وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

ربرت جی بارتل

اصول آنالیز حقیقی

ترجمهٔ جعفر زعفرانی

اصول آنالیز حقیقی

ربرت جی بارتل

ترجمهٔ جعفر زعفرانی

مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان **صفحه**

عنوان	صفحه

پیشگفتار مؤلف

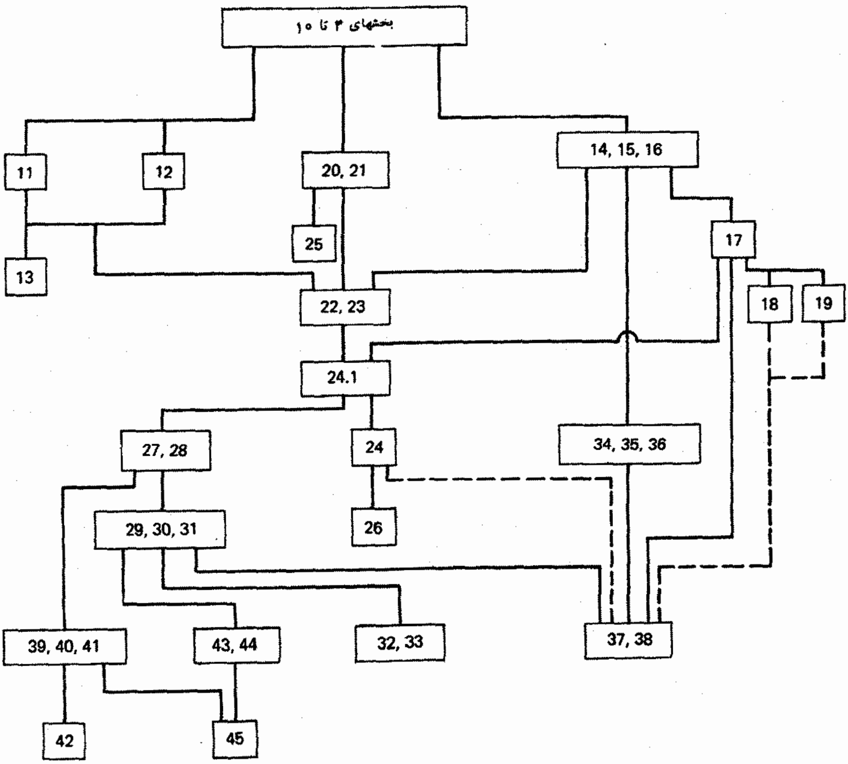
زمانی ازدانشجوی دورهٔ لیسانس ریاضی‌این انتظار می‌رفت که در حل مسائلی که مستلزم محاسبات‌زیادی‌هستند مهارت داشته‌باشد. ولـی ازاوتوقع نداشتیم که به«ریزه‌کاریهای نظری» مانند همگرایی یکنواخت یا پیوستگی یکنواخت مسلط باشد. او بایستی‌می‌توانست از قضیهٔ تابع ضمنی بدون آگاهی ازمفروضات آن، استفاده‌کند. امروزه این وضعیت تغییر یافته و درك اساس نظری مطلب برای تمام دانشجویان ریاضیات عالـی ــ ریاضیدانان آینده، متخصصین علوم کامپیوتر، فیزیکدانها، مهندسین و اقتصاددانان ــ اهمیت ویژه‌ای دارد. باآشنایی به‌اساس نظری، هم‌قدرت و هم‌محدودیت نظریهٔ کلی بهتر درك خواهدشد.

این کتاب حاصل تجربه‌ای است که ازتدریس آنالیز حقیقی در دانشگاه ایلینوی از ۱۹۵۵ تاکنون به‌دست آورده‌ام. کلاس درسم اغلب از دانشجویان سطوح مختلف تحصیلی ــ از دانشجویان ممتاز سال اول تا دانشجویان فوق لیسانس ــ تشکیل می‌شود. رشتهٔ اصلی بیشتر آنهاریاضی نیست ولی حداقل دروسی معادل سه‌نیمسال حساب دیفرانسیل و انتگرال (نه‌چندان دقیق) شامل مشتقهای جـزئی، انتگرالهای چندگانه، انتگـرالهای روی خم، و سریهای بی‌پایان گذرانـده انـد. ازآنجایی کـه دراین‌درس قضایای تحلیلی‌ثابت‌شده‌اند، شایسته است دانشجویـان نیمسالی جبر یا جبرخطی خـوانده باشند. ولی چون بسیاری از دانشجویان‌کـه با آنها مواجهم این پایهٔ علمی را ندارند، مطالعهٔ آنالیز را با چند اثبات جبری برای به‌حرکت درآوردن آنها دراین راه، آغاز می‌کنم.

دراین چاپ خواص جبری وترتیبی دستگاه اعـداد حقیقی را دربخشهای ۴ و ۵ با روشی ساده‌تر ازچاپ اول معرفی کرده‌ام. علاوه براین، تعریفهای فضای برداری و فضای نرم دار در بخش ۸ ارائه شده‌اند، چرا که در ریاضیات جدید این مفاهیم بدفعات ظاهر می‌شوند. همچنین به‌منظور این‌که مطالب ساده‌تر به‌دست آیند وبرای تدریس،کتاب بیشتر انعطاف‌پذیر باشد، چندین بخش کوتاه شده‌اند. با آنکه تمرینها و پروژه‌های جدیدی به کتاب افزوده‌ام کوشش شده‌است کتاب درهمان سطح چاپ اول باقی بماند. تنها تغییرهای بسیارکوچکی در قسمت اول کتاب داده شده است. با این حال چون تجربه نشان داده که

در چاپ اول بحث مشتق‌گیری و انتگرال گیری در $\mathbf{R}^p$ بیش از حد مختصر بوده است، نظریهٔ توابع یك متغیره را در یك فصل گسرد آورده، بررسی توابع چند متغیره را به‌نحو قابل توجهی توسعه داده‌ام.

در بخشهای ۱ تا ۳، اصطلاحهای نظریهٔ مجموعه‌ها ونمادهایی را که در کتاب به‌کار رفته‌اند عرضه می‌کنم و چند مفهوم اساسی را معرفی می‌نمایم. ولی، در این بخشها نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طور اصولی عرضه نمی‌شود (چنین بیانی دراین مرحله مورد نیاز و یا مطلوب نیست.) این بخشها باید به‌اختصار بررسی شوند و بعدها در صورت لزوم به‌آنها مراجعه شود. در واقع کتاب از بخش ۴ آغاز می‌شود و در بخش ۶ به«آنالیز» وارد می‌شویم. مطالب بخشهای ۴ تا ۱۲، ۱۴ تا ۱۷، ۲۰ تا ۲۴ــ۱، وبیشتر قسمتهای بخشهای ۲۷ تا ۳۱ را می‌توان در یك نیمسال تدریس کرد. من از امتیاز معلمی استفاده می‌کنم و به قیمت کاستن (یا حتی حذف) نتایج مختلفی که برای مطالب بعدی لازم نیست چند مبحث دیگر (نظیر سریها) را به‌اختصار معرفی می‌نمایم. چون مطالب تمام کتاب کمی بیش از آن



است که معمولاً دریك سال تدریس می‌شود استاد احتمالاً می‌تواند در بعضی از بخشها به اختصار بپردازد. به‌هرحال، داشتن مطالب اضافی جهت مراجعات آتی برای دانشجو مفید است. دراین کتاب بیشتر مباحثی که معمولاً در «حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته» گفته می‌شوند مطرح شده‌اند. استثنای اصلی مبحث انتگرال روی خم، انتگرال رویه وقضیهٔ استوکس است؛ این مباحث مطرح نشده‌اند. زیرا بحث شهودی آنها بحق جزو حساب دیفرانسیل و انتگرال است، و بحثی دقیق که مفید باشد، نسبتاً طولانی است.

بستگی منطقی بخشهای مختلف این کتاب به یکدیگر، با نمودار فوق نشان داده شده است. خط پیوسته در این نمودار نشانگر بستگی آن با بخش قبلی و خط نقطه چین نشانگر بستگی کمتری است. تمام تعاریف، قضایا، نتایج، لمها و غیره برطبق شمارهٔ بخش متوالیاً شماره‌گذاری شده‌اند و قضیه‌های مهمتر، هرگاه اسم مناسبی به‌نظر رسیده است، نامگذاری شده‌اند. برهانها در متن با واژهٔ **برهان** شروع وباعلامت □ ختم شده‌است.

هراندازه در اهمیت پروژه‌ها و تمرینها تأکید شود بجاست؛ فقط با تلاشی پیگیر و مجدانه درحل آنها برمطالب این کتاب می‌توان تسلط یافت. درپروژه‌ها طی سلسلهٔ مرتبطی از تمرینها مطالب ویژه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد. باور ما بر این است که اینها به دانشجویان حداقل مزه‌ای ازشیرینی (ورنجا) تحقیق در ریاضیات را می‌چشانند. امیدوارم تمام دانشجویان در حل بسیاری از این پروژه‌ها کوشش کنند، زیرا معتقدم که این پروژه‌ها یکی ازقسمتهای ارزشمند این کتاب را تشکیل می‌دهند.

در نوشتن این کتاب، از تجربه‌های کلاس درسم استفاده کرده‌ام و تحت تأثیر منابع بسیاری بوده‌ام. از بحث با دانشجویان و همکاران بهره گرفته‌ام و از چاپ اول تاکنون مکاتبات گسترده‌ای با دانشجویان و استادان دیگر مؤسسات آموزشی داشته‌ام. از تمام آنهایی که اظهار نظر و پیشنهادهایی داده‌اند تشکر می‌کنم. علاقهٔ آنها در اصلاح کتاب، مشوق من دراین تجدید نظر بوده است. استادان ك.و.آندرسون[1]، و.ج.بید[2] آ. ل. پرسینی[3] نسخهٔ خطی چاپ اول را خوانده‌اند و پیشنهادهای مفید ارائه نموده‌اند. بویژه از همکارم استاد ب. س. برندت[4] بخاطر اظهار نظرهای متعدد و تصحیحهای صریحش سپاسگزاری می‌کنم. همچنین از کارولین. ج. بلومکر[5] به‌خاطر شکیبایی و کار پرزحمت ماشین کردن نسخهٔ دست نویس سپاسگزارم. در پایان ازکمك و همکاری کارمندان مؤسسهٔ نشر وایلی قدردانی می‌نمایم.

ربرت جی. بارتل
۲۳ ژوئن ۱۹۷۵
اوربانا ــ شامپاین، ایلینوی

---

1. K. W. Anderson　2. W. G. Bade　3. A. L. Peressini
4. B. C. Berndt　5. Carolyn J. Bloemker

مقدمه

نگاهی اجمالی به نظریهٔ مجموعه‌ها

مفهوم مجموعه، بنیادهمهٔ ریاضیات است و کلیهٔ اشیاء وساختمانهای ریاضی نهایتاً به‌نظریهٔ مجموعه‌ها باز می‌گردند. به‌خاطر اهمیت اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها، دراینجا خلاصه‌ای از مفاهیم آن راکه مکرر دراین‌کتاب به‌کار می‌روند می‌آوریم. به هرحال، چون هدف این کتاب بیشتر ارائهٔ عناصر (و نه زیربناهای) آنالیز حقیقی است، یك دیدگاه نسبتاً عملی و ساده را می‌پذیریم. ما به یك بحث غیر صوری اکتفاکرده واژهٔ «مجموعه» را مترادف با واژه‌های «رده» ، «دسته» و «انبوه» می‌گیریم و هیچ کوششی در جهت تعریف این واژه‌ها و یا ارائهٔ فهرستی از اصول موضوع برای نظریهٔ مجموعه‌ها نخواهیم کرد. آن خوانندهٔ تیزبین‌که با روش غیر رسمی ما قانع نمی‌شود ، می‌تواند به‌کتب مرجع دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها که در پایان این‌کتاب آمده‌اند مراجعه نماید. در آنجا او می‌فهمد‌که چگونه پایه‌های این مطالب را می‌توان براصول موضوع بنا نهاد و درمی‌یابد‌که این روش‌اصول موضوعی یك پیشرفت جالب در بنیادهای ریاضی است. بااین حال، چون این موضوع به نظر ما خارج از بحث‌کتاب حاضر است در اینجا به‌جزئیات آن نخواهیم پرداخت.

به منظور آشنایی با نمادهایی‌که در این‌کتاب به‌کار خواهیم برد. مطالعهٔ سریع این مقدمه را به خواننده قویاً توصیه می‌کنیم. برخلاف فصلهای بعدی ،که باید دقیقاً مطالعه شوند، این مقدمه شامل مطالب زمینه‌ای بوده و نباید وقت زیادی صرف آن شود.

بخش ۱ جبر مجموعه‌ها

اگر A یك مجموعه و x یك عنصر باشد اغلب مناسب آن است که

$$x \in A$$

را علامت اختصاری عبارت x **عنصر** A است، یا x **عضو** مجموعهٔ A است، یا مجموعهٔ A **شامل** عنصر x است، و یـا اینکه x **در** A است ، بگیریم. ما بیش از این ماهیت خاصیت عنصر یك مجموعه بودن را بررسی نمی‌کنیم. برای بسیاری مقاصد می‌توان ازمفهوم سادهٔ «عضویت» استفاده‌کرد ومشخص‌کردن این رابطه به روش اصول موضوعی لازم نمی‌شود.

اگر A یك مجموعه و x عنصری باشد که به‌آن متعلق نیست، اغلب می‌نویسیم

$$x \notin A.$$

با توجه به‌ادراك طبیعی ما از مجموعه، برقراری تنها یکی از دو امکان

$$x \in A, \qquad x \notin A,$$

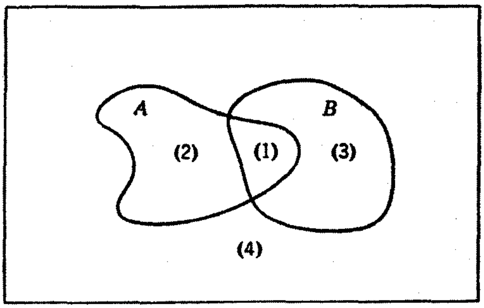
را برای عنصر x و مجموعهٔ A لازم می‌دانیم.

اگر A و B دو مجموعه باشند و x یك عنصر باشد، آنگاه اصولا ایـن چهار امکان وجود دارند (ر. ك. شکل ۱.۱) :

(۱) $x \in A, \quad x \in B;$ (۲) $x \in A, \quad x \notin B;$

(۳) $x \notin A, \quad x \in B;$ (۴) $x \notin A, \quad x \notin B.$

اگر حالت دوم رخ ندهد (یعنی هر گاه هرعنصر A عنصری از B نیز باشد)،آنگاه گوییم A



شکل ۱.۱

مشمول B است، یـا اینکه B **شامل** A است، یـا اینکه A **زیرمجموعهٔ** B است ، و آن را به صورت

$$A \subseteq B \qquad \text{یا} \qquad B \supseteq A$$

خواهیم‌نوشت. اگر $A \subseteq B$ وعنصری در B باشد که در A نباشدمی گوییم A **زیرمجموعهٔ سرهٔ** B است.

باید توجه داشت که عبارت $A \subseteq B$ امکان اینکه A تمام B را فراگیرد، ردنمی‌کند.

دراین‌صورت مجموعه‌های A و B را به‌مفهومی که‌اینك تعریف می کنیم «برابر» می گوییم.

۱۰۱ تعریف. دومجموعه **برابرند** هرگاه‌عناصرشان‌یکی‌باشند. چنانچه مجموعه‌های A و B برابر باشند، می‌نویسیم $A=B$.

لذا بـرای نشان دادن برابری مجموعه‌هـای A و B باید نشان دهیم که حالات (۲) و (۳) فوق نمی‌توانند رخ دهند. به‌عبارت دیگر، باید نشان داد که هم $A\subseteq B$ و هم $B\subseteq A$.

تعریف دقیق واژهٔ «خاصیت» آسان نیست. لیکن ما بدون هیچ تردیدی از آن طبق معمول (غیررسمی) استفاده می کنیم. اگر P نمایشگر خاصیتی باشد که به‌ازای دسته‌ای از عناصر معنی دارد، آنگاه قـرار می گذاریم مجموعهٔ کلیهٔ عنصرهـای x راکه ازخاصیت P برخوردارند به‌صورت

$$\{x : P(x)\}$$

بنویسیم. معمولا ایـن نماد را می‌خوانیم «مجموعهٔ تمام x ها به قسمی کـه $P(x)$». اغلب شایسته است مشخص شود که چه عناصری از نظر خاصیت P مورد توجه ما هستند. ازاین روست که غالباً مجموعهٔ S را مشخص کرده زیرمجموعهٔ S راکه عناصرش دارای خاصیت P هستند به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{x\in S : P(x)\}.$$

چند مثال. (الف) اگر $\mathbf{N}=\{۱،۲،۳، ...\}$ نمایشگرمجموعهٔ اعداد طبیعی باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$\{x\in\mathbf{N} : x^{۲}-۳x+۲=۰\}$$

از تمـام اعداد طبیعی کـه در معادلهٔ بالا صدق می کنند، تشکیل شده است. دراینجـا تنها جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{۲}-۳x+۲=۰$، اعداد $x=۱$ و $x=۲$ اند. بنابرایـن، معمولا به‌جای‌نوشتن‌عبارت بالا (چون درمورد همهٔ عناصرمجموعهٔ تحت بررسی اطلاعات مفصلی داریم) این مجموعه را به $\{۱,۲\}$ که عناصر مجموعه درآن نوشته شده‌اند، نمایش می‌دهیم.

(ب) گاه بـرای اختصار دربیان یـك مجموعه، از دستوری استفـاده می‌شود. مثلا مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی زوج‌را می‌توان به‌جای نمادطولانی $\{y\in\mathbf{N} : y=۲x، x\in\mathbf{N}\}$ با $\{۲x : x\in\mathbf{N}\}$ نشان داد.

(پ) مجموعهٔ $\{x\in\mathbf{N} : ۶<x<۹\}$ را می‌توان به‌صورت‌صریح $\{۷,۸\}$ نوشت و با عرضهٔ عناصر، مجموعه‌را نمایش داد. البته، برای‌این مجموعه‌نمایشهای بسیار دیگرنیز

وجود دارد. برای مثال:

$$\{x\in\mathbf{N} : ۴۰<x^۲<۸۰\},$$
$$\{x\in\mathbf{N} : x^۲-۱۵x+۵۶=۰\},$$
$$\{۷+x : x=۰ \quad \text{یا} \quad x=۱\}.$$

(ت) علاوه برمجموعهٔ **اعداد طبیعی** (یعنی مجموعهٔ عناصری که با ۱، ۲، ۳، ... نموده می‌شوند) کـه ما آن را معمولا به $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم، چند مجموعهٔ دیگـر راکـه نمادهای معینی دارند دراینجا می‌آوریم. مجموعهٔ **اعداد صحیح** را با

$$\mathbf{Z}=\{۰،۱،-۱،۲،-۲،۳،-۳،...\}$$

و مجموعهٔ **اعدادگویا** را با

$$\mathbf{Q}=\{m/n : m,n\in\mathbf{Z} \quad \text{و} \quad n\neq ۰\}$$

نمایش می‌دهیم. با مجموعه‌های $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ چنان برخورد می‌کنیم که گویی کاملا با آنها آشناییم و خواص آنها را به‌تفصیل زیاد بررسی مجدد نخواهیم کـرد. مجموعه‌ای که در مطالعات بعدی مـا اهمیت اساسی دارد مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ است که دربخشهای ۴ تا ۶ مـورد رسیدگی قـرار می‌گیرد. زیرمجموعهٔ خاصی از $\mathbf{R}$ کـه زیاد به‌کار گرفته خواهد شد، **فاصلهٔ یکه** است:

$$\mathbf{I}=\{x\in\mathbf{R} : ۰\leqslant x\leqslant ۱\}.$$

بالاخره، مجموعهٔ **اعداد مختلط** را به $\mathbf{C}$ نمایش می‌دهیم. تعریف $\mathbf{C}$ با توضیحی بیشتر و شرح مختصری از چند خاصیت آن دربخش ۱۳ ارائه خواهد شد.

اعمال درمجموعه‌ها

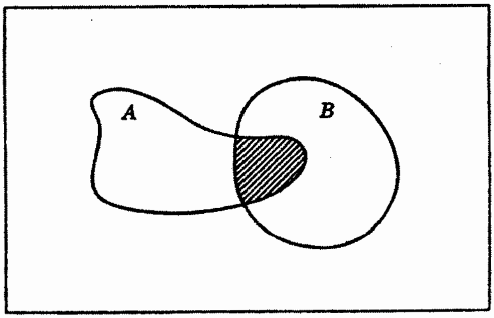
اکنون به‌معرفی چندروش ساختن مجموعه‌های جدید ازمجموعه‌های داده شده می‌پردازیم.

۲.۱ تعریف. هرگاه A و B دو مجموعه باشند، **مقطع** آنها مجموعهٔ تمام عناصری است که متعلق به‌هردو مجموعهٔ A و B اند. مقطع مجموعه‌های A و B را باعلامت $A\cap B$ نمایش داده آن را «A مقطع B» می‌خوانیم. (ر. ك. شکل ۲.۱.)

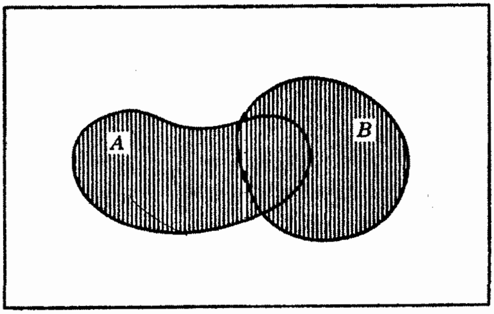
۳.۱ تعریف. هرگاه A و B دو مجموعه‌باشند، **اجتماع** آنها مجموعهٔ تمام عناصری است که یا به A یا به B و یا به هردوی A و B تعلق دارند. اجتماع مجموعه‌های A و B را با علامت $A\cup B$ نموده آن را «A اجتماع B» می‌خوانیم. (ر. ك. شکل ۲.۱.)

می‌توانستیم $A\cap B$ و $A\cup B$ را با

$$A\cap B=\{x : x\in A \quad \text{و} \quad x\in B\},$$



$A \cap B$



$A \cup B$

شکل ۲۰۱. مقطع و اتحاد دو مجموعه

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{یا} \quad x \in B\}$$

تعریف کنیم. در ارتباط با رابطهٔ دوم ، توجه به این مطلب مهم است که واژهٔ «یا» به معنی فراگیرش کــه در ریاضیات و منطق معمول می‌باشد به‌کار رفته است. در اصطلاح حقوقی گاهی این معنی فراگیر یا با «و/یا» نشان داده می‌شود.

به‌طور ضمنی فرض کــرده‌ایم کــه مقطع و اجتماع دو مجموعه نیز یك مجموعه است. این فرض نتایجی به وجود می‌آورد. از آن جمله این‌که باید مجموعه‌ای بدون عنصروجود داشته باشد (چراکه هرگاه A و B دارای عنصر مشترکی نباشند مقطع آنها هیچ عنصری نخواهد داشت).

۴۰۱ تعریف. مجموعه‌ای که هیچ عنصرندارد مجموعهٔ **تهی** و یا مجموعهٔ **خالی** نامیده می‌شود و با علامت $\varnothing$ نشان داده می‌شود. هرگاه A و B مجموعه‌هایی بدون عنصر مشترك باشند(یعنی‌هرگاه $A \cap B = \varnothing$) می‌گوییم A و B **مجزا** هستند یایکدیگررا **قطع نمی‌کنند.**

قضیهٔ بعدی چند خاصیت جبری اعمال برمجموعه‌ها را که هم اکنون تعریف کردیم

به‌دست می‌دهد. چون اثبات این احکام ساده است بیشتر آنها را به‌عنوان تمرین بدخواننده وا می گذاریم.

۵۰۱ قضیه. هرگاه A و B و C مجموعه‌های دلخواه باشند

(الف) $A\cap A=A,\qquad A\cup A=A;$

(ب) $A\cap B=B\cap A,\qquad A\cup B=B\cup A;$

(پ) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$

(ت) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

گاهی این برابریها را به‌ترتیب خواص خود توانی ، جابجایی ، شرکت پذیری و پخش پذیری اعمال مقطع و اجتماع مجموعه‌ها می‌نامند.

به عنوان نمونه ، معادلهٔ اول در قسمت (ت) را ثابت می‌کنیم. x را عنصر $A\cap(B\cup C)$ فرض‌می کنیم، پس $x\in A$ و $x\in B\cup C$. یعنی که $x\in A$ و یا $x\in B$ یا $x\in C$. بنابراین یا داریم (یك) $x\in A$ و $x\in B$ یا (دو) $x\in A$ و $x\in C$. پس یا $x\in A\cap B$ یا $x\in A\cap C$، درنتیجه $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. این امر نشان‌می‌دهد که $A\cap(B\cup C)$ زیرمجموعهٔ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ است.

بعکس، فرض می کنیم y عنصر $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ باشد. دراین صورت یا (سه) $y\in A\cap B$ یا (چهار) $y\in A\cap C$. از این نتیجه می‌شود که $y\in A$ و یا $y\in B$ یا $y\in C$. بنابراین، $y\in A$ و $y\in B\cup C$ و لذا $y\in A\cap(B\cup C)$. در نتیجه $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ زیر مجموعهٔ $A\cap(B\cup C)$ است. حال طبق تعریف ۱۰۱ ، نتیجه می گیریم که مجموعه‌های $A\cap(B\cup C)$ و $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ برابرند.

اکنون به‌روشی دیگر اشاره می‌کنیم. توجه‌کنید که اصولاً برای عنصر x نسبت به سه مجموعهٔ A و B و C جمعاً $(=2^3)8$ حالت وجود دارد (ر. ك. شکل ۳۰۱) که عبارت‌اند از:

(۱) $x\in A,\ x\in B,\ x\in C;$ (۲) $x\in A,\ x\in B,\ x\notin C;$

(۳) $x\in A,\ x\notin B,\ x\in C;$ (۴) $x\in A,\ x\notin B,\ x\notin C;$

(۵) $x\notin A,\ x\in B,\ x\in C;$ (۶) $x\notin A,\ x\in B,\ x\notin C;$

(۷) $x\notin A,\ x\notin B,\ x\in C;$ (۸) $x\notin A,\ x\notin B,\ x\notin C.$

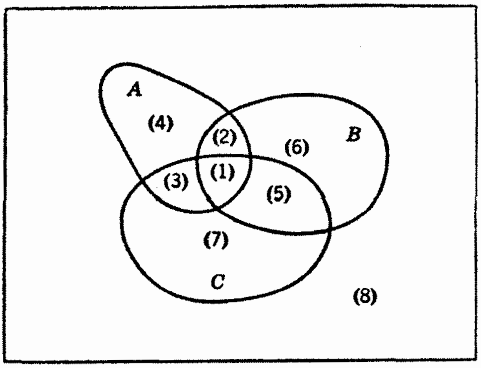
راه اثبات این است که نشان دهیم که دو طرف معادلهٔ اول (ت) شامل آن عناصر x می‌باشند که متعلق به حالات (۱) ، (۲) یا (۳) باشند و فقط شامل این عناصر هستند.

با توجه به روابط مذکور در قضیهٔ ۵.۱ (پ)، معمولاً پرانتزها را حذف کرده می‌نویسیم:

$$A \cap B \cap C, \qquad A \cup B \cup C.$$

می‌توان نشان داد که هرگاه $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه مجموعهٔ معین یکتای A وجود دارد که از تمام عناصری تشکیل شده که حداقل به‌یکی از مجموعه‌های A_j، $(j=1, 2, \ldots, n)$ تعلق دارند و همچنین مجموعهٔ معین‌یکتای B وجود دارد که از تمام عناصری تشکیل شده که به‌تمام مجموعه‌های A_j ، $(j=1, 2, \ldots, n)$ متعلق‌اند. باحذف پرانتزها می‌نویسیم:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$



شکل ۳.۱

گاه، به خاطر صرفه جویی در جا، از نماد مجموع در حساب دیفرانسیل و انتگرال تقلید کرده علامت مختصرتری نظیر

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \cup \{A_j : j = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$B = \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \cap \{A_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

را به‌کار می‌بریم.

به همین نحو، اگر به ازای هر عضو مجموعهٔ J مانند j ، یك مجموعهٔ A_j موجود باشد، آنگاه $\cup \{A_j : j \in J\}$ نشانگر مجموعهٔ تمام عناصری است که حداقل به‌یکی از مجموعه‌های A_j تعلق‌دارد، به‌همین‌ترتیب، $\cap \{A_j : j \in J\}$ نشانگرمجموعهٔ تمام‌عناصری

است که به تمام A_j ها $(j \in J)$ متعلق است.

حال روش دیگری را برای ساختن یك مجموعهٔ جدید از دو مجموعهٔ داده شده معرفی می‌کنیم.

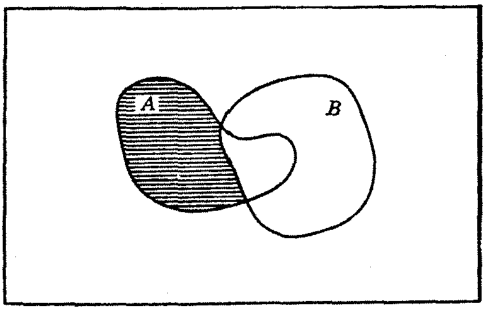
۶۰۱ تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه **متمم B نسبت به A** عبارت است از مجموعهٔ تمام عناصر A که به B متعلق نیستند. این مجموعه را به صورت $A \setminus B$ نمایش می‌دهیم (بخوانید «A منهای B»)، اگرچه بعضی از مؤلفین گاه از نمادهای $A-B$ یا $A \sim B$ استفاده می‌کنند. (ر. ك. شکل ۴۰۱.)

با نماد معرفی شده در بالا داریم

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

گاهی مجموعهٔ A معلوم است و نیازی به ذکر صریح آن نیست. در این حالت فقط می‌گوییم متمم B و $A \setminus B$ را با $\mathscr{C}(B)$ نشان می‌دهیم.

با مراجعه به شکل ۱۰۱، متوجه می‌شویم که آن دسته عناصر x که در شرط (۱) صدق می‌کنند به $A \cap B$ متعلق‌اند، آنهایی که در شرط (۲) صدق می‌کنند به $A \setminus B$ متعلق‌اند، و آنهایی که در شرط (۳) صدق می‌کنند به $B \setminus A$ تعلق دارند. حال نشان می‌دهیم که A اجتماع مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \setminus B$ است.



$A \setminus B$

شکل ۴۰۱. متمم نسبی

۷۰۱ قضیه. مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \setminus B$ مقطع مشترك ندارند و

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

برهان. فرض کنید $x \in A \cap B$ و $x \in A \setminus B$. فرض دوم حکم می‌کند که $x \in A$ و $x \notin B$ که با رابطهٔ $x \in A \cap B$ متناقض است. لذا این مجموعه‌ها مجزا هستند.

اگر $x \in A$، آنگاه یا $x \in B$ یا $x \notin B$. در حالت اول $x \in A$ و $x \in B$، در نتیجه

$x \in A \cap B$. در حالت دوم $x \in A$ و $x \notin B$، پس $x \in A \setminus B$. این امر نشان می‌دهد که A زیرمجموعهٔ $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ است. بعکس، اگر $y \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$، آنگاه یا $y \in A \cap B$ یا $y \in A \setminus B$. درهر دو حالت داریم $y \in A$ که نشان می‌دهد $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ زیرمجموعهٔ A است. □

اکنون قوانین دمورگن[1] را برای سه مجموعه بیان می‌کنیم؛ حالت کلیتر در تمرینها خواهد آمد.

۸.۱ قضیه. اگر A، B و C مجموعه‌های دلخواهی باشند، آنگاه

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

برهان. رابطهٔ اول را ثابت می‌کنیم و اثبات رابطهٔ دوم را به‌خواننده وا می‌گذاریم. برای اثبات برابری مجموعه‌ها، نشان می‌دهیم که هر عنصر $A \setminus (B \cup C)$ هم به $(A \setminus B)$ متعلق است و هم به $(A \setminus C)$ و بالعکس.

اگر x در $A \setminus (B \cup C)$ باشد، آنگاه x در A است ولی در $B \cup C$ نیست. بنابراین x در A است ولی نه در B است و نه در C. (چرا؟) لذا x در A است ولی در B نیست، و x در A است ولیکن در C نمی‌باشد؛ یعنی $x \in A \setminus B$ و $x \in A \setminus C$، پس $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

بعکس، اگر $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$، آنگاه $x \in (A \setminus B)$ و $x \in (A \setminus C)$. بنابراین $x \in A$ و $x \notin B$ و $x \notin C$. نتیجه این که $x \in A$ و $x \notin (B \cup C)$، پس $x \in A \setminus (B \cup C)$.

چون عناصر مجموعه‌های $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ و $A \setminus (B \cup C)$ یکی هستند، طبق تعریف ۱.۱ با هم برابرند. □

حاصلضرب دکارتی

حال به‌تعریف حاصلضرب دکارتی[2] دو مجموعه می‌پردازیم.

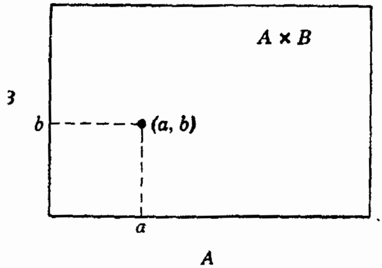
۹.۱ تعریف. هرگاه A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $A \times B$، **حاصلضرب دکارتی**

---

۱. اوگاستس دمورگن Augustus De Morgan (۱۸۰۶ـ۱۸۷۳) در دانشگاه لندن درس می‌داد. وی ریاضی دان و منطق دان بود و درهموار ساختن راه به‌سوی منطق ریاضی جدید کمك نموده است.

۲. رنه دکارت René Descartes (۱۵۹۶ ـ ۱۶۵۰) مبدع هندسهٔ تحلیلی، یك نجیب‌زادهٔ فرانسوی، سرباز، ریاضی دان، و یکی از بزرگترین فلاسفهٔ جهان است.

A و B مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (a,b) با شرط $a\in A$ و $b\in B$ است. (ر.ك. شكل ۵.۱)



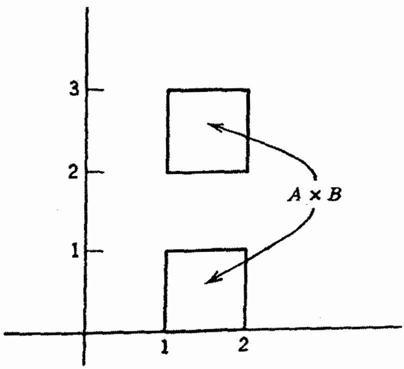
شکل ۵.۱ حاصلضرب دکارتی

(تعریف بالا به نوعی غیر رسمی است، چراکه هنوز معنی «جفت مرتب» را تعریف نکرده‌ایم. بدون وارد شدن دراین بحث، فقط خاطرنشان می‌کنیم که جفت‌مرتب (a,b) را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای تعریف کرد که عناصرش تنها $\{a\}$ و $\{a,b\}$ هستند. آنگاه می‌توان نشان داد که دو جفت مرتب $(a\ ,\ b)$ و $(a'\ ,\ b')$ برابرند اگر و فقط اگر $a=a'$ و $b=b'$. این خاصیت اساسی جفتهای مرتب است.)

مثلاً، اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۴,۵\}$، آنگاه مجموعهٔ $A\times B$ مجموعه‌ای است که عناصرش جفتهای مرتب

(۱،۴) ، (۱،۵) ، (۲،۴) ، (۲،۵) ، (۳،۴) ، (۳،۵)

می‌باشند. می‌توان مجموعهٔ $A\times B$ را به عنوان مجموعه‌ای از شش نقطه در صفحه با



شکل ۶.۱ حاصلضرب دکارتی

مختصاتی که هم اکنون ذکر شد تصور کرد.

ما غالباً برای نشان دادن حاصلضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B یك نمودار (نظیر شکل ۵.۱) رسم می‌کنیم. اما با این حال باید توجه داشت که این صورت ساده شدهٔ $A \times B$ است (نه نمودار واقعی). برای مثال، اگر $A = \{x \in \mathbf{R} : ۱ \leqslant x \leqslant ۲\}$ و $B = \{x \in \mathbf{R} : ۰ \leqslant x \leqslant ۱$ یا $۲ \leqslant x \leqslant ۳\}$، آنگاه به جای یك مستطیل باید نموداری شبیه شکل ۶.۱ داشته باشیم.

تمرین

۱. الف. برای هریك ازمجموعه‌های ذکر شده درقضیهٔ ۵.۱ یك نمودار رسم کنید.

۱. ب. قسمت (پ) از قضیهٔ ۵.۱ را ثابت کنید.

۱. پ. قسمت دوم (ت) از قضیهٔ ۵.۱ را ثابت کنید.

۱. ت. ثابت کنید که $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A \cap B = A$.

۱. ث. نشان دهید که D، مجموعهٔ تمام عناصری که به A یا B متعلق است ولی به هردوی آنها متعلق نیست، به‌صورت زیر است:

$$D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

مجموعهٔ D را **تفاضل متقارن** A و B می‌گوییم. این مجموعه را بایك نمودار نشان دهید.

۱. ج. نشان‌دهید که تفاضل متقارن D راکه درتمرین قبل تعریف‌شده است به‌صورت $D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ نیزمی‌توان تعریف کرد.

۱. چ. هرگاه $B \subseteq A$، نشان دهید که $B = A \setminus (A \setminus B)$.

۱. ح. هرگاه A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند، نشان‌دهید که $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

۱. خ. اگر $\{A_۱, A_۲, \dots, A_n\}$ دسته‌ای از مجموعه‌ها و E مجموعهٔ دلخواهی باشد، آنگاه نشان دهید که

$$E \cap \bigcup_{j=۱}^{n} A_j = \bigcup_{j=۱}^{n} (E \cap A_j), \qquad E \cup \bigcup_{j=۱}^{n} A_j = \bigcup_{j=۱}^{n} (E \cup A_j)$$

۱. د. هرگاه $\{A_۱, A_۲, \dots, A_n\}$ دسته‌ای از مجموعه‌ها و E مجموعهٔ دلخواهی باشد، نشان دهید که

$$E \cap \bigcap_{j=۱}^{n} A_j = \bigcap_{j=۱}^{n} (E \cap A_j), \qquad E \cup \bigcap_{j=۱}^{n} A_j = \bigcap_{j=۱}^{n} (E \cup A_j)$$

۱. ذ. فرض کنید E یك مجموعه و $\{A_۱, A_۲, \dots, A_n\}$ دسته‌ای ازمجموعه‌ها باشد. قوانین دمورگن:

$$E \setminus \bigcap_{j=۱}^{n} A_j = \bigcup_{j=۱}^{n} (E \setminus A_j), \qquad E \setminus \bigcup_{j=۱}^{n} A_j = \bigcap_{j=۱}^{n} (E \setminus A_j)$$

را ثابت کنید. توجه داشته باشید که اگر $E\setminus A_j$ را به‌صورت $\mathcal{C}(A_j)$ نمایش دهیم این روابط به صورت

$$\mathcal{C}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)=\bigcup_{j=1}^{n}\mathcal{C}(A_j), \qquad \mathcal{C}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)=\bigcap_{j=1}^{n}\mathcal{C}(A_j)$$

در می‌آیند

۱. ر. فرض کنید J یك مجموعهٔ دلخواه و به‌ازای هر $j\in J$ ، A_j مشمول X باشد. نشان دهید که

$$\mathcal{C}(\cap\{A_j : j\in J\})=\cup\{\mathcal{C}(A_j) : j\in J\},$$
$$\mathcal{C}(\cup\{A_j : j\in J\})=\cap\{\mathcal{C}(A_j) : j\in J\}.$$

۱. ز. اگر B_1 و B_2 دو زیرمجموعهٔ B باشند و $B=B_1\cup B_2$ ، آنگاه

$$A\times B=(A\times B_1)\cup(A\times B_2).$$

بخش ۲ توابع

حال به بحثی در مورد مفهوم بنیادی تابع یا نگاشت می‌پردازیم. خواهیم دید که تابع نوع خاصی از مجموعه است، تعبیرهای دیگری هم از تابع وجود دارند که اغلب الهام‌بخش‌اند. گرچه تمام بخشهای بعدی در رابطه با انواع مختلف تابع می‌باشند، ولی در این بخش مقدماتی، تابع به‌صورت مجردتری مورد بحث است.

برای ریاضی دان یك قرن پیش واژهٔ «تابع» معمولاً به‌معنی دستور مشخصی ، مانند

$$f(x)=x^2+3x-5,$$

بود که به هرعدد حقیقی x عدد حقیقی دیگر $f(x)$ را نظیر نماید. البته می‌دانستند که در بعضی از دستورها، نظیر

$$g(x)=\sqrt{x-5},$$

به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x عدد حقیقی به‌دست نمی‌آید ولی این مطلب دلیل کافی برای لزوم گسترش مفهوم تابع تلقی نشد. احتمالاً امکان داشت این بحث درمیان این ریاضی‌دانان مطرح شود که آیا قدرمطلق

$$h(x)=|x|$$

در اعداد حقیقی یك «تابع واقعی» هست یا نه. زیرا بالاخره $|x|$ به‌شکل «تکه‌ای» و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ ، } x\geqslant 0 \text{ اگر} \\ -x \text{ ، } x<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

با گسترش ریاضی رفته رفته این حقیقت آشکار شد که این محدودیت که تابع باید

یك دستور باشد نابجاست و تعریف کلیتری سودمند خواهد بود. همچنین اهمیت تشخیص صریح خود تابع از مقادیرآن آشکار شد. خواننده دراین دو مورد احتمالاً خود را در موقعیت ریاضی دانان یك قرن قبل می بیند بدون آنکه تقصیری متوجه وی باشد. ما قصد داریم خواننده را با روش جدید و استفادهٔ معمول آن آشنا سازیم، ولی این عمل را در دو مرحله انجام می‌دهیم. اولین تعریف اصلاح شدهٔ ما به‌صورت زیر خواهد بود:

یك تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B قاعدهٔ تناظری است که به‌هر x متعلق به‌یك زیرمجموعهٔ A مانند D عنصر یکتای $f(x)$ متعلق به B را نظیر نماید.

البته دستورهای صریح مذکور دربالا مشمول این تعریف آزمایشی می باشند. بااین تعریف پیشنهادی امکان اینکه تابع احتمالاً برای عناصری از A تعریف نشده باشد وجود دارد و همچنین می‌توان توابعی را بررسی کرد که در آنها مجموعه‌های A و B الزاماً زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی نیستند. (این مجموعه‌ها حتی می توانند از میز وصندلی و یا حتی گربه و سگ تشکیل شده باشند.)

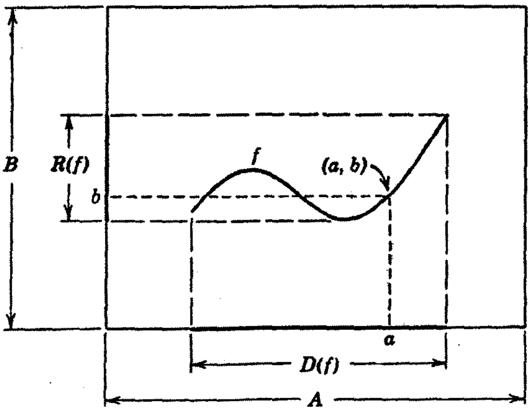
اما هرقدر این تعریف پیشنهادی جالب باشد دارای یك نقص بارز است و آن عدم وضوحش است. این اشکال باقی است که عبارت «قاعدهٔ تناظر» باید تعبیر شود. بدون‌شك خواننده می‌تواندعباراتی بیابدکه بهتر ازعبارت بالا او را ارضاکند، ولی‌احتمال نمی‌رود بتواند این ابهام را به‌کلی از بین ببرد. به‌نظر می‌رسدکه قانع‌کننده‌ترین راه حل این باشد که «تابع» تماماً برحسب مجموعه‌ها و مفاهیم ارائه شده در بخش قبل تعریف شود. این تعریف اگرچه دارای این‌نقص است که بیشترساختگی است و ازمحتوای شهودی توصیف قبلی برخوردار نیست، لیکن، روشنی بیان آن این نقایص را جبران می کند.

ایدهٔ اصلی تصور نمودار تابع است: یعنی دسته‌ای ازجفتهای مرتب. توجه داریم که یك دستهٔ دلخواه از جفتهای مرتب نمی‌تواند نمودار یك تابع باشد، چراکه درتابع به‌محض اینکه اولین عضو یك جفت مرتب مشخص شد، عضو دوم آن باید به‌طریقی یکتا معین شود.

۱۰۲ تعریف. فرض‌کنیم A و B دو مجموعه باشند (که الزاماً متمایز نیستند). یك **تابع از A به B** مجموعه‌ای است از جفتهای مرتب در $A\times B$، مانند f بااین خاصیت که اگر $(a ، b)$ و $(a ، b')$ عناصر f باشند آنگاه $b=b'$. مجموعهٔ تمام عناصر A را که در عضو اول عنصرهای f ظاهر می‌شوند **دامنه** (یا **حوزهٔ تعریف**) f می‌خوانیم و آن را به $D(f)$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ تمام عناصر B راکه در عضو دوم عنصرهای f ظاهر می‌شوند **برد** f (یا **مجموعهٔ مقادیر** f) می‌نامیم و آن را به $R(f)$ نمایش می‌دهیم. در حالت $D(f)=A$ اغلب می گوییم f ، A را **در** B **می‌نگارد** (یا یك **نگاشت** A در B است) و می نویسیم $f: A\to B$.

هرگاه $(a ، b)$ عنصری از یك تابع f باشد، معمولاً به‌جای $(a ، b)\in f$ می‌نویسیم:

$$b=f(a) \qquad \text{یا} \qquad f : a \longrightarrow b$$



شکل ۱۰۲ یك تابع به‌عنوان یك نمودار

عنصر b را اغلب ***مقدار*** f درنقطهٔ a یا ***تصویر*** نقطهٔ a ***به‌وسیلهٔ*** f می‌گوییم.

نمایش جدولی

یك طریقه برای تجسم تابع تصورش به‌صورت نمودار است. روش مهم دیگری که به‌طور وسیعی مورد استفاده است به‌کار بردن جدولی است. جدول ۱.۲ راکه نظیرآن درمجله‌های ورزشی دیده می‌شود، درنظر می‌گیریم.

دامنهٔ این تابع پرتاب آزاد f از نه بازیکن تشکیل شده است.

$D(f)=$ { آندرسون[1] ، بید[2] ، باتمن[3] ، هوخشیلد[4] ، کاکوتانی[5] ، کوالوسکی[6] ، ازبن[7] ، پرسینی[8] ، رزنبرگ[9] }

و حال آنکه برد تابع از شش عدد

$$R(f) = \{۰ ، ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۵ ، ۸\}$$

تشکیل شده است. عناصر واقعی تابع، جفتهای مرتب زیر هستند:

---

1. Anderson
2. Bade
3. Bateman
4. Hochschild
5. Kakutani
6. Kovalevsky
7. Osborn
8. Peressini
9. Rosenberg

(۵ ، باتمن) , (۰ ، بید) , (۲ ، آندرسون)
(۸ ، کوالوسکی) , (۴ ، کاکوتانی) , (۱ ، هوخشیلد)
(۴ , رزنبرگ) , (۲ ، پرسینی) , (۰ ، ازبن)

جدول ۱.۲

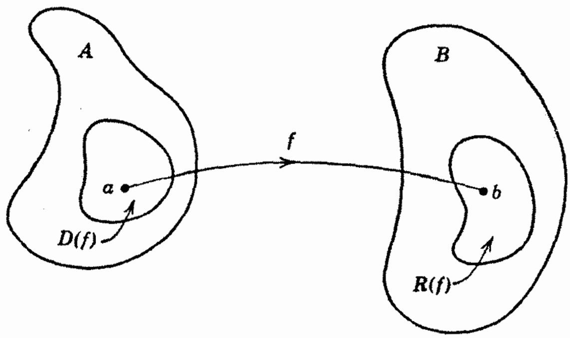
بازیکن	تعداد پرتاب
آندرسون	۲
بید	۰
باتمن	۵
هوخشیلد	۱
کاکوتانی	۴
کوالوسکی	۸
ازبن	۰
پرسینی	۲
رزنبرگ	۴

دراین چنین نمایشهای جدولی، معمولاً فقط دامنهٔ تابع را درستون طرف چپ می‌نویسیم (البته احتیاجی به‌ذکر نام افرادی از تیم که بازی نکرده‌اند نیست). بدین ترتیب مثلاً می‌توان گفت که تعداد پرتابهای آندرسون برابر با ۲ است و نوشت ۲ = (آندرسون)f یا ۲ ⟵ آندرسون، و به‌همین ترتیب.

همهٔ ما با نحوهٔ استفاده از این جداول آشنا هستیم. این جدولها نمونه‌های مهمی ازتوابع هستند واغلب ازطبیعتی برخوردارندکه بیان آنها برحسب یك دستور مشکل است.

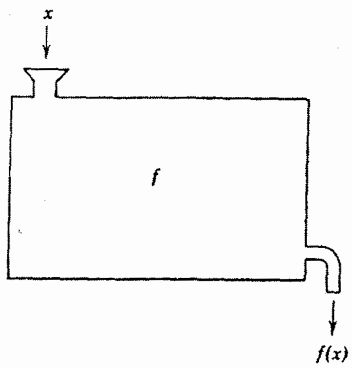
تبدیل و ماشینها

برای تجسم تابع راه دیگری نیز وجود دارد: تبدیل قسمتی از مجموعهٔ A به قسمتی از مجموعهٔ B. دراین بیان تابع f به‌این صورت تصور می‌شود که وقتی $(a, b)\in f$، f عنصر a را از مجموعهٔ $D(f)$ می‌گیرد و آن را به یك عنصر $R(f)$، یعنی $b=f(a)$، «تبدیل می‌کند» یا «می‌نگارد». توجه کنید که $D(f)\subseteq A$ و $R(f)\subseteq B$. ما اغلب این تصور تابع را با نموداری مانند شکل ۲.۲ نشان می‌دهیم. ما بارها این نمایش هندسی تابع را، حتی وقتی که A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه نیستند، به‌کار می‌بریم.



شکل ۲۰۲ یك تابع به‌عنوان یك تبدیل

روش دیگری برای تجسم تابع وجود دارد: تابع f را یك ماشین تصور می‌کنیم که عناصر $D(f)$ درآن وارد وعناصر $R(f)$ ازآن خارج می‌شوند. اگر x را در $D(f)$ اختیارکنیم و آن را در f بگذاریم، آنگاه $f(x)$، مقدار نظیر آن از f بیرون می‌آیـد. هرگاه عنصر متفاوتی مانند y از $D(f)$ را در f قرار دهیم $f(y)$ را به‌دست می‌آوریم (کـه ممکن است مخالف یا برابر با $f(x)$ باشد). اگر سعی‌کنیم چیزی راکـه متعلق به $D(f)$ نباشد در f بریزیم درمی‌یابیم کـه f آن را رد می‌کند، چراکه f تنها می‌تواند روی عناصر متعلق به $D(f)$ عمل کند. (ر. ك. شکل ۳۰۲.)



شکل ۳۰۲ تابع به‌عنوان یك ماشین

تجسم اخیر تابع، تمایـز بین f و $f(x)$ را آشکار می‌سازد : اولی ماشین و دومی بازده ماشین به ازای x است. البته مفید است کـه ماشین را از بازده آن تمیز دهیم. فقط

یك شخص ساده ممکن است چرخ گوشت را با گوشت چرخ کرده اشتباه کند؛ با این حال، تعدادی از مردم توابع را با مقادیر تابع اشتباه کرده‌اند. پس ارزش دارد با صرف انرژی کمی آنها را با نمادهای متمایزی مشخص کنیم.

تحدید وگسترش توابع

اگر f تابعی به‌دامنهٔ $D(f)$ و D_1 یك زیرمجموعهٔ $D(f)$ باشد، اغلب مفید است تابع جدیدی تعریف کنیم مانند f_1 که دامنه‌آن D_1 است و $f_1(x)=f(x)$ به‌ازای هر $x\in D_1$. تابع f_1 را **تحدید** f به D_1 می‌نامیم. بنابر تعریف ۱.۲ داریم

$$f_1=\{(a, b)\in f : a\in D_1\}.$$

گاه برای نمایش تحدید تابع f به D_1 می‌نویسیم $f_1=f|D_1$.

ساخت مشابهی (که کمتر مصنوعی به نظر می‌رسد)، مفهوم «گسترش» است. اگر g تابعی به دامنهٔ $D(g)$ باشد و $D_2\supseteq D(g)$، آنگاه هرتابع g_2 با دامنهٔ D_2 را به قسمی که به‌ازای هر $x\in D(g)$، $g_2(x)=g(x)$، یك **گسترش** g به‌مجموعهٔ D_2 می‌نامیم.

ترکیب توابع

اکنون می‌خواهیم دو تابع را به‌ترتیب زیر باهم «ترکیب» کنیم: در آغاز f را برهر x در $D(f)$ اعمال می‌کنیم، $f(x)$ به‌دست می‌آید. سپس g را درصورت امکان (یعنی، وقتی که $f(x)$ متعلق به $D(g)$ است) بر $f(x)$ اعمال می‌کنیم. در این عمل باید به دامنهٔ تابع حاصل توجه شود. برای مثال، هرگاه f در $\mathbf{R}$ با $f(x)=x^3$ و g به‌ازای $x\geqslant 0$ با $g(x)=\sqrt{x}$ تعریف شده باشد، ترکیب $g\circ f$ را فقط می‌توان برای $x\geqslant 0$ تعریف کرد، و برای این اعداد حقیقی مقدار آن $\sqrt{x^3}$ است.

۲.۲ تعریف. فرض کنیم f تابعی به دامنهٔ $D(f)$ در A و برد $R(f)$ در B و g تابعی به دامنهٔ $D(g)$ در B وبرد $R(g)$ در C باشد. (ر.ك. شکل ۴.۲.) **ترکیب** $g\circ f$ (به‌ترتیب آن توجه کنید!) تابعی از A به C است که با

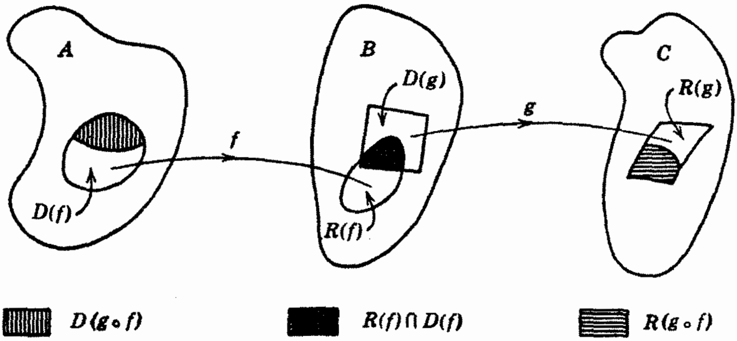
$g\circ f=\{(a,c)\in A\times C:$ عنصری مانند $b\in B$ هست به‌قسمی که $(a,b)\in f$ و $(b,c)\in g\}$

تعریف می‌شود.

۳.۲ قضیه. اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب $g\circ f$ تابعی است به دامنه و برد زیر:

$$D(g\circ f)=\{x\in D(f) : f(x)\in D(g)\},$$

$$R(g\circ f)=\{g(f(x)) : x\in D(g\circ f)\}.$$



شکل ۴۰۲ ترکیب توابع

۴.۲ چند مثال. (الف) فرض‌کنیم f و g توابعی باشندکه برای اعداد حقیقی x مقادیرشان اعداد حقیقی

$$f(x)=۲x,\qquad g(x)=۳x^{۲}-۱$$

باشند.[1] چون $D(g)$ برابر $\mathbf{R}$، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است و $R(f)\subseteq D(g)$، دامنهٔ $D(g\circ f)$ نیز $\mathbf{R}$ است و $g\circ f(x)=۳(۲x)^{۲}-۱=۱۲x^{۲}-۱$. از طرف دیگر، $D(f\circ g)=\mathbf{R}$ ولی $f\circ g(x)=۲(۳x^{۲}-۱)=۶x^{۲}-۲$.

(ب) اگر $D(h)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant ۱\}$ دامنهٔ تابع h باشد و h با ضابطهٔ

$$h(x)=\sqrt{x-۱},$$

تعریف شده باشد و اگر f تابع قسمت (الف) باشد، آنگاه

$$D(h\circ f)=\{x\in\mathbf{R} : ۲x\geqslant ۱\}=\left\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant\frac{۱}{۲}\right\}$$

و $h\circ f(x)=\sqrt{۲x-۱}$. همچنین $D(f\circ h)=\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant ۱\}$ و $f\circ h(x)=۲\sqrt{x-۱}$.

هرگاه g تابع قسمت (الف) باشد،

$$D(h\circ g)=\{x\in\mathbf{R} : ۳x^{۲}-۱\geqslant ۱\}=\left\{x\in\mathbf{R} : x\leqslant-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\ \text{ یا }\ x\geqslant\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right\}$$

و $h\circ g(x)=\sqrt{۳x^{۲}-۲}$. همچنین $D(g\circ h)=\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant ۱\}$ و $g\circ h(x)=۳x-۴$.

---

۱. این توابع را برای $x\in\mathbf{R}$ به‌صورت $f : x\longrightarrow ۲x$ و $g : x\longrightarrow ۳x^{۲}-۱$ نیز نشان می‌دهیم.

(توجه کنید که دستور بیان‌کنندهٔ $g\circ h$ برای مقادیر x خارج از دامنهٔ $g\circ h$ نیز دارای معنی است.)

(پ) فرض کنیم F و G توابعی به دامنه‌های $D(F)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant ۰\}$ و $D(G)=\mathbf{R}$ باشند به‌قسمی که مقادیر F و G درنقطهٔ دلخواه x واقع در دامنه‌هایشان با

$$F(x)=\sqrt{x}, \qquad G(x)=-x^{۲}-۱$$

داده شده باشند. دراین صورت $D(G\circ F)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant ۰\}$ و $G\circ F(x)=-x-۱$؛ در صورتی که $D(F\circ G)=\{x\in D(G) : G(x)\in D(F)\}$. این مجموعهٔ اخیر تهی است، چراکه برای هر $x\in D(G)$ ، $G(x)<۰$. بنابراین تابع $F\circ G$ درهیچ نقطه‌ای تعریف نشده است، پس تابع $F\circ G$ «تابع تهی» است.

توابع یك به یك و وارون

اکنون طریقه‌ای برای ساختن تابعی جدید از یك تابع داده شده درحالتی‌که مقادیر این تابع در دو نقطهٔ متمایز مساوی نباشند، ارائه می‌دهیم.

۵.۲ تعریف. فرض کنیم f تابعی به‌دامنهٔ $D(f)$ در A و برد $R(f)$ در B باشد. تابع f را **یك به یك** گوییم درصورتی‌که اگر (a,b) و (a',b) عناصر f باشند، آنگاه $a=a'$.

به عبارت دیگر، f یك به یك است اگر و فقط اگر از دو رابطهٔ $f(a)=b$ و $f(a')=b$، رابطهٔ $a=a'$ نتیجه شود. یا می‌توان گفت f یك به یك است اگر و فقط اگر وقتی a ، a' در $D(f)$ هستند و $a\neq a'$ ، آنگاه $f(a)\neq f(a')$.

ادعا می‌کنیم که هرگاه f تابع از A به B یك به یك باشد، آنگاه مجموعهٔ جفتهای مرتب در $B\times A$ که ازمبادلهٔ عضو اول با عضو دوم جفتهای مرتب f به‌دست می‌آید، تابعی است مانند g و این تابع نیز یك به یك است.

اثبات این ادعا که به‌عنوان تمرین آزمون خوبی برای خواننده است، حذف شده است. احکام زیر ارتباط بین f و g را نشان می‌دهند:

$$D(g)=R(f), \qquad R(g)=D(f),$$

$(b,a)\in g$ اگر و فقط اگر $(a,b)\in f$.

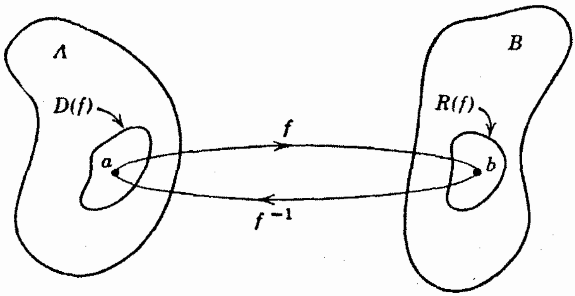
حکم اخیر را می‌توان به شکل متداول‌تر زیر نوشت:

$a=g(b)$ اگر و فقط اگر $b=f(a)$.

۶.۲ تعریف. فرض کنیم f تابعی یك به یك به‌دامنه $D(f)$ در A و برد $R(f)$ در

B باشد. اگر $g=\{(b,a)\in B\times A : (a,b)\in f\}$ ، آنگاه g تابعی است یك به یك به دامنهٔ $D(g)=R(f)$ در B و برد $R(g)=D(f)$ در A. تابع g را تابع **وارون** f می‌نامیم و آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

تابع وارون را می‌توان از دیدگاه نگاشتها تعبیر کرد (ر. ك. شکل ۵.۲). اگر f یك به یك باشد عناصر متمایز $D(f)$ را برعناصر متمایز $R(f)$ می‌نگارد. درنتیجه هرعنصر $R(f)$ مانند b تصویر تنها یك a در $D(f)$ تحت f می‌باشد. بدین‌ترتیب تابع وارون f^{-1} عنصر b را دراین عنصر یکتای a می‌نگارد.



شکل ۵.۲ تابع وارون

۷.۲ چند مثال. (الف) فرض کنیم $F : x \longrightarrow x^2$ تابعی به دامنهٔ $D(F)=\mathbf{R}$، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی، و برد در $\mathbf{R}$ باشد به‌قسمی که مقدار F در عدد حقیقی x ، $F(x)=x^2$ است. (به‌عبارت دیگر، F تابع $\{(x، x^2) : x\in\mathbf{R}\}$ است.) به‌سهولت می‌توان دید که F یك به یك نیست، در واقع جفتهای مرتب (۲ و ۴) و (۲− و ۴) هردو متعلق به F هستند. چون F یك به یك نیست، پس تابع وارون ندارد.

(ب) فرض کنیم f تابعی به‌دامنهٔ $D(f)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 0\}$ و برد $R(f)=\mathbf{R}^+$ باشد که مقدارش به ازای x های متعلق به $D(f)$ ، $f(x)=x^2$ است. توجه داشته باشید که f تحدید تابع F قسمت (الف) به $D(f)$ است. f برحسب جفتهای مرتب به‌صورت $f=\{(x , x^2) : x\in\mathbf{R} , x\geqslant 0\}$ نوشته می‌شود. برخلاف تابع F درقسمت(الف)، f یك به یك است، زیرا که اگر x و y در $D(f)$ باشند و داشته باشیم $x^2=y^2$، آنگاه $x=y$ (چرا؟) بنابراین، f دارای یك تابع وارون g باخاصیت

$$R(g)=D(f)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 0\} \quad \text{و} \quad D(g)=R(f)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 0\}$$

می‌باشد. بعلاوه، $f(x)=x^2=y$ اگر و فقط اگر $x=g(y)$. این تابع وارون g معمولاً موسوم به **تابع جذر مثبت** است و به‌صورت

$$g(y)=\sqrt{y}, \qquad y\in\mathbf{R}, \qquad y\geqslant 0$$

نمایش داده می‌شود.

(پ) هرگاه f_1 تابع $\{(x, x^2) : x\in\mathbf{R}, x\leqslant 0\}$ باشد، آنگاه مانند قسمت (ب)، f_1 یک به‌یک با دامنهٔ $D(f_1)=\{x\in\mathbf{R} : x\leqslant 0\}$ و برد $R(f_1)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 0\}$ است. توجه کنید که f_1 تحدید تابع F قسمت (الف) به $D(f_1)$ است. تابع g_1 وارون f_1 موسوم به **تابع جذر منفی** است و به‌صورت

$$g_1(y)=-\sqrt{y}, \qquad y\in\mathbf{R}, \qquad y\geqslant 0$$

نمایش داده می‌شود، لذا $g_1(y)\leqslant 0$.

(ت) تابع سینوسی را که در مثلثات معرفی شده F می‌نامیم. می‌دانیم که دامنهٔ آن $D(F)=\mathbf{R}$ و برد آن $R(F)=\{y\in\mathbf{R} : -1\leqslant y\leqslant +1\}$ است و تابع یک به یک نیست (برای مثال $\sin 0=\sin 2\pi=0$)، با این حال، هرگاه f تحدید آن به مجموعهٔ $D(f)=\left\{x\in\mathbf{R} : -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant +\frac{\pi}{2}\right\}$ باشد، f یک به‌یک است. لذا دارای یک تابع وارون g به دامنه و برد $D(g)=R(f)$ و $R(g)=D(f)$ می‌باشد. همچنین به ازای $x\in D(f)$، $y=\sin x$ اگر وفقط اگر $x=g(y)$. تابع g را (شاخهٔ اصلی) **تابع وارون سینوسی** می‌نامند و اغلب به‌صورت

$$g(y)=\operatorname{Arc}\sin y \qquad \text{یا} \qquad g(y)=\sin^{-1}y$$

نمایش داده می‌شود.

توابع پوشا و دوسو

۸.۲ تعریف. فرض کنیم f تابعی به دامنهٔ $D(f)\subseteq A$ و برد $R(f)\subseteq B$ باشد. هرگاه $R(f)=B$ می‌گوییم f **پوشایی** یا اینکه f، $D(f)$ را **روی B می‌نگارد.** اگر f تابع پوشا باشد می‌توانیم f را **پوشایی** بنامیم

درتعریف تابع، مشخص کردن دامنهٔ تابع و مجموعه‌ای که مقادیر تابع از آن گرفته می‌شوند، مهم است. پس از مشخص شدن این امر، می‌توان پوشا بودن یا نبودن آن را مطرح کرد.

۹.۲ تعریف. تابع f به‌دامنهٔ $D(f)\subseteq A$ و برد $R(f)\subseteq B$ را **دوسو** گوییم هرگاه (۱)، f **یک به یک** باشد و (۲)، f پوشا باشد (یعنی، $D(f)$ را روی B بنگارد). اگر f تابع دوسو باشد می‌توانیم f را **دوسویی** بنامیم

تصویرهای مستقیم و وارون

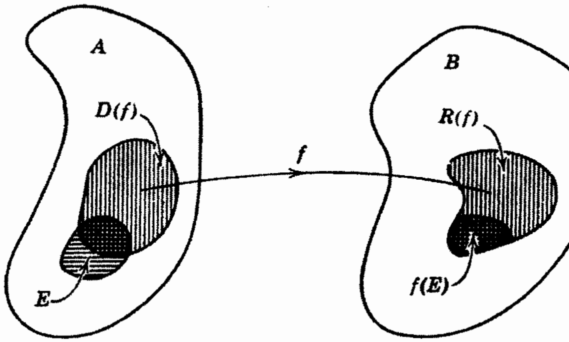
فرض کنید f تابعی دلخواه به‌دامنهٔ $D(f)$ در A و برد $R(f)$ در B باشد. فرض نمی‌کنیم که f یك به یك است.

۱۰.۲ تعریف. هر گاه E یك زیرمجموعهٔ A باشد، **تصویر مستقیم** E به وسیلهٔ f زیرمجموعه‌ای از $R(f)$ است که با

$$\{f(x) : x \in E \cap D(f)\}$$

تعریف می‌شود. معمولا تصویر مستقیم مجموعهٔ E تحت f را با نماد $f(E)$ نمایش می‌دهیم (ر. ك. شکل ۶.۲).

ملاحظه می‌شود که اگر $E \cap D(f) = \varnothing$، آنگاه $f(E) = \varnothing$. هر گاه E فقط شامل یك نقطهٔ p در $D(f)$ باشد، مجموعهٔ $f(E)$ فقط شامل نقطهٔ $f(p)$ است. اینك نشان می‌دهیم که بعضی از خواص مجموعه‌ها تحت تصویر مستقیم پایدار می‌مانند.



شکل ۶.۲ تصویرهای مستقیم

۱۱.۲ قضیه. فرض کنیم f تابعی به‌دامنهٔ در A و برد در B باشد و E و F زیرمجموعه‌های A باشند. در این صورت

(الف) اگر $E \subseteq F$، آنگاه $f(E) \subseteq f(F)$

(ب) $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

(پ) $f(E \cup f) = f(E) \cup f(F)$

(ت) $f(E \setminus F) \subseteq f(E)$.

برهان. (الف) اگر $x \in E$، آنگاه $x \in F$ و بنابراین $f(x) \in f(F)$. چون این امر برای هر $x \in E$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که $f(E) \subseteq f(F)$.

(ب) چون $E\cap F\subseteq E$، ازقسمت (الف) نتیجه می‌شود که $f(E\cap F)\subseteq f(E)$؛ به‌طریق مشابه، $f(E\cap F)\subseteq f(F)$. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$f(E\cap F)\subseteq f(E)\cap f(F)\cdot$$

(پ) چون $E\subseteq E\cup F$ و $F\subseteq E\cup F$، از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که $f(E)\cup f(F)\subseteq f(E\cup F)$. بعکس اگر $y\in f(E\cup F)$، آنگاه عنصری مانند $x\in E\cup F$ وجود دارد به‌قسمی که $y=f(x)$. چون $x\in E$ یا $x\in F$ نتیجه می‌شود که که یا $y=f(x)\in f(E)$ یا اینکه $y\in f(F)$. بنابراین داریم

$$f(E\cup F)\subseteq f(E)\cup f(F)$$

و اثبات کامل می‌شود.

(ت) این قسمت بلافاصله از قسمت (الف) نتیجه می‌شود. □

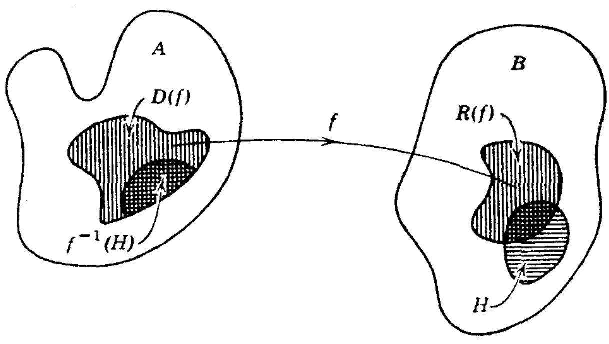
در تمرین ۲.د خواهید دیدکه، درحالت‌کلی، در (ب) به جای شمول $\subseteq$ نمی‌توان برابری $=$ گذاشت.

اکنون به‌معرفی مفهوم تصویروارون یك مجموعه تحت یك تابع می‌پردازیم. توجه داشته باشیدکه تابع یك به یك فرض نمی‌شود.

۱۲۰۲ تعریف. اگر H زیرمجموعهٔ B باشد؛ آنگاه **تصویر وارون** H به وسیلهٔ f زیرمجموعهٔ $D(f)$ به‌صورت

$$\{x\ :\ f(x)\in H\}$$

است. معمولاً* تصویر وارون مجموعهٔ H تحت f را با علامت $f^{-1}(H)$ نمایش می‌دهیم. (ر. ك. شکل ۷۰۲).



شکل ۷۰۲ تصویرهای وارون

بار دیگر تأکید می‌کنیم که الزامی نیست که f یك به یك باشد و در نتیجه تابع وارون f^{-1}، الزاماً وجود ندارد. (بااین‌حال هر گاه f^{-1} وجود داشته‌باشد، $f^{-1}(H)$ تصویر مستقیم H تحت f^{-1} است.)

۱۳.۲ قضیه. فرض کنیم f تابعی به دامنهٔ در A و برد در B باشد و G و H زیرمجموعه‌های B باشند، در این صورت

(الف) اگر $G \subseteq H$، آنگاه $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$.

(ب) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.

(پ) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$.

(ت) $f^{-1}(G \setminus H) = f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$.

برهان. (الف) فرض کنید $x \in f^{-1}(G)$؛ در این صورت $f(x) \in G \subseteq H$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(H)$.

(ب) چون $G \cap H$ زیرمجموعهٔ G و H است، ازقسمت (الف) نتیجه می‌شود که

$$f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H).$$

بعکس، اگر $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$، آنگاه $f(x) \in G$ و $f(x) \in H$. بنابراین $f(x) \in G \cap H$ و $x \in f^{-1}(G \cap H)$.

(پ) چون G و H زیرمجموعه‌های $G \cup H$ هستند ازقسمت (الف) نتیجه‌می‌شود که

$$f^{-1}(G \cup H) \supseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H).$$

بعکس، اگر $x \in f^{-1}(G \cup H)$، آنگاه $f(x) \in G \cup H$. از این نتیجه می‌شود که یا $f(x) \in G$، درنتیجه $x \in f^{-1}(G)$، یا $f(x) \in H$ که‌دراین حالت $x \in f^{-1}(H)$. بنابراین

$$f^{-1}(G \cup H) \subseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H).$$

(ت) اگر $x \in f^{-1}(G \setminus H)$، آنگاه $f(x) \in G \setminus H$. بنابراین $x \in f^{-1}(G)$ و $x \notin f^{-1}(H)$، که نتیجه می‌دهد

$$f^{-1}(G \setminus H) \subseteq f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H).$$

بعکس، اگر $w \in f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$، آنگاه $f(w) \in G$ و $f(w) \notin H$ بنابراین $f(w) \in G \setminus H$ و از آن نتیجه می‌شود که

$$f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \setminus H). \square$$

تمرین

۲.الف. ثابت کنید که تعریف ۲.۲ واقعاً یك‌تابع به‌دست می‌دهد.

۲.ب. فرض کنید $A = B = \mathbf{R}$ و زیرمجموعهٔ $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ از $A \times B$ را درنظر بگیرید. آیا این مجموعه یك تابع بادامنهٔ در $\mathbf{R}$ و برد در $\mathbf{R}$ است؟

۲.پ. زیرمجموعهٔ $D=\{(x,y) : |x|+|y|=1\}$ از $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ را درنظر بگیرید؟ این مجموعه را با عبارات توصیف کنید. آیا این مجموعه یك تابع است؟

۲.ت. مثالی از دو تابع f و g در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ بزنید به قسمی که $f\neq g$ ولی $f\circ g=g\circ f$.

۲.ث. ثابت کنید که اگر f یك تابع یك به یك از A به B باشد، آنگاه

$$f^{-1}=\{(b,a) : (a,b)\in f\}$$

یك تابع و یك به یك است.

۲.ج. فرض کنید f یك تابع یك به یك باشد نشان دهیدکه برای هر x در $D(f)$ داریم $f^{-1}\circ f(x)=x$ و برای هر y در $R(f)$ داریم $f\circ f^{-1}(y)=y$.

۲.چ. فرض کنید f و g دو تابع باشند و برای هر x در $D(f)$ داشته باشیم $g\circ f(x)=x$. نشان دهیدکه f یك به یك است و $R(f)\subseteq D(g)$ و $R(g)\supseteq D(f)$.

۲.ح. فرض کنید f و g دو تابع باشند به‌قسمی که

برای هر x در $D(f)$ ، $g\circ f(x)=x$ ،

برای هر y در $D(g)$ ، $f\circ g(y)=y$.

ثابت کنیدکه $g=f^{-1}$.

۲.خ. نشان‌دهیدکه تصویرمستقیم $f(E)$ تهی‌است اگر وفقط اگر $E\cap D(f)=\varnothing$.

۲.د. فرض کنید f تابعی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشدکه با $f(x)=x^2$ داده شده است و $E=\{x\in\mathbf{R} : -1\leqslant x\leqslant 0\}$ و $F=\{x\in\mathbf{R} : 0\leqslant x\leqslant 1\}$ را درنظر بگیرید. دراین صورت $E\cap F=\{0\}$ و $f(E\cap F)=\{0\}$ درحالی که

$$f(E)=f(F)=\{y\in\mathbf{R} : 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

بنابراین $f(E\cap F)$ یك زیرمجموعهٔ سرهٔ $f(E)\cap f(F)$ است.حال ۰ را از Eو F بردارید و نتیجه را بررسی کنید.

۲.ذ. اگر f ، E و F نمادهای تعریف شده درتمرین ۲.د باشند، آنگاه

$$E\setminus F=\{x\in\mathbf{R} : -1\leqslant x<0\} \quad \text{و} \quad f(E)\setminus f(F)=\varnothing$$

بنابراین

$$f(E\setminus F)\subseteq f(E)\setminus f(F)$$

نتیجه نمی‌شود.

۲.ر. نشان دهیدکه اگر f تابعی یك به یك در $D(f)$ به $R(f)$ و H زیرمجموعهٔ $R(f)$ باشد، آنگاه تصویر وارون H تحت f برتصویرمستقیم H تحت f^{-1} منطبق‌است.

۲.ز. اگر f و g توابع مفروض در تعریف ۲.۲ باشند، آنگاه

$$D(g\circ f)=f^{-1}(D(g)).$$

بخش ۳ مجموعه‌های با پایان و بی‌پایان

هدف این بخش بسیار محدود و عبارت است از معرفی اصطلاحهای «با پایان»، «شمارش پذیر» و «بی‌پایان». گرچه دراین بخش زمینه‌ای برای مطالعهٔ اعداد اصلی فراهم می‌شود، اما این مطالعه دراینجا دنبال نخواهد شد. البته نظریهٔ اعداد اصلی و ترتیبی به‌خودی خود جالب‌اند ولی در این کتاب قسمت بسیار مختصری از این مباحث واقعاً مورد نیاز است.[۱]

فرض ما بر این است که خواننده با مجموعهٔ اعداد طبیعی آشنایی دارد. این مجموعه را با نماد $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم؛ عناصر $\mathbf{N}$ با نمادهای آشنای

$$1، 2، 3، \ldots$$

نشان داده می‌شوند. چنانچه $n،m\in\mathbf{N}$، همهٔ ما معنی n کوچکتر از m یا برابر با m است را به‌طور شهودی می‌فهمیم. اکنون این مفهوم را به عاریت می‌گیریم با توجه به اینکه معنی کاملاً دقیق آن نیاز به‌تحلیلی بیش از این دارد. فرض‌کنیم هر زیرمجموعهٔ غیر تهی $\mathbf{N}$ دارای کوچکترین عنصر است. این خاصیت مهمی از $\mathbf{N}$ است؛ گاهی این خاصیت را باجملهٔ $\mathbf{N}$ خوش ترتیب است بیان می‌کنیم. خاصیت خوش ترتیبی هم‌ارز استقرای ریاضی است. به کار بردن استدلالهای مبتنی براستقرای ریاضی را موجه خواهیم شمرد و فرض می‌کنیم که خواننده با آن آشناست.

منظور از یك **قطعهٔ آغازی** $\mathbf{N}$ مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی است که کوچکتر از عنصر ثابتی از $\mathbf{N}$ یا برابر آن هستند. درنتیجه یك قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ مانند S_n عنصر $n\in\mathbf{N}$ را مشخص می‌کند و برعکس n، قطعهٔ آغازی S_n را به‌صورت زیر مشخص می‌کند:

x عنصر $\mathbf{N}$ و متعلق به S_n است اگر و فقط اگر $x\leqslant n$.

برای مثال: زیرمجموعهٔ $S_۲=\{۱،۲\}$ قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ مشخص شده با عدد طبیعی ۲ است؛ زیرمجموعهٔ $S_۴=\{۱،۲،۳،۴\}$ قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ مشخص شده با عدد طبیعی ۴ است؛ ولی $\{۱،۳،۵\}$ زیرمجموعهٔ $\mathbf{N}$ است و یك قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ نیست، چراکه شامل ۳ و ۵ است بدون اینکه شامل ۲ و ۴ باشد.

۱.۳ تعریف. مجموعهٔ B را **باپایان** گوییم هرگاه تهی‌باشد و یا یك دوسویی وجود داشته باشد به‌دامنهٔ B و بردی دریك قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$. هرگاه چنین تابعی وجود نداشته باشد، مجموعه را **بی‌پایان** گوییم. اگر یك دو سویی از B روی $\mathbf{N}$ وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه را **شمارش پذیر بی‌پایان** گوییم. اگر مجموعه‌ای با پایان و یا شمارش‌پذیر

---

۱. خواننده‌ای که مایل به‌فراگیری این مطالب است می‌تواند به‌کتاب هالموس که در مراجع آمده است، مراجعه کند.

بی‌پایان باشد، آن را **شمارش پذیر** می‌نامیم.

وقتی که تابعی یك به یك به دامنهٔ B و برد C وجود داشته باشد، گاهی می‌گوییم که B را می‌توان با C در تناظر یك به یك قرار دارد. با استفاده از این اصطلاح، می‌توان تعریف ۱.۳ را به‌این‌صورت بازگو کرد که مجموعهٔ B را با پایان گوییم هرگاه تهی باشد و یا بتوان آن را با زیرمجموعه‌ای از یك قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ در تناظر یك به یك قرار داد. مجموعهٔ B را شمارش پذیر بی‌پایان گوییم هرگاه بتوان آن را با تمام $\mathbf{N}$ در تناظر یك به یك قرار دارد.

باید توجه داشت که، بنا بر تعریف، یك مجموعه مانند B یا با پایان و یا بی‌پایان است. با این حال، ممکن است B به صورتی تعریف شود که تصمیم درمورد با پایان بودن و یا بی‌پایان بودن آن ساده نباشد.

زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ به‌صورتهای $\{۱،۳،۵\}$، $\{۲،۴،۵،۸،۱۰\}$، $\{۲،۳،...،۱۰۰\}$ با پایان هستند، زیرا با آنکه قطعه‌های آغازی $\mathbf{N}$ نیستند ولی در قطعه‌های آغازی $\mathbf{N}$ جا دارند و بنابراین می‌توان آنها را درتناظر یك به‌یك با زیرمجموعه‌هایی ازقطعه‌های آغازی $\mathbf{N}$ قرار داد. E مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج:

$$E = \{۲،۴،۶،۸،...\}$$

و O مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی فرد:

$$O = \{۱،۳،۵،۷،...\}$$

قطعه‌های آغازی $\mathbf{N}$ نیستند ولی چون می‌توان آنها را با تمام $\mathbf{N}$ در تناظر یك به یك قرار داد (چگونه؟)، هردو شمارش پذیر بی‌پایان هستند.

با آنکه $\mathbf{Z}$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیح:

$$\mathbf{Z} = \{...، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ...\}$$

شامل مجموعه $\mathbf{N}$ است، می‌توان دید که $\mathbf{Z}$ شمارش پذیر بی‌پایان است. (چگونه؟)

اکنون به ذکر چند قضیه بدون اثبات می‌پردازیم. این طور به‌نظر می‌رسد که بهتر است درمطالعهٔ اول آنها را بدون بررسی بیشتر بپذیریم، به‌هرحال، در بار دوم، سعی در اثبات این قضیه‌ها برای خواننده ثمربخش است، دراین کار خواننده خواهد دید که به‌کار بردن خاصیت استقرایی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ مفید است.[۱]

۲.۳ قضیه. مجموعهٔ B شمارش پذیر است اگر و فقط اگر تابعی یك به یك به دامنهٔ B و برد در $\mathbf{N}$ وجود داشته باشد.

---

۱. ر. ك. کتاب هالموس و کتاب هامیلتون ــ لاندین در مراجع.

۳.۳ قضیه. هر زیر مجموعهٔ یك مجموعهٔ با پایان، با پایان است. هرزیرمجموعهٔیك مجموعهٔ شمارش پذیر، شمارش پذیر است.

۴.۳ قضیه. اجتماع یك دستهٔ با پایان از مجموعه‌های با پایان ، یك مجموعهٔ با پایان است. اجتماع یك دستهٔ شمارش پذیر از مجموعه‌های شمارش پذیر، یك‌مجموعهٔ شمارش پذیر است.

یك نتیجهٔ قسمت دوم قضیهٔ ۴.۳ این است که $\mathbf{Q}$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد گویا ، شمارش پذیراست. (یادآور می‌شویم که عددگویا کسری است به‌صورت m/n که در آن m و n اعداد صحیح هستند و $n \neq ۰$.) برای اثبات شمارش پذیری $\mathbf{Q}$ مجموعه‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۰ = \left\{ ۰ \right\},$$

$$A_۱ = \left\{ \frac{۱}{۱}, -\frac{۱}{۱}, \frac{۲}{۱}, -\frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۱}, -\frac{۳}{۱}, \dots \right\},$$

$$A_۲ = \left\{ \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۲}, -\frac{۲}{۲}, \frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}, \dots \right\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = \left\{ \frac{۱}{n}, -\frac{۱}{n}, \frac{۲}{n}, -\frac{۲}{n}, \frac{۳}{n}, -\frac{۳}{n}, \dots \right\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

توجه داریم که هریك از A_nها شمارش پذیرند و اجتماع آنها برابر با تمام $\mathbf{Q}$ است. بنابراین قضیهٔ ۴.۳ حکم می‌کند که $\mathbf{Q}$ شمارش پذیر است. در واقع $\mathbf{Q}$ را می‌توان با «روش قطری» شمارش نمود:

$$۰, \frac{۱}{۱}, -\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۱}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \dots .$$

با استفاده از این نوع استدلال خواننده می‌تواند برهانی برای قضیهٔ ۴.۳ بسازد. تمرین ۳.ذ را نیز ملاحظه نمایید.

شمارش ناپذیری R و I

با آنکه‌مجموعهٔ اعداد گویا شمارش‌پذیر است، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ شمارش‌پذیر نیست. در واقع ، $\mathbf{I}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی x با شرط $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ ، شمارش پذیر نیست.

برای اثبات این مطلب از استدلال زیبای «قطری» کانتور[1] استفاده می‌کنیم. فرض کنیم می‌دانیم هرعدد حقیقی x با شرط $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ دارای نمایش اعشاری به صورت $x = ۰/a_۱a_۲a_۳ \cdots$ است که در آن هر a_k یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ می‌باشد. باید توجه داشت که برخی از اعداد حقیقی دو نمایش به‌این شکل دارند (برای مثال، عددگویای $\frac{۱}{۱۰}$ دارای دو نمایش اعشاری

$$۰/۱۰۰۰ \cdots \quad \text{و} \quad ۰/۰۹۹۹ \cdots$$

است). می‌توانیم یکی از دو نمایش را انتخاب کنیم. ولی الزامی دراین‌کار نیست. چون بی‌نهایت عددگویا درفاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ هست (چرا؟)، مجموعهٔ $\mathbf{I}$ نمی‌تواند با پایان باشد. اکنون نشان می‌دهیم که‌این‌مجموعه‌شمارش‌پذیر بی‌پایان نیست. فرض کنید $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots$ یك شمارش تمام اعداد حقیقی که در $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ صدق می‌کنند باشد که به‌صورت زیر داده شده است.

$$x_۱ = ۰/a_۱a_۲a_۳ \cdots$$
$$x_۲ = ۰/b_۱b_۲b_۳ \cdots$$
$$x_۳ = ۰/c_۱c_۲c_۳ \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

اکنون فرض می‌کنیم $y_۱$ رقمی مخالف ۰، $a_۱$، و ۹ باشد؛ $y_۲$ رقمی مخالف ۰، $b_۲$، و ۹ باشد؛ $y_۳$ رقمی مخالف ۰، $c_۳$، و ۹ باشد، و ...، حال عدد y با نمایش اعشاری

$$y = ۰/y_۱y_۲y_۳ \cdots$$

را در نظر می‌گیریم که مسلماً در شرط $۰ \leqslant y \leqslant ۱$ صدق می‌کند. عدد y از آن اعدادی نیست که دو نمایش اعشاری دارند، چراکه y_n مخالف صفر و نه است. علاوه براین، به ازای هر n، $y \neq x_n$ (چون در نمایشهای اعشاری y و x_n رقم n ام متفاوت هستند). بنابراین، هردستهٔ شمارش پذیر بی‌پایان از اعداد حقیقی دراین فاصله حداقل یکی از اعداد حقیقی متعلق به این فاصله را شامل نیست. لذا، این فاصله یك مجموعهٔ شمارش‌پذیر نیست.

اگر A یك مجموعهٔ بی‌پایان باشد؛ فرض می‌کنیم یك تناظر یك به یك بین یك زیرمجموعهٔ A و تمام $\mathbf{N}$ برقرار است. به‌عبارت دیگر، فرض می‌کنیم هرمجموعهٔ بی‌پایان شامل یك زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان است. این فرض صورت ضعیفی از «اصل انتخاب» است که یکی از اصول موضوع معمول درنظریهٔ مجموعه‌هاست. پس از آنکه

---

۱. گئورگ کانتور Georg Cantor (۱۸۴۵–۱۹۱۸) در سن پترزبورگ متولد شده، در برلین با وایرشتراس تحصیل کرده و در دانشگاه هاله تدریس نموده است. او به خاطر کارهایش درنظریهٔ مجموعه‌ها که درسالهای ۱۸۷۴–۱۸۹۵ تدوین شده، شناخته شده است.

خواننده مطالب این کتاب را هضم کرد می‌تواند به‌بررسی اصل موضوعی این مبانی که ما به‌طریقی غیرصوری مطرح کرده‌ایم، بپردازد. با این حال توصیه می‌شود بیان فوق را به عنوان یك اصل موقت بپذیرد و بعدها به‌جای آن اصل پربارتری از نظریهٔ مجموعه‌ها را انتخاب کند.

تمرین

۳.الف. یك تناظر یك به‌یك بین مجموعهٔ اعداد زوج E و $\mathbf{N}$ برقرار کنید.

۳.ب. یك تناظر یك به یك بین مجموعهٔ اعداد فرد O و $\mathbf{N}$ برقرار کنید.

۳.پ. یك تناظر یك به یك بین $\mathbf{N}$ و یك زیرمجموعهٔ سره $\mathbf{N}$ برقرار کنید.

۳.ت. هرگاه A در یك قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ واقع باشد، با استفاده ازخاصیت خوش‌ترتیبی $\mathbf{N}$ یك دو سویی از A روی یك قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ تعریف کنید.

۳.ث. یك دستهٔ شمارش پذیر از مجموعه‌های باپایان مثال بزنید که اجتماع آنها با پایان نباشد.

۳.ج. بااستفاده از این مطلب که هرمجموعهٔ بی‌پایان دارای یك زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان است، نشان دهید که هرمجموعهٔ بی‌پایان را می‌توان بایك‌زیرمجموعهٔ سرهٔ آن در تناظر یك به یك قرار داد.

۳.چ. نشان دهید که اگر مجموعهٔ A با مجموعهٔ B در تناظر یك به‌یك باشد، آنگاه B را می‌توان با A در تناظر یك به یك قرار داد.

۳.ح. نشان دهید که اگر مجموعهٔ A را بتوان با مجموعهٔ B در تناظر یك به یك و B را با مجموعهٔ C در تناظر یك به یك قرار داد، آنگاه A را می‌توان با C در تناظر یك به یك قرار داد.

۳.خ. با استفاده از استقرای ریاضی روی $n\in\mathbf{N}$، نشان دهید که اگر $m<n$، قطعهٔ آغازی مشخص شده با n را نمی‌توان با قطعهٔ آغازی مشخص شده با $m\in\mathbf{N}$ درتناظر یك به یك قرار داد.

۳.د. ثابت کنید که $\mathbf{N}$ را نمی‌توان با هیچ قطعهٔ آغازی $\mathbf{N}$ در تناظر یك به یك قرار داد.

۳.ذ. به ازای هر $n\in\mathbf{N}$ بنویسید $A_n=\{a_{nj} : j\in\mathbf{N}\}$ و فرض کنید که به ازای $n ، m\in\mathbf{N}$ با شرط $n\neq m$ داشته باشیم $A_n\cap A_m=\varnothing$. در این صورت نشان دهید که تابع $f(n ، j)=\frac{۱}{۲}(n+j-۲)(n+j-۱)+n$ شمارشی از مجموعهٔ $\cup\{A_n : n\in\mathbf{N}\}$ را به دست می‌دهد.

فصل اول
اعداد حقیقی

دراین فصل به‌بحث‌خواص دستگاه اعداد حقیقی می‌پردازیم. باآنکه ساختن این دستگاه‌از یك مجموعهٔ ساده‌تر (نظیرمجموعهٔ اعدادطبیعی **N** ویامجموعهٔ اعدادگویای **Q**) امکان‌پذیر است، ازاین راه عمل نمی‌کنیم. به‌جای آن فهرستی ازبعضی خواص دستگاه اعدادحقیقی را ارائه می‌دهیم ونشان می‌دهیم چگونه دیگرخواص را می‌توان ازآنها به‌دست آورد.

به‌خاطر اینکه مطلب روشن شود ترجیح می‌دهیم که تمام این خواص دستگاه اعداد حقیقی را یکجا بیان نکنیم. بلکه درآغاز، دربخش ۴، «خواص جبری» را براساس دو عمل جمع وضرب معرفی می‌کنیم وبرخی از نتایج آنها را به‌اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم. آنگاه «خواص ترتیبی» رامعرفی می‌کنیم. دربخش ۶، با افزودن «خاصیت کمال» قدم نهایی را برمی‌داریم. چند دلیل برای این روش تدریجی وجود دارد. اول‌اینکه‌وقتی قرار است تعدادی‌خاصیت بررسی شوند، بهتراست که هردفعه به‌چندتایی ازآنها بپردازیم. بعلاوه، طبیعی‌تر است اثباتهای مورد نیاز مراحل مقدماتی جبری قبل از اثباتهای دیگر بیایند. بالاخره، چون روشهای جالب دیگری برای افزودن «خاصیت کمال» وجود دارد، مایلیم این خاصیت را جدا از دیگرفرضها بیان‌کنیم.

یکی ازهدفهای بخشهای ۴ و ۵ به‌دست دادن نمونهٔ برهانهایی است برای قضایای مقدماتی که از فرضهای تصریح شده، به‌دست می‌آیند. تجربه نشان می‌دهد که دانشجویانی که تاکنون با اثباتهای مشکل ریاضی زیاد روبرو نبوده‌اند می‌توانند استدلالهای این دو بخش را بسادگی درك کنند وسپس به‌بخش ۶ بپردازند. اما، آن عده از دانشجویانی که‌با روش اصل‌موضوعی و شگرد برهانی‌آشنا هستند، می‌توانند بعدازیك نگاه‌اجمالی به‌بخشهای

۴ و ۵، وارد بخش ۶ شوند.

در بخش ۷، مفهوم بریدگی در دستگاه اعداد حقیقی معرفی می‌شود وانواع مختلف حجره‌ها وفواصل تعریف می‌گردند. خاصیت مهم حجره‌های آشیانی در $\mathbf{R}$ ثابت می‌شود، و مجموعهٔ کانتور به‌اختصار مورد بحث قرار می‌گیرد.

بخش ۴ خواص جبری $\mathbf{R}$

دراین بخش ساختمان «جبری» دستگاه اعداد حقیقی مورد بحث ما خواهد بود. مختصر بگوییم، اعداد حقیقی به‌زبان جبرمجرد یك «هیأت» تشکیل می‌دهند. حال به‌شرح این مطالب می‌پردازیم.

منظور از **یك عمل دوتایی** درمجموعهٔ F تابعی مانند B به‌دامنهٔ $F\times F$ و برد در F است. به‌جای اینکه مقدارعمل‌دوتایی B درنقطهٔ (a, b) واقع در $F\times F$ را با $B(a, b)$ نشان دهیم، مرسوم است که از نمادهایی نظیر aBb یا $a+b$ ویا $a\cdot b$ استفاده شود.

۱.۴ خواص جبری $\mathbf{R}$. درمجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ دوعمل دوتایی وجود دارند (که به‌ترتیب با نمادهای $+$ و $\cdot$ نمایش داده می‌شوند و به‌جمع وضرب موسوم‌اند) و دارای خواص[1] زیرمی‌باشند:

(ج۱) به‌ازای هر a و b در $\mathbf{R}$، $a+b=b+a$؛

(ج۲) به‌ازای هر a و b و c در $\mathbf{R}$، $(a+b)+c=a+(b+c)$؛

(ج۳) عنصری مانند $\circ$ در $\mathbf{R}$ هست به‌قسمی که به‌ازای هر a در $\mathbf{R}$، $\circ+a=a$ و $a+\circ=a$:

(ج۴) به‌ازای هرعنصر a در $\mathbf{R}$ عنصری مانند $-a$ در $\mathbf{R}$ هست به‌قسمی که $a+(-a)=\circ$ و $(-a)+a=\circ$؛

(ض۱) به‌ازای هر a و b در $\mathbf{R}$، $a\cdot b=b\cdot a$؛

(ض۲) به‌ازای هر a و b و c در $\mathbf{R}$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$؛

(ض۳) عنصر ۱ در $\mathbf{R}$ متمایز از $\circ$ است و دارای این خاصیت است که به‌ازای هر a در $\mathbf{R}$، $1\cdot a=a$ و $a\cdot 1=a$؛

(ض۴) به‌ازای‌هرعنصر $a\neq\circ$ در $\mathbf{R}$ عنصر $\frac{1}{a}$ در $\mathbf{R}$ هست به‌قسمی که $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$ و $\left(\frac{1}{a}\right)\cdot a=1$.

(پ) به‌ازای هر a و b و c در $\mathbf{R}$، $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ و $(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$.

---

۱. این فهرست «مینیمم» درنظرگرفته نشده است. مثلاً احکام دوم در(ج۳) و (ج۴) ازاحکام اول با استفاده از (ج۱) نتیجه می‌شوند.

خواننده یقیناً با این خواص آشناست. اکنون چند نتیجهٔ ساده (ولی مهم) این خواص را به‌دست می‌آوریم. نخست ثابت می‌کنیم که ۰ تنها عنصر $\mathbf{R}$ است که در (ج۳) صدق می‌کند، و ۱ تنها عنصر صادق در (ض۳) می‌باشد.

۲.۴ قضیه. (الف) اگر z و a عناصر $\mathbf{R}$ باشند به‌قسمی که $z+a=a$، آنگاه $z=0$.

(ب) اگر w و $b\neq 0$ عناصر $\mathbf{R}$ باشند به‌قسمی که $w\cdot b=b$، آنگاه $w=1$.

برهان. (الف) بنا به‌فرض $z+a=a$. با افزودن $-a$ به‌طرفین این رابطه و با استفاده از (ج۴)، (ج۲)، (ج۴)، و (ج۳) به‌دست می‌آید.

$$0=a+(-a)=(z+a)+(-a)=z+(a+(-a))=z+0=z.$$

قسمت (ب) را به‌عنوان تمرین اثبات کنید. توجه داشته باشید که در آن از فرض $b\neq 0$ استفاده می‌شود. □

حال نشان می‌دهیم که خواص مفروض (ج۴) و (ض۴) عناصر $-a$ و $\frac{1}{a}$ (وقتی $a\neq 0$) را به‌طور یکتا مشخص می‌کنند.

۳.۴ قضیه. (الف) اگر a و b عناصر $\mathbf{R}$ باشند و $a+b=0$، آنگاه $b=-a$.

(ب) اگر $a\neq 0$ و b عناصر $\mathbf{R}$ باشند و $a\cdot b=1$، آنگاه $b=\frac{1}{a}$.

برهان. (الف) اگر $a+b=0$ با افزودن $-a$ به طرفین آن داریم $(-a)+(a+b)=-a+0$. حال با استفاده از (ج۲) در طرف چپ و (ج۳) در طرف راست نتیجه می‌گیریم که

$$((-a)+a)+b=-a.$$

چنانچه از (ج۴) و (ج۳) درسمت چپ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید $b=-a$.

قسمت (ب) را به‌عنوان تمرین اثبات کنید. توجه داشته باشید که در آن از فرض $a\neq 0$ استفاده می‌شود. □

خواص (ج۴) و (ض۴) امکان حل معادلات

$$a+x=0,\quad a\cdot x=1\quad (a\neq 0),$$

را نسبت به x تضمین می‌کنند وقضیهٔ ۳.۴ یکتایی جوابها را ایجاب می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم که طرف راست این معادله‌ها می‌توانند هرعنصر دلخواه $\mathbf{R}$ باشند.

۴.۴ قضیه. (الف) فرض‌کنیم a و b عناصر دلخواه $\mathbf{R}$ باشند. در این صورت معادلهٔ $a+x=b$ تنها یك جواب دارد و آن $x=(-a)+b$ است.
(ب) فرض کنیم $a\neq 0$ و b عناصر دلخواه $\mathbf{R}$ باشند. در این صورت معادلهٔ $a\cdot x=b$ جواب یکتا دارد و آن $x=(1/a)\cdot b$ است.

برهان. (الف) چون $a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=0+b=b$، واضح است که $x=(-a)+b$ یك جواب معادلهٔ $a+x=b$ است. برای اثبات اینکه این تنها جواب است، فرض می‌کنیم x_1 جواب دیگر این معادله باشد، بنابراین

$$a+x_1=b.$$

با افزودن $-a$ به‌طرفین برابری فوق داریم

$$(-a)+(a+x_1)=(-a)+b.$$

حال با استفاده از (ج۳)، (ج۴)، و (ج۲) نتیجه می‌گیریم که

$$x_1=0+x_1=((-a)+b)+x_1=(-a)+(a+x_1)=(-a)+b.$$

بنابراین $x_1=(-a)+b$.
قسمت (ب) را به‌عنوان تمرین اثبات کنید. □

۵.۴ قضیه. اگر a و b عناصر $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه
(الف) $a\cdot 0=0$؛ (ب) $-a=(-1)\cdot a$؛
(پ) $-(a+b)=(-a)+(-b)$؛ (ت) $-(-a)=a$؛
(ث) $(-1)\cdot(-1)=1$.

برهان. (الف) با توجه به (ض۳) داریم $a\cdot 1=a$. بنابراین

$$\begin{aligned}a+a\cdot 0&=a\cdot 1+a\cdot 0=a\cdot(1+0)\\&=a\cdot 1=a.\end{aligned}$$

اگر قضیهٔ ۲.۴ (الف) را به‌کار بریم نتیجه می‌گیریم که $a\cdot 0=0$.
(ب) دیده می‌شود که

$$\begin{aligned}a+(-1)\cdot a&=1\cdot a+(-1)\cdot a=(1+(-1))\cdot a\\&=0\cdot a=0.\end{aligned}$$

لذا با توجه به‌قضیهٔ ۳.۴ (الف) نتیجه می‌گیریم که $(-1)\cdot a=-a$.
(پ) داریم

$$\begin{aligned}-(a+b)&=(-1)\cdot(a+b)=(-1)\cdot a+(-1)\cdot b\\&=(-a)+(-b).\end{aligned}$$

(ت) با توجه به (ج۴) داریم $(-a)+a=0$. لذا، طبق حکم یکتایی قضیهٔ ۳.۴ (الف) نتیجه می‌شود که $-(-a)=a$.
(ث) در قسمت (ب) می‌گیریم $a=-1$، به دست می‌آید

$$-(-1)=(-1)\cdot(-1).$$

بنابراین از قسمت (ت) به‌ازای $a=1$ حکم نتیجه می‌شود. □

۶.۴ قضیه. (الف) اگر $a\in\mathbf{R}$ و $a\neq 0$، آنگاه $\frac{1}{a}\neq 0$ و $1/(1/a)=a$.
(ب) اگر $a,b\in\mathbf{R}$ و $a\cdot b=0$، آنگاه یا $a=0$ و یا $b=0$.
(پ) اگر $a,b\in\mathbf{R}$، آنگاه $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.
(ت) اگر $a\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$، آنگاه $1/(-a)=-(1/a)$.

برهان. (الف) اگر $a\neq 0$، آنگاه $1/a\neq 0$، زیرا در غیراین صورت $1=a\cdot(1/a)=a\cdot 0=0$ که با(ض۳)متناقض است. چون $a\cdot(1/a)=1$، از قضیهٔ ۳.۴ (ب) نتیجه می‌شود که $1/(1/a)=a$.
(ب) فرض می‌کنیم $a\cdot b=0$ و $a\neq 0$. اگر طرفین رابطه را در $1/a$ ضرب کنیم‌داریم

$$b=1\cdot b=((1/a)\cdot a)\cdot b=(1/a)\cdot(a\cdot b)$$
$$=(1/a)\cdot 0=0.$$

استدلال مشابهی برای حالت $b\neq 0$ برقرار است.
(پ) از قضیهٔ ۵.۴ داریم $-a=(-1)\cdot a$ و $-b=(-1)\cdot b$؛ در نتیجه

$$(-a)\cdot(-b)=((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b)$$
$$=(a\cdot(-1))\cdot((-1)\cdot b)$$
$$=a\cdot((-1)\cdot(-1))\cdot b=a\cdot 1\cdot b$$
$$=a\cdot b.$$

(ت) اگر $a\neq 0$، آنگاه $1/a\neq 0$ و $-a\neq 0$. چون $a.(1/a)=1$، ازقسمت (پ)نتیجه می‌شود که $(-a)\cdot(-(1/a))=1$.چنانچه قضیهٔ ۳.۴ (ب) را به‌کاربریم، نتیجه می‌گیریم که همان‌طور که‌ادعا شده بود، $1/(-a)=-(1/a)$.

اعدادگویا

از اینجا به‌بعد ضرب را با نقطه نمایش نمی‌دهیم و بجای $a\cdot b$ می‌نویسیم ab. طبق معمول به جای aa می‌نویسیم a^2، به‌جای $(a^2)a$ می‌نویسیم $aaa=a^3$، و اگر $n\in\mathbf{N}$

تعریف می‌کنیم $a^{n+1}=(a^n)a$ با استفاده از استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که اگر $m,n\in\mathbf{N}$،
آنگاه به‌ازای هر $a\in\mathbf{R}$،

$$a^{m+n}=a^m a^n. \qquad (*)$$

به‌همین‌نحو، به‌جای $1+1$ می‌نویسیم ۲، به جای $1+(1+1)=1+2$ می‌نویسیم ۳،
ومانند اینها. علاوه براین، عموماً به‌جای $(-a)+b=b+(-a)$ می‌نویسیم $b-a$ و
اگر $a\neq 0$، معمولاً به‌جای $\left(\frac{1}{a}\right)\cdot b=b\cdot\left(\frac{1}{a}\right)$ می‌نویسیم:

$$b/a \quad \text{یا} \quad \frac{b}{a}.$$

همچنین، a^{-1} را به‌جای $1/a$ و a^{-n} را به‌جای $1/a^n$ خواهیم نوشت. دراین صورت
می‌توان نشان داد که دستور $(*)$ بالا، وقتی $a\neq 0$، به‌ازای $m,n\in\mathbf{Z}$ نیز برقرار است،
به‌شرط آنکه قراردادهای $a^0=1$ و $a^1=a$ را قبول نماییم.
عناصر $\mathbf{R}$ به‌شکل

$$\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad -\frac{b}{a}$$

را وقتی $a,b\in\mathbf{N}$ و $a\neq 0$ **اعدادگویا** گوییم، ومجموعهٔ تمام اعدادگویا در $\mathbf{R}$ را با
نماد متعارف $\mathbf{Q}$ نمایش می‌دهیم. تمام عناصر $\mathbf{R}$ راکه‌گویا نیستند **اعداد اصم** (یا **گنگ**)
می‌نامیم.

این بخش را با اثباتی از این مطلب که عددگویایی که مربعش ۲ باشد وجودندارد
به‌پایان می‌بریم.

۷.۴ قضیه. عددگویایی مانند r وجود ندارد به‌قسمی که $r^2=2$.

برهان. بعکس، فرض کنیم $(p/q)^2=2$، که در آن p و q اعدادی صحیح هستند.
می‌توان، بدون‌کاستن ازکلیت قضیه، فرض کرد که p و q دارای عامل مشترك صحیح
نیستند. (چرا؟) از $p^2=2q^2$ نتیجه می‌شود که p باید عددی زوج باشد (زیرا اگر
$p=2k+1$ فرد باشد، آنگاه $p^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ فرد
است)، بنابراین، به‌ازای عدد صحیحی چون k، $p=2k$ و لذا $4k^2=2q^2$. در نتیجه
$q^2=2k^2$ پس q نیز باید زوج باشد. بدین ترتیب p و q هردو بر ۲ بخش‌پذیرند که با
فرض ما متناقض است. □

تمرین

۰.۴ الف. قسمت (ب) ازقضیهٔ ۲.۴ را ثابت کنید.

۴. ب. قسمت (ب) ازقضیهٔ ۳.۴ را ثابت کنید.
۴. پ. قسمت (ب) ازقضیهٔ ۴.۴ را ثابت کنید.
۴. ت. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که اگر $a \in \mathbf{R}$ و $m, n \in \mathbf{N}$، آنگاه $a^{m+n} = a^m a^n$.
۴. ث. نشان دهید که اگر $a \in \mathbf{R}$، $a \neq 0$ و $m, n \in \mathbf{Z}$، آنگاه

$$a^{m+n} = a^m a^n.$$

۴. ج. با استفاده از استدلال قضیهٔ ۷.۴ نشان دهید که عددگویایی مانند s وجود ندارد که $s^2 = 6$.
۴. چ. با تغییر مناسبی در استدلال قضیهٔ ۷.۴ نشان دهید که عدد گویایی مانند t نیست به‌قسمی که $t^2 = 3$.
۴. ح. اگر $\xi \in \mathbf{R}$ اصم و $r \in \mathbf{R}$ با شرط $r \neq 0$ گویا باشد، نشان دهید که $r + \xi$ و $r\xi$ اصم هستند.

بخش ۵ خواص ترتیبی $\mathbf{R}$

هدف از این بخش معرفی خواص مهم «ترتیبی» $\mathbf{R}$ است که نقش مهمی در بخشهای بعدی ایفا می‌کنند. ساده‌ترین راه برای این کار استفاده از مفهوم «اکیداً مثبت» است که اکنون به‌شرح آن می‌پردازیم.

۱.۵ خواص ترتیبی $\mathbf{R}$. یك زیرمجموعهٔ غیرتهی $\mathbf{R}$ مانند P موسوم به مجموعهٔ **اعداد حقیقی اکیداً مثبت** وجود دارد که دارای خواص زیراست:

(یك) اگر a و b به P متعلق باشند، آنگاه $a+b$ نیز به P متعلق است.
(دو) اگر a و b به P متعلق باشند، آنگاه ab نیز به P متعلق است.
(سه) اگر a به $\mathbf{R}$ متعلق باشد، آنگاه دقیقاً یکی (یعنی یکی وفقط یکی) از روابط زیر برقرار است:

$$a \in P, \quad a = 0, \quad -a \in P.$$

شرط (سه) گاهی **خاصیت سه‌گانگی** نامیده می‌شود. این شرط ایجاب می‌کند که مجموعهٔ $N = \{-a : a \in P\}$، موسوم به مجموعهٔ **اعداد حقیقی اکیداً منفی** عنصر مشترکی با P نداشته باشد. درواقع کل مجموعهٔ $\mathbf{R}$ اجتماع سه مجموعهٔ مجزای P، $\{0\}$ و N است.

۲.۵ تعریف. اگر $a \in P$، می گوییم a یك **عدد حقیقی اکیداً مثبت** است و می‌نویسیم $a > 0$. اگر a در P ویا ۰ باشد می گوییم a یك **عدد حقیقی مثبت** است و می‌نویسیم

$-a \in P$ چنانچه $a \geqslant 0$. ، می گوییم a یک عدد حقیقی اکیداً منفی است و می نویسیم $a < 0$. بالاخره هرگاه $-a$ در P و یا 0 باشد، می گوییم a یك عدد حقیقی منفی‌است و می‌نویسیم $a \leqslant 0$.

باید توجه داشت که، برطبق اصطلاحی که هم‌اکنون بیان شد، عدد 0 هم مثبت وهم منفی است، این تنها عددی است که این وضعیت دوگانه را دارد. این اصطلاح ممکن است اول کمی عجیب بنماید، ولی خواهید دیدکه اصطلاح مناسبی است. برخی از مؤلفین لفظ «مثبت» را برای عناصر P ولفظ «غیرمنفی» را برای عناصر $P \cup \{0\}$ به‌کار می‌برند.

اکنون به‌معرفی رابطه‌های ترتیبی می‌پردازیم.

۳.۵ تعریف. فرض‌کنیم a و b عناصر $\mathbf{R}$ باشند. اگر $a-b \in P$، آنگاه می‌نویسیم $a > b$. اگر $-(a-b) \in P$، آنگاه‌می‌نویسیم $a < b$. اگر $a-b \in P \cup \{0\}$، آنگاه می‌نویسیم $a \geqslant b$. اگر $-(a-b) \in P \cup \{0\}$، آنگاه می‌نویسیم $a \leqslant b$.

طبق معمول اغلب مناسب آن است که در تعریف بالا علامات را برگردانیم و به‌ترتیب بنویسیم

$$b < a,\ b > a,\ b \leqslant a,\ b \geqslant a.$$

علاوه براین، اگر $a < b$ و $b < c$، آنگاه معمولاً می‌نویسیم

$$c > b > a \quad \text{یا} \quad a < b < c.$$

اگر $a \leqslant b$ و $b < c$، آنگاه می‌نویسیم

$$c > b \geqslant a \quad \text{یا} \quad a \leqslant b < c.$$

خواص ترتیبی

حال به خواص اساسی رابطهٔ ترتیبی در $\mathbf{R}$ می‌پردازیم. این خواص «قوانین» نابرابریها هستندکه خواننده با آنها در درسهای قبلی آشنا شده است، وبارها دربخشهای بعدی‌به‌کار گرفته خواهند شد و از اهمیت خاصی برخوردارند.

۴.۵ قضیه. فرض می‌کنیم a و b و c عناصر $\mathbf{R}$ باشند.

(الف) اگر $a > b$ و $b > c$، آنگاه $a > c$.

(ب) دقیقاً یکی از سه‌شرط $a > b$، $a = b$، $a < b$ برقرار است.

(پ) اگر $a \geqslant b$ و $b \geqslant a$، آنگاه $a = b$.

برهان. (الف) اگر $a-b$ و $b-c$ به P متعلق باشند، آنگاه از ۵ ۰ ۱ (یک)

نتیجه می‌شود که $a-c=(a-b)+(b-c)$ نیز به P متعلق است، لذا $a>c$.

(ب) بنابر ۱.۵ (سه) دقیقاً یکی از سه‌حالت

$$a-b\in P,\ \ a-b=0,\ \ b-a=-(a-b)\in P$$

رخ می‌دهد.

(پ) اگر $a\neq b$، آنگاه بنابر قسمت (ب) باید یا $a-b$ یا $b-a$ در P باشد. بنابراین یا $a>b$ یا $b>a$. درهریك ازاین دوحالت یکی ازفرضها نقض می‌شود. □

۵.۵ قضیه. (الف) اگر $a\in\mathbf{R}$، $a\neq 0$، آنگاه $a^2>0$.

(ب) $1>0$.

(پ) اگر $n\in\mathbf{N}$، آنگاه $n>0$.

برهان. (الف) a یا $-a$ به P متعلق است. اگر $a\in P$، آنگاه از ۱.۵ (دو) به‌دست می‌آید $a^2=aa\in P$. اگر $-a\in P$، آنگاه بنابر قضیه ۶.۴ (پ) داریم $a^2=(-a)(-a)\in P$. بنابراین، درهرصورت، $a^2\in P$.

(ب) چون $1=(1)^2$، حکم از قسمت (الف) حاصل می‌شود.

(پ) استقرای ریاضی را به‌کار می‌بریم. حالت $n=1$ بنابرقسمت (ب) درست است. اکنون اگراین حکم برای عدد طبیعی k درست باشد (یعنی اگر $k\in P$)، آنگاه چون $1\in P$، از ۱.۵ (یك) نتیجه می‌شود که $k+1\in P$. بدین‌ترتیب حکم برای تمام اعداد طبیعی درست است. □

خواننده احتمالاً با خواص زیرآشناست.

۶.۵ قضیه. فرض کنیم a، b، c، و d عناصر $\mathbf{R}$ باشند.

(الف) اگر $a>b$، آنگاه $a+c>b+c$.

(ب) اگر $a>b$ و $c>d$، آنگاه $a+c>b+d$.

(پ) اگر $a>b$ و $c>0$، آنگاه $ac>bc$.

(پ)' اگر $a>b$ و $c<0$، آنگاه $ac<bc$.

(ت) اگر $a>0$، آنگاه $1/a>0$.

(ت)' اگر $a<0$، آنگاه $1/a<0$.

برهان. (الف) ملاحظه کنید که $(a+c)-(b+c)=a-b$.

(ب) اگر $a-b$ و $c-d$ به P متعلق باشند، آنگاه از ۱.۵ (یك) نتیجه‌می گیریم که $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ نیز به P متعلق است.

(پ) اگر $a-b$ و c به P متعلق باشند، آنگاه، بنابر ۱.۵ (دو)، $ac-bc=(a-b)c$ نیز به P متعلق است.

(پ)' هرگاه $a-b$ و $-c$ به P متعلق باشند، بنابر ۱.۵ (دو)،

$bc-ac=(a-b)(-c)$ نیز به P متعلق است.

(ت) اگر $a > ۰$، آنگاه، بنابر ۱.۵ (سه)، $a \neq ۰$، پس عنصر $۱/a$ موجود است. اگر $۱/a = ۰$، آنگاه $۱ = a(۱/a) = ۰$، که یك تناقض است. اگر $۱/a < ۰$، آنگاه، قسمت $'$(پ) به‌ازای $c = ۱/a$ ایجاب می کند که $a(۱/a) = ۱ < ۰$ که با ۵.۵ (ب) تناقض دارد. بنابراین باید داشته باشیم $۱/a > ۰$، چراکه دوحالت دیگررد شدند.

$'$(ت) این قسمت را می‌توان با استدلالی شبیه به (ت) ثابت کرد. دیگرآنکه، می‌توانیم از قضیهٔ ۶.۴ (ت) کمك بگیریم و (ت) را مستقیماً به‌کاربریم. □

۷.۵ قضیه. اگر $a > b$، آنگاه $a > \frac{۱}{۲}(a+b) > b$.

برهان. چون $a > b$، از قضیهٔ ۶.۵ (الف) به ازای $c = a$ نتیجه می‌شود که $۲a > a+b$ و از قضیهٔ ۶.۵ (الف) به ازای $c = b$ به‌دست می‌آید $a+b > ۲b$. بنابرقضیهٔ ۵.۵ (پ)، $۲ > ۰$، و از قضیهٔ ۶.۵ (ت) داریم $۱/۲ > ۰$. حال قضیهٔ ۶.۵ (پ) را به‌ازای $c = ۱/۲$ به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که $a > \frac{۱}{۲}(a+b)$ و $\frac{۱}{۲}(a+b) > b$. بنابراین، همان‌طورکه ادعاشده بود $a > ۱/۲(a+b) > b$. □

قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت شد (به‌ازای $b = ۰$) ایجاب می‌کند که برای هرعدد اکیداً مثبت مفروض a عدد اکیداً کوچکتر و اکیداً مثبت دیگری (یعنی $a/۲$) وجود دارد. بنابراین، کوچکترین عدد حقیقی اکیداً مثبت وجود ندارد.

قبلاً دیده‌ایم که اگر $a > ۰$ و $b > ۰$، آنگاه $ab > ۰$. همچنین، اگر $a < ۰$ و $b < ۰$، آنگاه $ab > ۰$. حال درستی عکس این مطلب را نشان می‌دهیم.

۸.۵ قضیه. اگر $ab > ۰$، آنگاه یا $a > ۰$ و $b > ۰$ یا $a < ۰$ و $b < ۰$.

برهان. اگر $ab > ۰$، آنگاه $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$. (چرا؟) اگر $a > ۰$، آنگاه از قضیهٔ ۶.۵ (ت) نابرابری $۱/a > ۰$ واز قضیهٔ ۶.۵ (پ)،

$$b = ((۱/a)a)b = (۱/a)(ab) > ۰$$

را نتیجه می گیریم. ازطرف‌دیگر، اگر $a < ۰$، آنگاه ازقضیهٔ ۶.۵ $'$(ت) نابرابری $۱/a < ۰$ و از ۶.۵ $'$(پ) $b = ((۱/a)a)b = (۱/a)(ab) < ۰$ نتیجه می‌شود. □

۹.۵ نتیجه. اگر $ab < ۰$، آنگاه یا $a > ۰$ و $b < ۰$ یا $a < ۰$ و $b > ۰$.
این حکم را به‌عنوان تمرین اثبات کنید.

قدرمطلق

خاصیت سه‌گانگی ۱.۵ (سه) تضمین می کند که اگر $a \neq ۰$، آنگاه یکی از اعداد a و

$-a$ اکیداً مثبت است. قدرمطلق $a\neq 0$ عدد اکیداً مثبت از جفت $\{a, -a\}$، و قدر مطلق 0 برابر 0 تعریف می‌شود.

۱۰.۵ تعریف. اگر $a\in\mathbf{R}$، آنگاه **قدرمطلق** a که با $|a|$ نموده می‌شود به‌این‌صورت تعریف می‌شود.

$$|a|=\begin{cases} a & \text{،}\ a\geqslant 0\ \text{اگر} \\ -a & \text{،}\ a<0\ \text{اگر}\end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع قدرمطلق تمام $\mathbf{R}$ و بردش $P\cup\{0\}$ است، وعناصر a و $-a$ را به‌یك عنصر می‌نگارد.

۱۱.۵ قضیه. (الف) $|a|=0$ اگر و فقط اگر $a=0$.

(ب) به‌ازای هر $a\in R$، $|-a|=|a|$.

(پ) به‌ازای هر $a, b\in\mathbf{R}$، $|ab|=|a||b|$.

(ت) اگر $c\geqslant 0$، آنگاه $|a|\leqslant c$ اگر و فقط اگر $-c\leqslant a\leqslant c$.

(ث) به‌ازای هر $a\in\mathbf{R}$ $\quad -|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

برهان. (الف) اگر $a=0$، آنگاه بنابر تعریف $|0|=0$. اگر $a\neq 0$، آنگاه $-a\neq 0$؛ درنتیجه $|a|\neq 0$.

(ب) اگر $a=0$، آنگاه $|-0|=|0|=0$. اگر $a>0$، آنگاه $|-a|=a=|a|$. بالأخره اگر $a<0$، آنگاه $|-a|=-a=|a|$.

(پ) اگر $a>0$ و $b>0$، آنگاه $ab>0$، در نتیجه $|ab|=ab=|a||b|$. اگر $a<0$ و $b>0$، آنگاه $ab<0$، بنابراین $|ab|=-(ab)=(-a)b=|a||b|$. دیگرحالات به‌همین طریق ثابت می‌شوند.

(ت) اگر $|a|\leqslant c$، آنگاه هم $a\leqslant c$ و هم $-a\leqslant c$؛ (چرا؟) از نابرابری دوم و قضیهٔ ۶.۵ (پ′) نتیجه می‌گیریم که $-c\leqslant a$، پس $-c\leqslant a\leqslant c$. بعکس، اگر این‌رابطه برقرار باشد، آنگاه هم $a\leqslant c$ وهم $-a\leqslant c$ که از آنجا $|a|\leqslant c$.

(ث) قسمت (ت) را برای $c=|a|\geqslant 0$ به‌کار می‌بریم. □

قضیهٔ بعدی اغلب دراین‌کتاب مورد استفاده قرار خواهدگرفت. (یادآور می‌شویم که $a\pm b$ یعنی هم $a+b$ وهم $a-b$.)

۱۲.۵ نابرابری مثلثی. اگر a و b اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

برهان. بنابرقضیهٔ ۱۱.۵ (ث) داریم $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$ و $-|b|\leqslant\pm b\leqslant|b|$. با به‌کاربردن ۶.۵ (ب) نتیجه می‌گیریم که

$$-(|a|+|b|)=-|a|-|b|\leqslant a\pm b\leqslant |a|+|b|.$$

حال از قضیهٔ ۱۱.۵ (ت) نتیجه می‌شود که $|a\pm b|\leqslant |a|+|b|$، پس قسمت دوم نابرابری ثابت می‌شود.

چون $|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$ (چرا؟) نتیجه می‌گیریم که $|a|-|b|\leqslant |a-b|$. به‌همین‌نحو، $|b|-|a|\leqslant |a-b|$ (چرا؟). از ترکیب این‌دو نابرابری نتیجه می‌گیریم $|\,|a|-|b|\,|\leqslant |a-b|$، که قسمت اول نابرابری مطلوب با علامت منفی است. برای به دست آوردن نابرابری درحالت مثبت، کافی است به‌جای b، $-b$ بگذاریم. □

۱۳.۵ نتیجه. اگر a_1، a_2، $\cdots$، a_n، n عدد حقیقی باشند، آنگاه

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

برهان. اگر $n=2$ حکم بنابرقضیهٔ ۱۲.۵ برقراراست.چنانچه $n>2$، ازاستقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\begin{aligned}|a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}|&=|(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}|\\&\leqslant |a_1+a_2+\cdots+a_k|+|a_{k+1}|.\ \square\end{aligned}$$

تمرین

۵. الف. اگر $a, b\in \mathbf{R}$ و $a^2+b^2=0$، نشان دهید که $a=b=0$.

۵. ب. اگر $n\in \mathbf{N}$، نشان دهید که $n^2\geqslant n$ و درنتیجه $1/n^2\leqslant 1/n$.

۵. پ. اگر $a>-1$ و $a\in \mathbf{R}$، نشان دهید که به ازای هر $n\in \mathbf{N}$، $(1+a)^n\geqslant 1+na$. این نابرابری به **نابرابری برنولی**[1] موسوم است. (راهنمایی: از استقرای ریاضی استفاده کنید.)

۵. ت. اگر $c>1$ و $c\in \mathbf{R}$، نشان دهید که به ازای هر $n\in \mathbf{N}$، $c^n\geqslant c$. (راهنمایی: $c=1+a$ که ان $a>0$.)

۵. ث. اگر $c>1$ و $c\in \mathbf{R}$، نشان دهید که به‌ازای $m, n\in \mathbf{N}$ وقتی $m\geqslant n$، داریم $c^m\geqslant c^n$.

۵. ج. فرض کنید $0<c<1$. اگر $m\geqslant n$ و $m, n\in \mathbf{N}$ نشان دهید که $0<c^m\leqslant c^n<1$.

---

۱. یاکوب برنولی Jacob Bernoulli (۱۶۵۴-۱۷۰۵) از یك خانوادهٔ سویسی است که چندین ریاضی‌دان به‌بارآورده است وهر یك ازآنها نقش‌مهمی درگسترش حساب دیفرانسیل وانتگرال داشته‌اند.

۵. ج. نشان دهید که به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $n < 2^n$. بنابراین به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $1/2^n < 1/n$.

۵. ح. اگر a و b اعداد حقیقی مثبتی باشند و $n \in \mathbf{N}$، آنگاه $a^n < b^n$ اگر و فقط اگر $a < b$.

۵. خ. نشان دهید که اگر $a \leqslant x \leqslant b$ و $a \leqslant y \leqslant b$، آنگاه $|x-y| \leqslant b-a$. تعبیر هندسی این مطلب را بیان کنید.

۵. د. فرض کنید $\delta > 0$ و $a \in \mathbf{R}$. نشان دهید که $a-\delta < x < a+\delta$ اگر و فقط اگر $|x-a| < \delta$. به‌همین‌نحو، $a-\delta \leqslant x \leqslant a+\delta$ اگر و فقط اگر $|x-a| \leqslant \delta$.

۵. ذ. اگر $a, b \in \mathbf{R}$ و $b \neq 0$، نشان دهید که $|a/b| = |a|/|b|$.

۵. ر. نشان دهید که اگر $a, b \in \mathbf{R}$، آنگاه $|a+b| = |a| + |b|$ اگر و فقط اگر $ab \geqslant 0$.

۵. ز. مجموعهٔ نقاط (x, y) در صفحهٔ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ را وقتی $|x| = |y|$ رسم کنید.

۵. ژ. مجموعهٔ نقاط (x, y) در صفحهٔ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ را وقتی $|x| + |y| = 1$ رسم کنید.

۵. س. اگر x و y و z متعلق به $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه $x \leqslant y \leqslant z$ یا $z \leqslant y \leqslant x$ اگر و فقط اگر $|x-y| + |y-z| = |x-z|$.

۵. ش. اگر $0 < a < 1$، آنگاه $0 < a^2 < a < 1$ وحال آنکه اگر $1 < a$، آنگاه $1 < a < a^2$.

بخش ۶ خاصیت کمال $\mathbf{R}$

دراین بخش خاصیتی دیگر از دستگاه اعداد حقیقی را عرضه می‌کنیم که اغلب آن را «خاصیت کمال» می‌نامند، زیرا این خاصیت تحت شرایطی وجود عناصری را در $\mathbf{R}$ تضمین می‌کند. این خاصیت کمال به‌طرق مختلف توصیف شده است. ما دراینجا فرض می‌کنیم که زیرمجموعه‌های کراندار در $\mathbf{R}$ زبرینه ($=$ سوپریمم) دارند. این طریقهٔ بیان احتمالاً کارآمدترین توصیف خاصیت کمال است.

زبرینه و زیرینه

درآغاز مفهوم کران بالای یك زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی را معرفی می‌کنیم. این مفهوم در بخشهای بعدی منتهای اهمیت را دارد.

۱۰۶ تعریف. فرض کنیم S یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) عنصر $u \in \mathbf{R}$ را **کران بالای** S گوییم هرگاه به‌ازای هر $s \in S$، $s \leqslant u$.

(ب) عنصر $w \in \mathbf{R}$ را **کران پایین** S گوییم هرگاه به‌ازای هر $s \in S$، $w \leqslant s$.

توجه‌داریم که زیرمجموعهٔ $S \subseteq R$ ممکن است دارای کران‌بالا نباشد (برای مثال،

فرض کنید $S=\mathbf{R}$). با این‌حال، هرگاه این مجموعه یک کران بالا داشته باشد، بی‌نهایت کران بالا دارد (زیرا اگر u یک کران بالای S باشد، آنگاه $u+n$ نیز به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ یک کران بالای S است). به‌طور مثال عدد ۱ یک کران‌بالای مجموعهٔ

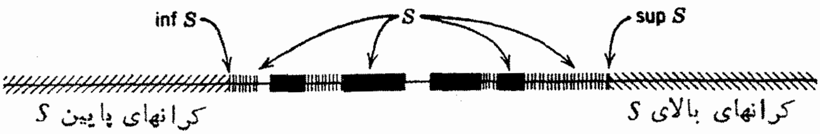
$$S_1=\{x\in\mathbf{R} : 0<x<1\}$$

است؛ درواقع هرعدد $u\geqslant 1$ یک کران‌بالای S_1 است، همچنین مجموعهٔ

$$S_2=\{x\in\mathbf{R} : 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

همان کرانهای بالای S_1 را دارد. اما توجه کنید که S_2 شامل کران بالای ۱ است، حال آنکه S_1 شامل هیچ یک از کرانهای بالای خود *نیست* (چرا هیچ عدد $c<1$ نمی‌تواند کران بالای S_1 باشد؟)

برای آنکه نشان دهیم عدد $u\in\mathbf{R}$ کران‌بالای $S\subseteq\mathbf{R}$ نیست، باید عنصری مانند $s_0\in S$ را به‌طوری که $u<s_0$، به‌دست آوریم. این‌کار برای $S=\varnothing$، یعنی مجموعهٔ تهی، امکان‌پذیر نیست. لذا مجموعهٔ تهی این خاصیت غیرعادی را دارد که هرعدد حقیقی کران‌بالای آن است، همچنین هرعدد حقیقی کران‌پایین $\varnothing$ است. این امرممکن است به‌نظر ساختگی آید، لکن یک نتیجهٔ منطقی تعریفهای ما است، پس باید آن را قبول کنیم.



شکل ۱.۶ زبرینه‌ها و زیرینه‌ها

وقتی یک مجموعه کران بالا داشته باشد می‌گوییم **ازبالاکراندار** است، وزمانی که مجموعه کران‌پایین داشته باشد می‌گوییم **از پایین‌کراندار** است. چنانچه مجموعه‌ای هم از بالا وهم از پایین‌کراندار باشد خواهیم گفت که **کراندار** است. هرگاه مجموعه‌ای فاقد کران بالا یا کران‌پایین باشد می‌گوییم که **بیکران** است. بدین‌ترتیب مجموعه‌های S_1 و S_2 درفوق هردو کراندار هستند. اما $P=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$، زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$، بیکران است، زیرا کران‌بالاندارد. به‌طریق مشابه، مجموعهٔ $\mathbf{R}$ بیکران است، زیرا نه کران‌بالا دارد و نه کران پایین.

۲.۶ تعریف. فرض کنید S زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) اگر S از بالاکراندار باشد، آنگاه کران‌بالای S را **زبرینه**[1] (**یاکوچکترین**

۱. دربرخی کتابها سوپریمم نیز گفته شده است.ـم.

کران‌بالای S) گوییم اگر این‌کران‌بالا از هر کران‌بالای دیگر S کوچکتر باشد.

(ب) اگر S از پایین‌کراندار باشد، آنگاه‌کران‌پایین S را **زیرینه**[1] (**یا بزرگترین کران‌پایین**) S نامیم اگر این‌کران‌پایین از هرکران‌پایین دیگر S بزرگتر باشد (ر.ك. شکل ۱.۶).

به‌بیان دیگر، عدد $u \in \mathbf{R}$ زبرینهٔ یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S است اگر در دو شرط زیر صدق کند:

(یك) به‌ازای هر $s \in S$، $s \leqslant u$؛

(دو) اگر به‌ازای هر $s \in S$، $s \leqslant v$، آنگاه $u \leqslant v$.

درواقع شرط (یك) می‌گوید u کران‌بالای S است، و شرط (دو) بیان می‌کند که u از هر کران بالای دیگر S کوچکتر است.

واضح است که هر زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S فقط یك زبرینه می‌تواند داشته باشد. زیرا اگر u_1 و u_2 زبرینه‌های S باشند، آنگاه هردو کرانهای بالای S هستند: چون u_1 یك زبرینه و u_2 یك کران‌بالای S است، باید داشته باشیم $u_1 \leqslant u_2$. استدلالی مشابه‌نشان می‌دهدکه باید داشته باشیم $u_2 \leqslant u_1$. بنابراین $u_1 = u_2$. به‌روش مشابه می‌توان نشان داد که یك زیرمجموعهٔ مفروض $\mathbf{R}$ مانند S فقط یك زیرینه می‌تواند داشته باشد. زبرینه و زیرینهٔ S را (اگروجود داشته باشند) بترتیب با

$$\inf S \quad \text{و} \quad \sup S$$

نشان خواهیم داد. اغلب مناسب است که توصیف دیگری از زبرینهٔ یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ داشته باشیم.

۳.۶ لم. عدد $u \in \mathbf{R}$ زبرینهٔ زیرمجموعهٔ غیرتهی $S \subseteq \mathbf{R}$ است اگر و فقط اگر دارای خواص زیر باشد:

(یك) هیچ عنصری مانند $s \in S$ با شرط $u < s$ وجود ندارد.

(دو) اگر $v < u$، آنگاه عنصری مانند $s_v \in S$ وجود دارد به قسمتی‌که $v < s_v$.

برهان. فرض‌کنیم u در شرطهای (یك) و (دو) صدق کند. شرط (یك) ایجاب می‌کند که u یك‌کران‌بالای S باشد. اگر v عدد دلخواهی با شرط $v < u$ باشد، آنگاه خاصیت (دو) نشان می‌دهدکه v نمی‌تواند یك‌کران‌بالای S باشد و درنتیجه u زبرینهٔ S خواهد بود.

بعکس، فرض کنیم u زبرینهٔ S باشد. چون u یك کران‌بالای S است، شرط (یك) برقرار است. اگر $v < u$، آنگاه v کران‌بالای S نیست. بنابراین عنصری مانند $s_v \in S$

---

۱. دربرخی کتابها اینفیموم نیز گفته شده است.ـم.

وجود دارد به‌قسمی که $s_v > v$.

خواننده باید خود را قانع سازد که عدد ۱ زبرینهٔ هردو مجموعهٔ S_1 و S_2 که بعد از تعریف ۱.۶ معرفی شدند می‌باشد. توجه داریم که S_2 شامل زبرینهٔ خود است و حال آنکه S_1 شامل زبرینه‌اش نیست لـذا، وقتی می‌گوییم یك‌مجموعه زبرینه دارد، هیچ‌حکمی دراین مورد که زبرینه عنصرمجموعه هست یا نه نمی‌کنیم.

یك خاصیت عمیق و بنیادی دستگاه اعداد حقیقی این است که هرزیرمجموعهٔ‌غیرتهی $\mathbf{R}$ که از بالاکراندار باشد زبرینه دارد. ما ازایـن خاصیت، کـه آن را به‌عنوان آخرین فرض درمورد $\mathbf{R}$ انتخاب می‌کنیم، بارها و به‌طور اساسی استفاده خواهیم کرد.

۴.۶ خاصیت زبرینه. هرمجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی که دارای یك کران‌بالا باشد، زبرینه دارد.

خاصیت مشابه برای‌زیرینه‌ها را می‌توان به‌سهولت ازخاصیت زبرینه به‌دست‌آورد.

۵.۶ خاصیت زیرینه. هرمجموعهٔ غیرتهی ازاعداد حقیقی‌که دارای یك‌کران‌پایین باشد، زیرینه دارد.

برهان. فرض‌کنید S از پایین‌کراندار باشد و $S_1 = \{-s : s \in S\}$، درنتیجه S_1 از بالاکراندار است. بنابر خاصیت زبرینه S_1 زبرینه دارد. ایـن زبرینه را u می‌نامیم. نشان دادن اینکه $-u$ زیرینهٔ S است به‌خواننده واگذار می‌شود. □

خاصیت ارشمیدسی[1]

یکی از نتایج مهم خاصیت زبرینه این است کـه مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ در $\mathbf{R}$ از بالا کراندار نیست. بویژه این بدان‌معنی است که به‌ازای هرعدد حقیقی x عددی طبیعی مانند n_x وجود داردکه از x بزرگتر است (در غیراین‌صورت x یك‌کران‌بالای $\mathbf{N}$ می‌شود). حال به‌اثبات این مطلب می‌پردازیم.

۶.۶ خاصیت ارشمیدسی. اگر $x \in \mathbf{R}$، عددی طبیعی مانند $n_x \in \mathbf{N}$ وجـود دارد به‌قسمی که $x < n_x$.

برهان. اگرحکم برقرار نباشد، آنگاه x یك‌کران بالای $\mathbf{N}$ است. ازاین‌رو بنابر

---

۱. این‌خاصیت $\mathbf{R}$ به‌یاد ارشمیدس Archimedes (۲۸۷–۲۱۲ ق. م) که «بزرگترین نابغهٔ عهد عتیق» لقب‌گرفته ویکی ازبنیانگذاران روش علمی بوده است، نامگذاری شده است.

خاصیت زبرینه، $\mathbf{N}$ زبرینه دارد. اگر u زبرینهٔ $\mathbf{N}$ باشد، چون x یك کران بالای $\mathbf{N}$ است، نتیجه می‌شود که $u \leqslant x$. از آنجا که $u-1<u$، از لم ۳.۶ (دو) نتیجه می‌شود که عددی مانند $n_1 \in \mathbf{N}$ هست به قسمی که $u-1<n_1$. بنابراین $u<n_1+1$، اما چون $n_1+1 \in \mathbf{N}$ این با فرض اینکه u کران بالای $\mathbf{N}$ است متناقض است. □

۷.۶ نتیجه. فرض کنید y و z دو عدد حقیقی اکیداً مثبت باشند.
(الف) عددی طبیعی مانند n وجود دارد به‌قسمی که $ny>z$.
(ب) عددی طبیعی مانند n وجود دارد به قسمی که $0<1/n<z$.
(پ) عددی طبیعی مانند n وجود دارد به قسمی که $n-1 \leqslant y<n$.

برهان. (الف) چون y و z اکیداً مثبت هستند، پس $x=z/y$ نیز اکیداً مثبت است. فرض کنیم $n \in \mathbf{N}$ از x بزرگتر باشد: $z/y=x<n$. در این‌صورت، همان‌طور که حکم شده بود، $z<ny$.

(ب) فرض کنید $n \in \mathbf{N}$ از $1/z$ بزرگتر باشد: $0<1/z<n$. در این صورت $0<1/n<z$.

(پ) خاصیت ارشمیدسی وجود عددی طبیعی مانند m را باشرط $y<m$ تضمین می‌کند. فرض کنیم n کوچکترین عدد طبیعی از این‌نوع باشد (ر. ك. بخش ۳). در این صورت $n-1 \leqslant y<n$. □

بعد از قضیهٔ ۷.۵ متذکر شدیم که کوچکترین عدد حقیقی اکیداً مثبت وجود ندارد. نتیجهٔ ۷.۶ (ب) نشان می‌دهد که به‌ازای هر $z>0$ داده شده، عددگویایی به‌شکل $1/n$ با شرط $0<1/n<z$ وجود دارد. گاهی گفته می‌شود که «اعداد گویای بدلخواه کوچك و به‌شکل $1/n$ وجود دارند».

وجود $\sqrt{2}$

یکی از خواص مهم خاصیت زبرینه این است که، همان‌طور که قبلاً گفته‌شد، وجود بعضی اعداد حقیقی را تضمین می‌کند. ما از این ویژگی بدفعات استفاده خواهیم کرد. اینك نشان خواهیم داد که این خاصیت وجود عدد حقیقی و مثبت x به‌طوری که $x^2=2$؛ یعنی **جذر مثبت** ۲، را تضمین می‌کند. این‌قضیه، قضیهٔ ۷.۴ را تکمیل می‌کند.

۸.۶ قضیه. عدد مثبتی در $\mathbf{R}$ وجود دارد به‌قسمی که $x^2=2$.

برهان. مجموعهٔ $S=\{y \in \mathbf{R}: 0 \leqslant y,\ y^2 \leqslant 2\}$ را در نظر بگیرید. ۲، کران بالای S است، و گرنه باید عنصری مانند $s \in S$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $s>2$، از

اینجا نتیجه می‌شود که $۲ \leqslant s^۲ < ۴$، که یك تناقض است. بنابرخاصیت زبرینه، مجموعهٔ S دارای زبرینه است که آن‌را $x = \sup S$ می گیریم. مسلماً $x > ۰$.

اکنون حکم می کنیم که $x^۲ = ۲$. اگر چنین نباشد آنگاه یا $x^۲ < ۲$، یا $x^۲ > ۲$.

اگر $x^۲ < ۲$، فرض می کنیم $n \in \mathbf{N}$ طوری اختیار شده باشد که $۱/n < (۲ - x^۲)/(۲x + ۱)$. در این حالت

$$\left(x+\frac{۱}{n}\right)^۲ = x^۲ + \frac{۲x}{n} + \frac{۱}{n^۲} \leqslant x^۲ + \frac{۲x+۱}{n} < x^۲ + (۲ - x^۲) = ۲,$$

این بدان معنی است که $x + ۱/n \in S$، که تناقض دارد با اینکه x کران بالای S است.

اگر $x^۲ > ۲$، عدد $m \in \mathbf{N}$ را طوری اختیار می کنیم که $۱/m < (x^۲ - ۲)/۲x$. چون $x = \sup S$، عنصری مانند $s_۰ \in S$ با خاصیت $x - ۱/m < s_۰$ وجود دارد. اما این ایجاب می کند که

$$۲ < x^۲ - \frac{۲x}{m} < x^۲ - \frac{۲x}{m} + \frac{۱}{m^۲} = \left(x - \frac{۱}{m}\right)^۲ < s_۰^۲.$$

از این‌رو $۲ < s_۰^۲$، که با $s_۰ \in S$ متناقض است.

چون دو امکان $x^۲ < ۲$ و $x^۲ > ۲$ کنار گذاشته شده‌اند، باید داشته باشیم $x^۲ = ۲$. □

با استفاده از تغییراتی بسیار جزئی در استدلال قضیهٔ ۸.۶ خواننده می‌تواند نشان دهد که اگر $a \geqslant ۰$، آنگاه عدد یکتایی مانند $b \geqslant ۰$ هست به‌قسمی که $b^۲ = a$. b را جذر مثبت یا ریشهٔ دوم مثبت a می‌نامیم و آن‌را با

$$b = a^{۱/۲} \quad \text{یا} \quad b = \sqrt{a}$$

نشان می‌دهیم.

اکنون می‌دانیم که حداقل یك عنصر اصم، یعنی $\sqrt{۲}$ (ریشهٔ دوم مثبت ۲)، وجود دارد. در واقع تعداد اعداد اصم «بیش» از عدهٔ اعداد گویاست، بدین‌معنی که (همان‌طور که در بخش ۳ دیده‌ایم) مجموعهٔ اعداد گویا شمارش‌پذیر است، حال آنکه مجموعهٔ اعداد اصم شمارش‌پذیر نیست. حال نشان می دهیم که اعداد اصم بدلخواه کوچك وجود دارند. این نتیجه مکمل نتیجه ۷.۶ است.

۹.۶ نتیجه. فرض کنید $\xi > ۰$ عددی اصم باشد و $z > ۰$. در این صورت عددی طبیعی مانند m وجود دارد به‌قسمی که عدد اصم ξ/m در $۰ < \xi/m < z$ صدق کند.

برهان. چون $\xi > ۰$ و $z > ۰$، از قضیهٔ ۶.۵ (ت) و ۶.۵ (پ) نتیجه می‌شود

که $0<\xi/z$. برطبق خاصیت ارشمیدسی، عددی طبیعی مانند m هست به‌قسمی که $m<\xi/z<0$. بنابراین $z<\xi/m<0$ و نشان دادن اینکه ξ/m اصم است تمرینی است برعهدهٔ خواننده. □

حال نشان می‌دهیم که بین هردو عدد حقیقی متمایز یک‌عددگویا و یک عدد اصم وجود دارد. (درواقع، تعداد بی‌پایانی از هر دونوع وجود دارد!)

۶.۱۰. قضیه. فرض‌کنید x و y اعدادی حقیقی باشرط $x<y$ باشند.

(الف) در این‌صورت عددگویایی مانند r وجود دارد به‌قسمی‌که $x<r<y$.

(ب) اگر $0<\xi$ عدد اصمی دلخواه باشد، آنگاه عددگویایی مانند s وجود دارد به‌قسمی‌که عدد اصم $s\xi$ در $x<s\xi<y$ صدق کند.

برهان. بی‌آنکه ازکلیت قضیه‌کاسته شود می‌توان x را مثبت‌فرض کرد. (چرا؟)

(الف) چون $0<y-x$، از نتیجهٔ ۶.۷ (ب) معلوم می‌شود که عددی طبیعی مانند m هست به‌قسمی‌که $0<1/m<y-x$. بنابرنتیجهٔ ۶.۷ (الف)، عددی طبیعی مانند k وجود دارد به‌قسمی که

$$\frac{k}{m}=k\frac{1}{m}>x\,,$$

و فرض می‌کنیم n کوچکترین عدد طبیعی از این‌نوع باشد. بنابراین

$$\frac{n-1}{m}\leqslant x<\frac{n}{m}\,.$$

همچنین باید داشته‌باشیم $n/m<y$، زیرا درغیر این‌صورت

$$\frac{n-1}{m}\leqslant x<y\leqslant\frac{n}{m},$$

که ایجاب می‌کند $y-x\leqslant 1/m$ و این با فرضی که در مورد m کردیم، متناقض است. بنابراین $x<n/m<y$.

(ب) با فرض $0<x<y$ و $0<\xi$ داریم $x/\xi<y/\xi$. بنا برقسمت (الف)، عددگویایی مانند s وجود دارد به‌قسمی‌که $x/\xi<s<y/\xi$. بنابراین $x<s\xi<y$. (نشان‌دهید که $s\xi$ اصم است.) □

تمرین

۶. الف. ثابت‌کنید که هرمجموعه از اعداد حقیقی که غیرتهی و باپایان باشد

دارای زبرینه و زیرینه است.

۶. ب. اگر یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S، شامل یک‌کران بالای خود باشد، آنگاه این کران بالازبرینهٔ S است.

۶. پ. مثالی بزنید از مجموعه‌ای از اعداد گویا که کراندار باشد ولی زبرینهٔ گویا نداشته باشد.

۶. ت. مثالی بزنید از مجموعه‌ای از اعداد اصم که زبرینهٔ گویا داشته باشد.

۶. ث. ثابت کنید که اجتماع دومجموعهٔ کراندار، کراندار است.

۶. ج. مثالی بزنید از یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های کراندار که اجتماع آنها نیز کراندار باشد، ومثالی بیاورید که اجتماع بیکران باشد.

۶. چ. اگر S یک‌مجموعهٔ کراندار در $\mathbf{R}$ باشد و $S_\circ$ زیرمجموعهٔ S و غیرتهی باشد، آنگاه‌نشان‌دهید که

$$\inf S \leqslant \inf S_\circ \leqslant \sup S_\circ \leqslant \sup S.$$

گاهی اوقات مناسبتر است‌که این‌مطلب به‌صورتی دیگر بیان شود. فرض‌کنید $D \neq \varnothing$ و $f: D \longrightarrow \mathbf{R}$ بردکراندار داشته‌باشد. هرگاه $D_\circ$ یک‌زیرمجموعهٔ غیرتهی D باشد،

$$\inf\{f(x): x \in D\} \leqslant \inf\{f(x): x \in D_\circ\} \leqslant \sup\{f(x): x \in D_\circ\}$$
$$\leqslant \sup\{f(x): x \in D\}.$$

۶. ح. فرض‌کنید X و Y مجموعه‌های غیرتهی باشند و $f: X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$ دارای بردکراندار در $\mathbf{R}$ باشد. بنویسید

$$f_1(x) = \sup\{f(x, y), y \in Y\}, \quad f_2(y) = \sup\{f(x, y): x \in X\}.$$

آنگاه **اصل زبرینه‌های مکرر** را ثابت‌کنید:

$$\sup\{f(x, y): x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x): x \in X\}$$
$$= \sup\{f_2(y): y \in Y\}.$$

ما گاهی اوقات این‌را به‌صورت نمادی زیر:

$$\sup_{x,y} f(x, y) = \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_y \sup_x f(x, y)$$

بیان می‌کنیم.

۶. خ. فرض‌کنید f و f_1 توابع تمرین قبل باشند وبنویسید

$$g_2(y) = \inf\{f(x, y): x \in X\}.$$

ثابت کنید که

$$\sup\{g_2(y): y \in Y\} \leqslant \inf\{f_1(x): x \in X\}.$$

نشان دهید که امکان دارد نـابرابری اکید برقرار بـاشد . ما گاهی این نـابرابری را به‌صورت

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leqslant \inf_x \sup_y f(x, y)$$

بیان می‌کنیم.

۶.د. فرض کنید X یك‌مجموعهٔ غیرتهی‌باشد و $f: X \longrightarrow \mathbf{R}$ دارای بردکراندار در $\mathbf{R}$ باشد. هرگاه $a \in \mathbf{R}$، نشان‌دهید که

$$\sup\{a+f(x): x \in X\} = a+\sup\{f(x): x \in X\},$$

$$\inf\{a+f(x): x \in X\} = a+\inf\{f(x): x \in X\}.$$

۶. ذ. فرض کنید X یك‌مجموعهٔ غیرتهی باشد و f و g در X تعریف شده باشند و دارای بردهای‌کراندار در $\mathbf{R}$ باشند. نشان‌دهید که

$$\begin{aligned}\inf\{f(x): x \in X\}+\inf\{g(x): x \in X\} &\leqslant \inf\{f(x)+g(x): x \in X\}\\ &\leqslant \inf\{f(x): x \in X\}+\sup\{g(x): x \in X\}\\ &\leqslant \sup\{f(x)+g(x): x \in X\}\\ &\leqslant \sup\{f(x): x \in X\}+\sup\{g(x): x \in X\}.\end{aligned}$$

با ذکر مثالهایی نشان دهید که امکان دارد هریك از نابرابریها اکید باشد.

۶.ر. اگر $z > 0$ نشان‌دهید که عددی طبیعی مانند n هست به‌قسمی که $1/2^n < z$.

۶. ز. استدلال قضیهٔ ۸.۶ را به‌طور مناسبی تغییر داده نشان‌دهید که اگر $a > 0$، آنگاه عدد

$$b = \sup\{y \in \mathbf{R}: 0 \leqslant y,\ y^2 \leqslant a\}$$

وجود دارد و دارای خاصیت $b^2 = a$ است. این‌عدد را با $\sqrt{a}$ یا $a^{1/2}$ نشان می‌دهیم و آن‌را **جذر مثبت** یا **ریشهٔ دوم مثبت** a می‌نامیم.

۶. ژ. بـا استفـاده از تمرین ۵. ش نشان دهید کـه اگر $0 < a < 1$، آنگاه $0 < a < \sqrt{a} < 1$، حال‌آنکه اگر $1 < a$، آنگاه $1 < \sqrt{a} < a$.

پروژه[۱]

۶. α. a^n و b^n را درحالتی که a و b اعدادی حقیقی، اکیداً مثبت هستند و $n \in \mathbf{N}$، قبلاً تعریف کرده‌ایم. از استقرای ریاضی معلوم می‌شود که هرگاه $m, n \in \mathbf{N}$

$$(\text{یك})\ a^m a^n = a^{m+n}\,;$$

$$(\text{دو})\ (a^m)^n = a^{mn}\,;$$

$$(\text{سه})\ (ab)^n = a^n b^n;$$

$$(\text{چهار})\ a<b \text{ اگر و فقط اگر } a^n<b^n\,.$$

در اینجا قراردادهای $a^0 = 1$ و $a^{-n} = 1/a^n$ را می‌پذیریم. لذا a^x را برای xهای در $\mathbf{Z}$ تعریف کرده‌ایم، و بسهولت می‌شود تحقیق کرد که خواص (یك) تا (سه) معتبر باقی می‌مانند.

می‌خواهیم a^x را برای اعداد گویای x طوری تعریف کنیم که (یك) تا (سه) برقرار باشند. مراحل زیر می‌تواند به‌عنوان رئوس مطالب مورد استفاده قرار گیرد. در تمام این قسمت فرض خواهیم کرد که a و b اعدادی حقیقی و بزرگتر از ۱ هستند.

(الف) اگر r عدد گویایی به‌شکل $r = m/n$ باشد که در آن m و n اعدادی صحیح هستند و $n>0$، تعریف می‌کنیم $S_r(a) = \{x \in \mathbf{R}: 0 \leqslant x^n \leqslant a^m\}$. نشان دهید که $S_r(a)$ یك زیرمجموعهٔ غیر تهی کراندار $\mathbf{R}$ است و تعریف کنید $a^r = \sup S_r(a)$.

(ب) ثابت کنید که $z = a^r$ ریشهٔ مثبت یکتای معادلهٔ $z^n = a^m$ است. (راهنمایی: عدد ثابتی مانند k هست به‌قسمی که اگر $0<\varepsilon<1$، آنگاه $(1+\varepsilon)^n<1+k\varepsilon$. در نتیجه اگر $x^n<a^m<y^n$، عددی مانند $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌قسمی که

$$x^n(1+\varepsilon)^n<a^m<y^n/(1+\varepsilon)^n.)$$

(پ) نشان دهید مقداری که برای a^r در قسمت (الف) داده شده است، بستگی به نمایش r به‌شکل m/n ندارد. همچنین، نشان دهید که اگر r عدد صحیح باشد، آنگاه تعریف جدید a^r همان مقدار تعریف قبلی را به‌دست می‌دهد.

(ت) نشان دهید که اگر $r, s \in \mathbf{Q}$، آنگاه $a^r a^s = a^{r+s}$ و $(a^r)^s = a^{rs}$.

(ث) نشان دهید که $a^r b^r = (ab)^r$.

(ج) اگر $r \in \mathbf{Q}$ و $r>0$، آنگاه $a<b$ اگر وفقط اگر $a^r<b^r$.

---

۱. پروژه‌ها برای درگیر کردن بیشتر خواننده با مسائل ریاضی آورده شده‌اند، ولی به‌یك اندازه ساده یا مشکل نیستند. ما این سه پروژه (نسبتاً مشکل) را در اینجا آورده‌ایم، چراکه منطقاً به‌این بخش متعلق هستند. خواننده بهتر است، پس‌ازآنکه بیشتر با زمینه آشنا شد، به‌حل آنها بپردازد.

(چ) اگر $s \in \mathbf{Q}$ و r، آنگاه $r<s$ اگر وفقط اگر $a^r<a^s$.
(ح) اگر c یک عدد حقیقی با شرط $0<c<1$ باشد، تعریف می کنیم $c^r=(1/c)^{-r}$.
نشان دهید که قسمتهای (ت) و (ث) برقرار هستند ونتیجه‌ای شبیه به (چ)، منتهی با علامت نابرابری درجهت عکس، برقرار می باشد.

۶. β. حال که a^x برای اعداد گویای x تعریف شده است، می‌خواهیم آن‌را برای xهای حقیقی تعریف کنیم. برای این‌کار از نتایج پروژهٔ قبل آزادانه استفاده می کنیم. مثل قبل، فرض کنیم a و b اعدادی حقیقی وبزرگتر از ۱ باشند. چنانچه $u \in \mathbf{R}$، می گیریم

$$T_u(a)=\{a^r : r \in \mathbf{Q},\ r \leqslant u\}.$$

نشان دهید که $T_u(a)$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی وکراندار $\mathbf{R}$ است، وتعریف کنید

$$a^u=\sup T_u(a).$$

ثابت کنید که این تعریف، وقتی u گویاست، همان نتیجهٔ قبلی را به‌دست می‌دهد. خواص نظیر قسمتهای (ت) تا (چ) پروژهٔ قبل‌را ثابت کنید. تابع بسیار مهمی که در این پروژه در $\mathbf{R}$ تعریف شده است به **تابع نمایی** (در پایهٔ a) موسوم است. برخی از تعریفهای دیگر تابع نمایی در بخشهای بعد داده خواهد شد. گاهی شایسته است که این تابع را با علامت

$$\exp_a$$

نمایش داده مقدارش را در عدد حقیقی u به‌جای a^u با $\exp_a(u)$ نشان دهیم.

۶. γ. بااستفاده ازخواص تابع نمایی که در پروژهٔ قبلی اثبات شده‌اند، نشان دهید که $\exp_a$ تابعی یک به‌یک به‌دامنهٔ $\mathbf{R}$ وبرد $\{y \in \mathbf{R} : y>0\}$ است. چون در این‌پروژه $a>1$ فرض‌شده است، این تابع نمایی اکیداً صعودی است، بدین‌معنی که اگر $x<u$، آنگاه $\exp_a(x)<\exp_a(u)$. بنابراین، تابع وارون به‌دامنهٔ $\{v \in \mathbf{R} : v>0\}$ وبرد $\mathbf{R}$ وجود دارد. ما این‌تابع وارون را **لگاریتم** (در پایهٔ a) می‌نامیم وآن‌را با

$$\log_a$$

نشان می‌دهیم. نشان دهید که $\log_a$ یک‌تابع اکیداً صعودی است و به‌ازای $v>0$، $\exp_a(\log_a(v))=v$ و به‌ازای $u \in \mathbf{R}$، $\log_a(\exp_a(u))=u$.
همچنین نشان دهید که $\log_a(1)=0$، $\log_a(a)=1$ و به‌ازای $v<1$، $\log_a(v)<0$ و به‌ازای $v>1$، $\log_a(v)>0$. ثابت کنید اگر $v, w>0$، آنگاه

$$\log_a(vw)=\log_a(v)+\log_a(w).$$

علاوه براین ، اگر $v>0$ و $x\in\mathbf{R}$، آنگاه

$$\log_a(v^x)=x\log_a(v).$$

بخش ۷ بریدگی، فاصله و مجموعهٔ کانتور

روش دیگری برای کامل کردن مجموعهٔ اعداد گویا و به‌دست‌آوردن $\mathbf{R}$ توسط ددکیند[1] ابداع شده، که برمفهوم «بریدگی» استوار است.

۱.۷ تعریف. گوییم جفت مرتب (A, B) از زیرمجموعه‌های غیرتهی $\mathbf{R}$ یك **بریدگی** تشکیل می‌دهد هرگاه $A\cap B=\varnothing$ ، $A\cup B=\mathbf{R}$ و به‌ازای هر $a\in A$ و هر $b\in B$ ، $a<b$.

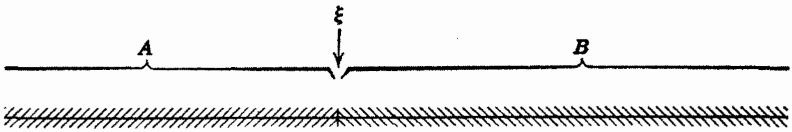
یك‌مثال بارز از یك بریدگی در $\mathbf{R}$ به‌ازای عنصر ثابت $\xi\in\mathbf{R}$ این‌طور به‌دست می‌آید که تعریف کنیم

$$A=\{x\in\mathbf{R}: x\leqslant\xi\},\quad B=\{x\in\mathbf{R}: x>\xi\}.$$

همچنین می‌توانستیم دومجموعهٔ زیر را اختیار کنیم

$$A_1=\{x\in\mathbf{R}: x<\xi\},\quad B_1=\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant\xi\}.$$

یك‌خاصیت مهم $\mathbf{R}$ این است که هر بریدگی در $\mathbf{R}$ با عددی حقیقی مشخص شده است. اکنون به‌اثبات این‌خاصیت می‌پردازیم .



شکل ۱.۷ یك بریدگی ددکیند

---

۱. ریشارد ددکیند Richard dedekind (۱۸۳۱ـ۱۹۱۶) یکی از شاگردان گاوس بود. در نظریهٔ اعدادکار می‌کرده است. لکن شهرتش به‌خاطر کارهایش در مبانی‌دستگاه‌اعداد حقیقی می‌باشد.

۲.۷ خاصیت بریدگی. اگر $(A \text{ و } B)$ یک بریدگی در $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه عدد یکتایی مانند $\xi \in \mathbf{R}$ وجوددارد به قسمی که به‌ازای هر $a \in A$، $a \leqslant \xi$ وبه‌ازای هر $b \in B$ $\xi \leqslant b$.

برهان . بنا به‌فرض، مجموعه‌های A و B غیرتهی‌اند وهرعنصر B یک کران بالای A است. ازاین‌رو A زبرینه‌ای‌دارد که آن‌را به ξ نشان می‌دهیم. چون ξ یک کران بالای A است، پس به‌ازای هر $a \in A$، $a \leqslant \xi$.

اگر $b \in B$، آنگاه ازتعریف بریدگی معلوم می‌شود که به‌ازای هر $a \in A$، $a \leqslant b$. بنا براین b یک کران بالای A است و در نتیجه $\xi \leqslant b$. بدین‌ترتیب وجود عددی باخواص ذکر شده نشان داده شد.

برای اثبات یکتایی ξ فرض می‌کنیم $\eta \in \mathbf{R}$ چنان‌باشد که به‌ازای هر $a \in A$، $a \leqslant \eta$ وبه‌ازای‌هر $b \in B$، $\eta \leqslant b$. پس‌نتیجه می‌شود که η یک کران بالای A است، از این‌رو $\xi \leqslant \eta$. اگر $\xi < \eta$، آنگاه عددی مانند $\zeta = (\xi + \eta)/۲$ هست به‌قسمی که $\xi < \zeta < \eta$. حال یا $\zeta \in A$ یا $\zeta \in B$. اما $\zeta \in A$ بااین حقیقت که به‌ازای هر $a \in A$، $a \leqslant \xi$، تناقض دارد و $\zeta \in B$، با این حقیقت که به‌ازای هر $b \in B$، $\eta \leqslant b$، تناقض دارد. بنابراین باید داشته‌باشیم $\xi = \eta$. $\square$

در واقع آنچه که ددکیند اساساً انجام داد تعریف عدد حقیقی با یک بریدگی در دستگاه اعداد گویا بود. **بااین روش می‌توان دستگاه اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ رابامجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$** «بنا» کرد.

حجره و فاصله

اگر $a \in \mathbf{R}$، آنگاه مجموعه‌های

$$\{x \in \mathbf{R} : x < a\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

پرتوهای باز مشخص شده با a نام دارند. به‌همین نحو، مجموعه‌های

$$\{x \in \mathbf{R} : x \leqslant a\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant a\}$$

به‌**پرتوهای‌بسته** مشخص شده با a موسوم‌اند. نقطهٔ a **نقطهٔ انتهایی** این‌پرتوها گفته می‌شود. این‌مجموعه‌ها اغلب بترتیب بانمادهای

$$(-\infty,\ a), \quad (a, +\infty), \quad (-\infty,\ a], \quad [a,\ +\infty),$$

نشان داده می‌شوند. در اینجا $-\infty$ و $+\infty$ صرفاً علامت‌هستند ونباید به‌عنوان‌عناصری از $\mathbf{R}$ درنظر گرفته شوند.

اگر $a, b \in \mathbf{R}$ و $a \leqslant b$، آنگاه مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$

حجرهٔ باز مشخص شده با a و b خوانده می‌شود و اغلب آن‌را به‌صورت (a, b) نشان می‌دهند. مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

حجرهٔ بستهٔ مشخص‌شده با a و b نام دارد و به‌صورت $[a, b]$ نشان داده می‌شود. ۲
مجموعه‌های

$$\{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x < b\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : a < x \leqslant b\}$$

حجره‌های نیم‌باز (یا **نیم‌بسته**) مشخص‌شده با a و b نامیده می‌شوند و بترتیب با

$$[a, b), \quad (a, b]$$

نشان داده می‌شوند. نقاط a و b **نقاط انتهایی** این‌حجره‌ها خوانده می‌شوند.

منظور ما از **فاصله** در $\mathbf{R}$، یك‌پرتو، یا یك‌حجره، ویا خود $\mathbf{R}$ است. درنتیجه ده نوع فاصلهٔ مختلف در $\mathbf{R}$ وجود دارند؛ که عبارت‌اند از

$$\varnothing, \quad (-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad [a, b], \quad [a, b),$$
$$(a, b], \quad (a, b), \quad [b, +\infty), \quad (b, +\infty), \quad \mathbf{R},$$

که در آنها $a, b \in \mathbf{R}$ و $a < b$. پنج‌تا ازاین فواصل کراندار هستند. دوتا از آنها فقط از بالا کراندارند، ودوتای آنها فقط از پایین کراندار می‌باشند.

حجرهٔ یکه (یا **فاصلهٔ یکه**) مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = [0, 1]$ است. این مجموعه بانماد متعارف $\mathbf{I}$ نشان داده خواهد شد.

می‌گوییم دنباله‌ای از فاصله‌ها مانند I_n، $n \in \mathbf{N}$، **آشیانی** است هرگاه زنجیر شمولهای

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

برقرار باشد. توجه به‌این نکته مهم است‌که یك‌دنبالهٔ فاصله‌های آشیانی الزاماً نقطهٔ مشترکی ندارد. جالب است به‌عنوان تمرین نشان‌دهیدکه اگر $I_n = (n, +\infty)$، $n \in \mathbf{N}$، آنگاه دنبالهٔ فاصله‌های حاصل آشیانی است اما نقطهٔ مشترکی ندارد. همچنین دنبالهٔ $J_n = (0, 1/n)$، $n \in \mathbf{N}$ آشیانی است ونقطهٔ مشترکی ندارد.

با این‌حال این یك‌خاصیت بسیار مهم $\mathbf{R}$ است‌که هردنبالهٔ آشیانی **حجره‌های بسته** (غیرتهی) نقطهٔ مشترکی دارد. اکنون به‌اثبات این‌مطلب می‌پردازیم.

۳.۷ خاصیت حجره‌های آشیانی. فرض می‌کنیم‌که به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، I_n یك‌حجرهٔ

بستهٔ غیرتهی در $\mathbf{R}$ است و فرض می‌کنیم این دنباله آشیانی است بدین‌معنی که

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots.$$

دراین‌صورت عنصری وجودداردکه به‌همهٔ این‌حجره‌ها متعلق است.

برهان . فرض‌کنید $I_n=[a_n, b_n]$ کـه در آن به‌ازای هر $n\in \mathbf{N}$ $a_n\leqslant b_n$. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای‌هر n، $I_n\subseteq I_1$ ، درنتیجه، به‌ازای هر n، $a_n\leqslant b_1$. از این‌رو مجموعهٔ $\{a_n : n\in \mathbf{N}\}$ ازبالاکراندار است. اگر ξ زبرینهٔ این‌مجموعه بـاشد. به‌ازای هر n، $a_n\leqslant \xi$.

حکم می‌کنیم که به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، $\xi\leqslant b_n$. اگر چنین نباشد، عددی مانند $m\in\mathbf{N}$ هست به‌قسمی که $b_m<\xi$. چون ξ زبرینهٔ $\{a_n : n\in \mathbf{N}\}$ است، a_pای وجوددارد به‌قسمی که $b_m<a_p$. حـال فرض کنیم q بزرگتر از اعداد طبیعی m و p باشد. از آنجا کـه $a_1\leqslant a_2\leqslant \cdots \leqslant a_n\leqslant \cdots$ و $b_1\geqslant b_2\geqslant \cdots\geqslant b_n\geqslant\cdots$، نتیجه می گیریم که

$$b_q\leqslant b_m<a_p\leqslant a_q.$$

اما این ایجاب می‌کند $b_q<a_q$ که بافرض غیرتهی‌بودن حجرهٔ $I_q=[a_q, b_q]$ متناقض است. بنابراین، به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ ، $\xi\leqslant b_n$. چون $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$ نتیجه می گیریم که به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، $\xi\in I_n=[a_n, b_n]$. □

ملاحظه می‌کنیم که، بـا مفروضات قضیهٔ ۳.۷، ممکن است بیش از یك‌عنصر مشترك وجود داشته بـاشد . در واقع، اگر بنویسیم $\eta=\inf\{b_n : n\in\mathbf{N}\}$ به‌عنوان یك‌تمرین می‌توان نشان‌داد که

$$[\xi, \eta]=\bigcap_{n\in \mathrm{N}} I_n.$$

مجموعهٔ کانتور

حال زیرمجموعه‌ای از فاصلهٔ یکهٔ $\mathbf{I}$ را معرفی می‌کنیم که توجه زیـادی به‌آن می‌شود و اغلب در ساختن مثالها و مثالهای ناقض مورد استفاده قرار می‌گیرد. مـا این‌مجموعه را به $\mathbf{F}$ نشان می‌دهیم و آن‌را با (بـا اینکه گاهی **مجموعهٔ سه‌تایی‌کانتور** یا **ناپیوستارکانتور** نیز می گویند) **مجموعهٔ‌کانتور** می‌نامیم.

یك‌راه توصیف $\mathbf{F}$ این است که آن‌را مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی در $\mathbf{I}$ بگیریم که در بسط آنها در پـایهٔ ۳ تنها ارقـام ۰ و ۲ به‌کار رفته باشند. بااین‌حال، این مجموعه را به‌صورت دیگری تعریف می کنیم. به‌تعبیری که بعداً دقیقتر بیان خواهد شد، اگر «یك‌سوم میانی» $\mathbf{I}$ و یك سوم میـانی فواصل حـاصل را حذف‌کنیم ، $\mathbf{F}$ مجموعهٔ نقاطی است که پس از حذف متوالی یك‌سوم میانی فواصل باقی می‌ماند.

توضیح بیشتر اینکه، اگر فاصلهٔ باز یك‌سوم میانی را از $\mathbf{I}$ برداریم، مجموعهٔ

$$F_{۱}=\left[۰\,,\ \frac{۱}{۳}\right]\cup\left[\frac{۲}{۳},\ ۱\right]$$

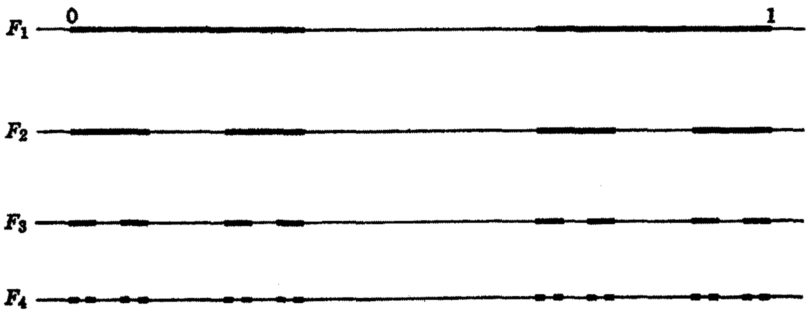
به‌دست می‌آید. چنانچه از هریك از دو فاصلهٔ بستهٔ در $F_{۱}$ ، فاصلهٔ باز یك‌سوم میانی را برداریم، مجموعهٔ

$$F_{۲}=\left[۰\,,\ \frac{۱}{۹}\right]\cup\left[\frac{۲}{۹},\ \frac{۱}{۳}\right]\cup\left[\frac{۲}{۳},\ \frac{۷}{۹}\right]\cup\left[\frac{۸}{۹},\ ۱\right]$$

را خواهیم داشت. بدین‌ترتیب $F_{۲}$ اجتماع $(۲^{۲}=)۴$ فاصلهٔ بسته است که هریك به‌شکل $[k/۳^{۲},\ (k+۱)/۳^{۲}]$ می‌باشد. حال فاصلهٔ باز یك‌سوم میانی هریك از این چهار مجموعه را حذف می‌کنیم تا $F_{۳}$ به‌دست‌آید. در حالت‌کلی، اگر F_n ساخته شده باشد و از اجتماع ۲^n فاصله به‌شکل $[k/۳^n\ ,\ (k+۱)/۳^n]$ تشکیل شده باشد، آنگاه $\mathbf{F}_{n+۱}$ ازحذف فاصلهٔ باز یك‌سوم میانی هریك ازاین فواصل به‌دست می‌آید.

بعد از انجام این‌عمل به‌ازای هر n در $\mathbf{N}$ ، آنچه باقی می‌ماند مجموعهٔ‌کانتور است.

۴.۷ تعریف. مجموعهٔ‌کانتور $\mathbf{F}$ عبارت است ازمقطع مجموعه‌های F_n، $n\in\mathbf{N}$، که ازحذف متوالی فواصل باز یك‌سوم میانی به‌دست می‌آیند.



شکل ۲.۷ مجموعهٔ‌کانتور

در نگاه اول، ممکن است این‌طور به‌نظر برسد که با این عمل هر نقطه سرانجام در $\mathbf{I}$ حذف می‌شود. اما به‌روشنی دیده می‌شود که این‌نظر درست نیست چرا که نقاط ۰، ۱/۳، ۲/۳، ۱ به‌تمام F_nها، $n\in\mathbf{N}$، ودرنتیجه به‌مجموعهٔ‌کانتور $\mathbf{F}$ تعلق‌دارند. در حقیقت به‌آسانی می‌توان دیدکه در $\mathbf{F}$ بینهایت نقطه وجود دارد ، با اینکه $\mathbf{F}$ از جهاتی دیگر نسبتاً «تنك» است. در واقع اثبات اینکه تعداد عناصر $\mathbf{F}$ شمارش‌ناپذیر

است و اینکه می‌توان نقاط $\mathbf{F}$ را با نقاط $\mathbf{I}$ درتناظر یك‌به‌یك قرارداد مشکل نیست. پس مجموعهٔ $\mathbf{F}$ شامل تعداد زیادی عنصر است.

اکنون دو تعبیر برای «تنك‌بودن» $\mathbf{F}$ می‌آوریم، اول آنکه ملاحظه می‌کنیم $\mathbf{F}$ شامل هیچ فاصلهٔ غیرتهی نیست. زیرا هرگاه x متعلق به $\mathbf{F}$ وفاصلهٔ باز (a, b) شامل x باشد، آنگاه (a, b) شامل یك‌فاصلهٔ باز یك‌سوم میانی است که در به‌دست‌آوردن $\mathbf{F}$ حذف شده است. (چرا؟) ازاین‌رو (a, b) زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ کانتور نیست، بلکه بی‌نهایت نقطهٔ مجموعهٔ متمم، $\mathcal{C}(\mathbf{F})$ را شامل است.

تعبیر دوم تنك‌بودن $\mathbf{F}$ مربوط به«طول» است. با آنکه تعریف طول برای زیرمجموعه‌های دلخواه $\mathbf{R}$ ممکن نیست، لکن بسهولت می‌توان خودرا قانع کرد که $\mathbf{F}$ نمی‌تواند طول مثبت داشته‌باشد. زیرا طول F_1 برابر با ۲/۳، طول F_2 برابر با ۴/۹ و، درحالت کلی، طول F_n برابر $(۲/۳)^n$ است. چون $\mathbf{F}$ زیرمجموعه‌ای از F_n است، نمی‌تواند طولی بیش ازطول F_n داشته‌باشد. ازآنجا که این‌مطلب به‌ازای هر n در $\mathbf{N}$ درست است نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{F}$، باوجود شمارش‌ناپذیربودن، دارای طول مثبت نیست.

باآنکه مجموعهٔ کانتور عجیب می‌نماید، ازبسیاری جهات نسبتاً خوشرفتاراست. باکمی تعمق دراین‌مجموعه دیده‌می‌شود که $\mathbf{R}$ چه زیرمجموعه‌های پیچیده‌ای دارد و درك شهودی ما چقدرکم راهنمای ماست. دربخشهای بعدی مفاهیمی معرفی خواهند شد که اهمیت آنها برحسب فاصله‌ها و زیرمجموعه‌های بسیار مقدماتی دیگرکاملاً درك نمی‌شوند. در این موارد مجموعهٔ کانتور به‌عنوان یك‌آزمون نیز به‌کار می‌رود.

الگوهایی برای R

در بخشهای ۴ تا ۶ $\mathbf{R}$ را به‌طریق اصل موضوعی معرفی کرده‌ایم، به این معنی که چند خاصیت را برشمردیم و فرض کردیم که $\mathbf{R}$ دارای این‌خواص است. سؤالی که در این روش مطرح می‌شود این است که آیا چنین مجموعه‌ای واقعاً وجود دارد و به‌چه تعبیری یکتاست. با آنکه وارد این‌بحث نخواهیم شد به‌ذکر چند نکته‌که بیقین مناسب این متن است، می‌پردازیم.

برای اثبات وجود مجموعه‌ای که یك‌هیأت مرتب‌کامل باشد می‌توان عملاً آن‌را ساخت. چنانچه احساس کنیم که با هیأت اعداد گویای $\mathbf{Q}$ به‌حدکافی آشنایی داریم، می‌توانیم اعداد حقیقی را به‌وسیلهٔ زیرمجموعه‌های خاصی از $\mathbf{Q}$ تعریف کنیم و جمع، ضرب، ورابطه‌های ترتیبی بین این‌زیرمجموعه‌ها را طوری تعریف نماییم که یك‌هیأت مرتب‌کامل به‌دست آید. برای این‌امردوروش متعارف به‌کارمی‌رود: یکی روش«برید گیها»ی ددکیند است که درکتاب رودین[1]، که درکتابنامه ذکر شده موردبحث قرار گرفته است؛

1. Rudin

دیگری روش «دنباله‌هــای کوشی» است که کانتور به‌کار برده است ودرکتاب همیلتن[1] و لاندین[2] مطرح شده است.

درآخرین بند، حکم کرده‌ایم که امکان‌ساختن یك الگوی $\mathbf{R}$ از $\mathbf{Q}$ (حداقل به‌دوراه) وجود دارد. همچنین ممکن است یك الگوی $\mathbf{R}$ را از مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ ساخت و اغلب افرادی‌که، مانند کرونکر[3]، اعداد طبیعی‌را خداداد می‌دانند، $\mathbf{N}$ را نقطهٔ آغاز می گیرند. به‌هرحال ، چون درمجموعهٔ اعداد طبیعی نیز نکات حساسی (مانند خاصیت خوش‌ترتیبی) وجود دارد، احساس می کنیم که رضایت‌بخش‌ترین روش آن است کــه ابتدا مجموعهٔ $\mathbf{N}$ را ازمفاهیم مقدماتی‌نظریهٔ مجموعه‌ها بسازیم، بعد مجموعهٔ اعدادصحیح $\mathbf{Z}$ را عرضه کنیم، سپس به‌ساختن هیأت اعدادگویای $\mathbf{Q}$ وبالاخره مجموعهٔ $\mathbf{R}$ بپردازیم. درك این‌روش با مشکل خــاصی مواجه نیست وآموزنده است ، لکن کمی طولانی است . چــون این‌روش بتفصیل درکتاب همیلتن و لاندین عرضه شده است دراینجا ذکر نخواهد شد.

باتوجه به‌تذکرات قبل، واضح است که هیأتهای مرتب‌کامل را می‌توان به‌روشهای متفاوت‌ساخت. لذا نمی‌توانیم بگوییم که تنها یك‌هیأت مرتب‌کامل وجوددارد. به‌یك‌معنی، تمام روشهای ساختن پیشنهاد شده در بالا به‌هیأتهای مرتب‌کاملی منجر می‌شوندکه بــا هم «یکریخت»اند. (یعنی هرگاه R_1 و R_2 دومیدان مرتب‌کامل بــاشندکه با روشهای متفاوت به‌دست‌آمده‌اند، یك نگاشت یك‌به‌یك مانند φ از R_1 روی R_2 هست به‌قسمی‌که (یك) φ یك‌عنصرگویــای R_1 را به‌عنصرگویای نظیرش در R_2 می‌برد، (دو) φ ، $a+b$ را به $\varphi(a)+\varphi(b)$ می‌برد ، (سه) φ ، ab را به $\varphi(a)\,\varphi(b)$ می برد ، و (چهار) φ یك‌عنصر مثبت R_1 را به‌یك عنصر مثبت R_2 می برد.) در محدودهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها به‌زبــان ساده ، می‌توان برهانی آوردکه نشان‌دهد هردو هیأت مرتب‌کامل به‌مفهوم بالا، یکریخت هستند. امکان قالب‌ریزی این‌برهان دریك دستگاه منطقی بستگی دارد به‌قواعد استنباطی‌که درآن دستگاه به‌کار گرفته می‌شوند. لذا این‌مسئله‌که درچه‌حدودی دستگاه اعدادحقیقی‌را می‌توان به‌طور یکتا معین‌کرد، یك‌بحث نسبتاً ظریف منطقی است. با این‌حال ، برای اهداف مــا این یکتایی (یــا فقدان‌آن) مهم نیست ، چراکه می‌توانیم هر هیأت مرتب‌کامل خاصی را به‌عنوان الگو برای دستگاه اعداد حقیقی درنظر بگیریم .

تمرین

۷. الف. اگر (A, B) یك‌بریدگی در $\mathbf{R}$ باشد، نشان‌دهیدکه $\sup A = \inf B$.

---

1. Hamilton 2. Landin

۳. لئوپلدکرونکر Leopold Kronecker (۱۸۹۱–۱۸۲۳) در برلن شاگرد دیریکله و دربن شاگردکومر بوده است. بعد از رسیدن به‌ثروت پیش از سی‌سالگی به‌ریاضیات بازگشت. به‌سبب‌کارهایش درجبر و نظریهٔ اعداد و نیز مخالفت شخصی‌اش با نظریات کانتور در باب نظریهٔ مجموعه‌ها مشهور است.

۷. ب. اگر بریدگیهای (A, B) و (A', B') بترتیب اعداد حقیقی ξ و ξ' را مشخص نمایند، نشان‌دهید که شرط $\xi<\xi'$ ایجاب می‌کند که $A\subseteq A'$ و $A\neq A'$.

۷. پ. آیا عکس تمرین قبل درست است؟

۷.ت. فرض کنید $A=\{x\in\mathbf{R}: x\leqslant ۰$ یا $x^۲\leqslant ۲\}$ و $B=\{x\in\mathbf{R}: x>۰$ و $x^۲>۲\}$.
نشان‌دهید که (A, B) یك بریدگی در $\mathbf{R}$ است.

۷.ث. فرض کنید به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، $I_n=(n, +\infty)$. نشان‌دهید که این‌دنبالهٔ فواصل، آشیانی است ولی نقطهٔ مشترکی وجود ندارد.

۷. ج. فرض کنید به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، $J_n=(۰, ۱/n)$. نشان‌دهید که این‌دنبالهٔ فواصل، آشیانی است ولی نقطهٔ مشترکی وجود ندارد.

۷. چ. اگر $I_n=[a_n, b_n]$، $n\in\mathbf{N}$، دنباله‌ای آشیانی از حجره‌های بسته باشد، نشان‌دهید که

$$a_۱\leqslant a_۲\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant\ldots\leqslant b_m\leqslant\ldots\leqslant b_۲\leqslant b_۱.$$

چنانچه بنویسیم $\xi=\sup\{a_n: n\in\mathbf{N}\}$ و $\eta=\inf\{b_m: m\in\mathbf{N}\}$، نشان‌دهید که $[\xi, \eta]=\bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n$.

۷. ح. نشان‌دهید که هرعدد درمجموعهٔ کانتور دارای بسط سه‌تایی (درپایهٔ ۳) است که در آن فقط ارقام ۰ و ۲ به‌کار رفته است.

۷. خ. نشان‌دهید که‌دستهٔ نقاط انتهایی «سمت راست» در $\mathbf{F}$ شمارش‌پذیر بی‌پایان است. نشان‌دهید که هرگاه تمام این‌نقاط انتهایی را از $\mathbf{F}$ برداریم، آنگاه باقیمانده را می‌توان با تمام مجموعهٔ $[۰، ۱)$ در تناظر یك‌به‌یك قرارداد. از این نتیجه بگیرید که مجموعهٔ $\mathbf{F}$ شمارش‌پذیر نیست.

۷.د. هرفاصلهٔ باز $(a ، b)$ که شامل نقطه‌ای از $\mathbf{F}$ باشد. تمام یك‌مجموعهٔ «یك‌سوم میانی» که به $\mathcal{C}(\mathbf{F})$ متعلق است‌را نیز دربردارد. ازاین‌رو $\mathbf{F}$ شامل‌هیچ زیرفاصلهٔ غیرتهی نیست.

۷. ذ. با حذف مجموعه‌هایی با طول نزولی، نشان‌دهید که می‌توان مجموعه‌ای «کانتورمانند» ساخت که دارای طول مثبت باشد. تاچه‌اندازه طول این‌مجموعه را می‌توان بزرگ کرد؟

۷. ر. نشان‌دهید که $\mathbf{F}$ اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر ازفواصل بسته نیست.

فصل دوم

توپولوژی فضاهای دکارتی

بخشهای فصل اول را به‌ارائهٔ خواص جبری، خواص ترتیبی ، و خاصیت کمال دستگاه اعداد حقیقی اختصاص داده‌ایم. از این خواص در این‌فصل وفصلهای آتی استفادهٔ شایانی خواهد شد.

با آنکه می‌توان بحث دنباله‌های اعداد حقیقی و توابع حقیقی پیوسته را بلافاصله پیش کشید ، ترجیح می‌دهیم بررسی این مطالب کمی به‌تعویق بیفتد . در واقع ، در اینجا تعاریف فضای‌برداری ، فضای نرم‌دار و فضای ضرب داخلی را مطرح می‌کنیم . این عمل به‌این خاطر است که این مفاهیم بسهولت قابل درك‌اند و این فضاها (قطع نظر از کاربردهایی که در هندسه، فیزیك، مهندسی، اقتصاد، و غیره دارند) در سرتاسر آنالیز ظاهر می‌شوند . البته ، به فضاهای دکارتی $\mathbf{R}^p$ توجه خاصی مبذول خواهیم داشت. خوشبختانه، درك شهودی ما از $\mathbf{R}^2$ ، $\mathbf{R}^3$ معمولاً بدون تغییر زیادی به‌فضای $\mathbf{R}^p$ تعمیم می‌یابد. و شناختی از این فضاها به‌تحلیل فضاهای کلی‌تر کمك می‌کند.

بخش ۸ فضاهای برداری و دکارتی

«فضای برداری» مجموعه‌ای است که درآن می‌توان دوعنصر را باهم جمع کرد وعنصری را در عددی حقیقی ضرب نمود، به‌نحوی‌که بعضی از خواص آشنا برقرار باشند. حال مطلب را دقیقتر بیان می‌کنیم.

۱۰۸ تعریف. فضای برداری مجموعه‌ای است مانند V (که عناصرش را **بردار** می‌نامند) مجهز به‌دوعمل دوتایی که **جمع برداری** و **ضرب عددی** نامیده می‌شود.

اگر $x, y \in V$ آنگاه عنصری مانند $x+y$ در V ، موسوم به **مجموع برداری**

x و y ، وجود دارد. این‌جمع برداری در خواص زیر صدق می‌کند:

(ج ۱) به‌ازای هر x و y در V ، $x+y=y+x$ ؛

(ج ۲) به‌ازای هر x و y و z در V $(x+y)+z=x+(y+z)$؛

(ج ۳) عنصری مانند 0 در V هست به‌قسمی که‌به‌ازای هر x در V، $x=0+x$ و $x+0=x$؛

(ج ۴) به‌ازای هر x مفروض در V عنصری مـانند $-x$ در V هست به‌قسمی که $x+(-x)=0$.

چنانچه $a\in\mathbf{R}$ و $x\in V$ ، عنصری مـانند ax در V ، موسوم به **حاصلضرب** a و x ، وجود دارد. این‌ضرب عددی دارای خواص زیر است :

(ض ۱) به‌ازای هر $x\in V$ ، $1x=x$ ؛

(ض ۲) به‌ازای هر a ، $b\in\mathbf{R}$ و $x\in V$ ، $a(bx)=(ab)x$؛

(ب) به‌ازای هـر $a, b\in\mathbf{R}$ و x ، $y\in V$ ، $a(x+y)=ax+ay$ و $(a+b)x=ax+bx$.

حال به‌ذکر چند مثال مقدماتی، ولی مهم، از فضاهای برداری می‌پردازیم.

۲۰۸ چندمثال. (الف) دستگاه اعدادحقیقی یك‌فضای برداری‌است‌که درآن اعمال جمع و ضرب عددی همان جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی است.

(ب) فرض‌کنید $\mathbf{R}^2$ نشانگر حاصلضرب دکارتی $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ باشد. بنـابراین $\mathbf{R}^2$ از تمام جفتهای مرتب (x_1 , x_2) ازاعداد حقیقی تشکیل شده است. هرگاه جمع برداری و ضرب عددی را با

$$(x_1, x_2)+(y_1 ,y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$$

و

$$a(x_1, x_2)=(ax_1, ax_2)$$

تعریف‌کنیم، بسهولت می‌توان صحت خواص ذکـرشده در تعریف ۱۰۸ را تحقیق نمود. [در اینجا $0=(0, 0)$ و $-(x_1, x_2)=(-x_1,-x_2)$.] لذا $\mathbf{R}^2$ تحت این اعمال یك فضای برداری است.

(پ) فرض‌کنید $p\in\mathbf{N}$ و $\mathbf{R}^p$ نشانگر دستهٔ تمام «pتاییهای» مرتب

$$(x_1, x_2, \dots , x_p)$$

با شرط $x_i\in\mathbf{R}$ به‌ازای $i=1, \dots , p$ بـاشد . هرگاه جمع برداری و ضرب عددی را با

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p)+(y_1, y_2, \ldots, y_p)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_p+y_p)$$

و

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_p)=(ax_1, ax_2, \ldots, ax_p),$$

تعریف کنیم، بسهولت می‌توان تحقیق کرد که $\mathbf{R}^p$ تحت این اعمال یك فضای برداری است. [در اینجا دیده می‌شود که $0=(0, 0, \ldots, 0)$ و

$$[-(x_1, x_2, \ldots, x_p)=(-x_1, -x_2, \ldots, -x_p).]$$

(ت) فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه و $\mathbf{R}^S$ نشانگر دستهٔ تمام توابع u به‌دامنهٔ S و برد در $\mathbf{R}$ باشد. (بنابراین، $\mathbf{R}^S$ دستهٔ تمام توابع حقیقی تعریف شده در S است.) هرگاه $u+v$ و au را با

$$(u+v)(s)=u(s)+v(s)$$

و

$$(au)(s)=au(s),$$

به‌ازای هر $s \in S$، تعریف کنیم؛ بسهولت می‌توان تحقیق کرد که R^S تحت این اعمال یك فضای برداری است. [در اینجا 0 تابع متحد با صفر و $-u$ تابعی است که مقدارش در $s \in S$ برابر با $-u(s)$ است.]

در بخشهای بعدی با فضاهای برداری دیگری برخورد خواهیم کرد.

معمولاً به‌جای $x+(-y)$ خواهیم نوشت $x-y$.

حاصلضرب داخلی و نرم

خواننده توجه خواهد کرد که ضرب عددی در یك فضای برداری V تابعی است به‌دامنهٔ $\mathbf{R}\times V$ و برد V. بسیاری از فضاهای برداری به تابعی به‌دامنهٔ $V\times V$ و برد $\mathbf{R}$ نیز مجهزاند.

۳.۸ تعریف. هرگاه V یك فضای برداری باشد، **حاصلضرب داخلی** (یا **حاصلضرب نقطه‌ای**) تابعی است در $V\times V$ به $\mathbf{R}$ که با $(x, y) \to x\cdot y$ نموده شده است و در خواص زیر صدق می‌کند:

(یك) به‌ازای هر $x \in V$، $x\cdot x \geqslant 0$؛

(دو) $x\cdot x=0$ اگر و فقط اگر $x=0$؛

(سه) به‌ازای هر $x, y \in V$ $x\cdot y=y\cdot x$؛

(چهار) به‌ازای هر $x, y, z \in V$، $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ و

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

(پنج) به‌ازای هر $x, y \in V$ و $a \in \mathbf{R}$، $(ax) \cdot y = a(x \cdot y) = x \cdot (ay)$. هر فضای برداری که در آن حاصلضرب داخلی تعریف‌شده باشد **فضای حاصلضرب داخلی** نام دارد.

ممکن است در یك فضای برداری حاصلضرب هـای داخلی متفاوتی تعریف شوند (ر. ك. تمرین ۸. ت).

۴.۸ چندمثال. (الف) ضرب معمولی در $\mathbf{R}$ از خواص بالا برخوردار است، در نتیجه $\mathbf{R}$ یك فضای حاصلضرب داخلی است.

(ب) در $\mathbf{R}^۲$، تعریف می‌کنیم

$$(x_۱, x_۲) \cdot (y_۱, y_۲) = x_۱ y_۱ + x_۲ y_۲ \cdot$$

بسهولت می‌توان تحقیق کرد که این رابطه معرف یك حاصلضرب داخلی در $\mathbf{R}^۲$ است.

(پ) در $\mathbf{R}^p$، تعریف می‌کنیم

$$(x_۱, x_۲, \ldots, x_p) \cdot (y_۱, y_۲, \ldots, y_p) = x_۱ y_۱ + x_۲ y_۲ + \cdots + x_p y_p$$

بسهولت می‌توان تحقیق کرد که این‌رابطه معرف یك حاصلضرب داخلی در $\mathbf{R}^p$ است.

۵.۸ تعریف. اگر V یك فضای برداری باشد، آنگاه **نرم** در V تابعی است در V، به $\mathbf{R}$ که با $x \longmapsto \|x\|$ نموده شده است و در خواص زیر صدق می‌کند:

(یك) به‌ازای هر $x \in V$ ؛ $\|x\| \geqslant ۰$ ؛

(دو) $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$؛

(سه) به‌ازای هر $x \in V$ و $a \in \mathbf{R}$، $\|ax\| = |a| \, \|x\|$ ؛

(چهار) به‌ازای هر $x, y \in V$، $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

فضایی برداری که در آن نرم تعریف شده‌باشد **فضای نرم‌دار** نام دارد.

همـان‌طور که در تمرینها خواهیم دید، فضای برداری می‌تواند چندین نرم جالب داشته باشد.

۶.۸ چندمثال. (الف) تـابع قدر مطلق در $\mathbf{R}$ از خواص مذکور در ۸. ۵ برخوردار است.

(ب) در $\mathbf{R}^۲$، تعریف می‌کنیم

$$\|(x_۱, x_۲)\| = (x_۱^۲ + x_۲^۲)^{۱/۲}.$$

تحقیق درستی خواص (یك)، (دو)، و (سه) خیلی آسان و در مورد خـاصیت (چهار) قدری مشکلتر است.

(پ) در $\mathbf{R}^p$ ، تعریف می‌کنیم

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)^{1/2}.$$

باز در اینجا خواص (یك)، (دو)، و (سه) بآسانی تحقیق می‌شوند.

اینك قضیه‌ای را ذکر می‌کنیم که نشان می‌دهد همواره می‌توان با استفاده از حاصلضرب داخلی نرمی را به‌طریق طبیعی تعریف کرد.

۷.۸ قضیه. فرض‌کنیم V یك‌فضای حاصلضرب داخلی باشد و $\|x\|$ با

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \text{ ،به‌ازای } x \in V$$

تعریف شده‌باشد. در این‌صورت $x \longrightarrow \|x\|$ یك نرم در V است ودر خاصیت

$$x \cdot y \leqslant \|x\| \, \|y\| \qquad (*)$$

صدق می‌کند. علاوه براین، اگر x و y مخالف صفر باشند، آنگاه در (*) برابری برقرار است اگر و فقط اگر عدد حقیقی اکیداً مثبتی مانند c وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $x = cy$.

برهان . چون به ازای هر $x \in V$، $x \cdot x \geqslant 0$، پس ریشهٔ دوم $x \cdot x$ وجود دارد، در نتیجه $\|x\|$ خوش‌تعریف است. سه‌خاصیت اول نرم، نتایج مستقیم ۳.۸ (یك)، (دو)، و (پنج) می‌باشند. برای‌اثبات(*) فرض‌می‌کنیم $a, b \in \mathbf{R}$، $x, y \in V$، و$z = ax - by$. چنانچه از خواص ۳.۸ (یك)، (سه)، (چهار)، و (پنج) استفاده نماییم، خواهیم‌داشت

$$0 \leqslant z \cdot z = a^2 x \cdot x - 2ab x \cdot y + b^2 y \cdot y.$$

حال می‌گیریم $a = \|y\|$ و $b = \|x\|$؛نتیجه می‌شود:

$$0 \leqslant \|y\|^2 \|x\|^2 - 2\|y\| \, \|x\| x \cdot y + \|x\|^2 \, \|y\|^2$$

$$= 2\|x\| \, \|y\| \, (\|x\| \, \|y\| - x \cdot y).$$

بنابراین نابرابری (*) برقرار است.

اگر $x = cy$ و $c > 0$ آنگاه $\|x\| = c\|y\|$ و لذا

$$x \cdot y = (cy) \cdot y = c\,(y \cdot y) = c\|y\|^2$$

$$= \|x\| \, \|y\|,$$

در نتیجه در(*) برابری برقراراست. بعکس، اگر $x \cdot y = \|x\| \, \|y\|$، محاسبات

بند قبل نشان می‌دهد که $z = \|y\|x - \|x\|y$ دارای خاصیت $z.z = 0$ است. بنابراین $z = 0$ و چون x و y دوبردار مخالف صفر هستند، می‌توانیم c را $\|x\|/\|y\|$ بگیریم.
برای اثبات ۵.۸ (چهار) از (*) استفاده کرده می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y).(x+y)\\ &= x.x + x.y + y.x + y.y\\ &= \|x\|^2 + 2(x.y) + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $x, y \in V$ ، $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

اثبات نتیجهٔ زیر را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌نماییم.

۸.۸ نتیجه. اگر x و y عناصری در V باشند، آنگاه

$$|x.y| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{**}$$

علاوه براین، اگر $y \neq 0$ ، آنگاه در (**) برابری می‌تواند برقرار باشد اگر و فقط اگر عددی حقیقی مانند c باشد به‌قسمی که $x = cy$.

هردو نابرابری(*) و (**) **نابرابری شوارتس**[1] ، یا **نابرابری کوشی**[2]ـ**بونیاکوفسکی**[3] ـ **شوارتس** خوانده می‌شوند. این نابرابریها مکرر مورد استفاده قرار

---

۱. هرمان‌اماندوس شوارتس Hermann Amandus Schwarz (۱۸۴۳ـ۱۹۲۱) شاگرد و جانشین وایرشتراس در برلن بود. او در بسیاری از رشته‌ها ، بویژه در آنالیز مختلط، نتایج بسیاری به‌دست آورده است.

۲. اگوستن‌لوئی‌کوشی Augustin - Louis Cauchy (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، بنیانگذار آنالیز جدید است و در قسمتهای دیگر ریاضی نیزکارهای بسیار عمیقی انجام داده‌است. او به‌عنوان مهندس درخدمت ناپلئون بود، همراه با شارل دهم به‌میل خود به‌تبعید رفت، ودر دوران سلطنت ژویه به‌خاطر ادانکردن سوگند وفاداری، مقام خودرا درکولژدوفرانس از دست داد. علی‌رغم فعالیتهای سیاسی ومذهبی‌اش، توفیق یافت ۷۸۹ مقاله ریاضی‌بنویسد.

۳. ویکتوربونیاکوفسکی Victor Bunyakovski (۱۸۰۴ ـ ۱۸۸۹) ، که در سن‌پترزبورگ استاد بود، تعمیمی از نابرابری کوشی در مورد انتگرالها را در سال ۱۸۵۹ ثابت‌کرد. نویسندگان غربی از تحقیقاتش آگاه نشدند و بعدها شوارتس مستقلاً آن را به‌دست آورد.

خواهند گرفت. نابرابری ۵.۸ (چهار) **نابرابری مثلثی** نام دارد. نشان‌دادن

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x\pm y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

به‌ازای هر x و y در یك فضای نرم‌دار را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌نماییم.

فضای دکارتی $\mathbf{R}^p$

منظور از **فضای دکارتی p- بعدی حقیقی**، مجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ است که به‌جمع برداری و ضرب عددی تعریف شده در مثال ۸. ۲ (پ) و ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۸. ۴ (پ) مجهز شده باشد. همان‌طورکه دیده‌ایم، این **حاصلضرب داخلی** نرم

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2}$$

را القاء می‌کند. اعداد حقیقی x_1، x_2، . . .، x_p به‌ترتیب **مختص** (یا **مؤلفهٔ**) **اول**، **دوم**، . . .، **p ــ ام** بردار $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ نامیده می‌شوند.

در $\mathbf{R}^p$، عدد حقیقی $\|x\|$ را می‌توان به‌عنوان «طول» x ویا دوری x از ۰ در نظر گرفت. به‌طورکلیتر، $\|x-y\|$ را به‌عنوان دوری x از y در نظر می‌گیریم. با این تعبیر، خاصیت ۵.۸ (دو) گویای این مطلب است که دوری x از y صفر است اگر وفقط اگر $x=y$. ازخاصیت ۵.۸ (سه) به‌ازای $a=-1$ رابطهٔ $\|x-y\|=\|y-x\|$ به‌دست می‌آید. این‌رابطه بدین‌معنی است که دوری x از y با دوری y از x برابراست. نابرابری مثلثی ایجاب می‌کند که

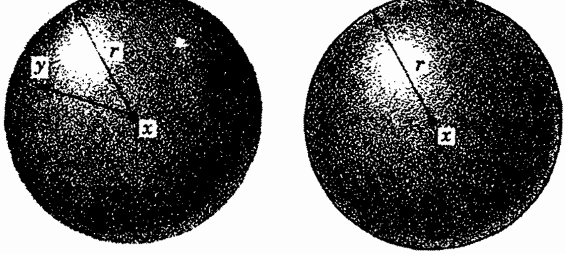
$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|.$$

این رابطه بیان می‌کند که دوری x از y از مجموع دوریهای x از z و z از y بزرگتر نیست.

۹.۸ تعریف. فرض کنیم $x\in\mathbf{R}^p$ و $r>0$. در این صورت مجموعهٔ $\{y\in\mathbf{R}^p : \|x-y\|<r\}$ **گوی باز** به‌مرکز x و **شعاع** r خوانده می‌شود. مجموعهٔ $\{y\in\mathbf{R}^p : \|x-y\|\leqslant r\}$ **گوی بسته** به‌مرکز x و شعاع r نامیده می‌شود. مجموعهٔ $\{y\in\mathbf{R}^p, \|x-y\|=r\}$ **کرهٔ** به‌مرکز x و **شعاع** r نام دارد.

مفهوم گوی به‌نرم بستگی دارد. در تمرینها خواهید دید که برخی ازگویها خیلی «گرد» نیستند.

اغلب بجاست که روابطی بین نرم یك‌بردار در $\mathbf{R}^p$ و بزرگی مؤلفه‌هایش داشته باشیم.



یك‌گوی باز به‌مرکز x یك‌گوی بسته به‌مرکز x

شکل ۱.۸

۱۰.۸ قضیه. اگر $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ عنصر دلخواهی از $\mathbf{R}^p$ باشد، آنگاه $|x_i| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{p}\,\sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$.

برهان. چون $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2$، واضح است که به‌ازای هر i، $|x_i| \leqslant \|x\|$. به همین‌نحو، اگر $M=\sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$، آنگاه $\|x\|^2 \leqslant pM^2$، در نتیجه $\|x\| \leqslant \sqrt{p}M$. □

نابرابری که هم‌اکنون ثابت شد، از حیث‌کمی، مبین آن است که، اگر نرم x کوچك باشد، آنگاه طول مؤلفه‌هایش کوچك است، وبرعکس.

تمرین

۸.الف. هرگاه V یك‌فضای برداری باشد وبه‌ازای یك x و z در V، $x+z=x$، نشان دهیدکه $z=0$. بنابراین عنصر صفر در V یکتاست.

۸.ب. هرگاه‌به‌ازای‌یك x ویك y در V، $x+y=0$، نشان دهیدکه $y=-x$.

۸.پ. $p \in \mathbf{N}$ و $S=\{1, 2, \ldots, p\}$ داده شده‌اند. نشان دهید کـه فضای برداری $\mathbf{R}^S$ «در اصل» همان فضای برداری $\mathbf{R}^p$ است.

۸.ت. اگر w_1 و w_2 اکیداً مثبت باشند، نشان دهیدکه با تعریف

$$(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = x_1y_1w_1 + x_2y_2w_2$$

یك حاصلضرب داخلی در $\mathbf{R}^2$ به‌دست می‌آید. این‌تعریف را در $\mathbf{R}^p$ تعمیم دهید.

۸.ث. تعریف

$$(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = x_1y_1$$

یک حاصلضرب داخلی در $\mathbf{R}^2$ تعریف نمی‌کند. چرا؟

۸. ج. اگر $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)\in\mathbf{R}^p$، $\|x\|_1$ را با

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_p|$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که $x \longrightarrow \|x\|_1$ یک نرم در $\mathbf{R}^p$ است.

۸. چ. اگر $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)\in\mathbf{R}^p$، $\|x\|_\infty$ را با

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که $x \longrightarrow \|x\|_\infty$ یک نرم در $\mathbf{R}^p$ است.

۸. ح. در مجموعهٔ $\mathbf{R}^2$، مجموعه‌های

$$S_1=\{x\in\mathbf{R}^2 : \|x\|_1<1\}\ ,\ S_\infty=\{x\in\mathbf{R}^2 : \|x\|_\infty<1\}$$

را توصیف نمایید.

۸. خ. اگر $x, y\in\mathbf{R}^p$، نرم تعریف‌شده در ۴.۸ (پ) در **اتحاد متوازی‌الاضلاع**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

صدق می‌کند. این مطلب را ثابت کنید و نشان دهید که یک تعبیر آن این است که بگوییم مجموع مربعات چهارضلع متوازی‌الاضلاع برابر مجموع مربعات اقطار است.

۸. د. نشان دهید که نرمهای تعریف شده در تمرینهای ۸. ج و ۸. چ در اتحاد متوازی‌الاضلاع صدق نمی‌کنند.

۸. ذ. نشان‌دهید که ثابتهای مثبتی مانند a و b وجود دارند به‌قسمی که

به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^p$، $a\|x\|_1\leqslant\|x\|\leqslant b\|x\|_1$.

بزرگترین مقدار ثابت a و کوچکترین مقدار ثابت b ی دارای خاصیت را بیابید.

۸. ر. نشان دهید که ثابتهای مثبتی مانند a و b وجود دارند به‌قسمی که

به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^p$، $a\|x\|_1\leqslant\|x\|_\infty\leqslant b\|x\|_1$

بزرگترین مقدار ثابت a و کوچکترین مقدار ثابت b با این خاصیت را بیابید.

۸. ز. اگر x و y متعلق به $\mathbf{R}^p$ باشند، آیا نابرابریهای

$$|x\cdot y|\leqslant\|x\|_\infty\|y\|_\infty \quad \text{و} \quad |x\cdot y|\leqslant\|x\|_1\|y\|_1$$

درستند؟

۸. ژ. اگر x و y به $\mathbf{R}^p$ متعلق باشند، آیا درست است که رابطهٔ

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$$

برقرار است اگر و فقط اگر $x=cy$ یا $y=cx$ که درآنها $c\geqslant 0$ ؟

۸. س. فرض کنید x و y متعلق به $\mathbf{R}^p$ باشند. در این صورت آیا درست است که رابطهٔ

$$\|x+y\|_\infty=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

برقرار است اگر و فقط اگر $x=cy$ و یا $y=cx$ که درآنها $c\geqslant 0$؟

۸. ش. هرگاه x و y متعلق به $\mathbf{R}^p$ باشند، آنگاه

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

برقرار است اگر و فقط اگر $x.y=0$. در این حالت می‌گویند x و y **متعامد** یا **برهم عمود** هستند.

۸. ص. یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند K را **محدب** گویند اگر وقتی x و y به K متعلق هستند و t عددی حقیقی با شرط $0\leqslant t\leqslant 1$ است، آنگاه نقطهٔ

$$(1-t)x+ty=x+t(y-x)$$

نیز به K متعلق باشد. تعبیر هندسی این‌شرط را بیان کنید ونشان دهیدکه زیرمجموعه‌های

$$K_1=\{x\in\mathbf{R}^2: \|x\|\leqslant 1\},$$

$$K_2=\{(\xi, \eta)\in\mathbf{R}^2: 0<\xi<\eta\},$$

$$K_3=\{(\xi, \eta)\in\mathbf{R}^2: 0\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant 1\},$$

محدب هستند ولی زیرمجموعهٔ

$$K_4=\{x\in\mathbf{R}^2: \|x\|=1\}$$

محدب نیست.

۸. ض. مقطع هردسته از زیرمجموعه‌های محدب $\mathbf{R}^p$ محدب است. اما اجتماع دو زیر مجموعهٔ محدب $\mathbf{R}^p$ ممکن است محدب نباشد.

۸. ط. اگر M مجموعهٔ دلخواهی باشد، آنگاه تابع $d: M\times M\longrightarrow\mathbf{R}$ را یك **متریك** در M گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(یك) به‌ازای هر x و y در M، $d(x, y)\geqslant 0$؛

(دو) $d(x, y)=0$ اگر وفقط اگر $x=y$؛

(سه) به‌ازای هر x و y در M، $d(x, y)=d(y, x)$؛

(چهار) به‌ازای هر x و y و z در M، $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$.

نشان‌دهیدکه اگر $x\longrightarrow\|x\|$ نرمی دلخواه در فضای برداری V باشند و d را با $d(x, y)=\|x-y\|$، به‌ازای $x, y\in V$، تعریف کنیم، آنگاه d یك متریك در V است.

۸. ظ. فرض کنید d یك متریك در یك مجموعهٔ M باشد. با استفاده از تعریف ۹.۸ به‌عنوان الگو، گوی باز به‌مرکز $x \in M$ و شعاع r را تعریف کنید. دو مجموعهٔ S_1 و S_∞ تمرین ۸. ح را به‌عنوان گویهای باز در $\mathbf{R}^2$ برحسب دومتریك متفاوت تعبیر نمایید. تمرین ۸.ذ. را چنین تعبیر کنید: یك گوی به‌مرکز صفر برحسب متریك d_2 (حاصل از نرم ۸. ۶ (ب)) هم شامل گویهایی به‌مرکز صفر برحسب متریك d_1 حاصل از نرم $\|\ \|_1$ است و هم مشمول در بعضی از آنها. تعبیرهای مشابهی برای تمرین ۸. ر وقضیهٔ ۸. ۱۰ به‌دست‌آورید.

۸. ع. فرض کنید M یك‌مجموعهٔ دلخواه باشد و d در $M \times M$ باشرط

$$d(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } x=y \\ 1 & \text{اگر } x\neq y \end{cases}$$

تعریف شده‌باشد. نشان‌دهید که d در M به‌مفهوم تمرین ۸. ط یك‌متریك است. اگر x یك نقطهٔ دلخواه در M باشد، آنگاه گوی باز به‌مرکز x و شعاع ۱ (نسبت به‌متریك d) دقیقاً از یك نقطه تشکیل می‌شود. اما گوی باز به‌مرکز x و شعاع ۲ (نسبت به‌متریك d) تمام M است. این d را گاهی **متریك گسسته** در مجموعهٔ M می‌نامند.

پروژه

۸. α. در این پروژه به‌ارائهٔ چند نابرابری مهم می‌پردازیم.

(الف) فرض کنید a و b اعدادی حقیقی و مثبت باشند، نشان‌دهید که

$$ab \leqslant (a^2+b^2)/2$$

وبرابری برقرار است اگر وفقط اگر $a=b$. (راهنمایی: $(a-b)^2$ را درنظر بگیرید.)

(ب) فرض کنید a_1 و a_2 اعدادی حقیقی و مثبت باشند. نشان دهید که

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant (a_1+a_2)/2$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a_1=a_2$.

(پ) فرض کنید a_1، a_2، ...، a_m، m عدد حقیقی مثبت باشند و $m=2^n$. نشان دهید که

$$(a_1 a_2 \cdots a_m)^{1/m} \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_m)/m \qquad (*)$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a_1=\ldots=a_m$.

(ت) نشان‌دهید که نابرابری (*) بین میانگین هندسی و میانگین حسابی حتی اگر m توانی از ۲ نباشد برقرار است. (راهنمایی. اگر $2^{n-1}<m<2^n$ بنویسید $b_j=a_j$

به‌ازای $j=1,\ldots,m$ و فرض کنید که به‌ازای $j=m+1,\ldots,2^n$،

$$b_j=(a_1+a_2+\cdots+a_m)/m.$$

اکنون قسمت (پ) را درمورد اعداد حقیقی b_1، b_2، ... ، b_{2^n} به کار برید.)

(ث) فرض کنید a_1، a_2، ... ، a_n و b_1 ، b_2 ، ... ، b_n دومجموعه از اعداد حقیقی باشند. **اتحاد لاگرانژ**[1]

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j b_j\right\}^2=\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right\}-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(a_jb_k-a_k b_j)^2$$

را ثابت کنید. (راهنمایی: اول حالتهای $n=2$ و $n=3$ را آزمایش کنید.)

(ج) با استفاده از قسمت (ث)، **نابرابری کوشی**

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j b_j\right\}^2\leqslant\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right\}$$

را ثابت کنید. نشان دهید که برابری برقرار است اگر و فقط اگر مجموعه‌های مرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ متناسب باشند.

(چ) با استفاده از قسمت (ج) **نابرابری مثلثی**

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right\}^{1/2}$$

را ثابت کنید.

۸. β دراین پروژه $\{a, a, \ldots, a_n\}$ و امثال آن را مجموعه‌های n عدد حقیقی مثبت بگیرید.

(الف) می‌توان ثابت کرد (مثلاً، با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین) که اگر a و b مثبت باشند و $0<\alpha<1$، آنگاه

$$a^\alpha b^{1-\alpha}\leqslant\alpha a+(1-\alpha)b$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a=b$. این نتیجه را بپذیرید و فرض کنید $r>1$, s در

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1,$$

صدق می‌کنند (درنتیجه $s>1$ و $r+s=rs$). نشان دهید که اگر A و B مثبت باشند، آنگاه

---

۱. ژوزف لوئی لاگرانژ Joseph — Louis Lagrange (۱۷۳۶—۱۸۱۳) در تورن به‌دنیا آمد و در نوزده‌سالگی در همانجا استاد شد. بعدها به‌مدت بیست‌سال به‌عنوان جانشین اویلر در برلن بود و سپس به‌پاریس رفت. شهرت او بیشتر به‌واسطهٔ کارهایش درحساب تغییرات و مکانیک تحلیلی است.

$$AB \leqslant \frac{A^r}{r} + \frac{B^s}{s}$$

و برابری برقرار است اگر وفقط اگر $A^r = B^s$.

(ب) فرض کنید $\{a_1, \ldots, a_n\}$ و $\{b_1, \ldots, b_n\}$ اعدادی حقیقی ومثبت باشند. چنانچه $r, s > 1$ و $(1/r) + (1/s) = 1$، **نابرابری هولدر**[1]

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right\}^{1/r} \left\{\sum_{j=1}^{n} b_j^s\right\}^{1/s}$$

را ثابت کنید. (راهنمایی: فرض کنید $A = \{\sum a_j^r\}^{1/r}$ و $B = \{\sum b_j^s\}^{1/s}$ و قسمت (الف) را در مورد a_j / A و b_j / B به‌کار برید.)

(پ) با استفاده از نابرابری هولدر، **نابرابری مینکوفسکی**[2]

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^r\right\}^{1/r} \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right\}^{1/r} + \left\{\sum_{j=1}^{n} b_j^r\right\}^{1/r}$$

را ثابت کنید. (راهنمایی: $(a+b)^r = (a+b)(a+b)^{r/s} = a(a+b)^{r/s} + b(a+b)^{r/s}$.)

(ت) با استفاده از نابرابری هولدر ثابت کنید که

$$(1/n)\sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant \left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right\}^{1/r}$$

(ث) اگر $a_1 \leqslant a_2$ و $b_1 \leqslant b_2$، آنگاه $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geqslant 0$ و در نتیجه

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_1 .$$

نشان دهید که اگر $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ و $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$، آنگاه

$$n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \geqslant \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j\right\} \left\{\sum_{j=1}^{n} b_j\right\} .$$

(ج) فرض کنید $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ و $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ و $r \geqslant 1$

---

۱. اوتو هولدر Otto Hölder (۱۸۵۹ ـ ۱۹۳۷) درگوتینگن تحصیل و در لایپزیك تدریس کرد. او هم در جبر و هم در آنالیز کار کرده است.

۲. هرمان مینکوفسکی Hermann Minkowski (۱۸۶۴ـ۱۹۰۹) در کونیگز برگ و گوتینگن استاد بود. شهرت او بیشتر به‌واسطهٔ کارهایش روی مجموعه‌های محدب و «هندسهٔ اعداد» است.

نابرابری چبیشف[1]

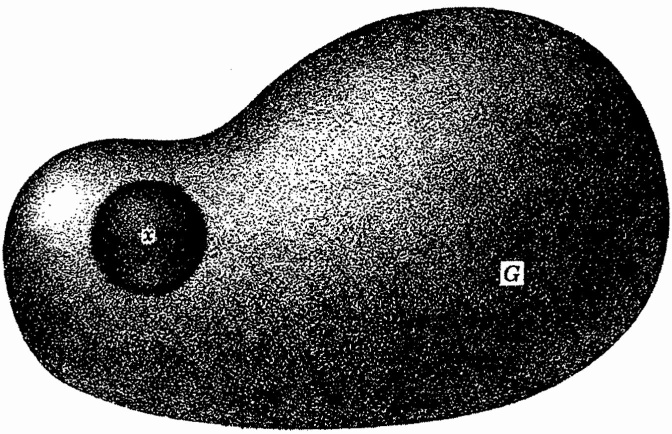
$$\left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n}a_j{}^r\right\}^{1/r}\left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n}b_j{}^r\right\}^{1/r}\leqslant\left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n}(a_jb_j)^r\right\}^{1/r}$$

را ثابت کنید. نشان‌دهید که جهت این‌نابرابری در صورتی که $\{a_j\}$ صعودی و $\{b_j\}$ نزولی باشد باید وارونه گردد.

بخش ۹ مجموعه‌های باز و بسته

بسیاری از عمیقترین خواص آنالیز حقیقی بستگی به بعضی مفاهیم در توپولوژی دارند. در چند بخش آتی مفاهیم اساسی را مطرح می‌کنیم و برخی از مهمترین خواص در توپولوژی فضای $\mathbf{R}^p$ را نتیجه می‌گیریم. این نتایج بارها در فصلهای بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱.۹ تعریف. مجموعهٔ G در $\mathbf{R}^p$ را **باز در** $\mathbf{R}^p$ (یا فقط **باز**) گوییم هرگاه به‌ازای هرنقطهٔ x در G، عددی حقیقی مانند $r>0$ باشد به‌قسمی که هرنقطهٔ y در



شکل ۱.۹ یک‌مجموعهٔ باز

---

۱. پافنوتی ل. چبیشف Pafnuti L. Chebyshev (۱۸۲۱–۱۸۹۴) درسن‌پترزبورگ استاد بوده در ریاضیات کارهای زیادی کرده است، که مهمترین آنها در زمینهٔ نظریهٔ اعداد، احتمال و نظریهٔ تعریف می‌باشند.

$\mathbf{R}^p$ که در $\|x-y\|<r$ صادق‌است نیز به‌مجموعهٔ G متعلق باشد. (ر. ك. شكل ۹.۱.)

با استفاده از تعریف ۹.۸ می‌توان این تعریف را این‌طور بیان‌کردکه مجموعهٔ G باز است هرگاه هرنقطه در G مرکزگوی بازی باشدکه تماماً در G قراردارد.

۹.۲ چندمثال. (الف) تمام مجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ باز است، چراکه می‌توان به‌ازای هر x، r را برابر ۱ گرفت.

(ب) مجموعهٔ $G=\{x\in\mathbf{R}: 0<x<1\}$ در $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$ باز است. مجموعهٔ $F=\{x\in\mathbf{R}: 0\leqslant x\leqslant 1\}$ در $\mathbf{R}$ باز نیست. (چرا؟)

(پ) مجموعه‌های $G=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2<1\}$ و

$$H=\{(x, y): 0<x^2+y^2<1\}$$

بازند، ولی مجموعهٔ $F=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$ در $\mathbf{R}^2$ باز نیست. (چرا؟)

(ت) مجموعهٔ $G=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2: 0<x<1,\ y=0\}$ در $\mathbf{R}^2$ بازنیست. [با قسمت (ب) مقایسه کنید.] مجموعهٔ $H=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2: 0<y<1\}$ باز است، ولی مجموعهٔ $K=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2: 0\leqslant y<1\}$ در $\mathbf{R}^2$ باز نیست.

(ث) مجموعهٔ $G=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: z>0\}$ در $\mathbf{R}^3$ باز است. همچنین مجموعه $H=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x>0\, y>0,\ z>0\}$ در $\mathbf{R}^3$ باز می‌باشد. از سوی دیگر، مجموعهٔ $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x=y=z\}$ در $\mathbf{R}^3$ باز نیست.

(ج) مجموعهٔ تهی $\varnothing$ در $\mathbf{R}^p$ باز است، چراکه شامل هیچ نقطه‌ای نیست، در نتیجه شرط تعریف ۹.۱ خودبه‌خود برقرار است.

(چ) اگر B گوی بازی به‌مرکز z وشعاع $a>0$ باشد و $x\in B$، آنگاه گوی باز به‌مرکز x و شعاع $a-\|z-x\|$ در B قرار دارد. لذا B در $\mathbf{R}^p$ باز است.

اکنون به ذکر خواص اساسی مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^p$ می‌پردازیم. در درس توپولوژی قضیهٔ بعدی به‌صورت زیر خلاصه می‌شود: مجموعه‌های باز به‌صورتی‌که در تعریف ۹.۱ آمده است یك **توپولوژی** برای $\mathbf{R}^p$ تشکیل می‌دهند.

۹.۳ خواص مجموعه‌های‌باز. (الف) مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و تمام فضای $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^p$ باز هستند.

(ب) مقطع هردو مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^p$ باز است.

(پ) اجتماع هر دسته ازمجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^p$ باز است.

برهان. در مورد باز بودن مجموعه‌های $\varnothing$ و $\mathbf{R}^p$ قبلاً بحث‌کرده‌ایم. برای اثبات (ب)، فرض‌کنیم G_1 و G_2 باز باشند و $G_3=G_1\cap G_2$. برای آنکه

بـازبودن G_3 را نشان دهیم، فرض می‌کنیم $x \in G_3$. چون x متعلق به‌مجموعهٔ بـاز G_1 است، پس عددی مانند $r_1 > 0$ هست به قسمی که اگر $\|x-z\| < r_1$ ، آنگاه $z \in G_1$. به‌همین نحو ، عددی مانند $r_2 > 0$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر $\|x-w\| < r_2$ ، آنگاه $w \in G_2$. اگرمینیمم r_1 و r_2 را r_3 بنامیم ، نتیجه می‌گیریم که اگر $y \in \mathbf{R}^p$ چنان باشد که $\|x-y\| < r_3$، آنگاه y به‌هر دو مجموعهٔ G_1 و G_2 متعلق است. از این‌رو این yها به $G_3 = G_1 \cap G_2$ متعلق‌اند، که بازبودن G_3 در $\mathbf{R}^p$ را نشان می‌دهد.

برای اثبات (پ) ، فرض‌کنید $\{G_\alpha, G_\beta, \ldots\}$ دسته‌ای ازمجموعه‌های بازباشند و فرض می‌کنیم G اجتماع آنها باشد. برای‌آنکه نشان‌دهیم G باز است، فرض می‌کنیم $x \in G$. از تعریف اجتماع نتیجه می‌شودکه x در یکی ازمجموعه‌هـای این دسته است، مثلاً $x \in G_\lambda$. چون G_λ باز است گوی بازی‌به‌مرکز x وجوددارد که تماماً در G_λ قرار دارد. چون $G_\lambda \subseteq G$، این گوی تماماً در G واقع است و بنابراین G در $\mathbf{R}^p$ بازاست. □

از خاصیت (ب) در بـالا به‌استقرا نتیجه می‌شود که مقطع هردستهٔ بـا پایان از مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^p$ نیز بـاز است. این‌راکه مقطع یك‌دستهٔ بی‌پایان ازمجموعه‌های باز ممکن است باز نباشد، می‌توان ازمثال

$$G_n = \left\{ x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \right\}, \ n \in \mathbf{N} \qquad (۱.۹)$$

دریـافت . مقطع مجموعه‌هـای G_n مجموعهٔ $F = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ می‌باشد که باز نیست.

مجموعه‌های بسته

حال مفهوم مهم مجموعهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ را معرفی می‌کنیم.

۴.۹ تعریف. مجموعهٔ F در $\mathbf{R}^p$ را بسته در $\mathbf{R}^p$ (یـا فقط **بسته**) گوییم هرگاه متممش $\mathcal{C}(F) = \mathbf{R}^p \setminus F$ در $\mathbf{R}^p$ بازباشد.

۵.۹ چندمثال. (الف) مجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^p$ بسته است، چرا که متممش مجموعهٔ تهی است که بازبودن‌آن در $\mathbf{R}^p$ در ۲.۹ (ج) دیده شد.

(ب) مجموعهٔ $\varnothing$ در $\mathbf{R}^p$ بسته است، چراکـه متممش در $\mathbf{R}^p$ تمام $\mathbf{R}^p$ می‌باشدکه بازبودن‌آن در $\mathbf{R}^p$ در ۲.۹ (الف) دیده شد.

(پ) مجموعهٔ $F = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ در $\mathbf{R}$ بسته است . یك راه اثبات این مطلب توجه به‌این نکته است‌که متمم F در $\mathbf{R}$ اجتماع دو مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ و $\{x \in \mathbf{R} : x > 1\}$ می‌باشدکه هردو باز هستند . به‌همین‌نحو مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} : x \leqslant 0\}$ بسته است.

(ت) مجموعهٔ $F=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$ بسته است، چراکه متممش در $\mathbf{R}^2$ مجموعهٔ $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2>1\}$ می‌باشد که باز بودنش قبلاً نشان‌داده شده است.

(ث) مجموعهٔ $H=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : x\geqslant 0\}$ در $\mathbf{R}^3$ بسته است . همچنین مجموعهٔ $F=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : x=y=z\}$ بسته می‌باشد.

(ج) گوی بستهٔ B به‌مرکز x و شعاع $r>0$ یك‌مجموعهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ است. زیرا، اگر $z\notin B$ ، آنگاه گوی باز به مرکز z و شعاع $\|z-x\|-r$ در $\mathcal{C}(B)$ واقع است. بنابراین $\mathcal{C}(B)$ باز و B در $\mathbf{R}^p$ بسته است.

در صحبتهای معمولی، وقتی سخن از درها وپنجره‌هاست ، واژه‌های «باز»، و «بسته» متضاد هستند. اما وقتی از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ سخن می‌گوییم این واژه‌ها متضاد نیستند. برای مثال در بالا ملاحظه کردیم که مجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ و $\varnothing$ هر دو در $\mathbf{R}^p$ هم باز و هم بسته‌اند. (شاید این‌نکته‌که در بین‌زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ تنها این‌دومجموعه هم باز و هم بسته‌اند از سرگردانی خواننده بکاهد.) علاوه براین ، بسیاری از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ هستندکه نه بازند ونه بسته ، در حقیقت ، بیشتر زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ از این نوع‌اند. به‌عنوان یك مثال ساده، مجموعهٔ

$$A=\{x\in \mathbf{R} : 0\leqslant x<1\} \tag{۲.۹}$$

را ذکر می‌کنیم. مجموعهٔ A در $\mathbf{R}$ باز نیست، چراکه شامل نقطهٔ 0 می‌باشد. به‌همین نحو، A در $\mathbf{R}$ بسته‌نیست، چراکه متممش در $\mathbf{R}$ مجموعهٔ $\{x\in\mathbf{R} : x<0 \text{ یا } x\geqslant 1\}$ می‌باشد،که چون شامل نقطهٔ ۱ است، بازنیست. توصیه می‌شود خواننده مثالهای‌دیگری از مجموعه‌ها بیاورد که در $\mathbf{R}^p$ نه بازند نه بسته.

اکنون به‌ذکرخواص بنیادی مجموعه‌های بسته‌می‌پردازیم. اثبات این‌نتیجه مستقیماً از قضیهٔ ۳.۹ بااستفاده ازقوانین دمورگن (قضیهٔ ۸.۱ وتمرین ۱.ر) به‌دست می‌آید.

۶.۹ خواص مجموعه‌های بسته. (الف) مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و تمام فضای $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^p$ بسته‌اند.

(ب) اجتماع هردو مجموعهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ بسته است.

(پ) مقطع هردسته از مجموعه‌های بسته در $\mathbf{R}^p$ بسته است.

همسایگیها

حال چند مفهوم دیگر توپولوژی را معرفی می‌کنیم که هم مفید خواهند بود و هم به‌ما امکان خواهند داد مجموعه‌های باز وبسته را با اصطلاحات دیگری مشخص کنیم.

۷.۹ تعریف. (الف) اگر $x \in \mathbf{R}^p$، آنگاه هرمجموعه کـه شامل مجموعهٔ بازی مشتمل بر x باشد، **یك همسایگی** x نامیده می‌شود.
(ب) نقطهٔ $x \in \mathbf{R}^p$ را **نقطهٔ درونی** مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$ گوییم هرگاه یك‌همسایگی x باشدکه تماماً در A واقع باشد.
(پ) نقطهٔ $x \in \mathbf{R}^p$ را **نقطهٔ کرانه‌ای** مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$ گوییم هرگاه هرهمسایگی x شامل نقاطی در A ونقاطی در $\mathcal{C}(A)$ باشد.
(ت) نقطهٔ $x \in \mathbf{R}^p$ را **نقطهٔ برونی** مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$ گوییم هرگاه‌یك‌همسایگی x باشدکه تماماً در $\mathcal{C}(A)$ واقع باشد.

باید تـوجه داشت‌کـه به‌ازای $x \in \mathbf{R}^p$ و $A \subseteq \mathbf{R}^p$ مفروض سه‌حالت متمایز وجود دارد (یك) x نقطهٔ درونی A است، (دو) x نقطهٔ‌کرانه‌ای A است، یا (سه) x نقطهٔ برونی A است.

۸.۹ چندمثال. (الف) مجموعهٔ U یك‌همسایگی نقطهٔ x است اگر وفقط اگرگوی بازی به‌مرکز x وجود داشته‌باشدکه تماماً در U واقع باشد.
(ب) نقطهٔ x، نقطهٔ درونی A است اگر و فقط اگرگوی بـازی به‌مرکز x وجود داشته‌باشدکه تماماً در A واقع باشد.
(پ) نقطهٔ x، نقطهٔ‌کرانه‌ای A است اگر و فقط اگر به ازای هرعدد طبیعی n نقاطی چون $a_n \in A$ و $b_n \in \mathcal{C}(A)$ وجود داشته باشند به‌قسمی‌که

$$\|x-a_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \|x-b_n\| < \frac{1}{n}\cdot$$

(ت) هرنقطه از فاصلهٔ $(۰, ۱) \subseteq \mathbf{R}$ نقطهٔ درونی است. نقاط ۰، ۱ نقاط‌کرانه‌ای $(۰, ۱)$ می‌باشند.
(ث) فرض‌کنیم $A = [۰, ۱] \subseteq \mathbf{R}$. در این‌صورت نقاط درونی A نقاط فاصلهٔ باز $(۰، ۱)$ می‌باشند. نقاط ۰، ۱ نقاط‌کرانه‌ای A هستند.
(ج) نقاط‌کرانه‌ای گویهای بـاز وبسته به‌مرکز $x \in \mathbf{R}^p$ و شعاع $r > ۰$ نقاط‌کرهٔ به مرکز x وشعاع r می‌باشند. (ر. ك. تعریف ۹.۸.)

حال مجموعه‌های باز را برحسب همسایگیها ونقاط درونی مشخص می‌کنیم.

۹.۹ قضیه. اگر $B \subseteq \mathbf{R}^p$، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:
(الف) B باز است؛
(ب) هرنقطهٔ B یك‌نقطهٔ درونی B است؛
(پ) B همسایگی هریك از نقاط خودش است.

برهان . اگر (الف) برقرار باشد و $x \in B$، آنگاه مجموعهٔ باز B یك همسایگی x است و لذا x یك‌نقطهٔ درونی B است.

واضح است که (ب) گزارهٔ (پ) را ایجاب می کند.

اگر (پ) برقرار باشد،آنگاه به‌ازای هر $x \in B$ ، مجموعهٔ بازی مانند $G_x \subseteq B$ باشرط $x \in G_x$ وجود دارد. ازاین‌رو $B = \cup \{G_x : x \in B\}$،پس‌ازقضیهٔ ۳.۹ (پ) نتیجه می‌شود که B در $\mathbf{R}^p$ باز است.

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که مجموعهٔ بازشامل هیچیك از نقاط کرانه‌ای‌خودش نیست. مجموعه‌های بسته از این‌لحاظ در نقطهٔ مقابل قرار دارند.

۹. ۱۰ قضیه. مجموعهٔ $F \subseteq \mathbf{R}^p$ بسته است اگر و فقط اگر شامل تمام نقاط کرانه‌ای خود باشد.

برهان . فرض کنید F بسته و x یك نقطهٔ کرانه‌ای‌آن باشد. اگر $x \notin F$ ، آنگاه مجموعهٔ باز $\mathcal{C}(F)$ شامل x است و حاوی هیچ نقطه‌ای از F نیست ، که این با فرض این‌که x نقطهٔ کرانه‌ای F است متناقض است. بنابراین باید داشته‌باشیم $x \in F$.

بعکس ، فرض کنیم F شامل تمام نقاط کرانه‌ای خود باشد . اگر $y \notin F$ آنگاه y نه‌نقطه‌ای از F است و نه یك نقطهٔ کراندای F ، در نتیجه یك‌نقطهٔ برونی است . بنابراین یك‌همسایگی y مانند M هست که تماماً در $\mathcal{C}(F)$ واقع است. چون این برای هر $y \notin F$ درست است، نتیجه می گیریم که $\mathcal{C}(F)$ باز است، پس F در $\mathbf{R}^p$ بسته است. □

مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}$

این بخش را باتوصیف شکل یك‌زیرمجموعهٔ باز ودلخواه $\mathbf{R}$ به‌پایان می‌بریم.

۹. ۱۱ قضیه. یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ بازاست اگر وفقط اگر اجتماع دستهٔ شمارش‌پذیری از فواصل باز باشد.

برهان. چون فاصلهٔ باز مجموعه‌ای است باز (چرا؟) ، از ۹. ۳ (پ) نتیجه می‌شود که اجتماع هر تعداد شمارش‌پذیر ازفواصل باز، باز است.

بعکس ، فرض کنیم $G \neq \varnothing$ یك زیرمجموعهٔ باز در $\mathbf{R}$ باشد و $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$ شمارشی ازتمام نقاط گویای در G باشد. به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،فرض‌کنیم m_n کوچکترین عدد طبیعی باشدکه فاصلهٔ $J_n = (r_n - 1/m_n \, , \, r_n + 1/m_n)$ تماماً در G واقع است. از این نتیجه می‌شود که

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n \subseteq G.$$

حال فرض کنیم x یك نقطهٔ دلخواه در G باشد و $m \in \mathbf{N}$ چنان باشد که $(x-۲/m, x+۲/m) \subseteq G$. دراین‌صورت ازقضیهٔ ۱۰.۶ نتیجه‌می‌شود که عدد گویایی مانند y در $(x-۱/m, x+۱/m)$ وجود دارد؛ از این‌رو $y \in G$ و در نتیجه به‌ازای عددی طبیعی‌مانند n، $y = r_n$. اگر x به $J_n = (r_n - ۱/m_n, r_n + ۱/m_n)$ متعلق نباشد، آنگاه الزاماً باید داشته‌باشیم $۱/m_n < ۱/m$، ولی چون بسهولت دیده می‌شود که

$$\left(r_n - \frac{۱}{m}, r_n + \frac{۱}{m}\right) \subseteq \left(x - \frac{۲}{m}, x + \frac{۲}{m}\right) \subseteq G.$$

این امر با انتخاب m_n متناقض است. بنابراین به‌ازای این‌مقدار n داریم $x \in J_n$. از آنجا که $x \in G$ دلخواه است، نتیجه می گیریم که

$$G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n.$$

بنابراین G برابر این اجتماع است. □

از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ بسته است اگر و فقط اگر مقطع یك دستهٔ شمارش‌پذیر از فواصل بسته باشد. (چرا؟) ولی نتیجه نمی‌شود که هر اجتماع شمارش‌پذیر از فواصل بسته باید بسته باشد، و یا اینکه هرمجموعهٔ بسته این خاصیت را دارد.

تعمیم این‌نتیجه در تمرین ۹.ج آمده است.

تمرین

۹. الف. درستی همگی را که در مثال ۹. ۲ (ب) در مورد مجموعه‌های G و F بیان شد تحقیق کنید.

۹. ب. درستی حکمی را که درمثال ۲.۹ (پ) بیان شد تحقیق کنید.

۹. پ. ثابت کنید که مقطع هردستهٔ با پایان از مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^p$ باز است (راهنمایی: از ۳.۹ (ب) و استقرا استفاده کنید.)

۹. ت. مجموعهٔ نقاط درونی، کرانه‌ای و برونی مجموعهٔ $(۱, ۰]$ در $\mathbf{R}$ چیست؟ نتیجه بگیرید که این‌مجموعه نه باز است ونه‌بسته.

۹. ث. مثالی از یك‌مجموعه در $\mathbf{R}^۲$ بزنید که نه باز باشد نه‌بسته. درستی ادعای خود را ثابت کنید.

۹. ج. جزئیات اثبات قضیهٔ ۶.۹ را بنویسید.

۹. چ. نشان‌دهید که یك‌زیرمجموعه $\mathbf{R}^p$ باز است اگر و فقط اگر این مجموعه اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از گویهای باز باشد. (راهنمایی: مجموعهٔ تمام‌نقاط در $\mathbf{R}^p$ که همهٔ مختصاتشان اعدادی‌گویا باشند، شمارش‌پذیر است.)

۹. ح. هرزیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته است.

۹. خ. هرزیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^p$ مقطع دسته‌ای شمارش‌پذیر ازمجموعه‌های باز است.

۹. د. زیرمجموعهٔ دلخواه A از $\mathbf{R}^p$ داده شده است. فرض‌کنید A° اجتماع تمام مجموعه‌های باز مشمول در A را نشان دهد، مجموعهٔ A° را **درون** A می‌نامیم. توجه‌کنیدکه A° یك‌مجموعهٔ باز است؛ ثابت‌کنید این مجموعه بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در A است. ثابت‌کنیدکه

$$A^\circ \subseteq A, \qquad (A^\circ)^\circ = A^\circ$$

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \qquad (\mathbf{R}^p)^\circ = \mathbf{R}^p$$

با ذکر مثالی نشان دهیدکه $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ممکن است برقرار نباشد.

۹. ذ. ثابت کنید که یك‌نقطه به A° متعلق است اگر و فقط اگر نقطهٔ درونی A باشد.

۹. ر. فرض‌کنید A یك زیرمجموعهٔ دلخواه $\mathbf{R}^p$ باشد، اگر A^- مقطع تمام مجموعه‌های‌بستهٔ شامل A را نشان‌دهد مجموعهٔ A^- را **بستار** A می‌گوییم. توجه‌کنیدکه A^- یك‌مجموعهٔ بسته است. ثابت‌کنیدکه A^- کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که شامل A می‌باشد. ثابت‌کنیدکه

$$A \subseteq A^-, \qquad (A^-)^- = A^-$$

$$(A \cup B)^- = A^- \cup B^-, \qquad \varnothing^- = \varnothing،$$

با ذکر مثالی نشان‌دهیدکه $(A \cap B)^- = A^- \cap B^-$ ممکن است برقرار نباشد.

۹. ز. ثابت‌کنیدکه یك‌نقطه به $\bar{A}$ متعلق است اگر و فقط اگر نقطهٔ درونی و یا نقطهٔ‌کرانه‌ای A باشد.

۹. ژ. مثالی بزنید از یك مجموعه مانند A در $\mathbf{R}^p$ که $A^\circ = \varnothing$ و $A^- = \mathbf{R}^p$. آیا چنین مجموعه‌ای می‌تواند شمارش‌پذیر باشد؟

۹. س. فرض‌کنید A و B زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ باشند. نشان‌دهید که حاصلضرب دکارتی $A \times B$ در $\mathbf{R}^۲$ باز است اگر و فقط اگر A و B در $\mathbf{R}$ باز باشند.

۹. ش. فرض‌کنید A و B زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ باشند. نشان‌دهیدکه حاصلضرب دکارتی $A \times B$ در $\mathbf{R}^۲$ بسته است اگر و فقط اگر A و B در $\mathbf{R}$ بسته باشند.

۹. ص. مفاهیمی راکه در این بخش آمده است، در مورد مجموعهٔ‌کانتور $\mathbf{F}$ (تعریف ۴.۷) تعبیرکنید. بویژه:

(الف) نشان دهیدکه $\mathbf{F}$ در $\mathbf{R}$ بسته است.

(ب) $\mathbf{F}$ دارای هیچ نقطهٔ درونی نیست.

(پ) هیچ‌مجموعهٔ باز غیرتهی در $\mathbf{F}$ نیست.

(ت) هرنقطهٔ $\mathbf{F}$ یك‌نقطهٔ کرانه‌ای است.

(ث) مجموعهٔ $\mathbf{F}$ را نمی‌توان به‌صورت اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از فواصل بسته نوشت.

(ج) متمم $\mathbf{F}$ را می‌توان به‌صورت اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از فواصل باز نوشت.

بخش ۱۰ فواصل آشیانی وقضایای بولتسانو-وایرشتراس

در این بخش دوقضیهٔ بسیار مهم‌راکه درفصلهای بعدی اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌دهیم. به‌یك‌مفهوم می‌توان آنها را به‌عنوان خاصیت‌کمال برای $\mathbf{R}^p$، درحالت $p>1$، در نظر گرفت.

ازبخش ۷ به‌یاد می‌آوریم‌که اگر $a\leqslant b$، آنگاه حجرهٔ باز در $\mathbf{R}$، که با (a , b) نموده می‌شود، مجموعه‌ای است‌که با

$$(a, b)=\{x\in\mathbf{R}:a<x<b\}$$

تعریف می‌شود. بسهولت دیده می‌شود که چنین مجموعه‌ای در $\mathbf{R}$ بازاست. به‌همین نحو حجرهٔ بسته $[a, b]$ در $\mathbf{R}$ مجموعهٔ

$$[a, b]=\{x\in\mathbf{R}: a\leqslant x\leqslant b\}$$

می‌باشدکه در $\mathbf{R}$ بسته است. حاصلضرب دکارتی دوفاصله معمولاً **مستطیل** و حاصلضرب دکارتی سه‌فاصله اغلب **متوازی‌السطوح** نامیده می‌شود. به‌خاطر سادگی، معمولاً اصطلاح «حجره» را بدون‌توجه به‌بعد فضا به‌کار می‌بریم.

۱۰۱۰ تعریف. **حجرهٔ باز** J در $\mathbf{R}^p$ حاصلضرب دکارتی p حجرهٔ باز از اعداد حقیقی است. بنابراین J به‌صورت

$$J=\{x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbf{R}^p:a_i<x_i<b_i,\ i=1,2,\cdots,p\}$$

است.به‌همین‌نحو، **حجرهٔ بسته** I در $\mathbf{R}^p$، حاصلضرب دکارتی p حجرهٔ بسته از اعداد حقیقی است. بنابراین I به‌صورت

$$I=\{x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbf{R}^p\cdot a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\ldots,p\}$$

است. زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ را **کراندار** گوییم اگر در یك حجره واقع باشد.

به‌عنوان تمرین، نشان‌دهید که حجرهٔ باز در $\mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای است باز و حجرهٔ

بسته مجموعه‌ای بسته است . همچنین، زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ کراندار است اگر و فقط اگر در یك گوی واقع باشد. توجه کنید که این اصطلاح برای مجموعه‌های کراندار با اصطلاحی که برای حالت $p=1$ در بخش ۶ معرفی شد، سازگار است.

خواننده از بخش ۷ به‌یاد دارد که از خاصیت زبرینهٔ دستگاه اعداد حقیقی نتیجه می‌شود که هردنبالهٔ آشیانی از حجره‌های بستهٔ غیرتهی در $\mathbf{R}$ دارای نقطهٔ مشترك است. اکنون به‌اثبات این‌خاصیت در فضای $\mathbf{R}^p$ می‌پردازیم.

۲.۱۰ قضیهٔ حجره‌های‌آشیانی. فرض‌کنیم (I_k) دنباله‌ای آشیانی از حجره‌های بستهٔ غیرتهی در $\mathbf{R}^p$ باشد ، بدین معنی‌که $\ldots \supseteq I_k \supseteq \ldots \supseteq I_2 \supseteq I_1$. در این صورت نقطه‌ای در $\mathbf{R}^p$ وجود داردکه به‌تمام این‌حجره‌ها متعلق است.

برهان. فرض کنید I_k حجرهٔ

$$I_k=\{(x_1, \ldots, x_p): a_{k1}\leqslant x_1\leqslant b_{k1}, \ldots, a_{kp}\leqslant x_p\leqslant b_{kp}\}$$

باشد. بسهولت می‌توان دید که حجره‌های $[a_{k1}\ , b_{k1}]$ ، $k\in\mathbf{N}$ ، دنباله‌ای آشیانی از حجره‌های بسته وغیرتهی از اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند و چون دستگاه اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ کامل است ، عددی حقیقی مانند y_1 هست‌که به‌تمام این‌حجره‌ها تعلق دارد. با تکرار این استدلال در مورد هرمؤلفه، یك‌نقطهٔ $\mathbf{R}^p$ ، مانند $y=(y_1, \ldots, y_p)$ به‌دست می‌آوریم به‌قسمی که اگر j در $j=1, 2, \ldots, p$ صدق کند ، آنگاه y_j به تمام حجره‌های $\{[a_{kj}, b_{kj}]:k\in\mathbf{N}\}$ تعلق دارد. بنابراین‌نقطهٔ y به‌تمام حجره‌های (I_k) متعلق است. □

نقطهٔ تجمع وقضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس

۳.۱۰ تعریف. نقطهٔ $x\in\mathbf{R}^p$ را **نقطهٔ تجمع** (یا **نقطهٔ خوشه‌ای**) $A\subseteq R^p$ گوییم اگر هر همسایگی x حداقل شامل یك‌نقطهٔ A متمایز از x باشد.

اینك چندمثال می‌آوریم:

۴.۱۰ چندمثال . (الف) نقطهٔ $x\in\mathbf{R}^p$ را نقطهٔ تجمع A گوییم اگر و فقط اگر به‌ازای هرعدد طبیعی n عنصری مانند $a_n\in A$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که

$$0<\|x-a_n\|<1/n\,.$$

(ب) هرگاه یك‌نقطهٔ کرانه‌ای مجموعه، به‌مجموعه متعلق نباشد، نقطهٔ تجمع مجموعه است .

(پ) هرنقطهٔ فاصلهٔ یکهٔ $\mathbf{I}$ از $\mathbf{R}$ نقطهٔ تجمع $\mathbf{I}$ است.

(ت) فرض کنید $A=(\circ ، ۱)$. در این‌صورت هر نقطهٔ A نقطهٔ درونی و نقطهٔ تجمع A است. نقاط ۰، ۱ نقاط تجمع A هستند (ولی نقاط درونی A نمی‌باشند).

(ث) فرض کنید $B=\mathbf{I}\cap\mathbf{Q}$ مجموعهٔ تمام اعدادگویا در فاصلهٔ یکه باشد. هر نقطهٔ $\mathbf{I}$ نقطهٔ تجمع B در $\mathbf{R}$ است اما B هیچ نقطهٔ درونی ندارد.

(ج) هیچ زیرمجموعهٔ با پایان $\mathbf{R}^p$ دارای نقطهٔ تجمع نیست. (چرا؟)

(چ) مجموعهٔ بی‌پایان اعداد صحیح $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{R}$ نقطهٔ تجمع ندارد. (چرا؟)

۵.۱۰ قضیه. مجموعهٔ $\mathbf{F}\subseteq\mathbf{R}^p$ بسته است اگر و فقط اگر شامل تمام نقاط تجمعش باشد.

برهان. فرض کنیم F بسته و x یک نقطهٔ تجمع آن باشد. هرگاه $x\notin F$ مجموعهٔ باز $\mathcal{C}(F)$ یک همسایگی x است و در نتیجه باید حداقل شامل یک نقطهٔ F باشد. امـا این غیرممکن است، پس نتیجه می‌گیریم که $x\in F$.

بعکس، اگر F شامل تمام نقاط تجمعش بـاشد، نشان می‌دهیم که $\mathcal{C}(F)$ باز است. بدین‌منظور، هرگاه $y\in\mathcal{C}(F)$ ، y نقطهٔ تجمع F نیست. بنابراین یک همسایگی y مانند V_y هست به‌قسمی که $F\cap V_y=\varnothing$ در نتیجه $V_y\subseteq\mathcal{C}(F)$. چون این مطلب برای هر $y\in\mathcal{C}(F)$ درست است، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{C}(F)$ در $\mathbf{R}^p$ باز است. □

قضیهٔ بعدی یکی از مهمترین قضایـای این کتاب است. این قضیهٔ مهم اساسی بارها مورد استفاده قرارخواهدگرفت. باید توجه‌داشت که درصورت حذف هریک ازمفروضات قضیه ممکن است حکم درست نباشد. (ر. ك. مثالهای ۴.۱۰ (ج و چ).)

۶.۱۰ قضیهٔ بولتسانو[۱] ــ وایرشتراس[۲]. هر زیرمجموعهٔ بی‌پـایان وکراندار $\mathbf{R}^p$ دارای نقطهٔ تجمع است.

برهان. فرض کنیم B یک مجموعهٔ کـراندار است و تعدادی بی‌پایان عنصر دارد.

---

۱. برنـاردبولتسانو Bernard Bolzano (۱۷۸۱ــ۱۸۴۸) استاد فلسفهٔ ادیان در پراگ بود، اما درریاضیات نظرات عمیقی داشت. همانندکوشی، یکی ازریاضیدانانی بودکه‌سطح دقت درآنالیز ریاضی را بالا بردند. کتاب او درمورد پارادکسهای بینهایت پس‌ازمرگ او به‌چاپ رسید.

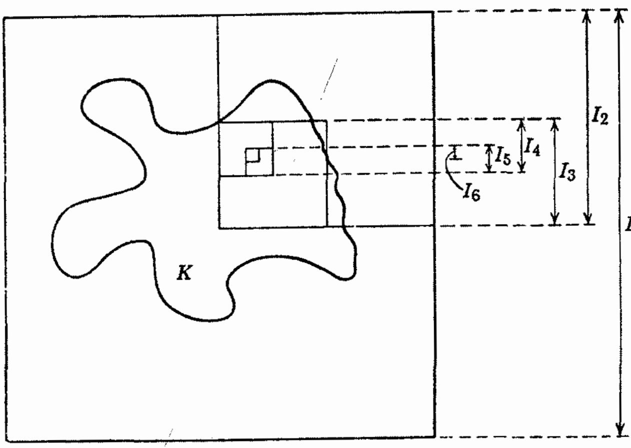
۲. کارل وایرشتراس Karl Weierstrass (۱۸۱۵ــ۱۸۹۷) سالهای زیـادی در بـرلن استاد بـود و کارهای او در توسعهٔ آنـالیز اثر عمیقی داشته است. مقدمه‌ای بر دستگاه اعداد حقیقی تدوین کرد که در آن همواره تأکید بر اثبات دقیق بود ولی آن را به‌چاپ نرسانید. او همچنین در آنالیز حقیقی و مختلط،معادلات دیفرانسیل، وحساب تغییرات تحقیقات مهمی دارد.

I_1 را حجرهٔ بسته‌ای که شامل B باشد می‌گیریم . با نصف کردن هریك از یالهای I_1 ، آن‌را به 2^p حجرهٔ بسته تقسیم می‌کنیم. چون I_1 شامل بی‌نهایت نقطهٔ B است ، حداقل یکی از این زیرحجره‌ها شامل بی‌نهایت نقطهٔ B است . (زیرا هرگاه هریك از 2^p حجره فقط تعدادی با پایان از نقاط مجموعهٔ B را شامل باشد ، B باید مجموعه‌ای با پایان باشد، که با فرض ما متناقض است.) فرض‌کنیم I_2 یکی از این زیرحجره‌های I_1 باشد که دارای بی‌نهایت عنصر B است. حال I_2 را با نصف کردن هریك از یالهایش به 2^p حجرهٔ بسته تقسیم می‌کنیم . مجدداً یکی از این زیرحجره‌های I_2 باید شامل بی‌نهایت نقطهٔ B باشد، زیرا درغیر این‌صورت I_2 فقط شامل تعدادی با پایان عنصر B می‌شود که با ساختار آن متناقض است. فرض‌کنیم I_3 یك زیرحجرهٔ I_2 باشد که شامل تعدادی بی‌پایان نقطهٔ B است. با ادامهٔ این کار، دنبالهٔ آشیانی (I_k) به دست می‌آید که هر I_k یك حجرهٔ بستهٔ غیرتهی در $\mathbf{R}^p$ است. بر طبق قضیهٔ حجره‌های آشیانی نقطه‌ای مانند y هست که به تمام حجره‌های I_k، $k = 1, 2, \ldots$، تعلق‌دارد. حال نشان می‌دهیم که y یك نقطهٔ تجمع B است و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود

ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $I_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ با فرض $a_k < b_k$ ، $l(I_1) = \sup\{b_1 - a_1, \ldots, b_p - a_p\}$ ، آنگاه $l(I_1) > 0$ طول بزرگترین یال I_1 است. برطبق ساختار دنبالهٔ (I_k) در بالا ، به‌ازای $k \in \mathbf{N}$ داریم

$$0 < l(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1) .$$

فرض می‌کنیم V یك همسایگی دلخواه نقطهٔ مشترك y باشد و کلیهٔ نقاط z در $\mathbf{R}^p$ با شرط $\|y - z\| < r$ متعلق به V باشند . حال k را آنقدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که



شکل ۱۰۱۵

$I_k \subseteq V$. این انتخاب ممکن است چراکه اگر w نقطهٔ دیگری از I_k باشد، آنگاه ازقضیهٔ ۱۰.۸ نتیجه می‌شود که

$$\|y-w\| \leqslant \sqrt{p}\, l(I_k) = \frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} l(I_1).$$

از تمرین ۶.ر، به‌دست می‌آید که اگر k به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آنگاه

$$\frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} l(\mathbf{I}_1) < r .$$

برای این‌مقادیر k داریم $I_k \subseteq V$. چون I_k شامل بی‌نهایت عنصر B است، نتیجه می‌شود که V شامل حداقل یک‌عنصر B مخالف با y می‌باشد. بنابراین، y یک‌نقطهٔ تجمع B است. □

تمرین

۱۰. الف. فرض کنید $I_n \subseteq \mathbf{R}^p$ حجره‌هایی باز به‌صورت

$$I_n = (0, 1/n) \times \cdots \times (0, 1/n)$$

باشند. نشان‌دهید که این حجره‌ها آشیانی‌اند. اما شامل هیچ نقطهٔ مشترکی نیستند.

۱۰. ب. فرض کنید فواصل بستهٔ $J_n \subseteq \mathbf{R}^p$ به‌صورت

$$J_n = [n, +\infty) \times \cdots \times [n, +\infty)$$

داده شده‌باشند. نشان‌دهید که این فواصل آشیانی هستند، امـا شامل هیچ‌نقطهٔ مشترکی نیستند.

۱۰.پ. نقطهٔ x یک‌نقطهٔ‌تجمع مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$ است اگر وفقط اگر هرهمسایگی x شامل بی‌نهایت نقطه از A باشد.

۱۰.ت. فرض کنید $A = \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$. نشان‌دهید که هرنقطهٔ A در $\mathbf{R}$ یک‌نقطهٔ کرانه‌ای است و ۰ تنها نقطهٔ تجمع A در $\mathbf{R}$ است.

۱۰.ث. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ باشند و x یک‌نقطهٔ تجمع $A \cap B$ در $\mathbf{R}^p$ باشد. ثابت‌کنیدکه x هم نقطهٔ تجمع A و هم نقطهٔ تجمع B است.

۱۰. ج. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ باشند و x یک‌نقطهٔ تجمع $A \cup B$ در $\mathbf{R}^p$ باشد. ثابت‌کنیدکه x یا نقطهٔ تجمع A است یا نقطهٔ تجمع B.

۱۰.چ. نشان‌دهید که‌هرنقطه درمجموعهٔ‌کانتور $\mathbf{F}$ هم‌نقطهٔ تجمع $\mathbf{F}$ و هم نقطهٔ‌تجمع $\mathcal{C}(\mathbf{F})$ است.

۱۰.ح. هرگاه A زیرمجموعهٔ دلخواهی از $\mathbf{R}^p$ باشد، یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر A مانند C هست به‌قسمی که هرگاه $x \in A$ و $\varepsilon > 0$، عنصری مانند $z \in C$ وجود دارد به‌قسمی که $\|x - z\| < \varepsilon$. بنابراین هرعنصر A یا در C است و یا نقطهٔ تجمع C است.

پروژه

۱۰. α. فرض کنید M یک مجموعه و d متریکی در M باشدکه در تمرین ۸. ۵ تعریف شده است. تعاریف وقضایای بخشهای ۹ و ۱۰ را دو باره بررسی کرده مشخص نمایید که کدامیک از این خواص درمجموعه‌های دارای متریک معتبرند. برای مثال خواهیم دید که مفاهیم مجموعه‌های باز، بسته، وکراندار معتبر می‌مانند. اما اگر M و d مناسب انتخاب شوند قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس درست نیست. در صورت امکان یانشان‌دهید که قضیه قابل تعمیم است ویا مثال ناقضی در ردآن بزنید.

۱۰. β. فرض کنید $\mathscr{T}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک‌مجموعه مانند X باشد که (یک) شامل $\varnothing$ و X باشد، (دو) شامل مقطع هرخانوادهٔ با پایان ازمجموعه‌های $\mathscr{T}$ باشد، (سه) شامل اجتماع هرخانواده از مجموعه‌های در $\mathscr{T}$ باشد. $\mathscr{T}$ را **یک توپولوژی** برای X می‌گوییم و مجموعه‌های $\mathscr{T}$ را **مجموعه‌های باز** می‌نامیم. تعاریف و قضایای بخشهای ۹ و۱۰ را دوباره بررسی کرده، کوشش کنید مشخص نمایید که کدامیک از این خواص درمجموعه‌های X که یک توپولوژی $\mathscr{T}$ دارند، معتبر می‌مانند.

بخش ۱۱ قضیهٔ هاینه-بورل

قضیهٔ حجره‌های آشیانی ۱۰. ۲ وقضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس ۶.۱۰ با مفهوم بسیار مهم فشردگی، که دربخش حاضر موردبحث ماست، ارتباط نزدیکی دارند. باآنکه اغلب‌نتایج بخشهای بعدی را می‌توان بدون آگاهی ازقضیهٔ هاینه ــ بورل به‌دست آورد، اما بدون این‌قضیه خیلی بیش از این نمی‌توان درآنالیز پیش رفت. لذا اجتناب از ارائهٔ این‌قضیهٔ عمیق جایز نیست.

۱۱. ۱ **تعریف.** مجموعهٔ K را درصورتی **فشرده** گوییم که هروقت این‌مجموعه در اجتماع دسته‌ای از مجموعه‌های باز مانند $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ واقع باشد در اجتماع تعدادی با پایان از مجموعه‌های $\mathcal{G}$ نیز قرار گیرد.

دستهٔ $\mathcal{G}$ ازمجموعه‌های بازرا که اجتماع آنها شامل K باشداغلب **پوشش** K می‌نامند. بنابراین‌شرط اینکه K فشرده باشد این‌است که‌هرپوشش K مانند $\mathcal{G}$ را بتوان با **یک پوشش باپایان** K فقط بااستفاده ازمجموعه‌های $\mathcal{G}$، جایگزین کرد. توجه‌داریم که برای به‌کاربردن این

تعریف درا ثبات فشرده بودن K لازم است که دستهٔ دلخواهی از مجموعه‌های باز را که اجتماعشان شامل K است بررسی کرده نشان‌دهیم که K در اجتماع یك زیردستهٔ با پایانی از آن‌دسته جا دارد. ازطرف دیگر، برای نشان‌دادن اینکه‌مجموعهٔ H فشرده نیست، کافی است فقط یك پوشش ارائه دهیم که باهیچ زیردستهٔ باپایانش که آن‌هم H را بپوشاند، قابل تعویض نباشد.

۲.۱۱ چندمثال. (الف) فرض کنیم $K=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ یك زیرمجموعهٔ باپایان $\mathbf{R}^p$ باشد. واضح است که اگر $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ دسته‌ای از مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^p$ باشد، و هرنقطهٔ K به‌یکی ازمجموعه‌های $\mathcal{G}$ متعلق باشد، آنگاه، اگر در انتخاب مجموعه‌های $\mathcal{G}$ دقت‌شود، اجتماع حداکثر m مجموعهٔ $\mathcal{G}$ شامل K می‌شود. بنابراین K یك‌زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ است.

(ب) در $\mathbf{R}$، زیرمجموعهٔ $H=\{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 0\}$ و $G_n=(-1, n)$، $n \in \mathbf{N}$ را درنظر می گیریم. مجموعهٔ $\mathcal{G}=\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$ یك‌دسته از زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}$ است که اجتماعشان‌شامل H است. اگر $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\}$ یك زیردستهٔ با پایان $\mathcal{G}$ باشد، می‌نویسیم $M=\sup\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$، در نتیجه به‌ازای $j=1, 2, \ldots, K$، $G_{n_j} \subseteq G_M$. از اینجا نتیجه می‌شود که G_M اجتماع $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\}$ است. ولی با این‌حال عدد حقیقی M به‌G_M متعلق نیست ولذا به $\bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j}$ متعلق نمی‌باشد. بنابراین، هیچ اجتماع با پایانی ازمجموعه‌های $\mathcal{G}$ نمی‌تواند شامل H باشد، ودرنتیجه H فشرده نیست.

(پ) $H=(0, 1)$ رادر $\mathbf{R}$ درنظرمی‌گیریم‌هرگاه‌به‌ازای $n>2$، $G_n=(1/n, 1-1/n)$ دستهٔ مجموعه‌های باز $\mathcal{G}=\{G_n : n>2\}$ یك‌پوشش H است. هرگاه $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_k}\}$ یك‌زیردستهٔ باپایان $\mathcal{G}$ باشد، می‌نویسیم $M=\sup\{n_1, \ldots, n_k\}$. به‌ازای $j=1, 2, \ldots, k$، داریم $G_{n_j} \subseteq G_M$. از اینجا نتیجه می‌شود که G_M اجتماع $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_k}\}$ است. ولی با اینکه عدد حقیقی $1/M$ متعلق به H است به G_M تعلق ندارد. بنابراین هیچ زیردستهٔ با پایان $\mathcal{G}$ نمی‌تواند پوشش H باشد، پس H فشرده نیست.

(ت) مجموعهٔ $\mathbf{I}=[0, 1]$ را درنظر می گیریم و نشان می‌دهیم که $\mathbf{I}$ فشرده است. فرض کنیم $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}$ باشد که اجتماعشان شامل $\mathbf{I}$ است. عدد حقیقی $x=0$ به‌مجموعهٔ بازی در دستهٔ $\mathcal{G}$ تعلق دارد و همچنین به‌ازای عددی مثبت چون ε، اعداد x صادق در $0 \leqslant x < \varepsilon$ در این مجموعهٔ باز هستند. xهایی در $\mathbf{I}$ هستند به‌طوری‌که حجرهٔ $[0, x]$ در اجتماع تعدادی با پایان ازمجموعه‌های در $\mathcal{G}$ واقع باشد. x^* را زبرینهٔ این xها می گیریم. چون x^* به $\mathbf{I}$ متعلق است، نتیجه می‌شود که x^* عنصری از یکی از مجموعه‌های باز در $\mathcal{G}$ است. بنابراین، به‌ازای یك $\varepsilon>0$ حجرهٔ $[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]$ در مجموعه‌ای ازدسته $\mathcal{G}$ مانند G_0 واقع است. اما (طبق تعریف x^*) حجرهٔ $[0, x^*-\varepsilon]$ دراجتماع تعدادی با پایان ازمجموعه‌های $\mathcal{G}$ واقع است. از این‌رو با

افزودن مجموعهٔ $G_{\circ}$ به‌تعداد با پایان مجموعه‌های $\mathcal{G}$ که $[\circ\,,\,x^*-\varepsilon]$ را می‌پوشانند، نتیجه می‌شود کــه مجموعهٔ $[\circ\,,\,x^*+\varepsilon]$ در اجتماع تعدادی با پایان از مجموعه‌های $\mathcal{G}$ واقع است. این‌تناقض به‌وجود می‌آورد مگر اینکه $x^*=۱$. پس $\mathbf{I}$ فشرده است.

معمولاً اثبات فشردگی یك مجموعه فقط بااستفاده از تعریف‌آسان نیست. اکنون قضیهٔ مهم وجالب‌توجهی‌را عرضه می‌کنیم که زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbf{R}^p$ راکاملاً مشخص می‌کند. درواقع،بخشی ازاهمیت قضیهٔ هاینه ــ بورل مدیون سادگی شرایط فشردگی در $\mathbf{R}^p$ است.

۱۱ . ۳ قضیهٔ هاینه[۱]-بورل[۲]. زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ فشرده است اگر و فقط اگــر بسته و کراندار باشد.

برهان . ابتدا نشان می‌دهیم‌که اگر K در $\mathbf{R}^p$ فشرده‌باشد ، آنگاه بسته است. فرض‌کنیم x به $\mathcal{C}(K)$ متعلق باشد وبه‌ازای هرعدد طبیعی m مجموعهٔ G_m با

$$G_m=\{y\in\mathbf{R}^p:\|y-x\|>۱/m\}$$

تعریف شده‌باشد بسهولت دیده می‌شود‌که هرمجموعهٔ G_m،$m\in\mathbf{N}$ ، در $\mathbf{R}^p$ بــاز است . همچنین اجتماع کلیهٔ مجموعه‌های G_m ، $m\in\mathbf{N}$ از تمام نقاط $\mathbf{R}^p$ بجز x تشکیل شده است. چون $x\notin K$ ، هر نقطهٔ K به یکی از G_mها متعلق است. از اینکه K فشرده است، نتیجه می‌شود‌که عددی طبیعی مانند M هست به‌قسمی‌که K در اجتماع مجموعه‌های

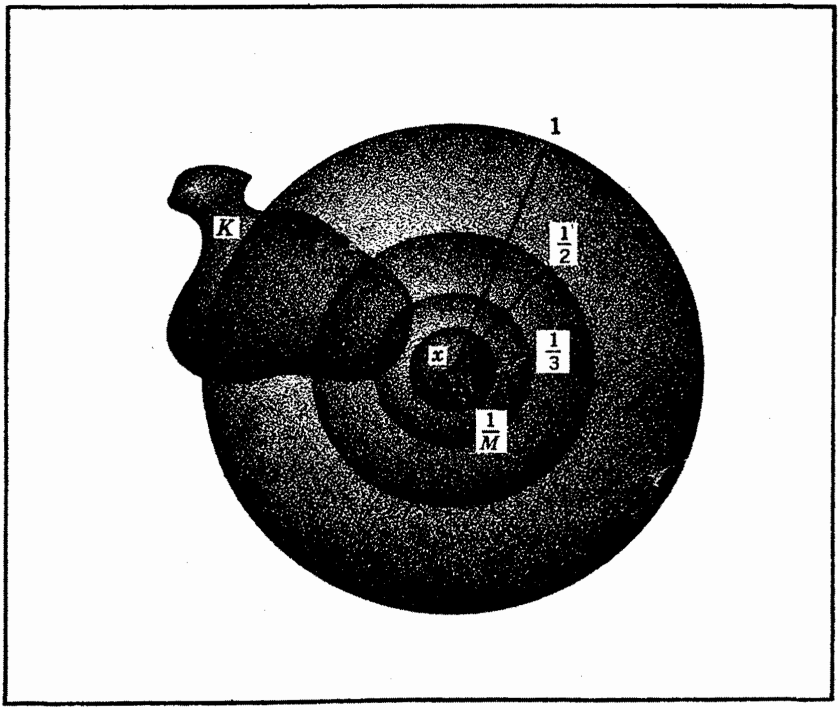
$$G_۱,\,G_۲,\,\ldots,G_M$$

واقع است. اما مجموعه‌های G_m با m بزرگ می‌شوند . پس K در G_M واقع است. از این‌رو همسایگی $\{z\in\mathbf{R}^p:\|z-x\|<۱/M\}$ مجموعهٔ K را قطع نمی‌کند، و این نشان می‌دهد‌که $\mathcal{C}(K)$ یك‌مجموعهٔ بــاز است . بنابراین K در $\mathbf{R}^p$ بسته است. (ر. ك. شکل ۱۱ . ۱ که درآن چندگوی بستهٔ متمم چند G_m ، رسم‌شده‌اند.)

---

۱. ادواردهاینه Eduard Heine (۱۸۲۱ــ۱۸۸۱) دربرلن زیر نظر وایرشتراس تحصیل کرد وبعد در بن و هاله تدریس‌کرد . در ۱۸۷۲ ثابت‌کرد که هرتابع پیوسته در فاصلهٔ بسته، پیوستهٔ یکنواخت است.

۲. امیل‌بورل Émile Borel (۱۸۷۱ ــ ۱۹۵۶) شاگرد هرمیت ، در پاریس‌استاد ویکی ازمتنفذترین ریاضی‌دانان عهد خود بود. کارهای زیاد عمیقی در آنالیز و احتمال کرده است. در سال ۱۸۹۵ ثابت‌کردکه هرگاه یك دستهٔ شمارش‌پذیــر از فاصله‌های باز یك فاصلــهٔ بستهٔ (کراندار) را بپوشانند، این‌دسته دارای یك‌زیرپوشش باپایان است .



شکل ۱۰۱۱ یك‌مجموعهٔ فشرده بسته است.

اینك نشان می‌دهیم که اگر K در $\mathbf{R}^p$ فشرده‌باشد، آنگاه K کراندار است (یعنی، K در مجموعه‌ای به‌صورت $\{x\in\mathbf{R}^p:\|x\|<r\}$ واقع‌است اگر r به‌قدرکافی‌بزرگ‌باشد). در واقع، به‌ازای هرعدد طبیعی m ، فرض می کنیم H_m مجموعهٔ بازی باشدکه با

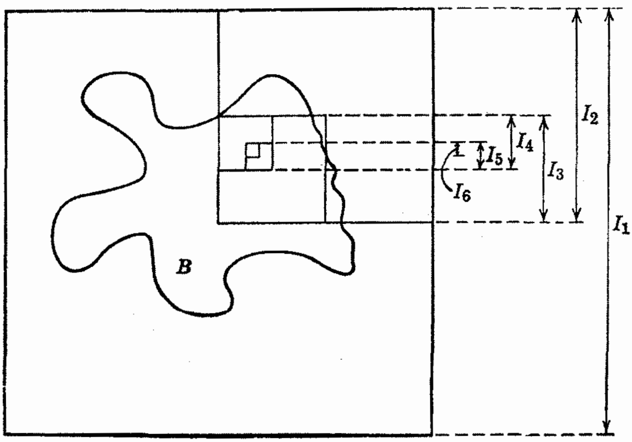
$$H_m=\{x\in\mathbf{R}^p:\|x\|<m\}$$

تعریف شده است. تمام فضای $\mathbf{R}^p$ ، و در نتیجه K ، در اجتماع مجموعه‌های صعودی $m\in\mathbf{N},H_m$ ، واقع است . چون K فشرده است، عددی طبیعی مانند M هست به‌قسمی که $K\subseteq H_M$ ، این‌مطلب ثابت می کندکه K کراندار است.

برای اتمام برهان این‌قضیه لازم است نشان دهیم که هرگاه K مجموعه‌ای بسته و کراندار باشد و در اجتماع دستهٔ $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^p$ واقع باشد، در اجتماع تعدادی با پایان از مجموعه‌های $\mathcal{G}$ واقع است. چون مجموعهٔ K کراندار است، می‌توان آن‌را در یك حجرهٔ بستهٔ I_1 در $\mathbf{R}^p$ جا داد. برای مثال ، اگر $r>0$ به‌اندازهٔکافی بزرگ‌باشد ، می‌توانیم $\{(x_1,\dots,x_p):|x_k|\leqslant r,\ K=1,2,\dots,p\}$ را I_1 بگیریم. برای به‌دست‌آوردن تناقض فرض می کنیم K دراجتماع هیچیك اززیردسته‌های با پایان $\mathcal{G}$ واقع نباشد. بنابراین حداقل یکی از 2^p حجرهٔ بسته‌که ازنصف‌کردن یالهای I_1 به‌دست می‌آید، شامل بخشی از K است به‌قسمی که این‌بخش در اجتماع هیچیك از

زیردسته‌های بـا پایان $\mathcal{G}$ واقع نیست. (زیرا اگر نقاط K که در هریك از 2^p زیرحجرهٔ بسته واقع‌اند، در اجتماع تعدادی بـا پـایـان از مجموعه‌های $\mathcal{G}$ واقع باشند، K در اجتماع تعدادی با پایان از مجموعـه‌های $\mathcal{G}$ واقع می‌شود، کـه متناقض با فرض است).
حال فرض کنیم I_1 را با نصف کردن یـالها به 2^p زیر حجره تقسیم کرده‌ایم و I_2 یکی از این زیرحجره‌هـا باشد به قسمی که مجموعهٔ غیـرتهی $K \cap I_2$ در اجتماع هیچیك از زیردسته‌های بـا پایان $\mathcal{G}$ واقع نیست. این‌عمل را بـا نصف کردن یالهای I_2 ادامه داده تعداد 2^p زیرحجرهٔ بسته به دست می‌آوریم و فرض می‌کنیم I_3 یکی‌از زیرحجره‌ها باشد به‌قسمی که مجموعهٔ غیرتهی $K \cap I_3$ دراجتماع هیچیك از زیردسته‌های با پایان $\mathcal{G}$ واقع نیست، واین عمل‌را ادامه می‌دهیم.

بدین‌ترتیب یك دنبالهٔ آشیانی (I_n) ازحجره‌های غیرتهی به‌دست می‌آوریم (ر. ك. شکل ۲.۱۱)؛ برطبق قضیهٔ حجرهٔ آشیانی نقطه‌ای مـانند y مشترك در تمام I_n هـا وجود دارد. چون هریك از I_nها شامل نقاطی از K است، پس عنصر مشترك یك‌نقطهٔ تجمع K است. اما چون K بسته است، y به K متعلق و درنتیجه به‌مجموعهٔ بازی مانند G_λ در $\mathcal{G}$ متعلق است، بنابراین، عددی مـانند $\varepsilon > 0$ هست به‌قسمی که تمام نقاط w بـا شرط $\|y-w\| < \varepsilon$ به G_λ متعلق باشند. ازسوی دیگر، حجره‌های I_k، $k \geqslant 2$ از نصف کردن متوالی یـالهای حجرهٔ $I_1 = \{(x_1, \ldots, x_p) : |x_j| \leqslant r\}$ به‌دست آمده‌اند در نتیجه طول یال I_k برابر بـا $r/2^{k-2}$ است. از قضیهٔ ۱۰.۸ نتیجه می‌شود که اگر $w \in I_k$، آنگاه $\|y-w\| \leqslant r\sqrt{p}/2^{k-3}$. پس اگر k را آن‌قدر بزرگ انتخـاب کنیم که $r\sqrt{p}/2^{k-3} < \varepsilon$، آنگاه تمام نقـاط I_k در یك مجموعـهٔ G قـرار خواهد گرفت. اما این باطرز ساختن I_k متناقض است، زیرا مجموعهٔ I_k را به‌قسمی گرفتیم که در $K \cap I_k$



شکل ۲.۱۱

اجتماع هیچ تعداد با پایانی ازمجموعه‌های $\mathcal{G}$ واقع نباشد. این‌تناقض نشانگر آن است که فرض اینکه برای پوشاندن مجموعهٔ بسته و کراندار K بی‌نهایت مجموعه $\mathcal{G}$ لازم است، غیرقابل قبول است. □

چند کاربرد

به‌عنوان یکی از نتایج قضیهٔ هاینه ــ بورل، قضیهٔ بعدی را که به کانتور منسوب است به‌دست می‌آوریم. این قضیه شکل قویتری ازقضیهٔ حجره‌های آشیانی است، چراکه در اینجا به‌جای حجره‌های بسته، مجموعه‌های بسته به‌طورکلی موردنظر خواهند بود.

۴.۱۱ قضیهٔ مقطع کانتور. فرض‌کنیم F_1 یك زیرمجموعهٔ غیرتهی بسته و کراندار $\mathbf{R}^p$ و

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

دنباله‌ای از مجموعه‌های غیرتهی و بسته باشد. در این‌صورت نقطه‌ای وجود داردکه به‌تمام مجموعه‌های $\{F_k : k \in \mathbf{N}\}$ متعلق است.

برهان . چون F_1 بسته و کراندار است، ازقضیهٔ هاینه ــ بورل نتیجه می‌شودکه این مجموعه فشرده است. به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$، فرض می‌کنیم G_k متمم F_k در $\mathbf{R}^p$ باشد. چون F_k بسته فرض شده، G_k در $\mathbf{R}^p$ باز است. اگر، برخلاف حکم هیچ نقطه‌ای به‌تمام F_kها، $k \in \mathbf{N}$ متعلق‌نباشد، آنگاه اجتماع مجموعه‌های G_k، $k \in \mathbf{N}$ ، شامل مجموعهٔ‌فشرده F_1 می‌شود. بنابراین مجموعهٔ F_1 دراجتماع تعدادی با پایان ازمجموعه‌های G_k ، مثلاً G_1 ، G_2، . . . ،G_K واقع می‌شود. چونG_kهاصعودی‌هستند، داریم $G_1 \cup \cdots \cup G_K = G_K$ واز آنجاکه $F_1 \subseteq G_K$، نتیجه می‌شودکه $F_1 \cap F_K = \varnothing$. اما بنا به‌فرض $F_1 \supseteq F_K$، پس $F_1 \cap F_K = F_K$. بدین‌ترتیب فرض ما به $F_K = \varnothing$ منتج می‌شودکه بافرض قضیه متناقض است وقضیه را به‌اثبات می‌رساند. □

۵.۱۱ قضیهٔ پوششی لبگ. فرض‌کنیم $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ پوششی برای یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند K باشد. در این صورت عدد اکیداً مثبتی مانند λ هست به‌قسمی‌که اگر نقطهٔ x و y را شامل باشد. و $\|x-y\| < \lambda$، آنگاه مجموعه‌ای در $\mathcal{G}$ وجود دارد که هر دو x و y را شامل باشد.

برهان . به‌ازای هرنقطهٔ u در K ، مجموعهٔ بازی مانند $G_{\alpha(u)}$ در $\mathcal{G}$ هست که شامل u باشد . فرض‌کنیم $\delta(u) > 0$ چنان باشدکه هرگاه $\|v-u\| < 2\delta(u)$، v به $G_{\alpha(u)}$ متعلق باشد. مجموعهٔ‌باز $S(u) = \{v \in \mathbf{R}^p : \|v-u\| < \delta(u)\}$ و دستهٔ مجموعه‌های باز $\mathcal{P} = \{S(u) : u \in K\}$ را درنظرمی گیریم. چون $\mathcal{P}$ یك‌پوشش مجموعهٔ فشردهٔ K است، K

در اجتماع تعدادی بـا پـایان مجموعـهٔ $\mathcal{G}$ ، مثلاً در اجتمـاع $S(u_1), \ldots, S(u_n)$ جای دارد. حال λ را به‌صورت

$$\lambda = \inf\{\delta(u_1), \ldots, \delta(u_n)\}$$

تعریف می‌کنیم. هرگاه x و y به K متعلق باشند و $\|x-y\| < \lambda$، به‌ازای یك j بـا شرط $1 \leqslant j \leqslant n$، x به $S(u_j)$ متعلق است. پس $\|x-u_j\| < \delta(u_j)$. چون $\|x-y\| < \lambda$، داریم $\|y-u_j\| \leqslant \|y-x\| + \|x-u_j\| < 2\delta(u_j)$. حال از تعریف $\delta(u_j)$ نتیجه می‌گیریم که x و y هردو به‌مجموعهٔ $G_{\alpha(u_j)}$ متعلق هستند. □

خاطرنشان‌کنیم که گاهی عدد مثبت λ ای که واجد خـاصیت مذکور در قضیهٔ بالا باشد **عدد لبگ**[1] پوشش $\mathcal{G}$ نامیده می‌شود.

بـا آنکه در بخشهای بعد استدلالهای مبتنی برفشردگی را به‌کار خواهیم گرفت ، بجاست که در اینجـا دو قضیه بیاوریم که واضح شهودی هستند ولی به‌نظر می‌رسد که در اثبات آنها از نوعی استدلال فشردگی استفاده می‌شود.

۱۱. ۶. قضیهٔ نزدیکترین نقطه. فـرض‌کنیم F یك‌زیـرمجموعهٔ بستهٔ غیرتهی $\mathbf{R}^p$ و x نقطه‌ای درخـارج آن باشد. در این صورت حداقل یك‌نقطهٔ y متعلق به F هست به‌قسمی‌که به‌ازای هر $z \in F$، $\|y-x\| \geqslant \|z-x\|$.

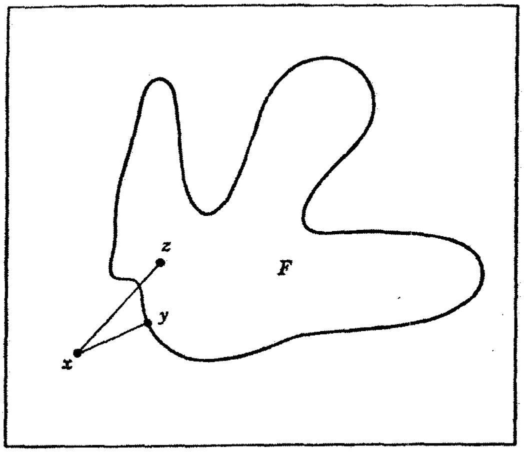
برهان . چون F بسته و $x \notin F$، پس(ر. ك. تمـرین ۱۱. ح) دوری x از F ، کـه بـه صورت $d = \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$ تعریف شده است ، اکیداً مثبت است. فرض کنیم به‌ازای $k \in \mathbf{N}$، $F_k = \{z \in F : \|x-z\| \leqslant d + 1/k\}$. طبق مثـال ۹.۵ (ج) ، این مجموعه‌ها در $\mathbf{R}^p$ بسته هستند وواضح است که F_1 کراندار است و

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k \supseteq \cdots.$$

علاوه براین، طبق تعریف d و F_k ملاحظه می‌شود که F_k غیرتهی است. از قضیهٔ‌مقطع کانتور ۱۱. ۴ نتیجه می‌شود که نقطه‌ای مانند y متعلق به‌تمام F_kها ، $k \in \mathbf{N}$، وجود دارد. بسهولت دیده می‌شود که $\|x-y\| = d$، درنتیجه y درشرایط حکم قضیه صدق می‌کند. (ر. ك. شکل ۱۱. ۳). □

---

۱. هانری‌لبگ Henri Lebesgue (۱۸۷۵ـ۱۹۴۱). شهرت او بیشتر به‌این خاطر است که درعرضهٔ نظریهٔ جدید انتگرال (که به‌نام خود اوانتگرال‌لبگ نامیده می‌شود) پیشگام بوده است واین‌نظریه ازپایه‌های آنالیز امروز است.

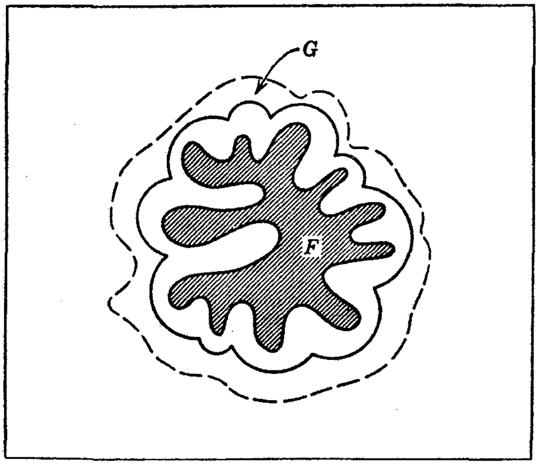


شکل ۳.۱۱

یکی از صورتهای قضیهٔ بعدی در نظریهٔ توابع تحلیلی از اهمیت خاصی برخوردار است. ما قضیه را فقط برای $p=2$ بیان می‌کنیم و از مفاهیم شهودی مثل مفهوم مجموعهٔ محصور در یک خم بسته (یعنی، خمی که نقاط انتهایی ندارد) استفاده می‌کنیم.

۷.۱۱ قضیهٔ کرانهٔ محیطی. فرض کنیم F یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار در R^2 و G مجموعهٔ بازی شامل F باشد در این صورت خم بسته‌ای مانند C هست که تماماً در G واقع است، از تعدادی با پایان کمان دایره ساخته شده است، و F در C محصور است.

خلاصه‌ای از برهان. چنانچه x به $F \subseteq G$ متعلق باشد، عددی مانند $\delta(x) > 0$ هست به قسمی که اگر $\|y-x\| < \delta(x)$ آنگاه y به G متعلق است. اکنون فرض می‌کنیم به‌ازای هر x در F، $G(x) = \{y \in \mathbf{R}^2 : \|y-x\| < \frac{1}{2}\delta(x)\}$. چون دستهٔ $\mathcal{G} = \{G(x) : x \in F\}$ پوشش مجموعهٔ فشردهٔ F است، تعدادی با پایان از مجموعه‌های $\mathcal{G}$، مثلاً $G(x_1)$، . . .، $G(x_k)$، وجود دارد که پوشش مجموعهٔ فشردهٔ F است. با استفاده از کمانهای دوایر به‌مرکز x_j و شعاعهای $\frac{1}{2}\delta(x_j)$، خم مطلوب C به‌دست می‌آید (ر.ك. شکل ۴.۱۱). جزئیات ساختمان خم در اینجا ذکر نخواهد شد. □



شکل ۴.۱۱

تمرین

۱۱. الف. تعریف را مستقیماً به‌کاربرید (یعنی بدون استفاده ازقضیهٔ هاینه ـ بورل) ونشان‌دهیدکه گوی باز $\{(x,y):x^{2}+y^{2}<1\}$ در $\mathbf{R}^{2}$ فشرده نیست.

۱۱.ب. مستقیماً نشان‌دهیدکه تمام فضای $\mathbf{R}^{2}$ فشرده نیست.

۱۱. پ. مستقیماً ثابت کنید اگر K در $\mathbf{R}^{p}$ فشرده و $F\subseteq K$ مجموعهٔ بسته‌ای باشد، آنگاه F در $\mathbf{R}^{p}$ فشرده است.

۱۱. ت. ثابت کنید اگر K زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه K به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^{2}$ نیز فشرده‌است.

۱۱. ث. استدلال مثال ۲.۱۱ (ت) را کمی تغییر داده، ثابت کنید فاصلهٔ $J=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ در $\mathbf{R}^{2}$ فشرده است.

۱۱. ج. در اثبات قضیهٔ هاینه ـ بورل چه موقع ازفرض کراندار بودن و چه موقع از فرض بسته‌بودن K استفاده شده است؟

۱۱. چ. قضیهٔ مقطع کانتور را از راه زیر اثبات کنید: از F_n یك‌نقطه مانند x_n انتخاب کنید و قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۶.۱۰ را در مورد مجموعهٔ $\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$ به‌کار برید.

۱۱. ح. اگر $F\neq\varnothing$ در $\mathbf{R}^{p}$ بسته باشد و

$$d(x, F)=\inf\{\|x-z\|:z\in F\}=0$$

آنگاه x به F متعلق است.

۱۱. خ. آیا قضیهٔ نزدیکترین نقطه در $\mathbf{R}$ ایجاب می‌کند که نزدیکترین عدد حقیقی اکیداً مثبت به‌صفر وجود داشته باشد؟

۱۱. د. اگر F یک‌مجموعهٔ بستهٔ غیرتهی در $\mathbf{R}^p$ باشد و $x \notin F$ ، آیا نقطهٔ یکتایی در F هست که نزدیکترین نقطه به x باشد؟

۱۱. ذ. اگر K یک‌زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ و x نقطه‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $K_x = \{x+y : y \in K\}$ نیز فشرده‌است. (مجموعهٔ K_x را گاهی **انتقال** مجموعهٔ K توسط x می‌نامند).

۱۱. ر. مقطع دومجموعهٔ باز فشرده است اگر وفقط اگر تهی باشد. آیا امکان‌دارد مقطع دستهٔ بی‌پایانی ازمجموعه‌های باز یک مجموعهٔ فشردهٔ غیرتهی باشد؟

۱۱. ز. اگر F یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^2$ و G مجموعهٔ بازی شامل F باشد، آنگاه چندضلعی بسته‌ای مانند C وجود دارد که تماماً در G واقع است و F را محصور می‌نماید.

۱۱. ژ. فرض‌کنید $\{H_n : n \in \mathbf{N}\}$ خانواده‌ای اززیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد با این‌خاصیت که هیچ‌یک از H_n ها شامل مجموعه‌ای باز وغیرتهی نباشد. (برای مثال، H_n می‌تواند یک‌نقطه یا یک‌خط در $\mathbf{R}^2$ باشد.) فرض‌کنید $G \neq \emptyset$ یک مجموعهٔ بازباشد.
(الف) اگر $x_1 \in G \setminus H_1$، نشان‌دهید که گوی بسته‌ای مانند B_1 به‌مرکز x_1 وجود دارد به‌قسمی که $B_1 \subseteq G$ و $H_1 \cap B_1 = \emptyset$.
(ب) اگر $x_2 \in H_2$ به‌درون B_1 متعلق باشد. نشان‌دهید که گوی بسته‌ای مانند B_2 به‌مرکز x_2 هست به‌قسمی که B_2 دردرون B_1 واقع است و $H_2 \cap B_2 = \emptyset$.
(پ) با ادامهٔ این‌عمل، خانواده‌ای آشیانی ازگویهای بسته به‌دست می‌آید به‌طوری که $H_n \cap B_n = \emptyset$. طبق قضیهٔ ۱۱. ۴ (مقطع کانتور)، نقطه‌ای مانند x_0 مشترک درتمام B_nها وجود دارد. نتیجه بگیرید که $x_0 \in G \setminus \cup H_n$، پس G نمی‌تواند در $\cup H_n$ باشد. این نتیجه‌صورتی ازقضیه‌ای است که اغلب قضیهٔ رسته‌ای بر[1] نامیده می‌شود.

۱۱. س. یک **خط** در $\mathbf{R}^2$ مجموعه‌ای از نقاط (x, y) است که در معادله‌ای به‌شکل $ax + by + c = 0$ که درآن $(a, b) \neq (0, 0)$ صدق می‌کند. بااستفاده ازتمرین قبلی نشان‌دهید که $\mathbf{R}^2$ اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر ازخطوط نیست.

۱۱. ش. مجموعهٔ اعداد اصم $\mathscr{C}(\mathbf{Q})$ در $\mathbf{R}$ اجتماع خانواده‌ای شمارش پذیر از مجموعه‌های بسته که هیچ‌یک ازآنها شامل یک مجموعهٔ باز غیرتهی‌نباشد، نیست.

۱۱. ص. مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ مقطع دسته‌ای شمارش‌پذیر ازمجموعه‌های باز در $\mathbf{R}$ نیست.

---

۱. رنه‌لوئی‌بر René Louis Baire (۱۹۳۲—۱۸۷۴) استاد در دیژن بود، او درنظریهٔ مجموعه‌ها وآنالیز حقیقی کار کرده است.

بخش ۱۲ مجموعه‌های همبند

حال مفهوم مجموعهٔ همبند را که گهگاه به‌کار خواهد رفت معرفی می‌کنیم.

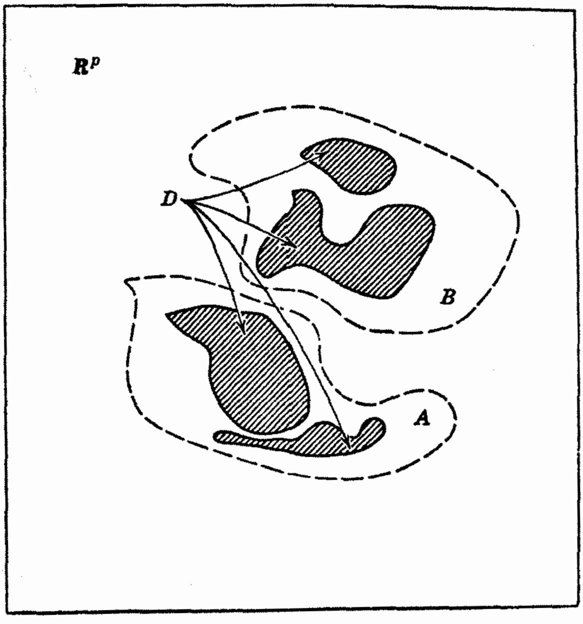
۱۲.۱ تعریف. زیرمجموعهٔ $D\subseteq \mathbf{R}^p$ را **ناهمبند** گوییم هرگاه دومجموعهٔ باز A و B وجود داشته‌باشند به‌قسمی‌که $A\cap D$ و $B\cap D$ ازهم‌جدا، غیرتهی، واجتماعشان D باشد. در این‌حالت گوییم که جفت A و B یك **ناهمبندی** برای D تشکیل می‌دهند. زیرمجموعه‌ای که ناهمبند نباشد **همبند** گفته می‌شود. (ر. ك. شکل ۱۲.۱).

۱۲.۲ چندمثال. (الف) مجموعهٔ $\mathbf{N}\subset \mathbf{R}$ ناهمبند است چرا که می‌توان A را $\{x\in\mathbf{R}:x<3/2\}$ و B را $\{x\in\mathbf{R}:x>3/2\}$ اختیار کرد.

(ب) مجموعهٔ $H=\{1/n:n\in\mathbf{N}\}$ ناهمبند است.

(پ) مجموعهٔ S مرکب از تمام اعداد گویای مثبت در $\mathbf{R}$ ناهمبند است، چراکه می‌توان A را $A=\{x\in\mathbf{R}:x<\sqrt{2}\}$ و B را $B=\{x\in\mathbf{R}:x>\sqrt{2}\}$ انتخاب نمود.

(ت) اگر $0<c<1$، آنگاه مجموعه‌های $A=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant c\}$ و $B=\{x\in\mathbf{R}:x>c\}$ فاصلهٔ یکهٔ $\mathbf{I}=\{x\in\mathbf{R}:0\leqslant x\leqslant 1\}$ را به دو مجموعهٔ غیرتهی



شکل ۱۲.۱ یك مجموعهٔ ناهمبند

مجزاکه اجتماعشان $\mathbf{I}$ است تقسیم می‌کند. اما چون A باز نیست، این‌مثال نشان نمی‌دهد که $\mathbf{I}$ ناهمبند است. در واقع، در زیر نشان خواهیم دادکه مجموعهٔ $\mathbf{I}$ همبند می‌باشد.

۳۰۱۲ قضیه. فاصلهٔ یکهٔ بستهٔ $\mathbf{I}=[0,1]$ یک‌زیرمجموعهٔ همبند است.

برهان . به‌روش برهان خلف عمل‌کرده فرض می‌کنیم A و B مجموعه‌های‌بازی هستندکه یک‌ناهمبندی برای $\mathbf{I}$ تشکیل می‌دهند. بنابراین $A\cap\mathbf{I}$ و $B\cap\mathbf{I}$ مجموعه‌هایی غیرتهی، مجزا، وکراندارندکه اجتماعشان $\mathbf{I}$ است. چون A و B بازند، مجموعه‌های $A\cap\mathbf{I}$ و $B\cap\mathbf{I}$ نمی‌توانند فقط شامل یک نقطه باشند. (چرا؟) به‌خاطر این‌که وضع مشخص باشد فرض می‌کنیم نقاط مانند $a\in A$ و $b\in B$ باشند به‌طوری که $0<a<b<1$. بااستفاده‌ازخاصیت‌زبرینهٔ ۴۰۶، فرض می‌کنیم $c=\sup\{x\in A: x<b\}$، در نتیجه $0<c<1$ ؛ بنابراین $c\in A\cup B$. هرگاه $c\in A$، $c\neq b$ ، و چون A باز است نقطه‌ای مانند $a_1\in A$ با شرط $c<a_1$ وجود دارد به قسمی‌که فاصلهٔ $[c, a_1]$ در $\{x\in A: x<b\}$ واقع است ، که با تعریف c متناقض است. به‌همین نحو، اگر $c\in B$ ، آنگاه چون B باز است نقطه‌ای مانند $b_1\in B$ با شرط $b_1<c$ وجود دارد به‌قسمی‌که فاصلهٔ $[b_1, c]$ در $B\cap\mathbf{I}$ جا دارد، که این‌هم باتعریف c متناقض است. از این‌رو فرض ناهمبندی $\mathbf{I}$ به‌تناقض منتهی‌می‌شود. □

خواننده باید توجه‌کندکه همین اثبات را می‌توان به‌کاربرد ونشان دادکه فاصلهٔ‌باز $(0,1)$ در $\mathbf{R}$ همبند است.

۴۰۱۲ قضیه. فضای $\mathbf{R}^p$ همبند است.

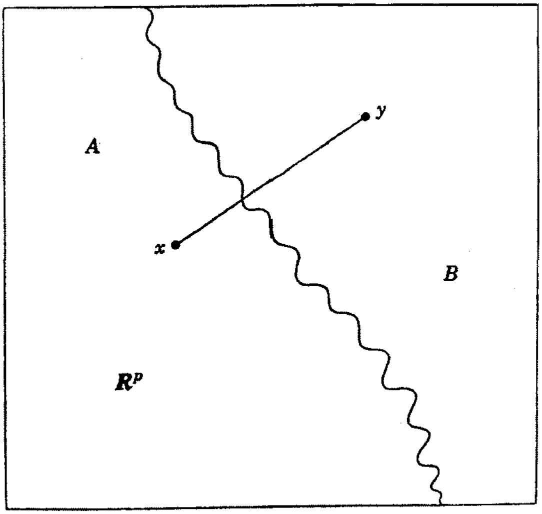
برهان . هرگاه چنین نباشد، دو مجموعهٔ باز غیرتهی و از هم جدا مانند A و B وجود دارند که اجتماعشان برابر با $\mathbf{R}^p$ است (ر.ک. شکل ۲۰۱۲). فرض می‌کنیم $x\in A$ و $y\in B$ و قطعه خط S واصل x به y ، یعنی

$$S=\{x+t(y-x): t\in\mathbf{I}\}$$

را در نظر می‌گیریم . فرض کنیم $A_1=\{t\in\mathbf{R}: x+t(y-x)\in A\}$ و $B_1=\{t\in\mathbf{R}: x+t(y-x)\in B\}$. بسهولت دیده می‌شود که A_1 و B_1 زیرمجموعه‌های باز غیرتهی و مجزا در $\mathbf{R}$ هستند و یک ناهمبندی برای $\mathbf{I}$ تشکیل می‌دهند ، که با قضیهٔ ۳۰۱۲ متناقض است. □

۵۰۱۲ نتیجه. $\varnothing$ و $\mathbf{R}^p$ تنها زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ هستندکه هم بازند و هم بسته.

برهان . زیرا هرگاه A در $\mathbf{R}^p$ هم باز و هم بسته باشد، $B=\mathbf{R}^p\setminus A$ نیز چنین



شکل ۲۰۱۲

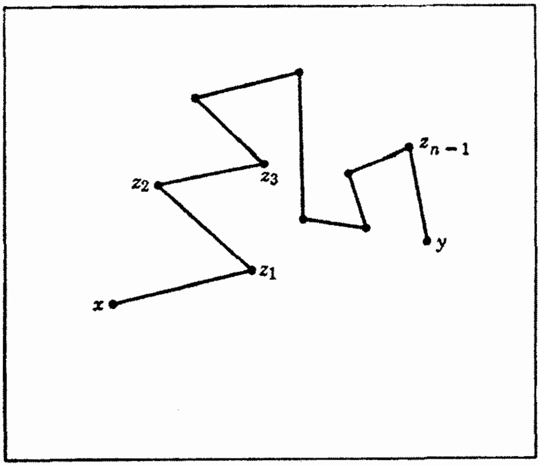
است. اگر A نه تهی باشد ونه تمام $\mathbf{R}^p$ ، آنگاه جفت A و B یك‌ناهمبندی برای $\mathbf{R}^p$ تشکیل می‌دهند که متناقض باقضیه است. □

مجموعه‌های باز همبند

در بعضی از قسمتهای آنالیز، مجموعه‌های باز همبند نقش فوق‌العاده مهمی ایفا می‌کنند. با استفاده از تعریف بآسانی می‌توان نتیجه زیررا ثابت کرد.

۱۲. ۶ لم. زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ همبند است اگر و فقط اگر نتوان‌آن‌را به‌صورت اجتماع دومجموعهٔ باز غیرتهی و مجزا از یکدیگر بیان‌کرد.

گاهی توصیف دیگری از مجموعه‌های باز همبند سودمند است. برای بیان چنین توصیفی ابتدا به معرفی چند اصطلاح می‌پردازیم. هرگاه x و y دونقطه در $\mathbf{R}^p$ باشند، یك **چند ضلعی** واصل x به y ، مجموعه‌ای است مانند P که از اجتماع تعدادی با پایان از قطعه خطهای مرتب $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ در $\mathbf{R}^p$ تشکیل شده است به قسمی که x و z_1دو سرقطعه خط L_1، z_1 و z_2 دوسر قطعه خط L_2، ...، و z_{n-1} و y دو سر قطعه خط L_n است (ر. ك. شکل ۳۰۱۲).



شکل ۳۰۱۲ یك چندضلعی

۷۰۱۲ قضیه. فرض‌کنیم G مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^p$ باشد. G همبند است اگر و فقط اگر هرجفت نقطه مانند x و y در G را بتوان بایك چندضلعی‌که تماماً در G واقع باشد به‌هم وصل‌کرد.

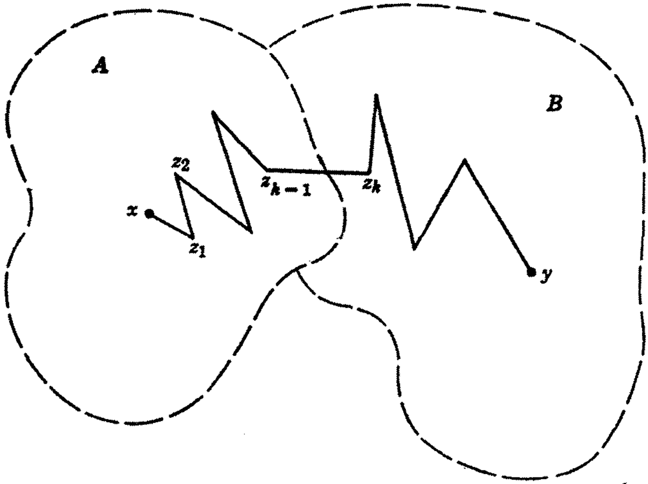
برهان. فرض کنیم G همبند نباشد و A و B یك‌ناهمبندی برای G تشکیل بدهند. فرض‌کنیم $x \in A \cap G$ و $y \in B \cap G$ و $P=(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ یك‌چندضلعی باشد که تماماً در G واقع است و x و y را به‌هم وصل می‌کند. همچنین فرض‌کنیم k کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد که اگر z_{k-1} و z_k دو سر L_k باشند؛ z_{k-1} متعلق به $A \cap G$ و z_k متعلق به $B \cap G$ باشد (ر. ك. شکل ۴۰۱۲). اگر A_1 و B_1 را را به‌صورت

$$A_1=\{t \in \mathbf{R} : z_{k-1}+t(z_k-z_{k-1}) \in A \cap G\},$$

$$B_1=\{t \in \mathbf{R} : z_{k-1}+t(z_k-z_{k-1}) \in B \cap G\},$$

تعریف کنیم، آنگاه بسهولت دیده می‌شود که A_1 و B_1 زیرمجموعه‌هایی باز، غیرتهی، و مجزا در $\mathbf{R}$ هستند. از این‌رو جفت A_1 و B_1 یك‌ناهمبندی برای فاصلهٔ یکهٔ $\mathbf{I}$ تشکیل می‌دهند که با قضیهٔ ۳۰۱۲ متناقض است. بنابراین، اگر G همبند نباشد، دو نقطه در G وجود دارندکه نمی‌توان آنها را با یك چندضلعی در G به‌یکدیگر متصل نمود.

اینك فرض می‌کنیم G یك‌مجموعهٔ باز همبند در $\mathbf{R}^p$ باشد و x به G متعلق باشد. زیرمجموعهٔ G متشکل از نقاط G راکه امکان دارد با یك چندضلعی‌که تماماً در G واقع



شکل ۴۰۱۲

است به x وصل‌شوند G_1 می‌گیریم وفرض می‌کنیم G_2 متشکل از تمام نقاطی در G باشد که نتوان آنهارا با یك چندضلعی واقع در G به x وصل کرد. واضح است که $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. مجموعهٔ G_1 تهی نیست چراکه شامل نقطهٔ x است. حال نشان می‌دهیم که G_1 در $\mathbf{R}^p$ باز است. اگر y به G_1 متعلق باشد، از بازبودن G نتیجه می‌شود که عددی حقیقی مانند $r>0$ وجود دارد به‌قسمی که $\|w-y\|<r$ ایجاب کند که $w \in G$. بنا بر تعریف G_1، نقطهٔ y را می‌توان با یك چند ضلعی به x وصل نمود وبه‌این چندضلعی قطعه‌خطی که y را به w وصل می‌کند اضافه می‌کنیم ونتیجه می‌گیریم که w نیز به G_1 متعلق است. بنابراین G_1 یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ است. به‌همین‌نحو دیده می‌شود که‌زیرمجموعهٔ G_2 در $\mathbf{R}^p$ باز است. هر گاه G_2 تهی نباشد، مجموعه‌های G_1 و G_2 یك ناهمبندی برای G تشکیل می‌دهند که با فرض همبندبودن G متناقض است. بنابراین $G_2 = \varnothing$ و هرنقطهٔ G را می‌توان با یك چند ضلعی که تماماً در G است به x وصل کرد. □

زیر مجموعه‌های همبند در $\mathbf{R}$

این بخش را با اثبات این‌مطلب که زیرمجموعه‌های همبند $\mathbf{R}$ همان فاصله‌های $\mathbf{R}$ هستند به‌پایان می‌رسانیم (ر. ك. بخش ۷).

۸۰۱۲ قضیه. زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ همبند است اگر وفقط اگر یك فاصله باشد.

خلاصه‌ای از برهان. با تغییری جزئی در برهان قضیهٔ ۳.۱۲ می‌توان همبندی یك فاصلهٔ غیرتهی دلخواه را ثابت کرد. جزئیات این کار را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

بعکس، فرض کنیم $C \subseteq \mathbf{R}$ همبند است و $C \neq \varnothing$. توجه داریم که C دارای این خاصیت است که هرگاه $a, b \in C$ و $a < b$، هرعدد c صادق در $a < c < b$ باید به C متعلق باشد، زیرا هرگاه $c \notin C$، مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbf{R} : x < c\}$ و $B = \{x \in \mathbf{R} : x > c\}$ یك ناهمبندی برای C تشکیل می‌دهند.

(یك) حال فرض می‌کنیم C ازبالا وپایین کراندار باشد، ومی‌نویسیم $a = \inf C$ و $b = \sup C$. نشان می‌دهیم که C باید به‌یکی ازچهار صورت زیر

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b),$$

باشد. در واقع، هرگاه $a \in C$ و $b \in C$، در بند قبل دیده‌ایم که $[a, b] \subseteq C$ و از اینکه a و b به‌ترتیب کرانهای پایین و بالای C هستند $C \subseteq [a, b]$ نتیجه می‌شود.

اگر $a \in C$ ولی $b \notin C$، b' را عددی حقیقی باشرط $a \leqslant b' < b$ می‌گیریم. چون $b = \sup C$، باید عنصری مانند $b'' \in C$ باشد به‌قسمی که $a \leqslant b' \leqslant b''$. بنابراین عدد b' باید به C متعلق باشد، و چون b' هرعدد صادق در $a \leqslant b' < b$ است، نتیجه می‌گیریم که $C = [a, b)$.

به‌همین نحو، اگر $a \notin C$ ولی $b \in C$، نتیجه می‌گیریم که $C = (a, b]$، حال آنکه اگر $a \notin C$ و $b \notin C$، نتیجه می‌گیریم که $C = (a, b)$.

(دو) اینك فرض می‌کنیم C از پایین کراندار است و از بالا کراندار نیست و می‌نویسیم $a = \inf C$، در نتیجه $C \subseteq [a, \infty)$. هرگاه $a \in C$ و x عددی حقیقی با شرط $a \leqslant x$ باشد، چون C ازبالاکراندار نیست عددی مانند $c \in C$ هست به‌قسمی که $x \leqslant c$، که از اینجا بنابرخاصیت بالا نتیجه می‌شود که $x \in C$. چون x هرعددصادق در $a \leqslant x$ است، نتیجه می‌گیریم که $C = [a, +\infty)$.

(سه) اگر C از پایین کراندار نباشد و ازبالاکراندار باشد ونیز $b = \sup C$، آنگاه بسته به‌اینکه $b \in C$ یا $b \notin C$ دو حالت $C = (-\infty, b]$ یا $C = (-\infty, b)$ وجود دارد.

(چهار) بالاخره، هرگاه C نه از پایین کراندار باشد و نه از بالا، حالت $C = (-\infty, \infty)$ را داریم. □

تمرین

۱۲. الف. اگر A و B زیرمجموعه‌های همبند $\mathbf{R}^p$ باشند، با ذکر مثالهایی نشان دهید که $A \cup B$، $A \cap B$، $A \setminus B$ می‌توانند همبند یا ناهمبند باشند.

۱۲. ب. هرگاه $C\subseteq \mathbf{R}^p$ همبند و x یک‌نقطهٔ تجمع C باشد، $C\cup\{x\}$ همبند است.

۱۲. پ. اگر $C\subseteq \mathbf{R}^p$ همبند باشد، نشان‌دهید که بستار آن $\bar{C}$ (ر. ك. تمرین ۹.ر) نیز همبند است.

۱۲. ت. مجموعهٔ $D\subseteq \mathbf{R}^p$ ناهمبند است اگر وفقط اگر $D=E\cup F$، که در آن E و F غیرتهی‌هستند و $E\cap F^-=\varnothing$ و $E^-\cap F=\varnothing$.

۱۲. ث. اگر $K\subseteq \mathbf{R}^p$ محدب باشد (ر. ك. تمرین ۸. ص)، آنگاه K همبند است.

۱۲. ج. نشان‌دهید که مجموعهٔ کانتور شدیداً ناهمبند است به‌این معنی که اگر $x, y\in \mathbf{F}$ و $x\neq y$، آنگاه یك ناهمبندی مانند A و B برای $\mathbf{F}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in A$ و $y\in B$.

۱۲. چ. اگر C_1 و C_2 زیرمجموعه‌های همبند $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه حاصلضرب $C_1\times C_2$ زیرمجموعهٔ همبندی از $\mathbf{R}^2$ است.

۱۲. ح. نشان‌دهید که مجموعهٔ

$$A=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2: 0<y\leqslant x^2\ ,\ x\neq 0\}\cup\{(0,\ 0)\}$$

در $\mathbf{R}^2$ همبند است. با این‌حال هیچ خم چندضلعی که تماماً در A واقع باشد وجود ندارد که $(0\ ,\ 0)$ را به‌دیگر نقاط مجموعه وصل کند.

۱۲. خ. نشان‌دهید که مجموعهٔ

$$S=\left\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2: y=\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0\right\}\cup\left\{(0,\ y): -1\leqslant y\leqslant 1\right\}$$

در $\mathbf{R}^2$ همبند است. با این‌حال همیشه نمی‌توان دونقطه در S را با یك چندضلعی (یا یك «خم پیوسته») که تماماً در S واقع باشد به‌یکدیگر وصل کرد.

بخش ۱۳ دستگاه اعداد مختلط

وقتی دستگاه اعداد حقیقی در اختیار باشد، ابداع دستگاه اعداد مختلط کار ساده‌ای است. در این بخش طرز ساختن هیأت مختلط را نشان می‌دهیم.[1]

همان‌طور که قبلاً دیده شد، دستگاه اعداد حقیقی هیأتی است که از چند خاصیت اضافی برخوردار است. در بخش ۸ فضای حاصلضرب دکارتی $\mathbf{R}^p$ را ساختیم و در این حاصلضرب p تایی $\mathbf{R}$ چند عمل جبری معرفی کردیم. اما از $\mathbf{R}^2$ یك‌هیأت نساختیم. شاید تعجب‌آور باشد که نمی‌توان ضربی تعریف کرد که از $\mathbf{R}^p$، $p\geqslant 3$، یك هیأت بسازد.

---

۱. این بخش در مطالعهٔ اول می‌تواند حذف شود.

بااین حال امکان دارد عمل‌ضربی در $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ تعریف شودکه از این مجموعه یك‌هیأت بسازد. اکنون به معرفی اعمال موردنظر می‌پردازیم.

۱۰.۱۳ تعریف. دستگاه اعداد مختلط $\mathbf{C}$ عبارت‌است ازتمام جفتهای مرتب (x,y) از اعداد حقیقی با عمل جمع که به‌صورت

$$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$$

وعمل ضرب که به‌صورت

$$(x, y)\cdot(x', y')=(xx'-yy', xy'+x'y)$$

تعریف شده‌اند.

لذا عناصر دستگاه‌اعداد مختلط $\mathbf{C}$ همان عناصرفضای دوبعدی $\mathbf{R}^۲$ است. عمل‌جمع در این دستگاه همان عمل جمع در $\mathbf{R}^۲$ است، ولی دارای ضربی است‌که $\mathbf{R}^۲$ فاقدآن است. بنابراین دومجموعهٔ $\mathbf{C}$ و $\mathbf{R}^۲$، صرفاً به‌عنوان مجموعه، با هم برابرند، چراکه عناصرشان یکی است؛ اما ازنظر جبری یکی نیستند، زیرا دارای اعمال مختلفی‌هستند.

هرعنصر $\mathbf{C}$ را یك **عدد مختلط** می‌نامیم و غالباً آن‌را با یك حرف مانند z نشان می‌دهیم. اگر $z=(x, y)$، آنگاه عدد حقیقی x را **قسمت حقیقی** z و y را **قسمت موهومی** z می‌نامیم وبه‌صورت نمادی می‌نویسیم:

$$x=\operatorname{Re} z\ ,\quad y=\operatorname{Im} z$$

عدد مختلط $\bar{z}=(x, -y)$ **مزدوج** $z=(x, y)$ نامیده می‌شود.

مهم است بدانیم‌که تعریف جمع وضربی‌که در بالا برای عناصر $\mathbf{C}$ داده شده‌است از $\mathbf{C}$ یك «هیأت» به‌مفهومی که در جبر مجرد به‌کار می‌رود، می‌سازد، بدین‌معنی‌که از خواص جبری مذکور در ۴.۱ برخوردار است به‌شرط‌آنکه عدد ۰ در (ج ۳) را جفت (۰ , ۰)، نظیر عنصر $-a$ در (ج ۴) را جفت ($-x$ و $-y$)، و عدد ۱ در (ض ۳) را جفت (۱ , ۰) بگیریم وعدد متناظر $۱/a$، جفت

$$\left(\frac{x}{x^۲+y^۲}\ ,\ \frac{-y}{x^۲+y^۲}\right)$$

باشد، با شرط $(x , y)\neq(۰ , ۰)$.

گاهی شایسته است‌که برخی از نمادهای بخش ۸ را به‌کاربریم وبنویسیم:

$$az=a(x , y)=(ax, ay)$$

که در آن a یك‌عدد حقیقی و $z=(x, y)$ در $\mathbf{C}$ است. با این نمادها واضح است که هرعنصر در $\mathbf{C}$ نمایشی یکتا به‌صورت مجموع حاصلضرب عددی حقیقی در (۰ , ۱) و

حاصلضرب عددی حقیقی در $(۱ , ۰)$ دارد یعنی می‌توانیم بنویسیم:

$$z=(x, y)=x(۱, ۰)+y(۰, ۱).$$

چون عنصر $(۰ , ۱)$ عنصر همانی C است ، طبیعی است که آن‌را با ۱ نشان دهیم (یا وقتی عامل ضرب باشدآن‌را حذف کنیم). به‌خاطر اختصار برای $(۱ , ۰)$ نماد i انتخاب شده است. با این نمادها می‌نویسیم:

$$z=(x, y)=x+iy.$$

علاوه براین، داریم $\bar{z}=(x, -y)=x-iy$ و

$$x=\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{۲} \ , \ y=\operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{۲i}$$

بنابرتعریف ۱۳. ۱، داریم $(۰ , ۱-)=(۱ , ۰)(۱ , ۰)$ که می‌توان آن‌را به‌صورت $i^۲=-۱$ نوشت. بنابراین در C معادلهٔ درجهٔ دوم

$$z^۲+۱=۰$$

دارای جواب است. از نظر تاریخی دستگاه اعداد مختلط برای به‌دست‌آوردن دستگاهی از «اعداد» که درآن هرمعادلهٔ درجهٔ دوم جواب‌داشته‌باشد به‌وجود آمد. محقق شده بود که هرمعادلهٔ با ضرایب حقیقی جواب حقیقی‌ندارد واعداد مختلط برای اصلاح این‌نقیصه ابداع شدند. البته همه می‌دانیم که دستگاه اعداد مختلط نه‌تنها برای‌تولید جواب‌هرمعادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی کفایت می‌کند، بلکه وجود جواب هرمعادلهٔ چندجمله‌ای با درجهٔ دلخواه وبا ضرایب احتمالاً مختلط را نیز تضمین می‌کند. این‌نتیجه به‌قضیهٔ بنیادی جبر موسوم است واول بار در ۱۷۹۹ توسط گاوس[۱] ریاضی‌دان بزرگ به‌اثبات رسیده است.

باآنکه تجهیز C به‌خواص ترتیبی مطرح شده در بخش ۵ امکان ندارد، بسهولت می‌توان آن‌را به‌ساختار متریك و توپولوژیایی بخشهای ۸ و ۹ مجهز کرد. زیرا که اگر $z=(x ,y)$ متعلق به C باشد، قدر مطلق z را به‌صورت

$$|z|=(x^۲+y^۲)^{۱/۲}$$

---

۱. کارل فریدریش گاوس Carl Friedrich Gauss (۱۷۷۷—۱۸۵۵) پسر نابغهٔ یك کارگر روزمزد و یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان جهان بود، اما از او به خاطر کارهایش در نجوم، فیزیك، و مساحی کرهٔ زمین (ژئودزی) نیز یاد می‌شود. او استاد ورئیس رصدخانهٔ گوتینگن بود.

تعریف می کنیم. بسهولت دیده می‌شود که این‌قدر مطلق که اینك تعریف شد دارای‌خواص زیر است:

(یك) $0 \leqslant |z|$؛

(دو) $0 = |z|$ اگر وفقط اگر $z = 0$؛

(سه) $|wz| = |w|\ |z|$؛

(چهار) $||w| - |z|| \leqslant |w \pm z| \leqslant |w| + |z|$.

توجه‌کنید که قدرمطلق عدد مختلط $z = (x, y)$ درست همان نرم عنصر (x , y) در $\mathbf{R}^2$ است. بنابراین، تمام خواص توپولوژیایی فضاهای دکارتی که در بخشهای ۹ تا ۱۲ معرفی ومطالعه شدند در مورد $\mathbf{C}$ با معنی و معتبر هستند. بخصوص، مفاهیم مجموعه‌های باز و بسته در $\mathbf{C}$ درست مانند این مفاهیم در فضای دکارتی $\mathbf{R}^2$ می‌باشند. علاوه براین، قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس ۶.۱۰ وقضیهٔ هاینه ــ بورل ۳.۱۱ و نتایجش نیز، همچون قضیهٔ ۷.۱۲ ، در $\mathbf{C}$ برقرار هستند.

خواننده باید این‌نکات را درسراسر بخشهای‌آیندهٔ این‌کتاب به‌خاطر داشته‌باشد.او ملاحظه خواهد کرد که کلیهٔ مطالب بعدی‌که در مورد فضاهای دکارتی از یك گفته خواهد شد به‌دستگاه اعداد مختلط نیز اطلاق می‌شوند. ازاین‌رو بیشتر نتایج مربوط به‌دنباله‌ها ، توابع پیوسته، مشتقات، انتگرالها ، وسریهای بی‌پایان را که به‌دست خواهیم آورد بدون هیچ تغییری درصورت ویا اثبات‌آنها درمورد $\mathbf{C}$ نیز معتبرند. تنها استثنا در این موردآن دسته ازخواصی هستند که مبتنی برخاصیتهای ترتیبی $\mathbf{R}$ می‌باشند.

بدین‌مفهوم آنالیز مختلط حالت خاصی است ازآنالیز حقیقی؛ بااین‌حال درمبحث توابع تحلیلی چند خاصیت جدید عمیق ومهم وجود داردکه مشابه آنها در حالت‌کلی در آنالیز حقیقی موجود نیست. ازاین‌رو بخشهای‌آیندهٔ این‌کتاب‌جنبه‌های نسبتاً‌سطحی‌آنالیز مختلط را شامل خواهد شد.

تمرین

۱۳. الف. نشان‌دهیدکه عدد مختلط iz از دوران z حول مبدأ به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ رادیان $(= 90^\circ)$ ودرجهت خلاف عقربه‌های ساعت به‌دست می‌آید.

۱۳.ب. اگر $c = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$،آنگاه عدد cz ازدوران z حول مبدأ به‌اندازهٔ θ ودرجهت خلاف عقربه‌های ساعت به‌دست می‌آید.

۱۳.پ. رابطهٔ هندسی بین‌اعداد مختلط z و $az+b$،که درآن $a \neq 0$، را توصیف کنید. نشان‌دهیدکه نگاشت‌تعریف‌شده به‌ازای $z \in \mathbf{C}$ با $f(z) = az+b$ دوایررا به‌دوایر وخطوط را به‌خطوط تبدیل می‌کند.

۱۳.ت. روابط هندسی بین‌اعداد مختلط z ، $\bar{z}$ و $1/z$، به‌ازای $z \neq 0$، راتوصیف

نمایید . نشان‌دهید که نگاشت $g(z)=\bar{z}$ دوایر را به‌دوایر وخطوط را به‌خطوط تبدیل می‌کند. چه‌دوایر وخطوطی تحت g ثابت می‌مانند؟

۱۳. ث. نشان دهید که **نگاشت انعکاس** ، که با $h(z)=۱/z$ تعریف شده است، دوایر و خطوط را به دوایر وخطوط تبدیل می‌کند. چه دوایری به‌خطوط تبدیل می‌شوند؟ چه‌خطوطی به‌دوایر تبدیل می‌شوند؟ تصویرهای تحت h خطوط قائم که بامعادلهٔ $\mathrm{Re}\, z=C$ مشخص می‌شوند، خطوط‌افقی $\mathrm{Im} z=c$ ودوایر $|z|=c$ را بیابیدکه درآنها c مقداری ثابت است.

۱۳. ج. خاصیت مشخصهٔ هندسی نگاشتی را که با $g(Z)=z^۲$ تعریف شده‌است ، بررسی کنید. معین کنیدکه آیا نگاشت g یك‌به‌یك است وآیا $\mathbf{C}$ را روی $\mathbf{C}$ می‌نگارد یا خیر. تصویرهای وارون خطوط

$$\mathrm{Re}\, z=\mathrm{c}\,,\quad \mathrm{Im}\, z=\mathrm{c}$$

ودوایر $c=|z|$ را تحت g بیابید. c مقداری ثابت است.

فصل سوم

همگرایی

مطالب دوفصل قبل باید خواننده را با دستگاه اعداد حقیقی و فضاهای دکارتی بـه‌حدکافی آشنا کرده باشند. حال که این بنیادهای جبری و توپولوژیایی گذارده شده‌اند، برای دنبال کردن مسائلی که بیشتر طبیعت تحلیلی دارند، آمادگی داریم. کار را با بررسی دنباله‌های همگرا آغاز می‌کنیم. خواننده ممکن است بـا بعضی ازنتایج ایـن فصل درسایر دروس آنالیز آشنا شده باشد، اما در اینجا هدف آن است که مطالب به‌طور دقیق ارائه شود و قضایایی به‌دست می‌آید عمیقتر ازآنچه‌که در دروس قبلی مطرح شده‌اند.

درآغازمفهوم همگرایی یك دنباله ازعناصر در $\mathbf{R}^p$ رامعرفی کرده برخی ازنتایج مقدماتی (ولی مفید) را در مورد همگرایی دنباله‌ها ثابت می‌کنیم. آنگاه چند محك مهم همگرایی را عرضه می‌کنیم. سپس همگرایی وهمگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع را موردبررسی قرارمی‌دهیم. بعدازیك بخش کوتاه درمورد حد زبرین، فصل را با بخشی به‌پایان‌می‌رسانیم که گرچه جالب توجه است، می‌توان آن را بدون آنکه پیوستگی مطالب را به هم بزند حذف کرد، زیـرا نتایج ایـن بخش در بخشهای بعدی مـورد استفاده قـرار نخواهند گرفت.

به واسطهٔ محدودیتهایی که در ترتیب عرضهٔ مطالب یك کتاب وجود داردبرآن‌شدیم این فصل را با بررسی پیوستگی، مشتق‌گیری، و انتگرال‌گیری دنبال کنیم. این روش‌این اشکال را داردکه‌ارائهٔ تفصیلی‌سریها را خیلی به‌تعویق می‌اندازد. به مدرس توصیه‌می‌شود که همراه ایـن فصل حداقل باختصارسری را معرفی‌کندو یـا اینکه اگر ترجیح می‌دهد، بعد ازبخش ۱۶ بلافاصله به اولین قسمت فصل ششم برود.

بخش ۱۴ آشنایی با دنباله‌ها

باآنکه نظریهٔ همگرایی را می‌توان به‌صورتی بسیار مجرد عرضه‌کرد، ترجیح می‌دهیم که همگرایی دنباله‌ها را در فضاهای دکارتی $\mathbf{R}^p$، با توجهی خاص به‌حالت خط حقیقی، مطرح کنیم. لازم است خواننده مفاهیم‌را با رسم نمودارهایی در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^۲$ تعبیر نماید.

۱۰۱۴ تعریف. چنانچه S مجموعهٔ دلخواهی باشد، یك **دنباله** در S تابعی است در مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}=\{۱,۲,\ldots\}$ که بردش در S باشد. در حالت خاص، دنباله در $\mathbf{R}^p$ تابعی است که دامنه‌اش $\mathbf{N}$ و بردآن در $\mathbf{R}^p$ باشد.

بــه عبارت دیگر، یك دنباله در $\mathbf{R}^p$ به هر عدد طبیعی $n=۱,۲,\ldots$ یك عنصر از $\mathbf{R}^p$ را نسبت می‌دهد. مرسوم‌است، عنصری از $\mathbf{R}^p$ راکه به‌عدد طبیعی n نظیرمی‌شود با علامتی مانند x_n نشان می‌دهند، با آنکه این نماد بـا آنچه‌که در مورد اکثر توابع به‌کار می‌رود متفاوت است، مـا هم این علامت مرسوم را به‌کار خواهیم‌برد. [اگر بخواهیم نمادی به‌کاربریم که بـا نمادهـای قبلی سازگار باشد بـاید مقدار دنبالهٔ $X:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{R}^p$ در $n\in\mathbf{N}$ را به‌جای x_n با $X(n)$ نمایش دهیم.]

بـا اینکــه نماد سنتی را قبول می‌کنیم، می‌خــواهیم بین تابع X و مقـادیرش $X(n)=x_n$ نیز فــرق قــائل شویم. بنابراین عناصر دنباله (یعنی مقادیر تـابع) را با x_n و تابع را با نماد $X=(x_n)$ یا $X=(x_n:n\in\mathbf{N})$ نشان خواهیم داد. به‌جای علامت مجموعه، پرانتز به‌کار می‌بریم تـا نشان‌دهیم ترتیبی‌کــه از $\mathbf{N}$ به (x_n) القاء می‌شود، اهمیت دارد. لذا به‌طور نمادی دنبالهٔ $X=(x_n:n\in\mathbf{N})$ را از مجموعهٔ مقادیر این‌دنباله یعنی $\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$، متمایز می‌گیریم.

در تعریف دنباله‌هــا اغلب عناصر دنبالــه را بترتیب می‌نویسیم تا جایی که قاعدهٔ تشکیل عنــاصر آشکار شود، مثلاً می‌توانیم دنبالهٔ اعداد طبیعی و زوج را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$(۲,\ ۴,\ ۶,\ ۸,\ \ldots).$$

روش مناسبتر تعیین دستوری برای جملهٔ عمومی دنباله است، مانند

$$(۲n:n\in\mathbf{N}).$$

درعمل‌اغلب مناسبتراست که مقدار $x_۱$ و روش به‌دست‌آوردن $x_{n+۱}$ $(n\geqslant ۱)$ را وقتی x_n معلوم است مشخص کنیم. حالت کلیتر این‌است‌که $x_۱$ وقاعدهٔ رسیدن به $x_{n+۱}$ از $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$، x_n را مشخص نماییم. بدین‌طریق می‌توان دنبالهٔ اعدادطبیعی زوج‌را با

$$x_۱=۲,x_{n+۱}=x_n+۲,n\geqslant ۱$$

یا با روابط (ظاهراً کمی مشکلتر)

$$x_1=2,\ x_{n+1}=x_n+x_1,\quad n\geqslant 1$$

معرفی نمود. آشکار است که روشهای دیگری برای تعریف این‌دنباله وجود دارد.

اکنون چندروش ساختن دنباله‌های جدید ازدنباله‌های مفروض را معرفی می‌کنیم.

۲۰۱۴ تعریف. اگر $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ دنباله‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشند، آنگاه **مجموع** آنها را دنبالهٔ $X+Y=(x_n+y_n)$ در $\mathbf{R}^p$، **تفاضل** آنها را دنبالهٔ $X-Y=(x_n-y_n)$ در $\mathbf{R}^p$، و **حاصلضرب داخلی** آنها را دنبالهٔ $X\cdot Y=(x_n\cdot y_n)$ در $\mathbf{R}$، که ازحاصلضرب داخلی جمله‌های نظیر به‌دست می‌آید، تعریف می‌کنیم. به‌همین نحو، اگر $X=(x_n)$ یك دنباله در $\mathbf{R}$ و $Y=(y_n)$ یك‌دنباله در $\mathbf{R}^p$ باشد، **حاصلضرب** X و Y دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ است که با $XY=(x_ny_n)$ نموده می‌شود: یا اینکه اگر $X=(x_n),\ c\in\mathbf{R}$، **حاصلضرب** c در X را با $cX=(cx_n)$ تعریف می‌کنیم. بالاخره هرگاه $Y=(y_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ با شرط $y_n\neq 0$ باشد، **خارج‌قسمت** دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ بر Y را با دنبالهٔ $X/Y=(x_n/y_n)$ تعریف می‌کنیم.

مثلاً، هرگاه X و Y دنباله‌هایی در $\mathbf{R}$ باشندکه با

$$X=(2,\ 4,\ 6,\ \dots,\ 2n,\ \dots),\quad Y=\left(1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\dots,\ \frac{1}{n},\dots\right)$$

داده شده‌اند، خواهیم داشت

$$X+Y=\left(3,\frac{9}{2},\ \frac{19}{3},\ \dots,\ \frac{2n^2+1}{n},\dots\right),$$

$$X-Y=\left(1,\frac{7}{2},\ \frac{17}{3},\ \dots,\ \frac{2n^2-1}{n},\ \dots\right)$$

$$XY=(2,\ 2,2,\dots,\ 2,\dots),$$

$$3X=(6,\ 12,\ 18,\dots,\ 6n,\dots),$$

$$\frac{X}{Y}=(2,\ 8,\ 18,\ \dots,\ 2n^2,\dots).$$

به‌طریق مشابه، هرگاه Z دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد به‌صورت

$$Z=\left(1,\ 0,\ 1,\dots,\frac{1-(-1)^n}{2},\dots\right),$$

دراین‌صورت $X+Z$، $X-Z$، و XZ تعریف می‌شود اما X/Z، به‌دلیل اینکه برخی

ازعناصر Z صفرند، تعریف نمی‌شود.

حال به‌مفهوم حد دنباله می‌پردازیم.

۳.۱۴ تعریف. فرض کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد. عنصر x از $\mathbf{R}^p$ را **حد** X گوییم هر گاه به‌ازای هرهمسایگی x مانند V، عددی طبیعی مانند K_V وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $n \geqslant K_V$، x_n به V متعلق باشد. چنانچه x حد X باشد، همچنین می گوییم X به x **همگراست**. اگر دنباله‌ای دارای حد باشد، می گوییم دنباله **همگراست**. چنانچه دنباله حد نداشته باشدآن‌را **واگرا** می گوییم.

نماد K_V برای نمایش بستگی K به V به‌کار رفته است. واضح است که برای یك همسایگی کوچك V معمولاً لازم است K_V عدد بزرگی باشد تا تعلق x_n به V به‌ازای هر $n \geqslant K_V$ تضمین شود.

ماحد دنبالهٔ $X=(x_n)$ را برحسب همسایگیها تعریف کرده‌ایم. اغلب مناسب‌است که بااستفاده ازنرم در $\mathbf{R}^p$ تعریفی هم‌ارز برای حد دنباله ارائه دهیم. اکنون این‌تعریف را به‌صورت یك‌قضیه بیان می کنیم.

۴.۱۴ قضیه. فرض‌کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد. عنصر x از $\mathbf{R}^p$ حد X است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که برای هر $n \geqslant K(\varepsilon)$، $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

برهان. فرض می‌کنیم x حد دنبالهٔ X برطبق تعریف ۳.۱۴ باشد. حال ε را بزرگتر از ۰ فرض می کنیم و گوی باز $V(\varepsilon)=\{y\in\mathbf{R}^p : \|y-x\|<\varepsilon\}$ را، که یك همسایگی x است، در نظر می گیریم. بنا برتعریف ۳.۱۴ عددی‌طبیعی مانند $K_{V(\varepsilon)}$ هست به قسمی که اگر $n \geqslant K_{V(\varepsilon)}$، آنگاه $x_n \in V(\varepsilon)$. بنابراین اگر $n \geqslant K_{V(\varepsilon)}$، آنگاه $\|x_n - x\| < \varepsilon$. این امر برقراری خاصیت ذکر شده را وقتی x حد دنبالهٔ X است نشان می‌دهد.

بعکس، فرض کنیم خاصیت مذکور در قضیه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار باشد، باید نشان‌دهیم که x طبق تعریف ۳.۱۴ حد دنبالهٔ X است. برای این‌کار فرض می‌کنیم V یك‌همسایگی دلخواه x باشد؛ پس عددی مانند $\varepsilon > 0$ هست به‌قسمی که‌گوی باز $V(\varepsilon)$ به‌مرکز x و شعاع ε در V واقع باشد. برطبق خاصیت مذکور در قضیه، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که اگر $n \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $\|x_n - x\| < \varepsilon$. به‌بیان دیگر، اگر $n \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $x_n \in V(\varepsilon)$؛ در نتیجه $x_n \in V$، و شرط در تعریف ۳.۱۴ برآورده شده است. □

۵.۱۴ یکتایی حد. هردنباله در $\mathbf{R}^p$ حداکثر یك حد دارد.

برهان . فرض کنیم، بعکس، x' و x'' دوحد $X=(x_n)$ باشند و $x'\neq x''$. V' و V'' را بترتیب همسایگیهای از هم جدای x' و x'' انگاشته، فرض می کنیم K' و K'' اعدادی طبیعی باشند به‌قسمی که اگر $n\geqslant K'$ ، آنگاه $x_n\in V'$ و اگر $n\geqslant K''$ ، آنگاه $x_n\in V''$. می نویسیم $K=\sup\{K', K''\}$ ، در نتیجه $x_K\in V'$ و $x_K\in V''$. لذا نتیجه می گیریم که x_K به $V'\cap V''$ متعلق است، که با فرض ازهم‌جدا بودن V' و V'' متناقض است. □

وقتی که دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ دارای حد x است، اغلب می‌نویسیم:

$$x=\lim X \quad \text{یا} \quad x=\lim_n(x_n)$$

یا گاهی اوقات علامت $x_n \to x$ را به‌کار می‌بریم.

می گوییم دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ **کراندار** است هرگاه عددی مانند $M>0$ باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ ، $\|x_n\|<M$.

۶.۱۴ لم. هردنبالهٔ همگرا در $\mathbf{R}^p$ کراندار است.

برهان . فرض کنیم $x=\lim(x_n)$ و $\varepsilon=1$ بنا برقضیهٔ ۴.۱۴ عددی طبیعی‌مانند $K=K(1)$ هست به‌قسمی که اگر $n\geqslant K$، آنگاه $\|x_n-x\|\leqslant 1$. بااستفاده ازنابرابری مثلثی ، نتیجه می گیریم که اگر $n\geqslant K$ ، آنگاه $\|x_n\|\leqslant\|x\|+1$. می‌نویسیم $M=\sup\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{K-1}\|, \|x\|+1\}$، آنگاه به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ ، $\|x_n\|\leqslant M$. □

ممکن است گمان رود که نظریهٔ همگرایی دنباله‌ها در $\mathbf{R}^p$ پیچیده‌تر از این نظریه در $\mathbf{R}$ است، اما (بجز مسائل نمادی) این‌طور نیست. در واقع ، قضیهٔ بعدی از این‌نظر مهم است که نشان می‌دهد مسائل مربوط به‌همگرایی در $\mathbf{R}^p$ را می‌توان به‌مسائل مشابه در $\mathbf{R}$، نظیر به‌هریك از دنباله‌های مختص تبدیل کرد.

قبل از بیان این قضیه یادآور می‌شویم که هر عنصر x در $\mathbf{R}^p$ با مختصاتش به‌صورت «p تایی»

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

نمایش داده می‌شود. از این‌رو هرعنصر دنبالهٔ (x_n) در $\mathbf{R}^p$ دارای نمایش مشابهی ، مانند $x_n=(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn})$ است. بدین‌ترتیب، دنبالهٔ (x_n)، p دنبالهٔ اعداد حقیقی (x_{1n})، (x_{2n}) ، ... ، (x_{pn}) را تولید می کند.

اکنون نشان می‌دهیم که همگرایی دنبالهٔ (x_n) کاملاً با همگرایی این p دنباله از مختصات مشخص می‌شود.

۷.۱۴ قضیه. دنبالهٔ (x_n) در $\mathbf{R}^p$ به‌صورت

$$x_n=(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn}),\ n\in\mathbf{N},$$

به $y=(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ همگراست اگر و فقط اگر p دنبالهٔ حقیقی

$$(x_{1n}), (x_{2n}), \ldots, (x_{pn}) \qquad (1.14)$$

بترتیب به y_1 ، y_2، . . . ، y_p همگرا باشند.

برهان. اگر $x_n \to y$ ، آنگاه به‌ازای $n\geqslant K(\varepsilon)$ ، $\|x_n-y\|<\varepsilon$. برطبق قضیهٔ ۱۰.۸ ، برای هر $j=1, 2, \ldots, p$ داریم

$$|x_{jn}-y_j|\leqslant\|x_n-y\|<\varepsilon\ ,\quad n\geqslant K(\varepsilon)$$

بنابراین هریك از p دنبالهٔ مختص باید به‌عدد حقیقی نظیرش همگراباشد.
بعکس، فرض کنیم دنباله‌های (۱.۱۴) به ازای $j=1, 2, \ldots, p$ به y_j همگرا باشند. برای $\varepsilon>0$ داده شده، عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ هست ، به‌قسمی که اگر $n\geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$|x_{jn}-y_j|<\varepsilon/\sqrt{p}\ \text{،}\ j=1, 2, \ldots, p \ \text{به‌ازای}$$

از این نابرابریها نتیجه می‌شود که اگر $n\geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$\|x_n-y\|^2=\sum_{j=1}^{p}|x_{jn}-y_j|^2\leqslant\varepsilon^2,$$

در نتیجه دنبالهٔ (x_n) به y همگراست. □

چند مثال

اینك چند مثال می‌آوریم وهمگرایی دنباله را فقط با استفاده از روشهایی که فعلاً در اختیار داریم ثابت می‌کنیم . باید توجه داشت که برای این‌کار لازم است قبلاً دنباله را بررسی کرده، مقدار حدآن‌را «حدس» بزنیم. تمام مثالهایی که در زیر می‌آیند مستلزم به‌کاربردن برخی مهارتهای عملی و «حیلهٔ ریاضی» می‌باشند ، اما نتایجی که به‌دست می‌آوریم دراثبات همگرایی دیگر دنباله‌ها (باروشهای ساده‌تر) بسیار مفید خواهند بود. بنابراین به‌یك‌اندازه به‌نتایج و روشها توجه خواهیم کرد.

۸.۱۴ چندمثال. (الف)فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که درآن $x_n=1/n$. نشان می‌دهیم که $\lim(1/n)=0$. بدین‌منظور فرض می کنیم $\varepsilon>0$؛ بنابرنتیجهٔ ۷.۶(ب)

(که از خاصیت ارشمیدسی به‌دست می‌آوریم) عددی مانند $K(\varepsilon)$ هست به قسمی که $1/K(\varepsilon)<\varepsilon$. دراین‌صورت، اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$، داریم

$$0<x_n=\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{K(\varepsilon)}<\varepsilon,$$

این نتیجه می‌دهد که به‌ازای $n\geqslant K(\varepsilon)$، $|x_n-0|<\varepsilon$. چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، ثابت می‌شود که $\lim(1/n)=0$.

(ب) فرض می‌کنیم $a>0$ ودنبالهٔ $X=(1/(1+na))$ در $\mathbf{R}$ رادرنظر می گیریم. نشان خواهیم دادکه $\lim X=0$ ابتدا توجه می کنیم که

$$0<\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}.$$

می‌خواهیم وقتی n به‌قدرکافی بزرگ است، جملهٔ اخیر از $\varepsilon>0$ مفروض کوچکتر باشد. مجدداً برطبق نتیجهٔ ۶.۷ (ب)، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که $1/K(\varepsilon)<a\varepsilon$. پس اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$ داریم

$$0<\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}<\frac{1}{K(\varepsilon)a}<\varepsilon.$$

این‌نتیجه می‌دهد که به‌ازای $n\geqslant K(\varepsilon)$، $|1/(1+na)-0|<\varepsilon$. چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، این نابرابری نشان می‌دهد که $\lim X=0$.

(پ) فرض‌کنیم $b\in\mathbf{R}$ در $0<b<1$ صدق می کند و دنبالهٔ (b^n) را در نظر می گیریم. نشان خواهیم‌دادکه $\lim(b^n)=0$. بدین‌منظور بهتر است b را به‌صورت

$$b=\frac{1}{1+a}$$

بنویسیم که درآن $a>0$، و از نابرابری برنولی، یعنی $(1+a)^n\geqslant 1+na$ به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، استفاده نماییم (ر. ك. تمرین ۵. پ). بنابراین،

$$0<b^n=\frac{1}{(1+a)^n}\leqslant\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}.$$

مانند مثال قبل، اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد، آنگاه عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که وقتی $n\geqslant K(\varepsilon)$، $|b^n-0|<\varepsilon$. بنابراین داریم $\lim(b^n)=0$.

(ت) فرض می کنیم $c>0$ و دنبالهٔ $(c^{1/n})$ را در نظر می گیریم. نشان خواهیم داد که $\lim(c^{1/n})=1$.

ابتدا فرض می‌کنیم $c>1$. در این صورت $c^{1/n}=1+d_n$ که درآن $d_n>0$ و در نتیجه، بنا برنا برابری برنولی،

$$c=(1+d_n)^n\geqslant 1+nd_n.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $c-1\geqslant nd_n$. چون $c>1$، داریم $c-1>0$. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که هرگاه $n\geqslant K(\varepsilon)$،

$$0<c^{1/n}-1=d_n\leqslant\frac{c-1}{n}<\varepsilon.$$

بنابراین، وقتی $n\geqslant K(\varepsilon)$، $|c^{1/n}-1|<\varepsilon$، که همان نتیجهٔ مطلوب است.

اکنون فرض می‌کنیم $0<c<1$ (زیراحالت $c=1$ واضح است). دراین‌صورت $c^{1/n}=1/(1+h_n)$ که در آن $h_n>0$ و درنتیجه، بنا برنا برابری برنولی،

$$c=\frac{1}{(1+h_n)^n}\leqslant\frac{1}{1+nh_n}<\frac{1}{nh_n}.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $0<h_n<1/nc$. اما چون $c>0$، به ازای $\varepsilon>0$ داده شده، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه

$$0<1-c^{1/n}=\frac{h_n}{1+h_n}<h_n<\frac{1}{nc}<\varepsilon.$$

بنابراین، وقتی $n\geqslant K(\varepsilon)$، $|c^{1/n}-1|<\varepsilon$، که همان نتیجهٔ مطلوب است.

(ث) دنبالهٔ $X=(n^{1/n})$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که $\lim X=1$، که چندان هم آشکار نیست. می‌نویسیم $n^{1/n}=1+k_n$ که در آن به‌ازای $n>1$، $k_n>0$، بنابراین $n=(1+k_n)^n$ وطبق قضیهٔ دوجمله‌ای، وقتی $n>1$، داریم

$$n=1+nk_n+\frac{n(n-1)}{2}k_n^2+\dots>\frac{n(n-1)}{2}k_n^2.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $k_n^2<2/(n-1)$، بنابراین

$$k_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

حال فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده‌باشد. در این‌صورت یك $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $1/(n-1)<\varepsilon^2/2$، که نتیجه می‌دهد $0<k_n<\varepsilon$ وبنابراین، به‌ازای $n\geqslant K(\varepsilon)$،

$$0 < n^{1/n} - 1 = k_n < \varepsilon.$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، ثابت می‌شود که $\lim(n^{1/n}) = 1$.

از این مثالها دیده می‌شود، مجموعه‌ای از قضایایی که اجتناب از این محاسبات پیچیده را موجب شود، بسیار مفید است. این‌چنین قضایا را ما در دو بخش بعد به‌دست می‌آوریم و این بخش را باذکر نتیجه‌ای که بسیار مورد استفاده است به‌پایان می‌رسانیم.

۹.۱۴ قضیه. فرض‌کنیم $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد و $x \in \mathbf{R}^p$. با فرض آنکه $A = (a_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد به‌طوری‌که

(یك) $\lim(a_n) = 0$.

(دو) به‌ازای یك $C > 0$ و هر $n \in \mathbf{N}$، $\|x_n - x\| \leqslant C|a_n|$، آنگاه $\lim(x_n) = x$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\lim(a_n) = 0$، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که هرگاه $n \geqslant K(\varepsilon)$،

$$C|a_n| = C|a_n - 0| \leqslant \varepsilon.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \geqslant K(\varepsilon)$،

$$\|x_n - x\| \leqslant C|a_n| \leqslant \varepsilon.$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه‌است، نتیجه می‌گیریم که $\lim(x_n) = x$. □

تمرین

۱۴. الف. با فرض $b \in \mathbf{R}$، نشان‌دهید که $\lim(b/n) = 0$.

۱۴. ب. نشان‌دهید که $\lim(1/n - 1/(n+1)) = 0$.

۱۴. پ. فرض کنید $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ و به x همگرا باشد و $c \in \mathbf{R}$. نشان دهید که $\lim(cx_n) = cx$.

۱۴. ت. فرض‌کنید $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ و به x همگرا باشد. نشان‌دهید که $\lim(\|x_n\|) = \|x\|$ (راهنمایی: از نابرابری مثلثی استفاده‌کنید).

۱۴. ث. فرض‌کنید $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد و $\lim(\|x_n\|) = 0$. نشان دهیدکه $\lim(x_n) = 0$. با این‌حال باذکر مثالی در $\mathbf{R}$ نشان‌دهیدکه همگرایی $(|x_n|)$ ممکن است همگرایی (x_n) را ایجاب نکند.

۱۴. ج. نشان‌دهیدکه $\lim(1/\sqrt{n}) = 0$. درواقع، هرگاه (x_n) دنباله‌ای ازاعداد مثبت باشد و $\lim(x_n) = 0$، آنگاه $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$.

۱۴. چ. فرض کنید $d\in\mathbf{R}$ در $1<d$ صدق کند. با استفاده از نابرابری برنولی نشان دهید که دنبالهٔ (d^n) در $\mathbf{R}$ کراندار نیست. لذا این دنباله همگرا نمی‌باشد.

۱۴. ح. فرض کنید $b\in\mathbf{R}$ در $0<b<1$ صدق کند. نشان دهید که $\lim(nb^n)=0$.
(راهنمایی: قضیهٔ دوجمله‌ای را مانند مثال ۸.۱۴ (ث) به‌کار برید.)

۱۴. خ. فرض کنید $X=(x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد به‌طوری‌که $\lim(x_{n+1}/x_n)<1$، نشان دهید که عددی مثبت مانند r که در $0<r<1$ صدق می‌کند و عددی مثبت مانند C وجود دارند به‌طوری‌که برای اعداد طبیعی n که به‌قدرکافی بزرگ باشند $0<x_n<Cr^n$. با استفاده از این نابرابری نشان دهید که $\lim(x_n)=0$.

۱۴. د. فرض کنید $X=(x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد و به‌طوری‌که $1<\lim(x_{n+1}/x_n)$. نشان دهید که X یک دنبالهٔ کراندار نیست و لذا همگرا نمی‌باشد.

۱۴. ذ. مثالی بیاورید از یک دنبالهٔ همگرا از اعداد حقیقی اکیداً مثبت به‌طوری‌که $\lim(x_{n+1}/x_n)=1$. همچنین مثالی از یک دنبالهٔ واگرا با این خاصیت ذکر نمایید.

۱۴. ر. نتایج تمرینهای ۱۴. خ و ۱۴. د را در مورد دنباله‌های زیر به‌کار برید.
(در اینجا $0<a<1$، $1<b$ و $0<c$.)

(الف) (a^n) (ب) (na^n)

(پ) (b^n) (ت) (b^n/n)

(ث) $(c^n/n!)$ (ج) $(2^{3n}/3^{2n})$

۱۴. ز. فرض کنید $X=(x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد به‌طوری‌که $\lim(x_n^{1/n})<1$. نشان دهید که عدد r وجود دارد به قسمی که $0<r<1$ و برای n های به‌قدرکافی بزرگ در $\mathbf{N}$، $0<x_n<r^n$ با استفاده از این نتیجه بگیرید که $\lim x_n=0$.

۱۴. ژ. فرض کنید $X=(x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد به‌طوری که $1<\lim(x_n^{1/n})$. نشان دهید که X یک دنبالهٔ کراندار نیست و لذا همگرا نمی‌باشد.

۱۴. س. دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی اکیداً مثبت مانند (x_n) مثال بزنید که $\lim(x_n^{1/n})=1$. دنبالهٔ واگرایی مثال بیاورید که این خاصیت را داشته باشد.

۱۴. ش. همگرایی دنباله‌های تمرین ۱۴. ر را با توجه به تمرینهای ۱۴. ز و ژ مجدداً بررسی کنید.

۱۴. ص. همگرایی دنباله‌های زیر در $\mathbf{R}$ را بررسی کنید.

(الف) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ (ب) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(پ) $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ (ت) $((-1)^n)$.

بخش ۱۵ زیردنباله‌ها و ترکیب دنباله‌ها

این بخش به‌ما اطلاعاتی درمورد همگرایی دنباله‌هایی می‌دهد که به‌طرق مختلف از دنباله‌هایی که همگرا شناخته شده‌اند به‌دست می‌آیند. به‌کمك این اطلاعات می‌توانیم دستهٔ دنباله‌های همگرای خود را به‌طور وسیعی گسترش دهیم.

۱۰۱۵ تعریف. اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ و $r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$ دنباله‌ای اکیداً صعودی ازاعداد طبیعی باشد، دنباله X' در $\mathbf{R}^p$ راکه با

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, \cdot, \ldots, x_{r_n} \cdots)$$

داده شده است، یك **زیردنبالهٔ** X می گویند.

ممکن است مفید باشد که مفهوم زیردنباله را به‌مفهوم ترکیب دوتابع مربوط کنیم. فرض‌کنیم g تابعی **اکیداً صعودی** بادامنهٔ $\mathbf{N}$ و برد در $\mathbf{N}$ باشد، بدین‌مفهوم که اگر $n<m$، آنگاه $g(n)<g(m)$. در این‌صورت g با دستور

$$X \circ g = (x_{g(n)} : n \in \mathbf{N})$$

یك زیردنبالهٔ $X=(x_n)$ تعریف می کند. بعکس، هرزیردنبالهٔ X بصورت $X \circ g$ است که در آن g اکیداً صعودی است بادامنهٔ $D(g)=\mathbf{N}$ وبرد $R(g)\subseteq \mathbf{N}$.

واضح است که یك دنبالهٔ مفروض زیردنباله‌های بسیار دارد. اگرچه لم بعد خیلی مقدماتی است، ولی‌آن‌قدر مهم است که باید صریحاً ذکر شود.

۲۰۱۵ لم. اگر دنبالهٔ X در $\mathbf{R}^p$ به‌عنصر x همگرا باشد، آنگاه هرزیر دنبالهٔ X به x همگراست.

برهان. فرض کنیم V یك همسایگی عنصر x، حد دنباله باشد، طبق تعریف، عددی طبیعی مانند K_V هست به‌قسمی که به‌ازای هر $n \geqslant K_V$، x_n به V متعلق است. حال فرض می کنیم X' یك‌زیردنبالهٔ X باشد، بنویسیم

$$X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}, \cdots).$$

چون $r_n \geqslant n$، پس $r_n \geqslant K_V$ و در نتیجه x_{r_n} به V متعلق است. به این ترتیب ثابت می‌شود که X' نیز به x همگراست. □

۳.۱۵ نتیجه. اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای باشد که به‌عنصر x از $\mathbf{R}^p$ همگراست و m یك‌عدد طبیعی دلخواه باشد، دنبالهٔ $X'=(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$ نیز به x همگراست.

برهان. چون X' زیردنبالهٔ X است، این نتیجه مستقیماً از لم پیش به‌دست می‌آید. □

قسمت عمدهٔ مطالب قبلی مربوط به‌اثبات همگرایی دنباله به‌یك‌نقطهٔ مفروض بود. دانستن معنی دقیق اینکه دنبالهٔ X به x همگرا نیست نیز مهم است. قضیهٔ بعدی مقدماتی است ولی بدیهی نیست وتحقیق درستی‌آن برای هرفرد لازم است. بدین جهت است که اثبات مفصل آن‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۴.۱۵ قضیه. اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد، آنگاه احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) X به x همگرا نیست؛

(ب) یك همسایگی x مانند V هست به‌طوری‌که هرگاه n عددی طبیعی باشد، عددی طبیعی مانند $m=m(n)\geqslant n$ وجود دارد به‌قسمی‌که x_m به V متعلق نیست؛

(پ) یك‌همسایگی x مانند V ویك‌زیردنبالهٔ X مانند X' وجود دارند به‌قسمی که هیچ‌یك ازعناصر X' به V متعلق نیست.

۵.۱۵ چندمثال. (الف) فرض‌کنیم X در $\mathbf{R}$ دنبالهٔ اعداد طبیعی

$$X=(۱, ۲, \ldots, n, \ldots)$$

باشد. x را عددی حقیقی انگارید و V همسایگی x را فاصلهٔ باز $(x-۱, x+۱)$ در نظر بگیرید. برطبق خاصیت‌ارشمیدسی ۶.۶، عددی طبیعی مانند $k_۰$ هست به‌قسمی‌که $x+۱<k_۰$؛ از این‌رو، از $n\geqslant k_۰$، نتیجه می‌شود که $x_n=n$ به V متعلق نیست. بنابراین $X'=(k_۰, k_۰+۱, \ldots)$ زیردنبالهٔ X است و نقطه‌ای در V ندارد، این‌نشان می‌دهدکه X به x همگرا نیست.

(ب) دنبالهٔ $Y=(y_n)$ در $\mathbf{R}$ را $Y=(-۱, ۱, \ldots, (-۱)^n, \ldots)$ بگیرید. اثبات اینکه هیچ‌نقطه‌ای مانند y، بجز احتمالاً $y=\pm ۱$، نمی‌تواند حد Y باشدرا به‌خواننده واگذارمی‌کنیم. نشان می‌دهیم که‌نقطهٔ $y=-۱$ حد Y نیست؛ اثبات برای $y=+۱$ کاملاً مشابه خواهدبود. V همسایگی نقطهٔ $y=-۱$ را فاصلهٔ باز $(-۲, ۰)$می‌گیریم. در این‌صورت، اگر n زوج باشد،عنصر $y_n=(-۱)^n=+۱$ به V متعلق نیست. بنابراین Y' زیردنبالهٔ Y نظیر به $r_n=۲n$، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، درهمسایگی V نیست، پس $y=-۱$ حد Y نیست.

(پ) $Z=(z_n)$ را دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ با شرط $z_n\geqslant ۰$ به‌ازای $n\geqslant ۱$ می‌گیریم. نتیجه می‌گیریم که هیچ عدد $z<۰$ نمی‌تواند حد Z باشد. در واقع، مجموعهٔ باز

$V=\{x\in\mathbf{R}: x<0\}$ یك‌همسایگی z است که شامل هیچ عنصر Z نیست. این امر نشان می‌دهد که z نمی‌تواند حد Z باشد (چرا؟) از این‌رو، اگر Z حد داشته‌باشد، این‌حد منفی نیست.

ترکیب دنباله‌ها

با استفاده از اعمال جبری که در ۲.۱۴ تعریف کردیم، دنباله‌های جدیدی می‌توان‌ساخت که با قضیهٔ بعدی همگرایی آنها ازهمگرایی دنباله‌های داده‌شده قابل پیش‌بینی است.

۶.۱۵ قضیه. (الف) فرض‌کنیم X و Y دنباله‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشندکه بترتیب به x و y همگراهستند. در این‌صورت‌دنباله‌های $X+Y$، $X-Y$ و $X.Y$ بترتیب به $x+y$، $x-y$، و $x.y$ همگرا می‌باشند.

(ب) فرض‌کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ همگرا به x و $A=(a_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ همگرا به a باشد. دراین‌صورت دنبالهٔ (a_nx_n) در $\mathbf{R}^p$ به ax همگراست.

(پ) فرض‌کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ همگرا به x و $B=(b_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مخالف صفر و همگرا به‌عدد مخالف صفر b باشد. در این صورت دنبالهٔ $(b_n^{-1}x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ به $b^{-1}x$ همگراست.

برهان. (الف) برای نشان‌دادن $x_n+y_n\to x+y$، احتیاج به‌ارزیابی مقدار $\|(x_n+y_n)-(x+y)\|$ داریم. بدین‌منظور، با استفاده از نابرابری مثلثی، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\|(x_n+y_n)-(x+y)\| &= \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \\ &\leqslant \|x_n-x\|+\|y_n-y\|.\end{aligned} \tag{۱.۱۵}$$

بنابرفرض، اگر $\varepsilon>0$، می‌توان K_1 را چنان انتخاب کرد که اگر $n\geqslant K_1$، آنگاه $\|x_n-x\|<\varepsilon/2$، و نیز K_2 را طوری انتخاب نمود که اگر $n\geqslant K_2$، آنگاه $\|y_n-y\|<\varepsilon/2$. بنابراین هرگاه $K_0=\sup\{K_1, K_2\}$ و $n\geqslant K_0$، از (۱.۱۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

چون این‌کار به‌ازای $\varepsilon>0$ دلخواه انجام‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که $X+Y$ به $x+y$ همگراست. دقیقاً همین استدلال را می‌توان به‌کاربرد ونشان داد که $X-Y$ به $x-y$ همگراست.

برای اثبات همگرایی $X\cdot Y$ به $x\cdot y$ ، برآورد

$$|x_n\cdot y_n-x\cdot y|=|(x_n\cdot y_n-x_n\cdot y)+(x_n\cdot y-x\cdot y)|$$
$$\leqslant|x_n\cdot(y_n-y)|+|(x_n-x)\cdot y|$$

را درنظر می‌گیریم. بااستفاده ازنابرابری شوارتس، داریم

$$|x_n\cdot y_n-x\cdot y|\leqslant\|x_n\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\|. \qquad (۲.۱۵)$$

برطبق لم ۶.۱۴ ، مجموعهٔ $\{\|x_n\|,\|y\|\}$ کران بالایی مانند $M>0$ دارد. علاوه براین ، از همگرایی X و Y نتیجه می گیریم که اگر $\varepsilon>0$ داده شده‌باشد ، اعدادی طبیعی‌مانند K_1 و K_2 وجوددارند به‌قسمی‌که اگر $n\geqslant K_1$، آنگاه $\|y_n-y\|<\varepsilon/2M$ و اگر $n\geqslant K_2$ ، آنگاه $\|x_n-x\|<\varepsilon/2M$. حال K را برابر $\sup\{K_1\,,K_2\}$ اختیار می‌کنیم، در این‌صورت اگر $n\geqslant K$ ، از (۲.۱۵) نتیجه می گیریم که

$$|x_n\cdot y_n-x\cdot y|\leqslant M\|y_n-y\|+M\|x_n-x\|$$
$$<M\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\varepsilon.$$

به‌این ترتیب همگرایی $X\cdot Y$ به $x\cdot y$ ثابت می‌شود.

قسمت (ب) به‌همین نحو ثابت می‌شود.

برای اثبات (پ)، برآورد زیررا درنظر می گیریم:

$$\left\|\frac{1}{b_n}x_n-\frac{1}{b}x\right\|=\left\|\left(\frac{1}{b_n}x_n-\frac{1}{b}x_n\right)+\left(\frac{1}{b}x_n-\frac{1}{b}x\right)\right\|$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|\|x_n\|+\frac{1}{|b|}\|x_n-x\|$$
$$=\frac{|b-b_n|}{|b_nb|}\|x_n\|+\frac{1}{|b|}\|x_n-x\|.$$

حال فرض‌کنیم $M>0$ چنان باشد که

$$\|x\|<M \quad و \quad \frac{1}{M}<|b|.$$

نتیجه می‌شود که عددی طبیعی مانند K_0 هست به‌قسمی‌که اگر $n\geqslant K_0$، آنگاه

$$\|x_n\|<M \quad و \quad \frac{1}{M}<|b_n|.$$

بنابراین، اگر عدد حقیقی $\varepsilon>0$ از پیش داده شده باشد، اعدادی طبیعی مانند K_1 و K_2 وجود دارند به‌قسمی که اگر $n\geqslant K_1$، آنگاه $|b_n-b|<\varepsilon/2M^3$ و اگر $n\geqslant K_2$، آنگاه $\|x_n-x\|<\varepsilon/2M$. با فرض $K=\sup\{K_0, K_1, K_2\}$ نتیجه می گیریم که هرگاه $n\geqslant K$،

$$\left\|\frac{1}{b_n}x_n-\frac{1}{b}x\right\|<M^3\,\frac{\varepsilon}{2M^3}+M\,\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

که همگرایی (x_n/b_n) به x/b را ثابت می کند. □

۷.۱۵ کاربردها. باز توجه خود را به‌دنباله‌های در $\mathbf{R}$ معطوف می کنیم.

(الف) فرض کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که با

$$x_n=\frac{2n+1}{n+5}\ ,\ n\in\mathbf{N},$$

تعریف شده است. توجه داریم که x_n را می‌توان به‌صورت

$$x_n=\frac{2+1/n}{1+5/n}$$

نوشت؛ بنابراین X را می‌شود به‌صورت خارج قسمت $Y=(2+1/n)$ و $Z=(1+5/n)$ درنظر گرفت. چون دنبالهٔ اخیر ازجملاتی مخالف صفر تشکیل شده ودارای حد ۱ است (چرا؟)، با به‌کاربردن قضیهٔ قبل نتیجه می گیریم که

$$\lim X=\frac{\lim Y}{\lim Z}=\frac{2}{1}=2\ .$$

(ب) اگر p یك چندجمله‌ای و $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که به x همگراست، آنگاه دنبالهٔ تعریف‌شده با $(p(x_n):n\in\mathbf{N})$ به $p(x)$ همگرا خواهد بود. (راهنمایی: از قضیهٔ ۶.۱۵ و استقرا استفاده نمایید.)

(پ) فرض کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که به x همگراست و r یك تابع گویا باشد (یعنی به‌صورت $r(y)=p(y)/q(y)$، که در آن p و q چند جمله‌ای هستند). با فرض آنکه $q(x_n)$ و $q(x)$ مخالف صفر باشند، دنبالهٔ $(r(x_n):n\in\mathbf{N})$ به $r(x)$ همگرا خواهد بود. (راهنمایی: قسمت (ب) وقضیهٔ ۶.۱۵ را به‌کار برید.)

این بخش را با نتیجه‌ای که غالباً سودمند است به‌پایان می بریم. این نتیجه گاهی با عبارت «از نابرابریها می‌توان حد گرفت» توصیف می‌شود.

۸۰۱۵ لم. فرض‌کنیم $X=(x_n)$ یك‌دنبالهٔ همگرا در $\mathbf{R}^p$ و حد آن x باشد. اگر عنصری چون c در $\mathbf{R}^p$ و عددی مانند $r>0$ وجود داشته‌باشند به‌قسمی‌که به‌ازای nهای به‌قدرکافی بزرگ $\|x_n-c\|\leqslant r$، آنگاه $\|x-c\|\leqslant r$.

برهان. مجموعهٔ $V=\{y\in\mathbf{R}^p:\|y-c\|>r\}$ یك‌زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ می‌باشد. اگر $x\in V$، آنگاه V یك همسایگی x است، درنتیجه، به‌ازای nهای به‌قدرکافی بزرگ، $x_n\in V$، که بافرض متناقض است. بنابراین $x\notin V$ ودر نتیجه داریم $\|x-c\|\leqslant r$. □

باید به‌این نکته توجه داشت‌که درنتیجهٔ فوق فرض‌کرده‌ایم‌که حد وجوددارد، چراکه بقیهٔ فرضها برای اثبات وجود حدکافی نیستند.

تمرین

۱۵. الف. اگر (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی همگرا از اعداد حقیقی باشند، و به‌ازای هر n، $x_n\leqslant y_n$، آنگاه $\lim(x_n)\leqslant\lim(y_n)$.

۱۵. ب اگر $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی و به c همگرا باشند و $Z=(z_n)$ دنباله‌ای باشدکه به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$، آنگاه Z نیز به c همگراست.

۱۵. پ. همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ $X=(x_n)$ را برای x_nهای داده شده با دستورهای زیر، تحقیق کنید.

(الف) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ (ب) $x_n=\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(پ) $x_n=\dfrac{2n}{3n^2+1}$ (ت) $x_n=\dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}$

(ث) $x_n=n^2-n$ (ج) $x_n=\sin n$

۱۵.ت. چنانچه X و Y دنباله‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشند و $X+Y$ همگرا باشد، آیا Xو Y همگرایند و $\lim(X+Y)=\lim X+\lim Y$؟

۱۵. ث. اگر X و Y دنباله‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشند و $X.Y$ همگرا باشد، آیا X و Y همگرایند و $\lim(X\cdot Y)=(\lim X).(\lim Y)$؟

۱۵. ج. اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای مثبت و به x همگرا باشد، آنگاه $(\sqrt{x_n})$ به $\sqrt{x}$ همگراست. (راهنمایی: $\sqrt{x_n}-\sqrt{x}=(x_n-x)/(\sqrt{x_n}+\sqrt{x})$ وقتی $x\neq 0$.)

۱۵. چ. هرگاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای ازاعداد حقیقی باشد به‌قسمی که $Y=(x_n^2)$ به ۰ همگرا باشد، آیا X به ۰ همگراست؟

۱۵.ح. هرگاه $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$، آیا دنباله‌های $X = (x_n)$ و $Y = (\sqrt{n}\, x_n)$ همگرایند؟

۱۵.خ. فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد به‌قسمی که زیردنباله‌های (x_{2n}) و (x_{2n+1}) به $x \in \mathbf{R}^p$ همگرا باشند. ثابت کنید که (x_n) به x همگراست.

۱۵.د. فرض کنید (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در $\mathbf{R}$ باشند به‌قسمی که $\lim(x_n) \neq 0$ و $\lim(x_n y_n)$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که $\lim(y_n)$ وجود دارد.

۱۵.ذ. آیا حکم تمرین ۱۵.د در $\mathbf{R}^2$ نیز برقرار است؟

۱۵.ر. هرگاه $0 < a \leqslant b$ و $x_n = (a^n + b^n)^{1/n}$، نشان دهید که $\lim(x_n) = b$.

۱۵.ز. هرعدد اصم در $\mathbf{R}$ حد دنباله‌ای از اعداد گویاست. هرعدد گویا در $\mathbf{R}$ حد دنباله‌ای از اعداد اصم است.

۱۵.ژ. فرض کنید $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و $x \in \mathbf{R}^p$. در این صورت x یك نقطهٔ مرزی A است اگر وفقط اگر دنباله‌ای چون (a_n) ازعناصر A و دنباله‌ای مانند (b_n) ازعناصر $\mathcal{C}(A)$ وجود داشته باشند به‌قسمی که

$$\lim(a_n) = x = \lim(b_n).$$

۱۵.س. فرض کنید $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و $x \in \mathbf{R}^p$، در این‌صورت x یك نقطهٔ تجمع A است اگر وفقط اگر دنباله‌ای از عناصر متمایز در A مانند (a_n) وجود داشته باشد به‌قسمی که $x = \lim(a_n)$.

۱۵.ش. هرگاه $x = \lim(x_n)$ و به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $\|x_n - c\| < r$، آیا نتیجه می‌شود که $\|x - c\| < r$؟

پروژه

۱۵.α. فرض کنید، به‌مفهوم تمرین ۸.ط، d یك‌متریك در مجموعهٔ M باشد. چنانچه $X = (x_n)$ دنباله‌ای در M باشد، عنصر $x \in M$ را **حد** X گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $K(\varepsilon)$ در $\mathbf{N}$ باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $n \geqslant K(\varepsilon)$، $d(x_n, x) < \varepsilon$. این تعریف را به‌کاربرده نشان‌دهید که قضایای ۱۴.۵، ۱۴.۶، ۱۵.۲، ۱۵.۳، و ۱۵.۴ را می‌توان به‌فضاهای متری تعمیم‌داد. نشان‌دهید که هردنباله در $\mathbf{R}^p$ که با یکی از متریکهای d_1، d_2، و d_∞ همگرا باشد با دومتریك دیگر نیز همگراست. نشان‌دهید که هرگاه d متریك گسسته در یك مجموعه باشد، تنها دنباله‌هایی که نسبت به d همگرایند آنهایی هستند که «از مرتبه‌ای به‌بعد ثابت هستند.»

۱۵.β. فرض کنید m دستهٔ تمام دنباله‌های کراندار در $\mathbf{R}$ باشد؛ c را دستهٔ تمام دنباله‌های همگرا در $\mathbf{R}$ بینگارید؛ و فرض کنید c_0 دستهٔ تمام دنباله‌های همگرا به‌صفر در $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) مجموع $X+Y$ وحاصلضرب cX را با تعریف ۱۴.۲ درنظر بگیرید و

نشان‌دهید که هریك ازدسته‌های بالا یك‌فضای برداری است که درآنها عنصر صفر، دنبالهٔ $(0, 0, \cdots) = 0$ می‌باشد.

(ب) درهریك‌ازدسته‌های m،c،وc_0نرم$X = (x_n)$را با $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}$ تعریف می‌کنیم. نشان‌دهید که با این تعریف واقعاً یك‌نرم به‌دست‌می‌آید.

(پ) هرگاه X و Y به‌یکی از دسته‌های m یا c ویا c_0 متعلق باشند، حاصلضرب XY نیز به‌همان دسته متعلق است و $\|XY\| \leqslant \|X\|\|Y\|$. مثالی بزنید که نشان‌دهد برابری امکان دارد وهمچنین مثالی بزنیدکه امکان عدم برابری را نشان‌دهد.

(ت) نشان‌دهیدکه متریك القایی به‌وسیلهٔ نرم قسمت (ب) در این فضاها با $d(X, Y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbf{N}\}$ داده می‌شود .

(ث) نشان‌دهیدکه اگر دنبالهٔ (X_k) نسبت به‌متریك قسمت (ت) به Y همگرا باشد، آنگاه هر «دنبالهٔ مختص» به‌مختص نظیر Y همگراست. (تذکر : X_k دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ است. حال آنکه (X_k) دنباله‌ای است در m یا c ، یا c_0 ، یعنی «دنباله‌ای از دنباله‌ها» در $\mathbf{R}$، می‌باشد.)

(ج) دنباله‌ای مانند (X_k) در c_0 مثال بزنیدکه هریك ازدنباله‌های مختص به 0 همگرا باشد ولی $d(X_k, 0)$ به 0 همگرا نباشد.

بخش ۱۶ دومحك برای همگرایی

روش عمده‌ای که برای‌نشان‌دادن‌همگرایی‌یك‌دنباله تاکنون‌دراختیارداریم، تطبیق‌آن با زیردنبالهٔ یك‌دنبالهٔ همگرا ویاترکیبی جبری از دنباله‌های همگراست. درچنین روشی با به‌کاربردن قضایای بخش قبلی می‌توانیم حد را حساب‌کنیم. اما زمانی‌که این‌کارعملی نباشد مجبوریم برای اثبات وجود حد به تعریف ۳.۱۴ یا قضیهٔ ۴.۱۴ متوسل شویم. استفاده از این‌دووسیلهٔ اخیر دارای این اشکال قابل‌ملاحظه است که باید قبلاً مقدار دقیق حد را بدانیم (یا حداقل حدس بزنیم) وسپس صحت ادعای خود را تحقیق‌کنیم .

به‌هرحال، دربسیاری ازموارد، حتی اگر باتحلیلی مقدماتی به‌همگرایی دنباله‌معتقد شده‌باشیم. حدی‌که باید برای دنباله پیشنهاد شود. آشکار نیست . در این بخش چند قضیه عرضه می‌کنیم‌که از قضایای بخشهای قبل عمیقتر هستند و می‌توان آنها را برای اثبات همگرایی دنباله وقتی پیش‌بینی هیچ‌عنصر خاصی به‌عنوان مقدار حد میسر نباشد، به‌کار گرفت. اولین قضیه در این زمینه ازاهمیت بسیار برخوردار است. باآنکه می‌توان آن‌را به $\mathbf{R}^p$ تعمیم داد، مناسب است‌که صورت قضیه را به‌دنباله‌های در $\mathbf{R}$ محدودکنیم.

۱.۱۶ قضیهٔ همگرایی یکنوا. فرض‌کنیم $X = (x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و صعودی باشد به‌این معنی‌که

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots .$$

آنگاه دنبالهٔ X همگراست اگر و فقط اگرکراندار باشد، ودرصورت همگرایی،

$$lim(x_n)=sup\{x_n\}.$$

برهان . درلم۶.۱۴ دیده‌شده‌که دنبالهٔ‌همگرا کراندار است. اگر $x=\lim(x_n)$ و $\varepsilon>0$، آنگاه عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که هرگاه $n\geqslant K(\varepsilon)$،

$$x-\varepsilon\leqslant x_n\leqslant x+\varepsilon.$$

چون X یکنواست، این‌رابطه نتیجه می‌دهد که

$$x-\varepsilon\leqslant \sup\{x_n\}\leqslant x+\varepsilon,$$

و ازاین رابطه، $|x-\sup\{x_n\}|\leqslant\varepsilon$ حاصل می‌شود . چون این مطلب برای هر $\varepsilon>0$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که $\lim(x_n)=x=\sup\{x_n\}$.

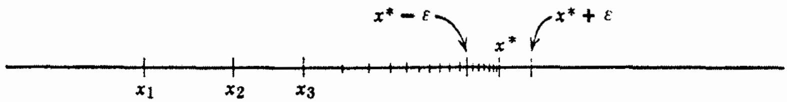
بعکس، فرض‌کنیم $X=(x_n)$ یك دنبالهٔ اعداد حقیقی، صعودی وکراندار باشد. برطبق اصل زبرینه $x^*=\sup\{x_n\}$ وجود دارد؛ نشان خواهیم‌دادکه این زبرینه حد X است. چون x^*کران بالای عناصر X است، پس به‌ازای $n\in\mathbf{N}$ ، $x_n\leqslant x^*$ و از آنجاکه x^* زبرینهٔ X است ، چنانچه $\varepsilon>0$، عدد $x^*-\varepsilon$ کران بالای X نیست و عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که

$$x^*-\varepsilon<x_{k(\varepsilon)}$$

چون X یکنواست، به‌ازای هر $n\geqslant K(\varepsilon)$،

$$x^*-\varepsilon<x_n\leqslant x^*,$$

که ازآن نتیجه می‌شود $|x_n-x^*|<\varepsilon$. خلاصه آنکه عدد $x^*=\sup\{x_n\}$ دارای این خاصیت است‌که، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ داده شده، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ (وابسته به ε) وجود دارد به قسمی‌که اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $|x_n-x^*|<\varepsilon$. این‌امر نشان می‌دهد‌که $x^*=\lim x$. □



شکل ۱۰۱۶

۲.۱۶ نتیجه. فرض‌کنیم $X=(x_n)$ دنبـاله‌ای از اعـداد حقیقی و نزولی بـاشد، به‌این معنی‌که

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots.$$

آنگاه دنبالهٔ X همگراست اگر و فقط اگرکراندار باشد، ودر صورت همگرایی

$$\lim(x_n)=\inf\{x_n\}.$$

برهان . به‌ازای $n\in\mathbf{N}$ می‌نویسیم $y_n=-x_n$. در این صورت بـآسانی دیده می‌شود که دنبالهٔ $Y=(y_n)$ یك‌دنبـالهٔ صعودی است. علاوه براین، Y کراندار است اگر وفقط اگر X کراندار باشد. بنابراین، نتیجه ازقضیهٔ فوق حاصل می‌شود. □

۳.۱۶ چندمثال. (الف) به‌دنبالهٔ $X=(1/n)$ که درمثـال ۸.۱۴ (الف) مطرح شد باز می گردیم.واضح است که

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\cdots>\frac{1}{n}>\cdots>0;$$

لذا از نتیجهٔ ۲.۱۶ همگرایی $X=(1/n)$ حاصل می‌شود. چنانچه‌بتوانیم $\inf\{1/n\}$ را احساب کنیم‌می توانیم به‌مقدار $\lim(1/n)$ دست‌یابیم. دیگر اینکه، وقتی‌اطمینان حاصل‌شد که X همگراست، اغلب‌می‌توان مقدارحدش‌را با استفاده ازلم ۲.۱۵ وقضیهٔ ۶.۱۵ به‌دست آورد. در وضع فعلی، اگر $X'=(1/2,1/4,\ldots,1/2n,\ldots)$، آنگاه نتیجه می‌شود که

$$\lim X=\lim X'=\frac{1}{2}\lim X.$$

بنابراین داریم $\lim X=0$.

(ب) فرض‌کنیم $Y=(y_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که با تعریف به‌روش استقرا ، به‌صورت زیر داده شده است:

$$y_1=1\ \text{؛ به‌ازای}\ n\in\mathbf{N}\ \text{،}\ y_{n+1}=(2y_n+3)/4.$$

محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که $y_1<y_2<2$. اگر $y_{n-1}<y_n<2$، آنگاه

$$2y_{n-1}+3<2y_n+3<2\times 2+3,$$

که ازآن $y_n<y_{n+1}<2$ نتیجه می‌شود. به‌استقرا دیده می‌شودکه دنبالهٔ Y صعودی‌است وکران بالای‌آن ۲ است. ازقضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود کـه دنبالهٔ Y به‌حدی کـه بیش از ۲ نیست همگراست . در این حـالت ممکن است محاسبهٔ $\sup\{y_n\}$ برای تعیین $y=\lim Y$ چندان آسان نباشد . به‌هرحـال ، وقتی بدانیم حد وجود دارد روش

دیگری برای محاسبهٔ مقدار آن هست. برطبق لم ۲.۱۵ داریم $y=\lim(y_n)=\lim(y_{n+1})$. با استفاده ازقضیهٔ ۶.۱۵، y باید در رابطهٔ

$$y=(2y+3)/4$$

صدق کند. بنابراین، نتیجه می گیریم که $y=3/2$.

(پ) فرض کنیم $Z=(z_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که به‌این صورت تعریف‌شده‌است:

$$z_1=1\text{، به‌ازای } n\in\mathbf{N}\text{، } z_{n+1}=\sqrt{2z_n}.$$

واضح است که $z_1<z_2<2$. هرگاه $z_n<z_{n+1}<2$، آنگاه $2z_n<2z_{n+1}<4$، در نتیجه $z_{n+1}=\sqrt{2z_n}<z_{n+2}=\sqrt{2z_{n+1}}<2=\sqrt{4}$. این نشان می‌دهد که Z یك دنبالهٔ صعودی است و ۲ یك کران بالای آن است؛ ازاین‌رو Z به‌عددی چون z همگراست. می‌توان مستقیماً نشان‌داد که $2=\sup\{z_n\}$، درنتیجه z برابر با ۲ می‌باشد. دیگر اینکه، می‌توان روش مثال قبل را مورداستفاده قرارداد. با علم به‌اینکه دنباله دارای حد z است، ازرابطهٔ $z_{n+1}=\sqrt{2z_n}$ نتیجه می‌گیریم که z باید در رابطهٔ $z=\sqrt{2z}$ صدق کند. برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ اخیر، آن‌را به‌توان دو می‌رسانیم و $z^2=2z$ را به‌دست می‌آوریم، که دارای‌ریشه‌های ۰و ۲ می‌باشد. بدیهی است که ۰ نمی‌تواندحدباشد (چرا؟)؛ پس این‌حد باید برابر با ۲ باشد.

(ت) فرض کنیم $U=(u_n)$ دنباله‌ای‌ازاعدادحقیقی باشد که با $u_n=(1+1/n)^n$، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$ تعریف شده است. با به‌کاربردن قضیهٔ دوجمله‌ای، می‌توان نوشت

$$u_n=1+\frac{n}{1}\ \frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ \frac{1}{n^3}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\times1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

با تقسیم صورتهای ضرایب دوجمله‌ای برتوانهای n، داریم

$$u_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

u_{n+1} را به‌همین‌نحو بیان می‌کنیم:

$$u_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

توجه کنید که عبارت مربوط به u_n شامل $n+1$ جمله و عبارت نظیر به u_{n+1} حاوی $n+2$ جمله است. یک بررسی مقدماتی نشان می‌دهد که هرجمله در u_n از جملهٔ نظیرش در u_{n+1} بزرگتر نیست وعبارت اخیر یک جملهٔ مثبت بیشتر دارد. بنابراین، داریم

$$u_1<u_2<\cdots<u_n<u_{n+1}<\cdots.$$

برای نشان‌دادن اینکه دنباله کراندار است، ملاحظه می‌کنیم که برای $p=1,2,\ldots,n$، داریم $(1-p/n)<1$. علاوه براین $2^{p-1}\leqslant p!$ (چرا؟) در نتیجه $1/p!\leqslant 1/2^{p-1}$. با توجه به‌عبارت بالا که برای u_n به‌دست‌آوردیم، برآوردهای

$$2<u_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,\quad n>2$$

به‌دست می‌آید. ازاینجا نتیجه می‌شود که ۳ یک کران بالای دنبالهٔ یکنوای U است. لذا ازقضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که دنبالهٔ U به‌عددی حقیقی که حداکثر ۳ می‌باشد، همگراست. خواننده احتمالاً می‌داند که‌حد U عدد بنیادی e است. اگر برآوردهای دقیقتری به‌کار بریم می‌توانیم به‌تقریبهای گویای نزدیکتری به‌مقدار e برسیم. اما بااینکه می‌شود e را باهر تعداد رقم اعشار مطلوب حساب کرد، به‌دلیل اصم بودنش از این‌راه نمی‌توان آن‌را دقیقاً محاسبه نمود. (این نشان می‌دهد بااین‌که نتیجه‌ای مانند قضیهٔ همگرایی یکنوا فقط حاکی ازوجود حددنباله‌است، حتی زمانی که نتوان به‌مقدار حد به‌آسانی‌دست‌یافت، ممکن است بسیار مفید واقع شود.)

قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس

قضیهٔ همگرایی یکنوا فوق‌العاده مفید و مهم است، اما این‌عیب را دارد که فقط در مورد دنباله‌های یکنوا به‌کار می‌رود. پس‌لازم است شرطی پیدا کنیم که همگرایی در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^p$ را بدون استفاده ازخاصیت یکنوایی ایجاب نماید. این‌شرط مطلوب محک کوشی است که در زیر معرفی خواهد شد. بااین‌حال ابتدا شکلی از قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۶.۱۵ را که بخصوص درمورد دنباله‌ها به‌کار می‌رود بیان می‌کنیم.

۴.۱۶ قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس. هردنبالهٔ کراندار در $\mathbf{R}^p$ یک زیردنبالهٔ همگرا دارد.

برهان . فرض‌کنیم $X=(x_n)$ دنبالهٔ کرانداری در $\mathbf{R}^p$ باشد . هرگاه دنبالهٔ X فقط تعداد با پایانی عنصر متمایز داشته‌باشد، حداقل یکی از آنها باید بینهایت بار تکرار شود، وهرعنصری که بینهایت‌بار تکرار می‌شود یك‌زیردنبالهٔ همگرای X است.

از سوی دیگر، اگردنبالهٔ X شامل بینهایت عنصر متمایز در $\mathbf{R}^p$ باشد ، آنگاه چون‌مجموعهٔ این‌نقاط کرانداراست،قضیهٔ‌بولتسانو ـ وایرشتراس ۶.۱۵ درموردمجموعه‌ها ایجاب می‌کند که این مجموعه دارای حداقل یك‌نقطهٔ‌تجمع x^* باشد. x_{n_1} را عنصری در X می‌گیریم به‌طوری که

$$\|x_{n_1}-x^*\|<1.$$

سپس همسایگی $V_2=\{y:\|y-x^*\|<1/2\}$ را در نظرمی گیریم. چون x^* یك‌نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $S_1=\{x_m:m\geqslant 1\}$ است، نقطهٔ‌تجمع مجموعهٔ $S_2=\{x_m:m\geqslant n_1\}$، که از S_1 با حذف تعداد با پایانی عنصر به‌دست می‌آید، نیز هست. (چرا؟) بنابراین در S_2 عنصری مانند x_{n_2} (باشرط $n_2>n_1$) که به V_2 متعلق باشد وجود دارد. حال V_3 را همسایگی $V_3=\{y:\|y-x^*\|<1/3\}$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$S_3=\{x_m:m>n_2\}.$$

چون x^* یك‌نقطهٔ تجمع S_3 است باید در S_3 عنصری مانند x_{n_3} (با شرط $n_3>n_2$) متعلق به V_3 وجود داشته‌باشد. با ادامهٔ این‌روش $X'=(x_{n_1},x_{n_2},\ldots)$ زیردنبالهٔ X را با خاصیت

$$\|x_{n_r}-x^*\|<\frac{1}{r},$$

به‌دست می‌آوریم. درنتیجه $\lim X'=x^*$. □

۵.۱۶ نتیجه. اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ و x^* یك نقطهٔ‌تجمع‌مجموعهٔ $\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$ باشد، یك‌زیردنبالهٔ X مانند X' هست‌که به x^* همگراست.

در واقع، این‌مطلب در قسمت دوم اثبات ۴.۱۶ ثابت شده‌است.

دنباله‌های کوشی

حال مفهوم مهم دنبالهٔ‌کوشی در $\mathbf{R}^p$ را معرفی می‌کنیم. خواهید دیدکه یك‌دنباله در $\mathbf{R}^p$ همگراست اگر وفقط اگر دنبالهٔ‌کوشی باشد.

۶.۱۶ تعریف. دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ را **دنبالهٔ کوشی** گوییم هرگاه برای

هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $m,n\geqslant M(\varepsilon)$، $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$.

برای اینکه انگیزهٔ پیدایش مفهوم دنبالهٔ کوشی بهتر درك شود نشان می‌دهیم که هردنبالهٔ همگرا در $\mathbf{R}^p$ یك‌دنبالهٔ کوشی است.

۷ ۰۱۶ لم. هرگاه $X=(x_n)$ یك دنبالهٔ همگرا در $\mathbf{R}^p$ باشد، X یك دنبالهٔ کوشی است.

برهان . هرگاه $x=\lim X$، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon/2)$ هست به‌قسمی‌که اگر $n\geqslant K(\varepsilon/2)$، آنگاه $\|x_n-x\|<\varepsilon/2$. بدین‌ترتیب، اگر $M(\varepsilon)=K(\varepsilon/2)$ و $m,n\geqslant M(\varepsilon)$، آنگاه

$$\|x_m-x_n\|\leqslant\|x_m-x\|+\|x-x_n\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

بنابراین، دنبالهٔ همگرای X یك‌دنبالهٔ کوشی است. $\square$

برای به‌کاربردن قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس، احتیاج به‌نتیجهٔ زیرداریم.

۸ ۰۱۶ لم. هردنبالهٔ‌کوشی در $\mathbf{R}^p$ کراندار است.

برهان . فرض کنیم $X=(x_n)$ یك دنبالهٔ‌کوشی باشد و $\varepsilon=1$. اگر $m=M(1)$، $n\geqslant M(1)$، آنگاه $\|x_m-x_n\|<1$. این با توجه به‌نابرابری مثلثی ایجاب می‌کندکه به‌ازای $n\geqslant M(1)$، $\|x_n\|\leqslant\|x_m\|+1$. بنابراین، هرگاه

$$B=\sup\{\|x_1\|,\ \|x_2\|,\ \dots,\ \|x_{m-1}\|,\ \|x_m\|+1\},$$

به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، $\|x_n\|\leqslant B$. لذا دنبالهٔ‌کوشی X کراندار است. $\square$

۹ ۰۱۶ لم. اگر X یك‌دنبالهٔ‌کوشی در $\mathbf{R}^p$ باشد ویك‌زیردنبالهٔ‌آن‌مانند X' به‌عنصر x همگرا باشد، آنگاه تمام دنبالهٔ X به x همگراست.

برهان . چون $X=(x_n)$ یك‌دنبالهٔ‌کوشی است، به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon/2)$ هست به‌قسمی‌که اگر $m,\ n\geqslant M(\varepsilon/2)$، آنگاه

$$\|x_m-x_n\|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot \qquad (*)$$

چنانچه دنبالهٔ $X'=(x_{n_j})$ به x همگرا باشد، عددی طبیعی مانند $K\geqslant M(\varepsilon/۲)$، متعلق به‌مجموعهٔ $\{n_۱, n_۲, \ldots\}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\|x-x_K\|<\frac{\varepsilon}{۲}\cdot$$

حال فرض می‌کنیم n عددی طبیعی با شرط $n\geqslant M(\varepsilon/۲)$ باشد. نتیجه می‌شود که (*) برای این‌مقدار n و $m=K$ برقرار است. از این‌رو، وقتی $n\geqslant M(\varepsilon/۲)$،

$$\|x-x_n\|\leqslant\|x-x_{Kn}\|+\|x_K-x_n\|<\varepsilon.$$

بنابراین، دنبالهٔ X به‌عنصر x همگراست که x حد زیردنبالهٔ X' می‌باشد. □

اکنون آماده‌ایم محك مهم کوشی را به‌دست آوریم. برهان این محك به‌ظاهر کوتاه است، لکن خواننده متوجه خواهد شد که کارهای لازم قبلاً انجام شده است وما فقط آنها را کنار یکدیگر قرار می‌دهیم.

۱۰.۱۶ محك همگرایی کوشی. یك دنباله در $\mathbf{R}^p$ همگراست اگر وفقط اگر دنبالهٔ کوشی باشد.

برهان. درلم ۷.۱۶ دیده‌شد که هردنبالهٔ همگرا باید یك‌دنبالهٔ کوشی باشد. بعکس فرض کنیم X یك‌دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^p$، باشد. از لم ۸.۱۶ نتیجه می‌شود که دنبالهٔ X در $\mathbf{R}^p$ کراندار است. طبق قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس ۴.۱۶، دنبالهٔ کراندار X دارای یك‌زیردنبالهٔ همگرا مانند X' است. در نتیجه بنابرلم ۹.۱۶ تمام دنبالهٔ X به‌حد دنبالهٔ X' همگراست. □

۱۱.۱۶ چند مثال. (الف) فرض کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$x_۱=۱\text{ ، }x_۲=۲\text{ ، }\ldots\text{ ، }x_n=\frac{۱}{۲}(x_{n-۲}+x_{n-۱})\text{ ، به ازای }n>۲\cdot$$

می‌توان به‌استقرا نشان داد که

$$\text{به‌ازای } n\in\mathbf{N}\text{ ، }۱\leqslant x_n\leqslant ۲\text{،}$$

اما دنبالهٔ X نه نزولی است و نه‌صعودی. (در واقع، جملاتی که اندیس فرد دارند یك دنبالهٔ صعودی وجملات با اندیس زوج یك دنبالهٔ نزولی تشکیل می‌دهند.) چون جملات دنباله با میانگین گیری به‌دست می‌آیند، بسهولت دیده می‌شود که

به‌ازای $n \in \mathbf{N}$ ، $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

در نتیجه اگر $m > n$ ، باستفاده ازنابرابری مثلثی داریم

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

هرگاه n راآن‌قدر بزرگ اختیارکنیم که به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، $1/2^n < \varepsilon/4$ و نیز $m \geqslant n$ ، از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

بنابراین، X یك‌دنبالهٔ‌کوشی در $\mathbf{R}$ است، و بنابر محك‌کوشی، دنبالهٔ X به‌عددی مانند x همگراست. برای محاسبهٔ حد توجه می‌کنیم که اگر از رابطه‌ای‌که دنباله را تعریف می‌کند حد بگیریم، نتیجه صحیح

$$x = \frac{1}{2}(x + x)$$

به‌دست می‌آید بدون‌آنکه اطلاعی دربارهٔ مقدار x حاصل‌شود. با این‌حال، چون دنبالهٔ X همگراست، زیردنبالهٔ با اندیسهای فرد نیز همگراست. به‌روش استقرا می‌شود ثابت کرد که

$$x_1 = 1, x_3 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}, \ldots,$$

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}, \ldots$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

بنابراین، زیردنبالهٔ بااندیسهای فرد به ۳ر۵ همگراست، درنتیجه حد تمام دنباله هم ۳ر۵ است.

(ب) $X=(x_n)$ را دنباله‌ای حقیقی فرض کنیم که با

$$x_1=\frac{۱}{۱!}\,,\ x_۲=\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}\,,\ \ldots\,,\ x_n=\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n!},\ldots$$

داده شده است، چون این دنباله یکنوا نیست ، اعمال مستقیم قضیهٔ همگرایی یکنوا امکان ندارد. ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $m>n$ ،

$$x_m-x_n=\frac{(-۱)^{n+۲}}{(n+۱)!}+\frac{(-۱)^{n+۳}}{(n+۲)!}+\cdots+\frac{(-۱)^{m+۱}}{m!}$$

اگر رابطهٔ $۲^{r-۱}\leqslant r!$، را به‌یادآوریم، درمی‌یابیم که

$$|x_m-x_n|\leqslant\frac{۱}{(n+۱)!}+\frac{۱}{(n+۲)!}+\cdots+\frac{۱}{m!}$$

$$\leqslant\frac{۱}{۲^n}+\frac{۱}{۲^{n+۱}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{m-۱}}<\frac{۱}{۲^{n-۱}}\,.$$

بنابراین، دنبالهٔ مفروض یك‌دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}$ است.

(پ) هرگاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که با

$$x_n=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}\quad \text{به‌ازای}\ n\in\mathbf{N}$$

تعریف شده است و نیز $m>n$،

$$x_m-x_n=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{m}\,.$$

از مقایسهٔ هریك از این $m-n$ جمله با $۱/m$ ، نتیجه می‌شود که این تفاضل از $(m-n)/m=۱-n/m$ بزرگتر است. درحالت خاص $m=۲n$، داریم

$$x_{۲n}-x_n>\frac{۱}{۲}\,.$$

این نشان می‌دهد که X دنبالهٔ کوشی نیست، پس نتیجه می‌گیریم که X واگراست. (درواقع ما ثابت کرده‌ایم که «سری همساز» واگراست.)

تمرین

۱۶. الف. فرض کنید $x_1 \in \mathbf{R}$ در $x_1 > 1$ صدق کند، و به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$. نشان‌دهید که دنبالهٔ (x_n) یکنوا و کراندار است. حدآن چیست؟

۱۶.ب. فرض کنید $y_1 = 1$، و به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، $y_{n+1} = (2 + y_n)^{1/2}$. نشان دهید که (y_n) یکنوا و کراندر است. حدآن چیست؟

۱۶. پ، فرض کنید $z_1 > 0, a > 0$. به ازای $n \in N$ تعریف کنید: $z_{n+1} = (a + z_n)^{1/2}$. نشان‌دهید که (z_n) همگراست.

۱۶. ت. هرگاه a در $0 < a < 1$ صدق کند، نشان‌دهید که دنبالهٔ $X = (a^n)$ همگراست. چون $Y = (a^{2n})$ یك زیردنباله است، نشان دهید که

$$\lim X = \lim Y = (\lim X)^2،$$

و نتیجه بگیرید که $\lim X = 0$.

۱۶. ث. نشان‌دهید که هردنباله در $\mathbf{R}$ دارای زیردنباله‌ای صعودی یا زیردنباله‌ای نزولی است.

۱۶. ج. با استفاده از تمرین ۱۶. ث، قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس را برای دنباله‌های در $\mathbf{R}$ ثابت‌کنید.

۱۶. چ. همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ (x_n) را، که در آن

$$\text{به‌ازای } n \in \mathbf{N}،\quad x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}،$$

تعیین نمایید.

۱۶.ح. فرض کنید $X = (x_n)$ و $Y = (y_n)$ دنباله‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشند و $Z = (z_n)$ دنبالهٔ «آمیختهٔ» آنها باشد که با $z_1 = x_1$، $z_2 = y_1$، . . . ، $z_{2n} = x_n$، $z_{2n+1} = y_n$، ... تعریف می‌شود. آیا درست است که Z همگراست، اگر وفقط اگر X و Y همگرا باشند و $\lim X = \lim Y$؟

۱۶. خ. مستقیماً نشان‌دهید که

$$\text{(الف)}\ \left(\frac{1}{n}\right)،\quad \text{(ب)}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)،\quad \text{(پ)}\ \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)،$$

دنباله‌های کوشی هستند.

۱۶. د. مستقیماً نشان‌دهید که

$$\text{(الف)}\ ((-1)^n)،\quad \text{(ب)}\ (n + (-1)^n/n)،\quad \text{(پ)}\ (n^2)$$

دنباله‌های کوشی نیستند.

۱۶. ذ. فرض کنید $X = (x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد و $\lim(x_{n+1}/x_n) = L$. همچنین فرض کنید $0 < \varepsilon < L$. نشان‌دهید که اعدادی مانند

$A>0$، $B>0$، و $K\in\mathbf{N}$ وجود دارند به‌قسمی که به‌ازای $n\geqslant K$،

$$A(L-\epsilon)^n\leqslant x_n\leqslant B(L+\varepsilon)^n\cdot$$

سپس نشان‌دهید که $\lim(x_n^{1/n})=L$.

۱۶. ر. مثال ۳.۱۶ (ت) وتمرین قبل را در مورد دنبالهٔ $(n^n/n!)$ به‌کار برید و نشان دهید که $\lim(n/(n!)^{1/n})=e$.

۱۶. ز. همگرایی وحد دنباله‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) $((1+1/n)^{n+1})$، (ب) $((1+1/2n)^n)$،

(پ) $((1+2/n)^n)$، (ت) $(1+1/(n+1)^{3n})$.

۱۶. ژ. فرض کنید $0<a_1<b_1$، و به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، تعریف کنید:

$$a_{n+1}=(a_nb_n)^{1/2},\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n).$$

به‌روش استقرا نشان‌دهید که $a_n<b_n$. نشان‌دهید که (a_n) و (b_n) به‌یك‌حد همگرا هستند.

۱۶. س. اثباتی برای قضیهٔ مقطع کانتور از راه زیر ارائه دهید: x_n را در F_n اختیار کنید وقضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۴.۱۶ را اعمال کنید.

۱۶. ش. بااستفاده ازقضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس، اثباتی برای قضیهٔ نزدیکترین نقطهٔ ۱۱. ۶ ارائه‌دهید.

۱۶. ص ثابت‌کنید که اگر K_1 و K_2 زیرمجموعه‌های فشرده‌ای از $\mathbf{R}^p$ باشند، آنگاه نقاطی مانند $x_1\in K_1$ و $x_2\in K_2$ هستند به‌قسمی که اگر $z_1\in K_1$ و $z_2\in K_2$، آنگاه $\|z_1-z_2\|\geqslant\|x_1-x_2\|$.

پروژه

α.۱۶ دراین‌پروژه m، c، و c_0 را دسته‌هایی از دنباله‌های حقیقی که در پروژهٔ β.۱۵ معرفی شده‌اند بگیرید، وفرض کنید d متریکی باشد که درقسمت (ت)ی آن پروژه تعریف شده است.

(الف) چنانچه $r\in\mathbf{I}$ و $r=0{,}r_1r_2\ldots r_n\ldots$ بسط اعشاری آن باشد، عنصر $X_r=(r_n)$ را در m درنظر گرفته نتیجه بگیرید که یك‌زیرمجموعهٔ شمارش‌ناپذیر مانند A وجوددارد به‌قسمی که اگر X_r و X_s عناصر متمایز A باشند آنگاه $d(X_r,X_s)\geqslant 1$.

(ب) فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از c باشد با این‌خاصیت که هرگاه X و Y دو عنصر متمایز B باشند، $d(X,Y)\geqslant 1$. ثابت کنید که B یك‌مجموعهٔ شمارش‌پذیر است.

(پ) به‌ازای $j\in\mathbf{N}$، فرض کنید $Z_j=(z_{nj}:n\in\mathbf{N})$ دنباله‌ای باشد که j عنصراول

آن ۱ و بقیهٔ عناصرش ۰ است. ملاحظه کنید که Z_j به‌هریك ازفضاهای متری m ، c ، و $c_\circ$ تعلق دارد، و به‌ازای $j \neq k$ ، $d(Z_j, Z_k) = ۱$. نشان‌دهید که دنبالهٔ $(Z_j : j \in \mathbf{N})$ یکنواست بدین‌مفهوم که هردنبالهٔ مختص $(z_{nj} : j \in \mathbf{N})$ یکنوا می‌باشد. نشان‌دهید که دنبالهٔ (Z_j) در هیچیك ازسه فضای فوق نسبت به‌متریك d همگرا نیست.

(ت) نشان دهید که دنباله‌ای مانند (X_j) در m ، c و $c_\circ$ وجود دارد که کراندار است (بدین‌مفهوم که ثابتی مانند K هست به‌قسمی که به‌ازای هر $j \in \mathbf{N}$ ، $d(X_j, \circ) \leqslant K$) اما هیچ زیردنبالهٔ همگرا ندارد.

(ث) (چنانچه d یك متریك در مجموعهٔ M باشد، می گوییم دنبالهٔ (X_j) در M یك **دنبالهٔ کوشی** است هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ ، عددی مانند $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ باشد به‌قسمی که هروقت $j, k \geqslant K(\varepsilon)$ ، $d(X_j, X_k) < \varepsilon$. می گوییم M نسبت به d **کامل** است در صورتی که‌هردنبالهٔ کوشی در M به‌عنصری از M همگراباشد.) ثابت کنید که‌مجموعه‌های m ، c ، و $c_\circ$ نسبت به‌متریك d ای که درنظر گرفته‌ایم کامل هستند.

(ج) فرض کنید f دستهٔ تمام دنباله‌های حقیقی باشد که فقط تعداد باپایانی عناصر غیرصفر دارند، و d را مانند قبل تعریف نمایید. نشان‌دهید که d یك متریك در f است، اما f نسبت به d کامل نیست.

بخش ۱۷ دنباله‌های توابع

در سه بخش پیش همگرایی دنباله‌هایی از عناصر در $\mathbf{R}^p$ را بررسی کردیم. در بخش حاضر دنباله‌های توابع‌را بررسی می‌کنیم. بعد از ذکرمقدماتی ساده، همگرایی یکنواخت یك‌دنباله ازتوابع راکه مفهومی نسبتاً دقیق ولی اساسی است، معرفی خواهیم کرد.

$D \subseteq \mathbf{R}^p$ مفروض است. فرض کنید به‌ازای هرعدد طبیعی $n \in \mathbf{N}$ ، f_n تابعی باشد به دامنهٔ D و برد در $\mathbf{R}^q$. در این صورت می گوییم (f_n) یك‌دنبالهٔ توابع در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ است. باید توجه داشت که، به‌ازای هرنقطهٔ x در D ، ازاین‌دنبالهٔ توابع دنباله‌ای ازعناصر در $\mathbf{R}^q$ ، یعنی دنبالهٔ

$$(f_n(x)) \qquad (۱۰۱۷)$$

به‌دست می‌آید که دنبالهٔ مقادیر هریك ازتوابع در x است. به‌ازای بعضی‌نقاط x در D دنبالهٔ (۱۰۱۷) ممکن است همگرا و برای دیگر نقاط x در D این‌دنباله ممکن است‌واگرا باشد. به‌ازای هریك از x هایی که در آن دنبالهٔ (۱۰۱۷) همگراست، طبق قضیهٔ ۵۰۱۴ یك‌نقطهٔ یکتا در $\mathbf{R}^q$ حد دنباله است. درحالت کلی، مقدار این‌حد، اگر وجود داشته‌باشد، به‌انتخاب نقطهٔ x بستگی خواهد داشت. بدین‌ترتیب، تابعی به‌دست می‌آید که دامنه‌اش عبارت‌است‌ازتمام نقاط x در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ که به‌ازای‌آنهادنبالهٔ(۱۰۱۷) در $\mathbf{R}^q$ همگراست.

حال این‌مطالب مقدماتی‌را درتعریف رسمی همگرایی دنبالهٔ توابع گرد می‌آوریم.

۱۰۱۷ تعریف. (f_n) دنباله‌ای از توابع در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$، $D_\circ$ زیرمجموعه‌ای از D، و f تابعی به‌دامنه‌ای شامل $D_\circ$ و برد در $\mathbf{R}^q$ داده شده‌اند. می‌گوییم **دنبالهٔ** (f_n) **در** $D_\circ$ **به** f **همگراست**، هرگاه به‌ازای هر x در $D_\circ$ دنبالهٔ $(f_n(x))$ در $\mathbf{R}^q$ به $f(x)$ همگرا باشد. دراین‌صورت تابع f را **حد دنبالهٔ** (f_n) در $D_\circ$ می‌نامیم. وقتی این تابع f وجود دارد می‌گوییم که دنبالهٔ (f_n) **در** $D_\circ$ **به** f **همگراست** یا اینکه دنباله **در** $D_\circ$ **همگراست.**

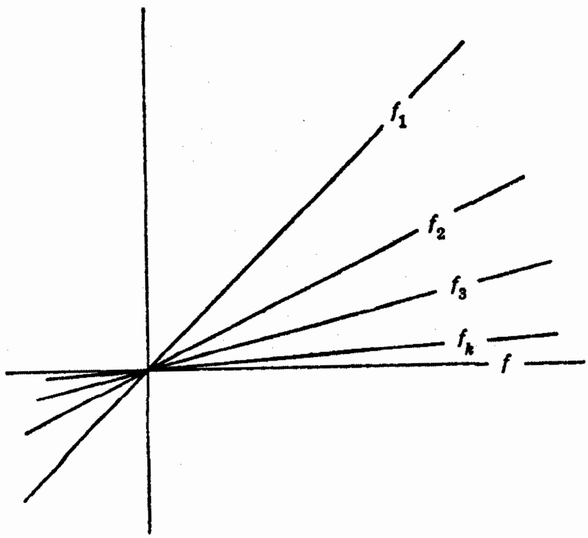
از قضیهٔ ۵.۱۴ نتیجه می‌شود که، بجز تغییر احتمالی دردامنهٔ $D_\circ$، تابع حد به‌طور یکتا مشخص می‌شود. معمولاً $D_\circ$ را بزرگترین مجموعهٔ ممکن، یعنی مجموعهٔ تمام xهایی در D که به‌ازای آنها (۱۰۱۷) همگراست، اختیار می‌کنیم. گاهی همگرایی دنبالهٔ (f_n) به f در $D_\circ$ را با نماد

$$f = \lim(f_n) \text{ در } D_\circ \quad \text{یا} \quad f_n \longrightarrow f \text{ در } D_\circ$$

نشان می‌دهیم.

حال چند نمونه از دنبالهٔ توابع را مورد توجه قرار می‌دهیم. به‌منظور سادگی حالت خاص $p = q = 1$ را مطرح می‌کنیم.

۲۰۱۷ چند مثال. (الف) به‌ازای هرعدد طبیعی n، فرض می‌کنیم f_n برای xهای در $D = \mathbf{R}$ با $f_n(x) = x/n$ تعریف شده است. f را برای هر x در $D = \mathbf{R}$ با $f(x) = 0$ تعریف می‌کنیم (ر.ك. شکل ۱۰۱۷). جملهٔ دنبالهٔ (f_n) در $\mathbf{R}$ به f همگراست،



شکل ۱۰۱۷

هم‌ارز است با جملهٔ «به‌ازای هرعدد حقیقی x، دنبالهٔ عددی (x/n) به ۰ همگراست.» برای پی‌بردن به‌درستی جملهٔ اخیر مثال ۸.۱۴ (الف) وقضیهٔ ۶.۱۵ (ب) را به‌کاربرید.

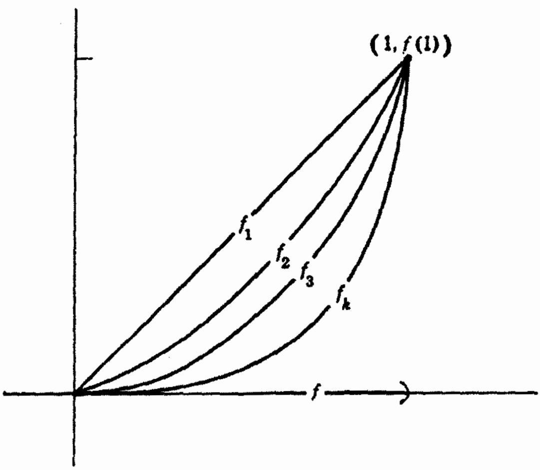
(ب) فرض کنید $D=\{x\in\mathbf{R}: 0\leqslant x\leqslant 1\}$ و f_n، به‌ازای هرعدد طبیعی n وهر x در D، با $f_n(x)=x^n$ داده شده باشد ونیز f به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=0 \qquad 0\leqslant x<1,$$
$$=1 \qquad x=1.$$

(ر. ك. شکل ۲.۱۷) واضح است که وقتی $x=1$، $f_n(x)=f_n(1)=1^n=1$، درنتیجه $f_n(1)\longrightarrow f(1)$. در مثال ۸.۱۴ (پ) نشان‌داده‌ایم که اگر $0\leqslant x<1$، آنگاه $f_n(x)=x^n\longrightarrow 0$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که (f_n) در D به f همگراست. (بآسانی ثابت می‌شود که اگر $x>1$، آنگاه $(f_n(x))$ همگرا نیست.)

(پ) فرض‌کنیم $D=\mathbf{R}$، و به‌ازای هرعدد n، f_n تابعی باشدکه به‌ازای هر x در D با

$$f_n(x)=\frac{x^2+nx}{n},$$



شکل ۲.۱۷

تعریف شده است، وفرض کنیم $f(x)=x$. (ر. ك. شکل ۳.۱۷) چون

$$f_n(x)=(x^2/n)+x$$

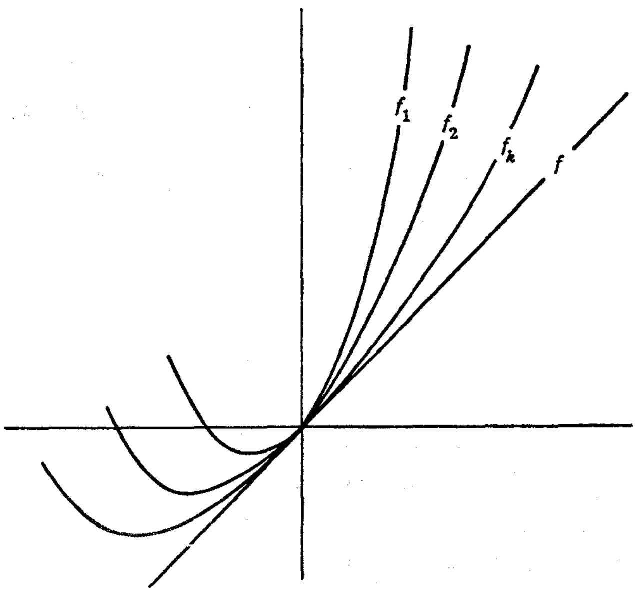
ازمثال ۸.۱۴ (الف) وقضیهٔ ۶.۱۵ (ب) نتیجه می‌شود که $(f_n(x))$، به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$، به $f(x)$ همگراست.

(ت) فرض کنیم $D=\mathbf{R}$ و ، به‌ازای هرعدد طبیعی n ، f_n با

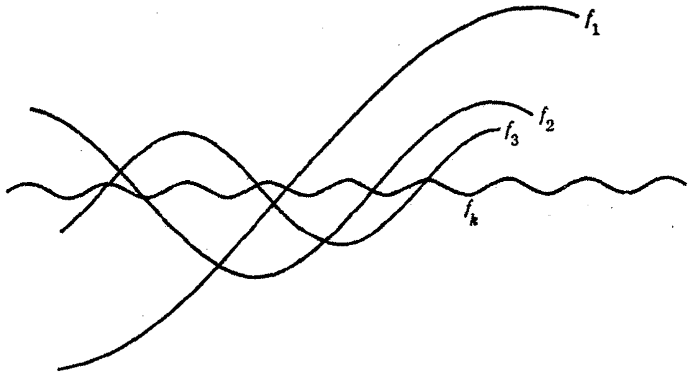
$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx+n)$$

تعریف شده‌باشد. (ر. ك. شکل ۴.۱۷) (دراینجا تعریف دقیق تابع سینوسی لازم نیست، در واقع، تنها احتیاج داریم بدانیم که به‌ازای هرعدد حقیقی y، $|\sin y|\leqslant 1$). اگر f تابع صفر باشد، یعنی برای هر $x\in\mathbf{R}$ ، $f(x)=0$، آنگاه در $\mathbf{R}$ ، $f=\lim(f_n)$. در واقع، به‌ازای هرعدد حقیقی x داریم

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|\sin(nx+n)|\leqslant\frac{1}{n}\,.$$



شکل ۳.۱۷



شکل ۴.۱۷

چنانچه $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $n \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $1/n < \varepsilon$. از این‌رو نتیجه می‌گیریم که مقدار x هرچه باشد، اگر $n \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

بنابراین، دنبالهٔ (f_n) به f همگراست. (توجه کنید که اگر n به‌قدر کافی بزرگ باشد تفاضل $|f_n(x) - f(x)|$ به‌ازای تمام مقادیر x از ε کوچکتر است.)

برای آنکه تعریف ۱.۱۷ قوی‌تر شود و راه برای مفهوم مهم همگرایی یکنواخت نسبتاً هموار گردد، تعریف ۱.۱۷ را به‌صورت زیر مجدداً بیان می‌کنیم.

۳.۱۷ لم. دنبالهٔ توابع (f_n) در $D \subseteq \mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ به‌تابعی مانند f در $D_0 \subseteq D$ همگراست اگر وفقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ وهر x در D_0 عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon, x)$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که اگر $n \geqslant K(\varepsilon, x)$، آنگاه

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon. \qquad (۲.۱۷)$$

چون این لم فقط بیان دیگری ازتعریف ۱.۱۷ است، اثبات تفصیلی آن‌را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم. فقط می‌خواهیم این نکته را متذکر شویم که بزرگی لازم‌برای‌مقدار n درنابرابری (۲.۱۷) درحالت کلی‌هم به $\varepsilon > 0$ وهم به $x_0 \in D$ بستگی دارد. خوانندهٔ آگاه قبلاً متوجه شده است که درمثالهای ۲.۱۷ (الف ـ پ) بزرگی لازم برای مقدار n تا (۲.۱۷) برقرار باشد هم به $\varepsilon > 0$ وهم به $x_0 \in D$ بستگی دارد. با این‌حال، در مثال ۲.۱۷ (ت) نابرابری (۲.۱۷) می‌تواند به‌ازای هر x در D_0 برقرار باشد مشروط براینکه n به قدرکافی بزرگ اختیار شود، و اندازهٔ بزرگی n فقط به ε بستگی دارد.

دقیقاً همین تفاوت نسبتاً ظریف است که همگرایی «معمولی» یك‌دنباله از توابع

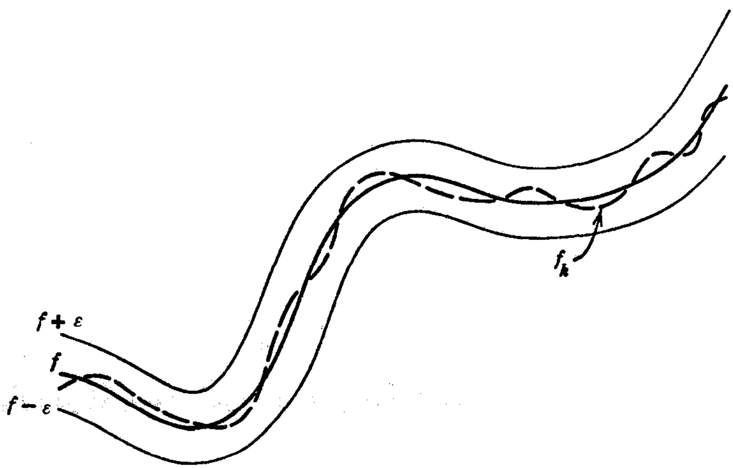
(به‌مفهوم تعریف ۱.۱۷) را ازهمگرایی «یکنواخت» که اینك تعریف خواهیم کرد متمایز می‌سازد.

۴.۱۷ تعریف. دنبالهٔ توابع (f_n) در $D\subseteq \mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ دریك زیرمجموعهٔ D مانند $D_\circ$ به‌تابعی مانند f **همگرای یکنواخت** یا **به‌طور یکنواخت همگراست** هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ (وابسته به ε ولی نه به $x\in D_\circ$) وجود داشته‌باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $n\geqslant K(\varepsilon)$ و $x\in D_\circ$،

$$\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon. \qquad (۳.۱۷)$$

دراین‌حالت می‌گوییم دنباله در $D_\circ$ **همگرای یکنواخت** یا **به‌طور یکنواخت همگراست.** (ر.ك. شکل ۵.۱۷.)

نتیجهٔ مستقیم این‌تعریف اینکه اگردنبالهٔ (f_n) در $D_\circ$ به f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه این‌دنبالهٔ توابع به‌مفهوم تعریف ۱.۱۷ به f همگراست. اینکه عکس این مطلب صحیح نیست با بررسی دقیق مثالهای ۲.۱۷ (الف. پ) معلوم می‌شود؛ مثالهای دیگری هم درزیر خواهندآمد. قبل از این‌کار، شرطی لازم وکافی برای آنکه دنبالهٔ (f_n) در $D_\circ$ به f همگرای یکنواخت نباشد، ذکر می‌کنیم.



شکل ۵.۱۷

۵.۱۷ لم. دنبالهٔ (f_n) در D_0 به f همگرای یکنواخت نیست اگر و فقط اگر برای یک $\varepsilon_0 > 0$، یک زیر دنبالهٔ (f_{n_k}) مانند (f_n) و یک دنبالهٔ (x_k) در D_0 وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای $k \in \mathbf{N}$

$$\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geqslant \varepsilon_0 . \qquad (۴.۱۷)$$

برای اثبات این لم فقط کافی است که خواننده تعریف ۴.۱۷ را نفی کند. این کار را به‌عنوان یک تمرین اساسی به‌خواننده واگذار می‌کنیم. با استفاده از این لم می‌توان نشان داد که مثالهای ۲.۱۷ (الف تا پ) در مجموعه‌های داده شدهٔ D_0 همگرای یکنواخت نیستند.

۶.۱۷ چندمثال (الف) مثال ۲.۱۷ (الف) را در نظر می‌گیریم. اگر $n_k = k$ و $x_k = k$، آنگاه $f_k(x_k) = 1$، درنتیجه

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1.$$

این‌نشان می‌دهد که دنبالهٔ (f_n) در $\mathbf{R}$ به f همگرای یکنواخت نیست.

(ب) مثال ۲.۱۷ (ب) را در نظر می‌گیریم. اگر $n_k = k$ و $x_k = (1/2)^{1/k}$. آنگاه

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |f_k(x_k)| = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ (f_k) در $[0, 1]$ به f همگرای یکنواخت نیست.

(پ) مثال ۲.۱۷ (پ)را درنظر می‌گیریم. اگر $n_k = k$ و $x_k = k$، آنگاه

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = k,$$

نشانگر آن است که (f_n) در $\mathbf{R}$ به f همگرای یکنواخت نیست.

(ت) مثال ۲.۱۷ (ث) را درنظر می‌گیریم. چون برای تمام x های در $\mathbf{R}$،

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n},$$

دنبالهٔ (f_n) در $\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت به f همگراست.

نرم یکنواخت

در بحث همگرایی یکنواخت، اغلب استفاده از یک‌نرم خاص درفضای برداری توابع مفید واقع می‌شود.

هرگاه $D\subseteq \mathbf{R}^p$ و $f:D \to \mathbf{R}^q$ می‌گوییم f **کراندار** است اگر عددی مانند $M>0$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $x\in D$، $\|f(x)\|\leqslant M$. هرگاه $f:D \to \mathbf{R}^q$ کراندار باشد، نتیجه می‌شود که عدد $\|f\|_D$ که با

$$\|f\|_D=\sup\{\|f(x)\|:x\in D\} \qquad (۵.۱۷)$$

تعریف می‌شود، در $\mathbf{R}$ وجود دارد. (توجه‌داریم که نرم سمت راست این معادله نرم در فضای $\mathbf{R}^q$ است.)

۷.۱۷ تعریف. اگر $D\subseteq \mathbf{R}^p$، آنگاه دستهٔ تمام توابع کراندار در D به $\mathbf{R}^q$ را به $B_{pq}(D)$ یا (وقتی p و q معلوم باشند) به $B(D)$ نمایش می‌دهیم.

در فضای $B_{pq}(D)$، **مجموع برداری** دو تابع f و g و **حاصلضرب عددی** $c\in\mathbf{R}$ و f را به‌ازای هر $x\in D$ به‌ترتیب با

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (cf)(x)=cf(x) \qquad (۶.۱۷)$$

تعریف می‌کنیم. **تابع صفر** را تابع $0:D \to \mathbf{R}^q$ که به‌ازای هر $x\in D$ با $0(x)=0$ تعریف می‌شود، می‌گیریم. حال این اصطلاح را با مفاهیم ارائه‌شده در بخش ۸ مرتبط می‌سازیم.

۸.۱۷ لم. (الف) مجموعهٔ $B_{pq}(D)$ بااعمال برداری تعریف شده در معادلات (۶.۱۷) یك فضای برداری است.

(ب) تابع $f \to \|f\|_D$ تعریف شده با معادلهٔ (۵.۱۷) یك نرم در $B_{pq}(D)$ است.

برهان. اثبات (الف) فقط احتیاج به‌مقداری محاسبات ساده دارد.

برای اثبات (ب) لازم است چهار خاصیت نرم را که در تعریف ۵.۸ داده شده تأییدکنیم. (یك) از (۵.۱۷) واضح است که $\|f\|_D\geqslant 0$. (دو) همچنین بوضوح $\|0\|_D=\sup\{\|0(x)\|:x\in D\}=0$. بعکس، اگر $\|f\|_D=0$، آنگاه، چون $0\leqslant\|f(x)\|\leqslant\|f\|_D=0$، نتیجه می‌گیریم که $\|f(x)\|=0$، و از این‌رو به‌ازای هر $x\in D$، $f(x)=0$. (سه) این‌مطلب که $\|cf\|_D=|c|\|f\|_D$، بسهولت دیده‌می‌شود. (چهار) چون به‌ازای هر $x\in D$،

$$\|(f+g)(x)\|=\|f(x)+g(x)\|\leqslant\|f(x)\|+\|g(x)\|$$

$$\leqslant\|f\|_D+\|g\|_D,$$

نتیجه می‌شود که $\|f\|_D+\|g\|_D$ یك کران بالای مجموعهٔ $\{\|(f+g)(x)\|:x\in D\}$ است. بنابراین داریم

$$\|f+g\|_D=\sup\{\|(f+g)(x)\|:x\in D\}$$
$$\leqslant\|f\|_D+\|g\|_D.\ \square$$

گاهی اوقات نرم $f\to\|f\|_D$ را **نرم یکنواخت** (یا **نرم زبرینه**) در $B_{pq}(D)$ می‌نامند. اکنون نشان می‌دهیم که همگرایی یکنواخت توابع در $B_{pq}(D)$ با همگرایی نسبت به‌نرم یکنواخت هم‌ارز است.

۹.۱۷ قضیه. دنبالهٔ (f_n) در $B_{pq}(D)$ به $f\in B_{pq}(D)$ در D همگرای یکنواخت است اگر وفقط اگر

$$\|f_n-f\|_D\longrightarrow 0.$$

برهان . هرگاه دنبالهٔ (f_n) به f در D همگرای یکنواخت باشد، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$ و $x\in D$، آنگاه $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$. این ایجاب می‌کند که

$$\|f_n-f\|_D=\sup\{\|(f_n-f)(x)\|:x\in D\}\leqslant\varepsilon.$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، نتیجه می‌شود که $\|f_n-f\|_D\longrightarrow 0$.

بعکس، اگر $\|f_n-f\|_D\longrightarrow 0$، آنگاه به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض عددی‌طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $\|f_n-f\|_D\leqslant\varepsilon$. این ایجاب می‌کند که اگر $x\in D$، آنگاه

$$\|f_n(x)-f(x)\|=\|(f_n-f)(x)\|\leqslant\|f_n-f\|_D\leqslant\varepsilon.$$

بنابراین دنبالهٔ (f_n) در D به f به‌طور یکنواخت همگراست.$\square$

حال نحوهٔ استفاده ازاین‌لم را به‌عنوان ابزاری برای بررسی همگرایی یکنواخت دنبالهٔ توابع نشان می‌دهیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که نرم فقط برای توابع کراندار تعریف شده است؛ از این‌رو کاربرد مستقیم نرم تنها در حالتی است که دنباله از توابع کراندار تشکیل شده‌باشد.

۱۰.۱۷ چند مثال (الف). قضیهٔ ۹.۱۷ را نمی‌توان در مورد مثالهای ۲.۱۷ (الف) و ۶.۱۷ (الف) به‌کاربرد، به این دلیل که توابع f_n تعریف شده با $f_n(x)=x/n$، در دامنهٔ داده شده، یعنی $\mathbf{R}$ کراندار نیستند. برای آنکه بتوان از قضیهٔ

فوق استفاده کرد، دامنه را تغییر می‌دهیم تا دنبالهٔ کرانداری در دامنهٔ جدید به‌دست آوریم. برای سهولت، E را برابر $[\circ, \text{۱}]$ اختیار می‌نماییم. با آنکه [همان‌طور که در مثال ۶.۱۷ (الف) دیده شد] دنبالهٔ (x/n) در دامنهٔ $\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت به‌تابع صفر همگرا نیست، در $E=[\circ, \text{۱}]$ این همگرایی یکنواخت‌است. برای دیدن این مطلب نرم مطلوب را حساب می‌کنیم:

$$\|f_n-f\|_E=\sup\left\{\left|\frac{x}{n}-\circ\right|:\circ\leqslant x\leqslant \text{۱}\right\}=\frac{\text{۱}}{n}.$$

بنابراین $\|f_n-f\|_E=\text{۱}/n\to\circ$.

(ب) حال دنبالهٔ مطرح‌شده درمثالهای ۲.۱۷ (ب) و ۶.۱۷ (ب) را نظر می‌گیریم. در اینجا $D=[\circ, \text{۱}]$، $f_n(x)=x^n$، و تابع حدی f به‌ازای $\circ\leqslant x<\text{۱}$ برابر $\circ$ وبه‌ازای $x=\text{۱}$ برابر ۱ می‌باشد. نرم تفاضل f_n-f را حساب می‌کنیم:

$$\|f_n-f\|_D=\sup\begin{Bmatrix}x^n, & \circ\leqslant x<\text{۱}\\ \circ, & x=\text{۱}\end{Bmatrix}=\text{۱}$$ به‌ازای $n\in\mathbf{N}$،

چون این نرم به‌صفر همگرا نیست، نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ (f_n) در $D=[\circ,\text{۱}]$ به f همگرای یکنواخت نیست. این نتیجه ملاحظات قبلی ما را تأیید می‌کند.

(پ) مثال ۲.۱۷ (پ) را درنظر می‌گیریم. در اینجا نیز نمی‌توان لم ۹.۱۷ را به‌کار گرفت، چراکه توابع کراندار نیستند. مجدداً، یك دامنهٔ کوچکتر، یعنی $E=[\circ, a]$ را با شرط $a>\circ$، اختیار می‌کنیم. چون

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x^\text{۲}+nx}{n}-x\right|=\frac{x^\text{۲}}{n},$$

داریم

$$\|f_n-f\|_E=\sup\{|f_n(x)-f(x)|:\circ\leqslant x\leqslant a\}=\frac{a^\text{۲}}{n}.$$

در نتیجه دنباله در فاصلهٔ $[\circ, a]$ به‌طور یکنواخت به f همگراست. (چرا این مطلب با نتیجهٔ حاصل در مثال ۶.۱۷ (پ) متناقض نیست؟)

(ت) به مثال ۲.۱۷ (ت) بازگشته، تابع $f_n(x)=(\text{۱}/n)\sin(nx+n)$ را در $D=\mathbf{R}$ در نظر می‌گیریم. در اینجا تابع حدی $f(x)$، به ازای هر $x\in D$، برابر با $\circ$ می‌باشد. برای اثبات همگرایی یکنواخت این‌دنباله، توجه می‌کنیم که

$$\|f_n-f\|_D=\sup\left\{\frac{\text{۱}}{n}\left|\sin(nx+n)\right|:n\in\mathbf{R}\right\}.$$

اما چون $|\sin y| \leqslant 1$ ، نتیجه می‌گیریم که $\|f_n - f\|_D = 1/n$. بنابراین همان‌طور که درمثال ۶.۱۷ (ت) ثابت‌شد، (f_n) همگرای یکنواخت است .

یکی از جنبه‌های مفیدتر نرم آن است که بیان محك کوشی را در مورد همگرایی یکنواخت یك‌دنبالهٔ توابع کراندار، ساده می‌کند.

۱۱.۱۷. محك کوشی برای همگرایی یکنواخت . فرض‌کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع در $B_{pq}(D)$ باشد . در این‌صورت تابعی مانند $f \in B_{pq}(D)$ هست به‌قسمی‌که (f_n) در D به‌طور یکنواخت به‌آن همگراست اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که به‌ازای هر $m,n \geqslant M(\varepsilon)$،

$$\|f_m - f_n\|_D < \varepsilon .$$

برهان . فرض‌کنیم دنبالهٔ (f_n) در D به‌طور یکنواخت ، به‌تابع $f \in B_{pq}(D)$ همگرا باشد. دراین‌صورت، به‌ازای $\varepsilon > 0$، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ هست به‌قسمی‌که اگر $n \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $\|f_n - f\|_D < \varepsilon/2$. بنابراین اگر $m,n \geqslant K(\varepsilon)$، نتیجه می‌گیریم که

$$\|f_m - f_n\|_D \leqslant \|f_m - f\| + \|f - f_n\|_D < \varepsilon.$$

بعکس، فرض‌کنیم محك کوشی برقرار باشد، و به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجودداشته‌باشد به‌قسمی‌که، وقتی $m,n \geqslant M(\varepsilon)$، $\|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$. دراین صورت به‌ازای هر $x \in D$ داریم :

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leqslant \|f_m - f_n\|_D \leqslant \varepsilon \text{، } m, n \geqslant M(\varepsilon) \text{ به‌ازای} \qquad (۷.۱۷)$$

بنابراین‌دنبالهٔ $(f_n(x))$ یك‌دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^q$ است و در نتیجه به‌عنصری از $\mathbf{R}^q$ همگرا می‌باشد. حال f را به‌ازای هر x در D با

$$f(x) = \lim(f_n(x))$$

تعریف می‌کنیم. از(۷.۱۷) نتیجه‌می گیریم که‌اگر m یك‌عدد طبیعی‌ثابت ودر $m \geqslant M(\varepsilon)$ صادق باشد و n هرعدد طبیعی صادق در $n \geqslant M(\varepsilon)$ باشد ، آنگاه به‌ازای هر x در D خواهیم داشت

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon.$$

چنانچه لم ۸.۱۵ را به‌کاربریم نتیجه می‌گیریم که اگر $m \geqslant M(\varepsilon)$ و $x \in D$ ، آنگاه

$\varepsilon \leqslant \|f_m(x)-f(x)\|$. چون f_m یك تـابع کراندار است، بآسانـی نتیجه می‌شود (به‌چه طریق؟) که f کراندار است و از این‌رو به $B_{pq}(D)$ متعلق می‌باشد. علاوه براین نتیجه می‌گیریم که (f_n) در D به‌طور یکنواخت به f همگراست. □

تمرین

در این تمرینها می‌توانید ازخواص مقدمـاتی توابع مثلثاتی و نمایی که در درسهای پیشتر خوانده‌اید استفاده کنید.

۱۷. الف. به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، فرض کنید f_n به‌ازای $x>0$ با $f_n(x)=1/(nx)$ تعریف شده‌باشد. برای چه‌مقادیری از x، $\lim(f_n(x))$ وجود دارد؟

۱۷. ب. برای هر $n\in\mathbf{N}$، فرض کنید g_n به‌ازای $x\geqslant 0$ بـا فرمول زیر تعریف شده‌باشد:

$$g_n(x)=nx, \qquad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n},$$

$$=\frac{1}{nx}, \qquad \frac{1}{n}<x.$$

نشان‌دهید که به‌ازای هر $x>0$، $\lim(g_n(x))=0$.

۱۷. پ. نشان‌دهید که $\lim((\cos\pi x)^{2n})$ به‌ازای تمـام مقادیر x وجود دارد. حدآن چیست؟

۱۷. ت. نشان‌دهید که هرگاه f_n را در $\mathbf{R}$ به‌صورت

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},$$

تعریف کنیم، (f_n) در $\mathbf{R}$ همگراست.

۱۷. ث. فرض کنید h_n درفاصلهٔ $\mathbf{I}=[0,1]$ بافرمول

$$h_n(x)=1-nx \qquad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n},$$

$$=0 \qquad \frac{1}{n}<x\leqslant 1$$

تعریف شده‌باشد. نشان‌دهید که $\lim(h_n)$ در $\mathbf{I}$ وجود دارد.

۱۷. ج. فرض کنید g_n در $\mathbf{I}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$g_n(x)=nx, \qquad \circ\leqslant x\leqslant\frac{1}{n},$$

$$=\frac{n}{n-1}(1-x), \quad \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.$$

نشان‌دهید که $\lim(g_n)$ در $\mathbf{I}$ وجود دارد.

۱۷. چ. نشان‌دهید که هرگاه f_n در $\mathbf{R}$ با

$$f_n(x)=\frac{2}{\pi}\text{Arc}\tan(nx)$$

تعریف شده‌باشد، $f=\lim(f_n)$ در $\mathbf{R}$ وجوددارد. درواقع حد به‌صورت زیراست.

$$f(x)=1, \qquad x>\circ$$

$$=\circ, \qquad x=\circ$$

$$=-1 \quad x<\circ.$$

۱۷. ح. نشان‌دهید که $\lim(e^{-nx})$ به‌ازای $x\geqslant\circ$ وجود دارد. همچنین وجود $\lim(xe^{-nx})$ را بررسی کنید.

۱۷. خ. فرض‌کنید (x_n) دنباله‌ای همگرا از نقاط باشدکه، به‌انضمام حدش x، در مجموعهٔ $D\subseteq\mathbf{R}^p$ واقع است. با این فرض‌که (f_n) در D به تابع f همگراست، آیا $f(x)=\lim(f_n(x_n))$ درست است؟

۱۷. د. تمرین قبلی را با این فرض اضافی‌که همگرایی (f_n) در D یکنواخت است بررسی‌کنید.

۱۷. ذ. ثابت‌کنیدکه همگرایی در تمرین ۱۷. الف در تمام مجموعهٔ همگرایی یکنواخت نیست، اما این همگرایی به‌ازای $x\geqslant 1$ یکنواخت می‌باشد.

۱۷. ر. نشان‌دهیدکه همگرایی درتمرین۱۷. ب در دامنهٔ $x\geqslant\circ$ یکنواخت نیست، اما در مجموعهٔ $x\geqslant c$، که درآن $c>\circ$، یکنواخت است.

۱۷. ز. آیا همگرایی درتمرین ۱۷.ت. در $\mathbf{R}$ یکنواخت است؟

۱۷. ژ. آیا همگرایی در تمرین ۱۷.ث در $\mathbf{I}$ یکنواخت است؟

۱۷. س. آیا همگرایی در تمرین ۱۷. ج در $\mathbf{I}$ یکنواخت است؟ آیا در $[c, 1]$ به‌ازای $c>\circ$ یکنواخت می‌باشد؟

۱۷. ش. آیا دنبالهٔ (xe^{-nx}) بدازای $x\geqslant\circ$ به‌طور یکنواخت همگراست؟

۱۷. ص. آیا دنبالهٔ (x^2e^{-nx}) بدازای $x\geqslant\circ$ به‌طور یکنواخت همگراست؟

۱۷. ض. فرض‌کنید (f_n) دنباله‌ای ازتوابع‌باشدکه در D به‌تابع f همگراست.

هرگاه A و B زیرمجموعه‌هایی از D باشند و بدانیم که همگرایی در A و در B یکنواخت است، نشان‌دهید که همگرایی در $A \cup B$ نیز یکنواخت می‌باشد.

۱۷. ط. دنباله‌ای مانند (f_n) در $B_{pq}(\mathbf{I})$ مثال بزنید به‌طوری که به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، $\|f_n\|_I \leqslant 1$، واین دنباله زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت نداشته‌باشد. (از این‌رو، قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس در $B_{pq}(\mathbf{I})$ برقرار نیست.)

بخش ۱۸ حد زبرین

در بخش ۶ مفهوم زبرینهٔ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی کراندار ازاعداد حقیقی‌را معرفی نمودیم، وبارها ازاین مفهوم استفاده‌های مهمی کردیم. بااین‌حال، در بررسی مجموعه‌های بی‌پایان کراندار $S\subseteq\mathbf{R}$، گاه توجه به s^*، بزرگترین نقطهٔ تجمع S، مفید واقع خواهد شد. این نقطهٔ s^* زبرینه تمام‌اعدادحقیقی‌است که حداکثر ازتعداد باپایانی ازعناصر S کوچکترند. با به‌کاربردن این‌مجموعه درمورد دنباله‌های‌کراندار در $\mathbf{R}$ مفهوم بسیارمفید «حد زبرین» را به‌دست می‌آوریم.

۱۰۱۸ تعریف. فرض کنیم $X=(x_n)$ دنبالهٔ کرانداری در $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) **حد زبرین** X که‌آن‌را با

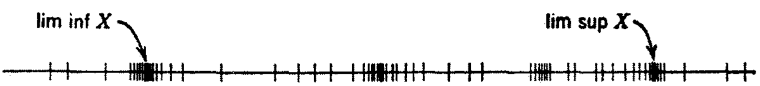
$\limsup X$، $\limsup(x_n)$، یا $\overline{\lim}(x_n)$

نشان می‌دهیم، عبارت است از زبرینهٔ مجموعهٔ V متشکل از تمام عناصر $v\in\mathbf{R}$ به‌قسمی که حداکثر به‌ازای تعداد با پایانی $n\in\mathbf{N}$، داشته‌باشیم $v<x_n$.

(ب) **حد زیرین** X که‌آن‌را با

$\liminf X$، $\liminf(x_n)$، یا $\underline{\lim}(x_n)$

نشان می‌دهیم، عبارت است از زبرینهٔ مجموعهٔ W متشکل ازتمام عناصر $w\in\mathbf{R}$ به‌قسمی که حداکثر به‌ازای تعداد باپایانی $m\in\mathbf{N}$، $x_m<w$.



شکل ۱۰۱۸

با آنکه یک‌دنبالهٔ کـراندار ملزم به‌داشتن حد نیست، همیشه حد زبرین یکتا (وحد زیرین یکتا) دارد . این امر روشن است زیرا عدد $v=\sup\{x_n : n\in\mathbf{N}\}$ به‌مجموعهٔ V متعلق است، وعدد $\inf\{x_n : n\in\mathbf{N}\}-۱$ کران پایینی برای مجموعهٔ V می‌باشد.

چندین‌روش هم‌ارزکه اغلب سودمند می‌بـاشند، برای تعریف حد زبرین یک‌دنبالهٔ کراندار وجود دارد. (به‌خواننده قویـاً توصیه می‌شود که‌کوشش‌کند این‌قضیه را قبل از خواندن اثبات آن، ثابت‌کند.)

۲۰۱۸ قضیه. هرگاه $X=(x_n)$ دنبالهٔ‌کرانداری در $\mathbf{R}$ باشد ، احکام زیر در مورد عدد حقیقی x^* هم‌ارزند:

(الف) $x^*=\lim\ \sup(x_n)$ ؛

(ب) هرگاه $\varepsilon>۰$ ، حداکثر تعداد با پایانی $n\in\mathbf{N}$ وجود دارد به‌قسمی که $x^*+\varepsilon<x_n$، ولی تعداد بی‌پایانی $n\in\mathbf{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x^*-\varepsilon<x_n$؛

(پ) اگر $v_m=\sup\{x_n:n\geqslant m\}$؛ آنگاه $x^*=\inf\{v_m:n\in\mathbf{N}\}$؛

(ت) اگر $v_m=\sup\{x_n : n\geqslant m\}$، آنگاه $x^*=\lim(v_m)$؛

(ث) اگر L مجموعهٔ عناصری چون $v\in\mathbf{R}$ باشد به‌طوری که زیردنباله‌ای از X به v همگرا باشد، آنگاه $x^*=\sup L$.

برهان . فرض‌کنیم $x^*=\lim\sup(x_n)$ و $\varepsilon>۰$. طبق تعریف ۱۰۱۸ نقطه‌ای مانند $v\in V$ با شرط $x^*\leqslant v\leqslant x^*+\varepsilon$ وجـود دارد. بنابراین $x^*+\varepsilon$ نیز به V متعلق است، درنتیجه حداکثر تعداد با پایانی $n\in\mathbf{N}$ هست‌که $x^*+\varepsilon<x_n$. از طرف‌دیگر، $x^*-\varepsilon$ در V نیست، پس‌تعداد بی‌پایانی $n\in\mathbf{N}$ ، وجوددارد به‌طوری‌که $x^*-\varepsilon<x_n$. ازاین‌رو، (الف) حکم (ب) را ایجاب می‌کند.

هرگاه (ب) برقرار باشد و $\varepsilon>۰$ داده شده‌بـاشد ، به‌ازای مقـادیر به‌قدرکافی بزرگ m داریم $v_m\leqslant x^*+\varepsilon$؛ بنابراین $\inf\{v_m : m\in\mathbf{N}\}\leqslant x^*+\varepsilon$. اما چون تعداد بی‌پایانی $n\in\mathbf{N}$ هست کـه $x^*-\varepsilon<x_n$ ، پس به‌ازای هر $m\in\mathbf{N}$، $x^*-\varepsilon<v_m$ و در نتیجه $x^*-\varepsilon\leqslant\inf\{v_m : m\in\mathbf{N}\}$. چون $\varepsilon>۰$ دلخواه است. نتیجه می‌گیریم که $x^*=\inf\{v_m:m\in\mathbf{N}\}$ و (پ) برقرار است.

اگر (v_m) دنباله‌ای بـاشدکه در (پ) تعریف شده است، آنگاه این‌دنباله نزولی یکنواست وبنابراین $\inf(v_m)=\lim(v_n)$، پس از (پ)، (ت) نتیجه می‌شود.

حال فرض می‌کنیم x^* در (ت) صدق کند و $X'=(x_{n_k})$ یک‌زیردنباله همگرای X بـاشد . چون $n_k\geqslant k$ ، داریم $x_{n_k}\leqslant v_k$ ودر نتیجه $\lim X'\leqslant\lim(v_k)=x^*$. بعکس، تـوجه کنید کـه یک $n_۱\in\mathbf{N}$ هست به‌قسمی کـه $v_۱-۱<x_{n_۱}\leqslant v_۱$. اکنون به‌استقرا $n_{k+۱}>n_k$ را چنان انتخاب می‌کنیم که به ازای $k=۰,۱,۲,\ldots$ ، $n_۰=۰$

$$v_{n_k+1}-\frac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}\leqslant v_{n_k+1}$$

چون $\lim(v_{n_k+1})=\lim(v_m)=x^*$ نتیجه می‌شود که $x^*=\lim(x_{n_k})$. بدین ترتیب، (ت) حکم (ث) را ایجاب می‌کند.

بالاخره، فرض می‌کنیم $w=\sup L$. هرگاه $\varepsilon>0$ داده شده باشد، طبق قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۴.۱۶ حداکثر تعداد با پایانی $n\in\mathbb{N}$ می‌تواند با شرط $w+\varepsilon<x_n$ وجود داشته باشد. بنابراین $w+\varepsilon\in V$ و $\lim\sup X\leqslant w+\varepsilon$. از سوی دیگر، زیر دنباله‌ای مانند X' همگرا به یك عدد بزرگتر از $w-\varepsilon$ وجود دارد، از این‌رو $w-\varepsilon$ در V نیست و در نتیجه $w-\varepsilon\leqslant\lim\sup X$. چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $w=\lim\sup X$. بنابراین، (ث) حکم (الف) را ایجاب می‌کند. □

هر دو شرط (ت) و (ث) را می‌توان برای توجیه اصطلاح «حد زبرین» به‌کار برد. توصیفهای متناظری از حد زیرین یك دنبالهٔ کراندار موجودند که خواننده باید آنها را بنویسد و اثبات کند.

حال به‌اثبات خواص جبری حد زبرین و حد زیرین دنباله‌های کراندار می‌پردازیم.

۳.۱۸ قضیه. فرض کنیم $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ دنباله‌های کرانداری از اعداد حقیقی باشند، آنگاه احکام زیر هم‌ارزند.

(الف) $\lim\inf(x_n)\leqslant\lim\sup(x_n)$؛

(ب) هرگاه $c\geqslant 0$، $\lim\inf(cx_n)=c\lim\inf(x_n)$ و

$$\lim\sup(cx_n)=c\lim\sup(x_n)؛$$

(بَ) هرگاه $c\leqslant 0$، $\lim\inf(cx_n)=c\lim\sup(x_n)$ و

$$\lim\sup(cx_n)=c\lim\inf(x_n)؛$$

(پ) $\lim\inf(x_n)+\lim\inf(y_n)\leqslant\lim\inf(x_n+y_n)$؛

(ت) $\lim\sup(x_n+y_n)\leqslant\lim\sup(x_n)+\lim\sup(y_n)$؛

(ث) اگر به‌ازای هر n، $x_n\leqslant y_n$، آنگاه $\lim\inf(x_n)\leqslant\lim\inf(y_n)$ و نیز $\lim\sup(x_n)\leqslant\lim\sup(y_n)$.

برهان. (الف) اگر $w<\lim\inf(x_n)$ و $v>\lim\sup(x_n)$، آنگاه بینهایت $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $w\leqslant x_n$، در صورتی که فقط تعداد با پایانی n هست که $v<x_n$. بنابراین باید داشته باشیم $w\leqslant v$، که (الف) را ایجاب می‌کند.

(ب) اگر $c \geqslant 0$، آنگاه ضرب نـابرابریهای به‌شکل $w \leqslant x_n$ در c،جهت آنها را تغییر نمی‌دهد.

(ب′) اگر $c \leqslant 0$، آنگاه ضرب نابرابریها در c جهت آنها را وارونه وحد زبرین را به‌حد زیرین وبعکس بدل می کنند.

حکم (پ) صورت دیگری از (ت) است و مستقیماً از (ت) نتیجه می‌شود ویـا با استدلالی مشابه‌اثبات می گردد. برای اثبات (ت)، فرض می کنیم $v > \lim\sup(x_n)$ و $u > \lim\sup(y_n)$؛ بنا برتعریف، هریك از نابرابریهای $v < x_n$ و $u < y_n$ فقط برای تعداد با پایانی $n \in \mathbb{N}$ برقرارند. بنابراین فقط ممکن است تعداد بـا پـایـانی n وجود داشته‌باشند که‌به‌ازای آنها $v + u < x_n + y_n$، بنابراین $\lim\sup(x_n + y_n) \leqslant v + u$، ازاین رابطه حکم (ت) نتیجه می‌شود.

اکنون به‌اثبات قسمت دوم (ث) می‌پردازیم . هرگاه $u > \lim\sup(y_n)$ ، فقط ممکن است تعداد بـا پـایـانی n وجود داشته باشند که به‌ازای آنهـا $u < y_n$. چون $x_n \leqslant y_n$، پس $\lim\sup(x_n) \leqslant u$،ودرنتیجه $\lim\sup(x_n) \leqslant \lim\sup(y_n)$. □

می توان هریك از شرایط هـم‌ارز داده شده در قضیهٔ ۱۸ . ۲ را بـرای اثبـات قسمتهای قضیهٔ ۳.۱۸ به‌کاربرد. پیشنهاد می کنیم خواننده بعضی از این اثباتها را به‌عنوان تمرین انجام‌دهد.

ممکن است این سؤال مطرح‌شودکه آیا می‌توان نابرابریهای قضیهٔ ۳.۱۸ را با برابری عوض‌کرد. جواب در حـالت‌کلی منفی است. زیرا، اگر $X = ((-1)^n)$، آنگاه $\lim\inf X = -1$ و $\lim\sup X = 1$. اگـر $Y = ((-1)^{n+1})$ ، آنگاه $X + Y = (0)$، در نتیجه

$$\lim\inf X + \lim\inf Y = -2 < 0 = \lim\inf(X + Y),$$

$$\lim\sup(X + Y) = 0 < 2 = \lim\sup X + \lim\sup Y.$$

دیدیم که هردنبالهٔکراندار صرفنظر از همگرایی یا واگرایی ، حد زبرین و زیرین دارد . نشان می‌دهیم که وجود $\lim X$ با برابری $\lim\inf X$ و $\lim\sup X$ هم‌ارز است.

۴.۱۸ لم . فرض‌کنیم X یك دنبالهٔکراندار ازاعداد حقیقی باشد. دراین‌صورت X همگراست اگر و فقط اگر $\lim\inf X = \lim\sup X$ که در این حالت مقدار مشترك $\lim X$ است.

برهان . اگر $x = \lim X$ ، آنگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که

$$x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon\,,\qquad n\geqslant N(\varepsilon),$$

نابرابری دوم نشان می‌دهد که $\limsup X\leqslant x+\varepsilon$ و نابرابری اول نشان می‌دهد که $x-\varepsilon\leqslant\liminf X$. ازاین‌رو $0\leqslant\limsup X-\liminf X\leqslant 2\varepsilon$، وچون $\varepsilon>0$ دلخواه است، برابری مطلوب حاصل است.

بعکس، فرض می کنیم $x=\liminf X=\limsup X$. اگر $\varepsilon>0$، از قضیهٔ ۲.۱۸ (ب) نتیجه می‌شود که عددی طبیعی مانند $N_1(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که اگر $n\geqslant N_1(\varepsilon)$، آنگاه $x_n<x+\varepsilon$. به‌همین نحو، عددی طبیعی مانند $N_2(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $n\geqslant N_2(\varepsilon)$، آنگاه $x-\varepsilon<x_n$. فرض می کنیم $N(\varepsilon)=\sup\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\}$؛ در این صورت اگر $n\geqslant N(\varepsilon)$ ، آنگاه $|x_n-x|<\varepsilon$ ، و این نشان می‌دهد که $x=\lim X$. □

دنباله‌های بیکران

گاهی اوقات شایسته است که حد زبرین وحد زیرین را برای دنباله‌های دلخواه، یعنی دنباله‌هایی که الزاماً در $\mathbf{R}$ کراندار نیستند، تعریف کنیم. بدین‌منظور احتیاج به‌معرفی نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ خواهیم داشت، اما باید تأکید کنیم که آنها اعدادی حقیقی نیستند وصرفاً به‌عنوان نمادهایی مناسب به‌کار می‌روند.

هرگاه S یک‌مجموعهٔ غیرتهی در $\mathbf{R}$ باشد که از طرف بالا کراندار نیست، تعریف می کنیم $\sup S=+\infty$؛ چنانچه T مجموعه‌ای غیرتهی در $\mathbf{R}$ باشد که از پایین کراندار نیست، تعریف می کنیم $\inf T=-\infty$. همان‌طور که بعد از تعریف ۱.۶ تذکرداده‌ایم هرعددحقیقی، کران بالای مجموعهٔ تهی $\varnothing$ است، بنابراین تعریف می کنیم $\sup\varnothing=-\infty$. به‌همین‌نحو، هرعدد حقیقی یک کران پایین $\varnothing$ است، لذا تعریف می کنیم $\inf\varnothing=+\infty$.

حال فرض کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که از بالا کراندار نیست. در این صورت $v\in\mathbf{R}$ به‌قسمی که به‌ازای تعداد با پایانی $n\in\mathbf{N}$، $v<x_n$ وجود ندارد. بنابراین V، مجموعهٔ این اعداد، تهی است. پس $\inf V=+\infty$. در نتیجه اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که از بالا کراندار نیست، آنگاه

$$\limsup(x_n)=+\infty.$$

به‌همین‌نحو، هرگاه $Y=(y_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که ازپایین کراندار نیست، داریم

$$\liminf(y_n)=-\infty.$$

توجه داریم که هرگاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که از بالا کراندار نیست، مجموعه‌های $\{x_n: n\geqslant m\}$ از بالا کراندار نیستند و در نتیجه، به‌ازای هر $m\in\mathbf{N}$

$$v_m=\sup\{x_n: n\geqslant m\}=+\infty.$$

حدهای بی‌پایان

هرگاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد، می‌گوییم $X=(x_n)$ به $+\infty$ **واگراست**، و می‌نویسیم $\lim(x_n)=+\infty$، اگر به‌ازای هر $\alpha\in\mathbf{R}$ عددی مانند $K(\alpha)\in\mathbf{N}$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که اگر $n\geqslant K(\alpha)$، آنگاه $x_n>\alpha$.

به‌همین‌نحو می‌گوییم $X=(x_n)$ به $-\infty$ **واگراست** و می‌نویسیم $\lim(x_n)=-\infty$ اگر که به‌ازای هر $\alpha\in\mathbf{R}$، عددی مانند $K(\alpha)\in\mathbf{N}$ باشد به‌قسمی که اگر $n\geqslant K(\alpha)$، آنگاه $x_n<\alpha$.

به‌عنوان تمرین نشان‌دهید که $X=(x_n)$ به $+\infty$ واگراست اگر وفقط اگر

$$\lim\inf(x_n)=\lim\sup(x_n)=+\infty$$

و $X=(x_n)$ به $-\infty$ واگراست اگر وفقط اگر

$$\lim\inf(x_n)=\lim\sup(x_n)=-\infty.$$

تمرین

۱۸. الف. حد زبرین وحد زیرین دنباله‌های کراندار در $\mathbf{R}$ راکه در زیر آمده‌اند، به‌دست آورید.

(الف) $((-۱)^n)$، (ب) $((-۱)^n/n)$،

(پ) $((-۱)^n+۱/n)$، (ت) $(\sin n)$.

۱۸. ب. هرگاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbf{R}$ باشد، نشان‌دهید که‌یك‌زیردنبالهٔ X وجود داردکه به $\lim\inf X$ همگراست.

۱۸. پ. نظیر قضیهٔ ۱۸. ۲ را برای حد زیرین بیان ومستقیماً آن‌را ثابت کنید.

۱۸. ت. برهان مستقیمی برای قضیهٔ ۳.۱۸ (پ) بیاورید.

۱۸. ث. قضیهٔ ۳.۱۸ (ت) را بااستفاده از ۲.۱۸ (ب) به‌عنوان تعریف حد زبرین ثابت کنید. همین‌کار را بااستفاده از ۲.۱۸ (ت) و ۲.۱۸ (ث) انجام‌دهید.

۱۸. ج. هرگاه $X=(x_n)$ دنبالهٔ کرانداری ازعناصر اکیداً مثبت $\mathbf{R}$ باشد، نشان دهید که $\lim\sup(x_n^{۱/n})\leqslant\lim\sup(x_{n+۱}/x_n)$.

۱۸. چ. حد زیرین و حد زبرین دنباله‌های زیر در $\mathbf{R}$ را تعیین کنید.

(الف) $((-۱)^n n)$، (ب) $(n\sin n)$،

(پ) $(n(\sin n)^۲)$، (ت) $(n\tan n)$.

۱۸. ح. نشان‌دهید که دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}$ به $+\infty$ واگراست اگر و فقط اگر $\lim\inf X=+\infty$.

۱۸ . خ . نشان‌دهید که $\limsup X=+\infty$ اگر وفقط اگر زیردنباله‌ای از X مانند X' وجود داشته باشد به‌قسمی که $\lim X'=+\infty$.

۱۸ . د. قضیهٔ ۳.۱۸ را برای دنباله‌هایی که کراندار نیستند تفسیر کنید.

بخش ۱۹ چندگسترش

درآنالیز اغلب لازم می‌شود «مرتبهٔ بزرگی» یك دنباله را برآورد کنیم یا دو دنباله را از نظر بزرگی با هم مقایسه کنیم. برای این‌منظور ما جملاتی راکه در مرتبهٔ بزرگی‌دنباله تأثیر ندارند حذف می‌کنیم. برای‌مثال در $x_n=2n+17$ وقتی $n\in\mathbf{N}$ بزرگ باشد، جملهٔ $2n$ ازنظر مرتبهٔ بزرگی قسمت‌اصلی x_n را تشکیل می‌دهد. هرگاه $y_n=n^2-5n$، وقتی $n\in\mathbf{N}$ بزرگ است، جمله اصلی n^2 است. وبا اینکه چندجملهٔ اول (y_n) از جملات نظیرشان در (x_n) کوچکترند، ولی نهایتاً جملات این‌دنباله با سرعت بیشتری از جملات (x_n) افزایش می‌یابند.

حال با ارائهٔ چند اصطلاح این‌مفهوم را دقیقتر بیان می‌کنیم، و همچنین چند نماد راکه اول بار لاندو[1] به‌کاربرده‌است واغلب مفید واقع می‌شوند، معرفی می‌نماییم.

۱.۱۹ تعریف. فرض کنیم $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ دنباله‌هایی در $\mathbf{R}$ باشند و به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ به‌قدرکافی بزرگ، $y_n\neq 0$. می‌گوییم X و Y **هم‌ارزند** ومی‌نویسیم:

$$X\sim Y \text{ یا } (x_n)\sim(y_n)$$

در صورتی که $\lim(x_n/y_n)=1$. می‌گوییم **مرتبهٔ بزرگی X ازمرتبهٔ بزرگی Y کمتر است**[2] ومی‌نویسیم

$$X=o(Y) \text{ یا } x_n=o(y_n)$$

درصورتی‌که $\lim(x_n/y_n)=0$. می‌گوییم X **بر Y مسلط است** و می‌نویسیم

$$X=O(Y) \text{ یا } x_n=O(y_n)$$

درصورتی‌که دنبالهٔ (x_n/y_n) کراندار باشد.

آشکار است که $X\sim Y$ یا $X=o(Y)$، ایجاب می‌کندکه $X=O(Y)$. خواص

---

۱. ادموندلاندو Edmund (G.H) Landau (۱۸۷۷ ــ ۱۹۳۸) در گوتینگن استاد بود وبه‌خاطر تحقیقات وکتابهایش در نظریهٔ اعداد وآنالیز شناخته شده است. این کتابها به‌خاطر دقت وسبك کوتاه‌نویسی (ونیز زبان سادهٔ آنها معروف هستند).

۲. اغلب به‌جای «مرتبهٔ بزرگی X» به‌طورخلاصه می‌گوییم «مرتبهٔ X». ــم .

گوناگون این نمادها در تمرین خواهدآمد.

جمع‌پذیری چزارو[۱]

ما قبلاً «دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ به‌عنصری مانند x همگراست» را تعریف کرده‌ایم. وقتی X به‌مفهوم تعریف ۳.۱۴ به x همگرا نیست ، گاهی می‌توان برای دنبالهٔ X نوعی «حد تعمیم یافته» در نظر گرفت. روشهای متعددی برای تعمیم مفهوم حد دنباله وجود دارند که حتی اشارهٔ به‌بعضی از آنها ما را از موضوع بحث این کتاب بسیار دور خواهد کرد. با این‌حال، روشی وجود دارد که هم ساده است وهم کاربردهای مفیدی درمورد دنباله‌های نوسانی دارد. چون این روش تا حدودی اهمیت دارد واثبات قضیهٔ اصلی آن نمونه‌ای است از بسیاری از استدلالهای تحلیلی،ما در اینجا مقدمهٔ مختصری از نظریهٔ‌جمع‌پذیری چزارو را ارائه می‌دهیم.

۲۰۱۹ تعریف. هر گاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای‌ازعناصر در $\mathbf{R}^p$ باشد، دنباله‌$S=(\sigma_n)$ راکه با

$$\sigma_1=x_1,\ \ \sigma_2=\frac{x_1+x_2}{2},\ \ldots,\ \sigma_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\ldots,$$

تعریف می‌شود **دنبالهٔ میانگینهای حسابی** X می‌نامند.

به‌عبارت دیگر، عناصر S با میانگین‌گیری از جملات X به‌دست می‌آیند. چون این میانگین تغییرات نامنظم در X راکم می‌کند، معقول‌است انتظار داشته‌باشیم که شانس همگرایی دنبالهٔ S بیش از دنبالهٔ اصلی باشد. در حالتی که دنبالهٔ میانگینهای حسابی S به‌عنصری مانند y همگرا باشد، می‌گوییم دنبالهٔ X **جمع‌پذیر چزارو** به y است، یااینکه y **حد** $(C,1)$ دنبالهٔ X است.

برای مثال، X را دنبالهٔ‌حقیقی غیرهمگرای$X=(1,0,1,0,\cdots)$ فرض کنیم. بسهولت دیده می‌شودکه هرگاه n یک‌عدد طبیعی زوج باشد، $\sigma_n=1/2$ و ، هرگاه n یک‌عدد طبیعی فرد باشد، $\sigma_n=(n+1)/2n$. چون $\lim\sigma_n=1/2$، دنبالهٔ X جمع‌پذیر چزارو به $1/2$ می‌باشد، درحالی‌که $1/2$ حد X نیست ، اما به‌نظرمی‌رسد طبیعی‌ترین «حد تعمیم‌یافته‌ای» باشدکه می‌توان به X نسبت‌داد.

در تعمیم مفهوم حددنباله به‌نظر منطقی می‌رسدکه توقع داشته‌باشیم حد تعمیم‌یافته،

---

۱. ارنستوچزارو Ernesto Cesàro (۱۸۵۹ـ۱۹۰۶) در رم تحصیل و در ناپل تدریس نمود. او در هندسه وجبر وآنالیز کارکرده است.

وقتی دنباله همگراست، باحد دنباله برابر باشد. اکنون نشان می‌دهیم که روش چزارو از این خاصیت برخوردار است.

۳.۱۹ قضیه. اگر دنبالهٔ $X=(x_n)$ به x همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ میانگینهای حسابی $S=(\sigma_n)$ نیز به x همگراست.

برهان. لازم است که مقدار

$$\sigma_n - x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x$$

$$= \frac{1}{n}\{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)\}. \qquad (1.19)$$

را برآورد کنیم. چون $x=\lim(x_n)$، پس به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $m \geqslant N(\varepsilon)$، آنگاه $\|x_m - x\| < (\varepsilon)$. ونیز، از آنجا که دنبالهٔ $X=(x_n)$ همگراست، عددی حقیقی مانند A وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر k، $\|x_k - x\| < A$. هرگاه $n \geqslant N = N(\varepsilon)$، حاصل‌جمع سمت راست (۱.۱۹)را به‌حاصل‌جمع مجموع از $k=1$ تا $k=N$ و مجموع از $k=N+1$ تا $k=n$، تجزیه می‌کنیم. با به‌کاربردن برآورد $\|x_k - x\| < \varepsilon$ درمورد $n-N$ جملهٔ آخر نتیجه‌می گیریم که

$$\text{به‌ازای } n \geqslant N(\varepsilon)\text{،} \quad \|\sigma_n - x\| \leqslant \frac{NA}{n} + \frac{n-N}{n}\varepsilon$$

اگر n به‌قدرکافی بزرگ باشد، آنگاه $NA/n < \varepsilon$ وچون $(n-N)/n < 1$ درمی‌یابیم که به‌ازای مقادیر بزرگ n، $\|\sigma_n - x\| < 2\varepsilon$. بنابراین $x=\lim(\sigma_n)$. □

ما نظریهٔ جمع‌پذیری چزارو را بیش ازاین دنبال نمی‌کنیم، فقط خواننده را به کتابهای مربوط به سریهای واگرا و جمع‌پذیری ارجاع می‌دهیم. به‌عنوان مثال، به‌کتاب نوپ[1] که در فهرست مراجع آمده است، رجوع کنید. یکی از جالبترین کاربردهای مقدماتی جمع‌پذیری چزارو قضیهٔ مشهور فییر است که حکم می کند که همیشه می‌توان تابع پیوسته را از سری فوریه‌اش باروش جمع‌پذیری چزارو بدست آورد حتی وقتی با همگرایی معمولی به‌دست نمی‌آید (ر. ك. قضیهٔ ۳۸-۱۲).

دنباله‌های دوگانه ومکرر

به‌یاد می‌آوریم که یك‌دنباله در $\mathbf{R}^p$ تابعی است که در مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ تعریف

1. Knopp

شده و بردآن در $\mathbf{R}^p$ است. یك‌دنبالهٔ دوگانه در $\mathbf{R}^p$ تابعی است مانند X که دامنه‌اش $N \times N$، یعنی کلیه جفتهای مرتب از اعداد طبیعی و بردش در $\mathbf{R}^p$ است. به‌عبارت‌دیگر، مقدار دنبالهٔ دوگانهٔ X در هر جفت مرتب (m, n) از اعداد طبیعی، عنصری از $\mathbf{R}^p$ است که معمولاً آن‌را با x_{mn} نمایش می‌دهیم. ما معمولا از نمادهای نظیر $X = (x_{mn})$ برای نمایش X استفاده می کنیم، ولی گاهی اوقات مناسب است که عنصرها را در یك آرایه مانند زیر بنویسیم:

$$X = \left| \begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right| \qquad (۲.۱۹)$$

ملاحظه کنید که در این آرایه اندیس اول سطر واندیس دوم ستونی را نشان می‌دهد که عنصر x_{mn} درآن ظاهر شده است.

۴.۱۹ تعریف. چنانچه $X = (x_{mn})$ یك‌دنبالهٔ دوگانه در $\mathbf{R}^p$ باشد، عنصر x را **حد** (یا **حد دوگانهٔ** X) گوییم، هرگاه به‌ازای هرعدد مثبت ε، عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ باشد به قسمی که به ازای هر $m, n \geqslant N(\varepsilon)$، $\|x_{mn} - x\| < \varepsilon$. دراین صورت می‌گوییم دنبالهٔ دوگانه به x **همگرا**ست و می‌نویسیم:

$$x = \lim X \quad \text{یا} \quad x = \lim_{mn} (x_{mn})$$

بسیاری‌ازمطالب نظریهٔ مقدماتی حددنباله‌هارا می‌توان بااندکی تغییر به‌دنباله‌های دوگانه تعمیم‌داد. بویژه، این‌مطلب‌که حد دوگانه (درصورت وجود) به‌طور یکتا مشخص می‌شود درست با همان روش مذکور درقضیهٔ ۵.۱۴ ثابت می‌شود. به‌همین‌نحو، می‌توان اعمال جبری را برای دنباله‌های دوگانه تعریف کرد و نتایجی دقیقاً مشابه با نتایج قضیهٔ ۶.۱۵ به‌دست‌آورد. همچنین درمورد همگرایی یك‌دنبالهٔ دوگانه محك‌کوشی نیز وجود دارد‌که صورت‌آن‌را در زیر می‌آوریم ولی اثباتش را به‌خواننده محول می کنیم.

۵.۱۹ محك‌کوشی. هرگاه $X = (x_{mn})$ یك دنبالهٔ دوگانه در $\mathbf{R}^p$ باشد، X

همگراست، اگر و فقط اگر که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $m, n, r, s \geqslant M(\varepsilon)$،

$$\|x_{mn}-x_{rs}\|<\varepsilon.$$

در اینجا بیش از این به‌جزئیات آن بخشی از نظریهٔ دنباله‌های دوگانه‌که مشابه نظریهٔ دنباله‌ها (ی تك‌اندیس) است نمی‌پردازیم. بلکه در عوض قصد داریم به‌اختصار رابطهٔ بین‌حد تعریف شده در ۴.۱۹ وحدهای «مکرر» را مطرح‌سازیم.

مطلب‌را با این نکته شروع می‌کنیم که دنبالهٔ دوگانه را می‌توان (حداقل از دوراه) به‌عنوان دنباله‌ای از دنباله‌ها درنظر گرفت. از یکسو، می‌توان هرسطر آرایهٔ (۲.۱۹)را به‌عنوان دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ درنظر گرفت. مثلاً سطر اول در آرایهٔ (۲.۱۹) دنبالهٔ $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots) = (x_{1n} : n\in\mathbf{N}) = Y_1$ و سطر دوم در (۲.۱۹) دنبالهٔ $Y_2=(x_{2n}: n\in\mathbf{N})$ را به‌دست می‌دهد، به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم. کاملاً طبیعی‌است حد هریك از دنباله‌های سطری $\ldots, Y_m, \ldots, Y_2, Y_1$ (وقتی این‌حدها وجود دارند) را درنظر بگیریم. فرض می‌کنیم این‌حدها وجود دارند و آنها را به $\ldots, y_m, \ldots, y_2, y_1$ نشان می‌دهیم. به‌این ترتیب دنباله‌ای از عناصر در $\mathbf{R}^p$ به‌دست می‌آوریم که همگرایی آن‌را نیز می‌توان بررسی‌کرد. پس فرض می‌کنیم $y=\lim(y_m)$ وجود داشته‌باشد. چون عناصر y_m عبارت‌اند از $y_m = \lim Y_m$ که درآن $Y_m=(x_{mn}: n\in\mathbf{N})$، به‌این نتیجه می‌رسیم‌که $y=\lim(Y_m)$ را (در صورت وجود) باعبارت

$$y=\lim_{m}\lim_{n}(x_{mn})$$

نشان‌دهیم. y را **حد مکرر** دنبالهٔ دوگانه (یا به‌عبارت دقیقتر، **حد مکرر سطری** این‌دنبالهٔ دوگانه) می‌نامیم.

آنچه راکه در مورد سطرها گفته شد می‌توان تمام وکمال در مورد ستونها تکرار کرد. بنابراین، دنباله‌های

$$Z_1=(x_{m1}: m\in\mathbf{N}), \quad Z_2=(x_{m2}: m\in\mathbf{N}),$$

و غیره را تشکیل می‌دهیم. با فرض‌اینکه حدهای $z_1 = \lim Z_1$ ، z_2 ، $z_2 = \lim Z_2$ ، ... وجود دارند، می‌توان $z=\lim(z_n)$ را درنظر گرفت. وقتی‌که این‌حد اخیر وجوددارد، آن‌را به

$$z=\lim_{n}\lim_{m}(x_{mn})$$

نشان داده z را یك **حد مکرر** ، یا **حد مکرر ستونی** دنبالهٔ دوگانهٔ $X=(x_{mn})$ می گوییم.

اولین سؤالی‌که ممکن است مطرح شود این است‌که: هرگاه حد دوگانهٔ دنبالهٔ $X=(x_{mn})$ موجود باشد، آیا حدهای مکرر هم وجود دارند؟ شاید برای خواننده

تعجب‌انگیز باشد که جواب این سؤال منفی است. برای نشان دادن این مطلب، فرض می‌کنیم X دنبالهٔ دوگانه‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که به‌صورت $x_{mn}=(-۱)^{m+n}(۱/m+۱/n)$ داده شده است. در این‌صورت بآسانی دیده می‌شود که حد دوگانهٔ این‌دنباله وجود دارد و برابر ۰ است. با این‌حال، بآسانی نیز دیده می‌شود که هیچیك از دنباله‌های

$$Y_۱=(x_{۱n}:n\in\mathbf{N}),\ldots,\ Y_m=(x_{mn}:n\in\mathbf{N}),\ldots$$

حدندارد. از این‌رو حد مکرر هم نمی‌تواند وجود داشته‌باشد، چرا که هیچیك ازحدهای «داخلی» وجود ندارند.

سؤال بعدی این است که: هرگاه حد دوگانه و یکی از حدهای مکرر وجود داشته باشند، آیا این حد مکرر برابر باحد دوگانه هست؟ این‌بار جواب مثبت است. در واقع، ما اکنون نتیجهٔ کلی‌تری را ثابت می‌کنیم.

۶.۱۹ قضیهٔ دوگانه. اگر حد دوگانهٔ $x=\lim_{mn}(x_{mn})$ وجود داشته‌باشد و به‌ازای هرعدد طبیعی m حد $y_m=\lim_n(x_{mn})$ موجود باشد، آنگاه حد مکرر $\lim_m\lim_n(x_{mn})$ وجودداردو برابر x است.

برهان . بنا به‌فرض، به‌ازای $\varepsilon>۰$ داده شده عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که اگر $m, n\geqslant N(\varepsilon)$، آنگاه $\|x_{mn}-x\|<\varepsilon$. باز بنا به‌فرض، حدهای $y_m=\lim_n(x_{mn})$ وجود دارند، واز نابرابری فوق ولم ۸.۱۵ نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر $m\geqslant N(\varepsilon)$، $\|y_m-x\|\leqslant\varepsilon$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $x=\lim(y_m)$. □

قضیهٔ قبل نشان می‌دهدکه چنانچه حد دوگانه موجود باشد، تنها چیزی که مانع وجودحدمکررو برابری آن باحد دوگانه‌است، عدم وجود حدهای «داخلی»است. به‌عبارت دقیقتر، در این مورد نتیجهٔ زیر را داریم.

۷.۱۹ نتیجه. فرض‌کنیم حد دوگانه وجود دارد وحدهای

$$y_m=\lim_n(x_{mn})\ ,\ z_n=\lim_m(x_{mn})$$

به‌ازای تمام‌اعدادطبیعی m و n وجود دارند. دراین‌صورت‌حدهای مکرر

$$\lim_m\lim_n(x_{mn})\ ,\ \ \lim_n\lim_m(x_{mn})$$

وجود دارند و برابر حد دوگانه می‌باشند.

حال می‌پرسیم آیا وجود وبرابری دوحدمکرر، وجود حد دوگانه‌را ایجاب می‌کند؟

جواب منفی است. با بررسی دنبالهٔ دوگانهٔ $X=(x_{mn})$ در $\mathbf{R}$ که درآن $x_{mn}=۱$ وقتی $m\neq n$ و $x_{mn}=۰$ وقتی $m=n$ این مطلب روشن می‌شود. دراینجا هردو حد مکرر موجود و با یکدیگر برابرند، اما حد دوگانه وجود ندارد. با این حال، باچند شرط اضافی، می‌توان حد دوگانه را از وجود یکی از حدهای مکرر نتیجه گرفت.

۸۰۱۹ تعریف. فرض کنیم به‌ازای هرعدد طبیعی m، دنبالهٔ $Y_m=(x_{mn})$ در $\mathbf{R}^p$ به y_m همگرا باشد. می‌گوییم دنباله‌های $\{Y_m:m\in\mathbf{N}\}$ **همگرای یکنواخت** یا **به‌طور یکنواخت همگرا** هستند، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که اگر $n\geqslant N(\varepsilon)$، به‌ازای هرعدد طبیعی m، $\|x_{mn}-y_m\|<\varepsilon$.

خوب است خواننده این تعریف را با تعریف ۴.۱۷ مقایسه کرده ببیند که در واقع این دو تعریف از یك نوع هستند. تا اندازه‌ای به‌منظور توجیه قضیهٔ ۱۹. ۱۰ که در زیر می‌آید نشان می‌دهیم که اگر هریك ازدنباله‌های Y_m همگرا باشد، آنگاه وجود حد دوگانه، همگرایی یکنواخت دنباله‌های $\{Y_m:m\in\mathbf{N}\}$ را ایجاب می‌کند.

۹۰۱۹ لم. اگر حد دوگانهٔ دنبالهٔ دوگانهٔ $X=(x_{mn})$ وجود داشته‌باشد و دنبالهٔ $Y_m=(x_{mn}:n\in\mathbf{N})$ به‌ازای هرعدد طبیعی m همگرا باشد، آنگاه این‌دسته از دنباله‌ها به‌طور یکنواخت همگرا هستند.

برهان. چون حد دوگانه وجود دارد، به‌ازای $\varepsilon>۰$ داده شده عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر $m, n\geqslant N(\varepsilon)$، آنگاه $\|x_{mn}-x\|<\varepsilon$. بنا به‌فرض، دنبالهٔ $Y_m=(x_{mn}:n\in\mathbf{N})$ به‌عنصری مانند y_m همگراست، و با به‌کاربردن لم ۸.۱۵، درمی‌یابیم که‌هرگاه $m\geqslant N(\varepsilon)$، $\|y_m-x\|\leqslant\varepsilon$. لذا، هرگاه $m,n\geqslant N(\varepsilon)$، نتیجه می گیریم که

$$\|x_{mn}-y_m\|\leqslant\|x_{mn}-x\|+\|x-y_m\|<۲\varepsilon.$$

علاوه براین، به‌ازای $m=۱, ۲, \ldots, N(\varepsilon)-۱$ دنبالهٔ Y_m به y_m همگراست؛ از این‌رو، عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $n\geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه

$$\|x_{mn}-y_m\|<\varepsilon\ ,\quad m=۱,۲,\ldots,N(\varepsilon)-۱.$$

می‌نویسیم $M(\varepsilon)=\sup\{N(\varepsilon), K(\varepsilon)\}$ و نتیجه می گیریم که هرگاه $n\geqslant M(\varepsilon)$، به‌ازای تمام مقادیر m داریم

$$\|x_{mn}-y_m\|<۲\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که همگرایی دنباله‌های $\{Y_m:m\in\mathbf{N}\}$ یکنواخت است. □

لم قبل نشان می‌دهد که، تحت فرض همگرایی دنباله‌های Y_m، همگرایی یکنواخت

این دسته از دنباله‌ها شرطی لازم برای وجود حد دوگانه است. حال نتیجه‌ای در جهت عکس این لم ثابت می‌کنیم.

۱۰.۱۹ قضیهٔ حد مکرر . فرض‌کنیم حدهای سادهٔ

$$y_m = \lim_n(x_{mn}) \ , \quad z_n = \lim_m(x_{mn}).$$

به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{N}$ وجود دارند و همگرایی یکی از این دو دسته یکنواخت است. دراین صورت هر دو حد مکرر و حد دوگانه وجود دارند و هر سه با هم برابرند.

برهان . فرض می‌کنیم همگرایی دستهٔ $\{Y_m : m \in \mathbf{N}\}$ یکنواخت باشد. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عددی طبیعی مانند $N(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که هرگاه $n \geqslant N(\varepsilon)$، برای تمام اعداد طبیعی m داریم

$$\|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon. \qquad (۳.۱۹)$$

برای اثبات وجود $\lim(y_m)$ ، عدد ثابت $q \geqslant N(\varepsilon)$ را اختیار می‌کنیم . چون $z_q = \lim(x_{rq} : r \in \mathbf{N})$ وجود دارد، درمی‌یابیم که اگر $r,\ s \geqslant R(\varepsilon,\ q)$، آنگاه

$$\|y_r - y_s\| \leqslant \|y_r - x_{rq}\| + \|x_{rq} - x_{sq}\| + \|x_{sq} - y_s\| < ۳\varepsilon.$$

بنابراین، (y_r) یك‌دنبالهٔ کوشی است و به‌عنصری مانند y در $\mathbf{R}^p$ همگراست . این وجود حد مکرر

$$y = \lim_m(y_m) = \lim_n \lim_m(x_{mn})$$

را به‌ثبوت می‌رساند .

اکنون نشان می‌دهیم که حد دوگانه وجود دارد. گوییم چون $y = \lim(y_m)$ ، پس به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده عددی مانند $M(\varepsilon)$ هست به‌قسمی که اگر $m \geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه $\|y_m - y\| < \varepsilon$. با فرض $K(\varepsilon) = \sup\{N(\varepsilon)\ ,\ M(\varepsilon)\}$، دوباره از (۳.۱۹) استفاده‌کرده نتیجه می‌گیریم که اگر $m, n \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه

$$\|x_{mn} - y\| \leqslant \|x_{mn} - y_m\| + \|y_m - y\| < ۲\varepsilon.$$

این ثابت می‌کند که حد دوگانه وجود دارد و برابر y است.

بالاخره، برای نشان‌دادن وجود حد مکرر دیگر و برابری آن با y ، می‌توان از قضیهٔ ۶.۱۹ یا نتیجهٔ آن استفاده‌کرد. □

باآنکه در برهانی که در چند سطر بالاآمده است از وجود حدهای سادهٔ هردو

دسته و همچنین یکنواختی همگرایی یکی از آنها استفاده شده است، ممکن است حدس بزنید که نتیجه را می‌توان از وجود (و یکنواختی) حدهای سادهٔ فقط یکی از دسته‌ها نیز به‌دست آورد. تحقیق درستی یا نادرستی این حدس به خواننده محول می‌شود.

تمرین

۱۹. الف. صحت روابط زیر را تحقیق کنید:

(الف) $(n^2+2)\sim(n^2-3)$، (ب) $(n^2+2)=o(n^3)$،

(پ) $((-1)^n n^2)=O(n^2)$، (ت) $((-1)^n n^2)=o(n^3)$،

(ث) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sim(1/2\sqrt{n})$، (ج) $(\sin n)=O(1)$.

۱۹. ب. فرض کنید X، Y، و Z دنباله‌هایی با عناصر مخالف صفر باشند. نشان دهید که:

(الف) $X\sim X$.

(ب) اگر $X\sim Y$، آنگاه $Y\sim X$.

(پ) اگر $X\sim Y$ و $Y\sim Z$ آنگاه، $X\sim Z$.

۱۹. پ. چنانچه $X_1=O(Y)$ و $X_2=O(Y)$، نتیجه بگیرید که

$$X_1\pm X_2=O(Y)$$

و آن‌را در «معادله» زیر خلاصه کنید.

(الف) $O(Y)\pm O(Y)=O(Y)$. تعبیرهای مشابهی برای معادلات زیر ارائه داده آنها را ثابت کنید.

(ب) $o(Y)\pm o(Y)=o(Y)$.

(پ) هرگاه $c\neq 0$، آنگاه $o(cY)=o(Y)$ و $O(cY)=O(Y)$.

(ت) $O(o(Y))=o(Y)$ ، $o(O(Y))=o(Y)$.

(ث) $O(X)O(Y)=O(XY)$، $O(X)o(Y)=o(XY)$، $o(X)o(Y)=o(XY)$.

۱۹. ت. نشان دهید که $X=o(Y)$ و $Y=o(X)$ با هم نمی‌توانند برقرار باشند. دو دنبالهٔ X و Y مثال بزنید به‌قسمی که $X=O(Y)$ ولی $Y\neq O(X)$.

۱۹. ث. هرگاه X یک دنبالهٔ یکنوا در $\mathbf{R}$ باشد، نشان دهید که دنبالهٔ میانگینهای حسابی آن نیز یکنواست.

۱۹. ج. هرگاه $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ و (σ_n) دنبالهٔ میانگینهای حسابی آن باشد، نشان دهید که $\limsup(\sigma_n)\leqslant\limsup(x_n)$، مثالی بزنید که در آن نابرابری برقرار باشد.

۱۹. چ. در صورتی که $X=(x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد، آیا (σ_n) یک دنبالهٔ صعودی است؟

۱۹. ح. نشان دهید که اگر دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ جمع‌پذیر چزارو باشد، آنگاه $X=o(n)$. (راهنمایی: $x_n=n\sigma_n-(n-۱)\sigma_{n-۱}$.)

۱۹. خ. فرض کنید X یک دنبالهٔ یکنوا در $\mathbf{R}$ باشد. آیا این درست است که X جمع‌پذیر و چزارو است اگر وفقط اگر همگرا باشد؟

۱۹. د. قضیهٔ ۱۹.۵ را ثابت کنید.

۱۹. ذ. وجود حد دوگانه وحدهای مکرر دنباله‌های دوگانهٔ (x_{mn}) را که در آن x_{mn} به‌صورتهای زیر داده‌شده بررسی نمایید:

(الف) $(-۱)^{m+n}$، (ب) $\dfrac{۱}{m+n}$، (پ) $\dfrac{۱}{m}+\dfrac{۱}{n}$،

(ت) $\dfrac{m}{m+n}$، (ث) $(-۱)^m\left(\dfrac{۱}{m}+\dfrac{۱}{n}\right)$، (ج) $\dfrac{mn}{m^۲+n^۲}$.

۱۹. ر. آیا یک دنبالهٔ دوگانهٔ همگرا کراندار است؟

۱۹. ز. هرگاه $X=(x_{mn})$ یک دنبالهٔ دوگانه همگرا از اعداد حقیقی باشد، و به‌ازای هر $m\in\mathbf{N}$، حد $y_m=\limsup_n(x_{mn})$ وجود داشته‌باشد، داریم

$$\lim_{mn}(x_{mn})=\lim_m(y_m).$$

۱۹. ژ. درتمرین ۱۹. ذ درکدامیک از دنباله‌های دوگانه، دستهٔ

$$\{Y_m=\lim(x_{mn}):m\in\mathbf{N}\}$$

به‌طور یکنواخت همگرااست.

۱۹. س. فرض کنید $X=(x_{mn})$ یک دنبالهٔ دوگانه کراندار در $\mathbf{R}$ باشد با این خاصیت که، به‌ازای هر $m\in\mathbf{N}$، دنبالهٔ $Y_m=(x_{mn}:n\in\mathbf{N})$ صعودی یکنوا، و به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، دنبالهٔ $Z_n=(x_{mn}:m\in N)$ صعودی یکنوا باشد. آیا درست است که حدهای مکرر وجود دارند و برابرند؟ آیا به وجود حد دوگانه نیاز است؟

۱۹. ش. در مسئله‌ای که درآخرین پاراگراف این‌بخش مطرح‌شد، بحث نمایید.

فصل چهارم

توابع پیوسته

حال مطالعهٔ خود را درمهمترین‌ردهٔ توابع درآنالیز ــ یعنی توابع‌پیوسته ــ آغازمی‌کنیم. دراین فصل نتایج فصلهای دوم و سوم را درهم آمیخته محصولی غنی از قضایا برداشت می‌کنیم که از عمق و سودمندی قابل ملاحظه‌ای برخوردارند.

دربخش ۲۰ مفهوم پیوستگی معرفی می‌شود ومورد بررسی قرار می‌گیرد. دربخش ۲۱ ردهٔ مهم توابع خطی را معرفی می‌کنیم. دربخش بنیادی ۲۲ خواص توابع پیوسته درمجموعه‌های فشرده و همبند بررسی می‌شود و دربخش ۲۳ مفهوم پیوستگی یکنواخت مطرح می‌گردد. نتایج این چهار بخش تا پایان‌کتاب بارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. دنباله‌های توابع پیوسته را دربخش ۲۴، و حدهای بالا و پایین را در بخش ۲۵ مطالعه خواهیم کرد. دربخش آخر چند نتیجهٔ جالب و مهم عرضه خواهد شد، اما این نتایج دربخشهای بعدی این‌کتاب به‌کار نخواهند رفت.

فرض نشده است که خواننده با بحثی دقیق درمبحث توابع پیوسته آشنایی قبلی دارد. با این‌حال دربعضی از مثالها و تمرینها از توابع نمایی، لگاریتم، و مثلثاتی برای ذکر مثالهایی آموزنده استفاده می‌کنیم.

بخش ۲۰ خواص موضعی توابع پیوسته

فرض ما این خواهد بود که f تابعی است به دامنهٔ $D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ و برد $R(f)$ در $\mathbf{R}^q$. درحالت‌کلی $D(f)$ را برابر $\mathbf{R}^p$ ویا q رابرابر p فرض‌نخواهیم‌کرد. درآغازپیوستگی را برحسب همسایگیها تعریف می‌کنیم و سپس به‌ذکر چند تعریف دیگر به‌عنوان شرطهای لازم وکافی می‌پردازیم.

۱.۲۰ تعریف. اگر $a\in D(f)$، آنگاه می‌گوییم f در a **پیوسته** است اگر به‌ازای هر همسایگی $f(a)$ مانند V یك همسایگی a مانند U (وابسته به V) وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر عنصر دلخواه $U\cap D(f)$ مانند x، $f(x)$ عنصری از V باشد (ر.ك. شکل ۱.۲۰). هرگاه $A\subseteq D(f)$، می‌گوییم f **در** A **پیوسته** است درصورتی که f درهرنقطهٔ A پیوسته باشد.

گاهی گفته می‌شود که تابع پیوسته‌تابعی است که «نقاط مجاور را به‌نقاط مجاور می‌فرستد.» این تعبیر شهودی را نباید به‌کار برد، زیرا این فکر را القا می‌کند که تصویر یك همسایگی a یك همسایگی $f(a)$ است. (تابع $|x| \longrightarrow x$ را در $x=0$ درنظر بگیرید.)

حال به‌ذکر دوگزارهٔ هم‌ارز، که می‌توانستیم از آنها به‌عنوان تعریف استفاده کنیم، می‌پردازیم.

۲.۲۰ قضیه. فرض کنیم a نقطه‌ای باشد در $D(f)$، دامنهٔ تابع f، دراین‌صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) f در a پیوسته است؛

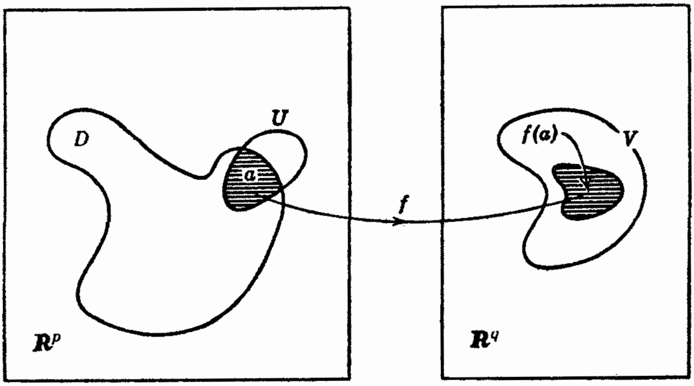
(ب) برای هرعدد $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ هست به‌قسمی که اگر x در $D(f)$ باشد و $\|x-a\|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$.

(پ) اگر (x_n) دنباله‌ای از عناصر $D(f)$ و به a همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $(f(x_n))$ به $f(a)$ همگراست.

برهان. فرض کنیم (الف) برقرار باشد و $\varepsilon>0$. دراین صورت گوی $V_\varepsilon=\{y\in\mathbf{R}^q : \|y-f(a)\|<\varepsilon\}$ یك همسایگی نقطهٔ $f(a)$ است. بنابر تعریف ۱.۲۰ یك همسایگی a مانند U هست بدقسمی که اگر $x\in U\cap D(f)$ آنگاه $f(x)\in V_\varepsilon$. چون U یك همسایگی a است، عددی حقیقی و مثبت مانند $\delta(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که گوی باز به‌شعاع $\delta(\varepsilon)$ و مرکز a تماماً در U واقع باشد. بنابراین (الف) شرط (ب) را ایجاب می‌کند.

فرض کنید (ب) برقرار باشد و (x_n) دنباله‌ای از عناصر $D(f)$ باشد که به a همگراست. بافرض $\varepsilon>0$ وبا استفاده‌ازشرط (ب) عددی‌مانند $\delta(\varepsilon)>0$ با خاصیت‌مذکور در (ب) به‌دست می‌آید. به‌علت همگرایی (x_n) به a، عددی طبیعی مانند $N(\delta(\varepsilon))$ هست به‌قسمی که اگر $n\geqslant N(\delta(\varepsilon))$، آنگاه $\|x_n-a\|<\delta(\varepsilon)$. چون هر $x_n\in D(f)$، از (ب) نتیجه می‌شود که $\|f(x_n)-f(a)\|<\varepsilon$، که برقراری (پ) را ثابت می‌نماید.

بالاخره، با برهان خلف نشان می‌دهیم که هرگاه شرط (الف) برقرار نباشد، شرط (پ) نیز برقرار نیست. گوییم هرگاه (الف) درست نباشد، یك همسایگی $f(a)$ مانند



شکل ۱.۲۰

$V_\circ$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر همسایگی a مانند U عنصری مانند x_U متعلق به $D(f)\cap U$ هست به‌طوری که $f(x_U)$ به $V_\circ$ متعلق نیست. حال به‌ازای هر عدد طبیعی n همسایگی a را که به‌صورت $U_n=\{x\in\mathbf{R}^p : \|x-a\|<1/n\}$ تعریف شده؛ درنظر می گیریم. با توجه به‌عبارت‌قبل، به‌ازای‌هر n در $\mathbf{N}$ عنصری‌مانند x_n متعلق‌به $D(f)\cap U_n$ هست به‌طوری که $f(x_n)$ به $V_\circ$ متعلق نیست. دنبالهٔ (x_n) که بدین‌ترتیب ساخته شد به $D(f)$ متعلق است و به a همگراست، درحالی که هیچیك از عناصر دنبالهٔ $(f(x_n))$ به $V_\circ$، همسایگی $f(a)$، تعلق ندارد. از این‌رو دنباله‌ای ساخته‌ایم که برای آن شرط (پ) برقرار نیست. این نشان می‌دهد که (پ) قسمت (الف) را ایجاب می کند. □

محك ناپیوستگی مفید زیر نتیجه‌ای است از آنچه هم‌اکنون به‌دست آمد.

۳.۲۰ محك ناپیوستگی. تابع f دریك نقطهٔ $D(f)$ مانند a پیوسته نیست اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند (x_n) از عناصر $D(f)$ وجود داشته باشد که به a همگرا باشد و $(f(x_n))$، دنبالهٔ تصویرها، به $f(a)$ همگرا نباشد.

قضیهٔ زیرشکل سادهٔ دیگری از تعریف پیوستگی است. به‌یاد می‌آوریم که در تعریف ۱۲.۲، $f^{-1}(H)$، **تصویر وارون** H تحت f، را با این فرض که H یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^q$ است، به‌صورت

$$f^{-1}(H)=\{x\in D(f) : f(x)\in H\}$$

تعریف کرده‌ایم.

۴.۲۰ قضیه. تابع f دریک نقطهٔ $D(f)$ مانند a پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر همسایگی $f(a)$ مانند V یك همسایگی a مانند V_1 باشد به‌قسمی که

$$V_1 \cap D(f) = f^{-1}(V). \qquad (۱.۲۰)$$

برهان. چنانچه V_1 یك همسایگی a باشد که دراین معادله صدق کند، می‌توانیم U را برابر V_1 بگیریم. بعکس، هرگاه تعریف ۱.۲۰ برقرار باشد، V_1 را برابر $U \cap f^{-1}(V)$ اختیار می‌کنیم تا معادلهٔ (۱.۲۰) به‌دست آید. □

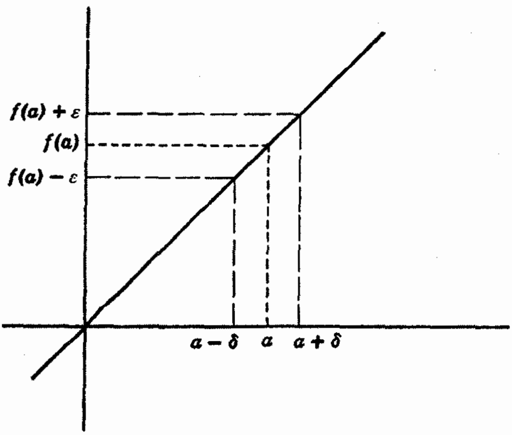
قبل‌از اینکه درنظریهٔ توابع پیوسته جلوتر برویم، به‌ذکر چندمثال می‌پردازیم. برای سهولت، بیشتر مثالها را درحالت $\mathbf{R}^p = \mathbf{R}^q = \mathbf{R}$ می‌آوریم.

۵.۲۰ چندمثال. (الف) فرض‌کنیم $D(f) = \mathbf{R}$ و f تابع «ثابت» باشد که به‌ازای کلیهٔ اعداد حقیقی x مقدار آن برابر عدد حقیقی c است. دراین‌صورت f درهر نقطهٔ $\mathbf{R}$ پیوسته است؛ در واقع می‌توان همسایگی U درتعریف ۱.۲۰ درهر نقطهٔ $D(f)$ مانند a را برابر با $\mathbf{R}$ اختیارکرد. به‌همین‌نحو، تابع g که با

$$\begin{aligned} g(x) &= ۱ \ , \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ &= ۲ \ , \quad ۲ \leqslant x \leqslant ۳ \end{aligned}$$

تعریف شده است، درهرنقطهٔ دامنه‌اش پیوسته است.

(ب) فرض‌کنیم $D(f) = \mathbf{R}$ و f تابع «همانی» باشد که با $f(x) = x$، به‌ازای $x \in \mathbf{R}$، تعریف شده است. (ر.ك. شکل ۲.۲۰) چنانچه عدد حقیقی a داده شده باشد،



شکل ۲.۲۰

فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ و می‌نویسیم $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. دراین‌صورت اگر $|x-a|<\delta(\varepsilon)$، داریم $|f(x)-f(a)|=|x-a|<\varepsilon$.

(پ) فرض کنیم $D(f)=\mathbf{R}$ و تابع f به‌صورت $f(x)=x^2$ ، به‌ازای $x\in\mathbf{R}$ ، تعریف شده باشد . فرض می‌کنیم a به $\mathbf{R}$ متعلق باشد و $\varepsilon>0$. دراین صورت $|f(x)-f(a)|=|x^2-a^2|=|x-a||x+a|$.می‌خواهیم $|x-a|$ را آنقدر کوچك بگیریم که این عبارت‌از ε کوچکتر شود. اگر $a=0$ ، آنگاه $\delta(\varepsilon)$ را برابر $\sqrt{\varepsilon}$ انتخاب می کنیم. اگر $a\neq 0$ ، لازم است که برای $|x+a|$ دریکی از همسایگیهای a کرانی بیابیم. برای مثال، اگر $|x-a|<|a|$ ، آنگاه $2|a|>|x|>0$ و $|x+a|\leqslant|x|+|a|<3|a|$.بنابراین

$$|f(x)-f(a)|\leqslant 3|a|\,|x-a| \tag{2.20}$$

به‌شرط آنکه $|x-a|<|a|$. لذا ، هرگاه $\delta(\varepsilon)$ را $\delta(\varepsilon)=\inf\{|a| ، \varepsilon/3|a|\}$ بگیریم ، وقتی $|x-a|<\delta(\varepsilon)$ ، نابرابری (۲.۲۰) برقرار است و داریم $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

(ت) همان تابع مثال (پ) را درنظر می‌گیریم اما روشی به‌کار می‌بریم که باروش بالاکمی متفاوت است. به‌جای تجزیه کردن x^2-a^2 ، آن‌را به‌صورت یك چندجمله‌ای از $x-a$ می‌نویسیم:

$$x^2-a^2=(x^2-2ax+a^2)+(2ax-2a^2)=(x-a)^2+2a(x-a)\,.$$

با استفاده از نابرابری مثلثی، داریم

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|x-a|^2+2|a|\,|x-a|\,.$$

اینك اگر $\delta\leqslant 1$ و $|x-a|<\delta$ ، آنگاه $|x-a|^2\leqslant\delta^2\leqslant\delta$ و جملهٔ سمت راست از $\delta+2|a|\delta=\delta(1+2|a|)$ کوچکتر ویا مساوی با آن می‌شود. بنابراین به‌این نتیجه می‌رسیم که $\delta(\varepsilon)$ را

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1 ، \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$$

اختیار کنیم.

(ث) $D(f)=\{x\in\mathbf{R} : x\neq 0\}$ را درنظر گرفته فرض می‌کنیم f به‌صورت $f(x)=1/x$ ، به‌ازای $x\in D(f)$ ، تعریف شده باشد. هرگاه $a\in D(f)$،

$$|f(x)-f(a)|=|1/x-1/a|=\frac{|x-a|}{|ax|}\,.$$

باز می‌خواهیم برای ضریب $|x-a|$ دریکی از همسایگیهای $a\neq 0$ کرانی بیابیم . ملاحظه می‌کنیم که اگر $|x-a|<\frac{1}{2}|a|$ ، آنگاه $\frac{1}{2}|a|<|x|$ ، و داریم

$$|f(x)-f(a)|\leqslant\frac{۲}{|a|^{۲}}|x-a|\,.$$

لذا به‌این نتیجه می‌رسیم که $\delta(\varepsilon)$ را $inf\left\{\frac{۱}{۲}|a|,\ \frac{۱}{۲}\varepsilon|a|^{۲}\right\}$ بگیریم.

(ج) فرض کنیم تابع f در $D(f)=\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

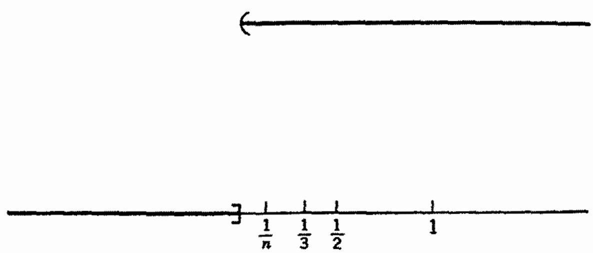
$$f(x)=۰\ ,\ x\leqslant ۰\ ,$$
$$=۱\ ,\ x>۰\ .$$

می‌توان دید که f درتمام نقاط $a\neq ۰$ پیوسته است. با استفاده از محك ناپیوستگی ۳۰۲۰ نشان‌می‌دهیم که f در ۰ پیوسته‌نیست. درواقع، هرگاه $x_n=۱/n$، دنبالهٔ $(f(۱/n))=۱$ به $f(۰)$ همگرا نیست. (ر. ك. شکل ۳۰۲۰)

(چ) فرض کنیم $D(f)=\mathbf{R}$ و f تابع ناپیوستهٔ دیریکله[1] باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

هرگاه x گویا باشد	$f(x)=۱$
هرگاه x اصم باشد	$=۰$

با این فرض که a یك عددگویا است، $X=(x_n)$ را دنباله‌ای از اعداد اصم می‌گیریم که به a همگرا باشد. (قضیهٔ ۱۰۰۶ وجود چنین‌دنباله‌ای را تضمین می‌کند.) چون به‌ازای‌هر $n\in\mathbf{N}$، $f(x_n)=۰$، پس دنبالهٔ $(f(x_n))$ بـه $f(a)=۱$ همگـرا نیست و f درنقطهٔ گویای a پیوسته نمی‌باشد. از سوی دیگر، هرگاه b یك عدد اصم بـاشد، دنباله‌ای مانند $Y=(y_n)$ از اعداد گویا و همگرا به b وجود دارد. دنبالهٔ $(f(y_n))$ به $f(b)$ همگرا نیست. بنابراین f در b پیوسته نیست. لذا تابع دیریکله درهیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.



شکل ۳۰۲۰

---

۱. پتر گوستاولـژن دیریکله Peter Gustav Lejeune Dirichlet (۱۸۵۹-۱۸۰۵) در رینلند متولد شد و پس‌از تدریس قـریب به سی سال در برلین، به‌عنوان جانشین گاوس به گوتینگن رفت. او درنظریهٔ اعداد و آنالیز کارهایی بنیادی انجام داده است.

(ح) فرض کنیم $D(f)=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$. به‌ازای هرعدد اصم $x>0$، تعریف می‌کنیم $f(x)=0$ و برای هرعدد گویا به‌شکل m/n ، که در آن m و n دوعدد طبیعی هستند و بجز ۱ عامل مشترکی ندارند، تعریف می‌کنیم $f(m/n)=1/n$. نشان مـی‌دهیم که f درهرعدد اصم در $D(f)$ پیوسته و درهرعدد گویا در $D(f)$ ناپیوسته است. حکم اخیر با انتخاب یك دنباله از اعداد اصم که به عددگویای داده شده میل کند و با استفاده از محك ناپیوستگی ، نتیجه مـی‌شود. حال فرض کنیم a یك عدد اصم باشد و $\varepsilon>0$. دراین‌صورت عددی طبیعی مانند n هست به‌قسمی که $1/n<\varepsilon$. گوییم هرگاه δ آن‌قدر کوچك اختیار شود که فاصلهٔ $(a-\delta \text{ ، } a+\delta)$ شامل هیچ عددگویای بامخرج کمتراز n نباشد ، برای xهای دراین فاصله داریم $|f(x)-f(a)|=|f(x)|\leqslant 1/n<\varepsilon$. پس f درعدد اصم a پیوسته است. بنابراین این تابع تنها درنقاط اصم دامنهٔ خود پیوسته است.

(خ) این‌بارفرض می‌کنیم $D(f)=\mathbf{R}^2$ و f تابعی باشد در $\mathbf{R}^2$ با مقادیر در $\mathbf{R}^2$ که به‌صورت

$$f(x \text{ ، } y)=(2x+y \text{ ، } x-3y)$$

تعریف شده است. فرض کنیم $(a \text{ ، } b)$ نقطهٔ ثابتی در $\mathbf{R}^2$ باشد. نشان می‌دهیم که f دراین نقطه پیوسته است. برای این منظور باید نشان دهیم که اگر $(x \text{ ، } y)$ به‌قدرکافی نزدیك به $(a \text{ ، } b)$ انتخاب شود عبارت

$$\|f(x \text{ ، } y)-f(a \text{ ، } b)\|=\{(2x+y-2a-b)^2+(x-3y-a+3b)^2\}^{1/2}$$

بدلخواه کوچك می‌شود. چـون $\{p^2+q^2\}^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\sup\{|p| \text{ ، } |q|\}$ ، کافی است نشان دهیم که اگر در $\mathbf{R}^2$ ، $(x \text{ ، } y)$ به‌قدرکافی نزدیك‌به $(a \text{ ، } b)$ انتخاب شود، عبارات

$$|2x+y-2a-b| \text{ ، } |x-3y-a+3b| \text{ ،}$$

بدلخواه کوچك می‌شوند. در واقع، بنابر نابرابری مثلثی،

$$|2x+y-2a-b|=|2(x-a)+(y-b)|\leqslant 2|x-a|+|y-b|.$$

حال‌می‌توان‌نوشت $|x-a|\leqslant\{(x-a)^2+(y-b)^2\}^{1/2}=\|(x \text{ ، } y)-(a \text{ ، } b)\|$، و به‌همین‌ترتیب برای $|y-b|$. درنتیجه داریم

$$|2x+y-2a-b|\leqslant 3\|(x \text{ ، } y)-(a \text{ ، } b)\| .$$

به‌همین نحو،

$$|x-3y-a+3b|\leqslant|x-a|+3|y-b|\leqslant 4\|(x, y)-(a \text{ ، } b)\| .$$

بنابراین، هرگاه $\varepsilon>0$ ، می‌توان $\delta(\varepsilon)$ را برابر $\varepsilon/(4\sqrt{2})$ گرفت و مطمئن بود که اگر $\|(x, y)-(a, b)\|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $\|f(x, y)-f(a, b)\|<\varepsilon$، هرچندکه باتحلیلی دقیقتر (مثلاً، بااستفاده ازنابرابری شوارتس ۷.۸) می‌توان به‌مقدار بزرگتری از δ دست یافت.

(د) مجدداً فرض می‌کنیم $D(f)=\mathbf{R}^{۲}$ و f به‌صورت

$$f(x,\ y)=(x^{۲}+y^{۲},\ ۲xy)$$

تعریف شده باشد. هرگاه $(a,\ b)$ نقطهٔ ثابتی در $\mathbf{R}^{۲}$ باشد،

$$\|f(x,\ y)-f(a,\ b)\|=\{(x^{۲}+y^{۲}-a^{۲}-b^{۲})^{۲}+(۲xy-۲ab)^{۲}\}^{۱/۲}\ .$$

همانطور که در (خ) عمل کردیم، دوجملهٔ سمت راست را جداگانه برآورد می‌کنیم. خواهید دید که به‌برآوردهای مقدماتی مقادیر این دوجمله احتیاج داریم. برای این‌منظور نابرابری مثلثی را به‌کار برده می‌نویسیم:

$$|x^{۲}+y^{۲}-a^{۲}-b^{۲}|\leqslant|x^{۲}-a^{۲}|+|y^{۲}-b^{۲}|\ .$$

هرگاه دوری نقطهٔ $(x,\ y)$ تا $(a,\ b)$ نابیشتر از ۱ باشد، $|x|\leqslant|a|+۱$، لذا $|x+a|\leqslant ۲|a|+۱$ و $|y|\leqslant|b|+۱$، درنتیجه $|y+b|\leqslant ۲|b|+۱$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}|x^{۲}+y^{۲}-a^{۲}-b^{۲}|&\leqslant|x-a|(۲|a|+۱)+|y-b|(۲|b|+۱)\\&\leqslant ۲(|a|+|b|+۱)\|(x,\ y)-(a,\ b)\|.\end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، داریم

$$\begin{aligned}xy-۲ab|=۲|xy-xb+xb-ab|&\leqslant ۲|x|\ |y-b|+۲|b|\ |x-a|\\&\leqslant ۲(|a|+|b|+۱)\|(x,\ y)-(a,\ b)\|.\end{aligned}$$

بنابراین می‌نویسیم

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{۱,\ \frac{\varepsilon}{۲\sqrt{۲}(|a|+|b|+۱)}\right\};$$

هرگاه $\|(x,\ y)-(a,\ b)\|<\delta(\varepsilon)$، داریم $\|f(x,\ y)-f(a,\ b)\|<\varepsilon$، که‌پیوستگی f را درنقطهٔ $(a,\ b)$ ثابت می‌کند.

ترکیبهای توابع

قضیهٔ زیرنتیجهٔ مستقیمی از قضایای ۶.۱۵ و ۲.۲۰ (پ) است، ولذا جزئیات آن‌را بیان نخواهیم کرد. این قضیه را همچنین می‌توان مستقیماً و با استفاده از استدلالهایی کاملاً مشابه با آنچه دراثبات قضیهٔ ۶.۱۵ آمده است اثبات نمود. به‌یاد می‌آوریم که اگر f و g توابعی باشند که دامنه‌هایشان $D(f)$ و $D(g)$ در $\mathbf{R}^{p}$ و بردهایشان در $\mathbf{R}^{q}$ هستند، آنگاه **مجموع** $f+g$، **تفاضل** $f-g$ و **حاصلضرب داخلی** $f\cdot g$ آنها به‌ازای هر x در $D(f)\cap D(g)$ با فرمولهای

$$f(x)+g(x), \qquad f(x)-g(x), \qquad f(x)\cdot g(x)$$

تعریف می‌شوند. به‌همین نحو، هرگاه c یك عدد حقیقی و φ تابعی باشد به دامنهٔ $D(\varphi)$ در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}$، حاصلضربهای cf به‌ازای xهای در $D(f)$ و φf به ازای xهای در $D(\varphi)\cap D(f)$ را با فرمولهای

$$cf(x), \qquad \varphi(x)f(x)$$

تعریف می کنیم. بخصوص، هرگاه به‌ازای هر $x\in D_\circ$، $\varphi(x)\neq \circ$، **خارج قسمت** f/φ را می‌توان به‌ازای هر x در $D(f)\cap D_\circ$ به‌صورت

$$f(x)/\varphi(x)$$

تعریف نمود.

حال، باتوجه به‌این تعاریف به‌بیان قضیهٔ زیر می‌پردازیم.

قضیهٔ ۶.۲۰. اگـر توابـع f، g، و φ درنقطهٔ a پیوسته باشند، آنگاه ترکیبهای جبری

$$f+g, \; f-g, \; f\cdot g, \; cf, \; \varphi f \text{ و } f/\varphi$$

نیز دراین نقطه پیوسته‌اند.

ترکیب جبری دیگری نیزهست که اغلب مورد استفاده قرار می گیرد. هرگاه f در $D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد، $|f|$، **قدرمطلق** f را تابعی تعریف می کنیم کـه بردش در $\mathbf{R}$ ومقدارش درهرنقطهٔ $D(f)$ مانند x برابر $|f(x)|$ است.

۷.۲۰ قضیه. هـرگاه f درنقطهٔ a پیوسته بـاشد، $|f|$ نیز درایـن نقطه پیوسته است.

برهان. از نابرابری مثلثی داریم

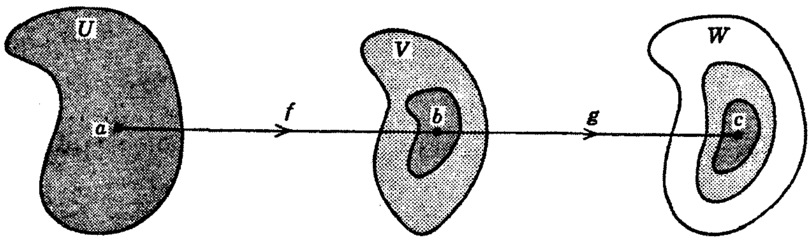
$$\big||f(x)|-|f(a)|\big| \leqslant |f(x)-f(a)|\,.$$

از این رابطه نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. □

مفهوم ترکیب دوتابع را به‌خاطر می‌آوریم. فـرض‌کنیم دامنهٔ $D(f)$ تابع f در $\mathbf{R}^p$ و برد f در $\mathbf{R}^q$ باشدو $D(g)$، دامنهٔ g در $\mathbf{R}^q$ و برد g در $\mathbf{R}^r$ باشد. در تعریف ۲.۲ ترکیب $h=g\circ f$ را تابعی تعریف کردیم که‌دامنه‌اش $D(h)=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}$ است و به‌ازای هـر x در $D(h)$ داریـم $h(x)=g[f(x)]$. بنابراین $h=g\circ f$ تابعی است که $D(h)$ را، که زیرمجموعه‌ای از $D(f)\subseteq \mathbf{R}^p$ است، در $\mathbf{R}^r$ می‌نگارد. حـال پیوستگی این تابع را بررسی می کنیم.

۸.۲۰ قضیه. هرگاه f در a و g در $b=f(a)$ پیوسته باشند، ترکیب $g\circ f$ در a پیوسته است.

برهان. فرض کنیم W یك همسایگی نقطهٔ $c=g(b)$ باشد. چون g در b پیوسته است، یك همسایگی b مانند V وجود دارد به‌قسمی که هرگاه y به $V\cap D(g)$ متعلق باشد، $g(y)\in W$. چون f در a پیوسته است، یك‌همسایگی a مانند U وجود دارد به‌قسمی که هرگاه x به $U\cap D(f)$ متعلق باشد، $f(x)$ در V است. بنابراین هرگاه x به $U\cap D(g\circ f)$ متعلق باشد، $f(x)$ در $V\cap D(g)$ و $g[f(x)]$ به W متعلق است. (ر. ك. شکل ۴.۲۰) این نشان می‌دهد که $h=g\circ f$ در a پیوسته است. □



شکل ۴.۲۰

تمرین

۲۰.الف. ثابت کنید هرگاه f به‌ازای $x\geqslant 0$ با $f(x)=\sqrt{x}$ تعریف شده باشد، f درهر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

۲۰.ب. نشان دهید که «تابع چندجمله‌ای»؛ یعنی، تابعی مانند f به‌شکل

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0,\ x\in\mathbf{R}$$

درهر نقطهٔ $\mathbf{R}$ پیوسته است.

۲۰.پ. نشان‌دهید که «تابع گویا» (یعنی، خارج قسمت دوتابع چندجمله‌ای) درهر نقطه‌ای که تعریف شده باشد پیوسته است.

۲۰.ت. با استفاده از نابرابری شوارتس نشان‌دهید که درمثال ۵.۲۰ (خ) می‌توان $\delta(\varepsilon)$ را برابر $\varepsilon/\sqrt{15}$ اختیار کرد.

۲۰.ث. فرض کنید f تابعی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} f(x)&=x && \text{اصم } x,\\ &=1-x && \text{گویا } x. \end{aligned}$$

نشان دهید که f در $x=1/2$ پیوسته و دربقیهٔ نقاط ناپیوسته است.

۲۰.ج. فرض‌کنید f در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ پیوسته باشد. نشان دهیدکه اگر به‌ازای هر x گویا، $f(x)=0$، آنگاه به‌ازای هر x حقیقی، $f(x)=0$.

۲۰.چ. فرض‌کنید f و g در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ پیوسته باشند. آیا درست است که $f(x)=g(x)$ به‌ازای‌هر $x\in\mathbf{R}$، اگر وفقط اگر $f(y)=g(y)$ به‌ازای هرعددگویای $y\in\mathbf{R}$ ؟

۲۰.ح. با استفاده از نابرابری $|\sin x|\leqslant|x|$ به‌ازای $x\in\mathbf{R}$، نشان‌دهیدکه‌تابع سینوسی در $x=0$ پیوسته است. با استفاده ازاین مطلب و اتحاد

$$\sin x-\sin u=2\sin\frac{1}{2}(x-u)\cos\frac{1}{2}(x+u),$$

ثابت کنیدکه تابع سینوسی درهر نقطهٔ $\mathbf{R}$ پیوسته است.

۲۰.خ. با استفاده از نتایج تمرین قبل، نشان دهیدکه تابع g که در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ به‌صورت

$$\begin{aligned} g(x)&=x\sin(1/x), && x\neq 0,\\ &=0, && x=0, \end{aligned}$$

تعریف شده درهر نقطه پیوسته است. نمودار این تابع را رسم‌کنید.

۲۰.د. فرض‌کنید h به‌ازای $x\in\mathbf{R}$ با شرط $x\neq 0$ به‌صورت

$$h(x)=\sin(1/x)$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که h هرطور در $x=0$ تعریف شود، در $x=0$، ناپیوسته است.

۲۰.ذ. فرض‌کنید $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x,y)=x^2+y^2 \quad \text{،} \quad \text{هرگاه } x,y\in Q$$
$$=0 \qquad \text{درغیر این‌صورت}$$

نقاطی راکه درآنها F پیوسته است تعیین‌کنید.

۲۰.ر. گوییم تابع f در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ **جمعی** است هرگاه f در رابطهٔ

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

به‌ازای هر $x, y\in\mathbf{R}$ صدق کند. نشان دهید که اگر تابع جمعی در $x=0$ پیوسته باشد درهرنقطهٔ $\mathbf{R}$ پیوسته است. نشان دهیدکه تابع جمعی یکنوا درهرنقطه پیوسته است.

۲۰.ز. فرض‌کنید f یك تابع جمعی پیوسته در $\mathbf{R}$ باشد. هرگاه $c=f(1)$، نشان دهیدکه به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$، $f(x)=cx$. (راهنمایی: ابتدا نشان‌دهید که هرگاه r عددی گویا باشد، $f(r)=cr$.)

۲۰.ژ. فرض‌کنید $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در رابطهٔ

$$g(x+y)=g(x)g(y)$$

به‌ازای $x, y\in\mathbf{R}$ صدق کند، نشان‌دهید که هرگاه g در $x=0$ پیوسته‌باشد، g درهر نقطه پیوسته است. همچنین، اگر به‌ازای یک $a\in\mathbf{R}$، $g(a)=0$، آنگاه به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$، $g(x)=0$.

۲۰.س. اگر $|f|$ دریك نقطه پیوسته باشد، آیا f نیز دراین نقطه پیوسته است؟

۲۰.ش. فرض کنید $f, g: \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ درنقطه‌ای مانند $a\in\mathbf{R}^p$ پیوسته باشند و h و k در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ به‌صورت

$$h(x)=\sup\{f(x), g(x)\}, \qquad k(x)=\inf\{f(x), g(x)\}$$

تعریف شده باشند. نشان دهید که h و k در a پیوسته هستند. (راهنمایی: توجه کنید که $\sup\{b, c\}=\frac{1}{2}(b+c+|b-c|)$، $\inf\{b, c\}=\frac{1}{2}(b+c-|b-c|)$.)

۲۰.ص. هرگاه $x\in\mathbf{R}$، اغلب $[x]$ را بزرگترین عدد صحیح $n\in\mathbf{Z}$ به‌طوری که $n\leqslant x$ تعریف‌می‌کنیم. نگاشت $x\longrightarrow [x]$ را تابع **بزرگترین مقدار صحیح** می‌گوییم. نمودار تابعی که به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$ با

(الف) $f(x)=[x]$ ، (ب) $g(x)=x-[x]$ ،

(پ) $h(x)=[2\sin x]$ ، (ت) $k(x)=\sin\frac{1}{2}[x]$ ،

تعریف شده‌اند رسم کرده نقاط پیوستگی آنهارا معین نمایید.

۲۰.ض. تابع f راکه درفاصلهٔ $I\subseteq\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ تعریف شده در I **صعودی** گوییم هرگاه $x\leqslant x'$ $(x, x'\in I)$ ایجاب کند $f(x)\leqslant f(x')$. تابع را در I **اکیداً صعودی** گوییم هرگاه $x<x'$ $(x', x\in I)$ ایجاب کند $f(x)<f(x')$. تعریفهای مشابهی برای توابع **نزولی** و **اکیداً نزولی** می‌توان ذکر کرد. تابعی‌را که دریك فاصله یا صعودی ویا نزولی باشد درآن فاصله **یکنوا** گوییم.

(الف) اگر f در I صعودی باشد، آنگاه f دریك نقطهٔ درونی $c\in I$ پیوسته است اگر وفقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$ نقاطی مانند $x_1, x_2\in I$ با شرط $x_1<c<x_2$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $f(x_2)-f(x_1)<\varepsilon$.

(ب) اگر f در I صعودی باشد، آنگاه f درنقطهٔ درونی $c\in I$ پیوسته است اگر وفقط اگر

$$\sup\{f(x): x<c\}=f(c)=\inf\{f(x): x>c\}.$$

۲۰.ط. فرض کنید f در $I=[a, b]$ با تعریف تمرین قبل صعودی باشد. می‌نویسیم:

$$j_c=\inf\{f(x): x>c\}-\sup\{f(x): x<c\}.$$

اگر $j_c>0$، می‌گوییم f درنقطه c دارای **جهش** j_c است.

(الف) هرگاه $n\in\mathbf{N}$ ، نشان‌دهید که فقط تعداد با پایانی نقطه در I می‌توانندباشند که f درآنها جهشی بیش‌از $1/n$ داشته باشد.

(ب) نشان‌دهید که تابع صعودی می‌تواند حداکثر مجموعهٔ شمارش‌پذیری نقاط ناپیوسته داشته باشد.

پروژه

α.۲۰. فرض‌کنیم g تابعی در $\mathbf{R}$ ، به $\mathbf{R}$ باشد که متحد با صفر نباشد و درمعادلهٔ تابعی

$$g(x+y)=g(x)g(y),\quad x,y\in\mathbf{R}. \qquad (*)$$

صدق‌کند. هدف از این پروژه آن است‌که نشان دهیم g باید یك «تابع‌نمایی» باشد.

(الف) نشان‌دهیدg درهرنقطهٔ $\mathbf{R}$ پیوسته است اگروفقط اگر درنقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد.

(ب) نشان دهیدکه به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$ ، $g(x)>0$.

(پ) ثابت‌کنیدکه $g(0)=1$. هرگاه $a=g(1)$، آنگاه $a>0$ و ، به‌ازای هر $r\in\mathbf{Q}$ ، $g(r)=a^r$.

(ت) تابعg، درصورت پیوسته‌بودن، اکیداً صعودی، ثابت، یا اکیداً نزولی است برحسب آنکه $g(1)>1$ ، $g(1)=1$، یا $0<g(1)<1$.

(ث) اگر به‌ازای xهای واقع درفاصله‌ای چون $(0,\delta)$ ، که $\delta>0$، داشته باشیم $g(x)>1$، آنگاه g در $\mathbf{R}$ اکیداً صعودی وپیوسته است.

(ج) اگر $a>0$ ، آنگاه حداکثر یك تابع پیوسته مانند g هست‌که در $(*)$ صدق می‌کند و $g(1)=a$.

(چ) فرض‌کنید $a>1$.باتوجه به پروژهٔ β.۶ ، نشان دهیدکه تابع پیوستهٔ یکتایی هست‌که در $(*)$ صدق می‌کند و $g(1)=a$.

β.۲۰. $P=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$ مفروض است و $h:P\to\mathbf{R}$ تابعی است‌که متحد با صفر نیست و درمعادلهٔ تابعی

$$h(xy)=h(x)+h(y),\quad x,\ y\in P, \qquad (**)$$

صدق می‌کند. هدف از این پروژه آن است‌که نشان دهیم h باید یك «تابع لگاریتمی» باشد.

(الف) نشان دهیدکه h درهرنقطهٔ P پیوسته است اگر وفقط اگـر درنقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد.

(ب) نشان دهیدکه اگر بخواهیم h در $(**)$ به‌ازای $\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant 0\}$ صدق‌کند، آنگاه h را نمی‌توان در $x=0$ تعریف‌کرد.

(پ) ثابت‌کنید $h(1)=0$. اگر $x>0$ و $r\in\mathbf{Q}$ ، آنگاه $h(x^r)=rh(x)$.
(ت) نشان دهیدکـه اگــر درفاصله‌ای واقع در $\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 1\}$ ، $h(x)\geqslant 0$ ، آنگاه h در P اکیداً صعودی وپیوسته است.
(ث) هرگاه h پیوسته باشد، نشان دهید که به‌ازای $x\neq 1$ ، $h(x)\neq 0$ ، همچنین نشان دهیدکه به‌ازای $x>1$ ، یا همیشه $h(x)>0$ یا همیشه $h(x)<0$.
(ج) هرگاه $b>1$ ، نشان‌دهید که حداکثر یـك تابع پیوسته در P هست که در (**) صدق می‌کند و $h(b)=1$.
(چ) فـرض کنید $b>1$. باتوجه به پـروژهٔ ۶.۷ ، نشان دهیدکـه تابع پیوسته یکتایی هست‌که در (**) صدق می‌کند و $h(b)=1$.

بخش ۲۱ توابع خطی

بحث پیشین به توابع دلخواهی کـه درقسمتی از $\mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده‌انـد مربـوط می‌شد. قبل‌از ادامهٔ این بحث، ردهٔ نسبتاً ساده ولی بی‌اندازه مهم از توابع، یعنی «توابع خطی»، راکه دربسیاری از کاربردها ظاهر می‌شوند، معرفی می‌کنیم.

۲۱.۱ تعریف. تابع f به دامنهٔ $\mathbf{R}^p$ و بـرد در $\mathbf{R}^q$ را درصورتی **خطی** گوییم که به‌ازای هر a ، b در $\mathbf{R}$ و هر x ، y در $\mathbf{R}^p$ ،

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y) \tag{۲۱.۱}$$

از رابطهٔ (۲۱.۱) به‌استقرا نتیجه می‌شودکه اگر a، b ، ... ، c ، n عدد حقیقی و x ، y ، ... ، z ، n عنصر از $\mathbf{R}^p$ باشند، آنگاه

$$f(ax+by+\dots+cz)=af(x)+bf(y)+\dots+cf(z)\,.$$

به‌سهولت دیده می‌شودکه توابع مثالهای ۲۰.۶ (ب) و ۲۰.۶ (خ) بترتیب توابع خطی برای حالتهای $p=q=1$ و $p=q=2$ می‌باشند. درواقع، توصیف‌کلیترین تابع خطی از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ مشکل نیست.

۲۱.۲ قضیه. اگر f یك تابع خطی به دامنهٔ $\mathbf{R}^p$ و بـرد در $\mathbf{R}^q$ باشد، آنگاه pq عــدد حقیقی مانند (c_{ij}) ، $1\leqslant i\leqslant q$ و $1\leqslant j\leqslant p$ ، وجـود دارد بـه‌قسمی کـه اگـر $x=(x_1,x_2,\dots,x_p)$ نقطـه‌ای در $\mathbf{R}^p$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_q)=f(x)$ تصویر آن تحت f باشد، آنگاه

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1p}x_p,\\
y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2p}x_p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (۲.۲۱)\\
y_q &= c_{q2}x_1 + c_{q1}x_2 + \cdots + c_{qp}x_p.
\end{aligned}
$$

بعکس، هرگاه (c_{ij}) دسته‌ای از pq عدد حقیقی باشد، تابعی که به هر x در $\mathbf{R}^p$ عنصر y در $\mathbf{R}^q$ را طبق معادلات (۲.۲۱) مربوط کند یك تابع خطی به دامنهٔ $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ است.

برهان. فرض کنیم e_1 ، e_2 ، … ، e_p عناصری از $\mathbf{R}^p$ باشند که به‌صورت $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$ ، $e_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$ ، … ، $e_p=(0, 0, \ldots, 1)$ داده شده‌اند. تصویر این بردارها را تحت تابع خطی f مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{q1}),\\
f(e_2) &= (c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{q2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (۳.۲۱)\\
f(e_p) &= (c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{qp}).
\end{aligned}
$$

پس عدد حقیقی c_{ij} مختص iام نقطهٔ $f(e_j)$ است.

یك عنصر دلخواه $\mathbf{R}^p$ مانند $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ به‌صورت ساده‌ای برحسب بردارهای e_1 ، e_2 ، … e_p بیان می‌شود. در واقع

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p .$$

چون f خطی است، نتیجه می‌شود که

$$f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_pf(e_p) .$$

حال اگر معادلات (۳.۲۱) را به‌کار بریم، داریم

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x_1(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{q1}) + x_2(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{q2}) + \cdots +\\
&\qquad + x_p(c_{1p}, x_{2p}, \ldots, c_{qp})\\
&= (c_{11}x_1, c_{21}x_1, \ldots, c_{q1}x_1) + (c_{12}x_2, c_{22}x_2, \ldots, c_{q2}x_2)\\
&\qquad + \cdots + (c_{1p}x_p, c_{2p}x_p, \ldots, c_{qp}x_p)\\
&= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1p}x_p,\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2p}x_p,\\
&\qquad \ldots,\ c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qp}x_p).
\end{aligned}
$$

این نشان می‌دهد که، همان‌طور که درحکم قضیه آمده است، مختصات $f(x)$ با روابط (۲.۲۱) داده می‌شوند.

بعکس، با محاسبهٔ مستقیم بسهولت معلوم می‌شود که اگر روابط (۲.۲۱) برای رسیدن از مختصات x به‌مختصات y، یعنی از x_jها به y_iها، به‌کار روند، آنگاه تابع حاصل در رابطهٔ (۱.۲۱) صدق می‌کند و در نتیجه خطی است. این محاسبه را به‌دلیل سرراست بودنش حذف کرده‌ایم. □

لازم است متذکر شویم که آرایهٔ مستطیلی‌شکل اعدادی به‌صورت

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix}, \qquad (۴.۲۱)$$

را، که از q سطر و p ستون تشکیل شده، اغلب **ماتریس** تابع خطی f می‌نامند. بین توابع خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ وماتریسهای $q \times p$ ازاعداد حقیقی، یك تناظر یك به‌یك وجود دارد. همان‌طور که دیدیم عمل f کاملاً با ماتریس مشخص می‌شود. به‌هرحال خواهیم دید که به‌بحث کلی در بارهٔ ماتریسها محتاج نخواهیم شد و تنها ماتریس (۴.۲۱) را به عنوان خلاصه‌ای ازیك توصیف تفصیلی تابع خطی f درنظر خواهیم گرفت.

حال ثابت می‌کنیم که هرتابع خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ خودبه‌خود پیوسته است. برای این‌کار، ابتدا نابرابری شوارتس را به‌شکل زیر درنظر می‌گیریم

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p|^2 \leqslant \{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_p^2\}\cdot\{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_p^2\}.$$

واین نابرابری‌را درمورد هرعبارت‌معادلهٔ (۲.۲۱) به‌کارمی بریم، به‌ازای‌هر i، $1 \leqslant i \leqslant q$، برآورد

$$|y_i|^2 \leqslant (|c_{i1}|^2+|c_{i2}|^2+\cdots+|c_{ip}|^2)\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{p} |c_{ij}|^2 \|x\|^2$$

به‌دست می‌آید. از جمع این نابرابریها حاصل می‌شود

$$\|y\|^2 \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} |c_{ij}|^2\right\}\|x\|^2,$$

واز آن نتیجه می‌گیریم

$$\|y\| = \|f(x)\| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} |c_{ij}|^2\right\}^{1/2}\|x\|. \qquad (۵.۲۱)$$

۳.۲۱ قضیه. هرگاه f یك تابع خطی به دامنهٔ $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ باشد، عدد ثابت مثبتی مانند A هست به‌قسمی که اگر u و v دوبردار دلخواه در $\mathbf{R}^p$ باشند، آنگاه

$$\|f(u)-f(v)\| \leqslant A\|u-v\|. \tag{۶.۲۱}$$

بنابراین تابع خطی در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ درهر نقطه پیوسته است.

برهان. دراثبات فرمول (۵.۲۱) دیدیم که عدد ثابتی مانند A هست که هرگاه x عنصری‌از $\mathbf{R}^p$ باشد، $\|f(x)\| \leqslant A\|x\|$. حال با فرض $x=u-v$ و استفاده ازخاصیت خطی بودن f داریم $f(x)=f(u-v)=f(u)-f(v)$. بنابراین، فرمول (۶.۲۱) نتیجه می‌شود . واضح است که این رابطه پیوستگی f را ایجاب می‌کند، زیرا ، اگر $A>0$ ، می‌توانیم $\|u-v\|$ را از ε/A کوچکتر بگیریم تا $\|f(u)-f(v)\|$ از ε کوچکتر شود. □

به‌عنوان تمرین می‌توان نشان داد که هرگاه f و g توابعی خطی در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ باشند، $f+g$ یك تابع خطی در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ است. به‌همین‌نحو، اگر $c\in\mathbf{R}$ ، آنگاه cf یك تابع خطی است. اثبات اینکه $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ ، دستهٔ تمام توابع خطی در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$، تحت این اعمال برداری یك فضای برداری است، به‌خواننده محول می‌شود. درتمرینها نشان خواهیم دادکه دراین فضای برداری چگونه نرم تعریف می‌شود.

تمرین

۲۱.الف. نشان‌دهید که $f: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ یك تابع خطی است اگر و فقط اگر به ازای هر $a\in\mathbf{R}$ وهر $x, y\in\mathbf{R}^p$، $f(ax)=af(x)$ و $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

۲۱.ب. هرگاه f یك تابع خطی در $\mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}^q$ باشد، نشان دهید که ستونهای (۴.۲۱)، نمایش ماتریسی f ، عناصری در $\mathbf{R}^q$ را نشان می‌دهند که عنصرهای $e_1=(1; 0, \ldots, 0)$، $e_2=(0, 1, \ldots, 0)$، ...، $e_p=(0, 0, \ldots, 1)$ از $\mathbf{R}^p$ توسط f به‌آنها نگاشته می‌شوند.

۲۱.پ. فرض کنید f تابعی خطی در $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^3$ باشدکه عناصر $e_1=(1, 0)$ و $e_2=(0, 1)$ از $\mathbf{R}^2$ را به‌بردارهای $f(e_1)=(2, 1, 0)$، $f(e_2)=(1, 0, -1)$ از $\mathbf{R}^3$ بنگارد. نمایش ماتریسی f را به‌دست آورید. چه‌بردارهایی در $\mathbf{R}^3$ تصاویر عناصر (۰ ، ۲)، (۱ ، ۱) و (۳ ، ۱) تحت f می‌باشند؟

۲۱.ت. هرگاه f تابع خطی تمرین ۲۱.پ باشد، نشان دهیدکه بردارهایی در $\mathbf{R}^3$ وجود دارندکه تصویر برداری در $\mathbf{R}^2$ تحت f نیستند.

۲۱.ث، فرض کنید g یك تابع خطی دلخواه در $\mathbf{R}^2$ ، به $\mathbf{R}^3$ باشد. نشان دهید که هر عنصر $\mathbf{R}^3$ تصویر یك بردار در $\mathbf{R}^2$ تحت g نیست.

۲۱.ج. فرض‌کنید h یك تابع خطی دلخواه در $\mathbf{R}^3$ به $\mathbf{R}^2$ باشد. نشان دهید که بردارهای غیرصفری در $\mathbf{R}^3$ هستندکه توسط h به‌بردار صفر $\mathbf{R}^2$ نگاشته می‌شوند.

۲۱.چ. فرض‌کنید f یك تابع خطی در $\mathbf{R}^2$، به $\mathbf{R}^2$ باشد و نمایش ماتریسی آن به‌صورت زیر داده شده باشد

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

نشان دهیدکه $f(x) \neq 0$ وقتی $x \neq 0$، اگر وفقط اگر $\Delta = ad - bc \neq 0$.

۲۱.ح. فرض‌کنید f تابع خطی تمرین ۲۱.چ. باشد. نشان دهیدکه f، $\mathbf{R}^2$ را بروی $\mathbf{R}^2$ می‌نگارد اگر و فقط اگر $\Delta = ad - bc \neq 0$.نشان دهید که هرگاه $\Delta \neq 0$، تابع وارون آن f^{-1} خطی است و دارای نمایش ماتریسی

$$\begin{bmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{bmatrix}$$

می‌باشد.

۲۱.خ. فرض‌کنید g یك تابع خطی در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ باشد. نشان‌دهیدکه g یك‌به‌یك است اگر وفقط اگر $g(x) = 0$ ایجاب کندکه $x = 0$.

۲۱.د. اگر h یك‌تابع‌خطی یك به یك در $\mathbf{R}^p$، روی $\mathbf{R}^p$ باشد، نشان دهیدکه h^{-1} وارون آن، یك تابع خطی در $\mathbf{R}^p$، روی $\mathbf{R}^p$ است.

۲۱.ذ. نشان دهیدکه مجموع و ترکیب دوتابع خطی توابعی خطی‌اند.

۲۱.ر. هرگاه f یك نگاشت خطی در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ باشد، تعریف‌کنید

$$\|f\|_{pq} = \sup\{\|f(x)\| : x \in \mathbf{R}^p,\ \|x\| \leqslant 1\}$$

ونشان دهیدکه $f \longrightarrow \|f\|_{pq}$ معرف یك نرم درفضای برداری $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ مرکب‌از تمام توابع خطی در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ مـی‌باشد. همچنین نشان‌دهیدکـه به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}^p$، $\|f(x)\| \leqslant \|f\|_{pq}\|x\|$.

۲۱.ز. هرگاه f یك نگاشت خطی در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ باشد، تعریف‌کنید

$$M(f) = \inf\{M > 0 : \|f(x)\| \leqslant M\|x\|,\ x \in \mathbf{R}^p\}$$

و نشان دهیدکه $M(f) = \|f\|_{pq}$،

۲۱.ژ. هرگاه fو g در $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ باشند، نشان‌دهیدکه $f \circ g$ نیزدر $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ است و $\|f \circ g\|_{pp} \leqslant \|f\|_{pp}\|g\|_{pp}$. نشان‌دهیدکه این نابرابری می‌تواند برای بعضی از fها و gها اکید باشد

۲۱.س. مثالی از یك نگاشت خطی f در $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ بـا نمایش ماتریسی $[c_{ij}]$

بزنیدکه درآن داشته باشیم

$$\|f\|_{pq} < \left\{ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} c_{ij}{}^{2} \right\}^{1/2} .$$

۲۱.ش. هرگاه (۴.۲۱) ماتریس نظیر به f باشد، نشان دهیدکه به‌ازای هر i و j، $|c_{ij}| \leqslant \|f\|_{pq}$.

بخش ۲۲ خواص همه‌جایی توابع پیوسته

دربخش ۲۰ به‌خواص «موضعی» پیوستگی پرداختیم، یعنی توجهمان معطوف به پیوستگی دریك نقطه بود. دراین بخش برخی از خواص عمیقتر توابع پیوسته مورد نظر می‌باشند. دراینجا به‌خواص«همه‌جایی» پیوستگی‌می‌پردازیم، بدین‌معنی‌که فرض خواهیم‌کرد توابع درهر نقطه از دامنهٔ خود پیوسته هستند.

f جز درحالتی‌که خلافش‌تصریح شود، نشانگرتابعی است به دامنهٔ $D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$. به‌یاد می‌آوریم‌که هرگاه B زیرمجموعه‌ای از فضای برد $\mathbf{R}^q$ باشد، **تصویر وارون** B تحت f عبارت است از مجموعهٔ

$$f^{-1}(B) = \{ x \in D(f) : f(x) \in B \} .$$

توجه دارید که $f^{-1}(B)$ زیرمجموعه‌ای از $D(f)$ است، حتی اگر B زیرمجموعه‌ای از برد f نباشد.

در درس توپولوژی،که پیوستگی همه‌جایی بیش‌از پیوستگی موضعی مطرح می‌شود،قضیه‌ای‌که در زیرمی‌آید اغلب به‌عنوان تعریف پیوستگی (همه‌جایی) می‌آید. اهمیت این قضیه به‌زودی آشکار خواهد شد.

۱.۲۲ قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی. گزاره‌های زیر با یکدیگر هم‌ارزند:

(الف) f در دامنه‌اش $D(f)$، پیوسته است؛

(ب) اگر G مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^q$ باشد، آنگاه مجموعهٔ بازی مانند G_1 در $\mathbf{R}^p$ هست به‌قسمی که $G_1 \cap D(f) = f^{-1}(G)$.

(پ) اگر H مجموعهٔ بسته‌ای در $\mathbf{R}^q$ باشد، آنگاه مجموعهٔ بسته‌ای مانند H_1 در $\mathbf{R}^p$ هست به‌قسمی که $H_1 \cap D(f) = f^{-1}(H)$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم (الف) برقرارباشد و G را زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}^q$ می‌انگاریم. اگر a متعلق به $f^{-1}(G)$ باشد، آنگاه چون G یك همسایگی $f(a)$ است، از پیوستگی f در a نتیجه می‌شود که مجموعهٔ بازی مانند $U(a)$ هست به‌قسمی که اگر $x \in D(f) \cap U(a)$، آنگاه $f(x) \in G$. برای هر a در $f^{-1}(G)$ یك $U(a)$ انتخاب

می‌کنیم و اجتماع $U(a)$ها را G_1 می‌نامیم. بنابر قضیهٔ ۳.۰۹ (پ)، مجموعهٔ G_1 باز است و بوضوح $G_1 \cap D(f) = f^{-1}(G)$. بنابراین، (الف) شرط (ب) را ایجاب می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که (ب) شرط (الف) را ایجاب می‌کند. گوییم اگر a یك نقطهٔ دلخواه $D(f)$ و G یك همسایگی باز $f(a)$ باشد، آنگاه شرط (ب) ایجاب می‌کند که مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^p$ مانند G_1 وجود داشته باشد به‌قسمی که $G_1 \cap D(f) = f^{-1}(G)$. چون $f(a) \in G$، نتیجه می‌شود که $a \in G_1$، درنتیجه G_1 یك همسایگی a است. اگر $x \in G_1 \cap D(f)$، آنگاه $f(x) \in G$، لذا f در a پیوسته است. به‌این‌ترتیب ثابت می‌شود که (ب) شرط (الف) را ایجاب می‌کند.

حال هم‌ارز بودن (ب) و (پ) را ثابت می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر B یك زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^q$ باشد و $C = \mathbf{R}^q \backslash B$، آنگاه $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \varnothing$ و

$$D(f) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) . \qquad (۱.۲۲)$$

اگر B_1 یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد به‌قسمی که $B_1 \cap D(f) = f^{-1}(B)$ و $C_1 = \mathbf{R}^p \setminus B_1$، آنگاه $C_1 \cap f^{-1}(B) = \varnothing$ و

$$D(f) = (B_1 \cap D(f)) \cup (C_1 \cap D(f)) = f^{-1}(B) \cup (C_1 \cap D(f)). \qquad (۲.۲۲)$$

در فرمولهای (۱.۲۲) و (۲.۲۲)، $D(f)$ اجتماع $f^{-1}(B)$ با مجموعهٔ دیگری است که با آن نقطهٔ مشترك ندارد. بنابراین، داریم $C_1 \cap D(f) = f^{-1}(C)$.

فرض کنیم (ب) برقرار و H در $\mathbf{R}^q$ بسته باشد. استدلالی را که هم‌اکنون پایان یافت درحالتی که $B = \mathbf{R}^q \backslash H$ و $C = H$ به‌کار می‌بریم. دراین‌صورت B و B_1 بترتیب در $\mathbf{R}^q$ و $\mathbf{R}^p$ مجموعه‌های باز هستند، درنتیجه $C_1 = \mathbf{R}^p \backslash B_1$ در $\mathbf{R}^p$ بسته است. این نشان می‌دهد که (ب) شرط (پ) را ایجاب می‌کند.

برای اثبات اینکه (پ) شرط (ب) را ایجاب می‌کند. استدلال بالا را با فرض $B = \mathbf{R}^q \backslash G$، که در آن G مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^q$ است، به‌کار می‌بریم. □

درحالتی که $D(f) = \mathbf{R}^p$ قضیهٔ قبل تاحدودی ساده می‌گردد.

۲.۲۲ نتیجه. فرض کنیم f درتمام $\mathbf{R}^p$ تعریف شده باشد و بردش در $\mathbf{R}^q$ باشد. دراین‌صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) f در $\mathbf{R}^p$ پیوسته است؛

(ب) اگر G در $\mathbf{R}^q$ باز باشد، آنگاه $f^{-1}(G)$ در $\mathbf{R}^p$ باز است؛

(پ) اگر H در $\mathbf{R}^q$ بسته باشد، آنگاه $f^{-1}(H)$ در $\mathbf{R}^p$ بسته است.

بایستی تأکید شود که قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲ نمی‌گوید که: درصورت باز بودن G در $\mathbf{R}^p$، تصویر مستقیم G، یعنی $f(G) = \{ f(x) : x \in G \}$ در $\mathbf{R}^q$ باز است. درحالت کلی، تابع پیوسته لزوماً مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز و مجموعه‌های

بسته را به مجموعه‌های بسته نمی‌برد. به‌عنوان‌مثال، تابع f در $\mathbf{R}$ بـه $\mathbf{R}$ که با

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

تعریف شده در $\mathbf{R}$ پیوسته است. [درمثالهای ۵.۲۰ (الف) و (پ) دیـدیم کـه توابـع $f_1(x)=1$ و $f_2(x)=x^2$ ، به‌ازای $x\in\mathbf{R}$ ، درهر نقطه پیوسته هستند. از قضیهٔ ۶.۱۵ نتیجه می‌شود که

$$f_3(x)=1+x^2, \quad x\in\mathbf{R},$$

درهر نقطه پیوسته است و چون f_3 هرگز صفر نمی‌شود، همین قضیه ایجاب مـی‌کند که تابع f مذکور درفوق در $\mathbf{R}$ پیوسته باشد.] هرگاه G را مجموعهٔ باز $G=(-1, 1)$ بگیریم، $f(G)=(1/2, 1]$ ، که در $\mathbf{R}$ باز نیست. به‌همین نحـو، هرگاه H مجموعـهٔ بستهٔ $H=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 1\}$ بـاشد، $f(H)=(0, 1/2]$ ، کـه در $\mathbf{R}$ بستـه نیست. به‌طریق مشابه تابع f مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را ، کـه در $\mathbf{R}$ هم باز و هم بسته است بـه مجموعـهٔ $f(\mathbf{R})=(0, 1]$، که در $\mathbf{R}$ نه باز و نه بسته است، می‌نگارد.

منظوراز تذکارهای قبلی این‌است که‌خاصیت باز بودن یا بسته بودن مجموعه‌ها الزاماً تحت تابع پیوسته پایدار نمی‌ماند. اما، خواص مهمی از مجموعه‌ها هستند که تحت‌نگاشت پیوسته پـایدار هستند. به‌عنوان مثال، اینك نشان می‌دهیم کـه خواص همبندی و فشردگی مجموعه‌ها از این نوع‌اند.

پایداری همبندی

درتعریف ۱.۱۲ دیدیم که مجموعهٔ H در $\mathbf{R}^p$ ناهمبند است هـرگاه مجموعـه‌های بازی مانند A و B در $\mathbf{R}^p$ باشند به‌قسمی که $A\cap H$ و $B\cap H$ مجموعه‌هایی غیرتهی و مجـزا باشند و اجتماعشان H بـاشد . گفتیم کـه مجموعه همبند است درصورتی کـه ناهمبند نباشد.

۳.۲۲ پایداری همبندی. اگر $H\subseteq D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ همبند و f در H پیوسته‌باشد، آنگاه $f(H)$ در $\mathbf{R}^q$ همبند است.

برهان. فرض‌کنیم h تحـدید f به مجموعـهٔ H باشد، درنتیجـه $D(h)=H$ ، و به‌ازای هر $x\in H$ ، $h(x)=f(x)$. ملاحظه مـی‌کنیم کـه $f(H)=h(H)$ و h در H پیوسته است.

هرگاه $f(H)=h(H)$ در $\mathbf{R}^q$ ناهمبند باشد، مجموعه‌های بازی مانند A و B در $\mathbf{R}^q$ وجود دارندبه‌قسمی که $A\cap h(H)$ و $B\cap h(H)$ مجموعه‌های غیرتهی مجزایی‌هستند

که اجتماعشان $h(H)$ است. بنابرقضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲، مجموعه‌های بازی مانند A_1 و B_1 در $\mathbf{R}^p$ وجود دارند به‌قسمی که

$$A_1 \cap H = h^{-1}(A), \quad B_1 \cap H = h^{-1}(B) .$$

این مقاطع غیرتهی هستند و مجزا بودن آنها نتیجهٔ مجزا بودن مجموعه‌های $A \cap h(H)$ و $B \cap h(H)$ است. این فرض که اجتماع $A \cap h(H)$ و $B \cap h(H)$ برابر $h(H)$ است ایجاب می‌کند که اجتماع $A_1 \cap H$ و $B_1 \cap H$ برابر H باشد؛ بنابراین، ناهمبندی $f(H) = h(H)$ ناهمبندی H را ایجاب می‌کند. □

واژهٔ «پیوستگی» اشاره‌برآن دارد که درنمودار تابع «گسستگیهای» ناگهانی‌وجود ندارد، بنابراین قضیهٔ زیر به‌هیچ‌وجه دور از انتظار نیست. با این حال، از خواننده می‌خواهیم سعی‌کند اثبات دیگری از این قضیه بیابد و بدین‌ترتیب به‌عمق آن پی‌ببرد.

۴.۲۲ قضیهٔ مقدار میانی بولتسانو. فرض کنیم $H \subseteq D(f)$ یک زیر مجموعهٔ همبند $\mathbf{R}^p$ باشد و f در H پیوسته و مقادیرش در $\mathbf{R}$ باشند. اگر k عددی حقیقی باشد و در

$$\inf \{f(x) : x \in H\} < k < \sup \{f(x) : x \in H\}$$

صدق کند، حداقل یك نقطه در H هست‌که درآن نقطه مقدار f برابر k است.

برهان. اگر $k \notin f(H)$ ، آنگاه مجموعه‌های $A = \{t \in \mathbf{R} : t < k\}$ ، $B = \{t \in \mathbf{R} : t > k\}$ یك ناهمبندی برای $f(H)$ تشکیل می‌دهند، که با قضیهٔ قبلی متناقض است. □

پایداری فشردگی

حال نشان می‌دهیم که خاصیت مهم فشردگی تحت نگاشت پیوسته پایدار است. به‌یاد می‌آوریم که یکی از نتایج قضیهٔ مهم هاینه ـ بورل ۳.۱۱ این است‌که یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند K فشرده است اگر وفقط اگر در $\mathbf{R}^p$ بسته وکراندار باشد. ازاین‌رو می‌توانیم بگوییم که اگر K در $\mathbf{R}^p$ بسته و کراندار و f در K پیوسته و بردش در $\mathbf{R}^q$ باشد، آنگاه $f(K)$ در $\mathbf{R}^q$ بسته وکراندار است.

۵.۲۲ پایداری فشردگی. اگر $K \subseteq D(f)$ فشرده و f در K پیوسته باشد ، آنگاه $f(K)$ فشرده است.

برهان اول. فرض می‌کنیم K در $\mathbf{R}^p$ بسته وکراندار است ونشان می‌دهیم که $f(K)$ نیز در $\mathbf{R}^q$ بسته وکراندار می‌باشد. گوییم هرگاه $f(K)$ کراندار نباشد، به‌ازای

هر $n\in\mathbf{N}$ نقطه‌ای مانند x_n در K هست به‌طوری که $\|f(x_n)\|\geqslant n$. چون K کراندار است، دنبالهٔ $X=(x_n)$ کراندار است؛ ازاین‌رو ازقضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۴.۰۱۶ نتیجه می‌شود که یك زیر دنبالهٔ X وجود دارد که به عنصری مانند x همگراست. چون به‌ازای $n\in\mathbf{N}$ ، $x_n\in K$ ، نقطهٔ x به‌مجموعهٔ بستهٔ K تعلق دارد. بنابراین، f در x پیوسته است، درنتیجه دریکی از همسایگیهای x نرم f از $1+\|f(x)\|$ کوچکتر است. چون این امر فرض $\|f(x_n)\|\geqslant n$ را نقض می‌کند، مجموعهٔ $f(K)$ کراندار است.

حال ثابت می‌کنیم $f(K)$ بسته است به‌این‌ترتیب که نشان مـی‌دهیم هر نقطهٔ تجمع $f(K)$ مانند y ، باید دراین‌مجموعه باشد. درواقع، اگر n یك عدد طبیعی باشد، نقطه‌ای مانند z_n در K هست به‌قسمی که $\|f(z_n)-y\|<1/n$. بنابرقضیهٔ بولتسانو‌ـوایرشتراس ۴.۰۱۶، دنبالـهٔ $Z=(z_n)$ زیردنباله‌ای‌مانند $Z'=(z_{n(k)})$ داردکه به عنصر z همگراست. چون K بسته است، z در K است و f در z پیوسته است. بنابراین با

$$f(z)=\lim_k\left(f(z_{n(k)})\right)=y,$$

ثابت می‌شودکه y به $f(K)$ متعلق است. بنابراین $f(K)$ بسته است.

برهان دوم. باتحدید f به‌K می‌توان‌فرض کردکه $D(f)=K$. حال $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ را خانواده‌ای از مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^q$ می‌گیریم کـه اجتماعشان شامل $f(K)$ باشد. دراین‌صورت، بنابر قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲، به‌ازای هر مجموعهٔ G_α در $\mathcal{G}$ زیر‌مجموعهٔ بازی مانند C_α در $\mathbf{R}^p$ هست به‌قسمی که $C_\alpha\cap D(f)=f^{-1}(G_\alpha)$. خانـوادهٔ $\mathcal{C}=\{C_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌هایی باز در $\mathbf{R}^p$ تشکیل شده است. حکم می‌کنیم که اجتماع این مجموعه‌ها شامل K است . زیرا اگـر $x\in K$ ، آنگاه $f(x)$ به $f(K)$ متعلق است ؛ ازاین‌رو $f(x)$ به‌یك G_α متعلق است و، بنابر ساختار ایـن خانواده، x به‌مجموعهٔ C_α ، متناظربا G_α متعلق‌است. اما چون K فشرده است، دراجتماع تعدادبا پایانی ازمجموعه‌های $\mathcal{C}$ واقع می‌باشد و تصویر آن $f(K)$ دراجتماع تعداد با پایانی از مجموعه‌های نظیر در $\mathcal{G}$ واقع است. چون این مطلب برای هرخانوادهٔ دلخواه $\mathcal{G}$ از مجموعه‌های بازکه $f(K)$ را می‌پوشاند برقرار است، مجموعهٔ $f(K)$ در $\mathbf{R}^q$ فشرده است. □

وقتی برد تابع $\mathbf{R}$ است، گاهی قضیه‌ای راکه در زیر می‌آید این‌طور بیان‌می‌کنند که هرتابع حقیقی که دریك مجموعهٔ فشرده پیوسته باشد، به‌مقادیر ماکزیمم و مینیمم خـود می‌رسد.

۶.۲۲ قضیهٔ مقدار ماکزیمم و مینیمم. فرض کنیم $K\subseteq D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ فشرده و f یك تابع حقیقی پیوسته باشد. دراین‌صورت نقاطـی مانند x^* و x_* در K هستند بـه قسمی که

$$f(x^*)=\sup\{f(x):x\in K\},\qquad f(x_*)=\inf\{f(x):x\in K\}.$$

برهان اول. چون K در $\mathbf{R}^p$ فشرده است، ازقضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که $f(K)$ در $\mathbf{R}$ کراندار است. فرض می‌کنیم $M=\sup f(K)$ و (x_n) را دنباله‌ای در K می‌گیریم به‌قسمی که

$$f(x_n)\geqslant M-۱/n, \qquad n\in\mathbf{N}.$$

بنابر قضیهٔ بولتسانو_وایرشتراس ۴.۱۶، زیردنباله‌ای مانند $(x_{n(k)})$ به‌حدی مانند $x^*\in K$ همگراست. چون f در x^* پیوسته است باید داشته‌باشیم $f(x^*)=\lim f(x_{n(k)})=M$. وجود x_* به‌طریقی کاملا مشابه ثابت می‌شود.

برهان دوم. با تحدید f به K، می‌توان فرض کرد که $D(f)=K$. می‌نویسیم $M=\sup f(K)$. دراین صورت به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، تعریف می‌کنیم $G_n=\{u\in\mathbf{R}: u<M-۱/n\}$. چون G_n باز است از قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ بازی مانند C_n در $\mathbf{R}^p$ هست به‌قسمی که

$$C_n\cap K=\{x\in K: f(x)<M-۱/n\}.$$

حال گوییم اگر مقدار تابع برابر M نشود، آنگاه اجتماع مجموعه‌های باز خانوادهٔ $\mathcal{C}=\{C_n\}$ شامل K می‌شود. چون K فشرده و خانوادهٔ $\{C_n\cap K\}$ صعودی است، عددی مانند $r\in\mathbf{N}$ هست به‌قسمی که $K\subseteq C_r$. اما دراین‌صورت به‌ازای هر $x\in K$ داریم $f(x)<M-۱/r$. که بافرض $M=\sup f(K)$ متناقض است. □

اگر f بردش در $\mathbf{R}^q$ باشد و $q>۱$، نتیجهٔ زیر گاهی مفید واقع می‌شود.

۷.۲۲ نتیجه. فرض کنیم f تابعی در $D(f)\subseteq\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ باشد و $K\subseteq D(f)$ فشرده باشد. دراین‌صورت اگر f در K پیوسته باشد، آنگاه نقاطی مانند x^* و x_* در K هستند به‌قسمی که

$$\|f(x^*)\|=\sup\{\|f(x)\|: x\in K\}, \qquad \|f(x_*)\|=\inf\{\|f(x)\|: x\in K\}.$$

از قضیهٔ ۲.۲۱ نتیجه می‌شود که اگر $f:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ خطی باشد، عدد ثابتی‌مانند $M>۰$ هست به‌قسمی که به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^p$، $\|f(x)\|\leqslant M\|x\|$. بااین‌حال همیشه‌عدد ثابتی مانند $m>۰$ وجود ندارد، به‌طوری که به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^p$، $\|f(x)\|\geqslant m\|x\|$. اکنون نشان می‌دهیم که m همیشه وجود دارد اگر و فقط اگر f یك تابع خطی یك‌به‌یك باشد.

۸.۲۲ نتیجه. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ یك تابع خطی باشد. دراین‌صورت f یك به یك است اگر و فقط اگر عددی مانند $m>۰$ باشد به‌قسمی که به‌ازای‌هر $x\in\mathbf{R}^p$، $\|f(x)\|\geqslant m\|x\|$.

برهان . فرض‌کنید f یك‌به‌یك‌باشد وکرهٔ یکهٔ $S=\{x\in\mathbf{R}^p : \|x\|=1\}$ راکه در $\mathbf{R}^p$ فشرده است، درنظر بگیرید.

بنابر نتیجهٔ ۷.۲۲ ، نقطه‌ای مانند $x_* \in S$ هست به‌قسمی‌که

$$\|f(x_*)\|=m=\inf\{\|f(x)\| : x\in S\}.$$

چون f یك به یك است ، $m=\|f(x_*)\|>0$. از این‌رو ، به ازای هر x در S ، $\|f(x)\|\geqslant m>0$. حال‌گوییم اگر $u\in\mathbf{R}^p$ و $u\neq 0$، آنگاه $u/\|u\|$ به S متعلق است و چون f خطی است، داریم

$$\frac{1}{\|u\|}\|f(u)\|=\left\|f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\|\geqslant m.$$

از این نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $u\in\mathbf{R}^p$ ، $\|f(u)\|\geqslant m\|u\|$.(زیرا این نتیجه برای $u=0$ واضح است.)

بعکس، فرض کنید به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^p$،$\|f(x)\|\geqslant m\|x\|$. گوییم هرگاه $f(x_1)=f(x_2)$، داریم

$$0=\|f(x_1)-f(x_2)\|=\|f(x_1-x_2)\|\geqslant m\|x_1-x_2\|$$

که $x_1=x_2$ را ایجاب می‌کند. بنابراین، f یك به یك است. □

یکی از نتایج قابل‌توجه قضیهٔ ۵.۲۲ این است که هرگاه f در دامنهٔ فشرده‌اش پیوسته و یك به یك باشد، f^{-1} تابع وارون آن نیز پیوسته است.

۹.۲۲ پیوستگی تابع وارون. فرض کنیم K یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ و f یك تابع یك به‌یك و پیوسته با دامنهٔ K و برد $f(K)$ در $\mathbf{R}^q$ باشد. دراین‌صورت تابع وارون آن پیوسته و دارای دامنهٔ $f(K)$ و برد K می‌باشد.

برهان. ملاحظه می‌کنیم که چون K فشرده است، قضیهٔ ۵.۲۲ ایجاب می‌کند که $f(K)$ فشرده و درنتیجه بسته باشد. ازآنجاکه f بنابه‌فرض یك به یك است، $g=f^{-1}$ تابع وارون آن‌وجود دارد. فرض‌کنیم H مجموعهٔ بستهٔ دلخواهی در $\mathbf{R}^p$ باشد و $H\cap K$ را درنظر می‌گیریم؛ چون این مجموعه بسته‌وکراندار است (بنابر قضیهٔ ۶.۹ (پ)) قضیهٔ هاینهٔ ـ بورل فشردگی آن‌را در $\mathbf{R}^p$ تضمین می‌کند. ازقضیهٔ ۵.۲۲ نتیجه می‌گیریم که $H_1=f(H\cap K)$ فشرده و درنتیجه در $\mathbf{R}^q$ بسته است. حال گوییم اگر $g=f^{-1}$ ، آنگاه

$$H_1=f(H\cap K)=g^{-1}(H).$$

چون H_1 زیرمجموعهٔ $f(K)=D(g)$ است، این معادلهٔ اخیر را می‌توان به‌صورت

$$H_1 \cap D(g) = g^{-1}(H)$$

نوشت. حال‌از قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی۱.۲۲ (پ) نتیجه می گیریم که $g = f^{-1}$ پیوسته است. □

این بخش را با معرفی چند نماد که تسهیلاتی به‌وجود می‌آورند به‌پایان می‌بریم.

۱۰.۲۲ تعریف. اگر $D \subseteq \mathbf{R}^p$ ، آنگاه مجموعهٔ تمام **توابع پیوسته** در D ، به $\mathbf{R}^q$ را با $C_{pq}(D)$ نشان می‌دهیم. دستهٔ تمام **توابع پیوستهٔ کراندار** در D ، به $\mathbf{R}^q$ را با $BC_{pq}(D)$ نمایش می‌دهیم. وقتی مقادیر p و q از متن مشخص شوند، این دسته‌ها رافقط با $C(D)$ و $BC(D)$ نشان خواهیم داد.

قسمت اول قضیهٔ زیر نتیجه‌ای از قضیهٔ ۶.۲۰ است، وقسمت دوم‌آن به‌همان‌صورت لم ۸.۱۷ ثابت می‌شود.

۱۱.۲۲ قضیه. (الف) فضاهای $C_{pq}(D)$ و $BC_{pq}(D)$ با عملهای برداری زیر

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x), \quad x \in D$$

فضاهای برداری هستند.

(ب) فضای $BC_{pq}(D)$ یك فضای نرم‌دار با نرم

$$\|f\|_D = \sup\{\|f(x)\| : x \in D\}$$

است.

البته در حالت خاصی که D یك زیر مجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد؛ آنگاه $C_{pq}(D) = BC_{pq}(D)$.

تمرین

۲۲. الف. قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲ را درمورد توابع‌حقیقی $f(x) = x^2$ و $g(x) = 1/x$ ، به‌ازای $x \neq 0$ ، تعبیر نمایید. چندمجموعهٔ باز و بسته را اختیار کنید و و تصویرهای وارون آنها را تحت f و g بیابید.

۲۲.ب. فرض‌کنید $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$h(x) = 1 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{هرگاه}$$
$$= 0 \qquad \text{درغیر این‌صورت}$$

مجموعهٔ باز G و مجموعهٔ بستهٔ F را طوری بیابید که نه $h^{-1}(G)$ در $\mathbf{R}$ باز باشد و نه $h^{-1}(F)$ در $\mathbf{R}$ بسته.

۲۲.پ. هرگاه f در $\mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}$ پیوسته و کراندار باشد و $f(x_\circ)>\circ$ ، نشان دهیدکه f دریکی از همسایگیهای $x_\circ$ اکیداً مثبت است. آیا همین نتیجه درحالتی که f فقط در $x_\circ$ پیوسته باشد برقرار است؟

۲۲.ت. هرگاه $p:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ یك چندجمله‌ای باشد و $c\in\mathbf{R}$ ، نشان‌دهید که مجموعهٔ $\{(x,y):p(x,y)<c\}$ در $\mathbf{R}^2$ باز است.

۲۲.ث. هرگاه $f:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}$ در$\mathbf{R}^p$پیوسته باشد و$\alpha<\beta$، نشان دهیدکه مجموعهٔ $\{x\in\mathbf{R}^p:\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta\}$ در $\mathbf{R}^p$ بسته است.

۲۲.ج. زیرمجموعهٔ $D\subseteq\mathbf{R}^p$ ناهمبند است اگر وفقط اگر تابع پیوسته‌ای مانند $f:D\to\mathbf{R}$ باشد به‌قسمی‌که $f(D)=\{\circ,1\}$.

۲۲.چ. فرض کنید f در $\mathbf{R}^2$ ، به $\mathbf{R}^q$ پیوسته باشد. توابع g_1 و g_2 در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}^q$ را با

$$g_1(t)=f(t,\circ),\qquad g_2(t)=f(\circ,t)$$

تعریف کنید. نشان‌دهیدکه g_1 و g_2 پیوسته‌اند.

۲۲.ح. فرض کنید f ، g_1 و g_2 با فرمولهای تمرین قبل به‌هم مربوط شده باشند. نشان‌دهیدکه ازپیوستگی g_1 و g_2 در $t=\circ$ نمی‌توان پیوستگی f در $(\circ,\circ)$ رابه‌دست آورد.

۲۲.خ. مثالی ازیك‌تابع در $\mathbf{I}=[\circ,1]$ به $\mathbf{R}$ بزنیدکه‌کراندار نباشد.

۲۲.د. مثالی ازیك‌تابع کراندارf در $\mathbf{I}$، به$\mathbf{R}$ بزنیدکه مقدار $\sup\{f(x):x\in\mathbf{I}\}$ یا $\inf\{f(x):x\in\mathbf{I}\}$ را اختیار نکند.

۲۲. ذ. مثالی از یك تابع پیوسته و کراندار g در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ بزنید که مقدار $\sup\{g(x):x\in\mathbf{R}\}$ یا $\inf\{g(x):x\in\mathbf{R}\}$ را اختیار نکند.

۲۲.ر. نشان‌دهیدکه هرچندجمله‌ای از درجهٔ فردکه ضریبهایش حقیقی باشند، ریشهٔ حقیقی دارد. نشان دهید که چندجمله‌ای $p(x)=x^4+7x^3-9$ حداقل دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۲۲. ز. هرگاه $c>\circ$ و n عددی طبیعی باشد، عدد مثبت یکتایی مانند b هست به قسمی که $b^n=c$.

۲۲.ژ. فرض‌کنید f در $\mathbf{I}$ به $\mathbf{R}$ پیوسته باشد و $f(\circ)<\circ$ و $f(1)>\circ$. اگر $N=\{x\in\mathbf{I}:f(x)<\circ\}$ و $c=\sup N$ ، نشان‌دهیدکه $f(c)=\circ$.

۲۲.س. فرض کنید f یك تابع پیوسته در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشدکه اکیداً صعودی است (بدین‌معنی که هرگاه $x'<x''$ ، $f(x')<f(x'')$). ثابت‌کنید که f یك به یك است و تابع وارونش f^{-1} پیوسته و اکیداً صعودی است.

۲۲.ش. فرض‌کنید f یك تابع پیوسته در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد به‌قسمی که هیچیك از مقادیر تابع دوبار به‌دست نیاید. آیا درست است‌که f باید اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد؟

۲۲.ص. فرض کنید g تابعی در $\mathbf{I}$ به $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که اگر g هر مقدار را درست دوبار اختیار کند، آنگاه g نمی‌تواند درهر نقطهٔ $\mathbf{I}$ پیوسته باشد.

۲۲.ض. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای درفاصلهٔ $[0, 2\pi]$ به $\mathbf{R}$ باشد به‌طوری که $f(0)=f(2\pi)$. ثابت کنید که نقطه‌ای مانند c دراین فاصله هست به‌قسمی که $f(c)=f(c+\pi)$. (راهنمایی: $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$ را درنظر بگیرید). سپس نتیجه بگیرید که درهر لحظه برخط استوای زمین نقاط متقاطری با درجهٔ حرارت برابر وجود دارند.

۲۲.ط. فرض کنید $\varphi:[0, 2\pi)\to\mathbf{R}^2$ به‌ازای $t\in[0, 2\pi)$ با $\varphi(t)=(\cos t, \sin t)$ تعریف شده‌باشد. دراین‌صورت، φ یك نگاشت پیوسته یك به یك از $[0, 2\pi)$ روی دایرهٔ یکهٔ $S=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ است. نشان دهید که $\varphi^{-1} : S \to [0, 2\pi)$ نمی‌تواند پیوسته باشد. (بدین‌ترتیب، نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ ۹.۲۲ درصورت فشرده نبودن دامنه، ممکن است درست نباشد.)

پروژه

α.۲۲. دراین‌پروژه می‌خواهیم نشان بدهیم که بسیاری از قضایای بخش ۱۲ برای توابع پیوسته‌ای که دامنه و بردشان درفضاهای متری هستند برقرار می‌باشند. (برای برقراری این قضایا می‌توان توجه کرد که یا تعاریف قبلی درفضاهای متری معتبرند ویا اینکه می‌توان آنهارا به‌صورتی بیان کرد که درفضاهای متری معتبر باشند.)

(الف) نشان‌دهید که قضیهٔ ۲.۲۰ را می‌توان به‌صورتی بیان کرد که برای یك تابع از یك فضای متری به‌فضای متری دیگر معتبر باشد.

(ب) نشان دهید که قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲ بدون هیچگونه تغییر برقرار است.

(پ) ثابت کنید که قضیهٔ پایداری همبندی ۳.۲۲ برقرار است.

(ت) ثابت کنید که قضیهٔ پایداری فشردگی ۵.۲۲ برقرار است.

بخش ۲۳ پیوستگی یکنواخت و نقاط ثابت

فرض کنیم f در $D(f)$، به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده باشد و $D(f)$ زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد. دراین‌صورت بآسانی دیده می‌شود که گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(یك) f درهر نقطهٔ $D(f)$ پیوسته است؛

(دو) به‌ازای هر $\varepsilon>0$ و $u\in D(f)$ مفروض، عددی مانند $\delta(\varepsilon, u)>0$ هست به‌قسمی که اگر x به $D(f)$ متعلق باشد و $\|x-u\|\leqslant\delta$، آنگاه $\|f(x)-f(u)\|<\varepsilon$.

مطلبی که باید به‌آن توجه‌داشت این است که δ، درحالت کلی، هم به ε بستگی دارد و هم

به u . بستگی δ به u ناشی ازاین است کـه امکان دارد مقادیر تابع f درنقاط نزدیـك بهبعضی از نقاط بهسرعت و درنقاط نزدیك بهبرخی نقاط دیگر بهکندی تغییر کند.
حال ممکن است تابع f چنان باشد که بتوان عدد δ را مستقل ازنقطهٔ u در $D(f)$ و فقط وابسته به ε انتخاب کرد. برای مثال، اگر $f(x)=۲x$ ، آنگاه

$$|f(x)-f(u)|=۲|x-u|,$$

و میتوان $\delta(\varepsilon,u)$ را بهازای تمام مقادیر u برابر $\varepsilon/۲$ انتخاب کرد.
از سوی دیگر، اگر بهازای $x>۰$ ، $g(x)=۱/x$ ، آنگاه

$$g(x)-g(u)=\frac{u-x}{ux}\cdot$$

حال اگر $۰<\delta<u$ و $|x-u|\leqslant\delta$ ، برخواننده است که نشان دهد

$$|g(x)-g(u)|\leqslant\frac{\delta}{u(u-\delta)}$$

و این نابرابری را نمیتوان از این بهترکرد، چراکـه برابری عملاً بهازای $x=u-\delta$ برقرار است. اگر بخواهیم که $|g(x)-g(u)|\leqslant\varepsilon$ ، آنگاه بزرگترین مقداریکه برای δ میتوان انتخاب کرد عبارت است از

$$\delta(\varepsilon,u)=\frac{\varepsilon u^۲}{۱+\varepsilon u}\cdot$$

لـذا، اگـر $u>۰$ ، آنگاه g در u پیوسته است، چراکـه میتوان $\delta(\varepsilon,u)$ را بـرابـر $\varepsilon u^۲/(۱+\varepsilon u)$ انتخاب نمود. و ایـن بزرگترین مقداری است که میتوان برای $\delta(\varepsilon,u)$ انتخاب کرد. چون

$$\inf\left\{\frac{\varepsilon u^۲}{۱+\varepsilon u}:\ u>۰\right\}=۰$$

نمیتوان یك $\delta(\varepsilon,u)>۰$ به دست آورد که به ازای تمام نقاط $u>۰$، مستقل از انتخاب u باشد.

اکنون g را بهدامنهٔ کـوچکتری محدود میکنیم. در واقع، فرض میکنیم $a>۰$ و بهازای $x\geqslant a$ تعریف میکنیم $h(x)=۱/x$. دراین صورت تحلیلی که هماکنون انجام گـرفت، نشان میدهد کـه میتوان همان مقدار $\delta(\varepsilon,u)$ را بهکار بـرد. اما، این بار دامنه کوچکتر است و

$$\inf\left\{\frac{\varepsilon u^۲}{۱+\varepsilon u}:\ u\geqslant a\right\}=\frac{\varepsilon a^۲}{۱+\varepsilon a}>۰\cdot$$

لذا، اگر تعریف کنیم $\delta(\varepsilon)=\varepsilon a^{2}/(1+\varepsilon a)$ ، می‌توانیم این عدد را برای تمام نقاط $u\geqslant a$ به‌کار بریم.

برای کمك به درك این مطالب، خواننده باید مثالهای ۵.۲۰ را بررسی و مشخص کند که درچه مثالهایی δ وابسته به‌نقطه و در کدامیك مستقل از آن اختیار شده است.

با توجه به‌این مقدمات، اکنون به‌یك تعریف رسمی می‌پردازیم.

۱.۲۳ تعریف. فرض کنیم $D(f)$ ، دامنهٔ f در $\mathbf{R}^p$ و برد آن در $\mathbf{R}^q$ باشد. گوییم f درمجموعهٔ $A\subseteq D(f)$ **پیوستهٔ یکنواخت** است درصورتی که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ باشد به‌قسمی که اگر x و u به A متعلق باشند و $\|x-u\|\leqslant\delta(\varepsilon)$، آنگاه $\|f(x)-f(u)\|\leqslant\varepsilon$.

واضح است که هرگاه f در A پیوستهٔ یکنواخت باشد، درهر نقطهٔ A پیوسته است. اما، عکس این‌مطلب، درحالت کلی درست نیست. مفید است به‌خاطر داشته باشیم که درچه صورت یك تابع ، پیوستهٔ یکنواخت‌نیست، از این‌رو محك زیر را می‌آوریم و اثبات آن را به‌خواننده وا می‌گذاریم.

۲.۲۳ لم. شرط لازم وکافی برای آنکه تابع f در $A\subseteq D(f)$ پیوستهٔ یکنواخت نباشد این است که عددی مانند $\varepsilon_0>0$ و دو دنبالهٔ $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ در A وجود داشته‌باشند به‌قسمی که‌اگر $n\in\mathbf{N}$، آنگاه $\|x_n-y_n\|\leqslant 1/n$ و $\|f(x_n)-f(y_n)\|>\varepsilon_0$.

به‌عنوان تمرین‌لازم است خواننده این‌محك را به‌کاربرده نشان‌دهد که $g(x)=1/x$ در $D(g)=\{x: x>0\}$ پیوستهٔ یکنواخت نیست.

حال قضیهٔ بسیارمفیدی را عرضه می‌کنیم که می‌گوید: تابع پیوسته درهرزیرمجموعهٔ فشردهٔ دامنهٔ تابع، پیوستهٔ یکنواخت است.

۳.۲۳ قضیهٔ پیوستگی یکنواخت. فرض کنیم f تابعی پیوسته باشد به‌دامنه $D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$. اگر $K\subseteq D(f)$ فشرده باشد، آنگاه f در K پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان اول. فرض کنیم f در K پیوستهٔ یکنواخت نباشد. بنا بر لم ۲.۲۳ ، عددی چون $\varepsilon_0>0$ و دو دنباله مانند $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ در K وجود دارند به قسمی که اگر $n\in\mathbf{N}$ ، آنگاه

$$\|x_n-y_n\|\leqslant\frac{1}{n}\ ,\quad \|f(x_n)-f(y_n)\|>\varepsilon_0. \tag{۱.۲۳}$$

چون K در $\mathbf{R}^p$ فشرده است، دنبالهٔ X کراندار است. بنابرقضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس ۴.۱۶ یك زیردنبالهٔ (x_n) مانند $(x_{n(k)})$ وجود دارد که به‌عنصری‌مانند z همگراست. چون K بسته است، z به K متعلق است و f در z پیوسته است. واضح است که زیردنبالهٔ Y

متناظر به $(x_{n(k)})$، یعنی $(y_{n(k)})$، نیز به z همگراست.

از قضیهٔ ۲.۲۰ (پ) نتیجه‌می‌شود که دو دنبالهٔ $(f(x_{n(k)}))$ و $(f(y_{n(k)}))$ به $f(z)$ همگرایند. بنابراین، وقتی k به‌قدر کافی بزرگ است، داریم $\|f(x_{n(k)})-f(y_{n(k)})\|<\varepsilon_0$. ولی این با رابطهٔ دوم در (۱.۲۳) متناقض است.

برهان دوم. (می‌توانستیم براساس قضیهٔ پوشش لبگ ۵.۱۱ اثبات کوتاهتری ارائه دهیم، اما ما استفاده از تعریف فشردگی را ترجیح می‌دهیم.) فرض کنیم f در هر نقطه از مجموعهٔ فشردهٔ K پیوسته باشد. در این صورت بنا برقضیهٔ ۲.۲۰ (ب)، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ و هر u در K عددی مانند $\delta(\varepsilon/2,u)>0$ هست به‌قسمی که اگر $x\in K$ و

$$\|x-u\|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, u\right)$$

آنگاه $\|f(x)-f(u)\|<\varepsilon/2$. به ازای هر u در K، گوی باز

$$G(u)=\left\{x\in\mathbf{R}^p : \|x-u\|<\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, u\right)\right\}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت مجموعهٔ K مسلماً در اجتماع خانوادهٔ

$$\mathcal{G}=\{G(u) : u\in K\}$$

واقع است، چراکه به‌ازای هر u در K یک گوی باز $G(u)$ هست که شامل u است. چون K فشرده است، K دراجتماع تعداد با پایانی مجموعه درخانوادهٔ $\mathcal{G}$، مانند

$$G(u_1)\text{، }\ldots\text{، }G(u_N)$$

واقع است. حال تعریف می‌کنیم

$$\delta(\varepsilon)=\frac{1}{2}\inf\left\{\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon, u_1\right), \ldots, \delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon, u_N\right)\right\},$$

و نشان می‌دهیم که $\delta(\varepsilon)$ از خاصیت مطلوب برخوردار است. فرض کنیم x و u به K متعلق باشند و $\|x-u\|<\delta(\varepsilon)$. در این صورت، عددی طبیعی مانند k با شرط $1\leqslant k\leqslant N$ هست به‌قسمی که x به‌مجموعهٔ $G(u_k)$ متعلق باشد، یعنی

$$\|x-u_k\|<\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k\right).$$

اما $\delta(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{\varepsilon}{2},u_k\right)$، پس نتیجه می‌شود که

$$\|u-u_k\|\leqslant\|u-x\|+\|x-u_k\|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{2},u_k\right).$$

بنابراین، روابط زیر برقرارند

$$\|f(u)-f(u_k)\|<\frac{\varepsilon}{2} \ , \ \|f(x)-f(u_k)\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ازاین‌روابط، $\|f(x)-f(u)\|<\varepsilon$ نتیجه می‌شود. پس نشان داده‌ایم که اگر x و u دو نقطهٔ K باشند به‌طوری که $\|x-u\|\leqslant\delta(\varepsilon)$، آنگاه $\|f(x)-f(u)\|<\varepsilon$. □

چون دربخشهای بعدی بارها از مفهوم پیوستگی یکنواخت استفاده خواهیم کرد در اینجا کاربردی از آن را ذکر نمی‌کنیم. اما خاصیت دیگری را معرفی می‌کنیم که دراغلب موارد وجود دارد و برای تضمین پیوستگی یکنواخت کافی است.

۴۰۲۳ تعریف. هرگاه دامنهٔ f، یعنی $D(f)$، در $\mathbf{R}^p$ و برد آن در $\mathbf{R}^q$ باشد، می‌گوییم f **درشرط لیپشیتس**[1] صدق می‌کند در صورتی که عدد ثابتی مانند $A>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای تمام نقاط x و u در $D(f)$،

$$\|f(x)-f(u)\|\leqslant A\|x-u\|. \qquad (۲۰۲۳)$$

درحالتی که درنابرابری (۲۰۲۳) عددثابت A را بتوان کوچکتر ازیک گرفت، تابع را یک **انقباض** گوییم.

واضح است که هرگاه رابطهٔ (۲۰۲۳) برقرار باشد، اگر $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/A$ انتخاب‌شود پیوستگی‌یکنواخت f در $D(f)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر f در شرط لیپشیتس‌صدق کند، پیوستهٔ یکنواخت است. بااین حال، عکس این مطلب درست نیست. مثلاً تابعی را که در $D(f)=\mathbf{I}$ با $f(x)=\sqrt{x}$ تعریف می‌شود در نظر بگیرید. هرگاه (۲۰۲۳) برقرار باشد، اگر u را صفربگیریم بایدبه‌ازای‌ثابتی‌چون A داشته‌باشیم $|f(x)|\leqslant A|x|$، اما بآسانی دیده می‌شود که نابرابری اخیر نمی‌تواند برقرار باشد.

با توجه به قضیهٔ ۳۰۲۱ می‌بینیم که هرتابع خطی‌که دامنه‌اش $\mathbf{R}^p$ و بردش در $\mathbf{R}^q$ باشد در شرط لیپشیتس صدق می‌کند. علاوه براین، دربخش ۲۷ خواهیم دیدکه هرتابع حقیقی با مشتق‌کراندار نیز درشرط لیپشیتس صدق می‌کند.

قضایای نقطهٔ ثابت

فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه‌اش $D(f)$ و بردش هر دو در فضای $\mathbf{R}^p$ هستند. در این صورت نقطهٔ u در $D(f)$ را یک **نقطهٔ ثابت** f گوییم هرگاه $f(u)=u$. چون

---

۱. رودلف لیپشیتس Rudolph Lipschitz (۱۸۳۲—۱۹۰۳) در دانشگاه بن استاد بود. او در زمینهٔ جبر، نظریهٔ اعداد، هندسهٔ دیفرانسیل، و آنالیزکارهایی انجام داده است.

نتایج مهمی را براساس وجود نقاط ثابت توابع می‌توان به دست آورد، اهمیت دارد که چند محك مثبت در این جهت داشته باشیم. اولین قضیهٔ ما با آنکه نوعاً مقدماتی است، اغلب مورداستفاده است و این‌مزیت مهم را دارد که راهی برای ساختن نقطهٔ ثابت به‌دست می‌دهد. برای سهولت، ابتدا قضیه را برای حالتی که دامنهٔ تابع تمام فضاست بیان‌می‌کنیم.

۵.۲۳ قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای انقباضها. فرض‌کنیم f یك انقباض باشدکه دامنه‌اش $\mathbf{R}^p$ و بردش در $\mathbf{R}^p$ است. در این صورت f یك و فقط یك نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. فرض کنیم ثابتی‌مانند C باشرط $0<C<1$ موجودباشد به‌قسمی که‌به‌ازای هر x و y در $\mathbf{R}^p$، $\|f(x)-f(y)\|\leqslant C\|x-y\|$. x_1 را نقطهٔ دلخواهی در $\mathbf{R}^p$ گرفته بنویسید $x_2=f(x_1)$. به‌استقرا، تعریف کنید

$$x_{n+1}=f(x_n) \quad \text{و} \quad n\in\mathbf{N}. \tag{۳.۲۳}$$

نشان خواهیم دادکه دنبالهٔ (x_n) به‌یك نقطهٔ ثابت یکتای تابع f مانند u همگراست و سرعت همگرایی آن را برآورد می‌نماییم.

برای این منظور، ملاحظه می‌کنیم که

$$\|x_3-x_2\|=\|f(x_2)-f(x_1)\|\leqslant C\|x_2-x_1\|,$$

و به استقرا می‌بینیم که

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|f(x_n)-f(x_{n-1})\|\leqslant \tag{۴.۲۳}$$
$$C\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\|C^{n-1}\|x_2-x_1\|.$$

هرگاه $m\geqslant n$، (۴.۲۳) را مکرر به‌کار می‌بریم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\|x_m-x_n\|&\leqslant\|x_m-x_{m-1}\|+\|x_{m-1}-x_{m-2}\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\|\\&\leqslant\{C^{m-2}+C^{m-3}+\cdots+C^{n-1}\}\|x_2-x_1\|.\end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود که، اگر $m\geqslant n$، آنگاه

$$\|x_m-x_n\|\leqslant\frac{C^{n-1}}{1-C}\|x_2-x_1\|. \tag{۵.۲۳}$$

چون $0<C<1$، دنبالهٔ (C^{n-1}) به صفر همگراست. بنابراین، (x_n) یك دنبالهٔ کوشی است. چنانچه $u=\lim(x_n)$، از (۳.۲۳) واضح است که u یك نقطهٔ ثابت f است. از (۵.۲۳) و لم ۸.۱۵، برآورد

$$\|u-x_n\|\leqslant\frac{C^{n-1}}{1-C}\|x_2-x_1\| \tag{۶.۲۳}$$

را درمورد سرعت همگرایی به‌دست می‌آوریم.

بالاخره، نشان می‌دهیم که فقط یك نقطهٔ ثابت برای f وجود دارد. در واقع، اگر u و v دو نقطهٔ ثابت و متمایز f باشند، آنگاه

$$||u-v|| = ||f(u)-f(v)|| \leqslant C||u-v||.$$

چون $u \neq v$، پس $||u-v|| \neq ٠$، درنتیجه این رابطه $١ \leqslant C$ را ایجاب می کند که با فرض $C < ١$ متناقض است.

مشاهده می‌شود که ما در واقع نتیجهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

۶.۲۳ نتیجه. اگر f یك انقباض با ثابت $C < ١$ باشد، $x_١$ نقطهٔ دلخواهی در $\mathbf{R}^p$ باشد، دنبالهٔ $X = (x_n)$ بـا معادلهٔ (۳.۲۳) تعریف شده باشد، و u نقطهٔ ثابت یکتای f باشد، آنگاه X به u همگراست و سرعت همگرایی با (۶.۲۳) برآورد می‌شود.

درحالتی که تابع f درتمام $\mathbf{R}^p$ تعریف‌نشده است، دقت بیشتری لازم است تامطمئن شویم که تعریف به‌استقرای (۳.۲۳) دنباله را می‌توان به‌کار بست وجملات دنباله در دامنهٔ f باقی می‌مانند. باآنکه این وضع به‌صورتهای دیگر نیز قابل بیان است. ما به‌قضیهٔ زیر قناعت خواهیم کرد.

۷.۲۳ قضیه. فرض کنیم f یك انقباض با ثابت C باشد که در

$$D(f) = \{x \in \mathbf{R}^p : ||x|| \leqslant B\}$$

تعریف شده است و $||f(٠)|| \leqslant B(١-C)$. در این صورت دنبالهٔ

$$x_١ = ٠ \ , \ x_٢ = f(x_١) \ , \ \dots \ , \ x_{n+١} = f(x_n) \ , \ \dots$$

به نقطهٔ ثابت یکتای f، که در مجموعهٔ $D(f)$ واقع است، همگراست.

برهان. در واقع، اگر $x \in D = D(f)$، آنگاه

$$||f(x)-f(٠)|| \leqslant C||x-٠|| \leqslant CB,$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$||f(x)|| \leqslant ||f(٠)|| + CB \leqslant (١-C)B + CB = B.$$

بنابراین، $f(D) \subseteq D$. لذا، دنبالهٔ (x_n) را می‌شودتعریف کرد و دنباله در D باقی‌می‌ماند؛ درنتیجه می‌توان برهان قضیهٔ قبل را درمورد آن به‌کار برد. □

قضیهٔ انقباض که دربالا ثابت شد، دارای این مزیتهاست: ساختنی است،خطای تقریب را می‌توان برآورد کردووجود یك نقطهٔ ثابت یکتا را تضمین می کند. بااین‌حال،این‌نقص

را داردکه شرط انقباض برای f قید بسیار سنگینی است. یك قضیهٔ عمیق و مهم، که اول بار براوئر[1] آن را در ۱۹۱۰ ثابت کرد، این است که هر تابع پیوسته که دامنه‌اش $D=\{x\in\mathbf{R}^p : \|x\|\leqslant B\}$ و بردش در D باشد، باید حداقل یك نقطهٔ ثابت داشته باشد.

۸.۲۳ قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر. فرض کنیم $B>0$ و $D=\{x\in\mathbf{R}^p : \|x\|\leqslant B\}$. دراین صورت، هرتابع پیوسته به‌دامنهٔ D و برد در D حداقل یك نقطهٔ ثابت دارد.

اثبات این‌قضیه درحالت $P=1$ به‌عنوان یك‌تمرین خواهدآمد. اما اثبات درحالت $p>1$ خیلی ما را از موضوع بحث دور خواهد کرد. برای برهانی که فقط براساس مفاهیم مقدماتی بنا شده است به‌کتاب دانفرد ــ شوارتس، صفحه‌های ۴۶۷ تا ۴۷۰ رجوع کنید. برای گزارشی مدون وکاملتر درمورد نقطهٔ ثابت و قضایای مربوط به‌آن به‌کتاب لفشتس مراجعه نمایید.

تمرین

۲۳.الف. هریك از توابع مثال ۵.۲۰ را بررسی کنید و یا نشان دهید که تابع در دامنه‌اش پیوستهٔ یکنواخت است، یا نشان دهید که پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۲۳. ب. با استفاده از قضیهٔ پوششی لبگ ۵.۱۱، برهانی برای قضیهٔ پیوستگی یکنواخت ۳.۲۳ ارائه دهید.

۲۳.پ. هرگاه B در $\mathbf{R}^p$ کراندارو $f : B \longrightarrow \mathbf{R}^q$ پیوستهٔ یکنواخت باشد، نشان دهید که f در B کراندار است. نشان دهید که این حکم، درصورتی‌که B در $\mathbf{R}^p$ کراندار نباشد، همیشه درست نیست.

۲۳.ت. نشان دهید که توابعی که به ازای $x\in\mathbf{R}$ با

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad , \quad g(x)=\sin x,$$

تعریف شده‌اند در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت هستند.

۲۳.ث. نشان دهید که توابع تعریف شده در $D=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 0\}$ با

$$h(x)=x \quad , \quad k(x)=e^{-x}$$

در D پیوستهٔ یکنواخت هستند.

۲۳.ج. نشان دهید که توابع زیر در دامنه‌هایشان پیوستهٔ یکنواخت نیستند

---

[1] ل. ا. ژ. براوئر- L. E. J. Brouwer (۱۸۸۱–۱۹۶۶) در آمستردام استاد و رئیس مدرسه هلندی ریاضیات بود. علاوه برفعالیتهای اولیه‌اش در توپولوژی، به‌خاطر کارش درمبانی ریاضیات شناخته شده است.

(الف) $f(x)=1/x^2$ ، $D(f)=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$ ،

(ب) $g(x)=\tan x$ ، $D(g)=\{x\in\mathbf{R} : 0\leqslant x<\pi/2\}$ ،

(پ) $h(x)=e^x$ ، $D(h)=\mathbf{R}$ ،

(ت) $k(x)=\sin(1/x)$ ، $D(k)=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$.

۲۳.ج. تابع $g : \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^q$ را **دوره‌ای** گوییم هر گاه عددی مانند $p>0$ وجود داشته باشد به قسمی که به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$ ، $g(x+p)=g(x)$. نشان دهیدکه یك تابع دوره‌ای پیوسته، در $\mathbf{R}$ کراندار و پیوستهٔ یکنواخت است.

۲۳.ح. فرض‌کنید f از $D\subseteq\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده، و f در D پیوستهٔ یکنواخت باشد. هر گاه (x_n) یك دنبالهٔ کوشی در D باشد، نشان دهیدکه $(f(x_n))$ یك دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^q$ است.

۲۳.خ. فرض‌کنید $f : (0,1)\longrightarrow\mathbf{R}$ در $(0,1)$ پیوستهٔ یکنواخت باشد. نشان دهیدکه f را می‌توان در $x=0$ و $x=1$ چنان تعریف کردکه در $[0,1]$ پیوسته باشد.

۲۳.د. فرض‌کنید $D=\{x\in\mathbf{R}^p : \|x\|<1\}$. نشان دهیدکه $f : D\longrightarrow\mathbf{R}^q$ را می‌توان به تابعی پیوسته در $D_1=\{x\in\mathbf{R}^p : \|x\|\leqslant 1\}$ به $\mathbf{R}^q$ گسترش داد اگر و فقط اگر f در D پیوستهٔ یکنواخت باشد.

۲۳.ذ. هر گاه f و g در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت باشند، نشان دهیدکه $f+g$ نیز در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است، اما ممکن است fg در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت نباشدحتی وقتی f یا g کراندار است.

۲۳.ر. هر گاه $f : \mathbf{I}\longrightarrow\mathbf{I}$ پیوسته باشد. نشان دهیدکه f در $\mathbf{I}$ یك نقطهٔ ثابت دارد. (راهنمایی : تابع $g(x)=f(x)-x$ را درنظر بگیرید.)

۲۳.ز. تابعی $f : \mathbf{R}^p\longrightarrow\mathbf{R}^p$ مثال بزنیدکه به‌ازای هر $x,u\in\mathbf{R}^p$ ، داشته باشیم $\|f(x)-f(u)\|\leqslant\|x-u\|$ و f هیچ نقطهٔ ثابتی نداشته باشد. (چرا این مثال قضیهٔ انقباض ۲۳.۵ را نقض نمی‌کند؟)

۲۳.ژ. فرض‌کنید f و g توابع پیوسته‌ای در $[a,b]$ باشند به‌قسمی‌که

$$R(f)\subseteq R(g)=[0,1].$$

ثابت‌کنید نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ هست به‌قسمی‌که $f(c)=g(c)$.

پروژه

۲۳.α. دراین پروژه مفهوم «نوسان» تابع دریك مجموعه و دریك نقطه معرفی می‌شود. فرض‌کنیم $I=[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ و $f : I\longrightarrow\mathbf{R}$ کراندار باشد. هر گاه $A\subseteq I$ ، **نوسان f در A** را برابر عدد

$$\Omega_f(A)=\sup\{f(x)-f(y) : x,y\in A\}$$

تعریف می کنیم.

(الف) نشان دهید که $0\leqslant \Omega_f(A)\leqslant 2\sup\{|f(x)| : x\in A\}$. اگر $A\subseteq B\subseteq I$، آنگاه $\Omega_f(A)\leqslant \Omega_f(B)$.

(ب) هر گاه $c\in I$، **نوسان** f در c را عدد

$$\omega_f(c)=\inf_{\delta}\Omega_f(N_\delta)$$

تعریف‌می کنیم که‌در آن $N_\delta=\{x\in I : |x-x_0|<\delta\}$. نشان‌دهید که(ر. ك. بخش ۲۵)

$$\omega_f(c)=\lim_{\delta\longrightarrow 0}\Omega_f(N_\delta).$$

همچنین، اگر $\omega_f(c)<\alpha$ آنگاه یك $\delta>0$ هست به‌قسمی که $\Omega_f(N_\delta)<\alpha$.

(پ) نشان دهید که f در $c\in I$ پیوسته است اگر وفقط اگر $\omega_f(c)=0$.

(ت) هر گاه $\alpha>0$ وبه‌ازای هر $x\in I$، $\omega_f(x)<\alpha$، آنگاه عددی مانند $\delta>0$ هست به‌قسمی که‌اگر $A\subseteq I$ چنان‌باشد که‌قطرش $d(A)=\sup\{|x-y| : x, y\in A\}$ کمتر از δ باشد، آنگاه $\Omega_f(A)<\alpha$.

(ث) هر گاه $\alpha>0$، مجموعهٔ $D_\alpha=\{x\in I : \omega_f(x)\geqslant\alpha\}$ مجموعهٔ بسته‌ای در $\mathbf{R}$ است. نشان‌دهید که

$$D=\bigcup_{\alpha>0}D_\alpha=\bigcup_{n\in N}D_{1/n}$$

مجموعهٔ نقاطی است که f در آنها ناپیوسته‌است. لذا، مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی یك تابع، اجتماع خانوادهٔ شمارش‌پذیری از مجموعه‌های بسته است. (چنین مجموعه‌ای را یك مجموعهٔ F_σ می گوییم.)

(ج) این‌تعریفها ونتایج را به‌حالتی‌که تابع دریك حجرهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ تعریف شده است تعمیم دهید.

بخش ۲۴ دنباله‌های توابع پیوسته

درموارد بسیاری احتیاج داریم یك دنباله از توابع پیوسته را درنظر بگیریم. دراین‌بخش چند قضیهٔ مهم و جالب درمورد این دنباله‌ها عرضه می‌کنیم. قضیهٔ ۱.۲۴ دراین کتاب بارها مورد استفاده قرار می‌گیرد و یك قضیهٔ ره گشاست. بقیهٔ قضایا را چندان به‌کار نخواهیم برد، ولی خواننده حداقل باید باصورت آنها آشنا باشد.

دراین بخش اهمیت همگرایی یکنواخت باید روشنتر شود. به‌خاطر داریم که وقتی می گوییم دنبالهٔ توابع (f_n) در D، به $\mathbf{R}^q$، $D\subseteq\mathbf{R}^p$، در D به f همگرای یکنواخت است، هر گاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $N(\varepsilon)$ باشد به‌قسمی که اگر $n\geqslant N(\varepsilon)$ و $x\in D$، آنگاه $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$. به‌یادمی‌آوریم (قضیهٔ ۹.۱۷) که اگر (f_n) یك

دنبالهٔ کراندار باشد، مطلب فوق درست است اگر وفقط اگر $\|f_n - f\|_D \to ۰$.

شرط پایداری پیوستگی درحد

ملاحظه می‌کنیم که حد یك دنباله از توابع پیوسته ممکن است پیوسته نباشد. این مطلب با مثال زیر بآسانی دیده می‌شود: به‌ازای $n \in \mathbf{N}$ و $x \in \mathbf{I}$، فرض کنید $f_n(x) = x^n$. درمثال ۲.۱۷ (ب) دیدیم که دنبالهٔ (f_n) در $\mathbf{I}$ به‌تابع f که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = ۰, \qquad ۰ \leqslant x < ۱,$$
$$= ۱, \qquad x = ۱$$

همگراست. بنابراین، با اینکه توابع پیوستهٔ f_n توابعی ساده هستند، تابع حد درنقطهٔ $x = ۱$ پیوسته نیست.

دامنهٔ ناپیوستگی تابع حد درمثال بالا خیلی بزرگ نیست، اما واضح است که می‌توان مثالهای پیچیده‌تری ساخت که ناپیوستگی بیشتری را به‌وجود آورند. بررسی چگونگی ناپیوستگی حد یك دنبالهٔ توابع پیوسته جالب است، اما این بررسی ما را از مطلب بسیار دور می‌کند. علاوه‌براین، دراکثر کاربردها، یافتن شرایطی اضافی که پیوستگی تابع حد را تضمین کند از اهمیت بیشتری برخوردار است.

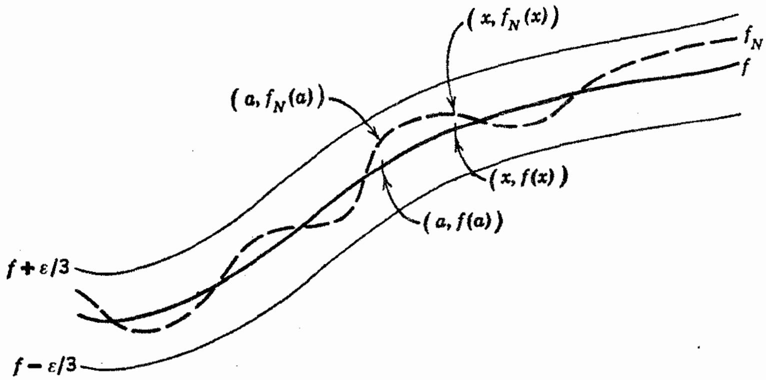
حال این مطلب مهم را ثابت می‌کنیم: همگرایی یکنواخت دنبالهٔ توابع پیوسته برای تضمین پیوستگی تابع حدکافی است.

۱.۲۴ قضیه. فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته به دامنهٔ D در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ باشد و فرض کنیم این دنباله در D به‌تابع f همگرای یکنواخت باشد. دراین‌صورت f در D پیوسته است.

برهان. چون (f_n) در D به f همگرای یکنواخت است، به‌ازای $\varepsilon > ۰$ داده‌شده، عدد طبیعی $N = N(\varepsilon/۳)$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر x در D داریم $\|f_N(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon/۳$. برای آنکه نشان دهیم f دریك نقطهٔ D مانند a پیوسته است، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leqslant \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| \\ &\quad + \|f_N(a) - f(a)\| \\ &\leqslant \varepsilon/۳ + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \varepsilon/۳. \end{aligned} \tag{۱.۲۴}$$

گوییم چون f_N پیوسته است، پس عددی مانند $\delta = \delta(\varepsilon/۳, a, f_N) > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $\|x - a\| < \delta$ و $x \in D$، آنگاه $\|f_N(x) - f_N(a)\| < \varepsilon/۳$.



شکل ۱۰۲۴

(ر. ك. شکل ۱.۲۴). بنابراین وقتی x چنین است، داریم $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$. این پیوستگی تابع f درنقطهٔ a، یك نقطهٔ دلخواه D، را نشان می‌دهد. □

توجه داریم که، شرط همگرایی یکنواخت دنبالهٔ توابع پیوسته برای پیوستگی تابع حد کافی است ولی لازم نیست. بنابراین، هرگاه (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته به یك تابع پیوستهٔ f همگرا باشد، نمی‌شود نتیجه گرفت که این همگرایی یکنواخت است. (ر. ك. تمرین ۲۴. الف.)

همان‌طور که درقضیهٔ ۹.۱۷ دیدیم همگرایی یکنواخت یك دنبالهٔ توابع در یك مجموعهٔ D، از همگرایی با نرم یکنواخت در D نتیجه می‌شود. بنابراین، قضیهٔ ۱۰۲۴ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

۲.۲۴ قضیه. اگر (f_n) دنباله‌ای از توابع در $BC_{pq}(D)$ باشد به‌قسمی که $\|f_n - f\|_D \to 0$، آنگاه $f \in BC_{pq}(D)$.

قضایای تقریب

دربسیاری ازکاربردها مفید است که توابع پیوسته به وسیلهٔ توابعی ساده «تقریب» شوند. تعاریف متعدد قابل‌قبولی برای روشنتر کردن واژهٔ «تقریب» وجود دارد، یکی از طبیعیترین و مهمترین آنها این است که شرط کنیم درهرنقطهٔ از دامنهٔ داده شده، تفاوت بین تابع تقریب زننده و تابع داده شده ازخطای معین مفروضی بیشتر نباشد. این تعریف گاهی «تقریب یکنواخت» نامیده می‌شود و با همگرایی یکنواخت ارتباطی نزدیك دارد. فرض

می‌کنیم تابع f به‌دامنهٔ $D=D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ داده شده است گوییم تابع g، f را **بادقت $\varepsilon>0$ به‌طور یکنواخت در D تقریب می‌زند** هر گاه

$$\text{به‌ازای هر } x\in D \quad ، \quad \|g(x)-f(x)\|\leqslant\varepsilon\ ;$$

یا به‌عبارت دیگر، هر گاه

$$\|g-f\|_D=\sup\{\|g(x)-f(x)\|:x\in D\}\leqslant\varepsilon.$$

دراینجا از نرمی که در معادلهٔ (۵.۱۷) معرفی شده، استفاده کرده‌ایم. گوییم تابع f را می‌توان در D با توابع ردهٔ $\mathcal{G}$ **به‌طور یکنواخت تقریب‌کرد** هر گاه، به‌ازای هر $\varepsilon>0$، تابعی مانند g_ε در $\mathcal{G}$ باشد به‌قسمی که $\|g_\varepsilon-f\|_D<\varepsilon$، یا، به‌عبارتی دیگر، هر گاه دنباله‌ای ازتوابع در $\mathcal{G}$ باشد که در D به‌طوریکنواخت به f همگرا باشد.

۳.۲۴ تعریف. تابع g به دامنهٔ $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ را **تابع پله‌ای** گوییم هر گاه مقادیر تابع فقط ازتعدادی با پایان نقطهٔ $\mathbf{R}^q$ تشکیل‌شده‌باشد وهریك ازاین مقادیرمخالف صفر، مقدار تابع درفاصله‌ای از $\mathbf{R}^p$ باشد.

برای مثال، اگر $p=q=1$، آنگاه تابع g، که به‌صورت

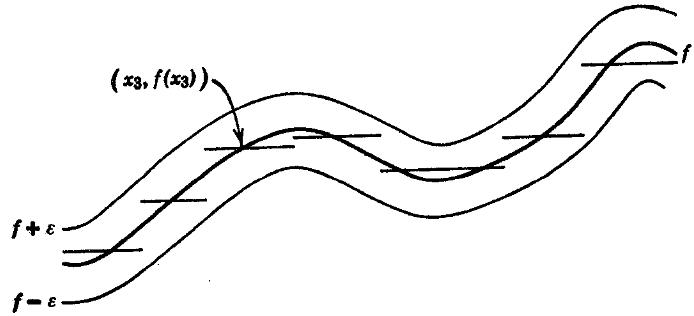
$$\begin{aligned} g(x)&=0, && x\leqslant -2,\\ &=1, && -2<x\leqslant 0,\\ &=3, && 0<x<1,\\ &=-5, && 1\leqslant x\leqslant 3,\\ &=0, && x>3, \end{aligned}$$

تعریف شده است، یك تابع پله‌ای است.

حال نشان می‌دهیم که هر تابع‌پیوسته‌ای راکه دامنه‌اش حجره‌ای‌فشرده باشد می‌توان با توابع پله‌ای به‌طور یکنواخت تقریب زد.

۴.۲۴ قضیه. فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای باشد که دامنه‌اش D یك حجرهٔ فشرده در $\mathbf{R}^p$ است و مقادیرش در $\mathbf{R}^q$ هستند. دراین‌صورت، f را می‌توان در D به‌طوریکنواخت به‌وسیلهٔ توابع پله‌ای تقریب زد.

برهان. فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون f پیوستهٔ یکنواخت است (قضیهٔ ۳.۲۳)، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ هست به‌قسمی که اگر x و y به D متعلق باشند و $\|x-y\|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$. دامنهٔ f یعنی D را به حجره‌های I_1، ...، I_n چنان‌تقسیم می‌کنیم که اگر xوy به I_k متعلق‌باشند،آنگاه $\|x-y\|<\delta(\varepsilon)$



شکل ۲۰۲۴۰ تقریب به‌وسیلهٔ یك تابع پله‌ای

(چگونه ؟). x_k رانقطهٔ دلخواهی متعلق به حجرهٔ I_k ، n ، $k=۱, ۲, …$، می گیریم و g_ε را با $g_\varepsilon(x)=f(x_k)$ به‌ازای $x\in I_k$ و $g_\varepsilon(x)=۰$ به‌ازای $x\notin D$ تعریف می کنیم . دراین صورت واضح است که به‌ازای $x\in D$ ، $\|g_\varepsilon(x)-f(x)\|<\varepsilon$ ، درنتیجه g_ε ، f را در D بادقت ε تقریب می کند (ر. ك. شکل ۲۰۲۴). □

طبیعی است متوقع باشیم که یك تابع پیوسته را بتوان به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ توابع ساده‌ای که پیوسته نیز هستند (توجه کنیدکه توابع پله‌ای پیوسته نیستند.) تقریب کرد. برای‌سهولت، نتیجهٔ بعدی راتنها درحالت $p=q=۱$ ثابت می‌کنیم، هرچندآشکار است که این نتیجه به‌ابعاد بالا تعمیم می‌یابد.

اگر $J=[a, b]$ حجره‌ای فشرده در $\mathbf{R}$ باشد ، می گوییم تابع g در J به $\mathbf{R}$ **خطی تکه‌ای**است‌هرگاه تعدادی‌باپایان‌نقطهٔ c_k باشرط $a=c_۰<c_۱<c_۲<\dots<c_n=b$ و اعداد حقیقی A_k ، B_k ، $k=۰, ۱, ۲, …, n$ ، وجود داشته باشند به‌قسمی‌که وقتی x در رابطهٔ $c_{k-۱}<x<c_k$ صدق می کند، تابع g به‌صورت زیر باشد:

$$g(x)=A_kx+B_k, \qquad k=۰, ۱, \dots, n\,.$$

البته، اگر g در J پیوسته باشد، آنگاه ثابتهای A_k و B_k باید در روابط معینی صدق کنند.

۵۰۲۴ قضیه. فرض کنیم f تابعی پیوسته باشد که دامنه‌اش حجره‌ای فشرده مانند J در $\mathbf{R}$ است، دراین‌صورت، f را می‌توان در J به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ توابع خطی تکه‌ای پیوسته تقریب زد.

برهان. مانند قبل f درمجموعهٔ فشردهٔ J پیوستهٔ یکنواخت است. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon>۰$ داده شده ، $J=[a, b]$ را با نقاط c_k ، n ، $k=۰, ۱, ۲, …$ به طوری که $a=c_۰<c_۱<\dots<c_n=b$ و $c_k-c_{k-۱}<\delta(\varepsilon)$ به n حجره تقسیم می کنیم. نقاط $(c_k, f(c_k))$ رابه‌وسیلهٔ قطعه خطها به‌هم وصل می کنیم وتابع خطی تکه‌ای پیوستهٔ حاصل

را به g_ε نمایش می‌دهیم. واضح است که g_ε ، f را در J با دقت ε تقریب می‌زند. □

تقریب به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها

حال به‌اثبات نتیجه‌ای عمیقتر، مفیدتر و جالبتر در ارتباط با تقریب به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها می‌پردازیم، ابتدا، قضیهٔ تقریب وایرشتراس را با استفاده از چندجمله‌ایهای برنشتین[1] برای حالت $p=q=1$ به‌اثبات می‌رسانیم.

۶.۲۴ تعریف. فرض‌کنیم f تابعی باشد که دامنه‌اش $\mathbf{I}=[0, 1]$ و بردش در $\mathbf{R}$ است. nامین **چندجمله‌ای برنشتین** تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$B_n(x)=B_n(x\,;\,f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (۲.۲۴)$$

چندجمله‌ایهای برنشتین به‌آن اندازه که درنگاه اول به‌نظر می‌آید عجیب و غریب نیستند. هرخواننده‌که با نظریهٔ احتمال کمی آشنا باشد، به‌یاد توزیع دوجمله‌ای می‌افتد. حتی بدون این آشنایی، خواننده توجه داردکه مقدار $B_n(x\,;\,f)$ چندجمله‌ای درنقطهٔ x، ازمقادیر $f(0)$، $f(1/n)$، $f(2/n)$، ...، $f(1)$ با ضرایب وزنی غیرمنفی به‌صورت $\varphi_k(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ حاصل می‌شود. دیده می‌شودکه برای آن مقادیر k که به‌ازای آنها k/n از x دور است، این عوامل بسیار کوچك‌اند. درواقع، تابع φ_k در $\mathbf{I}$ غیرمنفی است و مقدار آن درنقطهٔ k/n ماکزیمم است. علاوه‌براین، همان‌طوری که در زیر ملاحظه خواهیم کرد، مجموع همهٔ $\varphi_k(x)$ها برای $k=0, 1, \dots, n$ وبه‌ازای هر x در $\mathbf{I}$ برابر با ۱ می‌باشد.

به‌خاطر داریم که قضیهٔ دوجمله‌ای بیان می‌کندکه

$$(s+t)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s^k t^{n-k}, \qquad (۳.۲۴)$$

که درآن ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ نمایشگر

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

---

[1] . سرژه ن. برنشتین Serge N. Bernstein (۱۸۸۰ـ۱۹۶۸) درآنالیز، نظریهٔ تقریب و احتمال تحقیقاتی عمیق کرده است. در ادسا متولد شد و در لنینگراد و مسکو سمت استادی یافت.

است. با محاسبهٔ مستقیم، نتیجه می گیریم که

$$\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{k}{n}\binom{n}{k} \qquad (۴.۲۴)$$

$$\binom{n-2}{k-2}=\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k}. \qquad (۵.۲۴)$$

حال در (۳.۲۴) می گیریم $s=x$ و $t=1-x$، به‌دست می‌آید

$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (۶.۲۴)$$

اکنون اگر در (۶.۲۴) به‌جای n ، $n-1$ و به‌جای k ، j بنویسیم، داریم

$$1=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}.$$

از ضرب این رابطهٔ اخیر در x و اعمال اتحاد (۴.۲۴)، به‌دست می‌آید

$$x=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{j+1}{n}\binom{n}{j+1}x^{j+1}(1-x)^{n-(j+1)}.$$

حال می‌نویسیم $k=j+1$ ، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

همچنین توجه داریم که جملهٔ نظیر به $k=0$ را ، چون صفر است، می‌توان جزو این مجموع گرفت. بنابراین داریم

$$x=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (۷.۲۴)$$

محاسبه‌ای مشابه، براساس (۶.۲۴) که در آن به جای n ، $n-2$ گذاشته شده باشد، و اتحاد (۵.۲۴)، نشان می‌دهد که

$$(n^2-n)x^2=\sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

بنابراین نتیجه می گیریم که

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (۸.۲۴)$$

(۶.۲۴) را در x^2 و (۷.۲۴) را در $-2x$ ضرب و سپس آنها را با (۸.۲۴) جمع می کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(1/n)x(1-x)=\sum_{k=0}^{n}(x-k/n)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (9.24)$$

از این برآورد در زیر استفاده خواهیم کرد.

با توجه به‌تعریف ۶.۲۴، فرمول (۶.۲۴) این را می‌گوید که n امین چندجمله‌ای برنشتین برای تابع ثابت $f_0(x)=1$ بر f_0 منطبق است. فرمول (۷.۲۴) گویای همین مطلب درمورد تابع $f_1(x)=x$ است. بالاخره فرمول (۸.۲۴) حکم می‌کند که nامین چندجمله‌ای برنشتین برای تابع $f_2(x)=x^2$

$$B_n(x\,;f_2)=(1-\frac{1}{n})\,x^2+(\frac{1}{n})x$$

است که در $\mathbf{I}$ به f_2 همگرای یکنواخت است. حال ثابت می‌کنیم که اگر f تابع پیوستهٔ دلخواهی از $\mathbf{I}$ به $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه دنبالهٔ چندجمله‌ایهای برنشتین آن در $\mathbf{I}$ به‌طور یکنواخت به f همگراست. این نتیجه یك برهان ساختاری از قضیهٔ تقریب وایرشتراس را به‌دست می‌دهد. درجریان اثبات این قضیه احتیاج به‌فرمول (۹.۲۴) خواهیم داشت.

۷.۲۴ قضیهٔ تقریب برنشتین. فرض کنیم f در $\mathbf{I}$ پیوسته باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}$ باشند. دراین‌صورت دنبالهٔ چندجمله‌ایهای برنشتین که با معادلهٔ (۲.۲۴) برای f تعریف شده است، در $\mathbf{I}$ به f همگرای یکنواخت است.

برهان . از ضرب فرمول (۶.۲۴) در $f(x)$ داریم

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

بنابراین، رابطهٔ

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

به‌دست می‌آید و از آن نتیجه می‌شود که

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (10.24)$$

حال گوییم f کراندار وهمچنین پیوستهٔ یکنواخت است. توجه داریدکه هرگاه k چنان باشد که k/n نزدیك به x باشد، آنگاه جملهٔ نظیر درمجموع (۱۰.۲۴) به‌علت پیوستگی f در x کوچك است. از سوی دیگر، اگر M یك کران f باشد، هرگاه k/n از x دور باشد، فقط می‌توان گفت که عامل ضربی که شامل f است از $2M$ کوچکتر است وعاملهای دیگر هستندکه باید موجب کوچك شدن جمله شوند. بنابراین، به‌این نتیجه می‌رسیم که

رابطهٔ (۱۰.۲۴) را به دوقسمت تقسیم کنیم: قسمتی که در آن مقادیر k به قسمی است که $x-k/n$ کوچك‌اند و قسمتی دیگر که در آن مقادیر k به‌قسمی است که $x-k/n$ بزرگ‌اند.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ و همچنین فرض کنیم که $\delta(\varepsilon)$ عدد مذکور در تعریف پیوستگی یکنواخت f باشد. خواهیم دید که مناسب است n را آن‌قدر بزرگ بگیریم که

$$n\geqslant \sup\left\{(\delta(\varepsilon))^{-4},\frac{M^2}{\varepsilon^2}\right\}, \tag{۱۱.۲۴}$$

و (۱۰.۲۴) را به‌دومجموع تقسیم نماییم. مجموع اول عبارت‌است‌از مجموع جملاتی که در آن kها به‌قسمی انتخاب شده‌اند که $|x-k/n|<n^{-1/4}\leqslant\delta(\varepsilon)$ و برآورد

$$\sum_k \varepsilon\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\varepsilon$$

را به‌دست می‌دهد. مجموع دوم را، که در آن kها به‌قسمی هستند که $|x-k/n|\geqslant n^{-1/4}$، یعنی $(x-k/n)^2\geqslant n^{-1/2}$، می‌توان با استفاده از فرمول (۹.۲۴) برآورد کرد و برای آن کران بالای $M/2\sqrt{n}$ را بترتیب زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\sum_k 2M\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= 2M\sum_k\frac{(x-k/n)^2}{(x-k/n)^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant 2M\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}(x-k/n)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant 2M\sqrt{n}\left\{\frac{1}{n}x(1-x)\right\}\leqslant\frac{M}{2\sqrt{n}},\end{aligned}$$

زیرا درفاصلهٔ $\mathbf{I}$، $x(1-x)\leqslant 1/4$. حال یادآوری می‌کنیم که n باشرط (۱۱.۲۴) تعیین شده است و نتیجه می‌گیریم که ε کران بالای مجموع اول و مجموع دوم است. بنابراین برای مقادیر n که درشرط (۱۱.۲۴) صدق می‌کنند، نامساوی مستقل از x زیر به‌دست می‌آید:

$$|f(x)-B_n(x)|<2\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که دنبالهٔ (B_n) در $\mathbf{I}$ به‌طور یکنواخت به f همگراست. □

به‌عنوان یك نتیجهٔ مستقیم از قضیهٔ برنشتین، قضیهٔ مهم زیر را داریم

۸.۲۴ قضیهٔ تقریب وایرشتراس. فرض کنیم تابع f درفاصله‌ای فشرده از $\mathbf{R}$ پیوسته باشد و مقادیر f در $\mathbf{R}$ باشد. دراین‌صورت f را می‌توان به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها تقریب زد.

برهان. اگر f در $[a, b]$ تعریف شده باشد، تابع g که در $\mathbf{I}=[0, 1]$ به‌صورت

$$g(t)=f((b-a)t+a), \qquad t\in\mathbf{I},$$

تعریف شده، پیوسته است. لذا g را می‌توان به‌طور یکنواخت با چندجمله‌ایهای برنشتین تقریب کرد و با یك تغییر متغیرساده یك تقریب چندجمله‌ای f به‌دست می‌آید. □

قضیهٔ برنشتین ۷.۲۴ را به‌تفصیل بیان کردیم. چراکه برای یافتن دنباله‌ای از چندجمله‌ایهایی که در $\mathbf{I}$ به‌تابع پیوستهٔ مفروضی همگرای یکنواخت است، روش سازنده‌ای به‌دست می‌دهد. علاوه‌براین، روش اثبات قضیهٔ ۷.۲۴ در بسیاری از استدلالهای تحلیلی به‌کار می‌رود و آشنایی با چنین استدلالهایی مهم است. دیگر این که در بخش ۲۶ قضایای کلیتری درمورد تقریب ثابت خواهیم کرد و نیاز خواهیم داشت بدانیم که تابع قدرمطلق را می‌توان دریك فاصلهٔ فشرده با چندجمله‌ایها تقریب کرد. گرچه امکان داشت این حالت خاص را مستقیماً ثابت کنیم ولی استدلالش چندان ساده نیست. برای بحثی کاملتر درمورد تقریب، خواننده را به‌کتاب ا. چنی[1] که درکتابنامه ذکر شده است ارجاع می‌دهیم.

تمرین

۲۴.الف. یك دنباله از توابع پیوسته مثال بزنید که به تابعی پیوسته همگرا باشد ولی این همگرایی یکنواخت نباشد.

۲۴.ب. یك دنباله از توابع همه‌جا ناپیوسته مثال بزنید که به‌طوریکنواخت به‌تابع پیوسته‌ای همگرا باشد.

۲۴.پ. دنباله‌ای از توابع پیوسته مثال بزنید که دریك مجموعهٔ فشرده به‌تابعی که بینهایت ناپیوستگی دارد. همگرا باشد.

۲۴.ت. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته در $D\subseteq\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ باشد به‌قسمی که (f_n) به‌طوریکنواخت‌در D به f همگرا باشد، و (x_n) را دنباله‌ای ازعناصر در D بگیرید که به $x\in D$ همگرا باشد. آیامی‌شود نتیجه گرفت که $(f_n(x_n))$ به $f(x)$ همگرا است؟

۲۴.ث. دنباله‌های (f_n) که در $D=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant 0\}$، به $\mathbf{R}$ با فرمولهای زیر تعریف شده‌اند، درنظر بگیرید:

$$\text{(الف)}\quad \frac{x^n}{n}\,,\qquad \text{(ب)}\quad \frac{x^n}{1+x^n}\,,\qquad \text{(پ)}\quad \frac{x^n}{n+x^n}\,،$$

1. E. Cheney

(ت) $\dfrac{x^{2n}}{1+x^n}$ ، (ث) $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ ، (ج) $\dfrac{x}{n}e^{-x/n}$.

درهمگرایی و همگرایی یکنواخت این دنباله‌ها و پیوستگی توابع حدی آنها بحث کنید. درحالت همگرایی غیریکنواخت در D ، در D فواصل مناسبی را درنظر بگیرید.

۲۴.ج. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}^q$ باشد که در D به f همگراست. با این فرض که هر f_n در c پیوسته و دنباله دریك همسایگی c همگرای یکنواخت است، ثابت کنید که f در c پیوسته است.

۲۴.چ. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته در $D \subseteq \mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}$ و نزولی باشد، بدین‌معنی که اگر $x \in D$ ، آنگاه

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \dots \geqslant f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant \dots$$

هرگاه به‌ازای یك $c \in D$ ، $\lim(f_n(c)) = 0$ ، $\varepsilon > 0$ ، نشان‌دهید که یك $m \in \mathbf{N}$ ویك همسایگی c مانند U وجود دارد به‌قسمی که اگر $n \geqslant m$ و $x \in U \cap D$ ، آنگاه $f_n(x) < \varepsilon$.

۲۴.ح. با استفاده از تمرین قبل قضیهٔ زیر را که به‌دینی[1] منسوب است، ثابت کنید. اگر (f_n) دنباله‌ای یکنوا از توابع پیوسته باشد که درهرنقطهٔ مجموعهٔ فشردهٔ K در $\mathbf{R}^p$ به‌تابع پیوستهٔ f در K همگراست، آنگاه این همگرایی در K یکنواخت است.

۲۴.خ. با ذکرمثالهایی نشان دهید که قضیهٔ دینی درصورت‌حذف شرط فشردگی K ویاپیوستگی f، درست نیست.

۲۴.د. قضیه زیر منسوب به‌پولیا[2] را ثابت کنید. اگر به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ تابع f_n از $\mathbf{I}$ به $\mathbf{R}$ صعودی و $f(x) = \lim(f_n(x))$ در $\mathbf{I}$ پیوسته باشد، آنگاه این همگرایی در $\mathbf{I}$ یکنواخت است. (توجه کنید که f_n پیوسته فرض نشده است.)

۲۴. ذ. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ باشد و، به‌ازای $x \in D$، $f(x) = \lim(f_n(x))$. نشان‌دهید که f درنقطهٔ $c \in D$ پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد $m \in \mathbf{N}$ ویك همسایگی c مانند U وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $x \in D \cap U$ ، آنگاه $\|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

۲۴. ر. فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت باشد وبه‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ و هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f_n(x) = f(x + 1/n)$. نشان دهید که (f_n) در $\mathbf{R}$ به f همگرای یکنواخت است.

---

۱. اولیس دینی Ulisse Dini (۱۹۱۸–۱۸۴۵) در پیزا تحصیل و تدریس می‌کرده است. او در هندسه و آنالیز، بویژه سری فوریه، کارکرده است.

۲. گئورگ پولیا George Polya (۱۹۸۴–۱۸۸۷) در بوداپست متولد شد و در زوریخ و استنفرد تدریس کرد. او به‌خاطر کارهایش درآنالیز مختلط، احتمال نظریهٔ اعداد و نظریهٔ استنباط بسیار مشهور است.

۲۴. ز. هرگاه به‌ازای $x \in \mathbf{I}$ ، $f_2(x) = x^2$، چقدر n باید بزرگ باشد تا B_n ، چندجمله‌ای nامی برنشتین برای تابع f_2، به‌ازای هر $x \in \mathbf{I}$ در $|f_2(x) - B_n(x)| < 1/1000$ صدق کند؟

۲۴. ژ. هرگاه به‌ازای $x \in \mathbf{I}$ ، $f_3(x) = x^3$ چندجمله‌ای nامی برنشتین برای f_3 را حساب کنید. مستقیماً نشان‌دهید که این دنبالهٔ چندجمله‌ایها در $\mathbf{I}$ به f_3 همگرای یکنواخت است.

۲۴. س. برای به‌دست آوردن معادلهٔ (۷.۲۴) از راهی دیگر، یك‌بار از (۳.۲۴) نسبت به s مشتق بگیرید و درآن $x = s$ و $x - 1 = t$ را جایگزین کنید.

۲۴. ش. برای به‌دست آوردن معادلهٔ (۸.۲۴) از راهی دیگر، دوبار از (۳.۲۴) نسبت به s مشتق بگیرید.

۲۴.ص. (الف) J رافاصله‌ای‌فشرده در $\mathbf{R}$ و $a \in \mathbf{R}$ و $c \in J$ بگیرید. نمودارتابع $\varphi : J \to \mathbf{R}$ راکه با $\varphi(x) = a + m(|x - c| + x + c)$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

(ب) نشان‌دهیدکه هرتابع‌خطی تکه‌ای پیوسته را می‌توان به‌صورت مجموع تعداد با پایانی از توابع φ_1 ، ... ، φ_n، که به‌شکل تابع درقسمت (الف) هستند، نوشت.

(پ) بپذیریدکه درهرفاصلهٔ فشرده تابع قدرمطلق $A(x) = |x|$ حد یکنواخت دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای x است و با استفاده از قسمت (ب) برهان دیگری برای قضیهٔ تقریب وایرشتراس ارائه دهید. (این روش اثبات از لبگ است.)

۲۴.ض. ثابت‌کنیدکه تابع $x \to e^x$ در $\mathbf{R}$ حدیکنواخت دنباله‌ای ازچندجمله‌ایها در $\mathbf{R}$ نیست. بنابراین ممکن است قضیهٔ تقریب وایرشتراس درمورد فاصله‌های بی‌پایان درست نباشد.

۲۴. ط. نشان دهیدکه قضیهٔ تقریب وایرشتراس برای فاصله‌های باز کراندار درست نیست.

بخش ۲۵ حد تابع

هرچندکه برای مبحث «آنالیز ریاضی» نمی‌توان تعریفی دقیق ارائه داد، اما عموماً این مبحث را آن قسمت از ریاضی می‌دانندکه درآن مفاهیم مختلف حد به‌طور اصولی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگراین بیان نسبتاً رسا باشد، ممکن است به‌نظر خواننده عجیب آید که چرا تا به‌حال بخشی درباب حد نیاورده‌ایم. برای این تأخیر چنددلیل وجود دارد، که مهمترین آنها این است‌که آنالیز مقدماتی باچندنوع عمل حدگیری مختلف سروکار دارد، ما قبلاً همگرایی دنباله‌ها وحدگیری راکه به‌طور ضمنی دربررسی پیوستگی مطرح‌اند بحث‌کرده‌ایم. درفصلهای آینده، اعمال حدگیری مربوط به‌مشتق و انتگرال مورد بررسی قرار خواهندگرفت. با آنکه تمام این مفاهیم حدی حالات خاصی از یك مفهوم کلیترند. مفهوم کلی، سرشتی نسبتاً مجرد دارد. به‌این‌دلیل است‌که ترجیح می‌دهیم مفاهیم راجداگانه

معرفی و مطرح کنیم به‌جای این که اول ایدهٔ کلی حدگیری را عرضه کنیم و بعد به‌حالات خاص بپردازیم. همین که حالات خاص کاملاً درك شدنـد، فهم مفهوم کلی چندان مشکل نخواهد بود. یك بحث بسیار خوب از ایـن‌حد مجرد، درمقالهٔ تـوصیفی ا. ج. مك‌شین[1] آمده است (ر. ك. کتابنامه) می‌توانید به‌آن مراجعه کنید.

دراین بخش نظر ما معطوف به حدتابع دریك نقطه و چند تعمیم جزئی این مفهوم است. اغلب مفهوم حدپیش‌از پیوستگی بررسی می‌شود؛ در واقع گاهی به‌جای به‌کاربردن تعریفی که دربخش ۲۰ آمده است، تعریف تابع پیوسته رابرحسب این حد بیان می‌کنند. یکی از دلایلی‌که بررسی پیوستگی را جدا از حد انتخاب کـرده‌ایم این است‌که بـرای حدتابع دریك نقطه دوتعریف کمی متفاوت به‌کار خواهیم برد، و چون هردوتعریف بسیار مورد استفاده هستند، هردوی آنهارا عرضه می‌کنیم، و سعی می‌کنیم آنها را به‌هم مربوط کنیم.

فرض این است‌کـه f تابعی است بـه دامنهٔ D مشمول در $\mathbf{R}^p$ و مقادیر در $\mathbf{R}^q$، مگر آنکه خلاف آن صریحاً ذکر شود، و توجه ما به خاصیتی است‌کـه حد f را دریك نقطهٔ تجمع D مانند c، مشخص می‌کند. بنابراین، هر همسایگی c شامل بینهایت نقطهٔ D است.

۱۰۲۵ تعریف. (یك) عنصر b از $\mathbf{R}^q$ را **حد سودهٔ f در c** گوییم هـر گاه به‌ازای هر همسایگی b مانند V، یك همسایگی c مانند U وجود داشته باشد به‌قسمی‌کـه وقتی x به $U \cap D$ متعلق است و $x \neq c$، $f(x)$ به V متعلق باشد. دراین حالت می‌نویسیم

$$b = \operatorname*{Lim}_{x \to c} f(x) \qquad \text{یا} \qquad b = \lim_{c} f \tag{۱۰۲۵}$$

(دو) عنصر b از $\mathbf{R}^q$ را **حد ناسودهٔ f در c** گوییم هر گاه به‌ازای هر همسایگی b مانند V، یك همسایگی c مانند U وجود داشته باشد به‌قسمی‌که وقتی x به $U \cap D$ متعلق است، $f(x)$ به V متعلق باشد. دراین حالت می‌نویسیم

$$b = \operatorname*{Lim}_{x \to c} f(x) \qquad \text{یا} \qquad b = \operatorname*{Lim}_{c} f \tag{۲۰۲۵}$$

مهم است توجه شود کـه تفاوت بین این دومفهوم از اینجاست‌کـه مقدار $f(c)$، درصورت وجود، دریکی مورد بررسی قـرار گرفته و در دیگری به‌آن توجه نشده است. همچنین به تمایز نسبتاً ظریف نمادی که درمعادلات (۱۰۲۵) و (۲۰۲۵) معمول داشته‌ایم توجه کنید. متذکرمی‌شویم که اغلب مؤلفین فقط یکی از این دو مفهوم را معـرفی می‌کنند وآن‌را فقط «حد» می‌نامند وعموماً نمادهای (۱۰۲۵) رابه‌کار می‌برند. چون حدسوده‌بیشتر معمول است، علامتگذاری مربوط به‌آن‌را حفظ کرده‌ایم.

---

1. E. J. McShane

یکتایی هریك از این دوحد، درصورت وجود، بسهولت به‌دست می‌آید. دراینجا به‌بیان حکم زیر قناعت می‌کنیم.

۲۰۲۵ لم. (الف) اگر $\operatorname{Lim}_c f$ یا $\lim_c f$ وجود داشته باشد، آنگاه این حدیکتاست.

(ب) هرگاه حدناسوده وجود داشته باشد، حد سوده نیز وجود دارد و داریم

$$\lim_c f = \operatorname{Lim}_c f.$$

(پ) هرگاه c به D دامنهٔ f متعلق نباشد، حدسوده وجود دارد اگر و فقط اگر حد ناسوده وجود داشته باشد.

قسمت (ب) دراین لم نشان می‌دهد که مفهوم حدناسوده به‌نحوی از حدسوده محدودتر است. قسمت (پ) در لم نشان می‌دهد که این دوحد فقط درحالتی‌که c به D متعلق است می‌توانند متمایز باشند. برای ارائهٔ موردی که درآن دومفهوم متمایز هستند، تابع f از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ راکه به‌صورت زیر تعریف شده است درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \qquad x \neq 0, \\ &= 1, \qquad x = 0. \end{aligned} \tag{۳۰۲۵}$$

اگر $c=0$،آنگاه حدسودهٔ f در $c=0$ وجود دارد و برابر 0 است، درحالی که حدناسوده وجود ندارد.

حال چند شرط لازم وکافی برای وجود این حدها را بیان کرده اثبات آنها را به خواننده وا گذار می‌کنیم. باید توجه داشت که در هر دوقضیهٔ زیر درقسمت(پ)، حددنباله که قبلاً دربخش ۱۴ مورد بحث قرارگرفته است، مطرح است.

۳۰۲۵ قضیه. احکام زیر درحد سوده هم‌ارزند:

(الف) حدسودهٔ $b = \lim_c f$ وجود دارد.

(ب) به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $x \in D$ و $0 < \|x-c\| < \delta$، آنگاه $\|f(x)-b\| < \varepsilon$.

(پ) اگر (x_n) دنبالهٔ دلخواهی در D باشد به‌قسمی‌که $x_n \neq c$ و $c = \lim(x_n)$، آنگاه $b = \lim(f(x_n))$.

۴۰۲۵ قضیه. احکام زیر درمورد حدناسوده هم‌ارزند:

(الف) حدناسودهٔ $b = \operatorname{Lim}_c f$ وجود دارد.

(ب) به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $x \in D$ و $\|x-c\| < \delta$، آنگاه $\|f(x)-b\| < \varepsilon$.

(پ) اگر (x_n) دنبالهٔ دلخـواهی در D باشد به‌قسمی که $c=\mathrm{Lim}(x_n)$ ، آنگاه $b=\mathrm{Lim}(f(x_n))$.

قضیهٔ زیر رابطهٔ آموزنده‌ای بین این دوحد و پیوستگی f در c به‌دست می‌دهد.

۵.۲۵ قضیه. اگر D دامنهٔ f و c نقطهٔ تجمع D ، و به D متعلق بـاشد، آنگاه احکام زیر هم‌ارزند.

(الف) تابع f در c پیوسته است.

(ب) حدسودهٔ $\lim_c f$ وجود دارد و با $f(c)$ برابر است.

(پ) حدناسودهٔ $\mathrm{Lim}_c f$ وجود دارد.

برهان. اگر (الف) برقرار و V یك همسایگی $f(c)$ باشد، آنگاه یك همسایگی c مانند U وجود دارد به‌قسمی‌که اگر x به $U\cap D$ متعلق باشد، آنگاه $f(x)$ بـه V متعلق است. آشکار است کـه این وضع ایجاب می‌کند کـه $\mathrm{Lim}\, f$ در c وجـود داشته ، بـا $f(c)$ برابر باشد. به‌طریق مشابه، به‌ازای هـر $x\neq c$ وقتی $x\in U\cap D$ ، $f(x)$ بـه V متعلق است،که دراین‌صورت $\lim f$ وجود دارد وبا $f(c)$ برابراست. به‌عکس، بسهولت دیده می‌شود که (ب) و (پ) حکم (الف) را ایجاب می‌کنند. □

هرگاه f و g دوتابع باشند که دریك نقطهٔ تجمع $D(f+g)=D(f)\cap D(g)$ مانند c، حـد سوده (یا ناسوده) داشته بـاشند، مجمـوع آنها $f+g$ نیز در c حدسوده (یا ناسوده) دارد و

$$\lim_c (f+g)=\lim_c f+\lim_c g$$

$$\left(\mathrm{Lim}_c (f+g)=\mathrm{Lim}_c f+\mathrm{Lim}_c g \text{ ، یا}\right)$$

بسهولت دیده می‌شود که نتایج مشابهی درمورد سایرترکیبهای جبری‌توابع برقرار است. نتیجهٔ زیر، مربوط به‌ترکیب دوتابع، کمی عمیقتر است و درآن حدناسوده ازحد سوده ساده‌تر است.

۶.۲۵ قضیه. فرض‌کنیم f دارای‌دامنهٔ $D(f)$ در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ باشد و g دارای دامنهٔ $D(g)$ در $\mathbf{R}^q$ و برد در $\mathbf{R}^r$ باشد. $g\circ f$ ترکیب f و g ویك نقطهٔ تجمع $D(g\circ f)$ مانند c را درنظر می‌گیریم.

(الف) اگر هر دو حدسودهٔ $b=\lim_c f$ و $a=\lim_b g$ وجود داشته باشند و یا g در b پیوسته باشد، یا وقتی x دریکی از همسایگیهای c است،داشته باشیم $f(x)\neq b$ ، آنگاه حدسودهٔ $g\circ f$ در c وجود دارد و $a=\lim_c g\circ f$.

(ب) اگر هر دو حدناسودهٔ $b=\operatorname{Lim}_c f$ و $a=\lim_b g$ وجود داشته باشند، آنگاه حدناسودهٔ $g\circ f$ در c وجود دارد و

$$a=\operatorname*{Lim}_{c} g\circ f\ .$$

برهان. (الف) فرض کنیم W یك همسایگی a در $\mathbf{R}^r$ باشد؛ چون $a=\lim_b g$، یك همسایگی b مانند V وجـود دارد به‌قسمی کـه اگـر y به $V\cap D(g)$ متعلق باشد و $y\neq b$، آنگاه $g(y)\in W$. چون $b=\lim_c f$، یك همسایگی c مانند U وجود دارد به‌قسمی که اگر x به $U\cap D(f)$ متعلق باشد و $x\neq c$، آنگاه $f(x)\in V$. لذا اگر x به مجموعهٔ احتمالاً کوچکتر $U\cap D(g\circ f)$ متعلق باشد و $x\neq c$، آنگاه $f(x)\in V\cap D(g)$. هر گاه دریك همسایگی c مانند U_1، $f(x)\neq b$، نتیجـه می‌شود کـه وقتی $x\neq c$ و در $(U_1\cap U)\cap D(g\circ f)$ واقع است، $(g\circ f)(x)\in W$، پس a حدسودهٔ $g\circ f$ در c است. اگر g در b پیوسته بـاشد، آنگاه اگـر x در $U\cap D(g\circ f)$ باشد و $x\neq c$ داریـم $(g\circ f)(x)\in W$.

برای اثبات قسمت (ب)، توجه می‌کنیم که استثناهایی که در برهان (الف) درنظر گرفته شده است دیگر لازم نیست. بنابراین، اگر x به $U\cap D(f\circ g)$ متعلق باشد، آنگاه $f(x)\in V\cap D(g)$ و درنتیجه $(g\circ f)(x)\in W$. □

اگـر درقضیهٔ قبلی، شرط g در b پیوسته است ویا شرط $f(x)\neq b$ در یکـی از همسایگیهای c را حذف کنیم، ممکن است حکم قسمت (الف) درست نباشد. برای تأیید این مطلب، فرض می‌کنیم f تابعی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد که بافرمولهای (۳.۲۵) تعریف شده است، و می‌گیریم $g=f$ و $c=0$، دراین‌صورت $g\circ f$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=1, && x\neq 0,\\ &=0, && x=0.\end{aligned}$$

عـلاوه برایـن داریـم $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=0$. و حال آنکـه بـوضوح $\lim\limits_{x\to 0}(g\circ f)(x)=1$ (تـوجه دارید کـه حـدهای ناسوده برای ایـن توابع وجـود ندارند.)

حدهای زبرین دریك نقطه

از این به‌بعد تا پایان بخش حاضر حالت $q=1$ را درنظر خـواهیم گرفت. بدین‌ترتیب، f تابعـی است به دامنهٔ D در $\mathbf{R}^p$ و مقادیر در $\mathbf{R}$، و نقطهٔ c در $\mathbf{R}^p$ یك نقطهٔ تجمع D است. دراینجا حـدزبرین (یا حدبالای) f در c را تعریف خـواهیم کرد. دراینجا نیز، بسته به‌اینکه همسایگیهای سوده یا ناسوده درنظر گرفته شوند، دو نوع حد زبرین تعریف

می‌شود و ما هردونوع را مورد بحث قرار خواهیم داد. واضح است که حدزیرین را می‌توان به‌نحو مشابه تعریف کرد. نکتهٔ جالب‌توجه این است که گرچه وجود حد در $\mathbf{R}$ (سوده یا ناسوده) موضوع نسبتاً دقیقی است، ولی حدهای زبرین که تعریف خواهیم کرد این حسن را دارند که اگر f کراندار باشد، بدون شرط دیگری وجود دارند.

ایده‌های این قسمت نظیرمفهوم حد زبرین در دنباله در $\mathbf{R}^p$ است که دربخش ۱۹ معرفی کردیم. بااین‌حال، بجز درچند تمرین، احتیاجی به آشنایی با آنچه درآنجا آمده است، نخواهد بود.

۷۰۲۵ تعریف. فرض‌کنیم f دریکی از همسایگیهای نقطهٔ c کراندار باشد. توابع $\varphi(r)$ و $\Phi(r)$ را با فرض $r>0$، با

(الف) $$\varphi(r)=\sup\{f(x): 0<\|x-c\|<r,\ x\in D\}$$

(ب) $$\Phi(r)=\sup\{f(x): \|x-c\|<r,\ x\in D\}$$

تعریف کرده می‌نویسیم

(پ) $$\limsup_{x\to c} f=\inf\{\varphi(r): r>0\}$$

(ت) $$\operatorname{Lim}\sup_{x\to c} f=\inf\{\Phi(r): r>0\}$$

و این کمیتها را بترتیب **حد زبرین‌سوده** و **حد زبرین ناسودهٔ** f در c می‌گوییم.

چون این‌کمیتها به‌صورت زیرینهٔ تصویرهای همسایگیهای نزولی c تحت f تعریف شده‌اند، ممکن است رابطهٔ لفظ «حدزبرین» با مفهوم آن روشن نباشد. لمی که در زیر می‌آید، موجه بودن این اصطلاح را نشان خواهد داد.

۸۰۲۵ لم. اگر φ و Φ به‌صورت بالا تعریف شده باشند، آنگاه

(الف) $$\limsup_{x\to c} f=\lim_{r\to 0}\varphi(r)$$

(ب) $$\operatorname{Lim}\sup_{x\to c} f=\lim_{r\to 0}\Phi(r)$$

برهان. ملاحظه می‌کنیم که اگر $s>r>0$، آنگاه

$$\limsup_{x\to c} f\leqslant\varphi(r)\leqslant\varphi(s).$$

علاوه براین، برطبق ۷۰۲۵ (پ)، هرگاه $\varepsilon>0$، عددی مانند $r_\varepsilon>0$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\varphi(r_\varepsilon)<\limsup_{x\to c} f+\varepsilon.$$

بنابراین اگر r در $0<r<r_\varepsilon$ صدق کند، داریم $|\varphi(r)-\limsup_{x\to c} f|<\varepsilon$، که (الف) را ثابت می‌کند. اثبات (ب) به‌همین‌نحو است وحذف می‌شود. □

۹۰۲۵ لم. (الف) اگر $M>\limsup_{x\to c} f$ یك همسایگی c مانند U وجود دارد به‌قسمی که

$$f(x)<M \quad ، \quad c\neq x\in D\cap U \qquad \text{به‌ازای}$$

(ب) اگر $M>\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to c} f$، آنگاه یک همسایگی c مانند U وجود دارد به‌قسمی که

$$f(x)<M \quad ، \quad x\in D\cap U \qquad \text{به‌ازای}$$

برهان. (الف) بنابر ۷۰۲۵ (پ)، داریم $\inf\{\varphi(r): r>0\}<M$. لذا عدد حقیقی $r_1>0$ وجود دارد به‌قسمی که $\varphi(r_1)<M$، U را می‌توان $U=\{x\in \mathbf{R}^p : \|x-c\|<r_1\}$ اختیار کرد. (ب) به‌طریق مشابه اثبات می‌شود. □

۱۰۰۲۵ لم. فرض کنیم f و g دریکی از همسایگیهای c کراندار باشند و c یک نقطهٔ تجمع $D(f+g)$ باشد. دراین‌صورت

(الف) $\limsup_{x\to c}(f+g)\leqslant \limsup_{x\to c} f+\limsup_{x\to c} g$

(ب) $\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to c}(f+g)\leqslant \operatorname*{Lim\,sup}_{x\to c} f+\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to c} g$

برهان. بنابه رابطهٔ

$$\sup\{f(x)+g(x): x\in A\}\leqslant \sup\{f(x): x\in A\}+\sup\{g(x): x\in A\},$$

روشن است که اگر نماد در ۷۰۲۵ را به‌کار بریم، داریم

$$\varphi_{f+g}(r)\leqslant \varphi_f(r)+\varphi_g(r).$$

اکنون لم ۸۰۲۵ را به‌کار می‌بریم و r را به‌صفر میل می‌دهیم، (الف) به‌دست می‌آید. □

نتایج مربوط به سایر ترکیبهای جبری درتمرین ۲۵.ج آمده است.

اگرچه دراین‌کتاب موردی پیش نخواهد آمدکه ادامهٔ این مطالب را ایجاب کند، ولی چون درپاره‌ای از قسمتهای آنالیز تعمیم زیر از مفهوم پیوستگی مفید است، به‌ذکر آن می‌پردازیم.

۱۱۰۲۵ تعریف. می‌گوییم تابع f از D به $\mathbf{R}$ درنقطهٔ c واقع در D از **بالا نیم‌پیوسته** است، هرگاه داشته باشیم:

$$f(c)=\operatorname*{Lim\,sup}_{x\longrightarrow c} f \cdot \qquad (۴.۲۵)$$

می‌گوییم تابع f در D از **بالا نیم‌پیوسته** است هرگاه درهر نقطهٔ D از بالا نیم‌پیوسته باشد.

به‌جای تعریف نیم‌پیوستگی از بالا با معادلهٔ (۴.۲۵) می‌توانستیم ازشرط

$$f(c)\geqslant \operatorname*{Lim\,sup}_{x\longrightarrow c} f \qquad (۵.۲۵)$$

که با آن هم‌ارز است ولی ازظرافت کمتری برخوردار است، استفاده کنیم. از لم زیر می‌توان به‌اهمیت و فایدهٔ توابع از بالا نیم‌پیوسته پی‌برد. این لم را با قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی ۱.۲۲ مقایسه کنید.

۱۲.۲۵ لم. فرض کنیم f یك تابع از بالا نیم‌پیوسته به دامنهٔ D در $\mathbf{R}^p$ باشد و k یك عدد حقیقی دلخواه باشد. آنگاه مجموعهٔ بازی مانند G و مجموعهٔ بسته‌ای مانند F وجود دارند به‌قسمی که

$$G\cap D=\{x\in D : f(x)<k\},\quad F\cap D=\{x\in D : f(x)\geqslant k\}. \qquad (۶.۲۵)$$

برهان. فرض کنید c نقطه‌ای در D باشد به‌طوری‌که $f(c)<k$. بنابر تعریف ۱۱.۲۵ و لم ۹.۲۵ (ب)، یك همسایگی c مانند $U(c)$ هست به‌قسمی که برای هر $x\in D\cap U(c)$ ، $f(x)<k$. بدون کاستن ازکلیت قضیه می‌توان $U(c)$ را یك همسایگی باز انتخاب نمود. دراین‌صورت

$$G=\bigcup\{U(c) : c\in D\},$$

مجموعه‌ای است باز با خاصیت مذکور در (۶.۲۵). هرگاه F متمم G باشد، F در $\mathbf{R}^p$ بسته است و در شرط فوق صدق می‌کند. □

با استفاده از لمی که هم‌اکنون ثابت شد می‌توان نشان داد (ر. ك. تمرین ۲۵. ز) که هرگاه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbf{R}^p$ باشد و f در K از بالا نیم‌پیوسته باشد، f از بالا در K کراندار است و نقطه‌ای در K هست که مقدار f درآن نقطه برابر زبرینهٔ f است. بدین‌ترتیب می‌بینیم با اینکه توابع ازبالا نیم‌پیوسته، ممکن است تعداد زیادی نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشند، از بعضی خواص توابع پیوسته در مجموعه‌های فشرده برخوردارند.

ممکن است خواننده دریافته باشد که با استفاده از ایده‌های داده شده درچند سطر آخر بخش ۱۸ می‌توان مفهوم حدزبرین دریك نقطه را به‌حالتی که تابع کراندار نیست تعمیم داد. به‌همین‌نحو می‌توان حدزبرین را وقتی $x\longrightarrow\pm\infty$ تعریف کرد. این مفاهیم مفید هستند و به‌خواننده توصیه می‌کنیم به‌آنها توجه کند.

تمرین

۲۵. الف. در وجود حدهای سوده وناسوده توابع زیر درنقطهٔ $x=\circ$ بحث کنید.

(الف) $f(x)=|x|$ (ب) $f(x)=1/x,\quad x\neq\circ$

(پ) $f(x)=x\sin(1/x),\quad x\neq\circ$ (ت) $f(x)=\sin(1/x),\ x\neq\circ$

(ث) $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq\circ\\ 1, & x=\circ\end{cases}$ (ج) $f(x)=\begin{cases}\circ, & x\leqslant\circ\\ 1, & x>\circ\end{cases}$

۲۵. ب. لم ۲.۲۵ را ثابت کنید.

۲۵. پ. هرگاه f تابع تعریف شده بامعادلهٔ (۳.۲۵) باشد، نشان دهید که حدسوده در $x=\circ$ برابر با $\circ$ است و حدناسوده در $x=\circ$ وجود ندارد. در وجود این دوحد برای ترکیب $f\circ f$ بحث کنید.

۲۵. ت. لم ۴.۲۵ را ثابت کنید.

۲۵. ث. نشان دهید که از احکام ۵.۲۵ (ب) و ۵.۲۵ (پ) حکم ۵.۲۵ (الف) نتیجه می‌شود.

۲۵. ج. نشان دهید که اگر f و g دریك نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $D(f)\cap D(g)$ مانند c حدسوده داشته باشند، آنگاه مجموع $f+g$ در c حدسوده دارد و

$$\lim_c (f+g)=\lim_c f+\lim_c g\,.$$

درهمین شرایط حاصلضرب داخلی $f\cdot g$ در c حدسوده دارد و

$$\lim_c (f\cdot g)=\left(\lim_c f\right)\cdot\left(\lim_c g\right).$$

۲۵. چ. فرض کنید f دریك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند $D(f)$ به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده باشد. اگر c یك نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $V=\{x\in\mathbf{R}: x\in D(f),\ x>c\}$، و f_1 تحدید f به V باشد، آنگاه وقتی $\lim_c f_1$ وجود دارد، این حد را **حدسودهٔ راست f در** c می‌نامیم. گاهی این حد را با $\lim_{c+} f$ یا $f(c+\circ)$ نمایش می‌دهند. قضیه‌ای مشابه باقضیهٔ ۳.۲۵ درمورد حدسودهٔ راست بیان و ثابت کنید. (درمورد **حد ناسودهٔ راست** و دو حد چپ (سوده و ناسوده) درنقطهٔ c می‌توان تعریف مشابهی ارائه داد.)

۲۵. ح. فرض کنید f در $D=\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant\circ\}$ به $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد. عدد L را **حد f در $+\infty$** گوییم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>\circ$ عددی حقیقی مانند $m(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که اگر $x\geqslant m(\varepsilon)$، آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$. دراین‌حالت می‌نویسیم $L=\lim_{x\to+\infty} f$. نتیجهٔ مشابه با قضیهٔ ۳.۲۵ را درمورد این حد بیان وثابت کنید.

۲۵. خ. اگر f دریك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند $D(f)$، به $\mathbf{R}$ تعریف شده و c یك نقطهٔ تجمع $D(f)$ باشد، می‌گوییم $f(x)\to+\infty$ وقتی $x\to c$، یا می‌گوییم

$$\lim_{x \longrightarrow c} f = +\infty$$

درصورتی که به‌ازای هر عدد مثبت M یك همسایگی c مانند U باشد به‌قسمی که اگر $x \in U \cap D(f)$ و $x \neq c$ ، آنگاه $f(x) > M$. قضیه‌ای مشابه با قضیهٔ ۳.۲۵ درمورد این حد بیان و ثابت کنید.

۲۵. د. با توجه به تمرینهای ۲۵. ح. و ۲۵. خ. ، عبارات زیر را تعریف کنید:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f = +\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow c} f = -\infty.$$

۲۵. ذ. لم ۸.۲۵ را برای حدزبرین ناسوده ثابت کنید. همچنین، لم ۹.۲۵ (ب) را ثابت کنید.

۲۵. ر. عبارات $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \sup f = L$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \inf f = -\infty$ را تعریف کنید.

۲۵. ز. نشان دهید که اگر تابع f دریك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند K، از بالا نیم‌پیوسته و مقادیرش در $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه f از بالا کراندار است و درنقطه‌ای از K با زبرینهٔ خود برابر می‌شود.

۲۵. ژ. نشان دهید که تابع از بالا نیم‌پیوسته دریك زیرمجموعهٔ فشرده ممکن است که از پایین کراندار نباشد وهمچنین ممکن است با زیرینهٔ خود برابر نشود.

۲۵. س. نشان دهید که اگر A یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ باشد و f در $\mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}$ با $f(x) = 1$ برای $x \in A$ وبا $f(x) = 0$ برای $x \notin A$ تعریف شده باشد، آنگاه f یك تابع از پایین نیم‌پیوسته است. هرگاه A یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد، نشان‌دهید که f از بالانیم‌پیوسته است.

۲۵. ش. تابعی مثال بزنید که از بالانیم‌پیوسته باشد وتعدادی بینهایت نقطهٔ ناپیوسته داشته باشد.

۲۵. ص. آیا درست است که تابع در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ دریك نقطه پیوسته است اگر وفقط اگر دراین نقطه از بالا و ازپایین نیم‌پیوسته باشد؟

۲۵. ض. هرگاه (f_n) دنباله‌ای کراندار از توابع پیوسته در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ باشد و اگر f^* در $\mathbf{R}^p$ با $f^*(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ برای $x \in \mathbf{R}^p$ تعریف شده باشد، آنگاه آیا درست است که f^* از بالا نیم‌پیوسته است؟

۲۵. ط. هرگاه (f_n) دنباله‌ای کراندار ازتوابع پیوسته‌در $\mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}$ باشد واگر f_* در $\mathbf{R}^p$ با $f_*(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$، برای $x \in \mathbf{R}^p$ ، تعریف شده باشد،آنگاه آیا f_* در $\mathbf{R}^p$ از بالا نیم‌پیوسته است؟

۲۵. ظ. فرض کنید f دریك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ مانند D ، تعریف شده باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}^r$ باشند. جفت (a, b) رایك نقطهٔ تجمع D بگیرید. مشابه با تعریف ۴.۱۹، حد دوگانه و حدهای مکرر f را در (a, b) تعریف کنید. نشان دهید که وجود حددوگانه و حدهای مکرر برابری آنها را ایجاب می‌کند. نشان دهید که بدون وجود هیچیك از

حدهای مکرر، حددوگانه می‌توانند وجود داشته باشد. ونیز دوحد مکرر می‌توانند، بدون وجود حددوگانه وجود داشته وبا یکدیگر برابر باشند.

۲۵. ع. فرض‌کنید f تابع تعریف شده درتمرین قبل باشد. مشابه با تعاریف ۴.۱۷ و ۸.۱۹، عبارت «حد

$$g(y)=\lim_{x \longrightarrow a} f(x\ ,y)$$

در یك مجموعه برحسب y **یکنواخت** است» را تعریف کنید. قضیه مشابه بـا قضیهٔ ۱۰.۱۹ را بیان و ثابت کنید.

۲۵. غ. فرض‌کنید f تابع درتعریف ۱.۲۵ باشد وفرض‌کنید که حدسوده درنقطهٔ c وجود دارد و بـرای عنصری مانند A در $\mathbf{R}^q$ و $r>0$، نابرابری $\|f(x)-A\|<r$ در یکـی از همسایگیهای c برقرار است. ثابت‌کنید که $\|\lim_c f-A\|\leqslant r$. آیا همین نتیجه برای حدناسوده هم برقرار است؟

۲۵. ف. درمورد نیم‌پیوستگی از بالا و پایین توابعی‌که درمثال ۵.۲۰ درقسمتهای (ج) و (ح) آمده است، بحث‌کنید.

۲۵. ق. هـرگاه $f:[0,+\infty)\rightarrow \mathbf{R}$ در $[0,+\infty)$ پیـوستـه بـاشد و $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$، نشان دهیدکه f در $[0,+\infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

بخش ۲۶ چند نتیجهٔ دیگر

دراین بخش چند قضیه عرضه می‌کنیم‌که درایـن کتاب به‌کار نمی‌روند، ولـی اغلب در توپولوژی و آنالیز مورد استفاده مـی‌باشند. چند قضیهٔ اول تعمیمهای گستردهٔ قضیهٔ تقریب وایرشتراس‌اند. بعد قضیه‌ای است‌که شرایطی را بیان می‌کند که تحت آنها تابع پیوسته گسترش پیوسته دارد، و نتیجهٔ نهایی مشابه قضیهٔ بولتسانو‌ـ‌وایرشتراس در $C_{pq}(K)$، یعنی فضای توابع پیوسته دریك مجموعهٔ فشردهٔ K است.

قضیهٔ استون ـ وایرشتراس

برای تسهیل دربحث، به‌معـرفی چند اصطلاح زیر مـی‌پردازیم. هرگاه D در $\mathbf{R}^p$ دامنهٔ توابع f و g باشد و مقادیر این دوتابع در $\mathbf{R}$ باشند، توابع h و k راکـه برای xهای در D با

$$h(x)=\sup\{f(x),\ g(x)\},\qquad k(x)=\inf\{f(x),\ g(x)\},$$

تعریف شده‌اند، بترتیب **زبرینه و زیرینهٔ** توابع f و g می‌گـوییم. هرگاه f و g در D پیوسته باشند، h و k هردو پیوسته‌اند. این مطلب از قضیهٔ ۷.۲۰ وتوجه به‌اینکه اگر a و b اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

$$\sup\{a, b\} = \frac{1}{2}\{a+b+|a-b|\},$$

$$\inf\{a, b\} = \frac{1}{2}\{a+b-|a-b|\},$$

نتیجه می‌شود.

اکنون صورتی از تعمیم قضیهٔ تقریب وایرشتراس توسط استون[1] را بیان می‌کنیم. این تعمیم با آنکه اخیراً کشف شده از قضایای اصلی به شمار می‌آید و باید جزئی از معلومات هردانشجوی ریاضی باشد. برای تکمیل آنچه دراینجا عرضه می‌شود ازنظرتعمیم وکاربرد و بحثی کلیتر، خواننده می‌تواند به‌مقاله استوز که درکتابنامهٔ آخرکتاب ذکرشده است، رجوع کند.

۱۰۲۶ قضیهٔ تقریب استون. فرض کنیم K یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ و $\mathcal{L}$ دسته‌ای از توابع پیوسته در K، به $\mathbf{R}$ با خواص زیر باشد:

(الف) اگر f و g به $\mathcal{L}$ متعلق باشند، آنگاه $\sup\{f, g\}$ و $\inf\{f, g\}$ نیز به $\mathcal{L}$ متعلق باشند؛

(ب) اگر $a, b \in \mathbf{R}$ و $x \neq y \in K$، آنگاه تابعی مانند f در $\mathcal{L}$ باشد به‌قسمی‌که $f(x)=a$ و $f(y)=b$.

دراین‌صورت هر تابع پیوسته در K، به $\mathbf{R}$ را می‌توان به‌وسیلهٔ توابعی در $\mathcal{L}$ به‌طور یکنواخت در K تقریب کرد.

برهان. فرض کنیم F تابعی پیوسته در K، به $\mathbf{R}$ باشد. هرگاه x و y به K متعلق باشند، $g_{xy} \in \mathcal{L}$ را به‌طوری می‌گیریم که $g_{xy}(x)=F(x)$ و $g_{xy}(y)=F(y)$. چون توابع F و g_{xy} پیوسته‌اند و در y یك مقدار دارند، برای $\varepsilon > 0$ یك همسایگی بازِ y مانند $U(y)$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر z به $K \cap U(y)$ متعلق باشد، آنگاه

$$g_{xy}(z) > F(z) - \varepsilon. \qquad (۱۰۲۶)$$

x را ثابت بگیرید و به‌ازای هر $y \in K$، یك همسایگی باز $U(y)$ با این خاصیت را اختیار کنید. از فشردگی K، نتیجه می‌شود که K درتعدادی با پایان از این همسایگیهای باز، مانند $U(y_1)$، ...، $U(y_n)$ واقع است. هرگاه $h_x = \sup\{g_{xy_1}, \dots, g_{xy_n}\}$، از رابطهٔ (۱۰۲۶) نتیجه می‌شود:

---

۱. مارشال ﺡ. استون Marshall H. Stone (ـ۱۹۰۳) در هاروارد تحصیل و در هاروارد و دانشگاههای شیکاگو و ماساچوست تدریس کرده است. او فرزند یکی از قضات عالیرتبه است و در آنالیزجدید، بویژه درنظریه‌های فضای هیلبرت وجبرهای بولی تحقیقاتی اساسی دارد.

$$h_x(z) > F(z) - \varepsilon \quad , \quad z \in K. \qquad (۲.۲۶)$$

چون $g_{xy_j}(x) = F(x)$ ، ملاحظه می‌شود که $h_x(x) = F(x)$ ، و درنتیجه یك همسایگی باز x مانند $V(x)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر z به $K \cap V(x)$ متعلق باشد، آنگاه

$$h_x(z) < F(z) + \varepsilon \,. \qquad (۳.۲۶)$$

یکبار دیگر برای به‌دست آوردن تعدادی با پایان همسایگی مانند $V(x_1)$ ، ... ، $V(x_m)$ از فشردگی K استفاده‌کنید و بنویسید $h = \inf\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_m}\}$. دراین‌صورت h به $\mathcal{L}$ متعلق است و از (۲.۲۶) نتیجه می‌شود که

$$h(z) > F(z) - \varepsilon, \qquad z \in K,$$

و از (۳.۲۶) نتیجه می‌گردد که

$$h(z) < F(z) + \varepsilon, \qquad z \in K\,.$$

از ترکیب این نتایج برای $z \in K$ ، داریم $|h(z) - F(z)| < \varepsilon$ ، که تقریب مطلوب را به‌دست می‌دهد. □

خواننده باید مشاهده کرده باشد که درقضیهٔ قبل، از قضیهٔ تقریب وایرشتراس استفاده نشده است. درقضیهٔ زیر به‌جای شرط (الف) بالا، سه شرط جبری روی مجموعهٔ توابع قائل می‌شویم. دراین قضیه برای حالت خاص تابع قدرمطلق φ که برای هر t در $\mathbf{R}$ با $\varphi(t) = |t|$ تعریف می‌شود، از قضیهٔ کلاسیك وایرشتراس ۸.۲۴ استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که φ را می‌توان در هر مجموعهٔ فشردهٔ اعداد حقیقی به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها تقریب زد.

۲.۲۶ قضیهٔ استون‌ـوایرشتراس. فرض کنیم K یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد و $\mathcal{A}$ دسته‌ای از توابع پیوسته در K به $\mathbf{R}$ با خواص زیر باشد:

(الف) تابع ثابت $e(x) = 1$ ، $x \in K$ ، به $\mathcal{A}$ متعلق باشد؛

(ب) اگر f و g به $\mathcal{A}$ متعلق باشند، آنگاه $\alpha f + \beta g$ به‌ازای هر α و β در $\mathbf{R}$ نیز به $\mathcal{A}$ متعلق باشد؛

(پ) اگر f و g به $\mathcal{A}$ متعلق باشند، آنگاه fg به $\mathcal{A}$ متعلق باشد؛

(ت) اگر $x \neq y$ دو نقطهٔ در K باشند، تابعی مانند f در $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $f(x) \neq f(y)$.

دراین صورت هر تابع پیوسته در K ، به $\mathbf{R}$ را می‌توان در K به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ توابعی در $\mathcal{A}$ تقریب کرد.

برهان. فرض کنیم $a, b \in \mathbf{R}$ و $x \neq y$ به K متعلق باشند. بنابر (ت) تابعی مانند

f در $\mathscr{A}$ وجود دارد به‌قسمی که $f(x) \neq f(y)$. چون $e(x) = ۱ = e(y)$، نتیجه‌می‌شود که اعدادی حقیقی مانند α و β وجود دارند به‌قسمی که

$$\alpha f(x) + \beta e(x) = a, \qquad \alpha f(y) + \beta e(y) = b,$$

پس بنا بر (ب)، تابعی مانند $g \in \mathscr{A}$ هست به‌طوری که $g(x) = a$ و $g(y) = b$.

اکنون فرض کنیم $\mathscr{L}$ دستهٔ تمام‌توابع پیوسته در K باشد که می‌توان آنهارا به‌وسیلهٔ توابعی در $\mathscr{A}$ به‌طوریکنواخت تقریب زد. واضح است که $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{L}$، پس $\mathscr{L}$ خاصیت (ب) مذکور در قضیهٔ تقریب استون ۱۰۲۶ را داراست. اینك نشان می‌دهیم که اگر $h \in \mathscr{L}$، آنگاه $|h| \in \mathscr{L}$. چون

$$\sup\{f, g\} = \frac{۱}{۲}(f + g + |f - g|),$$

$$\inf\{f, g\} = \frac{۱}{۲}(f + g - |f - g|),$$

نتیجه می‌شود که $\mathscr{L}$ دارای خاصیت ۱۰۲۶ (الف) است، و بنابراین هرتابع پیوسته در K، به $\mathbf{R}$ به $\mathscr{L}$ متعلق است.

چون h پیوسته و K فشرده است، نتیجه می‌شود که عددی مانند $M > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که $\|h\|_K < M$. چون $h \in \mathscr{L}$، دنباله‌ای از توابع در $\mathscr{A}$، مانند (h_n)، وجود دارد که در K به h همگرای یکنواخت است، ومی‌توان فرض کرد که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $\|h_n\|_K \leqslant M + ۱$. (چرا؟) هرگاه $\varepsilon > ۰$ داده‌شده‌باشد، می‌توان‌قضیهٔ تقریب‌وایرشتراس ۸۰۲۴ را درمورد تابع قدرمطلق درفاصلهٔ $[-(M+۱), M+۱]$ به‌کار برد و یك چندجمله‌ای p_ε به‌دست آورد به‌قسمی که

$$\big||t| - p_\varepsilon(t)\big| \leqslant \frac{۱}{۲}\varepsilon, \qquad |t| \leqslant M + ۱.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\big||h_n(x)| - p_\varepsilon(h_n(x))\big| \leqslant \frac{۱}{۲}\varepsilon, \qquad x \in K.$$

اکنون می‌گوییم فرضهای (الف)، (ب)، و (پ) نتیجه می‌دهند که $p_\varepsilon \circ h_n$ به $\mathscr{A}$ متعلق است. چون

$$\big||h(x)| - |h_n(x)|\big| \leqslant \|h - h_n\|_K$$

نتیجه می‌شود که هرگاه n به‌اندازه کافی بزرگ باشد، داریم

$$\big||h(x)| - p_\varepsilon \circ h(x)\big| \leqslant \varepsilon, \qquad x \in K.$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $|h| \in \mathcal{L}$ و نتیجه اینك از قضیهٔ قبل به‌دست می‌آید. □

اکنون به‌عنوان حالت خاصی ازقضیهٔ استون ـ وایرشتراس، صورتی قویتر ازقضیهٔ ۸.۲۴ را به‌دست می‌آوریم. این‌قضیه از دونظرقضیهٔ قبلی را تقویت می‌کند؛ (یك) دامنه، هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ فرض می‌شود ونه‌فقط حجره‌ای فشرده در $\mathbf{R}$، و (دو) به برد اجازه می‌دهد که نه‌فقط در $\mathbf{R}$، بلکه در هرفضای $\mathbf{R}^q$ باشد. برای درك این‌مطلب، یادآور می‌شویم که تابع f به دامنهٔ D در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}^q$ را می‌توان به‌عنوان q تابع در D، به $\mathbf{R}$ با نمایش مختصاتی زیر درنظرگرفت:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)), \qquad x \in D. \tag{۴.۲۶}$$

اگر هر تابع مختص f_j یك چندجمله‌ای از p مختص $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ باشد، آنگاه می‌گوییم f یك تابع چندجمله‌ای است.

۳.۲۶ قضیهٔ تقریب چندجمله‌ای. فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای باشد که دامنه‌اش یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند K باشد و بردش به $\mathbf{R}^q$ متعلق باشد و نیز فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. دراین‌صورت‌یك‌تابع چندجمله‌ای p در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای $x \in K$، $\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$.

برهان. f را مانند (۴.۲۶) با q تابع مختص نمایش می‌دهیم. چون f در K پیوسته است، هریك از توابع مختص f_j در K، به $\mathbf{R}$ پیوسته است. واضح است که توابع چندجمله‌ای که در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند. ازخواص قضیهٔ استون ـ وایرشتراس برخوردارند. بنابراین، تابع مختص f_j را می‌توان در K با دقت $\varepsilon/\sqrt{q}$ به‌وسیلهٔ یك چندجمله‌ای مانند p_j به‌طور یکنواخت تقریب زد. حال اگر p را به‌صورت

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_q(x)),$$

تعریف کنیم، تابعی چندجمله‌ای از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ حاصل می‌شود که تقریب مطلوب تابع مفروض f را در K به‌دست می‌دهد. □

گسترش توابع پیوسته

گاهی علاقه‌مندیم دامنهٔ یك تابع پیوسته را به مجموعه‌ای بزرگتر گسترش دهیم بدون‌اینکه مقادیرش در دامنهٔ قبلی تغییر کند. یك راه ساده برای این‌کار این‌است که تابع‌را درخارج از دامنهٔ اصلی ۰ بگیریم. اما درحالت کلی، بااین گسترش یك‌تابع‌پیوسته به‌دست نمی‌آید. با کمی تأمل، خواننده خواهد دید که همیشه به‌دست آوردن یك گسترش پیوسته امکان ندارد. برای مثال، اگر $D = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$ و f برای $x \in D$ با $f(x) = 1/x$

تعریف‌شده‌باشد، آنگاه f را نمی‌توان به‌یك تابع پیوسته در تمام $\mathbf{R}$ گسترش داد. با این‌حال، مهم است بدانیم که وقتی دامنهٔ تابع مجموعه‌ای بسته است همیشه گسترش پیوسته وجود دارد. علاوه بر این، احتیاجی به بزرگ کردن کران تابع (درصورتی که تابع کراندار باشد) نیست.

قبل از اینکه این قضیهٔ گسترش را ثابت کنیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر A و B دو زیرمجموعه $\mathbf{R}^p$، بسته وازهم جدا باشند، آنگاه تابع پیوسته‌ای مانند φ هست که در $\mathbf{R}^p$ تعریف شده، مقادیرش در $\mathbf{R}$ اند و به‌قسمی است که

$$\varphi(x)=0, \quad x\in A; \quad \varphi(x)=1, \quad x\in B; \quad 0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1, \quad x\in\mathbf{R}^p.$$

در واقع، اگر

$d(x, A)=\inf\{\|x-y\| : y\in A\}$ و $d(x, B)=\inf\{\|x-y\| : y\in B\}$،

آنگاه می‌توان φ را به‌ازای $x\in\mathbf{R}^p$ با معادلهٔ

$$\varphi(x)=\frac{d(x, A)}{d(x, A)+d(x, B)}$$

تعریف کرد.

۴.۲۶ قضیهٔ گسترش تیتز[1]. فرض کنیم f در یك زیر مجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^p$، مانند D کراندار و پیوسته باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}$ باشد. دراین‌صورت تابع پیوسته‌ای مانند g در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}$ هست به قسمی که به‌ازای هر x در D داشته باشیم $g(x)=f(x)$ و $\sup\{|g(x)| : x\in\mathbf{R}^p\}=\sup\{|f(x)| : x\in D\}$.

برهان. فرض می‌کنیم $M=\sup\{|f(x)| : x\in D\}$ و مجموعه‌های $A_1=\{x\in D : f(x)\leqslant -M/3\}$ و $B_1=\{x\in D : f(x)\geqslant M/3\}$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به‌پیوستگی f و اینکه D بسته است، از قضیهٔ ۱.۲۲ (پ) نتیجه می‌شود که A_1 و B_1 زیرمجموعه‌های بسته‌ای از $\mathbf{R}^p$ هستند. طبق تذکاری که قبل‌از صورت قضیه آمد، تابع پیوسته‌ای مانند φ_1 در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}$ هست به‌قسمی که

$$\varphi_1(x)=-\frac{1}{3}M, \quad x\in A_1; \qquad \varphi_1(x)=\frac{1}{3}M, \quad x\in B_1;$$

$$-\frac{1}{3}M\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\frac{1}{3}M, \quad x\in\mathbf{R}^p.$$

---

۱. هینریش تیتز Heinrich Tietze (۱۸۸۰—۱۹۶۴) در مونیخ استاد بود و کارهایی در زمینه‌های توپولوژی، هندسه، و جبر انجام داده است. درسال ۱۹۱۴ این قضیهٔ گسترش را به‌دست آورد.

حال می‌نویسیم $f_۲ = f - \varphi_۱$ و توجه می‌کنیم که $f_۲$ در D پیوسته است و

$$\sup\{|f_۲(x)| : x \in D\} \leqslant \frac{۲}{۳}M .$$

به‌همین روش، تعریف می‌کنیم $A_۲ = \{x \in D : f_۲(x) \leqslant -(۱/۳)(۲/۳)M\}$ و $B_۲ = \{x \in D : f(x) \geqslant (۱/۳)(۲/۳)M\}$ وتابع پیوسته‌ای مانند $\varphi_۲$ در $\mathbf{R}^p$ ؛ به $\mathbf{R}$ به‌دست می‌آوریم به‌قسمی که

$$\varphi_۲(x) = -\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}M, \quad x \in A_۲; \quad \varphi_۲(x) = -\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}M, \quad x \in B_۲;$$

$$-\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}M \leqslant \varphi_۲(x) \leqslant \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}M, \quad x \in \mathbf{R}^p.$$

پس‌از این‌کار می‌نویسیم $f_۳ = f_۲ - \varphi_۲$ و توجه می‌کنیم که $f_۳ = f - \varphi_۱ - \varphi_۲$ در D پیوسته است و $\sup\{|f_۳(x)| : x \in D\} \leqslant (۲/۳)^۲ M$.

با ادامهٔ این‌کار، (φ_n)، دنباله‌ای از توابع پیوسته، به‌دست می‌آید که در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند و چنان‌اند که به‌ازای هر n و هر x در D،

$$|f(x) - [\varphi_۱(x) + \varphi_۲(x) + \cdots + \varphi_n(x)]| \leqslant \left(\frac{۲}{۳}\right)^n M, \tag{۵.۲۶}$$

وبه‌ازای $x \in \mathbf{R}^p$ ؛

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n-۱} M. \tag{۶.۲۴}$$

فرض کنیم g_n در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}$ با $g_n = \varphi_۱ + \varphi_۲ + \cdots + \varphi_n$ تعریف شده باشد؛ از این تعریف معلوم می‌شود که g_n پیوسته است. از نابرابری (۶.۲۶) نتیجه می‌گیریم که اگر $m \geqslant n$ و $x \in \mathbf{R}^p$، آنگاه

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= |\varphi_{n+۱}(x) + \cdots + \varphi_m(x)| \\ &\leqslant \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)^n M \left[۱ + \frac{۲}{۳} + \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ + \cdots\right] \leqslant \left(\frac{۲}{۳}\right)^n M, \end{aligned}$$

پس دنبالهٔ (g_n) در $\mathbf{R}^p$، به‌تابعی که ما با g نشان‌می‌دهیم همگرای یکنواخت است. چون هر g_n در $\mathbf{R}^p$ پیوسته است، قضیهٔ ۱۰۲۴ ایجاب می‌کند که g درهر‌نقطهٔ $\mathbf{R}^p$ پیوسته‌باشد. همچنین، از نابرابری (۵.۲۶) نتیجه می‌شود که به‌ازای $x \in D$

$$|f(x) - g_n(x)| \leqslant \left(\frac{۲}{۳}\right)^n M.$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $x \in D$، $f(x) = g(x)$. بالاخره از نابرابری (۶.۲۶) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x در $\mathbf{R}^p$ داریم

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{۱}{۳} M\left[۱ + \frac{۲}{۳} + \cdots + \left(\frac{۲}{۳}\right)^{n-۱} \right] \leqslant M,$$

و حکم نهایی قضیه ثابت می‌شود. □

۵.۲۶ نتیجه: فرض کنیم f دریك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$، مانند D، تابعی کراندار و پیوسته باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}^q$ باشد. دراین‌صورت تابعی پیوسته مانند g در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای $x \in D$، $g(x) = f(x)$ و

$$\sup \{\|g(x)\| : x \in \mathbf{R}^p\} \leqslant \sqrt{q} \sup \{\|f(x)\| : x \in D\}.$$

برهان . در حالت $q = ۱$، این نتیجه را هم‌اکنون ثابت کردیم. درحالت کلی، توجه می‌کنیم که f، q تابع مختص حقیقی پیوستهٔ $f_۱$، ...، f_q در D تعریف می‌کند:

$$f\ x = f_۱(x, f_۲(x), \cdots, f_q(x)).$$

چون هریك از f_jها $(۱ \leqslant j \leqslant q)$ گسترش پیوسته‌ای مانند g_j در $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ دارد، g را در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ به‌صورت $g(x) = (g_۱(x), \ldots, g_q(x))$ تعریف می‌کنیم. دیده می‌شود که g دارای خواص مطلوب است. □

همپیوستگی

قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۶.۱۵ درمورد مجموعه‌ها (که می‌گوید هر زیرمجموعهٔ کراندار بی‌پایان $\mathbf{R}^p$ دارای نقطهٔ تجمع است) و قضیهٔ متناظرش ۴.۱۶ درمورد دنباله‌ها (که می‌گوید هر دنبالهٔ کراندار در $\mathbf{R}^p$ زیردنباله‌ای همگرا دارد) را بارها به‌کاربرده‌ایم. اکنون قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که کاملاً شبیه قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس است، فقط با این تفاوت که درمورد مجموعه‌هایی از توابع پیوسته است نه درمورد مجموعه‌هایی از نقاط. به‌خاطر اختصار وسهولت، دراینجا تنها شکل دنباله‌ای این قضیه را عرضه می‌کنیم.

درآنچه می‌آید K یك زیرمجموعهٔ فشرده و ثابت $\mathbf{R}^p$ است، و ما به‌توابعی توجه داریم که در K پیوسته‌اند و بردشان در $\mathbf{R}^q$ است؛ بنابر قضیهٔ ۵.۲۲، چنین توابعی کراندارند، درنتیجه $C_{pq}(K) = BC_{pq}(K)$. می‌گوییم یك زیرمجموعهٔ $C_{pq}(K)$ مانند $\mathcal{F}$ در K **کراندار** (یا **کراندار یکنواخت**) است، هرگاه عددی ثابت مانند M وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای هر f در $\mathcal{F}$، $\|f\|_K \leqslant M$. واضح است که اگر $\mathcal{F}$ مجموعهٔ با پایانی از این توابع باشد، کراندار است. زیرا، اگر $\mathcal{F} = \{f_۱, f_۲, \ldots, f_n\}$، آنگاه می‌توان نوشت

$$M=\sup\{\|f_1\|_K, \|f_2\|_K, \dots, \|f_n\|_K\}\ .$$

درحالت کلی، هر مجموعهٔ بی‌پایان توابع پیوسته در K، به $\mathbf{R}^q$ کراندار نیست. اما یك دنبالهٔ همگرای یکنواخت توابع پیوسته کراندار است (ر. ك. تمرین ۲۶. ز.)

هرگاه f تابع پیوسته‌ای درمجموعهٔ فشردهٔ K از $\mathbf{R}^p$ باشد، قضیهٔ ۳.۲۳ ایجاب می‌کندکه این تابع پیوستهٔیکنواخت‌باشد. بنابراین، هرگاه $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به قسمی که اگر x و y به K متعلق باشند و $\|x-y\|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$. البته، مقدار δ ممکن است به تابع f و همچنین به ε بستگی داشته باشد و ازاین‌رواست که اغلب آن‌را به‌صورت $\delta(\varepsilon, f)$ می‌نویسیم. (وقتی که با بیش‌از یك تابع سروکار داریم، بهتر است این بستگی را صریحاً نشان دهیم.) توجه می‌کنیم که اگر $\mathcal{F}=\{f_1, \dots, f_n\}$ یك مجموعهٔ با پایان در $C_{pq}(K)$ باشد، آنگاه با قرار دادن

$$\delta(\varepsilon, \mathcal{F})=\inf\{\delta(\varepsilon, f_1), \dots, \delta(\varepsilon, f_n)\},$$

یك عدد δ به‌دست می‌آوریم که برای تمام توابع موجود دراین مجموعهٔ با پایان «کارا»ست.

۶.۲۶ تعریف. مجموعهٔ $\mathcal{F}$ از توابع K، به $\mathbf{R}^q$ را **همپیوستهٔ یکنواخت** در K گوییم هرگاه، به‌ازای هر عدد حقیقی $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که اگر x و y به K متعلق باشند و $\|x-y\|<\delta$ و f تابعی در $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

دیدیم که یك مجموعهٔ باپایان از توابع پیوسته در K همپیوسته است. همچنین دیده می‌شودکه یك دنباله از توابع پیوسته‌که در K همگرای یکنواخت باشد، همپیوسته است. (ر. ك. تمرین ۲۶. ژ)

نتیجه می‌گیریم، برای‌اینکه دنباله‌ای در $C_{pq}(K)$ در K همگرای یکنواخت باشد، لازم است‌که این دنباله در K کراندار وهمپیوستهٔ یکنواخت باشد. اکنون نشان‌می‌دهیم، برای آنکه مجموعهٔ $\mathcal{F}$ در $C_{pq}(K)$ چنان باشدکه هر دنباله از توابع در $\mathcal{F}$ دارای زیر دنبالهٔ همگرای یکنواخت در K باشد، دو خاصیت بالا، لازم و کافی هستند. می‌توان گفت این تعمیمی از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس در مورد مجموعه‌های توابع پیوسته است، و این تعمیم در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال نقش مهمی بازی می‌کند.

۷.۲۶ قضیهٔ آرزلا[1] ــ آسکولی[2]. فرض کنیم K یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^p$ باشد و

---

۱. چزارو آرزلا Cesare Arzelà (۱۸۴۷ــ۱۹۱۲) در دانشگاه بولونیا (ایتالیا) استاد
←

$\mathscr{F}$ دسته‌ای ازتوابع باشدکه در K پیوسته ومقادیرشان در $\mathbf{R}^q$ است. دراین‌صورت، خواص زیر هم‌ارزند:

(الف) خانوادهٔ $\mathscr{F}$ در K کراندار و همپیوستهٔ یکنواخت است.

(ب) هر دنباله از $\mathscr{F}$ دارای یك زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت در K است.

برهان . درابتدا نشان می‌دهیم که هرگاه شرط (الف) غلط باشد، شرط (ب) نیز غلط است. اگر $\mathscr{F}$ کراندار نباشد، آنگاه دنباله‌ای مانند (f_n) در $\mathscr{F}$ هست به‌قسمی که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $\|f_n\|_K \geqslant n$، دراین‌صورت، هیچ زیردنباله‌ای از (f_n) نمی‌تواند همگرای یکنواخت باشد. همچنین، هرگاه مجموعهٔ $\mathscr{F}$ همپیوستهٔ یکنواخت نباشد، برای یك $\varepsilon_0 > 0$ دنباله‌ای مانند (f_n) در $\mathscr{F}$ و دنباله‌هایی مانند (x_n) و (y_n) در K وجود دارند به‌طوری که $\|x_n - y_n\| < 1/n$ و $\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0$ (چرا؟) اما، دراین‌صورت، هیچ زیردنبالهٔ (f_n) نمی‌تواند در K همگرای یکنواخت باشد.

اکنون نشان‌می‌دهیم که هرگاه مجموعهٔ $\mathscr{F}$ درشرط (الف) صدق کند، برای هردنبالهٔ مفروض (f_n) در $\mathscr{F}$، زیردنباله‌ای هست‌که در K همگرای یکنواخت است. برای این منظور توجه می‌کنیم که ازتمرین ۱۰.ح نتیجه می‌شود که در K زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری مانند C وجود دارد دارای این خاصیت‌که اگر $y \in K$ و $\varepsilon > 0$، آنگاه عنصری مانند x در C هست به‌قسمی‌که $\|x - y\| < \varepsilon$. هرگاه $C = \{x_1, x_2, \dots\}$، دنبالهٔ $(f_n(x_1))$ در $\mathbf{R}^q$ کراندار است. پس‌از قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۴۰۱۶ نتیجه می‌شود که یك زیردنبالهٔ $(f_n(x_1))$ مانند

$$(f_1^1(x_1),\ f_2^1(x_1),\ \dots,\ f_n^1(x_1),\ \dots)$$

وجود دارد که همگراست. اینك توجه می‌کنیم کـه دنبالهٔ $(f_k^1(x_2) : k \in \mathbf{N})$ در $\mathbf{R}^q$ کراندار است، لذا زیردنباله‌ای مانند

$$(f_1^2(x_2),\ f_2^2(x_2),\ \dots\ .\ f_n^2(x_2),\ \dots)$$

دارد که همگراست. همچنین دنبالهٔ $(f_n^2(x_3) : n \in \mathbf{N})$ در $\mathbf{R}^q$ کراندار است، پس زیر دنباله‌ای مانند

$$(f_1^3(x_3),\ f_2^3(x_3),\ \dots,\ f_n^3(x_3),\ \dots)$$

→

بود. او شرایط لازم وکافی برای اینکـه حد یك دنباله از تـوابع پیوسته دریك فاصلهٔ بسته پیوسته باشد را ارائه داد، و به‌بررسی بحث مباحث مربوط پرداخت.

۲. گیلیو آسکولـی Giulio Ascoli (۱۸۴۳ـ۱۸۹۶) در دانشگاه میلان استـاد بـود. همپیوستگی را در محدودهٔ هندسه تعریف‌کرد و همچنین کارهایی درمورد سریهای فوریه انجام داد.

دارد که همگراست. عمل‌را به‌همین‌نحوادامه می‌دهیم وبعد می‌نویسیم $g_n = f_n^n$. درنتیجه g_n، n امین تابع در n امین دنباله است. از طرز ساختن (g_n) معلوم است که (g_n) در هریك از نقاط C همگراست.

اکنون ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ (g_n) درهر نقطهٔ K همگراست، و این همگرایی یکنواخت است. برای این منظور، فرض‌کنید $\varepsilon > 0$ و $\delta(\varepsilon)$ همان $\delta(\varepsilon)$ در تعریف ۶.۲۶ باشد ونیز فرض‌کنیم $C_1 = \{y_1, \dots, y_k\}$ یك زیرمجموعهٔ با پایان C باشد به‌قسمی که دوری هر نقطهٔ K از یکی از نقاط C_1 کمتر از $\delta(\varepsilon)$ باشد. دراین صورت، چون دنباله‌های

$$(g_n(y_1)), (g_n(y_2)), \dots, g_n(y_k))$$

همگرا هستند، عددی طبیعی مانند M هست به‌قسمی که اگر $m, n \geqslant M$، آنگاه

$$\|g_m(y_i) - g_n(y_i)\| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

برای $x \in K$ مفروض، یك $y_j \in C_1$ وجود دارد به‌قسمی که $\|x - y_j\| < \delta(\varepsilon)$. ازاین‌رو، بنابر همپیوستگی یکنواخت برای هر $n \in \mathbf{N}$، داریم $\|g_n(x) - g_n(y_j)\| < \varepsilon$؛ پس این نابرابری برای حالت خاص $n \geqslant M$ نیز برقرار است. بنابراین با شرط $m, n \geqslant M$، داریم

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leqslant \|g_n(x) - g_n(y_j)\| + \|g_n(y_j) - g_m(y_j)\| + \|g_m(y_j) - g_m(x)\| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

این نشان می‌دهدکه

$$\|g_n - g_m\|_K \leqslant 3\varepsilon, \qquad m, n \geqslant M.$$

لذا همگرایی‌یکنواخت دنبالهٔ (g_n) در K از محك‌کوشی درمورد همگرایی یکنواخت که در ۱۱.۱۷ آمده است، نتیجه می‌شود. □

دربرهانی‌که برای این قضیه آوردیم، ابتدا یك دنباله از زیر دنباله‌های توابع را ساختیم و بعد دنبالهٔ «قطری» (g_n) راکه در آن $g_n = f_n^n$، انتخاب نمودیم. این نوع روش را اغلب «روش قطری» یا «روش قطری کانتور» می‌نامند و اغلب به‌کار گرفته می‌شود. خواننده به یاد داردکه دربخش ۳ استدلال مشابهی به‌کار رفت وثابت شدکه مجموعهٔ اعداد حقیقی شمارش‌پذیر نیست.

تمرین

۲۶. الف. نشان دهید که شرط (الف) در قضیهٔ ۱.۲۶ با این شرط هم‌ارز است:

′(الف) هرگاه f به $\mathfrak{L}$ متعلق باشد، $|f|$ نیز به $\mathfrak{L}$ متعلق است.

۲۶. ب. نشان دهید که هر تابع حقیقی پیوسته در فاصلهٔ $[\circ, \pi]$ حد یکنواخت دنبالهای است از «چندجملهایهایی از $\cos x$» (یعنی، توابع (P_n) که در آن $P_n(x) = p_n(\cos x)$ و p_n یك چندجملهای است).

۲۶. پ. نشان‌دهیدکه هرتابع حقیقی پیوسته در $[\circ, \pi]$ حدیکنواخت دنبالهای از توابع به‌صورت

$$x \to a_\circ + a_۱ \cos x + a_۲ \cos ۲x + \cdots + a_n \cos nx$$

است.

۲۶.ت. توضیح دهیدکه چرا اگر درتمرین ۲۶. پ. به‌جای $\cos kx$، $\sin kx$، $(k \in \mathbf{N})$، بگذاریم دیگر نتیجه درست نیست.

۲۶. ث. با استفاده از تمرین ۲۶. پ نشان دهید که هر تابع حقیقی پیوسته مانند f در $[\circ, \pi]$ با شرط $f(\circ) = f(\pi)$ حد یکنواخت دنبالهای از توابع به‌صورت

$$x \to b_\circ + b_۱ \sin x + b_۲ \sin ۲x + \cdots + b_n \sin nx$$

است.

۲۶. ج. با استفاده از تمرینهای ۲۶.پ و ۲۶.ث نشان دهید که هر تابع حقیقی پیوسته‌مانند f در $[-\pi, \pi]$ با شرط $f(-\pi) = f(\pi)$ حد یکنواخت دنبالهای ازتوابع به‌صورت

$$x \to a_\circ + a_۱ \cos x + b_۱ \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

است. [راهنمایی: تابع f را به‌صورت مجموع $f = f_e + f_\circ$ که در آن $f_e(x) = \frac{۱}{۲}(f(x) + f(-x))$ تابع زوج و $f_\circ(x) = \frac{۱}{۲}(f(x) - f(-x))$ تابع فرد است، بنویسید.]

۲۶.چ. برای تمرین قبل برهانی بیاورید مبتنی بر قضیهٔ ۳.۲۶ درمورد دایرهٔ یکهٔ $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ : x^۲ + y^۲ = ۱\}$ و توجه بهاینکه بین توابع پیوسته در T به $\mathbf{R}$ وتوابع پیوسته در $[-\pi, \pi]$ به $\mathbf{R}$ که دربرابری $f(-\pi) = f(\pi)$ صدق می‌کند، یك تناظر یك به یك وجود دارد.

۲۶. ح. $J \subseteq \mathbf{R}$ را یك فاصلهٔ فشرده بگیرید و فرض‌کنید $\mathcal{A}$ دستهای از توابع پیوسته در $J \to \mathbf{R}$ باشد که از خواص قضیهٔ استون ـ وایرشتراس ۲.۲۶ برخوردارند. نشان دهید که هرتابع پیوسته در $J \times J$ (در $\mathbf{R}^۲$)، به $\mathbf{R}$ را می‌توان به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ توابعی به‌صورت

$$f_۱(x)g_۱(y) + \cdots + f_n(x)g_n(y),$$

که در آن f_i و g_i به $\mathcal{A}$ متعلق هستند، تقریب زد.

۲۶. خ. نشان دهید که قضیهٔ تیتز ۴.۲۶، اگر دامنه بسته نباشد، ممکن است درست نباشد.

۲۶. د. با استفاده از قضیهٔ تیتز ۴.۲۶ نشان دهید که هرگاه $D \subseteq \mathbf{R}^p$ بسته و f یك تابع پیوستهٔ بیکران از $D \to \mathbf{R}$ در باشد، گسترش پیوسته‌ای از f در تمام $\mathbf{R}^p$ وجود دارد. [راهنمایی: ترکیب $\varphi \circ f$ را که در آن $\varphi(x) = \operatorname{Arc\,tan} x$ یا $\varphi(x) = x/(1+x)$ درنظر بگیرید.]

۲۶. ذ. فرض کنید $\mathcal{F}$ دسته‌ای از توابع در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}^q$ باشد. خاصیت زیر را درنقطهٔ $c \in D$ درنظر بگیرید: اگر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta(c, \varepsilon) > 0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $x \in D$ ، $\|x-c\| < \delta(c, \varepsilon)$ ، آنگاه به‌ازای هر $f \in \mathcal{F}$ ، $\|f(x)-f(c)\| < \varepsilon$. نشان دهید که $\mathcal{F}$ از این خاصیت درنقطهٔ $c \in D$ برخوردار است اگر و فقط اگر به‌ازای هر دنبالهٔ (x_n) در D با شرط $c = \lim (x_n)$ ، رابطهٔ $f(c) = \lim(f(x_n))$ به‌طوریکنواخت برای $f \in \mathcal{F}$ برقرار باشد. (وقتی این خاصیت برقرار است گاهی می‌گوییم $\mathcal{F}$ در $c \in D$ **همپیوسته** است.)

۲۶. ر. فرض کنید $\mathcal{F}$ دستهٔ توابع درتمرین ۲۶. ذ. باشد. هرگاه D فشرده وخاصیت مذکور درتمرین ۲۶. ذ برای هر $c \in D$ برقرار باشد، نشان دهید که $\mathcal{F}$ بنا بر تعریف ۶.۲۶ همپیوستهٔ یکنواخت است.

۲۶. ژ. فرض کنید $K \subseteq \mathbf{R}^p$ فشرده و (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته در K ، به $\mathbf{R}^q$ باشد که در K همگرای یکنواخت است. نشان دهید که خانوادهٔ $\{f_n\}$ در K کراندار است (بدین‌معنی که عددی مانند $M > 0$ هست به‌قسمی که به‌ازای هر $x \in K$ و $n \in \mathbf{N}$ ، $\|f_n(x)\| \leqslant M$ ، یا اینکه به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $\|f_n\|_K \leqslant M$).

۲۶. ژ. فرض کنید $K \subseteq \mathbf{R}^p$ فشرده و (f_n) دنبالهٔ توابعی پیوسته در K ، به $\mathbf{R}^q$ باشد که در K همگرای یکنواخت است. نشان دهید که خانوادهٔ $\{f_n\}$ بنا به تعریف ۶.۲۶ ، در K همپیوستهٔ یکنواخت است.

۲۶.س. فرض کنیم $\mathcal{F}$ دسته‌ای‌ازتوابع کراندار وهمپیوستهٔ یکنواخت‌در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ باشد و f^* در D ، به $\mathbf{R}$ به‌صورت

$$f^*(x) = \sup \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که f^* در D ، به $\mathbf{R}$ پیوسته است.

۲۶. ش. نشان‌دهید که اگر درتمرین قبل $\mathcal{F}$ همپیوستهٔ یکنواخت فرض‌نشود، ممکن است حکم درست نباشد.

۲۶. ص. به دنباله‌های توابع زیر که نشان می‌دهند قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی ۷.۲۶ درصورت‌حذف فرضهای مختلف آن، ممکن است درست نباشد، توجه کنید.

(الف) $\quad f_n(x) = x+n, \quad x \in [0, 1]$

(ب) $$f_n(x)=x^n, \quad x\in[0,1]$$

(پ) $$f_n(x)=\frac{1}{1+(x-n)^2}, \quad x\in[0,\infty)$$

۲۶ . ض. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته در $\mathbf{R}$ ، به $\mathbf{R}^q$ باشد که درهریك از نقاط مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ همگراست . هرگاه مجموعهٔ $\{f_n\}$ در $\mathbf{R}$ همپیوستهٔ یکنواخت باشد. نشان دهید که دنباله درهرنقطهٔ $\mathbf{R}$ همگراست و این همگرایی درهر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}$ یکنواخت است، ولی این همگرایی الزاماً در $\mathbf{R}$ یکنواخت نیست.

فصل پنجم

توابع یك متغیره

اکنون بررسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری توابع را آغاز می‌کنیم. برای این‌کار مناسب است ابتدا توابع یك‌متغیره را مطرح کنیم. در فصلهای هفتم وهشتم به‌بررسی توابع چند-متغیره خواهیم پرداخت. اگر این‌فصلها را با هم مقایسه‌کنید خواهید دیدکه طرح‌مطالب در حالت توابع چندمتغیره به‌آنچه در اینجا خواهیم‌آورد شباهت‌کامل دارد، جزآنکه در آنجا باپیچیدگیهایی مواجه می‌شویم. علاوه براین، چون در حالت‌کلی ازنتایج حالت یك‌متغیره استفاده می‌شود، بهتر می‌دانیم‌که قبلاً این‌حالت مورد بررسی قرار گیرد.

در بخشهای ۲۷ و ۲۸ مشتق تابع‌تعریف شده دریك فاصلهٔ حقیقی‌را معرفی می‌کنیم و قضیهٔ مهم مقدار میانگین وبرخی از نتایج آن‌را اثبات می‌نماییم. دربخش ۲۹ انتگرال ریمان (وریمان - استیلتیس) توابع کراندار را دریك فاصلهٔ $[a,b]$ تعریف خواهیم‌کرد. خواص اساسی انتگرال در این‌بخش و در بخشهای ۳۰ و ۳۱ مطرح خواهند شد. دردو بخش‌آخر به‌بحث درانتگرالهای ناسره وبی‌پایان می‌پردازیم. نتایجی‌که در این دوبخش به‌دست می‌آوریم در بسیاری از کاربردها اهمیت دارند، اما در این‌کتاب از این نتایج خیلی‌کم استفاده خواهیم‌کرد.

بخش ۲۷ قضیهٔ مقدار میانگین

چون فرض براین است کـه خواننده قبلاً با رابطهٔ بین مشتق تابع در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ و شیب نمودارآن، و همچنین بـا مفهوم میزان تغییرات لحظه‌ای‌آشنـا شده است توجه خود را کاملاً معطوف جنبه‌های ریاضی مشتق می‌کنیم و وارد بحث در کاربردهای‌آن در فیزیك،

اقتصاد، و غیره نمی‌شویم. در این بخش و بخش بعدی یك تابع به دامنهٔ D در $\mathbf{R}$ و برد در $\mathbf{R}$ را در نظر خواهیم گرفت. اگرچه ما اصولاً به‌تعریف مشتق در یك‌نقطهٔ درونی نیاز داریم اما مشتق را به‌قسمی تعریف می‌کنیم که بتوان، مثلاً، نقطهٔ انتهایی فاصله را نیز درنظر گرفت. با این‌حال، لازم است نقطه‌ای که در آن مشتق تعریف‌می‌شود، نقطهٔ تجمع D و به D متعلق باشد.

۱۰۲۷ تعریف. هرگاه c نقطهٔ تجمع D و به D متعلق باشد، عدد حقیقی L را مشتق f در c می‌گوییم، اگر برای هرعدد $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که وقتی x به D متعلق است و $0<|x-c|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-L\right|<\varepsilon. \qquad (۱۰۲۷)$$

در این صورت به‌جای L می‌نویسیم $f'(c)$.

می‌توانستیم $f'(c)$ را

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad (x\in D,\ x\neq c)$$

تعریف کنیم. توجه‌کنید که اگر c نقطهٔ درونی D باشد، در (۱۰۲۷) هم به‌نقاط سمت چپ و هم به‌نقاط سمت راست c نظر داریم. از طرف دیگر وقتی D فاصله و c انتهای چپ D است، تنها می‌توانیم x را درسمت راست c بگیریم.

هرگاه مشتق f در c وجود داشته باشد، مقدار آن‌را به $f'(c)$ نمایش می‌دهیم. بدین‌ترتیب تابعی به‌دست می‌آوریم که دامنهٔ آن یك‌زیرمجموعهٔ دامنهٔ f است. حال نشان می‌دهیم که برای وجود مشتق f در c پیوستگی شرط لازم است.

۲۰۲۷ لم. اگر f در c مشتق داشته‌باشد، f در c پیوسته است.

برهان. ε را ۱ و $\delta=\delta(1)$ را عددی بگیرید که برای هر $x\in D$ که در

$$0<|x-c|<\delta$$

صدق کند، داشته‌باشیم

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<1.$$

از نابرابری مثلثی نتیجه می‌گیریم که برای این‌مقادیر x، داریم

$$|f(x)-f(c)| \leqslant |x-c| \{|f'(c)|+۱\}.$$

اگر x در D و $|x-c|<\inf\{\delta, \varepsilon/(|f'(c)|+۱)\}$ باشد، طرف چپ این عبارت از ε کوچکتر می‌شود. □

بسهولت ملاحظه مـی‌شود که پیوستگی در c شرطی کافی برای وجود مشتق در c نیست. برای مثال، اگر $D=\mathbf{R}$ و $f(x)=|x|$، آنگاه f در هرنقطه از $\mathbf{R}$ پیوسته است. ولی در نقطهٔ c دارای مشتق است اگر وفقط اگر $c \neq ۰$. با ترکیبهای جبری ساده می‌توان بآسانی‌توابع پیوسته‌ای ساخت که درتعدادباپایانی وحتی شمارش‌پذیری از نقاط دارای مشتق نباشد. در سال ۱۸۷۲، وایرشتراس، با ارائهٔ مثالی ازیك تابع که در تمام نقاط پیوسته است ولی در هیچ‌نقطه دارای مشتق نیست، دنیای ریاضیات را تکان‌داد. (در واقع، می‌توان ثابت‌کرد که تابع تعریف شده باسری

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲^{n}} \cos(۳^{n} x),$$

دارای این خاصیت است. در اینجـا به‌تفصیل این مطلب نمی‌پردازیم، تفصیل آن و مراجع‌مربوط به‌آن درکتابهای تیچ مارش[1] و باس[2] آمده است، خواننده را به‌این‌دو کتاب ارجاع می‌دهیم.)

۳.۲۷ لم. (الف) اگر f در c مشتق داشته بـاشد و $f'(c)>۰$، آنگاه عددی مانند $\delta>۰$ هست به‌قسمی‌که اگر $x \in D$ و $c<x<c+\delta$، آنگاه $f(c)<f(x)$.

(ب) اگر $f'(c)<۰$، عددی مـانند $\delta>۰$ هست به‌قسمی که اگر $x \in D$ و $c-\delta<x<c$، آنگاه $f(c)<f(x)$.

برهان. (الف) فرض می‌کنیم $\varepsilon_۰>۰$ از $f'(c)$ کـوچکتر و $\delta=\delta(\varepsilon_۰)$ نظیر به $\varepsilon_۰$ طبق تعریف ۱.۲۷ باشد، آنگاه برای $x \in D$، با شرط $c<x<c+\delta$ داریم

$$-\varepsilon_۰<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c).$$

چون $x-c>۰$، این‌رابطه ایجاب می‌کند که

$$۰<(f'(c)-\varepsilon_۰)(x-c)<f(x)-f(c),$$

---

1. Titchmarsh 2. Boas

وحکم الف ثابت می‌شود. (ب) به‌طریقی مشابه ثابت می‌شود. □

به‌خاطر داریم که تابع f دریك نقطهٔ c در D **ماکزیمم نسبی (بیشینهٔ نسبی)** دارد، هرگاه عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که وقتی $x\in D$ و $|x-c|<\delta$، داشته باشیم $f(x)\leqslant f(c)$. **مینیمم نسبی(کمینهٔ نسبی)** به طور مشابه تعریف می‌شود. قضیهٔ بعدی توجیه می‌کند که چرا برای پیداکردن نقاط ماکزیمم ومینیمم نسبی تابع معمولاً صفرهای مشتق بررسی می‌شود. باید توجه داشت که این روش فقط در مورد نقاط درونی فاصله درست است. در واقع، اگر $f(x)=x$ را درفاصلهٔ $D=[0,1]$ درنظر بگیریم، آنگاه نقطهٔ انتهایی $x=0$، تنها مینیمم نسبی و نقطهٔ انتهایی $x=1$ تنها ماکزیمم نسبی f را به‌دست می‌دهد، اما هیچ‌یك از این نقاط ریشهٔ مشتق نیستند. برای سهولت، این قضیه را فقط برای ماکزیمم نسبی ثابت خواهیم کرد واثبات مربوط به‌مینیمم نسبی را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۴.۲۷ قضیهٔ ماکزیمم درونی. فرض‌کنیم c یك نقطهٔ درونی D باشدکه درآن نقطه، f ماکزیمم نسبی دارد. هرگاه مشتق f در نقطهٔ c وجود داشته‌باشد، مقدار آن باید برابر با صفر باشد.

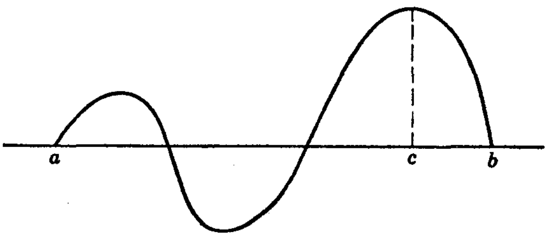
برهان. اگر $f'(c)>0$، آنگاه بنا برلم ۳.۲۷ (الف) عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $c<x<c+\delta$ و $x\in D$، آنگاه $f(c)<f(x)$. که با این فرض که f در نقطهٔ c ماکزیمم نسبی دارد متناقض است. هرگاه $f'(c)<0$، می‌توان لم ۳.۲۷ (ب) را به‌کاربرد. □

۵.۲۷ قضیهٔ رول.[1] فرض‌کنیم f درفاصلهٔ بستهٔ $J=[a,b]$ پیوسته ومشتق‌آن f' درفاصلهٔ باز (a,b) وجود داشته‌باشد و $f(a)=f(b)=0$، آنگاه نقطه‌ای مانند c در (a,b) وجود دارد به‌قسمی که $f'(c)=0$. (ر.ك. شکل ۱.۲۷.)

برهان. هرگاه f در J متحد باصفر باشد، cرا می‌توان $c=(a+b)/2$ انتخاب کرد. بنابراین فرض می‌کنیم که f در این فاصله متحد با صفر نیست. با گذاشتن $-f$ به‌جای f، در صورت لزوم، می‌توان فرض‌کرد که f برخی از مقادیر مثبت را اختیار می‌کند. بنابرقضیهٔ مقدار ماکزیمم ۶.۲۲، مقدار تابع f در نقطه‌ای مانند c در J برابر با $\sup\{f(x):x\in J\}$ می‌شود. ولی چون $f(a)=f(b)=0$، لذا نقطهٔ c در شرط

---

۱. این‌قضیه را عموماً به‌میشل‌رول Michel Rolle (۱۶۵۲–۱۷۱۹) عضوآکادمی فرانسه منسوب می‌کنند که‌کارهایی درزمینهٔهندسهٔ تحلیلی‌دارد ودرکارهای مقدماتی که‌حساب‌دیفرانسیل و انتگرال‌را به‌وجودآورده است، سهم دارد.



شکل ۱۰۲۷

$a<c<b$ صدق می‌کند. حال چونکه بنابه‌فرض $f'(c)$ وجود دارد و f در نقطهٔ c ماکزیمم نسبی دارد، قضیهٔ ماکزیمم درونی ایجاب می‌کند که $f'(c)=0$. □

به‌عنوان یك نتیجهٔ قضیهٔ رول، قضیهٔ کاملاً بنیادی مقدار میانگین‌را به‌دست می‌آوریم.

۶۰۲۷ قضیهٔ مقدار میانگین. فرض‌کنیم f در فاصلهٔ بستهٔ $J=[a, b]$ پیوسته و در فاصلهٔ باز (a, b) دارای مشتق باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در (a, b) وجود دارد به‌قسمی که

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

برهان. تابع φ را به‌صورت زیر در J تعریف می‌کنیم:

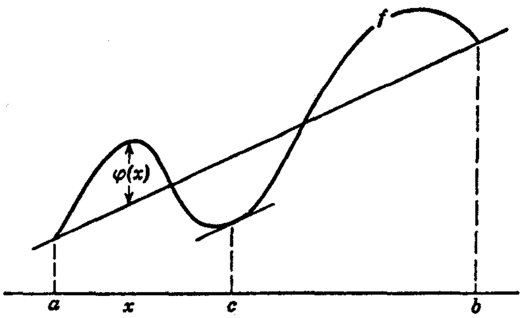
$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

[واضح است که φ تفاضل f و تابعی است که نمودار آن قطعه خط واصل بین دو نقطه $(a,f(a))$، $(b, f(b))$ است (ر. ك. شکل ۲۰۲۷)]. بدین‌ترتیب با توجه به‌شرایط قضیه، تابع φ در $J=[a, b]$ پیوسته است و بسهولت می‌توان تحقیق کرد که در فاصلهٔ باز (a, b) مشتق‌پذیر است. علاوه براین‌داریم $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. بنابراین با توجه به‌قضیهٔ رول، نقطه‌ای مانند c در درون J وجود دارد به‌قسمی که

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

وبدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود. □

۷۰۲۷ نتیجه. اگر f در فاصلهٔ $J=[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در (a, b) وجود دارد به‌قسمی که



شکل ۲۷۰۲

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

گاه به‌صورت کلیتری ازقضیهٔ مقدار میانگین که در آن دو تـابع ظاهر می‌شود ، احتیاج است .

۸۰۲۷ قضیهٔ مقدار میانگین کوشی. فرض‌کنیم تـوابع f و g در $J=[a, b]$ پیوسته ودر فاصلهٔ باز (a, b) مشتق‌پذیر باشند. دراین‌صورت نقطه‌ای مانند c در (a,b) وجود دارد به‌قسمی‌که

$$f'(c)[g(b)-g(a)]=g'(c)[f(b)-f(a)].$$

برهان . اگر $g(b)=g(a)$ ، قضیه بـا انتخاب c به‌قسمی‌که $g'(c)=0$ ثابت می‌شود. اگر $g(b)\neq g(a)$، آنگاه تابع φ را در J به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

قضیهٔ رول را برای تابع φ به‌کار می‌بریم، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. □

اگر چه ممکن است مشتق یك‌تابع پیوسته نباشد، قضیه‌ای مقدماتی ولی قابل توجه منسوب به‌داربو[1] نشان می‌دهد که f' هرمقدار بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را در فاصلهٔ $[a, b]$

۱. گاستون‌داربو Gaston Darboux (۱۸۴۲ـ۱۹۱۷) دانشجوی هرمیت‌واستادکولژدوفرانس بوده است . اگـرچه او بیشتر به‌عنوان یك‌هندسه‌دان شناخته‌شده، لیکن‌کارهای مهمی نیز در آنالیز انجام داده است.

اختیار می‌کند. (ر. ك. تمرین ۲۷.ح)

بـا ترسیم نمودارهای مناسبی می‌توان قضیهٔ مقدار میـانگین را بسهولت به‌خاطر سپرد. با اینکه ترسیم نمودار عملی مفید است، موجب می‌شود به‌نظر آیدکـه اهمیت این قضیه در طبیعت هندسی آن است و این بسیـار گمراه‌کننده است . در واقع قضیهٔ مقدار میانگین گرچه ظاهری ساده دارد قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل است. این‌بخش را با بیان چند نتیجهٔ مقدماتی از این‌قضیه به پـایان می‌رسانیم. در بخش بعد و همچنین در بخشهای دیگر نتیجه‌هایی دیگر ازاین‌قضیه را عرضه خواهیم‌کرد.

۲۷.۹ قضیه. فرض‌کنیم تابع f درفاصلهٔ بستهٔ $J=[a, b]$ پیوسته و درفاصلهٔ‌باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد.

(یك) اگر وقتی $a<x<b$، $f'(x)=0$ آنگاه تابع f در J ثابت است.

(دو) اگر وقتی $a<x<b$، $f'(x)=g'(x)$، آنگاه تفـاضل f و g در J ثابت است .

(سه) اگـر برای $a<x<b$، $f'(x)\geqslant 0$ و اگر $x_1\leqslant x_2$ به J متعلق باشند ، آنگاه $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

(چهار) اگر برای $a<x<b$، $f'(x)>0$ و اگر $x_1<x_2$ به J متعلق باشند ، آنگاه $f(x_1)<f(x_2)$.

(پنج) اگر برای $a<x<a+\delta$، $f'(x)\geqslant 0$، آنگاه a یك نقطهٔ مینیمم نسبی f است .

(شش) اگر برای $b-\delta<x<b$، $f'(x)\geqslant 0$ ، آنگاه b یك نقطهٔ ماکزیمم نسبی f است .

(هفت) اگر وقتی $a<x<b$، $|f'(x)|\leqslant M$ ، آنگاه f در شرط لیپشیتس زیر صدق می‌کند:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|, \quad x_1, x_2\in J.$$

اثبات این‌قضیه را به‌عنوان یك‌تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

تمرین

۲۷ . الف . بـا استفاده از تعریف، مشتق توابع زیر را (وقتی مشتق وجود دارد) محاسبه‌کنید.

(الف) $f(x)=x^2, \quad x\in\mathbf{R}$

(ب) $g(x)=x^n, \quad x\in\mathbf{R}$

(پ) $h(x)=\sqrt{x},\ x\geqslant 0$

(ت) $F(x)=1/x,\ x\neq 0$

(ث) $G(x)=|x|,\ x\in\mathbf{R}$

(ج) $H(x)=1/x^2,\ x\neq 0$

۲۷. ب. اگر f و g توابعی حقیقی باشند که در یك فاصلهٔ J تعریف شده‌اند، و این دو تابع در یك نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشند، آنگاه نشان دهید که h حاصلضرب آنها که برای $x\in J$ با $h(x)=f(x)g(x)$ تعریف شده است، در نقطهٔ c دارای مشتق است و

$$h'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$

۲۷. پ. نشان دهید تابعی که برای $x\neq 0$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\sin(1/x)$$

در هر نقطهٔ مخالف با صفر، مشتق‌پذیر است. نشان دهید که مشتق آن در همسایگی $x=0$ کراندار نیست. (می‌توانید از اتحادهای مثلثاتی، پیوستگی توابع سینوس و کسینوس، و رابطهٔ حدی $\sin u/u\rightarrow 1$ وقتی که $u\rightarrow 0$، استفاده کنید.)

۲۷. ت. نشان دهید تابعی که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$g(x)=x^2\sin(1/x),\quad x\neq 0$$

$$=0,\qquad\qquad x=0$$

برای تمام مقادیر حقیقی مشتق‌پذیر است، اما g' در $x=0$ پیوسته نیست.

۲۷. ث. تابع $h:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ که برای $x\in\mathbf{Q}$ با $h(x)=x^2$ و برای $x\notin\mathbf{Q}$ با $h(x)=0$ تعریف شده است، تنها در یك نقطه پیوسته است. آیا در این نقطه مشتق‌پذیر است؟

۲۷. ج. فرض کنید $c\in D$ یك نقطهٔ تجمع D باشد و $f:D\rightarrow\mathbf{R}$. نشان دهید که $f'(c)$ وجود دارد اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ (x_n) در D که در شرایط به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، $x_n\neq c$ و $\lim(x_n)=c$ صدق کند حد دنبالهٔ

$$\left(\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right)$$

وجود داشته‌باشد. در این‌حالت، حد تمام این‌چنین دنباله‌ها برابر با $f'(c)$ است.

۲۷. چ. هرگاه $f:D\rightarrow\mathbf{R}$ در نقطهٔ $c\in D$ مشتق‌پذیر باشد و برای تمام مقادیر $n\in\mathbf{N}$، $c+1/n\in D$، نشان دهید که

$$f'(c)=\lim\left(n\left\{f\left(c+\frac{1}{n}\right)-f(c)\right\}\right).$$

با این‌حال نشان‌دهید که وجود حد دنبالهٔ فوق، وجود مشتق‌را ایجاب نمی‌کند.

۲۷. ح. (داربو) هرگاه f ، در $[a, b]$مشتق‌پذیر باشد، اگر

$$f'(a)=A \text{ و } f'(b)=B \text{ و } C$$

بین A و B باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در (a, b) وجود دارد به‌قسمی‌که $f'(c)=C$ (راهنمایی: کران پایین تابع $g(x)=f(x)-C(x-a)$ را درنظر بگیرید.)

۲۷. خ. هرگاه برای $x<0$، $g(x)=0$ و برای $x\geqslant 0$ ، $g(x)=1$، ثابت‌کنید که تابع $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ به‌قسمی‌که برای هر $x\in\mathbf{R}$، $f'(x)=g(x)$ وجود ندارد.

۲۷. د. مثالی بزنید از تابعی پیوسته که تنها یك نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته‌باشد و مشتق تابع در این‌نقطه وجود نداشته‌باشد.

۲۷. ذ. مثالی بزنید از یك‌تابع پیوستهٔ یکنواخت‌که در $(0, 1)$ مشتق‌پذیر باشد ولی مشتق‌آن در $(0, 1)$ کراندار نباشد.

۲۷.ر. فرض‌کنید $f:[a, b]\rightarrow\mathbf{R}$ درنقطهٔ $c\in[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد. نشان‌دهید که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر

$$0<|x-y|<\delta(\varepsilon) \text{ و } a\leqslant x\leqslant c<y\leqslant b،$$

آنگاه

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(c)\right|<\varepsilon.$$

۲۷. ز. فرض‌کنید $f:[a, b]\rightarrow\mathbf{R}$ در $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که f' در $[a, b]$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>0$ ، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که اگر $x, y\in[a, b]$ و $0<|x-y|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

۲۷. ژ. فرض‌کنید $f:[a, b]\rightarrow\mathbf{R}$ در $[a, b]$ پیوسته ودر (a, b) مشتق‌پذیر باشد. هرگاه $\lim_a f'(x)=A$. نشان‌دهید که $f'(a)$ وجود دارد و برابر با A است.

۲۷. س. هرگاه $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ و $f'(a)$ وجود داشته‌باشد، نشان‌دهید که

$$f'(a)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

با ذکر مثالی نشان‌دهید که وجود این‌حد وجود مشتق را ایجاب نمی‌کند.

۲۷. ش. تابع $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ را **زوج** گوییم هرگاه $f(-x)=f(x)$ برای هر

$x\in\mathbf{R}$ و آن‌را **فرد** گوییم هرگاه $f(-x)=-f(x)$ برای هر $x\in\mathbf{R}$. هرگاه f در $\mathbf{R}$ مشتق‌پذیر وزوج (فرد) باشد، نشان‌دهیدکه f' فرد (زوج) است.

۲۷. ص. $f:(a, b)\to\mathbf{R}$ و $c\in(a, b)$ مفروض است. حد راست f در c، یعنی $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)$ را با $f(c+)$ نشان می‌دهیم. هرگاه A_r، حد راست زیر:

$$A_r=\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}}\frac{f(x)-f(c+)}{x-c}.$$

در $\mathbf{R}$ وجود داشته‌باشد، گوییم که تـابع f دارای **مشتق راست** در c است و A_r را به $f'_+(c)$ نمایش می‌دهیم. به‌طریق مشابه $f'_-(c)$، مشتق چپ را تعریف می‌کنیم.

نشان‌دهیدکه اگر f در c پیوسته‌بـاشد، آنگاه $f'(c)$ وجود دارد اگر وفقط اگر $f'_+(c)$ و $f'_-(c)$ موجود وبرابر باشند. نشان‌دهیدکه ممکن‌است $g'_-(c)=g'_+(c)$ بدون اینکه $g'(c)$ وجود داشته‌باشد.

۲۷.ض. I و J را فواصلی در $\mathbf{R}$ فرض‌کنید وفرض‌کنید $f:I\to\mathbf{R}$ و $g:J\to\mathbf{R}$ به‌قسمی باشندکه g در نقطهٔ $b\in J$ مشتق‌پذیر باشد، $a=g(b)$ یك نقطهٔ درونی I و f در a مشتق‌پذیر باشد. نشان‌دهیدکه ترکیب $h=f\circ g$ تعریف‌شده در $\{x\in J : g(x)\in I\}$ در b مشتق‌پذیر است و $h'(b)=f'(a)g'(b)$. راهنمایی: در $D(h)$ تابعی مانند H به‌صورت زیر تعریف‌کنید:

$$H(x)=\frac{f(g(x))-f(g(b))}{g(x)-g(b)} \qquad \text{هرگاه } g(x)\neq g(b)$$

$$=f'(a) \qquad \text{هرگاه } g(x)=g(b)$$

نشان‌دهیدکه $\lim_b H(x)=f'(a)$، آنگاه از این‌که رابطهٔ

$$(g(x)-g(b))H(x)=f(g(x))-f(g(b))$$

برای هر x در $D(h)$ برقرار است، استفاده‌کنید.)

۲۷. ط. فرض‌کنید $f:[0, +\infty)\to\mathbf{R}$ در $(0, +\infty)$ مشتق‌پذیر باشد.

(الف) هرگاه $f'(x)\to b\in\mathbf{R}$ وقتی‌که $x\to+\infty$، نشان‌دهیدکه‌برای هر $h>0$ داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=b.$$

(ب) اگـر $f(x)\to a\in\mathbf{R}$ و $f'(x)\to b\in\mathbf{R}$ وقتی $x\to+\infty$، آنگاه نشان‌دهیدکه $b=0$.

(پ) اگر $f'(x)\to b\in R$ وقتی که $x\to+\infty$، آنگاه نشان دهید که $f(x)/x\to b$ وقتی $x\to+\infty$.

۲۷. ظ. فرض کنید $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$ برای $x\in[a, b]$. فرض کنید $f(a)<0<f(b)$. در $[a, b]$ نقطه‌ای مانند x_1 انتخاب و دنبالهٔ (x_n) را به‌صورت

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{M}f(x_n),\quad n\in\mathbf{N}$$

تعریف می‌کنیم، ثابت کنید که این دنباله خوش‌تعریف و به $\bar{x}$، ریشهٔ یکتای معادلهٔ $f(x)=0$ در $[a, b]$، همگراست و برای $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$|x_{n+1}-\bar{x}|\leqslant\frac{|f(x_1)|}{m}\left(1-\frac{m}{M}\right)^n$$

(راهنمایی: تابع $\varphi:[a, b]\to\mathbf{R}$ را به‌صورت $\varphi(x)=x-f(x)/M$ تعریف کنید، نشان دهید که φ صعودی و یك انقباض (ر. ك. ۴.۲۳) با ثابت $1-m/M$ است.)

۲۷. ع. فرض کنید $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ مشتق پیوسته داشته باشد و $f(a)=b$ و $f'(a)\neq0$. فرض کنید $\delta>0$ به‌قسمی باشد که اگر $|x-a|\leqslant\delta$، آنگاه

$$|f'(x)-f'(a)|\leqslant\frac{1}{2}|f'(a)|$$

و بنویسید $\eta=1/2\delta|f'(a)|$. ثابت کنید که اگر $|\bar{y}-b|\leqslant\eta$، آنگاه دنبالهٔ (x_n) که به‌صورت زیر تعریف شده است: $x_1=a$ و

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)-\bar{y}}{f'(a)},\quad n\in\mathbf{N}$$

به نقطهٔ یکتای $\bar{x}$ در $[a-\delta, a+\delta]$ همگراست و $f(\bar{x})=\bar{y}$، (راهنمایی: نشان دهید که تابع φ که با $\varphi(x)=x-(f(x)-\bar{y})/f'(a)$ تعریف شده است، در فاصلهٔ $[a-\delta, a+\delta]$ یك انقباض با ثابت ۱/۲ است.)

بخش ۲۸ کاربردهای دیگری از قضیهٔ مقدار میانگین

هرقدر بر اهمیت قضیهٔ مقدار میانگین تأکید شود، بجاست، زیرا در بسیاری از بررسیهای نظری نقشی اساسی بازی می‌کند. علاوه بر این در بسیاری از کاربردهای عملی مفیداست. در ۹.۲۷ برخی از نتایج سادهٔ قضیهٔ مقدار میانگین را که معمولاً مورد استفاده می‌باشند، بیان کردیم. اکنون به‌مباحث دیگری که قضیهٔ مقدار میانگین را می‌توان در مورد آنها

به‌کاربرد، می‌پردازیم . در این قسمت بیش از سابق براطلاعات خواننده در مورد مشتق بعضی توابع آشنا تکیه خواهیم کرد.

۱۰۲۸ کاربرد اول. قضیهٔ رول را می‌توان در مورد موضع ریشه‌های یك تابع به‌کار برد. زیرا اگر تابع g مشتق تابع f باشد، آنگاه بین هردوریشهٔ f حداقل یك ریشهٔ g وجود دارد. برای مثال ، فرض‌کنیم $g(x)=\cos x$ همان‌طوری‌که می‌دانیم g مشتق تابع $f(x)=\sin x$ است ؛ بنابراین، بین هردو ریشهٔ دلخواه $\sin x$ حداقل یك‌ریشهٔ $\cos x$ وجود دارد. از طرف دیگر چون $g'(x)=-\sin x=-f(x)$ ، اگر بار دیگر قضیهٔ رول را به‌کاربریم می‌بینیم‌که بین هردو ریشهٔ دلخواه $\cos x$ حداقل یك‌ریشهٔ $\sin x$ وجود دارد . بنابراین نتیجه می‌گیریم‌که هرریشهٔ هریك از دو تابع $\sin x$ و $\cos x$ بین دوریشهٔ تابع دیگر واقع است. البته این‌نتیجه احتمالاً برای خواننده تازگی ندارد، اما از او می‌خواهیم که از همین راه در مورد تابع بسل[1] J_n از مرتبهٔ ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... با استفاده ازروابط زیر:

$$[x^n J_n(x)]'=x^n J_{n-1}(x),\ [x^{-n}J_n(x)]'=-x^{-n}J_{n+1}(x),\ x>0$$

نتیجهٔ مشابهی به‌دست آورد.

۲۰۲۸ کاربرد دوم. می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین را در مورد محاسبات تقریبی و همچنین برآورد میزان خطا به‌کاربرد. برای مثال اگر منظور یافتن مقدار تقریبی $\sqrt{105}$ باشد ، می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین را در مورد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برای $a=100$ و $b=105$ به‌کاربرد ونتیجه گرفت:

$$\sqrt{105}-\sqrt{100}=\frac{5}{2\sqrt{c}}$$

که در آن c عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۵ است . ولی چون

$$10<\sqrt{c}<\sqrt{105}<\sqrt{121}=11\text{،}$$

می‌توان حکم کرد که

$$\frac{5}{2(11)}<\sqrt{105}-10<\frac{5}{2(10)}$$

---

۱. فردریش‌ویلهلم‌بسل Friedrich Wilhelm Bessel (۱۷۸۴ ــ ۱۸۴۶) منجم و ریاضی‌دان بود. او یکی ازدوستان نزدیك‌گاوس بود و بیشتر به‌خاطر معادلهٔ دیفرانسیلی که به‌نام خود اوست شناخته شده است.

که از آن $10{,}25 > \sqrt{105} > 10{,}22$ نتیجه می‌گردد. البته ممکن است که این برآورد دقت موردنظر را نداشته باشد. واضح است که برآورد $\sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121}$ چندان هم دقیق نیست و به‌جای آن می‌توان برآورد بهتر $\sqrt{105} < 10{,}25$ را که هم‌اکنون به‌دست آوردیم به‌کاربرد. بدین‌ترتیب $\sqrt{c} < 10{,}25$ و بآسانی مشخص می‌شود که

$$0{,}243 < \frac{5}{2(10{,}25)} < \sqrt{105} - 10$$

و بدین‌ترتیب به برآورد دقیقتر $10{,}250 > \sqrt{105} > 10{,}243$ می‌رسیم و برآوردهای دقیقتری نیز ازاین طریق می‌توان به‌دست آورد.

۳۰۲۸ کاربرد سوم. قضیهٔ مقدار میانگین و نتایج آن‌را می‌توان برای نشان‌دادن برقراری نابرابریها به‌کاربرد و نابرابریهایی‌راکه برای‌اعداد صحیح و گویا شناخته شده‌اند به‌اعداد حقیقی تعمیم‌داد.

برای مثال ، نابرابری برنولی در تمرین ۵. پ گویای این‌مطلب است‌که اگر $1 + x > 0$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ ، نشان خواهیم‌داد‌که این‌نابرابری برای هر توان حقیقی $r \geqslant 1$ نیز برقرار است . بدین منظور $f(x) = (1 + x)^r$ و $f'(x) = r(1 + x)^{r-1}$ را در نظر می‌گیریم . اکنون اگر $-1 < x < 0$ ، آنگاه $f'(x) < r$ و برای مقادیر $x > 0$ داریم $f'(x) > r$. اگرقضیهٔ مقدار میانگین را درهردوحالت به‌کاربریم، نتیجه می‌گیریم که

$$(1 + x)^r \geqslant 1 + rx,$$

با شرط اینکه $1 + x > 0$ و $r \geqslant 1$. علاوه براین، اگر $r > 1$ ، آنگاه برابری برقرار است اگر وفقط اگر $x = 0$.

به‌عنوان یك‌نتیجهٔ مشابه، فرض می‌کنیم α یك‌عدد حقیقی با شرط $0 < \alpha < 1$ است وفرض می‌کنیم $g(x) = \alpha x - x^\alpha$ و $x \geqslant 0$. آنگاه از $g'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$ دیده می‌شود‌که وقتی $0 < x < 1$ داریم $g'(x) < 0$ و برای $x > 1$ ، $g'(x) > 0$. درنتیجه اگر $x \geqslant 0$ ، آنگاه $g(x) \geqslant g(1)$ و $g(x) = g(1)$ اگر و فقط اگر $x = 1$. بنا براین ، هرگاه $x \geqslant 0$ و $0 < \alpha < 1$ ، داریم

$$x^\alpha \leqslant \alpha x + (1 - \alpha).$$

هرگاه $a \geqslant 0$ و $b > 0$ وبنویسیم $x = a/b$ وطرفین‌نابرابری را در b ضرب‌کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1 - \alpha)b,$$

وبرابری برقرار است اگر وفقط اگر $a=b$. نابرابری مذکور اغلب نقطهٔ آغازی برای اثبات نابرابری مهم هولدر می‌باشد (ر. ك. پروژه β.۸).

۴.۲۸ کاربرد چهارم. قوانین هوپیتال[1] درمورد «صور مبهم» را می‌توان ازقضیهٔ مقدار میانگین کوشی به‌دست آورد. برای مثال فرض می کنیم که توابع f و g درفاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$، پیوسته و در فاصلهٔ باز (a, b) مشتق‌پذیر باشند و $f(a)=g(a)=0$ و g و g' درنقاط $x\neq a$ مخالف با صفر باشند،آنگاه نقطه‌ای مانند c باشرط $a<c<b$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot$$

از این‌نتیجه می‌شودکه هرگاه $\lim_{x\to a}f'(x)/g'(x)$ وجود داشته‌باشد،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot$$

درحالتی‌که توابع درنقطهٔ $x=a$ بینهایت شوند، یا اینکه حد دربینهایت باشد، و یااینکه با«صورت مبهم» دیگری مواجه‌باشیم، اغلب ازطریق لگاریتم گرفتن یا به‌کاربردن توابع‌نمایی عبارات یا عملی مشابه می‌توان رفع ابهام کرد.

برای مثال، هرگاه $a=0$ ومنظور یافتن حدتابع $h(x)=x\log x$ باشد وقتی‌که $x\to 0$ ، برای اینکه بتوانیم نتیجه‌ای راکه در بالا به‌دست‌آورده‌ایم به‌کاربریم $h(x)$ را به‌صورت $f(x)/g(x)$ می‌نویسیم که درآن $x>0$، $f(x)=\log x$ و $g(x)=1/x$ فرض شده‌اند. بسهولت دیده می‌شود وقتی‌که $x\to 0$، داریم

$$f'(x)/g'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-x\to 0.$$

فرض می کنیم $\varepsilon>0$ و یك عدد ثابت $1>x_1>0$ انتخاب می کنیم به‌قسمی که هرگاه

---

۱. گیوم فرانسوالوپیتال Guillaume François L'Hospital (۱۷۰۴-۱۶۶۱) یکی از دانشجویان یوهان‌برنولی (۱۷۴۸-۱۶۶۷) بود. مارکی‌دو لوپیتال درسهای استادش در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال را در۱۶۹۶ بچاپ رسانید. بنابراین او اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال را در جهان منتشرکرد. (لوپیتال نزد ما به‌هوپیتال معروف است.ـ م.)

$x_۱>x>۰$ ، آنگاه $|f'(x)/g'(x)|<\varepsilon$. با به‌کاربردن قضیهٔ مقدار میانگین کوشی داریم

$$\left|\frac{f(x)-f(x_۱)}{g(x)-g(x_۱)}\right|=\left|\frac{f'(x_۲)}{g'(x_۲)}\right|<\varepsilon,$$

که در آن $x_۲$ در شرط $x_۱>x_۲>x>۰$ صدق می‌کند. چون برای $x_۱>x>۰$ داریم $f(x)\neq ۰$ و $g(x)\neq ۰$، می‌توان طرف‌چپ این‌رابطه را برای سهولت به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left\{\frac{۱-\dfrac{f(x_۱)}{f(x)}}{۱-\dfrac{g(x_۱)}{g(x)}}\right\}.$$

اکنون $x_۱$ را ثابت می‌گیریم و x را به‌صفر میل می‌دهیم. چون عبارت داخل آکولاد به ۱ همگراست، اگر x به‌اندازهٔ‌کافی کوچك باشد، این‌عبارت از ۱/۲ بزرگتر می‌شود . در نتیجه برای xهای به‌اندازهٔ‌کافی نزدیك به‌صفر،

$$|h(x)|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<۲\varepsilon.$$

در نتیجه حد تابع h درنقطه ۰ برابر با ۰ است.

جابجایی حد و مشتق

فرض‌کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع باشد‌که درفاصلهٔ J از $\mathbf{R}$ وبا مقادیر در $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند. بسهولت می‌توان مثالی‌آورد از دنبالهٔ توابعی که در هرنقطهٔ J دارای مشتق باشند ودنباله در J به‌تابعی مانند f همگرا باشد، اما تابع f دربرخی از نقاط J مشتق نداشته‌باشد. (چنین مثالی به‌دست‌آورید.) علاوه براین، مثال وایرشتراس‌که قبلاً به‌آن اشاره شده است، مثالی است از یك دنبالهٔ توابع مشتق‌پذیر‌که در هرنقطه از $\mathbf{R}$ به‌تابع پیوسته‌ای در $\mathbf{R}$ همگرای یکنواخت است واین‌تابع پیوسته در هیچ نقطه‌ای دارای مشتق نیست. بنابراین اگردنباله‌ای ازتوابع مشتق‌پذیر به‌حد f همگرا وحتی همگرای‌یکنواخت باشد، در حالت‌کلی جایز نیست از توابع مشتق بگیریم وحد دنبالهٔ توابع مشتق را مشتق تابع حد، یعنی f' ، به‌حساب‌آوریم.

اکنون نشان‌می‌دهیم که اگردنبالهٔتوابع‌مشتق‌همگرای‌یکنواخت‌باشد، آنگاه حد این دنباله، برابر با مشتق حد، یعنی f' ، است. اگر فرض‌شود توابع مشتق پیوسته هستند،

می‌توان براساس انتگرال ریمان برهـان کوتاهی براین امر ارائه داد. اما اگر فرض بر پیوسته‌بودن مشتقها نباشد، به‌استدلال مشکلتری احتیاج است.

۵.۲۸ قضیه. فرض‌کنیم (f_n) دنبالهٔ توابعی باشدکه دریك فاصلهٔکراندار J از $\mathbf{R}$ تعریف‌شده‌اند ومقادیرشان در $\mathbf{R}$ است. فرض‌کنیم نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در J وجودداشته‌باشد به‌قسمی‌که دنبالهٔ $(f_n(x_\circ))$ همگرا باشد ومشتقهای f'_n در J وجود داشته باشند و دنبالهٔ (f'_n) در J به‌تابعی مانند g همگرای‌یکنواخت باشد،آنگاه دنبالهٔ (f_n) در J به‌تابعی مانند f، که درهرنقطه دارای مشتق است همگرای‌یکنواخت‌است و $f'=g$.

برهان . فرض کنید a و b دوسر فـاصلهٔ J، $(a<b)$، و x نقطه‌ای در J باشد. هرگاه m و n اعدادی طبیعی باشند، بـا به‌کاربردن قضیهٔ مقدار میانگین در مورد تفاضل f_m-f_n در فاصله‌ای با دوسر $x_\circ$ و x، نتیجه می‌گیریم‌که نقطه‌ای مانند y (وابسته به m و n) وجود دارد به‌قسمی‌که

$$f_m(x)-f_n(x)=f_m(x_\circ)-f_n(x_\circ)+(x-x_\circ)\{f'_m(y)-f'_n(y)\}.$$

لذا، نتیجه می‌گیریم‌که

$$\|f_m-f_n\|_J\leqslant|f_m(x_\circ)-f_n(x_\circ)|+(b-a)\|f'_m-f'_n\|_J.$$

بنابراین دنبالهٔ (f_n) در J به‌تابعی مانند f همگرای یکنواخت است . ولی چون f_nها پیوسته‌اند وهمگرایی (f_n) به f یکنواخت است، تابع f در J پیوسته است .

برای بررسی وجود مشتق تـابع f دریك نقطهٔ دلخواه J مـانند c ، قضیهٔ مقدار میانگین را درمورد تفـاضل f_m-f_n در فاصله‌ای بادوسر c و x به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم‌که نقطه‌ای مانند z (وابسته به m و n) وجود دارد به‌قسمی‌که

$$\{f_m(x)-f_n(x)\}-\{f_m(c)-f_n(c)\}=(x-c)\{f'_m(z)-f'_n(z)\}.$$

بنابراین، برای $c\neq x$ داریم

$$\left|\frac{f_m(x)-f_m(c)}{x-c}-\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right|\leqslant\|f'_m-f'_n\|_J.$$

اما دنبالهٔ (f'_n) همگرای یکنواخت است، پس برای $m,n\geqslant M(\varepsilon)$، طرف راست این رابطه از ε کـوچکتر است. لذا اگر نسبت به m حد بگیریم، ازلم ۸.۱۵ نتیجه می‌شود که برای $n\geqslant M(\varepsilon)$ داریم:

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right|\leqslant\varepsilon.$$

ولی چون $g(c)=\lim(f'_n(c))$، عددی مانند $N(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $n\geqslant N(\varepsilon)$، آنگاه $|f'_n(c)-g(c)|<\varepsilon$. اکنون $\sup\{M(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$ را K می‌نامیم. با توجه به‌وجود $f'_K(c)$، اگر $0<|x-c|<\delta_K(\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{f_K(x)-f_K(c)}{x-c}-f'_K(c)\right|<\varepsilon.$$

بنابراین، نتیجه می‌شود که اگر $0<|x-c|<\delta_K(\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-g(c)\right|<3\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که $f'(c)$ وجود دارد و برابر با $g(c)$ است. □

قضیهٔ تیلر

اگر $f'(x)$، مشتق f، در تمام نقاط یک مجموعهٔ D وجود داشته باشد، می‌توان وجود مشتق تابع f' را در یک نقطهٔ $c\in D$ بررسی کرد. درحالتی که f' در c دارای مشتق باشد، این مشتق را **مشتق دوم** تابع f درنقطهٔ c گوییم ومعمولاً آن‌را به $f''(c)$ ویا $f^{(2)}(c)$ نمایش می‌دهیم. به‌طریقی مشابه به مشتق سوم $f'''(c)=f^{(3)}(c)$، ... و مشتق nام، $f^{(n)}(c)$، را اگر وجود داشته باشند، تعریف می کنیم.

اکنون قضیهٔ مهم تیلر[1] را که نقش اساسی در بسیاری از بررسیهای ریاضی دارد و تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین است، مورد بحث قرار می‌دهیم.

۶.۲۸ قضیهٔ تیلر. فرض کنید n عددی طبیعی و f و $n-1$ مشتق آن، یعنی f' و f'' و... و $f^{(n-1)}$، در فاصلهٔ $J=[a, b]$ تعریف شده و پیوسته باشند، و $f^{(n)}$ در فاصلهٔ (a, b) وجود داشته باشد. اگر α و β به J متعلق باشند، آنگاه عددی مانند γ بین α و β وجود دارد به‌قسمی که

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(\alpha-\beta)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

---

۱. بروک تیلر Brook Taylor (۱۷۳۱-۱۶۸۵) یک ریاضی‌دان انگلیسی است. در سال ۱۷۱۵ او بسط سری نامتناهی را عرضه کرد ولی با توجه به‌افکار آن‌زمان همگرایی‌را بحث نکرد. جملهٔ باقیماندهٔ این بسط از لاگرانژ است.

برهان . عدد حقیقی P را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}P=f(\beta)-\left\{f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}\right\}$$

و تابع φ را که در t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(x)=f(\beta)-\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(\beta-x)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1}+\frac{P}{n!}(\beta-x)^n\right\} \quad (1.28)$$

در نظر می‌گیریم . واضح است که تابع φ در J پیوسته ودر فاصلهٔ (a, b) مشتق‌پذیر است. مسلم است که $\varphi(\beta)=0$ و با توجه به تعریف P نتیجه می گیریم که $\varphi(\alpha)=0$. بنابر قضیهٔ رول نقطه‌ای بین α و β مانند γ وجود دارد به طوری که $\varphi'(\gamma)=0$. از محاسبهٔ مشتق (با استفاده ازدستورهای معمول مشتق‌گیری مجموع وحاصلضرب دو تابع)، مجموع ادغامی زیر به‌دست می‌آید :

$$\varphi'(x)=-\left\{f'(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{1!}(\beta-x)+\cdots+(-1)\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(\beta-x)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1}-\frac{P}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1}\right\}=\frac{P-f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1}.$$

چون $\varphi'(\gamma)=0$، داریم $P=f^{(n)}(\gamma)$ وبدین‌ترتیب قضیه اثبات می‌شود. □

تذکر. جملهٔ باقیمانده

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n \quad (2.28)$$

معمولاً **صورت لاگرانژ باقیمانده** نامیده می‌شود. عبارات بسیار دیگری نیز برای باقیمانده وجود دارد. مادراینجا عبارتی راکه **به‌صورت کوشی** معروف‌است ذکر می‌کنیم. عددی مانند θ باشرط $0<\theta<1$ وجود دارد به‌قسمی که

$$R_n=(1-\theta)^{n-1}\frac{f^{(n)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n. \quad (3.28)$$

صورت کوشی باقیمانده را نیز می‌توان به‌همان‌طریق بالا به‌دست‌آورد:کافی است به‌جای طرف چپ معادلهٔ (۲۸ .۱) عبارت $(\beta-\alpha)Q/(n-1)!$ را قراردهیم و در عبارت $\varphi(x)$ به‌جای جملهٔ آخر آن $(\beta-x)Q/(n-1)!$ بگذاریم.تفصیل عملیات لازم را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم. (دربخش ۳۱، صورت دیگری از باقیمانده

را با استفاده از انتگرال به‌دست خواهیم آورد.)

تمرین

۲۸. الف. با استفاده از فرمول ۱.۲۸، نشان‌دهید که اگر $n=0,1,2,\ldots$، آنگاه هر ریشهٔ یکی از دو تابع بسل J_n و J_{n+1} در $(0, +\infty)$ بین‌دو ریشه تابع دیگر است.

۲۸. ب. نشان‌دهید که اگر $x>0$، آنگاه

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}\cdot$$

۲۸. پ. مقادیر تقریبی $\sqrt{1.2}$ و $\sqrt{2}$ را محاسبه کنید. دقت این‌مقادیر تقریبی را تعیین کنید.

۲۸.ت. برآوردی‌شبیه به‌تمرین ۲۸.ب برای $(1+x)^{1/3}$ درفاصلهٔ $[0, 7]$ بیابید. بااستفاده از آن مقادیر تقریبی $\sqrt[3]{1.5}$ و $\sqrt[3]{2}$ را پیدا کنید.

۲۸.ث. فرض کنید که $0<r<1$ و $x>-1$ — نشان‌دهید که $(1+x)^r\leqslant 1+rx$ و برابری برقرار است اگر وفقط اگر $x=0$.

۲۸. ج. ریشهٔ چندجمله‌ای p مانند x_0 را **ساده** (یا از **مرتبهٔ یك**) گوییم هرگاه $p'(x_0)\neq 0$، و از **مرتبهٔ** n گوییم هرگاه $p(x_0)=p'(x_0)=\ldots=p^{(n-1)}(x_0)=0$، ولی $p^{(n)}(x_0)\neq 0$.

اگر $a<b$ دوریشهٔ متوالی یك‌چندجمله‌ای باشد، آنگاه تعداد ریشه‌های مشتق آن در فاصلهٔ (a, b) (با به‌حساب‌آوردن مرتبهٔ هرریشه) فرد است.

۲۸. چ نشان‌دهید که اگر ریشه‌های یك چندجمله‌ای p تماماً حقیقی باشند، آنگاه ریشه‌های p' نیز تماماً حقیقی هستند. همچنین نشان‌دهید که اگر ریشه‌های p تماماً حقیقی وساده باشند، آنگاه ریشه‌های p' نیز تماماً حقیقی وساده هستند.

۲۸. ح. اگر $f(x)=(x^2-1)^n$ و تابع p مشتق nام f باشد. آنگاه p یك چندجمله‌ای درجه n است که ریشه‌هایش تماماً ساده هستند و در فاصلهٔ باز $(-1, 1)$ واقع‌اند.

۲۸.خ. صورت کوشی جملهٔ باقیماندهٔ R_n در قضیهٔ تیلر یعنی عبارت (۳.۲۸) را، به‌دست آورید.

۲۸. د. قضیهٔ تیلر ۶.۲۸ را می‌توان به‌کمك قضیهٔ مقدار میانگین کوشی اثبات کرد: بنویسید

$$R(x)=f(x)-\left[f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\cdots+\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha)\right]$$

ونشان‌دهید که $R(\alpha)=R'(\alpha)=\cdots=R^{(n-1)}(\alpha)=0$ و $R^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$. توجه داشته‌باشید که نقطه‌ای مانند γ_1 بین α و β وجود دارد به‌قسمی که

$$\frac{R(\beta)}{(\beta-\alpha)^n}=\frac{R(\beta)-R(\alpha)}{(\beta-\alpha)^n-0^n}=\frac{R'(\gamma_1)}{n(\gamma_1-\alpha)^{n-1}}.$$

با ادامهٔ این‌عمل نشان‌دهید که برای یك γ_n بین α و β داریم

$$R(\beta)=(\beta-\alpha)^n f^{(n)}(\gamma_n)/n!\,.$$

۲۸. ذ. اگر $f(x)=e^x$، نشان‌دهید که جملهٔ باقیمانده درقضیهٔ تیلر وقتی α و β ثابت هستند و $n\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

۲۸. ر. اگر $f(x)=\sin x$، نشان‌دهید که جملهٔ باقیمانده درقضیهٔ تیلر وقتی α و β ثابت هستند و $n\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

۲۸. ز. اگر $f(x)=(1+x)^m$ که درآن $m\in\mathbf{Q}$ و $|x|<1$، با استفاده از دستورهای مشتق‌گیری که درریاضیات عمومی دیده‌ایم وقضیهٔ تیلر عبارت

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{n-1}x^{n-1}+R_n,$$

به‌دست می‌آید، که درآن R_n، صورت لاگرانژ باقیمانده برابر است با

$$R_n=x^n f^{(n)}(\theta_n x)/n!$$

با شرط $1>\theta_n>0$. نشان‌دهید که اگر $1>x\geqslant 0$، آنگاه $\lim(R_n)=0$. نشان‌دهید که اگر $0>x>-1$ نمی‌توانیم ازاین راه ثابت‌کنیم که $\lim(R_n)=0$.

۲۸. ژ. درتمرین قبل، بااستفاده ازصورت کوشی باقیمانده نشان‌دهید که

$$R_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\,.\,2\cdots(n-1)}\;\frac{(1-\theta_n)^{n-1}x^n}{(1+\theta_n x)^{n-m}}$$

که درآن $1>\theta_n>0$. با فرض $|x|<1$، نشان‌دهید که

$$|(1-\theta_n)/(1+\theta_n x)|<1$$

وثابت‌کنید که $\lim(R_n)=0$. (راهنمایی: اگر $|x|<1$، آنگاه مجموعهٔ

$$\{(1+\theta x)^{m-1};\ 0\leqslant\theta\leqslant 1\}$$

کراندار است.)

۲۸. س. اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $f'(x)$ برای $x\in\mathbf{R}$ وجود داشته باشد، با این‌فرض که $f''(a)$ وجود دارد، نشان‌دهید که

$$f''(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^۲}$$

با ذکر مثالی نشان‌دهید که وجود این‌حد، دلیلی بروجود مشتق دوم تابع‌درنقطهٔ a نیست.

۲۸. ش. فرض کنید برای x در $[-۱,۱]$، $f_n(x)=|x|^{۱+۱/n}$. نشان دهید که f_n در $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر است و (f_n) به‌طور یکنواخت در $[-۱,۱]$ به‌تابع $f(x)=|x|$ همگراست.

پروژه

۲۸. α. در این پروژه تابع نمایی را از دیدگاه حساب دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(الف) فرض‌کنید که تابع E در $J=(a,b)$ به $\mathbf{R}$ درهرنقطهٔ J دارای مشتق باشد وبرای هر $x\in J$، $E'(x)=E(x)$. تحقیق‌کنیدکه در این صورت مشتقات تمام مراتب E در J وجود دارند وهمگی برابر با E هستند.

(ب) اگر $E(\alpha)=۰$ برای یك $\alpha\in J$، آنگاه با به‌کاربردن قضیهٔ تیلر ۲۸.۶ و تمرین ۱۴. ر نشان‌دهیدکه $E(x)=۰$ برای هر $x\in J$.

(پ) نشان‌دهیدکه حداکثر یك‌تابع E در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ وجود دارد به‌قسمی‌که

$$E'(x)=E(x)\qquad x\in\mathbf{R},\ E(۰)=۱.$$

(ت) ثابت کنیدکه اگر E در شرایط قسمت (پ) صدق‌کند، آنگاه این‌تابع در معادلهٔ تابعی

$$E(x+y)=E(x)\,E(y),\quad x,\ y\in\mathbf{R}$$

صدق می‌کند. (راهنمایی: اگر $f(x)=E(x+y)/E(y)$، آنگاه $f'(x)=f(x)$ و $f(۰)=۱$.)

(ث) فرض‌کنیم دنبالهٔ‌توابع (E_n) در $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف‌شده‌باشد:

$$E_۱(x)=۱+x,\qquad E_n(x)=E_{n-۱}(x)+x^n/n!\,.$$

فرض‌کنیم A یك‌عدد مثبت دلخواه باشد، اگر $|x|\leqslant A$ و $m\geqslant n>۲A$، آنگاه

$$|E_m(x)-E_n(x)|\leqslant\frac{A^{n+۱}}{(n+۱)!}\left[۱+\frac{A}{n}+\cdots+\left(\frac{A}{n}\right)^{m-n}\right]<\frac{۲A^{n+۱}}{(n+۱)!}\cdot$$

بنابراین دنبالهٔ (E_n) برای $|x|\leqslant A$ همگرای یکنواخت است.

(ج) اگر (E_n) دنبالهٔ توابع تعریف شده درقسمت (ث) باشد، آنگاه

$$E'_n(x)=E_{n-1}(x), \quad x\in\mathbf{R}\cdot$$

نشان‌دهیدکه دنبالهٔ (E_n) در $\mathbf{R}$ به‌تابعی مانند E که خواص تابع قسمت (پ) را دارد همگراست. بنابراین E تنها تابعی است‌که دارای این‌خواص است.

(چ) فرض‌کنیم E تابعی باشدکه درشرایط $E'=E$ و $E(\circ)=1$ صدق می‌کند. اگر e را عدد

$$e=E(1)$$

تعریف‌کنیم، آنگاه e بین $2\frac{2}{3}$ و $2\frac{3}{4}$ واقع است. (راهنمایی:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}<e<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}،$$

به‌طور دقیقتر می‌توان نشان‌دادکه

$$2/723<2+\frac{13}{18}<e<2+\frac{17}{24}<2/708).$$

۲۸. β. دراین پروژه می‌توانید از نتایج قسمت قبل استفاده‌کنید. فرض‌کنیم E نمایشگر تابع یکتای در $\mathbf{R}$ باشد به‌قسمی‌که

$$E'=E, \quad E(\circ)=1$$

و بنویسیم $e=E(1)$.

(الف) نشان دهید که E اکیداً صعودی ودارای برد $P=\{x\in\mathbf{R}:x>\circ\}$ است.

(ب) فرض‌کنیم L تابع وارون E باشد، بنابراین دامنهٔ L مجموعهٔ P و بردش تمام $\mathbf{R}$ است. ثابت‌کنیدکه L در P اکیداً صعودی است و $L(1)=\circ$ و $L(e)=1$.

(پ) نشان‌دهیدکه برای هر x و y در P داریم $L(xy)=L(x)+L(y)$.

(ت) اگر $\circ<x<y$، آنگاه

$$\frac{1}{y}(y-x)<L(y)-L(x)<\frac{1}{x}(y-x).$$

(راهنمایی: قضیهٔ مقدار میانگین را درمورد E به‌کاربرید.)

(ث) تابع L برای $x>\circ$ مشتق دارد و $L'(x)=1/x$.

(ج) عدد e درشرط زیر صدق می‌کند

$$e=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

(راهنمایی: $L'(1)$ را بااستفاده ازدنبالهٔ $((1+1/n))$ وپیوستگی E محاسبه‌کنید.)

۷.۲۸. دراین پروژه توابع سینوس وکسینوس را تعریف می‌کنیم.
(الف)فرض کنیم h درفاصلهٔ $J=(a,\ b)$، به $\mathbf{R}$ تعریف شده‌باشد ودر

$$h''(x)+h(x)=0$$

برای تمام xهای در J صدق کند. نشان دهید که مشتقات تمام مراتب h وجود دارند و ثابت کنید که اگر نقطه‌ای مانند α در J باشد به‌قسمی که $h(\alpha)=0$، $h'(\alpha)=0$، آنگاه $h(x)=0$ برای هر $x\in J$، (راهنمایی: از قضیهٔ تیلر ۶.۲۸ استفاده‌کنید.)

(ب) نشان‌دهید که حداکثر یك‌تابع مانند C در $\mathbf{R}$ وجود داردکه در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$C''+C=0,\ \ C(0)=1,\ \ C'(0)=0$$

وحداکثر یك‌تابع مانند S در $\mathbf{R}$ وجود داردکه درشرایط زیر صدق می‌کند:

$$S''+S=0,\quad S(0)=0,\quad S'(0)=1.$$

(پ) دنبالهٔ (C_n) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_1(x)=1-x^2/2,\quad C_n(x)=C_{n-1}(x)+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

فرض کنیم A یك‌عدد مثبت دلخواه باشد، اگر $|x|\leqslant A$ و $m\geqslant n>A$، آنگاه

$$|C_m(x)-C_n(x)|\leqslant\frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!}\left[1+\left(\frac{A}{2n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2n}\right]$$

$$<\left(\frac{4}{3}\right)\frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

بنابراین دنبالهٔ (C_n) در $|x|\leqslant A$ همگرای یکنواخت است. همچنین نشان‌دهید که $C''_n=-C_{n-1}$، $C_n(0)=1$ و $C'_n(0)=0$. ثابت کنید که C حد دنبالهٔ (C_n)، تابع یکتایی‌است که خواص‌ذکرشده درقسمت (ب) را داراست. (ازقضیهٔ ۵.۲۸ استفاده کنید.)

(ت) فرض کنیم (S_n) به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$S_1(x)=x\qquad S_n(x)=S_{n-1}(x)+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

نشان‌دهید که (S_n) در $|x|\leqslant A$ به‌تابع یکتای با خواص ذکر شده در قسمت (ب) همگرای یکنواخت است.

(ث) ثابت کنید که $S'=C$ و $C'=-S$.

(ج) اتحادفیثاغورس‌یعنی $S^{2}+C^{2}=1$ را ثابت کنید.(راهنمایی:مشتق $S^{2}+C^{2}$ را حساب کنید.)

۲۸. δ. این‌پروژه ادامهٔ بحث درمورد توابع سینوس وکسینوس است. بدین‌لحاظ از خواص ارائه‌شده درپروژهٔ قبلی‌آزادانه استفاده خواهیم کرد.

(الف) فرض کنید h تابعی در $\mathbf{R}$ باشد به‌قسمی‌که درمعادلهٔ زیر صدق کند:

$$h''+h=0 .$$

نشان‌دهید که ثابتهایی مانند α و β وجود دارند به قسمی که $h=\alpha C+\beta S$. (راهنمایی: $\alpha=h(0)$، $\beta=h'(0)$.)

(ب) تابع C زوج و S فرداست بدین‌مفهوم که به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$ ،

$$C(-x)=C(x)\ ,\quad S(-x)=-S(x).$$

(پ) نشان‌دهید که «دستورهای مجموع» :

$$C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y),$$

$$S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y),$$

برای تمام مقادیر x و y در $\mathbf{R}$ برقرار است. (راهنمایی: y را ثابت بگیرید وتـابع $h(x)=C(x+y)$ را تعریف کنید. نشان دهیدکه

$$h''+h=0\ ،\ h(0)=C(y)\ ،h'(0)=-S(y).)$$

(ت) نشان‌دهیدکه «دستورهای تضعیف»:

$$C(2x)=2[C(x)]^{2}-1=1-2[S(x)]^{2},$$

$$S(2x)=2S(x)C(x)$$

به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$ برقرار است.

(ث) ثابت‌کنیدکه C درنابرابری زیر صدق می‌کند:

$$C_{1}(x)=1-\frac{x^{2}}{2}\leqslant C(x)\leqslant 1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}=C_{2}(x).$$

بنابراین، γ ، کوچکترین ریشهٔ مثبت C ، بین‌ریشهٔ مثبت $2-x^{2}=0$ وکوچکترین‌ریشهٔ مثبت $x^{4}-12x^{2}+24=0$ واقع است. بااستفاده از آن ثابت‌کنیدکه

$$\sqrt{2}<\gamma<\sqrt{3}.$$

(ج) عدد π را کوچکترین ریشهٔ اکیداً مثبت S تعریف می‌کنیم . ثـابت‌کنیدکه

$\pi = ۲\gamma$ وبنابراین $۲\sqrt{۲} < \pi < ۲\sqrt{۳}$.

(چ) ثابت کنید که توابع C و S هردودوره‌ای و با دورهٔ ۲π می‌باشند، بدین‌مفهوم که برای تمـام xهـای در $\mathbf{R}$، $C(x+۲\pi)=C(x)$ و $S(x+۲\pi)=S(x)$. همچنین نشان‌دهید که به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$ داریم

$$S(x)=C\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = -C\left(x+\frac{\pi}{۲}\right),$$

$$C(x) = S\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)=S\left(x+\frac{\pi}{۲}\right).$$

۲۸. ε. باتوجه به‌روش‌کار در دو پروژهٔ قبلی، توابع کسینوس هیپربولیك وسینوس هیپربولیك را به‌ترتیب به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$c''=c, \quad c(۰)=۱, \quad c'(۰)=۰$$

$$s''=s, \quad c(۰)=۰, \quad s'(۰)=۱.$$

وجود ویکتایی این‌توابع را ثابت کنید ونشان‌دهید که

$$c^{۲}-s^{۲}=۱.$$

نتایج مشابه با قسمتهای (الف) تـا (ت) پروژهٔ ۲۸.δ را ثابت کنید ونشان‌دهید که، اگر تابع نمایی‌را به‌صورت E نمایش دهیم، آنگاه

$$c(x)=\frac{۱}{۲}\left(E(x)+E(-x)\right), \qquad s(x)=\frac{۱}{۲}\left(E(x)-E(-x)\right).$$

۲۸. ζ. تابع φ در فـاصلهٔ J از $\mathbf{R}$ بـه $\mathbf{R}$ را **محدب** (میانی) گوییم هرگاه به‌ازای هر x و y در J

$$\varphi\left(\frac{x+y}{۲}\right)\leqslant\frac{۱}{۲}(\varphi(x)+\varphi(y)).$$

(تعبیر هندسی آن بدین صورت است: نقطهٔ میانی هر وتر دلخواه از خم $y=\varphi(x)$، بالا ویا روی خم است.) دراین پروژه φ را تابع پیوستهٔ محدب درنظر می‌گیریم.

(الف) اگر $n=۲^{m}$ و $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_{n}$ متعلق به J باشند، آنگاه

$$\varphi\left(\frac{x_{۱}+x_{۲}+\cdots+x_{n}}{n}\right)\leqslant\frac{۱}{n}\left(\varphi(x_{۱})+\cdots+\varphi(x_{n})\right).$$

(ب) اگر $n<۲^{m}$ و $x_{۱},x_{۲},\ldots,x_{n}$ متعلق به J بـاشند، آنگاه x_j را برای $j=n+۱,\ldots,۲^{m}$ برابر با

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

انتخاب می‌کنیم. نشان‌دهید که نابرابری قسمت (الف) دراین حالت نیز برقرار است.

(پ) با توجه به‌این که φ پیوسته است، نشان‌دهید که اگر x و y متعلق به J باشند و $t\in I$، آنگاه $\varphi((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)\varphi(x)+t\varphi(y)$. (تعبیرهندسی آن بدین‌صورت است: تمام وتر بالا ویا روی خم است.)

(ت) با فرض آنکه φ دارای مشتق دوم در J باشد، نشان‌دهید که یك‌شرط لازم و کافی برای اینکه φ در J محدب باشد این است که برای $x\in J$، $\varphi''(x)\geqslant 0$. (راهنمایی: برای اثبات لزوم شرط، از تمرین ۲۸. س استفاده کنید. برای اثبات کفایت شرط از قضیهٔ تیلر وبسط درحول $\bar{x}=(x+y)/2$ استفاده کنید.)

(ث) اگر φ تابع پیوستهٔ محدب در J باشد واگر $x<y<z$ متعلق به J باشند، نشان‌دهید که

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\leqslant\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x}.$$

بنابراین، اگر $w<x<y<z$ متعلق به J باشند، آنگاه

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(w)}{x-w}\leqslant\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}.$$

(ج) ثابت کنید که یك‌تابع پیوستهٔ محدب φ در J درهرنقطه دارای مشتقات چپ‌و راست است. علاوه براین، زیرمجموعهٔ J که در نقاط آن φ' وجود ندارد، شمارش‌پذیر است.

بخش ۲۹ انتگرال ریمان- استیلتیس

دراین بخش انتگرال ریمان-استیلتیس[1] توابع کراندار را در یك فاصلهٔ فشرده از $\mathbf{R}$

---

۱. (گئورگ فریدریش) برنهارد ریمان (George Friedrich) Bernhard Riemann (۱۸۲۶-۱۸۶۶) فرزند یك کشیش فقیر روستایی بود ودر نزدیکی هانور به‌دنیا آمد. او درگوتینگن وبرلن درس خواند ودرگوتینگن تدریس کرد. یکی ازبنیانگذاران نظریهٔ توابع تحلیلی است، ودرهندسه، نظریهٔ اعداد وفیزیك نیز کارهای بنیادی انجام داده است.

توماس‌یان استیلتیس Thomas Joannes Stieltjes (۱۸۵۶-۱۸۹۴) منجم و ریاضی‌دان هلندی بود. او در پاریس شاگرد هرمیت بود و در دانشگاه تولوز صاحب‌کرسی استادی‌شد. معروفترین اثر اومقاله‌ای درکسرهای پیوسته (مسلسل)، مسئلهٔ گشتاور، وانتگرال استیلتیس می‌باشد که در سال آخر زندگی کوتاه او به چاپ رسید.

تعریف خواهیم کرد. چون فرض براین است که خواننده قبلاً حداقل به‌طور غیررسمی با انتگرال دردرس ریاضیات عمومی آشنا شده است، دراینجا به‌انگیزهٔ تعریف انتگرال نمی‌پردازیم.

خواننده‌ای که مطالعات خود را درآنالیز ریاضی ادامه می‌دهد مایل است که در حداقل‌زمان با انتگرال لبگ که کلیتر است، آشنا شود. با این حال، چون انتگرالهای ریمان و ریمان‌ـاستیلتیس در بسیاری از مواردکافی به‌نظر می‌رسند وخواننده بیشتر با آنها آشناست، در اینجا ترجیح می‌دهیم که این‌دو انتگرال را مورد بررسی قراردهیم و نظریهٔ پیشرفتهٔ لبگ را به‌درسهای بعدی موکول می‌کنیم.

در این‌بخش توابع حقیقی و کراندار در فاصله‌های بسته ازمجموعهٔ اعداد حقیقی را در نظر خواهیم گرفت وانتگرال چنین تابعی را نسبت به‌تابع دیگری از این نوع تعریف خواهیم‌کرد و خواص اساسی این انتگرالها را به‌دست خواهیم‌آورد. البته نوع انتگرال‌گیری که در اینجا بررسی می‌شود کمی ازآنچه در درسهای قبلی گفته شده است کلیتر است و همین امر موجب می‌شود که درکاربردها، بویژه درآمار بسیاز مفید باشد. با این‌حال روشهای نظری این‌انتگرال تنها کمی پیچیده‌تر از روشهایی است که دربحث دقیق نظری انتگرال معمولی ریمان به‌کار می‌رود. لذا ارزش دارد نظریهٔ این نوع انتگرال‌گیری تاآنجا که‌کاربردهای عادی‌آن ایجاب می‌کند، مورد بحث قرار گیرد.

فرض‌کنیم دو تابع حقیقی f و g درفاصلهٔ بستهٔ $J=[a, b]$ از مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده باشند. دراین بخش فرض بر‌کراندار بودن f و g در J است و این فرض را دیگر ذکر نخواهیم‌کرد. منظور از **افراز** J، یك‌دستهٔ با پایان از فواصلی‌است که نقاط درونی مشترك ندارند واجتماع آنها برابر با J است. معمولاً افراز P را با مجموعهٔ با پایانی ازاعداد حقیقی مانند $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ نمایش می‌دهیم به‌قسمی که

$$a=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n=b.$$

بدین‌ترتیب زیر فواصلی که این‌افراز P را تشکیل می‌دهند فواصل $[x_{k-1}, x_k]$ به‌ازای $k=1,2,\ldots,n$ هستند. نقاط x_k، $k=0,1,\ldots,n$ را **نقاط افرازی** P گوییم. با این‌حال، درعمل برای سهولت بدون هیچ گونه ابهامی می‌توان واژهٔ «افراز» را هم برای نمایش‌دادن دستهٔ زیر فواصل وهم برای مجموعهٔ نقاط دوسر این زیر فواصل به‌کار برد. بنابراین می‌نویسیم $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$.

هرگاه P و Q دو افراز J باشند، Q را **ظریفتر** از P گوییم اگر هرزیرفاصلهٔ Q در زیر فاصله‌ای از P واقع باشد. به‌عبارت دیگر، اگر هرنقطهٔ افرازی P نقطهٔ افرازی Q نیز باشد. به‌این دلیل وقتی‌که Q ظریفتر از P است، آن‌را به‌صورت نمادی $P\subseteq Q$ نمایش می‌دهیم.

۲۹.۱ تعریف. اگر P یك‌افراز J باشد، آنگاه منظور از **مجموع‌ریمان ـ استیلتیس** f نسبت به g نظیر به افراز $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$، عدد حقیقی $S(P;f, g)$ به‌صورت

زیر است:

$$S(P;\ f,\ g)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\{g(x_k)-g(x_{k-1})\} \qquad (1.29)$$

که درآن اعداد ξ_k انتخابی هستند ودرشرط زیر صدق می‌کنند:

$$x_{k-1}\leqslant \xi_k \leqslant x_k,\quad k=1,2,\dots,n.$$

توجه‌داریم‌که درحالت خاصی‌که تابع g به‌صورت $g(x)=x$ داده شده‌است، طرف راست معادلهٔ (۱.۲۹) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}). \qquad (2.29)$$

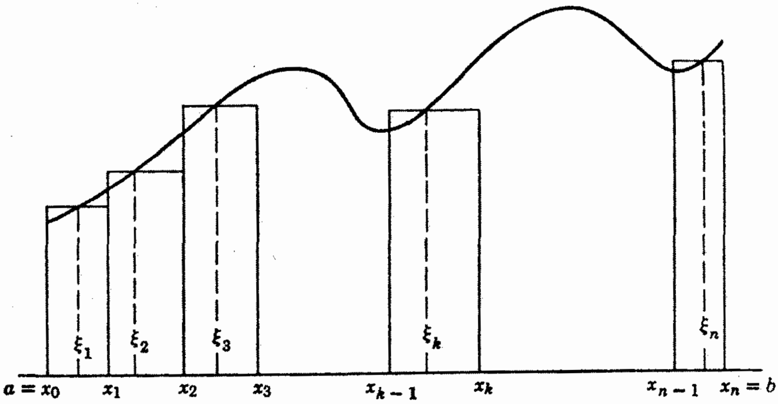
مجموع (۲.۲۹) را معمولاً **مجموع ریمان** f نظیر به‌افراز P می‌نامیم و می‌توان‌آن را به‌صورت مجموع مساحت مستطیلهایی باقاعدهٔ $[x_{k-1},\ x_k]$ وارتفاع $f(\xi_k)$ تعبیر کرد(ر. ك . شکل ۱.۲۹).بنابراین به‌نظر می‌رسدکه اگر افراز P خیلی ظریف باشد، مجموع ریمان (۲.۲۹) تقریب مناسبی از «سطح زیرمنحنی نمودار f» باشد. در حالت‌کلی برای یك تابع دلخواه g خواننده می‌تواند مجموع ریمان‌ـاستیلتیس (۱.۲۹) را مشابه با مجموع ریمان (۲.۲۹) تعبیر نماید، با این تفاوت که به جای x_k-x_{k-1}،طول زیرفاصلهٔ $[x_{k-1},\ x_k]$، اندازهٔ‌دیگری برای این‌زیرفاصله به‌صورت $g(x_k)-g(x_{k-1})$ در نظر بگیرد . بنابراین اگر مثلاً $g(x)$ نمایشگر «جرم» و یا «بار» در فاصلهٔ $[a,x]$ باشد، آنگاه $g(x_k)-g(x_{k-1})$، «جرم» و یا «بار» در زیر فاصلهٔ $[x_{k-1},\ x_k]$ را مشخص می‌کند . منظور این است‌که ما بتوانیم علاوه برطول فاصله، اندازه‌های دیگری ازمقادیر مربوط به‌فاصله را نیز درنظر بگیریم، لذا احتیاج به‌مجموع‌کلیتری به‌صورت (۱.۲۹) داریم.

باید توجه داشت‌که هردو مجموع (۱.۲۹) و (۲.۲۹) به انتخاب «نقاط بینی» یعنی اعداد ξ_k، $1\leqslant k\leqslant n$ بستگی دارند . لذا شاید به‌نظر برسد بهتر است نمادی به‌کاربریم‌که نمایشگر انتخاب این‌اعداد باشد.

با این‌حال، با ارائهٔ افرازی ظریفتر، همیشه می‌توان این نقاط بینی ξ_k را نقاط افرازی فرض‌کرد. در حقیقت، اگر ما افراز

$$Q=(x_0,\ \xi_1,\ x_1,\ \xi_2,\dots,\ \xi_n,\ x_n)$$

ومجموع $S(Q;\ f,\ g)$ را درنظر بگیریم، که درآن نقاط‌بینی متناوباً دو سر راست و چپ زیر فواصل باشند، آنگاه مجموع $S(Q;\ f,\ g)$ ومجموع در (۱.۲۹) یك مقدار دارند. بدین‌ترتیب می‌توان همواره فرض‌کرد که افراز فاصله‌را به‌تعدادزوجی از زیر فواصل تقسیم می‌کندکه نقاط بینی متناوباً نقاط انتهایی راست و چپ این‌زیر



شکل ۱۰۲۹ مجموع ریمان به‌صورت یک سطح

فواصل هستند. با این‌حال الزامی در «استاندارد» کردن نحوهٔ تقسیم‌بندی نیست، همچنین لزومی ندارد درنماد، نقاط بینی ظاهرشوند.

۲۰۲۹ تعریف. تابع f را نسبت به g در فاصلهٔ J **انتگرال‌پذیر** گوییم هرگاه عددی حقیقی مانند I وجودداشته‌باشد، به‌طوری‌که برای هرعدد $\varepsilon>0$ یک‌افراز J مانند P_ε باشد، به قسمی‌که برای هر افراز P ظریفتر از P_ε، هر مجموع ریمان-استیلتیس $S(P; f, g)$ نظیر به P درشرط زیر صدق‌کند:

$$|S(P; f, g)-I|<\varepsilon. \qquad (۳۰۲۹)$$

در این‌صورت عدد I یکتاست و آن‌را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$I=\int_a^b f\,dg=\int_a^b f(t)\,dg(t);$$

و آن‌را **انتگرال ریمان ـ استیلتیس** f نسبت به g در $[a, b]$ می‌گوییم. تابع f را **تابع زیر علامت انتگرال** و g را **انتگرال‌گیر** می‌نامیم. درحالت خاصی که $g(x)=x$، هرگاه f نسبت به g انتگرال‌پذیر باشد، تابع f را **انتگرال‌پذیر ریمان** گوییم.

قبل ازبحث در خواص انتگرال ریمان ـ استیلتیس، به ذکر چند مثال می‌پردازیم. برای ساده‌کردن محاسبات، برخی از این مثالها حالات نهایی انتخاب شده‌اند و می‌توان مثالهای متنوع‌تری از ترکیب این‌مثالها به‌دست‌آورد.

۳۰۲۹ چند مثال. (الف) قبلاً توجه‌داشته‌ایم که اگر $g(x)=x$، آنگاه انتگرال

به‌همان انتگرال معمولی ریمان در ریاضیات عمومی تبدیل می‌شود.

(ب) اگر g در فاصلهٔ $[a, b]$ ثابت باشد، آنگاه هر تابع دلخواه f نسبت به g انتگرال‌پذیر است ومقدار انتگرال برابر باصفر است.

(پ) فرض‌کنیم g در فاصلهٔ $J=[a, b]$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \qquad & x &= a, \\ &= 1, & a &< x \leqslant b. \end{aligned}$$

این تمرین را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم که نشان دهد تابع f نسبت به این تابع g انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر f در نقطهٔ a پیوسته باشد که در این صورت مقدار انتگرال برابر با $f(a)$ است.

(ت) فرض کنیم c یك نقطهٔ درونی فاصلهٔ $J=[a, b]$ باشد و g به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \qquad & a &\leqslant x \leqslant c, \\ &= 1, & c &< x \leqslant b \end{aligned}$$

به‌عنوان تمرین نشان‌دهیدکه تابع f نسبت به g انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر f در c **از طرف راست پیوسته** باشد (بدین‌مفهوم که: برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجودداشته‌باشد به‌قسمی که‌اگر $c\leqslant x<c+\delta(\varepsilon)$ و $x\in J$، آنگاه $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$.) اگر f در این شرط صدق کند،آنگاه مقدار انتگرال برابر با $f(c)$ است. (توجه کنیدکه تابع انتگرال‌گیر g ازطرف چپ در نقطهٔ c پیوسته است.)

(ث) اگر مثال قبل را تغییردهیم وتابع h را به‌صورت زیر تعریف‌کنیم:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \qquad & a &\leqslant x < c, \\ &= 1, & c &\leqslant x \leqslant b. \end{aligned}$$

آنگاه تابع h در نقطهٔ c ازطرف راست پیوسته است و تابع f نسبت به h انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر f درنقطهٔ c ازطرف چپ پیوسته باشد، که در این صورت مقدار انتگرال برابر با $f(c)$ است.

(ج) فرض‌کنیم $c_1<c_2$ دونقطهٔ درونی $J=[a, b]$ باشند وتابع g به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_1, \qquad & a &\leqslant x \leqslant c_1, \\ &= \alpha_2, & c_1 &< x \leqslant c_2, \\ &= \alpha_3, & c_2 &< x \leqslant b. \end{aligned}$$

اگر f درنقاط c_1 و c_2 پیوسته‌باشد، آنگاه تابع f نسبت به‌g انتگرال‌پذیراست وداریم:

$$\int_a^b f\,dg = (\alpha_2-\alpha_1)f(c_1)+(\alpha_3-\alpha_2)f(c_2).$$

اگر نقاط بیشتری انتخاب شود، می‌توان مجموعی از مقادیر موزون f را در نقاطی از J با وزنی برابر باجهش‌های g دراین‌نقاط به‌دست‌آورد.

(چ) فرض کنیم f تابع ناپیوستهٔ دیریکله (ر. ک. مثال ۵.۲۰ (چ)) به‌صورت زیر تعریف شده باشد.

$$f(x)=1, \qquad \text{گویا } x,$$

$$=0, \qquad \text{گنگ } x,$$

و $g(x)=x$. این تابع را در فاصلهٔ $\mathbf{I}=[0, 1]$ درنظر می‌گیریم. اگر افراز P از n زیرفاصلهٔ برابر تشکیل شده باشد و k نقطهٔ بینی در مجموع $S(P; f, g)$ را گویا و بقیهٔ نقاط بینی را گنگ انتخاب کنیم، نتیجه می‌گیریم که $S(P; f, g)=k/n$. درنتیجه f انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

(ح) فرض کنیم تابع f در $\mathbf{I}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد: $f(0)=1$، $f(x)=0$ برای xهای گنگ و $f(m/n)=1/n$، که در آن m و n اعداد طبیعی و نسبت به‌هم اول هستند. در مثال ۵.۲۰ (ح) دیدیم که تابع f درهر نقطهٔ گنگ پیوسته ودر هر نقطهٔ گویا ناپیوسته است. به‌عنوان تمرین نشان‌دهید که اگر $g(x)=x$ آنگاه f نسبت به g انتگرال‌پذیر است ومقدار انتگرال برابر با ۰ است.

۲۹.۴ شرط (محک) کوشی برای انتگرال‌پذیری. تابع f نسبت به g درفاصلهٔ $J=[a, b]$ انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگربه‌ازای هر $\varepsilon>0$ یک افراز J مانند Q_ε وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که اگر P و Q دوافراز ظریفتر از Q_ε و $S(P; f, g)$ و $S(Q; f, g)$ مجموعهای اختیاری ریمان-استیلتیس نظیر به P و Q باشد، آنگاه

$$|S(P; f, g)-S(Q; f, g)|<\varepsilon. \qquad (۴.۲۹)$$

برهان . هرگاه f انتگرال‌پذیر باشد، دراین‌صورت افرازی مانند P_ε وجود دارد به‌قسمی‌که اگر P و Q ظریفتر از P_ε باشند، آنگاه مجموعهای ریمان-استیلتیس نظیر در شرایط $|S(P; f, g)-I|<\varepsilon/2$ و $|S(Q; f, g)-I|<\varepsilon/2$ صدق می‌کنند. با استفاده ازنابرابری مثلثی، (۴.۲۹) به‌دست می‌آید .

بعکس، فرض کنید که شرط کوشی برقرار است. برای نشان‌دادن انتگرال‌پذیری f نسبت به g، احتیاج به‌مقدار انتگرال واستفاده ازتعریف ۲.۲۹ داریم. فرض کنیم Q_1 یک افراز J باشد به‌قسمی که اگر P و Q ظریفتر از Q_1 باشند ، آنگاه

$$|S(P; f, g)-S(Q; f, g|<1$$

به‌طریق استقرا Q_n را ظریفتر از Q_{n-1} به‌قسمی انتخاب‌می‌کنیم که اگر P و Q ظریفتر از Q_n باشند، آنگاه

$$|S(P; f, g)-S(Q; f, g)|<\frac{1}{n}. \qquad (۵.۲۹)$$

اکنون دنبالهٔ $(S(Q_n; f, g))$ ازاعدادحقیقی راکه بدین‌ترتیب حاصل می‌شود در نظر می‌گیریم. چون Q_n برای $n\geqslant m$ ظریفتر از Q_m است، این دنباله از مجموعها بدون توجه به‌نحوهٔ انتخاب نقاط بینی آنها، یك‌دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی است. لذا طبق قضیهٔ ۱۶. ۱۰، این‌دنباله به‌یك عدد حقیقی مانند L همگراست. بنابراین اگر $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند N وجود دارد به‌قسمی که $2/N<\varepsilon$ و

$$|S(Q_N; f, g)-L|<\varepsilon/2.$$

اگر افراز P ظریفتر از Q_N باشد، آنگاه باتوجه به‌ساختمان Q_N داریم

$$|S(P; f, g)-S(Q_N; f, g)|<1/N<\varepsilon/4.$$

بنابراین، برای هر افراز P ظریفتر از Q_N و هر مجموع ریمان-استیلتیس نظیرآن داریم:

$$|S(P; f, g)-L|<\varepsilon, \qquad (۶.۲۹)$$

که نشان‌دهندهٔ انتگرال‌پذیری f نسبت به g در J است ومقدار این انتگرال برابر با L می‌باشد. □

برخی از خواص انتگرال

خاصیتی که در زیرمی‌آید موسوم به‌خاصیت **دوخطی** انتگرال ریمان-استیلتیس است.

۲۹. ۵ قضیه. (الف) اگر f_1 و f_2 نسبت به g در J انتگرال‌پذیر و α و β اعدادی حقیقی باشند، آنگاه $\alpha f_1+\beta f_2$ نسبت به g در J انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_a^b(\alpha f_1+\beta f_2)dg=\alpha\int_a^b f_1dg+\beta\int_a^b f_2dg. \qquad (۷.۲۹)$$

(ب) اگر f نسبت به g_1 و g_2 در J انتگرال‌پذیر و α و β اعدادی حقیقی باشند، آنگاه f نسبت به $g=\alpha g_1+\beta g_2$ در J انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_a^b f\,dg=\alpha\int_a^b f\,dg_1+\beta\int_a^b f\,dg_2. \qquad (۸.۲۹)$$

برهان. (الف) فرض کنیم $\varepsilon>0$ و $P_1=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ و

دو افراز فاصلهٔ $J=[a, b]$ باشند به‌قسمی که اگر Q از هر $P_{۲}=(y_{۰}, y_{۱}, \dots, y_m)$ دو افراز $P_{۱}$ و $P_{۲}$ ظریفتر باشد، آنگاه برای مجموعهای دلخواه ریمان-استیلتیس نظیر داشته باشیم

$$|I_{۱}-S(Q; f_{۱}, g)|<\varepsilon, \qquad |I_{۲}-S(Q; f_{۲}, g)|<\varepsilon.$$

حال فرض کنیم P_ε یك افراز J باشد ظریفتر از هردو افراز $P_{۱}$ و $P_{۲}$ (مثلاً اجتماع دوافراز $P_{۱}$ و $P_{۲}$ را می‌توان P_ε گرفت.) اگر Q یك‌افراز J باشد ظریفتر از P_ε، آنگاه هردو رابطهٔ فوق برای این‌افراز برقرار است. حال اگر از نقاط بینی واحدی استفاده کنیم، داریم

$$S(Q; \alpha f_{۱}+\beta f_{۲}, g)=\alpha S(Q; f_{۱}, g)+\beta S(Q; f_{۲}, g).$$

از رابطهٔ فوق ونامساویهای قبلی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}|\alpha I_{۱}+\beta I_{۲}-S(Q; \alpha f_{۱}+\beta f_{۲}, g)| &= |\alpha\{I_{۱}-S(Q; f_{۱}, g)\}\\ &+\beta\{I_{۲}-S(Q; f_{۲}, g)\}|\leqslant(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon.\end{aligned}$$

بدین‌ترتیب اثبات می‌شود که $\alpha I_{۱}+\beta I_{۲}$ مقدار انتگرال $\alpha f_{۱}+\beta f_{۲}$ نسبت به g است. بنابراین قسمت (الف) ثابت شد. قسمت (ب) به‌طریقی مشابه اثبات می‌شود و اثبات آن به‌عهدهٔ خواننده واگذار شده است. □

انتگرال ریمان-استیلتیس خاصیت جمع‌پذیری دیگری دارد و آن نسبت به‌فاصله‌ای‌است که انتگرال درآن گرفته می‌شود. برای به‌دست‌آوردن قضیهٔ بعدی است که ما نوع حدگیری راکه در تعریف ۲.۲۹ معرفی شده است، به‌کاربردیم. یك‌نوع حدگیری که موجب محدودیت بیشتری می‌شود، چنین تعریف می‌شود که بخواهیم نامساوی (۳.۲۹) برای هرمجموع ریمان-استیلتیس نظیر به افراز

$$P=(x_{۰}, x_{۱}, \dots, x_n)$$

که در

$$||P||=\sup\{x_{۱}-x_{۰}, x_{۲}-x_{۱}, \dots, x_n-x_{n-۱}\}<\delta(\varepsilon)$$

صدق می‌کند، برقرار باشد. این‌نوع حدگیری معمولاً درتعریف انتگرال ریمان به‌کار می‌رود وگاهی برای تعریف انتگرال ریمان-استیلتیس نیز از آن استفاده شده است. با این‌حال مؤلفین بسیاری تعریفی را که ما در اینجا ارائه‌کردیم ومنسوب به‌پولارد است به‌کاربرده‌اند، زیرا تا حدی ردهٔ توابع انتگرال‌پذیر را توسعه می‌دهد و از آن قضیهٔ بعدی بدون هیچ‌قید و شرطی، نتیجه می‌شود. (ر. ك. تمرین‌های ۲۹.ش تا ض.)

۲۹. ۶ قضیه. (الف) فرض کنید که $a\leqslant c\leqslant b$ و f نسبت به g در زیر فواصل $[a, c]$ و $[c, b]$ انتگرال‌پذیر باشد. آنگاه f نسبت به g درفاصلهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dg=\int_a^c f\,dg+\int_c^b f\,dg. \tag{۹.۲۹}$$

(ب) فرض‌کنیم f نسبت به g در فاصلهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد و c در شرط $a\leqslant c\leqslant b$ صدق کند. آنگاه f نسبت به g در زیر فواصل $[a, c]$ و $[c, b]$ انتگرال‌پذیر است و دستور (۹.۲۹) بر قرار است.

برهان. (الف)هر گاه $\varepsilon>0$، فرض کنیم P'_ε یك‌افراز $[a, c]$ باشد به‌قسمی که وقتی P' از P'_ε ظریفتر است،آنگاه نابرابری(۳.۲۹) برای هرمجموع ریمان-استیلتیس نظیر برقرار باشد. فرض‌کنیم P''_ε افراز نظیر $[c, b]$ باشد. اگر افراز $[a, b]$ راکه از نقاط افرازی P'_ε و P''_ε، تشکیل شده است، P_ε بنامیم، واگر P افرازی ظریفتر از P_ε باشد، آنگاه

$$S(P; f, g)=S(P'; f, g)+S(P''; f, g),$$

که در آن P' و P'' به‌ترتیب نمایشگر افرازهای $[a, c]$ و $[c, b]$ هستندکه از P به‌وجودآمده‌اند و همچنین درآن ازنقاط بینی متناظر استفاده شده است. بنابراین داریم

$$\left|\int_a^c f\,dg+\int_c^b f\,dg-S(P; f, g)\right|$$
$$\leqslant\left|\int_a^c f\,dg-S(P'; f, g)\right|+\left|\int_c^b f\,dg-S(P''; f, g)\right|<2\varepsilon.$$

لذا نتیجه می گیریم که تابع f نسبت به g در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرالش برابر است با

$$\int_a^c f\,dg+\int_c^b f\,dg.$$

(ب) برای اثبات انتگرال‌پذیری f در $[a, c]$ از شرط کوشی ۲۹. ۴ استفاده می‌کنیم. چون f در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است، برای هر $\varepsilon>0$ یك‌افراز $[a, b]$ مانند Q_ε وجوددارد به‌قسمی که اگر P و Q ظریفتر از Q_ε باشند،آنگاه رابطهٔ (۴.۲۹) برای هر مجموع ریمان-استیلتیس نظیر برقرار است. واضح است که می‌توان نقطهٔ c را متعلق به Q_ε فرض‌کرد. حال افراز $[a, c]$ راکه از نقاط Q_ε متعلق به‌فاصله $[a, c]$ تشکیل شده‌است، Q'_ε می‌نامیم. فرض‌کنید P' و Q' دو افراز $[a, c]$ واز $Q_\varepsilon{}'$ ظریفتر

باشندواین دوافراز را با افزودن تمام‌نقاطی از Q_ε که متعلق به $[c, b]$ هستند به‌دو افراز $[a, b]$ مانند P و Q گسترش‌دهید. حال چون P و Q ظریفتر از Q_ε می‌باشند، آنگاه رابطهٔ (۴.۲۹) برقرار است. اما با توجه به‌انطباق P و Q در $[c, b]$، اگر از نقاط بینی واحد استفاده شود، آنگاه واضح است که

$$|S(P'; f, g)-S(Q'; f, g)|=|S(P; f, g)-S(Q; f, g)|<\varepsilon.$$

بنابراین، شرط انتگرال‌پذیری کوشی برای تابع f نسبت به‌تابع g در زیر فاصلهٔ $[a, c]$ برقرار است واستدلال مشابهی را می‌توان در مورد فاصلهٔ $[c, b]$ به‌کاربرد. حال با توجه به‌انتگرال‌پذیری f در فواصل مذکور وقسمت (الف)، دستور (۲۹. ۹) به‌دست می‌آید. □

تاکنون ما نقش تابع زیرعلامت انتگرال f و تابع انتگرال‌گیر g را عوض نکرده‌ایم وحتی ممکن است به فکر خواننده نیز امکان این‌امر خطور نکرده باشد. اگرچه رابطهٔ بعدی دقیقاً همان «دستور انتگرال‌گیری جزء به‌جزء» ریاضیات عمومی نیست، اما به‌علت شباهت با آن، معمولاً به‌همان نام خوانده می‌شود.

۰۷.۲۹ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء. تابع f نسبت به g در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر g نسبت به f در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد. در این‌صورت

$$\int_a^b f\,dg+\int_a^b g\,df=f(b)g(b)-f(a)g(a). \qquad (۱۰ .۲۹)$$

برهان . فرض‌کنیم تابع f نسبت به g انتگرال‌پذیر باشد. بنابراین برای هر $\varepsilon>0$، یك‌افراز $[a, b]$ مانند P_ε وجود دارد به‌قسمی‌که اگر Q از P_ε ظریفتر باشد، هرمجموع ریمان-استیلتیس نظیر در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\left|S(Q; f, g)-\int_a^b f\,dg\right|<\varepsilon. \qquad (۱۱.۲۹)$$

اینك فرض‌کنیم P افرازی ظریفتر از P_ε باشد، و یك مجموع ریمان-استیلتیس نظیر به‌آن یعنی $S(P; g, f)$ به صورت

$$S(P; g, f)=\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\{f(x_k)-f(x_{k-1})\},$$

داده‌شده‌باشد، که درآن $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$. اکنون $Q=(y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$ را افرازی از $[a, b]$ می‌گیریم که با به‌کاربردن نقاط ξ_k ونقاط x_k به‌عنوان نقاط افرازی به‌دست آمده‌است، بنابراین $y_{2k}=x_k$ و $y_{2k-1}=\xi_k$. باافزایش وکاهش جملات $f(y_{2k})g(y_{2k})$،

n، $k=0,1,\ldots,n$، به $S(P; g, f)$ وتنظیم مجدد نتیجه می‌گیریم

$$S(P; g, f)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)\{g(y_k)-g(y_{k-1})\},$$

که درآن نقاط بینی η_k ، نقاط x_j انتخاب شده‌اند. بنا براین

$$S(P; g, f)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-S(Q; f, g),$$

و درآن افراز $Q=(y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$ از P_εظریفتر است. با توجه‌به‌فرمول (۱۱.۲۹) داریم

$$\left|S(P; g, f)-\left\{f(b)\, g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f\, dg\right\}\right|<\varepsilon$$

به‌شرط آنکه P ظریفتر از P_ε باشد. این‌نشان می‌دهد‌که تابع g نسبت به f در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است وفرمول (۱۰.۲۹) برقرار می‌باشد.□

شکل دیگر انتگرال

وقتی کـه تـابـع g مشتق پیوسته داشته بـاشد، انتگرال ریمـان‌ـاستیلتیس را می‌توان به‌انتگرال ریمـان تبدیل کرد و اغلب ایـن تبدیل مفید است. اکنون به‌بیـان این تبدیل می‌پردازیم.

۸.۲۹ قضیه. اگـر g' مشتق g در $J_x=[a, b]$ وجود داشته و پیوسته باشد و f نسبت به g انتگرال‌پذیر باشد،آنگاه حاصلضرب fg' انتگرال‌پذیر ریمان است و

$$\int_a^b f\, dg=\int_a^b fg'. \qquad (۱۲.۲۹)$$

برهان. از فرض قضیه نتیجه می‌شود‌که تابع g' در J پیوستهٔ یکنواخت است. اگر $\varepsilon>0$، افراز J، $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ را به‌قسمی می‌گیریم‌که وقتی ξ_k و ζ_k متعلق به $[x_{k-1}, x_k]$ هستند، $|g'(\zeta_k)-g'(\xi_k)|<\varepsilon$. حال تفاضل مجموع ریمان‌ـاستیلتیس $S(P; f, g)$ ومجمـوع ریمـان $S(P; fg')$ رابـا استفاده از یك‌نقـاط‌بینـی ξ_k در نظر می‌گیریم. بدین‌ترتیب مجموعی ازجملاتی به‌صورت

$$f(\xi_k)\{g(x_k)-g(x_{k-1})\}-f(\xi_k)g'(\xi_k)\{x_k-x_{k-1}\}$$

داریم. اگر قضیه مقدار میانگین ۶.۲۷ را برای g به‌کار بریم، این تفاضل را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(\xi_k)\{g'(\zeta_k)-g'(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1}),$$

که در آن ζ_k نقطه‌ای متعلق به فاصلهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ است. اما چون قدرمطلق این جمله از $\varepsilon\|f\|(x_k-x_{k-1})$ کوچکتر است، نتیجه می‌گیریم که

$$|S(P;\ f,\ g)-S(P;\ fg')|\leqslant\varepsilon\|f\|(b-a),$$

به‌شرط آنکه افراز P به‌اندازهٔ کافی ظریف باشد. ازاین‌که انتگرال طرف چپ (۱۲.۲۹) وجود دارد و برابر با حد مجموعهای ریمان-استیلتیس $S(P;f,g)$ است، نتیجه می‌گیریم که انتگرال طرف راست (۱۲.۲۹) نیز وجوددارد و برابری بین این‌دو برقرار است. □

قضیهٔ ۱۳.۳۰ تعمیمی ازاین قضیه است.

۹.۲۹ چند مثال. (الف) از قضایایی که در بخش ۳۰ ثابت خواهد شد، نتیجه می‌شود که تابع $f(x)=x$ نسبت به‌تابع $g(x)=x^۲$ درفاصلهٔ $J=[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر است، باقبول این‌مطلب قضیهٔ ۸.۲۹ نشان می‌دهد که

$$\int_۰^۱ x\,d(x^۲)=\int_۰^۱ x\cdot ۲x dx=\frac{۲}{۳}x^۳\Big|_۰^۱=\frac{۲}{۳}.$$

(در اینجا از نتایج ریاضیات عمومی که در بخش ۳۰ نیز ثابت خواهد شد، استفاده کرده‌ایم)

(ب) اگر ما قضیهٔ ۷.۲۹ مربوط به‌انتگرال‌گیری جزء به‌جزء را در مورد (الف) به‌کار بریم به‌دست می‌آید

$$\int_۰^۱ x\,d(x^۲)=x^۳\Big|_۰^۱-\int_۰^۱ x^۲dx=۱-\frac{۱}{۳}x\Big|_۰^۱=\frac{۲}{۳}.$$

(پ) از قضایایی که دربخش ۳۰ ثابت خواهد شد. نتیجه می‌شود که تابع

$$f(x)=\sin x$$

نسبت به‌تابع f درفاصلهٔ $J=[۰ , \pi/۲]$ انتگرال‌پذیر است. بااین فرض داریم

$$\int_۰^{\pi/۲}\sin x d(\sin x)=\int_۰^{\pi/۲}\sin x\cos x\,dx=\frac{۱}{۲}(\sin x)^۲\Big|_۰^{\pi/۲}=\frac{۱}{۲}.$$

(ت) اگر قضیهٔ ۷.۲۹ انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء را درمورد قسمت (پ) به‌کاربریم داریم

$$\int_{\circ}^{\pi/۲} \sin x d(\sin x) = (\sin x)^{۲}\Big|_{\circ}^{\pi/۲} - \int_{\circ}^{\pi/۲} \sin x d(\sin x),$$

ونتیجه می‌شود که

$$\int_{\circ}^{\pi/۲} \sin x d(\sin x) = \frac{۱}{۲}(\sin x)^{۲}\Big|_{\circ}^{\pi/۲} = \frac{۱}{۲}\,.$$

(ث) اکنون **تابع بزرگترین مقدار صحیح** از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و آنرا به‌صورت نمادی [۰] نمایش می‌دهیم: برای هر $x \in \mathbf{R}$، $[x]$ نمایش بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر از x ویا برابر با x است. در نتیجه

$$[\pi] = ۳\text{،}\ [e] = ۲ \text{ و } [-۲٫۵] = -۳\,.$$

لازم است خواننده نمایش منحنی این‌تابع را رسم کند وتوجه‌کندکه تابع ازطرف‌راست پیوسته و دارای جهشی برابر با یك در اعداد صحیح است. ازاین مطلب نتیجه می‌شود که اگر تابع f درفاصله $[۰,۵]$ پیوسته باشد، f نسبت به $g(x)=[x]$ در فاصلهٔ $[۰, ۵]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_{\circ}^{۵} f(x)d([x]) = \sum_{j=۱}^{۵} f(j).$$

(ج) از قضایای بخش ۳۰ نتیجه می‌شودکه تابع $f(x)=x^{۲}$ نسبت به‌هردو تابع $g_{۱}(x)=x$ و $g_{۲}(x)=[x]$ در $[۰, ۵]$ انتگرال‌پذیر است. پس این تابع نسبت به $g(x)=x+[x]$ انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_{\circ}^{۵} x^{۲} d(x+[x]) = \int_{\circ}^{۵} x^{۲}dx + \int_{\circ}^{۵} x^{۲}d([x])$$

$$= \frac{۱}{۳}۵^{۳} + ۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + ۵^{۲}.$$

تمرین

۲۹. الف. اگر f در $[a, b]$ ثابت باشد، آنگاه f نسبت به هر تابع g انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dg = f(a)\{g(b)-g(a)\}.$$

۲۹. ب. اگر g تابع مثال ۳.۲۹ (پ) باشد، نشان‌دهید که f نسبت به g انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر f درنقطهٔ a پیوسته باشد.

۲۹. پ. فرض‌کنید g در فاصلهٔ $\mathbf{I}=[0, 1]$ با $g(x)=0$ برای $0\leqslant x\leqslant 1/2$ وبا $g(x)=1$ برای $1/2<x\leqslant 1$ تعریف شده‌باشد. نشان‌دهید که f نسبت به g در $\mathbf{I}$ انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر این تابع از طرف راست در نقطهٔ $1/2$ پیوسته باشد، دراین‌صورت مقدار انتگرال برابر با $f(1/2)$ است.

۲۹. ت. نشان‌دهید که تابع f درمثال ۳.۲۹ (ح) در $\mathbf{I}$ انتگرال‌پذیر ریمان است ومقدار انتگرال‌آن برابر باصفر است.

۲۹.ث. اگر تابع f در $[a, b]$ نسبت به f انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_a^b f\,df = \frac{1}{2}\{(f(b))^2-(f(a))^2\}.$$

(الف) رابطهٔ فوق را با بررسی دو مجموع ریمان-استیلتیس از یك افراز

$$P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

که باانتخاب $\xi_k=x_{k-1}$ و $\xi_k=x_k$ به‌دست می‌آیند، ثابت‌کنید.

(ب) رابطهٔ فوق را بااستفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء ۷.۲۹ ثابت‌کنید.

۲۹. ج. مستقیماً نشان‌دهید که اگر f تابع بزرگترین مقدار صحیح $f(x)=[x]$ باشد که در مثال ۹.۲۹ (ث) تعریف شده است، آنگاه f نسبت به f در فاصلهٔ $[0, 2]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۲۹. چ. نشان‌دهید که اگر f درفاصلهٔ $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه

$$\int_0^1 f = \lim\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

۲۹. ح. نشان‌دهید که اگر g در $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر نباشد، آنگاه دنباله میانگینهای

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

می‌تواند همگرا ویا واگرا باشد.

۲۹. خ. نشان‌دهید که تابع h که در $\mathbf{I}$ وقتی x گویاست با $h(x)=x$ و وقتی x گنگ است با $h(x)=0$ تعریف شده است، در $\mathbf{I}$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

۲۹. د. فرض کنید که تابع f در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. نشان‌دهید که اگر f_1 تابعی از $[a, b]$ در $\mathbf{R}$ باشد به‌قسمی که بجز در تعدادی با پایان از نقاط $[a, b]$، $f_1(x) = f(x)$، آنگاه f_1 انتگرال‌پذیر ریمان است و

$$\int_a^b f_1 = \int_a^b f.$$

(بنابراین می‌توان مقدار یک‌تابع انتگرال‌پذیر را درتعدادی با پایان ازنقاط تغییر داد و یا مشخص نکرد.)

۲۹.ذ. مثالی بیاورید که نشان‌دهد نتیجهٔ تمرین قبل اگر تعداد نقاط‌استثنائی بی‌پایان باشد ممکن است درست نباشد.

۲۹.ر. فرض کنید $c \in (a,b)$ وتابع k در $[a, b]$ به‌صورت $k(c) = 1$ و $k(x) = 0$ برای $x \in [a, b]$ با شرط $x \neq c$ تعریف شده‌باشد؛ هرگاه تابع $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ در نقطهٔ c پیوسته باشد، مستقیماً نشان‌دهید که f نسبت به k انتگرال‌پذیر است و k نسبت به f انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_a^b f\,dk = \int_a^b k\,df = 0\,.$$

۲۹. ز. فرض کنید f نسبت به g در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد. اگر

$$g_1 : [a, b] \to \mathbf{R}$$

به‌قسمی باشد که بجز درتعداد با پایانی از نقاط (a, b) که درآن نقاط f پیوسته است، $g_1(x) = g(x)$، آنگاه نشان‌دهید که f نسبت به g_1 انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dg_1 = \int_a^b f\,dg.$$

۲۹. ژ. فرض کنید که g در $[a, b]$ پیوسته است، همچنین فرض کنید که تابع $x \to g'(x)$ در $[a, b] \setminus \{c\}$ وجود دارد وپیوسته است، وحدهای یک‌طرفه

$$g'(c^-) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} g'(x)\,, \qquad g'(c^+) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} g'(x)$$

وجود دارند. اگر f نسبت به g در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه fg' را می‌توان در نقطهٔ c چنان تعریف کرد که در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg'.$$

(راهنمایی: تمرین ۲۷.ژ را درنظر بگیرید.)

۲۹. س. هرگاه f در $[-۵, ۵]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، نشان‌دهید که f نسبت به $g(x)=|x|$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int_{-۵}^{۵} f\,dg=\int_{۰}^{۵} f-\int_{-۵}^{۰} f.$$

۲۹. ش. اگر $P=(x_۰, x_۱, \ldots, x_n)$ یک‌افراز $J=[a, b]$ باشد، $\|P\|$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|P\|=\sup\{x_j-x_{j-۱} : j=۱, ۲,\ldots,n\};$$

$\|P\|$ را نرم افراز P می‌نامیم. تابع f را نسبت به g در J، **(*)ـ انتگرال‌پذیر** گوییم اگر عددی مانند A با خاصیت زیر وجود داشته باشد: برای هر $\varepsilon>۰$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>۰$ وجوددارد به‌قسمی که اگر $\|P\|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $|S(P;f,g)-A|<\varepsilon$ برای مجموع ریمان‌ـاستیلتیس نظیر به افراز P برقرار باشد. در این صورت عدد A را **(*) ـ انتگرال** f نسبت به g در J می‌گویند. نشان‌دهید که اگر f نسبت به g در J(*)ـ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f نسبت به g(به‌مفهوم تعریف ۲.۲۹) انتگرال‌پذیر است‌ومقدار این‌دو انتگرال باهم برابرند.

۲۹. ص. g تابعی است که در تمرین ۲۹. پ تعریف شده است، نشان‌دهید که یک تابع کراندار f نسبت به g به مفهوم تمرین قبل، (*) ـ انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر f در ۱/۲ پیوسته‌باشد ومقدار(*) ـ انتگرال‌آن $f(۱/۲)$است. اگر h به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$h(x)=۰, \qquad ۰\leqslant x<\frac{۱}{۲},$$

$$=۱, \qquad \frac{۱}{۲}\leqslant x\leqslant ۱,$$

آنگاه تابع h نسبت به g در $[۰, ۱/۲]$ و در $[۱/۲, ۱]$ (*) ـ انتگرال‌پذیر است. اما در $[۰, ۱]$ نسبت به g (*) ـ انتگرال‌پذیر نیست. بنابراین قضیهٔ ۶.۲۹ (الف) در مورد (*) ـ انتگرال، ممکن است درست نباشد.

۲۹. ض. فرض کنید برای $x\in J$، $g(x)=x$. نشان‌دهید که برای این‌انتگرال‌گیر، یک‌تابع f به‌مفهوم تعریف ۲۹. ۲ انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر این تابع، به‌مفهوم تمرین ۲۹. ش، * ـ انتگرال‌پذیر باشد.

۲۹. ط. فرض کنید f در J انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $f(x)\geqslant ۰$ برای $x\in J$. اگر f دریک نقطهٔ $c\in J$ پیوسته باشد و $f(c)>۰$، آنگاه

$$\int_a^b f>۰.$$

۲۹. ظ. فرض کنید f در J انتگرال‌پذیر ریمان باشد وفرض‌کنید برای $x\in J$،

$f(x)>0$. نشان دهید که

$$\int_a^b f>0.$$

(راهنمایی: به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، فرض کنید مجموعهٔ H_n بستار مجموعهٔ تمـام نقاط $x\in J$ به‌قسمی که $f(x)>1/n$ باشد و آنگاه تمرین ۱۱.ژ را به‌کار برید.)

پروژه

۲۹.α. طرحی که درزیر می‌آید، گاهی به‌عنوان راهی برای ارائهٔ انتگرال ریمان-استیلتیس در حالتی که انتگرال‌گیر g یکنوای صعودی در J است، به‌کار می‌رود. [این روش دارای این برتری است که براساس انتگرالهای بالا و پایین که همیشه برای تابع کراندار f وجود دارد تعریف شده است، ولی دارای این نقص است که به‌محدودیت g می‌افزاید به‌نحوی که نوعی تقارن در انتگـرال ریمان-استیلتیس راکه قضیهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء ۷.۲۹ نشان می‌دهد، از بین می‌برد.] $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ را یک افراز $J=[a, b]$ و f را در J کراندار می‌گیریم و زیرینه و زبرینهٔ مجموعهٔ

$$\{f(x): x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j\}$$

را بترتیب به m_j و M_j نمایش می‌دهیم. **مجموعهای پایین و بالای** f نسبت به g مربوط به‌افراز P را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$L(P;f,g)=\sum_{j=1}^{n} m_j\{g(x_j)-g(x_{j-1})\},$$

$$U(P;f,g)=\sum_{j=1}^{n} M_j\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}.$$

(الف) اگر $S(P;f,g)$ یک مجموع ریمان-استیلتیس دلخواه مربوط به P باشد، آنگاه

$$L(P;f,g)\leqslant S(P;f,g)\leqslant U(P;f,g).$$

(ب) اگر $\varepsilon>0$، آنگاه یک مجموع ریمان-استیلتیس $S_1(P;f,g)$ مربوط بـه P وجود دارد به‌قسمی که

$$S_1(P;f,g)\leqslant L(P;f,g)+\varepsilon,$$

وهمچنین یک مجموع ریمان-استیلتیس $S_2(P;f,g)$ نظیر به P وجود دارد به‌قسمی که

$$U(P;f,g)-\varepsilon\leqslant S_2(P;f,g).$$

(پ) اگر P و Q دوافراز J باشند و Q ظریفتر از P باشد (یعنی، $P\subseteq Q$)، آنگاه

$$L(P;f,g)\leqslant L(Q;f,g)\leqslant U(Q;f,g)\leqslant U(P;f,g).$$

(ت) اگر P_1 و P_2 دوافراز J باشند، آنگاه $L(P_1;f,g)\leqslant U(P_2;f,g)$.
(راهنمایی: Q را افرازی ظریفتر از P_1 و P_2 درنظر بگیرید و (پ) را به‌کار برید.)
(ث) **انتگرال پایین و بالای** f نسبت به g را بترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(f,g)=\sup\{L(P;f,g)\},$$
$$U(f,g)=\inf\{U(P;f,g)\};$$

که در آن زبرینه وزیرینه روی تمام افرازهای J مانند P گرفته شده است. نشان دهید که $L(f,g)\leqslant U(f,g)$.
(ج) ثابت کنید که f نسبت به تابع صعودی g انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر انتگرالهای پایین و بالای ارائه شده در(ث) برابر باشند. دراین صورت مقدارمشترك آنها برابراست با

$$\int_a^b f\,dg.$$

نشان دهید که f نسبت به g انتگرال‌پذیراست اگروفقط اگرشرط ریمان:برای هر $\varepsilon>0$ افرازی مانند P وجود دارد به‌قسمی که $U(P;f,g)-L(P;f,g)<\varepsilon$، صادق باشد.
(چ) اگر f_1 و f_2 در J کراندار باشند، آنگاه انتگرالهای پایین وبالای f_1+f_2 درشرایط زیرصدق می‌کنند:

$$L(f_1+f_2,g)\geqslant L(f_1,g)+L(f_2,g),$$
$$U(f_1+f_2,g)\leqslant U(f_1,g)+U(f_2,g).$$

نشان دهیدکه نابرابری اکید (بدون برابری) نیز دراین روابط می‌تواند برقرار باشد.
β.۲۹. دراین پروژه (و درپروژهٔ بعدی) ردهٔ مهم توابعی راکه دریك فاصلهٔ فشرده دارای تغییرکراندار هستند، تعریف می‌کنیم. فرض‌کنیم $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ داده شده است، اگر $P=(a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$ یك افراز $[a,b]$ باشد، آنگاه $v_f(P)$ را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$v_f(P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

هرگاه مجموعهٔ $\{v_f(P)$: $[a,b]$ یك افراز $P\}$ کراندار باشد، گوییم که f در $[a,b]$ دارای **تغییرکراندار** است. دستهٔ تمام توابعی راکه در $[a,b]$ تغییر کراندار دارند، به‌صورت $BV([a,b])$ یا $BV[a,b]$ نمایش می‌دهیم. اگر $f\in BV[a,b]$، آنگاه

$$V_f[a,b]=\sup\{v_f(P):[a,b] \text{ یك افراز } P\}$$

را تعریف می‌کنیم. عدد $V_f[a,b]$ را تغییر کل f در $[a,b]$ می‌نامیم. نشان دهید که $V_f[a,b]=0$ اگر و فقط اگر f در $[a,b]$ یك تابع ثابت باشد.

(الف) اگر $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ و اگر P و Q دو افراز $[a,b]$ باشند، و $P\supseteq Q$، نشان دهید که $v_f(P)\geqslant v_f(Q)$. اگر $f\in BV[a,b]$، نشان دهید که دنباله‌ای از افرازهای $[a,b]$ مانند (P_n) وجود دارد به‌قسمی که $V_f[a,b]=\lim(v_f(P_n))$.

(ب) اگر f در $[a,b]$ یکنوای صعودی باشد، نشان دهید که $f\in BV[a,b]$ و داریم $V_f[a,b]=f(b)-f(a)$. اگر f در $[a,b]$ یکنوای نزولی باشد، چه می‌توان گفت؟

(پ) نشان دهید که اگر $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ درشرط لیپشیتس صدق کند، یعنی برای تمام x و yهای در $[a,b]$، $|g(x)-g(y)|\leqslant M|x-y|$، آنگاه $g\in BV[a,b]$ و

$$V_g[a,b]\leqslant M(b-a).$$

اگر $|h'(x)|\leqslant M$ برای هر $x\in[a,b]$، آنگاه $h\in BV[a,b]$ و $V_h[a,b]\leqslant M(b-a)$. با این‌حال، تابع $k(x)=\sqrt{x}$ را در $[0,1]$ درنظر بگیرید.

(ت) فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ با $f(x)=0$ برای $x=0$ و $f(x)=\sin(1/x)$ برای $0<x\leqslant 1$ تعریف شده باشد. نشان دهید که f در $[0,1]$ دارای تغییر کراندار نیست. هرگاه g به‌صورت $g(x)=xf(x)$ برای $x\in[0,1]$ تعریف شده باشد، نشان دهید که g پیوسته است ولی در $[0,1]$ دارای تغییر کراندار نیست. اما اگر h به‌صورت $h(x)=x^2f(x)$ برای $x\in[0,1]$ تعریف شده باشد، نشان دهید که h در $[0,1]$ تغییر کراندار دارد.

(ث) هرگاه $f\in BV[a,b]$، نشان دهید که برای هر $x\in[a,b]$،

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+V_f[a,b],$$

لذا f در $I=[a,b]$ کراندار است و $\|f\|_I\leqslant|f(a)|+V_f[a,b]$.

(ج) هرگاه f و $g\in BV[a,b]$ و $\alpha\in\mathbf{R}$، نشان دهید که αf و $f+g$ به $BV[a,b]$ متعلق هستند و

$$V_{\alpha f}[a,b]=|\alpha|V_f[a,b],$$

$$V_{f+g}[a,b]\leqslant V_f[a,b]+V_g[a,b].$$

بنابراین $BV[a,b]$ یك فضای برداری از توابع است.

(چ) هرگاه $f,g\in BV[a,b]$، نشان دهید که fg به $BV[a,b]$ متعلق است و

$$V_{fg}[a,b]\leqslant\|f\|_I V_g[a,b]+\|g\|_I V_f[a,b].$$

نشان دهید که خارج قسمت دو تابع در $BV[a,b]$ الزاماً به $BV[a,b]$ متعلق نیست.

(ح) نشان دهید که نگاشت $f\to V_f[a,b]$ یك نرم درفضای برداری $BV[a,b]$

نیست، ولی نگاشت

$$f \to \|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f[a,b]$$

دراین فضا یك نرم است.

۷.۲۹. این پروژه ادامهٔ پروژهٔ β درمورد توابعی است که در فاصلهٔ $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ تغییرکراندار دارند.

(الف) هرگاه $f \in BV[a,b]$ و $c \in (a,b)$، نشان دهیدکه تحدیدهای f به $[a,c]$ و $[c,b]$ دراین فاصله‌ها تغییرکراندار دارند و

$$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b].$$

بعکس، اگر $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ به‌قسمی باشدکه برای یك $c \in (a,b)$ داشته باشیم $g \in BV[a,c]$ و $g \in BV[c,b]$، آنگاه $g \in BV[a,b]$.

(ب) اگر $f \in BV[a,b]$، آنگاه P_f را با $P_f(x) = V_f[a,x]$ برای $x \in (a,b]$ و $P_f(a) = ۰$ تعریف می‌کنیم. نشان دهیدکه P_f در $[a,b]$ تابعی صعودی است.

(پ) توجه داریدکه اگر $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$، آنگاه

$$f(y) - f(x) \leqslant V_f[x,y].$$

نشان دهیدکه اگر n_f را با $n_f(x) = P_f(x) - f(x)$ برای $x \in [a,b]$ تعریف‌کنیم، آنگاه n_f تابعی صعودی است.

(ت) نشان دهیدکه تابع $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ به $BV[a,b]$ متعلق است اگروفقط اگر بتوان آنرا به‌صورت تفاضل دوتابع صعودی نوشت.

(ث) هرگاه $f \in BV[a,b]$ ازطرف راست، در یك نقطهٔ $c \in [a,b)$ پیوسته باشد و $\varepsilon > ۰$، نشان دهید عددی مانند $\delta > ۰$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر

$$Q = (c < x_۱ < \cdots < x_n = b)$$

یك افراز به‌اندازهٔکافی ظریف $[c,b]$ باشد و $x_۱ - c < \delta$، آنگاه

$$V_f[c,b] - \tfrac{۱}{۲}\varepsilon \leqslant \tfrac{۱}{۲}\varepsilon + \sum_{k=۲}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-۱})| \leqslant \tfrac{۱}{۲}\varepsilon + V_f[x_۱,b],$$

که ازآن نتیجه می‌شود

$$V_f[c,x_۱] = V_f[c,b] - V_f[x_۱,b] < \varepsilon.$$

نشان دهیدکه f در $c \in [a,b]$ پیوسته است اگر وفقط اگر P_f در c پیوسته باشد.

(ج) نتیجه بگیریدکه تابع پیوستهٔ $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ به $BV[a,b]$ متعلق است اگر وفقط اگر بتوان آن را به‌صورت تفاضل دوتابع پیوستهٔ صعودی نوشت.

δ.۲۹. لبگ اثبات‌کرده است‌که هرتابع‌که تغییرکراندار دارد، درتمام نقاط، بجز احتمالاً در یك مجموعهٔ «صفراندازه»، مشتق دارد. اثبات ایــن قضیه‌کمی مشکل است و

آنرا دراینجا نمی‌آوریم، ولی برخی ازخواص دیگراین توابع را به‌دست خواهیم‌آورد.

(الف) اگر $f\in BV[a,b]$ و $c\in(a,b)$،آنگاه حدهای چپ وراست f در c وجود دارند. این حدها درتمام نقاط فاصلهٔ $[a,b]$ ، بجزاحتمالاً دریك مجموعهٔ شمارش‌پذیر از نقاط $[a,b]$، برابرند.

(ب) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای‌ازتوابع‌پیوسته در $BV[a,b]$ باشدکه‌به‌طوریکنواخت در $[a,b]$ به‌تابعی مانند f همگراست، نشان‌دهیدکه لازم‌نیست f به $BV[a,b]$ متعلق باشد.

(پ) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای در $BV[a,b]$ باشدکه درهرنقطهٔ $[a,b]$ به‌یك‌تابع f همگرا باشد، وفرض کنید عددی مانند $M>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $n\in\mathbf{N}$ داشته باشیم $V_{f_n}[a,b]\leqslant M$. نشان دهیدکه f به $BV[a,b]$ متعلق است و $V_f[a,b]\leqslant M$.

(ت) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای در $BV[a\cdot b]$ باشدبه‌قسمی که $\|f_n-f_m\|_{BV}\to 0$ وقتی $m,n\to\infty$. نشان دهیدکه تابعی مانند $f\in BV[a,b]$ وجود دارد به‌قسمی که $\|f_n-f\|_{BV}\to 0$ وقتی $n\to\infty$.

(ث) فرض کنید (f_n) یك دنبالهٔ یکنوای صعودی از توابع تعریف شده در $I=[a,b]$ باشد به‌قسمی‌که $\|f_n\|_I\leqslant M$ برای هر $n\in\mathbf{N}$. با استفاده از روش قطری، یك زیردنبالهٔ (g_k) از دنبالهٔ (f_n) به‌دست آوریدکه به‌ازای هرعدد گویای r در $[a,b]$ همگراباشد. $g(r)$ رابرای $r\in\mathbf{Q}\cap[a,b]$ به‌صورت $g(r)=\lim(g_k(r))$ تعریف‌می‌کنیم. نشان دهید که g در $\mathbf{Q}\cap[a,b]$ صعودی است. تابع g را در $x\in[a,b)$ با رابطهٔ $g(x)=\lim_{r\to x+}g(r)$ تعریف می‌کنیم. نشان‌دهیدکه‌اگر $c\in[a,b)$ یك‌نقطهٔ پیوستگی g باشد، آنگاه $g(c)=\lim_k g_k(c)$. چون نقاط ناپیوستگی g حداکثر یك مجموعهٔ شمارش‌پذیر است، با استفادهٔ مجدد از روش قطری می‌توان زیردنباله‌ای مانند (h_m) از (g_k) به‌دست آوردکه درتمام $[a,b]$ همگرا باشد.

(ج) با استفاده از قسمت (ث)، نتیجهٔ زیرراکه موسوم به **قضیهٔ گزینش‌هلی**[1] است ثابت‌کنید:

فرض‌کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع در $BV[a,b]$ باشد به‌قسمی که برای هر $n\in\mathbf{N}$، $\|f_n\|_{BV}\leqslant M$. آنگاه زیر دنباله‌ای از (f_n) وجود داردکه در هرنقطهٔ $[a,b]$ به یك تابع $f\in BV[a,b]$ همگراست و $\|f\|_{BV}\leqslant M$.

بخش ۳۰ وجود انتگرال

دربخش قبل، برخی از خواص مفید انتگرال ریمان-استیلتیس را بررسی‌کردیم. اما هنوز وجود انتگرال را، جز برای تعدادکمی از توابع، اثبات نکرده‌ایم.

دراین بخش بیشتر توجه خود را به‌توابع انتگرال گیر صعودی یکنوا معطوف

---

1. Helly

می‌داریم. بسیاری ازاین نتایج را می‌توان به‌توابع g کــه دریك فاصلهٔ $J=[a,b]$ **تغییر کراندار** دارند، گسترش داد؛ می‌گوییم g در J تغییر کراندار دارد، هــرگاه عددی ثابت مانند $M>0$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که برای هرافراز J مانند $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ داشته باشیم

$$\sum_{j=1}^{n} |g(x_j)-g(x_{j-1})| \leqslant M. \qquad (1.30)$$

واضح است که اگر g صعــودی یکنوا باشد، آنگاه مجموع (۱.۳۰) ادغــامی می‌شود و می‌توان M را $M=g(b)-g(a)$ اختیار کرد. بنابراین تابع صعودی یکنوا تغییر کراندار دارد. بعکس، می‌توان نشان داد که هر تابع که تغییر کراندار دارد تفاضل دو تابع صعودی است (ر. ك. پروژهٔ ۲۹.۰γ).

در آغاز یك نتیجهٔ بسیارمهم را ثابت می‌کنیم.

۱.۳۰ شرط انتگرال‌پذیری ریمان. فــرض کنیم $J=[a,b]$، و g در J صعــودی یکنوا باشد. تابع $f: J \to \mathbf{R}$ نسبت به g انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگــر برای هــر $\varepsilon>0$، یك افراز J مانند P_ε وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که اگرافراز $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ از P_ε ظریفتر باشد، آنگاه

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j-m_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}<\varepsilon, \qquad (2.30)$$

که درآن $M_j=\sup\{f(x) : x\in[x_{j-1}, x_j]\}$ و $m_j=\inf\{f(x) : x\in[x_{j-1}, x_j]\}$، برای $j=1, 2, \dots, n$.

برهان. اگر f نسبت به g انتگرال‌پذیر باشد و $\varepsilon>0$، آنگاه یك افراز J مانند P_ε وجود دارد به‌قسمی که اگر افراز $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ از P_ε ظریفتر باشد، آنگاه برای هرمجموع ریمان-استیلتیس نظیر به P،

$$\left|S(P; f, g)-\int_a^b f\, dg\right|<\varepsilon.$$

اکنون y_j و z_j را در $[x_{j-1}, x_j]$ به‌قسمی انتخاب می‌کنیم که

$$M_j-\varepsilon<f(y_j), \quad f(z_j)<m_j+\varepsilon.$$

نتیجه می‌گیریم که $M_j-m_j<f(y_j)-f(z_j)+2\varepsilon$. بنابراین

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}\leqslant\sum_{j=1}^{n}f(y_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}$$
$$-\sum_{j=1}^{n}f(z_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}+2\varepsilon\{g(b)-g(a)\}.$$

اکنون طرف راست این نابرابری شامل دومجموع ریمان-استیلتیس نظیر به P است. که تفاضل آنها از 2ε بیشتر نیست. بنابراین شرط (۲.۳۰) که در آن به‌جای ε، $2\varepsilon\{1+g(b)-g(a)\}$ آمده است، برقرار است.

بعکس، فرض کنیدکه $\varepsilon>0$، و P_ε افرازی است که برای هرافراز

$$P=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

ظریفتراز P_ε، (۲.۳۰) برقراراست. افراز $Q=(y_0, y_1, \cdots, y_m)$را ظریفتر از P فرض کنید. اکنون تفاضل دومجموع نظیر به‌این دو افراز، یعنی $S(P; f, g)-S(Q; f, g)$، را برآورد می‌کنیم. چون هرنقطهٔ P متعلق به Q است،می‌توان هردو مجموع را به‌صورت زیرنوشت:

$$S(P; f, g)=\sum_{k=1}^{m}f(u_k)\{g(y_k)-g(y_{k-1})\},$$

و

$$S(Q; f, g)=\sum_{k=1}^{m}f(v_k)\{g(y_k)-g(y_{k-1})\}.$$

باید توجه داشت که با نوشتن $S(P; f, g)$ برحسب نقاط Q ممکن است بعضی ازنقاط u_k تکرار شوند وهمچنین ممکن است u_k به $[y_{k-1}, y_k]$ متعلق نباشد. ولی با این‌حال، u_k و v_k هردو به‌یك فاصلهٔ $[x_{j-1}, x_j]$ متعلق هستند ودراین صورت

$$|f(u_k)-f(v_k)|\leqslant M_j-m_j.$$

ازضرب طرفین رابطه در $g(y_k)-g(y_{k-1})\geqslant 0$ وجمع آنها نتیجه می‌گیریم که

$$|S(P; f, g)-S(Q; f, g)|\leqslant\sum(M_j-m_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}<\varepsilon.$$

بالاخره فرض‌کنیم P و P' دو افراز دلخواه ظریفتر از P_ε، و Q افرازی ظریفتر از P و P' باشد. چون می‌توان استدلال قبل را هم درمورد P وهم درمورد P' به‌کاربرد، نتیجه می‌گیریم که اختلاف دومجموع دلخواه $S(P; f, g)$ و $S(P'; f, g)$ حداکثر برابربا 2ε است. لذا با توجه به‌شرط کوشی ۴.۲۹، تابع f انتگرال‌پذیراست. □

۲.۳۰ قضیهٔ انتگرال‌پذیری. اگر f پیوسته و g در J صعودی یکنوا باشد، آنگاه تابع f نسبت به g در J انتگرال‌پذیر است.

برهان. چون f در J پیوستهٔ یکنواخت است، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $x, y \in J$ و $|x-y| < \delta(\varepsilon)$، آنگاه $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
فرض کنیم $P_\varepsilon = (z_0, z_1, \dots, z_r)$ یك افراز J باشد به‌قسمی که

$$\sup\{z_k - z_{k-1}\} < \delta(\varepsilon).$$

اگر $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ از P_ε ظریفتر باشد، آنگاه نامساوی

$$\sup\{x_j - x_{j-1}\} < \delta(\varepsilon)$$

نیز برقرار است، درنتیجه $M_j - m_j < \varepsilon$، و رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\} \leqslant \varepsilon(g(b) - g(a)).$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، می‌توان شرط ریمان را به‌کار برد. □

۳.۳۰ نتیجه. اگر f یکنوا و g در J پیوسته باشد، آنگاه f نسبت به g در J انتگرال‌پذیر است.

برهان. قضیهٔ قبل و قضیهٔ ۷.۲۹ را درمورد $\pm f$ به‌کار برید. □

با شرط ریمان می‌توان نشان داد که قدرمطلق و حاصلضرب توابع انتگرال‌پذیر، انتگرال‌پذیر هستند.

۴.۳۰ قضیه. فرض کنیم g در $J = [a, b]$ صعودی یکنوا باشد.
(الف) اگر $f : J \to \mathbf{R}$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $|f|$ در J نسبت به g انتگرال‌پذیر است.
(ب) اگر f_1 و f_2 انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه حاصلضرب $f_1 f_2$ در J نسبت به g انتگرال‌پذیر است.

برهان. M_j و m_j را به‌همان معنی که در شرط ریمان ذکر شد می‌گیریم و توجه می‌کنیم که

$$M_j - m_j = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

برای اثبات (الف)، توجه کنید که $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)|$، لذا از شرط ریمان نتیجه می‌شود که اگر f انتگرال‌پذیر باشد، $|f|$ نیز انتگرال‌پذیر است.
اکنون توجه می‌کنیم که اگر $|f(x)| \leqslant K$ برای $x \in J$، آنگاه

$$|(f(x))^2-(f(y))^2|\leqslant 2K|f(x)-f(y)|.$$

بنا براین شرط ریمان، انتگرال‌پذیری f^2 را وقتی f انتگرال‌پذیر است، ایجاب می‌کند. برای اثبات انتگرال‌پذیری f_1f_2 وقتی که f_1 و f_2 انتگرال‌پذیرند، کافی است توجه داشته باشیم که

$$2f_1f_2=(f_1+f_2)^2-f_1^2-f_2^2. \square$$

۵.۳۰ لم. فرض‌کنیم g در $J=[a,b]$ صعودی یکنوا و f در J نسبت به g انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\left|\int_a^b f\,dg\right|\leqslant\int_a^b|f|\,dg\leqslant\|f\|_J(g(b)-g(a)). \qquad (۳.۳۰)$$

اگر $m\leqslant f(x)\leqslant M$ برای هر $x\in J$، آنگاه

$$m(g(b)-g(a))\leqslant\int_a^b f\,dg\leqslant M(g(b)-g(a)). \qquad (۴.۳۰)$$

برهان. با توجه به‌قضیهٔ ۴.۳۰، تابع $|f|$ نسبت به g انتگرال‌پذیر است. اگر $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ یك افراز J و (z_j) یك مجموعهٔ نقاط بینی باشد، آنگاه برای $j=1, 2, \dots, n$ داریم

$$-\|f\|_J\leqslant-|f(z_j)|\leqslant f(z_j)\leqslant|f(z_j)|\leqslant\|f\|_J.$$

از ضرب طرفین رابطهٔ فوق در $g(x_j)-g(x_{j-1})\geqslant 0$ وجمع آنها برآورد زیرحاصل می‌شود:

$$-\|f\|_J(g(b)-g(a))\leqslant-S(P;|f|,g)\leqslant S(P;f,g)\leqslant S(P;|f|,g)$$
$$\leqslant\|f\|_J(g(b)-g(a)),$$

و از آن نتیجه می‌شود که $|S(P;f,g)|\leqslant S(P;|f|,g)\leqslant\|f\|_J(g(b)-g(a))$ و بدین‌ترتیب درستی (۳.۳۰) محقق می‌شود. رابطهٔ (۴.۳۰) نیز به‌طریق مشابه ثابت می‌شود. $\square$

محاسبهٔ انتگرال

دوقضیهٔ بعدی نه‌تنها خود مفید هستند، بلکه ما را به‌قضیهٔ بنیادی انتگرال که وسیلهٔ اصلی محاسبهٔ انتگرال ریمان است راهنمایی می‌کنند.

۶.۳۰ قضیهٔ اول مقدار میانگین. اگر g در $J=[a, b]$ صعودی و f در J، به $\mathbf{R}$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در J وجود دارد به‌قسمی‌که

$$\int_a^b f\,dg = f(c)\int_a^b dg = f(c)\{g(b)-g(a)\}. \qquad (۵.۳۰)$$

برهان . اگر $m=\inf\{f(x): x\in J\}$ و $M=\sup\{f(x): x\in J\}$، در لم قبل دیدیم که

$$m\{g(b)-g(a)\} \leqslant \int_a^b f\,dg \leqslant M\{g(b)-g(a)\}.$$

اگر $g(a)=g(b)$، رابطهٔ (۵.۳۰) بدیهی است. هر گاه $g(b)>g(a)$، از قضیهٔ مقدار بینی بولتسانو به‌شمارهٔ ۴.۲۲ نتیجه می‌شود که‌نقطه‌ای مانند c در J وجود دارد به‌قسمی که

$$f(c)=\left\{\int_a^b f\,dg\right\}\Big/\{g(b)-g(a)\}. \square$$

۷.۳۰ قضیهٔ مشتق‌گیری. فرض کنیم f در J پیوسته و g در J صعودی و در نقطهٔ c از J دارای مشتق باشد، آنگاه تابع F که برای x در J با

$$F(x)=\int_a^x f\,dg,$$

تعریف شده است، در نقطهٔ c دارای مشتق است و $F'(c)=f(c)g'(c)$.

برهان. اگر $h>0$ به‌قسمی باشد که $c+h$ نیز متعلق به J باشد، با توجه به‌قضیهٔ ۶.۲۹ ونتیجهٔ قبلی داریم

$$F(c+h)-F(c)=\int_a^{c+h} f\,dg-\int_a^c f\,dg=\int_c^{c+h} f\,dg$$
$$=f(c_1)\{g(c+h)-g(c)\},$$

که درآن c_1 نقطه‌ای است که درشرط $c\leqslant c_1\leqslant c+h$ صدق می‌کند. رابطهٔ مشابهی برای حالت $h<0$ برقرار است. چون f پیوسته و g درنقطهٔ c دارای مشتق است، $F'(c)$ وجود دارد وبرابر است با $f(c)g'(c)$. $\square$

درحالت خاص انتگرال ریمان، قضیهٔ بالا اساس روش معمول درمحاسبهٔ انتگرالها را به‌دست می‌دهد.

۸.۳۰ قضیهٔ بنیادی حساب انتگرال . فرض کنیم f در $J=[a,b]$ پیوسته و F تابعی در J باشد، F در رابطهٔ

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f,\ x\in J, \qquad (۶.۳۰)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر در J، $F' = f$.

برهان. هرگاه رابطهٔ (۶.۳۰) برقرار باشد و $c \in J$، آنگاه از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود $F'(c) = f(c)$.

بعکس، فرض‌کنیم F_a برای هر x در J به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F_a(x) = \int_a^x f.$$

از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که در J، $f = F_a'$. اگر F به‌قسمی باشد که $f = F'$، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۹.۲۷ (دو)، عدد ثابتی مانند C وجود دارد به‌قسمی که $F(x) = F_a(x) + C$ برای $x \in J$. اما $F_a(a) = 0$، پس $C = F(a)$ و بنا براین اگر در J، $f = F'$، آنگاه

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f. \square$$

نکته. اگر تابع F در J به‌قسمی تعریف شده باشد که $F' = f$، آنگاه F را گاهی **انتگرال نامعین**، یا **پاد مشتق** و یا **تابع اولیهٔ** f می‌گوییم. با این اصطلاح می‌توان گفت که بنا بر قضیهٔ مشتق‌گیری ۷.۳۰، هر تابع پیوسته دارای تابع اولیه است. گاهی قضیهٔ بنیادی حساب انتگرال به‌صورت دیگری و متفاوت با آنچه‌که در ۸.۳۰ ارائه شده است، بیان می‌شود؛ اما به‌هرصورت که قضیهٔ بنیادی ارائه شود، شامل این مطلب است که در تحت شرایط مشابهی، انتگرال ریمان تابع f را می‌توان به‌توسط مقادیر هر تابع اولیهٔ f در نقاط انتهایی فاصلهٔ انتگرال گیری محاسبه‌کرد. ما این قضیه را به‌صورت یك شرط لازم و کافی برای اینکه تابعی، تابع اولیه یك تابع پیوسته باشد، بیان کرده‌ایم. نتیجهٔ کلیتر که نیازی به پیوستگی تابع زیرعلامت انتگرال ندارد، در تمرین ۳۵.خ آمده است.

باید توجه داشت که قضیهٔ بنیادی گویای این مطلب نیست که هرگاه f، مشتق تابع F، در هر نقطهٔ J وجود داشته باشد، آنگاه تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و (۶.۳۰) برقرار است. درحقیقت، ممکن است که f انتگرال‌پذیر ریمان نباشد (ر. ك. تمرین ۳۵. ذ). همچنین ممکن است تابع f انتگرال‌پذیر ریمان باشد، اما تابع اولیه نداشته باشد (ر. ك. تمرین ۳۵.ر).

به‌عنوان یك نتیجه از قضیهٔ بنیادی وقضیهٔ ۸.۲۹، می‌توان قضیهٔ اول مقدارمیانگین ۶.۳۰ را برای حالت انتگرال ریمان به‌صورت زیر بیان کرد.

۹.۳۰ قضیهٔ اول مقدار میانگین. اگر f و p در فاصلهٔ $J = [a, b]$ پیوسته‌باشند و برای هر $x \in J$، $p(x) \geqslant 0$، آنگاه نقطه‌ای مانند $c \in J$ وجود دارد به‌قسمی‌که

$$\int_a^b f(x) p(x)\, dx = f(c) \int_a^b p(x)\, dx. \qquad (۷.۳۰)$$

برهان. تابع $g : J \to \mathbf{R}$ را برای هر $x \in J$ به‌صورت

$$g(x)=\int_a^x p(t)\,dt$$

تعریف می‌کنیم. چون $p(x) \geqslant 0$، g صعودی است و از قضیهٔ مشتق‌گیری ۷.۳۰ نتیجه می‌شود که $g'=p$. اکنون بنا بر قضیهٔ ۸.۲۹ داریم

$$\int_a^b f\,dg=\int_a^b fp,$$

و بالاخره از قضیهٔ اول مقدار میانگین ۶.۳۰ نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مانند c در J وجود دارد به قسمی که

$$\int_a^b f\,dg=f(c)\int_a^b fp. \quad \square$$

به‌عنوان کاربرد دوم قضیهٔ ۸.۲۹، قضیهٔ ۷.۲۹ را که مربوط به انتگرال‌گیری جزء به جزء است، به‌صورت معمولتری بیان می‌کنیم. اثبات این قضیه به عهدهٔ خواننده است.

۱۰.۳۰ انتگرال‌گیری جزء به جزء. اگر f و g در $[a, b]$ دارای مشتقات پیوسته باشند، آنگاه

$$\int_a^b fg'=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'g.$$

قضیهٔ بعد نیز اغلب مورد استفاده است.

۱۱.۳۰ قضیهٔ دوم مقدار میانگین. (الف) اگر f صعودی و g در $J=[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در J وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_a^b f\,dg=f(a)\int_a^c dg+f(b)\int_c^b dg. \qquad (۸.۳۰)$$

(ب) اگر f صعودی و h در J پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در J وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_a^b fh=f(a)\int_a^c h+f(b)\int_c^b h. \qquad (۹.۳۰)$$

(پ) اگر φ غیرمنفی و صعودی و h در J پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در J وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_a^b \varphi h=\varphi(b)\int_c^b h.$$

برهان. شرایط قضیه وهمچنین قضیهٔ انتگرال‌پذیری ۲.۳۰، انتگرال‌پذیری g نسبت به f را در J ایجاب می‌کند. علاوه براین باتوجه به‌قضیهٔ اول مقدار میانگین ۶.۳۰ داریم

$$\int_a^b g\,df=g(c)\{f(b)-f(a)\}.$$

اکنون از قضیهٔ ۷.۲۹ مربوط به انتگرال گیری جزء به‌جزء نتیجه می گیریم که f نسبت به g انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dg = \{f(b)g(b)-f(a)g(a)\}-g(c)\{f(b)-f(a)\}$$
$$=f(a)\{g(c)-g(a)\}+f(b)\{g(b)-g(c)\}$$
$$=f(a)\int_a^c dg+f(b)\int_c^b dg,$$

قسمت (الف) ثابت شد. برای اثبات (ب)، g را در J به‌صورت

$$g(x)=\int_a^x h,$$

تعریف می‌کنیم، بنا براین $h=g'$. از قسمت (الف) و به کمك قضیهٔ ۸.۲۹ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. برای اثبات (پ)، تابع F را برای x در $(a, b]$ برابر φ و برای $x=a$، $F(a)=0$ تعریف کنید. آنگاه قسمت (ب) را درمورد F به‌کاربرید. □

قسمت (پ) قضیهٔ قبل را معمولاً صورت بنهٔ[۱] قضیهٔ دوم مقدارمیانگین می‌نامند. آشکار است که قضیهٔ مشابهی را می‌توان درمورد یك تابع نزولی بیان کرد (ر. ك. تمرین ۳۰. ژ).

تغییرمتغیر

اکنون به‌بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که درستی فرمول آشنای «تغییرمتغیر» را درمورد انتگرال ریمان نشان می‌دهد.

۱۲.۳۰ قضیهٔ تغییرمتغیر. فرض کنیم φ در فاصلهٔ $[\alpha, \beta]$ تعریف شده، مقادیرش در $\mathbf{R}$ است و مشتق پیوسته دارد و $a=\varphi(\alpha)$ و $b=\varphi(\beta)$. اگر f در برد φ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (۱۰.۳۰)$$

برهان. فرض می کنیم $I=\varphi([\alpha, \beta])$ و F را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(\xi)=\int_a^\xi f(x)\,dx,\quad \xi\in I$$

---

۱. اسیان بنه Ossian Bonnet (۱۸۱۹-۱۸۹۲) بیشتر به‌خاطر کارهایش درهندسهٔ دیفرانسیل شناخته شده است.

و تابع H را که به‌صورت $H(t)=F(\varphi(t))$ برای $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ تعریف شده است،در نظر می گیریم. توجه کنید که $H(\alpha)=F(a)=0$. اگر نسبت به t مشتق بگیریم و درنظر بگیریم که $F'=f$ (چرا؟)، نتیجه می گیریم که

$$H'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

حال قضیهٔ بنیادی را به‌کار می‌بریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)=H(\beta)=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \square$$

تغییرشکل درانتگرال

قضیهٔ بعدی غالباً درتبدیل انتگرال ریمان ـ استیلتیس به‌انتگرال ریمان مفید است.

۱۳.۳۰ قضیه. اگر g' وجود داشته باشد و f و g' در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند، آنگاه f نسبت به g انتگرال‌پذیر ریمان‌ـاستیلتیس است و داریم

$$\int_a^b f\,dg=\int_a^b fg'. \qquad (۱۱.۳۰)$$

برهان. فرض کنیم $M>0$ به‌قسمی باشد که برای $x\in[a, b]$، $|f(x)|\leqslant M$ و $\varepsilon>0$. از قضیهٔ ۴.۳۰ نتیجه می‌شود که fg' انتگرال‌پذیر ریمان است. بنابراین یك افراز P_ε مانند $[a, b]$ از وجود دارد به‌قسمی که اگر افراز دلخواه $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از P_ε ظریفتر باشد و برای $j=1, 2, 3, \ldots, n$، $\xi_j\in[x_{j-1}, x_j]$، آنگاه

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\xi_j)(x_j-x_{j-1})-\int_a^b fg'\right|<\varepsilon. \qquad (۱۲.۳۰)$$

چون g' انتگرال‌پذیر ریمان است، می‌توان فرض کرد (برطبق شرط ریمان ۱.۳۰) که P_ε چنان است که

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})<\varepsilon, \qquad (۱۳.۳۰)$$

که درآن $M_j=\sup\{g'(x) : x\in[x_{j-1},x_j]\}$ و $m_j=\inf\{g'(x) : x\in[x_{j-1},x_j]\}$.

اکنون اگر قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۲۷ را به‌کار بریم، نقاطی مانند $\zeta_j\in(x_{j-1}, x_j)$ به‌دست می‌آوریم به‌قسمی که

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\}-\int_a^b fg'\right|$$
$$=\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\zeta_j)(x_j-x_{j-1})-\int_a^b fg'\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\{g'(\zeta_j)-g'(\xi_j)\}(x_j-x_{j-1})\right|$$
$$+\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\xi_j)(x_j-x_{j-1})-\int_a^b fg'\right|.$$

اما چون $|g'(\zeta_j)-g'(\xi_j)|\leqslant M_j-m_j$، از (۱۲.۳۰) و (۱۳.۳۰) نتیجه می‌شود که عبارت قبلی از

$$M\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})+\varepsilon\leqslant(M+1)\varepsilon$$

کوچکتر یا برابر با آن است. چون $\varepsilon>0$ وانتخاب $\xi_j\in[x_{j-1}, x_j]$ دلخواه است، نتیجه می‌شود که f نسبت به g انتگرال‌پذیراست و (۱۱.۳۰) برقرار است. □

تذکر. اگر در اثبات فوق تغییر مناسبی داده شود می‌توان آن را برای حالتی به‌کاربرد که f کراندار و g در $[a, b]$ پیوسته است و g، بجز در تعداد با پایانی ازنقاط $[a, b]$، مشتق دارد (دراین نقاط g' را می‌توان به‌قسمی تعریف کرد که g' و fg' در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند).

تمرین

۳۰. الف. نشان‌دهید که تابع کرانداری که حداکثر تعداد با پایانی نقاط ناپیوسته داشته باشد، انتگرال‌پذیر ریمان است.

۳۰.ب. نشان دهید که اگر $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ درنقطه‌ای از فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته نباشد، تابعی صعودی مانند g وجود دارد به‌قسمی که f نسبت بـه g انتگرال‌پذیر نیست.

۳۰. پ. نشان دهید که قضیهٔ انتگرال‌پذیری ۲.۳۰ درمورد تابع g که در J با تغییر کراندار باشد، نیز برقرار است.

۳۰. ت. مثالی بزنید ازیك تابع f که در J انتگرال‌پذیرریمان نباشد، اما $|f|$ و f^2 انتگرال‌پذیرریمان باشند.

۳۰. ث. فرض کنید f در $J=[a, b]$ مثبت وپیوسته باشد و

$$M=\sup\{f(x): x\in J\}.$$

نشان دهید که

$$M = \lim_{n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n}.$$

۳۰. ج. نشان دهید که در قضیهٔ اول مقدار میانگین، قضیهٔ ۶.۳۰، شرط پیوسته‌بودن f لازم است.

۳۰. چ. نشان دهید که قضیهٔ مشتق گیری ۷.۳۰ برقرار است اگر فرض کنیم که f در J نسبت به‌تابع صعودی g انتگرال‌پذیر و در نقطهٔ c پیوسته است و g در نقطهٔ c دارای مشتق است.

۳۰. ح. فرض کنید f نسبت به‌تابع صعودی g در $J=[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد وفرض کنید تابع F برای $x \in J$ به‌صورت

$$F(x) = \int_a^x f\, dg$$

تعریف شده باشد. ثابت کنید که (الف) اگر g در c پیوسته باشد، F در c پیوسته است، و (ب) اگر f مثبت باشد، f صعودی است.

۳۰. خ. مثالی بیاورید از تابع انتگرال‌پذیر ریمان در J، مانند f، به‌قسمی که تابع F که برای $x \in J$ با

$$F(x) = \int_a^x f$$

تعریف شده است، در بعضی از نقاط J دارای مشتق نباشد. آیا می‌توانید تابع انتگرال پذیری مانند f به‌دست آورید به‌قسمی که F در J پیوسته نباشد؟

۳۰. د. نشان دهید که هر گاه f در $J=[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و در J، $F' = f$، آنگاه

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f.$$

راهنمایی: هر گاه $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ یك افراز J باشد، بنویسید:

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \{F(x_j) - F(x_{j-1})\}.$$

۳۰. ذ. فرض کنید F به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 \sin(1/x^2), & 0 < x \leqslant 1 \\ &= 0, & x = 0. \end{aligned}$$

نشان دهید که F درهر نقطهٔ $\mathbf{I}$ دارای مشتق است، بااین‌حال F' در $\mathbf{I}$ انتگرال‌پذیر نیست و درنتیجه F انتگرال مشتق خودش نیست.

۳۰. ر. فرض کنید f برای $x\in[0, 2]$ به‌صورت $f(x)=[x]$ تعریف شده‌باشد. نشان دهیدکه f در $[0, 2]$ انتگرال‌پذیر ریمان است، ولی مشتق هیچ تابعی نیست.

۳۰. ز. درقضیهٔ اول مقدار میانگین ۳۰.۹، فرض کنیدکه p (به‌جای اینکه پیوسته باشد) انتگرال‌پذیر ریمان است، نشان دهیدکه حکم قضیهٔ مذکور باز برقرار است.

۳۰. ژ. اگر φ غیرمنفی ونزولی و h در $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $\xi\in[a, b]$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_a^b \varphi h=\varphi(a)\int_a^\xi h.$$

۳۰.س. فرض کنید f در $\mathbf{I}=[0, 1]$ پیوسته است، و نیــز فرض کنید $f_0=f$ و f_{n+1} به‌صورت

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt,\ n\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{I}$$

تعریف شده‌است. به‌روش استقرا نشان دهیدکه $|f_n(x)|\leqslant(M/n!)x^n\leqslant M/n!$، که در آن $M=\sup\{|f(x)| : x\in\mathbf{I}\}$. نتیجه بگیریدکــه دنبالهٔ (f_n) در $\mathbf{I}$ به‌طوریکنواخت به‌تابع صفرهمگراست.

۳۰.ش. اگر f نسبت‌به g در $J=[a,b]$ انتگرال‌پذیر و φ در $[c,d]$ پیوسته‌واکیداً صعودی باشد و $\varphi(c)=a$ و $\varphi(d)=b$، آنگاه $f\circ\varphi$ نسبت به $g\circ\varphi$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dg=\int_c^d (f\circ\varphi)d(g\circ\varphi).$$

۳۰. ص. اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد وبرای هرتابع پیوستهٔ h،

$$\int_a^b fh=0$$

آنگاه برای هر x، $f(x)=0$.

۳۰. ض. اگر f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد وبرای هر تابع پیوستهٔ h

$$\int_a^b fh=0$$

آنگاه درتمام نقاط پیوستگی f، $f(x)=0$.

۳۰. ط. فــرض کنید p پیوسته ودر $[a, b]$ مثبت باشد و $c>0$، اگــربرای هــر $x\in[a, b]$

$$p(x)\leqslant c\int_a^x p(t)\,dt$$

آنگاه برای هر x، $p(x)=0$.

۳۰. ظ. فرض‌کنید f پیوسته باشد وبرای هر $x\in[a, b]$، $f(x)\geqslant 0$. هــرگاه g در $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، نشان دهیدکه

$$\int_a^b f\,dg = 0$$

اگروفقط اگر برای هر $x \in [a, b]$، $f(x) = 0$.

۳۰. ع. نشان دهید که اگر g در $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه در قضیهٔ اول مقدار میانگین ۶.۳۰ می‌توان c را در (a, b) گرفت. در قسمتهای (الف) و (ب) قضیهٔ دوم مقدار میانگین ۱۱.۳۰، تغییرمشابهی بدهید.

۳۰. غ. انتگرالهای ریمان-استیلتیس زیررا محاسبه کنید (منظور از $[x]$ $x \to$ تابع بزرگترین مقدار صحیح است.)

(الف) $\int_0^1 x\,d(x^3)$، (ب) $\int_{-2}^{2} x\,d(|x|)$،

(پ) $\int_0^2 x^3\,d([x])$، (ت) $\int_0^4 x^2\,d([x^2])$،

(ث) $\int_0^\pi \cos x\,d(\sin x)$، (ج) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,d(|\sin x|)$.

پروژه

α.۳۰. منظور این پروژه این است که لگاریتم را به‌صورت یك انتگرال تعریف‌کنیم و خواص آن را به‌دست آوریم. فرض‌کنیم $P = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.

(الف) $L(x)$ را برای $x \in P$ به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

بنابراین $L(1) = 0$. ثابت‌کنید که L مشتق‌پذیراست و $L'(x) = 1/x$.

(ب) نشان دهید که $L(x) < 0$ برای $0 < x < 1$ و $L(x) > 0$ برای $x > 1$. در حقیقت، برای $x > 0$

$$1 - \frac{1}{x} < L(x) \leqslant x - 1.$$

(پ) ثابت کنید که برای $x, y \in P$، $L(xy) = L(x) + L(y)$. بنابراین برای x در P، $L(1/x) = -L(x)$.

(راهنمایی: هرگاه $y \in P$، L_1 را در P به‌صورت $L_1(x) = L(xy)$ تعریف کنید و نشان دهید که $L_1' = L'$).

(ت) نشان دهید که اگر $n \in \mathbf{N}$ و $n \geqslant 2$، آنگاه

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<L(n)<1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}.$$

(ث) ثابت کنید که L تابعی است یك به‌یك از P روی تمام $\mathbf{R}$. عدد یکتای e را به‌صورت $L(e)=1$ تعریف کنید و با استفاده از $L'(1)=1$، نشان دهید که

$$e=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right).$$

(ج) عدد r را مثبت گویا فرض کنید، آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x)/x^{r}=0$.

(چ) تحقیق کنید که

$$L(1+x)=\int_{1}^{1+x}\frac{dt}{t}=\int_{0}^{x}\frac{dt}{1+t}.$$

با استفاده از بسط $(1+t)^{-1}$ به‌صورت سری هندسی با پایان، نشان دهید که

$$L(1+x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k}+R_{n}(x).$$

نشان دهید که برای $0\leqslant x\leqslant 1$، $|R_{n}(x)|\leqslant x/(n+1)$ و برای $-1<x<0$،

$$|R_{n}(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}.$$

۳۰. β این پروژه را با یك انتگرال شروع می‌کنیم و توابع مثلثاتی را به‌وجود می‌آوریم.

(الف) فرض کنید A برای x در $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$A(x)=\int_{0}^{x}\frac{dt}{1+t^{2}}.$$

دراین صورت A تابع فرد است (یعنی: $A(-x)=-A(x)$)، این تابع اکیداً صعودی و به ۲ محدود است. عدد π را به‌صورت $\pi/2=\sup\{A(x):x\in\mathbf{R}\}$ تعریف کنید.

(ب) فرض کنید T تابع وارون A باشد، بنابراین T اکیداً صعودی و دامنهٔ آن $(-\pi/2,\pi/2)$ است. نشان دهید که T مشتق دارد و $T'=1+T^{2}$.

(پ) توابع C و S را در $(-\pi/2,\pi/2)$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$C=\frac{1}{(1+T^{2})^{1/2}}\quad\text{و}\quad S=\frac{T}{(1+T^{2})^{1/2}}.$$

بنابراین در $(-\pi/2$ و $\pi/2)$، C زوج و S فرد است. نشان دهید که $C(0)=1$ و $S(0)=0$ ووقتی $x\to\pi/2$، $C(x)\to 0$ و $S(x)\to 1$.

(ت) ثابت کنید که برای x در $(-\pi/2 \text{ و } \pi/2)$، $C'(x) = -S(x)$ و $S'(x) = C(x)$. بنابراین در فاصلهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$، C و S هردو در معادلهٔ دیفرانسیل

$$h'' + h = 0$$

صدق می‌کنند.

(ث) مقادیر C و S را در $\pi/2$، $C(\pi/2) = 0$ و $S(\pi/2) = 1$ تعریف کنید و برای تعریف توابع C و S و T درخارج فاصلهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ تعریف کنید:

$$C(x+\pi) = -C(x), \quad S(x+\pi) = -S(x),$$
$$T(x+\pi) = T(x).$$

اگر دراین رابطه‌ها به‌جای x پی‌درپی $x+\pi$، $x+2\pi$ و ... بگذاریم، آنگاه C و S درتمام $\mathbf{R}$ تعریف می‌شوند ودارای دورهٔ تناوب 2π می باشند. تابع T نیز بجزدرمضارب فرد $\pi/2$ تعریف می‌شود ودارای دورهٔ تناوب π می‌باشد.

(ج) نشان دهید که توابع C و S به‌صورتی که درقسمت قبل تعریف شده‌اند درهر نقطهٔ $\mathbf{R}$ مشتق‌پذیرند وروابط

$$C' = -S, \quad S' = C$$

در $\mathbf{R}$ نیز برقرارند.

۳۰.۷. دراین پروژه فرمول شناخته شدهٔ والیس[1] را به‌دست خواهیم آورد. در تمام این قسمت،

$$S_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, dx.$$

(الف) اگر $n > 2$، آنگاه $S_n = [(n-1)/n] S_{n-2}$. (راهنمایی: ازانتگرال گیری جزء به‌جزء استفاده کنید.)

(ب) فرمولهای زیررا به‌دست آورید.

$$S_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2}, \quad S_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}.$$

(پ) نشان دهید که دنبالهٔ (S_n) نزولی یکنواست. (راهنمایی: $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$)

(ت) فرض کنید W_n به‌صورت زیرتعریف شده است:

$$W_n = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \cdots \times (2n) \times (2n)}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \cdots (2n-1) \times (2n+1)}.$$

---

۱. جان‌والیس John Wallis (۱۷۰۳-۱۶۱۶) در حدود شصت سال در دانشگاه آکسفورد مقام استادی هندسه را داشت ویکی از کسانی بودکه زمینه را برای‌کارهای نیوتن فراهم‌کرد. اوکارهایی در زمینهٔ توسعهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال انجام داده است.

ثابت کنید که $\lim(W_n)=\pi/2$. (این حاصلضرب والیس است.)

(ث) ثابت کنید که $\lim((n!)^2 2^{2n}/(2n)!\sqrt{n})=\sqrt{\pi}$.

۳۰. δ. در این پروژه فرمول مهم استرلینگ[1] که مقدار $n!$ را برآورد می‌کند بەدست می‌آوریم.

(الف) از مقایسهٔ سطح زیرهذلولی $y=1/x$ و سطح ذوزنقهٔ محاط شده در آن، نشان دهید که

$$\frac{2}{2n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

از آن نتیجه بگیرید که $e<(1+1/n)^{n+1/2}$.

(ب) نشان دهید که

$$\int_1^n \log x\,dx=n\log n-n+1=\log(n/e)^n+1.$$

شکل F را درنظر بگیرید که متشکل است ازمستطیلهایی بترتیب با قاعده‌های $[1, 3/2]$، $[n-1/2, n]$ وارتفاعهای ۲ و $\log n$ و ذوزنقه‌هایی قائم با ساقهای قائم

$$\left[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right]$$

برای $k=2, 3, \dots, n-1$ بەقسمی که ساق مورب هرکدام ازنقطهٔ $(k, \log k)$ بگذرد. نشان دهید که مساحت سطح F برابراست با

$$1+\log 2+\dots+\log(n-1)+\frac{1}{2}\log n=1+\log(n!)-\log\sqrt{n}.$$

(پ) با مقایسهٔ دوسطح در قسمت (ب)، نشان دهید که

$$u_n=\frac{(n/e)^n\sqrt{n}}{n!}<1,\quad n\in\mathbf{N}.$$

(ت) نشان دهید که دنبالهٔ (u_n) صعودی یکنواست. (راهنمایی: u_{n+1}/u_n را در نظر بگیرید.)

(ث) بادرنظر گرفتن u_n^2/u_{2n}، وبا استفاده ازنتیجه قسمت (ث) ازپروژهٔ قبلی، نشان دهید که $\lim(u_n)=(2\pi)^{-1/2}$.

(ج) فرمول استرلینگ را بەدست آورید:

---

۱. جیمز استرلینگ James Stirling (۱۶۹۲-۱۷۷۰) یك ریاضیدان انگلیسی از مکتب نیوتن بود، فرمولی که منسوب به استرلینگ است، درحقیقت قبلا توسط آبراهام دموآور (۱۶۶۷-۱۷۵۴) بەدست آمده بود. دموآور یك ریاضیدان پروتستان فرانسوی بود که در لندن سکونت اختیار کرد ویکی از دوستان نیوتن بود.

$$\lim\left(\frac{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)=1.$$

بخش ۳۱ خواص دیگرانتگرال

دراین بخش به‌چندخاصیت دیگرانتگرال ریمان-استیلتیس (وریمان) که غالباً مورداستفاده هستند، می‌پردازیم.

درآغاز امکان «حدگیری اززیرعلامت انتگرال» یعنی انتگرال‌پذیری حد یك‌دنباله ازتوابع انتگرال‌پذیررا بررسی می‌کنیم.

فرض کنیدکه g درفاصلهٔ $J=[a, b]$ صعودی یکنوا و (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نسبت به g باشدکه درهرنقطهٔ J به‌یك تابع f همگراست. طبیعی است انتظار داشته باشیم که این‌حد f انتگرال‌پذیر باشد وانتگرال آن برابرباشد با

$$\int_a^b f\,dg=\lim\int_a^b f_n\,dg. \tag{۱.۳۱}$$

با این‌حال، حتی درمورد توابع بسیارخوش‌رفتار ممکن است این انتظار بجا نباشد.

۱.۳۱ مثال. فرض کنیم $J=[0, 1]$، $g(x)=x$، و دنبالهٔ f_n برای $n\geqslant 2$ به صورت زیرتعریف شده باشد:

$$\begin{aligned} f_n(x)&=n^2x, && 0\leqslant x\leqslant 1/n,\\ &=-n^2(x-2/n), && 1/n\leqslant x\leqslant 2/n,\\ &=0, && 2/n\leqslant x\leqslant 1. \end{aligned}$$

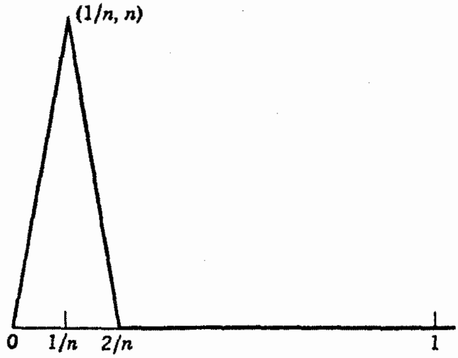
واضح است که به‌ازای هر n، تابع f_n در J پیوسته‌است وبنابراین نسبت به g انتگرال‌پذیر است (ر. ك. شکل ۱.۳۱.) حال با محاسبهٔ مستقیم و یا به‌کمك تعبیر انتگرال به‌صورت مساحت، به‌دست می‌آید

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=1,\quad n\geqslant 2.$$

علاوه براین، دنبالهٔ (f_n) در هرنقطهٔ J به 0 همگراست؛ پس تابع حدی f متحد با صفر ولذا انتگرال‌پذیر است و

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

بنابراین، رابطهٔ (۱.۳۱) حتی درحالتی که هردوطرف معادله معنی‌دار هستند، ممکن است درست نباشد.



شکل ۱۰۳۱ نمودار f_n

چون برقراری رابطهٔ (۱۰۳۱) بسیار مطلوب است، سعی ما دریافتن شرایط ساده‌ای است که این برقراری را ایجاب نماید. اینك نشان خواهیم داد که اگر همگرایی یکنواخت باشد، آنگاه این رابطه برقرار است.

۲۰۳۱ قضیه. فرض کنید g در J تابعی صعودی یکنوا و (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نسبت به g در J باشد. فرض کنید دنبالهٔ توابع f_n در J به تابع حدی f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه f نسبت به g انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\, dg = \lim \int_a^b f_n\, dg. \qquad (۱۰۳۱)$$

برهان . فرض کنیم $\varepsilon > 0$ و N به‌قسمی باشد که $\|f_N - f\|_J < \varepsilon$. اکنون فرض کنیم P_N یك افراز J باشد به‌قسمی که اگر افرازهای P و Q ظریفتر از P_N باشد، آنگاه به‌ازای هر انتخاب نقاط بینی، داشته باشیم $|S(P; f_N, g) - S(Q; f_N, g)| < \varepsilon$. اگر برای f و f_N نقاط بینی واحد به‌کار بریم، داریم

$$|S(P; f_N, g) - S(P; f, g)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_N - f\|_J \{g(x_k) - g(x_{k-1})\}$$
$$= \|f_N - f\|_J \{g(b) - g(a)\} < \varepsilon \{g(b) - g(a)\}.$$

چون برآورد مشابهی برای افراز Q نیز وجود دارد، برای افرازهای P و Q (ظریفتر از P_N) ومجموعهای ریمان-استیلتیس مربوط به آنها داریم

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| \leqslant |S(P; f, g) - S(P; f_N, g)|$$
$$+ |S(P; f_N, g) - S(Q; f_N, g)|$$
$$+ |S(Q; f_N, g) - S(Q; f, g)|$$

$$\leqslant \varepsilon(1+2\{g(b)-g(a)\}) \ .$$

درنتیجه برطبق شرط کوشی ۴.۲۹، تابع حدی f نسبت به g انتگرال‌پذیر است.
برای اثبات برقراری (۱.۳۱) لم ۵.۳۰ را به‌کار می‌بریم

$$\left|\int_a^b f\,dg-\int_a^b f_n\,dg\right|=\left|\int_a^b (f-f_n)\,dg\right|\leqslant \|f-f_n\|_J\{g(b)-g(a)\}.$$

اما $\lim \|f-f_n\|_J=0$، لذا نتیجهٔ مطلوب حاصل است.□

درقضیهٔ ۲.۳۱، شرط همگرایی یکنواخت دنبالهٔ f_n نسبتاً محدودکننده است واز کارآیی این قضیه می‌کاهد. اکنون به‌ذکر قضیه‌ای می‌پردازیم که در آن همگرایی (f_n) محدودیت کمتری به‌وجود می‌آورد ولی تابع حدی انتگرال‌پذیر فرض می‌شود. این قضیه را دراینجا ثابت نخواهیم کرد، چراکه طبیعیترین روش اثبات آن براساس «نظریهٔ اندازه» می‌باشد. (با این‌حال خواننده می‌تواند به‌مقالهٔ لوکزامبرگ که درمرجع ذکر شده است مراجعه کند.)

۳.۳۱ قضیهٔ همگرایی کراندار. فرض کنیم (f_n) دنبالهٔ توابعی در J به $\mathbf{R}$ باشد که نسبت به‌تابع صعودی g انتگرال‌پذیر هستند. فرض می‌کنیم که عددی مانند $B>0$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $n\in\mathbf{N}$ و $x\in J$، $|f_n(x)|\leqslant B$. اگر تابع

$$f(x)=\lim (f_n(x))$$

برای $x\in J$ وجود داشته باشد و نسبت به g در J انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_a^b f\,dg=\lim\int_a^b f_n\,dg. \qquad (1.31)$$

قضیهٔ زیرکه اغلب مورد استفاده است؛ نتیجه‌ای از قضیهٔ همگرایی‌کراندار است.

۴.۳۱ قضیهٔ همگرایی یکنوا. فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع یکنوا در J به $\mathbf{R}$ باشد که نسبت به‌تابع صعودی یکنوای g انتگرال‌پذیر هستند. اگر تابع

$$f(x)=\lim (f_n(x)),\ x\in J$$

نسبت به g انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_a^b f\,dg=\lim\int_a^b f_n\,dg \qquad (1.31)$$

برهان. فرض‌کنیدکه $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant \dots \leqslant f(x)$ برای هر $x\in J$. آنگاه $|f_n(x)|\leqslant B$ که در آن $B=\|f_1\|_J+\|f\|_J$، لذا می‌توان قضیهٔ ۳.۳۱ را به کار برد.□

برتری عمدهٔ نظریهٔ انتگرال گیری لبگ (ولبگ-استیلتیس) در این است که ردهٔ توابع انتگرال پذیر را گسترش می‌دهد به‌قسمی که برای آنها معادلهٔ (۱.۳۱) تحت شرایط ضعیفتری از آنچه که در قضایای قبل آمده است، برقرار است. می توانید به کتاب اصول انتگرال‌گیری مؤلف که در آخر این کتاب به‌عنوان مرجع ذکرشده است، مراجعه کنید.

باقیمانده به‌صورت انتگرال

خواننده قضیهٔ تیلر ۶.۲۸ را به‌خاطر دارد که توسط آن می‌توان مقدار $f(b)$ را برحسب مقادیر $f(a)$، $f'(a)$، ...، $f^{(n-1)}(a)$ و یك جملهٔ باقیمانده که شامل مقدار $f^{(n)}$ در نقطه‌ای بین a و b است، حساب کرد. در بسیاری از کاربردها مناسبتر است که بتوانیم جملهٔ باقیمانده را به‌صورت انتگرالی که شامل $f^{(n)}$ است، به‌دست آوریم.

۵.۳۱ قضیهٔ تیلر. فرض کنید که تابع f و مشتقاتش f'، f''، ...، $f^{(n)}$ در $[a, b]$ به $\mathbf{R}$ پیوسته باشند، آنگاه

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n,$$

که درآن باقیمانده به‌صورت زیر داده شده است:

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b(b-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt. \tag{۲.۳۱}$$

برهان. روش انتگرال گیری جزء به‌جزء را در R_n به‌کاربرید، به‌دست می‌آید

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\left\{(b-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\Big|_{t=a}^{t=b}+(n-1)\int_a^b(b-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)dt\right\}$$
$$=-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^b(b-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt.$$

با تکرار انتگرال گیری به‌روش جزء به‌جزء فرمول ذکرشده به‌دست خواهد آمد. □

بجای فرمول (۲.۳۱) اغلب مناسب است که از تغییر متغیر $t=(1-s)a+sb$ استفاده کنیم و فرمول باقیمانده را برحسب s، واقع درفاصلهٔ $[0, 1]$، به‌صورت زیر در آوریم:

$$R_n=\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1(1-s)^{n-1}f^{(n)}[a+(b-a)s]\,ds. \tag{۳.۳۱}$$

این صورت باقیمانده را می‌توان به‌حالتی که دامنهٔ f در $\mathbf{R}^p$ و برد آن در $\mathbf{R}^q$ است، گسترش داد.

انتگرالهای وابسته به‌یك پارامتر

اغلب بررسی انتگرالهاییکه درآنها توابع زیرعلامت انتگرال به‌یك پارامتر وابسته‌است اهمیت دارد. دراین انتگرالها، داشتن شرایطی که پیوستگی، مشتق‌پذیری وانتگرال‌پذیری تابع حاصل را تأمین‌کند، مطلوب است. چند قضیه‌ای که درزیرمی‌آید درارتباط بااین موضوع است.

مستطیل D در $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ بصورت

$$D=\{(x,t): a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t\leqslant d\},$$

مفروض است وفرض می‌کنیم‌که تابع f در D، به $\mathbf{R}$ پیوسته است. بسهولت دیده‌می‌شود (ر. ك. تمرین ۲۲. ج.) که به‌ازای هرنقطهٔ ثابت t در $[c, d]$، تابعی‌که x را به $f(x, t)$ می‌فرستد، در $[a, b]$ پیوسته و بنابراین انتگرال‌پذیر ریمان است. اکنون برای t در $[c, d]$، تابع F را به‌صورت

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx, \qquad (۴.۳۱)$$

تعریف می‌کنیم. نخست پیوستگی F را ثابت می‌کنیم.

۶.۳۱ قضیه. اگر f در D، به $\mathbf{R}$ پیوسته و F به‌صورت (۴.۳۱) تعریف شده‌باشد، آنگاه تابع F در $[c, d]$، به $\mathbf{R}$ پیوسته است.

برهان. از قضیهٔ پیوستگی یکنواخت ۳.۲۳ نتیجه می‌شودکه برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داردبه‌قسمی که‌اگر t و t_0 به $[c, d]$ متعلق باشند و $|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه برای هر x در $[a, b]$،

$$|f(x,t)-f(x, t_0)|<\varepsilon.$$

اکنون ازلم ۵.۳۰ نتیجه می‌شودکه

$$\begin{aligned}|F(t)-F(t_0)| &=\left|\int_a^b\{f(x,t)-f(x,t_0)\}\,dx\right|\\ &\leqslant\int_a^b|f(x,t)-f(x, t_0)|\,dx\leqslant\varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

که بنابراین F پیوسته است.□

در دوقضیهٔ بعدی از مفهوم مشتق جزئی تابع با دو متغیرحقیقی استفاده می‌کنیم. با این مفهوم خواننده قبلاً در ریاضیات عمومی آشنا شده است وبحث درموردآن در فصل هفتم خواهد آمد.

۷.۳۱ قضیه. اگر f و مشتق جزئی f_t آن، در D، به $\mathbf{R}$ پیوسته باشند، آنگاه

تابع F که با (۴.۳۱) تعریف شده است، در $[c, d]$ مشتق دارد و

$$F'(t)=\int_a^b f_t(x,t)dx. \tag{۵.۳۱}$$

برهان. با توجه به‌پیوستگی یکنواخت f_t در D، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه برای هر x در $[a,b]$،

$$|f_t(x,t)-f_t(x, t_0)|<\varepsilon.$$

فرض می‌کنیم t و t_0 در این شرط صدق می‌کنند و قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۲۷ را به‌کار می‌بریم

$$f(x,t)-f(x, t_0)=(t-t_0)f_t(x, t_1),$$

که درآن t_1 بین t و t_0 واقع است وممکن است به x بستگی داشته باشد. ازترکیب این دورابطه نتیجه می‌گیریم که اگر $0<|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{f(x,t)-f(x, t_0)}{t-t_0}-f_t(x,t_0)\right|<\varepsilon.$$

اکنون لم ۵.۳۰ را به‌کارمی‌بریم وبرآورد زیرراکه ازآن رابطهٔ (۵.۳۱) نتیجه می‌شود، به‌دست می‌آوریم:

$$\left|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}-\int_a^b f_t(x,t_0)dx\right|\leqslant\int_a^b\left|\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}-f_t(x,t_0)\right|dx$$
$$\leqslant\varepsilon(b-a).$$

گاهی علاوه برتابع زیرعلامت انتگرال، حدود انتگرال نیز به‌پارامتر t بستگی دارند. قضیهٔ بعدی بررسی این‌حالت است. دراثبات آن ازیك حالت بسیارخاص قانون مشتق زنجیری (که درفصل هفتم مورد بحث قرارخواهدگرفت)، وخواننده باآن آشنایی دارد، استفاده می‌کنیم.

۸.۳۱ فرمول لایبنیتز . فرض کنیم f و f_t در D، به $\mathbf{R}$ پیوسته باشند و α و β در فاصلهٔ $[c, d]$ توابعی مشتق‌پذیر و مقادیرشان در $[a, b]$ باشند. اگر φ در $[c, d]$ به‌صورت

$$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x, t)\,dx \tag{۶.۳۱}$$

تعریف شده باشد، آنگاه φ به‌ازای هر t در $[c ،d]$ مشتق دارد واین مشتق برابراست با

$$\varphi'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)\,dx. \quad (۷.۳۱)$$

برهان. تابع H راکه برای u و v ی متعلق به $[a,b]$ و tی متعلق به $[c,d]$ با

$$H(u,v,t)=\int_v^u f(x,t)\,dx$$

تعریف شده است، درنظرمی‌گیریم. تابع φ راکه در (۶.۳۱) تعریف شده است می‌توان بـه‌صورت $\varphi(t)=H(\beta(t),\alpha(t),t)$ نوشت. اکنون‌قانون زنجیری مشتق‌را بـه‌کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}\varphi'(t)=H_u(\beta(t),\alpha(t),t)\beta'(t)+H_v(\beta(t),\alpha(t),t)\alpha'(t)\\ +H_t(\beta(t),\alpha(t),t).\end{aligned}$$

بنابرقضیهٔ مشتق‌گیری ۷.۳۰ داریم

$$H_u(u,v,t)=f(u,t),\quad H_v(u,v,t)=-f(v,t)$$

و با توجه به‌قضیهٔ قبل:

$$H_t(u,v,t)=\int_v^u f_t(x,t)\,dx.$$

وازاین‌که $u=\beta(t)$ و $v=\alpha(t)$، فرمول (۷.۳۱) حاصل می‌شود. □

درقضیهٔ ۶.۳۱ ثابت شدکه اگر f در D به $\mathbf{R}$ پیوسته باشد و F به‌صورت (۴.۳۱) تعریف شده باشد، آنگاه F پیوسته است وبنابراین در فاصلهٔ $[c,d]$ دارای انتگرال ریمان است. اکنون نشان می‌دهیم‌که فرض پیوستگی برای تعویض ترتیب انتگرال‌گیری کافی است. این مطلب با فرمول، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,t)dx\right\}dt=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,t)\,dt\right\}dx. \qquad (۸.۳۱)$$

۹.۳۱ قضیهٔ تعویض. اگـر f در D پیوسته باشد و مقادیـرش در $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه فرمول (۸.۳۱) برقرار است.

برهان. ازقضیهٔ ۶.۳۱ وقضیهٔ انتگرال‌پذیری ۲.۳۰ وجود هردو انتگرال مکرردر فرمول (۸.۳۱) نتیجه می‌شود و فقط اثبات برابری این دوانتگرال باقی می‌ماند. چون f در D پیوستهٔ یکنواخت است، برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داردبه‌قسمی که‌اگر $|x-x'|<\delta(\varepsilon)$ و $|t-t'|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $|f(x,t)-f(x',t')|<\varepsilon$. فرض کنیم n آنقدر بزرگ است که $(b-a)/n<\delta(\varepsilon)$ و $(d-c)/n<\delta(\varepsilon)$. فاصله‌های $[a,b]$

و $[c, d]$ را به n قسمت برابر تقسیم می‌کنیم تا D به n^2 مستطیل برابر تقسیم شود. اکنون برای $j = 1, 2, \ldots, n$، می‌نویسیم:

$$x_j = a + (b-a)j/n, \qquad t_j = c + (d-c)j/n.$$

بدین ترتیب انتگرال طرف‌چپ (۸.۳۱) را می‌توان به‌صورت مجموع زیرنوشت:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x,t)\, dx \right\} dt.$$

قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۳۰ را دوبار به‌کار می‌بریم ونتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مانند x'_j در $[x_{j-1}, x_j]$ ونقطه‌ای مانند t'_{jk} در $[t_{k-1}, t_k]$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x, t)\, dx \right\} dt = f(x'_j, t'_{jk}).(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

بنابراین داریم

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,t)\, dx \right\} dt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x'_j, t'_{jk})(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

با به‌کاربردن استدلال مشابهی درمورد طرف راست (۸.۳۱)، نقاطی مانند x''_{jk} در $[x_{j-1}, x_j]$ و t''_k در $[t_{k-1}, t_k]$ وجود دارند به‌قسمی که

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t)\, dt \right\} dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x''_{jk}, t''_k)(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

چون نقاط x'_j و x''_{jk} هردو به $[x_{j-1}, x_j]$ ونقاط t'_{jk} و t''_k هردو به $[t_{k-1}, t_k]$ متعلق هستند، از پیوستگی یکنواخت f نتیجه می‌شود که تفاضل این دو مجموع دوگانه، و درنتیجه تفاضل این دوانتگرال مکرر حداکثر با $\varepsilon(b-a)(d-c)$ برابراست. چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، برابری این دوانتگرال نتیجه می‌شود. □

قضیهٔ نمایش ریس[1]

این بخش را با قضیهٔ عمیقی ختم می‌کنیم که اگرچه دراین‌کتاب ازآن استفاده نخواهد شد، ولی نقش بسیارمهمی درآنالیز تابعی دارد.

مناسب است در آغاز برخی از نتایجی راکه قبلاً ثابت شده‌اند (و یا ازآنچه تا

---

۱. بقیهٔ این بخش را می‌توان دراولین مطالعه حذف نمود.

بحال اثبات شده به‌دست می‌آیند) جمع‌آوری کنیم.

$J=[a, b]$ را حجرهٔ بسته‌ای در $\mathbf{R}$، $C(J)$ را نمایشگر فضای برداری تمام توابع پیوسته در J، به $\mathbf{R}$ فرض می‌کنیم و $\|f\|_J$، نرم در $C(J)$، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_J=\sup\{|f(x)| : x\in J\}.$$

یك تابعك خطی در $C(J)$، تابعی خطی به صورت $G : C(J) \to \mathbf{R}$ است که در فضای برداری $C(J)$ تعریف شده است. بنابراین برای هر β, α در $\mathbf{R}$ و هر f_1, f_2 در $C(J)$،

$$G(\alpha f_1+\beta f_2)=\alpha G(f_1)+\beta G(f_2).$$

تابعك خطی G را در $C(J)$ **مثبت** گوییم هرگاه به‌ازای هر $f\in C(J)$ با شرط $f(x)\geqslant 0$، $x\in J$، داشته باشیم

$$G(f)\geqslant 0$$

تابعك خطی G در $C(J)$ را **کراندار** گوییم، هرگاه عددی مانند $M\geqslant 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $f\in C(J)$ داشته باشیم

$$|G(f)|\leqslant M\|f\|_J.$$

۱۰.۳۱. لم. اگر g در J یك تابع صعودی یکنوا باشد و G به ازای f واقع در $C(J)$ به‌صورت

$$G(f)=\int_a^b f\,dg \qquad (۹.۳۱)$$

تعریف شده باشد، آنگاه G در $C(J)$ یك تابعك خطی مثبت کراندار است.

برهان. ازقضیهٔ ۵.۲۹ (الف) و قضیهٔ ۲.۳۰ نتیجه می‌شود که تابع G در $C(J)$ خطی است و بنابرلم ۵.۳۰، تابع G کراندار است و $M=g(b)-g(a)$ یك کران آن است. اگر f به $C(J)$ متعلق باشد و برای هر $x\in J$، $f(x)\geqslant 0$، آنگاه m را در فرمول (۴.۳۰) برابرصفرمی گیریم، نتیجه می‌شود که $G(f)\geqslant 0$. □

اکنون نشان می‌دهیم که برعکس هر تابعك خطی مثبت کراندار در $C(J)$ ازیك انتگرال ریمان-استیلتیس نسبت به‌یك تابع صعودی یکنوای g تولید می‌شود. این‌صورتی است از «قضیهٔ نمایش‌ریز» که یکی از قضایای مشهور واساسی رشتهٔ «آنالیز تابعی» است وداراى کاربردها وتعمیمهای بسیاری‌است. این‌قضیه‌را ریاضی‌دان بزرگ‌مجارستانی

فردریك ریز[1] ثابت کرده است.

۱۱.۳۱. قضیهٔ نمایش ریز. اگر G در $C(J)$ تابعکی خطی کراندار و مثبت باشد، آنگاه یك تابع یکنوای صعودی مانند g در J وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر f در $C(J)$،

$$G(f)=\int_a^b f\,dg. \qquad (۹.۳۱)$$

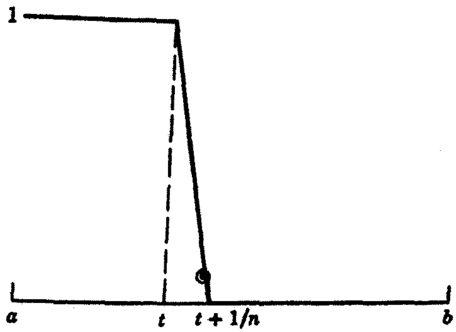
برهان. اول تابع صعودی یکنوای g را تعریف و سپس درستی (۹.۳۱) را تحقیق می‌کنیم.

عددی ثابت مانند M وجود دارد به‌قسمی‌که اگر برای هر x در J،

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x),$$

آنگاه $0\leqslant G(f_1)\leqslant G(f_2)\leqslant M\|f_2\|_J$. حال اگر t عددی‌حقیقی با شرط $a<t<b$ باشد و عدد طبیعی n به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، تابع $\varphi_{t,n}$ (ر. ك. شکل ۲.۳۱) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\varphi_{t,n}(x)&=1 && a\leqslant x\leqslant t,\\ &=1-n(x-t), && t<x\leqslant t+\frac{1}{n}, \qquad (۱۰.۳۱)\\ &=0, && t+\frac{1}{n}<x\leqslant b.\end{aligned}$$



شکل ۲.۳۱ نمودار $\varphi_{t,n}$

---

۱. فردریك‌ریز Frederic Riesz (۱۸۸۰-۱۹۵۵) ریاضی‌دان برجستهٔ مجار و یکی از بنیانگذاران توپولوژی و آنالیز تابعی است. او بعلاوه نتایج‌زیبایی درزمینه‌های نظریهٔ پتانسیل ارگودیك و انتگرال‌گیری به‌دست آورده است.

بسهولت دیده می‌شود که اگر $n \leqslant m$، آنگاه به‌ازای هر t با شرط $a<t<b$ داریم

$$\circ \leqslant \varphi_{t,\,m}(x) \leqslant \varphi_{t,\,n}(x) \leqslant ۱,$$

بنابراین $(G(\varphi_{t,\,n}) : n \in \mathbf{N})$ یك دنبالهٔ اعداد حقیقی، نزولی و کراندار است که به‌عددی حقیقی همگراست. $g(t)$ را برابر بـا این‌حد تعریف می‌کنیم. اگـر $a<t \leqslant s<b$ و $n \in \mathbf{N}$، آنگاه

$$\circ \leqslant \varphi_{t,\,n}(x) \leqslant \varphi_{s,\,n}(x) \leqslant ۱,$$

ونتیجه می‌گیریم که $g(t) \leqslant g(s)$. اکنون $g(a)$ را برابر ∘ تعریف می‌کنیم و اگر برای $x \in J$، $\varphi_{b,\,n}$ تابع $\varphi_{b,\,n}(x)=۱$ باشد، آنگـاه مـی‌نـویسیم $g(b)=G(\varphi_{b,\,n})$. اگـر $a<t<b$ و n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، برای هر x در J داریم

$$\circ \leqslant \varphi_{t,\,n}(x) \leqslant \varphi_{b,\,n}(x) = ۱,$$

پس $g(a)=\circ \leqslant G(\varphi_{t,\,n}) \leqslant G(\varphi_{b,\,n}) = g(b)$. این نشان می‌دهد که

$$g(a) \leqslant g(t) \leqslant g(b)$$

و ساختمان تابع صعودی یکنوای g کامل می‌شود.

اگر f در J پیوسته باشد و $\varepsilon>\circ$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>\circ$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ و $x,\, y \in J$، آنگاه $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. چـون f نسبت به g انتگرال‌پذیراست، یك‌افراز J مانند P_ε وجود دارد به‌قسمی کـه اگر افراز Q ظریفتر از P_ε باشد، آنگاه برای هرمجموع ریمان‌ـاستیلتیس داریم

$$\left|\int_a^b f\, dg - S(Q;\, f\,,\, g)\right| < \varepsilon.$$

اکنون فرض‌کنیم $P=(t_\circ,\, t_۱,\, \ldots,\, t_m)$ یك افراز J باشد کـه از P_ε ظریفتر و به‌قسمی است کـه $\sup\{t_k-t_{k-۱}\}<\frac{۱}{۲}\delta(\varepsilon)$. اگـر عـدد طبیعی n به‌اندازه‌ای بزرگ باشد که

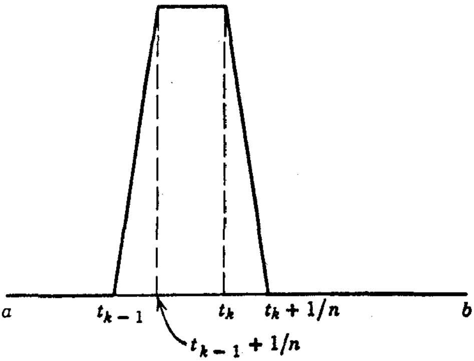
$$\frac{۲}{n} < \inf\{t_k - t_{k-۱}\},$$

آنگاه درفاصله‌های

$$\left[t_\circ,\, t_۱+\frac{۱}{n}\right],\, \ldots,\, \left[t_{k-۱},\, t_k+\frac{۱}{n}\right],\, \ldots,\, [t_{m-۱},\, t_m] \qquad (۱۱.۳۱)$$

تنها فواصل متوالی نقاط مشترك دارند (ر. ك. شکل ۳.۳۱). به ازای هر $k=۱,\, \ldots\,,\, m$ دنبالهٔ نزولی $G(\varphi_{t_k},\, n)$ به $g(t_k)$ همگراست وبنابراین می‌توان فرض‌کرد n به اندازه‌ای بزرگ است که

$$g(t_k) \leqslant G(\varphi t_k, n) \leqslant g(t_k) + (\varepsilon / m\|f\|_J). \qquad (۱۲.۳۱)$$



شکل ۳۰۳۱. نمودار $\varphi_{t_k,n}-\varphi_{t_{k-1},n}$

اکنون تابع f^* را در J به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(x)=f(t_1)\varphi_{t_1,n}(x)+\sum_{k=2}^{m} f(t_k)\{\varphi_{t_k,n}(x)-\varphi_{t_{k-1},n}(x)\}. \quad (۱۳.۳۱)$$

هرعنصر x در J به‌یك یا به دوفاصله ازفاصله‌های (۱۱.۳۱) متعلق است. اگر x به‌یك‌فاصله متعلق باشد، آنگاه سه‌حالت داریم: یا $t_0\leqslant x<t_1$ و $f^*(x)=f(t_1)$، یا برای یکی از مقادیر $k=2,\ldots,m-1$ داریم $t_{k-1}+1/n<x<t_k$ و $f^*(x)=f(t_k)$، ویاداریم $t_{m-1}+1/n<x\leqslant t_m$ و $f^*(x)=f(t_m)$ (ر. ك. شکل ۴.۳۱). بنابراین

$$|f(x)-f^*(x)|<\varepsilon.$$

اگر x به‌دو فاصله از فاصله‌های (۱۱.۳۱) متعلق باشد، آنگاه برای یك k،

$$k=1,\ldots,m-1،\quad t_k\leqslant x\leqslant t_k+\frac{1}{n}$$

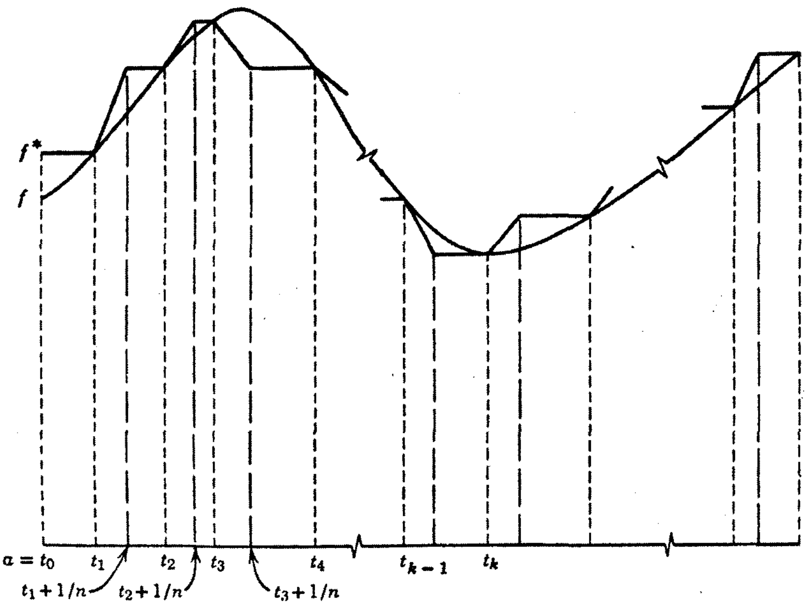
ونتیجه می‌گیریم:

$$f^*(x)=f(t_k)\varphi_{t_k,n}(x)+f(t_{k+1})\{1-\varphi_{t_k,n}(x)\}$$

اگر به‌تعریف تابع φ در (۱۰.۳۱) رجوع کنیم، می‌بینیم که

$$f^*(x)=f(t_k)(1-n(x-t_k))+f(t_{k+1})n(x-t_k).$$

چون $|x-t_k|<\delta(\varepsilon)$ و $|x-t_{k+1}|<\delta(\varepsilon)$، نتیجه می‌گیریم که



شکل ۴۰۳۱ نمودار f و f^*

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f^*(x)| &\leqslant |f(x)-f(t_k)|(1-n(x-t_k)) \\
&+|f(x)-f(t_{k+1})|n(x-t_k) \\
&<\varepsilon\{1-n(x-t_k)+n(x-t_k\}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

درنتیجه، برآورد زیررا داریم

$$\|f-f^*\|_J=\sup\{|f(x)-f^*(x)|\ :\ x\in J\}\leqslant\varepsilon.$$

چون G در $C(J)$ یك تابعك خطی کراندار است، نتیجه می‌گیریم که

$$|G(f)-G(f^*)|\leqslant M\varepsilon. \qquad (۱۴۰۳۱)$$

برطبق رابطهٔ (۱۲۰۳۱) می‌بینیم که برای $k=2, 3, \dots, m$

$$|\{G(\varphi_{t_k,n})-G(\varphi_{t_{k-1},n})\}-\{g(t_k)-g(t_{k-1})\}|<\varepsilon/2m\|f\|_J.$$

بـا اعمال G برتابـع f^* که بـا معادلهٔ (۱۳۰۳۱) تعـریف شده است وبا توجـه باینکه

$g(t_\circ)=\circ$، داریم

$$\left|G(f^*)-\sum_{k=1}^{m} f(t_k)\{g(t_k)-g(t_{k-1})\}\right|<\varepsilon.$$

اما جملهٔ دوم طرف‌چپ یك‌مجموع ریمان‌ـاستیلتیس $S(P;f,g)$ مربوط به‌افراز P است و P ظریفتر از P_ε است. لذا داریم

$$\left|\int_a^b f\,dg-G(f^*)\right|\leqslant\left|\int_a^b f\,dg-S(P;f,g)\right|+\left|S(P;f,g)-G(f^*)\right|<2\varepsilon.$$

بالاخره بااستفاده از رابطهٔ (۱۴.۳۱)، داریم

$$\left|\int_a^b f\,dg-G(f)\right|<(M+2)\varepsilon. \tag{۱۵.۳۱}$$

چون $\varepsilon>\circ$ دلخواه است و طرف چپ رابطهٔ (۱۵.۳۱) به‌آن بستگی ندارد، نتیجه می‌گیریم که

$$G(f)=\int_a^b f\,dg.\ \square$$

در بعضی از موارد، اهمیت دارد بدانیم که بین تابعکهای خطی مثبت وکراندار در $C(J)$ و بعضی توابع صعودی یکنوای نرمال شده، یك تناظر یك به‌یك وجود دارد. اگر طرزساختن g را بررسی کنیم می‌توانیم نشان دهیم که تابع صعودی g به‌قسمی است که $g(a)=\circ$ و g درهرنقطهٔ درونی J ازسمت راست پیوسته است. بااین شرایط اضافی، بین تابعکهای خطی مثبت وتوابع صعودی یك تناظر یك‌به‌یك وجود دارد.

تمرین

۳۱. الف. اگر $a>\circ$، مستقیماً نشان دهیدکه

$$\lim_n\int_\circ^a e^{-nx}dx=\circ.$$

کدامیك از قضایای این بخش را به‌کاربرده‌اید؟

۳۱. ب. اگر $\circ<a<2$، نشان دهیدکه

$$\lim_n\int_a^2 e^{-nx^2}\,dx=\circ.$$

اگر $a=\circ$، چه می‌توان گفت؟

۳۱. پ. در $\lim_n \int_0^1 nx(1-x)^n\, dx$ بحث کنید.

۳۱. ت. اگر $a>0$، نشان دهید که

$$\lim_n \int_a^\pi \frac{\sin nx}{nx}\, dx = 0.$$

اگر $a=0$، چه می‌توان گفت؟

۳۱. ث. فرض کنید $f_n(x) = nx(1+nx)^{-1}$ برای $x\in[0, 1]$، و $f(x)=0$ برای $x=0$ و $f(x)=1$ برای $x\in(0, 1]$. نشان دهید که $f_n(x) \to f(x)$ برای هر $x\in[0, 1]$، و

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx \to \int_0^1 f(x)\, dx.$$

۳۱. ج. فرض کنید $h_n(x) = nxe^{-nx^2}$ برای $x\in[0, 1]$ و $h(x)=0$. نشان دهید که

$$0 = \int_0^1 h(x)\, dx \neq \lim \int_0^1 h_n(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

۳۱. چ. فرض کنید (g_n) دنباله‌ای از توابع صعودی در $[a, b]$ باشد که به‌سمت یك تابع g در $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد. اگر برای هر $n\in\mathbf{N}$، تابع صعودی f نسبت به g_n انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه نشان دهید که f نسبت به g انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\, dg = \lim \int_a^b f\, dg_n.$$

۳۱. ح. با ذکر مثالی نشان دهید که اگر در تمرین قبل همگرایی یکنواخت نباشد، ممکن است حکم درست نباشد.

۳۱. خ. اگر $\alpha>0$، نشان دهید که $\int_0^1 t^\alpha(\log t)^2 dt = 2/(\alpha+1)^3$.

۳۱. د. فرض کنید f و مشتق نسبی آن f_t برای (x, t) در $[a, b]\times[c, d]$ پیوسته باشند، آنگاه قضیهٔ تعویض ۹.۳۱ را درمورد

$$\int_c^t \left\{\int_a^b f_t(x,t)\, dx\right\} dt,\ c\leqslant t\leqslant d$$

به‌کار برید ومشتق بگیرید واثبات دیگری برای قضیهٔ ۷.۳۱ به‌دست آورید.

۳۱. ذ. با استفاده از قضیهٔ بنیادی ۸.۳۰، نشان دهید که اگردنبالهٔ توابع (f_n) در J به‌تابع f همگرا باشد ودنبالهٔ مشتقات (f_n') پیوسته و در J به‌سمت تابع g همگرای یکنواخت باشد، آنگاه f' وجود دارد و برابر با g است. (این قضیه از قضیهٔ ۵.۲۸ ضعیفتر است، اما ساده‌تر اثبات می‌شود.)

۳۱. ر. فرض کنید اعداد گویای واقع در I به‌صورت $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ داده شده باشند. f_n را برای $x\in\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ برابر با ۱ و برای سایر نقاط I برابر با ۰ تعریف کنید، آنگاه f_n در I انتگرال‌پذیر ریمان است و دنبالهٔ (f_n) به‌طور یکنوا به‌تابع ناپیوستهٔ دیریکلهٔ f (که در $\mathbf{I}\cap\mathbf{Q}$ برابر با ۱ و در $\mathbf{I}\setminus\mathbf{Q}$ برابر با ۰ است) همگراست. بنابراین حد یکنوای دنبالهٔ توابع انتگرال‌پذیر ریمان، لازم نیست انتگرال‌پذیر ریمان باشد.

۳۱. ز. g را تابع صعودی یکنوای مفروضی در $J=[a, b]$ بگیرید. برای هر تابع f که نسبت به g در J انتگرال‌پذیر باشد، $\|f\|_1$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\, dg.$$

نشان دهید که خواصی از نرم که در زیر می‌آید برقرار است:

(الف) $\|f\|_1 \geqslant 0$

(ب) هرگاه $f(x)=0$ برای تمام $x\in J$، آنگاه $\|f\|_1=0$.

(پ) هرگاه $c\in\mathbf{R}$، آنگاه $\|cf\|_1=|c|\,\|f\|_1$.

(ت) $\big|\,\|f\|_1-\|h\|_1\big|\leqslant\|f\pm h\|_1\leqslant\|f\|_1+\|h\|_1$.

با این‌حال ممکن است $\|f\|_1=0$ بدون آنکه برای هر $x\in J$، $f(x)=0$.
(آیا این امر در صورتی که $g(x)=x$، نیز امکان دارد؟)

۳۱. ژ. اگر g در J صعودی یکنوا باشد، و f و f_n برای $n\in\mathbf{N}$ توابعی باشند که نسبت به g انتگرال‌پذیر هستند، آنگاه دنبالهٔ (f_n) را **همگرا درمیانگین** (نسبت به g) گوییم، هرگاه

$$\|f_n-f\|_1 \to 0.$$

(نماد $\|f\|_1$ در این تمرین به‌معنایی است که در تمرین قبل آمده است). نشان دهید که اگر (f_n) به f همگرا در میانگین باشد، آنگاه

$$\int_a^b f_n\, dg \to \int_a^b f\, dg.$$

ثابت کنید که اگر دنبالهٔ توابع انتگرال‌پذیر (f_n)، در J به‌تابع f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه این دنباله به f همگرا درمیانگین است. درحقیقت

$$\|f_n-f\|_1\leqslant\{g(b)-g(a)\}\,\|f_n-f\|_J.$$

ازطرف دیگر، f_n درمثال ۱.۳۱ و $g_n=(1/n)f_n$ را درنظر بگیرید، آنگاه دنبالهٔ (g_n) [نسبت به $g(x)=x$] به‌تابع صفر همگرا درمیانگین است، ولی این همگرایی در I یکنواخت نیست.

۳۱. س. فرض کنید در $J=[0, 2]$، $g(x)=x$ و (I_n) دنباله‌ای از فواصل بسته

در J باشد به‌قسمی که (۱) طول I_n برابر با $1/n$، (۲) $I_n \cap I_{n+1} = \varnothing$، و (۳) هر نقطهٔ x در J به‌تعدادی بی‌پایان I_n متعلق باشد. f_n را به‌صورت

$$f_n(x) = 1, \qquad x \in I_n,$$
$$= 0, \qquad x \notin I_n,$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که دنبالهٔ (f_n) در J [نسبت به $g(x) = x$] به‌تابع صفر همگرا درمیانگین است، ولی دنبالهٔ (f_n) به‌طور یکنواخت همگـرا نیست. درحقیقت دنبالهٔ f_n در هیچ نقطه‌ای همگرا نیست!

۳۱. ش. فرض کنید g در $J = [a, b]$ صعودی یکنوا باشد. اگر f و h در J به $\mathbf{R}$ نسبت به g انتگرال‌پذیر باشند، (f, h) **ضرب داخلی** f و h را به‌صـورت زیـر تعریف می‌کنیم:

$$(f, h) = \int_a^b f(x)h(x)\, dg(x).$$

ثابت کنید کـه تمام خـواص ضرب داخلی در تعریف ۳.۸ بجـز (۲) برقرار است. هرگاه $f = h$ تابع صفر در J باشد، آنگاه $(f, f) = 0$. اما امکان دارد $(f, f) = 0$ و f در بعضی از نقاط J صفر نباشد.

۳۱. ص. عبارت $\|f\|_2$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\, dg(x) \right\}^{1/2}.$$

دراین صورت $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$. نابرابری شوارتس

$$|(f, h)| \leqslant \|f\|_2 \|h\|_2$$

را ثابت کنید (قضیهٔ ۷.۸ و ۸.۸). نشان دهید که خواص نـرم مذکور در ۵.۸ بـرقرار است بجزاینکه از $\|f\|_2 = 0$ نتیجه نمی‌شود که برای هر x در J، $f(x) = 0$. نشان‌دهید که $\|f\|_1 \leqslant \{g(b) - g(a)\}^{1/2} \|f\|_2$.

۳۱. ض. فـرض کنید f و f_n بـرای $n \in \mathbf{N}$ در J نسبت به‌یـك تابع صعـودی g انتگرال‌پذیر باشند. گوییم دنبالهٔ f_n (در J نسبت به g) به f **همگرا درمربع میانگین** است، هرگاه $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

(الف). نشان دهید که اگر دنباله‌ای همگرای یکنواخت در J باشد، آنگاه این‌دنباله نیز به‌همان تابع همگرا درمربع میانگین است.

(ب) نشان دهیدکـه هرگاه دنباله‌ای همگرا در مـربع میانگین باشد، آنگاه ایـن دنباله نیز به‌همان تابع همگرا در میانگین است.

(پ) نشان دهیدکـه درتمرین ۳۱.س درحقیقت ثابت می‌شودکه همگرایی درمربع میانگین، همگرایی در هیچ نقطه از J را ایجاب نمی‌کند.

(ت) هرگاه در تمرین ۳۱. س طول فواصل I_n را برابر با $1/n^2$ و h_n را برابر nf_n بگیریم، آنگاه دنبالهٔ (h_n) به‌تابع صفر همگرا درمیانگین است، ولی همگرا درمربع میانگین نیست.

۳۱. ط. نشان دهید که هرگاه $f^{(n)}$ مشتق nام f در $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه می‌توان قضیهٔ تیلر ۵.۳۱ به‌صورت انتگرال وقضیهٔ اول مقدار میانگین ۹.۳۵ را به‌کاربرد وصورت باقیماندهٔ لاگرانژ در ۶.۲۸ را به‌دست آورد.

۳۱. ظ. اگر $J_1=[a, b]$ و $J_2=[c, d]$ و f در $J_1\times J_2$ بـه $\mathbf{R}$ پیوسته و g در J_1 انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه تابع F که در J_2 به‌صورت

$$F(t)=\int_a^b f(x, t)g(x)\,dx,$$

تعریف شده است، پیوسته است.

۳۱. ع. فرض کنید g یك تابع صعودی در $J_1=[a, b]$، به $\mathbf{R}$ باشد و فرض کنید که به‌ازای هرمقدار ثابت t در $J_2=[c, d]$، انتگرال

$$F(t)=\int_a^b f(x, t)dg(x)$$

وجود داشته باشد. اگر f_t، مشتق جزئی در $J_1\times J_2$، پیوسته باشد، آنگاه F'، مشتق F، در J_2 وجود دارد و

$$F'(t)=\int_a^b f_t(x, t)dg(x).$$

۳۱. غ. $J_1=[a, b]$ و $J_2=[c, d]$ مفروض‌اند. تابع‌حقیقی g را در J_1یکنوا، تابع h را در J_2 یکنوا، و f را در $J_1\times J_2$ پیوسته فرض کنید و G را در J_2 و H را در J_1 به‌صورت زیرتعریف کنید:

$$G(t)=\int_a^b f(x, t)\,dg(x),\quad H(x)=\int_c^d f(x, t)\,dh(t).$$

نشان دهیدکه G در J_2 نسبت به h انتگرال‌پذیر و H در J_1 نسبت به g انتگرال‌پذیر است و رابطهٔ زیربرقراراست:

$$\int_c^d G(t)\,dh(t) = \int_a^b H(x)\,dg(x).$$

این معادلهٔ اخیررا می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$\int_c^d\left\{\int_a^b f(x, t)\,dg(x)\right\}dh(t) = \int_a^b\left\{\int_c^d f(x, t)\ dh(t)\right\}dg(x).$$

۳۱. ف. تابع f وفاصله‌های J_1 و J_2 تمرین قبل را درنظربگیرید. اگر φ به $C(J_1)$

متعلق باشد (یعنی، φ در $J_۱$ به $\mathbf{R}$ پیوسته باشد)، تابع $T(\varphi)$ را در $J_۲$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$T(\varphi)(t)=\int_a^b f(x,\, t)\varphi(x)\, dx.$$

نشان دهید که T یك **تبدیل خطی** از $C(J_۱)$ در $C(J_۲)$ است. بدین معنی که اگر φ و ψ به $C(J_۱)$ متعلق باشند، آنگاه

(الف) $T(\varphi)$ به $C(J_۲)$ متعلق است،

(ب) $T(\varphi+\psi)=T(\varphi)+T(\psi)$،

(پ) $T(c\varphi)=cT(\varphi)$ برای $c\in\mathbf{R}$.

اگر $M=\sup\{|f(x,\, t)| : (x,\, t)\in J_۱\times J_۲\}$، آنگاه T به‌مفهوم زیر **کراندار** است:

(ت) $\|T(\varphi)\|_{J_۲}\leqslant M\|\varphi\|_{J_۱}$ برای $\varphi\in C(J_۱)$.

۳۱. ق. در ادامهٔ مطالب تمرین قبل، نشان دهید که اگر $r>۰$، آنگاه T دستهٔ

$$B_r=\{\varphi\in C(J_۱) : \|\varphi\|_{J_۱}\leqslant r\}$$

را به‌یك مجموعهٔ توابع همپیوستهٔ یکنواخت در $C(J_۲)$ می‌فرستد. (ر. ك. تعریف ۶.۲۸). بنابراین، هرگاه (φ_n) دنبالهٔ توابعی در B_r باشد، آنگاه زیردنباله‌ای مانند (φ_{n_k}) وجود دارد به‌قسمتی که دنبالهٔ $(T(\varphi_{n_k}))$ در $J_۲$ همگرای یکنواخت است.

۳۱. ك. $J_۱$ و $J_۲$ را فاصله‌های تمرین ۳۱. غ بگیرید وفرض کنید f تابعی پیوسته در $\mathbf{R}\times J_۲$، به $\mathbf{R}$ باشد. φ را در $C(J_۱)$ بگیرید ودر $J_۲$ تابع $S(\varphi)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$S(\varphi)(t)=\int_a^b f(\varphi(x),\, t)\, dx.$$

آنگاه نشان دهید که $S(\varphi)$ به $C(J_۲)$ متعلق است، ولی درحالت کلی، با تعریفی که در تمرین ۳۱. ف آمده است، S تبدیل خطی نیست؛ اما دستهٔ B_r درتمرین ۳۱. ق را به‌یك مجموعهٔ توابع همپیوستهٔ یکنواخت در $C(J_۲)$ می‌فرستد. همچنین، برای هردنبالهٔ (φ_n) در B_r زیردنباله‌ای مانند $(S(\varphi_{n_k}))$ وجود داردکه در $J_۲$ همگرای یکنواخت‌است. (این نتیجه درنظریهٔ معادلات انتگرال غیرخطی نقش اساسی دارد).

۳۱. گ. نشان دهید که اگر $G_۰$، $G_۱$ و $G_۲$ را برای هر f در $C(\mathbf{I})$ به‌صورت‌زیر تعریف کنیم:

$$G_۰(f)=f(۰),\ \ G_۱(f)=۲\int_۰^{۱/۲} f(x)\, dx,\ \ G_۲(f)=\frac{۱}{۲}\{f(۰)+f(۱)\};$$

آنگاه $G_۰$، $G_۱$، و $G_۲$ تابعکهای خطی کراندار ومثبت در $C(\mathbf{I})$ می‌باشند. توابع صعودی یکنوای $g_۰$، $g_۱$، و $g_۲$ را که نمایشگر این تابعکهای خطی هستند به‌صورت انتگرال

ریمان-استیلتیس بیابید. نشان دهیدکه انتخاب این g_jها یکتا نیست، مگر آنکه بخواهیم $g_j(0)=0$ و g_j درهر نقطهٔ درونی I ازطرف راست پیوسته باشد.

پروژه

α.۳۱. این پروژه وجودجواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول را وقتی شرط لیپشیتس برقرار است، ثابت می‌کند. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^2$ یك مجموعهٔ باز و $f:\Omega\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد و درشرط لیپشیتس صدق کند، یعنی: برای تمام نقاط (x, y) و (x, y') در Ω، $|f(x, y)-f(x, y')|\leqslant K|y-y'|$. فرض کنید حجرهٔ بستهٔ

$$I=\{(x, y):|x-a|\leqslant\alpha,\ |y-b|\leqslant\beta\}$$

واقع در Ω باشد و برای $(x, y)\in I$، $|f(x, y)|\leqslant M$ وهمچنین $M\alpha\leqslant\beta$.

(الف) اگر $J=[a-\alpha, a+\alpha]$، φ_0 را برای $x\in J$ با $\varphi_0(x)=b$، و $\varphi_n(x)$ را برای $n\in\mathbf{N}$ و $x\in J$ با

$$\varphi_n(x)=b+\int_a^x f(t, \varphi_{n-1}(t))\,dt,$$

تعریف کنید. به‌روش استقرا ثابت کنیدکه دنبالهٔ (φ_n) در J خوش تعریف است و برای هر $x\in J$،

$$|\varphi_n(x)-b|\leqslant\beta, \tag{1}$$

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}|x-a|^{n-1}. \tag{2}$$

(ب)، نشان دهیدکه هریك ازتوابع φ_n در J پیوسته است ودنبالهٔ (φ_n) در J به‌تابعی مانند φ همگرای یکنواخت است.

(پ) نتیجه بگیریدکه تابع φ در J پیوسته است، درشرط $\varphi(a)=b$ صدق می‌کند، و برای هر $x\in J$،

$$\varphi(x)=b+\int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt.$$

نتیجه بگیریدکه تابع φ در J مشتق‌پذیراست و برای $x\in J$،

$$\varphi'(x)=f(x, \varphi(x)).$$

(ت) اگر ψ در J پیوسته باشد و برای هر $x\in J$ در

$$\psi(a)=b,\ \ \psi'(t)=f(x, \psi(x))$$

صدق کند، نشان دهیدکه برای $x\in J$،

$$\psi(x)=b+\int_a^b f(t,\psi(t))dt.$$

(ث) اگر φ تابع در (پ) و ψ تابع در (ت) باشد، به‌روش استقرا نشان دهید که

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant K\left|\int_a^x|\varphi(t)-\psi(t)|\,dt\right|$$
$$\leqslant\frac{K^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_J|x-a|^n.$$

بنابراین $\|\varphi-\psi\|_J\leqslant\|\varphi-\psi\|_J K^n\alpha^n/n!$، که نتیجه می‌دهد برای هر $x\in J$،

$$\varphi(x)=\psi(x).$$

بخش ۳۲ انتگرالهای ناسره و بی‌پایان

درسه بخش قبل توابع مورد بررسی را کراندار ودامنهٔ انتگرال‌گیری را فشرده فرض کردیم. اگریکی ازاین دو فرض حذف شود، باید درنظریهٔ انتگرال‌گیری قبلی تغییراتی صورت گیرد. چون دربسیاری ازکاربردهای مهم حذف یك یا هردوفرض لازم می‌آید، در اینجا به‌ذکر تغییراتی که باید انجام گیرد، می‌پردازیم.

توابع بیکران

$J=[a,b]$ را فاصله‌ای در $\mathbf{R}$ و f را تابعی حقیقی فرض می‌کنیم که حداقل برای xهایی که در $a<x\leqslant b$ صدق می‌کنند تعریف شده است. اگر f درفاصلهٔ $[c,b]$ به‌ازای هر c که در $a<c\leqslant b$ صدق می‌کند انتگرال‌پذیر ریمان باشد، انتگرال f در این فاصله را I_c بنامید:

$$I_c=\int_c^b f. \tag{۱.۳۲}$$

انتگرال f در $J=[a,b]$ را حد I_c وقتی که $c\to a$ تعریف خواهیم کرد.

۱.۳۲ تعریف. فرض‌کنیم انتگرال ریمان در (۱.۳۲) به‌ازای هر c در $(a,b]$ وجودداشته باشد. فرض‌کنید که عددی حقیقی مانند I وجوددارد به‌قسمی که برای‌هر $\varepsilon>$ عدد $\delta(\varepsilon)>$ وجودداشته باشدبه‌طوری که اگر $a<c<a+\delta(\varepsilon)$، آنگاه $|I_c-I|<\varepsilon$. دراین صورت گوییم که I **انتگرال ناسرهٔ** f در $J=[a,b]$ است و I، مقداراین انتگرال ناسره، را گاهی به‌صورت

$$\int_{a+}^b f \quad\text{یا}\quad \int_{a+}^b f(x)dx, \tag{۲.۳۲}$$

نمایش می‌دهیم، گرچه بیشترمعمول است که علامت $+$ درحد پایین انتگرال نوشته نشود.

۲.۳۲ چندمثال. (الف) فرض کنید کـه تابع f در $[a, b]$ تعریف شده و در این فاصله کراندار باشد. اگر f در هرفاصلهٔ $[c, b]$ بـا شرط $a<c\leqslant b$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه بسهولت می‌توان ملاحظه کرد (ر. ك. تمرین ۳۲.الف) کـه انتگرال ناسرهٔ (۲.۳۲) وجود دارد. بنابراین تابع $f(x)=\sin(۱/x)$ درفاصلهٔ $[۰, ۱]$ انتگرال ناسره دارد.

(ب) اگربرای x درفاصلهٔ $(۰, ۱]$، $f(x)=۱/x$ و c به‌فاصلهٔ $(۰, ۱]$ متعلق‌باشد، آنگاه با توجه به‌قضیهٔ بنیادی ۸.۳۰ واین حقیقت که f مشتق لگاریتم است و

$$I_c=\int_c^{۱} f=\log ۱-\log c=-\log c.$$

ووقتی $c\rightarrow ۰$، $\log c$ بیکران می‌شود، انتگرال ناسرهٔ f در $[۰, ۱]$ وجود ندارد.

(پ) تابع $f(x)=x^{\alpha}$ را برای x در $(۰, ۱]$ درنظرمی‌گیریم. اگر $۰>\alpha$، تابع در $(۰, ۱]$ پیوسته ولی بیکران است. اگر $\alpha\neq -۱$، آنگاه f مشتق

$$g(x)=\frac{۱}{\alpha+۱}x^{\alpha+۱}$$

است، لذا بنابرقضیهٔ بنیادی ۸.۳۰ داریم

$$\int_c^{۱} x^{\alpha}\,dx=\frac{۱}{\alpha+۱}(۱-c^{\alpha+۱}).$$

اگر α در شرط $۰>\alpha>-۱$ صدق کند، آنگاه $c^{\alpha+۱}\rightarrow ۰$ وقتی کـه $c\rightarrow ۰$ ولذا f دارای انتگرال ناسره است. ازطرف دیگر، اگر $\alpha<-۱$، آنگاه وقتی $c\rightarrow ۰$، $c^{\alpha+۱}$ حد (با پایان) ندارد وبنابراین f انتگرال ناسره ندارد.

بحث قبلی مربـوط به‌حالتی بود کـه تابع درانتهای چپ فاصله بیکران باشد و یا تعریف نشده‌باشد. بسهولت می‌توان به‌روشی مشابه درمورد نقطهٔ انتهایی راست عمل کرد. حالتی که تابع دریك نقطهٔ درونی بیکران ویا تعریف نشده است، کمی جالبتر است. فرض کنید p یك نقطهٔ درونی $[a, b]$ و f درتمام نقاط $[a, b]$ بجز p تعریف شده باشد. اگر دوانتگرال ناسرهٔ

$$\int_a^{p-} f, \quad \int_{p+}^{b} f$$

وجود داشته باشند، آنگاه **انتگرال ناسرهٔ** f در $[a, b]$ به‌صورت مجموع این دوانتگرال تعریف می‌شود. بـا نماد $\lim$ انتگرال ناسرهٔ f را در $[a, b]$ به‌صـورت زیر تعریف می کنیم:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a}^{p-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0+} \int_{p+\delta}^{b} f(x)\,dx. \qquad (۳.۳۲)$$

آشکار است که اگر هر دو حد وجود داشته باشند، آنگاه حد زیر

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \int_{a}^{p-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{p+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right\} \qquad (۴.۳۲)$$

نیز وجود دارد و دارای همان مقدار (۳.۳۲) است. با این‌حال، وجود حد (۴.۳۲) دلیلی بر وجود حد (۳.۳۲) نیست. برای مثال، اگر f برای $x\in[-1, 1]$ با شرط $x\neq 0$ به‌صورت $f(x) = 1/x^3$ تعریف شده باشد، آنگاه به‌سهولت می‌توان دید که برای تمام εهایی که در $0<\varepsilon<1$ صدق می‌کنند،

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{x^3}\right)dx + \int_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{1}{x^3}\right)dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = 0.$$

با این‌حال، در مثال ۲.۳۲ (پ) دیدیم که اگر $\alpha = -3$، آنگاه انتگرالهای ناسرهٔ

$$\int_{-1}^{0-} \frac{1}{x^3}dx, \quad \int_{0+}^{1} \frac{1}{x^3}dx$$

وجود ندارند.

آنچه که در بالا ذکر شد، نشان می‌دهد که حد (۴.۳۲) ممکن است وجود داشته باشد بدون آنکه حد (۳.۳۲) موجود باشد. انتگرال ناسرهٔ f را (که گاه **انتگرال کوشی** نامیده می‌شود) به‌صورت (۳.۳۲) تعریف می‌کنیم. حد (۴.۳۲) نیز جالب توجه است و به **مقدار اصلی کوشی** انتگرال موسوم است و به‌صورت نمادی زیر نمایش داده می‌شود[1]:

$$(\mathrm{CPV}) \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

آشکار است که در مورد توابعی که در تعداد باپایانی از نقاط بیکران باشند و یا تعریف نشده باشند، می‌توان فاصله را به‌زیرفواصلی با این نقاط انتهایی تقسیم کرده به‌طریق مشابه عمل کرد.

انتگرالهای بی‌پایان

گسترش انتگرال به‌بعضی توابع که در مجموعه‌های بیکران تعریف شده‌اند، مهم است. برای مثال، اگر f در $\{x\in\mathbf{R} : x \geqslant a\}$، به $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد و در $[a, c]$ برای هر $c>a$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه انتگرال جزئی I_c را به‌صورت

---

۱. (CPV) مخفف Cauchy principal value است.ـ م.

$$I_c = \int_a^c f \qquad (۵.۳۲)$$

تعریف می کنیم. اکنون حد I_c را وقتی c به بینهایت میل می کند، انتگرال بی‌پایان f برای مقادیر $x \geqslant a$، تعریف خواهیم کرد.

۳.۳۲ تعریف. فرض‌کنیم f در $[a, c]$ به‌ازای هر $c > a$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و I_c **انتگرال جزئی** (۵.۳۲) باشد. دراین صورت عدد I را **انتگرال بی‌پایان** f در $\{x : x \geqslant a\}$ گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به قسمی که اگر $c > M(\varepsilon)$، آنگاه $|I - I_c| < \varepsilon$. دراین حالت I را به

$$\int_a^{+\infty} f \quad \text{یا} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \qquad (۶.۳۲)$$

نمایش می‌دهیم. انتگرالهای بی‌پایان را گاهی انتگرالهای ناسرهٔ نوع اول می‌نامند. ما واژهٔ انتگرال بی‌پایان را که هاردی[1] ریاضی‌دان انگلیسی اصطلاح کرده است ترجیح می‌دهیم، چراکه هم ساده‌تراست و هم به‌موازات اصطلاحاتی است که درسریهای بی‌پایان به‌کار می‌روند.

۴.۳۲ (چند مثال). (الف) اگر $f(x) = 1/x$ برای $x > a > 0$، آنگاه

$$I_c = \int_a^c \frac{1}{x}\, dx = \log c - \log a$$

انتگرالهای جزئی هستند. چون $\log c$ وقتی $c \to \infty$ بیکران است، انتگرال بی‌پایان f وجود ندارد.

(ب) فرض‌کنیم $f(x) = x^\alpha$ برای $x \geqslant a > 0$ و $\alpha \neq -1$، آنگاه

$$I_c = \int_a^c x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}(c^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

اگر $\alpha > -1$، آنگاه $\alpha + 1 > 0$ وانتگرال بی‌پایان‌وجود ندارد. اما اگر $\alpha < -1$، آنگاه

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha\, dx = -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(پ) فرض‌کنیم $f(x) = e^{-x}$ برای $x \geqslant 0$. آنگاه

---

۱. گادفری هرلد هاردی Godfrey Harold Hardy (۱۸۷۷-۱۹۴۷) استاد کمبریج و برای مدت زیادی رئیس جامعهٔ ریاضی بریتانیا بوده است. او کارهای عمیقی درزمینهٔ آنالیز ریاضی انجام داده است.

$$\int_{0}^{c} e^{-x}\, dx = -(e^{-c} - 1);$$

بنابراین انتگرال f در $\{x : x \geqslant 0\}$ وجود دارد و برابر با ۱ است.

همچنین می‌توان انتگرال تابعی را درنظر گرفت که در تمام $\mathbf{R}$ تعریف شده است. دراین‌حالت فرض‌می‌کنیم که f درهرفاصلهٔ باپایان $\mathbf{R}$، انتگرال‌پذیر ریمان است وحدهای

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)\, dx, \tag{الف ۷.۳۲}$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx \tag{ب ۷.۳۲}$$

را درنظرمی‌گیریم. بآسانی دیده می‌شود که اگربه‌ازای یك مقدار a هردوحد وجودداشته باشند، آنگاه به‌ازای جمیع مقادیر a نیزوجود دارند. دراین صورت **انتگرال بی‌پایان** f در $\mathbf{R}$ را مجموع این دوانتگرال بی‌پایان تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)\, dx + \lim_{c \to +\infty} \int_{a}^{c} f(x) dx. \tag{۸.۳۲}$$

همانند حالت انتگرال ناسره وجود هردوحد در(۸.۳۲)، وجود حد زیررا ایجاب‌می‌کند:

$$\lim_{c \to +\infty} \left\{ \int_{-c}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{c} f(x)\, dx \right\} = \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\, dx, \tag{۹.۳۲}$$

وبرابری (۸.۳۲) و (۹.۳۲) برقراراست. حد (۹.۳۲) اگروجود داشته باشد، اغلب **مقداراصلی‌کوشی** انتگرال بی‌پایان در $\mathbf{R}$ نامیده می‌شود و به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$(\mathrm{CPV}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{۱۰.۳۲}$$

اما، وجود مقداراصلی‌کوشی، وجود انتگرال بی‌پایان (۸.۳۲) را ایجاب‌نمی‌کند. چنانکه با درنظر گرفتن تابع $f(x) = x$ دیده می‌شود که برای هر c،

$$\int_{-c}^{c} x\, dx = \frac{1}{2}(c^2 - c^2) = 0.$$

بنابراین، مقدار اصلی‌کوشی انتگرال بی‌پایان برای $f(x) = x$ وجود دارد و برابر با صفر است، ولی انتگرال بی‌پایان این تابع وجود ندارد، چراکه، هیچ‌یك از انتگرالهای بی‌پایان در (۷.۳۲) وجود ندارند.

وجود انتگرال بی‌پایان

حال شرایطی برای وجود انتگرال بی‌پایان در مجموعهٔ $\{x : x \geqslant a\}$ به‌دست می‌آوریم.

این نتایج را در مورد انتگرال بی‌پایان در $\mathbf{R}$ نیز می‌توان به‌کاربرد، چراکه دراین نوع انتگرال بررسی انتگـرالهای بی‌پایان در مجموعه‌هـای $\{x : x \leqslant a\}$ و $\{x : x \geqslant a\}$ مطرح است. درآغاز شرط کوشی را بیان می‌کنیم.

۵.۳۲ شرط کوشی. فرض کنید f در $[a, c]$ برای هر $c \geqslant a$ انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال بی‌پایان

$$\int_{a}^{+\infty} f$$

وجود دارد، اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $K(\varepsilon)$ وجـود داشته باشد به‌قسمی که اگر $b \geqslant c \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه،

$$\left|\int_{c}^{b} f\right| < \varepsilon. \tag{۱۱.۳۲}$$

برهان. به‌روش معمول نشان داده می‌شود که شرط لازم است. درمورد شرط کافی، برای هر $n \in \mathbf{N}$، انتگرال جزئی I_n را به‌صورت

$$I_n = \int_{a}^{a+n} f$$

تعریف کنید. از شرط قضیه نتیجه می‌شود که I_n یك دنبالهٔ اعداد حقیقی کوشی است. اگر $I = \lim (I_n)$ و $\varepsilon > 0$، آنگاه‌عددی مانند $N(\varepsilon)$ وجود داردبه‌قسمی که اگر $n \geqslant N(\varepsilon)$، آنگاه $|I - I_n| < \varepsilon$. فرض کنیم $M(\varepsilon) = \sup \{K(\varepsilon), a + N(\varepsilon)\} + 1$ و $c > M(\varepsilon)$. آنگاه عددی طبیعی‌مانند $n \geqslant N(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که $K(\varepsilon) \leqslant a + n < c$. بنابراین انتگرال جزئی I_c به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$I_c = \int_{a}^{c} f = \int_{a}^{a+n} f + \int_{a+n}^{c} f,$$

و $|I - I_c| < 2\varepsilon$. $\square$

درحالت مهمی که برای هر $x \geqslant a$، $f(x) \geqslant 0$، از قضیهٔ زیرآزمون مفیدی به‌دست می‌آید.

۶.۳۲ قضیه. فرض کنید که برای هر $x \geqslant a$، $f(x) \geqslant 0$، و f در $[a, c]$ برای‌هر $c \geqslant a$ انتگرال‌پذیر باشد. آنگاه انتگرال بی‌پایان f وجود دارد اگر و فقط اگر مجموعهٔ $\{I_c : c \geqslant a\}$ کراندار باشد. دراین صورت

$$\int_a^{+\infty} f = \sup\left\{\int_a^c f : c \geqslant a\right\}.$$

برهان . فرض $0 \leqslant f(x)$ ایجاب می‌کند که I_c به‌عنوان تابع c، صعودی باشد. بنابراین وجود حد I_c باکراندار بودن مجموعهٔ $\{I_c : c \geqslant a\}$ هم‌ارز است. □ .

۷.۳۲ آزمون مقایسه. فرض کنید f و g در $[a, c]$ برای هر $c \geqslant a$ انتگرال‌پذیر باشند و برای هر $x \geqslant a$، $|f(x)| \leqslant g(x)$. اگر انتگرال بی‌پایان g وجود داشته باشد، آنگاه انتگرال بی‌پایان f نیز وجود دارد و

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \leqslant \int_a^{+\infty} g.$$

برهان. اگر $a \leqslant c < b$، آنگاه بنابرلم ۵.۳۰، تابع $|f|$ در $[c, b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\left|\int_c^b f\right| \leqslant \int_c^b |f| \leqslant \int_c^b g.$$

از شرط کوشی ۵.۳۲ نتیجه می‌شود که انتگرالهای بی‌پایان f و $|f|$ وجود دارند. علاوه براین داریم

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f| \leqslant \int_a^{+\infty} g. \square$$

۸.۳۲ آزمون مقایسهٔ حدی. فرض کنید f و g مثبت و برای هر $c \geqslant a$، در $[a, c]$ انتگرال‌پذیر باشند و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0. \qquad (۱۲.۳۲)$$

آنگاه یا هردو انتگرال بی‌پایان $\int_a^{+\infty} f$ و $\int_a^{+\infty} g$ وجود دارند یا هردو وجود ندارند.

برهان . از رابطهٔ (۱۲.۳۲) نتیجه می‌شود که اعدادی مثبت مانند $A < B$ و $K \geqslant a$ وجود دارند به‌قسمی که

$$Ag(x) \leqslant f(x) \leqslant Bg(x), \quad x \geqslant K.$$

آزمون مقایسهٔ ۷.۳۲ ورابطهٔ فوق نشان می‌دهندکه یا هر دو انتگرال بی‌پایان $\int_K^{+\infty} f$ ، $\int_K^{+\infty} g$ وجود دارند و یا هردو وجود ندارند. چون هردو تابع f و g در $[a, K]$ انتگرال‌پذیرند، حکم نتیجه می‌شود. □

۹.۳۲ آزمون دیریکله. فرض کنید که f بـرای $x \geqslant a$ پیوسته باشد، انتگرالهای جزئی

$$I_c = \int_a^c f, \quad c \geqslant a,$$

کراندار باشند ووقتی $x \to \infty$، φ نـزولی یکنوا و به‌صفـر همگرا باشد. آنگاه انتگرال بی‌پایان $\int_a^\infty f\varphi$ وجود دارد.

برهان. فرض‌کنیم A کرانی برای مجموعهٔ $\{|I_c| : c \geqslant a\}$ باشد. بـرای $\varepsilon > ۰$، $K(\varepsilon)$ را به‌قسمی بگیرید که اگر $x \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه $۰ \leqslant \varphi(x) \leqslant \varepsilon / ۲A$. اگر $b \geqslant c \geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه از تمرین ۳۰.ژ نتیجه می‌شود که عددی مانند ξ در $[c, b]$ وجود دارد به‌قسمی کـه

$$\int_c^b f\varphi = \varphi(c) \int_c^\xi f.$$

ازبرآورد

$$\left|\int_c^\xi f\right| = |I_\xi - I_c| \leqslant ۲A,$$

نتیجه می‌شود که وقتی $b \geqslant c$ وهردو از $K(\varepsilon)$ بزرگترند،

$$\left|\int_c^b f\varphi\right| < \varepsilon.$$

اکنون می‌توان شرط کوشی ۵.۳۲ را به‌کاربرد. □

۱۰.۳۲ چندمثال. (الف) اگر $f(x) = ۱/(۱ + x^۲)$ و $g(x) = ۱/x^۲$ برای $x \geqslant a > ۰$، آنگاه $۰ \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. اما قبلاً درمثال ۴.۳۲ (ب) دیده‌ایم که‌انتگرال بی‌پایان $\int_۱^{+\infty}(۱/x^۲)dx$ وجـود دارد، پس بنابر آزمون مقایسهٔ ۷.۳۲ انتگرال بی‌پایان $\int_۱^{+\infty}(۱/(۱+x^۲))dx$ نیزوجود دارد. (مستقیماً نیزاین مطلب را می‌توان به‌ترتیب‌زیر نشان‌داد:

$$\int_۱^c \frac{۱}{۱+x^۲} dx = \mathrm{Arc\,tan}\, c - \mathrm{Arc\,tan}\, ۱$$

و $\mathrm{Arc\,tan}\, c \to \pi/۲$ وقتی $c \to +\infty$.)

(ب) اگر $h(x) = e^{-x^۲}$ و $g(x) = e^{-x}$، آنگاه برای $x \geqslant ۱$، $۰ \leqslant h(x) \leqslant g(x)$. درمثال ۴.۳۲ (پ) دیدیم که انتگرال بی‌پایان $\int_۰^{+\infty} e^{-x}dx$ وجود دارد، ولذا ازآزمون مقایسهٔ ۷.۳۲ نتیجه‌می‌شود که انتگرال بی‌پایان $\int_۰^{+\infty} e^{-x^۲}dx$ وجود دارد. این‌بار، محاسبهٔ مستقیم انتگرالهای جزئی به‌کمك توابع مقدماتی ممکن نیست. با این‌حال، بعدها خواهیم

دید که این انتگرال بی‌پایان برابر با $\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$ است.

(پ) فرض می‌کنیم $p>۰$، و وجود انتگرال بی‌پایان زیررا مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\int_{۱}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p}}dx.$$

اگر $p>۱$، قدرمطلق تابع زیرعلامت انتگرال از $۱/x^{p}$، که همگرایی آن را در مثال ۴.۳۲ (ب) دیدیم، کوچکتر است. در این حالت، آزمون مقایسه همگرایی این انتگرال بی‌پایان را ایجاب می‌کند. اگر $۱\geqslant p>۰$، این استدلال را دیگر نمی‌توان به‌کاربرد. اما اگر بنویسیم $f(x)=\sin x$ و $\varphi(x)=۱/x^{p}$، آنگاه از آزمون دیریکله ۹.۳۲ وجود انتگرال بی‌پایان نتیجه می‌شود.

(ت) فرض کنیم $f(x)=\sin x^{۲}$ برای $x\geqslant ۰$، و **انتگرال فرنل**[۱]

$$\int_{۰}^{+\infty}\sin x^{۲}dx$$

را درنظرمی گیریم. واضح است که انتگرال در $[۰, ۱]$ وجود دارد، بنابراین فقط وجود انتگرال را در $\{x : x\geqslant ۱\}$ بررسی می‌کنیم. اگر متغییر $t=x^{۲}$ و قضیهٔ تغییر متغیر ۱۲.۳۰ را به‌کاربریم، داریم

$$\int_{۱}^{c}\sin x^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{c^{۲}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

مثال قبل نشان می‌دهد که وقتی $c\to+\infty$، انتگرال طرف راست همگراست. بنابراین $\int_{۱}^{+\infty}\sin x^{۲}\,dx$ وجوددارد. (بایدتوجه‌داشت که تابع زیرعلامت‌انتگرال وقتی $x\to+\infty$، به‌صفر همگرا نیست.)

(ث) فرض کنید که $\alpha\geqslant ۱$ و $\Gamma(\alpha)$ به‌صورت انتگرال زیرتعریف شده باشد:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{۰}^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-۱}\,dx. \qquad (۱۳.۳۲)$$

برای اثبات وجود این انتگرال بی‌پایان، تابع $g(x)=۱/x^{۲}$ را برای $x\geqslant ۱$ در نظر می گیریم. چون

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}x^{\alpha-۱}}{x^{-۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+۱}}{e^{x}}=۰,$$

نتیجه می گیریم که‌اگر $\varepsilon>۰$، عددی مانند $K(\varepsilon)$ وجوددارد به‌قسمی که برای $x\geqslant K(\varepsilon)$،

---

۱. اگوستن فرنل Augustin Fresnel (۱۸۲۷-۱۷۸۸) ریاضی‌دان وفیزیك‌دان فرانسوی است که به‌تحکیم مجدد اساس نظریهٔ موجی نور که قبلاً توسط هویگنس ارائه شده بود، کمك کرد.

$$0 < e^{-x}x^{\alpha-1} \leqslant \varepsilon x^{-2}.$$

چون انتگرال بی‌پایان $\int_K^{+\infty} x^{-2} dx$ وجود دارد، نتیجه می گیریم که انتگرال (۱۳.۳۲) نیز همگراست. تابع مهمی که برای $\alpha \geqslant 1$ با فرمول (۱۳.۳۲) تعریف شده‌است، به **تابع گاما** موسوم است. بسهولت می‌توان دید کـه اگر $\alpha < 1$، تابع $e^{-x}x^{\alpha-1}$ در نزدیکی $x = 0$ بیکران است. با این‌حال، اگر α درشرط $0 < \alpha < 1$ صدق کند، به‌طوری که در مثال ۲.۳۲ (ب) دیده‌ایم، تابع $x^{\alpha-1}$ در فاصلهٔ $[0, 1]$ انتگرال ناسره دارد. از طرف دیگر از $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$ برای $x \geqslant 0$، بآسانی نتیجه می‌شودکه انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$

برای $0 < \alpha < 1$ وجود دارد . بنابراین می‌توان تعریف تـابع گامـا را برای $\alpha > 0$ به‌صورت انتگرال (۱۳.۳۲) گسترش داد بـا این تعبیر که این انتگرال را مجموع دو انتگرال زیر بگیریم

$$\int_{0+}^{a} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx + \int_{a}^{+\infty} e^{-x}\,x^{\alpha-1}\,dx$$

که اولی انتگرالی ناسره ودومی انتگرالی بی‌پایان است.

همگرایی مطلق

اگر f در $[a, c]$ برای هر $c \geqslant a$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد ، از قضیهٔ ۴.۳۰ (الف) نتیجه می‌شودکه $|f|$ ، قدرمطلق f ، نیز در $[a, c]$ برای $c \geqslant a$ انتگرال‌پذیری ریمان است. از آزمون مقایسهٔ ۷.۲۳ نتیجه می‌شودکه اگر انتگرال بی‌پایان

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx \qquad (۱۴.۳۲)$$

وجود داشته‌باشد، انتگرال بی‌پایان

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (۱۵.۳۲)$$

نیز وجود دارد، قدرمطلق آن کراندار و (۱۴.۳۲) یك کران آن است.

۱۱.۳۲ تعریف. اگر انتگرال بی‌پایان (۱۴.۳۲) وجود داشته بـاشد، گوییم که f در $\{x : x \geqslant a\}$ **انتگرال‌پذیر مطلق** است ، یـا گوییم انتگرال بی‌پـایان (۱۵.۳۲) **همگرای مطلق** است.

توجه کردیم که اگر f در $\{x:x\geqslant a\}$ انتگرال‌پذیر مطلق باشد، انتگرال بی‌پایان (۱۵.۳۲) وجـود دارد. عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً انتگرال زیر را در نظر می گیریم:

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

همگرایی این انتگرال در مثـال ۱۰.۳۲ (پ) نشان داده شد. از طرف دیگر بسهولت می‌توان ملاحظه کرد که درهر فاصلهٔ $[k\pi, (k+۱)\pi]$ برای $k\in\mathbf{N}$، یك زیر فاصله به‌طول $b>۰$ وجود دارد به‌قسمی که در آن،

$$|\sin x|\geqslant\frac{۱}{۲}\cdot$$

(در حقیقت می‌توان b را $۲\pi/۳$ اختیار کرد.) بنابراین داریم

$$\int_{\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\int_{\pi}^{۲\pi}+\cdots+\int_{(k-۱)\pi}^{k\pi}\geqslant\frac{b}{۲}\left\{\frac{۱}{۲\pi}+\frac{۱}{۳\pi}+\cdots+\frac{۱}{k\pi}\right\},$$

این نتیجه می‌دهد (ر. ك. ۱۱.۱۶ (پ)) که تـابع $f(x)=\sin x/x$ در $\{x:x\geqslant\pi\}$ انتگرال‌پذیر مطلق نیست.

توجه کنیم که آزمون مقـایسهٔ ۷.۳۲ درحقیقت همگرایی مطلق انتگرال بی‌پـایان تابع f را درفاصلهٔ $[a, +\infty]$ مودد بررسی قرار می‌دهد.

تمرین

۳۲. الف. فرض کنید که f یك تابع حقیقی کراندار در $J=[a, b]$ باشد به‌قسمی که f درفاصلهٔ $[c, b]$ بـرای $c>a$ انتگرال‌پذیر باشد. ثابت کنید که انتگرال ناسرهٔ f در J وجود دارد.

۳۲. ب. فـرض کنید کـه f در $[c, b]$ برای هر $c>a$ انتگرال‌پذیر بـاشد و انتگرال ناسرهٔ $\int_{a+}^{b}|f|$ وجود داشته باشد. نشان‌دهید که انتگرال ناسرهٔ $\int_{a+}^{b}f$ وجود دارد، ولی ممکن است عکس این‌مطلب درست نباشد.

۳۲. پ. فرض کنید که f و g در $[c,b]$ برای هر $c\in(a, b)$ انتگرال‌پذیر باشند. اگر برای هر x در $J=[a, b]$، $|f(x)|\leqslant g(x)$ و g در J انتگرال‌ناسره داشته‌باشد، نشان‌دهید که f نیز در J انتگرال ناسره دارد.

۳۲. ت. در همگرایی انتگرالهای ناسرهٔ زیر بحث کنید:

(الف) $\displaystyle\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(x+x^{۲})^{۱/۲}}$، (ب) $\displaystyle\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(x-x^{۲})^{۱/۲}}$،

(پ) $\displaystyle\int_{\circ}^{1} \frac{x\,dx}{(1-x^{3})}$ (ت) $\displaystyle\int_{\circ}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$

(ث) $\displaystyle\int_{\circ}^{1} \frac{\log x}{1-x^{2}}\,dx$ (ج) $\displaystyle\int_{\circ}^{1} \frac{x\,dx}{(1-x^{3})^{1/2}}$

۳۲. ث . مقادیری از p و q راکه برای آنها انتگرالهای زیر همگرا هستند، معین کنید .

(الف) $\displaystyle\int_{\circ}^{1} x^{p}(1-x)^{q}\,dx$ (ب) $\displaystyle\int_{\circ}^{\pi/2} x^{p}(\sin x)^{q}\,dx$

(پ) $\displaystyle\int_{1}^{2} (\log x)^{p}\,dx$ (ت) $\displaystyle\int_{\circ}^{1} x^{p}(-\log x)^{q}\,dx$

۳۲. ج. در همگرایی انتگرالهای زیر بحث کنید. کدامیك از آنها همگرای مطلق هستند؟

(الف) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$ ، (ب) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{x^{2}+1}\,dx$ ،

(پ) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x}\,dx$ ، (ت) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ ،

(ث) $\displaystyle\int_{\circ}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^{2}}\,dx$ ، (ج) $\displaystyle\int_{\circ}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x}\,dx$.

۳۲. ج. برای چه مقادیری از p و q انتگرالهای زیر همگرا هستند؟ برای چه مقادیری همگرای مطلق می باشند؟

(الف) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^{p}}{1+x^{q}}\,dx$ (ب) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{q}}\,dx$

(پ) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x^{p}}{x}\,dx$ (ت) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{q}}\,dx$

۳۲. ح. اگر f در هر فاصلهٔ $[\circ, c]$ برای $c > \circ$ انتگرال‌پذیر باشد، نشان دهید که انتگرال بی‌پایان $\int_{\circ}^{+\infty} f$ وجود دارد اگر وفقط اگر انتگرال بی‌پایان $\int_{5}^{+\infty} f$ وجود داشته باشد .

۳۲. خ. یك تابع f مثال بزنید که انتگرال بی‌پایان $\int_{\circ}^{+\infty} f$ وجود داشته‌باشد و f در مجموعهٔ $\{x : x \geqslant \circ\}$ کراندار نباشد.

۳۲ . د . هرگاه f یکنوا و انتگرال بی‌پایان $\int_{0}^{+\infty} f$ وجود داشته باشد ، آنگاه نشان‌دهید که وقتی $x \to +\infty$، $xf(x) \to 0$.

بخش ۳۳ همگرایی یکنواخت وانتگرالهای بی‌پایان

در بسیاری از مسائل‌کاربردی ، بررسی انتگرالهای بی‌پایانی که در آنها تابع زیر علامت انتگرال وابسته به‌یك‌پارامتراست، اهمیت‌دارد. در بررسی این وضعیت، مفهوم همگرایی یکنواخت انتگرال نسبت به‌یك پارامتر، بسیار مهم است. درآغاز به‌حالتی می‌پردازیم که پارامتر متعلق به‌یك‌فاصلهٔ $J=[\alpha, \beta]$ باشد.

۱.۳۳ تعریف. فرض می‌کنیم که تابع حقیقی f در نقاط (x, t)، وقتی $x \geqslant a$ و $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$، تعریف شده است ، فرض می‌کنیم که به‌ازای هر t در $J=[\alpha, \beta]$ انتگرال بی‌پایان

$$F(t)=\int_{a}^{+\infty} f(x, t)dx \tag{۱.۳۳}$$

وجود دارد. دراین‌صورت می‌گوییم که این‌همگرایی **در J یکنواخت** است اگر برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $N(\varepsilon)$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که اگر $c \geqslant N(\varepsilon)$ و $t\in J$، آنگاه

$$\left|F(t)-\int_{a}^{c} f(x, t)\, dx\right|<\varepsilon.$$

تفاوت بین همگرایی معمولی انتگرالهای بی‌پایان که در (۱.۳۳) ارائه شده است وهمگرایی یکنواخت، در این است که در اینجا $M(\varepsilon)$ را می‌توان مستقل از مقادیر t در J انتخاب‌کرد. تعریف همگرایی یکنواخت انتگرالهای بی‌پایان را وقتی‌که پارامتر t متعلق به‌مجموعهٔ $\{t : t \geqslant \alpha\}$ ویا مجموعهٔ $\mathbf{N}$ باشد ، به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

اکنون به‌ذکر آزمونهایی درمورد همگرایی‌یکنواخت انتگرال بی‌پایان می‌پردازیم.

۲.۳۳ محك‌کوشی. فرض‌کنیدکه به‌ازای هر $t \in J$، انتگرال بی‌پایان (۱.۳۳) وجود داشته‌باشد ، آنگاه این همگرایی در J یکنواخت است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $K(\varepsilon)$وجودداشته‌باشد به‌قسمی‌که اگر $b \geqslant c \geqslant K(\varepsilon)$ و $t\in J$، آنگاه

$$\left|\int_{c}^{b} f(x, t)dx\right|<\varepsilon. \tag{۲.۳۳}$$

اثبات این‌قضیه را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۳۰۳۳ آزمون M- وایرشتراس. فرض‌کنید f در $[a, c]$ برای‌هر $c \geqslant a$ و‌هر $t \in J$ انتگرال‌پذیر ریمان است. فرض کنید تـابعی مثبت مانند M وجود داردکه برای $x \geqslant a$ تعریف شده است. همچنین فرض‌کنید برای $x \geqslant a$ و $t \in J$، داریم

$$|f(x, t)| \leqslant M(x),$$

و انتگرال بی‌پایان $\int_a^{+\infty} M(x)dx$ وجود دارد، آنگاه بـه‌ازای $t \in J$ انتگرال (۱۰۳۳) همگرای مطلق است و این همگرایی در J یکنواخت است.

برهان. همگرایی

$$\int_a^{+\infty} \left|f(x , t)\right| dx, \quad t \in J$$

مستقیماً از فرضهای قضیه و آزمون مقایسه نتیجه می‌شود. بنابراین انتگرالی‌که $F(t)$ را تعریف می‌کند، برای $t \in J$ همگرای مطلق است. اگر محك‌کوشی را با توجه به‌برآورد

$$\left|\int_c^b f(x , t)\, dx\right| \leqslant \int_c^b \left|f(x , t)\right| dx \leqslant \int_c^b M(x) dx ,$$

به‌کار بریم، بسادگی همگرایی یکنواخت در J به‌دست می‌آید. □

آزمون M- وایرشتراس بـرای نشان دادن همگرایی مطلق و همچنین همگرایی یکنواخت مفید است، ولی آن‌قدر دقیق نیست که وقتی همگرایی مطلق نیست، برای‌بررسی همگرایی یکنواخت به‌کار آید. برای این منظور قضیهٔ نظیر آزمون دیریکله ۹۰۳۲ را ذکر می‌کنیم.

۴۰۳۳ آزمون دیریکله. f را در (x , t) برای $x \geqslant a$ و t در J پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم‌که عدد ثابتی مانند A وجود دارد به‌قسمی‌که برای $c \geqslant a$ و $t \in J$،

$$\left|\int_a^c f(x , t) dx\right| \leqslant A.$$

فرض‌کنید که به‌ازای هر $t \in J$، تـابع $\varphi(x, t)$ برای $x \geqslant a$ نزولی یکنوا باشد و وقتی $x \to +\infty$، به‌صفر همگرا باشد. آنگاه انتگرال

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)\, \varphi(x, t)\, dx$$

در J همگرای یکنواخت است.

برهان. فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ و $K(\varepsilon)$ به‌قسمی بـاشد که اگر $x \geqslant K(\varepsilon)$ و $t \in J$،

آنگاه $\varphi(x, t)<\varepsilon/2A$. اگر $b\geqslant c\geqslant K(\varepsilon)$، آنگاه از تمرین ۳۰. ژ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $t\in J$، عددی مانند $\xi(t)$ در $[c, b]$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_c^b f(x, t)\,\varphi(x, t)dx=\varphi(c, t)\int_c^{\xi(t)} f(x, t)dx.$$

بنابراین، اگر $b\geqslant c\geqslant K(\varepsilon)$ و $t\in J$، آنگاه

$$\left|\int_c^b f(x, t)\,\varphi(x, t)\,dx\right|\leqslant\varphi(c, t)2A<\varepsilon,$$

که بدین‌ترتیب همگرایی یکنواخت از محك کوشی ۲.۳۳ نتیجه می‌گردد. □

۵.۳۳ چندمثال. (الف) اگر f به‌صورت

$$f(x, t)=\frac{\cos tx}{1+x^2},\ x\geqslant 0, t\in \mathbf{R}$$

داده‌شده باشد و اگر M را با $M(x)=(1+x^2)^{-1}$ تعریف کنیم، آنگاه $|f(x,t)|\leqslant M(x)$. چون انتگرال بی‌پایان M در $[0, +\infty]$ وجود دارد، از آزمون M- وایرشتراس نتیجه می‌شود که انتگرال بی‌پایان

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{1+x^2}dx$$

برای $t\in\mathbf{R}$ همگرای یکنواخت است.

(ب) $f(x, t)=e^{-x}x^t$ برای $x\geqslant 0$ و $t\geqslant 0$ مفروض است. قبلاً دیدیم که انتگرال

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx$$

وقتی t دریك فاصلهٔ $[0, \beta]$ است، برای هر $\beta>0$، همگرای یکنواخت است. با این‌حال، این انتگرال در مجموعهٔ $\{t\in\mathbf{R} : t\geqslant 0\}$ همگرای یکنواخت نیست (ر. ك. تمرین ۳۳. الف).

(پ) اگر $f(x, t)=e^{-tx}\sin x$ برای $x\geqslant 0$ و $t\geqslant\gamma>0$، آنگاه

$$|f(x, t)|\leqslant e^{-tx}\leqslant e^{-\gamma x}.$$

اگر بگیریم $M(x)=e^{-\gamma x}$، آنگاه از آزمون M- وایرشتراس نتیجه می‌شود که انتگرال

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,dx$$

برای $\circ > \gamma \geqslant t$ همگرای یکنواخت است و یك محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که به $(1+t^2)^{-1}$ همگراست. (توجه کنید که اگر $t=\circ$، دیگر انتگرال همگرا نیست.)

(ت) انتگرال بی‌پایان

$$\int_{\circ}^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx \quad , t \geqslant \circ$$

را در نظر می‌گیریم که در آن تابع زیر علامت انتگرال در $x=\circ$ برابر با ۱ تعریف شده است. چون قدرمطلق تابع زیر علامت انتگرال همواره از ۱ نابزرگتر است، کافی است نشان‌دهیم که انتگرال در $x \leqslant \varepsilon$ برای $t \geqslant \circ$ همگرای یکنواخت است. آزمون M-وایرشتراس را نمی‌توان در مورد این‌تابع زیر علامت انتگرال به‌کاربرد. اما اگر بگیریم $f(x, t)=\sin x$ و $\varphi(x, t)=e^{-tx}/x$، آنگاه شرایط آزمون دیریکله برقرار است.

انتگرالهای بی‌پایان وابسته به‌یك پارامتر

فرض کنید که f تابعی از (x, t) باشد، ووقتی $x \geqslant a$ و t در $J=[\alpha, \beta]$ است، تعریف شده وپیوسته باشد. بعلاوه فرض کنید که انتگرال بی‌پایان

$$F(t)=\int_{a}^{+\infty} f(x, t)dx \tag{۱.۳۳}$$

به‌ازای هر $t\in J$ وجود داشته‌باشد. اکنون نشان خواهیم‌داد که اگراین‌همگرایی یکنواخت باشد، آنگاه تابع F در J پیوسته است و انتگرال آنرا می‌توان با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری به‌دست‌آورد. درمورد مشتق نیز نتیجهٔ مشابهی را ثابت می‌کنیم.

۶.۳۳ قضیه. فرض‌کنیدکه f در (x, t) برای $x \geqslant a$ و t در $J=[\alpha, \beta]$ پیوسته و همگرایی در (۱.۳۳) در J یکنواخت باشد. آنگاه F در J پیوسته است.

برهان . اگر $n\in \mathbf{N}$، و F_n در J به‌صورت

$$F_n(t)=\int_{a}^{a+n} f(x, t)dx$$

تعریف شده‌باشد، از قضیهٔ ۶.۳۱ نتیجه می‌شود که F_n در J پیوسته است. چون دنبالهٔ (F_n) در J به F همگرای یکنواخت‌است، طبق‌قضیهٔ ۱.۲۴ تابع F در J پیوسته‌است. □

۷.۳۳ قضیه. تحت‌شرایط قضیهٔ قبل

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, dt=\int_{a}^{+\infty}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t)\, dt\right\}dx,$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^{+\infty} f(x,\ t)dx\right\}dt=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^\beta f(x,t)dt\right\}dx\cdot \quad (۳۰۳۳)$$

برهان . اگر F_n مانندقضیهٔ قبل تعریف شده‌باشد، از قضیهٔ ۹۰۳۱ نتیجه می‌شود که

$$\int_\alpha^\beta F_n(t)\,dt=\int_a^{a+n}\left\{\int_\alpha^\beta f(x\ ,\ t)\,dt\right\}dx\cdot$$

چون (F_n) در J به F همگرای یکنواخت است، از قضیهٔ ۲۰۳۱ نتیجه می‌شود که

$$\int_\alpha^\beta F(t)dt=\lim_n\int_\alpha^\beta F_n(t)dt\cdot$$

از ترکیب دورابطهٔ اخیر فرمول (۳۰۳۳) به‌دست می‌آید. □

۸۰۳۳ قضیه. فرض‌کنیدکه f و f_t مشتق جزئی‌آن ، در (x,t) برای $x\geqslant a$ و t در $J=[\alpha\ ,\beta]$ پیوسته‌باشند. فرض‌کنیدکه (۱۰۳۳) برای هر $t\in J$ وجود داشته‌باشد و

$$G(t)=\int_a^{+\infty} f_t(x,t)\,dx$$

در J همگرای یکنواخت باشد . آنگاه F در J مشتق‌پذیر است و $F'=G$. به‌صورت نمادی،

$$\frac{d}{dt}\int_a^{+\infty} f(x,\ t)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t)dx\cdot$$

برهان . اگر F_n برای $t\in J$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$F_n(t)=\int_a^{a+n} f(x,t)dx,$$

آنگاه از قضیهٔ ۷۰۳۱ نتیجه می‌شود که F_n مشتق‌پذیر است و

$$F'_n(t)=\int_a^{a+n} f_t(x,t)dx\cdot$$

امـا چون بنا به‌فرض ، دنبالهٔ (F_n) در J به F همگراست و دنبـالهٔ (F'_n) در J به G همگرای یکنواخت است، بنابرقضیهٔ ۵۰۲۸، تابع F در J مشتق‌پذیر است و $F'=G$. □

۹۰۳۳ چندمثال. (الف) می‌دانیم که اگر $t>0$، آنگاه

$$\frac{1}{t}=\int_{0}^{+\infty}e^{-tx}dx$$

و این همگرایی برای $0<t_0\leqslant t$ یکنواخت است. اگر از دو طرف این رابطه نسبت به t درفاصلهٔ $[\alpha, \beta]$، که درآن $0<\alpha<\beta$، انتگرال بگیریم وقضیهٔ ۷.۳۳ را به‌کاربریم، فرمول

$$\log(\beta/\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{t}\,dt=\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}e^{-tx}dt\right\}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$$

را به‌دست می‌آوریم. (توجه‌کنیدکه تابع زیر علامت انتگرال اخیر را می‌توان به‌قسمی تعریف کردکه در $x=0$ پیوسته باشد.)

(ب) اگر به‌جای‌انتگرال گیری، نسبت به t مشتق‌بگیریم، نتیجهٔ صوری زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{t^{2}}=\int_{0}^{+\infty}xe^{-tx}dx.$$

چون انتگرال اخیر برای $0<t_0\leqslant t$ ، نسبت به t همگرای یکنواخت است، فرمول فوق برای $t>0$ برقرار است. به‌روش استقرا نتیجه می گیریم که برای $t>0$،

$$\frac{n!}{t^{n+1}}=\int_{0}^{+\infty}x^{n}e^{-tx}dx.$$

لذا می‌بینیم که با تعریفی که برای تابع گاما در مثال ۱۰.۳۳ (ث) عرضه شده است، $\Gamma(n+1)=n!$.

(پ) اگر $\alpha>1$ عددی حقیقی باشد و $x>0$، آنگاه $x^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\log x}$ ، بنابراین $f(\alpha)=x^{\alpha-1}$ تابعی پیوسته از (α, x) است. علاوه براین دیده می‌شود که یك‌همسایگی α وجود دارد به‌قسمی که انتگرال

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

درآن همگرای یکنواخت است. بنابراین طبق قضیهٔ ۶.۳۳ تابع گاما حداقل برای $\alpha>1$ پیوسته است. (هرگاه $0<\alpha\leqslant 1$ ، نتیجهٔ مشابهی را می‌توان به‌دست آورد، لیکن باید باین نکته توجه داشت که انتگرال در $x=0$ ناسره است.)

(ت) فرض کنیم $t\geqslant 0$ و $u\geqslant 0$ و F به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد :

$$F(u)=\int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin ux}{x}dx.$$

اگر $t>0$، این انتگرال برای $u\geqslant 0$ همگرای یکنواخت است و انتگرال

$$F'(u)=\int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\cos ux\,dx.$$

نیز چنین است. علاوه براین با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء داریم

$$\int_{0}^{A} e^{-tx}\cos ux dx=\left[\frac{e^{-tx}[u\sin ux-t\cos ux]}{t^{2}+u^{2}}\right]_{x=0}^{x=A}.$$

اکنون A را به‌سمت $+\infty$ میل می‌دهیم، فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$F'(u)=\int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\cos ux\,dx=\frac{t}{t^{2}+u^{2}},\quad u\geqslant 0.$$

بنابراین، عدد ثابتی مانند C وجود دارد به‌قسمی که

$$F(u)=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{u}{t}\right)+C,\ u\geqslant 0.$$

برای‌محاسبهٔ ثابت C از مقادیر $F(0)=0$ و $\operatorname{Arc}\tan(0)=0$ استفاده می‌کنیم ونتیجه می‌گیریم که $C=0$. بنابراین هرگاه $t>0$ و $u\geqslant 0$،

$$\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{u}{t}\right)=\int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin ux}{x}dx.$$

(ث) اکنون در فرمول بالا، $u>0$ را ثابت می‌گیریم ومانند مثال ۵.۳۳ (ت) توجه می‌کنیم که انتگرال برای $t\geqslant 0$ همگرای یکنواخت است، بنابراین حدآن برای $t\geqslant 0$ پیوسته است. حال هرگاه $t\to 0^{+}$، فرمول مهم زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}dx,\quad u>0. \tag{۴.۳۳}$$

انتگرالهای بی‌پایان دنباله‌ها

فرض می‌کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع حقیقی باشدکه برای $x\geqslant a$ تعریف شده است و نیز فرض می‌کنیم انتگرالهای بی‌پایان $\int_a^{+\infty} f_n$ وجود دارند و $f(x)=\lim(f_n x))$ به‌ازای هر $x\geqslant a$ وجوددارد. می‌خواهیم بتوانیم نتیجه بگیریم که انتگرال بی‌پایان f وجود دارد و

$$\int_{a}^{+\infty} f=\lim\int_{a}^{+\infty} f_n. \tag{۵.۳۳}$$

در قضیهٔ ۲.۳۱ ثابت شده است که اگر یك‌دنبالهٔ‌توابع انتگرال‌پذیر ریمان، مانند (f_n)، در فاصلهٔ $[a, c]$ به‌تابعی مانند f همگرای یکنواخت باشد،آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان

است و انتگرال f برابر با حد انتگرالهای f_n است. قضیهٔ مشابه در مورد انتگرالهای بی‌پایان الزاماً درست نیست، زیرا همان‌طور که در تمرین ۳۳. د خواهیم دید تابع حدی ممکن است انتگرال بی‌پایان نداشته باشد. علاوه بر این، حتی اگر انتگرال بی‌پایان وجود داشته‌باشد و هردوطرف (۳۳. ۵) دارای معنی باشند، ممکن است برابری برقرار نباشد (ر. ك. تمرین ۳۳. ذ). به‌طریق مشابه، تعمیم قضیهٔ همگرایی کراندار ۳۱.۳ به‌انتگرالهای بی‌پایان، ممکن است درست نباشد. با این‌حال، دوقضیهٔ مهم و مفید وجود دارندکه نشان می‌دهند تحت شرایطی برابری (۳۳. ۵) برقرار است. در اثبات آنها از قضیهٔ همگرایی کراندار ۳۱.۳ استفاده خواهیم کرد. قضیهٔ اول حالت خاص قضیهٔ معروف لبگ است. (در این‌جاکه انتگرالهای بی‌پایان ریمان موردبحث است، به‌فرض انتگرال‌پذیری تابع حدی احتیاج است. اما درنظریهٔ کلیتر انتگرال لبگ به‌این فرض نیاز نیست.)

۳۳. ۱۰ قضیه همگرایی محصور. فرض‌کنیدکه (f_n) دنباله‌ای از توابع حقیقی کراندار باشد به‌قسمی که $f(x)=\lim(f_n(x))$ برای $x\geqslant a$، و f و f_n، $n\in \mathbf{N}$، در $[a, c]$ برای هر $c>a$ انتگرال‌پذیر ریمان‌باشند. فرض‌کنید تابعی مانند M وجود دارد به‌قسمی‌که برای $x\geqslant a$ انتگرال داشته‌باشد وبرای $x\geqslant a$ و $n\in\mathbf{N}$،

$$|f_n(x)|\leqslant M(x).$$

آنگاه f در $x\geqslant a$ انتگرال دارد و

$$\int_a^{+\infty} f=\lim\int_a^{+\infty} f_n. \tag{۵.۳۳}$$

برهان. ازآزمون مقایسهٔ ۷.۳۲ نتیجه می‌شودکه انتگرالهای بی‌پایان

$$\int_a^{+\infty} f\ ,\ \int_a^{+\infty} f_n\ ،\ n\in\mathbf{N}$$

وجود دارند. هرگاه $\varepsilon>0$ و K به‌قسمی باشدکه $\int_K^{+\infty} M<\varepsilon$ ، آنگاه

$$\left|\int_K^{+\infty} f\right|<\varepsilon \quad و \quad \left|\int_K^{+\infty} f_n\right|<\varepsilon\ ،\ n\in\mathbf{N}.$$

چون $f(x)=\lim\limits_n (f_n(x))$ برای هر $x\in[a, K]$ ، از قضیهٔ همگرایی‌کراندار ۳۱.۳ نتیجه می‌شودکه $\int_a^K f=\lim\int_a^K f_n$. بنابراین داریم

$$\left|\int_a^{+\infty} f-\int_a^{+\infty} f_n\right|\leqslant\left|\int_a^K f-\int_a^K f_n\right|+2\varepsilon,$$

که برای مقادیر به‌اندازهٔکافی بزرگ n، کمتر از 3ε می‌شود. □

۱۱.۳۳ قضیهٔ همگرایی یکنوا. فرض کنید که (f_n) دنبالهٔ توابعی کراندار، مثبت و یکنوا در $\{x{:}x\geqslant a\}$ باشد، بدین معنی‌که $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ برای $n\in\mathbf{N}$ و $x\geqslant a$. اگر $f_n,\ f$ در $[a,\ c]$ برای هر $c>a$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه تابع حدی f در مجموعهٔ $\{x{:}x\geqslant a\}$ دارای انتگرال است اگر و فقط اگر مجموعهٔ $\{\int_a^{+\infty}f_n{:}n\in\mathbf{N}\}$ کراندار باشد. دراین‌صورت

$$\int_a^{+\infty}f=\sup_n\left\{\int_a^{+\infty}f_n\right\}=\lim_n\int_a^{+\infty}f_n.$$

برهان. چون دنبالهٔ (f_n) صعودی یکنواست، نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ $(\int_a^{+\infty}f_n{:}n\in\mathbf{N})$ نیز صعودی یکنواست. اگر f در مجموعهٔ $\{x{:}x\geqslant a\}$ دارای انتگرال باشد، آنگاه از قضیهٔ همگرایی کراندار (برای $M=f$) نتیجه می‌شود که

$$\int_a^{+\infty}f=\lim\int_a^{+\infty}f_n.$$

بعکس، فرض کنید که مجموعهٔ انتگرالهای بی‌پایان، کراندار باشد و S زبرینهٔ این مجموعه باشد. اگر $c>a$، آنگاه ازقضیهٔ همگرایی یکنوای ۴.۳۱ نتیجه می‌شود که

$$\int_a^c f=\lim_n\int_a^c f_n=\sup_n\left\{\int_a^c f_n\right\}.$$

چون $f_n\geqslant 0$، نتیجه می‌شود که $\int_a^c f_n\leqslant\int_a^{+\infty}f_n\leqslant S$، و بنابراین $\int_a^c f\leqslant S$. بنا

$$\int_a^{+\infty}f=\sup_c\int_a^c f=\sup_c\left\{\sup_n\int_a^c f_n\right\}$$

$$=\sup_n\left\{\sup_c\int_a^c f_n\right\}=\sup_n\int_0^{+\infty}f_n.\ \square$$

انتگرالهای بی‌پایان مکرر

در قضیهٔ ۷.۳۳، نتیجه‌ای به‌دست‌آوردیم که تعویض ترتیب انتگرال‌گیری در ناحیهٔ $\{(x,\ t):a\leqslant x\ ,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ را توجیه می‌کند. همچنین مطلوب است که بتوانیم ترتیب انتگرال‌گیری انتگرال بی‌پایان مکرر را تعویض کنیم. یعنی می‌خواهیم برابری

$$\int_a^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty}f(x\ ,\ t)dx\right\}dt=\int_a^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty}f(x,\ t)dt\right\}dx,\quad (۶.۳۳)$$

را با شرایط مناسبی برقرار کنیم. البته شرط ساده‌ای می‌توان عرضه کرد که همگرایی

مطلق انتگرال را تضمین کند. با این حال، برای بررسی حالتی که انتگرال بی‌پایان الزاماً همگرای مطلق نیست، به‌مجموعه‌ای از شرایط پیچیده‌تری احتیاج است.

۱۲.۳۳ قضیه. فرض‌کنید f تابعی مثبت است‌که برای (x, t) که در $x \geqslant a$ و $t \geqslant \alpha$ صدق می‌کند، تعریف شده است و نیز فرض‌کنیدکه به‌ازای هر $b \geqslant a$

$$\int_a^b \left\{\int_\alpha^{+\infty} f(x, t)dt\right\}dx = \int_\alpha^{+\infty} \left\{\int_a^b f(x, t)\, dx\right\}dt \qquad (۷.۳۳)$$

و به‌ازای هر $\beta \geqslant \alpha$

$$\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^{+\infty} f(x, t)dx\right\}dt = \int_a^{+\infty} \left\{\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt\right\}dx. \qquad (۷'.۳۳)$$

آنگاه، اگر یکی ازانتگرالهای مکرر در معادلهٔ (۶.۳۳) وجود داشته‌باشد، انتگرال دوم نیز وجود دارد وبا هم برابرند.

برهان. فرض‌کنید که انتگرال طرف چپ (۶.۳۳) وجود داشته‌باشد.چون f مثبت است، به‌ازای هر $b \geqslant a$ و $t \geqslant \alpha$،

$$\int_a^b f(x,t)dx \leqslant \int_a^{+\infty} f(x, t)dx.$$

بنابراین ازآزمون مقایسه ۷.۳۲ نتیجه می‌شود که

$$\int_\alpha^{+\infty} \left\{\int_a^b f(x, t)dt\right\} dt \leqslant \int_\alpha^{+\infty} \left\{\int_a^{+\infty} f(x, t)dx\right\}dt.$$

با به‌کاربردن رابطهٔ (۷.۳۳) به‌ازای هر $b \geqslant a$ نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^b \left\{\int_a^{+\infty} f(x, t)dt\right\}dx \leqslant \int_a^{+\infty} \left\{\int_a^{+\infty} f(x, t)dx\right\} dt.$$

یک کاربرد قضیهٔ ۶.۳۲ نشان می‌دهدکه می‌توان از رابطهٔ فوق، وقتی $b \to +\infty$، حد گرفت، بنابراین انتگرال مکرر دیگر نیز وجود دارد و

$$\int_a^{+\infty} \left\{\int_\alpha^{+\infty} f(x, t)dt\right\}dx \leqslant \int_\alpha^{+\infty} \left\{\int_a^{+\infty} f(x, t)dx\right\}dt.$$

هرگاه این استدلال را به‌طریق مشابه در مورد معادلهٔ (۷'.۳۳) به‌کار بریم، نابرابری در جهت عکس را به‌دست خواهیم‌آورد. بنابراین برابری باید برقرار باشد. □

۱۳.۳۳ قضیه. فرض کنید برای $x \geqslant a$ و $t \geqslant \alpha$، f پیوسته است، و توابعی مثبت مانند M و N وجوددارند به‌قسمی که انتگرالهای $\int_a^{+\infty} M$ و $\int_\alpha^{+\infty} N$ وجود دارند. اگر نابرابری

$$|f(x,\ t)| \leqslant M(x)N(t),\ x \geqslant a, t \geqslant \alpha, \qquad (۸.۳۳)$$

برقرار باشد، آنگاه انتگرالهای مکرر در (۶.۳۳) هر دو وجود دارند و باهم برابرند.

برهان. فرض کنیم g برای $x \geqslant a$ و $t \geqslant \alpha$ به‌صورت

$$g(x,\ t) = f(x,\ t) + M(x)N(t)$$

تعریف شده‌باشد، آنگاه

$$0 \leqslant g(x,\ t) \leqslant 2M(x)N(t).$$

چون N در هرفاصلهٔ $[\alpha,\ \beta]$ کراندار است، از نابرابری (۸.۳۳) و آزمون M-وایرشتراس ۳.۳۳ نتیجه می‌شود که انتگرال

$$\int_a^{+\infty} g(x,\ t)dx$$

برای $t \in [\alpha,\ \beta]$ وجود دارد وهمگرای یکنواخت است. با به‌کار بردن قضیهٔ[1] ۷.۳۳ ملاحظه‌می‌کنیم که معادلهٔ (۷'.۳۳)،(که درآن g به‌جای f آمده‌است)،برای هر $\beta \geqslant \alpha$ برقرار است. به‌طریق مشابه، معادلهٔ (۷.۳۳)، (که درآن g به‌جای f آمده است)،برای هر $b \geqslant a$ بر قرار است. همچنین آزمون مقایسهٔ ۷.۳۲ وجود انتگرالهای مکرر در (۶.۳۳) را ، (که در آن g به جای f آمده است) ، ایجاب می‌کند. از قضیهٔ ۱۲.۳۳ نتیجه می‌گیریم که این‌دو انتگرال مکرر g برابرند. اما ازاین برابری نتیجه می‌شود که انتگرالهای دوگانه f نیز وجود دارند وباهم برابرند □.

نتایج‌قبل درمورد حالتی که انتگرالهای مکرر همگرای مطلق‌هستند، به‌کارمی‌روند. اکنون برای حالتی که همگرایی غیرمطلق است، قضیه‌ای می‌آوریم.

۱۴.۳۳ قضیه. فرض‌کنیدکه تابع حقیقی f در(x,t) برای$x \geqslant a$ و $t \geqslant \alpha$ پیوسته باشد و انتگرالهای بی‌پایان

$$\int_a^{+\infty} f(x\ ,\ t)dx\ \ ,\ \int_\alpha^{+\infty} f(x,\ t)dt \qquad (۹.۳۳)$$

بترتیب برای $t \geqslant \alpha$ و $x \geqslant a$ همگرای یکنواخت باشند. علاوه براین F را برای

---

۱. چون درقضیهٔ ۷.۳۳ f پیوسته فرض شده است‌درصورتی این‌قضیه رامی‌توان به‌کاربرد که g پیوسته‌باشد. بنابراین درصورت قضیه باید M و N پیوسته فرض‌شوند. ـم.

$x \geqslant a$ و $\beta \geqslant \alpha$ به‌صورت

$$F(x,\ \beta)=\int_{a}^{\beta} f(x,\ t)dt$$

تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم‌که انتگرال بی‌پایان

$$\int_{a}^{+\infty} F(x,\ \beta)dx \qquad (۱۰.۳۳)$$

برای $\beta \geqslant \alpha$ همگرای یکنواخت باشد. آنگاه هر دو انتگرال بی‌پایان مکرر وجود دارند و با هم برابرند.

برهان . چونکه انتگرال بی‌پایان (۳۳. ۱۰) برای $\beta \geqslant \alpha$ همگرای یکنواخت است، برای $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $A_\varepsilon \geqslant a$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر $A \geqslant A_\varepsilon$، آنگاه برای هر $\beta \geqslant \alpha$،

$$\left|\int_{a}^{A} F(x,\ \beta)dx-\int_{a}^{+\infty} F(x, \beta)dx\right|<\varepsilon. \qquad (۱۱.۳۳)$$

همچنین ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_{a}^{A} f(x,\ \beta)dx=\int_{a}^{A}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(x\ ,\ t)\ dt\right\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{a}^{A} f(x,\ t)\ dx\right\}dt.$$

از قضیهٔ ۷.۳۳ وهمگرایی یکنواخت انتگرال دوم در (۹.۳۳) نتیجه می گیریم که

$$\lim_{\beta \to +\infty}\int_{a}^{A} F(x,\ \beta)dx=\int_{a}^{A}\left\{\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,\ t)dt\right\}dx.$$

بنابراین، عددی مانند $B \geqslant \alpha$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant B$ ، آنگاه

$$\left|\int_{a}^{A} F(x,\ \beta_2)dx-\int_{a}^{A} F(x\ ,\ \ \beta_1)\ dx\right|<\varepsilon. \qquad (۱۲.۳۳)$$

از ترکیب (۱۱.۳۳) و (۱۲.۳۳) نتیجه می‌شود که اگر $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant B$ ، آنگاه

$$\left|\int_{a}^{+\infty} F(x,\ \beta_2)dx-\int_{a}^{+\infty} F(x,\ \beta_1)\ dx\right|<3\varepsilon,$$

و بنابراین وقتی کــه $\beta \to +\infty$، حد $\int_a^{+\infty} F(x,\ \beta)dx$ وجود دارد. قضیهٔ ۷.۳۳ را برای اولین انتگرال همگرای یکنواخت در (۹.۳۳) به‌کار می‌بریم، داریم

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}F(x,\beta)dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^\beta f(x,t)dt\right\}dx$$
$$=\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^{+\infty}f(x,t)dx\right\}dt$$
$$=\int_\alpha^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty}f(x,t)dx\right\}dt.$$

چون وقتی $\beta\to+\infty$ هر دو جملهٔ طرف چپ (۱۱.۳۳) دارای حد هستند، نتیجه می‌گیریم که حد طرف چپ

$$\left|\int_a^A\left\{\int_\alpha^{+\infty}f(x,t)\,dt\right\}dx-\int_\alpha^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty}f(x,t)dx\right\}dt\right|\leqslant\varepsilon.$$

بالاخره، هرگاه $A\to+\infty$، برابری انتگرالهای ناسرهٔ مکرر به‌دست می‌آید. □

قضیه‌های بالا برای تعویض ترتیب انتگرال‌گیری اغلب مورد استفاده هستند، اما هنوز میدانی وسیع برای مهارت و ابتکار باقی است. معمولاً این‌قضایا در ارتباط با قضایای همگرایی کراندار و همگرایی یکنوای ۱۰.۳۳ و ۱۱.۳۳ به‌کار می‌روند.

۱۵.۳۳ چندمثال (الف). اگر $f(x,t)=e^{-(x+t)}\sin xt$، می‌نویسیم $M(x)=e^{-x}$ و $N(t)=e^{-t}$، قضیهٔ ۱۳.۳۳ را به‌کار می‌بریم ونتیجه می‌گیریم که

$$\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-(x+t)}\sin xt\,dx\right\}dt=\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-(x+t)}\sin x\,t\,dt\right\}dx.$$

(ب) اگر $g(x,t)=e^{-xt}$ برای $x\geqslant 0$ و $t\geqslant 0$، آنگاه در خطوط $x=0$ و $t=0$ به‌اشکال برمی‌خوریم. اما اگر $a>0$، $\alpha>0$ و $x\geqslant a$ و $t\geqslant\alpha$، آنگاه توجه می‌کنیم که

$$e^{-xt}=e^{\frac{-xt}{2}}\cdot e^{\frac{-xt}{2}}\leqslant e^{\frac{-\alpha x}{2}}\cdot e^{\frac{-at}{2}}$$

اکنون اگر بگیریم $M(x)=e^{-\alpha x/2}$ و $N(t)=e^{-at/2}$، آنگاه قضیهٔ ۱۳.۳۳ ایجاب می‌کند که

$$\int_\alpha^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty}e^{-xt}\,dx\right\}dt=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^{+\infty}e^{-xt}dt\right\}dx.$$

(پ) تابع $f(x,y)=xe^{-x^2(1+y^2)}$ را برای $x\geqslant a>0$ و $y\geqslant 0$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x)=xe^{-x^2}$ و $N(y)=e^{-a^2y^2}$، آنگاه می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری درناحیهٔ $x\geqslant a$ و $y\geqslant 0$ را تعویض کرد. از

$$\int_a^{+\infty} x\, e^{-(1+y^2)x^2}dx = \frac{-e^{-(1+y^2)x^2}}{2(1+y^2)}\Bigg|_{x=a}^{x\to+\infty} = \frac{e^{-a^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}$$

نتیجه می گیریم که

$$\frac{1}{2}e^{-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}dy = \int_a^{+\infty} e^{-x^2}\left\{\int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}dy\right\}dx.$$

با تغییر متغیر $t=xy$ داریم

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}dy = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = I.$$

لذا نتیجه می‌شود که

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}dy = 2e^{a^2}I\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

اگر $a\to 0$ ، عبارت طرف راست به $2I^2$ همگرا می‌شود . اما درسمت چپ، تابع زیر علامت انتگرال به‌تابع انتگرال‌پذیر $(1+y^2)^{-1}$ محصور است. با به‌کاربردن قضیهٔ همگرایی کراندار نتیجه می گیریم که

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \lim_{a\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}\,dy = 2I^2.$$

بنابراین $I^2=\pi/4$، و فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

(ث) هرگاه دوبار به‌روش جزء به جزء انتگرال بگیریم ، فرمول زیر به‌دست می‌آید :

$$\int_a^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\cos a + \frac{ye^{-ay}}{1+y^2}\sin a. \qquad (۱۳.۳۳)$$

هرگاه $x\geqslant a>0$ و $y\geqslant\alpha>0$ ،می‌توان با استدلالی مشابه با استدلال مثال(ب) نشان داد که

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{e^{-ay}\cos a}{1+y^2}dy + \int_\alpha^{+\infty}\frac{ye^{-ay}\,\sin a}{1+y^2}dy$$
$$= \int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dy\right\}dx = \int_a^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}dx.$$

اکنون می‌خـواهیم a را به‌سمت صفر میل دهیم وحد بگیریم. حد انتگرال اخیر بسهولت به‌دست می‌آید وعبارت‌است از $\int_{\circ}^{+\infty}(e^{-\alpha x}\sin x/x)dx$. چونکه برای $y\geqslant \circ$، عدد ۱ کران $e^{-ay}\cos a$ است و انتگرال $\int_{\alpha}^{+\infty}(1/(1+y^{2}))dy$ وجود دارد، می‌توان قضیهٔ همگرایی محصور ۱۰.۳۳ را به‌کاربرد ونتیجه گرفت که

$$\lim_{a\to\circ}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{e^{-ay}\cos a}{1+y^{2}}dy=\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^{2}}.$$

در انتگرال دوم به‌دست آوردن برآورد مشکلتر است، زیرا اگر به‌طریق مشابه عمل‌شود برآورد

$$\left|\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^{2}}\right|\leqslant\frac{y}{1+y^{2}},$$

به‌دست می‌آید و تـابع سمت راست، انتگرال‌پذیر نیست، بنابراین باید برآورد بهتری به‌دست‌آورد. چون $u\leqslant e^{u}$ و $|\sin u|\leqslant u$ برای $u\geqslant \circ$، نتیجه می‌گیریم که

$$|e^{-ay}\sin a|\leqslant\frac{1}{y},$$

وبرآورد بهتر زیر به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^{2}}\right|\leqslant\frac{1}{1+y^{2}}.$$

اکنون می‌توانیـم قضیهٔ همگـرایی محصور را به‌کاربـریم و از زیر علامت انتگرال حد بگیریم، لذا

$$\lim_{a\to\circ}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^{2}}dy=\circ.$$

به‌این ترتیب به‌رابطهٔ زیر رسیده‌ایم

$$\frac{1}{2}\pi-\operatorname{Arc}\tan\alpha=\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^{2}}=\int_{\circ}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}dx.$$

اکنون می‌خواهیم α را به‌سمت صفرمیل‌دهیم. این‌بار نمی‌توان از قضیهٔ همگرایی‌محصور استفاده کرد، چراکـه $\int_{\circ}^{+\infty}x^{-1}\sin x dx$ همگرای مطلق نیست. اگر چه وقتی $\alpha\to\circ$ همگرایی $e^{-\alpha x}$ به‌سمت ۱ یکنواست، لیکن مثبت ومنفی‌شدن $\sin x$ ایجـاب می‌کند که همگرایی تـابع زیر علامت انتگرال یکنوا نباشد. خوشبختانه قبلاً درمثال ۵.۳۳ (ت) دیدیم که همگرایی انتگرال برای $\alpha\geqslant \circ$ یکنواخت است. بنابراین طبق قضیهٔ ۶.۳۳ ،

انتگرال برای $\alpha \geqslant 0$ پیوسته‌است ودر نتیجه یك‌بار دیگرفرمول‌زیررا به‌دست‌می‌آوریم:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi. \qquad (14.33)$$

تمرین

۳۳.الف. نشان دهید که‌انتگرال $\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx$ برای t درفاصلهٔ$[0, \beta)$ همگرای یکنواخت است، لیکن برای $t \geqslant 0$ همگرای یکنواخت نیست.

۳۳. ب. نشان‌دهیدکه انتگرال

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx$$

برای $t \geqslant 1$ همگرای یکنواخت‌است، اما برای هیچ‌یك‌ازاین‌مقادیر t همگرای‌مطلق‌نیست.

۳۳.پ.برای چه مقادیری از t انتگرالهای بی پایان زیرهمگرای یکنواخت هستند:

(الف) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t^2}$, (ب) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t}$,

(پ) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos tx\, dx$, (ت) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\cos tx\, dx$,

(ث) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2} dx$, (ج) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-x^2-t^2/x^2} dx.$

۳۳. ت. با استفاده ازفرمول (۱۴.۳۳) نشان‌دهیدکه $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

۳۳. ث. با استفاده از فرمول (۱۴.۳۳) نشان‌دهیدکه برای $t>0$ داریم

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

آنگاه درستی مشتق‌گیری را توجیه‌کنید ونشان‌دهیدکه

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1\times 3\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

۳۳. ج. وجود انتگرال $\int_0^{+\infty} (1-e^{-x^2})x^{-2} dx$ را ثابت کنید . (توجه‌کنیدکه تابع زیر علامت انتگرال را می‌توان چنان تعریف‌کردکه در نقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد.) این انتگرال را ازدو راه زیر حساب‌کنید:

(الف) از راه گذاشتن e^{-tx^2} به‌جای e^{-x^2} ومشتق گیری نسبت به t؛
(ب) از راه انتگرال گیری نسبت به t از $\int_1^{+\infty} e^{-tx^2}dx$. درستی هریك از اعمال انجام شده‌را توجیه کنید.

۳۳. چ. فرض کنید F برای $t\in\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos tx\,dx.$$

با استفاده ازمشتق گیری نسبت به t وانتگرال گیری جزء به‌جزء ثابت کنید که

$$F'(t)=F'(t)=-\frac{1}{2}tF(t)$$

آنگاه $F(t)$ را بیابید وبا استفاده ازیك تغییر متغیر درفرمول بالا نشان‌دهید که

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx^2}\cos tx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}\,e^{-t^2/4c},\quad c>0.$$

۳۳. ح. تابع G برای $t>0$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$G(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2}dx.$$

با استفاده از مشتق گیری و تغییر متغیر نشان‌دهید که $G'(t)=-2G(t)$. آنگاه $G(t)$ را بیابید وفرمول زیر را ثابت کنید

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2|t|}.$$

۳۳. خ. با استفاده از فرمول (۳۳.۴) وفرمولهای مقدماتی مثلثات نشان‌دهید که

(الف)
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}1, & a>0\\ 0, & a=0\\ -1, & a<0.\end{cases}$$

(ب)
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos ax}{x}dx=\begin{cases}1, & |a|<1,\\ \frac{1}{2}, & |a|=1,\\ 0, & |a|>1.\end{cases}$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\sin x\sin ax}{x}dx=\frac{۱}{\pi}\log\frac{a+۱}{۱-a},\quad |a|<۱, \qquad \text{(پ)}$$

$$=\frac{۱}{\pi}\log\frac{a+۱}{a-۱},\quad |a|>۱,$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{۲}dx=۱. \qquad \text{(ت)}$$

۳۳. د. فرض‌کنید برای هر $n\in\mathbf{N}$، f_n به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$f_n(x)=\frac{۱}{x},\quad ۱\leqslant x\leqslant n,$$

$$=۰,\quad x>n.$$

نشان‌دهید که هر f_n برای $x\geqslant ۱$ دارای انتگرال است و دنبالهٔ (f_n) کراندار، صعودی یکنواست، و به‌تابع پیوسته‌ای‌که در $\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant ۱\}$ انتگرال‌پذیر نیست، همگرای یکنواخت است.

۳۳. ذ. فرض‌کنید g_n به‌صورت زیر تعریف‌شده‌باشد:

$$g_n(x)=\frac{۱}{n}\ ,\ ۰\leqslant x\leqslant n^{۲}$$

$$=۰\ ,\ x>n^{۲}.$$

نشان‌دهید‌که هر g_n در $۰\leqslant x$ دارای انتگرال است و دنبالهٔ (g_n) کراندار و به‌تابعی مانند g، که در $۰\leqslant x$ دارای انتگرال است، همگراست، ولی برابری زیر درست نیست:

$$\lim\int_{۰}^{+\infty}g_n=\int_{۰}^{+\infty}g.$$

آیا این‌همگرایی یکنواست؟

۳۳. ر. هرگاه $f(x,t)=(x-t)/(x+t)^{۳}$، نشان‌دهید‌که

$$\text{برای‌هر } A\geqslant ۱ \qquad \int_{۱}^{A}\left\{\int_{۱}^{+\infty}f(x\ ,\ t)dx\right\}dt>۰ \ ;$$

$$\text{برای هر } B\geqslant ۱ \qquad \int_{۱}^{B}\left\{\int_{۱}^{+\infty}f(x,t)dt\right\}dx<۰ .$$

بنابراین، نشان‌دهید‌که

$$\int_{1}^{+\infty}\left\{\int_{1}^{+\infty} f(x,\, t)\, dx\right\}dt \neq \int_{1}^{+\infty}\left\{\int_{1}^{+\infty} f(x,\, t)dt\right\}dx.$$

۳۳. ز. از مشابه استدلالی که درمثال ۱۵.۳۳ (پ) آمده است و از فرمولهای مذکور در تمرینهای ۳۳.چ و ۳۳.ح استفاده کنید و نشان‌دهید که

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ty}{1+y^{2}}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}.$$

۳۳. ژ. انتگرالهای مکرر $e^{-(a+y)x}\sin y$ در ربع $x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0$ را درنظر بگیرید ودرستی برابری زیر را تحقیق کنید:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^{2}} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin y}{a+y} dy,\ a > 0.$$

پروژه

۳۳. α. دراین پروژه **تابع گاما** را که درمثال ۱۰.۳۲ (ث) ارائه شده است، مورد بررسی بیشتر قرارخواهیم‌داد. به‌خاطرداریم که تابع Γ برای x در $P = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ به‌صورت انتگرال زیر تعریف شده است:

$$\Gamma(x) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt\,.$$

قبلاً دیده‌ایم که این انتگرال برای $x \in P$ همگراست و $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(الف) نشان‌دهید که Γ در P پیوسته است.

(ب) ثابت کنید که برای $x \in P$ ، $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. (راهنمایی: در فاصلهٔ $[\varepsilon,\, c]$ از راه جزء به‌جزء انتگرال بگیرید.)

(پ) نشان‌دهید که برای $n \in \mathbf{N}$، $\Gamma(n+1) = n!$.

(ت) نشان‌دهید که $\lim\limits_{x \to 0+} x\Gamma(x) = 1$. از این نتیجه بگیرید که Γ در طرف راست $x = 0$ کراندار نیست.

(ث) نشان‌دهید که Γ در P مشتق‌پذیر است و مشتق دوم آن همیشه مثبت است. (بنابراین Γ در P یك تابع محدب است.)

(ج) متغیر t را به‌متغیر دیگری تبدیل کرده، نشان‌دهید که

$$\Gamma(x) = 2\int_{0+}^{+\infty} e^{-s^{2}} s^{2x-1} ds = u^{x} \int_{0+}^{+\infty} e^{-us} s^{x-1} ds.$$

۳۳. β. اکنون به‌ذکر **تابع بتای اویلر** می‌پردازیم. فرض کنید $B(x\,,\, y)$ برای

x و y در $P=\{x\in\mathbf{R}:x>0\}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$B(x,\ y)=\int_{0+}^{1-}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

برای $x\geqslant 1$، $y\geqslant 1$، این انتگرال سره[1] است، ولی اگر $0<x<1$ یا $0<y<1$، این انتگرال ناسره است.

(الف) همگرایی انتگرال را برای x و y در P ثابت کنید.

(ب) ثابت کنید که $B(x,\ y)=B(y,\ x)$.

(پ) نشان‌دهید که هرگاه x و y به P متعلق باشند، آنگاه

$$B(x,\ y)=2\int_{0+}^{(\pi/2)-}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt$$

و

$$B(x,y)=\int_{0+}^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du.$$

(ت) باانتگرال گیری از تابع مثبت

$$f(t,\ u)=e^{-t^2-u^2}t^{2x-1}u^{2y-1}$$

در $\{(t,\ u):t^2+u^2=R^2,\ t\geqslant 0,\ u\geqslant 0\}$ و با مقایسهٔ این انتگرال با انتگرال در مربعهای محاطی ومحیطی، فرمول مهم زیر را به‌دست‌آورید:

$$B(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(ث) فرمولهای انتگرال گیری زیر را به‌دست‌آورید:

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2n}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\ \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2n+1}dx\ \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}.$$

---

۱. اگر شرایط تعریف ۲۹. ۲ انتگرال برقرار باشد، گاه برای متمایزکردن انتگرال از انتگرال ناسره آنرا انتگرال سره گویند.ــم.

۷.۳۳. دراین پروژه وپروژهٔ بعدی، بعضی از خواص تبدیل لاپلاس[1] راکه هم از نظر ریاضی وهم ازنظرکاربردی مهم است، عرضه می‌شود. به‌منظور ساده‌کردن بحث، توجه خود را منحصراً به توابع پیوستهٔ حقیقی f کــه در $\{t\in\mathbf{R}:t\geqslant 0\}$ تعریف شده‌اند، معطوف می‌کنیم. **تبدیل لاپلاس** f، تابع $\hat{f}$ است که برای عدد حقیقی s بافرمول

$$\hat{f}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt,$$

وقتی این انتگرال همگراست، تعریف می‌شود. گـاهی $\hat{f}$ را به‌صورت $\mathfrak{L}(f)$ نمایش می‌دهیم.

(الف) فرض کنید عددی حقیقی مـانند c وجود دارد به‌قسمی‌کـه برای t های به‌انـدازهٔکافی بزرگ، $|f(t)|\leqslant e^{ct}$. آنگاه انتگرالی‌کـه تبدیل لاپلاس $\hat{f}$ را تعریف می‌نماید برای $s>c$ همگراست. علاوه براین برای $s\geqslant c+\delta$، با شرط $\delta>0$، این همگرایی یکنواخت است.

(ب) اگر f به‌مفهوم قسمت (الف) کراندار باشد، آنگاه $\hat{f}$ برای $s>c$ پیوسته است ومشتقی داردکه برابر است با

$$\hat{f}'(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}(-t)f(t)dt.$$

[بنابراین، مشتق تبدیل لاپلاس f تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=-tf(t)$ است.]

(پ) به‌روش استقرا نشان‌دهیدکه اگـر f به‌مفهوم قسمت (الف) کراندار باشد، تابع $\hat{f}$ برای $s>c$ دارای مشتق ازهرمرتبه‌است و

$$\hat{f}^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}(-t)^n f(t)dt\,.$$

(ت) فرض کنید کـه f و g توابع پیوسته‌ای باشند که تبدیلات لاپلاس $\hat{f}$ و $\hat{g}$ آنها برای $s>s_0$ همگرا باشند. نشان‌دهیدکه اگر a و b دوعدد حقیقی باشند، آنگاه تابع $af+bg$ تبدیل لاپلاسی دارد کـه برای $s>s_0$ همگراست وبرابر است بـا $a\hat{f}+b\hat{g}$.

(ث) اگر $a>0$ و $g(t)=f(at)$، آنگاه $\hat{g}$ برای $s<as_0$ همگراست و

$$\hat{g}(s)=\frac{1}{a}\hat{f}(s/a).$$

---

۱. پیر - سیمون لاپلاس Pierre - Simon Laplace (۱۷۴۹ ــ ۱۸۲۷) فـرزند یـك کشاورز نرماندی بود. استاد مدرسهٔ نظام درپاریس‌گردید وبه‌عضویت آکادمی علوم انتخاب شد. بیشتر به‌خاطرکارهایش درمکانیك سماوی ونظریهٔ احتمالات مشهور است.

به‌طریق مشابه، اگر $h(t)=(1/a)f(t/a)$، آنگاه $\hat{h}$ برای $s>s_0/a$ همگراست و

$$\hat{h}(s)=\hat{f}(as).$$

(ج) فرض کنید که $\hat{f}$، تبدیل لاپلاس f، برای $s>s_0$ وجود داشته‌باشد وفرض کنید f برای $t<0$ برابر با صفر باشد. اگر $b>0$ و $g(t)=f(t-b)$، آنگاه $\hat{g}$ برای $s>s_0$ همگراست و

$$\hat{g}(s)=e^{-bs}\hat{f}(s).$$

به‌طریق مشابه نشان‌دهید که اگر $h(t)=e^{bt}f(t)$، که درآن b عددی حقیقی است،آنگاه $\hat{h}$ برای $s>s_0+b$ همگراست و

$$\hat{h}(s)=\hat{f}(s-b).$$

۵.۳۳. این پروژه ادامهٔ پروژهٔ قبلی‌است ودرآن ازنتایج پروژهٔ قبلی استفاده می‌شود.
(الف) جدول مختصر تبدیلات لاپلاس زیر را به‌دست‌آورید:

$f(t)$	$\hat{f}(s)$	فاصلهٔ همگرایی
1	$1/s$	$s>0$,
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$,
e^{at}	$(s-a)^{-1}$	$s>a$,
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$	$s>a$,
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	تمام s ها,
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	تمام s ها,
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s>a$,
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s>a$,
$\dfrac{\sin t}{t}$	$\mathrm{Arc\,tag}(1/s)$	$s>0$.

(ب) فرض کنید که f و f' برای $t \geqslant 0$ پیوسته و $\hat{f}$ برای $s > s_0$ همگرا باشد و وقتی $t \to \infty$، برای $s > s_0$، $e^{-st} f(t) \to 0$. آنگاه تبدیل لاپلاس f' برای $s > s_0$ وجود دارد و

$$\hat{f}'(s) = s\hat{f}(s) - f(0)$$

(راهنمایی: جزء به‌جزء انتگرال بگیرید.)

(پ) فرض کنید که f، f' و f'' برای $t \geqslant 0$ پیوسته باشند و $\hat{f}$ برای $s > s_0$ همگرا باشد. علاوه براین، فرض کنید که $e^{-st} f(t)$ و $e^{-st} f'(t)$ برای هر $s > s_0$، وقتی که $t \to \infty$ به‌صفر میل کنند. نشان‌دهید که در این‌صورت تبدیل لاپلاس f'' برای $s > s_0$ وجود دارد و

$$\hat{f}''(s) = s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0).$$

(ت) هر گاه تمام یا قسمتی از تابع زیر علامت انتگرال یک‌تبدیل لاپلاس باشد، گاهی می‌توان این انتگرال را با تعویض ترتیب انتگرال گیری محاسبه کرد. با این روش، رابطهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \frac{1}{2}\pi.$$

(ث) حل معادلهٔ دیفرانسیل زیر موردنظر است :

$$y'(t) + 2\hat{y}(t) = 3\sin t,\ y(0) = 1.$$

فرض کنید این معادله دارای جوابی مانند y باشد به‌قسمی که تبدیلهای لاپلاس y و y' برای s های به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ وجود داشته‌باشند . در این‌صورت تبدیل y باید در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = 4/(s-1),\ s > 1,$$

که از آن

$$\hat{y}(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s-1)}$$

نتیجه می‌شود. حال بااستفاده ازتجزیهٔ‌کسرها وجدول تبدیلات در (الف) نتیجه بگیرید که $y(t) = (4/3)e^{t} - (1/3)e^{-2t}$. مستقیما نیز می‌توان تحقیق کرد که این تابع یک‌جواب معادله است.

(ج) جواب معادلهٔ

$$y''+y'=0, \quad y(0)=a, \quad y'(0)=b,$$

را با استفاده از تبدیل لاپلاس بیابید.

(چ) نشان‌دهید که معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی با ضرایب ثابت را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس و تجزیه‌کسرهای گویا به کسرهای جزئی حل کرد.

فصل ششم

سریهای بی‌پایان

دراین فصل به‌بررسی مهمترین قضایای نظریهٔ سریهای بی‌پایان می‌پردازیم. اگرچه‌چندین نتیجهٔ جنبی نیز دراینجا آمده است، توجه ما بیشتر به قضیه‌های اساسی است. به‌خواننده توصیه می‌شود برای قضایای درسطح بالا و کاربردهای سری به‌کتابهای جامعتری رجوع کند.

دربخش اول، قضایای اصلی مربوط به همگرایی سریهای بی‌پایان در $\mathbf{R}^p$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. درحقیقت نتایجی که ما دراینجا به‌دست می‌آوریم جنبهٔ عمومی دارند و به‌منظور برقراری همگرایی سریها و تحقیق در درستی برخی از اعمال برروی آنها به‌کار می‌روند.

دربخش ۳۵ برخی از «آزمونهای» معمول برای همگرایی مطلق سریها ارائه می‌شود. در سریهایی‌که این آزمونها قابل اعمال هستند، با هرآزمون که همگرایی سری تضمین شود، تندی همگرایی نیز به‌طورکمی برآورد می‌شود.

دربخش‌بعد، برخی ازآمونهای مفید درمورد همگرایی مشروط آمده است و راجع به سریهای دوگانه و ضرب سریها به‌اختصار بحث شده است.

دربخش ۳۷ سری توابع و خواص اساسی سریهای توانی مورد بررسی قرار می‌گیرند. درآخرین بخش ازاین فصل برخی از نتایج اصلی نظریهٔ سریهای فوریه مورد بررسی قرار خواهندگرفت.

بخش ۳۴ همگرایی سریهای بی‌پایان

درکتابهای درسی مقدماتی، سری بی پایان گاهی باعبارت «سری بی پایان عبارتی است

به‌صورت

$$x_{1}+x_{2}+\cdots+x_{n}+\cdots» \qquad (1.34)$$

تعریف شده‌است. این «تعریف» چندان واضح نیست، چراکه ازقبل به‌حاصل این آرایه‌ازنمادها که تعداد بی‌پایانی عمل جمع را مطرح می‌کند، نمی‌توان مقدارمشخصی نسبت داد. برای سری بی‌پایان چند تعریف مناسب وجود دارد، ما سری بی‌پایان‌را دنبالهٔ مجموعهای‌جزئی تعریف می‌کنیم.

۱۰۳۴ تعریف. اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد، آنگاه **سری بی‌پایانی** (ویا به‌طور ساده سری‌ای) که از X به‌وجود می‌آید، دنبالهٔ $S=(s_k)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_{1}=x_{1},$$

$$s_{2}=s_{1}+x_{2} \quad (=x_{1}+x_{2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{k}=s_{k-1}+x_{k} \quad (=x_{1}+x_{2}+\cdots+x_{k}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

اگر S همگرا باشد، $\lim S$ را **مجموع** سری بی‌پایان گوییم. عناصر x_n را **جمله‌ها** و عناصر s_k را **مجموعهای جزئی** این سری بی‌پایان می‌نامیم.

قرار براین است که عبارت (۱۰۳۴) ویا یکی ازنمادهای زیر:

$$\sum(x_{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}x_{n},$$

هم‌نمایشگر سری بی‌پایانی باشدکه از دنبالهٔ $X=(x_n)$ به‌وجود می‌آید، وهم‌درحالتی که این سری‌بی‌پایان همگراست، $\lim S$ را نمایش دهد. در عمل این استفادهٔ دوگانه از این نمادها ابهامی بوجود نمی‌آورد، به‌شرط آنکه توجه داشته باشیم‌که همگرایی سری باید مسجل شده باشد.

خواننده باید درمورد به‌کار بردن واژه‌های «دنباله» و «سری» احتیاط لازم را به‌کاربرد. در زبان‌عادی‌این دو واژه مترادف هستند، ولی در ریاضی، این‌چنین نیست. طبق تعریف بالا، سری بی‌پایان دنباله‌ای مانند S است‌که از دنبالهٔ مفروضی طبق‌روش بخصوصی‌که دربالا ذکر شد به‌دست آمده است. روشهای بسیار دیگری برای‌ساختن دنباله‌های جدید و نسبت‌دادن «مجموع» به‌دنبالهٔ مفروض X وجود دارد. برای‌مثالهای این‌روشها خواننده باید به‌کتابهای **سریهای واگرا**، **سریهای مجانبی**، **جمع‌پذیری‌سریها** مراجعه کند.

درمورد زیرنویس (اندیس) جمله‌های سری، گرچه معمولاً سری را با $n=1$ شروع می‌کنیم، ولی گاهی مناسبتر است سری را با $n=0$، $n=5$ و یا $n=k$ آغاز کنیم. درچنین حالتی سری نظیر یا مجموع آنرا با نمادهای

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=5}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=k}^{\infty} x_n$$

نمایش می‌دهیم.

در تعریف ۲.۱۴ مجموع و تفاضل دو دنبالهٔ X و Y در $\mathbf{R}^p$ را تعریف کردیم. به‌طریق مشابه، وقتی c عددی حقیقی و w عنصری در $\mathbf{R}^p$ بود، دنباله‌های $cX=(cx_n)$ و $(w\cdot x_n)$ را بترتیب در $\mathbf{R}^p$ و $\mathbf{R}$ تعریف کردیم. اکنون به‌سریهایی‌که از این دنباله‌ها به‌وجود می‌آیند می‌پردازیم.

۲.۳۴ قضیه. (الف) اگر سریهای $\sum(x_n)$ و $\sum(y_n)$ همگرا باشند، آنگاه سری $\sum(x_n+y_n)$ همگراست و بین مجموع این سریها رابطهٔ زیر برقرار است

$$\sum(x_n+y_n)=\sum(x_n)+\sum(y_n).$$

نتیجهٔ مشابهی برای سری‌ای‌که از $X-Y$ به وجود می‌آید برقرار است.

(ب) اگر سری $\sum(x_n)$ همگرا، c عددی حقیقی، و w عنصری ثابت از $\mathbf{R}^p$ باشد، آنگاه سریهای $\sum(cx_n)$ و $\sum(w\cdot x_n)$ همگرا هستند و

$$\sum(cx_n)=c\sum(x_n) \quad \text{و} \quad \sum(w\cdot x_n)=w\cdot\sum(x_n).$$

برهان. این قضیه مستقیماً از قضیهٔ ۶.۱۵ و تعریف ۱.۳۴ نتیجه می‌شود. □

ممکن است انتظار رود که اگر سریهایی‌که از دنباله‌های $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ به‌وجود می‌آیند، همگرا باشند، آنگاه دنبالهٔ $X\cdot Y=(x_n\cdot y_n)$ نیز یك سری همگرا به‌وجود آورد. این‌مطلب همیشه درست نیست، چنانکه بامثال $X=Y=((-1)^n/\sqrt{n})$ دیده می‌شود.

اکنون یك شرط لازم بسیار ساده برای همگرایی سری عرضه می‌شود. البته این شرط کافی نیست.

۳.۳۴ لم. اگر $\sum(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ همگرا باشد، آنگاه $\lim(x_n)=0$.

برهان. بنابرتعریف، همگرایی $\sum(x_n)$ بدان‌معنی است‌که $\lim(s_k)$ وجود دارد. اما $x_k=s_k-s_{k-1}$، لذا $\lim(x_k)=\lim(s_k)-\lim(s_{k-1})=0$. □

با اینکه میدان عمل قضیهٔ بعدی محدود است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۴.۳۴ قضیه. اگـر (x_n) دنباله‌ای از اعـداد حقیقی مثبت بـاشد. آنگاه $\sum(x_n)$ همگراست اگر وفقط اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی $S=(s_k)$ کراندار باشد. در این صورت

$$\sum x_n=\lim(s_k)=\sup\{s_k\}.$$

برهان. چونکه $x_n\geqslant 0$ ، دنبالهٔ مجموعهای جزئی صعودی یکنواست:

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_k\leqslant\cdots.$$

برطبق قضیهٔ همگرایی‌یکنوای ۱.۱۶ ، دنبالهٔ S همگراست اگر وفقط اگرکراندار باشد. □

چون شرط کـوشی زیر دقیقاً بیان دیگـری از قضیهٔ ۱۰.۱۶ است ، اثبات آن را نمی‌آوریم.

۵.۳۴ شرط کوشی برای سریها. سری $\sum(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ همگراست اگر وفقط اگر به‌ازای هر عدد $\varepsilon>0$ ، عـددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجـود داشته باشد به‌قسمی که اگر $m\geqslant n\geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$\|s_m-s_n\|=\|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m\|<\varepsilon.$$

بعداً نشان خواهیم دادکه همگرایی مطلق معمولاً درمبحث سریها از اهمیت خاصی برخوردار است.

۶.۳۴ تعریف. فرض‌کنیم $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد. گوییم سری $\sum(x_n)$ **همگرای مطلق** است هرگاه سری $\sum(\|x_n\|)$ در$\mathbf{R}$همگرا باشد. سری را **همگرای مشروط** گوییم هرگاه سری همگرا باشد. ولی همگرای مطلق نباشد.

باید توجه داشت‌که بـرای سریهایی‌که عناصرشان اعـداد حقیقی مثبت هستند، بین همگرایی و همگرایی مطلق هیچ‌تمایزی نیست. اما برای‌دیگر سریها این مفاهیم می‌توانند متفاوت باشند.

۷.۳۴ قضیه. اگر یک سری در $\mathbf{R}^p$ همگرای مطلق باشد، آنگاه همگراست.

برهان. بنا به فـرض سری $\sum(\|x_n\|)$ همگراست، بنابراین از قسمت لازم شرط کوشی ۵.۳۴ نتیجه می‌شودکه برای هر $\varepsilon>0$ مفروض ، عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر $m\geqslant n\geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$\|x_{n+1}\|+\|x_{n+2}\|+\cdots+\|x_m\|<\varepsilon.$$

بنابر نابرابری مثلثی، طرف چپ این رابطه بزرگتر از

$$\|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m\|$$

یا برابر با آن است. از قسمت کافی شرط کوشی نتیجه می‌گیریم که سری $\sum(x_n)$ همگراست. □

۸.۳۴ چندمثال. (الف) دنبالهٔ حقیقی $X=(a^n)$ که سری هندسی

$$a+a^{2}+\cdots+a^{n}+\cdots \tag{۲.۳۴}$$

را به‌وجود می‌آورد، درنظرمی‌گیریم. یك شرط لازم همگرایی، $\lim(a^n)=0$ که‌از آن $|a|<1$ نتیجه می‌شود. اگر $m\geqslant n$، آنگاه

$$a^{n+1}+a^{n+2}+\cdots+a^{m}=\frac{a^{n+1}-a^{m+1}}{1-a}, \tag{۳.۳۴}$$

برای تحقیق درستی این رابطه، می‌توان دوطرف آن‌را در $1-a$ ضرب و توجه کرد که جمله‌های سمت چپ ادغامی هستند. بنابراین مجموعهای جزئی s_m و s_n در

$$|s_m-s_n|=|a^{n+1}+\cdots+a^{m}|\leqslant\frac{|a^{n+1}|+|a^{m+1}|}{|1-a|},\quad m\geqslant n$$

صدق می‌کنند. اگر $|a|<1$، آنگاه $|a^{n+1}|\to 0$ وبنابراین از شرط کوشی نتیجه می‌شود که‌سری هندسی (۲.۳۴) همگراست اگروفقط اگر $|a|<1$. با قرار دادن $n=0$ در (۳.۳۴) و حدگیری نسبت به m، نتیجه می‌گیریم که (۲.۳۴) برای $|a|<1$ به $a/(1-a)$ همگراست.

(ب) **سری همساز** $\sum(1/n)$ را، که خواننده می‌داند واگراست، درنظرمی‌گیریم. چون $\lim(1/n)=0$، نمی‌توان لم ۳.۳۴ را به‌منظور نشان دادن واگرایی به‌کار برد، بلکه باید از استدلالی ظریفتر استفاده شود و ما بر اساس قضیهٔ ۴.۳۴ عمل می‌کنیم. نشان می‌دهیم که یك زیردنباله از مجموعهای جزئی کراندار نیست. اگر $k_1=2$، آنگاه

$$s_{k_1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2},$$

و اگر $k_2=2^2$، آنگاه

$$s_{k_2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=s_{k_1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>s_{k_1}+2\left(\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2}.$$

با استقرای ریاضی، نشان می‌دهیم که اگر $k_r=2^r$، آنگاه

$$s_{k_r}>s_{k_{r-1}}+2^{r-1}\left(\frac{1}{2^r}\right)=s_{k_{r-1}}+\frac{1}{2}\geqslant 1+\frac{r}{2}.$$

بنابراین زیر دنبالهٔ (s_{k_n}) کراندار نیست و سری همساز واگراست.

(پ) اکنون p سری $\sum(1/n^p)$ را که در آن $0 < p \leqslant 1$، بررسی می‌کنیم و نابرابری مقدماتی $n^p \leqslant n$ برای $n \in \mathbf{N}$ را به‌کار می‌بریم. اولاً برای $0 < p \leqslant 1$ داریم

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^p}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

چون مجموعهای جزئی سری همساز کراندار نیست، این نابرابری نشان می‌دهد که مجموعهای جزئی سری $\sum(1/n^p)$ برای $0 < p \leqslant 1$ کراندار نیست. بنابراین سری برای این مقادیر p واگراست.

(ت) p سری را برای $p > 1$ درنظر می‌گیریم. چون مجموعهای جزئی یکنوا هستند، کافی است برای همگرایی نشان‌دهیم که زیردنباله‌ای ازاین مجموعهای جزئی کراندار است. اگر $k_1 = 2^1 - 1 = 1$، آنگاه $s_{k_1} = 1$ واگر $k_2 = 2^2 - 1 = 3$، آنگاه داریم

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}},$$

وبه‌همین‌ترتیب اگر $k_3 = 2^3 - 1$، آنگاه

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}.$$

فرض کنیم $a = 1/2^{p-1}$؛ چون $p > 1$، دیده می‌شود که $0 < a < 1$. باروش استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم که اگر $k_r = 2^r - 1$، آنگاه

$$0 < s_{k_r} < 1 + a + a^2 + \dots + a^{r-1}.$$

بنابراین عدد $1/(1-a)$ یك کران بالای مجموعهای جزئی p سری، برای $p > 1$، است. لذا از قضیهٔ ۴.۳۴ نتیجه می‌شود که برای این مقادیر p، سری همگراست.

(ث) سری $\sum(1/(n^2+n))$ را درنظر می‌گیریم. با استفاده از کسرهای جزئی، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

این عبارت نشان می‌دهد که مجموعهای جزئی ادغامی هستند و بنابراین

$$s_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

از این نتیجه می‌شود که دنبالهٔ (s_n) به ۱ همگراست.

آرایش مجدد سریها

با عبارتی نه‌چندان دقیق، آرایش مجدد سری، سری دیگری است که جمله‌های آن همان جمله‌های سری مفروض‌اند که به‌ترتیب دیگری نوشته شده‌اند. برای مثال سریهای

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۲n-۱}+\cdots,$$

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\cdots$$

دو آرایش مجدد سری همساز

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}+\cdots,$$

هستند. آرایش مجدد اولی از تعویض جمله‌های اول بادوم، سوم باچهارم، و به‌همین‌ترتیب، به‌دست‌آمده است. سری دوم از سری همساز به‌این‌ترتیب به‌دست آمده‌که درآغاز یك جمله با اندیس فرد، آنگاه دوجمله با اندیس زوج، سپس سه‌جمله با اندیس فرد و ... نوشته شده است. آشکار است‌که سری همساز تعداد بی‌پایانی آرایش مجدد دیگر دارد.

۹.۳۴ تعریف. سری $\sum(y_m)$ در $\mathbf{R}^p$ را **آرایش مجدد** سری $\sum(x_n)$ گوییم، هرگاه یك تابع دوسویی f از $\mathbf{N}$ بر روی $\mathbf{N}$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که برای هر $m\in\mathbf{N}$، $y_m=x_{f(m)}$.

ریمان به نکتهٔ جالب زیر توجه‌کرده است: اگر $\sum(x_n)$ یك سری در $\mathbf{R}$ و همگرای مشروط باشد (یعنی سری همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد) و اگر c عددی حقیقی دلخواه باشد، آنگاه $\sum(x_n)$ آرایش‌مجددی داردکه به c همگراست. روش اثبات این ادعا بسیار مقدماتی است، بدین‌ترتیب‌که درآغاز آنقدر جمله مثبت می‌نویسیم تااینکه به‌یك مجموع جزئی که‌از c بزرگتر باشد، دست‌یابیم، آنگاه‌آنقدر جملهٔ منفی از سری داده شده به‌آن اضافه می‌کنیم تا مجموع جزئی حاصل کمتراز c شود و به‌همین‌ترتیب عمل را ادامه می‌دهیم. چون $\lim(x_n)=۰$، بسهولت می‌توان دیدکه آرایش مجددی‌که بدین‌ترتیب ساخته می‌شود به c همگراست.

وقتی‌روی سریها اعمالی به‌جامی‌آوریم، معمولاً لازم است‌مطمئن‌شویم‌که آرایشهای مجدد درهمگرایی و مقدار حد تأثیری ندارند.

۱۰.۳۴ قضیهٔ آرایش مجدد. فرض کنیم سری $\sum(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ همگرای مطلق باشد. آنگاه هرآرایش مجدد $\sum(x_n)$ به‌همان حد همگرای مطلق است.

برهان . فرض‌کنیم $x=\sum(x_n)$ ، $\sum(y_m)$ یک آرایش مجدد $\sum(x_n)$ ، و K یك کران بالای مجموعهای جزئی $\sum(\|x_n\|)$ باشد. واضح است که اگر

$$t_r=y_1+y_2+\dots+y_r$$

یك مجموع جزئی $\sum(y_m)$ باشد، آنگاه

$$\|y_1\|+\dots+\|y_r\|\leqslant K,$$

که از آن‌نتیجه می‌شود که $\sum(y_m)$ به‌عنصری مانند y در $\mathbf{R}^p$ همگرای مطلق است. اکنون برابری $y=x$ را نشان می‌دهیم. برای $\varepsilon>0$ ، $N(\varepsilon)$ را به‌قسمی می‌گیریم که اگر $m>n\geqslant N(\varepsilon)$ و $s_n=x_1+\dots+x_n$ ، آنگاه $\|x-s_n\|<\varepsilon$ و

$$\sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\|<\varepsilon\,.$$

اینك یك مجموع جزئی t_r از $\sum(y_m)$ را انتخاب می‌کنیم به‌قسمی که $\|y-t_r\|<\varepsilon$ و هریك از $x_1, x_2, \dots, x_n$ در t_r وجود داشته باشند. سپس $m>n$ را به‌اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم به قسمی‌که تمام y_kهایی که در t_r هستند در s_m نیز ظاهر شوند. بنابراین

$$\|x-y\|\leqslant\|x-s_m\|+\|s_m-t_r\|+\|t_r-y\|<\varepsilon+\sum_{n+1}^{m}\|x_k\|+\varepsilon<3\varepsilon.$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم‌که $x=y$. □

تمرین

۳۴. الف. سری $\sum(a_n)$ مفروض است و $\sum(b_n)$ سری دیگری است که ازجمله‌های غیرصفر سری $\sum(a_n)$ تشکیل شده است، یعنی جمله‌های برابر صفر سری حذف شده‌اند. نشان دهید که $\sum(a_n)$ به‌عدد A همگراست اگر وفقط اگر $\sum(b_n)$ به A همگرا باشد.

۳۴. ب. نشان دهید که تغییر تعداد باپایانی از جمله‌ها درهمگرایی سری تأثیری ندارد. (البته ممکن است مجموع تغییر یابد.)

۳۴. پ. نشان دهید که دسته‌بندی جمله‌های یك‌سری همگرا با درج پرانتزهایی که شامل تعداد باپایانی از جمله‌های سری باشند، تأثیری درهمگرایی و یا مقدار حد سری نمی‌گذارد. با این‌حال دسته‌بندی جمله‌های یك سری واگرا ممکن است یك سری همگرا به‌وجود آورد.

۳۴. ت. نشان دهید که اگر یك سری همگرا از اعداد حقیقی فقط شامل تعداد باپایانی جمله‌های منفی باشد، آنگاه همگرای مطلق است.

۳۴. ث. نشان‌دهید که اگر یك‌سری از اعداد حقیقی همگرای مشروط باشد، آنگاه

سری جمله‌های مثبت و سری جمله‌های منفی واگرا هستند.

۳۴. ج. با استفاده از تجزیهٔ کسرها نشان دهید که

(الف) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}=\frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha>0$$

(ب) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}.$$

۳۴. چ. اگر سری اعداد حقیقی $\sum(a_n)$ همگرا باشد، آیا سری $\sum(a_n^2)$ همواره همگراست؟ اگر $a_n\geqslant 0$، آیا سری $\sum(\sqrt{a_n})$ همواره همگراست؟

۳۴. ح. اگر $\sum(a_n)$ همگرا باشد و $a_n\geqslant 0$، آیا سری $\sum(\sqrt{a_na_{n+1}})$ همگراست؟

۳۴. خ. سری اعداد اکیداً مثبت $\sum(a_n)$ مفروض است. فرض کنید برای هر $n\in\mathbf{N}$، b_n به‌صورت $b_n=(a_1+a_2+\dots+a_n)/n$ تعریف شده باشد. نشان‌دهید که $\sum(b_n)$ همواره واگراست.

۳۴. د. فرض کنید $\sum(a_n)$ همگرا وبرای هر $n\in\mathbf{N}$، c_n به‌صورت میانگین وزین زیر تعریف شده باشد:

$$c_n=\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n(n+1)}.$$

نشان دهید که $\sum c_n$ همگرا و برابر با $\sum(a_n)$ است.

۳۴. ذ. سری اعداد مثبت نزولی $\sum(a_n)$ مفروض است. ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ همگراست اگر و فقط اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ همگرا باشد. این نتیجه موسوم به **آزمون تراکم کوشی** است. (راهنمایی: جمله‌های سری را مانند مثال ۸.۳۴ (ب و ت) دسته‌بندی کنید.)

۳۴. ر. بااستفاده‌ازآزمون تراکم‌کوشی درمورد همگراییpسری‌یعنی $\sum(1/n^p)$ بحث کنید.

۳۴. ز. با استفاده از آزمون تراکم کوشی نشان‌دهید که سریهای

$$\sum\frac{1}{n\log n}, \qquad \sum\frac{1}{n(\log n)(\log\log n)},$$

$$\sum\frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)}$$

واگرا هستند.

۳۴. ژ. نشان دهید که هرگاه $c>1$، آنگاه سریهای

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^c}, \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^c}$$

همگرا هستند.

۳۴. س. فرض کنید (a_n) یك دنبالهٔ نزولی یکنوا از اعداد مثبت باشد. نشان دهید که هرگاه سری $\sum(a_n)$ همگرا باشد، آنگاه $\lim(na_n)=0$. آیا عکس این مطلب صحیح است؟

۳۴. ش. اگر $\lim(a_n)=0$، دو سری $\sum(a_n)$ و $\sum(a_n+2a_{n+1})$ یا هردو همگرا و یا هردو واگرا هستند.

بخش ۳۵ آزمونهای همگرایی مطلق

در بخش قبلی قضایایی مربوط بـه اعمال برروی سریهایی بـی‌پایان، بخصوص درحالت مهمی که سریها همگرای مطلق هستند، به‌دست آوردیم. اما، بجز شرط کوشی و این موضوع که جمله‌های یك سری همگرا به‌صفر می‌گراید، هیچ شرط لازم یا کافی دیگری درمـورد همگرایی سریهای بی‌پایان به‌دست نیاوردیم.

اکنون چند قضیه عرضه می‌کنیم که می‌توان آنها را برای بررسی همگرایی سریهای بی‌پایان به‌کار برد. ازنظر اهمیتی که همگرایی مطلق دارد، تـوجه خاصی به آن خـواهیم داشت. اما همگرایی مطلق سری $\sum(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ هم‌ارز با همگرایی سری حقیقی مثبت $\sum(\|x_n\|)$ در $\mathbf{R}$ است، لذا واضح است که قضایای مربوط به‌همگرایی سری حقیقی‌مثبت از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

اولین آزمون ما نشان می‌دهد که اگر جمله‌های یك سری مثبت از جمله‌های نظیر یك سری مثبت همگرا، کوچکتر یا با آن برابر باشد، همگراست. بدین‌ترتیب آزمونی برای همگرایی مطلق به‌دست خواهد آمد که بیان صورت آن با خواننده است.

۱.۳۵ آزمون مقایسه. دو دنبالهٔ حقیقی و مثبت $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ مفروض‌اند و فرض می‌کنیم که عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$x_n \leqslant y_n, \qquad n \geqslant K, \tag{۱.۳۵}$$

آنگاه همگرایی $\sum(y_n)$ همگرایی $\sum(x_n)$ را ایجاب می‌کند.

برهان. اگر $m \geqslant n \geqslant \sup\{K, M(\varepsilon)\}$، آنگاه

$$x_{n+1}+\cdots+x_m \leqslant y_{n+1}+\cdots+y_m < \varepsilon,$$

که درستی قضیه را روشن می‌کند. □

۲.۳۵ آزمون مقایسهٔ حدی. فرض کنید کـه $X=(x_n)$ و $Y=(y_n)$ دو دنبالـهٔ

حقیقی از اعداد مثبت باشند.

(الف) اگر رابطهٔ

$$\lim (x_n / y_n) \neq 0 \qquad (۲.۳۵)$$

برقرار باشد، آنگاه $\sum(x_n)$ همگراست اگر وفقط اگر $\sum(y_n)$ همگرا باشد.

(ب) اگر حد در (۲.۳۵) برابر بـا صفر و $\sum(y_n)$ همگرا بـاشد، آنگاه $\sum(x_n)$ همگراست.

برهان . از (۲.۳۵) نتیجه می‌شود که عددی حقیقی مانند $c>1$ و عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$(1/c)y_n \leqslant x_n \leqslant c y_n, \qquad n \geqslant K.$$

اگر آزمون مقایسهٔ ۱.۳۵ را دوبار به‌کار بریم، قسمت (الف) ثابت می‌شود. قسمت (ب) به‌طریقی مشابه ثابت می‌شود. □

آزمونهای ریشه و نسبت

اکنون به آزمون مهمی می‌پردازیم که منسوب به‌کوشی است.

۳.۳۵ آزمون ریشه. (الف) اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد و عددی حقیقی و مثبت مانند $r<1$ و عددی طبیعی مانند K وجود داشته باشند به‌قسمی که

$$\|x_n\|^{1/n} \leqslant r, \qquad n \geqslant K, \qquad (۳.۳۵)$$

آنگاه سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر عددی مانند $r>1$ و عددی طبیعی مانند K وجود داشته باشند به‌قسمی‌که

$$\|x_n\|^{1/n} \geqslant r \qquad n \geqslant K, \qquad (۴.۳۵)$$

آنگاه سری $\sum(x_n)$ واگراست.

برهان . (الف) اگر (۳.۳۵) بـرقرار باشد، $\|x_n\| \leqslant r^n$. درمثال ۸.۳۴ قسمت (الف) دیدیم که برای $0 \leqslant r < 1$ ، سری $\sum(r^n)$ همگراست. بنابراین باتوجه به آزمون مقایسه، $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است.

(ب) از (۴.۳۵) ، $\|x_n\| \geqslant r^n$ نتیجـه مـی‌شـود . امـا $r \geqslant 1$ ، لـذا شـرط $\lim(\|x_n\|)=0$ نمی‌تواند برقرار باشد. □

آزمون ریشه را علاوه بر تحقیق درهمگرایی $\sum(x_n)$ ، می‌توان به‌منظور بـرآورد

تندی همگرایی به‌کار برد. این برآورد درمحاسبات‌عددی و همچنین در برخی از برآوردهای نظری مفید است.

۴.۳۵ نتیجه. اگر r درشرط $0<r<1$ و دنبالهٔ $X=(x_n)$ در رابطهٔ (۳.۳۵) صدق کند، آنگاه مجموعهای جزئی s_n وقتی $n\geqslant K$، مجموع $s=\sum(x_n)$ را طبق برآورد زیر

$$\|s-s_n\|\leqslant\frac{r^{n+1}}{1-r}, \qquad n\geqslant K \tag{۵.۳۵}$$

تقریب می‌زنند.

برهان. اگر $m\geqslant n\geqslant K$، آنگاه

$$\|s_m-s_n\|=\|x_{n+1}+\cdots+x_m\|\leqslant\|x_{n+1}\|+\cdots+\|x_m\|$$
$$\leqslant r^{n+1}+\cdots+r^m<\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

اگر نسبت به m حد بگیریم، رابطهٔ (۵.۳۵) به‌دست می‌آید. □

برای سهولت، گاه می‌توان از صورت دیگر آزمون ریشه استفاده کرد.

۵.۳۵ نتیجه. دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ مفروض است و فرض می‌کنیم حد

$$r=\lim\left(\|x_n\|^{1/n}\right) \tag{۶.۳۵}$$

وجود داشته باشد. آنگاه $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است اگر $r<1$، و واگراست درصورتی که $r>1$.

برهان. از وجود حد (۶.۳۵) و اینکه حد کوچکتر از ۱ است، نتیجه می‌شود که عددی حقیقی مانند r_1 باشرط $r<r_1<1$ و عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$\|x_n\|^{1/n}\leqslant r_1, \qquad n\geqslant K.$$

دراین‌حالت سری همگرای مطلق است. درصورتی که این حد بزرگتر از ۱ باشد، آنگاه عددی حقیقی مانند $r_2>1$ و عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$\|x_n\|^{1/n}\geqslant r_2, \qquad n\geqslant K,$$

پس دراین حالت سری واگراست. □

دراین نتیجه می‌توان به‌جای حد، از حد زبرین استفاده کرده نتیجه را تعمیم داد.

جزئیات این مطلب درتمرین آمده است. آزمون بعدی منسوب به دالامبر[1] است.

۶.۳۵ آزمون نسبت. (الف) اگر $X=(x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ با عناصر مخالف صفر باشد و هرگاه عدد مثبتی مانند $r<۱$ و عددی طبیعی مانند K با شرط

$$\frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|}\leqslant r, \qquad n\geqslant K \tag{۷.۳۵}$$

وجود داشته باشد، آنگاه سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر عددی مانند $r\geqslant ۱$ و عددی طبیعی‌مانند K وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$\frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|}\geqslant r\,, \qquad n\geqslant K\,, \tag{۸.۳۵}$$

آنگاه سری $\sum(x_n)$ واگراست.

برهان . (الف) اگر (۷.۳۵) برقرار باشد، یك استدلال استقرایی مقدماتی نشان می‌دهدکه برای $m\geqslant ۱$، $\|x_{K+m}\|\leqslant r^m\|x_K\|$. لذا برای $n\geqslant K$ جمله‌های سری $\sum(x_n)$ به مضرب ثابتی از جمله‌های سری هندسی $\sum(r^n)$ با شرط $۰\leqslant r<۱$ محصور است. بنابراین از آزمون مقایسهٔ (۱.۳۵) نتیجه می گیریم که سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است.

(ب) هرگاه (۸.۳۵) برقرار باشد، یك استدلال استقرایی مقدماتی نشان می‌دهد که $\|x_{K+m}\|\geqslant r^m\|x_K\|$ برای $m\geqslant ۱$. چون $r\geqslant ۱$، شرط $\lim(\|x_n\|)=۰$ نمی‌تواند برقرار باشد، بنابراین سری همگرا نیست. □

۷.۳۵ نتیجه. اگر r درشرط $۰\leqslant r<۱$ و دنبالهٔ $X=(x_n)$ برای $n\geqslant r$ در رابطهٔ (۷.۳۵) صدق کند، آنگاه مجموعهای جزئی، طبق برآورد

$$\|s-s_n\|\leqslant\frac{r}{۱-r}\|x_n\|, \qquad n\geqslant K\,, \tag{۹.۳۵}$$

مجموع $s=\sum(x_n)$ را تقریب می‌زنند.

برهان . از رابطهٔ (۷.۳۵)نتیجه می‌شودکه برای $n\geqslant K$، $\|x_{n+k}\|\leqslant r^k\|x_n\|$. بنابراین، اگر $m\geqslant n\geqslant K$ ، آنگاه

---

۱. ژان لورون دالامبر Jean le Rond D'Alembert (۱۷۸۳–۱۷۱۷) فرزند شوالیه دتوش بود. دبیر آکادمی فرانسه و مسئول قسمت ریاضی دائرةالمعارف شد، در دینامیك و معادلات دیفرانسیل آثاری دارد.

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_m\| \leqslant \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\|$$

$$\leqslant (r + r^2 + \dots + r^{m-n})\|x_n\| < \frac{r}{1-r}\|x\|_n.$$

نسبت به m حد می‌گیریم ، رابطهٔ (۹.۳۵) حاصل می‌شود. □

۸.۳۵ نتیجه. دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ مانند $X = (x_n)$ مفروض است و فرض می‌کنیم

$$r = \lim\left(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}\right),$$

وجود دارد. آنگـاه سری $\sum(x_n)$ برای $r < 1$ همگرای مطلق است و بـرای $r > 1$ واگراست.

برهان . فرض کنید که حـد وجـود داشته بـاشد و $r < 1$. اگـر r_1 در شرط $r < r_1 < 1$ صدق کند، آنگاه عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < r_1, \qquad n \geqslant K,$$

دراین حالت ، قضیهٔ ۶.۳۵ همگرایی مطلق سری را ایجاب مـی‌کند . اگر $r > 1$ و r_2 درشرط $r > r_2 > 1$ صدق کند، آنگاه عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > r_2, \qquad n \geqslant K\ ,$$

و دراین حالت سری واگراست. □

آزمون راب

هرگاه $r = 1$ ، دیگر دو آزمون ریشه و نسبت به‌کار نمی‌آیند و همگرایی و یا واگرایی سری هردو امکان‌پذیر است. (ر. ك. مثال۱۳.۳۵(ت).) دربعضی موارد مفید است آزمون نسبت دقیقتری برای حالت $r = 1$ داشته باشیم. نتیجهٔ زیر کـه منسوب به راب[1] است ، معمولاً برای این منظور مناسب است.

۹.۳۵ آزمون راب. (الف) اگر $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ از عناصر مخالف با

---

۱. ژوزف ل. راب Joseph L. Raabe (۱۸۰۱ــ۱۸۵۹) دراوکراین به‌دنیا آمد و در زوریخ تدریس می‌کرد. او هم درهندسه وهم درآنالیز کار کرده است.

صفر باشد و اگر عددی حقیقی مانند $a > ۱$ و عددی طبیعی مانند K وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$\frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|} \leqslant ۱ - \frac{a}{n}, \qquad n \geqslant K, \qquad (۱۰.۳۵)$$

آنگاه $\sum (x_n)$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر عدد حقیقی $a \leqslant ۱$ و عدد طبیعی K وجود داشته باشند به‌قسمی که

$$\frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|} \geqslant ۱ - \frac{a}{n}, \qquad n \geqslant K, \qquad (۱۱.۳۵)$$

آنگاه $\sum (x_n)$ همگرای مطلق نیست.

برهان. (الف) با فرض آنکه رابطهٔ (۱۰.۳۵) برقرار باشد، داریم

$$k\|x_{k+۱}\| \leqslant (k-۱)\|x_k\| - (a-۱)\|x_k\|, \qquad k \geqslant K$$

یا

$$(k-۱)\|x_k\| - k\|x_{k+۱}\| \geqslant (a-۱)\|x_k\| > ۰ \qquad k \geqslant K. \qquad (۱۲.۳۵)$$

درنتیجه دنبالهٔ $(k\|x_{k+۱}\|)$ برای $k \geqslant K$ نزولی است. ازجمع رابطه‌های (۱۲.۳۵) برای $k = K, \ldots, n$ و با توجه به‌این مطلب که طرف چپ رابطه ادغامی است، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(K-۱)\|x_K\| - n\|x_{n+۱}\| \geqslant (a-۱)(\|x_K\| + \cdots + \|x_n\|).$$

این نشان می‌دهد که مجموعهای جزئی سری $\sum (\|x_n\|)$ کراندار هستند و همگرایی‌مطلق سری $\sum (x_n)$ نتیجه می‌شود.

(ب) اگر رابطهٔ (۱۱.۳۵) برای $n \geqslant K$ برقرار باشد، آنگاه چون $a \leqslant ۱$،

$$n\|x_{n+۱}\| \geqslant (n-a)\|x_n\| \geqslant (n-۱)\|x_n\|.$$

بنابراین دنبالهٔ $(n\|x_{n+۱}\|)$ برای $n \geqslant K$ صعودی است و عددی مانند $c > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\|x_{n+۱}\| > c/n, \qquad n \geqslant K$$

چون‌سری‌همساز $\sum (۱/n)$ واگراست، سری $\sum (x_n)$ نمی‌تواندهمگرای مطلق باشد. □

آزمون راب رابرای به‌دست‌آوردن اطلاعات دربارهٔ تندی همگرایی نیزمی‌توانیم به‌کار ببریم.

۱۰.۳۵ نتیجه. اگر $a > ۱$ و دنبالهٔ $X = (x_n)$ در رابطهٔ (۱۰.۳۵) صدق کند، آنگاه مجموعهای جزئی، طبق برآورد

$$\|s - s_n\| \leqslant \frac{n}{a-۱} \|x_{n+۱}\|, \qquad n \geqslant K, \qquad (۱۳.۳۵)$$

مجموع $s = \sum (x_k)$ را تقریب می‌زنند.

برهان . فرض کنیم $m > n \geqslant K$. از جمع نابرابریهای حاصل از (۱۲.۳۵) برای $k = n + ۱, \dots, m$ داریم

$$n\|x_{n+۱}\| - m\|x_{m+۱}\| \geqslant (a-۱)(\|x_{n+۱}\| + \dots + \|x_m\|) .$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\|s_m - s_n\| \leqslant \|x_{n+۱}\| + \dots + \|x_m\| \leqslant \frac{n}{a-۱} \|x_{n+۱}\|;$$

نسبت به m حد می‌گیریم، رابطهٔ (۱۳.۳۵) حاصل می‌شود. □

درکاربرد آزمون راب، گاه ممکن است مناسب باشد از صورت حدی آن که کارایی کمتری دارد استفاده شود.

۱۱.۳۵ نتیجه. فرض کنیم $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$ با عناصر مخالف صفر باشد و حد

$$a = \lim \left(n\left(۱ - \frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|}\right)\right), \qquad (۱۴.۳۵)$$

وجود داشته‌باشد، آنگاه سری $\sum (x_n)$ برای $a > ۱$ همگرای مطلق است و برای $a < ۱$ همگرای مطلق نیست.

برهان . فرض کنیدکه $a > ۱$ و حد (۱۴.۳۵) وجود داشته باشد. اگر $a_۱$ عددی باشد با شرط $a > a_۱ > ۱$ ، آنگاه عددی طبیعی مانند K وجود دارد به‌قسمی که

$$a_۱ < n\left(۱ - \frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|}\right), \qquad n \geqslant K .$$

بنابراین، نتیجه می گیریم که

$$\frac{\|x_{n+۱}\|}{\|x_n\|} < ۱ - \frac{a_۱}{n} \qquad n \geqslant K ,$$

و قضیهٔ ۹.۳۵ ، همگرایی مطلق سری را تضمین می کند. برای حالت $a < 1$ ، به طریق مشابه می‌توان عمل کرد و ما به ذکر آن نمی‌پردازیم. □

آزمون انتگرال

اکنون به‌آزمون‌مهمی می‌پردازیم که منسوب به مکلورن[1] و مربوط به‌یك سری باجمله‌های مثبت است.

۱۲.۳۵ آزمون انتگرال. تابع مثبت، نزولی وپیوستهٔ f در $\{t : t \geqslant 1\}$ مفروض است، سری $\sum f(n)$ همگراست اگر و فقط اگر انتگرال بی‌پایان

$$\int_{1}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n} \left(\int_{1}^{n} f(t)dt\right)$$

وجود داشته باشد. درصورت همگرایی، مجموع جزئی $s_n = \sum_{k=1}^{n} (f(k))$ و مجموع $s = \sum_{k=1}^{\infty} (f(k))$ در برآورد زیر صدق می‌کنند:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant s - s_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)dt \,. \qquad (۱۵.۳۵)$$

برهان . چون f درفاصلهٔ $[k-1, k]$ مثبت، پیوسته و نزولی است

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k-1) \,. \qquad (۱۶.۳۵)$$

از جمع این نابرابریها برای $k = 2, 3, \ldots, n$ رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$s_n - f(1) \leqslant \int_{1}^{n} f(t)dt \leqslant s_{n-1} \,,$$

که نشان می‌دهد دو حد

$$\lim (s_n), \qquad \lim \left(\int_{1}^{n} f(t)dt\right)$$

یا هردو وجود دارند یا هیچکدام وجود ندارند. درصورتی که این دو حد وجود داشته باشند، با جمع نابرابریهای (۱۶.۳۵) برای $k = n+1, \ldots, m$ داریم

---

۱. کالین مکلورن Colin Maclaurin (۱۶۹۸_۱۷۴۶) از دانشجویان نیوتن و استاد در ادینبورو بود. اوسرآمد ریاضی‌دانان بریتانیایی در زمان خود بود وکارهایی در زمینه‌های هندسه و فیزیك ریاضی انجام داده است.

$$s_m - s_n \leqslant \int_n^m f(t)dt \leqslant s_{m-۱} - s_{n-۱},$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$\int_{n+۱}^{m+۱} f(t)dt \leqslant s_m - s_n \leqslant \int_n^m f(t)dt\,.$$

اگر نسبت به m حد بگیریم، رابطهٔ (۱۵.۳۵) به‌دست می‌آید. □

اکنون نشان خواهیم داد که قضایای ۱.۳۵ تا ۱۲.۳۵ را چگونه می‌توان در مورد p سریها (که در مثال ۸.۳۴ (پ) آمده است) به‌کار برد.

۱۳.۳۵ چند مثال. (الف) درآغاز آزمون مقایسه را بـه‌کار می‌بریم. با آگاهی از اینکه سری همساز $\sum(۱/n)$ واگراست، باتوجه به‌اینکه اگر $p\leqslant ۱$، $n^p \leqslant n$ و لذا

$$\frac{۱}{n} \leqslant \frac{۱}{n^p}\,.$$

از آزمون مقایسهٔ ۱.۳۵ نتیجه می‌گیریم کـه p سری یعنی $\sum(۱/n^p)$ بـرای $p \leqslant ۱$ واگراست.

(ب) اکنون حالت $p=۲$، یعنی سری $\sum(۱/n^۲)$، را درنظرمی‌گیریم. این‌سری را می‌توان با سری همگرای $\sum[۱/n(n+۱)]$ درمثال ۸.۳۴ (ث) مقایسه کرد. چـون رابطهٔ

$$\frac{۱}{n(n+۱)} < \frac{۱}{n^۲}$$

برقرار است و جمله‌های سمت چپ یك سری همگرا تشکیل مـی‌دهند، نمی‌توان مستقیماً آزمـون مقایسه را به‌کار بـرد. اما اگـر جملهٔ nام سری $\sum(۱/n(n+۱))$ را با جملهٔ $(n+۱)$ام سری $\sum(۱/n^۲)$ مقایسه می‌کردیم، می‌توانستیم ایـن قضیه را به‌کار بریم. به‌جای این‌کار، ما آزمون مقایسهٔ حدی ۲.۳۵ را به‌کار می‌بریم و توجه می‌کنیم که

$$\frac{۱}{n(n+۱)} \div \frac{۱}{n^۲} = \frac{n^۲}{n(n+۱)} = \frac{n}{n+۱}\,.$$

چون حد این خارج قسمت برابر با ۱ می‌باشد و $\sum[۱/n(n+۱)]$ همگـراست، سری $\sum(۱/n^۲)$ نیز همگراست.

(پ) اکنون حالت $p \geqslant ۲$ را درنظر می‌گیریم. باتوجه به‌اینکه $n^p \geqslant n^۲$ بـرای $p \geqslant ۲$، رابطهٔ

$$\frac{۱}{n^p} \leqslant \frac{۱}{n^۲},$$

نتیجه می‌شود و کاربرد مستقیم آزمون مقایسه، همگرایی سری $\sum(۱/n^p)$ را برای $p \geqslant ۲$ تضمین می‌کند. البته می‌توان آزمون مقایسهٔ حد را نیز به‌کار برد، چراکه

$$\frac{۱}{n^p} \div \frac{۱}{n^۲} = \frac{n^۲}{n^p} = \frac{۱}{n^{p-۲}}.$$

برای $p > ۲$ به‌صفر همگراست و با توجه به‌قضیهٔ ۲.۳۵ (ب) همگرایی‌سری $\sum(۱/n^p)$ برای $p \geqslant ۲$ حاصل می‌شود.

با استفاده از آزمون مقایسه نمی‌توان اطلاعـی دربارهٔ همگرایی p سری بـرای $۱ < p < ۲$ به‌دست آورد، مگر آنکه بتوانیم یك‌سری که ازقبل همگرایی آن مشخص‌شده است پیداکنیم و آن‌را برای مقادیر $۱ < p < ۲$ با این سری مقایسه‌کنیم.

(ت) اکنون آزمونهای ریشه و نسبت را درمورد p سریها به‌کار می‌بریم. توجـه داریم که

$$\left(\frac{۱}{n^p}\right)^{۱/n} = (n^{-p})^{۱/n} = (n^{۱/n})^{-p}.$$

همان‌طوری کـه مـی‌دانیم (ر. ك. مثال ۸.۱۴ (ث)) ، دنبالـهٔ $(n^{۱/n})$ به ۱ همگـراست. بنابراین

$$\lim\left(\left(\frac{۱}{n^p}\right)^{۱/n}\right) = ۱,$$

درنتیجه آزمون ریشه (به‌صورت نتیجهٔ ۵.۳۵) را نمی‌توان به‌کار برد.

به‌طریق مشابه، چون

$$\frac{۱}{(n+۱)^p} \div \frac{۱}{n^p} = \frac{n^p}{(n+۱)^p} = \frac{۱}{(۱+۱/n)^p},$$

و چون دنبالهٔ $(۱+۱/n)^p$ به ۱ همگراست، آزمون نسبت (به‌صورت نتیجهٔ ۸.۳۵) را نیز نمی‌توان به‌کار برد.

(ث) با نومیدی، آزمون راب را درمورد p سری برای مقادیـر صحیح p به‌کار می‌بریم. در آغاز سعی می‌کنیم نتیجهٔ ۱۱.۳۵ را به‌کار بریم. توجه‌کنید که

$$\begin{aligned} n\left(۱-\frac{(n+۱)^{-p}}{n^{-p}}\right) &= n\left(۱-\frac{n^p}{(n+۱)^p}\right) \\ &= n\left(۱-\frac{(n+۱-۱)^p}{(n+۱)^p}\right) = n\left(۱-\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^p\right). \end{aligned}$$

اگر p عدد صحیح باشد، آنگاه می‌توان قضیهٔ دوجمله‌ای را به‌منظور برآورد جملهٔ آخر به‌کار برد، درحقیقت

$$n\left(1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{p}\right)=n\left(1-1+\frac{p}{n+1}-\frac{p(p-1)}{2(n+1)^{2}}+\dots\right).$$

حال اگر نسبت به n حد بگیریم، p حاصل می‌شود. بنابراین نتیجهٔ آزمون راب نشان می‌دهد که برای مقادیر صحیح $p \geqslant 2$ ، سری همگراست. (درصورتی که قضیهٔ دوجمله‌ای را برای مقادیر غیرصحیح p به‌کار بریم نتیجهٔ بهتری به‌دست می‌آید.)

(ج) بالاخره آزمون انتگرال را درمورد p سری به‌کار می‌بریم . می‌گیریم $f(t)=t^{-p}$ و توجه داریم که

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{t}dt=\log(n)-\log(1),$$

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{t^{p}}dt=\frac{1}{1-p}(n^{1-p}-1),\qquad p\neq 1.$$

ازاین رابطه‌ها دیده می‌شود که p سری برای $p>1$ همگرا و برای $p \leqslant 1$ واگراست.

تمرین

۳۵. الف. درهمگرایی سریهای زیر که جملهٔ nام آنها داده شده است بحث کنید.

(الف) $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ (ب) $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$

(پ) $2^{-1/n}$ (ت) $n/2^{n}$

(ث) $[n(n+1)]^{-1/2}$ (ج) $[n^{2}(n+1)]^{-1/2}$

(چ) $n!/n^{n}$ (ح) $(-1)^{n}n/(n+1)$

۳۵. ب. برای هریك از سریهای تمرین ۳۵. الف که همگراست، باقیمانده را درصورتی که فقط چهار جملهٔ اول آن‌را بگیریم، برآورد کنید. هرگاه بخواهیم مجموع را با تقریب ۱/۱۰۰۰ به‌دست آوریم، از هر سری چند جمله باید بگیریم.

۳۵. پ. در همگرایی سریهای زیر که جملهٔ nام آنها (برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ n) داده شده بحث کنید.

(الف) $[\log n]^{-p}$ (ب) $[\log n]^{-n}$

(پ) $[\log n]^{-\log n}$ (ت) $[\log n]^{-\log(\log n)}$

(ث) $[n\log n]^{-1}$ (ج) $[n(\log n)(\log\log n)^{2}]^{-1}$

۳۵. ت. درهمگرایی سریهای زیر که جملهٔ nام آنها داده شده‌اند، بحث کنید.

(الف) $\text{۲}^n e^{-n}$ (ب) $n^n e^{-n}$

(پ) $e^{-\log n}$ (ت) $(\log n) e^{-\sqrt{n}}$

(ث) $n!\, e^{-n}$ (ج) $n!\, e^{-n^{\text{۲}}}$

۳۶. ث. نشان دهید که سری

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲}}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۳}}}+\frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲}}}+\frac{\text{۱}}{\text{۴}^{\text{۳}}}+\cdots$$

همگراست، ولی دو آزمون نسبت و ریشه دراین مورد نتیجه نمی‌دهند.

۳۵. ج. اگر a و b اعدادی مثبت باشند، آنگاه سری

$$\sum \frac{\text{۱}}{(an+b)^p}$$

برای $p > \text{۱}$ همگرا و برای $p \leqslant \text{۱}$ واگراست.

۳۵. چ. درهمگرایی سریهای زیر که جملهٔ nام آنها داده شده است، بحث کنید.

(الف) $\dfrac{n!}{\text{۳}\times\text{۵}\times\text{۷}\times\cdots\times(\text{۲}n+\text{۱})}$ (ب) $\dfrac{(n!)^{\text{۲}}}{(\text{۲}n)!}$

(پ) $\dfrac{\text{۲}\times\text{۴}\times\cdots\times(\text{۲}n)}{\text{۳}\times\text{۵}\times\cdots\times(\text{۲}n+\text{۱})}$ (ت) $\dfrac{\text{۲}\times\text{۴}\times\cdots\times(\text{۲}n)}{\text{۵}\times\text{۷}\times\cdots\times(\text{۲}n+\text{۳})}$.

۳۵. ح. نشان دهید که سری

$$\left(\frac{\text{۱}}{p}\right)^p+\left(\frac{\text{۱}\times\text{۳}}{\text{۲}\times\text{۴}}\right)^p+\left(\frac{\text{۱}\times\text{۳}\times\text{۵}}{\text{۲}\times\text{۴}\times\text{۶}}\right)^p+\cdots$$

برای $p>\text{۲}$ همگرا و برای $p \leqslant \text{۲}$ واگراست.

۳۵. خ. دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ مفروض است و

$$r=\limsup\left(\|x_n\|^{\text{۱}/n}\right).$$

نشان دهید که سری $\sum(x_n)$ برای $r<\text{۱}$ همگرای مطلق و برای $r>\text{۱}$ واگراست. [حد زبرین دنبالهٔ حقیقی کراندار، $u=\limsup(b_n)$، در بخش ۱۸ تعریف شده است و آن عدد یکتای u است با این خواص: (۱) اگر $u<v$، آنگاه $b_n \leqslant v$ برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ $n\in\mathbf{N}$ و (۲) اگر $w<u$، آنگاه $w \leqslant b_n$ برای تعدادی بی‌پایان از مقادیر $n\in\mathbf{N}$.]

۳۵. د. دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ با عناصر مخالف صفر و

$$r=\limsup(\|x_{n+1}\|/\|x_n\|)$$

مفروض‌اند.

(الف) نشان دهید که اگر $r<1$ ، آنگاه سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است.

(ب) مثالی بزنید که سری همگرای مطلق باشد و $r>1$.

(پ) هرگاه $\liminf(\|x_{n+1}\|/\|x_n\|)>1$،نشان‌دهید که‌سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق نیست.

۳۵. ذ. دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}^p$ با عناصر مخالف صفر و

$$a=\limsup(n(1-\|x_{n+1}\|/\|x_n\|))$$

مفروض‌اند.

(الف) اگر $a<1$ ، نشان دهید که سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق نیست.

(ب) مثالی بزنید که سری واگرا باشد و $a>1$.

(پ) هرگاه $\liminf(n(1-\|x_{n+1}\|/\|x_n\|))>1$ ، نشان دهید که سری $\sum(x_n)$ همگرای مطلق است.

۳۵. ر. دنبالهٔ $X=(x_n)$ به‌قسمی‌که $x_n>0$ برای $n\in\mathbf{N}$ ، مفروض است ، نشان دهید که سری $\sum(x_n)$ واگراست، هرگاه

$$\limsup\left((\log n)\left[n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\right]\right)<1\right.\,.$$

۳۵. ز. فرض کنید $x_n>0$ برای $n\in\mathbf{N}$ ، و فرض کنید که

$$n(1-x_{n+1}/x_n)=a+k_n/n^p$$

و $p>0$ و (k_n) کراندار باشد. آنگاه سری $\sum(x_n)$ برای $a>1$ همگرا و برای $a\leqslant 1$ واگراست.

۳۵. ژ. هرگاه $p>0$ و $q>0$ ، سری

$$\sum\frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$$

برای $q>p+1$ همگرا و برای $q\leqslant p+1$ واگراست.

۳۵. س. نشان دهید که سری $\sum(2^n n!)^2/(2n+1)!$ واگراست.

۳۵. ش. فرض کنید $x_n>0$ و $r=\liminf(-\log x_n/\log n)$. نشان دهید که $\sum(x_n)$ برای $r>1$ همگرا و برای $r<1$ واگراست.

۳۵. ص. فرض کنید که‌هیچ یك از اعداد a, b, c ، عدد صحیح منفی یا صفرنباشد. ثابت کنید که سری فوق هندسی

$$\frac{ab}{۱!c}+\frac{a(a+۱)b(b+۱)}{۲!\,c(c+۱)}+\frac{a(a+۱)(a+۲)b(b+۱)(b+۲)}{۳!\,c(c+۱)(c+۲)}+\cdots$$

برای $c>a+b$ همگرای مطلق و برای $c\leqslant a+b$ واگراست.

۳۵. ض. $a_n>۰$ مفروض است و فرض کنید که $\sum(a_n)$ همگرا باشد. سری همگرایی مانند $\sum(b_n)$ باشرط $b_n>۰$ بسازید به‌قسمی که $\lim(a_n/b_n)=۰$. بدین‌ترتیب سری $\sum(b_n)$ با تندی کمتری از $\sum(a_n)$ همگراست. (راهنمایی: (A_n) را دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum(a_n)$ و A را حد آن بگیرید، آنگاه تعریف کنید $r_۰=A$، $r_n=A-A_n$ و $b_n=\sqrt{r_{n-۱}}-\sqrt{r_n}$.)

۳۵. ط. $a_n>۰$ مفروض است. فرض کنید که $\sum(a_n)$ واگرا باشد. سری واگرایی مانند $\sum(b_n)$ با شرط $b_n>۰$ بسازید به‌قسمی که $\lim(b_n/a_n)=۰$. بدین‌ترتیب سری $\sum(b_n)$ با تندی کمتری از سری $\sum(a_n)$ واگراست. (راهنمایی: بنویسید $b_۱=\sqrt{a_۱}$ و $b_n=\sqrt{a_{n-۱}}-\sqrt{a_n}$ برای $n>۱$.)

۳۵. ظ. فرض کنید $\{n_۱, n_۲, \ldots\}$ دستهٔ تمام اعداد طبیعی را که در نمایش دهدهی آنها رقم ۶ به‌کار برده نشده است، نمایش دهد. نشان دهید که سری $\sum(۱/n_k)$ به‌عددی کمتر از ۹۰ همگراست. اگر $\{m_۱, m_۲, \ldots\}$ دستهٔ تمام اعداد طبیعی را که به ۶ ختم می‌شوند نمایش دهد، آنگاه نشان دهید که $\sum(۱/m_k)$ واگراست.

پروژه

۳۵. α. اگرچه حاصلضربهای بی‌پایان به‌اندازهٔ سریهای بی‌پایان مورد استفاده نیستند، اما دربسیاری از بررسیها و کاربردها از اهمیت خاصی برخوردارند. برای سهولت، توجه خود را محدود به حاصلضربهای بی‌پایان با جمله‌های $a_n>۰$ می‌کنیم. اگر $A=(a_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد، آنگاه **حاصلضرب بی‌پایان** یا **دنبالهٔ حاصلضربهای جزئی** تولید شده از دنبالهٔ A، دنبالهٔ $P=(p_n)$ است که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$p_۱=a_۱,\ p_۲=p_۱a_۲(=a_۱a_۲),\ \ldots,$$

$$p_n=p_{n-۱}a_n(=a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}a_n)\ ,\ \ldots\ .$$

اگر دنبالهٔ P به‌عددی مخالف باصفر همگرا باشد، آنگاه $\lim P$ را **حاصلضرب** بی‌پایان حاصل از A می‌نامیم. دراین حالت گوییم که حاصلضرب بی‌پایان **همگرا**ست و ازیکی‌از نمادهای زیر

$$\prod_{n=۱}^{\infty}a_n\ ,\qquad \Pi(a_n),\qquad \text{یا}\qquad a_۱a_۲a_۳\cdots a_n\cdots$$

برای نمایش P و $\lim P$ استفاده می‌کنیم.

(نکته: شرط اینکه $\lim P \neq ۰$، الزامی نیست و فقط قراردادی است چرا که با این شرط برخی از خـواص حاصلضربهای باپایان در مورد حاصلضربهای بی‌پایان نیز برقرار هستند.)

(الف) نشان‌دهید که برای همگرایی حاصلضرب بی‌پایان لازم است که $\lim (a_n) = ۱$.

(ب) ثابت کنید که یك شرط لازم و کافی برای همگرایی

$$a_n > ۰ \qquad \text{،} \prod_{n=۱}^{\infty} a_n, \quad \text{همگرایی} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \log a_n \text{ است.}$$

(پ) جمله‌های حاصلضربهای بی‌پایان اغلب به‌صورت $a_n = ۱ + u_n$ می‌باشند. برای اینکـه محدودیت قبلی حفظ شود فرض می‌کنیم $u_n > -۱$ برای هر $n \in \mathbf{N}$. هـرگاه $u_n \geqslant ۰$، نشان دهید که همگرایی سری بی‌پایان $\sum (u_n)$ یـك شرط لازم و کافـی برای همگرایی حاصلضرب بی‌پایان است. (راهنمایی: آزمون مقایسهٔ حـدی ۲.۳۵ را به کار برید.)

(ت) $u_n > -۱$ مفروض است. نشان‌دهید که اگر سری بی‌پایان $\sum (u_n)$ همگرای مطلق باشد، آنگاه حاصلضرب بی‌پایان $\Pi(۱ + u_n)$ همگراست.

(ث) فرض کنید که $u_n > -۱$ و سری $\sum (u_n)$ همگرا باشد. آنگاه همگرایی سری بی‌پایان $\sum (u_n^۲)$ یك شرط لازم و کافی برای همگرایی حاصلضرب بی‌پایان $\Pi(۱ + u_n)$ است. (راهنمایی: قضیهٔ تیلـر را به‌کار برید ونشان دهید کـه ثابتهای مثبتی مانند A و B وجود دارند به‌قسمی که اگر $|u| < ۱/۲$، آنگاه $Au^۲ \leqslant u - \log(۱ + u) \leqslant Bu^۲$.)

بخش ۳۶ چند نتیجهٔ دیگر درسریها

آزمونهای ارائه شده در بخش ۳۵ تماماً تحت شرایطی خاص همگرایی مطلق سری $\sum (x_n)$ را تضمین می‌کنند. می‌دانیم که همگرایی مطلق، همگرایی معمولی را ایجاب می‌کند، ولی با بررسی سریهای ویژه‌ای مانند

$$\sum \frac{(-۱)^n}{n}, \qquad \sum \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$$

این نتیجه بدست می‌آید که ممکن است سری همگـرا باشد، بدون اینکه همگـرای مطلق باشد. بنابراین علاقه‌مندیم آزمونی داشته باشیم که اطلاعاتی درمورد همگرایـی معمولی سریها به‌دست دهد. تعداد این آزمونها کـه هر کدام درمـورد سریهای مخصوصی به‌کار می‌روند زیاد هستند. شاید در بین این آزمـونها، آزمـونهای منسوب به آبل[۱] و دیریکله

---

۱. نیلس هنریك آبل Niels Henrik Abel (۱۸۰۲–۱۸۲۹) فـرزند یـك کشیش فقیر نروژی بود. درسن بیست و دو سالگی ثابت کرد که حل‌معادلات در جهٔ پنجم درحالت کلی توسط رادیکالها امکان‌پذیر نیست. ایـن ریاضی‌دان نابغهٔ خودساخته درعمر کـوتاهش تحقیقات بسیار جالبی درمورد سریها وتوابع بیضوی نمود و به‌علت بیماری سل در جوانی فوت کرد.

دارای بیشترین کاربرد باشند.

برای بیان این آزمونها احتیاج به لمی داریم که‌گاهی آن‌را **فرمول مجموع جزئی** می‌نامند و دلیل این نامگذاری شباهت آن با فرمول انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء است. ازهمه بیشتر این لم درمواردی به‌کار می‌رود که دنباله‌های X و Y دنباله‌هایی در $\mathbf{R}$ هستند، ولی هرگاه X و Y دنباله‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشند و حاصلضرب داخلی آنها به‌کار رود ویا یکی از دنباله‌های X و Y حقیقی و دیگری در $\mathbf{R}^p$ باشد، این قضایا برقرارند.

۱.۳۶ لم آبل. دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}$ و دنبالهٔ $Y=(y_n)$ در $\mathbf{R}^p$ مفروض‌اند، و (s_k) نمایشگر مجموعهای جزئی سری $\sum(y_n)$ است. اگر $m \geqslant n$، آنگاه

$$\sum_{j=n}^{m} x_j y_j = (x_{m+1}s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m}(x_j - x_{j+1})s_j \,. \qquad (۱.۳۶)$$

برهان . یك اثبات این لم از به‌کار بردن رابطهٔ $y_j = s_j - s_{j-1}$ ومقابلهٔ جمله‌ها درطرفین برابری به‌دست می‌آید. جزئیات اثبات آن به‌خواننده واگذار می‌شود. □

لم آبل را برای نتیجه‌گیری همگرایی سری $\sum(x_n y_n)$ درحالتی که هر دو سری $\sum(x_n)$ و $\sum(y_n)$ ممکن است واگرا باشند، به‌کار می‌بریم.

۲.۳۶ آزمون دیریکله. فرض کنید که مجموعهای جزئی $\sum(y_n)$ کراندار باشند.
(الف) اگر دنبالهٔ $X=(x_n)$ در R به صفر همگرا و

$$\sum |x_n - x_{n+1}| \qquad (۲.۳۶)$$

همگرا باشد، آنگاه سری $\sum(x_n y_n)$ همگراست.
(ب) درحالت خاص، اگر $X=(x_n)$ یك دنبالهٔ نزولی از اعداد حقیقی مثبت و همگرا به صفر باشد، آنگاه سری $\sum(x_n y_n)$ همگراست.

برهان . (الف) فرض‌کنید برای هر j، $\|s_j\| < B$. از (۱.۳۶) برآورد زیر را داریم:

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} x_j y_j\right\| \leqslant \left\{|x_{m+1}| + |x_n| + \sum_{j=n}^{m}|x_j - x_{j+1}|\right\}B \,. \qquad (۳.۳۶)$$

اگر $\lim(x_n)=0$، دوجملهٔ اول طرف راست را می‌توان بدلخواه کوچك کرد، هرگاه m و n به‌قدر کافی بزرگ انتخاب شوند. همچنین، اگر سری (۲.۳۶) همگرا باشد، آنگاه شرط کوشی تضمین می‌کند که جملهٔ آخر این طرف نیز با انتخاب $m \geqslant n \geqslant M(\varepsilon)$ از ε کوچکتر است. بنابراین شرط کوشی، همگرایی سری $\sum(x_n y_n)$ را ایجاب می‌کند.

(ب) اگر $\cdots \geqslant x_{2} \geqslant x_{1}$ ، آنگاه سری (۲.۳۶) ادغامی است و در نتیجه همگراست. □

۳.۳۶ نتیجه. در قسمت (ب) ، برآورد خطای زیر را داریم:

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right\| \leqslant 2 x_{n+1} B ,$$

که درآن B یك کران بالا برای مجموعهای جزئی $\sum(y_j)$ است.

برهان . این رابطه بسهولت از (۳.۳۶) نتیجه می‌شود. □

در آزمون بعدی شرط برروی سری $\sum(y_n)$ قویتر و درعوض شرط برروی $\sum(x_n)$ ضعیفتر است.

۴.۳۶ آزمون آبل. فرض کنید که سری $\sum(y_n)$ در $\mathbf{R}^p$ همگرا باشد.

(الف) اگر دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}$ بقسمی باشد که سری

$$\sum |x_n - x_{n+1}| \qquad (۲.۳۶)$$

همگرا باشد، آنگاه سری $\sum(x_n y_n)$ نیز همگراست.

(ب) درحالت‌خاص، اگر دنبالهٔ $X=(x_n)$ در $\mathbf{R}$ یکنوا و به x همگرا باشد، آنگاه سری $\sum(x_n y_n)$ همگراست.

برهان . (الف) طبق فرض s_k ، مجموعهای جزئی $\sum(y_n)$، به‌یك عنصر s از $\mathbf{R}^p$ همگراست. بنابراین کرانی مانند B برای $\{\|s_k\| : k \in \mathbf{N}\}$ وجود دارد و برای $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی‌مانند $N_1(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که‌اگر $n \geqslant N_1(\varepsilon)$، آنگاه $\|s_n - s\| < \varepsilon$.

اکنون فرض همگرایی (۲.۳۶) ایجاب می‌کند که اگر $n \in \mathbf{N}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}|x_n| &\leqslant |x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})| \\ &\leqslant |x_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| .\end{aligned}$$

بنابراین عددی مانند $A > 0$ وجود دارد به‌قسمی که $|x_n| < A$. علاوه‌براین‌عددی مانند $N_2(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $m > n \geqslant N_2(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$|x_{m+1} - x_n| \leqslant \sum_{j=n}^{m} |x_{j+1} - x_j| < \varepsilon . \qquad (۴.۳۶)$$

اکنون می‌نویسیم $N_3(\varepsilon) = \sup\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. اگر $m > n > N_3(\varepsilon)$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1}s_m - x_n s_{n-1}\| \\
&\leqslant \|x_{m+1}s_m - x_{m+1}s\| + \|x_{m+1}s - x_n s\| + \|x_n s - x_n s_{n-1}\| \\
&\leqslant |x_{m+1}|\,\|s_m - s\| + |x_{m+1} - x_n|\,\|s\| + |x_n|\,\|s - s_{n-1}\| \\
&\leqslant A\varepsilon + \varepsilon B + A\varepsilon = (2A - B)\varepsilon.
\end{aligned}$$

لذا طبق لم آبل ۱.۳۶ ، اگر $N_3(\varepsilon) < n < m$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=n}^{m} x_j y_j\right\| &\leqslant (2A+B)\varepsilon + \left\|\sum_{j=n}^{m} (x_j - x_{j+1}) s_j\right\| \\
&\leqslant (2A+B)\varepsilon + \left(\sum_{j=n}^{m} |x_j - x_{j+1}|\right) B \\
&\leqslant 2(A+B)\varepsilon\ ,
\end{aligned}$$

(درآخرین مرحله از نابرابری (۴.۳۶) استفاده شده است.) چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، همگرایی $\sum (x_j y_j)$ به‌دست آمده است.

(ب) اگر دنبالهٔ (x_n) یکنوا و به x همگرا باشد، آنگاه سری (۲.۳۶) ادغامی است و به $x_1 - x$ ویا $x - x_1$ همگراست. □

با استفاده از استدلال مشابهی می‌توان برآورد خطای زیر را به‌دست آورد.

۵.۳۶ نتیجه. در قسمت (ب) برآورد خطای زیر را داریم

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right\| \leqslant |x_{n+1}|\,\|s - s_n\| + 2B|x - x_{n+1}|\ .$$

سریهای متناوب

سریهایی که جمله‌های آنها به‌طور متناوب مثبت و منفی هستند، دستهٔ بسیار مهمی از سریهای حقیقی همگرای مشروط را تشکیل می‌دهند.

۶.۳۶ تعریف. دنبالهٔ اعداد حقیقی مخالف صفر $X = (x_n)$ را **متناوب** گوییم هرگاه جمله‌های $(-1)^n x_n$ برای $n = 1, 2, \ldots$ تماماً اعدادمثبت (یاتماماً منفی) باشند. اگر دنبالهٔ $X = (x_n)$ متناوب باشد، آنگاه سری $\sum (x_n)$ راکه ازآن به‌وجود می‌آید **سری متناوب** گوییم.

می‌توانیم بنویسیم $x_n = (-1)^n z_n$ و شرط کنیم که برای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $z_n > 0$ (یا $z_n < 0$). درحالتی که قضیهٔزیر رابتوان به‌کاربرد، همگرایی سریهای‌متناوب بآسانی به‌دست می‌آید. این قضیه را لایبنیتز ثابت‌کرده است.

۷.۳۶ آزمون سریهای متناوب. اگر $Z=(z_n)$ دنباله‌ای نزولی از اعداد اکیداً مثبت با شرط $\lim(z_n)=0$ باشد، آنگاه سری متناوب $\sum((-1)^n z_n)$ همگراست. علاوه‌براین، اگر s مجموع این سری و s_n مجموع جزئی nام آن باشد، برای تندی همگرایی برآورد زیر را داریم

$$|s-s_n| \leqslant z_{n+1}. \qquad (۵-۳۶)$$

برهان . اگر در آزمون دیریکله ۲.۳۶ (ب)، y_n را $(-1)^n$ بگیریم، این آزمون نتیجه می‌شود، ولی برآورد خطای ارائه شده در نتیجهٔ ۳.۳۶ بدقت برآورد در (۵.۳۶) نیست. بدین منظور می‌توان مستقیماً با روش استقرای ریاضی نشان داد که اگر $m \geqslant n$، آنگاه

$$|s_m-s_n|=|z_{n+1}-z_{n+2}+\cdots+(-1)^{m-n-1}z_m| \leqslant |z_{n+1}|.$$

از این نابرابری هم همگرایی و هم برآورد (۵.۳۶) یکجا به‌دست می‌آید. □

۸.۳۶ چندمثال (الف) سری $\sum((-1)^n/n)$ که گاهی **سری همساز متناوب** نامیده می‌شود، همگرای مطلق نیست. اما از آزمون سریهای متناوب نتیجه می‌شود که همگراست.

(ب) به‌طریق مشابه، سری $\sum((-1)^n/\sqrt{n})$ همگراست‌ولی همگرای‌مطلق‌نیست.

(پ) فرض‌کنیم $x \in \mathbf{R}$ و $k \in \mathbf{Z}$، آنگاه از

$$2\cos kx \sin\frac{1}{2}x=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x,$$

نتیجه می‌شود که

$$2\sin\frac{1}{2}x[\cos x+\cdots+\cos nx]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x.$$

بنابراین، هرگاه x مضرب صحیحی از 2π نباشد،

$$\cos x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}. \qquad (۶.۳۶)$$

بنابراین، هرگاه $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$،

$$|\cos x + \cdots + \cos nx| \leqslant \frac{۱}{|\sin \frac{۱}{۲}x|}\cdot$$

لذا می‌توان آزمون دیریکله ۳۶-۲ (ب) را به‌کار برد و نتیجه گرفت که سری $\sum(۱/n)\cos nx$ برای هر $x \notin \{۲k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ همگراست. توجه داریم که این‌سری برای $x = ۲k\pi$ با شرط $k \in \mathbf{Z}$ واگراست.

(ت) فرض‌کنیم $x \in \mathbf{R}$ و $k \in \mathbf{Z}$. آنگاه از

$$۲\sin kx \sin\frac{۱}{۲}x = \cos\left(k-\frac{۱}{۲}\right)x - \cos\left(k+\frac{۱}{۲}\right)x,$$

نتیجه می‌شود:

$$۲\sin\frac{۱}{۲}x\,[\sin x + \cdots + \sin nx] = \cos\frac{۱}{۲}x - \cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x.$$

پس، هرگاه x مضرب صحیحی از ۲π نباشد،

$$\sin x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{۱}{۲}x - \cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x}{۲\sin\frac{۱}{۲}x}.$$

بنابراین هرگاه $x \notin \{۲k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$،

$$|\sin x + \cdots + \sin nx| \leqslant \frac{۱}{|\sin\frac{۱}{۲}x|}$$

مانند قبل، آزمون دیریکله همگرایی سری $\sum(۱/n)\sin nx$ را برای هر $x \notin \{۲k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ ایجاب می‌کند. توجه داریم که این‌سری‌برای $x = ۲k\pi$، $k \in \mathbf{Z}$ نیز همگراست.

(ث) فرض‌کنیم $Y = (y_n)$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}^۲$ باشد که عناصر آن به‌صورت زیر داده شده‌اند

$$y_۱ = (۱, ۰), \qquad y_۲ = (۰, ۱), \qquad y_۳ = (-۱, ۰),$$
$$y_۴ = (۰, -۱), \ldots, y_{n+۴} = y_n, \ldots .$$

بسهولت‌دیده می‌شود که‌سری $\sum(y_n)$ همگرا نیست، اما مجموعهای جزئی s_n آن کراندار

هستند. در واقع $\sqrt{2} \leqslant \|s_n\|$. بنابراین از آزمون دیریکله همگرایی‌سری $\sum (1/n) y_n$ در $\mathbf{R}^2$ به‌دست می‌آید.

سریهای دوگانه

گاه لازم است مجموعهای بی‌پایان وابسته بــه دو اندیس صحیح را بررسی کنیم. نظریهٔ این سریهای دوگانه از تبدیل آنها به‌دنباله‌های دوگانه به‌دست می‌آید، درنتیجه می‌توان تمام نتایج بخش ۱۹ درمورد دنباله‌های دوگانه را بــرای سریهای دوگانه به‌کار بــرد. با این‌حال، دراینجا تمام نتایج بخش ۱۹ را بیان نمی‌کنیم. بلکه توجه خود را بیشتر به سریهای دوگانهٔ همگرای مطلق محدود می‌کنیم، چــراکه معمولاً به‌این نوع از سریهای دوگانه بیشتر برمی‌خوریم.

فرض کنید که برای هرجفت (i, j) در $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ یك عنصر x_{ij} در $\mathbf{R}^p$ داریــم. دراین‌صورت می‌توان s_{mn} **مجموع جزئی** (m, n)ام را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$s_{mn} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \,.$$

ازنظر تشابه باتعریف ۱.۳۴، گوییم **سری دوگانهٔ** $\sum (x_{ij})$ به‌عنصر x در $\mathbf{R}^p$ **همگراست**، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجــود داشته باشد به‌قسمی که اگر $m \geqslant M(\varepsilon)$ و $n \geqslant M(\varepsilon)$، آنگاه

$$\|x - s_{mn}\| < \varepsilon \,.$$

از نظر تشابه با تعریف ۶.۳۴، گوییم کــه سری دوگانه $\sum (x_{ij})$ **همگرای مطلق** است هرگاه سری دوگانه $\sum (\|x_{ij}\|)$ در $\mathbf{R}$ همگرا باشد.

به‌عهدهٔ خواننده است نشان دهدکه از همگرایی مطلق سری دوگانه، همگرایی‌سری دوگانه نتیجه مــی‌شود. علاوه‌براین، سری دوگانه همگرای مطلق است اگر و فقط اگر مجموعهٔ

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \|x_{ij}\| : m, n \in \mathbf{N} \right\} \tag{۷.۳۶}$$

مجموعهٔ کرانداری از اعداد حقیقی باشد.

اکنون می‌خواهیم سری دوگانه را با سری مکرر مــربوط کنیم. دراین بحث تنها سریهای همگرای مطلق را درنظرخواهیم گرفت. نتیجهٔ بعدی اگرچه بسیارمقدماتی است، اما محك مفیدی برای همگرایی مطلق سریهای دوگانه است.

۹.۳۶ لم. فرض کنید که سری مکرر $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{ij}\|$ همگــرا بــاشد. آنگاه سری

دوگانهٔ $\sum(x_{ij})$ همگرای مطلق است.

برهان . بنا به‌فرض به‌ازای هر $j\in\mathbf{N}$ ، سری $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{ij}\|$ به عددی مثبت مانند a_j همگراست. علاوه‌براین سری $\sum(a_j)$ به‌عددی مانند A همگراست. آشکار است که دراین‌صورت A کران بالای مجموعهٔ (۷.۳۶) است. □

۱۰.۳۶ قضیه. فرض کنید که سری دوگانهٔ $\sum(x_{ij})$ در $\mathbf{R}^p$ به x همگرای مطلق باشد، آنگاه هردو سری مکرر

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}x_{ij},\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_{ij} \tag{۸.۳۶}$$

به x همگرا هستند.

برهان . بنا به فرض عددی حقیقی و مثبت مانند A وجود داردکه یک‌کران بالای مجموعهٔ (۷.۳۶) است. هرگاه n ثابت باشد، به‌ازای هر m در $\mathbf{N}$ داریم

$$\sum_{i=1}^{m}\|x_{in}\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\|x_{ij}\|\leqslant A\,.$$

لذا نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ ، سری $\sum_{i=1}^{\infty}(x_{in})$ در $\mathbf{R}^p$ نیز به‌عنصری مانند y_n همگرای مطلق است.

اگر $\varepsilon>0$ ، فرض می‌کنیم $M(\varepsilon)$ به‌قسمی باشد که اگر $m\,,\,n\geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$\|s_{mn}-x\|<\varepsilon \tag{۹.۳۶}$$

برطبق رابطهٔ

$$s_{mn}=\sum_{i=1}^{m}x_{i1}+\sum_{i=1}^{m}x_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}x_{in}\,,$$

داریم

$$\begin{aligned}\lim_m(s_{mn})&=\sum_{i=1}^{\infty}x_{i1}+\sum_{i=1}^{\infty}x_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{\infty}x_{in}\\&=y_1+y_2+\cdots+y_n.\end{aligned}$$

هرگاه از رابطهٔ (۹.۳۶) نسبت به m حد بگیریم، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} y_j - x\right\| \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant M(\varepsilon).$$

این رابطه ثابت می‌کند که مجموع مکرر اول در (۸.۳۶) موجود و برابر با x است.
اثبات مشابهی را می‌توان درمورد مجموع مکرر دوم به‌کار برد. □

روش دیگری که برای به‌دست‌آوردن مجموع سری دوگانه موردتوجه است، روش مجموعهای درطول قطرهای $n=i+j$ است.

۱۱.۳۶ قضیه. فرض کنید که سری دوگانهٔ $\sum(x_{ij})$ در $\mathbf{R}^p$ بـه x همگرای مطلق باشد. اگر t_k را به‌صورت

$$t_k = \sum_{i+j=k} x_{ij} = x_{1,k-1} + x_{2,k-2} + \cdots + x_{k-1,1}$$

تعریف کنیم، سری $\sum(t_k)$ به x همگرای مطلق است.

برهان . فرض کنیم A زبرینهٔ مجموعهٔ (۷.۳۶) باشد، و توجه کنیم که

$$\sum_{k=2}^{n} \|t_k\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_{ij}\| \leqslant A.$$

لذا سری $\sum(t_k)$ همگرای مطلق است و کافی است نشان دهیم که به x همگراست. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ وعدد M به‌قسمی باشد که

$$A - \varepsilon < \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \|x_{ij}\| \leqslant A.$$

اگر $m, n \geqslant M$ ، نتیجه می‌شود که $\|s_{mn} - s_{MM}\|$ ، بـرای تمام جفتهای (i, j) کـه در شرط $M < i \leqslant m$ یا $M < j \leqslant n$ صدق می‌کنند ، از مجموع $\sum(\|x_{ij}\|)$ ، بزرگتر نیست. بنابـراین $\|s_{mn} - s_{MM}\| < \varepsilon$ بـرای $m, n \geqslant M$. ایـن نتیجـه مـی‌دهد کـه $\|x - s_{MM}\| \leqslant \varepsilon$. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که اگر $n \geqslant 2M$ ،

$$\left\|\sum_{k=2}^{n} t_k - s_{MM}\right\| < \varepsilon,$$

از این رابطه، $x = \sum t_k$ نتیجه می‌شود. □

حاصلضرب کوشی

عمل ضرب دوسری توانی و گردآوری جمله‌ها برحسب توانها، روش جدیدی را بـرای

تولید یك سری از دوسری مفروض، به‌طریقی طبیعی به‌دست می‌دهد. دراین مبحث مناسب است که اندیس جمله‌های سریها را ۰، ۱، ۲، ... بگیریم.

۱۲.۳۶ تعریف. اگر $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(y_i)$ و $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(z_j)$ دو سری بی‌پایان در $\mathbf{R}^p$ باشند، **حاصلضرب کوشی** آنها سری $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(x_k)$ است که درآن،

$$x_k = y_0 \cdot z_k + y_1 \cdot z_{k-1} + \cdots + y_k \cdot z_0 .$$

دراینجا، نقطه نمایشگرحاصلضرب‌داخلی در $\mathbf{R}^p$ است. به‌طریقی مشابه می‌توان‌حاصلضرب کوشی یك سری در $\mathbf{R}$ و یك سری در $\mathbf{R}^p$ را تعریف کرد.

شاید کمی تعجب‌آور باشدکه حاصلضرب کوشی دوسری همگـرا ممکن است همگرا نباشد. به‌عنوان مثال سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

راکـه همگـراست‌وحاصلضـرب‌کوشی این سری درخـودش را درنظر‌می‌گیریم؛ جملهٔ nام آن برابر است با

$$(-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}}\right].$$

چون کروشه $n+1$ جمله دارد وهرکدام ازآنها از $1/(n+2)$ بزرگترند، جمله‌های سری حاصلضرب‌کوشی به‌صفر همگرا نیست. بنابراین‌سری حاصلضرب کوشی‌نمی‌تواند همگرا باشد.

۱۳.۳۶ قضیه. اگر سریهای $\sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i$ و $\sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j$ به y و z در $\mathbf{R}^p$همگرای‌مطلق‌باشند، حاصلضرب‌کوشی آنها به $y \cdot z$ همگرای مطلق است.

برهان. برای $i, j = 1, 2, \ldots$، می‌نویسیم $x_{ij} = y_i \cdot z_j$. از فرضهای‌قضیه نتیجه می‌شود که سری مکرر $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\|x_{ij}\|$ همگراست. با توجه به لم ۹.۳۶، سری دوگانهٔ $\sum(x_{ij})$ به عددی حقیقی مـانند x همگرای مطلق است. حـال با به‌کار بـردن قضیه‌های ۱۰.۳۶ و ۱۱.۳۶، نتیجه می‌گیریم کـه هردو سری

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} x_{ij}\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} x_{ij}$$

به x همگرا هستند. به‌آسانی دیده می‌شود که سری مکرر به $x=y\cdot z$ همگراست وسری قطری، حاصلضرب کوشی $\sum(y_i)$ و $\sum(z_i)$ است. □

درحالت $p=1$ ، مرتنس[1] ثابت کرده است که همگرایی مطلق یکی از سریها برای همگرایی حاصلضرب کوشی کافی است. علاوه‌براین چزارو نشان داده است که میانگینهای حسابی مجموعهای جزئی حاصلضرب کوشی به yz همگراست. (ر. ك. تمرین‌های ۳۷ س و ش.)

تمرین

۳۶. الف. سری

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}++--\cdots$$

راکه درآن بعداز جملهٔ اول علامت جمله‌ها دو به دو تغییر می‌کند، درنظر می‌گیریم. آیا این سری همگراست؟

۳۶. ب. دنبالهٔ $a_n\in\mathbf{R}$ برای $n\in\mathbf{N}$ مفروض است و $p<q$. هرگاه سری $\sum(a_n/n^p)$ همگرا باشد، آنگاه نشان دهیدکه سری $\sum(a_n/n^q)$ نیز همگراست.

۳۶. پ. هرگاه اعداد p و q اکیداً مثبت باشند، آنگاه سری

$$\sum(-1)^n\frac{(\log n)^p}{n^q}$$

همگراست.

۳۶. ت. درمورد همگرایی سریهای زیر که جملهٔ nام آنها داده شده است بحث کنید.

(الف) $(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ (ب) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(پ) $(-1)^n\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ (ت) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

---

۱. فرانتس (ك. ی.) مرتنس Franz (C. J.) Mertens (۱۸۴۰ـ۱۹۲۷) در برلین تحصیل کرده و درکراکو و وین تدریس نموده است. او بیشتر کارهایی در زمینه‌های هندسه، نظریه اعداد و جبر انجام داده است.

۳۶. ث. سری حقیقی $\sum(a_n)$ را همگرا فرض کنید. همگرایی $\sum(b_n)$ و یا واگرایی آن را بایك مثال نقض نشان دهید. b_nها به‌صورت زیر تعریف شده‌اند.

(الف) a_n/n (ب) $\sqrt{a_n}/n \quad (a_n \geqslant ۰)$

(پ) $a_n \sin n$ (ت) $\sqrt{a_n/n} \quad (a_n \geqslant ۰)$

(ث) $n^{۱/n} a_n$ (ج) $a_n/(۱+|a_n|)$

۳۶. ج. نشان دهیدکه سری

$$۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}++-\ \cdots$$

واگراست.

۳۶. چ. نشان دهیدکه اگر فرض نزولی بودن (z_n) در آزمون سریهای متناوب ۷.۳۶ حذف شود، ممکن است نتیجهٔ آزمون درست نباشد.

۳۶. ح. برای هر $n \in \mathbf{N}$، c_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$c_n=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\ \cdots\ +\frac{۱}{n}-\log n\ .$$

نشان دهیدکه (c_n) دنباله‌ای نزولی ازاعداد مثبت است. C، حد این دنباله را **ثابت اویلر** می‌نامند و تقریباً برابر است با ۵۷۷ر۰ . نشان دهیدکه اگر b_n را با عبارت زیر تعریف کنیم:

$$b_n=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\ \cdots\ -\frac{۱}{۲n}\ ,$$

آنگاه دنبالهٔ (b_n) به $\log ۲$ همگراست. (راهنمایی: $b_n=c_{۲n}-c_n+\log ۲$.)

۳۶. خ. فرض‌کنید سری دوگانهٔ $\sum(a_{mn})$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a_{mn}=+۱ \qquad m-n=۱ \qquad \text{هرگاه}$$
$$=-۱ \qquad m-n=-۱ \qquad \text{هرگاه}$$
$$=\ ۰ \qquad \text{درغیراین دوصورت}$$

نشان دهیدکه هردومجموع مکرر وجود دارند، ولی باهم برابر نیستند، و مجموع دوگانه وجود ندارد. بااین‌حال، اگر (s_{mn}) نمایشگر مجموعهای جزئی باشد، آنگاه $\lim(s_{nn})$ وجود دارد.

۳۶. د. نشان دهیدکه اگر سری دوگانه و سریهای مکرر $\sum(a_{mn})$ وجود داشته باشند، آنگاه تمام آنها با یکدیگر برابرند. نشان دهید که وجود مجموع سری دوگانه

وجود مجموع سریهای مکرر را ایجاب نمی کند، درحقیقت وجـود مجموع سری دو گانه حتی شرط $\lim_n (a_{mn}) = 0$ به‌ازای هر m را ایجاب نمی کند.

۳۶.ذ. نشان دهید که اگر $p>1$ ، $q>1$، آنگاه سریهای دوگانهٔ زیرهمگرا هستند:

$$\sum\left(\frac{1}{m^p n^q}\right) \quad \text{و} \quad \sum\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^p}\right)$$

۳۶. ر. جمله‌های سری $\sum(1/n^2)$ را به دوقسمت زوج و فرد تقسیم کرده ، نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

۳۶. ز. هرگاه $|a|<1$ و $|b|<1$ ، ثابت کنیدکه سری

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$$

همگراست. حد این سری چیست؟

۳۶. ژ. هرگاه $\sum(a_n^2)$ و $\sum(b_n^2)$ همگرا باشند، آنگاه $\sum(a_n b_n)$ همگرای مطلق است و

$$\sum a_n b_n \leqslant \{\sum a_n^2\}^{1/2}\{\sum b_n^2\}^{1/2}.$$

۳۶. س. قضیهٔ مرتنس را ثابت کنید: اگر $\sum(a_n)$ به A همگرای مطلق و $\sum(b_n)$ به B همگرا باشد، آنگاه حاصلضرب کوشی آنها به AB همگراست.(راهنمایی: مجموعهای جزئی را بترتیب با A_n و B_n و C_n نمایش دهید، آنگاه نشان دهید که $\lim (C_{2n} - A_n B_n) = 0$ و $\lim (C_{2n+1} - A_n B_n) = 0$.)

۳۶. ش. قضیهٔ چزارو را ثابت کنید: فرض کنید $\sum(a_n)$ به A همگرا و $\sum(b_n)$ به B همگرا باشد و $\sum(c_n)$ حاصلضرب کوشی آنها باشد. اگر (C_n) دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum(c_n)$ باشد، آنگاه

$$\frac{1}{n}(C_1+C_2+\cdots+C_n) \to AB.$$

(راهنمایی: بنویسید $C_1+\cdots+C_n = A_1 B_n+\cdots+A_n B_1$ واین مجموع را به سه قسمت تقسیم کنید و از اینکه $A_n \to A$ و $B_n \to B$ ، استفاده کنید.)

بخش ۳۷ سری توابع

اکنون به‌بحث درسریهای بی‌پایان توابـع می‌پردازیم، زیرا با آنها زیاد مواجه می‌شویم

و مبحث مهمی است. چون همگرایی سری بی‌پایان از بررسی دنبالهٔ مجموعهای جزئی به دست می‌آید، جواب سؤال مربوط به همگرایی سری توابع نیز از بررسی سؤال نظیر درمورد دنبالهٔ توابع حاصل می‌شود. به‌این دلیل قسمتی از این بخش صرفاً بیان مطالب قبلی در مورد دنبالهٔ توابع با اصطلاحات مربوط به سریهاست. برای مثال، قسمتی از این بخش که مربوط به سری توابع درحالت کلی است، چنین وضعی دارد. اما درقسمت‌دوم بخش که درمورد سریهای توانی بحث می‌شود، به‌بعضی خواص جالب‌جدیدی برمی‌خوریم که صرفاً از سرشت خاص توابع مورد بحث نتیجه می‌شوند.

۱۰۳۷ تعریف. اگر (f_n) دنبالهٔ توابعی باشد که دریك زیرمجموعهٔ D از $\mathbf{R}^p$ تعریف شده‌اند و مقادیرشان در $\mathbf{R}^q$ است، آنگاه (s_n)، دنبالهٔ **مجموعهای جزئی** سری بی‌پایان $\sum(f_n)$، درهرنقطهٔ D، مانند x، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_1(x)=f_1(x),$$

$$s_2(x)=s_1(x)+f_2(x) \qquad [=f_1(x)+f_2(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$s_{n+1}(x)=s_n(x)+f_{n+1}(x) \qquad [=f_1(x)+\cdots+f_n(x)+f_{n+1}(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

اگر دنبالهٔ (s_n) در D به f همگرا باشد، گوییم سری بی‌پایان‌توابع $\sum(f_n)$ در D به f **همگراست.** معمولاً سری یا تابع حد آن را وقتی که موجود است به‌صورتهای

$$\sum(f_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(f_n), \qquad \text{یا} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

نشان می‌دهیم.

اگر سری $\sum(\|f_n(x)\|)$ به‌ازای هر x در D همگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum(f_n)$ در D **همگرای مطلق** است. هر گاه دنبالهٔ (s_n) در D به f همگرای یکنواخت باشد، گوییم $\sum(f_n)$ در D **همگرای یکنواخت** است و یا اینکه **در** D **به** f **همگرای یکنواخت** است.

یکی از دلائل اصلی توجه به همگرایی یکنواخت سریهای توابع وجود قضایای زیر است که درآنها شرایطی ذکرشده که اگر برقرار باشند می‌توان مجموع‌یابی را قبل یابعداز دیگر اعمال حدی به‌جای آورد.

۲۰۳۷ قضیه. اگر f_n به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ در $D\subseteq\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ پیوسته باشد و $\sum(f_n)$ در D به f همگرای یکنواخت باشد، f در D پیوسته است.

این قضیه بیان قضیهٔ ۱۰۲۴ است که در آن مفهوم سری به‌کار رفته است. قضیهٔ بعدی نیز بیانی از قضیهٔ ۲.۳۱ می‌باشد.

۳.۳۷ قضیه. فرض کنید تابع حقیقی f_n برای هر $n \in \mathbf{N}$، نسبت به‌تابع یکنوای g در فاصلهٔ $J = [a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان - استیلتیس باشد. اگر سری $\sum(f_n)$ در J به f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه f نسبت به g انتگرال‌پذیر ریمان - استیلتیس است و داریم

$$\int_a^b f dg = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dg. \tag{۱.۳۷}$$

اکنون قضیهٔ همگرایی یکنوای ۴.۳۱ را درمورد سریها مطرح می‌کنیم.

۴.۳۷ قضیه. اگر توابع مثبت f_n در $J = [a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند و مجموع آنها، $f = \sum(f_n)$، انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n. \tag{۲.۳۷}$$

حال به قضیه‌ای که مربوط به مشتق‌گیری است می‌پردازیم. دراینجا فرض می‌کنیم که سری حاصل ازمشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ سری داده شده همگرای یکنواخت‌است. این قضیه بدین‌ترتیب نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ ۵.۲۸ می‌باشد.

۵.۳۷ قضیه. فرض کنیم به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، تابع حقیقی f_n در $J = [a, b]$ دارای مشتق f'_n باشد. فرض کنیم سری بی‌پایان $\sum(f_n)$ حداقل دریك نقطهٔ J همگرا باشد و سری مشتقها، یعنی $\sum(f'_n)$ در J همگرای یکنواخت باشد، آنگاه یك تابع حقیقی مانند f در J وجود دارد به‌قسمی‌که $\sum(f_n)$ در J به f همگرای یکنواخت است. علاوه‌براین، f در J مشتق دارد و

$$f' = \sum f'_n. \tag{۳.۳۷}$$

آزمونهای همگرایی یکنواخت

چون برخی ازنتایج مربوط به‌همگرایی یکنواخت سریها را بیان کرده‌ایم، اکنون به‌ذکر چند آزمون درمورد همگرایی یکنواخت می‌پردازیم.

۶.۳۷ شرط کوشی. دنباله‌ای از توابع در $D \subseteq \mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ مانند (f_n) مفروض است. سری بی‌پایان $\sum(f_n)$ در D همگرای یکنواخت است اگر و فقط اگر برای هر

۰ $<\varepsilon$ ، عددی مانند $M(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که اگر $m \geqslant n \geqslant M(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$\|f_n+f_{n+1}+\cdots+f_m\|_D<\varepsilon. \qquad (۴.۳۷)$$

اثبات این قضیه از قضیهٔ نظیر آن یعنی‌از ۱۱.۱۷ ، که شرط کوشی برای همگرایی یکنواخت دنباله‌هاست، بآسانی به‌دست می‌آید.

۷.۳۷ آزمون M ـ وایرشتراس. دنبالهٔ اعداد حقیقی دغیرمنفی (M_n) به‌قسمی که $\|f_n\|_D \leqslant M_n$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ مفروض است. اگـر سری بی‌پایان $\sum(M_n)$ همگـرا باشد. آنگاه $\sum(f_n)$ در D همگرای یکنواخت است.

برهان . هرگاه $m>n$ ، داریم

$$\|f_n+\cdots+f_m\|_D \leqslant \|f_n\|_D+\cdots+\|f_m\|_D \leqslant M_n+\cdots+M_m.$$

اکنون از محکهای کـوشی ۵.۳۴ و ۶.۳۷ و همگـرایی $\sum(M_n)$ ، نتیجـه حـاصل می‌شود. □

دو قضیهٔ بعدی برای تحقیق درهمگرایی یکنواخت موقعی که همگرایی مطلق‌نیست، بسیار مفید هستند. اثبات آنهـا از برهانهای ۲.۳۶ و ۴.۳۶ پس از تغییراتـی مناسب ، به‌دست می‌آیند و به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده وا گذار می‌شوند.

۸.۳۷ آزمون دیریکله. فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای از تـوابع در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ باشد به‌قسمی که مجموعهای جزئی

$$s_n=\sum_{j=1}^{n} f_j, \qquad n \in \mathbf{N},$$

تماماً برحسب D ـ نرم کراندار باشند. فرض کنیم (φ_n) یك دنبالهٔ نـزولی یکنوا از توابع در D ، به $\mathbf{R}$ باشد که در D به صفر همگـرای یکنواخت است. آنگاه سری $\sum(\varphi_n f_n)$ در D همگرای یکنواخت است.

۹.۳۷ آزمون آبل. فرض کنیم $\sum(f_n)$ یـك سری تـوابع در $D \subseteq \mathbf{R}^p$ ، به $\mathbf{R}^q$ باشدکه در D همگرای یکنواخت است. فرض کنیم (φ_n) یك دنبالهٔ یکنوا از توابع حقیقی در D باشد که برحسب D ـ نرم کـراندار است. آنگاه سری $\sum(\varphi_n f_n)$ در D همگرای یکنواخت است.

۱۰.۳۷ چندمثال. (الف) سری $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n^2)$ را درنظرمی گیریم. اگر $|x| \leqslant 1$ ،

آنگاه $|x^n/n^2| \leqslant 1/n^2$. چون سری $\sum(1/n^2)$ همگراست ، با توجه به آزمون M - وایرشتراس سری داده شده درفاصلهٔ $[-1, 1]$ همگرای یکنواخت است.

(ب) سری حاصل از مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ سری مفروض درمثال (الف) یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}/n)$ را درنظر می‌گیریم . آزمون M - وایرشتراس را نمی‌توان در فاصلهٔ $[-1, 1]$ به‌کار برد، بنابراین قضیهٔ ۵.۳۷ را نمی‌توان به‌کار برد . در واقع ، آشکار است که سری مشتق درنقطهٔ $x = 1$ همگرا نیست. با این‌حال، اگر $0 < r < 1$ ، آنگاه سری هندسی $\sum(r^{n-1})$ همگراست. چون برای $|x| \leqslant r$ ،

$$\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right| \leqslant r^{n-1},$$

از آزمون M - وایرشتراس نتیجه می‌شود که سری مشتق درفاصلهٔ $[-r, r]$ همگرای یکنواخت است.

(پ) آزمون M - وایرشتراس (برای $M_n = 1/n^2$) نشان می‌دهد که سری $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n^2)\sin nx$ در $\mathbf{R}$ همگرای یکنواخت است.

(ت) چون سری همساز $\sum(1/n)$ واگراست، نمی‌توان آزمون M - وایرشتراس را برای سری زیر به‌کار برد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx \,. \tag{۵.۳۷}$$

با این حال ، از بحث درمثال ۸.۳۶ (ت) نتیجه می‌شود که اگر فاصلهٔ $J = [a, b]$ درفاصلهٔ باز $(0, 2\pi)$ واقع باشد ، مجموعهای جزئی $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin kx$ در J کراندار یکنواخت هستند. چون دنبالهٔ $(1/n)$ به‌سمت صفر نزول می‌کند، آزمون‌دیریکلهٔ ۸.۳۷ ایجاب می‌کند که سری (۵.۳۷) در J همگرای یکنواخت باشد.

(ث) سری $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/n)\,e^{-nx}$ را درفاصلهٔ $\mathbf{I} = [0, 1]$ درنظر می‌گیریم.

چون نرم جملهٔ nام سری $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/n)$ در $\mathbf{I}$ برابر $1/n$ است، نمی‌توان آزمون M - وایرشتراس را به‌کار برد. آزمون دیریکله را درصورتی می‌توانیم به‌کار بریم که نشان‌دهیم مجموعهای جزئی $\sum((-1)^n e^{nx})$ کراندارهستند. آزمون آبل‌را هم‌می‌توان به‌کار برد، چرا که $\sum((-1)^n/n)$ همگراست و دنبالهٔ کراندار (e^{-nx}) در $\mathbf{I}$ نزولی یکنواست. (لیکن به‌صفر همگرای یکنواخت نیست.)

سریهای توانی

اکنون به بحثی درمورد سریهای توانی می‌پردازیم. این ردهٔ مهم از سریهای توابع از خواصی برخوردارند که درسریهای توابع درحالت کلی وجود ندارند.

۱۱.۳۷ تعریف. سری توابع حقیقی $\sum(f_n)$ را **سری توانی درحول** $x=c$ گوییم، هرگاه تابع f_n به‌صورت

$$f_n(x)=a_n(x-c)^n$$

باشد، که درآن a_n و c متعلق به $\mathbf{R}$ می‌باشند و $n=0, 1, 2, \ldots$.

به‌خاطر سادگی نمادگذاری، فقط به‌حالت $c=0$ می‌پردازیم، این عمل از کلیت مطلب نمی‌کاهد، چراکه باانتقال $x'=x-c$ سری توانی درحول c را می‌توان به سری توانی درحول ۰ تبدیل کرد. بنابراین مقصود ما از سری توانی، یك سری به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots . \qquad (۶.۳۷)$$

با اینکه توابعی که در (۶.۳۷) ظاهر می‌شوند درتمام $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند، نباید انتظار داشت که سری (۶.۳۷) برای هر x در $\mathbf{R}$ همگرا باشد. برای مثال، با آزمون نسبت ۸.۳۵، می‌توان نشان دادکه سریهای

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!,$$

بترتیب برای xهای واقع درمجموعه‌های

$$\{0\}, \quad \{x\in\mathbf{R} : |x|<1\}, \quad \mathbf{R},$$

همگرا هستند. بنابراین مجموعه‌ای که در آن، سری توانی همگراست، می‌تواندکوچك، متوسط و یا بزرگ باشد. بااین حال نشان خواهیم داد که هرزیرمجموعهٔ دلخواه $\mathbf{R}$ نمی‌تواند مجموعهٔ همگرایی یك سری‌توانی (یعنی مجموعهٔ متشکل از تمام نقاطی از $\mathbf{R}$ که سری توانی درآن نقاط همگراست) باشد.

اگر (b_n) دنباله‌ای کراندار ازاعداد حقیقی‌غیرمنفی باشد، آنگاه **حد زبرین** (b_n) عبارت است از زیرینهٔ اعداد v به‌قسمی‌که برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ $n\in\mathbf{N}$، $b_n \leqslant v$. این زیرینه مشخص ویکتاست و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\limsup\,(b_n) .$$

برخی دیگر ازخواص مشخصه و ویژگیهای حدزبرین دنباله دربخش ۱۸ ارائه شده است.

اما دراینجا تنها نیاز داریم بدانیم که (۱) اگر $v > \limsup(b_n)$ ، آنگاه برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ $n\in \mathbf{N}$ ، $b_n \leqslant v$ و (۲) اگر $w < \limsup(b_n)$ ، آنگاه برای تعدادی بی‌پایان ازمقادیر $n\in \mathbf{N}$ ، $w \leqslant b_n$.

۱۲.۳۷ تعریف. سری توانی $\sum(a_n x^n)$ مفروض است. هرگاه دنبالهٔ $(|a_n|^{1/n})$ کراندار باشد، می‌نویسیم $\rho = \limsup(|a_n|^{1/n})$. هرگاه این دنباله کراندار نباشد، می‌نویسیم $\rho = +\infty$. **شعاع همگرایی** (سری $\sum(a_n x^n)$) را به R نمایش می‌دهیم و آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = 0, \qquad \rho = +\infty, \quad \text{هرگاه}$$

$$= \frac{1}{\rho}, \qquad 0 < \rho < +\infty, \quad \text{هرگاه}$$

$$= +\infty, \quad \rho = 0 \qquad \text{هرگاه}$$

فاصلهٔ همگرایی فاصلهٔ باز $(-R, R)$ است.

حال به‌توجیه اصطلاح «شعاع همگرایی» می‌پردازیم.

۱۳-۳۷. قضیهٔ کوشی - آدامار[1]**.** اگر R شعاع همگرایی سری توانی $\sum(a_n x^n)$ باشد، آنگاه سری برای $|x| < R$ همگرای مطلق و برای $|x| > R$ واگر است.

برهان. قضیه‌را برای‌حالت $0 < R < +\infty$ ثابت‌خواهیم کرد وحالات $R = 0$ و $R = +\infty$ را در تمرین‌خواهیم آورد. اگر $0 < |x| < R$، عددی مثبت مانند $c < 1$ وجود دارد به‌قسمی که $|x| < cR$. بنابراین $\rho < c/|x|$ ، و نتیجه می‌شود که برای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ n ، داریم $|a_n|^{1/n} \leqslant c/|x|$ که هم ارز است بااین گزاره که برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ n ،

$$|a_n x^n| \leqslant c^n. \tag{۷.۳۷}$$

چون $c < 1$ ، همگرایی مطلق $\sum(a_n x^n)$ از آزمون مقایسه ۱.۳۵ نتیجه می‌شود.

اگر $|x| > R = 1/\rho$ ، آنگاه تعدادی بی‌پایان از مقادیر $n\in \mathbf{N}$ وجود دارد به

---

[1] ژاك آدامار Jacques Hadamard (۱۸۶۵-۱۹۶۳) که سالها میان ریاضی‌دانان فرانسوی مقام اول را داشت، و درامتحان ورودی مدرسهٔ پلی‌تکنیك با بیشترین معدل در قرن اول تأسیس این مدرسه، پذیرفته شد. درآکادمی علوم جانشین هانری پوانکاره بود و قضیهٔ عدد اول راکه گاوس پیش‌بینی کرده بود درسال ۱۸۹۶ ثابت‌کرد، آدامار کارهای دیگری نیز در نظریهٔ اعداد، آنالیز مختلط، معادلات دیفرانسیل جزئی و حتی روانشناسی انجام داده است.

قسمی که $|a_n|^{1/n} \geqslant 1/|x|$. بنابراین برای تعدادی بی‌پایان ازمقادیر n، $|a_n x^n| \geqslant 1$.
لذا دنبالهٔ $(a_n x^n)$ به‌صفر همگرا نیست. □

لازم به‌تذکر است که قضیهٔ کوشی ـ آدامار در مورد همگرایی یا واگرایی سریهای توانی درحالت $|x| = R$، چیزی نمی‌گوید. درحقیقت به طوری که مثالهای زیر نشان می‌دهند، وقوع همهٔ حالات همگرایی یا واگرایی امکان دارد.

$$\sum x^n \;,\; \sum \frac{1}{n} x^n \;,\; \sum \frac{1}{n^2} x^n \qquad (8.37)$$

چون $\lim (n)^{1/n} = 1$ (ر. ك. مثال ۸.۱۴ (ث))، شعاع همگرایی هریك ازاین سریهای توانی برابر با ۱ می‌باشد. سری توانی اول درهیچ یك از نقاط $x = +1$ و $x = -1$ همگرا نیست، سری دوم در نقطهٔ $x = -1$ همگرا ولی در نقطهٔ $x = +1$ واگراست. و بالاخره سومین سری توانی در هردو نقطهٔ $x = -1$ و $x = +1$ همگراست. (یك سری توانی با $R = 1$ که درنقطهٔ $x = +1$ همگرا و درنقطهٔ $x = -1$ واگراست، بیابید.)
به‌عنوان یك تمرین نشان دهید که اگر حد زیر وجود داشته باشد

$$\lim\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right), \qquad (9.37)$$

شعاع همگرایی سری $\sum (a_n x^n)$ برابر با این حد است. معمولاً به کار بردن (۹.۳۷) از تعریف ۱۲.۳۷ مناسبتر است.
استدلالی که در اثبات قضیهٔ کوشی ـ آدامار به‌کار رفت، همگرایی یکنواخت سری توانی را در هرزیرمجموعهٔ فشرده از فاصلهٔ همگرایی $(-R, R)$ به‌دست می‌دهد.

۱۴.۳۷ قضیه. اگر R شعاع همگرایی $\sum (a_n x^n)$ و K زیرمجموعه‌ای فشرده از فاصلهٔ همگرایی $(-R, R)$ باشد. آنگاه سری توانی در K همگرای یکنواخت است.

برهان. فشردگی $K \subseteq (-R, R)$ وجودعدد ثابتی مانند $c < 1$ را ایجاب می‌کند بقسمی که $|x| < cR$ برای هر $x \in K$. (چرا؟) از استدلال ۱۳.۳۷ نتیجه می‌گیریم که برای مقادیر بزرگ n، برآورد (۷.۳۷) برای هر $x \in K$ برقرار است. چون $c < 1$، همگرایی یکنواخت $\sum (a_n x^n)$ در K نتیجهٔ مستقیم آزمون M ـ وایرشتراس است که درآن $M_n = c^n$. □

۱۵.۳۷ قضیه. مجموع سری توانی درفاصلهٔ همگرایی پیوسته است. ازسری‌توانی، در هرزیرفاصلهٔ فشردهٔ دلخواه از فاصلهٔ همگرایی، می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت.

برهان. اگر $|x_0| < R$، آنگاهٔ طبق قضیهٔ قبلی، $\sum (a_n x^n)$ در هرهمسایگی‌فشردهٔ

دلخواه x_0 که در $(-R,R)$ واقع باشد، همگرای یکنواخت است، و پیوستگی در نقطهٔ x_0 از قضیهٔ ۲.۳۷ و انتگرال‌گیری جمله به‌جمله از قضیهٔ ۳.۳۷ نتیجه می‌شود. □

اکنون نشان می‌دهیم که از سری توانی می‌توان جمله به‌جمله مشتق گرفت. در قضیهٔ مشتق سری توابع، سری مشتق را همگرای یکنواخت فرض کردیم، اما در اینجا احتیاجی به این فرض نیست. بنابراین، قضیهٔ زیر از قضیهٔ نظیر در مورد مشتق سری توابع قویتر است.

۱۶.۳۷ قضیهٔ مشتق. از سری توانی می‌توان جمله به جمله در فاصلهٔ همگرایی مشتق گرفت. یعنی

اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ ، آنگاه $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(na_n x^{n-1})$ ،

و هر دو سری دارای شعاع همگرایی برابر هستند.

برهان. چون $\lim(n^{1/n})=1$ ، دنبالهٔ $(|na_n|^{1/n})$ کراندار است اگر و فقط اگر دنبالهٔ $(|a_n|^{1/n})$ کراندار باشد. علاوه بر این، به‌سهولت می‌توان دید که

$$\lim\sup(|na_n|^{1/n})=\lim\sup(|a_n|^{1/n}).$$

بنابراین شعاع همگرایی دو سری برابرند. درنتیجه سری مشتق صوری[1] درهرزیرمجموعهٔ فشرده از فاصلهٔ همگرایی، همگرای یکنواخت است. اکنون بنابر قضیهٔ ۵.۳۷ این سری مشتق صوری به‌مشتق سری همگراست. □

باید توجه داشت که این قضیه درمورد نقاط انتهایی فاصلهٔ همگرایی حکمی نمی‌کند. اگر سری دریك نقطهٔ انتهایی همگرا باشد، ممکن است که سری مشتق آن در این نقطه همگرا و یا واگرا باشد. برای مثال، سری $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n^2)$ درهردونقطهٔ انتهایی $x=-1$ و $x=+1$ همگراست. اما سری مشتق

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m+1}$$

درنقطهٔ $x=-1$ همگرا و درنقطهٔ $x=+1$ واگراست.

---

۱. به‌طورکلی مقصود از عمل صوری عملی است که صحت نتیجهٔ آن مشکوك است. دراینجا سری مشتق صوری گفته شده است، چراکه هنوز قضیه ثابت نشده است و صحت مشتق‌گیری جمله به جمله مشکوك است. یعنی هنوز نمی‌دانیم که مجموع این سری برابر با $f'(x)$ است یا نه. ـ م.

هرگاه قضیهٔ قبل را پـی در پـی به‌کار بریم، نتیجه می‌گیریم که هرگاه k یك عدد طبیعی دلخـواه باشد، از سری توانـی $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ می‌تـوان k بـار جمله به جمله مشتق گرفت و سری

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k} \qquad (۱۰.۳۷)$$

را به‌دست آورد. این سری برای $|x|<R$ به $f^{(k)}$ همگرای مطلق و در هر زیرمجموعهٔ فشرده دلخواه از فاصلهٔ همگرایی، همگرایی یکنواخت است.

اگر در (۱۰،۳۷) ، x را صفر بگیریم، فرمول مهم زیر به‌دست می‌آید:

$$f^{(k)}(0)=k!a_k. \qquad (۱۱.۳۷)$$

۱۷.۳۷ قضیهٔ یکتایی. اگر $\sum(a_n x^n)$ و $\sum(b_n x^n)$ دریك فاصلهٔ $(-r,r)$ برای $r>0$ به‌یك تابع f همگرا باشند، برای هر $n\in\mathbf{N}$،

$$a_n=b_n.$$

برهان. تذکر قبلی نشان می‌دهد که برای $n\in\mathbf{N}$ ، $n!a_n=f^{(n)}(0)=n!b_n$. □

چند قضیه دیگر[1]

تعدادی قضیه مربـوط به‌انواع ترکیبهای جبری سریهای توانی وجود دارد، اما در مورد قضایای مربوط به‌جابگزینی و وارون‌کردن سریهای توانی طبیعیتر است که از استدلالهای آنالیز مختلط استفاده شود. به‌این دلیل در اینجا، به‌این قضایا نمی‌پردازیم و دراین زمینه تنها به‌یك قضیه که خوشبختانه یکی از مفیدترین آنهاست، قناعت می‌کنیم.

۱۸.۳۷ قضیهٔ ضرب. اگر f و g در فاصلهٔ $(-r,r)$ به‌صورت سریهای توانی زیـر داده شده باشند:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad , \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n,$$

آنگاه حاصلضرب آنها در این فاصله به‌صورت سری توانی $\sum(c_n x^n)$ است، کـه در آن ضرایب (c_n) برابرند با

---

۱. بقیهٔ این بخش را می‌توان در اولین دور مطالعه حذف کرد.

$$c_n=\sum_{k=\circ}^{\infty}a_kb_{n-k}\quad,\quad n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots\ .$$

برهان. در ۱۳.۳۷ دیدیم که هرگاه $|x|<r$ ، سریهای توانی فوق به مجموعهای $f(x)$ و $g(x)$ همگرای مطلق هستند. هرگاه قضیهٔ ۱۳.۳۶ را به کار بریم، نتیجهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید. □

طبق قضیهٔ ضرب ، شعاع همگرایی حاصلضرب حداقل برابر با r است. بسهولت می‌توان نشان داد که امکان دارد شعاع همگرایی از r بیشتر باشد.

دیده‌ایم که برای نشان دادن تابع f به‌صورت سری توانی درفاصلهٔ $(-r,r)$ ، $r>\circ$ ، لازم است که تمام مشتقهای f دراین فاصله وجود داشته باشند. ممکن است به‌نظر برسد که این شرط، کافی هم هست؛ اما مسئله به‌این سادگی نیست. برای مثال، می‌توان نشان داد که تمام مشتقهای تابع f که به‌صورت

$$f(x)=e^{-\text{۱}/x^{\text{۲}}}\qquad x\neq\circ,$$
(۱۲.۳۷)
$$=\circ,\qquad\qquad x=\circ,$$

داده شده است، وجود دارند و برای $n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots$ ، داریم $f^{(n)}(\circ)=\circ$ (ر.ك. تمرین ۳۷. ژ). اگر بتوان f را در یك فاصلهٔ $(-r,r)$ به صورت یك سری توانی در حول $x=\circ$ نشان داد ، آنگاه طبق قضیهٔ یکتایی ۱۷.۳۷ ، این سری باید متحد با صفر باشد که با $f(x)\neq\circ$ برای $x\neq\circ$ متناقض است.

باوجود این، چند شرط کافی می‌توان ارائه داد که درصورت برقراری آنها، f را می‌توان به صورت یك سری توانی نوشت. به عنوان مثال از قضیهٔ تیلور ۶.۲۸ نتیجه می‌شود که اگر عددی ثابت مانند $B>\circ$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $|x|<r$ و $n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots$ ،

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant B, \tag{۱۳.۳۷}$$

آنگاه $\sum_{n=\circ}^{\infty}f^{(n)}(\circ)x^n/n!$ برای $|x|<r$ به $f(x)$ همگراست. با شرایطی مشابه (ولی کمی ملایمتر) درمورد اندازهٔ مشتقها می‌توان همین نتیجه را به‌دست آورد.

به‌عنوان یك مثال، به‌ذکر یك قضیهٔ زیبا و مفید منسوب به سرژ برنشتین می‌پردازیم که مربوط به‌بسط یکطرفهٔ تابع به‌صورت سری توانی است.

۳۷-۱۹ قضیهٔ برنشتین. فرض کنید f در فاصلهٔ $[\circ,r]$ معین باشد و مشتقهای تمام مراتب آن وجود داشته باشند و فرض کنید که f و تمام مشتقاتش در فاصلهٔ $[\circ,r]$ مثبت

باشند. اگر $0 \leqslant x < r$ ، آنگاه $f(x)$ دارای بسط زیر است:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}.$$

برهان. از صورت باقیماندهٔ تیلور به‌شکل انتگرال،کـه در رابطهٔ (۳.۳۱) ارائه شده است استفاده می‌کنیم. اگر $0 \leqslant x < r$ ، آنگاه

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x_{k}+R_{n}, \qquad (۱۴.۳۷)$$

که درآن

$$R_{n}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-1}f^{(n)}(sx)ds.$$

چون تمام جمله‌های مجموع (۱۴.۳۷) مثبت هستند،

$$f(r)\geqslant\frac{r^{n-1}}{(r-1)!}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-1}f^{(n)}(sr)ds. \qquad (۱۵.۳۷)$$

از طرف دیگر چون $f^{(n+1)}$ مثبت است، $f^{(n)}$ در $[0,r]$ صعودی است، بنابراین اگـر x دراین فاصله باشد، آنگاه

$$0\leqslant R_{n}\leqslant\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\int_{0}^{2}(1-s)^{n-1}f^{(n)}(sr)ds. \qquad (۱۶.۳۷)$$

ازترکیب(۱۵.۳۷) و(۱۶.۳۷) نتیجه‌می گیریم که $0 \leqslant R_n \leqslant (x/r)^{n-1}f(r)$. بنابراین اگر $0 \leqslant x < r$ ، آنگاه $\lim(R_n)=0$. □

در قضیهٔ ۱۴.۳۷ دیدیم که سری توانی درهرزیرمجموعهٔ فشرده از فاصلهٔ همگرایی، همگـرای یکنواخت است. اما هیچ دلیل یا نشانه‌ای وجـود نداردکه ازامکان تعمیم این نتیجه به‌نقاط انتهایی فاصلهٔ همگرایی حکایت کند. بااین حـال دراین بـاره آبل قضیه‌ای داردکه در زیـر می‌آید و درآن سری در یکی از دو سر فاصلهٔ همگرایی همگـرا فرض شده است. دراین صورت همگرایی یکنواخت به‌این نقطهٔ انتهایی گسترش می‌یابد.

برای سهولت، می‌تـوان فرض‌کردکه شعاع همگرایی سری برابر با ۱ است. این مطلب البته ازکلیت قضیه نمی‌کاهد، چراکه همواره می‌توان از رابطهٔ $x'=x/R$ که‌صرفاً یك تغییر مقیاس است، استفاده نمود.

۲۰.۳۷ قضیهٔ آبل. فـرض کنید که سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ برای $|x|<1$ ، بـه

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)$ و $f(x)$ همگرای یکنواخت است و I=[۰,۱] به A همگرا باشد، آنگاه سری توانی در

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=A. \qquad (۱۷.۳۷)$$

برهان. می‌توان آزمون آبل ۹.۳۷ را در حالت $\varphi_n(x)=x^n$ و $f_n(x)=a_n$ برای به‌دست آوردن همگرایی یکنواخت $\sum(a_n x^n)$ در I به‌کار برد. بنابراین حد آن در I پیوسته است، وچون این حد برای $0\leqslant x<1$ برابر با $f(x)$ است، رابطهٔ (۱۷.۳۷) نتیجه می‌شود. □

یکی از جالبترین نکات این قضیه این است که برای انتساب حد به یک سری که ممکن است همگرا نباشد، روشی را به ذهن می‌آورد. بدین منظور هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ یک سری بی‌پایان باشد، می‌توان سری توانی $\sum(b_n x^n)$ نظیر را تشکیل داد. هرگاه b_n بسرعت افزایش نیابد، این سری توانی برای $|x|<1$ به تابعی مانند $B(x)$ همگراست. حال هرگاه $B(x)\to\beta$ وقتی که $x\to 1-$، می‌گوییم که سری $\sum(b_n)$ **جمع‌پذیر آبل** به β است. این نوع جمع‌پذیری شبیه به (ولی قویتر از) روش چزارو درمورد میانگین‌حسابی است که در بخش ۱۹ ذکر شده است و دارای نتایج جالب و عمیقی می‌باشد. محتوای قضیهٔ آبل ۲۰.۳۷ شبیه به قضیهٔ ۳.۱۹ است، بدین معنی که اگر سری همگرا باشد، آنگاه سری نیز به‌همان حد جمع‌پذیر آبل است. عکس این نتیجه همواره درست نیست، چرا که سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ همگرا نیست ولی چون

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

$\sum(-1)^n$ به ۱/۲ جمع‌پذیر آبل است.

گاهی امکان دارد که اگر بدانیم سری جمع‌پذیر آبل است و دربعضی شرایط دیگر صدق می‌کند بتوانیم همگرایی سری را ثابت کنیم. این نوع قضایا به **قضیه‌های تاوبری** موسوم‌اند و اغلب بسیار عمیق هستند و اثبات آنها مشکل است. این قضایا هم از این نظر جالب هستند که به‌ما امکان می‌دهند ازیک همگرایی از نوعی ضعیفتر به‌کمک بعضی فرضهای اضافی دیگر، به‌یک همگرایی از نوعی قویتر برسیم.

آخرین قضیهٔ این بخش، اولین قضیه از این نوع است و توسط **تاوبر**[1] ثابت شده

---

۱. آلفرد تاوبر Alfred Tauber (پیرامون ۱۸۶۶–۱۹۴۷) در وین استاد بود. تحقیقات اصلی او در آنالیز بوده است.

است. این قضیه درحقیقت جزئی از عکس قضیهٔ آبل است.

۲۱.۳۷ قضیهٔ تاوبر. فرض کنید که سری توانی $\sum(a_n x^n)$ برای $|x|<1$ به $f(x)$ همگرا باشد و $\lim(na_n)=0$. اگر $\lim f(x)=A$ وقتی $x \to 1-$، آنگاه سری $\sum(a_n)$ به A همگراست.

برهان. منظوربرآوردتفاضلی به‌صورت $\sum^{N}(a_n)-A$ است. بدین‌لحاظ می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A=\left\{\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x)\right\}+\{f(x)-A\} \qquad (18.37)$$
$$=\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)-\sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n+\{f(x)-A\}.$$

چون $0\leqslant x<1$، $1-x^n=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})<n(1-x)$، بنابراین جملهٔ اول طرف راست از عبارت $(1-x)\sum_{n=0}^{N} na_n$ کوچکتر است.

اما بنا به‌فرض $\lim(na_n)=0$، لذا قضیهٔ ۳.۱۹ ایجاب می‌کند که

$$\lim\left(\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} n a_n\right)=0$$

علاوه براین، به‌فرض وقتی $x\to 1-$ داریم $A=\lim f(x)$.

اکنون فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد و عدد طبیعی N را به قدری بزرگ انتخاب کنید که

$$(1)\quad \left|\sum_{n=0}^{N} na_n\right|<(N+1)\varepsilon;$$

$$(2)\quad |a_n|<\frac{\varepsilon}{N+1}\ ,\quad n\geqslant N;$$

$$(3)\quad |f(x_0)-A|<\varepsilon\ ,\quad x_0=1-\frac{1}{N+1}$$ برای .

اکنون‌عبارت (۱۸.۳۷) را برای این‌مقدار N و x_0 برآورد می‌کنیم. از (۱)، (۲)، (۳) و باتوجه به‌این‌که $(1-x_0)(N+1)=1$، برآورد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right|\leqslant(1-x_0)(N+1)\varepsilon+\frac{\varepsilon}{N+1}\cdot\frac{x_0^{N+1}}{1-x_0}+\varepsilon<3\varepsilon.$$

چون این عمل را به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان انجام داد، $\sum(a_n)$ به A همگراست. □

تمرین

۳۷. الف. در همگرایی و همگرایی یکنواخت سری $\sum(f_n)$ که در آن $f_n(x)$ به‌صورت زیر داده شده است بحث کنید.

(الف) $(x^2+n^2)^{-1}$، (ب) $(nx)^{-2},\ x\neq 0$،

(پ) $\dfrac{\sin x}{n^2}$ (ت) $(x^n+1)^{-1},\ x\geqslant 0$،

(ث) $x^n(x^n+1)^{-1},\ x\geqslant 0$ (ج) $(-1)^n(n+x)^{-1},\ x\geqslant 0$.

۳۷. ب. اگر $\sum(a_n)$ همگرای مطلق باشد، سری $\sum(a_n \sin nx)$ همگرای یکنواخت و همگرای مطلق است.

۳۷. پ. فرض کنید (c_n) یک دنبالهٔ نزولی از اعداد مثبت باشد. اگر $\sum(c_n \sin nx)$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه $\lim(nc_n)=0$.

۳۷. ت. جزئیات اثبات آزمون دیریکلهٔ ۸.۳۷ را بیان کنید.

۳۷. ث. جزئیات اثبات آزمون آبل ۹.۳۷ را بیان کنید.

۳۷. ج. قضیهٔ کوشی ـ آدامار ۱۳.۳۷ را در حالتهای $R=0$ و $R=+\infty$ بحث کنید.

۳۷. چ. نشان دهید که R، شعاع همگرایی سری توانی $\sum(a_n x^n)$،

$$\lim\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$$

است، اگر این حد وجود داشته باشد. یک سری توانی مثال بزنید که در آن این حد وجود نداشته باشد.

۳۷. ح. شعاع همگرایی سری $\sum(a_n x^n)$ را که در آن a_n به‌صورت زیر تعریف شده است، تعیین کنید:

(الف) $\dfrac{1}{n^n}$، (ب) $\dfrac{n^\alpha}{n!}$،

(پ) $\dfrac{n^n}{n!}$، (ت) $(\log n)^{-1},\ n\geqslant 2$،

(ث) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$، (ج) $n^{-\sqrt{n}}$.

۳۷. خ. فرض کنید وقتی n مربع یک‌عدد طبیعی است، $a_n = 1$ و درغیراین‌صورت $a_n = 0$. شعاع همگرایی $\sum(a_n x^n)$ را بیابید. اگر b_n وقتی m عددی طبیعی است و $n = m!$ برابر یك و درغیر این صورت صفر باشد، آنگاه شعاع همگرایی سری $\sum(b_n x^n)$ را بیابید.

۳۷. د. برابری $\lim\sup(|a_n|^{1/n}) = \lim\sup(|na_n|^{1/n})$ را بتفصیل اثبات کنید.

۳۷. ذ. اگر $0 < p \leqslant |a_n| \leqslant q$ برای هر $n \in \mathbf{N}$، شعاع همگرایی $\sum(a_n x^n)$ را بیابید.

۳۷. ر. فرض کنید $f(x) = \sum(a_n x^n)$ برای $|x| < R$. هرگاه $f(x) = f(-x)$ برای هر $|x| < R$ ، نشان دهید که برای تمام اعداد فرد n ، $a_n = 0$.

۳۳. ز. ثابت کنید که اگر تابع f برای $|x| < r$ تعریف شده باشد و عدد ثابتی مانند B وجود داشته باشد به‌قسمی که $|f^n(x)| \leqslant B$ برای هر $|x| < r$ و $n \in \mathbf{N}$ ، آنگاه بسط سری تیلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

برای $|x| < r$ به $f(x)$ همگراست.

۳۷. ژ. به‌روش استقراء ثابت کنید که مشتقهای تمام مراتب تابع ارائه شده در فرمول (۳۷. ۱۲) درهرنقطه وجود دارند و تمام این مشتقها درنقطهٔ $x = 0$ برابر صفرند. بنابراین این تابع را نمی‌توان به‌صورت سری تیلر درحول $x = 0$ بسط داد.

۳۷. س. تابعی مثال بزنید که با بسط سری تیلرش درحول $x = 0$ برای $x \geqslant 0$ برابر باشد، ولی برای $x < 0$ بااین بسط برابر نباشد.

۳۷. ش. موضوعی که در تمرین ۲۸. ز طرح شده است، نشان می‌دهد که صورت باقیماندهٔ لاگرانژ را می‌توان برای توجیه درستی بسط عمومی دوجمله‌ای

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

وقتی که x در فاصلهٔ $0 \leqslant x < 1$ است، به‌کار برد. به‌طریق مشابه از تمرین ۲۸. ژ با استدلالی که مبنای آن صورت کوشی باقیمانده و کمی مشکلتر است، درستی این بسط برای $-1 < x \leqslant 0$ به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن اثبات دیگری از این حالت دوم، قضیهٔ برنشتین را درمورد تابع $g(x) = (1-x)^m$ برای $0 \leqslant x < 1$ به‌کار برید.

۳۷. ص. بسط دوجمله‌ای را درنقاط انتهایی $x = \pm 1$ درنظر بگیرید. نشان دهید که اگر $x = -1$، آنگاه سری برای $m \geqslant 0$ همگرای مطلق وبرای $m < 0$ واگراست، درنقطهٔ $x = +1$ هرگاه $m \geqslant 0$ سری همگرای مطلق، وهرگاه $-1 < m < 0$ همگرای مشروط و بالاخره برای $m \leqslant -1$ واگراست.

۳۷. ض. تابع $f(x)=\tan x$ را برای $|x|<\pi/2$ درنظر بگیرید. ازاین‌که تابع f فـرد است و بااستفاده ازقضیهٔ برنشتین، نتیجه بگیرید که f را درایـن فاصله می‌توان به‌صورت بسط سری تیلرش درحول $x=0$ نمایش داد.

۳۷. ط. با استفـاده از قضیهٔ آبل ثابت کنیدکـه اگـر $f(x)=\sum(a_nx^n)$ برای $|x|<R$،

$$\int_0^R f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

به‌شرط آنکه سری طـرف راست همگرا باشد، اما همگرایی سری اصلی درنقطهٔ $x=R$ الزامی نیست. از این رابطه، رابطه‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$\log 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

۳۷. ظ. بااستفاده از قضیهٔ آبل ثابت کنید کـه اگـر $\sum(a_n)$ و $\sum(b_n)$ همگـرا باشند و حاصلضرب کوشی آنها $\sum(c_n)$ نیز همگرا باشد، آنگاه

$$.\sum(c_n)=\sum(a_n).\sum(b_n)$$

۳۷. ع. فرض کنید که $a_n\geqslant 0$ وشعاع همگرایی $f(x)=\sum(a_nx^n)$ برابر با ۱ باشد و $\sum(a_n)$ واگرا باشد. ثابت کنید که $f(x)\longrightarrow+\infty$ وقتی $x\longrightarrow 1-$. بااستفاده از این نتیجه قضیهٔ مقدماتی تاوبری را که در زیر می‌آید اثبات کنید. اگر $a_n\geqslant 0$ و

$$A=\lim_{x\to 1-}\sum a_nx^n$$

آنگاه $\sum(a_n)$ به A همگراست.

۳۷. غ. فرض کنید سری اعـداد مثبت $\sum_{n=0}^{\infty}(p_n)$ واگـرا بـاشد به قسمی که شعاع همگرایی $\sum(p_nx^n)$ برابر با ۱ باشد. قضیهٔ آپل[1] را ثابت کنید: اگر $s=\lim(a_n/p_n)$، آنگاه شعاع همگرایی $\sum(a_nx^n)$ نیز برابر با ۱ است و داریم

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\sum a_nx^n}{\sum p_nx^n}=s.$$

(راهنمایی: کافیست قضیه را درحالت $s=0$ ثابت کنید. همچنین از $\lim_{x\to 1-}[\sum(p_nx^n)]^{-1}=0$ استفاده کنید.)

---

۱. پول آپل Paul Appell (۱۸۵۵ـ۱۹۳۰) دانشجوی هرمیت در سوربـن بود. تحقیقات او در زمینهٔ آنالیز مختلط بوده است.

۳۷. ف. قضیهٔ آبل را درمورد $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)$ به‌کار برید و قضیهٔ آبل را به دست آورید.

۳۷. ق. اگر (a_n) یك دنبالهٔ اعداد حقیقی باشد و $a_0=0$، بنویسید

$$\sigma_n=(s_1+s_2+\dots+s_n)/n \quad \text{و} \quad s_n=a_1+\dots+a_n$$

و قضیهٔ فروبنیوس[1] را ثابت کنید: اگر $s=\lim \sigma_n$، آنگاه

$$s=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

تذکر: با اصطلاح نظریهٔ جمع‌پذیری این قضیه به‌صورت زیر بیان می‌شود: اگر دنبالهٔ (a_n) جمع‌پذیر چزارو به s باشد، آنگاه سری $\sum a_n$ جمع‌پذیر آبل به s است. (راهنمایی: قضیهٔ آبل را درمورد $p(x)=(1-x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(nx^{n-1})$ به‌کار برید و توجه داشته باشید که $\sum(n\cdot\sigma_nx^n)=p(x)\sum(a_nx^n)$.)

پروژه

۳۷. α. نظریهٔ سریهای توانی ارائه شده دراین کتاب را می‌توان به‌سریهای توانی مختلط تعمیم داد.

(الف) طبق نکاتی که دربخش ۱۳ آمده است، تمام تعریفها و قضیه‌هایی که درمورد سریها در $\mathbf{R}^2$ معتبر و معنی‌دار هستند در مورد سریهایی که عناصرشان در $\mathbf{C}$ هستند نیز معتبرند. بخصوص قضایای همگرایی مطلق بسهولت به‌این سریها تعمیم می‌یابند.

(ب) قضایای مربوط به آرایش مجدد و حاصلضرب کوشی را مورد بررسی قرار دهید و تحقیق کنید آیا آنها را می‌توان به $\mathbf{C}$ تعمیم داد.

(پ) نشان دهید که آزمونهای مقایسه، ریشه و نسبت به $\mathbf{C}$ تعمیم می‌یابند.

(ت) $\mathbf{R}$ را شعاع همگرایی سری توانی مختلط

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

فرض کنید. ثابت کنید که سری برای $|z|<R$ همگرای مطلق و در هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ دلخواه $\{z\in\mathbf{C}:|z|<R\}$ همگرای یکنواخت است.

(ث) فرض کنید f و g توابعی هستند که مقادیرشان در $\mathbf{C}$ هستند، در

---

۱. گئورگ فروبنیوس Georg Frobenius (۱۸۴۹ـ۱۹۱۷) در برلین استاد بود. شهرت او به‌خاطر کارهایش در جبر و در آنالیز است.

$$D=\{z\in \mathbf{C} : |z|<r\}$$

تعریف شده‌اند و به‌صورت حد دوسری توانی در D ارائه شده‌اند. نشان دهیدکه اگر f و g در $D\cap \mathbf{R}$ برابر باشند، آنگاه درتمام D برابرند.

(ج) نشان دهیدکه دو سری توانــی در $\mathbf{C}$ را در داخل دایرهٔ مشترك همگرایی‌شان می‌توان در یکدیگر ضرب کرد.

۳۷. β دراین پروژه، توابع نمایی را برحسب سریهــای توانی تعریف می‌کنیم. در این کار توابع نمــایی را برای اعــداد مختلط و همچنین بــرای اعداد حقیقی تعریف خواهیم کرد.

(الف) فــرض‌کنید تابــع E برای $z\in \mathbf{C}$ به صورت سری تــوانی زیــر تعریف شده باشد:

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

نشان دهیدکــه سری برای هر $z\in \mathbf{C}$ همگرای مطلق است و در هر زیرمجموعه دلخــواه کراندار $\mathbf{C}$، همگرایی یکنواخت است.

(ب) ثابت‌کنیدکه E یك تابع پیوسته در $\mathbf{C}$، به $\mathbf{C}$ است به قسمی‌که $E(0)=1$ وبرای هر w و z در $\mathbf{C}$،

$$E(z+w)=E(z)E(w).$$

(راهنمایی: قضیهٔ دو جمله‌ای برای $(z+w)^{n}$ در حالتی که $z\,,\,w\in \mathbf{C}$ و $n\in \mathbf{N}$ برقرار است.)

(پ) هــر گاه x و y اعــدادی حقیقی بــاشند، تــوابع E_1 و E_2 را به صــورت $E_1(x)=E(x)$ و $E_2(y)=E(iy)$ تعریف کنید. بنابراین $E(x+iy)=E_1(x)E_2(y)$. نشان دهیدکه تمام مقادیر E_1 حقیقی هستند ولی E_2 دارای مقادیر غیرحقیقی نیز می‌باشد. توابع C و S را در $\mathbf{R}$، به $\mathbf{R}$ به‌صورت

$$C(y)=\operatorname{Re}E_2(y),\qquad S(y)=\operatorname{Im}E_2(y)$$

برای $y\in \mathbf{R}$ تعریف کنید و نشان دهیدکه

$$C(y_1+y_2)=C(y_1)C(y_2)-S(y_1)S(y_2),$$
$$S(y_1+y_2)=S(y_1)C(y_2)+C(y_1)S(y_2).$$

(ت) ثابت کنیدکه C و S به‌طریقی که در (پ) تعریف شده‌اند به صورت سریهای توانی زیر بیان می‌شوند:

$$C(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}y^{2n}}{(2n)!},\qquad S(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}y^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(ث) نشان دهید که $C' = -S$ و $S' = C$. بنابراین

$$(C^2+S^2)' = 2CC' + 2SS' = 0$$

و درنتیجه C^2+S^2 متحد با ۱ می‌باشد. بویژه، این‌امر ایجاب می‌کند که قدرمطلق توابع C و S کمتر از ۱ یا برابر با ۱ باشند.

(ج) نتیجه بگیرید که E_2 که تابعی در $\mathbf{R}$ ، به $\mathbf{C}$ است در شرایط $E_2(0) = 1$ و $E_2(y_1+y_2) = E_2(y_1)E_2(y_2)$ صدق می‌کند. بنابراین $E_2(-y) = 1/E_2(y)$ و $|E_2(y)| = 1$ برای تمام مقادیر $y \in \mathbf{R}$.

بخش ۳۸ سریهای فوریه

در این بخش، تعریف سری فوریه[1] یك تابع پیوستهٔ تکه‌ای با دورهٔ 2π را ارائه خواهیم کرد. در این بحث مختصر قضایای اصلی همگرایی مربوط به‌سریهای فوریه را عرضه خواهیم کرد. این‌قضیه‌هادر آنالیزو کاربردهای‌فیزیکی آن‌ازاهمیت‌قابل‌توجهی‌برخوردارند.

دراینجا فرض می‌کنیم که $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ دارای **دورهٔ** 2π باشد، یعنی

$$f(x) = f(x+2\pi)$$

برای هر $x \in \mathbf{R}$. علاوه براین فرض می‌کنیم که f **پیوستهٔ تکه‌ای** است، بدین معنی که در هرفاصلهٔ دلخواه به‌طول 2π، f پیوسته است بجزاحتمالاً درچند نقطه به تعدادی با پایان مانند $x_1, \ldots, x_p$ که دراین نقاط، f دارای حد راست $f(x_j+)$ وحدچپ $f(x_j-)$ است.

$$f(x_j-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} f(x_j - h), \qquad f(x_j+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_j + h).$$

مجموعهٔ تمام توابع $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ با دورهٔ 2π راکه پیوستهٔ تکه‌ای هستند با $PC(2\pi)$ نمایش می‌دهیم. بسهولت می‌توان دیدکه این مجموعه، تحت اعمال زیر:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

یك فضای برداری است. به‌علت دوره‌ای بودن $f \in PC(2\pi)$، فقط لازم است که f را درفاصله‌ای به‌طول 2π مورد بررسی قرار دهیم؛ برای مثال

---

۱. (ج ـ ب) ژوزف فوریه (J. B.) Joseph Fourier (۱۷۶۸ـ۱۸۳۰) فرزند یك خیاط فرانسوی بود. او در یك دیر مشغول تحصیل بود و به‌خاطر علاقه به‌ریاضیات و فعالیتهای انقلابی آنجا را ترك‌کرد. او در ۱۷۹۸ با ناپلئون به مصر رفت و بعد به استانداری استان ایزر واقع در جنوب فرانسه منصوب گردید. در این ایام بودکه مشهورترین کارهای خود یعنی نظریهٔ ریاضی حرارت را انجام داد. کارهایش در فیزیك ریاضی بسیار برجسته است و از آن زمان تاکنون درهردو رشتهٔ ریاضی و فیزیك بسیار تأثیر داشته است.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{c}^{c+2\pi} f(x)dx$$

برای هر $c\in\mathbf{R}$ دلخواه.

درفضای $PC(2\pi)$ دو نرم زیر مورد توجه ماست:

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[-\pi,\pi]\},\qquad \|f\|_2=\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx\right)^{1/2},$$

که خوش تعریف هستند، چراکه هرتابع در $PC(2\pi)$ کراندار و انتگرال پذیر ریمان است. به‌عنوان یك تمرین مقدماتی می‌توان نشان دادکه اگر $f\in PC(2\pi)$ ، آنگاه

$$\|f\|_2\leqslant\sqrt{2\pi}\|f\|_\infty. \tag{۱.۳۸}$$

ازاین نابرابری نتیجه می‌شودکه همگرایی نسبت به‌نرم $\|\cdot\|_\infty$ (یعنی همگرایی یکنواخت) همگرایی نسبت به نرم $\|\cdot\|_2$ (یعنی همگرایی در مربع میانگین) را ایجاب می‌کند. اما عکس ایـن نتیجه درست نیست. (ر. ك. تمرینهای ۳۱.ح و ۳۸.د.)

۱.۳۸ تعریف. اگر $f\in PC(2\pi)$، آنگاه **ضرایب فوریه** f، اعداد $a_0,a_1,a_2,\dots$ و $b_0,b_1,b_2,\dots$ هستندکه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \tag{۲.۳۸}$$

منظورما از **سری فوریهٔ** f ، سری زیراست:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{۳.۳۸}$$

برای نشان دادن ارتباط سری فوریهٔ (۳.۳۸) به‌تابع f ، معمولاً می‌نویسیم:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

اما لازم به‌تأکید است‌که این ، دلیلی برهمگرایی سری فوریه به $f(x)$ درهرنقطهٔ دلخواه x نیست. درحقیقت، توابع پیوسته‌ای با دورهٔ 2π وجود دارندکه سریهای فوریهٔ‌نظیرشان درتعداد بی‌پایانی ازنقاط واگراست.[1]

۲.۳۸ چند مثال. (الف)فرض کنید $f_1\in PC(2\pi)$ و در $[-\pi,\pi]$، $f_1(x)=-1$ با

---

۱. رجوع‌کنید به صفحهٔ ۳۱۷ کتاب Burkhill & Burkhill یا به صفحهٔ ۳۰۰ کتاب Hewitt and Ross.

برای $-\pi<x<0$ و $f_1(x)=+1$ برای $0\leqslant x\leqslant+\pi$ تعریف شده باشد. به‌عنوان تمرین نشان دهید که

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right].$$

سری فوریهٔ f_1 است. ثابت خواهیم کرد که این سری فوریه برای $0<|x|<\pi$ به f_1 همگراست، ولی در $\pm\pi$ ، $x=0$ به f_1 همگرا نیست (چرا؟). توجه کنید که f_1 پیوستهٔ تکه‌ای است و در نقاط $\{n\pi : n\in \mathbf{Z}\}$ پیوسته نیست.

(ب) فرض کنیم $f_2\in PC(2\pi)$ در $[-\pi ، \pi)$ به صورت $f_2(x)=|x|$ تعریف شده باشد. به‌عنوان تمرین نشان دهید که

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right].$$

سری فوریهٔ f_2 است. واضح است که این سری در $\mathbf{R}$ همگرای یکنواخت است و ثابت خواهیم کرد که به f_2 همگراست.

(پ) $f\in PC(2\pi)$ را **زوج** فرض می‌کنیم، یعنی $f(-x)=f(x)$ برای هر $x\in\mathbf{R}$. برای این تابع ضرایب فوریهٔ b_n برای $n=0,1,2,\dots$ برابر صفراند و

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt,\qquad n=0,1,2,\dots .$$

(توجه کنید که تابع در (ب) زوج است.)

(ت) $g\in PC(2\pi)$ را **فرد** فرض می‌کنیم، یعنی $g(-x)=-g(x)$ برای هر $x\in\mathbf{R}$. برای این تابع ضرایب فوریهٔ a_n برای $n=0,1,2,\dots$ برابر صفراند و

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin nt\,dt,\qquad n=1,2,\dots .$$

(توجه دارید که تابع در (الف) فرد است.)

(ث) فرض می‌کنیم تابع f در $\mathbf{R}$ پیوسته و دورهٔ آن 2π باشد و f' مشتق آن، در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ تکه‌ای (با دورهٔ 2π) باشد. دراین صورت ضرایب فوریهٔ f' یعنی a'_n و b'_n را، برای $n=1,2,\dots$ ، برحسب a_n و b_n، ضرایب فوریهٔ f، به‌دست می‌آوریم. از انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود:

$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[f(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(-n)\sin nt\,dt\right].$$

چون دورهٔ تناوب $t \longrightarrow f(t)\cos nt$ ، 2π است، جملهٔ اول برابر با صفر است، و در نتیجه $a'_n = nb_n$ برای $n = 1, 2, \ldots$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $b'_n = -na_n$ برای $n = 1, 2, \ldots$. (توجه دارید که اگر f_1 و f_2 توابع در مثالهای (الف) و (ب) باشند، آنگاه $f_1(x) = f'_2(x)$ وقتی $x \notin \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$ ، و ضرایب فوریهٔ آنها برای $n = 1, 2, \ldots$ در روابط بالا صدق می‌کنند.)

در لم بعدی، مربع فاصلهٔ f در $PC(2\pi)$ را از یك تابع دلخواه T_n به‌صورت

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \qquad (4.38)$$

نسبت به‌نرم $\|\cdot\|_2$ محاسبه می‌کنیم. $T_n(x)$ راگاهی **چند جمله‌ای مثلثاتی درجهٔ nام** می‌گویند. درمحاسبات بعدی روابط زیرمورد استفاده می‌باشند:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 dx = \pi,\ k \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx = 0,\ k, n \in \mathbf{N}, k \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx\, dx = 0,\ k,\ m = 0, 1, 2, \cdots.$$

۳.۳۸ لم. اگر $f \in PC(2\pi)$ و T_n یك‌چندجمله‌ای مثلثاتی درجهٔ nام باشد (یعنی T_n به صورت (۴.۳۸) باشد)، آنگاه

$$\|f - T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\}$$
$$+ \pi\left\{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]\right\}, \qquad (5.38)$$

که درآن a_k و b_k ضرایب فوریهٔ تابع f هستند.

برهان. داریم

$$\|f - T_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(t)]^2 dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T_n(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} [T_n(t)]^2 dt.$$

اکنون بسهولت دیده می‌شود که

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T_n(t)dt = \frac{1}{2}\alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}\alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right\}.$$

علاوه براین، با استفاده از روابطی که در بالا آمده است، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(t)]^2 dt = \pi\left\{\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right\}.$$

هرگاه این دو رابطه را در فرمول اول بگذاریم و عبارت

$$\pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\}$$

را اضافه و کسر کنیم، فرمول (۵.۳۸) حاصل می‌شود. □

لم ۳.۳۸ دارای تعبیرمهم «هندسی» زیراست: در بین چند جمله‌ایهای مثلثاتی درجهٔ nام تنها یکی عبارت $\|f-T_n\|_2^2$ را مینیمم می کندو آن چندجمله‌ای، با انتخاب ضرایب β_k, α_k برابر با ضرایب فوریهٔ f برای $k=0,1,2,\dots,n$ به‌دست می‌آید. اگر این چند جمله‌ای مینیمم کنندهٔ (یکتا) را به‌صورت $S_n(f)$ نمایش دهیم، آنگاه

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \qquad (۶.۳۸)$$

مجموع جزئی nام سری فوریهٔ f است وفرمول (۵.۳۸) ایجاب می کند که

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\}. \qquad (۷.۳۸)$$

با استفاده از تمرین ۲۶.ج می‌توان نشان داد که به‌ازای هر تابع پیوسته با دورهٔ 2π،

$$\lim_n \|f - S_n(f)\|_2 = 0. \qquad (۸.۳۸)$$

بااین‌حال چون این تمرین نتیجهٔ موشکافیهای زیادی است ترجیح می‌دهیم که (۸.۳۸) را از راه مستقیم‌تری به‌دست‌آوریم. برای این منظوربه دونتیجهٔ زیراحتیاج داریم.

۴.۳۸ نابرابری بسل. اگر $f\in PC(2\pi)$،

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2. \qquad (9.38)$$

برهان. اگر $n\in\mathbf{N}$ دلخواه باشد، از (۷.۳۸) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2.$$

بنابراین مجموعهای جزئی سری طرف چپ (۹.۳۸) از بالا کراندار هستند. چون جمله‌های آن همگی مثبت‌اند، این سری همگراست و (۹.۳۸) برقرار است. □

قضیهٔ بعدی حالت خاصی از حکمی است که معمولاً به لم ریمان-لبگ موسوم است.

۵.۳۸ لم ریمان-لبگ. اگر $g\in PC(2\pi)$، آنگاه

$$\lim_n\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}t\right)tdt=0.$$

برهان. چون $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t=\sin nt\cos\frac{1}{2}t+\cos nt\sin\frac{1}{2}t$، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\pi g(t)\cos\frac{1}{2}t\right]\sin ntdt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\pi g(t)\sin\frac{1}{2}t\right]\cos ntdt.$$

از $g\in PC(2\pi)$، نتیجه می‌شود که توابع زیر که برای $t\in(-\pi,\pi]$ به‌صورت

$$g_1(t)=\pi g(t)\cos\frac{1}{2}t\ ,\ g_2(t)=\pi g(t)\sin\frac{1}{2}t,$$

تعریف شده‌اند، گسترشهایی در $\mathbf{R}$ دارند که به $PC(2\pi)$ متعلق هستند. بنابراین انتگرالهای طرف راست فرمول بالا بترتیب ضرایب فوریهٔ توابع g_1 و g_2 را به‌دست می‌دهند. لذا طبق نابرابری بسل این انتگرالها وقتی $n\to\infty$ به ۰ همگراست. □

۶.۳۸ لم. اگر $f\in PC(2\pi)$، آنگـاه مجموعهای جـزئی سری فوریهٔ f، یعنی $S_n(f)$، از عبارت

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt \qquad (10.38)$$

به‌دست می‌آیند که در آن D_n هستهٔ nام دیریکله است که به‌صورت زیر

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}, & 0<|t|\leqslant\pi,\\[2ex] n+\frac{1}{2}, & t=0\end{cases}$$

تعریف می‌شود.

برهان. از فرمولهای (۲.۳۸) و (۶.۳۸) نتیجه می‌شود که

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(t)\{\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right\}dt.$$

اگر بنویسیم $t=x+s$ و توجه کنیم که کسینوس یك تابع زوج است و دورهٔ تابع زیر علامت انتگرال 2π است، داریم

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+s)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ks\right\}ds$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+s)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ks\right\}ds$$

اکنون فرمول (۶.۳۶) را به‌کار می‌بریم، فرمول (۱۰.۳۸) به‌دست می‌آید. □

قبل از بیان قضیهٔ بعدی یادآور می‌شویم (ر. ك. تمرین ۲۷. ص) که اگر تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ درنقطهٔ $c\in\mathbf{R}$ حد راست داشته باشد (یعنی اگر $f(c+)$ وجود داشته باشد)، منظور از **مشتق راست** f درنقطهٔ c حد زیر است

$$f'_+(c)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(c+t)-f(c+)}{t}$$

اگر این حد وجود داشته باشد. به‌طریق مشابه، **مشتق چپ** f درنقطهٔ c حد زیر است

$$f'_-(c)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{f(c+t)-f(c-)}{t}.$$

۷.۳۸ قضیهٔ همگرایی نقطه‌ای. فرض‌کنید $f \in PC(2\pi)$ و f درنقطهٔ c مشتقهای چپ و راست داشته‌باشد. آنگاه‌سری فوریهٔ f درنقطهٔ c به $(1/2)\{f(c-)+f(c+)\}$ همگراست. یعنی دراین شرایط داریم

$$\frac{1}{2}\{f(c-)+f(c+)\}=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nc+b_n \sin nc)\,. \qquad (11.38)$$

برهان . از (۶.۳۶) نتیجه می‌شود که اگر $\sin \frac{1}{2}t \neq 0$، آنگاه

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin \frac{1}{2}t}\,.$$

طرفین را در $(1/\pi)\,f(c+)$ ضرب مـی‌کنیم و نسبت به t درفاصلهٔ $[0\,,\,\pi]$ انتگرال می‌گیریم. باتوجه باینکه $\int_0^{\pi}\cos kt\,dt=0$ برای $k \in \mathbf{N}$، نتیجه می گیریم که

$$\frac{1}{2}f(c+)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(c+)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin \frac{1}{2}t}\,dt\,.$$

به‌طریق مشابه، هرگاه طرفین رابطهٔ بالا را در $(1/\pi)f(c-)$ ضرب کنیم و نسبت به t درفاصلهٔ $[-\pi\,,\,0]$ انتگرال بگیریم، داریم

$$\frac{1}{2}f(c-)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(c-)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin \frac{1}{2}t}\,dt\,.$$

هرگاه این عبارات را ازفرمول (۱۰.۳۸) کم کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$S_n(f)(c)-\frac{1}{2}\{f(c-)+f(c+)\} \qquad (*)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(c+t)-f(c-)}{2\sin \frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(c+t)-f(c+)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\,.$$

اکنون چون

$$\lim_{t\to 0,\ t>0}\frac{f(c+t)-f(c+)}{2\sin\frac{1}{2}t}=\lim_{t\to 0,\ t>0}\left\{\frac{f(c+t)-f(c+)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right\}$$

$$=f'_+(c)\cdot 1=f'_+(c)\,,$$

نتیجه می‌شود که تابع

$$\begin{aligned} F_+(t)&=\frac{f(c+t)-f(c+)}{2\sin\frac{1}{2}t}, && t\in(0,\pi] \\ &=f'_+(c) &&, \quad t=0, \\ &=0 &&, \quad t\in(-\pi,0), \end{aligned}$$

در $[-\pi,\pi]$ پیوستهٔ تکه‌ای است. بنابراین انتگرال دوم (*) وقتی $n\to\infty$، به ۰ همگراست.

به‌طریق‌مشابه، انتگرال اول در (*) وقتی $n\to\infty$، همگرا به ۰ است. بنابراین قضیه ثابت می‌شود. □

۸.۳۸ چندمثال. (الف) تابع f_1 درمثال ۲.۳۸ (الف) به $PC(2\pi)$ متعلق است، علاوه براین $f_1(c+)=f_1(c)=f_1(c-)$ برای $c\in[-\pi,\pi]$، به‌شرط آنکه $c\neq-\pi,\ 0,\ +\pi$ و دراین‌نقاط داریم $f_1(-\pi-)=+1$، $f_1(-\pi+)=-1$، $f_1(0-)=-1$، $f_1(0+)=1$، $f_1(\pi-)=1$ و $f(\pi+)=-1$. چون مشتقهای یکطرفه در همه‌جا موجود و برابر با ۰ هستند، از قضیهٔ همگرایی نقطه‌ای ۷.۳۸ نتیجه می‌شود که سری فوریهٔ f_1 به $f_1(c)$ همگراست به شرط آنکه $c\in[-\pi,\pi]$ و $c\neq-\pi,\ 0,\ \pi$، و دراین سه نقطه، سری فوریهٔ f_1 به صفر همگراست.

(ب) تابع f_2 درمثال ۲.۳۸ (ب) پیوسته‌است، دوره‌اش 2π است و درتمام نقاط، مشتقهای یکطرفه دارد. بنابراین سری فوریهٔ f_2 درهرنقطه به f_2 همگراست وهمان‌طور که دیدیم این‌همگرایی‌یکنواخت است. توجه داریم که‌مشتق (دوطرفهٔ) f_2 در $[-\pi,\pi]$ بجزدرنقاط ۰ و $\pm\pi$ وجود دارد و f'_2 برتابع‌پیوستهٔ‌تکه‌ای f_1 برای $x\notin\{n\pi : n\in\mathbf{Z}\}$ منطبق است.

خاطر نشان می‌سازیم که از قضیهٔ مقدار میانگین (ر. ك. تمرین ۲۷.ژ) نتیجه‌می‌شود که اگر $f' \in PC(2\pi)$ ، آنگاه مشتقهای چپ و راست f درنقاط ناپیوستگی f' وجود دارند. اکنون نشان‌خواهیم دادکه اگر دورهٔ تابع f برابر 2π باشد و $f' \in PC(2\pi)$، آنگاه سری فوریهٔ f به f همگرای یکنواخت است.

۹.۳۸ قضیهٔ همگرایی یکنواخت. فرض می‌کنیم f پیوسته و دورهٔ آن 2π باشد و فرض می‌کنیم که $f' \in PC(2\pi)$ ، در این صورت سری فوریهٔ f در $\mathbf{R}$ به f همگرای یکنواخت است.

برهان . چون تابع f پیوسته است ومشتقهای یکطرفهٔ f درهرنقطه وجود دارند، ازقضیهٔ همگرایی نقطه‌ای ۷.۳۸ نتیجه می‌شودکه سری‌فوریهٔ f در هرنقطه به f همگراست. لذا کافی است نشان دهیم که همگرایی یکنواخت است. اما داریم

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|),$$

پس کافی است که همگرایی سری طرف راست را نشان دهیم. درحقیقت، اگر نابرابری بسل را درمورد f' به‌کار بریم، همگرایی سری $\sum(|a'_k|^2+|b'_k|^2)$ به‌دست می‌آید، ولی همان طوری که درمثال ۲.۳۸ (ث) دیده شده است، $a_k=-b'_k/k$ و $b_k=a'_k/k$. اینك با توجه به نابرابری شوارتس داریم

$$\sum_{k=1}^{m}|a_k|=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}|b'_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{m}|b'_k|^2\right)^{1/2}.$$

چون شبیه این نابرابری برای $\sum|b_k|$ برقرار است، از این دو نابرابری همگرایی سری مورد بحث نتیجه می‌شود. □

اکنون نشان می‌دهیم که مجموعهای جزئی سری فوریهٔ هر تابع دلخواه f در $PC(2\pi)$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_2$ به f همگراست. البته با اینکه این امر تعیین مقدار f در هرنقطهٔ خاص مفروض را تضمین نمی‌کند، ولی می‌تواند بدین‌صورت تعبیر شودکه f را به‌مفهومی «آماری» مشخص می‌کند. در برخی از کاربردها این نوع همگرایی، به‌اندازهٔ همگرایی نقطه‌ای مفید است و این برتری را داردکه دیگر محدودیت شرط مشتق‌پذیری وجود ندارد.

۱۰.۳۸ قضیهٔ همگرایی نرم. اگر $f \in PC(2\pi)$ و $(S_n(f))$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری فوریهٔ f باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|_2=0.$$

برهان . $f\in PC(2\pi)$ و $\varepsilon>0$ مفروض‌اند. به‌عنوان تمرین مـی‌توانید نشان دهید که‌تابع‌پیوسته‌ای‌مانند f_1 با دورهٔ 2π وجوددارد به‌قسمی که $\|f-f_1\|_2<\varepsilon/7$. از قضیهٔ ۵.۲۴ نتیجه می‌شود که تـابع خطی تکه‌ای پیوسته‌ای مانند f_2 وجود دارد که دورهٔ آن 2π است و به‌قسمی است که $\|f_1-f_2\|_\infty<\varepsilon/7$. اکنون طبق قضیهٔ‌همگرایی یکنواخت ۹.۳۸، اگر n به قدرکافی بزرگ باشد ، آنگاه $\|f_2-S_n(f_2)\|_\infty<\varepsilon/7$. از فرمول (۱.۳۸) می‌دانیم که برای هر $g\in Pc(2\pi)$ دلخواه داریم

$$\|g\|_2\leqslant\sqrt{2\pi}\|g\|_\infty\leqslant 3\|g\|_\infty,$$

بنابراین

$$\|f-S_n(f_2)\|_2<\|f-f_1\|_2+\|f_1-f_2\|_2+\|f_2-S_n(f_2)\|_2$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{7}+\frac{3\varepsilon}{7}+\frac{3\varepsilon}{7}=\varepsilon.$$

بدین‌ترتیب، $S_n(f_2)$ یک‌چندجمله‌ای مثلثاتی درجهٔ nام وتقریبی برای f با خطای کمتراز ε (نسبت بـه نـرم $\|\cdot\|_2$) است . چون در لم ۳.۳۸ نشان داده شده است کـه مجموع جزئی $S_n(f)$،چندجمله‌ای‌مثلثاتی‌درجهٔ n امی است که بهترین تقریب برای تابع f است، نتیجه می‌گیریم که $\|f-S_n(f)\|_2<\varepsilon$. چون $\varepsilon>0$ دلخواه است ،

$$\lim\|f-S_n(f)\|_2=0\ \square$$

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه ولم ۳.۳۸ شکل قویتری از نابرابری بسل را برای $f\in PC(2\pi)$ به‌دست می‌آوریم.

۱۱.۳۸ برابری پارسوال.[1] اگر $f\in PC(2\pi)$، آنگاه

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2=\frac{1}{2}a_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),\qquad(12.38)$$

که درآن a_k و b_k ضرایب فوریهٔ f هستند.

این‌بخش را بـا اثبـاتی از قضیهٔ فیر[1] درمورد جمع‌پذیری چزاروی سری فوریهٔ یک‌تابع پیوسته به‌پایان می‌رسانیم. فرض‌کنید برای $n=0,1,2,\ldots$، $S_n(f)$ مجموعهای جزئی سری‌فوریهٔ نظیر به f، و $\Gamma_n(f)$ میانگینهای چزارو باشند:

---

۱ . لئوپولدفیر Leopold Fejér (۱۸۸۰ـ۱۹۵۹) در بوداپست تحصیل و تدریس نموده است. اوکارهای بسیارجالبی درزمینه‌های‌آنالیز حقیقی ومختلط انجام داده است.

$$\Gamma_n(f)=\frac{1}{n}[S_0(f)+S_1(f)+\cdots+S_{n-1}(f)].$$

حال D_n، $n=0,1,2,\ldots$، را به معنایی که در لم ۶.۳۸ آمده، بگیرید. با استفاده از فرمول مقدماتی

$$2\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{1}{2}t=\cos(k-1)t-\cos kt,\ k=0,1,\ldots,$$

می‌توان نشان‌داد که

$$\frac{1}{n}[D_0(t)+D_1(t)+\cdots+D_{n-1}(t)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2, & 0<|t|\leqslant\pi,\\[2ex] \dfrac{1}{2}n, & t=0\ ,\end{cases}\qquad (۱۳.۳۸)$$

این تابع را که هستهٔ n امی فیر نامیده می‌شود، به K_n نمایش می‌دهیم. آشکار است که $K_n(t)\geqslant 0$ وچون

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)dt=1$$

برای $k=0,1,2,\ldots$، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1.\qquad (۱۴.۳۸)$$

همچنین، هر گاه $0<\delta<\pi$، بادرنظر گرفتن‌این که $\sin\theta\geqslant 2\theta/\pi$، برای $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$، داریم

$$0\leqslant K_n(t)\leqslant\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2,\ \delta\leqslant|t|\leqslant\pi.\qquad (۱۵.۳۸)$$

بالاخره از لم ۶.۳۸ نتیجه‌می‌شود که میانگین چزارو را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\Gamma_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_n(t)dt.\qquad (۱۶.۳۸)$$

اکنون برای اثبات قضیهٔ فیر آمادگی داریم.

۱۲.۳۸ قضیهٔ فیر. اگر f پیوسته و دورهٔ آن 2π باشد، آنگاه میانگینهای

چزاروی سری فوریهٔ f، در $\mathbf{R}$ به f همگرای یکنواخت است.

برهان. از (۱۴.۳۸) نتیجه می‌شود که

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt.$$

این‌عبارت را از (۱۶.۳۸) کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\Gamma_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x+t)-f(x)\}K_n(t)dt.$$

چون $K_n(t)\geqslant 0$ برای هر t داریم

$$|\Gamma_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|K_n(t)dt.$$

فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد، چون f در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است، عددی مانند δ با شرط $\pi>\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $|t|\leqslant\delta$، آنگاه

$$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon, \quad x\in[-\pi, \pi].$$

بنابراین داریم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|K_n(t)dt\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)dt\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=\varepsilon.$$

ازطرف دیگر، طبق (۱۵.۳۸) داریم

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|K_n(t)dt\leqslant\frac{\pi-\delta}{\pi}(2\|f\|_\infty)\left(\frac{1}{2n}\,\frac{\pi^2}{\delta^2}\right)\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{\pi^2\|f\|_\infty}{\delta^2}\right),$$

که اگر n به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، از ε کوچکتر است. چون برآورد مشابهی برای انتگرال در فاصلهٔ $[-\pi, -\delta]$ وجود دارد، برای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ n داریم

$$\|\Gamma_n(f)-f\|_\infty<3\varepsilon$$

وقضیه ثابت می‌شود. □

بآسانی دیده می‌شود که تابع $\Gamma_n(f)$ یك چندجمله‌ای مثلثاتی (از درجهٔ $n-1$)

است، لذا بدین‌ترتیب اثبات دیگری ازقضیهٔ وایرشتراس به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

۱۳.۳۸ قضیهٔ تقریب وایرشتراس. اگر f پیوسته و دارای دورهٔ ۲π باشد، آنگاه این تابع را می‌توان با چندجمله‌ایهای مثلثاتی به‌طور یکنواخت تقریب زد.

تمرین

۳۸. الف. تابع حقیقی و معین g در یك حجرهٔ J از $\mathbf{R}$ بانقاط انتهایی $a<b$ مفروض است . g را در J **پیوستهٔ تکه‌ای** گوییم اگر (یك) g در a حد راست داشته باشد، (دو) g در b حد چپ داشته‌باشد، و (سه) g در تمام نقاط درونی J پیوسته‌باشد بجز احتمالاً درتعدادی باپایان ازنقاط که دراین نقاط g حدچپ وحد راست داشته‌باشد.

(الف) نشان دهیدکه اگر g در $[-\pi, \pi]$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد، آنگاه تابع یکتایی مانند G در $PC(۲\pi)$ وجود دارد به‌قسمی که $G(x)=g(x)$ برای هر $x\in(-\pi, \pi]$.

(ب) تابع g در نقطهٔ $c\in(-\pi, \pi)$ دارای مشتق چپ (راست ، دوطرفه است) اگر وفقط اگر G دارای مشتق‌چپ (راست، دوطرفه) باشد.

(پ) تابع g در نقطهٔ $-\pi$ دارای مشتق راست (به ترتیب : مشتق‌چپ در π) می‌باشد اگر وفقط اگر G دارای این‌خاصیت باشد .

(ت) مشتقهای یکطرفهٔ $g'_+(-\pi)$ و $g'_-(\pi)$ وجود دارند و برابرند اگر و فقط اگر G در $\pm\pi$ دارای مشتق باشد.

۳۸. ب. (الف) اگر $f\in PC(۲\pi)$ و $f'(x)$ ، مشتق $f(x)$، برای هر x وجود داشته‌باشد، آنگاه دورهٔ f' برابر با ۲π است.

(ب) اگر $f\in PC(۲\pi)$ و $c\in\mathbf{R}$ ، آنگاه تابع $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را به صورت $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ تعریف کنید، بدین‌ترتیب F پیوسته است . نشان‌دهید که تابع F دارای دورهٔ ۲π است اگر وفقط اگر **میانگین** f صفرباشد ، یعنی

$$\frac{۱}{۲}a_۰=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=۰.$$

۳۸ . پ. (الف) فرض‌کنید $f\in PC(۲\pi)$ فرد باشد ، آنگاه $f(\pm\pi)=۰$. اگر f درنقطهٔ ۰ پیوسته‌باشد، $f(۰)=۰$.

(ب) اگر $g\in PC(۲\pi)$ زوج باشد، $g(۰+)=g(۰-)$. اگر $g'(x)$ برای هر $x\in\mathbf{R}$ وجود داشته باشد، آنگاه (ر. ك. تمرین ۲۷.ش) g' فرد است، دارای دورهٔ ۲π می‌باشد، و $g'(۰)=g'(\pm\pi)=۰$.

۳۸ . ت. فرض‌کنید F و f به $PC(۲\pi)$ متعلق باشند و ضرایب فوریهٔ آنها

بترتیب A_n ، B_n ، a_n و b_n باشند. هرگاه $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ و $h = \alpha F + \beta f$ ، نشان دهیدکه تابع h به $PC(2\pi)$ متعلق است و ضرایب فوریهٔ آن $\alpha A_n + \beta a_n$ و $\alpha B_n + \beta b_n$ است. (بنابراین ضرایب فوریهٔ یك‌تابع به‌طور خطی به‌تابع وابسته هستند.)

۳۸.ث. (الف) f_1 را تـابع مثال ۲.۳۸ (الف) بگیرید. سری فوریهٔ f_1 را حساب کنید، ونشان‌دهیدکه همگرایی این سری فوریه در $[-\pi, \pi]$ یکنواحت نیست.

(ب) f_2 را تابع مثال ۲.۳۸ (ب) بگیرید. سری فوریهٔ f_2 را حساب کنید و نشان‌دهیدکه مشتق جمله به‌جمله سری فوریهٔ f_2 برسری فوریهٔ f_1 منطبق است.

(پ) از این حقیقت که سری‌فوریهٔ f_2 به f_2 همگراست، نتیجه بگیریدکه

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

(ت) $f_3(x) = \pi/2 - f_2(x)$ بـرای $x \in (-\pi, \pi]$ مفـروض است، یعنی

$$f_3(x) = \frac{1}{2}\pi - |x| .$$

با استفاده ازتمرین ۳۸.ت نشان دهیدکه سری‌فوریهٔ f_3 به‌صورت زیر است

$$f_3(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right].$$

۳۸. ج. (الف) $g_1 \in PC(2\pi)$ به‌قسمی کـه $g_1(x) = x$ برای $x \in (-\pi, \pi)$ و $g_1(\pi) = 0$، مفروض است. نشان‌دهیدکه g_1 تابعی فرد است وسری‌فوریهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right].$$

توجه داریدکه این‌سری فوریه در نقاط $x = \pm\pi$ به ۰ همگراست. با استفاده از قضیهٔ همگرایی نقطه‌ای ۷.۳۸ نشان دهیدکه این‌سری‌فوریه برای هرنقطهٔ $x \in [-\pi, \pi]$ به $g_1(x)$ همگراست.

(ب) $g_2 \in PC(2\pi)$ به‌قسمی که $g_2(x) = x^2$ برای $x \in (-\pi, \pi]$ مفروض است. نشان‌دهیدکه g_2 تابع زوج وسری‌فوریهٔ‌آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right].$$

نشان‌دهیدکه این سری‌فوریه در $[-\pi, \pi]$ به g_2 همگرای یکنواخت است و مشتق جمله به‌جملهٔ آن، دوبرابر سری‌فوریهٔ g_1 است.

(پ) نشان‌دهید که

$$\frac{\pi^۲}{۱۲}=\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\dots .$$

(ت) $h(x)=(۱/۳)\pi^۲-g_۲(x)$ برای $x\in(-\pi,\pi]$، یعنی $h(x)=\frac{۱}{۳}\pi^۲-x^۲$ مفروض است. نشان‌دهید که سری‌فوریهٔ h به‌صورت زیر است:

$$۴\left[\frac{\cos x}{۱^۲}-\frac{\cos ۲x}{۲^۲}+\frac{\cos ۳x}{۳^۲}-\dots\right].$$

۳۸. ج. (الف) فرض کنید $k(x)=x^۳$ برای هر $x\in\mathbf{R}$. نشان‌دهید که تابع k در $\mathbf{R}$ پیوسته وفرداست. با این‌حال، تابع $k_۱$ که به $PC(۲\pi)$ متعلق ودر $(-\pi,\pi]$ برتابع k منطبق است، پیوسته نیست.

(ب) فرض کنید $h(x)=x^۳-\pi^۲x$؛ پس h در $\mathbf{R}$ پیوسته و فرد است. $h_۱$ را تابعی در $PC(۲\pi)$ منطبق بر h در $(-\pi,\pi]$ فرض کنید. نشان‌دهید که $h_۱$ در $\mathbf{R}$ پیوسته است و $h'_۱(x)=۳x^۲-\pi^۲$ برای $x\in(-\pi,\pi]$.

(پ) بااستفاده از تمرین ۲۷.ش، مثال ۲.۳۸ (ث) و تمرین ۳۸.پ (ت) نشان دهید که سری‌فوریهٔ $h_۱$ به‌صورت زیر است:

$$-۱۲\left[\frac{\sin x}{۱^۳}-\frac{\sin ۲x}{۲^۳}+\frac{\sin ۳x}{۳^۳}-\dots\right].$$

۳۸. ح. تابع $f:[۰,\pi]\to\mathbf{R}$ یك تابع پیوستهٔ تکه‌ای است و $f_e\in PC(۲\pi)$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f_e(x)=f(x),\qquad x\in[۰,\pi]$$
$$=f(-x),\quad x\in[-\pi,۰).$$

(الف) نشان‌دهید که f_e تابع زوج است؛ این‌تابع به **گسترش زوج** f با دورهٔ ۲π موسوم است.

(ب) سری‌فوریهٔ f_e **سری‌کسینوسی** (فوریهٔ) f نامیده می‌شود. نشان‌دهید که این سری به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲}a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos nx$$

که درآن

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\ n=\circ,۱,۲,\cdots.$$

(پ) نشان‌دهید که اگر $c\in(\circ,\pi)$ و f درنقطهٔ c دارای مشتقهای چپ و راست باشد، سری کسینوسی f بـه $(۱/۲)[f(c-)+f(c+)]$ همگراست. همچنین اگر f در $\circ$ مشتق راست داشته باشد، سری کسینوسی f به $f(\circ+)$ همگراست. اگر f در π مشتق چپ داشته باشد، سری کسینوسی f به $f(\pi-)$ همگراست.

۳۸. خ. سری کسینوسی هریك از توابع زیر را که در $[\circ,\pi]$ تعریف شده‌اند حساب کنید وحد این‌سریها را درهرنقطه مشخص کنید.

(الف) $f(x)=x$ (ب) $f(x)=\sin x$

(پ) $f(x)=۱ \quad \circ\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$
$=\circ \quad \frac{۱}{۲}\pi<x\leqslant\pi$

(ت) $f(x)=\frac{۱}{۲}\pi-x \quad \circ\leqslant x\leqslant\frac{۱}{۲}\pi$
$=\circ \quad \frac{۱}{۲}\pi<x\leqslant\pi$

(ث) $f(x)=x(\pi-x)$.

۳۸. د. فرض‌کنید $f:[\circ,\pi]\to\mathbf{R}$ یك‌تـابع پیوستهٔ تکه‌ای و $f_{\circ}\in PC(۲\pi)$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$\begin{aligned} f_{\circ}&=f(x), && x\in(\circ,\pi],\\ &=\circ, && x=\circ,\\ &=-f(-x), && x\in(-\pi,\circ). \end{aligned}$$

(الف) نشان‌دهید که $f_{\circ}$ تابع فرد است؛ این‌تابع به **گسترش فرد** f بـا دورهٔ ۲π موسوم است.

(ب) سری‌فوریهٔ $f_{\circ}$ **سری سینوسی** (فوریهٔ) f نـامیده می‌شود. نشان‌دهید که این سری به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} b_n\sin nx,$$

که در آن

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt,\qquad n=۱,۲,\cdots.$$

(پ) نشان‌دهید که اگر $c\in(\circ,\pi)$ و f درنقطهٔ c مشتقهای چپ وراست‌داشته‌باشد،

سری سینوسی f به $(۱/۲)[f(c-)+f(c+)]$ همگراست. به‌هرحال، سری‌سینوسی f در نقاط $x=۰\,,\pi$ به ۰ همگراست.

۳۸ . ذ. سری سینوسی هر یك از توابع زیر را که در $[۰\,,\pi]$ تعریف شده‌اند، حساب کنید وحد این‌سریها را درهرنقطه مشخص کنید:

(الف) $f(x)=۱$ (ب) $f(x)=\cos x$

(پ) $f(x)=۱,\ ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲}\pi$ (ت) $f(x)=\pi-x$

$=۰,\ \frac{۱}{۲}\pi<x\leqslant\pi$

(ث) $f(x)=x(\pi-x)$.

۳۸. ر. فرض کنید. $f_n\in PC(۲\pi)$ تابعی باشد که برای $۰\leqslant x\leqslant ۱/n$ برابر با $f_n(x)=n^{۱/۴}$ و در دیگر نقـاط $x\in(-\pi,\pi]$، برابر بـا صفر است . نشان‌دهیدکه $\|f_n\|_۲=۱/n^{۱/۴}$. بدین‌ترتیب دنبالهٔ (f_n) برحسب نرم $\|\cdot\|_۲$ به‌تابع صفر همگراست، اما چون کراندار نیست، همگرایی یکنواخت نیست.

۳۸ . ز. اگر $f\in PC(۲\pi)$ و $\varepsilon>۰$، نشان‌دهیدکه تابع پیوسته‌ای مانند $f_۱$ بادورهٔ ۲π وجود دارد به‌قسمی‌که $\|f-f_۱\|_۲<\varepsilon$.

۳۸ . ژ. با استفاده از برابری پارسوال ۱۱.۳۸، فرمولهای زیر را به‌دست‌آورید:

(الف) $\frac{\pi^۲}{۶}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$، (ب) $\frac{\pi^۲}{۸}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$،

(پ) $\frac{\pi^۴}{۹۰}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}$، (ت) $\frac{\pi^۶}{۹۴۵}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۶}$،

۳۸ . س . هرگاه f و F به $PC(۲\pi)$ متعلق باشند و ضرایب فوریهٔ آنها به‌ترتیب a_n و b_n و A_n، B_n باشند، نشان‌دهید که

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)F(t)dt=\frac{۱}{۲}a_۰A_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_nA_n+b_nB_n).$$

(راهنمایی: برابری پارسوال را درمورد $f+F$ به‌کاربرید.)

۳۸. ش. بـا استفاده از آزمون دیریکله ۲.۳۶ ومثال ۸.۳۶ نشان دهیدکـه سری مثلثاتی

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{۱/۲}}$$

برای تمام xها همگراست. نشان‌دهید که با این‌حال، این‌سری نمی‌تواند سری فوریهٔ هیچ تابعی در $PC(2\pi)$ باشد.

۳۸. ص. فرض کنید $L>0$ و $PC(2L)$ فضای برداری تمام توابع دوره‌ای $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ باشدکه پیوستهٔ تکه‌ای با دورهٔ $2L$ هستند.

(الف) برای $f, g\in PC(2L)$، $f\cdot g$ را با $f.g=\int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt$ تعریف کنید. نشان دهید که نگاشت $(f, g)\to f\cdot g$ ، به مفهوم تعریف ۳.۸، یك ضرب داخلی در $PC(2L)$ است وعلاوه براین، نرمی که با این ضرب داخلی تولید می‌شود (ر. ك ۷.۸) عبارت است از:

$$\|f\|_2=\left[\int_{-L}^{L}|f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}.$$

(ب) فرض کنید C_0 ، C_n و S_n ، برای $n\in\mathbf{N}$ ، توابعی در $PC(2L)$ باشندکه به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$C_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2L}},\quad C_n(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi x}{L},\quad S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

نشان‌دهیدکه این‌توابع **متعامدیکه (ارتونرمال)** هستند، به‌این معنی‌که

$$C_n\cdot S_m=0,\quad C_n\cdot C_m=\delta_{nm}\ ,\quad S_n\cdot S_m=\delta_{nm}$$

و $\delta_{nm}=1$ برای $n=m$ و $\delta_{nm}=0$ برای $n\neq m$. (راهنمایی: روابطی که قبلاً در ۳.۳۸ آمده‌اند همین روابطاند به‌ازای $L=\pi$.)

(پ) اگر $f\in PC(2L)$، **سری فوریهٔ** f را در $[-L\ ,\ L]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

که در آن

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt,\qquad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt,$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt,$$

برای $n=1,2,\ldots$.

(ت) قضیهٔ همگرایی ۷.۳۸، ۹.۳۸، و ۱۰.۳۸ را برای سریهای فوریهٔ توابع در $PC(۲L)$ بیان کنید. (راهنمایی: تغییر متغیر دهید.)

(ث) اگر $f\in PC(۲L)$، برابری پارسوال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{L}\|f\|_۲^۲=\frac{۱}{۲}a_۰^۲+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n^۲+b_n^۲),$$

که درآن نرم f درقسمت (الف) وضرایب فوریه درقسمت (پ) تعریف شده‌اند.

۳۸.ض. سری فوریهٔ هریك از توابع زیر را در فاصلهٔ تعیین‌شده حساب کنید و مجموع این سریهارا درهر نقطه مشخص کنید.

(الف) $f(x)=x$ در $(-۲, ۲]$

(ب) $f(x)=۰$ برای $-۴<x<۰$

$=x$ و برای $۰\leqslant x\leqslant ۴$

(پ) $f(x)=۰$ برای $-۳<x<۰$

$=۱$ برای $۰\leqslant x\leqslant ۱$

$=۰$ برای $۱<x\leqslant ۳$

۳۸.ط. فرض کنید f پیوسته و دوره‌اش ۲π باشد. نشان‌دهیدکه اگر سری فوریهٔ f درنقطهٔ $c\in[-\pi, \pi]$ به‌عددی همگرا باشد، آنگاه این‌سری به $f(c)$ همگراست.

۳۸. ظ. فرض می‌کنیم f به $PC(۲\pi)$ متعلق‌باشد وفرض‌می‌کنیم که $c\in[-\pi, \pi]$. اگر $\Gamma_n(f)$ نمایشگر میانگین‌چزاروکه در(۱۶.۳۸) تعریف شده‌است، باشد، نشان‌دهیدکه

$$\lim\Gamma_n(f)(c)=\frac{۱}{۲}[f(c-)+f(c+)].$$

۳۸.ع. فرض کنیدکه f و f' توابع پیوسته بادورهٔ ۲π باشند و $f''\in PC(۲\pi)$.

(الف) نشان‌دهیدکه سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}n\ (|a_n|+|b_n|)$$

که درآن a_n و b_n ضرایب فوریهٔ fاند همگراست. بنابراین عددی ثابت مانند $M>۰$ وجود دارد به‌قسمی‌که $|a_n|\leqslant M/n$ و $|b_n|\leqslant M/n$ برای هر $n\in \mathbf{N}$.

(ب) نشان‌دهیدکه سری‌فوریهٔ f' مشتق جمله به‌جملهٔ سری فوریهٔ f است.

۳۸.غ. (الف) اگر $k\in PC(۲\pi)$ و $x\in[-\pi, \pi]$ و $x_۰$، با استفاده از نابرابری شوارتس نشان‌دهیدکه

$$\left|\int_{x_0}^{x} k(t)dt\right| \leqslant \|k\|_2 |x-x_0|^{1/2} \leqslant \|k\|_2 \sqrt{2\pi}.$$

(ب) با استفاده ازقسمت (الف) و قضیهٔ همگرایی نرم ۱۰.۳۸، نشان دهیدکه اگر $f \in PC(2\pi)$ و $x_0 \in [-\pi, \pi]$، ازسری‌فوریهٔ f می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت، یعنی:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0(x-x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt,$$

وسری حاصل برای $x \in [-\pi, \pi]$ همگرای یکنواخت است.

۳۸.ف. (الف) فرض‌کنیدکه $\alpha > 0$ عدد صحیح نباشد . نشان دهیدکه برای هر $x \in [-\pi, \pi]$ داریم

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots\right].$$

(ب) بااستفاده ازقسمت (الف) نشان‌دهیدکه اگر $x \notin \mathbf{Z}$، آنگاه

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2},$$

$$\csc \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.$$

(پ) ازسری اول در (ب) جمله به‌جمله مشتق بگیرید (درستی این عمل را تحقیق کنید) ونشان‌دهیدکه اگر $x \notin \mathbf{Z}$، آنگاه

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2} = \lim_{m} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

(پ) ازسری اول در (ب) جمله به‌جمله انتگرال بگیرید (اعتبار این‌عمل‌را تحقیق نمایید)ونشان‌دهدکه‌اگر $x \notin \mathbf{Z}$، آنگاه

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{m}\left[\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)\right].$$

فصل هفتم

مشتق گیری در $\mathbf{R}^p$

دراین فصل به نظریهٔ توابع مشتق‌پذیر در $\mathbf{R}^p$ درحالت $p>1$ می‌پردازیم. اگــرچه این نظریه به موازات آنچه کــه در بخشهای ۲۷ و ۲۸ ارائه شده است، پیش می‌رود، اما به پیچیدگیها و ویژگیهای جدیدی برمی‌خوریم. برخی از آنهــا صرفاً حاصل از پیچیدگی نماد وغیرقابل اجتناب است، ولی بیشتر آنها بدین لحاظ است که از «مسیرهای مختلف» می‌توان به‌نقطهٔ $c\in\mathbf{R}^p$ نزدیك شد و درنتیجه پدیده‌های جدیدی مطرح می‌شوند.

دربخش ۲۷ مشتق تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را درنقطهٔ $c\in\mathbf{R}$ به‌روش معمول، به‌صورت عدد $L\in\mathbf{R}$ به‌قسمی که

$$L=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

تعریف کردیم، این مشتق، یعنی عدد L را، می‌توانستیم با رابطهٔ

$$\lim_{x\to c}\frac{|f(x)-f(c)-L(x-c)|}{|x-c|}=0.$$

تعریف کنیم، این تعریف معادل با تعریف قبلی است و این معنی را روشن می‌کند که برای xهای به قدر کافی نزدیك به c، مقادیر $f(x)$ را با مقادیر نگاشت آفین[1]،

$$x\to f(c)+L(x-c),$$

---

۱. در درسهای مقدماتی این چنین نگاشتی را «خطی» گویند. بااین حال، برای سازگاری با استفادهٔ محدودتر از واژهٔ «خطی» ارائه شده دربخش ۲۱، دراینجا واژهٔ «آفین» در مورد تابعی به‌کار می‌رودکه از افزودن یك ثابت به‌یك تابع خطی حاصل می‌شود.

که نمودار آن خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(c, f(c))$ است، تخمین می‌زنیم.
این تعبیر مشتق را برای توابع در $\mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ به کار خواهیم برد. بنابراین فرض کنیم تابع f در یك همسایگی نقطهٔ $c\in\mathbf{R}^p$ تعریف شده ومقادیرش در $\mathbf{R}^q$ است؛ مشتق f در c، نگاشت خطی $L:\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ است به‌قسمی که

$$\lim_{x\to c}\frac{\|f(x)-f(c)-L(x-c)\|}{\|x-c\|}=0.$$

بنابراین برای مقادیر x که به‌اندازهٔکافی به c نزدیك هستند، $f(x)$ را بانگاشت آفین

$$x \to f(c)+L(x-c)$$

از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ تقریب می‌کنیم. [خواننده باید توجه‌کند که اگر $p=1$، آنگاه نماد $L(x-c)$ حاصلضرب عددحقیقی L در $x-c$ است، هرگاه $p>1$، $L(x-c)$ نمایشگر مقدار نگاشت خطی L در بردار $x-c$ می‌باشد.] در بخش ۳۹ مشتق را تعریف می‌کنیم و آن را با مشتقات «جزئی» مربوط می‌کنیم. در بخش۴۰ قاعدهٔ زنجیری و قضیهٔ مقدار میانگین را که از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند، به‌دست خواهیم آورد. بخش ۴۱ شامل تجزیه وتحلیلی عمیق ازخواص نگاشت توابع دیفرانسیل‌پذیرمی‌باشد،که ما را به‌قضایای مهم وارونی و تابع ضمنی می‌رساند و به قضیه‌های پارامتری‌کردن و رتبه می‌انجامد. در بخش آخر خواص فرینهٔ (اکسترمم) توابع حقیقی در $\mathbf{R}^p$ موردبحث قرار می‌گیرد.

بخش ۳۹ مشتق در $\mathbf{R}^p$

در بخش ۲۷ مشتق تابعی که دامنه و بردش در $\mathbf{R}$ است مورد بررسی قرار گرفت. دراین بخش تابعی که در زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^p$ تعریف شده و مقادیرش در $\mathbf{R}^q$ هستند از دیدگاه مشابهی موردبررسی قرار خواهد گرفت.

هرگاه خواننده تعریف ۱۰۲۷ را دوباره مورد بررسی قرار دهد، متوجه می‌شود که آن‌را می‌توان در مورد تابعی که در یك فاصلهٔ J از $\mathbf{R}$ تعریف شده و مقادیرش درفضای دکارتی $\mathbf{R}^q$ هستند نیز به‌کار برد. البته، دراین حالت L برداری در $\mathbf{R}^q$ است. تنهاتغییری که این گسترش ایجاب می کند این است‌که درمعادلهٔ (۱۰۲۷) به جای قدر مطلق، نرم در فضای $\mathbf{R}^q$ را بگذاریم. با این تغییر، تعریف ۱۰۲۷ را می‌توان‌کلمه به کلمه دراین حالت کلیتر به‌کار برد.ارزش مطالعهٔ این حالت وقتی آشکار می‌شودکه متوجه باشیم تابع f از J در $\mathbf{R}^q$ را می‌توان به‌صورت خمی درفضای $\mathbf{R}^q$ درنظر گرفت و مشتق آن (وقتی وجود دارد) در نقطهٔ $x=c$، بردار مماس بر خم در نقطهٔ $f(c)$ را به دست می‌دهد. یا می‌توان گفت اگر x نمایشگر زمان باشد، آنگاه تابع f نشانگر مسیر حرکت یك نقطه در $\mathbf{R}^q$ است و $f'(c)$، مشتق آن، نمایشگر بردار سرعت در نقطهٔ نظیر به‌زمان $x=c$ می‌باشد.

بررسی بیشتر این موضوع ما را به هندسهٔ دیفرانسیل و دینامیك می کشاند که در

حال حاضر مورد نظر ما نیست. ما در اینجا منظور ساده‌تری داریم: می‌خواهیم ابزاری تحلیلی فراهم کنیم که بررسی رضایت بخشی را ممکن سازد و این محدودیت را که دامنه در فضای یك بعدی باشد از میان بردارد و بتوانیم دامنه را درفضای دکارتی $\mathbf{R}^p$ بگیریم. اکنون به‌بیان این مطلب می‌پردازیم.

از تجزیه و تحلیل تعریف ۱.۲۷ دیده می‌شود که تنها چیزی که ایجاب می‌کند دامنه، زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ باشد کسری است که در معادلهٔ (۱.۲۷) وجود دارد، زیرا تقسیم بردار در $\mathbf{R}^q$ بر برداری در $\mathbf{R}^p$ معنی ندارد، لذا معادلهٔ (۱.۲۷) را نمی‌توان به این صورت درفضای $\mathbf{R}^p$ تعبیر کرد. بنابراین باید این معادله را به‌صورت جدیدی درآوریم. یکی از روشهای جالب در نظر گرفتن «برشهای» یك بعدی است که از نقطهٔ cی دامنه می‌گذرند. برای سهولت فرض می‌کنیم که c یك نقطهٔ درونی D، دامنهٔ تابع، باشد، آنگاه برای هر u در $\mathbf{R}^p$، نقطهٔ $c+tu$ برای مقادیرحقیقی و به‌اندازهٔ کافی کوچك t به D متعلق است.

۱.۳۹ تعریف: فرض کنیم f در یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$، مانند A، تعریف شده باشد ومقادیرش در $\mathbf{R}^q$ باشد وفرض کنیم c یك نقطهٔ درونی A و u یك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{R}^p$ باشد. بردار $L_u\in\mathbf{R}^q$ را **مشتق جزئی f در c نسبت به u** گوئیم هرگاه به ازای هرعدد $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به قسمی که برای $t\in\mathbf{R}$ که در $0<|t|<\delta(\varepsilon)$ صدق می‌کند، داشته باشیم

$$\left\|\frac{1}{t}\{f(c+tu)-f(c)\}-L_u\right\|<\varepsilon. \qquad (۱.۳۹)$$

بسهولت دیده می‌شود که مشتق جزئی L_u که در (۱.۳۹) تعریف شده است، در صورت وجود، یکتاست. L_u را نیز می‌توان به‌صورت حد زیر

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{f(c+tu)-f(c)\},$$

و یا به صورت مشتق تابع F در $t=0$ تعریف کرد؛ F با $F(t)=f(c+tu)$ برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی کوچك $|t|$ تعریف شده است و مقادیر آن در $\mathbf{R}^q$ است.

مشتق جزئی f درنقطهٔ c نسبت به u، یعنی L_u، را معمولاً به‌صورت $D_uf(c)$ و یا $f_u(c)$ نمایش می‌دهیم. نماد اول هنگامی که نماد معرف تابع، اندیس زیرین دارد (و این امر غالباً پیش‌می‌آید) بمراتب برنماد دیگر ترجیح دارد، تابع $c\to D_uf(c)=f_u(c)$ را به صورت D_uf و یا f_u نمایش می‌دهیم. این تابع برای نقاط درونی A، مانند c، که در آن نقاط حد موردنظر وجود دارد، تعریف شده است و مقادیر آن در $\mathbf{R}^q$ هستند.

واضح است که اگر مقادیر تابع f اعداد حقیقی باشند (یعنی $q=1$) و u بردار

$e_1=(1,0,\ldots,0)$ در $\mathbf{R}^p$ باشد، آنگاه مشتق جزئی f نسبت به e_1 بر **مشتق f نسبت به متغیر اول** منطبق است و معمولاً به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$D_1 f,\ f_{x_1},\ \text{یا}\ \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

به‌طریق مشابه اگر u را $(0,1,\ldots,0)=e_2$، ...، $e_p=(0,\ldots,1)$ بگیریم **مشتقات جزئی f** را **نسبت به دیگر متغیرها** به‌دست می‌آوریم:

$$D_2 f=f_{x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2},\ \ldots,\ D_p f=f_{x_p}=\frac{\partial f}{\partial x_p}.$$

در حالتی‌که نماد تابع اندیس زیرین داشته باشد، معمولاً از ویرگول برای نشان دادن مشتق جزئی استفاده می‌کنیم، مثلاً $D_j f_2=f_{2,j}$.

باید توجه داشت‌که ممکن است مشتق جزئی تابع در یك نقطه، نسبت به‌یك بردار وجود داشته باشد، ونسبت به‌بردار دیگری وجود نداشته باشد. (ر.ك. تمرین ۳۹.الف.) همچنین آشکار است که تحت شرایط مناسبی بین مشتقات جزئی مجموع و حاصلضرب و سایر ترکیبهای توابع روابطی جبری وجود دارند، ولی دراینجا به‌آنها اشاره نمی‌کنیم، چراکه یا حالتهای خاصی هستند از آنچه در زیر به دست خواهیم آورد و یا اینکه به طریقی مشابه اثبات می‌شوند.

کلمه‌ای در مورد اصطلاحات: اگر u برداری‌یکه در $\mathbf{R}^p$ باشد، مشتق جزئی $D_u f(c)=f_u(c)$ را معمولاً **مشتق جهتی f در نقطهٔ c در جهت u** یا **مشتق f در جهت u در c** گوییم.

مشتق

اشکال اصلی مشتق جزئی تابع f در یك نقطهٔ c نسبت به بردار u، این است‌که تنها در مجموعهٔ یك‌بعدی $\{c+tu : t\in\mathbf{R}\}$ تصویری از رفتار f در نزدیکی c به‌دست می‌دهد. برای به‌دست آوردن اطلاعات‌کاملتری از f در همسایگی $c\in\mathbf{R}^p$، مفهوم مشتق f در c راکه یك نگاشت خطی از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ است، ارائه می‌دهیم.

۲.۳۹ تعریف: فرض‌کنیم f دارای‌دامنهٔ A در$\mathbf{R}^p$ وبرد در$\mathbf{R}^q$ باشدوهمچنین فرض کنیم c **یك نقطهٔ درونی** A باشد. تابع f را **در c دیفرانسیل‌پذیر** گوییم، هرگاه یك‌تابع خطی $L:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ وجود داشته باشد به قسمی‌که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ موجود باشد به طوری‌که اگر بردار $x\in\mathbf{R}^p$ در $\|x-c\|<\delta(\varepsilon)$ صدق کند، آنگاه $x\in A$ و رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\|f(x)-f(c)-L(x-c)\|\leqslant\varepsilon\|x-c\|. \qquad (۲.۳۹)$$

(۲.۳۹) را می‌توان بدین صورت نیز بیان کرد: اگر برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به قسمی که اگر $u\in\mathbf{R}^p$ و $\|u\|<\delta(\varepsilon)$ ، آنگاه

$$\|f(c+u)-f(c)-L(u)\|\leqslant\varepsilon\|u\|, \qquad (۳.۳۹)$$

که به‌صورت فشرده‌تر می‌توان نوشت:

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|f(c+u)-f(c)-L(u)\|}{\|u\|}=0. \qquad (۴.۳۹)$$

خواهیم دیدکه این تابع خطی L ، درصورت وجود ، یکتاست. این تابع خطی‌را **مشتق f در** c می‌نامیم[1] ومعمولاً آنرا به‌صورت $Df(c)$ به‌جای L نمایش‌می‌دهیم. اغلب نماد $Df(c)(u)$ را به‌جای $L(u)$ و نماد $Df(c)(x-c)$ را به‌جای $L(x-c)$ به کار می‌بریم.

از نظر تحلیلی ، وجود مشتق f در نقطهٔ c نشانگر امکان تقریب زدن نگاشت $x\to f(x)$ با نگاشت $x\to f(c)+L(x-c)$ است. نابرابری (۲.۳۹) اندازهٔ ازدقت این تقریب‌را وقتی x به c نزدیک‌است، به‌دست می‌دهد. چون L خطی‌است داریم

$$f(c)+L(x-c)=(f(c)-L(c))+L(x).$$

بنابراین نگاشت $x\to f(x)$ را با نگاشتی به‌صورت $x\to y_0+L(x)$ که درآن y_0 ثابت است، تقریب می‌زنیم.چنین توابعی **نگاشتهای آفین** از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ نامیده می‌شوند. این نگاشتها درحقیقت انتقالهای نگاشتهای خطی می‌باشند و بنابراین نهاد بسیارساده‌ای دارند.

از نظر هندسی وجود مشتق f در c نشانگر وجود **صفحهٔ مماس** بر رویهٔ $\{(x,f(x)) : x\in A\}$ در $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ درنقطهٔ $(c,f(c))$ است، یعنی صفحه‌ای که نمودار تابع زیر است:

$$\{(x,f(c)+L(x-c)):x\in\mathbf{R}^p\}. \qquad (۵.۳۹)$$

اکنون به اثبات یکتایی مشتق می‌پردازیم

۳.۳۹ لم. تابع f در هرنقطه حداکثریک مشتق دارد.

برهان. فرض کنید L_1, L_2 توابع‌خطی از $\mathbf{R}^p$ بر $\mathbf{R}^q$ باشند و درشرایط (۳.۳۹) برای $\|u\|<\delta(\varepsilon)$ صدق کنند. آنگاه‌داریم

---

[1] خواننده باید توجه داشته باشدکه L را گاه **مشتق فرشه** (Fréchet) یا **دیفرانسیل** f در c می‌نامند. وآن را بعضی مواقع به‌صورت $df(c)$ یا $f'(c)$ وغیره نمایش می‌دهند.

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \|L_1(u)-L_2(u)\| \\
&\leqslant \|f(c+u)-f(c)-L_1(u)\|+\|f(c+u)-f(c)-L_2(u)\| \\
&\leqslant 2\varepsilon\|u\|.
\end{aligned}
$$

لذا برای هر $u\in\mathbf{R}^p$ ، با شرط $\|u\|\leqslant\delta(\varepsilon)$ داریم $0\leqslant\|L_1(u)-L_2(u)\|\leqslant 2\varepsilon\|u\|$. اگر $L_1\neq L_2$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند $z\in\mathbf{R}^p$ وجود دارد به‌قسمی که $L_1(z)\neq L_2(z)$ ، پس $z\neq 0$. اکنون می‌نویسیم $z_0=(\delta(\varepsilon)/\|z\|)z$. بنابراین $\|z_0\|=\delta(\varepsilon)$ و در نتیجه $0\leqslant\|L_1(z_0)-L_2(z_0)\|\leqslant 2\varepsilon\|z_0\|$. بدین ترتیب برای هر $\varepsilon>0$ داریم $\|L_1(z)-L_2(z)\|\leqslant 2\varepsilon\|z\|$ و در نتیجه $L_1(z)=L_2(z)$ ، که یك تناقض است. بنابراین $L_1=L_2$. □

۴.۳۹ چند مثال. (الف) اگر $A\subseteq\mathbf{R}^p$ و $y_0\in\mathbf{R}^q$ باشد و $f_0=A\to\mathbf{R}^q$ یك «تابع ثابت» باشد که به‌صورت $f_0(x)=y_0$ برای $x\in A$ تعریف شده است و همچنین اگر c یك نقطهٔ درونی A باشد و $x\in A$ ، آنگاه $f_0(x)-f_0(c)=0$. این نتیجه می‌دهد که f_0 در c دیفرانسیل‌پذیر است و $Df_0(c)=0$ ، یعنی «تابع خطی صفر» که هرعنصر $\mathbf{R}^p$ را به‌عنصر صفر $\mathbf{R}^q$ می‌نگارد مشتق آن است. بنابراین مشتق هرتابع ثابت در هرنقطهٔ دلخواه ، تابع خطی صفر است.

(ب) مجموعهٔ $A=\mathbf{R}^p$ و تابع خطی $f_1:A\to\mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. اگر $c\in A$ و $x\in A$ ، آنگاه $f_1(x)-f_1(c)-f_1(x-c)=0$. پس f_1 در c دیفرانسیل‌پذیر است و $Df_1(c)=f_1$. بنابراین مشتق هرتابع خطی در هرنقطه ، همان تابع خطی است.

۵.۳۹ لم . اگر $f:A\to\mathbf{R}^q$ درنقطهٔ $c\in A$ دیفرانسیل‌پذیر باشد،اعداد اکیداً مثبتی مانند δ و k وجود دارند به قسمی که اگر $\|x-c\|<\delta$،

$$\|f(x)-f(c)\|\leqslant k\|x-c\|. \qquad (۶.۳۹)$$

بخصوص نتیجه می‌شود که f در $x=c$ پیوسته است.

برهان. بنا به تعریف ۲.۳۹ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به قسمی که اگر $0<\|x-c\|<\delta$ ، آنگاه (۲.۳۹) برای $\varepsilon=1$ برقرار است. اگر نابرابری مثلثی را به‌کار بریم، وقتی $0<\|x-c\|\leqslant\delta$ داریم

$$\|f(x)-f(c)\|\leqslant\|L(x-c)\|+\|x-c\|.$$

حال بر طبق قضیهٔ ۳.۲۱ ، عددی مانند $B>0$ وجود دارد به قسمی که $\|L(x-c)\|\leqslant B\|x-c\|$ برای هر $x\in\mathbf{R}^p$. بنابراین هرگاه $0<\|x-c\|\leqslant\delta$ ، نتیجه می گیریم که

$$\|f(x)-f(c)\| \leqslant (B+1)\|x-c\|,$$

واین نابرابری برای $x=c$ نیز برقرار است. □

اینك نشان می‌دهیم که وجود مشتق در یك نقطه، وجود تمام مشتقهای جزئی در آن نقطه را ایجاب می‌کند.

۶.۳۹ قضیه. اگر $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و $f: A \to \mathbf{R}^q$ در نقطهٔ $c \in A$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، و اگر u عنصر دلخواهی در $\mathbf{R}^p$ باشد، $D_u f(c)$، یعنی مشتق جزئی f در c نسبت به u، وجود دارد وعلاوه‌براین

$$D_u f(c) = Df(c)(u). \tag{۷.۳۹}$$

برهان. چون f در c دیفرانسیل‌پذیر است، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\|f(c+tu)-f(c)-Df(c)(tu)\| \leqslant \varepsilon\|tu\|,$$

بشرط آنکه $\|tu\| < \delta(\varepsilon)$. اگر $u=0$، بآسانی دیده می‌شود که مشتق جزئی نسبت به 0 برابر با $Df(c)(0)=0$ است، بنابراین فرض می‌کنیم که $u \neq 0$. در نتیجه اگر

$$0 < |t| \leqslant \delta(\varepsilon)/\|u\|،$$

داریم

$$\left\|\frac{f(c+tu)-f(c)}{t} - Df(c)(u)\right\| \leqslant \varepsilon\|u\|.$$

این نشان می‌دهد که $Df(c)(u)$ مشتق جزئی f نسبت به u در c است، و این حکم موردنظر ماست. □

۷.۳۹ نتیجه. مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$، تابع $f: A \to \mathbf{R}$، و یك نقطهٔ درونی A مانند c مفروض‌اند. اگر $Df(c)$، مشتق در نقطهٔ c، وجود داشته‌باشد، آنگاه هریك از مشتقهای جزئی $D_1 f(c), \ldots, D_p f(c)$ در $\mathbf{R}$ وجود دارند واگر $u=(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathbf{R}^p$، آنگاه

$$Df(c)(u) = u_1 D_1 f_1(c) + \cdots + u_p D_p f(c). \tag{۸.۳۹}$$

برهان. از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که به‌ازای هریك از بردارهای $e_1, \ldots, e_p$ مشتقهای جزئی $D_1 f(c)$،...،$D_p(f)(c)$ وجود دارند وبترتیب برابرند با

$$Df(c)(e_1), \ldots, Df(c)(e_p).$$

اما، چون $Df(c)$ خطی است و $u = u_1e_1 + \cdots + u_pe_p$، نتیجه می‌گیریم که

$$Df(c)(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j Df(c)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} u_j D_j f(c). \square$$

تذکر. (الف) عکس نتیجهٔ ۷.۳۹ همواره درست نیست، چراکه ممکن است مشتقهای جزئی f وجود داشته باشند، بدون آنکه مشتق تابع موجود باشد. برای مثال، فرض کنیم $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{برای } (x, y) = (0, 0)$$

$$= \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{برای } (x, y) \neq (0, 0)$$

به‌عنوان تمرین نشان‌دهید که مشتق جزئی f نسبت به‌بردار (a, b) در نقطهٔ $(0, 0)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{(a, b)} f(0, 0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \ (a, b) \neq (0, 0). \qquad (9.39)$$

بنابراین، $D_1 f(0, 0) = 0$ و $D_2 f(0, 0) = 0$. اگر مشتق Df در $(0, 0)$ وجود داشته باشد، از نتیجهٔ ۷.۳۹ داریم

$$D_{(a, b)} f(0, 0) = Df(0, 0)(a, b) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

که با (۹.۳۹) متناقض است.

(ب) بعدها خواهیم دید که اگر $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و مشتقهای جزئی $f: A \to \mathbf{R}^q$ در c پیوسته باشند، آنگاه $Df(c)$ وجود دارد.

۸.۳۹ چند مثال (الف) فرض کنید $A \subseteq \mathbf{R}$ و $f: A \to \mathbf{R}$. آنگاه f در یك نقطهٔ درونی A مانند c بنابه‌تعریف ۲.۳۹ دیفرانسیل‌پذیر است اگر وفقط اگر مشتق معمولی

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} = f'(c)$$

وجود داشته‌باشد. در این‌حالت مشتق $Df(c)$ تابع‌خطی از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$u \longrightarrow f'(c)u.$$

بنابراین $Df(c)$ نقطهٔ $u\in\mathbf{R}$ را برحاصلضرب $f'(c)$ و u می‌نگارد. (در اصطلاح ماتریسی، تابع مشتق، $Df(c)$، نگاشتی خطی است که با یك ماتریس یك در یك که تنها عنصرش $f'(c)$ است، نمایش داده می‌شود.)

از قدیم مرسوم بوده است که به‌جای عدد حقیقی u که تابع خطی $Df(c)$ روی آن عمل می‌کند نماد dx را به‌کاربرند. (در اینجا «d» صرفاً نقش یك پیشوند را دارد و هیچگونه معنی دیگری ندارد.) در این‌صورت اگر نمادگذاری مشتق منسوب به‌لایبنیتز[1] را به‌کاربریم، فرمول $Df(c)(u)=f'(c)u$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Df(c)(dx)=\frac{df}{dx}(c)dx.$$

(ب) $A\subseteq\mathbf{R}$ و $f:A\to\mathbf{R}^q$ (برای $q>1$) مفروض‌است. بنابراین f را می‌توان به‌صورت «توابع مختصاتش» به‌شکل زیر نشان‌داد:

$$f(x)=(f_1(x),\dots,f_q(x)),\ x\in A.$$

به‌عنوان‌تمرین خواننده می‌تواند ثابت کندکه f در یك‌نقطهٔ درونی A مانند c دیفرانسیل‌پذیر است اگر وفقط اگر هریك از توابع حقیقی $f_1,\dots,f_q$ در c مشتق داشته‌باشند. در این‌حالت $Df(c)$، یعنی مشتق، تابع خطی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}^q$ زیر است

$$u \longrightarrow u(f'_1(c),\dots,f'_q(c)),\ u\in\mathbf{R}.$$

بنابراین $Df(c)$ عدد حقیقی u را درحاصلضرب u ویك بردار ثابت

$$f'(c)=(f'_1(c),\dots,f'_q(c))$$

می‌نگارد. اگر f به‌عنوان یك «خم» درنظر گرفته‌شود، این‌بردار، «بردار مماس» بر f در نقطهٔ $f(c)$ نامیده می‌شود.

(پ) اگر $A\subseteq\mathbf{R}^p$ ($p>1$) و $f:A\to\mathbf{R}$، آنگاه از نتیجهٔ ۳۹. ۷ حاصل می‌شودکه اگر $Df(c)$، تابع مشتق در یك‌نقطهٔ درونی A مانند c، وجود داشته‌باشد، آنگاه هر یك از مشتقهای جزئی $D_1f(c),\dots,D_pf(c)$ وجود دارند و علاوه براین $Df(c)$ نگاشت خطی از $u=(u_1,\dots,u_p)\in\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ است که با

---

۱. گوتفرید ویلهلم‌لایبنیتز Gottfried Wilhelm Leibniz (۱۶۴۶–۱۷۱۶) وآیزك نیوتن (۱۶۴۲–۱۷۲۷) از بنیانگذاران حساب‌دیفرانسیل وانتگرال بودند. لایبنیتز بیشتر عمر خود را صرف خدمت به‌دوك‌ها نورکرد ویك نابغهٔ جامع بود. تحقیقات مهمی درزمینه‌های ریاضیات، حقوق، فلسفه، علوم مذهبی، زبانشناسی وتاریخ دارد.

$$Df(c)(u)=u_1D_1f(c)+\cdots+u_pD_pf(c)$$

مشخص می‌شود. اگــرچه صرف وجود مشتقهای جزئی دلیلی بر وجود مشتق نیست ، ولی نشان خواهیم‌داد که پیوستگی آنها در c وجود مشتق را تضمین می کند.

برخی مواقع وقتی مشتق در یك نقطهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند $u=(u_1,\dots,u_p)$ عمل می‌کند ، به‌جای u می‌نویسیم $dx=(dx_1,\dots,dx_p)$. درایـــن‌صورت اگر نماد لایبنیتز مربوط به‌مشتقهای جزئی را به‌کار بریم فرمول بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Df(c)(dx)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p.$$

(ت) اکنون حـــالت $A\subseteq\mathbf{R}^p$ و $f:A\to\mathbf{R}^q$ را ، که درآن $p>1$ و $q>1$ ، درنظـــر مـی گیریم. در این حـــالت می‌توان $y=f(x)$ را به‌صورت دستگاه q تابع p متغیری

$$y_1=f_1(x_1,\dots,x_p),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_q=f_q(x_1,\dots,x_p)$$

نشان‌داد. اگر f دریك‌نقطهٔ A، مانند $c=(c_1,\dots,c_p)$ ، دیفرانسیل‌پذیر باشد، به‌عنوان تمرین نشان‌دهید که هر یك از مشتقهای جزئی $(D_jf_i(c)(=f_{i,j}(c))$ در نقطهٔ c وجود دارند. (باز در اینجا در حالت‌کلی وجود مشتقهای جزئی برای دیفرانسیل‌پذیری f در c کافی نیست.) $Df(c)$، اگر وجودداشته باشد، تابعی خطی است که نقطهٔ $u=(u_1,\dots,u_p)$ در $\mathbf{R}^p$ را برنقطهٔ $w=(w_1,\dots,w_q)$ در $\mathbf{R}^q$ که به‌صورت زیر داده شده است:

$$w_1=D_1f_1(c)u_1+D_2f_1(c)u_2+\cdots+D_pf_1(c)u_p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (10.39)$$

$$w_q=D_1f_q(c)u_1+D_2f_q(c)u_2+\cdots+D_pf_q(c)u_p$$

می‌نگارد. مشتق ، $Df(c)$ ، نگاشتی خطی از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ است که بـا ماتریس $q\times p$ی زیر تعریف شده است:

$$\left|\begin{matrix} D_1 f_1(c) & D_2 f_1(c) & \cdots & D_p f_1(c) \\ D_1 f_2(c) & D_2 f_2(c) & \cdots & D_p f_2(c) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ D_1 f_q(c) & D_2 f_q(c) & \cdots & D_p f_q(c) \end{matrix}\right| \tag{۱۱.۳۹}$$

$$= \left|\begin{matrix} f_{1,1}(c) & f_{1,2}(c) & \cdots & f_{1,p}(c) \\ f_{2,1}(c) & f_{2,2}(c) & \cdots & f_{2,p}(c) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ f_{q,1}(c) & f_{q,2}(c) & \cdots & f_{q,p}(c) \end{matrix}\right|$$

همانطوری که قبلاً خاطرنشان کرده‌ایم (ر.ك. قضیهٔ ۲.۲۱) این آرایهٔ اعدادحقیقی یك‌تابع‌خطی از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ را معین می کند. ماتریس (۱۱.۳۹) **ماتریس ژاکوبی** دستگاه (۱۰ .۳۹) در نقطهٔ c نـامیده می‌شود . وقتی کـه $p=q$، دترمینان ماتریس (۱۱.۳۹) **دترمینان ژاکوبی** یا به‌طور خلاصه **ژاکوبی** دستگاه (۱۰ .۳۹) در نقطهٔ c نامیده می‌شود. معمولاً، این دترمینان‌ژاکوبی[1] به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_p)}\right|_{x=c} \quad \text{یا} \quad J_f(c).$$

وجود مشتق

در قضیهٔ ۶.۳۹ ثابت شده است که وجود مشتق یك‌تابع دریك نقطه وجود تمام مشتقهای جزئی تابع را در این‌نقطه ایجاب می‌کند. در تذکری که بعد از نتیجهٔ ۷.۳۹ آمده‌است دیدیم که وجود مشتقهای جزئی وجـود مشتق را حتی درحالت $p=2$ و $q=1$ ایجاب نمی‌کند. اینك نشان خواهیم‌داد که پیوستگی مشتقهای جزئی در c برای وجود مشتق در c کافی است.

۹.۳۹ قضیه. A زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$، تابع $f:A\to\mathbf{R}^q$، ویك نقطهٔ درونی A، مانند c

۱. کارل (گ ـ ی) ژاکوبی Carl (G. J.) Jacobi (۱۸۰۴ ـ ۱۸۵۱) در دانشگاههای کونیگسبرگ وبرلین استاد بود. کار اصلی او درتوابع بیضوی است، ولی او به‌خاطرکارهایش در دترمینانها ودینامیك نیز معروف است.

مفروض‌اند. هرگاه مشتقهای جزئی $D_j f_i$ ($i=1, \ldots, q$ و $j=1, \ldots, p$) در یك همسایگی c موجود ودر c پیوسته باشند، آنگاه f در c دیفرانسیل‌پذیر است. علاوه براین $Df(c)$ به‌صورت ماتریس $q\times p$ (۱۱.۳۹) نمایش داده می‌شود.

برهان. قضیه را به‌تفصیل درحالت $q=1$ اثبات می‌کنیم. هرگاه $\varepsilon>0$، فرض کنیم $\delta(\varepsilon)>0$ به‌قسمی باشد که اگر $\|y-c\|<\delta(\varepsilon)$ و $j=1, 2, \ldots, p$، آنگاه

$$|D_j f(y)-D_j f(c)|<\varepsilon. \tag{۱۲.۳۹}$$

هرگاه $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ و $c=(c_1, c_2, \ldots, c_p)$، فرض کنیم $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$ نمایشگر نقاط زیر باشند:

$$z_1=(c_1, x_2, \ldots, x_p),\quad z_2=(c_1, c_2, x_3, \ldots, x_p),$$

$$\ldots,\ z_{p-1}=(c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}, x_p),$$

و $x=z_0$ و $z_p=c$. هرگاه $\|x-c\|\leqslant\delta(\varepsilon)$، بسهولت دیده می‌شود که

$$\|z_j-c\|\leqslant\delta(\varepsilon)$$

برای $j=0, 1, \ldots, p$. بدین‌ترتیب می‌توان تفاضل $f(x)-f(c)$ را به صورت مجموع ادغامی زیر نوشت:

$$f(x)-f(c)=\sum_{j=1}^{p}\{f(z_{j-1})-f(z_j)\}.$$

اگر قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۲۷ را در مورد جملهٔ j ام این مجموع به‌کار بریم، نقطه‌ای مانند $\bar{z}_j$ واقع برقطعه‌خط واصل بین z_{j-1} و z_j به‌دست می‌آوریم به‌قسمی که

$$f(z_{j-1})-f(z_j)=(x_j-c_j)D_j f(\bar{z}_j).$$

بنابراین داریم

$$f(x)-f(c)-\sum_{j=1}^{p}(x_j-c_j)D_j f(c)=\sum_{j=1}^{p}(x_j-c_j)\{D_j f(\bar{z}_j)-D_j f(c)\}.$$

طبق نابرابری (۱۲.۳۹) قدرمطلق هریك از کمیتهایی که درآکولادهای طرف دوم‌فرمول ارائه شده‌اند از ε کوچکترند. با به‌کاربردن نابرابری شوارتس در این مجموع اخیر، وقتی $\|x-c\|\leqslant\delta(\varepsilon)$، برآورد زیر به‌دست می‌آید

$$\|f(x)-f(c)-\sum_{j=1}^{p}(x_j-c_j)D_jf(c)\| \leqslant (\varepsilon\sqrt{p})\|x-c\|.$$

بدین ترتیب ثابت کردیم که f در c دیفرانسیل‌پذیر است و $Df(c)$ تابع مشتق آن، تابع خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر است :

$$u=(u_1,\dots,u_p) \longrightarrow Df(c)(u)=\sum_{j=1}^{p}u_jD_jf(c).$$

درحالتی که مقادیر f در $\mathbf{R}^q$ ، $q>1$ ، هستند، می‌توان استدلال مشابهی را برای هریك از توابع حقیقی f_i، $i=1,2,\dots,q$، که در نمایش مختصی نگاشت f ظاهر می‌شوند، به‌کار برد. اثبات جزئیات آن را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. □

تمرین

۳۹. الف. فرض کنید $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y)=\frac{x}{y} \qquad \text{برای } y\neq 0$$

$$=0 \qquad \text{برای } y=0$$

نشان دهید که مشتقهای جزئی $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ وجود دارند و برابر با صفر می‌باشند. با این‌حال، مشتق f در $(0,0)$ نسبت به بردار $u=(a,b)$ اگر $ab\neq 0$ وجود ندارد. نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته نیست، و درحقیقت f درهمسایگی $(0,0)$ حتی کراندار نیست.

۳۹. ب. فرض کنید $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g(x,y)=0 \qquad \text{برای } xy=0$$

$$=1 \qquad \text{برای } xy\neq 0$$

نشان دهید که مشتقهای جزئی $D_1g(0,0)$ و $D_2g(0,0)$ وجود دارند و برابر با صفر می‌باشند. با این‌حال مشتق g در $(0,0)$ نسبت به بردار $u=(a,b)$ با شرط $ab\neq 0$ وجود ندارد. نشان دهید که g در $(0,0)$ پیوسته نیست اما در همسایگی $(0,0)$ کراندار است.

۳۹. پ. فرض کنید $h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$h(x,y)=0 \qquad \text{برای } (x,y)=(0,0)$$

$$=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{برای } (x,y)\neq(0,0)$$

نشان دهید که مشتقهای جزئی $D_1h(0,0)$ و $D_2h(0,0)$ وجود دارند و برابر با صفر می‌باشند. با این‌حال مشتق جزئی h در $(0,0)$ نسبت به‌بردار $u=(a,b)$ با شرط $ab\neq 0$ وجود ندارد. نشان دهید که h در $(0,0)$ پیوسته نیست.

۳۹. ت. فرض کنید $k:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$k(x,y)=0 \qquad \text{برای } (x,y)=(0,0)$$

$$=\frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \text{برای } (x,y)\neq(0,0)$$

نشان دهید که مشتق جزئی k در $(0,0)$ نسبت به بردار دلخواه $u=(a,b)$ وجود دارد و برابر است با

$$D_uk(0,0)=\frac{b^2}{a} \qquad \text{هرگاه } a\neq 0$$

نشان دهید که k در $(0,0)$ پیوسته نیست و بنابراین دراین نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

۳۹. ث. فرض کنید $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x,y)=0 \qquad \text{برای } (x,y)=(0,0)$$

$$=\frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \text{برای } (x,y)\neq(0,0)$$

نشان دهید که مشتق جزئی f در $(0,0)$ نسبت به هربردار دلخواه $u=(a,b)$ وجود دارد و برابر است با

$$D_uf(0,0)=\frac{ab^2}{a^2+b^2} \qquad \text{هرگاه } (a,b)\neq(0,0)$$

نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته است ولی در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

۳۹. ج. فرض کنید $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x,y)=x^2+y^2 \qquad \text{هرگاه } x\text{،}y \text{ هردو گویا باشند}$$

$$=0 \qquad \text{درغیر این‌صورت}$$

نشان دهید که F تنها درنقطهٔ $(0,0)$ پیوسته است و دراین نقطه دیفرانسیل پذیر است.

۳۹. چ. فرض کنید $G:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$G(x,y)=(x^2+y^2)\sin 1/(x^2+y^2) \qquad \text{هرگاه } (x,y)\neq(0,0)$$

$$=0 \qquad \text{هرگاه } (x,y)=(0,0)$$

نشان دهید که G در هر نقطهٔ $\mathbf{R}^2$ دیفرانسیل پذیر است ولی مشتقهای جزئی D_1G و D_2G در همسایگی $(0,0)$ کراندار نیستند (و بنابراین پیوسته نمی‌باشند).

۳۹. ح. فرض کنید $H:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$H(x,y)=(x^2+x^2\sin\frac{1}{x},y) \qquad \text{هرگاه } x\neq 0$$

$$=(0,y) \qquad \text{هرگاه } x=0$$

نشان دهید که D_1H درهرنقطه وجود دارد و D_2H دریك همسایگی $(0,0)$ وجوددارد و پیوسته است. نشان دهیدکه H در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر است.

۳۹. خ. فرض کنید $A\subseteq\mathbf{R}^p$، و $f:A\to\mathbf{R}^q$ در یك نقطهٔ **درونی** مانند c دیفرانسیل پذیر باشد. و فرض کنید $v\in\mathbf{R}^q$. هرگاه تابع $g:A\to\mathbf{R}$ را به‌صورت $g(x)=f(x)\cdot v$ برای هر $x\in A$ تعریف کنیم. نشان دهیدکه g در c دیفرانسیل پذیر است و

$$Dg(c)(u)=(Df(c)(u))\cdot v \quad \text{برای } u\in\mathbf{R}^p$$

۳۹. د. یك نقطهٔ **درونی** $A\subseteq\mathbf{R}^p$ مانند c و $f:A\to\mathbf{R}$ مفروض است.

(الف) اگر f در c دیفرانسیل پذیر باشد، نشان دهیدکه بردار یکتایی مانند $v_c\in\mathbf{R}^p$ وجود دارد به قسمتی که

$$D_uf(c)=Df(c)(u)=v_c\cdot u, \quad \text{برای هر } u\in\mathbf{R}^p$$

بردار v_c را **گرادیان** f در c گوییم و آن را به‌صورت نمادی ∇_cf یا $\operatorname{grad}f(c)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهیدکه

$$\nabla_cf=(D_1f(c),\cdots,D_pf(c))\cdot$$

(ب) با استفاده ازنابرابری شوارتس نشان دهیدکه اگر $u\in\mathbf{R}^p$ و $\|u\|=1$، آنگاه تابع $u\to D_uf(c)$ ماکزیمم است وقتی که u مضرب مثبتی از ∇_cf باشد. بنابراین جهتی که در آن مشتق جهتی f در c ماکزیمم است، جهت گرادیان f در c است.

۳۹. ذ. فرض کنید c یك نقطهٔ **درونی** $A\subseteq\mathbf{R}^p$ باشد و $f,g:A\to\mathbf{R}$ در c دیفرانسیل پذیر باشند و $\alpha\in\mathbf{R}$. نشان دهیدکه

$$\nabla_c(\alpha f)=\alpha\nabla_cf, \quad \nabla_c(f+g)=\nabla_cf+\nabla_cg,$$

$$\nabla_c(fg)=f(c)\nabla_cg+g(c)\nabla_cf\cdot$$

۳۹. ر. گرادیانهای توابع زیر را دریك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{R}^3$ بیابید:

(الف) $f_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2;$

(ب) $f_2(x,y,z)=x^2-yz+z^2;$

(پ) $f_3(x,y,z)=xyz.$

۳۹. ز. مشتقهای جهتی هر یك از توابــع تمرین ۳۹. ر را درنقطهٔ $(2,1,0)$ در جهت $(3,2,0)$ بیابید.

۳۹. ژ. فرض‌کنید $A\subseteq\mathbf{R}^2$، وفرض‌کنید نمودار یك تابع $f:A\to\mathbf{R}$ ، رویهٔ S_f در $\mathbf{R}^3$ باشد:

$$S_f=\{(x,y,f(x,y,)):(x,y)\in A\}.$$

هر گاه f دریك نقطهٔ **درونی** A، مانند (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر باشد، **صفحهٔ مماس** بر S_f درنقطهٔ $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ نمـودار نگاشت آفین $A_{(x_0,y_0)}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$A_{(x_0,y_0)}(x,y)=f(x_0,y_0)+Df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0).$$

نشان دهید که صفحهٔ مماس بر S_f دراین نقطه عبارت است از:

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:z=f(x_0,y_0)+D_1f(x_0,y_0)(x-x_0)$$
$$+D_2f(x_0,y_0)(y-y_0)\}.$$

۳۹. س. صفحه‌های مماس بــر رویه‌های واقع در $\mathbf{R}^3$ راکه نمودار توابع زیــر هستند، درنقاط مشخص شده تعیین‌کنید. برای هریك شکلی رسم‌کنید.

(الف) $f_1(x,y)=x^2+y^2$ درنقاط $(0,0)$ و $(2,1)$

(ب) $f_2(x,y)=xy$ در نقاط $(0,0)$ و $(2,1)$

(پ) $f_3(x,y)=(4-(x^2+y^2))^{1/2}$ درنقاط $(0,0)$ و $(1,1)$

۳۹. ش. فرض‌کنید $J\subseteq\mathbf{R}$ یك فاصله و $g:J\to\mathbf{R}^3$ نمایشگر یك خم C_g واقع در $\mathbf{R}^3$ به‌صورت پارامتری زیر باشد:

$$C_g=\{(g_1(t),g_2(t),g_3(t)):t\in J\}.$$

اگــر g در یك نقطهٔ **درونی** J ، مانند t_0، دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه **فضای مماس** بــر C_g درنقطـهٔ $g(t_0)=(g_1(t_0),g_2(t_0),g_3(t_0))\in\mathbf{R}^3$ توسط نگاشت آفین $A_{t_0}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ که با رابطهٔ

$$A_{t_0}(t)=g(t_0)+Dg(t_0)(t-t_0)$$

داده شده است، به‌صورت پارامتری تعریف می‌شود. نشان دهید که فضای مماس بر C_g در این نقطه عبارت است از:

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x=g_1(t_0)+g_0'(t_0)(t-t_0),$$
$$y=g_2(t_0)+g_2'(t_0)(t-t_0),\quad z=g_3(t_0)+g_3'(t_0)(t-t_0)\}.$$

اگر $g_1'(t_0), g_2'(t_0), g_3'(t_0)$ هر سه صفر نباشند، این فضای مماس، یک خط در $\mathbf{R}^3$ و موسوم به **خط مماس** است.

۳۹. ص. معادلات پارامتری خطوط مماس برخطهای واقع در $\mathbf{R}^3$ زیر را در نقاط مشخص‌شده تعیین کنید:

(الف) $g: t \longrightarrow (x,y,z)=(t,t^2,t^3)$ درنقاط نظیر به $t=0$ و $t=1$.

(ب) $g: t \longrightarrow (x,y,z)=(t-1,t^2,2)$ در نقاط نظیر به $t=0$ و $t=1$.

(پ) $g: t \longrightarrow (x,y,z)=(2\cos t, 2\sin t, t)$ درنقاط نظیر به $t=\frac{\pi}{2}$ و $t=\pi$.

۳۹. ض. فرض کنید $A\subseteq \mathbf{R}^2$ و $h: A \to \mathbf{R}^3$ نمایشگر پارامتری یک‌رویهٔ S_h در $\mathbf{R}^3$ به‌صورت زیر است:

$$S_h=\{(h_1(s,t),h_2(s,t),h_3(s,t)):(s,t)\in A\}.$$

اگر h در یک نقطهٔ درونی A، مانند (s_0, t_0)، دیفرانسیل‌پذیر باشد. **فضای مماس** بر S_h در نقطهٔ $h(s_0,t_0)=(h_1(s_0,t_0),h_2(s_0,t_0),h_3(s_0,t_0))\in\mathbf{R}^3$ توسط نگاشت مستوی $A_{(s_0,t_0)}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ که با رابطهٔ

$$A_{(s_0,t_0)}(s,t)=h(s_0,t_0)+Dh(s_0,t_0)(s-s_0,t-t_0)$$

داده شده است، به‌صورت پارامتری تعریف می‌شود. نشان دهید که فضای مماس بر S_h در این نقطه عبارت است از:

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x=h_1(s_0,t_0)+D_1h_1(s_0,t_0)(s-s_0)+D_2h_1(s_0,t_0)(t-t_0),$$
$$y=h_2(s_0,t_0)+D_1h_2(s_0,t_0)(s-s_1)+D_2h_2(s_0,t_0)(t-t_0),$$
$$z=h_3(s_0,t_0)+D_1h_3(s_0,t_0)(s-s_0)+D_2h_3(s_0,t_0)(t-t_0)\}.$$

اگر دوبردار $(D_1h_1(s_0,t_0),D_1h_2(s_0,t_0),D_1h_3(s_0,t_0))$ و

$$(D_2h_1(s_0,t_0),\ D_2h_2(s_0,t_0),D_2h_3(s_0,t_0))$$

در $\mathbf{R}^3$ یکی مضرب دیگری نباشد، این فضای مماس، یک صفحه در $\mathbf{R}^3$ وموسوم به **صفحهٔ مماس** است.

۳۹. ط. معادلات پارامتری صفحه‌های مماس بر رویه‌های زیر در $\mathbf{R}^3$ را در نقاط

مشخص شده به‌دست آورید:

(الف) $h:(s,t) \to (x,y,z)=(s,t,s^۲+t^۲)$

در نقاط $(۱,۱)$, $(s,t)=(۰,۰)$.

(ب) $h:(s,t) \to (x,y,z)=(s+t,s-t,s^۲-t^۲)$

در نقاط $(۱,۲)$,$(s,t)=(۰,۰)$.

(پ) $h:(s,t) \to (x,y,z)=(s\cos t,s\sin t,t)$

در نقاط $\left(۲,\frac{\pi}{۲}\right)$, $(s,t)=(۱,۰)$.

(ت) $h:(s,t) \to (x,y,z)=(\cos s\sin t,\sin s\sin t,\cos t)$

در نقاط $\left(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}\right)$, $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$, $(s,t)=(۰,۰)$.

۳۹. ظ. هرگاه $A\subseteq\mathbf{R}^p$ و $f:A\to\mathbf{R}$ به قسمی باشد که مشتقهای جزئی $D_۱f,\dots,D_pf$ موجود و در یك همسایگی $c\in A$ کراندار باشند، آنگاه f در c پیوسته‌است. (راهنمایی: مانند اثبات قضیهٔ ۹.۳۹ عمل کنید.)

۳۹. ع. فرض کنید f در یك همسایگی نقطهٔ $c\in\mathbf{R}^۲$ تعریف شده باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}$ باشد. همچنین فرض کنید که $D_۱f$ وجود داشته، درهمسایگی c پیوسته باشد و $D_۲f$ در c وجود داشته باشد. نشان دهید که f در c دیفرانسیل‌پذیر است.

۳۹. غ. مجموعهٔ $A\subseteq\mathbf{R}^p$ وتوابع $f:A\to\mathbf{R}^q$ و $g:A\to\mathbf{R}^r$ مفروض‌اند. اگر $F:A\to\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^r=\mathbf{R}^{q+r}$ برای $x\in A$ به‌صورت $F(x)=(f(x),g(x))$ تعریف‌شده باشد، نشان دهید که F دریك نقطهٔ درونی $c\in A$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر و فقط اگر f و g در c دیفرانسیل‌پذیر باشند. دراین حالت داریم

$$DF(c)(u)=(Df(c)(u),Dg(c)(u)),\ u\in\mathbf{R}^p.$$

۳۹.ف. مجموعه‌های $A\subseteq\mathbf{R}^p$ و $B\subseteq\mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. فرض کنید $G:A\times B\to\mathbf{R}^r$ دریك نقطهٔ $A\times B$، مانند (a,b) دیفرانسیل‌پذیرباشد. توابع $g_۱:A\to\mathbf{R}^r$ و $g_۲:B\to\mathbf{R}^r$ را برای هر $x\in A$ وهر $y\in B$ به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$g_۱(x)=G(x,b),\qquad g_۲(y)=G(a,y)$$

واین توابع را «نگاشتهای جزئی» در (a,b) می‌نامیم. نشان دهید که $g_۱$ و $g_۲$ بترتیب‌در aوb دیفرانسیل‌پذیرند وبرای هر $u\in\mathbf{R}^p$ و $v\in\mathbf{R}^q$، داریم

$$Dg_۱(a)(u)=DG(a,b)(u,۰)\ ,\ Dg_۲(b)(v)=DG(a,b)(۰,v).$$

علاوه براین

$$DG(a,b)(u,v)=Dg_1(a)(u)+Dg_2(b)(v).$$

[گاهی $Dg_1(a)\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^r)$ و $Dg_2(b)\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^s,\mathbf{R}^r)$ را «مشتقهای جزئی بلوکی» G در (a,b) می‌نامیم و آنها را بترتیب به $D_{(1)}G(a,b)$ و $D_{(2)}G(a,b)$ نمایش می‌دهیم.]

بخش ۴۰ قاعدهٔ زنجیری و قضیه‌های مقدار میانگین

در آغاز به روابط اساسی جبری مربوط به‌مشتق می‌پردازیم. این خواص اغلب در این کتاب به‌کار خواهند رفت و آنها را درمورد توابع حقیقی یك متغیره به‌دست آورده‌ایم.

۱.۴۰ قضیه. مجموعهٔ $A\subseteq\mathbf{R}^p$ و یك نقطهٔ درونی A مانند c مفروض‌اند.
(الف) اگر f و g در A، به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده و در c دیفرانسیل‌پذیر باشند و اگر $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$، آنگاه تابع $h=\alpha f+\beta g$ در c دیفرانسیل‌پذیر است و داریم

$$Dh(c)=\alpha Df(c)+\beta Dg(c).$$

(ب) اگر $\varphi:A\to\mathbf{R}$ و $f:A\to\mathbf{R}^q$ در c دیفرانسیل‌پذیر باشند، آنگاه تابع حاصلضرب $k=\varphi f:A\to\mathbf{R}^q$ در c دیفرانسیل‌پذیر است و داریم

$$Dk(c)(u)=\{D\varphi(c)(u)\}f(c)+\varphi(c)\{Df(c)(u)\},\ u\in\mathbf{R}^p.$$

برهان. (الف) اگر $\varepsilon>0$، آنگاه اعدادی مانند $\delta_1(\varepsilon)>0$ و $\delta_2(\varepsilon)>0$ وجود دارند به قسمی که اگر $\|x-c\|\leqslant\inf\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$، آنگاه

$$\|f(x)-f(c)-Df(c)(x-c)\|\leqslant\varepsilon\|x-c\|,$$

$$\|g(x)-g(c)-Dg(c)(x-c)\|\leqslant\varepsilon\|x-c\|.$$

درنتیجه اگر $\|x-c\|\leqslant\inf\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$، آنگاه

$$\|h(x)-h(c)-\{\alpha Df(c)(x-c)+\beta Dg(c)(x-c)\}\|\leqslant(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon\|x-c\|.$$

اما $\alpha Df(c)+\beta Dg(c)$ یك تابع خطی از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ است، لذا نتیجه می‌شود که h در c دیفرانسیل‌پذیر است و $Dh(c)=\alpha Df(c)+\beta Dg(c)$.

(ب) یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$k(x)-k(c)-\{D\varphi(c)(x-c)f(c)+\varphi(c)Df(c)(x-c)\}$$
$$=\{\varphi(x)-\varphi(c)-D\varphi(c)(x-c)\}f(x)$$

$$+D\varphi(c)(x-c)\{f(x)-f(c)\}$$
$$+\varphi(c)\{f(x)-f(c)-Df(c)(x-c)\}.$$

چون $Df(c)$ وجود دارد، از لم ۵.۳۹ نتیجه می‌گیریم که f در c پیوسته است، بنابراین ثابتی مانند M وجود دارد به‌قسمی که برای $\delta<\|x-c\|$ داریم $\|f(x)\|\leqslant M$. از این نتیجه می‌شود که اگر $\|x-c\|$ به‌اندازهٔ کافی کوچك انتخاب شود، تمام جمله‌های طرف راست معادلهٔ اخیر به‌دلخواه کوچك است؛ وبدین ترتیب (ب) ثابت می‌شود. □

قضیهٔ بسیار مهم بعدی بیان می‌کند که مشتق ترکیب دوتابع دیفرانسیل‌پذیر، ترکیب مشتقهای آنهاست.

۲.۴۰ قاعدهٔ زنجیری. فرض کنید $A\subseteq\mathbf{R}^p$ دامنهٔ f و بردآن در $\mathbf{R}^q$ باشد و همچنین فرض کنید که $B\subseteq\mathbf{R}^q$ دامنهٔ g و بردآن در $\mathbf{R}^r$ باشد. فرض کنید که f در c دیفرانسیل‌پذیر و g در $b=f(c)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه ترکیب $h=g\circ f$ در c دیفرانسیل‌پذیر است و

$$Dh(c)=Dg(b)\circ Df(c). \qquad (۱.۴۰)$$

به‌عبارت دیگر

$$D(g\circ f)(c)=Dg(f(c))\circ Df(c). \qquad (۲.۴۰)$$

برهان. فرض قضیه ایجاب می‌کند که c نقطهٔ درونی دامنهٔ $h=g\circ f$ باشد. (چرا؟) ε را مثبت و $\delta(\varepsilon, f)$ و $\delta(\varepsilon, g)$ را $\delta(\varepsilon)$ تعریف ۲.۳۹ بگیرید. از لم ۵.۳۹ نتیجه می‌شود که اعداد اکیداً مثبتی مانند γ و K وجود دارند به‌قسمی که اگر $\|x-c\|\leqslant\gamma$، آنگاه $f(x)\in B$ و

$$\|f(x)-f(c)\|\leqslant K\|x-c\|. \qquad (۳.۴۰)$$

برای سهولت، می‌نویسیم $L_f=Df(c)$ و $L_g=Dg(b)$. طبق قضیهٔ ۳.۲۱ عدد ثابتی مانند M وجود دارد به‌قسمی که

$$\|L_g(u)\|\leqslant M\|u\|,\ u\in\mathbf{R}^q \qquad (۴.۴۰)$$

اگر $\|x-c\|\leqslant\inf\{\gamma, (1/K)\delta(\varepsilon, g)\}$، آنگاه از (۳.۴۰) نتیجه می‌شود که $\|f(x)-f(c)\|\leqslant\delta(\varepsilon, g)$، واین ایجاب می‌کند که

$$\|g(f(x))-g(f(c))-L_g(f(x)-f(c))\|\leqslant\varepsilon\|f(x)-f(c)\|\leqslant\varepsilon K\|x-c\| \qquad (۵.۴۰)$$

هرگاه علاوه‌براین فرض کنیم $\|x-c\|\leqslant\delta(\varepsilon, f)$، آنگاه از (۴.۴۰) نتیجه‌می‌گیریم که

$$\|L_g\{f(x)-f(c)-L_f(x-c)\}\|\leqslant\varepsilon M\|x-c\|.$$

اگر این رابطهٔ آخر را با (۵.۴۰) ترکیب کنیم، نتیجه می‌گیریم که اگر

$$\delta_1 = \inf\{\gamma, (1/K)\delta(\varepsilon, g), \delta(\varepsilon, f)\}$$

و اگر $x \in A$ و $\|x-c\| \leqslant \delta_1$، آنگاه

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - L_g(L_f(x-c))\| \leqslant \varepsilon(K+M)\|x-c\|,$$

واین بدان معنی است که

$$\|g\circ f(x) - g\circ f(c) - L_g\circ L_f(x-c)\| \leqslant \varepsilon(K+M)\|x-c\|.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $Dh(c) = L_g \circ L_f$. □

با حفظ نمادگذاری برهان قضیه، $L_f = Df(c)$ تابعی خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$ و $L_g = Dg(b)$ تابعی‌خطی از $\mathbf{R}^q$ به $\mathbf{R}^r$ است. ترکیب $L_g \circ L_f$ تابعی خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^r$ است، و همین‌طور هم باید باشد، چراکه $h = g\circ f$ تابعی است که در قسمتی از $\mathbf{R}^p$ تعریف شده است و مقادیرش در $\mathbf{R}^r$ است. اکنون به ذکر برخی از مثالهای این قضیه می‌پردازیم.

۳.۴۰ چند مثال. (الف) فرض کنیم $p=q=r=1$، آنگاه، $Df(c)$، مشتق f، تابعی خطی است که عدد u را بر $f'(c)u$ می‌نگارد و همچنین است درمورد تابع $Dg(b)$. ازاین نتیجه می‌شود که مشتق $g\circ f$ عدد حقیقی u را بر $g'(b)f'(c)u$ می‌نگارد.

(ب) فرض کنیم $p>1$ و $q=r=1$. طبق مثال ۸.۳۹ (پ)مشتق f در c، نقطهٔ $w=(w_1, \dots, w_p)$ در $\mathbf{R}^p$ را به‌عدد حقیقی

$$D_1 f(c)w_1 + \dots + D_p f(c)w_p$$

می‌برد وبنابراین مشتق $g\circ f$ در c، این نقطهٔ $\mathbf{R}^p$ را به‌عدد حقیقی زیرمی‌برد:

$$g'(b)[D_1 f(c)w_1 + \dots + D_p f(c)w_p].$$

(پ) فرض کنیم $q>1$ و $p=r=1$. طبق مثال ۸.۳۹ (ب) و (پ) تابع مشتق $Df(c)$، عدد حقیقی u را به‌نقطهٔ

$$Df(c)(u) = uf'(c) = (f_1'(c)u, \dots, f_q'(c)u)$$

در $\mathbf{R}^q$ می‌برد و $Dg(b)$، مشتق g در b، نقطهٔ $w=(w_1, \dots, w_q)$ در $\mathbf{R}^q$ را بـه‌عددحقیقی زیرمی‌برد:

$$D_1 g(b)w_1 + \dots + D_q g(b)w_q.$$

از این نتیجه می‌شود که مشتق تابع $h = g\circ f$ عدد حقیقی u را به‌عدد حقیقی زیر می‌برد:

$$Dh(c)u = \{D_1 g(b)f_1'(c) + \dots + D_q g(b)f_q'(c)\}u = u\{Dg(b)(f'(c))\}.$$

مقدار داخل آکولادکه برابر با $h'(c)=(g\circ f)'(c)$ است، بعضی اوقات به‌صورت نماد زیرکه دقتش کمتر است، نمایش داده می‌شود:

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{df_1}{dx}+\dots+\frac{\partial g}{\partial y_q}\frac{df_q}{dx}.$$

دراینجا، باید توجه شودکه مشتقها در نقاط مناسب حساب شوند.

(ت) حالت $p=q=2$ و $r=3$ را درنظرمی‌گیریم. برای‌سهولت درنمادگذاری، نقطهٔ متغیررا در $\mathbf{R}^p$ به (x, y)، در $\mathbf{R}^q$ به (w, z) ودر $\mathbf{R}^r$ به (r, s, t) نمایش‌می‌دهیم. آنگاه تابع f از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ را می‌توان به‌صورت

$$w=W(x, y),\quad z=Z(x, y)$$

و تابع g از $\mathbf{R}^q$ در $\mathbf{R}^r$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$r=R(w, z),\quad s=S(w, z),\quad t=T(w, z).$$

$Df(c)$، مشتق f در c، نقطهٔ (ξ, η) را به‌نقطهٔ (ω, ζ) طبق روابط زیرمی‌فرستد:

$$\begin{aligned}\omega&=W_x(c)\xi+W_y(c)\eta,\\ \zeta&=Z_x(c)\xi+Z_y(c)\eta.\end{aligned}\tag{۶.۴۰}$$

دراینجا W_x را به‌جای $D_1W=D_xW$ و... نوشته‌ایم. همچنین تابع مشتق $Dg(b)$ نقطهٔ (ω, ξ) را به‌نقطهٔ (ρ, σ, τ) طبق روابط زیرمی‌فرستد:

$$\begin{aligned}\rho&=R_w(b)\omega+R_z(b)\zeta,\\ \sigma&=S_w(b)\omega+S_z(b)\zeta,\\ \tau&=T_w(b)\omega+T_z(b)\zeta.\end{aligned}\tag{۷.۴۰}$$

یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که مشتق $g\circ f$ نقطهٔ (ξ, η) را به‌نقطهٔ (ρ, σ, τ) طبق روابط زیرمی‌برد:

$$\begin{aligned}\rho&=\{R_w(b)W_x(c)+R_z(b)Z_x(c)\}\xi+\{R_w(b)W_y(c)+R_z(b)Z_y(c)\}\eta,\\ \sigma&=\{S_w(b)W_x(c)+S_z(b)Z_x(c)\}\xi+\{S_w(b)W_y(c)+S_z(b)Z_y(c)\}\eta,\\ \tau&=\{T_w(b)W_x(c)+T_z(b)Z_x(c)\}\xi+\{T_w(b)W_y(c)+T_z(b)Z_y(c)\}\eta.\end{aligned}\tag{۸.۴۰}$$

بیشتر معمول است که dx و dy را به‌جای ξ, η و dz و dw را به‌جای w, ζ و بالاخره dt، ds و dr را به‌جای τ، σ و ρ به‌کار برند. هرگاه مقادیر مشتقهای‌جزئی

W_x وغیره را درنقطهٔ c با $\partial w/\partial x$ و غیره نشان دهیم، آنگاه (۶.۴۰) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$dw=\frac{\partial w}{dx}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy;$$

به‌طریق مشابه (۷.۴۰) به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial w}dw+\frac{\partial r}{\partial z}dz,$$

$$ds=\frac{\partial s}{\partial w}dw+\frac{\partial s}{\partial z}dz,$$

$$dt=\frac{\partial t}{\partial w}dw+\frac{\partial t}{\partial z}dz;$$

و (۸.۴۰) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$dr=\left(\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy,$$

$$ds=\left(\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy,$$

$$dt=\left(\frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy.$$

لازم است توجه شود که مشتقهای جزئی دراین سه‌دسته فرمول اخیر باید در نقاط مناسب حساب شوند. بنابراین ضرایب dx و dy وغیره اعدادی حقیقی هستند.

معادلهٔ (۶.۴۰) را می‌توان به‌صورت ماتریس بیان‌کرد و گفت نگاشت $Df(c)$ از (ξ, η) به (ω, ζ) با ماتریس ۲×۲ زیرمشخص شده است:

$$\begin{bmatrix} W_x(c) & W_y(c) \\ Z_x(c) & Z_y(c) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(c) & \frac{\partial w}{\partial y}(c) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(c) & \frac{\partial z}{\partial y}(c) \end{bmatrix} \qquad (۹.۴۰)$$

به‌طریق مشابه، (۷.۴۰) بیان می‌کندکه نگاشت $Dg(b)$ از (ω, ζ) به (ρ, σ, τ) را می‌توان به‌صورت ماتریس ۲×۳ی زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} R_w(b) & R_z(b) \\ S_w(b) & S_z(b) \\ T_w(b) & T_z(b) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial w}(b) & \dfrac{\partial r}{\partial z}(b) \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial w}(b) & \dfrac{\partial s}{\partial z}(b) \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial w}(b) & \dfrac{\partial t}{\partial z}(b) \end{vmatrix} \qquad (۱۰.۴۰)$$

بالاخره رابطهٔ (۸.۴۰) نشان می‌دهد که نگاشت $D(g\circ f)(c)$ از (ξ, η) به (ρ, σ, τ) را می‌توان به‌صورت ماتریس ۲×۳ی زیر

$$\begin{bmatrix} R_w(b)W_x(c)+R_z(b)Z_x(c) & R_w(b)W_y(c)+R_z(b)Z_y(c) \\ S_w(b)W_x(c)+S_z(b)Z_x(c) & S_w(b]W_y(c)+S_z(b)Z_y(c) \\ T_w(b)W_x(c)+T_z(b)Z_x(c) & T_w(t)W_y(c)+T_z(b)Z_y(c) \end{bmatrix}$$

که حاصلضرب ماتریس (۱۰.۴۰) در ماتریس (۹.۴۰) است، نمایش داد.

قضیهٔ مقدار میانگین

اکنون می‌پردازیم به‌مسئلهٔ تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۲۷ برای توابع دیفرانسیل‌پذیر از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}^q$. خواهیم دیدکه نظیرواقعی قضیهٔ ۶.۲۷ برای حالت $q>1$ وجود ندارد. ممکن است انتظار رودکه اگر f در هر نقطهٔ $\mathbf{R}^p$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}^q$ باشند، و اگر a و b متعلق به $\mathbf{R}^p$ باشند، آنگاه نقطه‌ای مانند c (بین a ، b) وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$f(b)-f(a)=Df(c)(b-a). \qquad (۱۱.۴۰)$$

این نتیجه حتی در حالت $p=1$ و $q=2$ ممکن است درست نباشد. چنانکه در تابع f که از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر

$$f(x)=(x-x^2,\ x-x^3)$$

تعریف شده است، دیده می‌شود. دراینجا $Df(c)$ تابعی خطی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}^2$ است که عدد حقیقی u را به‌عنصر زیرمی‌فرستد:

$$Df(c)(u)=((1-2c)u,\ (1-3c^2)u)$$

اکنون $f(0)=(0, 0)$ و $f(1)=(0, 0)$، ولی نقطه‌ای مانند c وجود نداردبه‌قسمی که برای عددی‌مخالف صفردر$\mathbf{R}$، مانند u، $Df(c)(u)=(0, 0)$. بنابراین فرمول(۱۱.۴۰)

برای $q>1$، حتی برای $p=1$ عمومیت ندارد. اما در بسیاری از کاربردها احتیاجی به‌حالت $q>1$ نیست و در حالت $q=1$، تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین ساده است.

۴۰.۴ قضیهٔ مقدار میانگین. فرض کنید f در یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ مانند Ω تعریف شده باشد و مقادیرش در $\mathbf{R}$ باشد. همچنین فرض کنید مجموعهٔ Ω شامل نقاط a و b و قطعه خط S واصل بین این دو نقطه باشد و f در هر نقطه از این قطعه خط مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c روی S وجود دارد به‌قسمی‌که

$$f(b)-f(a)=Df(c)(b-a). \qquad (۱۱.۴۰)$$

برهان. تابع $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^p$ را که به‌صورت زیر تعریف شده است، درنظرمی‌گیریم:

$$\varphi(t)=(1-t)a+tb=a+t(b-a).$$

این تابع به‌قسمی است که $\varphi(0)=a$، $\varphi(1)=b$ و برای $t\in[0,1]$ داریم $\varphi(t)\in S\subseteq\Omega$. چون Ω باز و φ پیوسته است، عددی مانند $\gamma>0$ وجود دارد به‌قسمی که φ فاصلهٔ $(-\gamma, 1+\gamma)$ را در Ω می‌نگارد. اکنون $F:(-\gamma, 1+\gamma)\to\mathbf{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(t)=f\circ\varphi(t)=f((1-t)a+tb).$$

از قاعدهٔ زنجیری [ر. ك. ۴۰.۳ (پ) و ۴۰.ش] نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}F'(t)&=Df((1-t)a+tb)(\varphi'(t))\\&=Df((1-t)a+tb)(b-a).\end{aligned}$$

اگر قضیهٔ مقدار میانگین ۲۷.۶ را درمورد F به‌کار بریم، نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مانند $t_0\in(0,1)$ وجوددارد به‌قسمی‌که $F(1)-F(0)=F'(t_0)$. اگر c را $\varphi(t_0)\in S$ اختیار کنیم نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=F(1)-F(0)\\&=F'(t_0)=Df(c)(b-a). \square\end{aligned}$$

گرچه طبیعیترین گسترش قضیهٔ مقدار میانگین، درحالتی که $q>1$ وفضای برد $\mathbf{R}^q$ است، وجود ندارد، اما چندگسترش آن در دسترس هستند. یکی از مفیدترین آنها براساس یك نابرابری است نه‌یك برابری.

۴۰.۵ قضیهٔ مقدار میانگین. مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ وتابع $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. فرض کنید که نقاط a و b و قطعه خط S واصل بین این دو نقطه در Ω باشند و f در هرنقطه از S دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه نقطه‌ای مانند c روی S وجود دارد به قسمی که

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|Df(c)(b-a)\|. \qquad (۱۲.۴۰)$$

برهان. اگر $y_\circ = f(b)-f(a)$ بردار صفر باشد، نتیجه بدیهی است. اگر $\circ \neq y_\circ$، می‌نویسیم $y_1 = y_\circ / \|y_\circ\|$ و تابع $H: \Omega \to \mathbf{R}$ را با استفاده ازحاصلضرب داخلی در $\mathbf{R}^q$ به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H(x) = f(x) \cdot y_1, \quad x \in \Omega.$$

آشکاراست که

$$H(b)-H(a) = \{f(b)-f(a)\} \cdot y_1 = \|f(b)-f(a)\|$$

و بسهولت دیده می‌شود (ر. ك. تمرین ۴۰.ح) که اگر $x \in S$ و $u \in \mathbf{R}^p$، آنگاه

$$DH(x)(u) = \{Df(x)(u)\} \cdot y_1.$$

ازقضیهٔ مقدارمیانگین ۴.۴۰ نتیجه می‌شود که‌نقطه‌ای مانند c روی S وجود داردبه‌قسمی که

$$H(b)-H(a) = DH(c)(b-a)$$
$$= \{Df(c)(b-a)\} \cdot y_1.$$

هر گاه نابرابری شوارتس را به‌کاربریم و از $\|y_1\| = ۱$ استفاده‌کنیم، داریم

$$\|f(b)-f(a)\| = \{Df(c)(b-a)\} \cdot y_1 \leqslant \|Df(c)(b-a)\|,$$

که همان نتیجه مطلوب است. □

چون مقدار دقیق نقطهٔ c معمولاً معلوم نیست، قضیهٔ بالا را اغلب به‌صورت‌نتیجه‌ای که در زیر می‌آید، به‌کار می‌برند. در بیان این نتیجه از مفهوم نـرم نگاشت خطی L از $\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ که در تمرین ۲۱.ر ارائه شده است، استفاده می‌شود. فقط لازم است به‌خاطر داشته باشیم که برای هر $u \in \mathbf{R}^p$، $\|L(u)\| \leqslant M\|s\|$ اگر و فقط اگر $\|L\|_{pq} \leqslant M$.

۶.۴۰ نتیجه. فرض کنید شرایط قضیهٔ ۵.۴۰ برقرار باشد و عددی مانند $M > \circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\|Df(x)\|_{pq} \leqslant M$ برای هر $x \in S$. آنگاه

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant M\|b-a\|.$$

برهان. چون $\|Df(c)(b-a)\| \leqslant \|Df(c)\|_{pq}\|b-a\|$ وچون $c \in S$، داریم

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|Df(c)(b-a)\| \leqslant \|Df(c)\|_{pq}\|b-a\| \leqslant M\|b-a\|. \;\square$$

تعویض ترتیب مشتق‌گیری

تابع f که دامنهٔ آن در $\mathbf{R}^p$ وبرد آن در $\mathbf{R}$ است، مفروض است. f ممکن است p مشتق جزئی (از مرتبهٔ اول) داشته باشد، که آن را به‌صورت

$$D_i f \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i=1,\ 2,\ \dots,\ p$$

نمایش می‌دهیم. هریك از مشتقهای جزئی تابعی است که دامنه‌اش در $\mathbf{R}^p$ و بردش در $\mathbf{R}$ است. بنابراین هریك از این p تابع ممکن است p مشتق جزئی داشته باشد. p^2 تابعی را که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آید، **مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم** f می‌نامیم و ما آنها را به‌صورت نمادهای زیر

$$D_{ji} f \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},\quad i,j=1,2,\ \dots,\ p$$

نمایش خواهیم داد. باید توجه داشت که منظور از هریك از دو نماد بالا مشتق جزئی تابعی نسبت به x_j است که خود مشتق جزئی f نسبت به x_i می‌باشد. (به عبارت دیگر: اول x_i، آنگاه x_j).

به‌روش مشابه می‌توان مشتقهای‌جزئی مرتبهٔ سوم وحتی بالاتر از آن را تعریف‌کرد. بدین ترتیب تابع از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ درصورتی که مشتقها وجود داشته باشند، p^n مشتق جزئی مرتبهٔ nام دارد. امری که کار با این مشتقها را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای ساده می‌کند این‌است که اگرمشتقهایی که به‌دست می‌آیند، پیوسته باشند، رعایت ترتیب مشتق گیری لازم‌نیست. این خاصیت علاوه بر کم‌کردن تعداد مشتقهای جزئی متمایز مرتبه‌های بالا، نیاز به‌کاربردن نمادهای نسبتاً پیچیده برای تمایز ترتیب مشتق‌گیریها را (که مستلزم دقت است)، ازمیان برمی‌دارد.

کافی است تعویض ترتیب را برای مشتقهای مرتبهٔ دوم در نظر بگیریم. با ثابت قراردادن دیگر مختصات، ملاحظه می‌شود که، بدون‌کاستن ازکلیت مسئله، می‌توان یك تابع از $\mathbf{R}^2$ در $\mathbf{R}$ را مورد بررسی قرار داد. به‌منظور سهولت در نمادگذاری، $(x,\ y)$ را نمایشگر نقطه‌ای در $\mathbf{R}^2$ می‌گیریم و نشان می‌دهیم که اگر $D_x f$ و $D_y f$ و $D_{yx} f$ وجود داشته باشند و اگر $D_{yx} f$ دریك نقطه پیوسته باشد، آنگاه مشتق جزئی $D_{xy} f$ دراین‌نقطه وجود دارد و برابر با $D_{yx} f$ است. در تمرین ۴۰.ع خواهیم دیدکه امکان دارد هردو مشتق جزئی $D_{yx} f$ و $D_{xy} f$ در یك‌نقطه‌وجود داشته باشند بی‌آنکه بایکدیگر برابر باشند.

شیوه‌ای که در اثبات این نتیجه به‌کار خواهد رفت این است که نشان دهیم که‌هردو مشتق جزئی آمیخته در نقطهٔ $(0,\ 0)$ برابر با حد خارج‌قسمت زیر است:

$$\frac{f(h,\ k)-f(h,\ 0)-f(0,\ k)+f(0,\ 0)}{hk}$$

وقتی که $(h,\ k)$ به $(0,\ 0)$ میل کند.

۷.۴۰ لم. فرض کنید که f در یك همسایگی مبدأ در $\mathbf{R}^2$، مانند U، تعریف شده است و مقادیرش در $\mathbf{R}$ است و مشتقهای جزئی $D_x f$ و $D_{yx} f$ در U وجود دارند و $D_{yx} f$

در $(\circ, \circ)$ پیوسته است. اگر A تفاضل آمیختهٔ

$$A(h, k)=f(h, k)-f(h, \circ)-f(\circ, k)+f(\circ, \circ)$$

باشد، داریم

$$D_{yx}f(\circ, \circ)=\lim_{(h, k)\to(\circ, \circ)} \frac{A(h, k)}{hk}.$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon>\circ$ و $\delta>\circ$ آن‌قدر کوچك باشد که اگر $|h|<\delta$ و $|k|<\delta$، آنگاه نقطهٔ (h, k) در U است و داریم

$$|D_{yx}f(h, k)-D_{yx}f(\circ, \circ)|<\varepsilon. \qquad (۱۴.۴۰)$$

به‌ازای $|k|<\delta$، B را برای $|h|<\delta$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(h)=f(h, k)-f(h, \circ),$$

که نتیجه می‌دهد $A(h, k)=B(h)-B(\circ)$. بنا به‌فرض مشتق جزئی $D_x f$ در U وجود دارد و بنابراین B مشتق دارد. اگر قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۲۷ را در مورد B به‌کار بریم می‌بینیم که عددی مانند $h_\circ$ با شرط $\circ<|h_\circ|<|h|$ وجود دارد به‌قسمی که

$$A(h, k)=B(h)-B(\circ)=hB'(h_\circ). \qquad (۱۵.۴۰)$$

(توجه داریم که مقدار $h_\circ$ به‌مقدار k بستگی دارد، ولی این بستگی اشکالی به‌وجود نخواهد آورد.) اینك با توجه به‌تعریف B داریم

$$B'(h_\circ)=D_x f(h_\circ, k)-D_x f(h_\circ, \circ).$$

اگر قضیهٔ مقدار میانگین را در طرف راست معادلهٔ اخیر به‌کار بریم می‌بینیم که عددی مانند $k_\circ$ با شرط $\circ<|k_\circ|<|k|$ وجود دارد به‌قسمی که

$$B'(h_\circ)=k\{D_{yx}f(h_\circ, k_\circ)\}. \qquad (۱۶.۴۰)$$

از ترکیب معادلات (۱۵.۴۰) و (۱۶.۴۰)، نتیجه می‌شود که اگر $\circ<|h|<\delta$ و $\circ<|k|<\delta$، آنگاه

$$\frac{A(h, k)}{hk}=D_{yx}f(h_\circ, k_\circ),$$

که در آن $\circ<|h_\circ|<|h|$ و $\circ<|k_\circ|<|k|$. از نابرابری (۱۴.۴۰) و عبارت قبلی نتیجه می‌شود که وقتی $\circ<|h|<\delta$ و $\circ<|k|<\delta$

$$\left|\frac{A(h, k)}{hk}-D_{yx}f(\circ, \circ)\right|<\varepsilon. \square$$

اکنون یك شرط مفید (منسوب به‌شوراتس[1]) برای برابری مشتقهای آمیخته به‌دست می‌آوریم.

۸.۴۰ قضیه. فرض کنید که f در یك همسایگـی نقطهٔ $(x,\ y)$ در $\mathbf{R}^2$، مانند U تعریف شده است و مقادیرش در $\mathbf{R}$ است. همچنین فرض کنید که مشتقهای جزئی $D_x f$، $D_y f$، و $D_{yx} f$ در U وجود دارند و $D_{yx} f$ در $(x,\ y)$ پیوسته است. دراین صورت مشتق جزئی $D_{xy} f$ در $(x,\ y)$ وجود دارد و $D_{xy} f(x,\ y)=D_{yx} f(x,\ y)$.

برهان. بدون کاستن از کلیت قضیه می‌توان فرض کرد که $(x,\ y)=(0,\ 0)$ و مـا چنین فرض می‌کنیم. فرض کنیم A تابعی باشد که درلم قبل تعریف شده است، دیدیم که

$$D_{yx} f(0,\ 0)=\lim_{(h,\ k)\to(0,0)} \frac{A(h,\ k)}{hk}. \qquad (۱۷.۴۰)$$

وجود این حد دوگانه خود قسمتی ازحکم قضیه است. بنابه‌فرض $D_y f$ در U وجوددارد، بنابراین

$$\lim_{k\to 0}\frac{A(h,k)}{hk}=\frac{1}{h}\{D_y f(h,\ 0)-D_y f(0,\ 0)\},\ h\neq 0. \qquad (۱۸.۴۰)$$

اگر $\varepsilon>0$، آنگاه عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $0<|h|<\delta(\varepsilon)$ و $0<|k|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{A(h,\ k)}{hk}-D_{yx} f(0,\ 0)\right|<\varepsilon.$$

اگر از این نابرابری نسبت به k حد بگیریم و (۱۸.۴۰) را به کار بریم، نتیجه می‌گیریم که برای هر h که در $0<|h|<\delta(\varepsilon)$ صدق کند،

$$\left|\frac{1}{h}\{D_y f(h,\ 0)-D_y f(0,\ 0)\}-D_{yx} f(0,\ 0)\right|\leqslant\varepsilon.$$

بنابراین $D_{xy} f(0,\ 0)$ وجود دارد و برابر با $D_{yx} f(0,\ 0)$ است. □

مشتقهای مراتب بالاتر

هرگاه دامنهٔ تابع f در $\mathbf{R}^p$ و برد آن در $\mathbf{R}$ باشد، مشتق f در c، $Df(c)$، تابعـی خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ است با این خاصیت که اگر z به‌اندازهٔکافی کوچك باشد، داریم

$$\|f(c+z)-f(c)-Df(c)(z)\|\leqslant\varepsilon\|z\|.$$

1. H. A. Schwarz

این بدان معنی است که $Df(c)$ تابع خطی‌ای است که وقتی z کوچك است برای تفاضل $f(c+z)-f(c)$ نزدیکترین تقریب است. وقتی z کوچك است، هر تابع خطی دیگری با دقت کمتری این تفاضل را تقریب می‌کند. از این خاصیت که مشتق را تعریف می‌کند نتیجه می‌شود که اگر $Df(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$Df(c)(z)=D_1f(c)z_1+\dots+D_pf(c)z_p,$$

که در آن $z=(z_1,\dots,z_p)$ در $\mathbf{R}^p$ است.

اگرچه تقریبهای خطی خیلی ساده و برای بسیاری موارد به‌اندازهٔ کافی دقیق هستند، اما گاه تقریبی بهتر از آنچه با توابع خطی به‌دست می‌آید مورد احتیاج است. در این صورت برای به‌دست آوردن تقریبهای نزدیکتر، طبیعی است به توابع درجهٔ دوم، سوم و غیره توجه کنیم. چون دامنه‌های توابع موردنظر در $\mathbf{R}^p$ هستند، برای ارائه بحث کامل این توابع، به مطالعهٔ توابع چند خطی از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ نیاز خواهد بود. با اینکه چنین بحثی چندان مشکل نیست، اما چون کاربردش در این کتاب محدود خواهد بود، برای اینکه از مطلب بسیار دور نشویم، از مطالعهٔ آن صرفنظر می‌کنیم.

بدین لحاظ **مشتق دوم** f در c را تابع $D^2f(c)$ از $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر (y,z) متعلق به $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p$ باشد و $y=(y_1,\dots,y_p)$ و $z=(z_1,\dots,z_p)$، آنگاه

$$D^2f(c)(y,z)=\sum_{i,j=1}^{p}D_{ji}f(c)y_iz_j.$$

وقتی مشتق دوم مورد بحث است فرض می‌کنیم که مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم f وجود دارند و در یك همسایگی c پیوسته‌اند. به‌طریق مشابه **مشتق سوم** f در c، $D^3f(c)$، را که تابعی از (y,z,w) در $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p$ است، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^3f(c)(y,z,w)=\sum_{i,j,k=1}^{p}D_{kji}f(c)y_iz_jw_k.$$

وقتی مشتق سوم مورد بحث است، فرض می‌کنیم که مشتقهای جزئی مرتبه سوم وجوددارند و در یك همسایگی c پیوسته‌اند.

حال روش تعریف مشتقهای مرتبه‌های بالاتر باید روشن شده باشد. (طبق تذکرهای قبلی مربوط به‌تعویض ترتیب مشتق‌گیری، اگر مشتقهای جزئی آمیخته‌ای که به‌دست می‌آیند پیوسته باشند، آنگاه به‌ترتیب مشتق‌گیری بستگی ندارند.)

یك علامت نمادی دیگر:

به‌جای $D^2f(c)(w,w)$ می‌نویسیم $D^2f(c)(w)^2$

به‌جای $D^3f(c)(w,w,w)$ می‌نویسیم $D^3f(c)(w)^3$

. . . .

به‌جای $D^nf(c)(w,w,\dots,w)$ می‌نویسیم $D^nf(c)(w)^n$

اگر $p=2$ و اگر یك عنصر از $\mathbf{R}^2$ را به‌صورت (x, y) نمایش دهیم و $w=(h, k)$، آنگاه $D^2f(c)(w)^2$ برابر با عبارت زیراست:

$$D_{xx}f(c)h^2+2D_{xy}f(c)hk+D_{yy}f(c)k^2,$$

به‌طریق مشابه $D^3f(c)(w)^3$ برابر است با:

$$D_{xxx}f(c)h^3+3D_{xxy}f(c)h^2k+3D_{xyy}f(c)hk^2+D_{yyy}f(c)k^3,$$

ودرحالت کلی $D^nf(c)(w)^n$ برابر با عبارت زیر می‌باشد:

$$D_{x\ldots x}f(c)h^n+\binom{n}{1}D_{x\ldots xy}f(c)h^{n-1}k+\binom{n}{2}D_{x\ldots xyy}f(c)h^{n-2}k^2 + \cdots + D_{yy\ldots y}f(c)k^n.$$

اکنون که این نماد را ارائه داده‌ایم بدیك تعمیم مهم قضیهٔ تیلر برای توابع از $\mathbf{R}^p$ به $\mathbf{R}$ می‌پردازیم:

۹.۴۰ قضیهٔ تیلر. فرض کنید f تابعی باشد بـه دامنهٔ باز Ω در $\mathbf{R}^p$ و برد در $\mathbf{R}$. همچنین فرض کنید f در همسایگی هریك ازنقاط پاره خط S که دونقطهٔ a و $b=a+u$ واقع در Ω را به‌یکدیگر وصل می‌کند، دارای مشتقهای جزئی مرتبهٔ nام پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c روی S وجود دارد به‌قسمی که

$$f(a+u)=f(a)+\frac{1}{1!}Df(a)(u)+\frac{1}{2!}D^2f(a)(u)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a)(u)^{n-1}+\frac{1}{n!}D^nf(c)(u)^n.$$

برهان. تابع F از $\mathbf{I}$ به $\mathbf{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(t)=f(a+tu), \quad t \text{ در } \mathbf{I}.$$

از فرض وجود مشتقهای جزئی f، نتیجه می‌گیریم که

$$F'(t)=Df(a+tu)(u),$$
$$F''(t)=D^2f(a+tu)(u)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(t)=D^nf(a+tu)(u)^n.$$

اگرقضیهٔ یك‌بعدی تیلر ۶.۲۸ را درمورد تابع F در I به‌کار بریم، نتیجه‌می گیریم که عددی مانند t_0 در I وجود دارد به‌قسمی که

$$F(۱)=F(\circ)+\frac{۱}{۱!}F'(\circ)+\cdots+\frac{۱}{(n-۱)!}F^{(n-۱)}(\circ)+\frac{۱}{n!}F^{(n)}(t_\circ).$$

اگر c را $a+t_\circ u$ بگیریم نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. □

تمرین

۴۰. الف. اگر $f(x, y)=x^۲+y^۲$ و $g(t)=(۳t+۱, ۲t-۳)$، آنگاه $F(t)=f\circ g(t)$ را درنظر بگیرید، $F'(t)$ را هم مستقیماً وهم با استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌دست آورید.

۴۰. ب. اگر $f(x, y)=xy$ و $g(s, t)=(۲s+۳t, ۴s+t)$، آنگاه $F(s, t)=f\circ g(s, t)$ را درنظر بگیرید، $D_۱F$ و $D_۲F$ را هم مستقیماً وهم با استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌دست آورید.

۴۰. پ. اگر $f(x, y, z)=xyz$ و $g(s, t)=(۳s+st, s, t)$، آنگاه $F(s,t)=f\circ g(s,t)$ را در نظر بگیرید. مشتقهای جزئی $D_۱F$ و $D_۲F$ را هم مستقیماً و هم با استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌دست آورید.

۴۰. ت. اگر $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ و $g(s,t)=(\cos s, \sin s\cos t, \sin t)$، آنگاه $F(s, t)=f\circ g(s, t)$ را درنظر بگیرید. مشتقهای جزئی $D_۱F$ و $D_۲F$ را هم مستقیماً و هم با استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌دست آورید.

۴۰. ث. هرگاه محورهای دکارتی درصفحه به‌اندازهٔ θ دوران کنند، u و v، مختصات جدید نقطه و x و y، مختصات اولی آن، با روابط زیر به‌یکدیگر مربوط هستند:

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\ y=u\sin\theta+v\cos\theta.$$

فرض کنید $f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^۲$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و $F(u, v)=f(x, y)$ برای هر x و y. نشان دهید که

$$[D_۱F(u, v)]^۲+[D_۲F(u, v)]^۲=[D_۱f(x, y)]^۲+[D_۲f(x, y)]^۲.$$

۴۰. ج. فرض کنید $f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^۲$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنید $g:(\circ, +\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌صورت $g(r, \theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ تعریف‌شده باشد و فرض کنید $F=f\circ g$. مشتقهای جزئی $D_۱F$ و $D_۲F$ را حساب کنید و نشان دهید که

$$[D_۱F(r, \theta)]^۲+\frac{۱}{r^۲}[D_۲F(r, \theta)]^۲=[D_۱f(r\cos\theta, r\sin t)]^۲$$
$$+[D_۲f(r\cos\theta, r\sin\theta)]^۲.$$

۴۰. چ. فرض کنید $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد:

(الف) اگر $F(x, y)=f(xy)$، آنگاه $xD_۱F(x, y)=yD_۲F(x, y)$ برای هر (x, y).

(ب) اگر $F(x, y)=f(ax+by)$ که درآن $a, b\in\mathbf{R}$، آنگاه

$$bD_1F(x, y) = aD_2F(x, y)$$

برای هر (x, y).

(پ) اگر $F(x, y) = f(x^2+y^2)$، آنگاه $yD_1F(x, y) = xD_2F(x, y)$ برای هر (x, y).

(ت) اگر $F(x, y) = f(x^2-y^2)$، آنگاه $yD_1F(x, y) + xD_2F(x, y) = 0$ برای هر (x, y).

۴۰. ح. مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و یك نقطهٔ درونی A مانند c مفروض‌اند. فرض کنید که g, f در A به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده درنقطهٔ c دیفرانسیل‌پذیر باشند. اگر $h: A \to \mathbf{R}$ برای هر $x \in A$ به‌صورت $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ تعریف شده باشد، نشان دهید که h در c دیفرانسیل‌پذیر است و اگر $u \in \mathbf{R}^p$، آنگاه

$$Dh(c)(u) = (Df(c)(u)) \cdot g(c) + f(c) \cdot (Dg(c)(u)) .$$

۴۰. خ. نتیجهٔ تمرین ۴۰. ح را برحسب توابع مختص بیان کنید.

۴۰. د. فرض کنید $A \subseteq \mathbf{R}$، c یك نقطهٔ درونی A باشد. فرض کنید $f: A \to \mathbf{R}^p$ در c دیفرانسیل‌پذیر باشد و برای $x \in A$ داشته باشیم $\|f(x)\| = 1$. نشان دهید $f(c) \cdot \nabla_c f = 0$، که در آن $\nabla_c f$ نمایشگر گرادیان f در c است. (ر.ك. تمرین ۳۹.د.) این نتیجه را از نظرهندسی تعبیر کنید.

۴۰. ذ. فرض کنید $f: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ **همگن مثبت از درجهٔ** k باشد بدین معنی که

$$f(tx) = t^k f(x), \ x \in \mathbf{R}^p, \ t > 0.$$

(الف) هرگاه f در $\mathbf{R}^p$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، نشان دهید که این تابع در **رابطهٔ اویلر**[1] صدق می‌کند یعنی:

$$kf(x) = x_1D_1f(x) + \cdots + x_pD_pf(x)$$

برای هر $x = (x_1, \dots, x_p)$ در $\mathbf{R}^p$ با شرط $x \neq 0$.

(ب) بعکس فرض کنید f دررابطهٔ اویلر صدق کند و $c \in \mathbf{R}^p$ با شرط $c \neq 0$. اگر $g(t) = f(tc)$ برای $t > 0$، آنگاه نشان دهید که $tg'(t) = kg(t)$ برای $t > 0$. با استفاده از این رابطه ثابت کنید که f همگن از درجهٔ k می‌باشد.

۴۰. ر. فرض کنید $A \subseteq \mathbf{R}^p$، $f: A \to \mathbf{R}^p$ و تابع $g: f(A) \to \mathbf{R}^p$ وارون f به‌معنای زیر باشد:

---

۱. لئونهارد اویلر Leonhard Euler (۱۷۰۷–۱۷۸۳)، موطن اصلی از بازل و شاگرد یوهان برنولی بود. سالهای زیادی درکاخ سن‌پترزبورگ سکونت کرد ولی بیست و پنج سال توقف او در برلین در این سکونت فاصله ایجاد کرد. با اینکه پدر سیزده فرزند بود و بکلی بیناییش را از دست داده بود، توانست بیش از هشتصد مقاله و کتاب بنویسد و کارهایی بنیادی درتمام زمینه‌های ریاضی انجام دهد.

$$f\circ g(y)=y,\quad g\circ f(x)=x,$$

برای هر $x\in A$ و $y\in f(A)$. اگر f در نقطهٔ $a\in A$ و g در $b=f(a)$ دیفرانسیل‌پذیر باشند، نشان‌دهید که‌توابع‌خطی $Df(a)$ و $Dg(b)$ وارون‌یکدیگرند: یعنی $Df(a)\circ Dg(b)$ و $Dg(b)\circ Df(a)$ تابع همانی در $\mathbf{R}^p$ هستند.

۴۰. ژ. فرض کنید $B:\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p=\mathbf{R}^{2p}\to\mathbf{R}^q$ دوخطی باشد بدین‌معنی که

$$B(ax+bx',y)=aB(x,y)+bB(x',y),$$
$$B(x,ay+by')=aB(x,y)+bB(x,y')$$

برای هر $a,b\in\mathbf{R}$ و هر x,x',y,y' در $\mathbf{R}^p$. می‌توان ثابت کرد که عددی مانند $M>0$ وجود دارد به‌قسمی که $\|B(x,y)\|\leqslant M\|x\|\|y\|$ برای هر x و y در $\mathbf{R}^p$. بااین‌فرض ثابت‌کنید که در B در هر نقطهٔ $(x,y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p=\mathbf{R}^{2p}$ دیفرانسیل‌پذیر است و

$$DB(x,y)(u,v)=B(x,v)+B(u,y)$$

برای هر (u,v) در $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p=\mathbf{R}^{2p}$

۴۰. ژ. فرض کنید $B:\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ دوخطی به‌معنای تمرین قبل باشد و برای هر $x\in\mathbf{R}^p$، $g(x)=B(x,x)$. نشان دهید که اگر $x,u\in\mathbf{R}^p$، آنگاه

$$g(tx)=t^2g(x),\ t\in\mathbf{R}; \tag{1}$$
$$Dg(x)(u)=B(x,u)+B(u,x)=Dg(u)(x); \tag{2}$$
$$g(x+u)=g(x)+Dg(x)(u)+g(u). \tag{3}$$

علاوه براین، اگر B متقارن باشد بدین‌معنی که $B(x,y)=B(y,x)$، آنگاه

$$Dg(x)(u)=2B(x,u). \tag{4}$$

۴۰. س. تمرین ۴۰. ح را با استفاده از تمرین ۴۰. ز ثابت‌کنید.

۴۰. ش. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ یك مجموعهٔ باز و $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ در Ω دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنید $I=(a,b)$ فاصلهٔ بازی در $\mathbf{R}$ و $g:I\to\mathbf{R}^p$ در I دیفرانسیل‌پذیر و به‌قسمی باشد که $g(I)\subseteq\Omega$. اگر $h=f\circ g:I\to\mathbf{R}^q$، نشان دهید که

$$h'(c)=Df(g(c)(g')(c)).$$

۴۰. ص. مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. فرض‌کنید که Ω شامل نقاط a, b و S، پاره‌خط واصل بین‌این‌دو نقطه، باشد و f درهر نقطهٔ S دیفرانسیل‌پذیر باشد. نشان دهید که نگاشتی خطی مانند $L:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ وجود دارد به‌قسمی که $f(b)-f(a)=L(b-a)$.

۴۰. ض. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ یك مجموعهٔ باز همبند و تابع $f:\Omega\to\mathbf{R}^p$ در Ω دیفرانسیل‌پذیر باشد. اگر $Df(x)\doteq 0$ برای هر $x\in\Omega$، نشان دهید که $f(x)=f(y)$

برای هر $x, y \in \Omega$. همچنین نشان دهید که اگر Ω همبند نباشد، امکان دارد این نتیجه درست نباشد.

۴۰. ط. فرض کنید $J \subseteq \mathbf{R}^p$ یك حجرهٔ باز و $f: J \to \mathbf{R}$ در J دیفرانسیل‌پذیر باشد. نشان دهید که اگر مشتق جزئی، $D_1 f(x)$، برای هر $x \in J$ صفر باشد، f به‌متغیر اول بستگی ندارد، بدین معنی که

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = f(x'_1, x_2, \cdots, x_p).$$

برای هر دو نقطهٔ J که دومین، سومین، ...، و pامین مختص به‌ترتیب با هم برابرند.

۴۰. ظ. نشان دهید که اگر J یك حجره نباشد، امکان دارد نتیجهٔ تمرین قبل درست نباشد.

۴۰. ع. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \quad (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

نشان دهید که مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم $D_{xy} f$ و $D_{yx} f$ در $(0, 0)$ وجود دارند ولی برابر نیستند.

۴۰. غ. با استفاده از قضیهٔ مقدارمیانگین، مقدار تقریبی دوری نقطهٔ $(1/4, 2/3)$ را از مبدأ بیابید. کرانهای خطای این برآورد را تعیین کنید.

۴۰. ف. مجموعهٔ باز $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ و تابع $f: \Omega \to \mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. فرض کنید که Ω شامل نقاط a، b و S، پاره‌خط واصل بین این دو نقطه، باشد و f دارای مشتقهای جزئی پیوسته روی S باشد، نشان دهید که

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b - a))(b - a)\,dt.$$

۴۰. ق. فرض کنید $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دارای مشتقهای دوم پیوسته در $\mathbf{R}$ باشند.

(الف) هرگاه $c \in \mathbf{R}$ و $u(x, y) = f(x + cy) + g(x - cy)$، نشان دهید که $u: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ برای هر (x, y) در «معادلهٔ موج»

$$c^2 D_{xx} u(x, y) = D_{yy} u(x, y)$$

صدق می‌کند.

(ب) هرگاه $v(x, y) = f(3x + 2y) + g(x - 2y)$، نشان دهید که $v: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$، برای هر (x, y)، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$4 D_{xx} v(x, y) - 4 D_{xy} v(x, y) - 3 D_{yy} v(x, y) = 0.$$

۴۰. ك. هرگاه $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ دارای مشتقهای جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد و

هرگاه $F(r, \theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ برای $r>0$ و $\theta\in\mathbf{R}$، نشان دهید که

$$D_{xx}f(x, y)+D_{yy}f(x, y)=D_{rr}F(r, \theta)+\frac{1}{r}D_rF(r, \theta)+\frac{1}{r^2}D_{\theta\theta}F(r, \theta)$$

$$=\frac{1}{r}D_r(rD_rF(r, \theta))+\frac{1}{r^2}D_{\theta\theta}F(r, \theta),$$

که در آن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$.

پروژه

۴۰. α. (این پروژه صورت دیگری از **روش نیوتن** برای یافتن موضع ریشه‌هاست وقتی که یك تقریب به‌اندازهٔ کافی نزدیك در دست باشد). فرض کنید f در مجموعهٔ بازی که شامل گوی بستهٔ $B_r[x_0]=\{x\in\mathbf{R}^p:\|x-x_0\|\leqslant r\}$ است تعریف شده و پیوسته است ومقادیر آن در $\mathbf{R}^q$ است. فرض کنید که f در هر نقطهٔ $B_r(x_0)$ دیفرانسیل‌پذیر است و عددی مانند C با شرط $0<C<1$ و یك نگاشت خطی یك به‌یك $\Gamma:\mathbf{R}^q\to\mathbf{R}^p$ وجود دارد به‌قسمی که $\|\Gamma\circ f(x_0)\|\leqslant(1-C)r$ و

$$\|I-\Gamma\circ Df(x)\|_{pp}\leqslant C, \; x\in B_r(x_0).$$

(الف) فرض کنید $g: B_r(x_0)\to\mathbf{R}^p$ برای $x\in B_r(x_0)$ به صورت $g(x)=x-\Gamma\circ f(x)$ تعریف‌شده‌باشد. نشان‌دهید که g درهر نقطهٔ $B_r(x_0)$ دیفرانسیل‌پذیر و در $B_r(x_0)$ تابعی انقباضی با ثابت $C<1$ است. (ر. ك. ۴۰.۲۳.)

(ب) تعریف کنید: $x_1=g(x_0)$ و $x_{n+1}=g(x_n)$ برای $n\in\mathbf{N}$. نشان دهید که $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant C^n\|x_1-x_0\|$ و نتیجه بگیرید که $\|x_{n+1}-x_m\|<C^m r$ برای $n\geqslant m\geqslant 0$. بنابراین برای $k=0, 1, 2, \dots$ داریم $\|x_k-x_0\|<r$.

(پ) نشان دهید که (x_k) دنبالهٔ کوشی‌است و بنابراین به‌عنصری مانند $\bar{x}\in B_r(x_0)$ به‌قسمی که $g(\bar{x})=\bar{x}$ همگراست. علاوه براین، برآورد $\|x_k-\bar{x}_0\|<C^k r$ را به‌دست آورید.

(ت) نشان‌دهید که $f(\bar{x})=0$، و $\bar{x}$ تنها عنصر در $B_r(x_0)$ است که f در آن صفر می‌شود.

بخش ۴۱ قضیه‌های نگاشت و توابع ضمنی

فرض کنیم Ω مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^p$ و f تابعی به‌دامنهٔ Ω و برد واقع در $\mathbf{R}^q$ باشد. p را برابر q فرض نمی‌کنیم مگر آنکه‌صریحاً برابری آنها را ذکر کنیم. دراین بخش‌خواهیم دیدکه تحت شرایطی نگاشت خطی $Df(c)$ «مشخصات موضعی» نگاشت f در یك نقطه $c\in\Omega$ را تعیین می‌کند. به‌زبان صریحتر:

(۱) اگر $p\leqslant q$ و $Df(c)$ یك به‌یك باشد، آنگاه f دریك همسایگی کوچك c یك به‌یك است.

(۲) اگر $p\geqslant q$، و $Df(c)$ پوشا باشد، آنگاه تصویریك همسایگی کوچك c توسط f، یك همسایگی $f(c)$ است و بالاخره،

(۳) اگر $p=q$، و $Df(c)$ دوسویی باشد (یعنی یك به‌یك وپوشا باشد)، آنگاه f یك همسایگی c مانند U را به‌طور یك به‌یك و پوشا روی یك همسایگی $f(c)$ مانند V می‌نگارد. درحالت (۳) تابعی وجود دارد که در V تعریف شده است و وارون تحدید f به U است.

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه‌های نگاشت، قضیهٔ توابع ضمنی را به‌دست خواهیم آورد،که یکی از قضیه‌های بنیادی در آنالیز وهندسه است. همچنین قضیهٔ مفید پارامتری کردن وقضیهٔ مهم رتبه را عرضه خواهیم کرد.

ردهٔ $C^{1}(\Omega)$

صرف وجود مشتق برای اهداف ماکافی نیست، بلکه به‌پیوستگی آن نیز احتیاج داریم. یادآور می‌شویم که اگر $f:\Omega\to\mathbf{R}^{q}$ در هرنقطهٔ $\Omega\subseteq\mathbf{R}^{p}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه تابع $x\to Df(x)$ نگاشتی از Ω در دستهٔ تمام توابع خطی از $\mathbf{R}^{p}$ به $\mathbf{R}^{q}$، یعنی $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{p}, \mathbf{R}^{q})$، است. در بخش ۲۱ دیدیم که‌مجموعهٔ $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{p}, \mathbf{R}^{q})$ فضایی برداری است، و در تمرین ۲۱.ر دیدیم که این فضا نرم دارد ونرم آن عبارت است از

$$\|L\|_{pq}=\sup\{\|L(x)\| : x\in\mathbf{R}^{p},\ \|x\|\leqslant 1\}. \qquad (۱.۴۱)$$

۱.۴۱ تعریف. مجموعهٔ باز Ω در $\mathbf{R}^{p}$ و $f:\Omega\to\mathbf{R}^{q}$ مفروض‌اند. گوییم f به‌ردهٔ $C^{1}(\Omega)$ متعلق است هرگاه مشتق $Df(x)$ برای هر $x\in\Omega$ وجود داشته باشد و نگاشت $x\to Df(x)$ از Ω به $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{p}, \mathbf{R}^{q})$ تحت نرم (۱.۴۱) پیوسته باشد.

از مثال ۸.۳۹ (ت) به‌خاطرداریم که به‌ازای هر $x\in\Omega$، $Df(x)$، مشتق f، را می‌توان به‌صورت ماتریس ژاکوبی $q\times p$، یعنی $[D_{j}f_{i}(x)]$ نشان داد. بنابراین $Df(x)-Df(y)$ با ماتریس $q\times p$ ی زیر نشان داده می‌شود:

$$[D_{j}f_{i}(x)-D_{j}f_{i}(y)].$$

اکنون از نابرابری (۵.۲۱) نتیجه می‌شود که

$$\|Df(x)-Df(y)\|_{pq}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}|D_{j}f_{i}(x)-D_{j}f_{i}(y)|^{2}\right\}^{1/2}.$$

بنابراین پیوستگی مشتقهای جزئی $D_{j}f_{i}$ در Ω، پیوستگی $x\to Df(x)$ را ایجاب می‌کند. خواننده بسهولت می‌تواند نشان دهد که عکس این مطلب نیز درست است. بنابراین قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید:

۲.۴۱ قضیه. اگر $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ یک مجموعهٔ باز و $f:\Omega \to \mathbf{R}^q$ در Ω مشتق‌پذیرباشد، آنگاه f به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است اگر و فقط اگر $D_j f_i$، مشتقهای جزئی f، برای $j=1,\dots,p$ و $i=1,\dots,q$، در Ω پیوسته باشند.

در ادامهٔ بحث به‌لم زیرکه بیان دیگری از قضیهٔ مقدار میانگین است نیاز خواهیم داشت.

۳.۴۱ لم. فرض‌کنید $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ یک‌مجموعهٔ باز و $f:\Omega \to \mathbf{R}^q$ درΩ دیفرانسیل‌پذیر باشد، فرض کنید که Ω شامل نقاط a و b و قطعه خط S واصل بین این دو نقطه باشد و $x_\circ \in \Omega$. آنگاه داریم

$$\|f(b)-f(a)-Df(x_\circ)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{x\in S}\{\|Df(x)-Df(x_\circ)\|_{pq}\}$$

برهان. فرض کنید $g:\Omega \to \mathbf{R}^q$ برای $x\in\Omega$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$g(x)=f(x)-Df(x_\circ)(x).$$

چون $Df(x_\circ)$خطی‌است، نتیجه‌می‌شودکه‌برای $x\in\Omega$، $Dg(x)=Df(x)-Df(x_\circ)$. اگرقضیهٔ مقدارمیانگین ۵.۴۰ را به‌کاربریم، نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مانند $c\in S$وجود دارد به‌قسمی که

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)-Df(x_\circ)(b-a)\| &= \|g(b)-g(a)\|\\ &\leqslant \|Dg(c)(b-a)\| = \|Df(c)-Df(x_\circ)(b-a)\|\\ &\leqslant \|b-a\|\sup_{x\in S}\{\|Df(x)-Df(x_\circ)\|_{pq}\}.\ \square\end{aligned}$$

نتیجهٔ زیرلم‌کلیدی برای قضیه‌های نگاشت است.

۴.۴۱ لم تقریب. مجموعهٔ باز $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ و $f:\Omega \to \mathbf{R}^q$ متعلق به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ مفروض‌اند. اگر $x_\circ \in \Omega$ و $\varepsilon>\circ$، آنگاه عددی مانند $\delta(\varepsilon)>\circ$ وجود دارد به قسمی که اگر برای $k=1,2$، $\|x_k-x_\circ\|\leqslant\delta(\varepsilon)$، آنگاه $x_k\in\Omega$ و

$$\|f(x_1)-f(x_2)-Df(x_\circ)(x_1-x_2)\| \leqslant \varepsilon\|x_1-x_2\|. \qquad (۲.۴۱)$$

برهان. چون $x \to Df(x)$ در Ω، به $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ پیوسته است، برای $\varepsilon>\circ$ مفروض عددی مانند $\delta(\varepsilon)>\circ$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر $\|x-x_\circ\|<\delta(\varepsilon)$، آنگاه $x\in\Omega$ و $\|Df(x)-Df(x_\circ)\|_{pq}\leqslant\varepsilon$. اکنون فرض‌کنیم x_1 و x_2 در شرط $\|x_k-x_\circ\|<\delta(\varepsilon)$ صدق کنند. بنابراین قطعه‌خط‌واصل بین x_1 و x_2 تماماً درداخل گوی بسته به‌مرکز $x_\circ$ و شعاع $\delta(\varepsilon)$ واقع است، وبنابراین در Ω است. اکنون لم ۳.۴۱ را به‌کار می‌بریم، نتیجهٔ بالا به‌دست می‌آید. $\square$

قضیهٔ نگاشت یك‌به‌یك

اکنون نشان می‌دهیم که اگر f متعلق به‌ردهٔ $C^{1}(\Omega)$ باشد و $Df(c)$ یك‌به‌یك باشد، تحدید f به‌یك همسایگی مناسب c نیز یك‌به‌یك است.

خواننده‌ای که با مفهوم «رتبهٔ» تبدیل خطی آشناست ، می‌داند که $L:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ یك به‌یك است اگر و فقط اگر $\operatorname{rank}(L)=p\leqslant q$.

۵۰۴۱ قضیهٔ نگاشت یك‌به‌یك . فرض‌کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ یك مجموعهٔ باز، $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ متعلق به ردهٔ $C^{1}(\Omega)$ ، و $L=Df(c)$ یك‌به‌یك باشد.دراین صورت عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی کــه تحدید f به $B_\delta=\{x\in\mathbf{R}^p:\|x-c\|<\delta\}$ یك به‌یك است. علاوه براین، وارون تحدید $f|B_\delta$ در $f(B_\delta)\subseteq\mathbf{R}^q$ ، به $B_\delta\subseteq\mathbf{R}^p$ یك‌تابع‌پیوسته‌است.

برهان. چون تــابع خطــی $L=Df(c)$ یك‌به‌یــك است، از نتیجهٔ ۸۰۲۲ معلوم می‌شود که عددی مانند $r>0$ وجود دارد به‌قسمی که

$$r\|u\|\leqslant\|Df(c)(u)\|,\qquad u\in\mathbf{R}^p. \tag{۳۰۴۱}$$

اکنون لم تقریب ۴۰۴۱ را برای $\varepsilon=\frac{r}{2}$ به‌کار می‌بریم تا عــددی مانند $\delta>0$ به دست آوریم به‌قسمی‌که اگر برای $k=1,2$ ، $\|x_k-c\|\leqslant\delta$ ، آنگاه

$$\|f(x_1)-f(x_2)-L(x_1-x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}r\|x_1-x_2\|.$$

اگر نابرابری مثلثی را درطرف چپ این نابرابری به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم:

$$\|L(x_1-x_2)\|-\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}r\|x_1-x_2\|.$$

از ترکیب این نابرابری و معادلهٔ (۳۰۴۱) به‌ازای $u=x_1-x_2$ ، نتیجه می‌شود که برای $x_k\in B_\delta$ داریم

$$\frac{1}{2}r\|x_1-x_2\|\leqslant\|f(x_1)-f(x_2)\|, \tag{۴۰۴۱}$$

بدین ترتیب ثابت می‌شود که تحدید f به B_δ یك به یك است. پس این تحدید یك تابع وارون دارد که آن را به g نمایش می‌دهیم. اگر $y_k\in f(B_\delta)$ ، آنگاه نقاطی یکتا مانند $x_k=g(y_k)$ در B_δ وجود دارند به‌قسمی که $y_k=f(x_k)$. از (۴۰۴۱) نتیجه می‌شود که

$$\|g(y_1)-g(y_2)\|\leqslant(2/r)\|y_1-y_2\|,$$

که از آن نتیجه می‌شود $g=(f|B_\delta)^{-1}$ در $f(B_\delta)$، به $\mathbf{R}^p$ پیوستهٔ یکنواخت است. □

توجه داریم که نیازی نیست g را در یك همسایگی $f(c)$ تعریف شده باشد، یعنی $f(c)$ الزاماً نقطهٔ درونی $f(B_\delta)$ نیست. بدین‌دلیل نمی توانیم درمورد دیفرانسیل‌پذیری g حکمی داشته باشیم. قضیهٔ وارونی قویتری تحت شرایطی اضافی در زیر ثابت خواهد شد.

قضیهٔ نگاشت پوشا

قضیهٔ بعدی در ردیف قضیهٔ نگاشت یك به یك است. این قضیه که منسوب به ل. م. گریوز[1] است، بیان می کند که اگر f در ردهٔ $C^1(\Omega)$ باشد و برای یك $c\in\Omega$ نگاشت خطی $Df(c)$ از $\mathbf{R}^p$ روی $\mathbf{R}^q$ پوشا باشد، آنگاه f یك همسایگی مناسب c را به یك همسایگی $f(c)$ می‌نگارد. بنابراین هرنقطهٔ $\mathbf{R}^q$ که به اندازهٔ کافی به $f(c)$ نزدیك باشد، تصویر یك نقطهٔ نزدیك به c تحت f است.

خواننده‌ای که بامفهوم «رتبهٔ»[2] تبدیل خطی آشناست، می‌داند که $L:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ پوششی است اگر و فقط اگر $\operatorname{rank}(L)=q\leqslant p$.

۶.۴۱ قضیهٔ نگاشت پوشا. مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ متعلق به ردهٔ $C^1(\Omega)$ مفروض‌اند. با فرض آنکه در نقطهٔ $c\in\Omega$، تابع خطی $L=Df(c)$ از $\mathbf{R}^p$ روی $\mathbf{R}^q$ پوشا باشد، اعدادی مانند $m>0$ و $\alpha>0$ وجود دارند به قسمی که اگر $y\in\mathbf{R}^q$ و $\|y-f(c)\|\leqslant\dfrac{\alpha}{2m}$، آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in\Omega$ که درشرایط $\|x-c\|\leqslant\alpha$ و $f(x)=y$ صدق کند، وجود دارد.

برهان. چون L پوشاست، هریك از بردارهای پایهٔ استاندارد:

$$e_1=(1,0,\dots,0),\qquad e_2=(0,1,\dots,0),\dots\ ,e_q=(0,0,\dots,1)$$

در $\mathbf{R}^q$ تصویر یك بردار $\mathbf{R}^p$ تحت L است که به ترتیب آنها را $u_1,u_2,\dots,u_q$ می نامیم. اکنون فرض کنیم $M:\mathbf{R}^q\to\mathbf{R}^p$ نگاشتی خطی باشد که به‌ازای $j=1,2,\dots,q$، e_j را به u_j می‌نگارد، یعنی

---

۱. لورنس. م. گریوز Lawrence M. Graves (۱۸۹۶ـ۱۹۷۳) درکانزاس به دنیا آمد، ولی سالهای دراز دانشجو واستاد دانشگاه شیکاگو بود. او بیشتر به‌خاطر کارهایش در زمینه‌های آنالیز تابعی و حساب تغییرات معروف است.

2. rank

$$M\left(\sum_{i=1}^{q} a_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{q} a_i u_i.$$

این نتیجه می‌دهد که $L\circ M$ نگاشت همانی در $\mathbf{R}^q$ است؛ یعنی $y=L\circ M(y)$ برای هر $y\in\mathbf{R}^q$. اگر بنویسیم

$$m=\left\{\sum_{i=1}^{q}\|u_j\|^2\right\}^{1/2},$$

و نابرابریهای مثلثی وشوارتس را به‌کار می‌بریم نتیجه می‌شود که اگر $y=\sum_{i=1}^{q} a_i e_i$، آنگاه

$$\begin{aligned}\|M(y)\| &\leqslant \sum_{i=1}^{q}|a_i|\,\|u_i\|\\ &\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{q}|a_i|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{q}\|u_i\|^2\right\}^{1/2}\\ &=m\|y\|.\end{aligned}$$

بنابرلم تقریب ۴.۴۱ عددی مانند $\alpha>0$ وجود دارد به قسمی که اگر به‌ازای $k=1,2$، $\|x_k-c\|\leqslant\alpha$، آنگاه $x_k\in\Omega$ و

$$\|f(x_1)-f(x_2)-L(x_1-x_2)\|\leqslant\frac{1}{2m}\|x_1-x_2\|. \qquad (5.41)$$

اکنون می‌نویسیم $B_\alpha=\{x\in\mathbf{R}^p:\|x-c\|\leqslant\alpha\}$ و فرض می‌کنیم $y\in\mathbf{R}^q$ به قسمی باشد که $\|y-f(c)\|\leqslant\dfrac{\alpha}{2m}$. نشان خواهیم داد که برداری مانند x متعلق به B_α وجود دارد به‌قسمی که $y=f(x)$.

بنویسیم $x_0=c$ و $x_1=x_0+M(y-f(c))$ به‌قسمی که

$$\|x_1-x_0\|\leqslant m\|y-f(c)\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha,$$

بنابراین

$$\|x_1-x_0\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\quad \text{و}\quad \|x_1-c\|\leqslant\left(1-\frac{1}{2}\right)\alpha.$$

فرض کنیم $c=x_0,x_1,\dots,x_n$ به طریق استقرا در $\mathbf{R}^p$ به‌قسمی انتخاب شده‌اند که به‌ازای $k=1,2,\dots,n$ داریم

$$\|x_k-x_{k-1}\|\leqslant\alpha/2^k,\qquad \|x_k-c\|\leqslant(1-1/2^k)\alpha. \qquad (6.41)$$

اکنون x_{n+1} را (برای $n \geqslant 1$) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+1} = x_n - M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})]. \qquad (7.41)$$

از (۵.۴۱) نتیجه می‌شود که

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant m\|f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|.$$

ازاین نتیجه می‌شود که $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{\alpha}{2^{n+1}}$ و

$$\|x_{n+1} - c\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - c\|$$
$$\leqslant \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\alpha$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha.$$

بنابراین (۶.۴۱) برای $k = n+1$ نیز برقرار است. لذا، ازاین‌طریق می‌توانیم دنباله‌ای مانند (x_n) در B_α بسازیم. اگر $m \geqslant n$ ، آنگاه داریم

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{m-1} - x_m\|$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\alpha}{2^m} \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$

از این نتیجه می‌شود که (x_n) یك دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^p$ است و بنابراین به عنصری مانند x همگراست. از $\|x_n - c\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\alpha$ ، نتیجه می‌شود که $\|x - c\| \leqslant \alpha$ و بنابراین $x \in B_\alpha$.

از $x_1 - x_0 = M(y - f(c))$ ، نتیجه می‌شود:

$$L(x_1 - x_0) = L \circ M(y - f(c)) = y - f(x_0).$$

علاوه براین، طبق (۷.۴۱) داریم

$$\begin{aligned} L(x_{n+1} - x_n) &= -L \circ M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})] \\ &= -\{f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\} \\ &= L(x_n - x_{n-1}) - [f(x_n) - f(x_{n-1})] \end{aligned}$$

بنا بر استقرا رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$L(x_{n+1}-x_n)=y-f(x_n),$$

از این نتیجه می‌شود $y=\lim f(x_n)=f(x)$. بنابراین هر نقطهٔ y که در $\|y-f(c)\|\leqslant \frac{\alpha}{2m}$ صدق کند تصویر نقطه‌ای مانند $x\in\Omega$ تحت f است به قسمی که $\|x-c\|\leqslant\alpha$. □

۷.۴۱ قضیهٔ نگاشت باز. فرض کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و $f:\Omega\rightarrow\mathbf{R}^q$ متعلق به ردهٔ $C^1(\Omega)$ باشد. اگر به ازای هر $x\in\Omega$ مشتق $Df(x)$ پوشا باشد و اگر $G\subset\Omega$ باز باشد، آنگاه $f(G)$ در $\mathbf{R}^q$ باز است.

برهان. اگر $b\in f(G)$، نقطه‌ای مانند $c\in G$ وجود دارد به‌قسمی که $f(c)=b$. از قضیهٔ نگاشت پوشای ۶.۴۱ در مورد $f|G$ نتیجه می‌شود که عددی مانند $\beta>0$ وجود دارد به قسمی که اگر $\|y-b\|\leqslant\beta$، آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in G$ وجود دارد به‌قسمی که $y=f(x)$. بنابراین $f(G)$ در $\mathbf{R}^q$ باز است. □

قضیهٔ وارون

اکنون دو قضیهٔ نگاشت‌را درحالت $p=q$ ترکیب می‌کنیم. در اینجا فرض شده است که $Df(c)$، مشتق تابع f، دوسویی است واین فرض برقرار است اگر وفقط اگر $Df(c)$ وارون داشته باشد و $Df(c)$ وارون دارد اگر و فقط اگر دترمینان ژاکوبی

$$J_f(c)=\det[D_jf_i(c)]=\det[f_{i,j}(c)]$$

مخالف با صفر باشد.

خواننده‌ای که با مفهوم «رتبهٔ» تبدیل خطی آشناست، می‌داند که $L:\mathbf{R}^p\rightarrow\mathbf{R}^q$ دوسویی است اگر و فقط اگر $\operatorname{rank}(L)=p=q$.

از پیوستگی مشتقهای جزئی و دترمینان نتیجه می‌شود که اگر $Df(c)$ وارون پذیر باشد، $Df(x)$ برای x های به‌اندازهٔ کافی نزدیک به c وارون پذیر است.

۸.۴۱ قضیهٔ وارون. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و $f:\Omega\rightarrow\mathbf{R}^p$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد. اگر $c\in\Omega$ به‌قسمی باشدکه $Df(c)$ دوسویی باشد، آنگاه یك همسایگی باز c مانند U وجود دارد به‌قسمی که $V=f(U)$ یك همسایگی باز $f(c)$ است و تحدید f به U یك دوسویی روی V با وارون پیوستهٔ g است. علاوه براین g به ردهٔ $C^1(V)$ متعلق است و داریم

$$Dg(y)=[Df(g(y))]^{-1}, \qquad y\in V.$$

برهان . بنا به‌فرض $L=Df(c)$ یك به یك است، بنابراین نتیجهٔ ۷.۲۲ ایجاب می‌کند که عددی مانند $r>0$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که

$$2r\|z\|\leqslant\|Df(c)(z)\|, \quad z\in\mathbf{R}^p.$$

چون f از ردهٔ $C^1(\Omega)$ است، یك‌همسایگی c وجود دارد که در آن $Df(x)$ وارون‌پذیر است ودر شرط زیر صدق می‌کند:

$$r\|z\|\leqslant\|Df(x)(z)\|, \quad z\in\mathbf{R}^p. \tag{8.41}$$

ما در اینجا به‌یك همسایگی c مانند U که در آن f یك به‌یك است و U در گوی به‌مرکز c وشعاع α (همانند قضیهٔ نگاشت پوشای ۶.۴۱) واقع است، توجه داریم . در این‌صورت $V=f(U)$ یك همسایگی $f(c)$ است و از قضیه‌های نگاشت قبلی نتیجه می‌گیریم که تحدید $f|U$ دارای تابع وارون پیوستهٔ $g:V\to\mathbf{R}^p$ است.

برای تکمیل اثبات قضیه، کافی است نشان‌دهیم که g در یك نقطهٔ دلخواه $y_1\in V$ دیفرانسیل‌پذیر است . فرض‌کنیم $x_1=g(y_1)\in U$؛ چون f در x_1 دیفرانسیل‌پذیر است نتیجه می گیریم که اگر $x\in U$، آنگاه

$$f(x)-f(x_1)-Df(x_1)(x-x_1)=\|x-x_1\|u(x),$$

که در آن $\|u(x)\|\to 0$ وقتی‌که $x\to x_1$. اگروارون تابع خطی $Df(x_1)$ را به M_1 نمایش دهیم، آنگاه

$$\begin{aligned} x-x_1&=M_1[Df(x_1)(x-x_1)]\\ &=M_1[f(x)-f(x_1)-\|x-x_1\|u(x)]. \end{aligned}$$

اگر $x\in U$، آنگاه به‌ازای یك $y=f(x)\in V$، $x=g(y)$، وعلاوه براین $y_1=f(x_1)$، پس این‌معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$g(y)-g(y_1)-M_1(y-y_1)=-\|x-x_1\|M_1(u(x)).$$

از این‌که $Df(x_1)$ یك‌به‌یك است، همان‌طور که در اثبات قضیهٔ نگاشت یك‌به یك ۵.۴۱ دیدیم، نتیجه می‌شود که

$$\|y-y_1\|=\|f(x)-f(x_1)\|\geqslant\frac{1}{2}r\|x-x_1\|,$$

با این‌شرط که y به‌اندازهٔ‌کافی به y_1 نزدیك بـاشد. امـا از (۸.۴۱) نتیجه می شود که برای هر $u\in\mathbf{R}^p$ داریم $\|M_1(u)\|\leqslant(1/r)\|u\|$. بنابراین داریم

$$\|g(y)-g(y_1)-M_1(y-y_1)\| \leqslant \left(\frac{2}{r^2}\right)\|u(x)\|\|y-y_1\|.$$

اکنون وقتی که $y \to y_1$، آنگاه $x=g(y) \to g(y_1)=x_1$ و بنابراین $\|u(x)\| \to 0$.
لذا نتیجه می گیریم که $Dg(y_1)$ وجود دارد و با $M_1=[Df(x_1)]^{-1}$ برابر است.
این که g متعلق به ردهٔ $C^1(V)$ است، از رابطهٔ $Dg(y)=[Df(g(y))]^{-1}$ برای $y\in V$ و از پیوستگی نگاشتهای

$$y \longrightarrow g(y), \quad x \longrightarrow Df(x), \quad L \longrightarrow L^{-1}$$

به ترتیب از $V \to U$، $U \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ و $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^p) \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ نتیجه‌می‌شود.
(ر. ك. تمرین ۴۱.ر.) □

توابع ضمنی

فرض کنید F تابعی است که در یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$، به $\mathbf{R}^q$ تعریف شده است. (واضح است که $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ را می‌توان بر $\mathbf{R}^{p+q}$ منطبق فرض کرد. دراین‌صورت احتیاج نداریم پیوستگی یا دیفرانسیل‌پذیری F دریك نقطه، ویا ازردهٔ C^1 بودن آن‌را در یك مجموعه تعریف کنیم.) فرض کنید F نقطهٔ (a, b) را به بردار صفر $\mathbf{R}^q$ می‌برد. مسئلهٔ توابع ضمنی، حل معادلهٔ

$$F(x, y)=0$$

نسبت به‌یك متغیر (مثلاً y) برحسب متغیر دیگر است، بدین‌معنی‌که تابعی مانند φ بیابیم که دریك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ تعریف شده و مقادیر آن در $\mathbf{R}^q$ باشد به‌قسمی که $b=\varphi(a)$ وبرای هر x دردامنهٔ φ،

$$F(x, \varphi(x))=0.$$

فرض می کنیم F در یك همسایگی (a, b) پیوسته باشد و امیدواریم بتوانیم پیوستگی «تابع جواب» φ را دریك همسایگی a نتیجه بگیریم. احتمالاً خواننده تعجب‌نخواهد کرد اگر فرض‌کنیم F در یك همسایگی (a , b) به ردهٔ C^1 متعلق است، اما حتی این فرض هم برای تضمین وجود یك‌تابع جواب پیوستهٔ یکتا که در همسایگی a تعریف شده باشد،کافی نیست.

مثلاً درحالت $p=q=1$ ، تابع $F(x, y)=x^2-y^2$ نظیر به‌نقطهٔ $(0,0)$ دارای دوتابع جواب پیوستهٔ $\varphi_1(x)=x$ و $\varphi_2(x)=-x$ است. همچنین‌جوابهای ناپیوسته‌ای مانند

$$\varphi_{\text{۲}}(x)=x, \qquad \text{گویا } x$$
$$=-x, \quad \text{اصم } x.$$

دارد. تابع $G(x, y)=x-y^{\text{۲}}$ در $(\text{۰}, \text{۰})$ دوتابع‌جواب پیوسته دارد، اماهیچیك از آنهـا در یك‌همسایگی نقطهٔ $x=\text{۰}$ تعریف‌نشده‌اند ـ مثال شگفت‌آورتر ، تـابع $H:\mathbf{R}^{\text{۲}} \rightarrow \mathbf{R}$ است‌که به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$H(x, y)=x, \qquad y=\text{۰}$$
$$=x-y^{\text{۳}}\sin\left(\frac{\text{۱}}{y}\right), \quad y\neq\text{۰}.$$

این‌تابع در یك‌همسایگی $(\text{۰}, \text{۰})$ به‌ردهٔ $C^{\text{۱}}$ متعلق است ، امـا تابع جواب پیوسته‌ای که دریك همسایگی $x=\text{۰}$ تعریف شده‌باشد، وجود ندارد.

درهرسه‌مثال بالا، مشتق جزئی نسبت به y درنقطهٔ موردنظر صفر می‌شود. درحالت $p=q=\text{۱}$ شرط اضافی برای تضمین وجود ویکتایی تابع جواب این است‌که این‌مشتق جزئی مخالف باصفر باشد. درحالت‌کلی مشاهده می‌کنیم‌که $DF(a, b)$ یك‌تابع خطی پیوسته در $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$، بر $\mathbf{R}^q$ است وتـابع خطی پیوستهٔ $L_{\text{۲}}:\mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^q$ راکه بـرای $v\in\mathbf{R}^q$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$L_{\text{۲}}(v)=DF(a, b)(\text{۰}, v)$$

القاء می‌کند. منطقی است‌که $L_{\text{۲}}$ را «مشتق جزئی» F نسبت به $y\in\mathbf{R}^q$ درنقطهٔ (a, b) بنامیم. ما فرض خواهیم کردکه $L_{\text{۲}}$ وارون‌پذیر است.

اکنون‌می‌خواهیم این‌مسئله‌را برحسب مختصات بیان‌کنیم. اگر $x=(x_{\text{۱}},\cdots, x_p)$ و $y=(y_{\text{۱}}, \cdots, y_q)$، آنگاه معادلهٔ $F(x, y)=\text{۰}$ به‌صورت q معادلهٔ $p+q$ متغیری $x_{\text{۱}}, \cdots, x_p, y_{\text{۱}}, \cdots, y_q$ درمی‌آید:

$$f_{\text{۱}}(x_{\text{۱}},\cdots,x_p,y_{\text{۱}},\cdots,y_q)=\text{۰}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (\text{۹.۴۱})$$
$$f_q(x_{\text{۱}}, \cdots x_p, y_{\text{۱}},\cdots,y_q)=\text{۰}.$$

به‌منظور سهولت، فرض می‌کنیم‌که $a=\text{۰}$ و $b=\text{۰}$. بنابراین مقادیر

$$x_{\text{۱}}=\text{۰},\cdots, x_p=\text{۰} \text{ و } y_{\text{۱}}=\text{۰},\cdots, y_q=\text{۰}$$

دراین دستگاه صدق می‌کنند، و می‌خواهیم y_jها را برحسب x_iها حداقل برای حالتی‌که

$|x_i|$ ها به‌اندازهٔ کافی کوچک هستند به‌دست آوریم. اگر توابع f_j خطی باشند، شرط جواب‌داشتن دستگاه این است که دترمینان ضرایب y_j مخالف صفر باشد. اگر توابع f_j خطی نباشند، شرط این است که دترمینان ژاکوبی زیر مخالف صفر باشد:

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(y_1,\dots y_q)}(a, b)\neq 0.$$

با این شرط توابع φ_j، $j=1,\dots,q$، باخواص زیر وجود دارند: درنزدیکی $a=0$ تعریف شده و پیوسته‌اند و اگر

$$y_1=\varphi_1(x_1, \dots, x_p),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_q=\varphi_q(x_1\dots, x_p)$$

را در دستگاه (۹.۴۱) جایگزین کنیم آنگاه یك‌همانی از x_iها به‌دست می‌آوریم.

۹.۴۱ قضیهٔ تابع ضمنی • مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ و $(a, b)\in\Omega$ مفروض‌اند. فرض کنیدکه تابع $F:\Omega\to\mathbf{R}^q$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است و $F(a,b)=0$، و فرض کنید نگاشت خطی‌که به‌صورت

$$L_2(v)=DF(a, b)(0, v), v\in\mathbf{R}^q,$$

تعریف شده است، یك‌دوسویی از $\mathbf{R}^q$ روی $\mathbf{R}^q$ است.

(الف) آنگاه یك‌همسایگی باز $a\in\mathbf{R}^p$ مانند W ویك‌تابع یکتای $\varphi:W\to\mathbf{R}^q$ متعلق به‌ردهٔ $C^1(W)$ وجود دارد به‌قسمی‌که $b=\varphi(a)$ و

$$F(x, \varphi(x))=0, \quad x\in W.$$

(ب) یك همسایگی باز نقطهٔ (a, b) مانند U در $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ وجود دارد به‌قسمی که جفت $(x, y)\in U$ در شرط $F(x, y)=0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر برای $x\in W$، $y=\varphi(x)$.

برهان • بدون‌کاستن ازکلیت قضیه فرض می‌کنیم‌که $a=0$ و $b=0$. فرض کنیم $H:\Omega\to\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$H(x, y)=(x,F(x, y)), \ (x, y)\in\Omega.$$

به‌سهولت نتیجه می‌شود (ر. ك. تمرین ۳۹.ع) که H به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است و

$$DH(x, y)(u, v)=(u, DF(x, y)(u, v))$$

برای $(x, y)\in\Omega$ و $(u,v)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$. اکنون ادعا می‌کنیم که $DH(\circ,\circ)$ در $\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^q$ وارون‌پذیر است. درحقیقت اگر $L_1\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$L_1(u)=DF(\circ, \circ)(u, \circ),\ \ u\in\mathbf{R}^p.$$

آنگاه رابطهٔ $DF(\circ, \circ)(u,v)=L_1(u)+L_2(v)$ نشان می‌دهد که وارون $DH(\circ, \circ)$ نگاشت خطی K در $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ است که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$K(x, z)=(x, L_2^{-1}[z-L_1(x)]).$$

بنابراین از قضیهٔ وارون ۸.۴۱ نتیجه می‌شود که یک همسایگی باز $(\circ,\circ)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ مانند U وجود دارد به قسمی که $V=H(U)$ یک همسایگی باز $(\circ,\circ)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ است و تحدید H به U یک دوسویی روی V است و یک وارون پیوستهٔ $\Phi:V\longrightarrow U$ دارد که متعلق به ردهٔ $C^1(V)$ است و $\Phi(\circ,\circ)=(\circ,\circ)$. بدین‌ترتیب Φ به‌صورت زیر است:

$$\Phi(x, z)=(\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z)),\ (x, z)\in V$$

که درآن $\varphi_1:V\longrightarrow\mathbf{R}^p$, $\varphi_2:V\longrightarrow\mathbf{R}^q$. چون

$$\begin{aligned}(x, z)=H\circ\Phi(x, z)&=H[\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z)]\\&=[\varphi_1(x, z), F(\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z))],\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم $\varphi_1(x, z)=x$ برای هر $(x, z)\in V$. بنابراین Φ به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید:

$$\Phi(x, z)=(x, \varphi_2(x, z)),\ (x, z)\in V.$$

اکنون اگر $P:\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ به‌صورت $P(x, z)=z$ تعریف شده‌باشد، آنگاه P خطی و پیوسته است و $\varphi_2=P\circ\Phi$، بنابراین φ_2 به‌ردهٔ $C^1(V)$ متعلق است و داریم

$$z=F(x, \varphi_2(x, z)),\ \ (x, z)\in V.$$

اکنون می‌نویسیم $W=\{x\in\mathbf{R}^p:(x, \circ)\in V\}$، بنابراین W یک همسایگی باز $\circ$ در $\mathbf{R}^p$ است، و تعریف می‌کنیم $\varphi(x)=\varphi_2(x, \circ)$ برای $x\in W$. واضح است که $\varphi(\circ)=\circ$ و از فرمول قبل نتیجه می‌شود:

$$F(x, \varphi(x))=\circ,\ \ x\in W.$$

علاوه براین $D\varphi(x)(u)=D\varphi_2(x, \circ)(u, \circ)$ برای $x\in W$ و $u\in\mathbf{R}^p$، پس نتیجه می‌گیریم که φ به‌ردهٔ $C^1(W)$ متعلق است. بدین‌ترتیب قسمت (الف) ثابت می‌شود.

برای کامل نمودن برهان قسمت (ب) فرض کنیم که $(x,y)\in U$ درشرط $F(x,y)=\circ$ صدق می‌کند. دراین‌صورت $H(x, y)=(x, F(x,y))=(x, \circ)\in V$ که نتیجه می‌دهد

$x\in W$. علاوه براین $(x,y)=\Phi(x,\circ)=(x,\varphi_{\text{۲}}(x,\circ))=(x,\varphi(x))$، بنابراین $y=\varphi(x)$. □

گاهی مفیداست یک‌فرمول صریح برای مشتق φ داشته‌باشیم. برای این‌منظور عرضهٔ مفهوم **مشتقهای جزئی بلوکی** F مناسب است. اگر $(x,y)\in\Omega$، آنگاه مشتق جزئی بلوکی $D_{(\text{۱})}F(x,y)$ نگاشتی خطی از $\mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{(\text{۱})}F(x,y)(u)=Df(x,y)(u,\circ),\ u\in\mathbf{R}^p,$$

ومشتق جزئی بلوکی $D_{(\text{۲})}F(x,y)$ نگاشتی خطی از $\mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^q$ است که به‌صورت زیر داده شده است:

$$D_{(\text{۲})}F(x,y)(v)=Df(x,y)(\circ,v),\ v\in\mathbf{R}^q.$$

چون $(u,v)=(u,\circ)+(\circ,v)$، آشکار است که

$$DF(x,y)(u,v)=D_{(\text{۱})}F(x,y)(u)+D_{(\text{۲})}F(x,y)(v). \qquad (\text{۱۰.۴۱})$$

توجه‌کنید که نگاشتهای $L_{\text{۱}}$، $L_{\text{۲}}$ که در اثبات قضیهٔ قبل به‌کار رفته‌اند، به‌ترتیب $D_{(\text{۱})}F(\circ,\circ)$ و $D_{(\text{۲})}F(\circ,\circ)$ هستند.

۱۰.۴۱ نتیجه. تحت شرایط قضیهٔ قبل، عددی مانند $\gamma>\circ$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $\|x-a\|<\gamma$، آنگاه مشتق‌تابع φ در x، عنصری از $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ است‌که به‌صورت زیر داده شده است:

$$D\varphi(x)=-[D_{(\text{۲})}F(x,\varphi(x))]^{-\text{۱}}\circ[D_{(\text{۱})}F(x,\varphi(x))]. \qquad (\text{۱۱.۴۱})$$

برهان. فرض‌کنیم $K:W\rightarrow \mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$K(x)=(x,\varphi(x)),\ x\in W.$$

آنگاه از $F\circ K(x)=F(x,q(x))=\circ$ نتیجه می‌شود که $F\circ K:W\rightarrow\mathbf{R}^q$ یک‌تابع ثابت است. علاوه براین به‌سهولت دیده می‌شود که

$$DK(x)(u)=(u,D\varphi(x)(u)),\ u\in\mathbf{R}^p,$$

لذا با به‌کاربردن قاعدهٔ زنجیری ۲.۴۰ در مورد تابع ثابت $F\circ K$ نتیجه می گیریم که

$$\circ=D(F\circ K)(x)=DF(K(x))\circ DK(x).$$

اگر (۱۰.۴۱) را به کاربریم، داریم

$$DF(x, \varphi(x))(u, v) = D_{(۱)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(۲)}F(x, \varphi(x))(v).$$

از این نتیجه می‌شود که اگر $u \in \mathbf{R}^p$، آنگاه

$$\begin{aligned} ۰ = DF(x, \varphi(x))(u) &= D_{(۱)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(۲)}F(x, \varphi(x))(D\varphi(x)(u)) \\ &= D_{(۱)}F(x, \varphi(x))(u) + [D_{(۲)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)](u). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x \in W$ داریم:

$$۰ = D_{(۱)}F(x, \varphi(x)) + D_{(۲)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x).$$

بنا به‌فرض، $L_۲ = D_{(۲)}F(a, b)$ وارون‌پذیر است. چون φ و F پیوسته هستند، عددی مانند $۰ < \gamma$ وجود دارد به قسمی که اگر $\|x - a\| < \gamma$ ، آنگاه $D_{(۲)}F(x, \varphi(x))$ نیز وارون‌پذیر است. بنابراین معادلهٔ (۱۱.۴۱) از معادلهٔ قبل نتیجه می‌شود. □

گاهی مفید است فرمول (۱۱.۴۱) برحسب ماتریسها تعبیر شود. برای این منظوردستگاه q معادله از $p+q$ متغیر (۹.۴۱) را درنظر می‌گیریم. همان طوری‌که قبلاً خاطرنشان کردیم، ازشرایط قضیهٔ تابع‌ضمنی نتیجه می‌شود که ماتریس

$$\begin{bmatrix} f_{۱,p+۱} & \cdots & f_{۱,p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q,p+۱} & \cdots & f_{q,p+q} \end{bmatrix}$$

در نقطهٔ (a, b) وارون‌پذیر است. (به‌خاطر دارید که $f_{i,j}$ نمایشگر مشتق جزئی f_i نسبت به‌متغیر jام است.) در این حالت مشتق تابع جواب φ دریك نقطهٔ x به‌صورت زیر است:

$$-\begin{bmatrix} f_{۱,p+۱} & \cdots & f_{۱,p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q,p+۱} & \cdots & f_{q,p+q} \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} f_{۱,۱} & \cdots & f_{۱,p} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q,۱} & \cdots & f_{q,p} \end{bmatrix},$$

که در آن هردوماتریس درنقطهٔ $(x, \varphi(x))$ نزدیك به (a, b) محاسبه شده‌اند.

قضیه‌های رتبه و پارامتری کردن

قضیهٔ تابع‌ضمنی ۹.۴۱ را می توان به‌صورت زیر تعبیر کرد: این‌قضیه شرایطی را به‌دست می‌دهد که تحت آن «خم‌تراز»

$$C=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q:F(x,\ y)=0\}$$

را که از نقطهٔ $(a,\ b)$ می‌گذرد، می‌توان در $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ به‌صورت نمودار تابعی که در یك همسایگی $a\in\mathbf{R}^p$ مانند W تعریف شده و مقادیر آن در $\mathbf{R}^q$ است، به‌طور موضعی پارامتری کرد؛ بدین‌معنی که

$$C=\{(x,\ \varphi(x)):x\in W\}.$$

اکنون به‌ذکر قضیهٔ دیگری می‌پردازیم که تحت‌شرایط آن پارامتری کردن تصویر تابعی که یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^p$ را در $\mathbf{R}^q$ می‌نگارد، توسط تابعی مانند φ که در یك مجموعهٔ باز درفضایی با بعدکمتر تعریف شده است، امکان‌پذیر است.

در این قضیه، احتیاج به‌استفاده از برخی مطالب مقدماتی ولی مهم جبر خطی داریم که‌خواننده احتمالاً با آنها آشناست.[1] به‌خاطر داریم که اگر $L:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ یك‌تبدیل خطی باشد، آنگاه R_L، **برد** (یا **تصویر**) L، یك‌زیرفضای $\mathbf{R}^q$ به‌صورت

$$R_L=\{L(x):x\in\mathbf{R}^p\},$$

می‌باشد و N_L، **فضای پوچ** (یا **هستهٔ**) L، یك‌زیر فضای $\mathbf{R}^p$ است که به‌صورت زیر داده شده است:

$$N_L=\{x\in\mathbf{R}^p,\ L(x)=0\}.$$

$r(L)$، بعد R_L، را **رتبهٔ** L و $n(L)$، بعد N_L را **پوچی** L می‌نامیم. (بنابراین رتبهٔ L، تعداد بردارهای مستقل خطی در $\mathbf{R}^q$ است که برای تولید برد R_L مورد احتیاج است و پوچی L، تعداد بردارهای مستقل خطی در $\mathbf{R}^p$ است که برای تولید فضای پوچ N_L موردنیاز است.) به‌عنوان تمرین می‌توانید ثابت‌کنید که اگر $\{u_1,\ \dots,\ u_n\}$ (که در آن $n=n(L)$) مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در $\mathbf{R}^p$ باشد که N_L را تولید می‌کند و به‌آن $p-n$ بردار دیگر $u_{n+1},\dots,\ u_p$ بیفزاییم تا یك پایهٔ $\mathbf{R}^p$ به‌دست آید، آنگاه $\{L(u_{n+1}),\ \dots,\ L(u_p)\}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در $\mathbf{R}^q$ است که R_L را تولید می‌کند. بنابراین نتیجه می‌شود که $p=n(L)+r(L)$، لذا: بعد دامنهٔ L برابر با مجموع پوچی و رتبهٔ L است.

---

۱. برای توضیح بیشتر می‌توانید به‌کتابهای Hoffman and Kunze یا Finkbeiner که در مراجع آمده است رجوع کنید.

اگر همانند (۱.۲۳)، L را به صورت‌ماتریس $q\times p$ نمایش دهیم، آنگاه می‌توان نشان‌داد کــه رتبهٔ L بزرگترین عدد r است به‌قسمی که حداقل یك‌زیر ماتریس $r\times r$ با دترمینان مخالف صفر وجود داشته باشد.

قضیهٔ پارامتری کردن می‌گوید که اگر f یك نگاشت C^1 از مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^q$ باشد به‌قسمی که رتبهٔ $Df(x)$ برای هر $x\in\Omega$، r بـاشد و اگر برای $a\in\Omega$، $f(a)=b\in\mathbf{R}^q$، آنگاه یك‌همسایگی a مانند V وجود دارد به‌قسمی که‌تحدید f به V را می‌توان به‌صورت یك نگاشت φ متعلق به‌ردهٔ C^1 که در یك همسایگی در $\mathbf{R}^r$ تعریف شده است، بیان کرد.

۱۱.۴۱ قضیهٔ پـارامتری کردن. مجموعهٔ بـاز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و تـابع $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ متعلق به‌ردهٔ $C^1\Omega$ مفروض‌اند. اگر‌رتبهٔ $Df(x)$ برای هر $x\in\Omega$، r باشد و $f(a)=b\in\mathbf{R}^q$ برای یك $a\in\Omega$، آنگاه

(یك) یك‌همسایگی باز a مانند $V\subseteq\Omega$ و یك تابع $\alpha:V\to\mathbf{R}^r$ در ردهٔ $C^1(V)$ وجود دارد، و

(دو) یك‌مجموعهٔ‌باز $W\subseteq\mathbf{R}^r$ و توابع $\beta:W\to\mathbf{R}^p$ و $\varphi:W\to\mathbf{R}^q$ وجوددارند به‌قسمی که

(سه) $f(x)=\varphi\circ\alpha(x)$ برای هر $x\in V$، و $\varphi(t)=f\circ\beta(t)$ برای هر $t\in W$.

برهان. بدون کاستن از کلیت قضیه فرض می‌کنیم که $a=0\in\mathbf{R}^p$ و $b=0\in\mathbf{R}^q$. می‌نویسیم $L=Df(0)$، پس رتبهٔ $L:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$، r است و فــرض می‌کنیم $\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ پایه‌ای در $\mathbf{R}^p$ باشد به‌قسمی کــه $\{x_{r+1},\cdots,x_p\}$ فضای پوچ L را تولید کند. فضایی‌را که‌از $\{x_1,\cdots,x_r\}$ تولیدمی‌شود، X_1 وفضایی‌را که‌از $\{x_{r+1},\cdots,x_p\}$ تولید می‌شود $X_2=N_L$ می‌نامیم. به‌طوری که دربالا ذکرشد، نتیجه می‌شود که $Y_1=R_L$ از $\{y_1=L(x_1),\cdots,\ y_r=L(x_r)\}$ تولید می‌شود. حال $\{y_{r+1},\cdots,y_q\}$ را به‌قسمی انتخاب می‌کنیم که $\{y_1,\cdots,y_q\}$ پایه‌ای برای $\mathbf{R}^q$ باشد و فرض‌می کنیم که Y_2 فضایی‌باشد که از $\{y_{r+1},\cdots,y_q\}$ تولید می‌شود.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که هر بردار $x\in\mathbf{R}^p$ نمایشی یکتا به‌صورت

$$x=c_1x_1+\cdots+c_px_p$$

دارد. P_1 و P_2 را تبدیلهای خطی در $\mathbf{R}^p$ که به‌صورت زیر

$$P_1(x)=\sum_{j=1}^{r}c_jx_j\ ,\quad P_2(x)=\sum_{j=r+1}^{p}c_jx_j$$

تعریف شده‌اند، می‌گیریم. واضح است که X_j برد P_j، $j=1,2$، است. به‌طریق مشابه،

$Q_۱$ و $Q_۲$ را تبدیلهایی خطی در $\mathbf{R}^q$ که برای $y=c_۱y_۱+\dots+c_qy_q$ به صورت زیر

$$Q_۱(y)=\sum_{j=۱}^{r} c_j y_j,\ \ Q_۲(y)=\sum_{j=r+۱}^{q} c_j y_j$$

تعریف می‌شوند، می گیریم. واضح است که Y_j برد Q_j، $j=۱,۲$، است.

اگر $L_۱$ تحدید L به $X_۱$ باشد، آنگاه $L_۱$ یك‌دوسویی از $X_۱$ روی $Y_۱$ است. $A:Y_۱ \to X_۱$ را وارون $L_۱$ می گیریم. توجه داریم که $A\circ L(x)=x$ برای‌هر $x\in X_۱$ و $L\circ A(y)=y$ برای هر $y\in Y_۱$. اکنون u را در $\Omega\subseteq \mathbf{R}^p$، به $\mathbf{R}^q$ بـه صورت زیر تعریف می کنیم

$$u(x)=A\circ Q_۱\circ f(x)+P_۲(x),\ x\in\Omega. \qquad (۱۲.۴۱)$$

بنابراین $u(۰)=۰$ و u مجموعهٔ $X_۱\cap\Omega$ را در $X_۱$ می نگارد، وداریم

$$Du(x)=A\circ Q_۱\circ Df(x)+P_۲(x),\ x\in\Omega.$$

لذا u به‌ردهٔ $C^۱(\Omega)$ متعلق است . چون به‌سهولت دیده می‌شود کـه $Du(۰)$ نگاشت همانی در $\mathbf{R}^p$ است ، از قضیـه **وارون** ۸.۴۱ نتیجه می شود که یك‌همسایگی بازه $a=$ ، مانند U وجوددارد به‌قسمی‌که $U'=u(U)$ یك‌همسایگی باز ۰ است وتحدید u به U، روی U' دوسویی است، ووارون آن $w=u^{-۱}:U'\to\mathbf{R}^p$ به‌ردهٔ $C^۱(U')$ متعلق است. علاوه براین، اگر مجموعه‌های کوچکتری به‌جای U و U' بگذاریم، می‌توان فرض کرد که U' محدب است (یعنی خط واصل بین هردونقطه‌اش‌را شامل است).

اکنون $g:U'\to\mathbf{R}^q$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(z)=f(w(z)),\ z\in U'\subseteq\mathbf{R}^p.$$

واضح است که g به‌ردهٔ $C^۱(U')$ متعلق است و

$$Dg(z)=Df(w(z))\circ Dw(z),\ z\in U'.$$

رتبهٔ $Df(x)$ بـرای هر $x\in\Omega$، r است و $Dw(z)$ برای $z\in U'$ وارون‌پذیر است، لذا از قضیه‌ای در جبر خطی نتیجه می‌شود که $Dg(z)$ برای هر $z\in U'$ دارای رتبهٔ r است. از طرف دیگر

$$g(z)=(Q_۱+Q_۲)\circ f(w(z))$$
$$=Q_۱\circ f(w(z))+Q_۲\circ f(w(z)).$$

چون $w=u^{-۱}$، از (۱۲.۴۱) نتیجه می‌شود که

$$z = u(w(z)) = A \circ Q_1 \circ f(w(z)) + P_2(w(z)),\quad z \in U'.$$

اما در $\mathbf{R}^q$، $L \circ A \circ Q_1 = Q_1$ ودر $\mathbf{R}^p$، $L \circ P_2 = 0$، لذا داریم

$$L(z) = Q_1 \circ f(w(z)) = Q_1 \circ g(z), \qquad (۱۳.۴۱)$$

و نتیجه می‌شود که $L = Q \circ Dg(z)$ برای $z \in U'$. بنابراین اگر $z \in U'$، آنگاه عملگر Q_1 برد $Dg(z)$ را (که بعدش r است) روی برد L (که همچنین بعدش r است) می نگارد. از این نتیجه می شودکه Q_1 در برد $Dg(z)$ برای $z \in U'$ یك به یك است، بنابراین اگر $z \in U'$ و $x \in \mathbf{R}^p$ به‌قسمی باشدکه $L(x) = 0$، آنگاه $Dg(z)(x) = 0$. در نتیجه اگر $z \in U'$ و $z_2 \in X_2 = N_L$، آنگاه نتیجه می گیریم که $Dg(z)(z_2) = 0$.

اکنون نشان خواهیم‌داد که $g: U' \to \mathbf{R}^q$ تنها به $z_1 \in X_1$ وابسته است، بدین‌معنی که اگر $z \in U'$ و $z_2 \in X_2$ به قسمی باشدکه $z + z_2 \in U'$، آنگاه $g(z+z_2) = g(z)$. برای این‌منظور، قضیهٔ مقدار میانگین ۵.۴۰ را به کار می‌بریم ونتیجه می گیریم که روی پاره‌خطی که z را به $z + z_1$ وصل می‌کند (وبنابراین در U' واقع است) نقطه‌ای مانند z_0 وجود دارد به‌قسمی که

$$0 \leqslant \|g(z+z_2) - g(z)\| \leqslant \|Dg(z_0)(z_2)\| = 0,$$

بنابراین همان‌طور که ادعا شده‌بود $g(z+z_2) = g(z)$.

اینك آمادگی داریم که نگاشتهای α، β و φ را تعریف‌کنیم. $C: \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^p$ را تبدیلی‌خطی‌می‌گیریم که $e_1, \dots, e_r$، عناصر پایهٔ‌استاندارد $\mathbf{R}^r$ را دربردارهای $x_1, \dots, x_r$ که تشکیل یك‌پایه برای X_1 می‌دهند، می‌نگارد. بنابراین C از $\mathbf{R}^r$ روی X_1 دوسویی است و $C^{-1}: X_1 \to \mathbf{R}^r$ وجـود دارد. بنویـسیم $W = C^{-1}(U') = C^{-1}(U' \cap X_1)$، آنگاه $W \subseteq \mathbf{R}^r$ یك همسایگی باز 0 در $\mathbf{R}^r$ است . همچنین یك همسایگی باز $a = 0$ مانند $V \subseteq U$ را بـه‌قسمی انتخاب می کنیم کـه $P_1 \circ u(V) \subseteq U'$. اکنون $\alpha: V \to \mathbf{R}^r$ و $\beta: W \to \mathbf{R}^p$را برای $x \in V$ و $t \in W$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(x) = C^{-1} \circ P_1 \circ u(x),\quad \beta(t) = w \circ C(t), \qquad (۱۴.۴۱)$$

واضح است کـه α به‌ردهٔ $C^1(V)$ متعلق است و $\alpha(V) \subseteq W$، و β به‌ردهٔ $C^1(W)$ متعلق است و $\beta(W) \subseteq U$. اکنـون $\varphi: W \to \mathbf{R}^q$ را بـرای $t \in W$ به‌صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\varphi(t) = g \circ C(t).$$

این‌نتیجه می‌دهد که

$$\varphi(t) = (f \circ w) \circ C(t) = f \circ \beta(t).$$

علاوه براین، اگر $x \in V$، آنگاه

$$f(x)=f(w\circ u(x))=(f\circ w)\circ u(x)=g\circ u(x).$$

اما دیده‌ایم که $g\circ u(x)=g\circ P_{1}\circ u(x)$، بنابراین

$$f(x)=g\circ u(x)=g\circ(C\circ C^{-1})\circ(P_{1}\circ U)(x)$$
$$=(g\circ C)\circ(C^{-1}\circ P_{1}\circ u)(x)$$
$$=\varphi\circ\alpha(x).$$

درنتیجه، $f(x)=\varphi\circ\alpha(x)$ برای هر $x\in V$. □

در برهانی که برای این‌قضیه آوردیم در واقع اطلاعات بیشتری به‌دست آوردیم. درنتیجهٔ زیر ازنمادی که در اثبات قضیه به‌کار رفته است، استفاده می کنیم.

۱۲۰۴۱ نتیجه. (الف) نگاشت $\varphi: W\to \mathbf{R}^{q}$ به‌صورت $\varphi_{1}+\varphi_{2}$ است ، که در آن φ_{1} تحدیدنگاشت خطی از $\mathbf{R}^{r}\to\mathbf{R}^{q}$ به W است‌که $e_j\in\mathbf{R}^{r}$ را به $y_j=L(x_j)$، $j=1,\dots,r$، می‌برد، و $\varphi_{2}(W)\subseteq Y_{2}$.
(ب) اگر $t\in W$ ، آنگاه $\alpha\circ\beta(t)=t$.
(پ) اگر $x\in U\cap X_{1}$، آنگاه $x\in V$ و $\beta\circ\alpha(x)=x$.

برهان . (الف) چون $g=Q_{1}\circ g+Q_{2}\circ g$ ، از (۱۳۰۴۱) نتیجه می شود که $g=L+Q_{2}\circ g$. بنابراین، ازتعریف φ به‌دست می‌آید $\varphi=L\circ C+Q_{2}\circ g\circ C$ که همان حکم (الف) است.

(ب) اگــر $t\in W$، آنگاه $x=\beta(t)=w\circ C(t)\in U$ دارای این‌خاصیت است که $u(x)=u\circ w\circ C(t)=C(t)\in U'\cap X_{1}$ ، بنابراین $P_{1}\circ u(x)=C(t)\in U'$ و در نتیجه $x\in V$ و

$$\alpha(x)=C^{-1}\circ P_{1}\circ u(x)=C^{-1}\circ C(t)=t,$$

وگزارهٔ (ب) ثابت می‌شود.

(پ) اگر $x\in\Omega\cap X_{1}$، آنگاه از (۱۲۰۴۱) واین‌که $P_{2}(x)=0$، نتیجه می شود که $u(x)\in X_{1}$. بنابراین‌اگر $x\in U\cap X_{1}$،نتیجه می‌شودکه $P_{1}\circ u(x)=u(x)\in U'\cap X_{1}$ و در نتیجه $x\in V$. علاوه براین

$$\beta\circ\alpha(x)=(w\circ C)\circ(C^{-1}\circ P_{1}\circ u)(x)$$
$$=w\circ C\circ C^{-1}\circ u(x)=w\circ u(x)=x.\ \square$$

اکنون بااستفاده از قضیهٔ پارامتری کردن، قضیهٔ رتبه را ثابت می کنیم .

۱۳.۴۱ قضیهٔ رتبه. فرض کنیم $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ یك مجموعهٔ باز و $f:\Omega \to \mathbf{R}^q$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد. همچنین فرض‌کنیم $Df(x)$ برای هر $x \in \Omega$ از رتبهٔ r باشد وبرای یك $a \in \Omega$، $f(a)=b \in \mathbf{R}^q$. آنگاه:

(یك) همسایگی باز a، مانند V وهمسایگی باز O، مانند V' در $\mathbf{R}^q$ ویك تابع $\sigma:V \to V'$ دررده‌ٔ $C^1(V)$ وجوددارند به‌قسمی‌که σ وارون‌دارد ووارون‌آن $\sigma^{-1}:V' \to V$ در ردهٔ $C^1(V')$ است.

(دو) یك‌همسایگی باز b مانند Z ویك‌همسایگی‌باز O، مانند Z' در $\mathbf{R}^q$ وتابع $\tau:Z' \to Z$ در ردهٔ $C^1(Z')$ وجوددارند به‌قسمی‌که τ وارون‌دارد ووارون‌آن $\tau^{-1}:Z \to Z'$ در ردهٔ $C^1(z)$ است.

(سه) اگر $x \in V$ آنگاه $f(x)=\tau \circ i_r \circ \sigma(x)$، که درآن $i_r:\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ نگاشتی است‌که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$i_r(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_p)=(c_1, \dots, c_r, 0, 0, \dots 0) \in \mathbf{R}^q.$$

برهان. فرض می‌کنیم که $a=0$ و $b=0$ و نماد ونتایج به‌دست‌آمده در اثبات قضیهٔ پارامتری کردن را به‌کار می‌بریم. $B:\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ را تابعی خطی می‌گیریم که $e_1, \dots, e_p$، عناصر پایه استاندارد $\mathbf{R}^p$ را در بردارهای $x_1, \dots, x_p$ می‌نگارد، بنا براین B یك‌دوسویی از $\mathbf{R}^p$ روی $\mathbf{R}^p$ است ولذا B^{-1} وجود دارد. نگاشت $\sigma:\Omega \to \mathbf{R}^p$ که به‌صورت $\sigma(x)=B^{-1} \circ u(x)$ تعریف شده است به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است، و ازاین‌که تحدید u به U وارونی به‌صورت $w:U' \to \mathbf{R}^p$ دارد که نگاشتی روی U است، نتیجه می‌شود که تحدید σ به U وارونی به‌صورت $\sigma^{-1}=w \circ B$ داردکه $B^{-1}(U)$ را روی U می‌نگارد.

مجموعهٔ $W \subseteq \mathbf{R}^r$ و تابع $\varphi:W \to \mathbf{R}^q$ را که در قضیهٔ پارامتری‌کردن تعریف کردیم درنظر بگیرید وفرض‌کنید $H:\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$ تابعی خطی‌باشد که $e_1, \dots, e_q$، عناصر پایهٔ استاندارد $\mathbf{R}^q$ را در بردارهای $y_1, \dots, y_q$ می‌نگارد. بنابراین H یك دوسویی از $\mathbf{R}^q$ روی $\mathbf{R}^q$ است ودر نتیجه H^{-1} وجود دارد. اکنون W' را به‌صورت زیر:

$$W'=\{(c_1, \dots, c_q) \in \mathbf{R}^q : (c_1, \dots, c_r) \in W\}$$

تعریف می‌کنیم وفرض می‌کنیم $\tau = W' \to \mathbf{R}^q$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\tau(c_1, \dots, c_q)=\varphi(c_1, \dots, c_r)+H(0, \dots, 0, c_{r+1}, \dots, c_q).$$

حال از نتیجهٔ ۱۲.۴۱ (الف) حاصل می شود که $D\tau(0)=H$، بنابراین قضیهٔ وارونی ۸.۴۱ ایجاب می‌کندکه تحدید τ به‌یك همسایگی 0، مانند Z'، یك‌دوسویی روی یك همسایگی $\tau(0)=0$، مانند Z باشد.

اگر در صورت لزوم V را محدودتر کنیم، می‌توان فرض کرد که $f(V) \subseteq Z$.

اکنون x را در V و $\sigma(x)=B^{-1}\circ u(x)$ را درنظر می‌گیریم. اگر $\bar{i}_r$ تابعی باشد که در بالا تعریف کرده‌ایم، آنگاه $i_r\circ\sigma(x)=(C^{-1}\circ P_1\circ u(x),\ 0)=(\alpha(x),\ 0)$.
بنابراین $\tau\circ i_r\circ\sigma(x)=\varphi\circ\sigma(x)=f(x)$ برای هر $x\in V$.

تمرین

۴۱.الف: مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و تابع $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. اگر $Df(x)$ برای هر $x\in\Omega$ وجود داشته‌باشد واگر $j=1,\dots p$ ، $i=1,\dots,q$، آنگاه نشان‌دهید که $|D_jf_i(x)-D_j f_i(y)|\leqslant\|Df(x)-Df(y)\|_{pq}$. بنابراین اگر f به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد، آنگاه هریك از مشتقهای جزئی D_jf_i در Ω پیوسته است.

۴۱.ب. مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و تابع $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ مفروض‌اند. اگر f به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق‌باشدو $K\subseteq\Omega$ فشرده باشد، آنگاه نشان دهید که $x\to Df(x)$ پیوستهٔ یکنواخت است بدین‌معنی که برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $x,\ y\in K$ و $\|x-y\|<\delta$، آنگاه $\|Df(x)-Df(y)\|_{pq}<\varepsilon$.

۴۱.پ. فرض‌کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و $\Omega_1\subseteq\mathbf{R}^q$ مجموعه‌هایی باز و $f:\Omega\to\mathbf{R}^q$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ و $g:\Omega_1\to\mathbf{R}^r$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega_1)$ متعلق باشند. اگر $f(\Omega)\subseteq\Omega_1$، نشان‌دهید که $g\circ f$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است.

۴۱.ت. تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ که به صورت $f(x)=x^3$ تعریف شده‌است، مفروض است. نشان‌دهید که f به‌ردهٔ $C^1(\mathbf{R})$ متعلق است ویك‌دوسویی از $\mathbf{R}$ روی $\mathbf{R}$ است و $g(x)=x^{1/3}$ وارون آن برای هر $x\in\mathbf{R}$ است. با این حال $Df(0)$ نه یك‌به‌یك است ونه پوشا. آیا g به‌ردهٔ $C^1(\mathbf{R})$ متعلق است؟

۴۱.ث. فرض‌کنید $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به قسمی باشد که برای هر $x\in\mathbf{R}$، $g'(x)\neq 0$. نشان دهید که g یك‌دوسویی از $\mathbf{R}$ روی $g(\mathbf{R})$ است.

۴۱.ج. مجموعهٔ $A\subseteq\mathbf{R}^p$، تابع $f:A\to\mathbf{R}^p$ و $g:f(A)\to\mathbf{R}^p$ وارون f مفروض‌اند. فرض‌کنید که f در $a\in A$ مشتق‌پذیر و g در $b=f(a)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $Df(a)$ وارون‌پذیر نباشد، آنگاه نشان‌دهید که $Dg(b)$ وارون‌پذیر نیست.

۴۱.چ. فرض‌کنید $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x,\ y)=(x+y,\ 2x+ay).$$

(الف) $Df(x\ ,\ y)$ را محاسبه‌کنید و نشان‌دهید که $Df(x,\ y)$ وارون‌پذیر است اگر وفقط اگر $a\neq 2$.

(ب) تصویر مربع یکه $\{(x,\ y):x,y\in[0,1]\}$ را برای $a=1,2,3$، بیابید.

۴۱.ح. فرض کنید f نگاشتی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ باشدکه نقطهٔ $(x,\ y)$ را به‌نقطهٔ $(u,\ v)$ که به‌صورت زیر داده شده است:

$$u=x,\ \ v=xy$$

بنگارد. چندخم ثابت $=u$ وثابت $=v$ رادرصفحهٔ $(x,\ y)$وچندخم ثابت $=x$ وثابت $=y$ رادرصفحهٔ $(u,\ v)$ رسم کنید. آیا این نگاشت یك‌به یك است؟ آیا f روی تمام $\mathbf{R}^۲$ پوشا است؟ نشان‌دهید که اگر $x\neq ۰$ ، آنگاه f یك‌همسایگی $(x,\ y)$ را به‌طوریك‌به‌یك‌روی‌یك همسایگی $(x,\ xy)$ می‌نگارد. f مستطیل $\{(x,y):۱\leqslant x\leqslant ۲, ۰\leqslant y\leqslant ۲\}$ را برچه ناحیه‌ای از صفحهٔ $(u,\ v)$ می‌نگارد ؟ f چه‌نقاطی از صفحهٔ $(x,\ y)$ را برمستطیل $\{(u,v):۱\leqslant u\leqslant ۲, ۰\leqslant v\leqslant ۲\}$ می‌نگارد؟

۴۱.خ . فرض کنید f نگاشتی از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$ باشدکه نقطهٔ (x,y) را برنقطهٔ $(u,\ v)$ که به‌صورت زیر داده شده است

$$u=x^۲-y^۲,\ \ v=۲xy$$

بنگارد. f چه‌خمهایی ازصفحهٔ $(x,\ y)$ را برخطوط ثابت $=u$ و ثابت $=v$ می‌نگارد؟ f خطوط ثابت $=x$ و ثابت $=y$ را به‌چه خمهایی درصفحهٔ $(u,\ v)$ می‌نگارد؟ نشان‌دهید که هرنقطهٔ مخالف صفر $(u,\ v)$ تصویر تحت f دونقطه است. f مربع

$$\{(x,y):۰\leqslant x\leqslant ۱, ۰\leqslant y\leqslant ۱\}$$

را برچه ناحیه‌ای می‌نگارد؟ f چه‌نقاطی ازصفحهٔ $(x,\ y)$ را برمربع

$$\{(u,\ v):۰\leqslant u\leqslant ۱,\ ۰\leqslant v\leqslant ۱\}$$

می‌نگارد ؟

۴۱.د. فرض کنید $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$h(x)=x+۲x^۲\sin\frac{۱}{x},\ \ x\neq ۰$$

$$=۰,\qquad\qquad x=۰.$$

نشان‌دهیدکه h به‌ردهٔ $C^۱(\mathbf{R})$ متعلق نیست و h در همسایگی ۰ یك به‌یك نیست. با این‌حال، این‌تابع در یك‌همسایگی ۰ پوشا است و $Dh(۰)$ وارون‌پذیر است.

۴۱. ذ فرض‌کنید $f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}^۲$ برای $(x,y)\in\mathbf{R}^۲$ به صورت $f(x,y)=(y,x+y^۲)$ تعریف شده باشد. نشان دهیدکه f به ردهٔ $C^۱(\mathbf{R}^۲)$ متعلق است و f دریك همسایگی یك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{R}^۲$ وارون پذیراست. تصویر تحت f خطهای $y=۰,\pm ۱,\pm ۲, x=۰,\pm ۱,\pm ۲$ را رسم کنید. تابع وارون $g=f^{-۱}:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}^۲$ را بیابید ونشان دهیدکه $Dg(f(x_۰,y_۰))=Df(x_۰,y_۰)^{-۱}$.

۴۱. ر.(آشنایی با مفهوم دترمینان ماتریس‌مربع دراین تمرین لازم است.) نگاشت خطی $L\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^p)$ و $[c_{ij}]$ نمایش ماتریسی L نسبت به‌پایه استاندارد در $\mathbf{R}^p$ مفروض‌اند.

درجبرخطی نشان داده شده است که L وارون پذیراست اگر وفقط اگر $\Delta = \det [c_{ij}]$ مخالف با صفر باشد. علاوه براین، اگر $\Delta \neq ۰$، آنگاه ماتریس $L^{-۱}$ به‌صورت $[p_{ij}/\Delta]$ است، که در آن p_{ij} ها چند جمله‌ایهایی از c_{ij} می باشند.

(الف) نشان‌دهید که اگر $L_۰$ وارون‌پذیر باشدو $\|L - L_۰\|_{pp}$ به اندازهٔ کافی کوچك باشد، آنگاه L وارون پذیراست.

(ب) نشان دهید که اگر $L_۰$ وارون پذیر باشد، آنگاه نگاشت $L \to L^{-۱}$ دریك همسایگی $L_۰$ نسبت‌به‌نرم $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ پیوسته است.

(پ) مجموعهٔ باز $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ و $f: \Omega \to \mathbf{R}^p$ متعلق به ردهٔ $C^۱(\Omega)$ مفروض‌اند. اگر $Df(c)$ دریك $c \in \Omega$ وارون پذیر باشد، آنگاه $Df(x)$ در یك همسایگی c وارون پذیر است.

۴۱. ز. فرض‌کنید $F: \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ به‌صورت $F(x,y) = y^۲ - x$ تعریف‌شده‌باشد. نشان دهیدکه F به‌ردهٔ $C^۱(\mathbf{R}^۲)$ متعلق است ولی $D_۲F(۰,۰) = ۰$. نشان دهیدکه تابعی مانند φ که دریك همسایگی O مانند W تعریف شده باشد به قسمی که $F(x, \varphi(x)) = ۰$ برای هر $x \in W$، وجودندارد.

۴۱. ژ. فرض‌کنید $f: \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۲$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x - y - ۲xz).$$

بنابراین $f(۰,۰,۰) = (۰,۰)$ و $Df(۰,۰,۰)$ به‌صورت زیراست:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان‌دهیدکه $f(x,y,z) = (۰,۰)$ را می‌توان درنزدیکی $z = ۰$ به‌صورت $(x,y) = \varphi(z)$ حل‌کرد و

$$D\varphi(۰) = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}.$$

(ب) نشان دهیدکه جواب صریح معادلهٔ $(x,y) = \varphi(z)$ به‌صورت زیر است:

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{۲(z-۱)}, \frac{z - ۲z^۲}{۲(z-۱)} \right), \quad z < ۱.$$

درستی نتیجهٔ قسمت (الف) را تحقیق کنید.

(پ) نشان دهید که $f(x,y,z)=(0,0)$ را می‌توان درنزدیکی $x=0$ به‌صورت $(y,z)=\psi(x)$ حل کرد و

$$D\psi(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(ت) نشان دهید که جواب صریح معادلهٔ $(y,z)=\psi(x)$ به‌صورت زیر است:

$$\psi(x)=\left(\frac{2x^2+x}{1-2x}\ ,\ \frac{2x}{2x-1}\right)\ ,\ x<\frac{1}{2}\ .$$

درستی نتیجهٔ قسمت (پ) را تحقیق کنید.

۴۱. س. فرض کنید $F:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(u,v,w,x,y)=(uy+vx+w+x^2,uvw+x+y+1)$$

و توجه کنید که $F(2,1,0,-1,0)=(0,0)$.

(الف) نشان دهید کـه معادلهٔ $F(u,v,w,x,y)=(0,0)$ را مـی‌توان نسبت بـه (x,y) برحسب (u,v,w) درنزدیکی نقطهٔ $(2,1,0)$ حل کرد.

(ب) اگر $(x,y)=\varphi(u,v,w)$ جواب قسمت الف باشد، نشان دهید که $D\varphi(2,1,0)$ ماتریس زیر است:

$$-\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

۴۱. ش. مجموعهٔ $A\subseteq\mathbf{R}^3$، تابع $F:A\to\mathbf{R}$ و رویهٔ S_F در $\mathbf{R}^3$

$$S_F=\{(x,y,z)\in A : F(x,y,z)=0\}$$

که به صورت ضمنی داده شده است و سطح تراز نامیده می‌شود، مفروض‌انـد. اگر F در نقطهٔ $(x_0,y_0,z_0)\in S_F$ که یك نقطهٔ **درونی** A است، مشتق‌پذیر باشد، آنگاه **فضای مماس** بر S_F دراین نقطه، مجموعهٔ نقاط زیر است:

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : A_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z)=0\},$$

که در آن $A_{(x_0,y_0,z_0)}$ نگاشت مستوی $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ است کـه بـه صورت زیـر تعریـف شده است:

$$\begin{aligned}A_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z)&=F(x_0,y_0,z_0)+DF(x_0,y_0,z_0)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\\&=DF(x_0,y_0,z_0)(x-x_0,y-y_0,z-z_0).\end{aligned}$$

نشان دهیدکه فضای مماس در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{(x,y,z) : D_1F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)(x-x_\circ)+D_2F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)(y-y_\circ)$$
$$+D_3F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)(z-z_\circ)=\circ\}.$$

بنابراین فضای مماس بر S_F هرگاه حداقل یکی از اعداد $D_1F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$، $D_2F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$، $D_3F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ مخالف باصفر باشند، یك صفحه است. در این حالت فضای مماس بر S_F در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ **صفحهٔ مماس** بر S_F نامیده می‌شود.

۴۱. ص. فرض کنید توابع $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ که در زیر آمده‌اند، رویه‌های S_F در $\mathbf{R}^3$ را به‌طورضمنی به‌عنوان سطح تراز نمایش دهند:

$$S_F=\{(x\ \ y\ \ z)\in\mathbf{R}^3 : F(x,y,z)=\circ\}.$$

در هریك ازحالتهای زیر، فضای مماس بر S_F را درنقاط داده شده بیابید.

(الف) $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$ درنقاط $(1,1,2)$ و $(\circ,2,4)$.

(ب) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-25$ درنقاط $(3,4,\circ)$ و $(3,3,\sqrt{7})$.

(پ) $F(x,y,z)=z-xy$ درنقاط $(1,1,1)$ و $\left(4,\frac{1}{2},2\right)$.

۴۱. ض. (الف) فرض کنیدکه علاوه برشرایط قضیهٔ وارونی ۸.۴۱، می‌دانیم که تابع f دارای مشتقهای جزئی پیوسته ازمرتبهٔ $m>1$ است. نشان دهیدکه تابع وارون $g : V \to \mathbf{R}^p$ دارای مشتقهای جزئی پیوسته از مرتبهٔ m است.

(ب) نتیجهٔ مشابهی را برای قضیهٔ تابع ضمنی ۹.۴۱ ثابت کنید.

۴۱. ط. فرض کنید $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ به ردهٔ $C^1(\mathbf{R}^2)$ متعلق باشد. نشان دهید که f یك به‌یك نیست. درواقع تحدید f به هرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^2$ یك‌به‌یك نیست.

۴۱. ظ. فرض کنید $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ به ردهٔ $C^1(\mathbf{R})$ متعلق باشد. نشان دهیدکه اگر $c\in\mathbf{R}$، آنگاه تحدید g به‌هر همسایگی c روی یك همسایگی $g(c)$ نگاشت پوشا نیست.

۴۱. ع. فرض کنید $L\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ یك به یك و $r>\circ$ به قسمی باشد که $\|L(x)\|\geqslant r\|x\|$ برای هر $x\in\mathbf{R}^p$. نشان دهید که اگر $L_1\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ به قسمی باشد که $\|L_1-L\|_{pq}<r$، آنگاه L_1 یك به‌یك است. (بنابراین، مجموعهٔ نگاشتهای یك‌به‌یك در $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ باز است.)

۴۱. غ. فرض کنید $L\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ پوشا و $m>\circ$ مقداری باشد که در برهان قضیهٔ ۶.۴۱ آمده‌است. نشان‌دهیدکه‌اگر $L_1\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ به‌قسمی باشد که $\|L_1-L\|_{pq}<\frac{2}{m}$،

آنگاه L_1 پوشا است. (بنابراین، مجموعهٔ نگاشتهای پوشا در $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$ بازاست.)

۴۱. ف. فرض کنید $g:\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ به ردهٔ $C^1(\mathbf{R}^p)$ متعلق باشد ودر شرط $\|Dg(x)\|_{pp} \leqslant a < 1$ برای هر $x\in\mathbf{R}^p$ صدق کند. هرگاه $f(x)=x+g(x)$ برای $x\in\mathbf{R}^p$، نشان دهید که f درشرط

$$\|f(x_1)-f(x_2)-(x_1-x_2)\| \leqslant a\|x_1-x_2\|$$

برای هر x_1 و x_2 در $\mathbf{R}^p$ صدق می‌کند و f از $\mathbf{R}^p$ روی $\mathbf{R}^p$ دوسویی است.

پروژه

۴۱. α. (این پروژه یك برهان مستقیم ومقدماتی از قضیهٔ تابع ضمنی را به دست می‌دهد.) فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^2$ مجموعهٔ بازو $F:\Omega\to\mathbf{R}$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد. فرض کنید که $(a,b)\in\Omega$، $F(a,b)=0$ و $D_2F(a,b)>0$.

(الف) نشان دهید که‌حجرهٔ بسته‌ای مانند $Q=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ به‌مرکز (a,b) وجوددارد به‌قسمی که اولاً برای هر $(x,y)\in Q$، $D_2F(x,y)>0$ و ثانیاً برای هر $x\in[a_1,a_2]$، $F(x,b_1)<0$ و $F(x,b_2)>0$.

(ب) اگر $x\in[a_1,a_2]$، آنگاه تابع $F_x:[b_1,b_2]\to\mathbf{R}$ که‌به‌صورت $F_x(y)=F(x,y)$ برای $y\in[b_1,b_2]$ تعریف شده است، به‌قسمی است که

$$F_x(b_1)<0<F_x(b_2) \text{ و } F'_x(y)>0 \text{ برای } y\in[b_1,b_2].$$

(پ) تابعی مانند φ وجوددارد که $[a_1,a_2]$ را بر $[b_1,b_2]$ به قسمی می‌نگارد که برای هر $x\in[a_1,a_2]$، $F(x,\varphi(x))=0$.

(ت) اگر $x\in(a,a_2)$ و $|h|$ به‌اندازهٔ‌کافی کوچك باشد، نشان دهید که عددی مانند h_1 باشرط $0<|h_1|<|h|$ وجود دارد به‌قسمی که

$$0=F[x+h,\varphi(x+h)]-F[x,\varphi(x)]$$

$$=D_1F[x+h_1,\varphi(x+h_1)]h+D_2F[x+h_1,\varphi(x+h_1)][\varphi(x+h)-\varphi(x)].$$

(ث) نشان دهید که φ در (a_1,a_2) مشتق‌پذیر است و

$$\varphi'(x)=-D_1F[x,\varphi(x)]/D_2F[x,\varphi(x)].$$

(ج) استدلال قبلی را با تغییراتی مناسب درمورد تابعی که دریك مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ تعریف شده است، به‌کار برید.

(چ) فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^2$ مجموعه‌ای باز و توابع $F,G : \Omega \to \mathbf{R}$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشند و فرض کنید که در یک نقطهٔ $(a,b) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^2$ داریم $F(a,b) = 0$ و $G(a,b) = 0$. فرض کنید:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} D_{p+1}F(a,b) & D_{p+2}F(a,b) \\ D_{p+1}G(a,b) & D_{p+2}G(a,b) \end{bmatrix} \neq 0,$$

در این صورت حداقل یکی از دو مقدار $D_{p+1}F(a,b)$ و $D_{p+2}F(a,b)$ مخالف صفر است. با فرض $D_{p+2}F(a,b) \neq 0$ و با استفاده از (ج)، $x_{p+2} = \varphi(x_1, \dots, x_{p+1})$ را دریک همسایگی $(a,b_1) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ به‌دست آورید. بنابراین در این همسایگی داریم $F(x_1, \dots, x_{p+1}, \varphi(x_1, \dots, x_{p+1})) = 0$. اکنون می‌نویسیم:

$$H(x_1, \dots, x_{p+1}) = G(x_1, \dots, x_{p+1}, \varphi(x_1, \dots, x_{p+1})).$$

بنا بر قاعدهٔ زنجیری داریم

$$D_{p+1}H = D_{p+1}G + (D_{p+2}G)(D_{p+1}\varphi),$$

که در آن، توابع در نقاط مناسب محاسبه شده‌اند. چون $D_{p+1}\varphi = -(D_{p+1}F)/(D_{p+2}F)$، نتیجه می‌گیریم که $D_{p+1}H = -\Delta / D_{p+2}F$ و این عبارت در (a,b_1) صفر نمی‌شود. بنابراین می‌توان (ج) را برای به‌دست آوردن $x_{p+1} = \psi(x_1, \dots, x_p)$ در یک همسایگی $a \in \mathbf{R}^p$ به‌کار برد. (بدین‌ترتیب قضیهٔ توابع ضمنی در حالت $q = 2$ به‌دست آمد و گسترش آن به‌حالت کلی q، با استقرا حاصل می‌شود.)

۴۱. β. (این پروژه به موازات پروژهٔ α.۴۰ است و برای قسمت اول قضیهٔ وارونی ۸.۴۱ اثباتی مستقیم‌تر از آنچه در متن کتاب ارائه شده، به‌دست می‌دهد.) فرض می کنیم که مجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ باز و $f : \Omega \to \mathbf{R}^p$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است و در نقطهٔ $x_0 \in \Omega$ نگاشت خطی $Df(x_0)$ دوسویی است. می‌نویسیم $\Gamma = Df(x_0)^{-1}$.

(الف) نشان دهید که عددی مانند $r > 0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر

$\|x - x_0\| < r$، آنگاه $\|I - \Gamma \circ Df(x)\|_{pp} \leqslant \frac{1}{2}$.

(ب) فرض کنید $s \leqslant \frac{1}{2} r \|\Gamma\|_{pp}^{-1}$ و در نقطهٔ ثابت y که در $\|y - f(x_0)\| \leqslant s$ صدق کند، تابع $F_y(x) = f(x) - y$ را برای $\|x - x_0\| \leqslant r$ تعریف می کنیم. آنگاه برای $\|x - x_0\| \leqslant r$، F_y مشتق‌پذیر است،

$$\|\Gamma\circ F_y(x_\circ)\|\leqslant\frac{1}{2}r \quad \text{و} \quad \|I-\Gamma\circ DF_y(x)\|_{pp}\leqslant\frac{1}{2}.$$

(پ) با فرض $\|y-f(x_\circ)\|\leqslant s$، G_y را برای $\|x-x_\circ\|\leqslant r$ به‌صورت $G_y(x)=x-\Gamma\circ f_y(x)$ تعریف می‌کنیم. آنگاه نشان دهید که G_y در این گوی، تابعی انقباضی با ثابت $\frac{1}{2}$ است.

(ت) با فرض $\|y-f(x_\circ)\|\leqslant s$، φ_n را برای $n=0,1,2,\ldots$ با $\varphi_\circ(y)=x_\circ$ و $\varphi_{n+1}(y)=G_y(\varphi_n(y))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که

$$\|\varphi_{n+1}(y)-\varphi_n(y)\|\leqslant 2^{-n}\|\varphi_1(y)-\varphi_\circ(y)\|\leqslant 2^{-n-1}r$$

و نتیجه بگیرید که برای $n\geqslant m\geqslant 0$، $\|\varphi_{n+1}(y)-\varphi_m(y)\|\leqslant 2^{-m}r$. بخصوص، $\|\varphi_k(y)-x_\circ\|\leqslant r$؛ پس این تکرار عمل، امکان‌پذیر است.

(ث) نشان‌دهید که‌هر یك از توابع φ_k برای $\|y-f(x_\circ)\|\leqslant s$ پیوسته‌اند و همچنین دنبالهٔ (φ_k) به تابع پیوسته‌ای مانند φ همگرای یکنواخت است و φ به قسمی است که برای $\|y-f(x_\circ)\|\leqslant s$، $G_y(\varphi(y))=\varphi(y)$. از این نتیجه می‌شود که برای $\|y-f(x_\circ)\|\leqslant s$، $f(\varphi(y))=y$.

بنابراین تابع φ درمجموعهٔ $\{y:\|y-f(x_\circ)\|\leqslant s\}$ وارون f است و این مجموعه‌را بر مجموعهٔ $\{x:\|x-x_\circ\|\leqslant r\}$ می‌نگارد.

۷۰۴۱. (این پروژه به موازات پروژه‌های α۰۴۰ و β۰۴۱ است و یك اثبات مستقیم از قضیهٔ تابع‌ضمنی را به‌دست می‌دهد.) مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ و $(x_\circ,y_\circ)\in\Omega$ مفروض‌اند. فرض کنید $F:\Omega\to\mathbf{R}^q$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق است، $F(x_\circ,y_\circ)=0$ ونگاشت خطی $L_2:\mathbf{R}^q\to\mathbf{R}^q$ که به‌صورت

$$L_2(v)=DF(x_\circ,y_\circ)(0,v),\ v\in\mathbf{R}^q$$

از $\mathbf{R}^q$ روی $\mathbf{R}^q$ تعریف شده است، دوسویی است. بنویسید $\Gamma=L_2^{-1}$.

(الف) نشان دهید که عددی مانند $r>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $\|x-x_\circ\|^2+\|y-y_\circ\|^2\leqslant r^2$، آنگاه

$$\|v-\Gamma\circ Df(x,y)(0,v)\|\leqslant\frac{1}{2}\|v\| \quad ,v\in\mathbf{R}^q\ .$$

(ب) فرض کنید $0<s\leqslant\frac{1}{2}r$ به‌قسمی باشد که اگر $\|x-x_\circ\|\leqslant s$، آنگاه

$$\|F(x,y_\circ)\|\leqslant\frac{1}{2}r\|\Gamma\|_{qq}^{-1}.$$

برای هر x ثابت که در $\|x-x_0\| \leqslant s$ صدق کند، برای $\|y-y_0\| \leqslant \frac{1}{2}r$، G_x را با $G_x(y) = y - T\circ F(x,y)$ تعریف و توجه می‌کنیم که مقادیر G_x در $\mathbf{R}^q$ است. نشان دهید که به‌ازای هر x و هر y_1 و y_2 که در $\|x-x_0\| \leqslant s$ و $\|y_j - y_0\| \leqslant \frac{1}{2}r$ صدق کنند، داریم

$$\|G_x(y_1) - G_x(y_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|.$$

(پ) اگر $\|x-x_0\| \leqslant s$، ψ_n را برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ با $\psi_0(x) = y_0$ و $\psi_{n+1}(x) = G_x(\psi_n(x))$ تعریف کنید. نشان دهید که $\|\psi_{n+1}(x) - \psi_m(x)\| \leqslant 2^{-m-1}r$ برای $n \geqslant m \geqslant 0$. بنابراین $\|\psi_k(x) - y_0\| \leqslant \frac{1}{2}r$ و ψ_n با رابطهٔ بالا واقعاً تعریف می‌شود.

(ت) نشان دهید که هریك از توابع ψ_k برای $\|x-x_0\| \leqslant s$ پیوسته‌اند و دنبالهٔ (ψ_k) به‌تابع پیوسته‌ای مانند ψ همگرای یکنواخت است و ψ به‌قسمی است که برای هر $\|x-x_0\| \leqslant s$، داریم

$$F(x, \psi(x)) = 0.$$

(ث) به‌منظور نشان دادن مشتق‌پذیری ψ برای $\|x-x_0\| < s$ از تمرین ۳۹.ف استفاده کنید و برای هر مؤلفهٔ F استدلالی مشابه با قسمتهای (ت) و (ث) از پروژهٔ α۴۱.۰ به‌کار برید.

بخش ۴۲ مسائل فرینه

در بخش ۲۷ بحث مختصری داشتیم در روش معمول برای تعیین نقاطی درونی که یك تابع حقیقی مشتق‌پذیر یك متغیره درآن نقاط به مقادیر فرین نسبی می‌رسد. این سؤال که آیا **نقطهٔ بحرانی** (یعنی، نقطه‌ای که مشتق درآن صفر است) در واقع نقطهٔ فرین است همیشه مطرح نمی‌شود، پاسخ به این سؤال اغلب به وسیلهٔ قضیهٔ تیلر ۶.۲۸ به دست می‌آید. در تجزیه وتحلیل نقاط فرینی که در مرز دامنه هستند، اغلب ازقضیهٔ مقدارمیانگین ۶.۲۷ استفاده می‌شود.

درحالتی که دامنهٔ تابع در $\mathbf{R}^p$ $(P>1)$ وبرد آن در $\mathbf{R}$ است، مسئله معمولاً بسیار مشکلتراست ولازم است هر تابع جداگانه مورد بررسی قرار گیرد. با این‌حال چند قضیهٔ کلی مفید دراین‌مورد وجود داردکه اکنون به‌بیان آن می‌پردازیم.

مجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ و تابع $f:\Omega \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. نقطهٔ $c\in\Omega$ را **نقطهٔ مینیمم نسبی** f گوییم اگر عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $x\in\Omega$ که در $\|x-c\|<\delta$ صدق می‌کند، داشته‌باشیم $f(c)\leqslant f(x)$. نقطهٔ $c\in\Omega$ را **نقطه مینیمم اکید نسبی** f گوییم هرگاه عددی‌مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که برای هر $x\in\Omega$ که در $0<\|x-c\|<\delta$ صدق می‌کند، داشته باشیم $f(c)<f(x)$. **نقطهٔ ماکزیمم[اکید] نسبی** f را به‌طریق مشابه تعریف می‌کنیم. علاوه بر این، اگر $c\in\Omega$، نقطهٔ مینیمم [اکید] نسبی یا ماکزیمم [اکید] نسبی f باشد، می‌گوییم c **نقطهٔ فرینهٔ [اکید] نسبی** f است‌و یا می‌گوییم fدارای **فرینهٔ[اکید] نسبی در**c است، یا f در c **فرینهٔ [اکید] نسبی** دارد.

قضیهٔ زیر در بسیاری ازموارد مفید است.

۱.۴۲ قضیـــه. مجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ و تابع $f:\Omega \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. اگر c یك نقطهٔ درونی Ω ویك نقطهٔ فرینهٔ نسبی f باشد، واگرمشتق جزئی f نسبت به‌بردار $u\in\mathbf{R}^p$، یعنی $D_uf(c)$، وجود داشته باشد، آنگاه $D_uf(c)=0$.

برهان. بنا برفرض، تحدید f به‌مقطع Ω با خط $\{c+tu : t\in\mathbf{R}\}$ دارای یك‌فرینهٔ نسبی در c است. بنابراین از قضیهٔ ۴.۲۷ نتیجه می‌شود که $D_uf(c)=0$. □

۲.۴۲ نتیجـــه . مجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ وتابع $f:\Omega \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. اگر c یك نقطهٔ درونی Ω ویك نقطهٔ فرینهٔ نسبی f باشد و $Df(c)$، مشتق f، وجود داشته باشد، آنگاه $Df(c)=0$.

برهان. از نتیجهٔ ۷.۳۹ به دست می‌آید که هر یك از مشتقهای جزئی $D_jf(c)$، $j=1,\dots,p$ وجود دارند و همچنین دیده می‌شود که اگر $u=(u_1,\dots,u_p)\in\mathbf{R}^p$، آنگاه

$$Df(c)(u)=\sum_{j=1}^{p} u_j\, D_jf(c).$$

از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که $D_j\, f(c)=0$ برای $j=1,\dots,p$ بنابراین $Df(c)(u)=0$ برای هر $u\in\mathbf{R}^p$. □

به‌این نتیجه می‌رسیم که اگر $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ ، $f:\Omega \to \mathbf{R}$ دارای یك‌فرینهٔ نسبی در $c\in\Omega$ باشد، و اگر $Df(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه

$$D_1f(c)=0,\dots,D_pf(c)=0. \tag{۱.۴۲}$$

نقطهٔ درونی c کــه در آن $Df(c)=0$، **نقطهٔ بحرانی** f نامیده مــی‌شود. نتیجه می گیریم که اگر Ω یك مجموعهٔ باز در$\mathbf{R}^p$ باشد‌که در‌آن f دیفرانسیل‌پذیر است، آنگاه مجموعهٔ نقاط بحرانی f شامل تمام‌نقاط فرین‌نسبی f است. البته این مجموعهٔ نقاط‌بحرانی f ممکن است شامل نقاطی باشدکه نقاط فرینهٔ نسبی f نباشند. (علاوه براین، ممکن است

تابع f دریك نقطهٔ درونی Ω، مانند c، دارای فرینهٔ نسبی باشد که در آن نقطه $Df(c)$، مشتق تابع، وجود نداشته باشد، یا f ممکن است دارای فرینهٔ نسبی دریك نقطهٔ $c\in\Omega$ باشد و c نقطهٔ درونی Ω نباشد[1]، در هریك از این حالات c نقطهٔ بحرانی f نیست.)

۳.۴۲ چند مثال. (الف) $f_1(x)=x^3$ برای $x\in[-1,1]$ مفروض است. آنگاه $Df_1(0)=0$، با این حال f_1 در $x=0$ فرینه ندارد. ازطرف دیگر، f_1 در نقاط ± 1 دارای فرینه‌های اکید نسبی‌است (که نقاط درونی دامنه نیستند ونقاط بحرانی‌نمی‌باشند).

(ب) $f_2(x)=|x|$ برای $x\in[-1,1]$ مفروض است. $Df_2(0)$ وجود ندارد. با این‌حال f_2 دارای یك مینیمم اکید نسبی در نقطهٔ درونی 0 است. ازطرف دیگـر، f_2 دارای فرینه‌های اکید نسبی درنقاط ± 1 می‌باشد.

(پ) فرض‌کنید $f_3:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت $f_3(x,y)=xy$ تعـریف شده باشد، آنگاه $Df_3(0,0)=0$، بنابراین‌مبدأ $(0,0)$ نقطهٔ‌بحرانی f_3 است؛ با این‌حال‌فرینهٔ‌نسبی f_3 نیست، چون‌که

$$f_3(0,0)<f_3(x,y)\ ,\ xy>0$$
$$f_3(0,0)>f_3(x,y)\ ,\ xy<0$$

می‌گوییم مبدأ $(0,0)$ **نقطهٔ زینی** f_3 است، بدین معنی کـه هرهمسایگی $(0,0)$ شامل نقاطی است‌که درآن نقاط f_3 اکیداً از $f_3(0,0)$ بزرگتـراست و همچنین شامل نقاطی است‌که درآن نقاط f_3 اکیداً از $f_3(0,0)$ کوچکتراست.

(ت) فرض کنید $f_4:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ بـه صورت $f_4(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ تعریف شده باشد. نشان دهید که $Df_4(0,0)=0$ و تحدید f_4 برهرخطی‌که از $(0,0)$ می‌گذرد دارای مینیمم نسبی در مبدأ است. با این حال، نشان دهید که درهـرهمسایگی $(0,0)$ نقاطی وجوددارندکه f_4 درآن نقاط اکیداً مثبت است و همچنین نقاطی وجـود دارندکه f_4 درآن نقاط اکیداً منفی است.

آزمون مشتق دوم

با توجه به‌مثالهای بالا، خوب است برای تضمین اینکه نقطهٔ بحرانی نقطهٔ فرینه باشد یا اینکه نقطهٔ بحرانی نقطهٔ زینی باشد، شرایطی‌لازم (یاکافی) داشته باشیم. درقضایای بعدی شرایطی برحسب مشتق دوم f که درآخربخش۴۰ آمده، عرضه شده است.

۴.۴۲ قضیــه. فرض‌کنیم $\Omega\subseteq R^p$ باز و $f:\Omega\to R$ دارای‌مشتقهای جزئی‌پیوستهٔ

---

۱. درعبارات داخل پرانتز این فرض‌که Ω باز است و f در تمام نقاط آن دیفرانسیل پذیر است کنار گذاشته شده‌است. ـ م.

مرتبهٔ دوم در Ω باشد. اگر $c\in\Omega$ یك نقطهٔ مینیمم [ماکزیمم] نسبی f باشد، آنگاه

$$D^{2}f(c)(w)^{2}=\sum_{i,j=1}^{p}D_{ij}f(c)w_iw_j\geqslant 0 \qquad (2.42)$$

$[D^2f(c)(w)^2\leqslant 0]$ برای هر $w\in\mathbf{R}^p$.

برهان. $w\in\mathbf{R}^p$ با شرط $\|w\|=1$ مفروض است. اگر c یك نقطهٔ مینیمم نسبی باشد، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $|t|<\delta$، آنگاه

$$f(c+tw)-f(c)\geqslant 0$$

چون Ω بازاست، عددی مانند $\delta_1>0$ باشرط $\delta_1\leqslant\delta$ وجوددارد به‌قسمی که $c+tw$ وقتی $0\leqslant t\leqslant\delta_1$، متعلق به Ω است. حال بنابر قضیهٔ تیلر ۹.۴۰، عددی مانند t_1 با شرط $0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant\delta_1$ وجوددارد به‌قسمی که اگر $c_t=c+t_1w$، آنگاه

$$f(c+tw)=f(c)+Df(c)(tw)+\frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2\ .$$

چون c نقطهٔ مینیمم نسبی‌است، ازنتیجهٔ ۲.۴۲ به دست می‌آید که $Df(c)=0$، بنابراین برای $0\leqslant t\leqslant\delta_1$ داریم

$$\frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2\geqslant 0\ .$$

درنتیجه، $D^2f(c_t)(w)^2\geqslant 0$. از $\|c_t-c\|=|t_1|\leqslant|t|$ نتیجه‌می‌شود که $c_t\to c$ وقتی $t\to 0$. چون مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم f پیوسته‌اند، $D^2f(c)(w)^2\geqslant 0$ برای‌هر $w\in\mathbf{R}^p$ باشرط $\|w\|=1$، که از آن نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. □

قضیهٔ زیرجزئی است ازعکس قضیهٔ ۴.۴۲. اما توجه کنید که فرضهای این قضیه کمی قویتر ازحکم قضیهٔ ۴.۴۲ است.

۵.۴۲ قضیه. فرض‌کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای باز وتابع $f=\Omega\to\mathbf{R}$ دارای مشتقهای جزئی پیوستهٔ مرتبهٔ دوم و $c\in\Omega$ یك نقطهٔ بحرانی f باشد.

(الف) اگر $D^2f(c)(w)^2>0$ برای‌هر $w\in\mathbf{R}^p$ با شرط $w\neq 0$، آنگاه f دارای مینیمم اکید نسبی در c است.

(ب) اگر $D^2f(c)(w)^2<0$ برای هر $w\in\mathbf{R}^p$ با شرط $w\neq 0$، آنگاه f دارای ماکزیمم اکید نسبی در c است.

(پ) اگر $D^2f(c)(w)^2$ هم مقادیراکیداً مثبت وهم مقادیر اکیداً منفی در $w\in\mathbf{R}^p$ بگیرد، آنگاه f دارای یك نقطهٔ زینی در c است.

برهان. (الف) بنابه فرض وقتی w درمجموعهٔ فشردهٔ $\{w\in\mathbf{R}^p:\|w\|=1\}$ است،

داریم $D^2f(c)(w)^2>0$. چون نگاشت $w\to D^2f(c)(w)^2$ پیوسته است، عددی مانند $m>0$ وجود دارد به‌قسمی که

$$D^2f(c)(w)^2\geqslant m,\ \ \|w\|=1.$$

چون مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم f در Ω پیوسته‌اند، عدد $\delta>0$ وجود دارد به قسمی که اگر $\|x-c\|<\delta$، آنگاه برای $\|w\|=1$،

$$D^2f(x)(w)^2\geqslant\frac{1}{2}m.$$

طبق قضیهٔ تیلر ۹.۴۰، اگر $0\leqslant t\leqslant 1$، نقطه‌ای مانند c_t روی قطعه خط واصل بین c و $c+tw$ وجود دارد به‌قسمی که

$$f(c+tw)=f(c)+Df(c)(tw)+\frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2.$$

چون c نقطهٔ بحرانی است، نتیجه می‌شود که اگر $\|w\|=1$ و $0<t<\delta$، آنگاه

$$f(c+tw)-f(c)=\frac{1}{2}t^2D^2f_1(c_t)(w)^2\geqslant\frac{1}{4}mt^2>0.$$

بنابراین برای $0<\|u-c\|<\delta$ داریم $f(c+u)>f(c)$. پس f دارای مینیمم اکید نسبی در c است. بدین ترتیب قسمت (الف) ثابت شد و قسمت (ب) به‌طریق مشابه ثابت می‌شود.

(پ) فرض کنیم بردارهای یکه w_+ و w_- در $\mathbf{R}^p$ به‌قسمی باشند که

$$D^2f(c)(w_+)^2>0,\ \ D^2f(c)(w_-)^2<0.$$

ازقضیهٔ تیلر برای مقادیربه‌اندازهٔ کافی کوچک $t>0$ نتیجه می گیریم که

$$f(c+tw_+)>f(c),\ \ f(c+tw_-)<f(c).$$

بنابراین c یك نقطهٔ زینی f است. □

از مقایسهٔ قضیه‌های ۴.۴۲ و ۵.۴۲ به‌نظر می‌رسد که: (یك) اگر $c\in\Omega$ یك نقطهٔ مینیمم اکید نسبی باشد، آنگاه $D^2f(c)(w)^2>0$ برای هر $w\in\mathbf{R}^p$ با شرط $w\neq0$، (دو) اگر $c\in\Omega$ یك‌نقطهٔ زینی f باشد، آنگاه $D^2f(c)(w)^2$ مقادیر اکیداً مثبت و اکیداً منفی می گیرد، (سه) اگر $D^2f(c)(w)^2\geqslant0$ برای هر $w\in\mathbf{R}^p$ با شرط $w\neq0$، آنگاه c یك نقطهٔ مینیمم نسبی است. تمام این حدسها غلط است چنانکه می‌توان با ذکرچند مثال خلاف آنها را نشان داد.

برای به‌کاربردن قضیهٔ ۵.۴۲ لازم است بدانیم که آیا تابع $w\to D^2f(c)(w)^2$

دارای علامت ثابت است یا نه. یك قضیهٔ مهم و معروف جبر (کتاب هافمن و کونز[1] را که به‌عنوان مرجع ذکرشده است ببینید.) را می‌توان برای این منظور به‌کاربرد. برای هر $j=1,2,\ldots,p$ فرض‌کنیم Δ_j دترمینان ماتریس (متقارن) زیر باشد:

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} D_{11}f(c) & \cdots & D_{1j}f(c) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ D_{j1}f(c) & \cdots & D_{jj}f(c) \end{bmatrix}$$

اگر تمام اعداد $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_p$ اکیداً مثبت باشند، آنگاه برای هر $w\neq 0$، $D^2f(c)(w)^2>0$ و f در c مینیمم نسبی اکید دارد. اگر اعداد $\Delta_1,\Delta_2,\ldots\Delta_p$ به تناوب اکیداً منفی و اکیداً مثبت باشند، آنگاه $D^2f(c)(w)^2<0$ برای‌هر $w\neq 0$ و f دارای ماکزیمم اکید نسبی در c است. درحالات دیگرممکن‌است نقاط فرین یا زینی‌داشته‌باشیم.

درحالت خاص ومهم $p=2$ قاعده‌ای ساده‌تر وجود داردکه مناسبتراست واز آن اطلاعات نسبتاً بیشتری به‌دست می‌آید. در اینجا به‌بررسی تابع درجه دوم زیر احتیاج داریم:

$$Q = Au^2 + 2Buv + Cv^2.$$

اگر $\Delta = AC - B^2 > 0$، آنگاه $A\neq 0$ (و $C\neq 0$) و می‌توان مربع را کامل کرد و نوشت:

$$Q = \frac{1}{A}[(Au+Bv)^2 + (AC-B^2)v^2].$$

بنابراین علامت Q همان علامت A (یا C) است. از طرف دیگر اگر $\Delta<0$، آنگاه Qهم مقادیراکیداً مثبت دارد وهم مقادیراکیداً منفی. این مطلب درحالت $A\neq 0$ ازمعادلهٔ بالا آشکار است ودرحالت $A=0$ به‌سهولت ثابت می‌شود.

درنتیجهٔ زیراین تذکارها به‌صورتی رسمی آمده است.

۶.۴۲ نتیجه. فرض کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^2$ باز و $f:\Omega\to\mathbf{R}$ دارای مشتقهای جزئی پیوستهٔ مرتبهٔ دوم در Ω باشد، فرض‌کنیم $c\in\Omega$ یك نقطهٔ بحرانی f باشد و بنویسیم

$$\Delta = D_{11}f(c)D_{22}f(c) - [D_{12}f(c)]^2. \tag{۳.۴۲}$$

(الف) اگر $\Delta>0$ و $D_{11}f(c)>0$، آنگاه f دارای یك مینیمم اکید نسبی در c است.

(ب) اگر $\Delta>0$ و $D_{11}f(c)<0$، آنگاه f دارای یك ماکزیمم اکید نسبی در c است.

(پ) اگر $\Delta<0$: آنگاه f دارای یك نقطهٔ زینی در c است.

---

۱. ترجمهٔ فارسی این کتاب را مرکز نشر دانشگاهی منتشرکرده است. ــ م.

برخی از اطلاعات مربوط به‌حالت $\Delta = \circ$ در تمرینها ارائه خواهند شد.

مسائل فرینهٔ مقید

تاکنون درمورد حالتی بحث‌می کردیم که فرینه‌های تابع $f:\Omega \to \mathbf{R}$ به‌نقاط درونی دامنهٔ $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ متعلق بودند. هیچ‌یك‌از تذکارهای ما را نمی‌توان‌درمورد موضع‌فرینه‌های روی کرانه به‌کاربرد، با‌این‌حال، اگرتابع‌روی کرانهٔ Ω تعریف‌شده‌باشد و این کرانه را بتوان به توسط‌تابعی مانند φ بیان کرد، آنگاه مسئلهٔ فرینه به‌بررسی‌فرینه‌های ترکیب $f\circ\varphi$ برمی‌گردد.

در این زمینه مسئله‌ای وجود دارد که فرآیند جالب و زیبایی به‌دست می‌دهد. فرض کنید S «رویه»‌ای است که در Ω، دامنهٔ تابع حقیقی f، واقع است. غالباً یافتن ماکزیمم‌یا مینیمم مقادیری که f روی S اختیار می‌کند، موردنظر است. برای مثال، اگر

$$f(x) = ||x|| \ , \ \Omega = \mathbf{R}^p,$$

آنگاه مسئلهٔ موردنظر یافتن نزدیکترین نقاط رویهٔ S به‌مبدأ یا دورترین آنها ازمبدأ می‌باشد. اگررویهٔ S به‌صورت پارامتری داده شده باشد، آنگاه این مسئله را می‌توان به صورت ترکیب f با نمایش‌پارامتری S موردبررسی قرارداد. اما اغلب بیان S بدین‌صورت مناسب نیست وغالباً مناسبتراست ازفرایند دیگری استفاده شود.

فرض‌کنید S را بتوان به‌صورت نقاطی در Ω، مانند x، که در رابطه ای به‌صورت

$$g(x) = \circ,$$

صدق می‌کنند تعریف کرد، که در آن g تابعی است که در Ω، به $\mathbf{R}$ تعریف شده است. دراینجا کوشش ما برای یافتن مقادیر فرین نسبی f است برای آن نقاط x در Ω که در قید (یا شرط جنبی) $g(x) = \circ$ صدق می کنند. اگرفرض‌کنیم که f و g از ردهٔ $C^1(\Omega)$ باشند و $Dg(c) \neq \circ$، آنگاه یك شرط لازم برای اینکه c نسبت به‌نقاط x که در شرط $g(x) = \circ$ صدق می‌کنند، نقطهٔ فرین f باشد، این است که مشتق $Dg(c)$ مضربی‌از $Df(c)$ باشد. برحسب مشتقهای جزئی، این شرط بدین صورت بیان می‌شود که عددی حقیقی‌مانند λ وجودداشته باشد به قسمی که

$$\begin{aligned} D_1 f(c) &= \lambda D_1 g(c) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ D_p f(c) &= \lambda D_p g(c) . \end{aligned} \tag{۴.۴۲}$$

در عمل می‌خواهیم p مختص نقطهٔ c را که در این شرط لازم صدق می کنند، تعیین کنیم. اما، عدد حقیقی λ، که معمولاً آن را **ضریب لاگرانژ** می‌نامند، نیز معلوم نیست. از حل $p+1$ معادله متشکل از p معادلهٔ بالا ومعادلهٔ

$$g(c) = \circ$$

می‌توان $p+1$ مجهول‌را به‌دست آورد، که البته توجه اصلی به‌مختصات c است.

۷.۴۲ قضیهٔ لاگرانژ. فرض‌می‌کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ بازباشد و f و g توابع‌حقیقی ازردهٔ $C^1(\Omega)$ باشند. همچنین فرض می‌کنیم $c\in\Omega$ به‌قسمی‌باشد که $g(c)=0$ ویك‌همسایگی c مانند U وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که برای هرنقطهٔ $x\in U$ که‌درشرط $g(x)=0$ صدق‌کند

$$f(x)\leqslant f(c)\quad [\text{یا } f(x)\geqslant f(c)].$$

آنگاه اعدادی حقیقی‌مانند μ و λ که هردوی‌آنها صفرنیستند وجوددارندبه‌قسمی‌که

$$\mu Df(c)=\lambda Dg(c). \tag{۵.۴۲}$$

علاوه‌براین، اگر $Dg(c)\neq 0$، می‌توان μ را برابر با ۱ گرفت

برهان. فرض‌کنیم $F:U\rightarrow\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیرتعریف شده باشد:

$$F(x)=(f(x),\, g(x)),\ x\in U,$$

بنابراین F به‌ردهٔ $C^1(U)$ متعلق است و

$$DF(x)(v)=(Df(x)(v),Dg(x)(v)),\ x\in U,\ v\in\mathbf{R}^p.$$

علاوه‌براین، نقطهٔ $x\in U$ درقید $g(x)=0$ صدق می‌کند اگر وفقط اگر

$$F(x)=(f(x),0).$$

اگر برای هر $x\in U$ که درشرط $g(x)=0$ صدق می‌کند $f(x)\leqslant f(c)$، آنگاه نقاط $(r,0)$ با شرط $f(c)<r$ درتصویر $F(U)$ نیستند، بنابراین $DF(c)$ یك‌تابع پوشا از $\mathbf{R}^p$ روی $\mathbf{R}^2$ نیست. اما ازاینکه بردنگاشت‌خطی $DF(c)$ زیرفضایی از $\mathbf{R}^2$ است وبر $\mathbf{R}^2$ منطبق نیست، نتیجه‌می‌شود که $DF(c)$ واقع برخطی در $\mathbf{R}^2$ است که از $(0,0)$ می‌گذرد. بنابراین، نقطه‌ای مانند $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ وجود دارد به‌قسمی‌که برد $DF(c)$ روی خطی‌که از دو نقطهٔ $(0,0)$ و (λ,μ) می‌گذرد واقع است. بنابراین داریم

$$\mu Df(c)(v)=\lambda Dg(c)(v)\ ,v\in\mathbf{R}^p, \tag{۶.۴۲}$$

که ازآن معادلهٔ (۵.۴۲) نتیجه می‌شود.

بالاخره، فرض‌می‌کنیم که $Dg(c)\neq 0$. اگر $\mu=0$، آنگاه معادلهٔ (۵.۴۲) ایجاب می‌کند $\lambda=0$، که با $(\mu,\lambda)\neq(0,0)$ متناقض است. بنابراین در این حالت باید داشته باشیم $\mu\neq 0$ ومی‌توان رابطه را بر μ تقسیم‌کرد و λ را جایگزین λ/μ نمود. □

اگردر معادلهٔ (۶.۴۲)، با توجه به‌اینکه $U\subseteq\mathbf{R}^p$، $v=e_1,\dots,e_p$ اختیار شود p معادلهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$\mu D_1 f(c) = \lambda D_1 g(c),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu D_p f(c) = \lambda D_p g(c).$$

اگر تمام $D_i g(c)$ها، $i=1,\ldots,p$, برابر با صفر نباشند، آنگاه با انتخاب $\mu=1$ دستگاه (۴.۴۲) به‌دست می‌آید. □

باید تأکید شود که قضیهٔ لاگرانژ فقط یک شرط لازم را به‌دست می‌دهد. واین نقاط که ازحل معادلات (که غالباً هم حل آنها مشکل است!) حاصل می شوند، ممکن است نقاط ماکسزیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشند یا هیچ یك ازاین دو نباشند. نتیجهٔ ۱۳.۴۲ راکه در زیر خواهد آمد، اغلب می‌توان به عنوان آزمونی برای ماکزیمم‌ها یا مینیمم‌های نسبی به‌کار برد. علاوه‌براین، دربسیاری ازکاربردها براساس بررسیهای هندسی یا فیزیکی تحقیق می‌شود که آیا نقاط درحقیقت فرینه هستند یا خیر.

۸.۴۲ چندمثال. (الف) می‌خواهیم درصفحهٔ $\{(x,y,z): 2x+3y-z=5\}$ واقع در $\mathbf{R}^3$ نزدیکترین نقطه به مبدأ را بیابیم. برای حل این مسئله، تابعی را که مربع دوری راتا مبدأ به‌دست می‌دهد، یعنی

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,$$

را تحت قید

$$g(x,y,z) = 2x+3y-z-5 = 0$$

مینیمم می کنیم. چون بـرای هر $c\in\mathbf{R}^3$، $Dg(c)\neq 0$، از قضیهٔ لاگرانژ بـه دستگاه زیر می‌رسیم:

$$2x = 2\lambda,$$

$$2y = 3\lambda,$$

$$2z = -\lambda,$$

$$2x+3y-z-5 = 0.$$

ازحذف x,y,z نتیجه می گیریم که

$$2\lambda+3\left(\frac{3}{2}\lambda\right)-\left(\frac{1}{2}\lambda\right)-5=0,$$

یا $14\lambda = 4\lambda+9\lambda+\lambda = 10$ یا $\lambda = 5/7$. بدین ترتیب نقطهٔ یکتای

$(۵/۷ , ۱۵/۱۴ , -۵/۱۴)$ به دست‌می‌آید. با بررسیهای هندسی‌نتیجه می گیریم که‌این نقطه درصفحه نزدیکترین نقطه به $(۰,۰,۰)$ است.

(ب) ابعاد جعبهٔ مکعب مستطیل شکلـی را بیابیدکه از طرف بالا باز، دارای حجم ماکزیمم و A، سطح آن، داده‌شده‌باشد. x،y،z را ابعادجعبه و z را ارتفاع آن می گیریم می‌خواهیم تابع

$$V(x,y,z)=xyz$$

را با قید

$$g(x,y,z)=xy+۲xz+۲yz-A=۰.$$

ماکزیمم‌کنیم. چون نقطهٔ مطلوب دارای مختصات اکیداً مثبت است، قضیهٔ لاگرانژ دستگاه زیر را به دست می‌دهد:

$$yz=\lambda(y+۲z),$$

$$xz=\lambda(x+۲z),$$

$$xy=\lambda(۲x+۲y),$$

$$xy+۲xz+۲yz-A=۰.$$

اگرسه معادلهٔ اول را بترتیب در x،yو z ضرب کنیم. سپس آنها را با هم برابرکنیم، و بر λ تقسیم نماییم (چرا $\lambda\neq۰$؟)، نتیجه می گیریم:

$$xy+۲xz=xy+۲yz=۲xz+۲yz.$$

برابری اول y $x=y$ را ایجاب می کند و ازدومی $y=۲z$ به‌دست می آید. بنابراین‌نسبت اضلاع ۱:۲:۲ است و از معادلهٔ آخر نتیجه می‌شود که $A=۴z^۲+۴z^۲+۴z^۲$، لـذا $z=\frac{۱}{۲}(A/۳)^{۱/۲}$. درنتیجه حجم جعبه $\frac{۱}{۲}(A/۳)^{۳/۲}$ است.

درحالتی‌که بیش ازیك قید وجود دارد قضیهٔ زیرمفید واقع می‌شود.

۹.۴۲ قضیه . فرض‌کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و f و $g_۱ ,\ldots, g_k$ توابعی حقیقی در $C^۱(\Omega)$ باشند. فرض‌کنید $c\in\Omega$ درقیدهای

$$g_۱(x)=۰,\ldots,g_k(x)=۰,$$

صدق‌کند ویك همسایگی c مانند U وجود داشته باشد به قسمی‌که برای هر $x\in U$ که در این قیدها صدق می‌کند داشته باشیم $f(x)\leqslant f(c)$ [یـا $f(x)\geqslant f(c)$]. آنگاه اعداد حقیقی $\mu,\lambda_۱,\ldots,\lambda_k$ که همگی آنها صفرنیستند وجود دارند به‌قسمی‌که

$$\mu Df(c)=\lambda_1 Dg_1(c)+\cdots+\lambda_k Dg_k(c). \qquad (۷.۴۲)$$

برهان. فرض می‌کنیم $F:U\to \mathbf{R}^{k+1}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد.

$$F(x)=(f(x),\, g_1(x),\dots,g_k(x)),\, x\in U,$$

ومانند اثبات قضیهٔ ۷.۴۲ استدلال می‌کنیم. □

۱۰.۴۲ نتیجه . علاوه بر شرایط قضیهٔ ۹.۴۲، فرض کنید که رتبهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} D_1 g_1(c) & \cdots & D_1 g_k(c)\\ \vdots & & \vdots \\ D_p g_1(c) & \cdots & D_p g_k(c)\end{bmatrix} \qquad (۸.۴۲)$$

برابر با $k(\leqslant p)$ باشد، آنگاه اعداد حقیقی $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ که همگی آنها صفر نیستند، وجود دارند به‌قسمی که

$$\begin{aligned} D_1 f(c)&=\lambda_1 D_1 g_1(c)+\cdots+\lambda_k D_1 g_k(c),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (۹.۴۲)\\ D_p f(c)&=\lambda_1 D_p g_1(c)+\cdots+\lambda_k D_p g_k(c). \end{aligned}$$

برهان. اگر فرمول (۷.۴۲) را در مورد $e_1,\dots,e_p\in\mathbf{R}^p$ به‌کار بریم، دستگاه معادلات (۹.۴۲) را که طرف چپ آن در μ ضرب شده است، به دست می‌آوریم. اگر $\mu=0$، آنگاه فرض آنکه رتبهٔ ماتریس برابر با k است ایجاب می‌کند $\lambda_1=\dots=\lambda_k=0$، که با فرض متناقض است. بنابراین $\mu\neq 0$ و می‌توان این دستگاه را نرمال کرد و (۹.۴۲) را به دست آورد.

۱۱.۴۲ مثال. درمقطع استوانهٔ $\{(x,y,z): x^2+y^2=4\}$ با صفحهٔ

$$\{(x,y,z): 6x+3y+2z=6\}$$

نزدیکترین نقاط به مبدأ و دورترین نقاط ازمبدأ را بیابید.

هدف، یافتن فرینه‌های نسبی تابع

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

با قیدهای زیراست:

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$$

$$g_2(x,y,z)=6x+3y+2z-6=0$$

ماتریس نظیر به (۸.۴۲) در این حالت به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 2y & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

که، بجز در نقطهٔ $(x,y)=(0,0)$ که در قیدها صدق نمی‌کند، رتبه‌اش ۲ است. بنابراین می‌توان نتیجه را در مورد آن به‌کار برد و دستگاه پنج معادله با پنج مجهول زیر را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda_1(2x)+\lambda_2(6), \\ 2y &= \lambda_1(2y)+\lambda_2(3), \\ 2z &= \qquad\qquad \lambda_2(2), \end{aligned}$$

$$x^2+y^2=4,$$

$$6x+3y+2y=6,$$

ازمعادلهٔ سوم $z=\lambda_2$ به دست‌می‌آید، بنابراین λ_2 را می‌توان ازدو دستگاه اول‌حذف نمود. برای حذف λ_1، اولین معادلهٔ به‌دست آمده را در y ودومین معادله را در x ضرب وبعداز یکدیگر کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$0=6yz-3xz=3z(2y-x).$$

نتیجه می‌شود که یا $z=0$ یا $x=2y$.

اگر $z=0$، ازمعادلهٔ پنجم داریم $2x+y=2$. ازترکیب این معادله بامعادلهٔ چهارم داریم

$$x^2+(2-2x)^2=x^2+4-8x+4x^2=4,$$

بنابراین $0=5x^2-8x=x(5x-8)$ ودرنتیجه $x=0$ یا $x=8/5$. دراین‌حالت دو نقطهٔ $(0,2,0)$ و $(8/5,-6/5,0)$ بـه دست می‌آیـدودوری هریك از آنها از مبدأ برابر با ۲ است.

از طرف دیگر، اگر $x=2y$، از معادلهٔ چهارم داریم $5y^2=4$ و بنابرایـن

$y=2/\sqrt{5}$ (و $x=4/\sqrt{5}$) یا $y=-2/\sqrt{5}$ (و $x=-4/\sqrt{5}$). این مقادیر را بترتیب درمعادلهٔ پنجم می‌گذاریم، به‌دست می‌آید $z=3(1-\sqrt{5})$ و $z=3(1+\sqrt{5})$. بنابراین، دراین حالت دو نقطهٔ

$$(4/\sqrt{5}\ ,2/\sqrt{5}\ ,3(1-\sqrt{5}))\ \text{و}\ (-4/\sqrt{5}\ ,-2/\sqrt{5}\ ,3(1+\sqrt{5}))$$

به‌دست می‌آید که بترتیب مربع دوری هریك از آنها ازمبدأ برابر با $58-18\sqrt{5}$ و $58+18\sqrt{5}$ است.

نتیجه می‌گیریم که در هر دونقطهٔ $(0,2,0)$ و $(8/5,-6/5,0)$ دوری این مقطع تا مبدأ مینیمم است ونقطهٔ $(-4/\sqrt{5}\ ,-2/\sqrt{5}\ ,3(1+\sqrt{5}))$ دارای دوری ماکزیمم می‌باشد. از بررسی هندسی نتیجه‌می‌شود که نقطهٔ $(4/\sqrt{5}\ ,2/\sqrt{5}\ ,3(1-\sqrt{5}))$ در مجموعهٔ نقاط این مقطع ماکزیمم نسبی است. (رسم نمودار برای تجسم این وضع به خواننده کمك می‌کند.)

قیدهایی به‌صورت نابرابری

درسالهای اخیر اهمیت مسائل مربوط به‌فرینه با قیدهایی به‌صورت نابرابری بجای برابری، هر روز بیشتر شده است. به این جهت می‌خواهیم فرینهٔ نسبی تابع $f:\Omega\to\mathbf{R}$ را برای نقاطی در $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ که درقیدهای

$$h_1(x)\geqslant 0,\dots,h_k(x)\geqslant 0$$

صدق می‌کنند، به دست آوریم. خواهیم دید که دراین مسائل نیز می‌توان روش لاگرانژ را به‌کاربرد.

گاه درمسئلهٔ فرینه قیدهایی هم به صورت برابری وهم به صورت نابرابری می‌آید، اما چون برابری $g(x)=0$ معادل با نابرابری $-(g(x))^2\geqslant 0$ است، این مسائل را می‌توان به مسئله‌ای که تنها شامل قیدهایی به صورت نابرابری است، تبدیل کرد.

۱۲.۴۲ قضیه. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و f و $h_1,\dots,h_k$ توابعی حقیقی در $C^1(\Omega)$ باشند. فرض کنید $c\in\Omega$ در نابرابریهای قیدی

$$h_1(x)\geqslant 0,\ \dots,\ h_k(x)\geqslant 0$$

صدق کند و یك همسایگی باز c مانند U وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $x\in U$ که در این قیدها صدق می‌کند، داشته باشیم $f(x)\leqslant f(c)$ [یا $f(x)\geqslant f(c)$]. آنگاه اعداد حقیقی $\mu,\lambda_1,\dots,\lambda_k$ که همگی صفر نیستند وجود دارند به‌قسمی که

$$\mu Df(c)=\lambda_1 Dh_1(c)+\dots+\lambda_k Dh_k(c)\,. \qquad (10.42)$$

علاوه براین، اگر برای یکی از hها مانند h_i داشته باشیم $h_i(c)>0$، آنگاه $\lambda_i=0$.

برهان. فرض کنیم $F:U \to \mathbf{R}^{k+1}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x)=(f(x), h_1(x), \ldots, h_k(x)),\ x \in U.$$

اگر c نقطه‌ای در U باشد که در قیدها صدق کند و f را ماکزیمم یا مینیمم نماید، آنگاه $DF(c)$ نمی‌تواند پوشا باشد و بنابراین (۱۰.۴۲) باید برقرار باشد.

اگر $h_1(c)=0, \ldots, h_r(c)=0$، ولی $h_{r+1}(c)>0, \ldots, h_k(c)>0$، آنگاه $U_1 \subseteq U$ را یک همسایگی باز می‌گیریم که در آن $h_{r+1}, \ldots, h_k$ اکیداً مثبت باشند وسپس قضیه را درمورد قیدهای $h_1(x) \geqslant 0, \ldots, h_r(x) \geqslant 0$ به‌کار می‌بریم. □

۱۳.۴۲ نتیجه. علاوه برشرایط قضیهٔ ۱۲.۴۲، فرض‌کنید رتبهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} D_1h_1(c) & \cdots & D_1h_r(c) \\ \vdots & & \\ D_ph_1(c) & \cdots & D_ph_r(c) \end{bmatrix} \qquad (11.42)$$

نظیر به h_iهایی که برای آنها $h_i(c)=0$، برابر با r باشد. آنگاه در (۱۰.۴۲) می‌توان μ را برابر با ۱ گرفت. علاوه براین اگر برای هر $x \in U$ که در ایـن قیدها صدق می‌کند داشته‌باشیم $f(x) \leqslant f(c)$ [بترتیب، $f(x) \geqslant f(c)$] و اگر در(۱۰.۴۲)، μ را ۱ بگیریم، آنگاه $\lambda_i \leqslant 0$ [بترتیب، $\lambda_i \geqslant 0$] برای $i=1, \ldots, r$.

برهان. اثبات اینکه در (۱۰.۴۲) می‌تـوانیم μ را ۱ بگیریم، مشابه بـا اثبات نتیجهٔ ۱۰.۴۲ است. فرض کنید $\mu=1$ و برای هر $x \in U$ که دراین قیدهـا صدق می‌کند داشته باشیم $f(x) \leqslant f(c)$. چون رتبهٔ ماتریس (۱۱.۴۲) برابر بـا $r \leqslant k$ است، برای $1 \leqslant j \leqslant r$، برداری مانند $v_j \in \mathbf{R}^p$ وجود دارد به‌قسمی که

$$Dh_i(c)(v_j)=\delta_{ij}.$$

بنابراین، اگر $t>0$ به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c_t روی قطعه خط واصل بین c و $c+tv_j$ وجود دارد به‌قسمی که

$$0 \geqslant f(c+tv_j)-f(c)=Df(c_t)(tv_j)=tDf(c_t)(v_j).$$

در نتیجه داریم

$$0 \geqslant \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{f(c+tv_j)-f(c)}{t}=Df(c)(v_j)=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dh_i(c)(v_j)=\lambda_j,$$

بنابراین برای $j=1, \ldots, r$، $\lambda_j \leqslant 0$. □

در مقالهٔ ا.ج. مکشان[1] که در مراجع آمده است، قضیهٔ لاگرانژ، درحالتی که قیدها به‌صورت نابرابری هستند، با برهانی مقدماتی، که با برهان در متن خیلی تفاوت دارد، اثبات شده است؛ می‌توانید به‌آن رجوع کنید.

تمرین

۴۲. الف. نقاط بحرانی توابع زیررا بیابید و نوع این نقاط را تعیین کنید.

(الف) $f(x, y)=x^{2}+4xy$

(ب) $f(x, y)=x^{4}+2y^{4}+32x-y+17$

(پ) $f(x, y)=x^{2}+4y^{2}-12x-36y$

(ت) $f(x, y)=x^{4}-4xy$

(ث) $f(x, y)=x^{2}+4xy+2y^{2}-2y$

(ج) $f(x, y)=x^{2}+3y^{4}-4y^{3}-12y^{2}$

۴۲. ب. مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^{p}$ و تابع $f:\Omega\to\mathbf{R}$ که در Ω مشتقهای جزئی پیوستهٔ مرتبهٔ دوم دارد، مفروض‌اند. $c\in\Omega$ یك نقطهٔ بحرانی f است و $\delta>0$.

(الف) نشان دهید که اگر $D^{2}f(x)(w)^{2}\geqslant 0$ برای هر $0<\|x-c\|<\delta$ و $w\in\mathbf{R}^{p}$، آنگاه c نقطهٔ مینیمم نسبی f است.

(ب) نشان دهید که اگر $D^{2}f(x)(w)^{2}>0$ برای هر $0<\|x-c\|<\delta$ و $w\in\mathbf{R}^{p}$ با شرط $w\neq 0$، آنگاه c یك نقطهٔ مینیمم اکید نسبی f است.

۴۲. پ. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^{2}$ باز، $f:\Omega\to\mathbf{R}$ در Ω دارای مشتقهای جزئی پیوستهٔ مرتبهٔ دوم و $c\in\Omega$ یك نقطهٔ بحرانی f باشد و برای $x\in\Omega$ بنویسید

$$\Delta(x)=D_{11}f(x)D_{22}f(x)-(D_{12}f(x))^{2}.$$

فرض کنید عدد $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $\|x-c\|<\delta$ داشته باشیم $\Delta(x)\geqslant 0$.

(الف) فرض کنید وقتی x در $0<\|x-c\|<\delta$ صدق می‌کند، $D_{11}f(x)>0$ (یا $D_{22}f(x)>0$). نشان دهید که c نقطهٔ مینیمم نسبی f است.

(ب) فرض کنید وقتی x در $0<\|x-c\|<\delta$ صدق می‌کند، $D_{11}f(x)<0$ (یا $D_{22}f(x)<0$). نشان دهید که c نقطهٔ ماکزیمم نسبی f است.

۴۲. ت. فرض کنید $f:\mathbf{R}^{p}\to\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^{p}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و برای هر $x\in\mathbf{R}^{p}$ با شرط $\|x\|=1$، $f(x)=0$. نشان دهید که نقطه‌ای مانند $c\in\mathbf{R}^{p}$ با شرط

---

۱. ادوارد جیمز مکشان Edward James Mc Shane (۱۹۰۴ـ) دکترای خودرا از دانشگاه شیکاگو گرفت. اومدتی طولانی وابسته به‌دانشگاه ویرجینیا بود و به‌خاطر کارهایش در زمینهٔ نظریهٔ انتگرال‌گیری، حساب تغییرات، نظریهٔ کنترل بهین و پرتابشناسی خارجی معروف است.

$||c|| < 1$ وجود دارد به‌قسمی که $Df(c) = 0$. (این بیانی از قضیهٔ رول در $\mathbf{R}^p$ است.)

۴۲. ث. قضیهٔ نگاشت پوشای ۶.۴۱ را برای اثبات نتیجهٔ ۲.۴۲ به‌کار برید.

۴۲. ج. نشان دهید که هریك از توابع زیر دارای نقطهٔ بحرانی در مبدأ است. کدامیك درمبدأ دارای فرینه‌های نسبی وکدامیك دارای نقاط زینی است؟

(الف) $f(x, y) = x^2y^2$، (ب) $f(x, y) = x^2 - y^3$،
(پ) $f(x, y) = x^3 - y^3$، (ت) $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^4$،
(ث) $f(x, y) = x^3y - xy^3$، (ج) $f(x, y) = x^4 + y^4$.

۴۲. چ. نشان دهید که تابع $f(x, y) = 2x + 4y - x^2y^4$ نقطهٔ بحرانی دارد ولی نقطهٔ فرین نسبی ندارد.

۴۲. ح. رفتار تابع $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ را درهمسایگی مبدأ بررسی کنید. نمودار این تابع راگاه «زین میمونی» می‌نامند. چرا؟

۴۲. خ. مینیمم دوری نقطهٔ $(2, 1, -3)$ از صفحهٔ $2x + y - 2z = 4$ را بیابید.

۴۲. د. ابعاد جعبهٔ مکعب مستطیل شکلی را بیابیدکه از طرف بالا باز و با حجم داده شده دارای سطح مینیمم باشد.

۴۲ـ ذ. مینیمم دوری بین خطهای

$$L_1 = \{(x, y, z): x = 2 - t,\ y = 3 + t,\ z = 1 - 2t\}$$

و $L_2 = \{(x, y, z): x = 1 - s,\ y = 2 - s,\ z = 3 + s\}$ را بیابید.

۴۲. ر. با ذکر مثالهایی نشان دهیدکه هریك از حدسهایی که بعد از قضیهٔ ۵.۴۲ زده شده است، نادرست است.

۴۲. ز. فرض کنیدکه n نقطهٔ (x_j, y_j)، $j = 1, 2, \dots, n$ در $\mathbf{R}^2$ داده شده‌اند. می‌خواهیم تابعی‌مستوی مانند $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت $F(x) = Ax + B$ پیدا کنیم به‌قسمی که کمیت

$$\sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - y_j)^2$$

مینیمم شود. نشان دهیدکه اعداد A و B در معادلات زیرصدق می‌کنند:

$$A\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + B\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

$$A\sum_{j=1}^{n} x_j + nB = \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

[می‌گویند در بین توابع مستوی، تابع حاصل F «بهترین برازش n نقطه از نظر **کمترین مربعات**» است.]

۴۲. ژ. فرض کنید $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ در $[0, 1]$ پیوسته است. می‌خواهیم اعداد

حقیقی A، B و C را بیابیم به‌قسمی که کمیت زیر مینیمم شود:

$$\int_0^1 [f(x)-(Ax^2+Bx+C)]^2 dx.$$

نشان دهید که اعداد A, B, C در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{5}A+\frac{1}{4}B+\frac{1}{3}C=\int_0^1 x^2 f(x)dx,$$

$$\frac{1}{4}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{2}C=\int_0^1 xf(x)dx,$$

$$\frac{1}{3}A+\frac{1}{2}B+C=\int_0^1 f(x)dx.$$

[می گویند در بین توابع درجهٔ دوم، تابع حاصل $x \longrightarrow Ax^2+Bx+C$ «بهترین برازش f در $[0, 1]$ از نظر کمترین مربعات» است.]

۴۲. س. قضیهٔ لاگرانژ را برای تعیین موضع نقاطی از خم $y=x^5+x-2$ که در آنها تابع $f(x, y)=x-y$ ممکن است دارای فرینهٔ نسبی باشد به کار برید. آنگاه خم و خم‌های تراز برای f را رسم کنید ونشان دهید که نقطه (یا نقاط) مذکور، برای f یك نقطه (یا نقاط) فرینهٔ نسبی نیست.

۴۲. ش. $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ را تابع درجه دوم $f(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$ برای $(x, y)\in \mathbf{R}^2$ فرض کنید. می‌خواهیم فرینه‌های نسبی f را روی دایرهٔ یکهٔ $\{(x, y):x^2+y^2=1\}$ به‌دست آوریم. قضیهٔ لاگرانژ را به‌کار برید و نشان دهید که نقاط فرینه‌های نسبی (x_0, y_0) باید در دستگاه زیر صدق کنند:

$$(a-\lambda)x_0+by_0=0$$

$$bx_0+(c-\lambda)y_0=0,$$

که در آن ضریب لاگرانژ λ، یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیراست:

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0.$$

نشان دهید که مقدار ضریب λ نظیر بدیك فرینهٔ نسبی f، با مقدار این فرینه برابراست.

۴۲. ص. مجموع سه عدد حقیقی برابر با ۹ است. این اعداد را بیابیددرصورتی که حاصلضرب آنها ماکزیمم باشد.

۴۲. ض. نشان دهید که حجم بزرگترین جعبهٔ محاط در بیضوی

$$\left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$$

(که در آن a, b, c اعداد اکیداً مثبت هستند) برابر با $8abc/3\sqrt{3}$ است.

۴۲ـ ط. برای هریك از توابع زیر، مقادیر ماکزیمم و مینیمم را درمجموعهٔ داده شده بیابید. (درصورت لزوم، علامت ضرایب را بررسی کنید.)

(الف) $f(x, y)=x^4-y^4$ و $S=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$.

(ب) $f(x, y)=x^2+2x+y^2$ و $S=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$.

(پ) $f(x, y)=x^2+2x+y^2$ و $S=\{(x,y): |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$.

(ت) $f(x, y)=(1-x^2)\sin y$ و $S=\{(x,y): |x|\leqslant 1$ و $|y|\leqslant \pi\}$.

۴۲. ظ. فرض کنید f از $x>0$, $y>0$ در $\mathbf{R}$ به‌صورت

$$f(x, y)=1/x+cxy+1/y$$

تعریف شده باشد.

(الف) موضع نقاط بحرانی f را بیابید و نوع آنها را معین کنید.

(ب) هـر گاه $c>0$ و $S=\{(x, y): 0<x, 0<y, x+y\leqslant c\}$، مقادیـر ماکزیمم و مینیمم نسبی f در S را بیابید.

۴۲. ع. مقادیر فرین $f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3$ را با قیدهای $x^2+y^2+z^2=1$ و $x+y+z=1$ بیابید.

۴۲. غ. فرض کنید f درمجموعهٔ بازی که شامل گوی $\{x\in \mathbf{R}^p: ||x||\leqslant r\}$ است، دارای مشتقهای مرتبهٔ دوم پیوسته است و برد f در $\mathbf{R}$ است، و فرض کنید نقطه‌ای مانند c با شرط $||c||<r$ وجود دارد به‌قسمی که

$$M=f(c)>\sup\{f(x): ||x||=r\}=m.$$

اگر g به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g(x)=f(x)+\frac{M-m}{4r^2}||x-c||^2,$$

نشان دهید که $g(c)=M$، درصورتی که $g(x)<M$ برای $||x||=r$. بنابرایـن g در یك نقطهٔ c_1 با شرط $||c_1||<r$ ماکزیمم نسبی دارد و درآن نقطه داریم

$$\sum_{j=1}^{n} D_{jj}f(c_1)\leqslant -\frac{p}{2r^2}(M-m)<0.$$

۴۲. ف. فرض کنید $\Omega\subseteq \mathbf{R}^p$ یك مجموعهٔ باز کراندار، $b(\Omega)$ مجموعهٔ نقاط کرانه‌ای Ω (ر. ك. تعریف ۹.۷) و $\Omega^- = \Omega\cup b(\Omega)$ بستار Ω باشد. تابع $f: \Omega^-\to \mathbf{R}$ را در Ω **همساز** گوییم هرگاه این تابع در Ω^- پیوسته باشد و در معادلهٔ لاپلاس

$$\sum_{j=1}^{p} D_{jj}f(x)=0$$

برای هر $x\in\Omega$ صدق کند.

(الف) با استفاده از استدلال تمرین قبـل نشان دهید که تـابع همساز در Ω، روی

$b(\Omega)$ به‌زبرینه و زیرینهٔ خود می‌رسد.

(ب) اگر f و g در Ω همساز باشند و اگر برای $x \in b(\Omega)$، $f(x)=g(x)$، آنگاه $f(x)=g(x)$ برای هر $x \in \Omega^-$.

(c) اگر f و g در Ω همساز باشند و اگر $f(x)=\varphi(x)$, $g(x)=\psi(x)$ برای $x \in b(\Omega)$، آنگاه

$$\sup\{|f(x)-g(x)|:x \in \Omega\} = \sup\{|\varphi(x)-\psi(x)|:x \in b(\Omega)\}.$$

(این نتیجه را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد: «حل مسئلهٔ دیریکله برای Ω بستگی مستقیم با شرایط کرانه‌ای دارد».)

۴۲. ق. نشان دهید که ماکزیمم تابع $f(x_1, \ldots, x_p)=(x_1 \ldots x_p)^2$ با قید $x_1^2+\ldots+x_p^2=1$ برابراست با $1/p^p$. با استفاده ازاین، نابرابری زیررا ثابت کنید:

$$|y_1 \cdots y_p| \leqslant \frac{\|y\|^p}{p^{p/2}}, \quad y \in \mathbf{R}^p.$$

۴۲. ك. نشان دهید که میانگین هندسی اعداد مثبت و حقیقی $\{a_1, \ldots, a_p\}$ از میانگین حسابی آنها بیشتر نیست، یعنی:

$$(a_1 \cdots a_p)^{1/p} \leqslant \frac{1}{p}(a_1+\cdots+a_p).$$

۴۲. گ. (الف) فرض کنید $p>1$، $q>1$ و $1/p+1/q=1$. نشان دهید که مینیمم تابع $f(x, y)=(1/p)x^p+(1/q)y^q$ برای $x>0$ و $y>0$ با قید $xy=1$ برابر با ۱ می‌باشد.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که اگر $b>0$ و $a>0$، آنگاه

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

(پ) فرض کنید $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ برای $i=1, \ldots, n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند. نابرابری هولدر:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q}$$

را از راه زیرثابت کنید: بنویسید $A=(\sum a_i^p)^{1/p}$، $B=(\sum b_i^q)^{1/q}$، و قسمت (ب) را درمورد $a=a_i/A$ و $b=b_i/B$ به‌کار برید.

(ت) با استفاده از نابرابری هولدردر (پ)، نابرابری مینکوفسکی:

$$\Big(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\Big)^{1/p}.$$

را ثابت کنید.

[راهنمایی: $|a+b|^p=|a+b|\,|a+b|^{p/q} \leqslant |a|\,|a+b|^{p/q}+|b|\,|a+b|^{p/q}$.]

فصل هشتم

انتگرال گیری در $\mathbf{R}^p$

دراین فصل به‌نظریهٔ انتگرال گیری توابع حقیقی در $\mathbf{R}^p$ برای $p>1$ می پردازیم. روشی که دراینجا به‌کار می‌بریم همان است که در بخش ۲۹ برای حالت $p=1$ به‌کار گرفته‌شده است. ولی دراینجا فقط به انتگرال ریمان (و نه انتگرال ریمان ــ استیلیتس) می‌پردازیم.

در بخش ۴۳ خواهیم دید که نظریهٔ انتگرال گیری برای توابع کرانداری که در یك حجرهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ تعریف شده‌اند، چندان تفاوتـی با نظریهٔ انتگرال گیری در $\mathbf{R}$ ندارد. با این حال برای اینکه‌بتوانیم روی مجموعه‌های عمومیتری در $\mathbf{R}^p$ انتگرال بگیریم‌لازم است که به بحث درنظریهٔ محتوا برای‌خانواده‌ای مناسب ازمجموعه‌های در $\mathbf{R}^p$ بپردازیم وما این کار را در بخش ۴۴ خواهیم کرد و مفهوم p بعدی مساحت رامحتوا خواهیم نامید. ما تابع محتوا را دراین خانواده ازمجموعه‌ها مشخص خواهیم کرد ونشان خواهیم داد که چگونه انتگرالهای در $\mathbf{R}^p$ را می‌توان به صورت انتگرالهای مکرر بیان کرد. بخش آخر بـه بحث درمورد قضایـای مهم در تبدیـلهای مجموعه‌ها و انتگرالها، تـحت نگاشتهای دیفرانسیل‌پذیر، اختصاص داده شده است. اشکالات نظری بسیارند، با این حال این فصل را با اثبات‌یك قضیهٔ بسیارمفید درمورد تغییرمتغیرها که حتی حالاتی راکه تبدیل‌تاحدودی رفتار «غیرعادی» دارد شامل می‌شود، به پایان می‌رسانیم.

بخش ۴۳ انتگرال در $\mathbf{R}^p$

دربخشهای ۲۹ تا ۳۱ درموردانتگرال توابع‌حقیقی کرانداری که دریك‌فاصلهٔ‌فشردهٔ J در $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند، بحث کرده‌ایم. خواننده اگر درصدد تعمیم این مطالب برآید در می‌یابد

که قسمت قابل‌ملاحظه‌ای از آنچه دراین بخشها آمده است برای حالتی که مقادیر تابع‌در فضای دکارتی $\mathbf{R}^q$ باشد، قابل‌اجراست. پس‌از پی‌بردن به‌امکان‌این تعمیم، اجرای‌اصلاحات لازم برای به‌دست‌آوردن نظریهٔ انتگرال‌گیری توابع در J به $\mathbf{R}^q$ مشکل نخواهد‌بود.

همچنین طبیعی است سؤال شود که آیا می‌توان برای توابعی که دامنه‌شان زیر‌مجموعه‌ای از فضای $\mathbf{R}^p$ است یک نظریهٔ انتگرال‌گیری به دست آورد؟ البته خواننده به‌خاطر دارد که درحقیقت در درسهای ریاضیات عمومی آنجایی که انتگرالهای «دوگانه» و «سه‌گانه» مورد بررسی قرار گرفته‌اند این‌کار به‌عمل آمده است. این بخش را با بررسی انتگرال ریمان توابع حقیقی که دریک زیر‌مجموعهٔ کراندار مناسب $\mathbf{R}^p$ تعریف شده‌اند، شروع می‌کنیم. بسیاری از نتایج را می‌توان به‌توابعی که مقادیرشان در $\mathbf{R}^q$ است و $q>1$، تعمیم داد. ما این تعمیم را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

محتوای صفر

از بخش ۵ به‌خاطرداریم که یک **حجره** در $\mathbf{R}$ مجموعه‌ای‌است به‌یکی از‌چهارصورت زیر:

$$(a, b),\ [a, b],\ [a, b),\ (a, b],$$

که درآن $a \leqslant b$، اعداد a و b را **نقاط انتهایی** این حجره‌ها گوییم. یک **حجره** در $\mathbf{R}^p$ حاصلضرب دکارتی p حجره در $\mathbf{R}$ مانند $J = J_1 \times \dots \times J_p$ است. حجرهٔ J را **بسته** (**باز**) گوییم هرگاه هریک از حجره‌های J_1، ...، J_p در $\mathbf{R}$ بسته (باز) باشند. اگر $a_i \leqslant b_i$ نقاط انتهایی J_i، $i = 1, \dots, p$، باشند، **محتوای** $J = J_1 \times \dots \times J_p$ را حاصلضرب

$$c(J) = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p)$$

تعریف می‌کنیم.

معمولاً محتوا رابرای $p=1$، «طول»، برای $p=2$، «سطح»، و برای $p=3$، «حجم» می‌گویند. ما واژهٔ «محتوا» راکه‌اشاره به‌حالت‌خاصی ندارد، به‌کارخواهیم برد.

توجه دارید که اگر $J = J_1 \times \dots \times J_p$ و $K = K_1 \times \dots \times K_p$ حجره‌هایی در $\mathbf{R}^p$ باشند به‌قسمی که J_i و K_i به‌ازای هر $i = 1, \dots, p$ نقاط انتهایی مشترک داشته باشند، آنگاه $c(J) = c(K)$. به طریق مشابه اگر $a_k = b_k$ برای یک k، $k = 1, \dots, p$، آنگاه محتوای $c(J)$ حجرهٔ J صفراست؛ با این‌حال لازم نیست که $J = \varnothing$.

اگر J_i یک‌حجره‌بانقاط‌انتهایی $a_i \leqslant b_i$ باشدواگر $b_1 - a_1 = \dots = b_p - a_p > 0$، آنگاه $J = J_1 \times \dots \times J_p$ را یک **مکعب** می‌نامیم، مکعب ممکن است بسته یا باز‌باشد یا نه باز باشد نه بسته. عدد $b_1 - a_1 > 0$ را طول **ضلع** مکعب گوییم.

۱.۴۳ تعریف ▪ مجموعهٔ $Z \subseteq \mathbf{R}^p$ دارای **محتوای صفر** است‌هرگاه به‌ازای هر

$\varepsilon>0$ مجموعهٔ باپایانی از حجره‌ها مانند J_1، ...، J_n وجود داشته باشد به قسمی که اجتماع آنها شامل Z باشد و

$$c(J_1)+\cdots+c(J_n)<\varepsilon.$$

خوب است خواننده نشان دهد که حجره‌های به‌کاررفته دراین تعریف را می‌توان بسته یا باز، و یا مکعب فرض‌کرد بدون‌آنکه در مفهوم محتوای صفر تغییری حاصل شود. گاهی به‌جای «Z دارای‌محتوای صفراست» می‌گوییم «محتوای Z صفراست».

۲.۴۳ چند مثال. (الف) یك نقطه در $\mathbf{R}^p$ دارای‌محتوای‌صفراست. (چرا؟) درحالت کلیتر، هرزیرمجموعهٔ باپایان $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفراست.

(ب) هرگاه $(z_n)_{n\in N}$، دنباله‌ای در $\mathbf{R}^p$، به $z_0\in\mathbf{R}^p$ همگرا باشد، مجموعهٔ $Z=\{z_n:n>0\}$ دارای محتوای صفراست. زیرا اگر $\varepsilon>0$،کافیست J_0، یك حجرهٔ باز شامل z_0، را چنان انتخاب کرد که $c(J_0)<\varepsilon$. بنابراین عددی مانند $k\in\mathbf{N}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $z_n\in J_0$ برای $n>k$، و برای $i=1,\ldots,k$ می‌توان J_i را $\{z_i\}$ فرض‌کرد که بدین‌ترتیب $Z\subseteq J_0\cup J_1\cup\ldots\cup J_k$. چون

$$c(J_0)+c(J_1)+\cdots+c(J_k)<\varepsilon+0+\cdots+0=\varepsilon,$$

وچون $\varepsilon>0$ دلخواه است، نتیجه می‌شود که Z دارای محتوای صفراست.

(پ) هرزیرمجموعهٔ یك مجموعهٔ بامحتوای صفر، دارای محتوای صفراست.اجتماع تعداد باپایانی از مجموعه‌های با محتوای صفر، دارای محتوای صفراست.

(ت) در فضای $\mathbf{R}^2$، مجموعهٔ $S=\{(x,y):|x|+|y|=1\}$ دارای محتوای صفراست. زیرا اگر $n\in\mathbf{N}$، و مربعهایی راکه یکی از دوقطرشان روی S است ورئوسی در نقاط $x=y=\pm k/n$، $k=0,1,\ldots,n$، دارند درنظربگیریم، ملاحظه می‌شود که می‌توان S را در $4n$ مربع‌بسته‌که محتوای هریك $1/n^2$ است، قرارداد. بنابراین‌محتوای مجموع این مربعها $4/n$ است‌که می‌توان آن‌را بدلخواه کوچك‌کرد. (ر.ك.شکل ۱.۴۳.)

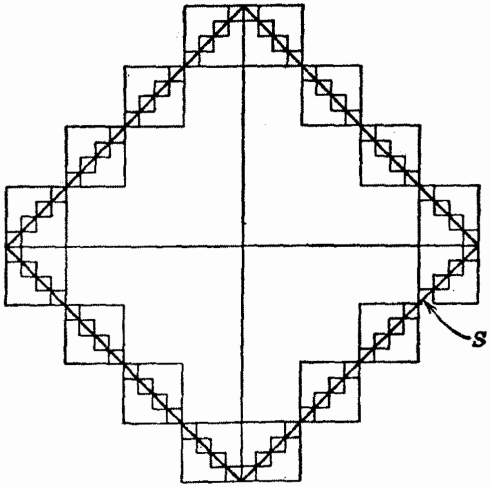
(ث) دایرهٔ $S=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ در $\mathbf{R}^2$ دارای محتوای صفر است. برای اثبات این مسئله می‌توان برهانی راکه در (ت) آمده است با تغییراتی مناسب به‌کاربرد.

(ج) فرض کنیم f یك تابع پیوسته در $J=[a,b]$، به $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه نمودار

$$G=\{(x,f(x))\in\mathbf{R}^2:x\in J\}$$

دارای محتوای صفراست. این مسئله را می‌توان با توجه به‌پیوستگی یکنواخت f و با تغییراتی در استدلال در قسمت (ت) ثابت‌کرد.

(چ) مجموعهٔ $S\subseteq\mathbf{R}^2$ که تشکیل شده است از نقاط (x,y)که x و y هر دو به $\mathbf{I}\cap\mathbf{Q}$ متعلق هستند، یك مجموعهٔ شمارش‌پذیر است‌که دارای محتوای صفر نیست. در حقیقت، برای اینکه اجتماع باپایانی از حجره‌ها شامل S باشد، باید شامل حجرهٔ $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$،



شکل ۱۰۴۳

که دارای محتوای ۱ است، نیز باشد.

باید توجه داشت که برخلاف مثال (ج) «خمهای پیوسته‌ای» در $\mathbf{R}^2$ وجود دارند که‌دارای محتوای مثبت هستند. درحقیقت، توابع پیوسته‌ای مانند f و g در $I=[0,1]$، به $\mathbf{R}$ وجود دارند به‌قسمی که مجموعهٔ

$$S=\{(f(t),\, g(t)) : t \in \mathbf{I}\}$$

شامل حجرهٔ $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ در $\mathbf{R}^2$ است. این‌چنین خمی به **خم فضاپرکن** یا **خم پئانو** موسوم است. (ر. ك. تمرین ۴۳.ع.۰)

تعریف انتگرال

درآغاز به‌تعریف انتگرال تابع‌کراندار f که دریك **حجرهٔ بستهٔ** $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^p$ تعریف شده و مقادیرش در $\mathbf{R}$ است می‌پردازیم. فرض‌کنیم

$$I=[a_1,\, b_1]\times \cdots \times[a_p,\, b_p],$$

و به‌ازای هر $k=1, \ldots, p$، فرض‌کنیم P_k یك افراز $[a_k,\, b_k]$ متشکل از تعدادباپایانی حجرهٔ بسته در $\mathbf{R}$ باشد. این افرازها یـك **افراز I**، مانند P، متشکل از تعـدادی باپایان حجره در $\mathbf{R}^p$، القاء می‌کند. اگر P و Q دو افراز I باشند، گوییم P **ظریفتر از Q** است اگرهرحجـرهٔ P دریك حجرهٔ Q واقع باشد. (یا به عبارت دیگر، با توجه به‌اینکه افراز

به‌وسیلهٔ رئوس حجره‌هایش مشخص می‌شود، P ظریفتر از Q است اگــر وفقط اگر تمام رئوس در Q رئوس در P نیز باشند.)

۳.۴۲ تعریف.مجموع ریمان $S(P; f)$ نظیر به‌یك‌افراز I.مانند $P=\{J_1, \ldots, I_n\}$ عبارت

$$S(P; f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)c(J_k)$$

است که در آن x_k یك نقطـهٔ «بینی» دلخواه در J_k بـرای $k=1, \ldots, n$ می‌باشد. عدد حقیقی L را **انتگرال ریمان f روی I** گوییم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ یك افراز I مانند P_ε وجود داشته باشد به‌قسمی‌که برای هـرافراز P ظریفتر از P_ε و هرمجموع ریمـان $S(P; f)$ نظیر به P، داشته باشیم $|S(P; f)-L|\leqslant\varepsilon$، درحالتی‌که این انتگرال‌وجود دارد می‌گوییم‌که f **در I انتگرال‌پذیر** است.

بآسانی می‌توانید نشان دهید که وقتی انتگرال وجود دارد، L، مقدار آن، یکتاست. عموماً می‌نویسیم:

$$L=\int_I f.$$

با این‌حال، وقتی‌که $p=2$، این انتگرال را گاهی به‌صورت

$$\iint_I f \quad \text{یا} \quad \iint_I f(x, y)d(x, y)$$

نشان می‌دهیم، ووقتی‌که $p=3$، این انتگرال را گاهی به‌صورت

$$\iiint_I f \quad \text{یا} \quad \iiint f(x, y, z)d(x, y, z)$$

می‌نویسیم.

محك‌کوشی مناسبی برای انتگرال‌پذیری وجود داردکه آن را اثبات نمی‌کنیم‌چون مشابه با اثبات قضیهٔ ۴.۲۹ است.

۴.۴۳ محك کوشی. تابع کراندار $f:I\to\mathbf{R}$ در I انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>0$ یك افراز I مانند Q_ε وجود داشته باشد به‌قسمی که اگر افرازهای P و Q ظریفتر از Q_ε و $S(P; f)$ و $S(Q; f)$ دو مجموع ریمان دلخـواه نظیـر به P و Q باشند، آنگاه

$$|S(P; f)-S(Q; f)|\leqslant\varepsilon.$$

تا به‌حال توابع را درحجره‌های بسته در نظر گرفته‌ایم؛ اکنون می‌خواهیم به‌طور کلیتر توابعی را بررسی کنیم که درزیرمجموعه‌های کراندار $\mathbf{R}^p$ تعریف شده‌اند. فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای کراندار و $f: A \to \mathbf{R}$ تابعی کراندار باشد. چون A کراندار است، حجرهٔ بسته‌ای مانند $I \subseteq \mathbf{R}^p$ وجود دارد به قسمی کـه $A \subseteq I$. $f_I: I \to \mathbf{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_I(x) = f(x), \ x \in A,$$
$$= 0, \ x \in I \setminus A.$$

اگر تابع f_I در I به‌معنایی که در تعریف ۳.۴۳ آمد. انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه به عنوان تمرین (ر.ك. تمرین ۴۳. ز) نشان دهید که مقدار $\int f_I$ به‌انتخاب‌حجرهٔ بستهٔ I که‌شامل A باشد، بستگی ندارد. بدین‌جهت اگر f_I در I انتگرال‌پذیر باشد، چون $\int f_I$ فقط به f و A بستگی دارد، می‌گوییم که f در A **انتگرال‌پذیر** است و $\int_A f$ را

$$\int_A f = \int_I f_I$$

تعریف می‌کنیم. (از این به‌بعد اغلب f_I را برای سهولت به f نشان می‌دهیم.)

به‌طریق مشابه فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbf{R}^p$ باشند و $f: A \to \mathbf{R}$ داده شده باشد. فرض کنیم‌حجرهٔ بستهٔ I شامل $A \cup B$ باشد و $f_1: I \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f_1(x) = f(x), \ x \in A \cap B,$$
$$= 0, \ x \in I \setminus (A \cap B).$$

توجه‌دارید‌که f_1 گسترش تحدید $f|A \cap B$ به I است. اگر f_1 در I انتگرال‌پذیر باشد، می‌گوییم که f **در** B **انتگرال‌پذیر** است و $\int_B f$ را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$\int_B f = \int_I f_1 \left(= \int_{A \cap B} f\right).$$

خواص انتگرال

اکنون برخی ازخواصی راکه انتظار می‌رود انتگرال داشته باشد بررسی خواهیم کرد.در تمام این بخش فرض می‌کنیم که A یك زیرمجموعهٔ کراندار $\mathbf{R}^p$ است.

۵.۴۳ قضیه ـ فرض‌کنیم f و g توابعی در A، به $\mathbf{R}$ باشندکه، در A انتگرال‌پذیرند، و فرض‌کنیم $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ آنگاه تابع $\alpha f + \beta g$ در A انتگرال‌پذیر است و

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g.$$

برهان . این‌نتیجه از اینجا حاصل می‌شود که مجموعهای ریمان برای یك‌افراز حجرهٔ $I \supseteq A$، مانند P، در شرط

$$S(P; \alpha f+\beta g)=\alpha S(P; f)+\beta S(P; g)$$

صدق می‌کنند، به‌شرط آنکه برای هر k ازیك نقطهٔ بینی x_k استفاده‌شود. □

۶.۴۳ قضیه . اگر $f: A \to \mathbf{R}$ در A انتگرال‌پذیرباشد وبرای $x \in A$، $f(x) \geqslant 0$، آنگاه $\int_A f \geqslant 0$.

برهان . توجه کنیدکه برای هرمجموع ریمان داریم $S(P; f) \geqslant 0$. □

۷.۴۳ قضیه . تابع‌کراندار $f: A \to \mathbf{R}$ مفروض است وفرض می‌کنیم‌که A دارای محتوای صفر باشد. آنگاه f در A انتگرال‌پذیر است و $\int_A f = 0$.

برهان . فرض‌کنیم حجرهٔ بستهٔ I شامل A باشد. برای $\varepsilon > 0$ مفروض، فرض کنیم P_ε، یك‌افراز I باشد به‌قسمی‌که مجموع محتوای حجره‌های P_ε که شامل نقاطی از A هستند‌کمتر از ε باشد. (نشان‌دهیدکه این‌افراز P_ε وجود دارد.) اکنون اگر P ظریفتراز P_ε باشد، آنگاه مجموع محتوای حجره‌های P که شامل نقاطی از A هستند نیز کمتر از ε است . بنابراین اگر برای $x \in A$، $|f(x)| \leqslant M$، برای هرمجموع ریمان نظیر به P داریم $|S(P; f)| \leqslant M\varepsilon$. چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، ازاین نتیجه می‌شود که $\int_A f = 0$. □

۸.۴۳ قضیه . توابع‌کراندار $f, g: A \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند وفرض می‌کنیم که f در A انتگرال‌پذیراست. اگر $E \subseteq A$ دارای محتوای‌صفرباشد وبرای هر $x \in A \setminus E$، داشته‌باشیم $f(x)=g(x)$ آنگاه g در A انتگرال‌پذیر است و

$$\int_A f = \int_A g.$$

برهان . f و g را به‌توابع f_I و g_I در یك حجرهٔ بستهٔ I که شامل A باشد گسترش دهید. شرایط قضیه ایجاب می‌کند که $h_I = f_I - g_I$ کراندار وبجز در E برابر با 0 باشد. از قضیهٔ ۷.۴۳ نتیجه می‌گیریم که h_I در I انتگرال پذیر است و مقدار انتگرالش 0 است. با به‌کاربردن قضیهٔ ۵.۴۳، نتیجه می‌گیریم که $g_I = f_I - h_I$ در I انتگرال‌پذیر است و

$$\int_A g = \int_I g_I = \int_I (f_I - h_I) = \int_I f_I = \int_A f. \square$$

وجود انتگرال

انتظار می‌رود که وقتی f در یک حجرهٔ بسته I به $\mathbf{R}$ پیوسته است، f در I انتگرال‌پذیر باشد. حال قضیه‌ای کلیتر اثبات می‌کنیم که در آن f می‌تواند در زیرمجموعه‌ای با محتوای صفر ناپیوسته باشد.

۹.۴۳ قضیهٔ انتگرال‌پذیری. حجرهٔ بستهٔ $I \subseteq \mathbf{R}^p$ و تابع کراندار $f: I \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. اگر یک زیرمجموعهٔ $E \subseteq I$ با محتوای صفر وجود داشته باشد به‌قسمی که f در $I \setminus E$ پیوسته باشد، آنگاه f در I انتگرال‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم برای هر $x \in I$، $|f(x)| \leqslant M$ و فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. آنگاه یک افراز I مانند P_ε وجود دارد (چرا؟) به‌قسمی که (یک) در هر حجرهٔ P_ε که شامل نقاطی از E است این نقاط E، نقاط درونی حجره باشند و (دو) مجموع محتوای این حجره‌ها کمتر از ε باشد. اجتماع حجره‌های بسته در P_ε راکه شامل نقاط E نیستند C می‌نامیم. C زیرمجموعهٔ فشرده‌ای است که f در آن پیوسته است. طبق قضیهٔ پیوستگی یکنواخت ۳.۲۳، تحدید f به C پیوستهٔ یکنواخت است. اگر در صورت لزوم به‌جای P_ε افرازی ظریفتر بگذاریم، می‌توانیم فرض کنیم که برای هر حجرهٔ P_ε، مانند J_k، که در C واقع باشد، اگر $x, y \in J_k$، آنگاه $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

اکنون فرض می‌کنیم که P و Q از P_ε ظریفتر هستند. اگر $S'(P; f)$ و $S'(Q; f)$ نمایشگر قسمتهایی از مجموعهای ریمان باشند که به‌حجره‌های واقع در C مربوط هستند، از استدلالی مشابه با استدلال قسمت دوم اثبات قضیهٔ ۱.۳۰ نتیجه می‌گیریم که

$$|S'(P;f)-S'(Q;f)| \leqslant |S'(P;f) - S'(P_\varepsilon;f)| + |S'(P_\varepsilon;f)-S'(Q;f)| \leqslant 2\varepsilon c(I).$$

به‌طریق مشابه، اگر $S''(P;f)$ و $S''(Q;f)$ نشانگر قسمتی از مجموعهای ریمان باشند که به‌حساب نیامده‌اند، آنگاه

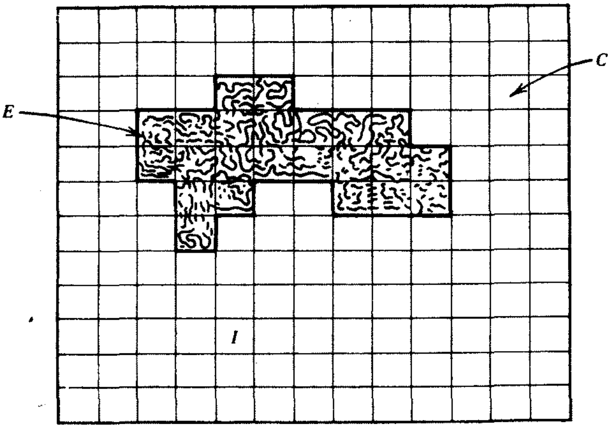
$$|S''(P;f)-S''(Q;f)| \leqslant |S''(P;f)| + |S''(Q;f)| \leqslant 2M\varepsilon.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$|S(P;f)-S(Q;f)| \leqslant \varepsilon(2c(I)+2M);$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، از محک کوشی نتیجه می‌شود که f در I انتگرال‌پذیر است. □

شرایط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیری در تمرین ۴۳ . ش و پروژهٔ ۴۴.α ارائه خواهد شد.



شکل ۲۰۴۳

تمرین

۴۳ . الف. (الف) نقطهٔ $a=(a_1,\dots,a_p)\in\mathbf{R}^p$ و حجره‌های

$$J_1=[a_1,\, a_1],\cdots,J_p=[a_p,\, a_p]$$

در $\mathbf{R}$ مفروض‌اند . نشان‌دهید که $J=J_1\times\dots\times J_p$ در $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر است. بنابراین مجموعهٔ $\{a\}$ در $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر است.

(ب) اگر $(a_1,\, a_1)$ را J'_1 بگیریم ، آنگاه حجرهٔ $J'=J'_1\times J_2\times\dots\times J_p$ تهی است ودر $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر است.

۴۳ . ب. نشان‌دهید که مجموعهٔ $Z\subseteq\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$ یك‌مجموعهٔ با پایان مکعبهای $K_1,\dots,K_n$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که اجتماع آنها شامل Z باشد و $c(K_1)+\dots+c(K_n)<\varepsilon$.

۴۳ . پ. مطلوب است جزئیات اثبات حکم مذکور در مثال ۲۰۴۳ (ج) که می گوید $S\subseteq\mathbf{R}^2$ نمودار تابع پیوستهٔ $f:[a,b]\to\mathbf{R}$، داری محتوای صفر است.

۴۳ . ت. هرگاه J یك‌حجرهٔ بسته در $\mathbf{R}^2$ و $g:J\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، نشان دهید که $\{(x,\, y,g(x,y)):(x,y)\in J\}\subseteq\mathbf{R}^3$ یعنی نمودار g دارای محتوای صفراست.

۴۳ . ث. مجموعهٔ $A\subseteq\mathbf{R}^2$ متشکل از تمام‌جفتهای مرتب به صورت $(i/p,\, j/p)$ مفروض است که درآن p یك‌عدد اول است و $i,\, j=1,2,\dots,p-1$. نشان‌دهید که هرخط افقی و هرخط قائم در $\mathbf{R}^2$ مجموعهٔ A را در تعدادی با پایان ازنقاط (معمولاً صفر) قطع می کند. آیا A دارای محتوای صفر است؟

۳۳ . ج . حجرهٔ بستهٔ $I\subseteq\mathbf{R}^p$ و دو افراز I مانند $P=\{I_1,\dots,I_n\}$ و

$Q=\{J_1, \ldots, J_m\}$ متشکل از حجره‌های بسته داده شده‌اند. نشان‌دهید که

$$R=\{I_i \cap J_j: i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m\}$$

یك‌افراز I واز P و Q ظریفتر است. افراز R را **افراز مشترك** P و Q گوییم.

۴۳ . چ . هرگاه $I \subseteq J$ دو حجره در $\mathbf{R}^p$ و P یك افراز I باشد، نشان دهید که یك‌افراز J مانند Q وجود دارد به‌قسمی که هرحجرهٔ P به Q متعلق باشد.

۴۳ . ح. فرض‌کنید $Z \subseteq \mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای با محتوای صفر است و حجرهٔ بستهٔ I شامل Z است. اگر $J_1, \ldots, J_n$ حجره‌هایی در I باشند به‌قسمی که اجتماعشان شامل Z باشد، آنگاه نشان‌دهید که یك‌افراز I مانند P وجود دارد به‌قسمی که بستار هریك از J_kها اجتماع حجره‌هایی در P است.

۴۳ . خ. فرض‌کنید $Z \subseteq \mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای با محتوای صفر وحجرهٔ بستهٔ I شامل Z است . اگر $\varepsilon > 0$، نشان‌دهید که یك‌افراز I مانند P_ε وجود دارد به‌قسمی که مجموع محتوای حجره‌های P_ε که شامل نقاطی از Z هستندکمتر از ε باشد.

۴۳ . د. درتمرین قبل، نشان دهید که می‌توان P_ε را چنان انتخاب‌کرد که دارای این‌خاصیت اضافی باشد : درهر حجرهٔ P_ε که شامل نقاطی از Z است این‌نقاط Z ، نقاط درونی حجره باشند.

۴۳ . ذ. اگر درتمرین ۴۳.خ، I مکعب باشد، نشان دهید که یك‌افراز I به مکعبها، مانند Q_ε وجود دارد به قسمی که مجموع محتوای مکعبهای Q_ε که شامل نقاطی از Z هستندکمتر از ε باشد.

۴۳ . ر. مجموعهٔ‌کراندار $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و حجره‌های بستهٔ I و J در $\mathbf{R}^p$ به قسمی که $A \subseteq I \subseteq J$ مفروض‌اند. اگر $f: A \to \mathbf{R}$ تابعی‌کراندار باشد ، آنگاه $f_I: I \to \mathbf{R}$ (یا $f_J: J \to \mathbf{R}$) را که در A بر f منطبق است و در $I \setminus A$ (یا $J \setminus A$) صفر است، تعریف می‌کنیم . نشان‌دهید که انتگرال f_I در I وجود دارد اگر و فقط اگر انتگرال f_J در J وجود داشته‌باشد ودر این‌حالت این‌دو انتگرال بایکدیگر برابرند.

۴۳ . ز. مجموعهٔ کراندار $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و حجره‌های بستهٔ I_1 و I_2 در $\mathbf{R}^p$ به‌قسمی که $A \subseteq I_j$ برای $j=1,2$، وتابع کراندار $f = A \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. توابع $f_j: I_j \to \mathbf{R}$، $j=1,2$ را به‌صورت $f_j(x)=f(x)$ برای $x \in A$ و $f_j(x)=0$ برای $x \in I_j \setminus A$ ، تعریف‌می‌کنیم . نشان‌دهید که انتگرال f_1 در I_1 وجود دارد اگروفقط اگرانتگرال f_2 در I_2 وجود داشته‌باشد ودر این حالت این‌دو انتگرال با یکدیگر برابرند.

۴۳ . ژ. نشان دهید که انتگرال تابع‌کراندار f که در یك حجرهٔ بستهٔ $I \subseteq \mathbf{R}^p$ تعریف شده، یکتاست.

۴۳ . س. برهان محك‌کوشی ۴.۴۳ را به‌تفصیل بنویسید .

۴۳ ـ ش. حجرهٔ بستهٔ $I \subseteq \mathbf{R}^p$ وتابع کراندار $f: I \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. آنگاه f در I انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یك‌افراز I مانند P_ε وجود

داشته‌باشد به‌قسمی‌که اگر $P=\{J_1,\dots,J_n\}$ ظریفتر از P_ε باشد، آنگاه

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)c(J_j)<\varepsilon,$$

که‌در آن $M_j=\sup\{f(x):x\in J_j\}$ و $m_j=\inf\{f(x):x\in J_j\}$، برای $j=1,\dots,n$.
این‌قضیه به **محك انتگرال‌پذیری ریمان**، موسوم است (ر. ك. قضیهٔ ۱۰.۳۰).

۴۳ . ص. فرض‌کنید $I\subseteq\mathbf{R}^p$ حجرهٔ بسته و $f:I\to\mathbf{R}$ کراندار و M یك‌کران f باشد. نشان‌دهید‌که اگر f در I انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع $|f|$ در I انتگرال‌پذیر است وداریم $\int_I|f|\leqslant Mc(I)$.

۴۳.ض. فرض‌کنید $I\subseteq\mathbf{R}^p$ حجرهٔ‌بسته‌باشد و $f,g:I\to\mathbf{R}$ در I انتگرال پذیر باشند. نشان‌دهید که تابع حاصل‌ضرب fg در I انتگرال‌پذیر است.

۴۳ . ط. حجرهٔ بستهٔ $I\subseteq\mathbf{R}^p$ ودنبالهٔ توابع انتگرال‌پذیر (f_n) در I مفروض‌اند. اگر این دنباله در I به f همگرای یکنواخت باشد، نشان‌دهید‌که f در I انتگرال‌پذیر است و

$$\int_I f=\lim_n\left(\int_I f_n\right).$$

۴۳ . ظ مکعب بستهٔ $K\subseteq\mathbf{R}^p$ و دو تابع پیوستهٔ $f,g:K\to\mathbf{R}$ مفروض‌اند. نشان‌دهید که برای هر $\varepsilon>0$، یك افراز K به‌مکعبها مانند $\{K_1,\dots,K_r\}$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر x_j, y_j دونقطهٔ دلخواه K_j برای $j=1,\dots,r$ باشند،آنگاه

$$\left|\int_K fg-\sum_{j=1}^{r}f(x_j)g(y_j)c(K_j)\right|<\varepsilon c(K).$$

۴۳ . ۴. (این تمرین مثالی است ازخم فضا پرکن منسوب به ا. ج. شونبرك[1].) تابع پیوسته وزوج $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ با دورهٔ ۲ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=0, && 0\leqslant t\leqslant\tfrac{1}{3},\\ &=3t-1, && \tfrac{1}{3}<t<\tfrac{2}{3},\\ &=1, && \tfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1.\end{aligned}$$

---

۱. ایزاك ج . شونبرك Isaac J. Schoenberg (–۱۹۰۳) دررومانی به‌دنیا آمد ودرهمانجاودرآلمان تحصیل‌کرد. سالهاست‌که دردانشگاه پنسیلوانیا در زمینه‌های نظریهٔ اعداد، آنالیز حقیقی ومختلط، وحساب تغییرات‌کار می‌کند.

(الف) نمایش نمودار φ را رسم کنید. توجه داشته‌باشید که $\|\varphi\|_R = ۱$.
(ب) برای $t \in \mathbf{I}$ ، $f(t)$ و $g(t)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f(t) = \frac{۱}{۲}\varphi(t) + \frac{۱}{۲^۲}\varphi(۳^۲ t) + \frac{۱}{۲^۳}\varphi(۳^۴ t) + \cdots,$$

$$g(t) = \frac{۱}{۲}\varphi(۳t) + \frac{۱}{۲^۲}\varphi(۳^۳ t) + \frac{۱}{۲^۳}\varphi(۳^۵ t) + \cdots,$$

نشان‌دهید که این‌دو سری همگرای یکنواخت هستند، بنابراین f و g در I پیوسته هستند.
(پ) مقادیر $f(t)$ و $g(t)$ را وقتی که t در مبنای سه به‌صورت زیر داده شده است، بیابید.

$$۰٫۲۰۲۰\,, \qquad ۰٫۰۲۲۰\,, \qquad ۰٫۰۰۲۲\,, \qquad ۰٫۲۰۰۲\,.$$

(ت) فرض کنید (x, y) به‌مکعب $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ متعلق باشد و x و y را در مبنای دو به‌صورت زیر بنویسید:

$$x = ۰٫\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳\cdots, \qquad y = ۰٫\beta_۱\beta_۲\beta_۳\cdots$$

که درآن α_n و β_m یا ۰ ویا ۱ هستند. عدد حقیقی t راکه درمبنای سه به‌صورت

$$t = ۰٫(۲\alpha_۱)(۲\beta_۱)(۲\alpha_۲)(۲\beta_۲)\cdots$$

نوشته می‌شود، درنظر بگیرید. نشان‌دهید که $x = f(t)$ و $y = g(t)$، بنابراین هر نقطهٔ مکعب $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ به‌نمودار S متعلق است.

۴۳ . غ. مجموعهٔ $Z \subseteq \mathbf{R}^p$ دارای **اندازهٔ صفر** است اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ دنبالهٔ حجره‌های (J_n) وجود داشته‌باشد به‌قسمی که اجتماعشان شامل Z باشد و $\sum c(J_n) < \varepsilon$.
(الف) با توجه به‌اینکه مجموعهٔ تهی یک‌حجره است ، نشان‌دهید مجموعه‌ای که محتوایش صفر است، دارای اندازهٔ صفر است.
(ب) نشان‌دهید که هرمجموعهٔ شمارش‌پذیر در $\mathbf{R}^p$ دارای اندازهٔ صفر است. بنابراین مجموعهٔ مثال ۲۰۴۳ (ج) دارای اندازهٔ صفر است (ولی محتوایش صفر نیست).
(پ) نشان‌دهید که در تعریف «اندازهٔ صفر» که در بالا آمده است می‌توان حجره‌ها را باز ویا مکعب فرض کرد.
(ت) نشان‌دهید که هرمجموعهٔ فشرده که اندازه‌اش صفر است، دارای محتوای صفر است.
(ث) اجتماع یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های به محتوای صفر دارای اندازهٔ

صفر است.

پروژه

۴۳.α. حجرهٔ بستهٔ $I \subseteq \mathbf{R}^p$ و تابع کراندار $f: I \to \mathbf{R}$ مفروض‌اند. اگر $P = \{J_1, \ldots, J_n\}$ یک‌افراز I باشد، برای $j = 1, \ldots, n$ می‌نویسیم

$$m_j = \inf\{f(x): x \in J_j\}, \quad M_j = \sup\{f(x): x \in J_j\}$$

و **مجموع پایین** و **مجموع بالای** f برای P را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(P; f) = \sum_{j=1}^{n} m_j c(J_j), \quad U(P; f) = \sum_{j=1}^{n} M_j c(J_j).$$

(الف) برای هرمجموع ریمان نظیر به P مانند $S(P; f)$، داریم

$$L(P; f) \leqslant S(P; f) \leqslant U(P; f).$$

برای هر $\varepsilon > 0$ دومجموع ریمان نظیر به P مانند $S_1(P; f)$ و $S_2(P; f)$ وجود دارند به‌قسمی که

$$S_1(P; f) \leqslant L(P; f) + \varepsilon, \quad U(P; f) - \varepsilon \leqslant S_2(P; f).$$

(ب) اگر P یک‌افراز I وافرازی Q ظریفتر از P باشد،

$$L(P; f) \leqslant L(Q; f) \leqslant U(Q; f) \leqslant U(P; f).$$

(پ) اگر P_1 و P_2 دوافراز I باشند، آنگاه $L(P_1; f) \leqslant U(P_2; f)$.

(ت) $L(f)$، **انتگرال پایین** و $U(f)$، **انتگرال بالای** f در I را

$$L(f) = \sup\{L(P; f)\}, \quad U(f) = \inf\{U(P; f)\}$$

تعریف می‌کنیم که در آن زبرینه و زیرینه روی تمام افرازهای I گرفته شده است. نشان‌دهید که $L(f) \leqslant U(f)$.

(ث) نشان‌دهید که f (به‌مفهوم تعریف ۴۳.۳) انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر $L(f) = U(f)$، که در این‌حالت $L(f) = U(f) = \int_I f$.

(ج) نشان‌دهید‌که f انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P وجودداشته‌باشد به‌قسمی $U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$. (این‌شرط معمولا به‌شرط ریمان موسوم است، این نتیجه را باتمرین ۴۳. ش مقایسه کنید.)

۴۳.β. این پروژه مربوط به‌انتگرال توابعی است که در یک حجرهٔ بستهٔ $I \subseteq \mathbf{R}^p$

تعریف شده‌اند و مقادیرشان در $\mathbf{R}^q$ است. اگر $P=\{J_1,\ldots,J_n\}$ یك افراز I باشد، آنگاه $S(P;f)$، مجموع ریمان نظیر به P، مجموعی است به‌صورت

$$S(P;f)=\sum_{k=1}^{n} c(J_k)f(x_k)$$

که درآن $x_k\in J_k$. عنصر $L\in\mathbf{R}^q$ انتگرال ریمان f در I است اگر بـرای هر $\varepsilon>0$ یك‌افراز I مانند P_ε وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که اگر P ظریفتر از P_ε باشد و $S(P;f)$ یك‌مجموع ریمان دلخواه نظیر به P باشد، آنگاه $\|S(P;f)-L\|<\varepsilon$. بررسی کنید کدامیك ازقضایای این بخش برای توابعی که مقادیرشان در $\mathbf{R}^q$ است درست است . نشان‌دهید که $f:I\to\mathbf{R}^q$ انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگـر هریك ازتوابع $f_j=e_j\cdot f$ برای $j=1,\ldots,q$ انتگرال‌پذیر باشد. (در اینجا $e_1,\ldots,e_q$ بردارهـای پـایهٔ معمولی در $\mathbf{R}^q$ هستند.)

بخش ۴۴ محتوا و انتگرال

در این بخش دستهٔ مجموعه‌های با محتوا را عرضه خواهیم نمود، وتابع محتوا را تابعی حقیقی‌که در این‌دسته از مجموعه‌ها تعریف شده است، توصیف خواهیم‌کرد. سپس برخی از خواص دیگر انتگرال درمجموعه‌های بامحتوارا به‌دست خواهیم‌آورد، ونشان‌خواهیم دادکه چگونه انتگرال را می‌توان به‌صورت یك «انتگرال مکرر» حساب کرد.

۱۰۴۴ تعریف. $A\subseteq\mathbf{R}^p$ مفروض است ، به‌خاطرداریم کـه نقطهٔ $x\in\mathbf{R}^p$ را **نقطهٔ کرانه‌ای** A گوییم هرگاه هرهمسایگی x شامل نقاطی از A ونقاطـی از متممآن یعنی $\mathscr{C}(A)$ باشد. **کرانهٔ** A زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ است‌که ازتمام‌نقاط‌کرانه‌ای A تشکیل شده‌است وآن‌را به $b(A)$ نمایش می‌دهیم.

$A\subseteq\mathbf{R}^p$ مفروض است، به‌خاطر داریم‌که هرنقطهٔ $\mathbf{R}^p$ یا نقطهٔ درونی A، یـا نقطـهٔ کرانه‌ای A، ویا نقطهٔ برونی A است. A°، **درون** A ، که از تمام نقاط درونی A تشکیل شده است، یك‌مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^p$ است . دربالاگفتیم که **کرانهٔ** $b(A)$ از تمام نقاط کرانه‌ای A تشکیل شده است ؛ $b(A)$ یك‌مجموعهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ است. **بستار** A^- اجتماع $A\cup b(A)$ ویك مجموعهٔ بسته در $\mathbf{R}^p$ است.

معمولاً انتظار داریم کرانهٔ مجموعه‌کوچك باشد، این‌بدان دلیل است‌که مـا بیشتر به‌مستطیل، دایره و دیگر شکلهای مقدماتی توجه داریم. مثال ۲۰۴۳ (چ) نشان می‌دهد که کرانهٔ یك‌مجموعه شمارش‌پذیر در $\mathbf{R}^2$ ممکن است برابر با $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ باشد.

مجموعه‌های با محتوا

ما اکنون محتوای زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^p$ را که کرانه‌اش دارای محتوای صفر است، تعریف می‌کنیم.

۲۰۴۴ تعریف. اگر کرانهٔ مجموعهٔ کراندار $A \subseteq \mathbf{R}^p$، یعنی $b(A)$، دارای محتوای صفر باشد، می‌گوییم A **محتوا دارد** یا **دارای محتوا** است. دستهٔ تمام زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^p$ راکه دارای محتوا هستند به $\mathscr{D}(\mathbf{R}^p)$ نمایش می‌دهیم. اگر $A \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^p)$، و حجرهٔ بستهٔ I شامل A باشد، آنگاه تابع g_I که به‌صورت

$$g_I(x) = 1\,, \qquad x \in A\,,$$
$$= 0\,, \qquad x \in I \setminus A,$$

تعریف شده است، در تمام I، بجز احتمالاً درنقاط $b(A)$، پیوسته است. بنابراین g_I در I انتگرال‌پذیراست و $c(A)$، **محتوای** مجموعهٔ A را برابر با $\int_I g_I$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$c(A) = \int_I g_I = \int_A 1.$$

توجه داشته‌باشید که اگر $J \subseteq \mathbf{R}^p$ یك حجره‌باشد، کرانهٔ آن عبارت است ازاجتماع تعداد با پایانی از «وجه‌ها» که هریك حجره‌ای با محتوای صفر است. [برای مثال، اگر $J = [a, b] \times [c, d]$، آنگاه $b(J)$ اجتماع چهارحجرهٔ زیر است:

$$[a, b] \times [c, c], \qquad [a, b] \times [d, d],$$
$$[a, a] \times [c, d], \qquad [b, b] \times [c, d].$$

کرانهٔ حجرهٔ $(a, b) \times (c, d)$ نیز همین چهار حجره است.] از این نتیجه می‌شود که حجره در $\mathbf{R}^p$ دارای محتوا است، علاوه براین بسهولت دیده می‌شود که اگر $J = [a_1, b_1] \times \cdots [a_p, b_p]$،

$$c(J) = \int_J 1 = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p).$$

بنابراین محتوای یك حجره که از تعریف ۲۰۴۴ به‌دست می‌آید با تعریفی‌که در بخش ۴۳ برای حجرهٔ بسته‌آمده است، سازگار است، ملاحظات مشابهی در مورد دیگر حجره‌های در $\mathbf{R}^p$ صادق است، بخصوص دیدیم که اگر $K = [a_1, b_1) \times \cdots [a_p, b_p)$، آنگاه

$$c(K) = \int_K 1 = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p).$$

اکنون نشان خواهیم داد که مفهوم محتوای صفر که در تعریف ۱.۴۳ آمده است با مفهوم محتوایی که در تعریف ۲.۴۴ ارائه شده است، سازگار است.

۳.۴۴ لم . مجموعهٔ $A\subseteq \mathbf{R}^p$ (با تعریف ۱.۴۳) دارای محتوای صفر است اگر وفقط اگر (با تعریف ۲.۴۴) دارای محتوا باشد و $c(A)=0$.

برهان . فرض کنید که $A\subseteq \mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر باشد . آنگاه اگر $\varepsilon>0$ ، می‌توان A را در اجتماع تعدادی با پایان از حجره‌های بسته که مجموع محتوایشان کمتر از ε باشد، قرارداد. اجتماع این حجره‌ها را U می‌نامیم . چون U یک مجموعهٔ کراندار است، A کراندار است وچون U بسته است، شامل $b(A)$ نیز می‌باشد. اما چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $b(A)$ دارای محتوای صفر است . بنابراین A دارای محتواست و

$$c(A)=\int_A 1.$$

اکنون از قضیهٔ ۷.۴۳ نتیجه می‌شود که $c(A)=0$.

بعکس ، فرض کنید که $A\subseteq \mathbf{R}^p$ دارای محتوا باشد و $c(A)=0$. بنابراین حجرهٔ بسته‌ای مانند I شامل A وجود دارد به‌قسمی که تابع

$$g_I(x)=1,\qquad x\in A,$$
$$=0,\qquad x\in I\setminus A,$$

در I انتگرال‌پذیر است. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده‌باشد و P_ε یک‌افراز I باشد به‌قسمی که هرمجموع ریمان نظیر به P_ε در شرط $0\leqslant S(P_\varepsilon; g_I)<\varepsilon$ صدق کند. اگر نقاط بینی در $S(P_\varepsilon; g_I)$ را هروقت که امکان دارد در A انتخاب کنیم ، می‌بینیم که اجتماع تعدادی با پایان از حجره‌های P_ε که مجموع محتوای آنها از ε کمتر است، شامل A است. بنابراین A با تعریف ۱.۴۳ دارای محتوای صفر است. □

۴.۴۴ قضیه . مجموعه‌های A و B متعلق به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و $x\in\mathbf{R}^p$ مفروض‌اند.

(الف) مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cup B$ به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق هستند و

$$c(A)+c(B)=c(A\cap B)+c(A\cup B).$$

(ب) مجموعه‌های $A\setminus B$ و $B\setminus A$ به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق هستند و

$$c(A\cup B)=c(A\setminus B)+c(A\cap B)+c(B\setminus A).$$

(پ) اگر $x+A=\{x+a: a\in A\}$، آنگاه $x+A$ به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق است و

$$c(x+A)=c(A).$$

برهان . بنابه‌فرض کرانه‌های $b(A)$ و $b(B)$ دارای محتوای صفر هستند. به‌عنوان تمرین خواننده می‌تواند نشان‌دهدکه $b(A)\cup b(B)$ شامل

$$b(A\cap B),\quad b(A\cup B),\quad b(A\setminus B),\quad b(B\setminus A)$$

است وبا توجه به مثال ۲.۴۳ (پ) نتیجه بگیردکه $A\cap B$، $A\cup B$، $A\setminus B$، و $B\setminus A$ به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق هستند.

اکنون فرض‌کنیم I حجرهٔ بسته‌ای‌باشدکه شامل $A\cup B$ است و f_a, f_b, f_i, f_u توابعی باشند که بترتیب در $A, B, A\cap B, A\cup B$ برابر با ۱ و در دیگر نقاط برابر با صفر هستند . چون هریك از این توابع ، بجز در مجموعه‌های با محتوای صفر ، پیوسته‌اند، در I انتگرال‌پذیرند. چون

$$f_a+f_b=f_i+f_u,$$

از قضیهٔ ۵.۴۳ وتعریف محتوا نتیجه می‌شودکه

$$c(A)+c(B)=\int_I f_a+\int_I f_b=\int_I(f_a+f_b)$$

$$=\int_I(f_i+f_u)=\int_I f_i+\int_I f_u$$

$$=c(A\cap B)+c(A\cup B).$$

بدین‌ترتیب فرمولی‌که در (الف)آمده است ثابت‌شد، فرمول مربوط به (ب) نیز به‌طریق مشابه اثبات می‌شود.

برای اثبات (پ) ، توجه‌داریم‌که اگر $\varepsilon>0$ داده شده‌باشد و $J_1,\ldots,J_n$ حجره‌هایی باشندکه مجموع محتواهای آنهاکمتر از ε و اجتماعشان شامل $b(A)$ باشد ، آنگاه $x+J_1,\ldots,x+J_n$ حجره‌هایی هستندکه مجموع محتواهای آنهاکمتر از ε و اجتماعشان شامل $b(x+A)$ است . چون $\varepsilon>0$ دلخواه است ، مجموعهٔ $x+A$ به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق است . برای نشان‌دادن اینکه $c(x+A)=c(A)$، فرض‌کنیم I حجرهٔ بسته‌ای شامل A باشد ، بنابراین حجرهٔ بستهٔ $x+I$ شامل $x+A$ است. حال فرض کنیم $f_1:I\to\mathbf{R}$ به‌قسمی‌باشدکه وقتی‌$y\in A$، $f_1(y)=1$ ووقتی‌$y\in I\setminus A$، $f_1(y)=0$ وهمچنین فرض‌کنیم $f_2:x+I\to\mathbf{R}$ به‌قسمی باشدکه $f_2(z)=1$ برای $z\in x+A$ و $f_2(z)=0$ برای $z\in(x+I)\setminus(x+A)$. نشان‌دهیدکه هرمجموع ریمان f_1 با یك مجموع ریمان f_2 برابر است ودر نتیجه

$$c(A)=\int_I f_1=\int_{x+I} f_2=c(x+A).\ \square$$

۵.۴۴ نتیجه . فرض‌کنیم A و B به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق باشند.

(الف) اگر $A\cap B=\varnothing$، آنگاه $c(A\cup B)=c(A)+c(B)$.

(ب) اگر $A\subseteq B$، آنگاه $c(B\setminus A)=c(B)-c(A)$.

مشخصات تابع محتوا

دیدیم که $c:\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\to\mathbf{R}$ یعنی تابع محتوا، مثبت، «جمعی» و «تحت انتقال پایدار» است و به‌مکعب «نیم‌باز»

$$K_0=[0,1)\times[0,1)\times\cdots\times[0,1)$$

عدد ۱ را مربوط می‌کند. اکنون نشان خواهیم‌داد که این‌چهار خاصیت c را مشخص می‌کنند.

۶.۴۴ قضیه . فرض‌کنیم $\gamma:\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\to\mathbf{R}$ تابعی با خواص زیر باشد:

(یك) $\gamma(A)\geqslant 0$ برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$.

(دو) اگر $A,B\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و $A\cap B=\varnothing$، آنگاه $\gamma(A\cup B)=\gamma(A)+\gamma(B)$،

(سه) اگر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و $x\in\mathbf{R}^p$، آنگاه $\gamma(A)=\gamma(x+A)$،

(چهار) $\gamma(K_0)=1$.

آنگاه $\gamma(A)=c(A)$ برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$.

برهان . اگر $n\in\mathbf{N}$، مکعب «نیم‌باز»

$$K_n=[0,2^{-n})\times[0,2^{-n})\times\cdots\times[0,2^{-n})$$

را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که K_0 اجتماع 2^{np} انتقال مجزای K_n است؛ (ر. ك. تمرین ۱۱.ذ.) بنابراین $1=\gamma(K_0)=2^{np}\gamma(K_n)$. پس داریم

$$\gamma(K_n)=\frac{1}{2^{np}}=c(K_n)\ .$$

فرض‌کنیم A و B به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق باشند و $A\subseteq B$. آنگاه $B=A\cup(B\setminus A)$. چون $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$، از (یك) و (دو) نتیجه می‌شود که

$$\gamma(B)=\gamma(A)+\gamma(B\setminus A)\geqslant\gamma(A).$$

بنابراین γ یکنواست بدین‌معنی که اگر $A\subseteq B$، آنگاه $\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$. اکنون فرض کنیم $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$. چونکه A کراندار است، اگر I مکعب بسته‌ای به‌مرکز ۰ باشدکه طول نصف ضلع آن ۲^M است، برای یك $M\in\mathbf{N}$ مجموعهٔ A در داخل I واقع است. برای هر $\varepsilon>۰$، یك‌افراز I به‌مکعبهای کوچك بـا اضلاع به‌طول ۲^{-n} وجود دارد به‌قسمی که محتوای اجتماع تمام‌مکعبهای $I_۱,\ldots,I_r$ که در A واقع هستند از $c(A)-\varepsilon$ بیشتر است، وهمچنین محتوای اجتماع‌تمام حجره‌های $I_۱,\ldots,I_s(r\leqslant s)$ که شامل نقاطی از A هستند از $c(A)+\varepsilon$ بیشتر نیست. (ر. ك. تمرین ۴۴.۰خ.) اکنون هریك از این مجموعه‌های I_i با یك انتقال K_n مانند x_i+K_n در یك مجموعهٔ با محتوای صفر اختلاف دارد. بنابراین داریم

$$c(A)-\varepsilon\leqslant c\Big(\dot{\bigcup_{i=۱}^{r}}(x_i+K_n)\Big)\leqslant c(A)\leqslant c\Big(\dot{\bigcup_{i=۱}^{s}}(x_i+K_n)\Big)\leqslant c(A)+\varepsilon.$$

اکنون c و γ هردو تحت‌انتقـال مجموعه پایدار ودر K_n برابر هستند. علاوه براین c و γ در اجتماعهای باپایان مجزا، جمعی هستند. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$c\Big(\dot{\bigcup_{i=۱}^{r}}(x_i+K_n)\Big)=\sum_{i=۱}^{r}c(x_i+K_n)=\sum_{i=۱}^{r}\gamma(x_i+K_n)$$

$$=\gamma\Big(\dot{\bigcup_{i=۱}^{r}}(x_i+K_n)\Big).$$

با توجه به‌این مطلب واین‌که γ یکنواست نتیجه می گیریم:

$$c(A)-\varepsilon\leqslant\gamma\Big(\dot{\bigcup_{i=۱}^{r}}(x_i+K_n)\Big)\leqslant\gamma(A)\leqslant\gamma\Big(\dot{\bigcup_{i=۱}^{s}}(x_i+K_n)\Big)\leqslant c(A)+\varepsilon,$$

بنابراین $|\gamma(A)-c(A)|\leqslant\varepsilon$. اما $\varepsilon>۰$ دلخواه است، لذا $\gamma(A)=c(A)$. □

۷.۴۴ نتیجه . فرض کنیم تابع $\mu:\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\to\mathbf{R}$ دارای خواص (یك) و (دو) و (سه) بـاشد. آنگاه ثـابتی مـانند $m\geqslant۰$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ داریم $\mu(A)=mc(A)$.

برهان . چون μ دارای خواص (یك) و (دو) است، به‌سهولت می‌توان دیدکه μ یکنواست بدین‌معنی که $A\subseteq B$ ایجاب می کند $\mu(A)\leqslant\mu(B)$. اگر $\mu(K_۰)=۰$، آنگاه در هرمجموعهٔ کـرانـدار، μ صفر است، پس برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، $\mu(A)=۰$، بنابراین می‌توان m را صفرگرفت. اگر $\mu(K_۰)\neq۰$، برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ می‌نویسیم:

$$\gamma(A)=\frac{۱}{\mu(K_۰)}\mu(A).$$

بسهولت دیده می‌شود که γ دارای خــواص (یك)، (دو)، (سه)، و (چهار) مذکور در قضیهٔ بالاست، لذا $\gamma = c$. پس نتیجه می گیریم $m = \mu(K_\circ)$. $\square$

خواص دیگر انتگرال

اکنون به‌چند خاصیت دیگر انتگرال که غالباً به‌کار می‌روند، می‌پردازیم.

۸.۴۴ قضیه. اگر $A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، و $f: A \to \mathbf{R}$ در A کراندار و پیوسته باشد، آنگاه f در A انتگرال‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم I حجره‌ای بسته باشد با شرط $A \subseteq I$ و $f_I: I \to \mathbf{R}$ در A برابر با f و در $I \setminus A$ برابر با ۰ باشد. چون f_I در I کراندار و در $I \setminus b(A)$ پیوسته است، از قضیهٔ انتگــرال‌پذیری ۹.۴۳ نتیجه می‌شود کــه f_I در I انتگــرال‌پذیر است. بنابراین f در A انتگرال‌پذیر است. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم که انتگرال نسبت به‌مجموعه‌ای که در آن انتگرال گرفته‌می‌شود جمعی است.

۹.۴۴ قضیه. (الف) فرض کنیم A_1 و A_2 بــه $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق باشند و $A_1 \cap A_2$ دارای محتوای صفر باشد. اگــر $A = A_1 \cup A_2$ و $f: A \to \mathbf{R}$ در A_1 و A_2 انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f در A انتگرال‌پذیر است و

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f. \tag{۱.۴۴}$$

(ب) فرض کنیم A به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق باشد و $A_1, A_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ به‌قسمی باشندکه $A = A_1 \cup A_2$ و $A_1 \cap A_2$ دارای محتوای صفرباشد. اگر $f: A \to \mathbf{R}$ در A انتگرال‌پذیر باشد و تحدیدهای f به A_1 و A_2 انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه (۱.۴۴) برقرار است.

برهان. (الف) فرض کنیم‌حجرهٔ بستهٔ I شامل $A = A_1 \cup A_2$ باشد و $f_i: I \to \mathbf{R}$ برای $i = ۱, ۲$ در A_i برابر با f و در دیگر نقاط I، صفر باشد. بنابه‌فرض، f_1 و f_2 در I انتگرال‌پذیرند و

$$\int_I f_i = \int_{A_i} f, \quad i = ۱, ۲.$$

از قضیهٔ ۵.۴۳ نتیجه می‌شود که $f_1 + f_2$ در I انتگرال‌پذیر است و

$$\int_I (f_1+f_2)=\int_I f_1+\int_I f_2.$$

اکنون چون $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ برای $x\in A\setminus(A_1\cap A_2)$، از لم ۸.۴۳ نتیجه می‌شود که f در A انتگرال‌پذیر است و (۱.۴۴) برقرار است.

(ب) نمادگذاری اثبات (الف) را به‌کار می‌بریم. بنابه‌فرض، f_i در I انتگرال‌پذیر است. اینك توجه می‌کنیم که $f_I(x)=f_1(x)+f_2(x)$ بجز برای xهای واقع در $A_1\cap A_2$ که مجموعه‌ای با محتوای صفر است. لذا از قضیهٔ ۵.۴۳ و لم ۸.۴۳ نتیجه می‌شود که

$$\int_A f=\int_I f=\int_I (f_1+f_2)=\int_I f_1+\int_I f_2$$
$$=\int_{A_1} f+\int_{A_2} f.\ \square$$

خاطرنشان می‌سازیم که اگر $f:A\to \mathbf{R}$ تابعی کراندار و انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال‌پذیری تحدیدهای f به A_1 و A_2 که در ۹.۴۴ (ب) فرض شده است، خود به‌خود برقرار است. (ر. ك. تمرین ۴۴.د.)

قضیهٔ زیراغلب برای برآورد مقدار انتگرال به‌کار می‌رود.

۱۰.۴۴. قضیه . فرض کنیم $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و $f:A\to\mathbf{R}$ در A انتگرال‌پذیر باشد و برای هر $x\in A$، $|f(x)|\leqslant M$، آنگاه

$$\left|\int_A f\right|\leqslant Mc(A). \tag{۲.۴۴}$$

همچنین، اگر f حقیقی و برای هر $x\in A$، $m\leqslant f(x)\leqslant M$، آنگاه

$$mc(A)\leqslant\int_A f\leqslant Mc(A). \tag{۳.۴۴}$$

برهان. گسترش f را به‌حجرهٔ بسته‌ای مانند I که شامل A باشد، به f_I نمایش می‌دهیم. اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد، یك افراز I مانند $P_\varepsilon=\{J_1,\ldots,J_n\}$ وجوددارد به‌قسمی که برای هرمجموع ریمان $S(P_\varepsilon;f_I)$ مربوط به P_ε داریم

$$S(P_\varepsilon;f_I)-\varepsilon\leqslant\int_I f_I\leqslant S(P_\varepsilon;f)+\varepsilon.$$

توجه داریم که اگرهرجا که ممکن است نقاط بینی مجموع ریمان خارج از A انتخاب شود، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S(P_\varepsilon;f)=\sum{}' f(x_j)c(J_j),$$

که مجموع سمت راست به‌آن دسته از حجره‌های P_ε که تماماً در A قرار دارند مربوط است. بنابراین

$$S(P_\varepsilon; f) \leqslant M \sum{}' c(J_k) \leqslant Mc(A).$$

درنتیجه داریم

$$\int_A f = \int_I f_I \leqslant Mc(A) + \varepsilon,$$

و چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است نابرابری طرف راست (۳.۴۴) به دست می‌آید. نابرابری طرف‌چپ به‌طریق مشابه برقرار می‌شود. □

به‌عنوان یك نتیجه ازاین قضیه، قضیه زیرراکه تعمیمی از قضیهٔ اول مقدارمیانگین ۶.۳۰ است به‌دست خواهیم آورد.

۱۱.۴۴ قضیهٔ مقدار میانگین. فرض کنیم $A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ یك مجموعهٔ همبند و $f: A \to \mathbf{R}$ در A کراندار و پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $p \in A$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_A f = f(p)c(A). \tag{۴.۴۴}$$

برهان. اگر $c(A) = 0$، نتیجه بدیهی‌است، بنابراین‌فرض می کنیم که $c(A) \neq 0$. می نویسیم

$$m = \inf\{f(x): x \in A\},\ M = \sup\{f(x): x \in A\},$$

ازقسمت دوم قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که

$$m \leqslant \frac{1}{c(A)} \int_A f \leqslant M. \tag{۵.۴۴}$$

اگر هردو نابرابری در (۵.۴۴) اکید باشند، نتیجه از قضیهٔ مقدار بینی بولتسانو ۴.۲۲ به‌دست می‌آید.

اکنون فرض می کنیم که $\int_A f = Mc(A)$. اگر f درنقطهٔ $p \in A$ به زبرینهٔ M برسد، باز نتیجه به‌دست می‌آید. بنابراین فرض می‌کنیم که f در A به M نرسد. چون $c(A) \neq 0$ حجرهٔ بسته‌ای مانند $K \subseteq A$ وجود دارد به‌قسمی که $c(K) \neq 0$ (ر.ك. تمرین ۴۴. ج). چون K فشرده و f در K پیوسته است، عددی مانند $\varepsilon > 0$ وجود داردبه‌قسمی که $f(x) \leqslant M - \varepsilon$ برای هر $x \in K$. ولی با توجه به‌اینکه $A = K \cup (A \setminus K)$، از قضیه‌های ۹.۴۴ و ۱۰.۴۴ نتیجه می‌شود که

$$Mc(A) = \int_A f = \int_K f + \int_{A \setminus K} f$$
$$\leqslant (M - \varepsilon)c(K) + Mc(A \setminus K) < Mc(A),$$

که یك تناقص است. برای فرض $\int_A f = mc(A)$، استدلال مشابهی را می‌توان به کار برد. □

انتگرال به‌صورت انتگرال مکرر

می‌خواهیم بدانیم که در چه شرایطی اگر f در یك حجرهٔ بستهٔ
$$J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$$
واقع در $\mathbf{R}^p$ انتگرال‌پذیر ومقادیرش در $\mathbf{R}$ باشد، $\int_J f$ را می‌توان برحسب «انتگرالهای مکرر» p تایی حساب کرد:
$$\int_{a_p}^{b_p} \left\{ \cdots \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_p)\, dx_1 \right\} dx_2 \right\} \cdots \right\} dx_p.$$
خواننده با این روش در محاسبهٔ انتگرالهای دوگانه و سه‌گانه به‌توسط انتگرالهای مکرر در درس ریاضیات عمومی آشنا شده است. در اینجا ما فقط درستی این روش را ثابت می‌کنیم: برای سهولت حالت $p = 2$ را در نظر خواهیم گرفت، ولی روشن است که این استدلال را می‌توان به بعدهای بالاتر نیز تعمیم داد.

۱۲.۴۴ قضیه. اگر f در $J = [a,b] \times [c,d]$، به $\mathbf{R}$ پیوسته باشد، آنگاه
$$\int_J f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy$$
$$= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

برهان. درقضیهٔ تعویض ۹.۳۱ دیدیم که این دو انتگرال مکرر با یکدیگر برابرند. برای نشان دادن این که انتگرال f در J با انتگرال مکرر اول برابر است، فرض می‌کنیم F برای $y \in [c, d]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:
$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$
یك افراز فاصلهٔ $[c, d]$ مانند $c = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_r = d$ و یك افراز $[a, b]$ مانند $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_s = b$ و P افراز J حاصل از حجره‌های $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ را درنظر می‌گیریم. y_j^* را نقطه‌ای دلخواه در $[y_{j-1}, y_j]$ می‌گیریم و توجه داریم که

$$F(y_j^*) = \int_a^b f(x, y_j^*)dx = \sum_{k=1}^{s} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y_j^*)dx.$$

برطبق قضیهٔ اول‌مقدارمیانگین ۶.۳۰، به‌ازای هر j و k نقطه‌ای مانند x_{jk}^* در $[x_{k-1}, x_k]$ وجود دارد به‌قسمی که

$$F(y_j^*) = \sum_{k=1}^{s} f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1}).$$

از ضرب طرفین در $(y_j - y_{j-1})$ و جمع آنها به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{r} F(y_j^*)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

ولی عبارت طرف چپ این فرمول یك مجموع ریمان دلخواه برای انتگرال زیر است:

$$\int_c^d F(y)dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy.$$

بدین ترتیب نشان داده‌ایم که این مجموع ریمان با یك مجموع ریمان خاص‌نظیر به افراز P برابر است. چون f در J انتگرال پذیر است، وجود این انتگرال مکرر و برابری‌آن باانتگرال تابع در J ثابت شده است. □

با کمی تغییر در اثبات قضیهٔ قبل، نتیجهٔ نسبتاً قویتر زیر به‌دست می‌آید.

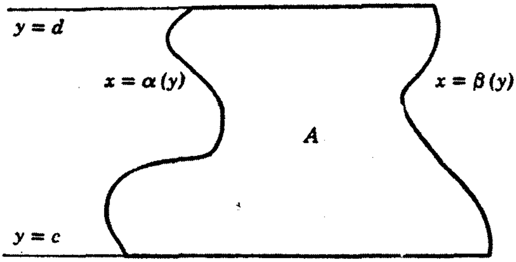
۱۳.۴۴ قضیه. فرض کنیم f در مستطیل $J = [a,b] \times [c,d]$ به $\mathbf{R}$، انتگرال‌پذیر باشد و فرض کنیم که به‌ازای هر $y \in [c,d]$ ، تابع $x \to f(x,y)$ از $[a,b]$ به $\mathbf{R}$ ، بجز احتمالاً در تعداد باپایانی از نقاط که درآن نقاط حدهای یکطرفه موجودند، پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_J f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\, dx \right\} dy.$$

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه ، قضیه‌ای به‌دست می‌آوریم که اغلب برای محاسبهٔ انتگرالهای توابعی که درمجموعهٔ محصور به‌خمهای پیوسته تعریف‌شده‌اند، به‌کارمی‌رود. برای سهولت، قضیه را درحالتی که کرانه‌های بالا وپایین مجموعه، خطهای افقی وکرانه‌های جانبی خمهای پیوسته هستند، بیان می‌کنیم. واضح است که در حالتی که کرانه‌های جانبی قطعه خطهای عمودی و کرانه‌های بالایی و پایینی خمهای پیوسته باشند قضیهٔ مشابهی نیز برقرار است. مجموعه‌های پیچیده‌تر را به‌صورت اجتماع زیر مجموعه‌هایی ازاین دونوع تجزیه می‌کنیم.

۱۴.۴۴ قضیه. فرض کنیم $A \subseteq \mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر داده شده باشد:

$$A = \{(x, y) : \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y), \quad c \leqslant y \leqslant d\},$$



شکل ۱۰۴۴

که درآن β,α در $[c,d]$ توابعی پیوسته و مقادیرشان در $[a,b]$ هستند. اگر f در $A \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد، آنگاه f در A انتگرال پذیر است و

$$\int_A f = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx \right\} dy .$$

برهان. فرض کنیم J یك حجرهٔ بستهٔ شامل A ، و f_J گسترش f به J باشد. اگر تغییر مناسبی درمثال ۲۰۴۳ (ج) بدهیم دیده‌می‌شود که کرانهٔ A دارای محتوای صفر است، بنابراین f_J در J انتگرال‌پذیراست. اکنون به ازای هر $y\in[c,d]$ تابع $x \to f_J(x,y)$ پیوسته است، بجز احتمالاً در دو نقطهٔ $\alpha(y)$ و $\beta(y)$ که دراین نقاط حدهای یکطرفه دارد. بنابراین ازقضیهٔ قبل نتیجه می گیریم که

$$\int_A f = \int_J f_J = \int_c^d \left\{ \int_a^b f_J(x,y)dx \right\} dy$$
$$= \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy. \quad \square$$

تمرین

۴۴. الف. اگر $A\subseteq \mathbf{R}^p$ ، آنگاه a نقطهٔ کرانه‌ای A است اگر و فقط اگر a نقطهٔ کرانه‌ای متمم A یعنی $\mathcal{C}(A)$ باشد. بنابراین $b(A)=b(\mathcal{C}(A))$.

۴۴. ب. مجموعهٔ $A\subseteq \mathbf{R}^p$ و $b(A)$ ، کرانهٔ A ، مفروض‌اند.

(الف) مجموعهٔ $b(A)$ در $\mathbf{R}^p$ بسته است.

(ب) $A^\circ = A \setminus b(A)$ ، درون A ، در $\mathbf{R}^p$ باز است و هرمجموعهٔ باز $G\subseteq A$ را شامل است.

(پ) بستار $\bar{A} = A\cup b(A)$ در $\mathbf{R}^p$ بسته و درهرمجموعهٔ بستهٔ F که‌شامل A باشد واقع است.

۴۴. پ. مجموعهٔ $A \subseteq \mathbf{R}^p$ و بستار $A^- = A \cup b(A)$ مفروض‌اند. نشان دهید که $b(A^-) \subseteq b(A)$. با ذکر مثالی نشان دهید که برابری می‌تواند برقرار باشد و همچنین با ذکر مثالی نشان دهید که برابری می‌تواند برقرار نباشد.

۴۴. ت. دو زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^p$ مانند A و B مفروض‌اند. نشان دهید که کرانهٔ هریک از مجموعه‌های

$$A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad A \cup B$$

در $b(A) \cup b(B)$ واقع است. (راهنمایی: $b(A) = A^- \cap (\mathcal{C}(A))^-$.)

۴۴. ث. مجموعهٔ A در $\mathbf{R}^p$ بسته است اگر و فقط اگر $b(A) \subseteq A$. مجموعهٔ $B \subseteq \mathbf{R}^p$ در $\mathbf{R}^p$ باز است اگر و فقط اگر $B \cap b(B) = \varnothing$.

۴۴. ج. اگر $A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، نشان دهید که درون و بستار A، یعنی $A^\circ = A \setminus b(A)$ و $A^- = A \cup b(A)$، نیز به $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ متعلق‌اند و داریم $c(A^\circ) = c(A) = c(A^-)$.

۴۴. چ. اگر $A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و $c(A) > ۰$، ثابت کنید که حجرهٔ بسته‌ای مانند $K \subseteq A$ وجود دارد به‌قسمی که $c(K) \neq ۰$.

۴۴. ح. اگـر $A \subseteq \mathbf{R}^p$ **محتوای داخلی** A را $c_*(A) = \sup c(U)$ و **محتـوای خارجی** آن را $c^*(A) = \inf c(V)$ تعریف مـی کنیـم؛ کـه در آن منظـور از $\sup c(U)$، زبرینهٔ مجموعهٔ تمام اجتماعهای باپایان ازحجره‌های واقع در A است و $\inf c(V)$ زیرینهٔ تمام اجتماعهای باپایان حجره‌هایی است که شامل نقاط A هستند.

(الف) ثابت کنید که اولاً $c_*(A) \leqslant c^*(A)$ و ثانیاً A دارای محتواست اگر و فقط اگر $c_*(A) = c^*(A)$، که دراین صورت $c(A)$ این مقدار مشترک است.

(ب) اگر A و B زیرمجموعه‌های مجزای $\mathbf{R}^p$ باشند، نشان دهید که

$$c^*(A \cup B) \leqslant c^*(A) + c^*(B).$$

(پ) مثالی بیاورید از مجموعه‌های مجزای A و B بقسمی که

$$۰ \neq c^*(A) = c^*(B) = c^*(A \cup B).$$

۴۴. خ. عدد $M \in \mathbf{N}$ و $I_M \subseteq \mathbf{R}^p$، مکعبی که طول نصف ضلع آن ۲^M و مرکـز آن ۰ است مفروض‌اند. برای $n \in \mathbf{N}$ مکعب I_M را به **توری** $G_{M,n}$ به درازای ۲^{-n} تقسیم می‌کنیم: این توری تشکیل شده است از تمام مکعبهای واقع در I_M کـه طول هر ضلعشان ۲^{-n} و نقاط انتهایی‌شان گـویاهای دو دویی هستند. (یعنی نقاط انتهایـی به‌صورت $k/۲^n$ برای $k \in Z$ هستند.)

(الف) اگـر $J \subseteq I_M$ یك حجرهٔ بسته باشد و $\varepsilon > ۰$، نشان دهید کـه عددی مانند $n \in \mathbf{N}$ وجود دارد بقسمی که اجتماع تمام مکعبهای در $G_{M,n}$ که در J واقع هستند دارای محتوایی بیش از $c(J) - \varepsilon$ و اجتماع تمام مکعبهای در $G_{M,n}$ که شامل نقـاط J هستند دارای محتوایی کمتر از $c(J) + \varepsilon$ باشد.

(ب) اگر $A \subseteq I_M$ دارای محتوا باشد و $\varepsilon > ۰$، نشان دهید که عددی مانند $n \in \mathbf{N}$

وجود دارد به‌قسمی که اجتماع تمام‌مکعبهای در $G_{M,n}$ که در A واقع هستند دارای‌محتوایی بیش از $c(A)-\varepsilon$ و اجتماع تمام مکعبهای در $G_{M,n}$ که شامل نقاط A هستند دارای محتوایی کمتر از $c(A)+\varepsilon$ باشد.

۴۴. د. فرض کنید $I\subseteq \mathbf{R}^p$ یك حجرهٔ بسته و $f: I \to \mathbf{R}$ در I انتگرال پذیر باشد. اگر $A\subseteq I$ دارای محتوا باشد، آنگاه تحدید f به A، در A انتگرال‌پذیر است. (راهنمایی: از تمرین ۴۳. ش استفاده کنید.)

۴۴. ذ. فرض کنید $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و f و g در A انتگرال‌پذیر هستند و برای هر $x\in A$، $g(x)\geqslant 0$. اگر $M=\sup(A)$ و $m=\inf(A)$، آنگاه یك عدد حقیقی مانند $\mu\in[m, M]$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_A fg=\mu\int_A g.$$

۴۴. ر. اگرعلاوه برفرضهای تمرین قبل، فرض کنیم که A همبند و f در A پیوسته است، آنگاه نقطه‌ای مانند $P\in A$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\int_A fg=f(p)\int_A g.$$

۴۴. ز. فرض کنید $\{(x_n, y_n):n\in\mathbf{N}\}$ شمارشی از نقاط به‌مختصات گویا در $(0,1)\times(0,1)$ باشد. به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، فرض کنید I_n یك حجرهٔ باز در $(0,1)\times(0,1)$ باشد که‌شامل (x_n, y_n) است‌وبنویسید $G=\cup_{n\in N}I_n$.نشان‌دهید که G در $\mathbf{R}^2$ مجموعهٔ بازی است که‌کرانهٔ آن $b(G)$مجموعهٔ $(0,1)\times(0,1)\setminus G$ است.نشان دهید که اگر $\sum c(I_n)<1$، آنگاه مجموعهٔ باز G دارای محتوا نیست.

۴۴. ژ. با استفاده از اصطلاحهای تمرین ۷.ذ، فرض کنید $A\subseteq[0,1]$ یك مجموعهٔ «شبه‌کانتور» به‌طول ۱/۲ باشد. اگر $K=A\times[0,1]$، نشان دهید که K یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^2$ است و $b(K)=K$، و نشان دهید که K دارای محتوا نیست.

۴۴. س. فرض کنید $a\leqslant b$ و $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد به قسمی که برای هر $x\in[a, b]$، $f(x)\geqslant 0$. مجموعهٔ $S_f=\{(x, y):a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ را **مجموعهٔ عرض** f گوییم. با بررسی کرانهٔ S_f، نشان دهید که S_f دارای محتواست. نشان دهید که

$$c(S_f)=\int_a^b\left\{\int_0^{y=f(x)}1\,dy\right\}dx=\int_a^b f(x)dx.$$

۴۴. ش. فرض کنید $A\subseteq\mathbf{R}^2$ مجموعهٔ در مثال ۴۳. ث باشد و فرض کنید f در $Q=[0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}$ به‌صورت $f(x,y)=1$ برای $(x,y)\in A$ و $f(x,y)=0$ برای $(x, y)\notin A$، تعریف شده باشد. نشان دهید که A دارای محتوا نیست و f در Q انتگرال‌پذیر نمی‌باشد. با این‌حال، انتگرالهای مکرر وجود دارند و در شرط زیرصدق

می‌کنند:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y)dx \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y)dy \right\} dx.$$

۴۴.ص. فرض کنید $Q = [0,1] \times [0,1]$ و $f: Q \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف‌شده باشد: اگر x یا y گنگ باشد، $f(x, y) = 0$ و اگر x و y گویا باشند و $x = m/n$، که در آن $m, n > 0$ نسبت به‌هم اول‌اند، $f(x, y) = 1/n$. نشان دهید که

$$\int_Q f = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y)dx \right\} dy = 0,$$

ولی $\int_0^1 f(x, y)dy$ برای xهای گویا وجود ندارد.

۴۴.ض. فرض کنید حجرهٔ باز $J \subseteq \mathbf{R}^2$ شامل $(0, 0)$ و $f: J \to \mathbf{R}$ در J پیوسته است. تابع $F: J \to \mathbf{R}$ را به‌صورت انتگرال‌مکرر زیر تعریف کنید:

$$F(x, y) = \int_0^x \left\{ \int_0^y f(s, t)dt \right\} ds.$$

نشان دهید که برای $(x, y) \in J$، $D_1 D_2 F(x, y) = f(x,y) = D_2 D_1 F(x, y)$.

۴۴.ط. حجرهٔ J را مانند تمرین قبل بگیرید و فرض کنید $G: J \to \mathbf{R}$ به قسمی باشد که $D_2 D_1 G$ در J پیوسته باشد. با استفاده از تمرین قبل نشان دهید که $D_1 D_2 G$ وجود دارد و برابر با $D_2 D_1 G$ است.

۴۴ـ ظ. فرض کنید $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ و تابع $f: J \to \mathbf{R}$ پیوسته است. $J_{(1)} = [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ در $\mathbf{R}^{p-1}$ را در نظر بگیرید و $F_{(1)}: J_{(1)} \to \mathbf{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$F_{(1)}(x_2, \ldots, x_p) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)dx_1.$$

(الف) نشان دهید که $F_{(1)}$ در $J_{(1)}$ پیوسته است.

(ب) نشان دهید که برای هر $(x_2^*, \ldots, x_p^*)$ در $J_{(1)}$ و هر افراز $[a_1, b_1]$ مانند $a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,s} = b_1$، نقاطی مانند $x_{1,k}^*$ در $[x_{1,k-1}, x_{1,k}]$ وجود دارند به‌قسمی که

$$F_{(1)}(x_2^*, \ldots, x_p^*) = \sum_{k=1}^{s} f(x_{1,k}^*, x_2^*, \ldots, x_p^*)(x_{1,k} - x_{1,k-1}).$$

(پ) ثابت کنید که

$$\int_{J_{(1)}} F(x_2, \ldots, x_p)d(x_2, \ldots, x_p) =$$

$$=\int_{J_{(1)}}\left\{\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)dx_1\right\}d(x_2, \ldots, x_p)$$
$$=\int_J f(x_1, \ldots, x_p)d(x_1, \ldots, x_p).$$

(ت) این نتیجه را به‌حالتی تعمیم دهید که به‌ازای هر نقطهٔ $(x_2, \ldots, x_p)$ در $J_{(1)}$ تابع $x_1 \to F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ به‌دامنهٔ $[a_1, b_1]$ و برد در $\mathbf{R}$، بجزاحتمالاً درتعدادی باپایان از نقاط که درآن نقاط تابع‌حدهای یکطرفه دارد، پیوسته باشد.

۴۴. ع. (الف) فرض کنید توابع $\alpha, \beta:[a, b] \to \mathbf{R}$ پیوسته باشند و برای هر $x \in [a, b]$، $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$. نشان دهیدکه مجموعهٔ

$$B=\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 a \leqslant x \leqslant b, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}$$

در $\mathbf{R}^2$ فشرده و بامحتواست.

(ب) اکنون فرض‌کنید $\gamma, \delta:B \to \mathbf{R}$ توابع پیوسته‌ای باشند وبرای هر $(x, y) \in B$، $\gamma(x, y) \leqslant \delta(x, y)$. نشان دهیدکه مجموعهٔ

$$D=\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3:(x, y) \in B, \gamma(x, y) \leqslant z \leqslant \delta(x, y)\}$$

در $\mathbf{R}^3$ فشرده و با محتواست.

(پ) اگر $f:D \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد، نشان دهیدکه f در D انتگرال‌پذیراست و

$$\int_D f=\int_a^b\left\{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left\{\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right\}dy\right\}dx.$$

۴۴. غ. فرض کنید $I=[a_1, b_1]\times \cdots \times [a_p, b_p]$ و به ازای هر $j=1, \ldots, p$ فرض‌کنید $f_j:[a_j, b_j] \to \mathbf{R}$ یك تابع انتگرال‌پذیر باشد.

اگر $\varphi:I \to \mathbf{R}$ به‌صورت $\varphi(x_1, \ldots, x_p)=f_1(x_1) \cdots f_p(x_p)$, تعریف شده باشد، نشان دهیدکه φ در I انتگرال‌پذیر است و

$$\int_I \varphi=\left\{\int_{a_1}^{b_1} f_1\right\} \cdots \left\{\int_{a_p}^{b_p} f_p\right\}.$$

۴۴. ف. با استفاده از قضیهٔ تقریب وایرشتراس نشان دهید که اگر $I=[a_1, b_1]\times \cdots \times [a_p, b_p]$ و $g:I \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد، داریم

$$\int_J g=\int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left\{\int_{a_p}^{b_p} g(x_1, x_2, \ldots, x_p)dx_p\right\} \cdots dx_2\right\}dx_1.$$

۴۴. ق. فرض‌کنید $\varphi:[0, \infty) \to \mathbf{R}$ پیوسته، اکیداً صعودی، بیکران، و $\varphi(0)=0$ باشدوفرض کنید ψ تابع‌وارونش باشد. بنابراین ψ نیزپیوسته ودر$[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

(الف) مساحت حجرهٔ $[0, \alpha]\times[0, \beta]$ را وقتی α و β اعدادی مثبت هستند با سطحی که محدود به‌محورهای مختصات و نمودار φ است مقایسه‌کنید ونابرابری زیر را که به نابرابری یانگ معروف است، به‌دست آورید:

$$\alpha\beta\leqslant\int_0^\alpha\varphi+\int_0^\beta\psi.$$

(ب) اگر $p\geqslant 1$ و $q\geqslant 1$ به‌قسمی باشند که $(1/p)+(1/q)=1$، و اگر $\varphi(x)=x^{p/q}$ و $\psi(x)=y^{p/q}$، با استفاده از نابرابری یانگ، نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\alpha\beta\leqslant\alpha^p/p+\beta^q/q.$$

(پ) اگر a_i و b_i برای $i=1, 2, \ldots, n$ اعداد حقیقی باشند و

$$A=(|a_1|^p+\cdots+|a_n|^p) \text{ و } B=(|b_1|^q+\cdots+|b_n|^q)^{1/q}،$$

با استفاده از نابرابری بالا، نابرابری هولدر

$$\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant AB,$$

را، که در پروژهٔ β.۸ (ب) به‌دست آوردیم، نتیجه بگیرید.

پروژه

α.۴۴. فرض کنید $I\subseteq\mathbf{R}^p$ یك حجرهٔ بسته و $f:I\to\mathbf{R}$ کراندار باشد. برای $\alpha>0$، مجموعهٔ $D_\alpha=\{x\in I:\omega_f(x)\geqslant\alpha\}$ راکه در آن $\omega_f(x)$ نشانگر نوسان f در x است، درنظر بگیرید. (ر. ك. پروژهٔ α.۲۳.)

(الف) فرض کنید که D_α دارای محتوای صفر باشد. همچنین فرض کنید $P_\alpha=\{I_1, \ldots, I_n\}$ یك افراز I باشد به‌قسمی که (یك) هرنقطهٔ D_α در درون یکی از حجره‌های $I_1, \ldots, I_r(r\leqslant n)$ باشد، (دو) $c(I_1)+\cdots+c(I_r)\leqslant\alpha/2\|f\|_I$، و (سه) اگر $x, y\in I_j$ برای $j=r+1, \ldots, n$، آنگاه $|f(x)-f(y)|<\alpha$. اگر P ظریفتر از P_α باشد، نشان دهید که $|S(P; f)-S(P_\alpha; f)|\leqslant\alpha(c(I)+1)$.

(ب) نتیجه بگیرید که اگر D_α برای هر $\alpha>0$ دارای محتوای صفر باشد، آنگاه f در I انتگرال‌پذیر است.

(پ) فرض کنید که برای یك $\alpha>0$ محتوای خارجی $c^*(D_\alpha)$ مثبت باشد. نشان دهید که برای هرافراز دلخواه I مانند $P=\{J_1, \ldots, J_n\}$، داریم

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)c(J_j)\geqslant \alpha c^*D_\alpha).$$

نتیجه بگیرید که f در I انتگرال‌پذیر نیست.

(ت) نشان‌دهید که f در I انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعهٔ D_α برای هر $\alpha>0$ دارای محتوای صفر باشد.

(ث) به‌یاد بیاورید که $D=\cup_{n\in N}D_{1/n}$ مجموعهٔ نقاطی است که f در آن نقاط ناپیوسته است. نشان‌دهید که D دارای‌اندازهٔ صفراست (به‌معنایی که درتمرین ۴۳.غ. آمده است) اگر وفقط اگر هریك ازمجموعه‌های $D_{1/n}$ دارای محتوای صفر باشد.

(ج) نتیجه بگیرید که f در I انتگرال‌پذیر است اگر وفقط اگر D، مجموعهٔ نقاط‌ناپیوستگی‌اش، دارای‌اندازهٔ صفرباشد. (این‌قضیه را **محك لبك برای‌انتگرال‌پذیری** می‌نامند.)

β.۴۴. در این پروژه انتگرالهای پایین وبالا (که درپروژهٔ α.۴۳ ارائه‌شده‌اند) و انتگرالهای مکررشان مورد بررسی قرار می‌گیرند. فرض‌کنید $I\subseteq \mathbf{R}^r$ و $J\subseteq \mathbf{R}^s$ حجره‌هایی بسته‌باشند، و بنویسید $p=r+s$، و $K=I\times J\subseteq \mathbf{R}^p=\mathbf{R}^r\times \mathbf{R}^s$. همچنین فرض‌کنیدکه $f:K\rightarrow \mathbf{R}$ کراندار است.

(الف) به‌ازای‌هر $x\in I$؛ تابع $g_x:J\rightarrow \mathbf{R}$ رابه‌صورت $g_x(y)=f(x,y)$ برای $y\in J$ تعریف می‌کنیم. فرض‌کنید $\lambda:I\rightarrow \mathbf{R}$ به‌توسط $\lambda(x)=L(g_x)$ که درآن $L(g_x)$ انتگرال‌پایین g_x است و $\mu:I\rightarrow \mathbf{R}$ به‌توسط $\mu(x)=U(g_x)$ که درآن $U(g_x)$ انتگرال بالای g_x است، تعریف شده‌باشند. اگر R یك‌افراز دلخواه I و S یك‌افراز دلخواه J باشد و $R\times S$، افراز K راکه از این دوافراز نتیجه می‌شود، P بنامیم، آنگاه نشان‌دهید‌که

$$L(P;f)\leqslant L(R;\lambda)\leqslant U(R;\lambda)\leqslant U(R;\mu)\leqslant U(P;f),$$

(ب) نشان‌دهید‌که

$$L(f)\leqslant L(\lambda)\leqslant U(\lambda)\leqslant U(f),\ L(f)\leqslant L(\mu)\leqslant U(\mu)\leqslant U(f).$$

بنابراین، اگر f در K انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه λ و μ در I انتگرال‌پذیر هستند و

$$\int_K f=\int_I \lambda=\int_I \mu.$$

(پ) به‌ازای هر $y\in J$، تابع $h_y:I\rightarrow \mathbf{R}$ را به‌صورت $h_y(x)=f(x,y)$ برای $x\in I$ تعریف‌کنید. فرض‌کنید $\lambda':J\rightarrow \mathbf{R}$ و $\mu':J\rightarrow \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\lambda'(y)=L(h_y), \qquad \mu'(y)=U(h_y).$$

نشان‌دهید که اگر f در K انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه λ' و μ' در J انتگرال‌پذیرند و

$$\int_K f=\int_J \lambda'=\int_J \mu'.$$

(ت) اگر $g_x:J \to \mathbf{R}$ در J برای هر $x\in I$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $\lambda=\mu$ و

$$\int_K f(x,y)d(x,y)=\int_K f=\int_J\left\{\int_I f(x,y)dy\right\}dx.$$

به‌طریق مشابه، اگر $h_y:I \to \mathbf{R}$ به‌ازای هر $y\in J$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_K f(x,y)d(x,y)=\int_K f=\int_I\left\{\int_J f(x,y)dx\right\}dy.$$

۷.۴۴. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و $\mathcal{D}(\Omega)$ دستهٔ تمام مجموعه‌های $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ بـا شرط $A^-\subseteq\Omega$ باشد. دراین پروژه مفهوم تابع «جمعی» در $\mathcal{D}(\Omega)$ و «چگالی قوی» آن را ارائه‌خواهیم کرد. تابع $G:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbf{R}$ **جمعی** نامیده می‌شود اگر وقتی $A, B\in\mathcal{D}(\Omega)$ و $A\cap B=\varnothing$، داشته باشیم

$$G(A\cup B)=G(A)+G(B).$$

(الف) اگر $f:\Omega\to\mathbf{R}$ در هرمجموعهٔ واقع در $\mathcal{D}(\Omega)$ انتگرال‌پذیر باشد و اگر $F:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbf{R}$ را به‌صورت

$$F(A)=\int_A f,$$

تعریف کنیم، آنگاه F در $\mathcal{D}(\Omega)$ جمعی است.

(ب) تابع جمعی $G:D(\Omega)\to\mathbf{R}$ و $g:\Omega\to\mathbf{R}$ مفروض‌اند. گوییم g برای G یك **چگالی قوی** است، اگر برای هر $\varepsilon>0$ وهرمجموعهٔ $A\in\mathcal{D}(\Omega)$ عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که اگر K مکعبی بسته واقع در Ω باشد که طول ضلعش از δ کمتر است و اگر $x\in A\cap K$، آنگاه

$$\left|\frac{G(K)}{c(K)}-g(x)\right|<\varepsilon.$$

(پ) فرض کنید $\Omega=\mathbf{R}^p$. نشان دهید که تابع محتوای $c:\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\to\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^p$

دارای چگالی قوی متحد با ۱ است.

(ت) فرض کنید $\mu:\mathcal{D}(\mathbf{R}^p) \to \mathbf{R}$ تابع جمعی مثبتی است که تحت انتقال مجموعه پایدار است [یعنی، $\mu(x+A)=\mu(A)$ برای هر $x\in\mathbf{R}^p$ و $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$]. نشان‌دهید که μ دارای یک چگالی قوی در $\mathbf{R}^p$ است که در $\mathbf{R}^p$ ثابت است.

(ث) اگر $f:\Omega \to \mathbf{R}$ پیوسته و F تابعی باشد که در (الف) تعریف شده است، نشان‌دهید که F دارای چگالی قوی f در Ω است.

(ج) اگر $G:\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ جمعی و دارای چگالی قوی $g:\Omega \to \mathbf{R}$ باشد، نشان‌دهید که g در Ω پیوسته است. بنابراین g در هر $A\in\mathcal{D}(\Omega)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

(چ) فرض کنید که $G:\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ جمعی و دارای چگالی قوی متحد باصفر در Ω باشد. نشان‌دهید که اگر K مکعبی بسته‌باشد و $\varepsilon>0$، آنگاه یک‌افراز K به‌مکعبهای $\{K_1, \ldots, K_r\}$ وجود دارد به‌قسمی که $|G(K_j)| \leqslant \varepsilon c(K_j)$ برای $j=1,\ldots,r$، که نتیجه می‌دهد $|G(K)|\leqslant \varepsilon c(K)$. نشان‌دهید که برای هرمکعب بستهٔ $K\subseteq\Omega$ داریم $G(K)=0$.

(ح) فرض کنید F_1 و F_2 توابعی جمعی در $\mathcal{D}(\Omega)$ باشند به‌قسمی که برای عددی مثبت مانند M و برای هر $A\in\mathcal{D}(\Omega)$، داشته باشیم $|F_j(A)|\leqslant Mc(A)$ برای $j=1,2$. اگر $F_1(K)=F_2(K)$ برای هرمکعب $K\subseteq\Omega$، ثابت کنید که $F_1(A)=F_2(A)$ برای هر $A\in\mathcal{D}(\Omega)$.

بخش ۴۵ تبدیل مجموعه‌ها و انتگرالها

در بخش ۴۳ گفته شد که ممکن است یک‌نگاشت پیوسته در یک‌فاصله از $\mathbf{R}$، یک مربع بسته در $\mathbf{R}^2$ را بپوشاند. در اینجا نشان می‌دهیم که اگر نگاشت ازردهٔ C^1 باشد دیگر این‌پدیده رخ نمی‌دهد ونگاشت مجموعه‌های با محتوا تحت توابع C^1 را بررسی می‌کنیم. حالتی که نگاشت خطی است بسیار اهمیت دارد وقضیه ساده است. در حالت غیرخطی، خواهیم دیدکه ژاکوبی نگاشت نشانگر اندازهٔ «واپیچش» تبدیل است.

این‌نتایج را دراثبات قضیه‌ای مربوط به«تغییر متغیر» انتگرال روی مجموعه‌ای در $\mathbf{R}^p$ به‌کار می‌بریم. حالتهای خاص مختصات قطبی واستوانه‌ای‌را باختصار بررسی‌می‌کنیم وبالاخره قضیهٔ قویتری عرضه می‌کنیم که درمورد بسیاری از تبدیلاتی که نقاط غیرعادی ضعیفی دارند، به‌کارمی‌رود.

۱۰۴۵ لم. مجموعهٔ باز $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ و تابع $\varphi:\Omega \to \mathbf{R}^p$ متعلق به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ را درنظر می‌گیریم. اگر A، یک‌مجموعهٔ‌کراندار باشد و $A^-\subseteq\Omega$، آنگاه یک‌مجموعهٔ باز

کراندار Ω_1 با شرط $A^- \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1^- \subseteq \Omega$ و ثابتی مانند $M > 0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر A در اجتماع تعداد باپایانی مکعب بسته در Ω_1 واقع باشدکه محتوای اجتماع آنها حداکثر برابر با α باشد، آنگاه $\varphi(A)$ در اجتماع تعداد با پایانی مکعب بسته واقع است‌که محتوای اجتماع این‌مکعبها حداکثر برابر با $(\sqrt{p}M)^p\alpha$ است.

برهان. اگر $\Omega = \mathbf{R}^p$، کافی است δ را ۱ بگیریم، و در غیر این‌صورت δ را برابر $\delta = (1/2)\inf\{\|a-x\|: a\in A^-, x\notin\Omega\}$ می‌گیریم چون A^- فشرده است، $\delta > 0$. (چرا؟) اکنون می‌نویسیم $\Omega_1 = \{y\in\mathbf{R}^p: \|y-a\| < \delta$ ، $a\in A$ برای یك$\}$. بنابراین Ω_1 باز وکراندار است و $A^- \subseteq \Omega_1$ و $\Omega_1^- \subseteq \Omega$. چون $\varphi\in C^1(\Omega)$ و Ω_1^- فشرده است، نتیجه می‌شود که $M = \sup\{\|D\varphi(x)\|_{pp}: x\in\Omega_1\}$ با پایان است. اگر $A \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n$ که در آن I_j ها مکعبهای بسته در Ω_1 می‌باشند، آنگاه از نتیجهٔ ۶.۴۰ حاصل می‌شود که برای $x, y\in I_j$ داریم

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leqslant M\|x-y\|.$$

با فرض آنکه طول ضلع I_j برابر با $2r_j$ و x مرکز I_j باشد، اگر $y\in I_j$، داریم

$$\|x-y\| \leqslant \sqrt{p}\, r_j$$

و بنابراین $\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leqslant \sqrt{p}Mr_j$. در نتیجه $\varphi(I_j)$ در یك مکعب بسته به‌طول ضلع $2\sqrt{p}Mr_j$ واقع است. بنابراین نتیجه می‌شود که $\varphi(A)$ در اجتماع با پایانی‌مکعب بسته‌که محتوای اجتماع آنها حداکثر برابر $(\sqrt{p}M)^p\alpha$ است، واقع است. □

۲.۴۵ قضیه. فرض‌کنیم $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ باز و $f: \Omega \to \mathbf{R}^p$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد. اگر $A \subseteq \Omega$ دارای محتوای صفر باشد و $A^- \subseteq \Omega$، آنگاه $\varphi(A)$ دارای محتوای صفر است.

برهان. کافیست لم بالا را برای $\alpha > 0$ دلخواه به‌کار بریم. □

۳.۴۵ نتیجه. فرض‌کنیم $r < p$، $\Omega \subseteq \mathbf{R}^r$ باز و $\psi: \Omega \to \mathbf{R}^p$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد. اگر $A \subseteq \Omega$ یك مجموعهٔ کراندار باشرط $A^- \subseteq \Omega$ باشد، آنگاه $\psi(A)$ در $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر است.

برهان. می‌نویسیم $\Omega_0 = \Omega \times \mathbf{R}^{p-r}$. بنابراین Ω_0 در $\mathbf{R}^p$ باز است. تابع $\varphi: \Omega_0 \to \mathbf{R}^p$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_p) = \psi(x_1, \dots, x_r).$$

روشن است که $\varphi\in C^1(\Omega_\circ)$. می‌نویسیم $A_\circ = A\times\{\circ,\dots,\circ\}$. بدین ترتیب $A_\circ^- \subseteq \Omega_\circ$، و $A_\circ$ در $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفر است . در نتیجه $\psi(A)=\varphi(A_\circ)$ در $\mathbf{R}^p$ دارای محتوای صفراست. □

توجه کنید که این نتیجه گویای این مطلب است که C^1ـ تصویر هر مجموعهٔ کراندار با «بعد کمتر» دارای محتوای صفر است .

چون کرانهٔ مجموعهٔ با محتوای A دارای محتوای صفر است، از قضیهٔ ۲.۴۵ نتیجه می‌شود که اگر φ از ردهٔ C^1 باشد، آنگاه $\varphi(b(A))$ دارای محتوای صفر است. متأسفانه $\varphi(b(A))$ در حالت کلی کمترین رابطه‌ای با $b(\varphi(A))$ ندارد . با این تذکار ارزش دو قضیهٔ زیر نمایانتر می‌شود.

۴.۴۵ قضیه. فرض کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^p$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق باشد. همچنین فرض کنیم A دارای محتواباشد، $A^-\subseteq\Omega$ و $J_\varphi(x)\neq\circ$ برای هر $x\in A^\circ$. آنگاه $\varphi(A)$ دارای محتواست.

برهان . چون A^- فشرده و φ پیوسته است ، $\varphi(A)\subseteq\varphi(A^-)$ کراندار است. برای نشان‌دادن اینکه $\varphi(A)$ دارای محتواست، نشان می‌دهیم که $b(\varphi(A)\subseteq\varphi(b(A))$ و $\varphi(b(A))$دارای محتوای صفر است .

چون $\varphi(A^-)$فشرده‌است،داریم $b(\varphi(A))\subseteq\varphi(A\ \ )=\varphi(A^\circ\cup b(A))$. بنابراین، هرگاه $y\in b(\varphi(A))$، نقطه‌ای مانند $x\in A^\circ\cup b(A)$ وجود دارد به‌قسمی که $y=\varphi(x)$. اگر $x\in A^\circ$، آنگاه $J_\varphi(x)\neq\circ$ و از قضیهٔ نگاشت پوشای ۶.۴۱ نتیجه می‌شود که $y=\varphi(x)$ نقطهٔ درونی $\varphi(A^\circ)\subseteq\varphi(A)$ است . اما این بافرض $y\in b(\varphi(A))$ متناقض است. بنابراین نتیجه می گیریم که $b(\varphi(A))\subseteq\varphi(b(A))$.

اکنون می گوییم چون A دارای محتواست ، کرانهٔ آن $b(A)\subseteq\Omega$ ، یك مجموعهٔ بستهٔ با محتوای صفر است . اینك از قضیهٔ ۲.۴۵ نتیجه می‌شود که $\varphi(b(A))$ دارای محتوای صفر است. □

۵.۴۵ نتیجه. فرض کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^p$ متعلق به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ و در Ω یك به‌یك باشد. اگر A دارای محتوا باشد و $A^-\subseteq\Omega$ وبرای $x\in A^\circ$ ، $J_\varphi(x)\neq\circ$، آنگاه $b(\varphi(A))=\varphi(b(A))$.

برهان . کافی است نشان‌دهیم که $\varphi(b(A))\subseteq b(\varphi(A))$، چراکه عکس این‌رابطه در اثبات قضیه نشان داده شده است. فرض‌کنیم $x\in b(A)$، آنگاه دنباله‌ای مانند (x_n) در A ودنباله‌ای مانند (y_n) در $\Omega\setminus A$ وجود دارندکه هردو به x همگرا هستند. چون φ پیوسته است، $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ و $\varphi(y_n)\to\varphi(x)$. امـا چون φ در Ω یك به‌یك است، $\varphi(y_n)\notin\varphi(A)$ و درنتیجه $\varphi(x)\in b(\varphi(A))$. بنابراین $\varphi(b(A))\subseteq b\varphi(A)$. □

تبدیلات به‌توسط نگاشتهای خطی

اکنون نشان می‌دهیم که محتوای تصویر مجموعه‌های با محتوا تحت یك‌نگاشت خطی در $\mathbf{R}^p$، مضرب ثـابتی است از محتوای مجموعه‌های مفروض. علاوه براین، این مضرب، قدرمطلق دترمینان نگاشت خطی است. (در ایـــن‌قضیه فرض می‌کنیم که خواننده بامفهوم و خواص مقدماتی دترمینان نگاشت خطی در $\mathbf{R}^p$ آشناست.)

۶.۴۵ قضیه . $L\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p)$ مفروض است. اگر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، آنگاه

$$c(L(A))=|\det L|c(A)\cdot$$

برهان . اگر L غیرعادی باشد (یعنی‌اگر $\det L=0$)، آنگاه L فضای $\mathbf{R}^p$ را برزیرفضای سره‌ای از $\mathbf{R}^p$ می‌نگارد. چون این زیرفضا را نیز می‌توان به‌عنوان تصویر یك‌تابع خطی $L':\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^p$ با شرط $r<p$ به‌دست‌آورد، از نتیجهٔ ۳.۴۵ دیده می‌شود که برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، داریــم $c(L(A))=0$. بنابراین‌گزاره برای نگاشتهای خطی غیرعادی درست است .

اگر L عادی باشد (یعنی اگر $\det L\neq 0$)، آنگاه از قضیهٔ ۴.۴۵ نتیجه می‌شود که اگر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$،آنگاه $L(A)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$. اکنون‌تابع $\lambda:\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)\to\mathbf{R}$ را به‌صورت $\lambda(A)=c(L(A))$تعریف‌می‌کنیم. (یك) آشکاراست که $\lambda(A)\geqslant 0$ برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$.
(دو) فرض‌کنید که $A,\ B\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ و $A\cap B=\varnothing$، آنگاه

$$\lambda(A\cup B)=c(L(A\cup B))=c(L(A)\cup L(B)).$$

چون L یك‌به‌یك است، $L(A)\cap L(B)=\varnothing$ وبنابراین

$$c(L(A)\cup L(B))=c(L(A))+c(L(B))=\lambda(A)+\lambda(B).$$

(سه) فرض‌کنید $x\in\mathbf{R}^p$ و $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، آنگاه

$$\lambda(x+A)=c(L(x+A))=c(L(x)+L(A))=c(L(A))=\lambda(A).$$

بنابراین ازنتیجهٔ ۷.۴۴ به‌دست می‌آید که ثابتی مانند $m_L\geqslant 0$ وجود دارد به قسمی کـــه

برای هر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ داریم $\lambda(A)=m_Lc(A)$.

اکنون بررسی می‌کنیم کـه چگونه m_L به $L\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p)$ بستگی دارد. فرض کنیم $M\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p)$ یك نگاشت عادی باشد، آنگاه اگر $A\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$، داریم

$$m_{L\circ M}c(A)=c(L\circ M(A))=c(L(M(A)))$$

$$=m_Lc(M(A))=m_Lm_Mc(A).$$

بنابراین برای تمام نگاشتهای عادی $L,\ M\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p)$ داریم $m_{L\circ M}=m_Lm_M$.

بالاخره باید نشان‌دهیم که $m_L=|\det L|$. برای این منظور قضیهٔ زیر را که در جبر خطی به‌دست‌آمده است به‌کار می‌بریم: هرنگاشت عادی $L\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^p)$ ترکیبی است از نگاشتهای خطی به‌صورتهای زیر:

(الف) $L_1(x_1,\dots,x_p)=(\alpha x_1,\ x_2,\ \dots,x_p),\quad \alpha\neq 0$

(ب) $L_2(x_1,\dots,x_i,\ x_{i+1},\ \dots,x_p)=(x_1,\dots,x_{i+1},\ x_i,\dots,x_p)$

(پ) $L_3(x_1,\dots,x_p)=(x_1+x_2,\ x_2,\dots,\ x_p).$

توجه کنید که اگر K_0 مکعب نیم‌باز $[0,1)\times\dots\times[0,1)$ در $\mathbf{R}^p$ بـاشد و اگر $\alpha>0$، آنگاه $L_1(K_0)=[0,\alpha)\times[0,1)\times\dots\times[0,1)$ که از آن نتیجه می‌شود:

$$\alpha=c(L_1(K_0))=m_{L_1}c(K_0)=m_{L_1}.$$

به‌طریق مشابه، اگر $\alpha<0$، آنگاه $L_1(K_0)=(\alpha,0]\times[0,1)\times\dots\times[0,1)$، و

$$-\alpha=c(L_1(K_0))=m_{L_1}c(K_0)=m_{L_1}.$$

بنابراین، در هرحالت داریم $m_{L_1}=|\alpha|=|\det L_1|$.

از $L_2(K_0)=K_0$، نتیجه می‌شود که $m_{L_2}=1=|\det L_2|$.

بالاخره، فرض کنیم Δ_1 و Δ_2 دومجموعهٔ زیر باشند:

$$\Delta_1=\{(x_1,\dots,x_p):0\leqslant x_i<1,\ x_1<x_2\},$$

$$\Delta_2=\{(x_1,\dots,x_p):0\leqslant x_i<1,\ x_2\leqslant x_1\}.$$

آشکار است که $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$ و $K_0=\Delta_1\cup\Delta_2$. بآسانی دیده می‌شود که

$$L_3(K_0)=\Delta_2\cup\{(1,0,\dots,0)+\Delta_1\}$$

از این نتیجه می‌شود که

$$c(L_۳(K_\circ))=c(\Delta_۲)+c((۱,\circ,\dots,\circ)+\Delta_۱)=c(\Delta_۲)+c(\Delta_۱)$$
$$=c(\Delta_۱\cup\Delta_۲)=c(K_\circ).$$

بنابراین $|\det L_۳|=۱=m_{L_۳}$.

اکنون فرض کنیم نگاشت عادی خطی L ترکیب نگاشتهای خطی $L_۱,L_۲,\dots,L_r$ باشد که هریك از آنها به‌یکی ازسه صورت بالاست. ازرابطه‌های زیر

$$m_L=m_{L_۱\circ L_۲\circ\dots\circ L_r}=m_{L_۱}m_{L_۲}\cdots m_{L_r}$$
$$=|\det L_۱|\,|\det L_۲|\cdots|\det L_r|$$
$$=|(\det L_۱)(\det L_۲)\cdots(\det L_r)|$$
$$=|\det(L_۱\circ L_۲\circ\dots\circ L_r)|=|\det L|,$$

قضیه ثابت می‌شود. □

تبدیل به‌توسط نگاشتهای غیرخطی

اکنون یك‌تعمیم قضیهٔ ۶.۴۵ را به‌نگاشتهای $C^۱$ غیرخطی به‌دست می‌آوریم. البته در این حالت‌لازم نیست که محتوای‌تصویر یك‌مجموعهٔ دلخواه مضرب ثابتی از محتوای مجموعهٔ مفروض باشد، بلکه ممکن است از یك نقطه به‌نقطهٔ دیگر تغییر کند. قضیهٔ ژاکوبی ایجاب می‌کند که وقتی K یك‌مکعب به‌اندازهٔ‌کافی‌کوچك و به‌مرکز x است، $c(\varphi(K))$ تقریباً برابر با $|J_\varphi(x)|c(K)$ باشد. این نتیجه برای اثبات قضیهٔ تغییر متغیر لازم است. برای سهولت عمل، درآغاز حالت خاص زیررا درنظر می‌گیریم.

۷.۴۵ لم. فرض‌کنید $K\subseteq\mathbf{R}^p$ مکعبی بسته به‌مرکز $\circ$، Ω مجموعه‌ای باز شامل K و $\psi:\Omega\to\mathbf{R}^p$ یك‌به‌یك و به‌ردهٔ $C^۱(\Omega)$ متعلق باشد. علاوه بر این فرض‌کنید که برای $x\in K$، $J_\psi(x)\neq\circ$ و

$$\|\psi(x)-x\|\leqslant\alpha\|x\|,\quad x\in K,\tag{۱.۴۵}$$

که در آن α درشرط $\circ<\alpha<۱/\sqrt{p}$ صدق می‌کند. دراین‌صورت

$$(۱-\alpha\sqrt{p})^p\leqslant\frac{c(\psi(K))}{c(K)}\leqslant(۱+\alpha\sqrt{p})^p.$$

برهان . از قضیهٔ ۴.۴۵ نتیجه می‌شود کـه $\psi(K)$ دارای محتواست و از نتیجهٔ ۵.۴۵ به‌دست می‌آید که $b(\psi(K))=\psi(b(K))$. اگرطول ضلع K، $2r$ باشد و $x\in b(K)$، آنگاه (طبق قضیهٔ ۱۰.۸) داریم $r\leqslant\|x\|\leqslant r\sqrt{p}$. نابرابری(۱.۴۵)ایجاب می‌کند که دوری $\psi(x)$ از $\psi(x)$ $x\in b(K)$ کمتر از $\alpha r\sqrt{p}$ یـا بـا آن برابر باشد. بنابراین مجموعهٔ فشردهٔ $\psi b(K))=b\psi(K)$ مکعب باز C_i به‌مرکز ۰ وطول ضلع $2(1-\alpha\sqrt{p})r$ را قطع نمی‌کند. اگر A مجموعهٔ تمام نقاط درونی $\psi(K)$ و B مجموعهٔ تمام نقاط‌بیرونی آن باشد، آنگاه A و B مجموعه‌های مجزا، باز وغیرتهی هستند واجتماعشان

$$\mathbf{R}^{p}\setminus b(\psi(K))$$

است. چون C_i در $\mathbf{R}^p$ همبنداست، باید یا $C_i\subseteq A$ ویا $C_i\subseteq B$. اما $0\in C_i\cap A$، لذا $C_i\subseteq A\subseteq\psi(K)$. خواننده می‌تواند بـا روشی‌مشابه نشان‌دهد که اگر $C_{\circ}$ مکعب بستهٔ به‌مرکز ۰ وطول ضلع $2(1+\alpha\sqrt{p})r$ باشد، آنگاه $\psi(K)\subseteq C_{\circ}$. اکنون‌نتیجهٔ مطلوب از این‌روابط به‌دست می‌آید. □

۸.۴۵ قضیهٔ ژاکوبی . فرض می‌کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز است و تابع $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^p$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق‌است ودر Ω یك‌به‌یك‌است، وبرای $x\in\Omega$، $J_\varphi(x)\neq 0$. همچنین فرض می‌کنیم‌که A دارای محتواست و $A^-\subseteq\Omega$. اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد، آنگاه عددی مانند $\gamma>0$ وجود دارد به‌قسمی‌که اگر K یك‌مکعب بستهٔ به‌مرکز $x\in A$ وطول ضلع کمتر از 2γ باشد، آنگاه

$$|J_\varphi(x)|(1-\varepsilon)^p\leqslant\frac{c(\varphi(K))}{c(K)}\leqslant|J_\varphi(x)|(1+\varepsilon)^p. \qquad (۲.۴۵)$$

برهان . عدد $\delta>0$ و Ω_1 را مانند اثبات لم ۱.۴۵ درنظر می‌گیریم. از

$$\det D\varphi(x)=J_\varphi(x)\neq 0$$

برای هر $x\in\Omega$، نتیجه می‌شود که $L_x=(D\varphi(x))^{-1}$ وجود دارد. از

$$1=\det(L_x\circ D\varphi(x))=(\det L_x)(\det D\varphi(x))$$

نتیجه می‌شود که

$$\det L_x=1/J_\varphi(x),\quad x\in\Omega.$$

ولی چون درایه‌های نمایش معمولی ماتریس L_x توابع پیوسته هستند، ازفشردگی Ω_1^- و

(۴.۲۱) نتیجه می‌شود که عددی مانند $M>0$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\|L_x\|_{pp}\leqslant M$ برای هر $x\in\Omega_1$.

اکنون فرض کنیم ε باشرط $0<\varepsilon<1$ داده‌شده‌باشد. چون نگاشت $x\to D\varphi(x)$ در Ω_1 پیوستهٔ یکنواخت‌است، عددی مانند β باشرط $0<\beta<\delta$ وجوددارد به‌قسمی‌که اگر $x_1, x_2\in\Omega_1$ و $\|x_1-x_2\|\leqslant\beta$، آنگاه $\|D\varphi(x_1)-D\varphi(x_2)\|_{pp}\leqslant\varepsilon/M\sqrt{p}$.
اکنون فرض‌کنیم $x\in A$ داده شده‌باشد، بنابراین اگر $\|z\|\leqslant\beta$، آنگاه x و $x+z$ به Ω_1 متعلق هستند. بنابراین از لم ۳.۴۱ نتیجه می‌شود که

$$\|\varphi(x+z)-\varphi(x)-D\varphi(x)(z)\|\leqslant\|z\|\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|D\varphi(x+tz)-D\varphi(x)\|_{pp}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{M\sqrt{p}}\|z\|. \qquad (۳.۴۵)$$

فرض‌کنید $x\in A$ وتابع $\psi(z)$ را برای $\|z\|\leqslant\beta$ به‌صورت زیر تعریف‌کنید:

$$\psi(z)=L_x[\varphi(x+z)-\varphi(x)].$$

چون $L_x=(D\varphi(x))^{-1}$، از نابرابری (۳.۴۵) نتیجه می‌شود که

$$\|\psi(z)-z\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}\|z\|,\quad \|z\|\leqslant\beta.$$

اکنون لم قبل‌را که‌درآن $\alpha=\varepsilon/\sqrt{p}$ به‌کار می‌بریم تا نتیجه بگیریم که‌برای هرمکعب بستهٔ K_1 به‌مرکز 0 وواقع درگوی باز به‌شعاع β داریم

$$(1-\varepsilon)^p\leqslant\frac{c(\psi(K_1))}{c(K_1)}\leqslant(1+\varepsilon)^p.$$

از تعریف ψ و قضیهٔ ۶.۴۵ نتیجه می‌شود که اگر $K=x+K_1$، آنگاه K یك مکعب بسته به‌مرکز x است به‌قسمی‌که $c(K)=c(K_1)$ و

$$c(\psi(K_1))=|\det L_x|\,c(\varphi(x+K_1)-\varphi(x))$$

$$=\frac{1}{|J_\varphi(x)|}c(\varphi(K)).$$

بنابراین اگر K یك‌مکعب بسته به‌مرکز $x\in A$ وطول‌ضلع کمتراز 2γ باشد (که در آن $\gamma=\beta\sqrt{p}$)، آنگاه نابرابری (۲.۴۵) برقرار است. □

تغییر متغیرها

اکنون قضیهٔ ژاکوبی را برای به‌دست آوردن قضیه‌ای مهم که یك تعمیم قضیهٔ تغییر متغیر ۱۲.۳۰ به $\mathbf{R}^p$ است، به‌کار می‌بریم. این قضیه می گوید، که اگر $\varphi:[\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ دارای مشتق پیوسته باشد و f در برد φ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'. \qquad (۴.۴۵)$$

قضیه‌ای که ثابت خواهیم کرد مربوط به‌نگاشت یك به‌یك φ است که در مجموعهٔ باز $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ تعریف شده است ومقادیرش در $\mathbf{R}^p$ است. فرض خواهیم کرد که $\varphi \in C^1(\Omega)$، ودترمینان ژاکوبی آن

$$J_\varphi(x) = \det[D_j \varphi_i(x)]$$

در Ω مخالف با صفراست. نشان‌خواهیم‌دادکه اگر A دارای‌محتوا باشد، و$A^- \subseteq \Omega$ و f در $\varphi(A)$ به $\mathbf{R}$ پیوسته وکراندار باشد، آنگاه $\varphi(A)$ دارای محتواست و

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi|. \qquad (۵.۴۵)$$

ملاحظه خواهد شدکه شرایط دراین‌حالت‌کمی ازحالت $p=1$ محدودکننده‌تر است. در حقیقت، در (۴.۴۵) فرض نمی‌کنیم که φ یك‌به‌یك باشد و یا این‌که برای $x \in [\alpha, \beta]$، $\varphi'(x) \neq 0$. اگر φ یك‌به‌یك باشد توجه‌داریم‌که نظیر (۵.۴۵) برای حالت $p=1$ دقیقاً عبارتست از

$$\int_A^B f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)|\varphi'|,$$

که درآن $A = \inf\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$ و $B = \sup\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$. البته، اگر

$$\varphi'(x) > 0 \text{ برای } \alpha \leqslant x \leqslant \beta،$$

آنگاه فرمول (۵.۴۵) به فرمول (۴.۴۵) خلاصه مـی‌شود، در صورتی که برای $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ داشته‌باشیم $\varphi'(x) < 0$، آنگاه فرمول (۵.۴۵) به‌صورت

$$\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(-\varphi')$$

درمی‌آیدکه این رابطه البته از (۴.۴۵) نیز نتیجه می‌شود. توضیح وجود این‌تفاوت این است کـه انتگرال در فـاصله‌های واقع در $\mathbf{R}$ «جهت‌دار» هستند، بدین‌معنی که برای دوعدد دلخواه u و v داریم

$$\int_u^v f = -\int_v^u f.$$

البته چنین جهتی برای انتگرالهای در $\mathbf{R}^p$ تعریف نشده است.

اثباتی که در اینجا ارائه می‌شود منسوب به ج.ت. شوارتس[1] است. این اثبات مقدماتی است، بدین‌مفهوم که هیچ‌یك ازقضایای نظریهٔ اندازه درآن به‌کار نمی‌رود. با این‌حال، استدلال آن ظریف و تعدادی ازخواص عمیقتر توابع پیوسته، مجموعه‌های فشرده و همبند، وخواص انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما قضیه‌ای که در اینجا ثابت می‌شود برای تمام حالات مهمی که رخ می‌دهدکافی نیست و بعداً صورتی قویتر از این قضیه را عرضه خواهیم کرد که J_φ می‌تواند صفر شود و $f\circ\varphi$ می‌تواند در یك مجموعهٔ با محتوای صفر ناپیوسته باشد.

۹.۴۵ قضیهٔ تغییر متغیرها. فرض‌کنیم $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز باشد و تابع $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^p$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق و در Ω یك به یك باشد و برای $x\in\Omega$، $J_\varphi(x)\neq 0$. همچنین فرض کنیم A دارای محتوا باشد، $A^-\subseteq\Omega$، و $f:\varphi(A)\to\mathbf{R}$ پیوسته وکراندار باشد، آنگاه

$$\int_{\varphi(A)} f=\int_A (f\circ\varphi)|J_\varphi|. \qquad (۵.۴۵)$$

برهان. از قضیهٔ ۴.۴۵ نتیجه می‌شودکه $\varphi(A)$ دارای محتواست. چون توابع زیر علامت انتگرال پیوسته هستند، نتیجه می‌گیریم که انتگرالهای در (۵.۴۵) وجود دارند و لذا کافی است تنها برابری آنها را نشان دهیم. با نوشتن $f=f^+-f^-$ که درآن

$$f^-=\tfrac{1}{2}(|f|-f) \quad \text{و} \quad f^+=\tfrac{1}{2}(f+|f|),$$

و با استفاده ازخاصیت خطی بودن انتگرال دیده می‌شودکه کافی است قضیه را در حالی که برای هر $y\in\varphi(A)$، $f(y)\geqslant 0$ اثبات کنیم.

اکنون Ω_1 را مجموعه‌ای که در لم ۱.۴۵ آمده است فرض می‌کنیم و می‌نویسیم

$$M_\varphi=\sup\{\|D\varphi(x)\|_{pp}:x\in\Omega_1\},$$

---

۱. ج. ت. شوارتس J. T. Schwartz (۱۹۳۰–) از دانشگاه نیویورك لیسانس و از دانشگاه ییل دکترا گرفته است وهم‌اکنون استاد انستیتوی تحقیقاتی کوران دانشگاه نیویورك است. اگرچه بیشتر به‌خاطر کارهایش در آنالیز تابعی معروف‌است ولی در معادلات‌دیفرانسیل، هندسه، زبانهای‌کامپیوتر وجنبه‌های مختلف ریاضیات در فیزیك و ریاضیات در اقتصاد نیز کارهای زیادی انجام داده است.

$$M_f = \sup\{f(y) : y \in \varphi(A)\},$$
$$M_J = \sup\{|J_\varphi(x)| : x \in A\}.$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد جز اینکه $1 > \varepsilon > 0$. همچنین فرض کنیم I حجره‌ای بسته، شامل A، و $\{K_i : i = 1, \dots, M\}$ یك افراز I باشد متشکل ازمکعبهای بسته که نقاط درونی مشترك ندارند و طول ضلعشان از 2γ کمتر است و γ مقدار ثابت در قضیهٔ ژاکوبی است. و نیز فرض کنیم مکعبها به‌صورت زیرشماره‌گذاری شده باشند: $K_1, \dots, K_m$ مکعبهایی باشند که کاملا در A واقع‌انـد، $K_{m+1}, \dots, K_n$ مکعبهایی باشند که شامل نقاطی از A هستند و بالاخره $K_{n+1}, \dots, K_M$ مکعبهای کاملاً واقع در متمم A باشند. چون A دارای محتواست می‌توان فرض کرد که افراز به اندازه‌ای ظریف انتخاب شده است که داریم

(یك)
$$c(A) \leqslant \sum_{i=1}^{m} c(K_i) + \varepsilon \quad , \quad \sum_{i=m+1}^{n} c(K_i) < \varepsilon$$

می‌نویسیم $B = K_1 \cup \dots \cup K_m$، پس $B \subseteq A$. چون $c(A \setminus B) = c(A) - c(B) < \varepsilon$؛ داریم

(دو)
$$\left| \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi)|J_\varphi| \right|$$
$$= \left| \int_{A \setminus B} (f \circ \varphi)|J_\varphi| \right| \leqslant M_f M_J c(A \setminus B) \leqslant [M_f M_J]\varepsilon.$$

از لم ۱۰۴۵ نتیجه می‌شود که $c(\varphi(A \setminus B)) \leqslant (\sqrt{p} M_\varphi)^p \varepsilon$، بنابراین

(سه)
$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| = \left| \int_{\varphi(A \setminus B)} f \right| \leqslant [M_f (\sqrt{p} M_\varphi)^p]\varepsilon.$$

اگر برای $i = 1, \dots, m$، x_i مرکز K_i باشد، آنگاه از قضیهٔ ژاکوبی نتیجه می‌شود که

$$|J_\varphi(x_i)|(1 - \varepsilon)^p \leqslant \frac{c(\varphi(K_i))}{c(K_i)} \leqslant |J_\varphi(x_i)|(1 + \varepsilon)^p.$$

اکنون چون $1 > \varepsilon > 0$، دیده‌ایم که $1 - 2^p\varepsilon \leqslant (1 - \varepsilon)^p$ و $(1 + \varepsilon)^p < 1 + 2^p\varepsilon$، بنابراین این نابرابری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

(چهار)
$$|c(\varphi(K_i)) - |J_\varphi(x_i)| c(K_i)| \leqslant [c(K_i) M_J 2^p]\varepsilon.$$

اینك به دلیل پیوستگی توابع زیر علامت انتگرال در مجموعهٔ فشردهٔ B، نتیجه می‌شود که می‌توانیم فرض کنیم برای هرنقطهٔ $y_i \in K_i$ داریم

(پنج)
$$\left| \int_B (f \circ \varphi)|J_\varphi| - \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) |J_\varphi(x_i)| c(K_i) \right| < \varepsilon c(B),$$

زیرا در صورت لزوم، می‌توان مکعبهای $K_1, \ldots, K_m$ را به مکعبهای کوچکتری تقسیم کرد. (ر. ك. تمرین ۴۳.ظ.)

چون φ یك به‌یك است، دو مجموعه از دستهٔ $\{\varphi(K_i) : i = 1, \ldots, m\}$ حداکثر در یك مجموعه بـه‌صورت $\varphi(K_i \cap K_j)$ کـه دارای محتوای صفـر است، یکدیگر را قطع می‌کنند؛ چـرا که $c(K_i \cap K_j) = 0$. همچنین، چـون $\varphi(K_i)$ دارای محتواست، f در $\varphi(K_i)$ انتگرال‌پذیر است، بنابراین از قضیهٔ ۹.۴۴ (ب) نتیجه می‌شود که

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi(K_i)} f.$$

اکنون چون K_i همبنداست، $\varphi(K_i)$ نیز همبنداست. چون f در $\varphi(K_i)$ پیوسته‌وکراندار است، از قضیهٔ مقدار میانگین ۱۱.۴۴ نتیجه می‌شود که نقطه‌ای مانند $p_i \in \varphi(K_i)$ وجود دارد به قسمی که

$$\int_{\varphi(K_i)} f = f(\bar{p}_i) c(\varphi(K_i)), \quad i = 1, \ldots, m.$$

چون $p_i \in \varphi(K_i)$، برای $i = 1, \ldots, m$، نقطهٔ یکتایی مانند $y_i \in K_i$ وجود دارد به قسمی که $p_i = \varphi(y_i)$. بنابراین داریم

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) c(\varphi(K_i)). \tag{شش}$$

اما چون $(f \circ \varphi)(y_i) \geqslant 0$، از (چهار) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) c(\varphi(K_i)) - \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) |J_\varphi(x_i)| c(K_i) \right| \\
&\qquad \leqslant \left[M_J 2^p \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) c(K_i) \right] \varepsilon \\
&\qquad \leqslant \left[M_J M_f 2^p \sum_{i=1}^{m} c(K_i) \right] \varepsilon \leqslant [M_J M_f 2^p c(A)] \varepsilon.
\end{aligned}$$

هرگاه این رابطهٔ اخیر را با (پنج) و (شش) ترکیب کنیم، داریم

$$\left| \int_{\varphi(B)} f = \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \leqslant (1 + M_J M_f 2^p) c(A) \varepsilon. \tag{هفت}$$

از ترکیب (هفت) با (دو) و (سه) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \\
&\qquad \leqslant [M_f (\sqrt{p} M_\varphi)^p + (1 + M_J M_f 2^p) c(A) + M_f M_J] \varepsilon.
\end{aligned}$$

چون ε عددی دلخواه بین صفر ویك است، معادلهٔ (۵.۴۵) برقرار است. □

کاربردها

مورد استفادهٔ قضیهٔ تغییر متغیرها درحالت $p>۱$ معمولاً باکاربرد قضیهٔ نظیر در حالت $p=۱$ تفاوت دارد. برای مثال، برای محاسبهٔ

$$\int_۰^۱ x(۱+x^۲)^{۱/۲}dx$$

معمولاً توجه می‌کنیم که اگر $\varphi(x)=۱+x^۲$ را به‌کار بریم، آنگاه $\varphi'(x)=۲x$، بنابراین تابع زیر علامت انتگرال به صورت $\frac{۱}{۲}\varphi(x))^{۱/۲}\varphi'(x)$ است و

$$\int_۰^۱ x(۱+x^۲)^{۱/۲}dx=\frac{۱}{۲}\ \frac{۲}{۳}(\varphi(x))^{۳/۲}\Big|_{x=۰}^{x=۱}$$

$$=\frac{۱}{۳}(۱+x^۲)^{۳/۲}\Big|_{x=۰}^{x=۱}=\frac{۱}{۳}(۲^{۳/۲}-۱).$$

در نتیجه انتگرال‌گیری بدین ترتیب انجام می‌شود که تحقیق کنیم تابع زیر علامت‌انتگرال به صورت یك ترکیب تابعی و φ است که در مشتق φ ضرب شده است. اما این راه را معمولاً برای محاسبهٔ انتگرالهایی که بیش از یك متغیردارند نمی‌توان به‌کاربرد مگراین‌که جملهٔ ژاکوبی یا ثابت یا خیلی ساده باشد. برای مثال، انتگرال به صورت

$$\iint_A f(x+۲y,\ x-۳y)d(x,y)$$

را می‌توان با تبدیل خطی $\varphi(x,y)=(x+۲y,\ ۲x-۳y)$ به ترتیب زیر محاسبه‌کرد. در اینجا

$$J_\varphi(x,y)=\det\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & -۳\end{bmatrix}=-۳-۴=-۷$$

و بنابراین داریم

$$\iint_A f(x+۲y,۲x-۳y)d(x,y)=\frac{۱}{۷}\iint_{\varphi(A)} f(u,v)d(u,v).$$

محاسبهٔ انتگرال طرف دوم ساده‌تر است اگر $f(u,v)$ ساده‌تر باشد [برای مثال، هرگاه

$[f(u,v)=g(u)h(v)$، یا اگر $\varphi(A)$ ساده‌باشد (برای مثال، اگر این مجموعه یك حجره باشد). در غیر این صورت ممکن است تبدیل متغیرها حل مسئله را ساده نکند.

معمولاً این قضیه را بیشتر در محاسبهٔ انتگرال چندگانه $\int_D f$ بدین ترتیب به‌کار می‌برندکه تحقیق می کنند مجموعـهٔ D تصویر یك مجموعهٔ ساده‌تـر A (مثلاً یك حجره) تحت یك نگاشت مناسب φ است.

۱۰.۴۵ چند مثال. (الف) فرض کنیم D مستطیل به‌رئوس $(۲,۲),(۱,۳),(-۱,۱)$، $(۰,۰)$ باشد. یعنی D ناحیه‌ای باشدکه با خطوط زیر محدود شده است.

$$y=x,\ \ y=-x+۴,\ \ y=x+۲,\ \ y=-x.$$

اگر بنویسیم $u=y-x$ و $v=y+x$، این خطوط به‌صورت زیرنمایش داده می‌شوند:

$$u=۰,\ \ v=۴,\ \ u=۲,\ \ v=۰.$$

بنابراین، اگر φ نگاشت $\varphi(u,v)=(x,y)$ باشد، آنگاه φ حجرهٔ $A=[۰,۲]\times[۰,۴]$ را در D می‌نگارد. به دست‌آوردن روابط زیر را به خواننده واگذار می‌کنیم:

$$\iint_D f(x,y)d(x,y)=\iint_A f[\tfrac{۱}{۲}(v-u),\tfrac{۱}{۲}(u+v)]\tfrac{۱}{۲}d(u,v)$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_۰^۴\left\{\int_۰^۲ f[\tfrac{۱}{۲}(v-u),\tfrac{۱}{۲}(u+v)]du\right\}dv.$$

(ب) فرض‌کنید $D\subseteq\mathbf{R}^۲$ مجموعهٔ نقاط زیر باشد:

$$D=\{(u,v):۱\leqslant u^۲-v^۲\leqslant ۹,\ \ ۱\leqslant uv\leqslant ۴\};$$

بنابراین D به‌چهارهذلولی محدود شده است. اگر تابع $\psi:(u,v)\mapsto(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف‌کنیم:

$$x=u^۲-v^۲,\ \ y=uv,$$

واضح است‌که ψ این هذلولیهای واقع در صفحه (u,v) را بـرخطوط صفحهٔ (x,y) بـه معادلات $x=۱,x=۹\ ,y=۱,y=۴$ مـی‌نگارد. اگـرچـه ψ در تمام $\mathbf{R}^۲$ یك بـه‌یك نیست، ولـی در مجموعهٔ $Q=\{(u,v):u>۰,v>۰\}$ یـك به‌یـك است و $\psi(Q)=\{(x,y):x\in\mathbf{R},y>۰\}$. علاوه براین، $J_\psi(u,v)=۲(u^۲+v^۲)$.

بنابراین تابع φ از $\{(x,y):x\in\mathbf{R},y>۰\}$ به $Q\subseteq\mathbf{R}^۲$ را به صورت وارون ψ تعریف می‌کنیم. ازروابط بالاآشکار است‌که φ خطهای $x=۱,\ x=۹,\ y=۱,y=۴$ را بترتیب بر هذلولیهای

$$u^2-v^2=1,\ u^2-v^2=9,\ uv=1,\ uv=4,$$

می‌نگارد، و مجموعهٔ D تصویر حجرهٔ $A=[1,9]\times[1,4]$ به وسیلهٔ φ است. یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که φ به صورت زیر است: $\varphi(x,y)=(u,v)$ که در آن

$$u=\left[\frac{x+(x^2+4y^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2},\quad v=\left[\frac{-x+(x^2+4y^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2}. \qquad (6.45)$$

از این نتیجه می‌شود که $u^2+v^2=(x^2+4y^2)^{1/2}$ و

$$J_\varphi(x,y)=(1/2)(x^2+4y^2)^{-1/2}.$$

[این رابطه از اتحاد $(u^2+v^2)^2=(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=x^2+4y^2$ نیز به دست می‌آید.] بنا براین داریم

$$\iint_D f(u,v)d(u,v)=\iint_A \frac{f(u(x,y),v(x,y))}{2\sqrt{x^2+4y^2}}d(x,y),$$

که در آن $A=[1,9]\times[1,4]$، و $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (۶.۴۵) ارائه شده‌اند.

مختصات قطبی و کروی

اغلب مناسب است که نقاط درصفحهٔ $\mathbf{R}^2$ را با «مختصات قطبی» آنها مشخص کنیم. معمولاً، درصفحه هم مختصات دکارتی (متشکل ازخطوط افقی وعمودی) وهم دستگاه قطبی (متشکل از پرتوهای گذرنده از مبدأ و دوایر به مرکزمبدأ) را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، مختصات قطبی را می‌توان نگاشتی در $\mathbf{R}^2 \ni (r,\theta)$ به $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر درنظر گرفت

$$(x,y)=\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta). \qquad (7.45)$$

هرجفت ازاعداد $(r,\theta)\in\mathbf{R}^2$ رابه‌قسمی که $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$، **مختصات قطبی** نقطهٔ (x,y) گوییم. معمولاً فرض می‌کنیم $r\geqslant 0$؛ حتی با این فرض هر نقطهٔ (x,y) در $\mathbf{R}^2$ دارای تعداد بی‌پایانی مجموعهٔ مختصات قطبی است.

برای مثال، اگر $(x,y)=(0,0)$، آنگاه $(0,\theta)$ یك مجموعهٔ مختصات قطبی نقطهٔ $(0,0)$ برای هر $\theta\in\mathbf{R}$ است، اگر $(x,y)\neq(0,0)$ و (r,θ) یك مجموعهٔ مختصات قطبی برای (x,y) باشد، آنگاه به ازای هر $n\in Z$ جفت $(r,\theta+n2\pi)$ نیزیك مجموعهٔ مختصات قطبی برای (x,y) است.

اگر $(x,y)\neq(0,0)$ و $r>0$ و $0\leqslant\theta<2\pi$، آنگاه جفت یکتای (r,θ) به **مجموعهٔ اصلی مختصات قطبی نقطهٔ** (x,y) موسوم است. بنا براین تابع φ نگاشتی یك به‌یك در $(0,+\infty)\times[0,2\pi)$ روی $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ است، همچنین φ نگاشتی در

$[0,2\pi)\times[0,+\infty)$ روی $\mathbf{R}^2$ است اما یك‌به‌یك نیست، چراکه اگر $0\leqslant\theta<2\pi$، همهٔ نقاط $(0,\theta)$ را به نقطهٔ $(0,0)$ می‌فرستد. همچنین توجه کنید که ژاکوبی $J_\varphi(r,\theta)$ برابر است با:

$$J_\varphi(r,\theta)=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} \tag{۸.۴۵}$$

$$=r(\cos\theta)^2+r(\sin\theta)^2=r,$$

و برای $r=0$ صفر می‌شود.

آشکار است که φ، حجرهٔ $A=[0,1]\times[0,2\pi]$ از صفحهٔ (r,θ) را بر گردهٔ یکهٔ $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ می‌نگارد ولی چون φ در A یك به یك نیست و چون J_φ برای $r=0$ صفر می‌شود، نمی‌توان قضیهٔ تغییر متغیرهای ۹.۴۵ را برای تبدیل انتگرال‌گیری در D به انتگرال‌گیری در A به‌کار برد.

در مورد مختصات کروی در $\mathbf{R}^3$ با اشکالات مشابهی روبرو هستیم. به خاطر داریم که مختصات کروی با نگاشت $\Phi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=(r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi). \tag{۹.۴۵}$$

هرسه تایی $(r,\theta,\varphi)\in\mathbf{R}^3$ به قسمی که $(x,y,z)=\Phi(r,\theta,\varphi)$ به‌مجموعهٔ **مختصات کروی** نقطهٔ (x,y,z) موسوم است. معمولاً فرض می‌کنیم $r\geqslant 0$، که حتی با این فرض هر نقطه در $\mathbf{R}^3$ دارای تعداد بی‌پایانی مجموعهٔ مختصات کروی است.

برای مثال، اگر $(x,y,z)=(0,0,0)$، آنگاه برای این نقطه، $(0,\theta,\varphi)$ یك مجموعهٔ مختصات کروی است برای هر $\varphi\in\mathbf{R}$ و هر $\theta\in\mathbf{R}$. اگر $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ و (r,θ,φ) یك مجموعهٔ مختصات کروی برای (x,y,z) باشد، آنگاه به‌ازای هر $m,n\in Z$، سه‌تاییهای $(r,\ \theta+2m\pi,\ \varphi+2n\pi)$ و $(r,\theta+(2m+1)\pi,-\varphi+2n\pi)$ مجموعه‌های مختصات کروی برای این نقطه می‌باشند.

اگر (x,y,z) به قسمی باشد که $(x,y)\neq(0,0)$، آنگاه سه‌تایی یکتای (r,θ,φ) با شرایط $0<\varphi<\pi$، $0\leqslant\theta<2\pi$، $r>0$ بــه **مجموعهٔ اصلی مختصات کروی نقطهٔ** (x,y,z) موسوم است. بنابراین تابع Φ یك نگاشت یك به‌یك از

$$(0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\pi)$$

روی $\{(0,0,z):z\in\mathbf{R}\}\setminus\mathbf{R}^3$ است. تحدید Φ به $[0,\pi]\times[0,2\pi)\times[0,+\infty)$ یك نگاشت پوشا روی تمام $\mathbf{R}^3$ است، ولی یك به‌یك نیست، چراکه تمام نقاط، $(0,\theta,\varphi)$ را بر نقطهٔ $(0,0,0)$ می‌نگارد و اگر φ برابر 0 یا π باشد، آنگاه تمام نقاط (r,θ,Φ) بر

$(\circ,\circ,r\cos\varphi)$ نگاشته می‌شوند. همچنین توجه داشته باشید که

$$J_\varphi(r,\theta,\varphi)=\det\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & \circ & -r\sin\varphi\end{bmatrix} \qquad (۱۰.۴۵)$$

$$=-r^{2}\sin\varphi.$$

بسهولت ملاحظه‌می‌شود که Φحجرهٔ $A=[\circ,1]\times[\circ,2\pi]\times[\circ,\pi]$ درفضای(r,θ,φ) را برگوی یکهٔ $D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ می‌نگارد، ولی چون Φ در A یك به‌یك نیست و J_Φ وقتی $r^2\sin\varphi=\circ$، صفر می‌شود، نمی‌توان قضیهٔ تغییر متغیرهای ۹.۴۵ را برای تبدیل انتگرال گیری در D به انتگرال گیری در A به‌کار برد.

اکنون به ذکر قضیه‌ای می‌پردازیم که هم اشکالات مذکور در مورد استعمال مختصات‌قطبی و کروی را رفع می‌کند وهم معمولاً درتبدیلات دیگری که نقاط غیر عادی دارند مفید است. توجه خواهید کرد که در این قضیه لزومی به یك به‌یك بودن φ در مجموعهٔ A نیست، اگرچه در A° یك به‌یك است.

۱۱.۴۵ قضیهٔ تغییر متغیرها (صورت قوی). اگر فرضهای زیر برقرار باشند: (۱) مجموعهٔ $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز و $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^p$ به ردهٔ $C^1(\Omega)$متعلق باشد، (۲) $\Omega_\circ$ یك مجموعهٔ باز با محتوا باشد به‌قسمی‌که $\Omega_\circ^-\subseteq\Omega$ وφ در$\Omega_\circ$ یك به یك باشد، (۳) $E\subseteq\Omega$ یك مجموعهٔ فشرده بامحتوای صفر باشد به‌قسمی‌که $J_\varphi(x)\neq\circ$ برای هر $x\in\Omega_\circ\setminus E$، و (۴) $A\subseteq\Omega$ دارای محتوا باشد، $A^-\subseteq\Omega_\circ^-$، $f:\varphi(A)\to\mathbf{R}$ کراندار، و f در $\varphi(A\setminus E)$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{\varphi(A)}f=\int_A(f\circ\varphi)|J_\varphi|. \qquad (۵.۴۵)$$

برهان. چون $b(A)$ و$b(\Omega_\circ)$ فشرده ودارای محتوای صفر هستند، می‌توانیم فرض کنیم که این مجموعه‌ها در E واقع هستند: بنابراین $A^\circ\setminus E\subseteq\Omega_\circ\setminus E$. چون A و E دارای‌محتوا هستند، مجموعهٔ $A\setminus E$ دارای‌محتواست. علاوه براین چون E بسته است، $(A\setminus E)^\circ=A^\circ\setminus E$، بنابراین $J_\varphi(x)\neq\circ$ برای $x\in(A\setminus E)^\circ$. بدین ترتیب از به کاربردن قضیهٔ ۴.۴۵ در مورد $A\setminus E$ نتیجه می‌گیریم که $\varphi(A\setminus E)$ دارای محتواست. از قضیهٔ ۲.۴۵ نتیجه می‌شود که $\varphi(E)$ دارای محتوای صفر است، از

$$\varphi(A)=\varphi((A\setminus E)\cup(A\cap E))=\varphi(A\setminus E)\cup\varphi(A\cap E)$$

نتیجه می‌شود که $\varphi(A)$ دارای محتواست. ولی چون f در $\varphi(A)$کراندارو در $\varphi(A)$ بجز در زیر مجموعه‌ای از $\varphi(E)$ پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که f در $\varphi(A)$ انتگرال-

پذیر است. علاوه بر این، چون $f\circ\varphi$ بجز در زیر مجموعه‌ای از E پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ در A انتگرال پذیر است. اثبات قضیه کامل می‌شود اگر نشان دهیم این انتگرالها، با یکدیگر برابرند.

اکنون لم ۱.۴۵ را درمورد E به‌کار می‌بریم تا مجموعهٔ بازکرانداری مانند Ω_1 باشرط $E\subseteq\Omega_1\subseteq\Omega_1^-\subseteq\Omega$ وثابتی‌مانند $M_1>0$ به‌دست‌آوریم با این خاصیت که اگر E دراجتماع یك تعدادباپایانی ازمکعبهای بسته در Ω_1 با محتوای حداکثر $\alpha>0$ واقع باشد، آنگاه $\varphi(E)$ دراجتماع باپایان مکعبهای بستهٔ نظیر بامحتوای‌حداکثر $(\sqrt{p}M_1)^p\alpha$ قرار گیرد.

اکنون فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و E را در اجتماع با پایانی مانند U_ε از مکعبهای بازدر Ω_1، با شرط $c(U_\varepsilon)<\varepsilon$ قرارمی‌دهیم به قسمی که W_ε، اجتماع باپایان بستارهای مکعبهای واقع در U_ε، نیز در Ω_1 واقع باشد. آنگاه $c(W_\varepsilon)<\varepsilon$، و از لم ۱.۴۵ نتیجه می‌شود که $c(\varphi(U_\varepsilon))\leqslant c(\varphi(W_\varepsilon))\leqslant(\sqrt{p}M_1)^p\varepsilon$. اکنون می‌نویسیم $B=A\setminus U_\varepsilon$، و در نتیجه B دارای محتواست. اکنون چون U_ε باز و شامل $b(\Omega_0)$ و E است، نتیجه می‌گیریم که $B^-\subseteq\Omega_0\setminus E$. حال قضیهٔ تغییرمتغیرهای ۹.۴۵ را درمورد $B,\Omega_0\setminus E$، به‌جای A,Ω، به‌کار می‌بریم، به دست می‌آید:

$$\int_{\varphi(B)} f=\int_B (f\circ\varphi)|J_\varphi|.$$

اکنون بسهولت دیده می‌شود که $\varphi(A)\setminus\varphi(B)\subseteq\varphi(A\cap U_\varepsilon)$ و لذا

$$\left|\int_{\varphi(A)} f-\int_{\varphi(B)} f\right|\leqslant\int_{\varphi(A\cap U_\varepsilon)}|f|\leqslant M_f c(\varphi(A\cap U_\varepsilon))$$
$$\leqslant(\sqrt{p}M_1)^p M_f\varepsilon.$$

به طریق مشابه داریم

$$\left|\int_A (f\circ\varphi)|J_\varphi|-\int_B (f\circ\varphi)|J_\varphi|\right|\leqslant\int_{A\cap U_\varepsilon}|(f\circ\varphi)|J_\varphi||$$
$$\leqslant M_f M_J c(A\cap U_\varepsilon)\leqslant M_f M_J\varepsilon.$$

در نتیجه

$$\left|\int_{\varphi(A)} f-\int_A (f\circ\varphi)|J_\varphi|\right|\leqslant[(\sqrt{p}M_1)^p M_f+M_f M_J]\varepsilon.$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است. نتیجه حاصل است. □

برای مختصات قطبی کافی است Ω_0 را یك مجموعهٔ با محتوای واقع در $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ انتخاب کنیم. برای مختصات کروی، مجموعهٔ Ω_0 را یك مجموعهٔ باز بامحتوای واقع در $(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$ انتخاب می کنیم.

تمرین

۴۵. الف. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ یک‌مجموعهٔ باز و $f:\Omega \to \mathbf{R}^q$ در Ω در شرط لیپشیتس صدق کند، یعنی $M > 0$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که برای هر $x, y \in \Omega$، $\|f(x)-f(y)\| \leqslant M\|x-y\|$. اگر $K \subseteq \Omega$ مکعبی به طول ضلع $s > 0$ باشد، نشان دهیدکه $f(K)$ در مکعبی به طول ضلع $M\sqrt{p}s$ واقع است. نشان دهیدکه اگر $A \subseteq \Omega$ یک‌مجموعهٔ فشرده با محتوای صفر باشد، آنگاه $f(A)$ دارای محتوای صفر است، واگر $B \subseteq \Omega$ یک‌مجموعهٔ فشردهٔ با محتواباشد، آنگاه $f(B)$ دارای محتوا است.

۴۵.ب. نگاشت مختصات قطبی $(x,y)=\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ راکه‌در $\mathbf{R}^2$ تعریف شده‌است در نظر بگیرید و به‌رفتارش‌در مجموعهٔ $A=[0, 1]\times[0, 2\pi]$ توجه کنید. قضیهٔ ۴.۴۵ را برای به دست‌آوردن این‌که تصویر $D=\varphi(A)$، یعنی گردهٔ یکهٔ $D=\{(x, y):x^2+y^2\leqslant 1\}$، با محتواست به‌کار برید. (البته قبلاً دیده‌ایم که گرده محتوا دارد) . بررسی‌کنید چگونه φ کرانهٔ A را می‌نگارد. نشان‌دهیدکه کرانهٔ D تصویر تنها یك ضلع A تحت φ است، وسه‌ضلع دیگر A درداخل D نگاشته می‌شوند.

۴۵. پ. نگاشت $(x,y)=\psi(u, v)=(\sin u, \sin v)$که در $\mathbf{R}^2$ تعریف شده است را درنظر گیرید. تصویر کرانهٔ $B=[-3\pi/4, 3\pi/4]\times[-3\pi/4, 3\pi/4]$ را تحت ψ، وکرانهٔ$\psi(B)$ را مشخص کنید . نشان‌دهیدکه بیشترین نقاط کرانه‌ای $\psi(B)$ ولی نه‌تمام نقاط آن، تصویرهای نقاط درونی‌می‌باشند.

۴۵.ت. می‌دانیم که سطح گردهٔ مستدیر $\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ برابر با π است، سطح گرده‌های بیضوی زیر را بیابید:

(الف)
$$\left\{(x, y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1\right\}$$

(ب)
$$\{(x,y):2x^2+2xy+5y^2\leqslant 1\}$$

(راهنمایی: $(2x^2+2xy+5y^2=(x+2y)^2+(x-y^2)$

۴۵.ث. مجموعهٔ $B=\{(x,y):0\leqslant x, 0\leqslant y , 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$ را در نظر بگیرید. فرض‌کنید $u=x+y, v=y$؛ بدین‌ترتیب B، تصویر ذوزنقهٔ

$$C=\{(u, v):1\leqslant u\leqslant 2, 0\leqslant v\leqslant u\}$$

تحت نگاشت $(x, y)=\varphi(u, v)=(u-v , v)$ است. نشان‌دهیدکه φ درتمام $\mathbf{R}^2$ یك‌به‌یك است و $J_\varphi(u,v)=1$. نتیجه بگیریدکه

$$\iint_B (x+y)d(x , y) = \iint_C u\, d(u, v)=\frac{7}{3}.$$

۴۵.ج. مجموعهٔ $B=\{(u,v):0\leqslant u+v\leqslant 2, 0\leqslant v-u\leqslant 2\}$ مفروض است. با استفاده از تبدیل $(x,y)\mapsto(u,v)=(x-y, x+y)$ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\iint_B (v^2-u^2)e^{(u^2+v^2)/2}\,d(u,v).$$

۴۵.چ. انتگرال مکرر

$$\int_1^3\left\{\int_{x^2}^{x^2+1} xy\,dy\right\}dx$$

را مستقیماً وسپس با استفاده از تبدیل $(x,y)\mapsto(u,v)=(x, y-x^2)$ حساب کنید.

۴۵.ح. مساحت سطح ناحیهٔ محدود به‌خمهای

$$xy=1,\quad xy=2,\quad y=x^2,\quad y=2x^2$$

را به‌وسیلهٔ تغییر متغیر مناسبی به‌دست‌آورید.

۴۵.خ. تابع $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ به‌صورت

$$(u,v)=\psi(x,y)=(x^2-y^2, x^2+y^2)$$

تعریف شده است. توجه‌کنید که تصویر وارون خط $u=a>0$ تحت ψ یك‌هذلولی و تصویر وارون خط $v=c>0$ تحت ψ یك‌دایره است. نشان‌دهیدکه ψ در $\mathbf{R}^2$ یك‌به‌یك نیست، ولی تحدیدآن به $Q=\{(x,y):x>0, y>0\}$ یك‌نگاشت یك‌به‌یك روی

$$\{(u,v): v>|u|\}$$

است. فرض کنید φ وارون تحدید $\psi|Q$ باشد، نشان‌دهیدکه اگر $0<a<b<c<d$، آنگاه φ مستطیل $A=[a,b]\times[c,d]$ را برناحیهٔ

$$\varphi(A)=\{(x,y):a\leqslant x^2-y^2\leqslant b, c\leqslant x^2+y^2\leqslant d\}$$

می‌نگارد. نشان‌دهیدکه اگر $f:Q\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\,d(x,y)=$$

$$=\iint_A f\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^{1/2}, \left(\frac{v-u}{2}\right)^{1/2}\right)\frac{1}{4(v^2-u^2)^{1/2}}\,d(u,v),$$

ودر حالت خاص $f(x,y)=xy$

$$\iint_{\varphi(A)} xy\,d(x,\ y)=\iint_{A}\frac{1}{8}d(u,v)=\frac{1}{8}(b-a)(d-c).$$

۴۵.د. تابع $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ در تمرین قبل را درنظر بگیرید. نشان دهید که ψ ناحیهٔ مثلثی $\Delta=\{(x,\ y):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$ را برناحیهٔ مثلثی زیر می‌نگارد:

$$\Delta_1=\psi(\Delta)=\{(u,v):0\leqslant u\leqslant 1,\ u\leqslant v\leqslant 2-u\}.$$

در اینجا $J_\varphi(x,\ y)=8xy$. اگر $\Omega_0=(0,2)\times(0,2)$ و f در Δ_1 پیوسته باشد، ازقضیهٔ ۱۱.۴۵ نتیجه بگیرید که

$$\iint_{\Delta_1} f(u,\ v)d(u,\ v)=\iint_{\Delta} f\circ\psi(x,\ y)|J_\psi(x,\ y)|d(x,y).$$

درحالت خاص نشان‌دهید که

$$\iint_{\Delta}(x^2-y^2)\ (x^2+y^2)^{1/2}xy\,d(x,y)=\frac{1}{8}\iint_{\Delta_1}uv^{1/2}d(u,\ v).$$

۴۵ . د. فرض کنید $\alpha<\beta$ به $[0,\ 2\pi]$ متعلق باشند، $h:[\alpha,\ \beta]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد وبرای $\theta\in[\alpha,\ \beta]$، $h(\theta)\geqslant 0$. فرض کنید

$$H=\{(\theta,r)\in\mathbf{R}^2:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant h(\theta)\}$$

مجموعهٔ عرض h باشد (ر. ك. تمرین ۴۴ . س.)، بدین ترتیب H دارای محتواست. **خم قطبی** که h تولید می‌کند، خمی است در $\mathbf{R}^2$ که به‌صورت

$$\theta\to(h(\theta)\cos\theta\ \ h(\theta)\sin\theta)$$

تعریف می‌شود و **مجموعهٔ عرض قطبی** این‌خم عبارت است از

$$H_1=\{r\cos\theta,\ r\sin\theta)\in\mathbf{R}^2:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant h(\theta)\}.$$

توجه‌کنید که H_1 تصویر H تحت نگاشت قطبی (وارون) $\varphi_1(\theta,r)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ است وبا استفاده ازقضیهٔ ۱۱.۴۵ نشان‌دهید که

$$c(H_1)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\theta))^2d\theta\ .$$

۴۵.ر. فرض‌کنید $a<b$ و $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد و برای $x\in[a,\ b]$، $f(x)\geqslant 0$. مانندتمرین۴۴.س،فرض کنید $S_f=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ **مجموعهٔ عرض** f باشد. همچنین فرض‌کنید $\rho_x:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ به‌صورت

$$\rho_x(x,y,\ \theta)=(x,\ y\cos\theta,y\sin\theta)$$

تعریف شده‌باشد و X_f تصویر $S_f\times[\circ,\text{۲}\pi]$ تحت ρ_x باشد (مجموعهٔ X_f را «جسم دوار حاصل از دوران مجموعهٔ عرض S_f در حول محور xها می‌نامند»). با استفاده از قضیهٔ ۱۱.۴۵ نشان‌دهید که

$$c(X_f)=\pi\int_a^b(f(x))^{۲}dx.$$

۴۵.ز. فرض‌کنید $\circ\leqslant a<b$ ، $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ و S_f مجموعه‌ای است که در تمرین قبل تعریف شده. همچنین فرض‌کنید که $\rho_y:\mathbf{R}^{۳}\to\mathbf{R}^{۳}$ به‌صورت

$$\rho_y(x,y,\theta)=(x\cos\theta,\ y,x\sin\theta)$$

تعریف شده‌باشد و Y_f تصویر مجموعهٔ $S_f\times[\circ,\ \text{۲}\pi]$ تحت ρ_y باشد (مجموعهٔ Y_f به «جسم دوار حاصل ازدوران مجموعهٔ عرض S_f درحول محور yها نامیده می‌شود»). با استفاده ازقضیهٔ ۱۱.۴۵ نشان‌دهید که

$$c(Y_f)=\text{۲}\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

۴۵.ژ. (الف) ازراه تغییر به‌مختصات قطبی، نشان‌دهید که

$$\iint_{C_R}e^{-(x^{۲}+y^{۲})}\ d(x\ ,y)\ =\ \frac{\pi}{۴}(\text{۱}-e^{-R^{۲}}),$$

که درآن $C_R=\{((x,\ y):\circ\leqslant x,\circ\leqslant y,\ x^{۲}+y^{۲}\leqslant R^{۲}\}$.

(ب) اگر $B_L=\{(x,\ y):\circ\leqslant x\leqslant L,\ \circ\leqslant y\leqslant L\}$، نشان‌دهید که

$$\iint_{B_L}e^{-(x^{۲}+y^{۲})}d(x,\ y)\ =\Big(\int_\circ^L e^{-x^{۲}}\,dx\Big)^{۲}.$$

(پ) بااستفاده از $C_R\subseteq B_R\subseteq C_{R\sqrt{۲}}$، نشان‌دهید که

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\int_\circ^R e^{-x^{۲}}\,dx\Big)^{۲}=\frac{\pi}{۴},$$

که از آن‌نتیجه می‌شود که $\int_\circ^{+\infty}e^{-x^{۲}}dx=(\text{۱}/\text{۲})\sqrt{\pi}$.

۴۵ . س . فرض‌کنید $B=\{(x,\ y):\text{۴}x^{۲}+\text{۹}y^{۲}\leqslant\text{۴}\}$. با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب انتگرال زیررا حساب‌کنید:

$$\iint_B e^{-(\text{۴}x^{۲}+\text{۹}y^{۲})}\ \ d(x\ ,y)\ =\frac{\pi}{۶}(\text{۱}-e^{-۴}).$$

۴۵.ش. تحقیق کنید که مجموعهٔ

$$\left\{(x,y,z): 0\leqslant x^2+y^2\leqslant \frac{1}{2}, (x^2+y^2)^{1/2}\leqslant z\leqslant (1-x^2-y^2)^{1/2}\right\}$$

«یك قطـاع مخروطی بریده‌شده از گوی یکه» در $\mathbf{R}^3$ است . این‌مجموعـه را به‌عنوان تصویر حجرهٔ $[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi/4]$ تحت نگاشت مختصی کروی Φ به‌دست آورید.

(الف) نشان‌دهید که محتوای این‌مجموعه در $\mathbf{R}^3$ برابر است با $\pi(2-\sqrt{2})/3$.

(ب) محتوای این‌مجموعه را با استفاده از نگاشت مختصی استوانه‌ای

$$\Gamma:(r,\theta,z)\rightarrow(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

به‌دست آورید.

۴۵.ص. فرض کنید $a>0$ و A مقطع مجموعه‌های زیر باشد:

$$\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2\},\ \{(x,y,z): z\geqslant a\}.$$

(الف) با استفاده ازنگاشت مختصی کروی نشان‌دهید که $c(A)=5\pi a^3/3$.

(ب) با استفاده ازنگاشت مختصی استوانه‌ای مقدار $c(A)$ را حساب کنید.

۴۵.ض. فرض کنید B مقطع مجموعه‌های زیرباشد :

$$\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leqslant 2\},\quad \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\}.$$

(الف) بااستفاده ازنگاشت مختصی کروی‌نشان‌دهید که $c(B)=\pi(4\sqrt{2}-3)/3$.

(ب) بااستفاده ازنگاشت مختصی استوانه‌ای مقدار $c(B)$ را حساب کنید .

۴۵.ط. فرض کنید‌که $B_p(r)=\{x\in\mathbf{R}^p: \|x\|\leqslant r\}$ گویی به‌شعاع $r>0$ در فضای $\mathbf{R}^p$ باشد. محتوای $B_p(r)$، $\omega_p(r)$ را حساب کنید:

(الف) با استفاده از تغییر متغیرها نشان‌دهید که $\omega_p(r)=r^p\omega_p(1)$.

(ب) اگر $p\geqslant 3$، انتگرال $\omega_p(1)$ را به‌صورت یك‌انتگرال مکرر بیان‌کنید و بـا استفاده ازقسمت (الف) نشان‌دهید که

$$\omega_p(1)=\omega_{p-2}(1)\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1(1-r^2)^{(p/2)-1}r\,dr\right\}d\theta$$
$$=\omega_{p-2}(1)2\pi/p.$$

(پ) نتیجه بگیرید که اگر $p=2k$، یعنی p زوج باشد، آنگاه $\omega_p(1)=\pi^k/k!$. اگر $p=2k-1$، یعنی p فردباشد، آنگاه $\omega_p(1)=4^k\pi^{k-1}k!/(2k)!$، که برحسب تابع گاما بـه‌صورت $\omega_p(1)=\pi^{p/2}/\Gamma(\frac{1}{2}p+1)$ درمی‌آید.

(ت) نتیجهٔ قابل‌ملاحظهٔ $\lim(\omega_p(1))=0$ را به‌دست‌آورید.

۴۵.ظ. می‌توان نتیجهٔ تمرین قبل‌را به‌روش دیگری نیز به دست آورد. فرض کنید $p\in\mathbf{N}$ و $\sigma:\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ به‌صورت

$$\sigma(\theta)=\sigma(\theta_1,\dots,\theta_p)$$
$$=(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1\cos\theta_2,\dots,\sin\theta_1\ \sin\theta_2\ \dots\sin\theta_{p-1}\cos\theta_p)$$

تعریف شده‌باشد.

(الف) نشان دهید که $\|\sigma(\theta)\|^2\leqslant 1$ و $\|\sigma(\theta)\|=1$ تنها وقتی‌که $\theta_j=0$ یا $\theta_j=\pi$ برای یك $j=1,\dots,p$.

(ب) نشان‌دهید که σ تابعی یك به‌یك از $(0,\pi)^p=(0,\pi)\times\dots\times(0,\pi)$ روی‌درون گوی یکهٔ $B_p(1)$ یعنی $\{x\in\mathbf{R}^p:\|x\|<1\}$ است. همچنین نشان‌دهید که σ، مجموعهٔ $[0,\pi]^p$ را روی گوی یکه می‌نگارد، ولی این نگاشت در کرانه یك به‌یك نیست.

(پ) ازمحاسبهٔ ژاکوبی σ، عبارت زیررا به‌دست‌آورید:

$$J_\sigma(\theta)=(-1)^p(\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-2}\dots(\sin\theta_{p-1})^2(\sin\theta_p).$$

بنابراین $J_\sigma(\theta)\neq 0$ برای $\theta\in(0,\pi)^p$.

(ت) بااستفاده از فرمول حاصلضرب والیس برای $\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^k d\theta$ که درپروژهٔ ۳۰.γ به دست‌آمد، عبارت $\omega_p(1)$ راکه درتمرین قبل‌آمده است، به‌دست آورید.

پروژه

۴۵.α. این‌پروژه‌برمبنای پروژهٔ ۴۴.γ است وبه‌روش دیگری قضیه تغییرمتغیرهای ۹.۴۵ را به دست می‌دهد. فرض‌کنیم که $\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ باز باشد و $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^p$ به‌ردهٔ $C^1(\Omega)$ متعلق و در Ω یك‌به‌یك باشد به‌قسمی‌که برای هر $x\in\Omega$، $J_\varphi(x)\neq 0$. همچنین برای‌سهولت، فرض می‌کنیم که‌عددی مانند $M>0$ وجود دارد به‌قسمی که‌برای $x,y\in\Omega$،

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|\leqslant M\|x-y\|\ .$$

(الف) اگر $\Phi:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$\Phi(A)=c(\varphi(A))\ ,\ \ A\in\mathcal{D}(\Omega).$$

آنگاه Φ در $\mathcal{D}(\Omega)$ جمعی است و دارای چگالی قوی برابر با $|J_\varphi|$ است. علاوه براین $M_1>0$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $A\in\mathcal{D}(\Omega)$، $\Phi(A)\leqslant M_1 c(A)$.

(ب) اگر f تابعی کراندار باشدکه در هر مجموعهٔ $\varphi(A)$ برای $A\in\mathcal{D}(\Omega)$ انتگرال‌پذیر باشد واگر $\psi:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$\psi(A)=\int_{\varphi(A)} f,$$

آنگاه ψ در $\mathscr{D}(\Omega)$ جمعی است . علاوه براین یك $M_{۲}>۰$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $A\in\mathscr{D}(\Omega)$، $|\psi(A)|\leqslant M_{۲}c(A)$.

(پ) اگــر f تابعی کراندار و در $\varphi(\Omega)$ پیوسته‌باشد، واگر ψ تابعی باشدکه در (ب) تعریف شده است، نشان‌دهیدکه ψ دارای چگالی‌قوی برابر با $(f\circ\varphi)|J_{\varphi}|$ است.

(ث) اگر f تابعی باشدکه در (پ) آمده است، نشان‌دهیدکه

$$\int_{\varphi(A)} f=\int_{A}(f\circ\varphi)|J_{\varphi}|,\quad A\in\mathscr{D}(\Omega).$$

مراجع

این‌فهرست حاوی اسامی کتابها و مقاله‌هـای مذکور در متن‌کتاب و برخی مراجع‌اضافی است‌که برای مطالعهٔ بیشتر مفید هستند.

Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, Wiley, New York, 1966.

Boas, R. P., Jr., *A Primer of Real Functions*, Carus Monograph Number 13, Math. Assn, of America, 1960.

Bruckner, A. M., «Differentiation of Integrals,» *Amer. Math. Monthly* Vol. 78, No. 9, Part II, 1–51 (1971). (H. E. Slaught Memorial Paper, Number 12.)

Burkill, J. C., and H. Burkill. *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.

Cartan, H. P., *Cours de Mathématiques*, I. *Calcul Différentiel*; II *Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967. (English translation, Houghton-Mifflin, Boston. 1971.)

Cheney, E. L., *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill, New York, 1966.

Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

Dunford, N., and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I. Wiley-Interscience, New York, 1958.

Finkbeiner, D. T., II. *Introduction to Matrices and Linear Transformations*, Second Edition, W. H. Freeman, San Francisco, 1966.

Gelbaum, B. R., and J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco. 1964.

Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960. (Republished by Springer-Verlag, New York, 1974.)

Hamilton, N. T., and J. Landin, *Set Theory*, Allyn-Bacon, Boston, 1961.

Hardy. G. H., J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Hewitt, E., and K. Stromberg, *Real and Abstact Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1965.

Hoffman, K., and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.

Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series* (English translation), Hafner, New York. 1951.

Lefschetz, S., *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

Luxemberg, W. A. J.. "Arzela's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 970–979 (1971).

McShane, E. J., "A Theory of Limits," published in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.

——, "The Lagrange Multiplier Rule," *Amer. Math. Monthly*. Vol. 80, 922–925 (1973).

Royden, H. L., *Real Analysis*, Second Edition, Macmillan, New-York, 1968.

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1964.

Schwartz, J., "The Formula for Change of Variables in a Multiple Integral." *Amer. Math. Monthly* Vol. 61, 81–85 (1954).

Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1963.

Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York, 1965.

Stone, M. H., "The Generalized Weierstrass Approximation Theorem," *Mathematics Magazine*, Vol. 21, 167–184, 237–254 (1947/48). (Reprinted in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.)

Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand. Princeton, 1961.

Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford University Press, London, 1939.

Varberg, D. E., "Change of Variables in Multiple Integrals." *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 42–45 (1971).

Woll, J. W., Jr., *Functions of Several Variables*, Harcourt, Brace and World, New York, 1966.

Wilder, R. L., *The Foundations of Mathematics*, Wiley, New York, 1952.

راهنمای تمرینهای برگزیده

به خوانندگان اکیداً توصیه می‌شود که تا با اشکالی جدی مواجه نشوند به این راهنماییها رجوع نکنند. در بسیاری از تمرینها مطالبی باید اثبات شوند که چند راه درست برای اثبات آنها وجود دارد؛ حتی ممکن است خواننده یك استدلال کاملاً متفاوت با راهنمایی ارائه‌شده بیاورد که تماماً درست باشد. با این حال برای اینکه به خواننده در یادگیری مطالب و به دست آوردن مهارت در روشهای استدلال کمك شود راهنماییهایی ارائه شده و چند مسئله حل شده‌اند. توجه خواهید کرد که برای مطالب قسمتهای اول کتاب توضیحات بیشتری داده شده است.

بخش ۱

۱. ت. بنا به تعریف، $A\cap B\subseteq A$. اگر $A\subseteq B$، آنگاه $A\cap B\supseteq A$، بنابراین $A\cap B=A$. بعکس، اگر $A\cap B=A$، آنگاه $A\cap B\supseteq A$ که از آن نتیجه می‌شود $B\supseteq A$.

۱. ث و ج. تفاضل متقارن A و B اجتماع دو مجموعهٔ $\{x: x\in A\ ,\ x\notin B\}$ و $\{x : x\notin A\ ,\ x\in B\}$ است.

۱. ح. اگر x به $E\cap(\cup A_j)$ متعلق باشد، آنگاه $x\in E$ و $x\in\cup A_j$. بنابراین $x\in E$ و $x\in A_j$ برای حداقل یك j. این امر ایجاب می‌کند که $x\in E\cap A_j$ برای حداقل یك J، بنابراین

$$E\cap\ \cup A_j\subseteq\cup(E\cap A_j).$$

اگر این مرحله‌ها را درجهت مخالف از آخر به اول طی کنیم، رابطهٔ شمول درجهت مخالف به‌دست می‌آید. برابری دیگر به‌طریق مشابه اثبات می‌شود.

۱. ر. اگر $x\in\mathcal{C}(\cap\{A_j : j\in J\})$، آنگاه $x\notin\cap\{A_j : j\in J\}$. از این نتیجه می‌شود که یك $k\in J$ به قسمی که $x\notin A_k$ وجود دارد. بنابراین، $x\in\mathcal{C}(A_k)$، و در نتیجه $x\in\cup\{\mathcal{C}(A_j) : j\in J\}$. به‌این ترتیب ثابت می‌شود که $\mathcal{C}(\cap A_j)\subseteq\cup\,\mathcal{C}(A_j)$. رابطهٔ شامل بودن درجهت مخالف، باطی این مرحله‌ها در جهت مخالف ثابت می‌شود. برابری

دیگر به‌طریق مشابه اثبات می‌شود.

بخش ۲

۲. الف. اگر (a,c) و (a,c') به $g\circ f$ متعلق باشند آنگاه نقاطی مانند b و b' در B وجوددارند به‌قسمی که (a,b) و (a,b') به f و (b,c) و (b',c') به g متعلق‌هستند. چون f تابع است، $b=b'$ وچون g تابع است، $c=c'$.

۲. ب. نه. هم $(۰,۱)$ وهم $(۱,-۰)$ به C تعلق دارند.

۲. ت. بنویسید $f(x)=۲x$ و $g(x)=۳x$.

۲. ث. اگر (b,a) و (b,a') به $f^{-۱}$ متعلق باشند، آنگاه (a,b) و (a',b) به f متعلق‌اند. چون f یك به‌یك است، $a=a'$. بنا براین $f^{-۱}$ یك تابع است.

۲. ج. اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$، آنگاه $x_۱=g\circ f(x_۱)=g\circ f(x_۲)=x_۲$. بنابراین f یك به‌یك است.

۲. ح. تمرین ۲.ج را دوبار به‌کار برید.

بخش ۳

۳. الف. بگیرید $f(n)=n/۲$ برای $n\in E$.

۳. ب. بگیرید $f(n)=(n+۱)/۲$ برای $n\in O$.

۳. پ. بگیرید $f(n)=n+۱$ برای $n\in \mathbf{N}$.

۳. ث. بگیرید $A_n=\{n\}$ برای $n\in\mathbf{N}$. آنگاه هر مجموعهٔ A_n یك نقطه دارد، ولی $\mathbf{N}=\cup\{A_n : n\in\mathbf{N}\}$ بی پایان است.

۳. ج. اگر A بی‌پایان و $B=\{b_n : n\in\mathbf{N}\}$ زیر مجموعه‌ای از A باشد، آنگاه تابعی که با

$$f(x)=b_{n+۱},\quad x=b_n\in B,$$

$$=x,\qquad x\in A\setminus B$$

تعریف شده یك به‌یك است و A را روی $A\setminus\{b_۱\}$ می‌نگارد.

۳. ح. اگر f یك نگاشت یك به‌یك از A روی B، و g یك نگاشت یك به‌یك از B روی C باشد، آنگاه $g\circ f$ یك نگاشت‌یك به یك از A روی C است.

بخش ۴

۴. ج. سه حالت $p=۳k$ و $p=۳k+۱$ و $p=۳k+۲$ را در نظربگیرید.

بخش ۵

۵. الف. چون $a^۲ \geqslant ۰, b^۲ \geqslant ۰$، $a^۲+b^۲=۰$ ایجاب می‌کند که $a^۲=b^۲=۰$.

۵. ت. اگر $c=۱+a$ با شرط $a>۰$، آنگاه

$$c^n=(۱+a)^n \geqslant ۱+na \geqslant ۱+a=c\ .$$

۵. چ. توجه کنید که $۱<۲^۱=۲$. اگر $k<۲^k$ برای $k\geqslant ۱$، آنگاه

$$k+۱\leqslant ۲k<۲\cdot ۲^k=۲^{k+۱}\ .$$

بنابراین $n<۲^n$ برای هر $n\in \mathbf{N}$.

۵. ح. توجه داشته باشید که

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-۱}+\cdots+a^{n-۱})=(b-a)p\ ,$$

که در آن $p>۰$.

۵. ذ. $\{(x,y)\ :\ y=\pm x\}$.

۵. ژ. مربع به رئوس $(۰,\pm ۱),(\pm ۱,۰)$.

بخش ۶

۶. الف. اگر $A=\{x_۱\}$، آنگاه $x_۱=\sup A$. اگر $A=\{x_۱,\dots,x_n,\ x_{n+۱}\}$ واگر $u=\sup\{x_۱,\dots,x_n\}$، نشان دهید که $\sup\{u,x_{n+۱}\}$ زبرینهٔ A است.

۶. پ. بگیرید $S=\{x\in \mathbf{Q}\ :\ x^۲<۲\}$

۶. ث. درحقیقت، $\sup A\cup B=\sup\{\sup A,\sup B\}$.

۶. ح. اگر $S=\sup\{f(x,y)\ :\ x\in X,y\in Y\}$، آنگاه برای هـر $x\in X$ و هر $y\in Y$، $f(x,y)\leqslant S$. بنابراین $f_۱(x)\leqslant S$ برای هر $x\in X$. در نتیجه

$$\sup\{f_۱(x) : x\in X\}\leqslant S\ .$$

بعکس، هر گاه $\varepsilon>۰$، نقطه‌ای مانند $(x_۰,y_۰)$ وجوددارد به قسمی که $S-\varepsilon<f(x_۰,y_۰)$. بنا براین $S-\varepsilon<f_۱(x_۰)$ و درنتیجه

$$S-\varepsilon<\sup\{f_۱(x)\ :\ x\in X\}\ .$$

چون $\varepsilon>۰$ دلخواه است، $S\leqslant \sup\{f_۱(x)\ :\ x\in X\}$.

۶. ذ. چون $f(x)\leqslant \sup\{f(z)\ :\ z\in X\}$، داریم

$$f(x)+g(x)\leqslant \sup\{f(z)\ :\ z\in X\}+\sup\{g(z)\ :\ z\in X\}.$$

بنابراین $\sup\{f(x)+g(x)\ :\ x\in X\}$ ازطرف راست رابطه کمتر یا برابر آن است. به طریق مشابه، اگر $x\in X$، آنگاه

$$\inf\{f(z)\ :\ z\in X\}+g(x)\leqslant f(x)+g(x).$$

هرگاه ۶. د. را به کار بریم، نتیجه می‌گیریم که

$$\inf\{f(z) : z\in X\}+\sup\{g(x) : x\in X\}\leqslant\sup\{f(x)+g(x) : x\in X\}.$$

حکمهای دیگر نیز به‌طریق مشابه ثابت می‌شوند.

بخش ۷

۷. ب. بگیرید $a\in A$، اگر $a\notin A'$ آنگاه $a\in B'$ و بنابراین $\xi<\xi'\leqslant a$، که یك تناقض است. بنابراین $a\in A'$ وچون $a\in A$ دلخواه است داریم $A\subseteq A'$. چون $\xi<\xi'$، نقطه‌ای مانند $x\in\mathbf{R}$، با شرط $\xi<x<\xi'$ وجوددارد. چون $\xi<x$، باید داشته‌باشیم $x\in B$. اما چون $x\in A'$، داریم $A\neq A'$.

۷. پ. بگیرید

$$A=\{x : x<1\}, B=\{x : x\geqslant 1\} \text{ و } B'=\{x : x>1\}، A'=\{x : x\leqslant 1\}.$$

۷. ث. اگر برای هر n، $x\in I_n$، آنگاه با خاصیت ارشمیدسی ۶.۶ تناقض به وجود می‌آید.

۷. ج. اگر برای‌هر n، $x\in J_n$، با نتیجهٔ ۷.۶ (ب) تناقض به وجود می‌آید.

۷. ح. درمبنای سه، رقم اول هرعنصر F_1، ۰ یا ۲ است. در چهار زیر فاصلهٔ F_2 نقاط درمبنای سه به صورت

$$0/00\ldots,\quad 0/02\ldots,\quad 0/20\ldots,\quad 0/22\ldots$$

نوشته می‌شوند و به‌همین ترتیب عمل را می‌توان ادامه داد.

۷. د. اگر n به قدرکافی بزرگ باشد، $1/3^n<b-a$.

۷. ذ. به هراندازه‌که بخواهیم نزدیك به ۱.

بخش ۸

۸. ث. خاصیت ۳.۸ (دو) صادق نیست.

۸. ح. ملاحظه می‌شود که S_1 مجموعهٔ نقاط درونی مربع به رئوس $(\pm 1,0)$، $(0,\pm 1)$ و S_2 مجموعهٔ نقاط درونی مربع به رئوس $(-1,\pm 1)$، $(1,\pm 1)$ می‌باشند.

۸. ذ. بگیرید $a=1/\sqrt{p},\ b=1$.

۸. ر. بگیرید $a=1/p,\ b=1$.

۸. ز. داریم $\|x\|_1\|y\|_1\geqslant|x\cdot y|\leqslant\sum|x_i||y_i|\leqslant\{\sum|x_i|\}\sup|y_i|\leqslant\|x\|_1\|y\|_1$. ولی $|x\cdot y|\leqslant p\|x\|_\infty\|y\|_\infty$ وهرگاه $x=y=(1,1,\ldots,1)$، برابری برقراراست.

۸. ژ. رابطهٔ ذکرشده ایجاب می‌کندکه

$$\|x\|^2+2(x\cdot y)+\|y\|^2=\|x+y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$
$$=\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2.$$

بنابراین $x\cdot y=\|x\|\|y\|$ وشرط برابری درقضیهٔ ۷.۸ برقراراست به‌شرط آنکه بردارها مخالف صفر باشند.

۸. ش. چون $\|x+y\|^{2}=\|x\|^{2}+2(x\cdot y)+\|y\|^{2}$، رابطهٔ مذکور برقرار است اگر وفقط اگر $x\cdot y=0$.

۸. ص. مجموعهٔ K محدب است اگرو فقط اگرشامل قطعه خط واصل بین هردو نقطهٔ واقع در K باشد. اگر $x,y\in K_{1}$، آنگاه

$$\|tx+(1-t)y\|\leqslant t\|x\|+(1-t)\|y\|\leqslant t+(1-t)=1\,.$$

بنابراین $tx+(1-t)y\in K_{1}$ برای $0\leqslant t\leqslant 1$. نقاط $(\pm 1,0)$ به K_{4} متعلق‌اند، ولی $(0,0)$، نقطهٔ میانی آنها، به K_{4} متعلق نیست.

۸. ض. اگر x,y به $\cap K_{\alpha}$ متعلق باشند، آنگاه $x,y\in K_{\alpha}$ برای هر α. بنابراین $tx+(1-t)y\in K_{\alpha}$ برای هر α، که از آن نتیجه می‌شود که $\cap K_{\alpha}$ محدب است.

اجتماع دوفاصلهٔ مجزا را درنظر بگیرید.

بخش ۹

۹. الف. اگر $x\in G$، بگیرید $r=\inf\{x,1-x\}$. درصورتی که $|x-y|<r$، داریم $x-r<y<x+r$، که از آن نتیجه می‌شود که $0\leqslant x-r<y<x+r\leqslant 1$، بنابراین $y\in G$. اگر $z=0$، آنگاه عددی حقیقی مانند $r>0$ وجود ندارد به قسمی که هر نقطهٔ y در $\mathbf{R}$ باشرط $|y|<r$ به F متعلق باشد. به طریق مشابه برای $z=1$ می‌توان عمل کرد.

۹. ب. هرگاه $x\in G$، بگیرید $r=1-\|x\|$. هرگاه $x\in H$ بگیرید

$$r=\inf\{\|x\|,1-\|x\|\}.$$

اگر $z=(1,0)$، آنگاه برای هر $r>0$ نقطه‌ای مانند y در $\mathcal{C}(F)$ وجود دارد به‌قسمی که $\|y-z\|<r$.

۹. ج. نقاط مجموعهٔ باز را که تمام مختصهایشان اعدادی گویا هستند شماره‌گذاری کنید. آنگاه مانند اثبات قضیهٔ ۱۱.۹ وبا استفاده ازگویهای باز به‌مرکز این نقاط گویا عمل کنید.

۹. ح. مانند تمرین قبل استدلال کنید. ولی این دفعه ازگویهای بسته استفاده کنید.

۹. خ. متمم بگیرید و ۹. ح را به‌کاربرید.

۹. د. مجموعهٔ A° اجتماع دستهٔ تمام مجموعه‌های باز در A است. بنابراین هر مجموعهٔ باز $G\subseteq A$ باید در A° واقع باشد. بنابرتعریف A°، باید داشته باشیم $A^{\circ}\subseteq A$. ازآن نتیجه می‌شود $(A^{\circ})^{\circ}\subseteq A^{\circ}$. چون A° باز است و $(A^{\circ})^{\circ}$ اجتماع تمام مجموعه‌های باز در A° است باید داشته باشیم $A^{\circ}\subseteq(A^{\circ})^{\circ}$. بنابراین $(A^{\circ})^{\circ}=A^{\circ}$. چون $A^{\circ}\subseteq A$

و $B^\circ \subseteq B$، نتیجه می‌شود که $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$. اما چون $A^\circ \cap B^\circ$ بـاز است، نتیجه می‌شود که $(A^\circ \cap B^\circ) \subseteq (A \cap B)^\circ$. ازطـرف دیگر $(A \cap B)^\circ$ یك مجموعهٔ باز است و در A و B واقــع است؛ بنابرایــن $(A \cap B)^\circ \subseteq \mathring{A}$ و $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$ ، پس $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$ در نتیجه $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$. چون $\mathbf{R}^p$ بـاز است، $(\mathbf{R}^p)^\circ = \mathbf{R}^p$.

مجموعهٔ A راتمام اعداد گویا در $(۰,۱)$ بگیرید وفرض کنید B مجموعهٔ تمام اعداد اصم در $(۰,۱)$ باشدآنگاه $A^\circ \cup B^\circ = \varnothing$ ولی $(۰,۱) = (A \cup B)^\circ$.

۹. ر. یا مانند ۹. د استدلال‌کنید، یامتمم بگیرید واز ۹. د استفاده نمایید.

۹. ژ. اگر $p = ۱$، A را $\mathbf{Q}$ بگیرید. در $\mathbf{R}^p$، $\mathbf{Q}^p$ را درنظر بگیرید.

۹. س. فرض‌کنید A و B در $\mathbf{R}$ دومجموعهٔ بازباشندو نیز فرض کنید $(x,y) \in A \times B$، بنابراین $x \in A$ و $y \in B$. عددی مانند $r > ۰$ وجود دارد به‌قسمی‌کـه اگر $|x' - x| < r$، آنگاه $x' \in A$ وعددی مانند $s > ۰$ وجود دارد به قسمی کـه اگر $|y' - y| < s$، آنگاه $y' \in B$. اکنون t را $\inf\{r,s\}$ بگیرید. گوی‌باز به‌شعاع t در $A \times B$ واقع است.عکس این مطلب به‌طریقی مشابه ثابت می‌شود.

بخش ۱۰

۱۰. پ. اگـر x یك نقطهٔ تجمع A در $\mathbf{R}^p$ و N یك همسایگـی x باشد، آنگاه $N \cap \{y \in \mathbf{R}^p : \|y - x\| < ۱\}$ شامـل یك نقطهٔ $a_۱ \in A$ با شرط $a_۱ \neq x$ است. مجموعهٔ $N \cap \{y \in \mathbf{R}^p : \|y - x\| < \|a_۱\|\}$ شامل یك نقطهٔ $a_۲ \in A$ با شرط $a_۲ \neq x$ و همچنین $a_۲ \neq a_۱$ می‌باشد.این روش را به‌همین ترتیب ادامه دهید.

۱۰. ج. هر همسایگی x شامل تعداد بی‌پایانی ازنقاط $A \cup B$ است، بنابراین یـا A ویا B (یا احتمالاً هردو) باید دارای تعداد بی‌پایانی ازعناصر دراین همسایگی‌باشند.

بخش ۱۱

۱۱. الف. G_n را برای $n \in \mathbf{N}$، $\{(x,y) : x^۲ + y^۲ < ۱ - ۱/n\}$ بگیرید.

۱۱. ب. G_n را برای $n \in \mathbf{N}$، $\{(x,y) : x^۲ + y^۲ < n^۲\}$ بگیرید.

۱۱. پ. فـرض‌کنید $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ یك پوشش باز بـرای F باشد و $G = \mathcal{C}(F)$، بنابراین G در $\mathbf{R}^p$ باز است. اگر $\mathcal{G}_۱ = \mathcal{G} \cup \{G\}$، آنگاه $\mathcal{G}_۱$ یك پوشش باز برای K است، درنتیجه K یك زیرپوشش با پایان به‌صورت $\{G, G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\omega\}$ دارد. دراین‌صورت $\{G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\omega\}$ یك زیر پوشش $\mathcal{G}$ برای مجموعهٔ F است.

۱۱. ت. توجه‌کنیدکه اگر G در $\mathbf{R}$ بازباشد.آنگاه یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^۲$ مانند $G_۱$ وجوددارد به قسمی‌که $G = G_۱ \cap \mathbf{R}$. راه دوم : از قضیهٔ‌هاینه ـ بورل استفاده کنید.

۱۱. ث. $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ را یك پوشش باز فاصلـهٔ یکهٔ بستهٔ J در $\mathbf{R}^۲$ بگیرید. اعداد

حقیقی x را به‌قسمی که‌مربع $[0,x]\times[0,x]$ دراجتماع باپایانی از مجموعه‌های در $\mathcal{G}$ واقع باشد، درنظر بگیرید و x^* را زبرینهٔ آنها بگیرید.

۱۱. چ. بگیرید $x_n\in F_n$، $n\in\mathbf{N}$. اگر $\{x_n : n\in\mathbf{N}\}$ تنها از تعداد با پایانی نقطه تشکیل شده باشد،آنگاه حداقل یکی ازآنها تعداد بی پایانی دفعه تکرار شده و یك نقطهٔ مشترك است. اگر تعداد نقاط مجموعهٔ کراندار $\{x_n\}$ بی‌پایان باشد، آنگاه یك‌نقطهٔ تجمع مانند x وجود دارد. چون برای $m\geqslant n$، $x_m\in F_n$ و F_n بسته است، آنگاه $x\in F_n$ برای هر $n\in\mathbf{N}$.

۱۱. ح. اگر $d(x,F)=0$، آنگاه x نقطهٔ تجمع مجموعهٔ بستهٔ F است.

۱۱. د. نه. F را $\{y\in\mathbf{R}^p : \|y-x\|=r\}$ بگیرید، آنگاه تمام نقاط F به‌یك فاصله از x هستند.

۱۱. ذ. فرض کنید G یك مجموعهٔ بازباشد و $x\in\mathbf{R}^p$. اگر $H=\{y-x:y\in G\}$، آنگاه H یك مجموعهٔ باز در$\mathbf{R}^p$ است.

۱۱. ز. استدلال ۷.۱۱ را به‌کار برید ودرآن به جای گویهای باز ازحجره‌های باز استفاده کنید.

۱۱. ص. فرض کنید $\mathbf{Q}=\cap\{G_n : n\in\mathbf{N}\}$، که در آن G_n در $\mathbf{R}$ باز است. بنا برقضیهٔ۱۰.۶، متمم G_n یعنی F_n بسته است وشامل هیچ زیرمجموعهٔ بازغیر تهی‌نیست. بنابراین مجموعهٔ اعداد اصم اجتماع خانوادهٔ شمارش پذیری ازمجموعه‌های بسته است که هیچیك از آنها شامل یك مجموعهٔ بازغیر تهی نیست، ولی این با تمرین ۱۱. ش متناقض است.

بخش ۱۲

۱۲. ب. فرض کنید A,B یك ناهمبندی‌برای مجموعهٔ $C'=C\cup\{x\}$ باشد.آنگاه $A\cap C'$ و$B\cap C'$ مجزا وغیر تهی هستند، واجتماعشان C' است. یکی ازاین دومجموعه، مثلاً B، باید شامل x باشد. چون B مجموعه‌ای باز است، شامل نقاطی از C نیز هست‌و درنتیجه $C\cap(B\setminus\{x\})\neq\varnothing$. امابدین‌ترتیب $A,B\setminus\{x\}$ برای Cیك‌ناهمبندی‌است.

۱۲. ث. برهان به‌کار رفته درقضیهٔ ۴.۱۲ راکمی تغییردهید.

۱۲. چ. بنا برقضیهٔ۸.۱۲، مجموعه‌های C_1وC_2 فاصله‌هستند. به‌سهولت دیده می‌شود که $C_1\times C_2$ محدب است. بنابراین ۱۲.ث را می‌توان به‌کاربرد.

بخش ۱۳

۱۳. الف. موقعیت هندسی نقطهٔ $iz=(-y,x)$ را برحسب نقطهٔ $z=(x,y)$ در نظر بگیرید.

۱۳. ب. توجه کنید که $cz=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$، و این نظیر است به دوران درحول مبدأ به اندازهٔ θ رادیان درخلاف جهت عقربهٔ ساعت.
۱۳. ب. دایرهٔ $|z-c|=r$ روی دایرهٔ $|w-(ac+b)|=|a|r$ نگاشته می‌شود. بنویسید $z=a^{-1}w-a^{-1}b$، $x=\operatorname{Re} z, y=\operatorname{Im} z$ را برحسب $u=\operatorname{Re} w, v=\operatorname{Im} w$ محاسبه کنید. با انجام این‌عمل به سهولت می بینید که معادلهٔ $ax+by=c$ به معادله‌ای به صورت $Au+Bv=C$ تبدیل می‌شود.
۱۳. ت. g دایره را ثابت نگه می‌دارد اگروفقط اگر مرکز آن روی محور حقیقی واقع باشد. تنها خطهایی‌راکه g ثابت نگه می‌دارد محورهای حقیقی وموهومی هستند.
۱۳. ث. نگاشت h دایره‌ای راکه از مبدأ می گذرد به‌خط تبدیل می کند. تمام خطهایی که ازمبدأ نمی گذرند به دوایری‌که ازمبدأ می گذرند تبدیل می‌شوند، وبالاخره تمام خطوطی که ازمبدأ می گذرند به‌خطوطی که از مبدأ می گذرند تبدیل می‌شوند.
۱۳. ج. هرنقطهٔ C، بجزمبدأ، تصویر دوعنصر C تحت g است. اگر $\operatorname{Re} g(z)=k$، آنگاه $x^2=y^2=k$. اگر $\operatorname{Im} g(z)=k$، آنگاه $2xy=k$. اگر $|g(z)|=k$، آنگاه $k\geqslant 0$ و $|z|=\sqrt{k}$.

بخش ۱۴

۱۴. ب توجه کنید که $0\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{n}$.

۱۴. ث. داریم $0\leqslant|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|$.

۱۴. خ. فرض کنید $r\in\mathbf{R}$ به قسمی باشد که $\lim(x_{n+1}/x_n)<r<1$. چون فاصلهٔ $(-1,r)$ یك همسایگی این حداست، عددی مانند $K\in\mathbf{N}$ وجوددارد به قسمی که $0<x_{n+1}/x_n<r$ برای هر $n\geqslant K$. اکنون نشان دهید که برای یك C و $n\geqslant K$ داریم $0<x_n<Cr^n$.
۱۴. د. دنبالهٔ $(1/n)$ و (n) را درنظر بگیرید.
۱۴. ر. دنباله‌های (الف)، (ب)، (ث)، و(ج) همگراهستند ودنباله‌های(پ) و(ت) واگرا می باشند.
۱۴. ز. فرض کنید $r\in\mathbf{R}$ بـه قسمی باشد که $\lim(x_n^{1/n})<r<1$ چون فاصلهٔ $(-1,r)$ یك همسایگی این حد است، عـددی مانند $K\in\mathbf{N}$ وجود دارد به قسمی که $0<x_n^{1/n}<r$، و درنتیجه $0<x_n<r^n$ برای هر $n\geqslant K$.

بخش ۱۵

۱۵. الف. دنبالهٔ $z_n=y_n-x_n$ رادرنظر گیریدومثال ۵.۱۵(پ)وقضیهٔ ۶.۱۵(الف)

را به‌کار برید.

۱۵. پ (الف) به ۱ همگراست. (ب) واگراست. (ج) واگراست.

۱۵. ت. بگیرید $Y = -X$.

۱۵. ج. دوحالت $x = 0$ و $x > 0$ را درنظر بگیرید.

۱۵. چ. بله.

۱۵. ح. از راهنمایی تمرین ۱۵. ج استفاده کنید.

۱۵. د. توجه کنید که $b \leqslant x_n \leqslant b2^{1/n}$.

بخش ۱۶

۱۶. الف. با استقرا نشان دهید که برای $n \geqslant 2$ داریم $1 < x_n < 2$. چون $x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})/(x_n x_{n-1})$، دنباله یکنواست.

۱۶. پ. دنباله یکنوا وکرانداراست. حد برابر با $(1+(1+4a)^{1/2})/2$ است.

۱۶. ت. دنبالهٔ X یکنوا، نزولی وکراندار است.

۱۶. ث. عنصر x_k از $X = (x_n)$ را یك «نوك» برای X می‌گویند، هرگاه $x_k \geqslant x_n$ برای $n > k$.

(یك) هرگاه تعداد بی‌پایانی نوك با اندیسهای $k_1 < k_2 < \dots$ موجود باشد، آنگاه (x_{kj})، دنبالهٔ نوکها، یك زیر دنبالهٔ نزولی X است.

(دو) اگرفقط تعداد باپایانی نوك با اندیسهای $k_1 < \dots < k_r$ موجود باشد، آنگاه بنویسید $m_1 > k_r$. چون x_{m_1} نوك نیست، عددی مانند $m_2 > m_1$ وجوددارد به قسمی که $x_{m_1} < x_{m_2}$. با ادامهٔ این روش یك زیر دنبالهٔ اکیداً صعودی از X به صورت (x_{mj}) به‌دست می‌آوریم.

۱۶. ج. دنبالهٔ صعودی است و $x_n \leqslant n/(n+1) < 1$.

۱۶. ذ. عددی مانند $K \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که اگر $n \geqslant K$، آنگاه $L - \varepsilon \leqslant x_{n+1}/x_n \leqslant L + \varepsilon$. اکنون از یك استدلال مشابه با استدلال تمرین ۱۴. خ استفاده کنید.

۱۶. ز. (الف) e، (ب) $e^{1/2}$، (پ) راهنمایی:

$$(1+1/(n+1))(1+1/n) = (1+2/n)\text{، (ت)} e^2.$$

۱۶. ش. فرض کنید $y_n \in F$ به قسمی باشد که $\|x - y_n\| < d + 1/n$. اگر $y = \lim(y_{nk})$، آنگاه $\|x - y\| = d$.

بخش ۱۷

۱۷. الف. تمام مقادیر

۱۷. پ. هرگاه $x\in\mathbf{Z}$، حد برابر با ۱ است، هرگاه $x\notin\mathbf{Z}$، حد برابر با ۰ است.
۱۷. ث. هرگاه $x=0$، حد برابر با ۱ است، هرگاه $x\neq 0$،حد برابر با ۰ است.
۱۷. ج . اگر $x>0$ و $0<\varepsilon<\pi/2$، آنگاه $\tan(\pi/2-\varepsilon)>0$. بنابراین $nx\geqslant\tan(\pi/2-\varepsilon)$ برای هر $n\geqslant n_x$، که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leqslant \operatorname{Arc}\tan nx\leqslant\frac{\pi}{2}$$

۱۷. ح. اگر $x>0$، آنگاه $e^{-x}<1$.
۱۷. د. نه الزاماً.
۱۷. ز. دنبالهٔ $(1/n)$ را درنظربگیرید یا توجه‌کنید که $\|f_n\|_D\geqslant 1/2$.
۱۷. ش. بله.
۱۷. ص. نه.

بخش ۱۸

۱۸. الف. (الف) ± 1. (ب) 0. (پ) ± 1. (ت) ± 1.
۱۸. ث. بگیرید $m,\ p\in\mathbf{N}$ و $p\leqslant m$. آنگاه

$$v_m(X+Y)=\sup\{x_n+y_n : n\geqslant m\}$$
$$\leqslant\sup\{x_n : n\geqslant m\}+\sup\{y_n : n\geqslant m\}=v_m(X)+v_m(Y)\leqslant v_p(X)+v_m(Y)$$

بنابراین

$$(x+y)^*=\inf\{v_m(X+Y) : m\in\mathbf{N}\}\leqslant v_p(X)+y^*.$$

چون این مطلب برای‌هر $p\in\mathbf{N}$ درست است، نتیجه می‌گیریم که $(x+y)^*\leqslant x^*+y^*$.
۱۸. (چ). (الف) $\pm\infty$. (پ) $0,+\infty$.

بخش ۱۹

۱۹. (ث). اگر $j\leqslant n$، آنگاه $x_j\leqslant x_{n+1}$ و $x_j(1+1/n)\leqslant x_j+(1/n)x_{n+1}$.
اکنون جمع کنید.
۱۹. خ. اگر X صعودی‌و واگرا در $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه X کراندار نیست.
۱۹. ذ. (الف) هیچکدام وجود ندارد. (ب و پ) هر سه برابرند. (ت) حدهای مکرر متفاوت‌اند وحد دوگانه وجود ندارد. (ث) حد دوگانه ویك حد مکرر برابرند.(ج) حدهای مکرر برابرند ولی حد دوگانه وجود ندارد.
۱۹. ر. بگیرید $x_{mn}=n$هرگاه $m=1$ و $x_{mn}=0$ هرگاه $m>1$.
۱۹. ژ. در (ب، پ، ث).
۱۹. س. نتیجهٔ ۷.۱۹ را درمورد $x=\sup\{x_{mn} : m,n\in\mathbf{N}\}$ به‌کار برید.

۱۹. ش. بگیرید $x_{mn}=0$ برای $m<n$ و $x_{mn}=(-1)^m/n$ برای $m\geqslant n$.

بخش ۲۰

۲۰. الف. هرگاه $a=0$، $\delta(\varepsilon)$ را ε^2 انتخاب کنید. هرگاه $a>0$، از برآورد زیر استفاده کنید:

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}\ .$$

۲۰. ب. تمرین ۵.۲۰ (ب) وقضیهٔ ۶.۲۰ را به‌کار برید.
۲۰. پ. تمرین ۲۰. ب وقضیهٔ ۶.۲۰ را به‌کار برید.
۲۰. ث. نشان دهید که $|f(x)-f(1/2)|=|x-1/2|$.
۲۰. ج. هرعدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویاست.
۲۰. د. دنباله‌هایی مانند (x_n)،(y_n) وجود دارند به قسمی که

$$\lim(h(x_n))=1,\ \lim(h(y_n))=-1\ .$$

۲۰. ر. نشان دهید که $f(a+h)-f(a)=f(h)-f(0)$. اگر f در $\mathbf{R}$ یکنوا باشد، آنگاه این تابع درنقطه‌ای پیوسته است.
۲۰. ز. نشان دهید که $f(0)=0$ و $f(n)=nc$ برای $n\in\mathbf{N}$. همچنین $f(n)+f(-n)=0$، بنابراین $f(n)=nc$ برای $n\in\mathbf{Z}$. چونکه $f(m/n)=mf(1/n)$، باقراردادن $m=n$ نتیجه می‌شود که $f(1/n)=c/n$ و درنتیجه $f(m/n)=c(m/n)$. اکنون ازپیوستگی f استفاده کنید.
۲۰. ژ. یا $g(0)=0$ که در این حالت $g(x)=0$ برای هر x در $\mathbf{R}$، یا $g(0)=1$ که دراین صورت $g(a+h)-g(a)=g(a)\{g(h)-g(0)\}$.

بخش ۲۱

۲۱. پ. $f(1,1)=(3,1,-1)$، $f(1,3)=(5,1,-3)$.
۲۱. ت. بردار (a,b,c) دربرد f واقع است اگر و فقط اگر $a-2b+c=0$.
۲۱. چ. اگر $\Delta=0$، آنگاه $f(-b,a)=(0,0)$. اگر $\Delta\neq 0$، آنگاه تنها جواب دستگاه معادلات

$$ax+by=0,\qquad cx+dy=0$$

نقطهٔ $(x,y)=(0,0)$ است.
۲۱. خ. توجه کنید که $g(x)=g(y)$، اگر وفقط اگر $g(x-y)=\theta$

۲۱. ش. توجه کنید که $c_{ij}=e_i \cdot f(e_j)$ وآنگاه نابرابری شوادتس رابه‌کاربرید.

بخش ۲۲

۲۲. پ. اگر $f(x_\circ)>\circ$ ، آنگاه $V=\{y\in \mathbf{R} : y>\circ\}$ یك‌همسایگی $f(x_\circ)$ است.

۲۲. ح. بگیرید $f(s, t)=\circ$ هرگاه $st=\circ$ و $f(s, t)=1$ هرگاه $st\neq\circ$.

۲۲. ر. بافرض آنکه ضریب بزرگترین توان مثبت باشد، نشان دهید که x_1 و x_2 با فرض $x_2>\circ>x_1$ ، وجود دارند به‌قسمی که $f(x_1)<\circ<f(x_2)$.

۲۲. ز. بگیرید $f(x)=x^n$. اگر $c>1$، آنگاه $f(\circ)=\circ<c<f(c)$.

۲۲. ژ. هرگاه $f(c)>\circ$ ، یك همسایگی c وجود داردکه درآن f مثبت است، بنابراین $c\neq\sup N$. برای $f(c)<\circ$ به‌طریق مشابه عمل کنید.

۲۲. س. چون f اکیداً صعودی است، و $a<b$ ، f فاصلهٔ باز (a, b) را به‌طور یك‌به‌یك روی فاصلهٔ باز $(f(a), f(b))$ می‌نگارد. ایـن نتیجه می‌دهد که f^{-1} پیوسته است.

۲۲. ش. بله. فرض کنید $a<b$ ثابت باشند و $f(a)<f(b)$. اگر c به‌قسمی‌باشد که $a<c<b$ ، آنگاه یا (یك) $f(c)=f(a)$ ، یـا (دو) $f(c)<f(a)$ و یـا (سه) $f(a)<f(c)$. حالت (یك) بنابه فرض درست نیست. اگر (دو) بـرقرار باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند a_1 در (c, b) وجـود دارد به‌قسمی‌که $f(a_1)=f(a)$ ، کـه یك تناقض است. بنابراین (سه) باید برقرار باشد. به‌طریق مشابه دیده می‌شودکه $f(c)<f(b)$ و f اکیداً صعودی است.

۲۲. ص. فرض‌کنید که g پیوسته و $c_1<c_2$ دونقطه در $\mathbf{I}$ باشندکه g دراین نقاط برابر زبرینهٔ خـود باشد. اگر $c_1>\circ$ ، اعداد a_2 و a_1 را به قسمی انتخاب کنید کـه $\circ<a_1<c_1<a_2<c_2$ و فرض‌کنید k درشرط $g(a_i)<k<g(c_i)$ صدق‌کند، آنگاه سه عدد b_i با شرط $a_1<b_1<c_1<b_2<a_2<b_3<c_2$ که درآن $k=g(b_i)$ ، وجود دارندکه یك‌تناقض است. بنابراین، باید داشته‌باشیم $c_1=\circ$ و $c_2=1$. اکنون استدلال مشابهی درمورد نقاطی‌که g درآن نقاط برابر زبرینهٔ خود است برای به‌دست‌آوردن یك تناقض به‌کار برید.

۲۲. ط. توجه کنید که $\varphi^{-1}(S)$ فشرده نیست . همچنین φ^{-1} در $(\circ, 1)$ پیوسته نیست.

بخش ۲۳

۲۳. الف. توابع مثالهای ۵.۲۰ (الف، ب، خ) در $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت هستند.

۲۳. ج. تابع g در $[\circ, p]$ کراندار و پیوسته یکنواخت است.

۲۳. خ. اگر (x_n) دنبالهٔ‌ای در $(0, 1)$ باشد و $x_n \to 0$ ، آنگاه $(f(x_n))$ یك دنبالهٔ کوشی است و بنا براین در $\mathbf{R}$ همگراست.
۲۳. ذ. بگیرید $g(x)=x$ و $f(x)=\sin x$ برای $x\in\mathbf{R}$.

بخش ۲۴

۲۴. ب. بگیرید $(f(1/n))$ ، که در آن f تابعی است که درمثال ۵.۲۰ (ج) آمده است.
۲۴. پ. تابع مثال ۵.۲۰ (ح۱) را بدین‌طریق به‌دست آورید.
۲۴. ث. (الف)همگرایی در$[0, 1]$ یکنواخت است. (ب)همگرایی در هرمجموعهٔ بسته‌که شامل ۱ نباشد یکنواخت است. (پ) همگرایی در $[0, 1]$ یا در $[c, +\infty)$که درآن $c>1$ ، یکنواخت است.
۲۴. د. نتیجه می‌شود که f یکنوای صعودی است . چون f پیوستهٔ یکنواخت است، هرگاه $\varepsilon>0$ ، فرض کنید $0=x_0<x_1<\dots<x_h=1$ به‌قسمی باشد که $f(x_j)-f(x_{j-1})<\varepsilon$ وn_jبه‌قسمی باشد که‌اگر $n\geqslant n_j$، آنگاه$|f(x_j)-f_n(x_j)|<\varepsilon$. هرگاه $n\geqslant\sup\{n_0, n_1, \dots, n_k\}$ ، نشان دهید که برای هر $x\in\mathbf{I}$ داریم $|f(x)-f_n(x)|<3\varepsilon$.
۲۴. ط. هر چندجمله‌ای (یا حد یکنواخت دنباله‌ای از چندجمله‌ایها) دریك فاصلهٔ کراندار، کراندار است.

بخش ۲۵

۲۵. چ. (ب) هرگاه $\varepsilon>0$ ، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $c<x<c+\delta(\varepsilon)$ و $x\in D(f)$ ، آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$. (پ) اگر(x_n) دنباله‌ای در $D(f)$ باشد به‌قسمی که $c<x_n$ و$c=\lim(x_n)$ ، آنگاه $b=\lim(f(x_n))$.
۲۵. د. (الف) اگر $M>0$ ، آنگاه عددی مانند $m>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $x\geqslant m$ و $x\in D(f)$ ، آنگاه $f(x)\geqslant M$. (ب) هرگاه $M<0$ ، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $0<|x-c|<\delta$ ، آنگاه $f(x)<M$.
۲۵. ر. (الف) بگیرید$\varphi(r)=\sup\{f(x):x>r\}$ و بنویسید$L=\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(r)$.
راهی دیگر: هرگاه $\varepsilon>0$ ، عددی مانند $m(\varepsilon)$ وجود دارد به‌قسمی که اگر$x\geqslant m(\varepsilon)$ ، آنگاه $|\sup\{f(x):x>r\}-L|<\varepsilon$.
۲۵. ز. لم. ۱۲.۲۵ را به‌کار برید.
۲۵. ژ. تابع $f(x)=-1/|x|$ برای $x\neq0$ و $f(0)=0$ را درنظر بگیرید.
۲۵. ش. مثال ۵.۲۰ (ح) را درنظر بگیرید.

۲۵. ض. نه‌الزاماً. تابع $f_n(x)=-x^n$ برای $x\in \mathbf{I}$ را درنظر بگیرید.
۲۵. ط. بله.

بخش ۲۶

۲۶. ب. نشان دهید که $\mathcal{A}_{\circ}$، دستهٔ چندجمله‌ایهای از $\cos x$ در شرایط قضیهٔ استون‌ـوایرشتراس صدق می‌کند.
۲۶. ث. هرگاه $f(\circ)=f(\pi)=\circ$، درابتدا تابع f را با یک تابع g که در فاصله‌هایی مانند $[\circ,\delta]$ و $[\pi-\delta,\pi]$ صفرمی‌شود تقریب بزنید. آنگاه تابع $h(x)=g(x)/\sin x$ برای $x\in(\circ,\pi)$ و $h(x)=\circ$ برای $x=\circ,\pi$ رادرنظربگیرید.
۲۶. خ. تابع $f(x)=\sin(۱/x)$ برای $x\neq\circ$ را درنظربگیرید.
۲۶. ذ. قضیهٔ‌هاینه‌ـ بورل یا قضیهٔ پوشش لبك را به‌روشی که در اثبات قضیهٔ پیوستگی یکنواخت به‌کار گرفته شده، به‌کار برید.
۲۶. ص. (الف) دامنه فشرده، و دنباله همپیوستهٔ یکنواخت است ولی کراندار نیست. (ب) دامنهٔ فشرده، دنباله کراندار ولی همپیوستهٔ یکنواخت نیست. (پ) دامنه فشرده نیست، دنباله‌کراندار وهمپیوستهٔ یکنواخت است.

بخش ۲۷

۲۷. ت. توجه‌کنیدکه $g'(\circ)=\circ$ و $g'(x)=۲x\sin(۱/x)-\cos(۱/x)$ برای $x\neq\circ$.
۲۷. ث. بله.
۲۷. ر. می‌توان نوشت:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x-c}{x-y}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\frac{y-c}{x-y}\cdot\frac{f(y)-f(c)}{y-c}.$$

۲۷. ط. (ب) اگر $b\neq\circ$، آنگاه اگر $n\in\mathbf{N}$ به قدرکافی بزرگ و $x>n$ داده شده باشد، عدد $x_n>n$ وجود دارد به‌قسمی که

$$|(f(x)-f(n)/x|=|(x-n)/x|\;|f'(x_n)|\geqslant|(x-n)/x|\;|b|/۲$$

بخش ۲۸

۲۸. ج. بین ریشه‌های متوالی p'، چندجمله‌ای اکیداً یکنواست. اگر $x_{\circ}$ یك ریشهٔ ازمرتبهٔ فرد p' باشد، آنگاه $x_{\circ}$ یك نقطهٔ فرینهٔ اکید برای p است.
۲۸. ح. تابع f دارای ریشه‌های از مرتبهٔ n در $x=\pm۱$ است، f' دارای

ریشه‌های ازمرتبهٔ ۱ — n در ۱ $\pm = x$ می‌باشد، ویك ریشهٔساده درداخل (۱ , ۱ —) دارد.
۲۸. س. ۲۷.س را به‌کار برید.

بخش ۲۹

۲۹. ت. اگر $\varepsilon >$ ۰، آنگاه اعداد گویایی مانند $r_1, \ldots, r_m$ در I وجود دارند به‌قسمی که $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$ برای $x \neq r_k$. فرض کنید افراز P به‌قسمی باشد که هریك (به‌تعداد حداکثر $2m$) از زیرفاصله‌هایی که شامل یکی‌ازاعداد $r_1, \ldots, r_m$ هستنددارای طولی کمتر از $\varepsilon/2m$ باشد. نشان دهید که $0 \leqslant S(P; f, g) \leqslant 2\varepsilon$.

۲۹— د. اگر $f_1(x) = f(x)$ برای $x \notin \{c_1, \ldots, c_m\}$ و $\varepsilon > 0$، فرض کنید افراز P به‌قسمی باشدکه هریك از زیرفاصله‌هایی که شامل یکی از اعداد $c_1, \ldots, c_m$ استدارای طولی کمتراز $\varepsilon/2mM$ باشد، که درآن $M \geqslant \sup\{\|f\|_J, \|f_1\|_J\}$. با استفاده از نقاط بینی واحد داریم $|S(P; f, g) - S(P; f_1, g)| < \varepsilon$ که در آن $g(x) = x$ برای $x \in J$.

۲۹. ژ. فرض کنید که $c \in (a, b)$، آنگاه f در $[a, c]$ و $[c, b]$ نسبت به g انتگرال‌پذیر است. هرگاه g_1 تحدید g در $[a, c]$ باشد، از ۲۷.ژ نتیجه می‌شود که g_1' در $[a, c]$ پیوسته است، به‌طریق مشابه برای g_2 تحدید g در $[c, b]$ عمل کنیم. ازقضیهٔ ۸.۲۹ نتیجه‌می‌شود که fg_1' در$[a, c]$ انتگرال‌پذیر است وfg_2' در $[c, b]$ انتگرال‌پذیر است ولذا

$$\int_a^c f\,dg = \int_a^c fg_1' \quad \text{و} \quad \int_c^b f\,dg = \int_c^b fg_2'.$$

اکنون بگیرید $(fg')(x) = f(x)g_1'(x)$ برای$a \leqslant x \leqslant c$ و$(fg')(x) = f(x)g_2'(x)$ برای $c < x \leqslant b$.

۲۹. ش. اگر $\|P\| < \delta$ و اگر Q ظریفتر از P باشد، آنگاه $\|Q\| < \delta$.

۲۹. ض. هرگاه $\varepsilon > 0$، فرض کنید $P_\varepsilon = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ یك افراز J باشد به‌قسمی که وقتی $P \supseteq P_\varepsilon$، برای هرمجموع ریمان $S(P; f)$، داشته باشیم

$$\left|S(P; f) - \int_a^b f\right| < \varepsilon,$$

بگیرید $M \geqslant \|f\|_J$ و $\delta = \varepsilon/4nM$. اگر $Q = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ افرازی باشد با نرم $\|Q\| < \delta$، آنگاه $Q^* = Q \cup P_\varepsilon$ به‌قسمی است که $Q^* \supseteq P$ و حداکثر $n - 1$ نقطه بیشتراز Q دارد. نشان دهید که $S(Q^*; f) - S(Q; f)$ حداکثر دارای $2(n-1)$ جمله به‌صورت $\pm\{f(\xi) - f(\eta)\}(x_j - x_k)$ با شرط $|x_j - y_k| < \delta$ است.

بخش ۳۰

۳۰. پ. $\varepsilon>0$ مفروض است، P_εی را کـه در اثبات قضیهٔ ۲.۳۰ آمده است در نظر بگیرید. اگر P ظریفتر از P_ε باشد، آنگاه

$$|S(P_\varepsilon; f, g)-S(P; f, g)|\leqslant\sum|f(u_k)-f(v_k)|\ |g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

که درآن $(u_k-v_k)<\delta(\varepsilon)$؛ پس این مجموع از εM کوچکتر است. اکنون محك کوشی را به‌کاربرید.

۳۰.ث. از برآوردی مستقیم نتیجه می‌شود:

$$\left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n}\leqslant M(b-a)^{1/n}.$$

بعکس دریك زیرفاصلهٔ $[a, b]$ داریم $f(x)\geqslant M-\varepsilon$.

۳۰. ح. اگر $m\leqslant f(x)\leqslant M$ برای $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$، آنگاه عددی مانند A باشرط $m\leqslant A\leqslant M$ وجود دارد به‌قسمی‌که

$$F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^\beta f\,dg=A\{g(\beta)-g(\alpha)\},$$

۳۰. خ. بگیـریـد $f(x)=-1$ بـرای $x\in[-1, 0)$ و $f(x)=1$ بـرای $x\in[0, 1]$.

۳۰. د. برای‌اینکه $F(b)-F(a)$ را به‌صورت مجموع ریمان انتگرال f به‌دست آورید، قضیهٔ مقدار میانگین ۶.۲۷ را به‌کاربرید.

۳۰. ز. اگر $m\leqslant f(x)\leqslant M$ برای $x\in J$، آنگاه

$$m\int_a^b p\leqslant\int_a^b fp\leqslant M\int_a^b p.$$

اکنون قضیهٔ بولتسانو (قضیهٔ ۴.۲۲) را به‌کار برید.

۳۰. ش. توابـع φ و φ^{-1} پیـوسته و یـك به یك هستند. افرازهای $[c, d]$ بـا افرازهای $[a, b]$ در تناظر یـك به‌یك هستند ومجموعهای ریمان‌ـاستیلتیس $f\circ g$ نسبت به‌تابع $g\circ\varphi$ در تناظر یك به‌یك با مجموعهای ریمان‌ـاستیلتیس f نسبت به g می‌باشند.

۳۰. غ. (الف) ۳/۴. (پ) ۹. (ث) $\pi/2$.

بخش ۳۱

۳۱. ذ. چون $f_n(x)-f_n(c)=\int_c^x f'_n$، می‌توان قضیهٔ ۲.۳۱ را به کار بـرد و نتیجه گرفت که $f(x)-f(c)=\int_c^x g$ برای هر $x\in J$. نشان دهید که $g=f'$.

۳۱. ط. قضیهٔ ۹.۳۰ را در مورد (۲.۳۱) باشرط $h(t)=(b-t)^{n-1}$ به کار برید.

۳۱. غ. ثابت کنید که توابع G و H پیوسته‌اند. بقیهٔ برهان مانند برهانی‌است که در ۹.۳۱ آمده است.

۳۱. ق. تابع f در $J_1 \times J_2$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۳۱. ك. بگیرید $g_2(0)=0$، $g_2(x)=1/2$ برای $1>x>0$، و $g_2(1)=1$.

بخش ۳۲

۳۲. ت. (الف)، (ب)، (ت)، و (ث) همگرا هستند.

۳۲. ث. (الف) برای $p, q > -1$ همگراست. (ب) برای $p+q > -1$ همگراست.

۳۲. ج. (الف) و (پ) همگرای مطلق هستند، (ب) واگراست.

۳۲. چ، (الف) برای $q > p+1$ همگرای مطلق است. (ب) همگرا برای $q>0$ و همگرای مطلق برای $q>1$ است.

بخش ۳۳

۳۳. الف. اگر $0 \leqslant t \leqslant \beta$، آنگاه $x^t e^{-x} \leqslant x^\beta e^{-x}$.

۳۳. ب. آزمون دیریکله ۴.۳۳ را به‌کار برید.

۳۳. پ. (الف) برای $|t| \geqslant a > 0$ همگرای یکنواخت است. (ب) برای $t \leqslant 0$ واگرا و برای $t \geqslant c > 0$ همگرای یکنواخت است. (پ) و (ث) برای تمام مقادیر t همگرای یکنواخت هستند.

۳۳. ج. $\sqrt{\pi}$.

بخش ۳۴

۳۴. پ. جمله‌های سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ را اول به قسمی دسته‌بندی کنید که سری به -1 همگرا باشد و بعد به‌قسمی‌که به 0 همگرا باشد.

۳۴. چ. سری $\sum((-1)^n n^{-1/2})$ را درنظر بگیرید. حالت $a_n \geqslant 0$ را نیز درنظر بگیرید.

۳۴. ح. اگر $a, b \geqslant 0$، آنگاه $2(ab)^{1/2} \leqslant a+b$.

۳۴. خ. نشان دهید که $b_1+b_2+\dots+b_n \geqslant a_1(1+1/2+\dots+1/n)$.

۳۴. د. تمرین ۳۴. ج (الف) را به‌کار برید.

۳۴. ذ. نشان دهید که $a_1+a_2+\dots+a_{2^n}$ از طرف پایین کراندار و $(1/2)\{a_1+2a_2+\dots+2^n a_{2^n}\}$ یك کران پایین آن و از طرف بالا کراندار و

$a_1+2a_2+\dots+2^{n-1}a_{2^{n-1}+1}+a_{2n}$ یک کران بالای آن است.

۳۴. س. مجموعهای جزئی s_k با شرط $n/2\leqslant k\leqslant n$ را مورد بررسی قرار دهید ومحک کوشی را به‌کار برید.

بخش ۳۵

۳۵. پ. (الف) و (ث) واگرا هستند. (ب) همگراست

۳۵. ت. (ب)، (پ) و (ث) واگرا هستند.

۳۵. چ. (الف) همگراست. (پ) واگراست.

۳۵. ر. اگر $r<1$ و $m\in\mathbf{N}$ به‌قدرکافی بزرگ باشد، داریم

$$\log m<\log(m+1)-r/m$$

نشان دهیدکه دنبالهٔ $(x_n n\log n)$ صعودی است.

بخش ۳۶

۳۶. الف. آزمون دیریکله را به‌کار برید.

۳۶. ت. (الف) همگراست. (ب) واگراست.

۳۶. ث. (پ) اگر $\sum(a_n)$ همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum(b_n)$ نیز همگرای مطلق است. اگر، بجزوقتی که $\sin n$ نزدیک به ±1 است، $a_n=0$، می‌توان یک‌مثال نقض به‌دست آورد. (ت) $a_n=1/n(\log n)^2$ را درنظر بگیرید.

۳۶. خ. اگر $m>n$، آنگاه $s_{mn}=+1$، اگر $m=n$ آنگاه $s_{mn}=0$ و بالاخره اگر $m<n$، آنگاه $s_{mn}=-1$.

۳۶. ذ. توجه‌کنید که $2mn\leqslant m^2+n^2$.

بخش ۳۷

۳۷. الف. (الف) و(پ) برای هر x همگرای‌یکنواخت هستند. (ب) برای $x\neq0$ همگراست وبرای xهایی که درمتمم یک همسایگی دلخواه $x=0$ باشند، این همگرایی یکنواخت است. (ت) برای $x>1$ همگرا وبرای $x\geqslant a$ که درآن $a>1$ همگرای یکنواخت است.

۳۷. پ. اگرسری همگرای یکنواخت باشد، آنگاه

$$|c_n\sin nx+\dots+c_{2n}\sin 2nx|<\varepsilon.$$

به‌شرط آنکه n بقدرکافی بزرگ باشد. اکنون فاصله‌ای درنظربگیریدکه وقتی x دراین فاصله است، برای $n\leqslant k\leqslant 2n$ داریم $\sin kx>1/2$ و به xهای واقع در این فاصله

توجه کنید.

۳۷. ح. (الف) ∞، (پ) $1/e$، (ج) ۱.

۳۷. ر. قضیهٔ یکتایی ۱۷.۳۷ را به‌کار ببرید.

۳۷. ژ. نشان دهید که اگر $n \in \mathbf{N}$، آنگاه یك چند جمله‌ای مانند P_n وجود دارد به‌قسمی که اگر $x \neq 0$، آنگاه $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$.

۳۷. ظ. سریهای $A(x) = \sum (a_n x^n)$، $B(x) = \sum (b_n x^n)$ و $C(x) = \sum (c_n x^n)$ در I به توابع پیوسته همگرا هستند. بنا بر قضیهٔ ضرب ۸.۳۷، برای $0 \leqslant x < 1$ داریم $C(x) = A(x)B(x)$، و از پیوستگی نتیجه می گیریم $C(1) = A(1)B(1)$.

۳۷. ع. دنبالهٔ مجموعهای جزئی در فاصلهٔ $[0, 1]$ صعودی است.

۳۷. غ. اگر $\varepsilon > 0$، آنگاه برای $n > N$ داریم $|a_n| < \varepsilon p_n$. مجموع $\sum (a_n x^n)$ را به‌یك مجموع روی $n = 1, \dots, N$ ویك مجموع روی $n > N$ تفکیك کنید.

بخش ۳۸

۳۸. ب. (ب) اگر $a_n = 0$، آنگاه برای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم

$$F(x+2\pi) = \int_c^{x+2\pi} f(t)dt = \int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt$$

$$= F(x) + 0 = F(x).$$

۳۸. ث. (پ) مقدار $f_2(0)$ را از دو راه حساب کنید.

۳۸. چ. (الف) اگر k_1 پیوسته باشد، آنگاه $k_1(-\pi) = -\pi^3$ ولی چون k_1 دارای دورهٔ 2π است، $k_1(-\pi) = k_1(\pi) = \pi^3$.

۳۸. خ. (ب) $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos 2x}{1\times 3} + \dfrac{\cos 4x}{3\times 5} + \dfrac{\cos 6x}{5\times 7} + \dots\right]$

(پ) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{1} - \dfrac{\cos 3x}{3} + \dfrac{\cos 5x}{5} - \dots\right]$

(ث) $\dfrac{\pi^2}{6} - \left[\dfrac{\cos 2x}{1^2} + \dfrac{\cos 4x}{2^2} + \dfrac{\cos 6x}{3^2} + \dots\right]$

۳۸. ذ. (ب) $\dfrac{8}{\pi}\left[\dfrac{\sin 2x}{1\times 3} + \dfrac{2\sin 4x}{3\times 5} + \dfrac{3\sin 6x}{5\times 7} + \dots\right]$

(ث) $\dfrac{8}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{1^3} + \dfrac{\sin 3x}{3^3} + \dfrac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right]$

۳۸. ژ. (ت) از تمرین ۳۸. چ (ب) استفاده کنید.

۳۸. ض. (الف) $\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\pi x}{1}-\frac{\sin\pi x}{2}+\frac{\sin\frac{3}{2}\pi x}{3}-\dots\right]$

(ب) $1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]$.

۳۸. ط. از قضیهٔ فیر ۱۲.۳۸ وقضیهٔ ۳.۱۹ استفاده کنید.

۳۸. ظ. برهانهای ۷.۳۸ و ۱۲.۳۸ را کمی تغییر دهید.

بخش ۳۹

۳۹. ج. داریم $\|(u, v)\|^2=|u^2+v^2|\leqslant|G(u, v)-G(0, 0)|$ بنابراین $DG(0, 0)(u, v)=0$، اگر $(x, y)\neq(0, 0)$، آنگاه

$$D_1G(x, x)=2x\sin(2x^2)^{-1}-x^{-1}\cos(2x^2)^{-1}،$$

که وقتی $x\to 0$، کراندار نیست.

۳۹. ر. (الف) $\nabla_{(a, b, c)}f_1=(2a, 2b, 2c)$.

(پ) $\nabla_{(a, b, c)}f_3=(bc, ac, ab)$.

۳۹. ز. (الف) ۰. (پ) $4/\sqrt{6}$.

۳۹. س. (الف) درنقطهٔ $(1, 2)$ داریم

$$\{(x, y, z): z-5=2(x-1)+4(y-2)\}.$$

(پ) درنقطهٔ $(1, 1)$ داریم

$$\{(x, y, z): z-\sqrt{2}=-(x+y-2)/\sqrt{2}\}$$

۳۹.ص. (الف) در $t=0$ داریم $\{x, y, z): x=t, y=0, z=0\}$، در $t=1$ داریم $\{(x, y, z): x=1+s, y=1+2s, z=1+3s\}$.

(پ) در $t=\pi/2$ داریم

$$\left\{x, y, z): x=-2s, y=2, z=\frac{1}{2}\pi+s\right\}.$$

۳۹. ط. (ب) درنقطهٔ $(3, -1, -3)$ نظیر به $(s, t)=(1, 2)$ داریم

$$S_h=\{(x, y, z): x=3+(s-1)+(t-2), y=-1+(s-1)-(t-2), z=-3+2(s-1)-4(t-2)\}.$$

(ت) درنقطهٔ $(1, 0, 0)$ نظیر به $(s, t)=(0, \pi/2)$ داریم

$$S_h=\left\{(x,\ y,\ z): x=1,\ y=s,\ z=-\left(t-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}.$$

۳۹. غ. توجه کنید که اگر $z\in\mathbf{R}^r$ ،$y\in\mathbf{R}^q$، آنگاه $(y,\ z)\in\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^r=\mathbf{R}^{q+r}$ به‌قسمی است که $\|(y,\ z)\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$.

بخش ۴۰

۴۰. الف. $F'(t)=2(3t+1)3+2(2t-3)2=26t-6$.

۴۰. ت. $D_1F(s,t)=(\sin s\cos t+\sin t)(-\sin s)$

$$+(\cos s+\sin t)(\cos s\cos t)+0$$

۴۰. ج. (الف) $D_1F(x,y)=f'(xy)y,\ \ D_2F(x,y)=f'(xy)x$

(ت) $D_1F(x,y)=f'(x^2-y^2)(2x),\ \ D_2F(x,y)=f'(x^2-y^2)(-2y)$

۴۰. ذ. (ب) چون $g'(t)=D_1f(tc)c_1+\cdots+D_pf(tc)c_p$، از رابطهٔ اویلر نتیجه می‌شود که

$$tg'(t)=(tc_1)D_1f(tc)+\cdots+(tc_p)D_pf(tc)=kf(tc)=kg(t).$$

بنابراین $g(t)=Ct^k$ برای‌یك ثابت C (چرا؟). چون $C=g(1)=f(c)$، نتیجه‌می گیریم که $f(tc)=g(t)=t^kf(c)$، یعنی f همگن از درجهٔ k است.

۴۰. ز. چون

$$\|B(x+u,y+v)-B(x,y)-(B(x,v)+B(u,y))\|$$
$$=\|B(u,v)\|\leqslant M\|u\|\|v\|\leqslant\tfrac{1}{2}M(\|u\|^2+\|v\|^2)=\tfrac{1}{2}M\|(u,v)\|^2,$$

نتیجه می‌شود که $DB(x,y)(u,v)$ موجود و برابر با $B(x,v)+B(u,y)$ است

۴۰. ش. چون برای $u\in\mathbf{R}$ داریم

$$Dg(c)(u)=(ug_1'(c),\cdots,ug_p'(c))=ug'(c)،$$

از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود که

$$Dh(c)(u)=Df(g(c))(Dg(c)(u))=Df(g(c))(ug'(c))=uDf(g(c))(g'(c))$$

بنابراین $h'(c)=Df(g(c))(g'(c))$.

۴۰. ص. هرگاه $f=(f_1,\cdots,f_q)$، نقاطی‌مانند $c_i\in S$ وجود دارندبه قسمی که $f_i(b)-f_i(a)=Df_i(c_i)(b-a)$. اکنون نمایش ماتریسی L، یعنی $[D_jf_i(c)]$ را

درنظر بگیرید.

۴۰. ض. بنابر قضیهٔ ۷.۱۲ هردو نقطهٔ واقع در Ω را می‌توان با یك چند ضلعی که تماماً در Ω واقع است به یکدیگر وصل کرد. قضیهٔ مقدار میانگین را در مورد هر قطعه از این خم به‌کار برید.

۴۰. ع. درحقیقت $D_x f(x,y) = y(x^2 - y^2)(x^2+y^2)^{-1} + 4x^2y^3(x^2+y^2)^{-2}$ و $D_{yx}f(0,0) = -1$ در صورتی‌که $D_{xy}f(0,0) = +1$.

۴۰. ف. اگر $\varphi : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbf{R}^q$ به صورت $\varphi(t) = f(a+t(b-a))$ تعریف شده باشد، آنگاه $\varphi'(t) = Df(a+t(b-a))(b-a)$. اکنون بنویسید $(\varphi(t) = \varphi_1(t), \cdots, \varphi_q(t))$ که درآن $\varphi_j(t) = f_j(a+t(b-a))$ و توجه کنید که $\varphi_j(1) - \varphi_j(0) = \int_0^1 \varphi_j'(t)$.

بخش ۴۱

۴۱. الف. از تمرین ۲۱. ش استفاده کنید.

۴۱. ت. دراینجا $Df(0) = 0$.نه.

۴۱. ث. تمرینهای ۲۷. ح و ۲۲. س را در نظر بگیرید.

۴۱. ج. تمرین ۴۰. ر را در نظر بگیرید.

۴۱. د. فرینه‌های نسبی نزدیك ۰ را بیابید.

۴۱. ص. (الف) در $(1,1,2)$ داریم $S_F = \{(x,y,z) : 2x+2y-z=2\}$.

(پ) در $(4, \frac{1}{2}, 2)$ داریم $S_F = \{(x,y,z) : x+8y-2z=4\}$.

۴۱. ط. اگر $D_1 f$ در یك مجموعهٔ باز صفر باشد، تمرین ۴۰. ط را به‌کار برید. اگر $D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$، آنگاه تابع $F(x,y) = (f(x,y), y)$ را درنزدیکی (x_0, y_0) را در نظر بگیرید.

۴۱.ظ. اگر $D_1 g(c) \neq 0$، آنگاه تابع $G(x,y) = g(x) + (0,y)$ را درنظر بگیرید.

۴۱. غ. با استدلالی نظیر برهان ۴۱. ۶ نشان دهید که اگر $\|y\| < m/2$، آنگاه یك بردار $x \in \mathbf{R}^p$ با شرط $\|x\| \leqslant 1$ وجود دارد به قسمی که $y = L_1(x)$.

۴۱. ف. هرگاه $y \in \mathbf{R}^p$، بگیرید $x_0 = 0$ و

$$x_{n+1} = x_n - (f(x_n) - f(x_{n+1}) - (x_n - x_{n-1})).$$

با استدلالی نظیر برهان ۶.۴۱ نشان دهید که $\bar{x} = \lim(x_n)$ وجود دارد و $f(\bar{x}) = y$.

بخش ۴۲

۴۲. الف. (الف) در$(0,0)$ نقطهٔ زینی است. (ب) در $(-2, 1/2)$ مینیمم اکید نسبی است. (پ) در $(0, -1)$ نقطهٔ زینـی است و مینیمم اکید نسبی در $(0, 3)$ است،

(ج) در نقطهٔ $(0,0)$ زینی و در نقاط $(0,-1)$ و $(0,2)$ مینیمم اکید نسبی است.

۴۲. ت. اگر f ثابت نباشد، آنگاه یا زبرینه و یا زیرینهٔ f در

$$S=\{x\in\mathbf{R}^p:\|x\|\leqslant 1\}$$

صفر نیست. چون S فشرده است، f در یك نقطهٔ $c\in S$ به این زبرینه (یا زیرینه) می‌رسد. فرض، امکان $\|c\|=1$ را رد می‌کند.

۴۲. ج. (الف و ت) در نقطهٔ $(0,0)$ مینیمم نسبی است. (ب و پ و ث) در $(0,0)$ نقطهٔ زینی است. (ج) مینیمم اکید نسبی در $(0,0)$ است.

۴۲. چ. در $(1,1)$ نقطهٔ زینی است.

۴۲. ح. میمونها دم دارند.

۴۲. خ. $7/30$.

۴۲. ط. (الف) تابع به مقدار ماکزیمم ۱ در $(\pm1,0)$ می‌رسد، تابع به مقدار مینیمم -1 در $(0,\pm1)$ می‌رسد. (ب) تابع به مقدار ماکزیمم ۳ در نقطهٔ $(1,0)$ و به مقدار مینیمم -1 در نقطهٔ $(1,0)$ می‌رسد. (پ) تابع به مقدار ماکزیمم ۴ در نقطهٔ $(1,\pm1)$ به مقدار مینیمم -1 در نقطهٔ $(-1,0)$ می‌رسد. (ت) تابع به مقدار ماکزیمم ۱ در $(0,\pi/2)$ و به مقدار مینیمم -1 در $(0,-\pi/2)$ می‌رسد.

۴۲. ع. تابع به مقدار ماکزیمم ۱ در $(1,0,0)$ و به مقدار مینیمم $5/9$ در $(-1/3,2/3,2/3)$ می‌رسد.

بخش ۴۳

۴۳. ب. هرگاه $p\in\mathbf{N}$ داده شده باشد، بگیرید $n>(2^{1/p}-1)^{-1}$. هرگاه یك حجرهٔ I در $\mathbf{R}^p$ ضلعهایی به‌طول $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_p$ داشته باشد بگیرید $c=a_1/n$. آنگاه I در اجتماع $n([a_2/c]+1)\cdots([a_p/c]+1)$ مکعب واقع است که طول ضلعشان c و محتوای کل آنها کمتر از $2(a_1,\cdots a_p)=2c(I)$ است. بنابراین، اگر Z در اجتماع حجره‌هایی باشد که محتوای کل آنها کمتر از ε باشد، آنگاه این مجموعه در اجتماع مکعبهایی قرار دارد که محتوای کل آنها از 2ε کمتر است.

۴۳. ث. نه.

۴۳. ح. اگر بستار J_j به‌صورت $[a_{jp},b_{jp}]\times\cdots\times[a_{j1},b_{j1}]$ برای $j=1,\ldots,n$ باشد و اگر $I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$، فرض کنید P_1 افراز $[a_1,b_1]$ حاصل از نقاط $\{a_{j1},b_{j1}:j=1,\cdots,n\}$، ...، و P_p افراز $[a_p,b_p]$ حاصل از نقاط

$$\{a_{jp},b_{jp}:j=1,\cdots,n\}$$

باشند. افرازهای $P_1,\cdots,P_p$ یك افراز برای I تولید می‌کند.

۴۳. خ. مجموعهٔ Z را در اجتماع با پایانی از حجره‌های بسته واقع در I که

محتوای کل آنها کمتر از ε است قرار دهید. اینك تمرین ۴۳. ح را به‌کار ببرید.

۴۳.د مجموعهٔ Z را در اجتماع بـا پایانی از حجره‌های باز در I که محتوای کل آنها کمتر از ε است قرار دهید. اینك تمرین ۴۳. ح را به‌کار برید.

۴۳ ذ. دنباله‌ای از افرازهای I را بـه صـورت مکعبهایی به طول ضلع $\delta 2^{-n}$ با نصف کردن متوالی اضلاع I به دست‌آورید. اگر یك مکعب $K \subseteq I$ به ضلع r داده شده باشد، K را در اجتماع تمام مکعبهایی از افراز nام که دارای مقطع غیر تهی با K باشند قرار دهید. اگر n به قدرکافی بزرگ باشد، داریـم $(1+\delta/2^{n-1}r)^p < 2$، آنگاه این اجتماع دارای محتوایی کمتر از $2c(K)$ است.

۴۳.ر. ازتمرین ۴۳. چ استفاده کنید

۴۳.ز. از تمرین ۴۳.ر استفاده کنید.

۴۳. ض. نخست حالت $f = g$ و سپس حالت $(f+g)^2$ را درنظر بگیرید.

۴۳.ط. بگیرید $\|f\|_I, \|g\|_I < M$. چون f و g در K پیوستهٔ یکنواخت هستند، اگر P_ε به اندازهٔ کافی ظریف باشد، آنگاه f و g در هریك از K_jها کمتر از $\varepsilon/2M$ تغییر می‌کنندو برای هر $p_j \in K_j$ داریم $\left|\int_K fg - \sum f(p_j)g(p_j)c(K_j)\right| \leqslant (\varepsilon/2)c(K)$. لذا

$$\left|\int_K fg - \sum f(x_j)g(y_j)c(K_j)\right| \leqslant \left|\int_K fg - \sum f(x_j)g(x_j)c(K_j)\right|$$

$$+\left|\sum f(x_j)[g(x_j)-g(y_j)]c(K_j)\right| \leqslant \varepsilon c(K).$$

۴۳. غ. (ت) اگر Z فشرده باشد و در اجتماع حجره‌های باز $\dots ,J_2 ,J_1$ قرار گرفته باشد، آنگاه Z در اجتماع با پایانی از این حجره‌ها قرار دارد.

بخش ۴۴

۴۴. ب. (الف) اگر $c \notin b(A)$، آنگاه c یا یك نقطهٔ درونی A و یا یك نقطهٔ درونی $\mathcal{C}(A)$ است. درهردو حالت، یك همسایگی c مجزا از $b(A)$ وجود دارد. بنابـراین $\mathcal{C}(b(A))$ باز است

۴۴. پ. در مثال ۴۳. ۲ (چ) داریم $S^- = b(S) = \mathbf{I}\times\mathbf{I}$. با این‌حال

$$b(\mathbf{I}\times\mathbf{I}) = \mathbf{I}\times\{0,1\}\cup\{0,1\}\times\mathbf{I}.$$

۴۴. ت. از $(A\cup B)^- \subseteq A^- \cup B^-$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} b(A\cap B) &= (A\cap B)^- \cap (\mathcal{C}(A\cap B))^- \subseteq A^- \cap B^- \cap (\mathcal{C}(A)\cup \mathcal{C}(B))^- \\ &= A^- \cap B^- \cap (\mathcal{C}(A)^-) \cup (\mathcal{C}(B)^-) \\ &= (B^- \cap b(A)) \cup (A^- \cap b(B)) \subseteq b(A)\cup b(B). \end{aligned}$$

۴۴. د. هرگاه $\varepsilon > 0$، P_ε را افراز تمریـن ۴۳. ش، بگیرید به قسمی که اجتماع تمام حجره‌های واقع در P_ε که شامـل نقاطی از $b(A)$ می‌باشند دارای محتوایی کمتر از $\varepsilon/2\|f\|_I$ باشد. اکنون تمرین ۴۳.ش را در مورد تحدید f در A به‌کار برید.

۴۴. ذ. از $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ بـرای $x \in A$، نتیجه می‌شود کـه $m\int_A g \leqslant \int_A fg \leqslant M\int_A g$. هرگاه $\int_A g \neq 0$، مقدار μ را $(\int_A fg)(\int_A g)^{-1}$ انتخاب کنید.

۴۴. ژ. مجموعهٔ $b(K) = K$ دارای محتوای صفر نیست.

۴۴. ض. توجه کنید که $F(x,y) = \int_0^y \{\int_0^x f(s,t)ds\}dt$.

بخش ۴۵

۴۵. الف. برهانهای ۱.۴۵ تا ۴.۴۵ را بررسی کنید.

۴۵. ت. (الف)6π.

۴۵. ج. $(e-1)^2$.

۴۵. ح. بگیریـد $u = xy, v = y/x^2$ سطح مطلوب برابـراست با $(\log 2)/3$.

واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی

Abel summability	جمعپذیری آبل
absolute convergence	همگرایی مطلق
accumulation point	نقطهٔ تجمع
additive	جمعی
affine	آفین
algebraic properties	خواص جبری
alternating series	سری متناوب
analytic	تحلیلی
anti-derivative	پادمشتق
archimedean property	خاصیت ارشمیدسی
arithmetic mean	میانگین حسابی
asymptotic series	سری مجانبی
axiomatic	اصل موضوعی
axiom of choice	اصل انتخاب
ball	گوی
bijection	دوسویی
bijective	دوسو
bilinear	دوخطی
binary operation	عمل دوتایی

binomial expansion	بسط دوجمله‌ای
block partial derivative	مشتق جزئی بلوکی
bound	کران
boundary point	نقطهٔ کرانه‌ای
bounded	کراندار
Cantor's ternary set	مجموعهٔ سه‌تایی کانتور
cardinal number	عدد اصلی
cartesian	دکارتی
-product	حاصلضرب دکارتی
-space	فضای دکارتی
cell	حجره
chain rule	قاعدهٔ زنجیری
change of variable	تغییر متغیر
circumscribing contour	کرانهٔ محیطی
class	رده
closure	بستار
cluster point	نقطهٔ تجمع
collection	دسته
combination	ترکیب
compactness	فشردگی
compact set	مجموعهٔ فشرده
comparison test	آزمون مقایسه
complement	متمم
completeness property	خاصیت کمال
complex number	عدد مختلط
component	مؤلفه
composition	ترکیب
condensation test	آزمون تراکم
conditional convergence	همگرای مشروط
conjugate	مزدوج
connected set	مجموعهٔ همبند
constraint	قید

content	محتوا
-of set	محتوای مجموعه
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
contraction	انقباض
contradiction	تناقض
convergence	همگرایی
-in mean	همگرایی درمیانگین
-square	همگرایی درمربع میانگین
convurgent	همگرا
convex	محدب
correspondence	تناظر
countable	شمارش‌پذیر
covering	پوشش
criterion	محك
critical point	نقطهٔ بحرانی
curve	خم
cut property	خاصیت بریدگی
decreasing	نزولی
deleted limit	حدسوده
density	چگالی
denumerable	شمارش‌پذیر بی‌پایان
derivative	مشتق
diagonal	قطری
-method	روش قطری
-procedure	روش قطری
diagram	نمودار
differentiable	دیفرانسیل‌پذیر [= مشتق‌پذیر]
differentiation	مشتق گیری
directional derivative	مشتق‌جهتی
disconnected	ناهمبند
disconnection	ناهمبندی

discontinuity	ناپیوستگی
discrete metric	متریك گسسته
disjoint	مجزا
-set	مجموعهٔ مجزا
divergence	واگرایی
divergent	واگرا
domain of a function	دامنهٔ تابع [= حوزهٔ تعریف تابع]
dominated convergence	همگرایی محصور
dot product	حاصلضرب نقطه‌ای [= حاصلضرب داخلی]
double	دوگانه
-limit	حددوگانه
-sequence	دنبالهٔ دوگانه
-series	سری دوگانه
element	عنصر
empty set	مجموعهٔ تهی
end points	نقاط انتهایی
enumerable	شمارش‌پذیر
equality	برابری
equicontinuity	همپیوستگی
equivalent	هم‌ارز
-sequences	دنباله‌های هم‌ارز
extension	گسترش
exterior point	نقطهٔ برونی
extremum	فرینه
field	هیأت
finite	باپایان
-set	مجموعهٔ باپایان
fixed point	نقطهٔ ثابت
functional	تابعك
function of bounded variation	تابع دارای تغییر کراندار

geometric mean	میانگین هندسی
geometric series	سری هندسی
global	همه‌جایی
-continuity	پیوستگی همه‌جایی
gradient	گرادیان
grid	توری
half-closed cell	حجرهٔ نیم بسته
half-open cell	حجرهٔ نیم باز
harmonic	همساز
-series	سری همساز
homogeneous	همگن
hyperbolic function	تابع هیپربولیك
hypergeometric series	سری فوق هندسی
identity	همانی، اتحاد
identity element	عنصر همانی
image	تصویر
implicit	ضمنی
improper integral	انتگرال ناسره
inclusion	شمول
increasing	صعودی
indefinite	نامعین
indeterminant forms	صور مبهم
inequality	نابرابری
infima	زیرینه‌ها
infimum	زیرینه
infinite	بی‌پایان
initial segment	قطعهٔ آغازی
injection	تابع یك به‌یك
injective	یك به‌یك
inner product	فضای حاصلضرب داخلی
-space	فضای حاصلضرب داخلی

integrable	انتگرال‌پذیر
integrability	انتگرال‌پذیری
integral	صحیح، انتگرال
-test	آزمون انتگرال
integrand	تابع زیرعلامت انتگرال
integration	انتگرال‌گیری
_by parts	انتگرال‌گیری جزء به‌جزء
integrator	انتگرال‌گیر
interior maximum	ماکزیمم درونی
interior point	نقطهٔ درونی
intersection	مقطع
interval	فاصله
-unit	فاصلهٔ یکه
inverse	وارون
inversion mapping	نگاشت انعکاس
irrational	اصم[= گنگ]
iterated	مکرر
jacobian determinant	دترمینان ژاکوبی
jump of a function	جهش تابع
kernel	هسته
Lagrange multiplier	ضریب لاگرانژ
Lagrange identity	اتحاد لاگرانژ
law	قانون
least squares	کمترین مربعات
least upper bound	کوچکترین کران بالا [= زبرینه]
Lebesgue covering	پوششی لبگ
limit	حد
_superior	حد زبرین
local	موضعی

lower bound	کران پایین
lower integral	انتگرال پایین
mapping	نگاشت
maximum	ماکزیمم
mean convergence	همگرایی درمیانگین
mean square convergence	همگرایی درمربع میانگین
measure zero	اندازهٔ صفر
metric space	فضای متریك
minimum	مینیمم
monotone	یکنوا
-convergence	همگرایی یکنوا
multiplicity of root	مرتبهٔ ریشه
natural number	عدد طبیعی
neighborhood	همسایگی
nested cells	حجره‌های آشیانی [= فاصله‌های آشیانی]
non - deleted limit	حد ناسوده
nondifferentiable	دیفرانسیل ناپذیر
non—empty set	مجموعهٔ غیر تهی
nonintersecting sets	مجموعه‌های مجزا
norm	نرم
normed space	فضای نرم‌دار
nullity	پوچی
null space	فضای پوچ
one—one correspondence	تناظر یك به یك
operation	عمل
order	ترتیب
ordered	مرتب
-line segments	قطعه خطهای مرتب

-pairs	جفتهای مرتب
order properties	خواص ترتیبی
ordinate set	مجموعهٔ عرض
orthogonal vectors	بردارهای متعامد
orthonormal set	مجموعهٔ متعامدیکه
oscillation	نوسان
outer content	محتوای خارجی
parallelepiped	متوازی السطوح
parallelogram identity	اتحاد متوازی‌الاضلاع
partial	جزئی
-product	حاصلضرب جزئی
-sum	مجموع جزئی
partition	افراز
periodic function	تابع دوره‌ای
piecewise continuous	پیوستهٔ تکه‌ای
pointwise convergence	همگرایی نقطه‌ای
polar	قطبی
-coordinates	مختصات قطبی
-curve	خم قطبی
polygonal curve	خم چند ضلعی
polynomial	چند جمله‌ای
positive class	ردهٔ مثبت
positive square root	جذر مثبت [= ریشهٔ دوم مثبت]
power series	سری توانی
preservation of compactness	پایداری فشردگی
preservation of connectedness	پایداری همبندی
proper	سره
-integral	انتگرال سره
-subset	زیر مجموعهٔ سره
range of a function	برد تابع
rank	رتبه

ratio	نسبت
rational number	عدد گویا
ray	پرتو
real part	قسمت حقیقی
rearrangement of series	آرایش مجدد سری
relative	نسبی
-complement	متمم نسبی
remainder	باقیمانده
restriction	تحدید
Riesz representation	نمایش ریز
saddle point	نقطهٔ زینی
semicontinuity	نیم پیوستگی
sequence	دنباله
series	سری
set	مجموعه
-theory	نظریهٔ مجموعه‌ها
shuffled sequence	دنبالهٔ آمیخته
side	یال
side condition	شرط جنبی
simple root	ریشهٔ ساده
sine function	تابع سینوسی
sine series	سری سینوسی
solid of revolution	جسم دوار
space - filling curve	خم فضا پرکن
step function	تابع پله‌ای
strictly increasing	اکیداً صعودی
subsequence	زیر دنباله
subset	زیر مجموعه
summability	جمعپذیری
summable	جمعپذیر
suprema	زبرینه‌ها
supremum	زبرینه [= سوپریمم]
surjection	پوشایی

surjective function	تابع پوشا
symmetric difference	تفاضل متقارن
telescoping sum	مجموع ادغامی
test	آزمون
topological space	فضای توپولوژیکی
topology	توپولوژی
triangle inequality	نابرابری مثلثی
trichotomy property	خاصیت سه گانگی
unbounded	بیکران
uncountability	شمارش ناپذیری
uniform	یکنواخت
union	اجتماع
uniqueness	یکتایی
unit cell	حجرهٔ یکه
unit interval	فاصلهٔ یکه
upper bound	کران بالا
upper integral	انتگرال بالا
vector space	فضای برداری
void	تهی
-function	تابع تهی
-set	مجموعهٔ تهی
well-ordering property	خاصیت خوش ترتیبی

واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

آرایش مجدد سری	rearrangement of series
آزمون	test
ـ انتگرال	integral test
ـ تراکم	condensation test
ـ مقایسه	comparison test
آفین	affine
اتحاد	identity
ـ لاگرانژ	Lagrange's identity
ـ متوازی‌الاضلاع	Parallelogram identity
اجتماع	union
اصل انتخاب	axiom of choice
اصل موضوعی	axiomatic
اعشاری	decimal
افراز	partition
اکیداً صعودی	strictly increasing
انتگرال	integral
ـ بالا	upper integral
ـ پایین	lower integral
ـ سره	proper integral
ـ ناسره	improper integral
انتگرال‌پذیر	integrable

integrability	انتگرال پذیری
integrator	انتگرال گیر
integration	انتگرال گیری
integration by parts	ــ جزء به‌جزء
measure zero	اندازهٔ صفر
contraction	انقباض

finite	با پایان
remainder	باقیمانده
equality	برابری
orthogonal vectors	بردارهای متعامد
range of a function	برد تابع
closure	بستار
binomial expansion	بسط دوجمله‌ای
infinite	بی‌پایان
unbounded	بیکران

anti-derivative	پادمشتق
preservation	پایداری
preservation of compactness	ــ فشردگی
preservation of connectedness	ــ همبندی
ray	پرتو
nullity	پوچی
surjection	پوشایی
covering	پوشش
Lebesgue covering	ــ لبگ
continuous	پیوسته
piecewise continuous	ــ تکه‌ای
continuity	پیوستگی
global continuity	ــ همه‌جایی

function	تابع

ـــ پله‌ای	step function
ـــ پوشا	surjective function
ـــ تهی	void function
ـــ دارای تغییر کراندار	function of bounded variation
ـــ دوره‌ای	periodic function
ـــ زیرعلامت انتگرال	integrand
ـــ سینوسی	sine function
ـــ هیپربولیك	hyperbolic function
ـــ یك‌به‌یك	injection
تابعك	functional
تحدید	restriction
تحلیلی	analytic
ترتیب	order
ترکیب	composition[=combination]
تصویر	image
تغییر متغیر	change of variable
تفاضل متقارن	symmetric difference
تقریب	approximation
تناظر یك‌به‌یك	one - one correspondence
تناقض	contradiction
توپولوژی	topology
توری	grid
جذر مثبت	positive square root
جزئی	partial
جسم دوار	solid of revolution
جفتهای مرتب	ordered pairs
جمعپذیر	summable
جمعپذیری	summability
جمعپذیری آبل	Abel summability
جمعی	additive
جهش تابع	jump of a function
چگالی	density

حاصلضرب	product
ـ جزئی	partial product
ـ دکارتی	Cartesian product
حجره	cell
ـ نیم باز	half – open cell
ـ نیم بسته	half – closed cell
ـ های آشیانی	nested cells
ـ یکه	unit cell
حد	Limit
ـ دوگانه	double limit
ـ زبرین	superior limit
ـ زیرین	inferior limit
ـ سوده	deleted limit
ـ ناسوده	non – deleted limit
حوزهٔ تعریف تابع	domain of a function
خاصیت	property
ـ ارشمیدسی	Archimedean property
ـ بریدگی	cut property
ـ خوش ترتیبی	well – ordering property
ـ سه گانگی	trichotomy property
ـ کمال	completeness property
خم	curve
ـ چندضلعی	polygonal curve
ـ فضاپرکن	space – filling curve
ـ قطبی	polar curve
خواص ترتیبی	order properties
خواص جبری	algebraic properties
دامنهٔ تابع	domain of a function
دترمینان ژاکوبی	Jacobian determinant
دسته	collection
دکارتی	Cartesian

sequence	دنباله
shuffled sequence	ــ آمیخته
double sequence	ــ دوگانه
equivalent sequences	ــ های هم‌ارز
bilinear	دوخطی
bijective	دوسو
bijection	دوسویی
double	دوگانه
differentiable	دیفرانسیل‌پذیر
nondifferentiable	دیفرانسیل‌ناپذیر
rank	رتبه
class	رده
positive class	ــ مثبت
diagonal method[=diagonal procedure]	روش قطری
root	ریشه
positive square root	ــ دوم مثبت
simple root	ــ ساده
supremum	زبرینه
superma	ــ ها
subsequence	زیردنباله
subset	زیرمجموعه
proper subset	ــ سره
infimum	زیرینه
infima	زیرینه‌ها
proper	سره
series	سری
power series	ــ توانی
double series	ــ دوگانه

ـ سینوسی	sine series
ـ فوق هندسی	hypergeometric series
ـ متناوب	alternating series
ـ مجانبی	asymptotic series
ـ همساز	harmonic series
ـ هندسی	geometric series
سوپریمم	supremum
سوپریممها	suprema

شرط جنبی	side condition
شمارش پذیر	countable [=denumerable=enumerable]
شمارش ناپذیری	uncountability
شمول	inclusion

صحیح	integral
صعودی	increasing
صورت مبهم	indeterminant form

حاصلضرب داخلی	dot product [=inner product]
حاصلضرب نقطه‌ای	dot product
ضریب لاگرانژ	Lagrange multiplier
ضمنی	implicit

عدد	number
ـ اصلی	cardinal number
ـ اصم	irrational number
ـ گنگ	irrational number
ـ گویا	rational number
ـ مختلط	complex number
عمل	operation
ـ دوتایی	binary operation
عنصر	element

— همانی	identity element

فاصله‌های آشیانی	nested cells
فاصله	interval
— یکه	unit interval
فرینه	extremum
فشردگی	compactness
فضا	space
— ی برداری	vector space
— ی پوچ	null space
— ی توپولوژیکی	topological space
— ی دکارتی	Cartesian space
— ی ضرب داخلی	inner product space
— ی متریك	metric space
— ی نرم‌دار	normed space

قاعدهٔ زنجیری	chain rule
قانون	law
قسمت حقیقی	real part
قطری	diagonal
قطعهٔ آغازی	initial segment
قطعه خطهای مرتب	ordered line segments
قید	constraint

کران	bound
— بالا	upper bound
— پایین	lower bound
کراندار	bounded
کرانهٔ محیطی	circumscribing contour
کمترین مربعات	least squares
کوچکترین کران بالا	least upper bound

گرادیان	gradient
گسترش	extension
گوی	ball
لم	lemma
ماکزیمم	maximum
ـ درونی	interior maximum
متریك گسسته	discrete metric
متمم	complement
ـ نسبی	relative complement
متوازی السطوح	parallelepiped
مجزا	disjoint
مجموع	sum
ـ ادغامی	telescoping sum
ـ جزئی	partial sum
مجموعه	set
ـ با پایان	finite set
ـ تهی	empty set [=void set]
ـ سه تایی کانتور	Canotr's ternary set
ـ عرض	ordinate set
ـ غیر تهی	non - empty set
ـ فشرده	compact set
ـ متعامد	orthonormal set
ـ های مجزا	disjoint [=non intersecting] sets
ـ همبند	connected set
محتوا	content
ـ ی خارج	outer content
ـ ی مجموعه	content of set
محدب	convex
محك	criterion
ـ ناپیوستگی	discontinuity criterion
مختصات	coordinates

polar coordinates	ـ قطبی
spherical coordinates	ـ کروی
mutiplicity of root	مرتبهٔ ریشه
conjugate	مزدوج
derivative	مشتق
differentiable	ـ پذیر
directional derivative	ـ جهتی
block partial derivative	ـ جزئی بلوکی
differentiation	ـ گیری
intersection	مقطع
iterated	مکرر
local	موضعی
component	مؤلفه
mean	میانگین
arithmetic mean	ـ حسابی
geometric mean	ـ هندسی
minimum	مینیمم
inequality	نابرابری
triangle inequality	ـ مثلثی
indefinite	نامعین
disconnected	ناهمبند
disconnection	ناهمبندی
norm	نرم
decreasing	نزولی
ratio	نسبت
relative	نسبی
set theory	نظریهٔ مجموعه‌ها
end points	نقاط انتهایی
point	نقطه
critical point	ـ بحرانی
exterior point	ـ برونی
accumulation point	ـ تجمع
cluster point	ـ تجمع

ـ ثابت	fixed point
ـ درونی	interior point
ـ زینی	saddle point
ـ کرانه‌ای	boundary point
نگاشت	mapping
ـ انعکاس	inversion mapping
نمایش ریز	Riesz representation
نمودار	diagram
نوسان	oscillation
نیم‌پیوستگی	semicontinuity
وارون	inverse
واگرا	divergent
واگرایی	divergence
هسته	kernel
هم ارز	equivalent
همانی	identity
همپیوستگی	equicontinuity
همساز	harmonic
همسایگی	neighborhood
همگرا	convergent
همگرایی	convergence
ـ در مربع میانگین	convergence in mean square
ـ در میانگین	convergence in mean
ـ محصور	dominated convergence
ـ مشروط	conditional convergence
ـ مطلق	absolute convergence
ـ نقطه‌ای	pointwise convergence
ـ یکنوا	monotone convergence
همگن	homogeneous
همه جایی	global
هیأت	field

side	یال
injective	یك به یك
uniquness	یکتایی
monotone	یکنوا
uniform	یکنواخت

فهرست اسامی خاص

Abel, N.H.	آبل، ن. ه.
Appell, P.	آپل، پ.
Hadamard, J.	آدامار، ژ.
Arzela, C.	آرزلا، چ.
Ascoli, G.	آسکولی، گ.
Stirling, J.	استرلینگ، ج.
Stone, M.H.	استون، م. ه.
Stieltjes, T.J.	استیلیتس،ت. ی.
Euler, L.	اویلر، ل.
Baire, R.	بر، ر.
Brouwer, L.E.J.	براوئر، ل.ا. ج.
Bernstein, S.N.	برنشتین، س. ن.
Bernoulli, J.	برنولی، ی.
Bessel, F.W.	بسل، ف. و.
Borel, E.	بورل، ا.
Bolzano, B.	بولتسانو، ب.
Bunyakovskii, V.	بونیاکفسکی، و.
Bonnet, O.	بنه، ا.

فهرست راهنما