نوع بر هم نهی را در حالت ساده ای که دو ارتعاش هم بسامد و هم دامنه اند در شکل (۲-۱۵) نشان دهیم. در شکل، ترکیب دو

ارتعاش سینوسی را به ازای اختلاف فازهای گوناگون - بین صفر و  $\pi$  - می بینیم. دو منحنی پایین در هر گروه جابه جاییهای اصلی باریکه دوگانه (مضاعف) اسیلوسکوپ را در راستای  $y$  بر حسب مبنای خطی زمان نشان می دهد. در بالا هر جفت منحنی که یک برآیند (ترکیب) سینوسی است، از جمع مستقیم این دو جابه جایی  $y$  به دست می آید. سرانجام با خاموش کردن مبنای زمان در اسیلوسکوپ، و دادن دو سیگنال سینوسی اولیه به صفحات  $x$  و  $y$ ، الگوی لیسازو ظاهر می شود.

اگر دو سیگنال اولیه به صورت  $A \cos \omega t$  و  $A \cos(\omega t + \delta)$  داده شده باشند، نتایج زیر به دست خواهد آمد:

### برهم نهی متوازی

$$y_1 = A \cos \omega t$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$y = y_1 + y_2 = \left( 2A \cos \frac{\delta}{2} \right) \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

[توجه داشته باشید وقتی  $\delta$  از صفر تا  $\pi$  زیاد شود، دامنه متناسب با  $\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$  کم می شود.]

### برهم نهی متعامد

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = A \cos(\omega t + \delta)$$

با حذف زمان  $t$  در این دو رابطه خواهیم داشت:

$$x^2 - 2xy \cos \delta + y^2 = A^2 \sin^2 \delta$$

این رابطه معرف یک منحنی بیضوی است که بتدریج تغییر شکل می دهد، و همانگونه که در عکسها می بینیم، وقتی  $\delta = 0$  یا  $\pi$  باشد، منحنی به صورت یک خط راست است، و به ازای  $\delta = \frac{\pi}{2}$  منحنی به شکل یک دایره است.

## مسائل

۱-۲) روابط زیر را به صورت  $Z = \text{Re}[Ae^{j(\omega t + \alpha)}]$  در آورید.

$$Z = \sin \omega t + \cos \omega t \quad (\text{الف})$$

$$Z = \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) - \cos \omega t \quad (\text{ب})$$

$$Z = 2 \sin \omega t + 3 \cos \omega t \quad (\text{ج})$$

$$Z = \sin \omega t - 2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) + \cos \omega t \quad (\text{د})$$

۲-۲) یک ذره به طور همزمان تحت تاثیر سه حرکت هماهنگ ساده است. بسامد همه آنها یکسان و راستایشان  $x$  است. اگر دامنه حرکات به ترتیب  $0.25$ ،  $0.20$  و  $0.15$  mm و اختلاف فاز بین اولی و دومی  $45^\circ$  درجه، بین دومی و سومی  $30^\circ$  درجه باشد، دامنه جابه جایی برایند (سه حرکت) و فاز حرکت برایند را نسبت به مولفه اولی (با دامنه  $0.25$  mm) تعیین کنید.

۳-۲) دو ارتعاش را با معادلات زیر در راستای یک خط در نظر بگیرید:

$$y_1 = A \cos 10\pi t$$

$$y_2 = A \cos 12\pi t$$

دوره تناوب زنش را به دست آورید، و شکل آشفتگی برایند را در یک دوره تناوب زنش به دقت رسم کنید.

۴-۲) بسامد حرکت برایند را در هر یک از موارد زیر تعیین کنید:

$$\sin(2\pi t - \sqrt{2}) + \cos(2\pi t) \quad (\text{الف})$$

$$\sin(12\pi t) + \cos(13\pi t - \frac{\pi}{4}) \quad (\text{ب})$$

$$\sin(3t) - \cos(\pi t) \quad (\text{ج})$$

۲-۵) دو ارتعاش عمود برهم را با معادلاتی به شرح زیر در نظر بگیرید:

$$x = 10 \cos(\omega t)$$

$$y = 10 \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

شکل لیسازور را برای حرکت برابند آنها تشکیل دهید.

۲-۶) شکل‌های لیسازو را برای حرکات زیر رسم کنید:

$$x = \cos 2\omega t \quad \text{و} \quad y = \sin 2\omega t \quad (\text{الف})$$

$$x = \cos 2\omega t \quad \text{و} \quad y = \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{ب})$$

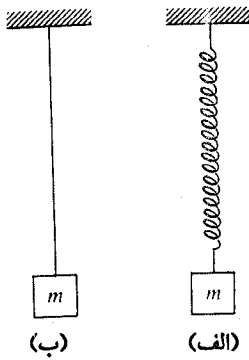
$$y = \cos 2\omega t \quad \text{و} \quad y = \cos \omega t \quad (\text{ج})$$

## ارتعاشات آزاد سیستم های فیزیکی

در توضیحی که بر ضد پدیده های دستگاههای کشسان ذکر شده است، رابرت هوک در این مورد بیشتر اغراق کرده است. همانطور که در آغاز فصل اول اشاره شده نیروهای برگشت پذیر در هر سیستم فیزیکی واقعی فقط بطور تقریبی توابع خطی تغییر مکان هستند. با این حال جالب است که یک تنوع وسیع از تغییر شکل سیستم های فیزیکی نظیر کشش، فشار، پیچش یا خمش (یا ترکیبی از تمام اینها) در نیروهای برگشت پذیر متناسب با تغییر مکان دیده می شود و منجر به ارتعاش ساده هماهنگ (یک برهم نهی ارتعاشات هماهنگ) می گردد. در این فصل تعدادی از این قبیل حرکات را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. حرکتها با تاکید اصلی روی روشی که می توان خصوصیات جنبشی حرکت را با خواصی که اغلب به وسیله اندازه گیری واقعی ایستایی می تواند پیدا شود، ارتباط داده می شود. ما با یک نگاه دقیق به سیستمی که برای بسیاری از مسائل نوسانی الگو محسوب می شود، این اندازه گیری را شروع خواهیم کرد. از آن جمله وزنه آویخته به فنر با یک نوسان تک بعدی تحت نوعی از نیروی برگشت پذیر که به وسیله هوک (HOOK) پیشنهاد شده است. بیشتر بحث ما در بخش بعد احتمالاً مبنای آشنایی خواهد داشت. اما قطعاً قبل از مطالعه آن باید از فهم مطالب این قسمت مطمئن شد.

### سیستم پایه ای جرم-فنر

در نخستین مرجع که برای این نوع سیستم در فصل اول به آن اشاره شد، ما آن را به صورت ترکیبی از یک وزنه به جرم  $m$  که به یک فنر آویزان می شود [شکل ۱-۳ (الف)] با یک وسیله هم ارز آن نشان دادیم، مثلاً با یک سیم نازک [شکل ۱-۳ (ب)].



شکل ۱-۳ الف) دستگاه جرم-فنر

ب) دستگاه جرم-سیم

آزمودیم که یک نیروی برگشت پذیر  $k$  برابر تغییر مکان وزنه آویخته به فنر از حالت تعادل است. این تعریف ساده از یک سیستم در مورد دو نمونه ای که برای ایجاد حرکات نوسانی بیان شده صادق است:

۱- یک مولفه اینرسی می تواند دارای انرژی جنبشی باشد؛

۲- یک مولفه الاستیک می تواند انرژی پتانسیل الاستیکی ذخیره کند.

با فرضی که قانون هوک پیشنهاد می کند، می توان انرژی پتانسیل متناسب با مربع جابه جایی جسم از وضعیت تعادل را به دست آورد. با این فرض که اینرسی تمام سیستم در وزنه آویخته به انتهای فنر متمرکز شده است، انرژی جنبشی سیستم برابر با  $\frac{mv^2}{2}$  است، که  $v$  سرعت جسم متصل به فنر است. باید توجه داشت که هر دو فرض مخصوص شرایط عمومی ۱ و ۲ بالا است. قابل ذکر آنکه نمونه های زیادی از سیستم های نوسانی وجود دارند که این شرایط برای آنها به کار نمی رود. اما اگر یک سیستم را بتوان واقعاً یک جرم متمرکز در انتهای یک فنر خطی (خطی بودن به خاصیت الاستیک آن بیشتر از هندسی اشاره می کند) در نظر گرفت آنگاه می توان معادله حرکتش را به یکی از دو طریق زیر نوشت:

$$-kx = ma \quad (F = ma) \quad \text{۱- با استفاده از قانون نیوتن}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad \text{۲- با استفاده از بقاء انرژی مکانیکی (E)}$$

البته دومی نتیجه انتگرال گیری اولی نسبت به تغییر مکان  $x$  است، اما هر دو، معادلات دیفرانسیل برای حرکت سیستم هستند. بسیار مهم است که قدرت استنتاج چنین معادله



دیفرانسیلی را از آنالیز یک سیستم فیزیکی داشته باشیم. معادله دیفرانسیل حرکت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E \quad (2-3)$$

هر زمان که یک معادله مشابه با یکی از معادلات بالا طرح شود تغییر مکان  $x$  را می توان تابع زمان بشکل زیر نتیجه گرفت:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (3-3)$$

که  $\omega^2$  برابر نسبت  $\left( \frac{k}{m} \right)$  ثابت فنر به ثابت اینرسی  $m$  است. این نسبت حتی اگر سیستم به صورت یک جسم منفرده که به یک فنر واقعاً کم جرم آویزان نباشد، باز هم در معادلات (1-3) و (2-3) بخوبی صدق خواهد کرد. در معادله (3-3) یادآور می شویم که ثابت  $\omega$  در تمام شرایط به ازاء مقادیر مشخص  $m$  و  $k$  تعیین می شود. معادله دارای دو ثابت دیگر است که عبارتند از دامنه نوسان  $A$  و فاز اولیه  $\alpha$  که بین آنها یک ویژگی کامل از حالت حرکت سیستم در  $t = 0$  (یا هر زمان مشخص دیگری) در هر حالت خاص ایجاد می کند. بیان اولیه قانون نیوتن در معادله (1-3) هیچ یک از ثابتها را شامل نمی شود. معادله (2-3) اغلب بصورت تابع اوکیه معادله (1-3) به دست می آید و به صورت محاسباتی واسطه ای بین معادلات (1-3) و (3-3) بوده و شامل یک ثابت قابل تنظیم (انرژی کل  $E$ )، که برابر  $\frac{kA^2}{2}$  است) می باشد. همیشه معرفی یک ثابت دیگر در هر مرحله انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل اصلی (قانون نیوتن) ضروری است، حتی اگر ثابت فوق برای حالت خاصی احتمالاً به صفر برسد. درباره عکس فرایند (انتگرال گیری) می توان پیش بینی کرد که در هر مشتق گیری یک جمله ثابت از بین می رود و صفر می شود.

### حل معادله نوسانگر هماهنگ با استفاده از توابع نمایی مختلط

به عنوان یک الگو برای محاسبات بعدی اکنون معادله دیفرانسیل مبنا، یعنی معادله (1-3) را در نظر می گیریم و حل آن را که در معادله (3-3) آمده است بسط می دهیم و از

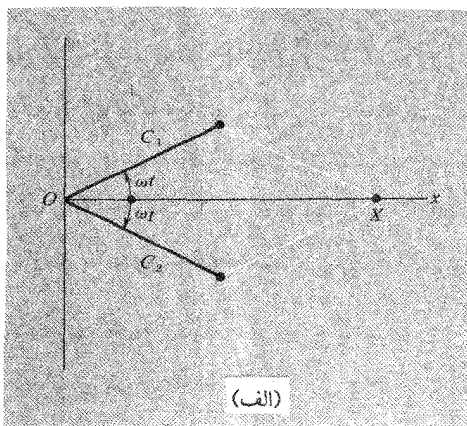
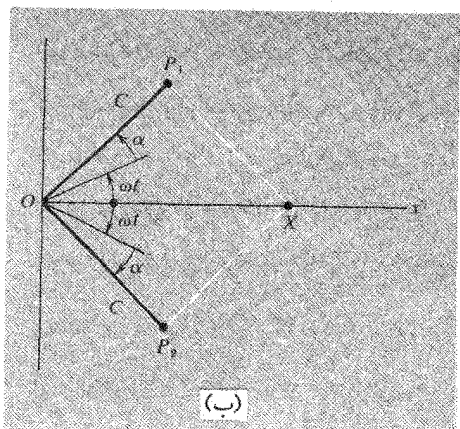
تابع نمایی مختلط در این روش استفاده می کنیم. چون  $k$  و  $m$  به طور مجزا به کار نرفته است بلکه فقط به صورت نسبت  $\frac{k}{m}$  در روابط اساسی وارد می شود؛ بحث را با دوباره نویسی معادله (۱-۳) به شکل فشرده زیر آغاز می کنیم:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (4-3)$$

این معادله توضیح می دهد که  $X$  و مشتق دوم آن نسبت به زمان بطور خطی برای ایجاد صفر ترکیب می شوند، یا بطور هم ارز  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  یک مضرب  $X$  است. البته تابع نمایی این خاصیت هم ارزی را دارد، لذا با این توضیح داریم:

$$x = Ce^{pt} \quad (5-3)$$

که در آن (با داشتن عوامل با ابعاد صحیح) ضریب  $C$  با واحد فاصله و ضریب  $p$  با واحد عکس زمان، به طوری که  $pt$  بدون بعد باشد، تعریف شده اند.



شکل (۲-۳) (الف) برهم نهی پاسخهای مختلط معادله (۴-۳) با توجه به  $C_1 = C_2$  (ب) برهم نهی پاسخهای مختلط معادله (۴-۳) با توجه به صفر نبودن زاویه فاز اولیه.

سپس به وسیله جایگزینی در معادله (۴-۳) داریم:

$$p^2 Ce^{pt} + \omega^2 Ce^{pt} = 0$$

که به ازاء جميع مقادير  $t$  و  $C$  می تواند صادق باشد، با این شروط که:

$$p^2 + \omega^2 = 0$$

$$p^2 = -\omega^2$$

$$p = \pm j\omega$$

هریک از این مقادیر  $p$  در معادله اصلی صدق خواهد کرد. بدون هیچ دلیل با کنار گذاشتن یکی از این دو، ما هر دو جمله را، همراه با مقدار  $C$  می پذیریم. بدین ترتیب معادله (۳-۵) می شود:

$$x = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} \quad (۷-۳)$$

اکنون معادله (۷-۳) را بر حسب نوع بردار چرخشی SHM (حرکت هماهنگ ساده) تفسیر می کنیم. جمله اول سمت راست به بردار چرخشی  $C_1$  در جهت مثبت (مخالف چرخش عقربه های ساعت) با سرعت زاویه ای  $\omega$  مربوط است. جمله دوم به بردار چرخشی  $C_2$  در جهت منفی (در جهت چرخش عقربه های ساعت) با همان سرعت زاویه ای مربوط است. اگر طولهای  $C_1$  و  $C_2$  برابر باشند، دو جمله فوق برای ایجاد یک نوسان هماهنگ در امتداد محور  $x$  ها به همان صورتی که در شکل ۲-۳ (الف) نشان داده شده است ترکیب می شوند. اما  $C_1$  و  $C_2$  به صورتی که در معادله (۷-۳) ظاهر می شوند، ضرورتی ندارد که حقیقی باشند. ما می توانیم معادله (۷-۳) را بخوبی قبول کنیم، به شرط آنکه  $C_1$  به اندازه زاویه  $\alpha$  در جهتی که به وسیله تعیین می شود چرخیده شود، و  $C_2$  به اندازه  $-\alpha$  در جهت  $-\omega t$  بچرخد تا بردارهای هم طول به صورتی که در شکل ۱ (۲-۳) (ب) نشان داده شده است تشکیل شود. این شرط با محدودیت کمتری که دارد منجر به نتیجه بعدی می شود:

$$\begin{aligned} x &= C e^{j(\omega t + \alpha)} + C e^{-j(\omega t + \alpha)} \\ &= 2C \cos(\omega t + \alpha) \\ &= A \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

کمیت  $C_1$  و  $C_2$  در معادله (۷-۳) یا  $A$  و  $\alpha$  در معادله بالا بطور هم ارز دو ثابت انتگرالگیری را ارائه می دهد که باید در فرایند معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۳-۴) دخالت داده شود، این

۱- رابطه دیگری ما را به نوسان حول محور  $x$  ها هدایت نمی کند. سعی کنید خودتان این نکته را کاملاً درک کنید.

۲- درجه یک معادله دیفرانسیل با بالاترین مشتق گیری آن ظاهر می گردد.

فرایند به جواب نهایی که  $X$  را بصورت تابع  $t$  بیان می کند، منجر شود. تحلیل بالا ضمناً نشان می دهد که یک حرکت هماهنگ مستقیم الخط می تواند از برهم نهی دو حرکت دورانی حقیقی یکسان و مختلف الجهد حاصل شود که خود عکس حالتی است که یک شکل لیسازو از دو نوسان خطی مساوی و عمود بر هم تولید می شود (هر دو نتایج کاربردهای مهمی در توصیف نور پلاریزه دارند). با ورود در معادله نهایی، می بینیم که  $X$  می تواند به صورت جزء حقیقی یک بردار چرخشی درست نظیر جمله اول (به طور مجزا) در معادله  $(۷-۳)^۳$  توصیف شود. بدین ترتیب در بسیاری از محاسبات بعدی بنا بر سهولت جوابهایی از نوع زیر را مد نظر قرار خواهیم داد:

$$(۸-۳) \quad \text{جزء حقیقی } z = X \quad \text{در اینجا } z = Ae^{j(\omega t + \alpha)}$$

این بحث نوسانگر هماهنگ ساده را دوباره مطرح می کنیم، گرچه فقط نتایج بسیار روشن ممکن است هم در بیان عملکردهای بردار مختلط چرخشی SHM و هم در اثبات درستی این روش ما را یاری دهد.

### الاستیسیته و مدول یانگ

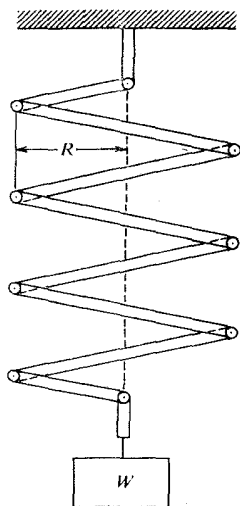
اکنون به شرح خواص ماده ای می پردازیم که فرکانس یک نوع سیستم جرم-فنر را کنترل می کند. اگر یک فنر مارپیچ واقعی را در نظر بگیریم مسأله بخرنج می شود. اتصال یک وزنه به چنین فنری به صورتی که در شکل (۳-۳) نشان داده شده دو اثر مختلف را پیش می آورد که هیچ یک از این دو یک فرایند کششی ساده نیست. اگر وزنه  $W$  که از یک نقطه روی محور قائم مارپیچ آویزان شده است، اثرش در هر نقطه روی محور تقریباً افقی فنر مرکب از چند سیم یک گشتاور  $WR$  باشد. یک اثر این گشتاور که مهمترین اثر در بیشتر فنرهاست، پیچش سیم تقریباً حول محور خودش است و پایین آمدن وزنه اصولاً نتیجه این فرایند پیچشی است. اما اثر دوم گشتاور آن است که مارپیجهای فنر را کمی به هم نزدیک یا از یکدیگر دور می کند. به طوری که فنر به صورت کامل حول محور قائم می پیچد. این فرایند خمش مارپیچها را به همراه دارد و تغییری در خمیدگیشان ایجاد می کند<sup>۳</sup>. نتیجه

۳- یا جمله دوم به تنهایی اگر ترجیح داده شود.

۴- هر چند میزان به هم نزدیک شدن و از هم دور شدن مارپیچ ها، به جنس فنر بستگی دارد.

نهایی را مطمئناً می توان به صورت یک تناسب بیان کرد که (ثابت فنر  $k$ ) مساوی خارج قسمت باری است که به فنر آویزان شده به فاصله ای که بار جابه جا می شود، با توجه به خصوصیات فیزیکی پایه ای فنرها به جای طرح مسائل فنرهای مارپیچی عادی به مسائلی می پردازیم که روانتر است.

کشش ساده یک میله یا سیم آسانترین وضعیتی است که مورد بحث قرار می گیرد رفتار یک چنین سیستمی تحت شرایط تعادل ایستایی می تواند به صورتهای زیر بحث شود:



شکل ۳-۳

۱- برای یک ماده معین که از آن میله یا سیم با سطح مقطع مشخصی ساخته شود، افزایش طول  $\Delta l$  تحت تاثیر یک نیروی معین متناسب با طول اصلی  $l$  است. نسبت بدون بعد  $\Delta l/l$  کرنش (Strain) نامیده می شود. این نتیجه می تواند با انجام یک آزمایش ایستایی یا یک سیم معین نشان داده شود به قسمی که جابه جایی های نقاط مختلف در طول میله تنها متناسب با فواصلشان از انتهای ثابت میله است که در شکل ۳-۴ (الف) نیز نشان داده شده است. زیرا در یک چنین حالت ایستایی وقتی نیروی  $\Delta P$  به یک انتها اثر کند، یک کشش به بزرگی  $\Delta F$  در تمام طول میله به وجود می آورد.

۲- همچنین مشخص شده است که برای میله ها با یک ماده معین، اما با سطح مقطع مختلف کرنش یکسان  $\Delta l/l$  با به کار بردن نیروهای متناسب با سطح مقطع، مانند شکل ۳-۴ (ب) ایجاد می شود. نسبت  $\Delta P/A$  تنش نامیده می شود و بعداً دیمانسیون آن نیروی وارد بر واحد سطح یا فشار است.

۳- با توجه به اینکه کرنش خیلی کوچک (یعنی کمتر از حدود ۰/۱٪ در طول معمولی  $l_0$ ) است، رابطه بین تنش و کرنش طبق قانون هوک خطی است. در این مورد می توانیم بنویسیم:

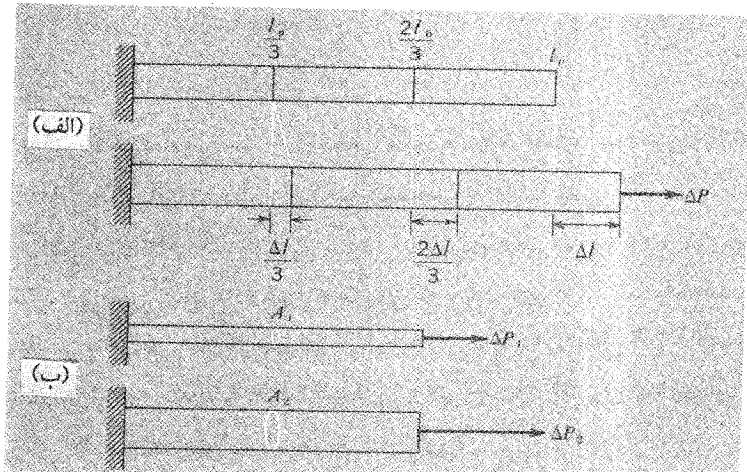
$$\frac{\text{تنش}}{\text{کرنش}} = \text{ثابت}$$

مقدار این ثابت برای هر ماده معین مدول یانگ نامیده می شود (توماس یانگ همان کسی است که تاریخ علم در سال ۱۸۰۱ میلادی با آزمایشهای تداخل نوری اش رقم خورده است<sup>۵</sup>). این مدول معمولاً با علامت  $Y$  نشان داده می شود. اگر نیروی اعمال شده به یک سیم کشیده شده یا میله را بر روی جسم دیگر با  $dF$  مشخص کنیم، بنابراین می توانیم داشته باشیم:

یعنی

$$\frac{dF}{\frac{A}{dl} l_0} = -Y$$

$$dF = -\frac{AY}{l_0} dl \quad (۹۳)$$



شکل ۳-۴ (الف) کشیدگی طولی یکنواخت میله در شرایط ایستایی.  
(ب) میله های با مقاطع مختلف  $A_1$  و  $A_2$  تحت کششهای  $\Delta P_1$  و  $\Delta P_2$

۵- او همچنین در کشف خطوط اولیه Hieroglyphics مصریان روی سنگ معروف Rosetta سهم بسزایی داشته است.

اگر افزایش طول را با  $x$  و افزایش نیرو را با  $F$  نشان دهیم، می توانیم مجدداً این رابطه را بصورت زیر بنویسیم:

$$F = -\frac{AY}{l_0} x \quad (۱۰-۳)$$

که در آن صورت با بیان همیشگی قبلی می توان گفت که نیروی وارد بر یک جسم فنری شکل با میزان کشیدگی مطابقت دارد، در چنین حالتی ثابت فنر  $k$  به صورت  $AY/l_0$  نشان داده می شود.

جدول ۱-۳ اندازه های تقریبی مدول یانگ را برای چند جسم جامد معروف مشخص می کند. همچنین ارزش تقریبی کشش نهایی نشان داده شده بیانگر استحکام نهایی به صورت تنشی که جسم آماده شکستن است بیان می شود.

جدول ۱-۳ = خواص انبساطی اجسام

ماده	مدول (ضریب) یانگ ( $N/m^2$ )	کشش نهایی ( $N/m^2$ )
آلمینیوم	$6 \times 10^{10}$	$2 \times 10^8$
برنج	$9 \times 10^{10}$	$4 \times 10^8$
مس	$12 \times 10^{10}$	$5 \times 10^8$
شیشه	$6 \times 10^{10}$	$10 \times 10^8$
فولاد	$20 \times 10^{10}$	$11 \times 10^8$

توجه کنید که مدولهای یانگ تنش مربوط به کشیدگی  $100\%$  را ارائه می کند که هیچگاه به کشش واقعی یک نمونه نخواهد رسید. شکست در تنشهای دو یا سه برابر کمتر از این، یعنی در مقادیر کشش بین  $1/10$  و  $1/100$  اتفاق می افتد. امکان ندارد با مستقیم کشیدن یک سیم یا میله بتوانیم به کسر بزرگی از تغییر طول دست یابیم که بهتر از سیستمی همانند یک فنر مارپیچ باشد.

اگر وزنه ای به جرم  $m$  به انتهای سیمی آویزان باشد، زمان تناوب نوسانهای با دامنه بسیار کوچک به صورت زیر داده می شود:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml_0}{AY}} \quad (۱۱-۳)$$

می توان آن را از قانون نیرو طبق معادله (۳-۱۰) نتیجه گرفت. برای مثال جسمی به جرم 1kg را در نظر بگیرید که به انتهای سیم فولادی به طول یک متر و قطر یک میلیمتر آویزان شده است. داریم:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0.785 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

بنابراین

$$k = \frac{AY}{l_0} \approx 1.76 \times 10^5 \text{ N/m}$$

بنابراین

$$T \approx \frac{2\pi}{400} \approx 1.57 \times 10^{-2} \text{ sec}$$

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 60 \text{ Hz}$$

یا

ملاحظه می شود که این سیم به صورت یک فنر خیلی سخت عمل می کند و نوسانها، علاوه بر داشتن فرکانس بالا، باید همچنین دارای دامنه کوچک باشند (فقط کسر کوچکی از میلیمتر در سیمی به طول یک متر) به طوری که از حد استحکام سیم نیز تجاوز نکند. چنانچه در تعادل استاتیکی جسمی به جرم  $m$  به سیمی آویزان شود و افزایش طول سیم در این راستا را به  $h$  نشان دهیم، نتیجه نشان داده شده در رابطه (۳-۱۱) می تواند در یک بیان روشتر فیزیکی بازنویسی شود. به کمک رابطه (۳-۱۰) داریم:

$$mg = \frac{AY}{l_0} h$$

بنابراین

$$\frac{ml_0}{AY} = \frac{h}{g}$$

بدین ترتیب از معادله (۳-۱۱) داریم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

(۳-۱۲)

ملاحظه می گردد که زمان تناوب برابر زمان تناوب یک آونگ ساده به طول  $h$  است. این روش محاسبه زمان تناوب بر مبنای یک اندازه گیری ساده افزایش طول ناشی از کشیدگی



استاتیکی خیلی آسان است و هیچ نیاز به داشتن جزئیات خواص سیم یا بزرگی جسم آویزان شده نیست .

خواص الاستیک ، ماکروسکپی که ضرورتاً به وسیله مدول یانگ توضیح داده می شود ، با بررسی برهم کنشهای میکروسکپی ماده قابل تحلیل است . به طور آشکار اگر طول یک سیم در مجموع به اندازه یک درصد افزایش یابد ، این بدان معنی است که فواصل بین اتمها در آن جهت نیز هر کدام جداگانه به اندازه یک درصد افزایش می یابد ، بدین ترتیب می توان اصولاً مدولهای الاستیک را به خواص اتمی به نحوی که به وسیله منحنی انرژی پتانسیل ناشی از اثر نیروهای بین اتمی توصیف شده است مرتبط دانست . این موضوع را در اینجا ادامه نمی دهیم ، زیرا ارتباط فوری ما در این بحث با توصیف ماکروسکپی است . در عوض ما با مطرح نمودن چند مثال از حرکت هماهنگ ساده مطلب را ادامه می دهیم .

### اجسام شناور

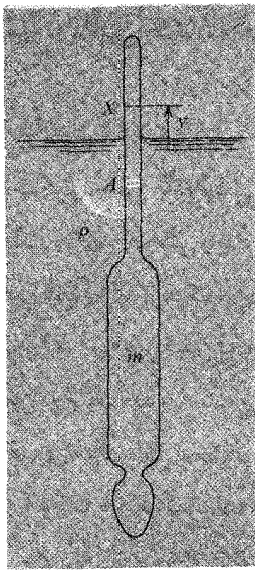
اگر جسمی شناور از وضعیت تعادل معمولی خود اندکی پائین تر یا بالاتر برود نیرویی بازگرداننده معادل با افزایش یا کاهش وزن مایع جابه جا شده به وسیله جسم بوجود می آید و حرکت تناوبی به دنبال آن رخ می دهد . اگر جسم شناور سطح مقطعی ثابت بر روی قسمتی که سطح مایع را قطع می کند ، داشته باشد موقعیت ساده ویژه ای وجود خواهد داشت . یک چگالی سنج ( هیدرومتر ) ، ( شکل ۵-۳ ) که برای اندازه گیری وزن مخصوص اسید باتری با ضد یخ به کار می رود . مثال علمی خوبی است .

جرم چگالی سنج را  $m$  و چگالی مایع را  $\rho$  در نظر بگیرید . سطح مقطع را با  $A$  مشخص کنید . اگر هیدرومتر به فاصله  $y$  بالای تراز شناوری نرمال خودش باشد ، حجم مایع جابه جا شده ، معادل با  $Ay$  و معادله حرکت (قانون نیوتن) چنین خواهد بود :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho g A y \quad \text{در نتیجه}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g A}{m}} \quad \text{و} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g A}} \quad (۱۳-۳)$$

برای مثال ، نوع متداول چگالی سنج باتری دارای جرم  $m \approx 10 \text{ g}$  و  $A \approx 0.25$  سانتی متر مربع است فرض کنید آن را در اسید باتری با جرم ویژه  $1/2$  قرار داده اید . بنابراین (با



شکل ۵-۳ چگالی سنج ساده ، وقتی نسبت به وضعیت شناوری نرمال جابه جا شود، در راستای قائم شروع به نوسان می کند.

استفاده از واحدهای سیستم MKS داریم :

$$m \approx 10^{-2} \text{ kg}$$

$$A \approx 2/5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$g \approx 10 \text{ m/sec}^2$$

$$\rho \approx 1/2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$T \approx 1 \text{ sec}$$

که نتیجه می دهد :

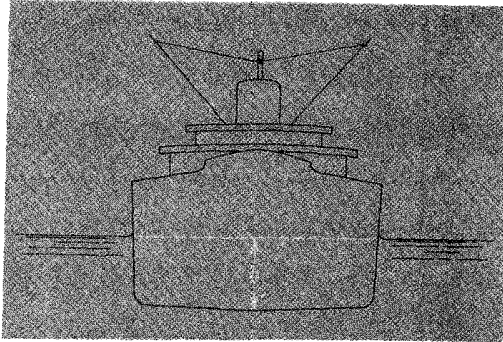
و آنگاه در مقیاس بسیار بزرگتر ، می توان چنین حرکتی را که با یک کشتی رخ می دهد ، ملاحظه کرد . چنانکه در شکل (۳-۶) پیداست ، با شباهت زیاد و تقریب خوب کناره های یک کشتی بزرگ ، تقریباً عمودی و کف آن کم و بیش مسطح است . در چنین حالتی براحتی می توانیم جرم کشتی را بر حسب ارتفاع آب نشینی کشتی یعنی  $h$  چنین بیان کنیم :

$$m = \rho Ah$$

که  $\rho$  چگالی آب و  $A$  سطح مقطع افقی کشتی در سطح آب است . با جایگزینی این مقدار در رابطه (۳-۱۳) خواهیم داشت :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (۳-۱۴)$$

که بدین سان ، عیناً همانند معادله آونگ ساده است که برای نوسانات قائم جرم آویخته از یک سیم استفاده می شد [معادله (۳-۱۲)]. برای مثال اگر آب نشین کشتی ۱۵ متر باشد، زمان تناوب چنین نوسانات قائمی حدود ۶ ثانیه خواهد بود.

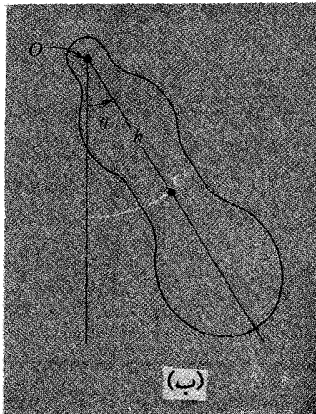


شکل ۳-۶ مقطع عرضی کشتی شناور

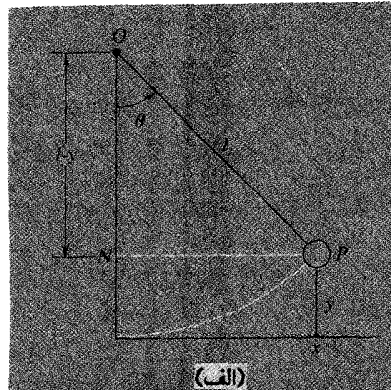
بهرحال چنین حرکتی ، مؤلفه مهمی از الگوی کلی نوسان کشتی نخواهد بود. غلتیدن و غوطه وری که هیچ افت و خیز مهمی در وضعیت مرکز جرم نسبت به سطح آب وارد نمی کند، بوسیله فعالیت امواج راحت تر برانگیخته می شود.

## آونگها

اصطلاح «آونگ ساده» چنانکه در شکل ۳-۷ (الف) نشان داده شده ، سیستم نوسان ساز متداولی است که علیرغم عملکرد خوب، پیچیده تر از نوسان های یک بعدی است که



(ب)



(الف)

شکل ۳-۷ (الف) آونگ ساده  
(ب) جسمی با شکل دلخواه از یک محور افقی آویزان شده است (آونگ مرکب)

تاکنون در نظر گرفته ایم (اگر چه باید پذیرفت که در بحث نوسانات قائم اجسام شناور براحتی از پرسش ماهرانه حرکت مایع جابه جا شده چشم پوشی کرده ایم). مساله آونگ ، اساساً دو بعدی است ، حتی اگر جابه جایی واقعی به وسیله یک تک زاویه کاملاً مشخص باشد. اگر چه جابه جاییها غالباً افقی هستند ، درعین حال حرکت اساساً به افت و خیزی مرکز جرم بستگی دارد که از تغییرات انرژی پتانسیل جاذبه ای ناشی می شود. در حقیقت برای شروع تحلیل حرکت آونگ ، کاربرد قانون بقای انرژی مناسب است و چون نتیجه نهایی تقریباً بدون تردید معلوم است ، لذا مثال خوبی از کاربرد روش انرژی است که خود از روشهای متعددی در تحلیل سیستم های پیچیده تر برخوردار است. اکنون با رجوع به شکل ۳-۷ (الف) اگر زاویه  $\theta$  کوچک باشد ، خواهیم داشت  $y \ll x$ . بنابراین از بررسی هندسی شکل به دست می آید که :

$$y \approx \frac{x^2}{2l}$$

که  $l$  طول ریسمان<sup>۶</sup> است. قانون بقای انرژی عبارت است از :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgy = E \quad \text{در حالی که}$$

با به کارگیری تقریبهای داده شده که پیش از این معرفی شد ، آنچه در زیر می آید ، بسیار نزدیک به صحت است :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2 = E$$

که ما این رابطه را بر طبق معادله (۲-۳) همانند حرکت هماهنگ ساده معین با  $\omega = \sqrt{g/l}$  تعریف می کنیم.

برای آمادگی بیشتر در مورد آونگهای پیچیده تر ، وضعیت تناوبی مساله را بر حسب جابه جایی زاویه  $\theta$  در نظر می گیریم. و با استفاده از آن داریم :

$$v = l\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \quad (\text{دقیقاً})$$

$$y = l(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}l\theta^2$$

۶- در مثلث ONP ، (با استفاده از قضیه فیثاغورث) داریم :  $y = l(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}l\theta^2$  در نتیجه

$$x^2 = 2ly - y^2 \approx 2ly$$

بنابراین عبارت تقریبی بقای انرژی به شکل زیر است:

$$\frac{1}{2} ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2 = E$$

حال جسمی دلخواه را در نظر بگیرید که در یک صفحه قائم آزادانه تاب می خورد. مرکز جرم C به فاصله h از نقطه آویزش، چنانکه در شکل ۷-۳ (ب) نشان داده شده، واقع است. افزایش انرژی پتانسیل به ازاء یک انحراف زاویه ای  $\theta$  برابر  $\frac{mgh\theta^2}{2}$  است. انرژی جنبشی همان انرژی دورانی جسم حول نقطه O است. از آنجائی که هر نقطه روی جسم

دارای سرعت زاویه ای  $d\theta/dt$  است، این انرژی جنبشی می تواند به صورت  $\frac{I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{2}$  نوشته شود که I گشتاور لختی جسم نسبت به محور افقی است که از نقطه O می گذرد، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mgh\theta^2 = E$$

در بسیاری از موارد، بهتر است ممان اینرسی جسم نسبت به یک محور موازی که از مرکز جرم می گذرد در نظر گرفته شود. اگر این گشتاور را  $mk^2$  بنویسیم که k «شعاع چرخش»

جسم است، در نتیجه انرژی جنبشی دورانی نسبت به مرکز جرم برابر  $mk^2 \frac{\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{2}$  است،

و باید به انرژی جنبشی محاسبه شده بر حسب سرعت خطی لحظه ای  $h \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$  مرکز جرم، اضافه شود. بنابراین معادله بقای انرژی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} mk^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( h \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mgh\theta^2 = E$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$\omega^2 = \frac{gh}{h^2 + k^2}$$

$$T = 2\pi \left( \frac{h^2 + k^2}{gh} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15-3)$$

### آب در لوله U شکل

اگر مایعی در لوله ای به شکل U با بازوهای قائم و دارای سطح مقطع ثابت، مطابق شکل (۸-۳) نگهداشته شود، دستگاهی خواهیم داشت که مانند آونگ می تواند عمل کند و هر چند حرکت دو بعدی است، ولی جابه جایی قائم  $y$  مایع نسبت به سطح مایع در حالت تعادل نوعی نوسان به نظر می رسد. طول کلی ستون مایع محتوی را  $l$  و سطح مقطع آن را  $A$  فرض کنید. بنابراین اگر  $\rho$  چگالی مایع باشد،  $m$  جرم کل مایع برابر،  $\rho A l$  خواهد بود. فرض می کنیم که هر قسمت از مایع با سرعت یکسان  $\frac{dy}{dt}$  حرکت می کند. افزایش انرژی پتانسیل گرانشی در وضعیتی که در شکل ۳-۸ نمایش داده شده، با برداشتن قسمتی از مایع به طول  $y$  از لوله سمت چپ و قرار دادن آن در بالای لوله سمت راست متناسب است. بنابراین می توانیم چنین بنویسیم:

$$U = gpAy^2$$

معادله زیر بقاء انرژی مکانیکی را ارائه می دهد:

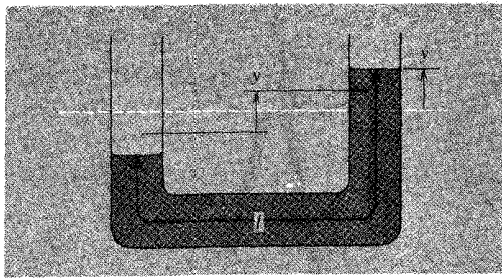
$$\frac{1}{2} \rho A l \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + gpAy^2 = E$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{l} \quad \text{از آنجا}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad (16-3)$$

شبهات این معادله را با معادله آونگ ساده ملاحظه کنید. همچنین تفاوت ظریف دوره تناوب ستونی از مایع که همانند دوره تناوب آونگی ساده با طول  $\frac{l}{2}$  است، باید مورد توجه قرار گیرد.

۷- بازوها حقیقتاً احتیاجی به عمودی بودن ندارد بلکه باید مستقیم باشند. سطح مقطع نیز نیازی به یکسان بودن ندارد زیرا فقط باید ثابت باشد. لوله رابط دو ستون مایع می تواند سطح مقطع متفاوتی داشته باشد اما باید قابلیت انتقال مایع را از هر قسمتی به قسمت دیگر داشته باشد.



شکل ۳-۸ ستون مایع در حال نوسان در یک لوله U شکل

### نوسان پیچشی

رشد یک گشتاور برگشت پذیر و وجود انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک جسم تاییده حقایق مکانیکی آشنایی هستند. اگر گشتاور  $M$  متناسب با جابه جایی زاویه ای بین دو پایانه یک جسم باشد، می توانیم در نظر بگیریم:

$$M = -c\theta \quad (۱۷-۳)$$

که  $c$  ثابت پیچشی سیستم است. بنابراین انرژی پتانسیل ذخیره شده به وسیله فرمول زیر معین می شود:

$$U = -\int M d\theta = \frac{1}{2}c\theta^2$$

اگر انحراف زاویه ای  $\theta$  به جسمی با گشتاور لختی  $I$  که متصل به یک پایانه سیستم تاییده است، داده شود (و اگر لختی سیستم تاییده به تنهایی ناچیز باشد)، آنگاه قانون بقاء انرژی به شکل زیر خواهد بود:

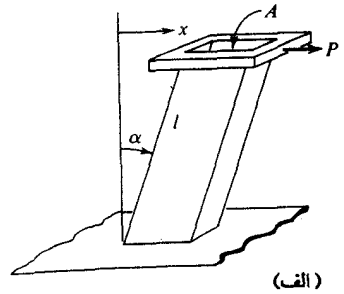
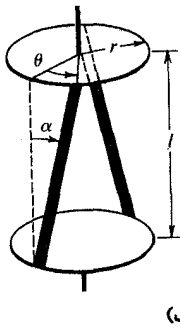
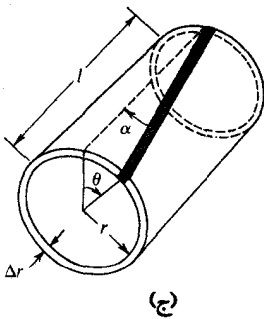
$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}c\theta^2 = E$$

$$\omega^2 = \frac{c}{I}$$

و بنابراین:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} \quad (۱۸-۳)$$

وابستگی ثابت پیچشی به خواص کشسانی پایه ای یک ماده تاییده شده از وابستگی ثابت فنر به مدول یانگ برای سیم یا میله کشیده شده کمتر است. این فرایند اساسی، تغییر شکل قابل بازگشت ماده نامیده می شود. فرض کنید که قالب راست گوشه از تکیه گاهش محکم به



شکل ۹-۳ (الف) تغییر شکل برشی یک قالب راست گوشه

(ب) راست گوشه بر اثر گشتاور پیچشی در خلال تغییر شکل برشی تاب بر می دارد.

(ج) یک لوله تابدار را می توان مانند مجموعه ای از تابها تصور کرد که در شکل (ب) نشان داده شده است.

یک میز چسبیده باشد و رویه فوقانی نیز به یک تخته مسطح بچسبد [شکل ۹-۳ (الف)]. اگر نیروی افقی P به تخته وارد شود، در مسیری موازی با دولبه فوقانی قالب موجب تغییر شکل نشان داده شده، می شود. دو وجه کناری، از مستطیل به متوازی الاضلاع تبدیل می شود. بنابراین تغییر شکل می تواند به وسیله زاویه قابل بازگشت  $\alpha$  مشخص شود. اندازه  $\alpha$  بر حسب جابه جایی عرضی واقعی X از انتهای فوقانی راست گوشه به ارتفاع l تقریباً از رابطه زیر به دست می آید:

$$\alpha = \frac{X}{l}$$

مشخص است که زاویه قابل بازگشت با نسبت نیروی عرضی اعمال شده به سطح فوقانی A متناسب است. تناسب تنش قابل بازگشت  $\frac{P}{A}$  به زاویه قابل بازگشت  $\frac{X}{l}$  به وسیله مدول قابل بازگشتی یا مدول استحکام که معمولاً با n نشان داده می شود، بیان می گردد. اگر نیروی اعمال شده به وسیله ماده قابل تغییر شکل را روی تخته با  $F(= -P)$  مشخص کنیم، در آن صورت می توان نوشت:

$$n = \frac{-F}{A \alpha}$$

و یا

$$dF = -nA d\alpha = \frac{-nA}{l} dx \quad (۱۹-۳)$$

-۸ برای حفظ تعادل میز باید نیروی افقی P- و همچنین گشتاور پیچشی را در جهت پادساعتگرد باندازه lp وارد آورد. بنابراین قالب در معرض هیچ نیروی انتقالی یا گشتاور پیچشی برآیند نخواهد بود.



این روابط از نوع روابطی هستند که برای تغییر شکل‌های مربوط به طول جغرافیایی - معادلات (۳-۹) و (۳-۱۰) داشتیم و مدول استحکام  $n$  ابعاد فیزیکی مشابهی با مدول ینگ دارد. اگر چه  $n$  معمولاً و عمدتاً کمتر از  $Y$  است اما بیشتر مواد، این دو مدول دارای مقادیر مشابهی هستند. جدول (۳-۲) اندازه‌های هر دو مقدار ( $n, Y$ ) را برای مجموعه مواد مشابه مندرج در جدول (۳-۱) نشان می‌دهد. همچنین مدول سومی که مدول حجمی (کپه ای)،  $K$  نامیده می‌شود، مقاومت ماده را به ازاء تغییرات حجم توصیف می‌کند.

جدول (۳-۲) مقادیر مدول‌های کشسانی

ماده	$Y, N/m^2$	$n, N/m^2$	$K, N/m^2$
آلمینیوم	$6 \times 10^{10}$	$3 \times 10^{10}$	$7 \times 10^{10}$
برنج	$9 \times 10^{10}$	$3/5 \times 10^{10}$	$6 \times 10^{10}$
مس	$12 \times 10^{10}$	$4/5 \times 10^{10}$	$13 \times 10^{10}$
شیشه	$6 \times 10^{10}$	$2/5 \times 10^{10}$	$4 \times 10^{10}$
فولاد	$10 \times 10^{10}$	$8 \times 10^{10}$	$16 \times 10^{10}$

در شروع محاسبه گشتاورهای برگشت پذیر، از فرایندهای قابل بازگشت استفاده کنید، و وضعیت نشان داده شده در شکل [۳-۹(ب)] را در نظر بگیرید. دو صفحه دایره ای شکل به شعاع  $r$  روی دو کلهایی به وسیله یک جفت نوار مستطیل شکل متصل شده اند. هنگامی که یک دوک به اندازه زاویه کوچک  $\theta$  تابیده می‌شود، پایانه هر نوار به صورت عرضی به میزان فاصله  $r\theta$  حرکت می‌کند. از این رو زاویه قابل بازگشت به وسیله فرمول زیر داده می‌شود:

$$\alpha = \frac{r\theta}{l}$$

اگر هر نوار، سطح مقطعی به میزان  $A$  داشته باشد، خود یک نیروی برگشت پذیر مماس بر صفحه دایره ای شکل، ایجاد می‌کند که به وسیله فرمول زیر داده می‌شود:

$$F = -nA \frac{r\theta}{l}$$

این رابطه خود گشتاور پیچشی را به بزرگی  $rF$  که به وسیله هر نوار حول محور چرخش

اعمال شده است، نشان می دهد. حال لوله ای را با دیواره نازک به شعاع داخلی  $r$  و ضخامت دیواره  $\Delta r$  که در شکل [۹۳ (ج)] نشان داده شده است در نظر بگیرید. به طور کلی این لوله می تواند مجموعه ای از نوارهای نازک موازی با محور استوانه باشد، همه این نوارها به گشتاورهای برگشت پذیر حول این محور کمک می کنند. از این رو گشتاور  $\Delta M$  تولید شده به وسیله لوله هنگامی که پایانه هایش به اندازه  $\theta$  پیچش نسبی یافته باشند، از فرمول زیر به دست می آید:

$$\Delta M = -\frac{m A r^2 \theta}{I}$$

$$A = 2\pi r \Delta r$$

$$\Delta M = -\frac{2\pi \rho r^3 \Delta r}{I} \theta$$

که

بنابر این

سرانجام همانند انجام عملیات مشابه در اغلب موارد، اگر جسم تابیده شده یک میله استوانه ای شکل یا سیم یا نخ محکم باشد، گشتاور کلی به وسیله جمع کردن یا انتگرال گیری نتیجه بالا به دست می آید، از این رو داریم.

$$M = -\frac{\pi \rho r^4 \theta}{2I} \quad (\text{استوانه محکم}) \quad (20-3)$$

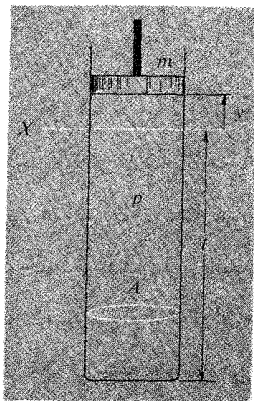
### فنریت هوا

یکی از مباحث مهم در این کتاب تشریح امواج توده های هوا و تولید اصوات موسیقی است. یک روش مفید برای این تشبیه، در نظر گرفتن توده محبوسی از گاز همانند یک فنر (به علت شباهت بسیار زیاد) است. در چنین موردی از اندیشه رابرت بویل<sup>۹</sup> در کشسانی یک گاز، و به عنوان بندی این بخش از نام کتابی که او در چنین موضوعاتی نوشته، استفاده شده است. (بویل از لغت "spring" به عنوان کیفیت فنریت استفاده کرد)<sup>۱۰</sup>

9. Robert Boyle

۱۰- کتاب رابرت بویل درباره شیوه های جدید آزمایشهای فیزیک مکانیک، که در حقیقت مربوط به فنریت هوا و آثار آن است، نوشته شده است. بیشتر قسمتهای کتاب را اسبابها و ماشینهای بادی جدید تشکیل می دهد، اکسفورد، ۱۶۶۰.

برای اینکه بحث در این زمینه را هر چه دقیقتر ادامه دهیم به تحلیل دستگاه جرم- فنر می پردازیم. لوله ای استوانه ای شکل را اختیار می کنیم که یک پایانه آن مسدود است و با پیستونی به جرم  $m$  کاملاً جفت شده ولی آزادانه حرکت می کند، چنانکه در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده است. توده هوای محبوس همانند فنری کاملاً نیرومند عمل می کند و در برابر فشار یا کشش ناگهانی بسیار مقاوم است. برای پی بردن به این اثر (هوای محبوس) کافی است کسی سوراخ خروجی تلمبه دوچرخه ای را با انگشتش ببندد و سعی کند که پیستون تلمبه را حرکت دهد.



شکل ۱۰-۳ پیستون در بالای ستون قائم هوا.

پیستون با عنایت به اینکه لوله افقی یا قائم باشد، حالت تعادل کاملاً متمایزی دارد. اگر لوله قائم باشد، چنانکه در شکل نمایش داده شده، فشار  $p$  گاز در لوله به طور قابل توجهی باید بالاتر از فشار جو باشد تا قابلیت نگهداری وزن پیستون را داشته باشد یعنی درست مانند کشش اولیه یک فنر. حال اگر پیستون به اندازه فاصله  $y$  که همان طول توده هواست، جابه جا شود، فشار درونی تنزل می کند و این باعث یک نیروی برگشتی روی جرم  $m$  می گردد. در واقع می توانیم معادله ای به شکل زیر بنویسیم:

$$F = A\Delta p$$

که  $\Delta p$  تغییرات فشار است.

تغییر فشار، تا چه اندازه بزرگ است؟ اولین فکر صحیح آن است که فشار را از قانون بویل محاسبه کنیم:

$$pV = \text{ثابت}$$

که به ما می دهد:

$$p\Delta V + V\Delta p = 0 \quad (21-3)$$

حالا

$$\Delta V = Ay$$

$$V = Al$$

بنابراین باید به دست آوریم که :

$$\Delta p = -\frac{pY}{l}$$

واز این رو

$$F = -\frac{Ap}{l}y \quad (22-3)$$

این رابطه را با معادله (۱۰-۳) که برای کشش یا تراکم یک میله جامد است، مقایسه کنید. می بینیم که در معادله (۲۲-۳) نقش فشار  $p$  کاملاً مشابه مدول کشسانی است. در واقع قانون بویل در مورد مدول کشسانی هوا نیز کاربرد دارد. و این فرض که مدول یانگ تنها برای نمونه ای جامد با حدود طبیعی خودش قابل تعریف است صحت ندارد. تحت شرایط تعریف و اندازه گیری مدول یانگ، ستونی از ماده آزاد است، به هنگام کشیده شدن از پهلو منقبض می شود و هنگام فشرده شدن از پهلو منبسط می شود، اساساً زمانی که با یک گاز سرو کار داریم. بایستی ظرفی با دیواره های سخت آماده کنیم. مدول مناسب این است که تغییرات حجم کل نمونه مورد آزمایش با یک تنش یکنواخت که به شکل تغییر فشار بر روی کل سطح (نمونه) وارد می آید مطابقت داشته باشد. این همان مدول حجم  $K$ ، است که پیش از این اشاره شد، و به طور کلی از معادله زیر تعیین می شود:

$$K = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}}$$

$$= -V \frac{dp}{dv} \quad (23-3)$$

به یاد بیاورید که قانون بویل رابطه بین فشار و حجم گاز را در دمای ثابت توصیف می کند. بنابراین معادله (۲۱-۳) منجر به تعریف مدول حجمی تک دمای یک گاز می شود:

$$K_{تک\text{دما}} = p \quad (24-3)$$

برای گازی در فشار یک اتمسفر، این مدول حدوداً برابر است با  $10^5 \text{ N/m}^2$ ، یعنی  $10^5$  با

۱۶ برابر کمتر از اندازه ای که برای مواد جامد به دست آمده است. (جدول ۳-۲ را ببینید). سؤال مهم این است که آیا ثابت فنریت توده ای از هوا، فی الواقع با کشسانی تک دما معین می شود. عموماً این حالت مصداق ندارد. هنگامی که گازی ناگهان فشرده شود، بر اثر کاری که روی آن انجام شده، گرمتر می شود. به عبارت دیگر، ذرات تشکیل دهنده آن، به طور میانگین سریعتر حرکت می کنند. ما از این تأثیر (گرم شدن) در استفاده از قانون بویل برای محاسبه تغییر فشار در (نتیجه نیروی برگشت پذیر) برای تغییر طول ستون هوای محبوس چشم پوشی کرده ایم. از این رو طبق نظریه جنبشی گازها، که فشار متناسب با مجذور سرعت میانگین مولکولی است این گرما باعث ایجاد نیروی برگشت پذیری بزرگتر از آنچه داشتیم، می گردد و مدول کشسانی ستون گاز بزرگتر از اندازه P می شود که در معادله (۳-۲۴) پیش بینی شده است. آزمایش چنین نتیجه ای را در بردارد. فشار با یک ضریب بزرگتر از عکس حجم تغییر می کند، تحت شرایط کاملاً بی در رو (بدون مبادله گرما از خارج) به داخل یا از داخل به خارج، رابطه بین حجم و فشار به صورت زیر در می آید<sup>۱۱</sup>.

$$pV^\gamma = \text{ثابت} \quad (\text{بی در رو یا آدیاباتیک}) \quad (3-25)$$

از این رو داریم:

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{ثابت}$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dV} + \frac{\gamma}{V} = 0$$

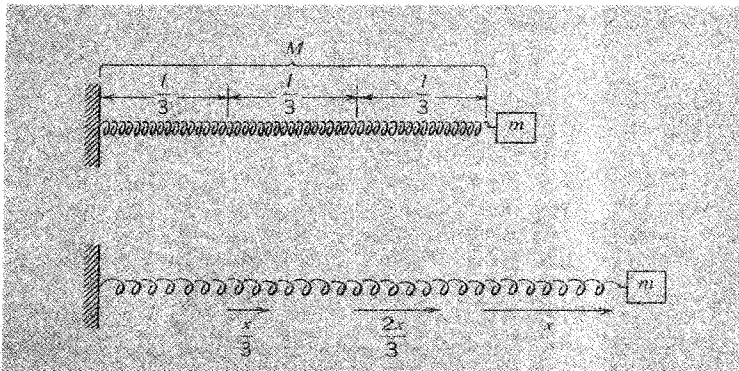
$$K_{\text{بی در رو}} = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p \quad (3-26)$$

اندازه ثابت  $\gamma$  برای گازهای «یک اتمی» نزدیک به  $1/67$  برای گازهای دو اتمی  $1/40$  و کمتر از  $1/40$  برای دیگر گازها (در دماهای طبیعی اتاق) است. این افزایش کشسانی تحت شرایط بی در رو، موجب افزایش بسامد ارتعاشات در گازهای محبوس می شود.

۱۱ - مبنای صحیح معادله (۳-۲۵) زمانی در نظر گرفته خواهد شد که بحث از سرعت صوت در گاز می شود.

تاکنون رفتار فنرها را با فرض نداشتن اینرسی مورد بحث قرار داده ایم. چنین فنرهایی دقیقاً مانند مخازن انرژی پتانسیل کشسانی عمل می کنند. البته این نگرش در بهترین فنر یک تقریب است در حالی که در بعضی موارد وجود اینرسی فنر می تواند نقش عمده ای را بازی کند. برای نزدیک شدن به این پرسش اجازه دهید مساله ای را که مورد توجه نویسندگان کتابهای درسی است، در نظر بگیریم. مساله عبارت است از جسمی که جرم  $m$  به فنری یکنواخت با جرم کلی  $M$  و ثابت فنر  $k$  بسته شده است. دوره تناوب نوسان چنین فنری با هنگامی که همین فنر بی وزن باشد، چقدر تفاوت دارد؟ حتی بدون هیچ محاسبه ای می توان پیش بینی کرد که دوره تناوب نوسانات طولانی تر می شود. اما چقدر؟

تقریبی ساده و ظاهراً معقول آن است که فرض کنیم قسمتهای مختلف فنر، جابه جایی را تحمل می کنند که با فواصلشان از انتهای ثابت فنر متناسب است و در شکل ۳-۱۱ نشان داده می شود (همانند آنچه در انبساط ایستایی رخ می دهد و در شکل ۳-۴ نشان داده شده است). اکنون می توان کل انرژی جنبشی فنر را در هر لحظه ای که انبساط آن از انتهای دیگر فنر جابه جایی ۱۰۰٪ را دارد، محاسبه کنیم.



شکل ۳-۱۱ کشیدگی یکنواخت فنر سنگین

۱۲- در مباحث بعدی روشن خواهد شد که اگر کسی مساله را در زمینه صحیح به کار برد، از یک مساله نظری محض جالب تر است.

طول فنر را در حالت آزاد،  $l$  و فاصله اندازه گیری شده از انتهای ثابت را ( $0 \leq s \leq l$ ) فرض کنید. بخش کوچکی از فنر را که بین  $s$  و  $s + ds$  قرار گرفته، در نظر بگیرید. جرم فنر به وسیله رابطه زیر معین می شود:

$$dM = \frac{M}{l} ds$$

و جابه جایی نسبی این بخش کوچک برابر کسر  $\frac{s}{l}$  است. بنابراین انرژی جنبشی این بخش کوچک از رابطه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} dK &= \frac{1}{2} \left( \frac{M}{l} ds \right) \left( \frac{s}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{M}{2l^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 s^2 ds \end{aligned}$$

در هر لحظه معین انرژی جنبشی کل فنر به وسیله انتگرالگیری رابطه بالا به دست می آید، برای این منظور  $dx/dt$  مانند یک ضریب ثابت عمل می کند، از این رو

$$\begin{aligned} K_{\text{فنر}} &= \frac{M}{2l^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \int_0^l s^2 ds \\ &= \frac{1}{6} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

بنابراین قانون بقاء انرژی برای کل سیستم خواهد شد:

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{6} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E$$

که نتیجه می شود:

$$\omega^2 = \frac{k}{m + \frac{M}{3}}$$

این نتیجه مانند حالتی است که فنری بی جرم در نظر گرفته شود و  $\frac{M}{3}$  به جرم بسته شده به پایانه اش اضافه شود.

اما آیا این درست است؟ برای مثال فرض کنید که در حالت پایانی جرم  $m$  آویخته را به کلی برداریم، در آن صورت با سیستمی روبرو خواهیم بود که خود فنر، هم مخزن انرژی جنبشی و

هم مخزن انرژی پتانسیل کشسانی است. آیا بسامد ارتعاشات آزادش به وسیله  $\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$  به دست خواهد آمد؟ پاسخ منفی است! محاسبه فوق در شرایط انبساط ایستایی یک فنر

یکنواخت در صورتی پذیرفتنی است که در آن انبساط متناسب با فاصله از انتهای ثابت آن باشد. محاسبه تنها هنگامی مصداق دارد که نیروی کششی در تمام نقاط در طول فنر یکسان باشد. و اگر توزیع جرمی در طول فنر وجود داشته باشد موجب ایجاد شتاب می شود، این شرط به هیچوجه عملی نیست. بنابراین باید تغییر نیروی کششی با فاصله در طول فنر وجود داشته باشد. معادله ما در مورد  $\omega$  تنها یک تقریب است و در صورتی صدق می کند که  $M \ll m$  باشد، در این حالت نیرو در طول فنر تا حدودی ثابت است در صورتی که به ازاء  $m = 0$  نیروی برگشت پذیر در انتهای آزاد فنر بایستی تا صفر نزول کند. (در این نقطه اگر وزنه ای به فنر متصل نباشد شتاب وجود دارد.)

مثال فوق، اگر چه در اینجا به طور ناقص به کار رفت، اما حلقه ارتباط مهمی بین سیستم فنر - جرم ساده و ارتعاشات آزاد یک جسم کشیده شده است. البته، برای میله ای که آزادانه ارتعاش دارد، یا ستونی از هوا، دقیقاً شبیه فنر جرم داری است که هیچ وزنه ای به انتهایش متصل نباشد. تحلیل هر چه دقیقتر رفتار چنین سیستمی برای ما اهمیت اساسی خواهد داشت. ما این کار را در فصل ۶ انجام خواهیم داد. هر چند در ضمن می توانیم با استفاده از بحث خام فوق به نوعی نتیجه اشاره کنیم که از عملکرد واقعی حاصل می شود و آن (نتیجه) بسامد  $\nu (= \frac{\omega}{2\pi})$  نوسان آزاد فنری یکنواخت به جرم  $M$  و ضریب سختی  $k$  است، که از رابطه اساسی زیر به دست می آید:

$$\nu = \text{ثابت} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (27-3)$$

(در اینجا، ثابت یک ضریب عددی محض است)، زیرا این تنها ترکیب  $k$  و  $M$  است که بعد یک بسامد را دارد. ما می توانیم حتی یک قدم جلوتر برویم و فرض کنیم که در معادله (۲۷-۳) بتوانیم به جای  $k$  و  $M$  بر حسب ابعاد خطی، چگالی و مدول کشسانی ماده را قرار دهیم. برای مثال فرض می کنیم میله ای جامد به طول  $l$ ، سطح مقطع  $A$ ، چگالی  $\rho$  و مدول یانگ  $Y$  داریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$M = Al\rho$$

$$k = \frac{AY}{l}$$

[معادله (۱۰-۳)]

و از این رو

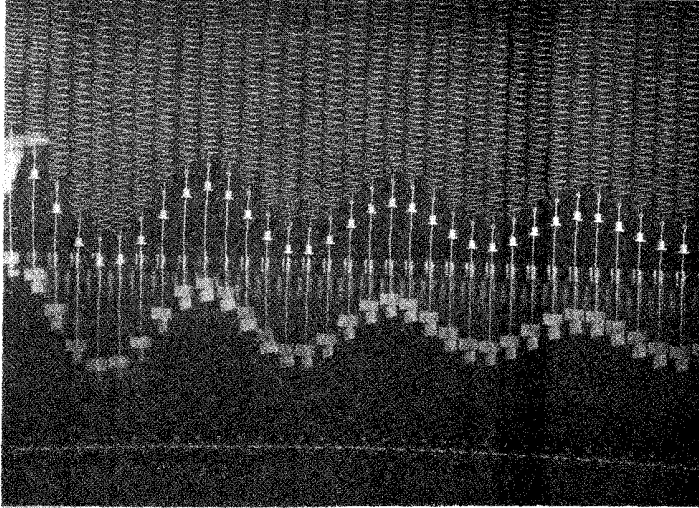
$$\nu = \frac{\text{ثابت}}{l} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (28-3)$$



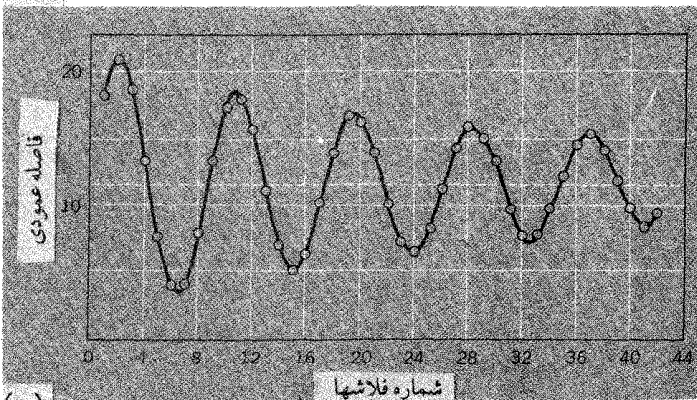
می توانیم انتظار داشته باشیم که چنین معادله ای با وجود آنکه ثابت عددی هنوز نامعین است، بتواند ارتعاشات طولی میله را توجیه کند.

### میرایی ارتعاشات آزاد

ارتعاشات آزاد هر سیستم فیزیکی واقعی همیشه در گذر زمان تحلیل می رود. چنین سیستم هایی به طور اجتناب ناپذیر به علت تحلیل رفتن انرژی مکانیکی، ارتعاش صورت از هم پاشیدگی پیدا می کند. در چنین سیستم ارتعاشی می توان انتظار داشت که در بخشی از سیستم، اتلاف انرژی وجود دارد. برای مثال، هنگامی که ما صدای دیپازونی را



(الف)



(ب)

شکل ۳-۱۲ (الف) عکس از نوسانات آزاد میرا یا چند فلاش گرفته شده است، تصاویر مسلسل و مجزا با چرخش آهسته و هماهنگ دوربین از پهلو به دست آمده است، (عکس از Jon Rosenfeld، مرکز آموزش پژوهشی M.I.T.)  
 (ب) نمودار نوسانات میرا، بر اساس اندازه گیری از عکسی به دست آمده که با این روش گرفته شده است.

بر اثر انرژی منتقل شده آن در هوا و سپس از هوا به گوشه‌هایمان می‌شنویم. هرگز درست نیست که این ارتعاشات آزاد را از نظر ریاضی یک ارتعاش سینوسی با دامنه ثابت توصیف کنیم. اکنون بایستی بررسی کنیم که معادله ارتعاشات آزاد توسط نیروهای از هم پاشیده چگونه تغییر می‌کند.

ما بار دیگر بحثمان را به سیستم پایه ای فتر-وزنه مربوط خواهیم کرد. شکل ۳-۱۲ نمونه ای واقعی از میرایی نوسانات چنین سیستمی را نشان می‌دهد. با تاکید بر میرایی، پره متصل به وزنه در حال حرکت، درون استوانه ای پر از مایع فرو می‌رود. شکل ۳-۱۲ (الف) تصویر روشنی را نشان می‌دهد که با چند فلاش، ضمن حرکت، گرفته شده است. شکل ۳-۱۲ (ب) نموداری است که مستقیماً بر اساس اندازه گیریهای به دست آمده از عکس ترسیم شده است.

نیروی مقاوم یک سیال در برابر یک جسم متحرك تابع سرعت جسم است و اندازه اش بخوبی به وسیله معادله زیر توصیف می‌شود:

$$R(v) = b_1 v + b_2 v^2$$

که  $v$  اندازه  $|v|$  سرعت است. این نیروی مقاوم در خلاف جهت سرعت  $v$  اعمال می‌شود. با توجه به کوچک بودن  $v$  در مقایسه با  $\frac{b_1}{b_2}$  می‌توانیم فرض کنیم که نیروی مقاوم به وسیله جمله خطی معین می‌شود. در این حالت عبارت قانون نیوتن برای وزنه متحرك می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv$$

یعنی

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (29-3)$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

در اینجا

$$\gamma = \frac{b}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (30-3)$$

بنابراین ممکن است تصور شود که در این حالت میرایی به وسیله کمیت  $\gamma$ ، که دارای بُعد

بسامد است مشخص می شود و ثابت  $\omega_0$  بسامد زاویه ای سیستم را ، هنگامی که میرایی وجود ندارد ، بیان می کند .

اکنون برای آنکه معادله  $(3-30)$  را حل کنیم ، این کار را به وسیله روش نمایی مختلط انجام می دهیم ، با فرض اینکه  $X$  جزء حقیقی بردار چرخشی  $Z$  است و  $Z$  در معادله ای مانند معادله  $(3-30)$  صدق می کند . این معادله عبارت است از :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (30-3) \text{ (الف)}$$

بایستی راه حلی به شکل زیر برای  $Z$  فرض کنیم :

$$z = Ae^{j(pt+\alpha)} \quad (31-3)$$

این معادله درست مانند  $(3-8)$  ، و شامل دو ثابت ضروری  $A$  و  $\alpha$  است تا بتوانیم پاسخ خود را با اندازه های اولیه جابه جایی و سرعت مطابقت دهیم . با جایگزینی در معادله  $30-3$  (الف) خواهیم داشت :

$$(-p^2 + jp\gamma + \omega_0^2)Ae^{j(pt+\alpha)} = 0$$

اگر تمام مقادیر  $A$  در این معادله صدق کند خواهیم داشت :

$$-p^2 + jp\gamma + \omega_0^2 = 0 \quad (32-3)$$

این شرط ، اعداد مختلط را وارد مسأله می کند ، یعنی واقعاً دو شرط را که اجزاء حقیقی و موهومی ، به طور جداگانه کاربرد دارند شامل می شود . اگر کمیت  $p$  منحصرأ حقیقی باشد ، شرط مذکور صدق نمی کند ، زیرا عبارت  $jp\gamma$  یک کمیت موهومی محض ، بدون آنکه بتوان آن را حذف کرد ، خواهد بود . بنابراین باید چنین جایگزین کنیم :

$$p = n + js$$

که  $n$  و  $s$  هر دو حقیقی هستند . پس :

$$p^2 = n^2 + 2jns - s^2$$

با جایگزین ساختن این کمیات در معادله  $(32-3)$  خواهیم داشت :

$$-n^2 - 2jns + s^2 + jn\gamma - s\gamma + \omega_0^2 = 0$$

از این رو ما دو معادله جداگانه خواهیم داشت :

$$-n^2 + s^2 - s\gamma + \omega_0^2 = 0 \quad \text{اجزاء حقیقی :}$$

$$-2ns + n\gamma = 0 \quad \text{اجزاء موهومی :}$$

از معادله دومی به دست می آید:

$$s = \frac{\gamma}{\tau}$$

با جایگزینی  $s = \frac{\gamma}{\tau}$  در نخستین معادله نتیجه می شود:

$$n^2 = \omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

حالا به معادله (۳-۳۱) بر می گردیم. بانوشتن  $p$  به عنوان کمیت مختلط  $n + js$  خواهیم داشت:

$$z = Ae^{j(nt+jst+\alpha)}$$

$$= Ae^{-st} e^{j(mt+\alpha)}$$

وازاینرو

$$x = Ae^{-st} \cos(nt + \alpha)$$

اگر به جای  $n$  و  $s$  مقدار قرار دهیم حل زیر به دست می آید:

$$x = Ae^{-\frac{\gamma t}{\tau}} \cos(\omega t + \alpha) \quad (3-33)$$

که

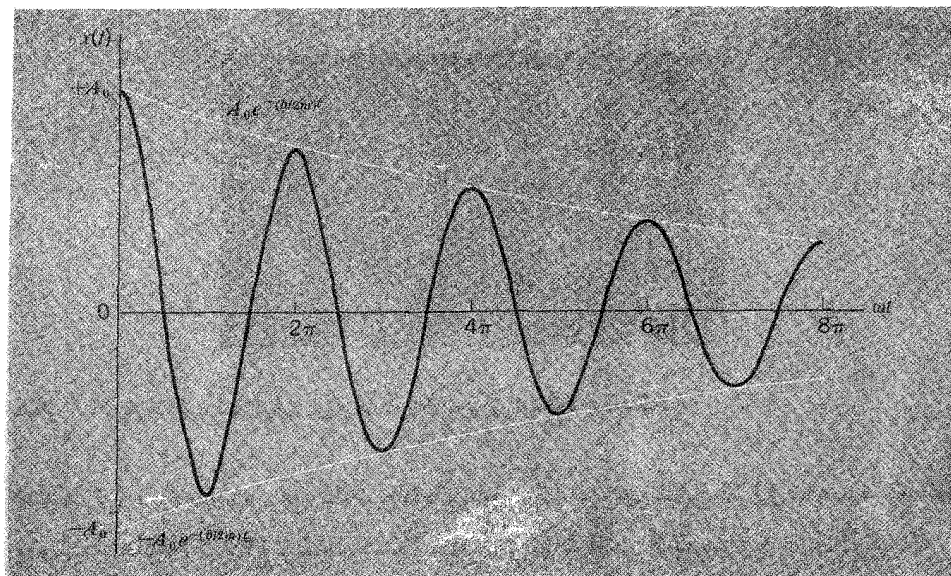
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \quad (3-34)$$

شکل (۳-۱۳) نمودار معادله (۳-۳۳) را در حالت خاص  $\alpha = 0$  نشان می دهد. پوش منحنی نوسانی میرا، نیز در شکل رسم گردیده است<sup>۱۳</sup>. صفرهای منحنی در فواصل مساوی و به فاصله  $\omega \Delta t = \pi$  از یکدیگر قرار گرفته اند و بنابراین حداکثرها و حداقل های متوالی با همین فاصله از یکدیگر واقعند اما حداکثرها و حداقل ها تنها بطور تقریبی نیمه راه بین صفرها هستند. اندازه  $\omega$  بسامد زاویه ای طبیعی نوسان ساز میرا را به طور وضوح مشخص می سازد.

منحنی در شکل (۳-۱۳) برای حالتی رسم شده که میرایی ارتعاشات سریع است. هر چند اگر میرایی کوچک باشد، حرکت تقریباً به حرکت هماهنگ ساده (SHM) با دامنه ثابت برای چند چرخه نزدیک می شود. تحت این شرایط، تاثیر میرایی را بر حسب تابع

---

۱۳- برای نشان دادن دامنه حرکت در  $t = 0$ ، به جای  $A$  مقدار  $A_0$  را قرار می دهیم، با این کار اندازه عددی دامنه خیلی کم تغییر می کند.



شکل ۳-۱۳ نوسانات هماهنگ تدمیرا

نمایی انرژی مکانیکی کل،  $E$  می توان شرح داد. به ازاء  $\omega \ll \gamma$  می توانیم بگوئیم که در حدود زمان  $t$ ، نوسانات برای چندین چرخه به وسیله SHM با دامنه ثابت  $A$  به شرح زیر بیان می گردد:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \quad (3-35)$$

اکنون انرژی مکانیکی کل نوسانگر هماهنگ ساده از فرمول زیر تعیین می گردد:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

در نتیجه با استفاده از اندازه  $A$  در رابطه بالا، داریم:

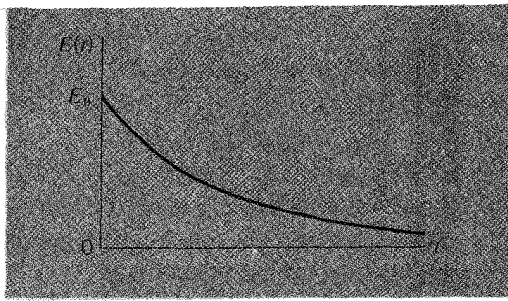
$$E(t) = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-\gamma t}$$

یعنی:

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} \quad (3-36)$$

این کاهش انرژی کل در شکل ۳-۱۴ نشان داده شده است.

به یاد خواهید آورد که این تحلیل کافی فرایند میرایی مبتنی بر فرضی است که میرایی را ناشی از نیروی مقاومتی می داند که متناسب با سرعت است. اگر قانون مقاومت به صورت دیگری مثلاً  $v^2 \approx R(v)$  اعمال شود، موقعیت کاملاً متفاوت (و به کاربرد آن



شکل ۳-۱۴ سقوط (فروآفت) نمایی انرژی کل در خلال میرایی نوسانات هماهنگ.

مشکل تر) خواهد بود. هر چند شایان ذکر است که میرایی نمایی انرژی، همانگونه که به وسیله معادله (۳-۳۵) توصیف شده است، می تواند ناشی از بسیاری از اشکال گوناگون فرایندهای تلفات باشد مثلاً در یک مدار الکتریکی نوسانی نرخ تلفات انرژی در مقاومت موجود در مدار متناسب با مربع شدت جریان است، بنابراین انرژی کسل الکترو مغناطیسی مدار نیز به همین نحو با مربع جریان متناسب خواهد بود. این موقعیت در حقیقت شباهت زیادی به میرایی نوسانگر مکانیکی دارد که ناشی از چسبناکی (viscous) است.

در فیزیک اتمی و هسته ای نیز برهم کنشهای بسیاری وجود دارد که موجب میرایی نمایی انرژی یک سیستم می شود. و بنابراین می بینیم که رفتار این سیستمها با یک نوسانگر مکانیکی ساده که دارای میرایی چسبناکی است شباهت دارد. در نتیجه تحلیل چنین نوسانگر مکانیکی هر چند که حالت خاصی است، ولی موجب می شود که مو شکافانه تر به پدیده های مشابه دیگر بنگریم.

از تحلیل فوق الذکر، روشن است که نوسانگر میرا با دو پارامتر  $\omega_0$  و  $\gamma$  ( $\gamma = \frac{b}{m}$ ) مشخص می شود. ثابت  $\omega_0$  بسامد زاویه ای نوسانات غیر میراست و عکس  $\gamma$  زمان لازم برای کاهش انرژی تا  $\frac{1}{e}$  مقدار اولیه اش است. بنابراین  $\omega_0$  و  $\gamma$  کمیتهایی هستند که ابعاد شان یکسان است برای سهولت در کاربرد نتایج آن در سیستمهای فیزیکی گوناگون، پارامتری را به نام  $Q$  تعریف می کنیم ( $Q$  نشانه کیفیت) و اندازه  $Q$  برای سیستم نوسانی از نسبت این دو کمیت یعنی  $\omega_0$  و  $\gamma$  به دست می آید:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (3-37)$$

Q یک عدد مطلق است که در مقایسه با یکای دستگاههای نوسان کننده ، و با وجود کوچکی نرخ تلفات انرژی ، بسیار بزرگ است . معادله (۳۸-۳) بر حسب اندازه Q می شود :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right) \quad (38-3)$$

اگر Q نسبت به یک بزرگ باشد و این حالت مهم یکی از حالاتی است که ما عمدتاً با آن سروکار داریم . از معادله (۳۸-۳) نتیجه می شود که  $\omega \approx \omega_0$  است و حرکت نوسانگر [معادله (۳۳-۳)] تقریباً از رابطه زیر به دست می آید :

$$x = A_0 e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (39-3)$$

می توان یادآور شد که Q دقیقاً به تعداد چرخه (سیکل) های نوسان که دامنه نوسان آنها با ضریب e سقوط می کند ، بستگی دارد . بنابر معادله (۳۹-۳) خواهیم داشت :

$$A(t) = A_0 e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}}$$

حال زمان t را بر حسب تعداد چرخه های کامل نوسان n اندازه می گیریم . سپس با تقریب داده شده  $\omega \approx \omega_0$  می توانیم به جای  $t \approx \frac{2\pi n}{\omega_0}$  بر حسب تعداد چرخه های سپری شده مقدار قرار دهیم و رابطه زیر به دست می آید :

$$A(n) \approx A_0 e^{-\frac{n\pi}{Q}} \quad (40-3)$$

در این صورت ، دامنه به میزان ضریب e ، در حدود  $n = \frac{Q}{\pi}$  سیکل از نوسان آزاد کاهش می یابد .

می توانیم معادله (۳۰-۳) را بر حسب  $\omega_0$  و Q به شکل زیر بازنویسی کنیم :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (41-3)$$

و در موارد بسیاری ، این معادله ، برای نوسانات آزاد ، میرا ، در تعداد زیادی از دستگاههای گوناگون فیزیکی ، مکانیکی و غیر مکانیکی ، می تواند شکل مناسب ، راحت و جامع معادله دیفرانسیل اساسی باشد .

ملاحظه کرده اید که تشکیل معادله برای نوسانات آزاد میرا [معادله (۳-۳۳)] اساساً بستگی به توانایی ما برای تعریف این نوسانات دارد و بسامد زاویه ای  $\omega$  نوسانات به وسیله معادله زیر معین می شود:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

اما اگر  $\omega_0 = \left[ \left( \frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$  کمتر از  $\frac{\gamma}{2} \left( = \frac{b}{2m} \right)$  باشد، چه خواهد شد؟ در این حالت حرکت

به هیچ وجه نوسانی نخواهد بود. برای پی بردن به راه حل مسئله، مراجعه به تحلیل پیشین یعنی معادله (۳-۳۳) کمک مؤثری به ما خواهد بود. ضمناً به این نتیجه رسیده ایم که معادله دیفرانسیل حرکت [معادله (۳-۳۰)] در پاسخی به شکل زیر صدق می کند:

$$x = \text{Re} \left[ A e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{J(n t + \alpha)} \right]$$

$$n^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

که در آن

حالا فرض کنید که  $\omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{4}$  باشد لذا می توانیم قرار دهیم.

$$n^2 = - \left( \frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 \right)$$

و اگر به حل آن برای یافتن  $n$  پردازیم، خواهیم داشت:

$$n = \pm J \left( \frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \pm J\beta$$

بنابراین داریم  $e^{Jnt} = e^{\pm\beta t}$  که تابع نمایی میرایی  $x$  بر حسب  $t$  در مورد هر یک از دو مؤلفه ممکن خواهد بود:

$$e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t} \quad \text{یا} \quad e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t}$$

تحلیل دقیق نشان می دهد که هر دو تابع نمایی عموماً لازم هستند و تغییرات کامل  $x$  بر حسب  $t$

۱۴- این مبحث به مسأله نوسانی زیاد مربوط نیست، ولی بسیار نزدیک به آن است و به منظور کامل شدن بحث اضافه شده است.



به وسیله معادله زیر تعیین می شود:

$$x = A_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{\tau} + \beta\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{\tau} - \beta\right)t} \quad (42-3)$$

$$\beta = \left( \frac{\gamma^2}{\tau} - \omega_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{که در آن}$$

دو ثابت قابل تعدیل  $A_1$  و  $A_2$  (که می توانند با هر علامتی باشند) برای حل، آن چنان هستند که به ازاء هر مقدار  $x$  و  $\frac{dx}{dt}$  در هر زمان معین مانند  $t = 0$  مناسبند. آخرین سؤالی که ممکن است در ارتباط با این حرکت با میرایی زیاد مطرح شود آن است که اگر  $\omega_0$  و  $\frac{\gamma}{\tau}$  دقیقاً یا یکدیگر مساوی باشند، چه خواهد شد؟ در این مورد طرف راست معادله (42-3) به دو عبارت دقیقاً هم نوع کاهش خواهد یافت و تنها یک ثابت قابل تعدیل باقی می ماند. هر چند این راه حلی قابل قبول نخواهد بود، اما هنوز به دو ثابت قابل تعدیل نیاز داریم. لذا می توان نشان داد که شکل مناسب حل در این مورد چنین است:

$$x = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma t}{\tau}} \quad (43-3)$$

شما می توانید با جایگزینی تحقیق کنید که در معادله اساسی حرکت یعنی رابطه (30-3) مقدار  $\omega_0 = \frac{\gamma}{\tau}$  یا  $\gamma = 2\omega_0$  صدق می کند. این شرط بسیار خاص مربوط به وضعیتی است که آن را میرایی بحرانی می نامند. در سیستمهای مکانیکی واقعی ثابت میرایی  $\gamma$  اغلب بطور سنجیده مطابق با این وضعیت انتخاب می شود، زیرا در وضعیت میرایی بحرانی اعمال ناگهانی یک نیروی ثابت به سیستم (از پیش ساکن) باعث می شود که دستگاه از وضعیت تعادل خارج شود و با کُند شدن حرکات غیر نوسانی بتدریج از یک وضعیت جدید پیروی کند. چنان رفتاری در اجزاء متحرک کنتور برق و نظایر آن بالاترین مزیت محسوب می شود. در آن صورت شخص می تواند به محض برقرار شدن جریان در مدار، کارکرد کنتور را بخواند.

۳-۱ جسمی به جرم یک گرم از فنری آویخته شده و دارای حرکت نوسانی است. اگر در لحظه  $t = 0$ ، تغییر مکان  $43/785$  سانتیمتر و شتاب  $1/7514$  سانتیمتر بر مجذور ثانیه باشد. ثابت فنر را بدست آورید.

۳-۲ جسمی به جرم  $m$  از یک فنر یکنواخت با ثابت فنر  $k$  آویخته شده است.

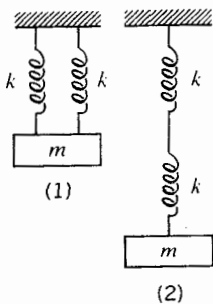
(الف) دوره تناوب نوسانات در این سیستم چقدر است؟

(ب) دوره تناوب نوسانات را در حالی که جرم  $m$  :

(۱) به دو فنر یکسان که موازی یکدیگر بسته شده اند آویزان شود،

(۲) به پائین دو فنر یکسان که انتهای یکی به ابتدای دیگری وصل شده است، آویزان شود؛

بیابید (به شکل توجه کنید).



۳-۳ یک سکو در حال اجراء یک حرکت هماهنگ ساده در راستای قائم با دامنه  $5$  سانتیمتر و بسامد  $\frac{10}{\pi}$  ارتعاش در هر ثانیه است. یک بلوک بر روی سکو در پائین ترین نقطه مسیرش قرار داده می شود.

(الف) در چه نقطه ای بلوک، سکو را رها خواهد کرد؟

(ب) بلوک چقدر بالاتر از بالاترین نقطه مسیر سکو خواهد رسید؟

۴-۳ یک استوانه با قطر (قاعدۀ)  $d$  ، بطوری که به اندازه  $l$  از طول آن در داخل آب است به حالت شناور قرار دارد. ارتفاع کلی آن  $L$  می باشد. فرض کنید سیستم غیر میراست. در زمان  $t = 0$  استوانه به اندازه طول  $B$  به داخل آب فرو برده شده و رها می شود.

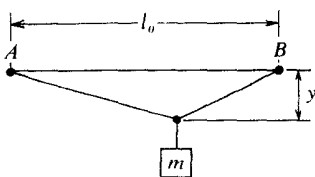
الف) بسامد نوسان چقدر است؟

ب) نمودار سرعت نسبت به زمان را از  $t = 0$  تا یک دورۀ تناوب  $t$  رسم نمایید. رسم نمودار دامنه صحیح و فاز را نیز شامل باشد.

۵-۳ یک میله به طول  $L$  به یک تیر میخکوب شده ، به طوری که  $\frac{2}{3}$  طول آن ، زیر میخ قرار دارد. دورۀ تناوب نوسانات کوچک میله چقدر است ؟

۶-۳ یک حلقه مدور به قطر  $d$  بر روی یک میخ به حالت آویزان قرار دارد. دورۀ تناوب نوساناتش با فرض کوچک بودن دامنه چقدر است ؟

۷-۳ یک سیم کشیده نشده به طول  $l$  هنگامی که یک جرم معلوم در انتهای زیرینش آویزان شده باشد، به اندازه  $l_0$  کشیده می شود. اگر این سیم یکنواخت بین دو نقطه  $A$  و  $B$  که فاصله بینشان در راستای افقی  $l$  است، محکم شده باشد و همان جرم چنانکه در شکل نشان داده شده از نقطه میانی سیم آویخته شده باشد، افتادگی  $y$  نقطه میانی سیم و کشش سیم چقدر است ؟



۸-۳ الف) جسمی به جرم  $5$  کیلوگرم از انتهای یک سیم فولادی به طول  $2m$  و قطر  $5mm$  آویخته شده است (مدول یانگ  $2 \times 10^{11} N/m^2$ ) افزایش طول سیم چقدر است ؟  
 ب) جسم به اندازه فاصله  $h$  بالا برده می شود (بنابراین سیم شل خواهد شد) و سپس رها می گردد، به طوری که سیم یک تکان ناگهانی می خورد. حداکثر کشش فولاد

$1/1 \times 10^1 \text{ N/m}^2$  می باشد. حداکثر ارتفاع ممکن برای آنکه سیم پاره نشود چقدر است؟

۹-۳ الف) یک توپ فولادی جامد از انتهای یک سیم فولادی به طول  $2 \text{ m}$  و شعاع  $1 \text{ mm}$  آویزان شده است. حداکثر کشش فولاد برابر  $1/1 \times 10^1 \text{ N/m}^2$  است. شعاع و جرم

بزرگترین توپ برای آنکه سیم بتواند آن را تحمل کند چقدر است؟

ب) دوره تناوب نوسان پیچشی این سیستم چقدر است؟ (مدول پیچشی فولاد همان

$8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  است. گشتاور لختی جسم کروی حول محوری که از مرکز می گذرد  $\frac{2Mr^2}{5}$

است.

۱۰-۳ یک میله فلزی، به طول  $0.5 \text{ m}$ ، سطح مقطعی به اندازه  $2 \text{ mm}^2$  دارد.

الف) به انتهای میله که در راستای قائم است، وزنه  $60 \text{ kg}$  آویخته شده است که

باعث کشش طولی به اندازه  $0.25 \text{ mm}$  می شود. مدول یانگ به  $\left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$  برای جنس این میله

چقدر است؟

ب) میله به طور محکم و استوار از زیر چنانکه در شکل نشان داده شده، نگهداری

می شود و در بالا نیز نیروی  $F$  در جهت  $y$  که در شکل مشخص است (موازی با لبه به طول

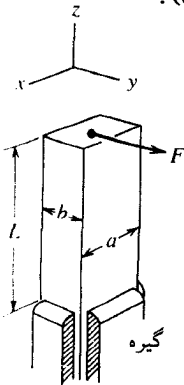
$b$ ) به جسم وارد می شود. در نتیجه انحراف ایستایی  $y$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$y = \frac{4L^3}{Yab^3} F$$

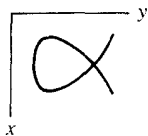
اگر نیروی  $F$  برداشته شود و یک وزنه به جرم  $m$  که خیلی بزرگتر از جرم میله می باشد، به

انتهای نوک میله بسته شود. نسبت بسامدهای ارتعاش در جهت های  $x$  و  $y$  چقدر خواهد

بود (یعنی، موازی با لبه ها به طول  $a$  و  $b$ )؟



ج) وزنه به یک طرف به طور عرضی کشیده شده و رها می گردد. در نتیجه وزنه مانند طرح کشیده شده در شکل ، مسیری را ترسیم می کند. نسبت a به b چقدر است ؟



۱۱-۳ الف) بسامد ارتعاش یک ستون گاز محبوس شده در یک لوله استوانه ای را که یک سر آن به طور خیلی مناسب بسته شده اما پیستونی به جرم m آزادانه در آن متحرك است تحت شرایط بی در رو (آدیاباتیک) به دست آورید.

ب) یک گلوله فولادی به قطر ۲cm در یک لوله شیشه ای دارای سوراخ ظریف ، که بر روی یک فلاسک ۱۲ لیتری محتوی هوا در فشار جو سوار شده است ، نوسان می کند. تحقیق کنید که دوره تناوب نوسان در حدود ۱sec می باشد.  
(در تغییر فشار بی در رو  $\gamma = 1/4$  ، فرض شود. چگالی فولاد  $\frac{kg}{m^3} = 7600$  است)

۱۲-۳ ممکن است حرکت یک نوسانگر خطی توسط نموداری مشخص شود که X محور طولها و  $dx/dt$  محور عرضها باشد. در نتیجه نمایش نوسان به صورت یک منحنی خواهد بود.

الف) نشان دهید که نمودار برای یک نوسانگر غیر میرا ، یک بیضی است.  
ب) نشان دهید که (حداقل به طور کیفی) اگر یک جمله میرا هم داشته باشیم ، نمودار به شکل مارپیچی از مبدأ می گذرد.

۱۳-۳ تحقیق کنید که  $x = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$  جواب ممکن برای معادله زیر بوده است

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\alpha$  و  $\omega$  را بر حسب  $\gamma$  و  $\omega_0$  بدست آورید.

۱۴-۳ یک جسم به جرم  $2kg$  از یک فنر با ثابت فنر  $80 N/m$  آویخته شده است. به این جسم یک نیروی مقاوم به صورت  $-bv$  وارد می شود.  $v$  سرعت جسم بر حسب متر بر ثانیه

است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت را برای نوسانات آزاد سیستم بنویسید.

ب) اگر بسامد میرایی  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  برابر بسامد در حالت نامیرایی باشد؛ میزان ثابت  $b$

چقدر است؟

ج)  $Q$  سیستم چقدر است و با چه ضریبی، دامنه نوسان بعد از  $10$  چرخه کامل کاهش می یابد؟

۳-۱۵ در بسیاری از سیستمهای نوسانی گرچه تلفات و مکانیزم پراکندگی مشابه میرایی چسبناکی نیست، نشان دهید تغییرات انرژی متوسط ذخیره شده آنها با زمان به صورت یک تابع نزولی نمایی  $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-\gamma t}$  نمایش داده می شود.  $Q$  برای چنین نوسانگری ممکن است با استفاده از  $Q = \frac{\omega}{\gamma}$  تعیین شود که  $\omega$  بسامد زاویه ای طبیعی است.

الف) هنگامی که نت "middle C" با پیانو نواخته شود، انرژی نوسانش به نصف مقدار اولیه در طی  $1$  ثانیه کاهش خواهد یافت. بسامد "middle C"  $256 \text{ Hz}$  است.  $Q$  این سیستم چقدر است؟

ب) اگر انرژی از تنهای هشت گانه موسیقی با بسامد  $512 \text{ Hz}$  تقریباً در همین زمان، زوال یابد،  $Q$  چقدر است؟

ج) یک نوسانگر هماهنگ میرا به صورت آزاد، شامل یک جسم به جرم  $m = 0.1 \text{ kg}$  در یک مایع چسبناک با ضریب میرایی  $b$  ( $F_{\text{viscous}} = -bv$ ) و متصل به یک فنر با ثابت فنر  $9 \text{ N/m}$  دارای حرکت نوسانی میرا است. انرژی متوسط آن در  $4$  ثانیه به  $\frac{1}{e}$  مقدار اولیه اش کاهش می یابد. مقدار  $Q$  این نوسانگر چقدر است؟ مقدار  $b$  را به دست آورید؟

۳-۱۶ طبق نظریه الکترومغناطیس کلاسیک، یک الکترون شتاب دار با نرخ  $\frac{ke^2 a^2}{c^3}$  انرژی تشعشع می کند. در اینجا  $k = \frac{6 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$  و  $e$  بار الکتریکی بر حسب کولن،  $a$  شتاب لحظه ای بر حسب  $(\text{m/s}^2)$  و  $c$  سرعت نور می باشد.

الف) اگر یک الکترون در طول یک خط راست با بسامد  $\nu$  (Hz) و دامنه  $A$  نوسان

کنید، بعد از یک چرخه چه مقدار انرژی تشعشع می کند؟ (فرض کنید که حرکت در خلال هر چرخه بصورت مناسب  $x = A \sin 2\pi vt$  توصیف می شود.)

(ب)  $Q$  این نوسانگر چقدر است؟

(ج) پس از چند نوسان انرژی تشعشع به نصف مقدار اولیه می رسد؟

(د) با در نظر گرفتن یک بسامد معمولی نوری برای  $\nu$  (مثلاً برای نور مرئی) میزان

تقریبی و عددی  $Q$  و نیمه عمر سیستم تشعشع کننده را تخمین بزنید.

۳-۱۷ در یک لوله  $U$  شکل بازوهای قائم به شعاعهای  $r$  و  $2r$  توسط یک لوله افقی به طول  $l$  که شعاع آن به طور خطی از  $r$  تا  $2r$  افزایش می یابد، وصل شده است. در هر بازوی لوله، مایعی به ارتفاع  $h$  موجود است. مایع را به نوسان در می آوریم و در یک لحظه معین، مایع در بازوی باریکتر به اندازه  $y$  بالا تر از سطح تعادل قرار می گیرد.

(الف) نشان دهید که انرژی پتانسیل مایع با رابطه  $U = \frac{5}{8} g \rho \pi r^2 y^2$  به دست می آید.

(ب) نشان دهید که انرژی جنبشی باریکه کوچک مایع در بازوی افقی (به دیاگرام

توجه کنید) از رابطه

$$dK = \frac{1}{4} \rho \frac{\pi r^2 dx}{\left(1 + \frac{x}{\ell}\right)^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

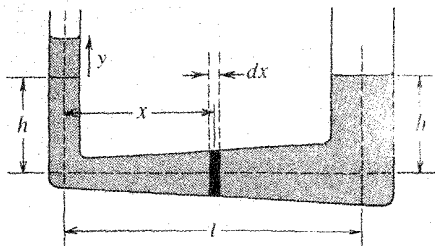
به دست می آید. یادآور می شویم که اگر مایع در هیچ جا دچار مشکل نشود، باید حاصلضرب سرعت در سطح مقطع در سراسر طول لوله یکسان باشد.

(ج) با استفاده از نتیجه قسمت (ب) نشان دهید که کل انرژی جنبشی برای تمام مایع

متحرک از رابطه زیر به دست می آید:

$$k = \frac{1}{4} \rho \pi r^2 \left( \ell + \frac{5}{2} h \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$$

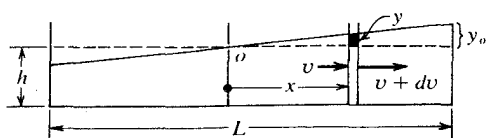
(از هر گونه نارسایی در گوشه ها چشم پوشی کنید)



د) برای (الف) و (ج) دوره تناوب نوسانات را اگر  $I = \frac{\Delta h}{\rho}$  باشد، محاسبه نمایید.

۳-۱۸ این مسأله معمولی پیچیده تر به نظر می رسد، زیرا لازم است چند بخش مربوط به هم کنار یکدیگر قرار داده شوند. اما اگر از بخش های گوناگون استفاده کنید، خواهید دید که هر یک به تنهایی مشکل نیست و مساله به عنوان نمونه کاملی با به کارگیری روش اصل بقای انرژی تشریح کننده مسائل نوسانسازی است.

بدون شک با پدیده تشکیل لجن حول وان حمام آشنا هستید. با تقریب اندکی، در ساده ترین



حرکت سطح آب چنانکه نمایش داده شده است کمی بالاتر می ایستد، اما بنظر می رسد که کم و بیش صاف باقی می ماند. پدیده ای مشابه در دریاچه هارخ می دهد که آن را Seiche نامند (که سیش تلفظ می شود). دریاچه ای را با سطح مستطیلی همانند آنچه در شکل نشان داده شده به طول L و عمق آب  $h \ll L$  تصور کنید. مساله از آن جهت مشابه یک آونگ ساده است که انرژی جنبشی تقریباً به طور کامل باعث جریان افقی آب می شود، در حالی که انرژی پتانسیل به تغییرات بسیار اندک سطح تراز آب در راستای قائم بستگی دارد. در اینجا برنامه محاسبه تقریبی زمان تناوب نوسانات به شرح زیر است:

الف) در لحظه معینی تراز آب را در پایانه طولش در ارتفاع  $\pm y_0$  نسبت به تراز طبیعی تصور کنید. نشان دهید که افزایش انرژی پتانسیل گرانشی تمام جرم آب از رابطه زیر به دست می آید:

$$U = \frac{1}{6} b \rho g L y_0^2$$

که b پهنای دریاچه است. این نتیجه را با یافتن افزایش انرژی پتانسیل باریکه ای به فاصله x از مرکز و انتگرال گیری به دست می آورید.



ب) با فرض اینکه جریان آب عمده‌تاً افقی است، سرعتش بایستی با  $x$  تغییر کند و بیشترین مقدار سرعت در  $x = 0$  و در  $x = \pm \frac{L}{4}$  صفر است. به علت اینکه آب تراکم ناپذیر است (کم و بیش) می‌توانیم تفاوت سرعت جریان را در  $x$  و  $x + dx$  با نرخ تغییرات  $\frac{dy}{dt}$  ارتفاع سطح آب در  $x$  مربوط بدانیم. این شرط دوام و استمرار دارد. آب با نرخ  $v$  در  $x$  به داخل و با نرخ  $(v + dv)$  در  $x + dx$  به خارج جریان می‌یابد. (فرض می‌کنیم  $h \gg y_0$ ). اختلاف باید مساوی  $(b dx) \frac{dy}{dt}$  باشد که خود نرخ افزایش حجم آب موجود بین  $x$  و  $x + dx$  را نمایش می‌دهد. با استفاده از این شرط، نشان دهید که:

$$v(x) = v(0) - \frac{1}{hL} x^2 \frac{dy_0}{dt}$$

که

$$v(0) = \frac{L}{4h} \frac{dy_0}{dt}$$

ج) از این رو نشان دهید که در هر لحظه معین انرژی جنبشی کل ناشی از حرکت افقی آب از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{6} \frac{b\rho L^3}{h} \left( \frac{dy_0}{dt} \right)^2$$

برای به دست آوردن این نتیجه، بایستی انرژی جنبشی باریکه‌ای از آب را که بین  $x$  و  $x + dx$  قرار گرفته (با حجمی مساوی با  $bh dx$ )، و با سرعت  $v(x)$  حرکت می‌کند به دست آورد و در فاصله بین حدود  $x = \pm \frac{L}{4}$  انتگرال گیری نمود.

د) با استفاده از اصل بقاء انرژی مکانیکی:

$$K + U = \text{ثابت}$$

این معادله به شکل زیر است:

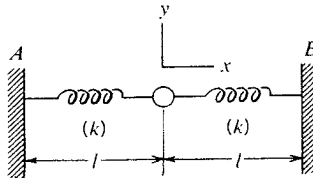
$$A \left( \frac{dy_0}{dt} \right)^2 + B y_0^2 = \text{ثابت}$$

که خود بیانگر یک حرکت هماهنگ ساده (SHM) با زمان تناوب معین است. نتیجه آن که این زمان تناوب تنها به طول  $L$  و عمق  $h$  و بستگی دارد. [توجه: این فرضیه واقعاً صحیح نیست. سطح آب در واقع بخشی از موجی سینوسی است، نه یک سطح صاف.

اما فرمول ما با تقریب یک درصد صحیح است. (جواب درست  $T = \frac{2L}{\sqrt{gh}}$  است). [

ه) دریاچه ژنورا می توان مخزنی با سطح مستطیل در نظر گرفت که طولش حدوداً ۷۰ کیلومتر و عمق میانگین آن حدوداً ۱۵۰ متر است. زمان تناوب نوسانات امواج روی دریاچه حدود ۷۳ دقیقه مشاهده گردیده است. این نتیجه را با فرمولتان مقایسه کنید.

۱۹-۳ وزنه ای به جرم  $m$  به روی یک میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و از دو طرف با دو فنر سخت یکسان که طول هر کدام در حالت بی بار (آزاد) است محکم نگهداشته شده است و فنرها دارای ثابت فنر  $k$  می باشند. (به شکل توجه کنید). هر فنر تا طول  $l$  که از  $l_0$  بزرگتر است کشیده می شود. تغییر مکان افقی  $m$  از وضعیت تعادل خود با  $x$  (در امتداد  $AB$ ) و  $y$  (عمود بر  $AB$ ) مشخص شده است.



الف) معادله دیفرانسیل حرکت (یعنی قانون نیوتن) حاکم بر نوسانات کوچک را در راستای  $x$  بنویسید.

ب) معادله دیفرانسیلی حرکت حاکم بر نوسانات کوچک را در راستای  $y$  بنویسید (فرض کنید  $y \ll l$ ).

ج) نسبت زمان تناوب نوسانات در امتداد  $x$  و  $y$  را بر حسب  $l$  و  $g$  محاسبه کنید.

د) اگر در  $t = 0$  وزنه  $m$  از نقطه  $x = y = A$  با سرعت صفر رها گردد،  $x$  و  $y$  وزنه در هر لحظه  $t$  چقدر است؟

ه) اگر  $l = \frac{gl_0}{g}$  باشد، شکل مسیر متوجه  $m$  را در شرایط مذکور در بند (د) رسم کنید.

## ارتعاشات واداشته و تشدید

فصل قبلی به طور کامل به ارتعاشات آزاد دستگاههای فیزیکی گوناگون مربوط می شد. اکنون می خواهیم به شرح پدیده های قابل ملاحظه ای بپردازیم که در فیزیک از هر جهت حائز اهمیت است. این پدیده ها هنگامی رخ می دهد که یک دستگاه - یک نوسانگر فیزیکی - تحت تاثیر یک نیروی محرک تناوبی یا یک عامل خارجی قرار گیرد.

« تشدید » یک واژه کلیدی است. هر کسی با این پدیده لاقفل از نظر کیفی آشنایی دارد و احتمالاً جالبترین روش برای به نوسان درآوردن یک نوسانگر آن است که با یک نیروی تناوبی با اندازه ثابت نتایج بسیار متفاوتی گرفته شود، به گونه ای که با بسامد نیروی تناوبی ارتباط داشته باشد. حتی اگر بسامد محرک به بسامد طبیعی نزدیک باشد؛ باز هم (هرکسی که یک تاب را هل داده باشد می داند که) دامنه نوسان را با استفاده از نیروی نسبتاً کوچک ولی مکرر می توان خیلی بزرگ ساخت. و این (فرایند) پدیده تشدید است. هرگاه نیروی تقریباً ثابتی با بسامدهای خیلی بالاتر یا خیلی پایین تر از بسامد مشدد اعمال شود تاثیرش خیلی کمتر است، بنابراین دامنه ای را که چنین نیرویی ایجاد می کند کاملاً کوچک باقی می ماند. در شروع این فصل پدیده ای را نقل می کنیم که مدتهاست مورد توجه بوده است. نمونه ای از این نوع حرکت، حرکتی است که دستگاه ملزم به پذیرش تکرار بسامد نیروی محرک باشد. در آن صورت دستگاه ممکن است در آغاز با بسامد طبیعی خود به ارتعاش درآید، ولی سرانجام تسلیم عوامل خارجی می شود.

۱- الکساندر وود (Alexander Wood) در کتابش اکوستیک [بلاکی و پسر (Blackie & Son)، لندن، ۱۹۴۰] می نویسد: « مشکل به نظر می رسد باور کنیم که تدوین قانون وضعیتی را شامل شود که هرگز پیش نیامده است. » مسأله وقتی مایه شگفتی بیشتر می شود که H. Bouasse فیزیکدان فرانسوی اظهار نظر رسمی Talmudic را نقل می کند، تالمودیک گزارش می دهد که تعداد زیادی خروس پرورش داده است ولی هیچ یک از خروسهایی که آنها را وادار کرده از دانه های داخل ظرفهای شیشه ای تغذیه کنند رشد نکرده اند!

برای آنکه حالت ابتدایی پدیده تشدید را در ذهن خود مجسم کنیم به توصیف نظریه این پدیده اکتفا می کنیم بدون آنکه وارد تحلیل جزئیات آن شویم. برای این منظور مسأله را با در نظر گرفتن حالت یک نوسانگر شروع خواهیم کرد این حالت هر چند ساده است ولی از لحاظ فیزیکی واقعیت ندارد در این نوسانگر اثر میرایی کاملاً قابل اغماض است.

## نوسانگر نامیرا با اعمال نیروی هماهنگ

دستگاهی که برای این منظور اختیار خواهیم کرد، یک وزنه معمولی به جرم  $m$  است که به فنری با ضریب سختی  $k$  آویزان شده است. به این فنر نیروی محرک سینوسی  $F = F_0 \cos \omega t$  وارد می شود. اندازه  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  بیانگر بسامد زاویه ای طبیعی دستگاه است، که با  $\omega_0$  نمایش می دهیم. بنابراین معادله حرکت، که شکل کلی آن:  $ma =$  نیروی خالص است، به صورت زیر نوشته می شود:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos \omega t$$

یا

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1-4)$$

پیش از آنکه به بحث درباره جزئیات این معادله دیفرانسیل حرکت پردازیم، وضعیت آن را از لحاظ کیفیت در نظر می گیریم. اگر نوسانگر از وضع تعادلش منحرف شده باشد و سپس به حال خود رها شود. با بسامد طبیعی اش  $\omega_0$  به نوسان در می آید. مگر آنکه سعی کنیم به کمک یک نیروی محرک تناوبی با بسامد  $\omega$  را بر نوسانگر تحمیل کنیم. از این رو، انتظار داریم که در این حالت، حرکت به صورت نوعی برهم نهی از نوسانات با دو بسامد  $\omega_0$  و  $\omega$  نمایان شود. حل کامل معادله (1-4) از لحاظ ریاضی در حقیقت جمع ساده این دو حرکت است. ولی، به علت حضور اجتناب ناپذیر نیروهای اتلافی در هر دستگاه واقعی، نوسانات آزاد احتمالاً کم کم از بین می روند. مرحله اول، دو نوع حرکت که هر دو ممتازند مرحله گذرا نامیده می شود. با وجود این، حرکت فقط بر اثر وجود نوسان واداشته

۲- برای اجتناب از تکرارهای خسته کننده، در بیشتر موارد به جای «بسامد زاویه ای» واژه ساده «بسامد» را به  $\omega$  نسبت می دهیم، البته جایی که قرآینی باشد که ابهام پیش نیاید.

است که بدون کم شدن از بسامد  $\omega$  ، ادامه خواهد یافت . وقتی این شرط تحقق یابد حرکت یکنواخت نوسانگر تحریک شده را چه باید نامید .

بررسی و تحلیل آثار گذرا را به آینده موکول خواهیم کرد ، ولی در حال حاضر توجه خود را منحصرأ به حالت یکنواخت نوسان واداشته معطوف می کنیم . در یک نوسانگر نامیرای آرمانی (ایده آل ) ، تاثیر ارتعاشات طبیعی هرگز از بین نخواهد رفت . ولی ما موقتاً از این پیچیدگی مسلّم چشم می پوشیم ، زیرا نبود میرایی به سادگی موجب حرکت واداشته می شود .

جالبترین شکل حرکت ، هنگامی نمایان می شود که تقریباً  $\omega = \omega_0$  باشد ، ولی پیش از حل کامل معادله ( ۴-۱ ) ، اشاره ای داریم به بعضی شکلهای حرکت در پایانه ها که بسامد محرک  $\omega$  بسیار پایین یا بسیار بالا است ، اگر بسامد نیروی محرک نسبت به بسامد طبیعی نوسانات آزاد خیلی پایین باشد ، انتظار داریم ذره اساساً در هر مرحله بر اثر نیروی محرک با دامنه ای نه چندان متفاوت با  $\left( = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right)$  حرکت کند ، در این حالت نیروی ثابت موجب

جابه جایی خواهد شد . این مرحله معادل وضعیتی است که جمله  $m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)$  در معادله ( ۴-۱ ) در مقایسه با جمله با بسامدهای بسیار پایین نقش نسبتاً کم اهمیتی را ایفا می کند ، یا به عبارت دیگر ، با جمله اخیر سختی فتر کنترل می شود . از طرف دیگر در بسامدهای نیروی محرک که در مقایسه با بسامد طبیعی نوسان آزاد بسیار بالاست ، وضعیت مخالف پیش می آید . جمله  $kx$  در مقایسه با  $m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)$  کوچک است ، زیرا شتاب بزرگ مربوط به بسامدهای بالاست ، به طوری که تاثیر آن به وسیله لختی کنترل می شود . در این حالت انتظار داریم دامنه نوسان نسبتاً کوچک باشد و این نوسان نسبت به نیروی محرک در فاز مقابل قرار گیرد ، زیرا شتاب یک ذره در حرکت هماهنگ با جابه جایی اش  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد . این ذره از این لحاظ ناآرام به نظر می رسد که دامنه مشدد در بسامدهای پایین یا بالا بیش از حد بزرگ است ، و ما اکنون آن را نشان خواهیم داد .  
برای به دست آوردن پاسخ معادله ( ۴-۱ ) در حالت یکنواخت به جای  $x$  قرار می دهیم :

$$x = C \cos \omega t \quad (۲-۴)$$

به عبارت دیگر فرض می کنیم که حرکت با همان بسامد و فاز نیروی محرک هماهنگ است

و نوسانات طبیعی دستگاه حضور ندارد. این حرکت را با معادله (۲-۴) مفروض باید در ذهن خود تصور کنیم و باید آماده باشیم که اگر از یافتن اندازه ثابت  $C$  که تاکنون نامعین بوده نومیست شدیم، از آن معادله آزمایشی صرف نظر کنیم. اندازه  $C$  در معادله (۱-۴) به ازاء اندازه های اختیاری  $\omega$  و  $t$  صدق می کند. اگر از معادله (۲-۴) دوبار بر حسب  $t$  مشتق بگیریم، معادله زیر به دست می آید:

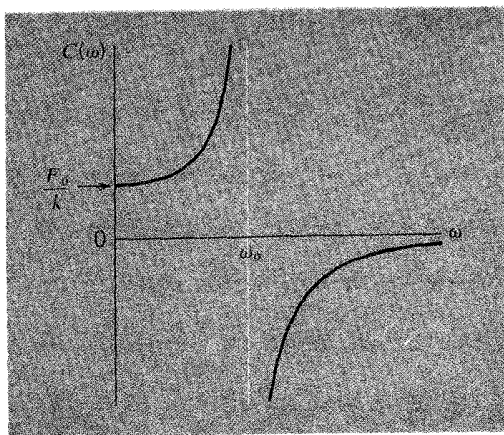
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 C \cos \omega t$$

اگر در معادله (۱-۴) مقدار قرار دهیم، داریم:

$$-m\omega^2 C \cos \omega t + kC \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

و از آنجا

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (۳-۴)$$



شکل ۱-۴ دامنه نوسانات واداشته تابع بسامد محرک است (فرض می کنیم میرایی صفر است) علامت منفی دامنه به ازاء  $\omega > \omega_n$  مربوط به تاخیر فاز  $\pi$  جابه جایی نسبت به نیروی محرک است.

اندازه  $C$  که به طور قابل قبول از معادله (۳-۴) تعیین می شود همواره در معادله (۱-۴) صدق می کند. بنابراین می توان آن را دامنه حرکت واداشته در نظر گرفت که با معادله (۲-۴) تعریف شده است، از طرفی  $C$  طبق معادله (۳-۴) با  $\omega$  بستگی دارد. این وابستگی در شکل (۱-۴) به طور نموداری نشان داده شده است. توجه کنید چگونه نمودار  $C$  هنگام گذشتن از  $\omega_n$  به طور ناگهانی تغییر جهت می دهد و از اندازه های بسیار بزرگ مثبت دفعتهاً به

اندازه های بسیار بزرگ منفی سقوط می کند. تغییر سریع و بینهایت بزرگ C به ازاء  $\omega = \omega_0$  ، بدون در نظر گرفتن علامت ، خود نمایانگر پدیدهٔ شدید است .

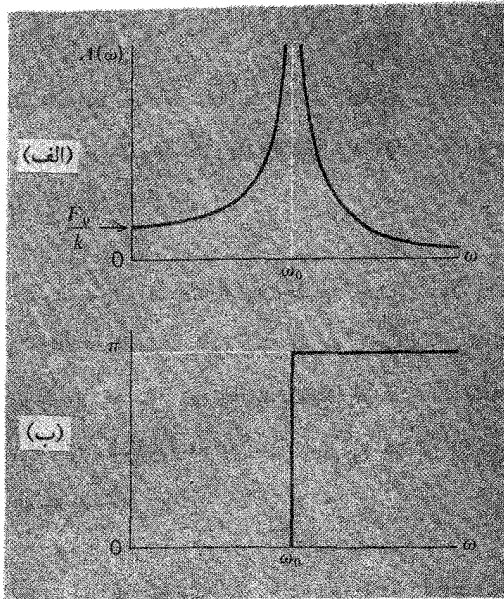
هر چند به کمک معادلات (۲-۴) و (۳-۴) می توان راه حل کاملاً مناسب این مسألهٔ دینامیکی را ارائه داد ، ولی راه حل بهتری که ما را به نتیجه برساند بر طبق توصیف کلی حرکات هماهنگ است . برای این منظور رابطه X را می توان به صورت یک حرکت ارتعاشی نوشت که دامنه اش A بنا بر تعریف یک کمیّت مثبت است ، و فاز آن در  $t = 0$  برابر  $\alpha$  است .

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (۴-۴)$$

می بینیم که اگر به جای  $A = |C|$  مقدار قرار دهیم ، با مشکلی مواجه نخواهیم شد . و بر حسب آنکه بسامد محرک  $\omega$  کوچکتر یا بزرگتر از  $\omega_0$  باشد یکی از دو اندازهٔ صفر و  $\pi$  را می توان به  $\alpha$  نسبت داد :

$$\omega < \omega_0 : \alpha = 0$$

$$\omega > \omega_0 : \alpha = \pi$$

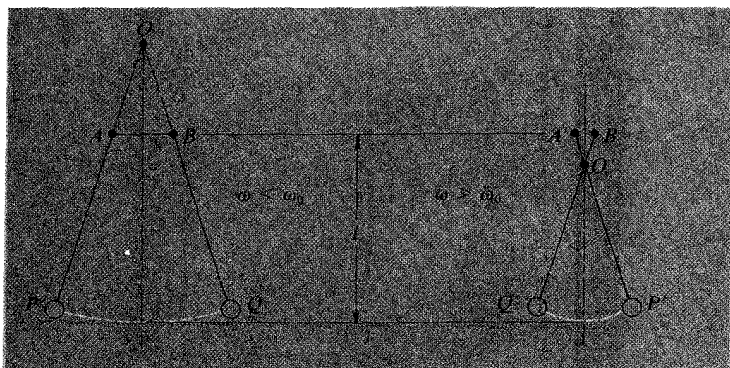


شکل (۲-۴) (الف) قدر مطلق دامنهٔ نوسات و داشته ، به ازاء میرایی صفر ، تابع بسامد محرک است .

(ب) تاخیر فاز جابه جایی نسبت به نیروی محرک نیز تابع بسامد است .

بنابراین پاسخ دستگاه به صورت منحنیهای دامنه  $A$  و فاز  $\alpha$  ، به ازاء همه مقادیر  $\omega$  ، به طور جداگانه در شکل (۲-۴) نشان داده شده است . اندازه  $A$  به ازاء  $\omega = \omega_0$  بینهایت می شود و پرش گسیخته منحنی  $\alpha$  از صفر تا  $\pi$  باید غیرطبیعی باشد  $\pi$  اندازه  $\alpha$  به ازاء  $\omega_0$  است ، ولی همان گونه که خواهیم دید ، این نمودارها از لحاظ ریاضی حالت جدی آنچه را که تاکنون در دستگاهها ، با وجود صفر نبودن میرایی ، اتفاق افتاده است ، نمایش می دهند .

برگشت واقعی فاز جابه جایی نسبت به نیروی محرک (از بودن در فاز تا  $18^\circ$  خارج از فاز) را به روش مستقیم نشان می دهد که در آن آونگ ساده حول نقطه آویزش رفت و برگشت افقی دارد و حرکت هماهنگ ساده ای انجام می دهد . اوضاع (آونگ) به ازاء بسامدهای خیلی پایین تر و خیلی بالاتر از بسامد تشدید در شکل (۳-۴) نمایش داده شده است .



شکل (۳-۴) حرکت آونگهای ساده از نوسان هماهنگ و داشته نقطه آویز در طول خط  $AB$  ناشی می شود .

$$\text{الف) } \omega < \omega_0 \quad \text{ب) } \omega > \omega_0$$

در حالت تعادل پایدار ، رفتار آونگ که از یک نقطه ثابت آویزان شده به طول آن مربوط است . یعنی به ازاء  $\omega < \omega_0$  آونگ طولی بزرگتر از طول حقیقی دارد ، و به ازاء  $\omega > \omega_0$  طول آونگ کمتر از طول واقعی است . در حالت پیشین حرکت گلوله همیشه در همان جهتی است که حرکت از حالت سکون شروع شده بود ، در صورتی که در حالت بعدی حرکت همواره در خلاف جهت حرکت اولیه است .

### روش نمایی مختلط در مورد نوسانات و داشته

برای حل ساده ترین مسائل ارتعاش و داشته برحسب توابع سینوسی ، لازم است

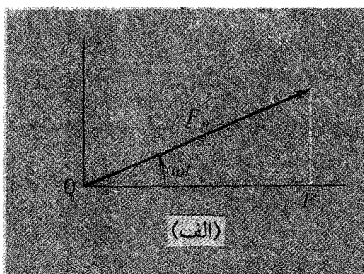
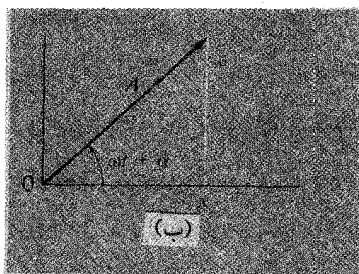


توابع نمایی مختلط را دوباره به کار بریم. این روش تا آنجا که به مسأله حاضر مربوط می شود مزیت خاصی ندارد، ولی روش نمایشی در اینجا و در شرایط ابتدایی هنگامی سودمند خواهد بود که در مورد نوسانگر میرا طبق برنامه زیر اجرا شود:

۱- این روش را با معادله حرکت طبیعی که به وسیله معادله (۴-۱) مشخص شده، شروع می کنیم:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

۲- نیروی محرك  $F_0 \cos \omega t$  را که تصویر بردار چرخشی  $F_0 \exp(j\omega t)$  بر روی محور  $x$  است، همان گونه که در [شکل ۴-۴ (الف)] نشان داده شده، در نظر می گیریم، و  $x$  تصویر بردار  $z$  را که با همان بسامد می چرخد تصور می کنیم [شکل ۴-۴ (ب)].



شکل ۴-۴ (الف) نمایش مختلط سینوسی نیروی محرك، (ب) نمایش مختلط بردار جابه جایی در نوسان واداشته.

۳- سپس معادله دیفرانسیل حاکم بر  $z$  را می نویسیم:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz = F_0 e^{j\omega t} \quad (۴-۵)$$

۴- پاسخ  $z = A e^{j(\omega t + \alpha)}$  را امتحان می کنیم:

برای این منظور پاسخ را در معادله (۴-۵) قرار می دهیم، به ما می دهد:

$$(-m\omega^2 A + KA) e^{j(\omega t + \alpha)} = F_0 e^{j\omega t}$$

که می تواند به صورت زیر هم نوشته شود:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A = \frac{F_0}{m} e^{-j\alpha}$$

$$(\omega_0^y - \omega^y)A = \frac{F_0}{m} \cos \alpha - j \frac{F_0}{m} \sin \alpha \quad (6-4)$$

این معادله دو شرط دارد، که مربوط به بخشهای حقیقی و موهومی در دو طرف معادله است:

$$(\omega_0^y - \omega^y)A = \frac{F_0}{m} \cos \alpha$$

$$0 = -\frac{F_0}{m} \sin \alpha$$

این روابط ما را به سوی پاسخهایی سوق می دهد که به وسیله دو نمودار در شکل ۲-۴ نمایش داده شده است.

### نوسانهای واداشته با میرایی

در پایان فصل ۳ ارتعاشات آزاد دستگاه جرم-فنر را که، از نیروی مقاوم متناسب با سرعت پیروی می کرد، تجزیه و تحلیل نمودیم. اکنون می خواهیم نتیجه تاثیر نیروی را بر روی چنین دستگاهی بررسی کنیم که در مبحث پیش درست مانند آن را در نظر گرفته بودیم. بنابراین با استفاده از قانون نیوتن می توان نوشت:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

با قرار دادن  $\omega_0^y = \frac{k}{m}$  و  $\frac{b}{m} = \gamma$  رابطه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^y x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (7-4)$$

اکنون حل حالت پایا را در مورد این معادله جستجو می کنیم.

برای این کار از روش نمایی مختلط استفاده می کنیم، در آن صورت معادله پایه به صورت

زیر در می آید:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^y z = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \quad (8-4)$$

اکنون حل زیر را فرض می کنیم:

$$z = Ae^{j(\omega t - \delta)} \quad (9-4)$$

$$x = \text{Re}(z) \quad \text{با}$$

توجه داشته باشید معادله ای که برای  $z$  در نظر گرفته ایم با معادله ای که در مبحث پیش فرض کرده بودیم اختلاف کمی دارد؛ فاز اولیه  $z$  را به جای  $\omega t$  به صورت  $\omega t - \delta$  نوشته ایم. چرا این کار را کرده ایم؟ پاسخ این چرا در معادله (۶-۴) یافت می شود. در طرف راست، معادله جمله های هندسی را می توان دید که به صورت برداری به طول  $\frac{F_0}{m}$  هستند و به اندازه زاویه  $-\alpha$  نسبت به محور حقیقی چرخیده اند. اکنون در صدیم معادله بسیار مشابهی به دست آوریم، این معادله در صورتی کارها را ساده خواهد کرد که به کمک آن بتوانیم لااقل جهت چرخش زاویه را که مثبت (پادساعت گرد) است، تعیین کنیم. این زاویه که اندازه اش  $\delta$  و در جهت مثبت است راستای نیروی محرک را، که منجر به جابه جایی می شود، مشخص می کند.

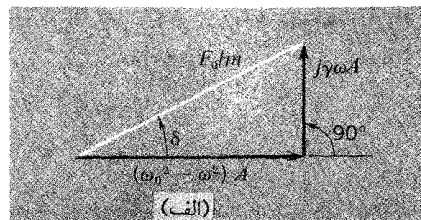
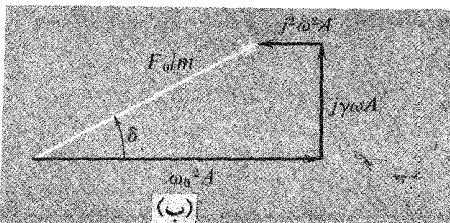
با استفاده از معادله (۹-۴)، در معادله (۸-۴) مقدار قرار می دهیم، نتیجه می شود:

$$(-\omega^2 A + j\gamma\omega A + \omega_0^2 A)e^{j(\omega t - \delta)} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

بنابراین

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + j\gamma\omega A = \frac{F_0}{m} e^{j\delta} \quad (10-4)$$

به این ترتیب دقت و صراحت روش نمایی مختلط آشکار می شود. ضمناً می توان فهمید که معادله (۱۰-۴) دارای شکل هندسی است، زیرا طرف چپ معادله، بیانگر آن است که بردار (افقی) به طول  $A(\omega_0^2 - \omega^2)$  با بردار به طول  $\gamma\omega A$  زاویه قائمه تشکیل می دهد و در طرف



شکل ۵-۴. نمایش هندسی معادله (۱۰-۴)

راست، بردار به طول  $\frac{F_0}{m}$  با محور حقیقی (افقی) زاویه  $\delta$  می سازد. این معادله ایجاب می کند که این دو بردار اخیر رسم شده یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، و بردارها یک

مثلث بسته را تشکیل دهند. همان گونه که در شکل [۵.۴(الف)]<sup>۲</sup> نشان داده شده است.

در این مثلث داریم:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{F_0}{m} \cos \delta$$

$$\gamma \omega A = \frac{F_0}{m} \sin \delta$$

بنابراین

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2 \right]^{1/2}}$$

(۱۱-۴)

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

البته این همان نتیجه ای است که بدون دخالت توابع نمایی مختلط می توان به دست آورد. در آن صورت حل به شکل زیر را فرض می کنیم:

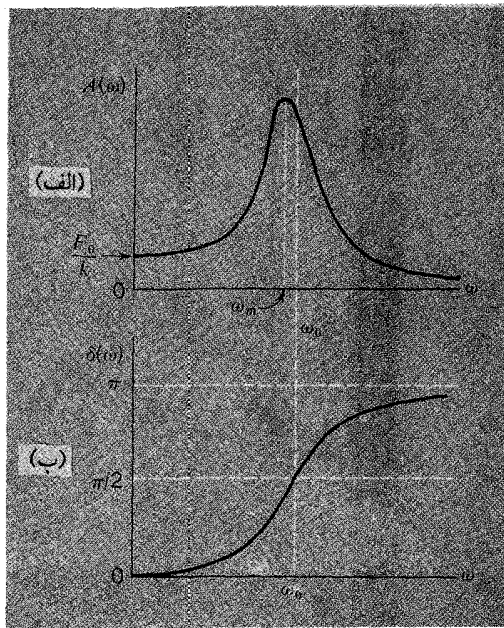
$$x = A \cos(\omega t - \delta) \quad (۱۲-۴)$$

این رابطه را در معادله (۷-۴) قرار می دهیم، که منجر به تشکیل معادله زیر می شود:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \cos(\omega t - \delta) - \gamma \omega A \sin(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

بنابراین معادله، باید مانند یک معادله مثلثاتی واقعی به اِزاء همه مقادیر  $t$  حل شود. تحلیل آن مسلماً دشوار نیست، ولی نسبت به سایر معادلات از کارایی کمتری برخوردار است.

<sup>۳</sup> شما ممکن است واقعاً ترجیح دهید طرف چپ معادله را به جمله (برحسب مبدا آنها) به صورت مجموع سه بردار (به دنبال هم بنویسید و رسم کنید):  $\omega_0^2 A + j \gamma \omega A + (j)^2 \omega^2 A$  همان گونه که در شکل [۵.۴(ب)] نشان داده شده است.

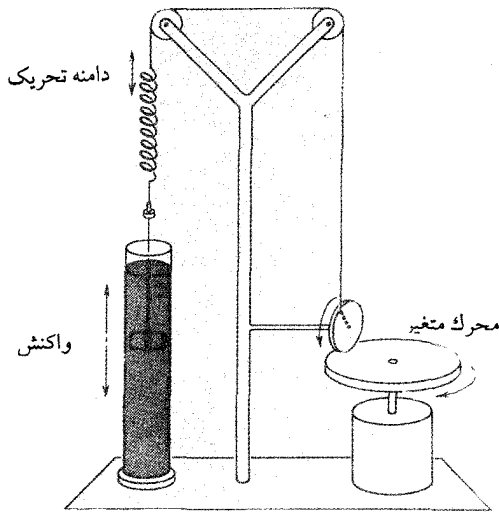


شکل ۶-۴ (الف) وابستگی دامنه به بسامد محرک برای نوسانات واداشته با وجود میرایی.

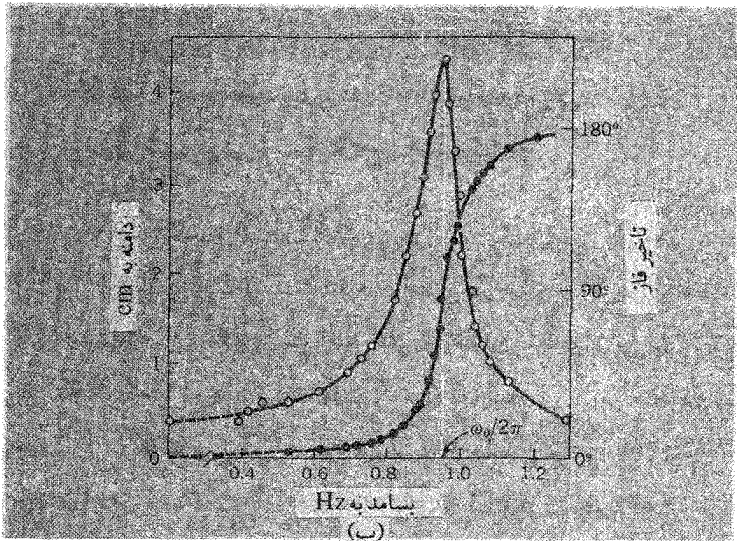
(ب) فاز جابه‌جایی نسبت به نیروی محرک که تابع بسامد محرک است.

نوع وابستگی دامنه  $A$  و زاویه فاز  $\delta$  به بسامد  $\omega$ ، در مورد یک نیروی مفروض با اندازه ثابت  $F_0$ ، در شکل (۶-۴) نشان داده شده است. (به خاطر بیاورید که  $\delta$  زاویه ای است که نیروی محرک عقب تر است). این منحنیها شباهت کلی روشنی با منحنیهایی دارند که در شکل (۲-۴) برای نوسانگر نامیرا رسم شده است. چون از رابطه  $\tan \delta$  در معادلات (۱۱-۴) می‌توان نتیجه گرفت که تاخیر فاز به طور پیوسته از صفر (در  $\omega = 0$ ) تا  $180^\circ$  (در حد  $\omega \rightarrow \infty$ ) مرتباً زیاد می‌شود، و به ازاء بسامد دقیقاً  $\omega_0$  از مرز  $90^\circ$  می‌گذرد. واضح است که در بسامد  $\omega_m$ ، که قدری از  $\omega_0$  کمتر است، دامنه به بیشینه می‌رسد. در بیشتر حالات این نکته جالب، عملی و مشهود است، هرچند اختلاف بین  $\omega_m$  و  $\omega_0$  به طور قابل اغماض کوچک باشد.

اینها بعضی از طرحهای محاسبه شده یک نوسانگر میرای واداشته اند. این طرحها توسط دستگاههای فیزیکی واقعی به طور دقیق چگونه نمایش داده می‌شوند؟ شکل (۷-۴) پاسخی را به شکل نتایج تجربی تدارک می‌بیند که به کمک نوعی دستگاه فیزیکی، که قبلاً بررسی



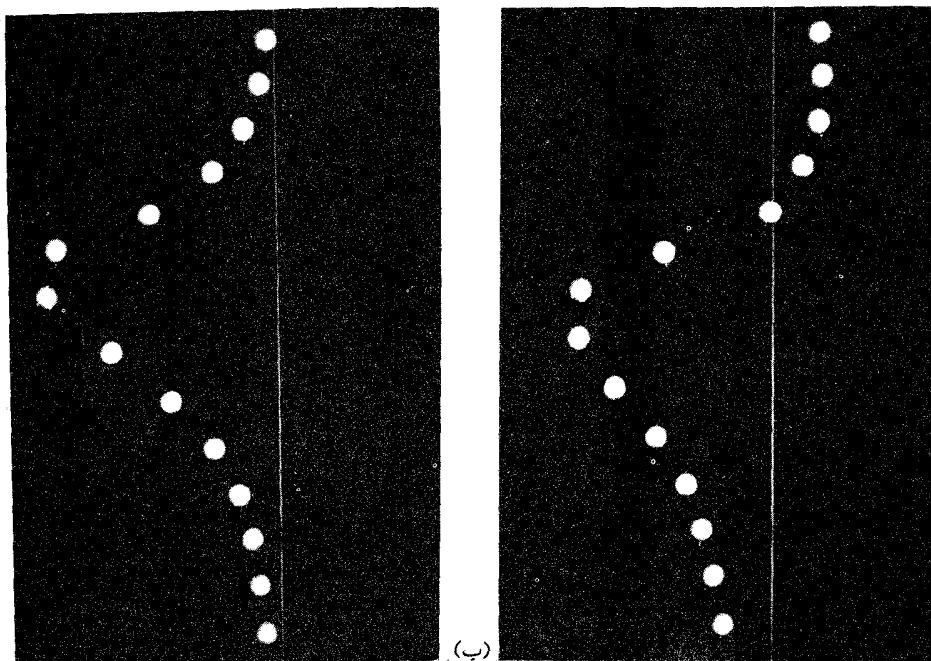
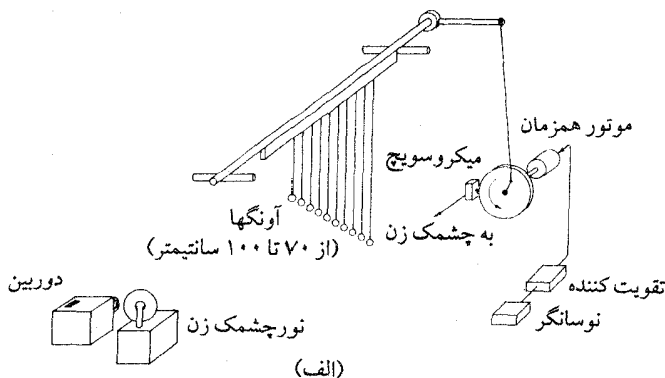
(الف)



شکل ۷-۴ (الف) شکل ساده نموداری «Texas Tower» (یا برج تگزاس)، یک ماشین پیشرفته تشدید مکانیکی توسط J.G.King در مرکز آموزشی پژوهشی M.I.T. (ب) منحنیهای تشدید تجربی به ازاء دامنه و تاخیر فازی که با این ماشین به دست آمده است. (اندازه گیریها توسط M.I.T, G.J. Churinoff، سال ۱۹۶۷)

کرده بودیم ، به دست آمده است . مطمئناً این دستگاه طبیعی نیست ، بلکه یک دستگاه مصنوعی است که اختصاصاً برای نمایش این طرحها اختراع شده است . با وجود این ،

نمونه قانع کننده ای وجود دارد که با تحلیل ریاضی می توان رفتار چنین دستگاهی را تشریح کرد (با این همه، ممکن است واقعیت نداشته باشد)، در حقیقت رفتار این دستگاه نمونه نظیر دستگاهی است که شامل یک فنر حقیقی و یک سیال چسبنده میراکننده است.



شکل ۸-۴ برگردان نوینی از آزمایش آونگهای بار تون. (الف) شکل کلی آرایش. فلاشهای نور استروب (استروبو سکوپ) یک بار در هر نوسان برای یک نقطه قابل کنترل در چرخه. (ب) جابه جایی آونگها وقتی نیروی محرک از صفر تجاوز می کند (چپ) و در لحظه ای بعد (راست). در عکس آخری، توجه کنید که آونگهای کوتاهتر در جهت نیروی محرک، و آونگهای بلندتر در خلاف جهت آن به حرکت درآمده اند، به ترتیب و بر طبق  $\delta < 90^\circ$  و  $\delta > 90^\circ$ . (عکسها از Jon Rosenfeld، مرکز آموزشی پژوهشی M.I.T.)

این همان دستگاهی است که برای نمایش واپاشی (فروآفت) نوسانات آزاد در شکل (۳-۱۲) نشان داده شده است.

طرحهای شکل (۴-۶) را نیز با دقت و با وسایل ساده می توان به نمایش گذاشت. بنابراین، برای مجموعه ای از نوسانگر با بسامدهای طبیعی متفاوت، از یک نیروی محرک با بسامد ثابت معینی استفاده می کنیم. این تحقیق تجربی را E.H.Barton (۱۹۱۸) با تغییر آرایش تعدادی آونگ سبک با طولهای مختلف که از یک میله افقی آویزان کرده بود، به آسانی انجام داده است. آونگها به ترتیب طول ردیف شده بودند، بارتون، آونگ وسط را همان گونه که در شکل [۴الف] نشان داده شده است، با بسامد تشدید به حرکت در آورد. وقتی از لبه آونگها عکسبرداری کرد مشاهده نمود که گلوله های سبک همگی با همان بسامد به حرکت در آمده اند. به این ترتیب توانست روابط فازی را که انتظار می رفت آونگها داشته باشند لاقبل به طور کیفی نمایش دهد. این گلوله ها که در شکل [۴ب] مشخص شده جابه جایی آونگهای کوچک را در لحظه ای نشان می دهد که حرکت، در وضعیت تعادل میله، از راست به چپ پیش می رود. آونگهای کوتاه (به ازاء  $\omega_0 > \omega$ ) دارای  $\delta < 90^\circ$ ، و آونگهای بلند (به ازاء  $\omega_0 < \omega$ ) دارای  $\delta > 90^\circ$  می باشند. بنابراین در خلاف جهتی که به حرکت در آمده اند به حرکت در می آیند و آونگ در حال تشدید کامل  $90^\circ$  تاخیر فاز دارد و هنگامی که از صفر می گذرد، در جابه جایی منفی بیشینه است.

### تاثیر گوناگون بخش مقاوم

در پایان فصل ۳ که بحث واپاشی ارتعاشات آزاد را پیش کشیدیم، «عامل کیفیت»  $Q$  را، که یک عدد مطلق و مساوی با نسبت  $\frac{\omega_0}{\gamma}$  است، دخالت دادیم. در نوسانات آزاد، هرگاه اندازه  $Q$  بزرگتر باشد اثر اتلافی کمتر است و تعداد نوسان آزاد برای کاهش معین دامنه بیشتر خواهد بود. اکنون نشان خواهیم داد که با تغییر دادن  $Q$  دستگاه، رفتار مشدد دستگاه چگونه تغییر می کند، کمیات دیگر باید مساوی باشند. برای آنکه معادلات (۴-۱۱) (برای  $A$  و  $\tan \delta$ ) شکل مناسبتری داشته باشند، با جانشین



کردن  $\gamma = \frac{\omega_0}{Q}$  ، نتیجه می شود:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega\omega_0}{Q} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۱۳-۴)$$

بعلاوه تجربه نشان می دهد که به دلایل زیادی بهتر است به عنوان یک متغیر، به جای خود  $\omega$  از نسبت  $\frac{\omega}{\omega_0}$  استفاده کرد. به همین جهت معادلات (۱۳-۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

یا

$$A = \frac{F_0}{k} \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (۱۴-۴)$$

$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{Q}}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}$$

و

شکل (۹-۴) منحنیهایی را نشان می دهد که بر اساس معادلات (۱۴-۴) رسم شده اند، به کمک این منحنیها، تغییرات دامنه  $A$  با بسامد و تغییرات تاخیر فاز  $\delta$  با بسامد، به ازاء اندازه های مختلف  $Q$ ، نشان داده شده است. بیشترین تغییر که تابع بسامد است تقریباً از

در  $\omega_0$  متمرکز شده است. در حد  $Q \rightarrow \infty$  نمودار تأخیر فاز در لحظه عبور از  $\omega_0$  ناگهانی است و از صفر به  $\pi$  جهش دارد. بدیهی است که بسامد  $\omega_0$  ویژگی مهم دستگاه مشدد محسوب می شود، ولو اینکه دستگاه (به استثنای حالتی که میرایی صفر است) هنگامی که به حال خود رها می شود نتواند با همان بسامد نوسان کند. دامنه  $A$  به ازاء هر یک از اندازه های  $Q$  که بزرگتر از  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  باشد از یک بیشینه می گذرد یعنی به ازاء همه مقادیر به استثنای بیشترین مقدار، دستگاه بسختی میرا می شود. همان طور که نخستین بار یادآور شدیم این دامنه بیشینه  $A_m$ ، در بسامد  $\omega_m$  که کمتر از  $\omega_0$  است، اتفاق می افتد. اگر دامنه  $\frac{F_0}{k}$  را، که به ازاء  $\omega \rightarrow 0$  به دست آمده، با  $A_0$  نشان دهیم. در آن صورت می توان نشان داد که نتایج زیر به آسانی حاصل می شود:

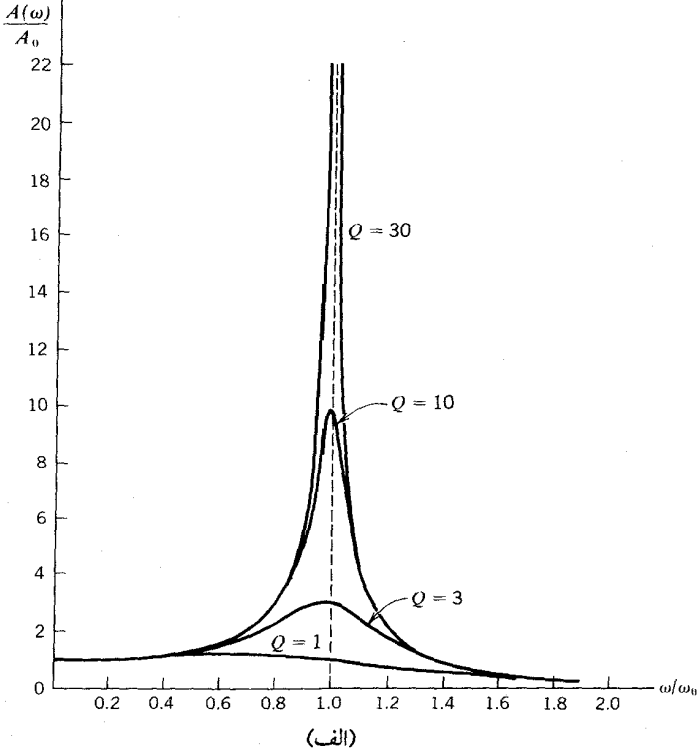
$$\omega_m = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(۱۵-۴)

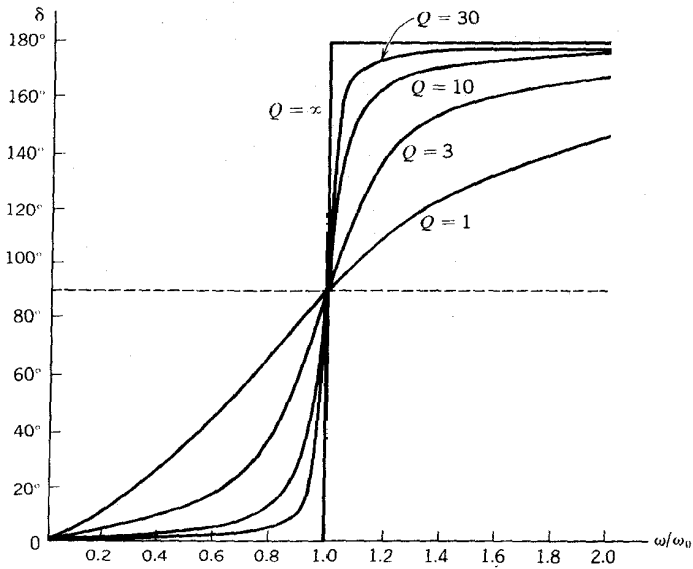
$$A_m = A_0 \frac{Q}{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

جدول ۱-۴: پارامترهای تشدید دستگاههای میرا

$\frac{A_m}{A_0}$	$\frac{\omega_m}{\omega_0}$	$Q$
۱	۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1/15$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0/707$	۱
$\frac{1}{\sqrt{14}} = 2/06$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0/935$	۲
$\frac{18}{\sqrt{35}} = 3/04$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0/973$	۳
$\frac{50}{\sqrt{99}} = 5/03$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0/990$	۵
$Q \left[1 + \frac{1}{4Q^2}\right]$	$1 - \frac{1}{4Q^2}$	$\gg 1$



(الف)

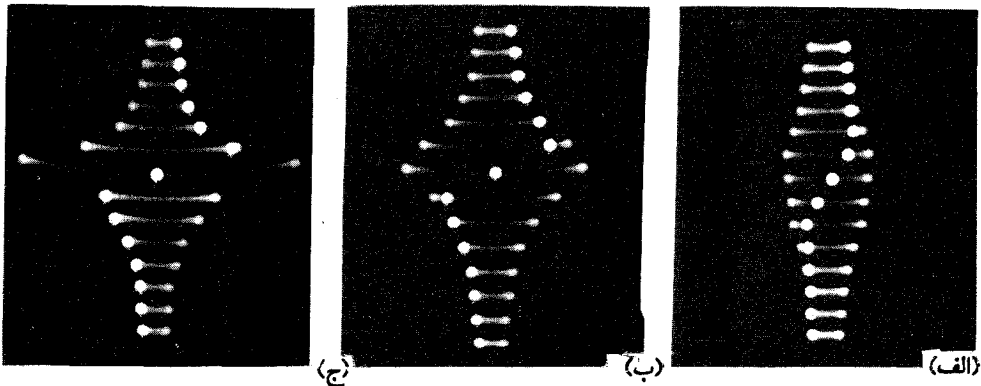


(ب)

شکل (۹-۴) (الف) دامنه به ازاء اندازه های مختلف  $Q$  تابع یسامد محرک است. فرض می کنیم اندازه نیروی محرک ثابت ولی یسامد آن متغیر باشد. (ب) اختلاف فاز  $\delta$  نیز به ازاء اندازه های مختلف  $Q$  تابع یسامد محرک است.

در جدول (۴-۱) فهرست بعضی اندازه های  $\frac{\omega_m}{\omega_0}$  و  $\frac{A_m}{A_0}$  برای اندازه های مخصوص  $Q$  نوشته شده است. یادآور می شویم که در بیشتر حالات ( $Q \geq 5$ ) دامنه قله نزدیک به  $Q$  برابر جابه جایی ایستایی، به ازاء همان  $F_0$  است، و این (امر) در یک بسامد کاملاً نزدیک به  $\omega_0$  اتفاق می افتد. دامنه، در خود بسامد  $\omega_0$ ، درست مساوی  $QA_0$  است.

شکل (۹۴) نشان می دهد که تیزی ظنین یک دستگاه مشدد با  $Q$  چگونه تغییر می کند: از آرایش یک ردیف آونگ، که در شکل [۴-۸ (الف)] نشان داده شده است، برای نمایش این پدیده می توان استفاده کرد. افزایش  $Q$ ، بدون تغییر  $\omega_0$ ، با سنگین تر ساختن گلوله آونگها امکان پذیر است. شکل (۴-۱۰) مراحل عکسبرداری از آونگها را، نخست هنگامی که بدون بار (واشر) بوده اند و سپس با دو (واشر) به جرهای مختلف بار دار شده اند، نشان می دهد. در این شکل بهبود حاصل در تیزی ظنین، کاملاً هویدا است، و لو اینکه دامنه های مطلق نوسان در سه تصویر دقیقاً قابل مقایسه نباشند. برای هر یک از مراحل عکسبرداری یک فلاش لحظه ای بر روی دوربین نصب می شود تا عکسهای گرفته شده روابط فاز میان آونگهای به حرکت درآمده را، به ازاء  $Q$  های مختلف، مطابق شکل [۴-۹ (ب)] نمایش دهند.



شکل (۴-۱۰) عکسهای مرحله ای از آونگهای بارتون (ر. ک. شکل ۴-۸) نشان دهنده خواص تشدید است. گلوله های آونگ از کره های سبک (از کیت الکتروستاتیک PSSC) بودند. (الف) گلوله های آونگ بدون بار که بسختی میرا می شدند، نشان دهنده تشدید گزینشی کمی بود. (ب) هر گلوله آونگ مختصراً باردار شد (با یک پونز) در این صورت میرایی آن کمتر و تشدید گزینشی اش بیشتر می شد. (ج) هر گلوله آونگ بیشتر از دفعه پیش باردار شد (یک پونز+یک واشر کوچک) در این حالت میرایی کم و  $Q$  نسبتاً زیاد می شد. (عکسها از جان روزنفلد، مرکز آموزشی پژوهشی M.I.T.) در هر حالت یک فلاش لحظه ای عکسبرداری که روی دوربین نصب شده بود تا روابط فاز میان آونگهای به حرکت درآمده در هر مرحله بخوبی نمایش داده شود.

تاکنون بحث ما دربارهٔ حالت تعادل کاملاً پایدار دور می زد، چون اگر نیروی محرک بر دستگاهی وارد آید و آن را به ارتعاش در آورد پس از مدتی همه نشانه های ارتعاش طبیعی دستگاه به حرکت درآمده از بین می رود. ولی البته، در هر وضعیت حقیقی نیروی محرک  $F_0 \cos \omega t$  ابتدا در لحظهٔ کوتاهی اعمال می شود که به دلیل کوتاهی  $t = 0$  اختیار می شود و فقط پس از زمان معینی است که شرایط حالت تعادل دوباره تحقق می یابد. در حقیقت اگر میرایی ارتعاشات آزاد بینهایت کوچک باشد این مرحله گذرا ممکن است مدتی طولانی ادامه یابد؛ حتی می توانیم (برای ساده شدن محاسبات ریاضی) میرایی را صفر در نظر بگیریم.

برای آنکه مسألهٔ کاملاً روشن شود، فرض می کنیم دستگاه فنر-وزنه ای باشد که در لحظهٔ  $t = 0$  ساکن است. در  $t = 0$  نیروی محرکه ای بر آن وارد می آوریم، تا دستگاه طبق معادله (۱۴-۱)، که در شروع همین فصل توضیح داده شد، به حرکت در آید. این معادله عبارت است از:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (۱۶-۴)$$

تاکنون دیده ایم که این معادله دیفرانسیل حرکت واداشته چگونه به معادله زیر، که برای  $X$  نوشته شده، منجر می شود:

$$x = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (۱۷-۴)$$

این معادله، گرچه شامل ثابتهای قابل تنظیم انتگرالگیری نیست ولی حل آن به کمک اندازه های  $m$ ،  $\omega_0$ ،  $F_0$  و  $\omega$  کاملاً امکان پذیر است. پس از توضیحاتی که در فصل ۳ دربارهٔ لزوم دخالت دادن دو ثابت انتگرال گیری در حل یک معادلهٔ دیفرانسیل درجهٔ دوم داده شد، ممکن است تعجب کنید که این دو ثابت انتگرال گیری در این حالت چرا صفر شده است البته به طور تجربی بهتر می توان فهمید که از معادله (۱۷-۴) در لحظهٔ  $t = 0$  به ازاء نیروی

محرکه اعمال شده، طبق فرضهای موجود، چه نتایجی به دست می آید. نتیجه در صورتی ناممکن است که به عنوان مثال به ازای  $\omega < \omega_0$  اندازه جابه جایی در  $t = 0$  مثبت باشد. ولی دستگاهی وجود ندارد که بالختی (ایرسی) مخالف صفر وقتی نیروی اندکی بر آن وارد شود بتواند در زمان صفر جابجایی مخالف صفر داشته باشد. و اگر فرض کنیم  $\omega > \omega_0$  در آن صورت باز هم نتیجه به دست آمده نامعقول است. یعنی هرگاه جسمی تحت تاثیر نیرویی مثبت به طور ناگهانی به حرکت درآید و در اثر این نیرو یک جابه جایی منفی داشته باشد. معادله (۴-۱۷) نمی تواند تمام جنبه های حرکت را به طور کامل و روشنی بیان کند، در صورتی که به کمک پدیده گذرا این کار امکان پذیر است.

از نظر ریاضی، وضعیت چنین است. فرض می کنیم راه حلی پیدا کرده باشیم و معادله (۴-۱۶) به ازاء  $x_1$  به صورت زیر باشد:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

اکنون فرض می کنیم راه حل دیگری وجود داشته باشد و معادله ارتعاش آزاد به ازاء  $x_2$  به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = 0$$

در آن صورت با جمع این دو معادله خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

بنابراین حل یک معادله حرکت وا داشته به ازاء ترکیب  $x_1 + x_2$  نظیر وقتی است که  $x_1$  تنها باشد. از نظر ریاضی هیچ دلیلی نداریم که  $x_2$  را در حل معادله شرکت ندهیم؛ برعکس اگر ما بخواهیم شرایط موجود در  $t = 0$  را دقیقاً رعایت کنیم ناگزیریم که حتماً آن را در حل معادله مذکور شرکت دهیم. همین مطلب را از لحاظ فیزیکی با صراحت کمتری می توان بیان کرد. نوساناتی که در لحظه  $t = 0$  بر اثر یک ضربه خفیف وارد شده به دستگاه ایجاد می شود، مطمئناً فرایندهایی با بسامد طبیعی  $\omega_0$  را به دنبال دارد. فقط اگر نیرویی تناوبی بیش از چند چرخه بر دستگاه وارد آید، در آن صورت دستگاه با بسامدی به نوسان در خواهد آمد که با بسامد نیروی اعمال شده کمی تفاوت دارد. بنابراین می توان انتظار داشت که

حرکت در آخرین و اولین مراحل نوسانات خود شامل هر دو بسامد باشد.

اکنون به معادلات دقیق و صریح بر می گردیم، معادله ارتعاش آزاد با بسامد شامل دو ثابت قابل تعدیل یک دامنه و یک فاز اولیه است. این دامنه و فاز را به ترتیب  $B$  و  $\beta$  می نامیم، و از آنها برای سازگار ساختن شرایط در شروع حرکت واداشته استفاده می کنیم. بنابراین طبق طرحهایی که در بالا به اختصار تشریح شد، حل کامل معادله حرکت واداشته را به شکل زیر پیشنهاد می کنیم:

$$x = B \cos(\omega_0 t + \beta) + C \cos \omega t \quad (18-4)$$

از آنجا

$$C = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

اکنون می توان با جاگذاری در معادله (۱۸-۴) شرایط اولیه را (در این حالت) که  $x = 0$  و  $\frac{dx}{dt} = 0$  و  $t = 0$  است سازگار ساخت. به ازاء این شرایط رابطه خود  $x$  به صورت زیر در می آید:

$$0 = B \cos \beta + C$$

هم چنین با دیفرانسیل گرفتن از معادله (۱۸-۴) داریم:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 B \sin(\omega_0 t + \beta) - \omega C \sin \omega t$$

از آنجا، در لحظه  $t = 0$ ، داریم:

$$0 = -\omega_0 B \sin \beta$$

دومین شرط ایجاب می کند که  $\beta = 0$  یا  $\pi$  باشد. با در نظر گرفتن معادله قبلی (نتیجه نهایی در هر یک از حالات یکسان است)  $B = -C$  به دست می آید، بنابراین معادله (۱۸-۴) می شود:

$$x = C(\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (19-4)$$

که مثالی از زنشهاست، و در شکل ۱۱-۴ (الف) هم نشان داده شده است. این زنشها در نبود کامل میرایی تا مدت نامحدودی ادامه خواهد داشت؛ شاید ارزش نداشته

باشد که شرایط پس از  $t = 0$  به نحو مطلوب تحقق یابد. اگر  $\omega_0 t$  و  $\omega t \gg 1$  باشد، می توان نوشت:

$$\cos \omega t \approx 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}$$

$$\cos \omega_0 t \approx 1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2}$$

در نتیجه،

$$x \approx \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) t^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2$$

بنابراین، دقیقاً همان گونه که انتظار داریم، نیروهای بازگرداننده جسم را در راستای نیروی اعمال شده با شتاب  $\frac{F_0}{m}$  به حرکت در می آورند. ممکن است تعجب کنید، ولی مسلم است که چنانچه معادله (۱۸-۴) بتواند درستی راه حلی را برای معادله حرکت واداشته به اثبات رساند، آن راه حل قابل قبول است. در این مورد می توان ادعا کرد، که برای معادلات دیفرانسیل چنین راه حلی واقعاً کم نظیر است، و اگر هر راه حلی را که پیدا می کنیم، چنانچه شرایط لازم به دست آوردن ثابتهای قابل تعدیل را هم در نظر بگیریم، در واقع راه حل منحصر به فرد مسأله<sup>۵</sup> را ارائه داده ایم. اکنون اگر بیشتر واقع نگر باشیم، و فرض کنیم که میرایی وجود دارد، بدون آنکه درد سربیشتری را تحمّل کنیم می توانیم ترکیب حرکات آزاد و حالت پایا را به شرح زیر بپذیریم:

$$x = B e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega_1 t + \zeta) + A \cos(\omega t - \delta) \quad (20-4)$$

از آنجا

$$\omega_1 = \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

A و  $\delta$  در معادله (۱۸-۴) داده شده است.

در اینجا قصد نداریم در باره چگونگی جفت و جور کردن اندازه های B و  $\zeta$  با اندازه های

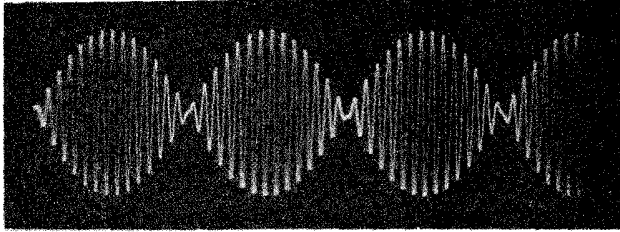
۵- برای اطلاع از بحث کاملتر در این زمینه می توانید به عنوان مثال به کتاب: معادلات دیفرانسیل مقدماتی، نوشته W.T. Martin و E. Reissner. انتشارات Addison - Wesley, Reading, Mass, چاپ دوم، ۱۹۶۱

مراجعه کنید.

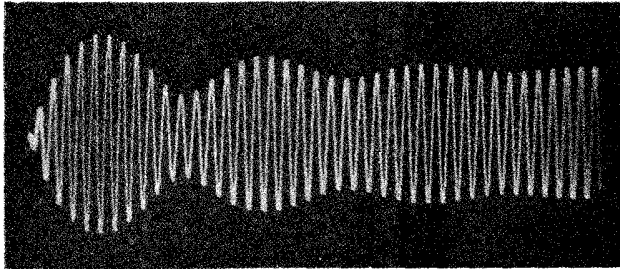


$\frac{dx}{dt}, x$ ، در لحظه  $t = 0$ ، از نظر ریاضی محض وارد جزئیات شویم. این شرح و بسط دقیقاً پیچیده تر از آن است که در بالا برای نوسانگر نامیرا ارائه دادیم. با وجود این در شکل ۱۱-۴ (ب) نوع حرکت را که اتفاق می افتد نشان می دهیم - به طور کلی، زنش هنگامی رخ می دهد که با بسامد واداشته  $\omega$ ، دامنه حرکت ثابت باشد. شکل ۱۱-۴ (ج) اثرگذاری بسیار ساده تر را وقتی نشان می دهد که نوسانگر میرا با بسامد طبیعی خودش به نوسان درآید.

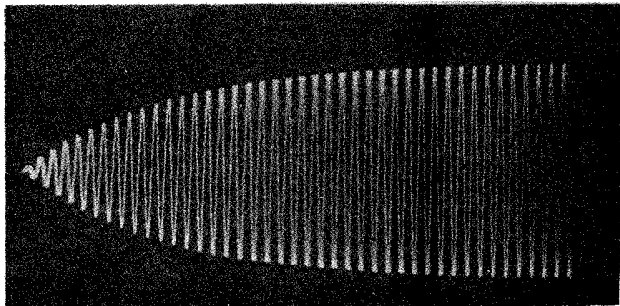
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۱۱-۴ (الف) پاسخ نوسانگر هماهنگ غیر میرا به نیروی واداشته تناوبی که با معادله (۳-۱۹) تشریح شده است. این الگوی زنش تا مدت نامحدودی ادامه خواهد یافت. (ب) رفتار گذرای نوسانگر میرا با نیروی واداشته تناوبی در شرف تشدید. (ج) رفتار گذرا در تشدید کامل، نشان دهنده رشد یکنواخت دامنه پایا است (عکسها از Jon Rosenfeld، مرکز آموزشی پژوهشی M. I. T.)

## توان جذب در نوسانگر واداشته

موضوع مهم و جالبی که بسیار اتفاق خواهد افتاد آن است که باید بدانیم به یک نوسانگر واداشته با چه نرخ‌ی باید انرژی مورد نیاز داده شود تا نوساناتش با دامنه ثابت محفوظ بماند. هم چنین در هر وضعیت دینامیکی دیگر توان لحظه‌ای ورودی یعنی  $P$  را که به صورت حاصلضرب نیروی محرك در سرعت است می‌توان محاسبه کرد:

$$p = \frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv$$

یک بار دیگر، نخست نوسانگر نامیرا را در نظر می‌گیریم، در این حالت نیروهای مؤثر به هدر نمی‌رود و توان میانگین ورودی و خروجی برابر است در نتیجه تفاضل آنها صفر می‌شود. معادلاتی را در نظر می‌گیریم که قبلاً بسط داده شده، و راه حل حالت پایا را می‌پذیریم، در آن صورت داریم:

$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$v = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = C \cos \omega t$$

در نتیجه

$$x = -\omega C \sin \omega t$$

$$P = -\omega C F_0 \sin \omega t \cos \omega t$$

این توان ورودی با  $\sin 2\omega t$  متناسب است، اندازه آن در نیم نوسان اول مثبت و در نیم نوسان دیگر منفی است، به این ترتیب مجموع هر چند تعداد درست نیم نوسان صفر می‌شود. زیرا مقدار انرژی که در خلال یک چهارم چرخه به دستگاه داده می‌شود در خلال یک چهارم چرخه بعدی دوباره از آن گرفته می‌شود.

اکنون به بررسی نوسانگر واداشته ولی میرا، می‌پردازیم، در این صورت داریم:

$$x = A \cos(\omega t - \delta)$$

در نتیجه،

$$v = -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

این رابطه را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$v = -v_0 \sin(\omega t - \delta)$$

در اینجا  $v_0$  اندازه بیشینه  $v$  به ازاء هر یک از اندازه های داده شده  $F_0$  و  $\omega$  است. اندازه  $A$  را از معادله (۴-۱۴) به دست می آوریم، نتیجه می شود:

$$v_0(\omega) = \frac{F_0 \omega_0}{k} \frac{1}{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \quad (۴-۲۱)$$

اندازه  $v_0$  به ازاء  $\omega = \omega_0$  از بیشینه ای می گذرد، در این حالت دقیقاً پدیده ای رخ می دهد که آن را سرعت تشدید می توان نامید. اکنون کار و توانی را در نظر می گیریم که برای محفوظ نگهداشتن نوسانات واداشته نیاز داریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P &= -F_0 v_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \delta) \\ &= F_0 v_0 \cos \omega t (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \\ P &= -(F_0 v_0 \cos \delta) \sin \omega t \cos \omega t + (F_0 v_0 \sin \delta) \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (۴-۲۲)$$

اگر میانگین توان ورودی را در هر تعداد صحیح چرخه ها حساب کنیم حتی در نخستین دوره طبق معادله (۴-۲۲) صفر می شود. از آنجا که میانگین  $\cos^2 \omega t$  مساوی  $\frac{1}{2}$  است، بنابراین میانگین توان ورودی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin \delta = \frac{1}{2} \omega A F_0 \sin \delta$$

این توان با کمک معادلات (۴-۱۴) و (۴-۲۱) به صورت زیر در می آید:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2 \omega_0}{2kQ} \frac{1}{\left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2}} \quad (۴-۲۳)$$

۶- به خاطر بیاورید، که  $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$  و برای یک چرخه کامل  $\int_0^{2\pi} \cos 2\omega t dt = 0$  هانگین  $(\cos 2\omega t)$  است.

می بینیم که این توان ورودی، نظیر سرعت، دقیقاً به ازاء  $\omega = \omega_0$  برای هر مقدار  $Q$  از بیشینه ای می گذرد. توان بیشینه از فرمول زیر به دست می آید:

$$P_m = \frac{F_0^2 \omega_0 Q}{2k} = \frac{Q F_0^2}{2m \omega_0} \quad (۲۴-۴)$$

وابستگی  $\bar{P}$  به  $\omega$  به ازاء  $Q$  های متفاوت در شکل ۴-۱۲ (الف) نشان داده شده است.

در این شکل می توان مشاهده کرد که توان ورودی به ازاء بسامدهای خیلی کم و خیلی زیاد به سمت صفر تنزل می کند، به استثنای منحنیهایی که، به ازاء  $Q$  های کم، نسبت به بیشینه تقریباً متقارند. تعیین یک پهنابرای این منحنیهای تشدید توان مناسب است، پهنای تشدید بنا به تعریف اختلاف بین اندازه های  $\omega$  است برای آنکه توان ورودی نصف توان بیشینه باشد. اگر  $Q$  بزرگ باشد (که در بیشتر حالات جلب توجه می کند)، با روش مخصوصاً روشن و رایجی این پهنای به دست می آید. به عبارت دیگر پهنای تشدید حقیقتاً در درون نوار باریکی با بسامدهای نزدیک به  $\omega_0$  قرار دارد. بنابراین معادله  $\bar{P}(\omega)$  را با تقریب و با استفاده از رابطه جبری زیر می توان به شکل دیگری نوشت:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega \omega_0} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \omega_0}$$

$$= \frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{\omega \omega_0}$$

در نتیجه، اگر  $\omega \approx \omega_0$  باشد، می توان قرار داد:

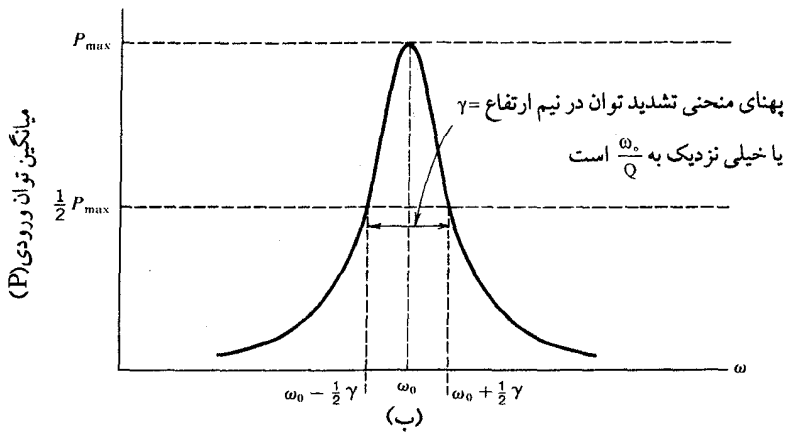
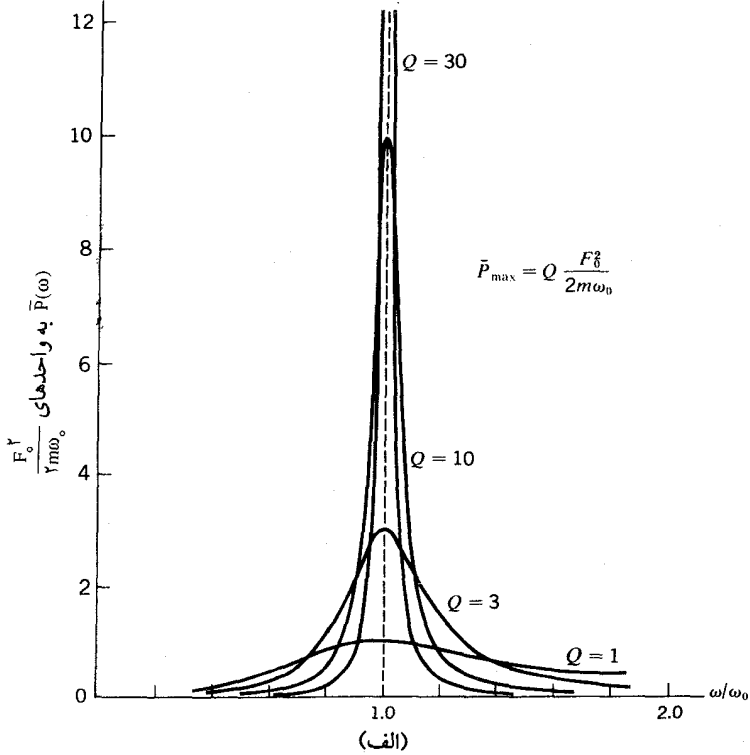
$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega \omega_0} \approx \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}{\omega_0^2} = \frac{2(\omega_0 - \omega)}{\omega_0}$$

در مخرج معادله (۴-۲۳)، به جای  $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega \omega_0}$  مقدار  $\frac{2(\omega_0 - \omega)}{\omega_0}$  را قرار می دهیم در نتیجه

خواهیم داشت:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2 \omega_0}{2kQ} \frac{1}{\frac{4(\omega_0 - \omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q^2}}$$

$$= \frac{F_0^2 \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)}{2\left(\frac{k}{\omega_0^2}\right) 4(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}$$



شکل ۴-۱۲ (الف) میانگین توان جذب شده در هر نوسانگر واداشته، به ازام اندازه‌های مختلف  $Q$ ، تابع بسامد است.  
 (ب) تیزی منحنی تشدید بر حسب منحنی توان تعیین شده است.

اکنون با کمیّت قبلی  $\frac{\omega_0}{Q}$  مواجه شده ایم. این کمیّت ثابت میرایی  $\left(\frac{b}{m}\right)$  است. و نرخ

کاهش انرژی را در یک نوسانگر میرا در نبود نیروی محرک مشخص می کند:

$$E = E_0 e^{-\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)t} = E_0 e^{-\gamma t} \quad (4-25)$$

[معادله (۳-۳۶) را ببینید]. بنابراین برای  $\bar{P}$  معادله به صورت ساده زیر هم می تواند نوشته شود (یادآور می شویم که  $k = m\omega_0^2$ ):

$$\bar{P}(\omega) = \frac{\gamma F_0^2}{2m \gamma^2 (\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (4-26)$$

بسامدهای  $\omega_0 \pm \Delta\omega$  که اندازه  $\bar{P}(\omega)$  را به نصف اندازه بیشینه  $\bar{P}(\omega_0)$  تنزل می دهد از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\gamma(\Delta\omega)^2 = \gamma^2$$

یعنی

$$2\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q} \quad (4-27)$$

به این ترتیب پهنای منحنی تشدید برای نوسانگر واداشته، که توسط توان ورودی [شکل ۴-۱۲ (ب)] اندازه گیری شده، مساوی عکس زمان لازم برای نوسانهای آزاد است، و انرژی اولیه آنها را به هدر می دهد. لذا می توان پیش بینی کرد که اگر در دستگای پهنای تشدید (که با دامنه یا توان جذب اندازه گیری شده) خیلی باریک باشد، در هر حال افت نوسانات آزاد خیلی کند خواهد بود. و بر عکس، مشاهده افت تند یا کند نوسانات آزاد نیز بیانگر پهن یا باریک بودن پهنای منحنی تشدید در نوسانگر واداشته است. در سنجش «کند» یا «تند»، «پهن» یا «باریک» بودن، معیار ما چیست؟ معادلات (۴-۲۶) و (۴-۲۷) در این باره به ما پاسخ می دهند. به طور کلی می توان گفت که تشدید در صورتی باریک است که پهنای فقط کسر کوچکی از بسامد مشدد باشد، یعنی اگر

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (4-28 \text{ الف})$$

وباز می توان گفت که افت نوسانات آزاد هنگامی کند است که نوسانگر فقط کسر کوچکی از انرژی اش را در هر نوسان از دست بدهد. اینک با استفاده از معادله (۴-۲۵) داریم:

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\gamma \Delta t$$

اگر به اِزاء  $\Delta t$  زمان  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  را، که با زمان تناوب نوسانات آزاد میرا [معادله (۳-۴۰)] تقریباً مساوی است، قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{2\pi\gamma}{\omega_0}$$

بنابراین یک آفت کُند یعنی

$$\frac{2\pi\gamma}{\omega_0} \ll 1$$

[[۲۸-۴(ب)]]

هم چنانکه  $\gamma = 2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ ، شرایط مشروح در معادلات [۲۸-۴(الف)] و [۲۸-۴(ب)] هر دو گویای آنند که کمیّت بی بُعد  $Q$  باید بزرگ باشد.

این رابطه بین پهنای تشدید نوسانات واداشته و کاهش نوسانات آزاد، نه تنها در مورد نوسانگر مکانیکی - که ما در اینجا از آن استفاده می کنیم - بلکه برای سایر دستگاههای فیزیکی نوسانی، مشخصه کاملاً متفاوتی است. در حقیقت، هرگاه یک دستگاه فیزیکی به هنگام نوسان آزاد اتلاف انرژی اش بر حسب زمان به صورت تابع نمایی باشد، نمودار چنین حرکت واداشته ای نشان می دهد که دستگاه دارای مشخصات تشدید است.

### نمونه های تشدید

در خلال بحث هایمان که با مرجع های گذرا مواجه می شدیم، به این حقیقت پی بردیم که بسیاری از دستگاهها علی رغم وجوه مشترک بسیاراند کسان با وزنه آویخته به فنر، باز هم رفتار مشابه تشدید دارند. ما سعی می کنیم منحصراً به بررسی رفتار دستگاه ساده مکانیکی پردازیم، گرچه این بررسی و تحلیل ممکن است خیلی مفصل و تخصصی شود. از سوی دیگر اکنون با دید بازتر و بُعدیگر به مسأله تشدید در دستگاههای کاملاً متفاوت نگاه می کنیم تا نکته تازه ای در این زمینه مطرح سازیم.

اگر در این راه فکر خود را بیشتر به کار اندازیم، مسلماً اطلاعات جامعتری درباره معنی و مفهوم تشدید به دست می آوریم، برای این منظور ابتدا از خودمان می پرسیم که: علت اصلی رفتار دستگاه فنر و وزنه چیست؟ و با کنار گذاشتن ریاضیات می توان گفت که: دستگاه با یک عامل خارجی فعال می شود، و پارامتر (بسامد) تغییر می کند. پاسخ (واکنش) دستگاه را می توان به وسیله دامنه و فاز یا به وسیله توان جذب شده اندازه گرفت، به شرط آنکه تغییرات سریع بسامد از حد معینی تجاوز نکند. شکل پاسخ به کمک دو کمیّت - یکی

بسامد و دیگری پهنای  $\left(\frac{\omega_0}{Q}\right) - \gamma$  ترسیم می شود، به گونه ای که خواص ویژه دستگاه واداشته مشخص گردد. تشدید پدیده دستگاه محرک است و تحت چنین شرایطی بر هم کنش بین عامل محرک و دستگاه به بیشینه می رسد. ملاک سنجش اگر دقیق باشد، می توان گفت که بر هم کنش به احتمال زیاد در  $\omega_0$  یا نزدیک به آن به بیشینه می رسد، و بیشترین تغییرات محسوس بر هم کنش نسبت به بیشینه، در اطراف  $\pm \gamma$  اتفاق می افتد.

وقتی درباره رفتار تشدید سایر دستگاههای فیزیک بیشتر فکر کنیم، به این نتیجه خواهیم رسید که کمّیاتی که یک تشدید را مشخص می کند همواره بسامد، توان جذب شده و دامنه نیست. این نکته، طی چند مثالی که اکنون مطرح خواهیم کرد، روشن خواهد شد.

### تشدید الکتریکی

یکی از رایجترین و مهمترین دستگاههای مشدد، که شکل (۴-۱۳) آن را نشان می دهد، دستگاه الکتریکی است که از یک خازن و یک سیم پیچ ساخته شده است. تحلیل چنین دستگاهی شباهت بسیار زیادی با دستگاههای مکانیکی دارد که تاکنون با آنها سروکار داشته ایم. اکنون برای این تحلیل نخست نوسانات آزاد را در نظر می گیریم و برای لحظه ای هر گونه فرایند اتلافی ناشی از مقاومت الکتریکی را نادیده می گیریم. در شروع کار، به شرح اجمالی رفتار الکتریکی بنیادی هر یک از اجزاء خاص خواهیم پرداخت.

خازن وسیله ای است که برای ذخیره بار الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی از آن استفاده می شود. ظرفیت آن،  $C$  از تقسیم اندازه بار  $q$  که در صفحات خازن ذخیره می شود بر اندازه اختلاف پتانسیلی که این بار (الکتریکی) را تولید می کند، به دست می آید:

$$C = \frac{q}{V_c}$$

در نتیجه

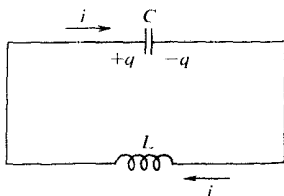
$$V_c = \frac{q}{C}$$

تأثیر سیم پیچ در مدار ایجاب می کند که آن را با تحلیل بیشتری بررسی کنیم. در شرایط  $D.C.$  سیم پیچ با عبور جریان مخالفت نمی کند، ولی اگر جریان متغیر باشد، در این صورت سیم پیچ (که از این پس القاگر نامیده می شود) با این تغییر (جریان) مخالفت می کند (قانون لنز).



در این حالت  $V_L$  ، اختلاف پتانسیل بین دو سر القاگر با نرخ (آهنگ) تغییر جریان  $i$  متناسب است. ضرب القاء  $L$  از رابطه زیر تعیین می شود:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$



شکل ۴-۱۳ خازن و القاگر به طور متوالی در مدار قرار گرفته اند: دستگاه تشدید الکتریکی بنیادی

این معادله بیانگر آن است که ولتاژ  $V_L$  ، بین دو سر القاگر ، موجب می شود تا جریان با نرخ  $\frac{di}{dt}$  تغییر کند.

در مداری که فقط شامل این دو جزء است ، مجموع  $V_L$  و  $V_C$  باید صفر شود ، زیرا در یک سفر خیالی ، اگر ابتدا از میان خازن و سپس از درون القاگر عبور کنیم و به همان نقطه اولیه از مدار برگردیم ، جابه جایی نداریم ، بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (29-4)$$

اکنون می بینیم که بین  $q$  و  $i$  رابطه تنگاتنگی وجود دارد ، زیرا جریان در مدار دقیقاً مساوی نرخ شارش بار در هر نقطه است . وقتی جریان  $i$  برای مدت  $dt$  در سیم متصل به صفحات خازن شارش کند ، بار روی صفحات به میزان  $dq = idt$  زیادتر می شود بنابراین داریم :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

با استفاده از این رابطه می توان معادله (۲۹-۴) را به صورت زیر نوشت :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (30-4)$$

این معادله دقیقاً شبیه معادله دیفرانسیل بنیادی SHM است که در مورد دستگاه فنر-وزنه

مطرح کردیم، در اینجا  $q$  نقش  $x$  را ایفا می کند،  $L$  به جای  $m$  و  $\frac{1}{C}$  به جای  $k$ ، ثابت فنر، ظاهر شده اند. در چنین مداری مطمئناً می توان فرض کرد که نوسانات الکتریکی آزاد-با بسامد زاویه ای مشروح زیر-وجود دارد:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

اکنون تاثیر مقاومت  $R$  را که در مدار، شکل [۴-۱۴ (الف)]، اضافه شده بررسی می کنیم. هنگامی که جریان  $i$  از مدار می گذرد، لازم است که اختلاف پتانسیل  $V_R (= iR)$  بین دو سر مقاومت برقرار باشد. به این ترتیب اختلاف پتانسیل در یک دوره کامل مدار، همان گونه که روابط زیر نشان می دهد، به صفر می رسد:

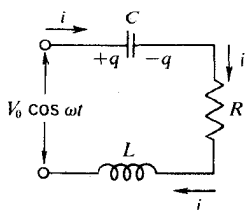
$$\frac{q}{C} + iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

یعنی

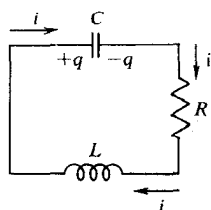
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

یا

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q = 0 \quad (۴-۳۱)$$



(ب)



(الف)

شکل ۴-۱۴ (الف) خازن، القاگر، و مقاومت به طور سری به هم بسته شده اند،

(ب) خازن، القاگر، و مقاومت به طور سری به دو سر ولتاژ سینوسی بسته شده اند.

در این معادله،  $\frac{R}{L}$  دقیقاً نقش ثابت میرایی  $\gamma$  را ایفا می کند و در چنین مداری بار روی صفحات خازن ولتاژ نوسانات هماهنگ میرا را به صورت نمایی تحمل خواهد کرد. سرانجام، اگر دو سر مدار به یک ولتاژ متناوب وصل شود، معادله نوسانگر واداشته

نمونه به شکل زیر است :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t \quad (۳۲-۴)$$

مقایسه کنید با :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (۳۳-۴)$$

اگر انرژی دستگاه را در نظر بگیریم رابطه بین معادلات (۳۲-۴) و (۳۳-۴) حتی نزدیکتر هم می شود. همان گونه که  $Fdx$  مقدار کار انجام شده توسط نیروی محرک  $F$  در جابه جایی  $dx$  است.  $Vdq$  نیز کاری است که ولتاژ محرک  $V$  انجام می دهد تا باری به اندازه  $dq$  را در مدار

### جدول ۲-۴ : پارامترهای تشدید مکانیکی و الکتریکی

دستگاه الکتریکی	دستگاه مکانیکی
بار $q$	جابجایی $x$
ولتاژ محرک $V$	نیروی محرک $F$
القائیدگی (اندوکتانس) $L$	جرم $m$
مقاومت $R$	نیروی ثابت چسبنده (ویسکوز) $b$
عکس ظرفیت $\frac{1}{C}$	ثابت فنر $k$
سامد مشدد $\frac{1}{\sqrt{LC}}$	سامد مشدد $\sqrt{\frac{k}{m}}$
پهنای تشدید $\gamma = \frac{R}{L}$	پهنای تشدید $\gamma = \frac{b}{m}$
انرژی بار ایستا (استاتیک) $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	انرژی پتانسیل $\frac{1}{2} kx^2$
انرژی الکترومغناطیسی بار متحرک $\frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} Li^2$	انرژی جنبشی $\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} mv^2$
توان جذب شده در تشدید $\frac{V_0^2}{2R}$	توان جذب شده در تشدید $\frac{F_0^2}{2b}$

به حرکت در آورد. وقوع نوسان در مدار با انتقال تناوبی انرژی بین خازن و القاگر، و با اتلاف دائمی انرژی در مقاومت همراه است. مقایسه معادلات مکانیکی و الکتریکی طبقه بندی کمیات مشابه را، که در جدول (۲-۴) نشان داده شده، ایجاد می کند.

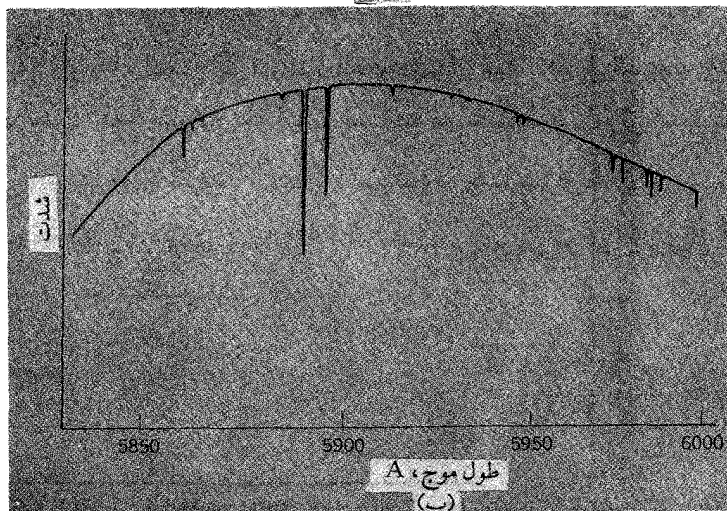
ما درباره این پدیدهٔ تشدید الکتریکی به علت شباهت فوق العاده زیادش به تشدید مکانیکی تا اندازه ای به تفصیل بحث کرده ایم. سایر مثالهای ما، هر چند از لحاظ فیزیکی حائز اهمیت است، ولی در قالب این الگوی ارائه شده کاملاً قرار نمی گیرند به همین جهت آنها را با اختصار بیشتری مطرح خواهیم کرد.

## تشدید آپتیکی

ما دلیل بسیار قانع کننده ای داریم که اتمها در فرایندهای گسیلندگی و جذب نور نظیر نوسانگرها رفتار می کنند و به عوامل محرک به سرعت پاسخ می دهند. هر وقت گسیل نور در چنین شرایطی اتفاق بیفتد اتمهای پرتو افکن واقعاً جدا از یکدیگر عمل می کنند، مثلاً، در یک گاز با فشار پایین طیفی که تشکیل می شود دارای خطوط بسیار باریک مجزاً است، یعنی انرژی تابشی به طول موجهای خاصی وابسته است. یک جسم ملتهب - مثلاً سیم داخل یک لامپ رشته ای - یک طیف پیوسته گسیل می کند، ولی در اینجا وضعیت کاملاً متفاوت است، زیرا در یک جسم جامد هر اتم به اتمهای مجاورش محکم چسبیده است، به همین جهت در حالت دینامیکی الکترونها تحوولی جدی ظاهر می شود. این تحول، در الکترونهايي که باعث تشعشع پرتوهای مرئی یا نزدیک به مرئی می شوند، بیشتر نمایان است.

ما دقیقاً از اتمهایی سخن گفته ایم که مانند نوسانگرها بسامدهای مختص خود را گسیل می کنند. ولی این (گسیل بسامد) را، با توصیف تشعشع فوتون و با تشریح فرایند تشعشع که اتم پرش یک کوانتوم را تحمل می کند، آیا می توان توجیه کرد؟ برای این پرسش به هیچوجه پاسخ روشنی نداریم. پیش از مطرح شدن نظریهٔ کوانتوم، هر کسی تصور می کرد که یک الکترون در درون اتم بر روی یک مدار دایره ای می چرخد و گسیلندهٔ نوری است که بسامدش با بسامد مداری الکترون مساوی است. ولی اکنون فقط می توان گفت که بسامد نور (از فرمول  $E=h\nu$ ) با استفاده از اختلاف انرژی بین دو حالت اتم به دست می آید. بنابراین می توان بسامد را با ارتعاش خود اتم تشخیص داد. با اینهمه، در بعضی موارد مفهوم اتم از این نظر، گویاتر از یک نوسانگر است. اگر نور گسیل شده با یک تداخل سنج تجزیه شود، طول قطارهای موج حاصل محدود است. از تقسیم طول قطارهای موج بر  $C$ ، زمان  $\tau$  به دست می آید که با عمر میانگین اتمهای تابان در حالت برانگیخته شان

همخوانی دارد، و انرژی اضافی انبوهی از اتمهای برانگیخته به طور نمایی ( $e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\gamma t}$ ) و به صورت تشعشع به بیرون پاشیده می شود. تشبیه نور نه به فوتون و نه به موج، هیچکدام به تنهایی همه تاریخچه انتشار نور را برای ما بیان نمی کند، ولی الگوی اتم، نظیر یک نوسانگر میرا برای فرایند تشعشعی از چند جنبه مهم تعریف قابل قبولی ارائه می دهد. همان گونه که دیده ایم. همراه با بسامد طبیعی نوسان آزاد جذب تشدید می دهد. همان بسامد رخ می دهد. در مورد نور مرئی بسامدها خیلی بالا (در حدود  $10^{15}$  Hz) قابل اندازه گیری است، در عین حال می توانیم هم گسیل و هم جذب را بر حسب مشخصات طول موج تعریف و ترسیم کنیم. شاید بارزترین نمونه جذب تشدید نور با خطوط فرانهوفر به دست آمده است. این خطوط که تیره هستند در تحلیل طیف خورشیدی مشاهده شده اند. این خطوط به خاطر مطالعه دقیق و تلاش پیگیر ژوزف فون فرانهوفر<sup>۷</sup> که ۵۷۶ عدد از آنها را در سال ۱۸۱۴ ترسیم نمود، به نام او خوانده می شود. در شکل ۴-۱۵ (الف) که بخشی از طیف خورشیدی را نشان می دهد،



شکل ۴-۱۵ (الف) بخشی از طیف خورشیدی، نشان دهنده خطوط معروف D سدیم در ۵۸۹۰ و ۵۸۹۶ انگسترم. (اقتباس از کتاب: مبانی اپتیک، نوشته: H.E.White و F.A.Jenkins. ناشر: Mc Graw Hill، نیویورک، ۱۹۵۷) (ب) نمایش کیفی شدت طیف خورشیدی بر حسب طول موج. حدود طول موجها در (الف) نشان داده شده است.

7- Joseph Von Fraunhofer

خطوط چشمگیر فرانهور در ۵۸۹۰ و ۵۸۹۶ انگستر، که از سدیم ناشی شده اند نمایان است.

شکل ۵.۴ (ب) از لحاظ کیفی شدت طیفها را بر حسب طول موج نشان می دهد. شدت به ازاء طول موج خطوط فرانهور از نظر تیزی محدودیت دارد ولی صفر نیست. (فرانهور نخستین کسی نیست که خطوط جذبی<sup>۱</sup> را مشاهده کرده است، ولی نخستین کسی است که تعدادی از این خطوط را که از لحاظ طول موج بر خطوط گسیلی درخشان تولید شده از منابع آزمایشگاهی منطبقند، مورد توجه قرار داده است. با اینهمه، نام کیرشهف<sup>۲</sup> و بنزن<sup>۳</sup>، به خاطر مقایسه تحلیلی طیف خورشیدی با طیفهای قوس الکتریکی و عناصر خالص در سال ۱۸۶۱، در تاریخ علم باقی خواهد ماند.)

با اطمینان می توان گفت که تشکیل خطوط فرانهور نتیجه فرایندهای جذب تشدید است. تصویر تشعشع پیوسته از ماده داغ و نسبتاً چگال نزدیک به سطح خورشید پس از عبور از لایه بخار جو خورشیدی، که به طور گزینشی پالایش شده، به دست آمده است. این نظریه در صورتی قانع کننده است که بتوانیم جزئیات شکل یک خط جذب اُبتیکی را رسم کنیم، و رابطه پهنای این خط را با زمان  $\left( = \frac{1}{\gamma} \right)$  گسیل خود به خودی مشخص سازیم. گرچه، انجام این کار فوق العاده دشوار است. دلایل مستقیم و غیر مستقیم هر دو مؤید آنند که عمر میانگین یک اتم بر انگیخته که گسیلنده نور مرئی است در حدود  $10^{-8}$  sec است، در نتیجه  $\gamma$  تقریباً  $10^8 \text{ sec}^{-1}$  می شود. بسامد زاویه ای نور گسیل شده از  $\frac{2\pi c}{\lambda}$  به دست می آید و در حدود  $4 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1}$  است. بنابراین می توانیم پهنای  $\delta\lambda$  یک خط را از رابطه زیر حساب کنیم:

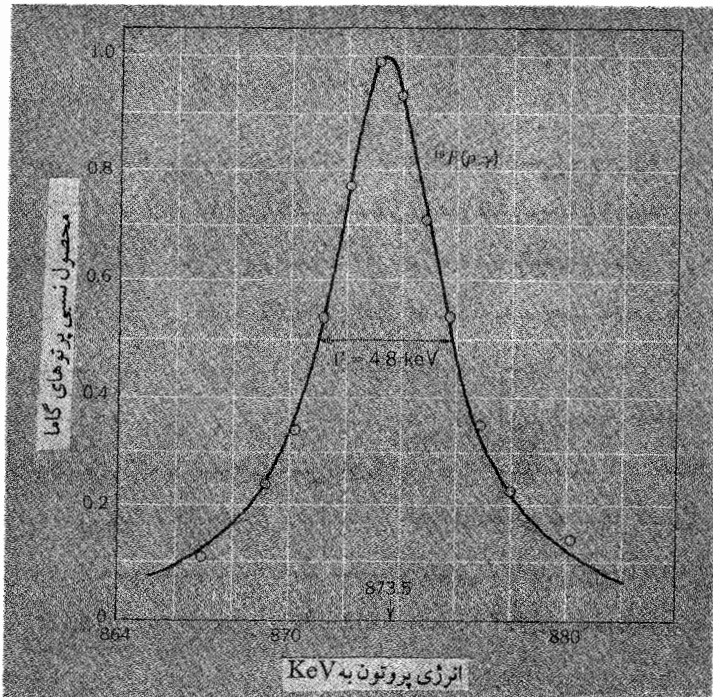
$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\gamma}{\omega_0} \approx \frac{10^8}{4 \times 10^{15}} \approx 2 \times 10^{-8}$$

۸- برای نخستین بار W.H. Wollaston در ۱۸۰۲ این خطوط را مشاهده و یادداشت کرده است. در ۱۸۹۵ فیزیکدان آمریکایی H.A. Rowland این خطوط را به طور اصولی مطالعه نمود و نتایج کارش را به صورت ۱۱۰۰ خط ترسیم نموده است. امروزه فهرستی در حدود ۲۶۰۰۰ خط بین ۳۰۰۰ و ۱۳۰۰۰ انگستر تهیه و ارائه شده است.

در این رابطه به ازاء  $\lambda \approx 5000 \text{ \AA}$  داریم  $\delta\lambda \approx 10^{-4}$  البته به شرط آنکه پیش بینی های لازم در مورد اتمهای گسیلنده که دارای حرکات گرمایی اتفاقی چند صد متر در ثانیه اند، به عمل آید، و ما بتوانیم میزان پهن شدگی خطوط طیفی دو پلر را ارزیابی کنیم:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} \approx 10^{-6}$$

بنابراین اثر دوپلر در حدود یکصد برابر اثر ناشی از عمر میانگین اتم تشعشع کننده است. برخورد های بین اتمی نیز وضع موجود را بر هم می زنند، در نتیجه شکل های تشدید خطوط طیفی بیش از مشاهده مستقیم اسپکتروسکوپی به حقیقت نزدیک است.



شکل ۴-۱۶ در واکنش زیر  ${}^{19}\text{F} + \text{p} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma$  محصول پروتوگاما تابع انرژی پروتونهای بمباران کننده است. [از داده های O.Sala و S.C.S.Snowden, R.G.Herb، مجله فیزیک ریویو، شماره ۷۵، صفحه ۲۴۶ (۱۹۴۹)].

### تشدید هسته ای

کتاب و مقالات تحت عنوان فیزیک هسته ای حاوی مثالهای متعددی از تشدیدهای

هسته ای است؛ شکل ۴-۱۶ یکی از آنها را نشان می دهد. این فرایند تشدید هسته ای از چند جهت با آنچه تاکنون بحث کرده ایم تفاوت دارد. موضوع شکل ۴-۱۶ یک واکنش هسته ای است؛ نمودار (فوق) محصول نسبی پرتوهای گاما را بر حسب انرژی پرتونها نشان می دهد. می دانیم وقتی فلوئورین در معرض بمباران پرتوهایی با انرژیهای مختلف در حدود ۸۷۵keV قرار گیرد، پرتوگاما از آن گسیل می شود. ولی (در این واکنش) دستگاه مشدد چیست؟ این (دستگاه مشدد) فلوئورین بمباران شده نیست ولی هسته آمیخته  $^{20}\text{Ne}$  در یک حالت برانگیخته هنگامی به صورت  $^{20}\text{Ne}^*$  تشکیل می شود که هسته فلوئورین یک پروتون بگیرد. این هسته آمیخته ناپایدار است و یکی از روشهای واپاشی اش گسیل پرتوگاما است. فرایند کامل را می توان به صورت زیر نوشت:



(عدد پایین، تعداد پرتونهای هسته و عدد بالا مجموع پرتونها و نوترونها را نشان می دهد.) پارامتر قابل کنترل - متغیر مستقل برهم کنش - بسامد نیست بلکه انرژی پرتون بمباران کننده است. این پارامتر معرف خواص پایه ای تشدید است: انرژی کل  $^{20}\text{Ne}^*$  در چارچوب خود باقی می ماند. پاسخ یا واکنش دستگاه نه بر حسب دامنه یا توان جذب شده، بلکه بر حسب احتمال اینکه پروتون تابشی موجب تولید پرتوگاما خواهد شد اندازه گیری می شود. این احتمال را می توان بر حسب سطح آماج مؤثر [سطح مقطع (برخورد)  $\sigma$ ] هر هسته فلوئورین، که در معرض تابش باریکه پرتون است، بیان کرد. سرانجام، می توان گفت که جزئیات شکل منحنی تشدید، از لحاظ تحلیلی به شکل تقریبی (برای Q بالا) منحنی توان جذب شده یک نوسانگر مکانیکی خیلی شباهت دارد [معادله (۴-۲۶) و شکل (۴-۱۲)]، یک تشدید هسته ای را نظیر تشدید شکل (۴-۱۶) با معادله زیر به خوبی می توان تشریح کرد:

$$\sigma(E) = \frac{\sigma(E_0)}{\frac{4(E_0 - E)^2}{\Gamma^2} + 1} \quad (۴-۳۴)$$

بنابراین  $E_0$  انرژی مربوط به قله منحنی تشدید و  $\Gamma$  پهنای کل منحنی در نصف ارتفاع داده شده است. با این روش پهنای انرژی، دقیقاً مشابه پهنای بسامد،  $\gamma$ ، در یک تشدید مکانیکی یا الکتریکی تعیین می شود. در شکل (۴-۱۶) طبق معادله (۴-۳۴) منحنی کامل با



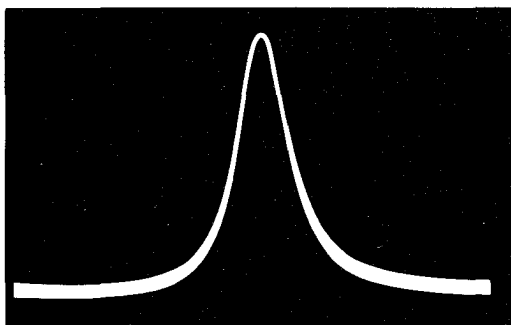
اندازه های تقریبی  $E_0$  و  $\Gamma$  رسم شده است، و می توان دید که این منحنی با داده ها کاملاً همخوانی دارد.

### تشدید مغناطیسی هسته ای

به عنوان آخرین مثال، در مورد تشدید در سایر میدانهای فیزیکی، به فرایند مشددی اشاره خواهیم کرد که توسط هسته اتمی رخ می دهد، در حالی که رفتاری نظیر مغناطیسهای بسیار ریز دارد و در یک میدان مغناطیسی می تواند به لرزه درآید. این فرایند به پدیده کوآتومی بستگی دارد: مغناطیسهای اتمی ممکن است چند جهت مجزاً داشته باشند، در صورتی که میدان مغناطیسی یک راستای معین دارد. یک پروتون، نمونه بارزی است که می تواند فقط در دو جهت قرار گیرد. به عنوان مثال عقربه یک قطب نمای معمولی را در نظر بگیرید، طرف شمال یاب آن تقریباً در جهت شمال می ایستد و طرف دیگر در جهت عکس آن قرار می گیرد. اختلاف انرژی بین این دو جهت که مربوط به کار انجام شده در برابر نیروهای مغناطیسی است بخوبی تعیین می شود، این کار، مغناطیس هسته ای را می چرخاند و از یک وضعیت به وضعیت دیگر در می آورد. این اختلاف انرژی با قدرت میدان مغناطیسی موجود در پروتون نسبت مستقیم دارد. اگر فوتونها با انرژی بسیار زیاد در راستایی پیش بروند، می توانند موجب تغییر جهت پروتونها شوند. این تغییر جهت تقریباً با تشعشع امواج الکترومغناطیسی، با همان بسامد (تغییر جهت)، همراه است، و اگر پروتونها در میدانی به شدت در حدود  $5000\text{ G}$  قرار گیرند، بسامد تشدید تقریباً به  $21\text{ MHz}$  می رسد. اگر همه پروتونها در درون تقریباً  $1\text{ cm}^3$  آب تکان داده شود، به این طریق (با القایش الکترومغناطیسی در آن) می توان یک ولتاژ آشکار شدنی را در پیکاب سیم پیچ به راحتی تولید نمود. اگر میدان مغناطیسی ثابت نگهداشته شود، خواهیم دید که این سیگنال نظیر یک مشدد تابع بسامد پرتو تابشی است. استفاده از یک (ضریب) ثابت هر قدر هم راحت باشد، تعیین بسامد پرتو به سختی انجام می گیرد و قدرت مغناطیسی  $B$  اعمال شده را تغییر می دهد. بنابراین بزرگی سیگنال تشدید مغناطیسی هسته ای را، که نظیر یک مشدد تابع قدرت میدان است، می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$V(B) = \frac{V_0}{\frac{4(B_0 - B)^2}{(\Delta B)^2} + 1} \quad (35 - 4)$$

در اینجا B قدرت میدان در تشدید کامل، و  $\Delta B$  پهنای تشدید در نصف ارتفاع است. E.M.Purell و F.Bloch به خاطر پژوهش کاملاً مستقلی که روی این پدیده انجام داده اند، مشترکاً به اخذ جایزه نوبل فیزیک سال ۱۹۵۲ نایل آمدند. شکل (۴-۱۷) بخشی از مقاله پژوهشی Bloch است که در همان زمان در سخنرانی مربوط به اخذ جایزه نوبل ایراد کرده است.



شکل ۴-۱۷ خط تشدید مغناطیسی پروتونها در آب محتوی  $MnSO_4$  نظیر یک کاتالیست پارامغناطیسی است و از ترکیب سیگنال القایش هسته ای که مربوط به جذب است به دست آمده. عکس از یک نوسان نگار با پرتوکاتودی گرفته شده است. انحراف قائم بر اثر سیگنال اصلاح و تقویت شده رخ می دهد، و انحراف افقی مربوط به تفاوت اندازه های میدان ثابت است. اقتباس از سخنرانی نوبل: فیزیک (۱۹۴۲-۱۹۶۲)، Elsevier، آمستردام، ۱۹۶۴.

### نوسانگرهای ناهماهنگ

مباحثی که در این فصل تاکنون خواننده ایم روی هم رفته نتیجه اش موفقیت آمیز بوده، و هر مطلبی بر حسب ضرورت مطرح شده است. برای معادله دیفرانسیلی که ذیلاً می نویسیم، در هر حال یک راه حل تحلیلی، که با معادله دقیقاً سازگار باشد، به دست می آوریم. ضمناً از دستگاههای فیزیکی کنونی آن دسته را مورد توجه قرار می دهیم که با الگوی بسیار ساده ریاضی ما کاملاً موافق باشد. لذا باید دید آیا طبیعت این دستگاهها با الگوی ریاضی همخوانی دارد؟ پاسخ در بعضی حالات با تعدد و تنوع کافی که دارد از لحاظ فیزیکی نیز حائز اهمیت بسیار است. در حقیقت، صحت یک دستگاه مثلاً یک نوسانگر میرا هنگامی مورد تأیید است که نیروی بازگردان با جابه جایی و نیروی مقاوم با سرعت

متناسب باشد. ولی این شرایط استثنایی همواره پیش نمی آید و تحقق این شرایط در عمل کمتر است. بنابراین لازم است از چگونگی اوضاع خاص و مناسب که قبلاً بحث کرده ایم درك صحیح داشته باشیم. به طور اختصار به تأثیر اصلاحات به عمل آمده در معادلات حرکت اشاره خواهیم کرد.

معادله اصلی نوسانات آزاد وزنه آویخته به فنر بدون میرایی به صورت زیر نوشته می شود:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

این رابطه در صورتی صادق است که فنر به ازاء هر اندازه انبساط یا انقباض از یک رابطه خطی (قانون هوک) پیروی کند. ولی در عمل رفتار هیچ فنری کاملاً چنین نیست. اگر فنرهای گوناگونی را تحت تأثیر وزنه هایی قرار دهیم که اختلاف جرمشان اندک باشد، خواهیم دید که انبساط و انقباض هر فنر به ازاء هر یک از وزنه ها مساوی است. ساده ترین بی تقارنی این نوع فنرها با عبارتی نمایش داده می شود که در آن  $F$  با  $x^2$  متناسب است. بنابراین ممکن است فنر نسبت به جابه جاییهای مثبت و منفی متقارن باشد، ولی تناسب  $F$  با  $x$  دقیقاً برقرار نیست. ساده ترین نمایش تقارن در این فنرها با عبارتی بیان می شود که در آن  $F$  با  $x^3$  متناسب است. معادلات حرکت برای این حالات می تواند به صورتهای زیر نوشته شود:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + \alpha x^2 = 0 \quad [4-36 \text{ الف}]$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + \beta x^3 = 0 \quad [4-36 \text{ ب}]$$

اگر سعی کنیم پاسخی به شکل  $x = A \cos \omega_0 t$  را در هر یک از معادلات بالا قرار دهیم، خواهیم دید که این پاسخ در هر دو آنها صدق نمی کند. بنابراین حرکت مربوط به آن نظیر ارتعاش هماهنگ به ازاء بسامد  $\omega_0$  قابل توجیه نیست. در عوض، آنچه داریم یک نوسانگر ناهماهنگ نامیده می شود. حرکت از این جهت تناوبی آرام است که (بافرض میرایی) حالت معینی را با بازه های مساوی  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  مطرح می کند، ولی به جای  $x = A \cos \omega_0 t$  مجموعه نامحدودی از هماهنگهای  $\omega_0$  را به دست می آوریم که برای توجیه حرکت نیاز

داریم؛ یعنی باید قرار دهیم:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \delta_n)$$

تا این  $x$  انتخاب شده در معادلات دیفرانسیل صدق کند.

با روش مشابه، یک نیروی مقاوم متغیر متناسب با  $v^2$  یا  $v^3$  به جای  $v$  شرح تحلیلی ساده حرکت یک نوسانگر میرا را ناممکن می سازد.

اگر یک نوسانگر با شرایط غیرخطی (با وجود نیروی بازگردان، نیروی میران، یا هر دو) تحت تأثیر نیروی محرک سینوسی قرار گیرد چه اتفاق می افتد؟ ما در صدد ارائه پاسخ دشواری نخواهیم بود ولی اجازه می خواهیم برای چند لحظه ای شما را با واقعیات آشنا سازیم. مثلاً، نوسانگری را در نظر بگیرید که طبق معادله [۴-۳۶ (الف)] نوسانات آزادی دارد، علاوه بر آن نیروی چسبنده خالص  $\left( \approx \frac{dx}{dt} \right)$  بر آن اثر می کند، نیروی محرک را

$F = F_0 \cos \omega t$  بگیرید. فرض کنید  $kx \ll \alpha x^2$ ، به جای  $\omega_0 = \frac{k}{m}$  را قرار دهید و ببینید اگر شما بتوانید بسامد یا بسامدهایی مانند  $\omega$  را تعیین کنید در آن صورت دستگاه به حالت تشدید در می آید. پس از تحقیق این مسأله شما به یک نوسانگر هماهنگ ساده دست خواهید یافت، و پی می برید که چرا یک فیزیکدان از آن به صورت یک دستگاه ارتعاش کننده - احتمالاً در صورت اثبات درستی عملکرد آن - استفاده می کند.

## مسائل

۱-۴ جدولی بسازید که یک ردیف آن حتی الامکان طولانی و شامل دستگاههای مشدد موجود در طبیعت باشد (الف) آنها را بر حسب بزرگی اندازه فیزیکی هر دستگاه مرتب کنید، و (ب) بسامد هر دستگاه مشدد را تعیین کنید.

۲-۴ اگر نیروی محرک یک نوسانگر واداشته به جای  $F_0 \cos \omega t$  به صورت  $F = F_0 \sin \omega t$  باشد، معادله حرکت این نوسانگر در حالت پایا چگونه حل می شود؟

۳-۴ جسمی به جرم  $2 \text{ kg}$  از فتری با ضریب سختی  $80 \text{ Nm}^{-1}$  آویزان است. جسم از

نیروی مقاومی به شکل  $bv$  - پیروی می کند، سرعت حرکت جسم (به  $\frac{m}{sec}$ ) و  $b = 4 Nm^{-1} sec$  است.

(الف) معادله دیفرانسیل حرکت را برای نوسانات آزاد دستگاه بنویسید، و دوره تناوب چنین نوساناتی را به دست آورید.

(ب) جسم از نیروی محرک سینوسی به شکل  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  پیروی می کند، که در آن  $F_0 = 2N$  و  $\omega = 3 \text{ sec}^{-1}$ . دامنه نوسان واداشته، در حالت پایا، چه اندازه است؟

۴-۴ جسمی به جرم  $m$  را به فنری می بندیم، سر دیگر فنر در نقطه ای محکم شده است. سازوگار (مکانیسم) میران چسبنده ای نیز وجود دارد. با این دستگاه ساخته شده مشاهدات ما به شرح زیر است:

(۱) اگر جسم با نیروی  $mg$  به طور افقی فشرده شود، به اندازه  $h$  تراکم استاتیکی پیدا می کند.

(۲) اگر جسم با تندی معین  $u$  حرکت کند، نیروی مقاوم چسبنده مساوی  $mg$  می شود.

(الف) برای این دستگاه کامل (که شامل فنر و عامل میرایی هر دو است) معادله دیفرانسیل حاکم بر نوسانات افقی جسم را بر حسب  $m, g, h, u$  بنویسید. در حالتی که  $u = 3\sqrt{gh}$ ، به پرسشهای زیر پاسخ دهید.

(ب) بسامد زاویه ای نوسانات میرا چقدر است؟

(ج) پس از چه مدت، بر حسب مضربی از  $\sqrt{\frac{h}{g}}$ ، انرژی با تنزل عامل  $\frac{1}{e}$  به صفر می رسد؟

(د)  $Q$  این نوسانگر چه اندازه است؟

(ه) این نوسانگر که در آغاز ساکن است، در لحظه  $t = 0$  با گلوله ای که جرم آن قابل اغماض ولی اندازه حرکتش غیر قابل اغماض است، در جهت مثبت  $x$  به طور ناگهانی به حرکت در می آید. اندازه زاویه فاز  $\delta$  را در معادله  $x = Ae^{-\frac{\gamma}{T}} \cos(\omega t - \delta)$  تعیین کنید. به کمک این معادله که بیانگر حرکت بعدی است، برای چند چرخه (سیکل) اولیه،  $x$  را

بر حسب  $t$  به دست آورید .

(و) اگر نوسانگر با نیروی  $mg \cos \omega t$  به حرکت درآید، در صورتی که

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma g}{h}}$$

باشد، دامنه تشدید در حالت پایا چه اندازه است؟

۴-۵ طول آونگ ساده  $l = 1 \text{ m}$  است . دامنه نوسانات آونگ در ارتعاشات آزاد با ضریب  $e$  پس از ۵۰ نوسان کاهش می یابد . نقطه آویز آونگ را با دامنه  $1 \text{ mm}$  به طور افقی به حرکت هماهنگ ساده (SHM) وامی داریم تا ارتعاش واداشته به آونگ تحمیل شود .

(الف) نشان دهید که اگر جابه جایی افقی گلوله آونگ  $x$  و جابه جایی نقطه آویز

$\xi$  باشد، معادله حرکت گلوله برای نوسانات کوچک به صورت زیر است :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} x = \frac{g}{l} \xi$$

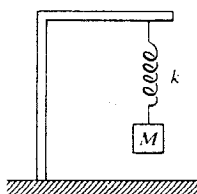
اگر  $\xi = \xi_0 \cos \omega t$  باشد، این معادله را برای حرکت پایا حل کنید . (به جای  $\omega_0 = \frac{g}{l}$  مقدار قرار دهید)

(ب) در تشدید کامل، دامنه حرکت گلوله آونگ چه اندازه است؟ (نخست، برای

یافتن  $Q$  از اطلاعات داده شده استفاده کنید .)

(ج) در چه بسامدهای زاویه ای دامنه نصف اندازه دامنه مشدد است؟

۴-۶ لرزه نگار ساده ای ، که در شکل نشان داده شده ، شامل وزنه ای است به جرم  $M$  که از فنری آویخته شده ، فنر نیز از چوبه محکمی ، که در زمین نصب شده ، آویزان است . نیروی فنر و نیروی میران به جابه جایی و سرعت نسبت به سطح زمین بستگی دارد، ولی از نظر دینامیکی شتاب معنی دار ، شتاب  $M$  نسبت به ستاره های ثابت است .



زمین

(الف) با استفاده از  $\eta$  یعنی جابه جایی  $M$  نسبت به زمین و  $\eta$  که جابه جایی خود

سطح زمین است. نشان دهید که معادله حرکت به شکل زیر است:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = -\frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

(ب) اگر  $\eta = C \cos \omega t$  باشد معادله را برای  $y$  (ارتعاش حالت پایا) حل کنید.

(ج) نمودار  $A$  یعنی دامنه جابه جایی  $y$  را بر حسب  $\omega$  (بافرض اینکه  $C$  برای همه

$\omega$  ها یکسان است) رسم کنید.

(د) در یک لرزه سنج با دوره تناوب طولانی، دوره تناوب در حدود  $30$  ثانیه و  $Q$

تقریباً  $2$  است. در نتیجه بر اثر یک زمین لرزه شدید، ممکن است سطح زمین با دوره تناوب

تقریباً  $20$  دقیقه نوسان کند و با چنین دامنه ای است که شتاب بیشینه به حدود  $10^{-9} \text{ msec}^{-2}$

می رسد. برای آنکه زمین لرزه محسوس باشد، لرزه نگار تا چه اندازه باید  $A$  را کوچک ولی

مشهود رسم کند؟

۷-۴ دستگاهی را در نظر بگیرید که با نیروی میران نوسانات واداشته ای را با بسامد زاویه ای

$\omega$  تحمل می کند.

(الف) انرژی جنبشی لحظه ای دستگاه چه اندازه است؟

(ب) انرژی پتانسیل لحظه ای دستگاه چه اندازه است؟

(ج) نسبت انرژی جنبشی میانگین به انرژی پتانسیل میانگین چه اندازه است؟

پاسخ را بر حسب  $\frac{\omega}{\omega_0}$  به دست آورید.

(د) به ازاء چه اندازه (یا اندازه های)  $\omega$ ، انرژی جنبشی میانگین و انرژی پتانسیل

میانگین مساویند؟ در این شرایط کل انرژی دستگاه چه اندازه است؟

(ه) به ازاء اندازه دلخواه  $\omega$ ، انرژی کل دستگاه بر حسب زمان چگونه تغییر

می کند؟ به ازاء چه اندازه (یا اندازه های)  $\omega$ ، انرژی کل نسبت به زمان ثابت است؟

۸-۴ جسمی به جرم  $m$  از نیروی مقاوم  $-bv$ ، و نه از نیروی بازگردان فرگونه، پیروی می کند.

(الف) نشان دهید که جابه جایی جسم، به شکل زیر، تابع زمان است:

$$x = C - \frac{v_0}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

در اینجا  $\gamma = \frac{b}{m}$

(ب) در لحظه  $t = 0$  جسم در  $x = 0$  ساکن است. در این لحظه نیروی محرک  $F = F_0 \cos \omega t$  بر آن اثر می کند. اندازه های  $A$  و  $\delta$  را در حالت پایا برای پاسخ  $x = A \cos(\omega t - \delta)$  به دست آورید.

(ج) حل عمومی [مجموعه بخشهای (الف) و (ب)] را بنویسید و اندازه های  $C$  و  $v_0$  را با استفاده از شرایط  $x = 0$  و  $\frac{dx}{dt} = 0$  در  $t = 0$  به دست آورید. نمودار  $x$  را بر حسب  $t$  به دست آورید.

۹-۴ (الف) تغییرات جابه جایی یک نوسانگر واداشته میرا به جرم  $m$  بر حسب زمان به صورت  $x = A \sin \omega t$  داده شده، نیروی مقاوم  $-bv$  است. با استفاده از این اطلاعات، حساب کنید در مدت یک چرخه نوسان، برای غلبه بر نیروی مقاوم  $-bv$ ، چه اندازه کار باید انجام داد؟

(ب) به ازاء بسامد محرک (واداشته)  $\omega$  کمتر از بسامد طبیعی  $\omega_0$ ، نمودارهای انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و انرژی کل را در یک چرخه کامل نوسانگر رسم کنید. یقیناً، نقاط برگشت و نقاط تقاطع با اندازه های انرژی و زمان در زمره نقاط مهم این نمودارها خواهد بود.

۱۰-۴ برای محاسبه توان ورودی ای که ارتعاشات واداشته را محفوظ نگهدارد لازم است بدانیم که این توان عبارت از نرخ میانگین کار انجام شده در قبال نیروی مقاوم  $-bv$  است. (الف) ثابت کنید که نرخ لحظه ای کار انجام شده در قبال این نیرو مساوی  $bv^2$  است.

(ب) با استفاده از  $x = A \cos(\omega t - \delta)$ ، نشان دهید که نرخ میانگین کار انجام شده برابر  $\frac{b\omega^2 A^2}{4}$  است.

(ج) مقدار  $A$  را به جای هر بسامد اختیاری قرار دهید، و پس از آن برای  $\bar{P}$  عبارتی همانند معادله (۴-۲۳) به دست آورید.

۱۱-۴ یک نوسانگر میرا را با  $m = 0.2 \text{ kg}$ ،  $b = 4 \text{ Nm}^{-1} \text{ sec}$ ، و  $k = 80 \text{ Nm}^{-1}$  در نظر



بگیرید. فرض کنید که این نوسانگر با نیروی محرک  $F = F_0 \cos \omega t$  به حرکت درآمده است، در این رابطه  $F_0 = 2\text{N}$  و  $\omega = 3 \text{ sec}^{-1}$ .

(الف) در پاسخ داده شده  $x = A \cos(\omega t - \delta)$ ، مقادیر  $A$  و  $\delta$  در حالت پایا چه اندازه هستند؟

(ب) در هر چرخه چه مقدار انرژی در قبال نیروی مقاوم به هدر می رود؟

(ج) توان ورودی میانگین چه اندازه است؟

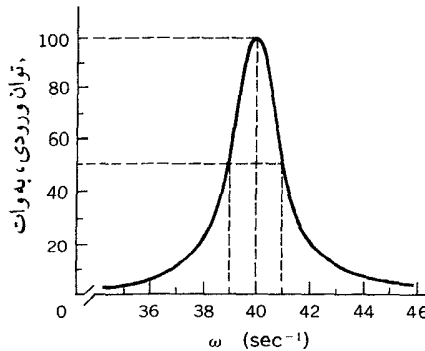
۴-۱۲ جسمی به جرم  $2\text{kg}$  از فنری به جرم ناچیز آویزان شده است، در نتیجه فنر  $2/5\text{cm}$  باز می شود، و انتهای آن شروع به نوسان می کند و بالا و پایین رفتن، حرکات هماهنگ ساده ای بادامنه  $1\text{mm}$  انجام می دهد.  $Q$  دستگاه ۱۵ است.

(الف) برای این دستگاه  $\omega_0$  چه اندازه است؟

(ب) دامنه نوسانات واداشته در  $\omega = \omega_0$  چقدر است؟

(ج) توان ورودی میانگین چه اندازه باشد تا نوسانات واداشته با بسامدی  $2\%$

بزرگتر از  $\omega_0$ ، ادامه یابد؟ [بهتر است در معادله (۴-۲۶) از قاعده تقریب استفاده شود].



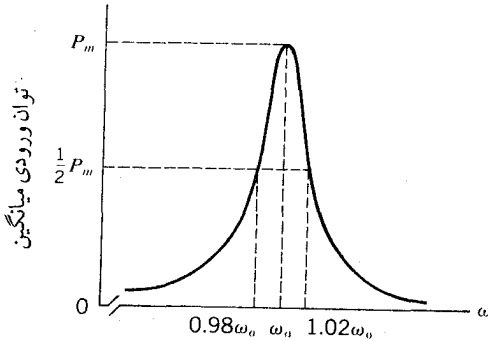
۴-۱۳ در شکل، منحنی توان تشدید دستگاه مکانیکی معینی را می بینید که با نیروی  $F_0 \sin \omega t$  به حرکت واداشته شده است، در این عبارت  $F_0$  ثابت و  $\omega$  متغیر است.

(الف) اندازه های عددی  $\omega_0$  و  $Q$  را برای این دستگاه تعیین کنید.

(ب) نیروی محرک را حذف می کنیم. انرژی دستگاه پس از چند چرخه نوسان آزاد

تا  $\frac{1}{e}$  اندازه اولیّه اش تنزل می کند؟ ( $e = 2.718$ ) (دوره تناوب نوسانات آزاد با تقریب

۱۴-۴ شکل توان ورودی میانگین  $\bar{P}$  را که بر حسب بسامد واداشته است برای جسمی نشان می دهد که به یک فنر میران آویزان است (نیروی واداشته مساوی  $F_0 \sin \omega t$ ، در اینجا ثابت و متغیر است).



برای آنکه توان ورودی میانگین، که در  $\omega_0$  بیشینه است، در بسامدهای  $0.98\omega_0$  و  $1.02\omega_0$  به نصف بیشینه سقوط کند،  $Q$  باید نسبتاً بالا باشد.

(الف) اندازه عددی  $Q$  چه اندازه است؟

(ب) اگر نیروی محرک حذف شود، انرژی طبق معادله زیر کم می شود:

$$E = E_0 e^{-\gamma t}$$

اندازه  $\gamma$  چقدر است؟

(ج) اگر نیروی محرک حذف شود، در هر چرخه چه کسری از انرژی به هدر

می رود؟

دستگاه جدیدی ساخته ایم که در آن ثابت فنر دو برابر شده، ولی جرم و محیط از

لحاظ چسبندگی تغییر نکرده است، در صورتی که همان نیروی محرک  $F_0 \sin \omega t$  بر آن وارد آید. اندازه های مشروح زیر را بر حسب همان کمیّاتی که برای دستگاه اصلی داده شده به دست آورید:

(د) بسامد مشدد جدید،  $\omega'_0$ .

(ه) عامل کیفیت جدید،  $Q'$ .

(و) توان ورودی میانگین بیشینه،  $\bar{P}_m$ .

(ز) انرژی کل دستگاه در حالت تشدید  $E_0$  ،

۴-۱۵ نوسانات آزاد یک دستگاه مکانیکی دارای بسامد زاویه ای معین  $\omega_0$  است . وقتی همان دستگاه تحت تاثیر محرک  $F_0 \cos \omega t$  (که در آن  $F_0$  ثابت و  $\omega$  متغیر است) قرار گیرد، دارای پهنای منحنی توان تشدید بر حسب بسامد زاویه ای ، در نصف توان بیشینه برابر  $\frac{\omega_0}{5}$  ، است .

(الف) در چه بسامد زاویه ای توان ورودی بیشینه است؟

(ب)  $Q$  دستگاه چه اندازه است؟

(ج) دستگاه شامل وزنه ای است به جرم  $m$  ، که به فنری با ضریب سختی  $k$  آویخته

شده است ، ثابت  $b$  در عبارت مقاومتی  $-b\dot{v}$  ، بر حسب  $m$  و  $k$  چه اندازه است؟

(د) منحنی ناشی از دامنه را بکشید و چند نقطه مشخص را بر روی منحنی علامت بزنید .

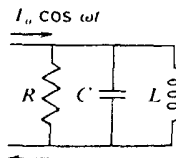
منحنی علامت بزنید .

۴-۱۶ در مداری که شکل آن رسم شده است تعیین کنید :

(الف) بسامد مشدد ،  $\omega_0$  .

(ب) پهنای تشدید ،  $\gamma$  .

(ج) توان جذب شده در تشدید .

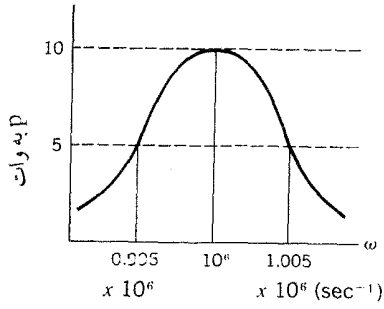


۴-۱۷ نمودار ، توان میانگینی را نشان می دهد که با یک نوسانگر جذب شده است . نیروی

محرک این نوسانگر از لحاظ بزرگی ثابت است ، ولی بسامد زاویه ای آن تغییر می کند .

(الف) در تشدید کامل ، در هر چرخه در مقابل نیروی مقاوم چه اندازه کار انجام

می گیرد؟ (دوره تناوب  $= \frac{2\pi}{\omega}$ )



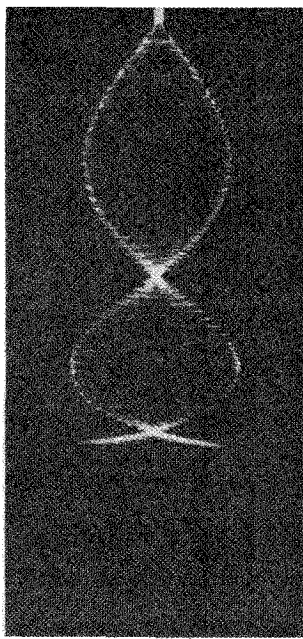
- (ب) در تشدید کامل، کل انرژی مکانیکی  $E_0$  نوسانگر چه اندازه است؟
- (ج) اگر نیروی محرک حذف شود و کاهش انرژی طبق رابطه  $E = E_0 e^{-t}$  صورت گیرد، چند ثانیه طول می کشد تا نوسانگر متوقف گردد؟

## نوسانگرهای جفت شده و مدهای طبیعی (بهنجار)<sup>۱</sup>

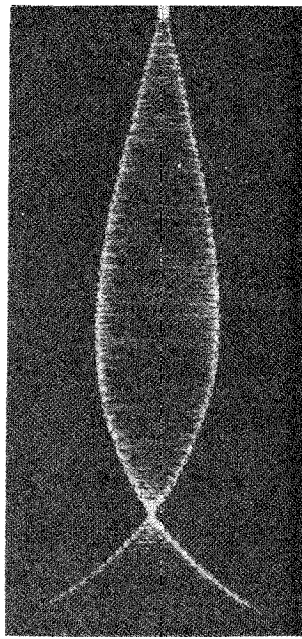
در سراسر دو فصل گذشته، تحلیل ما منحصرأ در مورد دستگاههایی بود که فقط دارای یک نوع ارتعاش آزاد بودند، و تنها با یک بسامد طبیعی مشخص می شدند. با این همه، یک دستگاه فیزیکی واقعی معمولاً به راههای گوناگون مرتعش می شود، یا ممکن است مانند نوعی پیانوی بزرگ با چندین بسامد متفاوت به حالت تشدید درآید. در صفحات آینده، از مشخصات گوناگون، هم چنین از مدها، یا به دلایلی که مطرح خواهیم کرد از مدهای طبیعی دستگاه سخن به میان خواهد آمد. یک مثال ساده زنجیر قابل انعطافی است که از یک انتها آویزان شده باشد. هرگاه این زنجیر با بسامدهایی متوالیاً به ارتعاش درآید، هر نقطه از زنجیر با حرکت هماهنگ ساده (SHM)، با همان بسامد مرتعش می شود. در نتیجه شکل زنجیر در حال ارتعاش ثابت به نظر می رسد، زیرا نسبتهای جابه جاییها در بخشهای مختلف زنجیر (در هر حالت) همیشه ثابت و محفوظ است. در شکل (۵-۱) نخستین سه مد (به ترتیب بالا بردن بسامد) برای چنین زنجیری نشان داده شده است. این نوسان در حقیقت یک بُعدی است، و تنوع مدهای طبیعی نوسان با عناوین دو-سه بُعدی بیشتر از این است.

بررسی این مدهای بسیار زیاد و محاسبه بسامدهای آنها را چگونه باید انجام داد؟ کلید این پرسش در حقیقت، به میزان فراگیری موضوع بستگی دارد و می تواند برای چندین نوسانگر ساده با هم جفت شده در نظر گرفته شود. مثلاً در جسم جامدی که از تعداد بسیار زیادی اتم یا مولکول تشکیل شده است.

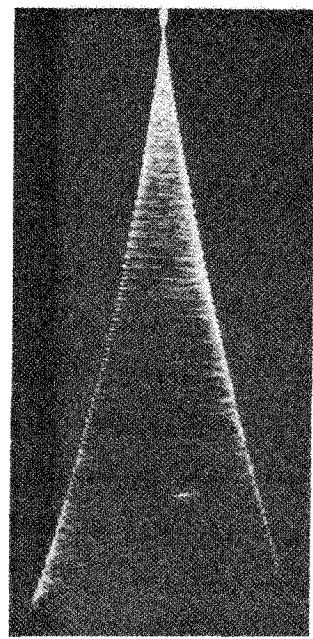
۱- تمام این فصل ممکن است (در ارتباط فصول قبل و بعد) نقش پل رابطی را داشته باشد، به شرط آنکه به بحث ارتعاشات و امواج در محیط های واقعاً پیوسته اولویت داده شود. از طرف دیگر، آشنایی با محتوای فصل حاضر ولو با یک برداشت کلی، احتمالاً ما را در ارزیابی مطالب بعدی کمک خواهد کرد. دستگاه متشکل از چند ذره وسیله ارتباط طبیعی بین تک نوسانگر و محیط پیوسته (هوا) را برقرار می سازد، و اثبات این امر از نظر ریاضی دشوار نیست. هر چند ممکن است در نگاه اول چنین به نظر رسد.



ج



ب



الف

شکل (۵-۱) نخستین سه مد طبیعی زنجیر قائم که از طرف بالا محکم شده است. (کشش در هر نقطه با وزن بخشی از زنجیر که در زیر آن است تامین می شود، و در نتیجه با فاصله ای که تا ته زنجیر دارد به طور خطی افزایش می یابد)

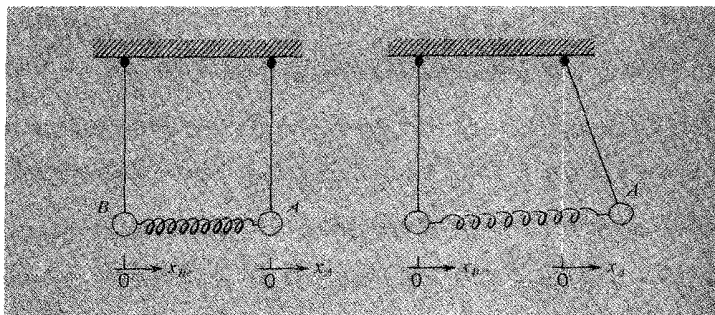
هر اتم می تواند مانند نوسانگری رفتار کند و در اطراف یک وضعیت تعادل به حالت ارتعاش درآید. ولی حرکت هر اتم اتمهای مجاورش را تحت تأثیر قرار می دهد به گونه ای که همه اتمهای جسم جامد واقعاً با هم جفت می شوند. بنابراین پرسش به این شکل مطرح می شود: جفت شدگی بر رفتار هریک از نوسانگرها چگونه اثر می گذارد؟

ما پاسخ را با بحث درباره پاره ای جزئیات خواص دستگاهی، شروع خواهیم کرد که فقط شامل دو نوسانگر جفت شده است. تبدیل دستگاه متشکل از یک نوسانگر به دو نوسانگر ممکن است تا اندازه ای کم اهمیت جلوه کند، ولی کارایی و کیفیت این دستگاه جدید طوری است که هر بیننده ای را شگفت زده می کند. بعلاوه در تحلیل رفتار چنین دستگاهی، اساساً از همه ابزارهای تئوری مورد نیاز استفاده خواهیم کرد، و مسأله را طوری طراحی می کنیم که برای تعداد زیاد و دلخواهی از نوسانگرهای جفت شده - که هدف نهایی ما خواهد بود قابل گسترش باشد. و این بدان معناست که ترکیب نوسانگرها را از نوع کاملاً ساده ای شروع کنیم، و برای آنکه در پایان، نوع کامل آن را بسازیم، باید اطلاع همه

جانبه ای از خواص دینامیکی نوسانگرهای مرکب - که مانند یک شبکه بلور پیچیده است - داشته باشیم. این ترکیب نوسانگرها کارکوچکی نیست و بحث ما نشان می دهد که برای دستیابی به نتایج مطلوب، از ابزار ریاضی فوق العاده کم استفاده می شود.

## دو آونگ جفت شده

آزمایش را با مثالی بسیار ساده شروع می کنیم. دو آونگ یکسان A و B را انتخاب کنید، و آنها را با فنری، مطابق شکل ۵-۲، به یکدیگر وصل کنید. طول آزاد فنر دقیقاً با فاصله بین گلوله های آونگ مساوی است. آونگ A را تا حدی به یک طرف بکشید که آونگ B ثابت نگهداشته شود، و سپس هر دوی آنها را رها سازید. چه اتفاق می افتد؟ آونگ A شروع به تاب خوردن می کند و از یک طرف به طرف دیگر می رود، ولی دامنه نوسانش دائماً کم می شود. آونگ B، که در ابتدا جابه جا نمی شد، بتدریج شروع به نوسان می کند، و دامنه اش مرتباً زیاد می شود. و به زودی A و B هم دامنه می شوند. اکنون شما ممکن است فکر کنید که در وضع دو آونگ تغییری بیش از این رخ نمی دهد. ولی نه، این طور نیست، فرایند ادامه پیدا می کند دامنه A به کاهش خود ادامه می دهد و دامنه B به افزایش خود، تا حدی که جابه جایی B احتمالاً با جابه جایی ای که در آغاز به A داده بودیم مساوی (تقریباً مساوی) شود؛ از طرف دیگر، جابه جایی A مرتباً کم می شود تا به صفر برسد. شرط شروع (حرکت) تقریباً وارونه می شود. اکنون پیش بینی دنباله (فرایند) آسان است. حرکت B به A پس داده می شود و فرایند همین طور ادامه می باید. مقدار انرژی که در آغاز به A (و به فنر) داده شده بود تا A را به نوسان درآورد محفوظ نمی ماند، بلکه به B پس داده



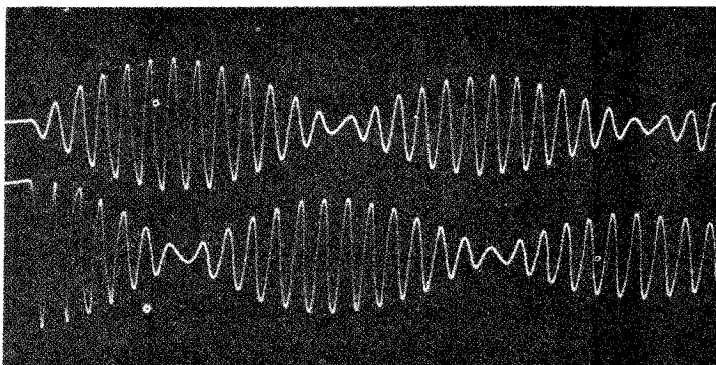
شکل ۵-۲ (الف) آونگهای جفت شده در وضعیت تعادل.

(ب) آونگهای جفت شده در وضعیتی که یک آونگ جابه جا شده است.

می شود و این مبادله انرژی بین A و B ادامه دارد. شکل ۵-۳ ثبت حرکات واقعی چنین دستگاه جفت شده ای را نشان می دهد. آونگها از سقف (مثلاً آزمایشگاه) آویزان بوده، درون گلوله هر آونگ یک پیل خشک وجود دارد.

ولامپ کوچک<sup>۱</sup> متصل به آن را روشن می کند، و از زیر به وسیله یک دوربین که بر روی مسیر در راستای عمود بر سطح دو آونگ - کشیده می شود، از حرکت نوسانی دو آونگ می توان عکسبرداری کرد.

البته رفتاری که از دو آونگ مشاهده می شود، ناشی از فتری است که آنها را به یکدیگر وصل کرده است. هنگامی که A نوسان می کند، فنر باعث جلو رفتن B و برگشتن آن می شود.



شکل ۵-۳ حرکت دو نوسانگر جفت شده همانند (آونگها با نور لامپهای روی بدنه گلوله ها در حرکتند). آونگ شماره ۱، در وضعیت تعادل طبیعی، در آغاز ساکن بوده، و میرایی دستگاه کاملاً نمایان است.

(عکس از Jon Rosenfeld، مرکز آموزشی پژوهشی M.I.T.)

با باز شدن فنر، نیروی محرک ایجاد می شود و B راتحت تاثیر قرار می دهد، و مجموعه را به حرکت درمی آورد. همزمان با کشیده یا جمع شدن فنر، بر A نیروی وارد می آید که گاهی موافق و گاهی مخالف با جهت حرکت آن است. ولی همین که B شروع به حرکت کند، اثر دافعه فنر بر روی A بیش از اثر جاذبه اش می شود. در هر نوسان کار خالص انجام شده بر روی A منفی است و دامنه A کم می شود. هر یک از حرکات ثبت شده در شکل ۵-۳ درست

۲- توضیح مترجم: لامپ بسیار کوچک تقریباً نقطه ای شکل در زیر هر یک از گلوله ها - روی بدنه نصب شده است، و دوربین از حرکت نوسانی هر یک از این لامپهای روشن نقطه ای عکسبرداری می کند.



حالتی را نشان می دهد که در زنشهای بین دو حرکت هماهنگ ساده هم دامنه ولی با بسامدهای متفاوت پدید می آید. در نتیجه واقعیتها همان طور که هست نمایان می شوند و نیازی به شرح جزئیات آنها نیست، هرچند، در موردیک موضوع روشن: «احساس» ما به درك پدیده فیزیکی فقط از نظر کیفی به ما کمک می کند. ولی مسأله هنگامی فوق العاده ساده می شود که شرایط شروع را تا اندازه ای تغییر دهیم.

### موارد تقارن

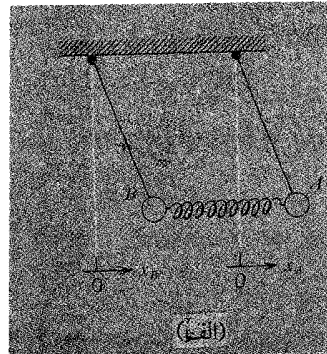
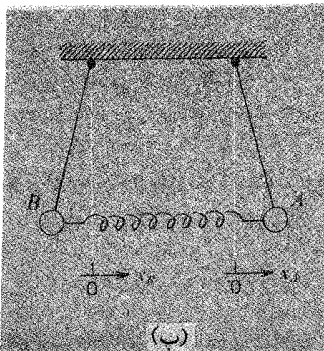
فرض کنیم هر دو آونگ A و B را با اندازه های مساوی به یک طرف بکشیم [شکل ۵-۴ (الف)] و بعد آنها را رها سازیم. فاصله بین آنها با طول فنر متصل به دو آونگ در حالت آزاد مساوی است، و در نتیجه فنر به هیچ یک از آونگها نیرویی وارد نمی آورد. در این حالت A و B همفازند و با دامنه های مساوی نوسان خواهند کرد، و فاصله دو آونگ محفوظ خواهد ماند. هر آونگ ممکن است درست همانند یک آونگ آزاد (جفت نشده) باشد. هر آونگ با بسامد طبیعی آزاد خودش  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  نوسان می کند. معادلات حرکت عبارتند از:

$$x_A = C \cos \omega_0 t$$

(۱-۵)

$$x_B = C \cos \omega_0 t$$

در این روابط  $x_A$  و  $x_B$  جابه جاییهای هر آونگ نسبت به وضعیت تعادل است.



شکل ۵-۴ (الف) مد طبیعی پایین برای دو آونگ جفت شده. (ب) مد طبیعی بالا برای دو آونگ جفت شده.

این حالت ، مُد طبیعی یک دستگاه جفت شده را نمایش می دهد. هر دو گلوله با بسامد یکسان ارتعاش می کنند و دامنه ارتعاش (برای هر دو یکسان) و ثابت است .

ما چند مُد طبیعی می توانیم داشته باشیم؟ در اینجا فقط یک مد دیگر داریم A و B را با اندازه های مساوی ولی در دو جهت مخالف بکشید [شکل ۴-۵ (ب)] و سپس آنها را رها کنید . اکنون فنر متصل به دو آونگ باز شده است ، در نیم چرخه بعدی جمع خواهد شد و بر آونگها نیروهایی وارد خواهد آورد . تقارن وضعیّت آونگها گویای آن است که حرکات A و B نسبت به آینه واقع در سطح تقارن دو آونگ تصاویری از یکدیگرند .

اگر آونگها آزاد بودند و هریک به اندازه فاصله کوچک x جابه جا می شدند ، نیروی ذخیره شده  $m\omega_0^2 x$  خواهد بود . ولی در وضعیّت فعلی که فنر متصل به دو آونگ به اندازه  $2x$  باز (یا جمع) شده است ، نیروی ذخیره شده  $2kx$  بر آونگها وارد می آید که در اینجا k ثابت (ضریب سختی) فنر است . بنابراین معادله حرکت برای A به صورت زیر است :

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + 2kx_A = 0$$

یا

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2) x_A = 0$$

از طرفی داریم  $\omega_c^2 = \frac{k}{m}$  . در نتیجه معادله ای که برای حرکت هماهنگ ساده با بسامد  $\omega'$  به دست می آید عبارت است از :

$$\omega' = (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

برای شرایط شروع معین ، حل آن :

$$x_A = D \cos \omega' t \quad (2-5 \text{ الف})$$

حرکت B تصویری در آینه (تقارن) است ، و در نتیجه :

$$x_B = -D \cos \omega' t \quad (2-5 \text{ ب})$$

هر آونگ با حرکت هماهنگ ساده نوسان می کند ، ولی بر اثر افزایش نیروی ذخیره شده در فنر متصل به دو آونگ ، بسامد نوسانات بیش از حالتی است که آونگها جفت نشده آزاداند .

در این نوع نوسان که آونگها دو مین مد طبیعی را تشکیل می دهند واضح است که حرکات A و B به اندازه  $180^\circ$  اختلاف فاز دارند. یادآوری می گردد که با میراشدن یکی از آونگها، بسامد زاویه ای آونگ دیگر تحت تاثیر گرانس بعلاوه فتر جفت کننده (دو آونگ) مساوی با  $(\omega_0^1 + \omega_0^2)^2$  می شود. بنابراین اگر کسی بخواهد این حرکت را همان گونه که هست در نظر بگیرد، ملاحظه می کند که مختصات حرکت همانند یک آونگ تنهاست. از سوی دیگر، مدهای طبیعی با بسامدهایی که بیشتر یا کمتر از اندازه بسامد تک آونگ است جابه جا می شوند.

### برهنه‌ی مدهای طبیعی

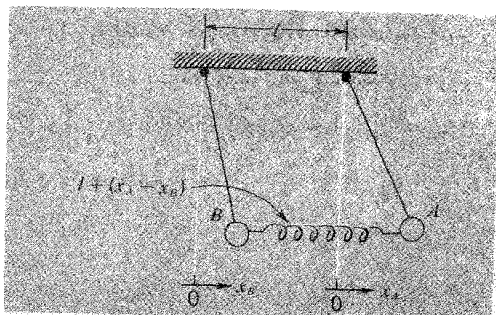
در هر دو حالت بالا، هر بار که حرکت در غیاب نیروهای میران شروع شود، بدون تغییر ادامه می یابد. در این صورت انتقال انرژی از یک مَد نوسان به مَد دیگر رخ نمی دهد. دلیل مهمی که این دو حالت راحت و قابل حل را مطرح می کنیم آن است که حرکت هر یک از آونگها را که از حالت سکون شروع شود می توان مانند حرکت ترکیبی دو آونگ تعریف کرد. اینک می بینیم که انجام این کار چگونه ممکن است.

لحظه دلخواهی را در نظر می گیریم که آونگ A در  $x_A$  و آونگ B در  $x_B$  باشد (شکل ۵-۵). فتر به اندازه  $x_A - x_B$  کشیده می شود، در نتیجه نیروی که بر A و B وارد می شود اندازه اش  $k(x_A - x_B)$  است. بنابراین نیروی ذخیره شده در A عبارت است از:

$$m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B)$$

و در B می شود

$$m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B)$$



شکل ۵-۵ آونگهای جفت شده با پیکربندی اختیاری

بنابراین ، معادلات حرکت A و B عبارتند از :

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B) = 0$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B) = 0 \quad (3-5)$$

از سوی دیگر با استفاده از  $\omega_c^2 = \frac{k}{m}$  ، این معادلات را به شکل زیر می توان نوشت :

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B = 0$$

(4-5)

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A = 0$$

نخستین معادله که بیانگر شتاب A است ، جمله ای بر حسب  $x_B$  دارد و دومین معادله دارای جمله ای بر حسب  $x_A$  است . این دو معادله دیفرانسیل را نمی توان مستقلاً حل کرد ، بلکه باید در یک دستگاه با هم حل شوند . حرکتی که به A داده شود منحصر به A نیست ، بلکه B را هم تحت تاثیر قرار می دهد ، و بالعکس .

در شرایط فعلی ، حل این معادلات مشکل نیست . اگر دو معادله را با هم جمع کنیم ، معادله زیر به دست می آید :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) + \omega_0^2(x_A + x_B) = 0$$

و اگر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم ، به دست خواهد آمد :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A - x_B) + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)(x_A - x_B) = 0$$

این معادلات برای نوسانات هماهنگ ساده ، متداول و شناخته شده اند . در نخستین معادله ، متغیر  $x_A + x_B$  و بسامد  $\omega_0$  است . در دومین معادله متغیر  $x_A - x_B$  و بسامد  $\omega' = (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)^{1/2}$  است . این دو بسامد دقیقاً نظیر بسامدهای دو مُد طبیعی است که قبلاً توضیح داده ایم . اگر به جای  $x_A + x_B = q_1$  و به جای  $x_A - x_B = q_2$  قرار دهیم ، دو معادله مستقل بر حسب  $q_1$  و  $q_2$  خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega'^2 q_2 = 0$$

حلهای ممکن ( هر چند شامل اکثر حالات عمومی نمی شود) عبارتند از:

$$q_1 = C \cos \omega t \quad (5-5) \quad (\text{حالت مخصوص})$$

$$q_2 = D \cos \omega' t$$

در این روابط  $C$  و  $D$  ضرایبی هستند که به شرایط اولیه بستگی دارد. [در حقیقت، فرق معادلات (5-5) بانوع عمومی این معادلات این است که در اینجا فازهای اولیه صفر منظور شده اند.]

ما در اینجا دو نوسان مستقل داریم، که با نوسان متغیرهای  $q_1$  و  $q_2$  نمایش داده شده و این متغیرها را لزوماً مختصات طبیعی نامند. تغییراتی که در اندازه  $q_1$  رخ می دهد به  $q_2$  بستگی ندارد و بالعکس.

حل  $x_A$  و  $x_B$  بر حسب مختصات اصلی عبارت است از

$$x_A = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}C \cos \omega t + \frac{1}{2}D \cos \omega' t \quad (6-5)$$

(حالت مخصوص)

$$x_B = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = \frac{1}{2}C \cos \omega t - \frac{1}{2}D \cos \omega' t$$

اگر  $C = 0$ ، آنگاه هر دو آونگ با بسامد  $\omega'$  نوسان می کنند، یا اگر  $D = 0$ ، در آن صورت دو آونگ با بسامد  $\omega$  نوسان خواهند کرد. این بسامدها به مدهای طبیعی اختصاص دارند، از این رو بسامدهای طبیعی نامیده می شوند. می بینیم که یکی از مشخصات یک بسامد طبیعی آن است که هم  $x_A$  و هم  $x_B$  بتوانند با همان بسامد نوسان کنند.

اکنون برای تحلیل حرکت جفت شده که در شکل 5-3 نشان داده شده است از معادلات (5-6) استفاده می کنیم. شرایط اولیه (در  $t = 0$ ) به شرح زیر است:

$$\frac{dx_B}{dt} = 0 \quad x_B = 0 \quad \frac{dx_A}{dt} = 0 \quad x_A = A_0$$

یادآور می شویم که شرایط مربوط به سرعتهای اولیه از همان شرایطی ناشی می شود که در معادلات (5-6) برخورد کردیم. زیرا با دیفرانسیل گیری از آن بر حسب  $t$ ، فقط جمله های  $\sin \omega t$  و  $\sin \omega' t$  به دست می آید، و این جملات به ازاء  $t = 0$  به سمت صفر میل

می کنند. با استفاده از شرایط مربوط به خود جابه جاییهای اولیه داریم:

$$x_A = A_0 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$$

$$x_B = 0 = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D$$

در نتیجه،

$$D = A_0 \quad C = A_0$$

در صورتی که این شرایط شروع ویژه را در معادلات (۵-۶) قرار دهیم، نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$x_A = \frac{1}{2}A_0(\cos\omega_0 t + \cos\omega' t)$$

$$x_B = \frac{1}{2}A_0(\cos\omega_0 t - \cos\omega' t)$$

که می تواند به صورت زیر هم نوشته شود:

$$x_A = A_0 \cos\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega_0}{2}t\right)$$

(۵-۷)

$$x_B = A_0 \sin\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega' + \omega_0}{2}t\right)$$

هریک از اینها یک نوسان سینوسی با بسامد زاویه ای  $\frac{\omega' + \omega_0}{2}$  است، در حالی که دامنه با روشی که در فصل ۲ بحث شد مدوله شده است. دامنه مربوط به هر یک از آونگها در لحظه ای صفر است که دامنه مربوط به آونگ دیگری بیشینه باشد گرچه جابه جایی واقعی به جابه جایی بعدی در هر زمان به اندازه لحظه ای  $\frac{\omega' + \omega_0}{2}t$  بستگی دارد.

### مثالهای دیگری از نوسانگرهای جفت شده

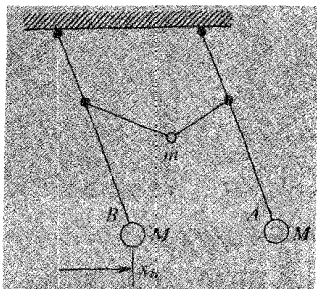
برای جفت شدگی دو آونگ یا نوسانگرهای دیگر با هم، روشهای بسیار گوناگون وجود دارد؛ که ذیلاً به چند مورد اشاره می شود.

در شکل (۵-۶) نشان داده شده است که دو آونگ به کمک یک وزنه،  $M \gg m$ ، چگونه

ممکن است با هم جفت شوند، و زنه  $m$  با رشته هایی به سیمهای بزرگ آویخته متصل شده است. از تقارن آرایش وزنه ها می توان حدس زد که مدهای طبیعی به ازاء  $x_B = \pm x_A$  با حرکتی همراه خواهند بود. اگر  $x_A = +x_B = q_1$  باشد وزنه  $m$  بلند می شود و با وزنه های اصلی  $M$  خواهد افتاد، ولی اگر  $x_A = -x_B = q_2$  باشد، وقتی وزنه های  $M$  بیشترین فاصله را از یکدیگر دارند وزنه  $m$  در بالاترین وضعیت خواهد بود. با افتادن وزنه  $m$  وزنه ها به هم نزدیک می شوند؛ بنابراین دو مد طبیعی متمایز برای بسامدها وجود دارد، که (به طور کلی) هیچکدام با بسامد یکی از آونگها به تنهایی مساوی نیست.

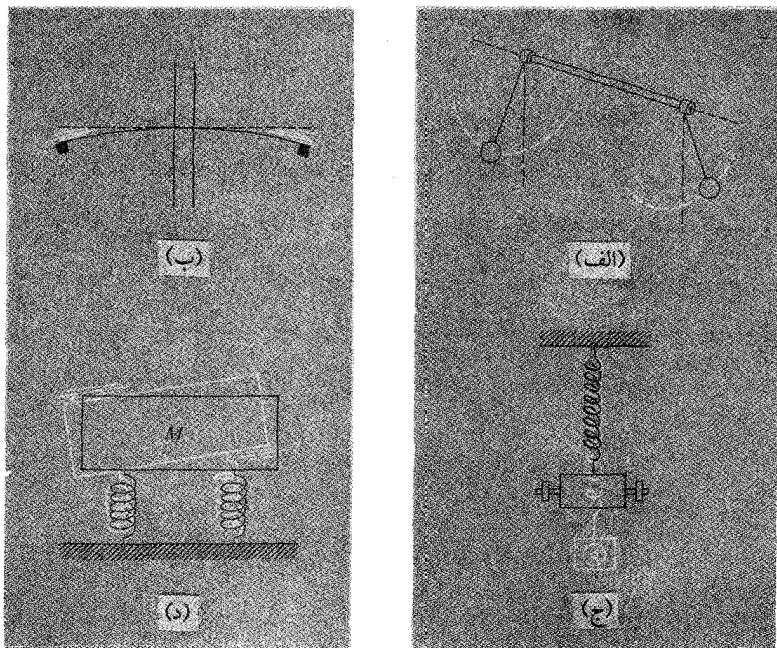
در شکل (۷-۵) چهار سیستم جفت شده مکانیکی دیگر نشان داده شده است. نخستین نمودار دو آونگ را نمایش می دهد، هر یک از گلوله ها به سیمی بسته شده است و دو آونگ به طرفین میله محکمی آویخته شده اند. آونگها در سطوحی عمود بر سیم تاب می خوردند. مگر اینکه آونگها با دامنه های مساوی همفاز تاب بخورند که در آن صورت سیم متصل به آونگ تابیده می شود و یک گشتاور پیچشی ایجاد می شود که با اختلاف جابه جایی زاویه ای متناسب است.

در شکل (۷-۵) (ب) سیستم دیگری را نشان می دهیم که در آن جفت شدگی توسط نیروهای کشسان ایجاد می شود، این نیروها جسم را به حالت نخستین بر می گردانند. به دو طرف یک تیغه اره آهن بری (یا تیغه فلزی دیگر) دو وزنه کوچک محکم شده است، این تیغه از وسط به وسیله پایه ای ثابت نگهداشته می شود. اگر یک وزنه را به طرف پایین بکشیم و سپس رها سازیم، همانگونه که در شکل نشان داد شد، حرکت از طریق نوعی برهمنهی مدهای طبیعی به وزنه دیگر سریعاً منتقل می شود.



شکل (۶-۵) آونگهای جفت شده جرمی.

شکل ۵-۷ (ج) شیوه دقیق شناخته شده ای نظیر آونگ ویلبر فرس<sup>۳</sup> را نشان می دهد. وزنه ای با تیرهای جلو آمده قابل تعدیل از یک فنر حلقوی آویزان می شود. اگر وزنه را به طرف پایین بکشیم و رها سازیم، حرکت در آغاز به صورت یک نوسان ساده در راستای قائم انجام می گیرد، ولی پس از مدت کوتاهی این نوسان از بین می رود و نوسان شدید وزنه (حول یک محور قائم) جایگزین آن می شود. بنابراین، نوسان خطی در راستای قائم به نوسان پیچشی تبدیل می شود و دوباره به سستی می گراید. عملکرد این دستگاه از آن نظر حائز اهمیت است که دوره های تناوب هر دو حرکت تقریباً مساوی است؛ در حقیقت وجود تیرهای جلو آمده قابل تعدیل موجب این نظم و ترتیب حرکات می شود. جفت شدگی بین حرکات خطی و زاویه ای، همان گونه که در فصل ۳ به آن اشاره شد، در حقیقت ناشی از آن است که باز شدن حلقه های فنر با پیچش مختصر انتهایی آن همراه است، یا بالعکس اگر فنر پیمچانده شود طولش بلندتر یا کوتاهتر خواهد شد. بنابراین وقتی وزنه آویخته به فنر را



شکل ۵-۷ (الف) آونگهای جفت شده که به یک میله افقی پیچشی محکم شده است. (ب) به انتهای هر یک از سیمها وزنه ها متصل شده است. (ج) آونگ ویلبر فرس (د) قطعه مکعب مستطیل شکل بر روی فنرها

۳- L.R. Wilber force، استاد فیزیک بریتانیا، پس از آنکه جزئیات مطالعه و بررسی خود را در ۱۸۹۴ منتشر ساخت، این شیوه به نام او معروف شد.



ضمن پایین کشیدن با زاویه مناسبی پیچچانیم و سپس رها سازیم، در آن صورت دستگاه ممکن است با مُد طبیعی به صورت (خطی یا زاویه ای) و با دامنه ثابت نوسان کند. آخرین نمودار [شکل ۵-۷ (د)] یک قطعه مکعب مستطیل شکل را نشان می دهد که روی دو فنر گذاشته شده است. یک مُد این دستگاه به صورت نوسانات قائم است که قطعه افقی نگهداشته می شود، در این حالت میزان انبساط یا انقباض هر دو فنر یکسان است، ولی مد دیگری وجود دارد که میزان تغییر طول دو فنر مساوی و در خلاف جهت یکدیگر است؛ بنابراین قطعه، بدون آنکه ارتفاع گرانیگاهش تغییر کند، حول یک محور افقی تاب گونه نوسان می کند. یک اتومبیل که از جلو و عقب معلق است، تا حدودی به این دستگاه شباهت دارد. اگر سپر جلویی را بلند کنیم و بلافاصله رها سازیم پس از مدت کوتاهی ممکن است به صورت یک نوسان به سپر عقب منتقل شود و اگر میرایی به زودی بر دستگاه مستولی نشود، نوسانات بین بخشهای جلو و عقب اتومبیل تا مدتی ادامه خواهد یافت.

### بسامدهای طبیعی : روش تحلیلی کلی

فرض کنیم کشف مُدهای طبیعی از ملاحظات تقارن آسان نبود، یا براحتی نمی توانستیم معادلات دیفرانسیل را همزمان حل کنیم. در آن صورت چگونه می توانستیم راه حلی ارائه دهیم؟ استفاده از مختصات را که در ارتباط با معادلات (۵-۶) بحث کردیم پیشنهاد می کنیم.  $x_B$  و  $x_A$  هر دو می توانند با یکی از بسامدهای طبیعی نوسان کنند. بنابراین معادلات را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$x_A = C \cos \omega t \quad (۸-۵)$$

$$x_B = C' \cos \omega t$$

از آنجا که این عبارات حل معادلات (۴-۵) هستند، لذا می توان اندازه های  $\omega$ ،  $C$  و  $C'$  را به دست آورد:

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_o^2 + \omega_c^2) x_A - \omega_c^2 x_B = 0 \quad (۴-۵)$$

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} + (\omega_o^2 + \omega_c^2) x_B - \omega_c^2 x_A = 0$$

اگر اندازه های  $\omega$  مناسب باشند، بسامدها طبیعی خواهند بود. البته پیش از این هم به این نتیجه رسیده ایم که  $C$  و  $C'$  از لحاظ قدر مطلق باید مساوی یکدیگر باشند، ولی در شرایط موجود با مسأله به گونه ای برخورد می کنیم که هنوز آن را نمی دانیم. از طرف دیگر فقط در مسأله بسیار خاصی می توانیم  $C$  و  $C'$  را مساوی یکدیگر در نظر بگیریم و در بیشتر حالات کلی، این تساوی برقرار نیست.

با قرار دادن معادلات (۵-۸) در معادلات (۵-۴)، به دست خواهد آمد:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C - \omega_c^2 C' = 0$$

$$-\omega_c^2 C + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C' = 0$$

این بسامدها به ازاء اندازه اختیاری  $\omega$  یک دستگاه دو معادله ای لحظه ای با دامنه های نامعلوم  $C$  و  $C'$  تشکیل می دهند. اگر این معادلات مستقل باشند یک راه حل وجود دارد  $C = 0$  و  $C' = 0$  یعنی به ازاء اندازه اختیاری  $\omega$ ، معادلات (۵-۸) پاسخ مسأله نیست. ولی اگر این دو معادله مستقل نباشد - مثلاً اگر دومی درست مضربی از اولی باشد. در آن صورت ما در حقیقت، برای دو دامنه  $C$  و  $C'$  فقط یک معادله داریم. در این حالت،  $C$  می تواند هر اندازه ای داشته باشد. ولی ابتدا به  $C$  مقداری نسبت می دهیم، سپس اندازه  $C'$  تعیین می شود.

به ازاء چه مقدار  $\omega$  دو معادله مستقل نیستند و در نتیجه  $C$  و  $C'$  می توانند مخالف صفر باشند. از نخستین معادله داریم:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2} \quad (۵-۹ \text{ الف})$$

واز دومین،

$$\frac{C}{C'} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}{\omega_c^2} \quad (۵-۹ \text{ ب})$$

اگر  $C$  و  $C'$  هر دو صفر نباشند. طرفهای راست این دو معادله باید مساوی باشند بنابراین

$$\frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}{\omega_c^2}$$

$$(-\omega^{\prime} + \omega_o^{\prime} + \omega_c^{\prime})^2 = (\omega_c^{\prime})^2$$

از آنجا

$$-\omega^{\prime} + \omega_o^{\prime} + \omega_c^{\prime} = \pm \omega_c^{\prime}$$

و یا

$$\omega^{\prime} = \omega_o^{\prime} + \omega_c^{\prime} \pm \omega_c^{\prime}$$

می بینیم که برای  $\omega$  دو جواب داریم، اگر آنها را  $\omega'$  و  $\omega''$  بنامیم خواهیم داشت:

$$\omega'^{\prime} = \omega_o^{\prime} + 2\omega_c^{\prime}$$

$$\omega''^{\prime} = \omega_o^{\prime}$$

ریشه های مربعی مثبت این عبارات دو بسامد طبیعی سیستم هستند، تاکنون یک بار دیگر موفق شده ایم که به همین نتایج برسیم.

اکنون می توان رابطه بین  $C$  و  $C'$  را به ازاء هر یک از وجوه طبیعی از معادلات (۵-۹) به دست آورد. به ازاء  $\omega = \omega'$  داریم:

$$\frac{C}{C'} = -1$$

و به ازاء  $\omega'' = \omega''$ ،

$$\frac{C}{C'} = +1$$

بنابراین دو معادله به شکل ویژه معادلات (۵-۸) به دست می آید که حل معادلات دیفرانسیل جفت شده حرکتند [معادلات (۴-۵)]:

$$x_A = D \cos \omega' t$$

$$x_A = C \cos \omega_c t$$

و

(۵-۱۰)

$$x_B = -D \cos \omega' t$$

$$x_B = C \cos \omega_c t$$

چون مقدار دامنه اختیاری است و با استفاده از شرایط اولیه تعیین می شود، از دو نشانه متفاوت (مثلاً  $C$  و  $D$ ) استفاده کرده ایم تا نشان دهیم که دامنه ها مربوط به مدهای طبیعی جداگانه اند.

معادلات دیفرانسیل خطی هستند (فقط توانهای اول  $x_A$ ،  $x_B$ ،  $\frac{d^2 x_A}{dt^2}$  و  $\frac{d^2 x_B}{dt^2}$  ظاهر می شود)، و در نتیجه مجموع دو پاسخ به یک پاسخ منتهی می شود:

$$x_A = C \cos \omega_0 t + D \cos \omega' t$$

(۱۱-۵) (حالت مخصوص)

$$x_B = C \cos \omega_0 t - D \cos \omega' t$$

پیش از این یک بار دیگر هم این پاسخ را به کمک معادلات (۵-۶) به دست آورده ایم. ولی این بار تقریب ما، بدون در نظر گرفتن تقارن دستگاه، دقیقاً جنبه تحلیلی و عمومی دارد. اکنون این بحث را با ارائه حل کلی معادلات نوسان آزاد این دستگاه جفت شده کامل می کنیم. معادلات دیفرانسیل (۴-۵) با فرض اینکه پاسخهای این معادلات در مراحل اولیه مخالف صفر باشد به ازاء اندازه های مناسبی مساویند. در آن صورت بین  $x_B$  و  $x_A$  یک رابطه اصولی به شکل خاص وجود دارد، مخصوصاً که می توانیم به جای معادلات (۵-۱۰) روابط کلی زیر را داشته باشیم:

$$x_A = C \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

مُد پایینتر:

$$x_B = C \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$x_A = D \cos(\omega' t + \beta)$$

مُد بالاتر:

$$x_B = -D \cos(\omega' t + \beta)$$

بنابراین وجود چهار ثابت قابل تعدیل این امکان را به ما می دهد که این پاسخها را با اندازه های دلخواه جابه جاییهای اولیه و سرعتهای هر دو آونگ جفت و جور کنیم. چنین شیوه ای محدودیت صفر بودن سرعت اولیه را که در راه حلهای قبلی خاصی خاص تلقی می شد در بر نخواهد گرفت.

۴- معادلات (۵-۱۰) در مقایسه با معادلات (۵-۶) فقط در عامل ۲ ضرب شده اند، و این امر موجب تفاوت این معادلات نمی شود، مخصوصاً اگر ثابت کنیم که اندازه های ضرایب همان ضرایب اولیه  $x_B$  و  $x_A$  هستند.

## ارتعاش واداشته و تشدید برای دو نوسانگر جفت شده

ما تاکنون فقط ارتعاشات آزادستگاهی را در نظر گرفته ایم که شامل دو نوسانگر جفت شده بوده است، و بدین وسیله به مشخصات بسامدهای طبیعی (درست دو تا از آنها) دستگاهی پی می بردیم که می توانست فقط یک نوع ارتعاش داشته باشد. ولی اگر دستگاه توسط یک عامل خارجی با یک بسامد دلخواه به ارتعاش درآید چه اتفاقی می افتد؟ با استفاده از آزمایشهایی که تا کنون انجام داده ایم به این نتیجه می رسیم که وقتی دستگاه با بسامدی نزدیک به یکی از بسامدهای طبیعی به ارتعاش درآید دامنه نوسان بزرگ خواهد بود، در صورتی که بسامد اعمال شده با بسامدهای طبیعی زیاد اختلاف داشته باشد دامنه ارتعاش دستگاه نسبتاً کوچک خواهد بود. ما جزئیات این پدیده را که از معادلات حرکت، در ساده ترین حالت ممکن، به دست می آید در مورد آونگ همانند جفت شده در نظر خواهیم گرفت، چراکه مابیش از این به هویت مدهای طبیعی پی برده ایم.

بحث ما دقیقاً ادامه تحلیل نوسانگر منفردی خواهد بود که در فصل ۴ بیان شد. در این حالت فرض خواهیم کرد که اثر میرایی به اندازه بی کوچک است که در معادلات حرکت می تواند نادیده گرفته شود. ولی با وجود این شاید پس از تعداد زیادی چرخه نوسان، آثار زودگذر از بین برود و در نتیجه حرکت هر آونگ با دامنه ثابت و با بسامد نیروی محرک انجام گیرد. بنابراین اکنون فرض می کنیم که نیروی محرک هماهنگ  $F_0 \cos \omega t$  بر آونگ A وارد آید (مثلاً بر نقطه آویز وارد آید و آن را به طور سینوسی به عقب و جلو به حرکت درآورد)، حرکت آونگ B فقط توسط نیروی تقویت کننده و فنر جفت شده کنترل می شود. در نتیجه آونگ B طبق قانون نیوتون همان حرکتی را خواهد داشت که برای ارتعاشات آزاد در نظر گرفته بودیم و معادله در مورد A فقط در حد اضافه شدن جمله  $F_0 \cos \omega t$  تغییر می کند؛ هر چند این اضافه شدن تغییر فاحشی در وضعیت فیزیکی به وجود می آورد. به این ترتیب دو معادله حرکت به صورت زیر درمی آید [به معادلات (۳-۵) در مورد معادلات ارتعاش آزاد مراجعه کنید]:

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B) = F_0 \cos \omega t$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B) = 0 \quad \left( \omega_0^2 = \frac{g}{l} \right)$$

طرفین هر رابطه را بر  $m$  تقسیم می کنیم، می شود:

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_o^2 + \omega_c^2) x_A - \omega_c^2 x_B = \frac{F_o}{m} \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} + (\omega_o^2 + \omega_c^2) x_B - \omega_c^2 x_A = 0 \quad \left( \omega_c^2 = \frac{k}{m} \right)$$

گرچه بهتر است با  $x_B$  و  $x_A$  به طور جداگانه عمل کنیم درعین حال می توان مختصات قائم  $q_1 (= x_A + x_B)$  و  $q_2 (= x_A - x_B)$  را که قبلاً هم دیده ایم یک جا دخالت داد، این مختصات می تواند برای یک دستگاه واحد مورد استفاده قرار گیرد. با جمع کردن معادلات دیفرانسیل بالا به دست می آید:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_o^2 q_1 = \frac{F_o}{m} \cos \omega t \quad (5-13 \text{ الف})$$

از کم کردن آنها از یکدیگر به دست می آید:

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega'^2 q_2 = \frac{F_o}{m} \cos \omega t \quad (5-13 \text{ ب})$$

در اینجا

$$\omega'^2 = \omega_o^2 + 2\omega_c^2$$

ساده شدن مسأله مورد توجه است. و درست مانند حالتی است که ما دو نوسانگر هماهنگ با بسامدهای طبیعی  $\omega_o$  و  $\omega'$  داشته باشیم. حلهای حالت پایدار را به کمک معادلات زیر می توان به روشنی شرح داد:

$$C = \frac{\frac{F_o}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad \text{در اینجا} \quad q_1 = C \cos \omega t \quad (5-14)$$

$$D = \frac{\frac{F_o}{m}}{\omega'^2 - \omega^2} \quad \text{در اینجا} \quad q_2 = D \cos \omega t$$

دامنه های  $C$  و  $D$  دقیقاً نوع رفتار تشدید یک تک نوسانگر را نمایش می دهند که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است و ما آنها را قبلاً به دست آورده ایم. از طرفی می توان وابستگی

هریک از دامنه های A و B دو آونگ را با بسامد آنها مشخص نمود، در این مورد داریم:

$$A = \frac{1}{2}(C + D) \quad \text{در اینجا} \quad x_A = A \cos \omega t$$

$$B = \frac{1}{2}(C - D) \quad \text{در اینجا} \quad x_B = B \cos \omega t$$

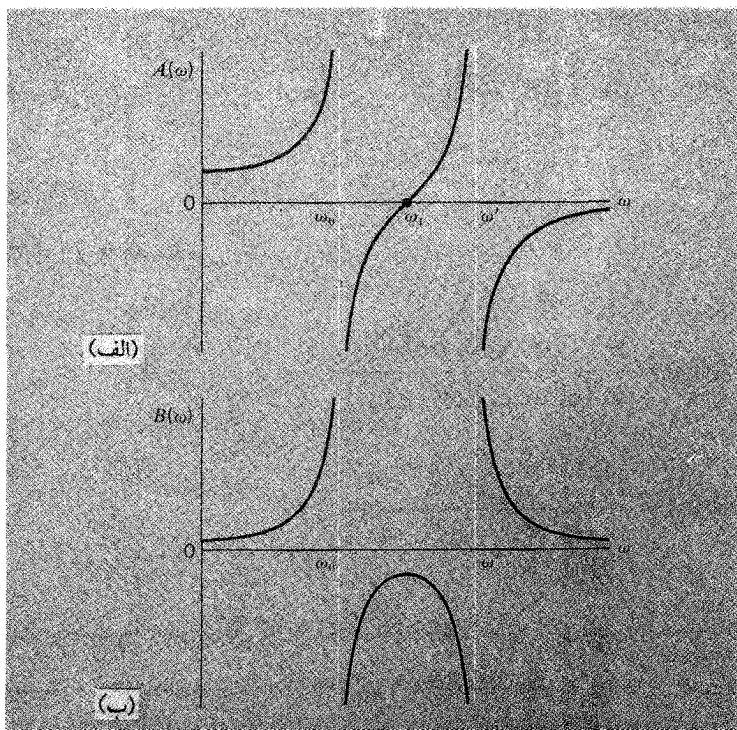
از این روابط نتایج زیر به دست می آید:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 + \omega_c^2) - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega^2)} \quad (5-15)$$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega^2)}$$

تغییر این کمیات بر حسب  $\omega$  در شکل ۵-۸ نشان داده شده است. در ناحیه بسامدهای غالب توسط تشدید پایتتر، جابه جاییهای A و B همواره هم علامتند یعنی با یکدیگر همفازند. در ناحیه بسامدهای غالب توسط تشدید حالات، جابه جاییها مختلف العلامه اند و در نتیجه  $180^\circ$  اختلاف فاز دارند. هنگامی که در یک نوسانگر منفرد در حال نوسان، میرایی صفر نباشد، تغییر فاز نسبت به بسامد، همان گونه که در سراسر ناحیه تشدیدها دیده می شود، آرام و یکنواخت خواهد بود.

تفسیر سیمای خاصی که در شکل ۵-۸ جلب توجه می کند، شاید از نظر فیزیک ناممکن به نظر برسد یا واقعاً ناممکن باشد. مسلم است که بسامد معین  $\omega_1$  بین تشدیدها واقع است در این حالت داریم  $A = 0$  و  $B \neq 0$ . از شرایط مفروض مسأله روشن است که حرکت آونگ A به نیروی محرکه تناوبی آونگ B بستگی دارد. در هر دستگاه واقعی (مانند دو آونگ که با فنری به هم متصلند) لازم است گلوله آونگ A چند نوسان کوچک انجام دهد، بسامد، که ظاهراً به عنوان یک وضعیت ناهنجار گسترش می یابد، دقیقاً بسامد طبیعی یک آونگ منفرد است که با فنر جفت کننده (Coupling) متصل شده است و آونگ دیگر را که کاملاً ثابت نگهداشته شده تحت تاثیر قرار می دهد  $\omega_1 = (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$ . در نبود کامل نیروهای میران، یک نیروی محرکه کوچک دلخواه با بسامد  $\omega_1$  موجب نوسانات کوچک دلخواه آونگ A



شکل ۵-۸ پاسخ متقابل دو آونگ جفت شده وابسته با میرایی قابل اغماض. وُمدهای طبیعی بسامدهایشان  $\omega_0$  و  $\omega_1$  است. (الف) دامنه نخستین آونگ تابع بسامد محرک است.

$$\left[ \omega_1 = (\omega_0^2 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

(ب) دامنه دومین آونگ نیز تابع بسامد محرک است.

می شود و بر روی آونگ B تاثیر زیادی خواهد گذاشت. وجود نیروهای میران، هر چند کوچک، این شرط را از بین خواهد برد، و موجب خواهد شد که دامنه با نزدیک شدن  $\omega$  به  $\omega_1$  خیلی کوچک شود ولی هرگز کاملاً صفر نخواهد شد. اکنون شرح کامل این سیمای خاص مستلزم آن است که جزئیات دستگاه را، که ترکیبی از یک جفت نوسانگر با نیروهای میران است، در نظر بگیریم. بدیهی است هر اندازه بیشتر به جزئیات پرداخته شود پیچیدگی تحلیل بیشتر خواهد شد. نکته مهمی که از این تحلیل باید آموخت آن است که بتوانیم مدهای طبیعی یک دستگاه جفت شده را به کمک مشاهدات حالت تشدید رسم کنیم و حرکات پایدار



اجزاء ترکیب کننده همان دستگاه را که در حالت تشدید با همان بسامد در ارتعاش آزادند مشخص نماییم.

### چند نوسانگر جفت شده

هر جسم درشت (ماکروسکپی) حقیقی، نظیر یک تکه جسم جامد، نه فقط از دو ذره بلکه از چندین ذره تشکیل شده است. بنابراین برای بیان مسأله چندین نوسانگر مشابه جفت شده با یکدیگر، قویترین دلایل را در اختیار داریم. مطالعه مباحث قبلی ما را برای این تحلیل کاملاً آماده کرده است. تحقیق درباره چندین دستگاهی می تواند ما را برای بیان چگونگی نوسانات یک محیط پیوسته هدایت کند، تا تحلیل حرکات موجی در چنین محیطی به آسانی امکان پذیر باشد.

با این تحلیل می توان به جای قانون نیوتن مستقیماً از مکانیک محیطهای پیوسته<sup>۵</sup> پیروی کرد. ولی روشی که ما انتخاب کرده ایم، توجیه مسأله به کمک مدهای نوسان دستگاههای جفت شده است که هم ارزش بیشتری دارد و هم اساساً صحیح تر پاسخ می دهد. به همین جهت می توان ادعا کرد که چیزی به عنوان محیط پیوسته حقیقتاً وجود ندارد. علاوه بر این ممکن است برای شما جالب باشد بدانید که روش حاضر که تاکنون ارائه شده در واقع همان روشی است که نیوتن و جان شینانش در پیش گرفته بودند. شاید به دلیل همین تردید و دو دلی در گزینش روشها است که ما آن را یک انحراف مقدماتی تلقی می کنیم.

پس از نیوتن مدت چندانی نگذشت که دو نفر از اعضاء برجسته و سرشناس خانواده برنولی (جان برنولی<sup>۶</sup> و پسرش دانیل<sup>۷</sup>) مطالعه تحلیلی دینامیک خط اتصال جرمها را شروع کردند. آنها نشان دادند که یک دستگاه با  $N$  جرم دقیقاً  $N$  مد ارتعاش مستقل دارد (البته فقط برای حرکت یک بُعدی)، پس از آن دانیل برنولی در سال ۱۷۵۳ اصل برهنه‌ی را برای چندین دستگاهی اعلام کرد. باید دانست که حرکت کلی یک دستگاه ارتعاش کننده مانند برهنه‌ی

---

۵- همان طور که در پانویست مربوط به سر فصل ۵ اشاره شد؛ شما می توانید برای آگاهی از مکانیک محیطهای پیوسته به فصل ۶ مراجعه کنید.

6- John Bernoulli

7- Daniel

مدهای طبیعی آن قابل توصیف است. (یادآور می شویم که ما همین نتیجه گیری را در مورد دستگاه متشکل از دو نوسانگر در همین فصل داشته ایم) در سخنان لئون بری یوان<sup>۸</sup>، که در تدوین نظریه ارتعاشات شبکه بلور سهم بسزایی داشته، آمده است:

این تحقیق برنولی ها ممکن است به این شکل بیان شود که تفاوت فیزیک نظری و مکانیک در آن است که مکانیک می کوشد تا قوانین را برای حرکت دستگاه متشکل از چندین ذره فرموله کند، در حالی که در فیزیک نظری قوانین حرکت برای یک ذره منفرد در نظر گرفته می شود. اصل برهنه‌ی مانند حالت ویژه سریهای فوریه مهم است، و هنگامی که بسط داده شود قضیه فوریه را بیان می کند. (مفاهیم تحلیلی قضیه فوریه را در فصل ۶ بیشتر توضیح خواهیم داد.)

پس از این مقدمه کوتاه، اکنون به موضوع اصلی بر می گردیم و به شرح جزئیات دستگاهی متشکل از  $N$  ذره می پردازیم.

### $N$ نوسانگر جفت شده

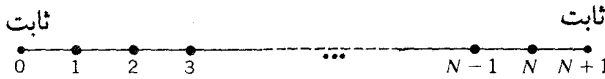
در بررسی عملکرد حرکت دستگاهی متشکل از دو نوسانگر، ناگزیر بودیم توجه خود را فقط به نوسانات طولی معطوف سازیم - حرکات گلوله های آونگ در طول خط واصل آنها، از آن جمله بود. ما بزودی خواهیم دید که رفتار نوسانات عرضی ذراتی که، در راستای عمود بر خط واصل خودشان، نوسان می کنند کاملاً شبیه نوسانات طولی است. به همین جهت نوسانات عرضی را راحت تر از نوسانات طولی می توان دید و نمایش داد. هم چنین نوسانات عرضی یک دستگاه متشکل از چند ذره را به عنوان نخستین الگو، مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهیم داد.

نخ کشسان و نرمی را در نظر بگیرید که به  $N$  ذره همانند بسته شده باشد، جرم هر ذره  $m$ ، و فاصله هر دو ذره از یکدیگر  $l$  فرض شود. اکنون دو سر نخ نرم را در دو نقطه ثابت نگه می داریم، یک سر نخ به فاصله  $l$  از نخستین ذره سمت چپ محکم شده و سردیگر به فاصله  $l$  از  $N$  امین ذره سمت راست ثابت نگهداشته شده است (شکل ۵-۹).

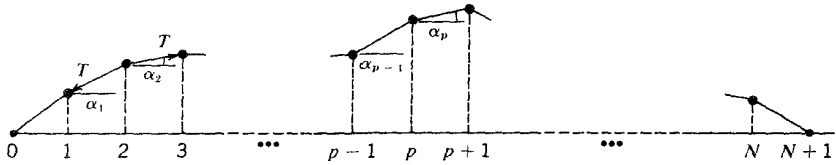
ذرات از ۱ تا  $N$  نامگذاری شده اند، یا اگر دو سر ثابت را هم به عنوان دو ذره با جابه جایی صفر به حساب آوریم، آنها را از ۰ تا  $N+1$  شماره گذاری می کنیم. اگر کشش

۸- Leon Brillouin، انتشار موج در ساختارهای تناوبی، Dover، نیویورک، ۱۹۳۵.

اولیه در نخ T باشد و اگر سعی کنیم جابجایی عرضی ذرات حتی الامکان کوچک باشد، در آن صورت می توانیم از هر افزایش کشش در مورد نخ و ذرات در حال نوسان صرف نظر نماییم. مثلاً فرض کنیم که ذره ۱ به اندازه  $y_1$  و ذره ۲ به اندازه  $y_2$  جابه جا شود.



شکل ۹-۵ ذره همفاصله در طول یک نخ بدون جرم.



شکل ۱۰-۵ نمودار نیروی وارد بر جرمهایی که در طول نخ به طور عرضی جابه جا شده اند.

شکل ۱۰-۵؛ بنابراین طول نخ بین دو ذره  $l' = \frac{l}{\cos \alpha_1}$  می شود. به ازاء  $\alpha_1 \ll 1 \text{ rad}$  در

این حالت  $\alpha_1 \approx 1 - \frac{\alpha_1^2}{2}$  و  $l' \approx l \left( 1 + \frac{\alpha_1^2}{2} \right)$ ، بنابراین، افزایش طول  $\frac{l \alpha_1^2}{2}$  است، و از هر افزایش کشش، که با این (توان دوم  $\alpha_1$ ) متناسب باشد در مقایسه با هر افزایش متناسب با توان اول  $\alpha_1$ ، می توان صرف نظر کرد.

در پیکربندی همان طور که نشان داده شده است،  $x$  برآیند نیروهای وارد بر ذره ۲، با  $-T \cos \alpha_1 + T \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} T (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$  مساوی بوده و با تفاضل توانهای دوم  $\alpha$  متناسب است. به ازاء اندازه های کوچک  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  این تفاضل بینهایت کوچک می شود و چگونگی نیروی نیروی برآیند از این تفاضل مورد توجه نخواهد بود.

شکل ۱۰-۵ پیکربندی ذرات را در لحظه ای نشان می دهد که با حرکت عرضی نوسان می کنند. اگر جابه جایی ذرات را، که در مقایسه با  $l$  بسیار کوچک است،  $y$  بنامیم برآیند نیروهای وارد بر یک ذره مثلاً ذره  $p$  عبارت است از:

$$F_p = -T \sin \alpha_{p-1} + T \sin \alpha_p$$

اندازه های تقریبی سینوسها عبارتند از :

$$\sin \alpha_{p-1} = \frac{y_p - y_{p-1}}{l}$$

$$\sin \alpha_p = \frac{y_{p+1} - y_p}{l}$$

در نتیجه

$$F_p = -\frac{T}{l}(y_p - y_{p-1}) + \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p)$$

و این نیرو باید با حاصلضرب جرم  $m$  در شتاب عرضی ذره  $p$  ام مساوی باشد. بنابراین

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2 (y_{p+1} + y_{p-1}) = 0 \quad (5-16)$$

را در این رابطه قرار داده ایم:

$$\frac{T}{ml} = \omega_0^2$$

برای هر یک از  $N$  ذره ، می توان معادله مشابهی نوشت. بنابراین به ازاء اندازه های  $p$  از  $1$  تا  $N$  ، مجموعه ای از  $N$  معادله دیفرانسیل داریم. یادآور می شویم که  $y_0 = 0$  و  $y_{N+1} = 0$ . شما می توانید معادله (5-6) را به ازاء  $N = 1$  و  $N = 2$  به صورت ویژه ساده ای به دست آورید. اگر  $N = 1$  باشد، داریم:

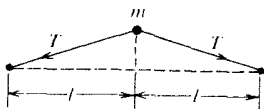
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_1 = 0$$

حرکت هماهنگ عرضی با بسامد زاویه ای  $\omega_0 \sqrt{2} = \left(\frac{2T}{ml}\right)^{1/2}$  حرکتی است که می توان آن را مستقیماً با در نظر گرفتن شکل 5-11 (الف) به دست آورد. اگر  $N = 2$  باشد داریم:

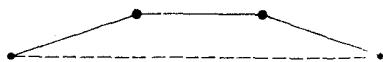
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 = 0$$

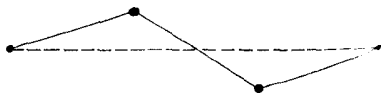
این معادلات به معادلات (۴-۵) که برای دو آونگ جفت شده بیان شد شباهت دارد. ولی اکنون آن معادلات به شکل ساده ای درآمده اند زیرا  $\omega_0$  و  $\omega_0$  مساویند، در نتیجه در معادلات (۴-۵) به جای  $\omega_0 + \omega_0$  می توان  $2\omega_0$  قرار داد، در این معادلات  $\omega_0$  نیز  $\omega_0$  می شود. بسامدهای زاویه ای وجود طبیعی در این حالت به شکل روابط عددی معینی درآمده اند، اندازه های فعلی آنها به ترتیب  $\omega_0\sqrt{3}$  و  $\omega_0$  است. نمودار وجود (مُدها) به ازاء  $N=2$  در شکل ۵-۱۱ (ب) و (ج) مشخص شده است. از پیکربندی فعلی نخها، رابطه بسامدهای طبیعی در شکل خود به خود تقریباً مشخص می شود، ولی هر اندازه که شماره ذرات بزرگتر شود نتایج پیکربندی کمتر نمایان است و ماباید از الگوی تحلیل کلی تری کمک بگیریم.



$$(\omega = \omega_0 \sqrt{2}) N=1 \text{ (الف)}$$



$$(\omega = \omega_0) N=2 \text{ (ب) ، مُد پایین تر}$$



$$(\omega = \omega_0 \sqrt{3}) N=2 \text{ (ج) ، مُد بالاتر}$$

شکل ۵-۱۱ مُدهای طبیعی با دو نخ شده که ساده ترین دستگاهها را تشکیل می دهند.  
 (الف)  $N=1$  فقط یک مُد. (ب)  $N=2$  ، مُد پایین تر. (ج)  $N=2$  ، مُد بالاتر.

پیدا کردن مُدهای طبیعی برای  $N$  نوسانگر جفت شده

ما اساساً همان روش تحلیلی را که قبلاً برای دو معادله استفاده کرده ایم در مورد  $N$  معادله دیفرانسیل نیز به کار می بریم. برای این منظور جویای مُدهای طبیعی هستیم؛ یعنی راه حل های سینوسی را جستجو می کنیم که هر ذره با همان بسامد ذرات دیگر نوسان کند. در این صورت قرار می دهیم:

$$y_p = A_p \cos \omega t \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (17-5)$$

در اینجا  $A_p$  و  $\omega$  دامنه و بسامد ارتعاش  $p$  امین ذره است. اگر بتوانیم اندازه های  $A_p$  و  $\omega$

را برای آنکه در معادلات (۵-۱۷) صدق کند. بیابیم،  $N$  معادله دیفرانسیل به شکل (۵-۱۶) خواهیم داشت در آن صورت منظور ما عملی شده است. یادآور می شویم که سرعت هر ذره را از معادلات (۵-۱۷) به صورت زیر می توان به دست آورد:

$$(p = 1, 2, \dots, N) \quad \frac{dy_p}{dt} = -\omega A_p \sin \omega t$$

بنابراین، با انتخاب معادلات (۵-۱۷) به عنوان یک راه حل جزئی، خود به خود ناگزیر می شویم شرط حادی اضافی را که سرعت هر ذره در  $t = 0$  صفر است بپذیریم، یعنی هر ذره از سکون شروع به حرکت می کند. با جانشینی معادلات (۵-۱۷) در معادلات دیفرانسیل (۵-۱۶) به دست خواهیم آورد:

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_1 - \omega_0^2(A_2 + A_0) = 0$$

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_2 - \omega_0^2(A_3 + A_1) = 0$$

⋮

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p+1} + A_{p-1})$$

⋮

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_N - \omega_0^2(A_{N+1} + A_{N-1})$$

این دستگاه  $N$  معادله  $N$  مجهولی را که حل آن دشوار به نظر می رسد می توان فشرده تر و به صورت زیر نوشت:

$$(P = 1, 2, \dots, N) \quad (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p-1} + A_{p+1}) = 0 \quad (5-18)$$

رعایت شرط حادی مستلزم آن است که دو سر (نخ) ثابت نگهداشته شود یعنی  $A_0 = 0$  و  $A_{N+1} = 0$  باشد.

سوآلی که در اینجا برای خود ما مطرح است آن است که آیا اندازه  $\omega^2$  می تواند در همه این  $N$  معادله صدق کند. پیش از این دیدیم که - وقتی دستگاه فقط شامل دو نوسانگر جفت شده بود با این مسأله چگونه درگیر شدیم. فرض این که یک راه حل وجود دارد (غیر از حلهای جزئی که دامنه مساوی صفر است) ما را ناگزیر می سازد که [همان گونه که در معادلات

(۹-۵) عمل شده [نسبتهای دامنه ها را در نظر گیریم. در این مساله پیچیده تر نیز که همان وضعیت حکمفرماست، معادلات (۵-۱۸) را به صورت زیر می توان نوشت:

$$(P = 1, 2, \dots, N) \quad \frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^{\tau} + 2\omega_0^{\tau}}{\omega_0^{\tau}} \quad (19-5)$$

می بینیم که طرف راست این رابطه به ازاء هر اندازه مخصوص  $\omega$  ثابت است، در نتیجه طرف چپ هم باید ثابت و مستقل از اندازه  $P$  باشد. به  $A_p$  چه اندازه هایی می توان نسبت داد تا این شرط در آن صدق کند و به طور همزمان  $A_0 = 0$  و  $A_{N+1} = 0$  شود؟ ما ادعا نخواهیم کرد که معادله (۵-۱۹) را حل می کنیم ولی فقط توجه شما را به یک نتیجه قابل ملاحظه جلب خواهیم کرد، این نتیجه به منزله کلید حل مسئله است. فرض می کنیم دامنه ذره  $P$  به شکل زیر قابل ارائه باشد:

$$A_p = C \sin p\theta \quad (20-5)$$

در اینجا  $\theta$  زاویه معینی است. اگر برای تعیین دامنه های ذرات مجاور  $p-1$  و  $p+1$  از معادله مشابهی استفاده شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_{p-1} + A_{p+1} &= C[\sin(p-1)\theta + \sin(p+1)\theta] \\ &= 2C \sin p\theta \cos \theta \end{aligned}$$

ولی می دانیم که  $C \sin p\theta$  درست همان  $A_p$  است، بنابراین داریم:

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2 \cos \theta \quad (21-5)$$

یعنی دستورالعملی که با معادله (۲۰-۵) نشان داده شد، در اینجا مورد استفاده قرار گرفت. طرف راست معادله (۲۱-۵) مقداری ثابت است و به  $p$  بستگی ندارد، و درست همان کمیتهی است که نیاز داریم. بنابراین شرط هم ارزی به کمک معادله (۱۹-۵) برقرار می شود. این معادله به عنوان شرط هم ارزی هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که همه اعداد از ۱ تا  $N$  در معادلات (۵-۱۸) صدق کند. آنچه باقی می ماند پیدا کردن اندازه  $\theta$  است. برای تعیین  $\theta$  می توان شرط  $A_p = 0$  را به ازاء  $p = 0$  و  $p = N+1$  اضافه کرد. این شرط خود به خود صادق است و در صورتی معتبر خواهد بود که  $(N+1)\theta$  مساوی مضرب

صحیح  $\pi$  باشد، بنابراین می توان نوشت:

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (N+1)\theta = n\pi \quad (22-5)$$

$$\theta = \frac{n\pi}{N+1}$$

اندازه  $\theta$  - یعنی طرف دوم رابطه اخیر - را در معادله (۲۰-۵) قرار می دهیم . به دست می آید:

$$A_p = C \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \quad (23-5)$$

بسامدهای مجاز مدهای طبیعی به کمک معادلات (۱۹-۵) و (۲۲-۵) تعیین می شود، و داریم:

$$\frac{A_{p+1} + A_{p-1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \right] \quad \text{در نتیجه}$$

از طرفین این رابطه جذر می گیریم ، به دست خواهد آمد:

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \quad (24-5)$$

خواص مدهای طبیعی برای  $N$  نوسانگر جفت شده

پاسخهای مسأله  $N$  نوسانگر جفت شده را با روشهای ریاضی قبلاً به دست آورده ایم، اکنون می خواهیم حرکاتی را که معادلات رسم می کند با دقت بیشتری مورد بررسی قرار دهیم. نخست مشاهده می کنیم که بسامدهای مختلف مد طبیعی با اندازه های گوناگون عدد صحیح  $n$  ، طبق معادله (۲۴-۵) تعیین می شود. از این رو ترجیح می دهیم که یک مد و بسامد مخصوص آن را با اندازه  $n$  نشان دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \quad (25-5)$$



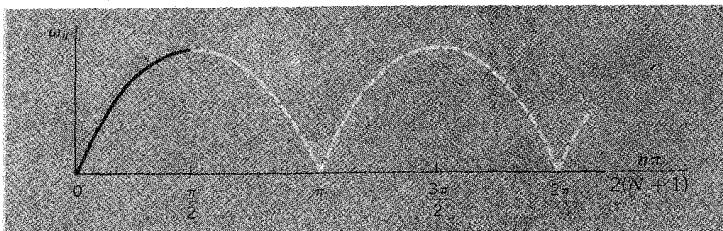
پس از آن ، حرکت یک ذره (نوسانگر) معین را که بر روی خط (p) و مد شماره (N) است مورد توجه قرار می دهیم . در این صورت دامنه حرکت چنین ذره ای می تواند به شکل زیر نوشته شود :

$$A_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \quad (26-5)$$

در اینجا  $C_n$  بیانگر دامنه ذره ای است که با مد مخصوص n تحریک شده است . بنا بر این جابه جایی p امین ذره وقتی که مجموعه کامل ذرات در حال نوسان است در n امین مد از رابطه زیر به دست می آید :

$$y_{pn}(t) = A_{pn} \cos \omega_n t \quad (27-5)$$

در این رابطه  $\omega_n$  و  $A_{pn}$  به ترتیب از معادلات (5-25) و (5-26) به دست می آید . از معادله



شکل ۱۲-۵ نمودار بسامد مد بر حسب تعداد آن . نمودار  $\omega_n$  بر حسب کمیت  $\frac{n\pi}{2(N+1)}$  بهترین می شود تا بر حسب خود نوسانگر .

بالا می توان فهمید که هر ذره در زمان  $t = 0$  ساکن است ، ولی در مساله دو نوسانگر شرایط اولیه دلخواه را در رابطه زیر می توان دخالت داد :

$$y_{pn}(t) = A_{pn} \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (27-5 \text{ الف})$$

در این رابطه تفاوت هر مد با مد دیگر می تواند با اختلاف فاز مربوط به خود  $\delta_n$  مشخص شود . در اینجا چند مد طبیعی وجود دارد؟ دیدیم که با دو نوسانگر جفت شده دقیقاً دو مد طبیعی وجود داشت . اگر نتیجه گیری شما این باشد که با N نوسانگر فقط N مد مستقل وجود دارد ، استنتاج شما صحیح است و یک واقعیت تلقی می شود ، هر چند در معادلات (5-25) و (5-26) تا حدودی پنهان باشد ، زیرا  $\omega_n$  و  $A_{pn}$  به ازاء اندازه های صحیح n تعیین می شوند نکته مهم آنکه معادلات به ازاء مقادیر بیش از  $n = N$  هر وضعیت جدید را از

۹- این (نتیجه گیری) برای یک دستگاه یک بُدی است . دستگاه دو بُدی 2N (مد) می دهد و سه بُدی 3N می دهد .

نظر فیزیکی توصیف نمی کنند.

به کمک شکل (۵-۱۲) می توان روشن ساخت که این اوضاع جدید تا چه حد به بسامدهای مُدارتباط دارند. این شکل، نموداری از معادله (۵-۲۵) است. با این تفاوت که اندازه های  $\omega$  در این شکل همواره مثبت نشان داده شده است. نکته دیگر آنکه به ازاء مقادیر مختلف  $n$  از ۱ تا  $N$ ،  $N$  بسامد مشخص متفاوت به دست می آید. به ازاء  $n = N + 1$  که مربوط به  $\frac{\pi}{2}$  است، بر روی محور عرضها به بسامد پیشینه که مساوی  $\omega_0$  است می رسمیم، در چنین نقطه یا نقاطی امکان حرکت وجود ندارد، زیرا [همان گونه که معادله (۵-۲۶) نشان می دهد] به ازاء این مقدار  $n$ ، همه دامنه های  $A_{p,n}$  صفر می شوند. به ازاء  $n = N + 2$  داریم:

$$\begin{aligned}\omega_{N+2} &= \omega_0 \sin \left[ \frac{(N+2)\pi}{2(N+1)} \right] \\ &= \omega_0 \sin \left[ \pi - \frac{N\pi}{2(N+1)} \right] \\ &= \omega_0 \sin \left[ \frac{N\pi}{2(N+1)} \right]\end{aligned}$$

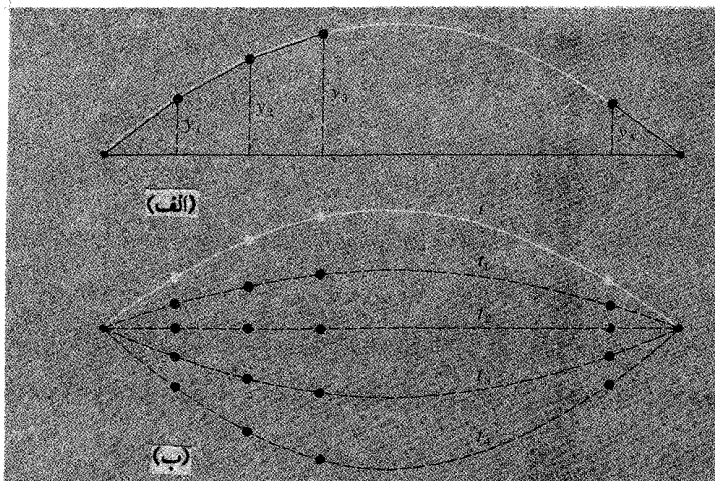
در نتیجه

$$\omega_{N+2} = \omega_N$$

همین طور،  $\omega_{N+2} = \omega_{N-1}$  و غیره. و در هر یک از رده های بعدی برای  $N + 1$  با اندازه های  $n$  چنین دو برابر شدنهایی اتفاق خواهد افتاد. فقط در مرحله کوتاهی می توان دید که دامنه های نسبی ذرات در یک مُد طبیعی خودشان تکراری می شوند.

لذا، مثلاً، از معادله (۵-۲۶) داریم:

$$\begin{aligned}A_{p,N+2} &= C_{N+2} \sin \left[ \frac{P(N+2)\pi}{N+1} \right] \\ &= C_{N+2} \sin \left[ 2P\pi - \frac{PN\pi}{N+1} \right] \\ &= -C_{N+2} \sin \left( \frac{PN\pi}{N+1} \right) \\ &\sim A_{p,N}\end{aligned}$$



شکل ۵-۱۳ (الف) رسم  $\sin\left[\frac{p\pi}{N+1}\right]$  برحسب  $P$ . ذرات در اوضاعی هستند که با اندازه های صحیح  $P$  مشخص شده اند و با قطعات مستقیم نخ به یکدیگر وصل شده اند. (ب) اوضاع ذرات در زمانهای متغیر برای پایین ترین مُد.

به آسانی می توان نشان داد که چنین پدیده ای به ازاء هر اندازه دیگر  $(N+1)n$  نیز رخ می دهد. اکنون ببینیم چه تغییراتی در مُدهای طبیعی می تواند اتفاق بیفتد. نخستین مُد با  $n = 1$  مشخص می شود. جابه جاییهای ذره عبارتند از:

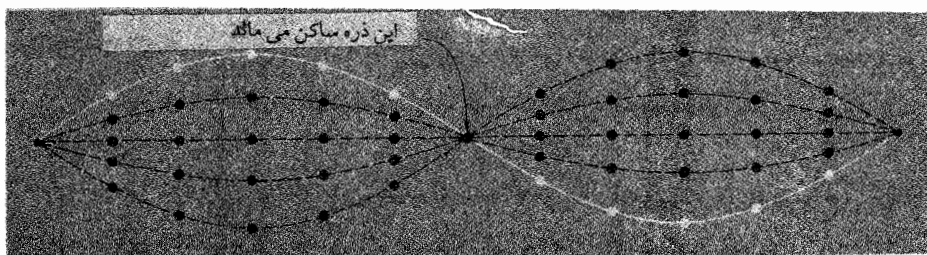
$$(P = 1, 2, \dots, N) \quad y_p l = C_1 \sin\left(\frac{P\pi}{N+1}\right) \cos \omega_1 t$$

در لحظه معینی از زمان، عامل  $C_1 \cos \omega_1 t$  برای همه ذرات یکسان است، فقط عامل  $\sin\left[\frac{P\pi}{N+1}\right]$  جابه جایی ذرات مختلف را مشخص می کند. در شکل ۵-۱۳ (الف)، منحنی سفید رسم  $\sin\left[\frac{P\pi}{N+1}\right]$  بر حسب  $P$  است، در اینجا  $P$  به طور پیوسته از ۰ تا  $N+1$  تغییر می کند، گرچه، ذرات موجود به ازاء اندازه های ناپیوسته  $P = 1, 2, \dots, N$  مواضع معینی هستند. بنابراین منحنی سینوسها برای مواضع ذرات فقط یک پیشاهنگ است، و نخ که از قطعاتی به صورت خط مستقیم تشکیل شده ذرات را به هم متصل می کند. با افزایش  $t$ ، هر ذره با بسامد  $\omega_1$  در راستای  $l$  نوسان می کند. تمام مجموعه منحنیهای سینوسی به ازاء اندازه های مختلف  $t$  که به مواضع ذرات مربوط است، در شکل ۵-۱۳

(ب) نشان داده شده است. برای دومین مد،  $n = 2$  داریم:

$$y_{p,2} = C_p \sin\left(\frac{P\pi}{N+1}\right) \cos \omega_p t \quad (P = 1, 2, \dots, N)$$

جابه جایهای ذرات در لحظات مختلف زمان در شکل (۵-۱۴) نشان داده شده است. اگر تعداد ذرات بر حسب اتفاق فرد باشد، ذره ای که در این مد در مرکز خط واقع است - همان طور که در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است - ساکن باقی خواهد ماند. یادآور می شویم که  $\omega_1$  و  $\omega_2$  باهم فرق دارند، به همین جهت این نمونه با بسامدی غیر از بسامد پیشین شاید، در عمل، دو برابر بزرگتر نوسان می کند.



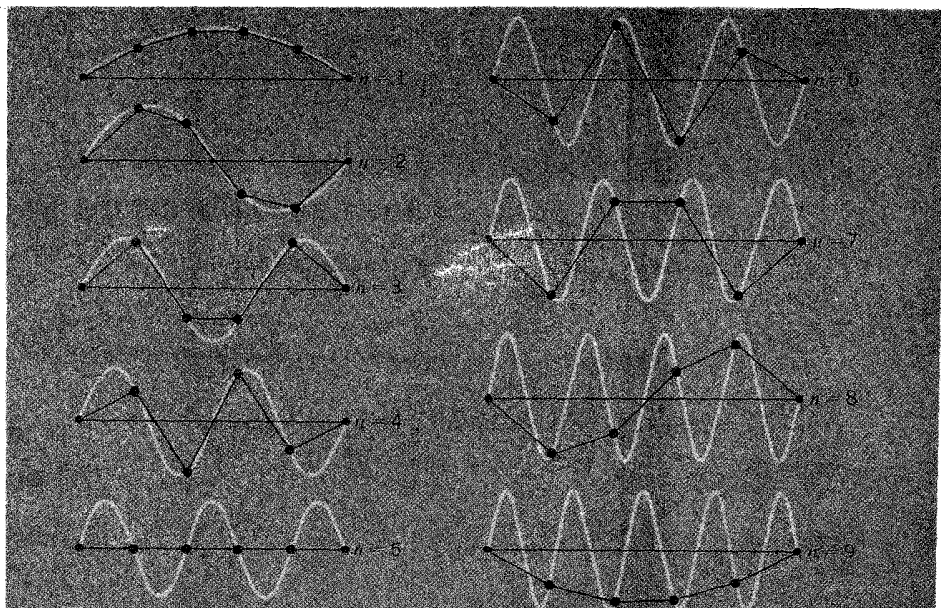
شکل ۵-۱۴ اوضاع ذره در زمانهای مختلف برای دومین مد ( $n = 2$ ).

در شکل ۵-۱۵ مجموعه ای از نمودارهای مد طبیعی را، برای یک مجموعه چهار ذره ای واقع بر روی یک نخ کشیده شده، نشان می دهیم، این شکل چگونگی مراحل مختلف جابه جایها را، پس از آنکه  $n = 0$  می شود، به طور زیبا نمایش می دهد، ولو آنکه منحنیهای سینوسی که  $A_{pm}$  را تعیین می کنند همگی متفاوت باشند. این طرحها به ازا اندازه کوچک  $N$  هم به طور کاملاً محسوس نمایان است. وقتی جابه جایهای هر ذره در هر مد برای چنین دستگاهی بر روی منحنی سینوسی بیفتد در آن صورت شکل نخ متصل به ذرات ممکن است از مسیر کاملاً متفاوتی پیروی کند.

### نوسانات طولی

همان گونه که در آغاز بیان شد ما با ارتعاشات عرضی بیشتر از ارتعاشات طولی سر و کار داریم. زیرا پایه و اساس تحلیل رفتار دستگاهی که شامل تعداد بسیار زیادی نوسانگر

جفت شده باشد ارتعاشات عرضی است. وقتی نخ را به چند ذره ببندیم و آنها را با نوسانات عرضی به ارتعاش درآوریم. با یک نظراجمالی بخوبی می توان فهمید که برای هر ذره چه اتفاق می افتد. ولی اکنون می خواهیم بدانیم تحلیل قبلی را، در مورد ذراتی که در راستای یک خط راست به فنرهای بسته شده اند و در طول همان خط به حرکت در آمده اند، چگونه باید به کار برد.

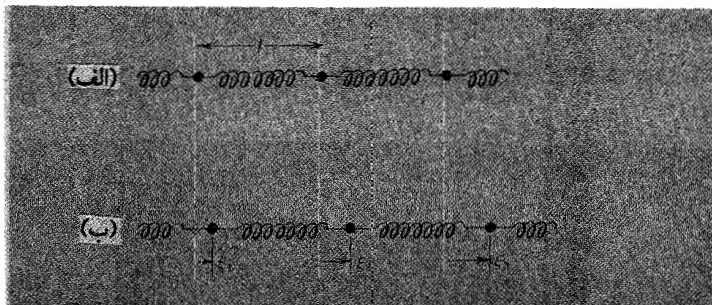


شکل ۵-۱۵ مدهای مهم نخ در حال ارتعاش  $N = 4$ ، یادآور می شویم که به ازاء  $n=6, 7, 8, 9$  طرحهای  $n=4, 3, 2, 1$  با علامت مخالف تکرار می شود (اقتباس از مکانیک N.H.Frank و J.C.Slater، مک گراو هیل، نیویورک، ۱۹۴۷).

این دستگاه - ذرات بسته شده به فنرها - ممکن است خیلی ساختگی (مصنوعی) به نظر برسد ولی با کمال شگفتی می بینیم که یک رشته اتم در ساختار یک بلور - که جنبه طبیعی هم دارد - چنین مدلی را بخوبی نمایش می دهد. بنابراین در مقیاس کم، یک ستون گاز هم می تواند چنین عملکردی داشته باشد.

فرض می کنیم جرم هریک از ذرات  $m$  و فاصله شان از یکدیگر، وقتی که ساکنند،  $l$  باشد [شکل ۵-۱۶ (الف)] ولی اکنون، در چنین دستگاهی، نیروهای ذخیره شده با باز شدن یا جمع شدن فنرها تأمین می شود. ثابت فنر برای هر فنر می تواند به صورت  $m\omega^2$  نوشته شود. در این حالت جابه جاییهای ذرات نسبت به وضعیت تعادلشان با  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

نمایش داده می شود [به شکل ۵-۱۶ (ب) مراجعه کنید].



شکل ۵-۱۶ (الف) گلوله های کوچک جفت شده با فنر در حال تعادل.

(ب) گلوله های کوچک جفت شده با فنر ، پس از یک جابه جایی کوتاه طولی.

بنابراین معادله حرکت P امین ذره به صورت زیر نوشته می شود:

$$m \frac{d^2 \xi_p}{dt^2} = m\omega_0^2 (\xi_{p+1} - \xi_p) - m\omega_0^2 (\xi_p - \xi_{p-1})$$

و یا

$$\frac{d^2 \xi_p}{dt^2} + 2\omega_0^2 \xi_p - \omega_0^2 (\xi_{p+1} + \xi_{p-1}) = 0 \quad (28-5)$$

این معادله دقیقاً همان شکل معادله (۵-۱۶) را دارد، بنابراین می دانیم که برگرداندن تمام شکلهایی که با روش ریاضی برای ارتعاشات عرضی نخ متصل به گلوله های کوچک رسم کرده بودیم. در این دستگاه جدید وجود دارد. به بیان دیگر، می توان گفت که حرکت P امین ذره در n امین مُد طبیعی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\xi_{pn}(t) = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \cos \omega_n t$$

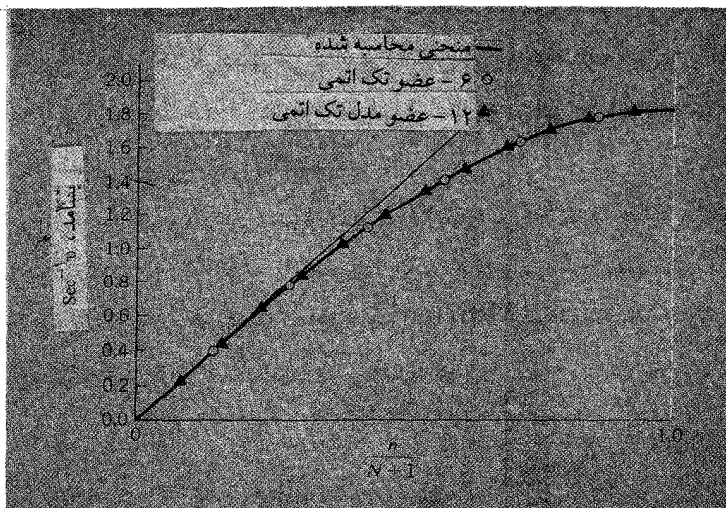
دراینجا

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \quad (29-5)$$

۱۰- از حرف یونانی  $\xi$  استفاده می کنیم و حرف معمولی X را برای نشان دادن کل فاصله از یک انتها در نظر می گیریم.

بررسی کمی بسیار دقیق چنین دستگاههایی با استفاده از هوای محبوس امکان پذیر است. در این دستگاهها شارش [=جریان] هوا (با فشارهایی درست کمی بیشتر از فشار جو) از سوراخهایی عبور می کند که بر یک سطوح تعبیه شده است این سطح صاف و کاملاً بدون اصطکاک اند، در نتیجه اجسام (مولکولهای هوا) بر روی این سطوح سُر می خورند. شکل ۵-۱۷ نتایج اندازه گیریهای را نشان می دهد که با چنین دستگاههایی<sup>۱۱</sup> به دست آمده است. جرم گلوله های کوچک هر کدام در حدود  $0.15 \text{ kg}$ ، و ثابتهای فنرها به اندازه ای است که بسامد (زاویه ای)  $\omega_0$  به  $5/68 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$  برسد.

شکل نشان می دهد که بسامدهای مشهود  $\left( = \frac{\omega_n}{2\pi} \right)$   $\gamma_n$  مدهای طبیعی گوناگون تابع تغییرات  $\frac{n}{(N+1)}$  است. نمودار رسم شده هم مربوط به اندازه های به دست آمده از دستگاهی است که شامل ۶ گلوله کوچک (و ۷ فنر) است، و هم متعلق به دستگاه مشابه دیگری با طول



شکل ۵-۱۷ اندازه های تجربی بسامد مُد بر حسب تعداد مُد  $V_n$  برای وزنه های کوچک جفت شده با فنر که بر روی یک خط واقع اند. یادآور می شویم که مقیاس عرض بر حسب  $\frac{n}{N+1}$  است و نه  $n$  این منحنی به اِزاء دو اندازه مختلف  $N$  ( $N=12, N=6$ ) بر روی همان منحنی نظری منطبق شده است. [اقتباس از:

[R.B.Runk, J.L.Stull and O.L.Anderson, Am.j.Phys.31,915(1963).]

11- R.B.Runk, J.L.Stull, and O.L.Andeerson, Am.J.Phys.,31,915(1963).

بیشتر است ، با این تفاوت که دستگاه بلندتر شامل ۱۲ گلوله کوچک (و ۱۳ فنر) است . چون برای هر دو دستگاه یکسان بوده ، لذا نتایج حاصل از دو دستگاه بر روی یک منحنی واقع شده اند :

$$\gamma_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\pi} \sin n \left( \frac{n}{N+1} \frac{\pi}{2} \right)$$

بخوبی می توان دید که اندازه های تجربی و نظری (تئوری) کاملاً برهم منطبق اند .

### Nخیلی بزرگ

اکنون فرض می کنیم که تعداد گلوله ها در یک دستگاه جفت شده خیلی زیاد شود . برای روشن نمودن مطلب ، حالت ارتعاشات عرضی ذرات را بر روی یک نخ کشیده شده در نظر می گیریم . یک رشته حقیقی ، همان طور که پیش از این گفته شد ، درحقیقت رشته ای است که در طول آن تعداد بسیار زیادی از اتمها در فواصل دقیقاً مساوی از یکدیگر قرار گرفته باشند . به این ترتیب یک بار دیگر می توانیم مطمئن شویم که نتیجه گیریهای ما [مثلاً در مورد یک رشته اتم] الهام گرفته از نتایج آزمایشی است که در آن گلوله های کوچک متصل به فنرها را به ارتعاش طولی وا می داشتیم .

حال اگر N را زیاد کنیم ، ولی همزمان با آن [فاصله بین ذرات مجاور را کم کنیم ، در آن صورت طول رشته  $L = (N+1)$  ثابت می ماند . هم چنین اگر [همزمان با زیاد کردن N] جرم هر ذره را بگونه ای کم کنیم که جرم کل  $M = Nm$  ثابت بماند . برای بسامدهای طبیعی چه اتفاق می افتد؟ قبلاً به دست آورده ایم که :

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right]$$

در اینجا  $\omega_0 = \left( \frac{T}{ml} \right)^{1/2}$  ، نخست ، رابطه را برای مدهای طبیعی که تعداد مُد n کوچک است ، در نظر می گیریم . سپس با زیاد شدن N می توان نوشت :

$$\sin \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \approx \frac{n\pi}{2(N+1)}$$



$$\omega_n \approx \sqrt[2]{\left(\frac{T}{ml}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n\pi}{2(N+1)}} = \left(\frac{T}{\frac{m}{l}}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{n\pi}{(N+1)l}$$

ولی می دانیم که  $(N+1)l = L$  کل طول نخ و  $\frac{m}{l}$  جرم واحد طول (چگالی خطی) نخ است که با  $\mu$  نشان خواهیم داد. بنابراین رابطه تقریبی به صورت زیر درمی آید:

$$(n = 1, 2, \dots) \quad \omega_n = n \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (30-5)$$

در حالت مخصوص

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}$$

و بنابراین  $\omega_n = n\omega_1$  یعنی بسامدهای طبیعی مضرب صحیحی از  $\omega_1$ ، پایین ترین بسامداند. یادآور می شویم، با وجود آنکه این (نتیجه) فقط یک تقریب است، با اینهمه همین تقریب به ازاء  $n \ll N$  فوق العاده خوب و رضایت بخش است.

درباره جابجاییهای ذره چه می دانیم؟ پیش از این تعیین کردیم که در  $n$  امین مد، جابه جایی  $P$  امین ذره از رابطه زیر به دست می آید:

$$y_{pn} = C_n \sin\left(\frac{Pn\pi}{N+1}\right) \cos \omega_n t$$

در این رابطه، به جای آنکه ذره را با اندازه  $P$  نشان دهیم، می توانیم آن را با  $x$ ، فاصله اش از انتهای ثابت نخ مشخص کنیم. در این صورت

$$x = Pl$$

در نتیجه

$$\frac{Pn\pi}{N+1} = \frac{Pln\pi}{(N+1)l} = \frac{n\pi x}{L}$$

به جای  $y_{pn}$  می توان  $y_n(x, t)$  نوشت، یعنی جابه جایی ذره واقع در فاصله  $x$  (از یک انتها)

در زمان  $t$ ، هنگامی که نخ در  $n$  آمین مد ارتعاش می کند،  $y$  است. بنابراین

$$y_n(x, t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \quad (31-5)$$

$(n = 1, 2, \dots)$

وقتی  $N$  خیلی بزرگ شود، اندازه های  $x$  می تواند پیوسته از  $0$  تا  $L$  تغییر کند. در شکل های (۵-۱۳)، (۵-۱۴)، و (۵-۱۵) منحنی های سینوسی سفید، نمایش پیکربندی های واقعی نخ در مدهای مختلف است. با وجود آشفتگی های سیار موج در طول نخ، پیوستگی چنین حرکتی زیاد به چشم نمی خورد، به همین جهت درباره شناخت موضوع هنوز درست پیشرفت نکرده ایم.

اکنون بالاترین مد ممکن،  $n = N$ ، را در نظر می گیریم. اگر  $N$  خیلی بزرگ باشد داریم:

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left[\frac{N\pi}{2(N+1)}\right] \approx 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\omega_0 \quad (32-5)$$

(بیشینه)

در این مد (که در فرصت مناسب نشان خواهیم داد) جابه جایی هر ذره، در هر لحظه، در خلاف جهت جابه جایی های نزدیکترین ذرات مجاور است. به استثنای ذرات نزدیک به دو سر ثابت. قدر مطلق این جابه جاییها تقریباً مساوی است. بنابراین، وضعیت نوسانات طولی در شکل ۵-۱۸ (الف) تا اندازه ای مشخص شده است، و برای آنکه حالت نوسانات عرضی برایتان بهتر قابل تصور باشد، شکل ۵-۱۸ (ب) را با دقت مشاهده کنید. به کمک معادله (۵-۲۶)، می توان به ارتباط جابه جایی های مجاور (هر ذره) پی برد:

$$A_{pn} = C_n \sin\left(\frac{Pn\pi}{N+1}\right)$$

با قرار دادن  $n = N$ ، داریم:

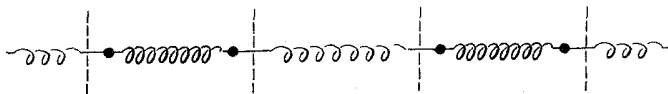
$$A_{p,N} = C_N \sin\left(\frac{PN\pi}{N+1}\right)$$

می توانیم بنویسیم که

$$A_{p,N} = C_N \sin(p\pi - \alpha_p)$$

در اینجا

$$\alpha_p = \frac{P\pi}{N+1}$$



(الف)

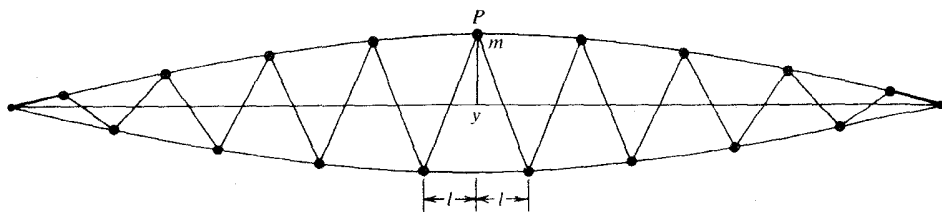


(ب)

شکل ۵-۱۸ (الف) ارتعاشات طولی در بالاترین مُد مربوط به گلوله های کوچک جفت شده با فنر واقع در یک خط. (ب) ارتعاشات عرضی در بالاترین مُد مربوط به گلوله های کوچک متصل به یک نخ کشیده شده، واقع در یک خط.

نخست یادآور می شویم که با تغییر  $P$  به  $P+1$ ، علامت دامنه عوض می شود، زیرا زاویه  $P\pi$  از یک مضرب فرد  $\pi$  به مضرب زوج  $\pi$  (یا برعکس) تغییر می کند و زاویه  $\alpha_p$  به ازاء هر اندازه  $P$  از  $\pi$  کوچکتر است (چون  $P \leq N$ ). هرگاه اندازه های متوالی  $(P\pi - \alpha_p)$  را در ربع های روبرو رو<sup>۱۲</sup> (در یک دایره) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(n=N, \text{بالاترین مُد}) \frac{A_p}{A_{P+1}} = - \frac{\sin \left[ \frac{P\pi}{N+1} \right]}{\sin \left[ \frac{(P+1)\pi}{N+1} \right]} \quad (۳۳-۵)$$



شکل ۵-۱۹ دامنه های یک خط کامل ذرات در بالاترین مُد برای نخ که از هر دو طرف محکم شده است.

۱۲- توضیح مترجم: اگر دایره را با رسم دو قطر افقی وعمود بر آن به چهار قسمت تقسیم کنیم دو کسر (۳۳-۵) مطابق شکل، در دو ربع روبرو نوشته می شوند  $\frac{P\pi}{N+1} + \frac{(P+1)\pi}{N+1}$

نکته دیگر اینکه، صبر فظ از تناوب علامت - که یک در میان مثبت و منفی می شود - معادله (۳۳-۵) چگونگی پخش دامنه ها را بر روی یک نیم منحنی سینوسی که بین دو سر ثابت نخ رسم شده است، مشخص می کند. همان طور که در شکل ۵-۱۹ نشان داده شده است، چنین منحنیهایی بیانگر ارتعاشات عرضی رشته ای است که به گلوله های کوچک<sup>۱۳</sup> بسته شده باشد. بنا بر این در ناحیه مرکزی این رشته کاملاً نمایان است که جابه جایها تقریباً مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند. مثلاً رشته ای را در نظر بگیرید که ۱۰۰۰ گلوله کوچک (ذره به جرم  $m$ ) بسته شده باشد. پس از آن، در مورد  $900 \leq P \leq 1000$  خواهیم دید که دامنه ها هر کدام با دیگری کمتر از ۱٪ تفاوت دارند. ولی هر چه به دو سر نخ نزدیکتر شویم تفاوت دامنه ها نسبت به شکل ۵-۱۸ (ب) بیشتر و نمایان تر است. بنابراین براحتی می توان دید که چرا بسامد تقریباً مساوی  $\omega_0$  است. ذره  $P$  را در شکل ۵-۱۹ در نظر بگیرید. اگر جابه جایی اش در لحظه معینی  $y$  باشد، جابه جایهای ذرات مجاورش در دو طرف تقریباً  $-y$  است. به این ترتیب اگر کشش در نخهای متصل به ذرات (گلوله های کوچک)  $T$  باشد، مؤلفه نیرو در هر طرف تقریباً  $T \left( \frac{2y}{l} \right)$  است و معادله حرکت  $p$  به صورت زیر در می آید:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} \approx -2T \frac{2y}{l}$$

یا

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \approx \frac{4T}{ml} y = -\omega_0^2 y$$

(یادآور می شویم که در معرفی قدر مطلق جابه جایهای عرضی در نمودارها قدری مبالغه شده است. ما، همان گونه که متداول است فرض کرده ایم که  $y \ll l$ ). پس می توان گفت که معادله بالا تقریباً بسامد زاویه ای  $\omega_0$  حرکت هماهنگ ساده را معین می کند و اگر کمی بیش از این دقت کنیم می توانیم بسامد صحیح را که اندکی از  $\omega_0$  کمتر است از معادله (۳۲-۵) به دست آوریم.

در تمام بحث مستدل خود که تاکنون درباره مدهای طبیعی داشته ایم به این نتیجه رسیده ایم که در شرایط مرزی، خواه دو سر رشته متصل به گلوله های کوچک ثابت یا آزاد باشد اثر

---

۱۳- یادآور می شویم که این نتیجه برای بالاترین مد حتی برای مواردی که  $N$  کوچک باشد صدق می کند - به عنوان مثال به چهارمین نمودار در شکل ۵-۱۵ مراجعه کنید.

نیروی کشش بیشتر مشهود است. ممکن است در خلال این بحث اخیر روشن شده باشد که خواص مدهای بسیار بالای رشته مدهای پایین در حالت بحرانی به شرایط مرزی بستگی دارد. بنابراین محاسبه بسامد بالاترین مد دستگاه فقط مستلزم آن است که جابه جاییهای پیاپی ذرات تقریباً مساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند. اگر فرض کنیم که یک سر رشته ثابت و سردیگرش آزاد است، باز هم بسامد بالاترین مد تقریباً همان اندازه به دست خواهد آمد. گرچه تاکنون محقق شده است که این نظریه فقط تا حدودی درست است، تأثیر شرایط مرزی در اصل باید همیشه مد نظر باشد.

### مدهای طبیعی یک شبکه بلور

ما درباره این موضوع بیش از این بحث نخواهیم کرد، زیرا ادامه بحث در حقیقت، مستلزم آن است که به حقیقت تمام کتابهایی که در این زمینه نوشته شده است پی برده باشیم. با وجود این، تحلیل مبحث قبلی برای بیان مدهای ارتعاشی جامدات می تواند روش بسیار نتیجه بخشی باشد. جای تعجب نیز نیست، زیرا همان طور که ملاحظه کرده ایم بر همکنش بین اتمهای مجاور، تا وقتی که جابه جاییها کوچک باشد، به این جابه جاییها ارتباط دارد، نمونه بارز آن یک فنر و ساختار یک جامد با ساختاری شبکه ای است. با این تفاوت که نظم حاکم بر شبکه جامدات مختلف، در مقایسه با یک شبکه بلور سه بعدی که رفتار ارتعاشی فنر گونه دارد، بیشتر یا کمتر است.

اگر سعی کنیم معادلات (۵-۲۹) و (۵-۳۰) را در مورد یک جامد به کار ببریم، می توانیم خطی از اتمها را در طول یکی از راستاهای اصلی شبکه در نظر بگیریم. اگر  $\mu$  جرم کل همه اتمها در واحد طول، یا نسبت جرم یک اتم به فاصله بین دو اتم مجاور  $l$  باشد، در این صورت کشش  $T$  چقدر است؟ برای محاسبه ثابت فنر که منشاء آن نیروهای کشان داخلی است، در فصل ۳ به طور جدی به آن اشاره شده است. نسبت  $\frac{T}{\rho}$  با  $\frac{y}{\rho}$ ، نسبت مدول یانگ به چگالی، از نظر اندازه مساوی است. استفاده از این نسبت، هنگامی که فنرها - که شکل (۵-۱۶) نشان می دهد - کشیده می شوند، حتی جدی تر توصیه شده است. بنابراین با در نظر گرفتن این نکات می توان بسامد های ارتعاش بلور را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\gamma l} \left( \frac{y}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{در این رابطه} \quad \gamma_n = 2\gamma_0 \sin \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \quad (34-5)$$

در مورد جامدات ، همان گونه که دیده ایم ( به جدول ۳-۱ مراجعه شود). اندازه های  $y$  در حدود  $10^{11} \text{ N/m}^2$  است، برای اینکه چگالیهای  $\rho$  در حدود  $10^4 \text{ kg/m}^3$  و نسبت  $\frac{y}{\rho}$  در حدود  $10^7 \text{ m}^2/\text{sec}^2$  ، و فاصله بین اتمی در حدود  $10^{-10} \text{ n}$  است. بنابراین خواهیم داشت:

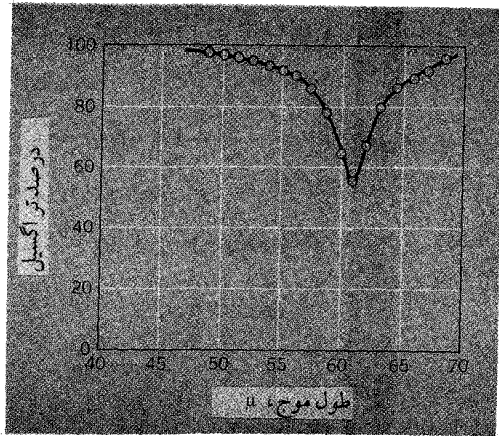
$$\gamma_0 \approx 10^{13} \text{ sec}^{-1}$$

این مقدار بالاترین بسامدی است که شبکه می تواند تحمل کند. مدهای پایین با معادلاتی نظیر معادله (۵-۳۰) تشریح می شوند:

$$\gamma_n = \frac{1}{2L} \left( \frac{y}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

در اینجا  $L$  ضخامت بلور است. به این ترتیب پایین ترین بسامد ارتعاش یک بلور به ضخامت  $1 \text{ cm}$  در حدود  $10^5 \text{ Hz}$  خواهد بود.

اکنون به بالاترین مد ممکن بر می گردیم، در این مد اتمهای مجاور در خلاف جهت یکدیگر جابه جا می شوند (شکل ۵-۱۸ را ببینید). چنین حرکتی را می توان باتابش نور بر روی یک بلور یونیزه نظیر کلراید سدیم، به طور بسیار مؤثری برانگیخت، در این بلور یونهای  $\text{Na}^+$  و  $\text{Cl}^-$  بر اثر میدان الکتریکی موج نور همواره در خلاف جهت یکدیگر رانده می شوند. از محاسبه بسیار تقریبی خود انتظار داریم که شرط وقوع تشدید بین نور و شبکه، بسامدی در حدود  $10^{13} \text{ Hz}$  باشد، این بسامد مربوط به طول موجی در حدود  $3 \times 10^{-5} \text{ m}$  یا  $3000 \text{ \AA}$  است. این نور فرو سرخ (مادون قرمز) است. شکل (۵-۲۰) نمونه زیبایی را نشان می دهد. که دقیقاً مربوط به چنین تشدید است. نتیجه ای که می گیریم آن است که جذب نور توسط بلور، هنگامی که طول موجها در حدود  $600 \text{ \mu}$  ، زیاد می شود. این جذب ، با استفاده از یک برش بینهایت نازک  $\text{NaCl}$  ، که فقط حدود  $10^{-7} \text{ m}$  ضخامت داشت، مشاهده شده است.

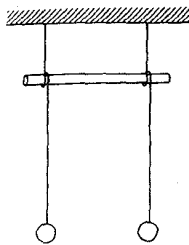


شکل ۵-۲۰ تراگسیل پرتو فرورسوخ از میان یک ورقه نازک کلراید سدیم.

[اقتباس از: (۱۹۳۲) ۷۲۳، ۷۵، Z.Physik، R.B.Barnes]

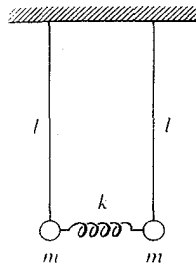
## مسائل

۵-۱ بهترین روش برای آنکه با رفتار یک دستگاه نوسانگر جفت شده خوب آشنا شوید، آن است که دستگاه را خودتان بسازید، و در شرایط مختلف با آن آزمایش انجام دهید. سعی کنید یک جفت آونگ مشابه بسازید، و آنها را با یک نی نوشابه (مطابق شکل) طوری به هم وصل کنید که بتوانید فاصله مجموعه را از پایین (گلوله‌ها) تغییر دهید. با این دستگاه حرکت نوسانی هر دو آونگ را در صفحه آونگها (وقتی آنها به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند یا از هم دور می‌شوند)، همچنین هنگامی که عمود بر این صفحه در نوسانند، بررسی کنید.



بکشید دوره های تناوب مدّ طبیعی و نیز دوره تناوب انتقال حرکت را از اولی به دومی و برعکس اندازه بگیرید. سپس نتایج خود را با آنچه در متن کتاب توضیح داده شده است، مقایسه کنید.

۲-۵ دو آونگ مشابه را یک فنر سبک جفت کننده به هم وصل کرده است. طول هر یک از آونگها  $0.4\text{m}$  است و در جایی به نوسان در می آیند که  $g = 9.8\text{m/sec}^2$  است. با فنر جفت کننده متصل به آنها، یک آونگ میرا می شود و دوره تناوب دیگری دقیقاً  $1/25\text{sec}$  به دست می آید.



(الف) دوره های تناوب دو مدّ طبیعی آونگ میرانشده چقدر است؟

(ب) یک آونگ را به یک طرف می کشیم و دوباره رها می کنیم. دامنه ها در چه

مدّت متوالیاً به بیشینه ممکن می رسند؟

۳-۵ گلوله ای به جرم  $m$  به یک فنر با ضریب سختی  $k$  آویخته شده است. طول فنر در وضعیت تعادل ایستایی است. اگر گلوله را به یک طرف بکشیم و سپس رها کنیم، حرکت بعدی ترکیبی از (الف) تاثیر وزن آونگ و (ب) انبساط و انقباض فنر، خواهد بود. بدون استفاده زیاد از ریاضیات، رفتار این آونگ ترتیب یافته را، که در حکم یک دستگاه جفت شده است، مورد توجه قرار دهید.

۴-۵ دو نوسانگر هماهنگ  $A$ ،  $B$  که جرم هر کدام  $m$  و ضریب سختی آنها به ترتیب  $k_A$  و  $k_B$  است با فنری با ضریب سختی  $k_c$  به یکدیگر جفت شده اند. اگر  $k_c = k_A k_B$  باشد، بسامدهای طبیعی  $\omega'$  و  $\omega''$  را تعیین کنید و مدّهای طبیعی نوسان را شرح دهید.

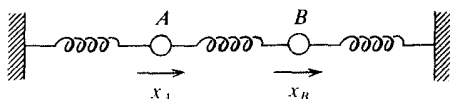
۵-۵ دو نوسانگر مشابه نامیرا،  $A$  و  $B$ ، که جرم هر کدام  $m$  و بسامد (زاویه ای) طبیعی آنها



۵. است بگونه ای جفت شده اند که از طرف جفت کننده بر A نیروی  $\alpha m \left( \frac{d^2 x_B}{dt^2} \right)$  ، و بر

B نیروی  $\alpha m \left( \frac{d^2 x_A}{dt^2} \right)$  وارد می آید، در اینجا  $\alpha$  ضریب سختی جفت کننده و اندازه اش کمتر از یک است. مدهای طبیعی دستگاه جفت شده را شرح دهید و بسامدهای آنها را تعیین کنید.

۵-۶ دو گلوله با جرمهای مساوی توسط سه فنر مشابه بین دو پایه در مسیر افقی واقعاً بدون اصطکاک، همان طور که در شکل نشان داده شده، در هوا محکم نگهداشته شده اند. جابه جاییها از وضعیت تعادل در طول خط فنر با مختصات نشان داده شده است. اگر هیچکدام از گلوله ها میرا نباشد دوره تناوب  $T = \left( \frac{2\pi}{\omega} \right)$  برای یک ارتعاش کامل دیگر ۳ ثانیه است.

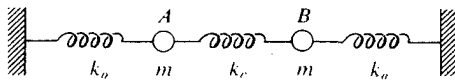


(الف) اگر هر دو گلوله آزاد باشند، دوره های تناوب دو مد طبیعی دستگاه چقدر است؟ نمودار  $x_B$  و  $x_A$  را بر حسب  $t$  برای هر مد بکشید. در لحظه  $t = 0$ ، وزنه A در وضعیت سکون طبیعی خود بوده و گلوله B به اندازه  $5\text{cm}$  به یک طرف کشیده شده است. در این لحظه گلوله ها از حالت سکون رها می شوند.

(ب) برای جابجایی بعدی هر گلوله معادله ای بنویسید که تابع زمان باشد.

(ج) چه مدت زمان (به ثانیه) انتقال تناوبی حرکت را از B به A و برگشت آن را مشخص می سازد؟ پس از یک چرخه آیا همان وضعیت لحظه  $t = 0$  پیش می آید و همان چرخه دوباره تولید می شود؟ توضیح دهید.

۵-۷ دو گلوله A و B که جرم هر کدام  $m$  است همان گونه که در شکل می بینیم به فنرهایی متصل شده اند. ضریب سختی فنری که جفت کننده A و B است  $k_0$  و ضریب سختی دو فنر دیگر  $k_1$  است. اگر B میرا باشد، A با بسامد  $\gamma_A$  که مساوی  $1/11 \text{sec}^{-1}$  است ارتعاش می کند.  $\gamma_A$  بسامد پایین ترین مد طبیعی  $1/14 \text{sec}^{-1}$  است.



(الف) معادلات حرکت A و B را به صورت زیر بنویسید:

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -k_o x_A - k_c (x_A - x_B)$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -k_o x_B - k_c (x_B - x_A)$$

(ب) با قرار دادن  $\omega_o = \sqrt{\frac{k_o}{m}}$  نشان دهید که بسامدهای زاویه ای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  مدهای طبیعی از روابط زیر به دست می آید:

$$\omega_2 = \left[ \omega_o^2 + \left( \frac{2k_c}{m} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_1 = \omega_o$$

و بسامد زاویه ای A وقتی B میرا است (همیشه  $x_B = 0$ ) از رابطه زیر به دست می آید:

$$\omega_A = \left[ \omega_o^2 + \left( \frac{k_c}{m} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

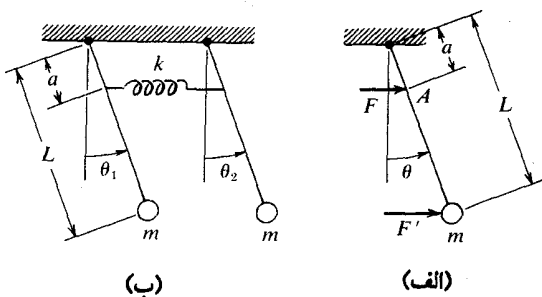
(ج) با استفاده از داده های عددی بالا ، بسامد ( $\gamma_2$ ) بالاترین مُد را حساب کنید. (اندازه مشاهده شده  $2/27 \text{ sec}^{-1}$  بوده است)

(د) از همین داده ها نسبت  $\frac{k_c}{k_o}$  ، ضریب سختی دو فنر ، را حساب کنید.

۸-۵ (الف) بر نقطه A از یک آونگ نیروی F مطابق شکل وارد می آید. به ازاء چه زاویه  $\theta$  (خیلی کوچکتر از یک رادیان) آونگ در وضعیت تعادل جدید قرار می گیرد؟

چه نیروی F' باید بر m وارد آوریم ، تا همان نتیجه عاید شود؟

دو آونگ مشابه از دو گلوله به جرمهای مساوی که به دو سر میله های سبک و سخت جوش خورده اند، همان گونه که شکل نشان می دهد، تشکیل شده اند. و با یک فنر سبک (وقتی دو میله در راستای قائم ، و در جای خود هستند کشیده نمی شود) موجبات جفت شدگی دو



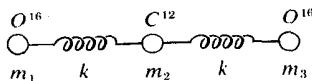
(ب) معادلات دیفرانسیلی حرکت را برای نوسانات کم دامنه بر حسب  $\theta_1$  و  $\theta_2$  بنویسید. (از میرایی صرف نظر کنید).

(ج) حرکت آونگها را در هریک از مدهای طبیعی شرح دهید.

(د) بسامدهای مدهای طبیعی دستگاه را حساب کنید.

[یادآوری: از تقارن دستگاه به عنوان یک مزیت در بخشهای (ج) و (د) می توان بهره برداری کرد به شرط آنکه پاسخهایی که با این روش به دست می آید در معادلات صدق کند.]

۹-۵ مولکول  $\text{CO}_2$  را می توان به دستگاهی تشبیه کرد که از جرم مرکزی  $m_2$  و دو جرم  $m_1$  و  $m_3$  (می دانیم  $m_3 = m_1$ ) تشکیل شده است، فنرهای مساوی با ضریب سختی  $k$ ، مطابق شکل، از یک طرف به  $m_2$  و از طرف دیگر به  $m_1$  و  $m_3$  متصل شده اند.

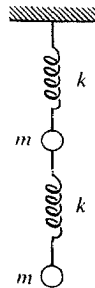


(الف) برای مدهای طبیعی که جرمها در طول خط واصل مراکز (سه اتم) نوسان می کنند معادلاتی تشکیل دهید و حل کنید. [معادله حرکت  $m_3$  عبارت است از:

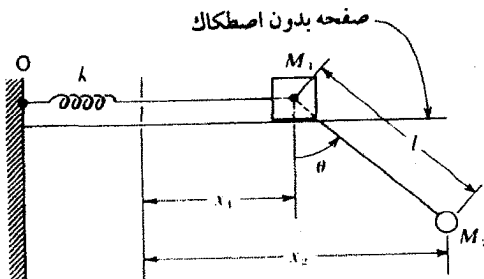
$$m_3 \left( \frac{d^2 x_3}{dt^2} \right) = -k(k_3 - x_3)$$

(ب) با قرار دادن اندازه های عددی:  $m_1 = m_3 = 16$  یکا،  $m_2 = 12$  یکا، و با فرض اینکه این توضیح کلاسیک قابل اجرا باشد، نسبت بسامدهای دو مد چه اندازه خواهد شد؟

۵-۱۰ دو گلوله به جرمهای مساوی مطابق شکل به دو فنر مشابه سبک که ضریب سختی هر کدام  $k$  است بسته شده اند. حرکت زاویه ای دو مُد طبیعی از رابطه  $\omega^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5})k}{2m}$  به دست می آید، و بنابراین نسبت بسامدهای مُد طبیعی به صورت  $\frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)}$  است. نسبت دامنه های حرکت دو گلوله را در هر مُد جداگانه تعیین کنید. (یادآوری: لازم است نیروهای گرانشی مؤثر بر گلوله ها را در نظر نگیرید، زیرا جابه جاییها به این نیروها بستگی ندارد و در نتیجه نباید آنها را با نیروهایی که فنر را به وضع اول بر می گردانند، و موجب نوسانات می شوند، سهمیم دانست. نیروهای گرانشی فقط موجب یک تغییر مکان در وضعیت تعادل گلوله ها می شوند، و شما نباید در صدد یافتن عامل این تغییر مکانها باشید.)



۵-۱۱ همانگونه که شکل نشان می دهد وزنه به جرم  $M_1$  بر روی یک سطح بدون اصطکاک قرار گرفته است و به وسیله فنری با ضریب سختی  $k$  در نقطه  $O$  محکم شده است. وزنه به جرم  $M_2$  با نخ به طول  $l$  از  $M_1$ ، نگهداشته می شود.



(الف) با استفاده از تقریب نوسانات کوچک،

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x_2 - x_1}{l}$$

و در آغاز با استفاده از  $F = ma$  ، معادلات حرکت  $M_1$  و  $M_2$  را به دست آورید :

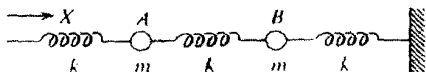
$$M_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 + M_2 \frac{g}{l}(x_2 - x_1)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -l(x_2 - x_1)$$

(ب) برای به دست آوردن بسامدهای طبیعی دستگاه ، در معادلات ، از  $M_1 = M_2 = M$  استفاده کنید .

(ج) به ازاء  $M_1 = M_2 = M$  و  $\frac{k}{M} \gg \frac{g}{l}$  حرکات مُد طبیعی به چه صورت در می آید؟

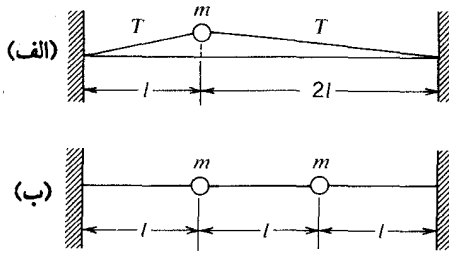
۱۲-۵ دو گلوله مساوی که جرم هر یک  $m$  است به سه فنر مشابه ( با ضریب سختی  $k$  ) بسته شده اند . و روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار گرفته اند (شکل را ببینید) . یک سر دستگاه ثابت است ؛ سر دیگر با جابجایی  $X = X_0 \cos \omega t$  عقب و جلو برده می شود . براینده جابه جاییهای دو گلوله را تعیین کنید و نمودارهای آنها را بکشید .



۱۳-۵ نخ به طول  $3l$  و جرم ناچیز از دو طرف به دو پایه ثابت بسته شده است . نخ کشان است .

(الف) گلوله کوچکی به جرم  $m$  به فاصله  $l$  از یک طرف ، همان گونه که در شکل می بینید ، به نخ بسته شده است . برای نوسانات عرضی کوچک  $m$  معادله تشکیل دهید ، و دوره تناوب آن را تعیین کنید .

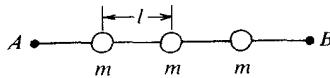
(ب) گلوله کوچک دیگری به جرم  $m$  ، همان گونه که نشان داده شده ، به نخ می بندیم ، تا به سه قسمت مساوی تقسیم شود ، کشش هر قسمت  $T$  است . شکل ظاهری نخ و گلوله ها را در دو مُد طبیعی نوسانات عرضی به طور جداگانه بکشید .  
(ج) بسامد را برای آن مُد طبیعی که بسامد بالاتری دارد حساب کنید .



۵-۱۴ احساس ما آن است که برای استفاده از معادله

$$A_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

[معادله (۵-۲۶) متن]، که دامنه های گلوله های کوچک متصل به هم را در مدهای طبیعی مختلف مشخص می کند، باید حالتی را در نظر بگیریم که  $N = 3$  است و جدول بندی باید در قالب  $3 \times 3$ ، و به صورت: اندازه های  $(P = 1, 2, 3)$  عددی دامنه های گلوله ها در هر یک از مدهای طبیعی  $(n = 1, 2, 3)$  باشد.



۵-۱۵ یک نخ کشسان با جرم ناچیز، طوری کشیده شده که دارای کشش  $T$  است، این نخ به دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$ ، به فاصله  $4l$  از یکدیگر، متصل شده است و سه گلوله کوچک به جرم  $m$ ، در فواصل مساوی از هم به آن بسته شده است، همان گونه که شکل بالا نشان می دهد.

(الف) فرض کنید که در لحظه معینی، جابه جاییهای عرضی کوچک گلوله ها به ترتیب  $y_1, y_2, y_3$  باشد. معادله دیفرانسیل حرکت را برای هر گلوله بنویسید.

(ب) با رسم منحنیهای سینوسی که از  $A$  و  $B$  می گذرد، مدهای طبیعی ظاهر می شود. چنین منحنیهایی را با اندازه های نسبی و علائم  $A_1, A_2, A_3$  در هر یک از مدهای ممکن دستگاه رسم کنید.

(ج) با قرار دادن  $y_3 = A_3 \sin \omega t$  ،  $y_2 = A_2 \sin \omega t$  ،  $y_1 = A_1 \sin \omega t$  در معادلات (الف) و با استفاده از نسبت‌های  $A_1 : A_2 : A_3$  از قسمت (ب) ، بسامدهای زاویه ای مدهای جداگانه را تعیین کنید .

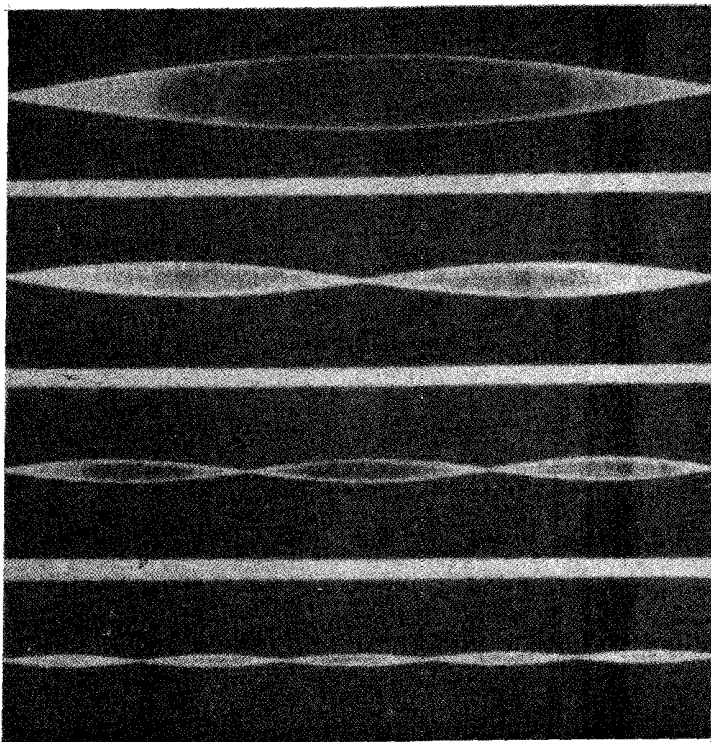
۱۶-۵ دستگاهی را با  $N$  نوسانگر جفت شده در نظر بگیرید که با بسامد  $\omega$  (یا  $2\omega$ ) به حرکت درآمده است (مثلاً  $y_0 = 0$  ،  $y_{N+1} = h \cos \omega t$  ) . دامنه های متوجه  $N$  نوسانگر را تعیین کنید . [یادآوری : معادلات دیفرانسیل ، همان معادلات حالت به حرکت در نیامده است (فقط شرایط مرزی متفاوت است) . بنابراین  $A_p = C \sin \alpha p$  را آزمایش کنید ، و اندازه های لازم  $\alpha$  و  $C$  را تعیین نمایید . (تذکر : اگر  $\omega > 2\omega_0$  باشد ،  $\alpha$  مبهم است و موج به طور نمایی در فضا میرا می شود)]

۱۷-۵ در متن یادآور شده ایم که بالاترین مد طبیعی رشته حاصل گلوله های کوچک هم فاصله را می توان با در نظر گرفتن گلوله نزدیک به وسط رشته تعیین کرد . گلوله های کوچک واقع در کناره ها جابه جایهایی تقریباً مساوی و در خلاف جهت هم دارند . ثابت کنید که همان بسامد را با در نظر گرفتن نخستین گلوله در رشته می توان محاسبه کرد ، این بسامد بر روی کشش قطعه ای از رشته ، که انتهای ثابت و گلوله ۲ را به هم وصل می کند ، مؤثر است . [به شکل (۵-۱۹) و بحث مربوط به آن مراجعه کنید] .

## مُد های طبیعی دستگاههای پیوسته تحلیل فوریه

در این فصل بحث ما به تارهای مرتعش محدود نخواهد شد. در عین حال تارها برحسب اهمیتشان مورد بررسی قرار می گیرند. رویه هم رفته، در مورد تارهای مرتعش، صرفنظر از جامعه موسیقیدانان، حتی نوازنده دوره گردهم که برای تأمین معاش خود نوازندگی می کند، بخوبی می داند که صدای زیر و بم تار به کشش آن بستگی دارد. هر چند مسلم است که تحلیل جامع مفاهیم یک دستگاه ساده فیزیکی - از جهات مختلف دینامیکی، ارتعاشات طبیعی و پاسخ به بسامدهای گوناگون امری تقریباً محال است. در عین حال چکیده مفاهیم نظریه الکترومغناطیسی، مکانیک کوانتومی و همه مباحث دیگر را مطرح می کنیم. ما اصولاً مطالعه تار را به خاطر خودش آغاز نمی کنیم، بلکه آن را نقطه شروع خوبی برای بررسی سایر دستگاههای ارتعاش کننده می دانیم. مخصوصاً، تا آنجا که به علم مکانیک مربوط است، با تحلیل رفتار ارتعاشی تار تقریباً می توان پی برد که یک دستگاه دارای ساختار پیوسته است. سرانجام، همان گونه که می دانیم این تحلیل باید درباره ماده ای در مقیاس ذره بینی (میکروسکپی) به عمل آید. برای شناخت ماهیت چنین ماده ای به عقب بر می گردیم و می بینیم هر قطعه از این ماده که شامل تعداد بسیار زیادی ذرات مجزاً و سخت است با یکدیگر بر هم کنش دارند، که البته موضوع فصل ۵ بود. ولی هر قطعه ماده معمولی که تا حد مشهود و ملموس بودن بزرگ باشد، به عنوان یک ماده تقریباً همگن و پیوسته قابل استفاده است. و اگر بخواهیم مطمئن شویم که آیا برای بیشتر مقاصد ما مناسب است، باید تحلیل تازه ای از رفتار این ماده ذره بینی داشته باشیم. بنابراین، مبنای هر چیزی در فصل حاضر گذاشته خواهد شد.





شکل ۱-۶ ارتعاش یک تار در مدهای ساده گوناگون (۵، ۳، ۲، ۱) (انتباس از D.C. Miller، دانش اصوات موسیقی، مک میلان، نیویورک ۱۹۲۲)

### ارتعاشات آزاد تارهای کشیده

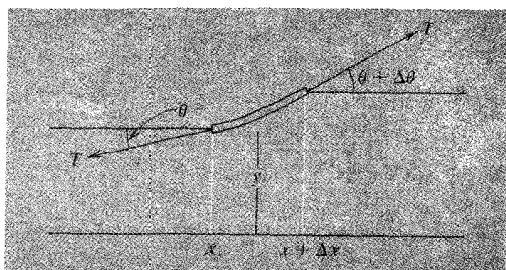
همان گونه که در شروع این فصل اشاره شد، مطالعه تارهای مرتعش تاریخچه مفصلی دارد. البته، دلیلش این است که استفاده از تارهای کشیده برای ایجاد آهنگهای موسیقی از زمانهای خیلی پیش تاکنون معمول بوده و هست. فیثاغورث گفته بود: وقتی یک تار کشیده شده را طوری به دو قسمت کنیم، که خارج قسمت طول آنها از نظر عددی نسبت ساده ای داشته باشد، بر اثر ارتعاش آنها صدای خوشایندی تولید می شود. در اینجا به نفع ما نیست که مساله را از لحاظ موسیقی بررسی کنیم، بلکه بهتر است از نظر مکانیکی تار را در نظر بگیریم که دو سرش ثابت نگهداشته شده و همان گونه که شکل نشان می دهد، در حالت طبیعی ارتعاشات طبیعی است، که ارتعاشات (امواج) ساکن نامیده

می شود. هرگاه نقطه ای از تار با حرکت هماهنگ ساده و با دامنه ثابت به طور عرضی ارتعاش کند، بسامد آن برای همه قسمت‌های تار یکسان است. به این ترتیب، با ارتعاشات ساکن در طول نخ شکل‌هایی به نام *مُد‌های طبیعی* تشکیل می شود. در همه آنها بجز پایین ترین *مُد*، نقاطی وجود دارد که جابه جایی آنها همواره صفر باقی می ماند. این نقاط *گره* هستند. نقاطی که با دامنه بیشینه در حال ارتعاشند *پادگره* [= *شکم*] نامیده می شوند. بنابراین می توان تصور کرد که در حالات پایه ای ارتعاشات ساکن علاوه بر گره های طول تار، در نقاط ثابت طرفین تار نیز گره تشکیل می شود. این حالات در شکل (۶-۱) به طور واضح نمایش داده شده است.

اکنون با در نظر گرفتن دینامیک چنین ارتعاشاتی فرض می کنیم که طول تار  $L$  است، و دو سرش در نقاط  $x = 0$  و  $x = L$  محکم نگهداشته شده است. علاوه بر این فرض خواهیم کرد که تار دارای چگالی خطی (جرم واحد طول) یکنواختی مساوی  $\mu$  است و با کشش  $T$  کشیده می شود. پیکربندی بخشی از تار در لحظه معینی در شکل (۶-۲) نشان داده شده است. در فصل ۵ برای ذرات نقطه ای متصل به یک تار بسیار سبک مساله معادلی در نظر گرفته ایم و نشان داده ایم که وقتی پیکربندی دستگاه تغییر می کند، کشش با تقریب خوبی بدون تغییر باقی می ماند. بنابراین برای قطعه کوتاهی از تار، به طول  $\Delta x$ ، نیروی مؤثر وارد بر آن از روابط زیر به دست می آید:

$$F_y = T \sin(\theta + \Delta\theta) - T \sin \theta$$

$$F_x = T \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos \theta$$



شکل ۶-۲ نمودار نیرو برای قطعه کوتاهی از تار نسبتاً سنگین که دارای ارتعاش عرضی است.

در این روابط  $\theta$  و  $\theta + \Delta\theta$  زوایایی است که راستای مماس بر تار با خط و اصل دو سر تار یعنی با  $x$  تشکیل می دهد.

فرض کرده ایم که جابجایی عرضی  $y$  کوچک است، در نتیجه زوایای  $\theta$  و  $\theta + \Delta\theta$  کوچک می شود. در این حالت داریم:

$$F_y \approx T\Delta\theta$$

$$F_x \approx 0$$

بنابراین معادله حاکم بر حرکت عرضی قطعه تار (خیلی تقریبی) و به صورت زیر است:

$$T\Delta\theta = (\mu\Delta x)a_y \quad (1-6)$$

می بینیم که  $\theta$  تغییرات  $y$  را با  $x$  در زمان معین  $t$  نشان می دهد، و  $a_y$  بیانگر تغییر  $y$  با  $t$  به ازاء  $x$  معین است. بنابراین در بازنویسی معادله (۱-۶) بر حسب  $x$ ،  $y$  و  $t$  باید از مشتقهای جزئی استفاده کنیم، و روابط زیر را داریم:

$$\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\sec^2 \theta \Delta\theta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

چون  $\sec \theta \approx 1$ ، لذا می توان نوشت:

$$\Delta\theta \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

هم چنین

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

بنابراین معادله (۱-۶) می شود:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2-6)$$

از این معادله پیدا است که  $\frac{T}{\mu}$  دارای دیمانسیون مربع سرعت است، و اثبات نخواهیم کرد

که امواج پیش‌رونده با این سرعت در طول تار با این اندازه های  $\mu$  و  $T$  چگونه جلو می‌روند. گرچه این مقوله را تا شروع فصل ۷ ادامه نخواهیم داد، ولی عجلتاً سرعت  $x$  را از معادله ساده زیر به دست خواهیم آورد:

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۶)$$

به این ترتیب معادله (۶-۲) را به شکل ساده تری بازنویسی خواهیم کرد:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۴-۶)$$

اکنون در صدد حل این معادله هستیم که البته شباهت زیاد به وضعیتی دارد که توسط ارتعاشات ساکن به نمایش گذاشته شد. از این معادله چنین بر می‌آید که هر نقطه بر روی تار دارای حرکتی است که وابستگی اش با زمان به شکل  $\cos \omega t$  است، ولی دامنه این حرکت تابع  $x$ -فاصله نقطه مورد نظر تا انتهای تار-است. (وابستگی شکل ارتعاشات ساکن بر روی تار، لحظه ای است. اگر چنین نباشد در  $t = 0$  زاویه فاز اولیه باید دخالت داده شود.) لذا فرض می‌کنیم:

$$y(x,t) = f(x) \cos \omega t \quad (۵-۶)$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \cos \omega t$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos \omega t$$

(یادآور می‌شویم که، چون  $f$  بنا بر تعریف فقط تابع  $x$  است، به جای مشتق جزئی می‌توان

$\frac{d^2 f}{dx^2}$  نوشت.) این مشتقها را در معادله (۶-۴) قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f$$

البته این معادله به معادله دیفرانسیلی شباهت دارد که یک تابع سینوسی یا کسینوسی در آن صدق می‌کند. اگر بخاطر داشته باشید قبلاً تعریف کردیم که  $x = 0$  بر یکی از دو سر ثابت تار

منطبق است، زیرا در آنجا جابه جایی عرضی در هر لحظه صفر است، از طرفی می دانیم که یک پاسخ قابل قبول باید رابطه زیر باشد:

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) \quad (6-6)$$

ولی شرط مرزی دیگری هم داریم، که جابه جایی در  $x = L$  همواره صفر است. به این ترتیب باید رابطه زیر نیز برقرار باشد:

$$A \sin\left(\frac{\omega L}{v}\right) = 0$$

در نتیجه

$$\frac{\omega L}{v} = n\pi \quad (7-6)$$

در اینجا  $n$  هر عدد صحیح (مثبت) می تواند باشد.

دخالت دادن تعداد چرخه ها در واحد زمان  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  مناسب خواهد بود. در نتیجه بسامدهای مجاز برای تشکیل ارتعاشات ساکن از رابطه زیر به دست می آید:

$$\nu_n = \frac{n\nu}{2L} = \frac{n}{2L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (8-6)$$

در این رابطه  $n$  ممکن است ۱، ۲، ۳، ... بینهایت باشد.

اگر شکل تار را در هر لحظه مورد توجه قرار دهیم می بینیم که در کل طول تار دقیقاً چند نیم منحنی سینوسی کامل طبق معادله (۶-۷) گنجانیده شده است، با این روش روشن می توان تشکیل هر مد ویژه  $n$  را بخوبی تشخیص داد. به همین جهت طول موج  $\lambda_n$  مربوط به مد  $n$  را می توان از رابطه زیر تعیین کرد:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (9-6)$$

لذا می توان مقدار قرارداد:

$$\frac{\omega}{v} = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

۲- شکل اصلی این وابستگی، که  $\nu$  تابع  $L$ ،  $T$  و  $\mu$  است، توسط گالیله کشف شده است.

با استفاده از معادله (۶-۶)، به کمک معادله زیر، شکل تار مد n را مشخص می کند.

$$f_n(x) = A_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10-6)$$

و در نتیجه توضیح کامل حرکت تار از رابطه زیر امکان پذیر است:

$$y_n(x, t) = A_n \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} \cos \omega_n t \quad (11-6)$$

که در آن

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = n\omega_1$$

از آنجا که همه بسامدهای حاصل از یک تار معین کشیده، طبق تحلیل فوق مضارب صحیحی از پایین ترین بسامد تار،  $\omega_1$ ، است، به همین جهت همه مدها رانسبت به این مد پایه یا اصلی می سنجند. ضمناً از بسامد اصلی به مشخصه بلندی یا ارتفاع صوت حاصل از تار مرتعش پی می برند، و به کمک آن کشش لازم را، برای آنکه یک تار با جرم و طول معین نت خاصی را ایجاد کند، به دست می آورند.

مثال- تار E یک ویولون برای بسامد  $640 \text{ Hz}$  کوك شده است. جرم و طول آن (از خرك تا انتها) به ترتیب  $0.125 \text{ gr}$  و  $33 \text{ cm}$  است. کشش لازم چقدر است؟  
حل- با استفاده از معادله (۶-۸) داریم:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

به جای  $\mu$  معادل آن را قرار می دهیم  $\mu = \frac{m}{L}$ ، در اینجا  $m$  جرم کل است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T &= 4mL\gamma_1^2 \\ &= 4(1/25 \times 10^{-4})(0.33)(6/4 \times 10^2)^2 \quad (\text{MKS}) \\ &\approx 68 \text{ N} \end{aligned}$$

این کشش در حدود  $2 \times 10^5 \text{ Lb}$  است (کشش کل هر چهار تار در یک ویولون کنونی حدود  $50 \text{ Lb}$  است.)

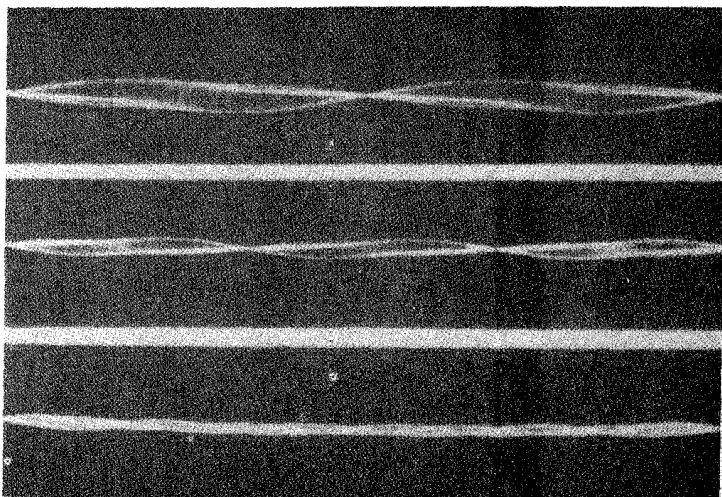
### برهم نهی مُدها بر روی یک تار

در یک ساز زهی نظیر یک پیانو، بر روی یکی از سیم ها نقطه معینی انتخاب شده، و بر آن ضربه ای وارد آمده است. در لحظه کوتاهی پس از این برخورد، سیم به طرف این نقطه کشیده می شود، و شکل آن تقریباً به صورت یک منحنی سینوسی در می آید. بر اثر این ضربه در تار حرکتی برقرار می شود که نتیجه بر هم نهی ساده ارتعاش اصلی و تعدادی از پایین ترین هماهنگهای آن است. این بر هم نهی از نظر فیزیکی بسیار مهم است. زیرا هر یک از این ارتعاشات می تواند همزمان و در عین حال مستقل از یکدیگر رخ دهد. یکی از دلایل این رویداد خواص دستگاه است که نظیر معادله دینامیکی (۶-۲) عمل می کند، و فقط نخستین توان جابه جایی  $y$  در هر نقطه از تار مصداق دارد. اگر پاسخهای گوناگون این معادله که مربوط به هماهنگهای مختلف است با  $y_1$ ،  $y_2$ ، و غیره نشان داده شود، در آن صورت مجموع این پاسخها نیز باید در معادله اصلی صدق کند. به همین جهت حرکت منتجه نیز می تواند همواره به هر یک از این مؤلفه ها قابل تجزیه باشد. شکل (۶-۳) چند نمونه از این ارتعاشات مرکب یا بر هم نهاده شده را نشان می دهد. با متوقف ساختن ناگهانی حرکت عرضی تار در نقطه ای که گره چند حرکت هماهنگ در آنجا تشکیل شده می توان وابستگی متقابل این ارتعاشات را به یکدیگر نشان داد. این مؤلفه های ارتعاشات در نقطه ای از تار که وضعیت گره بر آن حاکم است موجب سکون یکدیگر شده اند. بنابراین، مثلاً اگر یکی از سیمهای پیانو با وارد آوردن ضربه ای بر آن با صدای بلند به ارتعاش در آید، و سپس همان سیم را در فاصله یک سوم طولش با دست محکم نگهداریم، همه ارتعاشات مؤلفه به استثنای هماهنگهای سوم، ششم و غیره که مضارب بسامد اصلی هستند متوقف می شوند.

به نظر می رسد که این اصل نا وابستگی و بر هم نهی در مورد مُدهای طبیعی گوناگون یک دستگاه ارتعاش کننده برای تحلیل آشفتگیهای پیچیده اهمیت اساسی دارد، و در حقیقت سنگ بنای تحلیل فوریه است. پدیده ای که در یک تار مرتعش نمایان گردید، نخستین بار

۳- ده نیوتون تقریباً  $2/2 \text{ Lb}$  است.

توسط **دانیل برنولی** در سال ۱۷۳۳، به روشنی مورد بحث قرار گرفته بود. از آنجا که یک تار واقعی وجود ندارد، ناوابستگی مدهای جدا از هم واقعاً کامل نیز وجود نخواهد داشت؛ هر چند در بعضی شرایط ممکن است خیلی نزدیک به آن باشد.



شکل ۶-۳ ارتعاشات مرکب یک تار، ترکیبی از مدهای ساده است. (اقتباس از D.C. Miller، دانش اصوات موسیقی، مک میلان، نیویورک، ۱۹۲۲.)

### ارتعاش هماهنگ و اداشته یک تار کشیده

همان گونه که در بالا دیده ایم، ارتعاشات آزاد یک تار که از دو طرف محکم نگهداشته شده است دقیقاً به بسامد اصلی و مضارب صحیح آن محدود می شود. ولی اکنون، درست همان طور که در فصل ۴ برای یک نوسانگر هماهنگ ساده عمل کردیم، واکنش تار را در قبال یک نیروی محرک تناوبی در نظر خواهیم گرفت. برای آنکه یک بحث ساده و کاملاً معین را مطرح کرده باشیم، فرض می کنیم که یک سر تار در  $x = L$  و سر دیگرش در  $x = 0$  محکم نگهداشته شده است و تار با بسامد زاویه ای دلخواه و دامنه  $B$ ، ارتعاشات عرضی دارد.

علاوه بر این، حل معادله (۵۶) در حالت پایا را به شکل زیر در نظر خواهیم گرفت:

$$y(x,t) = f(x) \cos \omega t$$



ولی اکنون از شرایط زیر پیروی می کند:

$$y(0, t) = B \cos \omega t$$

$$y(L, t) = 0$$

معادله پایه ای حرکت به صورت معادله (۴-۶) هم نوشته می شود که در آن  $f(x)$  باید تابع سینوسی  $x$  باشد. به همین جهت می توان نوشت:

$$f(x) = A \sin(Kx + \alpha)$$

بنابراین از معادله (۴-۶) می توان  $k = \frac{\omega}{v}$  را به دست آورد، در نتیجه داریم:

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{v} + \alpha\right)$$

این معادله، غیر از داشتن یک پارامتر قابل تعدیل  $\alpha$ ، درست نظیر معادله (۶-۶) است. بنابراین، با استفاده از شرط مرزی در  $x = L$  خواهیم داشت:

$$\sin\left(\frac{\omega L}{v} + \alpha\right) = 0$$

در نتیجه،

$$\frac{\omega L}{v} + \alpha = p\pi$$

در اینجا  $p$  یک عدد صحیح است. با استفاده از شرط مرزی در  $x = 0$ ، به دست می آوریم:

$$B = A \sin \alpha$$

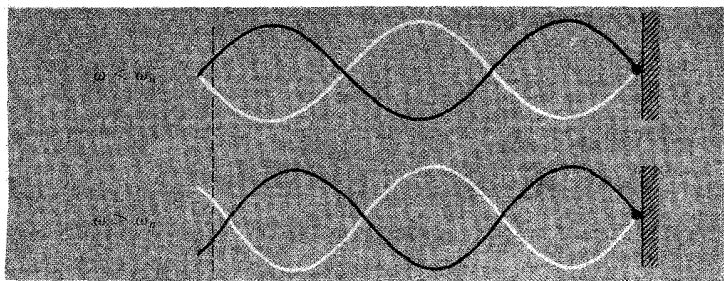
به همین جهت:

$$A = \frac{B}{\sin\left(p\pi - \frac{\omega L}{v}\right)} \quad (12-6)$$

مفهوم ضمنی این نتیجه آن است که، به ازاء یک دامنه معین جابه جایی واداشته در دو سر تار وقتی بسامد به یکی از بسامدهای طبیعی معادله (۶-۸) نزدیک است، واکنش تار خیلی بزرگ خواهد بود. در حقیقت دامنه واداشته، طبق معادله (۶-۱۲) به ازاء خود بسامدهای طبیعی، بینهایت بزرگ خواهد شد و به ازاء بسامدهای نزدیک به بسامد طبیعی وضعیت تا حدی در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. هرچند، می دانیم که وجود

نیروهای میران این نامحدودیت‌های غیر واقعی را از بین خواهد برد، و به ازاء  $\omega \approx \omega_n$  بسادگی خواهیم داشت:  $\frac{A}{B} \gg 1$ .

اهمیت نتیجه بالا در آن است که با یک دامنه واداشته کوچک می توان وقوع یک واکنش بزرگ را در نقطه ای که به گره یکی از ارتعاشات طبیعی نزدیک است، انتظار داشت. روشن است که گره نمی تواند دقیقاً در آن نقطه باشد، زیرا بنابر تعریف در آنجا حرکت تحمیل شده است. از این گذشته، در هر دستگاه حقیقی، نوع واکنش دامنه بزرگ که در شکل (۴-۶) نشان داده شده، فقط پس از استفاده از نیروی محرک تناوبی کوچک در چند دوره تناوب ارتعاش مصداق دارد. برای تزریق ناگهانی انرژی به درون دستگاهی که انرژی زیاد آن با دامنه ارتعاش مشدد نمایش داده می شود روش سحر آمیزی وجود ندارد. این پدیده به رشد تدریجی یک نوسانگر میرا، واداشته شباهت بسیار زیادی دارد. مرحله زود گذر آن در شکل [۴-۱۱(ج)] نشان داده شده است.



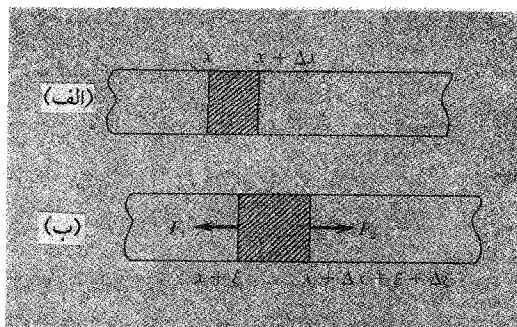
شکل ۴-۶ پیکربندی های تار واداشته با بسامدی پایین تر و بالاتر از بسامد طبیعی یک مُد طبیعی ارتعاش.

[هرکسی که این (مبحث) را بخواند، هم چنین کسی که با ساخت پیانوها آشنا باشد، احتمالاً درک این موضوع برایش قدری پیچیده است، و شاید بخوبی نداند که چگونه ممکن است یک تار در محل گره یا نزدیک به آن واکنش یک مشدد را داشته باشد. برای آن است که در عمل می توان چکش پیانو را در نقطه ای بر روی یکی از سیمها وارد آورد که فاصله اش تا نقطه ثابت شده سیم در حدود یک هفتم کل طول آن باشد. هدف و اثر این کار جلوگیری از بروز صدای ناخوشایند هماهنگ هفتم است، نه پروراندن آن. همان گونه که در تحلیل بالا نیز به این نکته اشاره شده است. در نقطه ای که جابه جایی آن صفر نیست، گره یک هماهنگ معین نمی تواند دقیقاً در آن نقطه باشد. هرگاه تک ضربه ای (در خلاف جهت حرکت

واداشته تناوبی) برتار وارد آید، موجب برانگیختگی ارتعاش طبیعی ویژه دستگاه می شود. [ تا اینجا درباره چگونگی اصولی ارتعاشات آزاد و واداشته تار مطالبی ارائه شد، اکنون در صدیدیم چند دستگاه دیگر را که بیانگر همان نوع رفتارند معرفی کنیم.

### ارتعاشات طولی یک میله

وقتی به انتهای یک میله فلزی در امتداد طول میله ضربه ای وارد آید، ارتعاشات با بسامدهایی تولید می شود که با صدای بلند کاملاً شنیدنی است. اگر میله به طور مناسب - مثلاً با گیره نازکی از وسطش - نگهداشته شود، ارتعاشات برای مدتی ادامه دارد. Q دستگاه، اختصاصاً در حالت پایین ترین بسامدهای طبیعی ممکن، کاملاً بالاست، و احتمالاً در بعضی حالات به طور غیر منتظره ای آهنگی یکنواخت ایجاد می شود. ما در فصل ۳، درباره خواص این نوع دستگاه، در ارتباط با مساله جسم آویخته به فنر به طور اختصار بحث کردیم و به این نتیجه رسیدیم که بسامد طبیعی ارتعاش باید با  $\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$  متناسب باشد، در اینجا  $Y$  مدول یانگ و  $\rho$  چگالی است. اکنون وضعیت را به طور دقیقتری بررسی می کنیم. مسئله واقعاً شباهت بسیار زیادی به فنر کشیده دارد، با این تفاوت که این تشابه را به بخوبی می توان تجسم کرد زیرا جابه جایی به جای آنکه عرضی باشد در همان جهت  $X$  است. برای نشان دادن جابه جایی هر ذره میله، که در وضعیت تعادل اولیه و در فاصله  $X$  است، از نشانه  $\xi$  استفاده خواهیم کرد، در این صورت فرض می کنیم در مقطع مورد نظر ثابت آهنگ حرکت دائماً ثابت است. در نتیجه معادله حرکت را در برش نازکی از میله در نظر



شکل ۵-۶ (الف) میله سنگین. (ب) میله سنگین پس از جابجایی طولی در شرایط نایستا. مقاطع هاشور زده (ب) و (الف) حاوی مواد یکسانند.

می گیریم که در حالت آشفته‌گی نیست و بین  $x$  و  $x + \Delta x$  واقع است [شکل ۵-۶ (الف)]. بنابراین همان گونه که در شکل ۵-۶ (ب) مشخص گردیده است (البته نمایش جابه جاییها بسیار مبالغه آمیز است)، ماده نشان داده شده در شکل یک جا انتقال یافته و کشیدگی نیز پیدا کرده است. این مقطع با نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  در خلاف جهت یکدیگر کشیده شده است. ضمناً اندازه  $F_1$  به تغییر جزئی فواصل بین اتمی در  $x$  بستگی دارد. به همین نحو  $F_2$  نیز به تغییر جزئی فواصل بین اتمی در  $x + \Delta x$  بستگی خواهد داشت. این نیروها به طور کلی مخالف یکدیگرند. در هر حال ماده محصور در میان گیره در حالت تنش است و تغییر شکل جزئی پیدا می کند، اندازه میانگین این تنش را روی هم رفته می توان بر حسب کشش تعیین کرد. طول گیره (در آغاز  $\Delta x$ ) به اندازه  $\Delta \xi$  زیاد می شود، در نتیجه

$$\text{کشش میانگین} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$$

$$\text{تنش میانگین} = Y \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$$

اکنون بر این باوریم که تنش را در نقطه ای<sup>۴</sup> با مختصات ویژه  $x$  که اندازه اش  $Y \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$  است می توان تعیین کرد، سپس، اندازه تنش را برای نقطه ای دیگر که به اندازه  $\Delta x$  دورتر از اولی است به دست آورد. به این ترتیب داریم:

$$(\text{تنش در } x + \Delta x) = (\text{تنش در } x) + \frac{\partial (\text{تنش})}{\partial x} \Delta x$$

بنابراین، اگر سطح مقطع عرضی میله  $\alpha$  باشد، خواهیم داشت:

$$F_1 = \alpha Y \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$F_2 = \alpha Y \frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x$$

و در نتیجه

$$F_2 - F_1 = \alpha Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x$$

۴- توجه داشته باشید که از مشتق جزئی باید استفاده کرد، زیرا تنش در نقطه معین  $x$  با تغییر می کند.

می توان تصور کرد که بخش دشوار محاسبه مربوط به دو سر میله است. اکنون قانون نیوتن را برای لایه ای از میله که بین  $x$  و  $x + \Delta x$  است به کار می بریم. اگر چگالی  $\rho$  و جرم لایه  $\rho \alpha \Delta x$  باشد. شتاب آن مشتق دوم جابه جایی نسبت به زمان است، یعنی مشتق دوم  $\xi$  در حدی که  $\Delta x$  کوچک باشد و به سمت صفر میل کند [به شکل ۵-۶ (ب) مراجعه کنید]. در نتیجه داریم:

$$\alpha Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x = \rho \alpha \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (۱۳-۶)$$

که با جاگذاری  $v = \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$  ساده شده است. پس این رابطه دقیقاً شبیه معادله (۶-۲) است، که برای تار کشیده داشتیم، و می توان انتظار داشت که پاسخهای کلی به صورت زیر باشد:

$$\xi(x, t) = f(x) \cos \omega t \quad (۱۴-۶)$$

البته تفاوت مهم در شرایط مرزی وجود دارد. زیرا در بیشتر موارد هر دو سر میله ثابت نخواهد بود. میله را گرچه می توان از دو طرف محکم نگهداشت، ولی معمولاً آن را از یک طرف با گیره نگه می دارند و طرف دیگر را رها می کنند، یا از وسط آن را با گیره محکم می گیرند و هر دو سر میله آزاد است.

ما درست حالتی را در نظر می گیریم که یک سر میله ثابت است. با این کار زودتر به نتیجه می رسیم، و ارتعاش میله که نظیر نوسان یک فنر سنگین (فصل ۳) است، توجه ما را جلب خواهد نمود. اگر طرف ثابت (میله) در  $x = 0$ ، و طرف آزاد در  $x = L$  باشد، در آن صورت معادله (۱۳-۶) تغییرات سینوسی  $\xi$  را با  $x$  در هر لحظه در بردارد و در نتیجه می توان نوشت:

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) \quad (۱۵-۶)$$

کاملاً نظیر معادله (۶-۶).

شرط لازم در طرف  $x = L$  آن است که سر آزاد میله باید در آنجا باشد. در اصطلاح فیزیکی این بدان معناست که در آنجا تنش صفر است. به ماده مجاور یک سر میله که با گیره درگیر است فشار وارد می آید، و برعکس ماده مجاور، سر آزاد میله شتابدار می شود. بنابراین، در

$x = L$  ، داریم :

$$F = \alpha Y \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

از معادلات (۶-۱۴) و (۶-۱۵) این نتیجه را می گیریم که

$$\cos\left(\frac{\omega L}{v}\right) = 0$$

یا

$$\frac{\omega L}{v} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (۶-۱۶)$$

در این رابطه  $n$  عددی صحیح<sup>۵</sup> و مثبت است . بنابراین بسامدهای طبیعی میله از رابطه زیر به دست می آید :

$$v_n = \frac{(n - \frac{1}{2})v}{2L} = \frac{n - \frac{1}{2}}{2L} \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۶-۱۷)$$

با استفاده از شرط ضمنی معادله (۶-۱۶) ، می توان دید که طول میله باید مضرب صحیحی از ربع طول موج منحنیهای سینوسی باشد . سه مُد اولیه (پایین ترین) میله به طور نمایشی در شکل (۶-۶) نشان داده شده است ، ولی به یاد داشته باشید که جابه جاییها واقعاً طولی هستند نه عرضی . بسامد پایین ترین مد چنین میله ای که یک سرش با گیره نگه داشته شده است از رابطه زیر به دست می آید :

$$v_1 = \frac{1}{4L} \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۶-۱۸)$$

مثلاً، برای یک میله آلومینیومی به طول یک متر و مشخصات زیر، خواهیم داشت :

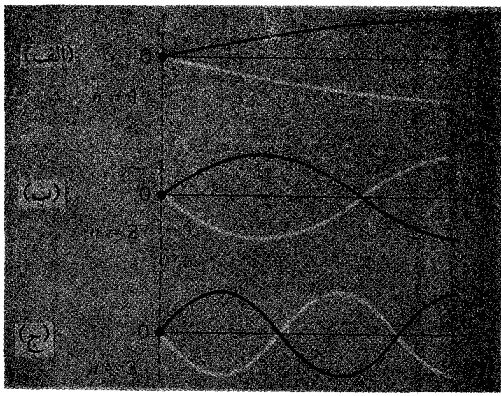
$$Y \approx 6 \times 10^{10} \text{ kg.m}^{-1}.\text{sec}^{-2}$$

$$\rho \approx 2770 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

پاسخی که برای بسامد به دست می آید.

$$v_1 \approx 1200 \text{ Hz}$$

۵- برای تعیین شماره مُدهای ۱، ۲، ۳ و غیره در معادله (۶-۱۶) ، استفاده از  $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$  رساتر از  $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  است.



شکل ۶-۶ مدهای طبیعی میله سنگینی که از یک طرف با گیره نگهداشته شده است. برای وضوح، جابه‌جاییهای طولی به گونه‌ای نمایش داده شده که گویی عرضی است.

مقایسه نتیجه دقیق معادله (۶-۱۸)، با آنچه که در فصل ۳ به دست آمده، جالب است. فرض می‌کنیم (به غلط) که اندازه‌های تنش و کشش در هر لحظه در تمام طول میله در حال ارتعاش یکسان باشد، در این صورت فرمول زیر را برای بسامد میله‌ای که یک سرش محکم نگه داشته شده است به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{3K}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi L} \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{غلط})$$

به جای ضریب  $\frac{1}{4}$  در معادله (۶-۱۸) باید داشته باشیم:  $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{1}{3/6}$ ، این ضریب باعث شده که بسامد در حدود ۱۰٪ بیشتر برآورد شود.

### ارتعاشات ستونهای هوا

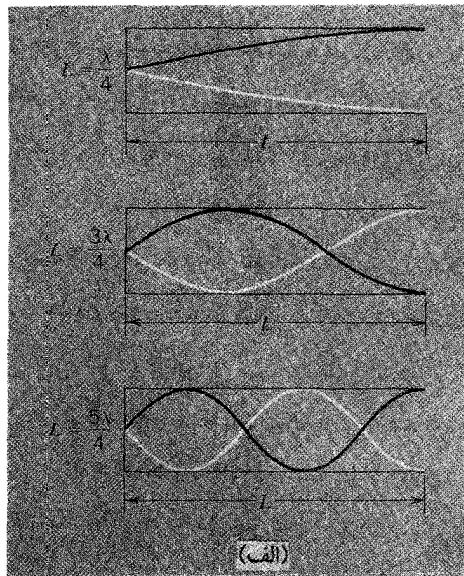
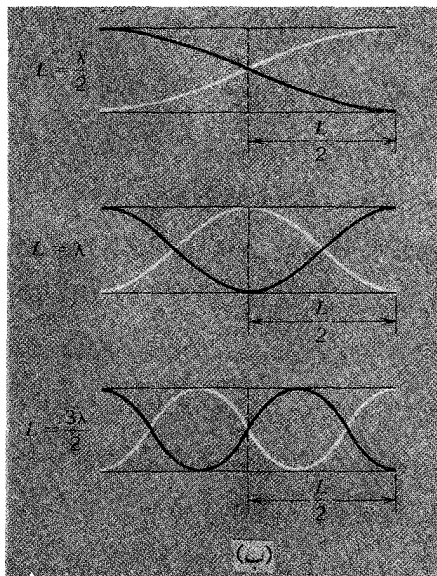
روشن است که یک ستون هوا، یا هر گاز دیگر تقریباً مانند یک میله جامد رفتار می‌کند، هریک از این دو (گاز یا جامد) کشسانی ذاتی خود را دارد، و مقایسه‌ای را که ما در فصل ۳ شروع کرده بودیم. در بحث حاضر می‌توانیم فشرده‌تر ادامه دهیم. با یک ستون هوای درون لوله که یک طرف یا هر دو طرفش باز باشد تمام مدهای ارتعاشی

را می توان به دست آورد. در طرف باز لوله (تقریباً در هر حالت) ، هنگامی که هوای درون لوله در نوسان است شرط تغییر فشار صفر و حرکت بیشینه هوا حکمفرماست. در طرف دیگر لوله که بسته است (بر عکس) حرکت صفر و تغییر فشار بیشینه است. اگر هوا درون لوله ای که یک طرفش بسته و طرف دیگرش باز است به ارتعاش درآید ، مُد ارتعاش و بسامد آن به کمک یکی از اوضاعی که در شکل [۶-۷ (الف)] نمایش داده شده است تعیین می شود. در همه آنها می بینیم که در یک طرف گره و در طرف دیگر پادگره [= شکم] تشکیل شده است. ولی اگر هر دو طرف لوله باز باشد همان گونه که در شکل [۶-۷ (ب)] نشان داده شده است ، در هر دو طرف پادگره تشکیل می شود. بنابراین بسامدهای ممکن برای یک لوله یک طرف بسته با طول معین شامل همه مضارب صحیح بسامد پایتترین مُد لوله - نخستین نمودار در شکل ۶-۷ است. مضارب فرد همگی به لوله بسته تعلق دارد، و مضارب زوج مربوط به لوله باز است. باید دانست که در لوله دو سر باز ، مُد ها ، یک در میان (آهایی که یک گره در وسط دارند) نظیر مُدهای لوله بسته به طول  $\frac{L}{4}$  ، تشکیل شده اند. هم چنین می توان یادآور شد که یک لوله دو سر بسته همان مجموعه بسامدهای طبیعی لوله دو سر باز را دارد. با این تفاوت که وضعیت گره ها و پادگره ها در آنها متناوباً عوض می شود<sup>۶</sup>.

---

۶- ارتعاشات ستونهای هوا در سازهای بادی موسیقی فعلی با موشکافیهای زیادی همراه است که در این مبحث حتی به آن اشاره هم نشده است. نمونه های اصلی مُد همان گونه که در اینجا بر شمرده شده خیلی زیاد است. یک لوله صوتی معمولاً مانند لوله اُرگ ، همواره در دهانه اش (در انتهای لوله) پادگره تشکیل می شود. و سر دیگرش ممکن است بسته یا باز باشد. یک فلوت اساساً نظیر یک لوله باز اُرگ است ، ولی در سازهای زبانه ای (که شامل لوله ها و سازهای برنجی است ، لبها نظیر زبانه عمل می کند) طرف نزدیک به زبانه بسته است ؛ البته طرف دیگر لوله باز است. زبانه مانند عامل موثر در بسامد مشدد ستون هوا عمل می کند. این زبانه انرژی لازم را برای نقطه نزدیک شونده به گره جابه جایی تامین می کند و شباهت زیاد به فنی دارد که در یک طرف لوله نقش محرک را دارد. در هر حال اگر شما بخواهید در این زمینه و سایر مباحث جذاب فیزیک موسیقی اطلاعات بیشتری کسب کنید ، مطالعه کتابهای مشروح زیر را به عنوان نقطه آغاز می توان توصیه کرد: Arthur Benade ، شیپورها ، تارها و صداها ، Doublday (سریهای مطالعه علم) ، نیویورک ۱۹۶۰؛ Sir James Jeans ، علم و موسیقی ، انتشارات دانشگاه کمبریج ، نیویورک ، ۱۹۶۱؛ Jess J. ، Josephs ، فیزیک اصوات موسیقی ، Van Nostrand ، (Momentum Books) = کتابهای اندازه حرکت] ، نیویورک ، ۱۹۶۷؛ John Backus ، مبانی صوتی موسیقی ، w.w. Norton ، نیویورک ، ۱۹۶۹.





شکل ۶-۷ (الف) سه مد طبیعی اوکیه لوله ای که فقط از یک طرف باز است . (ب) سه مد طبیعی اوکیه که از هر دو طرف باز است .

## کشسانی یک گاز

توضیحات قبلی به ما اجازه می داد که بسامدهای نسبی یک ستون هوا را تعیین کنیم . ولی اکنون بسامد مطلق را برای یک ستون گاز با طول معین در نظر می گیریم . اساساً علاقه مندییم از سرعت  $v$  که در معادله دیفرانسیل پایه ظاهر می شود ارزیابی صحیحی - درست نظیر معادله (۶-۱۳) به عمل آوریم . برای این کار ، در مورد گازها باید از یک مدول کشسانی مناسب ،  $K$  به جای مدول یانگ ،  $Y$  ، استفاده کنیم . در فصل ۳ به مدول یک گاز ، که از معادله زیر تعیین می شد اشاره کردیم :

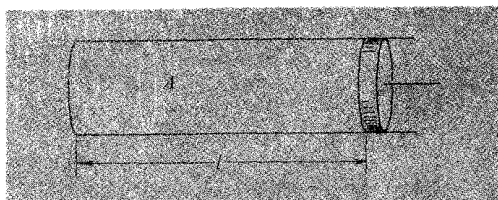
$$K = -V \frac{dp}{dV}$$

در مورد نوسانات یک گاز یادآور شدیم که تغییرات  $p$  و  $V$  در شرایط بی در رو (آدیاباتیک) شرایطی که گرما به داخل یا خارج گاز منتقل نشود رخ می دهد و چون در این تحول دما زیاد و کم می شود ، به همین جهت قانون بویل آن را در رابطه بین  $p$  و  $V$  دخالت نداده است .

اینک محاسبه روشنی انجام خواهیم داد.

فرض کنیم لوله ای با سطح مقطع عرضی  $A$  و طول  $l$  به وسیله پیستونی بسته شده و حاوی گازی با فشار  $p$  و چگالی  $\rho$  است [شکل (۶-۸)]. طبق نظریه جنبشی برای یک گاز حقیقی، فشار از رابطه زیر به دست می آید:

$$P = \frac{1}{3} \rho v_{r.m.s}^2 \quad (۶-۱۹)$$



شکل ۶-۸ لوله با پیستون

در این رابطه  $v_{r.m.s}^2$  سرعت مربعی میانگین<sup>۷</sup> مولکولهاست. اگر جرم گاز درون لوله  $m$  باشد. معادله (۶-۱۹) را به شکل زیر می توان بازنویسی کرد:

$$p = \frac{m}{3Al} v_{r.m.s}^2$$

اگر انرژی جنبشی کل انتقالی  $E_k$  همه ذرات را دخالت دهیم رابطه را می توان به شکل ساده تری نوشت:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{r.m.s}^2$$

پس از جاگذاری خواهیم داشت:

$$p = \frac{2}{3A} \frac{E_k}{l} \quad (۶-۲۰)$$

اکنون حرکت پیستون را در نظر خواهیم گرفت، که موجب تغییر فشار در سراسر ستون گاز می شود. پیستون با این حرکت کاری بر روی گاز انجام می دهد و این کار در درون گاز محفوظ می ماند و در نتیجه انرژی داخلی گاز تغییر می کند. نیروی لازم که موجب تراکم گاز می شود اساساً مساوی  $pA$  است. بر اثر کاری که بر روی گاز انجام می شود، تغییر

۷- پسونده r.m.s به جای Root mean square یعنی ریشه میانگین مربعی.

طول  $\Delta l$  در ستون گاز پدید می آید که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta W = -pA\Delta l$$

بنابراین، اگر  $\Delta l$  منفی باشد این کار مثبت است، اگر فرضاً این کار منحصرأ صرف افزایش انرژی جنبشی انتقالی مولکولها شود، داریم:

$$\Delta E_k = -pA\Delta l \quad (۲۱-۶)$$

از آنجا که تغییر طول  $\Delta l$  با تغییرات  $p$  و  $E_k$  (هر دو) همراه است، با مشتق گرفتن از معادله (۲۰-۶) خواهیم داشت:

$$\Delta p = \frac{۲}{۳A} \left( \frac{۱}{l} \Delta E_k - \frac{\Delta l}{l^2} E_k \right)$$

در نتیجه

$$\Delta p = \frac{۲}{۳Al} \Delta E_k - \frac{\Delta l}{l} \left( \frac{۲}{۳A} \frac{E_k}{l} \right)$$

ولی به کمک معادلات (۲۰-۶) و (۲۱-۶) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{۲}{۳Al} (-pA\Delta l) - \frac{\Delta l}{l} (p) \\ &= \frac{۵}{۳} p \frac{\Delta l}{l} \end{aligned}$$

چون سطح مقطع عرضی ستون گاز ثابت فرض شده است، می توان اندازه  $\frac{\Delta l}{l}$  را با تغییرات

نسبی حجم  $\frac{\Delta V}{V}$  برابر دانست، در نتیجه داریم:

$$K_{(بی دررو)} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{۵}{۳} p \quad (۲۲-۶)$$

این  $k$  را می توان با مدول کشسانی تکدما، که دقیقاً مساوی  $p$  است (فصل ۳ را ببینید)، مقایسه کرد. سرعت  $x$  به کمک این اندازه بی در رو  $K$  طبق رابطه زیر به دست می آید:

$$v = \left( \frac{1/667p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

این عبارت برای بعضی گازها، ولی نه همه - و نه برای خود هوا، واقعاً کارآیی دارد. برای رسیدن به این نتیجه، چه مراحل را باید طی کرد؟ این مراحل عبارتند از نخست آنکه کار انجام شده بر روی گاز ضمن مترکم ساختن آن موجب افزایش انرژی گاز می شود، و گرمای تولید شده را به ماده پیرامون خود می دهد. دوم آنکه این انرژی در درون گاز کاملاً محفوظ می ماند و انرژی جنبشی انتقالی مولکولها را بالا می برد، بعلاوه بخشی از آن باعث افزایش انرژی حرکات داخلی مولکولها می شود.

به نظر می رسد نخستین شرط برای ارتعاشات صوتی در همه گازها صادق باشد. دومین شرط، گرچه فقط برای مولکولهایی کارآیی دارد که واقعاً مانند توپهای سفت بیلیارد رفتار کنند - ولی منظور مخصوصاً اشاره ای به گازهای یک اتمی  $A, Ne, He$  و غیره است. در مورد سایر گازها، از جمله هوا، مقدار کار انجام شده بر روی (به وسیله) گاز، موجب می شود که میزان چرخش یا ارتعاش ذاتی مولکولها تغییر کند. در نتیجه، به ازاء تغییر معینی، تغییر انرژی جنبشی انتقالی - که فشار را طبق معادله  $(6-20)$  تعیین می کند - کمتر از مقداری است که محاسبه نشان می دهد، و به همین جهت، همان گونه که در فصل ۳ گفتیم، کشسانی یک گاز در ارتعاش بی در رو به صورت زیر نوشته می شود:

$$K_{\text{بی در رو}} = \gamma p \quad (23-6)$$

$$1 < \gamma \leq \frac{5}{3} \quad \text{در اینجا}$$

اندازه  $\gamma$  برای هوا نزدیک به  $1/40$  به دست آمده است، برای هوا در دمای اتاق و فشار متعارفی داریم:

$$p \approx 1/0 \times 10^5 \text{ N.m}^{-2}$$

$$\rho \approx 1/2 \text{ kg.m}^{-3}$$

بنابراین، مثلاً اگر لوله ای داشته باشیم به طول یک متر که یک طرفش بسته باشد، بسامد پایین ترین مُد آن با استفاده از معادله  $(18-6)$  به دست می آید:

$$v_1 = \frac{1}{4L} \left( \frac{\gamma p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 84 \text{ Hz}$$

در بخشهای پیشین بحث کرده بودیم که ارتعاشات طبیعی انواع گوناگون دستگاههای فیزیکی مدهای طبیعی نامیده می شوند، و فرض کردیم که این دستگاهها صرفنظر از تفاوتهایی جزئی مشترکاتی به شرح زیر دارند:

۱. هر دستگاه واقعاً یک بعدی و با طولی محدود در نظر گرفته شده است.
  ۲. هر دستگاه از لحاظ ساختاری پیوسته و یکنواخت در نظر گرفته شده است.
  ۳. هر دستگاه در پایانه هایش از شرایط مرزی پیروی کرده است.
  ۴. هر دستگاه با نیروهای برگرداننده متناسب با جابه جایی از وضع تعادل کنترل شده است.
- هر دستگاهی که مجموعه مدهای ارتعاشی مشخص را دارا باشد از این شرایط پیروی می کند. هر مد با یک شماره  $n$ ، یک بسامد  $\nu_n$  و یک طول موج  $\lambda_n$  مشخص می شود. این مشخصه اخیر با طول  $L$  دستگاه و شماره مد رابطه ساده ای دارد. هم چنین به این نتیجه رسیده ایم که بسامدهای اختصاصی در هر دستگاه معین به طور خطی تغییر کرده اند. بنابراین می خواهیم در باره این نتایج چند سؤال را مطرح کنیم:

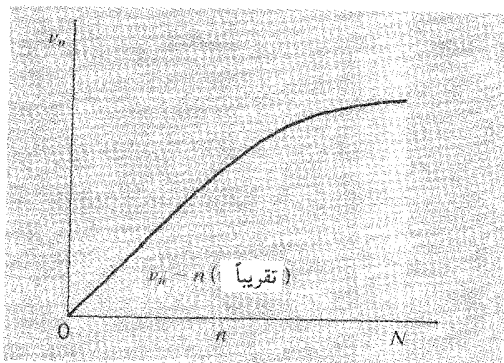
نخست، اینکه یک دستگاه معین چند مد متفاوت می تواند داشته باشد؟ اگر کسی روش تحلیل ما را از مساله بپذیرد، به این نتیجه می رسد که تعداد مدهای مشخص ظاهراً نامحدود است. آیا این امر واقعیت دارد؟ نه کاملاً، اگر شما بحث فصل اخیر را از ابتدا تا انتها دنبال کرده باشید، بخوبی دریافته اید که  $N$  ذره بر هم کُنشگر واقع در یک خط در مجموع دارای  $N$  مد ارتعاش طبیعی متفاوت از یک نوع معین (صرفاً عرضی یا صرفاً طولی) هستند، مثلاً، میله ای به طول  $m$  ۱، از رشته اتمهایی جدا از یکدیگر ساخته شده که فاصله شان از هم در حدود  $10^{-10}$  است. بنابراین چنین میله ای به جای بینهایت زیاد مد، فقط در حدود  $10^{10}$  مد طبیعی خواهد داشت. ولی البته  $10^{10}$  عدد فوق العاده بزرگی است و از نظر فیزیکی در بیشتر موارد تقریباً بینهایت در نظر گرفته می شود. هر چند، نکته اصلی آن است که ما بتوانیم مجموعه ای کامل، یا طیفی از تمام مدهای ممکن الوقوع یک دستگاه را در نظر بگیریم و مطمئن باشیم که شماره  $n$  شامل تمام مدهای ممکن الوقوع از ۱ تا  $N$  یا از ۱ تا  $\infty$  است که همه آنها را شماره گذاری کرده ایم.

دوم، اینکه طول موجهای ارتعاشات ساکن (مانا) بر روی یک دستگاه یک بعدی یکنواخت با طول معین  $L$  چه اندازه اند؟ پاسخ این پرسش به شرایط مرزی بستگی دارد. ما به حالتی

توجه خاص خواهیم داشت که جابه جایی در دو طرف دستگاه صفر است. در این حالت دیدیم که طول موج مخصوصاً از رابطه ساده ای به دست می آید - معادله (۶-۹):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

این طول موج یک نتیجه صرفاً هندسی است، از آن جهت که فقط به شکل معادلات حرکت بستگی دارد، و با کمّیاتی نظیر کشسانی و چگالی محیط هیچگونه رابطه مستقیمی ندارد. این طول موج به ازاء هر یک از اندازه های  $n$  کاملاً مشخص است.



شکل ۶-۹ تغییر بسامد مد با شماره مد تا بیشترین بسامد ممکن برای یک دستگاه یک بُعدی. در سطح هاشور زده رابطه بین  $v_n$  و  $n$  خیلی نزدیک به خطی است.

سوم، اینکه بسامد مدهای طبیعی در چه حدودند؟ آیا رابطه خطی  $v_n$  با  $n$  که به نظر می رسد برای چند دوازده هماهنگ نخستین صدق کند و تنها در پدیده های صوتی حائز اهمیت است، برای مدهای خیلی بالا هم برقرار است؟ حتماً به یاد خواهید آورد که برای دستگاهی با هر دو سر ثابت، قبلاً نتیجه ساده ای - معادله (۶-۸) را به دست آوردیم:

$$v_n = \frac{nv}{2L}$$

در این رابطه  $v$  سرعتی است که منحصرأ با استفاده از خواص لختی و باز گرداننده محیط تعیین می شود. ولی این تناسب ساده  $v_n$  با  $n$  به طور کلی صحّت ندارد. برای یک دستگاه

ساده‌ی یک بُعدی، آهنگ افزایش بسامد از آهنگ تسلسل شماره‌مد کمتر است تا اینکه در بالاترین شماره‌مد ممکن، بسامد به حدی می‌رسد که در شکل (۹۶) نشان داده شده است<sup>۸</sup>. بنابراین دستگاه قادر نیست با هر بسامدی، که بیش از بسامد مربوط به این حد باشد، ارتعاش کند. در یک دستگاه یک بُعدی نمونه توضیح داده ایم که ارتباط این پدیده با تعداد ذرات شرکت کننده در حرکت - که به طور نامحدود بزرگ نیست - چگونه است. در واقع تناسب  $v_{II}$  با  $n$  یک نتیجه نسبتاً اختصاصی است، به طور کلی هر وقت با دستگاههای دو و سه بُعدی<sup>۹</sup> سر و کار داشتیم، قادر به این نتیجه گیری نیستیم. با وجود این، شکل اصلی یک دستگاه یک بُعدی معین، با شرایط مرزی ویژه - که دارای مجموعه قابل شمارش (حتی اگر نامحدود) مدهای طبیعی مشخص ارتعاش است - محفوظ می ماند اکنون می خواهیم این بحث کلی مدهای طبیعی را با بیان دو مطلب، که مخصوصاً اهمیت زیادی دارد و پیش از این هم به آن اشاره شده است، به پایان برسانیم:

۱. شرایط مرزی در این حالت شامل حال دو سر یک دستگاه یک بُعدی است که در تعیین مشخصات مدهای طبیعی نقش قاطع و سرنوشت سازی را ایفا می کند.
۲. در معادلات حرکت پایه ای خطی مفروض، هر یک یا همه مدهای طبیعی ارتعاش می توانند با اندازه های نسبی دامنه و فاز با هم وجود داشته باشند.

### مدهای طبیعی یک دستگاه دو بُعدی

اکنون بر می گردیم و با نظر اجمالی مدهای طبیعی دستگاههایی را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم که نظیر یک ورقه کشسان کشیده شده یا یک صفحه فلزی نازک اساساً دو بُعدی است. تشخیص شرایط مرزی نظیر دستگاههای یک بُعدی است. اصولاً حرکات مجاز در لبه های اطراف هر صفحه به چند رده مخصوص محدود می شود: مدهای طبیعی با شرایط مرزی بیان شده سازگارند صفت بارز مدهای طبیعی ممکن است تقارنهای مشخص بسیار زیبایی باشد که یک دستگاه فیزیکی معین داراست.

۸- برای کسب اطلاع بیشتر به فصل ۵ برگردید.

۹- حتی در یک دستگاه یک بُعدی که از لحاظ ساختاری مانند دستگاه پیوسته رفتار می کند، اگر یکنواخت نباشد رابطه بین بسامدهای مد کاملاً متفاوت است - مثلاً یک سیم کشیده که ضخامتش از یک سر تا سر دیگر به طور یکنواخت زیاد شود، یا [همان گونه که در شکل (۱-۵) نشان داده شده] یک زنجیر یکنواخت که در راستای قائم آویزان است، کشش از بالا به طرف پایین به طور پایا کاهش پیدا می کند.

در ساده ترین حالت می توان یک پوسته مستطیل شکل ارتعاش کننده ای را در نظر گرفت برای آنکه این پوسته (دو بُعدی) وضعیتی مشابه با حالت یک بُعدی تار مرتعش پیدا کند، لبه های بیرونی پوسته را ثابت نگه می داریم تا مدهای طبیعی حاصل به کمک سینوسها و کسینوسهای مشروح زیر قابل توصیف باشد:

$$z(x, y, t) = C_{n_1 n_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_y}\right) \cos \omega_{12} t$$

در این عبارت بسامدهای مد طبیعی عبارت است از: (۶-۲۴)

$$\omega_{12} = \left(\frac{S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{n_1 \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{L_y}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

در اینجا

$S$  = (کشش سطحی) یکای طول / نیرو

$\sigma$  = یکای سطح / جرم

$n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$

$L_x, L_y$  = طولهای اضلاع پوسته

این معادله ممکن است کمی دشوار به نظر برسد، ولی در مقایسه با معادله مدهای طبیعی تار کشیده شده، از لحاظ ساختاری روشن و بی پیرایه است:

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t$$

در این رابطه

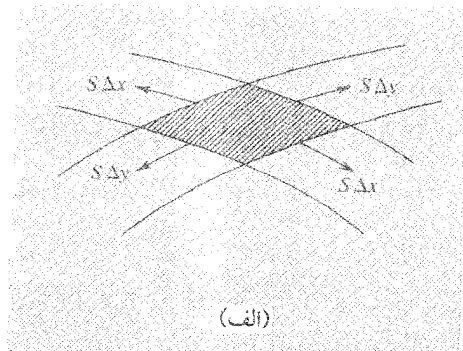
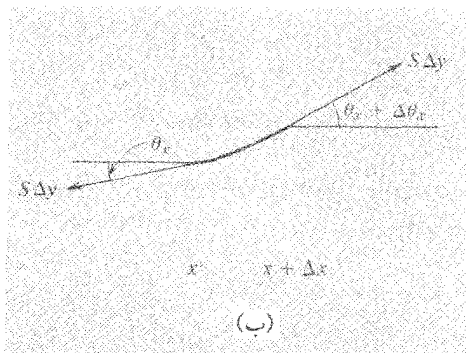
$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

حاصلضرب توابع سینوسی در معادله (۶-۲۴) تضمین می کند که جابه جایی  $Z$  در طول مرزها همواره صفر شود، و اندازه  $\omega$  به جای یک عدد با دو عدد صحیح مشخص گردد. بنابراین می توان پوسته کامل را مانند مجموعه ای تار تصور کرد که همگی به موازات



یکدیگر، در راستای (مخروطی) کشیده شده اند و شرط طول موج برای پوسته در همان راستا برقرار است. بعلاوه باید این تارها را به صورت خطوط موازی بار استای  $y$  که از عرض به هم چسبیده اند در نظر گرفت، به طوری که شرط طول موج بین  $y = L_y$  و  $y = 0$  در مورد تارهای خیالی اخیر هم صادق باشد. برای پی بردن به دینامیک واقعی این تارها (عمود بر هم فرض شده)، قطعه کوچک مستطیل شکلی از پوسته را با ابعاد اختیاری  $x$  و  $y$  در نظر می گیریم [شکل ۶-۱۰ (الف) را ببینید]. کشش سطحی  $S$  را می توان مانند نیروی مؤثر معینی در نظر گرفت که بر واحد طول و عمود بر سطح وارد آید. بنابراین اگر قطعه منظور ما دارای لبه هایی به طولهای  $\Delta x$  و  $\Delta y$  باشد، نیرو در سطح  $xz$  در هر طرف  $S\Delta y$  است و نیرو در سطح  $yz$  در هر طرف  $S\Delta x$  خواهد بود. به این ترتیب جرم قطعه  $\sigma\Delta x\Delta y$  است. اکنون نیمرخ سطح  $xz$  را در نظر می گیریم، همان گونه که در شکل [۶-۱۰ (ب)] نشان داده شده، وضعیت درست به آنچه در شکل (۶-۲) دیدیم شباهت دارد. نیروی عرضی ناشی از انحنای پوسته در سطح  $xz$  از رابطه زیر تعیین می شود:

$$S\Delta y\Delta\theta_x = S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x\Delta y$$



شکل ۶-۱۰ (الف) نمودار نیرو برای سطح کوچک  $\Delta x\Delta y$  یک پوسته کشسان.

(ب) مقطع عرضی نمودار نیرو در سطح  $xy$

ولی پوسته در سطح  $yz$ ، نیز انحناء می یابد، نیروی ناشی از این انحناء از رابطه زیر به دست می آید:

$$S\Delta x\Delta\theta_y = S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta x\Delta y$$

نیروی کل مساوی مجموع این نیروهاست. و جرمی که شتابدار می شود  $\sigma \Delta x \Delta y$  است. در نتیجه معادله حرکت ( $ma = F$ ) می شود:

$$\sigma \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = s \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Delta x \Delta y$$

یا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{s} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (25-6)$$

این معادله بسط حرکت مستقیمی از معادله (۶-۲) است. با قبول اینکه ممکن است در آنجا ارتعاشات ساکن به شکل زیر وجود داشته باشد:

$$Z(x, y, t) = f(x)g(y) \cos \omega t$$

ما در معادلات (۶-۲۴) برای  $f$ ،  $g$  و  $\omega$  عبارات دقیق و کاملاً ساده ای آورده ایم. همان گونه که در مبحث اخیر گفتیم، بسامدهای مُد برای یک دستگاه دو بُعدی معمولاً نه به صورت روابط عددی ساده، حتی نه با ساده ترین شکل هندسی ممکن، مثلاً یک مربع نمایش داده نمی شود. از طرف دیگر، نقاطی که در هر لحظه  $t$  جابه جایشان صفر است خطوط گرهی - خطوط راست موازی اضلاع مستطیل - را تشکیل می دهند، ولی می بینیم که با روش بسیار ساده ای شرایط هندسی بر روی خطوط مرزی به کار بسته شده است.

در شکل (۶-۱۱) چند مُد یک مستطیل را - که از پایین ترین شروع شده - نشان داده ایم، این مستطیل تقریباً ولی نه کاملاً یک مربع است. طول اضلاع این مستطیل را  $1/0.5L$  و  $0/9.5L$  می گیریم که سطح تقریبی آن  $L^2$  است. بسامدهای ممکن را بهتر است به صورت رابطه زیر که مضارب بسامد  $\omega$  است، بنویسیم:

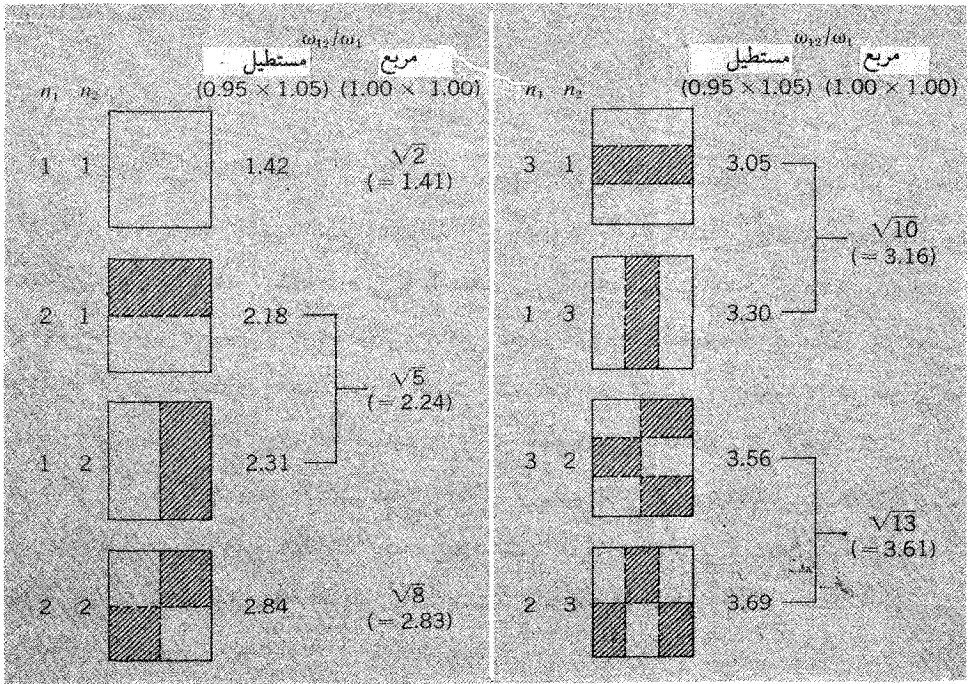
$$\left[ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{S}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L} \left( \frac{S}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

به این ترتیب، پوسته مربع شکل با ابعاد  $L$  می تواند با این پایین ترین بسامد ارتعاش کند، البته اگر لبه های روبرو ثابت و لبه های روبروی دیگر آزاد باشند. با استفاده از معادلات

(۶-۲۴)، بسامدهای مدهای طبیعی پوسته مستطیل شکل از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\omega_{1,2} = \omega_1 \left[ \left( \frac{n_1}{1/0.5} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{0/9.5} \right)^2 \right]^{1/2}$$

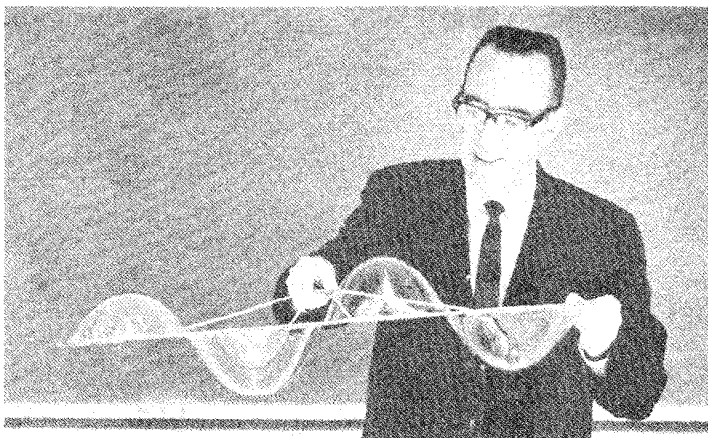
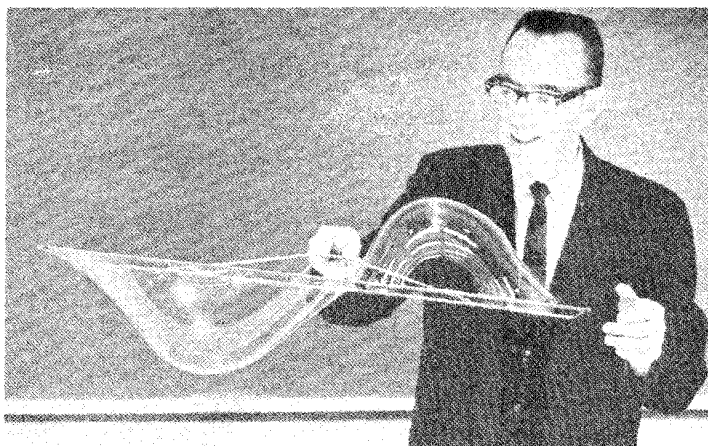
بر روی شکل (۶-۱۱) خطوط گرهی (مقاطع) هاشور زده نشان داده شده است، و بخشهایی از پوسته که در هر لحظه جابه جاییهای هم جهت دارند، در شکل مشخص گردیده است.



شکل ۶-۱۱ مدهای طبیعی سطح مستطیل تخت با مدهای طبیعی مربعی با همان سطح مقایسه شده است. جابه جاییهای سطوح هاشور زده (سایه دار) و سطوح روشن مختلف علامه بوده و بر صفحه نمودار نمودند، و در گذر از خطوط گرهی که با جابه جایی صفر است نشان داده می شود.

بسامدهای مدهای طبیعی برای یک پوسته کاملاً مربعی  $\sqrt{2}\omega_1$ ،  $\sqrt{5}\omega_1$ ،  $\sqrt{8}\omega_1$  و غیره خواهد بود. ما عمده پوسته را تقریباً ولی نه کاملاً مربعی انتخاب کرده ایم تا سیمای خوش منظر و مهم تشکیل شده نظر هر بیننده را به خود جلب کند. مشاهده می کنیم که مدهای مستطیل

شکل گرایش دارند جفت جفت به اندازه های  $\pi_1$  و  $\pi_2$  (اگر متفاوت باشند) رده بندی و معاوضه شوند. بسامدهای این مُدهای جفت شده کاملاً به هم شباهت دارند و به بسامدی منتهی می شوند که یک پوسته مربع شکل کامل آن را داراست. حالت حدی - مربع کامل - حالت تبهگن است. یک بسامد به تنهایی ممکن است مربوط به دو طرح ارتعاش باشد که از نظر هندسی متمایزند، و تعداد مُدهای طبیعی از تعداد بسامدهای مشخص بیشتر است. البته عامل و موجبات دیگری هم وجود دارد که در ارتعاشات یک پوسته مستطیل شکل ممکن است به حالت تبهگن درآید. اگر مثلاً نسبت  $\frac{L_x}{L_y}$  را بتوان به صورت نسبتی با اعداد صحیح

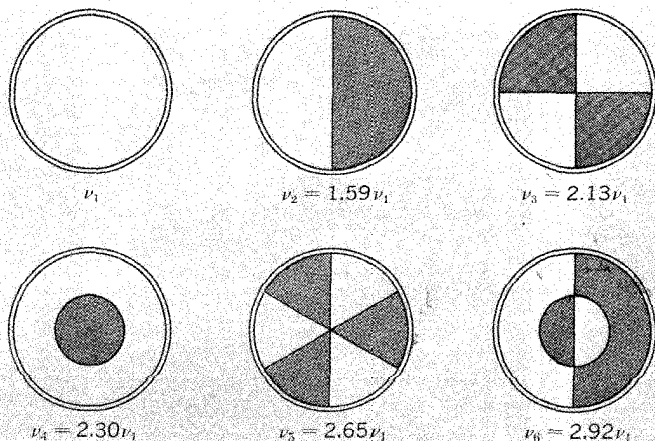


شکل ۶ - ۱۲ مُدهای طبیعی پرده نازک صابون (پروفیسور A. M. Hudson با استفاده از محلولی مرکب از مواد شوینده، گلیسرین و کمی شکر، پرده ای نازک با قدرت ویژه از جناب صابون را در معرض نمایش قرار داد.)

بیان کرد، در آن صورت دست کم دو مجموعه اعداد متفاوت  $(n_2, n_1)$  احتمالاً پیدا می شود که به یک بسامد یکسان منتهی خواهد شد. پدیده تبهگنی نه تنها در مکانیک کلاسیک، بلکه در دستگاههای اتمی و هسته ای نیز حائز اهمیت است. طرح اصلی کپلر نظیر مدل اتم هیدروژن بعدها توسط بوهر و سومر فلد گسترش یافت، و طرح به گونه ای به تصویر کشیده شده که الکترون در مدارهای «مجازی» معینی نه کاملاً دایروی که بوهر در آغاز مطرح کرده بود، بلکه بر روی مدارهای گوناگون بیضوی در حرکت است. باید دانست که مقدار اندازه حرکت زاویه ای الکترون در چرخش بر روی هر یک از این مدارها متفاوت است. بسیاری از این مدارهای مشخص با ساده ترین شکل نظریه یکسان بودن انرژی کل الکترون مطابقت دارند، ولی وقتی تعداد حالات قابل تشخیص یک الکترون در درون اتم را به حساب می آوریم می بینیم که در عمل بین انرژی کل الکترون در مدارها تفاوت مهمی وجود دارد.

پرده های نازک صابون بر روی یک قاب کوچک سیمی که خود بیانگر یک مرز سخت است، تشکیل می شود. با ارتعاش این پرده ها، مدهای طبیعی به طور واضح مشاهده می شود. شکل (۶-۱۲) دو مد یک پوسته مستطیل شکل را نشان می دهد که با این روش به دست آمده است.

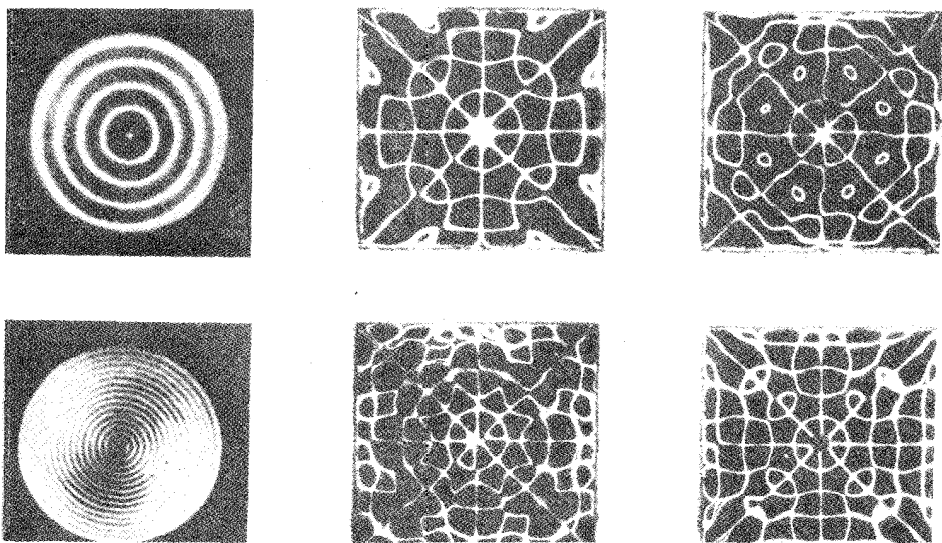
هنگامی که مرز دایروی شکل باشد. ارتعاشات به گونه بسیار مهم دیگری بر روی دستگاههای دو بعدی به دست خواهد آمد. اگر این مرز را دوباره به طور ثابت نگهداریم



شکل ۶-۱۳ مدهای طبیعی صفحه دایروی. جابه جایهای سطوح هاشور زده و روشن، نسبت به خطوط گرهی که از مرکز صفحه می گذرند، مختلف علامه اند.

مُد‌های طبیعی با آرایش متقارن به شکل دوایر هم مرکز و واقع در امتداد قطر آشکار می شود و تنوع سرشار ارتعاشات امکان پذیر است. در شکل (۶-۱۳)، پایین ترین شش مُد چنین دستگاهی نمایش داده شده است.

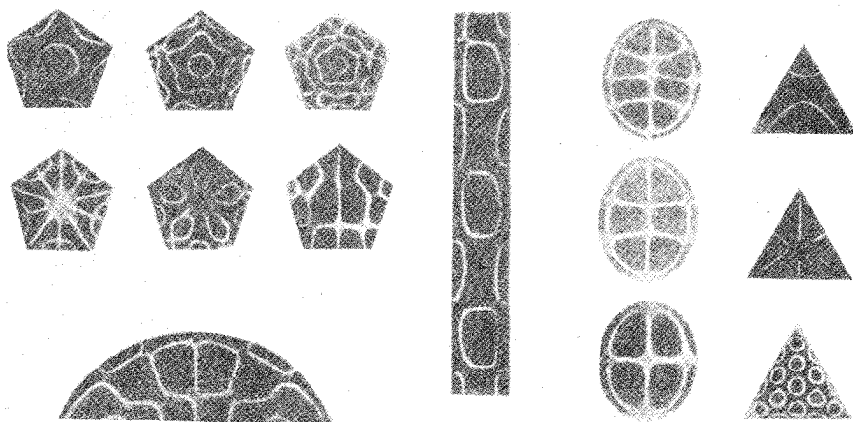
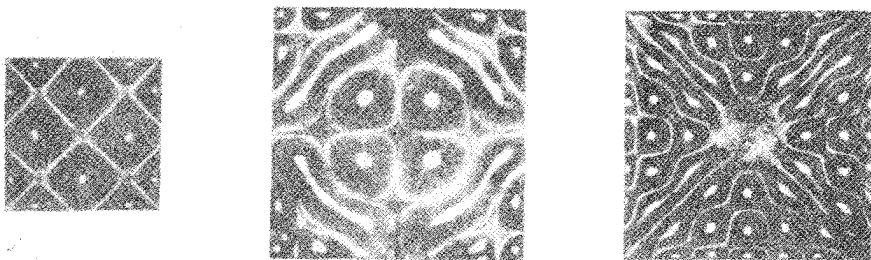
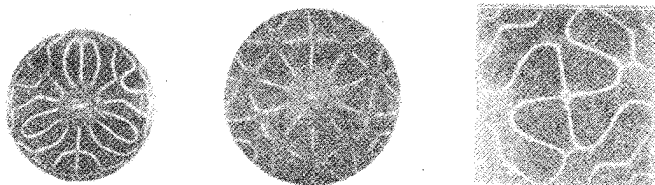
مُد‌های پیچیده تر دستگاه‌های مستطیلی و دایروی را در پرده های نازک کف و صابون می توان تشکیل داد، به این ترتیب که با گسیل بسامد مناسب از یک بلندگو، که نزدیک پرده هاست، آنها را به حرکات ارتعاشی مناسب واداریم. شکل (۶-۱۴) چند نمونه از این مُد‌ها را نشان می دهد؛ در این عکس خطوط سفید بازتابهای جابه جایی بیشینه اند نه خطوط گرهی. E.F. Chladni (۱۷۵۶ تا ۱۸۲۷)، برای نمایاندن ارتعاشات یک صفحه فلزی که در یک نقطه با گیره نگهداشته شده یا بر روی سه نقطه یا بیشتر متکی است، از یک روش ابتکاری استفاده کرده است.



شکل ۶-۱۴ جابه جایی بیشینه مُد‌های پرده های صابون. (عکسها از Ludwig Bergman، آنها را پروفیسور U. Ingard از M.I.T. تهیه کرده است.)

ماسه نرم بر روی صفحه پاشیده شده است، این ماسه ها در راستای خطوط گرهی که حرکت ندارند باقی می ماند. صفحه ممکن است با وارد آوردن ضربه، با آرشه کشیدن بر روی ویولون یا با نگهداشتن یک قطعه کوچک «بیخ خشک» در برابر صفحه، برانگیخته شود. البته با انگشت گذاشتن روی نقطه معینی از صفحه می توان از همه نوسانات، غیر از

آتهایی که خطوط گرهی شان از نقطه تماس (دست یا صفحه) می گذرد، جلوگیری کرد. شکل (۶-۱۵) چند تصویر مخصوصاً زیبا از شکلهای Chladni را که Mary Waller تهیه کرده است، نشان می دهد.



شکل ۶-۱۵ شکلهای Chladni نشان دهنده خطوط گرهی (از Mary Waller ، شکلهای Chladni :

مطالعه ای در تقارن ، Bell ، لندن ، ۱۹۶۱)

یک قطعه جامد از هر ماده ای همواره درجه کشسانی معینی دارد، در نتیجه دارای طیفی از مُدهای طبیعی ارتعاش است. این مطلب حتی اگر - درست نظیر تارها و پوسته ها که پیش از این بحث کرده ایم - مرزهای قطعات مذکور ثابت تصور شود مصداق خواهد داشت. مثلاً به ظرفی با جدار کمابیش سخت، که از ماده ژلاتین ماندنی کاملاً پر شده است، اگر ضربه ای ناگهانی وارد آید، با روش پیچیده ای شروع به ارتعاش خواهد نمود. در مورد دستگاههای یک بُعدی و دو بُعدی می توانستیم درباره مشخصات مُدهای نوسانات عرضی با روش روشنتری بحث کنیم و آنها را نمایش دهیم. وقتی دستگاههای سه بُعدی را بررسی می کنیم، با وجود اضافه شدن یک بُعد، هیچگونه بحث طولانی تری را پیش نمی کشیم، برای آنکه جابه جایی ممکن است درجا انجام گیرد. بنابراین فقط یادآور می شویم که معادله دیفرانسیل حرکت برای دستگاه سه بُعدی تقریباً مشابه معادلاتی است که پیش از این برای دستگاههای یک و دو بُعدی به دست آورده بودیم. در حالت سه بُعدی معادله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (۶-۲۶)$$

در اینجا  $v$  سرعت مشخص معینی است، مثلاً سرعتی که از  $\sqrt{\frac{K}{\rho}}$  به دست می آید و  $K$  مدول کپه ای کشسانی است. در نتیجه کمیت اسکالر (نرده ای)  $\psi$  ممکن است مقدار فشار در وضعیت مکان و زمان معین باشد. در مبحث ارتعاشات طبیعی یک میله یا یک ستون هوا، در حقیقت از همین معادله، با کم کردن یک بعد از آن استفاده کرده ایم. در آن حالات محیط گرچه سه بُعدی بوده است، ولی ما سعی می کردیم منحصرأ به ارتعاشاتی توجه کنیم که فقط بر حسب یک وضعیت قابل توصیفند.

اکنون باید شرایط مرزی را که برای همه سطوح خارجی دستگاه صدق می کند مورد توجه قرار دهیم. برای یک قطعه مکعب مستطیل شکل که تمام مرز بالایی آن ثابت و محکم شده است، می توان مجموعه ای از مُدهای طبیعی را، که شباهت بسیا زیادی به مُدهای یک پوسته مستطیل شکل دارد، تصور کرد. ولی اکنون نقاط گرهی بر روی مجموعه ای از سطح واقعتاً و در این حالت هر ارتعاش طبیعی به جای دو عدد (در مورد



پوسته) یا یک عدد (برای تار) باید با سه عدد صحیح مشخص شود. هر چند، بیش از این سعی نخواهیم کرد این بحث را ادامه دهیم. در عوض، موضوع دیگری را پیش می‌کشیم و مطالعه مسائل یک بُعدی و وجود همزمان تعدادی از مدهای طبیعی را در چنین دستگاهی آغاز خواهیم کرد.

### تحلیل فوریه

بنابراین، همان گونه که قبلاً دیده ایم، این تار می‌تواند (با پیروی از فرضهای معینی در زمینه دینامیک) به هر یک از شکل‌های نامحدود مدهای طبیعی به ارتعاش درآید. برای آنکه در انتخاب دامنه و فاز یک مد معین، هر دو آزادی لازم منظور شده باشد. رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (27-6)$$

بعلاوه، می‌توان تصور کرد که همه این مدها در صورتی مجازند ظاهر شوند که حرکت تار با معادله زیر کاملاً مشخص شود:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (28-6)$$

البته، حرکت فعلی تار ممکن است با دشواری زیاد با چشم دیده شود. ولی به شرطی که فرضهای مهم فیزیکی معادله (۶-۲۷) در معادله اخیر صدق کند، می‌توان فرض کرد که یک ترکیب اختیاری از این الگو امکان پذیر است.

اکنون تصور می‌کنیم که فلاش دوربین دوربین عکاسی از دستگاه نوسان کننده‌ای ساخته شده باشد. این دوربین پیکربندی حرکت تار را در زمان مشخص  $t$  نشان خواهد داد. بنابراین با کمیات  $\cos(\omega_n t - \delta_n)$  می‌توان درست به عنوان مجموعه‌ای با تعداد ثابت رفتار کرد، و رابطه جابه‌جایی تار را برای اندازه‌های معین  $x$  به صورت زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (29-6)$$

در اینجا

$$B_n = A_n \cos(\omega_n t - \delta_n)$$

اکنون نظریه را به این شرح بیان می کنیم: شکل نیمرخ تار را به وسیله  $y$  که تابع  $x$  است بین  $x = 0$  و  $x = L$  (که از شرایط  $y = 0$  در  $x = 0$  و  $x = L$  پیروی می کند) می توان در نظر گرفت، و  $y$  را به بینهایت سریهای توابع سینوسی - همان گونه که در معادله (۶-۲۹) ارائه شده - تجزیه کرد.

ممکن است به نظر برسد که در بیان نظریه بالا حدود اختیارات، زیاد در نظر گرفته شده است. هر چند، اگر کسی پیوستگی تار را، به ازاء  $N$  ذره متصل به هم وقتی  $N \rightarrow \infty$ ، محدود در نظر بگیرد، این اختیارات هم نادیده گرفته می شود. در این مورد اطلاعاتی که از مطالعه بحثهای فصل ۵ به دست آمده، به ما کمک می کند تا بتوانیم به روشی ببینیم که تعداد ذرات محدود چگونه  $N$  مد طبیعی را به طور واضح تشکیل می دهند. شرح هر مد متضمن دو ثابت قابل تعدیل دامنه و فاز - است. بنابراین حرکت هر یک از  $N$  ذره، که تحت تاثیر بر همکنشهای متقابل یکدیگرند، مانند یک بر هم نهی مدهای طبیعی قابل توصیف است و وجود کل  $2N$  ثابت قابل تعدیل به ما اجازه می دهد که اندازه های اختیاری جابه جایی و سرعت اولیه را به هر ذره نسبت دهیم. بیانیته حاضر از لحاظ کاربرد این نتیجه در مورد تعداد بسیار زیادی از ذرات متصل به هم، حائز اهمیت است.

البته، در حال حاضر دستگاهی فیزیکی که شامل تعداد ذرات نامحدود باشد وجود ندارد، در نتیجه این محدودیت را برای ذرات باید در نظر گرفت. در حقیقت مساله ما از جهان فیزیک به جهان ریاضیات بر می گردد. و معادله (۶-۲۹) - بیان فوق العاده ساده - اساس قویترین تکنیک در همه مسائل فیزیک از بُعد ریاضی است - که با تحلیل فوریه سازگار است. لاگرانژ<sup>۱۰</sup> ریاضیدان بزرگ فرانسوی (۱۸۱۳-۱۷۳۶)، که مکانیک را در حوزه اختصاصی اش ارائه داد و نظریه تار مرتعش را، با روشی که ذیلاً انتخاب کرده و شرح می دهیم، بسط داد؛ و در حدود سال ۱۷۵۹ دوباره نظریه دیگری مطرح ساخت که نتیجه آن در معادله (۶-۲۹) خلاصه شده است. ولی ریاضیدان فرانسوی دیگری به نام ژ. ب. فوریه<sup>۱۱</sup>، در حقیقت نخستین کسی بود که (در ۱۸۰۷) توانست آن را به صورت یک تابع کاملاً اختیاری در بازه های معین به وسیله سریها توصیف کند. فوق العاده بعید به نظر می رسد که از ظاهر اشیاء بتوان به اهمیت آن پی برد و عقل سلیم به این حقیقت گواهی می دهد.

ما مثال مخصوصی از کاربرد آن را به طور خلاصه در نظر خواهیم گرفت، ولی بهتر است ابتدا به نتیجه دیگری اشاره کنیم که برای یک دستگاه در حال ارتعاش شامل راه حل دینامیکی ماست.

حرکت عرضی کلیّیِ تار پیوسته را، همان گونه که به وسیلهٔ معادله (۶-۲۸) ارائه شده، در نظر بگیرید. طبق محاسبات اولیه ما در مورد تار پیوسته، که پیش از این در همین فصل تشریح شده، بسامدهای  $\omega_n$  مضارب صحیح بسامد اصلی  $\omega_1$  اند. به معادله (۶-۱۱) و تحلیل‌های قبلی مراجعه کنید. اکنون اگر به اندازهٔ مخصوص  $X$  توجه کنیم،

$$A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

را مانند یک ضریب ثابت  $C_n$  می‌توانیم بنویسیم، و در نتیجه داریم:

$$C_n = n\omega_1 \quad \text{در اینجا} \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (۶-۳۰)$$

و این رابطه نشان می‌دهد که انجام هر حرکت تناوبی با دورهٔ تناوب  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  در هر نقطه از تار امکان پذیر است، در اینجا  $\omega_1$  بسامد پایین‌ترین مُد است. علاوه بر این حرکت تناوبی، ترکیب‌های آن را هم، با دامنه‌ها و فازهای مناسب، می‌توان نوشت. این ترکیب‌ها شامل همهٔ هماهنگ‌های ممکن الوقوع ارتعاشات سینوسی خالص است. بنابراین تحلیل فوریه در این باره بیشتر جنبهٔ زمانی دارد تا مکانی، شما ممکن است مشاهده کنید که بسط‌های معادلات (۶-۲۹) و (۶-۳۰) به شکل مختلف علامه‌اند. علت این امر نه فقط در ساخت آنهاست که یکی به صورت سینوسی و دیگری کسینوسی است، بلکه علاوه بر آن، اگر بازهٔ همه متغیرها را در نظر بگیریم می‌بینیم که  $\frac{n\pi x}{L}$  با مضرب صحیحی از  $\pi$  تغییر می‌کند، در صورتی که  $n\omega_1 t$  با مضرب صحیحی از  $2\pi$  دگرگون می‌شود. هر چند، به نفع ماست که نمایش تابع فقط در حدود معینی باشد و نه خارج از آن (حدود)، بعلاوه، اختلاف لازم به ما مربوط نیست<sup>۱۲</sup>.

۱۲- در شرایط فعلی، یک تابع دلخواه  $y(t)$ ، در حدود  $0 < \omega_1 t < \pi$ ، می‌تواند به کمک عباراتی حتی ساده‌تر از معادله (۶-۳۰) و با تشابه بیشتر به معادله (۶-۲۹) جفت وجود شود. این تابع می‌تواند فقط بر حسب کسینوس، یا فقط بر حسب سینوس، همان گونه که ذیلاً نوشته شده، توصیف شود:

$$y(t) = \sum C_n \cos n\omega_1 t \quad \text{فقط کسینوس:}$$

$$y(t) = \sum D_n \sin n\omega_1 t \quad \text{فقط سینوس:}$$

از آنجا که نمایش کسینوس به صورت تابع زوج  $\omega_1 t$  و نمایش سینوس به شکل یک تابع فرد است، رفتار این دو تابع در حدود  $\omega_1 t > \pi$  کاملاً متفاوت است.

## تحلیل فوریه در عمل

برای آنکه تحلیل فوریه را وارد عمل کنیم، باید بتوانیم ضرایب مؤلفه توابع سینوس یا کسینوس را تعیین کنیم. فرایند انجام این کار تحلیل هماهنگ نامیده می شود، و خواص توابع سینوس و کسینوس انجام این کار را کاملاً ساده می سازد.

بسط  $y(x)$  را، که با معادله (۶-۲۹) داده شده است، در نظر بگیرید:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

فرض کنیم، بخواهیم دامنه مربوط به این حرکت را با اندازه مخصوص  $n$  - مثلاً  $n_1$  به دست آوریم، برای این منظور هر دو طرف معادله بالا را در  $\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)$  ضرب می کنیم و از دو طرف نسبت به  $x$  از صفر تا  $L$  انتگرال می گیریم:

(۶-۳۱)

$$\int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx$$

از بسط طرف راست این رابطه سریهایی با بینهایت جمله ظاهر خواهد شد، ولی با در نظر گرفتن خواص یک تابع اولیه که شامل حاصلضرب سینوسها، با زوایای معین  $\theta$  و  $\varphi$  است، خواهیم داشت:

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi$$

از این رو

$$\sin\theta \sin\varphi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$$

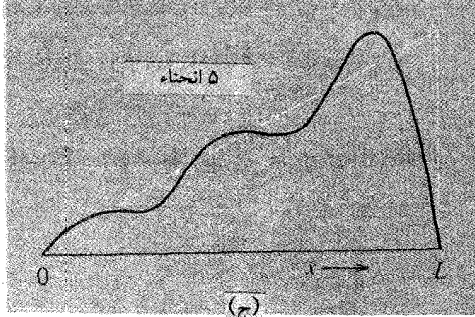
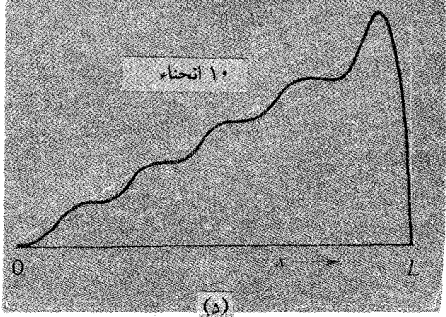
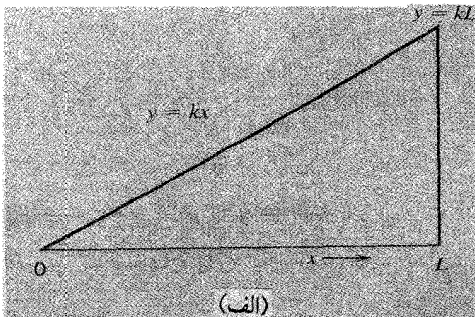
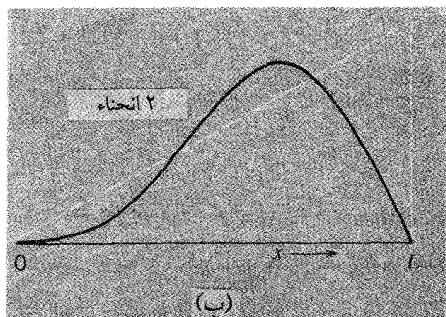
در نتیجه می توان نوشت:

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{(n - n_1)\pi x}{L}\right] - \cos\left[\frac{(n + n_1)\pi x}{L}\right] \right\}$$

$$\int \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2\pi(n-n_1)} \sin\left[\frac{(n-n_1)\pi x}{L}\right] - \frac{L}{2\pi(n+n_1)} \sin\left[\frac{(n+n_1)\pi x}{L}\right]$$

اگر به جای حدود  $x = 0$  و  $x = L$  مقدار قرار دهیم، اندازه های  $\sin\frac{(n \pm n_1)\pi x}{L}$  همگی صفر می شوند. بنابراین در نخستین نگاه به نظر می رسد که رویهمرفته از بابت طرف راست معادله (۶-۳۱) آسوده خاطر باشیم. ولی پس از آن مشاهده می کنیم که کمیت  $(n - n_1)$  در منخرج یکی از انتگرالها ظاهر می شود. در نتیجه اگر  $n = n_1$  باشد، یکی از آنها به صورت  $\frac{0}{0}$  در می آید. و در نتیجه سایر جمله ها نیز صفر می شود. بنابراین اگر  $n = n_1$  باشد، انتگرال به صورت زیر نوشته می شود:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n_1\pi x}{L}\right)\right] dx$$



شکل ۶-۱۶ (الف) تابعی که باید تجزیه و تحلیل شود - یک مثلث دنداناره آری. (ب)، (ج)، (د) ترکیبهای جزئی فوریه، با استفاده به ترتیب از ۲، ۵ و ۱۰ انحناء

جمله کسینوس بین حدود داده شده هیچگونه مشارکتی ندارد، ولی طرف دیگر  $\frac{L}{4}$  می شود. به این ترتیب رابطه نهایی به صورت زیر در می آید:

$$\int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{4} B_n$$

در نتیجه

$$B_n = \frac{4}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (۳۲-۶)$$

این معادله دامنه  $B_n$  را برای ما تعیین می کند و به ازای هریک از اندازه های  $n$  تحلیل هماهنگ تازه ای از  $y(x)$  خواهیم داشت.

اگر  $y(x)$  یک منحنی دقیقاً تجربی باشد، ارزیابی ضرایب  $B_n$  فوریه، برای کامپیوترها یا انتگرال گیری نموداری، موضوع جالبی است. ولی اگر تابع  $y(x)$  را بتوانیم به شکل یک تابع تحلیلی توصیف کنیم، در آن صورت می توانیم برای همه  $B_n$  ها یک فرمول کلی به دست آوریم. روش تصویری این امکان را به ما می دهد که نیمرخ نشان داده شده در شکل [۶-۱۶ (الف)] را در نظر بگیریم. این نیمرخ شبیه شکل یک تار است که از یک طرف کشیده شده باشد. (البته، در  $x = L$ ، باید دقیقاً داشته باشیم:  $y = 0$ ؛ هر چند فرض بر این است که معادله ما به ازای نقاط اختیاری نزدیک به انتهای تار، خوب پاسخ می دهد.) بنابراین  $B_n$  ها به روش زیر ارزیابی می شوند:

$$B_n = \frac{4}{L} \int_0^L kx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء به دست می آید:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4k}{L} \left\{ -\frac{L}{n\pi} \left[ x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \\ &= \frac{4k}{n\pi} \left\{ -\left[ x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \left[ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L \right\} \\ &= -\frac{4kL \cos n\pi}{\pi n} \end{aligned}$$

باید دانست که اندازه های  $B_n$ ، بر حسب آنکه  $n$  فرد یا زوج باشد، به دو دسته تقسیم

می شود، زیرا  $\cos n\pi$  بین  $+1$  و  $-1$  متناوباً تغییر می کند. در حقیقت داریم

$$B_n = \frac{2kL}{n\pi} : \text{ فرد } n$$

$$B_n = -\frac{2kL}{n\pi} : \text{ زوج } n$$

هر چند، اگر کسی بخواهد می تواند هر دو مجموعه را با یک فرمول نمایش دهد.

$$B_n = (-1)^{n+1} \frac{2kL}{n\pi}$$

اکنون دامنه های گوناگون را به ازاء  $n$  های مختلف، در جدول (۱-۶) به ترتیب می نویسیم. در نتیجه تشریح مثلث نیمرخ به صورت زیر در می آید:

$$y(x) = \frac{2kL}{\pi} \left\{ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \dots \right\}$$

جدول ۱-۶: اندازه های  $\frac{B_n}{kL}$

$\frac{B_n}{kL}$	$n$
$\frac{2}{\pi} = 0.636$	۱
$-\frac{1}{\pi} = -0.318$	۲
$\frac{2}{3\pi} = 0.212$	۳
$-\frac{1}{2\pi} = -0.159$	۴
$\frac{2}{5\pi} = 0.127$	۵

نتیجه ترکیب تعدادی از جمله های گوناگون، با استفاده از ضرایب عددی ۵ شماره اول که در جدول (۶-۱) آمده در شکلهای [۶-۱۶ (ب) - (د)] نشان داده شده است. با گنجاندن جمله های بیشتر می توان جدول کاملتری از این ضرایب تهیه کرد و با افزودن چند جمله قابل استفاده آن را به صورت کاملاً چشمگیری در آورد. شکل کلی نیمرخ - مخصوصاً هنگامی که از نقطه صفر به طرف انتها پیش می رویم - اساساً با منحنی سینوسی تفاوت دارد. منحنیهای سینوسی بر حسب آنکه طبق نمونه ای که نمایش داده شده با این تحلیل فوریه سازگار باشند توابع راستگوش (متعامد) نامیده می شوند. البته توصیف « راستگوش » اصولاً به هندسه تعلق دارد. نتیجه ای که از عمود بودن دو تابع سینوسی در تحلیل فوریه به دست می آید عبارت است از:

$$n_1 \neq n_2 \quad \int_0^L \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (۶-۳۳)$$

در نگاه اول ممکن است به نظر برسد که این نتیجه گیری هیچگونه ارتباطی به شرط هندسی ندارد، ولی وقتی کمی فکر کنیم می بینیم چنین نیست. مثلاً اگر دو بردار A و B داشته باشیم، شرط آنکه آنها بر هم عمود باشند آن است که حاصلضرب نرده ای (اسکالر) آنها صفر باشد. به همین جهت در مورد مولفه های این دو بردار رابطه زیر برقرار است:

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad (۶-۳۳)$$

اکنون اگر به جای انتگرال پیوسته معادله (۶-۳۳) مجموع تعداد بسیار زیاد، N، جمله جداگانه را قرار دهیم (در آن صورت می توانستیم انتگرال را با روش عددی ارزیابی کنیم)، و اندازه مخصوص X را به صورت  $x_p$  بنویسیم، در اینجا

$$x_p = \frac{pL}{N}$$

در نتیجه معادله (۶-۳۳) را به صورت زیر می توان نوشت:

$$n_1 \neq n_2 \quad \text{به ازاء} \quad \frac{L}{N} \sum_{p=1}^N \sin\left(\frac{n_1 \pi p}{N}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi p}{N}\right) = 0$$



اگر شرط راستگوشی (تعامل) را در مورد دو بردار معمولی به شکل زیر بنویسیم:

$$A \perp B \quad \text{به ازاء} \quad \sum_{p=1}^r A_p B_p = 0$$

با یک نگاه صرفاً ظاهری می بینیم که اختلاف بین دو حالت در آن است که یکی از آنها شامل کمیّاتی است که هر کدام درست با سه مؤلفه کاملاً توصیف می شوند، در صورتی که دیگری به  $N$  (و، در حدّ، به بینهایت جزء) نیاز دارد. امکان تجزیه یک تابع اختیاری به مجموعه ای از توابع راستگوش (نه الزاماً سینوسی یا کسینوسی) یکی از مهمترین و پرکاربردترین تکنیکها در فیزیک نظری و مهندسی است.

### مُد های طبیعی و توابع راستگوش

این فصل را با چند اظهار نظر درباره دستگاههای فیزیکی مطرح شده در گذشته به پایان می بریم. دیدیم که ارتعاشات مشخص یک تار یکنواخت به کمک توابع سینوسی عمود بر هم که پیش از این بحث شده چگونه (به طور آرمانی) قابل توصیفند. اصولاً، هر مُد بدون وابستگی به سایر مُدها می تواند دامنه اش تغییر کند بدون آنکه بر روی مُدهای دیگر اثر بگذارد. صفت «طبیعی» برای مُدهایی به کار می رود که صفت مشخصه ناوابستگی متقابل آنها - کاملاً مشابه ناوابستگی متقابل جابه جایهای عمود بر هم باشد.

این عمود بودن از نظر دینامیکی، نیز، پایدار می ماند و انرژی کل یک تار مرتعش به هنگام بر هم نهی مُدهای طبیعی اش دقیقاً با مجموع انرژیهای هریک از مُدهای بر هم نهاده شده مساوی است. اگر کسی بخواهد برای انرژیهای جنبشی و پتانسیل یک قطعه کوچک تار با اندازه دلخواه  $X$  عبارتی ثبت کند، این عبارت مبتنی بر دو نوع جمله است: (۱) جمله هایی که شامل مربع سینوسها یا کسینوسهای یک مقوله بوده، و فقط به یک مُد مربوطند؛ (۲) جمله هایی که شامل حاصلضرب سینوسها یا کسینوسها مقوله های متفاوتند، و نمایش دهنده جمله های پیوندی مُدهای گوناگون اند. زیرا شرط عمود بودن، معادله (۶-۳۳)، موجب می شود که با جمع شدن انرژی در تمام طول تار، جمله های نوع (۲) همگی صفر شوند. بنابراین مُدهای اصلی از نظر دینامیکی در واقع کاملاً بر یکدیگر عمودند.

بحث ما درباره این ناوابستگی، یا بر هم عمود بودن مُدهای طبیعی یک دستگاه در واقع با

تحلیل ما از حرکات دو آونگ جفت شده در فصل ۵، شروع شده است. شما ممکن است پیشنهاد ما را بپذیرید و احتمالاً فصل ۵ را به عنوان یک درس بار دیگر مرور کنید. در آن صورت وقتی به عقب برگردید و مطالعه فصل ۵ را از همان مبحث شروع کنید چه آن را یک درس تلقی کنید یا نکنید به هر حال برایتان سودمند خواهد بود. بنابراین اگر فکر خود را متمرکز کنید و با تعقیب خط اصلی مطلب را پیش ببرید، همان گونه که یادآوری شد به عمق موضوع پی خواهید برد.

## مسائل

۶-۱ سیمی یکنواخت به طول  $2/5m$  و جرم  $0/01kg$  با نیروی  $10N$  کشیده شده است.

(الف) بسامد مد اصلی اش چقدر است؟

(ب) اگر سیم به طور عرضی کشیده شود و سپس در نقطه ای به فاصله  $0/5m$  انگشت روی

سیم بگذاریم چه بسامدهایی تکرار می شود؟

۶-۲ یک سیم به طول  $L$  و جرم کل  $M$  با نیروی کشش  $T$  کشیده شده است. وقتی سیم به

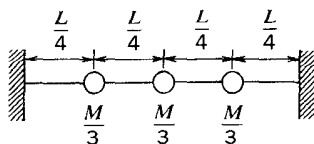
طور عرضی ارتعاش یابد بسامدهای پایین ترین سه مد طبیعی اش چه اندازه هستند؟ هرگاه

سه وزنه که جرم هر کدام  $\frac{M}{3}$  است در فواصل مساوی به سیم بدون جرم (بسیار سبک)، که

با نیروی  $T$  کشیده شده و طول کل آن  $L$  است، متصل کنیم و آن را به ارتعاش در آوریم،

بسامدهای پایین ترین سه مد طبیعی تار اولیه را که به دست آورده ایم با سه بسامد اصلی این

تار پس از افزودن هر یک از وزنه های  $\frac{M}{3}$  مقایسه کنید.



۳-۶ در ارتعاشات آزاد یک سیم کشیده شده موضوع گرانش نادیده گرفته می شود. آیا این حذف (گرانش) بجاست؟ اگر آثار گرانشی در نظر گرفته می شد تحلیلهای انجام شده به چه صورت در می آمد؟

۴-۶ نشان دهید که اگر  $T \gg mg$  باشد، تحلیل ارتعاشات آزاد یک سیم افقی در مورد یک سیم قائم نیز معتبر است.

۵-۶ یک سیم کشیده شده به جرم  $m$ ، طول  $L$  و کشش  $T$  با دو چشمه، در هر طرف یک چشمه، به ارتعاش در آمده است. هر دو چشمه دارای بسامد یکسان  $\nu$  و دامنه  $A$ ، ولی اختلاف فازشان نسبت به یکدیگر دقیقاً  $180^\circ$  است (هر طرف سیم را یک پادگره فرض کنید). برای تشکیل ارتعاشات ساکن در طول سیم، کوچکترین اندازه ممکن  $\omega$  چه اندازه باید باشد؟

۶-۶ میله یکنواختی از وسط با گیره نگهداشته شده، در حالی که دو طرف میله آزاد است.

(الف) بسامدهای طبیعی ارتعاشات طولی میله چه اندازه است؟

(ب) طول موج مد  $n$  ام میله چه اندازه است؟

(ج) گره های مد  $n$  ام در کجاها واقع است؟

۷-۶ از معادله موج ارتعاشات یک ستون هوا مشتق بگیرید. نتیجه نهایی به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

در این رابطه  $\xi$  جابه جایی از وضعیت تعادل است،  $\rho$  چگالی جرمی، و  $K$  مدل کشسانی است.

۸-۶ نشان دهید که برای ارتعاشات یک ستون هوا:

(الف) در طرف باز، که در خلال نوسان تغییر فشار صفر است، در آنجا، حرکت

بیشینه هوا نشان داده می شود (پادگره).

(ب) در طرف بسته ، حرکت صفر (گره) و در نتیجه فشار ارتعاش بیشینه است .

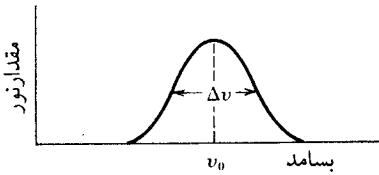
۹-۶ در اتاقی دو دیوار مقابل هم دارای نمای آجری است . بقیه دیوارها ، کف ، و سقف با ماده جذب صوت پوشیده شده اند . پایین ترین بسامدی که اتاق به ازای آن از نظر آکوستیکی به حالت تشدید در آید  $50 \text{ Hz}$  است .

(الف) ایجاد یک صدا (نوفه<sup>۱۳</sup>) ی پیچیده در اتاق موجب برانگیختگی فقط پایین ترین دو مُد می شود ، به این ترتیب هر مُد در  $t = 0$  دارای دامنه بیشینه است . جابه جایی  $x$  هر مُد را جداگانه در  $t = 0$  ،  $t = \frac{1}{200}$  ثانیه ، و  $t = \frac{1}{100}$  ثانیه نمایش دهید .  
 (ب) مشاهده می شود که جابه جایی بیشینه ذرات غبار در هوا (که با ذرات هوا در هر وضعیت الزاماً همزمان نیست!) در نقاط مختلف بین دو دیوار به شرح زیر است :

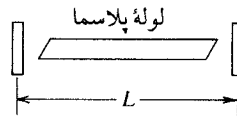
$\frac{3L}{4}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{4}$	$x$
$-10\mu$	$+10\mu$	$+10\mu$	بیشینه $\xi$

دامنه های هریک از دو مُد جداگانه چه اندازه است ؟

۱۰-۶ با قرار دادن یک لوله پلازما در یک اتاقک مشدد اپتیکی می توان یک لیزر ساخت ، این اتاقک از دو آینه تخت منعکس کننده قوی امواج نور تشکیل شده که مانند دیوارهای سخت عمل می کند (شکل را ببینید) . منظور از لوله پلازما آن است که با برانگیختگی مُدهای طبیعی اتاقک نور تولید شود .



(ب)



(الف)

(الف) بسامدهای مُد طبیعی اتاقک مشدّد چه اندازه است؟ (پاسخ خود را بر حسب

فاصله بین آینه ها  $L$  و سرعت نور  $C$  بیان کنید .)

(ب) فرض کنید که لوله پلاسماي نور متمرکز شده را با بسامد  $\nu_0 = 5 \times 10^{14}$  Hz

و با پهنای طیفی  $\Delta\nu$  ، همان گونه که در شکل نشان داده شده ، گسیل کنید . مقدار  $\Delta\nu$  به اندازه ای است که مُدهای طبیعی اتاقک با بسامدی در محدوده  $10^4 \times 10 \pm$  به وسیله لوله پلاسما برانگیخته خواهند شد .

(۱) اگر  $L = 1/5$  m باشد چند مُد برانگیخته خواهد شد؟

(۲) اندازه  $L$  حداکثر چقدر باشد تا فقط یک مُد طبیعی برانگیخته شود (به طوری که لیزر

فقط یک بسامد خروجی داشته باشد)؟  $C = 3 \times 10^8$  m.sec<sup>-1</sup>

۶-۱۱ (الف) انرژی کل ارتعاش یک تار به طول  $L$  را تعیین کنید، که از هر دو طرف ثابت نگهداشته شده ، و با دامنه  $A$  در  $n$  اُمین مُد در حال نوسان است . کشش در تار  $T$  و جرم کل آن  $M$  است . (تذکر : انرژی جنبشی را در لحظه ای که تار در راستای خط مستقیم است کامل در نظر بگیرید . برای آنکه در آن حال تار انرژی پتانسیل وضعیت بالا یا پایین را ذخیره نکرده است و نظیر وقتی است که تار به هیچ وجه ارتعاش ندارد)

(ب) انرژی کل ارتعاش همین تار را در حالتی حساب کنید که مُدهای طبیعی تار

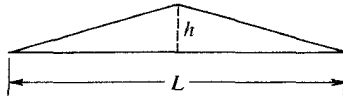
مرتعش به شرح زیر بر هم نهد دارند:

$$y(x, t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \omega_1 t + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

(شما می توانید ثابت کنید که این انرژی کل با مجموع انرژیهای دومد - که هر کدام جداگانه در نظر گرفته می شوند - مساوی است .)

۶-۱۲ تار ی به طول  $L$  از دو طرف محکم نگهداشته شده و نیروی کشش آن  $T$  است .  
وسط این تار را می گیریم و به فاصله  $h$  به یک طرف می کشیم و سپس رها می کنیم .  
(الف) انرژی نوسانات بعدی چه اندازه است ؟

(ب) وضعیت نشان داده شده در شکل ، هر از چند گاه دوباره ظاهر خواهد شد ؟  
(فرض کنید که کشش بر اثر افزایش اندک طول تار بدون تغییر باقی می ماند ، در نتیجه موجب جابه جاییهای عرضی می شود .) [تذکر : در بخش (الف) ، کار انجام شده در قبال کشش ایجاد شده در تار را در نظر بگیرید ، این کشش بر اثر شکل اولیه تار است .]



۶-۱۳ مکعب یکنواختی را در نظر بگیرید که طول هر یک از ابعادش  $L$  و سرعت موج در آن  $v$  است نشان دهید که برای این دستگاه ، تعداد کل مدهای ارتعاش مربوط به بسامدهای بین  $v$  و  $v + \Delta v$  به صورت زیر است :

$$\frac{\pi v}{L} \ll \Delta v \ll v \quad \text{اگر} \quad \frac{4L^3 v^2 \Delta v}{\pi^2 v^3}$$

[تذکر : با توجه به  $\frac{vL}{\pi v} = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$  ، یک شبکه مکعبی را با نقاطی در نظر بگیرید که  $z = n_x$  ،  $y = n_y$  ،  $x = n_z$  . بنابراین تعداد نقاط در هر ناحیه این شبکه با حجم ناحیه مساوی است و مدهای مربوط به یک بسامد معین  $v$  بر نقاطی منطبق است که هر کدام به فاصله  $r = \frac{vL}{\pi v}$  از مبدا قرار گرفته اند . به این ترتیب نتیجه مطلوب مساوی  $4\pi r^2 \Delta r$  است . در مورد یک مربع نتیجه به چه صورت در می آید؟ برای یک میله چطور ؟ اگر به جای مکعب ، مستطیل جامدی به ابعاد  $a$  ،  $b$  و  $c$  در نظر گرفته شود شما چگونه تغییر خواهد کرد؟

۶-۱۴ سربهای فوریه را برای توابع زیر به دست آورید ( $L \geq x \geq 0$ ):

$$y(x) = Ax(L - x) \quad (\text{الف})$$

$$y(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{ب})$$

$$y(x) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{\gamma \pi x}{L}\right), & 0 \leq x \leq \frac{L}{\gamma} \\ 0, & \frac{L}{\gamma} \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۶-۱۵ سربهای فوریه را برای حرکت یک سیم به طول  $L$  به دست آورید اگر

$$y(x, 0) = Ax(L - x); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y(x, 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = B_x(L - x) \quad (\text{ب})$$

## امواج پیشرونده

## موج چیست؟

بسیاری از مردم از واژه «موج» تصویری از اقیانوس با امواج خروشان که از دریا به سوی ساحل پیش می روند، برایشان تداعی می شود. اگر در کنار دریا بایستید و پیدایش موج را تماشا کنید احتمالاً به این نکته پی می برید که امواج با همه عظمتشان وقتی به اوج می رسند، دارای یک پاد اوج<sup>۱</sup> هم هستند. شما وقتی پیشروی قله ها را در دریا می بینید. احساس می کنید که آب یکپارچه به طرف حامل هجوم می آورد. امواج در حقیقت می توانند خسارات زیادی به بار آورند، زیرا آنها حاصل انرژی هستند ولی با وجود این وقتی همه قله ها به هم می پیوندند، موج بالا می رود و شکسته می شود؛ با بالا رفتن آب، ساحل جلو می آید. یورش امواج به معنی گسترش همه جانبه حرکت آب نیست. امواج بلند دریا (معروف به خیزاب) بسرعت ایجاد می شوند و از بین می روند. امواجی که به ساحل کالیفرنیا می رسد از طوفانهای دریایی جنوب اقیانوس آرام که بیش از ۷۰۰۰ مایل فاصله دارد نشأت می گیرد و این فاصله را با سرعت ۴۰ مایل در ساعت یا بیشتر پشت سر می گذارد. روشن است که در این رویداد تماشایی آب دریا این فاصله را نمی پیماید، بلکه نقش عامل انتقال پدیده ای را ایفا می کند. اصولاً این پدیده سیار را حرکت موج نامند. برای آنکه پدیده موج را عامل انتقال در فاصله دورتری تکرار کند، زمان معینی باید بگذرد. تندی و کندی جابه جایی موج به خواص عامل انتقال بستگی دارد که در رابطه سرعت موج بیان می شود. هر عامل انتقال اعم از جامدات، مایعات و گازها می تواند به وسیله امواج،

1- Anticlimax



حامل انرژی و اطلاعات باشد. بنابراین مطالعه و بررسی نوسانگرهای جفت شده و مدهای طبیعی در واقع زمینه سازی برای فهم این پدیده مهم است.

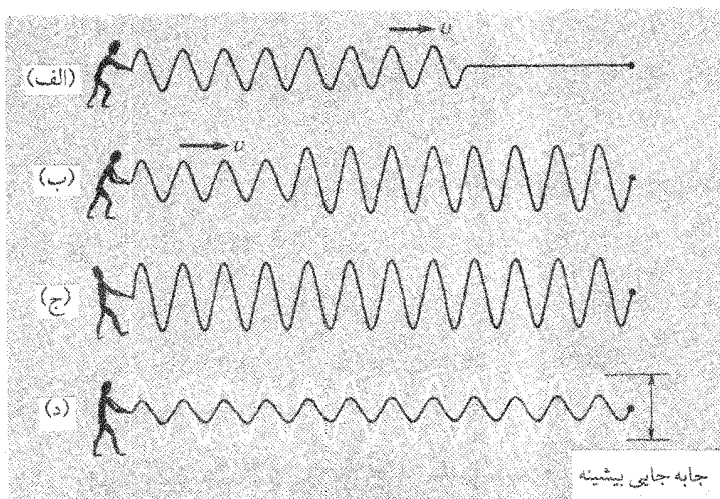
امواج آب گرچه برای همه آشنا ترین نوع موج است. در عین حال اگر بخواهیم آنها را بر حسب فرایندهای فیزیکی مشروح زیر تجزیه و تحلیل کنیم، در زمره پیچیده ترین امواج نیز به شمار می آیند. از این رو درباره آنها مطلب بسیار زیادی برای گفتن نداریم. در عوض، به مطرح ساختن همان مساله قدیمی خودمان - تار کشیده - بر می گردیم. وسعی می کنیم بحث کنونی را با استفاده از آن ادامه دهیم.

### مدهای طبیعی و امواج رونده

برای راه اندازی و تشکیل مُد طبیعی ویژه یک تار کشیده می توانیم شکل تار را، در حالتی که دامنه دقیقاً بیسینه است، الگو قرار دهیم و برای تشکیل این مُد طول تار را مناسب اختیار کنیم. سپس با یک حرکت ناگهانی که به تار می دهیم آن را به ارتعاش در آوریم، و سعی کنیم تار در همان مُد دلخواه به ارتعاش خود ادامه دهد.

هر چند خیلی بیشتر انتظار می رود که بتوانیم با به ارتعاش در آوردن تار حرکت هماهنگ ساده را با بسامد مُد دلخواه در طول تار برقرار کنیم. ولی در آن صورت چه اتفاق خواهد افتاد؟ بدیهی است که موج ساکن فوراً تشکیل نمی شود. آنچه اتفاق می افتد آن است که یک موج رونده در طول تار به حرکت در می آید. این موج در هر لحظه به صورت یک تابع سینوسی  $x$  است [شکل ۷-۱ (الف)]. ولی وقتی موج پیشرونده به انتهای ثابت تار ( $x=L$ ) می رسد، در آنجا فرایند بازتاب (که در فصل ۸ با موشکافی بیشتری مورد توجه قرار خواهیم داد) اتفاق می افتد و حرکت در هر نقطه از تار نتیجه در هم آمیختگی این دو حرکت مختلف جهت (رفت و برگشت) است [شکل ۷-۱ (ب)]. پس از آنکه موج بازتابیده به طرف آزاد تار رسید (اگر بسامد با طول و کشش و جرم واحد طول تار رابطه صحیحی داشته باشد) در صورتی که حرکات هماهنگی به طرف آزاد تار اعمال شود موج ایستاده که دقیقاً مُد طبیعی دلخواه است در طول تار تشکیل خواهد شد [شکل ۷-۱ (ج)]. پس از آن تار با روش مختص یک مُد طبیعی به ارتعاش خود ادامه می دهد، یعنی هر نقطه از تار به طور عرضی با حرکت هماهنگ ساده (SHM) مرتعش می شود و به این ترتیب در نقاط معینی از تار گره ها دائماً باقی می ماند [شکل ۷-۱ (د)]. به محض آنکه با این روش مُد طبیعی

برقرار شد، برای محفوظ نگه داشتن امواج ساکن، مقداری انرژی لازم است، که به صورت حرکت هماهنگ، به یک سر تار در  $x = 0$  داده شود.



شکل ۱-۷ (الف) موج رونده در حال تولید شدن است. (ب) موج رونده بعلاوه موج بازتابیده. (ج) موج ایستاده متوجه (مُد طبیعی) با دامنه بیشینه. (د) همان موج ایستاده (ج) ولی در لحظه ای که جابجاییها از اندازه بیشینه خیلی کمتر است.

نتایج تحلیل مُدهای طبیعی یک تار کشیده را معمولاً می توان در این نقطه دخالت داد. تجربه نشان می دهد که یک تار پیوسته به طول  $L$ ، که از هر دو طرف ثابت نگه داشته شده باشد، اصولاً می تواند به شکل تعداد بسیار زیادی از مُدهای طبیعی به ارتعاش در آید. این مُدها با معادله زیر توصیف می شوند:

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \quad (1-7)$$

در اینجا

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-7)$$

( $T$ ) کشش تار و  $\mu$  جرم واحد طول آن است (یادآور می شویم که  $n$  یک عدد صحیح است، و در حالت کمال مطلوب اگر تار واقعاً پیوسته باشد برای  $n$  همه اعداد صحیح

تا بینهایت قابل قبول است. اکنون می‌خواهیم با استفاده از روابط مثلثاتی، معادله (۱-۷) را به شکل دیگری مطرح کنیم. در اینجا، هر دو زاویه  $\theta$  و  $\varphi$  داده شده و تساوی زیر برقرار است:

$$\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi) = 2 \sin \theta \cos \varphi$$

در نتیجه

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]$$

با به کار بردن این نتیجه در معادله (۱-۷) داریم:

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega_n t\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega_n t\right) \right]$$

با استفاده از این رابطه  $n$  امین مُد طبیعی را برای ارتعاشات عرضی تا به کمک معادله زیر می‌توان توصیف کرد:

$$y_n(x,t) = \frac{1}{2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega_n t\right) + \frac{1}{2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega_n t\right) \quad (۳-۷)$$

اگر در جمع (سینوسها) به جای  $\omega_n$  از معادله (۲-۷) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$y_n(x,t) = \frac{1}{2} A_n \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left(x - \sqrt{\frac{T}{\mu}} t\right)\right] + \frac{1}{2} A_n \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left(x + \sqrt{\frac{T}{\mu}} t\right)\right] \quad (۴-۷)$$

سرانجام، همان گونه که در فصل ۶ در مبحث مُدهای طبیعی دیدیم، و همان گونه که در معادله (۴-۷) به صورت ابعادی بیان شد، سرعت مشخصه  $v$  را از معادله زیر می‌توان تعیین کرد:

$$v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۵-۷)$$

۲- یادآور می‌شویم گرچه حد بالایی  $n$  محدود است، در عین حال معادله (۲-۷) در مورد  $\omega_n$  فقط دارای اندازه تقریبی است، زیرا وقتی  $n$  بزرگ باشد نتیجه مطلوب عاید نمی‌شود.

از بررسی هایی که تاکنون به عمل آمده چنین بر می آید که معادله (۷-۴) از نظر ریاضی بیانگر وجود دو موج رونده مختلف الجهت (رفت و برگشت) است .

اگر نظر خود را بر روی نخستین جمله از دو جمله طرف راست معادله (۷-۴) معطوف سازیم . معادله به شکل زیر در می آید :

$$y(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (۶-۷)$$

در اینجا  $\lambda = \frac{2L}{n}$  است . اگر نخست تصوّر کنیم که زمان در لحظه معینی متوقف شده باشد در آن صورت نیمرخ آشفستگی به صورت یک موج سینوسی است که فاصله بین دو قله (فاصله بین دو نقطه متوالی دیگر با اندازه های جابه جایی و شیب یکسان)  $\lambda$  است . البته اندازه  $\lambda$  طول موج آشفستگی ویژه است . اکنون اندازه  $y$  مربوط به اندازه های معین  $x$  و  $t$  را در نظر می گیریم، و سعی می کنیم اندازه  $y$  را در لحظه  $t + \Delta t$  تعیین کنیم. البته در این لحظه  $x$  هم به  $x + \Delta x$  تبدیل می شود، بنابراین داریم:

$$y(x, t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t)$$

در نتیجه

$$\sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [(x + \Delta x) - v(t + \Delta t)] \right\}$$

از این رابطه نتیجه می گیریم که اندازه های  $\Delta x$  و  $\Delta t$  طبق معادله زیر به هم مربوطند :

$$\Delta x - v\Delta t = 0$$

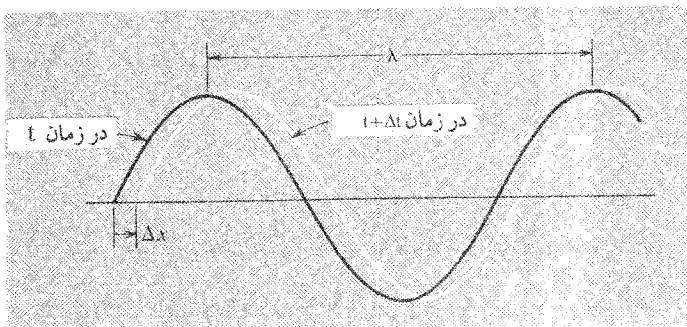
یعنی

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

آنچه از این رابطه استنباط می شود، همان گونه که در شکل نشان داده شده ، آن است که موج در جهت مثبت  $x$  با سرعت  $v$  حرکت می کند .

با روشی مشابه می توان فهمید که جمله دوم در معادله (۷-۴) بیانگر موجی با همان طول موج است که با سرعت  $v$  در جهت منفی پیش می رود. از نظر ریاضی ، موج

ایستاده دقیقاً هنگامی ظاهر می شود که بر هم نهی این دو موج مختلف الجهد با طول موج و دامنه یکسان تحقق یابد. هر چند در این گفتار، ما باید شرط مهمی را دخالت دهیم. منحنی



شکل ۷-۲ جابه جایی موج پیشرونده در جهت مثبت x

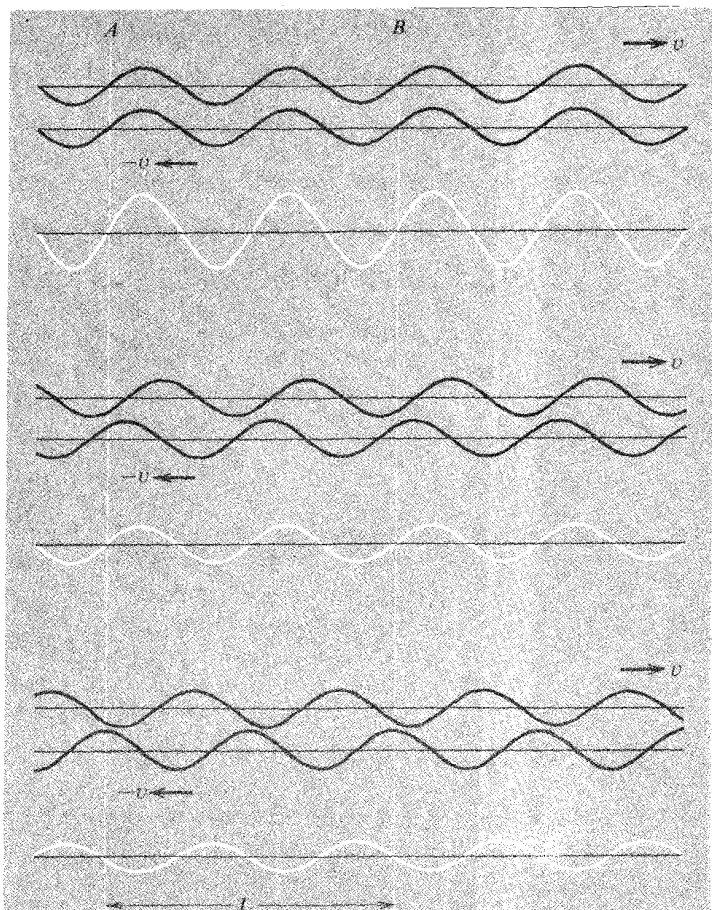
ترسیم شده توسط معادله (۶-۷) و متمم آن با  $(x + vt)$  در مبحث تابع سینوسی امواج سینوسی را به طور نامحدود - یعنی به ازاء همه  $x$  ها و همه  $t$  ها که در معادله صدق کند - نمایش می دهد. ولی دستگاهی که ما در آغاز در نظر گرفتیم یک تار با طول محدود  $L$  بوده با طول نامحدود. لذا این تعریف جدید ما از مُد طبیعی بر حسب امواج رونده واقعاً صحیح نیست. و تناقض موجود را براحتی می توان در این تعریف مشاهده کرد. شکل (۷-۳) چند مرحله متوالی از پیشروی دو موج را نشان می دهد که در خلاف جهت یکدیگر حرکت می کنند. از این گذشته می بینیم که از افزایش طولهای دو موج، برابند جابه جایی تابع  $x$  به دست می آید. این جابه جایی در دو نقطه  $A$  و  $B$ ، که به فاصله  $L$  از یکدیگر واقعدند، در همه زمانها صفر است (البته، این نکته از صورت مسأله اصلی نیز نتیجه گیری می شود). بین این دو نقطه جابه جایی دقیقاً طبق معادله (۷-۱) تغییر می کند. بنابراین می توان گفت تا آنجا که به شرایط بین  $x = L$  و  $x = 0$  ارتباط پیدا می کند توصیف پدیده بر حسب قطار موج های نامحدود صحیح است. علت اینکه آشفتگی در بیرون از این محدوده ادامه ندارد وجود یک شرط فیزیکی است که پیش از این یعنی وقتی که معادله مُد طبیعی را ثبت کردیم پنهان بود ولی به وسیله معادله ساده زیر آشکار می شود:

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t$$

البته ، چون تابع  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  نظیر تابع در بر گیرنده تمام حوزه  $x$  است ، ما باید دقیق تر باشیم ، و توصیف مناسبی از تار مرتعش را بر اساس توابع پیوسته  $x$  در سه ناحیه مشخص زیر ارائه دهیم :

$$\left. \begin{aligned} -\infty \leq x < 0 : y(x,t) &= 0 \\ 0 \leq x \leq L : y_n(x,t) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \\ L < x \leq \infty : y(x,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

در نظر گرفتن نکات بالا حائز اهمیت بود ، زیرا ، همان گونه که در آغاز در فصل ۱ ملاحظه



شکل ۲-۷ دو موج سینوسی کاملاً مشابه رونده در دو جهت مخالف و تشکیل امواج ایستاده.

کردیم، نادیده گرفتن حدود از شرایط مرزی واقعی، که جایگاهی بالاتر از یک وضعیت فیزیکی معین دارد، بسیار راحت تر است. در نظر گرفتن یک توصیف ریاضی که فراتر از حدود رابطه را نیز شامل شود عاقلانه نیست و موجبات سردرگمی را فراهم می آورد. ولی باید گفت که اکنون وقت آن رسیده است که از قوه تخیل خود برای وسعت بخشیدن به اجرای طرحهایمان استفاده کنیم.

### امواج پیشرونده در یک جهت

در آخرین مبحث گفتیم که مُد طبیعی ارتعاش یک تار کشیده، نظیر ترکیب دو موج سینوسی پیشرونده - که در همه ویژگیها غیر از جهت حرکت همانند یکدیگرند - چگونه قابل توصیف است. بنابراین چرا نباید فرض کنیم که یک تار به اندازه کافی بلند ممکن است موج سینوسی رونده را فقط در یک جهت تشکیل دهد؟ برای آنکه با چنین موجی، که در شکل [۷-۱] (الف) نشان داده شده، دقیقاً آشنا شویم، سر آزاد تار را به فاصله خیلی زیاد از سر ثابت آن در نظر می گیریم - به عبارت دیگر، کل طول تار  $L$  در مقایسه با طول موج  $\lambda$  باید خیلی زیاد اختیار شود. پس از انجام چند نوسان در  $x = 0$  جبهه آشفستگی به حرکت خود ادامه می دهد تا از میدان دید [شکل (۷-۴)] خارج شود، و شرح همه آنچه را که در صفحه قائم واقع در  $x = 0$  می بینیم در معادله (۷-۶) آمده است:

$$y(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$



شکل ۷-۴ تولید موج رونده در طول تار.

تولید این موج تقریباً نتیجه نوسانات انتهای چپ تار است که در حرکت هماهنگ ساده (SHM) با دامنه  $A$  و بسامد معین  $\nu$  بالا و پایین می رود:

$$\left( \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \nu \right) \quad \nu = \frac{v}{\lambda} \quad (۸-۷)$$

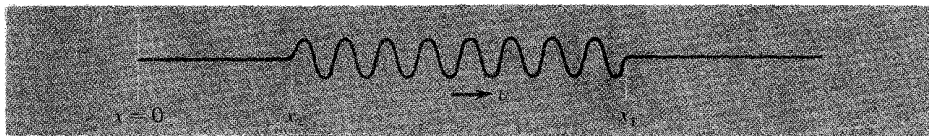
روشن است که معادله (بالا) در  $x = 0$  ، اندازه  $y$  تابع  $t$  است و می توان نوشت :

$$y_0(t) = -A \sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}\right) = -A \sin \omega t$$

شکل ظاهری تار در هر زمان معین  $t_0$  به کمک معادله زیر مشخص می شود :

$$y(x, t_0) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt_0)\right]$$

$$= A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \phi_0\right)$$



شکل ۵.۷ قطار موج محدود رونده

در اینجا  $\phi_0$  زاویه ثابتی است که هدف از آن توصیف شکل ظاهری موج در هر لحظه است . اگر انتهای تار در  $x = 0$  در لحظه  $t = t_1$  رو به بالا می بود ، از  $t_1$  به بعد نیز در حال سکون نگه داشته می شد . به این ترتیب در طول تار یک قطار از امواج سینوسی در قلمرو محدودی ظاهر می شد و در هر لحظه همان گونه که در شکل (۵.۷) نشان داده شده ، موج در حوزه بین  $x = x_1$  و  $x = x_2$  واقع است . بخش جلو آشفته گی که دورترین فاصله را از  $x = 0$  دارد در  $t = t_1$  بر شروع ارتعاش انطباق وارد ، و بخش آخر آن در  $t = t_2$  بر پایان ارتعاش منطبق است . در واقع داریم :

$$x_1 - x_2 = v(t_2 - t_1)$$

این نمونه خاصی از یک نتیجه بسیار مهم است :

انتشار موج در طول تار (ریسمان) با سرعت ثابت  $v$  یعنی انتقال تغییرات جابه جایی در اثر گذشت زمان در یک نقطه معین که با تغییرات جابه جایی بازای تغییر نقطه بر حسب زمان انطباق دارد .



برای هر آشفستگی سینوسی محض، سرعت موج  $v$  از حاصلضرب  $v\lambda$  [معادله (۷-۸) را ببینید] قابل محاسبه است. اندازه  $v$  برای امواج یک تار کشیده از معادله (۵-۷) به دست می آید و مقدارش،  $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$  برای همه طول موجها یکسان است. به طور کلی این عدم وابستگی  $v$  به  $\lambda$  یا  $\nu$  در مورد حرکات موج نمی تواند واقعیت داشته باشد. هر چند عجالتاً خود را به وضعیتهایی محدود می کنیم تا این وابستگی اعتبار خود را حفظ کند. اکنون معادله دیفرانسیل مربوط به انتشار موج یک بُعدی را که با معادله (۷-۲) مشخص شده، تشکیل می دهیم. این معادله دیفرانسیل به صورت رابطه بین مشتقهای جزئی جابه جایی  $y$  بر حسب  $x$  و  $t$  است و داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{2\pi v}{\lambda} A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

بنابراین معادله دیفرانسیل موج به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

هیچ عاملی از تشکیل این معادله جلوگیری نخواهد کرد. ولی می تواند روش ما را تا اندازه ای محدود و مقید کند، زیرا معادله بالا فقط برای امواجی به کار می رود که در جهت مثبت  $x$  پیش می رود. بنا به فرض، اگر معادله

$$y = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$

را در مورد یک موج که در جهت منفی  $x$  پیش می رود در نظر بگیریم. در آن صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2\pi v}{\lambda} A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = + \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

هر چند ، با تشکیل مشتقهای دوم ، می توان رابطه ای به دست آورد که امواج سینوسی با هر طول موج ، در هر جهتی که پیش روند در آن صدق کند :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (9-7)$$

دور از انتظار نیست که این معادله همانند معادله حرکت ، که در آغاز فصل ۶ [معادله (۶-۴)] به دست آوردیم ، عمل کند و مدهای تار کشیده یا دستگاه یک بُعدی پیوسته دیگری که تابع نیروهای باز گرداننده است ، در آن صدق کند .

### سرعت موج در محیط (ملاء) های خاص

هر دستگاهی که معادله (۹-۷) بر آن حاکم باشد دستگاهی است که امواج سینوسی با هر طول موج می توانند با سرعت  $v$  از آن عبور کنند . بنابراین ممکن است ماده جالبی باشد و بخواهیم اندازه  $v$  را در آن ماده محاسبه کنیم . مثلاً به فرض آنکه یک تار یا سیم دارای جرم واحد طول  $\mu = 0.5 \text{ g.m}^{-1}$  با نیروی  $100 \text{ N}$  کشیده شود . در مورد امواج عرضی تشکیل شده بر روی چنین تاری خواهیم داشت :

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} = 450 \text{ m.s}^{-1}$$

از طرف دیگر ، اگر یک ریسمان یا لوله لاستیکی با جرم واحد طول حدود  $1 \text{ kg.m}^{-1}$  با همان نیروی کشش از طول کشیده شود و به ارتعاش درآید ، ناقل امواجی با سرعت حدود  $10 \text{ m.s}^{-1}$  خواهد بود- که هنوز هم انتقال کاملاً تندی محسوب می شود . این سرعت انتقال امواج ، همان سرعت انتشار ارتعاشات است .

ما معادله (۹-۷) را فقط به امواج عرضی اختصاص داده ایم ؛ ولی همان گونه که در فصل ۶ گفتیم معادله ای دقیقاً با همان شکل - ذیلاً آمده است - می تواند بر ارتعاشات طولی ستونی از ماده کشسان حاکم باشد :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (10-7)$$

این معادله دیفرانسیل پایه برای امواج تراکمی که در طول یک بُعد پیش می روند صادق است روی هم رفته عنوان کلی صوت بر امواجی اطلاق می شود که گوش انسان قادر به شنیدن بسامدهایشان باشد. به همین جهت، حدودی را که برای سرعت امواج صوتی در مواد مختلف اختصاص یافته است در نظر می گیریم.

۱- میله های جامد - اندازه  $\nu$  برای امواجی که در طول یک میله پیش می روند به کمک مدول یانگ و چگالی تعیین می شود:

$$\nu = \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

جدول ۱-۷ سرعت صوت را در چند ماده مختلف، که بر حسب مدول یانگ و چگالی محاسبه و اندازه گیری نیز شده است، نشان می دهد. ممکن است سرعت های چند هزار متر در ثانیه نمونه باشد زیرا بین مقادیر محاسبه شده و اندازه گیری شده توافق معقولی وجود دارد.

جدول ۱-۷: مدول یانگ و سرعت های صوت

ماده	$Y \left( \frac{N}{m^2} \right)$	$\rho \left( \frac{kg}{m^3} \right)$	$\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \left( \frac{m}{sec} \right)$	$\nu \left( \frac{m}{sec} \right)$
آلمینیوم	$6/0 \times 10^{10}$	$2/7 \times 10^3$	۴۷۰۰	۵۱۰۰
گرانیت (سنگ خارا)	$5/0 \times 10^{10}$	$2/7 \times 10^3$	۴۳۰۰	$\approx 5000$
سرب	$\approx 1/6 \times 10^{10}$	$11/4 \times 10^3$	۱۱۹۰	۱۳۲۰
نیکل	$21/4 \times 10^{10}$	$8/9 \times 10^3$	۴۹۰۰	۴۹۷۰
پیرکس	$6/1 \times 10^{10}$	$2/25 \times 10^3$	۵۲۰۰	۵۵۰۰
نقره	$7/5 \times 10^{10}$	$10/4 \times 10^3$	۲۶۸۰	۲۶۸۰

یاد آور شویم که مدول یا تگ براندازه گیریهای استاتیکی مبتنی است، در صورتی که انتشار صوت به پاسخ سریع ماده به تنشها بستگی دارد. بنابراین نباید انتظار داشت که بین این دو کمیّت توافق کامل وجود داشته باشد. بعلاوه در استفاده از مدول یانگ فرض می کنیم ماده

آزاد است که بر اثر عبور موجی تراکمی و غیر تراکمی از آن از هر طرف (البته خیلی کم) متقبض یا منبسط شود، ولی ماده کپه ای برای انجام این انقباض و انبساط آزاد نیست؛ در نتیجه مقاومت ماده در برابر تغییر شکل و نیز سرعت محاسبه شده زیادتیر می شود. البته تفاوت آنها بسیار زیاد نیست (در حدود ۱۵٪)، به همین جهت بحث حاضر را بیش از این ادامه نمی دهیم.

سرعت این امواج کشسان در جامدات به طور قابل ملاحظه ای بالاست، مثلاً یک موج تراکمی که ممکن است بر اثر یک زمین لرزه تولید شود، در سنگ خارا (گرانیک) سرعتی در حدود  $5 \text{ km/s}^{-1}$  دارد، و فاصله نیمه راه به دور زمین را در یک ساعت طی خواهد کرد.

۲. ستونهای مایع - رفتار کشسانی یک مایع، نظیر یک گاز با مدول کپه ای آن، با  $k$  مشخص می شود. به طور کلی قابلیت تراکم مایعات، بدون آنکه خیلی کمتر چگال باشند از جامدات بیشتر است؛ این بدان معنی است که عبور امواج صوتی در مایعات خیلی کندتر از جامدات است. بارزترین نمونه، آب است. حجم آب تحت فشاری در حدود  $500$  اتمسفر (جو) [هر اتمسفر تقریباً  $10^5 \text{ N.m}^{-2}$  است]  $2/3\%$  کم می شود. با استفاده از این داده ها، مدول کپه ای در حدود  $2/2 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$  و  $\rho \approx 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  تعیین می شود، در نتیجه داریم:

$$v = \left( \frac{k}{\rho} \right)^{1/2} \approx 1500 \text{ m.s}^{-1}$$

این نتیجه با توجه به رقم واقعی بسیار دقیق است و بیشتر مایعات امواج تراکمی را با سرعتی در حدود  $1 \text{ km.s}^{-1}$  منتقل می کنند.

۳. ستونهای گاز - در فصل ۶ نوع وابستگی بسامدهای ارتعاش یک ستون گاز با مدول کشسانی بی در رو را بیان کردیم و گفتیم که این مدول ممکن است با مدول تکدما اختلاف زیادی داشته باشد. این اختلاف زیاد به علت قابلیت تراکم بسیار بالای یک گاز زیادتیر هم می شود، زیرا اگر فشار گاز تغییر کند مقدار بسیار زیادی کار بر روی آن انجام می شود. با این همه ممکن است ارتعاشات در یک جامد یا مایع بی در رو باشد، ولی به علت قابلیت تراکم بسیار کم آنها از این راه می توان انرژی نسبتاً کمی را به کار گرفت. بنابراین مدولهای کشسانی تکدما ویی در رو خیلی تفاوت ندارند.

در فصل ۶ اشاره شد که مدول کشسانی بی در رو یک گاز از رابطه زیر تعیین

می شود:

$$k_{(بی\ دررو)} = \gamma p \quad \left(1 < \gamma \leq \frac{5}{3}\right)$$

بنابراین

$$v = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11-7)$$

برای هوا،  $\gamma \approx 1/4$ ،  $\rho \approx 1/2 \text{ kg.m}^{-3}$  در نتیجه به دست می آید:

$$v \approx 340 \text{ m.s}^{-1}$$

جا دارد کمی بیشتر به معادله (۱۱-۷) توجه کنیم. معادله عمومی گازها برای  $m$

گرم گاز واقعاً کامل با جرم مولکولی  $M$  به صورت زیر است:

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

در اینجا  $R$  ثابت گازها و  $T$  دمای مطلق است. چون نسبت  $\frac{m}{V}$  مساوی چگالی  $\rho$  است،

معادله (۱۱-۷) به شکل زیر در می آید:

$$v = \left(\frac{\gamma RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (12-7)$$

بنابراین انتظار می رود که سرعت صوت در یک گاز (الف) به فشار یا چگالی بستگی نداشته

باشد، (ب) باریشه مربعی دمای مطلق نسبت مستقیم، و (ج) باریشه مربعی جرم مولکولی

نسبت عکس داشته باشد. نتایج (الف) و (ب) برای هر گاز لااقل در گستره وسیعی از  $p$  یا

$T$  صادق است، و (ج) در صورتی برای گازهای مختلف صدق می کند که تعداد اتمهای هر

مولکولشان یکسان (مثلاً، همه دو اتمی) باشد.

خصوصیت جالب دیگری که درباره معادله (۱۱-۷) می تواند ظاهر شود زمانی

است که فشار گاز پایین باشد. اگر در نظریه جنبشی ساده، محاسبه فشار یک گاز را به

خاطر آوریم، این محاسبه به نتیجه ای منجر می شود که در معادله (۱۹-۶) آمده است:

$$P = \frac{1}{3} \rho v_{r.m.s}^2$$

به طوری که  $v_{r.m.s}^2$  سرعت مربعی میانگین مولکولها می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$v_{r.m.s} = \left( \frac{3p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13-7)$$

از مقایسه معادلات (7-11) و (7-13) نتیجه می گیریم که سرعت صوت در یک گاز، همان گونه که محاسبه نشان می دهد، با سرعت میانگین خود مولکولها تقریباً مساوی است. از نظر اطلاع رسانی (مثلاً) هنگامی که به یک سر ستون گاز ضربه ای نواخته شود باید اثر آن را خود مولکولها به سر دیگر منتقل کنند. در اینجا تساوی تقریبی سرعتهای صوت و مولکولی (چند صد متر در ثانیه) نتیجه خوشحال کننده ای است.

### برهم نهی

قبلاً مشاهده کردیم که چگونه ممکن است یک تار کشیده را به ارتعاش در آورد و با گزینش اختیاری مدهای طبیعی یک برهم نهی را تشکیل داد. اکنون می خواهیم حالتی را بررسی کنیم که برهم نهی بر روی یک تار بلند یا محیط دیگری نظیر آن به وسیله دو موج پیشرونده با طول موجهای اندکی متفاوت تشکیل می شود. در آغاز، حالت بسیار ساده ای را در نظر می گیریم که دو موج هم دامنه اند، هر دو در جهت مثبت  $x$  پیش می روند و هر کدام با معادلاتی به شکل معادله (7-7) جداگانه توصیف می شوند:

$$y_1 = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda_1} (x - vt) \right] \quad (14-7)$$

$$y_2 = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda_2} (x - vt) \right]$$

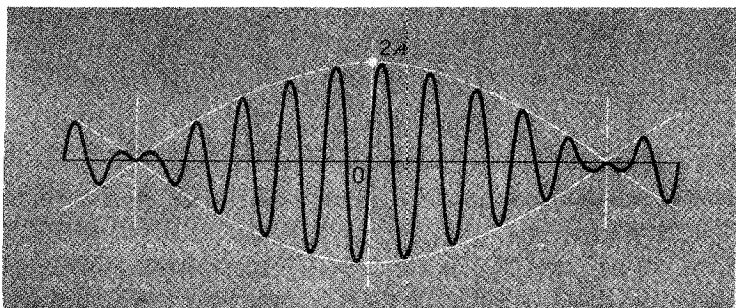
از آنجا که می دانیم برهم نهی خطی جابه جایها در دستگاهها از معادلاتی نظیر معادله (7-9) پیروی می کنند، به این نتیجه می رسیم که برآیند جابه جایها با مجموع  $y_1$  و  $y_2$  دقیقاً مساوی است. بنابراین می توان نوشت:

$$y = y_1 + y_2 = A \left\{ \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda_1} (x - vt) \right] + \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda_2} (x - vt) \right] \right\}$$

چون هر دو موج (فرض می کنیم) دارای سرعت یکسان  $v$  هستند، لذا آشفتگی مرکب با شکل ثابت و بدون تغییر، درست مانند موجی با تک طول موج و همانند منحنی سینوسی با سرعت  $v$  حرکت می کند. اگر در معادله  $t = 0$  قرار دهیم، شکل ترکیب (برهم نهی) راحت تر در نظر گرفته می شود. بنابراین داریم:

$$y = A \left[ \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_2}\right) \right]$$

چنین ترکیبی، برای دو طول موج نه چندان متفاوت با یکدیگر، در شکل (۶-۷) نشان داده شده است. در شکل حالت زنش که در فصل ۲ بحث شد به روشنی نمایان است.



شکل ۶-۷ برهم نهی دو موج رونده با طول موجهای اندکی متفاوت.

در واقع، این حالت یک پدیده زنش است، هر چند در اینجا مدولاسیون (مدوله سازی) دامنه، به جای آنکه تابع زمان باشد، تابع وضعیت است. در بحث چنین امواج برهم نهاده (نیز در ضمایم دیگر) دخالت دادن عکس طول موج فوق العاده مناسب است. این کمیت  $k \left( = \frac{1}{\lambda} \right)$  عدد موج نامیده می شود؛ و بیانگر تعداد طول موجهای کامل در واحد فاصله است. (البته لازم نیست که یک عدد صحیح باشد)<sup>۳</sup>

۳- توضیح! چون بارها اتفاق افتاده است که در توجیه ریاضی امواج، ترکیب  $\frac{2\pi}{\lambda}$  را به کار برده ایم. از طرفی در فیزیک نظری روش معمول آن است که از «عدد موج» استفاده کنیم و آن را با حرف  $k$  نشان دهیم. به این ترتیب این ترکیب در مثال فعلی ما به صورت  $2\pi k$  در می آید.

بنابراین معادله موج بر هم نهاده را بر حسب عدد موج به شکل زیر می توان نوشت :

$$y = A[\sin 2\pi k_1 x + \sin 2\pi k_2 x]$$

یا

$$y = 2A \cos[\pi(k_1 - k_2)x] \sin\left(2\pi \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \quad (15-7)$$

فاصله قله تا قله عامل مدولاسیون با تغییر  $x$  متناظر با افزایش  $\pi$  به صورت کمیّت  $\pi(k_1 - k_2)x$  تعیین می شود. این فاصله با  $D$  مشخص می شود، لذا داریم :

$$D = \frac{1}{k_1 - k_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

اگر طول موجها تقریباً مساوی باشند، آنها را می توان به صورت  $\lambda$  و  $\Delta\lambda$  نوشت، در آن صورت (به طور تقریب) داریم :

$$D \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

یعنی تعداد تقریبی طول موجها از  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  به دست می آید، و شامل تعداد طول موجهایی است که بین صفرهای متوالی پوش مدولاسیون وجود دارد.

برای آنکه چنین امواج رونده ای بر روی یک ریسمان بر هم نهی داشته باشند، می توان دو ارتعاش را با بسامدها و دامنه های متفاوت به طور همزمان به یک سر ریسمان تحمیل کرد. معادله این بر هم نهی از نظر ریاضی، با در نظر گرفتن وضعیت  $x = 0$  در معادلات (14-7) برای جابه جاییها، تعیین می شود. بنابراین داریم :

$$y_0(t) = -A \left[ \sin\left(\frac{2\pi\omega t}{\lambda_1}\right) + \sin\left(\frac{2\pi\omega t}{\lambda_2}\right) \right]$$

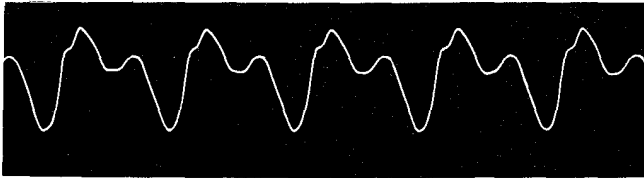
نسبت  $\frac{2\pi\omega}{\lambda}$  معرف بسامد زاویه ای  $\omega$  برای هر ارتعاش است، بنابراین داریم :

$$y_0(t) = -A[\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t]$$

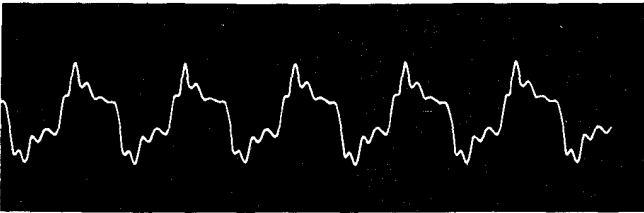


این رابطه بیانگر حالت روشنی از زنش زمانی است. در اینجا نمونه بارزی از وابستگی آشفته‌گی به زمان را در مورد چشمه ای که ارتعاش تولید می کند و وابستگی آشفته‌گی به فضا را در محیط (مثلاً ریسمان) می بینیم.

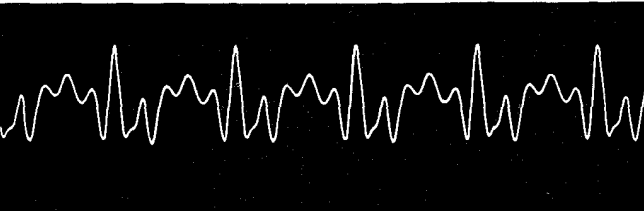
این بر هم نهی امواج، مخصوصاً در مورد امواج صوتی به شکل زیبایی ترسیم شده است. در تراگسیل (انتقال) صوت از چشمه به دریافت کننده از اصلی که اکنون ذکر شده دو نوع استفاده می شود. ابتدا امواجی از چشمه برحسب زمان گسیل می شود.



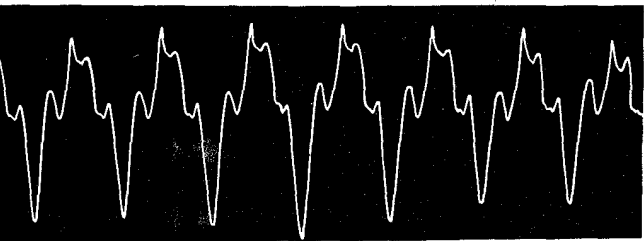
(الف) فلوٹ



(ب) قره نی



(ج) شیپور



(د) ساکسفون

شکل ۷-۷ شکل‌های موج در:

(از D.C. Miller امواج صوتی و موارد استفاده آنها، مک میلان، نیویورک، ۱۹۳۸)

در نتیجه قطاری که از امواج صوتی تشکیل شده از چشمه دور می شود. مدتی بعد این موجها با بخشی از آنها بر روی آشکارساز می افتند و در آن وابستگی جابه جایی با زبان مشخص می گردد که در نهایت دقیقاً همان شکلی را دارد که مدتی قبل در چشمه اتفاق افتاده بود.

شکل (۷-۷) چند نمونه گزینشی را نشان می دهد. و روش تشکیل هماهنگهای یک ساز معین را ترسیم می کند و مشخص می سازد که الگوی تولید شده چندین بار خود به خود تکرار می شود و از ترکیب آنها هماهنگها شکل می گیرند. آنگوها بر دریافت کننده تاثیر متقابل دارند ولی می توان تصور کرد که آشفتهگی هوا در هر لحظه در بازه های زمانی یکسان، به شکل یک سیگنال دریافت شده است.

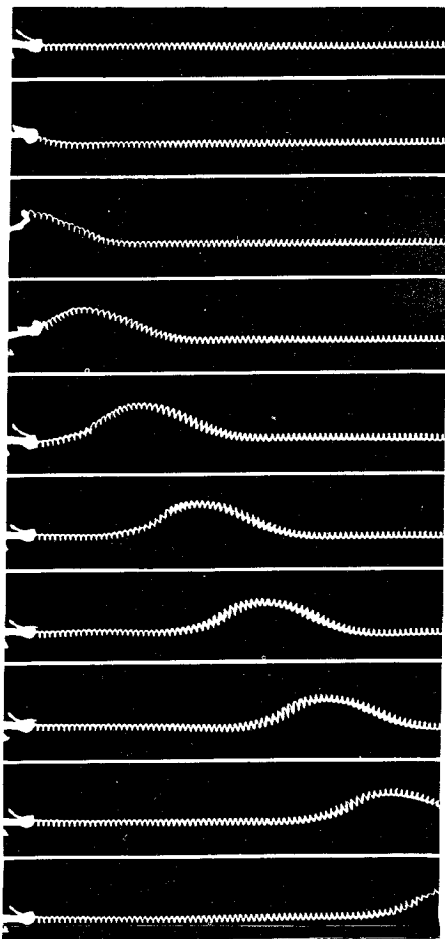
### پالس (تپ) های موج

شما ممکن است تصور کنید که یک موج شامل تمام رشته قلّه ها و فضاها بین آنها است. ولی لازم نیست که یک موج همه قلّه ها را در بر گیرد. در واقع، از اوضاع بشماری که اتفاق می افتد تنها یک وضعیت مورد نظر است، مانند یک پالس آشفتهگی که در یک محیط آرام از جایی به جایی دیگر فرستاده می شود- مثلاً ممکن است شخصی با صدای بلند کلمه سلام یا فرمان را به دیگری ابلاغ کند. پالسهای از این قبیل را می توان با کشیدن یک فنر (یا نخ کشسان) تشکیل داد و یک تغییر شکل موضعی در آن ایجاد کرد- به عنوان مثال، هرگاه یک سر فنر را به طوز ناگهانی بکشیم و سپس آن را آرام نگهداریم. شکل (۸-۷) رفتار بعدی چنین پالسی را نشان می دهد.

در هر لحظه ناحیه محدودی از فنر آشفته است و نواحی قبل و بعد بی حرکت است. پالس به پیشروی خود در طول فنر ادامه خواهد داد تا اینکه به سر دیگر فنر برسد، در آنجا فرایند بازتاب به نوعی اتفاق خواهد افتاد، تا وقتی که پالس به حرکت بی وقفه اش ادامه دهد، به نظر می رسد همان وضعیتی را که در شکل (۸-۷) نشان داده شده حفظ کند. اکنون چگونه می توانیم رفتار چنین پالسهای را با آنچه پیش از این درباره امواج سینوسی آموخته ایم ربط دهیم؟ پاسخ لازم در تحلیل فوریه پیش بینی شده است و در بخشی که ذیلاً مطرح می شود خواهیم دید که چگونه می توان این ارتباط را برقرار ساخت. از مطالعه دقیق در این زمینه به این نتیجه رسیده اند که تراگیل هر سیگنال آزاد و مستقل است.

ابتدا فرض می کنیم که ریسمان بسیار بلندی در اختیار داریم و می خواهیم با بالا و پایین بردن یک سر آن، نوساناتی ایجاد کنیم و آن را به حرکت هماهنگ ساده ای با دوره

تناوب یک ساعت وا داریم. برای تهیه وسایل مخصوص (آزمایش)، ریسمانی انتخاب می کنیم که کشش آن  $100\text{N}$  و چگالی خطی اش  $1\text{kg.m}^{-1}$  باشد. در نتیجه سرعت موج در آن



شکل ۷-۸ تولید و حرکت یک پالس را در طول یک فنر نشان می دهد، تصاویر پالس با یک دوربین متحرک گرفته شده است (عکس از کمیته مطالعات دانش فیزیک، فیزیک، هیت، بوستون، ۱۹۶۵).

یا  $10\text{ m.s}^{-1}$  است و طول موج چنین موجی با این سرعت مساوی خواهد بود با نسبت  $v$  تقسیم بر بسامد  $\left( = \frac{1}{3600} \text{sec}^{-1} \right)$ ، یا، مساوی حاصلضرب سرعت در زمان تناوب  $(3600\text{sec})$  است، در نتیجه  $\lambda = 36000\text{ m}$  یا در حدود ۲۲ مایل به دست می آید. اکنون

فرض می کنیم همین ریسمان چند برابر بلندتر مثلاً ۱۰۰ مایل باشد. این فرض اخیر، البته، از نظر فیزیکی غیر منطقی است، ولی تصور آن اساساً به پرورش فکر کمک خواهد کرد.

اکنون فرض می کنیم که یک سر ریسمان را با ترکیبی از هماهنگها با بسامدهای اصلی به نوسان در آوریم. دومین هماهنگ امواج سینوسی را با طول موج  $18000\text{ m}$  تولید خواهد کرد، بیست و دومین هماهنگ، امواجی با طول موج حدود یک مایل تولید خواهد کرد،  $36000$  امین هماهنگ، امواجی با طول موج متر ایجاد خواهد کرد. ما این امواج را به عنوان نمونه های خاصی مطرح می کنیم، ولی نکته اصلی آن است که بتوانیم امکان بر هم نهی هزارها هزار ارتعاش سینوسی گوناگون را، که به یک سر ریسمان اعمال می کنیم، در نظر بگیریم؛ ناگفته نماند که بسامد همه آنها مضارب صحیحی از همان بسامد اصلی (و فوق العاده پایین) است، و همه آنها امواج رونده در طول ریسمان را تولید خواهند کرد که با همان سرعت پیش می روند، در نتیجه این تکرار الگوی آشفستگی، که اصولاً مشابه آشفستگیهای نشان داده شده در شکلهای (۷-۶) و (۷-۷) است، در طول ریسمان حرکتی خواهیم داشت، ولی باید دانست که فاصله تکرارها بسیار طولانی و در حقیقت مساوی با طول موج منسوب به بسامد اصلی  $1\text{ hr}^{-1}$  است.

ولی اکنون می خواهیم امکانات قابل ملاحظه ای را به طور ضمنی در قضیه فوریه دخالت دهیم. برای این منظور، همان گونه که در فصل ۶ [معادله (۶-۳۰)] گفتیم هر گونه وابستگی زمان به الگوی جابه جایی را که در فواصل معینی (با دوره تناوب  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ ) تکرار شود می توان به صورت یک ترکیب خطی نامحدودی از هماهنگها بیان کرد که توسط  $\omega_1$  و همه مضارب صحیح آن نمایش داده شده است.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t - \delta_n) \quad (16-7)$$

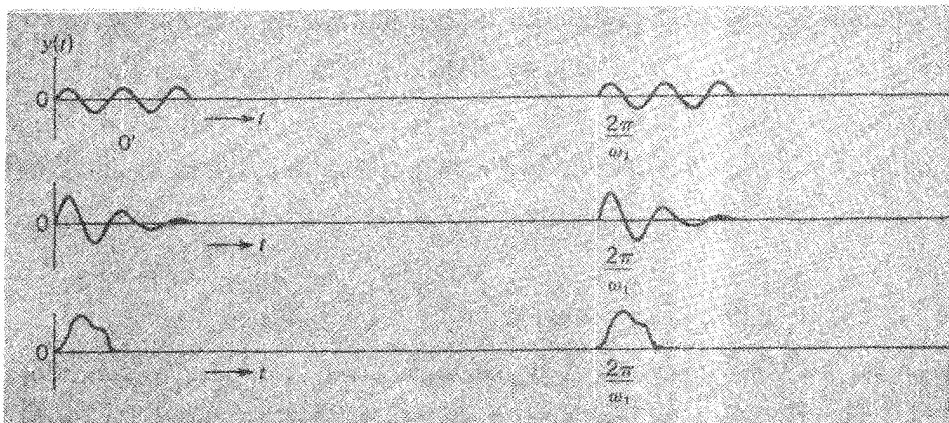
عکس این قضیه آن است که اگر بخواهیم بتوانیم هر الگوی تکراری در طیف کامل هماهنگها را با بسامد اصلی  $\frac{\omega_1}{2\pi}$  ترکیب کنیم.

اکنون در حالت مخصوص، می توانیم یک آشفستگی را در نظر بگیریم که دوره تناوب آن به سمت صفر میل می کند، در شکل (۷-۹) چند نمونه نشان داده شده است. طبق قضیه فوریه هریک از این نمونه ها، و نمونه های تناوبی دیگر تابع زمان می تواند به شکل ارتعاشات سینوسی و به صورت تابع پیوسته ای از زمان باشد. نبود هرگونه جابه جایی

تکراری با دوره تناوب  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  به علت ترکیب هماهنگی است که منجر به حذف کامل جابه جایی در این ناحیه می شود. ولی با وجود این، هنگامی که آشفتگی در حالت مخصوص صفر نباشد، با دوره تناوب مطلوب شکل می گیرد.

باید یادآور شد که از معادله (۷-۱۶) [ که با معادله (۶-۳۰) یکسان است ] استنباط می شود که برای نمایش یک تابع تناوبی دلخواه به توابع سینوسی و کسینوسی  $n\omega_1 t$  نیاز است، برای این منظور داریم:

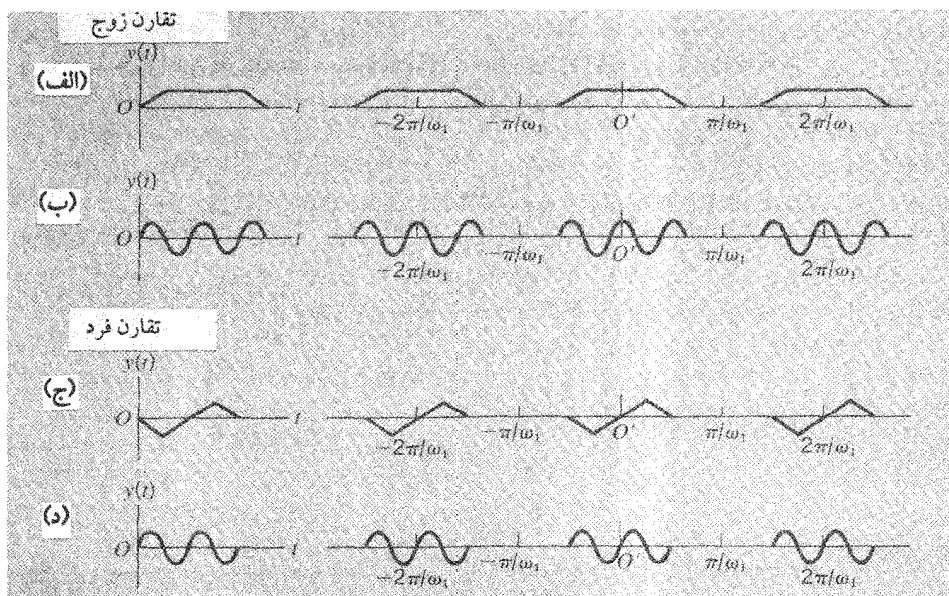
$$C_n \cos(n\omega_1 t - \delta_n) = A_n \sin n\omega_1 t + B \cos n\omega_1 t$$



شکل ۹-۷ نمونه هایی از آشفتگیهای تکراری تناوبی، که دوره تناوب به سمت صفر میل می کند.

شکلهای معین  $y(t)$ ، در اینجا فقط بر حسب توابع سینوسی یا توابع کسینوسی قابل توصیف خواهند بود. مخصوصاً اگر  $y(t)$  تابع زوج  $t$  باشد، در آن صورت بازای هر اندازه  $t$  داریم:  $f(-t) = +f(t)$ ، بنابراین تحلیل فوریه فقط به توابع کسینوسی نیاز دارد، حال اگر آن تابع فرد باشد در صورتی که  $f(-t) = -f(t)$  باشد، توابع سینوسی کافی خواهد بود. اگر تابع  $y(t)$  نسبت به نقطه وسط محور زمان دارای تقارن فرد یا زوج باشد، این نوع ساده سازی همیشه امکان پذیر است. بنابراین، به عنوان مثال، در شکل [۹-۷ الف] تابع  $y(t)$ ، که شامل  $\frac{1}{4}$  چرخه یک موج سینوسی است و از آشفتگی صفر پیروی می کند، نشان داده شده است، که نسبت به مبداء زمان، نه تقارن فرد دارد و نه تقارن زوج. از طرف دیگر، اگر مبداء به نقطه  $O'$ ، که منطبق بر قلّه مرکزی قطار موج سینوسی است، منتقل شود، تابع

نسبت به  $O'$  یک تابع زوج است. همین طور چرخه های یک موج سینوسی را - البته به تعداد صحیح - که در فواصل منظم تکرار شده باشد، با انتقال مناسب مبدا، می توان مانند یک تابع فرد نمایش داد. در چنین حالاتی، اندازه گیری یک دوره تناوب به تنهایی بین  $t = -\frac{\pi}{\omega_1}$  و  $t = +\frac{\pi}{\omega_1}$  از اندازه گیری بین  $0$  و  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  مناسبتر خواهد بود. شکل (۷-۱۰) کاربرد این روش نمونه را در مورد پالسهای زوج یا فرد نشان می دهد.



شکل ۷-۱۰ انتقال مبدا در انواع گوناگون پالس برای به تقارن رسیدن

مثال<sup>۴</sup>. فرض کنید می خواهیم موجی به شکل ۱۰۰ چرخه با ۱۰۰۰ آمین هماهنگ - که یک دهم دوره تناوب اصلی را اشغال می کند - ایجاد کنیم، به طوری که برای ۹۰٪ بقیه زمان از آشفتگی صفر پیروی کند. این وضعیت در شکل [۷-۱۰(د)] نشان داده شده است. با توجه به نقطه وسط تابع موج قطار به وسیله معادلات زیر در فاصله بین  $-\frac{\pi}{\omega_1}$  و  $+\frac{\pi}{\omega_1}$  توصیف

۴- این مثال را می توان حذف کرد بدون آنکه به پیوستگی مطلب لطمه ای وارد آید.

می شود:

$$0 \leq t \leq \frac{100\pi}{N\omega_1} \quad y(t) = A_0 \sin N\omega_1 t$$

$$\frac{100\pi}{N\omega_1} < t \leq \frac{\pi}{\omega_1} \quad y(t) = 0$$

$$N = 1000$$

در اینجا

چون تابع فرد است، فقط بر حسب مجموعه کامل توابع  $\sin n\omega_1 t$  قابل تحلیل است. [یعنی تمام زوایای فاز  $\delta_n$  در معادله (۷-۱۶) مساوی  $\frac{\pi}{2}$  اند]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\omega_1 t \quad (7-18)$$

و ضرایب  $C_n$ ، در یک دوره تناوب کامل  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ ، با استفاده از عمود بودن توابع سینوسی بر توابع اولیه به دست می آید:

$$\int_{\frac{\omega_1}{\pi}}^{\frac{\pi}{\omega_1}} \sin n_1 \omega_1 t \sin n_2 \omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & n_1 \neq n_2 \quad \text{اگر} \\ \frac{\pi}{\omega_1} & n_1 = n_2 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

بنابراین پس از ضرب معادله (۷-۱۸) در  $\sin n\omega_1 t$  و تابع اولیه گرفتن، نتیجه می شود:

$$C_n = \frac{\omega_1}{\pi} \int_{\frac{\omega_1}{\pi}}^{\frac{\pi}{\omega_1}} y(t) \sin n\omega_1 t dt$$

در این رابطه به جای  $y(t)$  با استفاده از معادلات (۷-۱۷) مقدار قرار می دهیم و رابطه زیر به دست می آید:

$$C_n = \frac{\omega_1 A_0}{\pi} \int_{\frac{N\omega_1}{100\pi}}^{\frac{100\pi}{N\omega_1}} \sin N\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt$$

(پادآور می شویم که در حال حاضر حدود انتگرال گیری  $\pm \frac{100\pi}{N\omega_1}$  است، زیرا انتگرال خارج

از این حدود صفر است.) این انتگرال را با استفاده از رابطه زیر می‌خواهیم ارزیابی کنیم:

$$\sin N\omega_1 t \sin n\omega_1 t = \frac{1}{2} [\cos(N-n)\omega_1 t - \cos(N+n)\omega_1 t]$$

می‌شود:

$$\int \sin N\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(N-n)\omega_1 t}{(N-n)\omega_1} - \frac{\sin(N+n)\omega_1 t}{(N+n)\omega_1} \right]$$

با درج حدود به جای  $t$ ، می‌بینیم که اندازه‌های  $\pm \frac{100\pi}{N}$  به جای  $\omega_1 t$  نوشته می‌شود، در

نتیجه داریم:

$$C_n = \frac{\omega_1 A_o}{\pi} \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{100\pi(N-n)}{N} \right]}{(N-n)\omega_1} - \frac{\sin \left[ \frac{100\pi(N+n)}{N} \right]}{(N+n)\omega_1} \right\}$$

در اینجا یک تقریب را بیان خواهیم کرد. یادآور می‌شویم که مخرج نخستین جمله داخل آکولاد به ازاء  $n \approx N$  نمو کمی دارد. به همین دلیل مخرج دومین جمله همواره بزرگ است. اندازه بیشینه ممکن برای صورت کسر در هر یک از دو جمله مساوی واحد است. بنابراین بازای بیشترین نتایج می‌توان از دومین جمله داخل آکولاد چشم‌پوشی کرد. در آن صورت عبارت تقریب خلاصه شده برای دامنه‌های  $C_n$  به صورت زیر در می‌آید.

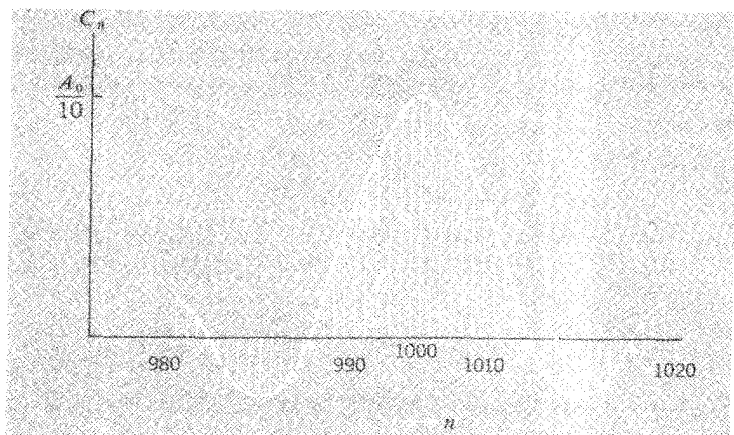
$$C_n \approx \frac{A_o}{\pi} \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{100\pi(N-n)}{N} \right]}{N-n} \right\}$$

$$\theta_n = \frac{100\pi(N-n)}{N} \quad \text{در اینجا} \quad C_n \approx \frac{100 A_o}{N} \left( \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} \right) \text{ یا}$$

اندازه  $C_n$  فقط در مجاورت  $n=N$  بزرگ است. تابع  $\frac{\sin \theta_n}{\theta_n}$  بازای  $\theta_n = 0$  مساوی یک



است و به ازاء  $\theta_n = \pm\pi$  تا حدّ صفر تنزّل می کند ( به این ترتیب با نوسان  $\theta_n$  بین اندازه های منفی و مثبت ، دامنه به طور یکنواخت کاهش می یابد) <sup>۵</sup>. اگر  $N = 1000$  باشد، همان گونه که فرض کرده بودیم بازای  $n = N \pm 10$  داریم  $\theta_n = \pm\pi$ . و این بدان معناست که طیف گروه ۱۰۰ چرخه ما با  $N = 1000$ ، اصولاً دسته ای از سهام را با  $n = 1000$  و بزرگترین تک دامنه ، که در شکل (۷-۱۱) نشان داده شده است تشکیل می دهد.



شکل ۷-۱۱ طیف بسامد ( با استنباط از تحلیل فوریه ، دامنه بر حسب بسامد رسم شده است ) برای یک سیگنال ۱۰۰ چرخه از یک موج سینوسی یک دست دریاژه زمانی ۱۰۰۰ چرخه تکرار شده است.

اگر ارتعاش گزینشی برای تعداد بسیار زیادی از چرخه ها ادامه یابد در آن صورت طیف مربوط بر حسب هماهنگهای محض به طور نامحدود محفوظ می ماند و چرخه در حدّ نهایی باریک می شود. البته ما می خواهیم این امر در مورد  $N=100$  هماهنگ محض به اجرا در آید.

از طرف دیگر ، یک پالس فقط چند چرخه را با بسامد هماهنگ معینی تشکیل می دهد که مستلزم به کاربردن یک طیف بینهایت پهن است (چندین هماهنگ با دامنه های نظیر هم) که

---

۵- اندازه های منفی  $C_n$  را مانند بحث نوسانگر واداشته یا تغییر فاز  $\pi$  می توان توجیه کرد. لذا این دامنه ها را برحسب اندازه های مثبت  $C_n$  ، که منسوب به فازهای  $\delta_n$  و به جای  $\frac{\pi}{2}$  و  $(-\frac{\pi}{2})$  است، می توان محاسبه کرد

در ترکیب فوریه<sup>۶</sup> صدق کند. این رابطه عکس، که بین مدت پالس و پهنای طیف بسامد آن برقرار است، اصولاً یک رابطه بسیار اساسی است. واضح است که این نوع نتیجه، نظرها را به فصل ۱ بیشتر معطوف می سازد؛ و در حقیقت اختطاری است که آشفتگیهای سینوسی کاملاً یک دست واقعاً وجود ندارد. ولی، البته، یک ارتعاش سینوسی که فرضاً برای یک میلیون چرخه ادامه داشته باشد، طیف بسامدش به شکل یک تک خط نازک است.

اکنون می خواهیم جنبه های کیفی ارتعاشات تکراری را بیشتر مورد توجه قرار دهیم که بین هر دو ارتعاش یک بازه زمانی طولانی سکون حاکم باشد. ما این ارتعاش را، که بر حسب مورد به طیف کامل مولفه های فوریه در حال تجزیه است در نظر می گیریم. این وقفه های ممتد، ولی تناوبی، به شرط آنکه سرعت موج هر مولفه دقیقاً یکسان باشد، بر اثر تکرار ارتعاشات، پالسهای مجزایی را در فواصل مساوی به دنبال دارد که در محیط در حال پیشروی هستند. مثلاً، باریسمان بلندی که در اختیار داریم می توان تصور کرد که امکان تولید پالسهای موج، به گونه ای که در شکل [۷-۹(ج)] نشان داده شده است، وجود دارد. طول هر کدام چند متر است و در فاصله ۳۶km تکرار می شوند. این پالسها یا آشفتگیهای منفرد از هر لحاظ مجزا خواهند بود. در عمل، زیاد قابل تصور نیست که برای اصول تحلیل فوریه بتوان یک حد بینهایت طولانی در نظر گرفت. از این رو شکل موج در امواج رونده، مرتب تکرار می شود. به همین جهت شکل یک تک موج را در صورتی می توان در نظر گرفت که الگوی جابه جایی اولاً تکرار نشده باشد، ثانیاً تابع زمان یا تابع وضعیّت آشفتگیهای سینوسی باشد و اندازه دوره تناوب یا طول موجهای در حال افزایش بینهایت بزرگ باشد.

همان گونه که در بالا یادآور شدیم در صورتی که سرعت امواج سینوسی محض به بسامد یا طول موجشان بستگی نداشته باشد، انتشار پالسهای مجزای دلخواه را در یک محیط می توان بدون هرگونه تغییر شکل در نظر گرفت. اکنون چند نمونه از حرکت چنین پالسهایی را بررسی می کنیم.

### حرکت پالسهای موج با شکل ثابت

ما می توانیم رفتار یک پالس معین را که در شرایط ویژه بالا صدق کند، در

۶- شما مسلماً قانع شده اید که تحلیلهای قبلی متضمن این ویژگی است.

شرایط کاملاً عمومی، مورد بررسی قرار دهیم. فرض می‌کنیم که یک پالس از چپ به راست در حرکت باشد، چنین پالسی در زمان  $t = 0$  با معادله معین زیر توصیف می‌شود:

$$y(t = 0) = f(x)$$

اگر یک پالس کامل با سرعت  $v$  در حرکت باشد، و جابجایی آن در مبداء زمان (مثلاً  $x_1$ ) فرض شود. و پس از زمان  $t$  به  $x_2$  برسد، در این صورت داریم:

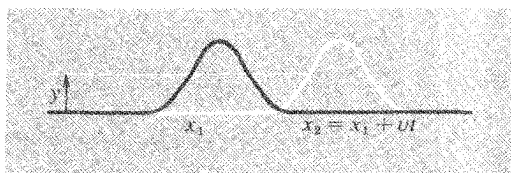
$$x_2 = x_1 + vt$$

معادله پالس را بازای این اندازه جدید  $t$ ، و با توجه به تصویر پالس در زمان  $t$ ، می‌توان به دست آورد. تصویر پالس در این لحظه درست مانند تصویری است که در  $t = 0$  داشته است. با این تفاوت که نسبت به مبداء  $x$  به اندازه فاصله  $vt$  [شکل (۷-۱۲) را ببینید] تغییر مکان یافته است. به این ترتیب می‌توان جابجایی عرضی را با زبان ریاضی، بازای اندازه‌های  $x$  و  $t$  به صورت زیر ارائه داد:

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (۷-۱۹)$$

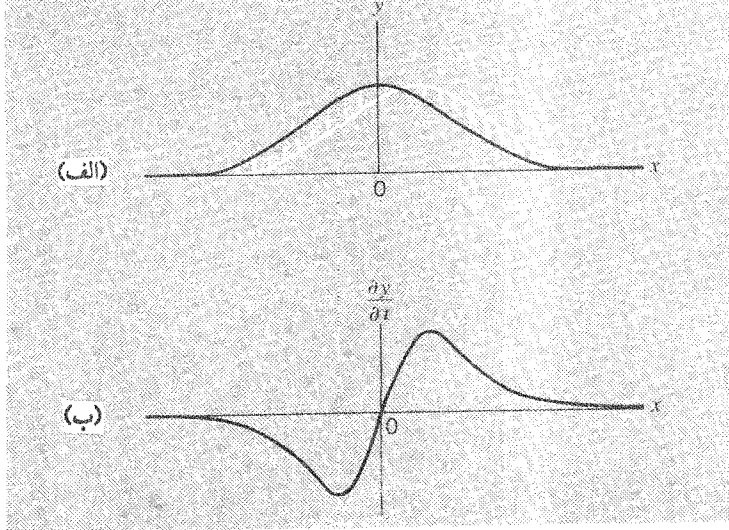
انتخاب این شکل تحلیلی می‌تواند مورد تأیید باشد، زیرا پس از آنکه وضعیت را در  $(x, t)$  در نظر می‌گیریم، در حالت مخصوص هم اندازه  $y$  برای یک موج سینوسی محض با رعایت شرایط لازم، و بازای  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$  به دست خواهد آمد. با روش مشابهی یک پالس پیشرونده از راست به چپ هم با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$v(x, t) = g(x + vt) \quad (۷-۲۰)$$



شکل ۷-۱۲ حرکت یک پالس پیشرونده اختیاری

شکل دقیق توابع  $f$  و  $g$  اهمیت ندارد. مهم آن است که بتوانیم  $y$  را به صورت تابع  $x \pm vt$  بیان کنیم. بنابراین، مثلاً، می‌توان شکل معین پالس را، که از چپ به راست در حرکت



شکل ۷-۱۳ (الف) پیشروی پالس که آن را معادله (۷-۲۱) توصیف کرده است .

(ب) توابع سرعت‌های عرضی در خلال پیشروی پالس .

است ، به کمک معادله زیر تعیین کرد :

$$y(x, t) = \frac{b^2}{b^2 + (x - vt)^2} \quad (7-21)$$

شکلهای این پالس در  $t = 0$  و در زمان کوتاهی پس از آن در شکل [۷-۱۳ (الف)] نشان داده شده است . ارتفاع قله پالس  $b$  خواهد بود ، و قله در  $t = 0$  از  $x = 0$  خواهد گذشت . ارتفاع قله هنگام گذشتن از نقاط  $x = vt \pm b$  به نصف ارتفاع بیشینه تنزل می کند ، و بازای  $|x - vt| > 3b$  به کمتر از ۱۰٪ ارتفاع قله کاهش خواهد یافت . با استفاده از توابع توان ، نمایی ، مثلثاتی و غیره ، و با نوشتن هر عدد قابل قبول دیگر در تابع ، می توان شکل پالس را مشخص کرد . ولی همه این قبیل پالسها ، اگر دقیقاً در یکی از معادلات (۷-۱۹) و (۷-۲۰) صدق کنند ، در حالی که شکل خود را حفظ می کنند با روش مشابه و سرعت یکسان  $v$  در حرکتند .

برای درک امواج ارزیابی چگونگی حرکت نیمرخ موج در جهت انتشار ( $x$ ) بسیار حائز اهمیت است ، و می تواند نتیجه جابه جاییهای ذره ، دقیقاً در جهت عرضی ( $y$ ) باشد . بنابراین ، پالس شکل [۷-۱۳ (الف)] که به طرف راست حرکت می کند ، علتش آن است که

در هر لحظه، جابه جایی عرضی هر نقطه در طرف چپ قله رو به افزایش، و جابه جایی هر نقطه در طرف راست قله رو به کاهش است. نتیجه قهری این حرکات آن است که جابه جایی قله، با اندازه های  $X$ ، به مرور زمان بیشتر شود.

حال می خواهیم توزیع سرعت های عرضی را برای پالسی که با معادله (۷-۲۱) توصیف شده است حساب کنیم. سرعت عرضی هر ذره از محیط (فتر، ریسمان یا هر محیط دیگر) در نقطه معین  $X$  مساوی آهنگ تغییر  $Y$  نسبت به  $t$  است، یعنی

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

در اینجا ما از مشتق جزئی استفاده می کنیم، برای آنکه  $Y$  تابع هر دو متغیر  $X$  و  $t$  است و  $X$  را ثابت نگه داشته ایم. بنابراین از معادله (۷-۲۱) مشتق می گیریم و نتیجه می شود:

$$v_y = \frac{-b^2}{[b^2 - (x - vt)^2]^2} \frac{\partial}{\partial t} [b^2 + (x - vt)^2]$$

یعنی

$$v_y(x, t) = \frac{2b^2(x - vt)v}{[b^2 + (x - vt)^2]^2} \quad (۷-۲۲)$$

به کمک این رابطه سرعت عرضی در هر نقطه و در هر زمان تعیین می شود. فرض کنیم می خواهیم توزیع سرعت های عرضی را در  $t = 0$ ، هنگامی که قله پالس از نقطه  $x = 0$  می گذرد، به دست آوریم. با قرار دادن  $t = 0$  در معادله (۷-۲۲) خواهیم داشت:

$$v_y(x, 0) = \frac{2b^2 vx}{(b^2 + x^2)^2}$$

نمودار این توزیع سرعت در شکل (۷-۱۳ب) نشان داده شده است، و براحتی می توان دید که این سرعتها چگونه در مدت کوتاه  $\Delta t$  موجب جابه جاییهای کوچک برداری می شوند، در نتیجه تمام پالس، همان گونه که در شکل (۷-۱۳الف) مشخص شده است تغییر مکان می یابد. البته خود توزیع سرعت که با پالس حرکت می کند باید مورد توجه قرار گیرد؛ بنابراین شرط  $v_y = 0$  همواره در مورد قله پالس صدق می کند. البته شکل

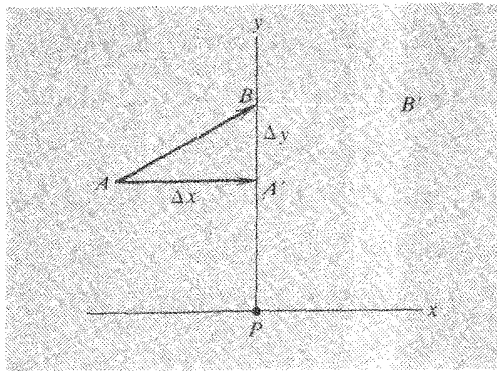
معادله (۷-۲۲) متضمن این شرط است، زیرا نشان می دهد که  $v_y$  مانند خود  $y$  تابع متغیر مرکب  $x - vt$  است.

شما ممکن است پیش از این هم پی برده باشید که بین سرعت عرضی و شیب نیمرخ پالس رابطه نزدیکی وجود دارد. اکنون با توجه به شکل (۷-۱۴) فرض کنید که تصویر لحظه ای یک پالس بخش کوچکی از آن را در امتداد خط مستقیم  $AB$  نشان دهد. شیب را به کمک  $\frac{A'B}{AA'}$  می توان اندازه گرفت. ولی خط  $AB$  در بازه زمانی کوتاه  $\Delta t$  حرکت می کند تا به وضع  $A'B'$  در آید؛ این زمان از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta t = \frac{AA'}{v}$$

در اینجا  $v$  سرعت عبور پالس است. هر چند، اگر ما مشاهدات خود را در راستای خط قائم، تا  $x$  که مشخص شده، محدود کنیم، خواهیم دید که تغییر جابه جایی عرضی از  $PB$  به  $PA'$  در حکم پالسی است که از این خط قائم گذشته است. بنابراین مقدار این جابه جایی منفی و با فاصله  $A'B$  مساوی است و سرعت عرضی مربوط به آن عبارت است از:

$$-\frac{A'B}{\Delta t} = -v \left( \frac{A'B}{AA'} \right)$$



شکل ۷-۱۴ رابطه بین جابه جایی عرضی یک محیط و جابه جایی طولی یک پالس پیشرونده.

اکنون این رابطه را به صورت مشتق جزئی بیان می کنیم. شیب  $\frac{A'B}{AA'}$ ، به ازاء مقدار ثابت  $t$ ، با  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  مساوی است، و از بحث بالا می توان نتیجه گرفت که (در حد) رابطه زیر برقرار

$$v_y = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

از آنجا که  $v$  به ازاء مقدار ثابت  $x$  مساوی  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  است، می توان رابطه را به صورت زیر

نوشت:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

بنابر این سرعت عرضی در هر نقطه مستقیماً با شیب نیمرخ پالس در آن نقطه مساوی است. ما می توانیم این تحلیل را با این تعریف تکمیل کنیم و یادآور شویم که خود  $v$  با حد اندازه  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، به ازاء مقدار ثابت  $y$ ، مساوی است، یعنی:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}$$

با قرار دادن همه این مقادیر (در رابطه قبلی) نتیجه زیر به دست می آید:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (۲۳-۷)$$

معادله (۲۳-۷) به طور فریبنده ای نظیر قاعده زنجیر در مورد مشتق گیری معمولی است ولی علامت منفی را باید در نظر گرفت. در اینجا ما از لحاظ نوع وضعیت با یک حالت خاص مواجهیم که در آن کمیّت  $y$  تابع دو متغیر مکان و زمان است. این کمیّت ممکن است در یک لحظه معین از مکانی به مکانی دیگر تغییر کند و یا ممکن است در مکان معین نسبت به زمان تغییر کند. به این ترتیب هرگاه  $y$  را دوبار پی در پی، به فاصله زمانی  $\Delta t$  و در اوضاع متمایزی به فاصله مکانی  $\Delta x$  مشاهده کنیم، به اندازه  $\Delta y$  تفاوت خواهد داشت، این تفاوت به صورت زیر بیان می شود:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$$

به طور کلی روی هم رفته آهنگ تغییر  $y$  به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \quad (۲۴-۷)$$

در اینجا  $v$  سرعت  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  است. عملگر  $\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$  در بیشتر موارد مشتق همرفتی<sup>v</sup> نامیده می شود. اگر نقطه مورد نظر با سرعت معینی حرکت کند، این عملگر روش به دست آوردن آهنگ تغییر  $y$  را نسبت به زمان - مثلاً حرکت یک سیال (شاره) را یک جا - معین می کند. و اگر، در معادله (۲۴-۷) شرط  $\frac{dy}{dt} = 0$  برقرار باشد، این شرط یادآور آن است که توجه خود را به اندازه مخصوص  $y$  معطوف سازیم، درست همان گونه که در تعیین حرکت یک نقطه با جابه جایی معین در مورد یک نیمرخ پالس دلخواه عمل کردیم. ولی این شرط  $-\frac{dy}{dt} = 0$  معادله (۲۴-۷) را به معادله (۲۳-۷)، که بیانگر حالت مخصوص است، تبدیل می کند.

در هر حال به آسانی می توان فهمید که معادلات عمومی ارائه شده، یعنی (۱۹-۷) و (۲۰-۷) هر دو با معادله دیفرانسیل اصلی حرکت موج سازگار است. [ البته، پیش از این هم به این نکته پی برده بودیم که چنین پالس پیشرونده ای نتیجه برهمنهی امواج سینوسی است که از معادله (۹-۷) پیروی می کنند. ] در این مورد دو معادله به شرح زیر داریم:

$$y(x, t) = \begin{cases} f(x - vt) \\ f(x + vt) \end{cases}$$

برای نخستین آنها می توان نوشت:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{d(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = f'$$

در اینجا  $f'$  مشتق  $f$  نسبت به تمام شناسه  $(x - vt)$  است. حال دوباره مشتق می گیریم، می شود:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''$$

در اینجا  $f''$  مشتق دوم نسبت به  $(x - vt)$  است. اکنون نسبت به  $t$  مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f' \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -vf'$$



و، پس از مشتق گیری دوم داریم:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (-v)^2 f'' = v^2 f''$$

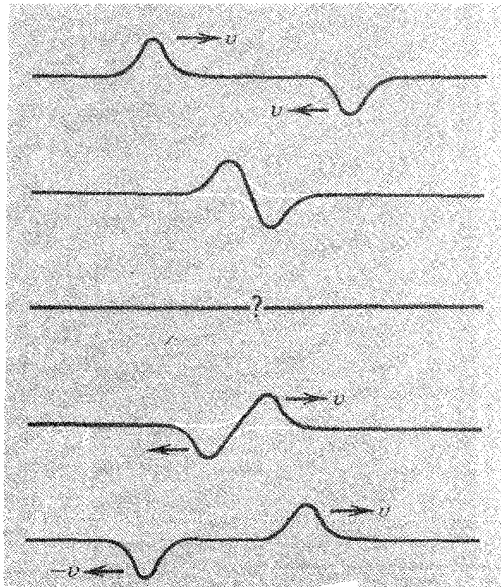
از مقایسه این دو مشتق دوم نتیجه می گیریم که

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

بنابراین معادله (۷-۹) دوباره به دست می آید. اگر همین روش را با تابع  $g(x + vt)$ ، که بیانگر یک آشفستگی دلخواه رونده در جهت منفی  $x$  است، به کار ببریم، خواهیم دید که تنها تفاوت در آن است که ضریب  $+v$  جایگزین  $-v$  شده ولی نتیجه هر بار مشتق گیری بر حسب  $t$ ، مشابه حالت قبلی است. بنابراین پس از دوبار مشتق گیری، می بینیم که توابع  $f$  و  $g$  از یک معادله یکسان پیروی می کنند.

### برهنه‌ی پالسهای موج

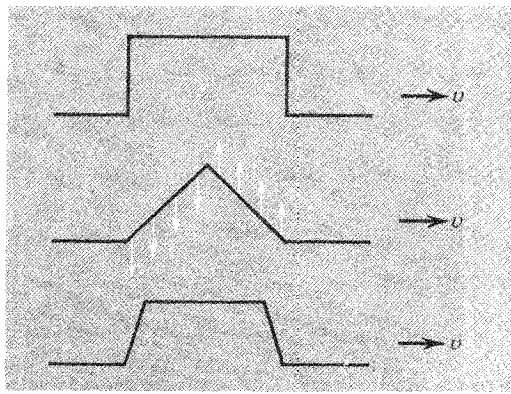
در مبحث قبلی ما خود را مقید کرده بودیم که تک پالسها را در نظر بگیریم. ولی یکی از مهمترین و جالبترین شکلهای رفتاری چنین پالسهای آن است که دو تا از آنها،



شکل ۷-۱۵ برهنه‌ی ما: الی دو پالس معکوس، که یکی از راست به چپ و دیگری از چپ به راست، در خلاف جهت یکدیگر، در حرکت است، و قله‌های آنها نیز یکی رو به بالا و دیگری رو به پایین است.

هنگامی که در جهات مخالف هم در حرکتند و از روبرو با هم برخورد می کنند بتوانند با حفظ هویت خود از درون هم بیرون آیند و به حرکت خود ادامه دهند. این برهمنهی است که بار دیگر به نحو بسیار جالبی رخ می دهد. شکل (۷-۱۵) آنچه را که در چنین برهمنهی غیر منتظره اتفاق افتاده نشان می دهد. دو پالس متقارن در خلاف جهت یکدیگر در حرکتند؛ آنها دقیقاً شبیه یکدیگرند، جز آنکه یکی مثبت و دیگری منفی است. هنگامی که آنها از درون یکدیگر می گذرند، لحظه ای فرا می رسد که تمام فتر یا ریسمان به حالت مستقیم در می آید؛ در آن لحظه اگر پالسها یکدیگر را نابود سازند، می توان نتیجه گرفت که قرینه اند. ولی عقل سلیم به شما خواهد گفت که هر پالس حامل مقداری انرژی مثبت است، که به سادگی نمی تواند از بین برود. در حقیقت، همین انرژی است که پالسها را دوباره ظاهر می سازد. ولی چه عاملی موجب می شود که پالسها پس از پشت سر گذاشتن مرحله برهم نهی صفر، دوباره دست نخورده و با همان شکل اولیه شان ظاهر شوند؟ این عامل، سرعت قسمتهای مختلف دستگاه است. ریسمان در لحظه ای که تغییر شکل عرضی صفر است، دارای توزیع سرعتهای عرضی هر یک از دو پالس بر هم نهاده است - و توزیع سرعت دو پالس مشابه و متقارن که یکی مثبت و به طرف راست، و دیگری منفی و به طرف چپ پیش می رود یکسان است. این تقارن در معادله (۷-۲۳) مشهود است - چون علائم هردو کسر  $\frac{\partial x}{\partial t}$  و  $\frac{\partial y}{\partial x}$  عکس یکدیگرند. اما لا که بدون تغییر باقی می ماند ولی اگر کسی شکل دو پالس را در همان دو لحظه متوالی که ظاهر می شوند بکشد، شکل برهمنهی فوراً آشکار می شود. به طور کلی جابه جایی های عرضی از بین می روند، ولی سرعتهای عرضی جمع می شود، و در آن یک لحظه تمام انرژی دستگاه با توجه به این سرعتها به صورت انرژی جنبشی باقی می ماند. ولی برای لحظه ای می خواهیم فقط از دریچه سینماتیک به مساله نگاه کنیم.

۹- لئونارد و داونچی یکی از باهوشترین مشاهده کنندگان زمان خود بوده است. او در سطح وسیعی امواج را مطالعه کرد و با نتایج چنین برهمنهی هایی آشنا بود، ولی مکانیسم آنها را تشخیص نداد. بنابراین نوشت: «تمام برآمدگیهای ایجاد شده در سطح آب می توانند بدون آنکه از بین بروند در درون یکدیگر ادغام شوند. یک موج هرگز در دیگری نفوذ نمی کند؛ ولی وقتی آنها به هم برخورد می کنند به عقب بر می گردند.» به دفاتر یادداشت لئونارد و داونچی ترجمه Edward McCurdy, Braziller, نیویورک، ۱۹۵۶، مراجعه کنید.



شکل ۷-۱۶ تصورات هندسی از نمونه های ساده پالس .

تصور شکلهای ساده هندسی - نظیر مستطیل ، مثلث و دوزنقه که در شکل (۷-۱۶) نشان داده شده - برای نیمرخهای پالس ، در بعضی موارد ، احتمالاً مناسب است . مثلاً ، با یک پالس مستطیلی سرعت عرضی در تمام نقاط هر یک از پهلوهای مستطیل یکسان است و تحلیل نتایج برهنه‌ی چنین پالسهایی به آسانی امکان پذیر است . گرچه محقق شده است که چنین شکلهایی غیر فیزیکی هستند . بنابراین گذشتن یک پالس مستطیلی مستلزم آن است که سرعت عرضی در پهلوهای قائم پالس بیهتایت زیاد باشد و گوشه های تیز هر نیمرخ پالس (نظیر دوزنقه) که ناپیوستگی به همراه دارد موجب تغییر سرعت عرضی می شود که به وسیله شتابهای بسیار بالا صورت می گیرد و شتابهای بسیار بالا بر اثر اعمال نیروهای قوی است . از این رو هر پالس حقیقی با گوشه های گرد و پهلوی مایل ممکن است شکل خارجی اش به گونه ای دیگر باشد .

### پاشندگی ؛ فاز و سرعتهای گروه

ما معادله موج سینوسی پیشرونده را به صورت [ معادله (۷-۷) ] ارائه داده ایم

$$y(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

در مورد یک ریسمان کشیده که دارای توزیع جرم یکنواخت باشد، [معادله (۷-۵)] سرعت را

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

طبق این معادلات ، یک ریسمان معین ، تحت کشش معین ، امواج سینوسی را با هر طول موجی با سرعت یکسان  $v$  انتقال خواهد داد . گرچه این نظریه ، تصوّر مطلوبی است که مسلماً با چند درجه تخفیف برای هر ریسمان عملاً صدق خواهد کرد . ما در فصل ۵ ، در بحث مدهای طبیعی یک رشته با جرمهای متصل به آن ، مخصوصاً به این محدودیت اشاره کرده ایم . ولی آنچه در اینجا برای یک ریسمان گره دار به طول  $L$  که از هر دو طرف ثابت شده پیش می آید ، آن است که طول موج  $\lambda_n$  یک مُد طبیعی معین  $n$  همانند طول موج یک ریسمان یکنواخت -  $\frac{2L}{n}$  است ، ولی بسامد  $v_n$  که با  $n$  تناسب ساده ای ندارد ، از رابطه زیر به دست می آید :

$$v_n = 2v_0 \sin \left[ \frac{\pi n}{2(N+1)} \right]$$

بنابراین اندازه  $2v_0$  حدّ بالای بسامد رشته است که در طول آن ( $N$ ) جرم متصل شده باشد [ به معادله (۵-۲۵) مراجعه کنید ] . به ازاء  $n \ll N$  ، این  $v_n$  به همان نتیجه ای منتهی می شود که برای یک ریسمان یکنواخت به دست آوردیم ، و دیدیم که  $v_n$  با  $n$  متناسب است . ولی با افزایش  $n$  ، اندازه های  $v_n$  با سرعت کمتری روبه ازدیاد است .

به طور کلی ، باید انتظار داشت که سرعت امواج یک ریسمان برای امواج سینوسی محض با بسامد بالا و طول موج کوتاه کمتر از سرعت امواج بلندتر باشد . این مثال ، که بیانگر تغییر سرعت موج بر حسب طول موج است ، پاشیدگی نامیده می شود . پدیده پاشیدگی در بسیاری از محیطهای گوناگون ، با مکانیسمهای فیزیکی اساسی مختلف رخ می دهد . البته موضوعی که می خواهیم بر آن تاکید کنیم تحلیل بسیار خاصی نیست که ما را به خاصیت پاشندگی یک ریسمان حامل مهره ها سوق می دهد . بلکه تاثیر خود پاشیدگی است . کلمه (پاشیدگی) اشاره ای است بر جدایی آنچه که در آغاز در یک جا بوده ، و دقیقاً انسجام داشته است . وقتی نور سفید از میان منشوری می گذرد به رنگهای مختلف تجزیه می شود . سرعت امواج نور قرمز در شیشه از سرعت امواج نور آبی بیشتر

است، و مسیر تابش و شکست نوری که وارد منشور و از آن خارج می شود به کمک قانون اسنل<sup>۱۰</sup> مشخص می شود:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{c}{v}$$

بنابراین زاویه شکست، برای رنگهای مختلف بر حسب تغییر سرعت تغییر می کند. در یک مساله یک بُعدی پاشیدگی دو موج بلند، ولی محدود به قطارهای موج با طول موجهای متفاوت، در نظر گرفته خواهد شد و اگر چند محیط منطبق بر روی هم چیده شده باشد، هر بار که نور از سطح جدایی دو محیط بگذرد، پدیده شکست اتفاق می افتد. هم چنین هر قطار موج به خودی خود ترکیبی از امواج سینوسی است که با سرعتهای کمی متفاوت هنگام گذشتن از سطح جدایی دو محیط منحرف خواهد شد، و به مرور که پیش می رود گسترده و پهن تر می شود. فقط یک موج سینوسی واقعاً بسیار پهن با طول موج و بسامد منحصر به فرد است که با سرعت معین در یک محیط پاشنده حرکت خواهد کرد. (البته پاشندگی ممکن است در اوضاع خاصی قابل اغماض باشد - و در حالت مخصوص که امواج نور در خلاء منتشر می شود دقیقاً صفر است.)

برای آنکه نتایج پاشندگی را با هماهنگی بیشتری بررسی کنیم، باید ببینیم، اگر دو موج سینوسی با طول موجهای کمی متفاوت در طول یک ریسمان در یک جهت (ولی احتمالاً با سرعتهای مختلف) پیش روند، چه اتفاق خواهد افتاد. برای سادگی فرض می کنیم که دو موج با دامنه های مساوی، و با معادلات زیر منتشر می شوند:

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin 2\pi(k_1 x - v_1 t) \\ y_2 &= A \sin 2\pi(k_2 x - v_2 t) \end{aligned} \quad (25-7)$$

این معادلات به معادلات (۷-۱۴) که برای محاسبه شکل موج حاصل از برهم نهی دو موج هم سرعت ثابت کردیم شباهت زیادی دارند. البته، برای به کارگیری مناسب این معادلات، از عدد موج  $k$  به جای  $\frac{1}{\lambda}$  و از بسامد  $v$  به جای  $\frac{v}{\lambda}$  استفاده می کنیم. به طور کلی، اکنون، فرض کرده ایم

که این دو موج سرعت‌های متفاوتی دارند:

$$v_2 = \frac{v_2}{k_2} = v_2 \lambda_2 \quad v_1 = \frac{v_1}{k_1} = v_1 \lambda_1$$

از برهم‌نهی این دو موج آشفته‌گی مرکبی به دست می‌آید که از معادله زیر پیروی می‌کند:

$$y = A[\sin 2\pi(k_1 x - v_1 t) + \sin 2\pi(k_2 x - v_2 t)]$$

با استفاده از همان روابط مثلثاتی که پیش از این به‌کار بردیم، این معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$y = 2A \cos \pi[(k_1 - k_2)x - (v_1 - v_2)t] \times \sin 2\pi \left[ \frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{v_1 + v_2}{2} t \right]$$

به ازای  $t = 0$  این برهم‌نهی درست شبیه امواج برهم نهاده شکل (۷-۶) نمایان می‌شود. ولی اکنون می‌خواهیم ببینیم با گذشت زمان چه اتفاقی می‌افتد. عبارت بالا که برای  $y$  نوشته شده می‌تواند چنین تفسیر شود که موج با طول موج کوتاه با پوش طول موج بلند مدوله می‌شود. به این ترتیب هر دو آشفته‌گی موج گونه حرکت می‌کنند. ولی ممکن است سرعت‌های متفاوتی داشته باشند. در جایی که دامنه حداکثر ممکن را داشته باشد موج با سرعت پوش حرکت می‌کند.

اگر دو موج مرکب تقریباً طول موج‌های یکسان داشته باشند، آشفته‌گی مرکب را با قرار دادن داده‌های زیر می‌توان ساده‌تر بیان کرد:

$$v_1 - v_2 = \Delta v$$

$$k_1 - k_2 = \Delta k$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = v$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k$$

در این صورت به دست می‌آید:

$$y = 2A \cos \pi(x \Delta k - t \Delta v) \sin 2\pi(kx - vt) \quad (۷-۲۶)$$

بنابراین به کمک این عبارت می‌توان مشخصات سرعت‌ها را به دست آورد. یکی از این سرعت‌ها سرعتی است که قله متعلق به میانگین عدد موج  $k$  با آن سرعت حرکت می‌کند. و آن را

سرعت فاز  $v_p$  نامند :

$$v_p = \frac{v}{k} = v\lambda \quad (27-7)$$

دیگر، سرعتی است که مدوله کننده پوش یا آن سرعت حرکت می کند. زیرا این پوش گروهی از امواج کوتاه را در بر می گیرد. سرعت مورد بحث، سرعت گروه،  $v_g$  نامیده می شود:

$$v_g = \frac{\Delta v}{\Delta k} \rightarrow \frac{dv}{dk} \quad (28-7)$$

سرعت فاز نوعی سرعت است که آن را به موج قلبه ربط می دهیم. علت این نامگذاری آن است که در آشفتهگی موج کوتاه پایه می توان این سرعت را با اندازه ثابت فاز در ارتباط دانست. به عبارت دیگر این سرعت برای یک نقطه با جابه جایی صفر بیانگر افزایش  $x$  بر حسب  $t$  است.

سرعت گروه از نظر فیزیکی بسیار حائز اهمیت است، زیرا هر قطار موج حدّ معینی دارد، و غیر از موارد نادری که حرکت قلبه موج را در نظر می گیریم، آنچه مشاهده می کنیم حرکت یک گروه موج است. هم چنین از این مطلب نتیجه می گیریم که انتقال انرژی در یک آشفتهگی موج به سرعت گروه مربوط می شود. در حقیقت، بحث در چنین مسائلی، نه تنها به دو موج سینوسی، بلکه به طیفی کامل نیاز دارد، و کافی است یک تک موج منزوی یا گروه موج را به روشی که پیش از این مورد بررسی قرار دادیم، ارزیابی کنیم. وقتی این ارزیابی انجام شد، اندازه سرعت گروه، که از معادله (28-7) تعیین شده بود، دوباره به دست می آید.

البته، برای تحلیل یک پالس سینوسی اختیاری وجود پاشیدگی به طور ضمنی دارای مفاهیم مهمی است. اگر این پالسهای سینوسی دارای سرعتهای مشخص متفاوتی باشند، شکل آشفتهگی باید به مرور زمان تغییر کند. مخصوصاً یک پالس که در آغاز بسیار متمرکز است، در خلال حرکت به تدریج پهن می شود.

مثالی می زنیم تا تفاوت سرعتهای فاز و گروه در موجهای عمق دریا که «موجهای گرانی» نامیده می شود بهتر نمایان گردد. این امواج قویاً پاشنده اند، سرعت موج برای یک

طول موج کاملاً معین که باید آن را سرعت فاز نامید - با ریشه مربعی طول موج متناسب است . بنابراین می توان نوشت :

$$v_p = C\lambda^{\frac{1}{2}} = Ck^{-\frac{1}{2}}$$

در این رابطه C مقدار ثابت است . ولی  $v_p = \frac{v}{k}$  ، از معادله (۷-۲۷) به دست می آید . در نتیجه داریم :

$$v = Ck^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین

$$\frac{dv}{dk} = \frac{1}{2} Ck^{-\frac{1}{2}}$$

چون  $\frac{dv}{dk}$  سرعت گروه است ، پس می توان نوشت :

$$v_g = \frac{1}{2} v_p$$

برای اینکه قلّه های موج مولفه از میان گروه سر در آورند و نمایان شوند ، نخست دامنه فزاینده ظاهر می شود، و دوباره ناپدید می گردد. شاید شما این اثر عجیب را در سطح دریا، یا بر روی جسم دیگری در عمق دریا مشاهده کرده باشید.

امواج صوتی را در گازها ، نظیر سایر ارتعاشات کشسان ناپاشنده در نظر می گیریم - لا اقل ، تا حدّی که به توصیف نظری ما لطمه ای وارد نیاید . آنچه گفته شد در یک وضعیت مساعد و خوب امکان پذیر است . اگر صداهایی با بسامدهای مختلف و سرعت های گوناگون در هوا پخش شود، سر و صداهایی را که بر اثر آن ایجاد می شود در نظر بگیرید . گوش دادن به ساز گروه نوازندگان در آن شرایط می تواند به صورت کابوس در آید . البته این صداهای گوش خراش را می توان جبران کرد - مثلاً می توان اصوات ( ناخوشایند ) را با یک منشور گازی تجزیه کرد ، درست همان گونه که نور را با یک منشور شیشه ای تجزیه می کردیم . ولی باید قبول کنیم که این امکانات رفاهی خود به خود در اختیار بشر قرار نمی گیرد و باید با ابتکار عمل به آنها دست یافت .

### پدیدهٔ برش<sup>۱۱</sup>

اثر قابل ملاحظهٔ معروف به برش ، با خاصیت پاشیدگی رابطهٔ تنگاتنگی دارد . این

۱۱ - The Phenomenon of Cut - Off ، این مبحث می تواند حذف شود بدون آنکه به ادامهٔ مطلب لطمه ای وارد آید .

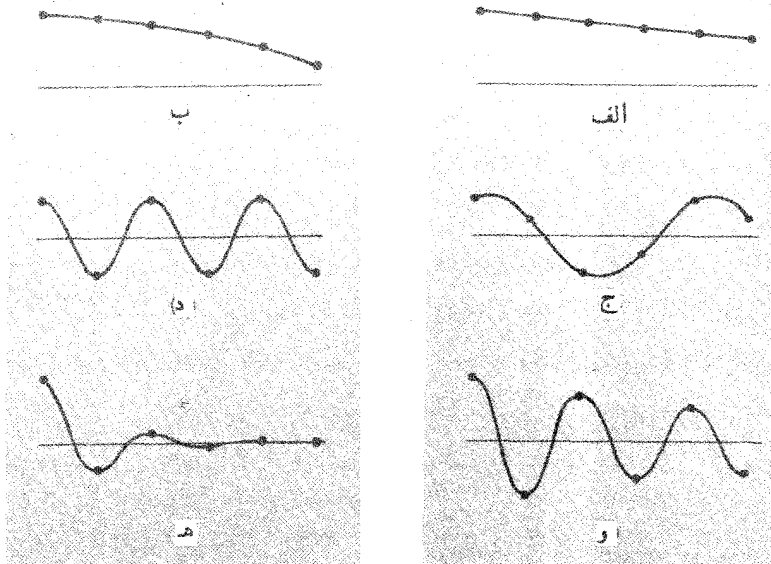


اصطلاح بیانگر عدم قابلیت یک محیط پاشنده برای تراگسیل امواجی است که بسامد آنها بالا (شاید زیر) یک بسامد بحرانی معین است. این اثر در تحلیل مدهای طبیعی رشته ای با  $N$  وزنه، که در فواصل مساوی به آن متصل شده، مشهود است، و ما قبلاً رابطه اش را پیدا کردیم [ به معادله (۲۴-۵) مراجعه کنید. ]

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi l}{2L}\right)$$

در اینجا  $L=(N+1)l$  می توان تصور کرد که طول  $L$  برای رشته ممکن است بینهایت زیاد شود بدون آنکه فاصله بین دو وزنه مجاور تغییر کند. در این حالت عدد موج  $k_n \left( = \frac{n}{2L} \right)$  در عمل به صورت یک متغیر پیوسته در می آید، و رابطه بین بسامد  $\nu$  و عدد موج  $k$  را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\nu(k) = 2\nu_0 \sin(\pi k l) \quad (29-7)$$



شکل ۷-۱۷ روابط دامنه (شناسه) برای قرات روی یک ريسمان، که از طرف چپ به ارتعاش واداشته شده است. الف) تراز بندی استاتیکی ( $\nu = 0$ ) ب)  $\nu < \nu_0$  ج)  $\nu = \sqrt{2}\nu_0$  د) بالاترین مُد،

$$\nu > 2\nu_0 \quad \nu > 2\nu_0 \quad \nu > 2\nu_0$$

بدیهی است که در معادله (۷-۲۹) اندازه  $v(k)$  نمی تواند بزرگتر از  $2v_0$  باشد. بنابراین همان گونه که پیش از این در فصل ۵ بحث شد) وجود یک بسامد بیشینه مُد طبیعی  $v_m$  (که  $v_m = 2v_0 = \frac{\omega_0}{\pi}$ ) را بررسی می کنیم. این بسامد  $v_m$  نظیر یک عدد موج  $k_m$  در رابطه زیر:

$$\pi k_m l = \frac{\pi}{2}$$

و مانند یک طول موج  $\lambda_m$  مساوی ۲ $l$  است. ولی اگر ما چنین رشته ای را، با وزنه های متصل به آن، با بسامدهای بزرگتر از  $v_m$  تکان دهیم، هیچ چیز مانع این کار نخواهد شد. در این حالت واقعا چه اتفاق خواهد افتاد؟

برای یافتن پاسخ این پرسش به معادله ای بر می گردیم که رابطه دامنه ها را با تعداد وزنه های متصل به رشته، در دستگاه جفت شده ای که با بسامد معین  $v$  ( $\omega$ ) در حال ارتعاش است، مشخص می سازد. با استفاده از معادله (۵-۱۹)، رابطه زیر بین دامنه های  $A_{p+1}$ ،  $A_p$ ،  $A_{p-1}$  برای سه ذره متوالی نوشته می شود:

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-v^2 + 2v_0^2}{v_0^2} \quad (۷-۳۰)$$

می خواهیم نوع تصویری را مورد توجه قرار دهیم که این معادله بازای اندازه های گوناگون  $v$  برای ما مشخص می سازد.

$$A_p = \frac{1}{2}(A_{p-1} + A_{p+1}), \quad \text{الف) در } v = 0$$

دامنه با فاصله در امتداد رشته به طور خطی تغییر می کند؛ این حالت یک ترازندی استاتیکی ساده است [شکل ۷-۱۷ (الف)]، وقتی یک سر رشته را از وضعیت سکون عادی به یک طرف می کشیم و ارتعاشات عرضی در آن ایجاد می کنیم. طول موج مؤثر بینهایت است.

$$A_p > \frac{1}{2}(A_{p-1} + A_{p+1}): \quad \text{ب) } v \ll v_0$$

هر دامنه از میانگین دو دامنه مجاور بزرگتر است - ولی نه خیلی زیاد. در نتیجه انحنای کمی به طرف محور پیدا می شود، این انحنای ملایم موجب می شود که رشته [شکل ۷-۱۷ (ب)] شکل سینوسی به خود بگیرد.

ج)  $v = \sqrt{2}v_0$  . این مرحله حالتی بسیار مخصوص است . اکنون داریم :

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 0$$

یادآور می شویم که این رابطه باید در مورد هر دستگاه که شامل سه وزنه با فاصله های مساوی باشد صدق می کند، نه برای یک دستگاه مخصوص . از رابطه بالا نتیجه می گیریم که :

$$A_{p+1} = -A_{p-1}$$

ولی به نظر می رسد که به گذاشتن شرط نسبت  $\frac{A_{p-1}}{A_p}$  نیاز نباشد . بنابراین وضعیت ممکن است به گونه ای باشد که در شکل [ ۱۷-۷ ج ] نشان داده شده است . واضح است که طول موج مربوط به این بسامد مساوی ۴l است ، l فاصله بین دو ذره ( دو وزنه متصل به رشته ) است . این نتیجه گیری با معادله ( ۲۹-۷ ) سازگار است ، و بازای  $k = \frac{1}{4l}$  خواهیم داشت :

$$v = 2v_0 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}v_0$$

د)  $v = 2v_0$  . این رابطه بسامد بیشینه  $v_m$  را برای یک مُد طبیعی نشان می دهد . از

معادله ( ۳۰-۷ ) داریم :

$$A_p = -\frac{1}{4}(A_{p-1} + A_{p+1})$$

این رابطه مستلزم آن است که در یک دوره تناوب جابه جاییهای مثبت و منفی هم اندازه ، همانگونه که در شکل [ ۱۷-۷ د ] نشان داده شده است و در فصل ۵ نیز بحث شد ، وجود داشته باشد . باید یادآور شد که به موجب معادله ( ۲۹-۷ ) ، طول موج مساوی ۲l است .

ه)  $v > 2v_0$  . فرض کنیم که v از  $2v_0$  بزرگتر است ، ولی نه خیلی بزرگتر . در

این صورت  $A_p$  با میانگین  $A_{p-1}$  و  $A_{p+1}$  مختلف علامه است ، و نیز داریم :

$$|A_p| < \frac{1}{4}|A_{p-1} + A_{p+1}|$$

این رابطه نشان می دهد که خط دارای انحنای مختصری است ، خط واصل ذرات ، یک در میان ، دور از محور ، انحنای ملایمی دارد . اگر طرف راست رشته تکان داده شود ، حرکت

تناوبی اش را که در شکل [۷-۱۷(هـ)] نشان داده شده ، خواهیم دید . دامنه ها که یک در میان هم علامتند ، اندازه شان به نسبت هندسی ، یعنی به صورت نمایی کم می شود . این پدیده را بُرش گویند .

به جای  $v = 2v_0 + \Delta v$  و نسبتهای  $\frac{A_p}{A_{p+1}}$  ،  $\frac{A_p}{A_{p-1}}$  ، ... مقدار قرار می دهیم ، مجموعه با  $(1+f)^{-1}$  مساوی است . ، در اینجا کسر کوچکی است . از معادله  $(7-30)$  داریم :

$$\frac{A_{p-1}}{A_p} + \frac{A_{p+1}}{A_p} = \frac{-v^r}{v_0^r} + 2$$

از این رو

$$-(1+f) - (1+f)^{-1} = \frac{-(2v_0 + \Delta v)^r}{v_0^r} + 2$$

بنابراین

$$-1 - f - (1 - f + f^r + \dots) = \frac{-[4v_0^r + 4v_0 \Delta v + (\Delta v)^r]}{v_0^r} + 2$$

یعنی

$$-2 - f^r + \dots = -2 - \frac{4\Delta v}{v_0} - \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^r$$

در نتیجه تقریباً

$$f = 2 \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^{\frac{1}{r}}$$

هر چه از بسامد بحرانی  $v_m$  فراتر رویم ، کاهش شدید دامنه در طول حرکت بیشتر مشهود می شود و این موضوع از مقایسه بخشهای (هـ) و (و) از شکل (۷-۱۷) نتیجه گرفته می شود .

(و)  $2v_0 \gg v$  . با وجود این نامساوی ، بعید است که وضعیّت با بسامد بحرانی برش سازگاری داشته باشد . به این ترتیب رابطه زیر به اندازه واقعی بسیار نزدیک است .

$$\frac{A_{p-1}}{A_p} = -\frac{v^r}{v_0^r}$$

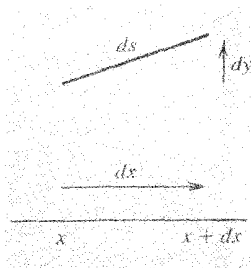
بنابراین ، اگر  $v = 27_m = 47$  باشد ، به عنوان یک واقعیت می توان گفت که فقط نخستین ذره (جسم) روی ریسمان - هرگاه ریسمان به وسیله عامل محرك خارجی به حرکت در آید - پاسخ ارزشمندی تلقی خواهد شد ، زیرا تقریباً می تواند مانند یک ساختار سخت رفتار کند .

## انرژی در یک موج مکانیکی

ذرات محیط ناقل موج در هر لحظه در حالات مختلف حرکتند . روشن است که وقتی به محیط انرژی داده شود حالت سکون عادی اش را ندارد . از انرژی داده شده به محیط ، مقداری به شکل انرژی پتانسیل تغییر شکل می دهد و مقداری هم به صورت انرژی جنبشی ذرات ناقل موج را به حرکت در آورد . انرژی کل مربوط یک طول موج کامل یک موج سینوسی را ، که بر روی ریسمان کشیده تشکیل شده ، حساب خواهیم کرد .

برای نزدیک شدن به این مساله ، قطعه کوچکی از ریسمان را به اندازه ای کوچک که بتوان آن را مانند خط مستقیم تصور کرد - در نظر می گیریم ، این قطعه همان گونه که در شکل ۷-۱۸ نشان داده شده بین  $x$  و  $x + dx$  واقع است . ما معمولاً جابه جاییهای ذرات را در ریسمان دقیقاً عرضی فرض خواهیم کرد ، مضافاً اینکه اندازه کشش  $T$  با تغییر شکل ریسمان نسبت به طول عادی اش تغییر نخواهد کرد . جرم این قطعه کوچک  $\mu dx$  ، و سرعت عرضی اش  $(u_y)$  مساوی  $\frac{\partial y}{\partial t}$  است . در نتیجه برای این قطعه ، داریم :

$$انرژی جنبشی = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = dk$$



شکل ۷-۱۸ جابه جایی و کشش قطعه کوتاهی از ریسمان کشان ناقل یک موج عرضی

وانرژی جنبشی در واحد طول را - که چگالی انرژی جنبشی نامیده می شود- برای چنین محیط یک بُعدی می توان تعیین کرد :

$$\text{چگالی انرژی جنبشی} \equiv \frac{dk}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (31-7)$$

انرژی پتانسیل را می توان با افزایش طول ریسمان حساب کرد؛ زیرا ریسمان وقتی تغییر شکل می دهد بلندتر از وقتی است که به شکل خط راست است. این افزایش طول ضربدر کشش ثابت مفروض T برابر میزان کار لازم جهت تغییر شکل ریسمان است. بنابراین، برای قطعه مفروض داریم:

$$\text{انرژی پتانسیل} = T(ds - dx)$$

در اینجا

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = dx \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

اگر جابه جایهای عرضی را کوچک فرض کنیم، در آن صورت  $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ ، برای محاسبه تقریبی انرژی پتانسیل، عبارت بالا را با استفاده از بسط دو جمله ای به دو جمله تبدیل می کنیم، بنابراین داریم:

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

از این رو

$$\text{انرژی پتانسیل} \approx \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = du$$

در نتیجه داریم:

$$\text{چگالی انرژی پتانسیل} \equiv \frac{dU}{dx} \approx \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (32-7)$$

هیچ جای تردید نیست که چگالیهای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل، که از معادلات (31-7) و (32-7) به دست آمده اند، مساوی هستند. برای این کار همان گونه که دیده ایم، معادله حرکت یک موج پیشرونده بر روی ریسمان، به شکل زیر است:

$$y(x, t) = f(x \pm vt) = f(z)$$

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(z)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v f'(z)$$

در نتیجه

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu v^2 [f'(z)]^2$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} T [f'(z)]^2$$

مساوی اند چون  $T = \mu v^2$ . گرچه تساوی دو چگالی انرژی نمی تواند در تمام نقاط موج معتبر باشد، اما با توجه به اینکه انرژی کل دستگاههای مکانیکی ساده از نیروهای باز گرداننده خطی پیروی می کند، این تساوی پذیرفتنی است.

اکنون در حالت مخصوص، یک موج سینوسی را در نظر می گیریم که با معادله زیر توصیف شده است،

$$y(x, t) = A \sin 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad (۷-۳۳)$$

بنابراین بازای اندازه معین  $x$  داریم:

$$u(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = 2\pi v A \cos 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

$$= u_0 \cos 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

در اینجا  $u_0 (= 2\pi v A)$  سرعت بیشینه حرکت عرضی است. اکنون این توزیع سرعتهای عرضی را در زمان  $t = 0$  در نظر می گیریم. در این لحظه داریم:

$$u(x) = u_0 \cos \left( \frac{-2\pi v x}{v} \right) = u_0 \cos \left( \frac{2\pi v x}{v} \right)$$

چون  $\frac{v}{v} = \frac{1}{\lambda}$  ، این معادله را به صورت زیر هم می توان نوشت :

$$u(x) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

بنابراین چگالی انرژی جنبشی از معادله زیر به دست می آید :

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu u_0^2 = \frac{1}{2} \mu u_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

در نتیجه کل انرژی جنبشی قطعه ای از ریسمان که بین  $x = 0$  و  $x = \lambda$  واقع است به شرح زیر است :

$$K = \frac{1}{2} \mu u_0^2 \int_0^\lambda \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx$$

یعنی

$$K = \frac{1}{4} (\lambda \mu) u_0^2 \quad (7-34)$$

به این ترتیب ، رابطه انرژی جنبشی مربوط به یک طول موج کامل آشفتگی نتیجه می شود . (شما می توانید به آسانی بررسی کنید که همین پاسخ با انتگرال گیری از تابع چگالی انرژی جنبشی در یک لحظه معین ، بازای دو اندازه جداگانه  $x$  که با یک  $\lambda$  از هم جدا می شوند ، به دست می آید .)

انرژی پتانسیل همین قسمت از ریسمان ، همان گونه که پیش از این هم دیدیم ، باید مساوی انرژی جنبشی باشد . هر چند برای روشن شدن کامل مطلب ، محاسبه را انجام خواهیم داد . از معادله (7-33) داریم :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2\pi v A}{v} \cos 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

بنابراین در  $t = 0$  داریم

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{t=0} = -\frac{2\pi v A}{v} \cos 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{2\pi A}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

از این رو چگالی انرژی پتانسیل [ معادله (7-32) ] به دست می آید .

$$\frac{dU}{dx} = \frac{2\pi^2 A^2 T v}{\lambda^2} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$



پس از انتگرال گیری در فاصله یک طول موج داریم:

$$U = \frac{\pi^2 A^2 T}{\lambda}$$

با قرار دادن  $T = \mu v \lambda = \mu v^2 \lambda^2$  نتیجه می گیریم

$$U = \pi^2 A^2 \mu v^2 \lambda \quad (35-7)$$

اگر از  $u_0 = 2\pi v A$  استفاده کنیم و در رابطه اخیر مقدار قرار دهیم، می توان ثابت کرد که  $U$  با اندازۀ  $K$  مساوی است و همان مقدار معادلۀ (34-7) به دست می آید.

انرژی کل در هر طول موج  $E$ ، را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E = \frac{1}{4} (\lambda \mu) u_0^2 \quad (36-7)$$

بنابراین می توان گفت که این مقدار با انرژی جنبشی قطعه ای از ریسمان به طول  $\lambda$  مساوی است، در صورتی که این قطعه در خلال انتشار موج با سرعت عرضی بیشینه در حرکت باشد. گرچه این محاسبه را برای یک موج سینوسی گزینشی انجام داده ایم، ولی اگر شکل موج به گونه ای دیگر باشد، باز هم نتیجه محاسبات یکسان خواهد بود (برای چنین مثالی به مسالۀ (23-7) مراجعه کنید).

### انتقال انرژی توسط یک موج

فرض کنید که یک سر ریسمان خیلی بلند در حال نوسانات عرضی است؛ در نتیجه یک موج سینوسی تولید می شود، که در طول ریسمان پیش می رود. محاسبات مبحث پیش به روشنی نشان می دهد که این فرایند به مصرف مداوم انرژی نیاز دارد. به این ترتیب برای هر طول موج جدید  $\lambda$  از ریسمان که موج آن را به حرکت در می آورد، مقدار انرژی لازم را معادلۀ (36-7) باید تأمین نماید. بنابراین کار هم ارز این انرژی، که به عنوان عامل محرک (چشمه) به یک سر ریسمان داده می شود، باید فراهم آید. اکنون ببینیم این مراحل چگونه می تواند تحقق یابد.

برای این کار همان معادلۀ موج سینوسی مبحث اخیر [معادلۀ (33-7) را در نظر خواهیم گرفت]:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

فرض می کنیم که یک سر ریسمان در  $x = 0$  است و در این نقطه [شکل (19-7)] به

حرکت در آمده است. نیروی محرک  $F$ ، که از نظر اندازه با کشش  $T$ ، مساوی است، همان گونه که در شکل نشان داده شده، باید در جهت مماس بر ریسمان وارد آید. حرکت نقطه انتهایی (ریسمان) که دقیقاً عرضی فرض شده از معادله زیر به دست می آید:

$$y(t) = A \sin 2\pi vt$$

مولفه  $F$  در راستای این حرکت عرضی از رابطه زیر معین می شود:

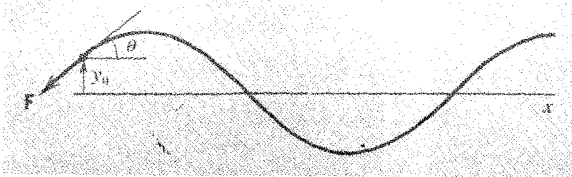
$$F_y = -T \sin \theta \approx -T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

از معادله (۷-۳۳) داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2\pi v A}{v} \cos 2\pi v \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

بنابراین،

$$F_y = \frac{2\pi v A T}{v} \cos 2\pi vt$$



شکل ۷-۱۹ ایجاد موج سینوسی در یک ریسمان کشیده، بردار نیروی اعمال شده در لحظه ای دلخواه نشان داده شده است.

اکنون می توانیم کار انجام شده را در هر زمان معین از انتگرال  $F_y dy$  حساب کنیم:

$$\begin{aligned} W &= \int F_y dy = \frac{2\pi v A T}{v} \int \cos 2\pi vt d(A \sin 2\pi vt) \\ &= \frac{(2\pi v A)^2 T}{v} \int \cos 2\pi vt dt \end{aligned}$$

با قرار دادن  $u$ ، سرعت بیشینه حرکت عرضی، به جای  $2\pi v A$  عبارت بالا را می توان به

صورت ساده تر نوشت :

$$W = \frac{u_0^2 T}{v} \int \cos^2 2\pi v t dt$$

برای محاسبه کار انجام شده در یک دوره تناوب کامل موج ، از رابطه بالا در فاصله  $t = 0$  تا  $t = \frac{1}{v}$  انتگرال می گیریم . در این صورت داریم :

$$W_{\text{چرخه}} = \frac{u_0^2 T}{2v} \int_0^{\frac{1}{v}} (1 + \cos 4\pi v t) dt$$

جمله  $\cos 4\pi v t$  در این چرخه کامل هیچگونه تاثیری - در نتیجه انتگرال - ندارد . لذا داریم :

$$W_{\text{چرخه}} = \frac{u_0^2 T}{2v} \quad (37-7)$$

چون  $T = \mu v^2$  و  $v = \frac{v}{\lambda}$  ، بنابراین رابطه بالا را به شکلهای دیگری نیز می توان نوشت :

$$W_{\text{چرخه}} = \frac{1}{v} (\lambda \mu) u_0^2 = 2\pi^2 v^2 A^2 \lambda \mu \quad (38-7)$$

هر یک از این مقادیر درست دو برابر اندازه های انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل هر طول موج است ، که در معادلات (34-7) و (35-7) داده شده اند .

سرعت (آهنگ) انجام کار ، که به توان میانگین ورودی  $P$  تعبیر می شود ، با در نظر گرفتن طرف دوم معادله (37-7) که کار یک چرخه است و ضرب کردن آن در تعداد چرخه های انجام شده در واحد زمان ( $v$ ) به دست می آید . به این ترتیب داریم :

$$P = \frac{u_0^2 T}{2v} = \frac{1}{2} \mu u_0^2 v \quad (39-7)$$

(یادآور می شویم که  $T = \mu v^2$ ) می دانیم که  $P$  حاصل ضرب انرژی کل موج در واحد طول ریسمان  $\left(\frac{1}{2} \mu u_0^2\right)$  در سرعت موج ( $v$ ) است . این موج احتمالاً (لااقل تا رسیدن به سر دیگر ریسمان) با همین سرعت به صورت آشفستگی در طول ریسمان پیش می رود . انرژی در چشمه نگه داشته نمی شود و در طول ریسمان جریان دارد . بنابراین محیط عامل انتقال

انرژی از نقطه ای به نقطه دیگر است، تندی انتقال با تندی موج  $\nu$  مساوی است. (توجه داشته باشید وقتی بخش معینی از ریزمان با حرکت موج کاملاً درگیر می شود، انرژی متوسط آن ثابت باقی می ماند.)

### شارش اندازه حرکت (تکانه) و فشار تابش مکانیکی

می توان انتظار داشت که یک موج مکانیکی علاوه بر انتقال انرژی با انتقال اندازه حرکت هم همراه باشد و گاهی پیش می آید که نسبت انتقال انرژی به انتقال اندازه حرکت را اصولاً سرعت موج  $\nu$  فرض کنیم (در بسیاری از موارد نسبت انرژی به اندازه حرکت یک ذره - مساوی نصف سرعت ذره است). هر چند، این تعریف کلی نیست. به هر حال در محاسبه اندازه حرکت موج، خواص محیط و نتایجی که می تواند غیر متظره باشد، باید به طور دقیق مورد توجه قرار گیرد. مثلاً می توان بررسی کرد و نتیجه گرفت که امواج طولی در یک میله که دقیقاً از قانون هوک پیروی می کند نمی تواند ناقل تمام اندازه حرکت باشد. از آنجا که محیط کاملاً کشسان با این ویژگی وجود ندارد، می توان انتظار داشت که محاسبه شارش اندازه حرکت در یک محیط حقیقی امری دقیق و گاهی دشوار باشد.

مساله ای که با شارش اندازه حرکت ارتباط کاملاً تنگاتنگی دارد، آن است که وقتی از سوی امواج بر یک ماده، نیروی مکانیکی وارد آید امواج ممکن است جذب یا بازتابیده شوند. مثلاً بخوبی ثابت شده است که امواج طولی در یک گاز (مانند امواج صوتی) بر سطحی که در مسیرشان قرار گیرد فشار وارد می آورند. وجود این فشار مسلماً باید مربوط به انتقال اندازه حرکت توسط امواج باشد. در این حالت مخصوص، اندازه نیرویی که از طرف امواج بر یک سطح وارد می شود، در واقع از تقسیم نرخ شارش انرژی بر سرعت موج به دست می آید. رابطه ای که دقیقاً برای امواج الکترومغناطیسی در نظر گرفته می شود. گرچه یک بار دیگر تأکید خواهیم کرد که نتیجه دقیق در مورد یک محیط، به فرمهای معادله حالت (یعنی معادله ای که تغییرات تنش و چگالی را به هم ربط می دهد) بستگی دارد. وجود شارش اندازه حرکت و نیروهای طولی سهمیم در آن، اساساً به غیر خطی بودن

---

۱۲- در اینجا فرض می کنیم که پاشیدگی وجود ندارد. اگر محیط پاشنده باشد، در آن صورت معلوم می شود که سرعت گروه است که سرعت انتقال انرژی را مشخص می سازد.

معادلات حرکت بستگی دارد، که با راه حل‌های موج سینوسی کاملاً سازگار نیست. پیگیری این مطلب نیز مسأله را از محدوده بحث فعلی ما خارج می‌سازد، بنابراین بیش از این آن را ادامه نخواهیم داد<sup>۱۳</sup>.

## امواج دو و سه بعدی

در فصل ۶ چند مثال در زمینه مدهای طبیعی دستگاهها که اساساً دو بعدی بودند - مانند لایه های آب و صابون و صفحات تخت نازک - ارائه دادیم. ساده ترین حالت آن است که یک غشاء (در واقع، لایه آب و صابون مثال خوبی است) در معرض کشش یکنواخت  $S$  (در واحد طول) قرار گیرد، سرتاسر هر خط واقع در سطح غشاء، تحت تاثیر این کشش است. اگر مختصات قائم  $x$  و  $y$  را در سطح غشاء دخالت دهیم، و جابه جاییهای عرضی را بر حسب مختصه  $z$ ، مشخص کنیم، در آن صورت، همان گونه که قبلاً هم دیدیم، معادله موج به شرح زیر است:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (40-7)$$

سرعت موج از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v^2 = \frac{S}{\sigma}$$

در این رابطه  $\sigma$  چگالی سطح (جرم واحد سطح) غشاء است.

اگر تقارن چنین دستگاهی در مختصات قائم باشد، با استفاده از معادله (۴۰-۷) می‌توان راه‌حلهایی به شکل امواج مستقیم، به صورت زیر به دست آورد:

$$z(x, y, t) = f(\alpha x + \beta y - vt)$$

برهنه‌ی‌های بعدی این قبیل امواج، در دستگاه مستطیل شکل، همان گونه که در شکل (۱۱-۶) نشان داده شده، مربوط به مدهای طبیعی است.

از سوی دیگر، اگر تقارن طبیعی دستگاه دایروی باشد - که ممکن است باشد - مثلاً اگر نقطه‌ای از غشاء را به حرکت عرضی واداریم، امواجی در سطح آن ایجاد می‌شود، در این

۱۳- برای بحثهای جامعتر و مفصلتر در زمینه اندازه حرکت و فشار موج به مقاله «فشار تابش در یک موج صوتی» نوشته R.T. Beyer، امریکا، مجله فیزیک، ۱۸، ۲۵ (۱۹۵۰)، و کتاب تابش مکانیکی، نوشته McGraw-Hill, R.B. Lindsay، نیویورک، ۱۹۶۰، مراجعه کنید.

حالت بهتر است به جای X و Y مختصات قطبی تخت  $r$  و  $\theta$  را دخالت دهیم. برای آنکه مساله را در یک وضعیت کاملاً متقارن و محدود بررسی نماییم. جابه جایی Z را بازای  $r$  معین، نسبت به  $\theta$  مستقل فرض می کنیم. در این صورت معادله  $(7-40)$  به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7-41) \text{ (تقارن استوانه ای)}$$

امواج پیشرونده با جبهه های دایروی منبسط شونده، راه حل های این معادله را ارائه می دهد. اگر کسی دقت کند، کم و بیش پی می برد که دامنه ارتعاش، با بزرگتر شدن  $r$ ، کوچکتر می شود، زیرا آشفتگی بر روی دایری با شعاع در حال افزایش، پخش می شود. راه حل های واضح و روشن بر حسب توابع مخصوصی به دست می آید که به توابع بسل معروف است. جمله دوم طرف راست معادله  $(7-41)$  بازای  $r$  نسبتاً بزرگ، در مقایسه با جمله اول، تقریباً قابل اغماض می شود و معادله به شکلی در می آید که برای جبهه موج های تخت با دامنه ثابت مطرح کردیم. (با بیان دقیقتر، دامنه تقریباً تا  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  کاهش می یابد) البته، این گفته برای نقاطی صادق است که از مبداء امواج دایروی خیلی دور باشند و فقط بر روی بخش کوچکی از پیرامون جبهه موج قرار گیرند. سرانجام، می توان برای یک محیط سه بعدی، نظیر یک قطعه جامد کشسان یا هوایی که در یک لوله محبوس نباشد، معادله موج را تشکیل داد. این معادله را در فصل ۶ هم آورده ایم:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7-42)$$

در این رابطه  $\psi$  متغیری نظیر مقدار فشار موضعی است. ترکیب عوامل دیفرانسیل در طرف چپ، لاپلاسین نامیده می شود (به احترام لاپلاس<sup>۱۴</sup> یک معاصر نزدیک به لاگرانژ<sup>۱۵</sup>) و برای اختصار با نشانه مخصوص  $\nabla^2$  (که «مربع دلتا» تلفظ می شود) مشخص می کنیم. بنابراین، معادله  $(7-42)$  را به شکل دیگری می نویسیم:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7-43)$$

14- P.S.delaplace

15- Lagrange

این رابطه برای محیط دو بُعدی نیز معتبر است، اگر دستگاهی با تقارنهای قائم الزاویه داشته باشیم بهتر است برای راه حل‌های موج تخت، معادله موج زیر را در نظر بگیریم:

$$\psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)$$

ولی، از سوی دیگر تقارن کروی القاء گر آن است که اگر امواج بر اثر انفجار کوچکی در عمق زمین ایجاد شود، در آن صورت برای تعیین موقعیت یک نقطه، باید شعاع  $r$  و دو زاویه را دخالت دهیم. در دستگاهی که دامنه موج فقط به  $r$  بستگی دارد، معادله دیفرانسیل به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (44-7)$$

به آسانی اثبات می شود که این معادله برای امواج هماهنگ ساده، که دامنه به نسبت عکس  $r$  تغییر می کند، صادق است:

$$\psi(r, t) = \frac{C}{r} \sin 2\pi(vt - kr) \quad (45-7)$$

یادآور می شویم که شارش انرژی برای موج یک بُعدی متناسب با مربع دامنه است و از مشاهده معادله (45-7) می توان فهمید که نرخ شارش انرژی، که مساوی حاصلضرب میانگین  $[\psi(r, t)]^2$  در سطح  $4\pi r^2$  کره ای به شعاع  $r$  است، به فاصله چشمه نقطه ای مولد امواج بستگی ندارد. این انرژی، در غیاب پراکندگی یا جذب، دقیقاً به همان اندازه ای که انتظار داریم به دست خواهد آمد.

۷-۱ ثابت کنید که معادلات زیر همگی می توانند برای توصیف موج پیشرونده واحدی مورد استفاده قرار گیرند:

$$y = \frac{A \sin 2\pi(x - vt)}{\lambda}$$

$$y = A \sin 2\pi(kx - vt)$$

$$y = A \sin 2\pi \left[ \left( \frac{x}{\lambda} \right) - \left( \frac{t}{T} \right) \right]$$

$$y = -A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

$$y = A \operatorname{Im} \{ \exp [j 2\pi(kx - vt)] \}$$

۷-۲ معادله یک موج عرضی رونده در امتداد یک ریسمان به صورت  $y = 0.3 \sin \pi(0.5x - 50t)$  داده شده است، در این معادله  $y$ ،  $x$  به سانتیمتر و  $t$  بر حسب ثانیه است.

(الف) دامنه، طول موج، عدد موج، بسامد، دوره تناوب، و سرعت موج را تعیین کنید.  
(ب) سرعت عرضی پیشینه هر ذره از ریسمان را به دست آورید.

۷-۳ معادله یک موج طولی که با دامنه  $0.03 \text{ m}$ ، بسامد  $5 \text{ sec}^{-1}$ ، و سرعت  $3000 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$  در جهت منفی  $x$  پیش می رود به چه صورت است؟

۷-۴ موجی با بسامد  $2 \text{ sec}^{-1}$  دارای سرعت  $80 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$  است.

(الف) فاصله دو نقطه از یکدیگر، با اختلاف فاز  $3^\circ$ ، چه اندازه است؟  
(ب) اختلاف فاز یک نقطه معین در دو لحظه به فاصله زمانی  $0.5 \text{ sec}$  چه اندازه

است؟



۵-۷ یک ریسمان یکنواخت بلند با چگالی جرمی  $1 \text{ kg.m}^{-1}$  با نیروی  $50 \text{ N}$  کشیده شده است. یک سر ریسمان ( $x = 0$ ) با دامنه  $2 \text{ cm}$  و دوره تناوب  $1 \text{ sec}$  به طور عرضی (سینوسی) به نوسان واداشته شده، در نتیجه امواج رونده در جهت  $+x$  تشکیل می شود.

(الف) سرعت امواج چه اندازه است؟

(ب) طول موجشان چقدر است؟

(ج) اگر جابه جایی ( $y$ ) در لحظه  $t = 0$  در طرفی از ریسمان ( $x = 0$ ) که به نوسان

واداشته شده است با وجود  $\frac{dy}{dt}$  منفی، مساوی  $1 \text{ cm}$  باشد، معادله امواج رونده به چه

صورت است؟

۶-۷ مشاهده شده است که زمان عبور یک پالس از یک سر به سر دیگر یک ریسمان بلند  $1 \text{ cm}$ ، ثانیه است. این ریسمان از روی قرقره ای می گذرد، و کشش آن به وسیله آویختن وزنه ای به سر آزاد ریسمان تامین می شود. جرم این وزنه  $100$  برابر جرم ریسمان است.

(الف) طول طناب چه اندازه است؟

(ب) معادله سوّمین مُد طبیعی به چه صورت است؟

۷-۷ در یک ریسمان بسیار بلند، با همان کشش و با همان جرم در واحد طول که در مساله (۶-۷) داده شد، یک موج رونده با معادله زیر تشکیل می شود:

$$y(x, t) = 0.02 \sin \pi(x - vt)$$

در این رابطه  $x$  و  $y$  به متر،  $t$  به ثانیه، و  $v$  سرعت موج به متر بر ثانیه است (که شما می توانید حساب کنید). جابه جایی عرضی و سرعت ریسمان را در نقطه  $x = 5 \text{ m}$  و در زمان  $t = 1 \text{ sec}$  تعیین کنید.

۸-۷ موج رونده ای از دو نقطه ریسمانی می گذرد. نقاط در  $x_1 = 0$  و  $x_2 = 1 \text{ m}$  واقعند. حرکات عرضی دو نقطه از معادلات زیر تعیین می شود:

$$y_1 = 0.02 \sin 3\pi t$$

$$y_2 = 0.02 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{\lambda}\right)$$

(الف) بسامد بر حسب هرتز چقدر است؟

(ب) طول موج چه اندازه است؟

(ج) موج با چه سرعت عبور می کند؟

(د) موج رونده از کدام نوع است؟ توضیح دهید که چگونه موفق به این نتیجه گیری

شده اید.

(یادآوری! به دقت توجه کنید. اگر بر اثر محدودیت و کمی اطلاعات داده شده ابهامی وجود دارد با افزودن داده های فرضی از مساله رفع ابهام کنید.)

۹-۷ یک پالس راست گوشه متقارن با ارتفاع بیشینه  $0.4\text{m}$  و طول کلی  $1.0\text{m}$  بر روی یک ریسمان در جهت مثبت  $x$  در حرکت است. سرعت موج بر روی ریسمان  $24\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$  است. پالس در  $t = 0$  بین  $x = 0$  و  $x = 1\text{m}$  واقع شده است. نمودار سرعت عرضی را بر حسب زمان در  $x = x_0 + 1\text{m}$  رسم کنید.

۱۰-۷ یک سر ( $x = 0$ ) ریسمان را با سرعت ثابت  $0.5\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$ ، برای  $0.1\text{sec}$  (شروع حرکت در  $t = 0$  است) به طور عرضی به حرکت در می آوریم و در خلال  $0.1\text{sec}$  بعدی با همان سرعت ثابت آن را به وضع عادی اش بر می گردانیم. در نتیجه پالس موج ایجاد شده با سرعت  $4\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$  در طول ریسمان به حرکت در می آید.

(الف) شکل ظاهری ریسمان را در  $t = 0.4\text{sec}$  و  $t = 0.5\text{sec}$  بکشید.

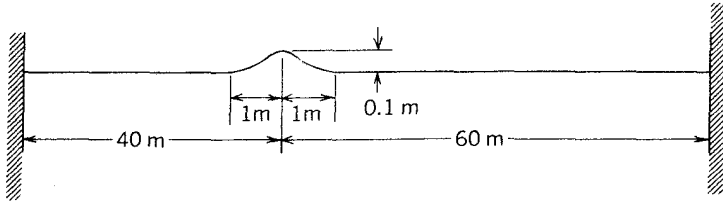
(ب) نمودار سرعت عرضی را بر حسب  $x$  در  $t = 0.4\text{sec}$  رسم کنید.

۱۱-۷ فرض کنید که پالس موج رونده ای با معادله زیر مشخص می شود:

$$y(x,t) = \frac{b^2}{b^2 + (x - vt)^2}$$

در اینجا  $b = 5\text{cm}$  و  $v = 2/5\text{ cm}\cdot\text{sec}^{-1}$  است. نیمرخ پالس را، همان گونه که در  $t = 0$  و  $t = 0.2\text{sec}$  ظاهر می شود، رسم کنید. با کاهش مستقیم ظاهری این منحنی، شکل مناسب سرعت عرضی را مانند یک تابع  $x$  در  $t = 0.1\text{sec}$  به دست می آورید. نتیجه را با آنچه از طریق محاسبه  $\frac{dy}{dt}$  در زمان اختیاری  $t$  به دست می آورید، البته پس از قرار دادن،

۷-۱۲ شکل زیر پالسی را، بر روی یک ریسمان به طول  $100\text{m}$  که از دو طرف محکم نگه داشته شده، نشان می دهد. پالس بدون هیچگونه تغییر شکل با سرعت  $40\text{m/sec}^{-1}$  به طرف راست پیش می رود.



(الف) شکل واضحی بکشید که نشان دهنده چگونگی تغییرات سرعت عرضی ریسمان نسبت به فاصله ها از دو طرف باشد، شکل را برای لحظه ای در نظر بگیرید که پالس در وضعیت نشان داده شده است.

(ب) سرعت عرضی نینۀ ریسمان (تقریباً) چه اندازه است؟

(ج) اگر جرم کل ریسمان  $2\text{kg}$  باشد، کشش  $T$  در آن چه اندازه است؟

(د) برای  $y(x,t)$  معادله ای بنویسید که از نظر عددی بیانگر امواج سینوسی با طول

موج  $5\text{m}$  و دامنه  $0.2\text{m}$  باشد؛ و این امواج بر روی ریسمانی بلند، که از لحاظ جنس و کشش نظیر ریسمان بالاست، به طرف چپ (در جهت منفی  $x$ ) پیش می روند.

۷-۱۳ پالسی بر روی یک ریسمان کشیده به گونه ای پیش می رود که معادله زیر بیانگر حرکت آن است:

$$y(x,t) = \frac{b^2}{b^2 + (2x - ut)^2}$$

(الف) نمودار  $y$  را بر حسب  $x$  برای  $t = 0$  بکشید.

(ب) سرعت و جهت حالت حرکت پالس معین و مشخص نمایید.

(ج) سرعت عرضی نقطه معینی از ریسمان به کمک رابطه زیر تعیین می شود:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

$v_y$  را نظیر یک تابع  $X$  بازای لحظه  $t = 0$  حساب کنید، وبا شکل نشان دهید که این سرعت حدود حرکت پالس را در مدت کوتاه  $\Delta t$  مشخص می کند.

۷-۱۴ حلقه بسته ای از ریسمان یکنواخت با سرعت زاویه ای ثابت  $\omega$  به سرعت می چرخد. جرم ریسمان  $M$ ، و شعاع حلقه  $R$  است. بر اثر چرخش حلقه، کشش  $T$  به طور محیطی در ریسمان ایجاد می شود.



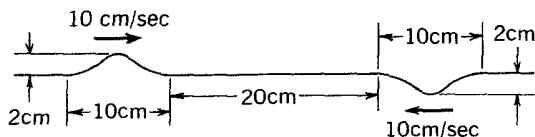
(الف) با در نظر گرفتن شتاب لحظه ای جانب مرکز برای قطعه کوچکی از ریسمان،

نشان دهید که کشش باید مساوی  $\frac{M\omega^2 R}{2\pi}$  باشد.

(ب) در نقطه ای از ریسمان به علت پیدایی یک پیچ، همان گونه که در شکل نشان

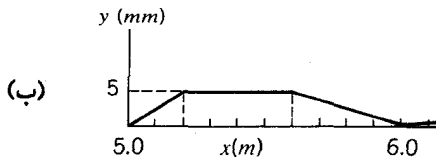
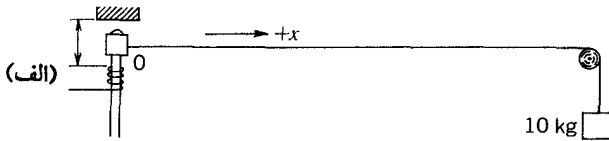
داده شده، تغییر شکلی ناگهانی ایجاد می شود. نشان دهید که این پیچ می تواند یک وا پیچش در ریسمان تولید کند، که قطع نظر از اندازه های ویژه  $M$ ،  $\omega$  و  $R$  ساکن باقی می ماند. ولی آیا این (تولید وا پیچش) همه داستان است؟ (به یاد آورید که پالسها روی یک ریسمان ممکن است از هر دو راه پیش روند.)

۷-۱۵ دو پالس یکسان با دامنه های مساوی ولی در خلاف جهت هم، ضمن انتشار بر روی یک ریسمان به یکدیگر نزدیک می شوند. در  $t = 0$  آنها در وضعیتی هستند که در شکل نشان داده شده است. مراحل بالا و پایین رفتن ریسمان و نیمرخ سرعت اجزاء جرم ریسمان را در  $t = 1 \text{ sec}$ ،  $t = 2/5 \text{ sec}$ ،  $t = 2 \text{ sec}$  بکشید.



۷-۱۶ می خواهیم سرعت حرکت قائم اتصال یک کلید مغناطیسی را بیشتر بررسی کنیم. برای این کار، یک سر نخ ماهیگیری افقی را، به جرم کل  $(5 \times 10^{-3} \text{ kg})$  و طول کل

۱۲/۵m ، به اتصال (کلید) می بندیم. به سر دیگر نخ ، که از شیار قرقره کوچک واقعاً بدون اصطکاک عبور کرده ، همان گونه که در شکل نشان داده شده است ، وزنه ۱۰ kg را آویزان می کنیم. برای اینکه اتصال به کار بیفتد کلید (در ابتدا باز) به وضعیت بسته در می آید. و برای مدت کوتاهی بسته باقی می ماند، و دوباره باز می شود. پس از آن با استفاده از فلاشهای سرعت بالا از نخ عکس گرفته می شود، و همان گونه که در شکل نشان داده شده (  $x = 0$  نقطه ۰ جایی است که نخ به اتصال بسته شده است ) می بینیم که نخ بین ۵ تا ۶m جابه جا می شود.



(الف) کلید چه مدت بسته بوده است ؟

(ب) نمودار جابه جایی اتصالات را نظیر یک تابع زمان رسم کنید، لحظه ای را  $t = 0$

بگیرید که اتصال کلید برای نخستین بار شروع به حرکت کند .

(ج) سرعت بیشینه حرکت اتصال چه اندازه بوده است ؟ در مدت بسته بودن یا باز

بودن کلید آیا اتفاقی رخ داده است ؟

(د) عکس در چه مدت ( $t$ ) گرفته شده است ؟ (فرض کنید  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ ).

۷-۱۷ دو موج زیر در یک محیط برهنه می دارند:

$$y_1 = A \sin(\Delta x - 10t)$$

$$y_2 = A \sin(4x - 9t)$$

در این روابط  $x$  به متر و  $t$  به ثانیه است .

(الف) برای آشفتهگی مرکب معادله ای بنویسید .

(ب) سرعت گروه این آشفتهگی مرکب چه اندازه است ؟

(ج) در آشفتگی مرکب فاصله بین نقاط با دامنه صفر چقدر است؟

۷-۱۸ حرکت چین خوردگیهای سطح آب با طول موج کوتاه ( $\geq 1\text{cm}$ ) را کشش سطحی کنترل می کند. سرعت فاز چنین خوردگیهایی از رابطه زیر تعیین می شود:

$$v_p = \left( \frac{2\pi S}{\rho \lambda} \right)^{1/3}$$

در این رابطه  $S$  کشش سطحی و  $\rho$  چگالی آب است.

(الف) ثابت کنید که سرعت گروه برای یک آشفتگی، با طول موجهای نزدیک به

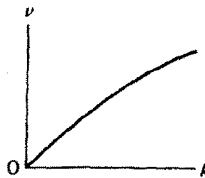
$\lambda$  داده شده، مساوی  $\frac{3}{2}v_p$  است.

(ب) از مشاهده حرکت یک رشته چین خوردگی در سطح آب چه نتیجه می گیرید؟

(ج) اگر رشته چین خوردگی سطح آب فقط شامل دو موج با طول موجهای  $0.99\text{m}$

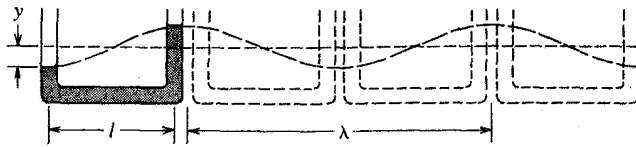
و  $1.01\text{m}$  باشد فاصله بین قله های هر رشته چقدر است؟

۷-۱۹ رابطه بین بسامد  $\gamma$  و عدد موج  $k$ ، برای موجها در یک محیط معین با نمودار مشخص شده است. مقادیر نسبی سرعتهای گروه و فاز را به طور کیفی در محدوده مشخص شده، برای هر طول موج تعیین و مبنای آن را بیان کنید.



۷-۲۰ لوله U شکلی را با مقطع عرضی یکنواخت و با دو شاخه در راستای قائم، در نظر بگیرید. می خواهیم طول کل ستون مایع در لوله  $l$  باشد. اگر مایع در لوله نوسان کند و پایین و بالا برود، سطح مایع در دو شاخه لوله در هر لحظه نسبت به سطح ترازمندی اش

بیشینه  $\pm y$  فاصله دارد، و تمام مایع با سرعت  $\frac{dy}{dt}$  نوسان می کند.



(الف) برای مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی مایع عبارتی بنویسید ، و ثابت

کنید که دوره تناوب نوسانات  $\pi \sqrt{\frac{2l}{g}}$  است .

(ب) برای تعیین فواصل قله ها و موجها ، رشته ای از چنین لوله های U شکل را

مجسم کنید و از آنها مانند یک موج آب ( نمودار را ببینید) استفاده کنید . باتوجه به نتیجه

(الف) ، و شرط  $2l \approx \lambda$  ، ثابت کنید که سرعت تقریبی امواج آب در حدود  $\frac{(g\lambda)^{1/2}}{\pi}$  است

(فرض کنید فقط مقدار کمی از شاخه های قائم لوله U شکل است .)

(ج) با استفاده از نتیجه واقعی  $v = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}$  ، سرعت امواجی با طول موج  $500\text{m}$

را در اقیانوس حساب کنید .

۷-۲۱ دستگاهی را با N نوسانگر جفت شده ( $N \gg 1$ ) در نظر بگیرید ، به طوری که فاصله نزدیکترین نوسانگرهای مجاور هم از یکدیگر l باشد .

(الف) طول موج و بسامد n امین مُد نوسان را تعیین کنید .

(ب) سرعتهای فاز و گروه را برای این مُد به دست آورید . این سرعتها در حالات

$$n \ll N \text{ و } n = N + 1 \text{ چه اندازه هستند؟}$$

۷-۲۲ مساله ای به شما داده اند که دینامیک یک قطار از اتومبیلها را که در یک بزرگراه بر

روی یک خط در حرکتند تجزیه کنید . در آغاز برای حل این مساله باید فرض کنید که قطار

اتومبیل رفتاری نظیر یک گروه از نوسانگرهای جفت شد دارند . برای حل این مساله چه

روش ساده ای در پیش می گیرید؟ فرضها را مجزا کنید .

۷-۲۳ یک سررسمان کشیده ای را با سرعت ثابت  $u_y$  در مدت  $\tau$  به طور عرضی به حرکت

در می آوریم ، در مدت بازه بعدی  $\tau$  ، با سرعت  $-u_y$  آن را به نقطه شروعش برمی گردانیم .

در نتیجه، یک پالس مستطیل شکل بر روی ریسمان تشکیل می شود و با سرعت  $v$  در طول ریسمان حرکت می کند.

انرژیهای جنبشی و پتانسیل مربوط به این پالس را حساب کنید و نشان دهید که مجموع این انرژیها با کل کاری که نیروی عرضی مؤثر بر یک سر ریسمان انجام می دهد، مساوی است.

۲۴-۷ یک موج سینوسی طولی به معادله  $\xi = \xi_0 \cos 2\pi k(x - vt)$  را در نظر بگیرید که با چگالی جرمی  $\rho$ ، سطح مقطع عرضی  $S$ ، و مدول یانگ در طول یک میله پیش می رود. ثابت کنید که اگر تنش در میله فقط بر اثر حضور موج باشد، چگالی انرژی جنبشی  $\frac{1}{4} \rho S \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$  و چگالی انرژی پتانسیل  $\frac{1}{4} Y S \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$  است. بنابراین ثابت کنید که انرژی جنبشی برای هر طول موج و انرژی پتانسیل برای هر طول موج، هر کدام مساوی  $\frac{1}{4} (\rho S \lambda) u^2$  است، در اینجا سرعت بیشینه ذره  $\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$  است.

۲۵-۷ تحقیق کنید که معادله موج برای امواج کروی مانند [معادله (۲۴-۷)] در مورد امواج هماهنگ ساده، که دامنه ها به نسبت عکس  $I$  کم می شود، صدق می کند.



## آثار مرزی (کرانه ای) و تداخل

فصل قبلی به امواجی مربوط می شد که در یک محیط مشخص با پیوستگی می توانستند پیش روند. این فصل به شرح بعضی آثار اختصاص دارد که فقط هنگام روبرو شدن موج رونده با یک مرز یا یک محیط متفاوت یا موانع کوچک ظاهر می شود. برای نمایش چنین آثاری باید در حوزه وسیعی به مطالعه و بررسی پرداخت، ولی در حال حاضر در نظر نداریم بیش از یک نگاه اجمالی به تحلیل این پدیده ها بپردازیم. به هر حال، موضوع را با همان مثال قبلی خودمان یعنی ریسمان کشیده، شروع خواهیم کرد، و آنچه را که بر اثر پیشروی موج بر روی یک ریسمان هنگام روبه رو شدن با محیط نامتجانس اتفاق می افتد مطالعه خواهیم نمود.

## بازتاب پالسهای موج

درباره ارتباط بین امواج ایستاده و امواج رونده بر روی یک ریسمان کشیده بحث کردیم، اکنون لازم است به شرایط موجود در دو سر هر ریسمان، با طول محدود، اشاره کنیم. ما خاطر نشان کردیم که تحت عنوان آزمایش می توان با تکان دادن یک سر ریسمان امواج ایستاده ای تشکیل داد، زیرا موج رونده ای که به این ترتیب تولید می شود پس از رسیدن به انتهای ریسمان، فرایند بازتاب را تحمل می کند و بر می گردد. بنابراین امواج صادر شونده و برگشتی دست به دست هم می دهند تا یک موج ایستاده نمونه را با گره هایی در مواضع ثابت تشکیل دهند.

برای آنکه جنبه کمی آن بیشتر مورد توجه قرار گیرد، مد طبیعی معینی را بر روی یک ریسمان با دو سر ثابت در نظر می گیریم، تا بتوانیم برهمه‌نی حاصل از دو موج سینوسی هم دامنه، هم طول موج، و هم بسامد را، که در خلاف جهت یکدیگر بر روی ریسمان در حرکتند،

ملاحظه کنیم. در حالت مخصوص، دو وضعیت زیر را که از لحاظ ریاضی هم ارزند در نظر می‌گیریم:  
 مد طبیعی:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega t$$

دو موج رونده:

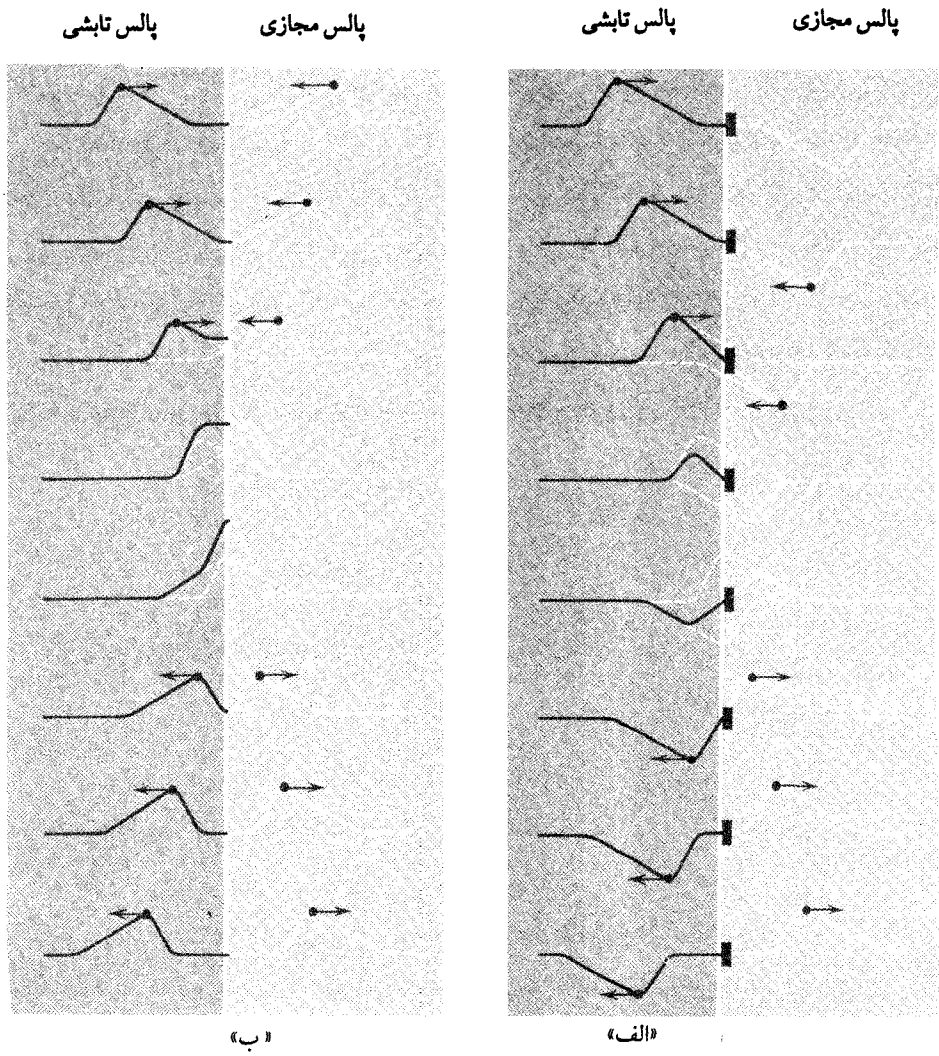
$$y(x, t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega t\right) + \frac{A}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega t\right)$$

اگر ما شرایط مرزی  $x = 0$  یا  $x = L$  را در این رابطه رعایت کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} y(0, t) = y(L, t) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(-\omega t) + \frac{A}{\sqrt{2}} \sin \omega t \\ &= -\frac{A}{\sqrt{2}} \sin \omega t + \frac{A}{\sqrt{2}} \sin \omega t \end{aligned}$$

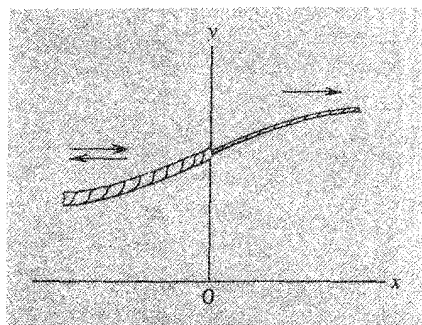
به عبارت دیگر می‌توان گفت که امواج رونده که در خلاف جهت یکدیگر پیش می‌روند باید، در هر زمان، در دو سر ثابت، جابه‌جاییهایی مساوی و مختلف‌الجهت ایجاد کنند. که البته امری بدیهی و الزامی است. نکته اصلی اینکه همین شرط باید فرایند بازتاب را، برای هر موج رونده وقتی با کرانه سخت روبرو می‌شود، تعیین کند.

اکنون می‌خواهیم فرایند برهم‌نهی را یک بار دیگر مورد توجه قرار دهیم. در رابطه با شکل (۷-۱۵)، درباره برهم‌نهی دو پالس قرینه، با جابه‌جاییهای متقابل که در خلاف جهت یکدیگر در طول ریسمان پیش می‌روند، بحث کردیم. نکته جالبی را که در این مثال می‌توان یادآور شد آن است که هر نقطه از ریسمان در هر زمان که دو پالس با یکدیگر مواجه شوند، به حال سکون باقی می‌ماند! امواج در خلاف جهت یکدیگر از میان هم می‌گذرند بدون آنکه در لحظه روبرو شدن موجب جابه‌جایی آن نقطه شوند. از سوی دیگر می‌توانیم نقطه‌ای از ریسمان را در نظر بگیریم که روی دیوار سخت محکم شده است. و موج الگو به هیچ‌وجه نمی‌تواند آن را جابه‌جا کند. این مثال کلید حل مشکل ماست، زیرا هنگامی که یک پالس موج تابشی به انتهای ریسمان می‌رسد که ساکن نگه داشته شده، بدیهی است که چه اتفاقی می‌افتد. یک پالس با جابه‌جایی متقابل از انتهای ریسمان بازتابیده می‌شود و به طرف چشمه (پالس موج) بر می‌گردد.



شکل ۸-۱ (الف) بازتاب در انتهای ثابت . (ب) بازتاب در انتهای آزاد . ممکن است بازتاب را به گونه ای تصور کرد که ریسمان بعد از پایانه فعلی اش تا بینهایت ادامه دارد . پالس می تواند ماندگار در نظر گرفته شود . در بخش فرضی پایه ای (برای ریسمان) وجود ندارد . در عین حال در همان زمان یک پالس « مجازی » در همان بخش در حال پیشروی است ، و در بخش حقیقی به درون ریسمان راه می یابد و پالس بازتاب را تشکیل می دهد . ماهیت پالس بازتاب به وضع انتهای ریسمان بستگی دارد که ممکن است ثابت یا آزاد باشد (شکل اقتباس شده از : F. W. Sears و M.W.Zemansky ، فیزیک دانشگاهی ، ویرایش سوم ، بخش ۱ ، Addison - Wesley ، Reading ، Mass ، ۱۹۶۳).

این بازتاب معکوس چندان پوشیده نیست، زیرا هنگامی که بر روی پایه ای که انتهای ثابت ریسمان محکم نگهداشته شده [شکل (۸-۱) را ببینید] نیرویی روبه بالا وارد آوردیم جابه جایی را مثبت در نظر خواهیم گرفت. بنابر قانون سوم نیوتن، پایه، نیروی واکنشی در خلاف جهت (اولیّه) بر ریسمان وارد می آورد. بنابراین پالسی مخالف (پالس تابش) تولید می کند که به طرف چشمه بر می گردد. اگر انتهای ریسمان کاملاً آزاد باشد و بتواند حرکت کند (مثلاً، اگر ریسمان با حلقه بسیار سبکی گره خورده باشد و میله قائم بدون اصطکاک<sup>۱</sup> از این حلقه گذشته باشد) به مجرد رسیدن یک پالس مثبت به انتهای ریسمان، نیروی واکنش رو به بالا بر ریسمان وارد می شود و پالس مثبتی را تولید خواهد کرد. این پالس مثبت در طول ریسمان به عقب بر گردانده می شود بنابراین نتیجه بازتاب انتهای «آزاد» تولید پالسی با همان قطبیت است که به طرف چشمه بر می گردد.



شکل ۸-۲ بازتاب و تراگیل در محل اتصال (پیوندگاه) ریسمانهای نامشابه

هرگاه ریسمانی با کششی معین و جرم واحد طول مشخص به ریسمان دیگری با  $\mu$  متفاوت بسته شود، به طور کلی در محل اتصال علاوه بر بازتاب (تراگیل هم) رخ خواهد داد. برای آنکه ببینیم این بازتاب و تراگیل در محل اتصال از نظر کمی چگونه انجام می گیرد، پالسی به شکل  $f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$  را در نظر می گیریم که در طول طناب کشیده ای با چگالی خطی  $\mu_1$  حرکت می کند، این طناب به طناب دیگری با چگالی خطی  $\mu_2$  در  $x = 0$  [شکل

۱- روش دیگری که برای تشکیل پایانه «آزاد» انجام می دهند آن است که با ریسمان گره را شل می بندند - که ریسمان در طول میله قائم آزادانه بالا و پایین رود.

(۸-۲) [بسته شده، و پالس از محل اتصال دو طناب نیز می‌گذرد. با فرض اینکه بازتاب و تراگسیل، در محل اتصال، هر دو جزیی و پاره‌ای است، جابه‌جاییهای عرضی را در دو ریسمان می‌توان به وسیله معادلات زیر تعیین کرد:

$$y_1(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right) \quad (۸-۱)$$

$$y_2(x, t) = f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

چون انتهای دو طناب همواره با یکدیگر در تماس هستند، جابه‌جاییهای  $y$ ، در نقطه  $x = 0$  برای هر دو طناب باید یکسان باشد. هم‌چنین میزان استحکام محل اتصال و کشش طنابها در هر لحظه باید مساوی باشد. از سوی دیگر به مقدار ماده موجود در محل اتصال شتاب چشمگیری داده خواهد شد. بنابراین دو شرط برقرار است:

$$y_1(0, t) = y_2(0, t)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0, t)$$

به عبارت دیگر

$$f_1(t) + g_1(t) = f_2(t) \quad (۲-۸)$$

$$\frac{1}{v_1} f_1'(t) - \frac{1}{v_1} g_1'(t) = \frac{1}{v_2} f_2'(t) \quad (۳-۸)$$

از معادله (۳-۸) انتگرال می‌گیریم، در نتیجه داریم

$$v_2 f_1(t) - v_2 g_1(t) = v_2 f_2(t) \quad (۴-۸)$$

با حل معادلات (۲-۸) و (۴-۸)،  $g_1$  و  $f_2$  را بر حسب  $f_1$  به دست می‌آوریم، می‌شود:

۲- در این تحلیل نوشتن پالس به شکل  $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ ، به جای شکل متداول  $f(x - vt)$ ، مناسبتر است، زیرا اساساً هنگامی که یک موج از یک محیط به محیط دیگر می‌رود طول موج تغییر می‌کند ولی بسامد تغییر نمی‌کند. بنابراین عوامل مؤثر در تغییر شکل موج را به مختصه  $x$  ربط می‌دهیم و نه به  $t$ .

$$g_1(t) = \frac{v_r - v_l}{v_r + v_l} f_1(t)$$

(۵-۸)

$$f_r(t) = \frac{2v_r}{v_r + v_l} f_1(t)$$

معادلات (۵-۸) فقط حالت موجها را در  $x = 0$  در هر زمان اختیاری  $t$  توصیف می کند. اکنون موجها را، که از لحاظ منطقی بسیار مهم است، به طور دقیق تولید خواهیم کرد، در اینجا نقش معادلات (۵-۸) ارتباط دادن  $f_1$ ،  $g_1$  و  $f_r$  به همان اندازه شناسه است. این شناسه بازای اندازه معین، مثلاً  $\tau$  عبارت است از

$$g_1(\tau) = \text{مقدار ثابت} \times f_1(\tau)$$

$$f_r(\tau) = \text{مقدار ثابت} \times f_1(\tau)$$

ولی مجبور نیستیم  $\tau$  را مانند اندازه  $t$  در  $x = 0$  تلقی کنیم. این تابع نمی تواند برای تعیین سایر اندازه های  $X$  و  $t$  که به گونه ای به یک موج رونده معینی مربوط است مورداستفاده قرار گیرد. بنابراین تابع  $f_1$  به صورت یک تابع شناسه  $t - \frac{x}{v_l}$  تعریف می شود، و تابع  $g_1$  هم به

صورت یک تابع شناسه  $t + \frac{x}{v_l}$  تعریف می شود. فرض می کنیم هر یک از این شناسه ها با همان اندازه  $\tau$  که در معادلات (۵-۸) احتیاج داشتیم مساوی است. از طرفی مسلم است که نمی توان از جفت اندازه های  $X$  و  $t$  برای هر دو (شناسه) با هم استفاده کرد؛ لذا آنها را به اندازه های  $t_f$ ،  $x_f$  و  $t_g$ ،  $x_g$  طبقه بندی می کنیم. در آن صورت داریم:

$$\tau = t_f - \frac{x_f}{v_l} = t_g + \frac{x_g}{v_l}$$

اگر به جای  $t_f = t_g = t$  مقدار قرار دهیم، باید داشته باشیم

$$x_g = -x_f$$

و این بدان معنی است که جابه جایی مربوط به پالس  $g_1$ ، در هر لحظه معین و در هر اندازه معین  $x$ ، با اندازه  $f_1$  که در همان زمان در وضعیت  $-x$  محاسبه شده رابطه مستقیم دارد. بویژه، که طبق نخستین معادلات (۵-۸)، داریم:

$$g_1\left(t + \frac{-x}{v_l}\right) = \frac{v_r - v_l}{v_r + v_l} f_1\left(t - \frac{x}{v_l}\right) \quad [۶-۸ \text{ الف}]$$

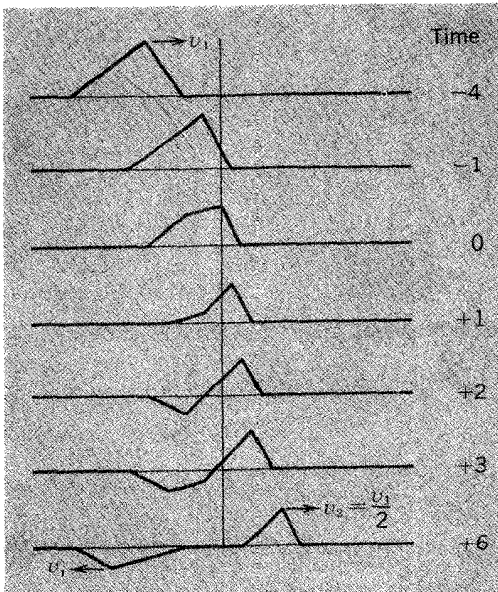
به عبارت دیگر می توان گفت که عامل  $\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$  با تعویض راست به چپ به صورت پالس باز تابیده در می آید. اگر  $v_2 < v_1$  باشد، پالس بر گردانده شده وارونه می شود. با روشی مشابه شکل موج تراگیل شده را می توان به شکل موج تابشی  $f_1$  مربوط ساخت. از طرفی اندازه های  $x$  (که آنها را  $x_1$  و  $x_2$  می نامیم) بازای اندازه معین  $t$  از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\tau = t - \frac{x_1}{v_1} = t - \frac{x_2}{v_2}$$

از آنجا که  $x_2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)x_1$  است، با قرار دادن دوّمین معادله از معادلات (۸-۵) داریم:

$$f_2 \left( t - \frac{v_2 x}{v_1} \right) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1 \left( t - \frac{x}{v_1} \right) \quad [۸-۶ \text{ (ب)}]$$

این رابطه برای ما روشن می سازد که پالس تراگیل شده در مقایسه با پالس تابشی، نه تنها



شکل ۸-۳ بازتاب و تراگیل پاره ای پالس موج مثلثی در محل اتصال دو ریسمان، پالس از طرف ریسمانی می تابد که سرعت موج بیشتر است  $\left( v_2 = \frac{1}{2} v_1 \right)$ .

تغییر ارتفاع بلکه تغییر مقیاس را هم در راستای  $x$  تحمل می کند.

با استفاده از رابطه بالا ملاحظه می کنیم که اگر پالس  $f_1$  در جهت منفی  $x$  تابیده شود و اگر پیوندگاه در  $x = 0$  باشد، در آن صورت توابع  $f_1$  و  $g_1$  از نظر فیزیکی تنها اگر  $x \leq 0$  باشد، بیانگر جابه جاییهای حقیقی خواهند بود، و  $f_2$  از لحاظ فیزیکی، تنها اگر  $x \geq 0$  باشد، بیانگر جابه جاییهای حقیقی است. بنابراین به عنوان مثال، می توان گفت که با استفاده از معادله [۸-۶] (الف) جابجایی حقیقی پالس باز تابیده را، بازای اندازه منفی  $x$ ، با در نظر گرفتن جابه جایی پالس تابشی  $f_1$ ، می توان به دست آورد. البته در صورتی که جابه جایی ادامه یابد و به درون ناحیه مثبت  $x$  نفوذ کند در ضریب  $\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$  ضرب می شود. در شکل (۸-۳) پیشروی باز تابیده و تراگسیل شده از یک پالس تابشی معین، در حالت مخصوص  $v_2 = \frac{v_1}{2}$ ، نشان داده شده است.

حالات نهایی معادله [۸-۶] (الف) عبارتند از:  
الف) ریسمان ۲ بینهایت سنگین است:

$$v_2 = 0$$

$$g\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = -f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

ب) ریسمان ۲ بی وزن است یا وجود ندارد:

$$v_2 = \infty$$

$$g\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

بنابراین این دو وضعیت در شکل (۸-۱) نشان داده شده است. شکل (۸-۴) چند نمونه از باز تابش و تراگسیل پالسهای را نشان می دهد که در طول فتر کشیده پیش می روند.

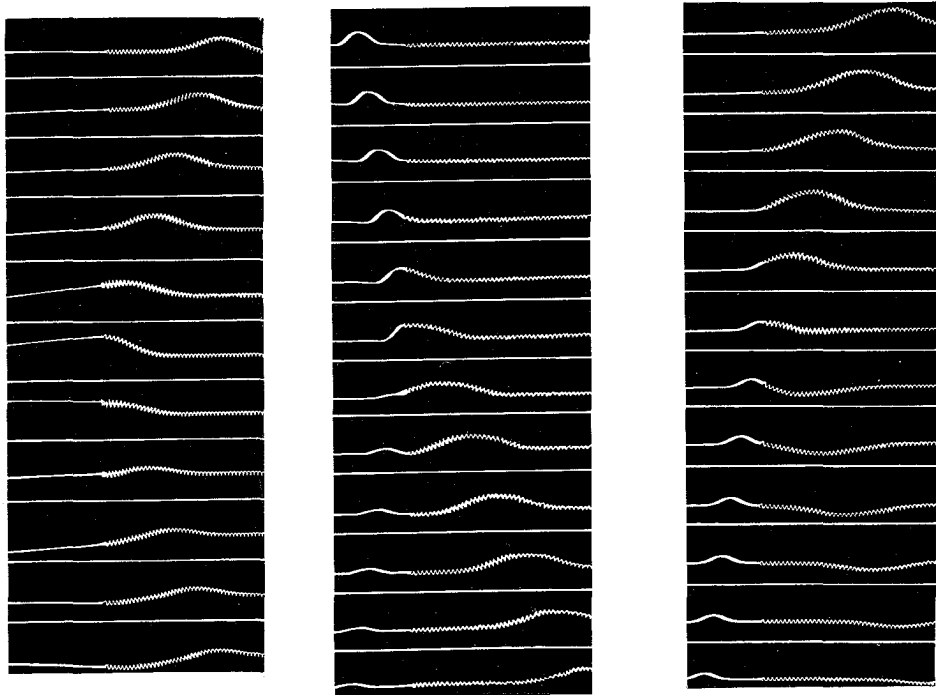
### امپدانس (پاگیری) ها : پایانه های نابازتابنده<sup>۳</sup>

درباره نوع رفتار امپدانسها که در آخرین مبحث بررسی شد، با روش بسیار روشنی، با دخالت دادن مفهوم امپدانس مکانیکی یک دستگاه فیزیکی که تحت تأثیر نیروهای

۳- این مبحث را می توان حذف کرد، بدون آنکه به پیوستگی مطلب لطمه ای وارد آید. (مطالعه آن دشوار نیست و ممکن است بسیار آموزنده باشد و شمارا با اجزاء اصلی مدار الکتریکی تاحدی آشنا سازد)



محرک قرار گرفته است، می توان بحث کرد. این امپدانس به عنوان نسبت نیروی محرک به سرعت جابه جایی دستگاه تعریف می شود. شما در اینجا شباهت زیاد امپدانس را با مفهوم مقاومت الکتریکی - نسبت ولتاژ دو سر دستگاه به جریان مربوطه - تصدیق خواهید کرد (جریان عبارت از نرخ شارش بار الکتریکی است). ولی به طور کلی در دستگاههای مکانیکی و الکتریکی شبیه به هم بین نیروی محرک و سرعت (بین ولتاژ و جریان) اختلاف فازی وجود دارد. قانون اهم رابطه ای را بیان می کند که ولتاژ و جریان همیشه همفازند.



(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۸-۴ عکسها مربوط به پالسهای است که با مرز بین دو محیط مواجه شده اند. (الف) پالس از یک فتر سبک (راست) می گذرد و وارد فتر سنگین می شود. در لحظه عبور پالس از محل اتصال (دو فتر) تراگیل و بازتاب به طور پاره ای رخ می دهد. شما ملاحظه خواهید کرد که پالس بازتابیده وارونه است. (ب) پالس از یک فتر سنگین (چپ) می گذرد و وارد یک فتر سبک می شود. پالس هنگام گذشتن از محل اتصال (پیوندگاه)، دُچار تراگیل و بازتاب پاره ای می شود. پالس بازتابیده مستقیم و روبه بالا است. (ج) پالس روی فتر از محل اتصالات با یک نخ بسیار سبک بازتابیده شده، این پالس کامل مستقیم و روبه بالا بر می گردد. انتهای تصاویر نشان می دهد که ذرات نخ با سرعت زیاد همان که پالس می گذرد در حرکتند. آیا می توانید جهت این حرکت را در هر یک از سه شکل بالا مشخص کنید؟ (عکسها از کمیته مطالعات علوم فیزیکی است، فیزیک، هیث، بوستون، ۱۹۶۵).

بنابر این مثلاً اگر ولتاژ معین با معادله زیر به دو سر یک مقاومت اعمال شود:

$$V = V_0 \cos \omega t$$

جریانی با معادله زیر برقرار خواهد شد:

$$I = I_0 \cos \omega t$$

در اینجا

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

ولی اگر، همین ولتاژ متناوب را به دو صفحه یک خازن وصل کنیم، بار  $q$  در آن ذخیره خواهد شد، نه جریان  $I$ ، که با ولتاژ همفاز می باشد، لذا داریم:

$$q = CV$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

در نتیجه، اگر

$$V = V_0 \cos \omega t$$

داریم

$$I = -\omega C V_0 \sin \omega t$$

یعنی

$$I = I_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

در اینجا

$$I_0 = \omega C V_0$$

لذا در این حالت، بین  $V$  و  $I$  اختلاف فاز  $90^\circ$  وجود دارد. اگر مقاومت و خازن را به طور سری به هم وصل کنیم و ولتاژ را به دو سر مجموعه ببندیم، اختلاف فاز نه  $0^\circ$  و نه  $90^\circ$  است. به همین جهت در مواردی که بیشتر جنبه کلی دارد، نسبت ولتاژ محرک به جریان ایجاد شده، که هر دو دارای یک مقدار و یک فاز باشند، بروز کمیّت دیگری را به دنبال خواهد داشت که امپدانس دستگاه نامیده می شود. شما به خاطر خواهید آورد که رابطه بین نیروی محرک و جابه جایی در یک نوسانگر مکانیکی میرا (فصل ۴) شباهت بسیار زیادی به این بحث دارد؛ و در این حالت نمایش روابط دامنه و فاز با استفاده از کمیّات مختلط روشی ساده و مقرون به صرفه است. در حقیقت مشخص کردن امپدانس با یک کمیّت مختلط منفرد،  $Z$  و نشان دادن ولتاژ و جریان با توابع نمایی مختلط امری عادی است.

بنابراین برای تعیین امپدانس یک خازن ، ابتدا به جای  $V$  مقدار قرار می دهیم:

$$V = V_0 e^{j\omega t}$$

$$q = CV_0 e^{j\omega t}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = j\omega CV_0 e^{j\omega t} = j\omega CV$$

در نتیجه

$$Z_C = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

اکنون به موضوع امواج رونده بر روی یک ریسمان بر می گردیم. نخست تولید چنین موجی را به واسطه وارد آوردن یک نیروی محرک عرضی بر هر نقطه (از ریسمان) در نظر می گیریم. فرض کنید که ریسمان را به طرف راست این نقطه می کشید برای آنکه موج به شکل زیر تولید شود:

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

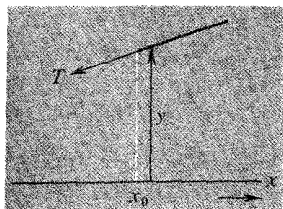
بنابراین داریم:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = f'\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$F_y = -T \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T}{v} f'\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

(ملاحظه کنید که نیروی وارد شده بر روی ریسمان منفی  $T \frac{\partial y}{\partial x}$  است - شکل (۸-۵) را

بینید)



شکل ۸-۵. شرایط موجود در انتهای یک ریسمان کشیده به حرکت واداشته شده .

بنابراین امپدانس  $Z$  را از معادله زیر تعیین می کنیم:

$$Z = \frac{F_y}{v_y} = \frac{T}{v} \quad (7-8)$$

از آنجا که  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  است، می توان آن را امپدانس مشخصه نامید، زیرا هویت ریسمان را بر حسب کشش و چگالی خطی آن مشخص می کند:

$$Z = (T\mu)^{\frac{1}{2}} \quad (8-8)$$

این کمیت کاملاً حقیقی است؛ نیروی محرک و سرعت همیشه نسبت به یکدیگر همفازند. این امپدانس در اصطلاح الکتریکی صرفاً مقاومت است.

اکنون می خواهیم همین مناسبات را برای شرایط محل اتصال دو ریسمان متفاوت در نظر بگیریم. مانند پیش، مختصه نقطه اتصال را  $x = 0$  انتخاب خواهیم کرد و فرض می کنیم موج در جهت منفی  $x$  از ریسمان (۱) بر نقطه اتصال بتابد. بنابراین برای توصیف و توجیه مساله دوباره از معادلات (۱-۸) استفاده می کنیم:

$$y_1(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$$

$$y_2(x, t) = f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

بنابراین در  $x = 0$  به معادلات زیر نیاز داریم:

$$v_y = f_1'(t) + g_1'(t) = f_2'(t)$$

(۹-۸)

$$F_y = \frac{T_1}{v_1} f_1'(t) - \frac{T_1}{v_1} g_1'(t) = \frac{T_2}{v_2} f_2'(t)$$

(در دومین معادله فقط به نیروهای عرضی هم جهت نیاز داریم. مثلاً اگر دو ریسمان کشیده، از طریق حلقه ای که یک میله صاف را در بر گرفته است به یکدیگر متصل شده باشند؛ می توان تفاوت بین کششهای  $T_1$  و  $T_2$  (این دو ریسمان) را تصور کرد. این اتصال، نسبت به جابه جایی در راستای  $x$ ، به یک اتصال سخت شباهت دارد، ولی مقاومتی در راستای  $y$  ابراز نمی شود.)

با دخالت دادن امپدانسهای مشخصه  $Z_1$  و  $Z_2$  دو ریسمان، دو شرایط زیر را

خواهیم داشت :

$$f_1'(t) + g_1'(t) = f_r'(t)$$

$$Z_1 f_1'(t) - Z_2 g_1'(t) = Z_r f_r'(t)$$

از این معادلات ، نتایجی درست نظیر معادلات (۸-۵) و (۸-۶) می توان به دست آورد ،  
غیر از آنکه اکنون داریم :

$$g_1(o, t) = \frac{Z_1 - Z_r}{Z_1 + Z_r} f_1(o, t)$$

(۸-۱۰)

$$f_r(o, t) = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_r} f_1(o, t)$$

در این عبارات می بینیم که وقتی موج رونده با محل اتصال ، که امپدانس مشخصه اش نمایش داده شده ، روبرو می شود ، مقدار بازتابی که رخ می دهد کاملاً معین است . در صورتی که ریسمان دیگری نداشته باشیم ، به هیچوجه نمی توان شرایط پیوندگاه را که با اندازه معین  $\frac{F_y}{v_y}$  مشخص می شود ، به وجود آورد . اکنون دو نتیجه ای را که پیش از این بحث کردیم در معادله (۸-۱۰) دوباره مورد توجه قرار می دهیم :

(۱) امپدانس  $Z_2$  بینهایت است ، خواهیم داشت :

$$g_1(o, t) = -f_1(o, t)$$

(۲) امپدانس  $Z_2$  صفر است ، در این حالت داریم :

$$g_1(o, t) = +f_1(o, t)$$

ولی اکنون می خواهیم امکان بازتابش صفر را در نظر بگیریم . این بررسی طبق نخستین معادله از معادلات (۸-۱۰) ، با قرار دادن  $Z_2 = Z_1$  انجام می گیرد . یک روش انجام این بررسی آن است که ریسمان دیگری داشته باشیم دقیقاً با همان کشش و با همان چگالی خطی - که البته ، به هیچوجه پیوندگاه نیست . روش دیگر [ معادله (۸-۸) ] آن است که ریسمان دیگری با کشش و چگالی خطی متفاوت داشته باشیم ، ولی رابطه  $T_{11} = T_{22}$  برای این دو ریسمان صدق کند . ولی روش سوم آن است که یک سر نخستین ریسمان را در یک ظرف بزرگ روغن با غلظت مناسب فرو بریم . از آنجا که با قانون مقاومت شاره بخوبی آشنا هستیم و می دانیم که در سرعتهای پایین ، نیرو با سرعت متناسب است ، و

این درست همان قانونی است که نیاز داریم، تا بر اساس تعریف مبنی بر معادله (۸-۷)، امپدانس ثابتی را تعیین کنیم. البته، تناسب از این لحاظ کافی نیست و اندازه کنونی  $\frac{F}{v}$  باید با اندازه  $\sqrt{TL}$  برای ریسمان مساوی باشد. ولی در اینجا امکان داشتن یک پایانه آرمانی برای ریسمان وجود دارد. امواج رونده در یک جهت در طول ریسمان پیش می روند وقتی وارد ظرف روغن شدند ناپدید می شوند. با این روش انتهای ریسمان به وضعی در می آید که می تواند درست مانند هنگامی که بینهایت بلند است رفتار کند. با بیان دیگر، باری که از طرف ظرف روغن در برابر انتهای ریسمان خودنمایی می کند باید با مشخصات ریسمان کاملاً سازگار باشد. تمام انرژی که امواج پیشرونده به انتهای ریسمان منتقل می شود، به وسیله روغن گرفته شده یا جذب می گردد. مثالی که ذکر شد تشابه زیادی به مساله انتقال انرژی الکتریکی از چشمه دارد، و این موضوع با امپدانس درست در می آید. البته اهمیت کاربردی بسیار زیاد آن نمونه دیگری از جامعیت مساله است و می تواند با رفتار یک ریسمان ساده کشیده شده سازگار باشد.

آخرین اظهار نظر درباره موضوع پیوندگاهها آن است که عبور از محیط به محیط دیگر نمی تواند خیلی سریع و بی تشریفات اتفاق بیفتد و موج باید همیشه فاصله بین دو محیط (پیوندگاه یا مرز مشترک) را طی کند تا وارد محیط دیگر شود. این هر چند کم (حتی اگر به اندازه قطر اتمی) باشد ولی صفر نیست نمونه محاسبات وضعیت پیوندگاه را خیلی خوب توصیف خواهد کرد. البته اگر طول ناحیه گذرگاه در مقایسه با طول موج مورد نظر بسیار کوچک باشد. ولی اگر طول موج به اندازه کافی کوچک باشد، یا گذرگاه به اندازه کافی برگردان، در آن صورت به علت مقدار بسیار زیاد بازتاب موج ممکن است از پیشروی باز ایستد. یک حالت پایانی قابل تصور آن است که تغییر خواص در طول ریسمان باید کاملاً یکنواخت باشد. مثلاً، ریسمان یکنواختی را در نظر بگیرید که در شکل (۵-۱) نشان داده شده است، یا ریسمانی را اختیار کنید که به طور یکنواخت شمع اندود شده و کشش در سراسر آن ثابت است. این امواج که دارای ناپیوستگیهای قابل تشخیص نیستند احتمالاً در معادله (۸-۱) یا (۸-۹) صدق می کنند. یک موج تابشی که با پیشامدگی خود هدایت می شود، تغییر طول موج یکنواختی را تحمل می کند و می تواند تا انتهای ریسمان، که شرایطش نسبت به ابتدای ریسمان کاملاً متفاوت است، منتقل شود. از این قبیل دستگاههای موجبر بسیار دقیق برای انتشار امواج صوتی و الکتریکی زیاد استفاده می شود.

## امواج طولی در مقابل عرضی : قطبش

شاید نوشتن توضیح مختصری درباره انواع آشفستگیهای موج - عرضی و طولی - که در مطالعه انتشار موج یک بعدی با آن مواجه می شویم، مناسب باشد.

تار کشیده اصولاً حاصل امواج عرضی است. از سوی دیگر یک فنر بلند قادر به انتقال هر دو نوع آشفستگی عرضی و طولی است. به همین جهت یک فنر به یک جامد واقعی بیشتر شباهت دارد، زیرا می تواند حامل هر دو نوع موج عرضی (برشی) و طولی (تراکمی) باشد. یک ستون مایع یا هوا تفاوتی که با یک جامد دارد آن است که در مقابل تغییر شکل، مقاومت کشسانی ندارد، فقط در برابر تغییر چگالی دارد. بنابراین ستونی از یک شاره (مانند هوا) که فقط حامل امواج طولی است مستثنی است - و این استثناء بسیار مهم است - در حقیقت بر اثر گرانی (ثقل) یا کشش سطحی است که نیروی کشسان بازگرداننده ای در برابر تغییر شکلهای عرضی، ایجاد می شود.

با امواج عرضی، لازم است برای ارتعاشات دو جهت مختلف قطبش، که بر یکدیگر و بر راستای انتشار عمودند، در نظر گرفته شود. حتی ممکن است برای حالات گوناگون قطبش سرعت امواج هم متفاوت باشد. چون برای مثال، در یک محیط بلورین فاصله بین اتمها در یک جهت از سایر جهات کمتر است. بنابراین می توان بخوبی تصور کرد که در یک بلور ناهمسانگرد<sup>۴</sup> ممکن است سه سرعت موج متفاوت در یک جهت معین وجود داشته باشد - یکی برای امواج طولی و دوتای دیگر برای جهات مشخص قطبش عرضی.

وقتی موج یک بعدی با یک مرز مشترک یا یک مانع برخورد کند، در دو قسمت آخر توضیح داده خواهد شد، که بر اثر برخورد چه اتفاق می افتد. هر چند ممکن است یک فصل مشترک معین نسبت به امواج طولی و عرضی دو رفتار متفاوت داشته باشد. مثلاً، فرض می کنیم در یک ظرف بزرگ با جدارهای قائم صاف آب را کد وجود داشته باشد. فصل مشترک آب و جدار نسبت به امواج طولی تقریباً نظیر یک مانع کاملاً سخت رفتار می کند ولی نسبت به امواج عرضی مانند یک انتهای کاملاً آزاد عمل خواهد کرد. اگر در ظرف بزرگ آب امواج ایستاده تشکیل می شد، بر روی جدار ظرف به هنگام ارتعاشات طولی آب، گره ولی موقع ارتعاشات عرضی پادگره دیده می شد.

در این مبحث از طرح مسائل امواج یک بُعدی صرف نظر خواهیم کرد، زیرا باید پدیده‌هایی را مورد توجه قرار دهیم که (مانند امواج سطحی) لاقبل به یک فضای دو بعدی نیاز دارند. این پدیده‌ها شامل تغییر جهت یک موج رونده است یا شامل برهم‌نهی آشفته‌گیهایی است که از جهات مختلف به یک نقطه معین می‌رسند. اساساً همین پدیده‌ها در انتشار امواج سه بعدی نیز رخ می‌دهد، ولی ملاحظه این پدیده‌ها در امواج دو بُعدی آسانتر است و متضمن بیشترین نمونه‌های واقعی است.

اصولاً راه‌های گوناگونی را برای معادله موج دو بعدی مطرح خواهیم کرد، همان گونه که برای موج یک بعدی یا سایر موارد دو نمونه آن را در فصل ۷ [معادلات (۷-۴۰) و (۷-۴۱)] ارائه داده ایم. <sup>۴</sup>:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

(۸-۱۱) یا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

با وجود این، در بیشتر موارد می‌توان توجه خود را منحصرآبه این دو شکل ویژه موج معطوف داشت:

۱- امواج تخت یا امواج مستقیم (نامگذاری دومی برای امواج سطحی توصیف مناسبتری است). چنین امواجی بر اثر نوسانات یک جسم خطی مستقیم یا هموار، که با ابعادش در مقایسه با طول موج بزرگ است، تولید می‌شود.

۲- امواج دایروی، بر اثر نوسانات یک جسم با ابعاد خطی تولید می‌شود، ولی در این حالت ابعاد جسم در مقایسه با طول موج کوچک است (چنین امواجی، که در سه بعد انتشار می‌یابند، کروی نامیده می‌شوند).

در فصل ۷ اشاره کردیم، که امواج دایروی در فواصل بسیار زیاد از چشمه موج، در حقیقت به صورت امواج خطی در می‌آیند که در بیشتر موارد همین خطی شدن موجب سهولت تحلیل رفتار آنها می‌شود. مخصوصاً بازای I های بزرگ می‌توان از کاهش دامنه، که

۵- ملاحظه کنید که معادله دوم حالت مخصوصی است، در این حالت جابه‌جایی Z به جهت  $\theta$  بستگی ندارد.

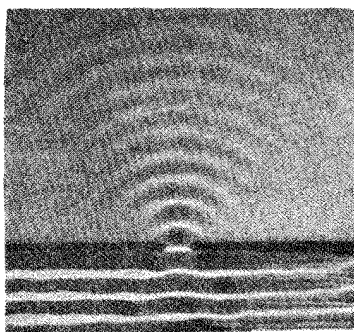


اصولاً باید به حساب آید، تقریباً صرف نظر کرد. رعایت این اختصار و چشم پوشی مخصوصاً برای آثار مربوط به تداخل امواج صادره از دو یا چند چشمه کوچک است. ما در این مبحث خود را از هر جهت به حل معادلات (۸-۱۱) مقید نخواهیم ساخت. در عوض با فرض وجود امواج مستقیم یا امواج کروی مطالعه در این زمینه را شروع خواهیم کرد و رفتار این امواج را در اوضاع گوناگون فیزیکی در نظر خواهیم گرفت. حل کامل و دقیق هر مسأله، در رابطه با انتشار موج، اصولاً به حل معادله دیفرانسیل پایه منجر می شود که به شرایط مخصوص مرزی بستگی دارد. با این روش این چند وضعیت را نیز می توان دقیقاً تجزیه و تحلیل کرد. و با استفاده از تقریبهای قابل قبول فیزیکی، که در بیشتر حالات صادق است، نتیجه گرفت. ریشه بیشتر این عملیات تقریباً اصلی است که نخستین بار توسط هویگنس<sup>۶</sup> در سال ۱۶۷۸ آن را مطرح نمود و بعداً در سال ۱۸۱۶ فرنل<sup>۷</sup> بار دیگر آن را کامل کرد. اصل هویگنس می گوید: هرگاه موجی در یک محیط منتشر شود، هر نقطه بر روی جبهه موج پیشرو می تواند مانند یک چشمه جدید رفتار کند. تشریح جزئیات این اصل موضوع مبحث بعدی است.

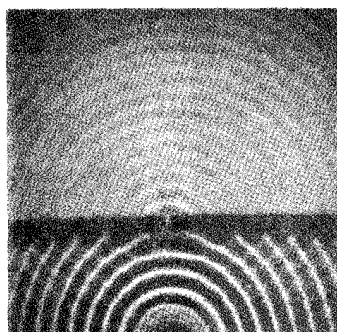
### اصل هویگنس - فرنل

فرض می کنیم در نقطه ای از یک ظرف بزرگ آب، با افتادن جسم کوچکی در آب - یا مثلاً با زدن نوك مداد در آب، یک آشفستگی ایجاد شود. سپس این آشفستگی به صورت پالس موج دایروی شروع به بزرگ شدن کند. با چشم پوشی از تأثیر پاشندگی، می توان گفت که پالس با سرعت معین  $v$  بزرگ و بزرگتر می شود. اگر پالس در  $t = 0$  در نقطه ای به نام مبدا ذرات محیط را به ارتعاش در آورد، این ارتعاش پس از  $t = \frac{r}{v}$  به نقطه ای از محیط به فاصله  $r$  از مبدا خواهد رسید. هویگنس وقتی مشاهده کرد که حرکت ارتعاش مبدا پس از  $t + \frac{\Delta r}{v}$  در نقطه ای به فاصله  $r + \Delta r$  از مبدا تکرار می شود، توانست انتقال حرکت ارتعاشی را به ذرات محیط نسبت دهد که پس از زمان  $t$  به فاصله  $r$  از مبدا مشاهده می شود. بنابراین بخوبی می توان فهمید که آشفستگی تولید شده در یک محیط چگونه از نقطه ای به نقطه دیگر منتقل می گردد. هویگنس و فرنل هر دو برای توجیه انتشار نور از این

اصل استفاده کردند، و رفتار محیط خارج از میدان دید را بررسی نمودند. به احتمال زیاد، تصویر اشیاء بر اثر رفتار موجهای کوچک روی آب، ظاهر می شود. مخصوصاً اگر امواج از چشمه دور شوند و در مسیرشان به مانعی برخورد کنند که فقط دارای یک شکاف نازک («نازک» یعنی عرض شکاف در مقایسه با طول موج کوچک) باشد، در آن صورت، این شکاف عیناً نظیر یک چشمه نقطه ای جدید عمل می کند و از امواج رسیده به شکاف، موج دایروی در حال انبساط تولید خواهد شد. این پدیده در شکل (۸-۶) نشان داده شده است. امواج صادره از منبع اصلی چه خطی باشد یا دایروی، تأثیری در اصل موضوع ندارد. نکته مهم آن است که شکاف کوچک باشد تا در هر حال مانند یک چشمه موج دایروی عمل کند. این رویداد کاملاً منطقی است، زیرا سداً واقع در مسیر، از انتشار تمام آشفتگی اصلی، غیر از بخشی که از شکاف می گذرد، جلوگیری می کند، و جابه جایی محیط برای انتقال بخشی از این آشفتگی آزاد است.



(ب)

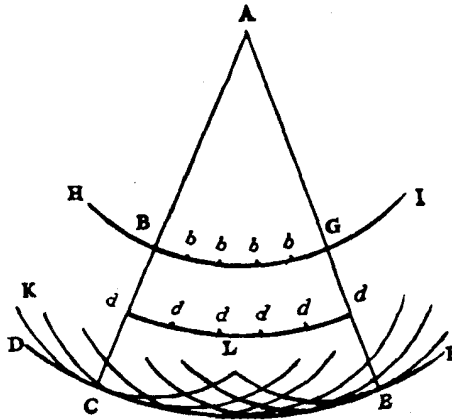


(الف)

شکل (۸-۶) تولید موجهای کوچک هویگنس به کمک یک شکاف باریک به وسیله جبهه موج پیشرو (الف) امواج دایروی ابتدایی (از: R.W.pohl اصول فیزیکی مکانیک و آکوستیک، Blackie، لندن، ۱۹۳۲) (ب) امواج خطی ابتدایی. (از فیلم «پدیده های موجهای کوچک ظرف آب» بخش ۲. مرکز گسترش آموزشی، لندن، ۱۹۳۲)

اصل هویگنس بخوبی توضیح می دهد که یک پالس موج دایروی که مانعی سر راهش نباشد، باعث تشکیل جبهه موج دایروی بعدی می شود. و یک پالس موج خطی، جبهه

موج خطی را تشکیل خواهد داد. شکل (۸-۷) از کتاب اصلی هویگنس<sup>۱</sup>، نشان می دهد که جبهه موج دایروی HBGI چگونه تشکیل می شود، پیشروی می کند و پس از مدتی به صورت جبهه موج دایروی DCEF در می آید.



شکل (۸-۷) رسم جبهه موج به روش هویگنس [۱ از Huygens، C، رساله نور، (ترجمه شده توسط S.P.

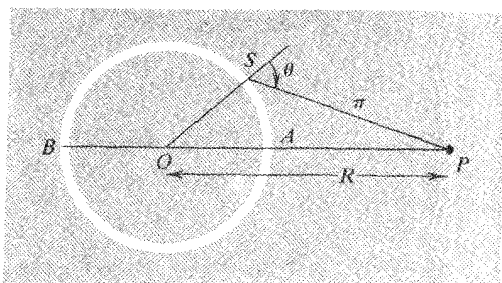
Thompson)، Dover، نیویورک، ۱۹۶۲]

زیرا هر نقطه واقع بر روی جبهه موج قبلی نظیر B می تواند موجب پیدایی موج کوچک دایروی KCL شده، و کل این موجهای کوچک که در لحظه معینی تولید می شوند طوری پهلوی هم قرار می گیرند که جبهه موج جدید DCEF بر همه آنها مماس شود. از ویژگیهای این مکان هندسی آن است که فاصله بین این جبهه موج و جبهه موج اصلی، کوتاهترین فاصله و در همه جا مساوی است، در اینجا زمانی است که جبهه موج از وضع (قبلی) HBGI به وضع فعلی در آمده است. با رسم ساختاری مشابه، برای یک جبهه موج خطی، می توان فهمید که جبهه موج بعدی با خود این جبهه موج موازی است.

در این شکل (رسم هویگنس) به هر حال نکاتی بیشتر از آنچه به چشم می خورد وجود دارد. رسم هویگنس، همان گونه که آن را توصیف کرده ایم بادو جبهه موج متوالی مشخص

۸- سی. هویگنس، رساله نور، ۱۹۶۰ (ترجمه اس. پی. تامپلسون، داور، نیویورک، ۱۹۶۲).

خواهد شد، نه یکی. بعلاوه یک جبهه موج جدید وقتی از چمسه موج دور می شود، جبهه موج دیگری متناظر با این جبهه موج جدید قاعدتاً وجود داشته باشد که به طرف چشمه برگردد. ولی می دانیم که این برگشت اتفاق نمی افتد. اگر روش هویگنس برای نمایاندن انتشار موج قابل قبول باشد، فقط خواص یک جانبه موج پیشرو باید دخالت داده شود. این کار در صورتی امکان پذیر است که سرعت انتشار آشفستگی خطی که در لحظه معینی، در نقطه مشخصی از محیط تولید شده، در همه جهات دقیقاً یکسان نباشد. مخصوصاً، اگر  $O$  [شکل (۸-۸)] چشمه اصلی حقیقی،  $S$  مبدا موجهای کوچک هویگنس و  $P$  نقطه تجلی نمایان ترین آشفستگی ثبت شده باشد، در آن صورت میزان تاثیر موجهای کوچک  $S$  در نقطه  $P$  تابع  $f(\theta)$  است،  $\theta$  زاویه بین  $OS$  و  $SP$  است. در حالت مخصوصی، بازای  $\theta = \pi$  داریم  $f(\theta) = 0$ .



شکل (۸-۸) نقطه  $S$  بر روی یک موج دایروی در حال گسترش با مبدا  $O$ ، مانند یک چشمه دوم عمل می کند، میزان تاثیر این چشمه در  $P$  به زاویه میل و به فاصله  $SP$  بستگی دارد.

تا اینجا بحث ما مربوط به رسم هویگنس بود، ولی در تحلیل کیفی انتشار موج نیز سهم بسزایی داشت. در حقیقت، با شرح چگونگی تشکیل جبهه موجهای بیشتر، موضوع کاملاً دشوار می شود. در هر حال، خواص دومین چشمه های روی یک جبهه موج پیشرو را، که با این روش تولید می شوند، باید تعیین کرد. نوعی فرمول سازی ویژه ریاضی با استفاده از اصل هویگنس را هلمهولتز<sup>۹</sup> ۱۸۵۹ منتشر ساخت، و پس از آن کیرشهف<sup>۱۰</sup> ۱۸۸۲ آن را

9- H. Helmholtz

10- G. Kirchhoff

تکمیل کرد<sup>۱۱</sup>. علی رغم ساختگی بودن تداخل، این روش برای بررسی نتایج تداخل آپتیکی بسیار ارزشمند است، و آن هنگامی رخ می دهد که جلو بخشی از باریکه نور تابیده به وسیله مانع گرفته شود و حتی بدون کاربرد ریاضیات از روش هویگنس به عنوان یک راهنما می توان استفاده کرد.

بیشتر اوقات نه همیشه، ما با امواج سینوسی پیوسته بیش از تک پالسها سرو کار داریم. و حتی یک تک پالس، همان گونه که دیده ایم، بر حسب برهمنهی قطارهای موج نامحدود، از راه تحلیل فوریه قابل توصیف است. این بدان معناست که در هر لحظه و در هر نقطه بر روی یک سطح انتخابی دلخواه می توان دو مین چشمه موجهای کوچک هویگنس را مشاهده کرد. در مورد امواج پیشرو می توان گفت که دامنه آشفتگی سینوسی در هر نقطه معین به زمان بستگی ندارد. یعنی با توجه به فازهای نسبی آشفتگیها که به نقطه معینی از سطح مشخصی می رسند، در بیشتر موارد وابستگی زمان را می توان نادیده گرفت و این نکات، در مسائل ویژه ای که در زمینه پراش و تداخل در نظر می گیریم، آشکار خواهد شد.

### بازتاب و شکست امواج تخت

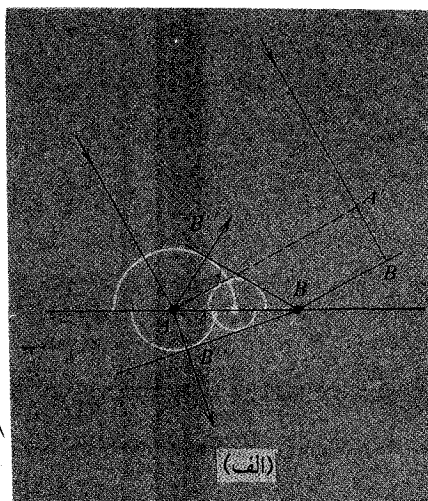
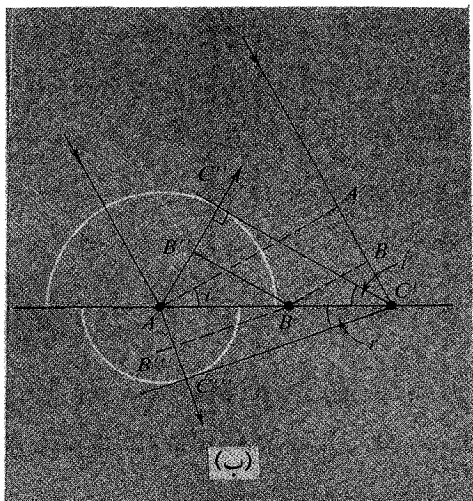
درست همان گونه که درباره امواج روی یک ریسمان توضیح داده شد، به طور کلی، می توان انتظار داشت که برای امواج پیشرو در یک محیط، وقتی با مرز بین دو محیط متفاوت روبه رو می شوند، بازتاب جزئی و تراگیل جزئی رخ دهد. ولی باید دانست که در مورد امواج دو یا سه بعدی امکان تغییر جهت هم وجود دارد.

ساده ترین حالت آن است که یک موج خطی با یک مرز خطی برخورد کند. در آن صورت

---

۱۱- این فرمول سازی برای انتشار امواج سه بعدی است. واقعاً به طور شگفت آوری - فرمول سازی و استفاده از اصل (هویگنس) برای امواج دو بعدی دشوارتر است، و نسبت به سه بعدی صراحت کمتری دارد. و علت آن نیز هنوز مکتوم و پنهان مانده است، بنابراین برای بحث در اینجا کاملاً نامناسب است. برای اطلاع از توضیحات مفصلتر در زمینه هویگنس، به کتاب آپتیک نوشته: B. Rossi، ناشر: Addison, Wesley, Reading, Mass، ۱۹۵۷، یا (برای آشنایی با بحث ریاضی آن) به کتاب: نظریه ریاضی اصل هویگنس، نوشته: E.T. Copson و B.B. Baker، ناشر: دانشگاه اکسفورد، نیویورک، ۱۹۵۰، مراجعه کنید.

می توان از قوانین معمولی بازتاب و شکست - به نام قوانین اسنل - استفاده کرد. این نتایج به وسیله رسم هویگنس به آسانی به دست می آید. در شکل (۸-۹) خط  $AA'$  جبهه موج خطی را در لحظه ای نشان می دهد که این جبهه در نقطه  $A$  با مرز (دو محیط) برخورد می کند. در لحظه ای بعد، می بینیم که جبهه موج پیشروی کرده و در همان محیط اولی به وضع  $BB'$  در آمده است. [ شکل ۸-۹ (الف) ] به مجرد آنکه جبهه موج به هر یک از نقاط مرز، واقع بین  $A$  و  $B$ ، برسد آن نقطه به صورت مرکز جدید موجهای کوچک هویگنس عمل می کند، و از آنجا موجهای کوچک هم در محیط دوم پیش می روند و هم به محیط اول بر می گردند. خط مماس بر این موجهای کوچک جبهه موجهای جدید خواهد بود.



شکل ۸-۹ (الف) نمایش بازتاب و شکست با رسم هندسی هویگنس. (ب) اثبات قانون اسنل با رسم هندسی هویگنس

لحظاتی بعد، جبهه موج اولیه در نقطه  $C'$  با مرز تماس می یابد [ شکل ۸-۹ (ب) ]. در همان لحظه، موج کوچکی که لحظاتی پیش از نقطه  $A$  شروع به بازگشت در محیط اولیه کرده بود، در همین مدت به شعاع  $AC''$  خواهد رسید. خط  $C'C''$  که بر این موج کوچک اخیر مماس است، بر تمام موجهای کوچک برخاسته از نقاط مرزی بین  $A$  و  $A'$  نیز مماس خواهد بود<sup>۱۱</sup>. خط  $C'C''$  یک جبهه موج جدید است. و با استفاده از شکل هندسی اگر<sup>۱</sup>

و  $i'$  زاویای بین جبهه موجهای تابش و بازتاب با مرز باشد، خواهیم داشت:

$$\sin i = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{AC''}{AC'} = \sin i'$$

زاویه بین مرز و جبهه موج با زاویه بین عمود بر مرز و عمود بر جبهه موج مساوی است. ولی این راستای اخیر (لااقل در آپتیک) راستای پرتو نامیده می شود، یعنی، همان راستای باریکه ای نازک از امواج پیشرو است<sup>۱۳</sup>. بنابراین زاویای  $i$  و  $i'$  برای پرتوهای برخورد کننده با یک مرز خطی زاویای تابش و بازتاب محسوب می شوند.

(تطبيق فرایند بازتاب با خواص دوّمین امواج کوچک هویگنس واقعاً کار دشواری است، زیرا این امواج که در آغاز با دامنه کوچک تولید می شوند به عقب بر می گردند، و چون یکی پس از دیگری از بین می روند جای خود را به امواج بزرگتر می دهند. هر چند ایجاد چنین امواجی به حضور یک مرز تیز مربوط می شود. در عین حال وضعیت جدید و متفاوتی را به دنبال دارد.)

فرایند شکست نیز با روش مشابهی تجزیه و تحلیل می شود. با مراجعه به شکل [۸- ۹ (ب)] شعاع موجهای کوچک هویگنس را، که همه از  $A$  به داخل محیط دوم پیش می روند، تعیین می کنیم. برای این کار فاصله پیشروی را، از زمانی که جبهه موج در  $AA'$  بود تا زمانی که در  $C'$  با مرز تماس یابد، در نظر می گیریم. به این ترتیب  $C'C''$ ، که بر این موج کوچک (و بر تمام موجهای کوچک دیگر در این لحظه) مماس است، در محیط ۲ جبهه موج به حساب می آید. اگر سرعت موج را در دو محیط به ترتیب  $v_1$  و  $v_2$  و اگر زمان این پیشروی را  $\Delta t$  فرض کنیم، داریم:

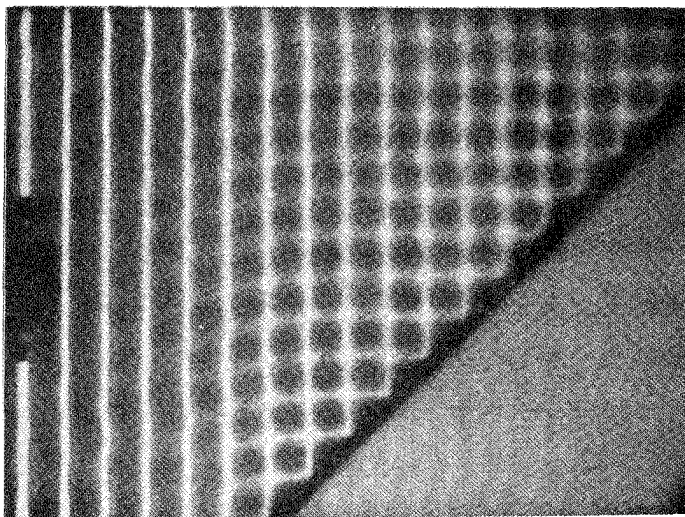
$$AC'' = v_2 \Delta t \quad A'C' = v_1 \Delta t$$

زاویه شکست،  $r$  زاویه بین  $C'A$  و  $C'C''$  است و با استفاده از قضایای هندسی داریم:

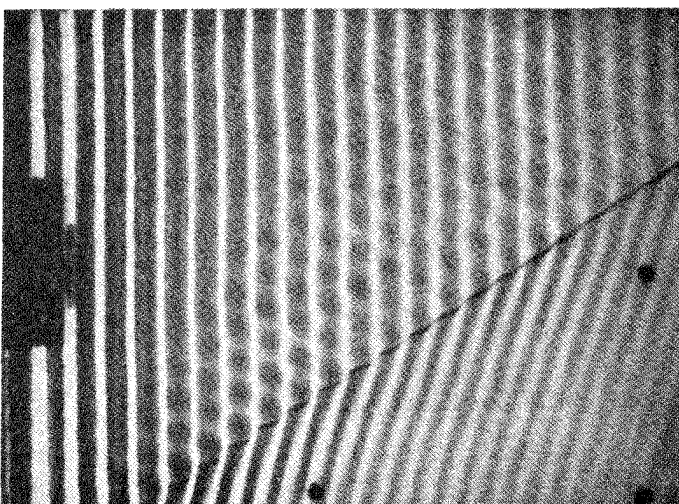
$$\sin i = \frac{v_1 \Delta t}{AC'} \quad \sin r = \frac{v_2 \Delta t}{AC''}$$

۱۳- این عمود بودن راستای پرتو و جبهه موج ممکن است بدیهی به نظر برسد، ولی محیطهای ناهمسانگرد مسیر پرتوها را واقعاً تغییر می دهند، به همین جهت موجهای کوچک هویگنس بجای دایروی احتمالاً بیضوی هستند.

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$



(الف)



(ب)

شکل ۸-۱۰ (الف) بازتاب امواج آب در برابر یک مرز سخت ( $i = 45^\circ$ ). (ب) شکست امواج آب در مرز مشترک بین دو ناحیه ای که عمق آب و در نتیجه سرعت موج در آن دو ناحیه متفاوت است. (اقتباس از فیلم «پدیده های امواج کوچک ظرف آب»، بخش ۱، مرکز گسترش آموزشی، نیوتون، جرم.)



محاسبه دامنه های واقعی امواج بازتابیده و تراگسیل شده مساله پیش پا افتاده ای نیست. این کار در حقیقت دشوار است. رفتار امواج طولی (تراکمی) و امواج عرضی با هم فرق دارد. از این گذشته، امواج عرضی در حالتی که جابه جایی بر سطح تصویر (۸-۹) (مثلاً بر سطح امواج آب) عمود است با حالتی که جابه جایی در سطح تصویر است تفاوت خواهد داشت. به همین جهت، رفتار امواج عرضی به حالت قطبش بستگی دارد. به علت این پیچیدگیها، درصدد تجزیه و تحلیل چنین مسائلی نیستیم. ولی باید یادآور شد که در تابش عمودی ( $i = 0$ ) بار دیگر با مساله ای یک بعدی سرو کار پیدا می کنیم. البته، ممکن است بین آشفته گیهای طولی و عرضی، همان گونه که پیش از این هم - در برخورد یک محیط (ملاء) سیال با مرز واقعاً ساکن ولی جامد و هموار - اشاره شد، هنوز تمایزی وجود داشته باشد. که در آن صورت بازتاب هر موج تابشی ۱۰۰٪ خواهد بود. ولی اگر موج طولی باشد، مرز مانند یک سطح کاملاً سخت عمل می کند و جابه جایی موج بازتابیده در مرز با موج تابشی باید مساوی و مختلف علامه باشد؛ در صورتی که همین مرز برای موج عرضی مقاومتی از خود نشان نمی دهد، و بازتاب بدون هیچگونه تغییر علامت جابه جایی رخ می دهد (به مباحث قبلی در زمینه مسائل مرز یک بعدی مراجعه کنید).

در شکل (۸-۱۰) نمونه هایی از بازتاب و شکست امواج آب در یک ظرف بزرگ نشان داده شده است. شکست موج را که با تغییر طول موج (به نسبت  $\frac{v_2}{v_1}$ ) همراه است، در لحظه ای که آشفته گی وارد محیط دوم می شود به وضوح می توان دید.

در اینجا هیچگونه بحثی را در مورد بازتاب یا شکست امواج دایروی هنگام تابش به مرزهای خطی یا خمیده مطرح نخواهیم کرد. البته چنین اوضاعی را به کمک رفتار موجهای کوچک هویگنس بخوبی می توان تجزیه و تحلیل کرد. آزمایش دقیقاً نشان می دهد که آینه ها و عدسیها جبهه موجهای تابشی را چگونه تغییر می دهند و موجبات همگرایی یا واگرایی پرتوها و سایر پدیده هایی از این قبیل را فراهم می آورند، و این تغییر مسیر پرتوها همگی طبق قوانین اسنل قابل توصیف است.

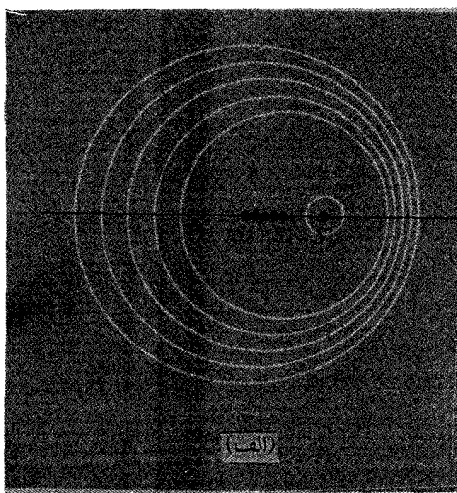
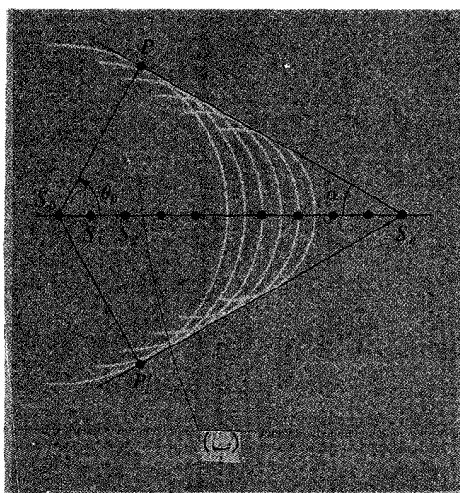
مساله خاصی، که در زمینه شکست موج، ارزش مطرح کردن را دارد آن است که هر وقت سرعت موج بر حسب وضعیّت تغییر کند جبهه موج هم تغییر جهت می دهد. این تغییر جهت در یک محیط هم، تحت شرایط معینی، می تواند اتفاق بیفتد. مثلاً، سرعت امواج تراکمی (صوت) در گازها تابع دما است. [مخصوصاً  $\sqrt{T}$  به فصل ۷، معادله (۷-۱۲)

مراجعه کنید . ]

بنابراین ، اگر در گازی گرادیان دما وجود داشته باشد ، امواج رونده در چنین گازی شیب ملایمی خواهند داشت . از طرف دیگر اگر خود محیط در حرکت باشد ، به گونه ای که بخشهای مختلف آن سرعتهای متفاوتی داشته باشد ، باز هم پدیده شکست اتفاق خواهد افتاد . در هوای مجاور سطح زمین که احتمالاً هم گرادیان دما و هم گرادیان سرعت وجود دارد ؛ باتوجه به علائم این دو گرادیان و جهت انتشار امواج ، ممکن است قطاری از امواج صوتی با شیب معین از سطح زمین دور و یا متناوباً به آن نزدیک شود . در حالت اخیر وقتی قطار موج از فواصل نسبتاً دور به زمین نزدیک می شود بر شدت صدای شنیده شده مرتباً افزوده خواهد شد .

### اثر دوپلر و پدیده های مربوط به آن

هرگاه چشمه یک آشفتنگی متناوب نسبت به محیط حرکت کند ، شکل امواج تولید شده به تبع آن تغییر می کند . ساده ترین حالت آن است که چشمه ای با سرعت ثابت در راستای خط مستقیم حرکت کند . برحسب آنکه سرعت چشمه از سرعت امواج تولید شده کمتر یا بیشتر باشد ، دو وضعیّت کاملاً متناوب وجود دارد . طرح ساده ای از این دو وضعیّت در شکل (۸-۱۱) نشان داده شده است . وضعیّت چشمه ، S ، در بازه های زمانی



شکل (۸-۱۱) جبهه موجهای متوالی که در بازه های زمانی مساوی تولید شده اند (الف) سرعت چشمه متحرك از سرعت موج کمتر است . (ب) سرعت چشمه متحرك از سرعت موج بیشتر است .

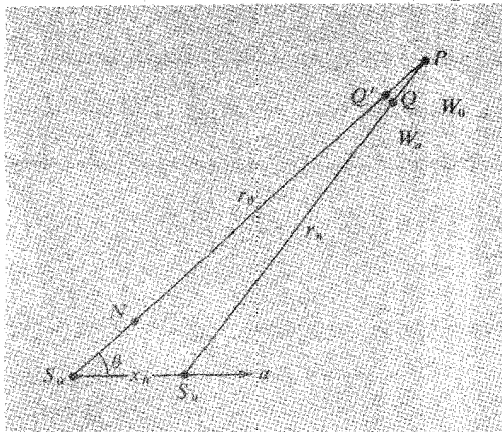
مساوی متوالی نمایش داده شده است. این بازه ها می توانست ، لحظاتی باشد که چشمه پالس کوتاهی تولید کرده است ، یا لحظاتی باشد که چشمه ارتعاش سینوسی یکنواخت یک دوره تناوب را پشت سر گذاشته است. در هر حال ،  $S$  چشمه صوت و مرکز دایره در لحظه معینی است ، که در لحظه بعدی به نقطه مجاور که مرکز دایره بعدی است منتقل می شود. بنابراین  $S$  ها مکان هندسی چشمه متحرك و مراکز دایروی هستند که امواج صادره از این نقاط در حال گسترش هستند.

اگر سرعت چشمه را  $u$  ، و سرعت موج را  $v$  بگیریم ، در این صورت پس از زمان  $t$  که از شروع یکی از امواج دایروی بگذرد ، شعاع جبهه موج به  $vt$  می رسد و در همین مدت چشمه به اندازه مسافت  $ut$  جابه جا شده است. اگر  $u < v$  باشد ، وضعیت به گونه ای است که در شکل [ ۸ - ۱۱ (الف) ] نشان داده شده است. در این حالت جبهه موجهای دایروی از یک طرف به هم نزدیک می شوند. فاصله بین جبهه موجهای متوالی ، در جهت حرکت چشمه ، به حداقل می رسد ، و در خلاف جهت حرکت چشمه ، حداکثر خواهد بود. اگر بازه زمانی بین دو وضعیت متوالی  $S$  باشد که در شکل [ ۸ - ۱۱ (الف) ] نشان داده شده است. در آن صورت فاصله دو جبهه موج متوالی به ترتیب  $(v - u)\tau$  و  $(v + u)\tau$  است. اگر چشمه ساکن باشد ،  $v\tau$  معرف فاصله بین دو جبهه موج در جمیع جهات است. بنابراین روابط تغییر طول موج را ، با در نظر گرفتن جهت حرکت ( چشمه ) ، برای امواج گسیل شده از یک چشمه متحرك ، می توان به صورت زیر نوشت ، و آن را اثر دوپلر نامید. در حالت مخصوص داریم :

$$\lambda_{\min} = \lambda_0 \left( 1 - \frac{u}{v} \right) \quad \lambda_{\max} = \lambda_0 \left( 1 + \frac{u}{v} \right)$$

وضعیت برای جهات دیگر پیچیده تر می شود ، ولی اگر فاصله ناظر از چشمه در مقایسه با طول موج گسیل شده بسیار زیاد باشد تحلیل وضعیت آسان است. لذا وضعیتی را بررسی می کنیم که در شکل ( ۸ - ۱۲ ) نشان داده شده است. نقاط  $S_0$  و  $S_n$  وضعیت چشمه را در  $t = 0$  و  $t = n\tau$  ( دوره بعد ) نمایش می دهد. چون سرعت چشمه  $u$  است ، لذا داریم :

$$S_0 S_n = x_n = un\tau$$



شکل (۸-۱۲) امواجی که از یک چشمه متحرک از نقاط  $S_0$  تا  $S_n$  به ناظر  $P$  به فاصله دور از چشمه می رسد.

چون فاصله ناظر  $P$  از چشمه ها خیلی دور فرض شده است، زاویه  $S_0PS_n$  خیلی کوچک است. این بدان معنا است که جبهه موجهایی که از  $S_0$  و  $S_n$  (و همه نقاط بین این دو) به ناظر  $P$  می رسد تقریباً موازی هستند. فرض می کنیم که موج  $W_0$  در زمان  $t_p$  از  $S_0$  به  $P$  می رسد. در این صورت  $t_p = \frac{r_0}{v}$ . گسیل موج در زمان  $t = n\tau$  از  $S_n$  شروع می شود؛ بنابراین در زمان  $t_p$  این موج فقط به مدت  $t_p - n\tau$  پیشروی داشته است؛ جبهه موج این چشمه  $W_n$  به فاصله  $S_nQ$  است و داریم:

$$S_nQ = v(t_p - n\tau) \\ = r_0 - vn\tau$$

فاصله بین جبهه های موج را می توان با  $QP$  یا  $Q'P$  مساوی در نظر گرفت (تفاوت بین آنها جزئی است). اگر به جای  $S_nP = r_n$  مقدار قرار دهیم، داریم:

$$QP = r_n - S_nQ = r_n - r_0 - vn\tau$$

اگر از  $S_n$  عمودی بر خط  $S_0P$  وارد آوریم، خواهیم داشت:  $NP \approx r_n$  (باز هم به علت کوچک بودن زاویه  $S_0PS_n$ )، برای آنکه

$$r_0 - r_n \approx S_0N = x_n \cos \theta$$

$$r_o - r_n \approx un\tau \cos \theta$$

برای به دست آوردن QP ، طرف دوم این رابطه را در فرمول قبلی قرار می دهیم ، داریم :

$$\begin{aligned} Q'P &\approx QP \approx un\tau - un\tau \cos \theta \\ &= n\lambda_o \left( 1 - \frac{u \cos \theta}{v} \right) \end{aligned}$$

ولی Q'P یا QP دارای n طول موج ناشی از آشفتگی چشمه متحرك است که تحت زاویه  $\theta$  مشاهده می شود ، بنابراین داریم :

$$\lambda(\theta) = \lambda_o \left( 1 - \frac{u \cos \theta}{v} \right) \quad (۱۳ - ۸)$$

از این رابطه به سادگی چنین استنباط می شود که اثر دوپلر به سرعت چشمه و راستای دید ناظر بستگی دارد . بسامدی که ناظر در نقطه P برای دریافت جبهه متوالی احساس می کند ، از تقسیم سرعت موج بر طول موج به دست می آید ، که عبارت است از :

$$v(\theta) = \frac{v_o}{1 + \frac{u \cos \theta}{v}} \quad (۱۴ - ۸)$$

معادله اخیر برای بیان اثر دوپلر مناسبترین رابطه در آکوستیک است ، زیرا بر اثر این پدیده ، تغییر صدای نت دریافتی از یک چشمه متحرك کاملاً محسوس است .

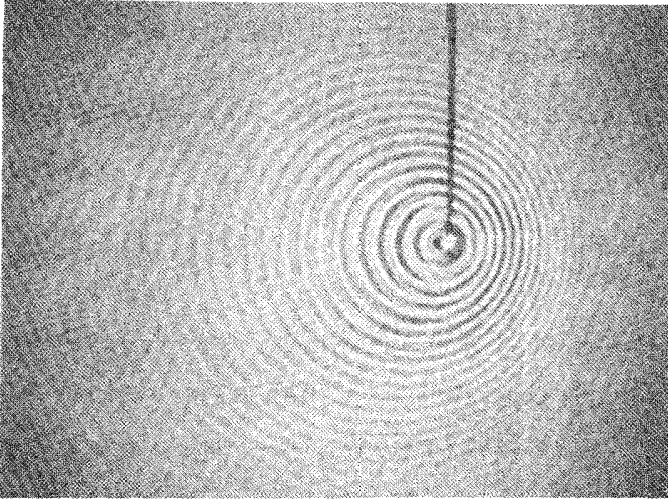
این حالت نظیر وضعیتی است که در شکل [۸ - ۱۱ (ب)] نشان داده شده است . فرض می کنیم که چشمه در  $t = 0$  در  $S_o$  است . پس از مدتی ، در  $t = n\tau$  چشمه در  $S_n$  است ، به طوری که  $S_o S_n = nu\tau$  ، و جبهه موج در این مدت از  $S_o$  به اندازه شعاع  $nu\tau$  جلوتر رفته است .

در این لحظه که چشمه در وضعیت  $S_n$  است ، تولید امواج شروع می شود . اگر از  $S_n$  خطوط مماسی بر جبهه موجهای دایروی صادر شده از  $S_o$  رسم کنید ، این خطوط بر تمام دایره های دیگر هم که بین  $S_o$  و  $S_n$  واقعند مماس خواهد بود . آزمایش قبلی که به رسم هندسی هویگنس منجر شد ، مؤید آن است که موجهای کوچک در طول این خطوط تشکیل می شوند ، در نتیجه مانند جبهه موج خطی ، که با سرعت  $v$  به طرف خارج پیش می رود ، عمل می کند . زاویه  $\alpha$  ، که از برخورد این جبهه موجها با مسیر حرکت چشمه تشکیل

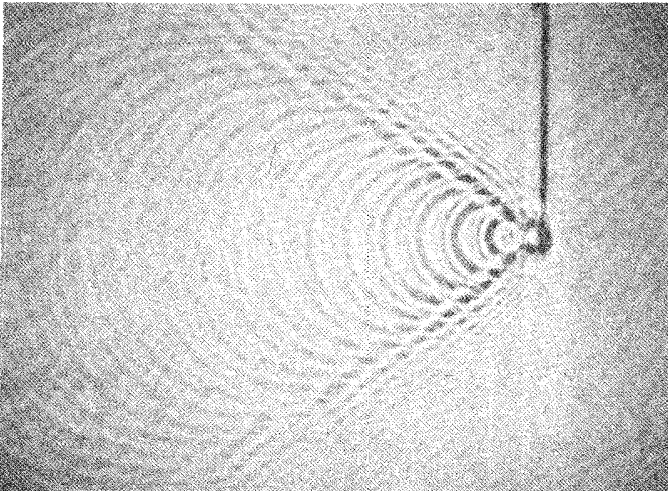
می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sin \alpha = \frac{S_o P}{S_o S_n} = \frac{v}{u} \quad (۸-۱۵)$$

نسبت  $\frac{u}{v}$  عدد ماخ<sup>۱۴</sup> نامیده می شود، و  $\alpha$  زاویه ماخ است ( $\alpha$  در صورتی وجود دارد که عدد ماخ از (۱) بزرگتر باشد).



(الف)



(ب)

شکل ۸-۱۳ امواج آبی راکه در ظرفی بزرگ، یک چشمه متحرك به وجود آورده است. (اقتباس از فیلم «پدیده های امواج کوچک طرف آب» بخش ۳، مرکز گسترش آموزش، نیوتون، جرم) (الف) سرعت چشمه از سرعت موج کمتر است (اثر دوپلر). (ب) سرعت چشمه از سرعت موج بیشتر است (موج شوکی).

14- Mach number

شکل (۸-۱۳) نمونه‌هایی را نشان می‌دهد که امواج در سطح آب یک ظرف به وسیله چشمه متحرک، بازای اعداد ماخ کوچکتر و بزرگتر از (۱)، تولید شده است. با وضوح بیشتری می‌توان دید که مکان هندسی امواج دایروی بازای  $u > v$  چگونه نظیر یک جبهه موج خطی تمرکز یافته عمل می‌کند باید زمان رسیدن امواج دایروی را، که یکی پس از دیگری از چشمه متحرک دور می‌شوند و به نقطه P می‌رسند، در نظر گرفت. برای این کار بهتر است دوباره به شکل (۸-۱۲) مراجعه کرد.

به فرض آنکه در  $t = 0$  موجی از  $S_0$  صادر شود و در  $t = n\tau$  موجی دیگری از  $S_n$  گسیل شود در این صورت زمان رسیدن این امواج به نقطه P از روابط زیر به دست می‌آید:

$$t_0 = \frac{r_0}{v}$$

$$t_n = n\tau + \frac{r_n}{v}$$

بنابراین

$$t_n - t_0 = n\tau - \frac{r_0 - r_n}{v}$$

به جای  $r_0 - r_n \approx x_n \cos \theta = n\tau v \cos \theta$  مقدار قرار می‌دهیم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$t_n - t_0 \approx n\tau \left( 1 - \frac{u \cos \theta}{v} \right)$$

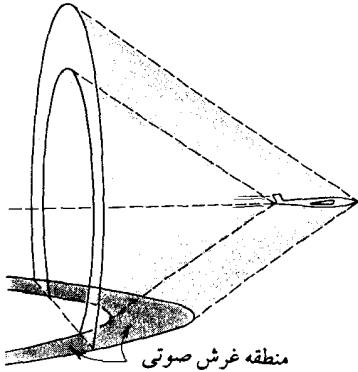
بدیهی است اگر  $u < v$  باشد  $t_n$  همیشه از  $t_0$  بزرگتر است - یعنی امواج به همان ترتیب که گسیل شده‌اند به نقطه مورد نظر می‌رسند. ولی اگر  $u > v$  باشد، ترتیب رسیدن موجها به اندازه  $\theta$  بستگی دارد. و در حالت مخصوص، بازای اندازه معین  $\theta$ ، تمام جبهه موجها می‌توانند به طور همزمان به P برسند. این زاویه را  $\theta_0$  می‌نامیم و داریم:

$$\cos \theta_0 = \frac{v}{u} \quad (۸-۱۶)$$

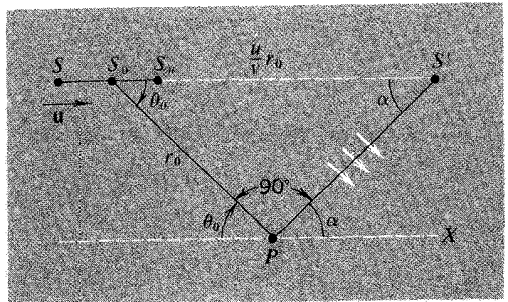
اندازه  $\theta_0$  متمم زاویه ماخ است و راستایی را معین می‌کند که بر جبهه موج عمود است. و ناحیه تراکم موجهای کوچک دایروی رونده نیز در همین راستا است. از این تعاریف می‌توان فهمید که پدیده‌هایی نظیر غرشهای صوتی چگونه تولید می‌شود. اگر چشمه S [شکل ۸-۱۴ (الف)] با سرعتی بیشتر از سرعت موج حرکت کند و ناظر در نقطه P باشد،

می توان از نقطه P خطی رسم کرد که با راستای حرکت چشمه، زاویه  $\theta_0$  تشکیل دهد. این خط مسیر حرکت چشمه را در نقطه  $S_0$  قطع خواهد کرد. در زمان  $\frac{r_0}{v}$  پس از آنکه چشمه (صوتی) از  $S_0$  می گذرد، در نقطه P صدای ناهنجاری ناگهان دریافت می شود، که بخشی در مبداء تولید شده و بقیه در مسیر و آخرین بار هنگام گذشتن چشمه از بالای P که کوتاهترین فاصله را تا ناظر (P) دارد، تولید می شود. ولی ناظر (P) همه این امواج صوتی را به طور همزمان و یک جا دریافت می کند. [ در این لحظه خود چشمه در فاصله  $\frac{ur_0}{v}$  جلوتر از  $S_0$  است - شکل ۸-۱۴ (الف) را ببینید. ]

پیش از این لحظه، ناظر P هیچگونه صدای ناهنجار دریافت نمی کرد. پس از شنیدن صدای ناهنجار - که از لحظه عبور چشمه از بالای سر ناظر اتفاق می افتد، دریافت صداهای عادی چشمه ادامه خواهد داشت، بدون آنکه صداها به طور تدریجی یا همزمان تقویت شود - حتی ممکن است صداها به طور قابل ملاحظه ای ضعیف و ضعیفتر شوند.



«ب»



«الف»

شکل (۸-۱۴) (الف) در راستای  $\theta_0 = \cos^{-1} \left( \frac{v}{u} \right)$  ، پالسهای صادره از چشمه متحرک ( $u < v$ ) به طور همزمان به ناظر P می رسد. (ب) تولید غرشهای صوتی.

در عمل، هواپیمایی که با سرعت فوق صوتی<sup>۱۵</sup> پرواز می کند، دو غرش تولید می شود که یکی مربوط به دماغه و دیگری مربوط به دنباله هواپیما است. این غرشها در مورد هواپیمایی که به طور افقی با سرعت ثابت پرواز می کند به شکل سطوح مخروطی است که به سطح



تخت (افقی) منتقل می شود [شکل ۸-۱۴ (ب) را ببینید]. مقطع این سطوح مخروطی بازمین به شکل هذلولی است. این مقطع هذلولی شکل با پرواز هواپیما زمین را جاروب می کند و کسانی که درون این مقطع باشند غرّش صوتی را می شنوند<sup>۱۶</sup>.

تداخل امواج دو شکاف [= دو چشمه]

اکنون موشکافانه تر بررسی خواهیم کرد که هنگام رسیدن یک موج پیشرونده به مانع (سوراخدار یا شکافدار) چه اتفاق می افتد. از لحاظ اصل هویگنس هر نقطه روی جبهه موج اصلی مانند یک چشمه جدید عمل می کند، در اینجا نیز سوراخها یا شکافهایی که در معرض تابش موج پیشرونده هستند نظیر چشمه های ثانوی رفتار خواهند کرد. بنابراین برای تمام امواج صادره از چشمه های جدید پدیده برهنه می رخ می دهد. چون امواج چشمه های جدید از موج اصلی نشأت گرفته اند، در نتیجه رابطه میان آنها شکل کاملاً معینی دارد. این شرط همدوسی<sup>۱۷</sup> نامیده می شود و مستلزم آن است که میان آشفتهگیهای ثانوی حتی در فواصل دور از چشمه ها رابطه اصولی برقرار باشد. در نتیجه الگوی تداخلی مشخصی - متناسب با این چشمه های همدوس - در طرف دیگر بر روی پرده تشکیل می شود.

ساده ترین وضعیت، و یکی از مواردی که برای تحلیل و بررسی از بقیه مناسبتر است، آن است که در مسیر موج اصلی مانعی قرار دهیم که در آن دو روزنه کوچک ایجاد شده است. در یک دستگاه دو بعدی این سوراخها مانند چشمه های نقطه ای عمل می کنند. وضعیت مشابهی که برای امواج در سه بعدی می توان در نظر گرفت آن است که بر روی یک صفحه دو شکاف موازی بلند ایجاد کنیم تا مانند چشمه های خطی عمل کنند. ما در فصل ۲ هنگامی که برای نخستین بار برهنه ارتعاشات هماهنگ را بررسی می کردیم، درباره چنین آرایشی به اختصار بحث کرده ایم، و شما احتمالاً با آزمایش تاریخی توماس یانگ<sup>۱۸</sup> (که در حدود ۱۸۰۲ انجام داد)، و تداخل امواج نور را با روشی دور از اشتباه به نمایش گذاشت، آشنا هستید.

---

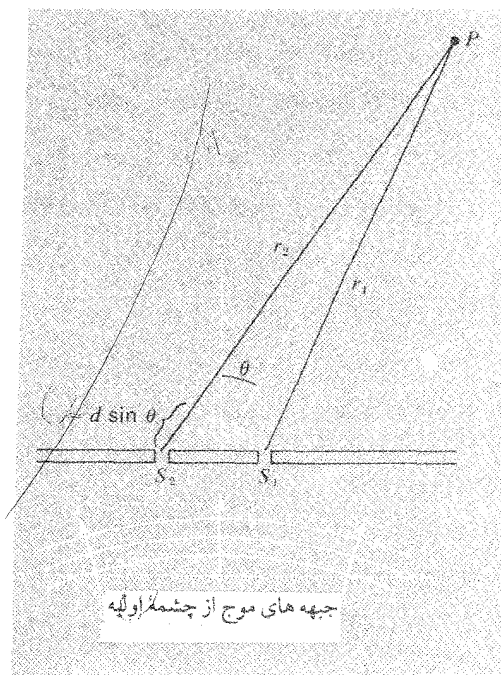
۱۶- برای دانستن نکات علمی جامعتر، به مقاله علمی امریکایی «غرّش صوتی» نوشته H. A. Wilson ژانویه ۱۹۶۲، صص ۳۶-۴۳، مراجعه کنید.

17- Coherence = ارتباط منطقی

18- Thomas Young

در شکل (۸-۱۵) جبهه موجی را نشان می دهیم که به دو شکاف  $S_1$  و  $S_2$  در حال نزدیک شدن است و فرض می کنیم که شکافها بسیار باریک ولی مساویند. برای سادگی، فاصله شکافها را از نقطه ای که به عنوان چشمه موج اولیه عمل می کند مساوی فرض خواهیم کرد. به این ترتیب چشمه های ثانوی  $S_1$  و  $S_2$  با یکدیگر همفازند. اگر موج اصلی به صورت یک آشفتگی هماهنگ ساده پیوسته باشد،  $S_1$  و  $S_2$  نیز امواج هماهنگ ساده ای تولید می کنند. در یک نقطه اختیاری P، از مجموع دو آشفتگی دیگر آشفتگی متوجه به دست می آید، که در لحظه معینی از  $S_1$  و  $S_2$  به P رسیده اند. به طور کلی باید دو نکته مهم زیر را در این آزمایش در نظر بگیریم:

۱- دامنه آشفتگیهایی که از  $S_1$  و  $S_2$  به P می رسند به دو دلیل متفاوت است. نخست آنکه فواصل  $r_1$  و  $r_2$  متفاوتند و هنگامی که آشفتگی دایروی گسترش یابد فاصله اش از چشمه زیاد می شود ولی دامنه اش کاهش می یابد. دوم آنکه زوایای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  متفاوتند، و یک موج کوچک هویگنس (پیش از این هم، در رابطه با شکل (۸-۸) بحث شده است) با زیاد شدن میل محور، دامنه اش کم می شود.

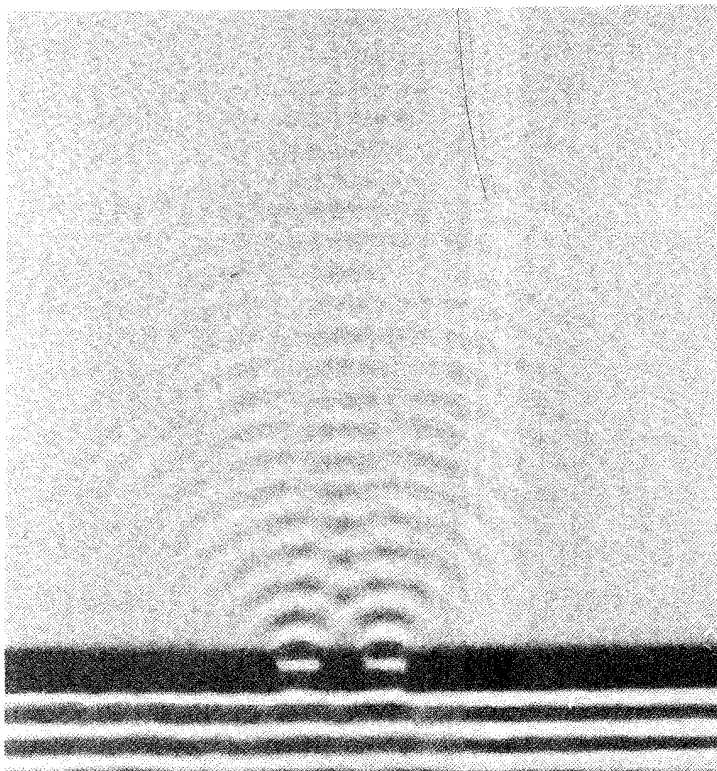


شکل (۸-۱۵) تداخل امواج مربوط به دو شکاف

۲- بین آشفته‌گیها در P اختلاف فازی وجود دارد که مربوط به اختلاف زمان  $\frac{r_2 - r_1}{v}$  است، در اینجا v سرعت موج است.

ما حالاتی را بیشتر مورد توجه قرار می دهیم که فواصل  $r_1$  و  $r_2$  در مقایسه با d، فاصله بین  $S_1$  و  $S_2$ ، نسبتاً بزرگ است. بنابراین تفاوت دامنه امواجی که از  $S_1$  و  $S_2$  به P می رسند قابل چشم پوشی است. ولی ممکن است بین دو آشفته‌گی رسیده از  $S_1$  و  $S_2$  به P اختلاف فاز مهمی وجود داشته باشد، که در شکل کلی موج متوجه نمونه نمایان است. در شکل (۸-۱۶) نوعی نتایج را می بینیم که عکس موجهای کوچک ظرف آب است. در این عکس مکانهای هندسی - خطوط گرهی - در طول آشفته‌گی برآیند در هر لحظه تقریباً صفر است. وضعیت این مکانها را به آسانی می توان حساب کرد. در چنین نقاطی مانند P در شکل (۸-۱۵) جابه جایی تابع زمان وبه شکل زیر است:

$$y_p(t) = A_1 \cos \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right) + A_2 \cos \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right) \quad (8-17)$$



شکل (۸-۱۶) تداخل امواج آب مربوط به دو شکاف (آفتاباز از فیلم «پلیده های موجهای کوچک ظرف آب» بخش ۲، مرکز گسترش آموزش، نیوتون، جرم.)

البته اگر وابستگی آشفته‌گیها به زمان در  $S_1$  و  $S_2$  به صورت  $\cos \omega t$  باشد. از معادله (۸-۱۷) می‌توان فهمید که جابه‌جاییهای مربوط به هر چشمه از زمان  $\frac{r}{v}$  به بعد ظاهر می‌شود، به دنباله‌ای مشابه آنچه در نقطه‌ی به فاصله  $r$  به بالا تشکیل شده توجه کنید. اکنون می‌توانیم به جای دامنه‌ها  $A_0$  قرار دهیم، زیرا

$$A_1 \approx A_2 (= A_0 \text{ مثلاً})$$

در نتیجه

$$y_p(t) = A_0 \left[ \cos \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right) + \cos \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right) \right]$$

$$= 2A_0 \cos \omega t \cos \left[ \frac{\omega}{2v} (r_2 - r_1) \right]$$

با دخالت دادن طول موج  $\lambda = \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi v}{\omega}$ ، داریم:

$$y_p(t) = 2A_0 \cos \omega t \cos \left[ \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \right] \quad (8-18)$$

یک خط گرهی به شرطی معین می‌شود که مقدار  $\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$  مضرب فرد  $\frac{\pi}{2}$  باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

یا

$$r_2 - r_1 = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (\text{خطوط گرهی}) \quad (8-19)$$

در اینجا  $n$  عدد صحیح، مثبت یا منفی یا صفر است. در نتیجه خطوط گرهی مجموعه‌ای از هذلولیها را تشکیل می‌دهند، و تمام ناحیه جلو شکافها را تا مسافتی دور می‌پوشانند. در فواصل بین خطوط گرهی می‌توان هذلولیهای دیگری را رسم کرد که معرف خطوط با جابه‌جایی بیشینه‌اند. به همین جهت در فاصله معینی از شکافها و بین دو خط گرهی مشخص دامنه آشفته‌گی برآیند به بزرگترین اندازه اش می‌رسد. به آسانی می‌توان پی برد که شرط لازم برای آنکه این حالت اتفاق بیفتد آن است که

$$r_2 - r_1 = n\lambda \quad (\text{بیشینه‌های تداخلی}) \quad (8-20)$$

به طور کلی پارامتر مهمی که در شکل گیری تداخل بسیار مؤثر است، نسبت بدون یکای فاصله شکافها،  $d$ ، بر طول موج،  $\lambda$ ، است. این حقیقت در ساده ترین شکل خود هنگامی تجلی می کند که شرط فاصله زیاد محل تشکیل نوارهای تداخلی از شکافها - یعنی  $d \gg r$  - در نظر گرفته شود. در آن صورت [با مراجعه مجدد به شکل (۸-۱۵)] می توان اندازه  $r_2 - r_1$  را با  $d \sin \theta$  مساوی فرض کرد، در این تساوی خطا ناچیز است. در نتیجه شرط لازم برای تشکیل بیشینه های تداخلی به صورت زیر در می آید:

$$d \sin \theta_n = n\lambda \quad \sin \theta_n = \frac{n\lambda}{d} \quad (۸-۲۱)$$

و دامنه بازای جهت دلخواه معینی از رابطه زیر به دست می آید:

$$A(\theta) = 2A \cos\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right) \quad (۸-۲۲)$$

از این رابطه نتیجه می گیریم که شکل نوارهای تداخلی در فاصله دور از شکافها اساساً به جهت تابش پرتوها بستگی دارد. البته به شرط آنکه راستای گره ها و بیشینه های تداخلی به موازات خط واصل دو روزنه باشد. در این صورت فواصل بیشینه ها یا صفرهای خطی مجاور متناسب با فاصله ای که از شکلها دارند، زیاد می شود. شکلهای کلی نمونه های تداخلی مربوط به دو شکاف بازای دو اندازه متفاوت  $\frac{d}{\lambda}$  در شکل (۸-۱۷) بخوبی نشان داده شده است. این شکلها نمونه های واقعی نیست بلکه مشابه آن است که از برهنه های دو شکاف دایروی هم مرکز به دست آمده است.<sup>۱۹</sup>

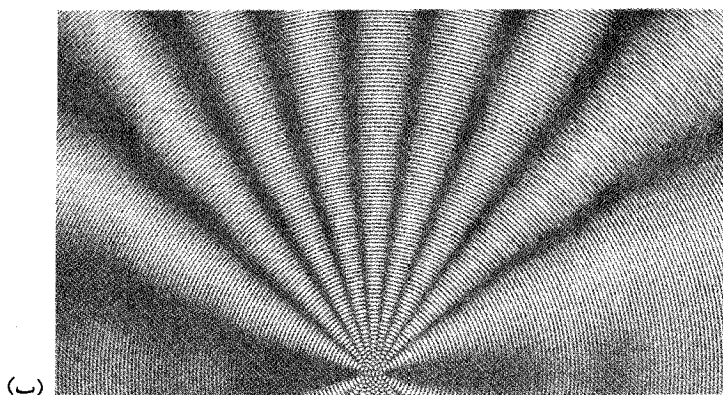
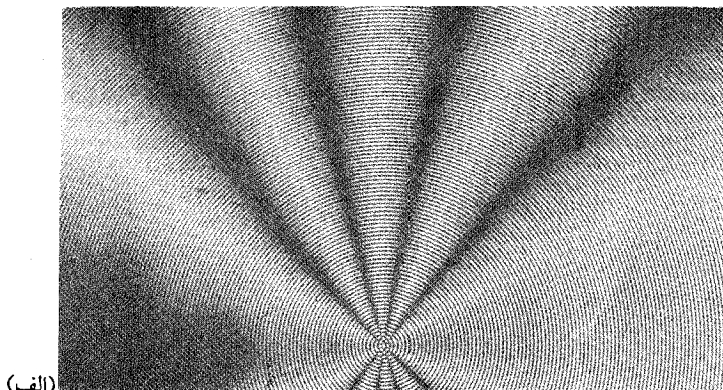
جالبترین طرحهای مربوط به این حالت هنگامی ظاهر می شود که  $\frac{d}{\lambda}$  خیلی بزرگ باشد. پس می توان گفت که این حالت ویژه، در تداخل اُپتیکی که طول موج (تقریباً  $6 \times 10^{-7}$  m) در مقایسه با فاصله دو شکاف (نوعاً در حدود  $0.1$  mm) بسیار کوچک است، بیشتر به چشم می خورد.

در شرایط  $\left(\frac{\lambda}{d} \approx 10^{-2}\right)$  می توان به جای  $\sin \theta_n$  خود  $\theta_n$  را در معادله (۸-۲۱) قرار داد،

۱۹- شکل با استفاده از مقالات «نمونه های Moir'e» توسط J. Barrington. N. J. Edmund Scientific Co.

تهیه شده است.

برای آنکه فاصله زاویه ای بین دو بیشینه تداخلی دقیقاً یا خیلی نزدیک به  $\frac{\lambda}{d}$  است. علاوه بر این، در فاصله معین  $D$  از شکافها، فاصله بین بیشینه های تداخلی مجاور مساوی است و این فاصله ها  $\frac{D\lambda}{d}$  است.



شکل (۸-۱۷) نمونه های موآره (Moir'e) به تداخل دو چشمه شباهت دارد. (متضمن نکاتی از «نمونه های موآره» و ابزار کار است، که به وسیله شرکت علمی ادموند بارینگتون بخش شده است.) (عکس از جان رازنفلد، مرکز آموزشی پژوهشی M. I. T.)

### تداخل با چند شکاف (شبکه پراش)

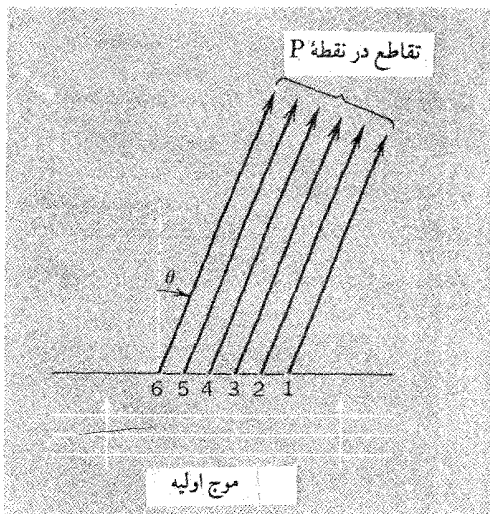
در بحث مساله دو شکاف دقیقاً مشخص شد که تداخل امواج چگونه تشکیل می شود. ولی در حالات پیچیده تر ما خود را مقید می سازیم که حالت تداخلی را فقط در فواصلی از شکافها در نظر بگیریم که در مقایسه با ابعاد خطی دستگاه شکافها زیاد باشد. با

توجه به این محدودیت که برای خود قائلیم می توان فرض کرد :

۱- تساوی قسمت‌های باز (نبسته) - شکافها - بر روی جبهه موج اصلی به تساوی دامنه در هر نقطه مورد نظر کمک می کند .

۲- خطوطی که از جبهه موج اصلی پس از خروج از شکافها بر روی پرده تشکیل می شود تقریباً موازیند .

اکنون می خواهیم با در نظر گرفتن این نکات ، الگوی تداخلی مربوط به N شکاف هم فاصله را بررسی نماییم همان گونه که در مورد مسأله دو شکاف عمل کردیم ، پهنای تمام شکافها را یکسان و بسیار اندک فرض خواهیم کرد . مثلاً فاصله دو شکاف مجاور را d می گیریم علاوه بر این فرض می کنیم که شکافهای گوناگون همگی به طور همفاز در معرض تابش موج اولیه خطی ( یعنی در فاصله ای دور از چشمه اولیه ) واقعند ، که با صفحه شکافها



### شکل (۸-۱۸) تداخل چند شکاف

[ شکل (۸-۱۸) ] موازیند . اختلاف راه امواج ثانوی که از دو شکاف مجاور به نقطه P می رسند مساوی  $d \sin \theta$  است . با استفاده از این اختلاف راه می توان اختلاف زمان  $\frac{d \sin \theta}{v}$  را تعیین کرد . اختلاف فاز  $\delta$  از رابطه زیر به دست می آید :

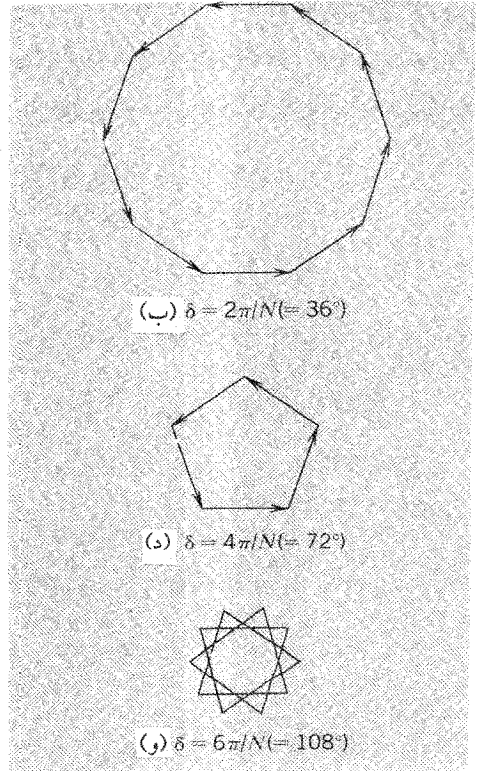
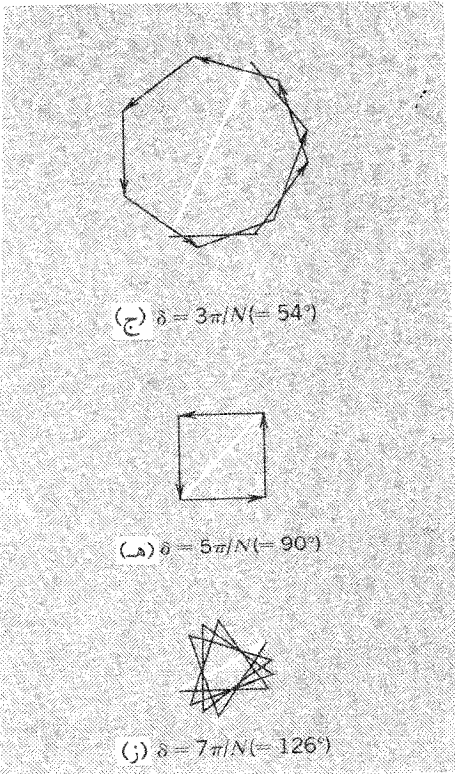
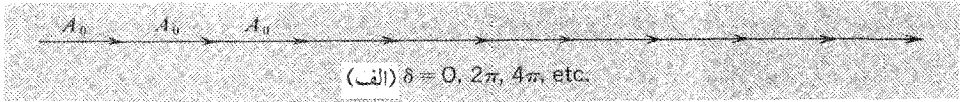
$$\delta = \frac{\omega d \sin \theta}{v} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \quad (۲۳-۸)$$

بنابراین جابه جایی متوجه در P به شکل زیر است :

+ ... ( جمله N ت)

$$y_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_0 \cos(\omega t - \varphi_1 - \delta) + A_0 \cos(\omega t - \varphi_1 - 2\delta)$$

در این رابطه  $\varphi_1 = \frac{2\pi r_1}{\lambda}$  اختلاف فاز مربوط به فاصله  $r_1$  ، از نخستین شکاف تا نقطه P ، است . ما پیش از این ، مسئله برهنه‌ی را در فصل ۲ بررسی کرده ایم .



شکل (۸-۱۹) نمودارهای برداری برای شبکه پراش ( $N=۱۰$ ) .

$$\delta = \frac{4\pi}{N} (= 72^\circ) \text{ (ع)} \quad \delta = \frac{3\pi}{N} (= 54^\circ) \text{ (ج)} \quad \delta = \frac{2\pi}{N} (= 36^\circ) \text{ (ب)} \quad \delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \text{ (الف)}$$

$$\delta = \frac{7\pi}{N} (= 126^\circ) \text{ (ز)} \quad \delta = \frac{6\pi}{N} (= 108^\circ) \text{ (و)} \quad \delta = \frac{5\pi}{N} (= 90^\circ) \text{ (د)}$$



دامنه متوجه A از جمع برداری N بردار به طول A<sub>0</sub> به دست می آید، هر یک از این بردارها با بردار مجاور زاویه δ می سازد [به شکل (۲-۷) مراجعه کنید]. دامنه متوجه از رابطه زیر به دست می آید:

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (۸-۲۴)$$

اکنون می خواهیم بررسی کنیم که وابستگی A به زاویه θ چگونه است، از طرفی معادله (۸-۲۳) تغییرات δ را بر حسب θ نشان می دهد. در این خصوص توضیح داده ایم، و مقادیر δ به کمک یک سری نمودارهای برداری، همان گونه که در شکل می بینیم برای حالت مخصوص N = ۱۰ مشخص شده است.

۱. وقتی δ = ۰، بردارها همگی در دنباله یکدیگر به طور خطی با هم ترکیب می شوند:

$$A = NA_0$$

به همین جهت، در این حالت مشاهده می شود که دامنه متوجه بزرگترین مقدار ممکن را داراست. به همین ترتیب می توان با استفاده از معادله (۸-۲۱) دامنه متوجه را بازای هر یک از اندازه های معین به دست آورد. به عبارت دیگر، با استفاده از یک ردیف N تایی شکاف همانند و هم فاصله، به فاصله d از یکدیگر، دامنه های متوجه ای هم جهت به نام بیشینه های اصلی تشکیل می شود. این بیشینه ها نظیر بیشینه های مربوط به دستگاه دو شکاف هم فاصله اند.

۲. وقتی  $\delta = \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \frac{6\pi}{N}, \dots$  باشد، از ترکیب بردارها یک چند پهلوئی بسته تشکیل می شود و داریم:

$$A = 0$$

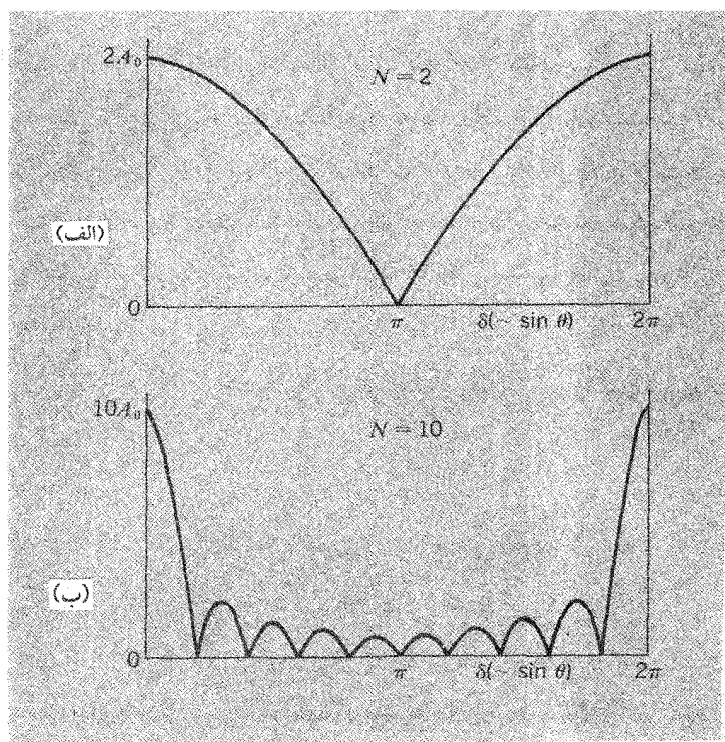
از معادله (۸-۲۴) نیز همین نتیجه بخوبی استنباط می شود، زیرا در تمام حالات زاویه  $\frac{N\delta}{2}$  مضرب صحیحی از π است، که صورت کسر را صفر می کند.

۳. بین این صفرها برای δ و در نتیجه برای θ اندازه هایی وجود خواهد داشت که بیانگر بیشینه های جابه جایی میانی است، و آنها را بیشینه های فرعی الگوی تداخلی چند شکاف نامند و دامنه آنها از دامنه بیشینه اصلی خیلی کمتر است. البته اگر بخواهید اندازه های بیشینه A را به کمک معادله (۸-۲۴) محاسبه کنید، به این حقیقت پی خواهید برد که ارزیابی

اوضاع زاویه ای این بیشینه ها و دامنه های نسبی کار چندان آسانی نیست. در شکل (۸-۱۹)، در نمودار (ج) اندازه دامنه بازای  $\delta = \frac{3\pi}{N}$  تقریباً با دامنه نخستین بیشینه فرعی مساوی است، و فقط در حدود یک پنجم دامنه بیشینه اصلی است.

۴. پس از صفرهای  $N-1$  و بیشینه های فرعی  $N-2$ ، به اندازه  $\delta = 2\pi$  می رسیم، که بیشینه اصلی بعدی الگوی پراش را تعیین می کند.

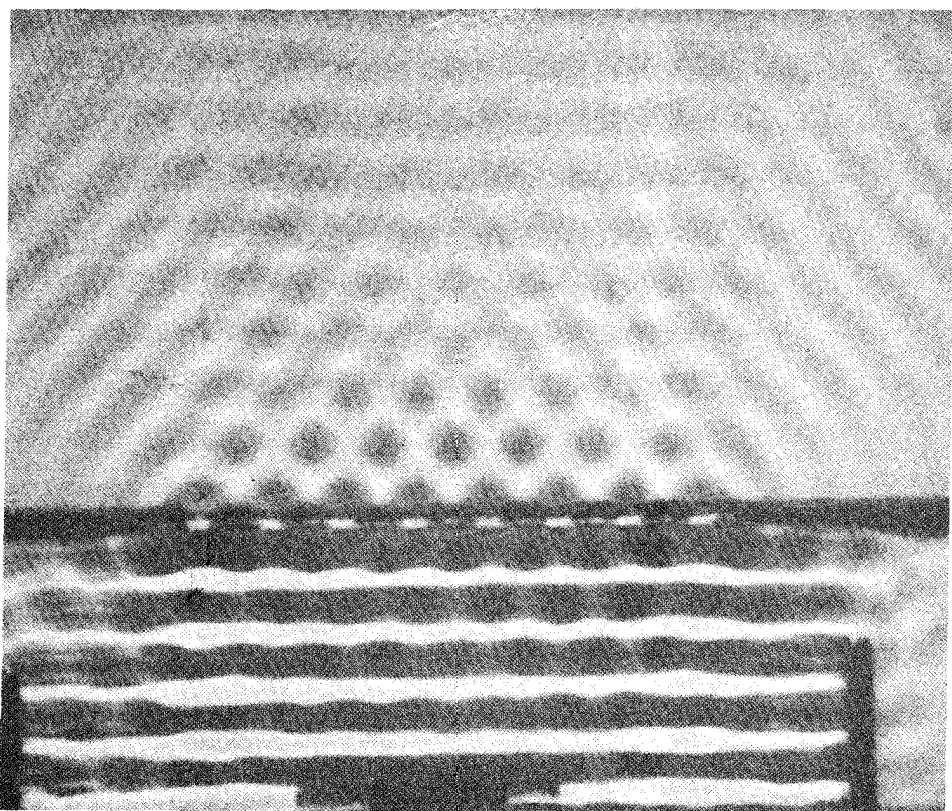
شکل (۸-۲۰) مقایسه ای از تغییرات دامنه با  $\delta$  برای یک دو شکاف و برای یک دستگاه ده شکاف با فواصل مساوی است (به تفاوت مقیاسها بر روی محور قائم توجه کنید). از نمایش این منحنیها که شباهت زیادی به نمودار حرکت « گلوله واجهنده » دارد- نتیجه می گیریم که  $A$  همواره مثبت است، در صورتی که از معادله (۸-۲۴) بخوبی می توان فهمید که اندازه های  $A$  بین زوج صفرهای متوالی متناوباً مثبت و منفی هستند. با استفاده از شکافهای بیشتر بیشینه های اصلی تیزتری می توان تشکیل داد. البته، توری پراش که وسیله



شکل (۸-۲۰) (الف) تغییر دامنه بر حسب اختلاف فاز برای تداخل حاصل از دو شکاف. (ب) تغییر دامنه بر حسب اختلاف فاز برای تداخل حاصل از ده شکاف.

پرازشی در اسپکتروسکوپی است، دقیقاً بر اساس همین خاصیت ساخته شده است؛ زیرا گوشه های تیزی دارد و برای نور با طول موج معین مناسب است.

بیشترین شدت در درون ردیفهای گوشه دار باریکی متمرکز است که بیشینه های اصلی را در بر گرفته اند. به همین جهت ردیف صفر (مستقیم سرتاسری)، نخستین ردیف، دومین ردیف، ... بیشینه های نمونه نامیده می شوند. شکل (۸-۲۱) یک الگوی تداخلی را که با چند شکاف ( $N = 8$ )، در یک ظرف بزرگ آب ایجاد شده، نشان می دهد. تمرکز واقعی امواج فقط در داخل سه باریکه به چشم می خورد، در شکل یک باریکه از ردیف صفر و دو باریکه از نخستین ردیف به وضوح نشان داده شده است. (تمرکز امواج چرا در ردیفهای بالا دیده نمی شود؟)

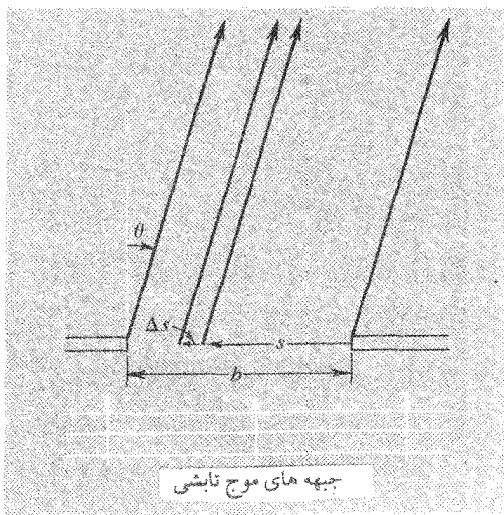


شکل (۸-۲۱) هشت شکاف تداخل امواج آب. (اقتباس از فیلم «پدیده های امواج کوچک در ظرف آب» بخش ۲، مرکز گسترش آموزش، نیوتون، جرم ۰.)

## پراش با یک تک شکاف

بدیهی است که تک شکاف یا تک روزنه نمی تواند به دلخواه باریک و یا کوچک باشد، و این امر موجب می شود که آثار مشخص تداخلی فقط در نواحی مختلف تک شکاف ظاهر شود. بررسی این مساله را قبلاً پیش نکشیدیم برای آنکه تحلیل مساله N شکاف، زمینهٔ پرازشی را برای بحث فراهم می کند.

شکل (۸-۲۲) نمودار بسیار بزرگ شده یک تک شکاف باریک با پهنای b است. فرض می کنیم تمام بخشهای شکاف به طور همفاز در معرض یک موج تابشی تخت قرار گیرد؛ در آن صورت اگر آشفستگی کناره های شکاف که با خط عمود بر شکاف زاویه  $\theta$  می سازد، بررسی شود؛ همان گونه که در شکل نشان داده شده است اختلاف راه خالص از دو طرف شکاف تا نقطهٔ مورد نظر، و اختلاف مورد نظر  $b \sin \theta$ ، و اختلاف فاز مربوط به آن  $\frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}$  است. اگر تصور کنیم که شکاف به چندین باریکه با پهنای مساوی  $\Delta s$  تقسیم شده، و هریک از این باریکه ها به اندازه s از لبه شکاف فاصله دارد. در آن صورت جابه جایی ایجاد شده در نقطهٔ مورد نظر با  $\Delta s$  متناسب است، و مقدار فاز (نسبی امواج از لبه شکاف) مساوی  $\frac{2\pi s \sin \theta}{\lambda}$  است. اگر این توصیف وضعیت را بپذیریم، می توانیم دامنه متوجه را به کمک رسم نمودار برداری نظیر نمودارهایی که در شکل (۸-۱۹) برای توری



شکل (۸-۲۲) پراش با یک تک شکاف

پراش دیدیم، به صورت تابع  $\theta$  به دست آوریم. برای این کار به جای  $N = \frac{s}{\Delta s}$  و

$$\delta = \frac{2\pi \Delta s \sin \theta}{\lambda}$$

باریکه واقعیت ندارد. آنچه باید انجام دهیم آن است که برای توصیف  $\Delta s \rightarrow 0$  و  $N \rightarrow \infty$

باید حدی تصور کنیم. بنابراین تداوم تغییر فاز با فاصله سرتاسری شکاف متناسب است.

مفهوم این تقسیم بندی آن است که نمودار برداری به صورت یک کمان صاف دایروی، با خواص مشروح زیر، در می آید:

۱. زاویه بین مماسهای دو سر کمان، اختلاف فاز کل  $\frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}$  را تشکیل می دهد.

۲. طول کمان با کل دامنه ای که شکاف (بازای اندازه های معین  $\Gamma$  و  $\theta$ ) فراهم خواهد کرد

مطابقت دارد، البته اگر تاثیر تمام بخشهای شکاف به طور همفاز یکسان باشد. اگر از عامل

زاویه میل در امواج کوچک هویگنس صرف نظر شود، طول این کمان همواره با دامنه  $A_0$  (در

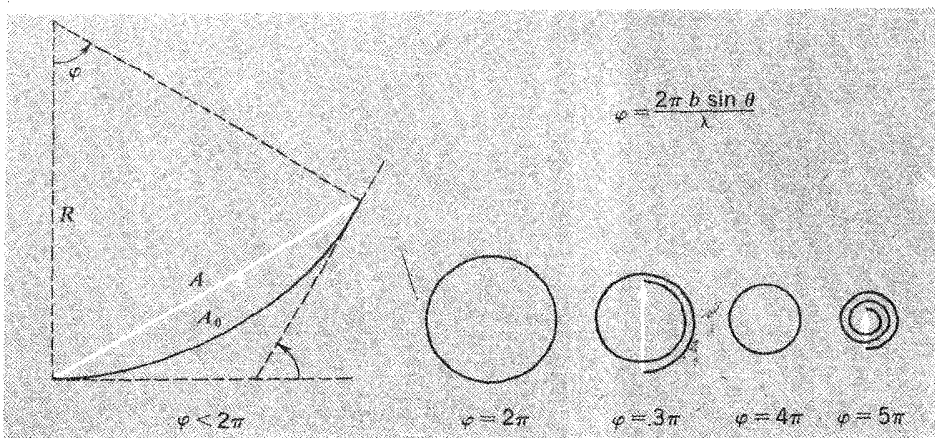
فاصله معین  $\Gamma$  از شکاف) بازای  $\theta = 0$  مساوی است.

اکنون محاسبه دامنه متوجه، مساله صریح و روشنی است. اساس این محاسبه در شکل

(۸-۲۳) نشان داده شده است. نمودار برداری این دامنه بازای اختلاف فاز کل  $\phi$ ، یک

کمان دایروی به شعاع  $R$ ، و به صورت زیر است:

$$A_0 = R\phi$$



شکل (۸-۲۳) نمودارهای برداری برای پراش تک شکاف.

در این شرایط ، دامنه متوجه A و تر این کمان است و از رابطه زیر به دست می آید :

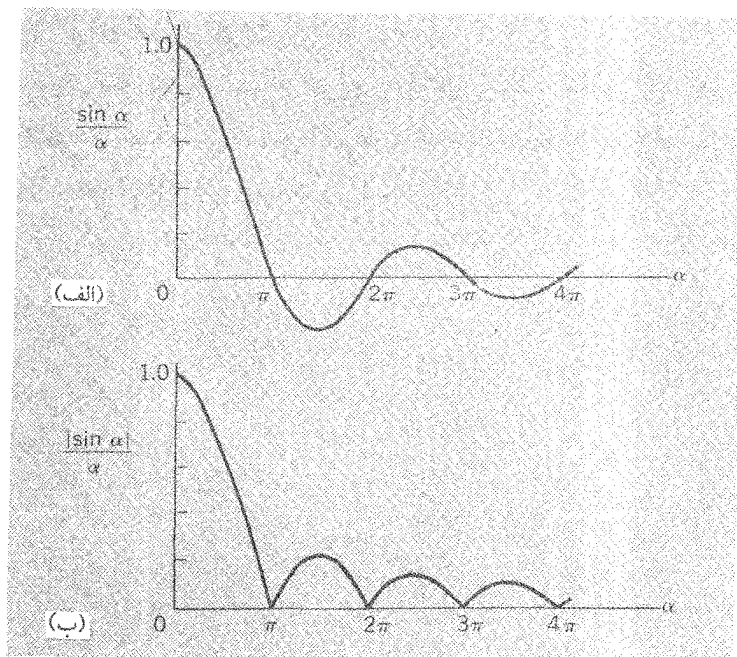
$$A = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

بنابراین داریم :

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad \text{در اینجا} \quad A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \quad (25-8)$$

به این ترتیب ، دامنه متوجه با راستای دیده به صورت  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  تغییر می کند ، در اینجا

$\alpha = \frac{\varphi}{2}$  . این تابع ، ( که ظاهراً به تابع بسل<sup>۲</sup> با ردیف صفر بیشتر شباهت دارد) هر وقت  $\frac{\varphi}{2}$  مضرب صحیح  $\pi$  باشد؛ صفر است . نمایش کلی تابع در شکل [۸-۲۴ (الف)] نشان داده شده است . و در شکل [۸-۲۴ (ب)] بدون در نظر گرفتن علامت ارائه شده است ، و به



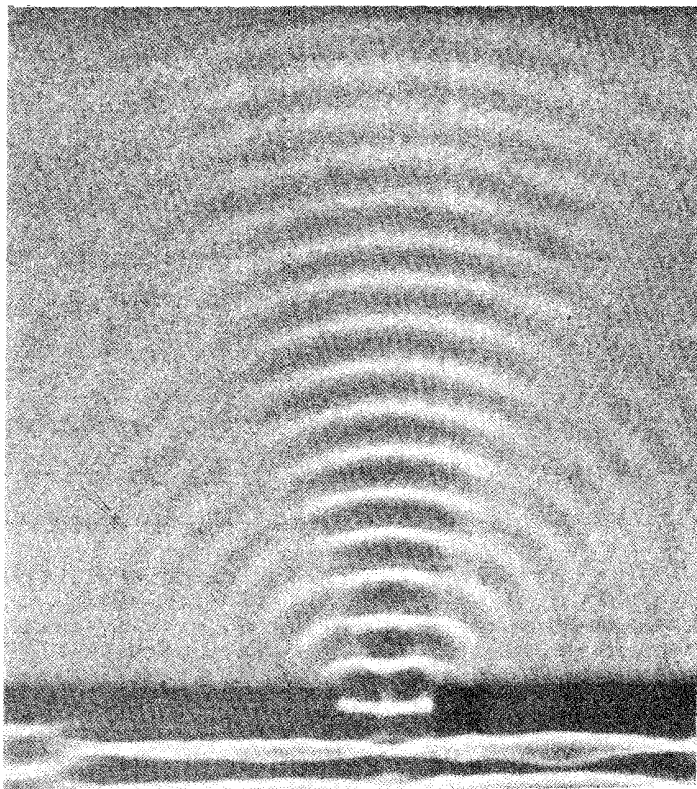
شکل (۸-۲۴) تغییر دامنه بر حسب زاویه دید در پراش تک شکاف .  $\alpha = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$  ، در اینجا  $\theta$  زاویه دید ، و b

پهنای شکاف است . (الف) تغییر دامنه با فاز (به ازاء اندازه های مثبت یا منفی ، همان گونه که نشان داده

شده) (ب) قدر مطلق دامنه .

دلیل شباهت نزدیک آن به منحنی دامنه ، برای یک توری پراش شکل [ ۸- ۲۰ (ب) ] ، کار ارزشیابی آن آسانتر است .

از این تحلیل نتیجه می گیریم که یک شکاف ، به تنهایی ، می تواند الگوی دو پراش را با مجموعه ای از خطوط گرهی ، همان گونه که در شکل ( ۸- ۲۵ ) نشان داده شده ، ایجاد کند . این الگو اساساً به الگوی پیرامون بیشینه مرکزی ( ردیف صفر ) توری پراش بیشتر شباهت دارد ، تا الگو شکاف . بیشینه های فرعی نسبتاً ضعیفند ، دامنه آنها با اندازه های مختلف  $\frac{(\sin \alpha)}{\alpha}$  بازاء  $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  ، یعنی بازای تقریباً  $\alpha = 3\pi, 5\pi, \dots$  متناسب است ( نه تحقیقتاً ، زیرا دامنه های به ازای  $\phi = 3\pi, 5\pi, \dots$  اندازه های دقیق این فازها به بیشینه نمی رسد . ) اگر نسبت به دامنه ۱ برای  $x = 0$  بسنجیم ، بیشینه های دیگر دامنه هایی در حدود  $\dots, \frac{2}{5\pi} (0/13), \frac{2}{3\pi} (0/21)$  خواهند داشت [ به شکل ( ۸- ۲۴ ) مراجعه کنید ] .



شکل ( ۸- ۲۵ ) پراش تک شکاف امواج آب . ( اقتباس از فیلم « پدیده های امواج کوچک ظرف بزرگ آب » بخش ۲ ،

مرکز گسترش آموزش ، نیوتون ، جرم . )

توجه داشته باشید نخستین ردیفهای صفر در جهاتی تشکیل می شود که اختلاف راه از دو طرف شکاف تا نقطه مورد نظر دقیقاً مساوی یک طول موج کامل باشد. بنابراین چنین استنباط می شود که تک شکاف را می توان دو شکاف نزدیک به هم تصور کرد که پهنای هر یک  $\frac{b}{2}$  است. شرط لازم برای تداخل ویرانگر آن است که اختلاف راه بین امواجی که از مراکز (یا هر دو نقطه دیگری که با این مراکز برابری کنند) این دو بخش به نقطه مورد نظر می رسند  $\frac{\lambda}{2}$  باشد. با روش مشابهی می توان فهمید که سایر خطوط گری برای یک تک شکاف تحت چه شرط یا شرایطی تشکیل می شود.

همیشه باید به خاطر داشته باشیم که بحث ما مربوط به نقاط مشهودی است که دور از شکاف یا شکافها هستند.

نکته بسیار مهم تاکنون این است که تأثیر پهنای شکاف را مورد توجه قرار داده ایم. البته، برای اوضاع وابسته به یک شکاف، تأثیر پهنای شکاف را در فواصل بسیار دور می توان دید. علت آشفتگی شدیدی که در این ناحیه وجود دارد، بخشی به پهنای  $b$ ، و بخشی به جبهه موج تابشی مربوط است که می تواند از شکاف عبور کند، در صورتی که همه نقاط دیگر که در حواشی واقعند در سایه هندسی هستند. عوامل قبلی  $b$  و  $\lambda$  را در توصیف زوایای پراش چگونه می توان دخالت داد؟ معیاری که می توان ارائه داد به این شرح است: بیشینه مرکزی الگوی پراش یک شکاف با پهنای  $b$  تحت زوایای  $\pm\theta_m$  گسترش می یابد، که در اینجا به صورت زیر است:

$$\sin\theta_m = \frac{\lambda}{b}$$

[ این مفهوم به طور ضمنی از معادله (۸-۲۵) نتیجه می شود ] در فاصله  $D$  از شکاف [شکل (۸-۲۶)] گستردگی خطی این بیشینه که مساوی  $\pm D \tan\theta_m$  است، تعیین می شود. از طرف دیگر تصویر صرفاً هندسی شکاف همواره پهنایی مساوی  $b$  خواهد داشت. در هر حال اگر شرط زیر برقرار باشد، عمدتاً پراش صورت می گیرد:

$$D \tan\theta_m \gg b$$

اگر  $\lambda$  در مقایسه با  $b$  کوچک باشد می توان به جای  $\tan\theta_m$  اندازه  $\frac{\lambda}{b}$  را قرار داد

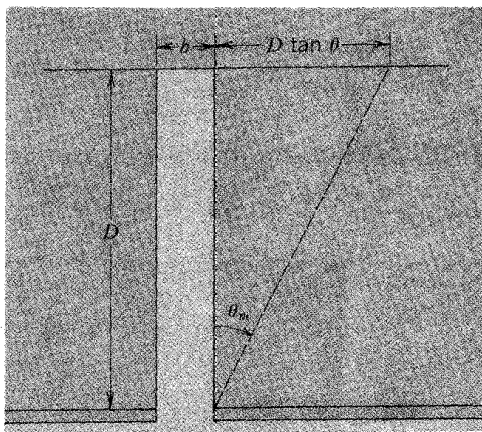
$$\left[ \tan\theta_m \approx \sin\theta_m = \frac{\lambda}{b} \right] \text{ و شرط قبلی می شود:}$$

$$D \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

(۸-۲۶)



این معیار مهم معرف شرایط پراش فرانهِوفر<sup>۲۱</sup> است ، که نمونه آن را قبلاً بحث کرده ایم .



شکل (۸-۲۶) شرایط برای پراش فرانهِوفر .

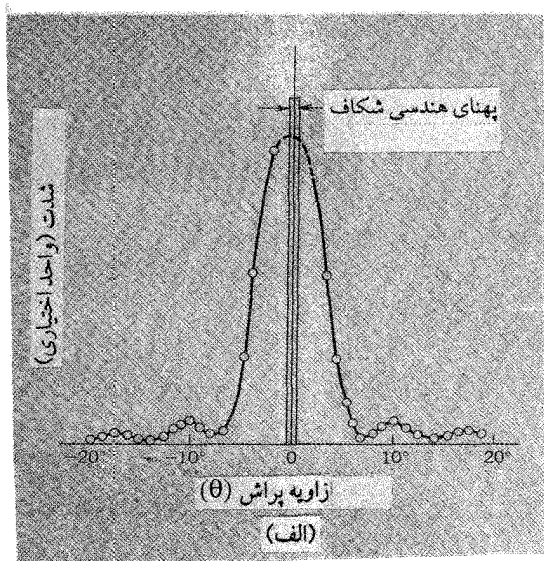
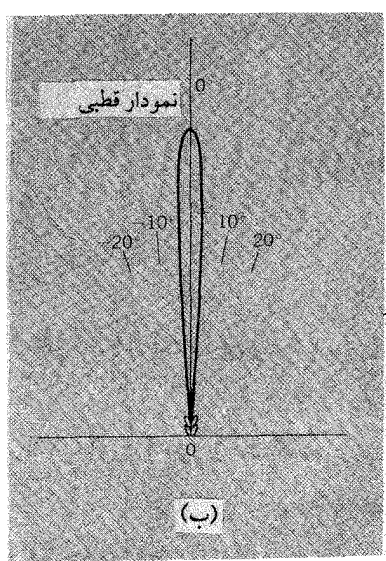
### الگوهای تداخلی از دستگاههایی با شکاف واقعی

پیش از این درباره آثار پهنای محدود شکاف بحث کردیم ، اکنون به تحلیل الگوهای پراش یا تداخلی موانع سوراخ شده ( در شرایطی که اساساً قابل مبادله اند ) می پردازیم . هرچند ، برای این کار دامنه متوجه را در نظر نخواهیم گرفت ، ولی شدت - یعنی نرخ از دست دادن انرژی موج متوجه را ، در ناحیه ای با ابعاد معین در نقاط مختلف ، در نظر می گیریم . برای یک موج با بسامد یا طول موج معین که در محیط معینی منتشر می شود ، انرژی منتقل شده موج با مربع دامنه متناسب است . بنابراین اندازه شدت را که متناسب با  $A^2$  است ، در فاصله معینی از شکاف پراش ، به صورت تابع زاویه تابش ارائه داد . در اینجا حالات مخصوصی از تک شکاف ، دو شکاف و چند شکاف ( شبکه ) را بررسی خواهیم کرد .

۱. تک شکاف . برای یک تک شکاف ، بر اساس معادله (۸-۲۵) داریم :

$$\alpha = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad \text{در اینجا} \quad I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (۸-۲۷)$$

شکل (۸-۲۷) نمونه زیبایی از چنین الگویی است ، که توسط R.W. Pohl با امواج صوتی به دست آمده است . طول موج  $\lambda$  مساوی  $1/45 \text{ cm}$  (که مربوط به بسامد فوق صوتی در

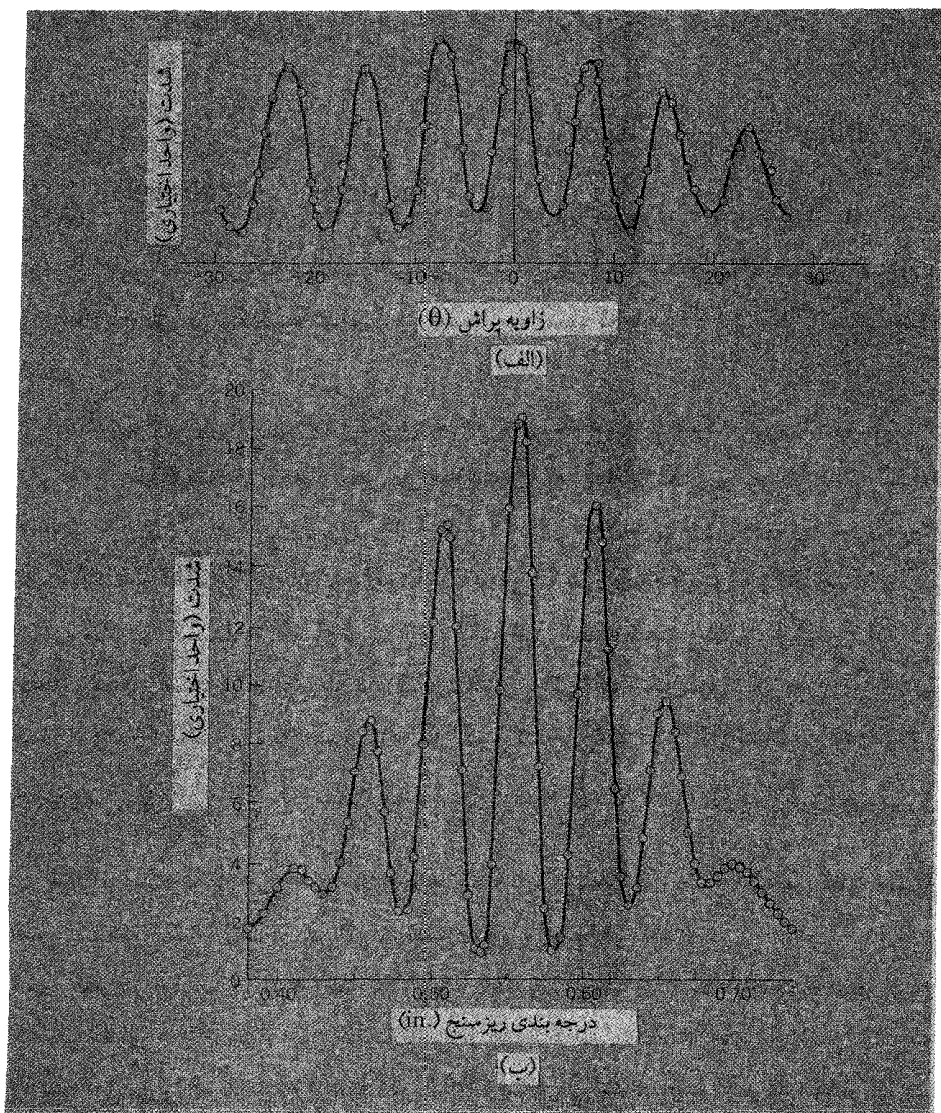


شکل (۸-۲۷) (الف) پراش تک شکاف امواج صوتی ( $\lambda = 1/45 \text{ cm}$ ) . (ب) نمودار قطبی همان الگو . طول خط O تا هر نقطه از منحنی شدت نسبی آن نقطه را معین می کند (اقتباس از R.W. Pohl ، اصول فیزیکی مکانیک و اکوستیک ، Blackie ، لندن ، ۱۹۳۲) .

حدود  $23 \text{ kHz}$  است) ، و پهنای شکاف  $b = 1/45 \text{ cm}$  بود . شرح دومین الگو ، مربوط به یک نمودار قطبی است ؛ در این نمودار شدت در راستای مشخص ، و در نقطه ای از منحنی ، با فاصله آن نقطه از مبدا O متناسب است .

یک بار دیگر به این نتیجه رسیده ایم که کمیت  $A^2$  در بعضی موارد - از جمله اندازه گیری شارش انرژی - از  $A$  مهمتر است و در ارزیابی بیشینه ها به مهمتر بودن بیشینه مرکزی در مقایسه با سایر بیشینه ها بهتر می توان پی بُرد . ارتفاع یا بلندی (از لحاظ تئوری) آن دسته از

بیشینه های فرعی که به بیشینه مرکزی نزدیکترند، اهمیت بیشتری دارند، و فقط  $5.0\%$  انرژی بیشینه مرکزی را به خود اختصاص می دهند، در صورتی که بیشینه های مرکزی در حدود  $93\%$  کل انرژی منتقل شده را دارا هستند. ضمناً توان دوم طولها در منحنیهای نظیر



شکل (۸-۲۸) الگوهای پراش دو شکاف، تأثیر پهنای هر شکاف را نشان می دهد. (الف) الگوی آکوستیک، با  $\lambda = 1/45 \text{ cm}$ ، (اقتباس از R.W. Pohl، اصول فیزیکی مکانیک و آکوستیک، Blackie، لندن، ۱۹۳۲) (ب) الگوی اپتیکی، با  $\lambda = 7300 \text{ \AA}$ ، [French J. G. King, A. P. French]. « یک نورسنج فریز تداخلی » مجله امریکایی فیزیک ۳۳، ۶۲۸ (۱۹۶۵). D.J. Cronin

شکل [۸-۲۴ (ب)] به شیب بیشینه‌های صفر بستگی ندارد (سعی کنید خودتان این انرژیها را موازنه کنید).

۲. در این حالت ترکیبی از دو اثر داریم - یکی، الگوی پراش مختص یک شکاف به تنهایی، و دیگری تداخل بین امواج دو شکاف. اندازه شدت از فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \times \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (۸-۲۸)$$

در اینجا  $\alpha = \frac{(\pi b \sin \theta)}{\lambda}$  و  $\delta = \frac{(\pi d \sin \theta)}{\lambda}$ . در این فرمول  $I_0$  شدت بیشینه (بازای  $\theta = 0$ ) است، که از یک شکاف به تنهایی به دست می‌آید. معادله بالا مبنی بر معادله (۸-۲۲)، برای دو شکاف با پهنای قابل اغماض، است که با معادله (۸-۲۷) ترکیب شده است.

اندازه گیریهای دقیق بر روی یک الگوی تداخلی دو شکاف، به کمک الگوی تک شکاف، این مدولاسیون تداخلی را مشخص می‌سازد. فاصله شکافها  $d$  (از بین مراکز اندازه گرفته شده) باید بزرگتر (شاید خیلی بزرگتر) باشد، در این صورت پهنای زاویه ای مدولاسیون تک شکاف از فاصله زاویه ای بین قله‌های تداخلی به طور چشمگیری بزرگتر است. اگر پهنای شکافها نسبت به فاصله شان از یکدیگر فوق العاده کمتر باشد، الگوی کامل دو شکاف ممکن است در داخل بیشینه مرکزی الگوی پراش تک شکاف قرار گیرد.

شکل [۸-۲۸ (الف)] [باز هم از Pohl] الگوی تداخلی آکوستیک را نشان می‌دهد که در چنین شرایطی  $\left( \frac{b}{d} \approx \frac{1}{10} \right)$  به دست آمده است. شکل [۸-۲۸ (ب)] یک الگوی اپتیکی از

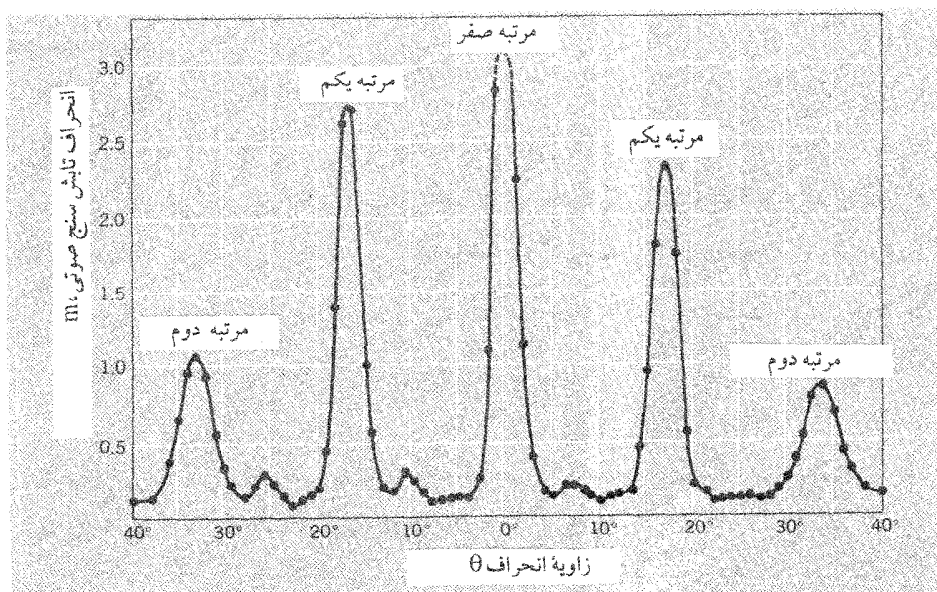
دو شکاف است که بازای  $\frac{b}{d} \approx \frac{1}{4}$  تهیه شده است. در این حالت، حدود شدتی که به وسیله ضریب پراش تک شکاف در نظر گرفته شده، بخوبی مشخص است.

اظهار نظر درباره ضریب ۴ در معادله (۸-۲۸) تفسیر ارزنده ای است. شدت حاصل از دو شکاف بازای  $\theta = 0$  چهار برابر شدت ناشی از یک شکاف است. هر چند، واضح است که مقدار کل انرژی که با امواج از میان دو شکاف منتقل می‌شود، فقط دو برابر مقدار انرژی است که از یک شکاف به تنهایی عبور می‌کند. بیش از دو برابر شدن شدت در راستاهای معین با وجود صفر بودن شدت در جهات دیگر - در امتداد خطوط گرهی - جبران می‌شود. اساساً تداخل، توزیع مجدد انرژی موجود است.

۳. توری پراش . در این حالت فرمول مناسب از ترکیب معادله (۸-۲۷) با معادله (۸-۲۴) به دست می آید که عبارت است از :

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left[ \frac{\sin \left( \frac{N\delta}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\delta}{2} \right)} \right]^2 \quad (۸-۲۹)$$

[ شما می توانید بررسی کنید و ببینید که با قرار دادن  $N = ۲$  دوباره معادله (۸-۲۸) به دست می آید. ] یک مطالعه کمی دقیق و جزء به جزء بر روی الگوی حاصل از چند شکاف ، در مورد امواج مکانیکی (مثلاً صوتی) کار آسانی نیست ؛ هر آزمایشگاه معمولی دارای همه نوع سطوح نامربوط و اشیایی است که با پخش امواج ، می تواند زمینه را برای چنین آزمایشی فراهم کند. شکل (۸-۲۹) نشان می دهد که طرحهای اصلی الگوی مورد نظر چگونه ظاهر می شود. ناگفته نماند که این الگو با استفاده از یک توری با هفت شکاف و امواج صوتی با طول موج  $۱/۴۵ \text{ cm}$  (توسط R.w. Pohl) به دست آمده است .



شکل (۸-۲۹) الگوی شدت در توری پراش آکوستیک برای  $\lambda = ۱/۴۵ \text{ cm}$  . (اقتباس از R.W. Pohl، اصول

فیزیکی مکانیک و آکوستیک، Blackie، لندن ، ۱۹۳۲ .)

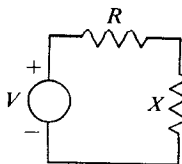
البته با دستگاه دوشکاف ، ممکن است توزیع مجدد انرژی موجود را مشاهده کنیم . اگر از تغییر ضریب  $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$  صرف نظر کنیم ، شدت هر بیشینه اصلی به  $N^2$  برابر شدت ناشی از یک تک شکاف می رسد . در این صورت پهنای این بیشینه فقط در حدود  $\frac{1}{N}$  فاصله بین بیشینه ها است . از ترکیب این عوامل رویهمرفته شدتی به دست می آید که  $N$  برابر شدت حاصل از یک شکاف تنها است .

## مسائل

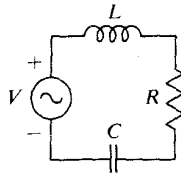
۸-۱ دوریسمان با کشش  $T$  و چگالیهای جرمی  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به یکدیگر متصل شده اند . فرض کنید موج رونده ای بر محل اتصال دوریسمان بتابد . نسبت دامنه بازتابیده به دامنه تابشی ، و نسبت دامنه گسیل شده به دامنه تابشی را ، در حالتی که  $\infty$  و  $4$  ،  $1$  ،  $0/25$  ،  $0$  ،  $\frac{\mu_2}{\mu_1}$  است ، به دست آورید .

۸-۲ دوریسمان ، با کشش  $T$  و چگالیهای جرمی  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به یکدیگر متصل شده اند . موج رونده ای را در نظر بگیرید . که به محل اتصال می تابد . ثابت کنید که شار انرژی موج بازتابیده بعلاوه شار انرژی موج گسیل شده با شار انرژی تابشی مساوی است . [ یادآوری : شار انرژی یک موج ( چگالی انرژی ضرب در سرعت موج ) با  $\frac{A^2}{v}$  متناسب است ، در اینجا  $A$  دامنه و  $v$  سرعت موج است . ]

۸-۳ مداری را که در شکل رسم شده در نظر بگیرید . اندازه مقاومت  $X$  را بازای اتلاف توان بیشینه ای که از آن می گذرد ، حساب کنید .



۴-۸ مداري را که شکل آن رسم شده در نظر بگيريد.  $\omega$  توليد شده، بر اثر اتلاف توان بيشينه‌اي که از مقاومت  $R$  می‌گذرد، چقدر است؟ [يادآوری: امپدانس مدار را در نظر بگيريد.]



۵-۸ يك موج تخت صوتي که در هوا منتشر می‌شود به طور عمود بر سطح آب می‌تابد. سرعت صوت در هوا تقريباً  $334 \text{ m sec}^{-1}$  و در آب در حدود  $1480 \text{ m sec}^{-1}$  است.

[شرایط مرزی مناسب برای امواج طولی عبارتند از پیوستگی جابه‌جایی موج و فشار موج] که دوّمی از  $K \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$  تعیین می‌شود، در این جمله  $k$  مدول کپه‌اي محیط است. (این

تغییر فشار از  $\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$  پیروی می‌کند.) چون سرعت موج  $v$  به صورت

$$\left( \frac{K}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

داده شده، ضریب بازتاب و تراگیل فقط بر حسب  $\rho$  و  $v$  بیان می‌شود. [

(الف) دامنه موج صوتی که وارد آب شده، به صورت کسری از دامنه موج تابش

چگونه بیان می‌شود؟

(ب) چه کسری از شار انرژی تابشی وارد آب می‌شود؟

۶-۸ (الف) ممکن است مشاهده کرده باشید وقتی امواج آب به طرف ساحل پیش می‌رود جبهه موج تقريباً همواره با خط ساحلی موازی است و به جهت باد بستگی ندارد. هیچ عاملی مانند کاهش عمق آب، سرعت امواج را در آب کم نمی‌کند. با استفاده از اصل هویگنس این پدیده را توضیح دهید.

(ب) برای آنکه تحلیل (الف) را کاملتر نمایید، فرض کنید امواج ابتدا در جهت  $x$  پیش می‌روند، سپس وارد ناحیه‌اي می‌شوند که سرعتشان  $v$  با فاصله  $y$ ، که عمود بر جهت پیشروی موج است، به طور اصولی تغییر می‌کند. (مثلاً  $x$  می‌تواند موازی با ساحل و  $y$  عمود بر خط ساحلی باشد.) ثابت کنید که مسیر امواج در این ناحیه به شکل کماني از

دایره ای به شعاع R است، به طوری که

$$R = \frac{v}{\frac{dv}{dy}}$$

۷-۸ الف) همان گونه که در متن [ معادله (۷-۱۲) ] توضیح داده شد، سرعت صوت در یک گاز با ریشه دوم دمای مطلق (گاز) متناسب است. با استفاده از این امر، و نتیجه ای که از مسأله قبلی گرفته اید. ثابت کنید هنگامی که در راستای قائم (Z) گرادیان دمایی وجود داشته باشد. امواج صوتی از همان آغاز با شعاع انحنای

$$R = \frac{2T}{dz}$$

خواهند چرخید. (ب) در یک روز آرام، دمای جو با ارتفاع کمابیش به طور خطی تنزل می کند. مسیرهای «اشعه» صوتی گسیل شده از چشمه ای را رسم کنید که از یک بلندی در جو آویزان شده است. با فرض اینکه سرعت صوت در سطح زمین  $1100 \text{ ft sec}^{-1}$  است، فاصله افقی هواپیمایی را برآورد کنید که در ارتفاع  $15000 \text{ ft}$  پرواز می کند و صدای آن برای ناظر روی زمین برای نخستین بار قابل شنیدن است؛ می دانیم با افزایش هر  $500 \text{ ft}$  ارتفاع دما  $1^\circ \text{C}$  کم می شود.

۸-۸ الف) یک ماشین پلیس با سرعت  $60$  مایل در ساعت حرکت می کند، هنگامی که از مقابل یک رهگذر عادی می گذرد، آژیر خود را، که  $2000 \text{ Hz}$  بسامد دارد، به صدا در می آورد. روی هم رفته رهگذر صدای آژیر را با چه بسامدی می شنود؟  
 (ب) ماشین پلیس وارد کوچه ای می شود که انتهای آن با یک دیوار بلند آجر بسته شده است. رهگذر از برهنه اصلی آژیر که مستقیماً دریافت می کند و بازتابهای آن که از دیوار بر می گردد چه می شنود؟

۹-۸ اتمهای سدیم، در حالت برانگیختگی گرمایی، نوری با طول موج  $\lambda \approx 6000 \text{ \AA}$  گسیل می کنند. تابش از چشمه بخار سدیم به صورت کاملاً تکفام نیست، بلکه شامل توزیع طول موجها در گستره  $A(6000 \pm 0.1/2)$  است. اگر علت عمده این پهن شدگی خط سدیم مربوط به اثر دوپلر باشد (که هست)، دمای تقریبی چشمه سدیم را تعیین کنید. (سرعت



۸-۱۰ لردریلی (Lord Rayleigh) در رساله مشهورش ، تئوری صوت (جلد ۲ ، مبحث ۲۹۸) یادآور می شود که اگر ناظری دقیقاً بادو برابر سرعت صوت از محل اجرای موسیقی دور شود «یک قطعه موسیقی را ، در همان طنین که اجرا شده ، ولی وارونه خواهد شنید» این آزمایش گرچه ظاهراً جالب به نظر می رسد ، ولی چنانچه درباره جزئیات آن فکر کنید خواهید دید که علاوه بر آن شامل نتیجه آموزنده و سرگرم کننده ای است .

۸-۱۱ امواج صوتی از یک چشمه به طرف ناظری به طور افقی پیش می رود . فرض کنید چشمه با سرعت  $u$  و ناظر با سرعت  $v$  ( در همان جهت ) حرکت می کند ، و باد با سرعت  $w$  از چشمه به طرف ناظر می وزد . اگر چشمه ، صوتی با بسامد  $v_0$  گسیل کند و اگر سرعت صوت در هوای آرام  $V$  باشد ، ثابت کنید که ناظر صوتی دریافت خواهد کرد که بسامدش از رابطه زیر به دست می آید :

$$v = v_0 \frac{V - v + w}{V - u - w}$$

یادآور می شویم که اگر سرعتهای چشمه و ناظر مساوی باشند وجود باد بسامد صوت دریافتی را دگرگون نخواهد ساخت .

۸-۱۲ در همین فصل در مبحث تئوری اثر دوپلر را برای یک چشمه متحرک توضیح دادیم که هرگاه امتداد های حرکات چشمه و ناظر با یکدیگر زاویه  $\theta$  بسازند ، بسامد دریافتی ، همان گونه که در معادله (۸-۱۴) نشان داده شد ، از رابطه زیر به دست می آید :

$$v(\theta) = \frac{v_0}{1 - \frac{u \cos \theta}{v}}$$

(الف) ثابت کنید که ، اگر چشمه ساکن و ناظر با سرعت  $u$  در حرکت باشد ، در این حالت سرعت نسبی چشمه و ناظر به همان صورتی است که قبلاً مطرح شد ، بنابراین ناظر بسامدی را احساس می کند که از رابطه زیر به دست می آید :

$$v'(\theta) = v_0 \left( 1 + \frac{u \cos \theta}{v} \right)$$

(ب) تفاوت تقریبی  $v$  و  $v'$  را تعیین کنید . این موضوع در فیزیک بسیار حائز

اهمیت است ، زیرا برای امواج نور در خلاء بر خلاف امواج صوت در هوا ، چنین تفاوتی وجود ندارد؛ در نتیجه فقط سرعت نسبی چشمه و ناظر ظاهر می شود. این سرعت نسبی یکی از کمیاتی است که در تدوین نظریه نسبیت خاص اینشتین از آن استفاده شده است ، طبق این نظریه ، محیط (هوا) نسبت به سرعت نور که (در خلاء و هوا) سرعت معینی دارد ، قابل تشخیص نیست .

۸-۱۳ یک چشمه صوت با بسامد  $v_0$  ، با سرعت ثابت  $u$  در ارتفاع  $h$  از سطح زمین به طور افقی در جهت  $x$  حرکت می کند. ناظری در نقطه  $x = 0$  روی زمین ایستاده است؛ چشمه در لحظه  $t = 0$  از بالای سرش می گذرد.

(الف) ثابت کنید علامت صوتی دریافت شده در زمان  $t_R$  در زمین ، مدت  $t_s$  قبل از چشمه گسیل شده است ، به طوری که

$$\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) t_s = t_R - \frac{1}{v} \left[ h^2 \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) + u^2 t_R^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(ب) ثابت کنید که بسامد علامت صوتی دریافت شده که تابع زمان گسیل  $t_s$  است

از رابطه زیر به دست می آید:

$$v(t_s) = \frac{v_0}{1 + \frac{u}{v} \frac{u t_s}{(h^2 + u^2 t_s^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

(اگر بخواهیم تابع  $v$  را بر حسب زمان دریافت (صوت)  $t_R$  به دست آوریم رابطه به طور قابل ملاحظه ای پیچیده تر خواهد شد.)

(ج) بسامد صوت دریافتی از چنین چشمه ای وقتی که دور است ولی نزدیک می شود به  $550 \text{ Hz}$  می رسد ، و هنگامی که چشمه دور است و دورتر می شود کاهش می یابد و به  $450 \text{ Hz}$  می رسد. بعلاوه ، ناظر در مدت ۴ ثانیه که چشمه از بالای سرش می گذرد احساس می کند که بسامد از  $510 \text{ Hz}$  به  $490 \text{ Hz}$  تنزل کرده است. از این تغییر بسامد نتیجه بگیرید و سرعت و ارتفاع چشمه را به دست آورید. روابط را به روش جبری و تقریبی ساده کنید. (از این نوع تحلیل در محاسبه سرعت و ارتفاع ماهواره های زمین استفاده می شود. بر این اساس، یک فرستنده رادیویی را در ماهواره نصب می کنند و

۸-۱۴ (الف) یک چشمه صوتی  $S$ ، با طول موج  $\lambda$  به فاصله اندک  $d$  از دیوار یک آپارتمان قرار گرفته است. نشان دهید که الگوی تداخلی حاصل از امواج صوتی این چشمه و بازتاب آن از دیوار، درست مشابه الگوی تداخلی حالتی است که اگر دیوار نبود و با چشمه دوّم،  $S'$ ، که به فاصله  $d$  پشت دیوار بود تشکیل می شد. ثابت کنید که این «چشمه تصویر» با چشمه اصلی  $S$ ،  $18^\circ$  اختلاف فاز خواهد داشت، و الگوی تداخلی حاصل از آن را با الگویی مقایسه کنید که در حالت عادی با دو چشمه همفاز تشکیل می شود.

(ب) اگر یک بلندگو در فاصله  $1\text{ft}$  از یک دیوار باشد، بسامدهایی که دو یا چند بزه تداخلی در اتاقی به ابعاد (مثلاً  $12\text{ft} \times 18\text{ft}$ ) تشکیل می دهند در چه گستره ای خواهند بود؟ اگر شما در  $12$  فوتی بلندگو و  $3$  فوتی دیوار باشید، چه بسامدهایی را بر اثر تداخل نخواهید شنید؟

۸-۱۵ یک شبکه پراش را با  $N$  شکاف به فاصله  $0.5\text{mm}$  از یکدیگر و  $A^\circ = 5000$  در نظر بگیرید.

(الف) تقریباً چند ردیف بیشینه اصلی وجود دارد؟

(ب) نسبت دو دامنه  $A_0$  و  $A_1$  چقدر است؟ ( $A_0$  دامنه ای است که اگر  $N = 1$  باشد به دست می آید.)

(ج) ثابت کنید که پاسخ شما به بخش (ب)، به نتیجه ای منجر می شود که با استفاده از متن، برای یک دستگاه دو شکاف، اگر  $N = 2$  باشد، دستگیرمان شد.

(د) اگر  $N = 100$  باشد، نسبت دامنه نخستین بیشینه فرعی را به دامنه بیشینه اصلی (به طور تقریبی) به دست آورید.

۸-۱۶ آزمایش پراش فرانوفر را با استفاده از نور با طول موج با  $A^\circ = 5000$  یک شکاف به پهنای  $0.5\text{mm}$  انجام داده ایم.

(الف) پرده آشکارساز در چه فاصله ای از شکاف باید باشد؟

(ب) اگر از یک دستگاه دو شکاف استفاده شود، نسبت شدت‌های نخستین بیشینه

کناری به بیشینه مرکزی ، اگر فاصله بین مراکز شکافهای ( همانند)  $0.1\text{mm}$  /  $0$  ثانیاً  $0.5\text{mm}$  /  $0$  باشد چقدر است ؟

۸-۱۷ امواج صوت با بسامد  $2000\text{Hz}$  به طور عمود بر دیوار بلندی می تابد که شکاف قائمی به پهنای  $18$  اینچ دارد. شخصی در طرف دیگر به فاصله  $50\text{ft}$  از دیوار و به موازات آن قدم می زند. این شخص شدت صوت را در چه فاصله ای اولاً بیش از  $50\%$  ثانياً بیش از  $5\%$  اندازه بیشینه را خواهد شنید؟

فصل ۱

$$(4-1) \text{ (ب)} \quad \tan \theta_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta_r = -2\theta_1, r_r = 7; \tan \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, r_1 = \sqrt{7}$$

(9-1) ممکن است! بیشترین اندازه اش تقریباً ۲۱ سانتیمتر است.

$$\tan \alpha = -\frac{B}{A}; C = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (10-1)}$$

$$(11-1) \text{ (الف)} \quad A = 5 \text{ cm}; \omega = 2\pi \text{ sec}^{-1}; \alpha = \pm \frac{\pi}{4} \text{ (ب) (به ازاء } \frac{\pi}{4} \text{)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -10\sqrt{3}\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}; \frac{dx}{dt} = 5\pi \frac{\text{cm}}{\text{sec}}; x = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}; \omega = \frac{\pi}{3} \text{ sec}^{-1}; A = \frac{150}{\pi} \text{ cm (الف) (12-1)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{25\pi}{\sqrt{3}} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}; \frac{dx}{dt} = -25 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}; x = -\frac{75\sqrt{3}}{\pi} \text{ cm (ب)}$$

فصل ۲

$$(1-2) \text{ اندازه های } (A, \alpha) \text{ عبارتند از (الف) } \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}; \text{ (ب) } 1, -\frac{2\pi}{3}; \text{ (ج) } -\frac{2\pi}{3}, 1$$

$$\frac{3\pi}{4}, 2-\sqrt{2}; -\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), \sqrt{13}$$

$$\delta \approx 33/5^\circ; A \approx 0/52 \text{ mm (2-2)}$$

$$1 \text{ sec (3-2)}$$

$$(4-2) \text{ (الف) } v = 1 \text{ sec}^{-1}; \text{ (ب) } 6/25 \text{ sec}^{-1}; \text{ (ج) } 0/49 \text{ sec}^{-1}$$

فصل ۳

$$K = 0/04 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}} \text{ (1-3)}$$

$$(2-3) \text{ (الف) } T_0 = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}; \text{ (ب) } \frac{T_0}{\sqrt{2}}; \text{ (ج) } \sqrt{2}T_0$$

$$(3-3) \text{ (الف) } y = 2/5 \text{ cm}; \text{ (ب) } 1/25 \text{ cm}$$

$$\omega = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (الف) (4-3)}$$

$$2\pi \left(\frac{2L}{3g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (5-3)}$$

$$2\pi \left(\frac{d}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (6-3)}$$

$$\text{کشش} = 5 \times \text{وزن جسم} \times y = \frac{1}{20} \text{ (7-3)}$$

$$0.23 \text{ m (ب)} ; 0.25 \text{ mm (الف) (8-3)}$$

$$66 \text{ sec (ب)} ; 360 \text{ kg شعاع} , 22 \text{ cm (الف) (9-3)}$$

$$1/5 \text{ (ج)} ; \frac{b}{a} \text{ (ب)} ; 5/9 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ (الف) (10-3)}$$

$$\omega = \left(\frac{\gamma PA}{ml}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (الف) (11-3)}$$

$$Q = 1 \text{ (ب)} ; 4 \text{ N} - \frac{\text{sec}}{\text{m}} \text{ (الف) (14-3)}$$

$$b = 0.025 \frac{\text{kg}}{\text{sec}} , Q = 12 \text{ (ج)} ; 2Q_0 \text{ (ب)} ; Q_0 = \frac{512\pi}{\log_e 2} \text{ (الف) (15-3)}$$

$$\frac{(Q \log_e 2)}{2\pi} \text{ (ج)} ; \frac{mc^2}{4\pi v k e^2} \text{ (ب)} ; \frac{8\pi^2 v^2 A^2 k e^2}{c^2} \text{ (الف) (16-3)}$$

$$\text{(د)} \approx 2/5 \times 10^9 \text{ sec} ; \approx 5 \times 10^{-9} \text{ نیمه عمر}$$

$$2\pi \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (د) (17-3)}$$

$$x(t) = A_0 \cos\left(\frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t \text{ (د)} ; \frac{T_x}{T_y} = \left(1 - \frac{I_0}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (ج) (19-3)}$$

$$y(t) = A_0 \cos\left[\frac{2k(1-I_0)}{ml}\right]^{\frac{1}{2}} t$$

### فصل ۴

$$1/3 \text{ cm (ب)} ; T = \frac{\pi}{5} \sqrt{3} \text{ sec (الف) (3-4)}$$

$$Q = 3 \text{ (د)} ; 3 \left( \frac{h}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (ج)} ; \left( \frac{35g}{36h} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (ب)} \text{ (۴-۴)}$$

$$0.9 \text{ h (و)} ; \delta = \frac{\pi}{4} \text{ (ه)}$$

$$\omega_0 \pm 0.017 \text{ sec}^{-1} \text{ (ج)} ; 15/7 \text{ cm (ب)} \text{ (۵-۴)}$$

$$200 \text{ \AA} \text{ در حدود (د)} \text{ (۶-۴)}$$

$$\tan \delta = \frac{\gamma}{\omega} ; A = \frac{F_0}{m\omega(\omega^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ (ب)} \text{ (۸-۴)}$$

$$\pi b \omega A^2 \text{ (الف)} \text{ (۹-۴)}$$

$$0.3 \text{ w (ج)} ; 0.063 \text{ J (ب)} ; 13^\circ , 1/3 \text{ cm (الف)} \text{ (۱۱-۴)}$$

$$0.086 \text{ w (ج)} ; 1/5 \text{ cm (ب)} ; 19/8 \text{ sec}^{-1} \text{ (الف)} \text{ (۱۲-۴)}$$

$$16 \text{ (ب)} ; Q = 20 , \omega_0 = 4 \text{ sec}^{-1} \text{ (الف)} \text{ (۱۳-۴)}$$

$$\sqrt{2} Q \text{ (ه)} ; \sqrt{2} \omega_0 \text{ (د)} ; 0.08 \pi \text{ (ج)} ; \gamma = 0.04 \omega_0 \text{ (ب)} ; Q = 25 \text{ (الف)} \text{ (۱۴-۴)}$$

$$E_0 \text{ (ز)} ; \bar{P}_m \text{ (و)}$$

$$0.2 \text{ (mk)}^{\frac{1}{2}} \text{ (ج)} \text{ (تقریباً)} ; Q = 5 \text{ (ب)} \text{ (خیلی تقریبی)} ; 1/0.05 \omega_0 \text{ (الف)} \text{ (۱۵-۴)}$$

$$P_m = I_0 \frac{R}{\gamma} \text{ (ج)} ; \gamma = \frac{1}{CR} \text{ (ب)} ; \omega_0 \text{ (IC)}^{\frac{1}{2}} \text{ (الف)} \text{ (۱۶-۴)}$$

$$10^{-7} \text{ sec (ج)} ; 10^{-7} \text{ J (ب)} ; 2\pi \times 10^{-5} \text{ J (الف)} \text{ (۱۷-۴)}$$

## فصل ۵

$$4 \text{ sec (تقریباً)} \text{ (ب)} ; 1/23 \text{ sec} , 1/27 \text{ sec (الف)} \text{ (۲-۵)}$$

$$m\omega^2 = \left( \frac{k_A + k_B}{2} + k_c \right) \pm \left[ \left( \frac{k_A - k_B}{2} \right)^2 + k_c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ (۴-۵)}$$

$$\omega'' = \left( \frac{kc}{m} \right)^{\frac{1}{2}} , \omega' \left[ \frac{K_A + k_B + k_c}{m} \right]^{\frac{1}{2}} , K_c' = K_A K_B \text{ اگر}$$

$$\omega = \omega_0 (1 \pm \alpha)^{-\frac{1}{2}} \text{ (۵-۵)}$$

$$\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} \text{ sec (ج)} ; 3\sqrt{2} \text{ sec} , \sqrt{6} \text{ sec (الف)} \text{ (۶-۵)}$$

$$\frac{k_c}{k_0} = 1/52 \text{ (د)} ; 2/29 \text{ sec}^{-1} \text{ (ج)} \text{ (۷-۵)}$$

$$\left[ \left( \frac{g}{L} \right) + \left( \frac{2ka^2}{3L^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} ; \left( \frac{g}{L} \right)^{\frac{1}{2}} (d)(\lambda-5)$$

$$\left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1/91(d)(9-5)$$

(۱۰-۵) در مُد (آهسته)، نسبت دامنه (پایین تر / بالاتر) =  $\frac{(\sqrt{\Delta}-1)}{2}$ ؛ در مُد تندنسبت  $\frac{(\sqrt{\Delta}+1)}{2}$

$$\omega^2 = \left[ \left( \frac{k}{2M} \right) + \left( \frac{g}{l} \right) \right] \pm \left[ \left( \frac{k}{2M} \right)^2 + \left( \frac{g}{l} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ب}) \quad (11-5)$$

$$\omega = \left( \frac{2T}{ml} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ج}) ; 2\pi \left( \frac{2ml}{3T} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{دوره تناوب} \quad (\text{الف}) \quad (13-5)$$

$$\omega_0 = \left( \frac{T}{ml} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{در اینجا } (2 + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \omega_0, \sqrt{2} \omega_0, (2 - \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \omega_0, \quad (\text{ج}) \quad (15-5)$$

$$C = \frac{h}{\sin[\alpha(N+1)]} ; \alpha = \cos^{-1} \left[ 1 - \left( \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right) \right] \quad (16-5)$$

## فصل ۶

(۱-۶) (الف)  $v_1 = 10 \text{ sec}^{-1}$ ؛ (ب)  $v = 50, 100, 150, \dots \text{sec}^{-1}$ ، (تمام مضارب صحیح  $(50 \text{ sec}^{-1})$ )

$$v_B = 0/84 v_1, 1/55 v_1, 2/04 v_1, \quad v_1^2 = \frac{T}{4ML}, \quad v_A = n v_1 (n = 1, 2, 3) \quad (2-6)$$

$$\omega = \pi \left( \frac{T}{LM} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5-6)$$

$$\lambda_n = \frac{L}{(n - \frac{1}{2})} \quad (\text{ب}) ; \omega_m = \frac{\left[ (2n-1) \pi \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{L} \quad (\text{الف}) \quad (6-6)$$

$$x = \frac{L(n - \frac{1}{2} \pm k)}{(2n-1)} \quad (\text{ج}) \quad (k = 0, \dots, n-1, \dots)$$



$$A_r = 10 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 3\mu, \quad A_1 = 10\mu \text{ (ب) (9-6)}$$

$$15\text{cm (2)}, 21(1) \text{ (ب)}; \quad v_n = \frac{nc}{2L} \text{ (الف) (10-6)}$$

$$\frac{(A_1^2 + 9A_r^2)\pi^2 T}{4L} \text{ (ب)}; \quad \frac{(A^2 n^2 \pi^2 T)}{4L} \text{ (الف) (11-6)}$$

$$2 \left( \frac{ML}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ sec هر کدام (ب)}; \quad TL \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{2h}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \approx \frac{2Th^2}{L} \text{ (الف) (12-6)}$$

$$\text{در اینجا, } y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ (14-6)}$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{\lambda AL^2}{(n\pi)^2} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$B_1 = A, B_n = 0 \text{ باشد } n \neq 0 \text{ اگر } \text{ (ب)}$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \times 4A}{\pi(n^2 - 4)} & \text{فرد } n \\ \frac{A}{2} & n = 2 \\ 0 & \text{زوج } n, n \neq 2 \end{cases} \text{ (ج)}$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ (15-6)}$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{\lambda AL^2 \cos(n\omega_1 t)}{n^2 \pi^2 \omega_1} & \text{در اینجا (الف) فرد } n \end{cases}$$

$$C_m = \begin{cases} \frac{\lambda BL^2 \sin(n\omega_1 t)}{n^2 \pi^2 \omega_1} & \text{(ب) فرد } n \end{cases}$$

(بسامد زاویه ای پائین ترین مد  $\omega_1$ )

## فصل ۷

$$T = 0.04 \text{ sec}, K = 0.25 \text{ cm}^{-1}, \lambda = 4 \text{ cm}, A = 0.3 \text{ cm (الف) (2-7)}$$

$$15\pi \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ (ب)}; \quad v = 100 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$\xi = 0.003 \sin 2\pi \left[ \left( \frac{x}{600} + \Delta t \right) \right] (3-7)$$

$$72^\circ (ب) ; \frac{1}{3} m (الف) (4-7)$$

$$2/24 m (ب) ; 22/4 m \cdot sec^{-1} (الف) (5-7)$$

$$y(x, t) = 0.02 \sin(2/80 x - 62/8 t + 0.52) (ج)$$

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos(30\pi t) (ب) ; 10 m (الف) (6-7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx 6 m \cdot sec^{-1} ; y = \text{صفر} (7-7)$$

$$\lambda = \frac{16}{16n-1} m, n = 1, 2, 3, \dots (ب) ; v = 1/5 Hz (الف) (8-7)$$

$$\cdot \frac{16}{16n+1} m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{مثبت، برای موج متحرك منفی} (ب)$$

$$(ج) v = -24 m \cdot sec^{-1}, \dots, v = +\frac{1}{5} m \cdot sec^{-1}, \dots (د) \text{ داده ها ناکافی است.}$$

$$; T = 32 N (ج) ; v_y (\text{بیشینه}) \approx 4 m \cdot sec^{-1} (ب) (12-7)$$

$$y(x, t) = 0.2 \sin 2\pi \left( \lambda t + \frac{x}{\delta} \right) (د)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{4b^2 u}{(b^2 + 4x^2)^2} x (ج) \text{ جهت} = +x, v = \frac{u}{2} (ب) (13-7)$$

$$(16-7) (الف) \lambda \times 10^{-2} sec ; 12/5 m \cdot sec^{-1} = \text{بیشینه } v, \text{ در مدت باز بودن ;}$$

$$t = 1/2 \times 10^{-2} sec (د)$$

$$, y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{t}{2}\right) \times \sin\left(\frac{9}{2}x - \frac{19}{2}t\right) (الف) (17-7)$$

$$2\pi m (ج) ; 1 m \cdot sec^{-1} (ب)$$

$$50 cm (ج) (18-7)$$

$$28 m \cdot sec^{-1} \approx 63 \frac{\text{مایل}}{\text{ساعت}} (ج) (20-7)$$

$$; \omega_n = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] ; \lambda_n = \frac{2l(N+1)}{n} (الف) (21-7)$$

$$, v_p(n) = \frac{\omega_n \lambda_n}{2\pi} (ب)$$

$$u_g(n) = \left[ \frac{2l\omega_0(N+1)}{\pi} \right] \left\{ \sin \left[ \frac{(n+1)\pi}{2(n+1)} \right] - \sin \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \right\}$$

## فصل ۸

$$\frac{f_2}{f_1} = 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0; \frac{g_1}{f_1} = 1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -1 \quad (1-8)$$

(۳-۸) برای پراکندگی بیشینه

$$\omega = (LC)^{-\frac{1}{2}} \quad (4-8)$$

(۴-۸) برای پراکندگی بیشینه، وقتی R، C، L معین باشند.

$$1/1 \times 10^{-3} \text{ (ب)}; 5/5 \times 10^{-4} \text{ (الف)} \quad (5-8)$$

(۷-۸) تقریباً ۲۰ مایل.

$$320 \text{ Hz} = \text{قطره} \quad (8-8)$$

$$T \approx 900^\circ \text{K} \quad (9-8)$$

$$v(\theta) - v'(\theta) \approx v_0 \left( \frac{u \cos \theta}{u} \right)^2 \quad (12-8) \text{ (ب)}$$

$$(13-8) \text{ (ج)} \quad u = 110 \text{ ft. sec}^{-1} \approx \text{تندی}; \text{ فوت } 1200 \text{ تا } 1100 \approx \text{ارتفاع}$$

(۱۴-۸) (ب) تمام بسامدهای شنیدنی در حدود ۱۳۰۰ Hz؛ مضارب صحیح (تقریبی) ۲۲۰۰ Hz.

$$\frac{1}{\delta} \frac{A}{A_0} = \frac{\sin(100\pi N \sin \theta)}{\sin(100\pi \sin \theta)} \quad (15-8) \text{ (ب)}; 100 \text{ (الف)}$$

(۱۶-۸) (الف) فاصله ای خیلی بزرگتر از ۵ mm؛

(ب) به ازاء  $d = 0/1 \text{ mm}$ ، نسبت تقریباً است ۰/۴۴؛ به ازاء  $d = 0/05 \text{ mm}$ ، در حدود ۰/۵

(۱۷-۸)  $\frac{I}{I_{\text{بیشینه}}} \geq 0/5$  در هر طرف بیشینه حدود ۸ ft است؛  $\frac{I}{I_{\text{بیشینه}}} \geq 0/05$  در هر طرف حدود ۱۶ ft است.