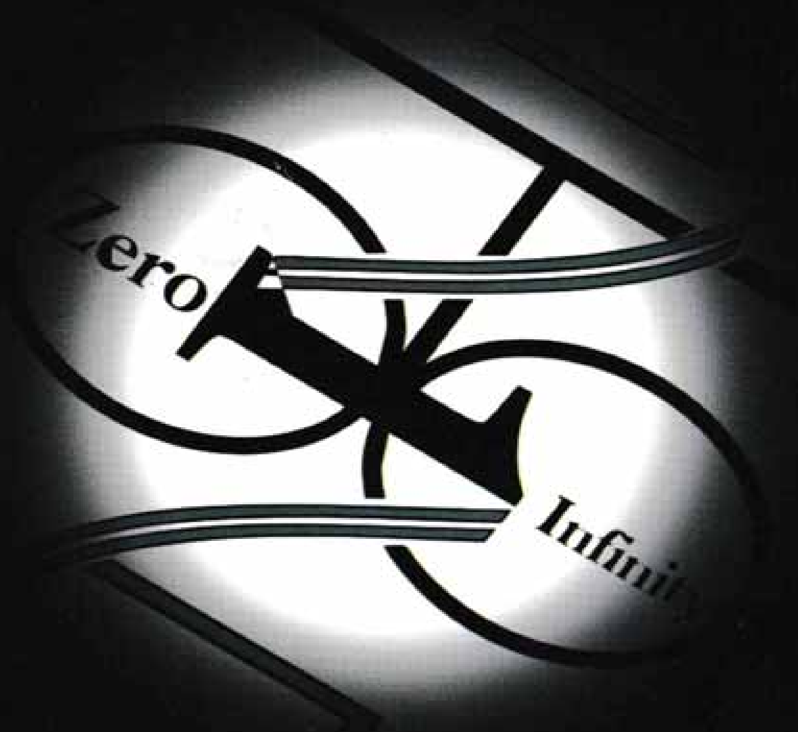
ما هر روز تاریخ، ویژگی ها و فرهنگ اعداد را بکار می بریم

دانشگاه بوعلی سینا
ع/۲۵۴

از صفر تا بی نهایت

آنچه اعداد را جالب می سازد



نوشته: کنستانس رید
مترجم: دکتر اسماعیل فیضی

جشن پنجاهمین سال چاپ کتاب از صفر تا بی نهایت

از صفر تا بی‌نهایت

«آن چه اعداد را جالب می‌کند»

مؤلف:

کنستانس رید

ترجمه:

دکتر اسماعیل فیضی

سال انتشار ۱۳۸۹

QA	ريد، كنستانس Reid, Constance
۹۳	از صفر تا بی نهایت: آن چه اعداد را جالب می کند/ کنستانس رید، ترجمه اسماعیل فیضی.
۴ الف ۹ ر/	همدان: انتشارات دانشگاه بوعلی سینا؛ ۱۳۹۰.
۱۳۹۰	۱۷۲ ص. شابک :۶-۰۸۵-۱۲۸-۶۰۰-۹۷۸
	عنوان اصلی:
	From zero to infinity: what makes numbers interesting.
	۱. اعداد. ۲. نظریه اعداد . الف. فیضی، اسماعیل، مترجم .ب. عنوان
	۹۵۵/۴۳۳۴

عنوان: از صفر تا بی نهایت

مولف: کنستانس رید

مترجم: دکتر اسماعیل فیضی

داوران علمی: دکتر رحیم علیزاده، دکتر هوگر قهرمانی، دکتر حسین عابدی

ویراستار ادبی: زهرا نور محمدی شایسته

ناشر: انتشارات دانشگاه بوعلی سینا

مدیر مسئول: محمدجواد یدالهی فر

چاپخانه: گیتی

صفحه و قطع: ۱۷۲- وزیری

نوبت چاپ: اول

تیراژ: ۱۰۰۰

قیمت: ۵۰۰۰۰ ریال

تاریخ انتشار: ۱۳۹۰

شابک: ۶-۰۸۵-۱۲۸-۶۰۰-۹۷۸

شماره کتاب: ۲۵۴/ع

مراکز فروش در همدان: ۱. دانشگاه بوعلی سینا، ادارهٔ انتشارات تلفکس: ۸۲۷٤٤٤۲-۰۸۱۱

۲. خیابان شهید حسین فهمیده، روبروی پارک مردم، فروشگاه ادارهٔ انتشارات

۳. خیابان مهدیه روبروی خانه معلم- انتشارات دانشجو

نمایندگی فروش در تهران:۱. موسسهٔ کتابیران ، میدان انقلاب ، خیابان لبافی نژاد غربی(بعد از چهار راه کارگر جنوبی) ، بعد از فروشگاه شیلات،پلاک۲۳۷ تلفن:٦٦٤٢٣٤١٦-٦٦٩٢٦٦٨٧

۲. نوپردازان ، خیابان شهدای ژاندارمری - بین فروردین و فخر رازی پلاک ۲۰۴ ، ۶۶۴۹۴۴۰۹ ۶۶۴۱۱۱۷۳ ۰۲۱

آن چه ریا ضی دان ها و معلمان در باره ***«از صفر تا بی نهایت»*** نوشته اند

" زمانی که من کتاب از **صفر تا بینهایت** را خواندم یک دانش آموز در شهر آکسفورد انگلستان بودم . تنها افسوس من این است که قبل از این اتفاق فقط یک نوجوان ۱۷ ساله بودم. همین هفته پیش جدید ترین نسخه ای که از این کتاب داشتم را به دختر ۱۲ ساله یکی از دوستانم دادم. البته حتما در اولین فرصت می توانم نسخه دیگری برای خود تهیه کنم."

-John B. Cosgrave, St. Patrick's College, Dublin, Ireland

" بعد از خواندن ***از صفر تا بی نهایت***، شیفته آن شدم. این کتاب ایده های بسیار زیبا و حقایقی درباره اعداد صحیح را تشریح می کرد و چندین مسئله جالب را بیان می نمود. که سعی می کردم آنها را حل کنم اما با شکست مواجه می شدم. یا تلاش می کردم مثال های نقض ارائه دهم. البته حدس های شخصی ام را مطرح و برخی نتایج مرتبط را اثبات کردم. در واقع تا زمان فارغ التحصیلی از دبیرستان دو دفتر حجیم را از تفکرات و نتایج و محاسبات خود انباشته بودم."

-Nathaniel Dean, Mathematics Department, Bell Communication Research

"کتاب ***از صفر تا بی نهایت*** کانستَنس رید به زبان ژاپنی ترجمه شده بود و زمانی که من سال سوم دبیرستان بودم آن را بدست آوردم. به واقع تحت تاثیر کتاب رید قرار گرفتم و آن را بارها خواندم. کتاب برایم الهام بخش بود و حتی تلاش کردم قضیه آخر فرما را حل کنم. اکنون من روی نظریه تحلیلی اعداد کار می کنم و فکر می کنم یکی از دلایل انتخاب من، این جمله ی کتاب رید بود: 'نظریه تحلیلی اعداد از لحاظ فنی از مشکل ترین بخش های کل ریاضیات می باشد'."

-Kohji Matsumoto, student at Nagoya University

"دیروز در حین پرواز از دنور یک گفتگوی بسیار جالب با یک مرد متشخص به نام جان مولر داشتم. وقتی فهمیدم آقای مولر معلم بازنشسته رشته ریاضی ازشهر لس آنجلس می باشد، به او گفتم که این بهترین فرصت من برای دانستن در خصوص کانستنس رید است. آقای مولر به طور ناگهانی پرسید منظورت کانستَنس رید است؟ وقتی تصدیق کردم، گفت که آن زندگیش را تغییر داده است. در واقع حدود پنجاه سال پیش که معلم تاریخ در دبیرستان بوده در یک آرایشگاه یک نسخه از مجله اسکوایر که شامل یک مرور بر کتاب ***صفر تا بی نهایت*** بوده را بطور اتفاقی می یابد. آن مقاله مروری موجب شده بود که ایشان آن کتاب را تهیه نماید و سپس آن کتاب نیز باعث شده بود که ایشان از تدریس تاریخ به تدریس ریاضیات تغییر روش دهد!"

-Letter from a friend with appended note from John Moulter: "Thank you. Thank you."

"من از آن دست کودکانی بودم که همیشه سر در کتاب دارند. کتابِ همدمِ من در کلاس پنجم و ششم هم همین ***از صفر تا بی نهایت*** بود. در واقع من ذاتا استعداد بالایی در ریاضیات داشتم، اما همین کتاب بود که مرا یاری کرد تا دریابم که من هم عضوی از جامعه بزرگِ مشتاقانِ اعدادم. یکی از لذتهای بزرگ دنیا برای من این است که سهمی دارم در تجدید چاپ کتاب مورد علاقه کودکی خود."

-Bruce Reznick, University of Illinois Urbana

"من خواستم به خاطر کتاب بسیار فوق العاده شما تشکر کنم. این کتاب درست در سطحی مناسب نوجوانان بود اما بیش از آن نمایانگر نسبتی دقیق از زیبایی و شگفتی بود. من عمیقاً معتقدم این کتاب کوچک، که هنوز جای مهمی رادر کتابخانه شخصی من به خود اختصاص داده بی حد و اندازه زندگی مرا غنی نمود. کم پیش می آید که افراد دقیقاً آن چه را که واقعاً می خواهند انجام دهند در زندگی بیابند، اما مایه خرسندی من است که این کتاب مرا در مسیر درست هدایت کرد."

-Hugh Williams. University of Calgary, Canada, author of *Edouard Lucas and Primality Testing*

فهرست مطالب

تقدیم به وجود قدسی همه کسانی که در طول تاریخ جان و مال خود را صرف پیشرفت دانش و علم بشریت کرده‌اند و ذره‌ای در تعالی فرهنگ و انسانیت گام برداشته‌اند.

سخن مترجم

کتاب حاضر در سال ۱۳۸۵ (۲۰۰۶) وقتی مسئول خرید کتاب درگروه ریاضی دانشگاه بوعلی سینا در نمایشگاه بین‌المللی کتاب بودم تهیه شد. عنوان کتاب و اختصاص هر فصل به یک رقم (۰، ۱، ...، ۹) و دو فصل نیز به عدد (e) و عدد اصلی ($\aleph_0$) به نظرم بسیار جالب رسید نکته بسیار عجیب این کتاب تهیه نسخه‌ی اصلی آن توسط یک خانم که از سلسله‌ی ریاضی‌دانان نبوده می‌باشد. باید توجه کرد که ایده‌ی اصلی مجموعه حاضر نوشتن کتابی در مورد اعداد بوده که نقش حروف الفبا را داشته باشد. که البته در بخش صفر یادداشت نویسنده، به چگونگی ایجاد ایده‌ی اصلی نوشتن کتاب حاضر و فرآیند چاپ آن اشاره شده است. سپس در سال ۸۹ـ۸۸ به لطف خداوند مهربان و با کمک یکی از دانشجویان ممتاز رشته مترجمی زبان انگلیسی دانشگاه موفق شدم ترجمه کتاب « از صفر تا بی‌نهایت» را تهیه نمایم.

در نهایت نوشته حاضر توسط یکی ازکارمندان دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم تهران که آشنایی کاملی با تایپ توسط (فارسی‌ـتک) را داشت، تایپ گردید و با حمایت مجموعه‌ی دانشگاه بوعلی سینا به خصوص همکاری انتشارات دانشگاه کتاب حاضر به چاپ رسید. بنده به عنوان یک علاقمند که سهمی در تهیه و چاپ این کتاب برعهده داشته‌ام صمیمانه از زحمت‌های همه‌ی عزیزانی که در فرآیند ترجمه‌ی «از صفر تا بی‌نهایت» به هر اندازه‌ای که نقش داشته‌اند تشکر می‌نمایم. همچنین از افرادی که در فهرست زیر به آنها اشاره شده به طور ویژه قدردانی می‌گردد.

۱) اعضای محترم گروه ریاضی دانشگاه بوعی سینا؛

۲) آقای امرایی دانشجوی ممتاز رشته مترجمی زبان انگلیسی دانشگاه بوعلی سینا؛

۳) خانم مریم پورگلزاری کارمند محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم تهران؛

۴) معاونت پژوهشی دانشگاه بوعلی‌سینا.

در نهایت از زحمات، حمایت‌ها و تشویق‌های همسر عزیزم که زمینه‌ی ترجمه‌ی حاضر را فراهم نمود صمیمانه سپاس‌گذارم.

مهر ماه ۱۳۸۹

$$۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, \cdots$$

اعداد طبیعی، که موضوع اصلی این کتابند، فقط به همین رقم‌ها ختم نمی‌شوند. آن‌ها به طرز نامشخصی (همان‌گونه که سه نقطه‌ی پایان آن‌ها نشان می‌دهد) تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند. و همه‌ی آن‌ها جذابند. زیرا حتا اگر اعدادی غیر جذاب هم وجود داشتند، آن‌گاه لزوماً در بین آن‌ها عددی وجود داشت که از همه غیرجذاب‌تر بود و بنابراین فقط همین دلیل کافی بود تا آن عدد خود عددی بسیار جذاب باشد.

یادداشت نویسنده

در پس انتشار این ویرایش از «از صفر تا بی‌نهایت» به مناسبت پنجاهمین سالگرد آن، ماجرایی وجود دارد.

داستان با یک تماس تلفنی از خواهرم، جولیا رابینسون، در صبح روز ۳۱ ژانویه‌ی ۱۹۵۲ آغاز شد. او با من تماس گرفت تا مرا از حادثه‌ی هیجان‌انگیزی که شب گذشته در مؤسسه‌ی آنالیز عددی واقع در محوطه‌ی دانشگاه UCLA رخ داده بود، مطلع کند؛ یعنی جایی که اداره‌ی ملی استاندارد، رایانه‌ی خودکار غربی خود (SWAC) را در آن‌جا قرار داده بود.

جولیا به من گفت که همسرش، رافائل رابینسون، برنامه‌ای نوشته که پس از هفتاد و پنج سال نخستین «اعداد کامل» جدید را مشخص کرده است؛ آن هم نه یک عدد، بلکه دوتا. (تازه بعدها بود که فهمیدم رافائل در آن زمان هرگز SWAC را ندیده بود و برنامه را تماماً براساس یک کپی از دفترچه‌ی راهنمای سیستم نوشته بود). جولیا مسئله را به زبان ساده شرح داد: «اعداد کامل» (که حتا اسم آن‌ها نیز کنجکاوبرانگیز است) اعدادی مانند ۶ هستند که برابر با حاصل جمع همه‌ی مقسوم علیه‌هایشان به جز خود می‌باشند:

$$۶ = ۱ + ۲ + ۳$$

سپس او به من گفت که نوع خاصی از اعداد اوّل برای ساخت این‌گونه اعداد لازم است. این موضوع در کل برای من حیرت‌آور بود. بنابراین تصمیم گرفتم تا مقاله‌ای در مورد کشف اعدادِ کاملِ جدید بنویسم.

هنگامی که دیک لمر[1] رئیسِ SWAC، و همسرش اما[2] برای بازدید به برکلی آمدند، خوشبختانه توانستم با او مصاحبه کنم. اما پیشنهاد داد که مقاله‌ی خود را برای مجله Scientific American ارسال کنم. اگر شماره‌ی مارس ۱۹۵۳ این مجله را پیدا کنید، عکسی از SWAC را در آن خواهید دید و می‌توانید شرحی به نسبت مفصل از برنامه‌ی رافائل و نحوه‌ی وارد کردن در رایانه را مطالعه کنید.

البته یکی از مشترکان بعدها برای دنیس فلنگن[3] نوشت که او انتظار دارد نویسندگان مطالب

1) Dick Lemmer 2) Emma 3) Dennis Flanagan

مجله‌ی Scintific American دارای مدرک دکترا باشند. اما این که من دکترا نداشتم، نه برای دنیس فلنگن و نه برای ناشر محترم، رابرت ال کراوّل[1] اهمیتی داشت. پس از خواندنِ مقاله‌ی من، آقای کراوّل فوراً نامه‌ای به من نوشت و پرسید که آیا من تمایل دارم کتاب کوچکی در باره‌ی اعداد بنویسم که او بتواند شبیه و هم راستا با کتابی در مورد حروف الفبا چاپ کند. البته حتا خود من نیز این شباهت را کمی ناسازگار دانستم، اما این پیشنهاد ایده‌ی خوبی در ذهنم ایجاد کرد. عنوان کتاب آقای کراوّل، که هنوز هم تجدید چاپ می‌شود، « **بیست‌وشش حرف**» بود. من می‌خواستم کتابی راجع به ده رقم بنویسم؛ و از آن جا که آن چه جولیا به من گفت برایم بسیار جالب بود، اسم کتاب را این گونه انتخاب کردم:« **آن چه اعداد را جالب می‌کند**».

با جولیا و رافائل مشورت کردم. پیشنهاد رابرت کراوّل برای آن‌ها خنده‌دار بود- این که من قرار است کتابی درباره‌ی«ریاضیات» بنویسم- اما فکر کردند که من می‌توانم آن چه را که پیشنهاد کرده‌ام انجام دهم. بنابراین قول دادند که دست نوشته‌های مرا قبل از آن که به ناشر بدهم یک بار بخوانند. در غیر این صورت من مجبور بودم به تنهایی کار خود را انجام دهم.

من فوراً یک پیشنهاد و یک بخشِ نمونه ازکار خود را برای رابرت کراوّل ارسال کردم. او هم در پاسخ گفت که اگر چه این فصلِ نمونه درباره‌ی‌صفر« به سختی در ارائه‌ی مطالب پیش می‌رود»، اما می‌خواهد با من قراردادی ببندد.

اکنون به واقع نمی‌دانم چه طور موفق به نوشتن چنین کتابی شدم. اما در رونِد کار مطالب بسیار زیادی آموختم و آن چه یاد می‌گرفتم برای من چنان جذاب بود که دلیلی نمی‌دیدم که دیگران را جذب نکند. کتاب در کمی بیش از یک سال به پایان رسید.

در این جا با مشکلی مواجه شدم. واحد فروشِ انتشارات به صراحت عنوانِ پیشنهادیِ مرا برای کتاب رد کرد (یعنی « آن چه اعداد را جالب می‌کند»). کلمه‌ی «جالب» برای آنها آزاردهنده بود. هیچ کس کتابی را نمی‌خرید که در مورد چیزهایی باشد که به عنوان «جالب» توصیف شده باشند.

آقای کراوّل قبول کرد و گفت که آیا خانم «رید» می‌تواند یک عنوان دیگر انتخاب کند؟

من بیش از ده یا دوازده عنوان دیگر را برای آن‌ها فرستادم که به هیچ‌کدام علاقه‌ای نداشتم. دست بر قضا واحد فروش درست همان عنوانی را پسندید که بیش از همه از آن تنفر داشتم؛ یعنی

---

1) Robert, L. Crowell

«از صفر تا بی‌نهایت». دلایل من هم برای تنفر از آن عنوان، این بود: اوّل از همه این که شبیه به عنوان یک رمان بسیار معروف با نام «از این‌جا تا ابدیت» بود و **بعدها هم یکی از منتقدان اشاره کرد که عنوان کتاب طوری به‌نظر می‌آید که گویا رمان است.** دوم این‌که بیش از اندازه به نام کتاب جورج گامف[1] یعنی «یک، دو، سه . . . بی‌نهایت» شباهت داشت **اگر چه گامف با عدد یک شروع کرده بود و من با عدد صفر.** اما اصلی‌ترین اعتراض من به این عنوان این بود که در کتابم هیچ مطلبی درباره‌ی نظریه‌ی بی‌نهایت‌ها ننوشته بودم.

بنابراین بعد از فصل نه سه نقطه گذاشتم تا نشان دهیم که اعداد طبیعی تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند، و عنوان اصلی خود را به صورت زیر عنوان نگه‌داشتم. حالا پنجاه سال می‌گذرد و این عنوان «**آن‌چه اعداد را جالب می‌کند**» هنوز این‌جاست و به صورتی مختصر و مفید ثابت می‌کند که هیچ عدد غیرجذابی وجود ندارد.

کتاب به موفقیت خوبی دست یافت، به معلمان و کتابخانه‌ها توصیه شد و توسط کانون‌هایِ کتابِ علمی برگزیده شد. حتا با وجود این که بر این باور بودند که این کتاب کاری را انجام داده که کتاب «طوفان» اثر جورج آر. استوارت[2] برای آب و هوا انجام داده است: یعنی «دمیدن زندگی در یک پیکر به ظاهر بی‌جان.» **استوارت اولین کسی بود که نام‌های دخترانه را برای طوفان‌ها انتخاب کرد.**

در سال ۱۹۵۷ روسیه ماهواره‌ی اسپوتنیک را به فضا پرتاب کرد. آمریکایی‌ها از این که در ریاضیات و علوم عقب بیفتند به شدت برآشفته شدند: سپس آقای کراوّل اعلام کرد که زمان ویرایش دوم فرارسیده است. در این‌جا بود که تغییر عنوان کتاب، که به شدت با آن مخالفت کرده بودم، به کار آمد. از آن‌جا که در یک ویرایش جدید باید یک فصل جدید هم اضافه می‌شد، این فصل را در مورد نظریه‌ی مجموعه‌های نامتناهی در نظر گرفته شد.

چهار سال بعد، کراوّل باز هم ویرایش جدیدی و بطور طبیعی فصل جدیدی را درخواست کرد چه‌چیزی می‌توانست در ادامه‌ی «بی‌نهایت» بیاید؟

این جا رافائل به کمک ما آمد و پیشنهاد داد فصلی براساس لگاریتم طبیعی بنویسم. همان‌گونه که او با دلیل و منطق یادآور شد، فقط با عدد e بوده است که ریاضی‌دانان سرانجام توانسته‌اند با

1) George Gamov 2) Georg R. Stewart

اثبات ریاضی توزیع اعداد اوّل را در مقیاس گسترده مشخص کنند یا **به عبارتی کوتاه‌تر قضیه‌ی عدد اوّل را اثبات کنند**. بنابراین به نظر او، همین دلیل بیانگر آن بود که e در اصل بی‌ارتباط با یک کتاب در مورد اعداد طبیعی نیست.

مدتی بعد. پس از ویرایش سوم کتاب من، رابرت کراوّل دید که هیچ‌کدام از چهار پسرش حاضر نیستند انتشاراتی را که جدّ آن‌ها پایه‌گذاری کرده بود، اداره کنند. بنابراین شرکت را فروختند. نام آن ابتدا به لی‌پین‌کت[1] و سپس، به هارپراَندرَو[2] سپس تا جایی که به یاد دارم، به هایپرکالینز[3] تغییر یافت. سرانجام حق تألیف‌ها چنان کم شد که کتاب بطور اساسی خارج از چاپ و نایاب شد. من درخواست کردم که حق نشر را به خودم بازگردانند و هایپرکالیننز موافقت کرد.

ویرایش چهارم «از صفر تا به‌نهایت» بدون اضافه شدنِ فصلی جدید و با یادداشتی زندگینامه‌ای به قلم خود نویسنده در سال ۱۹۹۲ توسط انجمن ریاضی آمریکا به چاپ رسید.

اکنون شما ویرایشی به مناسبت پنجاهمین سالگرد انتشار «از صفر تا بی‌نهایت» را می‌خوانید که توسط انتشارات «اِی.کِی. پیترز، ال تی دی[4] » به چاپ می‌رسد. هم ناشر و هم نویسنده‌ی حاضر امید دارند ماجرایی که با کشف نخستین اعداد کاملِ جدید پس از ۷۵ سال آغاز شد ادامه یابد و از طریق این ویرایشِ جدید، کتاب به دست نسل‌های جوان برسد؛ جوانانی که برخی از آن‌ها، مانند بسیاری در گذشته، ممکن است با الهام از این کتاب ریاضی‌دان شوند ـ و همه‌ی آن‌ها دیدی به دست خواهند آورد که چه چیزی اعداد طبیعی را این طور برای همیشه جالب می‌کند.

1) Lippincott 2) Harper and Row 3) Harpercollins 4) A K Peters, Ltd.

فصل اول

صفر

صفر اولین علامت‌ی است(یعنی ارقام) که با آن‌ها می‌توانیم بی‌نهایت عدد را نمایش دهیم. و همچنین صفر نخستین عددی است که می‌بایست نشان می‌دادیم. با این حال، صفر، که نخستین رقم است، آخرین رقمی بود که ساخته شد؛ و مفهوم صفر، آخرین عددی بود که کشف گردید.

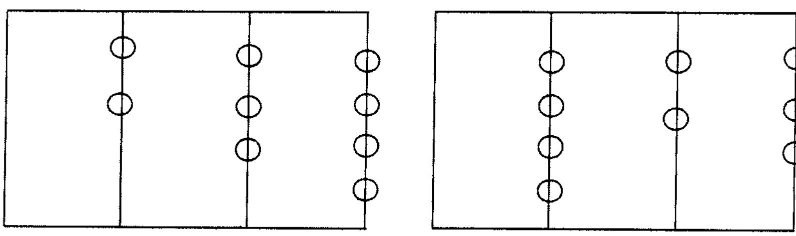
این دو رویداد، یعنی ابداع و کشف صفر، که بسیار کند در تاریخ اعداد به وقوع پیوستند، همزمان با هم اتفاق نیفتادند. ابداع نماد صفر چندین سده پیش از کشف مفهوم آن انجام شد.

در زمان میلاد مسیح، ایده‌ی صفر به عنوان یک نشانه فقط به ذهن بابلیان رسیده بود و با نابودی آن‌ها نیز از بین رفته بود. اما مفهوم صفر به عنوان یک عدد به فکر هیچ کس خطور نکرده بود. بطور تقریبی همه‌ی تمدن‌های بزرگ دیگر نیز به این مسئله برخورد کرده بودند که چگونه می‌توان اعداد را نوشت بدون اینکه برای هر یک از آن‌ها از یک نماد جداگانه استفاده کرد. مصریان برای هر عدد از تصویری خاص استفاده می‌کردند؛ یونانیان از حروف الفبای خود؛ رومیان از همان چند خط ساده‌ای که همه‌ی ما اغلب بر سنگ بناها می‌بینیم (I، X، V، $\cdots$) به هر حال، هرکدام از آن‌ها عددها را به نحوی گروه بندی کرده بودند که بتوان از نشانه‌هایی ثابت بارها و بارها استفاده کرد. نوشتن اعداد به راحتا امکان پذیر بود، اما نمی‌توانستند آن‌هارا به نحوی بنویسند که حتا به توان

ساده‌ترین اعمال حساب را روی آن‌ها انجام داد. هرکس که یک بار تلاش کرده باشد تا اعداد رومی را در هم ضرب کند بدون هیچ سختی می‌فهمید که چرا روسی‌ها وقتی به یک مسله از حساب می‌رسند ابتدا آن را براساس Vها، Xها، Cها و Mها از اعداد می‌نوشتند و پس جواب آن را با مهره‌ای روی یک چرتکه بدست می‌آورند. مصری‌ها و یونانیان هم همین کار را می‌کردند. اما در ظاهر هیچ کدام از آن‌ها نمی‌دانستند که راز نهفته در همین مهره‌های چرتکه مؤثرترین روش نشان دادن اعداد است که جهانیان بعدها آن را ایجاد خواهند کرد.

چرتکه، که در هر تمدن با شکل و نام متفاوتی شناخته شده بود؛ در اصل متشکل از قابی (چارچوب) بود که با ستون‌های موازی تقسیم شده بود. ارزش هر ستون برابر با توانی از ۱۰ در نظر گرفته می‌شد، و تعداد مرتبه‌ای که هر یک از این توان‌ها در یک عدد وجود داشت با یک نشانگر، که بطور معمول مهره‌ها بودند، نشان داده می‌شد. همه‌ی مهره‌ها شکل یکسانی داشته و هر کدام دارای ارزش یک واحد بودند. یک مهره در ستون اوّل دارای ارزش ۱($۱۰^{۰}$)، در ستون دوم دارای ارزش ۱۰ ($۱۰^{۱}$)، در ستون سوم دارای ارزش ۱۰۰ ($۱۰^{۲}$) بود و برای ستون‌های دیگر نیز به همین ترتیب بود. به همین علت گاهی زندگی ناپایدار درباریان در کاخ یک پادشاه مستبد را به همین مهره‌های چرتکه تشبیه می‌کردند که «گاه کم ارزش‌اند و گاه پر ارزش».

عددهایی که رومیان به شکل‌های $CCXXXIV$ (۲۳۴) و $CDXXIII$(۴۲۳) می‌نوشتند را به راحتا می‌شد به این صورت روی چرتکه نمایش داد.

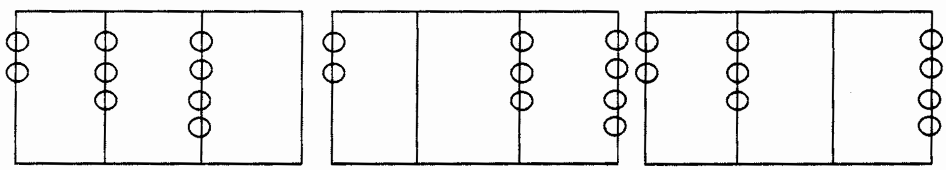


شکل ۱ـ۱

امروزه به سرعت متوجه شباهتی که بین نماشی اعداد بوسیله‌ی چرتکه در زمان قدیم و نحوه‌ی نمایش کنونی آن‌ها در نوشتار وجود دارد، می‌شویم. به جای ۹ مهره، ما از ۹ نماد مختلف برای

تعداد کل مهره‌ها در یک ستون و یک نماد دهم برای نمایش ستون‌های خالی استفاده می‌کنیم. نحوه‌ی چینش این ده نماد، که آن‌ها را ارقام می‌نامیم، همان چیزی را به ما می‌گوید که مهره‌ها انجام می‌دهند، ۲۳۴ یعنی دو تا ۱۰۰، سه تا ۱۰ و چهار تا ۱؛ در حالی که ۴۲۳ یعنی چهار تا ۱۰۰ و دو تا ۱۰ و سه تا یک می‌باشد.

به طور خلاصه، دستگاه موضعی نشانه‌ها در دوران ما، که در آن هر رقم بسته به موضع و جایگاهش در یک عدد می‌تواند دارای ارزش‌های مختلفی باشد، در واقع همان دستگاه نشانه‌هایی است که توسط چرتکه تثبت شد. برای انتقال اعداد از چرتکه به روی کاغذ فقط و فقط لازم است از ۱۰ نشانه‌ی جدید استفاده کنیم؛ چرا که در هر زمان فقط یکی از آن ۱۰ مقدار می‌تواند در یک ستون وجود داشته باشد؛ یک، دو، سه، چهار، پنج، شش، هفت، هشت یا نه مهره، و یا این که هیچ مهره‌ای وجود نداشته باشد. ستون می‌تواند خالی هم باشد، بنابراین ضرورت ایجاد می‌کند که نشانه‌ی دهم برای نمایاندن آن وجود داشته باشد. در غیر این صورت، نمی‌توان میان برخی اعداد مختلف روی چرتکه تمایزی قائل شد:



شکل ۲ـ۱

بدون وجود نشانه‌ای، مثال‌های بالا همگی بر روی کاغذ به صورت مشابه ۲۳۴ نوشته می‌شوند. امّا با این نشانه می‌توان آن‌ها را به صورت ۲۳۴۰، ۲۰۳۴، ۲۳۰۴ از یکدیگر تمایز داد.

در اصل این طور به نظر می‌آید نخستین کسی که می‌خواست عدد روی چرتکه را ثبت کند، ناخودآگاه علامتی برای این منظور گذاشته است- یک خط تیره، نقطه یا دایره- برای ستون خالی که امروزه با ۰ نمایش داده می‌شود. امّا در طی هزاران سال کسی این کار را نکرد.

نه فیثاغورس.

نه اقلیدس.

نه ارشمیدس.

زیرا بزرگ‌ترین رازِ صفر این بود که حتا به ذهن یونانیان نیز نرسیده بود، البته به جز ستاره شناسان آنها.

خوانندگان این کتاب به زودی درخواهند یافت که نوشتن راجع به اعداد بدون صحبت از یونانی‌ها، اگر غیرممکن نباشد، دست کم بسیار دشوار است. در نوشته‌ای به قلم «جی‌اچ‌هاردی» ریاضی‌دان انگلیسی (۱۸۷۷ـ۱۹۴۷) می‌توان نمونه‌ی احترامی را دید که ریاضیدانان برای این «معاصران» باستانی خود [= یعنی یونانیان] قائلند. « ممکن است ریاضیات شرق عجیب و جذاب باشد، امّا ریاضیات یونان، ریاضیات حقیقی است. لیتل وود[1] یک بار به درستی به من گفت که « یونانی‌ها، دانش‌آموزان باهوش و یا مدعیان فرهیختگی نیستند، بکله کسانی هستند مثل خود ما که انگار در یک کالج دیگر تحصیل می‌کنند.»

این که یونانیان صفر، یا مفهوم هیچ، را به عنوان عدد به حساب نیاوردند به واقع شگفت‌آور بود. آنان اولین مردمانی بودند که به اعداد فقط به این دلیل که جذاب هستند علاقمند شدند، و سؤالاتی را در زمینه‌ی نظریه‌ی اعداد مطرح کردند که برخی از آن‌ها تا به امروز نیز بی‌پاسخ مانده است. با این حال، آنان فقط سرگرم یادگیری اسرار اعداد بودند، نه کاربرد آن‌ها. یونانیان اعداد را از دریچه‌ی هندسه نگاه می‌کرند، و این می‌تواند یکی از دلایلی باشد که ایده‌ی صفر از نظرشان پنهان بماند. گرچه بخش عمده‌ای از نظریه اعداد به صفر وابسته نیست امّا محاسبه کردن بدون عدد صفر به طرز شدیدی دچار مشکل می‌شود.

ریاضیدانان بزرگ یونان که در بارهٔ ویژگیهای جالب اعداد می‌اندیشیدند براین باور بودند که حساب و کتاب کردن کاری پیش‌پا افتاده است و آن را به نوکران و بردگان واگذار می‌کردند. این هندی‌ها بودند که صفر و یک دستگاه عملی از علائم حساب را به ما دادند. روزگاری در اوایل دوره مسیحیت یک هندوی ناشناس که می‌خواست عدد چرتکه‌اش را روی کاغذ ثبت کند از خودش علامتی به شکل نقطه ابداع کرد و آن را ُسنیا[2] نامید تا بتواند ستونهای خالی از مهره را با آن نشان دهد. بنابراین صفر که اولین رقم است، آخر از همه آمد.

عقیدهٔ بعضی بر این است که فلسفه و مذهب آن فرد هندو بود که زمینه را به طرز خاصی فراهم کرده بود تا او بتواند نشانه‌ای برای مفهوم هیچ یاهمان تهی ابداع کند. امّا باید دانست که نقطهٔ

1) Littel Wood 2) sunya

sunya که آن هندو ابداع کرد در حقیقت عدد صفر نبود، بلکه فقط یک ابزار ریاضی برای نشان دادن فضای تهی بود و معنای آن کلمه هم همین بود: خالی.

هندی‌ها هنوز هم از همان واژه و نشانه برای نشان دادن مجهول در معادله‌ها (آنچه ما x می‌نامیم) استفاده می‌کنند، زیرا تا وقتی یک جایگاه با عدد مناسب پر نشود در واقع خالی محسوب می‌گردد. با ابداع sunya نشانه‌ی صفر اختراع شد؛ امّا هنوز عدد صفر کشف نشده بود. در این بین، نشانه‌های جدید هندی راه خود را از طریق اعراب، تحت عنوان نشانه‌های عربی به اروپا باز کرد و از آنجا که سطح بسیار بالایی داشت به سرعت پذیرفته نشد.

در سال ۱۳۰۰، استفاده از عددنویسیِ جدید در اسناد تجاری ممنوع شد به این دلیل که جعل آن‌ها نسبت به اعداد رومی ساده‌تر به نظر می‌آمد. بازرگان به کارآمدی آن‌ها پی بردند حال آن که قشر محافظه‌کارترِ دانشگاهی به همان اعداد رومی و چرتکه‌ها پایبند ماندند.

بالاخره تا سال ۱۶۰۰ این دستگاه اعداد در سرتاسر اروپا پذیرفته شد. همه متوجه شدند که تحول بزرگ در این دستگاه، لحاظ کردنِ آن نقطه (یا همان «صفر» به لفظ عرب‌ها) بود تا بتواند ستون‌های خالی را نمایش دهد. این دستگاه جدید با نام همین علامت شناخته شد، و این گونه شد که واژه‌ی «Cipher»، علاوه بر معنای « صفر»، به همه‌ی رقم‌ها نیز اطلاق شد و فعلِ « to Cipher» به معنای «محاسبه کردن» به کار رفت (کلمه‌ی «Zero» بعدها از فرانسوی و ایتالیایی وارد زبان انگلیسی شد.)

امّا «صفر» نیز، مانند «سونیا»، همچنان یک نشانه برای ستون خالی بود، نه یک عدد. حتا امروزه نیز اگرچه نشانه‌ی ۰ را همیشه به کار می‌بریم، امّا به طور معمول به چشم عدد به آن نگاه نمی‌کنیم. روی صفحه کلید و یا شماره‌گیر تلفن آن را با دیگر رقم‌ها می‌آوریم امّا پس از ۹ قرار می‌دهیم. چون ارزش صفر بطور طبیعی از ۹ بیشتر نیست، پس بدیهی است که تنها به عنوان یک نشانه بعد از آن می‌آید و نه یک عدد. جای تعجب نیست، زیرا صفر رقمی است که در کل آن را به عنوان عدد به کار نمی‌برند. اگر خواننده پاسخ چند پرسش زیر را بدهد خواهد فهمید که بهتر است با نشانه‌ی صفر کارکند تا با عدد صفر. صفری که او می‌شناسد، نشانه است؛ زیرا حقیقت شگفت‌آور این است که حساب موضعی (Positional arithmetic)، که در اصل وجودش به

علامت صفر بستگی دارد اغلب بدون عدد صفر خیلی بهتر جور می‌شود.

«فهمیدن صفر»

صفر به عنوان عدد	صفر به عنوان نشانه
۱ + ۰ =	۱ + ۱۰ =
۰ + ۱ =	۱۰ + ۱ =
۱ − ۰ =	۱ − ۱۰ =
۰ − ۱ =	۱۰ − ۱ =
۱ × ۰ =	۱ × ۱۰ =
۰ × ۱ =	۱۰ × ۱ =
۰ × ۰ =	۱۰ × ۱۰ =
۰ ÷ ۱ =	۱۰ ÷ ۱ =
۱ ÷ ۰ =	۱ ÷ ۱۰ =
۰ ÷ ۰ =	۱۰ ÷ ۱۰ =

«پاسخ‌ها»

صفر به عنوان نشانه: ۱۱، ۱۱، ۹ـ، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰، ۱۰، $\frac{۱}{۱۰}$، ۱

صفر به عنوان عدد: ۱، ۱، ۱، ۱ـ، ۰، ۰، ۰، ۰، غیرممکن، مبهم.

قرن‌ها پس از ابداع «سونیا» به عنوان یک نشانه برای ستون‌های خالی چرتکه، مردم هم چنان در تکاپو بودند که بر صفر، به عنوان عددی که بتوان آن را مثل هر عدد دیگری جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد، اشراف پیدا کنند. همه‌ی محققان امروزه که در متون ریاضی باستان تفکر و تعمق می‌کنند، از یک ملاک برای آزمونِ میزانِ این احاطه و اشراف استفاده می‌کنند. در حقیقت، برای مردم آن روزگار، جمع و تفریق و حتا ضرب صفرکار چندان مشکلی نبود؛ امّا آن چه امروزه به ما نشان می‌دهد که آیا آنان به واقع این عدد جدید و عجیب را می‌فهمیدند، تقسیم صفر و تقسیم بر صفر است. این همان مشکلاتی است که در سه موردِ آخرِ تستِ کوتاهی که در بالا آوردیم نیز

خود را نشان داد (شاید همان‌هایی که شاید خواننده را نیز دچار مشکل کرده).

$$۰ \div ۱ = ?$$

عبارت کسری $\frac{۰}{۱}$ که به طور دقیق گونه‌ی دیگری برای نشان دادن تقسیم بالا است، از نظر ریاضی معنادار است. صفر بر هر عدد دیگری قابل تقسیم است و از این حیث در میان اعداد، منحصر بفرد می‌باشد. (در نظریه‌ی اعداد، فقط وقتی می‌گوییم یک عدد بر عدد دیگری «بخش‌پذیر» است که جواب تقسیم، عددی کامل باشد.) هر عددی که در صفر ضرب شود همیشه جواب همان صفر است. از آن جا که $۰ = ۱ \times ۰$ پس $۰ = ۱ \div ۰$. و صفر بر هر عددی هم که تقسیم شود همیشه جواب همان صفر است.

$$۱ \div ۰ = ?$$

امّا از سوی دیگر، عبارت $\frac{۱}{۰}$ از نظر ریاضی معنادار نیست هیچ عددی به جز خودِ صفر بر صفر قابل تقسیم نیست، و صفر را حتا نمی‌توان به عنوان مخرج کسر به کار برد. از این لحاظ، و نیز از لحاظ این که صفر بر همه‌ی اعداد قابل تقسیم است، عددی بی‌مانند است. دلیل بی‌معنا بودن $\frac{۱}{۰}$ همان دلیلی است که $\frac{۰}{۱}$ معنادار است. هر عددی که در صفر ضرب می‌شود، جواب همیشه صفر است. امّا تقسیم به این معناست که هرگاه عدد خارج قسمت را در عدد مقسوم علیه ضرب کنیم، جواب حاصل همان مقسوم است. اگر $\frac{۱}{۰}$ جواب داشته باشد و مقداری برای آن وجود داشته باشد، آن مقدار باید عددی باشد که اگر در صفر ضرب کنیم جواب به دست آمده ۱ شود. امّا پیش از این گفتیم که حاصل ضرب هر عدد در صفر فقط صفر می‌تواند باشد. در نتیجه نمی‌توانیم ۱ (و هیچ عدد دیگری) را بر صفر تقسیم کنیم.

$$۰ \div ۰ = ?$$

عبارت ÷ از نظر ریاضی نه معنادار است و نه بی‌معنا؛ بلکه نامعلوم (مبهم) است. صفر می‌تواند برخودش تقسیم شود، امّا راهی برای تعیین مقدارِ جواب وجود ندارد. از آن جا که حاصل ضرب تمام اعداد در صفر، صفر می‌شود، جواب تقسیم صفر بر صفر هر عددی می‌تواند باشد. صفر تقسیم بر صفر می‌تواند صفر باشد. چون $۰ = ۰ \times ۰$، امّا می‌تواند یک هم باشد، چون $۰ = ۱ \times ۰$، و

همچنین دو، چون $\circ = ۲ \times \circ$ و به همین ترتیب تا بی‌نهایت.

صفر در میان سیل دشنام‌ها همواره محبوب بوده است و آن را به بهترین وجه با عبارت (ناسزای ریاضی) وصف کرده‌اند. به طور مثال یکی از روزنامه‌ها چنین جمله‌ای نوشته بود:

«یک مزخرف هیچ تقسیم بر هیچ» البته این عبارت، از نظر ریاضی، آن قدرها هم که تصور آن می‌رفت دشنام سختی نیست. سه تلفظ «معنادار»، «بی‌معنا» و «نامعین » را می‌توان با یک مقایسه روشن‌تر کرد. یک عملیات مشخص تقسیم را از نظر ریاضی فقط وقتی معنادار می‌گویند که برابر با مقدار خاصی باشد و آن مقدار را بتوان با انجام عمل تقسیم به دست آورد. می‌توانیم آن را با یک لقب قیاس کنیم که به یک فرد اطلاق می‌شود بدون ذکر نام آن شخص. برای مثال، رئیس جمهور آمریکا، عموماً وقتی این لقب را برای یک فرد خاص به کار می‌بریم که انگار دقیقاً نام او را برده‌ایم.

به همین ترتیب، عبارت $\frac{\circ}{۱}$ (و یا $۱ \div \circ$) به یک مقدار خاص اشاره می‌کند و آن صفر است. این عبارت نمی‌تواند نمایانگر مقدار دیگری باشد، درست همان‌طور که $\frac{۱\circ}{۱}$ نیز هیچ مقداری به جز ۱۰ را نشان نمی‌دهد.

از سوی دیگر، یک عملیات مشخص تقسیم فقط وقتی بی معناست که امکان وجود هیچ مقداری برای آن نیست. به همان صورت که، یک لقب نیز می‌تواند بی معنا باشد: برای مثال پادشاه آمریکا [چون آمریکا پادشاهی ندارد]. عبارت $\frac{۱}{\circ}$ (و یا $\circ \div ۱$) بی معناست چون یک را نمی‌توان بر صفر تقسیم کرد؛ بنابراین، این عبارت نماینده‌ی هیچ مقداری نیست. (البته هیچ مقدار ابداً به معنای صفر نیست.) عبارت $\div$ بی معناست امّا به نحوی کاملاً متفاوت. این مانند لقب سناتور آمریکا است، که بی معناست و چیزی را مشخص نمی‌کند مگر این که معلوم شود منظور ما کدام یک از یکصد سناتور آمریکاست. البته انتخاب‌های ما در عبارت $\div$ بسیار بیش از صد است. این عبارت می‌تواند هر مقدار عددی داشته باشد. چرا که حاصل ضرب همه‌ی اعداد در صفر برابر صفر است. عبارت $\div$ بی معناست فقط به این دلیل که می‌تواند هر معنایی داشته باشد.

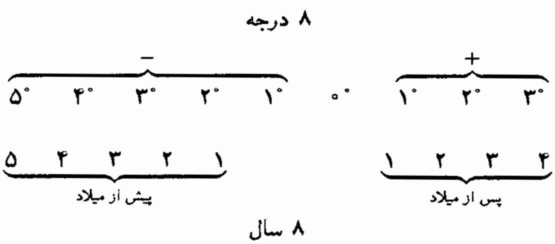
به بیان فنی‌تر، ریاضیدانان می‌گویند که مقدار (نامعین) است، و قرن‌ها به طول می‌انجامید تا به این نتیجه رسیدند. تازه آن زمانی بود که آنها به عدد صفر اشراف پیدا کرده بودند. برای درک اهمیت

ویژه صفر در بین اعداد، باید اعدادی را که به اعداد صحیح معروف هستند بررسی کنیم. هنگامی که اعداد صحیح به ترتیب قرار می‌گیرند، اعداد مثبت که در واقع چیزهای حاضر را می‌شمارند، تا بی نهایت به سمت راست گسترده می‌شوند؛ اعداد منفی که اشیاء را می‌شمارند، تا بی‌نهایت به سمت چپ گسترده می‌شوند. با این روش چینش از طریق دماسنج‌ها آشنا هستیم، که در آن‌ها اعداد مثبت نشان دهنده‌ی دماهای بالای صفر و اعداد منفی دماهای زیر صفر هستند.

$$\cdots, -۵, -۴, -۳, -۱, ۰, +۱, +۲, +۳, +۴, +۵, \cdots$$

در این نوع چینش اعداد صحیح مثبت و منفی، فاصله‌ی هر دو عدد پشت سرهم، برابر با فاصله‌ی هر دو عدد پشت سرهم دیگر است. این یکسان بودن فاصله‌ها، ماهیت اعداد صحیح است. فاصله ۱− تا ۲− برابر با فاصله ۱+ تا ۲+ و همچنین ۲+ تا ۳+ است. امّا این یکنواختی فقط تا هنگامی برقرار است که صفر را جز اعداد صحیح به حساب آوریم. بدون صفر، فاصله‌ی ۱− تا ۱+ دو برابر بقیه جفت‌هاست. بنابراین آن وقت واضح است که ۱− و ۱+ دو عدد پشت سرهم نیستند. پس صفر بین آن‌ها جا دارد.

بر خلاف مقیاس بالا، صفر درسال‌شمار تقویم مسیحی نمایانگر یک عدد نیست، بکله یک نقطه را نشان می‌دهد. بنابراین، یک مسئله درباره‌ی مقیاس دما، نسبت به یک مسئله‌ی مشابه در مورد سال‌های تقویم، جواب متفاوتی خواهد داشت. اگر دمای هوا در صبح ۵° زیر صفر باشد و در طول روز ۸° افزایش یاد، تبدیل به ۳° بالای صفر می‌شود. امّا کودکی که در روز اوّل ژانویه‌ی سال ۵ پیش از میلاد متولد شده، در سال ۴ پس از میلاد هشت ساله می‌شود. وقتی محور دما محور شمارش سال‌ها را کنار هم بکشیم، علّت تفاوت در پاسخ این دو مسئله‌ی به ظاهر یکسان مشخص می‌شود:



در سال ۱۹۳۰، همین اختلاف باعث یک اشتباه بزرگ و مضحک در جامعه‌ی علمی شد. مراسم دو هزار سالگی «ویرجیل»، شاعر بزرگ رومی، در اوج خود بود که یکی از اهالی ریاضی

سر و کله‌اش پیدا شد و تذکر داد از آن جا که سال صفر در تقویم نیست، این شاعر (متولد ۷۰ پیش از میلاد) تا سال ۱۹۳۱ دو هزار ساله نمی‌شود. دانشمندان، که باید بیشتر از این حواس خود را جمع می‌کردند، در واقع با محوری سروکار داشتند که صفر بر روی آن یک عدد محسوب نمی‌شد، و این یک عمل ریاضی که خواه ناخواه فرآیند خود را طی می‌کند زیرا صفر در حقیقت یک عدد است. ماجرای مشابهی هم در اوّل ژانویه ۲۰۰۰ به هنگام جشن شروع هزاره‌ی جدید اتفاق افتاد، چرا که هزاره جدید در اصل از اوّل ژانویه ۲۰۰۱ آغاز می‌شد.

در میان اعداد کامل، یا صحیح، صفر منحصر به فرد است. زیرا نه مثبت است، و نه منفی. اگر چه ما در محاسبات از همه‌ی اعداد استفاده می‌کنیم، امّا بطور معمول اعداد بعد از صفر را به عنوان « عدد» از ذهن داریم. (تازه در سده‌ی دوازدهم بود که «باسکارا» ریاضی‌دان هندی، ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۴۵x = ۲۵۰$ را $x = ۵۰$ و $x = -۵$ قرار داد، امّا هشدار داد که «ریشه‌ی دوم را نباید در نظر گرفت، چرا که قابل قبول نیست؛ کسی ریشه منفی را قبول نمی‌کند» ما حتا اعداد بعد از صفر را اعداد طبیعی می‌نامیم، گرچه این جای بحث دارد که آیا آن‌ها واقعاً طبیعی‌تر از بقیه‌ی اعداد هستند یا نه. این‌ها عددهایی هستند که به وسیله آنها شمارش می‌کنیم، و این به نظر ما طبیعی‌ترین کاری است که می‌توان با اعداد انجام داد. و صفر را جزء آن‌ها به حساب نمی‌آوریم، زیرا برای بسیاری از ما اصلاً طبیعی نیست که با هیچ بتوانیم «شمارش کنیم». با این حال، همین طورکه روز به روز افراد بیشتری کار با کامپیوتر را می‌آموزند، این مسئله طبیعی‌تر و عادی تر می‌شود. تا جایی که به حیطه‌ی کامپیوتری مربوط می‌شود، صفر یک عدد است، و هیچ شکلی در این مورد وجود ندارد. نه تنها روی قسمت عددی صفحه کلید صفر پیش از یک می‌آید، بلکه در برنامه‌نویسی ساده‌ترین کارهای روزمره مثل محاسبه‌ی اقساط اتومبیل و خانه نیز اولین سال را سال صفر در نظرمی‌گیریم، نه سال یک.

بر خلاف اعداد منفی، صفر از نظر منطقی کاملاً با اعداد به اصطلاح طبیعی تطابق دارد. زیرا صفر نیز همان سؤال مهمی را که بقیه‌ی اعداد شمارنده جواب می‌دهند به همان طریق پاسخ می‌دهد. سؤال این است: «چند تا؟»

ـ توی اتاقی که تو در حال خواندن این کتاب هستی، چند نفر هستند؟

ـ توی اتاقی که تو در حال خواند این کتاب هستی، چند تا فیل است؟

جواب سؤال اوّل دست کم یک است، شاید هم دو یا سه؛ امّا جواب سؤال دوم به احتمال قریب به یقین صفر است. تعداد فیل‌ها در اتاق صفر است. پس صفر نیز درست مثل یک، دو و سه، یک عدد است. امّا اگر صفر یک عدد است، خواننده حتماً می‌پرسد، اصلاً عدد چیست؟

شکی نیست که هر عدد یک مفهوم انتزاعی است، یعنی دریافتن این حقیقت که حتا اگر عضوهای در مجموعه با هم هیچ وجه اشتراکی نداشته باشند، آن دو مجموعه می‌توانند با هم در یک چیز [= در تعداد اعضا] مشترک باشند. بین دو کوه و دو پرنده یک وجه شباهت وجود دارد، حتا با وجود این که کوه و پرنده کمترین شباهتی با هم ندارند، و این وجه شباهت بین آن‌ها و هر دو چیز دیگری نیز وجود دارد. درست که این مسئله حالا برای ما مسلم است، امّا برای پیشینیان ما این گونه نبود. آن‌ها بین یک و دو قرقاول [=نوع پرنده] تمایز قائل می‌شدند؛ بین یک و دو روز تمایز قائل می‌شدند؛ امّا، همان‌طور که برتراند راسل (۱۸۷۲ـ۱۹۷۰) گفته است، « سال‌های درازی احتمالاً به طول انجامیده تا کشف کنند که یک جفت قرقاول و دو روز، هر دو نمونه‌هایی از عدد دو هستند.»

به بیان ریاضی، آن چه کشف شد این بود که عددِ دو، ویژگی تمام مجموعه‌هایی است که دارای دو عضو هستند. فرقی نمی‌کند که یک مجموعه شامل انسان، فیل، مگس، کوه و یا هر شئ کاملاً متفاوت دیگر باشد؛ در هر صورت با همه‌ی مجموعه‌های دو عضوی وجه مشترک دارد.

وقتی می‌گوییم یک، دو و سه هر کدام عدد هستند، منظور این است که یک، تعداد اعضای تمام مجموعه‌های تک عضوی است؛ دو، تعداد اعضای تمام مجموعه‌های دو عضوی است؛ سه، تعداد اعضای تمام مجموعه‌های سه عضوی است. و از آنجا که هیچ محدودیتی برای آنچه که در این مجموعه‌ها می‌گنجد وجود ندارد، بنابراین می‌گوییم که آنها بی‌نهایت هستند.

یک مجموعه‌ی صفر نیز وجود دارد که با بقیه قابل مقایسه است. این مجموعه، مجموعه‌ای است که هیچ انسان، فیل، مگس و یا کوهی درون خودش ندارد. به بیان دیگر، یک مجموعهٔ تهی، همان طور که یک، دو و سه به ترتیب، اعداد مجموعه‌های یک، دو و سه عضوی هستند؛ صفر نیز عدد مجموعهٔ تهی است. امّا تفاوتی بین مجموعهٔ صفر و دیگر مجموعه‌ها هست که هیچ ارتباطی با تفاوت در تعداد اعضا ندارد. در حالی که هر کدام از اعداد نمایانگر بی‌نهایت مجموعه از اعضاً

مختلف می‌تواند باشد، امّا صفر فقط و فقط یک مجموعه را نشان می‌دهد آن مجموعه‌ی تهی است. فرقی نمی‌کند که این مجموعه تهی از انسان است، تهی از فیل، از مگس یا از کوه؛ در هر حال این همان مجموعه تهی است و یگانه هم هست.

چنین چیزهایی است که صفر را، در میانِ بی‌نهایت عدد جالب، بسیار جالب می‌کند. البته هر یک از اعداد طبیعی منحصر به فرد است. دو، سه نیست؛ سه، چهار نیست؛ و چهار هم پنج نیست ـ و یا هر عدد دیگر. امّا منحصر بفرد بودن صفر بسیار کلی‌تر از دیگر اعداد است، و بنابراین بسیار چشمگیرتر و جذاب‌تر.

صفر تنها عددی است که به هر عددی قابل تقسیم است.

صفر تنها عددی است که هیچ عدد دیگری را نمی‌توان بر آن تقسیم کرد.

به خاطر این دو ویژگی، صفر بی هیچ چون و چرایی در میان تمامی اعداد یک «مورد» خاص است، و ما در صفحات بعدی به نمونه‌های متعددی از این «خاص بودن» برخواهیم خورد. صفر آن قدر به دیگر اعداد طبیعی شباهت دارد که یکی از آن‌ها محسوب می‌شود، امّا آن قدر هم متفاوت هست که یک عدد بسیار جالب توجه باشد، آخرین و اولین رقم‌ها.*

«یک مسئله»

رقم‌ها را به شیوه‌های مختلفی می‌توان پشت‌سر هم قرار داد. در این فصل دو روش را ذکر کردیم. در یکی از آن‌ها صفر به عنوان یک نشانه بعد از ۹ می‌آید؛ در دیگری، که زیاد رایج نیست، عدد صفر قبل از یک می‌آید. امّا معمولاً، حتا برای خنده، صفر به عنوان آخرین رقم می‌آید. اساس چینش زیر، بسیاری از ریاضیدانان را دچار مشکل خواهد کرد.

۸ ۵ ۴ ۹ ۱ ۷ ۶ ۳ ۲ ۰

«پاسخ»

رقم‌ها به ترتیب حروف الفبا مرتب شده‌اند. معمولاً منشی‌ها در این روش روی دست ریاضی‌دان‌ها می‌زنند.

فصل دوم

یک

همه‌ی ما با رفتار عدد یک در عملیات‌های عادیِ حساب آشنا هستیم. این دیگر مثل رفتار صفر ما را متعجب نمی‌کند. رفتارِ یک آن قدر ساده است که در کل از آن صرف نظر می‌کنیم. حتا در مدرسه هم وقت خود را صرف یادگرفتن عدد یک در جدول ضرب نمی‌کنیم، چون مثل روز روشن است که حاصل ضرب هر عدد در یک خودش می‌شود و خارج قسمت تقسیم آن بر یک نیز باز خود همان عدد می‌شود. امّا همین ویژگی‌های ساده‌ی عدد یک، بزرگترین نتایج را در مطالعه‌ی اعداد در پی دارد.

نخستین مفهوم از عدد در ذهن، با تمایز قائل شدن بین یک و بیشتر از یک شکل می‌گیرد. کودکان این تمایز را در حدود ۱۸ ماهگی درک می‌کنند. « آرنولد گِزل » درکتاب «پنج سال نخست زندگی» می‌نویسد:« ۱ و ۱ = کودک دوست دارد همه‌ی آن مکعب‌ها را روی هم بریزد و یک توده درست کند. یا آن توده را باز پخش کند و همه‌ی مکعب‌ها را جدا کند. در حقیقت، ذهن کودک یک ساله اشیاء را منفرد و به صورت واحد می‌بیند و آن‌ها را دنبال هم قرار می‌دهد.»

از قرار معلوم، انسان نیز کمابیش از همان اوایل تاریخ به این تمایز پی برده است: یا یک گرگ در اطراف آتش وجود دارد یا چند تا، یا یک رودخانه بین این دو سکونت‌گاه وجود دارد یا چند تا، یک

ستاره هنگام غروب در آسمان هست و ستاره‌های زیادی به هنگام شب در آسمان پیدا می‌شوند. بنابراین، همه چیز با دو مفهوم برای اعداد شروع می‌شود، و فقط یکی از آن‌ها عدد است؛ یعنی یک. با این حال، بالاخره امکانِ شمردن، آن هم به طور دقیق، وجود دارد. مثلاً، ناگهان سرخود را از آتش بلند می‌کنیم و می‌بینیم «تعدادی» گرگ آن جا هستند- یعنی بیشتر از یکی. در واقع آن گرگ‌ها فقط دو تا هستند، امّا هنوز کلمه‌ای برای دو نداریم، پس می‌گوییم تعدادی گرگ. سؤال این جاست که چه تعداد؟ به این منظور سعی می‌کنیم دنبال چیزی بگردیم که تعدادش با گرگ‌ها برابر باشد، و به جفت‌هایی برمی‌خوریم که برای ما آشناتر هستند. بعد، برای مثال، می‌گوییم که به تعدادِ بال‌های یک پرنده، گرگ دورِ آتش وجود دارد.

این نحوه‌ی بیان کردن تعداد دقیق گرگ‌ها، که معنی‌های متعددِ «تعداد» را از هم تفکیک می‌کند که لازم است به عدد دو ختم نمی‌شود. می‌توان مجموعه‌های آشنای دیگری پیدا کرد و تعداد گرگ‌ها را یک به یک با آن‌ها متناظر کرد. اوّل از همه بال‌های یک پرنده، بعد از آن برگ‌های شبدر[=سه]، بعد پاهای یک حیوان، و سپس انگشت‌های یک دست. بنابراین می‌توانیم بدون هیچ عددی و فقط با عدد یک، هر تعداد گرگ را از یک تا پنج بشماریم.

حالا در اصل از نظر منطقی دنبال مجموعه‌ی بعدی می‌گردیم، یعنی مجموعه‌ای با یک عضو بیشتر از انگشتان یک دست. پیدا کردن یک مجموعه‌ی شش عضوی در طبیعت آسان نیست. پس به جای استفاده از یک مجموعه‌ی بطور کامل جدید برای شمردنِ یک گرگ بیشتر، می‌آییم و یکی از انگشتانِ آن دستِ دیگر را هم به این دست اضافه می‌کنیم. این فکر بسیار کارآمد است، چون اگر باز هم یک گرگ دیگر به گرگ‌ها اضافه شود، برای مجموعه‌ی بعدی خود می‌توانیم یک انگشت دیگر از آن دست را استفاده کنیم و همین‌طور ادامه دهیم تا این که ده انگشت تمام شود.

امّا گرگ‌ها همین‌طور بیشتر می‌شوند. با تعدادی که بیشتر از انگشتانِ دو دست می‌شود چه کار می‌توانیم بکنیم؟ بطور طبیعی می‌شد از انگشت‌های پا کمک بگیریم، کما این که بعضی‌ها این کار را کرده‌اند؛ امّا ما تصمیم می‌گیریم که یک دورِ دیگر از انگشت‌های دست استفاده کنیم. برای شمردن یک گرگِ دیگر، دو دست را بالا می‌آوریم و یک انگشت را باز می‌کنیم.

حالا بی‌شک راه خود را به سمت بی‌نهایت پیش گرفته‌ایم و چیزی جلودارمان نیست. درست

است که هرگز به بی‌نهایت نخواهیم رسید، امّا در هیچ نقطه‌ای مجبور نیستیم توقف نماییم و اعلام ناتوانی از ادامه‌ی راه کنیم، زیرا هیچ فرقی نمی‌کند چند گرگ را شمرده‌ایم و از چند انگشت استفاده کرده‌ایم؛ در این صورت می‌توانیم یک انگشت دیگر را بلند کنیم و یکی به گرگ‌ها اضافه کنیم.

حال ببینیم دستآورد ما چه بوده است؟

به بیان ساده، این بوده است که توانسته‌ایم بدون کمک گرفتن از مفهوم هیچ عدد دیگری و فقط به وسیله‌ی عدد یک، مجموعه‌ی بی‌نهایتِ اعداد طبیعی را بسازیم:

$$\text{۱},$$
$$\text{۱} + \text{۱},$$
$$\text{۱} + \text{۱} + \text{۱},$$
$$\text{۱} + \text{۱} + \text{۱} + \text{۱},$$
$$\cdots$$

بله، این‌ها اعداد طبیعی هستند؛ شالوده‌ای که بر روی آن‌ها بنای پیچیده و زیبای نظریه‌ی اعداد بنیان گذاشته شده است.

این حقیقت که یک عدد با اضافه شدنِ مکرر به خودش همه‌ی اعداد دیگر را تولید می‌کند، زیرا وقتی با زوج‌ها جمع می‌شود حاصل، عددِ فرد، و وقتی با فردها جمع می‌شود، حاصل عدد زوج است.

یک، عددی معمولی نبود، بلکه عددی خاص و مجزا بود. آن را این گونه در نظر می‌گرفتند که، مثل لایه‌های پیاز، همه‌ی اعداد را در خود جا داده است.

تشبیه به پیاز آن قدر هم دور از ذهن نیست. «جوزف تی. شیپلی»[1] درکتاب خود « فرهنگ ریشه‌ی لغات» این گونه می‌نویسد: «کسانی که، من‌باب مزاح، جمله‌ی « در اتحاد [=union]، قدرت وجود دارد» را تبدیل کرده‌اند به « در پیاز [=onion] قدرت وجود دارد»، قطعاً نمی‌دانسته‌اند که در پیاز هم اتحاد وجود دارد. درست با همان تغییراتی که کلمه‌ی یک [=one] از ریشه‌ی لاتینیِ unus (به معنیِ یک) به دست آمده، پیاز [=onion] هم از ریشه‌ی unio (به معنای اتحاد و

1) Joseph T. Shipley

یکی بودن) آمده که آن نیز به نوبه‌ی خود از همان unus به دست آمده است. منظور این است که لایه‌های متعدد پیاز همگی «یک» کره را می‌سازند. پیاز همیشه یک نماد بوده است، از این لحاظ که هر چه لایه‌ها را بر می‌داریم به مرکز آن نمی‌رسیم.

خوشبختانه اعداد بزرگتر را به رقم‌هایشان تقلیل می‌دادند و بنابراین شانس آن‌ها برای سعادت و آمرزش به طور کل از بین نمی‌رفت.

آن دسته از ویژگی‌های عدد یک که آن را از نظر غیر ریاضی پر اهمیت می‌کنند، همان‌هایی هستند که به این عدد در ریاضی نیز جذابیت می‌بخشند ـ و نیز همان‌هایی که رفتار یک را در اعمال معمولی حساب تا این حد بدیهی و بنابراین به ظاهر کم اهمیت می‌سازند:

یک تنها عددی‌ست که همه‌ی اعداد بر آن تقسیم می‌شوند.

یک تنها عددی‌ست که بر هیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نیست.

در بینِ بی‌نهایت عدد طبیعی، که هر یک به نحوی بی همتا و از جهات بسیاری نیز با بقیه مشابه است، هیچ عددی مانند یک وجود ندارد. تنها عددی که تا به حال به آن ربط داده شده است، نقیضِ آن، یعنی صفر، است. در حالی که همه‌ی اعداد بر یک بخش‌پذیرند، هیچ عددی بر صفر قابل تقسیم نیست؛ در حالی که یک برهیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نیست، صفر بر همه‌ی اعداد بخش‌پذیر است. هر دوی آن‌ها در بین اعداد «مواردی خاص» به حساب می‌آیند.

این رفتار عدد یک که در ضرب و تقسیم برای ما تا این حد کم اهمیت به نظر می‌آید، نتیجه‌ی مستقیمِ قابلیتِ یک در تولید همه‌ی اعداد دیگر از طریق اضافه شدن‌های متوالی به خودش است. یک، واحدی است که همه‌ی اعداد را می‌سازد: نگذارید بدیهی بودن و مدرسه‌ای بودنِ این حقیقت شما را فریب دهد، زیرا این مهم‌ترین حقیقت در تمامِ نظریه‌ی اعداد است. هنگامی که سعی می‌کنیم اسرار روابطِ اعداد را از چنگشان بیرون بکشیم، این اصل که همه‌ی اعداد بر یک بخش‌پذیرند می‌تواند بهترین سلاح ما باشد. از جهتی، این سلاح در آغازکار تنها سلاح ماست. سلاح دوم ما نیز از همان یکی ناشی می‌شود ـ این که هر عدد بر خودش هم بخش‌پذیر است.

با این مجموعه‌ی بی‌نهایتِ اعداد طبیعی، که هرکدام یک واحد با عدد قبلی خود تفاوت دارد، نظریه‌ی اعداد یک پرسش چالش برانگیز را ایجاد می‌کند. به جز این دو حقیقت که به جز این دو

حقیقت که به آسانی اثبات می‌شوند دیگر چه چیزی می‌توانیم در مورد اعداد بفهمیم؟ (این دو حقیقت که هر عددی به یک بخش‌پذیر است و هر عددی بر خودش بخش‌پذیر است.)

اولین گام در راه فهمیدن ویژگی‌های هر گروه، از جمله اعداد، طبقه‌بندی اعضای آن به زیرمجموعه‌هایی است که اشتراکی نداشته باشند. در نگاه اوّل ممکن است به نظر نرسد که دو اصلِ مذکور بتواند مبنایی برای این طبقه‌بندی باشد. در واقع، انسان‌ها در آغاز نیز همین فکر را می‌کردند.

قدیمی‌ترین طبقه‌بندیِ اعداد براساسِ بخش‌پذیری آن‌ها به دو بود. اعدادی که به دو بخش‌پذیر بودند «زوج» نام گرفتند و اعدادی که تقسیمِ آن‌ها به دو دارای باقیمانده بود «فرد» نام گرفتند. همه‌ی اعداد فقط به یکی از آن دو گروه تعلق دارند و هیچ کدام نمی‌تواند عضو هر دو گروه باشد. تقسیم‌بندی زوج و فرد آن چنان برای یونانی‌ها اساسی به نظر می‌رسید که آن را مانند تقسیم‌بندی دو جنسِ انسان می‌دانستند. اعداد زوج، «فناپذیر» و بنابراین مؤنث(ماده)؛ اعداد فرد، «فناناپذیر، مذکرند(نر)، و دارای سرشت آسمانی» . امّا زوج و فرد بودن، براساس بخش‌پذیری به دو، به اندازه‌ی تقسیم‌بندی اعداد براساس بخش‌پذیر بودنِ کلیِ آن‌ها اهمیت ندارد.

پیش از این، دو حکم را در مورد بخش‌پذیریِ کلیِ اعداد مطرح کردیم، و در این جا نیز دو مورد دیگر به آن اضافه می‌کنیم که از بررسیِ چند عددِ نخست و مقسوم علیه‌های آن‌ها به دست می‌آید:

برخی اعداد، مثل دو، سه، پنج و هفت، فقط به خودشان و یک بخش‌پذیرند.

برخی اعداد، مثل چهار، شش، هشت و نه، به‌علاوه‌ی خودشان و یک، بر اعداد دیگری هم بخش‌پذیرند.

با این شیوه‌ی تقسیم‌بندی اعداد به دو گروه آن چنان حجمی از مباحث ریاضی مطرح شده است که بخش اعظمِ جلد اوّل و حجیمِ مجموعه‌ی سه جلدیِ مفصل پیرامون تاریخ نظریه‌ی اعداد نوشته‌ی «ال. ای. دیکسون» را به خود اختصاص داده است. اعداد گروه نخست را، که فقط برخود و یک بخش‌پذیرند، در کل «اعداد اوّل» می‌نامند. و چون به سادگی می‌توان اثبات کرد که همه‌ی اعداد گروه دوم، که به جز خودشان و یک بر اعداد دیگری هم بخش‌پذیرند، از ترکیب اعداد اوّل ساخته می‌شوند، این گروه را اعداد مرکب می‌نامیم.

(اگر عدد n مرکب باشد، مطابق تعریف، همه‌ی مقسوم علیه‌های آن بین ۱ تا n هستند. اگر

m کوچکترین مقسوم علیه باشد، پس m باید عددی اوّل باشد زیرا [اگر به جز خودش و یک بر عددی دیگر بخش‌پذیر باشد] نمی‌تواند کوچکترین مقسوم علیه n باشد. به همین روش، می‌توان تمام مقسوم‌علیه‌های n را به اعداد اوّل کاهش داد. وبنابراین ثابت کرد که هر عدد مرکب از اعداد اوّل ساخته می‌شود.)

چند صفحه قبل دیدیم که چگونه می‌توان تمام اعداد بزرگتر از صفر را با اضافه کردنِ متوالیِ عدد یک نمایش داد. حالا می‌بینیم که بعد از صفر و یک (که، به دلیلِ خاص بودن، نه اوّل و نه مرکب محسوب می‌شوند[1]) همه‌ی اعداد را می‌توان با اعداد اوّل و یا ترکیبِ اعداد اوّل نمایش داد:

$۱ + ۱$	$= ۲$	(اوّل)
$۱ + ۱ + ۱$	$= ۳$	(اوّل)
$۱ + ۱ + ۱ + ۱$	$= ۲ \times ۲$	(مرکب)
$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$	$= ۵$	(اوّل)
$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$	$= ۲ \times ۳$	(مرکب)
$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$	$= ۷$	(اوّل)

لازم به گفتن نیست که نحوه‌ی نمایش اعداد به صورتِ جمع یک‌ها در ستون سمت چپ، برای هر عدد، یکتاست. کاملاً بدیهی است که هر عدد را فقط به یک شکل می‌توان به صورت حاصل جمع یک‌ها نشان داد. اگر شش مساوی است با $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$، پس هیچ حالت دیگری وجود ندارد؛ و تالی آن، چه آن را هفت بنامیم و چه عدد تالی شش، نمی‌تواند چیز دیگری باشد به جز $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$.

امّا این که نمایش اعداد در ستون راست به صورت حاصل ضرب هم همیشه یکتاست، آن قدر بدیهی نیست. همان طور که فقط به یک روش نیز می‌توان عدد را به صورت حاصل ضرب

۱) ۱ـ صفر، عدد اوّل نیست زیرا به جز خودش و یک بر بی‌نهایت عدد بخش‌پذیر است، و مرکب نیست زیرا، از آن جا که یکی از عامل‌های آن همیشه خودش است، نمی‌تواند فقط با اعداد اوّل ساخته شود. از نظر فنی، عدد یک، اوّل نیست، زیرا، همان طور که خواهیم دید، اگر اوّل بود آن گاه مهم‌ترین قضیه راجع به اعداد اوّل نقض می‌شد. علاوه بر این، اگرچه یک نیز مثل اعداد اوّل فقط برخودش و یک بخش‌پذیر است، امّا فقط یک مقسوم علیه دارد ولی اعداد اوّل دو مقسوم علیه دارند.

اعداد اوّل نشان داد:

$۶ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$ (و فقط به همین صورت می‌توان نشان داد)

$۶ = ۲ \times ۳$ (این نیز فقط به همین ترتیب قابل نمایش است.)

پس هر عدد فقط به یک طریق از عوامل اوّل ساخته می‌شود.این در مورد هر عددی، چه بزرگ و چه کوچک، صادق است. مثلاً عدد ۱۷۶۴۰ حاصل جمعِ ۱۷۶۴۰ یک است و تجزیه‌ی آن به عوامل اوّل به این صورت است: $۷ \times ۷ \times ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲$. عدد ۱۷۶۴۰ بر هیچ عدد اوّلِ دیگری به جز بر ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نیست. گرچه ممکن است گولِ بزرگی آن را بخوریم و فکر کنیم که به جز این چهار عامل، عوامل اوّل دیگری هم وجود دارند.

فقط یک ترکیب از این چهار عامل اوّل(یعنی سه تا ۲، دو تا ۳، یک ۵ و دو تا ۷) است که ۱۷۶۴۰ را تولید می‌کند. البته، مقسوم علیه‌های متعدد دیگری همچون ۶، ۱۰، ۱۴، ۲۱ و ۳۵ برای این عدد وجود دارند، اما در نهایت همه‌ی آن‌ها را نیز می‌توان به همان چهار عامل اوّل، یعنی ۲، ۳، ۵ و ۷، تجزیه کرد.

نمایش هر عدد به صورت عواملِ اوّلِ آن همیشه یکتاست، درست همان‌طور که نمایش هر عدد به صورت مجموعِ یک‌ها همیشه یکتاست. چند لحظه به اهمیت این حکم فکر کنید. هر عدد آن قدر می‌تواند بزرگ باشد که تا به حال نوشته نشده باشد، آن قدر بزرگ که عمر انسان اجازه‌ی نوشتن آن را بر روی کاغذ ندهد (البته اگر کاغذی به این بلند بالایی وجود داشته باشد)؛ [هر عدد می‌تواند عددی باشد در تعداد بی‌نهایت اعداد]. امّا، از مطالبی که در بالا یاد گرفتیم می‌توانیم در مورد این عدد n، که هر عددی می‌تواند باشد و جالب‌ترین اعداد است، حکم بسیار مهمی بدهیم.

می‌توانیم بگوییم n دارای عوامل اوّلِ مشخص است، که آن‌ها را با $p_۱$، $p_۲ \cdots p_r$ نشان می‌دهیم، و تجزیه‌ی n به عوامل اوّل، ترکیب یکتایی از این عوامل است. عدد اوّلِ $p_۱$ به دفعاتی تکرار شده و ما این دفعات را با $p_۱^{k_۱}$ نشان می‌دهیم؛ تعداد دفعات تکرار $p_۲$ را نیز با $p_۲^{k_۲}$ نشان می‌دهیم؛ و همین‌طور تا پایان. به همان طریق که می‌توانیم بگوییم $۶ = ۲ \times ۳$ و $۱۷۶۴۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷^۲$، می‌توانیم بگوییم که برای هر عدد n، $n = p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} \cdots p_r^{k_r}$ و مطمئین باشیم که این گونه نمایش دادنِ n به وسیله‌ی عواملِ اوّل آن، تنها راه ممکن است. دانستن این موضوع در مطالعه‌ی اعداد

چنان با اهمیت است که قضیه‌ای که آن را بیان می‌کند در سراسر دنیا به عنوانِ قضیه‌ی بنیادیِ حساب پذیرفته شده است.[1]

اثبات این قضیه، که براساسِ آن تجزیه‌ی هر عدد به عوامل اوّل فقط به نحوی یکتا امکان‌پذیر می‌باشد، بر مبنای یک اصلِ ثانویه‌ی ریاضی (یعنی یک «لِم») استوار است که می‌گوید: (هر گاه حاصل ضرب چند عدد بر عددی اوّل بخش‌پذیر باشد دست کم یکی از آن چند عدد بر آن عدد اوّل بخش‌پذیر است) به عنوان مثال از اعدادی که در بالا کنار برده شد عدد ۱۷۶۴۰ با عامل‌های اوّل ۲، ۳، ۵و ۷ باشد که اگر هر یک از این عامل‌ها حاصل ضرب گروهی از اعداد، را عاد کند که حاصل ضربشان برابر ۱۷۶۴۰ شود می‌بایست دست کم یکی از آنها را عاد کند.

در همان مثالِ ۱۷۶۴۰، اگر چند عدد در هم ضرب شوند و ۱۷۶۴۰ را تولید کنند، هر کدام از این اعداد دست کم بر یکی از عامل‌های ۲، ۳، ۵ و یا ۷ بخش‌پذیر است. برای مثال: $۱۷۶۴۰ = ۴۲ \times ۲۸ \times ۱۵$؛ و طبق این لم می‌بینیم که ۲۸ و ۴۲ بر ۲ بخش‌پذیرند، ۱۵ و ۴۲ بر ۳ بخش‌پذیرند، ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است، و ۲۸ و ۴۲ بر ۷ بخش‌پذیرند.

اثبات قضیه‌ی بنیادی حساب نیز خود با برهان خلف صورت می‌گیرد؛ روشی که از زمان اقلیدس تا به امروز مورد علاقه‌ی ریاضیدانان بوده است. در ابتدای کار، برای اثبات قضیه، فرض می‌کنیم که تجزیه‌ی یک عدد به عوامل اوّل، یکتاست.

فرض کنیم عدد n برابر $p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} p_۳^{k_۳} \cdots p_r^{k_r}$ و نیز $q_۱^{l_۱} q_۲^{l_۲} q_۳^{l_۳} \cdots q_s^{l_s}$، که pها و qها دو گروه مجزا از عوامل اوّل هستند. براساس لمی که مطرح کردیم، می‌دانیم از آنجائی که p عدد n را عاد می‌کند. پس در عین حال حاصل ضرب qها را نیز عاد می‌کند، پس باید هر p یک q را عاد کند. از آن جا که qها، مطابق تعریف، عدد اوّل هستند و فقط بر خودشان و یک بخش‌پذیرند، پس هر p باید برابر یک q باشد و برعکس، هر q هم باید برابر با یک p باشد. پس هر دو گروه باید در برگیرنده‌ی اعداد اوّل یکسانی باشند و بنابراین، بر خلاف فرض آغازین ما؛ تجزیه‌ی n به عوامل اوّل یکتاست.

گفته شده است که این قضیه برای علم حساب ضروری است. به یقین حسابدانان آن را بسیار مهم می‌دانند که به خاطر آن عدد یک را جزء مجموعه‌ی اعداد اوّل به حساب نمی‌آورند. زیرا اگر

1) حتا «گاوس» نیز نظریه‌ی اعداد را به عنوان «علم حساب» نگاه می‌کرد، مثلاً در اثر کلاسیک خود « Disquistiotnes Arithmetricae»، و یا گاهی اوقات نیز به عنوان «حسابِ عالی»

یک را اوّل در نظر بگیریم، تجزیه‌ی عدد به عوامل اوّل آن دیگر یگانه نمی‌تواند باشد. آن وقت، به جای این که بتوانیم ۳ × ۲ = ۶ و چیز دیگری امکان پذیر نیست، ناچاریم بپذیریم که تعداد بی‌نهایتی از روش‌های تجزیه‌ی ۶ و هر عدد دیگر به عوامل اوّل آن وجو دارد:

$$۶ = ۲ \times ۳ \times ۱$$

$$۶ = ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۱,$$

$$۶ = ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۱ \times ۱,$$

$$\cdots$$

از آنجا که توسط قضیه‌ی بنیادی می‌دانیم که هر عدد اوّل نمایش یکتا بصورت حاصل ضرب عوامل اوّل می‌باشد، می‌توانیم به همان آسانی که با یک عدد مشخص برخورد می‌کنیم، از عهده‌ی هر عدد n نیز برآییم. به همین دلیل، اغلب می‌توانیم هرچیزی را برای تمام اعداد اثبات کنیم، که در غیر این صورت مجبور می‌شدیم برای هر عدد جداگانه ارائه دهیم و بنابراین هرگز نمی‌توانستیم آن چیز را برای همه‌ی اعداد اثبات کنیم.

مثالی که بطور معمول در این رابطه مطرح می‌شود مربوط به قضیه‌ای است که به طور عمومی بیان می‌کند کدام ریشه‌ها از کدام اعداد، گنگ هستند.

یونانی‌ها کشف و اثبات کردند که جذر ۲ گنگ است (یعنی نمی‌توان آن را به صورت عددی صحیح و یا کسری از اعداد صحیح نشان داد) و به بیان دیگر، عددی گویا(چیزی که معمولاً به آن کسر می‌گوییم) نیست. سپس یک به یک پیش رفتند و گنگ بودن جذر ۳، ۵، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۷ را اثبات کردند- و همین‌جا متوقف شدند(اعدادی که در بین این‌ها حذف شدند، مجذور عددهای کامل بودند). با وجود همه‌ی کوشش‌هایشان، تنها چیزی که اثبات کردند این بود که این چند عدد، در بین اعداد بی‌نهایت، دارای جذر گنگ هستند. آن‌ها در مورد بقیه‌ی ریشه‌های این اعداد(ریشه‌ی دوم، سوم، چهارم وهمین‌طور تا بی‌نهایت) چیزی را اثبات نکردند. امّا اگر از قضیه‌ی بنیادی حساب به عنوان ابزار خود استفاده کنیم، به آسانی و به طور مستقیم

می‌توانیم اثبات کنیم که کدام ریشه از کدام عدد، گنگ است.[1]

اثبات کردن چیزی در مورد یک عدد (که درباره‌ی‌یک، یا دو، یا سه، یا . . .درست باشد)، یا در مورد هر تعداد عدد مشخص، هرگز ثابت نخواهد کرد که آن حکم می‌تواند در کل در مورد همه‌ی اعداد صادق باشد. مسئله‌ی اصلی در مورد اعداد طبیعی این است که باید درستی بعضی حکم‌ها را در مورد آن‌ها ثابت کنیم. بدون این که امکان بررسی حکم را برای تک تک اعداد داشته باشیم. میزان و نحوه‌ی رویارویی انسان‌ها با این مسئله بر این اصل استوار بوده است که «یک» واحد اصلی است.

حتا پس از کشفِ بقیه‌ی اعداد همچنان به آن اهمیت خاصی می‌بخشند. یونانیان در تعریف عدد یک، دشواری‌های زیادی داشتند. زیرا آن شامل منابعی و ویژگی‌هایی بود که توسط آن سری اعداد تعریف می‌شد. « آیا سازنده‌ی اعداد می‌تواند خودش عدد باشد؟» به نظر آن‌ها این امکان‌پذیر نبود. (مطابق مشاهداتِ منطقیِ ارسطو، واحد اندازه‌گیری، اندازه قابل اندازه‌گیری نیست امّا اندازه است، بلکه یک واحدِ منفرد است). بنابراین آن‌ها، در عوض، یک را به عنوان آغازِ، و یا مبنای، عدد تعریف کردند. یک به طور کامل از دیگر اعداد جدا در نظر گرفته می‌شد و آن را اولین عدد فرد نمی‌دانستند (اولین عدد فرد سه بود) بلکه عدد مهمِ « زوج ـ فرد» به حساب می‌آورند.

یک است که شرایط را می‌سازد مجموعه‌ای بی‌نهایت که هر عضو کن با عضو بعدی در همان یک واحد متمایز است. و یک است که سلاح‌های ما را برای مقابله مشخص می‌کند:

هر عدد بر یک بخش‌پذیر است.

هر عدد بر خودش بخش‌پذیر است.

«یک آزمون»

تمام موضوع بخش‌پذیری، پایه و اساس مطالعه‌ی اعداد است. در طول کتاب، به پرسش‌های زیر دقیق‌تر پاسخ خواهیم داد، اما در این جا خواننده می‌تواند به خاطر لذت خودش سعی کند پاسخ

---

1) به بیان مختصر، این قضیه بیان می‌کند که mامین ریشه‌ی N گنگ است مگر این که N، mامین توان عدد صحیح n باشد. به بیان مختصر، امکان ندارد بتوانیم از به توان رساندن یک کسر، یک عدد کامل به دست آوریم- به طور مثال، اگر $\frac{۳}{۲}$ یا هر «کسر صحیح» دیگر را درخودش ضرب کنیم هرگز نمی‌توانیم به عددی کامل برسیم.

آن‌ها را بدهد:

۱) آیا عددی بدون مقسوم علیه وجود دارد؟

۲) چند عدد هستند که فقط یک مقسوم علیه دارند؟

۳) چند عدد هستند که فقط دو مقسوم علیه دارند؟

۴) چند عدد هستند که بی‌نهایت مقسوم علیه دارند؟

۵) آیا عددی هست که مقسوم علیه هیچ عددی نباشد؟

۶) آیا عددی هست که مقسوم علیه همه‌ی اعداد باشد؟

۷) چند عدد هستند که مقسوم علیه بی‌نهایت عدد باشند؟

۸) بزرگ‌ترین عددی که هیچ مقسوم علیهی به جز خودش و یک ندارد چیست؟

۹) چند عدد زوج وجود دارد که فقط دو مقسوم علیه داشته باشند؟

۱۰) بعد از صفر، کدام عدد بیشترین تعداد مقسوم علیه‌ها را دارد؟

«پاسخ‌ها»

۱) خیر.

۲) فقط یک. چون بقیه‌ی اعداد دست کم بر خودشان و یک بخش‌پذیرند.

۳) بی‌نهایت. زیرا اعداد اوّل فقط دو مقسوم علیه دارند و تعداد اعداد اوّل نیز بی‌نهایت است.

۴) فقط صفر. صفر بر همه‌ی اعداد طبیعی بخش‌پذیر است.

۵) بله، صفر. چون فقط مقسوم علیه خودش است.

۶) بله، یک.

۷) بی‌نهایت. چون همه‌ی اعداد، به جز صفر، مقسوم علیه تعداد بی‌نهایت از اعداد هستند.

۸) بزرگ‌ترین عدد وجود ندارد. زیرا اعداد اوّل هیچ مقسوم علیهی به جز خودشان و یک ندارند و می‌دانیم اعداد اوّل بی‌نهایت هستند.

۹) فقط عدد دو. فقط عدد دو است که هم زوج و هم اوّل است.

۱۰) نمی‌توان گفت. زیرا با ضرب کردن هر تعداد عدد اوّل که بخواهیم می‌توانیم عددی با تعداد مقسوم علیه‌های دلخواه به دست آوریم.

حالتِ برعکسِ شعار معروفِ « وحدت از تکثر» که در دل عدد یک جا دارد، همیشه این عدد را از نظر ادیان در بین عددها در جایگاه اوّل قرار داده ست. در قرون وسطی، که عرفان گسترش یافت و ریاضیات تحلیل رفت، عدد یک نمایانگر خداوند خالق، یا همان علت و محرک نخستین، بود. بقیه‌ی اعداد به نسبتی که از یک دور می‌شدند ناقص به حساب می‌آمدند.

دو، که اولین عدد دور از یک بود، به معنیِ گناه بود که از آن خوبِ نخستین منحرف شده بود.

فصل سوم

دو

هیچ وقت معمول نیست که عدد دو را با ۱۰ نشان دهیم؛ امّا می‌توانیم این کار را بکنیم. در سیستم ساده و دقیقِ اعداد به شکل دودویی [=در مبنای دو]، دوبرابر با ده است.

در واقع می‌توان گفت که دستگاه اعداد دودویی در تاریخ خود از نهایتِ بی‌ارزشی به اوج ارزش و منزلت رسیده است. این روش نشأت گرفته از همان روش بدوی انسان‌هاست که تعداد چیزها را به روشی به غیر از جمعِ یک‌ها نشان می‌دادند. مخترعِ آن ریاضی‌دان بزرگی بود که امید داشت به این وسیله بتواند امپراتوری چین را به مسیحیت گرایش دهد. این سیستم تا قرن بیستم فقط یک سرگرمی عجیب و غریب ریاضی محسوب می‌شد. سپس در میانه‌ی آن قرن، با اختراع رایانه، جایگاه اصلی خود را پیدا کرد. نمایش اعداد به وسیله‌ی فقط دو نشانه، یعنی صفر و یک، این امکان را فراهم می‌ساخت که اعداد به آسانی با وضعیت یک سوئیچ، یا با جریان برق، نشان داده شوند: یعنی یا وصل (۱) و یا قطع (۰). به طور تقریبی بلافاصله پس از این امر، یک واژه‌ی جدید به زبان اضافه شد وآن «بیت» بود که از عبارت «رقم دودویی» [= Binary digit] ساخته شده بود- انتخاب مفید و خوشحال کننده‌ای است چرا که کوچک‌ترین واحد ممکن برای اطلاعات را مشخص می‌کند.

دستگاه دودویی، در عین سادگی، نظام عددی به نسبت پیچیده‌ای است و برای نشان دادن ستون خالی از یک نشانه استفاده می‌کند. اولین دستگاه مبنای دو که انسان آن را شناخت، نظام جفتی بود. در آن نظام نیز دو نشانه برای اعداد وجود داشت، یک و دو. بنابراین، سه یعنی یک و دو، چهار یعنی دو و دو، پنج یعنی دو و دو یک. شاید انسان این نظام را با نگاه کردن به اعضای بدن خود دریافت. چشم‌ها، گوش‌ها، دست‌ها، پاها، همگی جفت بودند. اگر چه بالاخره او به خاطر وجود ده انگشت به شمارش ده تایی روی آورد، اما شروع شمارش او دوتا دوتا بود، شاید به این دلیل که دو دست داشت.

نظام جفتی، گرچه بدوی بود (و در واقع بدوی‌ترین نظام بود.) [امّا نیازهای اساسی برای یک دستگاه کارآمد اعداد را برطرف می‌کرد.] این نظام بر مبنای تعداد متناهی نشانه بود (در واقع فقط دو نشانه)، و می‌توانست در نشان دادن هر عددی، هر چقدر هم بزرگ، به کار آید. با این حال، به نظر نمی‌رسد که انسان با این نظام هرگز از عدد پنج فراتر رفته باشد.

دستگاه دودویی نیز مانند نظام جفتی فقط از دو نشانه برای نمایش همه‌ی اعداد استفاده می‌کند. تفاوت این‌جاست که اگرچه نظام جفتی اعداد را بر حسب تعداد دوهایشان می‌نمایاند، امّا دستگاه دودویی آن‌ها را بر حسب «توان»های دو می‌سنجد.

توان دو، مانند هر عدد دیگری، از حاصل ضرب دو در خودش به دست می‌آید. همه‌ی ما با مجذورها و مکعب‌ها، که توان دوم و سوم اعداد هستند، آشنایی داریم و می‌دانیم که عمل ضربی که آن‌ها را تولید می‌کند می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند.

$$۲^۲ = ۲ \times ۲ = ۴,$$

$$۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸,$$

$$۲^۴ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶,$$

$$۲^۵ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۳۲,$$

$$\cdots$$

این اعمال ضرب، حتا با اعداد کوچکی مثل دو، به سرعت به مقادیر نجومی می‌رسند: $۲^۲$ فقط

چهار می‌شود، امّا $۲^{۱۰}$ به هزارها، $۲^{۲۰}$ به میلیون‌ها و $۲^{۴۰}$ (یا به عبارتی دیگر، حاصل ضرب ۴۰ عدد دو در یکدیگر) به میلیون‌ها میلیون می‌رسد. بدیهی است که با استفاده از توان‌های دو می‌توانیم اعداد را بسیار فشرده‌تر از نظام جفتی، و بنابراین کارآمدتر از آن، نشان دهیم. عبارت لازم برای حتا یک عدد کوچک مانند ۳۰ را در نظر بگیرید. این عدد در نظام جفتی این گونه است:

$$۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲$$

امّا همین عدد در دستگاه دودویی این گونه است:

$$۲^{۴}+۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}(=۱۶+۸+۴+۲)$$

دستگاه دودویی نیز درست مانند دستگاه ده‌دهی عمل می‌کند، با این تفاوت که توان‌های ۱۰ با توان‌های ۲ جایگزین شده‌اند:

$$\text{(در مبنای ده)}۱۱۱۱۱ =$$

$$۱۰^{۴}+۱۰^{۳}+۱۰^{۲}+۱۰^{۱}+۱۰^{۰}$$

$$\text{(در مبنای دو)}۱۱۱۱۱ =$$

$$۲^{۴}+۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}+۲^{۰}$$

تفاوت در مبنای دو دستگاه، برای هر یک مزیت و در عین حال نیز نقطه‌ی ضعفی نسبت به دیگری در پی دارد. دستگاه ده‌دهی، به سبب مبنای بزرگ‌تر، قادر است اعداد را به مراتب فشرده‌تر از دستگاه دودویی نشان دهد. همان طور که در بالا می‌بینید، ۱۱۱۱۱ در دستگاه ده‌دهی ۳۵۸ مرتبه بزرگ‌تر از عدد ۳۱ است که معادل آن در دستگاه دودویی ۱۱۱۱۱ می‌شود. امّا دستگاه دودویی، به سبب مبنای کوچک‌تر، قادر است اعداد را با تعداد نشانه‌های کمتری نمایش دهد. این بدان معناست که جدول ضرب مبنای دو کوچک‌تر است و همین یک مزیت بزرگ به حساب می‌آید.

در دستگاه دودویی، نشانه‌ی ۱ یعنی این که در یک ستون، توانی از دو وجود دارد؛ و نشانه‌ی ۰ یعنی این که در ستون چیزی وجود ندارد. همه‌ی آن چه که ما نیاز داریم همین دو نشانه است، زیرا می‌توان هر عددی را به صورت حاصل جمع توان‌های دو و به شکلی یکتا نشان داد. تمامی

اعداد یا به طور دقیق بر دو بخش‌پذیر هستند و یا باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر دو یک می‌شود. از آن جا که صفرمین توان دو یک می‌شود و اولین توانِ آن خودِ دو می‌شود، به راحتا می‌توان دید که توان‌های دو می‌توانند هر عددی را نشان دهند و برای این کار از دو نشانه استفاده می‌کنند که هر یک مشخص می‌کند آیا یک توان خاص در ستون مربوط به خودش وجود دارد یاخیر؟

این موضوع که صفرمین توان دو، برابر با یک است را به آسانی نمی‌توان پذیرفت مگر این که منطق موجود در پس این عبارت به ظاهر غیرمنطقی را بررسی کنیم:

$$۲^{۳} = ۸ = ۲ \times ۲^{۲},$$

$$۲^{۲} = ۴ = ۲ \times ۲^{۱},$$

$$۲^{۱} = ۲ = ۲ \times ۲^{۰},$$

$$۲^{۰} = ۱$$

حتا اگر قسم هم بخوریم که در اصل چنین چیزی را ندیده‌ایم، باید بپذیریم که هر روز با این مفهوم سروکار داریم. در دستگاه آشنای ده‌دهی، مانند دستگاه دودویی، اولین ستون برای صفرمین توان مبنا در نظر گرفته شده است. (یعنی یک‌ها) وقتی این را بپذیریم، باید این ایده را نیز قبول کنیم که در حالی که همه‌ی توان‌های صفر برابر با صفر می‌شوند امّا صفرمین توان صفر برابر با یک می‌شود.

این حقیقت که همه‌ی اعداد را می‌توان فقط با صفر و یک نشان داد، «گوتفرید ویلهلم فون لایبنیتس» (۱۶۴۶_۱۷۱۶)، ابداع کننده‌ی دستگاه دودویی، را مجذوب خود ساخت. وی یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان بود. برای این که از جامع بودن نبوغ او به حیرت بیفتیم باید شرح زندگی‌اش را در کتاب «مردان ریاضیات» نوشته‌ی «ای. تی. بل» بخوانیم. بل می‌نویسد: « جمع شدن توانایی بی‌نظیر در دو حوزه‌ی وسیع و متضاد ریاضی در ذهن یک فرد، یعنی دو حوزه‌ی تحلیلی[1] و ترکیبی[2] ، و یا پیوسته و گسسته، پیش از لایبنیتس و پس از او هرگز تکرار نشد. »

ریاضیات نیز، با این همه گستردگی، برای پرکردن ذهن لایبنیتس کافی نبود. او پروژه‌های غیرریاضی دیگری نیز در دست کار داشت که یکی از آن‌ها ایجاد وحدت مجدد بین کلیسای کاتولیک و پروتستان بود. به نقل از « پی‌یرسیمون لاپلاس» (۱۷۴۹_۱۸۲۷)، که خود ریاضیدانان

1) analytical   2) combinatorial

بزرگی بود، لایبنیتس به هنگام ابداع دستگاه دودویی، در آن «تصویر خلقت را می‌دید. . .او این گونه تصور می‌کرد که این یکتایی نمایان‌گر خدا و صفر نمایان‌گر عدم است؛ وجود متعال، همه‌ی موجودات را از عدم بیرون کشیده است، همان‌گونه که یک و صفر همه‌ی اعداد را در دستگاه [دودویی] اعداد نمایش می‌دهند.»

ماجرا از این قرار بود که لایبنیتس ایده‌ی جدید خود را به یک یسوعی [= یکی از فرقه‌های مسیحیت] که رئیس کرسی حل اختلافات ریاضی در چین بود منتقل کرد و امید داشت که بااین کار بتواند امپراتور چین را مسیحی کند؛ امپراتوری که می‌گفتند بسیار به علوم علاقه‌مند است.

علاقه‌ی لایبنیتس به سادگی و دقت دستگاه دودویی‌اش در بین دیگر ریاضی‌دانان آن زمان شکل نگرفت، زیرا در آن زمان به نظر می‌رسید که این دستگاه چیزی به جز سادگی و دقت ندارد که بتوان استفاده از آن را توصیه کرد. با این حال، حتا در روزگار لایبنیتس هم مردم به طور گسترده از اصل نمایش اعداد به وسیله‌ی توان‌های دو استفاده می‌کردند در حالی که اگر عددی را در دستگاه دودویی می‌دیدند آن را نمی‌فهمیدند. آن‌ها، که دانش حسابشان چنان کم بود که سعی نمی‌کردند اعداد را در عددی به جز دو ضرب کنند، نظام بسیار منظمی برای ضرب کردن به این روش ابداع کرده بودند. در واقع، زمانی ضرب در دو[1] و تقسیم بر دو[2] چنان رایج بودند که در کنار جمع، تفریق، ضرب و تقسیم جزء اعمال اصلی ریاضی به حساب می‌آمدند. ضرب در دو و تقسیم بر دو، که با نام «ضرب دهاتی‌ها» شناخته شده بودند، به این صورت انجام می‌شدند. برای ضرب عدد ۲۹ در ۳۱، ۲۹ را به دو تقسیم کنید و جواب را نیز همین‌طور و این کار را ادامه دهید تا به یک برسید. سپس ۳۱ را به تعداد آن تقسیم‌ها ضرب در دو کنید و جواب این تقسیم‌ها و ضرب‌ها را در دو ستون کنار هم بنویسید. هرکدام از آن مقادیر دو برابر شده را که روبروی یک تقسیم کامل و بدون باقیمانده است

1) duplation 2) meditation

حذف کنید. سپس بقیه‌ی مقادیر دو برابرشده را (با عدد اصلی) جمع بزنید تا جواب به دست آید.

۳۱	۲۹
×	۱۴
۱۲۴	۷
۲۴۸	۳
۴۹۶	۱

۸۹۹	

اگر ۲۹ و ۳۱ را به روش رایج نیز ضرب کنید، حاصل ۸۹۹ خواهد بود.

تنها اگر این فرآیند را در دستگاه دودویی بررسی کنیم می‌توانیم بفهمیم که چرا جواب «ضرب دهاتی‌ها» درست بوده است. تقسیم‌های متوالی ۲۹ به دو، این عدد را به صورت دودویی به ما نشان داده است.

تنها کار لازم این است که مقابل ۲۹، عدد ۱ بگذاریم (چون فرد است)، مقابل همه‌ی نصف کردن‌های اعداد فرد دیگر نیز عدد ۱ و مقابل همه‌ی نصف کردن‌های اعداد زوج ۰ قرار دهیم.

۱	۲۹
۰	۱۴
۱	۷
۱	۳
۱	۱

به سرعت خواهیم دید که ۲۹ در مبنای ۱۰ برابر با ۱۱۱۰۱ در دستگاه دودویی خواهد بود. (در حقیقت این ساده‌ترین روش تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای دو است.) سپس می‌بینیم که مقادیر

دو برابر شده‌ی ۳۱ همان حاصل ضرب توان‌های دو در رقم‌های عدد ۲۹ در مبنای دو است:

$$\begin{array}{ll} ۱ \times ۲^{۰} = ۱ & ۱ \times ۳۱ = ۳۱ \\ ۰ \times ۲^{۱} = ۰ & ۰ \times ۳۱ = ۰ \\ ۱ \times ۲^{۲} = ۴ & ۴ \times ۳۱ = ۱۲۴ \\ ۱ \times ۲^{۳} = ۸ & ۸ \times ۳۱ = ۲۴۸ \\ ۱ \times ۲^{۴} = ۱۶ & ۱۶ \times ۳۱ = ۴۹۶ \\ \overline{۲۹} \times ۳۱ = & \overline{۸۹۹} \end{array}$$

همین عمل ضرب در دستگاه دودویی به این شکل خواهد بود:

$$\begin{array}{r} ۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۰۱ \\ \hline ۱۱۱۱۱ \\ ۰۰۰۰۰ \\ ۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱ \\ \hline ۱۱۱۰۰۰۰۰۱۱= \end{array}$$

$$۲^{۹} + ۲^{۸} + ۲^{۷} + ۲^{۱} + ۲^{۰} =$$

$$۵۱۲ + ۲۵۶ + ۱۲۸ + ۲ + ۱ = ۸۹۹$$

همان‌طور که نشان دادیم، سادگی مبنای دو (این که همه‌ی اعداد در آن به وسیله‌ی ترکیب صفر و یک‌ها نشان داده می‌شوند)، آن را به نظامی ایده‌آل برای کامپیوتر تبدیل کرده است، که کامپیوتر نیز در اصل برگرفته شده از ماشین حساب لاینبیتس است ـ ماشین حسابی که بسیار فراتر از سطح زمانه‌ی خود بود زیرا می‌توانست اعمال ضرب، تقسیم، جذر، جمع و تفریق را انجام دهد.

دلیل آن که کامپیوترها با مبنای دو کار می‌کنند این نیست که نمی‌توانستند آن‌ها را بر اساس مبنای ده بسازند، بلکه این است که با مبنای ده کارایی آن‌ها بسیار پایین‌تر می‌بود. ماشینی را در

نظر بگیرید که با عددی کار می‌کند که تا ۷۵ سال عنوان بزرگ‌ترین عدد اوّل را یدک می‌کشید؛ عددی که علی‌رغم بزرگ بودنش، تنها بر خودش و یک بخش‌پذیر است.

ریاضی‌دانان به هنگام فکرکردن و کار با این عدد آن را به صورت ۱ − ۲^۱۲۷ در نظر می‌گیرند. امّا این عدد در دستگاه ده‌دهی بدین صورت است:

۱۷۰, ۱۴۱, ۱۸۳, ۴۶۰ , ۴۶۹, ۲۳۱, ۷۳۱, ۶۸۷, ۳۰۳, ۷۱۵, ۸۸۴, ۱۰۵, ۷۲۷

و در دستگاه دودویی به شکل زیر است:

۱ ۱

۱ ۱

۱ ۱

[برای نمایش عدد بالا در مبنای ده، ماشین می‌بایست بین ده نشانه‌ی ممکن برای هر جایگاه تمایز قائل می‌شد.] امّا برای نمایش دودویی فقط با دونشانه را از هم متمایز کند.

کارآمدی بالای دستگاه دودویی در محاسبات پرسرعت از این امر ناشی می‌شود که «نشانه‌های» ۱ و ۰ در اصل لزومی ندارد که نشانه باشند. آن‌ها به راحتا می‌توانند جریان الکتریسته باشند؛ وجود شوک الکتریکی برای نشان دادن ۱، به این معنی که توان دو در آن ستون وجود دارد، و وجود نداشتن شوک الکتریکی برای نشان دادن ۰، به این معنی که آن توان دو وجود ندارد.

اگر قرار بود لایبنیتس به جای امپراتور چین، حساب دودویی خود را به طور اختصاصی برای ماشین‌های کامپیوتری امروز ابداع کند، نمی‌توانست روشی بهتر از این اختراع کند. فضای زیادی که اعداد بزرگ دودویی در حافظه اشغال می‌کنند برای ماشین اهمیتی ندارد. البته در زمانی که کامپیوتر به تازگی اختراع شده بود، این موضوع برای کسانی که اعداد را وارد کامپیوتر می‌کردند مهم نبود، و آن‌ها قادر بودند تا از روش دیگری نیز استفاده کنند (مبنای ۱۶) که در آن نمایش اعداد از دستگاه ده‌دهی نیز فشرده‌تر است. (البته امروزه دیگر به این تدبیر نیازی نیست، چرا که اعداد ده‌دهی به طور مستقیم وارد ماشین می‌شوند و ماشین خودش آن‌ها را به مبنای دو تبدیل می‌کند.)

در دستگاه مبنای ۱۶، نمایش اعداد، به جای توان دو و توان ده، با توان ۱۶ افزایش می‌یابد:

$$۱۱۱\ (\text{مبنای دو}) = ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰ = ۷$$

$$۱۱۱\ (\text{مبنای ده}) = ۱۰^۲ + ۱۰^۱ + ۱۰^۰ = ۱۱۱$$

$$۱۱۱\ (\text{مبنای شانزده}) = ۱۶^۲ + ۱۶^۱ + ۱۶^۰ = ۲۷۳$$

مبنای شانزده برای تبدیل از مبنای دو و تبدیل به مبنای دو انتخاب شد، زیرا این مبنا توانی از دو است ($۲^۴$). از آن جا که دستگاه دودویی خود نیز بر اساس دو است، این تبدیل نسبتاً به سادگی انجام می‌پذیرد، و این را می‌توان بامقایسه کردن چند توان نخست دو، در مبنای دو و شانزده مشاهده کرد:

(مبنای ۱۶)	(مبنای ۲)	
۱	۱	$۲^۰$
۲	۱۰	$۲^۱$
۴	۱۰۰	$۲^۲$
۸	۱۰۰۰	$۲^۳$
۱۰	۱۰۰۰۰	$۲^۴$
۲۰	۱۰۰۰۰۰	$۲^۵$
۴۰	۱۰۰۰۰۰۰	$۲^۶$
۸۰	۱۰۰۰۰۰۰۰	$۲^۷$
۱۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	$۲^۸$
...	...	...

اگر چه در مثال بالا روش نمایش در مبنای ۱۶ به طور دقیق شبیه به مبنای ده می‌باشد، امّا همیشه این طور نیست. برای نمایش کامل اعداد در مبنای ۱۶، علاوه بر ده نشانه‌ی مورد استفاده در دستگاه ده‌دهی، به شش نشانه‌ی دیگر نیز نیاز داریم. در آغاز رایج بود که ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵. در این مبنا را با ۶ حرف آخر الفبا نمایش دهند؛ یعنی u برای ۱۰، v برای ۱۱، و .... امّا بعدها شرکت IBM درکامپیوترهای خود از ۶ حرف اوّل الفبا به صورت بزرگ [=، A، B، C، D، E، F] بدین منظور استفاده کرد. بنابراین، xyz و DEF هر دو به معنای

(۱ × ۱۵) + (۱۶ × ۱۴) + (۲۵۶ × ۱۳) در مبنای ۱۶ هستند. این عدد در مبنای ۱۰ برابر با ۳۵۶۷ است.

ما چنان عادت کرده‌ایم فکر کنیم نمایش هر عدد فقط در مبنای ده خود همان عدد « است» که هرگز به ذهنمان نمی‌رسد که وقتی «دو» را به جای ۱۰ نمایش می‌دهیم، این هم به اندازه‌ی همان دویی که می‌شناسیم « دو» است. مبنای ده برتری خاصی نسبت به بقیه‌ی مبناها ندارد. برتری علم حساب مدرن در عدد ۱۰ نیست، بلکه در صفر است. «علم حساب مرتبه‌ای»[1] اغلب با مبناهای دیگر می‌تواند به اندازه‌ی مبنای ۱۰ و یا حتا بیش از آن مؤثر باشد.

در واقع، گفته‌اند که مبنای ده، به استثنای مبنای ۹، شاید بدترین مبنای ممکن برای نمایش مؤثر اعداد باشد. (به این دلیل از ۹ بهتر است که عدد ۹ فقط یک مقسوم علیه دارد امّا عدد ۱۰ دو مقسوم علیه دارد.) عددی مثل ۱۲ که چهار مقسوم علیه دارد، می‌توانست مبنای بسیار کارآمدتری باشد زیرا به آسانی به ۲، ۴، ۳ و ۶ بخش تقسیم می‌شود.

«شمردن با جین» [دوازده تایی] مدافعان زیادی داشته است که برخی از آن‌ها هم افراد بلند پایه‌ی سلطنتی بوده‌اند. (برای شرح کاملی از دلایل استفاده از مبنای ۱۲ به جای مبنای ۱۰ رجوع کنید به: « اعداد جدید» نوشته‌ی «اف. امرسون اندروز»، انتشارات Essenial Books، نیویورک. ۱۹۴۴)

برخی ریاضی‌دانان حتا استفاده از اعداد اوّل را، که فقط به خودشان و یک بخش‌پذیرند، پیشنهاد داده‌اند. بعضی ریاضی دانان هم کار دیگری را ترجیح داده‌اند: چه طور است از دستگاه عددی‌ای بر مبنای یکی از توان‌های دو استفاده کنیم؟

خود دو یا مجذور آن به عنوان مبنا، نمایش اعداد، حتا اعداد به نسبت کوچک را بسیار طولانی می‌کند. از سوی دیگر، دستگاهی بر مبنای توان چهارم دو نیز مستلزم اضافه کردن شش نشانه‌ی جدید است. پس چه طور است سومین توان دو را انتخاب کنیم، یعنی هشت؟ برای بسیاری از افرادی که با اعداد سروکار دارند، دستگاه مبنای هشت فکر بدی به نظر نمی‌رسد. نحوه‌ی نمایش آن تقریباً به همان فشردگی مبنای ۱۰ است، و جدول ضرب آن نیز به طور تقریبی کوچک‌تر است. نصف‌ها، یک‌چهارم‌ها و یک هشتم‌ها نیز به آسانی محاسبه می‌شوند.

1) positional artihmetic

علی‌رغم همه‌ی این بحث‌ها، بعید به نظر می‌رسد که دوازده، یازده، هفت و یا هشت (یا هر عدد دیگری) هرگز بتواند جای ده را به عنوان مبنای رایج برای نمایش اعداد بگیرد. امّا این حقیقت که این اعداد هم می‌توانند به جای ده به کار روند چیزی را به ما یادآوری می‌کنند که ممکن است آن را فراموش کنیم. یک عدد و نشانه‌ی آن، دو چیز متفاوت‌اند. «دو-بودن» را نباید با نشانه‌ی ۲ نمایش داد. چه نشانه‌ی ۲ را از یک دستگاه عددی، به طور مثال در دستگاه دودویی، حذف کرده باشیم؛ چه نشانه‌ی ۲ را به جای استفاده در مبنای ۱۰، برای نشان دادن تعداد توان‌های هشت، هفت، دوازده و یا هر مبنای دیگر به کار ببریم؛ چه در اصل نشانه‌ی ۲ را برداریم و به جای آن نشانه‌ی کاملاً متفاوتی، برای مثال b، بگذاریم. در هر حال، مفهوم عدد دو، یا همان جفت، بودن تغییر می‌ماند. دو همچنان عدد جالبی باقی خواهد ماند.

«مسائلی در حساب دودویی»

انجام دادن حتا ساده‌ترین اعمال بر روی اعداد در مبنایی غیر از ده کمی به تمرین نیاز دارد، امّا موفقیت در انجام این کار احساس رضایت و شادی به شما می‌دهد. در این جا نمونه‌هایی از جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در مبنای دو می‌بینید و پس از آن نیز مسائلی مطرح شده است تا خود شما به آن پاسخ دهید.

۳۳	به عبارتی	۱۰۰۰۰۱	جمع
۱۱+		۱۰۱۱ +	
۴۴		۱۰۱۱۰۰	
۳۰	به عبارتی	۱۱۱۱۰	تفریق
۱۰−		۱۰۱۰ −	
۲۰		۱۰۱۰۰	
۱۱	به عبارتی	۱۰۱۱	ضرب
۳ ×		۱۱ ×	
۳۳		۱۰۱۱	
		۱۰۱۱	
		۱۰۰۰۰۱	

$$\frac{۳}{۰/۳۳۳}\Big|\ ۱/۰۰۰$$ به عبارتی $$\frac{۱۱}{۰/۰۱۰۱۰۱}\Big|\ ۱/۰۰۰۰۰۰۰$$ تقسیم

$$\begin{array}{r} ۱۱ \\ \hline ۱۰۰ \\ ۱۱ \\ \hline ۱۰۰ \\ ۱۱ \\ \hline ۱ \end{array}$$

۱) اعداد ۱۱۰۰۱۰ و ۱۱۱۱ را جمع بزنید.

۲) ۱۱۰۰۱ را از ۱۱۰۱۱۱ تفریق کنید.

۳) ۱۰۱۰ را در ۱۰۱ ضرب کنید.

۴) ۱ را بر ۱۰۱ تقسیم کنید.

«پاسخ‌ها»

۱) ۱۰۰۰۰۰۱ (۶۵ درمبنای ۱۰).

۲) ۱۱۱۱۰ (۳۰ در مبنای ۱۰).

۳) ۱۱۰۰۱۰(۵۰ در مبنای ۱۰).

۴) ۰/۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰۰ (۰/۲ در مبنای ۱۰).

فصل چهارم

سه

سه، عدد جالب توجهی است چرا که نخستین عدد اوّل به معنای رایج کلمه است، و دسته اعداد اوّل نیز جالب‌ترین اعداد هستند.

«جی. اچ. هاردی» یکی از ریاضی‌دانان، چنین گفته است:« فکر نمی‌کنم کسی بتواند بیشتر و عمیق‌تر از آن میزان که من به نظریه‌ی اعداد اوّل علاقمندم، به چیزی علاقه پیدا کند.»

بسیاری از کسانی که ریاضی‌دان حرفه‌ای نیستند نیز به جذابیت‌های اعداد اوّل پی برده‌اند. به هر حال، اعداد اوّل نیز مثل بقیه‌ی اعداد، عدد هستند ـ اعدادی هستند مثل ۲ و ۳ که فقط بر خودشان و یک بخش‌پذیرند. آن‌ها اعدادی هستند که از حاصل‌ضربشان می‌توانیم همه‌ی اعداد را به دست آوریم، و به همین دلیل آن‌ها را اغلب «بلوک‌های سازنده‌ی دستگاه اعداد» می‌نامیم. به جز ۲، بقیه‌ی اعداد اوّل فرد هستند، زیرا همه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از دو بر دو، که خود اوّل است، بخش‌پذیر می‌باشند و بنابراین مرکب به حساب می‌آیند. بنابراین، اگرچه ۳ نخستین عدد اوّل نیست، امّا نخستین عدد اوّل در معنای رایج کلمه است.

تمایز بین دو نوع از اعداد، یعنی آن‌هایی که می‌سازند و آن‌هایی که خود ساخته می‌شوند، نسبتاً دیر به ریاضیات راه پیدا کرد امّا با این حال مفهومی قدیمی است. نخستین تعریف از اعداد اوّل

در «عناصر اقلیدس»، (تقریباً ۳۰۰ پیش از میلاد) آمده است. اگر چه، بسیار پیش‌تر از آن، معلوم شده بود که برخی اعداد خطی هستند(یعنی می‌توان واحدهای آن‌ها را فقط در یک خط مستقیم قرار داد) و برخی اعداد چهارگوشه هستند:

۲ ۳ ۵ ۷ ... امّا ۴ ۶ ۸ ۹...

اعداد خطی، از آن جا که فقط بر خودشان و یک بخش‌پذیرند، فقط به یک آرایش چیده می‌شوند. اعداد چهارگوشه را دست‌کم به دو روش می‌توان نمایش داد، یک خط مستقیم و یا یک چهارگوشه؛ بسیاری از آن‌ها را، مانند ۲۴، می‌توان به صورت چند چهارگوشه‌ی مختلف نشان داد.

این تمایز، چه آن را اوّل- مرکب بنامیم و چه خطی- چهارگوشه، تا زمان‌های اخیر هیچ کاربرد و اهمیتی پیدا نکرده بود. امّا بیش از ۲۰۰۰ سال است که این موضوع ذهن انسان را مشغول کرده است فقط به این دلیل که سؤال‌هایی برمی‌انگیزد که بسیار جذابند امّا پاسخ‌گویی به آن‌ها دشوار است.

بیشتر سؤال‌های ما در مورد اعداد اوّل است. زیرا پاسخ به سؤالات در مورد اعداد اوّل خود به خود به سؤالات ما در مورد اعداد مرکب نیز پاسخ می‌دهد.

نخستین سؤالی که در مورد اعداد اوّل مطرح شد، و نخستین سؤالی که پاسخ هم داده شد، این بود که: « تعداد اعداد اوّل چند تاست؟» سؤال، به بیان دقیق‌تر ریاضی، این است که مجموعه‌ی اعداد اوّل متناهی است یا نامتناهی. پاسخ به این سؤال در میزان جذابیت اعداد اوّل نقش بسزایی دارد. اگر اعداد اوّل متناهی باشند به اندازه‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی جالب توجه نیستند. از نظر تئوری، ما می‌توانیم راجع به یک مجموعه‌ی متناهی اعداد هرچه را که می‌خواهیم فقط با تلاش

فیزیکی به دست آوریم. حتا می‌توانیم بنشینیم و آن‌ها را بشماریم، هر تعدادی که باشند فرقی نمی‌کند، زیرا بالاخره در یک نقطه تمام می‌شوند. بنابراین، چالش یک مجموعه‌ی متناهی فقط فیزیکی است؛ امّا در مورد یک مجموعه‌ی نامتناهی، چالش پیش روی ما ذهنی است.

در مورد اعدادی که به طور منظم و پیش‌بینی‌پذیر در پی هم می‌آیند، به آسانی می‌توان نشان داد که تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کنند. اعداد طبیعی نامتناهی هستند زیرا به هر عدد طبیعی که بخواهیم می‌توانیم یک واحد اضافه کنیم و به یک عدد طبیعی دیگر برسیم. می‌توانیم به هر عدد زوج دو واحد اضافه کنیم و یک عدد زوج دیگر به دست بیاوریم؛ و اعداد فرد نیز به همین ترتیب. آخرین عدد وجود ندارد، آخرین عدد زوج و یا فرد هم وجود ندارد.

امّا پاسخ به این پرسش در مورد اعداد اوّل بسیار دشوارتر است. زیرا در حالی که اعداد طبیعی مثل رشته‌ای از مهره‌ها پشت سرهم می‌آیند و فاصله‌ی هر کدام از قبل و بعدش برابر است، و مهره‌های زوج و فرد نیز بدون استثنا یکی درمیان می‌آیند، امّا مهره‌های اعداد اوّل در ظاهر بدون هیچ الگوی خاصی در رشته‌ی اعداد ظاهر می‌شوند.

اعداد زوج (O) و فرد (X)

$$OXOXOXOXOXOXOXOX\cdots,$$

امّا:

اعداد اوّل (X) و اعداد مرکب (O)

$$\cdots XXOXOXOOOXOXOOOXOXOOOXOO\cdots$$

تقریباً ۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح، اقلیدس درکتاب «عناصر» خود، اثباتی برای نامتناهی بودن اعداد اوّل ارائه کرده است. این اثبات ویژگی و زیبایی خاصی از نظر ریاضی دارد و حتا امروز نیز حسادتی آمیخته با احترام در بین ریاضی‌دانان حرفه‌ای برمی‌انگیزد که از خود می‌پرسند:« آیا اگر تا به حال کسی به این مسئله فکر نکرده بود، این به ذهن من می‌توانست برسد؟»

اقلیدس اهل آتن بود و بیشتر عمر خود را در مدرسه‌ی اسکندریه تدریس کرد که خود نیز از بنیان‌گذاران آن بود. «اچ. وابلیو. ترن بل» درکتاب «ریاضیدانان بزرگ» می‌نویسد: « توصیف او،

آن گونه که به ما رسیده، مردی‌ست نابغه و اهل علم، متواضع و بسیار منصف، همواره حاضر به تحسین آثار خوب دیگران، و به نحو بارزی مهربان و صبور.»

او مردی بود که دوران زندگی خود را وقف اعداد کرد، نه به سبب کاربرد آن‌ها، بلکه به این دلیل که پرجذبه هستند. هنگامی که یکی از شاگردان از او می‌پرسید اثبات یک قضیه چه سودی می‌تواند داشته باشد، او به یکی از خدمتکاران دستور می‌داد تا سکه‌ای به آن شاگرد بدهد« زیرا او باید بابت یادگیری چیزی به دست آورد.»

اثبات نامتناهی بودن اعداد اوّل به دست اقلیدس درست به سادگی اثبات نامتناهی بودن اعداد طبیعی است. اساس کار، این حقیقت ساده است که اگر هر گروهی از اعداد اوّل را در هم ضرب کنیم و عدد n را به عنوان پاسخ به دست آوریم، عددی که بلافاصله بعد از n می‌آید (به زبان ریاضی، $n + ۱$) بر هیچ یک از اعداد اولی که در هم ضرب کردیم بخش‌پذیر نیست. $n + ۱$ یک نیز با خودش عددی اوّل است، و یا عدد مرکبی است که عوامل آن مشتمل بر اعداد اولی است که با عوامل تولید کننده‌ی n متفاوت است. دلیل این امر آن است که به جز یک، که عدد اوّل نیست، هیچ عدد دیگری وجود ندارد که n و $n + ۱$ هر دو بر آن بخش‌پذیر باشند.

اگر هر گروه دلخواه و تصادفی از اعداد اوّل را در هم ضرب کنیم و حاصل را با یک جمع کنیم، خواهیم دید که در هر حال می‌توانیم به یک عدد اوّل جدید برسیم؛ امّا در مورد فهم اثبات اقلیدس از نامتناهی بودن اعداد اوّل، بهتر از همه آن است که به حاصل ضرب گروهی از اعداد متوالی، که با دو و سه شروع می‌شوند، نگاهی بیندازیم:

$۲ \times ۳ = ۶,\ ۶ + ۱ = ۷$ (یک عدد اوّل جدید)

$۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰, ۳۰ + ۱ = ۳۱$ (یک عدد اوّل جدید)

$۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ = ۲۱۰, ۲۱۰ + ۱ = ۲۱۱$ (یک عدد اوّل جدید)

حال اگر به جای اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب «همه‌ی » اعداد اوّل، یک واحد از آن‌ها

کم کنیم نیز نتیجه‌ای مشابه به دست می‌آید:

$$۲ \times ۳ = ۶,\ ۶ - ۱ = ۵ \quad \text{(یک عدد اوّل جدید)}$$

$$۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰, ۳۰ - ۱ = ۲۹ \quad \text{(یک عدد اوّل جدید)}$$

$$۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ = ۲۱۰, ۲۱۰ - ۱ = ۲۰۹$$

که ۲۰۹ نیز خودش عدد اوّل نیست امّا عوامل آن ۱۱ و ۱۹ هستند و این دو عدد در مجموعه‌ی «همه‌ی» اعداد اوّل ما وجود نداشتند.

این بود اثبات اقلیدس از نامتناهی بودن اعداد اوّل. اگر مجموعه‌ای را در نظر بگیریم و آن را «همه‌ی» اعداد اوّل بنامیم، اعداد آن را در هم ضرب کنیم و یک واحد به حاصل اضافه کنیم، همان طورکه دیدیم، یا یک عدد اوّل جدید به دست می‌آوریم و یا عدد مرکبی به دست می‌آوریم که [دست کم] یکی از عوامل آن در مجموعه‌ی «همه‌ی» اعداد اوّل ما وجود نداشت.

پس واضح است که مجموعه‌ی ما شامل همه‌ی اعداد اوّل نبوده است؛ بلکه ما یک عدد اوّل جدید ساخته‌ایم و فرقی نمی‌کند چند عدد اوّل درمجموعه‌ی «همه‌ی» اعداد اوّل خود داشته باشیم، زیرا در هر حال می‌توانیم با این روش یک عدد اوّل جدید اضافه کنیم.

بنابراین، تعداد اعداد اوّل نامتناهی است.

اعداد مرکب نیز نامتناهی هستند. به ازای هر عدد اوّل جدید می‌توانیم یک عدد مرکب جدید بسازیم که تا پیش از آن نداشته‌ایم. در واقع می‌توانیم تعدادی نامتناهی از مجموعه‌های نامتناهی اعداد مرکب بسازیم. یک مثال از نقطه‌ی آغاز اعداد طبیعی کافی خواهد بود تا نشان دهیم چگونه اعداد مرکب فقط با اضافه کردن یک عدد اوّل به مجموعه‌ی اعداد اوّل زیاد می‌شوند. اگر دو را به عنوان تنها عدد اوّل در نظر بگیریم، اعداد مرکب ما فقط توان‌های دو هستند:

۴، که برابر است با ۲×۲

۸، که برابر است با $۲ \times ۲ \times ۲$

۱۶، که برابر است با $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$

...

امّا توجه داشته باشید که توان‌های دو نامتناهی هستند.

با اضافه کردن سه به مجموعه‌ی اعداد اوّل، یک مجموعه‌ی دیگر از اعداد مرکب را نیز به دست می‌آوریم؛ یعنی توان‌های سه:

۹، که برابر است با ۳ × ۳

۲۷، که برابر است با ۳ × ۳ × ۳

۸۱، که برابر است با ۳ × ۳ × ۳ × ۳

...

تعداد اعضای دو مجموعه‌ی بالا نامتناهی است. همچنین با اضافه کردن سه، در واقع یک مجموعه‌ی نامتناهی دیگر هم به اعداد اضافه کرده‌ایم؛ یعنی هر کدام از توان‌های دو که یک بار در سه ضرب شود:

۱۲، که برابر است با ۳ × ۲ × ۲

۲۴، که برابر است با ۳ × ۲ × ۲ × ۲

۴۸، که برابر است با ۳ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲

...

در واقع (البته باید گفت که این مسئله به بیان، ساده است امّا درک عظمت آن دشوار است) با اضافه کردن سه، یا هر عدد اوّل دیگر، به مجموعه‌ی اعداد اوّل، تعدادی نامتناهی از مجموعه‌های نامتناهی به مجموعه‌های اعداد مرکب می‌افزاییم. درست همان طور که هر توان دو را در سه ضرب کردیم، می‌توانیم هر یک از توان‌های دو را به نوبت در توان‌های سه ضرب کنیم که تعداد آن‌ها نیز نامتناهی است.

اینجاست که ناچاریم نفس عمیقی بکشیم و بپذیریم که تعداد اعداد مرکب بسیار زیاد است.

حالا ببینیم تعداد اعداد اوّل در مقایسه با اعداد مرکب چگونه است؟

اعداد اوّل، با دو و سه پیشی می‌گیرند، تا سیزده تعدادشان با مرکب‌ها برابر می‌شود، در هفده عقب

می‌افتند و از این جا به بعد دیگر عقب‌تر و عقب‌تر می‌مانند. آن‌ها به شدت کم‌تر می‌شوند در حالی که اعداد مرکب به سرعت افزایش می‌یابند. در دنباله‌ی نامتناهی اعداد طبیعی مکان‌هایی وجود دارد که یک میلیون، یک میلیارد، یک تریلیون، اصلاً « هر تعدادی که دوست داشته باشیم» اعداد مرکب بی‌وقفه بدون هیچ عدد اولی پشت سرهم می‌آیند. این محل‌ها را «برهوت اعداد اوّل» می‌نامند، و اثبات وجود این زمین‌های بی سکنه به سادگی و بدون کاوش ریاضی امکان‌پذیر است.

«هر تعداد که دوست داشته باشیم» در نظریه‌ی اعداد عبارت محبوبی است؛ و اگر چه بیشتر به لاف و رجزخوانی می‌ماند، امّا در حقیقت این‌گونه نیست. وقتی که می‌گوییم در بین اعداد طبیعی، دنباله‌هایی وجود دارد از هر تعداد عدد مرکب « که دوست داشته باشیم»، منظور ما دقیقاً همین است. به خاطر ساده‌تر کردن بحث، بیایید فرض کنیم که دوست داریم پنج عدد مرکب متوالی داشته باشیم. در ابتدا اعداد یک، تا شش را درهم ضرب می‌کنیم (یعنی یک عدد بیشتر از پنج) و حاصل ضرب آن را، که ۷۲۰ است، به دست می‌آوریم. سپس با اطمینان می‌توانیم بگوییم که پنج عدد متوالی ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵ و ۷۲۶ مرکب هستند. حال ببینیم دلیل ما برای این نتیجه‌گیری چه بوده است.

می‌دانیم که ۷۲۰ بر دو بخش‌پذیر است، زیرا دو یکی از اعداد ضرب شده برای تولید آن بود؛ اگر ۷۲۰ بر دو بخش‌پذیر باشد، پس ۷۲۲ نیز بر دو بخش‌پذیر است. بنابراین ۷۲۲ مرکب است. زیرا غیر از خودش و یک دست کم بر یک عدد دیگری بخش‌پذیر است. از آن جا که ۷۲۰ بر سه بخش‌پذیر است، ۷۲۳ نیز بر سه بخش‌پذیر است؛ به همین ترتیب، ۷۲۴ بر چهار، ۷۲۵ بر پنج؛ و ۷۲۶ بر شش بخش پذیر است. بنابراین، هر تعداد عدد غیراوّل متوالی « که دوست داریم» (و در این مورد پنج تا بود) پیدا کرده‌ایم. در این مورد خاص، ۷۲۱ نیز مرکب است، امّا در کل باید توجه کنیم که عددی که بلافاصله پس از حاصل ضرب ما می‌آید ممکن است اوّل باشد، زیرا، براساس اثباتی که دیدیم، این عدد تا جایی که ما می‌دانیم فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است.

دقیقاً با همین روش، اگر به جای پنج عدد یک میلیون عدد بخواهیم، می‌توانیم دنباله‌ی متوالی از اعداد طبیعی پیدا کنیم که دست کم یک میلیون عدد مرکب بین اعداد اوّل وجود دارد. با این حال هیچ عددی وجود ندارد که اعداد بعد از آن همگی اوّل باشند. از سوی دیگر، اگر چه ما می‌توانیم

وجود هر تعداد عدد مرکب متوالی را «که دوست داشته باشیم» اثبات کنیم، ریاضی‌دانان تا به حال نتوانسته‌اند وجود نقطه‌ای را اثبات کنند که بعد از آن دیگر هیچ جفتی از اعداد اوّل که فاصله‌ی بین آن‌ها فقط یک عدد مرکب باشد وجود نداشته باشد. (دو و سه، که تنها اعداد اولی هستند که عدد مرکبی بین آن‌ها وجود ندارد، گاهی اوقات با نام «دوقلوهای به هم چسبیده» خوانده می‌شوند.)

مانند بسیاری از مجموعه اعداد دیگری که در این کتاب تشریح خواهد شد، رایانه‌ها در زمینه‌ی اعداد اوّل نیز به یاری آمده‌اند و با کمک اپراتورهای خود به «اعداد اوّل دوقلو»ی آن چنان بزرگی دست یافته‌اند که قبلاً حتا کسی فکرش را هم نمی‌کرد. در نخستین ویرایش همین کتاب (۱۹۵۵)، بر طبق یافته‌ها بزرگ‌ترین اعداد اوّل دوقلوی شناخته شده ۱٫۰۰۰٫۰۰۰٫۰۰۹٫۶۴۹ و ۱٫۰۰۰٫۰۰۰٫۰۰۹٫۶۵۱ بودند. در زمان ویرایش چهارم (۱۹۹۲)، این دو عدد به $۱/۷۰۶/۵۹۵ \times ۲^{۱۱۲۳۵} \pm ۱$ افزایش یافتند. که توسط گروهی به نام «the six of Amdahl» در سال ۱۹۸۹ کشف شدند. در مقایسه دوقلوهای سیزده رقمی که در ویرایش نخست به عنوان «بزرگ‌ترین» ظاهر شدند، این دو عدد دارای ۳۳۸۹ رقم هستند. در این ویرایش تصمیم گرفته‌ام که از بزرگ‌ترین دوقلوها حتا نام هم نبرم، زیرا هر چقدر هم که باشند، احتمالاً در یک ماه یا حتا یک هفته دوقلوهایی بزرگ‌تر از آن‌ها کشف خواهد شد. در عوض، در این مورد، مانند همه‌ی موارد دیگر که پیوسته اعداد بزرگ‌تری کشف می‌شود، من خواننده را برای آگاهی از آخرین اکتشافات به اینترنت ارجاع می‌دهم.

«تقریباً همه‌ی» اعداد، مرکب هستند، امّا تعدادی نامتناهی از اعداد اوّل وجود دارد.

اگرچه اغلب تعیین کردن این که یک عدد اوّل است یا مرکب بسیار دشوار است، امّا به سادگی تمام می‌توان عددی «ساخت» که پیشاپیش می‌دانیم مرکب است. ساده است، فقط چند عدد اوّل را در هم ضرب می‌کنیم و بعد یک عدد مرکب در اختیار ماست. چنین کاری را به هیچ وجه نمی‌توانیم با اعداد اوّل انجام دهیم. دلیلش این است که هیچ کس تا به حال نتوانسته است الگوی خاصی در اعداد مشخص کند که همیشه اوّل باشد.

تلاش‌های بسیار زیادی به منظور کشف چنین الگویی برای تولید اعداد اوّل انجام شده، امّا هیچ کدام راه به جایی نبرده است.

پس اصلاً چگونه می‌توانیم بگوییم عددی اوّل است یا نه؟

این نیز یکی از همان سؤالات به ظاهر ساده امّا فریبنده‌ای است که در نظریه‌ی اعداد فراوان یافت می‌شوند. روش کلی برای تشخیص اوّل بودن یک عدد، در تمایز بین اعداد اوّل و مرکب نهفته است: اگر بتوان عددی را تقسیم کرد، دیگر آن عدد اوّل نیست. می‌توانیم اوّل بودن هر عددی را با این آزمایش ساده تشخیص دهیم که آن را بر هر یک از اعداد اوّل کوچک‌تر از ریشه‌ی دومش تقسیم کنیم. دست کم یکی از عوامل اوّل هر عدد باید کوچک‌تر یا مساوی ریشه‌ی دوم آن عدد باشد، زیرا اگر همه‌ی عوامل اوّل از ریشه‌ی دوم آن بزرگ‌تر باشند، حاصل ضرب آن‌ها نیز از خود عدد بزرگ‌تر می‌شود. مثلاً در مورد عدد ۹۷، باید تقسیم را بر دو، سه، پنج و هفت انجام دهیم. اگر ۹۷ بر هیچ یک از این اعداد اوّل بخش‌پذیر نبود، می‌توانیم بگوییم که به جز خودش و یک بر هیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نیست.

گونه‌ای از این تست برای تشخیص اعداد اوّل وجود دارد که با نام «غربال اراتوستن» شناخته شده است. اراتوستن (۲۷۶ـ۱۹۴ ق. م) شهرت خود را مدیون اندازه‌گیری بسیار دقیق و حیرت‌انگیز کره‌ی زمین است. به نظر می‌رسد غربال او نخستین تلاش روشمند برای جدا کردن اعداد اوّل از مرکب بوده باشد، و همه‌ی جدول‌های اعداد اوّل و عوامل اوّل که بعدها ایجاد شد همگی به نوعی بر اساس تعمیم همین روش بوده‌اند. تنظیم کردن چنین جدولی مستلزم کار بسیار زیادی است که همیشه هم نتیجه‌بخش و مورد تقدیر نیست. می‌گویند یکی از همین جدول‌ها، که در ۱۷۷۶ با هزینه‌ی خزانه‌ی سلطنتی اتریش منتشر شد، آن چنان فروش پایینی داشته است که کاغذ آن را جمع‌آوری کرده و در ساخت فشنگ در جنگ با ترکیه استفاده کرده‌اند. با استفاده از غربال اراستوتستن می‌توانیم همه‌ی اعداد اوّل زیر ۱۰۰ را پیدا کنیم. روش کار این‌گونه است که بعد از دو، عددها را دو تا در میان حذف می‌کنیم؛ بعد از سه، سه تا در میان؛ و همین‌طور تا آخر. نتیجه‌ی کار، به صورت جدول زیر است که فقط از اعداد اوّل تشکیل شده است.

X	X	۲	۳	X	۵	X	۷	X	X
X	۱۱	X	۱۳	X	X	X	۱۷	X	۱۹
X	X	X	۲۳	X	X	X	X	X	۲۹
X	۳۱	X	X	X	X	X	۳۷	X	X
X	۴۱	X	۴۳	X	X	X	۴۷	X	X
X	X	X	۵۳	X	X	X	X	X	۵۹
X	۶۱	X	X	X	X	X	۶۷	X	X
X	۷۱	X	۷۳	X	X	X	X	X	۸۹
X	X	X	X	X	X	X	۹۷	X	X

علاوه بر این غربال، که کار پیدا کردن اعداد اوّل در یک محدوده‌ی خاصی و همچنین روش طاقت فرسای تقسیم یک عدد بر تمام مقسوم‌علیه‌های اوّل ممکن را آسان می‌کند، فقط یک روش کلی برای آزمودن اوّل بودن اعداد وجود دارد. این قضیه نه به نام یک ریاضی‌دان بزرگ، بلکه به نام یک دانشجوی جوان شناخته شده است که در نهایت ریاضیات را رها کرد و به تحصیل در رشته‌ی حقوق پرداخت. «جان ویلسون» (۱۷۴۱ـ۱۷۹۳) دانشجوی دانشگاه کمبریج بود. هنگامی که او این قضیه را مطرح ساخت، استادش «ادوارد ورینگ» آن را ثبت کرد و ما از آن به بعد آن را قضیه‌ی ویلسون می‌نامیم:

اگر عدد n بزرگ‌تر از ۱ باشد، آن گاه $(n-۱)! + ۱$ مضربی از n است اگر وتنها اگر n اوّل باشد.

قضیه‌ی ویلسون به طرز زیبا و بدون نقصی عمومی است وهمه جا صدق می‌کند. این قضیه را می‌توان برای آزمون اوّل بودن همه‌ی اعداد استفاده کرد، وهر عددی که از این آزمون بگذرد اوّل است. آزمون‌های کارآمدتر دیگری بر تشخیص اوّل بودن وجود دارد، امّا هیچ کدام از آن‌ها این ویژگی عمومی بودن را دارا نیست.

گمان نمی‌کنیم که ویلسون قضیه‌ی خود را اثبات کرده باشد، بلکه او احتمالاً با کمی محاسبه به آن رسیده است. امروزه می‌دانیم که لایبنیتس هم این قضیه را مطرح کرد. امّا آن را منتشر نکرده بود. بعدها این قضیه را چند ریاضی‌دان بلند آوزاه اثبات کردند، امّا همچنان نام دانشجوی جوانی که نخست آن را طرح کرد برآن باقی ماند. ویلسون، هنگامی که قضیه‌اش اثبات شد، قاضی شده بود؛ و دیگر نمی‌دانیم آیا پس از آن هم به ریاضی خدمتی کرده است یا نه؟

بر اساس قضیه‌ی ویلسون، برای تشخیص اوّل بودن یک عدد، باید ابتدا $(n-۱)!$ را محاسبه کنیم. در واقع این عبارت به معنی حاصل ضرب تمام عددهای پیش از n است. عبارت $n!$ را در ریاضی «عدد فاکتوریل» می‌نامیم. اگر بخواهیم عدد ۷ را بیازماییم، ابتدا باید $(۷-۱)!$ یا همان $۶!$ را به دست آوریم. که حاصل آن برابر با $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ یا ۷۲۰ می‌شود. طبق قضیه‌ی ویلسون، عدد هفت اوّل است اگر و فقط اگر $(n-۱)! + ۱$، یا همان ۷۲۱، بر آن بخش‌پذیر باشد. از آن جا که حاصل تقسیم ۷۲۱ بر هفت، ۱۰۳ می‌شود، پس می‌دانیم که هفت

اوّل است.

اشکال قضیه‌ی ویلسون این است که بیش از آن که کارآمد باشد مختصر و زیباست. دشواری اصلی، اندازه‌ی بزرگ اعداد دخیل در محاسبه نیست (اگرچه آن‌ها به سرعت بزرگ می‌شوند)، بلکه تعداد اعمال مختلفی است که باید انجام دهیم. فقط کافی است زمان لازم برای محاسبه‌ی فاکتوریل یک عدد نسبتاً کوچک مثل ۲۶ را در نظر بگیرید. و یا این که، برای ما جالب است بدانیم عددی مثل

$$۱۷۰,۱۴۱,۱۸۳,۴۶۰,۴۶۹,۲۳۱,۷۳۱,۶۸۷,۳۰۳,۷۱۵,۸۸۴,۱۰۵,۷۲۷$$

اوّل است اگر وتنها اگر عدد

$$۱۷۰,۱۴۱,۱۸۳,۴۶۰,۴۶۹,۲۳۱,۷۳۱,۶۸۷,۳۰۳,۷۱۵,۸۸۴,۱۰۵,۷۲۶! + ۱$$

بر آن بخش‌پذیر باشد؛ امّا حتا نظریه‌ی اعداد نیز، که معروف است به این که برای کارآمد بودن اهمیتی قائل نیست، این اطلاعات را کارآمد و مفید نمی‌داند.

اوّل بودن این عدد نسبتاً طولانی (که اتفاقاً اوّل هم هست) با روشی کاملاً متفاوت مشخص شد. این روش نیز، که توسط «ادوارد لوکاس» (۱۸۴۲_۱۸۹۱) ابداع شد، مانند روش ویلسون اعداد اوّل را بدون امتحان کردن مقسوم علیه‌های ممکن مشخص می‌کند. به همین دلیل، ممکن است متوجه شویم عددی اوّل نیست و بنابراین به جز خودش و یک بر عددی دیگر هم بخش‌پذیر است، امّا با این حال ندانیم بر چه عددی بخش‌پذیر است.

بنا به گفته‌ی لوکاس، عدد N به صورت $۲^n - ۱$، وقتی $n > ۲$، اوّل است اگر و تنها اگر $(n-۱)$امین جمله‌ی دنباله‌ای که جمله‌ی اوّل آن ۴، جمله‌ی دوم آن مجذور اولی منهای دو، جمله‌ی سوم آن مجذور دومی منهای دو و . . .است بر N بخش‌پذیر باشد ـ درواقع، این دنباله به شکل ۴، ۱۴، ۱۹۴، ۳۷۶۳۴. . .می‌باشد. در این روش، برای بررسی اوّل بودن عدد ۷ باید $(n-۱)$امین جمله از این دنباله را به هفت تقسیم کنیم. با این حساب، $n = ۳$ و بنابراین $n - ۱ = ۲$؛ دومین جمله‌ی دنباله‌ی ما ۱۴ بود و می‌بینیم که ۱۴ بر هفت بخش‌پذیر است، پس هفت اوّل است. برای بررسی دومین عدد با این صورت، که $۲^۴ - ۱ = ۱۵$ است، باید سومین

جمله‌ی دنباله، یعنی ۱۹۴، را بر ۱۵تقسیم کنیم و می‌بینیم که تقسیم ما دارای باقیمانده است، پس ۱۵ عددی مرکب است. امّا عدد بعدی، یعنی ۳۱، مقسوم علیه ۳۷۶۳۴است و بنابراین اوّل است.

در مورد عددی مثل ۱ − $۲^{۱۲۷}$، حتا روش لوکاس نیز نسبتاً غیر قابل انجام می‌شود؛ زیرا باید ۱۲۶امین جمله‌ی دنباله را بر عدد

۱۷۰, ۱۴۱, ۱۸۳, ۴۶۰, ۴۶۹, ۲۳۱, ۷۳۱, ۶۸۷, ۳۰۳, ۷۱۵, ۸۸۴, ۱۰۵, ۷۲۷

تقسیم کنیم تا اوّل بودن آن مشخص گردد. برای اعدادی با این اندازه لوکاس راه میانبری ابداع کرد. او به جای این که هر جمله‌ی دنباله را به توان دو برساند، پس از این که آن را بر عدد مورد آزمون تقسیم می‌کرد باقیمانده را به توان دو می‌رساند. با استفاده از این راه میانبرد، در همان زمانی که روش جدید خود را معرفی کرد. اعلام کرد عدد ۱ − $۲^{۱۲۷}$ را آزموده و فهمیده است که اوّل است.

این راه میانبر به ویژه برای محاسبات ماشینی مناسب است. در سال ۱۹۵۲ این روش در نخستین آزمون موفق اوّل بودن اعداد توسط کامپیوتر استفاده شد که در فصل «شش» راجع به آن صحبت خواهیم کرد. بزرگترین عددی که اوّل بودن آن از این طریق اثبات شد، ۱ − $۲^{۲۲۸۱}$ بود. این عدد در مبنای دو به صورت ۲۲۸۱ رقم یک نمایش داده می‌شود.

در گذشته رایج بود که برای ملموس‌تر کردن اندازه‌ی اعداد اوّل، آن‌ها را با مقادیر بزرگ مقایسه می‌کردند و می‌گفتند که مثلاً این عدد چند برابر این یا آن چیز است. امّا ۱ − $۲^{۲۲۸۱}$ آن چنان بزرگ است که آن را نمی‌توانیم حتا با عدد بزرگی مثل تعداد الکترون‌ها در جهان مقایسه کنیم. مجذور تعداد الکترون‌ها در جهان (یعنی عدد بسیار بزرگی که در آن به جای هر الکترون، دنیایی از الکترون قرار داده شده) را می‌توان با عدد اوّل نسبتاً کوچک ۱ − $۲^{۵۲۱}$ مقایسه کرد.

شاید برای بسیاری از خوانندگان اندکی هیجان‌آور است که بدانند این عدد نی، با تمام بزرگی‌اش، مانند ۳ فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است. امّا درست همان‌طور که خیلی‌ها به یک کوه نگاه می‌کنند و ضرورتی برای فتح آن احساس نمی‌کنند، و حتا احساس ضرورت دیگران را نیز درک نمی‌کنند، بسیاری از ما نیز اعداد بزرگ را می‌بینیم و اصلاً کنجکاوی نمی‌کنیم که آیا این عدد اوّل هستند یا مرکب. آن چه که برخی افراد را وادار به بررسی اوّل بودن اعداد بزرگ می‌کند احتمالاً همان تأثیری است که در وجود یک فرد می‌نشیند و او را وادار به کار خطیر بالا رفتن از کوه می‌کند.

کوهنوردی معروف، در پاسخ به این که چرا قصد دارد از قله‌ای بالا برود، گفت: « به خاطر این که آن کوه وجود دارد.»

خوشبختانه این به نفع نظریه‌ی اعداد تمام می‌شود که کسانی هستند که اعداد را فقط و فقط به خاطر اوّل بودن می‌آزمایند. بیشتر آن چه که اکنون به طور عمومی در مورد همه‌ی اعداد اوّل می‌دانیم، در ابتدا از طریق کار گسترده بر روی اعداد اوّل منفرد پایه‌گذاری شده است. با این حال، جالب‌تر این است که به جای یک کوه خاص، در مورد کوه‌ها به طور کل اطلاعات کسب کنیم. ابداع آزمونی عمومی برای اوّل بودن اعداد بسیار جالب‌تر از تشخیص اوّل بودن یک عدد خاص است، آن عدد هر چقدر هم که می‌خواهد بزرگ باشد. اگر الگویی بی‌کم و کاست برای تولید اعداد اوّل وجود داشته باشد، این حقیقت بسیار جالب‌تر از خود آن الگو وا عداد اوّل تولید شده در آن است. بسیار جالب‌تر از این حقیقت که یک عدد بسیار بسیار بزرگ می‌تواند اوّل باشد این است که هیچ انتهایی برای اعداد اوّل وجود ندارد ـ و این موضوع از همان زمان‌های دور، هنگامی که انسان به سختی می‌توانست اعداد بسیار بزرگ را نمایش دهد، اثبات شده بود.

این نظریه‌ی اعداد اوّل به عنوان یک مجموعه‌ی نامتناهی، و نه اعداد اوّل منفرد، بود که جی. اچ. هاردی این گونه از آن سخن گفت: « فکر نمی‌کنم کسی بتواند بیشتر و عمیق‌تر از آن میزان که من به نظریه‌ی اعداد اوّل علاقمندم، به چیزی علاقه پیدا کند.»

«توان‌های سه»

اگر سه وزنه برابر با سه توان نخست عدد سه (یعنی ۱، ۳و ۹) در اختیار داشته باشیم و مجاز باشیم وزنه‌ها رادر هر کفه از ترازو بگذاریم تا تعادل را برقرار کنیم، می‌توایم هر وزنی را از ۱ تا ۱۳ اندازه‌گیری کنیم. در شکل زیر، مربع □ نشان دهنده‌ی مقداری است که می‌خواهیم وزن کنیم و دایره ○نمایانگر وزنه‌های ماست:

	چپ			راست	
$\boxed{1}$			1		
$\boxed{2}$	1		3		
$\boxed{3}$			3		
$\boxed{4}$			3	3	
$\boxed{5}$	1	3	9		
$\boxed{6}$	3		9		
$\boxed{7}$	3		9	1	
$\boxed{8}$	1		9		
$\boxed{9}$			9		
$\boxed{10}$			9	1	
$\boxed{11}$	1		9	3	
$\boxed{12}$			9	3	
$\boxed{13}$			9	3	1

۱) اگر با همین شرایط، چهار توان نخست سه را به صورت وزنه در اختیار داشته باشیم، تا چند کیلوگرم را می‌توانیم وزن کشی کنیم؟

۲) اگر پنج توان نخست سه را داشته باشیم چه طور؟

۳) با دانستن مقدار وزنی که به ترتیب با سه، چهار و پنج توان نخست سه می‌توانید اندازه بگیرید، آیا می‌توانید قاعده‌ای کلی را برای میزان وزنی که می‌توانید با n توان نخست سه اندازه بگیرید به دست آورید؟

«پاسخ‌ها»

۱) با چهار توان می‌توان تا ۴۰ کیلوگرم (به علاوه‌ی خود ۴۰) را اندازه گرفت.

۲) با پنج توان می‌توان تا ۱۲۱ کیلوگرم (به علاوه‌ی خود ۱۲۱) را اندازه گرفت.

۳) قاعده‌ی کلی به صورت $\frac{۳^n - ۱}{۲}$ است که در آن n تعداد توان‌های ۳ است که به عنوان وزنه استفاده کرده‌ایم.

فصل پنجم

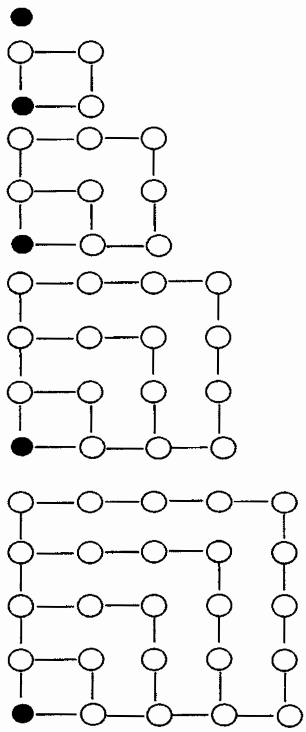
چهار

دو دو تا چهارتا. این جالب‌ترین حقیقت در مورد عدد چهار است، و از حق هم نگذریم واقعاً جالب است. اگر ازمقادیر کم اهمیت 0^2 و 1^2 چشم‌پوشی کنیم، عدد چهار اولین مجذور کامل در بین اعداد است. چهار برابر است با 2^2.

تقارن عدد چهار دارای اهمیت زیادی است. یکی از نخستین و پایدارترین تصورات از اعداد راجع به عدد چهار بود که آن را «عدد زمین» می‌دانستند. هنوز هم که هنوز است، بادهای چهارگانه و عناصر چهارگانه و همچنین چهارگوشه‌ی زمین در ذهن ما وجود دارد. مدت‌ها از اثبات گردبودن زمین می‌گذرد امّا چهار در بسیاری از اصطلاحات رایج همچنان آثاری از زمانی را در خود دارد که مردم گمان می‌کردند زمین مسطح و چهار گوش است.

کلمه‌ی مربع [= مجذور، توان دوم] را نخستین بار یونانیان برای اعداد به کار بردند، زیرا آنان به چشم هندسه به اعداد نگاه می‌کردند. اعداد مربع از نظر آنان اعدادی بودند که بتوان واحدهای آن‌ها را به صورت شکل‌هایی چهار ضلعی با اضلاع برابر نشان داد. بر طبق افسانه‌ها، نمایش اعداد از طریق چنین شکل‌هایی نخستین بار با فیثاغورسیان آغاز شد. آنان با سنگ ریزه‌های ساحل شکل انسان‌ها، حیوانات و اشکال هندسی را می‌ساختند و تعداد کل سنگ ریزه‌ها را به هر شکل

نسبت می‌دادند. آن‌ها متوجه شدند اعدادی که شکل مربع دارند به چند روش جالب با بقیه‌ی اعداد در ارتباطند. به طور مثال، هر مربع، حاصل جمع اعداد فرد متوالی است؛ و به این نحو است که می‌توان همه‌ی مربع‌ها را لایه لایه از یک واحد ساخت و بالا رفت. به علاوه، هر مربع، حاصل ضرب یکی از اعداد طبیعی در خودش است.



$$= ۱ = ۱ \times ۱ = ۱^{۲}$$

$$= ۱ + ۳ = ۲ \times ۲ = ۲^{۲}$$

$$= ۱ + ۳ + ۵ = ۳ \times ۳ = ۳^{۲}$$

$$= ۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۴ \times ۴ = ۴^{۲}$$

$$= ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ = ۵ \times ۵ = ۵^{۲}$$

شکل ۳ـ۱

دیگر مدت‌هاست که مجذور اعداد را به جای واحدهای هندسی با نماد $n^{۲}$ نشان می‌دهیم، امّا لفظ مربع [square=] که میراث یونانی‌هاست همچنان بر آن‌ها باقی مانده است.

با این حال، روابطی که در بالا مطرح شد آن چیزی نیست که عدد چهار و مجذورهای دیگر را با گذشت بیش از ۲۰۰۰ سال همچنان جذاب باقی گذاشته است. این‌ها اگر چه برای مردمانی که با دیدی نو به چیزها نگاه می‌کردند جاذبه داشت، امّا به سادگی قابل فهم و اثبات هستند.

امّا باید توجه داشت که دشواری در فهم و اثبات روابط بین مجذورها و دیگر اعداد، تنها ملاک برای جالب بودن از نظر ریاضی نیست. حال، رابطه‌ی حیرت‌آوری را بررسی می‌کنیم بین

این مجذورها و اعداد طبیعی که فقط با نگاه کردن می‌توان به آن پی برد و چنان بدیهی است که به ساده‌ترین نحو اثبات می‌شود.

هر عدد دارای یک مجذور است. و این حقیقت حتا به اثبات هم نیازی ندارد، زیرا آن را می‌توان از تعریف مجذور به عنوان حاصل ضرب هر عدد در خودش فهمید. پس اگر عدد دارای یک مجذور است، تعداد مجذورها نیز، مانند تعداد اعداد، نامتناهی است. این موضوع را یونانی‌ها می‌دانستند. این بسیار ساده‌تر و قابل درک‌تر از مسئله‌ی نامتناهی بودن اعداد اوّل بود، و حال آن که یونانی‌ها نامتناهی بودن اعداد اوّل را نیز اثبات کرده بودند.

امّا این حقیقت که مجذورها نیز، مانند خود اعداد، نامتناهی هستند برای یونانی‌ها و ریاضی‌دانان پس از آن‌ها تا زمان گالیله (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) معنای خاصی نداشت.

درست است که دانشنامه‌ی «بریتانیکا» از گالیله به عنوان منجم و فیلسوف تجربی نام می‌برد (و ما نیز درکل او را با این عنوان می‌شناسیم)، امّا او در حقیقت استاد ریاضی بود. مجذورها و اعداد طبیعی، که هر دو نامتناهی بودند، برای او متضمن رابطه‌هایی بودند که بیش از ۲۰۰۰ سال پس از مرگش اساس پایه‌ریزی نظریه‌ی بی‌نهایت بود. با این اشاره‌ی مختصر، ممکن است خواننده بخواهد مشتاقانه بداند که آیا او نیز می‌تواند این رابطه‌ی نهفته در اعداد زیر را پیدا کند:

۰	$۰^۲$	۰
۱	$۱^۲$	۱
۲	$۲^۲$	۴
۳	$۳^۲$	۹
...	...	...

چیزی که گالیله فهمید این بود که با اعداد طبیعی می‌توانیم مجذورها را «بشماریم». صفرمین مجذور، صفر است؛ اولی یک است؛ دومی چهار است؛ سومی نه است؛ تا آخر. هر چه پیش می‌رویم، اختلاف بین اعداد و مجذورها بیشتر می‌شود. مثلاً دهمین مجذور برابر با ۱۰۰ است. امّا نکته‌ی مهم این جاست که مجذورها هرگز تمام نمی‌شوند. به ازای هر عدد طبیعی یک مجذور وجود دارد. مجموعه‌ی مجذورها با مجموعه‌ی اعداد طبیعی تناظر یک به یک دارند، درست به همان طریقی

که در ابتدای بحث خود در این کتاب، دو گرگ را با بال‌های یک پرنده تناظر یک به یک دادیم.

امّا این جا یک تفاوت وجود دارد؛ و آن این که گرگ‌ها و بال‌های پرنده متناهی بودند و در مثال ما دقیقاً دو عدد از هر کدام وجود داشت. عددها و مجذورها نامتناهی هستند. امّا ظاهراً تعداد اعداد از تعداد مجذورها بسیار بیشتر است، زیرا هر چه به سمت اعداد بزرگ‌تر می‌رویم، تعداد مجذورها کمتر و کمتر می‌شود. برای این کار لازم نیست زیاد به سمت اعداد بزرگ برویم، بلکه از همین آغاز می‌توان آن را فهمید:

$$\boxed{0}, \boxed{1}, ۲, ۳, \boxed{4}, ۵, ۶, ۷, ۸, \boxed{9}, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, \boxed{16}, \cdots$$

چگونگی حل این مشکل را گالیله در کتاب «مباحثات و برهان‌های ریاضی» از زبان شخصیتی به نام «سالویاتوس» مطرح می‌کند. پس از بیان مطلبی که در بالا گفتیم، یعنی این که هر مجذور را می‌توان با یک عدد طبیعی به صورت یک به یک متناظر کرد، سالویاتوس به نتیجه‌ی زیر می‌رسد:

> « به نظرم تنها تصمیم قابل قبول این است که بگوییم همه‌ی اعداد نامتناهی هستند؛ مجذورها هم نامتناهی هستند؛ و تعداد مجذورها از اعداد نه کمتر است ونه بیشتر؛ در نتیجه، ویژگی‌های تساوی، کمتر بودن و بیشتر بودن برای بی‌نهایت‌ها معنا پیدا نمی‌کند بلکه فقط در مقادیر متناهی معنادار است. »

این نتیجه گیری گالیله منجر به یکی از مهم‌ترین تعاریف ریاضیات جدید شده است. بر اساس آن چه گالیله از روابط بین مجذورها و اعداد فهمید می‌توانیم بگوییم:

یک مجموعه را نامتناهی می‌گوییم وقتی که بتوان بین اعضای آن و بخشی از اعضای آن رابطه‌ی تناظر یک به یک برقرار کرد.

این تعریف، درست همان‌طور که در مورد مجموعه‌ی اعداد طبیعی صدق می‌کند، درباره‌ی مجموعه نامتناهی مجذورها نیز صادق است. اگر مجذورها را به زوج و فرد تقسیم کنیم، خواهیم دید که می‌توانیم اعضای این دو زیرمجموعه را در تناظر یک به یک اعضای کل مجذورها قرار دهیم.

همه‌ی مجذورها	مجذورهای فرد	مجذورهای زوج
۰	۱	۰
۱	۹	۴
۴	۲۵	۱۶
۹	۴۹	۳۶
۱۶	۸۱	۶۴
...	...	...

مجذورها هرگز تمام نمی‌شوند؛ همین‌طور مجذورهای زوج و فرد نیز تمام نخواهند شد. با اطمینان خاطر می‌توان گفت که مجذورها پایان ناپذیرند.

البته مسائل پیرامون مجذورها نیز پایان‌ناپذیرند. حتا اگر این مسائل به صورت یک مجموعه‌ی به هم مرتبط هم نبودند، باز هم مسائل منفرد به اندازه‌ی کافی وجود داشت تا ریاضی‌دانان را قرن‌های متمادی به خود مشغول کند، و از شواهد پیداست که این مسائل همچنان آن‌ها را به خود معطوف خواهد ساخت. یک نمونه‌ی مناسب در این جا، مسئله‌ایست مرتبط با قضیه‌ای که بدون شک شناخته شده‌ترین قضیه‌ی ریاضیات است:

مجذور وتر مثلث قائم الزاویه برابر است با حاصل جمع مجذور دو ضلع دیگر

این قضیه، که بانام فیثاغورس شناخته شده است، یا توسط خود او یا یکی از پیروانش که تقریباً ۵۰۰ سال پیش از میلاد می‌زیست (مطرح و اثبات گردید). این نیز مانند بیشتر اصل‌های یونانیان در مورد اعداد، در ارتباط با هندسه بود؛ با این حال، یک مسئله‌ی جالب حساب را مطرح می‌کرد. در بین اعداد کامل، کدام اعداد می‌توانند جواب‌های معادله‌ی زیر باشند؟

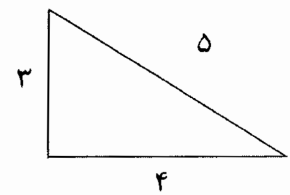
$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

یکی از جواب‌ها را مدت‌هاست که می‌دانیم. داستانی هست که می‌گوید مصریان برای ساخت اهرام یک طناب را با سه، چهار و پنج واحد نشانه‌گذاری کردند تا آن‌ها به صورت قائم الزاویه ساخته شوند. البته این فقط یک افسانه‌ی ریاضی است. آن طور که ریاضی‌دانان نشان داده‌اند، روش

ساده‌تری (در EuclidI در ۱۱) وجود دارد.

$$۳^{۲} + ۴^{۲} = ۵^{۲}$$

$$۳^{۲} + ۴^{۲} = ۵^{۲}$$



شکل ۳ـ۱

راهی وجود دارد که بتوان همه‌ی پاسخ‌های اولیه‌ی ممکن به این مسئله را تصدیق کرد. این را احتمالاً فیثاغورسیان نیز می‌دانستند، امّا مسائل مثلث قائم الزاویه همچنان ادامه داشت. پس از شناخته شدن مثلث قائم الزاویه با اضلاع عدد صحیح، مثلث فیثاغورس، به سبب ارتباطش با مجذورها، تا قرن‌ها سبب ایجاد مسئله‌های بی‌شماری گردید که اگرچه از طریق هندسی بیان می‌شدند، امّا در واقع به حساب مربوط بودند. تقریباً هفت قرن پس از فیثاغورس، این قبیل مسائل، در کنار مسائل پرشمار دیگری پیرامون مجذورها و توان‌های بیشتر از دو، توسط مردی به نام «دیوفانتوس اسکندریانی» در کتاب کوچکی جمع‌آوری شد؛ مردی که نامش تا ابد با مجذورها پیوند خورد.

دیوفانتوس یک یونانی بود که علاقه‌ای غیریونانی به چیزی خیلی شبیه به جبر داشت. به جز مسائلی که مطرح کرد، چیز زیادی درباره‌ی وی نمی‌دانیم. در حقیقت اطلاعات ما از او آن‌قدر اندک است که زمان زندگی او را از این طریق تخمین می‌زنیم که کدام افراد در نوشته‌های خود به آثار او ارجاع داده‌اند یا نداده‌اند. سنگ مزار او، که آخرین مسئله را مطرح می‌کند، همه‌ی اطلاعاتمان در مورد زندگی شخصی او را به ما داده است:

« آن چه می‌بینید مقبره‌ای است که باقیمانده‌ی جسم دیوفانتوس را در خود دارد، و جالب توجه است: زیرا هنرمندانه دوره‌های زندگی او را به ما می‌گوید. خداوند یک ششم زندگی او را به کودکی و نوجوانی‌اش اختصاص داد. پس یک دوازدهم

دیگر، موهای صورتش ظاهر شد. پس از یک هفتم دیگر، او همسر اختیارکرد، و پس از پنج سال صاحب پسری گردید. نام او «الاس» بود، پسری گرامی امّا بداقبال؛ او به اندازه‌ی نیمی از عمر پدر خود زیست و این کار تقدیر بی‌رحم بود، و پدرش در چهار سال باقی‌مانده‌ی عمر خویش، بر غم و اندوه خویش فائق آمد. و این گونه است که این تمهیدات اعداد، طول عمر وی را به ما می‌گویند.»

اگر x را سال‌های زندگی دیوفانتوس در نظر بگیریم، مسئله‌ی ما معادله‌ای خواهد بود که مجهول آن x است:

$$\frac{x}{۶} + \frac{x}{۱۲} + \frac{x}{۷} + ۵ + \frac{x}{۲} + ۴ = x^*$$

این از آن نوع مسئله‌هایی نیست که به مسائل دیوفانتوسی شهرت دارند؛ بلکه مسئله‌ای $x^* = ۸۴$ست ساده که در آن فقط یک مقدار ممکن برای x وجود دارد. یکی از مسائل رایج‌تر دیوفانتوسی، همان مسئله‌ی کهن مثلث فیثاغورس است: یعنی پیدا کردن اعداد کاملی که معادله‌ی $a^۲ + b^۲ = c^۲$ را حل می‌کنند.

مجذورها، به خصوص آن‌هایی که مربوط به این مسئله بودند، بسیار مورد توجه و علاقه‌ی دیوفانتوس بودند. به ویژه یکی از مسئله‌های او بسیار جالب توجه است زیرا، همان طورکه خواهیم دید، فرضیه‌ای را برانگیخت که دشوارترین فرضیه برای اثبات در طول تاریخ نظریه‌ی اعداد بوده است؛ یا این که دست کم به دشواری مشهور است. این مسئله تحت عنوان مسئله‌ی شماره‌ی ۸ درکتاب دوم از رساله‌ی «حساب» دیوفانتوس آمده است: « بخش کردن یک مربع مشخص به دو مربع دیگر.» این یعنی که بگوییم، «مربع وتر یک مثلث قائم‌الزاویه را داریم؛ مربع دو ضلع دیگر آن را بیابید.» ـ در واقع یکی دیگر از انواع به ظاهر بی‌شمار همان مسئله‌ی قدیمی است.

این مسئله در «حساب»، و دیگر مسائل از این دست، تا قرن‌ها مورد خواندن و بحث و مجادله بودند، تا این که نسخه‌ی ترجمه‌ی شده‌ی آن به دست مردی رسید که تقدیر رقم زده بود. چرا که دیوفانتوس اسکندریانی، کسی که قرن سوم پس از میلاد درگذشت، تقریباً ۱۴۰۰ سال بعد، این افتخار را داشت تا مردی را با اعداد آشنا سازد که بعدها پدر نظریه‌ی جدید اعداد نام گرفت.

پی‌یر فرما[1] (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵)، هنگامی که یک نسخه از رساله‌ی «حساب» را به دست آورد،

$x^* = ۸۴$) ۱ 1) Pierre Fermat

وکیلی سی‌ساله، پرکار و موفق بود. تا آن زمان، او ظاهراً فقط علاقه‌ای سطحی به اعداد نشان داده و این کار از نظر سنی برای او دیگر کمی دیر به نظر می‌رسید. بخش عمده و ارزشمند ریاضی اغلب به دست جوانان، و گاهی افراد بسیار جوان، ایجاد شده است. ما معمولاً از شاعرانی شنیده‌ایم که در جوانی از دنیا رفته‌اند و نامشان در ادبیات جاودانه مانده است؛ مثلاً کریستوفر مارلو ۲۹ ساله بود؛ شلی ۳۰ ساله؛ کیتز ۲۶ ساله. امّا بعضی از ریاضی‌دان‌ها جوان‌تر از آن‌ها مرده‌اند.

«گالوا»[1] وقتی در یک دوئل در پاریس کشته شد ۲۰ ساله بود؛ و «ابیل»[2] نیز ۲۷ ساله بود که در فقر کامل در نروژ از دنیا رفت. هر دو آن‌ها آن‌قدر کار ارزشمند در ریاضیات به جا گذاشتند که شهرتی همیشگی در تاریخ این علم به دست آوردند. حتا ریاضی‌دانانی که عمر طبیعی و طولانی دارند نیز اغلب باید این حقیقت را بپذیرند که بهترین کارهای خود را در زمان جوانی انجام داده‌اند. «کارل فریدریش گاؤس » که در زمان خود (و همچنین امروز) با لقب «شاهزاده‌ی ریاضی‌دان» شناخته شده بود، در سن ۷۸ سالگی از دنیا رفت؛ امّا کتاب « Disquistiones Arithmeticae» را، که شاهکار او محسوب می‌شود، بین ۱۸ تا ۲۱ سالگی نوشت. آن روز که «فرما» کتاب «حساب» دیوفانتوس را برداشت و اولین تصور از جذابیت اعداد را در ذهن خود شکل داد، از همه‌ی این ریاضی‌دانان (یعنی گالوا و ابیل که در جوانی مردند، وگاؤس هنگامی که کتاب Disquistiones را می‌نوشت) سن بیشتری داشت.

می‌گویند فرما نخستین کسی بوده است که به درون اعداد رخنه کرده است. او که وکیل بود و از نظر تخصصی یک ریاضی‌دان آماتور محسوب می‌شد، ازکتاب «جی ال کولیج»[3] با عنوان «آماتورهای بزرگ در ریاضیات» حذف شده است زیرا، همان طورکه «کولیج» می‌نویسد، « او آن قدر جایگاه والایی داشت که باید در زمره‌ی ریاضی‌دانان حرفه‌ای به حسابش آورد.»

فرما، که وکیل پرمشغله‌ای بود، در اوقات فراغت بر روی مسائل قدیمی دیوفانتوس کار می‌کرد. این مسئله‌ها معمولاً یک جواب را از خواننده می‌خواستند، امّا فرما ادامه می‌داد و اغلب روش‌هایی برای مشخص کردن تمامی جواب‌های ممکن ارائه می‌کرد. گاهی اوقات این مسائل، قضایایی کلی را به ذهن او می‌رساند که بیان‌گر روابطی عمیق و نامکشوف بین اعداد بودند. با این حال، فرما، در مقام یک ریاضی‌دان، ویژگی منحصر به فردی داشت. اگرچه او قضایای خود را در نامه‌های خود

1) Galois 2) Abel 3) J. L. Coolidge

به دوستانش بیان می‌کرد و یا در حاشیه‌ی کتاب دیوفانتوس می‌نوشت، امّا تقریباً هیچ گاه اثباتی برای آن‌ها ارائه نمی‌داد. ظاهراً هیچ دلیل خاصی برای این کار او وجود نداشته است. شاید او نیز، مانند بیشتر ریاضی‌دانان، برای چیزهایی که سعی در اثبات آن‌ها داشته ارزش بیشتری قائل بوده است تا برای چیزهایی که آن‌ها را اثبات کرده است.

در رابطه با مسئله‌ی شماره‌ی ۸ از کتاب دوم رساله‌ی « حساب»، فرما یادداشتی ویژه در حاشیه‌ی کتاب یادداشت کرده است. در مورد این یادداشت گفته‌اند که اگر حاشیه‌ی رساله‌ی «حساب» کمی عریض‌تر بود، تاریخ ریاضیات کاملاً تغییر می‌کرد. مسئله‌ی ۸، که تقریباً با کمی تفاوت آن را در بالا بیان کردیم، این است: « بخش کردن یک مربع به دو مربع.» فرما عمیقاً به مجذورها و نیز توان‌های بزرگ‌تر از دو علاقه داشت. مسئله‌ی مجذورها در ذهن او مسئله‌ی بسیار کلی‌تری را ایجاد کرد که همه‌ی توان‌ها را در بر می‌گرفت.

او در حاشیه کتاب کنار مسئله‌ی ۸ می‌نویسد:« از سوی دیگر، محال است که بتوانیم توان سوم را به دو توان سه، و یا توان چهارم را به دو توان چهار، و یا به طور کل هر توانی به جز دو را به دو بخش با همان توان قسمت کنیم. من برای این اثباتی حقیقتاً جالب یافته‌ام که البته حاشیه‌ی کتاب جای نوشتن آن را ندارد.»

حرف فرما در حاشیه‌ی کتاب دیوفانتوس درواقع بیان این مطلب است که معادله‌ی $a^n+b^n = c^n$ را به ازای $n > ۲$ با هیچ عدد صحیح مثبتی نمی‌توان حل کرد؛ یعنی همان قضیه‌ی فیثاغورس که در آن $n = ۲$.

نسخه‌ی رساله‌ی «حساب» فرما شامل بسیاری ارجاعات دیگر به چنین اثبات‌هایی است که هرگز ارائه نشده‌اند. این ارجاعات در نامه‌های فرما به دوستان اهل ریاضی‌اش حتا بیشتر هم هستند. عجیب است که او برای قضیه‌هایی که این قدر مشتاقانه مطرح می‌کرد هیچ اثباتی به دوستانش ارائه نمی‌کرد، امّا عجیب‌تر آن است که آن‌ها نیز هرگز از او درخواست اثبات نمی‌کردند. اگر هر کس دیگری به جز فرما بود، احتمالاً قضیه‌های او از سوی ریاضی‌دانان آینده نادیده گرفته می‌شد، چرا که یک قضیه بدون اثبات اصلاً جزء ریاضی محسوب نمی‌شود. در واقع، حتا نمی‌توان نام قضیه برآن گذاشت، یک قضیه‌ی ریاضی عبارت است از فرضیه‌ای که اثبات شده است. امّا فرما نه تنها

یکی از تیزبین‌ترین ریاضی‌دانان طول تاریخ بود، بلکه در صداقت او نیز ذره‌ای نمی‌توان تردید کرد. به جز در این یک مورد خاص، هر جای دیگر که او ادعای اثبات قضیه‌ای را کرده است، پس از مدتی (معمولاً مدتی بسیار طولانی) اثباتی برای آن پیدا شده است. فقط این قضیه، که از دیرباز به اسم « آخرین قضیه‌ی فرما» شهرت دارد (گرچه نه آخرین است ونه در واقع قضیه است بلکه فرضیه‌ای بیش نیست) همچنان بدون اثبات مانده است.

البته تلاش‌های زیادی در این راه انجام شده است. تقریباً همه‌ی آکادمی‌های صاحب نام گاه گاهی برای اثبات این قضیه جایزه‌ای در نظر گرفته‌اند. و تقریباً بیشتر ریاضی‌دانان بزرگ پس از فرما سعی در اثبات آن داشته‌اند. تنها گاؤس بود که از این کار سرباز زد، و بیان کرد که او نیز خود به شخصه می‌تواند فرضیه‌های ریاضیاتی بسیار زیادی را مطرح کند که کسی نتواند آن‌ها را اثبات یا رد کند.

هر از چندگاهی شایعه‌ای در دنیای ریاضی می‌پیچد که یکی از اعضای آن موفق به اثبات «قضیه‌ی» فرما شده است. در ۱۹۸۸ روزنامه‌ی «نیویورک تایمز» خبری منتشر کرد مبنی بر این که یک ریاضی‌دان ژاپنی به این کار نائل آمده است. امّا این نیز مانند همه‌ی موارد قبلی ادعایی بیش نبود.

موارد خاص بسیاری از قضیه به اثبات رسیده است. مثلاً با قطعیت مشخص شده است که برای اعداد اوّل n کوچک تر از ۱۵۰٫۰۰۰ این «قضیه» صادق است. به بیان دیگر، به ازای هر n اوّل بین ۳ تا ۱۵۰٫۰۰۰ نمی‌توان معادله‌ی $a^n + b^n = c^n$ را حل کرد. با استفاده از این می‌توان به طور ضمنی، و فقط به طور ضمنی، نشان داد که فرما به درستی می‌گوید که به ازای $n > ۲$ این معادله با اعداد صحیح مثبت غیر قابل حل است.

البته، موضوع جالب توجه این نبود که آیا قضیه‌ی فرما درست است یا خیر؛ بلکه این بود که آیا او در مورد اثبات آن راست می‌گوید. آیا به راستی او قادر بود در قرن هفدهم قضیه‌ای را اثبات کند که، علی‌رغم تلاش‌های فراوان، هیچ ریاضی‌دانی تا سه قرن آینده قادر به اثبات آن نباشد؟

گمان بر این بود که «آخرین قضیه‌ی فرما» درست است امّا او به اشتباه فکر می‌کرده که می‌تواند آن را اثبات کند. از نظر ریاضی، ظاهراً دیگر اهمیت زیادی نداشت که آیا این قضیه اثبات شده

است یا خیر. این قضیه به نوبه‌ی خود سهمش را به ریاضی ادا کرده بود، زیرا بسیاری سلاح‌های ارزشمند ریاضیات جدید به منظور حمله به فرضیه‌ی فرما ساخته شد، که این حملات بدون استثناء ناموفق از آب در آمدند.

«اریک تمپل بل»[1]، ریاضی‌دان و نویسنده‌ی مشهور در زمینه‌ی ریاضی، که عمیقاً بر این باور بود که فرما برای قضیه‌ی خود اثبات داشته است، واپسین سال‌های زندگی خود را صرف نوشتن تاریخچه‌ای با نام «آخرین مسئله » کرد.

او در کاتولوگ تبلیغ کتاب این گونه نوشت: « فرض کنید عصر ما، که عصر اتم است، با فاجعه‌ای بزرگ روبه پایان باشد. از میان مسائلی که نژاد انسان سعی در حل آن‌ها داشته، کدام‌ها همچنان پس از فرارسیدن تاری و تیرگی باقی خواهد ماند؟»

در نگاه او، اغلب مسائل «بزرگ» یا بیش از اندازه مبهم و یا بیش از اندازه کلی هستند و نمی‌توان آن‌ها را به عنوان «آخرین مسئله» در نظر گرفت. پیشنهاد او مسئله‌ای بود که «هرکسی حتا با تحصیلات ابتدایی نیز آن را درک کند. »

«بل» باقی عمر خود را بر روی «آخرین مسئله» کارکرد، و بابت کتاب خود که در شرف اتمام بود روی تخت بیمارستانش قراردادی امضاء کرد. ۱۵ روز بعد، در ۲۰ دسامبر ۱۹۶۰، او درگذشت.

چند سال بعد، نسخه‌ی انگلیسی کتاب به دست دانش آموزی ده ساله درکمبریج به نام «اندرو وایلز»[2] (۱۹۵۳) افتاد. در ۲۵ اکتبر ۱۹۹۴، وایلز اعلام کرد که آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات کرده است و یک بخش کوچک امّا مهم از اثبات خود را مدیون «ریچارد تیلور»[3] (۱۹۶۲) است. این اثبات، پس از اصلاح اشتباهی که در آن بود، تقریباً شامل ۴۰ صفحه استدلال موشکافانه بود؛ امّا سرانجام پس از ماه‌ها بررسی دقیق از سوی جامعه‌ی ریاضی پذیرفته شد:

معادله‌ی $a^n + b^n = c^n$ به ازای $n >$ ۲ دارای هیچ جوابی در اعداد صحیح نیست.

برای برخی از طرفداران نظریه‌ی قدیمی اعداد، اثبات طول ودراز و دیرهنگام آخرین قضیه‌ی فرما کمی نا امید کننده بود. آن‌ها می‌گفتند:« انتظار داشتیم که ساده‌تر از این باشد.» امّا همگی بر یک چیز توافق نظر داشتند: اگر هم فرما اثباتی برای این قضیه داشته، قطعاً چیزی غیر از اثبات اندرو

1) Eric Temple Bell 2) Andrew Wiles 3) Richard L. Taylor

وایلز بوده است!

پی یر فرما موضوعات بسیار جالبی را در مورد مجذورها اثبات کرد. « قضیه‌ی دومجذور» او، که بسیار مشهور است در هر بحثی پیرامون زیبایی‌های ریاضی از آن سخن می‌رود، بیان می‌کند که هر عدد اولی (مانند پنج) به شکل $۴n + ۱$ را همیشه می‌توان به صورت حاصل جمع دو مجذور نمایش داد، امّا هیچ عدد اولی (مانند سه) به شکل $۴n - ۱$ را نمی‌توان این گونه نمایش داد. از آن جا که همه‌ی اعداد اوّل بزرگ‌تر از دو به یکی از این دو شکل هستند، این حکم در مورد اعداد اوّل بسیار ژرف و عمیق است.

این یکی از معدود قضایایی است که فرما روش کار خود را دقیقاً شرح داده است و این روش را «روش نزول بی‌نهایت» نامیده است.

اوکارخود را با این فرض شروع می‌کند که عدد اولی به شکل $۴n + ۱$ وجود دارد که نمی‌توان آن را به صورت حاصل جمع دو مجذور نشان داد؛ سپس اثبات می‌کند که اگر چنین عدد اولی وجود داشت، باید عدد اوّل کوچک‌تری نیز وجود می‌داشت که نتوان به صورت حاصل جمع دو مجذور نشان داد؛ و همین‌طور ادامه می‌دهد تا به پنج می‌رسد، یعنی کوچک‌ترین عدد اولی که به صورت $۴n + ۱$ است. از آن جا که پنج را می‌توان به صورت حاصل جمع دو مجذور نشان داد ($۲^۲ + ۱^۲$)، بدیهی است که فرض اولیه‌ی ما نادرست می‌شود و قضیه به این ترتیب درست است. (حتا با این کمک فرما نیز قضیه‌ی دو مجذور تا تقریباً دویست سال پس از مرگ او اثبات نشد.)

بر حسب اتفاق، اعداد اوّل $۴n + ۱$ رابطه‌ی جالبی با مسئله‌ی قدیمی مثلث قائم الزاویه دارند. فرما همچنین قضیه‌ی دیگری را اثبات کرد که مطابق آن «یک عدد اوّل به شکل $۴n + ۱$ فقط می‌تواند وتر یک مثلث قائم الزاویه باشد؛ مجذور این عدد می‌تواند وتر دو مثلث باشد؛ توان سوم این عدد می‌تواند وتر سه مثلث باشد؛ و الی آخر.» به عنوان مثال، برای عدد پنج خواهیم داشت:

$$۵^۲ = ۳^۲ + ۴^۲,$$

$$۲۵^۲ = ۱۵^۲ + ۲۰^۲ \text{ و نیز } ۷^۲ + ۲۴^۲$$

$$۱۲۵^۲ = ۷۵^۲ + ۱۰۰^۲ \text{ و نیز } ۳۵^۲ + ۱۲۰^۲ \text{ و نیز } ۴۴^۲ + ۱۱۷^۲.$$

جالب این جاست که پی‌یر فرما، که مطالب بسیار جالبی در مورد مجذورها و بقیه‌ی اعداد اثبات

کرد، از طریق مسئله‌ای مشهور شده که به احتمال قریب به یقین او آن را اثبات نکرده است. از این نظر، او ما را به یاد گالیله می‌اندازد که حرف‌های جالب بسیار زیادی زد امّا ما فقط او را با این می‌شناسیم که پافشاری می‌کرد.

زندگی گالیله و فرما در فاصله‌ی سال‌های ۱۶۰۱ تا ۱۶۴۲ با هم همزمان بود: یکی در فرانسه به شدت مشغول سپری کردن روزهای یکنواخت وکالت؛ و دیگری در ایتالیا، در محکمه‌ی دادگاه تفتیش عقاید، در معرض تهدید به شکنجه و ناچار به انکار کردن عمیق‌ترین باورهای علمی خود بود. آن‌ها زندگانی متفاوتی از هم داشتند؛ امّا هر دوی آن‌ها، مانند بسیاری از ریاضی‌دانان پیش و پس از خود، دریافتند که مجذورها اعداد بسیار جالبی هستند.

«مسئله‌ها»

هیچ چیز نمی‌تواند انسان را بیشتر از این مشغول کند که بخواهد همه‌ی اعداد را با چهار عدد ۴ نشان دهد. هر چهار عدد ۴ باید برای همه‌ی اعداد استفاده شوند، امّا مانند مثال‌های زیر می‌توان از اعمال ریاضی مختلفی استفاده کرد:

$$۱ = \frac{۴۴}{۴۴}$$

$$۲ = \frac{۴ \times ۴}{۴ + ۴}$$

$$۳ = ۴ - (\frac{۴}{۴})^۴$$

$$۴ = ۴ + ۴ - \sqrt{۴} - \sqrt{۴}$$

حالا شما سعی کنید اعداد پنج تا دوازده را با چهار عدد چهار نشان دهید.

«پاسخ‌ها»

یکی از جواب‌های ممکن به این صورت است.

$$۵ = ۴ + (\frac{۴}{۴})^۴ \qquad ۶ = \frac{۴ + ۴ + ۴}{\sqrt{۴}} \qquad ۷ = ۴ + ۴ - \frac{۴}{۴}$$

$$۸ = ۴ \times ۴ - ۴ - ۴ \qquad ۹ = ۴ + ۴ + \frac{۴}{۴} \qquad ۱۰ = \frac{۴۴ - ۴}{۴}$$

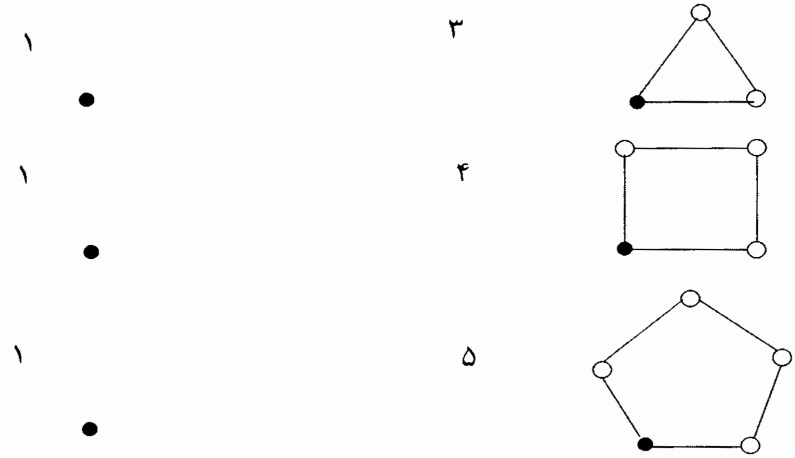
$$۱۱ = \frac{۴۴}{\sqrt{۴ \times ۴}} \qquad ۱۲ = \frac{۴۴ + ۴}{۴}$$

لزومی ندارد به دوازده اکتفا کنیم؛ زیرا اگر در اعمال ریاضی مورد استفاده محدودیتی نداشته باشیم می‌توانیم «همه‌ی » اعداد را با حهار عدد چهار نمایش دهیم.

فصل ششم

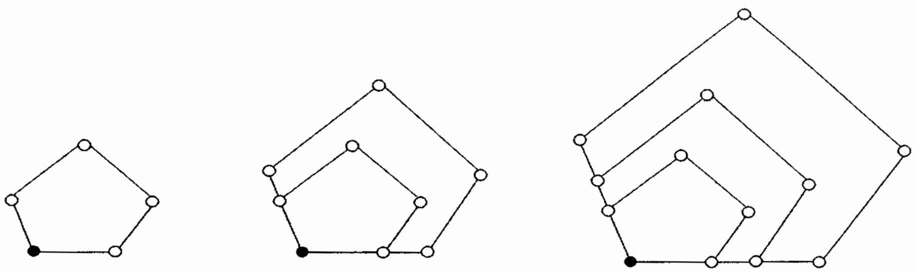
پنج

یکی از جالب‌ترین موضوعات در مورد اعداد طبیعی این است که با وجود این که تغییری در آن‌ها رخ نمی‌دهد اما همیشه این قابلیت را دارند که ما را شگفت زده کنند. یک نمونه‌ی مناسب که گواه این حرف باشد، اعداد پنج ضلعی است؛ یعنی اعدادی که می‌توان به شکل پنج ضلعی نمایش داد. فیثاغورسیان علاقه‌ی زیادی به شکل پنج داشتند، زیرا در یک پنج ضلعی منتظم می‌توانستند «مثلث سه بار در هم پیچیده» را رسم کنند؛ این شکل، ستاره‌ای با پنج راس بود که در نظام فکری آنان نماد شناخت بود. با این حال، برای آن‌ها اعداد پنج ضلعی نیز یک گروه از گروه‌های نامتناهی اعداد چند ضلعی بودند که دارای جذابیت فراوانی بودند. این اعداد با سه به شکل مثلث، چهار به شکل مربع و پنج به شکل پنج ضلعی شروع می‌شد و تا بی‌نهایت در اعداد طبیعی ادامه می‌یافت. زیرا یونانیان این رابطه‌ی بدیهی اما اساساً دور از دسترس را دریافته بودند که «بعد از سه، تعداد راس‌های هر عدد با تعداد واحدهایش برابر است.» سپس متوجه شدند که می‌توان با اضافه کردن یک ردیف واحد دیگر به هر چند ضلعی بزرگتر با همان تعداد اضلاع به دست آورد. از آن‌جا که در این نحوه‌ی رسم ردیف به ردیف، عدد یک نقطه‌ی شروع بود.



شکل ۲ـ۱

در نتیجه یک را در هرگروه به عنوان اولین چندضلعی در نظر می‌گرفتند. در مورد عدد پنج به طور مثال، پنج ضلعی‌های پشت‌سرهم از یک نقطه مانند شکل زیر شروع می‌شدند:



شکل ۷ـ۱

بنابراین، پنج، مصداق اصلی اعداد پنج ضلعی بود، زیراواحدهایش به تعداد رأس‌هایش بود، امّا یک اولین این اعداد بود. دوازده عدد نخست پنج ضلعی به شرح زیرند:

$$۱, ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ۷۰, ۹۲, ۱۱۷, ۱۴۵, ۱۷۶, ۲۱۰, \dots$$

از آن جا که یکی از آزمون‌های استاندارد هوش ریاضی، توانایی رفتن الگویی دنباله‌هایی مانند این دنباله است، ممکن است خواننده بخواهد تلاش کند تا عدد بعدی را در دنباله پیدا کند. این عدد،

سیزدهمین عدد پنج ضلعی است. برای این کار بیشتر از یک راه وجود دارد.

راه نخست این است که از یک شروع کنیم و اعداد را دو تا در میان جمع می‌زنیم تا به سیزدهمین عدد برسیم. همان طور که در فصل «چهار» دیدیم، مجذورها حاصل جمع پیوسته‌ی اعداد یک در میان پس از یک هستند. حالا می‌بینیم که اعداد پنج ضلعی نیز حاصل جمع پیوسته‌ی هر دو عدد در میان پس از یک هستند(اعداد شش ضلعی، هر سه عدد درمیان و ...)

$$\#۱ = ۱ = ۱ \text{ پنج ضلعی}$$

$$\#۲ = ۱ + ۴ = ۵$$

$$\#۳ = ۱ + ۴ + ۷ = ۱۲$$

$$\#۴ = ۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ = ۲۲$$

$$\vdots$$

$$\#۱۲ = ۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ + ۱۳ + ۱۶ + ۱۹ + ۲۲ + ۲۵ + ۲۸ + ۳۱ + ۳۴ = ۲۱۰$$

بنابراین برای بدست آوردن سیزدهمین عدد پنج ضلعی، عدد ۳۷ (یعنی ۳ + ۳۴) را به دوازدهمین عدد پنج ضلعی اضافه می‌کنیم که حاصل عدد ۲۴۷ می‌شود.

راه دوم برای رسیدن به سیزدهمین عدد پنج ضلعی راهی مستقیم‌تر است امّا نیازمند دانستن فرمول عمومی برای به دست آوردن هر عدد چندضلعی است. به زبان ریاضی، هر عدد چندضلعی را nامین عدد r ضلعی می‌دانیم. در این جا مابه دنبال ۱۳امین عدد ۵ ضلعی هستیم. در رابطه‌ی زیر، حرف n دارای مقدار ۱۳ و حرف r برابر با ۵ است:

$$p_n^r = \frac{n}{۲}[۲ + (n - ۱)(r - ۲)] \quad \text{یا} \; n + (r - ۲)n\frac{(n - ۱)}{۲}$$

$$\text{۱۳امین عدد ۵ ضلعی یا } = ۱۳ + \text{یا } ۳۸ \times \frac{۱۳}{۲} = ۱۳ + (۳ \times ۷۸) = ۲۴۷$$

یونانیان نیز، مانند بسیاری افراد دیگر پس از آن‌ها که نخستین بار در اعداد دقیق شدند، نحوه‌ی ساخت و رابطه‌ی بین اعداد چندضلعی را بسیار جالب دانستند. ریاضی‌دانان حرفه‌ای‌تر، با داشتن فرمول فوق که از طریق آن می‌توان هر عدد چندضلعی در هر مرتبه‌ای را به دست آورد، تمایل دارند

تا ارزش این اعداد را نادیده بگیرند و آن‌ها را فقط مورد علاقه‌ی ریاضی‌دانان تازه کار بدانند. امّا هیچ کس نمی‌تواند اعدادی را که پی‌یر فرما جالب می‌دانست، بدون جذابیت قلمداد کند. فرما اعداد طبیعی را با همان علاقه و انگیزه‌ی ناب یونانیان می‌نگریست، امّا در مورد اعداد چندضلعی او فراتر از روابط سطحی‌ای رفت که کنجکاوی یونانیان را برانگیخته بود، و بنابراین بین اعداد چندضلعی و همه‌ی اعداد رابطه‌ای را کشف کرد که یونانیان هرگز در رؤیا هم نمی‌دیدند.

فرما، باز هم در حاشیه‌ی نسخه‌ی کپی کتاب دیوفانتوس خود، می‌نویسد:

> «هر عدد، یا مثلثی است و یامجموع دو یا سه عدد مثلثی؛ یا مربع است و یامجموعه دو، سه یا چهار عدد مربعی؛ یا پنج ضلعی است و یامجموع دو، سه، چهار یا پنج عدد پنج ضلعی؛ و الی آخر.»

زیبایی قضیه‌ی او در عبارات « هرعدد» و «الی آخر» نهفته است. این قضیه کاملاً کلی است. این قضیه چیزی در مورد همه‌ی اعداد و همه‌ی اعداد پنج ضلعی به ما می‌گوید، و چیزی که می‌گوید به هیچ عنوان بدیهی و آشکار نیست.

جی. وی. آسپنسکی[1] و ام. ای. هیزلت[2] که درکتاب خود «نظریه‌ی اعداد مقدماتی» علاقه‌ی یونانیان به اعداد چند ضلعی را کم اهمیت می‌دانند، با احترام تمام در مورد قضیه‌ی فرما می‌گویند: « این واقعاً یک ویژگی نهفته در ژرفای اعداد است. »

این که هر عدد می‌تواند به صورت حاصل جمع یک تا پنج عدد پنج ضلعی نمایش داده شود بیان‌گر رابطه‌ای غیر منتظره بین این اعداد پنج ضلعی و همه‌ی اعداد طبیعی است. با این حال، پس از آن کشفی دیگر انجام شد که به مراتب شگفت‌انگیزتر بود.

این بار کاشف این موضوع، یک ریاضی‌دان آماتور، حتا مانند فرما آماتور و بلند آوازه، نبود. او لئونهارد اویلر (۱۷۰۷_۱۷۸۳) بود؛ یکی از حرفه‌ای‌ترین و بی‌شک پرکارترین ریاضی‌دانانی که تاکنون زندگی کرده است. او اگرچه در ۱۷ سال پایان عمر خود تقریباً به طورکامل نابینا شد، امّا در طول ۷۶ سال زندگی تقریباً در همه‌ی زمینه‌های ریاضی وارد شد و آن‌ها را نسبت به زمان پیش از خود سروسامان بیشتری داد.

1) J. V. Uspensky 2) M. A. Heaselet

یکی از نکات منحصر به فرد در مورد اویلر این بود که او دقیقاً کارهایی را انجام می‌داد که مورد نیاز ریاضی بود (چه کارهای بدیع و بزرگ، و چه کارهای کوچک و جانبی که به کارهای بزرگ کمک می‌کند.) چیزی که در زمان اویلر بسیار مورد نیاز بود(و ما نیز به خصوص به آن علاقمندیم) در مطالعه‌ی افرازها نهفته بود. در این بخش، که کسی انتظار نداشت اعداد پنج ضلعی در آن ایفای نقش کنند، اویلر ردپای این اعداد را پیدا کرد.

در نظریه‌ی افرازها ما به بررسی تعداد راه‌هایی می‌پردازیم که می‌توان یک عدد را به وسیله‌ی مجموع بخش‌هایش (= جمع وندهایش) نمایش داد. افرازها را می‌توان به جمع‌وندهایی خاص محدود کرد (مثلاً جمع‌وندهای فرد و یا جمع‌وندهایی با ویژگی‌هایی خاص)، امّا اغلب افرازهای نامحدود را در نظر می‌گیرند. به طور مثال، به چند طریق می‌توان عدد پنج را به صورت مجموع اعداد یک، دو، سه، چهار و پنج نمایش داد؟

$$۵ = ۵$$

$$۵ = ۴ + ۱$$

$$۵ = ۳ + ۲$$

$$۵ = ۳ + ۱ + ۱$$

$$۵ = ۲ + ۲ + ۱$$

$$۵ = ۲ + ۱ + ۱ + ۱$$

$$۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

تعداد افرازهای نامحدود برای عدد پنج، برابر با هفت است؛ به عبارتی دیگر، $p(۵) = ۷$.

مسئله‌ی کلی در نظریه‌ی افرازها این است که تعداد افرازهای ممکن برای هر عدد طبیعی را مشخص کنیم. این کار ساده‌ای نیست، زیرا تعداد افرازها رابطه‌ی ثابتی با عدد مورد افراز ندارد. یک را به یک صورت می‌توان افرازکرد، دو را به دو صورت، سه را به سه صورت؛ امّا پس از سه این رابطه دیگر یک به یک نیست. تعداد افرازهای چهار برابر با پنج است؛ افرازهای پنج نیز همان گونه که دیدیم هفت است. ممکن است خواننده علاقمند باشد تا تعداد افرازهای عدد شش را حدس بزنند.

او به احتمال قریب به یقین اشتباه خواهد گفت. مگر این که بنشیند و آن‌ها را تک به تک بشمارد[1].

اگر رابطه‌ای آشکار بین یک عدد و تعداد افرازهای آن وجود ندارد، پس چه طور می‌توان تعداد افرازهای یک عدد را بدون شمارش همه‌ی آن‌ها مشخص کرد؟ آن چه می‌تواند مفید باشد، ترکیبی از اعداد است که از طریق ضرب یا تقسیم، ویا هر دوی آن‌ها، خود به خود پاسخ‌های مورد نیاز ما را تولید کند؛ یعنی « تولید پاسخ‌ها به صورت نامعین». زیرا ما به دنبال تعداد افرازها برای هر کدام از اعداد در مجموعه‌ی نامتناهی اعداد هستیم.

چنین «تابع مولدی» بود که نظریه‌ی افرازها آن را مدیون اویلر است. با کشف آن، او همچنین رابطه‌ای بسیار شگفت‌انگیز بین اعداد پنج ضلعی و افرازهای نامحدود همه‌ی اعداد طبیعی را کشف کرد.

تابع مولد اویلر، $p(n)$ در واقع معکوس یک سری توانی است:

$$\frac{۱}{(۱-x)(۱-x^۲)(۱-x^۳)(۱-x^۴)(۱-x^۵)\cdots}$$

این عبارت، مانند هر عبارت کسری دیگر، حاکی از انجام یک تقسیم است. بهر حال چیزهای بسیار عجیبی درمورد این تقسیم وجود دارد. ما ناچاریم تقسیم خود را بدون تکمیل مقسوم علیه خود شروع کنیم. وجود سه نقطه پس از $(۱-x^۵)$ به ما می‌گوید که باید ضرب کردن را به همین ترتیب ادامه دهیم. هر بار باید توان x را یک واحد بالا ببریم به طوری که ضرب را با $(۱-x^۶)$ و $(۱-x^۷)$ و همین طور تا آخر ادامه دهیم. جمله‌های ضرب و نیز حاصل به دست آمده از آن‌ها هرگز به پایان نمی‌رسد. هر چه قدر ضرب را ادامه می‌دهیم، مقدار بیشتری از حاصل آن مشخص می‌شود، تمام آن به طور کامل هرگز مشخص نمی‌گردد. این همان چیزی است که حاصل ضرب نامتناهی خوانده می‌شود.

بنابراین، هرگاه یک را بر این حاصل ضرب نامتناهی تقسیم کنیم، پاسخ ما یک کسر نامتناهی خواهد بود. در واقع باید هم همین‌طور باشد، زیرا تابع مولد برای $p(n)$، مطابق تعریف، هرگز نباید تولید خود را متوقف کند. این تابع باید برای ما تعداد افرازهای هر یک از اعداد در مجموعه‌ی نامتناهی اعداد طبیعی را تولید کند.

1) $p^{(۶)} = ۱۱۰$

به طور کل، این تابع مولد $p(n)$ برای کسانی که به ضرب و تقسیم اعداد متناهی عادت کرده‌اند، چیز عجیب و غریبی است. عملیات ضربی که حاصل نامتناهی در مخرج را تولید می‌کند به اندازه‌ی کافی عجیب است، امّا تقسیمی که کسر نامتناهی را به ما می‌دهد از آن هم عجیب‌تر است.

شروع کار، که به طرز فریبنده‌ای ساده است، با ضرب $(1-x)$ در $(1-x^2)$ آغاز می‌شود. بخش ابتدایی این ضرب در پایین آمده است تا خواننده ببیند که چه طور در مدتی کوتاه چند جمله‌ی اوّل جواب ما دیگر با ادامه ضرب تغییر نمی‌یابد. به عبارت دیگر، آن‌ها ثابت ومعین می‌شوند؛ و می‌توانیم از آن‌ها برای تقسیم خود استفاده کنیم:

$$
\begin{array}{l}
1-x\\
1-x^2\\
\hline
1-x-x^2+x^3\\
1-x^3\\
\hline
1-x-x^2+x^3\\
\qquad\qquad -x^3+x^4+x^5-x^6\\
\hline
1-x-x^2 \qquad +x^4+x^5-x^6\\
1-x^4\\
\hline
1-x-x^2 \qquad +x^4+x^5-x^6\\
\qquad\qquad -x^4+x^5+x^6 \qquad -x^8-x^9+x^{10}\\
\hline
1-x-x^2 \qquad\quad +2x^5 \qquad -x^8-x^9+x^{10}\\
1-x^5\\
\hline
1-x-x^2 \qquad\quad +2x^5 \qquad -x^8-x^9+x^{10}\\
\qquad\qquad\quad -x^5+x^6+x^7 \qquad -2x^{10}\cdots\\
\hline
1-x-x^2 \qquad\quad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\ \cdots\\
1-x^6\\
\hline
1-x-x^2 \qquad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\ \cdots\\
\qquad\qquad\qquad -x^6+x^7+x^8 \qquad\qquad -x^{11}-x^{12}\\
\hline
1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +2x^7 \qquad -x^9-x^{10}-x^{11}-x^{12}\ \cdots\\
1-x^7\\
\hline
1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +2x^7 \qquad -x^9-x^{10}-x^{11}-x^{12}\ \cdots\\
\qquad\qquad\qquad -x^7+x^8+x^9 \qquad\qquad -x^{12}\ \cdots\\
\hline
1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +x^7+x^8 \qquad -x^{10}-x^{11}-x^{12}\ \cdots\\
1-x^8\\
\hline
\cdots
\end{array}
$$

نخستین جمله‌های مشخص شده به شرح زیرند:

$$۱ - x^{۱} - x^{۲} + x^{۵} + x^{۷} - x^{۱۲} - x^{۱۵} + x^{۲۲} + x^{۲۶} \cdots$$

اگر توان‌های موجود از x را با یک جای‌گذاری کنیم و به جای توان‌هایی که حذف شده‌اند (مثل $x^{۳}$، $x^{۴}$، $x^{۶}$ و...) صفر بگذاریم، به نحوه‌ی نمایشی عجیب از مقسوم علیه خود می‌رسیم:

$$۱ - ۱ - ۱ + ۰ + ۰ + ۱ + ۰ + ۱ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ - ۱ + ۰ \cdots$$

حالا آماده‌ایم که یک را بر این عدد تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l}
۱ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ \cdots & ۱ - ۱ - ۱ + ۰ + ۰ + ۱ + ۰ \cdots \\ \cline{2-2}
۱ - ۱ - ۱ + ۰ + ۰ + ۱ + ۰ \cdots & ۱ + ۱ + ۲ + ۳ + ۵ + ۷ + ۱۱ \cdots \\ \cline{1-1}
+۱ + ۱ + ۰ + ۰ - ۱ + ۰ \cdots & \\
۱ - ۱ - ۱ + ۰ + ۰ + ۱ \cdots & \\ \cline{1-1}
+۲ + ۱ + ۰ - ۱ - ۱ \cdots & \\
۲ - ۲ - ۲ + ۰ + ۰ \cdots & \\ \cline{1-1}
+۳ + ۲ - ۱ - ۱ \cdots & \\
۳ - ۳ - ۳ + ۰ \cdots & \\ \cline{1-1}
+۵ + ۲ - ۱ \cdots & \\
۵ - ۵ - ۵ \cdots & \\ \cline{1-1}
+۷ + ۴ \cdots & \\
۷ - ۷ \cdots & \\ \cline{1-1}
+۱۱ \cdots &
\end{array}$$

از این تکه از تقسیم که آن را بازسازی کردیم، خواننده متوجه خواهد شد که اعداد پاسخ ما (خارج قسمت) به طرز عجیبی آشنا به نظر می‌رسند. درست است، زیرا آن‌ها (به ترتیب) تعداد افرازهای

p برای هر یک از چند عدد نخست طبیعی را نشان می‌دهند:

$$p(۰) = ۱$$
$$p(۱) = ۱$$
$$p(۲) = ۲$$
$$p(۳) = ۳$$
$$p(۴) = ۵$$
$$p(۵) = ۷$$
$$p(۶) = ۱۱$$
$$\dots$$

ادامه دادن تقسیم عدد یک به همین روش دقیقاً مقادیر متوالی برای $p(n)$ را تولید می‌کند. حتا به ما نشان می‌دهد که تعداد افرازهای نامحدود عدد نسبتاً کوچکی مانند ۲۰۰، برابر با ۳,۹۷۲,۹۹۹,۰۲۹,۳۸۸ است.

در حساب‌هایی از این دست، به هیچ دلیل نمی‌توانیم انتظار دیدن همان دوستان قدیمی خود را داشته باشیم؛ همان اعداد کوچک، و شاید سرگرم کننده‌ای، که می‌توان آن‌ها را به شکل پنج در آورد. امّا اگر چندجمله‌ای آغازین آن حاصل نامتناهی که با قطعیت مشخص شده‌اند را بررسی کنیم، به عبارت زیر خواهیم رسید:

$$۱ - x^۲ - x^۲ + x^۵ + x^۷ - x^{۱۲} - x^{۱۵} + x^{۲۲} + x^{۲۶} \dots$$

امّا حال بیاید کمی به روش خودمان حساب انجام دهیم. این فرمول اعداد پنج ضلعی است:

$$p_n^۵ = \frac{۳n^۲ - n}{۲}$$

تاکنون فقط به بررسی آن دسته از اعداد پنج ضلعی پرداخته‌ایم که به ازای $n = ۰$ و یا nهای صحیح مثبت در رابطه‌ی بالا به دست می‌آیند.

۱ ، وقتی $n = +۱$

۵ ، وقتی $n = +۲$

۱۲ ، وقتی $n = +۳$

۲۲ $n = +۴$

...

امّا همین فرمول به ازای مقادیرمنفی n هم اعداد پنج ضلعی تولید می‌کند:

۲ ، وقتی $n = -۱$

۷ ، وقتی $n = -۲$

۱۵ ، وقتی $n = -۳$

۲۶ ، وقتی $n = -۴$

...

اگر اکنون چندجمله‌ی آغازین حاصل نامتناهی خود را بار دیگر بررسی کنیم، به این نتیجه خواهیم رسید: فقط xهایی در این عبارت باقی مانده‌اند که توان آن‌ها برابر با اعداد پنج ضلعی تولید شده در فرمول بالا به ازای مقادیر مثبت و منفی n است.

این رابطه‌ای نبود که اویلر یا هرکس دیگری تصورکند. بسیار عجیب است و کاملاً معلوم نیست که چرا اعداد پنج ضلعی باید چنین ظاهری را در تابع مولد برای $p(n)$ ایجاد کنند. امّا در هر صورت یونانی‌ها اگر حالا این‌جا بودند این رابطه را تحسین می‌کردند. زیرا اگرچه آن‌ها گاهی با جنبه‌های ساده‌تر و بدیهی‌تر ترکیب اعداد حیرت‌زده می‌شدند، امّا به هر حال اولین کسانی بودند که پی بردند اعداد به خودی خود دارای روابطی شگفت‌انگیز و پیچیده هستند که همیشه غافلگیرکننده‌اند.

«یک شگفتی دیگر»

بسیار رضایت بخش است اگر کسی برای خود روابطی جذاب بین اعداد کشف کند حتا اگر آن روابط قبلاً توسط شخص دیگری کشف شده باشند. اگر خوانندگان، بخش آغازین آن حاصل نامتناهی را که در این بخش به دست آوریم به توان دو برسانند به نتیجه‌ی خاصی نخواهند رسید؛ امّا اگر آن را به توان سه برسانند، الگویی شگفت‌آور و جالب به دست خواهد آمد. اولین کسی که این الگو را کشف کرد یک ریاضی‌دان بسیار بزرگ، سی. جی. ژاکوبی[1] بود.

$$۱ - x - x^۲ + x^۵ + x^۷ - x^{۱۲} - x^{۱۵}$$

ضرب در

$$۱ - x - x^۲ + x^۵ + x^۷ - x^{۱۲} - x^{۱۵}$$

ضرب در

$$۱ - x - x^۲ + x^۵ + x^۷ - x^{۱۲} - x^{۱۵}$$

می‌شود؟

«پاسخ»

$۱ - ۳x + ۵x^۳ - ۷x^۶ + ۹x^{۱۰} \cdots$؛ توان‌های باقی‌مانده در این جا اعداد مثلثی می‌شوند و دیگر اعداد پنج ضلعی نیستند. ضرایب نیز اعداد فرد هستند که یک در میان مثبت و منفی شده‌اند.

1) C. G. J. Jacobi (1804-1851)

فصل هفتم

شش

شش اولین «عدد کامل» است. یونانیان آن را کامل می‌دانستند زیرا این عدد حاصل جمع همه‌ی مقسوم‌علیه‌هایش به جز خودش است؛ یعنی یک، دو و سه: ۳+۲+۱=۶. رومی‌ها شش را عدد الهه‌ی عشق می‌دانستند، زیرا عدد شش از اجتماع جنس‌ها ساخته می‌شود: یعنی از سه، که به دلیل فردبودن مذکر است، و از دو، که به دلیل زوج بودن مونث است. عبریان باستان نیز بر این باور بودند که خدا جهان را به جای یک روز در شش روز خلق کرد به این دلیل که شش عدد کامل‌تری است. از زمان یونانیان تا به حال، اعدادی که از نظر ریاضی مانند شش «کامل» هستند (یعنی برابر با حاصل جمع مقسوم علیه‌هایشان به جز خودشان) برای ریاضی‌دانان، و همچنین برای بقیه‌ی افراد، جالب توجه بوده‌اند. امّا بعد از شش، ریاضی‌دانان در طول بیش از ۲۰۰۰ سال فقط یازده عدد دیگر پیدا کردند که از این ملاک دشوار کامل بودن عبور کند.

سپس، در ابتدای سال ۱۹۵۲، با شروع نیمه‌ی دوم قرن بیستم، یکی از استادان دانشگاه کالیفرنیا، رافائل ام. رابینسون (۱۹۱۱ـ۱۹۹۵)[1] با استفاده از کامپیوتر در مسئله‌ای که آن زمان «مؤسسه‌ی تحلیل عددی در واحد لس آنجلس» نام داشت توانست پس از ۷۰ سال بالاخره یک عدد کامل دیگر را پیدا کند، و پس از گذشت چند ماه، مجدداً چهار عدد دیگر به اعداد کامل اضافه

1) Raphael M. Rabinson (1911-1995)

کرد و تعداد آن‌ها را به ۱۷ افزایش داد.

کشف رابینسون، توجه مطبوعات را به خود جلب نکرد. اعداد کامل در ساختن تسلیحات جنگی به کار نمی‌آمدند؛ یا اصلاً، بهتر بگوییم، اعداد کامل در آن زمان به هیچ کاری نمی‌آمدند. اما آن‌ها برای ریاضی‌دانان جالب بودند (همان گونه که مثلاً برای گاؤس جالب بودند) و ماجرای آن‌ها نیز بسیار جالب است. همچون بیشتر داستان‌های ریاضی، این نیز با یونانی‌ها آغاز می‌شود. یونانی‌ها، پس از توجه به این موضوع که شش (۳+۲+۱) و بیست و هشت (۱۴ + ۷ + ۴ + ۲ + ۱) برابر با حاصل جمع همه‌ی مقسوم علیه‌ها به جز خودشان هستند و در پی آن شدند که تعداد کل چنین اعدادی را بفهمند. شباهت اساسی ۶ و ۲۸ را وقتی می‌توان دید که آن‌ها را به صورت جبری نمایش دهیم. شکل آن‌ها به صورت $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ است:

$$۶ = ۲^۱(۲^۲ - ۱), \qquad \text{یا} \qquad ۲ \times ۳,$$
$$۲۸ = ۲^۲(۲^۳ - ۱), \qquad \text{یا} \qquad ۴ \times ۷$$

بیش از دو هزار سال پیش، اقلیدس اثبات کرده بود همه‌ی اعدادی که به این شکل هستند، در صورتی که $۲^n - ۱$ فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر باشد، یا به بیان دیگر اوّل باشد، کامل هستند. برای این که $۲^n - ۱$ اوّل باشد، n نیز باید اوّل باشد. مثلاً در باره‌ی عدد ۶ که در بالا دیدیم، عدد اوّل لازم برای ساخت آن ۳، یا همان $۲^۲ - ۱$، است. امّا اقلیدس اثبات نکرد که همه‌ی اعداد کامل به این شکل هستند، و بنابراین این سؤال را برای ریاضی‌دانان آینده باقی گذاشت:

چند عدد کامل وجود دارد؟

در سده‌های بعد، ظاهراً اعداد اهمیت اخلاقی و ریاضیات بیشتری کسب کردند. «ال. ای. دیکسون»[۱] در تاریخ نظریه‌ی اعداد خود نقل می‌کند که در قرن اوّل پس از میلاد، اعداد را به سه گروه «وافر» (آن‌ها که مجموع مقسوم علیه‌هایشان بیشتر از خودشان است، مثل ۱۲) و «ناقص» (آن‌ها که مجموع مقسوم علیه‌هایشان کمتر است، مثل ۸) و «کامل» تقسیم می‌کردند؛ و کاربردهای اخلاقی هر سه گروه به دقت تحلیل می‌شد. در قرن هشتم گفته شد که نقطه‌ی شروع دومین نژاد از انسان از عدد ناقص هشت نشأت گرفته، زیرا هشت انسان در کشتی نوح بوده است که نسل انسان به

1) L.E. Dickson (1874-1954)

آن‌ها می‌رسد؛ بنابراین، نسل دوم، نسبت به نسل اوّل (آدم و حوا) که در شش روز خلق شده بود، ناقص‌تر بود. در قرن نوزدهم، مطالعه‌ی اعداد کامل در برنامه‌ای به منظور «شفای روح» توصیه شد. امّا هیچ کس پرسش اقلیدس را پاسخ نداد.

در حقیقت هیچ کس به این موضوع از طریق ریاضی فکر نمی‌کرد. نخستین چهار عدد کامل (یعنی ۶، ۲۸، ۴۹۶ و ۸۱۲۸) را از همان قرن اوّل می‌شناختند. اصل قضیه‌ی اعداد کامل را اقلیدس سیصد سال پیش از میلاد مسیح مطرح کرده بود. امّا تازه چهارده قرن بعد بود که، علی‌رغم تمام تأملاتی که در کل پیرامون این قضیه صورت گرفت بود، پنجمین عدد کامل را به درستی پیدا کردند و آن ۳۳٫۵۵۰٫۳۳۶ بود.

اگر با تحقیر به دوره‌های پیش از عصر کامپیوتر نگاه کنیم، ممکن است فراموش کنیم که کشف اعداد کامل، حتا آن‌هایی که بسیار کوچک‌تر از اعدادی هستند که امروزه می‌شناسیم، مستلزم محاسبات بسیار زیادی است. بیایید پنجمین عدد کامل را به عنوان نمونه در نظر بگیریم.

نمایش عدد ۳۳٫۵۵۰٫۳۳۶ مطابق فرمول اقلیدس به شکل $2^{13-1}(2^{13}-1)$ است. برای اثبات کامل بودن این عدد، نخست باید اثبات کنیم که $2^{13}-1$ اوّل است. ابتدا باید مقدار $2^{13}-1$ را محاسبه کنیم. حاصل ضرب ۱۳ بار عدد دو در هم برابر با ۸۱۹۲ می‌شود که اگر یکی از آن کم کنیم، عدد ۸۱۹۱ را خواهیم داشت.

برای این که بفهمیم ۸۱۹۱ اوّل است باید آن را بر همه‌ی اعداد اوّل کوچک‌تر از ریشه‌ی دومش تقسیم کنیم، و می‌دانیم که ریشه‌ی دوم آن بین ۹۱ و ۹۲ قرار دارد. ۲۴ عدد اوّل کوچک‌تر از ۹۰ وجود دارد. تنها در صورتی که ۸۱۹۱ بر هیچ یک از آن‌ها بخش‌پذیر نباشد می‌توانیم بگوییم اوّل است.

به این منظور، به فهرست دقیقی از اعداد اوّل و محاسباتی دقیق در هر مرحله نیازمندیم. وقتی به یاد می‌آوریم که محاسبه کردن تا پیش از زمان ما با نظام‌های کارآمد انجام نمی‌شد، تعجب نمی‌کنیم که چرا کشف دقیق پنجمین عدد کامل این قدر به درازا کشید. زیرا تازه پس از آن که اطمینان حاصل کردم که ۸۱۹۱ اوّل است، آن وقت است که باید آن را در ۴۰۹۶ (یعنی 2^{12}) ضرب کنیم تا پنجمین عدد کامل، یعنی ۳۳٫۵۵۰٫۳۳۶، را به دست آوریم.

خواننده‌ای که وقت فراغت دارد، ممکن است علاقمند باشد تا مهارت خود را با عدد $(۲^{۱۷} - ۱)۲^{۱۷-۱}$، که طبق فرمول اقلیدس احتمالاً عدد کامل بعدی است، بیازماید.

از آن جا که اعداد کامل، از عدد چهارم به بعد، بسیار بزرگ می‌شوند و امکان اشتباهات محاسباتی متعددی را فراهم می‌کنند، در زمان‌های مختلف اعداد ناقص بسیار زیادی به عنوان عدد کامل اعلام شده‌اند.

برخی‌ها نیز سعی کردند تا از طریق اعداد کامل موجود، اعداد کامل ناشناخته را حدس بزنند. بر اساس نخستین چهار عدد کامل (۶، ۲۸، ۴۹۶ و ۸۱۲۸)، دو احتمال به طور گسترده‌ای رایج شد. یکی این که اعداد کامل به نوبت با رقم ۶ و ۸ تمام می‌شوند. اتفاقاً آن‌ها با رقم ۶ و ۸ تمام می‌شوند، امّا نه به طور یکی درمیان و نه اصلاً با هیچ الگوی خاصی. وقتی ششمین عدد کامل کشف و اعلام شد(۸٫۵۸۹٫۸۶۹٫۰۵۶)، این فرضیه کنار رفت، زیرا بر طبق آن این می‌بایست با رقم ۸ تمام شود. حدس دیگر این بود که اعداد کامل با الگوی منظمی ظاهر می‌شوند؛ نخستین عدد فقط مرتبه‌ی یکان دارد (۶)؛ دومی، یکان و دهگان (۲۸)؛ سومی یکان، دهگان و صدگان (۴۹۶)؛ چهارمی یکان، دهگان، صدگان و هزارگان (۸۱۲۸). امّا کشف پنجمین عدد کامل این الگو را به هم ریخت و فرضیه را رد کرد.

با این حال، در مورد اعداد کامل، حدس هیچ کس بر دیگری ارجحیت ندارد. صرف این که فرضیه‌ای غلط بوده باشد، آن را از مکتوبات حذف نکرده است. به طور مثال، اعداد اوّل به شکل $۲^n - ۱$ که برای ساخت اعداد کامل مطابق الگوی اقلیدس ضروری هستند، تا ابد نام مردی را با خود حمل می‌کنند که اشتباه حدس زد.

«مارن مرسن»[1] (۱۵۸۸ـ۱۶۴۸) کشیشی بود که بهترین گواه برای اهمیت او در ریاضی، مکاتباتش با فرما و دکارت بود. در سال ۱۶۴۴ بود که او گواه دیگری بر جایگاهش در ریاضی ارائه کرد و نام خود را برای همیشه با اعداد کامل پیوند زد. از آن جا که پس از پنجمین عدد کامل، این اعداد به شدت رو به بزرگی می‌رفتند، لازم شده بود که همه‌ی اعداد کامل را بر اساس اعداد اوّل لازم برای توان n در عبارت $۲^n - ۱$ توصیف کنند. با این حساب، پنج عدد کامل موجود را با ۲ (توان عبارت $۲^۲ - ۱$ که در تولید عدد کامل ۶ استفاده می‌شود)، ۳، ۵، ۷ و ۱۳ می‌شناختند. مرسن

1) (1588-1648) Mrin Mersenne

اعلام کرد که تا ۲۵۷ فقط شش عدد اوّل دیگر برای قرار دادن به جای n وجود دارد که شامل خود ۲۵۷ هم می‌شود. او این اعداد اوّل را ۱۷، ۱۹ (که در آن زمان «پیترو کاتالدی»[۱] (۱۵۲۲ـ۱۶۲۶) اوّل بودن آن را نشان داده بود)، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ دانست. این عدد آخر که او به عنوان اوّل اعلام کرده بود (یعنی $۲^{۲۵۷} - ۱$) به شکل زیر است:

۲۳۱,۵۸۴,۱۷۸,۴۷۴,۶۳۲,۳۹۰,۸۴۷,۱۴۱,۹۷۰,۰۱۷,۳۷۵,۸۱۵,۷۰۶,۵۳۹,

۹۶۹,۳۳۱,۲۸۱,۱۲۸,۰۷۸,۹۱۵,۱۶۸,۰۱۵,۸۲۶,۲۵۹,۲۷۹,۸۷۱

برای دیگر ریاضی‌دانان بدیهی بود که کشیش مرسن نمی‌توانسته است اوّل بودن همه‌ی اعداد پیشنهادی خود را بررسی کند؛ امّا این کار را خود آن‌ها نیز نمی‌توانستند انجام دهند. یکی از هم‌عصران او با امیدواری بیان کرد که ادعای مرسن ریشه در نبوغ حیرت آورش دارد که سبب می‌شود حقایق را بیش از آن چه می‌تواند اثبات کند درک نماید.

زمانی که مرسن اعداد اوّل خود را اعلام کرد (البته اعداد اولی بیش از آن چه او فهرست کرده است نیز همچنان با نام او شناخته می‌شوند) تنها راه اعداد اوّل همان بود که پیش از این ذکر کردیم؛ یعنی تقسیم عدد بر تمامی اعداد اوّل کوچکتر از ریشه‌ی دومش. این روش آن چنان وقت‌گیر بود که برای برخی اعداد مرسن حتا کامپیوترهای آینده نیز در به دست آوردن نتیجه ناتوان خواهند بود. با این وجود، با همین روش طاقت فرسا ریاضی دانان توانستند اعداد اوّل اعلام شده توسط مرسن را برای ششمین، هفتمین و هشتمین عدد کامل بیازمایند و بررسی کنند. هشتمین عدد $(۲^{۳۱} - ۱)$ را «اویلر» بررسی کرد و اوّل بودن آن را فهمید.

یکی از ریاضی‌دانان بر این باور بود که عدد کاملی که بر اساس عدد اوّل اویلر به دست آمده دیگر به احتمال قریب به یقین آخرین عدد کاملی خواهد بود که کشف می‌شود: « زیرا از آن جا که اعداد کامل صرفاً کنجکاوی برانگیزند و کاربردی ندارند، احتمال نمی‌رود که کسی به دنبال عددی بزرگ‌تر از این برود.» امّا او به این فکر نکرده بود که وقتی این پرسش به میان می‌آید که الگوی خاصی از اعداد اوّل، متناهی‌اند یا نامتناهی، ریاضی‌دانان بسیار کنجکاو می‌شوند.

پس از اقلیدس، کسی که بیشترین کمک را به مسئله‌ی اعداد کامل کرد اویلر بود. اقلیدس

1) Pietro Cataldi (1522-1626)

اثبات کرده بود که همه‌ی اعداد با الگوی $(\text{۲}^n - \text{۱})\text{۲}^{n-\text{۱}}$ کامل‌اند مشروط بر این که $\text{۲}^n - \text{۱}$ اوّل باشد، امّا او اثبات نکرد که همه‌ی اعداد کامل از این الگو پیروی می‌کنند. او اثبات کرد که همه‌ی اعداد «زوج» کامل این گونه‌اند، تا آن جا که می‌دانیم، هیچ عدد فرد کاملی وجود ندارد؛ امّا این موضوع هرگز به «اثبات» نرسیده است.

عدد کامل اویلر تا بیش از صد سال بزرگ‌ترین عدد کامل شناخته شد. سپس در ۱۸۷۶، «ادوار لوکا»[۱] (۱۸۴۲ـ۱۸۹۱) روشی را ابداع کرد که در فصل «سه» در مورد صحبت کردیم و مطابق با آن می‌توان اوّل بودن عدد را بدون تجزیه به عوامل اوّل آن آزمایش کرد. در همان زمان او اعلام کرد که $\text{۲}^{\text{۱۲۷}} - \text{۱}$ را آزمایش کرده و اوّل بودن آن را مشخص کرده است. گرچه او در کتابش « نظریه‌ی اعداد» به سال ۱۸۹۱ حرف خود را پس گرفت و این عدد را به عنوان «نامشخص» نام نهاد، امّا پس از تأیید در سال ۱۹۱۳ این عدد به عنوان بزرگ‌ترین عدد مرسن شناخته شد.

حتا با کمک روش بسیار مؤثرتر لوکا نیز ریاضی‌دانان تا قرن بعد نتوانستند آزمودن همه‌ی اعداد مرسن را به پایان برسانند. آخرین عدد، یعنی $\text{۲}^{\text{۲۵۷}} - \text{۱}$ به بیش از یک سال زمان برای محاسبه با یک ماشین حسابگر الکترونیکی نیاز داشت و برای بررسی مجدد آن نیز یک سال لازم بود. این عدد اوّل نیست. از آنجا که این آخرین حدس مرسن بود، بالاخره توانستند حاصل کامل مرسن را در مجموع ارزیابی کنند. علاوه بر پنج عدد کاملی که در زمان او شناخته شده بود، او چهار عدد دیگر را به درستی (۱۷ و ۱۹- که اوّل بودن آن‌ها اثبات شده بود- و ۳۱ و ۱۲۷) و دو عدد را به اشتباه (۶۷ و ۲۵۷) نام برده بود؛ سه عدد را هم از قلم انداخته بود که باید از آن‌ها نام می‌برد زیرا از ۲۵۷ کوچک‌ترند (۶۱، ۸۹ و ۱۰۷).

با شروع نیمه‌ی دوم قرن بیستم، دوازده عدد کامل شناخته شده بود و بزرگ‌ترین آن‌ها $(\text{۲}^{\text{۱۲۷}} - \text{۱})\text{۲}^{\text{۱۲۶}}$ بود که لوکا آن را هفتادوپنج سال پیش کشف کرده بود. در سال ۱۹۵۱ با کامپیوتری که به تازگی اختراع شده بود تلاشی دوباره انجام گرفت، اما نتیجه‌ی کار فقط تأیید عدد $M_{\text{۱۲۷}}$ بود که لوکا در مورد آن کمی تردید داشت. پرسش اقلیدس اما همچنان بی پاسخ بود. ماشین که در ۱۹۵۲ رکورد اعداد مرسن را شکست «کامپیوتر اتوماتیک غرب» در اداره‌ی ملی

استاندارد بود که با نام SWAC شناخته شده بود. در آن زمان، این سریع‌ترین کامپیوتر موجود بود.[۲] این سیستم می‌توانست دو عدد ده رقمی را در ۶۴ میکروثانیه جمع کند. از آن‌جا که میکروثانیه یعنی یک میلیونیم ثانیه، پس SWAC می‌توانست چنین عمل جمعی را ۱۵۶۰۰۰ بار سریع‌تر از انسان انجام دهد (با فرض این که انسان این عمل را در ده ثانیه انجام دهد). این ارقام امروزه عجیب نیست، اما در سال ۱۹۵۲ بسیار جالب توجه بود. گسترش قدرت محاسبه‌ی انسان توسط SWAC درست مانند گسترش وسعت دید انسان به وسیله‌ی تلسکوپ «پالومار»[۳] بود که به تازگی ساخته شده بود و در همسایگی SWAC در جنوب کالیفرنیا قرار داشت.

امّا به هر حال SWAC یک ماشین بود و از ریاضی چیزی نمی‌دانست. به جز از لحاظ دقت و سرعت، از هر نظر دیگر در مرتبه‌ی پایین‌تری از انسان‌ها بود؛ انسان‌هایی که می‌دانستند چه طور به نحو مؤثری چهار عمل ریاضی را انجام دهند. زیرا این کامپیوتر، اگر دستورالعمل محاسبه‌ی مسئله‌ای را دریافت نمی‌کرد، نمی‌توانست آن را محاسبه کند.

رابینسون، در برکلی، هرگز این ماشین را که در لس‌آنجلس قرار داشت ندیده بود، امّا او شروع به ریختن برنامه‌ای برای SWAC کرد تا ماشین بتواند فقط با کمک دستورالعمل‌های داده شده به محاسبه‌ی اعداد مرسن بپردازد.

برای این کار، روش لوکا به پاره‌های کوچک تقسیم شد و به برنامه‌ای مبدل گردید متشکل از سیزده دستورالعملی که برای SWAC قابل فهم بود. آن چه کار را پیچیده می‌کرد این بود که SWAC به گونه‌ای طراحی شده بود تا با اعداد ۳۶ بیتی کار کند امّا اعداد لازم برای محاسبات به ۲۳۰۰ بیت می‌رسیدند. مجموع حافظه‌ی دستگاه فقط ۲۵۶ کلمه بود که هر کلمه از ۳۶ بیت و یک علامت تشکیل می‌شد، بنابراین یک عدد تقریباً ۲۳۰۰ بیتی معادل ۶۴ کلمه بود. امّا در روش لوکا، لازم بود اعداد را به توان دو نیز برسانند. بنابراین یک عدد می‌توانست تا نیمی از حافظه‌ی دستگاه را اشغال کند. به گفته‌ی رابینسون، این کار بسیار شبیه آن بود که سعی کنید به انسانی توضیح دهید چگونه می‌تواند با استفاده از یک ماشین حساب رومیزی که توانایی کار با اعداد ده رقمی را دارد،

1) Edouard Lucas (1842-1891)

۲) ۱ـ اداره ملی استاندارد دارای دو کامپیوتر بود. یکی به نام SEAC در شرق کشور و دیگری به نام SWAC در غرب کشور

3) Palomar

اعداد صد رقمی را در هم ضرب کند.

برنامه را باید به طور کامل به زبان ماشین می‌نوشتند. ۱۸۴ فرمان مجزا بود تا به SWAC بگوید که چگونه اوّل بودن اعداد را با استفاده از آزمون لوکا بررسی کند. امّا همین برنامه برای آزمودن هر یک از اعداد مرسن بین ۱ − ۲^{۳} و ۱ − ۲^{۲۲۹۷} استفاده می‌شد. ۱ − ۲^{۲۲۹۷} بزرگترین آن‌ها بود که ماشین قادر بود با آن کار کند.

امّا برای «حل » مسئله هنوز بخش دیگری از کار بود که باید انجام می‌شد. فرمان‌ها باید رمزگذاری می‌شدند. این کار از طریق حروف و علائم صفحه کلید ماشین تایپ استاندارد انجام می‌گرفت؛ به طور مثال، حرف «a» می‌توان برای فرمان جمع زدن [$add =$] استفاده شود. پس از رمزگذاری، این فرمان‌ها را به صورت سوراخ‌هایی بر روی نوارهای کاغذی ضخیمی پیاده می‌کردند. وجود سوراخ برای ماشین به معنای وجود جریان الکتریکی، و نبودن سوراخ به معنای نبودن جریان بود.

مهم‌ترین مسئله در سرعت محاسباتی شگفت‌آور SWAC در آن زمان، سادگی زبان آن بود. حتا اعداد بسیار بزرگ نیز به طور کامل به صورت یک (وجود جریان) و صفر (قطع جریان) نشان داده می‌شد. این ماشین، به جای استفاده از دستگاه ده‌دهی، از مبنای دو استفاده می‌کرد که در فصل «دو» در مورد آن صحبت کردیم. بی‌دلیل نبود که «دی. اچ. لمر»[1] (۱۹۰۵_۱۹۹۱)، مدیر SWAC، و همکارانش، وقتی برنامه‌ی ارسالی رابینسون از لس‌آنجلس را دیدند، هیجان‌زده شدند. به هرحال، برنامه‌ی خود آن‌ها، علی‌رغم آشنایی‌ای که با SWAC داشتند، تقریباً همیشه بار اوّل دچار خطا می‌شد. آن‌ها در ابتدا برنامه‌ی رابینسون را کنار گذاشتند تا هر وقت فرصت کردند بتوانند نشان دهند که این برنامه درست عمل نمی‌کند. امّا رابینسون اصرار داشت که برنامه‌اش اجرا شود. بالاخره پس از دو هفته، و ابراز نارضایتی مدام آن‌ها از این که رابینسون نمی‌تواند بدون دیدن ماشین و صرفاً از روی دفترچه‌ی راهنما به آسانی برای آن برنامه‌نویسی کند، برنامه‌ی او را از کشویشان بیرون آوردند.

در غروب سی‌ام ژانویه‌ی سال ۱۹۵۲، برنامه پس از رمزگذاری و پانچ شدن بر روی نواری با طول بیش از ۸ متر در ماشین قرار داده شد. زمان لازم برای قرار دادن نوار در ماشین (چند دقیقه)

1) D. H. Lehmer (1905-1991)

بسیار طولانی‌تر از مدت زمان چند ثانیه‌ای اجرای دستورالعمل‌ها توسط آن بود. دیگر برای بررسی اوّل بودن هرکدام از اعداد مرسن فقط می‌بایست توان عدد جدید را به دستگاه داد. ماشین خودش بقیه‌ی کارها را، حتا چاپ کردن نتیجه‌ها را انجام می‌داد. اگر صفرهایی پشت سر هم چاپ می‌شد، عدد مربوطه اوّل بود، و اگر عددی در مبنای ۱۶ چاپ می‌شد، عدد مربوطه اوّل نبود.

نشان اوّل بودن، یک رشته از صفرهای پشت‌سرهم بود، زیرا در تست لوکا (که در بخش «سه» شرح داده شد») عدد وقتی اوّل است که تقسیم آن بر جمله‌ای از یک دنباله‌ی خاص دارای باقیمانده نباشد. نسخه‌ای از تست لوکا که توسط رابینسون به کار گرفته شد در واقع نوعی بهینه‌سازی برای تستی بود که «لمر» مدیر موسسه، استفاده کرده بود.

اورپراتوری که با SWAC کار می‌کرد، در حالی که پشت میز در جلوی آن ماشین بزرگ نشسته بود، نخستین عدد مورد آزمایش را وارد می‌کرد. عدد را از آخر به اوّل وارد می‌کرد، و نه در مبنای دو که کارش را بسیار دشوار می‌کرد، بلکه در مبنای شانزده، و ماشین آن را به مبنای دو تبدیل می‌کرد. سپس دکمه‌ای را روی میز خود فشار می‌داد، و ماشین از طریق ۱۸۴ دستورالعملی که دریافت کرده بود شروع به بررسی اوّل بودن نخستین عدد می‌کرد.

نخستین عددی که برای تست انتخاب شد $۲^{۲۵۷} - ۱$ بود، یعنی بزرگ‌ترین عدد از دوازده عددی که مرسن به عنوان اوّل اعلام کرده بود. بیست سال پیش از آن، این عدد را لمر و همسرش، «اما تروتسکی لمر»[1] آزموده بودند و اعلام کرده بودند که اوّل نیست. به مدت یک سال روزی دو ساعت، آن‌ها با یک ماشین حسابگر الکتریکی هندلی به محاسبه مشغول بودند و این ماشین چنان سروصدایی ایجاد می‌کرد که اگر در شب با آن کار می‌کردند اعتراض همسایه‌ها بلند می‌شد. امّا در شب نخستین آزمایش SWAC، آقا و خانم لمر در اتاق بودند و به چشم خود دیدند که چگونه این ماشین در کسری از ثانیه به نتیجه‌ای رسید که آن دو در هفتصد و چند ساعت کار طاقت‌فرسا یافته بودند: $۲^{۲۵۷} - ۱$ عددی اوّل نیست.

سپس SWAC ادامه داد و فهرستی از اعداد احتمالی دیگر را نیز برای اوّل بودن آزمایش کرد. ۴۰۰ سال پیش مرسن چنین گفته بود که برای آزمودن یک عدد ۱۵ یا ۲۰ رقمی، گفته بود که آزمون یک عدد ۱۵ تا ۲۰ رقمی در ظرف زمان نمی‌گنجد؛ امّا او روش میانبری مانند روش لوکا_لمر و یا

1) Emma Trotsky

ماشین مثل SWAC را پیش‌بینی نکرده بود. از طریق این روش، SWAC چهل و دو عدد را یک به یک آزمایش کرد که کوچکترین آن‌ها ۸۰ رقم داشت؛ اوّل بودن هیچ کدام اثبات نشد.

هنوز ساعت ۱۰ شب نشده بود که بالاخره انتظارها به سر رسید و رشته‌ای از صفرها از دستگاه بیرون آمد. عددی که تست شده بود، عدد $۲^{۵۲۱} - ۱$ بود؛ این اولین عدد جدید مرسن بود که پس از ۷۵ سال کشف می‌شد. عدد کامل جدیدی که از آن ساخته می‌شد، یعنی $(۲^{۵۲۱} - ۱)۲^{۵۲۰}$، سیزدهمین عدد کاملی بود که کشف شد.

موفقیت برنامه‌ی رابینسون در اولین اجرا جار و جنجال و هیجانی به پا کرد. «جان تاد»[1] و «مگنوس هسته‌نیس»[2] در کتاب تاریخ مؤسسه‌ی تحلیل عددی نوشتند:« این که کد برنامه بدون خطا بود (و هنوز هم هست) کار بسیار بزرگی بود.»

برای زمانی به مدت تقریباً دو ساعت در شب سی‌ام ژانوی سال ۱۹۵۲، عدد $۲^{۵۲۱} - ۱$ بزرگ‌ترین عدد اوّل شناخته شده و بزرگ‌ترین عدد اوّل مرسن نام داشت. امّا کمی پیش از نیمه‌ی شب، دوباره رشته‌ای از صفرها از دستگاه بیرون آمد و عدد بزرگ‌تر $۲^{۶۰۷} - ۱$ به عنوان اوّل شناخته شد. در طی چند ماه بعد، برنامه‌ی رابینسون پنج عدد مرسن جدید را کشف کرد. آزمایش سیزدهمین عدد مرسن برای SWAC تقریباً یک دقیقه به طول انجامیده بود (برابر با یک سال تلاش انسانی). و نیز کشف هفدهمین و آخرین عدد مرسن، که این ماشین پیدا کرد، یک ساعت به درازا کشید، که با این حساب برابر کار یک انسان در تمام طول عمرش می‌شود.

حدوداً سی‌سال بعد، رابینسون برنامه‌ی خود را بر روی یکی از نخستین کامپیوترهای شخصی IBM اجرا کرد که مشخص شد دو برابر سریع‌تر از SWAC است. در پنجاه و چند سال گذشته، تعداد اعداد اوّل مرسن شناخته شده (و بنابراین تعداد اعداد کامل شناخته شده) تقریباً سه برابر شده است. هنگامی که من در سال ۱۹۹۲ بر روی ویرایش چهارم «از صفر تا بی‌نهایت» کار می‌کردم، ۳۱ عدد اوّل مرسن کشف شده بود که از کشف آخرین آن‌ها شش سال می‌گذشت. امّا فناوری، که همیشه در حال رشد است، و اهمیت اعداد اوّل بزرگ در رمز نگاری سبب ایجاد جهشی بزرگ رو به جلو شده است. از سال ۱۹۹۶ که «جورج ولتمن»[3] «جست‌وجوی بزرگ عدد اوّل مرسن در اینترنت» را ترتیب داد (GIMPS)، این سیستم به تعبیر خودش بزرگ‌ترین عدد اوّل را « در دنیای

1) John Todd 2) Maguns R. Hestenes 3) George Woltman

مجازی منحصراً در اختیار گرفته است.»:

«این به آن دلیل است که نرم افزارهای فوق‌العاده و رایگان این سیستم را به آسانی می‌توان نصب و نگهداری کرد، و تنها کاری که کاربر باید انجام دهد این است که بنشیند و ببیند آیا عدد اوّل بزرگ‌تر بعدی را پیدا می‌کند.» این را GIMPS در وب سایت خود گفته، و پس از آن اضافه می‌کند: «ده‌ها هزار کاربر، به جای محافظ‌های بیهوده‌ی نمایشگر، زمان بیکاری کامپیوتر خود را در این راه مفید به کار می‌گیرند.»

اکنون که این مطالب را تایپ می‌کنم، و نگاهی به سایت رسمی GIMPS می‌اندازم[1]، می‌بینم که بزرگ‌ترین عدد اوّل مرسن که تا به حال کشف شده $۱ - ۲^{۲۵/۹۶۴/۹۵۱}$ است؛ این چهل و دومین عدد اوّل مرسن، عددی با ۷٫۸۱۶٫۲۳۰ رقم است که در ۲۶ فوریه‌ی ۲۰۰۵ توسط یک چشم پزشک آلمانی که عضو GIMPSبود کشف شد.

امّا، براساس اثباتی به قدمت اقلیدس، می‌دانیم عدد کامل حاصل از این عدد اوّل، هر چقدر هم بزرگ و خیره کننده باشد، بازهم برابر با حاصل جمع مقسوم علیه‌هایش است؛ یعنی درست مانند $۳ + ۲ + ۱ = ۶$ و یا $۱۴ + ۷ + ۴ + ۲ + ۱ = ۲۸$.

در وب سایت GIMPS به نقل از گاؤس در کتاب Disquisitiones آمده است:

> « مسئله‌ی تشخیص اعداد اوّل از اعداد مرکب و تجزیه‌ی اعداد مرکب به عوامل اوّل، یکی از مهم‌ترین و کاربردی‌ترین مسائل حساب است. این مسئله چنان توش و توان و فکر هندسه‌دانان قدیم و جدید را درگیر کرده است که به توضیح مبسوط نیازی نیست. و علاوه براین، جایگاه والای این علم اقتضا می‌کند هر وسیله‌ی ممکن برای رسیدن به راه حل مسئله‌ای این چنین مورد توجه و درخور، را به کار بریم.»

امّا چند عدد کامل وجود دارد؟ آیا تعداد آن‌ها متناهی‌ست یا نامتناهی؟
پرسش اقلیدس همچنان بی‌پاسخ مانده است.

«محبوبان قدیمی»

«اعداد سازشگر» اگرچه به قدمت اعداد کامل نیستند، امّا به زمان‌های خیلی دور بازمی‌گردند.

1) http://prrme. utm.edu/largest.html

این‌ها جفت‌هایی از اعداد هستند که هر یک از آن‌ها برابر حاصل جمع مقسوم علیه‌های دیگری، شامل عدد یک، است . اویلر ۶۴ جفت از این اعداد را منتشر کرد که دو تا از آن‌ها بعدها غلط از آب درآمد. امّا مردم باستان فقط یک جفت از این اعداد را می‌دانستند، که آن هم نماد نظم کامل بود. یکی از اعضای این جفت ۲۲۰ بود. خواننده می‌تواند تلاش خود را برای به دست آوردن عدد دیگر این جفت انجام دهد.

«پاسخ»

مقسوم علیه‌های ۲۲۰ اعداد ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲، ۴۴، ۵۵ و ۱۱۰ هستند؛ و جمع آن‌ها برابر ۲۸۴ است که حاصل جمع مقسوم علیه‌های آن برابر ۲۲۰است.

فصل هشتم

هفت

از دوران باستان تاکنون، جایگاهی یکتا و ارزشمند در بین ده عدد نخست داشته است. در این ده عدد، هفت تنها عددی است که توسط بقیه تولید نمی‌شود (البته به استثنای یک) و هیچ کدام را تولید نمی‌کنند: شش، هشت، نه و ده با اعداد اوّل دو، سه و پنج تولید می‌شوند؛ و البته همه‌ی آن‌ها را با یک نیز می‌توان تولید کرد. یکی از فیلسوفان باستان این گونه نتیجه گرفت: «بر این اساس است که دیگر فیلسوفان این عدد را به «پیروزی» که مادری نداشت، و به الهه‌ی باکره تشبیه می‌کنند که مطابق افسانه‌ها از سر ژوپیتر به دنیا آمد: و فیثاغورسیان آن را به حاکم همه‌ی موجودات تشبیه می‌کنند.» اگر او بیش از آن که یک عددشناس باشد، ریاضی‌دان می‌بود، ممکن بود به چند ویژگی منحصر به فرد دیگر از عدد هفت در بین ده عدد نخست اشاره کند. به طور مثال، هفت تنها عدد اوّل تک رقمی است که از یکی از توان‌های دو بیش از یک واحد بزرگ‌تر است: $۱ + ۲^۰$ برابر است با دو؛ $۱ + ۲^۱$ برابر است با سه؛ $۱ + ۲^۲$ برابر است با پنج؛ امّا هفت یک واحد از یکی از توان‌های دو کم‌تر است، $۲^۳ - ۱$. چند وجهی منتظم باهفت ضلع، اوّلین چندوجهی با اضلاع اعداد اوّل است که نمی‌توان آن را با روش‌های سنتی و صرفاً استفاده از خط کش و پرگار رسم کرد.

یکی از جالب‌ترین ماجراها در نظریه‌ی اعداد، کشف رابطه‌ای بین این دو ویژگی ظاهراً بی‌ارتباط

عدد هفت با یکدیگر است. این داستان، نام برخی از بزرگان ریاضی را در خود دارد.

در ابتدا باز هم باید به یونانیان برگردیم. همان‌طور که گفتیم، برای یونانی‌ها اعداد حکم شکل را هم داشتند. هر عدد را یک چندوجهی «با رأس‌هایی به تعداد واحدهای آن» می‌دانستند: سه، مثلث؛ چهار، مربع؛ پنج، پنج ضلعی؛ و الی آخر. این علاقه به شکل اعداد حتا در رسم آن‌ها نیز وارد شده بود. یونانیان علاقمند بودند تا رسم‌های خود را به اعدادی محدود کنند که امکان کشیدن آن‌ها با خط کش (خط‌کشی که هیچ علامتی بر روی خود نداشت) و پرگار و فقط با اصول اثبات شده‌ی هندسی وجود داشت. مشهورترین مشکلات آن‌ها در رسم، تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی، دو برابر کردن مکعب و تبدیل دایره به مربع بود. امروزه می‌دانیم که این رسم‌ها با محدود کردن ابزار به خط کش و پرگار، یعنی کاری که یونانیان می‌کردند، امکان‌پذیر نیست. اما بدون محدودیت‌ها، همه‌ی آن‌ها را می‌توان کشید.

(حتا با وجود این که غیرممکن بودن این رسم‌ها اثبات شده است، اغلب دانش‌آموزانی که برای اولین بار به کلاس هندسه می‌آیند و کتاب «عناصر» اقلیدس را می‌خوانند، تلاش می‌کنند تا با رسم یکی از این شکل‌ها(معمولاً تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی) نام خود را در ریاضیات جاودانه کنند.)

امّا مسئله‌ی رسم چندوجهی‌های منتظم فقط با خط کش و پرگار به نحوی از بقیه متفاوت است، زیرا این کار برای برخی از چندوجهی‌ها ممکن و برای برخی دیگر غیرممکن است. مردی که معیار این رسم‌پذیری را تعیین کرد کسی بود که پیش از ۱۹ سالگی در راه خود به سمت جاودانگی در ریاضیات قدم گذاشته بود؛ امّا این موضوع مدت‌ها پس از یونانیان اتفاق افتاد.

یونانیان به آسانی می‌توانستند یک مثلث و یک مربع درون دایره رسم کنند. رسم پنج ضلعی کمی پیچیده‌تر بود، امّا به هرحال، به لطف فیثاغورسیان، با محدودیت‌های آن زمان امکان‌پذیر بود. با تقسیم کردن اضلاع این شکل‌ها به دو قسمت، آن‌ها بقیه‌ی چندوجهی‌هایی را که بیش از همه می‌شناسیم رسم کردند: یعنی، شش، هشت، ده و دوازده وجهی، که همه دارای اضلاع و زوایایی برابر بودند. امّا آن‌ها، باهمان محدودیت‌های آن زمان، قادر نبودند هفت وجهی منتظم رسم کنند. بنابراین، در هفت از ادامه‌ی راه بازماندند. آیا چندوجهی‌های قابل رسم دیگری وجود داشت؟ اگر

وجود داشت، آیا تعداد آن‌ها متناهی بود یا نامتناهی؟ این پرسش تا ۲۰۰۰ سال بی‌پاسخ ماند. در آن زمان هیچ کس، فقط با استفاده از خط کش و پرگار، نتوانست چندوجهی‌ای رسم کند که تعداد اضلاع آن اوّل و بزرگ‌تر از پنج باشد.

شروع ماجرای چندوجهی‌های قابل رسم در یونان بود. بخش دوّم ماجرا، قسمتی در فرانسه و قسمتی در روسیه اتفاق افتاد. در آن زمان، هیچ کس گمان نمی‌کرد این بخش حتا با بخش اوّل ارتباطی داشته باشد. نقش اصلی را در آن «پی‌یر فرما» بازی می‌کرد، و نقش او نقش ریاضی‌دانی بسیار بزرگ بود که به شدت در اشتباه بود.

فرما به موضوع چندوجهی‌های قابل رسم نپرداخت، بلکه کار او بر روی الگوی خاصی از اعداد بود که اعتقاد داشت همیشه اوّل‌اند. جست‌وجو به دنبال الگویی که همیشه عدد اوّل تولید کند، در نظریه‌ی اعداد بی‌وقفه و به شدت ادامه داشته است. منطقی‌ترین فرضی که در این باره مطرح شده، حدس فرما بوده است. امّا آن طور که مشخص شد، این فرض غلط از آب درآمد، و اعدادی که همچنان نام او را یدک می‌کشند ناشی از اشتباه او هستند.

او اعتقاد داشت که اعدادی با الگوی $۲^n + ۱$، اگر n توانی از دو باشد، بدون استثنا اوّل‌اند. یقیناً چند عدد اوّل با این الگو، یعنی $w^{۲^۴} + ۱$، اوّل هستند:

$$۲^{۲^۰} + ۱ = ۳,$$

$$۲^{۲^۱} + ۱ = ۵,$$

$$۲^{۲^۲} + ۱ = ۱۷.$$

فرما خودش دو عدد بعدی را، یعنی ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷، آزمایش کرد و فهمید که اوّل‌اند. این اعداد را معمولاً با یک F بزرگ و یک زیرنویس برابر با توان دویی که در الگو استفاده می‌شود نشان داده می‌شوند: مثلاً $F_۳$ و $F_۴$. امّا بررسی $F_۵$ حتا از توان فرما هم خارج بود. بر خلاف ظاهر مرتب و منظم نحوه‌ی نمایش آن به صورت $F_۵$، این عدد به مرز میلیارد می‌رسد:

$$F_۵ \text{ یا } ۲^{۲^۵} + ۱ = ۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۷$$

فرما بسیار تلاش کرد تا عاملی برای تجزیه‌ی $F_۵$ پیدا کند (او در ۱۶۴۰ نوشت: « تعداد بسیار

زیادی از مقسوم‌علیه‌ها را از طریق استلال‌هایی خطاناپذیر رد کرده‌ام») و به این نتیجه رسید که (اگرچه او یک ریاضی‌دان بود، امّا هیچ وقت از «به نظر من ...» فراتر نمی‌رفت) F_5 مانند پنج عدد قبل از خود در آن الگو اوّل است و همه‌ی عددهای بعدی به شکل $۲^{۲^n} + ۱$ نیز اوّل‌اند. این عددها را دیگر به نام عدد فرما می‌شناسیم.

این حقیقت که پنج عدد اوّل از یک الگوی خاص، اوّل هستند ممکن است برای برخی افراد به این معنی باشد که همه‌ی اعداد آن الگو اوّل هستند، به ویژه وقتی عدد ششم به میلیارد برسد. امّا برای ریاضی‌دانان، نمونه‌برداری از هیچ گروهی از اعداد نمی‌تواند منجر به حکمی قطعی در مورد تمام آن اعداد باشد.

(در رشته‌هایی به غیر از ریاضیات، یک نمونه‌ی جزئی می‌تواند فرضیه‌ای کلی را تأیید کند. ریاضی‌دان‌ها، که به اقتضای ماهیت رشته‌ی خود معمولاً می‌توانند فرضیه‌ها را با قطعیت اثبات یا رد کنند، در طرفداری از خودشان لطیفه‌ای دارند به این نام: «اثبات فیزیکدانان‌ها برای نشان دادن این که همه‌ی اعداد فرد اوّل‌اند.» می‌گویند یک فیزیکدان از یک شروع می‌کند و آن را به عنوان عدد اوّل مشخص می‌کند زیرا فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است. بعد، سه اوّل است، پنج اوّل است، هفت اوّل است؛ و نه هم۔ بر سه بخش‌پذیر است؟ خب، این استثنا است ـ یازده اوّل است، سیزده اوّل است. پس بدیهی است که همه‌ی اعداد فرد به جز نه اوّل‌اند.)

حکم‌های یک ریاضی‌دان باید اثبات شود. فرما، برای اثبات حکم خود، باید نشان می‌داد که هر عدد با الگوی $۲^{۲^n} + ۱$ « باید اوّل باشد». برای رد این حکم، فقط کافی بود نشان دهند یکی از اعداد با الگوی $۲^{۲^n} + ۱$ بر عددی به غیر از خودش و یک بخش‌پذیر است و بنابراین اوّل نیست.

آن شخص همان ریاضی‌دان معروف دربار سن‌پترزبورگ «لئونارد اویلر» بود. همان‌طورکه قبلاً هم گفتیم، اویلر خوش نداشت مسائل ریاضی را بی پاسخ ببیند. آیا، مطابق گفته‌ی فرما، الگوی $۲^{۲^n} + ۱$ همیشه عدد اوّل تولید می‌کرد، یاخیر؟ دادن پاسخ منفی با قاطعیت به این سؤال منوط به یافتن یک مقسوم علیه برای F_5 بود، و این کاری بود که اویلر قصد انجام آن را داشت.

او در ابتدا نشان داد که اگر عاملی اوّل برای تجزیه‌ی F_5 وجود داشته باشد باید عددی با الگوی $k^{۵+۱}۲ + ۱$، یا همان $۶۴k + ۱$ باشد. با این کشف، مسئله‌ی آزمایش کردن اوّل بودن

F_5 بسیار آسان شد. دیگر فقط اعداد اوّل خاصی به شکل $۶۴k + ۱$ باید تست می‌شدند. چند عدد نخست با این الگو ۱۹۳، ۲۵۷، ۴۴۹، ۵۷۷ و ۶۴۱ هستند. اتفاقاً عدد ۶۴۱ مقسوم‌علیه خوبی برای F_5 ، یا همان ۴٫۲۹۴٫۹۶۷٫۲۹۷ بود، و بنابراین برای همیشه مشخص شد که فرما دچار اشتباه شده است.

اکنون جا داشت که کل ماجرا با اعداد فرما به پایان برسد. امّا این طور نشد. این اعداد، چه اوّل باشند و چه نباشند، به هر حال جذابند. آن‌ها به طور طبیعی نامتناهی هستند. امّا نکته‌ی جالب این جاست که در بین تمام اعداد طبیعی عددی وجود ندارد که مقسوم علیه دو عدد فرما باشد. این بدان معناست که هرکدام از اعداد فرما (و توجه داشته باشید که این اعداد نامتناهی هستند) عاملی اوّل دارد که بقیه‌ی آن‌ها ندارد.[۱]

پس از این که اویلر نشان داد همه‌ی اعداد فرما نمی‌توانند اوّل باشند، ریاضی‌دانان مستقیماً به سراغ جست‌وجوی اعداد اوّل در بین اعداد فرما رفتند. هنوز یک سؤال جالب توجه در ریاضی وجود داشت. آیا اصلاً در بین اعداد فرما از F_4 به بعد عدد اولی وجود داشت؟ یا از این بخت بد آن ریاضی‌دان بزرگ، در بین اعداد نامتناهی $۲^{۲^n} + ۱$ فقط پنج عدد نخست اوّل‌اند؟ این جست‌وجو همچنان در هزاره‌ی دوم ادامه می‌یابد امّا حاصلی ندارد.

سومین بخش ماجرا به دنبال انتشار کتابی کوچک به سال ۱۸۰۱ در آلمان اتفاق افتاد. بنابراین، دو هزار سال پیش از یونانیان و یک قرن پس فرما، پنج عدد فرما دوباره به صحنه آمدند، امّا این بار، در کمال تعجب همگان، همراه با مسئله‌ی قدیمی چندوجهی‌های قابل رسم.

نام «کارل فریدریش گاؤس »، نویسنده‌ی بسیار جوان این کتاب، درخشان‌ترین نام در بین همه‌ی افراد حاضر در این ماجرا بود. گاؤس، درکنار نیوتن و ارشمیدس، یکی از سه ریاضی‌دان بزرگ در همه‌ی دوران‌ها بود؛ امّا در شاخه‌ی نظریه‌ی اعداد ریاضیات، هیچ کس همتای او نیست.

کتاب کوچکی که در ۱۸۰۱، وقتی گاؤس ۲۴ ساله بود، به چاپ رسید « Disquisitionses Arithmeticae» نام داشت. بیشتر کار این کتاب بین ۱۸ تا ۲۱ سالگی او انجام شد، یعنی

---

۱) ۱ـ از این حقیقت در اثباتی جالب از قضیه‌ی اقلیدس که می‌گوید اعداد اوّل نامتناهی‌اند استفاده شده است. این اثبات را «جورج پولیا»(George Polya) انجام داده است که کتاب بسیار مفید و در عین حال غیر تخصصی او، یعنی «چگونه آن را حل کنیم»، را مؤکداً به خوانندگان توصیه می‌کنیم.

پربارترین سال‌ها از زندگی پربار و طولانی او. براین باورند که این کتاب، نظریه‌ی اعداد را که تا آن زمان کاملاً بی‌سرو سامان بود نظام‌مند کرد و راهی برای دیگر افراد مشخص نمود.

همان طور که خواهیم دید، گاؤس مسئله‌ی چندوجهی‌های قابل رسم را به درستی در فصل هفتم کتاب خود گنجاند. دور از انتظار بود که این مسئله درکتابی راجع به نظریه‌ی اعداد بیان شود. زیرا از زمان یونانیان آن را در حیطه‌ی هندسه می‌دانستند. امّا سرانجام یک حسابدان با ترفند جبر به سراغ آن رفت و جواب را از طریق حساب پیدا کرد.

گاؤس کار خود را با این اصل شروع کرد که تنها طول‌های قابل رسم آن‌هایی هستند که می‌توان به صورت جبری از طریق چهار عمل اصلی و ریشه‌ی دوم نمایش داد، و بدین صورت توانست نشان دهد که یک چندوجهی باتعداد اضلاع اوّل را فقط وقتی می‌توان رسم کرد که تعداد اضلاع مطابق با الگوی $۱ + ۴^t$ باشد و نه غیر از این یعنی همان اعداد ول پی‌یر فرما.

به طورکل، یک چندوجهی منتظم با n ضلع را فقط می‌توان صرفاً با استفاده از خط کش و پرگار رسم کرد که n یا توانی از دو باشد، یا یکی از اعداد اوّل فرما باشد، و یا حاصل ضرب یکی از توان‌های نه ویک عدد فرما باشد.

با این راه کل کلی برای مسئله، گاؤس فقط سه تای دیگر به مجموعه چندوجهی قابل رسم اضافه کرد:

چندوجهی منتظم با ۱۷ ضلع ($F_۲$)،
چندوجهی منتظم با ۲۵۷ ضلع ($F_۳$)،
چندوجهی منتظم با ۶۵۵۳۷ ضلع ($F_۴$)،

گاؤس، اگرچه بعدها در ریاضیات دستاوردهای بسیار زیادی داشت، امّا به این مورد بیش از همه افتخار می‌کرد زیرا آن را در ۱۸ سالگی کشف کرده بود. گمان می‌رود این کشف باعث شده باشد او راه خود را بین ریاضیات و فقه‌اللغه [= فیلولوژی] انتخاب کند. او حتا چنین گفت که بر سنگ مزارش یک هفده وجهی رسم کنند، همان طورکه یک کره و استوانه‌ای محاط در آن (نشان دهنده‌ی فرمول حجم کره) بر مزار ارشمیدس نگاشته شده بود. امّا سنگ تراش اعتراض کرد که اگر یک هفده وجهی رسم کند بیشتر شبیه دایره خواهد شد. چه گاؤس چنین چیزی گفته باشد یا نه، پس

از ارائه‌ی راه حل خود اشاره می‌کند که:

«جای تعجب بسیار دارد که اگرچه روش تقسیم دایره به سه یا پنج قسمت مساوی از زمان اقلیدس شناخته شده بود، امّا هیچ کس در طی دو هزار سال به این کشفیات چیزی اضافه نکرده بود و نیز همه‌ی هندسه‌دانان یقین کرده‌اند که به جز این دو تقسیم و تقسیمات مشتق از آن‌ها، روش دیگری برای تقسیم دایره از طریق رسم هندسی وجود ندارد.»

شکل هفده وجهی بر سنگ مزار گاؤس ترسیم نشد، امّا بر بنای یادبودی که در زادگاهش برونزویک[1] ساخته شد این شکل را کشیدند.

امّا حتا گاؤس هم به این سؤال پاسخ نداد که آیا شکل چندوجهی با ۶۵٫۵۳۷ ضلع (F_4) آخرین چندوجهی قابل رسم صرفاً به وسیله‌ی خط کش و پرگار است. این سؤال را فقط وقتی می‌توان پاسخ داد که به چند سوال در مورد اعداد اوّل فرما پاسخ دهیم. آیا F_4 آخرین عدد اوّل با الگوی $۲^{۲^۴}+ ۱۴$ است؟ اگر بعد از آن هم اعداد اوّل وجود دارند، که احتمال وجود آن‌ها رو به کاهش می‌رود، آیا تعداد آن‌ها متناهی است یا نامتناهی؟

از زمان فرما تاکنون تلاش‌های ریاضیاتی بی‌اندازه‌ای در مورد این سوالات شده است. انتشار «Disquistiones Arithmetica»، که اهمیت تازه‌ای به اعداد اوّل فرما بخشید، یافتن پاسخ به این پرسش‌ها را حتا جالب‌تر از پیش کرد. از زمانی که فرما فرضیه‌ی خود را داد، همه‌ی آن چه که در این چند قرن یافته شد این بود که هرکدام از بقیه‌ی اعداد فرما که تست شده مرکب بوده است.

سه روش برای تعیین مرکب بودن یک عدد فرما وجود دارد. اولین آن‌ها مشابه آزمون لوکا است که در بخش «شش» مطرح شد. به این ترتیب، مرکب بودن برخی اعداد فرما سال‌ها پیش از آن که عاملی برای تجزیه‌ی آن‌ها پیدا شود اثبات شده است. به طور مثال، مرکب بودن F_7 و F_8 به ترتیب در سال‌های ۱۹۰۵ و ۱۹۰۹ مشخص شد اما عوامل تجزیه‌ی آن‌ها در ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ پیدا شد. به همین طریق، اگر چه از سال ۱۹۶۳ می‌دانیم F_{14} مرکب است، اما هنوز عاملی برای تجزیه‌ی آن پیدا نشده است. این روش [=تست لوکا]، که اولین بار در ۱۸۷۷ مطرح شد، به عنوان بخشی از برنامه‌ی بلند مدت آزمایش پایایی سخت افزاری در ابررایانه‌ای Cray-2 استفاده شد. در آن سال «جف یانگ»[2] و «دانکن ای. بوئل»[3] پس از ده روز کار با پردازنده در Cray-2 مرکب

1) Brunswick 2) Jeff Young 3) Duncan A. Buell

بودن $F_{۲۰}$ را اثبات کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که برای تعیین ماهیت $F_{۲۲}$ ، که در آن زمان کوچک‌ترین عدد فرما بود که هنوز ماهیتی ناشناخته داشت، پردازنده‌ی Cray-2 به چیزی بیش از ۱۶۰ روز نیازمند است. البته از آن زمان تا کنون، مرکب بودن $F_{۲۲}$، $F_{۲۳}$ ، $F_{۲۴}$، $F_{۲۸}$ و $F_{۳۱}$ اثبات شده است.

امّا با وجود این که اکنون می‌دانیم $F_{۲۰}$، $F_{۲۳}$ و $F_{۲۴}$ مرکب‌اند و بنابراین حاصل ترکیبی یگانه از عوامل اوّل می‌باشند، با این حال هنوز حتا یکی از عوامل آن را هم نمی‌دانیم (همان طور که عوامل $F_{۱۴}$ را نیز نمی‌دانیم).

(این‌جا هم مانند اعداد مرسن باید خواننده را برای اطلاعات به روزتر به اینترنت ارجاع دهیم.)

باید توجه داشت که روش بالا را فقط می‌توان برای اعداد «نسبتاً کوچک» فرما به کار برد. در مورد اعداد بزرگ باید از فرمولی استفاده کرد مانند آن‌چه اویلر برای رد فرضیه‌ی فرما به کار برد و نشان داد F_5 مرکب است.

دو روش دیگر برای بررسی اوّل بودن اعداد فرما این‌گونه‌اند که یا یکی از عوامل عدد را پیدا کنیم و یا این که عدد را به طور کامل تجزیه کنیم؛ که البته روش دوم بسیار زمان‌بر است. با این وجود، آن دسته از اعداد فرما که تاکنون آزموده شده‌اند لزوماً آن‌هایی نیستند که از بزرگ‌ترین عدد فرمای مرکب شناخته شده کوچک‌ترند. زیرا مرکب بودن اعدادی را راحت‌تر می‌توان اثبات کرد که نخستین اعداد اولی که برای تجزیه‌ی آن امتحان می‌کنیم، در بین عوامل آن وجود داشته باشد. برای ساده‌تر کردن این موضوع می‌توان به عنوان مثال گفت که تجزیه‌ی ۱۴۹۹۷ بسیار ساده‌تر از تجزیه ۸۶۳۳ است، زیرا نخستین عدد اولی که ۱۴۹۹۷ را تقسیم می‌کند ۳ است اما نخستین عدد اولی که در عامل‌های ۸۶۳۳ وجود دارد ۸۹ است.

می‌توان مثالی تقریباً مشابه را بین اعداد فرما پیدا کرد و آن هم $F_{۷۳}$ است که مرکب بودن آن مدت‌ها پیش در سال ۱۹۰۵ مشخص گردید. $F_{۷۳}$ بزرگ‌ترین عدد مرکب فرما بود که پیش از اختراع کامپیوتر شناخته شده بود. در واقع، احتمالاً این بزرگ‌ترین عددی بود که ماهیت آن در دوران پیش از کامپیوتر بررسی شده بود. عدد $F_{۷۳}$ آن چنان بزرگ است که اگر در مبنای ده و با خط و اندازه‌ی استاندارد نوشته شود، همه‌ی کتابخانه‌های دنیا نیز برای جا دادن آن کافی نیست.[۱]

۱) ۲ـ تخمین اندازه‌ی عدد $F_{۷۳}$ برگرفته از کتاب «مقاله‌ها و بازسازی‌های ریاضی» نوشته‌ی « دابلیو. روزبال»

امّا خوشبختانه این دو عدد و حتا بقیه‌ی اعداد بزرگ‌تر فرما نیز برای تجزیه شدن لازم نیست در مبنای ده نوشته شوند. اگر عدد F_t قابل تجزیه باشد، عامل آن باید عددی با الگوی $k2^{t+2} + 1$ باشد؛ که این حالت بهبود یافته‌تری از $k2^{t+1} + 1$ است که توسط اویلر مطرح شد، زیرا گزینه‌های احتمالی بیشتری را به عنوان عامل تجزیه رد می‌کند. در مورد F_{73} این بدان معناست که عامل ما باید به شکل $k2^{75} + 1$ باشد. از نظر ریاضی دلایل خوبی برای نپذیرفتن ۱، ۲، ۳ و ۴ به ازای k وجود دارد. پس k را ۵ می‌گیریم و $5 \times 2^{75} + 1$ را به عنوان اولین عامل احتمالی برای تجزیه‌ی F_{73} برمی‌گزینیم. و مشخص می‌شود که در واقع همین عدد کوچک‌ترین عامل اوّل است. بدین ترتیب، با کاری نه چندان زیاد، مرکب بودن F_{73} در همان ابتدای قرن بیستم معلوم شد.

عجیب و جالب است که در بین اعداد فرمایی که تاکنون مرکب بودن آن‌ها مشخص شده است، هشت عدد دارای عواملی به شکل $5 \times 2^n + 1$ می‌باشند. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد مرکب شناخته شده‌ی فرما، یعنی F_5 و F_{23471}، جزٔ این گروه هستند. دو مورد دیگر دارای عاملی به شکل $3 \times 2^n + 1$ و چهار مورد دارای عاملی به شکل $7 \times 2^n + 1$ می‌باشند. (برای یک عامل F_t، مقدار n باید دست کم $t + 2$ باشد.) در ادامه فهرستی از مواردی که دارای این اعداد اوّل کوچک می‌باشند خواهد آمد. جای تعجب ندارد که کشف این اعداد، بر خلاف دیگر اعداد مرکب فرما، به ترتیب زمانی اتفاق افتاد.

(W. W. Rouse Ball) است که به نوع خود کتابی کلاسیک در این حوزه محسوب می‌شود.

F_t	عامل	تاریخ کشف
$F_{۵}$	$۵ \times ۲^{۷} + ۱$	۱۷۳۲
$F_{۱۲}$	$۷ \times ۲^{۱۴} + ۱$	۱۷۷۷
$F_{۲۳}$	$۵ \times ۲^{۲۵} + ۱$	۱۷۷۸
$F_{۳۶}$	$۵ \times ۲^{۳۹} + ۱$	۱۸۸۶
$F_{۳۸}$	$۳ \times ۲^{۴۱} + ۱$	۱۹۰۳
$F_{۷۳}$	$۵ \times ۲^{۷۵} + ۱$	۱۹۰۵
$F_{۱۱۷}$	$۷ \times ۲^{۱۲۰} + ۱$	۱۹۵۶
$F_{۱۲۵}$	$۵ \times ۲^{۱۲۷} + ۱$	۱۹۵۶
$F_{۲۰۷}$	$۳ \times ۲^{۲۰۹} + ۱$	۱۹۵۶
$F_{۲۸۴}$	$۷ \times ۲^{۲۹۰} + ۱$	۱۹۵۶
$F_{۳۱۶}$	$۷ \times ۲^{۳۲۰} + ۱$	۱۹۵۶
$F_{۱۹۴۵}$	$۵ \times ۲^{۱۹۴۷} + ۱$	۱۹۵۷
$F_{۲۳۱۰}$	$۵ \times ۲^{۲۳۱۳} + ۱$	۱۹۷۹
$F_{۲۳۴۷۱}$	$۵ \times ۲^{۲۳۴۷۳} + ۱$	۱۹۸۴

شگفت‌آور این‌جاست که تجزیه‌ی کامل $F_{۱۱}$ در سال ۱۹۸۸ توجه کسی را از بیرون از دنیای ریاضیات جلب نکرد، امّا دو سال بعد، تجزیه‌ی $F_{۹}$، که از سوی ریاضی‌دانان علاقمند لقب «یکی از ده عدد تحت جست‌وجو» را گرفته بود، توجه همه‌ی رسانه‌های کشور را به خود جلب کرد. نیویورک تمایز عنوان خبر را «جهشی بزرگ در ریاضی » گذاشت و آن را «پیشرفتی در راستای شکافتن اسرار» قلمداد کرد. این توجه ویژه بیشتر به این دلیل بود که تجزیه‌ی این عدد کاری گروهی بود که متشکل از چندصد ریاضی‌دان و تقریباً هزار کامپیوتر بود. ترکیب قدرت انسان و کامپیوتر با چنان سرعتی «این عدد را به دست آورد» که نشان داد این روش تهدیدی جدی برای شیوه‌ی «رمزگذاری عمومی» است. در این شیوه رمزگذاری، پیام‌ها را با استفاده از عددی بسیار بزرگ

متشکل از صدها رقم و یا بیشتر رمزگذاری می‌کنند و لزومی ندارد که این عدد مخفی بماند. زیرا فقط کسی که عوامل اوّل تجزیه‌ی آن را می‌داند می‌تواند پیام را رمزگشایی کند.

سخنگوی این گروه که عدد ۱۵۵ رقمی $F_{۹}$ را تجزیه کرده بودند گفت:« برای نخستین بار وارد قلمروی آن چیزی شدیم که به آن رمزنگاری می‌گویند. . .واقعاً محال است که بتوان امنیت را صد در صد تضمین کرد.»

پنجاه سال پیش، در اوّلین ویرایش این کتاب نوشتیم:« بعید به نظر می‌رسد که ماهیت $F_{۱۳}$ [که در آن زمان بزرگ‌ترین عدد بررسی نشده‌ی فرما بود] در آینده‌ای نزدیک مشخص شود و بعید است این سؤال کلی که آیا اعداد اوّل فرما متناهی‌اند یا نامتناهی، به این زودی‌ها حل شود.»

در مورد بخش اوّل اشتباه کردیم امّا بخش دوّم را درست پیش‌بینی کردیم.

مسئله‌ی چندوجهی‌های قابل رسم کماکان بی‌پاسخ است. گاؤس توانست به ما بگوید که هفت وجهی منتظم ($F_{۲}$) را می‌توان صرفاً با خطکش و پرگار رسم کرد؛ امّا او، اگرچه ریاضی‌دان بزرگی بود، نتوانست مشخص کند که آیا آخرین شکل چندوجهی قابل رسم ۶۵٫۵۳۷ ضلع ($F_{۴}$) دارد.

بعید به نظر می‌رسد که ده سال دیگر مجدداً «نسخه‌ی سالگرد»ی برای «از صفر تا بی‌نهایت» به چاپ برسد.

چیزی که به احتمال قرین به یقین واقعی به نظر می‌رسد، این است که اعداد فرمای بزرگ‌تر و بزرگ‌تر و بزرگ‌تری خواهند آمد که مرکب بودن آن‌ها اثبات شده باشد. بنابراین، در این ویرایش از کتاب حاضر بیهوده به نظر می‌رسید که «فعلاً» اطلاعاتی راجع به بزرگ‌ترین اعداد تجزیه شده‌ی فرما بگنجانیم.

چیزی که احتمال آن کمتر می‌رود، امّا محال نیست، این است که ریاضی‌دانی، که شاید هنوز متولد نشده، خواهد توانست اثباتی ارائه دهد که به جز پنج عدد نخست فرما بقیه‌ی آن‌ها اوّل نیستند.

بدین ترتیب ماجرای چندوجهی‌های قابل رسم و اعداد اوّل فرما پایانی ندارد و در این جا فقط متوقف می‌شود. این ماجرایی‌ست که پر از نام‌های بزرگ ریاضی است. امّا هنوز برای نام‌های بزرگ دیگری جا دارد.

«یک مبارزه»

اعداد فرما و مرسن در این اشتراک دارند که نام هردوی آن‌ها به نام کسانی‌ست که اشتباه حدس زده‌اند؛ امّا علاوه بر این، اشتراکات زیادی دارند. الگوی کلی اعداد مرسن $۲^n - ۱$ است؛ الگوی اعداد فرما $۲^n + ۱$ است. هر کدام از این الگوها فقط به ازای مقادیر معین و محدودی از n عدد اوّل تولید می‌کنند. برای دیگر مقادیر n، حتا لازم نیست عدد را بنویسیم که بخواهیم آن را تجزیه کنیم. مسئله‌ای که در زیر می‌آید، کمک خواهد کرد تا چالش اعداد فرما و مرسن قابل فهم‌تر گردد.

مسئله. به ازای هر عدد صحیح مثبت s، عبارت $x^s - ۱$ از نظر جبری بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. به همین ترتیب، اگر s فرد باشد، $x^s - ۱$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر است.

$$x^۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱)$$

$$x^۳ - ۱ = (x - ۱)(x^۲ + ۲x + ۱)$$

$$x^۳ + ۱ = (x + ۱)(x^۲ - x + ۱)$$

در نتیجه، $۲^{rs} - ۱ = (۲^r)^s - ۱$ به ازای تمام sها بر $۲^r - ۱$ بخش‌پذیر است و $۲^{rs} + ۱ = (۲^r)^s + ۱$ به ازای sها فرد بر $۲^r + ۱$ بخش‌پذیر است. موارد زیر نمونه‌های از این فرمول‌ها هستند:

$$۲۵۵ = ۲^۸ - ۱ = (۲^۴ - ۱)(۲^۴ + ۱) = ۱۵ \times ۱۷$$

$$۵۱۱ = ۲^۹ - ۱ = (۲^۳ - ۱)(۲^۶ + ۲^۳ + ۱) = ۷ \times ۷۳$$

$$۵۱۳ = ۲^۹ + ۱ = (۲^۳ + ۱)(۲^۶ - ۲^۳ + ۱) = ۹ \times ۵۷$$

با استفاده از این حقایق، ممکن است برای خواننده لذت‌بخش باشد تا مقسوم علیه‌هایی برای $۲^{۱۲} - ۱$، یعنی ۴۰۹۵، و $۲^{۱۲} + ۱$، یعنی ۴۰۹۷، پیدا کند. همچنین او ممکن است بخواهد به بررسی مواردی بپردازد که قواعد بالا هیچ کدام از عوامل تجزیه‌ی $۲^n - ۱$ ویا $۲^n + ۱$ را به دست نمی‌دهند، و بکوشد تا نتیجه‌ای به دست آورد که در چه مواقعی این اعداد ممکن است اوّل باشند.

«پاسخ‌ها»

عدد $۴۰۹۵ = ۲^{۱۲} - ۱$ بر $۳ = ۲^{۲} - ۱$، $۷ = ۲^{۳} - ۱$، $۵ \times ۳ = ۱۵ = ۲^{۴} - ۱$ و $۷ \times ۳^{۲} = ۶۳ = ۲^{۶} - ۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین: $۱۳ \times ۷ \times ۵ \times ۳^{۲} = ۴۰۹۵$.

عدد $۴۰۹۷ = ۲^{۱۲} + ۱$ بر $۱۷ = ۲^{۴} + ۱$ بخش‌پذیر است. در حقیقت $۲۴۱ \times ۱۷ = ۴۰۹۷$.

به طور کل، در صورتی که n اوّل نباشد می‌توانیم مقسوم‌علیهی برای $۲^{n} - ۱$، به جز خودش و یک، پیدا کنیم؛ و نیز در صورتی که n توانی از دو نباشد می‌توانیم مقسوم علیهی برای $۲^{n} + ۱$، به جز خودش و یک پیدا کنیم.

به همین دلیل، اعداد مرسن اعدادی هستند با الگوی $۲^{n} - ۱$ وقتی n اوّل باشد؛ و اعداد فرما اعدادی هستند با الگوی $۲^{n} + ۱$ وقتی n توانی از دو باشد. همان طورکه در بخش «شش» و «هفت» دیدیم، حتا با این شروط نیز آن‌ها همیشه اوّل نیستند. و به همین دلیل است که اثبات متناهی یا نامتناهی بودن این اعداد چالش بزرگی پیش روی ریاضی‌دانان قرار داده است.

فصل نهم

هشت

جالب‌ترین نکته در مورد عدد هشت این است که مکعب است (یعنی ۲ × ۲ × ۲)، و مکعب‌ها اعدادی جذاب و مشکل سازند. این اعداد، که حاصل سه بار ضرب کردن عددی در خودش هستند، از زمان یونانیان که این اسم سه بعدی را به آن‌ها دادند تا به امروز تعدادی از دشوارترین مسائل حساب عالی را ایجاد کرده‌اند. و دشوارترین آن‌ها مسئله‌ای است که امروزه با نام مسئله‌ی مکعب‌ها می‌شناسیم. در تاریخ این مسئله، عدد هشت، علاوه بر این که خودش مکعب است، عددی بسیار حائز اهمیت بوده است.

دو سؤال وجود دارند که معمولاً در مورد هر گروه از اعداد مطرح می‌شوند، و طبیعتاً در مورد مکعب‌ها نیز مطرح شده‌اند:

چگونه می‌توان مکعب‌ها را از طریق اعداد طبیعی نشان داد؟

چگونه می‌توان اعداد طبیعی را به وسیله‌ی مکعب‌ها نشان داد؟

یکی از پاسخ‌ها به سؤال اوّل به اوایل میلاد مسیح باز می‌گردد. معمولاً آن را به «نیکوماخوس»[1] نسبت می‌دهند، که کتاب « مقدمات حساب » او در سده‌ی اوّل پس از میلاد نخستین کار جامعی بود که حساب را مستقل از هندسه مورد بحث قرار داده بود. اعداد مکعب همیشه برابر با حاصل

1) Nicomachus

جمع چند عدد فرد متوالی‌اند و می‌توان آن‌ها را این گونه نمایش داد:

$$۱^۳ = ۱ = ۱$$

$$۲^۳ = ۸ = ۳ + ۵$$

$$۳^۳ = ۲۷ = ۷ + ۹ + ۱۱$$

$$۴^۳ = ۶۴ = ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹$$

$$\cdots$$

پس پیدا کردن پاسخ پرسش اوّل دشوار نبود. (البته ممکن است پاسخ‌های دیگری هم وجود داشته باشد.) پاسخ به پرسش دوم، یعنی نمایش همه‌ی اعداد طبیعی از طریق مکعب‌ها، بسیار دشوار بود؛ و این پاسخ، پس از آن که تصادفاً پیدا شد، خود سؤالی جدید، متفاوت و بسیار سخت‌تر را در مورد مکعب‌ها به وجود آورد.

هنگامی که از «نمایش» گروهی از اعداد از طریق گروهی دیگر صحبت می‌کنیم، منظور ما یا از طریق حاصل جمع و یا حاصل ضرب آن‌هاست. طبیعی به نظر می‌رسد که اعداد اوّل را از حیث ضرب نگاه کنیم، که در این صورت اعداد صحیح به طور کلی از طریق حاصل ضرب اعداد اوّل نمایش داده می‌شوند.[1]

از سوی دیگر، طبیعی به نظر می‌رسد که اعداد مکعب را، مانند مجذورها، از حیث جمع نگاه کنیم؛ در این صورت اعداد صحیح از طریق حاصل جمع مجذورها، مکعب‌ها، توان‌های چهارم و یا توان‌های بالاتر نمایش داده می‌شوند.

۱) ۱ـ زمانی که ریاضی دان‌ها تفکر در خصوص اعدادی که به صورت مجموعی از اعداد اوّل هستند را شروع کردند، با مشکلات خارق العاده‌ای مواجه شدند. در سال ۱۷۴۲ یک ریاضی‌دان اهل پروس به نام کریستین گلادباخ (۱۶۹۰ـ۱۷۶۴) چیزی را پیشنهاد کرد که هم اکنون به «حدس گلادباخ» معروف است:

هر عدد زوج برزگتر از چهار به صورت مجموع دو عدد اول می‌باشد.

تا ۱۹۳۱ هیچ کس شک و شبه‌ای در خصوص این حدس نداشت. امّا بعد از آن یک ریاضی‌دان توانست ثابت کند که هر عدد زوج مجموع بیش از سیصد هزار عدد اوّل نیست. از آنجائیکه ثابت شده بود که هر عدد فرد به قدر کافی بزرگ مجموع بیش از سه عدد اوّل نیست، به همین جهت هر عدد زوج به قدر کافی بزرگ نیز بیش از چهار عدد اوّل نیست.

بدیهی است که در نمایش اعداد صحیح به صورت حاصل جمع مکعب‌ها، بعضی از اعداد به مکعب‌های کمتری نیاز دارند. عددی که خود مکعب است، مانند هشت، فقط به یک مکعب احتیاج دارد: $۲^۳$. عددی مثل ۲۳ را فقط با استفاده از $۱^۳$ و $۲^۳$ می‌توان نشان داد، زیرا $۲۷ = ۳^۳$، و بنابراین به این شکل می‌شود:

$$۱^۳ + ۱^۳ + ۱^۳ + ۱^۳ + ۱^۳ + ۱^۳ + ۱^۳ + ۲^۳ + ۲^۳$$

از طرفی، هشت را نیز می‌توانیم مانند ۲۳ از طریق حاصل جمع ۹ عدد مکعب نشان دهیم؛ به این صورت که هشت مرتبه $۰^۳$ را به $۲^۳$ اضافه کنیم.

واضح است که «اگر عددی وجود داشته باشد که برای نمایش آن به بیشترین تعداد مکعب‌ها نیاز داشته باشیم»، همه‌ی اعداد را می‌توان با آن تعداد مکعب‌ها به اضافه‌ی هر تعداد $۰^۳$ که لازم باشد نشان داد. امّا هیچ تضمینی برای چنین عددی وجود نداشت. تعداد مکعب‌های مورد نیاز برای نمایش اعداد احتمالاً با افزایش اعداد بیشتر می‌شد.

تا سال ۱۷۷۲، هیچ تلاش جدی‌ای برای پاسخ به سؤال دوم درباره‌ی مکعب‌ها صورت نگرفت. در آن سال، پس از دشواری‌هایی باور نکردنی، سؤالی مشابه در مورد مجذورها همراه با استدلال پاسخ داده شد. این نمونه، بهترین مثال در نظریه‌ی اعداد است که بدانیم بیان کردن یک حقیقت از اثبات آن آسان‌تر است. « قضیه‌ی چهار مجذور» بیان می‌کند که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع چهار مجذور نمایش داد. اندکی محاسبه در مورد اعداد کوچک نشان می‌دهد که این قضیه احتمالاً می‌تواند صحیح باشد. این قضیه‌ای است که گمان می‌رود دیوفانتوس با آن آشنا بوده است.

یقیناً مترجمی که فرما از طریق آن با مسائل دیوفانتوس آشنا شده این قضیه را مطرح کرده است. سپس فرما آن را به عنوان بخشی از قضیه‌ای کلی‌تر مطرح کرد و اثبات نمود. (این همان قضیه‌ای است که در بخش «پنج» مطرح کردیم به این مضمون که هر عدد یا مثلثی است یا حاصل جمع دو یا سه عدد مثلثی؛ یا مربع است یا حاصل جمع دو، سه یا چهار عدد مربع؛ یا پنج ضعلی است یا حاصل جمع دو، سه، چهار یا پنج عدد پنج ضلعی؛ و الی آخر). اگرچه، به گفته‌ی خود فرما، هیچ اثباتی برای او از اثبات این قضیه لذت‌بخش نبود، امّا طبق معمول حاشیه‌ی

کتاب دیوفانتوس او بیش از اندازه کوچک بود و در نتیجه با مرگ فرما آن اثبات هم از میان رفت. سپس اویلر با اثبات بخشی از قضیه که مربوط به مجذورها بود دست و پنجه نرم کرد و قریب به ۴۰ سال از عمر دراز خود را به طور ناپیوسته صرف این موضوع کرد امّا به نتیجه‌ای نرسید. امّا سرانجام در سال ۱۷۷۲، با کمک بخش عمده‌ای از کارهای اویلر، قضیه‌ی چهار مجذور را ژوزف لوئی لاگرانژ[1]، (۱۷۳۶ـ۱۸۱۳) مردی که ناپلئون وی را «قله‌ی افتخار ریاضیات» نامیده بود، به اثبات رساند. چند سال بعد، اویلر اثباتی ساده‌تر و قابل فهم‌تر از اثبات لاگرانژ ارائه کرد و این همان اثباتی است که امروزه استفاده می‌کنیم.

با چنین ماجرایی در مورد مجذورها، دیگر بعید به نظر می‌رسید بتوان به این سؤال که چند مکعب برای نمایش اعداد به صورت حاصل جمع مکعب‌ها لازم و کافیست به آسانی پاسخ داد.

سال (۱۷۷۲)، علاوه بر این که سال اثبات قضیه‌ی چهار مجذور بود، شروعی برای تلاش در جهت پاسخ دادن مسئله‌ی نمایش اعداد از طریق مکعب‌ها بود. ادوار وارینگ[2] از نقطه‌ای که قضیه‌ی چهار مجذور تمام می‌شد کار خود را شروع کرد، و بدون اثبات، قضیه‌ای را مطرح کرد: «هر عدد را می‌توان به صورت جمع چهار مجذور نشان داد؛ یا به صورت نه مکعب؛ یا به صورت نوزده توان چهارم؛ و همین موارد تا بی‌نهایت از توان‌های بالاتر.» همان طور که در فصل «سه» دیدیم، وارینگ کسی بود که تست اثبات نشده‌ی اوّل بودن اعداد از جان ویلسون را منتشر کرد. او به نوعی نابغه بود، چرا که پیش از کسب درجه‌ی کارشناسی ارشد در دانشگاه کمبریج صاحب کرسی شد. نقل کرده‌اند که او در طول عمر خود « شدیدترین غرور و تواضع ممکن را در شخصیت خود توأمان داشت.» (و البته افزوده‌اند که «ویژگی اوّل [= غرور] بارزتر بود.»)

در این جا به تاریخچه‌ی قضیه‌ی عمومی وارینگ بپردازیم. وارینگ خیلی خوش شانس بود که این قضیه «یکی از مسائلی از آب درآمد که برای ریاضی تاریخ ساز بوده‌اند.» (این عبارت ای. تی. بل به کار برده است.) این قضیه به نام «مسئله‌ی وارینگ» چنان شهرتی در ریاضیات به دست آورده که خود وارینگ ریاضی‌دان کسب نکرده است. (و عجیب این جاست که در خلاصه‌ی زندگی او در کتاب « فرهنگ زندگی‌نامه‌ی بزرگان کشور»، از مسئله‌ی ریاضی مشهور او نام برده نشده است.)

1) Joseph Louis Lagrange 2) Edward Waring

در این جا قضیه‌ی عمومی را کنار می‌گذاریم و به این قضیه می‌پردازیم که چرا ورینگ عدد ۹ را برای تعداد مکعب‌های لازم و کافی در نمایش هر عدد انتخاب کرده است. این که عدد ۹ به احتمال قریب به یقین انتخاب صحیح است، را او احتمالاً با کمی محاسبه به دست آورده است. اگر شروع کنیم و اعداد را به صورت حاصل جمع مکعب‌ها بنویسیم، خواهیم دید که تا ۱۰۰ فقط عدد ۲۳ است که به ۹ مکعب نیاز دارد. با گذشتن از ۱۰۰ می‌بینیم که بعد از ۲۳ هیچ عدد دیگری که حاصل جمع ۹ مکعب باشد وجود ندارد تا این که به ۲۳۹ برسیم.

احتمالاً ورینگ هم بر اساس همین محاسبات دستی حکم خود را بنا نهاد. امّا این فقط یک حدس خوب بود و نه بیشتر. امّا همان‌طور که دیدیم، با این محاسبات همچنین می‌توان با قاطعیت گفت که هیچ عددی برای نمایش به بیش از ۹ مکعب نیاز ندارد، حتا اگر محاسبات خود را تا مقادیر بسیار زیاد ادامه دهیم و باز نتوانیم چنین عددی را بیابیم. و همچنین نمی‌توان با قطعیت گفت که تعداد مکعب‌های مورد نیاز، همین‌طور که اعداد به سمت بی‌نهایت می‌روند، به بی‌نهایت نزدیک می‌شود. این همان چیزی است که وقتی می‌خواهیم اعداد را به صورت حاصل جمع توان‌های دو نمایش دهیم اتفاق می‌افتد؛ تعداد ثابتی از توان‌های دو وجود ندارد که برای نمایش همه‌ی اعداد کفایت کند.

برای اثبات بخشی از قضیه‌ی ورینگ که مربوط به مکعب‌ها بود اولین قدم این بود که وجود تعداد متناهی و محدودی از مکعب‌ها برای نمایش همه‌ی اعداد اثبات شود؛ به بیان کوتاه‌تر، باید ثابت می‌شد که تعداد مکعب‌های مورد نیاز به سمت بی‌نهایت نمی‌رود. نماد ریاضی انتخاب شده برای این تعداد مشخص از مکعب‌ها، در صورت وجود چنین چیزی، $g^{(۳)}$، بود. در حقیقت حرف ورینگ به این معنا بود که $g^{(۳)}$ وجود دارد و برابر ۹ است؛ $g^{(۴)}$، یعنی تعداد توان‌های چهارم برای نمایش اعداد، وجود دارد و ۱۹ است؛ و الی آخر. قضیه‌ی ورینگ فقط در صورتی معنا پیدا می‌کرد که برای هر توان بعد از $g^{(۲)}$ یک g موجود باشد. پیش‌تر، وجود $g^{(۲)}$ را لاگرانژ با اثبات قضیه‌ی چهار مجذور اثبات کرده بود و بنابراین $g^{(۲)} = ۴$.

بالاخره در ۱۸۹۵، یعنی یک قرن پس از انتشار قضیه‌ی ورینگ، فقط وجود $g^{(۳)}$، و نه مقدار آن، اثبات شد. در آن زمان اثبات شد که هر عدد را می‌توان از طریق حاصل جمع ۱۷ مکعب

نمایش داد. این یعنی که ۱۷ مکعب برای نشان دادن هر عددی کفایت می‌کند. اگرچه اثبات نشده بود که کوچک‌ترین تعداد ممکن از مکعب‌ها برای نشان دادن همه‌ی اعداد، ۱۷ است، امّا اثبات شده بود که به بیشتر از هفده مکعب نیازی نیست. در واقع، این مقداری تخمینی برای $g^{(۳)}$ بود.

این قدم بزرگی بود زیرا امکان افزایش بی‌پایان تعداد مکعب‌های لازم به ازای افزایش اعداد را رد می‌کرد. حالا $g^{(۳)}$ می‌توانست با $G^{(۳)}$ عوض شود، یعنی تعداد مکعب‌هایی که در واقع برای نمایش همه‌ی اعداد لازم است.

در طی شانزده سال بعد، ریاضی‌دانان به تدریج از هفده به شانزده، پانزده و . . .و سرانجام به ۹ مکعب لازم برای نمایش هر عدد به صورت حاصل جمع مکعب‌ها رسیدند. این نتیجه دقیقاً ۱۳۹ سال پس از طرح شدن فرضیه‌ی ورینگ حاصل شد.

کسی که با مسائل اعداد طبیعی آشنایی ندارد ممکن است این موضوع را گواهی بر نبوغ ورینگ بداند که چیزی را درک کرد که ریاضی‌دانان دیگر با بیش از یک صرف وقت آن را اثبات کردند. امّا این گونه نیست. زیرا یکی از ویژگی‌های اعداد طبیعی (و شاید جالب‌ترین ویژگی آن‌ها) این است که برخی از ساده‌ترین روابط بین آن‌ها را از دشوارترین روش‌ها می‌توان اثبات کرد.

جی. اچ. هاردی، کسی که بسیاری از وقت خود را صرف مسئله‌ی ورینگ کرد، این گونه می‌گوید:[1]

«محاسبات زیادی لازم نبود که ورینگ بتواند به فرضیه‌ای معقول برسد، و این به نظر من بزرگ‌ترین کمک او به نظریه‌ی اعداد بود. در نظریه‌ی اعداد فرضیه دادن بسیار آسان است امّا اثبات کردن بسیار دشوار. و فقط اثبات است که حائز اهمیت است.»

در این جا بود که مسئله‌ی مکعب‌ها، که حل کردن آن به سبب دشواری بیش از یک قرن به طول انجامیده بود، به مسئله‌ای بی‌اندازه دشوارتر (و جالب‌تر) تبدیل شد. در سال ۱۹۰۹ اثبات شد که تعداد اعدادی که برای نمایش آن‌ها به ۹ مکعب نیاز داریم متناهی است. شاید، آن گونه که به طور گسترده گمان می‌رفت، در بین تمامی اعداد فقط و فقط ۲۳ و ۲۳۹ بودند که به ۹ مکعب

۱) ۲ـ هاردی یکی از ریاضی‌دانان معاصر است که حرف‌هایش بیش از همه قابل نقل است، و بسیار سعی کردیم نقل قول‌ها از او در این کتاب بیش از این نشود. توصیه می‌کنیم خواننده به کتاب او «دفاعیات یک ریاضی‌دان» رجوع نماید.

نیاز داشتند.

این که فقط تعداد متناهی از اعداد به ۹ مکعب احتیاج دارند چه اهمیتی دارد؟ اهمیتش این است که بالاخره عدد آخری وجود دارد که به ۹ مکعب نیاز دارد. بنابراین از آن عدد به بعد ۸ مکعب برای نمایش همه‌ی اعداد کفایت می‌کند.

باز هم از هاردی نقل قول می‌کنیم:

> « بیایید فرض بگیریم (زیرا بی شک درست است) که تنها اعدادی که در نمایش آنها فقط به ۹ مکعب نیاز است ۲۳ و ۲۳۹ باشند. این حقیقتی بسیار عجیب است که برای هر حسابدان واقعی جالب توجه است؛ زیرا در مورد هر حسابدان، مثلاً و به خصوص در مورد آقای رامانوجان[1]، به درستی می‌توان گفت که «هرکدام از اعداد صحیح مثبت یکی از دوستان شخصی او محسوب می‌شوند.[2] امّا بی معناست اگر وانمود کنیم این یکی از حقایق عمیق حساب عالی است؛ در واقع این چیزی جز یک سرگرمی جذاب در علم حساب نیست. آن عدد ۸ است، نه عدد ۹، که عددی عمیقاً جالب است. »

با شکل گیری مفهوم جدید تعداد مکعب‌های کافی برای نمایش همه‌ی اعداد بعد از یک عدد خاص (احتمالاً بعد از ۲۴۰)، لازم بود تا نماد ریاضی جدیدی ابداع و استفاده شود. بنابراین، $g^{(۳)}$ که عبارت بود از تعداد مکعب‌های لازم برای نمایش همه‌ی اعداد، همراه شد با $G^{(۳)}$ که عبارت بود

1) Ramanujan

۲) ۳ـ «سری نیواسا رامانوجان» (Srinivasa Ramanujan) (۱۸۸۷ـ۱۹۲۰)، ریاضی‌دان جوان هندی که در سال ۱۹۲۰ در سن ۳۲سالگی از دنیا رفت، داستانی پرماجرا دارد که در چنین کتابی راجع به اعداد جالب، گفتن آن خالی از لطف نیست. او در واقع به صورت خودآموز ریاضی را شروع کرد تا این که کارمند دولت شد و سپس بخشی از کارهای ریاضیاتی خود را برای چند ریاضی‌دان انگلیسی ارسال کرد، و این گونه شد که هاردی او را به انگلستان آورد. این دو نفر در مدت چند سالی که با هم بودند، با همکاری هم چند کار ریاضیاتی درخشان به انجام رساندند. هاردی در مقدمه‌ی مجموعه آثار رامانوجان خاطره‌ای نقل می‌کند: روزی به دیدن دوست بیمار خود رفته و گفته بود که شماره‌ی تاکسی‌ای که سوار آن شده ۱۷۲۹ بوده که « عدد زیاد جذابی نیست.» رامانوجان بلافاصله جواب داده که برعکس، این عدد بسیار جالب است، زیرا کوچک‌ترین عددی است که می‌توان آن را به صورت مختلف به شکل حاصل جمع دو مکعب نشان داد($۱^۳ + ۱۲^۳ = ۹^۳ + ۱۰^۳ = ۱۷۲۹$).

از تعداد مکعب‌های لازم برای نمایش همه‌ی اعداد به جز تعداد محدودی از استثنائات که احتمالاً فقط ۲۳ و ۲۳۹ بودند. درآن هنگام اثبات شده بود که $g^{(3)}$ برابر با ۹ است؛ و از آن جا که تعداد اعدادی که به ۹ مکعب نیاز دارند مطابق اثبات‌ها متناهی بود، بنابراین $G^{(3)}$ می‌بایست کوچک‌تر مساوی ۸ باشد. در سال ۱۹۳۹ با قاطعیت اثبات شد که ۲۳ و ۲۳۹ تنها اعدادی هستند که برای نمایش به صورت حاصل جمع مکعب‌ها به ۹ مکعب نیاز دارند.

این تمایز بین «g کوچک» و «G بزرگ» از رهگذار کار بر روی آن بخش از مسئله‌ی ورینگ کشف شد که مربوط به توان‌های سوم بود، امّا کاربردهای مهمی نیز برای بخش‌های دیگر مسئله در بر داشت. وجود $g(s)$ به معنای وجود $G(s)$ و وجود $G(s)$ به معنای وجود $g(s)$ است. در نتیجه، ریاضی‌دانان برای هر کدام از بخش‌های مسئله با دو مسئله‌ی دیگر روبه رو شدند: مشخص کردن مقدار g کوچک برای هر توان و همچنین یک G بزرگ به ازای آن که می‌تواند برابر یا کوچک‌تر از g کوچک باشد.

مسئله‌ی G بزرگ هیچ گاه برای مجذورها ایجاد نشده بود زیرا $g(2)$ و $G(2)$ هر دو برابر ۴ هستند. همه‌ی اعداد را می‌توان به صورت حاصل جمع چهار مجذور نشان داد به جز آن‌هایی که به شکل $4^m(8n+7)$ می‌باشند و تعدادشان هم نامحدود است. بنابراین، هیچ عددی وجود ندارد که بتوانیم بگوییم «پس از این عدد، همه‌ی اعداد را می‌توان به صورت حاصل جمع سه مجذور نشان داد.» سؤال مربوط به توان‌های چهارم نیز پاسخ گفته شده است: $g(4) = 19$ و $G(4) = 16$.

مسئله‌ی مربوط به مکعب‌ها، به نحوی که ورینگ طرح کرده بود، به پاسخ رسید؛ امّا در نظریه‌ی اعداد اغلب اتفاق افتاده است که حل یک مسئله به ایجاد مسئله‌ی دیگری منجر شده است. همان طور که ریاضی‌دانان از $g(3) \leq 17$ شروع کرده و پایین آمده بودند، سعی کردن از $G(3) \leq 8$ هم پایین‌تر بروند. با بررسی جدول نحوه‌ی نمایش مکعبی اعداد تا ۴۰۰۰۰، حقیقت عجیبی آشکار شد. در بین همه‌ی این اعداد فقط ۱۵ عدد هستند که به ۸ مکعب نیاز دارند؛ هفت مکعب برای نمایش بقیه‌ی اعداد کفایت می‌کند (البته به جز ۲۳ و ۲۳۹ که همان طور که گفتیم به ۹ مکعب نیاز دارند) در این میان، بزرگ‌ترین عددی که به ۸ مکعب نیاز دارد ۴۵۴ است. در فاصله‌ی ۴۵۴ تا ۴۰۰۰۰ هیچ عددی وجود ندارد که به ۸مکعب نیاز داشته باشد.

باز هم در تاریخ مسئله‌ی ورینگ، این محاسبات دستی نقطه‌ای شد برای ورود به میدان نبرد و دست و پنجه نرم کردن با مسئله. ریاضی‌دانان شروع به اثبات این موضوع کردند که تعداد اعداد نیازمند به ۸ مکعب نیز مانند آن‌هایی که به ۹ مکعب نیازمندند محدود است. هنگامی که این موضوع اثبات شد، مقدار $G(۳)$ کوچکتر مساوی ۷ تعیین شد. در زمان نگارش این کتاب، آخرین مقدار اثبات شده همین ۷ است. امّا همان محاسبات نشان می‌دهد که احتمالاً ۷ نیز پاسخ نهایی نیست.

در جدول اعداد زیر ۴۰۰۰، فقط ۱۲۱ عدد وجود دارد که برای نمایش آن‌ها به ۷مکعب نیازمندیم. بزرگ‌ترین آن‌ها ۸۰۴۲ است. از ۸۰۴۲ تا ۴۰۰۰۰ هیچ عددی وجود ندارد که به بیش از شش مکعب نیاز داشته باشد. عموماً این طور فکر می‌کنند که بعد از ۸۰۴۲ هیچ عدد دیگری وجود ندارد که به بیش از شش مکعب نیاز داشته باشد، و بنابراین احتمالاً مقدار $G(۳)$ کوچک‌تر مساوی ۶ است.

این‌ها همه فقط در حد فرضیه است و اثبات نشده است. با این حال، هرگاه کسی ثابت کند، به احتمال قریب به یقین ثابت خواهد کرد، که $G(۳)$ کوچک‌تر مساوی ۶ است، باز هم جدول اعداد شامل نشانه‌هایی خواهد بود دال بر این که جواب نهایی را نیافته‌ایم. با پیش رفتن در اعداد، عددهایی که به شش مکعب نیاز دارند کم‌تر و کم‌تر می‌شوند. دو هزار عدد نخست، ۲۰۲ عدد به شش مکعب نیاز دارند امّا در هزار عدد پیش از یک میلیون، فقط یکی از این گونه اعداد وجود دارد.

ممکن است کسی دیگر هم بیاید و اثبات کند تعداد اعداد نیازمند به شش مکعب نیز متناهی است. سپس مقدار $G(۳)$ به پنج یا چهار کاهش خواهد یافت. و این قبلاً اثبات شده است که تعداد اعداد نیازمند به چهار مکعب، نامتناهی است.

در جدول‌های تهیه شده از اعداد، این نکته به چشم خورده است که با افزایش تعداد اعداد نیازمند به چهار مکعب، تعداد اعداد نیازمند به ۵ مکعب کاهش می‌یابد. ممکن است که سرانجام اعداد نیازمند به ۵ مکعب نیز در نقطه‌ای پایان یابند؛ در این صورت، آن نقطه چنان دور خواهد بود که انسان با کشیدن جدول قادر به دسترسی به آن نیست. البته این موضوع اصلاً اهمیتی ندارد،

زیرا مقدار دقیق $G(۳)$ را نه با جدول بلکه از طریق اثبات باید مشخص کرد.

تنها مسئله‌ی پیش روی ما این است که تعیین مقدار دقیق $G(۳)$ بسیار بسیار دشوار است. همان طور که در ابتدای فصل گفتیم، هشت و دیگر اعداد مکعب، اعدادی جالب و مشکل سازند.

«مسئله‌ای دیگر از مکعب‌ها»

این مسئله‌ای است که، بر خلاف مسئله‌ی مورد بحث ما در بالا، می‌توان آن را با کمی محاسبه حل کرد. در تمام اعداد، فقط چهار عدد وجود دارند که برابر با حاصل جمع مکعب رقم‌هایشان هستند. آن اعداد کدامند؟

«پاسخ»

$$۱۵۳ = ۱^۳ + ۵^۳ + ۳^۳$$

$$۳۷۰ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۰^۳$$

$$۳۷۱ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۱^۳$$

$$۴۰۷ = ۴^۳ + ۰^۳ + ۷^۳$$

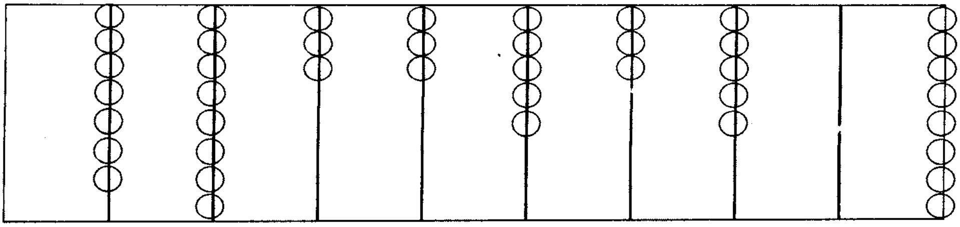
فصل دهم

نه

بسیاری از مطالب در مورد عدد ۹ و روابط آن با دیگر اعداد را می‌توان از طریق علامت مساوی نشان داد؛ امّا یکی از ویژگی‌های عدد ۹، که از زمان باستان تا به امروزه شناخته شده بود و بسیار جالب و کاربردی است، به این طریق قابل نمایش نیست. این ویژگی از این قرار است که باقیمانده‌ی تقسیم هر کدام از توان‌های ده بر عدد ۹ مساوی یک است. هنگامی که در ابتدای قرن نوزدهم نماد جدیدی بسیار شبیه به علامت مساوی برای بیان این رابطه و دیگر رابطه‌های مشابه ابداع شد، تمامی اعداد از «زاویه‌ای نو» مورد بررسی قرار گرفتند. هیچ ابداعی در نظریه‌ی اعداد به این اندازه منجر به سؤال‌های تازه و جالب توجه نشده است. و این شکوفایی ناگهانی در تاریخچه‌ی عدد ۹ نهفته است.

در زمانی که محاسبات با چرتکه انجام می‌شد، عموماً از عدد ۹ برای آزمایش صحت نتیجه‌ی محاسبات استفاده می‌شد. شخصی که محاسبه را انجام می‌داد، نیاز داشت تا از درست بودن نتایج خود اطمینان حاصل کند. به لطف عدد ۹، راه ساده‌ای برای این کار وجود داشت.

فرض کنیم او عدد ۴۹۴۷۶ را در ۱۵۸۳۳ ضرب کرده و پاسخ را ۷۸۳٫۳۵۳٫۵۰۸ به دست آورده است. تنها چیزی که پیش چشم او روی چرتکه است پاسخ محاسبه است.



شکل ۸ـ۱

از آن جا که او می‌داند باقیمانده‌ی تقسیم هر یک از توان‌های ده بر ۹ مساوی یک است و از طرفی هر مهره بر روی چرتکه نشان دهنده یک توان از ده است، تعداد مهره‌های دو عدد ضرب شده و عدد پاسخ را می‌شمارد.

امروزه ما برای این کار رقم‌های هر عدد را با هم جمع می‌زنیم:

$$۱ + ۵ + ۸ + ۳ + ۳ = ۲۰$$

$$۴ + ۹ + ۴ + ۷ + ۶ = ۳۰$$

$$۷ + ۸ + ۳ + ۳ + ۵ + ۳ + ۵ + ۰ + ۸ = ۴۲$$

سپس باقیمانده‌ی تقسیم هرکدام از این سه عدد را بر ۹ محاسبه می‌کند:

۹ ÷ ۲۰ ، باقیمانده ۲

۹ ÷ ۳۰ ، باقیمانده ۳

۹ ÷ ۴۲ ، باقیمانده ۶

اگر محاسبه‌ی فرد با چرتکه درست بوده باشد، وقتی باقیمانده‌ی مجموع رقم‌های دو عدد ضرب شده را در هم ضرب می‌کنیم (و در صورتی که حاصل از هشت بزرگتر شد، آن را باز بر ۹ تقسیم می‌کنیم و باقیمانده را در نظر می‌گیریم). حاصل برابر با باقیمانده‌ی تقسیم مجموع رقم‌های عدد حاصل ضرب بر ۹ است. بنابراین، از آن جا که ۶ = ۳ × ۲، در این جا با اطمینان خاطر می‌توان عملیات ضرب انجام شده را درست دانست. (با این حال، همیشه این امکان وجود داشت که رقم‌ها جابه‌جا شده باشند؛ اشتباه رایجی که این آزمون قادر به نشان دادن آن نیست.)

این آزمون، علاوه بر ضرب برای جمع و تفریق نیز قابل استفاده است. حاصل جمع دو عدد فوق، باقیمانده‌ی ۵ را به وجود خواهد آورد [یعنی ۳ + ۲]؛ همچنین حاصل تفریق آن‌ها باقیمانده‌ی ۱ [یعنی ۲ − ۳]. برای آزمودن درستی تقسیم، از این قاعده‌ی متعارف پیروی می‌کنیم که مقسوم (a) برابر است با مقسوم علیه (b) ضرب در خارج قسمت (q) به اضافه‌ی باقیمانده (r)، یا به عبارتی $a = bq + r$. امّا برای امتحان کردن تقسیم و گذاشتن اعداد در این ضابطه، فقط باقیمانده‌ی مجموع ارقام آن‌ها بر ۹ را در ضابطه قرار می‌دهیم.

$$۴۹۴۷۶ = ۱۵۸۳۳ \times ۳ + ۱۹۷۷$$

$$\begin{array}{r|l} ۴۹۴۷۶ & \underline{۱۵۸۳۳} \\ \underline{۴۷۴۹۹} & ۳ \\ ۱۹۷۷ & \end{array}$$

یا (هنگامی که باقیمانده‌ی مجموع ارقام بر ۹ را جایگزین می‌کنیم):

$$۲ \times ۳ + ۶ = ۱۲, \qquad ۱ + ۲ = ۳$$

این روش قدیمی آزمودن نتیجه‌ی محاسبه با نام «باقیمانده بر ۹» شناخته شده است. اساس آن، حقیقتی است که پیش‌تر به آن اشاره کردیم: هرگاه عدد ۱، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و یا هر یک از توان‌های دیگر ۱۰ بر ۹ تقسیم گردد، باقیمانده ۱ خواهد بود. به همین دلیل، فقط وقتی یک عدد در مبنای ده بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد؛ اگر مجموع ارقام بر ۹ باقیمانده‌ای داشته باشد، این همان باقیمانده‌ای است که از تقسیم خود عدد بر ۹ به دست می‌آید.[1] مطابق این «قاعده‌ی ۹»، که از زمان های دور وجود داشته، مثلاً در مورد عددی مانند ۹٫۸۷۶٫۵۴۳٫۲۱۰ در کوتاه‌ترین زمان و فقط با جمع زدن ارقام و تقسیم آن‌ها بر ۹ می‌توان گفت که این عدد بر ۹

---

۱) ۱ـ آزمونی مشابه برای عدد ۱۱ نیز وجود دارد. وقتی توان‌ها ۱۰ بر عدد ۱۱ تقسیم می‌شوند به طور یک در میان باقیمانده‌ی آن‌ها ۱+ و ۱− می‌شود. (۱+ برای ۱، ۱− برای ۱۰، ۱+ برای ۱۰۰، ۱− برای ۱۰۰۰ و الی آخر.) برای آزمایش کردن محاسبه‌ی خود به وسیله‌ی عدد ۱۱، به طور یک در میان رقم‌ها را اضافه و کم می‌کنیم و حاصل را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم.

بخش‌پذیر است.

$$۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱+۰=۴۵,$$
$$۴+۵=۹,$$
$$۹\div۹=۱$$

سرانجام نمادی بسیار ساده و جالب ابداع گردید تا بیانگر رابطه‌ای مانند رابطه‌ی بین ۹ و توان‌های ۱۰ باشد. این علامت را گاؤس ابداع کرد؛ کسی که، به قول ای. تی. بل، « نام او در جای‌جای ریاضیات حضور دارد.» زبان گاوس در رساله‌ی حساب (Disquistiones) لاتینی است، امّا زبان ریاضی او حول محور «هم نهشتی» می‌چرخد؛ مفهومی که نخستین بار در همین رساله مطرح شده است.

رابطه‌ی هم نهشتی از جهتی بسیار به علامت مساوی شبیه است و بنابراین کارآمد و مفید، و از جهتی نیز بسیار متفاوت است و بنابراین جذاب:

مساوی با	$=$
هم نهشت است با	$\equiv$

گاوس در رساله‌ی حساب، تعریف زیر را ارائه می‌دهد:

«دو عدد صحیح a و b راهم نهشت به پیمانه‌ی m می‌گوییم هنگامی که اختلاف آن‌ها، یعنی $a-b$، بر m بخش‌پذیر باشد.»

$$a \overset{m}{\equiv} ۵^۲ \overset{۲}{\equiv} ۱ \quad (\text{هنگ } ۲)$$
$$۸۴ \overset{۶}{\equiv} ۰ \quad (\text{هنگ } ۶)$$
$$۱۷۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \quad (\text{هنگ } ۱۱)$$

روش دیگری برای بیان همین مفهوم این است که بگوییم a و b هنگامی که بر m تقسیم شوند باقیمانده‌ی یکسانی خواهند داشت.

ممکن است مفهوم هم نهشتی در نگاه نخست بسیار عجیب و نا آشنا به نظر آید، امّا این گونه نیست ـ بر عکس، این مفهوم در واقع بسیار هم آشناست. ما هر روز از زندگی خود را بر پایه‌ی رابطه‌ی هم‌نهشتی می‌گذاریم. به طور مثال، وقتی می‌گوییم امروز سه‌شنبه است، در حقیقت می‌گوییم که تعداد معینی روز تقسیم بر هفت (= تعداد روزهای هفته) شده و باقیمانده‌ی آن سه‌شنبه است.

اگر از مفهوم «سال قیصری» [= تقویم رومی] که در نزد اخترشناسان مطرح است بهره بگیریم، روز هفته را می‌توان دقیقاً به عنوان ماه‌ها و سال‌هایی با طول متفاوت، اخترشناسان روزها را از تاریخ اوّل ژانویه‌ی ۴۷۱۳ پیش از میلاد، یعنی شروع دوره‌ی قیصر [=سزار] روم، پشت سرهم می‌شمارند. مطابق این شمارش، روز اوّل ژانویه‌ی ۱۹۳۰ که چهارشنبه بود، برابر با روز ۲٫۴۲۵٫۹۷۸ قیصری بود. بااین اطلاعات و نیز رابطه‌ی هم نهشتی بر اساس پیمانه‌ی ۷، می‌توانیم حساب کنیم که اوّل ژانویه‌ی ۲۰۰۰ (یعنی ۲۵٫۵۶۷ روز بعد) چه روزی از هفته می‌شود:

روز قیصری اوّل ژانویه‌ی ۱۹۳۰ = ۲٫۴۲۵٫۹۷۸ $\overset{۲}{\equiv}$ ۲ = (mod۷)

= چهارشنبه

روز قیصری اوّل ژانویه‌ی ۲۰۰۰ = ۲٫۴۵۱٫۵۴۵ $\overset{۷}{\equiv}$ ۵ = (mod۷)

= شنبه

[البته خوانندگان ترجمه‌ی فارسی در نظر داشته باشند که هفته در تقویم میلادی از دوشنبه شروع می‌شود. بنابراین فاصله‌ی اوّل هفته تا چهارشنبه ۲ روز و تا شنبه ۵ روز است ـ م .]

رابطه‌ی کلی هم‌نهشتی برای نشان دادن روش قدیمی آزمودن محاسبات براساس باقیمانده به ۹ نیز به شکل زیر است:

$$۱۰^n \overset{۹}{\equiv} ۱$$

این ضابطه در یک نگاه به ما می‌گوید که اختلاف بین ۱ و هر کدام از توان‌های ۱۰ همیشه بر ۹ بخش‌پذیر است. اگر به جای این که فقط به رابطه‌ی توان‌های ۱۰ با عدد ۹ بنگریم، به «همه‌ی»

اعداد با همین پیمانه‌ی ۹ نگاهی بیندازیم، خواهیم دید که به ۹ گروه مختلف تقسیم می‌شوند:

$$۰, ۹, ۱۸, ۲۷, ۳۶, \cdots \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$۱, ۱۰, ۱۹, ۲۸, ۳۷, \cdots \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, \cdots \overset{۹}{\equiv} ۲$$

$$۳, ۱۲, ۲۱, ۳۰, ۳۹, \cdots \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$۴, ۱۳, ۲۲, ۳۱, ۴۰, \cdots \overset{۹}{\equiv} ۴$$

$$۵, ۱۴, ۲۳, ۳۲, ۴۱, \cdots, \overset{۹}{\equiv} ۵$$

$$۶, ۱۵, ۲۴, ۳۳, ۴۲, \cdots, \overset{۹}{\equiv} ۶$$

$$۷, ۱۶, ۲۵, ۳۴, ۴۳, \cdots \overset{۹}{\equiv} ۷$$

$$۸, ۱۷, ۲۶, ۳۵, ۴۴, \cdots, \overset{۹}{\equiv} ۸$$

هر عدد در یکی از این گروه‌ها قرار می‌گیرد، و عددی نیست که در بیش از یک گروه جای گیرد. بنابراین، از طریق نماد، هم‌نهشتی می‌توان با اعداد طوری رفتارکرد که انگار فقط ۹ عدد متفاوت‌اند. با یک جدول ضرب مخصوص می‌توان همه‌ی حاصل‌های ممکن برای پیمانه‌ی ۹ را نشان داد:

×	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۲	۰	۲	۴	۶	۸	۱	۳	۵	۷
۳	۰	۳	۶	۰	۳	۶	۰	۳	۶
۴	۰	۴	۸	۳	۷	۲	۶	۱	۵
۵	۰	۵	۱	۶	۲	۷	۳	۸	۴
۶	۰	۶	۳	۰	۶	۳	۰	۶	۳
۷	۰	۷	۵	۳	۱	۸	۶	۴	۲
۸	۰	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

با استفاده از این جدول، خوانندگان می‌توانند ببینند که حاصل ضرب‌های کاملاً متفاوتی مانند ۱۴ × ۱۳، ۳۲ × ۴ و ۴۱ × ۲۲ باهم برابر است (براساس پیمانه‌ی ۹)؛ یا همان گونه که پیش‌تر گفتیم، باقیمانده‌ی همه‌ی آن‌ها بر ۹ برابر با ۲ است.

هر جفت شامل یک عدد است که با ۴ هم نهشت می‌باشد (به پیمانه‌ی ۹) و یک عدد دیگر که با ۵ هم نهشت است (به پیمانه‌ی ۹). می‌بینیم که ۵ × ۴ در جدول ضرب فوق برابر با ۲ است. با انجام ضرب‌های مذکور خواهیم دید که حاصل هر سه‌ی آن‌ها با ۲ هم نهشت است(به پیمانه‌ی ۹).

همان‌طور که به اعداد از حیث رابطه با ۹ نگاه کردیم، می‌توانیم به آن‌ها از حیث رابطه با هر عدد دلخواه m نیز نگاه کنیم؛ آن گاه خواهیم دید که اعداد متعاقباً هرکدام در یکی از m گروه مانعه الجمع جای می‌گیرند. آشناترین حالت این روش، انجام این کار براساس عدد ۲ است.

یک عدد «زوج» n، به هنگام تقسیم بر ۲ دارای باقیمانده‌ی ۰ است.

یک عدد «فرد» n، به هنگام تقسیم بر ۲ دارای باقیمانده‌ی ۱ است.

یک عدد «زوج» n، عددی است که به پیمانه‌ی ۲ با ۰ هم نهشت است.

یک عدد «فرد» n، عددی است که به پیمانه‌ی ۲ با ۱ هم نهشت است.

و یا:

عدد زوج $n \overset{2}{\equiv} 0$

عدد فرد $n \overset{2}{\equiv} 1$

در مدتی بسیار کوتاه نماد ابداعی توسط گاوس در رساله‌ی حساب چنان دقیق و آسان از سوی همگان درک و فهم شد که بسیاری از قضایایی که تا آن زمان به صورت‌هایی دیگر شناخته شده بودند، فوراً دوباره به صورت هم نهشتی بیان شدند. یک مثال مناسب، قضیه‌ی ویلسون[1] است که پیش‌تر در فصل «سه» دیدیم. نمایش دادن این قضیه به صورت هم نهشتی امروزه آن قدر معمول و رایج است که یک ریاضی‌دان، وقتی فهمید مؤلف کتاب حاضر قصد دارد قضیه‌ی ویلسون را در فصل «سه» معرفی کند امّا نماد هم نهشتی را تا فصل «نه» مطرح ننماید، پرسید: « اصلاً مگر

1) Wilson

می‌توان پیش از توضیح هم نهشتی قضیه‌ی ویلسون را حتا «مطرح» کرد؟» امّا در حقیقت هفت سال پیش از آن که حتا ابداع کننده‌ی نماد هم‌نهشتی به دنیا بیابد، قضیه‌ی ویلسون به صورت زیر مطرح شده بود:

اگر P عددی اوّل باشد، آنگاه مقدار زیر

$$\frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times (P-۱)+۱}{P}$$

عددی کامل خواهد بود.

هنگامی که معلم ویلسون جوان، ادوارد ورینگ، قضیه‌ی او را در سال ۱۷۷۰ منتشر کرد، چنین گفت: « قضایایی از این دست بسیار سخت اثبات خواهند شد، زیرا نمادی برای نمایش اعداد اوّل وجود ندارد.» این نظر در ارتباط با آن نظر گاوس بود که به نحوی تند و تیز بیان کرد بدن مضمون که اثبات‌های ریاضی وابسته به «مفاهیم‌اند» نه وابسته به «نمادها». اگرچه امروزه قضیه‌ی ویلسون تقریباً همیشه با نماد هم‌نهشتی به صورت زیر مطرح می‌شود.

$$(P-۱)!+۱ \overset{P}{\equiv} ۰$$

و اگر چه آسان‌ترین مستقیم‌ترین راه اثبات قضیه‌ی ویلسون (که متعلق به خود گاوس بود) بر مبنای هم نهشتی است، امّا مفهوم همچنان مهم‌تر از نماد است.

با وجود این، در طول تاریخ هم نهشتی دلیلی محکم وجود دارد گواه بر این که اهمیت نمادها و مفاهیم، همسان است. این نوع رابطه که با سه خط کوچک و موازی هم نهشتی بیان می‌شود از قرن‌های اولیه پس از میلاد مسیح شناخته شده است. حتا روشی دیگر به همان اندازه مختصر هم برای نمایش این مفهوم به صورت ریاضی از طریق نماد "|" یعنی «عادکردن»، وجود دارد:

وقتی می‌گوییم $a\overset{m}{equiv}b$ یعنی این که $m|(a-b)$

امّا این نوع رابطه که از دیرباز در ریاضی شناخته شده بوده، هیچ نقش مهمی در مطالعه‌ی اعداد ایفا نکرده است تا این که گاوس آن را از نظر ریاضی به صورتی معنادار و تداعی کننده بیان کرده است. سه خط موازی علامت هم نهشتی تداعی گر علامت تساوی هستند و به ما یادآوری

می‌کند که هم نهشتی و تساوی، که هر دوی این روابط نوعی برابری را نشان می‌دهند، دارای برخی ویژگی‌های مشترک هستند. ما با روابط تساوی زیر آشنائیم:

اگر a هر عددی باشد، آن گاه $a = a$.

اگر $a = b$، آن گاه $b = a$.

اگر $a = b$ و $b = c$، آن گاه $a = c$.

این ویژگی‌های رابطه‌ی تساوی، ویژگی‌های رابطه‌ی هم نهشتی نیز می‌باشند:

اگر a هر عددی باشد، آن گاه $a \overset{m}{\equiv} a$.

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن گاه $b \overset{m}{\equiv} a$.

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{m}{\equiv} c$، آن گاه $a \overset{m}{\equiv} c$.

این شباهت‌ها بین تساوی و هم نهشتی که از طریق تشابه نماد مورد تأکید قرار می‌گیرند بیانگر آنند که ما تلاش می‌کنیم برخی اعمال را که با تساوی انجام می‌شوند، با هم نهشتی نیز انجام دهیم. پیش از این به هنگام بحث درمورد فرآیند مشخص کردن باقیمانده بر ۹ دیدیم که چگونه می‌توان هم نهشتی‌های عددی را، همچون معادلات، ضرب و جمع و تفریق کرد. همچنین می‌توانیم با هم نهشتی‌های جبری دقیقاً مثل معادلات جبری برخورد کنیم. نتایج کار معمولاً جالب توجه است.

به طور نمونه، یک مسئله‌ی اساسی در مورد مجذورها و اعداد اوّل را در نظر بگیرید:

پیدا کردن مجذوری که یک واحد از یکی از مضرب‌های P کمتر است، هنگامی که P یک عدد اوّل فرد باشد.

این مسئله را با نهاد هم‌نهشتی به طوری مختصرتر می‌توان بیان کرد:

آیا $\quad x^{۲} \overset{P}{\equiv} -۱ \quad$ قابل حل است؟

پیش از آن که راه حل کلی مسئله را ارائه دهیم، ممکن است خواننده تمایل داشته باشد آن را به ازای چند مقدار ممکن برای P حل کند؛ یعنی مجذورهایی را پیدا کند که، به ترتیب، یک واحد کمتر

از یکی از مضرب‌های چند عدد اوّل فرد نخست، یعنی سه، پنج، هفت، یازده و سیزده باشند. او این مجذورها را فقط برای دو عدد از این اعداد اوّل پیدا می‌کند، اما این کار را بسیار سریع انجام خواهد داد.

حالا می‌رسیم به راه حل کلی مسئله.

می‌توان اثبات کرد (البته فراتر از حد این کتاب است) که تنها اعداد اوّل فردی که هم‌نهشتی بالا به ازای آن‌ها قابل حل است اعدادی مانند پنج و سیزده هستند که به شکل $4n + 1$ می‌باشند. با نماد هم‌نهشتی می‌توان گفت:

$$x^2 \overset{P}{\equiv} -1 \quad \text{قابل حل است فقط هنگامی که} \quad P \overset{4}{\equiv} 1$$

قضیه‌ای در ارتباط بسیار تنگاتنگ با مسئله‌ی فوق وجود دارد که بیش از هر قضیه‌ای در نظریه‌ی اعداد به اثبات رسیده است. این که از دیدگاه‌های بسیار متفاوتی می‌توان به این قضیه نگاه کرد خود به روشنی بیان‌گر این است که اهمیتی بنیادین در روابط بین اعداد دارد. دلیل ما برای مطرح کردن این قضیه در این‌جا این است که قضیه‌ی مذکور بارزترین مثال برای آن نوع خاص از رابطه بین اعداد است که از طریق نماد هم‌نهشتی دارای اهمیت می‌گردد.

این قضیه، که با نام «قانون تقابل درجه‌ی دوم» شهرت دارد، توسط گاوس «گوهر ریاضیات» دانسته شد؛ و از آن جا که گاوس ریاضیات را در جایی دیگر «شهبانوی دانش‌ها» دانست و علم حساب[1] را «شهبانوی ریاضیات» دانست، این امر قانون تقابل درجه‌ی دوم را در رأس علم قرار می‌دهد. ریاضی‌دانان پیش از گاوس از قانون تقابل درجه‌ی دوم آگاه بودند. اویلر بود که این قانون را کشف کرد، امّا نه او ونه هیچ کس دیگر آن را اثبات نکرد. سپس گاوس، در سن ۱۸ سالگی و بدون اطلاع از کار اویلر و دیگران، این قانون را شخصاً دوباره کشف کرد. او فوراً به جذابیت آن پی برد امّا فوراً نتوانست آن را اثبات کند. در جایی می‌نویسد: « این قانون یک سال تمام عذابم داد و حتا سخت‌ترین تلاش‌ها هم برای آن کارساز نبود.» سرانجام او قانون را به روشی واقعاً زیبا و ساده اثبات کرد. در آن هنگام گاوس ۱۹ سال داشت.

پس از اثبات این گوهر ریاضیات، گاوس همچنان از آن در شگفت بود، به طوری که در طول عمر خود با شش روش کاملاً متفاوت دیگر آن را اثبات نمود. در حال حاضر که این کتاب به نگارش

1) arithmetic

در می‌آید، تعداد اثبات‌های قانون تقابل درجه‌ی دوم به بیش از صد رسیده است.

منظور از «تقابل» در این قانون، تقابلی است که بین دو عدد اوّل فرد متفاوت pو q وجود دارد. این قانون بیان می‌کند که به ازای p و q، دو هم نهشتی

$$x^۲ \overset{p}{\equiv} q,\ x^۲ \overset{q}{\equiv} p$$

یا هر دو قابل حل‌اند و یا هر دو قابل حل نیستند، مگر این که p و q اعداد اولی به شکل $۴n - ۱$ که در این صورت یکی از هم نهشتی‌های قابل حل است و دیگری قابل حل نیست.

هنگامی می‌توانیم قانون تقابل درجه‌ی دوم را در عمل ببینیم و تحسین کنیم که بکوشیم تا مشخص کنیم که آیا یک هم نهشتی از نوعی که در این قانون صدق می‌کند قابل حل است یا خیر. به طور مثال:

آیا $x^۲ \overset{۹۷}{\equiv} ۴۳$ قابل حل است؟

این مانند آن است که بگوییم آیا مجذوری وجود دارد که ۴۳ واحد از یکی از مضرب‌های ۹۷ بزرگ‌تر باشد. از آن جا که فقط یکی از این دو عدد اوّل به شکل $۴n - ۱$ است، مطابق قانون تقابل درجه‌ی دوم می‌دانیم که هم نهشتی

$$x^۲ \overset{۹۷}{\equiv} ۴۳$$

فقط هنگامی قابل حل است که هم نهشتی

$$x^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۹۷$$

نیز قابل حل باشد. هر دوی آن‌ها با هم ایستادگی می‌کنند و یا با هم شکست می‌خورند؛ یا هر دو قابل حل‌اند، و یا هیچ کدام قابل حل نیستند.

برای تعیین قابل حل بودن هم نهشتی دوم، که به نوبه‌ی خود قابل حل بودن اولین هم نهشتی را تعیین می‌کند، از آن جا که ۹۷ بزرگ‌تر از ۴۳ است، آن را از طریق تقسیم کردن ۹۷ بر ۴۳ و به دست آوردن باقیمانده‌ی آن (یعنی ۱۱) فرو می‌کاهیم. بدین ترتیب، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۱۱$$

حالا یک هم نهشتی داریم که در آن هر دو عدد اوّل به شکل $۴n - ۱$ هستند. مطابق قانون تقابل دوگانه می‌دانیم که

$$۱۱ \overset{۴۳}{\equiv} x^۲ \text{ قابل حل است}$$

فقط اگر

$$۴۳ \overset{۱۱}{\equiv} x^۲ \text{قابل حل نباشد.}$$

حالا، از آن جا که ۴۳ بزرگ‌تر از ۱۱است، این هم نهشتی دوم رانیز مانند بالا فرو می‌کاهیم. حاصل کار، یک هم نهشتی آشناست:

$$x^۲ \overset{۱۱}{\equiv} -۱$$

می‌بینیم که این همان هم نهشتی‌ای است که چند صفحه پیش دیدیم: پیدا کردن مجذوری که یک واحد کمتر از یکی از مضربهای p باشد هنگامی که P یک عدد اوّل فرد باشد. از راه حل آن مسئله به یاد می‌آوریم که هم نهشتی بالا فقط هنگامی قابل حل است که عدد اوّل موجود به شکل $۴n + ۱$ باشد. از آن جا که ۱۱ به شکل $۴n - ۱$ است، پس این هم نهشتی قابل حل نیست.

حالا می‌توانیم به هم نهشتی اصلی خود بازگردیم.

از آن جا که $-۱ \overset{۱۱}{\equiv} x^۲$ قابل حل نیست، پس $۱۱ \overset{۴۳}{\equiv} x^۲$ نیز مطابق قانون تقابل درجه‌ی دوم قابل حل است. و از آن جا که $۱۱ \overset{۴۳}{\equiv} x^۲$ قابل حل است، $۹۷ \overset{۴۳}{\equiv} x^۲$ نیز قابل حل است و بنابراین مطابق قانون تقابل درجه‌ی دوم، هم نهشتی اصلی ما یعنی $۴۳ \overset{۹۷}{\equiv} x^۲$ قابل حل است.

در حقیقت ما «راه حلی» برای این مسئله پیدا نکرده‌ایم. (اغلب اگر فقط بخواهیم اثبات کنیم که راه حلی وجود دارد، کار ما دشوارتر است، امّا چندان جذاب نیست.) با این وجود، برای این هم نهشتی خاص می‌توانیم دست برقضا صرفاً با یک بررسی راه حلی عددی پیدا کنیم. هم نهشتی زیر

$$x \overset{۹۷}{\equiv} \pm ۲۵$$

بدین معناست که هر x که تفاضل آن از یکی از مضرب‌های ۹۷، برابر با ۲۵ است، اگر آن را به توان دو برسانیم، دقیقاً ۴۳ واحد بیشتر از مضرب ۹۷ است. کوچک‌ترین مقدار مثبت برای x برابر با ۲۵ است، و ممکن است خوانندگان علاقمند باشند تاهم نهشتی اصلی را به ازای $x = ۲۵$ بیازمایند.

راه حل چنین هم نهشتی‌ای اندکی مانند راه حل معادله است، امّا یک تفاوت عمده وجود دارد. در معادله‌ای مانند

$$x^{۲} - ۶۲۵ = ۰$$

که جواب آن هم ۲۵± است، در میان تعداد نامتناهی اعداد صحیح فقط دو مقدار برای x وجود دارد که جواب می‌دهد. آن دو ۲۵+ و ۲۵− هستند.

امّا از طرف دیگر، در هم نهشتی‌ای که حل کردیم، اگر چه می‌گوییم که فقط دو جواب وجود دارد، امّا هر کدام از این جواب‌ها در حقیقت نشان دهنده‌ی تعدادی نامتناهی از مقادیر عددی‌اند که در هم نهشتی زیر جواب می‌دهند:

$$x^{۲} \overset{۹۷}{\equiv} ۴۳$$

در این هم نهشتی، x می‌تواند هر عددی باشد (اعم از مثبت و منفی) که تفاضل آن با یکی از مضرب‌های ۹۷، برابر با ۲۵ باشد.

این که ما قادریم از دو تعداد نامتناهی اعداد به آسانی به عنوان دو عدد حرف بزنیم بیان‌گر دیدگاهی جدید به اعداد است که از طریق مفهوم هم نهشتی کسب کرده‌ایم. معمولاً هنگامی که به اعداد نگاه می‌کنیم، می‌کوشیم تا حتاالامکان به آن‌ها نزدیک شویم تا جایی که بتوانیم تفاوت‌های آن‌ها باهم دیگر را ببینیم. امّا هنگامی که از طریق هم نهشتی به اعداد می‌نگریم، در واقع خود را از آن‌ها دور می‌کنیم. ناگاه در می‌یابیم که آن‌ها بیشتر شبیه به هم جلوه می‌کنند تا متفاوت. همان طور که در راه حل هم نهشتی خود در صفحات قبل دیدیم، می‌توانیم تعدادی نامتناهی از اعداد را به طوری یکسان ببینیم. از آن جا که همه‌ی آن‌ها با یک عدد از یک جفت عدد به یک پیمانه هم نهشت هستند، می‌توانیم آن‌ها را نه به عنوان تعدادی نامتناهی از اعداد مختلف بلکه به عنوان دو عدد در نظر بگیریم.

این تحول بسیار تأمل برانگیز است.

زیرا اگر اعداد، که درست همان طور که از یک تا بی‌نهایت گسترده شده‌اند به ظاهر منظم و پیش‌بینی پذیرند، چنین تحولی را برمی‌تابند، پس دیگر چه چیزی وجود دارد که خارج از قابلیت‌های آنان باشد؟

«یک مسئله برای خوانندگان»

آیا هم نهشتی $x^{۲} \overset{p}{\equiv} ۲$ قابل حل است؟

با دانستن راه حل این هم نهشتی و راه حل هم نهشتی $x^{۲} \overset{p}{\equiv} ۱$، که دراین فصل ارائه کردیم، و با کمک قانون تقابل درجه‌ی دوم این امکان وجود دارد که قابل حل بودن هر هم نهشتی به شکل $x^{۲} \overset{p}{\equiv} a$ را مشخص کنیم.

گرچه اصلاً آسان نیست که اثبات کنیم تحت چه شرایطی هم نهشتی

$$x^{۲} \overset{p}{\equiv} ۳۲$$

قابل حل است، خواننده ممکن است بتواند جواب‌ها را در واقع با آزمودن چند مجذور نخست

$$۰, ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱$$

و چند عدد اوّل فرد نخست

$$۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱$$

در هم نهشتی حدس بزنند.

«پاسخ»

هم نهشتی $x^{۲} \overset{p}{\equiv} ۲$ قابل حل است هنگامی که $p \overset{۸}{\equiv} \pm ۱$. این هم نهشتی به ازای ۷، ۱۷ و ۳۱ از بین اعداد اوّل مذکور قابل حل است. آن را نمی‌توان هنگامی که $p \overset{۸}{\equiv} \pm ۳$ حل کرد، بنابراین به ازای ۳، ۵، ۱۱، ۱۳، ۱۹ و یا ۲۹ قابل حل نیست.

فصل یازدهم

e (عدد اویلر)

همه چیز در مورد اعداد طبیعی در مقابل ما وجود دارد. تمامی روابط بین آن‌ها در همین دنباله‌ی منظم و واحدواحدی نهفته است که از صفر آغاز می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. الگوهای ساده‌ی سطحی را هرکس به آسانی می‌تواند حدس بزند امّا اثبات آن‌ها اغلب دشوار و یا ناممکن است. از طرفی دیگر، الگوهای ظریف‌تر و پیچیده‌تر آن چنان در ژرفای اعداد پنهانند که ذهن‌های انگشت شماری قادر به مشاهده‌ی آن‌ها هستند. با این حال، همه چیز در همین ۰، ۱، ۲، ۳، . . .وجود دارد.

عجیب‌تر آن که یکی از اسرار اعداد طبیعی (یعنی نحوه‌ی توزیع کلی اعداد اوّل) که افشای آن بیش از همه دشوار است، باید به وسیله‌ی عددی که به هیچ عنوان مانند آن‌ها طبیعی نیست از دل آن‌ها بیرون کشیده شود.

چنین عددی همان است که ریاضی‌دان‌ها «عدد اویلر» و یا به بیان ساده‌تر e، می‌نامند. این عددیست که نمی‌توان با هیچ ترکیب متناهی از اعداد صحیح نمایش داد؛ عددی که تا تقریباً دوهزار سال پس از شروع پژوهش‌های عددی یونانی‌ها، رسماً به عرصه‌ی وجود پا نگذاشت؛ عددی که اگرچه غیرطبیعی‌تر از همه به نظر می‌رسد، امّا رابطه‌اش با طبیعت از هر عدد طبیعی تنگاتنگ‌تر

است.

ماجرای عدد بسیار جالب e و این که چه طور ریاضی‌دان‌ها پس از آگاهی از این عدد قادر شدند رابطه‌ی بسیار مهم و عمیق میان اعداد نامتناهی اوّل و اعداد نامتناهی طبیعی را آشکار کنند شاید جالب‌ترین ماجرا در طول ۲۵ قرن تاریخ نظریه‌ی اعداد باشد و شایسته است آن را در چنین کتابی که عنوان فرعی آن « آن چه اعداد را جالب می‌کند» است بگنجانیم.

بهترین تقریب برای نمایش عددی دقیق e، همین سری فاکتوریل معروف است:

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \frac{۱}{۶!} + \frac{۱}{۷!} + \frac{۱}{۸!} + \cdots$$

اگرچه ممکن است در نگاه اوّل عجیب به نظر برسد که یک عدد را به صورت مقدار محدود کننده‌ی یک سری نامتناهی بنویسیم، امّا این در حقیقت همان کاری است که همیشه انجام می‌دهیم. عدد اعشاری ...۰/۳۳۳۳۳ نحوه‌ی نمایشی آشنا از یک سری نامتناهی مانند سری مذکور برای عدد $\frac{۱}{۳}$ است:

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۱۰^{۱}} + \frac{۳}{۱۰^{۲}} + \frac{۳}{۱۰^{۳}} + \frac{۳}{۱۰^{۴}} + \frac{۳}{۱۰^{۵}} + \frac{۳}{۱۰^{۶}} + \frac{۳}{۱۰^{۷}} + \cdots$$

اگر عملیات‌های جمع فوق را $(\cdots + \frac{۳}{۱۰۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰})$ در ذهن خود دنبال کنیم، احساسی در درون به ما می‌گوید که اگرچه می‌توانیم به میزان دلخواه به نقطه‌ی $\frac{۱}{۳}$ نزدیک شویم امّا هرگز دقیقاً به آن نمی‌رسیم و یا از آن عبور نمی‌کنیم. به همین ترتیب، هر چقدر از جمله‌های سری e را جمع می‌زنیم به مقدار دقیق e نزدیک و نزدیک‌تر می‌شویم؛ این مقدار، مقدار محدودکننده‌ی آن دنباله است. درست مانند $\frac{۱}{۳}$ که مقدار محدود کننده‌ی دنباله‌ی دوم بود.

از سری فاکتوریلی برای e که به صورت فوق آغاز می‌گردد، می‌توانیم این عدد را تا هر تعداد ارقام اعشار که بخواهیم به دست بیاوریم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ را می‌آوریم، سپس دوباره ۱ را می‌آوریم و بر یک تقسیم می‌کنیم و پاسخ آن را (که ۱ است) در کنار ۱ قبلی می‌گذاریم، و یک را بر دو تقسیم می‌کنیم و پاسخ آن را (که ۰/۵۰۰۰۰۰ است) در کنار دو عدد قبلی می‌گذاریم، و یک را بر !۳ تقسیم می‌کنیم و پاسخ را به اعداد قبلی اضافه می‌کنیم، ویک را بر !۴ تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب تا آخر. پس از این که این کار را تا عدد ۹

انجام دادیم، عدد e را که تا شش رقم اعشار گرد شده خواهیم داشت:

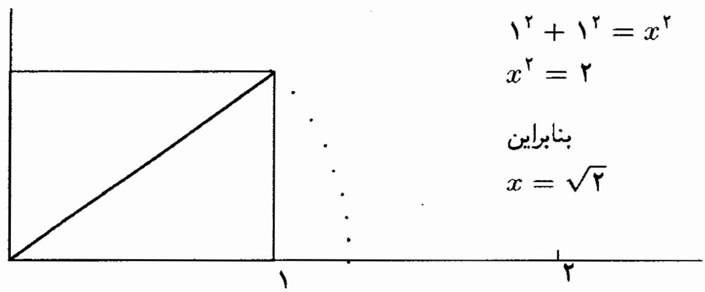
$$
\begin{array}{l}
۱/۰۰۰۰۰۰۰ \\
۱/۰۰۰۰۰۰۰ \\
۵/۰۰۰۰۰۰۰ \\
۰/۱۶۶۶۶۷ \\
۰/۴۱۶۶۷ \\
۰/۰۰۸۳۳۳ \\
۰/۰۰۱۳۸۹ \\
۰/۰۰۰۱۹۸ \\
۰/۰۰۰۰۲۵ \\
۰/۰۰۰۰۰۳ \\
\hline
e = ۲/۷۱۸۲۸۲
\end{array}
$$

این روند، مانند خود سری که نامتناهی است، می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد. با این وجود، بین نمایش اعشاری e و نمایش آن به صورت حد سری فوق تفاوتی وجود دارد. ما همیشه می‌توانیم nامین جمله‌ی این سری را پیش‌بینی کنیم که به صورت $\frac{۱}{(n-۱)!}$ است، امّا هیچ راهی وجود ندارد برای این که nامین رقم اعشار را در نمایش e به صورت عدد اعشاری پیش بینی کنیم. از این لحاظ است که عدد e با $\frac{۱}{۳}$ و دیگر اعداد گویا تفاوت دارد؛ زیرا آن‌ها را می‌توان با اعشاری نمایش داد که لااقل پس از نقطه‌ی معینی به یک الگوی متناوب و قابل پیش‌بینی تکرار شوند. بنابراین، عدد e غیرگویا و یا گنگ است.

برای به دست آوردن حتا سطحی‌ترین اطلاعات در مورد این عدد که به ظاهر هیچ شباهتی به اعداد ندارد، باید عدد e را در رابطه با گسترش و تکامل‌های زیادی بررسی کنیم که، از وقتی فیثاغورسیان فلسفه، مذهب و علمی بر پایه‌ی اعداد ۱، ۲، ۳، . . . بنیان گذاشتند، در مفهوم عدد صورت گرفته است.

فیثاغورسیان بر این باور بودند که این اعداد بر جهان هستی «حکم‌رانی» می‌کنند. به طور مثال،

اگرچه آنان فهمیده بودند که برخی طول‌ها را نمی‌توان با اعداد کامل اندازه گرفت، امّا می‌توان آن‌ها را با نسبت‌هایی از اعداد کامل، مثلاً $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۵}$ و... نشان داد. به بیان دیگر، اگر فرض کنیم یک خط کش غول پیکر اندازه‌گیری وجود دارد که به ازای هر اندازه‌ی ممکن یک نقطه بر روی آن وجود دارد، در بین اعداد کامل و یا کسرهای نسبت این اعداد می‌توان عددی به ازای هر نقطه‌ی موجود بر روی خط کش پیدا کرد. امّا تقریباً چهار قرن پیش از میلاد مسیح، موضوعی کشف و اثبات شد که ضربه‌ی نهایی را بر پیکر این نظریه وارد ساخت و آن را از بین برد؛ موضوع از این قرار بود که در بین اعداد کامل و کسرهای نسبت آن‌ها هیچ عددی وجود ندارد که دقیقاً بتواند قطر یک مربع با طول ضلع یک واحد را اندازه بگیرد:



$$۱^۲ + ۱^۲ = x^۲$$
$$x^۲ = ۲$$
بنابراین
$$x = \sqrt{۲}$$

شکل ۹ـ۱

آنان این موضوع را بدین ترتیب اثبات کردند. در ابتدا فرض کردند a و b در اعداد کامل وجود دارند به نحوی که $(\frac{a}{b})^۲$ برابر با ۲ می‌شود؛ سپس نشان دادند که این فرض از نظر منطقی محال است و بنابراین نادرست می‌باشد.

از آن جا که یونانی‌ها حتا کسرهای نسبت را نیز عدد به حساب نمی‌آوردند، هرگز به ذهن آن‌ها خطور نمی‌کرد که چیزی، که به صورت کسری قابل نمایش نیست (یعنی جذر عدد ۲)، هم بتواند عدد باشد. بنابراین، نتیجه‌ی یونانی‌ها از کشف جدیدشان این بود که طول‌هایی وجود دارد که هیچ عددی به ازای آن ها موجود نیست و آنان بهتر است که به همان مطالعه‌ی هندسه بپردازند؛ زیرا در هندسه ضرورتی وجود نداشت که لزوماً « عددی» را به قطر مربعی با طول یک واحد نسبت دهند و در محاسبات ریاضی از آن استفاده کنند.

(نکته‌ای بسیار عجیب در مورد عدد e وجود دارد: اگرچه می‌دانیم که این عدد فاصله‌ی معینی

را بر روی محور اعداد مشخص می‌کند و اگرچه می‌توانیم با هر دقتی که می‌خواهیم به این نقطه نزدیک شویم، امّا در حقیقت با ابزارهای سنتی ریاضی نمی‌توانیم پاره‌خطی دقیقاً برابر با اندازه‌ی e رسم کنیم. این تناقض می‌توانست برای یونانی‌ها قابل فهم باشد، زیرا آن‌ها نیز با کشیدن قطر مربعی به طول واحد به اندازه‌ای رسیده بودند که با هیچ عددی قابل نمایش نبود.

ابداع جبر توسط غیریونانیان بالاخره سبب شد ریاضیدانان باز به سمت اعداد رو کنند. با اختراع صفر و اعداد منفی، آنان توانستند محور اعداد را به صورت خطی تصور کنند که از دو طرف تا بی‌نهایت محور اعداد را به صورت خطی تصور کنند که از دو طرف تا بی نهایت امتداد می‌یابد. اختراع اعداد اعشاری در ابتدای قرن شانزدهم نیز روشی برای نمایش هر نقطه‌ی قابل تصور روی محور اعداد، از جمله قطر مربعی با طول واحد، را در اختیار آنان قرار داد. اعداد منفی، طول‌های سمت چپ مبدأ (یعنی صفر) و اعداد مثبت، طول‌های سمت راست را نمایش می‌دادند. اعداد گویا، چه مثبت و چه منفی، مشخص‌کننده‌ی همه‌ی طول‌هایی بودند که به صورت نسبت‌های اعداد صحیح، و همچنین خود اعداد صحیح، قابل نمایش بودند. اعشار این اعداد یا متناوب و نامتناهی (مانند $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۱}{۷}$) و یا متناهی (مانند $\frac{۱}{۵}$) است. اعداد گنگ نیز مشخص کننده‌ی بقیه‌ی طول‌ها (و یا نقطه‌ها) هستند و (مانند جذر سه و هفت) اعشار آن‌ها نامتناوب و نامتناهی است.

همه چیز واضح و مبرهن بود. به ازای هر نقطه بر روی محور یک عدد وجود داشت، و (بر اساس تعریف اعداد گنگ) نقطه‌ای نمی‌توانست وجود داشته باشد که نقطه‌ای به ازای آن موجود نباشد. از آن جا که دیگر در آن زمان ریاضی‌دانان شروع به استفاده از مقادیری به عنوان عدد کرده بودند که واقعیت آن‌ها به عنوان عدد حتا بسیار تردید برانگیزتر از آن چه بود که جذر عدد ۲ به نظر یونانیان می‌رسید، اعدادی که می‌توانستند در تناظر یک به یک با نقطه‌های محور اعداد قرار بگیرند، «اعداد حقیقی»[1] نام گرفتند.

مقادیری که از نظر عددی تردید برانگیزترند و در بالا به آن‌ها اشاره کردیم، بر مبنای یک ایده‌ی «خیالی» استوار بود که به آن «i، برابر با جذر ۱ –» می‌گفتند. با استفاده از این خیال، ریاضی‌دان‌ها دریافتند که می‌توانند معادلاتی را حل کنند که حتا با وجود تمام اعداد حقیقی نیز قابل حل شدن

1) The real number

نیستند. یکی از این قبیل معادلات به این صورت است:

$$x^۲ + ۱ = ۰$$

در این جا واضح است که $x^۲$ باید برابر ۱− باشد و بنابراین x باید عددی باشد که هرگاه به توان دو می‌رسد، عدد ۱− را تولید کند. آنان همگی بر این باورند که چنین عددی وجود ندارد، زیرا هر عدد مثبت یا منفی هنگامی که «درخود ضرب شود» حاصلی مثبت به دست خواهد داد. امّا بر این باور نیز بودند که از نظر ریاضی بسیار مفیداست اگر این عدد ناممکن وجود داشته باشد، و بنابراین از i برای نشان دادن ریشه‌ی دوم اعداد منفی استفاده کردند. آنان این اعداد را «اعداد موهومی»[1] نامیدند.

گسترش عدد i، آخرین کار لازمی بود که برای یافتن ریشه‌ی هر معادله‌ی جبری انجام گرفت.

تا این زمان، علی‌رغم همه‌ی مقادیر جدیدی که به عنوان عدد پذیرفته شده ومورد استفاده قرارگرفته بودند، مقدار اعشاری نامتناوب و نامتناهی ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۰۰۰ که امروزه e می‌نامیم هنوز به طور خاص مورد توجه نبود. امّا از آن جا که این هم یکی از اعداد حقیقی بود، مطمئناً نمایانگر نقطه‌ای بر روی محور اعداد حقیقی بود؛ جایی بین ۲ و ۳، بین ۲٫۷ و ۲٫۸، بین ۲٫۷۱ و ۲٫۷۲؛ دقیقاً معلوم نبود، امّا به هرحال آن جا بود.

تازه پس از اختراع لوگاریتم‌ها در آغاز قرن هفدهم بود که فهمیدند مقدار ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۰۰۰ یکی از جالب‌ترین اعداد و نیز پایه‌ی لگاریتم به اصطلاح «طبیعی» است.

قانون لگاریتم‌ها، که توسط «جان نپر»[2] (۱۵۵۰ـ۱۶۱۷) ابداع شد، تا حد بسیار زیادی از طریق جایگزینی عمل ضرب با جمع از بار سنگین محاسبات اعداد بسیار بزرگ کاست. (نپر خود به ویژه علاقمند به محاسبات مسائل نجوم بود) این از همان اختراعاتی است که با دیدن آن ممکن است از فرط سادگی بگویند « چرا این به فکر خودم نرسیده بود؟» این حس را «هنری بریگز»[3](۱۵۵۶ـ۱۶۳۱)، استاد هندسه‌ی دانشگاه آکسفورد، به بهترین نحو بیان کرد. هنگامی که وی ابداع کننده‌ی لگاریتم را برای نخستین بار ملاقات کرد، درکمال حیرت و تحسین گفت:

1) The imaginary numbers 2) John Napier 3) Henry Brigys

«سرورم، تعمداً این سفر دور و دراز را آمده‌ام تا شخص شما را ملاقات کنم، و ببینم با چه ذکاوت و مهارتی به این امر نائل آمدید که برای اولین بار به این فکر خارق العاده در علم نجوم بیندیشید ... امّا سرورم، این موضوعی که شما کشف کرده‌اید، حالا که می‌بینم تا چه حد آسان است، در حیرتم چرا پیش از این به ذهن کسی خطور نکرده است.»

همه‌ی ما خوب می‌دانیم که محاسبه از طریق توان‌ها چه قدر آسان است. به طور نمونه، برای ضرب کردن دو توان کامل یک عدد کافی است تا نماها را با هم جمع کنیم؛ مثلاً $۱۰^{۲۳} \times ۱۰^{۱۵}$ صرفاً به یک عمل جمع تبدیل می‌شود، یعنی $۲۳ + ۱۵$، و حاصل آن برابر با $۱۰^{۳۸}$ است. با استفاده از قانون لگاریتم، ما می‌توانیم هر عددی را به توانی از یک پایه‌ی ثابت تبدیل کنیم؛ به این ترتیب، عددی که توان کاملی از ۱۰ نیست، مثلاً ۱۱، تقریباً برابر با $۱۰^{۱/۰۴۱۴}$ است، و یا ۱۲ برابر است با $۱۰^{۱/۰۷۹۲}$. این قانون را حتا می‌توان به اعداد اعشاری نیز اعمال کرد، و بنابراین مثلاً عدد ۱۱٫۵ تقریباً برابر است با $۱۰^{۱/۰۶۰۷}$.

از نظر ریاضی، کاری را که در بالا انجام دادیم به صورت دو فرمول ساده که قانون لگاریتم را در بر می‌گیرند نشان می‌دهیم:

$$x = ۱۰^y, \qquad y = log_{۱۰} x$$

عبارات لگاریتمی را به این صورت می‌خوانیم:

$۱۰ = ۱۰^{۱}$: ۱ لگاریتم ۱۰ است

$۱۱ = ۱۰^{۱/۰۴۱۴}$: ۱٫۰۴۱۴ لگاریتم ۱۱ است

در محاسبات لگاریتمی در ابتدا از پایه‌ی ۱۰ استفاده می‌شد که برای ما از همه‌ی پایه‌ها «طبیعی‌تر» به نظر می‌آید. امّا همان طور که پیش‌تر در این کتاب دیدیم، از نظر ریاضی عدد ۱۰ به عنوان مبنا به هیچ وجه از دیگر اعداد طبیعی‌تر نیست. دلیل طبیعی بودن آن هم به ویژگی‌های عددی‌اش باز نمی‌گردد، بلکه فقط به این دلیل است که ما ذاتاً با ۱۰ انگشت متولد می‌شویم. در کارهای تحلیلی ریاضی‌دانان و همچنین محاسبات حساب مهندسی، بسیار طبیعی‌تر است که از e به عنوان پایه‌ی لگاریتم استفاده شود. به همین دلیل، e را پایه‌ی لگاریتم طبیعی می‌نامند.

به مدت پیش از ۳۰۰سال، آسانی محاسبات از طریق لگاریتم‌ها سبب می‌شد تا استفاده از آن‌ها برای افرادی که به صورت عملی با اعداد سروکار دارند، اجتناب‌ناپذیر باشد. آنان با خطکش‌های محاسباتی که همیشه در جیبشان داشتند، پس از اختراع و گسترش رایانه‌ها دیگر به تاریخ پیوستند. (حتا چرتکه‌ها نیز از آن‌ها عمر بیشتری پیدا کردند!) امّا لگاریتم طبیعی همچنان اهمیت خود را به همان میزان حفظ کرده است.

دلایل این که چرا e از نظر ریاضی طبیعی‌تر است عمدتاً بسیار تخصصی‌تر از سطح این کتابند، امّا برای روشن شدن دلیل طبیعی‌تر بودن پایه‌ی e نسبت به ۱۰ از نظر ریاضی، مثالی می‌تواند ما را یاری کند.

فرض کنید می‌خواهیم عددی را برای پایه‌ی لگاریتم انتخاب کنیم که لگاریتم هر عدد کوچک $(x + ۱)$ که فقط به اندازه‌ی مقدار کوچک x از یک بزرگ‌تر است تقریباً با خود x برابر است. چنین لگاریتمی محاسبات با اعداد بسیار کوچک را تا حد زیادی ساده می‌کند. سؤال اینجاست که چه عددی را می‌توانیم برای پایه‌ی خود انتخاب کنیم؟ پاسخ ما عددی است که اصلاً انتظار آن را نداشتیم. در کمال تعجب، می‌توان با قطعیت ثابت کرد که بهترین پاسخ ممکن برای پایه‌ای که دارای ویژگی مذکور باشد، عدد e است (که در نظر ما نامحتمل می‌آید).

جدول زیر به ترتیب تفاوت بین لگاریتم‌های با پایه‌ی e و ۱۰ را برای چند عدد که فقط چند صدم با یک اختلاف دارند نشان می‌دهد:

	۱٫۰۰	۱٫۰۱	۱٫۰۲	۱٫۰۳	۱٫۰۴	۱٫۰۵
log_e	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۱۰۰	۰٫۰۱۹۸	۰٫۰۲۹۶	۰٫۰۳۹۲	۰٫۰۴۸۸
امّا						
$log_{۱۰}$	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۴۳	۰٫۰۰۸۶	۰٫۰۱۲۸	۰٫۰۱۷۰	۰٫۰۲۱۲

از این چارت می‌فهمیم که $log_e^{۱٫۰۱}$ دقیقاً (تا چهار رقم اعشار) برابر است با اختلاف ۱ و ۱٫۰۱، و همچنین $log_e^{۱٫۰۲}$، یعنی ۰٫۰۱۹۸ نیز تقریباً برابر با ۰٫۰۲ است. امّا از سوی دیگر $log_{۱۰}^{۱٫۰۱}$ برابر با ۰٫۰۰۴۳ است. از نظر ریاضی، می‌گوییم که به ازای مقادیر بسیار کوچک x، $log_e(۱ + x)$ تقریباً برابر با ۱ ضرب در x، یا در واقع همان خود x، است، امّا $log_{۱۰}(۱ + x)$ تقریباً برابر است با ۰٫۴۳ ضرب در x، از آن جا که طبیعتاً عدد یک برای کار ما بسیار «طبیعی‌تر» از ۰٫۴۳ است،

امّا برای محاسبات اعداد بسیار کوچک از لگاریتم طبیعی با پایه‌ی e استفاده می‌کنیم و به عدد ۱۰ به عنوان پایه‌ی لگاریتم رایج توجه چندانی نمی‌کنیم.

امّا عدد e فقط از نظر ریاضی طبیعی نیست. تعریف این عدد به عنوان مبنای لگاریتم در زندگی روزمره‌ی ما، که بر مبنای ۱۰ است، کنار گذاشته شده و ویژگی‌های آن به عنوان یک عدد، با تمام اعداد طبیعی متفاوت است، امّا این عددی است که بیشتر از همه جزئی از طبیعت است. فرآیندهای بنیادین حیات (یعنی رشد و از بین رفتن) را در زبان ریاضی، دقیق‌تر ازهر چیز، بامنحنی‌هایی نشان می‌دهند که ریاضی‌دانان فرمول آن‌ها را «تابع نمایی» می‌نامند؛ این منحنی‌ها به طور عمومی با معادله‌ی $y = e^x$ نمایش داده می‌شوند. بدین ترتیب، عدد e به طرز منحصر به فردی در بسیاری از کاربردهای ریاضی حائز اهمیت است؛ آمار و احتمال، علوم زیستی و فیزیکی، پرتاب شناسی، مهندسی وامور مالی[1].

مدت پیش از آن که عدد ۲٫۷۱۸۲۸۲۸۰۰۰ را با نام e بشناسند، این عدد به عنوان پایه‌ی لگاریتم طبیعی ریاضی شناخته شده بود. اویلر جوان (که در آن هنگام فقط ۲۱ سال داشت و در دربار سنت پنزریورگ بود) برای اولین بار این حرف از حروف الفبا را (یعنی e) در مقاله‌ی خود با عنوان «تأملاتی در باب آزمایش‌های اخیر در نحوه‌ی شلیک توپ» پیشنهاد داد.

او گفت: « برای عددی که لگاریتم آن یک است، حرف e را می‌نویسیم . . .»

اگر چه اغلب نام «عدد اویلر» را به e می‌دهند و این عدد احتمالاً همیشه اولین حرف اسم این ریاضی‌دان بزرگ را تداعی خواهد کرد، امّا احتمالاً دلیل انتخاب این حرف توسط او کاملاً متفاوت بوده است: وی مطابق سنت رایج برای نشان دادن پایه‌ی عمومی لگاریتم از حرف a استفاده می‌کرد؛ و حرف e در حروف الفبا نخستین حرف صداداری است که بعد از a می‌آید.

باوجود این، بسیار شایسته که e را «عدد اویلر» بنامیم؛ زیرا در تاریخ ریاضیات هرگز چنین رابطه‌ی عظیمی بین نام یک فرد و یک عدد وجود نداشته است. اویلر، با عشق و علاقه‌ی فراوان خود، عدد e را تا ۲۳ رقم اعشار محاسبه کرد:

$$e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶۰۲۸\cdots$$

۱) ۱ـ خواننده‌ای که علاقمند به اطلاعات بیشتر در مورد این کاربردهاست می‌تواند به این کتاب « ریاضیات چیست؟» نوشته‌ی Herbert Robbins, Richard Courant. (انتشارات دانشگاه آکسفورد، ۱۹۴۱) رجوع کنید

او چند نحوه‌ی نمایش بسیار ساده از این عدد به وسیله‌ی کسرهای ادامه دار نامتناهی پیدا کرد؛ به طور نمونه:

$$e = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۲}{۳ + \cfrac{۳}{۴ + \cfrac{۴}{۵ + \cfrac{۵}{۶ + \cdots}}}}}}$$

و نیز:

$$e = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۴ + \cfrac{۱}{۱ + \cdots}}}}}}$$

نمونه‌ی دوم، یک کسر ادامه‌دار ساده نامیده می‌شود زیرا همه‌ی صورت‌ها در آن برابر ۱ است؛ بنابراین آن را حتا می‌توان به طرز ساده‌تری نیز بیان نشان داد:

$$e = [۲, ۱, ۲, ۱, ۱, ۴, ۱, ۱, ۶, ۱, ۱, ۸, ۱, \cdots ۰۰۰]$$

[1] همچنین اویلر بود که توانست از طریق یکی از کشفیات پیشین، مشهورترین فرمول را در ریاضیات کشف کند؛ فرمولی که بیانگر رابطه‌ی بین سه عدد بسیار ویژه (یعنی e، i و π) و نیز دو عدد طبیعی که همیشه خاص بوده‌اند(یعنی ۰و ۱) می‌باشد:

$$e^{i\pi} + ۱ = ۰$$

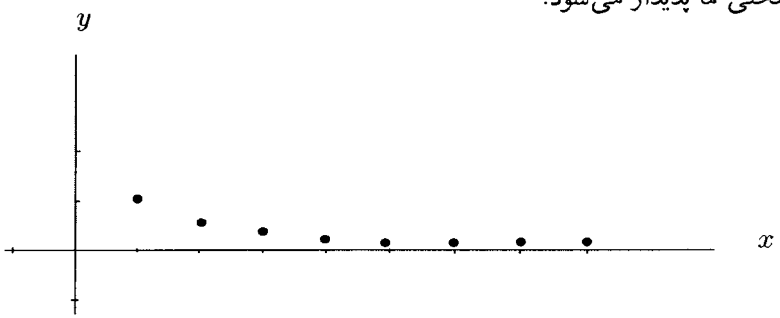
واکنش‌ها به این فرمول ساده و دقیق بسیارگوناگون بوده است؛ از «بنجامین پیرس»[2](۱۸۰۹ـ۱۸۸۰) گرفته که درکلاس خود در دانشگاه هاروارد گفت: «آقایان . . .مانمی‌توانیم این را بفهمیم، و نمی‌دانیم معنی‌اش چیست، امّا اثباتش کرده‌ایم و بنابراین می‌دانیم که باید درست باشد»، تا آن ریاضی‌دان گمنامی که به طنز و شوخی e را عددی تعریف کرد که سبب می‌شود آن معادله‌ی مشهور امکانپذیر باشد.

1) 2) Benjumin Peirce

تا زمان اویلر، ابداع هندسه‌ی تحلیلی توسط دکارت و ابداع جداگانه‌ی حسابان توسط نیومن ولایبنیتس دیگر مرزهای ریاضیات سنتی را پس زده بود و قلمرو جدید و بزرگی را گشوده بود. حالا علاوه بر حساب و هندسه و جبر، «آنالیز»[1] هم به حوزه‌های ریاضیات اضافه شده بود. بدون شک مهم‌ترین عدد در آنالیز، همان عدد اویلر یا e است. این هم کاملاً به حق است، زیرا اویلر در این شاخه‌ی جدید چنان مهارت داشت که او را «مظهر آنالیز» دانسته‌اند.

در آنالیز، با تعریفی کاملاً متفاوت از عدد e برخورد می‌کنیم. وقتی ویژگی‌های «ذاتی» و واضح اعداد طبیعی، و یا حتا ویژگی‌های مصنوعی و انسان ساخته‌ی اعدادی مثل i که در کمال سادگی و صراحت ابداع شده‌اند، را به یاد می‌آوریم، آن‌گاه این تعریف از e برای یک عدد، بسیار پیچیده به نظر می‌رسد؛ زیرا عدد e بر اساس مساحت زیر یک منحنی مشخص در یک نقطه‌ی مشخص تعریف می‌شود (که آن نقطه را e می‌نامیم.) یقیناً چنین عددی نمی‌تواند ارتباطی با ۰، ۱، ۲، ۳، ...داشته باشد. اما، همان‌گونه که در ادامه خواهیم دید، ارتباط زیادی با آن اعداد دارد.

منحنی لازم برای تعریف تحلیلی e از طریق رسم نقطه‌هایی مشخص می‌شود که عرض (y) آن‌ها معکوس طول (x) آن‌ها باشد؛ به عبارت دیگر، تمام نقطه‌هایی (x,y) که به ازای آن‌ها $y = \frac{1}{x}$. هنگامی که این نقطه‌ها را فقط برای اعداد کامل بر روی محور x مشخص می‌کنیم، شکل کلی منحنی ما پدیدار می‌شود.



شکل ۱۰ـ۱

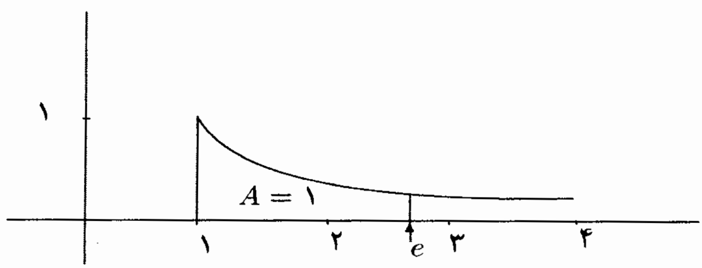
در شکل فوق به آسانی می‌بینیم که با مشخص کردن هر عدد حقیقی از محور x و به دست آوردن معکوس آن بر محور y ، منحنی پیوسته ایجاد کرده‌ایم. در این صورت عدد e توسط این منحنی و مساحت زیر آن در فاصله‌ی ۱ تا x تعریف می‌شود.

فرض کنید که با رسم دو عمود بر محور x این ناحیه را جدا می‌کنیم؛ یکی برای سمت چپ

1) Analysis

محدوده در نقطه‌ی ۱ و دیگری برای سمت راست آن در نقطه‌ای به نام x. هنگامی که این عمود سمت راست محدوده را نیز بر نقطه‌ی ۱ $= x$ رسم کنیم، بدیهی است که مساحت زیر منحنی صفر می‌شود؛ اما هرچه x، و در واقع عمود سمت راست، را به سمت راست حرکت می‌دهیم، مساحت زیر منحنی بیشتر می‌شود.

اینجاست که سؤالی را مطرح می‌کنیم که تعریف تحلیلی عدد e بر پایه‌ی آن استوار است. خط عمود را برکدام نقطه از محور x باید فرود آوریم تا مساحت زیر منحنی بین ۱ و x دقیقاً برابر با ۱ شود؟ ما این پرسش را به روش ریاضی‌دانان جواب می‌دهیم، یعنی به جای مشخص کردن نقطه، نامی برای آن انتخاب می‌کنیم. آن نقطه از محور x که در آن مساحت زیر منحنی دقیقاً برابر ۱ است e نامیده می‌شود.



شکل ۱۱ـ۱

مساحت زیر منحنی بین ۱ تا x در حقیقت لگاریتم عدد حقیقی x در پایه‌ی e است.[۱]

امّا یکی از غیرمنتظره‌ترین وقایع در تمام تاریخ ریاضیات این بود که رابطه‌ای نزدیک بین $log_e x$ و تعداد اعداد اوّل کوچکتر از (عدد داده شده e) وجود داشته باشد. ولی پیش از آن که این رابطه را مطرح کنیم باید به عقب بازگردیم و دوباره به اعداد طبیعی‌ای فکر کنیم که کار خود را با آن‌ها شروع کردیم (که هر یک از عدد قبلی یک واحد و از عدد بعدی نیز یک واحد فاصله دارد، از صفر شروع می‌شوند و تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند.) در ابتدا، اولین شگفتی را به یاد می‌آوریم: این که اعداد در این دنباله‌ی ساده و منظم (به شکلی ظاهراً بی‌قاعده) به دو گروه بسیار متفاوت تقسیم می‌شوند؛ یکی اعداد اوّل که بخش‌پذیر نیستند و دیگری اعداد مرکب که بخش‌پذیرند. دومین

۱) ویژگی عدد e را به روش کاربردی و ملموس زیر نیز می‌توانیم توصیف کنیم: اگر یک دلار را با نرخ سود ۱۰۰٪ سرمایه‌گذاری کنیم، و سود پول پیوسته به مبلغ اولیه‌ی ما اضافه شود، در پایان سال ۲٫۷۲ دلار خواهیم داشت (به عبارتی دیگر، e دلار)

شگفتی هم این بود که اعداد بخش‌ناپذیر، مانند کل اعداد، تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کنند؛ در حالی که عقل سلیم حکم می‌کند که انتظار داشته باشیم اعداد بسیار بزرگ بالاخره بر یک عدد کوچک‌تر از خود قابل تقسیم‌اند. و سپس سومین شگفتی که با آن مواجه شدیم: از همان آغاز همه می‌دانستند که هر عدد مرکب را می‌توان به وسیله‌ی اعداد اوّل تولید کرد، اما شگفت این‌جا بود که فقط و فقط یک ترکیب مشخص از اعداد اوّل می‌توانست یک عدد مرکب را تولید کند.

همین چند مثال کافی بود تا به ما یادآوری کند که اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، . . . پر از شگفتی‌اند. امّا شایان ذکر است که روابطی که در گذشته به آن‌ها اشاره کردیم، همگی در یک جنبه مشترک‌اند: ریاضی‌دانان آن‌ها را از طریق بررسی خود اعداد طبیعی حدس زده‌اند و با استفاده از ویژگی‌های ریاضیاتی دستگاه اعداد طبیعی اثبات کرده‌اند. عدد e در این عرصه مجاز نبوده، و اصلاً نیازی به آن هم وجود نداشته است.

امّا اکنون به مسئله‌ی متفاوتی می‌رسیم. دیدیم که وقوع اعداد اوّل بسیار بی‌قاعده است. اگر یکان عددی ۱، ۳، ۷ یا ۹ باشد قادر نیستیم سریعاً تعیین کنیم که آیا این عدد اوّل است یاخیر؟ همچنین با داشتن یک عدد که می‌دانیم اوّل است، نمی‌توانیم بگوییم عدد اوّل بعدی کدام است. اگرچه هرگز نتوانسته‌ایم وجود نقطه‌ای را اثبات کنیم که پس از آن هیچ جفت عدد اولی وجود نداشته باشد که بین آن‌ها فقط یک عدد فاصله باشد، امّا می‌دانیم محدوده‌های بسیار بزرگی وجود دارد که می‌توانیم در آن‌ها به تعداد دلخواه عدد مرکب متوالی پیدا کنیم بدون این که عدد اولی در بین این اعداد مرکب باشد. همچنین دیدیم که اگر چه اعداد اوّل تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند، امّا پیوسته کمتر و کمتر می‌شوند تا جائی که با تناقض می‌توان گفت علی‌رغم این که اعداد اوّل نامتناهی‌اند، امّا تقریباً همه‌ی اعداد مرکب هستند.

با وجود بی‌قاعدگی اعداد اوّل در مقیاس کوچک، امّا در مقیاس کلان نظم و قاعده‌ی خاصی در بین آن‌ها وجود دارد. کاهش تعداد آن‌ها آهسته و پیوسته است. در بین ۱۰۰ عدد نخست ۲۵ عدد اوّل، در بین ۱۰۰۰ عدد نخست ۱۶۸ عدد اوّل، در بین ۱۰۰۰۰ عدد نخست ۱۲۲۹ عدد اوّل و در بین ۱۰۰۰۰۰ عدد نخست ۹۵۹۲ عدد اوّل وجود دارد. امّا الگوی این کاهش چگونه است؟

این چشمان تیزبین گاؤس برای یافتن الگوهای بین اعداد بود که نخستین بار این رابطه‌ی حیرت‌آور بین کاهش آهسته و پیوسته‌ی اعداد اوّل و مساحت بین ۱ تا x زیر منحنی $y = \frac{1}{x}$ که در صفحات قبل رسم کردیم را کشف کرد. فرضیه‌ی او به نام «قضیه‌ی عدد اوّل» شناخته شده است؛ قضیه‌ای که مهم‌ترین حقیقت کشف شده در مورد اعداد طبیعی در دوران جدید است.

برای درک حکم این قضیه (البته اثبات آن متأسفانه فراتر از بحث ماست) باید ابتدا مسئله‌ی اندازه‌گیری تراکم اعداد اوّل کمتر از عدد مشخص x را بررسی کنیم. در ده عدد نخست، چهار عدد اوّل، یعنی ۲، ۳، ۵ و ۷، وجود دارد. می‌توانیم تراکم اعداد اوّل کمتر از ۱۰ را با نسبت $\frac{4}{10}$ یا ۰/۴۰ نشان دهیم. درصد عدد نخست فقط ۲۵ عدد اوّل وجود دارد و بنابراین تراکم آن به $\frac{25}{100}$ کاهش می‌یابد و در واقع از ۰٫۴۰ به ۰٫۲۵ و سپس ۰٫۱۶۸ کاهش یافتها ست. چیزی که گاؤس متوجه شد این بود که این نسبت مدام به مقدار $\frac{1}{log_e x}$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. این رابطه را می‌توان با زبان ریاضی این گونه بیان کرد:

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{log_e x}$$

در این‌جا $\pi(x)$ برابر است با تعداد اعداد اوّل کوچک‌تر از x به طوری که نسبت $\frac{\pi(x)}{x}$ همان

میزان تراکم آن‌هاست؛ علامت $\sim$ بیان می‌کند که این دو عبارت تقریباً برابرند؛ و نسبت $\frac{1}{log_e x}$ نیز مقدار معکوس لگاریتم طبیعی x در پایه‌ی e است.

این رابطه به این شکل، قضیه‌ی عدد اوّل است و معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/log_e x} = 1$$

به وسیله‌ی به دست آوردن تراکم واقعی اعداد اوّل کوچک‌تر از یک عدد x و مقایسه‌ی آن‌ها با مقدار تقریبی $\frac{1}{log_e x}$ در جدول زیر می‌توان دقت افزاینده‌ی این رابطه‌ی تقریبی را به بهترین نحو نمایش داد:

	تراکم واقعی	تراکم تقریبی
$x =$	$\pi(x)/x$	$۱/log_e x$
۱٫۰۰۰	۰٫۱۶۸	۰٫۱۴۵
۱٫۰۰۰٫۰۰۰	۰٫۰۷۸۴۹۸	۰٫۰۷۲۳۸۲
۱٫۰۰۰٫۰۰۰٫۰۰۰	۰٫۰۵۰۸۴۷۴۷۸	۰٫۰۴۸۲۵۴۹۴۲

دشواری اثبات این قضیه (که حتا پی بردن به آن نیز به اندازه‌ی کافی دشوار بود) از آن‌جا مشخص می‌شود که حتا گاؤس که خود آن را مطرح کرده بود نیز موفق به اثبات آن نشد. یکی از آخرین شاگردان گاؤس، گ. اف. ب. ریمان[1] (۱۸۲۶-۱۸۶۶)، که در سن ۳۹ سالگی درگذشت اما پایه‌ی ریاضیاتی لازم برای نظریه‌ی نسبیت را بنیان گذاشت، در سن ۳۳ سالگی در یک یادداشت کوتاه و بی‌نظیر روش مناسب برای دست و پنجه نرم کردن با این قضیه را طرح کرد؛ امّا او نیز به اثبات آن نائل نیامد.

قضیه‌ی عدد اوّل از یک جنبه‌ی بسیار مهم با قضایای دیگر در مورد اعداد اوّل که در این کتاب مشاهده کردیم تفاوت دارد. به طور مثال، اثبات خارق العاده‌ی اقلیدس از بی نهایت بودن اعداد اوّل چنان در درون اعداد طبیعی ریشه دارد که هرکس با اندکی محاسبه در بین کوچک‌ترین اعداد اوّل می‌تواند به درستی آن پی ببرد. امّا هیچ محاسبه‌ای نمی‌تواند ما را به همان طریق نسبت به درستی قضیه‌ی عدد اوّل قانع کند. همان طور که هاردی گفته است:« هیچ وقت بدون اثبات نمی‌توان از حقایق مطمئن شد.» و در اینجا، بر خلاف مورد اقلیدس، اثبات از خارج اعداد طبیعی به دست می‌آید.

تا سال ۱۸۹۶ ریاضی‌دانان موفق به اثبات قضیه‌ی عدد اوّل نشدند. در آن سال این قضیه به طور جداگانه توسط ریاضی‌دان فرانسوی «ژاک اس. آدامار»[2] (۱۸۶۵_۱۹۶۳) و ریاضی دان بلژیکی س. ژ. دولاواله پواسن[3] (۱۸۶۶_۱۹۶۲) به اثبات رسید. اثبات قضیه تقریباً یک قرن پس از آن که این رابطه برای اولین بار توسط گاؤس آشکار شد محقق گردید. هر دو اثبات به طرز

1) G.F. B. Riemann 2) Jacques S. Hadamard 3) C. J. dela Vallee Poussin

شگفت‌آوری دشوار بودند و هنوز هم پس از یک قرن تلاش سخت فقط در حیطه‌ی ریاضی‌دانان حرفه‌ای باقی مانده‌اند.

از زمان ریمان تاکنون، قضیه‌ی عدد اوّل به مسئله‌ی اصلی شاخه‌ای از ریاضیات تبدیل شده است که با نام نظریه‌ی تحلیلی اعداد شناخته شده است. این شاخه از پیشرفته‌ترین روش‌های (حساب دیفرانسیل و انتگرال) (Calculus) بهره می‌برد از نظر فنی یکی از دشوارترین بخش‌های ریاضیات است. برخلاف نظریه‌ی اعداد کلاسیک یونانیان، این رشته برای آشکار کردن روابط و پیوندهای موجود میان اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ...خود را فقط محدود به اعداد طبیعی نمی‌کند؛ بلکه برای نبرد از ترفند همه‌ی انواع نامتناهی اعداد بهره می‌جوید: اعداد گویا و گنگ، اعداد مثبت و منفی، اعداد حقیقی و موهومی . همه‌ی این اعداد تحت لوای «اعداد مرکب»[1] به صف می‌شوند. صورت کلی این اعداد به شکل $x+yi$ است، یعنی نیمی حقیقی و نیمی موهومی. به ازای $x = 0$ آن‌ها موهومی، و به ازای $y = 0$ حقیقی می‌شوند.

در برابر این صف شکوهمند اعداد، به نظر می‌آید که اعداد طبیعی هم در حقیقت و به صورت مجاز از حیث تعداد مغلوب می‌شوند؛ امّا آن‌ها اگرچه چیزهای زیادی را تسلیم و تقدیم می‌کنند، امّا بسیاری چیزها را نیز نزد خود نگه می‌دارند. آن چه که به وسیله‌ی اعداد دیگر در مورد آن‌ها به دست می‌آوریم، با دشواری بسیار زیادی حاصل می‌شود. آن‌چه از آن‌ها کسب می‌کنیم ابداً به آسانی کسب نمی‌شود.

در طول ماجرایی راجع رابطه‌ی بین عددی مانند e، یعنی پایه‌ی لگاریتم طبیعی، و نیز اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ...ما به یگانگی نهفته در تمام اعداد پی می‌بریم. درست مانند روابط بین اعداد طبیعی که در درون دنباله‌ی ساده‌ی ۰، ۱، ۲، ۳، ...وجود دارد، روابط بین انواع مختلف اعداد نیز در درون ساختار این بنای باشکوه، یعنی مفهوم عدد، نهفته است؛ بنایی که آجر به آجر بر شالوده‌ی همین اعداد طبیعی بنیان گذاشته شده است.

شگفت این نیست که روابط وجود دارند، بلکه این است که دریافت(و اثبات) آن‌ها برای ما تا این حد دشوار است.

1) Complex

«مسئله‌ای دیگر»

کسر نامتناهی ادامه داری که اویلر با آن عدد e را نمایش داد، به عنوان حد دنباله‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$۲, ۲, \frac{۱}{۱}, ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}}, ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۳}}}, ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۳+\cfrac{۳}{۴}}}},$$

$$۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۳+\cfrac{۳}{۴+\cfrac{۴}{۵}}}}}$$

برای خواننده می‌تواند لذت بخش باشد که این چند جمله‌ی آغازین را محاسبه کند و ببیند که چگونه حاصل جملات (که یکی در میان کوچک‌تر و بزرگ‌ترند) به مقدار e نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

$$e > ۲$$

$$e < ۲+\frac{۱}{۱} = ۳$$

$$e > ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}} = ۲+\cfrac{۱}{\cfrac{۳}{۲}} = ۲\frac{۲}{۳} \text{ یا } ۲/۶۷$$

$$e < ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۳}}} = ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۸}{۳}}} = ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۳}{۸}} = ۲\frac{۸}{۱۱} \text{ یا } ۲/۷۳$$

$$e > ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۳+\cfrac{۳}{۴}}}}$$

$$e < ۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۳+\cfrac{۳}{۴+\cfrac{۴}{۵}}}}}$$

«پاسخ»

$$e > ۲\frac{۳۸}{۵۳}\ \text{یا}\ ۲٫۷۱۷,\quad e < ۲\frac{۷۴}{۱۰۳}\ \text{یا}\ ۲٫۷۱۸۴$$

فصل دوازدهم

الف‌صفر

صفر، که ماجرای اعداد خود را با آن آغاز کردیم، کاربردی‌ترین ابداع در تاریخ ریاضیات بود. نظریه‌ی مجموعه‌های نامتناهی، که قرار است در این بخش راجع به آن صحبت کنیم، ممکن است غیرکاربردی‌ترین ابداع به نظر آید؛ امّا از نقطه نظر ریاضی، اهمیت آن به طرز غیر قابل قیاسی بیشتر است.

اگرچه نظریه‌ی بی‌نهایت در ریاضیات جدید به طور دقیق بخشی از نظریه‌ی اعداد نیست، امّا در نظریه‌ی جدید اعداد (و همچنین در همه‌ی بخش‌های ریاضیات جدید) رخنه کرده است و به طور کاملاً طبیعی از طریق بررسی همین اعدادی که تا به حال در این کتاب مورد بحث قرار گرفتند گسترش و تکامل پیدا می‌کند. در بخش‌های گذشته دیدیم دنباله‌هایی از اعداد در ریاضی جالب توجه‌اند که نامتناهی باشند. اگر اعدادِ اوّل متناهی بودند، علاقه و توجه بسیار کمتری را به سمت خود جلب می‌کردند؛ و یا اگر در نهایت اثبات شود که اعدادِ کامل متناهی هستند، آن گاه علاقه به آن‌ها فقط جنبه‌ی تاریخی می‌یابد. اعداد زوج و فرد، اعداد اوّل و مرکب، مجذورها، مکعب‌ها، اعداد عجیب پنج وجهی، همه و همه نامتناهی‌اند. این دنباله‌های نامتناهی اعداد که در دل دنباله‌ی نامتناهی اعداد طبیعی قرار دارند. نخستین بار سبب مطرح شدن یک ایده‌ی دگرگون

کننده شد که سنگ بنای اصلی نظریه‌ی جدید بی‌نهایت است.

برای درک این ایده، فقط کافی است به زمان گالیله برگردیم؛ او این سنگ بنا را در دست داشت، امّا نتوانست آن را در جای خود قرار دهد. در «چهار» گفتیم که چگونه او، در شخصیت سالویاتوس، اشاره کرد « همان تعداد» که در مجموعه‌ی نامتناهیِ مجذورها وجود دارد، در مجموعه‌ی نامتناهیِ تمام اعداد نیز وجود دارد. استدلال او به خودی خود بسیار ساده بود. مطابق تعریف، **هر عددی دارای یک مجذور است که برابر است با حاصل ضرب آن عدد در خودش** . ما می‌توانیم اولین مجذور را با اولین عدد متناظر کنیم، دومین مجذور را با دومین عدد، و همین‌طور تا آخر.

خواهیم دید تا وقتی که اعداد به پایان نرسند، مجذورها نیز تمام نخواهند شد؛ و از آن جا که اعداد هرگز تمام نمی‌شوند، مجذورها هم هرگز به پایان نمی‌رسند. به طریقی مشابه، ما انگشت‌های دست راست و چپ را با هم متناظر می‌کنیم، شست راست با شست چپ، انگشت اشاره‌ی راست با اشاره‌ی چپ و همین طور تا آخر؛ وقتی به پایان می‌رسیم و انگشت ها همه تمام می‌شوند، می‌گوییم (به همان تعداد) که در این دست انگشت داریم، در دست دیگر هم داریم.

گالیله کاری نکرد جز آنکه همین روش رایج برای مشخص کردن (به همان تعداد) را به مقادیر بی نهایت تعمیم دهد. او اشاره کرد که در سرتاسر دنباله‌ی اعداد، به ازای هر عدد یک مجذور وجود دارد. مجذورها و اعداد را (تا بی نهایت) می‌توان دو به دو متناظر کرد.

پس علی رغم امر، به همان تعداد اعداد، مجذور وجود دارد. وقتی می‌گوییم گالیله کاری نکرد جز آنکه همین روش رایج برای مشخص کردن (به همان تعداد) را از مقادیر متناهی به نامتناهی تعمیم دهد، قصد ما کوچک جلوه دادن دستاورد او نیست؛ زیرا تقریباً در طی دو هزار سال هیچ ریاضی دان دیگری کاری بیش از این نکرد. امّا به هر حال گالیله هم، که به نظریه‌ی جدید بی نهایت بسیار نزدیک شده بود، بیش از این پیش نرفت. او منطقاً نشان داده بود که به همان تعداد اعداد، مجذور وجود دارد؛ سپس سوال بعد را از خود پرسید. «اگر به همان تعداد اعداد، مجذور وجود دارد، پس آیا می‌توان گفت که تعداد مجذورها با تعداد اعداد برابر است؟»

حالا یک ریاضی دان چگونه می‌توانست این سوال را پاسخ دهد؟ اگر همان طور که خود او نشان داده بود به تعداد اعداد، مجذور وجود داشته باشد، پس این دو مجموعه نمی‌توانند نامساوی

باشند. اما از سوی دیگر، واضح است که تعداد عددهایی که مجذور نیستند بسیار بیشتر از عددهایی است که مجذور هستند. در این جا بود که گالیله آن سنگ بنا را دوباره بر روی تل آجرها برگرداند و، همان گونه که در فصل (چهار دیدیم)، این گونه نتیجه‌گیری کرد؛

«تصمیم دیگری پیش روی خود نمی‌بینم که پذیرفتنی باشد، جز این که بگویم همه‌ی اعداد نامتناهی‌اند؛ مجذورها نامتناهی‌اند؛ و نه تعداد مجذورها از اعداد کمتر است، نه تعداد مجذورها از اعداد بیشتر است؛ در نتیجه، ویژگی‌های تساوی، بزرگتر بودن و کوچکتر بودن در بی‌نهایت‌ها جایی ندارند، بلکه جای آن‌ها در مقادیر پایان‌پذیر است.»

سیصد سال بعد، یکی از ریاضی‌دانان با نام گئورگ کانتور[1](۱۸۴۸ـ۱۹۱۸) دریافت که در تعریف عبارت « به همان تعداد»، مفاهیم «تساوی » و «تعداد برابر» نهفته است. برای اعمال کردن این مفاهیم (که معمولاً فقط به مقادیر متناهی اعمال می‌شوند) به بی‌نهایت‌ها، او به تعریفی واقعاً دقیق از یک مجموعه‌ی نامتناهی، در برابر یک مجموعه‌ی متناهی، نیاز داشت. اگرچه مسیر اکتشاف کانتور با گالیله متفاوت بود، امّا او این تعریف مورد نیاز خود را از رابطه‌ای به دست آورد که گالیله پیش‌تر میانِ مجذورها و همه‌ی اعداد پیدا کرده بود.

مطابق تعریف کانتور، «مجموعه‌ی نامتناهی مجموعه‌ای است که بتوان آن را با بخشی مناسب از خودش در تناظر یک به یک قرار داد.)

بدیهی است که این تعریف در مورد یک مجموعه‌ی متناهی صدق نمی‌کند. اگرچه می‌توانیم همه‌ی مجذورها را با «همه‌ی» اعداد در تناظر یک به یک قرار دهیم بدون این که اعداد یا مجذورها به پایان برسند، امّا نمی‌توانیم مجذورها کمتر از ۱۰ را با اعداد کمتر از ۱۰ یک به یک متناظر کنیم؛ دلیل آن هم بسیار ساده است: زیرا مجذورها در این محدوده زودتر از اعداد تمام می‌شوند.

1) Georg Cantor

با احتساب مجذورهای زیر ۱۰		با احتساب همه‌ی مجذورها	
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۴	۲	۴	۲
۹	۳	۹	۳
	۴	۱۶	۴
	۵	۲۵	۵
	۶	۳۶	۶
	۷	۴۹	۷
	۸	۶۴	۸
	۹	۸۱	۹
		...	...

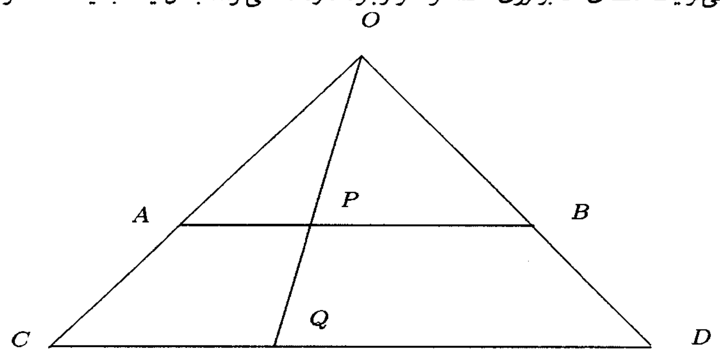
در این جا سوالی در ذهن ما شکل می‌گیرد: اگر گالیله ویژگی اساسی یک مجموعه‌ی نامتناهی را که با مجموعه‌ی متناهی متفاوت است درک کرده است، چرا سیصد سال پیش از کانتور به نظریه‌ی بی‌نهایت او دست نیافته است؟ پاسخ این پرسش ریشه در یکی از کهن‌ترین اصل‌های ریاضی دارد؛ اصلی که در کتاب «عناصر» اقلیدس آمده است و عنوان می‌کند که کل از جزء بزرگ‌تر است. گالیله نتوانست به ردکردنِ این اصل نائل آید و بگوید که کل (تمام اعداد) با جزء (تمام مجذورها) برابر است. در عوض، او نتیجه گرفت که ویژگی تساوی در مقادیر نامتناهی جایی ندارد. کانتور اساساً بیان کرد که این اصل که کل بزرگ‌تراز جزء است «در بی‌نهایت‌ها جایی ندارد».

توجیه ریاضی برای تحول عظیمی که کانتور در این اصل اقلیدس ایجاد کرد بسیار ساده است و آن این که این تحول بر مبنای کار با مقادیر بی‌نهایت است، بنابراین ما را به تناقض نمی‌کشاند.

امّا اصل اقلیدس، که کل بزرگ‌تر از جزء است، بر اساس مقادیر متناهی است و در نتیجه هنگام کار با بی‌نهایت سبب ایجاد تناقض می‌شود. پیش از کانتور، ریاضی‌دانان بیهوده کوشیده بودند تا این تناقض‌ها را حل کنند. کانتور، پس از تعریف مجموعه‌ی نامتناهی به عنوان مجموعه‌ای

که بر خلاف مجموعه‌ی متناهی می‌توان آن را با بخشی از خودش در تناظر یک به یک قرار داد، با حذف این تناقض‌ها آن‌ها را حل کرد. نظریه‌ی بی‌نهایتِ او به داشتن بسیاری تناقض‌های ظاهری معروف است. براساس آن مثلاً می‌توان اثبات کرد که تعداد نقطه‌های موجود بر یک خط یک اینچی و یک خط یک مایلی برابر است؛ همچنین می‌توان اثبات کرد که در طولِ تمامِ زمان، تعداد روزها و سال‌ها برابر است.[۱] امّا در هر دو مورد مذکور هیچ‌گاه در این موضع غیرقابل دفاع قرار نمی‌گیریم که بگوییم اثبات کرده‌ایم که مجموعه‌های مقایسه شده با هم برابرند (ویا برابر نیستند). توجیهِ عدم وجود تناقض (یعنی این که یک اصل در درون حکم‌های خود دچار تناقض نشود) همه‌ی آن

۱) برای اثبات این که تعداد نقطه‌های روی یک خط کوتاه و یک خط بلند برابر است، خط AB و خط بلندتر CD را در نظر می‌گیریم، هر دو را به موازات هم قرار می‌دهیم و AC و BD را به هم وصل می‌کنیم. خط‌های AC و BD را ادامه می‌دهیم تا همدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. به آسانی می‌توان دید که هر خطی را که از Oبه سمت خط‌های AB و CD رسم کنیم آن‌ها را به ترتیب در نقطه‌های P و Q قطع می‌کند. به ازای هر نقطه‌ی Q بر روی خط طولانی‌تر یک نقطه‌ی P بر روی خط کوتاه‌تر وجود دارد که می‌تواند با آن یک به یک متناظر شود.



شکل ۱۲ـ۱

و این که در طول تمام زمان، تعداد روزها و سال‌ها با هم برابر است، چیزی است که برتراند راسل آن را «تناقض ترسیترام شندی » نامیده است. [Tristram Shandy نام یک رمان انگلیسی است با شخصیتی به همین نام-م.] به یاد می‌آوریم که ّشندی دو سال را صرف بازگویی رویدادهای دو روز اوّل عمر خود کرد، و بعد ناله و شکایت کرد که با این سرعت او در نوشتن زندگی نامه‌ی خود مدام از زمان عقب‌تر و عقب‌تر می‌افتد. این برای یک شندیِ فانی کاملاً درست است. امّا اگر فرض کنیم یک شندیِ ابدی، با زمانی به درازی ابدیت، می‌خواست در سالِ اوّل رویدادهای اوّلین روز زندگی خود را بازگوید، در سال دوّم رویدادهای دوّمین روز، و همین‌طور تا پایان؛ او این امکان را داشت که داستان هر روز مشخص را بالاخره در وقتی بیان کند.

چیزی‌ست که یک ریاضی‌دان به عنوان توجیه نیاز دارد. پس از آن او مطابق قواعد ریاضی دیگر مختار است تا هر نظریه‌ای را که از اصل او به طور منطقی استنتاج می‌شود مطرح کند.

این دقیقاً همان کاری است که گئورگ کانتور انجام داد. او پس از تعریف یک مجموعه‌ی نامتناهی به عنوان مجموعه‌ای که می‌تواند در تناظر یک به یک با بخشی از خود قرار گیرد، سپس مجموعه‌های نامتناهی‌ای را تعریف کرد که اعضا آن‌ها به این صورت در تناظر یک به یک قرار می‌گیرند و «برابر» و « دارای تعداد اعضای یکسان» تلقی می‌شوند.

هر مجموعه‌ی نامتناهی که بتواند با مجموعه‌ی همه‌ی اعداد مثبت صحیح در تناظر یک به یک قرار گیرد، دارای عدد اصلی (cardinal number) برابر اعداد صحیح مثبت است، آن آخرین عدد صحیح مثبت نیست، زیرا آخرین وجود ندارد. آن تمامیت اعداد صحیح مثبت است. همچنین، عددِ اصلی است زیرا به پرسشِ « چه تعداد؟» در مورد مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت پاسخ می‌دهد درست همان‌طور که دو و سه در پاسخ به پرسش « چه تعداد؟» در مورد مجموعه‌های دو عضوی و سه عضویِ خود می‌آیند. امّا این نوعِ کاملاً جدیدی از اعداد اصلی است، زیرا به پرسش در مورد مجموعه‌های نامتناهی پاسخ می‌دهد، نه مجموعه‌های متناهی.

کانتور آن را (عدد اصلی فرامتناهی)[1] نامید و با جسارت تمام نامی برای آن برگزید. مانند یونانیان که اعداد خود را با حروف الفبای نام‌گذاری کرده بودند، او نیز عدد خود را با اوّلین حرف الفبای عبری، یعنی «الف»، نام‌گذاری کرد که علامتِ آن $\aleph$ است.

تا زمانِ کانتور، بی‌نهایت، که به وسیله‌ی سه نقطه در پایان دنباله‌های اعداد و یا به صورت علامت ∞ نمایش داده می‌شد، پایانِ کارهای ناتمام محسوب می‌شد: یعنی یک کمیت در حال افزایش از متناهی‌ها، با اضافه کردن یک واحد، مقدار بیشتری به دست می‌آید و عدد بزرگ‌تر می‌شود؛ و عددِ آخری نیز وجود ندارد. البته کانتور هیچ‌کدام از این اصول را تغییر نداد. «الف» اعدادِ صحیح مثبت به منزله‌ی عددِ پایانی نیست. در واقع این اصلاً یک عدد صحیح مثبت نیست. رابطه‌ی این عدد اصلی فرامتناهی در اعداد صحیح مثبت با خودِ اعداد صحیح مثبت مانند رابطه‌ی عدد یک با کسرهای Proper است. یک به خودی خود کسر نیست؛ بلکه حدی است که کسرها به آن نزدیک می‌شوند. مهّم نیست که کسر خود را چه‌قدر بزرگ انتخاب کنیم(یعنی این که چه قدر

1) transfinite

نزدیک به ۱ انتخاب کنیم)، به هر حال همیشه کسر دیگری وجود دارد که از قبلی بزرگ‌تر است و به یک نزدیک‌تر؛ امّا کسری وجود ندارد که با یک برابر یا از آن بیشتر شود. به طریقی بسیار مشابه نیز این عدد «الف»، که به خودی خود عدد صحیح مثبت نیست، حد تمام اعداد صحیح مثبت محسوب می‌شود. هر قدر هم که عدد صحیحِ انتخابیِ ما بزرگ باشد، باز هم عدد بزرگ‌تری وجود دارد، اگرچه هرگز به حد نزدیک نمی‌شود. در مثال فوق تفاوت اساسی بین عدد یک و عدد «الفِ» اعداد صحیح مثبت این است که در حالی که کسرهای ما واقعاً به سمت یک میل می‌کنند، امّا اعداد صحیح مثبت فقط به این دلیل به مقدار فرامتناهیِ خود نزدیک می‌شوند که از صفر دورتر می‌شوند. هرقدر هم که عدد صحیح انتخابی ما بزرگ باشد، هرگز به بی‌نهایت «نزدیک‌تر» نخواهیم شد. زیرا بین ما و بی‌نهایت همیشه بی‌نهایت عدد وجود دارد که تعدادشان برابر با تعداد نامتناهیِ اعداد صحیحِ مثبت است.

این ایده که بی‌نهایت، چیزی در حالِ به وقوع پیوستنِ مستمر نیست بلکه چیزی است که به طور کامل وجود دارد (یعنی عدد که می‌توان از بسیاری جهات مانند یک عدد متناهی با آن رفتار کرد: آن را جمع زد، ضرب کرد، به توان رساند) بیش از هر ایده‌ی دیگری که تاکنون در ذهن بشر شکوفا شده دگرگون کننده بود. مانند هر ایده‌ی دگرگون کننده‌ی دیگری، این یکی نیز به نحوی احساسی مورد مخالفت قرار گرفت که بیشتر کورکورانه و تند بود. حتا گاوس، که بسیار جلوتر از زمان خود می‌اندیشید و بر بسیاری از کرانه‌های ریاضی پیش از کاشفان رسمیِ آن‌ها گام نهاده بود، نتوانست ایده‌ی یک بی‌نهایتِ کامل را بپذیرد.

شاید هیچ ریاضی‌دان دیگری بیش از کانتور با ایده‌ی خود تنها نمانده بود. امّا او سرسختانه ایستاد:

> «من علی‌رغم خواسته‌ی خودم از نظر منطقی ملزم بودم زیرا در برابر سنت‌هایی ایستاده بودم که سال‌های سال در طول دوران پژوهش‌های علمی‌ام برای آن‌ها ارزش قائل شده بودم؛ ملزم بودم به این که بیندیشم آن چه را بی‌نهایت بزرگ است بررسی کنم، البته نه فقط به عنوان چیزی که بی حد و مرز افزایش می‌یابد. . . بلکه برای این که آن را از نظر ریاضی به شکل قطعیِ یک «بی‌نهایتِ کامل » به وسیله‌ی اعداد

نشان دهم. گمان نکنم دلیلی در برابر این امر بتوانند اقامه کنند که من قادر به مقابله با آن نباشم.»

اعتماد و اطمینان کانتور نه فقط نسبت به ریاضیِ خودش بلکه نسبت به خودِ ریاضیات بود. او همواره از آزادی و انعطافِ تفکرِ ریاضی آگاه بود، و در جای دیگری این گونه نوشت:

«. . . ریاضیات، در روند تکامل خود، کاملاً آزاد است، و فقط یک شرط بدیهی بر آن حکم می‌کند، آن هم این که مفاهیم ریاضی درون خود تناقضی ندارند و با مفاهیمی که از قبل ساخته و آزمایش می‌شوند دارای روابطی مشخص‌اند؛ روابطی که بر اساس تعریف‌ها سامان یافته‌اند. به ویژه در معرفیِ اعداد جدید، فقط ضروری است تعریفی از آن‌ها ارائه دهیم که چنان به آن‌ها قطعیت بخشید تا در برخی شرایط، آن‌ها را در چنان رابطه‌ی محکمی با اعداد قدیمی قرار دهد که در موارد معین قابل تمایز باشند. به محض این که عددی حائز همه‌ی این شرایط گردید، می‌توان و باید آن را به عنوان عددی موجود و واقعی در ریاضیات پذیرفت.»

کانتور از این آزادی و اختیار هراسی نداشت. او خود دریافته بود که شرایط لازم برای وجود این آزادی بسیار سخت است که باعث می‌شود سوء استفاده‌های شخصی و بی‌حساب به حداقل برسد. همچنین می‌دانست یک مفهوم ریاضی برای پایداری و بقای خود در طولانی مدت لازم است مفید و کارآمد باشد. و البته هم صحتِ تعبیر کانتور از مفهوم بی‌نهایتِ کامل و هم کارآمدیِ اعداد اصلی فرامتناهیِ او در ریاضی درگذر زمان مشخص شده است. حتا پیش از درگذشتِ او در سال ۱۹۱۸، عقایدش به طور گسترده پذیرفته شده بود؛ و نیز حسابِ اعداد فرامتناهی که در صفحات بعد به اختصار به آن خواهیم پرداخت، حالا دیگر برای ریاضیات مانند « دو دو تا چهارتا» ضروری است.

کانتور، پس از این که شمارش‌پذیری برای مقادیر نامتناهی را تعریف کرد، کار خود را ادامه داد و دو حکم مهم مطرح کرد:

۱ـ عدد اصلیِ همه‌ی اعداد صحیح مثبت، کوچک‌ترین عدد اصلی فرامتناهی است.

۲ـ به ازای هر عدد اصلیِ فرامتناهی، یک عدد «بعدیِ» فرامتناهی بزرگ‌تر وجود دارد.

شباهت بین کلیتِ اعداد اصلیِ فرامتناهی و اعداد اصلیِ روزمره (یعنی همان اعداد طبیعی) واضح است؛ ابتدا اولین عدد، سپس بعدی، و همین‌طور بدون انتها.

کانتور این اعداد اصلیِ فرامتناهی را «الف» نامید، امّا به هر یک از آن‌ها شماره‌ای اضافه کرد تا جایگاه آن را درون دنباله مشخص کند. عدد اعداد صحیح مثبت، که در واقع نخستین و کوچک‌ترین عدد اصلی فرامتناهی است، با صفر مشخص می‌شود و به صورت $\aleph_0$ نمایش داده می‌شود؛ آن را «الف ـ صفر» می‌خوانیم. عدد فرامتناهی بعدی «الف ـ یک» است؛ عدد بعدی «الف ـ دو» است، و الی آخر.[1]

امّا در این جا خواننده نباید نتیجه بگیرد که این دنباله‌ی نامحدود اعداد شمارشیِ فرامتناهی باعث کاهش و تمام شدن آن‌ها می‌شود به این دلیل که عددی وجود دارد که برابر حاصل جمع تمام این و، به گفته‌ی کانتور، « پس از آن دوباره به همین منوال .... عدد بزرگ‌تر بعدی ... و الی آخر، بدون انتها. »

آیا مثالی ملموس از یک بی‌نهایت که از الف ـ صفر بزرگ‌تر باشد می‌توان آورد ــ به عبارت دیگر، بی‌نهایتی که نتوان آن را در تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت قرار داد؟

موفقیت کار کانتور در این بود که علاوه بر ایجاد چنین بی‌نهایتی، آن را با چنان روش ساده‌ای مطرح کرد که فقط با همین دانش چند صفحه‌ای که تاکنون راجع به نظریه‌ی بی‌نهایت به دست آوردیم می‌توان به سادگی اثبات آن را درک کرد. به هر حال، برای درک و تحسین دستاورد او، باید بدانیم درست همان طور که اعداد صحیح مثبت را می‌توان با یکی از زیرمجموعه‌های آن‌ها، مانند مجذورها و یا اعداد اوّل، در تناظر یک به یک قرار داد، بی‌نهایت‌هایی که اعداد صحیح مثبت را به عنوان زیرمجموعه‌ی خود در برمی‌گیرند را نیز می‌توان با این مجموعه در تناظر یک به یک قرار داد.

یک مثال برای چنین بی‌نهایتِ به ظاهر بزرگتری که در واقع عدد اصلی آن برابر اعداد صحیح مثبت است، مجموعه‌ی نامتناهی اعداد گویای مثبت می‌باشد. همان طور که از فصل «یک» به یاد داریم، شامل همه‌ی آن مقادیری هستند که می‌توان به وسیله‌ی نسبت دو عدد کامل نشان داد. از آن جا که نسبت هر عدد کامل به یک برابر با خود همان عدد می‌شود، مانند $۲ = \frac{۲}{۱}$، درنتیجه

۱) جالب است که اگر چه کانتور بعدها به مفهوم الف ـ صفر رسید، امّا الف‌های خود را در ابتدا به جای صفر با یک شروع می‌کرد.

اعداد گویا هم اعداد صحیح را در برمی‌گیرند و هم بقیه‌ی نسبت‌ها را که به آن‌ها کسر می‌گوییم. شّم درونی به ما می‌گوید تعداد اعداد گویا بسیار بیشتر از اعداد صحیح است، امّا همین احساس بود که به ما گفت تعداد مجذورها کمتر از اعداد صحیح است. و شّم درونی نمی‌تواند در ریاضی به عنوان اثبات حساب شود. اگر بتوانیم اعداد گویا را بشماریم، یک کسر مشخص $\frac{a}{a_1}$ را با ۱ متناظر کنیم، کسر بعدی $\frac{b}{b_1}$ را با ۲ متناظر کنیم و ... به طوری که در مقدار محدودی زمان اگر بخواهیم می‌توانیم تاهر تعداد از اعداد گویا را بشماریم.

پس، بیایید شروع کنیم. امّا چه طور؟

۱ـ کوچک‌ترین عدد گویا وجود ندارد.

۲ـ بزرگ‌ترین عدد گویا هم وجود ندارد.

اگر عدد گویای $\frac{a}{b}$ را کوچک‌ترین در نظر بگیریم، همواره می‌توانیم با اضافه کردن یک واحد به مخرج کسر آن را کوچک‌تر کنیم و $\frac{a}{b+1}$ را به دست آوریم که از $\frac{a}{b}$ کوچکتر است. هر دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را که در نظر بگیریم، فارغ از این که چه قدر به هم نزدیکند، همواره می‌توانیم با جمع کردن صورت‌ها و مخرج‌های آن‌ها عدد گویای جدیدی بین آن دو به دست آوریم. مثلاً بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، عدد $\frac{(a+c)}{(b+d)}$ وجود دارد.

پس آیا حالا می‌توان گفت بی‌نهایتی پیدا کرده‌ایم که از تعداد نامتناهیِ اعداد صحیح مثبت، که با الف ـ صفر نشان داده می‌شود، بزرگتر است؟ خیر، نمی‌توانیم. زیرا این امکان وجود دارد تا اعداد گویا را طوری بچینیم (البته نه به ترتیب بزرگی و کوچکی) که به ازای هر عدد صحیح مثبت، یک عدد گویای منحصر به فرد وجود داشته باشد.

برای شروع، همه‌ی اعداد گویا را بر اساس صورت کسر و زیرمجموعه‌هایی دسته‌بندی می‌کنیم، و همه‌ی آن‌هایی را که عوامل مشترک دارند، حذف می‌کنیم، تا از تکرار آن‌ها بپرهیزیم. اکنون تعداد سطرهایی نامتناهی از اعداد گویا داریم و بدیهی است که سطرها را می‌توان در تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت قرار داد:

۱	↔	۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۵	...
۲	↔	۲/۱	۲/۳	۲/۵	۲/۷	۲/۹	...
۳	↔	۳/۱	۳/۲	۳/۴	۳/۵	۳/۷	...
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

امّا هر ستون نیز حاوی تعدادی نامتناهی از اعداد گویاست که آن‌ها را نیز می‌توان یک به یک با اعداد صحیح مثبت متناظر کرد:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	
۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۵	۱/۶	...
۲/۱	۲/۳	۲/۵	۲/۷	۲/۹	۲/۱۱	...
۳/۱	۳/۲	۳/۴	۳/۵	۳/۷	۳/۸	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

حالا چیزی که داریم، بی‌نهایت در بی‌نهایت است. اگر در طول سطرها شروع به شمارش کنیم، هرگز به پایان سطر اوّل و بنابراین آغاز سطر دوم، یعنی عدد گویای $\frac{۲}{۱}$ نخواهیم رسید. اگر در طول ستون‌ها شمارش را شروع کنیم، هرگز به انتهای ستون اوّل و ابتدای ستون دوم، یعنی $\frac{۱}{۲}$ نخواهیم رسید.

امّا راهی دیگر وجود دارد تا اعداد گویا را بشماریم به نحوی که بتوانیم هر کدام از آن‌ها را در تناظر یک به یک با یک عدد صحیح مثبت منحصر به فرد قرار دهیم و قادر باشیم در مدتی محدود هر عدد گویای دلخواه را شمارش کنیم.

کانتور نشان داد که می‌توانیم این کار را با شمارشِ همان ستون‌ها و سطرها به صورت قطری انجام دهیم:

$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	...
$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۲}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۲}{۵}$	...
$\frac{۳}{۱}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۵}$	...
$\frac{۴}{۱}$	$\frac{۴}{۲}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۴}{۴}$	$\frac{۴}{۵}$	...
$\frac{۵}{۱}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۵}{۵}$	...

شکل ۱۳ـ۱

در این روش، یک عدد $\left(\frac{۱}{۱}\right)$ برای شروع شمارش وجود دارد و پس از آن پیوسته به عدد و عددهای بعدی می‌رسیم (در شکل بالا، پس از $\frac{۱}{۵}$ به $\frac{۶}{۱}$ می‌رسیم). واضح است که در صورت داشتنِ زمان کافی می‌توانیم تا هر عدد گویایی که می‌خواهیم، شمارش را انجام دهیم. هرگز اعداد ما برای شمارش تمام نمی‌شود. می‌بینیم که برخلاف ظاهر امر، کاملاً به تعداد اعداد گویا عدد طبیعی وجود دارد.

$\frac{۱}{۱}$	۱
$\frac{۲}{۱}$	۲
$\frac{۱}{۲}$	۳
$\frac{۳}{۱}$	۴
$\frac{۲}{۳}$	۵

و الی آخر.

بنابراین، عدد اصلی فرامتناهیِ دو مجموعه با هم برابر است و همان الف ـ صفر است. چنین مجموعه‌هایی را، که می‌توانند در تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت قرار گیرند (به عبارتی،

توسط آن‌ها «شمرده » شوند)، «شمارش‌پذیر» می‌گویند.

حال پس از این که نتیجه‌ای بر خلاف شم درونی ما حاصل شد، سؤالی مطرح می‌شود: نظر به ادعای کانتور مبنی بر این که پس از هر عدد اصلی فرامتناهیِ یک عدد اصلی فرامتناهی دیگر وجود دارد، آیا می‌توان مجموعه‌ای نشان داد که «بزرگتر» باشد؟ به بیان ساده‌تر، مجموعه‌ای که «شمارش‌پذیر» نباشد و نتوان آن را با اعداد صحیح مثبت «شمارش» کرد؟ البته که می‌توانیم. کانتور شخصاً نشان داد که تعداد نامتناهی کسرهای اعشاری (decimal fractions) بین صفر و یک را نمی‌توان در تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت قرار داد و بنابراین باید عدد اصلی بزرگتر از الف ـ صفر داشته باشد.

کسرهای اعشاری هم شامل اعداد گویا و هم شامل اعداد گنگ می‌شوند. (مانند جذر عدد ۲) که نمی‌توان به وسیله‌ی نسبت دو عدد کامل نمایش داد. در بین کسرهای اعشاری، برخی به رشته‌ای از صفر ختم می‌شوند، برخی پس از یک رشته از اعداد دوباره تا بی‌نهایت آن را تکرار می‌کنند، و برخی هم (که همان اعداد گنگ هستند) ذاتاً نه به صفر ختم می‌شوند و نه دنباله‌ای متناوب و تکرار شونده دارند. هر سه دسته را می‌توان پایان‌ناپذیر قلمداد کرد(در دسته‌ی اوّل نیز در واقع رشته‌ی صفرها تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد)، و همه را می‌توان به صورتِ عمومی زیر نشان داد:

$$۰.n_۱\ n_۲\ n_۳\ n_۴\ n_۵\ n_۶\ n_۷\ n_۸\ n_۹\cdots$$

که هر n یکی از رقم‌های اعشار را مشخص می‌کند.

به همان اندازه که نوشتن نخستین عدد گویای بزرگتر از صفر ناممکن است، نوشتن نخستین کسر اعشاری نیز ناممکن است؛ و نیز به همان اندازه که نوشتن عدد گویای بعدی ناممکن است، نوشتن کسر اعشاری بعدی نیز ناممکن است. امّا دیدیم که برای چیدنِ اعداد گویا به نحوی که بتوان از عددی شروع کرد و آن‌ها را به ترتیب شمرد راهی وجود داشت؛ و ما می‌توانستیم در زمانی محدود به عدد گویای مورد نظر خود برسیم. حال ببینیم آیا راهی وجود دارد تا کسرهای اعشاری را به نحوی بچینیم که بتوانند در تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت قرار گیرند؟

ریاضیات دو راه برای پاسخ به این پرسش دارد: یا اینکه این نحوه‌ی چینش را ایجاد کنیم، و یا این که نشان دهیم چنین چینشی امکان پذیر نیست. کانتور دومین راه را به انجام رساند و آن را

به همان سادگی و روانی انجام داد که اقلیدس دوهزار سال پیش از او نامتناهی بودنِ اعداد اوّل را نشان داده بود. به یاد می‌آوریم (از «سه») که اقلیدس کارخود را با فرض مجموعه‌ای متناهی آغاز کرد که همه‌ی اعداد اوّل را در خود جای دهد؛ سپس نشان داد با ضرب کردن اعداد اوّل آن مجموعه در یکدیگر و اضافه کردن یک واحد به آن، همواره می‌تواند یا عدد اوّل جدیدی تولید کند که درمجموعه نیست، و یا عددی تولید کند که یکی از عوامل اوّل آن در مجموعه وجود نداشته است. پس فرض وجود مجموعه‌ی متناهی اعداد اوّل غلط از آب درمی‌آید، و اعدادِ اوّل نامتناهی می‌شوند.

این دقیقاً روشی است که کانتور دنبال کرد. برای اثبات این که مجموعه‌ی تمام کسرهای اعشاری بین صفر و یک نمی‌تواند در تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت قرارگیرد (و بنابراین شمارش‌پذیر است)، او فرض کرد که این تناظر از طریقِ یک نحوه‌ی چینشِ نامعلوم امکان‌پذیر باشد. و نیز فرض کرد یک کسر اعشاری به عنوان اولین عدد مشخص شده است و آن را با اولین عدد صحیح مثبت متناظر کرد. به همین ترتیب براساس فرض خود دومین کسر اعشاری را با دومین عدد صحیح مثبت متناظر کرد، و الی آخر.

$$۱ \leftrightarrow ۰/a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵a_۶a_۷a_۸a_۹\cdots$$

$$۲ \leftrightarrow ۰/b_۱b_۲b_۳b_۴b_۵b_۶b_۷b_۸b_۹\cdots$$

$$۳ \leftrightarrow ۰/c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵c_۶c_۷c_۸c_۹\cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

سپس نشان داد که چنین فرضی مبنی بر برقراریِ تناظر یک به یک بین اعداد اعشاری و اعداد صحیح نادرست است، زیرا او می‌تواند همواره کسری اعشاری تولید کند که شمارش نشده است. او این عدد اعشاریِ شمارش نشده را به شکل زیر نشان داد:

$$۰/m_۱m_۲m_۳m_۴m_۵m_۶m_۷m_۸m_۹\cdots$$

دراین جا، $m_۱$ عددی غیر از $a_۱$ در «اولین» عدد اعشاری است؛ $m_۲$ عددی غیر از $b_۲$ در «دومین» عدد اعشاری است؛ $m_۳$ عددی غیر از $c_۳$ در «سومین» عدد اعشاری است؛ و الی آخر[۱] چنین

۱) از آن جا که اعداد اعشاریِ پایان‌پذیر مانند ۰/۲۵ را می‌توان به دو صورتِ پایان‌ناپذیر نمایش داد: یعنی یا

عدد اعشاری ممکن نیست در میان چینشِ فرضیِ « همه‌ی» کسرهای اعشاری بوده باشد، زیرا با هر کسر دست کم در یک رقم اعشار تفاوت دارد. بدین ترتیب، نشان داده شد تعداد نامتناهی کسرهای اعشاری از تعداد نامتناهی اعداد صحیح مثبت بیشتر است: بنابراین این دو مجموعه در تناظر یک‌به‌یک قرار نمی‌گیرد. و از آن‌جا که این تعداد بیشتر است، پس عدد نشان دهنده‌ی آن نیز بزرگتر می‌باشد. کسرهای اعشاری بین صفر و یک فقط بخشی بسیار کوچک از محور اعداد را در بر می‌گیرند- این محور، پیوستاری از اعداد حقیقی است که به ازای هر نقطه بر روی آن، عددی به دست می‌دهد. اما چیزی که در مورد آن بخش از خط صدق می‌کند، در مورد تمام پیوستار نیز صادق است. بنابراین، کانتور نام عدد اصلی فرامتناهی خود را (عدد پیوستار) نامید و نمادی از بین حروف الفبای آلمانی برای آن برگزید.

این گذر از الفبای عبری حائز اهمیت بود، زیرا کانتور نمی‌توانست تعیین کند که عدد پیوستار در کدام نقطه بین الف‌ها قرار دارد. او بیان کرده بود که الف- صفر کوچکترین عدد اصلی فرامتناهی است، پس از هر عدد اصلی فرامتناهی یک عدد بزرگتر وجود دارد، و مهم‌تر از همه این که (همه‌ی) اعداد فرامتناهی شمارشی در دنباله‌ی الف‌ها جای دارند. حالا او در پیوستار اعداد حقیقی مجموعه‌ای از اعداد را ایجاد کرده بود که عدد فرامتناهی آن‌ها غیر از الف- صفر و بزرگ‌تر از آن بود؛ اما آیا این الف بعدی، یعنی الف ـ یک، بود؟ این پرسشی بود که کانتور پاسخ دادن به آن را برای ریاضی‌دانان پس از خود گذاشت. این پرسش مانند یکی از آن پرسش‌های یونانیان در مورد اعداد طبیعی ظاهری ساده و فریبنده داشت، اما هنگامی که به آن پاسخ داده شد (و این کار بالاخره انجام شد)، پاسخی بود که به نظر بسیاری از ریاضی‌دانان ناکافی می‌آمد. کانتور شخصاً همیشه بر این باور بود که عدد پیوستار، الف- یک است. اثبات این فرضیه‌ی او (به اصطلاح، «فرضیه‌ی پیوستار»)، به یکی از جنجال‌های بزرگ ریاضی در قرن بیستم بدل شد.

متأسفانه کانتور همه‌ی حکم‌هایی را که درباره‌ی الف‌ها صادر کرده بود اثبات نکرد؛ اگر (مطابق باور خود کانتور) همه‌ی مجموعه‌های نامتناهی می‌توانستند «مرتب» باشند (یعنی به نحوی که هر زیر مجموعه‌ی غیرتهی دارای عنصر اوّل باشد)، منطقاً پیش می‌رفتند. اما این قضیه سرانجام بعدها

... ۰٫۲۵۰۰۰ و یا ... ۰/۲۴۹۹۹۰۰۰، کانتور رقم ۹ را کنار گذاشت تا از تکرار یک عدد اعشاری با ظاهری جدید که قبلاً به شکلی دیگر در جمع «همه‌ی» اعداد اعشاری آمده بود پرهیز کند.

توسط ارنست زرملو (Ernst Zermelo) (۱۹۵۳-۱۸۷۱) به اثبات رسید و او برای این اثبات ناگزیر از یک اصل جدید بهره گرفت؛ اصلی با نام «اصل انتخاب».

به زبانی بسیار ساده و غیرتخصصی، این اصل می‌انگارد که حتا بدون قاعده‌ی برای انتخاب، می‌توان بی‌نهایت انتخاب مختلف انجام داد. مثالی بسیار رایج در بین منطق‌دانان، مردی است که تعدادی شمارش‌پذیر و بی‌نهایت جفت کفش و جوراب دارد که می‌خواهد آن‌ها را از طریق برقراری تناظر یک‌به‌یک با اعداد صحیح مثبت «بشمارد».

برای این منظور، او باید با اولین لنگه کفش و اولین لنگه جوراب از هر جفت آغاز کند. او بدون مشکل می‌تواند تصمیم بگیرد کدام لنگه کفش را اوّل در هر جفت انتخاب کند، زیرا لنگه‌ی چپ و راست کفش‌ها مشخص است؛ اما بر اساس چه قاعده‌ای می‌تواند اولین لنگه‌ی جوراب هر جفت را انتخاب کند؟ بر اساس اصل انتخاب، او می‌تواند هر لنگه‌ای را که دوست دارد انتخاب کند؛ فقط همین قاعده است. ریاضی‌دانان که این اصل را نمی‌پذیرد می‌گویند که او نمی‌تواند گمان کند که قادر به انتخاب است مگر آن که قاعده‌ای برای انتخاب داشته باشند. اما کسانی که اصل انتخاب را می‌پذیرند(و در اکثریت هم هستند)، بر این باورند که او می‌تواند انتخاب کند، چه قاعده‌ای باشد و چه نباشد.

از زمان کانتور تا کنون، نظریه‌ی مجموعه‌های نامتناهی با دقت تمام بر اساس مدلی که اقلیدس در «عناصر» ارائه کرده اصل‌بندی شده است. همچون قضایای هندسه، قضایای نظریه‌ی مجموعه‌ها نیز باید یا از مجموعه‌ی محدودی از مفروضات پذیرفته شده، به نام «اصل»، استخراج شوند و یا از قضایای دیگری که به نوبه‌ی خود از آن اصل‌ها استخراج شده‌اند. اما همواره تردید وجود داشته است که آیا اصل انتخاب را می‌توان یا نمی‌توان درکنار اصل‌های دیگر جای داد. بدون آن، بسیاری از قضیه‌های زیبا در مورد مجموعه‌ی نامتناهی صادر می‌کند که، به اصطلاح ریاضی، «سازنده نیست». چنین حکمی باعث آزردگی خاطر بسیاری از ریاضی‌دانان می‌شود. به بیان صریح، حتا آن‌هایی که از اصل انتخاب در اثبات‌های خود استفاده می‌کنند نیز خوشحال‌تر می‌شدند اگر مجبور به استفاده از آن نبودند. متأسفانه اصل انتخاب حتا برای اثبات حکم کانتور که عدد اصلی پیوستار در واقع یکی از الف‌هاست نیز ضروری است؛ حکمی که آشکارا بسیار ضعیف‌تر از فرضیه‌ی آن

است که عدد اصلی پیوستار همان الف ـ یک است.

ریاضی‌دانان که پس از کانتور آمدند همواره با او بر این باور بوده‌اند که عدد پیوستار در واقع الف ـ یک (یعنی الف بعد از الف ـ صفر) است. همین‌طور بر این باور بوده‌اند که سرانجام یکی از آنان، بر اساس اصل نظریه‌ی مجموعه‌ها، اثبات خواهد کرد که این عدد الف ـ یک است ـ و یا برعکس، از طریق همان اصل‌های اثبات خواهد کرد که الف ـ یک نیست. ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، «داوید هیلبرت» (David Hilbert) (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳)، در یک سخنرانی مشهور در آغاز قرن بیستم گفت: « هر مسئله‌ی حل نشده‌ای را که در نظر بگیرید. . .هر چه‌قدر هم برای دست نیافتنی به نظر برسد و هر چقدر هم مستأصل و درمانده برابر آن ایستاده باشیم، باز هم با قطعیت می‌توان بر این باور بود که راه حل آن صرفاً به وسیله‌ی تعداد مشخصی از فرایندهای مطلقاً منطقی به دست خواهد آمد.» هیلبرت بر این باور بود «که هر مسئله‌ی محض ریاضی لزوماً باید مستعد فیصله یافتن باشد؛ یا پاسخی واقعی به پرسش آن داده می‌شود، و یا اینکه با اثبات،[مانند مسائلی همچون تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی] ناممکن بودن حل آن و شکست همه‌ی تلاش‌ها مشخص می‌شود.»

این باور در سده‌ی آینده به شدت، و به خصوص در مورد اصل انتخاب و فرضیه‌ی پیوستارکانتور، مورد آزمایش قرارگرفت. در سال ۱۹۳۸ «کورت گودل» (Kurt Godel) (۱۹۰۶ـ۱۹۷۸) نشان داد که اصل انتخاب را از طریق اصل‌های دیگر «نمی‌توان رد کرد». ۲۵ سال بعد، ریاضی‌دان جوان آمریکایی، «پاول کوهن» (Paul Cohen) (۱۹۳۴ـ) نشان داد که این اصل را از طریق اصل‌های دیگر «نمی‌توان اثبات کرد». این نتیجه نشان داد که راهی برای عبور از کنار اصل انتخاب وجود ندارد. این اصل با دیگر اصل‌ها «مطابقت» دارد (گودل) و از آن‌ها «مستقل» است. (کوهن). پس اگر به آن نیاز هست، باید آن را به عنوان اصل پذیرفت. یکی دیگر از نتایج کوهن برای ریاضی‌دانان بسیار نگران کننده‌تر بود. گودل نشان داده بود که فرضیه‌ی پیوستار را نمی‌توان از طریق دیگر اصل‌ها رد کرد. حالا کوهن نشان داده بود که آن را نمی‌توان از طریق اصل‌های دیگر اثبات کرد. به زبانی که ریاضی دانان از زمان یونانی‌ها تاکنون، و در حقیقت از زمان هیلبرت، به آن رسیده‌اند می‌توان گفت که پرسش مطرح شده توسط نظریه‌ی پیوستار به اصطلاح «بی‌جواب» است.

بسیاری از ریاضی‌دانان، از جمله خود گودل، چنین پاسخی را بسیار ناکافی دانستند. اگر

ریاضیات بنابه گفته‌ی یکی از ریاضی‌دانان «حقیقتِ مطلق» است، پس عدد پیوستار یا الف ـ یک نیست. برخی ریاضی‌دانان حل کردن مسئله‌ی فرضیه‌ی پیوستار توسط کوهن را به نوعی «حل نکردن» آن می‌دانند. امّا کوهن خود معتقد است که این بهترین جواب ممکن است.

همان طور که در «شش» دیدیم، دو هزار سال پیش ریاضی‌دانان پرسیدند « چه تعداد عدد وجود دارد که برابر با حاصل تمام مقسوم علیه‌های خود است؟» آیا آن‌ها متناهی‌اند یا نامتناهی؟ امروز آنان با همان قطعیت سنتیِ ریاضیات مایلند بدانند که آیا عددِ پیوستار الف ـ یک است یا خیر. هر دو سؤال بی پاسخ مانده‌اند، امّا بین این دو پرسیدن، زمانی به درازای دو هزار سال در طلسمِ دنباله‌ای به ظاهر ساده بوده است که با صفر آغاز می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد.

« حساب بی‌نهایت»

حسابِ اعداد فرامتناهی به اندازه خودِ نظریه‌ی بی‌نهایت دارای تناقض است. سؤالاتی به شکل « دو به اضافه‌ی دو» در حسابِ عادی یا آن قدر ساده‌اند که بی‌اهمیت جلوه می‌کنند و یا آن قدر دشوار که کسی قادر به پاسخ گفتن به آن‌ها نیست.

خواننده با کمی دقت و یادآوری آن چه که در مورد مجموعه‌ها نامتناهی مختلف در اعداد حقیقی آموخته است خواهد دید که قادر است به سؤال‌های زیر پاسخ دهد و با ارائه‌ی یک مثال از متن کتاب «نشان» دهد که پاسخ او درست است.

$$\aleph_0 + \aleph_0 =$$

$$۲ \times \aleph_0 =$$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 =$$

«پاسخ‌ها»

پاسخ هر سه سؤال یکسان است: الف ـ صفر. مثال‌هایی که می‌توان ارائه داد:

۱) اعداد زوج و فرد،

۲) اعداد صحیح مثبت و منفی،

۳) اعداد گویا.

the history, characteristics, and lore of the numbers we use every day

Bu-Ali Sina University

FROM *zero* TO *infinity*

ISBN:978-600128-085-6

50 TH ANNIVERSARY EDITION