کتاب کوچک ریاضی ۲۱

استقرای ریاضی

$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$$

مؤلّف: پرویز شهریاری

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$n=1$

$n=k$

$n=k+1$

بسم الله الرحمن الرحیم

استقرای ریاضی

مؤلف: پرویز شهریاری

QA شهریاری، پرویز، ۱۳۰۵ -
۹ استقرای ریاضی / مؤلف پرویز شهریاری. ـ تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی
۹ش / آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۸.
۵الف ۸۶ ص.: مصور، جدول. ـ (کتابهای کوچک ریاضی؛ ۲۱).

ISBN 964-353-369-7

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
چاپ سوم: پاییز ۱۳۸۰.
۱. استقرا (ریاضیات). الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه.
ب. عنوان.

۵الف ۹ش / QA۹ ۵۱۱/۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه

استقرای ریاضی

مؤلف: پرویز شهریاری
طرح جلد از: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: ۷۸/ چاپ سوم: پاییز ۱۳۸۰
تیراژ چاپ اوّل و دوم: ۱۴۰۰۰ / تیراژ چاپ سوم: ۳۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
شابک ۷ ـ ۳۶۹ ـ ۳۵۳ ـ ۹۶۴
ISBN-964-353-369-7

فهرست

۱. پیش از آغاز

§۱. تمثیل (Analogie)

۱. مردی با عینکی به چشم و عصایی به دست، در پارک قدم می‌زند. کودکی سه ساله، خود را از دست مادرش رها می‌کند و به طرف مرد می‌دود، و رو به روی او، به حالت انتظار می‌ایستد.

ـ چیه دخترم، چیزی می‌خواهی؟

دخترک، تنها انتظار می‌کشد.

مرد بستهٔ بیسکویت خود را باز می‌کند و جلو دخترک می‌گیرد. ولی او روی برمی‌گرداند و با بغض و به حالت قهر، خود را در آغوش مادرش، که به دنبال او آمده بود، می‌اندازد.

مادر که نشانهٔ پرسش را در چهرهٔ مرد می‌خواند، توضیح می‌دهد: «چند روز پیش، دخترم در این پارک، به مردی عصا به دست و عینک به چشم برخورده است و از دست او «شکلات» گرفته است. از آن روز به بعد، گمان می‌کند، هر مرد عینکی که با عصا راه می‌رود، باید به او شکلات بدهد.»

کودک، برای رفتار خود، استدلالی دارد و این «استدلال» را، ضمن تجربه، آموخته است. ذهن کودکانهٔ او، ناآگاهانه، بنای استدلال خود را، بر تنها تجربه‌ای که داشته، گذاشته است. او در واقع، به دنبال نمونه‌ای است که در ذهن او نقش بسته است. وجود یک مرد، همراه با عصا و عینک، برای اوکافی است تا خاطرهٔ خوشِ شکلات را به‌یاد آورد و به همین دلیل، به دنبال نمونه‌های مشابه می‌رود.

این، آغاز داوری و استدلال، در انسان است. کودک از همان لحظه‌ای که چشم به جهان می‌گشاید تجربه را آغاز می‌کند و بتدریج، احساسهای خود را، بر اساس تجربه‌های خود شکل می‌دهد. چیزهایی را دوست دارد و از چیزهایی نگران می‌شود یا می‌ترسد ؛ به سمت چیزی یا کسی می‌دود و از چیزی یا کسی فرار می‌کند.

کودک، بیشتر و بویژه در سالهای نخست زندگی خود، به‌ناچار پایهٔ استدلال و داوری خود را بر «شباهت» پدیده‌ها می‌گذارد و «شبیه‌سازی» می‌کند، و به دلیل «شباهت» بین دو پدیده، دربارهٔ آنها به نتیجهٔ یکسانی می‌رسد.

این گونه «استدلال» را می‌توان «استدلال کودکانه» نامید که نام علمی آن «تمثیل» و «استدلال تمثیلی» است.

۲. فقیهان و متعلّمان، تمثیل را «قیاس فقهی» می‌نامند. در این‌جا «قیاس»، نه به معنایی که در «منطق» به‌کار می‌رود (یعنی داوری بر اساس یک حکم کلی و عام)، بلکه به معنای «شباهت» گرفته شده است. دربارهٔ قیاس منطقی، اندکی بعد، به کوتاهی سخن خواهیم گفت. باید توجه داشت که واژهٔ «قیاس»، در صحبتهای روزانه، بیشتر به معنای «شباهت» و «تمثیل» به‌کار می‌رود : «قیاس به نفس» ، یعنی «شبیه آنچه در خود می‌بینی، به دیگران هم نسبت بدهی» ؛ «بر این قیاس»، یعنی «برای همهٔ حالتهای مشابه» یا این شعر مولوی «کار نیکان را قیاس از خود مگیر» ؛ یعنی «رفتار نیکان روزگار را با نمونه و مثال خودت مقایسه مکن».

درهر دانشی، برای هر واژه‌ای، باید تعریفی دقیق در دست داشت. وقتی شما در ریاضیات، از مفهوم «تصاعد نزولی» صحبت می‌کنید، کمتر به معنای عادیِ دو واژه «تصاعد» و «نزولی» توجه دارید (چرا که این دو، در معنای واژه‌ای خود، یکدیگر را نقض می‌کنند). آن‌چه برای شما مهم است، تعریفی است که برای «تصاعد نزولی» می شناسید.

۳. «استدلال تمثیلی» خاص کودکان نیست. کسی که اساس داوری خود را دربارهٔ یک قوم یا یک جریان تاریخی، بر رفتار یکی از کسان آن قوم یا بر وجود یک پیشامد تاریخی می‌گذارد ؛ یا کسی که به استناد نابرابر بودن پنج انگشت دست، بر نابرابری حقوق انسانها صحه می‌گذارد، از استدلال تمثیلی استفاده کرده است. کم نیستند کسانی که پایهٔ تمامی «استدلال» خود را بر یک ضرب‌المثل یا یک بیت شعر قرار می‌دهند. اگر در رابطه با دوست خود، خود را مقصّر بدانند، برای کم کردن گناه خود، «دلیل» می‌آورند که :

من رشتهٔ محبت خود پاره می‌کنم
شاید گره خورد، به تو نزدیکترشوم

ولی اگر تقصیر «بی‌وفایی» به گردن دیگری باشد، با احساس نگرانی شکوه می‌کنند که :

هر رشتهٔ پاره را توان بست
امـا گرهیش در میان هست

اینها همه، «استدلالهای تمثیلی» است و بنای کار بر نوعی «شباهت» گذاشته شده است.

دانش‌آموزان هم، گهگاه، از استدلال تمثیلی استفاده می‌کنند. برای نمونه، با فرض طبیعی بودن عددهای m و n، ثابت می‌کنیم:

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

آن‌وقت آن را برای حالتهایی هم، که m و n عددهایی طبیعی نیستند، به‌کار می‌برند:

$$\sqrt{x} \times \sqrt[۳]{x} = x^{\frac{۱}{۲}} \times x^{\frac{۱}{۳}} = x^{\frac{۵}{۶}} = \sqrt[۶]{x^۵}$$

یا به فرض طبیعی بودن n، ثابت می‌کنیم مشتق $f(x) = x^m$، عبارت است از $f'(x) = mx^{m-۱}$ و بعد، مثال می‌زنیم که به فرض $f(x) = \sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱} = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

این‌گونه استدلالها، استدلال تمثیلی است و در ریاضیات اعتباری ندارد.

اگر «تمثیل» می‌تواند هنر را بارور کند، به آن ظرافت و زیبایی بخشد و دست شاعر، نقاش و موسیقیدان را، برای تلقین لطایف ذهنی خود باز نگه دارد، در دانش و بویژه در ریاضیات، نمی‌تواند معتبر باشد.

۴. با همهٔ اینها، تمثیل و جست‌وجوی شباهتها، می‌تواند راهنمای خوبی برای حل و تعمیم بسیاری از مسأله‌های ریاضی باشد. تمثیل می‌تواند به ما یاری برساند تا برای نمونه، تعمیم قضیهٔ فیثاغورس یا قضیه هِرون را در فضا پیدا کنیم.

ولی باید توجه داشت که در این‌جا، تمثیل تنها می‌تواند اندیشه‌ای را در ذهن ما بیدار کند و راهنمای ما برای این تعمیمها باشد. تمثیل را نمی‌توان به جای استدلال ریاضی (که در منطق به آن استدلال قیاسی گویند) به‌کار برد. به یاری تمثیل، تنها می‌توان حدس زد. این حدس، ممکن است در عمل درست یا نادرست از آب درآید و تنها با پی‌گیری موضوع و جست‌وجوی یک استدلال قیاسی است که می‌توان به چند و چون آن پی‌برد. به این نمونه توجه کنید:

با روش تقسیم یک چندجمله‌ای جبری، بر یک چندجمله‌ای دیگر آشنا هستیم. در این روش، هم بخشی و هم بخشیاب را بر حسب توانهای نزولی مجهول منظّم می‌کنیم و سپس، تقسیم را انجام می‌دهیم. ممکن است از راه شباهت، این اندیشه به ذهن ما برسد که، اگر دو عبارت را بر حسب توانهای صعودی مجهول منظّم کنیم، چه پیش می‌آید! اگر راهی که به ذهن رسیده است، درست باشد، آن‌وقت می‌توانیم عبارتهای از درجهٔ پایین‌تر را بر عبارتهای با درجهٔ

بالاتر تقسیم کنیم. عدد ۱ را بر دو جملهای $1-x$ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (1)$$

در خارج قسمت، رشته‌ای بی‌پایان به‌دست می‌آید. آیا دو سمت برابری (۱)، همیشه برابرند؟ آزمایش می‌کنیم: x را به سمت $+\infty$ میل می‌دهیم؛ سمت چپ برابری (۱) به سمت صفر و سمت راست آن، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. آیا باید از این آزمایش نتیجه بگیریم که، این برابری، همیشه نادرست است؟ در داوری شتاب نکنیم و به آزمایش خود ادامه دهیم. $x = \frac{1}{3}$ می‌گیریم. در این صورت:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$1 + x + x^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

(در محاسبهٔ رشتهٔ سمت راست برابری، از قاعدهٔ محاسبهٔ مجموع در تصاعد هندسی نزولی استفاده کردیم). پس برابری (۱) همیشه نادرست نیست؛ ولی با این آزمایشها، قانون به‌دست نمی‌آید؛ به یاری آزمایش، تنها ممکن است اندیشه یا اندیشه‌های کم و بیش روشنی، برای ادامهٔ کار، در ذهن ما پدیدار شود.

در این‌جا ضرورتی ندارد، کار این مسأله را تا پایان ادامه دهیم. تنها می‌خواستیم نشان دهیم، «تمثیل» تنها می‌تواند انگیزه‌ای برای جست‌وجو باشد؛ ولی نمی‌تواند به جای استدلال بنشیند.

[تجزیه و تحلیل دقیق، که خیلی هم مقدماتی نیست، روشن می‌کند که برابری (۱) برای $|x|<1$ درست و برای مقدارهای دیگر x نادرست است.]

۵. در داوریها، گاهی به «عقل سلیم» و «استدلالهای به‌ظاهر معقول» تکیه می‌شود. «عقل سلیم» هم، در تحلیل آخر، به همان تمثیل برمی‌گردد و به‌تنهایی نمی‌تواند وسیله‌ای برای کشف حقیقت باشد. هزاران سال، مردم (و همراه با آنان، دانشمندان)، با تکیه بر «عقل سلیم»، می‌پنداشتند که خورشید و همهٔ ستارگان و سیّاره‌ها، به دور زمین می‌چرخند و در نتیجه، گمان می‌کردند که زمین مرکز عالم است. حتی کسانی چون جیورداتو برونو و گالیله، که جرأت کرده بودند عقل سلیم را (البته، با معیار رهبران کلیسا) نادیده بگیرند، یا به کومهٔ آتش سپرده شدند و یا تا آخر عمر، محکوم به خانه‌نشینی شدند. ارسطو با تکیه بر عقل سلیم، حکم کرده بود که در سقوط آزاد، جسم سنگینتر زودتر از جسم سبکتر به زمین می‌رسد و تا زمانی که مشاهده و تجربه، مبنای استنباطهای علمی قرار نگرفت، دانشمندان هم ازنظر نادرست ارسطو پیروی می‌کردند.

پیش از آن که بتوان به وسیلهٔ ماهواره، از زمین عکس گرفت، در یک کتاب درسی اخترشناسی، که برای دبیرستانهای ایران نوشته شده بود، برای اثبات کروی بودن زمین، از جمله به این استدلال متوسّل شده بود که : اگر مشتی آب گِل‌آلود را به هوا پرتاب کنیم، به صورت قطره‌هایی درمی‌آید که کروی شکلند. زمین را هم می‌توان (به دلیل این که $\frac{۳}{۴}$ سطح آن را آب گرفته و در زیر پوستهٔ ظاهری آن، همه‌چیز به صورت مذاب است) قطرهٔ آب گِل‌آلودی فرض کرد که در درون هوای دور و برِ خود، قرار گرفته است. بنابراین زمین هم شکلی کروی دارد. این تکیهٔ بر عقل سلیم و به زبانِ دیگر، تکیه بر تمثیل، در استدلالهای علمی است که البته نمی‌تواند معتبر باشد.

«عقل سلیم»، «استدلال ذهنی» و «منطق درونی»، تنها زمانی می‌تواند ما را به سمت کشف حقیقت راهنما باشد که متّکی بر مشاهده و تجربه (چه تجربه در عمل و چه تجربه در ذهن و اندیشه) باشد. باید در آغاز مشاهده کرد، سپس حالتهای مختلف را به محک تجربه زد و آن‌گاه، با نیروی خرد و استدلال ذهنی، رابطه‌های پنهانی را کشف کرد و حقیقت را حدس زد. این حدس، در دانشهای طبیعی، به یاری مشاهده و آزمایش، و در دانش ریاضی با استدلال منطقی تأیید یا تکذیب می‌شود.

۲§. استقرا (Induction)

۱. استقرا، شکلی از تعمیم است که بر اساس نتیجه‌گیری از مشاهده‌ها و آزمایشهای معینی به دست آمده باشد. به همین دلیل،به این گونه تعمیمها، تعمیمهای استقرایی، حقیقتهای تجربی یا قانونهای ناشی از مشاهده و تجربه گفته می‌شود.

در دانشهای عملی، شناخت بر اساس بررسیهای عمومی روی گروه‌هایی از حالتهای مشابه قرار دارد و از این راه، امکان توضیح و پیش‌بینی پدیده‌ها و روندهای طبیعی و زندگی اجتماعی به‌دست می‌آید. نتیجه‌گیریهای آماری را می‌توان نمونه‌ای از تعمیم به یاری استقرا دانست.

استقرا به طور معمول، با تجزیه و تحلیل و مقایسهٔ، مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایشها، آغاز می‌شود ؛ سپس، نتیجه یا نتیجه‌هایی که حدس زده می‌شود، دربارهٔ پدیده‌ها و روندهای مشابه دیگری، به محک تحقیق زده می شود و بعد، از مشاهده‌ها و آزمایشهای بسیار، استنتاج استقرایی به‌دست می‌آید و پذیرفته می‌شود که این استنتاج (رابطه، قاعده، قانون و ...) برای همهٔ حالتهای مشابه، درست است. به همین دلیل، وقتی نتوان آزمایش را دربارهٔ همهٔ پدیده‌های مشابه تحقیق کرد، استقرا را **استقرای ناقص** و نتیجهٔ پذیرفته شده را **فرضیه** می‌گویند.

در واقع، تمثیل، آغاز استقراست. استدلال تمثیلی بر یک یا چند حالت مشاهده و آزمایش تکیه می‌کند و استدلال استقرایی، بر مشاهده‌ها و آزمایشهای مکرّر و بسیار.

۲. تنها در حالتهایی می‌توان به نتیجه‌های حاصل از استقرا اطمینان قطعی یافت که حالتی برای مشاهده یا آزمایش باقی نمانده باشد. اگر پزشکی، تمامی مردمِ یک روستا را معاینه کند و در هیچ‌کدام از آنها اثری از مالاریا نبیند، می‌تواند به طور قطع حکم کند که: «در این روستا، بیماری مالاریا ریشه‌کن شده است.» این حکم، گرچه بر اساس استقرا به‌دست آمده است، اما حکمی قاطع است و به همین مناسبت، آن را **استقرای کامل** گویند. با گونهٔ دیگری از استقرای کامل که همان **استقرای ریاضی** است، اندکی بعد آشنا می شویم.

ملّاهادی سبزواری، استقرای کامل را «قیاس مقسّم» می‌نامد. در واقع، در این‌جا، گرچه با روش استقرایی آغاز شده است؛ ولی نتیجهٔ حاصل، با نتیجه‌ای که با روش قیاسی به‌دست می‌آید، تفاوتی ندارد و به همان اندازه، دارای اعتبار است.

ولی اعتماد به نتیجه‌ای که از استقرای ناقص به‌دست می‌آید، نسبی است. به قول ابن سینا در «اشارات و تنبیهات»، «استقرا ما را به دانش واقعی نمی‌رساند؛ زیرا ممکن است نمونه‌ای پیدا شود که خلاف نتیجهٔ استقرایی باشد». و به قول نصیرالدین طوسی در «اساس‌الاقتباس»، «ممکن است جزوی دیگر باشد، غیر از آن‌چه مذکور است، بر خلاف جمله، و حکم کلی را نقض کند».

با اصطلاح پیشینیان، استقرا «ظن غالب» ایجاد می‌کند؛ یعنی وقتی بعد از مشاهده‌ها و آزمایشهای بسیار، دربارهٔ پدیده‌های مشابه، همه‌جا به یک نتیجه رسیدیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم، به احتمال زیاد (ونه به طور قطع)، نتیجهٔ حاصل، دربارهٔ پدیده‌های مشابه دیگری هم که آزمایش نشده‌اند، درست است.

طبیعت و جامعه، آزمایشگاهی نیرومند و در عین‌حال، صادق است. در صحنهٔ این آزمایشگاه است که می‌توان، در طول زمان، «ظن غالب» را به «یقین» تبدیل یا آن را اصلاح کرد و تکامل بخشید. بنابراین، به قول جُرج پولیا، مربّی ریاضیدان مجار: «استقرا، عبارت است از تلاش برای پیدا کردن نظم و بستگیهای نهفته، درحالتهایی که مشاهده کرده‌ایم».

سخن آخر را دربارهٔ استقرا، از زبان جرج پولیا در کتاب «استدلالهای نزدیک به حقیقت» می‌آوریم:

«ریاضیدان هم، مانند پژوهشگر دانشهای طبیعی، وقتی یک قانون کلی ریاضی را حدس می‌زند، ضمن این‌که برخی از نتیجه‌های آن را به محک آزمایش می‌زند، این پرسش را در برابر طبیعت قرار می‌دهد: «گمان می‌کنم، این قانون درست باشد؛ ولی آیا به واقع درست است؟» اگر نتیجه‌ای از قانون، با صراحت رد شود، قانون نمی‌تواند درست باشد. ولی اگر آزمایش، این نتیجه را تأیید کند، تنها اشاره‌ای است بر این که، این قانون، ممکن است درست باشد.

طبیعت گاهی پاسخ می‌دهد «بله» و گاهی می‌گوید «نه»؛ ولی «بله» را به صورت نجوا، آرام و مشروط بیان می‌کند؛ درحالی که «نه» را با صدای بلند و آشکارا.»

۳§. قیاس (Déduction)

۱. شریفترین داوریها، داوری برپایهٔ استدلال، و شریفترین استدلالها، استدلال قیاسی است.

اگر دربارهٔ مثلثهای مختلف و با اندازه‌گیریهای تا حدّ ممکن دقیق، نتیجه بگیریم : «در هرحال، مجموع سه زاویهٔ مثلث برابر ۱۸۰ درجه است» و حکم کنیم : «به احتمال قوی، مجموع زاویه‌های هر مثلثی، برابر است با ۱۸۰ درجه» بر استدلال استقرایی تکیه کرده‌ایم. ولی اگر بر پایهٔ تعریفها، اصلها و قضیه‌های ثابت شده، ثابت کنیم مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است، بر **استدلال قیاسی** تکیه کرده‌ایم. در این صورت، از آزمایش در حالتهای جداگانه، معاف می‌شویم و آن‌وقت، نه با «ظنّ غالب»، بلکه با «یقین» سروکار داریم.

در ریاضیات، جز استدلال قیاسی، با هیچ‌یک از دوگونهٔ استدلال دیگر (تمثیلی یا استقرایی) سروکار نداریم. استدلال استقرایی، ویژهٔ دانشهای تجربی و استدلال قیاسی ویژهٔ ریاضیات است. به همین مناسبت، هرچه دانشی، به ریاضیات نزدیکتر شود و در کشف قانونهای خود، بیشتر از ریاضیات و روشهای ریاضی استفاده کند، نتیجه‌گیریهای آن، مطمئن‌تر و تضمین‌شده‌تر است. کوتاه سخن، می‌توان گفت :

تمثیل عبارت است از نتیجه‌گیری جزئی ؛ درست دانستن نتیجه‌ای که از یک حالت خاص به‌دست می‌آید، در حالت خاص دیگر. به زبان دیگر، شباهتی را به شباهت دیگر سرایت دادن (کسی به شما بدی کرده است و شما نسبت به کس دیگری که چهره‌ای شبیه او دارد، خشمگین شوید ؛ از شباهت چهره‌ها، شباهت رفتارها را نتیجه بگیرید). استدلال تمثیلی، در دانش راهی ندارد.

استقرا عبارت است از نتیجه‌گیری کلی از روی نتیجه‌های مربوط به حالتهای جزئی ؛ درست دانستن نتیجه‌هایی که از مشاهده‌ها و آزمایشهای مکرّر دربارهٔ پدیده‌ها یا روندهای مشابه به دست می‌آید، دربارهٔ پدیده‌های دیگر مشابه آنها. استدلال استقرایی، مبنا و اساس بیشتر نتیجه‌گیریها در دانشهای تجربی است.

قیاس عبارت است از سرایت دادن یک قانون کلی، به حالتی جزئی ؛ درست دانستن نتیجه‌ای که برای حالت کلی و عمومی ثابت شده است، دربارهٔ حالتی خاص. استدلال قیاسی، ویژهٔ ریاضیات است.

۲. به این ترتیب، آیا ریاضیات، که بر استدلال قیاسی تکیه دارد، دانشی یقینی، بی‌تغییر و در قانونهای خود، تکامل‌ناپذیر است؟

درست است که ریاضیات، دانشی «منطقی»، «استنتاجی» و به اصطلاح «قیاسی» است ؛ ولی نباید از یاد برد که سرچشمهٔ پیدایش مفهومها و قانونهای آن، بر مشاهده، آزمایش و عمل استوار است. می‌دانیم، هر شاخه‌ای از ریاضیات، بر تعریفها و اصلهای موضوع قرار دارد. استدلال را

از «هیچ» نمی‌توان آغاز کرد. استدلال نوعی تکیه‌گاه لازم دارد که برای همگان پذیرفتنی باشد و این تکیه‌گاه در ریاضیات، همان اصل موضوعهاست؛ **یعنی حکمها و گزاره‌هایی که نیاز به اثبات ندارند و درستی آنها را همه پذیرفته‌اند**. پذیرش اصلها، بر پایهٔ تجزیهٔ درازمدت بشر، «بدیهی» شناخته شده‌اند. این تجربه، گرچه زمانی دراز را پشت سر دارد؛ ولی به هرحال، ازنظر زمانی و بویژه مکانی، محدود است. انسان بتازگی، تجربه دربارهٔ «فضاهای» دور از زمین را آغاز کرده است و تجربه‌های تازه، می‌تواند «اصلهای بدیهی» پیشین را تصحیح کند و تکامل بخشد.

چنین است که ریاضیات هم، در تحلیل آخر، مثل هر دانش دیگری،از طبیعت برخاسته است و همراه با فاش شدن رازهای بیشتری از قانونهای حاکم بر طبیعت، تغییر تکاملی دارد و پیش می‌رود. این تکامل به معنای بیرون ریختن و پوچ کردن گذشته نمی‌شود؛ بلکه با تعمیم بیشتر قانونها و رابطه‌های قبلی، شمول آن را گسترده‌تر و کاربردش را کاراتر می‌کند.

ریاضیات هم، مثل هر دانش دیگری، زنده است و همچون هر موجود زنده‌ای، هرگز در جای خود نمی‌ایستد و می‌تواند تا مرزهایی پیش برود که انسان امروزی، تصوّر آن‌ها را هم، در ذهن خیالپرداز خود، نمی‌تواند داشته باشد.

۲. استقرای ریاضی

§۱. استقرا در ریاضیات

۱. اولر (۱۷۰۸ ـ ۱۷۸۲ میلادی)، ریاضیدان بزرگ سویسی و یکی از بااستعدادترین و پرکارترین ریاضیدانان، زمانی نوشت :

«من هیچ استدلال دیگری، جز استقرای طولانی ندارم. آزمایشهای طولانی، برای من، تردیدی در درستی قانون باقی نگذاشته است. به‌نظر می‌رسد، وقتی قانونی، برای نمونه تا بیست حالت پشت‌سرهم درست باشد، ممکن نیست برای حالتهای بعدی، نادرست از آب درآید.»

این دیدگاه خاص لئونارد اولر نبود. بویژه تا میانه‌های سدهٔ هفدهم، روش استقرایی، کم و بیش بی‌نقص به‌حساب می‌آمد و از این راه، حکمهای بسیاری در ریاضیات، و بویژه در شاخهٔ نظریهٔ عددها، روی هم انباشته شده بود.

آیا به واقع، این دیدگاه درست است که «وقتی قانونی تا بیست حالت پشت سرهم درست باشد، ممکن نیست برای حالتهای بعدی نادرست از آب درآید؟» به چند نمونه توجه کنید :

مثال ۱. این ردیف مجموع را درنظر می‌گیریم :

$$۱۷+۲=۱۹, ۱۹+۴=۲۳, ۲۳+۶=۲۹, ۲۹+۸=۳۷, ۳۷+۱۰=۴۷$$

از عدد اوّل ۱۷ آغاز کردیم. از مجموع این عدد، با نخستین عدد زوج مثبت، عددی اوّل به‌دست آمد. عدد حاصل (یعنی ۱۹) را با دومین عدد زوج مثبت جمع کردیم ؛ حاصل جمع، بازهم عددی اوّل است (۲۳). ۲۳ را با سوّمین عدد زوج مثبت (یعنی ۶) جمع کردیم، به عدد اوّل

۲۹ رسیدیم و غیره. در ستون دوم، ردیف عددهای زوج پشت‌سرهم، قرار دارد و اوّلین عدد هر سطر، نتیجهٔ جمع سطر قبلی است. آیا با این پنج آزمایش، می‌توان گفت، قانونی را کشف کرده‌ایم؟ آیا با دنبال کردن این روش، همیشه عددی اوّل به‌دست می‌آید؟ آزمایش را ادامه می‌دهیم :

$$۴۷+۱۲=۵۹, ۵۹+۱۴=۷۳, ۷۳+۱۶=۸۹, ۸۹+۱۸=۱۰۷, ۱۰۷+۲۰=۱۲۷$$

در پنج آزمایش بعدی هم، رفتارِ عمل تغییر نمی‌کند. تا این جا حدس ما تأیید می‌شود ؛ یعنی هربار در حاصل جمع، عددی اوّل به‌دست می‌آید. در پنج حالت آزمایش بعدی هم، اشکالی پیش نمی‌آید.

$$۱۲۷+۲۲=۱۴۹, ۱۴۹+۲۴=۱۷۳, ۱۷۳+۲۶=۱۹۹, ۱۹۹+۲۸=۲۲۷, ۲۲۷+۳۰=۲۵۷$$

ولی آزمایش بعدی، یعنی آزمایش شانزدهم، ما را ناکام می‌کند :

$$۲۵۷+۳۲=۲۸۹$$

۲۸۹ عددی اوّل نیست ؛ زیرا $۱۷\times۱۷=۲۸۹$.

یک استثنا کافی است ما را قانع کند که با یک قانون سروکار نداریم. اگر آزمایش را ادامه دهیم، متوجه می شویم که ۱۸۹ استثنا نبود. از این به بعد، گاه عدد اوّل به‌دست می‌آید و گاه عدد مرکّب. ببینید :

$۲۸۹+۳۴=۳۲۳=۱۷\times۱۹$, $۳۲۳+۳۶=۳۵۹=$ عددی اوّل

$۳۵۹+۳۸=۳۹۷=$ عددی اوّل $۳۹۷+۴۰=۴۳۷=۱۹\times۲۳$,

$۴۳۷+۴۲=۴۷۹=$ عددی اوّل

$۴۷۹+۴۴=۵۲۳=$ عددی اوّل

حدس ما درست نبود. در این‌جا، قانونی کلی حکومت نمی‌کند.

مثال ۲. این سه جمله‌ای را که به سه جمله‌ای اولر معروف است، برای مقدارهای درست n درنظر می گیریم :

$$f(x)=n^۲+n+۴۱$$

اگر پشت‌سرهم، عددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... را به جای n قرار دهیم، «همه جا» عددی اوّل به‌دست می‌آید.

$$f(۰)=۴۱,\quad f(۱)=۴۳,\quad f(۲)=۴۷,\quad f(۳)=۵۳,$$

$$f(۴)=۶۱,\quad f(۵)=۷۱,\quad f(۶)=۸۳, \cdots, f(۳۹)=۱۶۰۱$$

تا این‌جا، با آزمایش ۴۰ عدد پشت سر هم (خیلی بیش از ۲۰ عدد متوالی که اولر سفارش کرده بود)، به عددهای اوّل رسیده‌ایم ؛ باوجود این، برای مقدارهای منفی n، آزمایش را ادامه می‌دهیم :

$$f(-۱)=۴۱\,,\,f(-۲)=۴۳\,,\,f(-۳)=۴۷\,,\,f(-۴)=۵۳,$$
$$f(-۵)=۶۱\,,\,f(-۶)=۷۱\,,\cdots,\,f(-۴۰)=۱۶۰۱$$

آیا این ۸۰ آزمایش (از $n=-۴۰$ تا $n=۳۹$) کافی است تا حکم کنیم: سه جمله‌ای $n^۲+n+۴۱$ به ازای همهٔ مقدارهای درست n، برابر است با عددی اوّل. در آزمایش خود، تنها یک گام به جلو و یک گام به عقب می‌رویم:

$$f(۴۰)=۴۰^۲+۴۰+۴۱=۴۰(۴۰+۱)+۴۱=۴۱(۴۰+۱)=۴۱\times۴۱\,,$$
$$f(-۴۱)=(-۴۱)^۲-۴۱+۴۱=(-۴۱)^۲=۴۱\times۴۱$$

از هر دو طرف، تیر ما به سنگ خورد. $n^۲+n+۴۱$، همیشه عددی اوّل نیست.

یادداشت ۱. روند پدیدآمدن عددهای اوّل را در سه جمله‌ای $f(n)=n^۲+n+۴۱$ برای $n>۴۰$ دنبال می‌کنیم، شاید بتوانیم، از این راه، به یک قانون برسیم. در جدول نشان داده‌ایم، $f(n)$ برای چه عددهایی در فاصلهٔ $۴۰<n<۷۷$، اوّل و برای چه عددهایی از این فاصله، مرکّب است.

عددهای مرکب	عددهای اوّل
$f(۴۱)$	$f(۴۲)\,,\,f(۴۳)$
$f(۴۴)$	$f(۴۵)\,,\,f(۴۶)\,,\,f(۴۷)\,,\,f(۴۸)$
$f(۴۹)$	$f(۵۰)\,,\,f(۵۱)\,,\,f(۵۲)\,,\,f(۵۳)\,,\,f(۵۴)\,,\,f(۵۵)$
$f(۵۶)$	$f(۵۷)\,,\,f(۵۸)\,,\cdots,\,f(۶۳)\,,\,f(۶۴)$
$f(۶۵)$	$f(۶۶)\,,\,f(۶۷)\,,\cdots,\,f(۷۴)\,,\,f(۷۵)$
$f(۷۶)$	

به‌ظاهر، بین تعداد عددهای اوّل و تعداد عددهای مرکّب، نوعی قانونمندی وجود دارد.

در سطر اوّل، یک عدد مرکّب و ۲ عدد اوّل؛

در سطر دوم، یک عدد مرکّب و ۴ عدد اوّل؛

در سطر سوّم، یک عدد مرکّب و ۶ عدد اوّل؛

درسطر چهارم، یک عدد مرکّب و ۸ عدد اوّل؛

در سطر پنجم، یک عدد مرکّب و ۱۰ عدد اوّل.

به این ترتیب، از $f(۴۱)$ تا $f(۷۶)$، ۳۰ عدد اوّل وجود دارد که بنا بر قانون معینی به‌دست می‌آیند. ولی، از این‌جا به بعد، این قانون هم، به هم می‌خورد. همهٔ این محاسبه‌های طولانی (اگر نخواهیم از ماشین حساب یا جدول عددهای اوّل استفاده کنیم)، هیچ ثمری به‌بارنیاورد و با آن که

در آغاز روزنه‌ای از امید وجود داشت، نتوانست ما را به نتیجه‌ای کلی برساند.

یادداشت ۲. استدلالی ساده می‌توانست، از همان آغاز، ما را قانع کند که نباید به این آزمایش، چشم امید دوخت. روشن است، سه جمله‌ای $f(n) = n^۲ + n + ۴۱$ ، برای هر مقداری از n که مضربی از ۴۱ باشد ($n = ۴۱k$)، عددی است مرکّب.

مثال ۳. این مسأله را در برابر خود می‌گذاریم: «آیا می‌توان هر عدد درست را به صورت مجموع دو عدد درست دیگر، طوری نوشت که، هریک از این دو عدد، یا عددی اوّل باشد و یا مجذور یک عدد درست؟»

حکم این مسأله را دربارهٔ عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ... آزمایش می‌کنیم:

$$۱ = ۱^۲ + ۰ \ , \ ۲ = ۱^۲ + ۱^۲ \ , \ ۳ = ۲ + ۱^۲ \ , \ ۴ = ۳ + ۱^۲ \ ,$$

$$۵ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۳ + ۲ \ , \ ۶ = ۲ + ۲^۲ = ۵ + ۱^۲ \ , \ ۷ = ۳ + ۲^۲ = ۵ + ۲ \ ,$$

$$۸ = ۲^۲ + ۲^۲ = ۵ + ۳ \ , \ ۹ = ۷ + ۲ = ۲^۲ + ۵ \ , \ ۱۰ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۷ + ۳ \ , \ \ldots$$

و شما می‌توانید، درستی این حکم را برای عددهای تا ۲۰، تا ۵۰ یا تا ۱۰۰ آزمایش کنید. آیا بعد از ۱۰۰ آزمایش، می‌توانید آزمایش را متوقف کنید و نتیجه بگیرید، این حکم همیشه درست است؟ بی‌تردید نه! اگر آزمایش را ادامه دهید تا به عدد ۱۲۷ برسید، با عددی رو به رو می‌شوید که حکم را نقض می‌کند؛ ۱۲۷ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عددی نوشت که هرکدام از آنها، یا عددی اوّل باشد و یا توان دوم یک عدد.

مثال ۴. شاید به‌نظر برسد، در مثالهای پیشین، تعداد آزمایشها چندان زیاد نبود و به‌هرحال، می‌توانستیم با شکیبایی و ادامهٔ آزمایش، به حالت یا حالتهای نقض حکم برسیم. اکنون به این مسأله توجه کنید:

آیا عدد $۸۹n^۲ + ۱$ $(n \in \mathbf{N})$ می‌تواند توان دوم یک عدد درست باشد؟

اگر بخواهیم به یاری استقرا، جوابی برای این مسأله بیابیم، باید حاصل عددی $۸۹n^۲ + ۱$ را، به ازای عددهای طبیعی n، با آغاز از عدد ۱، به‌دست آوریم تا به حالت $n = ۵۳۰۰۰$ برسیم:

$$n = ۵۳۰۰۰ \Rightarrow ۸۹n^۲ + ۱ = ۲۵۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱ = ۵۰۰۰۰۱^۲$$

و برای مجذور کامل بودن عدد $۶۱n^۲ + ۱$ ، باید بیشتر شکیبا باشیم و بازهم جلوتر برویم:

$$n = ۲۲۶۱۵۳۹۸۰ \Rightarrow ۶۱n^۲ + ۱ = ۱۷۶۶۳۱۹۰۴۹^۲$$

سرپینسکی، ریاضیدان بزرگ لهستانی، توانست کوچکترین عددی را پیدا کند که، به ازای آن، عدد $۹۹۱n^۲ + ۱$ توان دوم یک عدد درست باشد، این عدد، ۲۹ رقم دارد و چنین است:

$$n = ۱۲\ ۰۵۵\ ۷۳۵\ ۷۹۰\ ۳۳۱\ ۳۵۹\ ۴۴۷\ ۴۴۲\ ۵۳۸\ ۷۳۷$$

که به ازای آن داریم:

$$۹۹۱n^۲+۱=۳۷۹\ ۵۱۶\ ۴۰۰\ ۹۰۶\ ۸۱۱\ ۹۳۰\ ۶۳۸\ ۰۱۴\ ۸۹۶\ ۰۸۰^۲$$

گمان می‌کنید، زندگی چند نسل را باید صرف آزمایش کرد تا معلوم شود، عدد $\sqrt{۹۹۱n^۲+۱}$ همیشه عددی گنگ نیست؟ اگر بخواهیم این محاسبه‌ها را با دست (و نه به یاری رایانه) انجام دهیم، به چنان زمانی نیاز داریم که تمامی زمان موجودیت انسان (از آغاز تاکنون) در برابر آن، زمانی بسیار ناچیز است.

۲. گفتیم که برخی از ریاضیدانان هم، با تکیه بر استقرا، به اشتباه افتاده‌اند. دو نمونه می‌آوریم:

پیر فرما (۱۶۰۱ـ۱۶۵۱ میلادی)، ریاضیدان فرانسوی، گمان می‌کرد عدد $۲^{۲^n}+۱$، به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی، عددی اول است. در واقع، اگر این عدد را، که به عدد فرما مشهور است، با A_n نشان دهیم، داریم:

$$n=۰\Rightarrow A_۰=۳,$$
$$n=۱\Rightarrow A_۱=۲^۲+۱=۵$$
$$n=۲\Rightarrow A_۲=۲^۴+۱=۱۷$$
$$n=۳\Rightarrow A_۳=۲^۸+۱=۲۵۷$$
$$n=۴\Rightarrow A_۴=۲^{۱۶}+۱=۶۵۵۳۷$$

تا این جا، فرضیهٔ فرما درست است؛ ولی به ازای $n=۵$ نقض می‌شود:

$$n=۵\Rightarrow A_۵=۲^{۳۲}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷=۶۴۱\times۶۷۰۰۴۱۷$$

همان‌طور که می‌بینید، $A_۵$ عددی مرکب است.

و.آ. گراو، ریاضیدان مشهور شوروی سابق، براساس آزمایشهای زیاد و طولانی نشان داد، عدد $۲^{p-۱}-۱$، به شرط اوّل بودن عدد p، بر $p^۲$ بخش‌پذیر نیست.

ولی به ظاهر، این قضیه به شرطی درست است که p، **عدد اوّلی کوچکتر از ۱۰۹۳ باشد؛ زیرا عدد $۲^{۱۰۹۲}-۱$ بر $۱۰۹۲^۲$ بخش‌پذیر است.**

۳. دو قضیهٔ نظریهٔ عددها وجود دارد که در تاریخ ریاضی، یکی به نام «قضیهٔ گولدباخ» و دیگری به نام «قضیهٔ اولر» معروف است. تاریخ پیدایش و سرنوشت این دو قضیه، خواندنی است و آن را در اینجا، از کتاب «مسأله‌های تاریخی» تألیف چیستیاکوف می‌آوریم.

در نیمهٔ اوّل سدهٔ هجدهم، کریستیان گولدباخ (۱۶۹۰ـ۱۷۶۴) ریاضیدان روسی، در نامه‌ای

به دوست دانشمند خود، لئونار اولر، این حکم را که به مسألهٔ گولدباخ معروف شده است، مطرح کرد ؛ ثابت کنید، هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان به صورت مجموعی از سه عدد اوّل نوشت. خود گولدباخ، به این مناسبت، نوشته است : «این هم یکی از مسأله‌های من است.» یک عدد فرد دلخواه، مثل ۷۷ را در نظر می‌گیریم. آن را می‌توان به صورت مجموع سه عدد نوشت :

$$۷۷ = ۵۳ + ۱۷ + ۷$$

به نحوی که هر سه جملهٔ جمع، عددهای اوّلند. عدد فرد دلخواه دیگری، مثل ۴۶۱ را در نظر می‌گیریم :

$$۴۶۱ = ۴۴۹ + ۷ + ۵$$

که باز هم، سه جملهٔ جمع، عددهایی اوّلند. همین عدد ۴۶۱ را به صورت دیگری هم می‌توان به مجموع سه عدد اوّل تبدیل کرد :

$$۴۶۱ = ۲۵۷ + ۱۹۹ + ۵$$

و غیره. اکنون برای من روشن است که، هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت. ولی چگونه می‌توان این حکم را ثابت کرد؟ **هر آزمایشی، درستی حکم را ثابت می‌کند؛ ولی زندگی هیچ انسانی، امکان آزمایش روی همهٔ عددهای فرد را نمی‌دهد. این جا به استدلالی کلی نیاز داریم، نه آزمایش.**

اولر در پاسخ گولدباخ می‌نویسد : «این حکم درست است» ؛ ولی او هم نتوانسته است اثبات دقیقی برای آن پیدا کند. اولر در ضمن، حکم دیگری را هم پیشنهاد می‌کند (قضیهٔ اولر) : هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اوّل نوشت ؛ ولی اولر توضیح می‌دهد که، این حکم را هم نتوانسته است ثابت کند.

یادآوری می‌کنیم، اگر قضیهٔ اولر ثابت شود، می‌توان قضیهٔ گولدباخ را هم، به عنوان نتیجهٔ روشنی از آن، به‌دست آورد. در واقع، هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان این طور نوشت :

$$۲N + ۱ = ۳ + ۲(N - ۱)$$

که در آن داریم : $۲(N - ۱) \geq ۴$ اگر قضیهٔ اولر درست باشد، به معنای آن است که عدد زوج $۲(N - ۱)$ را می‌توان به مجموع دو عدد اوّل تبدیل کرد. آن وقت، روشن است که هر عدد فرد $۲N + ۱$، به صورت مجموع سه عدد اوّل درمی‌آید و قضیهٔ گولدباخ برای هر عدد فرد بزرگتر یا برابر ۷ درست است.

به نظر می‌رسد، قضیهٔ عکس درست نیست ؛ یعنی از درستی قضیهٔ گولدباخ، نمی‌توان درستی قضیهٔ اولر را نتیجه گرفت. بنابراین، قضیهٔ اولر دشوارتر از قضیهٔ گولدباخ است که در عمل هم، مورد تأیید قرار گرفت.

تنها در سال ۱۹۲۰ بود که ل. گ. شین رلمان دانشمند جوان شوروی سابق (۱۹۰۵ـ۱۹۳۸) توانست مسیر درست حلّ مسألهٔ گولدباخ را نشان دهد. او، این قضیه را (که به قضیهٔ شین رلمان

معروف است) ثابت کرد : عدد ثابت k وجود دارد ؛ به نحوی که هر عدد طبیعی بزرگتر از واحد را، بتوان به صورت مجموعی از عددهای اوّل، که تعداد آنها از k تجاوز نمی‌کند، نوشت. یعنی برای هر عدد طبیعی بزرگتر از واحد ($N > ۱$) داریم :

$$N = p_۱ + p_۲ + \ldots + p_k$$

که در آن p_i ، یا عددی است اوّل و یا صفر.

اگر بتوانیم ثابت کنیم $k = ۳$ ، آن وقت قضیهٔ گولدباخ ثابت می‌شود. با تلاش بسیاری از ریاضیدانان، عدد ثابت k تا مرز ۶۷ رسید و در زمان ما تا ۲۰ پایین آمده است. ولی هنوز تا عدد ۳، راه درازی در پیش است.

در سال ۱۹۳۷، حادثه‌ای بسیار مهم و بدون انتظار، برای ریاضیدانان پیش آمد. ای.م.ونیوگرادوف، دانشمند شوروی سابق و عضو فرهنگستان علوم، قضیهٔ گولدباخ را برای عددهای به اندازهٔ کافی بزرگ فرد ثابت کرد : هر عدد فرد، به شرطی که از عددی به اندازهٔ کافی بزرگ آغاز کنیم، برابر است با مجموع سه عدد اوّل. به زبان دیگر، بین عددهای طبیعی، چنان عددی وجود دارد که هر عدد فرد بعد از آن را بتوان به صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت.

ونیوگرادوف، قضیهٔ گولدباخ را، به مفهومی که در این جا آوردیم، با روشی کم و بیش پیچیده ثابت کرد و ضمن آن، از روشهای ظریف ریاضیات امروزی استفاده کرد.

ونیوگرادوف، قضیهٔ گولدباخ را، برای عددهای فرد به اندازهٔ کافی بزرگ، یعنی برای عددهای فردی که از عدد بزرگی مثل $N_۰$ بزرگتر باشند، ثابت کرد. ولی مقدار $N_۰$ چه‌قدر است؟ به این پرسش هم، ریاضیدان دیگر شوروی سابق، ک.گ.یوروزدکین پاسخ داد : او ثابت کرد :

$$N_۰ \geq e^{۱۶/۰۳۸}$$

که در آن، e عبارت است از عدد نپر(مبنای لگاریتم طبیعی) یعنی :

$$e = ۲/۷۱۸۲\ldots$$

برای این که قضیهٔ گولدباخ به طور کامل ثابت شود، باید برای عددهای فرد کوچکتر از $N_۰$ ، با آزمایش تأیید شود. ریاضیدانانی همچون کانتور، آبری، هالسینر و دیگران درستی قضیهٔ گولدباخ را، به طور مستقیم دربارهٔ عددهای فرد پشت سر هم آزمایش کرده بودند و آزمایش نشان داده بود که قضیهٔ گولدباخ، برای عددهای فرد تا ۹۰۰۰۰۰۰ درست است.

روش ونیوگرادوف، که به یاری آن، قضیهٔ گولدباخ ثابت شد، برای اثبات قضیهٔ اولر، مبنی بر این که، هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اوّل نوشت، نتوانست کاری انجام دهد.

قضیهٔ اولر هنوز هم حل نشده است. البته به یاری قضیهٔ ونیوگرادوف می‌توان نتیجه گرفت، هر عدد زوج به اندازهٔ کافی بزرگ را، می‌توان به صورت مجموع چهار عدد اوّل نوشت.

□

به این ترتیب، استقرا می‌تواند ابزاری برای حدس زدن باشد و نوعی قانون کلی را تلقین کند. ولی کار به این جا پایان نمی‌یابد. باید این پرسش را، به قول پولیا، در برابر طبیعت قرار داد که: «به گمان من، این قانون درست است. ولی آیا به واقع درست است؟». مراجعه به طبیعت و استقرای طولانی بعدی، تنها می‌تواند «گمان» را قویتر کند؛ ولی به معنای اثبات قانون کلی نیست. برای این «گمان قوی» یا «ظنّ غالب»، باید استدلالی منطقی (به زبان منطق «استدلالی قیاسی») جست و جو کرد تا به یاری آن، این قانون کلی ثابت یا رد شود. به قول گولدباخ، درست است که «هر آزمایشی، این حکم را تأیید می‌کند؛ ولی زندگی هیچ انسانی، امکان آزمایش روی همهٔ حالتها را نمی‌دهد. در این جا، به استدلالی کلی نیاز داریم، نه آزمایش».

یکی از این استدلالهای کلی، یا دقیقتر، یکی از «روشهای استدلال قیاسی»، روش استقرای ریاضی است. ببینیم روش استقرای ریاضی یعنی چه؟

§۲. استقرای ریاضی

۱. استقرا کمک کرده بود تا قضیه‌های زیادی در ریاضیات، روی هم انباشته شود. لازم بود راهی برای اثبات منطقی این گونه قضیه‌ها یافت. باید روشی جست و جو می‌شد که به یاری آن، بتوان قضیه یا دستوری را که با استقرا و برای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ درست از آب درآمده بود، برای همهٔ عددهای طبیعی n ثابت کرد؛ یعنی با استدلالی قیاسی، ثابت کرد که این دستور یا قضیه، نه تنها برای حالتهای آزمایش شدهٔ n، بلکه برای هر عدد طبیعی n، درست است. پس از بحثها و پیشنهادهای بسیار، سرانجام روش قیاسی اثبات به دست آمد: «عبور از k به $k+۱$» که آن را روش استقرای ریاضی می‌گویند. در راه رسیدن به این روش، ریاضیدانان بسیاری، از جمله پاسکال، دکارت و یاکوب برنولی کار کردند.

روش «عبور از k به $k+۱$» یعنی چه؟

اگر با پلکانی سر و کار داشته باشید و بدانید، ارتفاع هر پله چنان است که اگر به یکی از آنها رسیده باشید، می‌توانید خود را به پلهٔ بالاتر از آن برسانید، آن وقت کافی است، در نخستین پله قرار گیرید تا مطمئن شوید، می‌توانید تمامی پلکان را تا پایان طی کنید.

اثبات این که می‌توان از پلکان تا هر پلهٔ دلخواه بالا رفت، بر پایهٔ دو فرض است؛ اوّل این که، به پلهٔ اوّل دسترسی داشته باشید، و دوم این که، مطمئن شوید با رسیدن به هر پلهٔ دلخواه، می‌توانید به پلهٔ بعدی گام بگذارید.

به زبان ریاضی، اگر شمارهٔ ردیف پله‌ها را با n نشان دهیم، اوّل $n = ۱$ در دسترس باشد؛ و دوم، با دسترس بودن k بتوانید به $k+۱$ دسترسی پیدا کنید.

به همین دلیل، روش «عبور از k به $k+۱$» را، «استدلال پله‌ای» هم می‌گویند.

«استدلال پله‌ای» یا «روش عبور از k به $k+۱$» چیزی جز همان «روش استقرای ریاضی»

نیست. همان‌طور که دیدیم، این روش، به دو مرحله متکّی است :

۱) با آزمایش نشان دهیم، حکم مسأله در گام اوّل، یعنی برای $n = ۱$ درست است.

۲) با فرض درستی حکم برای $n = k$، ثابت کنیم برای $n = k + ۱$ هم درست است.

به این مثالها توجه کنید :

مثال ۳. با شرط $x > -۱$، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، نابرابری

$$(۱ + x)^n \geq ۱ + nx$$

برقرار است. [این نابرابری به نام یاکوب برنولی (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵) ریاضیدان سویسی، نابرابری برنولی نامیده می‌شود.]

حل. ۱) آیا به پلهٔ اوّل دسترسی داریم؟ این را می‌توان بسادگی آزمایش کرد. به ازای $n = ۱$ به دست می‌آید : $۱ + x = ۱ + x$. در این جا نابرابری به برابری تبدیل شد. بهتر است، پلهٔ دوم را هم آزمایش کنیم. برای $n = ۲$ داریم :

$$(۱ + x)^۲ \geq ۱ + ۲x \Rightarrow x^۲ \geq ۰$$

که درستی آن روشن است.

۲) فرض می‌کنیم به پلهٔ kام رسیده‌ایم (k عددی طبیعی و دلخواه است)، ببینیم آیا در این صورت، می‌توانیم خود را به پلهٔ $(k + ۱)$ام برسانیم؟

به زبان ریاضی، فرض می‌کنیم، این نابرابری، برای $n = k$ درست باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$(۱ + x)^k \geq ۱ + kx \qquad (۱)$$

ثابت می‌کنیم که در این صورت، نابرابری برنولی، برای $n = k + ۱$ هم درست است ؛ یعنی :

$$(۱ + x)^{k+۱} \geq ۱ + (k + ۱)x \qquad (۲)$$

با توجه به شرط $x > -۱$ داریم : $۱ + x > ۰$. دو طرف نابرابری (۱) را در مقدار مثبت $۱ + x$ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید :

$$(۱ + x)^{k+۱} \geq (۱ + kx)(۱ + x) = ۱ + kx + x + kx^۲$$

$kx^۲$ عددی است نامنفی و بنابراین، اگر آن را از طرف دوم نابرابری حذف کنیم، در جهت نابرابری، تغییری پدید نمی‌آید ؛ بلکه قویتر هم می‌شود [وقتی می‌دانیم مقداری از $A + kx^۲$ بزرگتر است، بی‌تردید از A بزرگتر خواهد بود.] :

$$(۱ + x)^k \geq ۱ + (k + ۱)x$$

و این، همان نابرابری (۲) است. ثابت شد، به فرض درستی نابرابری (۱)، نابرابری (۲) هم درست است. درستی نابرابری را برای $n = ۱$ و $n = ۲$ ثابت کرده بودیم. وقتی نابرابری (۱) برای $n = ۲$ درست باشد، با توجه به اثبات بالا، برای $n = ۳$ هم درست است. وقتی برای $n = ۳$ درست

باشد، برای $n=۴$ درست است و غیره. به این ترتیب، می‌توانیم پلکان را پشت سرهم و تا هر جا که لازم باشد، بالا برویم.

مثال ۴. ثابت کنید، عدد $A_n = ۱۱^{n+۲} + ۱۲^{۲n+۱}$، به ازای همهٔ عددهای درست و نامنفی n، بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

حل. در این جا، گام نخست $n=۰$ است. داریم:

$$A_۰ = ۱۱^۲ + ۱۲ = ۱۲۱ + ۱۲ = ۱۳۳$$

حکم مسأله، برای $n=۰$ درست است.

اکنون فرض می‌کنیم A_k بر ۱۳۳ بخش‌پذیر باشد؛ ثابت می‌کنیم، در این صورت، $A_{k+۱}$ هم بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است. داریم:

$$\begin{aligned} A_{k+۱} &= ۱۱^{k+۳} + ۱۲^{۲k+۳} = ۱۱\times ۱۱^{k+۲} + ۱۲^۲ \times ۱۲^{۲k+۱} \\ &= ۱۱\times ۱۱^{k+۲} + ۱۴۴\times ۱۲^{۲k+۱} = ۱۱\times ۱۱^{k+۲} + (۱۱+۱۳۳)\times ۱۲^{۲k+۱} \\ &= ۱۱\times ۱۱^{k+۲} + ۱۱\times ۱۲^{۲k+۱} + ۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱} \\ &= ۱۱(۱۱^{k+۲} + ۱۲^{۲k+۱}) + ۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱} \end{aligned}$$

یا سرانجام:

$$A_{k+۱} = ۱۱A_k + ۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱}$$

مجموع طرف دوم برابری، بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است؛ زیرا جملهٔ اوّل آن شامل A_k است که بنا به فرض، مضربی است از ۱۳۳، و جملهٔ دوم، شامل عامل ۱۳۳ است. بنابراین، سمت چپ برابری، یعنی $A_{k+۱}$ هم بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

مثال ۵. ثابت کنید، اگر n دایرهٔ دو به دو متقاطع، در یک صفحه رسم کنیم، صفحه را به $n^۲ - n + ۲$ بخش مختلف، تقسیم می‌کنند.

حل. $n^۲ - n + ۲$ را $\varphi(n)$ می‌نامیم. حکم مسأله، برای $n=۱$ درست است؛ زیرا:

$$\varphi(۱) = ۱^۲ - ۱ + ۲ = ۲$$

و روشن است که یک دایره، صفحه را به دو بخش (بخش درونی و بخش بیرونی دایره) تقسیم می‌کند.

اکنون فرض می‌کنیم، قضیه برای $n=k$ درست باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\varphi(k) = k^۲ - k + ۲ \qquad (۱)$$

و ثابت کنیم که، در این صورت، به ازای $n = k+۱$ هم درست است؛ یعنی

$$\varphi(k+۱) = (k+۱)^۲ - (k+۱) + ۲ = k^۲ + k + ۲ \qquad (۲)$$

روشن است، اگر p نقطهٔ جدا از هم، روی محیط دایره در نظر بگیریم، محیط دایره را به p کمان مختلف تقسیم می‌کند.

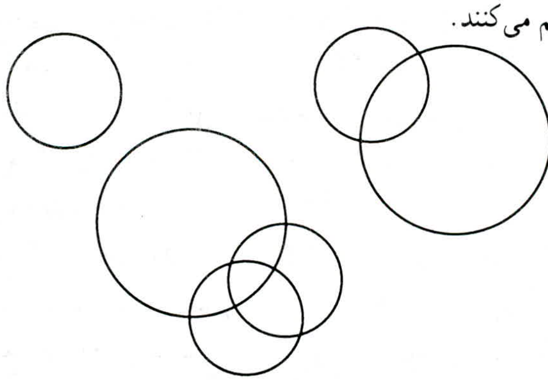
k دایرهٔ دو به دو متقاطع، روی یک صفحه در نظر می‌گیریم. اگر دایرهٔ $(k+1)$ ام را طوری رسم کنیم که هر یک از k دایرهٔ قبلی را در دو نقطه قطع کند، همهٔ این k دایره را در ۲k نقطه قطع می‌کند. به این ترتیب، دایرهٔ $(k+1)$ ام، از $\varphi(k)$ بخشی که k دایره روی صفحه بوجود آورده‌اند، ۲k بخش آن را قطع می‌کند؛ یعنی

$$\varphi(k+1) = \varphi(k) + 2k = (k^2 - k + 2) + 2k =$$
$$= k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2$$

با فرض درست بودن برابری (۱)، به درستی برابری (۲) رسیدیم و قضیه با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

یادداشت. این مثال، نمونهٔ خوبی است برای این که، با استقرای ناقص، دچار گمراهی شویم.

با توجه به شکل ۱، روشن است که: ۱) یک دایره، صفحه را به ۲ بخش تقسیم می‌کند؛ ۲) با دو دایرهٔ متقاطع، صفحه به ۴ بخش تقسیم می‌شود؛ ۳) سه دایرهٔ دو به دو متقاطع، صفحه را به ۸ بخش تقسیم می‌کنند.



شکل ۱

یک دایره ۲ بخش (2^1)، دو دایره ۴ بخش (2^2)، سه دایره ۸ بخش (2^3) در صفحه پدید می‌آورند. ممکن است این گمان نادرست پیش آید که، بنابراین، n دایرهٔ دو به دو متقاطع، صفحه را به 2^n بخش تقسیم می‌کنند. در حالی که دیدیم، تعداد بخشهایی که از n دایرهٔ دو به دو متقاطع، در صفحه ایجاد می‌شود، برابر است با $n^2 - n + 2$.

2^n ساده‌ترین عبارتی است که به ذهن می‌رسد؛ زیرا وقتی n را برابر ۱، ۲ و ۳ بگیریم، عددهای 2^1، 2^2 و 2^3 (یعنی ۲، ۴ و ۸) به دست می‌آید. در حالی که در واقع، بی‌نهایت عبارت با متغیر n می‌توان نوشت که با این سه حالت سازگار باشند؛ مثل:

$$f(n) = 2^n + (n-1)(n-2)(n-3) ,$$

$$g(n) = n^{۳} - ۵n^{۲} + ۱۰n - ۴\ ,\ \ldots$$

که دربارهٔ آنها داریم :

$$f(۱) = g(۱) = ۲\ ,\quad f(۲) = g(۲) = ۴\ ,\quad f(۳) = g(۳) = ۸$$

و جواب مسأله $n^{۲} - n + ۲$ است که بر هیچ کدام از اینها منطبق نیست.

۲. استقرای ریاضی را، برخی از نویسندگان، **استقرای کامل** هم نامیده‌اند ؛ ولی در واقع، بین دو مفهوم «استقرای کامل» و «استقرای ریاضی»، تفاوت منطقی وجود دارد و بهتر است آنها را در حالتهای خاص مربوط به خود به‌کار بریم.

استقرای کامل (یا به قول سبزواری، **قیاس مقسم**)، مربوط به حالتهایی است که با مجموعه‌ای متناهی سر و کار داریم و می‌توان عمل استقرا را دربارهٔ هر یک از عضوهای مجموعه انجام داد ؛ به نحوی که هیچ حالتی، بیرون از دایرهٔ استقرا نماند.

مجموعهٔ سیّاره‌های دستگاه خورشیدی، مجموعه‌ای متناهی است (منظور، سیّاره‌هاست، نه سیّارکها). وقتی به یاری آزمایش و محاسبه، روشن شود که، هر یک از این سیّاره‌ها، روی مداری بیضی شکل، به دور خورشید حرکت می‌کنند، به نحوی که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد، در واقع، به استقرای کامل دست یافته‌ایم ؛ یعنی عمل استقرا (آزمایش و محاسبه روی یک یک سیّاره‌ها) دربارهٔ همهٔ عضوهای مجموعه، انجام شده است.

به این مثال توجه کنید :

مثال ۶. ثابت کنید فرضیه‌های اولر و گولدباخ، برای عددهای طبیعی n، به شرط $۵ < n < ۲۵$ ، درست است ؛ یعنی هر عدد زوج n از این فاصله را، می‌توان به صورت مجموع دو عدد اوّل و هر عدد فرد از این فاصله را، با مجموع سه عدد اوّل نشان داد. عدد ۱ را هم، عددی اوّل به حساب آورید.

حل. اثبات حکم، با بررسی یک یک عددهای درست n که از ۵ بزرگتر و از ۲۵ کوچکترند، به پایان می‌رسد :

۱) برای عددهای زوج n :

$$۶ = ۵ + ۱ = ۳ + ۳\ ,\qquad ۸ = ۵ + ۳ = ۷ + ۱\ ,$$
$$۱۰ = ۷ + ۳ = ۵ + ۵\ ,\qquad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۷ + ۵\ ,$$
$$۱۴ = ۱۳ + ۱ = ۱۱ + ۳ = ۷ + ۷\ ,\qquad ۱۶ = ۱۳ + ۳ = ۱۱ + ۵\ ,$$
$$۱۸ = ۱۷ + ۱ = ۱۳ + ۵ = ۱۱ + ۷\ ,\qquad ۲۰ = ۱۹ + ۱ = ۱۷ + ۳ = ۱۳ + ۷\ ,$$
$$۲۲ = ۱۹ + ۳ = ۱۷ + ۵ = ۱۱ + ۱۱\ ,\qquad ۲۴ = ۲۳ + ۱ = ۱۹ + ۵ = ۱۷ + ۷ = ۱۳ + ۱۱$$

و برای عددهای فرد :

$$۷ = ۲ + ۲ + ۳ = ۱ + ۳ + ۳\ ,\qquad ۹ = ۳ + ۳ + ۳ = ۲ + ۲ + ۵\ ,$$

$۱۱=۲+۲+۷=۳+۳+۵$,　　$۱۳=۳+۳+۷=۳+۵+۵$,

$۱۵=۱+۳+۱۱=۳+۵+۷$,　　$۱۷=۱+۳+۱۳=۲+۲+۱۳$,

$۱۹=۱+۵+۱۳=۳+۵+۱۱$,　　$۲۱=۱+۳+۱۷=۳+۵+۱۳$,

$۲۳=۱+۳+۱۹=۱+۵+۱۷=۵+۷+۱۱$

و به این ترتیب، استقرای کامل انجام شد ؛ یعنی آزمایش روی همهٔ عددهای درست بین ۵ و ۲۵، معلوم شد که فرضیهٔ اولر دربارهٔ عددهای زوج و فرضیهٔ گولدباخ برای عددهای فرد، دربارهٔ عددهای بین ۵ و ۲۵ درست است.

ولی استقرای ریاضی، به معنای اثبات یک ویژگی کلی، برای همهٔ عضوهای یک مجموعهٔ بی‌پایان است. اثبات حکم هر یک از مثالهای ۳، ۴ و ۵، با استقرای ریاضی انجام گرفت. در این جا، مثالهای دیگری می‌آوریم.

مثال ۷. (u_n) را دنبالهٔ عددهای فیبوناچی می‌گیریم که به این ترتیب، تعریف شده است :

$u_۱=u_۲=۱$,　　$u_{n+۱}=u_n+u_{n-۱}$

ثابت کنید، مقدار جملهٔ عمومی را می‌توان با این دستور به‌دست آورد :

$$u_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n \qquad (۱)$$

حل. $u_۱$ و $u_۲$ را آزمایش می‌کنیم :

$$u_۱=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)=\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}+\frac{۱}{۲}\right)-\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}-\frac{۱}{۲}\right)=۱\ ,$$

$$u_۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}-\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)=۱$$

از آن جا که رابطهٔ بازگشتی $u_{n+۱}=u_n+u_{n-۱}$ ، سه جملهٔ پشت سر هم را در دنبالهٔ فیبوناچی به هم مربوط می‌کند، برای استفادهٔ از آن، باید جملهٔ سوّم را هم، با آزمایش محاسبه کنیم ؛ بنابراین، رابطهٔ بازگشتی، باید داشته باشیم :

$$u_۳=u_۲+u_۱=۱+۱=۲$$

$u_۳$ را به کمک برابری (۱) به دست می‌آوریم :

$$u_۳=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^۳-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^۳=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱۶+۸\sqrt{۵}}{۸}-\frac{۱۶-۸\sqrt{۵}}{۸}\right)=۲$$

اکنون فرض می‌کنیم، برابری (۱) برای $n=k$ و $n=k-۱$ درست باشد ؛ ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n=k+۱$ هم درست است. با توجه به تعریف (u_n) داریم :

$$\sqrt{۵}\ u_{k+۱}=\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^k-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k-۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k-۱}\right]$$

$$=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k-۱}\left(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\right)-\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k-۱}\left(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)$$

$$=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k-۱}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k-۱}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}$$

$$=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱}-\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱}$$

و از آن جا :

$$u_{k+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱}-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{k+۱}$$

یعنی، برابری (۱)، برای همهٔ عددهای طبیعی n درست است.

جمله‌های دنبالهٔ فیبوناچی، همگی عددهایی درست و مثبت می‌باشند ؛ ولی جملهٔ عمومی این دنباله، با رابطه‌ای بیان می‌شود که به یاری عددهای گنگ تنظیم شده است. از همین جا، می‌توان به پیچیدگی بستگیهایی که بین عددها وجود دارد، پی برد.

مثال ۸. n را عددی درست و بزرگتر از ۷ می‌گیریم. ثابت کنید، با n ریال، می‌توان تمبرهای ۳ ریالی و ۵ ریالی خرید، بی‌آن که پولی کم یا زیاد بیاید.

حل. ۱) برای $n = ۸$ ، حکم مسأله درست است ؛ زیرا با ۸ ریال می‌توان یک تمبر ۳ ریالی و یک تمبر ۵ ریالی خرید $(۸ = ۵ + ۳)$.

۲) اکنون فرض می‌کنیم، با k ریال $(k > ۸)$ ، بتوان تمبرهای ۳ ریالی و ۵ ریالی را تهیه کرد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، با $(k+۱)$ ریال هم می‌توان به همین هدف رسید.

حالت اول: با k ریال، تنها تمبرهای ۳ ریالی تهیه کرده‌ایم. روشن است، با توجه به شرط $k > ۸$ ، تعداد تمبرهای ۳ ریالی از ۳ عدد کمتر نیست. در این حالت، اگر ۳ تمبر ۳ ریالی را با دو تمبر ۵ ریالی عوض کنیم، توانسته‌ایم با $(k+۱)$ ریال، تمبرهای ۳ ریالی و ۵ ریالی را در اختیار داشته باشیم.

حالت دوم: در بین تمبرهایی که با k ریال تهیه کرده‌ایم، دست کم یک تمبر ۵ ریالی وجود دارد. در این صورت، می‌توان یکی از تمبرهای ۵ ریالی را با ۲ تمبر ۳ ریالی عوض کرد.

به این ترتیب، اگر حکم مسأله برای k درست باشد، برای $k+۱$ هم درست است ؛ یعنی حکم مسأله، برای هر مقدار $k > ۷$ درست است.

یادداشت. حل مثال ۸، به این معناست که، برای $n \in N$ و $n > ۷$ ، معادلهٔ

$$۳x + ۵y = n$$

برای x و y درست و نامنفی، همیشه جواب دارد.

مثال ۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم :

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

حل. ۱) برابری برای $n=1$ درست است ؛ زیرا در این حالت، سمت چپ برابری، برابر $\cos x$ می‌شود و برای سمت راست آن داریم :

$$\frac{2\cos x - \cos 2x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos x} = \cos x$$

۲) اکنون فرض می کنیم، برابری مفروض، برای $n=k$ برقرار باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + k\cos kx = \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

در این صورت، داریم :

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + k\cos kx + (k+1)\cos(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}} + (k+1)\cos(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)[\cos kx - 2\cos(k+1)x\cos x] - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

در صورت کسر، مقدار داخل کروشه را محاسبه می کنیم :

$$\cos kx - 2\cos(k+1)x\cos x = \cos[(k+1)x - x] - 2\cos(k+1)x$$

$$= -\cos(k+1)x\cos x + \sin(k+1)x\sin x = -\cos(k+2)x$$

و بنابراین :

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + k\cos kx + (k+1)\cos(k+1)x$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x - (k+1)\cos(k+2)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

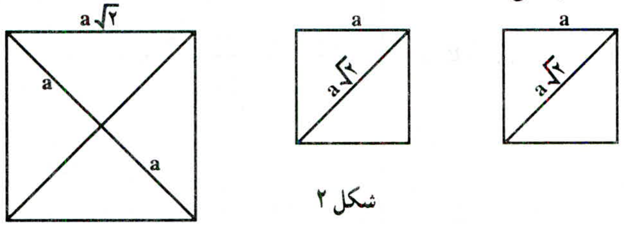
یعنی با فرض درست بودن اتّحاد برای $n=k$ ، برای $n=k+1$ هم درست است. درستی اتحاد ثابت شد.

مثال ۱۰. ثابت کنید اگر n مربع ($n \geq ۲$) داده شده باشد، همیشه می‌توان این مربعها را طوری تقسیم کرد که به یاری بخشهای حاصل، یک مربع به دست آید (می‌توان برخی از مربعها را تقسیم کرد و از برخی دیگر به طور کامل استفاده کرد).

حل. ۱) ثابت می‌کنیم، دو مربع را می‌توان چنان تقسیم کرد که با بخشهای آن، بتوان مربع جدیدی ساخت.

دو حالت را بررسی می‌کنیم :

الف) دو مربع برابرند. در این حالت، اگر هر مربع را با رسم یکی از قطرها نصف کنیم، مربعی که شامل این چهار «نیم مربع» است، بسادگی به دست می‌آید (شکل ۲).



شکل ۲

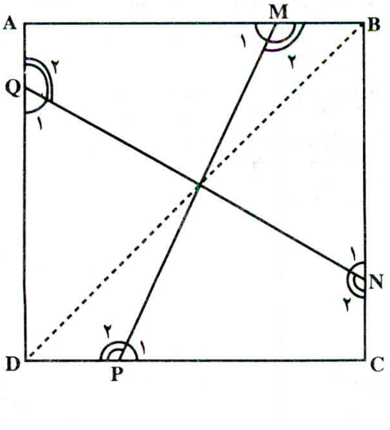
ب) دو مربع نابرابرند. در آغاز تا یک پیش قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش قضیه. روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از مربع ABCD ، به‌ترتیب نقطه‌های M، N، P و Q را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم :

$$|AM| = |BN| = |CP| = |DQ|$$

ثابت کنید، خطهای راست MP و NQ از مرکز مربع می‌گذرند، در آن جا بر هم عمودند و در ضمن، مربع ABCD را، به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنند.

اثبات. قطر BD را رسم می‌کنیم (شکل ۳) و نقطهٔ برخورد آن‌را با خط راست MP، با O نشان می‌دهیم. دو مثلث OMB و ODP با هم برابرند (در سه زاویه و یک ضلع). بنابراین $|OB| = |OD|$ ؛ یعنی خط راست MP در مرکز مربع، قطر BD را قطع می‌کند. به همین ترتیب، ثابت می‌شود، خط راست NQ هم از مرکز مربع می‌گذرد ؛ یعنی MP و NQ در مرکز مربع به‌هم می‌رسند.

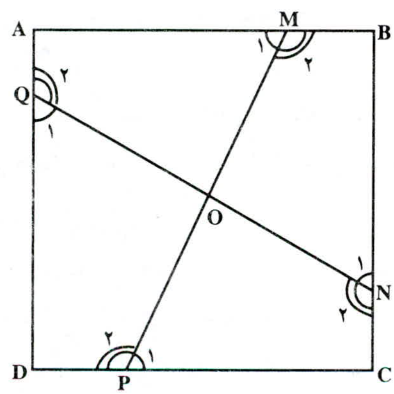


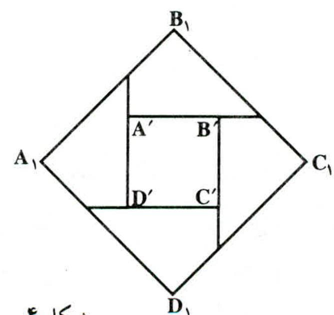
شکل ۳

از برابری همان دو مثلث، معلوم می‌شود که $|OP| = |OM|$ و به همین ترتیب $|ON| = |OQ|$ دو چهارضلعی AMOQ و DPOQ در پنج جزء (چهار ضلع و یک زاویهٔ قائمه) برابر و بنابراین، دو چهارضلعی هم‌نهشت‌اند (یعنی قابل انطباق بر یکدیگرند).

به همین ترتیب برابری همهٔ این‌گونه چهارضلعیها ثابت می‌شود. درضمن، در چهارضلعیهای AMOQ و DPOQ، زاویه‌های ۱ با هم برابرند و بنابراین، دو زاویهٔ ۱ و ۲ در چهارضلعی AMOQ، مکمّل یکدیگرند و مجموعی برابر ۱۸۰ درجه دارند. درنتیجه، زاویهٔ MOQ برابر ۹۰ درجه می‌شود و خط راست MP بر خط راست NQ عمود است.

اکنون دومربع ABCD(با ضلع به طول a) و $A'B'C'D'$ (با ضلع به طول b) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a > b$ (شکل ۴).





شکل ۴

مربع ABCD را شبیه پیش قضیه، به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم؛ به‌نحوی که داشته باشیم:

$$|AM| = |BN| = |CP| = |DQ| = \frac{۱}{۲}(a+b)$$

سپس، بخشهای مربع ABCD را، آن‌طور که در شکل ۵ می‌بینید، در بیرون مربع $A'B'C'D$ و متصل به آن قرار می‌دهیم. بسادگی ثابت می‌شود، چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ که از این راه به‌دست می‌آید، یک مربع است.

به این ترتیب همیشه می‌توان دو مربع را طوری تقسیم کرد که به کمک بخشهای آنها، بتوان یک مربع جدید درست کرد.

۲) فرض می‌کنیم، حکم مسأله برای k مربع L_1، L_2، ...، L_k درست باشد؛ یعنی بتوان آنها را طوری تقسیم کرد که از بخشهای حاصل، یک مربع جدید ساخته شود. اکنون، اگر با $(k+1)$ مربع L_1، L_2، ...، L_k و L_{k+1} سر و کار داشته باشیم،ابتدا k مربع L_1، L_2، ...، L_k را مربعی مثل مربع L' تبدیل می‌کنیم و سپس، با تقسیم دو مربع L' و L_{k+1} (با روشی که شرح دادیم) مربع L را می‌سازیم که از بخشهای $k+1$ مربع درست شده است.

درستی حکم مسأله، با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

مثال ۱۱. یک مجموعهٔ متناهی، با n عضو داده شده است. ثابت کنید، تعداد همهٔ زیرمجموعه‌های آن، برابر است با ۲^n.

حل. ۱) حکم برای $n = ۰$ روشن است: مجموعهٔ تهی، تنها یک زیرمجموعه دارد که همان مجموعهٔ تهی است و $۲^۰ = ۱$.

۲) فرض می‌کنیم، قضیه برای $n = k$ درست باشد؛ یعنی یک مجموعهٔ k عضوی دارای ۲^k زیرمجموعه باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی، برابر است با $۲^{k+۱}$.

زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی را در نظر می گیریم. همهٔ آنها، در ضمن، زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی هستند (تا این جا ۲^k زیرمجموعه). اگر به هریک از زیرمجموعه‌های p عضوی (یعنی زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ شامل k عضو که هرکدام دارای p عضو هستند)، عضو جدید $(k+۱)$ام را اضافه کنیم، زیرمجموعه‌های جدید $(p+۱)$ عضوی (بجز آنهایی که از قبل وجود داشتند) به دست می‌آید. برای نمونه، اگر عضو $(k+۱)$ام را برای مجموعهٔ تهی در نظر بگیریم، زیرمجموعهٔ یک عضوی به‌دست می‌آید، که همراه با زیرمجموعه‌های یک عضوی موجود، زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعهٔ جدید $(k+۱)$ عضوی را تشکیل می‌دهند. همچنین اگر عضو $(k+۱)$ام را، به هریک از زیرمجموعه‌های یک عضوی موجود اضافه کنیم، زیرمجموعه‌هایی دو عضوی به‌دست می‌آید که، همراه با زیرمجموعه‌های دو عضوی موجود، همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی را تشکیل می‌دهند و غیره.

به این ترتیب، برای هر زیرمجموعه از مجموعهٔ k عضوی، یک زیرمجموعهٔ جدید برای مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی پیدا می‌شود؛ یعنی زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی، دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ k عضوی است. پس، اگر تعداد زیرمجموعه های مجموعهٔ k عضوی، برابر ۲^k باشد، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی، برابر $۲^k \times ۲$، یعنی $۲^{k+۱}$ می‌شود. قضیه به یاری روش استقرای ریاضی ثابت شد.

*** ۳.** روش اثبات، به کمک استقرای ریاضی را می‌توان به‌صورت نمادی نشان داد. در آغاز، چند نماد معمول را به یاد می‌آوریم.

الف) $A(n)$ را به معنای گزاره‌ای می‌گیریم که معرّف قانونی یا دستوری نسبت به عدد طبیعی n است. هریک از گزاره‌های

«هر عدد طبیعی n که به ۵ یا ۰ ختم شده باشد، بر ۵ بخش‌پذیر است»؛

«به کمک بخشهایی که از تقسیم n مربع، به نحو ویژه‌ای به‌دست می‌آید، می‌توان مربع

تازه‌ای ساخت» ؛

«برای هر عدد طبیعی n، نابرابری $2^{n+2} < 2n + 5$ برقرار است» ؛

می‌تواند به نماد $A(n)$ نشان داده شود.

ب) ترکیب عطفی گزاره‌های A و B را به‌صورت $A \wedge B$ نشان می‌دهند (بخوانید : «A و B»). اگر با ترکیب عطفی چند گزارهٔ A_1 ، A_2 ، ... ، A_m سر و کار داشته باشیم، به این صورت نشان می‌دهیم :

$$\bigwedge_{r=1}^{m} A_r$$

ج) $A \Rightarrow B$ به معنای استلزام است : A را شرط و B را نتیجهٔ استلزام گویند (بخوانید : «اگر A، آن‌گاه B» یا «B نتیجه‌ای است از A»).

د) $\forall(n \in M)$ ، $\forall(n \geq q)$ برای سور عمومی (بخوانید : «هر عضو مجموعهٔ M»، «برای هر $n \geq q$»).

هـ) $\forall(n \in M)(A(n))$ ، یعنی برای هر n از مجموعهٔ M، گزارهٔ $A(n)$ درست است.

به این ترتیب، روش اثبات به یاری استقرای ریاضی را، در حالت عمومی، می‌توان این‌طور نشان داد :

$$\left.\begin{array}{l} A(1) \\ \forall n\big(A(n) \Rightarrow A(n+1)\big) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n(A(n))$$

همان‌گونه که در مثالها دیدید، بیشتر پیش می‌آید که گزارهٔ مفروض، نه برای همهٔ عددهای طبیعی، بلکه برای عددهای طبیعی $n \geq q$ درست است، در این صورت، بیان نمادین استقرای ریاضی، به این صورت درمی‌آید :

$$\left.\begin{array}{l} A(q) \\ \forall n(n \geq q)\big(A(n) \Rightarrow A(n+1)\big) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n(n \geq q)(A(n))$$

در مثال ۱۰، برای عبور از k به $k+1$ ، نه تنها از $A(k)$، که از $A(2)$ ، $A(3)$ ، ... ، $A(k)$ استفاده کردیم تا $A(k+1)$ را نتیجه بگیریم. در این‌گونه حالتها، بیان نمادین را این‌طور می‌نویسیم :

$$\left.\begin{array}{l} A(q) \\ \forall n(n \geq q)\ \left(\bigwedge_{r=q}^{n} A(r) \Rightarrow A(n+1)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n(n \geq q)(A(n))$$

۴. در بیشتر حالتها، اثبات با استقرای ریاضی را، می‌توان با روش ساده‌تری انجام داد. در

آغاز، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید، بخواهیم ثابت کنیم:

$$f(n)=u(n) \quad (۱)$$

که در آن، f و u، تابعهایی هستند که در مجموعهٔ عددهای طبیعی تعریف شده‌اند.

ثابت کنید، برابری (۱)، وقتی برای هر عدد طبیعی n برقرار است که

I. $f(۱)=u(۱)$ ؛

II. $f(n)-f(n-۱)=u(n)-u(n-۱)$ ، برای هر عدد طبیعی n.

اثبات. $f(n)$ و $u(n)$ را این‌طور می نویسیم:

$$f(n)=f(۱)+[f(۲)-f(۱)]+[f(۳)-f(۲)]+\cdots+[f(n)-f(n-۱)]$$

$$=f(۱)+\sum_{k=۲}^{n}[f(k)-f(k-۱)] \quad (۲)$$

$$u(n)=u(۱)+[u(۲)-u(۱)]+[u(۳)-u(۲)]+\cdots+[u(n)-u(n-۱)]$$

$$=u(۱)+\sum_{k=۱}^{n}[u(k)-u(k-۱)] \qquad (۳)$$

از این جا دیده می‌شود، اگر شرطهای I و II برقرار باشند، به‌دست می‌آید:

$$f(n)=u(n)$$

مثال ۱۲. ثابت کنید:

$$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\cdots+n(n+۱)=\frac{۱}{۳}n(n+۱)(n+۲)$$

حل. مقدار سمت چپ برابری را $f(n)$ و مقدار سمت راست آن‌را $u(n)$ می‌نامیم.

I. $f(۱)=u(۱)$ ، زیرا $\frac{۱(۱+۱)(۱+۲)}{۳}=۱\times۲$.

II. داریم:

$$f(n)-f(n-۱)=n(n+۱)$$

$$u(n)-u(n-۱)=\frac{۱}{۳}n(n+۱)(n+۲)-\frac{۱}{۳}(n-۱)n(n+۱)$$

$$=\frac{۱}{۳}[n(n+۱)(n+۲-n+۱)]=n(n+۱)$$

یعنی $f(n)-f(n-۱)=u(n)-u(n-۱)$. درستی برابری ثابت شد.

مثال ۱۳. ثابت کنید :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل. سمت چپ برابری را f(n) و سمت راست آن‌را u(n) می‌نامیم.

I. درستی برابری $f(1) = u(1)$ روشن است.

II. بترتیب داریم :

$$f(n) - f(n-1) = \left[(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right] = n^2;$$
$$u(n) - u(n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = n^2$$

□

اگر F در مجموعهٔ عددهای طبیعی تعریف شده باشد و بخواهیم ثابت کنیم، F(n) به ازای هر عدد طبیعی n بر عدد طبیعی m بخش‌پذیر است، می‌توان F را این طور نوشت :

$$F(n) = F(1) + \sum_{k=2}^{n}\left(f(k) - f(k-1)\right)$$

اکنون روشن است، اگر f(1) و تفاضل $F(k) - F(k-1)$ $(2 \le k \le n)$ بر m بخش‌پذیر باشد، F (n) هم بر m بخش‌پذیر است.

مثال ۱۴. ثابت کنید $n^3 + 11n$، برای همه عددهای طبیعی n، مضربی است از ۶.

حل. $n^3 + 11n$ را F (n) می‌نامیم.

I. $F(1) = 12$، یعنی F(1) بر ۶ بخش‌پذیر است.

II. داریم :

$$F(n) - F(n-1) = (n^3 + 11n) - \left[(n-1)^3 + 11(n-1)\right] = 3n(n+1) + 12$$

$n-1$ و n دو عدد پشت سر هم هستند، بنابراین یکی از آنها زوج و $n(n-1)$ بر ۲ بخش‌پذیر است. به این ترتیب $3n(n-1)$ بر ۶ بخش‌پذیر می‌شود، درنتیجه $3n(n-1)+12$ یعنی $F(n) - F(n-1)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

□

در اثبات درستی برخی نابرابریها هم، می‌توان از این روش استفاده کرد.

فرض کنید بخواهیم درستی نابرابری $f(n) > u(n)$ را، به ازای همهٔ عددهای طبیعی n، ثابت کنیم. نابرابری را، می‌توان این‌طور نوشت :

$$f(1) + \sum_{k=2}^{n}\left[f(k) - f(k-1)\right] > u(1) + \sum_{k=2}^{n}\left[u(k) - u(k-1)\right]$$

و روشن است،اگر نابرابریهای

$$f(۱) > u(۱) \ , \ \ f(n) - f(n-۱) > u(n) - u(n-۱)$$

برای $n \geq ۱$ برقرار باشند، به معنای درستی نابرابری $f(n) > u(n)$ است.

مثال ۱۵. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم: $۲^{n+۲} > ۲n + ۵$.

حل. $f(n) = ۲^{n+۲}$ و $u(n) = ۲n + ۵$ می‌گیریم:

I. $f(۱) = ۸$ و $u(۱) = ۷$ و $۸ > ۷$.

II. بترتیب داریم:

$$f(n) - f(n-۱) = ۲^{n+۲} - ۲^{n+۱} = ۲^{n+۱}$$

$$u(n) - u(n-۱) = (۲n + ۵) - [۲(n-۱) + ۵] = ۲$$

و روشن است که نابرابری $۲^{n+۱} > ۲$، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، برقرار است.

مثال ۱۶. ثابت کنید، نابرابری $۲^n > ۵n + ۶$، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۵$ برقرار است.

حل. $f(n) = ۲^n$ و $u(n) = ۵n + ۶$ می‌گیریم، در این جا f(n) و u(n) را باید به این ترتیب در نظر گرفت:

$$f(n) = f(۵) + \sum_{k=۶}^{n} [f(k) - f(k-۱)] \ , \ \ u(n) = u(۵) + \sum_{k=۶}^{n} [u(k) - u(k-۱)]$$

I. $f(۵) = ۳۲$ و $u(۵) = ۳۱$ و $۳۲ > ۳۱$.

II. داریم:

$$f(n) - f(n-۱) = ۲^n - ۲^{n-۱} = ۲^{n-۱},$$

$$u(n) - u(n-۱) = (۵n + ۶) - [۵(n-۱) + ۶] = ۵ < ۲^۳$$

و روشن است که نابرابری $۲^{n-۱} > ۲^۳$ برای همهٔ عددهای طبیعی $n \geq ۶$، برقرار است.

۵. در واقع، درستی اثبات به کمک استقرای ریاضی را، باید نتیجه‌ای از اصل موضوعهای مربوط به عددهای طبیعی دانست.

بستگی بنیادی بین دو عدد طبیعی و مختلف a و b، با بستگی «b بعد از a قرار دارد» مشخص می‌شود. معمول است که عدد طبیعی، بلافاصله بعد از a را با a' نشان می‌دهند. مجموعهٔ عددهای طبیعی را هم، با نماد N معرفی می‌کنند. عددهای طبیعی بر پایهٔ چهار اصل موضوع تعریف شده‌اند:

I. واحد یک عدد طبیعی است که بعد از هیچ عدد طبیعی دیگری قرارندارد.

II. برای هر عدد طبیعی، یک و تنها یک عدد طبیعی وجود دارد که بلافاصله بعد از آن آمده است.

III. هر عدد طبیعی، بجز واحد، تنها یک عدد طبیعی بلافاصله پیش از خود دارد.

IV. هر زیرمجموعهٔ M از مجموعهٔ عددهای طبیعی N، به‌شرطی که دارای این ویژگیها

باشد :

۱) واحد متعلّق به M باشد ؛

۲) اگر a عضوی از M باشد، آن وقت a' هم عضو مجموعهٔ M باشد ؛ آن‌وقت، مجموعهٔ M بر مجموعهٔ N منطبق است ؛ یعنی مجموعهٔ M همان مجموعهٔ N است.

با توجه به اصل موضوعهای مربوط به عددهای طبیعی، می‌توان این قضیه را ثابت کرد :

قضیه. اگر گزارهٔ $A(n)$ که برای عددهای طبیعی n تنظیم شده است، به ازای ۱ درست باشد [$A(1)$ برقرار باشد]، و با فرض درست بودن آن برابر n، برای عدد طبیعی بعدی n' هم درست باشد، آن وقت $A(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

اثبات. M را مجموعه‌ای از عددهای طبیعی می گیریم که،به ازای آنها، گزارهٔ $A(n)$ درست باشد. در این صورت، نتیجه می گیریم که : ۱) عدد ۱ عضوی از مجموعهٔ M است ؛ زیرا بنا به فرض، $A(1)$ گزاره‌ای درست است.

۲) فرض کنید، n متعلّق به M باشد، آن‌وقت بنابرفرض، n' هم عضوی از M است.

به این ترتیب، بنابر اصل موضوع IV، مجموعهٔ M بر مجموعهٔ N (مجموعه عددهای طبیعی) منطبق می‌شود ؛ یعنی گزارهٔ $A(n)$، در مجموعهٔ عددهای طبیعی درست است.

به این مناسبت است که روش استقرای ریاضی را (برخلاف نام ظاهری آن)، باید روشی قیاسی در ریاضیات دانست.

۳. دامنهٔ کاربرد استقرای ریاضی

§۱. استقرای ریاضی، روشی نیرومند در حلّ برخی از مسأله‌های ریاضی

۱. استقرای ریاضی، یکی از نیرومندترین روشها در ریاضیات و بویژه، ریاضیات محاسبه‌ای است. از این روش، می‌توان برای تعمیم تعریفها، اثبات اتّحادها و نابرابریهای اتّحادی، پیداکردن جملهٔ عمومی و مجموع جمله‌های یک دنباله یا رشته، انجام برخی محاسبه‌ها، اثبات بخش پذیریها، جست‌وجوی مکان هندسیها و غیر آن استفاده کرد.

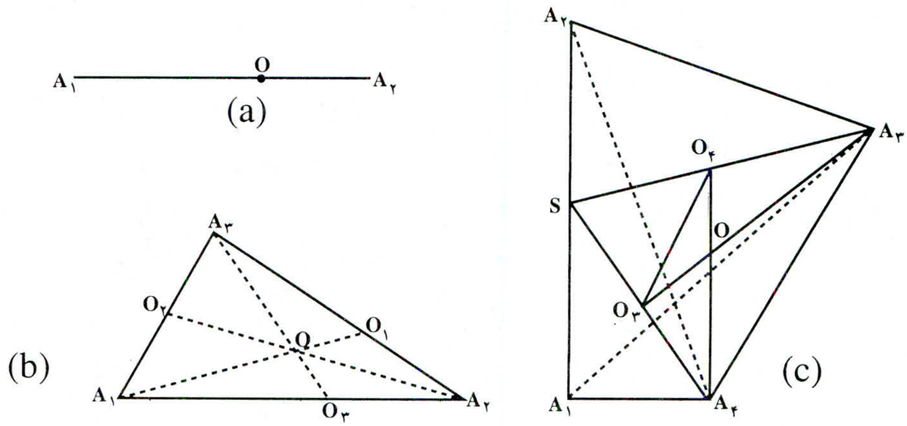
مثال ۱. (نمونه‌ای از کاربرد روش استقرای ریاضی درتعمیم تعریفهای هندسی[۱]). تعریف میانه و گرانیگاه (مرکز ثقل) در چندضلعی.

۱) گرانیگاه یک پاره‌خط راست، به‌شرطی که هَمگَن (متجانس) باشد، در نقطهٔمیان آن قرار دارد (شکل ۵ـa). در این صورت، میانه‌های مثلث همَگن $A_1A_2A_3$ را، می‌توان به عنوان پاره‌خطهای راستی تعریف کرد که رأسهای مثلث را به گرانیگاه ضلعهای روبه‌رو وصل می‌کنند (شکل۵ ـb). می‌دانیم، میانه‌های مثلث، در یک نقطه به هم می‌رسند و در نقطهٔ برخورد، به نسبت ۱ :۲ (از طرف رأس مثلث) تقسیم می‌شوند. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث را، گرانیگاه مثلث گویند.

اکنون میانه‌های چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را، به‌عنوان پاره‌خطهای راستی تعریف می‌کنیم که رأسهای A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 را به نقطه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 و O_4 ، گرانیگاه مثلثهایی که

۱ـ ای.م. یاگلوم، در کتاب «کاربردهای استقرای ریاضی در هندسه».

از سه رأس باقیمانده به‌دست می‌آیند، وصل کنند (شکل ۵ـc).



شکل ۵

ثابت می‌کنیم، میانه‌های یک چهارضلعی، در یک نقطه به هم می‌رسند و در نقطهٔ برخورد، به نسبت ۱ :۳ (از طرف رأس) تقسیم می‌شوند.

گرانیگاه (وسط) ضلع A_1A_2 را S و گرانیگاه‌های مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_1A_2A_4$ را، بترتیب، O_4 و O_3 و نقطهٔ برخورد میانه‌های A_3O_3 و A_4O_4 از چهارضلعی را O می‌نامیم.

SA_3 و SA_4، میانه‌های مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_1A_2A_4$ هستند. بنابراین:

$$\left(\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{3}{1}\ ,\ \frac{SA_4}{SO_3}=\frac{3}{1}\right)\Rightarrow\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{SA_4}{SO_3}$$

از آن‌جا:

$$O_3O_4\|A_3A_4\ ,\ \frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{3}{1}$$

سپس، از تشابه دو مثلث OO_3O_4 و OA_3A_4 به‌دست می‌آید:

$$\frac{OA_4}{OO_4}=\frac{OA_3}{OO_3}=\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{3}{1}$$

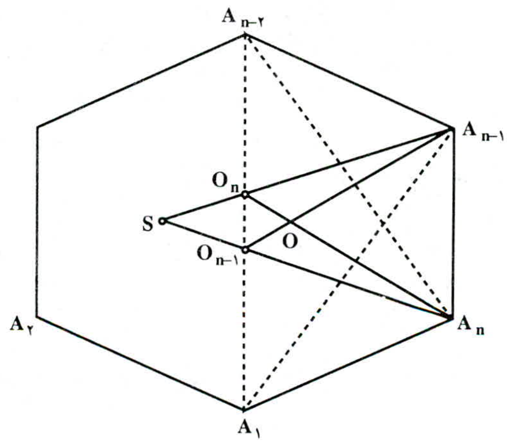
به این ترتیب، هر دو میانهٔ مجاور در چهارضلعی (یعنی میانه‌هایی که از دو رأس مجاور گذشته‌اند)، در نقطهٔ برخورد، به نسبت ۱ :۳ تقسیم می‌شوند. از این جا نتیجه می‌شود، هر چهار میانهٔ چهارضلعی، از نقطهٔ O می‌گذرند و در آن‌جا، به نسبت ۱ :۳ تقسیم می‌شوند. نقطهٔ O، محلّ برخورد میانه‌های چهارضلعی را، گرانیگاه چهارضلعی گویند.

۲) فرض می کنیم، برای همهٔ مقدارهای $k < n$، میانه‌های k ضلعی را، به عنوان پاره‌خطهای

راستی تعریف کنیم که هر رأس را به گرانیگاه $(k-1)$ ضلعی (که از $k-1$ رأس دیگر تشکیل شده است) وصل می‌کند. درضمن، برای همهٔ مقدارهای $k < n$ ، گرانیگاه k ضلعی، به عنوان نقطهٔ برخورد میانه‌های آن تعریف شده باشد. همچنین فرض می‌کنیم، میانه‌های k ضلعی، برای $k < n$ ، در نقطهٔ برخورد (گرانیگاه k ضلعی)، به نسبت $(k-1):1$ (از سمت رأس) تقسیم شده باشند.

اکنون تعریف می‌کنیم: میانهٔ یک nضلعی، پاره‌خط راستی است که یکی از رأسهای آن را به گرانیگاه $(n-1)$ ضلعی (که از $n-1$ رأس دیگر تشکیل شده است) وصل کند.

ثابت می‌کنیم، همهٔ میانه‌های یک n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ در یک نقطه به هم می‌رسند و در نقطهٔ برخورد، یکدیگر را به نسبت $(n-1):1$ (از سمت رأس) تقسیم می‌کنند.



شکل ۶

S را گرانیگاه $(n-2)$ ضلعی $A_1A_2\cdots A_{n-2}$ فرض می‌کنیم. در این صورت، پاره‌خطهای راست SA_{n-1} و SA_n، میانه‌های $(n-1)$ ضلعیهای $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ و $A_1A_2\cdots A_{n-2}A_n$ خواهند بود (شکل ۶). اگر O_n و O_{n-1} گرانیگاه‌های این دو $(n-1)$ ضلعی باشند، با توجه به فرض استقرا داریم:

$$\frac{SA_{n-1}}{SO_n} = \frac{SA_n}{SO_{n-1}} = \frac{n-1}{1}$$

و بنابراین:

$$(O_{n-1}O_n) \| (A_nA_{n-1}) \ , \ \frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n} = \frac{n-1}{1}$$

نقطهٔ برخورد $O_{n-1}A_{n-1}$ و O_nA_n (میانه‌های n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$) را O می‌نامیم. از تشابه دو مثلث $OO_{n-1}O_n$ و $OA_{n-1}A_n$ به دست می‌آید:

$$\frac{OA_{n-۱}}{OO_{n-۱}}=\frac{OA_n}{OO_n}=\frac{A_{n-۱}A_n}{O_{n-۱}O_n}=\frac{n-۱}{۱}$$

یعنی، هر دو میانهٔ مجاور nضلعی، درنقطهٔ برخورد، به نسبت $(n-۱):۱$ تقسیم می‌شوند. از این جا نتیجه می‌شود، همهٔ میانه‌های nضلعی، در یک نقطه به هم می‌رسند و در این نقطه، به نسبت$(n-۱):۱$ تقسیم می‌شوند.

اکنون می‌توانیم گرانیگاه یکnضلعی را، به‌عنوان نقطهٔ برخورد میانه‌های آن و سپس، میانه‌های یک $(n+۱)$ ضلعی را به‌عنوان پاره‌خطهای راستی که رأسهای $(n+۱)$ ضلعی را به گرانیگاه n ضلعیهای شامل n رأس دیگر، وصل می‌کند، تعریف کنیم.

به یاری روش استقرای ریاضی، می‌توان ادّعا کرد: این تعریف، برای میانه و گرانیگاه، به ازای هر مقدار دلخواه $n>۲$ درست است.

مثال ۲. (نمونه‌ای از کاربرد روش استقرای ریاضی، برای محاسبهٔ مجموع n جمله از یک رشته). این مجموع را محاسبه کنید:

$$A(n)=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

حل. $A(۱)$، $A(۲)$ و $A(۳)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A(۱)=\frac{۱}{۲}\ ,\ \ A(۲)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳}\ ,\ \ A(۳)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

محاسبهٔ این مجموعهای جزئی، خیلی زود به ما تلقین می‌کند که، به احتمالی، باید داشته باشیم:

$$A(n)=\frac{n}{n+۱}\qquad(۱)$$

۱) درستی برابری (۱)، برای $n=۱$ (و هم $n=۲$ و $n=۳$) با محاسبه تأیید شد.

۲) فرض می‌کنیم $A(k)=\frac{k}{k+۱}$ و ثابت می‌کنیم، در این صورت، به‌دست می‌آید $A(k+۱)=\frac{k+۱}{k+۲}$. داریم:

$$A(k+۱)=A(k)+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$=\frac{k(k+۲)+۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{(k+۱)^۲}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}$$

حدس ما درست بود: $A(n)=\frac{n}{n+۱}$.

یادداشت. البته $A(n)$ را، بدون استقرای ریاضی هم، می‌توان پیدا کرد. با توجه به اتّحاد :

$$\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}$$

مجموع $A(n)$ به این صورت درمی‌آید :

$$A(n)=(۱-\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})+\cdots+(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱})=۱-\frac{۱}{n+۱}=\frac{n}{n+۱}$$

مثال ۳. (نمونه‌ای از کاربرد روش استقرای ریاضی در محاسبه‌ها). **مطلوب است، تعداد قطرهای یک nضلعی کوژ.**

حل. تعداد قطرهای n ضلعی را $A(n)$ می‌نامیم و قطر را به‌معنای پاره‌خط راستی می‌گیریم که دو رأس غیرمجاور n ضلعی را به هم وصل می‌کند. روشن است که :

$$A(۳)=۰\ ,\ \ A(۴)=۲\ ,\ \ A(۵)=۵$$

چون $A(۳)$ برابر صفر است، بنابراین $A(n)$ بر $n-۳$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب، باید داشته باشیم :

$$A(n)=(n-۳).A'(n) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، با توجه به (۱) باید داشته باشیم :

$$A(۴)=A'(۴)=۲, \qquad A(۵)=۲A'(۵)=۵$$

ساده‌ترین عبارتی که با این شرطهای $A'(n)$ سازگار است، $A'(n)=\frac{n}{۲}$ است. می‌توان احتمال داد، برای $A(n)$ داریم :

$$A(n)=\frac{n}{۲}(n-۳) \qquad (۲)$$

۱) برابری (۲)، برای $n=۳$ (و همچنین $n=۴$ و $n=۵$) درست است.

۲) فرض می‌کنیم : $A(k)=\frac{k}{۲}(k-۳)$ و ثابت می‌کنیم، در این صورت :

$$A(k+۱)=\frac{k+۱}{۲}(k-۲)$$

برای این که یک k ضلعی به $(k+۱)$ ضلعی تبدیل شود، می‌توان در سمت بیرون یکی از ضلعهای k ضلعی، نقطه‌ای انتخاب و از آن‌جا به دو انتهای این ضلع وصل کرد. در این صورت، خود این ضلع، یکی از قطرهای $(k+۱)$ ضلعی می‌شود. بجز این، اگر از این رأس تازه، به همهٔ رأسهای غیرمجاورش (یعنی $k-۲$ رأس دیگر) وصل کنیم، بقیهٔ قطرهای $(k+۱)$ ضلعی به‌دست می‌آید. به این ترتیب روی هم :

$$(k-۲)+۱$$

قطر جدید به‌دست می‌آید که، اگر به تعداد قطرهای k ضلعی اضافه کنیم، تعداد قطرهای $(k+1)$ ضلعی پیدا می‌شود :

$$A(k+1) = A(k) + (k-1) = \frac{1}{2}k(k-3) + (k-1)$$
$$= \frac{1}{2}(k^2 - k - 2) = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$$

تعداد قطرهای n ضلعی، برابر است با $A(n) = \frac{1}{2}n(n-3)$.

مثال ۴. (نمونه‌ای برای پیدا کردن جملهٔ عمومی یک رشته). در تقسیم $1-x^2$ بر $(1 - 2x\cos x + x^2)$ ، اگر خارج قسمت را برحسب توانهای صعودی x، منظّم کنیم، جملهٔ شامل x^n در خارج قسمت، همچنین، صورت کلی باقیماندهٔ تقسیم را پیدا کنید.

حل. عمل تقسیم را، تا چند جملهٔ خارج قسمت، عمل می‌کنیم :

$$\begin{array}{l|l}
1 - x^2 & 1 - 2x\cos\alpha + x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-1 + 2x\cos\alpha - x^2} & 1 + 2x\cos\alpha + 2x^2\cos 2\alpha + \dots \\
\quad 2x\cos\alpha - 2x^2 & \\
\quad \underline{-2x\cos\alpha + 4x^2\cos^2\alpha - 2x^3\cos\alpha} & \\
\qquad 2x^2\cos 2\alpha - 2x^3\cos\alpha & \\
\qquad \underline{-2x^2\cos 2\alpha + 4x^3\cos\alpha\cos 2\alpha - 2x^4\cos 2\alpha} & \\
\qquad\qquad 2x^3\cos 3\alpha \ - 2x^4\cos 2\alpha & \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

می‌توان حدس زد که جملهٔ شامل x^n [یعنی جملهٔ $(n+1)$ ام]در خارج قسمت، به‌صورت $2x^n\cos n\alpha$ است. در این صورت، باقی‌ماندهٔ تقسیم، به این صورت درمی‌آید :

$$2x^{n+1}\cos(n+1)\alpha - 2x^{n+2}\cos n\alpha$$

برای تأیید درستی این حدس، کافی است تقسیم را ادامه دهیم و ببینیم، جملهٔ بعدی خارج‌قسمت و عبارت بعدیِ باقیمانده، از قانونی که حدس زده‌ایم، پیروی می‌کنند. انجام تقسیم، درستی حدس را تأیید می‌کنَد.

مثال ۵. (جست‌وجوی مکان هندسی). n نقطهٔ A_1 ، A_2 ، ...، A_n واقع در روی صفحهٔ P و n عدد مثبت a_1 ، a_2 ، ...، a_n داده شده‌اند. M را نقطه‌ای از صفحهٔ P می‌گیریم. ثابت کنید، اگر مجموع :

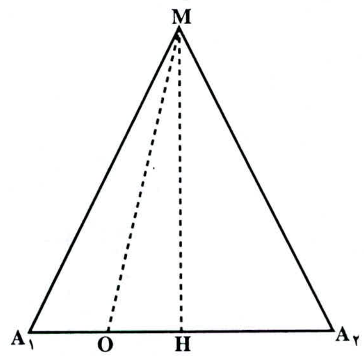
$$a_1.|MA_1|^2 + a_2.|MA_2|^2 + \dots + a_n.|MA_n|^2$$

مقداری ثابت باشد، نقطهٔ M روی محیط یک دایره حرکت می‌کند.

حل. ۱) مکان هندسی نقطهٔ A را، برای حالت $n = ۲$ ، جست‌وجو می‌کنیم. $A_۱$ را به $A_۲$ وصل، و روی پاره‌خط راست $A_۱A_۲$ ، نقطهٔ O را طوری پیدا می‌کنیم که پاره‌خط راست $A_۱A_۲$ را به نسبت $a_۱ : a_۲$ تقسیم کند. در این صورت داریم:

$$|OA_۱| = \frac{a_۲}{a_۱ + a_۲}.|A_۱A_۲|, |OA_۲| = \frac{a_۱}{a_۱ + a_۲}.|A_۱A_۲| \qquad (۱)$$

M را نقطه‌ای از صفحهٔ P و H را پای عمود وارد از M بر $A_۱A_۲$ می‌گیریم (شکل۶). داریم:



شکل ۷

$$|MA_۱|^۲ = |MO|^۲ + |A_۱O|^۲ \pm ۲|A_۱O|.|HO|$$

$$|MA_۲|^۲ = |MO|^۲ + |A_۲O|^۲ \mp ۲|A_۲O|.|HO|$$

دو طرف برابری اوّل را در $|A_۲O|$ و دو طرف برابری دوم را در $|A_۱O|$ ضرب و سپس، برابریهای حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

$$|MA_۱|^۲.|A_۲O| + |MA_۲|^۲.|A_۱O| = |MO|^۲(|A_۲O| + |A_۱O|)$$

$$+|A_۱O|^۲.|A_۲O| + |A_۲O|^۲.|A_۱O| = |MO|^۲.|A_۱A_۲| + |A_۱O|.|A_۲O|.|A_۱A_۲|$$

به‌جای $|A_۱O|$ و $|A_۲O|$ ، مقدارشان را از (۱) قرار می‌دهیم:

$$|MA_۱|^۲.\frac{a_۱}{a_۱ + a_۲}.|A_۱A_۲| + |MA_۲|^۲.\frac{a_۲}{a_۱ + a_۲}.|A_۱A_۲|$$

$$= |MO|^۲.|A_۱A_۲| + \frac{a_۱}{a_۱ + a_۲}.\frac{a_۲}{a_۱ + a_۲}.|A_۱A_۲|^۳$$

دو طرف این برابری را بر $|A_۱A_۲|$ تقسیم و در $a_۱ + a_۲$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a_1|MA_1|^2 + a_2|MA_2|^2 = (a_1 + a_2)|MO|^2 + \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2}|A_1A_2|^2$$

اکنون، اگر مقدار ثابت $a_1.|MA_1|^2 + a_2.|MA_2|^2$ را m^2 بنامیم، آن وقت :

$$|MO|^2 = \frac{m^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2}.|A_1A_2|^2$$

هم مقداری ثابت می‌شود ؛ یعنی M روی محیط دایره‌ای به مرکز O و با شعاع برابر طول پاره‌خط راست MO حرکت می‌کند.

مکان هندسی نقطهٔ M، محیط دایره‌ای است به مرکز O و شعاع برابر :

$$R = \sqrt{\frac{m_2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2}.|A_1A_2|^2}$$

در حالتی که مقدار زیر رادیکال مثبت باشد، با یک دایرهٔ واقعی سروکار داریم. در حالت $R = 0$ ، مکان هندسی نقطهٔ M، تنها شامل یک نقطه است و در حالت موهومی بودن R، حتی یک نقطه هم برای M وجود ندارد.

۲) فرض می‌کنیم، برای n نقطه و n عدد مثبت مفروض، مکان هندسی نقطهٔ M، محیط یک دایره باشد. $(n+1)$ نقطهٔ A_1 ، A_2 ، ....، A_n و A_{n+1} و n عدد مثبت a_1 ، a_2 ، ....، a_n و a_{n+1} را در نظر می‌گیریم. برای دو نقطهٔ A_n و A_{n+1} و دو عدد a_n و a_{n+1} می‌توان با استدلالی شبیه آن‌چه آوردیم، ثابت کرد روی پاره‌خط راست A_nA_{n+1} ، نقطه‌ای مانند O پیدا می‌شود که، برای هرنقطهٔ M از صفحهٔ P داشته باشیم :

$$a_n|MA_n|^2 + a_{n+1}|MA_{n+1}|^2 = (a_n + a_{n+1})|MO|^2 + \frac{a_na_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}|A_nA_{n+1}|^2$$

بنابراین، مسأله، منجر به جست‌وجوی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M می‌شود که برای آن، مجموع زیر، مقداری ثابت باشد :

$$a_1|MA_1|^2 + a_2|MA_2|^2 + \ldots + a_{n-1}|MA_{n-1}|^2 + (a_n + a_{n+1})|MO|^2$$

که بنا به فرض استقرا، این مکان، محیط یک دایره است.

مثال ۶.(نمونه‌ای از تعمیم یک مفهوم). مشتق مرتبهٔ nام تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin x$ را پیدا کنید.

حل. ۱) مشتقهای مرتبهٔ اوّل، مرتبهٔ دوم و مرتبهٔ سوم $f(x)$ را پیدا می‌کنیم :

$$f'(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x), \qquad f''(x) = -\sin x = \sin(\frac{2\pi}{2} + x),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$$

۲) فرض می‌کنیم، برای مشتق مرتبهٔ kام $f(x)$ داشته باشیم:

$$f^{(k)}(x) = \sin(\frac{k\pi}{۲} + x)$$

در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$f^{(k+۱)}(x) = \cos(\frac{k\pi}{۲} + x) = \sin\left[\frac{(k+۱)\pi}{۲} + x\right]$$

بنابراین: $f^{(n)}(x) = \sin(\frac{n\pi}{۲} + x)$.

§۲. اشتباه نکنید

۱. برای مسأله‌هایی می‌توان به سراغ روش استقرای ریاضی رفت و توانایی این روش را دربارهٔ آن آزمایش کرد که در آنها، کمیّت مطرح باشد، نه کیفیت. وقتی نتوان دربارهٔ پدیده‌ای، تعریف کمّی دقیقی ارائه داد، بی‌تردید برای بررسی آن، کاری از روش استقرای ریاضی ساخته نیست. به این دو قضیه توجه کنید:

قضیهٔ ۱. همهٔ آدمها، راستگو هستند.

اثبات. ۱) اگر کسی تنها یک‌بار در زندگی خود دروغ گفته باشد، نمی‌توان او را «دروغگو» نامید. (به‌ازای $n = ۱$، کسی دروغگو نمی‌شود.)

۲) فرض کنیم، اگر کسی در زندگی خود، k مرتبه دروغ گفته باشد، نتوان او را دروغگو نامید. در این صورت، روشن است اگر یک‌بار بیشتر دروغ بگوید (یعنی $k+۱$ بار)، به دلیل این یک دروغ اضافی، بسختی می‌توان او را دروغگو دانست (عبور از k به $k+۱$). بنابراین با تکیه بر روش استقرای ریاضی، ثابت می‌شود که با هر چند مرتبه دروغ گفتن، کسی دروغگو نمی‌شود. همهٔ مردم راستگو هستند.

قضیهٔ ۲. در بین جانداران، نوع انسان، صورتی بی‌مو دارد.

اثبات. ۱) اگر تنها یک مو در صورت کسی روییده باشد، نمی‌توان صورت او را «مودار» دانست.

۲) فرض کنیم، حکم قضیه برای $n = k$ درست باشد؛ یعنی کسی را که k عدد مو در صورت خود دارد، نتوان «ریش‌دار» به‌حساب آورد. در این صورت، روشن است، وقتی کسی با داشتن k مو در صورت خود، «بی‌مو» باشد، با داشتن یک موی اضافی، نمی‌توان او را «مودار» دانست؛ یعنی به‌ازای $n = k+۱$ مو هم، صورتی «بی مو» دارد. به این ترتیب، نمی‌توان هیچ مردی را، با صورتی «مودار» به حساب آورد.

در ظاهر استدلال هر دو قضیه، اشتباهی وجود ندارد ؛ ولی نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌ایم، در هر دو قضیه، نادرست است.

دروغگویی یا راستگویی، خصلتی یا رفتاری کیفی است ؛ در حالی که ریاضیات با کمیّتها سروکار دارد نه کیفیتها. اگر بخواهیم قضیه‌ای را دربارهٔ «راستگویی» یا وضعیت موی صورت مردی مطرح کنیم، پیش از همه، باید تعریف کمّی دقیقی از «آدم راستگو» یا «مرد بی‌مو» در دست داشته باشیم. اگر، برای مثال، تعریف کنیم : «کسی که در زندگی خود، دست‌کم یک‌بار دروغ گفته باشد، آدمی دروغگو است»، آن وقت در همان مرحلهٔ $n=1$ متوقف می‌شویم و نمی‌توانیم استدلال خود را دنبال کنیم. یا اگر بپذیریم که : «دروغگو، یعنی کسی که دست‌کم ۱۰ بار شهادت دروغ داده باشد»، آن وقت نمی‌توانیم مرحلهٔ «عبور از k به $k+1$» را بگذرانیم.

دوباره تأکید می‌کنیم، در ریاضیات محاسبه‌ای، نقش اصلی با کمیّت است، نه کیفیت، و درحالتی که با تعریف کمیّتی یک پدیده یا روند سروکار نداشته باشیم، از روش استقرای ریاضی، کاری ساخته نیست.

۲. وقتی می‌توان از روش استقرای ریاضی استفاده کرد که با عددهای طبیعی (یا دست‌کم، عددهای درست) سروکار داشته باشیم. در مثال ۱ فصل ۱، ثابت کردیم، نابرابری $(1+x)^n \geq 1+nx$ به‌ازای $x>-1$ و برای هر عدد طبیعی n درست است. اگر بخواهیم درستی یا نادرستی این نابرابری را، برای هر عدد حقیقی n بررسی کنیم، نمی‌توانیم انتظار یاری از روش استقرای ریاضی داشته باشیم و باید برای بررسی خود، راه دیگری پیدا کنیم.

۳. ضمن استفاده از روش استقرای ریاضی، باید در انتخاب حلقهٔ اوّل (یعنی مبنای استقرا) دقّت کرد و سپس، گام بعدی (گام استقرایی گذر از k به $k+1$) را برداشت. همان‌طور که در مثالهای پیشین دیدیم، ممکن است حلقهٔ اوّل، نه به‌ازای $n=1$، بلکه از عددی طبیعی مثل $n=q>1$ آغاز شود. درمثال ۱۵ فصل ۱، حلقهٔ نخستین $n=5$ بود. اشتباه در انتخاب نخستین حلقه، ممکن است ما را به نتیجه‌ای نادرست برساند. به این قضیه توجه کنید :

قضیهٔ ۳. ثابت کنید، در هر مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن معلوم باشد، همهٔ عضوهای مجموعه، با هم برابرند.

اثبات. تعداد عضوهای مجموعه را n می‌گیریم و از روش استقرای ریاضی دربارهٔ n استفاده می‌کنیم.

۱) به‌ازای $n=1$، درستی حکم روشن است : هر عدد با خودش برابر است.

۲) فرض می‌کنیم، حکم قضیه، برای هر مجموعه‌ای که دارای k عضو است، درست باشد. عضوهای مجموعه را a_1، a_2، ...، a_k می‌گیریم. بنا به فرض استقرا داریم :

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k \qquad (1)$$

اکنون مجموعه‌ای شامل $(k+1)$ عضو a_1 ، a_2 ،...، a_k ، a_{k+1} در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ

$$\{a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$$

را، که k عضو دارد، از آن جدا می‌کنیم. بنابه فرض استقرا، این مجموعه (که مجموعه‌ای k عضوی است)، باید عضوهای برابر داشته باشد ؛ یعنی :

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_k = a_{k+1} \qquad (2)$$

که با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$$

به این ترتیب، ثابت شد به فرض برابر بودن عضوهای هر مجموعهٔ k عضوی، همهٔ عضوهای مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی‌هم ، با یکدیگر برابرند. قضیه ثابت شد.

استدلال، به ظاهر، بی نقص است. در کجا اشتباه کرده‌ایم که به چنین نتیجهٔ نامنتظری رسیده‌ایم؟

اشتباه در این جاست که گام استقرایی (یعنی گذر از k به $k+1$) را، تنها می‌توان برای $k \geq 2$ برداشت. با استدلالی که کردیم، نمی‌توان از $n = 1$ به $n = 2$ عبور کرد. این‌جا، بحث بر سر مقایسهٔ عددهاست. وقتی از $n = 1$ صحبت می‌کنیم، تنها با یک عدد سروکار داریم و در نتیجه، مفهوم مقایسه، معنای خود را از دست می‌دهد. در این قضیه، حلقهٔ نخست (مبنای استقرا) $n = 2$ است، نه $n = 1$. و روشن است، اگر از $n = 2$ آغاز کنیم، نمی‌توانیم به نتیجه‌ای برسیم.

یادداشت.اگر در فرض قضیه، با مجموعه‌ای سروکار داشته باشیم که در مثل، p عضو آن با هم برابر باشند، برای حلقهٔ نخست، باید از $n = p + 1$ آغاز کرد.

۴. از روش استقرای ریاضی، می‌توان انتظار داشت که بتواند از عهدهٔ حلّ مسأله‌های مربوط به عددهای طبیعی برآید ؛ ولی مسأله‌هایی وجود دارد که، گرچه با عددهای طبیعی سروکار دارند، که در برابر روش استقرای ریاضی تسلیم نمی‌شوند.

قضیهٔ بزرگ فرما معروف است و همگی آن را می‌شناسیم : «ثابت کنید، برابری $x^n + y^n = z^n$ ، برای عددهای طبیعی x و y و z و عدد طبیعی $n \geq 3$ جواب ندارد.»

با این که در این‌جا، با عددهای طبیعی سروکار داریم، راهی برای حلّ آن، به یاری روش استقرای ریاضی، وجود ندارد یا تاکنون پیدا نشده است.

نمونه‌هایی هم وجود دارد که باید روش استقرای ریاضی را دربارهٔ آنها، از راهی غیرمستقیم آغاز کرد. در برخی مسأله‌ها، ناچاریم، نه دربارهٔ همهٔ عددهای طبیعی n، بلکه در آغاز برای برخی از آنها (یعنی زیرمجموعه‌ای از عددهای طبیعی) از استقرای ریاضی استفاده کنیم یا مجموعهٔ

دیگری، غیر از مجموعهٔ مفروض، برای استدلال با روش استقرای ریاضی انتخاب کنیم. به دو مثال توجه کنید.

مثال ۷. ثابت کنید، میانگین حسابی n عدد مثبت، از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست (نابرابری کوشی).

حل. a_1، a_2، ...، a_n را عددهایی مثبت می‌گیریم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

۱) برای $n=2$، درستی نابرابری کوشی روشن است؛ زیرا:

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2} \Rightarrow (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

۲) گام استقرایی را، نه به صورت «عبور از k به $k+1$»، بلکه به صورت «عبور از k به $2k$» برمی‌داریم؛ یعنی ثابت می‌کنیم، به فرض درستی نابرابری برای $n=k$، نابرابری برای $n=2k$ هم درست است. وقتی نابرابری میانگینها، برای k عدد درست باشد، برای میانگین حسابی $2k$ عدد می‌توان نوشت:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k}}{2k}=$$

$$=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}$$

$$\geq \sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{a_3+a_4}{2}\times\ldots\times\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}$$

$$\geq \sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\times\sqrt{a_3a_4}\times\ldots\times\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}$$

از آن‌جا که درستی نابرابری را برای $n=2$ ثابت کردیم، با توجه به اثبات اخیر، نابرابری میانگینها، برای $n=4$، $n=8$، ...، $n=2^m$ هم درست است $(m\in N)$.

اکنون درستی نابرابری کوشی را، برای هر مقدار طبیعی n ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم، بخواهیم برای n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n، نابرابری میانگینها را ثابت کنیم. q را کوچکترین عددی می‌گیریم که اگر به n اضافه شود، در مجموع توانی از ۲ به‌دست آید؛ یعنی:

$$n+q=2^m \quad (m\in N)$$

بنابر آن چه ثابت کردیم، نابرابری کوشی، برای $n+q$ عدد درست است؛ یعنی:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+q}}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{n+q}} \qquad (1)$$

این نابرابری، برای عددهای طبیعی و دلخواه a_i درست است. اگر فرض کنیم:

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+q} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

و برای سادگی کار، میانگین حسابی بین عددهای از a_1 تا a_n را s و میانگین هندسی بین آنها را p بنامیم، نابرابری (۱) به این صورت درمی‌آید :

$$\frac{ns + qs}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{p^n . s^q} \Rightarrow s \geq \sqrt[n+q]{p^n . s^q}$$

دو طرف نابرابری اخیر را، به توان $n+q$ می‌رسانیم :

$$s^{n+q} \geq p^n . s^q \Rightarrow s^n \geq p^n \Rightarrow s \geq p$$

درستی نابرابری کوشی، برای هر عدد طبیعی n ثابت شد.

مثال ۸. یک دایره و n نقطه روی یک صفحه داده شده‌اند. می‌خواهیم، یک n ضلعی در دایره محاط کنیم ؛ به‌نحوی که امتداد ضلعهای آن، از n نقطهٔ مفروض بگذرند[1].

حل. این، یک مسألهٔ ساختمانی هندسی است که می‌توان آن را با یاری گرفتن از روش استقرای ریاضی حل کرد ؛ ولی برای حلّ آن، باید از این روش، به گونه‌ای دیگر، که تا اندازه‌ای نامنتظر است، استفاده کرد. در این‌جا، نمی‌توان روش استقرای ریاضی را دربارهٔ n، یعنی تعداد ضلعهای n ضلعی، به کار برد. به جای آن، باید از مسألهٔ کلی‌تری استفاده کرد :

«در دایرهٔ مفروض، یک n ضلعی را طوری محاط کنید که k ضلع مجاور آن، از k نقطهٔ مفروض واقع در صفحهٔ دایره بگذرد و $n-k$ ضلع دیگر آن، موازی با امتدادهای مفروضی باشند.»

مسألهٔ ما، حالت خاصی از این مسأله است ؛ وقتی در این مسألهٔ کلی‌تر، $n = k$ بگیریم.

برای حلّ مسأله‌ای که طرح کردیم، استقرا را روی k انجام می‌دهیم.

۱) به‌ازای $k = 1$، به این مسأله می‌رسیم : در دایرهٔ مفروض، یک n ضلعی محاط کنید که ضلع A_1A_n آن، از نقطهٔ مفروض P واقع در صفحهٔ دایره بگذرد و ضلعهای دیگر آن، یعنی A_1A_2 ، A_2A_3 ،...، $A_{n-1}A_n$ با امتدادهای مفروض l_1 ، l_2 ،...، l_{n-1} موازی باشند.

مسأله را حل شده می‌گیریم (شکل ۸ ــ a و b). نقطهٔ دلخواه B_1 را روی محیط دایره در نظر می‌گیریم و n ضلعی محاطی $B_1B_2...B_n$ را طوری رسم می‌کنیم که ضلعهای B_1B_2 ، B_2B_3 ،...، $B_{n-1}B_n$ از آن، بترتیب با خطهای راست l_1 ، l_2 ،.....، l_{n-1} موازی باشند.

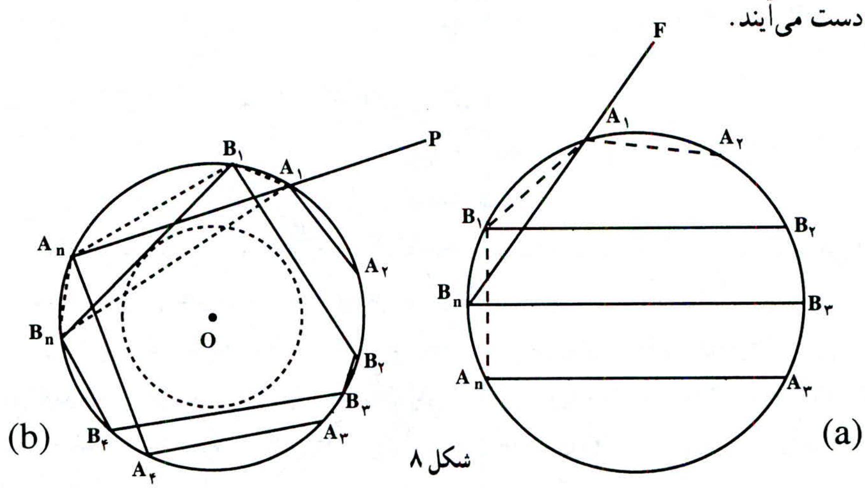
کمانهای A_1B_1 ، A_2B_2 ،...، A_nB_n با هم برابرند ؛ زیرا دو کمان A_1B_1 و A_2B_2 یا دو کمان A_2B_2 و A_3B_3 و غیر آن از محیط دایره، بین دو وتر موازی از دایره‌اند.

وقتی n عددی زوج باشد، کمانهای A_1B_1 و A_nB_n در دو جهت مختلف قرار می‌گیرند و

---

۱. یا گلوم، استقرای ریاضی در هندسه.

چهارضلعی $A_1B_1B_nA_n$ ، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قاعده‌های A_1A_n و B_1B_n می‌شود (شکل ۸ ــ a). به این ترتیب، ضلع A_1A_n از چند ضلعی مجهول، موازی با ضلع B_1B_n از nضلعی $B_1B_2...B_n$ خواهد شد. بنابراین، در حالت زوج بودن عدد n، باید از نقطهٔ P، خط راستی موازی B_1B_n رسم کرد که، پس از آن، بقیهٔ رأسهای n ضلعی $A_1A_2...A_n$ بسادگی به‌دست می‌آیند.



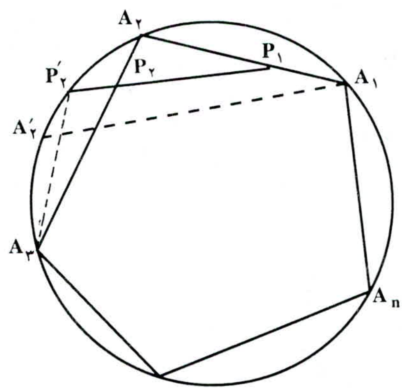
شکل ۸

در حالتی که عدد n فرد باشد، کمانهای A_1B_1 و A_nB_n در یک جهت هستند و چهارضلعی $A_1B_1A_nB_n$ ، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین،با قاعده‌های A_1B_1 و A_nB_n می‌شود (شکل ۸ ــ b). چون قطرهای A_1A_n و B_1B_n از این ذوزنقه، با هم برابرند، باید از نقطهٔ P قاطعی نسبت به دایره چنان رسم کرد که وتر A_1A_n را با طولی برابر وتر B_1B_n از دایره جدا کند ؛ یعنی باید بر دایره‌ای که با دایرهٔ مفروض، هم مرکز و بر خط راست B_1B_n مماس است، مماسی رسم کرد که از نقطهٔ P بگذرد.

۲) اکنون فرض می‌کنیم، بتوانیم در دایرهٔ مفروض، یک n ضلعی، چنان محاط کنیم که k ضلع پشت سرهم آن، از k نقطهٔ مفروض بگذرد و $n-k$ ضلع دیگر آن، با امتدادهای داده‌شده‌ای موازی باشند. ثابت می‌کنیم، در این صورت، می‌توانیم یک n ضلعی طوری در دایرهٔ مفروض محاط کنیم که $(k+1)$ ضلع پشت سرهم آن (A_1A_2 ، A_2A_3 ، .... ، $A_{k+1}A_{k+2}$) از $n+1$ نقطهٔ داده شدهٔ P_1 ، P_2 ، .... ، P_{k+1} بگذرند و $(n-k-1)$ ضلع دیگر آن، موازی با امتدادهای مفروضی باشد.

فرض می‌کنیم، n ضلعی مجهول را رسم کرده‌ایم (شکل ۹). ضلعهای A_1A_2 و A_2A_3 از این n ضلعی را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، خط راست $A_1A'_2$ را موازی P_1P_2 رسم می‌کنیم. A'_2 را نقطهٔ برخورد این خط راست با دایره، و P'_2 را نقطهٔ برخورد دو خط راست

$A'_۲A_۳$ و $P_۱P_۲$ می‌گیریم. دو مثلث $P_۱A_۲P_۲$ و $P'_۲P_۲A_۳$ متشابه‌اند؛ زیرا



شکل ۹

$$A_۱\hat{P}_۱P_۲ = A_۲\hat{A}_۱A_۲ = A_۲\hat{A}_۳P'_۲\ ,\ \ A_۲\hat{P}_۲P_۱ = P'_۲\hat{P}_۲A_۳$$

بنابراین:

$$\frac{|P_۱P_۲|}{|A_۳P_۲|} = \frac{|A_۲P_۲|}{|P'_۲P_۲|} \Rightarrow |P'_۲P_۲| = \frac{|A_۳P_۲|.|A_۲P_۲|}{|P_۱P_۲|}$$

چون حاصل ضرب $|A_۳P_۲|.|A_۲P_۲|$، تنها به نقطهٔ مفروض $P_۲$ و دایره مربوط است (و ربطی به انتخاب نقطه‌های $A_۲$ و $A_۳$ ندارد)، می‌تواند معین شود. بنابراین، طول پاره‌خط راست $P'_۲P_۲$ به‌دست می‌آید و از آن‌جا می‌توان نقطهٔ $P'_۲$ را پیدا کرد. به این ترتیب، با k نقطهٔ $P'_۲$ ، $P_۳$ ، $P_۴$ ، ... ، $P_{k+۱}$ سروکار پیدا می‌کنیم که k ضلع پشت سرهم $A'_۲A_۳$ ، $A_۳A_۴$ ، ... ، $A_{k+۱}A_{k+۲}$ ، از n ضلعی $A_۱A'_۲A_۳...A_n$ از آنها می‌گذرند و $n-k$ ضلع دیگر آن، یعنی $A_{k+۲}A_{k+۳}$ ، ... ، $A_nA_۱$ ، $A_۱A_۲$ موازی با امتدادهای داده شده‌اند، بنا به فرض استقرا، می‌دانیم n ضلعی $A_۱A'_۲A_۳...A_n$ قابل رسم است و سپس بسادگی، n ضلعی اصلی، یعنی $A_۱A_۲...A_n$ را بسازیم.

تمرین

۱. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، ثابت کنید در تقسیم $x^۲ + y^۲$ بر ۴، هرگز باقیمانده‌ای برابر ۳ به‌دست نمی‌آید.

۲. ثابت کنید، برای عدد طبیعی $n \geq ۲$ ، داریم :

$$|a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n| \leq |a_۱| + |a_۲| + \ldots + |a_n|$$

درستی این اتّحادها را ثابت کنید (از ۳ تا ۱۶) ؛ $n \in N$:

$$۳.\ ۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + \ldots + (-۱)^{n-۱}.n^۲ = (-۱)^{n-۱}\ \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۴.\ ۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + \ldots + n(n+۱)(n+۲) = \frac{۱}{۴}n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$$

$$۵.\ \frac{۱}{۱ \times ۳ \times ۵} + \frac{۱}{۳ \times ۵ \times ۷} + \ldots + \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)(۲n+۳)}$$

$$= \frac{n(n+۲)}{۳(۲n+۱)(۲n+۳)}$$

$$۶.\ (۱ - \frac{۱}{۴})(۱ - \frac{۱}{۹})\ldots\left[۱ - \frac{۱}{(n+۱)^۲}\right] = \frac{n+۲}{۲(n+۱)}$$

$$۷.\ (۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})\ldots(۱ - \frac{۱}{n+۱}) = \frac{۱}{n+۱}$$

۸. $۱\times۱!+۲\times۲!+\ldots+n\times n!=(n+۱)!-۱$

۹. $\frac{۰}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\ldots+\frac{n-۱}{n!}=۱-\frac{۱}{n!}$

۱۰. $۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۹۹}-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵۱}+\frac{۱}{۵۲}+\ldots+\frac{۱}{۱۰۰}$

۱۱. $(x-\frac{۱}{x})^۲+(x^۲-\frac{۱}{x^۲})^۲+\ldots+(x^n-\frac{۱}{x^n})^۲$

$=\frac{۱}{x^۲-۱}(x^{۲n+۲}-\frac{۱}{x^{۲n}})-۲n-۱$

۱۲. $\frac{۱^۲}{۱\times۳}+\frac{۲^۲}{۳\times۵}+\ldots+\frac{n^۲}{(۲n-۱)(۲n+۱)}=\frac{n(n+۱)}{۲(۲n+۱)}$

۱۳. $\tan\alpha.\tan۲\alpha+\tan۲\alpha\tan۳\alpha+\ldots+\tan(n-۱)\alpha\tan n\alpha=\frac{\tan n\alpha}{\tan\alpha}-n$

۱۴. $x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots+nx^n=\frac{x-(n+۱)x^{n+۱}+nx^{n+۲}}{(۱-x)^۲}\quad(x\neq۰,۱)$

۱۵. $\frac{a+۱}{۲}+\frac{a+۳}{۴}+\ldots+\frac{a+۲^n-۱}{۲^n}=\frac{(a-۱)(۲^n-۱)}{۲^n}+n$

۱۶. $(۱+x+x^۲+\ldots+x^n)^۲=x^{۲n}+۲x^{۲n-۱}+۳x^{۲n-۲}$

$+\ldots+(n+۱)x^n+nx^{n-۱}+\ldots+۳x^۲+۲x+۱$

۱۷. مطلوب است محاسبهٔ این حد :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{۱\times۵}+\frac{۱}{۵\times۹}+\ldots+\frac{۱}{(۴n-۳)(۴n+۱)}\right)$$

۱۸. دنبالهٔ (C_n) به این ترتیب تعریف شده است :

$$C_۱=۲\ ,\ C_{n+۱}=\frac{n+۲}{۲}C_n$$

بیان جملهٔ عمومی این دنباله، یعنی C_n را، برحسب n پیدا کنید.

۱۹. اگر در دنبالهٔ (x_n) داشته باشیم :

$$x_۱=۱\ ,\ x_{n+۱}=x_n-\frac{۱}{n(n+۱)}$$

بیان جملهٔ عمومی x_n را برحسب n پیدا کنید.

۲۰. برای دنبالهٔ (a_n) می‌دانیم :

$$a_1 = \frac{2}{3} \ , \ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

مطلوب است بیان جملهٔ عمومی a_n برحسب n.

۲۱. دنبالهٔ (a_n) با این تعریف داده شده است :

$$a_0 = 2 \ , \ a_1 = 3 \ , \ a_{n+1} = a_1 a_n - a_0 a_{n-1}$$

بیان جملهٔ عمومی a_n را برحسب n بنویسید.

۲۲. دنبالهٔ عددی (a_n)، با این شرطها تعریف شده است :

$$a_0 = a \ , \ a_1 = b \ , \ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

ثابت کنید :

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{3 \times 2^{n-1}}$$

۲۳. دنبالهٔ زوج عددهای زیر داده شده است :

$$(a, b) \ , \ (a_1, b_1) \ , \ (a_2, b_2) \ , \ \ldots, (a_n, b_n)$$

این دنباله، به این ترتیب تعریف شده است :

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \ , \ b_1 = \frac{a_1 + b}{2} \ , \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ , \ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}$$

ثابت کنید :

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)(1 - \frac{1}{4^n}) ; b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)(1 + \frac{1}{2 \times 4^n})$$

اگر دنبالهٔ (a_n) را با $a_0 = 1$ و $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ تعریف کنیم، دنباله فیبوناچی به‌دست می‌آید. برای دنبالهٔ فیبوناچی ثابت کنید (از ۲۴ تا ۲۹) :

۲۴. $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1$

۲۵. $a_n^2 - a_n - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$

۲۶. $a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1$

۲۷. $a_{2n+1} = 1 + a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$

۲۸. $a_{n+9} = a_{n-1} a_8 + a_n a_9$

۲۹. $a_n \cdot a_{n+1} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$

درستی این نابرابریها را ثابت کنید (از ۳۰ تا ۳۲ ؛ $n \in N$) :

۳۰. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} (n > 1)$

۳۱. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$

۳۲. $|\sin nx| \leq n|\sin x|$

۳۳. برای چه مقدارهایی از عدد طبیعی n، نابرابری $2^n > n^2$ درست است؟

۳۴. ثابت کنید، برای $n \in N$، عدد $4^n + 15n - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳۵. ثابت کنید عدد $10^n - 9n - 28$ برای هر $n \in N$، مضربی است از ۲۷.

۳۶. ثابت کنید، برای عددهای طبیعی n، عدد $9^{n+1} - 8n - 9$ بر ۶۴ بخش‌پذیر است.

۳۷. ثابت کنید، عدد $2^{3n} + 6$، برای عددهای طبیعی n، بر ۱۴ بخش‌پذیر است.

۳۸. ثابت کنید، عدد $3^{2n+1} + 40n - 67$، به‌ازای $n \in N$، مضربی است از ۶۴.

۳۹. ثابت کنید، مجموع توانهای سوّم ۳ عدد طبیعی پشت سرهم بر ۹ بخش‌پذیر است.

۴۰. ثابت کنید، برای $n \in N$، عدد $n^5 - 5n^3 + 4n$ بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

۴۱. روشن کنید، عدد $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ به‌ازای عددهای طبیعی n، مضربی است از ۱۳۳.

۴۲. ثابت کنید، برای $n \in N$، عدد $3^{n+2} \times 5^n + 2^{5n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۴۳. ثابت کنید، عدد $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$، به‌ازای عددهای طبیعی n، مضربی است از ۱۱.

۴۴. ثابت کنید، عدد $5^{3n+1} + 3^{4n} \times 2^{n+5}$ برای $n \in N$ و $n = 0$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

۴۵. ثابت کنید، برای $n \in N$، عدد $8^{2n+1} + 7^{n+2}$ مضربی است از ۵۷.

۴۶. ثابت کنید، عدد $3^{2n+2} \times 5^{2n} - 3^{3n+2} \times 2^{2n}$، به شرط $n \in N$، بر ۱۰۵۳ بخش‌پذیر است.

۴۷. عدد $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$، برای عددهای طبیعی n، بر ۲۴ بخش‌پذیر است. چرا؟

۴۸. ثابت کنید، عدد $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$، برای $n \in N$، بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۴۹. ثابت کنید، عدد $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$، برای عددهای طبیعی n، مضربی است از ۷.

۵۰. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^3 + px + q = 0$ را x_1، x_2 و x_3 بنامیم، ثابت کنید عبارت $x_1^n + x_2^n + x_3^n$ را می‌توان برحسب p و q بیان کرد (n عددی است درست، مثبت یا منفی یا صفر).

۵۱. ثابت کنید $x^n + \frac{1}{x^n}$ را می‌توان به‌صورت یک چند جمله‌ای درجهٔ n، نسبت به

توانهای $x+\frac{1}{x}$ نوشت (n، عددی طبیعی است). در ضمن، در حالت زوج بودن n، همهٔ توانهای چند جمله‌ای حاصل، زوج و در حالت فرد بودن n، همهٔ توانهای چند جمله‌ای حاصل فرد است.

۵۲. ثابت کنید، اگر داشته‌باشیم : $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ ، برای هر عدد طبیعی n خواهیم داشت :

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

۵۳. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$$

۵۴. a و b، دو عدد مثبت و n، عددی طبیعی است. ثابت کنید :

$$2^{n-1}(a^n+b^n)\geq(a+b)^n$$

۵۵. مشتق مرتبهٔ nام را، دربارهٔ تابعهایی که ضابطهٔ آنها داده شده است، پیدا کنید :

الف) $f(x)=\cos x$ ؛ ب) $f(x)=\frac{1}{x+a}$

ج) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ؛ د) $f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$

۵۶. این حاصلضرب را محاسبه کنید :

$$P=2^{\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{4}}\times8^{\frac{1}{8}}\times16^{\frac{1}{16}}\times\ldots$$

۵۷. n صفحه از یک نقطهٔ فضا گذشته‌اند ؛ ولی هیچ سه صفحه‌ای در یک خط راست مشترک نیستند. ثابت کنید، این صفحه‌ها، فضا را به $n(n-1)+2$ بخش مختلف تقسیم می‌کنند.

۵۸. اگر فرض کنیم $i=\sqrt{-1}$ ، ثابت کنید، برای همهٔ عددهای طبیعی n، داریم :

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$$

۵۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم (دستور مووآور) :

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$$

۶۰. دستور بسط دوجمله‌ای (دوجمله‌ای نیوتون) را، برای عددهای دلخواه a و b و عددطبیعی n، ثابت کنید :

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^pa^{n-p}b^p+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

۶۱. شهرهای یک کشور، دوبه‌دو، یا با جادهٔ اتومبیل رو به هم مربوطند یا با راه‌آهن. ثابت کنید، برای سفر به همهٔ شهرهای این کشور، می‌توان تنها از ماشین یا قطار استفاده کرد.

پاسخ، راهنمایی و حلّ مسأله‌ها

۱. سه حالت پیش‌می‌آید : ۱) هر دو عدد x و y زوج باشند ؛ در این حالت $x^۲ + y^۲$ بر ۴ بخش‌پذیر است. ۲) هر دو عدد x و y فرد باشند ؛ در این حالت، باقیماندهٔ حاصل از تقسیم $x^۲ + y^۲$ بر ۴، برابر ۲ می‌شود، زیرا اگر $x = ۲m + ۱$ و $y = ۲n + ۱$ ، آن وقت :

$$x^۲ + y^۲ = (۲m + ۱)^۲ + (۲n + ۱)^۲ = ۴(m^۲ + n^۲ + m + n) + ۲$$

۳) یکی از دو عدد x و y زوج و دیگری فرد باشد. در این حالت، باقیماندهٔ حاصل از تقسیم $x^۲ + y^۲$ بر ۴، برابر ۱ می‌شود ؛ زیرا با فرض $x = ۲m$ و $y = ۲n + ۱$ به‌دست می‌آید :

$$x^۲ + y^۲ = ۴m^۲ + (۲n + ۱)^۲ = ۴(m^۲ + n^۲ + n) + ۱$$

و به این ترتیب، هرگز باقیماندهٔ تقسیم $x^۲ + y^۲$ بر ۴، برابر ۳ نمی‌شود.

در این مسأله، برای حل از استقرای کامل (قیاس مقسم) استفاده کردیم، نه استقرای ریاضی ؛ زیرا در بررسی خود، همهٔ حالتهای ممکن را در نظر گرفتیم.

۲. ۱) در حالت $n = ۲$ باید ثابت کنیم :

$$|a_۱ + a_۲| \le |a_۱| + |a_۲| \qquad (۱)$$

حالتهای ممکن را بررسی می کنیم (استقرای کامل). الف) اگر یکی از دو عدد $a_۱$ یا $a_۲$ ، یا هر دوی آنها برابر صفر باشد، رابطهٔ (۱) درست است (نابرابری به برابری تبدیل می‌شود). ب) اگر $a_۱$ و $a_۲$ مخالف صفر و در ضمن، هم علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی)، باز هم رابطهٔ (۱) به برابری تبدیل می‌شود. ج) اکنون فرض می کنیم $a_۱ > ۰$ و $a_۲ < ۰$ ، و بی‌آن که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، فرض می کنیم $|a_۱| > |a_۲|$. $a'_۲ = -a_۲$ می گیریم، به دست می آید :

$$|a_۱ + a_۲| = |a_۱ - a'_۲| = a_۱ - a'_۲ \ ,$$

$$|a_۱|+|a_۲|=|a_۱|+|-a'_۲|=a_۱+a'_۲$$

و روشن است که $a_۱-a'_۲<a_۱+a'_۲$ (تفاضل دو عدد مثبت، از مجموع آنها کوچکتر است).

۲) فرض می‌کنیم، نابرابری برای $n=k$ درست باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_k|\le|a_۱|+|a_۲|+\cdots+|a_k| \qquad (۲)$$

و ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n=k+۱$ هم، درست است. داریم:

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_k+a_{k+۱}|=|(a_۱+a_۲+\cdots+a_k)+a_{k+۱}|$$

$$\le|a_۱+a_۲+\cdots+a_k|+|a_{k+۱}|\le|a_۱|+|a_۲|+\cdots+|a_k|+|a_{k+۱}|$$

۱.۳) درستی برابری، برای $n=۱$ روشن است.

۲) فرض می‌کنیم، برابری برای $n=k$ درست باشد. در این صورت داریم:

$$۱^۲-۲^۲+۳^۲-۴^۲+\cdots+(-۱)^{k-۱}k^۲+(-۱)^k(k+۱)^۲$$

$$=(-۱)^{k-۱}.\frac{k(k+۱)}{۲}+(-۱)^k(k+۱)^۲=(-۱)^k(k+۱)\left[-\frac{k}{۲}+(k+۱)\right]$$

$$=(-۱)^k.\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

یعنی، برابری برای $n=k+۱$ درست است. درستی برابری، با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۱.۴) برای $n=۱$، برابری برقرار است؛ زیرا:

$$۱\times۲\times۳=\frac{۱}{۴}(۱+۱)(۱+۲)(۱+۳)$$

۲) به فرض درست بودن برابری برای $n=k$، داریم:

$$۱\times۲\times۳+\cdots+k(k+۱)(k+۲)+(k+۱)(k+۲)(k+۳)$$

$$=\frac{۱}{۴}k(k+۱)(k+۲)(k+۳)+(k+۱)(k+۲)(k+۳)$$

$$=\frac{۱}{۴}(k+۱)(k+۲)(k+۳)(k+۴)$$

یعنی برابری برای $n=k+۱$ هم درست است.

یادداشت. اگر از دستورهای مربوط به مجموع توانهای متشابه عددهای طبیعی متوالی، آگاه باشیم:

$$S_۱=۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{۱}{۲}n(n+۱),$$

$$S_۲=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱),$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

آن وقت مجموعهایی از گونهٔ مجموع مسألهٔ ۴ را به دست آوریم. جملهٔ عمومی مجموع، یعنی $n(n+1)(n+2)$ را برحسب توانهای نزولی n می‌نویسیم :

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n \qquad (1)$$

اگر در اتحاد (۱)، به جای n، به ترتیب عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n را قرار دهیم و سپس، اتحادهای عددی حاصل را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = S_3 + 3S_2 + 2S_1$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)[n(n+1) + 2(2n+1) + 4] = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید بخواهیم، این مجموع را محاسبه کنیم :

$$A(n) = 1\times 3\times 5 + 2\times 5\times 9 + \cdots + n(2n+1)(4n+1)$$

با توجه به اتحاد $n(2n+1)(4n+1) = 8n^3 + 6n^2 + n$ ، مقدار $A(n)$ چنین می‌شود :

$$A(n) = 8S_3 + 6S_2 + S_1 = 2n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)[4n(n+1) + 2(2n+1) + 1] = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(2n+3)$$

۵. ۱) درستی برابری برای $n = 1$ روشن است.

۲) مجموع سمت چپ برابری را $A(n)$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم، برابری برای $n = k$ درست باشد. در این صورت،

$$A(k+1) = A(k) + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k(k+2)}{3(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k(k+2)(2k+5)+3}{3(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{(k+1)(k+3)(2k+1)}{3(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+2]}{3[2(k+1)+1][2(k+1)+3]}$$

با فرض درستی برابری برای $A(k)$ ، درستی آن برای $A(k+1)$ تأیید شد. برابری به ازای هر

مقدار طبیعی n درست است.

یادداشت. در این مسأله هم، بدون در دست داشتن مقدار سمت راست، می‌توان مجموع کسرهای سمت چپ برابری را پیدا کرد. می‌نویسیم :

$$\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)(۲n+۳)}=\frac{a}{۲n-۱}+\frac{b}{۲n+۱}+\frac{c}{۲n+۳}$$

در این اتحاد، مقدار عددهای a، b و c را به‌دست می‌آوریم (می‌توان، به جای n ، سه عدد طبیعی مختلف قرار داد و سه معادلهٔ سه مجهولی برای a، b و c به دست آورد) :

$$a=\frac{۱}{۸}\ ,\ b=-\frac{۱}{۴}\ ,\ c=\frac{۱}{۸}$$

و بنابراین، اگر مجموع سمت چپ برابری را A(n) بنامیم، داریم :

$$A(n)=\frac{۱}{۸}\sum_{k=۱}^{n}\left[\frac{۱}{۲k-۱}+\frac{۱}{۲k+۳}-\frac{۲}{۲k+۱}\right]$$

$$=\frac{۱}{۸}\left[(۱+\frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۳})+(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}-\frac{۲}{۵})+(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۹}-\frac{۲}{۷})+\cdots+(\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۲n+۳}-\frac{۲}{۲n+۱})\right]$$

$$=\frac{۱}{۸}(۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲n+۳}-\frac{۱}{۲n+۱})$$

$$=\frac{n(n+۲)}{۳(۲n+۱)(۲n+۳)}$$

۶. ۱) درستی برابری برای $n=۱$ روشن است.

۲) حاصل ضرب سمت چپ برابری را P(n) می‌نامیم و فرض می‌کنیم $P(k)=\frac{k+۲}{۲(k+۱)}$

در این صورت داریم :

$$P(k+۱)=P(k).(۱-\frac{۱}{(k+۲)^۲})$$

$$=\frac{k+۲}{۲(k+۱)}.\frac{(k+۱)(k+۳)}{(k+۱)^۲}=\frac{k+۳}{۲(k+۲)}$$

و درستی برابری ثابت می‌شود.

۷. شبیه مسألهٔ ۱۰۰ به نتیجه می‌رسد.

۸. ۱) درستی برابری، برای $n=۱$ روشن است.

۲) مجموع سمت چپ برابری را A(n) می‌نامیم و فرض می‌کنیم :

$$A(k)=(k+۱)!-۱$$

در این صورت، برای A(k+۱) داریم :

$$A(k+۱)=A(k)+(k+۱)(k+۱)!=\left[(k+۱)!-۱\right]+(k+۱)(k+۱)!$$

$$=(k+1)!\,[1+(k+1)]-1=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1$$

۹. ۱) درستی اتحاد، برای $n=1$ و $n=2$ روشن است.

۲) مجموع سمت چپ برابری را $A(n)$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $A(k)=1-\frac{1}{k!}$. از آن‌جا:

$$A(k+1)=A(k)+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}$$

$$=1-\frac{(k+1)-k}{(k+1)!}=1-\frac{k}{(k+1)!}$$

۱۰. این برابری، حالت خاصی از برابری کلی زیر است:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \qquad (1)$$

در واقع، برابری عددی مسأله، از برابری (۱) به ازای $n=50$ به دست می‌آید.

۱) برابری (۱)، برای $n=1$ درست است (زیرا $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$).

۲) فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$$

و ثابت می‌کنیم که در این صورت:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}$$

در واقع، با توجه به فرض استقرا (درستی برابری به ازای $n=k$) داریم:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

۱۱. ۱) سمت راست برابری، به ازای $n=1$، چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{x^۲-۱}\left(x^۴-\frac{۱}{x^۲}\right)-۳=\frac{۱}{x^۲-۱}.\frac{(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)}{x^۲}-۳$$

$$=\frac{x^۴-۲x^۲+۱}{x^۲}=\frac{(x^۲-۱)^۲}{x^۲}=\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲$$

که همان مقدار سمت چپ برابری، به ازای $n=۱$ است.

۲) مقدار سمت چپ برابری را S_n می‌نامیم و فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$S_k=\frac{۱}{x^۲-۱}\left(x^{۲k+۲}-\frac{۱}{x^{۲k}}\right)-۲k-۱$$

در این صورت، برای $S_{k+۱}$ داریم:

$$S_{k+۱}=S_k+\left(x^{k+۱}-\frac{۱}{x^{k+۱}}\right)^۲=\frac{۱}{x^۲-۱}\left(x^{۲k+۲}-\frac{۱}{x^{۲k}}\right)-۲k-۱+x^{۲k+۲}+\frac{۱}{x^{۲k+۲}}-۲$$

$$=\frac{x^{۴k+۲}-۱}{x^{۲k}(x^۲-۱)}+\frac{x^{۴k+۴}+۱}{x^{۴k+۲}}-۲(k+۱)-۱$$

$$=\frac{x^{۴k+۴}-x^۲+x^{۴k+۶}+x^۲-x^{۴k+۴}-۱}{x^{۲k+۲}(x^۲-۱)}-۲(k+۱)-۱$$

$$=\frac{x^{۴k+۶}-۱}{x^{۴k+۲}(x^۲-۱)}-۲(k+۱)-۱$$

$$=\frac{۱}{(x^۲-۱)}\left(x^{۲k+۴}-\frac{۱}{x^{۲k+۲}}\right)-۲(k+۱)-۱$$

و بنابراین، برابری مسأله، یک اتحاد است.

۱۲. شبیه مسأله ۵ حل می‌شود.

۱۳. ۱) به ازای $n=۱$ به اتحاد عددی $۰=۰$ می‌رسیم. به ازای $n=۲$، سمت راست برابری چنین می‌شود:

$$\frac{\tan ۲\alpha}{\tan\alpha}-۲=\frac{۲}{۱-\tan^۲\alpha}-۲=\frac{۲\tan^۲\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\tan\alpha.\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\tan\alpha\tan ۲\alpha$$

که همان مقدار سمت چپ برابری، برای $n=۲$ است.

۲) فرض می‌کنیم، برابری به ازای $n=k$ برقرار باشد، در این صورت:

$$A(k+۱)=\tan\alpha\tan ۲\alpha+\tan ۲\alpha\tan ۳\alpha+\cdots+$$

$$\tan(n-۱)\alpha\tan n\alpha+\tan n\alpha\tan(n+۱)\alpha$$

$$=\left(\frac{\tan k\alpha}{\tan\alpha}-k\right)+\tan k\alpha+\tan(k+۱)\alpha=\frac{\tan k\alpha+\tan\alpha\tan k\alpha\tan(k+۱)\alpha}{\tan\alpha}-k$$

$$\tan k\alpha + \tan\alpha \tan k\alpha \tan(k+1)\alpha = \tan k\alpha + \tan\alpha \tan k\alpha . \frac{\tan k\alpha + \tan\alpha}{1-\tan k\alpha \tan\alpha}$$

$$= \frac{\tan k\alpha + \tan k\alpha \tan^2\alpha}{1-\tan k\alpha \tan\alpha} = \frac{(\tan k\alpha + \tan\alpha) - \tan\alpha(1-\tan k\alpha \tan\alpha)}{1-\tan k\alpha\tan\alpha}$$

$$= \tan(k+1)\alpha - \tan\alpha$$

و بنابراین :

$$A(k+1) = \frac{\tan(k+1)\alpha - \tan\alpha}{\tan\alpha} - k = \frac{\tan(k+1)\alpha}{\tan\alpha} - (k+1)$$

ثابت شد، اگر برابری برای $n = k$ درست باشد، برای $n = k+1$ هم درست است.

۱۴. ۱) به ازای $n = 1$، سمت چپ برابری، برابر x می‌شود و برای سمت راست برابری داریم :

$$\frac{x - 2x^2 + x^3}{(1-x)^2} = \frac{(1-2x+x^2)x}{(1-x)^2} = x$$

۲) سمت چپ برابری را $A(n)$ می‌نامیم، در این صورت به فرض درستی آن، برای $n = k$ داریم :

$$A(k+1) = A(k) + (k+1)x^{k+1} = \frac{x-(k+1)x^{k+1}+kx^{k+2}}{(1-x)^2} +$$

$$(k+1)x^{k+1} = \frac{1}{(1-x)^2}\Big[x-(k+1)x^{k+1}+kx^{k+2}+(k+1)x^{k+1} -$$

$$2(k+1)x^{k+2} + (k+1)x^{k+3}\Big] = \frac{1}{(1-x)^2}\left[x-(k+2)x^{k+2}+(k+1)x^{k+3}\right]$$

و درستی اتحاد، برای همهٔ عددهای طبیعی n، تأیید می‌شود.

۱۵. اثبات را می‌توان با روش استقرای ریاضی، به صورت عادی انجام داد. ولی بهتر است از روش ساده‌تر استقرای ریاضی استفاده کنیم (شمارهٔ ۴ از § ۲ در فصل ۲ را ببینید). مجموع سمت چپ برابری را $u(n)$ و عبارت سمت راست آن را $f(n)$ می‌نامیم و ثابت می‌کنیم :
۱) $f(1) = u(1)$ ؛ ۲) $u(n)-u(n-1) = f(n)-f(n-1)$.

۱) درستی برابری $u(1) = f(1)$ بسادگی روشن می‌شود.

۲) داریم :

$$u(n)-u(n-1) = \frac{a+2^n-1}{2^n} = \frac{a-1}{2^n}+1$$

$$f(n)-f(n-1) = \frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n} + n - \left[\frac{(a-1)(2^{n-1}-1)}{2^{n-1}} + n - 1\right]$$

$$=\frac{a-1}{2^n}\left[(2^n-1)-2(2^{n-1}-1)\right]+1=\frac{a-1}{2^n}+1$$

درستی برابری، برای هر مقدار طبیعی n ثابت شد.

۱۶. ۱) برابری، به ازای $n=1$ روشن است و منجر به این اتحاد ساده می‌شود:

$$(1+x)^2=x^2+2x+1$$

۲) فرض می‌کنیم برابری برای $n=k$ درست باشد، در این صورت داریم:

$$(1+x+\cdots+x^k+x^{k+1})^2=(1+x+\cdots+x^k)^2+2x^{k+1}(x^k+\cdots+x+1)+x^{2k+2}$$

$$=x^{2k}+2x^{2k-1}+3x^{2k-2}+\cdots+kx^{k+1}+(k+1)x^k+\cdots+2x+1+$$

$$x^{2k+2}+2x^{2k+1}+2x^{2k}+2x^{2k-1}+2x^{2k-2}+\cdots+2x^{k+1}$$

$$=x^{2k+2}+2x^{2k+1}+3x^{2k}+4x^{2k-1}+5x^{2k-2}+\cdots+(k+2)x^{k+1}+$$

$$(k+1)x^k+\cdots+2x+1$$

$$=x^{2(k+1)}+2x^{2(k+1)-1}+3x^{2(k+1)-2}+\cdots+3x^2+2x+1$$

یعنی، اگر برابری به ازای $n=k$ درست باشد، به ازای $n=k+1$ هم درست است.

۱۷. مجموع داخل پرانتز، یعنی مجموعی که باید حدّ آن را به‌دست آوریم، $A(n)$ می‌نامیم. داریم:

$$A(1)=\frac{1}{1\times5}=\frac{1}{5}=\frac{1}{4+1},$$

$$A(2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5\times9}=\frac{2}{9}=\frac{2}{4\times2+1},$$

$$A(3)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9\times13}=\frac{3}{13}=\frac{3}{4\times3+1}$$

می‌توان حدس زد: $A(n)=\frac{n}{4n+1}$. کسر $\frac{n}{4n+1}$ را $f(n)$ می‌نامیم.

۱) روشن است $f(n)$ و $A(n)$ به ازای $n=1$ ($n=2$ و $n=3$) درست است.

۲) داریم:

$$A(n)-A(n-1)=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)},$$

$$f(n)-f(n-1)=\frac{n}{4n+1}-\frac{n-1}{4n-3}=\frac{1}{(4n+1)(4n-3)}$$

به این ترتیب، ثابت شد $A(n)=\frac{n}{۴n+۱}$ و حدّ آن به سادگی به دست می‌آید :

$$\lim_{n\to\infty} A(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۴n+۱}=\frac{۱}{۴}$$

۱۸. با توجه به رابطهٔ فرض، می‌توان بترتیب نوشت :

$$C_n=\frac{n+۱}{۲}C_{n-۱}=\frac{n+۱}{۲}.\frac{n}{۲}C_{n-۲}=\frac{n+۱}{۲}.\frac{n}{۲}.\frac{n-۱}{۲}C_{n-۳}=\cdots$$

$$=\frac{n+۱}{۲}.\frac{n}{۲}.\frac{n-۱}{۲}\cdots\frac{۳}{۲}C_۱=\frac{(n+۱)!}{۲^{n-۱}}$$

آیا حدس ما درست است؟ آیا $C_n=\frac{(n+۱)!}{۲^{n-۱}}$، جملهٔ عمومی دنباله است؟ C_n به ازای $n=۱$ تأیید می‌شود : $C_۱=۲$، از طرف دیگر، اگر این جملهٔ عمومی، برای $n=k$ درست باشد، برای $n=k+۱$، با توجه به فرض مسأله، به‌دست می‌آید :

$$C_{k+۱}=\frac{k+۲}{۲}C_k=\frac{k+۲}{۲}.\frac{(k+۱)!}{۲^{k-۱}}=\frac{(k+۲)!}{۲^k}$$

۱۹. با توجه به فرض مسأله، چند جملهٔ نخست دنباله را پیدا می‌کنیم :

$$x_۱=۱=\frac{۱}{۱}\ ,$$

$$x_۲=x_۱-\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\ ,$$

$$x_۳=x_۲-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}\ ,$$

$$x_۴=x_۳-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

به نظر می‌رسد : $x_n=\frac{۱}{n}$ برابری برای $n=۱$ ($n=۲$، $n=۳$ و $n=۴$) درست است.

فرض می‌کنیم $x_k=\frac{۱}{k}$ ؛ در این صورت :

$$x_{k+۱}=x_k-\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{۱}{k+۱}$$

درستی رابطه تأیید شد. جملهٔ عمومی دنباله $x_n=\frac{۱}{n}$ است.

یادداشت. تلاش کنید، جملهٔ عمومی x_n را، با روش حلّ مسألهٔ ۱۸ پیدا کنید (برای این

منظور، راه حلّ مثال ۲ فصل ۳ و یادداشت مربوط به آن را ببینید).

۲۰. شبیه مسألهٔ ۱۹، چند جملهٔ نخست دنباله را محاسبه می‌کنیم :

$$a_1 = \frac{2}{3},$$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{20} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5},$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{30} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$$

به نظر می‌رسد، باید جملهٔ عمومی برابر $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ باشد. گام استقرایی، یعنی گذر از k به $k+1$ بسادگی برداشته می‌شود :

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k+2}{k+3}$$

۲۱. بنا بر فرض مسأله، داریم :

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

چند جملهٔ نخست دنباله را پیدا می‌کنیم ($a_0 = 2$ ، $a_1 = 3$) :

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 9 - 4 = 5 = 2^2 + 1,$$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 15 - 6 = 9 = 2^3 + 1,$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 27 - 10 = 17 = 2^4 + 1$$

و به احتمالی، باید داشته باشیم : $a_n = 2^n + 1$. از $k-1$ و k به $k+1$ عبور می‌کنیم :

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$$

حدس با استفاده از روش استقرای ریاضی، به یقین رسید.

۲۲. ۱) به ازای $n = 0$ و $n = 1$، بترتیب به دست می‌آید : $a_0 = a$ ، $a_1 = b$.

۲) فرض می‌کنیم، دستور محاسبهٔ a_n برای $n = k-1$ و $n = k$ درست باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$a_{k-1} = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{k-2} \cdot \frac{b-a}{3 \times 2^{k-2}},$$

$$a_k = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{k-۱} \cdot \frac{b-a}{۳\times ۲^{k-۱}}$$

در این صورت داریم :

$$a_{k+۱} = \frac{۱}{۲}(a_k + a_{k-۱})$$
$$= \frac{۱}{۲}\left[\frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{k-۱} \cdot \frac{b-a}{۳\times ۲^{k-۱}} + \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{k-۲} \cdot \frac{b-a}{۳\times ۲^{k-۲}}\right]$$
$$= \frac{a+۳b}{۳} + \frac{۱}{۲}\left[\frac{(-۱)^{k-۲}}{۳\times ۲^{k-۱}}(-(b-a)+۲(b-a))\right]$$
$$= \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{k} \cdot \frac{b-a}{۳\times ۲^{k}}$$

توجه دارید که : $(-۱)^{k-۲} = (-۱)^k$ درستی دستور محاسبهٔ a_n ، ثابت شد.

۲۳. ۱) برای $n=۱$ داریم :

$$a_۱ = a + \frac{۲}{۳}(b-a)(۱-\frac{۱}{۴}) = a + \frac{b-a}{۲} = \frac{a+b}{۲} \;,$$
$$b_۱ = a + \frac{۲}{۳}(b-a)(۱+\frac{۱}{۸}) = \frac{a+۳b}{۴}$$
$$= \frac{(a+b)+۲b}{۴} = \frac{۲a_۱+۲b}{۴} = \frac{a_۱+b}{۲}$$

یعنی رابطه‌های a_n و b_n ، برای $n=۱$ درستند.

۲) اکنون فرض می‌کنیم، رابطه‌های a_n و b_n برای $n=k$ درست باشند. در این صورت خواهیم داشت :

$$a_{k+۱} = \frac{۱}{۲}(a_k + b_k) = \frac{۱}{۲}\left[a + \frac{۲}{۳}(b-a)(۱-\frac{۱}{۴^k}) + a + \frac{۲}{۳}(b-a)(۱+\frac{۱}{۲\times ۴^k})\right] =$$
$$= \frac{۱}{۲}\left[۲a + \frac{۲}{۳}(b-a)(۱-\frac{۱}{۴^k}) + ۱ + \frac{۲}{۴^{k+۱}}\right] =$$
$$= a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(\frac{۲\times ۴^{k+۱}-۲}{۴^{k+۱}}\right) = a + \frac{۲}{۳}(b-a)\left(۱-\frac{۱}{۴^{k+۱}}\right)$$

و به همین ترتیب، برای $b_{k+۱}$.

یادداشتی دربارهٔ دنبالهٔ عددی فیبوناچی. چند جملهٔ نخستین از دنبالهٔ فیبوناچی چنین است :

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ...

فیبوناچی، ریاضیدان ایتالیایی سدهٔ دوازدهم و آغاز سدهٔ سیزدهم میلادی، اهل پیزا و معروف به لئوناردوی پیزایی، این مسأله را، برای بررسی، روبه‌روی خود گذاشت :

«یک جفت خرگوش، در هر ماه، دو بچه (یکی نر و دیگری ماده) می‌آورند. در ضمن بچه‌ها می‌توانند در دو ماهگی، نخستین بچه‌های خود را به دنیا آورند. اگر در آغاز سال، دو بچهٔ خرگوش تازه به‌دنیا آمده داشته باشیم، در پایان سال، چند خرگوش خواهیم داشت؟»

از شرطهای مسأله، نتیجه می‌شود، بعد از یک ماه، همان یک جفت خرگوش را داریم. در آخر ماه دوم دو جفت. در آخر ماه سوم، همان جفت خرگوشهای اول بچه می‌آورند، و در نتیجه، ۳ جفت خرگوش داریم. یک ماه بعد، یعنی در پایان ماه چهارم، هم خرگوشهای اصلی و هم آنها که دو ماه بعد به دنیا آمده‌اند، دارای بچه می‌شوند و روی هم، صاحب ۵ جفت خرگوش خواهیم شد و غیره.

اگر تعداد جفت خرگوشهایی که بعد از گذشت n ماه از آغاز سال وجود دارد، با $f(n)$ نشان دهیم، در پایان ماه $(n+۱)$ام، باید به $f(n)$، تعداد جفت خرگوشهایی که در پایان ماه $(n-۱)$ام، اضافه کنیم، به زبان دیگر، این دستور برگشتی به دست می‌آید :

$$f(n+۱)=f(n)+f(n-۱)$$

این دستور برگشتی، همراه با شرطهای $f(۰)=۱$ و $f(۱)=۱$، همان دنبالهٔ عددهای فیبوناچی را می‌سازند.

همهٔ رابطه‌های مسأله‌های از ۲۴ تا ۲۹، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شوند.

۲۴. سمت چپ برابری را $u(n)$ و سمت راست آن را $f(n)$ می‌نامیم.

۱) درستی $u(۱)=f(۱)$، با آزمایش روشن می‌شود :

$$u(۱)=a_۴=۵\ ;\ \ f(۱)=a_۱+a_۳+۱=۱+۳+۱=۵$$

۲) باید ثابت کنیم : $u(n)-u(n-۱)=f(n)-f(n-۱)$. داریم :

$$u(n)-u(n-۱)=a_{۲n+۲}-a_{۲n}=a_{۲n+۱}$$

(از شرط مسأله، یعنی $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$ استفاده کردیم). سپس :

$$f(n)-f(n-1)=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n+1}+1)-(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+1)$$
$$=a_{2n+1}$$

۲۵. ۱) درستی برابری، برای $n=1$ روشن است.

۲) فرض می‌کنیم : $a_k^2-a_{k-1}.a_{k+1}=(-1)^k$. در این صورت :

$$a_{k+1}^2-a_k.a_{k+2}=a_{k+1}^2-a_k(a_{k+1}+a_k)=a_{k+1}(a_{k+1}-a_k)-a_k^2$$
$$=a_{k+1}.a_{k-1}-a_k^2=-(a_k^2-a_{k-1}.a_{k+1})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$$

۲۶. سمت چپ برابری را $u(n)$ و سمت راست آن را $f(n)$ می‌نامیم.

۱) درستی $u(1)=f(1)$ روشن است.

۲) ثابت می‌کنیم : $f(n)-f(n-1)=u(n)-u(n-1)$. داریم :

$$u(n)-u(n-1)=a_{n+2}-a_{n+1}=a_n\ ,$$
$$f(n)-f(n-1)=(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n+1)-(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+1)=a_n$$

۲۷. شبیه تمرین قبل عمل می‌کنیم.

۱) حالت $n=1$ منجر به $a_3=1+a_2$ می‌شود که درست است.

۲) داریم :

$$u(n)-u(n-1)=a_{2n+1}-a_{2n-1}=a_{2n}\ ,$$
$$f(n)-f(n-1)=(1+a_0+\cdots+a_{2n})-(1+a_0+\cdots+a_{2n-2})=a_{2n}$$

۲۸. ۱) برای $n=1$ به دست می‌آید :

$$a_{n+9}=a_{10}=55\ ;\ a_{n-1}a_8+a_na_9=1\times 21+1\times 34=55$$

۲) فرض می‌کنیم، برابری برای $n=k$ درست باشد. در این صورت :

$$a_{k+10}=a_{k+9}+a_{k+8}=(a_{k-1}a_8+a_ka_9)+(a_{k-2}a_8+a_{k-1}a_9)$$
$$=(a_{k-1}+a_{k-2})a_8+(a_k+a_{k-1})a_9=a_ka_8+a_{k+1}a_9$$

۲۹. سمت چپ برابری را $u(n)$ و سمت راست آن را $f(n)$ می‌نامیم.

۱) برای $n=1$ به دست می‌آید : $a_1a_2=a_0^2+a_1^2$ که منجر به برابری روشن $1\times 2=1^2+1^2$ می‌شود.

۲) بترتیب داریم :

$$u(n)-u(n-۱)=a_n a_{n+۱}-a_{n-۱}a_n=a_n(a_{n+۱}-a_{n-۱})=(a_n)^۲ \ ,$$

$$f(n)-f(n-۱)=(a_۰^۲+a_۱^۲+\cdots+a_n^۲)-(a_۰^۲+\cdots+a_{n-۱}^۲)=(a_n)^۲$$

۳۰. ۱) به‌ازای n=۲ داریم :

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱۴}{۲۴}>\frac{۱۳}{۲۴}$$

۲) فرض می کنیم، نابرابری برای n=k برقرار باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$A(k)=\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲k}>\frac{۱۳}{۲۴}$$

در این صورت :

$$A(k+۱)=\frac{۱}{k+۲}+\frac{۱}{k+۳}+\cdots+\frac{۱}{۲k}+\frac{۱}{۲k+۱}+\frac{۱}{۲k+۲}$$

$$=A(k)+\frac{۱}{۲k+۱}+\frac{۱}{۲(k+۱)}-\frac{۱}{k+۱}$$

$$=A(k)+\frac{۱}{۲(k+۱)(۲k+۱)}>A(k)>\frac{۱۳}{۲۴}$$

۳۱. سمت چپ نابرابری را u(n) و سمت راست آن را f(n) می‌نامیم. ثابت می کنیم : $u(۱)>f(۱)$ و $u(n)-u(n-۱)>f(n)-f(n-۱)$.

۱) $u(۱)>f(۱)$ منجر به $۱>\frac{۱}{۲}$ می‌شود که روشن است.

۲) داریم :

$$f(n)-f(n-۱)=\frac{n}{۲}-\frac{n-۱}{۲}=\frac{۱}{۲},$$

$$u(n)-u(n-۱)=\left(۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}-۱}+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\frac{۱}{۲^{n-۱}+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲^n-۱}\right)-$$

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}-۱}\right)=\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\frac{۱}{۲^{n-۱}+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲^n-۱}$$

روشن است که $۲^n=۲\times۲^{n-۱}$. بنابراین، از $۲^{n-۱}$ تا $۲^n-۱$، به تعداد $۲^{n-۱}$ عدد وجود دارد.

از طرف دیگر، همهٔ کسرهای $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ ،...، $\frac{۱}{۲^n-۱}$ از کسر $\frac{۱}{۲^n}$ بزرگترند. بنابراین :

$$u(n)-u(n-۱)>\frac{۱}{۲^n}+\frac{۱}{۲^n}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}=\frac{۲^{n-۱}}{۲^n}=\frac{۱}{۲}$$

می‌بینیم که نابرابری $u(n)-u(n-۱)>f(n)-f(n-۱)$ برقرار است.

۳۲. ۱) برای $n=1$ به‌دست می‌آید $|\sin x| \le |\sin x|$ که درست است. برای $n=2$ هم آزمایش می‌کنیم (تا گمان نرود که ممکن است همیشه علامت برابری برقرار باشد). سمت چپ نابرابری به‌ازای $n=2$، چنین است:

$$|\sin 2x| = |2\sin x\cos x| = 2|\sin x|.|\cos x|$$

بنابراین، نابرابری به این‌صورت درمی‌آید:

$$2|\sin x|.|\cos x| \le 2|\sin x| \Rightarrow |\cos x| \le 1$$

که درستی آن روشن است.

۲) فرض می‌کنیم نابرابری به‌ازای $n=k$ برقرار باشد؛ در این‌صورت:

$$|\sin(k+1)x| = |\sin kx\cos x + \cos kx\sin x| \le |\sin kx\cos x| + |\cos kx\sin x|$$

$$\le |\sin kx| + |\sin x| \le k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|$$

۳۳. این نابرابری، رفتار عجیبی دارد، آزمایش کنیم:

$$n=0 \Rightarrow 1>0 \quad \left(2^n > n^2\right);$$

$$n=1 \Rightarrow 2>1 \quad \left(2^n > n^2\right);$$

$$n=2 \Rightarrow 2^2 = 2^2 \quad \left(2^n = n^2\right);$$

$$n=3 \Rightarrow 2^3 < 3^2 \quad \left(2^n < n^2\right);$$

$$n=4 \Rightarrow 2^4 = 4^2 \quad \left(2^n = n^2\right);$$

$$n=5 \Rightarrow 2^5 > 5^2 \quad \left(2^n > n^2\right)$$

از این جا به بعد، یعنی برای $n \ge 5$، درستی نابرابری تأیید می‌شود.

برای اثبات، $u(n) = 2^n$ و $f(n) = n^2$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$u(n) - u(n-1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1},$$
$$f(n) - f(n-1) = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

بنابراین، باید ثابت کنیم، نابرابری $2^{n-1} > 2n-1$، به‌ازای $n \ge 5$ برقرار است.

$u'(x) = 2^{n-1}$ و $2n-1 = f'(n)$ فرض می‌کنیم:

۱) $u'(5) = 16$، $f'(5) = 9$، پس $u'(5) > f'(5)$.

۲) داریم:

$$u'(n) - u'(n-1) = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2},$$

$$f'(n) - f'(n-1) = (2n-1) - (2n-3) = 2$$

و نابرابری $2^{n-2} > 2$ برای هر عدد طبیعی $n \geq 5$ برقرار است.

۳۴. $A(n) = 4^n + 15^{n-1}$ می‌گیریم.

۱) $A(1) = 18$ و بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲) فرض می‌کنیم $A(k) = 4^k + 15k - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد. در این‌صورت :

$$A(k+1) = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k - 2)$$

چون بنا بر فرض استقرا $A(k)$ بر ۹ بخش‌پذیر است، درضمن $9(5k-2)$ هم مضربی است از ۹، پس $A(k+1)$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳۵. $10^n - 9n - 28 = f(n)$ فرض می‌کنیم.

۱) $f(0) = f(1) = -27$ که بر ۲۷ بخش‌پذیر است.

۲) فرض می‌کنیم $f(k) = 10^k - 9k - 28$ مضربی از ۲۷ باشد. در این‌صورت :

$$f(k+1) = 10^{k+1} - 9(k+1) - 28 = 10(10^k - 9k - 28) + 81(k+3)$$

که بخش‌پذیر بودن آن، بر ۲۷ روشن است.

۳۶. $9^{n+1} - 8n - 9 = f(n)$ می‌گیریم.

۱) $f(1) = 64$ مضربی است از ۶۴.

۲) $f(k+1) - f(k)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$f(k+1) - f(k) = \left(9^{k+2} - 8(k+1) - 9\right) - \left(9^{k+1} - 8k - 9\right)$$

$$= 9^{k+2} - 9^{k+1} - 8 = 9^{k+1}(9-1) - 8 = 8\left(9^{k+1} - 1\right)$$

$$= 8(9-1)(9^k + 9^{k-1} + \cdots + 9 + 1) = 64M$$

یعنی اگر $f(k)$ مضربی از ۶۴ باشد، $f(k+1)$ هم مضربی است از ۶۴.

۳۷. ۱) اگر عبارت را $f(n)$ بنامیم، داریم : $f(1) = 14$ ، که بر ۱۴ بخش‌پذیر است.

۲) داریم :

$$f(k+1) - f(k) = 2^{3k+3} - 2^{3k} = 2^{3k}(2^3 - 1) = 7 \times 2^{3k}$$

2^{3k} عددی است زوج، بنابراین 7×2^{3k} بر ۱۴ بخش‌پذیر است. به این ترتیب اگر $f(k)$ بر ۱۴ بخش‌پذیر باشد، $f(k+1)$ هم بر ۱۴ بخش‌پذیر است.

۳۸. $A(n) = 3^{2n+1} + 40n - 67$ فرض می‌کنیم.

۱) $A(0) = -64$ و $A(1) = 0$ بر ۶۴ بخش‌پذیرند.

۲) $A(k)$ را مضربی از ۶۴ می‌گیریم و $A(k+1)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$A(k+1) = 3^{2k+3} + 40(k+1) - 67 = 9\left(3^{2k+1} + 40k - 67\right) - 320k + 576$$

$$= 9A(k) - 64(5k - 9) = 64\lambda \quad (\lambda \in N)$$

۳۹. سه عدد طبیعی پشت سر هم را $n-1$ ، n و $n+1$ می‌گیریم. باید ثابت کنیم:

$$f(n)=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)$$

بر ۹ بخش‌پذیر است؛ یعنی باید $\varphi(n)=n(n^2+2)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. ۱) $\varphi(1)=3$.

۲) داریم:

$$\varphi(k+1)-\varphi(k)=(k+1)\left[(k+1)^2+2\right]-k(k^2+2)=3(k^2+k+1)$$

۴۰. با فرض $f(n)=n^5-5n^3+4n$ ، داریم:

۱) $f(0)=f(1)=f(2)=0$ و $f(3)=120$.

۲) فرض می‌کنیم $f(k)$ مضربی از ۱۲۰ باشد، در این صورت:

$$f(k+1)=(k+1)^5-5(k+1)^3+4(k+1)$$

$$=(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)-5(k^3+3k^2+3k+1)+4(k+1)$$

$$=(k^5-5k^3+4k)+5k(k^3+2k^2-k-2)$$

$$=f(k)+5(k-1)k(k+1)(k+2)$$

حاصل‌ضرب ۴ عدد پشت سرهم $k-1$ ، k ، $k+1$ و $k+2$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است؛ زیرا از سه عدد متوالی، یکی بر ۳ و از بین چهار عدد متوالی، یکی بر ۲ و یکی دیگر بر ۴ بخش‌پذیر است. به این ترتیب، اگر $f(k)$ بر ۱۲۰ بخش‌پذیر باشد، $f(k+1)$ هم بر ۱۲۰ بخش‌پذیر خواهد بود.

۴۱. $A(n)=11^{n+2}+12^{2n+1}$ فرض می‌کنیم. ۱) $f(0)=133$.

۲) $f(k+1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(k+1)=11^{k+3}+12^{2k+3}=11\times11^{k+2}+144\times12^{2k+1}$$

$$=11\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)+133\times12^{2k+1}=11A(k)+133\times12^{2k+1}$$

یعنی اگر $A(k)$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر باشد، $A(k+1)$ هم مضربی از ۱۳۳ خواهد بود.

۴۲. عبارت مفروض را $f(n)$ می‌نامیم. ۱) $f(0)=17$.

۲) $f(k+1)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(k+1)=2^{5k+8}+5^{k+1}\times3^{k+3}=32\times2^{5k+3}+15\times5^k\times3^{k+2}$$

$$=15\left(2^{5k+3}+5^k\times3^{k+2}\right)+17\times2^{5k+3}=15f(k)+17\times2^{5k+3}$$

به این ترتیب، اگر $f(k)$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، $f(k+1)$ هم بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۴۳. عبارت مفروض را $A(n)$ می‌نامیم. ۱) $A(0)=11$.

۲) $A(k+1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A(k+1)=36\times6^{2k}+3\times3^{k+2}+3\times3^k=3A(k)+33\times6^{2k}$$

بنابراین، اگر $A(k)$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، $A(k+1)$ هم مضربی از ۱۱ خواهد بود.

یادداشت. $A(n)$، برای $n \geq 1$ بر ۶۶ بخش‌پذیر است.

۴۴ و ۴۵. شبیه مسأله‌های پیش حل می‌شوند.

۴۶. عبارت را $f(n)$ می‌نامیم. ۱) $f(0)=0$ و $f(1)=1053$

۲) $f(k+1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(k+1)=225\times 3^{2k+2}\times 5^{2k}-108\times 3^{3k+2}\times 2^{2k}=$$

$$=108f(k)+1053\times 15^{2n}$$

عبور از k به $k+1$، درستی حکم را ثابت می‌کند.

یادداشت. $f(n)$ را می‌توانستیم به‌صورت $9\left(15^{2n}-3^{3n}\times 2^{2n}\right)$ بنویسیم و سپس، ثابت کنیم مقدار داخل پرانتز، بر ۱۱۷ بخش‌پذیر است.

۴۷. عبارت را $A(n)$ می‌نامیم. ۱) $A(1)=24$.

۲) $A(k+1)$، بعد از انجام عملهای ساده، به این صورت درمی‌آید:

$$A(k+1)=A(k)+4(k+1)(k+2)(k+3)$$

حاصل ضرب سه عدد متوالی $k+1$، $k+2$ و $k+3$ بر ۶ بخش‌پذیر است (از دو عدد متوالی، یکی زوج و از سه عدد متوالی، یکی مضرب ۳ است). به این ترتیب، اگر $A(k)$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، $A(k+1)$ هم بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۴۸. عبارت را $f(n)$ می‌نامیم. ۱) $f(1)=0$ و $f(1)=24$.

۲) برای $f(k+1)$ به‌دست می‌آید:

$$f(k+1)=f(k)+2n(3n^2+1)(n^2+2)$$

اکنون باید ثابت کرد $n(3n^2+1)(n^2+2)$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است. اگر n عددی زوج باشد، n^2+2 هم عددی زوج و حاصل‌ضرب آنها بر ۴ بخش‌پذیر است. اگر n عددی فرد باشد، $3n^2+1$ بر ۴بخش‌پذیر است (زیرا باقیماندهٔ حاصل از تقسیم عدد فرد n^2 بر ۲ برابر ۱ و درنتیجه، باقیماندهٔ تقسیم $3n^2+1$ بر ۴برابر باقیماندهٔ تقسیم $3+1$ بر ۴، یعنی صفر می‌شود). بدین‌ترتیب حاصل‌ضرب ما در هر حال بر ۴ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر، اگر n مضربی از ۳ باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند و اگر n مضربی از ۳نباشد، باقیماندهٔ تقسیم n^2 بر ۳ برابر ۱ می‌شود (چرا؟) و بنابراین n^2+2 بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. حاصل‌ضرب ما بر ۴ و ۳، یعنی بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۴۹. عبارت را $f(n)$ می‌نامیم. ۱) داریم: $f(0)=7$ و $f(1)=21$.

۲) $f(n)$ را این‌طور می‌نویسیم:

$$f(n)=4^{2^n}+2^{2^n}+1=4^{2\times 2^{n-1}}+2^{2\times 2^{n-1}}+1=16^{2^{n-1}}+4^{2^{n-1}}+1$$

اکنون $f(n)-f(n-1)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(n)-f(n-1)=\left(16^{2^{n-1}}-2^{2^{n-1}}+1\right)-\left(4^{2^{n-1}}-2^{2^{n-1}}+1\right)$$

$$=16^{2^{n-1}}-2^{2^{n-1}}=(2+14)^{2^{n-1}}-2^{2^{n-1}}=14M$$

که در آن، M عددی است طبیعی. بنابراین $f(n)=f(n-1)+14M$ ؛ یعنی اگر $f(n-1)$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد، $f(n)$ هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

۵۰. $x_1^n+x_2^n+x_3^n=S_n$ می‌گیریم ؛ داریم :

$$S_0=x_1^0+x_2^0=x_3^0\ ,$$

$$S_1=x_1+x_2+x_3=0\ ,$$

$$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2p$$

دو طرف معادلهٔ درجه سوّم $x^3+px+q=0$ را در x^{n-3} ضرب می‌کنیم ؛ بدست می‌آید :

$$x^n+px^{n-2}+qx^{n-3}=0 \qquad (1)$$

x_1 ، x_2 و x_3 ، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوّم در معادلهٔ (۱) هم صدق می کنند :

$$\begin{cases} x_1^n+px_1^{n-2}+qx_1^{n-3}=0 \\ x_2^n+px_2^{n-2}+qx_2^{n-3}=0 \\ x_3^n+px_3^{n-2}+qx_3^{n-3}=0 \end{cases} \qquad (2)$$

از مجموع برابریهای دستگاه (۲) به‌دست می‌آید :

$$S_n=pS_{n-2}-qS_{n-3} \qquad (3)$$

به این ترتیب، S_n ، برحسب S_{n-2} و S_{n-3} بیان می‌شود (در این‌جا، عبور از $k-3$ و $k-2$ به k). از آن‌جا که مقدارهای S_0 ، S_1 و S_2 را برحسب p و q در اختیار داریم، بنابراین با توجه به گام استقرایی (۳)، S_n با عبارتی گویا برحسب p و qقابل بیان است.

برای حالت منفی بودن n هم می‌توان از همین رابطهٔ (۳)، به این صورت استفاده کرد :

$$S_{n-3}=-\frac{pS_{n-2}+S_n}{q} \qquad (4)$$

که به‌عنوان نمونه، به‌ازای $n=2$ و $n=1$، مقدارهای S_{-1} و S_{-2} به‌دست می‌آید :

$$S_{-۱} = -\frac{pS_۰ + S_۲}{q} \quad , \quad S_{-۲} = -\frac{pS_{-۱} + S_۱}{q}$$

برخی از مقدارهای S_n را در این‌جا آورده‌ایم :

$$S_۳ = -pS_۱ - qS_۰ = -p \times ۰ - q \times ۳ = -۳q \; ,$$

$$S_۴ = -pS_۲ - qS_۱ = -p \times -۲p - q \times ۰ = ۲p^۲ \; ,$$

$$S_{-۱} = -\frac{p \times ۳ - ۲p}{q} = -\frac{p}{q} \; ,$$

$$S_{-۲} = -\frac{p \times -\frac{p}{q} + ۰}{q} = \frac{p^۲}{q^۲} \; ,\ldots$$

۵۱. $y = x + \frac{۱}{x}$ می‌گیریم. با مجذور کردن دو طرف این برابری، به‌دست می‌آید :

$$x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = y^۲ - ۲$$

بنابراین، حکم مسأله برای n=۱ و n=۲ درست است. اکنون می‌نویسیم :

$$x^n + \frac{۱}{x^n} = \left(x^{n-۱} + \frac{۱}{x^{n-۱}}\right)\left(x + \frac{۱}{x}\right) - \left(x^{n-۲} + \frac{۱}{x^{n-۲}}\right)$$

که با فرض $S_n = x^n + \frac{۱}{x^n}$ به‌دست می‌آید :

$$S_n = S_۱ \cdot S_{n-۱} - S_{n-۲} \qquad (۱)$$

اگر n عددی زوج باشد، $n-۱$ فرد و $n-۲$ زوج می‌شود. بنابراین، اگر $S_{n-۱}$ از درجهٔ $n-۱$ و تنها با توانهای فرد، و $S_{n-۲}$ نسبت به y از درجهٔ $n-۲$ و تنها با توانهای زوج باشد، آن‌وقت S_n نسبت به y از درجهٔ n و تنها با توانهای زوج است.

به همین ترتیب، می‌توان برای حالت فرد بودن n استدلال کرد.

برابری (۱)، که رابطهٔ بازگشتی است و محاسبهٔ S_n را، منجر به محاسبهٔ $S_{n-۱}$ و $S_{n-۲}$ می‌کند. مثال :

$$S_۳ = S_۱ \cdot S_۲ - S_۱ = y(y^۲ - ۲) - y = y^۳ - ۳y$$

$$S_۴ = S_۱ \cdot S_۳ - S_۲ = y(y^۳ - ۳y) - (y^۲ - ۲) = y^۴ - ۴y^۲ + ۲$$

۵۲. از برابری $a_n + b_n\sqrt{۳} = (۲+\sqrt{۳})^n$، به‌ازای n=۱ به‌دست می‌آید :

$$a_۱ = ۲ \;,\; b_۱ = ۱$$

که در برابری $a_۱^۲ - ۳b_۱^۲ = ۱$ صدق می‌کند.

اکنون فرض می‌کنیم $a_k^۲ - ۳b_k^۲ = ۱$ و ثابت می‌کنیم، در این‌صورت :

$$a_{k+۱}^۲ - ۳b_{k+۱}^۲ = ۱$$

بنا به فرض مسأله داریم :

$$(۲+\sqrt{۳})^{k+۱} = a_{k+۱} + b_{k+۱}\sqrt{۳}$$

یا :

$$(a_k + b_k\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) = a_{k+۱} + b_{k+۱}\sqrt{۳}$$

از آن جا به‌دست می‌آید :

$$a_{k+۱} = ۲a_k + ۳b_k \ , \ \ b_{k+۱} = a_k + ۲b_k$$

و بنابراین :

$$a_{k+۱}^۲ - ۳b_{k+۱}^۲ = (۲a_k + ۳b_k)^۲ - ۳(a_k + ۲b_k)^۲ = a_k^۲ - ۳b_k^۲ = ۱$$

۱.۵۳ ۱) برای n=۱ به‌دست می‌آید :

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۱۲} > ۱$$

۲) فرض می‌کنیم، نابرابری برای n=k برقرار باشد ؛ یعنی :

$$S_k = \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k+۲} + \cdots + \frac{۱}{۳k+۱} > ۱$$

در این‌صورت :

$$S_{k+۱} = \frac{۱}{k+۲} + \frac{۱}{k+۳} + \cdots + \frac{۱}{۳k+۴}$$
$$= S_k + \frac{۱}{۳k+۲} + \frac{۱}{۳k+۳} + \frac{۱}{۳k+۴} - \frac{۱}{k+۱}$$
$$= S_k + \frac{۲}{۳(k+۱)(۳k+۲)(۳k+۴)} > ۱$$

با فرض $S_k > ۱$، به‌دست آمد $S_{k+۱} > ۱$. حکم با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۱.۵۴ ۱) به‌ازای n=۱ و n=۲ نابرابری برقرار است :

$$n=۱:\ ۲^۰(a+b) = a+b \ ,$$
$$n=۲:\ ۲(a^۲+b^۲) \ge (a+b)^۲ \Rightarrow (a-b)^۲ \ge ۰$$

۲) فرض می‌کنیم، نابرابری به‌ازای n=k برقرار باشد :

$$۲^{k-۱}(a^k + b^k) \ge (a+b)^k \qquad (۱)$$

ثابت می‌کنیم، در این صورت :

$$۲^k(a^{k+۱} + b^{k+۱}) \ge (a+b)^{k+۱} \qquad (۲)$$

دو طرف نابرابری (۱) را در مقدار مثبت a+b ضرب می‌کنیم :

$$(a+b)^{k+1} \leq 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$$

$$=2^k \times \frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2}$$

اگر بتوانیم درستی نابرابری

$$\frac{a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1}}{2} \leq a^{k+1}+b^{k+1} \qquad (3)$$

را ثابت کنیم، به معنای آن است که نابرابری (۲) را ثابت کرده‌ایم. نابرابری (۳) را به این صورت می‌نویسیم :

$$\left(a^{k+1}+b^{k+1}\right)-\frac{a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1}}{2}=\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{2} \geq 0$$

و این نابرابری درست است ؛ زیرا برای a و b مثبت، تفاضلهای $a-b$ و a^k-b^k هم‌علامتند.

۵۵. الف) **پاسخ.** $f^{(n)}(x)=\cos(\frac{n\pi}{2}+x)$ ؛

ب) **پاسخ.** $f^{(n)}(x)=(-1)^n.\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$ ؛

ج) ضابطهٔ تابع را می‌توان این‌طور نوشت :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\frac{a}{c}(x+\frac{d}{c})+\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

$$=\frac{a}{c}+\left(\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}\right).\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$$

به این دلیل توانستیم، صورت و مخرج کسر را بر c تقسیم کنیم که c مخالف صفر است.
درحالت صفر بودن عدد c، مشتق مرتبهٔ nام، برای n>1، برابر صفر می‌شود.

پاسخ. $f^{(n)}(x)=(-1)^n.\frac{bc-ad}{c^2}.\frac{n!}{(x+\frac{d}{c})^{n+1}}$ ؛

د) **راهنمایی.** f(x) را به این صورت بنویسید :

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

پاسخ. $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2a}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+a)^{n+1}}\right]$.

۵۶. فرض می‌کنیم :

$$P_n = ۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۴^{\frac{۱}{۴}} \times \cdots \times \left(۲^n\right)^{\frac{۱}{۲^n}}$$

و حد P_n را، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، P می‌نامیم.

جملهٔ عمومی ضرب را می توان به‌صورت $۲^{\frac{n}{۲^n}}$ نوشت ؛ در این‌صورت :

$$P_n = ۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۲}{۴}} \times ۲^{\frac{۳}{۸}} \times ۲^{\frac{۴}{۱۶}} \times \cdots \times ۲^{\frac{n}{۲^n}} = ۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}+\cdots+\frac{n}{۲^n}}$$

مجموعی را که در توان ۲ وجود دارد، محاسبه می‌کنیم. اگر این مجموع را s_n بنامیم، بترتیب داریم :

$$s_۱ = \frac{۱}{۲} = ۲ - \frac{۳}{۲} = ۲ - \frac{۱+۲}{۲},$$

$$s_۲ = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} = ۱ = ۲ - \frac{۲+۲}{۲^۲},$$

$$s_۳ = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} = \frac{۱۱}{۸} = ۲ - \frac{۵}{۸} = ۲ - \frac{۳+۲}{۲^۳}$$

بنابراین، به احتمالی، باید داشته باشیم : $s_n = ۲ - \frac{n+۲}{۲n}$.

فرض می‌کنیم $s_k = ۲ - \frac{k+۲}{۲k}$ ؛ در این‌صورت داریم :

$$s_{k+۱} = s_k + \frac{k+۱}{۲k+۱} = ۲ - \frac{k+۲}{۲k} + \frac{k+۱}{۲k+۱}$$

$$= ۲ - \frac{۲k+۴-k-۱}{۲^{k+۱}} = ۲ - \frac{(k+۱)+۲}{۲^{k+۱}}$$

به این ترتیب به‌دست می‌آید :

$$P_n = ۲^{۲-\frac{n+۲}{۲^n}}$$

و از آن‌جا : $P = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} P_n = ۲^۲ = ۴$.

۵۷. ۱) به‌ازای n=۱، داریم $A_۱ = ۲$. درضمن، می‌دانیم یک صفحه، فضا را به دو بخش تقسیم می‌کند. بنابراین، برابری $A_n = n(n-۱)+۲$ به‌ازای n=۱ درست است.

۲) در آغاز، یادآوری می‌کنیم، اگر nخط راست در یک صفحه واقع باشند و درضمن، از یک نقطه بگذرند ؛ به‌شرطی که هیچ دو خط راستی بر هم منطبق نباشند، صفحه را به ۲nبخش

تقسیم می‌کنند. اثبات این حکم ساده است. یک خط راست، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند. اکنون اگر فرض کنیم، k خط راست مختلف، که از یک نقطه گذشته‌اند، صفحه را به ۲k بخش تقسیم می‌کنند، روشن است که خط راست (k+۱)ام (که از نقطهٔ مشترک k خط راست قبلی می‌گذرد)، هریک از بخشهای دو زاویهٔ روبه‌رو را (که خط راست جدید از آنها عبور می‌کند)، به دو بخش تقسیم می‌کند و بنابراین، دو بخش جدید، به ۲kبخش قبلی اضافه می‌شود؛ یعنی تعداد بخشهای صفحه، برابر ۲k+۲ یا ۲(k+۱) می‌شود.

اکنون به مسألهٔ ۵۷ برمی‌گردیم. فرض می‌کنیم، k صفحه‌ای که از یک نقطه گذشته‌اند، فضا را به $A_k = k(k-۱)+۲$ بخش تقسیم کرده باشند. صفحهٔ (k+۱)ام را از نقطهٔ مشترک k صفحهٔ پیشین می‌گذرانیم. این صفحه، هریک از k صفحهٔدیگر را در یک خط راست قطع می‌کند و همهٔ این خطهای راست، از نقطهٔ مشترک همهٔ صفحه‌ها می‌گذرند. بنابراین، روی صفحهٔ (k+۱)ام، k خط راست پدید می‌آید که همهٔ آنها از یک نقطه گذشته‌اند و بنابراین، صفحهٔ (k+۱)ام را، به ۲k بخش تقسیم می‌کنند. این بخشها، زاویه‌هایی روی صفحهٔ اخیر درست می‌کنند که رأسی مشترک دارند.

k صفحهٔ اوّل، فضا را به چند کُنج تقسیم کرده‌اند که برخی از آنها، به‌وسیلهٔ صفحهٔ (k+۱)ام، به دو بخش جداگانه تقسیم می‌شوند.

دو کُنج جدیدی که از یک کُنج قبلی به‌وجود می‌آیند، یک وجه مشترک دارند. این وجه، به دو نیم خطی محدود است که از برخورد صفحهٔ (k+۱)ام با کُنج تقسیم شده، به‌دست آمده‌اند. زاویهٔ بین این دو نیم خط راست، یکی از دو زاویه‌ای است که روی صفحهٔ (k+۱)ام ایجاد شده است. از همین جا می‌توان نتیجه گرفت، تعداد کُنجهایی که به‌وسیلهٔ صفحهٔ (k+۱)ام، به دو کُنج جدید تقسیم می‌شوند، نمی‌تواند از ۲k بیشتر باشد. ولی هریک از ۲k بخشی که در صفحهٔ (k+۱)ام پدید آمده است، یکی از وجه‌های مشترک دو کُنج جدید است. بنابراین، تعداد کُنجهایی که به‌وسیلهٔ صفحهٔ (k+۱)ام، به دو کُنج تبدیل می‌شوند، نمی‌تواند از ۲k کمتر باشد. به این ترتیب:

$$A_{k+۱} = A_k + ۲k = k(k-۱)+۲+۲k = (k+۱)k+۲$$

حکم مسأله، با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۵۸. در آغاز یادآوری کنیم: $i^۲ = (\sqrt{-۱})^۲ = -۱$.

۱) برابری برای n=۱ درست است ؛ زیرا :

$$(1+i)^1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

۲) فرض می‌کنیم، برابری برای n=k برقرار باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$(1+i)^k=2^{\frac{k}{2}}(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4})$$

در این صورت، خواهیم داشت :

$$(1+i)^{k+1}=(1+i)^k.(1+i)$$

$$=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right).2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2^{\frac{k+1}{2}}\left[\left(\cos\frac{k\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{k\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{k\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{k\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^{\frac{k+1}{2}}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

درستی برابری با گذر از k به k+۱ ثابت شد.

۵۹. ۱) درستی برابری، برای n=۱ روشن است.

۲) فرض می‌کنیم ، دستور مواور، برای n=k درست باشد ؛ در این صورت :

$$(\cos x+i\sin x)^{k+1}=(\cos x+i\sin x)^k.(\cos x+i\sin x)$$

$$=(\cos kx+i\sin kx)(\cos x+i\sin x)$$

$$=(\cos kx\cos x-\sin kx\sin x)+i(\sin kx\cos x+\cos kx\sin x)$$

$$=\cos(k+1)x+i\sin(k+1)x$$

یعنی، اگر برابری برای n=k درست باشد، برای n=k+۱ هم درست است. درستی دستور مواور ثابت شد.

یادداشت. اگر این برابریها را بدانیم :

$$i^2=-1\ ,\ i^3=-i\ ,\ i^4=1$$

و به‌طورکلی، برای $k\in N$

$$i^{4k}=1\ ,\ i^{4k+1}=i\ ,\ i^{4k+2}=-1\ ,\ i^{4k+3}=-i$$

آن‌وقت می‌توانیم از دستور مواور برای محاسبهٔ $\cos n\alpha$ و $\sin n\alpha$ استفاده کنیم. برای نمونه، $\cos 3\alpha$ و $\sin 3\alpha$ را به‌دست می‌آوریم. بنابر دستور مواور ، به‌ازای n=۳، داریم :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{3} = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

سمت چپ برابری را، با باز کردن پرانتز، محاسبه می‌کنیم :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{3} = \cos^{3}\alpha + 3i\sin\alpha\cos^{2}\alpha + 3i^{2}\sin^{2}\alpha\cos\alpha + i^{3}\sin^{3}\alpha$$

$$= \cos^{3}\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^{2}\alpha) + 3i\sin\alpha(1-\sin^{2}\alpha) - i\sin^{3}\alpha$$

$$= (4\cos^{3}\alpha - 3\cos\alpha) + i(-4\sin^{3}\alpha + 3\sin\alpha)$$

بنابراین، به این اتّحاد می‌رسیم :

$$(4\cos^{3}\alpha - 3\cos\alpha) + i(-4\sin^{3}\alpha + 3\sin\alpha) = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

دو عدد مختلط، وقتی با هم برابرند که بخش حقیقی و بخش موهومی آنها با هم برابر باشد. به این ترتیب به‌دست می‌آید :

$$\cos 3\alpha = 4\cos^{3}\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = -4\sin^{3}\alpha + 3\sin\alpha$$

۶۰. ۱) دستور بسط دوجمله‌ای، برای $n=1$، به برابری $a+b=a+b$ منجر می‌شود.

۲) فرض می‌کنیم دستور نیوتون برای $n=k$ درست باشد ؛ در این‌صورت :

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^{k}(a+b) = \left(a^{k} + C_{k}^{1}a^{k-1}b + \cdots + b^{k}\right)(a+b)$$

$$= a^{k+1} + (1+C_{k}^{1})a^{k}b + \left(C_{k}^{1} + C_{k}^{2}\right)a^{k-1}b^{2} + \cdots$$

$$+\left(C_{k}^{s} + C_{k}^{s+1}\right)a^{k-s}b^{s} + \cdots + b^{k+1}$$

که اگر از اتّحاد $C_{k}^{s} + C_{k}^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2} + \cdots$$

$$+C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s} + \cdots + b^{k+1}$$

اگر دستور نیوتون برای بسط دوجمله‌ای به‌ازای $n=k$ درست باشد، به‌ازای $n=k+1$ هم درست است. درستی دستور بسط دوجمله‌ای، به کمک روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۶۱. ۱) به‌ازای $n=2$، یعنی وقتی تنها با دو شهر سر و کار داشته باشیم، درستی حکم روشن است.

۲) فرض می‌کنیم، حکم مسأله برای کشوری که شامل k شهر است، درست باشد ؛ در این صورت برای کشور دارای (k+1) شهر هم درست است. فرض کنید، به همهٔ k شهر بتوان با ماشین سفر کرد. اگر از شهر (k+1)ام، به یکی از این k شهر، بتوان با ماشین رفت، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند ؛ ولی اگر از شهر (k+1)ام به هیچ کدام از k شهر دیگر نتوان با ماشین سفر کرد، به معنای آن است که شهر (k+1)ام با راه‌آهن به k شهر دیگر مربوط است و در این صورت، به k+1 شهر می‌توان با قطار سفر کرد. حکم با استقرای ریاضی ثابت شد.

معرفی کتابهای ریاضی
انتشارات مدرسه

- جبر پایه سال سوم دبیرستان / مؤلف : محمدهاشم رستمی
- جبر پایه سال چهارم دبیرستان / مؤلف : محمدهاشم رستمی
- دائرة المعارف مسائل هندسه ج ۱ / مؤلف : محمدهاشم رستمی
- آشنایی با ماتریسها / مؤلف : سیدحسین سیدموسوی
- هندسهٔ تحلیلی چندمحوری و چند رسالهٔ دیگر / مؤلف : دکتر احمد شرف‌الدین
- مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی / مترجم : غلامرضا یاسی‌پور
- هندسه‌های جدید / مترجم : غلامرضا یاسی‌پور
- بحث ریاضی با دانش‌آموز / مترجم : نعمت عبادیان
- معادله و نامعادله / مترجم : پرویز شهریاری
- بازآموزی و بازشناخت هندسه / مترجم : عبدالحسین مصحفی
- هندسه دلپذیر / مؤلف : دکتر احمد شرف‌الدین
- اصول فرا گیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی/ مؤلف : دکتر محمد جهانشاهی
- رام کردن و پرورش مسأله های ریاضی/ مؤلف :عبدالحسین مصحفی
- مبانی ریاضیّات / حمید رضا امیری ـ یدالله ایلخانی پور

- روشهایی از جبر / حمیدرضا امیری
- حد و مفهوم حد / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- مجانبها و رسم منحنی / احمد قندهاری
- بخش‌پذیری در جبر / پرویز شهریاری
- تعیین دامنه و بُرد توابع به روش حل مسأله / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- قدر مطلق / پرویز شهریاری
- پیوستگی و مشتق‌پذیری / احمد قندهاری
- آنالیز ترکیبی و بسط دوجمله‌ای / پرویز شهریاری
- نظریّهٔ گراف / حسین ابراهیم زاده قُلزم
- توان و رادیکال/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- تابع / احمد قندهاری ــ حمیدرضا امیری
- ورودی به نظریه احتمال / عین‌الله پاشا
- دنباله‌ها و سریها / احمد قندهاری
- معادله‌ها و عبارتهای جبری / علی حسن‌زاده ماکویی
- مثلثات / احمد فیروزنیا

ناشر برگزیده
سالهای ۷۳، ۷۵
۷۹

کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه

- آنالیز ترکیبی و بسط دوجمله ای/ پرویز شهریاری
- انتگرال معین و کاربردهای آن/ محمد عابدی
- بخش پذیری در جبر/ پرویز شهریاری
- بردارها/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- پیوستگی و مشتق پذیری/ احمد قندهاری
- تابع/ احمدقندهاری/ حمیدرضا امیری
- تقارن جبری و روش ضرایب نامعین/ پرویز شهریاری
- تعیین دامنه و برد توابع به روش حل مسأله/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- توان و رادیکال/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- حد و مفهوم حد/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- دنباله ها و سریها/ احمد قندهاری
- دیفرانسیل و انتگرال نامعین/ محمد عابدی
- روشهایی از جبر/ حمیدرضا امیری
- عبارتها و معادله های جبری/علی حسن زاده ماکویی
- قدر مطلق/ پرویز شهریاری
- مبانی ریاضیات/ حمیدرضا امیری/ یدالله ایلخانی پور
- مثلثات/ احمد فیروزنیا
- مجانبها و رسم منحنی/ احمد قندهاری
- نابرابری ها و نامعادله ها/ میرشهرام صدر
- نظریهٔ گراف/ حسین ابراهیم زاده قلزم
- ورودی به نظریه احتمال/ عین الله پاشا
- ورودی به نظریهٔ اعداد/ حمیدرضا امیری
- ورودی به آمار/ دکتر عین الله پاشا
- هندسه تحلیلی/ محمد هاشم رستمی

هدف از انتشار این سری کتابها طرح دقیق و اساسی موضوعات مهم ریاضیات دبیرستانی و برطرف کردن کمبودهای احتمالی موجود در مباحث مختلف ریاضیات دبیرستانی است. در هر کتاب و به نسبت حجم مباحث، یک یا چند مبحث به طور مبسوط شرح و توضیح داده شده و مثالها و مسائل لازم در لابه لای مطالب آمده است. بیشتر این کتابها که مخاطبین آنها دانش آموزان دبیرستانی هستند، توسط نویسندگان مجرب و استادان ریاضی تألیف شده است. البته ممکن است یک یا چند مجلد از این کتابها ترجمه آثار برتر ریاضیات جهان باشد که در این صورت سعی شده است مباحث آن با نظام آموزشی ما منطبق باشد.

ISBN 964-353-369-7
9789643533694
۴۰۰۰ ریال - کد ۷۸۲۳/۳

انتشارات مدرسه