



سنة اشکات اکبر نادرى

شماره ۳۵

استاد و دانشمندان مغرب زمین از جبر و مقابله ختام

نخستین

دکتر جمال مصطفوی

کازینت - اندیشه

تهران ۱۳۳۱ شمسی

استفاده دانشمندان مغرب زمین

از جبر و مقابله خيام



تألیف

دکتر جلال مصطفوی

دکتر در طب - مهندس شیمی



تقریظی است که آقای دکتر محسن هشرودی استاد دانشگاه
ورئیس دانشکده علوم بر این رساله مرقوم داشته‌اند

رساله حاضر تحقیقی است در تبعات خیام راجع به جبر در مورد حل معادلات
درجه سوم . - انجمن آثار ملی در انتشار چنین رسالاتی دینی را که معاصرین در حق
گذشتگان بر کردن دارند ادا مینماید و خدمتی مأجور و در خور تقدیر انجام
میدهد .

تدوین رساله را آقای دکتر مصطفوی که در تاریخ علوم سوابق خدمت شایانی
دارند بر عهده گرفتند ، و در انجام آن حق مطلب را ادا کرده‌اند . با اینکه شغل
شاغل ایشان طبابت است با اطلاعات وسیعی که در علوم خصوصاً مهندسی شیمی دارند در
زنده کردن تاریخ گذشته‌ای که غالب هموطنان از آن بی‌خبرند ایرانیان را بر یکی
از افتخارات علمی گذشته خویش آگاه ساخته‌اند . در بادی امر چنین بنظر میرسد
که اقدام در این کار بر عهده اساتید علم ریاضی میبایستی محول شده باشد ؛ اما کار
تحقیق تاریخ جز بررسی فنی و علمی است و رساله حاضر از این نظر بسی ارزش دارد ،
چه آقای دکتر مصطفوی چنانکه اشاره شد از مبانی علوم ریاضی و فیزیک و شیمی
بخوبی آگاه‌اند و در تدوین و ترتیب رساله تنها به تألیف صوری قناعت نکرده‌اند
بلکه در ابواب رساله ، تحقیقی ماهوی نیز انجام داده‌اند . طیب دانشمند و دوست
ارجمند من از من خواستند که بر این رساله مقدمه‌ای تنظیم کنم و من رواندیدم که
تقاضای دوست خود را بدین صورت بپذیرم ، چه رساله موقعیکه منتشر شد خود گویای
مطلبی است که من بیهوده در آن اطاله کلام میتوانم کرد و چنین صلاح دانستم که

مقدمه شامل قدردانی و معرفی طبیبی باشد که با انجام خدمت اجتماعی خویش که با حذاقت و مروت و با وجدان پاک صورت میگیرد ، سالیان درازی است که در احیای تاریخ دانشمندان گذشته ایران میکوشند و اوقات فراغت خود را در مطالعات علمی و تاریخی که گاهی باغوامض و مشککات روبروست مصروف میدارند . شماره های مجله دنیای علم حاصل زحمات چندین ساله طبیب دانشمندان است و اینک بر تدوین این رساله همت گماشته اند و نتیجه کوششهای ایشان بصورت این رساله مختصر تقدیم هموطنان میگردد . روح پر فتوح حکیم نیشابوری در این کار ، فیض بخش و مددکار ایشان بوده است و در سه یا چهار جلسه ای که لذت گفتگو و بحث با ایشان در کار این رساله یا مطالب علمی دیگر دست داد فریفتگی و دلدادگی ایشان را در روشن کردن تاریخ علوم بطور عام و خصوصاً در حق دانشمندان این مرز و بوم دریافتم و ارادت و محبت مرادر حق ایشان استوارتر و پا برجاتر ساخت . امیدوارم که در این خدمتها همواره کامیاب باشند و ایزد متعال پیوسته یار و مددکار ایشان باشد .

تهران جمعه ۶ آبانماه ۱۳۳۸ د کتر محسن هشترودی

سیاسگزاری

از دانشمند عالی‌مقام آقای دکتر محسن هشرودی استاد دانشگاه و رئیس دانشکده علوم که علاوه بر استادی مسلم در علوم ریاضی، در فلسفه و ادبیات نیز مقام شامخی دارند و حَقّاً یکی از مفاخر بزرگ علمی و ملی ما بشمار می‌روند، و پیوسته نگارنده را در مطالعات علمی رهبری و تشویق می‌فرموده‌اند صمیمانه سیاسگزاری مینمایم. اینکه تقریظی بر رساله حاضر نوشته و بخدمت ناچیز بنده ارزشی داده‌اند مایه کمال سر بلندی است.

از دانشمند گرانمایه آقای دکتر غلامحسین مصاحب استاد ریاضیات از دانشگاه کمبریج انگلستان و صاحب تحقیقات و مطالعات عدیده و مؤلف کتاب «جبر و مقابله خیام و تاریخ علوم ریاضی» که در تنظیم این رساله از آن کتاب فایده فراوان برده‌ام، مراتب حقشناسی خود را ابراز میدارم.

مقدمه مؤلف

غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیامی معروف به خیام یکی از بزرگترین دانشمندان ایران در قرن پنجم هجری است که در علوم ریاضی و فیزیک و نجوم سرآمد اقران بوده و از نظر اکتشافاتی که در علم جبر و مقابله مخصوصاً حل معادلات درجه سوم و طبقه‌بندی منظم و بحث و تحقیق در این معادلات داشته است، در تاریخ علوم شخصیت و موقعیتی بسار جمند پیدانموده و از این لحاظ میتوانیم او را حقاً یکی از بزرگترین دانشمندان شرق بشمار آوریم.

متأسفانه اهمیت و ارزش مقام علمی این دانشمند عالیقدر نه تنها بر مردم ایران بلکه بر سایر ملل جهان نیز کم و بیش مجهول و اکتشافات ریاضی او حتی بر ریاضی‌دانان نیز مکتوم مانده است؛ زیرا شکمی نیست که معرفی دانشمندان قدیم یک کشور و تحقیق در کارهای علمی آنان، از نظر حفظ شعائر ملی و اثبات حقی که دانشمندان مزبور در پیشرفت و سیر تکاملی علوم دارند، در وهله اول از وظایف خاصه مقامات فرهنگی و دانشگاهی کشوری است که زادگاه و محل زندگی آن دانشمندان بشمار میرود، و با کمال تأسف باید اقرار کنیم که دانشگاه تهران و وزارت فرهنگ نه تنها درباره خیام بلکه برای شناساندن سایر دانشمندان بزرگ قدیم ایران که قرن‌ها مشعل علم را در سراسر جهان فروزان داشتند تا کنون اقدامات شایسته‌ای که درخور مقام و شخصیت علمی آنان باشد انجام نداده‌اند.

از طرف دیگر تقریباً از سی سال باینطرف کتابهایی در ایران بطبع رسیده و همه جا پراکنده شده است که هدف و منظور آنها بزرگ جلوه دادن دانشمندان مغرب زمین و تحقیق دانشمندان قدیم بوده و هر کس این کتابها را بخواند سخت تحت تأثیر قرار گرفته و چنین تصور میکند که عقاید قدماً و افکار علمی آنها کودکانه و غلط و باطل بوده و علم بمعنای واقعی خود در حقیقت از اروپا سرچشمه گرفته و از

قرن شانزدهم و هفدهم نور خود را به همه جای دنیا پراکنده نموده است. ناچار با چنین طرز تفکر و مخصوصاً با توجه بمشکلات روز افزون زندگی و عدم استقبال عمومی بتحقیقات علمی و اینکه در محیط ما کوچکترین تشویقی ازارباب فضل و علم بعمل نمیآید، چه کسی حاضر خواهد شد که یک عمر رنج مطالعه بر خود هموار کرده، در مقام بررسی و تحقیق در معتقدات دانشمندان قدیم برآید، و اصول و مبانی علوم را با آنچه که امروزه در کتابها مندرج است مورد مقایسه و سنجش قرار داده و ثابت کند که پایه های علوم کنونی بردوش دانشمندان قدیم بوده و آنها طی قرنهای حمت و مرامت و با استفاده از هوش و نبوغ سرشار خود موفق شدند طرحی چنان متین و محکم برای دانشها بریزند که مرور زمان بهیچوجه نتوانسته است خدشه در ارکان آنها بیندازد و بطور مسلم دانشمندان قدیم ایران در ایجاد این طرح نقشی مؤثرتر و مهمتر از دانشمندان سایر ملل جهان قدیم داشته اند. فسی المثل کدام ریاضی دان ایرانی است که بداند اساس علم جبر و مقابله که امروز در دبیرستانهای دنیا تدریس میشود همان است که محمد بن موسی خوارزمی در قرن سوم هجری طرح ریزی کرده و گرچه دانشمند مزبور وارث مقام علمی ریاضی دانان ازمنه پیشین است که در کشورهای مختلف دنیای قدیم وجود داشته اند، و مخصوصاً از جبر دیوفانتوس استفاده نموده است، معیناً قضایای علمی او از حیث تنظیم و طبقه بندی و استحکام اصول و مبانی بهیچوجه قابل مقایسه با مطالبی که سایر دانشمندان قدیم راجع باین علم بطور ناقص و مبهم و مجمل در کتابهای خود شرح داده اند نیست. البته منکر نیستیم که هیچ فرد و هیچ ملتی به تنهایی واضح یک علم نبوده و نمیتواند باشد بلکه دانشمندان عموماً مطالب علمی را از دانشمندانی که بر آنها مقدم هستند اخذ میکنند؛ ولی همانطور که مثلاً نابعه ای همچون پاستور با استفاده از علومی که دانشمندان ازمنه گذشته برای او بمیراث گذاشته و حتی موجودات ذره بینی را نیز قبل از او کشف کرده و کلمه میکروب را هم نامگذاری نموده بودند معیناً واضح علم میکروب شناسی بشمار میرود، بهمین طریق محمد بن موسی خوارزمی را نیز باید بنیان گذار علم جبر و مقابله ای دانست که امروز در همه جای دنیا بطور کلاسیک تدریس میشود؛

ناگفته نماند که هنوز صدسال از مرگ پاستور نمیگذرد ، درحالی که میکروب شناسان بزرگ در این یکقرن بتدریج ثابت کرده اند که آن دانشمند نابغه در موارد عدیده بواسطه عدم توجه به بعضی حقایق مرتکب اشتباهاتی شده است ، ولی این امر که برای کلیه دانشمندان دنیا عمومیت دارد زره ای از اهمیت مقام علمی پاستور نمی‌کاهد و برای همیشه کشور فرانسه بخود فخر میکند که دانشمندی همچون پاستور بدنیای عرضه کرده است ، و همواره در تجلیل او میکوشد و مجسمه ها از او برپا میسازد و هنوز هم مؤسساتی را با اسم پاستور نامگذاری میکند ، زیرا تجلیل از مقام علمی دانشمندان اعصار گذشته یا حال علامت زنده بودن يك ملت و نشانه اهمیت است که يك کشور متمدن برای علم و دانش قائل است .

ذکر این مطلب برای این بود که : اگر محمد بن موسی خوارزمی یا خیام و یاد دیگر دانشمندان قدیم ایران توجه به بعضی حقایق که امروز بر جهانیان معلوم است نداشته اند نباید بآنها خرده گرفت و آنانرا بدیده حقارت نگریست بخصوص که فاصله زمانی برای مقایسه بین دانشمندان ادوار مختلفه تاریخ اهمیت فراوانی دارد ؛ بنابر این دانشمندان هزارسال قبل را از نظر میزان معلومات با دانشمندان امروز مقایسه کردن و آنانرا بواسطه کمتر بودن اطلاعاتشان تحقیر نمودن از دیده انصاف و عدالت بدور است . برعکس اگر معلوم شود که دانشمندان قدیم پایه های علم را بر اساسی چنان محکم استوار نموده اند که گذشت زمان طی قرنها نتوانسته است رخنه در ارکان آن بیندازد باید برهوش و نبوغ چنان دانشمندانی آفرین گفت ، و آنانرا همواره بدیده احترام نگریست ، زیرا بقول جرج سارتن استاد معروف تاریخ علم :

« هیچ چیز دشوار تر از آغاز نهادن و بی افکندن نیست ، و هیچ کار اساسی تر از بنیاد نیکو نهادن نمیتوان یافت . زیرا که تمام ساختمان بر روی پی های آن استوار است » .

ثانیاً برمانیز همانطور که در کلیه کشورهای زنده دنیا معمول میباشد واجب است که در معرفی شخصیت علمی دانشمندان قدیم خود بکوشیم ، چه از اینراه دو

نتیجه بزرگ بما عاید خواهد شد: یکی اینکه حق مسلم دانشمندان قدیم ایران نسبت بجهان علم و پیشرفت تمدن ادا گردیده؛ و دوم اینکه تکانی در دانشجویان جوان که رجال آئینه کشور و چشم و چراغ این مملکت بشمار میروند پیدا خواهد شد زیرا مطالعه در آثار علمی گذشتگان هیجانی در ذهن ایجاد کرده و حس ابتکار و ابداع را بر انگیزخته و راه را برای کشف مطالب تازه باز میکند و محققاً بسیاری از اکتشافات عامی از همین راه پیدا شده است. برای تأیید مطلب به گفته جرج سارتن استناد میکنم که در کتاب «سرگذشت علم» (ترجمه آقای احمد بیرشک) چنین مینویسد:

«هنوز مطالعه آثار ارسطو و دیوفانتوس^(۱) و هویکنس^(۲) و نیوتن بسیار نافع است و آن آثار مشحون از خزائن علمی پنهانی است. اشتباه بزرگی است اگر فکر کنیم که در آثار مذکور جز آنچه تا بحال درک و بیان شده است مطلب دیگری نیست. البته اگر چنین بود مطالعه آنها فایده ای نداشت و فقط بیان فهرستی از حقایق و عقاید گذشته کفایت میکرد، ولی چنین نیست و من بآنان که منکرند توصیه میکنم بدقت در این امر غور کنند تا ببینند که برای فکر هیچ چیز مهیج تر از دست یافتن بمنابع و ماخذ نیست».

و در جای دیگر مینویسد:

«تاریخ علوم از حیث زمان ارزش بسیار دارد، بخصوص اگر بوسیله کسی نوشته شود که هم با جنبه های علمی جدید و هم با اصول علمی قدیم آشنائی کامل داشته باشد. توالی کشفیات سابق همان توالی را به عالم محقق و متبّع تلقین میکند و وی را بکشف های جدید ناآل میسازد. میتوان روش های قدیمی و متر و کترا باز بردستی تغییر داد و از آنها نتایج عملی گرفت. این مطلب اگر خوب فهمیده شود تاریخ علوم بیک روش تحقیق تبدیل میشود».

از آنچه ذکر شد اهمیت بررسی و تحقیق در کارهای علمی خیام، مخصوصاً

جبر و مقابله که اساس ریاضیات بشمار میرود واضح و آشکار میگردد، بویژه با توجه باینکه ریاضیات پایه و محور کلیه علوم میباشد، و این علوم نیز مبنای تمام ترقیات بشر و پیشرفت تمدن و انقلابات صنعتی و بالنتیجه باعث تفوق مللی که تمدنشان عالتر است بر ملل دیگر میباشد. جای بسی شگفتی و در عین حال تأسف و تأثر است که تا کنون هیچ مقامی در صد احیای این آثار علمی که متضمن آنهمه نتایج درخشان میباشد بر نیامده، و در عوض خیام را با تبلیغات عجیبی در دنیا بنام یک شاعر می پرست و فیلسوف بیدین معرفی کرده اند. رباعیات مجعولی را که ابداً بخيام مربوط نیست بآن دانشمند بزرگ نسبت دادن و آنها را بتمام زبانهای زنده دنیا ترجمه کردن و در کتابهایی با کاغذ و جلد اعلی بچاپ رساندن و تصاویر رنگی بسیار زیبا که صحنه‌هایی از می و معشوق و مستی و بیخبری در نظر مجسم میسازد بهر صفحه از کتاب افزودن، و از راه نشر آن روح لاابالگیری و سستی و پشت پا زدن بدنی و شرابخواری و عیاشی در مردم دمیدن معلوم نیست از کجا سر چشمه گرفته و چه منظورهائی از آن داشته‌اند.

متن اصلی رساله جبر و مقابله خیام بزبان عربی در کتابخانه‌های معتبر دنیا موجود است. هر کس این رساله را مطالعه کند بخوبی پی خواهد برد که خیام مردی دیندار و موحد و معتقد به مبداء و معاد بوده، زیرا با اینکه رساله او صرفاً جنبه علمی دارد معهدنا چندین بار ضمن بحث از قضایای ریاضی، از خدا یاد میکنند و در جاهائی با خلوص نیت از او استمداد میطلبند. کسانی اگر میخواهند صحت این مدعا را دریا بند به کتاب «جبر و مقاله خیام» تألیف آقای دکتر غلامحسین مصاحب که در قسمتی از آن ترجمه جبر و مقابله خیام بنظر میرسد مراجعه فرمایند.

در صفحه ۲۲۳ مقدمه فصل چهارم چنین مینویسد:

«حمد خدا راست و انجام نیک پرهیز کاران را و جو رستم آنانرا که از حدود خود تجاوز کنند و درود پیغمبران را مخصوصاً محمد ص و جمیع خاندان پاک او... یکی از رشته‌های علوم که الخ».

و در صفحه ۲۲۵:

«..... واینکار را با تعدید اصناف مذکوره از مقدمات جبری شروع نمودم زیرا ریاضیات بتقدیم سزاوار تر است؛ و درزاینکار از توفیق الهی مدد جستیم و امیدوارم مرا موفق فرماید، تا تحقیق نتایج بحث های علمی خود و پیشینیانم را که از دیگر مطالب مهمتر است بآن ملحق سازم، و از خداوند مسئلت میکنم که مرا از جمیع خطایا محفوظ دارد، چو او دعوت بندگان را اجابت میکند. باو توکل میکنیم و باز گشت ما بسوی اوست.»

و در همان صفحه :

«جزء اول -۱- بیاری خداوند و توفیق کامل او چنین گویم. فن جبر و مقابله فنی است علمی.... الخ.»

و در صفحه ۲۳۰ :

«..... عنقریب يك يك این اصناف ۲۵ گانه را با برهان حل آنها خواهیم آورد و در این کار از خداوند کمک میجوئیم، چو هر کس از روی اخلاص باو توکل کند او را هدایت نموده از دیگران بی نیاز میکند.»

و در صفحه ۲۶۴ :

«چون کلام باینجا رسید رساله را بحمد خدا بتهالی و درود بر جمیع پیغمبرانش ختم میکنم.»

خیام پس از ختم رساله مطالبی نیز راجع به کارهای ریاضی ابوالجود مینویسد که در حقیقت دنباله رساله محسوب میشود و در آنجا نیز در صفحه ۲۶۵ مینویسد:

«.... کسی که مطالب این رساله را در یاد هر مسئله خاصی را که بخواهد میتواند حل کند؛ خداوند است که ما را بدریافت حقیقت توفیق میدهد و در هر حال اعتماد ما بر اوست.»

و در جای دیگر مینویسد :

« خداوند است که میتواند گره از این مشکلات بگشاید بمنه و کرمه »
و بالاخره در آخر رساله مینویسد : « حمد تنها خداوند را سزااست و لطف او همه را کافی است و سلام او بر بندگان بر گزیده اش باد.»

اکنون انصاف دهید آيا ساز و اراست بچنين دانشمندی كه حتى در يك رساله رياضي همه جا تكيه كلامش حمد خدا و در و دبه پيغمبر است اين رباعي و نظاير آن را نسبت دادن :

ابريق می مراشكستی ربّی برهن درعیش را ببستی ربّی

من می خورم و تو میكنی بد مستی خاكم بدهم مگر تو مستی ربی

خوشبختانه استاد محمد مشكوة كه از طرف انجمن آثار ملی بنشر قسمتی از شرح حالات حكيم عمر خيام خواهند پرداخت مداركي در دست دارند كه كه نشان ميدهد خيام نه تنها بيدین و خدا نشناس نبوده بلكه حتی در زمرة اوليا الله نیز بوده است . و نیز استاد جلال الدین همائی كه از طرف انجمن مزبور بنشر قدیمی ترین نسخه رباعیات خيام اقدام خواهند نمود با تحقیقات حكیمانه خود حق مطلب را درباره آن دانشمند گرانمایه ادا خواهند كرد .

در خاتمه لازم میدانم . از انجمن محترم آثار ملی كه صادقانه در راه احیای نام بزرگان قدیم ایران و نشر آثار علمی آنان میکوشد صمیمانه سپاسگذاری نمایم . امید است مؤسسات علمی و فرهنگی ما نیز اقدامات گرانبهای انجمن آثار ملی را سرمشق و نمونه قرار داده و مخصوصاً دانشگاه تهران كه مشعلدار علم در کشور است باین امر حیاتی و بزرگ توجه خاص مبذول دارد .



رساله حاضر كه مورد مطالعه خوانندگان محترم قرار خواهد گرفت شامل

سه بخش میباشد :

بخش ۱ - علم جبر و مقابله متعلق به دوره دانشمندان اسلامی قبل و بعد از خيام ؛

بخش ۲ - اكتشافات خيام در جبر و مقابله ؛

بخش ۳ - استفاده دانشمندان مغرب زمین از جبر و مقابله خيام

چون هدف اصلی نگارنده در تنظیم این رساله اینست كه بدرستی معلوم نماید ، علم جبر و مقابله ای كه امروز در در مدارس دنیا تدریس میشود تا چه اندازه مدیون تحقیقات و كوششهای علمی دانشمندان قدیم ایران است و آنان

چه حق بزرگی نسبت به پیشرفت علم و تمدن جهان داشته اند ، لذا روشی را که در تألیف این رساله بکار میبرد اینست که اصولاً مطالب مندرج در کتابهای جدید را با متن اصلی کتب ریاضی قدیم ایران تطبیق و مقایسه نماید. علت اتخاذ این تصمیم اینست که در کتب علمی جدید نه فقط هیچگونه انعکاسی از اکتشافات دانشمندان قدیم ایران دیده نمیشود ، بلکه مطالب کتابهای جدید طوری تنظیم شده که دانش آموزان و دانش جویان و حتی بسیاری از دبیران علوم ریاضی که منحصراً با کتب مزبور سروکار دارند تصور میکنند هر چه در آنها نوشته شده از اکتشافات اروپائیان است و دانشمندان قدیم هیچگونه سهمی در این مطالب علمی ندارند ، ولی ضمن مطالعه این رساله بر قاطبه دانش پژوهان روشن و آشکار خواهد شد که چه بیعدالتی در حق ایرانیان شده و چگونه اروپائیان يك سلسله مطالب علمی را که نتیجه عمرها کوشش و تحقیق و مطالعه شبانه روزی است از ایرانیان گرفته و با جزئی تحریف و مختصر تغییری بنام خود معروف ساخته و در دنیا پراکنده نموده اند و استادان و دبیران ریاضی قرن اخیر ایران نیز چون از علوم قدیمه بی اطلاع بوده اند کتب ریاضی اروپا را ترجمه و تدریس کرده و ابداً متوجه این تغییر لباس نشدند .

ناگفته نماند که عامل بزرگ دیگری نیز برای اغفال معلمین جدید وجود داشته است که آنان را نسبت بمطالعه و بحث و تحقیق درباره معلومات دانشمندان قدیم ایران سست نموده ، و آن تبلیغات عجیبی است که از طرف کسانی در اطراف دانشمندان دوره رنسانس (قرن ۱۶ و ۱۷ میلادی) مخصوصاً دکارت در ایران بعمل آمده و هر کس کتابهایی که در این مورد بچاپ رسیده مطالعه کند بر او چنین وانمود میشود که معلومات قدما تماماً عاقل و باطل بوده و اساس و بنیان درستی نداشته است ، و بموازات این نشریه ها مقالات و رسالات متعدد دیگری نیز از نیم قرن اخیر باینطرف توسط نویسندگان زبردست همه جا پراکنده شده که در تمام آنها بطلان عقاید قدما را گاهی با عبارات تمسخر آمیز و زمانی با روایات بی اصل و اساس در نظرها مجسم نموده و در عین حال استحکام اصول و

مبانی علمی اروپائیان و مقام شامخ و نبوغ دانشمندان آن قاره را در مغزها رسوخ داده و از اینراه ایجاد حس تحقیر در شخصیت هر فرد ایرانی و تبعیت کورکورانه و بلااراده از اروپائیان را در ایران بوجود آورده اند .

این ناچیز افتخار دارد که همین رساله مختصر بمنزله باطل السحری این تبلیغات زهر آگین را در هم شکسته و حقایق امور را بر عامه مردم بویژه بردانش پژوهان آشکار خواهد ساخت. بر استادان و دبیران علوم است که مطالب مندرج در این رساله را همه جا نشر دهند و بدانند که وارث مقام علمی فضلا و دانشمندی هستند که هنوز هم اروپائیان از خرمن علم و معرفت آنان خوشه چینی میکنند .



بخش یکم

جبر و مقابله در دوره دانشمندان اسلامی

طبق تصدیق عموم مورخین دنیا سهم ایران و هند در پیشرفت علوم ریاضی مخصوصاً جبر و مقابله بیش از سایر ملل متمدنه قدیم است ولی ما چون از آثار تمدن ایران در دوره هخامنشی و حتی در زمان ساسانیان چیز مهمی در دست نداریم، لذا از ذکر مطالب مربوط بآن زمانها صرف نظر کرده و فقط بشرح تحقیقات دانشمندان دوره اسلامی که مدارک مثبتی از آنها موجود است میپردازیم. از بین معروفترین ریاضی دانان دوره مزبور نیز سر تن انتخاب کرده و اصول مطالب مندرج در کتب جبر و مقابله آنها را با مطالبی که در کتابهای جبر امروز نوشته شده است مقایسه میکنیم. این سه تن عبارتند از:

۱- محمد بن موسی خوارزمی نخستین ریاضی دان معروف و از منجمین مشهور دوره اسلامی بوده که وفاتش بین ۸۳۵ و ۸۴۵ مسیحی و کتاب جبر و مقابله او قدیمیترین کتابی است که در دوره مزبور تألیف شده است. بویاه در تاریخ ریاضیات خود مینویسد:

«این جبر که در نظر يك دانشمند بغداد، در قرن نهم، مقدماتی بوده هفتصد سال بعد مرجع و مدرک اروپائیان شده و تا زمان ویت (Viète) (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳) مبنای مطالعات علمی آنان بوده است.»

۲- حکیم عمر خیام (۱۰۴۴ - ۱۱۲۳ مسیحی) در رساله جبر و مقابله خود بحل معادلات درجه اول و دوم و سوم پرداخته و مخصوصاً در تنظیم معادلات درجه سوم و حل انواع مختلفه آن که از اکتشافات مخصوص اوست بحث کرده است.

۳- غیاث الدین جمشید کاشانی - که از ریاضیون و منجمین معروف قرن پانزدهم

میلادی بوده محتملا در ۱۴۳۶ مسیحی وفات یافته است
مطالب مربوط باین بخش در سه گفتار مورد بحث قرار خواهد گرفت .

گفتار یکم

قاعده حل مسائل از راه جبر و مقابله

در این گفتار میخواهیم معلوم نمائیم که مسائل جبر و مقابله را امروز
بچه طریق حل کرده و ریاضی دانان قدیم ایران چگونه حل میکردند .
برای انجام این مقایسه باید مطالب مندرج در کتابهای جدید را با مطالب
کتابهای قدیم تطبیق دهیم .

یکی از جدیدترین کتب جبر که بتازگی چاپ شده و در دبیرستان هاندریس
میشود دو جلد جبر برای سال دوم و سوم دبیرستانها تألیف آقایان :
قدرت الله پورفتحی - جلیل الله قراکزلو - هادی فرهی - صمصام الدین علامه
نجم الدین طاهری و مه پاره ممقانی میباشد .

و نیز کتاب جبر و مقاله برای سال چهارم طبیعی دبیرستانها تألیف آقایان :
موسی آذرنوش، احمد بیرشک و ده مولف دیگر میباشد .

علاوه بر کتابهای فوق ، کتاب جبر و مقابله تألیف مرحوم وحید که ۳۰ سال
قبل چاپ شده است در سه جلد و کتابهای جبر و مقابله تألیف «میرزا رضاخان مهندس
الملک معلم و ممتحن کل ریاضیات عالی مدرسه مبارکه» «دارالفنون» که ۴۰ سال
پیش چاپ شده ، و بالاخره کتاب «حکمت ریاضی در اصول علم حساب و جبر و مقابله»
از تألیفات مرحوم ناظم العلوم که ۵۰ سال پیش بطبع رسیده و همه اینها برای دوره
اول و دوم دبیرستانها است .

نگارنده کلیه این کتابها را برای اینکه مورد استناد قرار گیرند در اختیار
دارم . مقایسه مطالب کتابهای مزبور بایکدیگر نشان میدهد که در ظرف ۵۰ سال
اخیر هیچگونه تغییری و لوجژی در کتب جبر و مقابله ای که در دبیرستانها تدریس
میشود پیدا نشده و اگر تفاوتی هست در پیش و پس کردن مباحث و مختصر یا مفصل

شرح دادن مطالب و تغییر در واژه‌ها و اختلاف در امثله و شواهد می‌باشد .
حال مطالب مندرج در این کتابهارا با مباحث مربوطه که در کتب جبر و مقابله
قدیم ایران وجود دارد مقایسه می‌کنیم :
قاعده‌ای که در کتابهای جدید برای حل مسائل فکری از راه جبر و مقابله معین
گردیده بقرار زیر است :

حل هر مسئله مرکب است از دو عمل مختلف : در عمل اول باید مسئله را
بمعادله گذارد یعنی بواسطه معادلات روابطی را که ما بین معلومات و مجهولات مسئله
موجود است بیان نمود ، و پس از آن عمل ثانی را بجای آورد یعنی معادله را حل نمود
۱- تبدیل مسئله به معادله - برای انجام عمل اول یعنی تحویل مسئله بمعادله
در کتابهای امروز چنین مینویسند :

«مجهول مسئله را بحرفی مانند x نموده و فرض میکنند که مقدار مجهول
 x معلوم باشد و سعی میکنند که از روی فرض و شرایط مسئله اعمالی را که بجهت صحت
مقدار x لازم است بنمایند ، تساوی که بدین طریق بدست می‌آید بمعادله مسئله است .»
در کتاب «مفتاح الحساب» تألیف غیاث الدین جمشید تاشانی نیز دستوری
برای حل مسائل از راه جبر و مقابله در فصل اول از مقاله پنجم ذکر شده است که
درست بهمین مضمون میباشد و آن اینست :

«فان اسئل مسئله فرض المجهول شیئا ونعمل علیه ما فهم عن کلام السائل
ونسوقه بشروط المسئلة علی ما یقتضی الحساب الی ان نعرف مقداراً منها باعتبارین
یقال لها المتعادلان و اذا انتهى العمل الی التعادل یقال له المسئلة الجبریه .»
یعنی «اگر مسئله‌ای مطرح شود مجهول را شیئی^(۱) فرض کرده و با آنچه که

(۱) واضح کلمه «جبر و مقابله» محمد بن موسی خوارزمی است ، و پس از آنکه کتاب جبر او
از راه اسپانیا با اروپا راه یافت کلمه جبر را که خوارزمی الجبر نامیده بود تمام ملل اروپا بهمان
اسم نامیده Algebra گفتند ، و مقدار مجهول را که خوارزمی «شیئی» نامیده بود عیناً بزبان اسپانیولی
آورده و آنرا $Xéi$ گفتند (x بزبان اسپانیولی ش تلفظ میشود) . بعدها برای سهولت و کوتاهی
کلام فقط حرف اول این کلمه را گرفته مجهول را بحرف x نشان دادند ؛ پس اینکه می‌بینیم
امروزه می‌گویند (مجهول را x فرض می‌کنیم) عیناً همانست که خوارزمی می‌گفته است (مجهول را
شیئی فرض می‌کنیم) و شیئی بمعنی «چیز» است .

از مسئله استنباط میشود عمل نموده و شرایط مسئله را چنانکه در حساب معمول است اجرا میکنیم تا مقدار آن از روی دو عبارت متعادل بایکدیگر بدست آید و همینکه معادله تشکیل شد آنرا مسئله جبری نامند .

توضیح - در جلد دوم جبر تألیف آقایان مصمصام الدین علامه و غیره که قبلاً ذکر کردیم راجع باین موضوع چنین مینویسد :

« مسئله را حل شده فرض نموده و همچنانکه در حساب صحت جواب مسئله را امتحان میکنیم در اینجا نیز بهمین ترتیب عمل مینمائیم تا بین معلومات و مجهولات مسئله روابطی بنام معادله بدست آید و باحل این معادله جوابهای مسئله بسهولت بدست میآید . »

در مطلب فوق جمله « همچنانکه در حساب صحت جواب مسئله را امتحان میکنیم در اینجا نیز بهمین ترتیب عمل مینمائیم » مطابق است با جمله « و نسوقه بشرط المسئله علی ما یقتضی الحساب » که در کتاب غیاث الدین جمشید دیدیم : و جمله : « تا بین معلومات و مجهولات مسئله روابطی بنام معادله بدست آید » مطابق است با جمله « الی ان نعرف مقداراً منها باعتبارین یقال لها المتعادلان » . و بهر حال آنچه از کتابهای قدیم و جدید مفهوم میشود کاملاً یکی است ، و این میرساند که قاعده مزبور را متماً حزین عیناً از قدما گرفته اند .

۴- حل معادله - در کتابهای جبر جدید برای حل هر معادله یعنی پیدا

کردن جواب یا جوابهای معادله نکاتی تذکر داده شده است که عبارتند از :

۱- بدو طرف معادله میتوان دو مقدار مساوی اضافه و یا از آن کم کرد؛

۲- بنا بر خاصیت ۱ میتوان دو جمله مساوی را از دو طرف معادله حذف

کرد؛

۳- میتوانیم جملات طرفین معادله را از طرفی بطرف دیگر ببریم بشرطی

که علامت آنها را تغییر دهیم؛

۴- میتوان دو طرف معادله را در دو عدد مساوی (مخالف صفر) ضرب یا

بر آن تقسیم کرد .

این نکات را تماماً ریاضی دانان قدیم ایران نیز برای حل هر معادله بکار میبردند مثلاً :

در مورد بند ۳ یعنی « میتوانیم جملات طرفین معادله را از طرفی بطرف دیگر ببریم بشرطی که علامت آنها را تغییر دهیم » ، مهمترین عمل در جبر و مقابله قدیم انجام همین امر بوده است ؛ زیرا در مواردیکه در یکطرف یا هر دو طرف معادله علامت منها بر جمله ای مقدم بوده ، جمله مزبور را بطرف دیگر برده و علامت (+) بر آن مقدم میداشتند ؛ مثلاً در معادله :

$$2x - 3 = 17$$

عدد ۳ را که باید از $2x$ کم شود حذف کرده و برای اینکه وضع تعادل در معادله بر هم نخورد آنرا بطرف دیگر می افزودند ، و با این ترتیب جمله ای را با تغییر علامت بطرف دیگر نقل میکردند ، و معادله بالا باینصورت درمیآید :

$$2x = 17 + 3$$

یا $2x = 20$

و چون با این عمل جمله $2x$ به تنهایی در یکطرف معادله باقی مانده و نقص آن که کم شدن عدد ۳ از آن بود برطرف شده و بنا بر این بصورت کامل $2x$ (بدون کم شدن چیزی از آن) درمیآید این عمل را جبر میگفتند ، زیرا کلمه جبر در اصطلاح ریاضی دانان قدیم بمعنای تمام و کامل بوده است .

در کتاب « مفتاح الحساب » راجع باین موضوع چنین مینویسد :

« وان كان في احد المتعادلين اوفى كليهما استثناء نظر الحسنة برأسه حتى يبقى المستثنى منه وحده اي يصير تاماً ثم تزيد مثل المستثنى المطروح على الاخر و تعادل بين الباقي والمجموع فهو معنى الجبر مثلاً مال الاشيين يعادل خمسة عشر وبعد الجبر يصير مال معادلاً لخمسة عشر وشيين » .

ترجمه - و اگر در یکطرف یا هر دو طرف معادله مقداری کم کردنی موجود باشد آنرا حذف میکنیم تا مفروق تنها بماند یعنی تبدیل بمقدار کاملی (بدون اینکه چیزی از آن کم شود - مترجم) گردد سپس بطرف دیگر معادله

همان مقداری را که از طرف اول حذف کرده ایم اضافه مینمائیم و معادله را مجدداً بین دو طرف در حالت فعلی برقرار میکنیم و این عمل را جبر گویند مثلاً :

مجذوری منهای دوشی معادل است با پانزده ، که بعد از جبر چنین میشود :

مجذوری معادل است با پانزده و دوشی .

و این عبارات با علائم کنونی چنین نوشته میشود :

$$x^2 - 2x = 15$$

$$x^2 = 15 + 2x \quad \text{و پس از عمل جبر :}$$

و در مورد بند ۲ یعنی : « میتوان دو جمله مساوی را از دو طرف معادله حذف کرد » عین این عمل را قدما نیز انجام داده و آنرا مقابله مینامیدند و عبارت مفتاح الحساب در این باره چنین است :

« و اذا كان جنس واحد موجود في كل من المتعادلين نسقط المشترك من كل منهما و نعدل بين الباقيين مثلاً شیء و عشرة يعادل اربعين نسقط العشرة من كل واحد من المتعادلين يبقى شیء معادل لثلاثين وهذا معنى المقابلة » .

ترجمه - « و اگر در هر يك از طرفین معادله جمله مشابهی موجود باشد مقدار مشترك آنها را حذف کرده و بین باقی اجزاء معادله را برقرار می سازیم ، مثلاً دوشی باضافه ده معادل است باچهل . عدد ده را از هر طرف حذف میکنیم باقی میماند دوشی معادل است با سی و معنی مقابله همین است » .

مثال بالا با علامات امروزه چنین میشود :

$$x^2 + 10 = 40$$

$$2x = 30 \quad \text{و پس از مقابله}$$

و در بعضی از کتب ریاضی قدیم ، مقابله را با « حذف مقادیر متشابهه » مرادف گرفته اند .

تبصره - چنانکه قبلاً گفتیم بند ۲ خاصیتی است از بند ۱ .

و در مورد بند ۴ یعنی :

« میتوان دو طرف معادله را در دو عدد مساوی ضرب یا بر آن تقسیم کرد » .

ریاضی دانان قدیم ایران نیز از این خاصیت برای حل معادلات استفاده میکردند؛ مثلاً در معادلات درجه اول اگر ضریب x بزرگتر از واحد بود تمام جمل را بر آن ضریب تقسیم میکردند که بجای چند x یک x موجود باشد؛ و در معادلات درجه دوم اگر ضریب x^2 بزرگتر از واحد بود همین عمل را عیناً برای ضریب مزبور انجام میدادند و اینرا «عمل رد» مینامیدند.

و هرگاه ضریب x در معادلات درجه اول و ضریب x^2 در معادلات درجه دوم کوچکتر از واحد بود تمام جمل معادله را بر کسر مزبور تقسیم مینمودند تا ضریب x یا x^2 بمقدار واحد تبدیل شود و اینرا «عمل تکمیل» میگفتند.

برای تایید مطلب عین عبارت کتاب مفتاح الحساب را راجع باین موضوع با ترجمه آن ذیلاً نقل میکنیم:

« و اذا كان المال في احد المتعادلين اكثر من واحد نرده الى الواحد وان كان اقل نكمله و ناخذ ساير الاجناس التي معه فيهما على تلك النسبة بان نقسم عدد كل جنس على عدد الاموال ليخرج من المال مال واحد ولسايره على تلك النسبة مثلا خمسة اموال و عشرة اشياء يعادل ثلثين قسمنا كلا من الخمسة و العشرة و الثلثين على الخمسة خرج مال واحد و اثنان اشياء معادل لسته سمي هذا بعمل الرد و ان كان نصف مال و خمسة اشياء يعادل سبعة قسمنا النصف و الخمسة و السبعة على النصف خرج مال واحد و عشرة اشياء معادل لاربعة عشر و هذا يسمى بعمل التكميل».

ترجمه - اگر در یکی از دو طرف معادله مقدار مال (یعنی ضریب x^2 - مترجم) زیادتر از واحد باشد آنرا بواحد تبدیل کرده و اگر کمتر باشد آنرا تکمیل مینمائیم و سایر جمل معادله را نیز بهمین نسبت تغییر میدهیم؛ باین طریق که عدد هر یک از اجناس را (یعنی هر جمله را - مترجم) بر عدد اموال (ضریب x^2) تقسیم میکنیم تا فقط یک مال بدست آید و نسبت بسایر جمل نیز همین عمل را انجام میدهیم. مثلاً اگر پنج مال و ده شیء معادل با سی باشد اعداد ۱۰ و ۳۰ را بر ۵ تقسیم میکنیم تا یک مال و ۲ شیء معادل با ۶ حاصل گردد و این را عمل رد نامند؛ و اگر نصف مال و پنج شیء معادل با ۷ باشد نصف و پنج و هفت را بر نصف تقسیم

میکنیم تا يك مال و ۱۰ شی معادل با ۱۴ بدست آید و اینرا عمل تکمیل گویند».

توضیح - در مورد مثال اول باعلامات کنونی چنین باید بنویسیم ،

$$0x^2 + 10x = 30$$

$$x^2 + 2x = 6 \quad \text{که پس از عمل رد}$$

$$\frac{x^2}{2} + 0x = 7 \quad \text{و در مورد مثال دوم}$$

$$x^2 + 10x = 14 \quad \text{که پس از عمل تکمیل}$$

از مطالب بالا کاملاً معلوم شد که برای حل مسائل جبری (تبدیل مسئله بمعادله و حل معادلات) ریاضی دانان قدیم ایران قواعدی بکار میبردند که کوچکترین تفاوتی با آنچه امروزه ریاضی دانان بکار میبرند ندارد . برای تأیید بحل يك مسئله جبر از کتاب سال سوم دبیرستانها تألیف دبیران علوم ریاضی که امروزه در تمام دبیرستانها تدریس میشود پرداخته و آنرا باحل مسئله ای نظیر آن که در کتاب مفتاح الحساب مندرج است مقایسه میکنیم و خوانندگان عزیز بخوبی در خواهند یافت که مسائلی از این قبیل را قداما بهمان سرعت و سهولتی حل میکردند که امروزه حل میکنند .

مسئله (از کتاب جدید) - عددی بدست آورید که چون به ۲ برابر آن سه واحد اضافه شود مساوی با ۱۹ گردد .

حل - مسئله را حل شده انگاشته و جواب را x فرض میکنیم پس ۲ برابر آن میشود $2x$ و بنا بفرض مسئله ، معادله زیر بدست میآید :

$$2x + 3 = 19$$

جواب این معادله جواب مسئله است :

$$2x = 19 - 3$$

$$2x + 16$$

$$x = \frac{16}{2} = 8$$

مسئله (از کتاب مفتاح الحساب) (۱) - کدام عدد است که اگر به دو برابر آن يك واحد افزوده و مجموع را در ۳ ضرب نموده و بر حاصل ۲ واحد بیفزائیم سپس آنچه بدست میآید در ۴ ضرب کرده و بر حاصل ۳ واحد اضافه کنیم نتیجه ۹۵ شود .

حل - عدد مطلوب را شی (۲) فرض میکنیم ؛ در اینصورت اگر به ۲ برابرش يك واحد بیفزائیم خواهیم داشت دوشی و يك واحد (۳) حال اگر آنرا در ۳ ضرب کنیم حاصل مساوی شش شی و سه واحد (۴) خواهد شد ؛ و اگر بر آن ۲ واحد اضافه نمائیم حاصل برابر شش شی و پنج واحد (۵) خواهد بود . اکنون آنرا در چهار ضرب میکنیم چنین نتیجه میشود : ۲۴ شی و ۲۰ واحد (۶) و بالاخره اگر سه واحد بر آن بیفزائیم ۲۴ شی و ۲۳ واحد (۷) بدست خواهد آمد که بنا بر فرض مسئله معادل با ۹۵ میباشد (۸) . عدد مشترك را که ۲۳ باشد از دو طرف معادله حذف میکنیم باقی میماند ۲۴ شی معادل است با ۷۲ (۹) سپس این عدد را بر ۲۴ که عدد اشیاء است (یعنی ضریب x - مترجم) تقسیم مینمائیم عدد ۳ بدست میآید (۱۰) که مقدار مجهول و جواب مسئله است .

اگر شرح این عملیات را بخواهیم باعلامات کنونی نشان دهیم مرتباً چنین خواهیم داشت .

$$\{ [3(2x + 1) + 2] \times 4 \} + 3 = 95$$

(۱) ترجمه آن در اینجا آورده میشود و چنانکه می بینیم این مسئله پیچیده تر از مسئله قبلی است .

$$24x + 23 \quad (7) \quad \text{یعنی } x \quad (2)$$

$$24x + 23 = 95 \quad (8) \quad 2x + 1 \quad (3)$$

$$24x = 72 \quad (9) \quad 6x + 3 \quad (4)$$

$$x = \frac{72}{24} = 3 \quad (10) \quad 6x + 5 \quad (5)$$

$$24x + 20 \quad (6)$$

$$[(6x + 3 + 2) \times 4] + 3 = 90$$

$$24x + 20 + 3 = 90$$

$$24x + 23 + 90$$

$$24x = 72$$

$$x = \frac{72}{24} = 3$$

در فرمولهای فوق چنانکه ملاحظه میشود علائم پرانتز () و کروشه [] و آگولاد { بکار رفته است . این علامات که از مخترعات دانشمندان اروپاست البته دارای فوایدی میباشد ؛ از جمله اینکه در هر رابطه‌ای وجود داشته باشند با یک نظر میتوان وضعیت محاسباتی که در رابطه مزبور انجام خواهد گرفت تشخیص داد ؛ و دیگر اینکه تا اندازه ای باعث سرعت و سهولت عملیات جبری میباشد ؛ ولی باید دانست که در برابر این محسنات معایبی هم دارند : یکی اینکه دانش آموزان را از تمرین در محاسبات ذهنی و تمرکز قوای دماغی که یکی از موجبات پیشرفت در علوم ریاضی است باز میدارند . دوم اینکه گاهی باعث اشتباه در محاسبات میشوند چنانکه در جبر و مقابله تألیف شادروان وحید مینویسد :

« بر متعلمین است که در استعمال آنها مواظبت تامه مجری دارند زیرا حذفشان بدون مراعات خاصیت مذکوره باعث خطاهای عمده میشوند» .

قدما چنانکه در مسئله بالا دیدیم بدون بکار بردن این علامات ، عملیات جبری را با کمال سرعت و ورزیدگی انجام میدادند و مرتکب هیچگونه خطا و اشتباهی هم نمیشدند .

حل معادلات دو مجهولی ، سه مجهولی و چند مجهولی درجه اول -

در کتابهای امروزه فصل مخصوص جداگانه‌ای برای حل معادلات دو مجهولی و سه مجهولی و چند مجهولی درجه اول در نظر گرفته شده ولی قدما کار را آسانتر کرده ، ذهن دانش آموزان را با مجموعه‌ای از مجهولات x و y و z و غیره مشوب نموده و حافظه آنها را با از بر کردن طرق حل و فرمولهای جداگانه خسته نمیکردند . چندین مسئله دو و سه و چند مجهولی را در کتابهای جدید حل کرده

که نظیر همانها در کتب قدیمه از راه يك مجهول فقط حل گردیده‌اند و ذیلاً بذکر يك نمونه از این مسائل اقتباس از کتاب مفتاح الحساب میپردازیم و آن اینست :

مسئله - وزن جواهری که از طلا و مروارید ساخته شده سه مثقال و بهای آن ۲۴ دینار است . ضمناً میدانیم که طلا مثقالی ۵ دینار و مروارید مثقالی ۱۵ دینار ارزش دارد . وزن هر کدام از این دورا در جواهر مزبور پیدا کنید .
حل - این مسئله با اصول امروزه چنین حل میشود :

وزن طلای محتوی در جواهر را x و وزن مروارید را y فرض میکنیم ؛ و چون مجموع آنها سه مثقال است پس خواهیم داشت .

$$x + y = 3 \quad (1)$$

از طرف دیگر بهای طلای محتوی در جواهر مساوی $5x$ و بهای مروارید برابر $15y$ میباشد و چون جمعاً ۲۴ دینار ارزش دارند پس :

$$5x + 15y = 24 \quad (2)$$

از رابطه (۱) مقدار y را پیدا کرده در رابطه (۲) میگذاریم چنین خواهیم داشت :

$$y = x + 3$$

$$5x + 15(x + 3) = 24$$

$$x = 2/1 \quad \text{مثقال} \quad \text{و پس از حل}$$

و

$$y = 3 - 2/1 = 1/1$$

ولی در کتاب مفتاح الحساب مسئله مزبور را فقط با يك مجهول حل میکند از اینقرار :

اگر وزن طلا را شیئی (x) فرض کنیم قیمت آن پنج شیئی ($5x$) خواهد شد و بنا بر فرض مسئله وزن مروارید مساوی سه مثقال منهای شیئی ($3-x$) میباشد ؛ و برای بدست آوردن قیمت مروارید باید وزنش را در قیمت هر مثقال از آن که ۱۵ دینار است ضرب کرد و پس از عمل چنین خواهیم داشت: چهل و پنج منهای پانزده شیئی

$$(\text{یعنی } ۱۵(۳-x) = ۴۵ - ۱۵x)$$

و مجموع بهای هر دو خواهد شد : چهل و پنج منهای ده شیئی .

$$(\text{یعنی } ۴۵ - ۱۵x + ۵x = ۴۵ - ۱۰x)$$

و این قیمت معادل است با ۲۴ دینار ؛ پس چهل و پنج منهای ۱۰ شیئی مساویست

با ۲۴

$$(\text{یعنی } ۴۵ - ۱۰x = ۲۴)$$

بعد از عمل جبر و مقابله

وزن طلای محتوی در جواهر

$$x = ۲/۱$$

و

مثقال $۳ - ۲/۱ = ۰/۹$ وزن مروارید محتوی در جواهر



گفتار دوم

حل معادلات درجه دوم

معادلات کامل درجه دوم بصورت کلی :

$$ax^2 + bx + c = ۰$$

نمایش داده شده و حل آنها مشکلتز و پیچیده تر از معادلات درجه اول بوده و مستلزم اعمال مختلف میباشد .

البته این معادلات نیز بنوبت خود اهمیت فراوانی در جبر و مقابله دارد زیرا عده بینهایت زیادی از مسائل کوناگون را باید بوسیله معادلات درجه دوم حل کرد ؛ باینجهت یکی از بخش های مهم جبر و مقابله محسوب شده و قسمت اعظم برنامه سال چهارم دبیرستانها را تشکیل میدهد .

اینک میخواهیم بینیم معادلات کامل درجه دوم را امروزه چگونه حل میکنند .

در کتاب جبر و مقابله تألیف دوازده دبیر ریاضی که قبلاً بآن اشاره کردیم چند مثال در این باره ذکر شده است که یکی از آنها را بعنوان نمونه انتخاب و در اینجا نقل میکنیم :

مثال - میخواهیم معادله $x^2 - 6x - 1 = 0$ را حل کنیم :

حل - ابتدا معادله را معلوم و مجهول میکنیم (۱) :

$$x^2 - 6x = 1$$

اکنون بدو طرف معادله عدد ۷ را اضافه میکنیم . پس :

$$x^2 - 6x + 9 = 1 + 9$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم :

$$(x - 3)^2 = 10$$

از دو طرف جذر میگیریم :

$$x - 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{10} \quad \text{یا}$$

می بینید که معادله دو جواب دارد؛ معمولاً یکی از آنها را به x_1 و دیگری را به x_2 نمایش میدهند؛ بنابراین جوابهای معادله فوق عبارتند از :

$$x_1 = 3 - \sqrt{10}$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

☆☆☆

قریب صدسال است که علوم و معارف اروپا بایران نفوذ پیدا کرده و بصورت برنامه های کلاسیک در مدارس ما تدریس میشود؛ در این مدت طولانی متجاوز از هزار دبیر ریاضی، معادلات درجه دوم را بشرحی که در فوق بیان کردیم بشاگردان خود تعلیم داده اند، ولی آیا در تمام مدت این یکقرن بعنوان نمونه حتی يك دبیر پیدا شده است که حس کنجکاوی او تحریک و در مقام تحقیق برآمده و مثلاً بعنوان نمونه برای ما بیان دارد که اعمالی که برای حل معادلات درجه

(۱) یعنی تمام جمل مجهول را در یک طرف معادله قرار داده و جمله معلوم را بطرف دیگر

نقل میکنیم .

دوم در این کتابها دستور داده شده از کجا سرچشمه گرفته است ؟ تا آنجا که ما اطلاع داریم هنوز چنین کسی پیدا نشده و چنین عملی انجام نگرفته است ؛ و اگر کسانی هم درصدد تحقیق و بررسی در این زمینه برآمده‌اند ، برای مطالعات خود هیچ راهی جز استفاده از کتب اروپائی نداشته ، و بنابراین فقط بنقل مطالب مندرج در آنها پرداخته‌اند ؛ ولی متأسفانه و با کمال صراحت باید اعلام کرد که در کتابهای مزبور بکلی سهم قدمای بویژه دانشمندان قدیم ایران را در پیشرفت تمدن و سیر تکاملی علوم نادیده گرفته و هرچه هست برنگ اروپا در آورده و بدانشمندان مغرب زمین نسبت داده‌اند ؛ و اگر احیاناً گاهی برای نمونه ، از دانشمندان قدیم نامی برده شده است بیشتر برای تحقیر و کوچک کردن و نشان دادن اشتباهات و خطاهای علمی آنان بوده است تا بدین وسیله دانشمندان اروپا بزرگ جلوه کنند .

این حق‌کشی را محققان بزرگ و دانشمندانی که سراسر تاریخ علوم را با دیده‌ای عمیق و منصف و بکلی دور از تعصب مینگرند نتوانسته‌اند تحمل کنند ؛ از جمله جرج سارتن استاد بزرگ تاریخ علوم که در دنیا بحقیقت گوئی معروف است در کتاب « سرگذشت علم » میگوید :

« تمام تواریخ عمومی جهد بلیغ کرده‌اند که کارهای نژاد هندواروپائی را جلوه‌گر سازند . این کار بمنظور خاص انجام شده و در آن هر چیز حول محور ترقی و پیشرفت اروپا دور میزند . البته این نظر بکلی غلط است و اگر تجارب گرانبهای مشرق زمین در سطح تجربیات غریبان قرار نگیرد تاریخ نوع بشر ناقص خواهد بود » .

بهر حال اکنون که برای نخستین بار در ایران این طلسم شکسته و این سد عظیم از میان برداشته شده ، بر آقایان دبیران محترم فرض است که رنج مطالعه و تحقیق بر خود هموار نموده و در هر قسمت از دانش‌ها بررسی کنند و تاریخچه صحیحی از تحولات علوم را در ضمن تدریس بشاگردان خود تعلیم داده و بنیان گذاران کاخ معظم علم را بدانش‌آموزان معرفی نمایند .

سخن کوتاه کنم ، بحث از حل معادلات درجه دوم بود . آنچه فوقاً راجع بحل این معادلات شرح داده شد و امروزه در کلیه دبیرستانهای دنیا تدریس میشود . تماماً بدون اندک دخل و تصرفی از کتاب جبر و مقابله محمد بن موسی خوارزمی اقتباس شده که مدت هزار و صدسال است در تمام کشورهای جهان از کتابی بکتاب دیگر نقل گردیده و امروز بدون اینکه ما از متن اصلی آن کوچکترین اطلاعی داشته باشیم بوسیله ترجمه از کتب اروپائی بدست ما رسیده است . تنها کاریکه اروپائیان در چند قرن اخیر راجع بمعادلات مزبور انجام داده اند تغییر اصطلاحات و دخالت حروف و علامات در آنها است ، که آنها بطوریکه خواهیم دید کوچکترین تأثیری در حل این معادلات ندارد .

اینک برای اثبات مطلب يك معادله کامل درجه دوم را از متن اصلی کتاب جبر و مقابله خوارزمی در اینجا نقل میکنیم تا خوانندگان عزیز راه حل آنرا با راه حلی که امروزه در کتابها موجود است مقایسه نموده و بر آنها معلوم گردد چگونه دانشمندان اروپا قدم بقدم همان راهی را طی کرده اند که دانشمندان قدیم ما طی میکردند .

يك نسخه از کتاب جبر و مقابله خوارزمی را فردريك روزن (Frederic Rosen) ریاضی دان و خاورشناس معروف از زبان عربی بانگلیسی ترجمه کرده و در سال ۱۸۳۱ مسیحی بطبع رسیده است . این کتاب شامل دو قسمت میباشد . يك قسمت متن اصلی آن بزبان عربی و قسمت دیگر ترجمه آن بزبان انگلیسی با توضیحاتی که مترجم در زیر صفحات داده ، وضائمی هم دارد که مربوط به تفسیر و توجیه مطالب متن کتاب است ،

در صفحه ۵ این کتاب خوارزمی معادله درجه دوم زیر :

مجذور عددی باضافه ده برابر همان عدد معادل است با ۳۹ را مطرح نموده که امروزه چنین نمایش داده میشود :

$$x^2 + 10x = 39$$

این معادله را خواری می حل کرده و ما برای مقایسه راه حل جدید و قدیم جدولی ترتیب میدهم:

در سمت راست این جدول حل معادله $x^2 - 6x + 1 = 0$ را که اقتباس از کتابهای امروز است و در ابتدای همین گفتار بشرح آن پرداختیم نوشته و در سمت چپ حل معادله $x^2 + 10x = 39$ را بطوری که خواری می شرح داده است ولی با اصطلاحات و علامات کنونی مینویسیم و ردیف بردیف اعمال مختلفه متوالیه را با یکدیگر مقایسه مینمائیم.



حل معادله $x^2 + 10x = 39$ که از کتاب جبر و مقابله خوارزمی اقتباس گردیده

معادله بالا را خوارزمی طوری طرح کرده که مجهولات در یکطرف و جمله معلوم در طرف دیگر قرار گرفته بنابراین احتیاجی بمعلوم و مجهول کردن ندارد و مینویسیم:

$$x^2 + 10x = 39$$

خوارزمی میگوید مجذور نصف ضریب x را که ۲۵ است بدو طرف می افزائیم چنین خواهیم داشت:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

خوارزمی میگوید با این عمل طرف اول معادله بصورت مربع کاملی درآمده است که طول هر ضلع آن $x + 5$ میباشد و میتوان چنین نوشت

$$(x + 5)^2 = 64$$

خوارزمی نیز میگوید از طرفین جذر میگیریم و چنین بدست میآوریم:

$$x + 5 = \pm \sqrt{64} = \pm 8$$

عدد را که نصف ضریب x است از طرفین کم میکنیم چنین خواهیم داشت:

$$x = \pm 8 - 5$$

ولی خوارزمی فقط جواب مثبت $3 = 8 - 5$ را قبول داشته و جواب منفی را نمی پذیرد

(علت آنرا توضیح خواهیم داد)

حل معادله $x^2 - 6x - 1 = 0$ که از کتب دبیرستانی امروزه اقتباس شده

ابتدا معلوم و مجهول میکنیم یعنی مجهولات را در یکطرف و جمله معلوم را در طرف دیگر معادله قرار میدهیم معادله باینصورت درمیآید:

$$x^2 - 6x = 1$$

بدو طرف معادله عدد ۹ را اضافه میکنیم (توضیح آنکه عدد ۹ مساوی مجذور نصف ضریب x است) چنین خواهیم داشت:

$$x^2 - 6x + 9 = 1 + 9$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم:

$$(x - 3)^2 = 10$$

از دو طرف جذر میگیریم چنین خواهیم داشت:

$$x - 3 = \pm \sqrt{10}$$

عدد ۳ را بطرف دیگر نقل میکنیم:

$$x = 3 \pm \sqrt{10}$$

جوابهای معادله عبارتند از

$$x_1 = 3 + \sqrt{10}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{10}$$

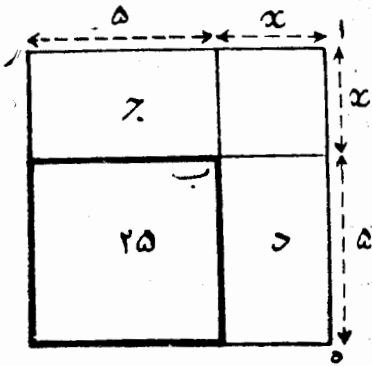
از ملاحظه جدول صفحه قبل معلوم شد که امروزه برای حل معادلات درجه دوم عیناً همان اعمالی را انجام میدهند که قدما دستور داده بودند. اکنون برای توضیح و تکمیل این مبحث لازم میدانیم بسه سؤال زیر پاسخ دهیم :

سؤال اول - راه حل معادلات درجه دوم چگونه پیدا شد و بچه دلیل برای بدست آوردن مجهول اعمال خاصی را که شرح آن گذشت مرتباً یکی پس از دیگری باید انجام داد ؛ مثلاً این فکر از کجا پیدا شد که باید مجذور نصف ضریب x را بطرفین معادله اضافه کرد ، تا طرفی که شامل مجهول است بصورت مجذور کامل درآمده و سپس از آن جذر بگیریم ؟ برای پاسخ باین سؤال در کتب امروزه چیزی نمیتوان یافت ؛ ناچار بکتب قدیمه مراجعه میکنیم . در کتاب جبر و مقابله خوارزمی و سایر ریاضی دانان قدیم می بینیم که آنها برای حل معادلات درجه اول و دوم و سوم راهی ساده و درعین حال کاملاً منطقی و مستدل پیدا کرده بودند و آن برهان هندسی است .

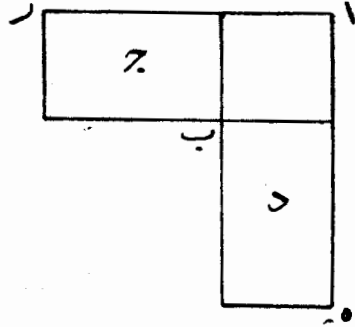
مگر نه اینست که اگر عددی را بوسیله ضلع مربعی نمایش دهیم، مساحت این مربع مجذور آن عدد خواهد بود ؛ بنابراین در معادله ای که خوارزمی مطرح کرده و میگوید: مجذور عددی باضافه ده برابر همان عدد معادل است با ۳۹ :

$$x^2 + 10x = 39$$

میتوانیم مربع ab را طرح کنیم که مساحتش مساوی x^2 و طول هر ضلعش برابر x باشد ش ۱ آنگاه باید $10x$ را باین مربع اضافه کنیم تا مجموع مساوی ۳۹ شود . برای انجام این امر ضریب x را که در اینجا ۱۰ است نصف میکنیم ، میشود ۵ و دو مستطیل در دو طرف مربعی که طرح کرده ایم میسازیم بطوریکه طول اضلاع هر یک از آنها مساوی x و ۵ باشد ؛ باین ترتیب دو مستطیل (د) و (ج) بوجود میآید ، و طبق معادله ای که طرح کرده ایم میدانیم که مجموع مساحت دو مستطیل و مربع معادل ۳۹ میباشد .



ش ۲



ش ۱

ساختمان دماغی بشر از دورانهای اولیه زندگی چنین بوده است که هر جهش فکری و هر قدمی که بسوی حل مشکلات طبیعت بر میدارد خودبخود راهی جدید و فکری تازه ایجاد کرده و از رموز و اسرارای که قبلا براو مجهول بوده است آگاه میشود. بعضی از افراد بشر که دانشمندان بزرگ و نوابغ جزء این دسته محسوب میشوند بیش از سایرین از این موهبت برخوردارند زیرا با داشتن نیروی اشراق و روشن بینی و نوعی تصور خلاقه با سهولت و سرعت بحل مجهولات فائق میشوند؛ بنابراین بعید نیست که برای اولین بار يك دانشمند ریاضی از مشاهده شکل ۱ بفکر افتاده باشد با پر کردن جای خالی مربع کاملی به شکل ۲ بسازد. پس از انجام این امر مشاهده کرده است که مساحت مربعی که جای خالی را پر کرده مساوی ۲۵ است، زیرا طول هر ضلع آن برابر ۵ میباشد؛ پس اگر این ۲۵ را (که در حقیقت مجذور نصف ضریب x است) به $x^2 + 10x$ اضافه کنیم مساحت مربع بزرگ چنین خواهد شد:

$$x^2 + 10x + 25$$

درعین حال مساحت همین مربع بزرگ مساویست با:

$$39 + 25 = 64$$

بنابراین طول ضلع این مربع بزرگ از یکطرف مساوی با $x + ۵$ و از طرف دیگر مساویست با $\sqrt{۶۴}$ یعنی ۸ پس خواهیم داشت :

$$x + ۵ = \sqrt{۶۴}$$

با

$$x = \sqrt{۶۴} - ۵$$

از راه هندسی بطوریکه در شکل پیداست برای x فقط :

$$x = \sqrt{۶۴} - ۵ = ۸ + ۵ = ۳$$

بدست میآید

هوگبن (Hogben) ریاضی دان وزیست شناس انگلیسی کتابی تحت عنوان :

«Mathematic for citizen»

نوشته که بزبان فرانسه بنام «Mathématiques pour tous» ترجمه شده . هوگبن در این کتاب ، خوارزمی و خیام را از بزرگترین ریاضی دانان عرب !! دانسته و دستور حل معادلات درجه دوم را با اسم قانون خوارزمی نامیده و استدلال هندسی را بطوریکه شرح آن گذشت بیان میدارد و همینکه بجواب معادله میرسد مینویسد :

ریاضی دانان عرب از قانون علامات (Loi des signes) مطلع بوده و مثلاً

میدانستند که :

$$(-a) \times (-a) = a^2$$

$$(+a) \times (+a) = a^2$$

$$\sqrt{a^2} = \pm a$$

پس :

باینجهت در معادله $x^2 + ۱۰x = ۳۹$ همینکه بجواب $x = +\sqrt{۶۴} - ۵ = ۳$

میرسیدند میدانستند که معادله جواب دیگری نیز دارد و آن مساوی :

$$x = -\sqrt{۶۴} - ۵ = -۱۳$$

» اعراب طبق روابط زیر محقق داشتند که هر دو جواب در معادله صدق

میکند :

$$۳^۲ + (۱۰ \times ۳) = ۹ + ۳۰ = ۳۹$$

$$(-۱۳)^۲ + ۱۰(-۱۳) = ۱۶۹ - ۱۳۰ = ۳۹$$

ولی هیچگونه معنی برای جواب منفی نمیتوانستند قائل شوند» (علت آنرا ما بعداً توضیح خواهیم داد).
ضمناً مینویسد که :

«هنوز هم میتوانیم قاعده بدست آوردن x را در معادله‌ای که شامل x^2 است بنام قاعدهٔ «تکمیل مربع» بنامیم زیرا از قدیم الایام حل مسائل و معادلات را بوسیلهٔ رسم اینگونه مربع‌ها معمول میداشتند و با اینکه امروزه در کتابهای جبر و مقابله از ترسیم مزبور برای اثبات حل معادلات درجهٔ دوم صرف نظر میکنند، معهداً هنوز هم این معادلات بنام «معادلات تربیعی» «Equations quadratiques» نامیده میشود که از کلمهٔ لاتین «Quadratum» بمعنای چهار گوشه مشتق است.»

سئوال دوم - ریاضی دانان قدیم ایران راجع به اعداد منفی چه نظر و عقیده‌ای داشته‌اند ؟

وپکه (Woepcke) کتابی در جبر و مقابلهٔ خیام نوشته و در آن کتاب بدون اینکه معتقدات ریاضی قدما را کاملاً توجیه و تفسیر نماید انتقادات غیر واردی بر آنها کرده مثلاً در چند جا مینویسد :

«خیام و خوارزمی و دیگر ریاضیون اسلامی از اعداد منفی و موهومی غافل بوده و باینجهت اگر در معادلات جواب مثبت بدست نیامد آنرا امتنع میشمرده‌اند.»

و حال آنکه حقیقت امر چنین نیست و خیام و خوارزمی و سایر ریاضی دانان قدیم ایران بهیچوجه از اعداد منفی و موهومی غافل نبوده و اگر جوابهای منفی را در مسائل و معادلات قبول نداشته‌اند دلیلی داشته است که باید توضیح داده شود.

میدانیم که یکی از اختلافات اساسی علم جبر و مقابله با علم حساب وجود اعداد جبری یعنی اعدادیست که علامت + یا - بر آنها مقدم بوده و بنام مثبت و منفی نامیده میشوند. کلیهٔ عملیات و محاسبات در علم حساب با اعداد حسابی (اعدادی که بر آنها علامت + یا - مقدم نشده باشد) و در علم جبر و مقابله با

اعداد جبری (اعدادی که بر آنها علامت + یا - مقدم شده باشد) انجام میگیرند؛ مثلاً در علم حساب اگر بخواهیم عدد ۲۲ را در عدد ۵ ضرب کنیم چنین مینویسیم:

$$۲۲ \times ۵ = ۱۱۰$$

ولی در جبر و مقابله چون کمیات اعم از اینکه بوسیله اعداد یا حروف نشان داده شده باشند دارای علامت مثبت یا منفی هستند لذا علامت حاصل ضرب دو مقدار بسته به علاماتی است که بر آن دو مقدار مقدم میباشد مثلاً حاصل ضرب $x^2 +$ در $۲x -$ مساویست با $۲x^۳ -$ و آنرا چنین مینویسند:

$$(+x^2) \times (-2x) = -2x^3$$

این موضوع یعنی مثبت و منفی بودن کمیات در جبر و مقابله بر قدما کاملاً کاملاً معلوم بوده است؛ زیرا می بینیم تمام عملیات و محاسبات را در مقادیر جبری با رعایت مثبت و منفی بودن آنها انجام داده و همان اعمال را در علم حساب بدون رعایت علامات مزبور اجرا میکرده اند؛ منتها بجای کلمات « مثبت » و « منفی » اصطلاحات « زائد » و « ناقص » را بکار میبردند، و در حقیقت اسم بامسمائی را هم برای این امر انتخاب کرده بودند، زیرا معنی واقعی یک عدد مثبت اینست که با عدد دیگری جمع شده مقدار آنرا زیاد کند و معنی حقیقی عدد منفی اینست که از عدد دیگری کم شده و باعث نقصان مقدار آن گردد.

برای تأیید مطلب قاعده ضرب اعداد و مقادیر جبری را مثال میزنیم.
در کتب جدید جبر و مقابله قاعده مزبور چنین خلاصه میشود:

حاصل ضرب	مقدار مثبت	در مقدار مثبت	میشود	مثبت
«	«	منفی	«	منفی
«	«	منفی	«	مثبت
«	«	مثبت	«	منفی

و در کتاب «مفتاح الحساب» تألیف غیاث الدین جمشید نیز این قاعده عیناً دستور داده شده است باین عبارت:

« لان حاصلضرب الزايد في الزايد زايد وحاصلضرب الناقص في الناقص ايضاً زايد وحاصلضرب الزايد في الناقص وبالعكس ناقص »
 يعنى « حاصلضرب مقدار مثبت در مثبت مقدار مثبت و حاصلضرب منفي در منفي نیز مثبت است و حاصلضرب مثبت در منفي وبالعكس (يعنى منفي در مثبت) منفي مي باشد ».

در مورد ساير اعمال و محاسبات جبري نیز قدها اعداد منفي را ميشناختند و همانطور كه امروزه معمول است قانون علامات (Loi des signes) را بر حسب شرايط مختلف رعايت مينمودند . بعنوان مثال گوئيم در تفریق جبري امروز قاعده اينست كه اگر بخواهيم $2x - 5x$ را از $5x$ كم كنيم بايد چنين بنويسيم :

$$5x - (-2x)$$

چون علامت $-$ بر پرانتز مقدم است ، علامت داخل پرانتز را تغيير داده تبديل به $+$ ميكنيم يعنى $(-2x)$ $-$ تبديل به $2x +$ ميشود و نتيجه چنين خواهد بود :

$$5x - (-2x) = 5x + 2x = 7x$$

و هر گاه مفروق و مفروق منه هر کدام ، از چند جمله مثبت و منفي تشكيل شده باشد همين قاعده در باره آنها رعايت ميشود . مثلاً ميخواهيم $x^2 - 2x - 2$ را از $4 + 6x + 3x^2$ كم كنيم چنين مينويسيم :

$$\begin{array}{r} \text{مفروق} \\ \text{مفروق منه} \end{array} \quad (3x^2 - 6x + 4) - (x^2 - 2x - 2)$$

برای انجام عمل تفریق فوق باید علامات جمل داخل پرانتز دست راست را كه مفروق است تغيير داده و جمل مفروق را پس از تغيير علامت در دنبال جمل مفروق منه بنويسيم ، يعنى در حقيقت بجای $(x^2 +)$ $-$ بنويسيم $x^2 -$ و بجای $(-2x)$ $-$ بنويسيم $2x +$ و بجای (-2) $-$ بنويسيم $2 +$

و نتیجه چنین میشود :

$$(3x^2 - 6x + 4) - (x^2 - 2x - 2) = \\ 3x^2 - 6x + 4 - x^2 + 2x + 2$$

و پس از ساده کردن چنین خواهیم داشت :

$$= 2x^2 - 4x + 6$$

چنانکه می بینیم در این عملیات ، هر يك از اعداد جبری علاوه بر مقدار و کمیتی که دارد ، دارای علامت + یا - نیز میباشد که مشخص آنست و باعث میشود که ما دو نوع عدد جبری متمایز از یکدیگر قائل شویم یکی مثبت و دیگری منفی . عین این قضیه را قدما نیز ضمن عمل تفریق جبری در نظر داشته و یک عدد منفی را مثلاً اگر میخواستند از یک عدد مثبت کم کنند علامت آن عدد منفی را تغییر داده + میکردند و بجای انجام عمل تفریق ، عدد مزبور را با عدد دیگر جمع مینمودند ؛ و در کتاب مفتاح الحساب مطلب مزبور باین عبارت نوشته شده است :

« وان كان في المنقوص والمنقوص منه معاً استثناء فنجمع الاجناس الناقصة للمنقوص مع الاجناس الزائدة للمنقوص منه لينجبر المنقوص و يزيد في المنقوص منه بقدر جبر المنقوص ثم ننقص الاجناس الزائدة للمنقوص من الاجناس الزائدة الحاصلة والناقصة للمنقوص منه بمثل مامر . »

یعنی : اگر ، هم درمفروق و هم درمفروق منه مقادیر منفی موجود باشد ، باید مقادیر منفی مفروق را با مقادیر مثبت مفروق منه جمع کرد^(۱) ؛ باین ترتیب که مقادیر مزبور را از مفروق حذف کرده و بمفروق منه اضافه میکنیم ؛ سپس همانطور که قبلاً گفتیم جمل مثبت مفروق را از جمل مثبت حاصله و منفیه مفروق منه کم مینمائیم .

همین اندازه کافی است ثابت کند که قدما اعداد مثبت و منفی را میشناخته و عملاً در محاسبات جبری از خواص آنها استفاده مینمودند ؛ اما اینکه چرا در

(۱) یعنی علامت (-) را تبدیل به (+) نمود .

معادلات فقط بجواب یا ریشه مثبت قانع شده و جواب منفی را قبول نمی‌کردند ، علت این بود که معادلات را همیشه برای حل مسائل تشکیل میدادند ، و مسائلی که در شرایط معمولی زندگی مطرح میشد جواب منفی را قبول نمی‌کرد ، و امروز نیز اگر ما آنقدرها با اعداد منفی خو نگرفته بودیم ، جوابهای منفی را نمیتوانستیم پذیرفت ؛ مثلاً در مسئله زیر :

مسئله - مطلوبست عدد درختان میوه يك باغچه در حالیکه میدانیم اگر عدد درختان مزبور را مجذور نموده و چهار برابر عدد درختان را باین مجذور بیفزائیم حاصل مساوی ۶۰ خواهد شد .

برای حل مسئله ، آنرا بمعادله میگذاریم ، چنین خواهیم داشت :

$$x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$x_1 = 6 \quad \text{و پس از حل :}$$

$$x_2 = -10$$

فقط میتوانیم جواب مثبت را پذیرفته و بگوئیم ۶ درخت میوه در این باغچه موجود است . البته جواب دوم یعنی ۱۰- نیز يك جواب معادله است یعنی اگر عدد درختان را ۱۰- فرض کنیم مجذور آن باضافه ۴ برابرش مساوی ۶۰ خواهد شد ، ولی آیا میتوان گفت که در باغچه مزبور ۱۰- درخت موجود است ؟ و آیا چنین جمله‌ای دارای معنی خواهد بود ؟

اگر صدها و هزارها مسئله که مفروضاتشان با عوامل زندگی روزانه ما سر و کار دارد طرح کنیم ، برای عموم آنها جواب منفی غیر قابل قبول خواهد بود .

در کتاب جبر و مقابله تألیف شادروان وحید نیز ، غیر قابل قبول بودن جوابهای منفی تذکر داده شده ، از جمله مسئله‌ای طرح کرده و مینویسد :

« شخصی در جیبش ده قطعه پول پنجقرانی و دو قرانی دارد میگوید که تمام پول من ۶۰ قران میباشد پس چند عدد پنجقرانی و دوقرانی دارد .

چون عدد دوقرانی‌ها را x فرض کنیم عدد پنجقرانی‌ها $(10-x)$ خواهد بود و بر حسب فرض مسئله معادله زیر حاصل میشود :

$$2x + 5(10-x) = 60$$

$$2x + 50 - 5x = 60 \quad \text{یا}$$

$$x = -\frac{10}{3} \quad \text{واز آنجا}$$

مقدار $-\frac{10}{3}$ که ریشه معادله مسئله مفروضه میباشد ابدأ در فرض مسئله صدق نمیکند زیرا که کلیه این قبیل مسائل تقاضای جواب مثبت و صحیح مینمایند پس مسئله مفروضه دارای جواب نبوده و غیر ممکن است.

با اینحال مواردی پیش میآید که میتوان برای جوابهای منفی تعبیری فائل شده و با اندک تصرفی در مفروضات مسئله آنها را قابل قبول دانست ، و آن موافقی است که با کمیاتی سر و کار داشته باشیم که در دو جهت مختلف قابل تغییر باشد مثل طول ، حرارت ، سرمایه و زمان ؛ و بر حسب قرارداد و معاهده یکی از دو جهت تغییرات را مثبت و جهت دیگر را منفی فرض کنیم .

برای روشن شدن مطلب بجلد اول کتاب جبر و مقابله تألیف وحید صفحہ ۱۶۱ مراجعه میکنیم ، مینویسد :

« تعبیر جوابهای منفیه - ممکن است اتفاق افتد که ریشه معادله مسئله منفی باشد ، در اینصورت نباید فوراً وجود ریشه منفی معادله مسئله را دلیل بر امتناع مسئله دانست و بلکه لازم است سعی و دقت کرده تعبیری بجهت ریشه منفی پیدا نمود یعنی بعبارة اخری ملاحظه نمود که آیا حقیقتاً مسئله غیر ممکن و ممتنع است و یا بوسیله اندک تصرف و تعبیری در فرض مسئله و ریشه معادله میتوان همان ریشه منفی را جوابی دانست .

مثال - سن پدری ۵۰ سال و سن پسرش ۲۶ سال می باشد تعیین کنید بعد از چند سال دیگر سن پدر مضاعف سن پسر میشود . چون مدت مطلوب را بحسب سال x فرض کنیم برحسب فرض مسئله معادلهٔ ذیل حاصل میشود :

$$50 + x = 2(26 + x)$$

$$50 + x = 52 + 2x \quad \text{و یا}$$

$$x = -2 \quad \text{و یا}$$

و حال بواسطهٔ وجود جواب منفی ۲- نباید گفت که مسئلهٔ مفروضه غیر ممکن می باشد و بلکه بواسطهٔ اندک تصرفی در فرض مسئله میتوان همین جواب منفی را قابل قبول دانست ؛ بدین طریق که در فرض مسئله بجای عبارت « بعد از چند سال دیگر » و « میشود » عبارات « که در چند سال قبل » و « بوده است » را قرار داد و چنین گفت :

سن پدری ۵۰ سال و سن پسرش ۲۶ سال می باشد تعیین کنید که در چند سال قبل سن پدر مضاعف سن پسر بوده است ؟

بطوریکه ملاحظه میفرمائید در این مثال نیز جواب منفی فقط بشرطی قابل قبول است که مفروضات مسئله تغییر کند ؛ ولی در این صورت جوابی که بدست خواهد آمد منفی نبوده و مثبت خواهد بود ، زیرا پس از تغییر مفروضات مسئله بر تریبی که در بالا گذشت :

$$50 - x = 2(26 - x)$$

$$x = 2 \quad \text{و از آنجا}$$

پس در حقیقت می بینیم که در اینجا نیز جواب مثبت قابل قبول است .
بهر حال با توضیحاتی که دادیم معلوم شد ریاضی دانان قدیم ایران که جوابهای منفی را در مسائل و معادلات قبول نمی کردند عذرشان موجه بوده و دلیل منطقی داشته اند و بنابراین نباید گفت که آنها از اعداد منفی غافل بوده و با اینجهت فقط جوابهای مثبت را می پذیرفته اند .

سؤال سوم - آیا ریاضی دانان قدیم ایران برای حل معادلات کامل درجه دوم دستور عمومی یا فرمولی داشته‌اند که هر معادله درجه دوم را بکمک آن بتوان حل کرد یا خیر؟ - یکی از پیشرفت‌های بزرگ در علم جبر و مقابله بکار بردن حروف بجای اعداد برای عمومیت دادن حل معادلات و مسائل جبری است. دکارت ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی (۱۵۹۶-۱۶۴۹) برای انجام این امر حروف اول الفبارا بجای مقادیر عددی و حروف آخر الفبارا بجای مجهولات انتخاب کرد؛ و از اینراه چون اعمال مختلفه عوض اینک-ه در اعداد معینه بجا آورده شود در حروف بعمل خواهد آمد، بنابراین بواسطه حل يك معادله میتوان جمیع معادلاتی را که از همان جنس باشند حل نمود. برای روشن شدن مطلب، یکی از معادلات کامل درجه دوم مثلاً $x^2 - 6x = 1$ را حل میکنیم.

چنانکه قبلاً گفتیم، برای حل این معادله ابتدا معلوم و مجهول میکنیم:

$$x^2 - 6x = 1$$

اکنون بدو طرف معادله عدد ۹ را اضافه میکنیم:

$$x^2 - 6x + 9 = 1 + 9$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم:

$$(x-3)^2 = 10$$

از دو طرف جذر میگیریم:

$$x-3 = \pm\sqrt{10}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{10} \quad \text{یا}$$

و همانطور که قبلاً یادآور شدیم معادله مزبور دو جواب یا دوریشه دارد.

میدانیم که در معادلات کامل درجه دوم میتوان بجای ضریب x^2 و x جمله معلوم جمیع مقادیر ممکنه را قرارداد، بنابراین عدده بینهایت زیاد از این معادلات میتوانیم تشکیل دهیم. آیا برای حل معادلات مزبور باید هر دفعه تمام اعمالی را که شرح دادیم تکرار نمائیم؟ کسانی که اولین مرتبه بفکر این موضوع افتادند

درصد برآمدند راهی پیدا کنند که بتوان تمام این قبیل معادلات و بطور کلی همه معادلاتی را که از يك جنس میباشند بوسیله يك دستور عمومی حل کنند ؛ و بطوریکه در کتابهای جبر و مقابله مینویسند ، قرار دادن حروف بجای اعداد برای انجام همین منظور بوده است .

پس معادلات کامل درجه دوم را میتوان بصورت کلی
 $ax^2 + bx + c = 0$ درآورد

برای حل این معادله ابتدا معلوم و مجهول میکنیم :
 $ax^2 + bx = -c$

دوطرف را برضرب x^2 یعنی a تقسیم میکنیم :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$\frac{b}{a}$ را نصف میکنیم میشود $\frac{b}{2a}$ و مجذور آنرا که $\frac{b^2}{4a^2}$ است بدوطرف اضافه میکنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

از دوطرف جذر میگیریم :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\frac{b}{2a}$ را بطرف دوم میآوریم :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یا

بطوریکه در فرمول کلی بالا ملاحظه میشود معادلهٔ کامل درجهٔ دوم
 دارای دو جواب: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و

میباشد. این جوابها دستور کلی است برای بدست آوردن جواب هر معادلهٔ درجهٔ دوم، باین معنی که وقتی در این فرمول بجای a ضریب جملهٔ درجه دوم و بجای b ضریب جملهٔ درجهٔ اول و بجای c مقدار معلوم آن معادله را قرار دهیم جوابهای آن معادله بدست میآید. فرمول فوق را دستور حل معادلهٔ درجهٔ دوم گویند؛ مثلاً اگر بخواهیم معادلهٔ $2x^2 - 3x - 2 = 0$ را حل کنیم مقدار عددی a و b و c را که باید در دستور بجایشان قرار دهیم تعیین میکنیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$a = 2 \quad \text{پس:}$$

$$b = -3$$

$$c = -2$$

بنابراین جوابهای معادله میشوند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(+2)(-2)}}{2(+2)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \quad \text{یا}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{4} \quad \text{یا}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \text{ و از آنجا}$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

و

معادله فوق دو ریشه دارد که عبارتند از :

$$x_1 = 2$$

$$\text{و } x_2 = -\frac{1}{2}$$

تبصره - اگر a یعنی ضریب x^2 مساوی واحد باشد معادلات کامل درجه

دوم را میتوان بصورت :

$$x^2 + px + q = 0$$

درآورد و فرمول کلی برای حل این قبیل معادلات عبارتست از :

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

☆☆*

شکی نیست که بدست آوردن فرمولهائی برای عمومیت دادن حل معادلات جبری را باید بمنزله يك پیشرفت بزرگ در علم جبر و مقابله تلقی کرد ، زیرا بكمك این فرمولها میتوان عده زیادی معادلات مشابه را با سرعت و سهولت حل کرده و بدین طریق از اتلاف وقت جلوگیری نمود ؛ و اگر کتابهای جبر و مقابله جدید را مورد مطالعه قرار دهیم خواهیم دید پر از فرمولها و دستورات عمومی میباشد ، در حالیکه کتب جبر و مقابله قدیم ظاهراً فاقد علامات و حروف بوده و فرمولهائی برای حل معادلات نظیر آنچه که در کتابهای جدید دیده میشود در آنها بنظر نمیرسد ؛ ولی اگر در این کتابها دقیق شویم خواهیم دید که نه تنها ریاضی دانان قدیم ایران برای حل معادلات فرمولها و دستورات کلی داشته اند ، بلکه مهمترین فرمولها و دستوراتی که امروزه برای حل معادلات مختلف موجود است اقتباس از همان فرمولهای قدماست .

برای اثبات مطلب دو مسئله از کتاب «مفتاح الحساب» که نظایر آن در کتاب جبر و مقابله خوارزمی و سایر کتب ریاضی قدیم ایران زیاد وجود دارد و حل آن منجر به تشکیل معادله درجه دوم میشود عیناً ترجمه کرده در اینجا نقل میکنیم. و برای توضیح عبارات کتاب، هر جا به اصطلاحات قدیمه بر خوردیم معادل آنها را با حروف و علامات کنونی در داخل پرانتز قرار میدهیم.

مسئله ۱- اجرت کارگری در هر ماه نود دینار است، تعیین کنید چند روز مشغول کار بوده در حالیکه میدانیم اگر از اجرتی که دریافت کرده ۲ دینار کم کنیم حاصل مساوی مجذور عده روزهایی خواهد شد که کار کرده است؛ بعبارت دیگر عددی پیدا کنید که اگر از سه برابر آن ۲ واحد کم کنیم حاصل مساوی مجذور همان عدد گردد، زیرا نسبت اجرتی که عمله مزبور دریافت نموده به عده روزهایی که مشغول کار بوده مثل نسبت سه بیک میباشد.

حل - عده روزهایی که کار کرده است شیئی (x) فرض میکنیم، پس اجرتش مساوی سه شیئی (3x) خواهد بود. ۲ دینار از آن کم میکنیم، حاصل مساوی سه شیئی منهای ۲ دینار: (3x - 2) خواهد شد، و این برابر مجذور شیئی (x²) میباشد (یعنی: 3x - 2 = x²).

و بعد از عمل جبر (۱) خواهیم داشت: مجذور شیئی و ۲ واحد معادل است با سه شیئی (یعنی: 3x + 2 = x²).

تا اینجا ترجمه از متن کتاب بود و اینک بمعادله کامل درجه دوم

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

رسیدیم که باید آنرا حل کنیم.

امروز برای حل این معادله چنین مینویسیم:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

و از فرمول کلی $x = -\frac{p}{q} \pm \sqrt{\frac{p^2}{q^2} - q}$ استفاده نموده بجای p و q مقادیر

عددی آنها را قرار داده دو جواب معادله را پیدا میکنیم؛ باین طریق:

(۱) سابقاً گفتیم که اگر جمله منفی را با تغییر علامت بطرف دیگر معادله بریم این عمل

را جبر گویند.

-۴۷-

$$p = -3$$

$$q = 2 \quad \text{و}$$

$$-\frac{p}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{پس}$$

$$\frac{p^2}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \quad \text{و}$$

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} \quad \text{و}$$

$$\pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \pm \frac{1}{2} \quad \text{و}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \text{پس}$$

بنابر این دو جواب معادله یا دو جواب مسئله عبارتند از:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{و}$$

این محاسبات را میتوانیم در جدولی بشکل زیر نمایش دهیم:

جدول با اصطلاحات جدید برای حل معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$\frac{p^2}{4} - q$	q	$\frac{p^2}{4}$	$-\frac{p}{2}$	$-p$
۱	۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۲	$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	۳

و نظیر همین جدول است که قداما برای حل معادلات کامل درجه دوم، بجای

فرمول $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ از آن استفاده میگردند. منتها بجای p که ضریب

x است کلمه «عدد اشیاء» و بجای q که جمله معلوم است کلمه «عدد» را بکار

میردند؛ و اینک جدولی که غیاث الدین جمشید در کتاب مفتاح الحساب برای حل معادله $x^2 + 2 = 3x$ تنظیم کرده است در اینجاست نقل میشود و خوانندگان محترم ملاحظه خواهند فرمود که در این جدول محاسبات برای حل معادله مزبور با همان سرعت و سهولتی صورت میگیرد که امروزه با فرمول $x = -p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ انجام میشود؛ و نیز ملاحظه خواهند فرمود که قدامت مثل امروز برای معادله مزبور دو جواب یافته اند؛ بنابراین ریاضی دانان قدیم در جلوی رادیکالها علامت + و - مقدم میداشته، یعنی میدانسته اند که عدد $\frac{1}{4}$ دارای دو جذر است یکی $\frac{1}{2}$ + و دیگری $\frac{1}{4}$ - .

جدول با اصطلاحات قدیم برای حل معادله $x^2 + 2 = 3x$	عدد اشیاء	۳
	نصف آن	$\frac{1}{2}$
	مجدور نصف عدد اشیاء	$\frac{3}{2}$
	عدد	۲
	عددا از مجدور نصف عدد اشیاء کم میکنیم	$\frac{1}{2}$
	جز آن	$\frac{1}{2}$
	نصف عدد اشیاء را یکمرتبه بآن اضافه میکنیم	۲
	و مرتبه دیگر از آن کم میکنیم	۱

قدما بعد از حل هر مسئله و بدست آوردن جواب یا جوابهای آن فوراً همچنانکه امروزه نیز معمول است و در کتب جبر دستور داده شده ، امتحان میکردند که آیا جواب یا جوابها صحیح است و در مسئله صدق میکند یا خیر ، مثلاً در مورد مسئله بالا ، غیاث الدین جمشید پس از حل بوسیله جدول ، بامتحان پرداخته مینویسد :

امتحان - هر گاه کارگر مزبور ۲ روز کار کند اجرت او ۶ دینار بوده و اگر ۲ واحد از آن کم کنیم عدد ۴ باقی میماند که مجذور ۲ میباشد ؛ و اگر یکروز کار کند اجرتش ۳ دینار بوده و پس از کم کردن عدد ۲ از آن ، يك واحد باقی میماند که مجذور واحد است .

مسئله ۲ - عددی پیدا کنید که اگر از دو برابرش يك واحد کم کرده و باقیمانده را در سه ضرب نمائیم و از حاصل ۲ واحد کم کرده نتیجه را در ۴ ضرب کنیم و از عددی که بدست میآید ۳ واحد نقصان نمائیم جذر باقیمانده مساوی $\frac{1}{3}$ همان عدد شود .

حل مسئله بطریق کنونی - ابتدا مسئله را بمعادله میگذاریم . طبق

مفروضات مسئله چنین خواهیم داشت :

$$\sqrt{\{[3(2x-1)-2] \times 4\}} - 3 = 2 \frac{1}{3}x$$

$$\sqrt{[(6x-5) \times 4]} - 3 = 2 \frac{1}{3}x \quad \text{یا}$$

$$\sqrt{24x - 23} = 2 \frac{1}{3}x \quad \text{یا}$$

$$24x - 23 = \frac{49}{9}x^2 \quad \text{یا}$$

$$\frac{49}{9}x^2 - 24x + 23 = 0 \quad \text{یا}$$

$$x^2 - 4 \frac{20}{49}x + 4 \frac{11}{49} = 0 \quad \text{و یا بالاخره}$$

اکنون باید این معادله را حل کنیم . طبق فرمول $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ چنین خواهیم داشت :

$$p = -\frac{20}{49}$$

$$q = \frac{11}{49}$$

$$x = \frac{20}{49} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{49}\right)^2 - 4 \frac{11}{49}} \quad \text{و}$$

$$x = \frac{20}{49} \pm \sqrt{4 \frac{2060}{2401} - 4 \frac{11}{49}} \quad \text{یا}$$

$$x = \frac{20}{49} \pm \sqrt{\frac{1021}{2401}} \quad \text{یا}$$

$$x = \frac{20}{49} \pm \frac{39}{49} \quad \text{یا}$$

$$x_1 = \frac{20}{49} + \frac{39}{49} = \boxed{3} \quad \text{و دو جواب مسئله عبارتند از:}$$

$$x_2 = \frac{20}{49} - \frac{39}{49} = \boxed{1 \frac{20}{49}} \quad \text{و}$$

حل مسئله بطریق قدیم - عدد مطلوب را شیئی^(۱) (x) فرض کرده و

از ۲ برابرش يك واحد کم میکنیم خواهیم داشت دوشیئی منهای يك (۲x - ۱)

حاصل را در ۳ ضرب میکنیم میشود ۶ شیئی منهای سه: (۶x - ۳)

(۱) عبارات داخل پرانتز برای توضیح مطلب بترجمه متن کتاب مفتاح الحساب اضافه

۲ تا از حاصل کم میکنیم میشود: شش شیئی منهای پنج:

$$: (۶x - ۵)$$

حاصل را در چهار ضرب مینمائیم چنین بدست میآید: بیست و چهار شیئی

$$: (۲۴x - ۲۰)$$

سه واحد از آن کم میکنیم میشود: بیست و چهار شیئی منهای بیست و سه:

$$: (۲۴x - ۲۳)$$

و این معادل است با مجذور دو شیئی و ثلث شیئی: $(۲\frac{1}{۳}x)^۲$ یا

$$: (\frac{۷}{۳}x)^۲$$

$$: (\frac{۴۹}{۹}x^۲ = ۵\frac{۴}{۹}x^۲)$$

پس چنین خواهیم داشت:

$$۳۴x - ۲۳ = ۵\frac{۴}{۹}x^۲$$

پس از انجام عمل جبر چنین خواهیم داشت:

$$۲۴x = ۵\frac{۴}{۹}x^۲ + ۲۳$$

$$۵\frac{۴}{۹}x^۲ + ۲۳ = ۲۴x$$

یا

ضریب x را بواحد تبدیل مینمائیم چنین بدست میآید:

$$x^۲ + \frac{۹}{۴۹}۲۳ = ۲۴\frac{۹}{۴۹}x$$

و پس از اختصار:

$$x^۲x\frac{۱۱}{۴۹} = ۴\frac{۲۰}{۴۹}x$$

برای حل این معادله غیاث الدین جمشید جدول زیر را ترتیب داده است:

جدول برای حل معادله: $x^2 + \frac{11}{39}x = \frac{20}{49}$

ویکمتر تبه جذرها	یکمتر تبه آنرا	جذرش	عددر از مجذور	عدد	مجدور!	نصف عدد	اشياء	نصف عدد	عدد
از نصف عدد اشياء کم میکنند میشود	بنصف عدد اشياء اضافه میکنند میشود:		نصف عدد اشياء کم میکنند	عدد	اشياء	نصف عدد	اشياء	نصف عدد	عدد
$\frac{20}{49}$	۳	$\frac{39}{49}$	$\frac{1021}{2401}$	$\frac{11}{49}$	$\frac{2060}{42401}$	$\frac{10}{249}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{10}{249}$	$\frac{20}{49}$

چنانکه از این دو مسئله استنباط میشود قدام نیز مثل امروز برای حل

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

که حکم فرمول

را داشته و سهولت و سرعت تمام معادلات درجه دوم را از روی آن حل میکردند.

بحث در فرمول - در کتاب جبر سال چهارم طبیعی تألیف ۱۲ دبیر ریاضی که قبلاً از آن یاد کردید در صفحات ۸۶ و ۸۷ پس از حل سه معادله کامل درجه دوم ، در فرمول بحث کرده مینویسد :

» در ضمن حل سه مثال اخیر از روی دستور :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

متوجه باشید که :

الف - وقتی مقدار زیر رادیکال مثبت باشد یعنی $b^2 - 4ac > 0$ معادله دارای دو ریشه است ؛

ب - وقتی مقدار زیر رادیکال برابر صفر یعنی $b^2 - 4ac = 0$ معادله دارای ریشه مضاعف است ؛

ج - وقتی مقدار زیر رادیکال منفی باشد یعنی $b^2 - 4ac < 0$ معادله ریشه ندارد ؛

بعبارت دیگر $b^2 - 4ac$ را که در واقع مقدار آن بیان میکند معادله جواب دارد یا نه مبین معادله درجه دوم گویند .

در بعضی از کتابهای جبر کنونی نیز که ضریب x^2 را در معادلات درجه دوم مساوی واحد گرفته و معادله را از روی فرمول $x = \frac{-p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{1}$ نقل میکند چنین بحث مینماید :

اگر $\frac{p^2}{4} - q > 0$ باشد معادله دارای دو جواب یا دو ریشه است ؛

اگر $\frac{p^2}{4} - q = 0$ باشد معادله دارای یک ریشه مضاعف است که مساوی با

$-\frac{p}{2}$ میباشد .

اگر $q < \frac{p^2}{4}$ باشد معادله جواب ندارد؛ یا ریشه معادله موهومی است. تمام این بحث‌ها از کتاب جبر و مقابله خوارزمی سرچشمه گرفته است که مدت ۱۱۰۰ سال متوالیاً از کتابی بکتاب دیگر نقل شده و چنانکه سابقاً گفتیم امروزه با تغییر لباس یعنی تغییر در اصطلاحات علمی از راه اروپا بمان رسیده و ریاضی دانان ما تصور میکنند که از تحقیقات دانشمندان اروپا میباید.

در کتاب خوارزمی پس از حل معادله $x^2 + ۲۱ = ۱۰x$ همین بحث را عیناً پیش میکشد. باین طریق که ابتدا معادله را طبق دستوری که قبلاً بآن اشاره کردیم حل میکند:

$$\begin{aligned} x &= \frac{۱۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^2 - ۲۱} \\ &= ۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۲۱} \\ &= ۵ \pm \sqrt{۴} \\ &= ۵ \pm ۲ \end{aligned}$$

و پس از اینکه دو جواب برای معادله بدست می‌آورد مینویسد:

« و اعلم انك اذا نصف الاجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها فکان مبلغ ذلك اقل من الدراهم التي مع المال فالمسئلة مستحيلة وان كان مثل الدراهم بعينها فجزر المال مثل نصف الاجذار سوا لا زيادة ولا نقصان ».

و منظور او از این عبارت اینست که اگر $q < \frac{p^2}{4}$ یعنی $q < \frac{p^2}{4}$

باشد معادله جواب ندارد و بجای کلمه «مستحیل» که بکار برده است امروز کلمه «موهومی» را بکار می‌برند؛ و اگر $q = \frac{p^2}{4}$ یعنی $q = \frac{p^2}{4}$ باشد معادله فقط يك

جواب دارد آنهم مساوی $\frac{p}{۲}$ است.

توضیح - معنی اصطلاحات ریاضی که در این عبارت عربی آورده شده
 بقرار زیر است :

اجذار یعنی ضریب x که p میباشد و نصف الاجذار یعنی $-\frac{p}{2}$ ؛

مال یعنی x^2 و جذر المال یعنی x ؛

دراهم یعنی جمله معلوم که q باشد ؛

مستحیله یعنی موهومی یا ممتنع و شارح کتاب آنرا :

The instance is impossible ترجمه کرده و Cannot happen نیز مینویسد ؛

تبصره - ریاضیون قدیم ایران معادله کامل درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ را بر حسب اینکه ضریب x و جمله معلوم در آن مثبت یا منفی باشد سه شکل نمایش داده و هر کدام را يك صنف مینامیدند و راه حل هر يك از آنها را جداگانه با استدلال هندسی تعیین مینمودند، ولی سرانجام فرمول کلی $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ برای حل هر سه صنف معادله بدست میآمد .
 سه صنف معادلات مزبور عبارتند از :

۱- ضریب x مثبت و جمله معلوم منفی است ، مثال :

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$

۲- ضریب x منفی و جمله معلوم مثبت است ، مثال :

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

۳- ضریب x منفی و جمله معلوم نیز منفی است ، مثال :

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

ضمناً باید توجه داشت که قدام جمله منفی را با تغییر علامت بطرف دیگر معادله نقل میگردند که تمام جمل مثبت باشد ، بنابراین سه صنف معادلات

بالا را بترتیب چنین مینوشتند :

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$x^2 = 3x + 4$$

چون ریاضیون قدیم ، حروف و علامات کنونی را در معادلات بکار نمیبردند . لازم است بدانیم چه اصطلاحاتی بجای آنها معمول میداشته‌اند ؛ پس گوئیم بجای x کلمه شیشی را بکار میبردند و مجذور آنرا که x^2 باشد مال مینامیدند و چندین x^2 یا ax^2 را چند مال یا بطور کلی اموال میگفتند ، و چون x جذر x^2 میباشد لذا آنرا معمولاً بنام جذر نامیده و px را چند جذر یا اجذار یا جذور میگفتند ؛ و بالاخره مقدار معلوم یعنی q را عدد مینامیدند ؛ پس برای تعریف سه صنف معادله بالا بترتیب چنین میگفتند :

(۱) اموال و جذور تعدل عددا یعنی مالها و جذرها معادل با عدد است :

$$(ax^2 + bx = c)$$

(۲) اموال و عدد تعدل جذورا یعنی مالها و عدد معادل با جذرها است :

$$(ax^2 + c = bx)$$

(۳) جذور و عدد تعدل اموالا یعنی جذرها و عدد معادل با مالها است :

$$(ax^2 = bx + c)$$

☆☆☆

صنف اول را که نمونه عددی آن معادله $x^2 + 10x = 39$ میباشد بابرهان هندسی در صفحه ۳۲ حل کردیم و راه حل را که منجر به پیدا کردن فرمول میگردد بیان داشتیم .

☆☆☆

اینک بحل صنف دوم از معادلات مزبور میپردازیم ؛ مثلاً برای حل معادله

درجه دوم :

$$x^2 + 21 = 10x$$

در حالت اول نقطه h وسط bc میباشد (ش ۳) پس :

$$bc = \frac{10}{2} = 5$$

پس خط ch را که مساوی cd یعنی x است با اندازه $ck = ch = a$ امتداد میدهیم و چنین خواهیم داشت :

$$bc = ch = 5$$

حال بر روی ضلع ck مربع cm را بنا میکنیم ؛ چون طول هر ضلع این مربع مساوی 5 است ، بنابراین مساحت آن 25 خواهد شد که در حقیقت مربع cm یا مجذور نصف ضریب x است :

$$25 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$$

و میدانیم که مساحت مربع مستطیل cm مساوی 21 بوده و مستطیل cm از آن جدا شده است . اکنون خط cl را با اندازه ck جدا کرده مربع cl را میسازیم ؛ و گوئیم خط ch مساوی خط cl است ؛ پس سطح cm مساوی سطح cl میشود ؛ بنابراین :

$$21 = \text{سطح } cm = \text{سطح } cl + \text{سطح } cm = \text{سطح } cl + \text{سطح } cm$$

$$25 = \text{سطح } cm \text{ میباشد} \quad \text{و چون}$$

پس اگر سطوح cm و cl را از سطح cm کم کنیم مربع کوچک ck باقی میماند ؛ بنابراین مساحت مربع کوچک ck مساویست با :

$$25 - 21 = 4$$

و جذر آن مساوی است با $\sqrt{4} = 2$ که آنهم مساویست با $ch = a$

پس :

$$ch = a = \sqrt{25 - 21} = \sqrt{4} = 2$$

و اگر آنرا از خط $ج$ که مساوی $۰ = \frac{۱۰}{۲}$ یا نصف ضریب x است کم کنیم خط $ا$ $ج$ باقی میماند پس:

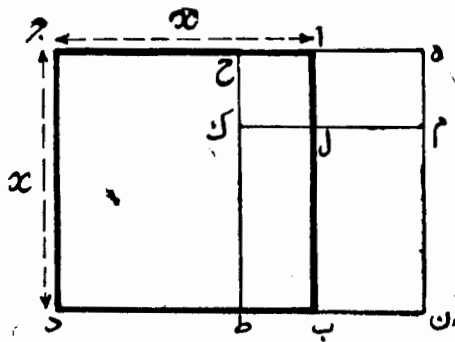
$$x = ۱ ج = ۵ - ۲ = ۳$$

در حالت دوم - نظیر همان استدلالات را با مختصر اختلافی در وضع حروف تکرار میکنیم و نتیجه این میشود که باید عدد ۲ را که نمودار خط $ا$ میباشد به خط $ج$ که مساوی $۰ = \frac{۱۰}{۲}$ یا نصف ضریب x است بیفزائیم تا خط $ا$ $ج$ یا x بدست آید (ش ۶) پس:

$$x = ۱ ج = ۵ + ۲ = ۷$$

و باین طریق می بینیم که معادله $x^2 + ۲۱ = ۱۰x$ دو جواب دارد

$$x_2 = ۷ \text{ و } x_1 = ۳$$



(ش ۶)

در حالت مخصوص $ا$ مساوی صفر بوده یعنی نقطه $ح$ بر $ا$ منطبق میباشد؛ در این صورت x یعنی $ا$ $ج$ نصف $ه$ $ج$ یا نصف ضریب x خواهد بود؛ و این حالت منطبق است با حالتی که در فرمول:

$$x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^2}{۴} - q}$$

مقدار زیر رادیکال و بنابراین خود رادیکال مساوی صفر باشد که در این صورت:

$x = -\frac{P}{۲}$ و امروزه میگویند معادله دارای ریشه مضاعف است .

برای حل صنف سوم از معادلات درجه دوم مثلاً معادله $x^2 = ۳x + ۴$ خوارزمی باز متوسل بیرهان هندسی نظیر آنچه که در صنف اول و دوم بیان داشتیم گردیده که برای رعایت اختصار در این رساله از شرح آن صرف نظر کردیم .

ریاضیون قدیم ایران نه تنها برای حل معادلات جبری بلکه برای حل بسیاری از مسائل ریاضی و تعیین مقادیر و اندازه گیریهای هندسی دستوراتی داشته‌اند که با فرمولهای امروزه کاملاً مطابق است . بعبارت دیگر فرمولهای کنونی اقتباس از دستورات قدماست با این تفاوت که بجای اصطلاحات و عبارات ریاضی قدیم متأخرین حروف و علامات را بکار برده‌اند .

مثلاً میدانیم که مساحت مثلث مساویست با حاصلضرب قاعده در نصف ارتفاع ، ولی اگر ارتفاع در دست نباشد و سه ضلع مثلث با بعداد a و b و c معلوم باشد ، مساحت S مثلث را بوسیله فرمول زیر تعیین میکنند :

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{۲} - a} \left(\frac{a+b+c}{۲} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{۲} - c \right) \left(\frac{a+b+c}{۲} \right)$$

در کتاب مفتاح الحساب عین این دستور منتها با عبارت زیر دیده میشود :
« تفاضل هریک از اضلاع مثلث را از نصف مجموع اضلاع گرفته و این تفاضل‌ها را در یکدیگر ضرب کرده و حاصل را در نصف مجموع اضلاع ضرب نموده و جذر حاصل را بدست آورید و آن مساحت مثلث خواهد بود . »

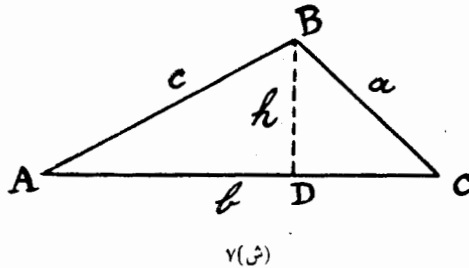
و برای روشن شدن مطلب مثال زیر را می‌آورد :

فرض میکنیم یکی از اضلاع مثلث ۱۰ و ضلع دیگر ۱۷ و ضلع سوم ۲۱ باشد ، در اینصورت نصف مجموع اضلاع مساوی ۲۴ خواهد بود و تفاضل آن از ۱۰ مساوی

۱۴ واز ۱۷ مساوی ۷ و از ۲۱ مساوی ۳ میباشد . اکنون ۱۴ را ۷ ضرب میکنیم ۹۸ بدست میآید و آنرا ۳ ضرب میکنیم ۲۹۴ بدست میآید ، آنرا در ۲۴ که نصف مجموع اضلاع است ضرب مینمائیم عدد ۷۰۵۶ بدست خواهد آمد جذر آنرا میگیریم ۸۴ میشود وهوالمطلوب .

برای اینکه تا اندازه ای به حدت ذهن و میزان نکات و هوش ریاضی - دانان قدیم جهت پیدا کردن این قبیل فرمولها پی ببریم راهی را که امروزه در کتابها برای تعیین مساحت مثلث بکار میبرند و منجر به کشف همین فرمول میشود شرح میدهیم و آن اینست :

فرض میکنیم سه ضلع a و b و c مثلث ABC معلوم باشد (ش ۷) و بخواهیم



از روی آن ، مساحت این مثلث را بدست آوریم . برای اینکار ارتفاع $BD = h$ را رسم میکنیم ، و فرض مینمائیم $DC = m$ تصویر ضلع BC بر AC باشد . در هندسه ثابت شده است که :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$$

(در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزایه حاده مساویست با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای مضاعف مسطح یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دوم بر همین ضلع)

و از آنجا :

$$m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

و از طرف دیگر در مثلث BDC داریم :

$$h^2 = a^2 - m^2$$

بجای m مقدار آنرا که از رابطه بالا بدست آورده ایم میگذاریم ، میشود :

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right)^2$$

$$h^2 = \frac{\xi a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{\xi b^2} \quad \text{یا}$$

صورت این کسر تفاضل مجذور دو مقدار است ، آنها را بعوامل خود تجزیه

میکنیم :

$$h^2 = \frac{(\xi ab + a^2 + b^2 - c^2) (\xi ab - a^2 - b^2 + c^2)}{\xi b^2}$$

صورت را در ۱ - ضرب میکنیم و برای اینکه تغییری در کسر داده نشود

در دو رابطه پائین تر مجدداً آنرا در ۱ - ضرب مینمائیم و پس از تجزیه متوالی

بعاملها مرتباً چنین حاصل میشود :

$$h^2 = \frac{[(a+b)^2 - a^2] [(a-b)^2 - c^2]}{\xi b^2}$$

$$h^2 = \frac{[(a+b+c)(a+b-c)] [(a-b+c)(a-b-c)]}{\xi b^2}$$

$$h^2 = \frac{[(a+b+c)(a+b-c)] [(a-b+c)(b+c-a)]}{\xi b^2}$$

اگر نصف مجموع اضلاع مثلث یعنی نصف محیط را به N بنمائیم خواهیم

داشت :

$$a + b + c = 2N$$

و مرتباً چنین بدست میآید :

$$a + b - c = 2N - 2c = 2(N - c)$$

$$a - b + c = 2N - 2b = 2(N - b)$$

$$b + c - a = 2N - 2a = 2(N - a)$$

واز آنجا :

$$h^2 = \frac{\surd N \times \surd(N-c) \times \surd(N-b) \times \surd(N-a)}{\surd b^2}$$

و یا :

$$h^2 = \frac{\surd N(N-a)(N-b)(N-c)}{b^2}$$

و

$$h = \sqrt{\frac{\surd N(N-a)(N-b)(N-c)}{b^2}}$$

یا :

$$h = \frac{\surd}{b} \sqrt{N(N-a)(N-b)(N-c)}$$

و چون مساحت مثلث ABC مساویست با حاصلضرب قاعده b در نصف ارتفاع

h پس :

$$\text{مساحت مثلث } S = b \times \frac{h}{\surd} = b \times \frac{\surd}{\surd b} \sqrt{N(N-a)(N-b)(N-c)}$$

و یا بالاخره :

$$S = \sqrt{N(N-a)(N-b)(N-c)}$$

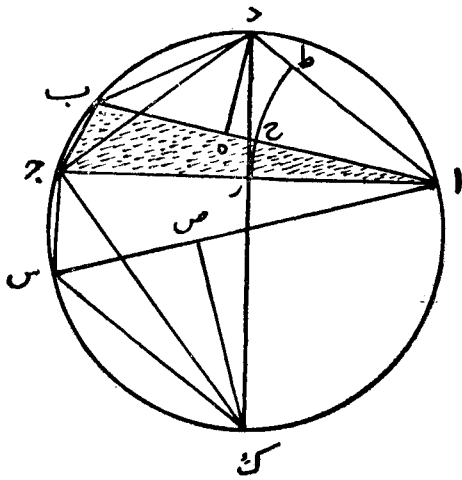
قدما با در دست داشتن اندازه سه ضلع مثلث همین فرمول را از راه برهان

هندسی پیدا میگردند و ابوریحان بیرونی طریق عمل آنرا در کتاب «رسائل البیرونی»

شرح داده و آنرا به ارشمیدس نسبت میدهد؛ و چون این راه تا اندازه ای پیچیده

و بفرنج است از شرح آن صرف نظر کرده و فقط تصویر آنرا در اینجا رسم میکنیم.

(ش ۱۸)



(ش ٨)

گفتار سوم

چند نمونه از دستورات وقواعدی که در جبر و مقابله
دانشمندان اسلامی ذکر شده است

ریاضیون اسلامی قوای متوالی اعداد را میشناخته و استخراج جذر و کعب و ریشه های بالاتر را میدانسته و راجع به ریشه های منطق و اصم مطالبی بیان کرده اند که با گفته های امروزی مطابقت دارد؛ و غیاث الدین جمشید کاشانی در کتاب مفتاح الحساب طی پنجاه قاعده قضایای مربوط به قوا و ریشه ها و تصاعدات و تناسبات و غیره را که در حل مسائل جبری مورد احتیاج واقع میشوند شرح داده که برای نمونه بعضی از آنها را ذکر و باموازین علمی کنونی تطبیق میکنیم.

١- در کتاب جبر و مقابله وحید جلد اول صفحه ١٢٤ مینویسد:

قضیه - حاصلضرب چندین رادیکال دارای يك نماینده رادیکالی است که نماینده اش همان نماینده مشترك و مقدار واقع در زیرش حاصلضرب مقادیر واقع

در زیر رادیکالهای عامل باشد .

یعنی :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{abc}$$

زیرا اگر طرفین تساوی فوق را مکعب کنیم در هر دو طرف حاصل مساوی

abc میشود .

مثال : $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$ (ومثالهای دیگر نیز میآورد که از نقل

آن صرفنظر میکنیم) .

در کتاب مفتاح الحساب این قضیه را در قاعده اول بترتیب زیر بیان

میدارد :

اگر بخواهیم جذر عددی را در جذر عدد دیگر یا جذر جمله‌ای را در جذر

جمله دیگر که درجه‌اش با درجه جمله مزبور فرق داشته باشد ضرب کنیم باید

دو عدد یا دو جمله را در یکدیگر ضرب کرده جذر حاصل را استخراج نمائیم .

ومثالهایی میآورد که ما دوتا از آنها را باعلامات وحروف کنونی نشان میدهیم :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{9x^2} \times \sqrt{20x^4} = \sqrt{220x^6} = 10x^3 \text{ و}$$

تبصره - برای ضرب دو یا چند رادیکال که دارای يك نماینده نبوده بلکه

نماینده‌های مختلف دارند ابتدا نماینده‌ها را یکی کرده سپس عمل فوق را انجام

میدادند مثلا برای ضرب $\sqrt{9x^4} \times \sqrt[3]{8}$

بترتیب چنین عمل میگردند :

$$\sqrt{9x^4} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(9x^4)^2} \times \sqrt[3]{8^2} =$$

$$\sqrt[3]{(9x^4)^2 \times 8^2} = \sqrt[3]{729x^8 + 64} =$$

$$\sqrt[3]{46656 x^{12}} = 6x^4$$

البته ریشه ششم عدد ۴۶۶۵۶ را از روی جدولی با قواعد معین استخراج می‌کردند .

قضیه - خارج قسمت دو رادیکال دارای يك نماینده، رادیکالی است که نماینده اش همان نماینده مشترک و مقدار واقع در زیرش خارج قسمت مقادیر واقع در زیر رادیکالهای مقسوم و مقسوم علیه باشد یعنی :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

زیرا

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{b} = \sqrt{\frac{ab}{b}} = \sqrt{a}$$

مثال

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲۷}} = \sqrt{\frac{۳}{۲۷}} = \frac{۱}{۳}$$

و

$$\frac{\sqrt[۳]{۱۶}}{\sqrt[۳]{۲}} = \sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۲}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

این قضیه نیز در کتاب مفتاح الحساب ذکر شده که ما ترجمه آنرا ذیلا نقل می‌کنیم :

در تقسیم نیز همین حکم جاری است یعنی اگر بخواهیم جذر عددی یا جمله جبری را بر جذر عددی یا جمله دیگر تقسیم کنیم مجذور مقسوم را بر مجذور مقسوم علیه تقسیم کرده و جذر خارج قسمت را استخراج می‌کنیم . مثال :

$$\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳۲}{۲}} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۲- در جبر وحید جلد ۳ صفحه ۸۰ مینویسد :

سلسله اعداد صحاح تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جمله اول و قدر

نسبتش a میباشد مطلوبست حاصل جمع n جمله اوایل آن چون در دستور
 $S = n \times \frac{2a + (n-1)r}{2}$ (a جمله اول ، n عدد جمله ، r قدرنسبت و S حاصلجمع
 تصاعد حسابی میباشد)

بجای حروف مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود :

$$S = n \times \frac{2 \times 1 + (n-1) \times 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثلا حاصلجمع هشتاد جمله اول آن مساویست با :

$$S = \frac{80 \times (80+1)}{2} = 3240$$

درمفتاح الحساب قاعدهٔ مزبور را چنین مینویسد :

اگر بخواهیم سلسلهٔ اعداد متوالیه را از واحد تا عدد مفروضی باهم جمع
 کنیم عدد يك را با عدد مزبور جمع کرده و مجموع را در نصف همان عدد ضرب
 میکنیم ؛ مثال - میخواهیم سلسلهٔ اعداد متوالیه را از يك تا ده باهم جمع کنیم
 حاصل چنین میشود :

$$(10+1) \times \frac{10}{2} = 55$$

و اگر بخواهیم حاصلجمع اعداد متوالیه را از غیر واحد تا هر عددی که
 بخواهیم بدست آوریم دو عدد طرفین یعنی کوچکترین و بزرگترین اعداد را باهم
 جمع کرده و حاصل جمع را در نصف عدد این اعداد ضرب مینمائیم .

مثال - میخواهیم جمع اعداد متوالیه از ۳ تا ۱۰ را بدست آوریم ۳ را با ۱۰
 جمع میکنیم میشود ۱۳ و آنرا در نصف عدد جمله یعنی ۴ ضرب مینمائیم نتیجه
 چنین میشود : $13 \times 4 = 52$

۳- در جبر وحید جلد ۳ صفحهٔ ۸۰ مینویسد :

سلسله اعداد صحاح فرد تصاعد عددی تشکیل میدهند که جمله اول آن ۱ و قدر نسبتش ۲ میباشد مطلوبست حاصل جمع n جمله اول آن تصاعد. - از دستور

$$S = n \times \frac{2a + (n-1)r}{2} \quad \text{میتوان چنین داشت:}$$

$$S = n \times \frac{2 + (n-1)2}{2} = n^2$$

مثلا حاصل جمع هشت جمله اول آن مساویست با:

$$S = 8^2 = 64$$

و در مفتاح الحساب چنین مینویسد: اگر بخواهیم اعداد متوالی فرد را با یکدیگر جمع کنیم بر عدد فرد آخری يك واحد افزوده و نصف حاصل را که عدۀ این اعداد فرد است^(۱) در نفس خود ضرب مینمائیم.

مثال - مطلوب جمع اعداد فرد متوالی از يك تا نه است. يك واحد به نه می افزائیم میشود ده، مجذور نصف آن که ۲۵ است حاصل جمع مطلوب خواهد بود.

۴ - در جبر وحید جلد ۳ صفحه ۸۱ مینویسد:

سلسله اعداد صحاح زوج تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جمله اول و قدر نسبتش ۲ میباشد مطلوبست تعیین حاصل جمع n جمله اول آن تصاعد چون در دستور فوق الذکر بجای حروف مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود:

$$S = n \frac{2 \times 2 + (n-1)2}{2} = n(n+1)$$

مثلا حاصل جمع نه جمله اول آن مساویست:

$$S = 9(9+1) = 90$$

در مفتاح الحساب مینویسد: اگر بخواهیم حاصل جمع اعداد زوج متوالی را بدست آوریم، نصف آخرین زوج یعنی عدۀ این اعداد زوج را در همین عدۀ باضافه يك ضرب میکنیم.

مثال . - میخواهیم حاصل جمع اعداد زوج متوالی از ۲ الی ۱۰ را بدست آوریم . عدد ۵ را در ۶ ضرب میکنیم میشود ۳۰ فهو المطلوب .

~~*

از توجه بمطالب بالا معلوم میشود که چگونه اکثر دستورات وقواعد ریاضی امروزه طابق التعل بالتعل اقتباس از تحقیقات علمی قدما است و چون در اینجا از تصاعد حسابی گفتگو میکنیم ، برای مزید استحضار خوانندگان دو قضیه اصلی تصاعدهات حسابی را نیز از روی کتابهای کنونی ذکر کرده و آنها را با مندرجات کتاب مفتاح الحساب تطبیق میدهیم .

در کتابهای امروز برای اینکه مقدار جمله مرتبه n ام در يك تصاعد عددی بدست آید قضیه و فرمول زیر را ذکر میکنند :

قضیه - مقدار جمله مرتبه n ام - مقدار ۱ جمله n ام تصاعد عددی که جمله اولش a و قدر نسبتش r باشد مساویست با :

$$l = a + (n-1)r$$

و برای تعیین حاصل جمع جمل يك تصاعد حسابی قضیه و فرمول زیر را دستور میدهند :

قضیه - حاصل جمع هر تصاعد حسابی محدود مساویست بحاصل ضرب عدد جمل در نصف مجموع دو جمله طرفین :

$$S = n \times \frac{a+l}{2}$$

اگر در دستور فوق بجای ۱ مقدارش $a + (n-1)r$ را قرار دهیم دستور ذیل بدست میآید :

$$S = n \times \frac{2a + (n-1)r}{2}$$

این دو قضیه با فرمولهائی که ذکر شد در کتاب مفتاح الحساب ضمن قاعده هفتم بیان شده است باین شرح :

اگر بخواهیم حاصل جمع سلسله اعدادی را که تفاضل هر دو عدد متوالی آن مقدار ثابتی باشد^(۱) بدست آوریم ، باید از عدّه جمل آن يك واحد کم کرده^(۲) و حاصل را در تفاضل دو عدد متوالی^(۳) ضرب نموده^(۴) و آنچه بدست میآید با عدد کوچکتتر^(۵) جمع کنیم تا عدد بزرگتر^(۶) بدست آید^(۷) و مجدداً عدد کوچکتتر را بر آن افزوده و حاصل را در نصف عدّه جمل ضرب نمائیم تا حاصل جمع مطلوب بدست آید^(۸).

محاسبات و مسائل دیگری نیز امروزه در کتابها ضمن بحث از تصاعدات عددی مطرح شده که در بادی امر تصور نمیرود قدما آنها را مورد مطالعه قرار داده باشند ؛ ولی با کمال تعجب می بینیم که این مسائل را نیز آنها در کتابهای خود ذکر کرده اند . مثلاً مجموع مکعبات n عدد صحیح اول ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ... را در کتب جدید بوسیله فرمولی تعیین کرده و نشان داده اند که این مجموع مساویست با مجذور مجموع آنها^(۱).

(۱) چنین سلسله اعدادی تشکیل يك تصاعد حسابی میدهد که تفاضل هر دو عدد متوالی قدر نسبت آن میباشد .

(۲) یعنی $n - ۱$

(۳) یعنی در قدر نسبت

(۴) که $r(n - ۱)$ میشود

(۵) یعنی جمله اول

(۶) یعنی جمله n ام

(۷) با علائم کنونی چنین میشود $l = a + (n - ۱)r$

(۸) و این حاصل جمع همان فرمول $S = n \times \frac{2a + (n - ۱)r}{۲}$ است .

(۱) جبر وحید جلد ۳ صفحه ۸۳.

و آنگاه می بینیم که درمفتاح الحساب نیز همین موضوع در قاعدهٔ سیزدهم
بعبارت زیر بیان شده است :

« اذا اردنا ان نجمع مكعبات الاعداد المتوالية من الواحد الى كم شيئاً
نضرب مجموع تلك الاعداد في نفسه يحصل المطلوب » .

یعنی : « اگر بخواهیم مجموع مکعبات اعداد متوالیه را از واحد تا هر
عدد مفروضی بدست آوریم مجموع این اعداد را در نفس خود ضرب میکنیم عدد
مطلوب بدست خواهد آمد . »



اکنون به قضایائی در تصاعدات حسابی برخورد میکنیم که در کتب جدید
قید نشده ولی قدما آنها را مطرح نموده اند . از جمله در قاعدهٔ هشتم چنین
میگویند :

سلسلهٔ اعداد زیر را :

۱ ۳ ۶ ۱۰ ۱۵ و.....

در نظر گرفته و تفاضل بین هر دو جمله را بتوالی یکدیگر مینویسیم :

۲ ۳ ۴ ۵ و.....

می بینیم که تفاضل های مزبور تشکیل يك تصاعد حسابی میدهند که قدر
نسبت آن يك است ؛ بنابراین در سلسله اعدادی که در نظر گرفتیم اختلاف بین
هر دو جملهٔ متوالی مرتباً يك واحد افزایش می یابد .

همچنین در سلسله اعداد :

۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ و.....

می بینیم که تفاضل بین هر دو جملهٔ متوالی مرتباً ۲ واحد افزایش پیدا
میکند زیرا تفاضل های مزبور عبارتند از :

۳ ۵ ۷ ۹ و.....

و بهمین طریق میتوان سلسله اعدادی را در نظر گرفت که تفاضل هر دو جمله متوالی آن ۳ یا ۴ یا ۵ یا ... هر مقدار که بخواهیم باشد افزایش یابد؛ در اینصورت مطلوب پیدا کردن حاصل جمع چند جمله اول از سلسله اعدادی است که تفاضل بین هر دو جمله متوالی آن مرتباً باندازه عدد مفروضی افزوده شود؛ مثلاً تعیین کنید حاصل جمع ۱۰ جمله اول از سلسله اعدادی که از واحد شروع شده و تفاضل بین هر دو جمله متوالی آن مرتباً ۳ واحد افزایش پیدا کند. برای بدست آوردن حاصل جمع مزبور از عدد جمله که ۱۰ است یک واحد کم میکنیم عدد ۹ بدست میآید؛ آنرا در ۳ که از دیاد تفاضلها است ضرب میکنیم حاصل ۲۷ میشود؛ آنرا در ۵۵ که حاصل جمع ده جمله اول سلسله اعداد بشماره طبیعی از ۱ تا ۱۰ است ضرب میکنیم ۵۵۰ بدست میآید و آن عدد مطلوبست.



و بهمین ترتیب ریاضیون قدیم ایران قضایا و قواعد مربوط به تصاعدات هندسی و سپس انواع نسبتها و اتحادها را که همه آنها امروزه در کتب جبر و هندسه موجود است بیان داشته اند. مثلاً درباره اتحادها مینویسند:

مربع مجموع دو مقدار مساویست با مربع یکی از آنها با اضافه مربع دیگری با اضافه دو برابر حاصل ضرب یکی از آنها در دیگری و این مطلب با علائم کنونی چنین میشود:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

و نیز حاصل ضرب مجموع دو مقدار در تفاضل همان دو مقدار مساویست با تفاضل مجذور آنها یعنی:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

و این قبیل قضایا را بابرهان هندسی ثابت میکردند؛ مثلاً در مورد:

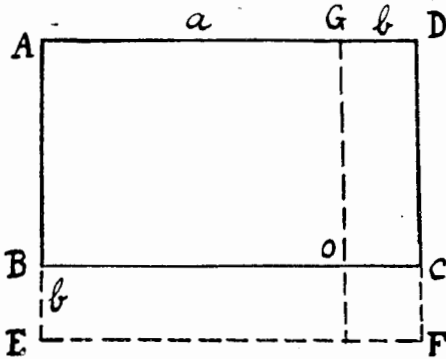
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربعی بطول $a + b$ رسم میکردند و بطوریکه از روی (شکل ۸) پیداست

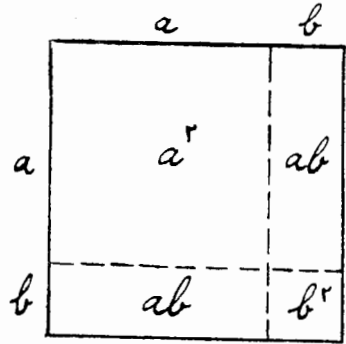
تساوی مزبور ثابت میکردید؛ و در مورد: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ مستطیل ABCD

(ش ۹) را که عبارت از مسطح $a + b$ در $a - b$ است رسم میکردند و از روی شکل پیداست که :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



(ش ۹)



(ش ۸)

از آنچه تا کنون مختصراً ذکر شد چنین استنباط میشود که اساس و بنیان علم جبر و مقابله کمنونی همانست که قدما طرح ریزی کرده و قواعد و قوانین آنرا بیان داشته و بسیاری از فرمولهای جبری را نیز بدست آورده بودند؛ معادلات درجه اول و دوم را بخوبی حل کرده و راه حل معادلات درجه سوم را نیز چنانکه خواهیم دید معین نموده اند، و در تمام این موارد متأخرین چیزی بر پیشینیان نیفزوده مگر اینکه علامات و حروف را جانشین مفهومات و عبارات ریاضی نموده اند.

* (بخش دوم) *

* (اکتشافات خیام در جبر و مقابله) *

جرج سارتن استاد تاریخ علوم در دانشگاه هاروارد که یکی از اجلّه مورخان علوم قرن بیستم (۱۹۵۷-۱۸۸۴) است در یکی از مؤلفات خود بنام «مدخل تاریخ علوم» راجع به خیام چنین مینویسد:

« عمر خیام یکی از بزرگترین ریاضیون قرون وسطی است؛ کتاب جبر او حاوی حل هندسی و جبری معادلات درجه دوم، طبقه بندی قابل تحسین معادلات درجات اول و دوم و سوم و تحقیق منظم در حل تمام وحل ناتمام اغلب آنهاست. »
خیام معادلات درجه اول و دوم و سوم را ابتدا به معادلات دو جمله ای و سه جمله ای و چهار جمله ای بطریق زیر تقسیم بندی میکند:

۱- معادلات دو جمله ای یا مفردات (۱)

$$\begin{array}{lll} * a = x & * a = x^2 & a = x^3 \\ * ax = x^2 & ax^2 = x^3 & ax = x^3 \end{array}$$

۲- معادلات ۳ و چهار جمله ای یا مقترنات

الف - مقترنات سه جمله ای شامل ۱۲ صنف اند:

سه صنف بین عدد و x و x^2 :

(۱) معادلاتی که در جلوی آنها علامت * دیده میشود قبل از خیام حل و بحث شده اند.

$$\begin{cases} x^2 + ax = b \\ *x^2 + b = ax \\ x^2 = ax + b \end{cases}$$

سه صنف بین x و x^2 و x^3

$$(۱) * \begin{cases} x^3 + ax^2 = bx \\ x^3 + bx = ax^2 \\ x^3 = ax^2 + bx \end{cases}$$

شش صنف بین عدد و x و x^3 یا عدد و x^2 و x^3 :

$$\begin{cases} (۱) x^3 + Bx = C \\ (۲) x^3 + C = Bx \\ (۳) x^3 = Bx + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} (۴) x^3 + Ax^2 = C \\ (۵) *x^3 + C = Ax^2 \\ (۶) x^3 = Ax^2 + C \end{cases}$$

ب - مقترنات چهار جمله‌ای شامل هفت صنف اند . چهار صنف که در آنها

یکی از مراتب معادل مجموع سه مرتبه دیگر است :

$$\begin{cases} (۷) x^3 + Ax^2 + Bx = C \\ (۸) *x^3 + Ax^2 + C = Bx \\ (۹) x^3 + Bx + C = Ax^2 \\ (۱۰) x^3 = Ax^2 + Bx + C \end{cases}$$

سه صنف که در آنها دو مرتبه معادل دو مرتبه دیگر است :

(۱) این سه صنف که ظاهراً از معادلات درجه سوم بشمار میروند درحقیقت از درجه دوم اند زیرا میتوان در تمام آنها از x عامل مشترك گرفت و در اینصورت معادلات مزبور شبیه بمعادلات سه گانه درجه دوم که قبل از آنها ذکر شد میگردند و خیام نیز به این مطلب اشاره کرده و بطریق هندسی ثابت میکند که مثلاً معادله $x^3 + ax^2 = bx$ با معادله $x^2 + ax = b$ معادل است .

$$\begin{cases} (۱۱) & x^3 + Ax^2 = Bx + C \\ (۱۲) & x^3 + Bx = Ax^2 + C \\ (۱۳) & x^3 + C = Ax^2 + Bx \end{cases}$$

بامختصر دقتی معلوم میشود که معادلات بالا شامل تمام اشکال معادلات ناقص و کامل درجه دوم و سوم میباشد؛ و چون بحث ما راجع بمعادلات درجه سوم است، کوئیم این قبیل معادلات را امروزه بصورت کلی .

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

نمایش میدهند که هر گاه تمام جمل در آن موجود باشد معادله را کامل گویند، و اگر يك یا چند جمله وجود نداشته باشد معادله ناقص بوده و یکی از اشکال زیر نشان داده میشود :

$$(۱) \quad ax^3 + bx^2 + cx = 0.$$

$$(۲) \quad ax^3 + bx^2 + d = 0.$$

$$(۳) \quad ax^3 + cx + d = 0.$$

$$(۴) \quad ax^3 + d = 0.$$

در معادله (۱) اگر یکی از ضرایب x^2 و x یا هر دو منفی باشد، معادله مزبور سه صورت درمیآید که خیام آنها را در سه صنف بین x^3 و x^2 و x شرح داده است (و در این سه صنف و همچنین در اصناف دیگر تمام جمل برضریب x^3 تقسیم شده که ضریب مزبور واحد باشد)؛ و در معادله (۲) نیز اگر يك یا دو ضریب منفی باشد معادله باز سه صورت درخواهد آمد که خیام آنها را ضمن سه صنف بین عدد و x^3 و x^2 بیان داشته است؛ و در معادله (۳) نیز اگر يك یا دو ضریب منفی باشد معادله سه صورت در میآید که خیام آنها را در سه صنف بین عدد و x^3 و در آورده است؛ و بالاخره معادله (۴) را خیام ضمن معادلات دوجمله‌ای یا مفردات بصورت $a = x^3$ نمایش داده است؛ و چون همانطور که گفتیم قدا تمام جمل معادله را برضریب x^3 تقسیم میکردند که ضریب مزبور مساوی واحد باشد،

بنابراین معادله $a = x^3$ که خیام جزء مفردات ذکر کرده در حقیقت بمنزله معادله ناقص درجه سوم $ax^3 + d = 0$ میباشد :

اما در معادله کامل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ پس از تقسیم تمام جمل بر ضریب x^3 معادله بصورتی در میآید که در آن ، ضریب x^3 مساوی واحد است ؛ پس از این عمل بر حسب اینکه ضرایب x^2 و x و جمله معلوم d مثبت یا منفی باشند ، معادله مزبور به هفت صورت ممکن است درآید و خیام این اشکال هفت گانه را در ضمن مقترنات چهار جمله ای که در بالا شرح دادیم نشان داده است ؛ مثلاً اگر در معادله کامل درجه سوم جمله معلوم منفی باشد ، و این جمله منفی را با نظرف معادله نقل کنیم ، معادله بصورتی در خواهد آمد که خیام آنرا در اولین ردیف مقترنات چهار جمله ای یعنی :

$$(۷) \quad x^2 + Ax^2 + Bx = C$$

نمایش داده است ؛ و هکذا سایر اصناف .

و نیز اگر ضرایب x^2 و x منفی باشد معادله کامل درجه سوم پس از نقل جملی که شامل x^2 و x است بسمت دیگر بصورتی در خواهد آمد که خیام آنرا در ردیف (۱۳) یعنی $x^2 + C = Ax^2 + Bx$ نمایش داده است .

لازم بتذکر است که ریاضیون قدیم ایران چون از راه براهین هندسی بحل معادلات جبری میپرداخته اند ، لذا ناچار بوده اند که برای هر يك از اشکال مختلفه آن ، شخصیت و استقلالی قائل گردیده و هر کدام را جدا گانه با استدلال هندسی حل نمایند ، زیرا در استدلال هندسی نمیتوان اصناف مختلفه معادلات درجه سوم را بصورت کلی $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ تعمیم داده بحل آن پرداخت . خلاصه اینکه خیام رویهم رفته معادلات درجه سوم را اعم از اینکه کامل یا ناقص باشند به چهارده شکل که سیزده تای آن در بالا بوسیله شماره مشخص شده و چهاردهمی بصورت $x^2 = a$ در ردیف مفردات منظور گردیده در آورده و از این ۱۴ شکل فقط دو شکل که عبارت از :

$$\begin{aligned}x^3 + C &= Ax^2 \\ x^3 + Ax^2 + C &= Bx\end{aligned}\quad \text{و}$$

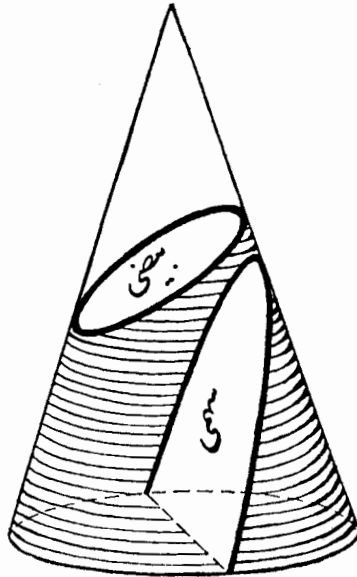
باشد قبل از خیام حل و بحث شده و حل بقیه از اکتشافات خیام است .
در اینجا باید تذکر دهیم که حل معادلات درجه سوم از راه برهان هندسی
آنطور که خیام کشف کرده بسیار آسانتر از حل معادلات مزبور از راه جبر و
مقابله است که امروز بآن عمل میکنند؛ جز اینکه راه هندسی برای رسیدن
بجواب صحیح دقت زیاد در ترسیم اشکال لازم دارد، زیرا جواب یا جوابهای
معادله از اندازه گیریهای دقیق در تقاطع مقاطع مخروطی بدست میآید .
چون در بین مقاطع مخروطی، سهمی و هذلولی نقش بیشتری در حل معادلات
درجه سوم دارند لذا برای تذکر ابتدا تعریف مقاطع مخروطی و سپس خواص
کلی و فرمول اصلی سهمی و هذلولی را بیان میداریم .

البته آقایان استادان و دبیران ریاضی مباحث مربوط بمقاطع مخروطی را
میدانند و بنابراین ممکن است مطالبی که ذکر خواهد شد بنظر آنها بیفایده جلوه
کند ولی کسانی مانند اطبا و مهندسين و لیسانسیه در علوم مختلف و نیز دانشمندان
که اطلاعات عمومی در کلیه علوم دارند و معلومات آنها درباره مقاطع مخروطی
دقیق نیست . برای فهم بر این هندسی که خیام جهت حل معادلات درجه سوم
بکار برده است باید حتماً خواص مقاطع مخروطی و فرمولهای مربوطه را مطالعه
نموده و نیز مقدمه ای را که خیام قبل از شروع بحل معادلات درجه سوم بیان
داشته است با دقت بخوانند تا بگفته های خیام که خیلی مختصر و کوتاه و خالی از
حشو و زوائد میباشد بخوبی پی ببرند؛ بنابراین توجه دقیق خوانندگان را بمطالب
آتی جلب میکنیم :

بطوریکه در کتب کلاسیک شرح داده اند تعریف مقاطع مخروطی و طرز
بدست آمدن آنها بقرار زیر است :

هر گاه صفحه‌ای مخروط دواری (۱) را قطع کند چهار حالت ممکن است اتفاق بیفتد :

- ۱- صفحه مزبور بر محور عمود باشد ، در این صورت مقطع دایره است .
- ۲- صفحه بر محور عمود نباشد اما تمام مولد ها را در يك طرف رأس قطع کند ؛ در این صورت مقطع شکلی است که آنرا بیضی گویند : (Ellipse) .
- ۳- صفحه با یکی از مولد های مخروط موازی باشد ؛ در این صورت مقطع منحنی غیر مسدودی است که سهمی (Parabole) خوانده میشود .
- ۴- صفحه مزبور برخی از مولد ها را در يك طرف رأس و برخی دیگر را در طرف دیگر آن تلاقی میکند (یعنی هر دو دامنه مخروط را قطع مینماید) مقطع منحنی ایست مرکب از دو شاخه متمایز و هذلولی (Hyperbole) نام دارد . پس دایره ، بیضی ، سهمی و هذلولی ، همه ، فصل مشترک های مخروط دوار بایک صفحه اند . از این روی آنها را مقاطع مخروطی مینامند (ش ۱۰) .

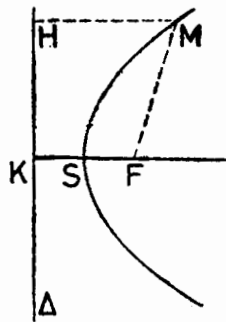


(ش ۱۰)

(۱) هر گاه در مخروط عمودی که از رأس بر قاعده فرود میآید بر مرکز قاعده بگذرد مخروط را دوار گویند .

این تعریف ها و نیز خواص مقاطع مخروطی و فرمولهای آنها را همانطور که امروز در کتابها موجود است قدما شرح داده اند و فقط بعضی از اصطلاحات تغییر پیدا کرده که اینک برای روشن شدن ذهن خوانندگان اصطلاحاتی را که در کتاب جبر و مقابله خیام بکار رفته با معادل کنونی آنها در اینجا ذکر میکنیم.

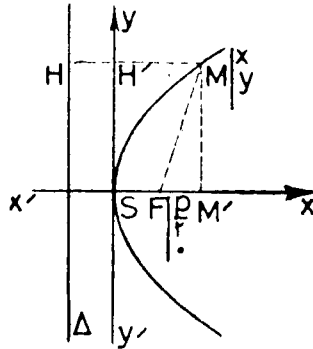
۱ - سهمی - سهمی مکان هندسی نقاطی است که از یکنقطه ثابت و یک خط ثابت بیک فاصله باشند. نقطه ثابت را کانون، خط ثابت را هادی، فاصله کانون از هادی را ممیز یا پارامتر گویند و آنرا به p نمایش میدهند. دو برابر فاصله کانون از هادی یا $2p$ را که در فرمول سهمی داخل است خیام ضلع قائم نامیده پس: ضلع قائم $= 2p$.



(ش ۱۱)

اگر M نقطه‌ای از سهمی باشد $MF = MH$ است؛ MF شعاع حامل نقطه M نامیده میشود (ش ۱۱) و خیام آنرا خط ترتیب نام گذاشته.

S وسط عمود FK ، که از کانون بر هادی رسم شده است، یکنقطه از سهمی و رأس سهمی است.



(ش ۱۲)

سهمی صفحه را بدو جزء تقسیم میکند، جزئی که شامل F کانون منحنی است، آنرا ناحیه داخل سهمی گویند، و جزئی که شامل خط Δ ، هادی منحنی است و آنرا ناحیه خارج سهمی نامند. خیمای قسمتی از محور کانونی را که در گودی Concavité منحنی قرار دارد سهم نامیده است.

معادله سهمی - هر گاه محور سهمی را محور x ها و عمودی را که از رأس سهمی بر آن رسم شود محور y ها اختیار کنیم (ش ۱۲) x نقطه F مساوی $\frac{p}{2}$ و y آن صفر است، اگر مختصات نقطه غیر مشخص M از سهمی را x و y فرض کنیم چنین خواهیم داشت:

$$MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

و

$$MH = x + \frac{p}{2}$$

اما

$$MF^2 = MH^2$$

یا

$$y^2 + x^2 + \frac{p^2}{4} - px = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$$

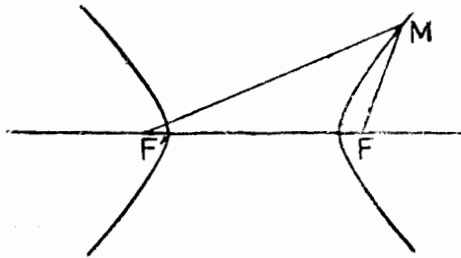
و پس از ساده کردن :

$$y^2 = 2px$$

چنانکه بعداً خواهیم دید خیام فرمول $y^2 = 2px$ را برای حل معادلات درجه سوم بکار برده است .

۴- هذلولی - هذلولی مکان هندسی نقاطی است واقع در يك صفحه که تفاضل فواصلشان از دو نقطه ثابت مانند F و F' مقدار ثابت $2a$ (۱) باشد . (ش ۱۳)

دو نقطه ثابت را دو کانون و $2a$ را عدد ثابت هذلولی گویند . فاصله بین دو کانون را فاصله کانونی هذلولی مینامند و به $2c$ نمایش میدهند از مثلث $MF'F$ که در آن هر ضلع بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر واضح میشود که $2a < 2c$ و یا $a < c$ است .



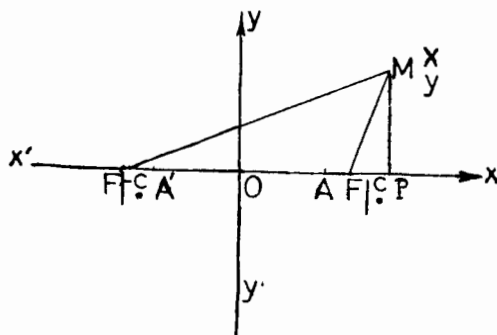
(ش ۹-۱)

(ش ۱۳)

MF و MF' را شعاع های حامل نقطه M میگویند . واضح است که این دو شعاع حامل میتوانند هر مقداری را احراز کنند پس بر روی هذلولی نقاطی میتوان یافت که بسیار دور باشند .

(۱) مقدار ثابت $2a$ را که در کتابهای امروزه بنام **طول قطر قاطع** مینامند خیام ضلع مایل نامیده است .

محاسبه شعاع‌های حامل در هذلولی - محور قاطع را محور طولها و محور غیر قاطع را محور عرض‌ها و نقطه مرکز هذلولی را مرکز مختصات اختیار میکنیم و مختصات هر نقطه M از هذلولی را x و y مینامیم (ش ۱۴).



(ش ۱۴)

از محاسبه‌ای نظیر آنچه در محاسبه شعاع‌های حامل در بیضی بیان شده است (بکتاب مخروطات مراجعه شود) طول شعاع‌های حامل نقطه M چنین بدست می‌آید:

$$MF = a - \frac{cx}{a}$$

و

$$MF' = a + \frac{cx}{a}$$

معادله هذلولی - هر گاه محورهای مختصات را مطابق (ش ۱۴) بر محورهای هذلولی منطبق اختیار کنیم و از M عمود MP را بر x فرود آوریم در مثلث قائم الزاویه MPF' چنین خواهیم داشت:

$$MF'^2 = MP^2 + F'P^2$$

و چون

$$MF' = a + \frac{cx}{a}$$

$$F'P = x + c$$

$$PM = y$$

و

و

پس :

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (x+c)^2$$

پس از بقوه رسانیدن و حذف جمله cx از دو طرف :

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2$$

یا :

$$x^2 \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) - y^2 = c^2 - a^2$$

یعنی :

$$\frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = b^2$$

و پس از تقسیم بر b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

خیام از این فرمول نیز برای حل معادلات درجه سوم استفاده کرده است.

خیام قبل از شروع بحل و بحث معادلات درجه سوم سه مقدمه ذکر میکند

که ما نیز برای روشن شدن ذهن خوانندگان بنقل آنها میپردازیم ؛ زیرا حل

معادلات درجه سوم محتاج بدانستن این سه مقدمه است :

مقدمه ۱ - میخواهیم دوخط بین دوخط مفروض چنان بیابیم که از آنها

تناسب متصلی تشکیل شود ، یعنی اگر دوخط a و b که بترتیب مساوی

a و b هستند مفروض باشند میخواهیم دوخط مانند x و y چنان بیابیم که :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \text{ باشد}$$

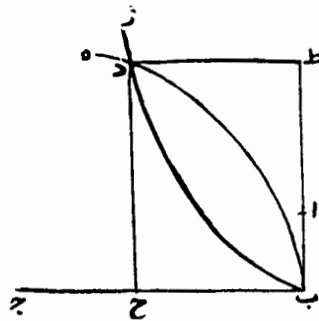
برای انجام این امر فرض میکنیم (ا ب) و (ب ج) دو خط مفروض باشند. دوسهمی برأس (ب) کدسهم (۱) و ضلع قائم (۲) اولی (ب ج) و سهم و ضلع قائم دیگری (ا ب) باشد طرح میکنیم. دو منحنی ناچار یکدیگر را در نقطه ای مانند (د) قطع میکنند. حال گوئیم خطوط (ا ب) و (ب ح) و (ب ط) و (ب ج) تناسب متصلی تشکیل میدهند زیرا بموجب خاصیت سهمی و تساوی قطعاتی که در (ش ۱۵) می بینیم:

$$ح^2 = د = ب ح \times ب ج *$$

$$\frac{ب ج}{ب ط} = \frac{ب ح}{ب ط} \quad \text{پس}$$

$$د^2 ط = ب ا \times ب ط **$$

$$\frac{ب ط}{ب ح} = \frac{ب ط}{ب ا} \quad \text{پس}$$



(ش ۱۵)

(۱) مقصود از سهم قسمتی از محور سهمی است که در کودی واقع شده. (۲) ضلع قائم یعنی $۲p$
 * درسهمی (ب ه) طبق خواص سهمی میدانیم که $y^2 = ح د$ و $x = ب ح$ و $۲p = ب ج$
 ** درسهمی (ب ز) نیز میدانیم که $y = د ط$ و $x = ب ط$ و $۲p = ب ا$

و از آنجا:

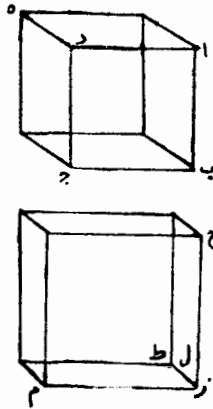
$$\frac{ب ج}{ب ا} = \frac{ب ط}{ح ب} = \frac{ب ج}{ب ط}$$

یا:

$$\frac{ب ا}{ح ب} = \frac{ب ج}{ب ط} = \frac{ب ط}{ب ج}$$

و باین طریق می بینیم که بین دوخط (ا ب) و (ب ج) تناسب متصلی با واسطه دوخط (ح ب) و (ب ط) تشکیل شده است .

مقدمه ۲ - می خواهیم مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع مفروض (ح م) است معادل با مکعب مستطیل (ه ب) که قاعده آن مربع (ا ج) است طرح کنیم (ش ۱۶) .



(شکل ۱۶)

خطوط $\overline{ك}$ و $\overline{ل}$ را چنان تعیین میکنیم که:

$$(۱) \frac{ب ا}{م} = \frac{م}{ك}$$

$$(۲) \frac{ب ا}{ك} = \frac{ل}{د ه}$$

و (ز ط) را مساوی $\bar{د}$ عمود بر صفحه (ح م) قرار داده جسم (ح ط م) را تمام میکنیم و کوئیم این جسم معادل جسم (ه ب) است زیرا:

از رابطه (۱) یعنی $\frac{زم}{ك} = \frac{اب}{زم}$ چنین حاصل میشود:

$$ك \times اب = زم^2$$

طرفین را بر $اب^2$ تقسیم میکنیم چنین حاصل میشود:

$$\frac{زم^2}{اب^2} = \frac{ك \times اب}{اب^2}$$

$$\frac{زم^2}{اب^2} = \frac{ك}{اب} \quad \text{یا}$$

$$\frac{اب^2}{زم^2} = \frac{اب}{ك} \quad \text{یا}$$

و چون طبق رابطه (۲):

$$\frac{اب}{ك} = \frac{د}{ه}$$

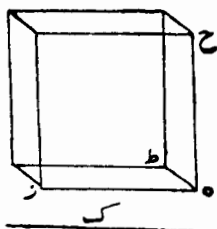
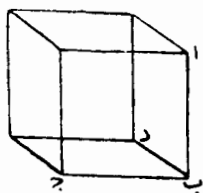
پس:

$$\frac{اب^2}{زم^2} = \frac{د}{ه}$$

و چون نسبت قواعد دو جسم مثل عکس نسبت ارتفاعات آنها است حکم ثابت میباشد. (۱)

مقدمه ۳ - مجسمی که قاعده اش مربع و ارتفاعش طول مفروض (ه ط) باشد چنان طرح کنید که حجمش با حجم مجسم (ا د ج) که قاعده اش مربع (ا ج) است مساوی باشد (ش ۱۷).

(۱) خیام بجای مکعب مستطیل مجسم استعمال میکند و بعداً تذکر میدهد که مقصود او از مجسم سطحی است که وجوه آن متوازی و زوایایش قائمه باشند و مرادش از سطح سطحی است که اضلاعش متوازی و زوایایش قائمه باشند.



(ش ۱۷)

طولهای (ك) و (ل) را چنین تعیین میکنیم که :

$$(۱) \quad \frac{ا ب}{ب د} = \frac{ا ب}{ك}$$

و

$$(۲) \quad \frac{ا ب}{ل} = \frac{ل}{ك} \quad \text{باشد}$$

بعد (ه ز) را مساوی (ل) بر (ه ط) عمود کرده (ط ز) را تمام میکنیم و
 (ه ح) را بطول (ل) بر صفحه (ط ز) عمود مینمائیم و جسم (ح ط ز) را تمام
 میکنیم ، این جسم همان جسم مطلوبست زیرا :
 از رابطه (۲) یعنی :

$$\frac{ا ب}{ل} = \frac{ل}{ك}$$

چنین بدست میآید :

$$ا ب \times ك = ل^۲$$

$$\frac{ل^۲}{ا ب} = \frac{ا ب \times ك}{ا ب}$$

و

$$\frac{اب^۲}{ج^۲} = \frac{اب^۲}{ا ب \times ك} \quad \text{یا}$$

$$\frac{اب^۲}{ج^۲} = \frac{اب}{ك} \quad \text{یا}$$

و پس از مقایسه رابطه اخیر با رابطه (۱) چنین خواهیم داشت:

$$\frac{اب^۲}{ج^۲} = \frac{ط}{ب}$$

ولهذا بهمان دلیلی که در مقدمه قبل گفتیم دو جسم معادل اند.

حل معادلات درجه سوم

بطریقی که خیام در کتاب جبر و مقابله خود

شرح داده است

باید دانست که خیام همیشه معادلات را از دو نقطه نظر مورد حل و بحث قرار میداده است: یکی موقعیکه مجهول برای اعداد در نظر گرفته میشود و دیگر در صورتیکه مجهول مقدار هندسی (طول - سطح - حجم) فرض میشده است؛ و معادلات درجه اول و دوم را اعم از اینکه مجهول عدد یا مقادیر هندسی بوده حل میکرده، ولی در معادلات درجه سوم فقط برهان هندسی اکتفا نموده و بکمک مقاطع مخروطی اصناف مختلفه این معادلات را حل میکرده است؛ با اینحال حل عددی را نیز در معادلات درجه سوم لازم میدانسته، چنانکه خود او گوید: «و باید دانست که برهان هندسی طرق حل این معادلات جای برهان عددی آنها را در موقعیکه موضوع مسئله عدد مطلق باشد، نه مقدار هندسی، نمیگیرد و شاهد بر این مطلب اینست که اقلیدس قضائاتی را که در مقاله پنجم کتاب خود در باب نسبت مقادیر هندسی ثابت کرده در مقاله هفتم مجدداً آنها را برای اعداد مطلقه ثابت نموده است.»

ویکه ریاضی دان فرانسوی نیز درباره کتاب جبر و مقابله خیام میگوید:
«از خصوصیات قابل بحث و توجه این کتاب آنست که مصنف الحاق حل هندسی هر یک از معادلاتی را که مورد مطالعه قرار داده بحل عددی آن لازم و در حکم قانونی میداند.»

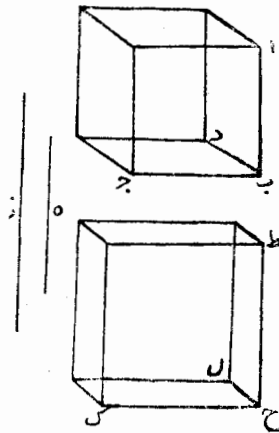
برای اینکه با مثال ساده ای حل معادلات جبری با این دو طریقۀ معلوم گردد، بحل معادلۀ ناقص درجه سوم $x^3 - d = 0$ که در آن ضرایب x^2 و x صفر است، و یکی از ساده ترین اشکال معادلات درجه سوم میباشد میپردازیم:

خیام معادلۀ مزبور را به هر دو شکل عددی و هندسی حل کرده است.

۱- حل عددی - برای حل معادلۀ $x^3 - d = 0$ یا $x^3 = d$ میگوید

اگر موضوع مسئلۀ عدد باشد x^3 معلوم خواهد بود و استخراج کعب آن راهی جز تفحص جدول مکعبات ندارد، چه دانستن اینکه کعب ۱۲۵ برابر ۵ است از روی يك قانون ریاضی نیست، بلکه مبنی بر تفحص میباشد.

۴- حل هندسی - خیام میگوید برای حل $x^3 = d$ از راه هندسی، مکعب مستطیل (ا د ب) را که قاعده اش (ا ج) مربعی بضلع واحد، و ارتفاعش (ب د) مساوی عدد مفروض یعنی d است (۱) طرح میکنیم.



(ش ۱۸)

حجم این جسم برابر d خواهد بود. حال مکعبی معادل این جسم می سازیم. برای انجام این امر دو خط مانند (ه) و (ز) بطوری تعیین میکنیم که با (ا ب) و (ب د) تناسب متصلی تشکیل دهند. مکعب (ط ل ک) که ضلعش

۱ - در کتاب جبر و مقابله خیام هر جا میگوید عددی مساوی مجسمی است مرادش از عدد، مکعب مستطیلی است که قاعده اش مربعی بضلع واحد و ارتفاعش برابر عدد مفروض میباشد.

مساوی (ه) و در نتیجه معلوم است معادل جسم مذکور است، زیرا بموجب تناسب متصلی که گفتیم:

$$\frac{\text{مربع ا ج}}{\text{مربع ط ك}} = \frac{\text{ب}}{\text{ز}}$$

و آن برابر $\frac{\text{ح ك}}{\text{ب د}}$ یا $\frac{\text{ح ل}}{\text{ب د}}$ میباشد (۱) یعنی:

$$\frac{\text{مربع ا ج}}{\text{مربع ط ك}} = \frac{\text{ح ل}}{\text{ب د}}$$

یا $\text{ح ل} \times \text{مربع ط ك} = \text{ب د} \times \text{مربع ا ج}$ پس دو جسم معادل اند.

تبصره - خیام پس از حل معادله $x^3 = d$ با دو طریق عددی و هندسی، شروع بحل اصناف مختلفه معادلات درجه سوم، سه جمله ای و چهار جمله ای کرده و طریقه حل آنها را با برهان هندسی بیان میدارد؛ ولی قبل از انجام این امر ابتدا معادله را متجانس میکند باین قسم:

۱- ضریب جمله درجه دوم (A) را بوسیله طولی (a) نمایش میدهد؛

۲- ضریب جمله درجه اول (B) را بوسیله مربعی (b^2) مینماید؛

۳- جمله معلوم را (در معادله $x^3 = d$) بوسیله مکعب مستطیلی بقاعده

مربع واحد و ارتفاع d نمایش داده که شرح آن گذشت) در معادلات $x^3 + Ax^2 = C$

و $x^3 + C = Ax^2$ به مکعبی بضلع c و در معادله $x^3 = Ax^2 + C$ بوسیله مکعب

مستطیلی که ارتفاعش a و قاعده اش مربع باشد ($C = ac^2$) و بالاخره در باقی

معادلات بمکعب مستطیلی که قاعده اش مربع b^2 باشد ($C = b^2c$) نمایش

میدهد.

پس از اینکه معادله متجانس شد قطوع لازم برای حل هر معادله را از روی ضرایب معادله تعیین کرده از تقاطع آنها جواب یا جوابهای معادله را بدست میآورد ، که اگر بعضی از این راههای حل را دقیقاً مورد بررسی قرار داده و مشکلات و اهمیت آنها بادیده انصاف بنکریم به هوش سرشار و نبوغ و تصور خلاقه خیام برای کشف مطالبی که قبل از او وجود نداشته است پی برده وبی اختیار آن دانشمند بزرگ را مورد تکریم و تحسین قرار خواهیم داد .
واینک بحل معادلات درجه سوم ، سه جمله ای و چهار جمله ای بطریق خیام میپردازیم :

حل معادلات درجه سوم سه جمله ای

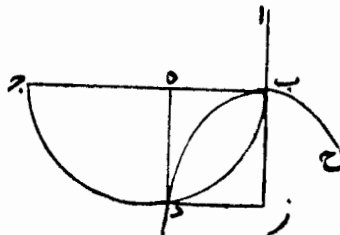
$$۱ - معادله \quad x^3 + Bx = C$$

$$\text{یا } x^3 + b^2x = b^2c$$

فرض میکنیم $ab = b$ و $bc = c$ باشد

قطوع لازم برای حل : نیمدایره ای بقطر (bc) ، سهمی برآس (b) و سهم (bz) وضع قائم (ab) .

جواب : $x = b$



(ش ۱۹)

$$\text{برهان - } d^2 = bz \times b$$

$$\frac{\text{اب}}{\text{دز}} = \frac{\text{بز}}{\text{دز}} \quad \text{پس}$$

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب ه}} = \frac{\text{د ه}}{\text{ب ه}} \quad \text{یا}$$

$$\frac{\text{ب ه}}{\text{د ه}} = \frac{\text{د ه}}{\text{ج ه}}$$

اما در دایره :

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب ه}} = \frac{\text{ب ه}}{\text{د ه}} = \frac{\text{د ه}}{\text{ج ه}} \quad \text{ولهذا}$$

بنا بر این جسم (۲ اب × ج ه) با مکعب (۳ ب ه) معادل است و اگر جسم (۲ اب × ب ه) را به هر دو بیفزائیم دیده میشود که جسم (۲ اب × ب ج) معادل مجموع مکعب (۳ ب ه) و جسم (۲ اب × ب ه) است (۱)

چنانکه می بینیم این صنف بیش از يك شكل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است (۲) و از تقاطع دایره و سهمی حل میشود .

$$x^3 + C = Bx \quad \text{۲ - معادله}$$

$$x^3 + b^2c = b^2x \quad \text{یا}$$

فرض میکنیم : $b = \text{اب}$ و $c = \text{ب ج}$ باشد

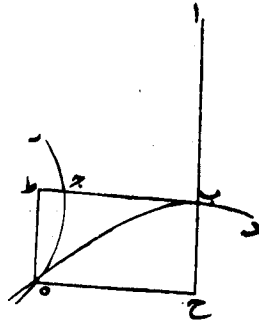
قطوع : سهمی برأس (ب) و ضلع قائم (اب) و سهم امتداد (اب) ؛
هندولوی برأس (ج) و سهم امتداد (ب ج) و ضلع قائم و ضلع مایل مساوی (ب ج) .

این دو منحنی یا متلاقی اند یا نه . در حالت دوم مسئله ممتنع است و در حالت اول در يك نقطه بر هم مماس و یا در دو نقطه مشترك اند . فرض کنیم (ه) یکی از نقاط مشترك آندو باشد . (ش ۲۰)

جواب : $x = \text{ب ط}$

$$(۱) \text{ یعنی : } b^2c = (b^2 \times \text{ب ه}) + \text{ب ه}^3$$

۲- معادله مفروض فقط يك جواب مثبت دارد و دوریشه دیگرش موهومی هستند ؛



(ش ۲۰)

برهان - در هذلولی نسبت مربع (ه ط) به مسطح (ب ط) و (ط ج) مثل نسبت اضلاع قائم و مایل است^(۱) پس در اینجا:
 $ه ط^۲ = ب ط \times ط ج$

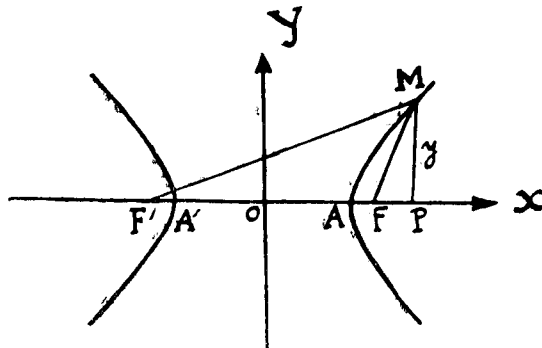
۱- اگر M نقطه ای از هذلولی باشد:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{یا:}$$

$$\frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{2b^2}{a} \times \frac{1}{2a} \quad \text{یا}$$

$$\frac{PM^2}{AP \times A'P} = \frac{2p}{2a} \quad \text{و بالاخره:} \quad \text{(ش ۲۱)}$$



(ش ۲۱)

$$\frac{\text{ب ط}}{\text{ط ه}} = \frac{\text{ط ه}}{\text{ط ج}} \quad \text{ولذا :}$$

اما در سهمی : $ه ج^2 = ب ط^2 = ب ح \times ب ا$

$$\frac{\text{ب ط}}{\text{ط ج}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ط ج}} = \frac{\text{ب ط}}{\text{ب ح}} \quad \text{پس :}$$

$$\frac{\text{ب ط}}{\text{ط ج}} = \frac{\text{ب ط}}{\text{ط ج}} \quad \text{ولهذا ؛}$$

پس جسم $(ا ب^2 \times ط ج)$ معادل مکعب $(ب ط^3)$ است و چون جسم $(ا ب^2 \times ب ج)$ را به هر دو بیفزائیم حکم ثابت میشود . پس ثابت شد که این صنف اشکال مختلفی دارد و بعضی از مسائل آن ممتنع است ^(۱) و بتقاطع سهمی و هذلولی حل میشود .

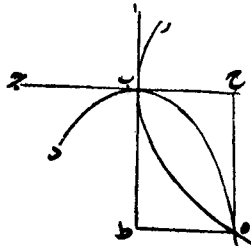
$$x^2 = Bx + C \quad \text{:-۳}$$

$$x^2 = b^2 x + b^2 c \quad \text{یا :}$$

فرض میکنیم $ا ب = b$ و $ب ج = c$ باشد

قطوع : سهمی برأس $(ب)$ و سهم امتداد $(ا ب)$ و ضلع قائم $(ا ب)$ -
 هذلولی برأس $(ب)$ و سهم امتداد $(ب ج)$ و اضلاع قائم و مایل مساوی $(ب ج)$ ؛
 منحنی اول بر خط $(ب ح)$ و منحنی دوم بر $(ا ب)$ مماس است ، پس دو منحنی ناچار یکدیگر را در نقطه ای مثل $(ه)$ قطع میکنند و $(ب ح) = x$ میباشد . (ش ۲۲)
 برهان - برهانی که خیام در این حالت ایراد میکند مانند آنست که در حالت قبل ذکر شد و لهذا احتیاجی بذکر و تکرار آن نیست . در پایان مسئله مینویسد : پس ثابت شد که این صنف بیش از یک شکل ندارد و تمام مسائل آن

۱ - معادله مفروض ، همیشه يك جواب منفی دارد و دو ریشه دیگر آن یا موهومی یا مثبت و مساوی و یا مثبت و غیر مساویند . خیام با برهان هندسی فقط یک ریشه مثبت را پیدا کرده و به ممتنع نیز که همان موهومی باشد اشاره نموده است .



(ش ۲۲)

ممکن اند (۱) و بتقاطع سهمی و هذلولی حل میشوند .

$$x^3 + Ax^2 = G - \epsilon$$

$$\text{یا } x^3 + ax^2 = c^3$$

خط (اب) را مساوی a (ضریب x^2) رسم نموده مکعبی بضلع $c =$ طرح میکنیم باینطریق که خط (اب) را امتداد داده و خط (ب ط) را باندازه (ح) جدا نموده و مربع (ب ط د ج) را رسم میکنیم: سپس بر نقطه د هذلولی (د ن) را بادو مجانب (ب ج) و (ب ط) طرح مینمائیم؛ و نیز سهمی (ا ک) را برأس (ا) و سهم (اط) و ضلع قائم (ب ج) رسم میکنیم. این دو منحنی ناچار یکدیگر را در نقطه (ه) قطع میکنند. از این نقطه عمود (ه ز) را بر (ب ط) و عمود (ه ل) را بر (ب ج) وارد میکنیم.

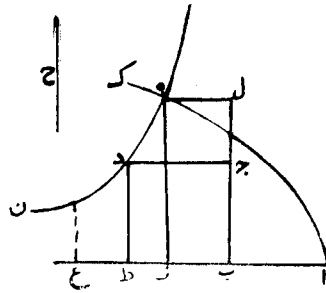
امتداد و طول این عمودها معلوم میباشد، و گوئیم (ب ز) $x =$ است. (ش ۲۳)

برهان - اولاً ممکن نیست نقطه (ز) بر (ط) یا در خارج (اط) واقع

شود، زیرا: اگر بر (ط) قرار گیرد:

$$اط . ب ج = اط . ط ب = ط ه^2$$

۱ - معادله مفروض، همیشه بکریشه مثبت دارد و دو ریشه دیگرش منفی یا موهومی



(ش ۲۳)

یا ط ب . ا ط = ط ² د

اما ط ب . ط ب = ط ² د

و این محال است ، پس (ز) بر (ط) واقع نمیشود .

و اگر (ز) در خارج (اط) باشد (هز) کوچکتر از (طد) خواهد بود و

بطریق اولی محال لازم میآید پس (ز) بین (ا) و (ط) واقع است و :

$$ب ج . ا ز = ه ز$$

$$\frac{ب ج}{ه ز} = \frac{ا ز}{ه ز} \quad \text{پس :}$$

اما بموجب خاصیت هذلولی ، مستطیل (ه ب) با مربع (دب) معادل

است ، پس :

$$\frac{ب ج}{ه ز} = \frac{ب ج}{ب ز}$$

ولذا خطوط (از) و (هز) و (بج) و (بز) تناسب متصلی تشکیل میدهند

و بالنتیجه $\frac{ب ج}{ب ز} = \frac{ب ج}{ه ز}$ پس جسم (۲ ب ز . از) معادل مکعب (۳ ب ج)

است ؛ اما جسم مذکور معادل مجموع دو جسم (۳ بز) و (۲ ب ز . اب) است ؛

پس مکعب (۳ ب ج) معادل مجموع این دو جسم میباشد فهوالمطلوب .

این صنف بیش از يك شكل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است (۱) و بكمك هذلولی و سهمی حل میشود.

$$x^2 + C = Ax^2 \quad - \text{و}$$

$$x^2 + c^2 = ax^2 \quad \text{یا}$$

ضریب x^2 یعنی a را مساوی (اج) فرض کرده و مکعبی بضلع (ح) برابر عدد معلوم طرح میکنیم .

سه حالت ممکن است اتفاق افتد: خط c = مساوی خط اول (یعنی اج = a) یا کوچکتر و یا بزرگتر از آنست .

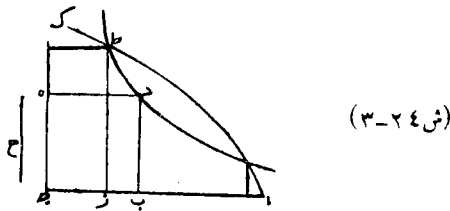
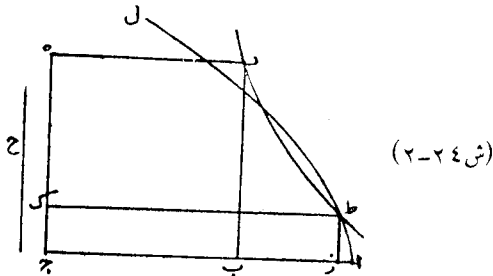
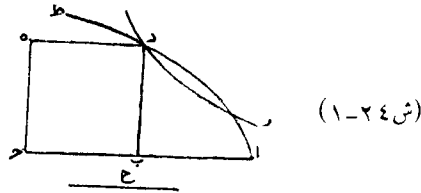
در حالت اول یعنی اگر $a = c$ باشد مسئله ممتنع است زیرا ادر اینصورت یا $x = c$ یا $x < c$ یا $x > c$ است . اگر $x = c$ باشد $ax^2 = c^2$ خواهد بود و این ممکن نیست زیرا طبق معادله $ax^2 = x^2 + c^2$ باید x^2 بر c^2 افزوده شود تا حاصل مساوی ax^2 گردد؛ و اگر $x < c$ باشد $ax^2 < c^2$ و بطریق اولی $ax^2 < x^2 + c^2$ میشود؛ و بالاخره اگر $x > c$ فرض شود $ax^2 > x^2$ میشود و بطریق اولی $ax^2 > x^2 + c^2$ خواهد بود .

در حالت دوم یعنی اگر $c > a$ باشد محالات مذکوره بطریق اولی لازم میآید ، پس واجبست که $c < a$ باشد و الا مسئله ممتنع است . در این حال (بج) را مساوی c جدا میکنیم این خط مساوی (اب) یا بزرگتر و یا بالاخره کوچکتر از آنست . در هر حال مربع (جد) را تمام میکنیم .
 قطوع لازمه :

۱ - هذلولی مار بر (د) با مجانب های (اج) و (جه)

۱ - معادله مفروض فقط یکریشه مثبت دارد و دو ریشه دیگر آن منفی یا موهومی میباشد .

۲ - سهمی برأس (ا) و سهم (اج) و ضلع قائم (بج) در (ش ۲۴-۱) میگذرد، زیرا
 $دب^2 = اب \cdot بج$



و دو منحنی یکدیگر را در نقطه دیگری قطع میکنند، و برای فهم این مطلب اندک تأمل کافی است. در (ش ۲۴-۲) نقطه (د) در خارج سهمی واقع است چونکه:

$$دب^2 > اب \cdot بج$$

پس اگر دو منحنی بر یکدیگر مماس شوند یا متلاقی گردند عمودوار از نقطه تقاطع بر (اج) بین نقاط (ا) و (ب) خط (اج) را متلاقی میکند و مسئله

ممکن است والا ممتنع می باشد؛ و مهندس فاضل ابوالجود باین تماس یا تقاطع توجه نکرده و بغلط درحالتی که (ب ج) بزرگتر از (اب) باشد مسئله را ممتنع شمرده و این صنف همانست که ماهانی بدان برخورده .

در (ش ۲۴-۳) (د) داخل سهمی واقع میشود و دو منحنی یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند .

خیام در شکل دوم ثابت میکند که اگر (ط) یکی از نقاط تقاطع باشد قطعه (ز ج) جواب معادله است و برهان او مانند دلیل حالت قبل می باشد؛ بعد میگوید برهان در سایر حالات بهمین قیاس است، الا اینکه در شکل سوم دو مکعب حاصل میشود یعنی مسئله دو جواب دارد، زیرا هر عمودی از (جا) ضلع مکعبی جدا میکند چنانکه ثابت شد. پس معلوم شد که این صنف اشکال مختلفی دارد و بعضی از مسائل آن بحال است و بتقاطع سهمی و هذلولی حل میشود (۱).

$$x^2 = Ax^2 + C \quad :- ۶$$

$$x^2 = ax^2 + ac^2 \quad \text{یا}$$

فرض میکنیم $a = b$ و $c = c$ باشد .

هذلولی مار بر (ج) با مجازب های (اد) و (اب)؛

و سهمی بر رأس (ب) و سهم استقامت (اب) و ضلع قائم (اب) را رسم

میکنیم .

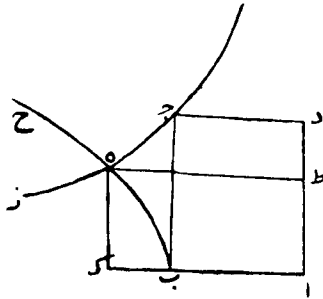
دو قطع ناچار یکدیگر را در نقطه ای مانند (ه) قطع میکنند و

۱ - معادله مفروض همیشه يك ریشه حقیقی منفی دارد و دو ریشه دیگر آن موهومی یا مثبت اند . خیام ابتدا ثابت میکند که اولین شرط امکان مسئله آنستکه $c < a$ باشد؛ بعد سه

حالت $c = \frac{a}{۲}$ و $c > \frac{a}{۲}$ و $c < \frac{a}{۲}$ را تشخیص میدهد و درحالت دوم میگوید؛ $c < x < a$ است

و در هر حال عدّه نقاط تقاطع دو قطع را صحیح بیان میکند؛ ولی فقط درحالت سوم بوجود دو جواب تصریح مینماید.

ا ك = x است . (ش ۲۵)



(ش ۲۵)

استدلال خیام مطلبی زائد بر آنچه در معادلات قبل گفته شد ندارد ،
 و در پایان میگوید این صنف بیش از يك شكل ندارد و جميع مسائل آن ممکن
 است ^(۱) و بتقاطع هذلولی و سهمی حل میشود .

حل معادلات درجه سوم چهار جمله ای

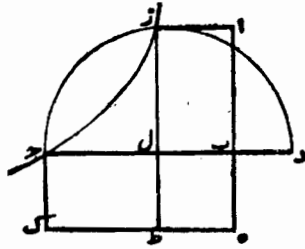
$$x^3 + Ax^2 + Bx = C \quad ۱-$$

$$x^3 + ax^2 + b^2x = b^2c \quad \text{یا}$$

فرض میکنیم : به $b = b$ و $b = c$ و $a = b$ باشد ، مستطیل (ب ك)
 را طرح میکنیم . قطوع لازمه عبارتند از : نیم دایره ای بقطر (ب ج) ؛ هذلولی
 مار بر (ج) با مجانهای (ه ب) و (ه ك) هذلولی ناچار دایره را در نقطه ای مانند
 (ز) قطع میکند و بل $x =$ است . (ش ۲۶)

برهان - سطح (زه) معادل سطح (ب ك) است و چون جزء مشترك را
 اسقاط کنیم معلوم میشود که سطوح (زب) و (ل ك) معادلند، پس $\frac{ه ب}{ب ل} = \frac{ز ل}{ل ج}$
 و لهذا نسبت بین مربعات این قطعات برقرار است، اما مربع نسبت (زل) به (ل ج)

۱ - معادله مفروض همیشه يك ریشه مثبت دارد و دو ریشه دیگرش موهومی میباشد .



(ش ۲۶)

بموجب خواص دایره برابر $\frac{دل}{لج}$ میباشد، پس جسم $(ه^۲ . ب . ل ج)$ معادل جسم $(ب^۲ . ل . دل)$ است بهر دو $(ه^۲ . ب . بل)$ را می‌افزائیم چنین نتیجه میشود:

$$ب^۳ + ب^۲ . دل = ب . ه^۲ + ب . دل . ج$$

یعنی $c . b^۲ = x . b^۲ + ax^۲ + x^۳$ فهوالمطلوب

پس این صنف بیس از یک شکل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است (۱) و بخواص دایره و هذلولی حل میشود.

$$x^۳ + Ax^۲ + C = Bx \quad -۲$$

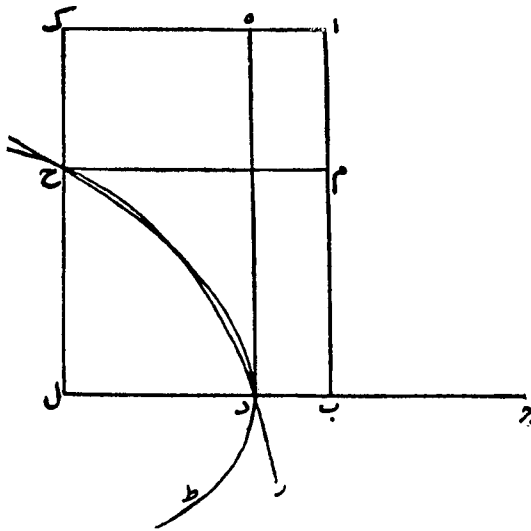
یا: $x^۳ + ax^۲ + b^۲c = b^۲x$

فرض میکنیم: $اب = b$ ، $ام = ب ج$ ، $a = ب ج$ و $ب د = c$ باشد.

مستطیل (به) را طرح میکنیم.

قطوع لازمه عبارتند از: هذلولی مار بر (د) با مجانبهای (اب) و (اه)؛ هذلولی برأس (د) و سهم استقامت (ب د) و اضلاع قائم و مائل برابر (د ج). دو قطع در نقطه (د) مشترک کند، پس اگر در نقطه دیگری مماس یا متلاقی شوند مسئله ممکن و الامتنع است، و اگر در نقطه دیگر متقاطع باشند ناچار در دو نقطه متقاطع خواهند بود و اگر (ح) نقطه مشترک کی از آنها باشد $بل = x$ است. (ش ۲۷)

۱ - معادله مفروض همیشه یک ریشه مثبت دارد و دوریشه دیگرش منفی یا موهومی هستند



(ش ۲۷)

برهان - سطوح (اح) و (اد) و بالنتیجه سطوح (م) و (ه ح) معادلند و چون (دح) را بهر دو بیضائیم سطوح (م) و (هل) معادل میشوند ، پس :

$$\frac{\text{مربع حل}}{\text{مربع لد}} = \frac{\text{مربع اب}}{\text{مربع بل}}$$

اما کسر طرف راست مساوی $\frac{\text{چ ل}}{\text{ل د}}$ است (۱)

پس :

$$\text{ا ب ل} \cdot \text{ب ج} + \text{ب ل}^3 = \text{ا ب ل}^2 \cdot \text{ج ل}$$

بدو طرف ($\text{ا ب} \cdot \text{ب د}$) را میافزائیم .

$$\text{ا ب}^2 \cdot \text{ب د} + \text{ب ل}^2 \cdot \text{ب ج} + \text{ب ل}^3 = \text{ا ب}^2 \cdot \text{ب ل} + \text{ب ل}^3$$

$$\text{یا } x \cdot b^2 = x^3 + a \cdot x^2 + b^2 \cdot c$$

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلفه دارد و بعضی از مسائل آن دارای دو جواب و بعضی از مسائلش ممتنع است (۲) و بخواص دو هذلولی حل میشود

۱ - بنا بخاصیت اربعه متناسبه .

۲- معادله مفروض ، همیشه يك جواب منفی دارد و دوريشه ديگرش موهومی یا حقیقی و مساوی (نظیر تماس دو هذلولی) و یا بالاخره حقیقی و متمایزند . خیام فقط حالت اخیر را صریحاً اسم میدهد .

و مستطیلی طرح میکنیم که یکی از روس آن (ج) باشد بطوری که اگر بر رأس مقابل (ج) قطعی چنانکه گفتیم مروردهیم دایره را بتماس یا تقاطع ملاقات کند و این مطلب با اندک امتحان و تفحص بکمک قیاس ساده ای فهمیده میشود، و خیام این قیاس را بعهدۀ محصلین وا گذاشته و میگوید آنکس که اینقدر قوه استنباط نداشته باشد چیزی از این رساله عاید او نمیشود زیرا این رساله مبتنی بر سه کتابی است که مصنف قبلاً بآن اشاره کرده است (کتاب اقلیدس در اصول هندسه و کتاب دیگر او موسوم به معطیات و دو مقاله از کتاب ابولونیوس در مخروطات) برهان استحاله - برهان بر استحاله حالت ممتنع بعکس برهانی است که در حالت امکان ذکر کردیم از اینقرار: ضلع مکعب مطلوب باید از a کوچکتر باشد، چه اگر با آن مساوی باشد $x^3 = ax^2$ خواهد بود و اگر از آن بزرگتر باشد x^3 به تنهایی از ax^2 بزرگتر میشود، پس واجب است که $x < a$ باشد پس طولی مانند (بف) برابر x از (ب) جدا کرده از (ف) عمودی بر (ب) اخراج میکنیم و برهان سابق را بعکس ایراد میکنیم. ثابت میشود که محل تلاقی عمود دایره بر قطعی که در حالت استحاله بالفرض دایره را قطع نمیکند قرار دارد و این ممتنع است.

خیام گوید چون گمان میکنیم که این استقراء برای بعضی از مطالعه کنندگان این رساله مشکل باشد بیانات فوق را بهمین جا ختم کرده قانونی بی نیاز از این استقراء میآوریم و آن اینست که در هر حال بر طول دلخواهی واقع بر امتداد (بج) مستطیلی که رأس یکی از زوایایش (ج) و معادل سطح (اج) باشد طرح کرده بر رأس مقابل هذلولی با مجانب های (زج) و (جم) مرور میدهیم اگر این منحنی دایره را بتماس یا تقاطع ملاقات کند مسئله ممکن و الامتنع است و برهان بر استحاله همانست که ذکر کردیم.

ملاحظه تاریخی - خیام گوید قبل از من یکی از مهندسین باین صنف دچار شده و آنرا حل کرده است، ولی اشکال مختلفه آنرا توضیح نداده و متوجه

نشده است که بعضی از مسائل آن چنانکه گفتیم ممتنع میباشد؛ و اما مسئله‌ای که یکی از متأخرین در ضمن حل آن بصف فوق بر خورده این است:

عدد ده را بدو جزء چنان تقسیم کنید که مجموع مربعین آنها باضافه خارج قسمت جزء بزرگتر بر جزء کوچکتر ۷۲ شود.

اگر یکی از اجزاء x و دیگری مطابق عادت جبریهها در اینگونه مسائل $x - ۱۰$ باشد حل مسئله بحل این معادله منجر میشود:

$$x^3 + 5 + 13 \frac{1}{4} x = 10x^2$$

و در اینحالت نقاط (ج) و (ح) داخل دایره واقع میشوند و بعد از اینکه جماعتی از فضایی عراق رحمهم الله که ابوسهل کوهی نیز جزء آنان بود از حل این مسئله عاجز شدند این مرد دانشمند آنرا حل کرد جز اینکه این حل کننده که خداوند از اوراضی باد با فضل و علو مقامی که در ریاضیات دارد متوجه این اختلافات نگردیده است و چنانکه دیدیم در بعضی از مسائل این صنف معادلات ممتنع وجود دارد؛ و این فاضل ابوالجود الشنی است.

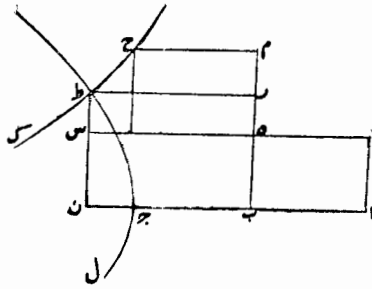
$$C + Bx + Ax^2 = x^3 \quad -\epsilon$$

$$x^3 = ax^2 + b^2x + b^2c \quad \text{یا}$$

فرض میکنیم $b =$ به و $b =$ اب و $c =$ ب ج و $a =$

قطوع لازمه: طول اختیاری ($ه م$) را بر امتداد ($به$) اختیار کرده سطح ($ه ح$) را معادل ($اه$) طرح میکنیم و بر ($ح$) هذلولی بامجانبهای ($هم$) و ($هس$) مرور میدهیم. هذلولی دیگری برأس ($ج$) و سهم استقامت ($ب ج$) و اضلاع مایل وقائم مساوی ($ا ج$) طرح میکنیم. دو قطع ناچار یکدیگر را در نقطه ای مثل ($ط$) قطع میکنند و بن $x =$ ($ش ۲۹$).

برهان خیام مانند براهین حالات قبل است و در پایان مینویسد، این صنف



(ش ۲۹)

بیش از يك شكل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است (۱)

$$x^2 + Ax^2 = Bx + C \quad -o$$

$$x^2 + ax^2 = b^2x + b^2c \quad \text{یا}$$

فرض میکنیم $b = d$ و $c = s$ و $a = j$ و بر حسب اینکه

c بزرگتر یا کوچکتر از a یا مساوی آن باشد سه حالت پیش میآید:

حالت اول: $c < a$ - طول (اب) را مساوی (c) جدا نموده سطح

(اد) را تمام کرده بر طول دلخواه (دز) واقع بر امتداد (ب د) سطح (ه د)

را معادل (اد) طرح میکنیم.

قطوع لازمه: هندلولی ماربر (ه) با مجانبهای (زد) و (دع). هندلولی

برأس (ا) و سهم (اب) و اضلاع قائم و مائل برابر (اج). دو هندلولی ناچار

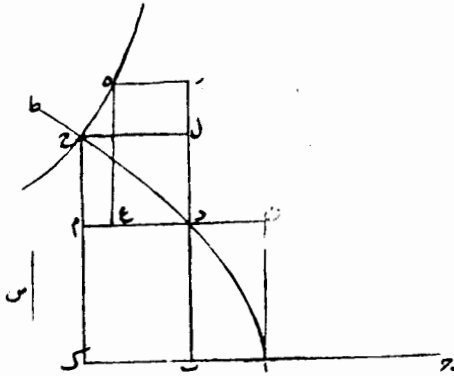
یکدیگر را در نقطه‌ای مثل (ح) قطع میکنند و $x = ك$ (ش ۳۰) برهان خیام

بر صحت این حکم شبیه براهینی است که قبلاً ذکر شد.

حالت دوم: $c = a$ در این صورت $b = d = x$ است.

$$b^2 + ab^2 = b^2b + b^2a \quad \text{زیرا}$$

و معلوم است که در این حالت جواب معادله در معادله هفتم نیز صدق میکند



ش (۳۰)

حالت سوم $c > a$ - طول (ا ب) را مساوی c جدا کرده هذلولی دوم را بر (ج) مرور میدهم و بقیه بر همان شبیه بحالت اول است. پس معلوم شد که این صنف اشکال مختلفه دارد و جواب یکی از حالات آن در معادله هفتم صدق میکند و تمام مسائش ممکن است ^(۱) و بخصوص دو هذلولی حل میشود.

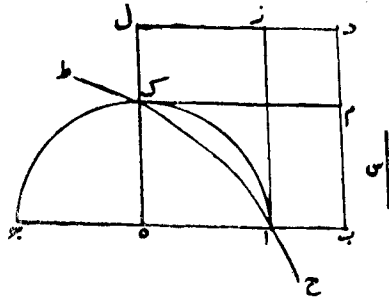
$$\begin{aligned} x^2 + Bx &= Ax^2 + C & - ۶ \\ x^2 + b^2x &= ax^2 + b^2c & \text{یا} \end{aligned}$$

فرض میکنیم $a = ج$ و $b = د$ و $c = س$

حالت اول $c < a$ - (ا ب) را مساوی c جدا کرده سطح (ا د) را تمام میکنیم.

قطع لازم: نیمدایره ای بقطر (ا ج) - هذلولی مار بر (ا) بامجانبهای (ب د) و (د ز) (ش ۳۱) هذلولی خط (ا ز) را که بر دایره مماس است قطع میکند و لهذا دایره را نیز تلاقی میکند زیرا اگر بین دایره و (ا ز) قرار گیرد چنانکه ابلونیوس در شکل ۱۶ از مقاله دوم ثابت کرده است ممکن است ^(۱)

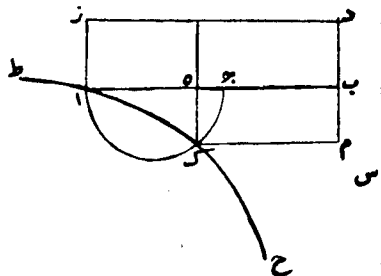
۱ - معادله مفروضه يك ریشه مثبت دارد و دو جواب دیگر آن منفی یا موهومی است.



ش (۳۱)

خطی بر قطع مماس کنیم و این خط یا بین (از) و دایره قرار میگیرد و این محال است و یاد خارج (از) و دایره واقع میشود؛ پس (از) بین قطع و این مماس قرار میگیرد و این نیز محال است، پس قطع بین دایره و (از) واقع نمیشود و لهذا دایره را قطع میکنند پس ناچار در نقطه دیگری مانند (ك) نیز با آن مشترکست (ش ۳۱) جواب به $x = h$ برهان این حالت بقیاس حالت قبل است: حالت دوم $c = a$ در این حالت $x = c$ و این مقدار در معادله هفتم نیز صدق میکند.

حالت سوم $c < a$ برهان بقیاس حالت قبل است (ش ۳۲) پس ثابت شد که این صنف اشکال مختلفه دارد و جواب یکی از انواع آن در صنف هفتم صدق میکند و تمام مسائل آن ممکن است (۱) و بخصوص دایره و هذلولی حل میشود.



ش (۳۲)

۲ - معادله مفروضه همیشه یکریشه مثبت دارد، در حالت اول ممکن است دو ریشه دیگر نیز حقیقی باشد ولی در حالات دوم و سوم دو جواب دیگر موهومی هستند.

$$x^2 + C = Ax^2 + Bx \quad : -\gamma$$

$$x^2 + b^2c = ax^2 + b^2x \quad : \text{با}$$

فرض میکنیم $b = c$ و $a = c$ و $b = d$ و $c = s$

حالت اول - $c < a$. (ا ب) را مساوی c جدا کرده (ب ز) را تمام

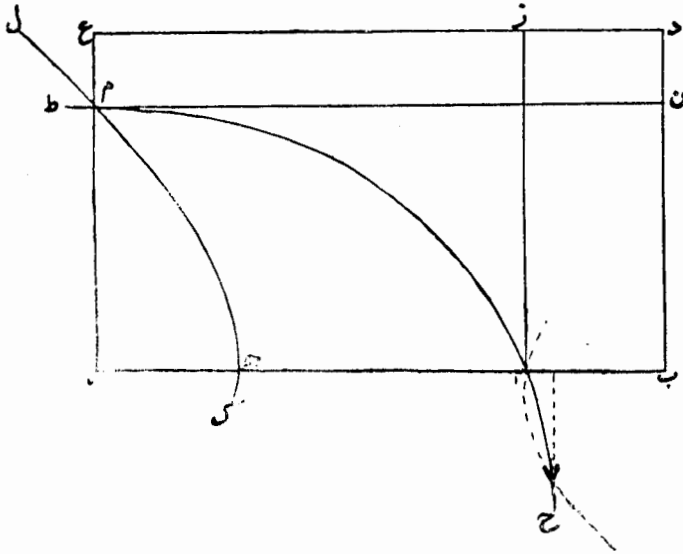
میکنیم .

قطع لازمه عبارتند از: هذلولی ماربر (ا) با مجانبهای (ب د) و (د ز) -

هذلولی با رأس (ج) و سهم استقامت (ب ج) و اضلاع قائم و مایل برابر (ا ج) .

دو قطع یکدیگر را در نقطه ای مانند (م) قطع میکنند و $x = b = c$

است (برهان بقیاس حالات قبل است) (ش ۳۳)



ش (۳۳)

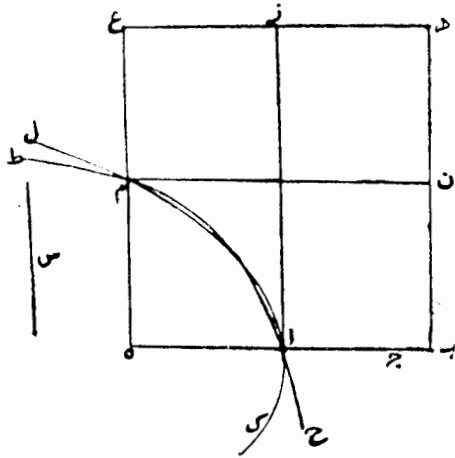
حالت دوم - $c = a$ پس $x = a$. این مقدار در معادله ششم نیز صدق میکند.

حالت سوم - $c > a$ هر دو قطع را بر (ا) مرور میدهیم پس اگر

یکدیگر را در نقطه دیگری ملاقات کنند خواه در این نقطه برهم مماس شوند

و یا متقاطع باشند (در این حالت بموجب مقاله چهارم مخروطات یکدیگر را در

دو نقطه قطع میکنند) مسئله ممکن و الامتنع است؛ و در حالت تقاطع از نقاط تلاقی عمود هائی بر (ب ه) فرود میآوریم (ش ۳۴) و از اینجا دو مقدار برای x پیدا میشود؛ و برهان این حکم مانند حالت قبل است پس معلوم شد که این صنف انواع مختلفی دارد و بعضی از آنها ممتنع اند.



ش (۳۴)



این بود راه حل معادلات درجه سوم که خیام آنها را بر حسب مثبت یا منفی بودن ضرایب جمله‌های درجه دوم و اول و نیز مثبت یا منفی بودن جمله معلوم به چهارده شکل یا صنف در آورده و چنانکه یاد آوری کردیم فقط دو صنف از این معادلات قبل از خیام حل و بحث شده و بقیه که دوازده صنف باشد از اکتشافات و تحقیقات علمی خیام است و باید دانست که اکتشافات خیام در جبر و مقابله منحصر بحل و بحث معادلات درجه سوم نیست بلکه در بسیاری از مباحث نیز مطالعات خاص دارد که در آثار پیشینیان دیده نمیشود و برخی از این تحقیقات را دانشمندان مغرب زمین دنبال کرده و بعضی راهم در کتابهای علمی جدید بنام خود معروف کرده‌اند؛ از آنجمله مثلث حسابی پاسکال و دو جمله‌ای نیوتن که چنانکه در بخش سوم این کتاب شرح خواهیم داد از کارهای علمی خیام میباشد.

و نیز اکتشافات و تحقیقات دیگر خیام در ریاضیات مربوط بنجوم و تقویم
که آنها را میتوان از بزرگترین شاهکارهای علمی جهان دانست .

* * *

بخش سوم

استفاده دانشمندان مغرب زمین از جبر و مقابله خيام

از قرن پنجم تا دهم میلادی ظلمت جهل و بربریت سرتاسر اروپا را فرا گرفته بود؛ زیرا بواسطه استیلای قبایل بربر و انقراض دولت روم غربی در قرن پنجم، تا مدتی نزدیک به پانصد سال اروپا در آتش هرج و مرج و اغتشاش و ناامنی و غارتگری و خونریزی میسوخت و اجدی توجه بعلم نداشت، حتی اولیای دین هم از سواد بی بهره بودند. پس از اینکه اروپا کمی آرام شد، سلاطین و زمامداران بفکر کسب علم و نشر دانش در کشورهای خود بسر آمدند. مقارن همان اوقات کشورهای پهناور اسلامی از ترکستان گرفته تا افریقا و اسپانیا هر يك دانشگاهی محسوب میشد و آنجا دانشمندان بازار فضل و دانش را گرم و رائج کرده بودند نخستین فردی که در اروپا بدانشمندی اشتها یافت ژربر (Gerbert) فرانسوی میباشد که در پایان عمر بمقام پاپی رسید و او برای کسب علم با اسپانیا که آن زمان مملکتی اسلامی بود و آندلس نامیده میشد رفته نزد دانشمندان آن سرزمین به زبان عربی تحصیل علم نمود و در ریاضیات و هیئت و نجوم دارای مقامی شد و چون بفرانسه برگشت بنشر معلوماتی که در اسپانیا فرا گرفته بود همت گماشت و از آن

پس دانش‌طلبان اروپا ممالک اسلامی را منبع علم و حکمت شناختند با انجام مسافرت کردند و بتحصیل زبان عرب و معلومات فضلا و حکمای اقطار ما پرداختند؛ و از قرن یازدهم تا سیزدهم میلادی اوقات دانشمندان بیشتر مصروف ترجمه کتب علمی اسلامی بود و چون آن زمان زبانهای اروپائی هنوز برای ادای مطالب علمی و فلسفی پخته و ورزیده نشده بود ترجمه‌ها را بزبان لاتین میگرداند، و از اینرو در آن روزگار اهل فضل و ادب چاره جز فراگرفتن زبان لاتین نداشتند ولیکن کسانی که میخواستند در علم و فلسفه تبحر کامل حاصل نمایند زبان عرب نیز تحصیل میکردند که بسرچشمه معرفت دست داشته باشند (۱).

پس از آنکه فن چاپ اختراع و شایع شد کتابهای مزبور را چاپ کردند و تا قرن چهاردهم و پانزدهم میلادی نیز ترجمه و چاپ کتابهای عربی جریان داشت و این غیر از ترجمه‌هایی است که اروپائیان در نهضت علمی اخیر خود از کتب عربی و فارسی و زبانهای دیگر شرقی کرده و میکنند و از اینراه استفاده‌هایی غیر از آنچه در قرون وسطی میکردند مینمایند.

کتاب جبر و مقابله خیام نیز مثل سایر مؤلفات دانشمندان اسلامی مدت چند قرن مورد استفاده دانشمندان اروپا بود و تا قرن شانزدهم و هفدهم یعنی تا زمان نهضت علمی اروپائیان (معروف به دوره رنسانس) بمطالب مندرج در آن مستقیماً استناد می‌جستند. پس از این دوره که دانشمندان اروپا در هر يك از رشته‌های علمی بتدریج پیشرفت‌های محسوسی پیدا کردند چنین بنظر میرسد که دیگر احتیاجی بمطالعه و تحقیق در آثار قدما ندارند، و کم‌کم نام دانشمندان قدیم از صفحات کتابهای علمی حذف شد و بجای آنها نام دانشمندان جدید قرار گرفت؛ با اینحال بعضی از کتابهای علمی قدیم و از جمله کتاب جبر و مقابله خیام

(۱) «سیر حکمت در اروپا» جلد اول.

هیچگاه کهنه نشد و در قرون اخیر، حتی در قرن بیستم نیز مورد توجه اروپائیان واقع گردید؛ و اینک نام ریاضی دانانی که از قرن هیجدهم تا کنون توجه باین کتاب داشته‌اند ذکر میکنیم:

در سال ۱۷۴۲ ژرار مرمان (Gerard Meerman) و پس از او منتکولا ریاضی دان قرن هیجدهم توجه دانشمندان را بجبر خیام معطوف داشت؛ پس از او دکتر گارتز (Gartz) تحقیقاتی دربارهٔ مطالب این کتاب نموده و سپس در سال ۱۸۳۴ سدیو (Sédillot) راجع بیک نسخهٔ خطی از جبر و مقابلهٔ خیام که در کتابخانهٔ سلطنتی موجود بوده است شرحی نوشته و کمی بعد شال (Chales) در کتاب مهم خود موسوم به «نظر تاریخی راجع به بسط روش‌های هندسی» باستناد مقالات سدیو اظهار میدارد که مطالعهٔ کتاب جبر خیام از لحاظ تاریخ علوم ریاضی خیلی مفید است. در همین ایام لیبری (Libri) نسخهٔ کاملی از این کتاب نفیس در کتابخانهٔ ملی پاریس بدست آورد و مورد مطالعه قرار داد و پس از او وپکه (Woepcke) در ۱۸۵۱ کتابی با اسم (جبر عمر الخیامی) منتشر ساخت؛ و بالاخره داوود کازیر (Daoud S. Kasir) نسخه‌ای از جبر و مقابلهٔ خیام متعلق به پرفسور اسمیت معلم دانشگاه کلمبیا بدست آورده و آنرا بانگلیسی ترجمه کرده و در سال ۱۹۳۱ مسیحی در نیویورک بطبع رساند؛ و همین توجه دانشمندان کشورهای مختلف اروپا و امریکا در قرون اخیر نسبت به جبر و مقابلهٔ خیام؛ نشانهٔ اهمیت و شخصیت علمی آن دانشمند بزرگ و ارزش مطالب مندرج در کتاب او میباشد.



اروپائیان برای معادلات درجهٔ سوم، از روش هندسی خیام الهام گرفته و آنرا تبدیل براه جبری نمودند.

اگر بتاریخ علوم ریاضی ، مخصوصاً جبر و مقابله در قرون اخیر توجه نمائیم بخوبی ملاحظه خواهیم کرد که حل معادلات درجه سوم بطریقی که امروزه در بیشتر کتابهای درسی دیده میشود به کاردان (Cardan) نسبت داده شده است؛ ولی با تحقیقات دقیقتر معلوم خواهد شد که کاردان راه حل معادلات درجه سوم را عیناً از تارتاگلیا (Tartaglia) ریاضی دان ایتالیائی که در قرن شانزدهم میزیسته اقتباس و کشف آنرا بخود نسبت داده است^(۱) تارتاگلیا نیز در سال ۱۵۳۵ برای حل معادلات درجه سوم روش :

Scipio del Ferro de Bologne

را که در ابتدای قرن شانزدهم میزیست بکار بسته ، و این دانشمند اخیر برای حل معادلات مزبور مستقیماً از کتاب خیام استفاده نموده است ، ولی خیام برای حل اصناف مختلفه معادلات درجه سوم اکتشافاتی دارد که مخصوص اوست و قبلاً در هیچیک از کتب ریاضی دیده نشده است .

پُل تانری (Paul Tannery) محقق تاریخ علوم ریاضی عقیده دارد که راه جبری حل معادلات درجه سوم و چهارم بطریقی که امروز معمول است، همان راه هندسی خیام و استفاده از مقاطع مخروطی است و میگوید قبل از خیام ، ریاضی دانان میدانستند که اگر محورین دوسهمی بر یکدیگر عمود باشند ، چهار نقطه تقاطع بر محیط یکدایره واقع میشود ، ولی نمیتوانستند آنرا ثابت نمایند ؛ خیام باثبات آن پرداخته و برای حل معادلات درجه سوم از آن استفاده کرده است . بعدها اروپائیان همان طریقه را با تبدیل راه هندسی بجبری برای حل معادلات درجه سوم و چهارم بکار برده اند .

(۱) آقای دکتر غلامحسین مصاحب در مجله ریاضیات و کتاب مثلثات که تألیف نموده کاردان

را «عالم دزد» نامیده و در اروپا نیز کاردان بنام دزد ریاضی معروف میباشد .

استاد معظم آقای دکتر محسن هشرودی چگونگی استفاده اروپائیان از روش خیام را در اختیار ما گذاشتند؛ ضمن سپاسگذاری از معظم له طریقه مزبور را ذیلاً می‌نکاریم.

معادله درجه سوم را قبلاً با ضرب کردن در x بمعادله درجه چهارم بدل می‌کنیم و در حل آن ریشه $x = 0$ را کنار می‌گذاریم.
معادله درجه چهارم:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

را با تبدیل:

$$x = y - \frac{a}{4}$$

میتوان بمعادله $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$ تبدیل کرد.

حال چون برای سهولت y را به x بنمائیم معادله بصورت:

$$(a) \quad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

نوشته میشود.

در این معادله $x^2 = y$ را جانشین می‌کنیم، حل معادله به حل دستگاه:

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 + Ay + Bx + C = 0. \end{cases}$$

منجر میشود. از نظر هندسی مسئله به تقاطع دوسهمی بدل میشود که محورهای آنها برهم عمودند؛ زیرا محور سهمی اول یعنی $x^2 = y$ محور oy میباشد و محور سهمی دوم موازی با ox می‌باشد.

چنین دوسهمی دارای چهار نقطه تقاطع (حقیقی یا موهومی) می‌باشد که بر یکدایره واقعند و میتوان بهسولت با افزودن دو معادله دستگاه (۱) دایره را تعیین کرد، یعنی دستگاه (۱) را بدستگاه (۲):

$$(۲) \begin{cases} x^2 = y \\ x^2 + y^2 + (A-1)y + Bx + C = 0 \end{cases}$$

منجر میکنیم که معادله دوم دستگاه (۲) مجموع دو معادله دستگاه (۱) می باشد و مشاهده میشود که تعیین ریشه های معادله درجه چهارم (a) به تعیین نقاط تقاطع دایره متغیر :

$$x^2 + y^2 + (A-1)y + Bx + C = 0$$

با سهمی ثابت $x^2 = y$ منجر میشود که طول نقاط تقاطع چهار ریشه معادله (a) می باشد . بطریق هندسی حل دستگاه (۱) یعنی تقاطع دو سهمی که محورهای آنها برهم عموداند به تقاطع یکی از این سهمی ها با دایره مذکور بدل میشود و این مطلب از استنباطات خیام در حل معادلات درجه سوم نتیجه میشود .

مثلت حسابی خیام (که در اروپا بنام مثلث حسابی باسکال معروف شده است)

و دو جمله ای خیام (که در اروپا بنام دو جمله ای نیوتن معروف گردیده است)

هر گاه ارقامی را بترتیب زیر (جدول شماره ۱) ستون بندی کرده بشکل مثلثی در آوریم ، بطوریکه از ده سطر و ده ستون تشکیل شده باشد ؛ سطر اول فقط شامل عدد ۱ و سطر دوم شامل اعداد ۱ و ۱ و در سطرهای بعد در زیر هر عدد مجموع همان عدد و عدد سمت چپ آن را بنویسیم (بافرض اینکه در سمت راست و سمت چپ هر سطر حتی سطر اول ، رقم صفر نوشته شود ؛

مثلا سطر دوم شامل اعداد $1 = 1 + 0$ و $1 = 1 + 0$ است ؛

و سطر سوم شامل اعداد $1 = 1 + 0$ و $2 = 1 + 1$ و $1 = 1 + 0$ میباشد ؛

و سطر چهارم شامل اعداد $1 = 1 + 0$ و $3 = 1 + 2$ و $3 = 2 + 1$ و $1 = 1 + 0$ است .

است .

و بهمین روش میتوان سطرهای بعدی جدول را نوشت (میتوانید سطرهای

یازدهم و دوازدهم و بیشتر از آنها تا هر جا که حوصله شما یاری میکند

بنویسید): (۱)

سطر اول	۱									
سطر دوم	۱	۱								
سطر سوم	۱	۲	۱							
سطر چهارم	۱	۳	۳	۱						
سطر پنجم	۱	۴	۶	۴	۱					
سطر ششم	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱				
سطر هفتم	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱			
سطر هشتم	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱		
سطر نهم	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	
سطر دهم	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱

جدول (۱)

(۱) جدول مزبور که در اروپا بنام مثلث حسابی پاسکال معروف شده است ، چنانکه توضیح خواهیم داد ، از اکتشافات حکیم عمر خیام میباشد .

استادان علوم ریاضی دانشگاه تهران در کتب « جبر و آنالیز » که تألیف نموده اند ضمن تعریف « تبدیل ، ترتیب و ترکیب » مثلث حسابی پاسکال را نیز شرح داده اند ؛ ولی هیچکدام از آنها اشاره باینکه مثلث مزبور از اکتشافات خیام است ننموده ؛ جز آقای محمد حسن مهدوی که در کتاب « احتمالات و آمار ریاضی » نام خیام را آورده آنها در دو جمله مختصر که از کتاب « ریاضیات برای همه » تألیف پرفسور هوگین نقل کرده ، ولی در همین دو جمله کوتاه آن حکیم بزرگوار را تجلیل نموده است .

دربین دبیران ریاضی دبیرستانهای پایتخت ، تا آنجا که ما اطلاع داریم تنها کسی که تحقیقات دقیق و دامنه داری راجع به ریاضیات قدیم و اکتشافات ریاضی دانان ایرانی نموده و ضمن مقالاتی در بعضی از مجلات حق مطلب را درباره آنان بخوبی ادا کرده است آقای ابوالقاسم قربانی میباشد . يك نمونه از مطالعات علمی ایشان در مقاله بسیار عالمانه‌ای تحت عنوان « مثلث حسابی خیام (یا پاسکال؟) » و دستور دو جمله‌ای خیام (یا نیوتن؟) ، در مجله سخن شماره ۱۰ سال ۱۳۳۸ منعکس میباشد که چون در عین حال ساده و نزدیک بفهم عمومی نوشته شده و از این نظر مطالعه آن برای کلیه دانش‌پژوهان کشور سودمند خواهد بود ، لذا عیناً مطالب مزبور را از آنجا اقتباس کرده ، ضمناً بهم خود از توجه و علاقمندی ایشان به پژوهش‌های علمی ، مخصوصاً زنده کردن نام دانشمندان قدیم ایران که مسلماً قسمت اعظم پیشرفت های علمی جدید نتیجه مطالعات و تحقیقات دقیق آنان است سپاسگزاری مینمائیم .

اعداد این جدول دارای خاصیت‌هایی هستند که عده‌ای از آنها را در اینجا

شرح می‌دهیم :

۱- مجموع اعداد هر سطر مساویست با دو برابر مجموع اعداد سطر قبل از آن ، مثلاً مجموع اعداد سطر چهارم مساویست با ۸ و این دو برابر مجموع اعداد سطر سوم است که ۴ میباشد .

۲- مجموع اعداد سطر n ام (اتم) مساویست با 2^{n-1} (دو بقوه $n-1$)
مثلاً مجموع اعداد سطر دوم مساویست با $2^1 = 2$ و مجموع اعداد سطر سوم مساویست با $2^2 = 4$ و مجموع اعداد سطر چهارم مساویست با $2^3 = 8$ و غیره .

۳- در هر سطر مجموع اعدادی که از سمت چپ در ستونهای زوج واقع هستند مساویست با مجموع اعدادی که در ستونهای فرد قرار دارند .

مثلاً در سطر چهارم مجموع اعدادی که از سمت چپ در ستونهای دوم و چهارم قرار دارند مساویست با $4 = 1 + 3$ و مجموع اعدادی هم که در ستونهای اول و سوم (از سمت چپ) قرار دارند باز مساویست با $4 = 1 + 3$.

۴- هر عدد از جدول مساویست با مجموع اعدادی که در ستون سمت چپ آن عدد و در سطرهای بالای آن واقع هستند .

مثلاً عدد ۱۵ از سطر هفتم (در ستون سوم) مساویست با مجموع اعداد ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ که در ستون سمت چپ ۱۵ (یعنی ستون دوم) و در سطرهای ششم و پنجم و چهارم و سوم و دوم و اول واقع هستند . (مورد استعمال اعداد این جدول را بعداً خواهیم دید) .

این جدول در همه کتابهای درسی اروپایی مثلث حسابی پاسکال^۱ نامیده شده است . باید دید که آیا ریاضی دانان مشرق زمین قبل از پاسکال این مثلث را می‌شناخته‌اند یا نه ؟ یاد آوری میکنیم که پاسکال از ۱۶۲۳ تا ۱۶۶۲ میلادی یعنی از ۱۰۳۳ تا ۱۰۷۳ هجری قمری می‌زیسته .

۱-بهبان فرانسو Triangle arithmétique de Paalc و به انگلیسی

Pascalsches Dreieck و به آلمانی

قبل از پاسخ دادن باین سؤال نظر خواننده گرامی را بدستور های زیر جلب می کنیم :

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

جدول (۲)

اگر این پنج دستور را با سطرهای دوم و سوم و چهارم و پنجم و ششم مثلث حسابی (جدول ۱) مقایسه کنیم درمی یابیم که در هر يك از این دستورها ضرائب عددی جمله ها همان اعداد سطر نظیر خود از مثلث حسابی هستند .

مثلا در دستور پنجم ضرائب عددی جمله ها عبارتند از ۱ و ۵ و ۱۰ و ۱۰ و ۵ و ۱ و این اعداد همان اعدادی هستند که در سطر ششم مثلث حسابی ثبت شده است . این قاعده کلی است و مثلا سطر دهم مثلث حسابی ضرائب عددی بسط $(a + b)^9$ هستند که عبارتند از :

$$۱ \text{ و } ۹ \text{ و } ۳۶ \text{ و } ۸۴ \text{ و } ۱۲۶ \text{ و } ۱۲۶ \text{ و } ۸۴ \text{ و } ۳۶ \text{ و } ۹ \text{ و } ۱$$

فایده و مورد استعمال مثلث حسابی اینست که ضرائب عددی بسط در جمله $(a + b)^n$ را بازاء مقاریر مختلف n بدست میدهد .

صورت کلی دستورهای فوق را بیشتر اروپائیان دستور دو جمله ای نیوتن^۱ می نامند حال باید دید که آیا ریاضی دانان مشرق زمین قبل از نیوتن این دستور را می شناخته اند یا نه ؟ یادآوری می کنیم که نیوتن از ۱۶۴۲ تا ۱۷۲۷ میلادی یعنی از ۱۰۵۲ تا ۱۱۴۰ هجری قمری می زیسته .

ریاضی دان بزرگ ایرانی غیاث الدین جمشید کاشانی کتاب مفتاح الحساب را

در سال ۸۳۰ هجری قمری یعنی تقریباً دو بیست سال قبل از تولد پاسکال و دو بیست و بیست سال قبل از تولد نیوتن نوشته است و از مقدمهٔ مفتاح الحساب پیداست که این کتاب شامل مطالبی است که در آن زمان برای یک نفر محاسب لازم بوده یعنی کتاب مفتاح یک کتاب درسی است و نه یک رسالهٔ تحقیقی.

اکنون قسمتی از باب پنجم از مقالهٔ اول مفتاح الحساب را ترجمه و تلخیص می‌کنیم و نشان می‌دهیم که « دستور دو جمله ای » و « مثلث حسابی » قرنهای پیش از زمان پاسکال و نیوتن بر ریاضی دانان ایرانی معلوم بوده و تقریباً دو بیست سال پیش از آنکه این دانشمندان پا بعرصهٔ وجود بگذارند مطالب مزبور در کتابهای درسی اسلامی نوشته شده و طالبان علم آنها را می‌آموخته‌اند و برای آنکه ذهن خوانندهٔ گرامی در این باره روشن تر شود متذکر می‌شویم که اولاً موضوع باب پنجم مقالهٔ اول مفتاح الحساب استخراج ریشه های اعداد است مثل جذر و کعب و ریشهٔ چهارم و غیره و ثانیاً قدماً بجای اصطلاحات ریاضی کنونی اصطلاحات دیگری بکار می‌برده‌اند که در بیشتر موارد با اصطلاحات امروزی تفاوت کلی دارد. برای مثال چند اصطلاح قدیمی را با اصطلاحات معادل آنها در اینجا می‌نویسیم تا قسمتی را که از مفتاح الحساب ترجمه می‌کنیم برای خواننده بهتر مفهوم شود.

اصطلاح قدیمی	اصطلاح کنونی	علائم قراردادی فعلی
مال یا مجذور یا مربع عدد	مربع عدد	a^2
کعب یا مکعب عدد	قوة سوم عدد	a^3
مال مال عدد	قوة چهارم عدد	a^4
مال کعب عدد	قوة پنجم عدد	a^5
کعب کعب عدد	قوة ششم عدد	a^6
مال مال کعب عدد	قوة هفتم عدد	a^7
ضلع اول	ریشه (اسم عام)	

$\sqrt[4]{A}$	ریشه چهارم	ضلع اول مال مال
a^n یا $(a+1)^n$	قوه (اسم عام)	مضلع
	نمای قوه	عدد منزل
	عددی که باید ریشه اش گرفته شود	مضلع
مثل $\sqrt{9}$	عدد گویا	مضلع منطوق
مثل $\sqrt{11}$	عدد گنگ	مضلع اصم

در مقام مقابله با قوه چهارم عدد a قوه چهارم دو جمله ای $(a+1)$ یعنی $(a+1)^4$ را منزلت مال مال می نامیده اند و ضرائب عددی جمله ها را در بسط عبارت $(a+1)^n$ اصول منازل مضلعات می گفته اند. مثلاً ضریب عددی جمله a^2 در بسط $(a+1)^n$ اصل صف مال از منزلت مال کعب نامیده می شده است. در دستور :

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

اعداد ۴ یعنی ضرائب a^3 و a را اعداد دو طرف این منزلت و عدد ۶ را عدد وسط این منزلت می نامیده اند.

اینک ترجمه و تلخیص يك قسمت از باب پنجم از مقاله اول مفتاح الحساب (رجوع کنید به صفحات ۳۷ و ۳۸ و ۳۹ از مفتاح الحساب چاپ تهران در ۱۳۰۶ هجری قمری) :

راه دیگر برای بدست آوردن تفاضل يك قوه از دو عدد صحیح متوالی یعنی محاسبه $a^n - (a+1)^n$ برای این باید اعدادی را که به اصول منازل مضلعات موسوم هستند بشناسیم... بدانکه اصل منزلت مال [یعنی ضریب a در بسط $(a+1)^2$] فقط يك عدد است و آن ۲ می باشد و اصول منزلت کعب [یعنی ضرائب a^2 و a در بسط $(a+1)^3$] دو عدد است که عبارت از ۳ و ۳ و برای هر يك از منزلت های بعدی اعداد دو طرف را يك واحد بازا هر صف زیاد می کنیم و اگر

هر دو عدد مجاور از اصول يك منزلت را با هم جمع کنیم یکی از اعداد وسط از منزلت بعدی بدست می آید مثلا اعداد منزلت مکعب ۳ و ۳ است که مجموعشان ۶ می شود پس ۶ عدد وسط منزلت چهارم است و اصول منزلت چهارم ۴ و ۶ و ۴ می باشند و مجموع ۴ و ۶ یعنی ۱۰ یکی از دو عدد وسط منزلت پنجم است و مجموع ۶ و ۴ و ۶ وسط دیگر است و بهمین قیاس اصول منازل تا بی نهایت بدست می آید. همانطور که در جدول زیر دیده می شود:

صفوف	اصول قوه دوم	اصول قوه سوم	اصول قوه چهارم	اصول قوه پنجم	اصول قوه ششم	اصول قوه هفتم	اصول قوه هشتم
صف قوه هشتم	۹						
صف قوه هفتم	۳۶	۸					
صف قوه ششم	۸۴	۲۸	۷				
صف قوه پنجم	۱۲۶	۵۶	۲۱	۶			
صف قوه چهارم	۱۲۶	۷۰	۳۵	۱۵	۵		
صف مکعب	۸۴	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	۴	
صف مربع	۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳
صف ریشه	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳

جدول ۳

و هر گاه بخواهیم تفاضل بین يك قوه از دو عدد صحیح متوالی [یعنی $(a+1)n - a^n$] را بدست آوریم عدد کوچکتر یعنی a را در اصل صف ضلع متعلق به آن قوه ضرب می کنیم و مربع a یعنی a^2 را در اصل صف مربع و a^3 را در اصل صف مکعب ضرب می کنیم و بهمین طریق عمل را ادامه می دهیم تا اینکه جمیع قوای a که از قوه مفروض کوچکترند در اصول منازل مربوطه

ضرب شوند و همه حاصلها را با هم جمع می‌کنیم و يك واحد بر آن می‌افزاییم
تفاضل مطلوب بدست می‌آید .

مثلا می‌خواهیم $۴^{\circ} - ۵^{\circ}$ را حساب کنیم . صفوفی را که کوچکتر از قوه پنجم هستند رسم می‌کنیم و در آنها اصول مربوط بخودشان را در يك ستون می‌نویسیم و عدد کوچکتر یعنی ۴ را در صف ضلع و مربع آن یعنی ۱۶ را در صف قوه دوم و مکعب آن یعنی ۶۴ را در صف قوه سوم و قوه چهارم آن یعنی ۲۵۶ را در صف قوه چهارم می‌نویسیم و بین آنها و بین اصول يك خط قائم رسم می‌کنیم سپس هر عدد را که در صف اصول واقع شده در عدد نظیر خود از ستون قوا ضرب می‌کنیم و حاصل‌ها را در ستون قائم دیگری از جدول قرار می‌دهیم سپس اعدادی را که در جدول حاصل ضرب‌ها نوشته‌ایم با هم جمع می‌کنیم و يك واحد به آن می‌افزاییم ۲۱۰۱ حاصل می‌شود و این عدد مساویست با $۴^{\circ} - ۵^{\circ}$.

صفوف	اصول قوه پنجم	قوای عدد که باید در اصول ضرب شوند	حاصل ضربها
صف قوه چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
صف قوه سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
صف قوه دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
صف ضلع	۵	۴	۲۰

جدول ۴

و هر گاه بخواهیم تفاضل دو قوه از دو عدد غیر متوالی (یعنی $a^{\circ} - b^{\circ}$)
مثلا $۴^{\circ} - ۷^{\circ}$ را حساب کنیم ستون دیگری به جدول فوق اضافه می‌کنیم و در آن قوای متوالی تفاضل دو عدد یعنی $۳ = ۷ - ۴$ را می‌نویسیم بطوریکه تفاضل یعنی ۳ در صف قوه چهارم و مربع ۳ یعنی ۹ در زیر آن و قوه چهارم آن در صف ریشه واقع شود. سپس اعدادی را که در صف حاصل ضربها واقع شده‌اند در اعداد نظیر آنها از ستون قوای تفاضل ضرب می‌کنیم و حاصل ضربهای اخیر را در يك

ستون قائم دیگر می نویسیم و سپس آنچه را در جدول اخیر نوشته ایم با هم جمع می کنیم و به آن قوه پنجم تفاضل یعنی $۳ = ۲۴۳ = ۳^۵$ را می افزاییم عدد ۱۵۷۸۳ حاصل می شود و این عدد همان عدد مطلوب یعنی $۴^۵ - ۳^۵$ است .

اصول قوه پنجم	قوای عدد که باید در اصول ضرب شوند	حاصل ضربها	قوای تفاضل که در حاصلها ضرب شده اند	حاصل ضربهای دوم	صفوف
۵	۲۵۶	۱۲۸۰	۴	۳۸۴۰	صف قوه چهارم
۱۰	۶۴	۶۴۰	۹	۵۷۶۰	صف قوه سوم
۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۷	۴۳۲۰	صف قوه دوم
۵	۴	۲۰	۸۱	۱۶۲۰	صف ضلع

جدول ۵

با کمی دقت معلوم می شود که اولاً جدول شماره ۲ همان جدول شماره ۱ یعنی مثلث حسابی است با این تفاوت که وضع قرار گرفتن اعداد در آنها متفاوت است و جدول ۲ ستون آحاد را ندارد و ثانیاً اگر در جدول شماره ۳ دو عدد صحیح متوالی را a و $a+1$ بنامیم مفهوم این جدول با علائم قرار دادی کنونی دستور زیر است :

$$(a+1)^5 - a^5 = 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$$

$$(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$$

و از آنجا

و ثالثاً اگر در جدول شماره ۴ دو عدد صحیح غیر متوالی را a و b بنامیم

مفهوم این جدول با علائم قرار دادی کنونی دستور زیر است :

$$(a+b)^5 - a^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

و از آنجا

یعنی درست دستور دوجمله ای که امروز در مدارس ما تدریس می شود . البته این دستور برای قوه پنجم داده شده ولی قاعده متن مفتاح الحساب کلی است و می توان آنرا برای هر قوه دیگری نیز بکار برد . این نکته شایسته توجه است که بر طبق آنچه در مفتاح الحساب نوشته شده مثلاً برای بدست آوردن ضرائب بسط دوجمله ای $(a + b)^2$ باید هفت سطر اول مثلث حسابی را نوشت تا سطر هفتم آن که همان ضرائب مذکور است بدست آید اما ریاضی دان دیگر ایرانی ملا محمد باقر یزدی (قرن هفدهم میلادی) در کتاب عیون الحساب^۱ قاعده ای بیان می کند که این ضرائب را مستقیماً و بدون اینکه احتیاج بنوشتن شش سطر اول مثلث حسابی باشد بدست می دهد .

نکته بسیار مهم دیگر این است که غیاث الدین جمشید در مقدمه مفتاح الحساب بصراحت می نویسد که تمام جداولی که در آن کتاب هست خودش استنباط کرده مگر هفت جدول که جداول شماره ۳ و ۴ که غیاث الدین جمشید آنها را جداول اصول منازل نامیده است جزء همین هفت جدول است یعنی غیاث الدین جمشید آنها را از پیشینیان خود اقتباس کرده و در کتاب مفتاح نوشته است . بنا براین « مثلث حسابی » و « دستور دوجمله ای » مدتها قبل از غیاث الدین جمشید شناخته شده بود .

طبیعی است که از خود پیرسیم که این مطالب که در زمان غیاث الدین جمشید در زمره مطالب معمولی و جاری ریاضیات بوده از کجا آمده و چه کسی این دستور ها را بدست آورده است . برای پیدا کردن جواب این سؤال باید بکتابهای حساب و جبری که پیش از زمان غیاث الدین جمشید تألیف شده و مخصوصاً بمباحثی ازین کتب که مربوط باستخراج ریشه اعداد و یا حل معادلات درجه سوم به بالاست رجوع کنیم . در کتاب جبر و مقابله خیام که استاد گرامی جناب

۱- چند نسخه خطی از کتاب عیون الحساب در کتابخانه مجلس موجود است و يك نسخه خطی از آن که در تاریخ ۱۲۶۴ هجری قمری نوشته شده متعلق به استاد محترم آقای دکتر بیژن است که برای مطالعه در اختیار بنده گذاشته اند ،

آقای دکتر غلامحسین مصاحب در سال ۱۳۱۷ هجری شمسی با انضمام تاریخ علوم ریاضی تا زمان خیام منتشر کرده‌اند (صفحه ۲۳۱) این عبارت هست. « هندیه‌ها برای استخراج جذر و کعب طرقي دارند که مبنی بر آنند تفحص است و آن عبارتست از دانستن مربعات ارقام نه‌گانه و حاصل ضرب آنها در یکدیگر و من در اثبات صحت این طرق و چگونگی نیل به مقصود از روی آنها کتابی تألیف کرده‌ام. در این کتاب بر انواعی که هندیان ذکر کرده‌اند انواع دیگری از قبیل استخراج ریشه‌های چهارم و پنجم و ششم و بالاتر افزوده‌ام و قبل از من کسی این مطالب را ذکر نکرده. براهین این کتاب عددی است و بر قسمتهای مربوط به حساب از کتاب اصول مبتنی می‌باشد »

کتابی که خیام به آن اشاره می‌کند به احتمال قوی عبارتست از رساله در صحت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب و شاید رساله مشکلات الحساب باشد. متأسفانه از این دو کتاب فقط نامی باقی مانده و هنوز نسخه‌ای از آنها بدست نیامده است. نگارنده برای بدست آوردن این دو رساله تحقیقاتی کرده‌ام که انشاء الله نتایج آنها را بعداً خواهم نوشت.

از اینکه خیام به صراحت در کتاب جبر و مقابله خود می‌گوید که استخراج ریشه‌های چهارم و پنجم و بالاتر را به طرق هندی افزوده و قبل از او کسی این مطالب را ذکر نکرده است و نظر باینکه مطالب مذکور بعد از خیام در کتب ریاضی نوشته شده و بعد ها جزء مطالب درسی درآمده است می‌توان دانست که مخترع واقعی مثلث حسابی و دستور دو جمله‌ای (البته در حالت خاصی که قوه دو جمله‌ای عدد صحیح مثبت باشد) همان ریاضی دان بزرگ ایران حکیم عمر خیام است که در قرن یازدهم میلادی یعنی در حدود شش قرن قبل از پاسکال و نیوتن می‌زیسته و باید این‌ها را به نام خیام نامید و گفت مثلث حسابی خیام و دستور دو جمله‌ای خیام.

خواننده تصور نکند که نویسنده این مقاله برای بزرگ جلوه دادن ریاضی دانان ایرانی خدای نخواستہ در پی آنست که به دانشمندان بزرگی همچون نیوتن

و پاسکال جسارتی کند . مقام شامخ این ستارگان قدر اول عالم علم خیلی عالیتر از آنست که اگر بگویم فلان دستور را دانشمندان دیگری قبل از زمان آنان می دانسته‌اند چیزی از آن کاسته شود . این مطلب هم ناکفته نماند که ریاضیون مشرق زمین دستور دو جمله ای را فقط در حالتی که قوه دو جمله ای عدد صحیح مثبت باشد بدست آورده‌اند و نیوتن آنها را بصورت کلی و جامع در آورده و تعمیم داده است .

اینک برای مزید اطلاع خواننده گرامی قسمتی از آنچه را در کتابهای خارجی راجع باین موضوع دیده‌ام در اینجا ترجمه می‌کنم :

از کتاب ریاضیات برای همه تألیف هگین^۱

« بی شك فریبندگی اعداد مثلث شکل موجب شده است که کسانی به فکر مثلث حسابی پاسکال بیفتند و اینکه این مثلث حسابی را مثلث حسابی پاسکال می‌نامند برای آنست که پاسکال اول ریاضی دان فرانسوی است که باحتمالات ریاضی که اساس تئوری جدید علم آمار است توجه کرد . در واقع سلسله مثلث حسابی را عمر خیام بدست آورد . این سلسله در کتاب آئینه قیمتی چهار عنصر^۲ معرفی شد و این کتاب در حدود سال ۱۳۰۰ میلادی بوسیله ریاضی دان چینی چوشی که^۳ در زمانی که امپراطوری مغول در اروپای شرقی پیش می‌رفت نوشته شده است. » مؤلف کتاب ریاضیات برای همه پس از تشریح این مطلب همه جا مثلث حسابی را به نام مثلث حسابی خیام می‌نامد و در جای دیگر همان کتاب می‌نویسد: عمر خیام که دستور دو جمله ای را کشف کرد يك ماتریالیست با ایمان بود که می‌خواست حکمت را در عالم واقعی بکار برد و آنرا موافق میل خود از نو بسازد .

از کتاب تاریخ ریاضیات تألیف اسمیت^۴ (جلد دوم صفحه ۵۰۷) :

1- Lancelot Hogben, 2- Précieux Miroir des Quatre Elements
3- Chu Shi kei 4- History of Mathematics
تألیف David Eugene Smith.

« قضیه دو جمله ای - بسط عبارت n $(a + b)$ بازاء مقادیر صحیح n یا لاقلاً وسیله بدست آوردن ضرائب آن مدت‌ها پیش از آنکه به اروپا برسد، در مشرق زمین شناخته شده بود حالت $n=2$ را اقلیدس (۳۰۰ سال قبل از میلاد) می دانست. اما تعمیم قاعده بازاء مقادیر دیگر n تا آنجا که اطلاع داریم در کتاب جبر عمر خیام (۱۱۰۰ میلادی) آمده است. »

«... تعمیم قضیه دو جمله ای بازاء مقادیر منفی و کسری n از نیوتن است» (از صفحه ۵۱۱ کتاب تاریخ ریاضیات).

یکی از کارهای علمی خیام که بعدها اروپائیان از آن استفاده کردند، تحقیقی است که در اصل توازی اقلیدس انجام داده و حاصل مطالعات خود را در رساله « فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس » بیان داشته است. بطوری که از مطالعه رساله مزبور برمی آید، خیام در صحت اصل اقلیدس تردید داشته، و بعد ها خواجه نصیرالدین طوسی کارهای خیام را از نو تشریح کرده و چندین قرن بعد نیز ساکری ایتالیائی (Saccheri) مجدداً همین بحث را پیش کشیده، ولی انجام کامل این تحقیق و اخذ نتیجه قطعی تا زمان لباچفسکی Lobatchewski بطول انجامیده است.

بحث در اصل توازی اقلیدس ضمن قسمتی از کارهای علمی خیام، از طرف انجمن آثار ملی به استاد جلال الدین همائی محول شده، و خوانندگان برای مطالعه این موضوع باید به تألیف ایشان مراجعه فرمایند.

نتیجه

از آنچه در این کتاب شرح داده شد ، اجمالا معلوم گردید که حکیم عمر خیام نه تنها در بین دانشمندان قدیم ایران مقامی بس ارجمند داشته است ، بلکه اروپائیان نیز تا همین قرون اخیر به مقام شامخ علمی او معترف بوده و اکنون هم هستند . اگر تمام مطالعات و اکتشافات علمی خیام را در ریاضیات و هیأت و نجوم و سایر علوم نادیده گرفته و فقط به تحقیقاتی که در باره تعیین دقیق مدت سال اعتدالی نموده است اکتفا کنیم ، از روی انصاف اهمیت کار های علمی او را تصدیق خواهیم کرد ، زیرا بععلل مشکلات زیادی که در اعمال رصد و محاسبات نجومی وجود دارد ، تا اوایل قرن بیستم نیز منجمان اروپا اندازه حقیقی مدت سال اعتدالی را نتوانسته بودند تعیین کنند ؛ چنانکه در قرن شانزدهم مسیحی طول سال مزبور را $365/2425$ روز معین کرده و تقویم گریگوری را روی این میزان غلط پایه گذاری کردند . در اواخر قرن نوزدهم طول سال اعتدالی را منجمان اروپا با محاسبه و رصد $365/242241$ روز یافته اند که آنهم با مقدار حقیقی مختصر اختلاف دارد و آنچه را که امروز طبق محاسبات دقیق برای طول سال اعتدالی یافته اند عبارت است از :

$$365/24219179 - \frac{714}{10}t$$

(t بحسب سالهای ژولین معین میشود)

مقدار $\frac{714}{10}t$ آنقدر ناچیز است که در عمل میتوان از آن صرف نظر کرد و فقط رقم $365/24219179$ روز را بحساب آورد ؛ آنگاه می بینیم که حکیم عمر خیام

طبق محاسباتی که مبتنی بر رصد های مکرر و طولانی قبلی و یک سلسله محاسبات نجومی است مدت یکسال اعتدالی را چنین بدست آورده است :

۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۵۸

و چنانکه ملاحظه میفرمائید درجه صحت و دقت این محاسبه تا ۶ رقم اعشار مطابق است با آنچه که امروز بآن رسیده اند، و بهمین جهت است که تقویم جلالی که بامر سلطان ملکشاه سلجوقی بوسیله خيام و عده ای دیگر از منجمان بزرگ ایرانی، روی همین حساب صحیح درست شده، بر تقویم گریگوری که از چند قرن پیش تا امروز در سراسر کشورهای متمدن مغرب زمین معمول شده است ترجیح دارد، و این مسئله در کلیه کتابهای درسی و غیر درسی مورد تصدیق میباشد، از جمله در کتاب هیأت تألیف آقایان قربانی - صفاری که اکنون در تمام دبیرستانهای کشور ما تدریس میشود در صفحه ۵۲ چنین میخوانیم :

« تقویم جلالی (یا ملکی) - تقویم جلالی در زمان سلطان ملکشاه سلجوقی بوسیله حکیم عمر خيام و ابوالمظفر اسفرازی و میمون بن نجیب واسطی و خواجه عبدالرحمن خازنی و عده ای دیگر از منجمان بزرگ ایرانی درست شد. آنان مدت سال را ۳۶۵ روز و ۵ ساعت و ۴۹ دقیقه تشخیص داده چنین مقرر داشتند که سال از دوازده ماه سی روزی تشکیل شود و پنجروز در آخر سال بنام خمه مسترقه اضافه میگردند لذا سالهای ۴ و ۸ و ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ۲۴ و ۲۸ و ۳۲ را کیسه محسوب میداشتند. باید دانست که تقویم جلالی بهترین وسیله تطبیق سال عرفی با سال اعتدالی است و اشتباه حاصل از آن نزدیک بیک روز در هر پنج هزار سال میباشد و بنا بر این بر تقویم گریگوری مزیت دارد. »

و در کتاب « گاه شماری در ایران قدیم » تألیف آقای سید حسن تقی زاده، صفحه ۱۶۷ چنین میخوانیم :

« مهمترین و رایج ترین اصلاحی که در ایران بعد از اسلام بعمل آمده همانا ایجاد تاریخ جلالی (یا ملکی) بود که ملکشاه سلجوقی در سنه ۴۷۱ هجری قمری وقتی که اعتدال ربیعی در ۱۹ فروردین ماه قدیم واقع بود تأسیس نموده

اول سال را در اول حمل (روز اول بهار) قرار داد ، و بهمین جهت نوروز که تا آن وقت در سال شمسی سیار بود ثابت گردانیده و بنوروز سلطانی معروف شد ، و برای ثابت نگاهداشتن آن در سال شمسی بنا بر معروف کبیسه دقیق بر قرار کردند که از کبیسه کریگوری هم دقیق تر بوده است .

در کتاب « جبر و مقابله خیام » تألیف آقای دکتر مصاحب نیز ذیل صفحه ۱۹۹ ، مطالبی از دایرة المعارف اسلامی اقتباس کرده که باین جمله ختم میشود :

« لهذا تقویم جلالی از تقویم کرگوار دقیق تر است »

بنا بر آنچه ذکر شد میتوانیم خیام را حقاً یکی از بزرگترین مفاخر علمی و ملی خود بشمار آوریم ، ولی معلوم نیست روی چه اصل همانطور که در دیباچه این کتاب اشاره شده است آن حکیم بزرگوار را در تمام دنیا بنام یک شاعر ، آنهم یک شاعر دائم الخمر و رند و خراباتی معرفی کرده اند .

اتفاقاً در موقعی که آخرین صفحات این کتاب در مطبعه چاپ میشد . مجله معلم شماره ۲-۳ (دوره دوم) بدست نگارنده افتاد که در آن مقاله ای راجع به حکیم عمر خیام بقلم نویسنده عالیقدر معاصر آقای محمد جناب زاده درج شده بود ، در بیخ آدم حقایقی را که در این مقاله منعکس شده و مؤید نظر نگارنده می باشد بنظر خوانندگان محترم نرسانم ، لذا بعنوان حسن الختام ، کتاب حاضر را با نقل قسمتی از مقاله مزبور ختم مینمایم :

خیام و پیرایه هائی که بر او بسته اند :

« برای بررسی و تحقیق آثار بزرگان و اکتشاف جزو مد روحی آنان امروز قواعد صحیح علمی در دست است و بحکم آنکه مرد از « سخن » شناخته میشود باید گفت که رباعیات منسوب بخیام نیشابوری اثر یک رند خراباتی و فارغ از مسئله کفر و ایمان و آئین اخلاق است ، اما مطالعه در اوضاع و احوال زندگانی سیاسی و دینی عصر خیام بما مجال نمیدهد درباره کسی که بارها بزیارت بیت الله الحرام رفته و با اجله علماء و فضلا همزمان و معاشر بوده و در نجوم و ریاضی مقام علمی و درجه اول را داشته است ، و کسیکه در آغاز قرن پنجم اسلامی میزیسته و

از منجمان بزرگ بشمار میامده و اصلاح تقویم را بنام (ملکشاه سلجوقی) انجام داده و در حکمت و علوم با مشاهیر عصر خود مانند غزالی و دیگران بحث ها نموده و کلید حل غوامض را در علوم در دست داشته است بتوان فرض نمود که عمرش با باده گساری و لا ابالیگری همی و معشوق گذشته باشد و اینگونه رباعیات پریشان از مغز منظم و ریاضی دان بزرگی تراوش کند که :

از هر چه خوری باز شراب اولیتر با سبز خطان باده ناب اولیتر
 دنیا همه سر بسر خرابست و بیات در جای خراب هم خراب اولیتر
 حکیم عمر خیام نیشابوری از این پلیدیها و افکار طوفانی و قلندری منزّه
 بوده و باستناد آثاری که از او باقی مانده است این پوشاک رندی و عیاری که
 خیاطان سیاسی بر قامت او دوخته اند نارسا است و این قبا بر اندام او راست نمی
 آید . کسیکه زندگانی مادی دنیا و مقامات بلند آنرا پست بشمارد و پرهیزکاری
 او تا باینجا برسد که میگوید :

« از نابکاری آشکار و نهان دورم ؛ مانند روزه داران از هر عملی بر کنارم و
 جز در راه عفاف گام بر نمیگذارم و با یاد خدا افطار میکنم و گروه گمراه از
 « حق » را راهنمایی و هدایت مینمایم ، برنامه زندگانی من مانند پلی است که
 نابینایان را از خطر سقوط حفظ میکند . »^۱

هیچگاه خلاف ادعای خود خطاکار و شیدائی از آب در نمیآید و طبیب بیعاری
 را بصدا در نمی آورد زیرا مردم را بر خود میخوراند و خشم زمان او را در کام خود
 فرو میبرد ...

کتابی بنام (جامع البدایع) چاپ مصر در دسترس مطالعه نگارنده قرار
 گرفت . این کتاب حاوی رسائل علمی و عالییه ای از سؤال و جواب بزرگان علم و
 حکمت در هفده رساله است .

رساله سیزدهم اختصاص بعمر خیام دارد .

۱- اینها ترجمه اشعاری است بزبان عربی که بنام حکیم عمر خیام نیشابوری در کتاب
 « نزهةالارواح و روضة الافراح » شهرزوری ثبت شده است .

ابو نصر محمد بن عبدالرحیم النسوی قاضی نواحی پارس در سال ۴۱۷ هجری در مکتوبی با بیانی بسیار بلیغ و فصیح در نهایت تواضع و فروتنی از حکیم عمر خیام جوینای موضوعی در حکمت میشود و نامه او با چند بیت عربی شروع میشود که مفاد آن اینست :

« ای نسیم عطر افشان صبا سلام مرا بعلامه حکیم عمر خیام برسان » بوسه زن برخاک آن وادی و مشکین کن نفس « تکریم و تعظیم از جانب من بگو و نیازمندی مرا از عطایای حکمت و دانش باو ابلاغ کن .

عمر خیام دانشمند و حکیمی است که ابرهای فضیلت و بزرگواری او بیدریغ ریزش میکند؛ آب حیات باستخوانهای شکسته و پوسیده میدمد (کنایه از آنکه مرده را زنده میکند) ، مرده جهل در گورستان نادانی را بعالم زندگی و دانش بر میگرداند، از فلسفه ایجاد عالم و تکلیف ما آنچه جواب میدهد و استدلال در این باره نماید دیگر جای چون و چرا باقی نمیکندارد . «

قاضی امام ابی نصر مزبور از شاگردان شیخ الرئیس ابن سینا بوده ولسی فلسفه و حکمت خلقت جهان و وظیفه را در کیتی با این عنوان شروع میکند :

« حجة الحق نصره الدین ، سید حکماء الشرق والغرب ابی الفتح عمر بن الخیام » آنچه در رساله های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ خواننده میشود ، صرف نظر از طرح مسائل مشکل و لاینحل که اهل نظر و متکلمان در آن باره بسیار سخن رانده و در مانده اند و خیام همه را پاسخ قانع کننده داده است . احترام و خضوع « سائل » که خود از مشاهیر عام و دانش است و از قضات و فقهاء بزرگ زمان بشمار میرفته ، علوم مقام خیام را مجسم میکند . آیا سزاوار است از روی بیخردی و نادانی بعلل جریانهای نامرئی سیاسی این مرد بزرگ را برای تأمین آرزوها و مطامع بیگانگان که همه مقدسات ما را از طریق فریبکاری میخواهند لجن مال کنند « رند خراباتی و مست طافح » بشناسیم و او را از مقام بلندی که در علم و حکمت و نجوم داشته است سقوط داده اجازه دهیم که میکده ها و مجامع آلوده بهوسرانیها بنام او خود نمائی کنند و در اوراق رنگین او را در آغوش زیبا رویان و بساط کناهکاران جلوه دهند؟! ..

خیر ، يك ملت زنده اجازه نخواهد داد كه مقدسات او آلت لهو و لعب و طرب و پليديهای اخلاقی خودی و بيگانه شود و خيام حكيم در فيلم های سينما ، روزگار خود را بسان كازانوای معروف يا راسپوتين بگذراند .

آنكه در رساله های جوايیه خود حكمت باریتعالی را در خلقت عالم و انسان و تكلیف مردم را در برابر خالق با عالیتین دقیق فلسفی دلچسب و روح پرور بیان میکند و مصادر خیر و شر را از هم جدا میسازد و در علم کلی داد سخن میدهد و بنظام عالم و وجود اعتقاد دارد و مبداء و معاد را میشناسد این رباعی گفته او نیست :

گویند بهشت عدن با حور خوش است من میگویم كه آب انگور خوش است
این نقد بگیر و دست از آن نسبه بدار كاواز دهل شنیدن از دور خوش است
یا :

تا بتوانی تو خدمت رندان كن بنیاد نماز و روزه را ویران كن
بشنو سخن راست ز خيام عمر می میخور و روزه میزن و احسان میكن

این افكار از دماغ يك قلندر حشیشی ، رند خراباتی كه بخورد هر چه در میان آید و بگوید هر چه بر زبان آید تراوش میکند ، و انتساب این آثار به نصره - الدین عمر بن ابراهیم خيام نیشابوری ظلم تاریخ و ستمکاریهای سیاستهای مخرب است .

تهران - فروردین ماه ۱۳۳۹ دكتر جلال مصطفوی

کتبی که برای تألیف این کتاب مورد مطالعه نگارنده قرار گرفته است

- ۱- جبر و مقابله ختّام تألیف آقای دکتر غلامحسین مصاحب
- ۲- خلاصه الحساب « غیاث الدین جمشید کاشانی
- ۳- کتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابله « محمد بن موسی خوارزمی
- ۴- مجموعه رسائل البیرونی « ابوریحان بیرونی
- ۵- ریاضیات برای همه (Mathématique pour tous)
تألیف پرفسور Hogben
- ۶- دوره کتب جبر و مقابله کلاسیک دبیرستانها .
- ۷- کتاب مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها

غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۷	۲	بمشکلات	بمشکلات
۱۲	۲۴	امروز در در	امروز در
۱۵	۸	سر	سه
۲۰	۱۹	x^2	$2x$
۲۲	۲۳	$2x + 16$	$2x = 16$
۲۵	۱۶	$y = x + 3$	$y = 3 - x$
۲۵	۱۷	$(x + 3)$	$(3 - x)$
۲۷	۷	۷	۹
۴۶	۱۵	$x^2 = 3x = 2$	$x^2 = 3x - 2$
۴۸	داخل جدول	تصف عدد اشیاء را بکمرته بآن	جذر را بکنوبت بنصف عدد
		اضافه میکنیم	اشیاء اضافه میکنیم
۵۱	۱۱	$34x$	$24x$
۵۱	۱۶	$x^2 + \frac{9}{49} 23 = 24 \frac{9}{49} x$	$x^2 + \left(\frac{9}{49} \times 23\right) = 24 \times \frac{9}{49} x$
۵۱	۱۸	$x^2 x \frac{11}{49}$	$x^2 + \frac{11}{49}$
۵۳	۷	$b^2 - 4ax > 0$	$b^2 - 4ac > 0$
۵۳	۹	$b^2 + 4ac = 0$	$b^2 - 4ac = 0$
۵۳	۱۶	نقل میکند	حل میکند
۶۵	۱۶	ضرب	ضرب
۶۵	۲۱	$\sqrt[6]{729x^{12} + 64}$	$\sqrt[6]{729x^{12} \times 64}$
۹۰	۱۶	ویکه ریاضی دان فرانسوی	ویکه ریاضی دان آلمانی
۱۱۰	۹	حالت سوم $c < a$	حالت سوم $c > a$
۱۲۱	۷	$2^1 - 2$	$2^1 = 2$
۱۲۱	در حاشیه	Triangle arithmétique de Pascal	صحیح است
۱۲۳	۹	طالبان	طالبان

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار و ائینه تاریخی ایران	شهریورماه ۱۳۰۴
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهرماه ۱۳۰۴
۳	شاهنامه و تاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریورماه ۱۳۰۵
۴	کشف دوا لوح تاریخی در همدان (تحقیق پرفسور هرتسفلد ترجمه آقای مجتبی مینوی)	اسفندماه ۱۳۰۵
۵	سه خطابه در باره آثار ملی و تاریخی ایران (از آقایان فروغی، هرتسفلد و هانی بال)	مهرماه ۱۳۰۶
۶	کشف الواح تاریخی تخت جمشید (پرفسور هرتسفلد)	اسفندماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس آقای فروغی راجع بفردوسی	بهمن ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر در احوال و زندگانی فردوسی (بقلم فاطمه خانم سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی سینا در پنجمین دوره اجلاس یونسکو در فلورانس	اسفندماه ۱۳۲۹
۱۰	رساله جودیه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمود نجم آبادی)	۱۳۳۰
۱۱	رساله نبض ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوة استاد دانشگاه)	۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقایان دکتر محمد معین و سید محمد مشکوة استادان دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوة استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۴	ریاضیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۵	الهیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمد معین استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۶	رساله نفس ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۷	رساله در حقیقت و کیفیت سلسله موجودات (به تصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمه رساله سرگذشت ابن سینا (از آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱۹	معراج نامه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۰	رساله تشریح اعضاء ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۱	رساله قراضه طبیعیات منسوب بابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۲	ظفر نامه منسوب به ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۳	رساله کنوز المعزمین ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۴	رساله معیار العقول - جرثقیل - ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۵	رساله حی بن یقطان ابن سینا با ترجمه شرح فارسی آن از یکی از معاصران ابن سینا (بتصحیح آقای هانری کربن)	۱۳۳۱
۲۶	چشن نامه ابن سینا (مجلد اول - سرگذشت و تألیفات و اشعار و آراء ابن سینا) تألیف آقای دکتر ذبیح الله صفا استاد دانشگاه	۱۳۳۱
۲۷	ترجمه مجلد اول چشن نامه بفرانسه (بوسیله آقای سعید نفیسی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۸	ترجمه اشارات و تنبیهات (بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۲۹	پنج رساله فارسی و عربی از ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۳۰	آثار تاریخی کلات و سرخس (تألیف آقای مهدی بامداد)	بهمن ماه ۱۳۳۳
۳۱	چشن نامه ابن سینا مجلد دوم (حاوی نطقهای فارسی اعضاء کنگره ابن سینا)	۱۳۳۴
۳۲	چشن نامه ابن سینا مجلد سوم (کتاب المهرجان لابن سینا) حاوی نطقهای عربی اعضاء کنگره ابن سینا	۱۳۳۵
۳۳	چشن نامه ابن سینا مجلد چهارم (شامل خطابه های اعضاء کنگره ابن سینا بزبانهای آلمانی و انگلیسی و فرانسوی)	۱۳۳۴
۳۴	نبردهای نزرک نادری شاه (بقلم سر لشکر غلامحسین مقتدر)	۱۳۳۹