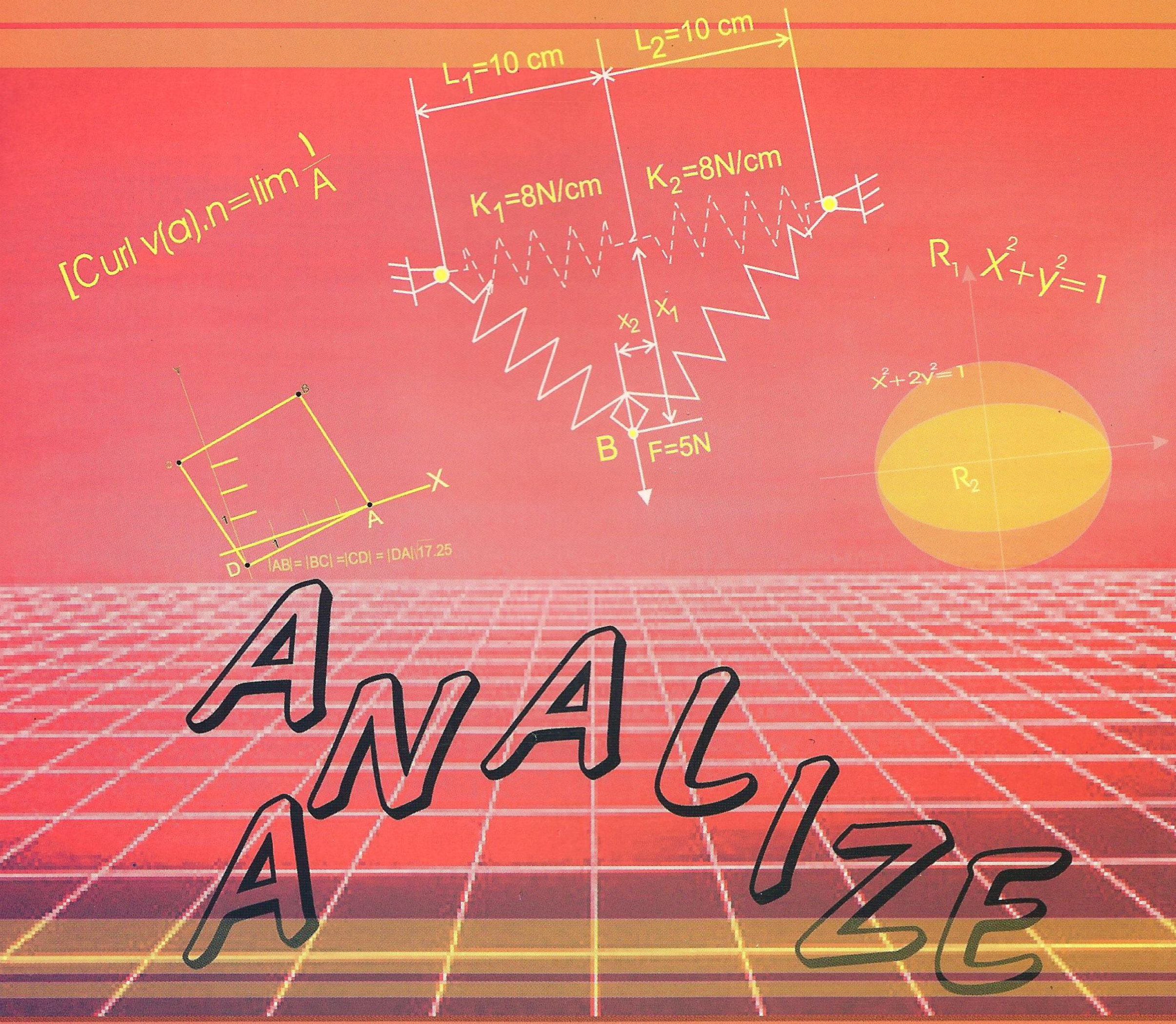
ویرایش جدید

اصول آنالیز حقیقی



مولفان: کارالامبوس دی، علی پرانتز، اون بورکین شاو

مترجم: پروفسور علی اکبر عالم زاده

اصول آنالیز حقیقی

نوشتهٔ

کارالامبوس دی. علی پرانتز

و

اون بورکین شاو

ترجمهٔ

پروفسور علی اکبر عالم‌زاده

پیشگفتار مترجم

یکی از کتب معروف در ریاضیات، کتاب *اصول آنالیز حقیقی* علی پرانتز و بورکین شاو است. این کتاب به همراه کتاب حل آن، مجموعهٔ کاملی است که نظیر و بدیل نداشته و شما را با همهٔ زوایای آنالیز حقیقی آشنا می‌سازد.

کتاب از هر حیث کامل بوده و در آن همهٔ مطالب به تفصیل بیان شده‌اند.

جامع بودن کتاب، صلابت بیان، و ترتیب بسیار زیبای مباحث دست به دست هم داده و خواننده را با جاذبه‌های سحرآمیز آنالیز حقیقی به بهترین وجه آشنا می‌سازند.

در پایان، این کتاب و حل آن به افرادی که به ریاضیات بیش از هر علم دیگر و به آنالیز حقیقی بیش از هر بخش دیگر ریاضی عشق می‌ورزند، تقدیم می‌شود.

پروفسور علی اکبر عالم‌زاده
استاد دانشگاه تربیت معلم

پیشگفتار مؤلفان

از زمان انتشار اثر پیشتاز اچ. لبگ (H. Lebesgue):

Intégrale, longueur, aire

در سال ۱۹۰۲، نظریهٔ انتگرالگیری مدام دستخوش تکامل و نوآوری بوده است. از جمله کارهای اساسی در این باب، سهم پی. ج. دانیل (P.J. Daniell) در ۱۹۱۷ (که امروزه به روش انتگرالگیری دانیل معروف است) و معرفی اندازه‌های خارجی توسط سی. کاراتئودوری (C. Carathéodory) در حوالی ۱۹۱۸ قابل توجه است. امروزه نظریهٔ انتگرالگیری پایهٔ آنالیز ریاضی جدید را تشکیل می‌دهد.

هدف از این کتاب ارائهٔ نظریهٔ اساسی آنالیز حقیقی به روشی هوشمندانه ولی ساده است. با آنکه مطالب ذکر شده متعارف اند، آنچه که این کتاب را ممتاز می‌سازد دو شیوهٔ اصلی است که در ارائهٔ مطالب به کار رفته‌اند.

اولی شیوه‌ای است که شخص را به نظریهٔ انتگرالگیری می‌رساند. تا بحال اغلب مؤلفان نظریهٔ انتگرالگیری را با استفاده از دو روش کلاسیک عرضه کرده‌اند: روش نظری اندازه و روش دانیل (این روش حتی امروزه نیز متداول است). آنها با این کار (بنابر تجربهٔ ما) ابهام قابل ملاحظه‌ای در دانشجویان ایجاد می‌کنند. یکی از هدفهای این کتاب ترکیب "روش نظری اندازه" با "روش دانیل" جهت ارائهٔ یک نظریهٔ انتگرالگیری متحد و ساده است که برای دانشجو به آسانی قابل تعقیب و قابل فهم باشد.

شیوهٔ دوم مستلزم روشهای به کار رفته است. در بررسی اخیر در

Mathematical Reviews 54(5), P.1562

راجع به کتاب

Banach Lattices and Positive Operators

به قلم اچ. اچ. شافر (H. H. Schaefer)، پروفسور ا. سی. زانن (A. C. Zaanen) از جمله مطالب دیگر چنین می‌نویسد: "حال که کتاب حاضر و کتابهای جدید دیگر که در ابتدای سخن ذکر شدند موجودند، ممکن است این فکر القا شود که در آینده از این حجم زیاد چه قسمتهایی باید در کتابهای درسی مقدماتی‌تر در آنالیز تابعی گنجانده شود. واضح است که مؤلفان کتب درسی دیگر نمی‌توانند ساختارهای ترتیبی در فضاهای برداری را نادیده بگیرند...

(*American Mathematical Society, 1977*).

همچنین به نظر می‌رسد که تاکنون اغلب مؤلفان کتابهای انتگرالگیری به خواص ترتیبی فضاهای تابعی به جای یک ابزار توانا که می‌تواند در توضیح نظریهٔ انتگرالگیری به کار رود به طور پراکنده

می‌کند. بر خواص توابع پیوسته تأکید خاص شده، و قضیهٔ کلاسیک استون ـ وایراشتراس (Stone - Weierstrass) به شکل کلی‌اش به ثبوت رسیده است.

فصل ۳ به نظریهٔ اندازه اختصاص دارد. این نظریه بر مفهوم نیم حلقه از مجموعه‌ها ساخته شده است. فضای اندازه یک سه‌تایی مانند (X,S,μ) است، که در آن X یک مجموعه است، S یک نیم حلقه از زیر مجموعه‌های X است، و μ یک اندازه بر S می‌باشد. اندازه‌های خارجی مطالعه شده‌اند، و روند توسیع کاراتئودوری یک اندازه به یک اندازهٔ خارجی مطرح گردیده است. مفهوم تابع اندازه‌پذیر معرفی شده است، و خواص تابع پله‌ای مطالعه شده‌اند. این فصل با بررسی اندازهٔ لبگ در فضاهای اقلیدسی خاتمه می‌یابد.

فصل ۴ حاوی نظریهٔ کلاسیک انتگرال لبگ است. نظریهٔ اصلی و روشها با کاربردهای کافی ارائه شده‌اند تا مطلب را جالب ساخته و در عین حال طرز استفاده از این نتایج در فضاهای اقلیدسی را نشان دهند. در اینجا طرز تعمیم انتگرال ریمان (Riemann) (که شاگرد قبلاً با آن آشناست) به انتگرال لبگ را نشان می‌دهیم. کاربردهای مختلف انتگرال لبگ را نیز عرضه خواهیم کرد. بالأخره، اندازه‌های حاصل ضربی مطالعه می‌شوند، و قضیهٔ فوبینی (Fubini) راجع به "انتگرالهای مضاعف" ثابت خواهد شد.

در فصل ۵ آشنایی مختصری با نظریهٔ فضاهای باناخ (Banach) و فضاهای کلاسیک L_p خواهیم یافت. در اینجاست که اغلب کتابها شبکهٔ باناخ بودن هر فضای L_p را نادیده گرفته‌اند و بدین ترتیب بخش اعظم زیبایی مطلب را از کف داده‌اند. به این دلیل، شبکه‌های باناخ در بخش جداگانه مطرح شده‌اند، و بر خواص شبکهٔ باناخ بسیاری از فضاهای کلاسیک تأکید شده است. در اینجا قضیهٔ همگرایی جالب کوروکین (Korovkin) در باب دنباله‌های عملگرهای مثبت بر $C[0,1]$ ثابت شده است، و محک فشردگی کلموگروف (Kolmogorov) برای زیر مجموعه‌های فضاهای L_p به ثبوت رسیده است.

فصل آخر به چند مبحث خاص مهم اختصاص یافته است. از جمله عبارتند از اندازه‌های علامتدار. خواص شبکه‌ای اندازه‌های علامتدار اساسی بوده و سودمندی ساختارهای ترتیبی را نشان می‌دهند. پس از بخش قبلی راجع به شبکه‌های باناخ، تجزیهٔ ژردان (Jordan) اندازهٔ علامتدار ($\mu=\mu^+-\mu^-$) یک دوست قدیمی به نظر خواهد رسید. سپس قضیهٔ نمایش ریس (Riesz) برای توابع خطی مثبت بر $C_c(X)$ ثابت شده است. چون تابعیهای خطی مثبت قبلاً به نحوی اصولی مطرح شده‌اند، این قضیه در محدودهٔ مناسبی قرار گرفته است. بالأخره، خواص مشتق‌پذیری اندازه‌های علامتدار بورل (Borel) مطالعه شده‌اند. نتایج حاصل بر توابع با تغییر کراندار اعمال گردیده و از آنها برای به دست آوردن "فرمول تغییر متغیر" استفاده شده است.

آشنایی با آنچه امروزه "حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته" نام دارد برای دانشجو لازم است.

همچنین چند مفهوم جبری متعارف را دانسته می‌گیریم. مثلاً، فرض می‌کنیم خواننده با نکات اصلی فضاهای برداری و خواص اصلی ماتریسها و دترمینانها آشناست.

کتاب به عنوان یک درس دو ترمی در آنالیز حقیقی که معمولاً شاگردان سال آخر کارشناسی یا دانشجویان سال اول کارشناسی ارشد می‌گیرند نگاشته شده است. ولی از آن می توان در یک درس در یک نیمسال نیز استفاده کرد. دانشجو می تواند با خواندن چهار فصل اول (با چند مورد حذف در فصل ۲) مبانی انتگرالگیری لبگ را درک نماید. اعتقاد داریم که خواننده کتاب را "سلیس" یافته و به آسانی خواهد خواند.

از همسران خود برنادت (Bernadette) و بتی (Betty) به خاطر کمکهای بی‌شائبهٔ آنها حین آماده شدن دستنویس سپاسگزاریم. همچنین مایلیم از کنت ج. بومن (Kenneth J. Bowman) سر دبیر، و انتشارات

Alsevier North Holland Publishing Company

به خاطر همکاری در تدوین این کتاب تشکر نماییم. به خصوص مراتب قدردانی خود را از لوییز سی. شرایبر (Louise C. Schreiber) سردبیر، که تلاش وی منجر به چاپ عالی این کتاب شد ابراز می‌داریم.

سی.دی. علی پرانتز & او. بورکین شاو

C.D Aliprantis & O.Burkinshaw

پرداخته‌اند. به علاوه، ارزش اطلاعات و روشهای شبکه‌های برداری (که در ۳۰ سال گذشته به دست آمده‌اند) ریشهٔ طبیعی در فضاهای برداری توابع انتگرالپذیر دارد. به این دلیل تمایل ما به استفاده، تأکید، و به کارگیری از خواص ساختارهای ترتیبی (به صورتی که در فضاهای تابعی به کار می‌روند) نسبتاً زیاد است.

همانطور که قبلاً ذکر شد، روش انتگرالگیری ما "روش نظری اندازهٔ دانیل" است. این روش را می‌توان به اختصار چنین توصیف کرد:

نقطهٔ شروع یک نیم حلقهٔ S از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ S است. یعنی S شامل زیر مجموعهٔ تهی است، تحت اشتراکهای متناهی بسته است، و تفاضل هر دو مجموعه در S را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از اعضای از هم جدای S نوشت. هرگاه μ یک اندازه بر S باشد، آنگاه روند توسیع کاراتئودوری به کاررفته، اندازهٔ خارجی μ^* تولید شده، و مجموعه‌های μ- اندازه‌پذیر به دست می‌آیند. حال هر تابع به شکل $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$، که در آن هر A_i، μ- اندازه‌پذیر بوده و $\mu^*(A_i) < \infty$، یک تابع پله‌ای نام دارد. عدد حقیقی

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$$

انتگرال لبگ φ می‌باشد. گردایهٔ تمام توابع پله‌ای یک شبکهٔ برداری تشکیل می‌دهد، که شبکهٔ اصلی برای روش دانیل می‌باشد. مرحلهٔ بعد تعریف "توابع بالایی" است. گوییم $f: X \to R$ یک تابع بالایی است اگر دنباله‌ای مانند $\{\varphi_n\}$ از توابع پله‌ای باشد به طوری که

(آ) $\varphi_n \uparrow f$، μ ت. هـ. و (ب) $\lim \int \varphi_n d\mu < \infty$.

عدد حقیقی $\int f d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu$ انتگرال لبگ f نام دارد.

بالأخره، توابع انتگرالپذیر لبگ آنهایی هستند که قابل نوشتن به صورت تفاضل دو تابع بالایی می‌باشند.

ما بر این باوریم که ترتیب مطالب جدید است و دانشجویان هم نظریهٔ مجرد و هم کاربردهای ملموس را درک خواهند کرد. مطالب کتاب به صورت بخش‌بخش آمده و در شش فصل پراکنده شده‌اند. بیش از ۳۵۰ تمرین وجود دارند که در آخر هر فصل آمده‌اند. تمرینها طوری طراحی شده‌اند، که با استفاده از نتایج قبل یا ارائهٔ مطالب جدید، معرفت شاگرد را افزایش می‌دهند. طبق معمول، بعضی از تمرینها معمولی اند، برخی نیاز به تلاش بیشتر دارند، و بعضی با شاگرد درگیر خواهند شد. چند تمرین راهنمایی شده‌اند و البته مدرس آزاد است که مسائل "مورد علاقهٔ" خود را اضافه نماید.

در آخر هر فصل، یک کتابنامه برای مطالعهٔ بیشتر آمده است. اعداد داخل کروشه که در کتاب آمده‌اند اشاره به کتابنامهٔ آخر فصل دارند.

فصل ۱ مروری است بر مطالب اصلی: نظریهٔ مجموعه‌ها، اعداد حقیقی، و فضاهای متری.

فصل ۲ به فضاهای توپولوژیک پرداخته و مفاهیم شبکه‌های برداری و فضاهای تابعی را معرفی

فهرست مطالب

فصل ۱ ـ مبانی آنالیز حقیقی

فصل ۲ ـ توپولوژی عمومی و فضاهای تابعی

فصل ۳ ـ نظریهٔ اندازه

فصل ۴ـ انتگرال لبگ

فصل ۵ـ فضاهای نرمدار و فضاهای L_p

فصل ۶ـ چند مبحث خاص در انتگرالگیری

فصل ۱

مبانی آنالیز حقیقی

اگر این کتاب را به قصد آموختن نظریهٔ انتگرالگیری می‌خوانید، انتظار آن است که زمینهٔ خوبی از مفاهیم اصلی آنالیز حقیقی داشته باشید. دانشجویی که به این سطح رسیده است قطعاً با اصطلاحات نظریهٔ مجموعه‌ها و خواص اصلی اعداد حقیقی آشناست و از خواص تابعهای پیوسته درک قابل قبولی دارد.

بخش اول این فصل به مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها می‌پردازد. این بخش شامل "حداقل" نظریهٔ مجموعه‌ها برای یک درس جدید در ریاضیات است. دو بخش بعد، راجع به اعداد حقیقی و اعداد حقیقی وسعت یافته می‌باشند. چون خواص اصلی اعداد حقیقی را دانسته می‌گیریم، بر قضایای اصلی همگرایی لازم در این کتاب تأکید شده است. همچنین، بحث اعداد حقیقی وسعت یافته بر نتایج مورد لزوم تمرکز دارد. در بخش آخر، بحث جامعی از فضاهای متری ارائه خواهد شد.

۱. نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها

در این کتاب از علایم ریاضی متداول زیر استفاده می‌شود:

$\forall$ یعنی "به ازای تمام " (یا به ازای هر)؛

$\exists$ یعنی "وجود دارد " (یا موجود است)؛

$\Rightarrow$ یعنی "ایجاب می‌کند که " (یا فقط ایجاب می‌کند)؛

$\Leftrightarrow$ یعنی "اگر و فقط اگر ".

در بخش اول این فصل مفاهیم اصلی نظریهٔ مجموعه‌ها به اختصار مطرح می‌شوند. از خواننده انتظار می‌رود که به نحوی با این مفاهیم آشنا باشد. ولی ما مبانی اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها را ارائه نمی‌دهیم. خوانندهٔ علاقمند می‌تواند بحث مشروح مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها را در مرجعهای [۲]، [۳]، [۴]، و [۵] در آخر این فصل بیابد. مفهوم مجموعه نقش مهمی در هر شاخه از ریاضیات جدید ایفا می‌کند.

با آنکه تعریف مفهوم مجموعه ظاهراً آسان و طبیعی است، معلوم شده است که هر چنین تعریف به تناقض می‌انجامد. این تناقض، به بیان نادقیق، وقتی ظهور می‌کند که با مجموعه‌های "بزرگ " سر و کار داریم. به این دلیل، در مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها، مفهوم مجموعه (مانند نقطه و خط در هندسه) بدون

تعریف می‌ماند و صرفاً با خواصش توصیف می‌شود. در این کتاب اصولاً با تعدادی مجموعهٔ «کوچک» معین (مانند فضاهای اقلیدسی R^n و زیرمجموعه‌های آنها) کار می‌کنیم و از به‌کارگیری مجموعه‌های «بزرگ» که به پارادکس منجر می‌شوند احتراز داریم. بنابراین، هر مجموعه را گردایه‌ای از اشیاء می‌گیریم که موجود واحدی تلقی می‌شود.

مجموعه‌ها با حروف بزرگ نموده می‌شوند. اشیاء در مجموعهٔ A ***عنصرها*** (یا عضوها یا نقاط) A نام دارند. برای نشان دادن اینکه شیء x متعلق به مجموعهٔ A است از ***رابطهٔ عضویت*** $\in$ استفاده می‌کنیم؛ یعنی می‌نویسیم $x \in A$ و می‌خوانیم: x متعلق به (یا عضو) A است. به همین نحو، علامت $x \notin A$ یعنی عنصر x تعلق به A ندارد. برای نمایش مجموعه‌ها از آکولاد نیز استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ای که عنصرهایش a، b، و c باشند به صورت $\{a, b, c\}$ نوشته می‌شود.

گوییم دو مجموعهٔ A و B ***مساوی***اند و می‌نویسیم $A = B$ اگر A و B دقیقاً عناصر یکسانی داشته باشند. مجموعهٔ A را ***زیرمجموعهٔ*** (یا مشمول) B نامیم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر هر عنصر A عضوی از B نیز باشد. واضح است که $A = B$ برقرار است اگر و فقط اگر هر دوی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ برقرار باشند. هرگاه $A \subseteq B$ و $B \neq A$، آنگاه A یک زیرمجموعهٔ ***حقیقی*** B نام دارد. مجموعهٔ بدون عنصر را مجموعهٔ ***تهی*** (یا ***خالی***) می‌نامیم و آن را با $\varnothing$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آنگاه تعریف می‌کنیم:

یک. *اجتماع* $A \cup B$ از A و B مجموعهٔ زیر است:

$$A \cup B = \{x : x \in B \text{ یا } x \in A\};$$

دو. *اشتراک* $A \cap B$ از A و B مجموعهٔ زیر است:

$$A \cap B = \{x : x \in B \text{ و } x \in A\};$$

سه. *تفاضل* $A \sim B$ مجموعهٔ B از A مجموعهٔ زیر است:

$$A \sim B = \{x : x \notin B \text{ و } x \in A\}.$$

دو مجموعهٔ A و B ***از هم جدایند*** اگر $A \cap B = \varnothing$. گاهی مجموعهٔ $A \sim B$ را ***متمم*** B ***نسبت به*** A می‌نامیم. در زیر، چند رابطهٔ مفید بین مجموعه‌ها ذکر شده است و از خواننده اثبات آنها را می‌خواهیم:

۱. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$؛

۲. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$؛

۳. $(A \cup B) \sim C = (A \sim C) \cup (B \sim C)$؛

۴. $(A \cap B) \sim C = (A \sim C) \cap (B \sim C)$.

اتحادهای (۱) و (۲) بین اجتماعها و اشتراکها را ***قوانین پخشپذیری*** می‌نامند.

با اثبات رابطهٔ (۱) طرز اثبات اتحادهای فوق را نشان می‌دهیم. توجه کنید که باید تساوی بین دو مجموعه را ثابت کنیم و این کار به این صورت انجام می‌شود که تحقیق می‌کنیم دو مجموعه عناصر یکسانی دارند. لذا، رابطهٔ (۱) به صورت زیر ثابت می‌شود:

$$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in C \text{ و } x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in C \text{ و } (x \in B \text{ یا } x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cap C \text{ یا }$$

$$x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

مفهوم مفید دیگر تفاضل متقارن دو مجموعه است. هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آنگاه ***تفاضل متقارن*** آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \Delta B = (A \sim B) \cup (B \sim A).$$

مفاهیم اجتماع و اشتراک دو مجموعه را می‌توان به اجتماع و اشتراک خانواده‌های دلخواه از مجموعه‌ها تعمیم داد. یک ***خانواده از مجموعه‌ها*** مجموعه‌ای است ناتهی مانند $\mathscr{F}$ که اعضایش خود مجموعه‌اند. برای نمایش خانواده‌ای از مجموعه‌ها روش متعارفی وجود دارد. هرگاه به ازای هر عنصر i از مجموعهٔ ناتهی I زیرمجموعه‌ای مانند A_i از مجموعهٔ ثابت X وجود داشته باشد، آنگاه $\{A_i : i \in I\}$ (یا فقط $\{A_i\}$) خانواده‌ای است که اعضایش مجموعه‌های A_i اند. مجموعهٔ ناتهی I را ***مجموعهٔ اندیسگذار*** خانواده و اعضایش را ***اندیس*** می‌نامیم. به‌عکس، هرگاه $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه با قرار دادن $I = \mathscr{F}$ و به ازای هر $i \in I$، $A_i = i$، می‌توان $\mathscr{F}$ را به شکل $\{A_i : i \in I\}$ بیان کرد.

هرگاه $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه ***اجتماع*** این خانواده مجموعهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ به طوری که } \exists\, i \in I\},$$

و ***اشتراک*** این خانواده عبارت است از:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ ، } i \in I \text{ به ازای هر }\}.$$

گاهی $\bigcup_{i \in I} A_i$ را با $\bigcup A_i$ و $\bigcap_{i \in I} A_i$ را با $\bigcap A_i$ نشان می‌دهیم. همچنین، هرگاه $I = N = \{۱, ۲, ...\}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی)، آنگاه اجتماع و اشتراک خانواده به‌ترتیب با $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و $\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n$ نموده می‌شود. حال قوانین پخشپذیری برای خانواده‌های کلی از مجموعه‌ها شکل زیر را به خود خواهند گرفت:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \text{ و } \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

خانوادهٔ $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه‌ها را ***دو بدو از هم جدا*** نامیم اگر به ازای هر دو اندیس مختلف i و j داشته باشیم $A_i \cap A_j = \varnothing$.

مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را ***مجموعهٔ توانی*** A نامیم و آن را با $\mathscr{P}(A)$ نشان

می‌دهیم. توجه کنید که $\varnothing$ و A اعضای $\mathcal{P}(A)$اند. در اکثر بحثهای این کتاب، زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ثابتی چون X در نظر گرفته می‌شوند (مجموعهٔ X را می‌توان یک چهارچوب تصور کرد) و همهٔ بحثها نسبت به مجموعهٔ اساسی X مطرح خواهند شد.

فرض کنیم X یک مجموعهٔ ثابت باشد. هرگاه $P(x)$ خاصیتی مربوطه به عناصر x از X باشد، آنگاه مجموعهٔ تمام xهایی که $P(x)$ درست است با $\{x \in X: P(x)\}$ نموده می‌شود. به عنوان مثال، هرگاه $X = \{۱, ۲, ...\}$ و $P(n)$ این حکم باشد که "عدد n در X بر ۲ بخشپذیر است"، آنگاه

$$\{x \in X: P(x)\} = \{۲, ۴, ۶, ...\}.$$

هرگاه A زیرمجموعهٔ X باشد، آنگاه متمم A^c (نسبت به X) با

$$A^c = X \sim A = \{x \in X: x \notin A\}$$

تعریف می‌شود. واضح است که $(A^c)^c = A$، $A \cap A^c = \varnothing$، و $A \cup A^c = X$. در زیر، چند خاصیت دیگر از عمل متمم ذکر شده‌اند، که در آنها A و B زیرمجموعه‌های X می‌باشند:

۵. $A \sim B = A \cap B^c$؛

۶. $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $B^c \subseteq A^c$؛

۷. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$؛

۸. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

اتحادهای (۷) و (۸) را قوانین دمورگان (De Morgan) می‌نامند. قوانین دمورگان تعمیم یافته بسیار سودمندند، و به این دلیل آنها را به عنوان یک قضیه بیان می‌داریم.

قضیهٔ ۱. ۱ (دمورگان). ***اتحادهای زیر به ازای خانوادهٔ $\{A_i: i \in I\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X برقرارند:***

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \text{ و } (\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

برهان. ما فقط فرمول اول را ثابت می‌کنیم، و دیگری را به خواننده وا می‌گذاریم. برهان از هم ارزیهای زیر نتیجه می‌شود:

$$x \in \left[\bigcup_{i \in I} A_i\right]^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i \ \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in A_i^c \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

منظور از ***تابع*** f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B (با علامات، $f: A \to B$ یا $x \to f(x)$) یعنی یک قاعده که به

هر عنصر x از A عنصر منحصر به فرد y در B را منتسب می‌کند. عنصر y را **مقدار** تابع f در x (یا **نقش** x **تحت** f) نامیده و با $f(x)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی $y = f(x)$. مجموعهٔ A را **قلمرو** f و مجموعهٔ $\{y \in B: f(x) = y$ که $\exists x \in A\}$ را **برد** f می‌نامیم. تلویحاً فرض می‌کنیم مجموعه‌های A و B ناتهی‌اند.

تابع $f: A \to B$ را **برو** (یا **پوشا**) نامیم اگر برد f همهٔ B باشد؛ یعنی اگر به ازای هر $y \in B$ دست کم یک $x \in A$ باشد که $y = f(x)$. تابع $f: A \to B$ را **یک به یک** نامیم اگر $f(x_1) = f(x_2)$ فقط وقتی $x_1 = x_2$. به بیان هم‌ارز، f یک به یک است اگر $x_2 \neq x_1$ ایجاب کند که $f(x_1) \neq f(x_2)$. گوییم دو تابع $f: A \to B$ و $g: A \to B$ **مساوی‌**اند و می‌نویسیم $f = g$ اگر به ازای هر $x \in A$، $f(x) = g(x)$.

حال فرض کنیم $f: X \to Y$ یک تابع باشد. هرگاه A زیرمجموعهٔ X باشد، آنگاه **نقش** $f(A)$ مجموعهٔ A تحت f زیرمجموعه‌ای از Y است که با

$$f(A) = \{y \in Y: y = f(x) \text{ به طوری که } \exists x \in A\}$$

تعریف می‌شود. به همین نحو، هرگاه B زیرمجموعهٔ Y باشد، آنگاه **نقش معکوس** $f^{-1}(B)$ از B تحت f زیرمجموعه‌ای از X است که با

$$f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$$

تعریف می‌شود. روابط زیر در مورد نقشها و نقشهای معکوس مجموعه‌ها برقرارند (خانوادهٔ $\{A_i: i \in I\}$ از زیرمجموعه‌ها باید به نحو مقتضی تعبیر شود):

۹. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$؛

۱۰. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$؛

۱۱. $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$؛

۱۲. $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$؛

۱۳. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

به ازای دو تابع $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$، ترکیب آنها $g \circ f$ تابع $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ به ازای $x \in X$ تعریف می‌شود. توجه کنید که

$$g \circ f: X \to Z.$$

هرگاه تابع $f: X \to Y$ یک به یک و برو باشد، آنگاه به ازای هر $y \in Y$ عنصر منحصر به فردی مانند $x \in X$ هست به‌طوری که $y = f(x)$؛ این عنصر منحصر به فرد x را با $f^{-1}(y)$ نشان می‌دهیم. لذا، در این حالت، تابع $f^{-1}: Y \to X$ را می‌توان این طور تعریف کرد که وقتی $y = f(x)$، $x = f^{-1}(y)$. تابع f^{-1} **معکوس** f نام دارد. توجه کنید که به ازای هر $y \in Y$ و $x \in X$، $(f \circ f^{-1})(y) = y$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. روابط اخیر را اغلب به صورت $f \circ f^{-1} = I_Y$ و $f^{-1} \circ f = I_X$ نشان می‌دهیم که در آنها $I_X: X \to X$ و

$I_Y: Y \to Y$ تابعهای همانی‌اند؛ یعنی به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $I_X(x) = x$ و $I_Y(y) = y$.

هر تابع مانند $x: N \to X$ که در آن $N = \{۱, ۲, ...\}$ یک **دنباله** از X نام دارد. راه متعارف برای نمایش مقدار $x(n)$ عبارت است از x_n (به نام **جملهٔ** nم دنباله). در این صورت، دنباله با $\{x_n\}$ نموده می‌شود. یک **زیردنباله** از $\{x_n\}$ دنباله‌ای است مانند $\{y_n\}$ به طوری که یک دنبالهٔ اکیداً صعودی از اعداد طبیعی مانند $\{k_n\}$ (یعنی $۱ \le k_۱ < k_۲ < ...$) باشد به طوری که به ازای هر n، $y_n = x_{k_n}$.

هرگاه $\{A_i: i \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه **حاصل ضرب دکارتی** $\prod_{i \in I} A_i$ (یا $\prod A_i$) مجموعهٔ مرکب از تمام توابع $f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ تعریف می‌شود که به ازای هر $i \in I$، $f(i) \in A_i$. یک چنین تابع (به دلایل روشن) «تابع انتخاب» نام دارد و گاهی با $\{x_i: i \in I\}$ یا $\{x_i\}$ نموده می‌شود.

هرگاه یک خانواده از مجموعه‌ها دارای دو مجموعه (مثلاً A و B) باشد، آنگاه حاصل ضرب دکارتی آنها را با $A \times B$ نشان می‌دهیم. اعضای $A \times B$ به صورت **جفتهای مرتب** نموده می‌شوند؛ یعنی

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ و } b \in B\}.$$

واضح است که $(a, b) = (a_۱, b_۱)$ اگر و فقط اگر $a = a_۱$ و $b = b_۱$. به همین نحو، حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌های $A_۱, ..., A_n$ به صورت $A_۱ \times ... \times A_n$ نوشته شده و اعضایش را با nتایی نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$A_۱ \times ... \times A_n = \{(a_۱, ..., a_n): a_i \in A_i, i = ۱, ..., n \text{ به ازای }\}.$$

در اینجا مجدداً $(a_۱, ..., a_n) = (b_۱, ..., b_n)$ اگر و فقط اگر به ازای $i = ۱, ..., n$، $a_i = b_i$. هرگاه $A = A_۱ = ... = A_n$، آنگاه معمولاً $A_۱ \times ... \times A_n$ را به صورت A^n می‌نویسند. به همین نحو، هرگاه خانوادهٔ $\{A_i: i \in I\}$ از مجموعه‌ها در $A_i = A$ به ازای هر $i \in I$ صدق کند، آنگاه $\prod_{i \in I} A_i$ به صورت A^I نوشته می‌شود؛ یعنی $A^I = \{f: f: I \to A\}$.

چه وقت حاصل ضرب دکارتی خانوادهٔ $\{A_i: i \in I\}$ از مجموعه‌ها ناتهی است؟

واضح است که اگر حاصل ضرب دکارتی ناتهی باشد، هر A_i باید ناتهی باشد. لذا، ممکن است این سؤال مطرح شود که:

اگر هر A_i ناتهی باشد، آیا $\prod A_i$ نیز ناتهی است؟

با آنکه جواب به نظر مثبت است، ولی متأسفانه نمی‌توان این امر را با اصول موضوع معمولی نظریهٔ مجموعه‌ها به ثبوت رسانید. جواب مثبت آخرین سؤال به «اصل موضوع انتخاب» معروف است. ما در این کتاب این اصل را بدون توضیح اضافی می‌پذیریم. یکی از صورتهای آن به قرار زیر است.

اصل موضوع انتخاب. ***هرگاه $\{A_i: i \in I\}$ یک خانوادهٔ ناتهی از مجموعه‌ها باشد به طوری که به***

ازای هر $i \in I$، $A_i \neq \varnothing$، آنگاه $\prod A_i \neq \varnothing$.

یک صورت هم‌ارز ولی مفید از اصل موضوع انتخاب به قرار زیر است:

هرگاه $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های دو بدو از هم جدا باشد به طوری که به ازای هر i، $A_i \neq \varnothing$، آنگاه یک مجموعه مانند $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ هست به طوری که به ازای هر $i \in I$ $E \cap A_i$ درست از یک عنصر تشکیل شده است.

خواننده برای بحثی از اصل موضوع انتخاب و تاریخچهٔ آن می‌تواند به مرجعهای [۲] و [۳] رجوع کند.

منظور از یک ***رابطهٔ*** (دوتایی) بر مجموعهٔ X یعنی زیرمجموعه‌ای مانند R از $X \times X$. هرگاه $(x, y) \in R$، آنگاه گوییم x با y رابطهٔ R دارد و آن را با $xR\,y$ نشان می‌دهیم. از جمله جالب‌ترین روابط عبارتند از روابط هم‌ارزی. رابطهٔ R بر مجموعهٔ X یک ***رابطهٔ هم‌ارزی*** است اگر از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

آ. به ازای هر $x \in X$، $xR\,x$ (انعکاس).

ب. هرگاه $xR\,y$، آنگاه $yR\,x$ (تقارن).

پ. هرگاه $xR\,y$ و $yR\,z$، آنگاه $xR\,z$ (تعدی).

فرض کنیم R یک رابطهٔ هم‌ارزی بر مجموعهٔ X باشد. در این صورت، ***ردهٔ هم‌ارزی*** معین شده به وسیلهٔ عنصر $x \in X$ با $[x] = \{y \in X : xR\,y\}$ تعریف می‌شود. به آسانی معلوم می‌شود که دو ردهٔ هم‌ارزی یا از هم جدایند یا یکی هستند. چون به ازای هر $x \in X$، $x \in [x]$، R مجموعهٔ X را ***افراز می‌کند***؛ یعنی خانواده‌ای مانند $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه‌های دو بدو از هم جدا (در اینجا خانوادهٔ رده‌های هم‌ارزی) وجود دارد به طوری که $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. به عکس، هرگاه خانوادهٔ $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه‌های دو بدو از هم جدا X را افراز کند (یعنی $X = \bigcup A_i$)، آنگاه

$$R = \{(x, y) \in X \times X : \exists i \in I \text{ به طوری که } x \text{ و } y \text{ در } A_i \text{ اند}\}$$

یک رابطهٔ هم‌ارزی بر X است که رده‌های هم ارزی‌اش درست A_iها می‌باشند. لذا، روابط هم‌ارزی بر یک مجموعه به طریقی یک به یک نظیر افرازهای آن مجموعه می‌باشند.

نوع مهم دیگری از رابطه، رابطهٔ ترتیب است. یک رابطه، که با $\leq$ نموده می‌شود، بر مجموعهٔ X یک ***ترتیب جزئی*** برای X نام دارد (یا X به وسیلهٔ $\leq$ جزئی مرتب می‌شود) اگر در خواص زیر صدق نماید:

α. به ازای هر $x \in X$، $x \leq x$ (انعکاس).

β. هرگاه $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$ (پادتقارن).

γ. هرگاه $x \leq y$ و $y \leq z$، آنگاه $x \leq z$ (تعدی).

نماد دیگر برای $x \leq y$ عبارت است از $y \geq x$. هر مجموعه با یک رابطهٔ ترتیب یک مجموعهٔ **جزئی مرتب** نام دارد.

حال فرض کنیم X یک مجموعهٔ جزئی مرتب باشد. زیرمجموعهٔ Y از X را **زنجیر** نامیم اگر به ازای هر جفت x, y از Y، $x \leq y$ یا $y \leq x$. یک زنجیر را یک مجموعهٔ کلی مرتب نیز می‌خوانند. هرگاه Y زیرمجموعه‌ای از X باشد به طوری که به ازای هر $x \in Y$ و $u \in X$ ای داشته باشیم $x \leq u$، آنگاه u را یک ***کران بالایی*** Y می‌نامند. عنصر $m \in X$ را یک ***عنصر ماکزیمال*** X نامیم اگر رابطهٔ $m \leq x$ تساوی $m = x$ را ایجاب کند. (**تذکار**. یک مجموعهٔ جزئی مرتب ممکن است بیش از یک عنصر ماکزیمال داشته باشد.)

حکم زیر وجود عنصرهای ماکزیمال در بعضی از مجموعه‌های جزئی مرتب را تضمین می‌کند. این حکم به لم زرن (Zorn) معروف است و ابزار توانایی در آنالیز می‌باشد.

لم زرن. ***هرگاه هر زنجیر از مجموعهٔ جزئی مرتب X دارای کران بالایی در X باشد، آنگاه X عنصر ماکزیمال دارد.***

لم زرن (به عنوان یک حکم) هم‌ارز اصل موضوع انتخاب است. برای بحث مفصل، ر.ک. [۳].

تمرینات

۱. احکام ۲ تا ۱۳ در این بخش را ثابت کنید.

۲. نشان دهید که به ازای هر سه مجموعهٔ A، B، و C، $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

۳. به ازای هر دو مجموعهٔ A و B نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند:

آ. $A \subseteq B$؛

ب. $A \cup B = B$؛

پ. $A \cap B = A$.

۴. تابع $f: X \to Y$ و دو زیرمجموعهٔ A و B از X را چنان مثال بزنید که $f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$.

۵. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که به ازای هر $A \subseteq Y$، $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ و به ازای هر $B \subseteq X$، $B \subseteq f^{-1}(f(B))$.

۶. به ازای تابع $f: X \to Y$، نشان دهید که سه حکم زیر هم‌ارزند:

آ. f یک به یک است؛

ب. $\forall A, B\in\mathcal{P}(X)$، $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$؛

پ. به ازای هر جفت زیرمجموعهٔ A و B از X که $A\cap B = \varnothing$، داریم $f(A)\cap f(B) = \varnothing$.

۷. نشان دهید که تابع $f: X\to Y$ بروست اگر و فقط اگر به ازای هر $B \subseteq Y$، $f(f^{-1}(B)) = B$.

۸. فرض کنید $f: X\to Y$ و $g: Y\to Z$. اگر $A \subseteq Z$، نشان دهید که $(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

۹. اگر X و Y مجموعه باشند، نشان دهید که $\mathcal{P}(X)\cap\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X\cap Y)$ و $\mathcal{P}(X)\cup\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X\cup Y)$.

۱۰. نشان دهید که ترکیب توابع در قانون شرکتپذیری صدق می‌کند؛ یعنی نشان دهید هرگاه $f: X\to Y$، $g: Y\to Z$، و $h: Z\to V$، آنگاه $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

۱۱. فرض کنید $f: X\to Y$. نشان دهید که رابطهٔ R بر X با تعریف $x_1 R x_2$ اگر $f(x_1) = f(x_2)$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۲. مجموعه‌های شمارشپذیر و شمارش ناپذیر

در این بخش به «اندازهٔ» یک مجموعه می‌پردازیم. گوییم دو مجموعه دارای «تعداد عناصر یکسان»اند اگر بتوان عنصرهایشان را در تناظر یک به یک با هم قرار داد. منظور از تناظر یک به یک بین مجموعه‌های A و B یعنی تابعی مانند $f: A\to B$ که یک به یک و برو باشد.

تعریف ۲.۱. گوییم دو مجموعهٔ A و B ***هم‌ارزند*** (با علامات، $A \approx B$) اگر یک تابع مانند $f: A\to B$ باشد که یک به یک و برو باشد.

به آسانی معلوم می‌شود که خواص زیر برای مجموعه‌ها برقرارند:

۱. $A \approx A$؛

۲. هرگاه $A \approx B$، آنگاه $B \approx A$؛

۳. هرگاه $A \approx B$ و $B \approx C$، آنگاه $A \approx C$.

خط منقسم بین اندازه‌های مجموعه‌ها مجموعهٔ اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ است. هر زیرمجموعه از N به شکل $\{1, \ldots, n\}$ یک ***قطعه*** از N نام دارد، و n را ***تعداد*** عنصرهای قطعه می‌نامیم. واضح است که دو قطعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ و $\{1, \ldots, m\}$ هم‌ارزند اگر و فقط اگر $n = m$. این نشان می‌دهد که هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی یک قطعه نمی‌تواند با آن قطعه هم‌ارز باشد.

هر مجموعهٔ هم‌ارز با یک قطعه یک مجموعهٔ ***متناهی*** نام دارد. مجموعهٔ تهی را نیز متناهی با تعداد عناصر صفر در نظر می‌گیریم. هر مجموعه را که متناهی نباشد یک مجموعهٔ ***نامتناهی*** می‌نامند.

تعریف ۲.۲. مجموعهٔ A را **شمارشپذیر** نامیم اگر هم‌ارز با N باشد؛ یعنی اگر یک تناظر یک به یک از N با عناصر A موجود باشد.

برای مجموعهٔ شمارشپذیر A نماد متعارف وجود دارد. این مجموعه را معمولاً به صورت $A = \{a_۱, a_۲, ...\}$ می‌نویسیم و اغلب آن را یک **شماره گذاری** مجموعه نامیم زیرا در تناظر یک به یک با اعداد طبیعی است.

هر مجموعهٔ نامتناهی که شمارشپذیر نیست یک مجموعهٔ **شمارش ناپذیر** نام دارد. اولین نتیجهٔ ما مجموعه‌های نامتناهی را با مجموعه‌های شمارشپذیر مقایسه می‌کند.

قضیهٔ ۳.۲. ***هر مجموعهٔ نامتناهی شامل یک زیرمجموعهٔ شمارشپذیر است.***

برهان. فرض کنیم A یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. واضح است که $A \neq \varnothing$. $a_۱ \in A$ را اختیار کرده و مجموعهٔ $A_۱ = A \sim \{a_۱\}$ را در نظر می‌گیریم. چون A نامتناهی است، $A_۱$ ناتهی است. $a_۲ \in A_۱$ را اختیار می‌کنیم و مجموعهٔ $A_۲ = A \sim \{a_۱, a_۲\}$ را درنظر می‌گیریم. بنا بر استدلال فوق، عنصری مانند $a_۳ \in A_۲$ وجود دارد. اگر به همین نحو ادامه دهیم، مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, a_۳, ...\}$ به دست می‌آید که به وضوح شمارشپذیر است و طبق ساخت زیرمجموعه‌ای از A می‌باشد.

برای اثبات خواص دیگر مجموعه‌های شمارشپذیر به دو اصل زیر از اعداد طبیعی نیاز خواهیم داشت. اولین خاصیت به «اصل خوش ترتیبی» N معروف است. به یاد آورید که زیرمجموعهٔ S از N دارای کوچکترین (یا اولین) عنصر است اگر $k \in S$ ای باشد به طوری که $\forall n \in S$، $k \leq n$.

اصل خوش ترتیبی. ***هر زیرمجموعهٔ ناتهی از N دارای کوچکترین عنصر است.***

دومین خاصیت مورد نیاز از N به «اصل استقرای ریاضی» معروف است و ابزار توانایی در ریاضیات می‌باشد.

اصل استقرای ریاضی. ***هرگاه زیرمجموعهٔ S از N در خواص زیر صدق کند:***

آ. $1 \in S$ و

ب. هرگاه $n \in S$، آنگاه $n+1 \in S$،

آنگاه $S = N$.

حال بحث مجموعه‌های شمارشپذیر را ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۴.۲. *هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ شمارشپذیر یا متناهی است یا شمارشپذیر.*

برهان. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از یک مجموعهٔ شمارشپذیر باشد. همچنین A متناهی نباشد. در این صورت، نشان می‌دهیم که A شمارشپذیر است. استدلالی ساده نشان می‌دهد که بدون کاستن از کلیت می‌توان A را زیرمجموعهٔ N گرفت. تابع $f: N \to A$ را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم: $f(1)$ را کوچکترین عنصر A می‌گیریم (این عنصر بنا بر اصل خوش ترتیبی وجود دارد). حال اگر $f(1), ..., f(n)$ تعریف شده باشند، $f(n+1)$ را کوچکترین عنصر $A \sim \{f(1), ..., f(n)\}$ می‌گیریم. (این کوچکترین عنصر مجدداً طبق اصل خوش ترتیبی و متناهی نبودن A وجود دارد.)

بر خواننده است که یک به یک و برو بودن f را تحقیق کند. لذا، $A \approx N$.

جالب است توجه شود که یک مجموعهٔ نامتناهی (برخلاف مجموعه‌های متناهی) می‌تواند با بعضی از زیرمجموعه‌های حقیقی‌اش هم‌ارز باشد. برای مشاهدهٔ این امر، فرض می‌کنیم $X = \{2, 4, 6, ...\}$ و توجه می‌کنیم که X یک زیرمجموعهٔ حقیقی N است. اما تابع $f: N \to X$ با تعریف $f(n) = 2n$ به ازای هر n یک به یک و بروست؛ درنتیجه $N \approx X$.

در زیر، چند ویژگی مفید برای آنکه یک مجموعهٔ نامتناهی شمارشپذیر باشد ارائه شده است.

قضیهٔ ۵.۲. *احکام زیر در مورد مجموعهٔ نامتناهی A هم‌ارزند:*

یک. A شمارشپذیر است؛

دو. زیرمجموعه‌ای مانند B از N و تابعی چون $f: B \to A$ وجود دارد که بروست؛

سه. تابعی مانند $g: A \to N$ هست که یک به یک است.

برهان. (دو)$\Leftarrow$(یک). چون A شمارشپذیر است، تابعی مانند $f: N \to A$ هست که یک به یک و

بروست. لذا، قسمت (دو) با $B = N$ برقرار است.

(سه) $\Leftarrow$(دو). فرض کنیم B زیرمجموعه‌ای از N بوده و $f:B\to A$ یک تابع برو باشد. چون f بروست، $f^{-1}(a) = \{n \in B : f(n) = a\}$ به ازای هر $a \in A$ ناتهی است. حال $g:A\to N$ را به قرار زیر تعریف می‌کنیم: $g(a)$ را کوچکترین عنصر $f^{-1}(a)$ می‌گیریم؛ این عدد طبیعی طبق اصل خوش ترتیبی وجود دارد. برای اتمام برهان، باید نشان دهیم که g یک به یک است. درواقع، هرگاه $g(a) = g(b)$، آنگاه $a = f(g(a)) = f(g(b)) = b$، که نشانگر یک به یک بودن g است.

(یک) $\Leftarrow$(سه). فرض کنیم $g:A\to N$ یک به یک باشد. در این صورت، $A \approx g(A)$. چون A (طبق فرض) نامتناهی است، $g(A)$ یک زیرمجموعهٔ نامتناهی N است و درنتیجه، طبق قضیهٔ ۴.۲، $g(A) \approx N$. بنابراین، $A \approx N$ و برهان قضیه تمام خواهد بود.

دو نتیجهٔ زیر از قضیهٔ قبل به دست می‌آیند. اولی می‌گوید که اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر، شمارشپذیر است.

قضیهٔ ۶.۲. ***فرض کنیم*** $\{A_1, A_2, \ldots\}$ ***خانواده‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌ها باشد به طوری که هر*** A_i ***مجموعه‌ای شمارشپذیر است. در این صورت،*** $A= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ***مجموعه‌ای شمارشپذیر است.***

برهان. فرض کنیم به ازای... $n = 1, 2,$، $A_n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots\}$ و نیز $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. همچنین، $B = \{2^k.3^n: k,n \in N\}$. تابع $f:B\to A$ را با $f(2^k.3^n) = a_k^n$ تعریف می‌کنیم. f مجموعهٔ B را به روی A می‌نگارد؛ و لذا، A طبق قضیهٔ ۵.۲، مجموعه‌ای شمارشپذیر است.

حاصل ضرب دکارتی یک گردایهٔ متناهی از مجموعه‌های شمارشپذیر همیشه شمارشپذیر است.

قضیهٔ ۷.۲. ***فرض کنیم*** $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ***گردایه‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد به طوری که هر*** A_i ***شمارشپذیر است. در این صورت،*** $A_1\times\ldots\times A_n$ ***شمارشپذیر می‌باشد.***

برهان. کافی است فرض کنیم به ازای هر i ، $A_i = N$؛ درنتیجه $A = N^n$. n عدد اول متمایز مانند $p_1, \ldots, p_n$ اختیار کرده و $f:N^n\to N$ را با $f(k_1,\ldots,k_n)=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}$ تعریف می‌کنیم. از قضیهٔ اساسی حساب (هر عدد طبیعی تجزیهٔ منحصر به فردی به اعداد اول دارد) واضح است که f یک به یک است.

لذا، طبق قضیهٔ ۵.۲، N^n شمارشپذیر می‌باشد.

بحث را با چند نتیجه راجع به مجموعه‌های «بزرگ» پایان می‌بخشیم. می‌توان پرسید: **یک مجموعه چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟**

برای پاسخ دادن به این سؤال، به یک تعریف نیاز داریم. می‌نویسیم $A \lesssim B$ اگر یک تابع یک به یک مانند $f:A\to B$ موجود باشد؛ به بیان دیگر، $A \lesssim B$ اگر A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌ارز باشد. واضح است که در این معنی می‌توان گفت که «B دست کم به اندازهٔ A عنصر دارد».

رابطهٔ $\lesssim$ از خواص زیر بهره‌مند است:

۱. به ازای هر مجموعهٔ A، $A \lesssim A$؛

۲. هرگاه $A \lesssim B$ و $B \lesssim C$، آنگاه $A \lesssim C$؛

۳. هرگاه $A \lesssim B$ و $B \lesssim A$، آنگاه $A \approx B$.

خاصیت (۳) به قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین (Schröder-Bernstein) معروف است و نتیجهٔ بسیار مهمی می‌باشد؛ برای اثبات آن، ر.ک. [۳، ص ۸۸] یا [۶، ص ۲۹].

نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد که مجموعهٔ توانی یک مجموعه عنصرهای بیشتری از آن مجموعه دارد. این نتیجه به جی. کانتور (G.Cantor) منسوب است.

قضیهٔ ۸.۲ (کانتور). **هرگاه A یک مجموعه باشد آنگاه** $A \lesssim \mathcal{P}(A)$ **و** $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

برهان. هرگاه $A = \varnothing$، آنگاه نتیجه بدیهی است. لذا، فرض می‌کنیم $A \neq \varnothing$. تابع $f:A\to\mathcal{P}(A)$ را با $f(x) = \{x\}$ به ازای $x \in A$ تعریف کرده و توجه می‌کنیم که f یک به یک است. بنابراین، $A \lesssim \mathcal{P}(A)$.

برای اثبات $A \not\approx \mathcal{P}(A)$، فرض کنیم $A \approx \mathcal{P}(A)$ (فرض خلف). درنتیجه، یک تابع مانند $g:A\to\mathcal{P}(A)$ وجود دارد که یک به یک و بروست. زیرمجموعهٔ B از A را با $B = \{x \in A:\ x \notin g(x)\}$ تعریف کرده و $a \in A$ را چنان اختیار می‌کنیم که $g(a) = B$. ولی در این صورت $a \in B$ اگر و فقط اگر $a \notin B$ که ناممکن است. پس برهان قضیه تمام خواهد بود.

تصور کنید که به هر مجموعهٔ A می‌توان علامتی (که نقش عدد را دارد) منتسب کرد که مبین تعداد عناصر آن مجموعه است. بدون پرداختن به جزئیات، این علامت را ***عدد اصلی*** A نامیده و آن را با $\operatorname{card} A$ نشان می‌دهیم.

واضح است که اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، مثلاً $A = \{a_1, ..., a_n\}$، داریم $\text{card } A = n$. ولی عدد اصلی N چیست؟ ما عدد اصلی N را با $\aleph_0$ نشان می‌دهیم. وقتی می‌گوییم مجموعهٔ A دارای عدد اصلی $\aleph_0$ است (با علامات، $\text{card } A = \aleph_0$) صرفاً منظور آن است که $A \approx N$. به طور کلی $\text{card } A = \text{card } B$ یعنی $A \approx B$.

هرگاه a و b دو عدد اصلی باشند، آنگاه $a \leq b$ یعنی دو مجموعه مانند A و B وجود دارند که $\text{card } A = a$، $\text{card } B = b$، و $A \lesssim B$. به همین نحو، $a < b$ در بین اعداد اصلی یعنی دو مجموعه مانند A و B وجود دارند که $\text{card } A = a$، $\text{card } B = b$، $A \lesssim B$، و $A \not\approx B$. توجه کنید که، بنا بر قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین، $a \leq b$ و $b \leq a$ ایجاب می‌کنند که $a = b$.

حال راجع به حساب اعداد اصلی چند نکته را ذکر می‌کنیم. از قضیهٔ ۸.۲ می‌دانیم که یک مجموعه با عدد اصلی بزرگتر از $\aleph_0$ وجود دارد؛ این مجموعه $\mathcal{P}(N)$ است. می‌توان نشان داد که $\mathcal{P}(N) \approx R$ (ر.ک. تمرین ۷ از بخش ۴)، که R مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. عدد اصلی R را با c نشان داده و آن را ***اصلیت پیوستار*** می‌نامیم. بنابراین، $\aleph_0 < c$. عدد اصلی a صادق در $\aleph_0 \leq a$ یک ***عدد اصلی نامتناهی*** نام دارد.

به آسانی معلوم می‌شود که اگر $\{0, 1\} = 2$، به ازای هر مجموعهٔ X داریم $2^X \approx \mathcal{P}(X)$. به این دلیل معمولاً عدد اصلی $\mathcal{P}(X)$ را با $2^{\text{card}X}$ نشان می‌دهند. لذا، نامساویهای زیر برقرارند:

$$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c < 2^c < 2^{2^c} < ...$$

در رابطه با اعداد اصلی نامتناهی، مسئلهٔ مهم زیر هنوز حل نشده است:

اگر a یک عدد اصلی نامتناهی باشد، آیا یک عدد اصلی مانند b هست که $a < b < 2^a$؟

فرض پیوستار حدس می‌زند که جواب مسئلهٔ فوق وقتی $a = \aleph_0$ منفی است، و فرض پیوستار تعمیم یافته حدس می‌زند که برای هر عدد اصلی نامتناهی جواب منفی است.

برای بحثهای مشروح راجع به اعداد اصلی، خوانندهٔ علاقمند می‌تواند به مرجعهای [۲]، [۳]، و [۵] مراجعه نماید.

تمرینات

۱. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد گویا شمارشپذیر است.

۲. نشان دهید که مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی از یک مجموعهٔ شمارشپذیر، شمارشپذیر است.

۳. فرض کنید A یک مجموعهٔ شمارش ناپذیر و B یک زیرمجموعهٔ شمارشپذیر از A باشد. نشان

دهید A هم‌ارز B $A \sim B$ است.

۴. نشان دهید مجموعهٔ تمام دنباله‌ها با مقادیر ۰ یا ۱ شمارش ناپذیر است.

۵. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند. اگر $f: A \to B$ برو و A شمارشپذیر باشد، نشان دهید B حداکثر شمارشپذیر است.

۶. نشان دهید هرگاه مجموعهٔ متناهی X دارای n عنصر باشد، آنگاه مجموعهٔ توانی‌اش $\mathcal{P}(X)$ دارای 2^n عنصر است.

۷. هرگاه $2 = \{0, 1\}$، آنگاه نشان دهید که به ازای هر مجموعهٔ X، $2^X \approx \mathcal{P}(X)$.

۸. هرگاه $f: A \to B$ برو باشد، آنگاه نشان دهید که $\text{card } B \leq \text{card } A$.

۹. هر عدد حقیقی که ریشهٔ یک چند جمله‌ای (ناصفر) با ضرایب صحیح باشد یک **عدد جبری** نام دارد. نشان دهید که مجموعهٔ تمام اعداد جبری شمارشپذیر است.

۱۰. نشان دهید که اجتماع یک گردایهٔ حداکثر شمارشپذیر از مجموعه‌ها که هر کدام متناهی است یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر است.

۱۱. با اثبات مطالب زیر، نشان دهید که مجموعهٔ اعداد حقیقی شمارش ناپذیر است:

آ. $R \approx (0, 1)$؛ و

ب. $(0, 1)$ شمارش ناپذیر است.

[**راهنمایی.** هرگاه $(0, 1)$ شمارشپذیر باشد، آنگاه $\{x_1, x_2, \dots\}$ را یک شماره گذاری $(0, 1)$ بگیرید. به ازای هر n بسط اعشاری x_n را به صورت $x_n = 0 . d_{n1}d_{n2}\dots$ بنویسید که در آن هر d_{ij} مساوی ۰، ۱،...، یا ۹ است. حال عدد حقیقی y در $(0, 1)$ را به صورت بسط اعشاری $y = 0 . y_1 y_2\dots$ درنظر بگیرید که در آن اگر $d_{nn} \neq 1$، $y_n = 1$ و اگر $d_{nn} = 1$، $y_n = 2$. برای به دست آوردن تناقض، نشان دهید که به ازای هر n، $y \neq x_n$.]

۱۲. نشان دهید که اصل خوش ترتیبی اصل استقرای ریاضی را ایجاب می‌کند.

۳. اعداد حقیقی

بی‌شک مهمترین مجموعه در این کتاب مجموعهٔ اعداد حقیقی R است. مجموعهٔ اعداد حقیقی را **خط حقیقی** نیز می‌گویند. دلیلش این است که اگر یک خط مستقیم در نظر بگیریم، می‌توان اعداد حقیقی را (به طریق معمول) در تناظر یک به یک با نقاط این خط قرار داد. ما اصطلاحات «خط حقیقی» و «اعداد حقیقی» را یکی خواهیم گرفت.

با آنکه هدف ما بسط اصل موضوعی اعداد حقیقی نیست، ولی شایسته است ببینیم درست چه

اصولی اعداد حقیقی را توصیف می‌کنند. این اصول عبارتند از اصول موضوع میدان، اصول موضوع ترتیب، و اصل موضوع تمامیت. با اصطلاحات جبری، مجموعهٔ اعداد حقیقی را صرفاً «میدان مرتب تام» می‌نامند. این نام از مبانی اصل موضوعی اعداد حقیقی که در زیر به طور خلاصه آمده است ناشی شده است.

اعداد حقیقی اعضای یک مجموعهٔ ناتهی مانند R است که با دو تابع + و $\cdot$ از $R\times R$ به توی R به نام جمع و ضرب مجهز شده است که در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند.

اصول موضوع میدان

حروف x، y، و z اعداد حقیقی دلخواهند مگر خلافش تصریح شود.

اصل موضوع ۱. $x+y = y+x$ و $xy = yx$ ***(قوانین تعویضپذیری).***

اصل موضوع ۲. $x+(y+z) = (x+y)+z$ و $x(yz) = (xy)z$ ***(قوانین شرکتپذیری).***

اصل موضوع ۳. $x(y+z) = xy+xz$ ***(قانون پخشپذیری).***

اصل موضوع ۴. ***عنصری مانند*** $0 \in R$ ***هست که به ازای هر*** $x \in R$، $x+0 = x$.

اصل موضوع ۵. ***به ازای هر*** $x \in R$ ***عنصری در*** R ***هست (که با*** $-x$ ***نموده می‌شود) به طوری که*** $x+(-x) = 0$.

اصل موضوع ۶. ***عنصری مانند*** $1 \in R$ ***هست که*** $0 \neq 1$ ***و به ازای هر*** $x \in R$، $1.x = x$.

اصل موضوع ۷. ***به ازای هر*** $x \neq 0$ ***عنصری در*** R ***هست (که با*** x^{-1} ***نموده می‌شود) به طوری که*** $xx^{-1} = 1$.

می‌توان نشان داد که عنصر صفر اصل موضوع ۴ منحصر به فرد است. همچنین، می‌توان ثابت کرد که عنصر $-x$ اصل موضوع ۵ منحصر به فرد است، و نیز $(-1)x = -x$. به همین نحو، می‌توان دید که عنصر x^{-1} اصل موضوع ۷ که در $xx^{-1} = 1$ صدق می‌کند (که البته $x \neq 0$) نیز منحصر به فرد می‌باشد.

از اصول موضوع میدان می‌توان خواص آشنای جمع و ضرب را به دست آورد. به عنوان مثال،

$$0 \cdot x = 0\,, -(-x) = x\,, (-x)(-y) = xy\,, x-y = x+(-y) = -(y-x)\,, (x^{-1})^{-1} = x.$$

شرط بعدی این است که R نه فقط میدان باشد بلکه «میدان مرتب» نیز باشد. این یعنی R با یک رابطهٔ ترتیب مانند $\geq$ مجهز است که با اعمال جبری از طریق اصول موضوع زیر سازگار باشد:

اصول موضوع ترتیب

اصل موضوع ۸. ***به ازای هر*** $x, y \in R$، $x \geq y$ ***یا*** $y \geq x$ ***برقرار است.***

اصل موضوع ۹. ***هرگاه*** $x \geq y$، ***آنگاه به ازای هر*** $z \in R$، $x+z \geq y+z$.

اصل موضوع ۱۰. **هرگاه $x \geq y$ و $z \geq 0$، آنگاه** $xz \geq yz$.

نماد دیگر برای $x \geq y$ عبارت است از $y \leq x$. هر عدد $x \in R$ صادق در $x > 0$ (یعنی $x \geq 0$ و $x \neq 0$) یک **عدد مثبت** نام دارد (و به همین ترتیب، هر عدد x که $x < 0$ یک **عدد منفی** نامیده می‌شود). از اصول موضوع ترتیب می‌توان خواص معمولی نامساوی در اعداد حقیقی را به دست آورد. ما یکی از خواص بسیار مفید از نامساویها را ذکر می‌کنیم:

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $x+\varepsilon \geq y$، آنگاه $x \geq y$ نیز برقرار است.

درواقع، هرگاه مطلب فوق برقرار نباشد، آنگاه $y-x > 0$. فرض کنیم $\varepsilon = \frac{1}{2}(y-x) > 0$ و توجه می‌کنیم که فرض ما ایجاب می‌کند که $\frac{1}{2}(x+y) = x + \frac{1}{2}(y-x) \geq y$. این به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که $y - x \leq 0$ که یک تناقض می‌باشد.

راه معمول برای تعریف قدر مطلق عدد حقیقی a به قرار زیر است: $|a| = a$ اگر $a \geq 0$، و $|a| = -a$ اگر $a < 0$. هرگاه $a \vee b$ ماکزیمم اعداد a و b باشد (مثلاً، $2 \vee (-1) = 2$ و $1 \vee 1 = 1$)، آنگاه با لحظه‌ای فکر معلوم می‌شود که به ازای هر $a \in R$، $|a| = a \vee (-a)$. به خصوص، نتیجه می‌شود که به ازای هر $a \in R$، $|a| = |-a|$. قدر مطلق از خواص زیر بهره‌مند است:

۱. به ازای هر $a \in R$، $|a| \geq 0$، و $|a| = 0$ اگر و فقط اگر $a = 0$؛

۲. به ازای هر جفت $a, b \in R$، $|ab| = |a| . |b|$؛

۳. به ازای هر جفت $a, b \in R$، $|a+b| \leq |a| + |b|$ (نامساوی مثلثی).

عدد نامنفی $|a - b|$ را می‌توان **فاصلهٔ** بین اعداد a و b تعبیر هندسی کرد.

خاصیتی از اعداد حقیقی که کمتر درک می‌شود ***اصل موضوع تمامیت*** یا ***اصل موضوع پیوستگی*** است. پیش از بیان این اصل، چند نکته را یادآور می‌شویم.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از R باشد. یک ***کران بالایی*** A عددی است حقیقی مانند a به طوری که به ازای هر $x \in A$، $x \leq a$؛ به همین نحو، $b \in R$ یک ***کران پایینی*** A است اگر به ازای هر $x \in A$، $b \leq x$. هرگاه A کران بالایی (پایینی) داشته باشد، آنگاه گوییم A از بالا (پایین) کراندار است. هرگاه A هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد، آنگاه گوییم A یک ***مجموعهٔ کراندار*** است. یک عدد حقیقی را ***کوچکترین کران بالایی*** (یا ***سوپرمم***) A نامیم اگر این عدد کران بالایی A بوده و از هر کران بالایی A کوچکتر یا مساوی باشد. یعنی $x \in R$ کوچکترین کران بالایی A است اگر

یک. A از بالا به x کراندار بوده، و

دو. هرگاه A از بالا به y کراندار باشد، آنگاه $x \leq y$.

واضح است که یک مجموعه مانند A حداکثر می‌تواند یک کوچکترین کران بالایی داشته باشد. این عدد را با $\sup A$ نشان می‌دهیم. برای **بزرگترین کران پایینی** (یا **اینفیمم**) مجموعهٔ A که با $\inf A$ نموده می‌شود تعریف مشابهی وجود دارد. اصل موضوع تمامیت به ما می‌گوید که هر مجموعهٔ ناتهی که از بالا کراندار باشد کوچکترین کران بالایی دارد و در زیر بیان شده است.

اصل موضوع تمامیت

اصل موضوع ۱۱. ***هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد کوچکترین کران بالایی دارد.***

از این اصل به آسانی نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد بزرگترین کران پایینی دارد. (هرگاه A ناتهی بوده و از پایین کراندار باشد، آنگاه مجموعهٔ $B = \{b \in R\colon b \leq x\ \forall x \in A\}$ از بالا کراندار است؛ و درنتیجه $\sup B$ وجود دارد. توجه کنید که $\sup B = \inf A$.) همچنین واضح است که اگر مجموعهٔ A دارای عنصر ماکزیمم (یا مینیمم) باشد، $\max A = \sup A$ (یا $\min A = \inf A$). از آن سو، هرگاه سوپرمم یک مجموعه موجود بوده و $\sup A \in A$، آنگاه $\sup A$ عنصر ماکزیمم A است. به عبارت دیگر، سوپرمم یک مجموعه تعمیم عنصر ماکزیمم مجموعه است. برای مشاهدهٔ این مبنای اصل موضوعی اعداد حقیقی، ر.ک. [۱].

قضیهٔ تقریب زیر در رابطه با سوپرمم یک مجموعه برقرار است.

قضیهٔ ۱.۳. ***فرض کنیم سوپرمم زیرمجموعهٔ A از R موجود باشد. در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عنصری مانند $x \in A$ هست به طوری که***

$$\sup A - \varepsilon < x \leq \sup A.$$

برهان. هرگاه به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq \sup A - \varepsilon$، آنگاه $\sup A - \varepsilon$ یک کران بالایی A است که از کوچکترین کران بالایی کمتر است. ولی این ناممکن است. لذا، عنصری مانند $x \in A$ هست که $\sup A - \varepsilon < x \leq \sup A$.

یک نتیجهٔ مفید از قضیهٔ ۱.۳ خاصیتی از اعداد حقیقی است که به «خاصیت ارشمیدسی» موسوم است.

خاصیت ارشمیدسی. ***هرگاه x و yدو عدد حقیقی مثبت باشند، آنگاه عددی طبیعی مانند n هست که $nx > y$.***

به آسانی معلوم می‌شود که خاصیت ارشمیدسی هم‌ارز آن است که بگوییم «مجموعهٔ اعداد طبیعی Nاز بالا در Rکراندار نیست.» برای مشاهدهٔ اینکه مجموعهٔ اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست، به عکس، فرض می‌کنیم به ازای $a \in R$ای و هر $n \in N$، $n \le a$. در این صورت، بنا بر اصل موضوع تمامیت، $s = \sup N$ وجود دارد و، بنا بر قضیهٔ ۱.۳، $k \in N$ای هست که $k > s-۱$. این ایجاب می‌کند که $s < k+۱ \le s$ که ناممکن است.

در قضیهٔ بعد خاصیت چگالی مهمی از اعداد گویا توصیف می‌شود. به یاد آورید که یک عدد گویا عددی است که می‌توان آن را به صورت خارج قسمت دو عدد صحیح نوشت.

قضیهٔ ۲.۳. ***بین هر دو عدد حقیقی متمایز عددی گویا وجود دارد.***

برهان. به آسانی معلوم می‌شود که فقط کافی است اعداد مثبت را درنظر بگیریم. لذا، فرض می‌کنیم $a, b \in R$ چنان باشند که $۰ < a < b$.

ابتدا مجموعهٔ $A = \{n \in N: n > \max\{\frac{۱}{(b-a)}, \frac{۱}{b}\}\}$ را درنظر می‌گیریم. چون Nاز بالا کراندار نیست، A ناتهی است. عنصر $q \in A$ را ثابت می‌گیریم. واضح است که $۰ < ۱/q < b-a$. حال قرار می‌دهیم $B = \{n \in N: n < bq\}$. در این صورت $B \neq \varnothing$ (زیرا $۱ \in B$)، و Bطبق ساخت خود مجموعه‌ای متناهی است. فرض کنیم $p = \max B$؛ توجه کنید که $p \in B$ و $p+۱ \notin B$.

برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم که $a < p/q < b$. برای این کار، ابتدا توجه می‌کنیم که، طبق ساخت، $p/q < b$. از آن سو، چون $b \le (p+۱)/q$، باید داشته باشیم

$$a = b-(b-a) < \frac{p+۱}{q} - \frac{۱}{q} = \frac{p}{q},$$

و مطلب تمام است.

گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ از R ***همگرا*** به xاست اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند $n_۰$(تابع ε) باشد به طوری که به ازای هر $n > n_۰$، $|x_n - x| < \varepsilon$. xرا حد $\{x_n\}$ نامیده و می‌نویسیم $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ یا فقط $x = \lim x_n$. واضح است که اگر $\lim x_n = x$، به ازای هر زیردنبالهٔ $\{y_n\}$ از $\{x_n\}$ داریم

$\lim y_n = x$.

قضیهٔ ۳.۳. *هر دنباله از اعداد حقیقی حداکثر دارای یک حد است.*

برهان. فرض کنیم دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی در $\lim x_n = x$ و $\lim x_n = y$ صدق کند. همچنین $\varepsilon > 0$. در این صورت عددی طبیعی مانند n_0 هست به طوری که به ازای $n > n_0$، $|x_n - x| < \varepsilon$ و $|x_n - y| < \varepsilon$.

حال $n > n_0$ را ثابت گرفته و از نامساوی مثلثی به دست می‌آوریم:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، $|x - y| \le |x - x_n| + |y - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$؛

یعنی $x = y$. پس برهان قضیه تمام است.

به یاد آورید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ را ***کراندار*** گوییم اگر یک عدد حقیقی مانند $M > 0$ باشد به طوری که به ازای هر n، $|x_n| \le M$. گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ از R ***صعودی*** است اگر به ازای هر n، $x_n \le x_{n+1}$، و ***نزولی*** است اگر به ازای هر n، $x_{n+1} \le x_n$. یک دنباله ***یکنوا*** است اگر صعودی یا نزولی باشد. علامت $x_n \uparrow x$ یعنی $\{x_n\}$ صعودی است با $x = \lim x_n$؛ به همین نحو، $x_n \downarrow x$ یعنی $\{x_n\}$ نزولی است با $x = \lim x_n$. هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $x_n = c$ به ازای هر n صدق کند، آنگاه آن را یک دنبالهٔ ***ثابت*** می‌نامیم.

قضیهٔ ۴.۳. *هر دنبالهٔ کراندار یکنوا از R یک دنبالهٔ همگراست.*

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ صعودی و کراندار باشد. چون $\{x_n\}$ کراندار است، $x = \sup\{x_n : n \in N\}$ در R وجود دارد. حکم می‌کنیم که $\lim x_n = x$. درواقع، هرگاه $\varepsilon > 0$، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۱.۳، عددی مانند n_0 هست که $x - \varepsilon < x_{n_0} \le x$. لذا، به ازای $n > n_0$، داریم $|x_n - x| = x - x_n \le x - x_{n_0} < \varepsilon$؛ درنتیجه $\lim x_n = x$.

برهان حالت نزولی به همین نحو است.

در زیر خواص اصلی دنباله‌های همگرا ذکر شده‌اند.

۱. هر دنبالهٔ همگرا کراندار است.

۲. هرگاه به ازای هر n، $x_n = c$، آنگاه $\lim x_n = c$.

۳. هرگاه سه دنبالهٔ $\{x_n\}$، $\{y_n\}$، و $\{z_n\}$ از R در $x_n \le z_n \le y_n$ به ازای هر n صدق کرده و $\lim x_n = \lim y_n = x$، آنگاه $\{z_n\}$ همگراست و $\lim z_n = x$.

در خواص بعد، فرض می‌کنیم $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$.

۴. به ازای هر $\alpha, \beta \in R$، دنبالهٔ $\{\alpha x_n+\beta y_n\}$ همگراست و

$$\lim (\alpha x_n+\beta y_n) = \alpha x+\beta y .$$

۵. دنبالهٔ $\{x_n y_n\}$ همگراست و $\lim (x_n y_n) = xy$.

۶. هرگاه به ازای هر n و δ ای داشته باشیم $|y_n| \geq \delta > 0$، آنگاه $\{x_n/y_n\}$ همگراست و $\lim (x_n/y_n) = x/y$.

۷. هرگاه به ازای هر $n \ge n_0$ داشته باشیم $x_n \ge y_n$، آنگاه $x \ge y$.

گوییم عدد حقیقی x یک **نقطهٔ حدی** (یا **نقطهٔ خوشه‌ای**) دنبالهٔ $\{x_n\}$ است اگر به ازای هر $n \in N$ و $\varepsilon > 0$ عددی مانند $k > n$ (تابع ε و n) باشد که $|x_k - x| < \varepsilon$. نقاط حدی یک دنباله به صورت زیر مشخص می‌شوند.

قضیهٔ ۵.۳. ***فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت عددی حقیقی مانند x یک نقطهٔ حدی $\{x_n\}$ است اگر و فقط اگر زیردنباله‌ای مانند $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_n\}$ موجود باشد که $\lim x_{k_n} = x$.***

برهان. فرض کنیم x یک نقطهٔ حدی $\{x_n\}$ باشد. عدد طبیعی k_1 را طوری می‌گیریم که $|x_{k_1} - x| < 1$. حال، به استقرا، اگر k_1، ...، k_n انتخاب شده باشند، $k_{n+1} > k_n$ را طوری می‌گیریم که $|x_{k_{n+1}} - x| < 1/(n+1)$. لذا، یک دنباله از اعداد طبیعی مانند $\{k_n\}$ هست به طوری که $k_1 < k_2 < \dots$ و به ازای هر n، $|x_{k_n} - x| < 1/n$. واضح است که $\{x_{k_n}\}$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ است به طوری که $\lim x_{k_n} = x$.

برای اثبات عکس استلزام، زیردنبالهٔ $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_n\}$ را در نظر می‌گیریم که $\lim x_{k_n} = x$. فرض کنیم $m \in N$ و $\varepsilon > 0$. باید نشان دهیم که $p > m$ ای هست به طوری که $|x_p - x| < \varepsilon$. برای این کار، n_0 را چنان اختیار می‌کنیم که اگر $n > n_0$، $|x_{k_n} - x| < \varepsilon$. حال $n > \max\{n_0, m\}$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم $p = k_n$. ولی در این صورت $p > m$ (زیرا $k_n \ge n$) و $|x_p - x| < \varepsilon$ و برهان تمام خواهد بود.

در بین نقاط حدی یک دنباله، بزرگترین و کوچکترین آنها از اهمیتی برخوردارند.

تعریف ۶.۳. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار از R باشد. در این صورت ***حد اعلای*** $\{x_n\}$ به

صورت

$$\limsup x_n = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} x_k\right),$$

و **حد اسفل** $\{x_n\}$ به صورت

$$\liminf x_n = \sup_n \left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

تعریف می‌شود. هرگاه بنویسیم

$$\inf_{k\geq n} x_k = \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \quad \text{و} \quad \sup_{k\geq n} x_k = \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k,$$

آنگاه فرمولهای فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\limsup x_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k\right),$$

$$\liminf x_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \left(\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k\right).$$

و نیز، چون به ازای هر n، $\bigvee_{k=n+1}^{\infty} x_k \leq \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$ و $\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \leq \bigwedge_{k=n+1}^{\infty} x_k$، نتیجه می‌شود که

$$\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \uparrow_n \liminf x_n \quad \text{و} \quad \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k \downarrow_n \limsup x_n.$$

قضیهٔ ۷.۳. هرگاه $\{x_n\}$ *یک دنبالهٔ کراندار باشد، آنگاه* $\liminf x_n$ و $\limsup x_n$ کوچکترین و بزرگترین نقطهٔ حدی $\{x_n\}$اند. به خصوص،

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار در R باشد. قرار می‌دهیم $s = \limsup x_n$. نشان می‌دهیم که s بزرگترین نقطهٔ حدی $\{x_n\}$ است. حالت دیگر را می‌توان به همین نحو نشان داد.

ابتدا نشان می‌دهیم که s یک نقطهٔ حدی است. برای این کار، فرض کنیم $m \in N$ و $\varepsilon > 0$. چون $\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k \downarrow_n s$، $n > m$ ی هست به طوری که $s \leq \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k < s+\varepsilon$. این امر وجود $k \geq n > m$ ای را ایجاب می‌کند که $s-\varepsilon < x_k < s+\varepsilon$. لذا، s یک نقطهٔ حدی $\{x_n\}$ است.

برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم که s بزرگترین نقطهٔ حدی است. فرض کنیم x یک نقطهٔ

حدی $\{x_n\}$ بوده و $\varepsilon > 0$. در این صورت، به ازای هر $n \in N$، $m > n$ ی هست به طوری که $x-\varepsilon < x_m < x+\varepsilon$. پس به ازای هر n داریم $x - \varepsilon < \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$ و درنتیجه، به ازای هر $\varepsilon > 0$، $x - \varepsilon \leq \bigwedge_{n=1}^{\infty}\left(\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k\right) = s$. لذا، $s \leq x$ و برهان تمام خواهد بود.

هرگاه $\lim x_n = x$، آنگاه x تنها نقطهٔ حدی $\{x_n\}$ است و درنتیجه

$$\limsup x_n = \liminf x_n = x\,.$$

همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، عکس این مطلب نیز برقرار است.

قضیهٔ ۸.۳. ***دنبالهٔ کراندار $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی همگراست اگر و فقط اگر***

$$\limsup x_n = \liminf x_n = x\,.$$

در این حالت $\lim x_n = x$.

برهان. فرض کنیم

$$\limsup x_n = \liminf x_n = x$$

و نشان می‌دهیم که $\lim x_n = x$. نامساویهای

$$x-x_n \leq \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k - \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \quad \text{و} \quad x_n - x \leq \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k - \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$$

ایجاب می‌کنند که $|x_n - x| \leq \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k - \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k - \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k\right) = x - x = 0,$$

به آسانی معلوم می‌شود که $\lim x_n = x$.

گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ از R یک ***دنبالهٔ کشی*** (Cauchy) است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند n_0 (تابع ε) موجود باشد به طوری که به ازای هر $n, m > n_0$، $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

واضح است که یک دنبالهٔ کشی لزوماً کراندار است. همچنین روشن است که هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است. عکس مطلب نیز درست است و این طور بیان می‌شود که اعداد حقیقی یک فضای متری تام تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ۳.۹. *یک دنباله از اعداد حقیقی همگراست اگر و فقط اگر یک دنبالهٔ کشی باشد.*

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی باشد، $\{x_n\}$ در R همگراست.

فرض کنیم $x = \limsup x_n$. بنا بر قضیهٔ ۳.۵، زیردنباله‌ای مانند $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_n\}$ هست به طوری که $\lim x_{k_n} = x$. حال فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. $n_۰$ را طوری اختیار می‌کنیم که به ازای $n, m > n_۰$، $|x_{k_n} - x| < \varepsilon$ و $|x_n - x_m| < \varepsilon$. حال اگر $n > n_۰$، داریم $k_n \geq n > n_۰$؛ و درنتیجه

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \varepsilon + \varepsilon = ۲\varepsilon .$$

بنابراین، $\lim x_n = x$.

حال فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعهٔ ناتهی X باشد. همچنین تابعی مانند g باشد که به ازای هر $x \in X$ و هر n، $|f_n(x)| \leq g(x)$. در این صورت، به ازای هر $x \in X$ ثابت، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ از اعداد حقیقی کراندار است. لذا، $\limsup f_n(x)$ و $\liminf f_n(x)$ هر دو در R وجود دارند. درنتیجه $\limsup f_n$ و $\liminf f_n$ دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع را می‌توان به ازای هر $x \in X$ چنین تعریف کرد:

$$(\limsup f_n)(x) = \limsup f_n(x) \text{ و } (\liminf f_n)(x) = \liminf f_n(x) .$$

تمرینات

۱. هرگاه $a \vee b = \max(a, b)$ و $a \wedge b = \min(a, b)$، آنگاه نشان دهید که

$$a \vee b = \frac{۱}{۲}(a+b+|a-b|) \text{ و } a \wedge b = \frac{۱}{۲}(a+b-|a-b|) .$$

۲. نشان دهید که به ازای هر $a, b \in R$، $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

۳. نشان دهید که بین هر دو عدد حقیقی متمایز عدد گویایی وجود دارد.

۴. نشان دهید هرگاه $|x| < ۱$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = ۰$.

۵. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار باشد. نشان دهید که

$$\limsup (-x_n) = -\liminf x_n \text{ و } \liminf (-x_n) = -\limsup x_n .$$

۶. هرگاه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنبالهٔ کراندار باشند، آنگاه نشان دهید که

آ. $\limsup(x_n+y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$ و

ب. $\liminf (x_n+y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$.

به علاوه، نشان دهید که اگر یکی از دنباله‌ها همگرا باشد، در (آ) و (ب) تساوی خواهیم داشت.

۷. برای دنبالهٔ $x_n = (-1)^n$ به ازای هر n، $\limsup$ و $\liminf$ را بیابید.

۸. نشان دهید که $\lim x_n = x$ برقرار است اگر و فقط اگر هر زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا به x داشته باشد.

۹. نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ با تعریف

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

یک دنبالهٔ همگراست.

۱۰. فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ در نامساوی $|x_{n+1}-x_n| \le \alpha|x_n - x_{n-1}|$ به ازای $n = 2, 3, \ldots$ و عدد ثابتی چون $0 < \alpha < 1$ صدق کند. نشان دهید که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگراست.

۱۱. یک دنباله را با $x_1 = 1$ و

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n}) \text{ با } n = 1, 2, \ldots \text{ به ازای}$$

تعریف کنید. نشان دهید که $\{x_n\}$ همگراست و $\lim x_n = \sqrt{2}$.

۱۲. دنبالهٔ $x_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ را به ازای $n = 1, 2, \ldots$ درنظر گرفته و نشان دهید که $\{x_n\}$ در R همگرا نیست. **[راهنمایی.** نشان دهید که $x_{2n}-x_n \ge \frac{1}{2}$.]

۱۳. به ازای هر n، تابع $f_n: [-1, 1] \to R$ را با $f_n(x) = x^n$ تعریف کرده و $\limsup f_n$ و $\liminf f_n$ را محاسبه نمایید.

۱۴. فرض کنید G زیرمجموعه‌ای ناتهی از R باشد که تحت جمع گروه تشکیل می‌دهد (یعنی، هرگاه $x, y \in G$، آنگاه $x+y \in G$ و $-x \in G$). نشان دهید که بین هر دو عدد حقیقی متمایز عنصری از G هست یا $a \in R$ ای وجود دارد که $G = \{na: n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

[راهنمایی. فرض کنید $a = \inf G \cap (0, \infty)$.]

۱۵. نقاط حدی دنبالهٔ $\{\cos n\}$ را معین کنید.

[راهنمایی. $G = \{n+2m\pi : \text{ و } m \text{ صحیح اند } n\}$ را درنظر گرفته و از تمرین قبل استفاده کنید.]

۴. اعداد حقیقی وسعت یافته

اعداد حقیقی وسعت یافتهٔ R^* اعداد حقیقی همراه با دو عنصر الحاقی‌اند. دو عنصر اضافی را با ∞ (یا $+\infty$) و $-\infty$ نشان داده و آنها را «به علاوهٔ بی‌نهایت» و «منهای بی‌نهایت» می‌خوانیم. بنابراین، $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ که طبق معمول به صورت $R^* = [-\infty, \infty]$ نوشته می‌شود.

اعمال جبری در رابطه با دو بی‌نهایت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱. $\infty = \infty + \infty$ و $-\infty = -\infty - (-\infty)$؛

۲. $\pm\infty = (\pm\infty).\infty$ و $\mp\infty = (\pm\infty).(-\infty)$؛

۳. به ازای هر $x \in R$، $x + \infty = \infty$ و $x - \infty = -\infty$؛

۴. به ازای هر $x \in R$، $x.(\pm\infty) = \pm\infty$ اگر $x > 0$ و $x.(\pm\infty) = \mp\infty$ اگر $x < 0$.

عبارات $\infty - \infty$ و $-\infty + \infty$ (طبق معمول) بدون تعریف گذارده می‌شوند. در این کتاب قرار می‌گذاریم که

۵. $0.\infty = 0$.

همچنین، R^* مرتب بوده و ∞ بزرگترین عنصر و $-\infty$ کوچکترین عنصر آن است. به علاوه،

۶. به ازای هر $x \in R$، $-\infty < x < \infty$.

تبصره. اگر به R^* توپولوژی مناسب بدهیم، R^* را فشرده سازی دو نقطه‌ای R می‌نامیم. معلوم می‌شود که تابع تانژانت معمولی $\tan: [-\pi/2, \pi/2] \to R^*$ که در آن البته $\tan(-\pi/2) = -\infty$ و $\tan(\pi/2) = \infty$ یک همانریختی است.

یک دلیل برای معرفی اعداد حقیقی وسعت یافته این است که در نظریهٔ اندازه لازم است مجموعه‌ها با اندازهٔ نامتناهی را در نظر بگیریم. دلیل دیگر آن است که اگر $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ بی‌کران از اعداد حقیقی باشد، با استفاده از تعریف ۶.۳ می‌توان دید که $\limsup x_n$ و $\liminf x_n$ در R^* وجود دارند (این مقادیر ممکن است به علاوه یا منهای بی‌نهایت باشند). لذا، هر دنباله از اعداد حقیقی دارای حد اعلا و حد اسفل در R^* است.

گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی همگرا به ∞ است (و آن را با $\lim x_n = \infty$ نشان می‌دهیم) اگر به ازای هر عدد حقیقی $M > 0$ عددی مانند n_0 (تابع M) باشد به‌طوری که به ازای هر $n > n_0$، $x_n > M$. به همین نحو، $\lim x_n = -\infty$ یعنی به ازای هر عدد حقیقی $M < 0$ عددی مانند n_0 باشد به طوری که به ازای هر $n > n_0$، $x_n < M$.

حال می‌توان قضیهٔ ۳. ۴ را به قرار زیر تنظیم کرد؛ اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۱.۴. *هر دنبالهٔ صعودی از اعداد حقیقی یا همگرا به یک عدد حقیقی است یا به به‌علاوهٔ بی‌نهایت.*

به یاد آورید که در مورد دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را همگرا گوییم اگر دنبالهٔ

مجموعهای جزئی $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ در R همگرا باشد. هرگاه دنبالهٔ مجموعهای جزئی همگرا به بی‌نهایت باشد، آنگاه می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ و گوییم مجموع سری بی‌نهایت است. تعریف $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$ به همین نحو است. توجه کنید که، طبق قضیهٔ ۱.۴، هر سری از اعداد حقیقی نامنفی در R^* همگراست.

گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ از اعداد حقیقی **پایای تجدید آرایش** است اگر به ازای هر تابع یک به یک و برو مانند $\sigma: N \to N$ (به نام **جایگشت** N)، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$ همگرا بوده و $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$.

قضیهٔ ۲.۴. ***هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ پایای تجدید آرایش است.***

برهان. فرض کنیم $\sigma: N \to N$ جایگشتی از N باشد. قرار می‌دهیم $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ و $b = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$ (توجه کنید که هر دو سری در R^* همگرایند). برای اثبات $a = b$ کافی است (به خاطر تقارن موجود) نشان دهیم که $b \leq a$. این هم‌ارز آن است که نشان دهیم به ازای هر n، $\sum_{m=1}^{n} x_{\sigma_m} \leq a$.

اگر $n \in N$، قرار می‌دهیم $k = \max\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ و ملاحظه می‌کنیم که $\sum_{m=1}^{n} x_{\sigma_m} \leq \sum_{i=1}^{k} x_i \leq a$. در اینجا برهان تمام خواهد بود.

در این کتاب، علاوه بر سریها، گهگاه «سریهای مضاعف» با جملات نامنفی ظاهر می‌شوند. هرگاه $\{a_{nm}\}$ یک دنبالهٔ مضاعف با $0 \leq a_{n,m} \leq \infty$ به ازای هر جفت n, m باشد، آنگاه به ازای هر n ثابت، سری $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ در R^* همگرا (احتمالاً به $+\infty$) است. حال سری مضاعف $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right].$$

توجه کنید که حد سمت راست همواره وجود دارد.

در رابطه با تغییر ترتیب جمعبندی، نتیجهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۳.۴. ***هرگاه به ازای هر m و n، $0 \leq a_{n,m} \leq \infty$، آنگاه***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $a = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ و $b = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$. توجه کنید که به ازای هر k و p داریم

$$\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{p}a_{n,m}=\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{k}a_{n,m}\le\sum_{m=1}^{p}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,m}\right]\le\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,m}=b,$$

که از آن به آسانی معلوم می‌شود که $a \le b$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $b \le a$. لذا، $a = b$ و کار تمام است.

قضیهٔ ۴.۴. *فرض کنیم به ازای هر m و n، $0 \le a_{n,m} \le \infty$. هرگاه $\sigma: N\to N\times N$ یک به یک و برو باشد، آنگاه*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $a=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma_n}$ و $b=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}$. به ازای هر i، فرض می‌کنیم

$$\sigma_i = (n_i , m_i).$$

در این صورت،

$$\sum_{i=1}^{k}a_{\sigma_i}=\sum_{i=1}^{k}a_{n_i,m_i}\le\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{m=1}^{\infty}a_{n_i,m}\right]\le\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}\right]=b$$

به ازای هر k برقرار است؛ درنتیجه $a \le b$.

از آن سو، به ازای هر k و m، عددی مانند n هست به طوری که به ازای هر $1 \le i \le k$ و $1 \le j \le m$ عددی مانند $1 \le r \le n$ هست که $\sigma_r = (i, j)$. لذا،

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\le\sum_{r=1}^{n}a_{\sigma_r}\le a$$

که نشانگر $b \le a$ است. بنابراین، $a = b$ و برهان تمام است.

تبصره. سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma_n}$ یک تجدید آرایش سری مضاعف $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}$ به یک سری ساده است.

تمرینات

۱. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از R^* باشد. یک نقطهٔ حدی $\{x_n\}$ در R^* را عنصری مانند x از R^* تعریف می‌کنیم که به ازای آن زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ همگرا به x موجود باشد. نشان دهید که $\limsup x_n$ و $\liminf x_n$ (از تعریف ۶.۳ استفاده کنید) بزرگترین و کوچکترین نقاط حدی $\{x_n\}$ در R^* اند.

۲. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$.

۳. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}1/(n^2+m^2)=\infty$.

۴. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ پایای تجدید آرایش نیست.

۵. فرض کنید به ازای هر m و n، $0 \leq a_{n,m} \leq \infty$ و تابع $\sigma: N\times N \to N\times N$ یک به یک و برو باشد. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{\sigma(n,m)} .$$

۶. این تمرین نمایش pای یک عدد حقیقی در $(0, 1)$ را توصیف می‌کند. فرض کنیم p یک عدد طبیعی باشد به طوری که $p \geq 2$ و $x \in (0, 1)$.

آ. بازهٔ $[0, 1)$ را به p بازهٔ بسته ـ باز

$$[0, 1/p), [1/p , 2/p), ..., [(p-1)/p , 1)$$

تقسیم کرده و آنها را از 0 تا $p-1$ شماره گذاری می‌کنیم. در این صورت x درست به یکی از این بازه‌ها، مثلاً k_1 $(0 \leq k_1 < p)$ تعلق دارد. حال بازهٔ $[k_1/p, (k_1+1)/p)$ را به p بازهٔ بسته ـ باز (به طول یکسان) تقسیم کرده و آنها را متوالیاً از 0 تا $p-1$ شماره گذاری می‌کنیم، و فرض می‌کنیم k_2 زیربازه‌ای باشد که x به آن متعلق است. به همین نحو ادامه داده و دنبالهٔ $\{k_n\}$ از اعداد صحیح نامنفی را چنان می‌سازیم که به ازای هر n، $0 \leq k_n < p$. نشان دهید که $x = \sum_{n=1}^{\infty} k_n/p^n$.

ب. فرایند قسمت (آ) را به کار برده ولی هر بازه را به p بازهٔ باز ـ بسته تقسیم کنید. مثلاً، از $(0, 1]$ شروع کرده و آن را به بازه‌های باز ـ بستهٔ

$$(0, 1/p] ,(1/p, 2/p] , ..., ((p-1)/p, 1]$$

تقسیم کنید. مانند قسمت (آ)، دنبالهٔ $\{m_n\}$ از اعداد صحیح نامنفی را چنان بسازید که به ازای هر n، $0 \leq m_n < p$. نشان دهید که $x = \sum_{n=1}^{\infty} m_n/p^n$.

پ. با مثال نشان دهید که دو دنبالهٔ ساخته شده در (آ) و (ب) ممکن است متفاوت باشند.

برای آنکه نمایش pای یک عدد منحصر به فرد باشد، قرار می‌گذاریم نمایش قسمت (آ) فوق را بپذیریم. طبق معمول، این نمایش را به صورت $x = 0/k_1k_2...$ می‌نویسیم.

۷. با اثبات مطالب زیر نشان دهید که $\mathcal{P}(N) \approx R$.

یک. هرگاه A یک مجموعهٔ نامتناهی بوده و $f: A\to B$ یک به یک باشد به طوری که $B\sim f(A)$ حداکثر شمارشپذیر باشد، آنگاه نشان دهید که $A \approx B$.

دو. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد $(0, 1)$ که به ازای آنها نمایشهای دویی (یعنی $p = 2$) که به وسیلهٔ قسمتهای (آ) و (ب) تمرین پیش معین می‌شوند متفاوتند یک مجموعهٔ شمارشپذیر است.

سه. به ازای هر $x \in (0, 1)$، فرض کنید $x = 0/k_1k_2...$ نمایش دویی معین شده به وسیلهٔ قسمت (آ) تمرین پیش باشد. واضح است که هر k_i مساوی 0 یا 1 است.

فرض کنید $f(x) = \{n \in N:\ k_n = 1\}$. نشان دهید که $f:(0,\ 1)\to\mathcal{P}(N)$ یک به یک است به طوری که $\mathcal{P}(N)\sim f((0,\ 1))$ شمارشپذیر است، و از قسمت (یک) نتیجه بگیرید که $(0,\ 1) \approx \mathcal{P}(N)$.

۸. به ازای دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی، نشان دهید که شرایط زیر هم‌ارزند:

آ. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ پایای تجدید آرایش در R است.

ب. به ازای هر جایگشت σ از N، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$ در R همگراست.

پ. سری $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ در R همگراست.

ت. به ازای هر دنبالهٔ $\{s_n\}$ از $\{1,\ -1\}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ در R همگراست.

ث. به ازای هر زیردنبالهٔ $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_n\}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ در R همگراست.

ج. به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند k (تابع ε) هست به طوری که به ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی S از N با $\min S \geq k$ داریم $\left|\sum_{n\in S} x_n\right| < \varepsilon$.

(هر سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ صادق در یکی از شرایط فوق را یک **سری به طور غیرمشروط همگرا** نیز می‌نامند.)

۵. فضاهای متری

یک **متر** (یا **فاصلهٔ**) d بر مجموعهٔ ناتهی X تابعی است مانند $d:X\times X\to R$ که از سه خاصیت زیر برخوردار است:

آ. به ازای هر $x,\ y \in X$، $d(x,\ y) \geq 0$ و $x = y \Leftrightarrow d(x,\ y) = 0$.

ب. به ازای هر $x,\ y \in X$، $d(x,\ y) = d(y,\ x)$.

پ. به ازای هر $x,\ y,\ z \in X$، $d(x,\ y) \leq d(x,\ z)+d(z,\ y)$ (نامساوی مثلثی).

در این صورت، جفت $(X,\ d)$ یک ***فضای متری*** نام دارد. در هر فضای متری $(X,\ d)$ نامساوی

$$|d(x,\ z)-d(y,\ z)| \leq d(x,\ y)$$

به ازای هر $x,\ y,\ z \in X$ برقرار است. درواقع، بنا بر نامساوی مثلثی، $d(x,\ z) \leq d(x,\ y)+d(y,\ z)$؛ و درنتیجه $d(x,\ z) - d(y,\ z) \leq d(x,\ y)$. از تعویض x و y داریم $d(y,\ z) - d(x,\ z) \leq d(x,\ y)$، که از آن نامساوی مورد نظر به دست می‌آید.

در اینجا چند مثال از فضاهای متری ذکر می‌کنیم. خواننده خود می‌تواند چند تابع صادق در خواص فاصله را ارائه دهد.

مثال ۱.۵. مجموعهٔ اعداد حقیقی R همراه با فاصلهٔ $d(x,\ y) = |x-y|$ به ازای $x,\ y \in R$.

مثال ۲.۵. فضای اقلیدسی R^n همراه با فاصلهٔ $d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$ به‌ازای $x=(x_1, ..., x_n)$ و $y=(y_1, ..., y_n)$ در R^n. این فاصله بر R^n ***فاصلهٔ اقلیدسی*** نام دارد.

مثال ۳.۵. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. در این صورت، تابع d با تعریف $d(x, y) = 1$ اگر $x \neq y$ و $d(x, x) = 0$ یک فاصله بر X است. این فاصله را ***فاصلهٔ گسسته*** بر X و X با این فاصله را یک ***فضای متری گسسته*** می‌نامیم.

مثال ۴.۵. فرض کنیم $X = (0, \infty)$. در این صورت، به ازای $x, y \in X$، $d(x, y) = |1/x-1/y|$ یک فاصله بر X است.

هرگاه Y زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, d) باشد، آنگاه Y همراه با فاصلهٔ d نیز یک فضای متری است.

حال فضای متری (X, d) را ثابت می‌گیریم. هرگاه $x \in X$، آنگاه ***گوی باز*** در x به شعاع $r > 0$ مساوی مجموعهٔ $B(x, r) = \{y \in X: d(x, y) < r\}$ تعریف می‌شود. حال زیرمجموعه‌های باز X را می‌توان به طریق معمول تعریف کرد. زیرمجموعهٔ A از X را ***باز*** نامیم اگر به ازای هر $x \in A$ عددی مانند $r > 0$ چنان باشد که $B(x, r) \subseteq A$.

هر گوی باز $B(x, r)$ یک مجموعهٔ باز است. درواقع، هرگاه $y \in B(x, r)$، آنگاه گوی باز $B(y, r_1)$ که در آن $r_1 = r - d(x, y) > 0$ در $B(y, r_1) \subseteq B(x, r)$ صدق می‌کند.

دلیل: $z \in B(y, r_1)$ ایجاب می‌کند که

$$d(x, z) \leq d(x, y)+d(y, z) < d(x, y)+r_1 = r;$$

و درنتیجه $z \in B(x, r)$.

قضیهٔ ۵.۵. ***احکام زیر در فضای متری (X, d) برقرارند:***

یک. X و $\varnothing$ مجموعه‌هایی بازند.

دو. اجتماعهای دلخواه از مجموعه‌های باز، مجموعه‌هایی بازند.

سه. اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌هایی بازند.

برهان. (یک) واضح.

(دو). فرض کنیم $\{A_i:\ i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های باز X باشد. همچنین $x \in \bigcup A_i$. در این صورت، عنصری مانند $i \in I$ هست به طوری که $x \in A_i$. چون A_i باز است، عددی مانند $r > ۰$ هست به طوری که $B(x, r) \subseteq A_i \subseteq \bigcup A_i$. بنابراین، $\bigcup A_i$ باز می‌باشد.

(سه) فرض کنیم $\{A_۱, ..., A_n\}$ گردایه‌ای متناهی از مجموعه‌های باز باشد. هرگاه $x \in \bigcap_{i=۱}^{n} A_i$، آنگاه به ازای هر $۱ \le i \le n$ عددی مانند $r_i > ۰$ هست به طوری که $B(x, r_i) \subseteq A_i$. قرار می‌دهیم $r = \min \{r_۱, ..., r_n\}$ و توجه می‌کنیم که $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=۱}^{n} A_i$. درنتیجه $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i$ باز است.

نقطهٔ $x \in X$ را یک **نقطهٔ درونی** زیرمجموعهٔ A نامیم اگر گوی بازی چون $B(x, r)$ باشد که $B(x, r) \subseteq A$. مجموعهٔ تمام نقاط درونی A را با A° نشان داده و آن را **درون** A می‌نامیم. واضح است که $A^{\circ} \subseteq A$. به آسانی معلوم می‌شود که A° بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در A است. همچنین، توجه کنید که A باز است اگر و فقط اگر $A = A^{\circ}$.

زیرمجموعهٔ A از فضای متری (X, d) را **بسته** نامیم اگر متمم آن $A^c (= X \sim A)$ مجموعه‌ای باز باشد. خواص مجموعه‌های بسته در زیر ذکر شده‌اند.

قضیهٔ ۶.۵. ***احکام زیر در فضای متری (X, d) برقرارند:***

یک. X و $\varnothing$ مجموعه‌هایی بسته‌اند.

دو. اشتراکهای دلخواه از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌هایی بسته‌اند.

سه. اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌هایی بسته‌اند.

برهان. (یک) نتیجه از $X^c = \varnothing$، $\varnothing^c = X$، و قضیهٔ ۵.۵ (یک) حاصل است.

(دو) فرض کنیم $\{A_i:\ i \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته باشد. در این صورت از قضیهٔ ۵.۵ و قانون دمورگان معلوم می‌شود که $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ باز است. لذا، $\bigcap_{i \in I} A_i$ یک مجموعهٔ بسته می‌باشد.

(سه) $(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=۱}^{n} A_i^c$ را با قضیهٔ ۵.۵ (سه) تلفیق نمایید.

باید توجه داشت که مجموعهٔ A باز است اگر و فقط اگر A^c بسته باشد؛ و به همین نحو، A بسته است اگر و فقط اگر A^c باز باشد. توجه کنید که یک مجموعه که باز نباشد لزوماً بسته نیست و بالعکس.

نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ **بست** زیرمجموعهٔ A از X نامیم اگر هر گوی باز در x شامل (دست کم) یک عنصر A باشد؛ یعنی، به ازای هر $r > ۰$، $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. مجموعهٔ تمام نقاط بست A با $\overline{A}$ نموده و

بست A نامیده می‌شود. واضح است که $A \subseteq \overline{A}$.

قضیهٔ ۵.۷. *به ازای هر زیرمجموعهٔ A از یک فضای متری، $\overline{A}$ کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A است.*

برهان. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از یک فضای متری باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که $\overline{A}$ بسته است. درواقع، هرگاه $x \notin \overline{A}$، آنگاه یک گوی باز مانند $B(x, r)$ هست به طوری که $B(x, r) \cap A = \varnothing$. هرگاه $y \in B(x, r)$، آنگاه [چون $B(x, r)$ یک مجموعهٔ باز است] $\delta > \circ$ ای هست به طوری که $B(y, \delta) \subseteq B(x, r)$. لذا، $B(y, \delta) \cap A = \varnothing$؛ و درنتیجه $y \notin \overline{A}$. پس داریم $B(x, r) \subseteq (\overline{A})^c$ و لذا $(\overline{A})^c$ باز است نشانگر آنکه $\overline{A}$ بسته می‌باشد.

حال اگر B یک زیرمجموعهٔ بسته باشد که $A \subseteq B$، به ازای هر $x \in B^c$ یک گوی باز مانند $B(x, r) \subseteq B^c$ وجود دارد. لذا، $B(x, r) \cap B = \varnothing$ و به خصوص $B(x, r) \cap A = \varnothing$. این نشان می‌دهد که عنصری از B^c یک نقطهٔ بست A نیست، و لذا $\overline{A} \subseteq B$.

یک نتیجهٔ فوری قضیهٔ قبل این است که مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $A = \overline{A}$.

هر مجموعه به شکل $A = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$، به نام **گوی بسته** در a به شعاع r، یک مجموعهٔ بسته است. درواقع، فرض می‌کنیم $d(x, a) > r$ و قرار می‌دهیم $r_\circ = d(x, a) - r > \circ$. هرگاه $d(y, x) < r_\circ$، آنگاه

$$d(a, y) \geq d(a, x) - d(y, x) > d(a, x) - r_\circ = r$$

که باز بودن A^c رانشان می‌دهد، و لذا A بسته است. ملاحظه می‌کنیم که در یک فضای متری گسسته $\overline{B(a,r)}$ ممکن است یک زیرمجموعهٔ حقیقی $\{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ باشد. اما، در فضاهای اقلیدسی R^n، بست هر گوی باز به شعاع r گوی بسته به شعاع r است (چرا؟).

به ازای هر زیرمجموعهٔ A از یک فضای متری، درونش در $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ صدق می‌کند. درواقع، هرگاه $x \in X$، آنگاه

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow B(x, r) \subseteq A \text{ که } \exists r > \circ \Leftrightarrow B(x, r) \cap A^c = \varnothing \text{ که } \exists r > \circ \Leftrightarrow x \notin \overline{A^c} \Leftrightarrow x \in (\overline{A^c})^c.$$

نقطهٔ x را یک ***نقطهٔ انباشتگی*** مجموعهٔ A نامیم اگر هر گوی باز $B(x, r)$ شامل عنصری از A متمایز با x باشد؛ یعنی اگر به ازای هر $r > \circ$ داشته باشیم $B(x, r) \cap (A \sim \{x\}) \neq \varnothing$. توجه کنید که x لزوماً عنصری از A نیست. واضح است که هر نقطهٔ انباشتگی یک مجموعه باید یک نقطهٔ بست آن مجموعه

باشد. مجموعهٔ تمام نقاط انباشتگی A **مجموعهٔ مشتق** A نام دارد و با A' نموده می‌شود. واضح است که $\overline{A} = A \cup A'$. به خصوص، یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل نقاط انباشتگی خود باشد.

گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ از فضای متری (X, d) **همگرا** به x در X است (با علامات، $\lim x_n = x$ یا $x_n \to x$) اگر $\lim d(x_n, x) = 0$. از نامساوی مثلثی به آسانی معلوم می‌شود که یک دنباله در یک فضای متری می‌تواند حداکثر یک حد داشته باشد. (ر.ک. برهان قضیهٔ ۳.۳.)

قضیهٔ بعد، نقاط بست یک مجموعه را بر حسب دنباله‌ها توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۸.۵. ***فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, d) باشد. در این صورت نقطهٔ $x \in X$ تعلق به $\overline{A}$ دارد اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از A باشد به طوری که $\lim x_n = x$.***

به خصوص، هرگاه x یک نقطهٔ انباشتگی A باشد، آنگاه دنباله‌ای از A با جملات متمایز هست که همگرا به x است.

برهان. فرض کنیم x متعلق به بست A باشد. به ازای هر n، $x_n \in A$ را چنان می‌گیریم که $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. در این صورت، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از A است به طوری که $\lim x_n = x$.

از آن سو، هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ از A در $\lim x_n = x$ صدق کند، آنگاه به ازای هر $r > 0$ عددی مانند k هست به طوری که اگر $n > k$، $d(x, x_n) < r$. لذا، به ازای هر $r > 0$، $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$؛ و درنتیجه $x \in \overline{A}$.

حال اگر x یک نقطهٔ انباشتگی A باشد، $x_1 \in A$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_1 \neq x$ و $d(x, x_1) < 1$. حال به استقرا، اگر $x_1, \dots, x_n \in (A \sim \{x\})$ انتخاب شده باشند، $x_{n+1} \in A \sim \{x\}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $d(x, x_{n+1}) < \min\{1/(n+1), d(x, x_n)\}$. در این صورت، $\{x_n\}$ یک دنباله از A است که به ازای $n \neq m$، $x_n \neq x_m$ و $\lim x_n = x$.

زیرمجموعهٔ A از فضای متری (X, d) را در X **چگال** خوانیم اگر $\overline{A} = X$. بنا بر قضیهٔ ۸.۵، مجموعهٔ A در X چگال است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$ دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از A باشد به طوری که $\lim x_n = x$.

نقطهٔ $x \in X$ یک **نقطهٔ مرزی** مجموعهٔ A نام دارد اگر هر گوی باز x شامل نقاطی از A و A^c باشد؛ یعنی اگر به ازای هر $r > 0$، $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ و $B(x, r) \cap A^c \neq \varnothing$. مجموعهٔ تمام نقاط مرزی مجموعهٔ A با ∂A نموده شده و **مرز** A نامیده می‌شود. بنا بر تقارن در تعریف، $\partial A = \partial A^c$ به ازای هر

زیرمجموعهٔ A از X برقرار است. همچنین، استدلالی ساده نشان می‌دهد که
$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

گوییم تابع $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ بین دو فضای متری در نقطهٔ $a \in X$ **پیوسته** است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ (تابع ε) باشد به طوری که هروقت $d(x, a) < \delta$، $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
گوییم تابع f بر X پیوسته است (یا فقط پیوسته است) اگر f در هر نقطه از X پیوسته باشد.

قضیهٔ زیر توابع پیوسته را به بهترین وجه توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۹.۵. *احکام زیر به ازای تابع $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ بین دو فضای متری هم‌ارزند:*

یک. ***f بر X پیوسته است.***

دو. ***هرگاه $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از Y باشد، آنگاه $f^{-1}(\mathcal{O})$ زیرمجموعهٔ بازی از X است.***

سه. ***هرگاه $\lim x_n = x$ در X برقرار باشد، آنگاه $\lim f(x_n) = f(x)$ در Y برقرار است.***

چهار. ***به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.***

پنج. ***هرگاه C زیرمجموعهٔ بسته‌ای از Y باشد، $f^{-1}(C)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است.***

برهان. (دو) $\Rightarrow$ (یک). فرض کنیم $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از Y بوده و $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$. چون $f(a) \in \mathcal{O}$ و $\mathcal{O}$ باز است، عددی مانند $r > 0$ هست به طوری که $B(f(a), r) \subseteq \mathcal{O}$. اما، طبق پیوستگی f در a، $\delta > 0$ای هست به طوری که $d(x, a) < \delta$ نامساوی $\rho(f(x), f(a)) < r$ را ایجاب می‌کند. ولی این نشان می‌دهد که $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$. بنابراین، a یک نقطهٔ درونی $f^{-1}(\mathcal{O})$ است و لذا $f^{-1}(\mathcal{O})$ باز است.

(سه) $\Rightarrow$ (دو). فرض کنیم $\lim x_n = x$ در X و $r > 0$. قرار می‌دهیم $V = B(f(x), r)$. طبق فرض، $f^{-1}(V)$ زیرمجموعهٔ بازی از X است، و چون x تعلق به آن دارد، $\delta > 0$ ای هست به طوری که $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$. kای چنان اختیار می‌کنیم که به ازای هر $n > k$، $x_n \in B(x, \delta)$. در این صورت، به ازای هر $n > k$، $f(x_n) \in V$ نشانگر آنکه $\lim f(x_n) = f(x)$.

(چهار) $\Rightarrow$ (سه). فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از X باشد. هرگاه $y \in f(\overline{A})$، آنگاه $x \in \overline{A}$ی هست به طوری که $y = f(x)$. چون $x \in \overline{A}$، (بنابر قضیهٔ ۸.۵) دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از A هست به طوری که $\lim x_n = x$. ولی در این صورت $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای از $f(A)$ است و طبق فرض $\lim (x_n) = f(x)$. پس، طبق قضیهٔ ۸.۵، $y \in \overline{f(A)}$؛ یعنی $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(پنج) $\Rightarrow$ (چهار). فرض کنیم C زیرمجموعهٔ بسته‌ای از Y باشد. واضح است که $C = \overline{C}$ در Y برقرار است. اگر فرضمان را بر مجموعهٔ $A = f^{-1}(C)$ اعمال کنیم، به دست می‌آوریم $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$

نشانگر آنکه $A = f^{-1}(C)$. چون $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C)$. چون $A \subseteq \overline{A}$ همواره درست است، پس $A = \overline{A}$ نشانگر آنکه $A = f^{-1}(C)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است.

(یک) $\Leftarrow$ (پنج). فرض کنیم $a \in X$ و $\varepsilon > 0$. مجموعهٔ بستهٔ

$$C = [B(f(a), \varepsilon)]^c = \{y \in Y: \rho(f(a), y) \geq \varepsilon\}$$

را در نظر می‌گیریم. طبق فرض، $f^{-1}(C)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است. چون $a \notin f^{-1}(C)$، $\delta > 0$ ای هست به طوری که $B(a, \delta) \subseteq (f^{-1}(C))^c$. ولی، در این صورت، هرگاه $d(x, a) < \delta$، آنگاه $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ برقرار است؛ درنتیجه f در a پیوسته است. چون a دلخواه است، f بر X پیوسته است. در اینجا برهان قضیه کامل خواهد شد.

از حکم (سه) واضح است که ترکیب دو تابع پیوسته بین فضاهای متری (هروقت معنی داشته باشد) باید تابع پیوسته‌ای باشد.

دو فضای متری (X, d) و (Y, ρ) را **همانریخت** نامیم اگر یک تابع یک به یک برو مانند $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ چنان موجود باشد که f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند.

دو فاصلهٔ d و ρ بر مجموعهٔ X را **هم‌ارز** خوانیم هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ از X در $\lim d(x_n, x) = 0$ صدق کند اگر و فقط اگر $\lim \rho(x_n, x) = 0$. بنابر قضیهٔ قبل، برای رخ دادن این امر لازم و کافی است که نگاشت همانی $I: (X, d) \to (X, \rho)$ همانریخت باشد. عبارت اخیر را می‌توان این طور گفت که d و ρ هم‌ارزند اگر و فقط اگر d و ρ مجموعه‌های باز یکسانی تولید نمایند.

فضای متری (X, d) را **کراندار** نامیم اگر عددی مانند $M > 0$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) \leq M$. **قطر** زیرمجموعهٔ A از فضای متری (X, d) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}.$$

لذا، (X, d) کراندار است اگر و فقط اگر قطر X متناهی باشد.

هرگاه d یک فاصله بر مجموعهٔ X باشد، آنگاه تابع ρ با تعریف

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

به ازای $x, y \in X$ نیز یک فاصله بر X است. به علاوه، (X, ρ) کراندار بوده و ρ هم‌ارز d می‌باشد.

حال توجه خود را معطوف فضاهای متری تام می‌کنیم. دنبالهٔ $\{x_n\}$ از فضای متری (X, d) یک **دنبالهٔ کشی** نام دارد اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند n_0 (تابع ε) باشد به طوری که به ازای هر $m, n > n_0$، $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. واضح است که هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است. اما، در حالت

کلی، عکس مطلب درست نیست. به عنوان مثال، فرض کنیم $X = (0, \infty)$ و $d(x, y) = |x-y|$ و نیز به ازای هر n، $x_n = 1/n$. در این صورت، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است که در X همگرا نمی‌باشد.

هرگاه یک فضای متری دارای این خاصیت باشد که همهٔ دنباله‌های کشی آن (در فضا) همگرا باشد، آنگاه فضای متری را یک ***فضای متری تام*** می‌نامیم. از جمله فضاهای متری تام عبارتند از فضاهای اقلیدسی R^n همراه با فاصله‌های اقلیدسی. به یاد آورید که، بنابر قضیهٔ ۹.۳، اعداد حقیقی یک فضای متری تام تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ۵. ۱۰. ***فرض کنیم (X, d) یک فضای متری تام باشد. در این صورت، زیرمجموعهٔ A از X بسته است اگر و فقط اگر A (با متر d) خود یک فضای متری تام باشد.***

برهان. فرض کنیم A بسته باشد. هرگاه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از A باشد، آنگاه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از X است. چون X تام است، $x \in X$ ی هست به طوری که $\lim x_n = x$. ولی چون A بسته است، $x \in A$. لذا، (A, d) یک فضای متری تام می‌باشد.

به عکس، فرض کنیم (A, d) یک فضای متری تام باشد. هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ از A در X در $\lim x_n = x$ صدق کند، آنگاه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از X است. ولی، در این صورت، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از A است و درنتیجه باید به عنصر منحصر به فردی از A همگرا باشد. این عنصر باید x باشد. لذا، $x \in A$؛ درنتیجه A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X است.

نتیجهٔ بسیار مهم زیر در رابطه با فضاهای متری تام منسوب است به جی. کانتور [به یاد آورید که قطر مجموعهٔ A با $d(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$ تعریف می‌شود.]

قضیهٔ ۱۱.۵ (کانتور). ***فرض کنیم (X, d) یک فضای متری تام بوده و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X باشد به طوری که به ازای هر n، $A_{n+1} \subseteq A_n$ و $\lim d(A_n) = 0$. در این صورت، $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ درست از یک عنصر تشکیل شده است.***

برهان. هرگاه $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$، آنگاه به ازای هر n داریم $x, y \in A_n$. درنتیجه، به ازای هر n، $d(x, y) \le d(A_n)$. لذا، $d(x, y) = 0$؛ درنتیجه $x = y$. این نشان می‌دهد که $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ شامل حداکثر یک عنصر است.

برای اثبات $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. به ازای هر n، $x_n \in A_n$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، به آسانی معلوم می‌شود که $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(A_n)$ به ازای هر n و p برقرار است، و از این نتیجه می‌شود که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از X است. لذا، $x \in X$ ی هست به طوری که $\lim x_n = x$، و حکم می‌کنیم که $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. درواقع، چون به ازای $m \geq n$، $x_m \in A_n$، به ازای هر n به دست می‌آوریم $x \in \overline{A}_n$. ولی چون هر A_n بسته است، $\overline{A}_n = A_n$ برقرار می‌باشد. بنابراین، به ازای هر n داریم $x \in A_n$ و کار تمام است.

گوییم زیرمجموعهٔ A از فضای متری (X, d) ***هیچ جا چگال*** است اگر بستش درون تهی داشته باشد؛ یعنی اگر $\overline{A}^{\circ} = \varnothing$. چون $B^{\circ} = (\overline{B^{c}})^{c}$ به ازای هر زیرمجموعهٔ B برقرار است، به آسانی معلوم می‌شود که زیرمجموعهٔ A هیچ‌جا چگال است اگر و فقط اگر $(\overline{A})^{c}$ در X چگال باشد.

یک زیرمجموعهٔ هیچ جا چگال کلاسیک از خط حقیقی مجموعهٔ کانتور است. چون بعدها از این مجموعه استفاده می‌کنیم، لحظه‌ای تأمل کرده واین مجموعه و خواصش را توصیف می‌نماییم.

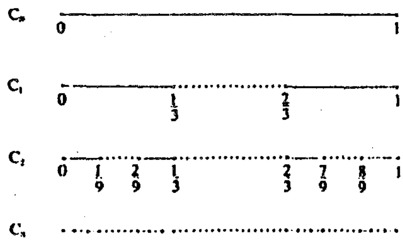
مثال ۱۲.۵ (کانتور). مجموعهٔ کانتور زیرمجموعه‌ای از $[۰, ۱]$ است و به صورت زیر ساخته می‌شود.

فرض کنیم $C_{۰} = [۰, ۱]$. این بازه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و بازهٔ باز وسط $(۱/۳, ۲/۳)$ را حذف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $C_{۱} = [۰, ۱/۳] \cup [۲/۳, ۱]$ و توجه می‌کنیم که $C_{۱}$ اجتماع $۲ = ۲^{۱}$ بازهٔ بستهٔ از هم جداست. حال هر بازهٔ بستهٔ $C_{۱}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و در هر یک بازهٔ باز وسط را حذف می‌کنیم. فرض کنیم $C_{۲}$ مجموعهٔ باقیمانده از $C_{۱}$ پس از این حذفیات باشد؛ یعنی

$$C_{۲} = [۰, ۱/۹] \cup [۲/۹, ۱/۳] \cup [۲/۳, ۷/۹] \cup [۸/۹, ۱].$$

توجه کنید که $C_{۲}$ اجتماع $۴ = ۲^{۲}$ بازهٔ بستهٔ از هم جداست.

عمل ساختن $C_{n+۱}$ از C_n اینک باید روشن باشد. هر یک از ۲^{n} بازهٔ بستهٔ از هم جدای C_n را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و از هر یک بازهٔ باز وسط را حذف می‌کنیم. $C_{n+۱}$ مجموعهٔ باقیمانده از C_n است. توجه کنید که $C_{n+۱}$ اجتماع $۲^{n+۱}$ بازهٔ بستهٔ از هم جداست. در شکل ۱ نمودارهای چند ساخت اولیه دیده می‌شود.



شکل ۱

واضح است که $C_{n+۱} \subseteq C_n$ به ازای هر n برقرار است. مجموعهٔ کانتور $[۰, ۱]$ با $C = \bigcap_{n=۱}^{\infty} C_n$ تعریف می‌شود. حال جالبترین خواص مجموعهٔ کانتور را ذکر می‌کنیم.

۱. مجموعهٔ C یک زیرمجموعهٔ هیچ جا چگال بستهٔ R است.

واضح است که C به دلیل آنکه اشتراک مجموعه‌های بسته است بسته می‌باشد. همچنین از طرز ساخت فوق واضح است که C شامل هیچ بازه‌ای نیست و لذا دارای درون تهی می‌باشد.

۲. طول کل بازه‌های حذف شده از $[۰, ۱]$ برای به دست آوردن C مساوی یک است.

برای مشاهدهٔ این امر، توجه می‌کنیم که ما در مرحلهٔ nم $۲^{n-۱}$ بازهٔ باز که هر یک به طول ۳^{-n} است، و لذا کلاً به طول $۲^{n-۱}.۳^{-n}$ اند، را حذف می‌کنیم. لذا، رویهم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{n-۱}.۳^{-n} = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty} (۲/۳)^n = ۱$$

حذف شده است.

۳. مجموعهٔ C دارای عدد اصلی c است؛ یعنی $C \approx R$.

شاید ساده‌ترین راه اثبات این امر نشان دادن $C \approx ۲^N$ است که در آن $۲ = \{۰, ۱\}$. چون $\mathcal{P}(N) \approx ۲^N$ [نگاشت $a = \{a_n\} \to g(a) = \{n \in N:\ a_n = ۱\}$ یک به یک از ۲^N به روی $\mathcal{P}(N)$ است] و $\mathcal{P}(N) \approx R$ (ر.ک. تمرین ۷ از بخش ۴)، پس $C \approx R$.

هرگاه $x = \{x_n\} \in ۲^N$ (یعنی هر x_n مساوی ۰ یا ۱ است)، آنگاه به ازای هر n قرار می‌دهیم $y_n = ۲x_n$ و تعریف می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} ۳^{-n} y_n$. واضح است که هر y_n مساوی ۰ یا ۲ است. ابتدا توجه می‌کنیم که $f(x) \in C$. درواقع، چون $y_۱ \neq ۱$، داریم $f(x) \notin (۱/۳\ ,\ ۲/۳)$.

به همین نحو، چون $y_۲ \neq ۱$، می‌توان دید که $f(x) \notin (۱/۹,\ ۲/۹) \cup (۷/۹,\ ۸/۹)$. به استقرا می‌توان دید که $f(x)$ به هیچیک از بازه‌های باز حذف شده تعلق ندارد. لذا، $f(x) \in C$. بنابراین، $x \to f(x)$ یک نگاشت از ۲^N به توی C است.

حال حکم می‌کنیم که $x \to f(x)$ یک به یک است. درواقع، هرگاه $a = \{a_n\} \neq b = \{b_n\}$، آنگاه قرار

می‌دهیم $k = \min\{n \in N:\ a_n \neq b_n\}$. فرض کنیم ۱ $= b_k$ و ۰ $= a_k$. در این صورت، در پرتو $۳^{-k} = ۲\sum_{n=k+۱}^{\infty} ۳^{-n}$ داریم

$$f(b) = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} b_n\, ۳^{-n} \geq ۲\sum_{n=۱}^{k=۱} b_n ۳^{-n} + ۲.۳^{-k} \rangle ۲\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\, ۳^{-n} = f(a).$$

بالأخره، به آسانی معلوم می‌شود که C دقیقاً همهٔ اعداد در $[۰,۱]$ با نمایش سه‌ای است (ر.ک. تمرین ۶ از بخش ۴) که مقادیر ۰ یا ۲ می‌گیرند. این ایجاب می‌کند که $x \to f(x)$ بروست و $C \approx R$ را ثابت خواهد کرد.

زیرمجموعهٔ Y از یک فضای متری را **نحیف** (یا از **رستهٔ اول**) گوییم اگر دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های هیچ جا چگال موجود باشد که $Y = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$. یک فضای متری را **فضای بئر** (Baire) نامیم اگر هر مجموعهٔ باز ناتهی یک مجموعهٔ نحیف نباشد. نتیجهٔ زیر فضاهای بئر را توصیف می‌کند.

لم ۵.۱۳. یک فضای متری فضای بئر است اگر و فقط اگر هر اشتراک شمارشپذیر از مجموعه‌های چگال باز نیز چگال باشد.

برهان. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. ابتدا (X, d) را یک فضای بئر می‌گیریم. فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های چگال باز از X باشد. برای اثبات چگال بودن $A = \bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n$ در X، باید نشان دهیم که به ازای هر مجموعهٔ باز ناتهی $\mathcal{O}$ از X، $A \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$. فرض کنیم مجموعه‌ای باز و ناتهی مانند $\mathcal{O}$ باشد که $A \cap \mathcal{O} = \varnothing$. در این صورت،

$$X = (A \cap \mathcal{O})^c = A^c \cup \mathcal{O}^c,$$

و لذا،

$$\mathcal{O} = X \cap \mathcal{O} = A^c \cap \mathcal{O} = \left[\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n\right]^c \cap \mathcal{O} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} (A_n^c \cap \mathcal{O}).$$

ولی این نشان می‌دهد که $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ نحیف است و لذا طبق فرض تهی است که با انتخاب $\mathcal{O}$ در تضاد است. بنابراین، A در X چگال است.

برای عکس مطلب فرض می‌کنیم هر اشتراک شمارشپذیر از مجموعه‌های چگال باز نیز چگال باشد. فرض کنیم $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز نحیف از X باشد. برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم که $\mathcal{O} = \varnothing$. دنبالهٔ $\{A_n\}$ از مجموعه‌های هیچ جا چگال اختیار می‌کنیم که $\mathcal{O} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$. در این صورت، $\{(\overline{A}_n)^c\}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های باز و چگال از X را تشکیل می‌دهد؛ و لذا، طبق فرض، $A = \bigcap_{n=۱}^{\infty} (\overline{A}_n)^c$ در

X چگال است. ولی در این صورت استلزامهای

$$\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{A}_n)^c = A \subseteq \mathcal{O}^c \Rightarrow X = \bar{A} \subseteq \overline{\mathcal{O}^c} = \mathcal{O}^c$$

نشان می‌دهند که $\mathcal{O} = \varnothing$.

نتیجهٔ زیر به قضیهٔ رسته‌ای بئر معروف است و نقش مهمی در آنالیز دارد.

قضیهٔ ۱۴.۵ (بئر). *هر فضای متری تام یک فضای بئر است.*

برهان. فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال از X باشد. بنابر لم ۱۳.۵، باید نشان دهیم که $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ در X چگال است. لذا، اگر $x \in X$ و $r > 0$، باید ثابت کنیم که $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. فرض کنیم $C(a, r) = \{x \in X: d(x, a) \leq r\}$.

چون A_1 باز و در X چگال است، $x_1 \in X$ ی و $1 \geq r_1 > 0$ هست به طوری که

$$C(x_1, r_1) \subseteq B(x, r) \cap A_1.$$

حال به استقرا رفته و گوییم اگر $x_1, \ldots, x_n$ و $r_1, \ldots, r_n$ انتخاب شده باشند، $x_{n+1} \in X$ و $1/(n+1) > r_{n+1} > 0$ را طوری می‌گیریم که $C(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$. لذا، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از X و دنباله‌ای چون $\{r_n\}$ از اعداد حقیقی وجود دارند به طوری که $1/n \geq r_n > 0$ و به ازای هر n، $C(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$. حال به ازای هر n قرار می‌دهیم $C_n = C(x_n, r_n)$. در این صورت، هر C_n ناتهی و بسته است و به ازای هر n، $C_{n+1} \subseteq C_n$. به علاوه، $d(C_n) \leq 2r_n \leq 2/n$ ایجاب می‌کند که $\lim d(C_n) = 0$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۱.۵، $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ ی وجود دارد. ولی، در این صورت، به آسانی معلوم می‌شود که $y \in B(x, r) \cap A$ و کار تمام است.

در زیر حالت خاصی از قضیهٔ قبل که کاربردهای مهم متعدد دارد ذکر می‌شود.

قضیهٔ ۱۵.۵. هرگاه (X, d) *یک فضای متری تام بوده و* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، *آنگاه به ازای* n *ی داریم* $\mathring{\bar{A}}_n \neq \varnothing$.

یک نمونهٔ مهم از فضاهای متری تام در زیر ارائه شده است.

مثال ۱۶.۵. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. مجموعهٔ تمام توابع حقیقی تعریف شده بر X

که کراندارند را با $B(X)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f:X\to R$ متعلق به $B(X)$ است اگر و فقط اگر عددی مانند $M > \circ$ (تابع f) باشد به‌طوری که به ازای هر $x \in X$، $|f(x)| \le M$.

حال به ازای هر $f, g \in B(X)$ تعریف می‌کنیم

$$D(f, g) = \sup\{|f(x)-g(x)|: x \in X\}.$$

توجه کنید که چون f و g کراندارند، $D(f, g)$ یک عدد حقیقی است. حکم می‌کنیم که D یک فاصله بر $B(X)$ است و، درواقع، $B(X)$ (با این فاصله) تام است.

برای اثبات فاصله بودن D، فقط نامساوی مثلثی را تحقیق می‌کنیم؛ دو خاصیت دیگر بدیهی‌اند. درواقع، هرگاه $f, g, h \in B(X)$، آنگاه به ازای هر $x \in X$ داریم

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \le D(f, h)+D(h, g);$$

و درنتیجه $D(f, g) \le D(f, h)+D(h, g)$.

حال تمامیت $B(X)$ را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $B(X)$ باشد. در این صورت، به ازای $\varepsilon > \circ$ داده شده، $n_\circ$ی هست که به ازای هر $n, m > n_\circ$، $D(f_n, f_m) < \varepsilon$. به خصوص، توجه کنید که به ازای هر $x \in X$، نامساوی $|f_n(x) - f_m(x)| \le D(f_n, f_m)$ ایجاب می‌کند که $\{f_n(x)\}$ یک دنبالهٔ کشی از اعداد حقیقی است. لذا، $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in X$ در R همگراست؛ فرض کنیم $f(x) = \lim f_n(x)$. از نامساوی $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ به ازای هر $n, m > n_\circ$ به آسانی معلوم می‌شود که برای هر $n > n_\circ$ و هر $x \in X$، $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. نامساوی اخیر به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که $f \in B(X)$ و به ازای هر $n > n_\circ$، $D(f_n, f) \le \varepsilon$. لذا، $\lim f_n = f$؛ و درنتیجه $B(X)$ تام است.

تابع $f: (X, d)\to(Y, \rho)$ بین دو فضای متری را **به طور یکنواخت پیوسته** نامیم اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی مانند $\delta > \circ$ (تابع ε) باشد به طوری که هروقت $d(x, y) < \delta$، $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. واضح است که هر تابع به طور یکنواخت پیوسته، پیوسته است.

هرگاه $X = (\circ,1]$ و $Y = R$ [هر دو با فاصلهٔ $d(x, y) = |x-y|$]، آنگاه $f:X\to Y$ که در آن $f(x) = x^2$ به طور یکنواخت پیوسته است ولی $g:X\to Y$ با تعریف $g(x) = x^{-1}$ پیوسته بوده ولی به طور یکنواخت پیوسته نیست.

در قضیهٔ بعد، نتیجهٔ سادهٔ زیر لازم است:

در فضای متری (X, d)، هرگاه $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$، آنگاه

$$\lim d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا توجه می‌کنیم که، بنابر نامساوی مثلثی، $|d(x, z) - d(z, y)| \le d(x, y)$

و سپس از نامساویهای زنجیره‌ای زیر استفاده می‌کنیم:

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y_n)| + |d(x, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

و حکم فوق ثابت خواهد شد.

قضیهٔ ۱۷.۵. ***فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, d) و (Y, ρ) یک فضای متری تام باشد. هرگاه $f: A \to Y$ یک تابع به طور یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه f یک توسیع به طور یکنواخت پیوستهٔ منحصر به فرد به بست A یعنی $\overline{A}$ دارد.***

برهان. یکتایی توسیع واضح است؛ باید وجودش را ثابت کنیم.

فرض کنیم $x \in \overline{A}$. در این صورت، طبق قضیهٔ ۸.۵، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از A هست به طوری که $\lim x_n = x$. نشان می‌دهیم که $\{f(x_n)\}$ یک دنبالهٔ کشی از Y است. برای این کار، فرض کنیم $\varepsilon > 0$. بنابر پیوستگی یکنواخت f، $0 < \delta$ای هست به طوری که هروقت $x, y \in A$ در $d(x, y) < \delta$ صدق کنند، داریم $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. n_0 را طوری می‌گیریم که به ازای هر $n, m > n_0$، $d(x_n, x_m) < \delta$. لذا، به ازای هر $n, m > n_0$، $\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$؛ یعنی $\{f(x_n)\}$ یک دنبالهٔ کشی است. بنابر تمامیت Y، $y \in Y$ی هست به طوری که $\lim f(x_n) = y$.

حال اگر $\{y_n\}$ دنبالهٔ دیگری از A باشد که $\lim y_n = x$، بنابر مطالب فوق، $\{f(y_n)\}$ در Y همگراست. فرض کنیم $\lim f(y_n) = u$. حال به ازای هر n تعریف می‌کنیم $z_{2n} = x_n$ و $z_{2n+1} = y_n$. توجه کنید که $\{z_n\}$ دنباله‌ای از A است به طوری که $\lim z_n = x$. لذا، $\lim f(z_n)$ در Y وجود دارد. به خصوص، داریم $\lim f(z_{2n}) = \lim f(z_{2n+1})$؛ یعنی $y = u$. بنابراین، $\lim f(x_n)$ مستقل از دنبالهٔ $\{x_n\}$ در A (تا وقتی همگرا به x باشد) خواهد بود.

حال $f^*: \overline{A} \to Y$ را با $f^*(x) = \lim f(x_n)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $\{x_n\}$ دنباله‌ای از A است که $\lim x_n = x$. واضح است که به ازای هر $x \in A$، $f^*(x) = f(x)$. برای اتمام برهان نشان می‌دهیم که f^* به طور یکنواخت پیوسته است.

اگر $\varepsilon > 0$، $0 < \delta$ را چنان می‌گیریم که هروقت $x, y \in A$ در $d(x, y) < \delta$ صدق کنند، داشته باشیم $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. حال اگر $x, y \in \overline{A}$ در $d(x, y) < \delta$ صدق کنند، دو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از A را طوری اختیار می‌کنیم که $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$. بنابر بحث پیش از قضیه، داریم $\lim d(x_n, y_n) = d(x, y)$. n_0 را طوری می‌گیریم که به ازای هر $n > n_0$، $d(x_n, y_n) < \delta$. در این صورت، به ازای $n > n_0$، $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$؛ و درنتیجه، بنابر همان تبصره، $\rho(f^*(x), f^*(y)) \leq \varepsilon$

نشانگر آنکه f^* بر $\overline{A}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

تابع $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ بین دو فضای متری را یک **یکمتری** نامیم اگر رابطهٔ $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ به ازای هر $x, y \in X$ برقرار باشد. هرگاه، علاوه بر این، f برو نیز باشد، آنگاه (X, d) و (Y, ρ) را **یکمتر** می‌خوانیم. توجه کنید که دو فضای یکمتر لزوماً همانریخت‌اند. همچنین، ملاحظه کنید که هر یکمتری یک نگاشت به طور یکنواخت پیوسته است.

فضای متری تام (Y, ρ) را یک **تتمیم** فضای متری (X, d) نامیم اگر یک یکمتری مانند $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ باشد به طوری که $f(X)$ در Y چگال باشد. هرگاه X و $f(X)$ را یکی تصور کنیم، آنگاه X را می‌توان زیرمجموعه‌ای از Y گرفت.

هر دو تتمیم یک فضای متری باید یکریخت باشند. درواقع، هرگاه (Y_1, ρ_1) و (Y_2, ρ_2) دو تتمیم (X, d) باشند، آنگاه یکمتریهای $f: X \to Y_1$ و $g: X \to Y_2$ وجود دارند. لذا، g یک یکمتری از X به روی $g(X)$ است، و f^{-1} یک یکمتری از $f(X)$ به روی X می‌باشد. در این صورت، $h = g \circ f^{-1}$ یک یکمتری از $f(X)$ به روی $g(X) \subseteq Y_2$ است. چون $f(X)$ در Y_1 چگال است، h به طور یکنواخت پیوسته است، و Y_2 تام است، از قضیهٔ ۱۷.۵ معلوم می‌شود که یک توسیع به طور یکنواخت پیوسته مانند h^* از h به تمام Y_1 وجود دارد. حال مستقیماً می‌توان نشان داد که h^* یک یکمتری از Y_1 به روی Y_2 می‌باشد.

ملاحظه می‌کنیم که اگر $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ یک یکمتری بوده و (Y, ρ) تام باشد، $\overline{f(X)}$ تتمیم X است [زیرا، طبق قضیهٔ ۱۰.۵، $\overline{f(X)}$ یک فضای متری تام می‌باشد]. حال با توجه به این نکته ثابت می‌کنیم که هر فضای متری دارای یک تتمیم است.

قضیهٔ ۱۸.۵. ***هر فضای متری دارای یک تتمیم منحصر به فرد (با تقریب یکمتری) می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. عنصر $a \in X$ را ثابت می‌گیریم. به ازای هر $x \in X$، فرض می‌کنیم $f_x: X \to R$ با $f_x(y) = d(x, y) - d(y, a)$ به ازای هر $y \in X$ تعریف شده باشد. از نامساوی مثلثی به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر $y \in X$، $|f_x(y)| \le d(x, a)$، و این نشان می‌دهد که f_x یک تابع کراندار به ازای هر $x \in X$ است. یعنی، به ازای هر $x \in X$، $f_x \in B(X)$؛ ر.ک. مثال ۱۶.۵. بنابراین، تابع $f: X \to B(X)$ با $x \to f_x$ را برقرار کرده‌ایم. حکم می‌کنیم که f یک یکمتری است. به یاد آورید که فاصله بر $B(X)$ عبارت است از

$$D(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|: x \in X\}.$$

درواقع، ابتدا توجه می‌کنیم که هرگاه $x, z \in X$، آنگاه

$$|f_x(y) - f_z(y)| = |d(x, y) - d(y, a) - [d(z, y) - d(y, a)]| = |d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

به ازای هر $y \in X$ برقرار است. از آن سو، $|f_x(z) - f_z(z)| = d(x, z)$. بنابراین،

$$D(f_x, f_z) = \sup\{|f_x(y) - f_z(y)|: y \in X\} = d(x, z).$$

چون $(B(X), D)$ یک فضای متری تام است (ر.ک. مثال ۱۶.۵)، $(\overline{f(X)}, D)$ یک تتمیم (X, d) می‌باشد.

یکتایی تتمیم (با تقریب یکمتری) در بحث پیش از قضیه ثابت شد. حال برهان به اتمام می‌رسد.

حال توجهمان را به مفهوم مهم فشردگی معطوف می‌کنیم.

گوییم خانوادهٔ $\{A_i: i \in I\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X یک **پوشش** زیرمجموعهٔ A از X است اگر $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. هرگاه زیرخانواده‌ای از $\{A_i: i \in I\}$ نیز A را بپوشاند، آنگاه آن را یک **زیرپوشش** می‌نامیم. هرگاه (X, d) یک فضای متری باشد، آنگاه هر پوشش یک مجموعه مرکب از مجموعه‌های باز یک **پوشش باز** آن مجموعه نام دارد.

پوششهای باز از زیرمجموعه‌های فضاهای اقلیدسی R^n را همواره می‌توان به پوششهای شمارشپذیر تقلیل داد؛ نتیجهٔ کلاسیک زیر از ای. لیندلف (E.Lindelöf) این امر را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۹.۵ (لیندلف). ***هر پوشش باز از یک زیرمجموعهٔ R^n را می‌توان به یک زیرپوشش حداکثر شمارشپذیر تقلیل داد.***

برهان. نقطهٔ $a = (a_1, ..., a_n) \in R^n$ را «گویا» نامیم اگر هر a_i یک عدد گویا باشد. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از R^n بوده و $\{\mathcal{O}_i: i \in I\}$ یک پوشش باز نامتناهی از A باشد؛ یعنی $A \subseteq \bigcup \mathcal{O}_i$.

حال به ازای هر $x \in A$ ابتدا اندیس $i_x \in I$ را چنان می‌گیریم که $x \in \mathcal{O}_{i_x}$ و سپس یک نقطهٔ گویا مانند $a_x \in R^n$ و یک عدد مثبت گویا مانند r_x را چنان اختیار می‌کنیم که $x \in B(a_x, r_x) \subseteq \mathcal{O}_{i_x}$. در این صورت، گردایهٔ $\{B(a_x, r_x): x \in A\}$ یک پوشش باز حداکثر شمارشپذیر است (چرا؟). چون هر $B(a_x, r_x)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{O}_i$ای است، به آسانی معلوم می‌شود که یک زیرپوشش حداکثر شمارشپذیر از $\{\mathcal{O}_i: i \in I\}$ برای A وجود دارد.

فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. گوییم زیرمجموعهٔ A از X **فشرده** است اگر هر پوشش باز A را بتوان به یک زیرپوشش متناهی تقلیل داد. هرگاه X یک مجموعهٔ فشرده باشد، آنگاه (X, d) را یک

فضای متری فشرده می‌نامند.

در آنالیز مفهوم فشردگی از اهمیت اساسی برخوردار است. نتیجهٔ بعد مجموعه‌های فشرده در فضاهای متری را توصیف کرده و سودمندی مجموعه‌های فشرده را گوشزد می‌کند.

قضیهٔ ۵.۲۰. ***احکام زیر برای زیرمجموعهٔ A از فضای متری (X, d) هم‌ارزند:***

۱. ***A یک مجموعهٔ فشرده است.***

۲. ***هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از A یک نقطهٔ انباشتگی در A دارد.***

۳. ***هر دنباله در A زیردنباله‌ای دارد که به نقطه‌ای از A همگراست.***

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از A باشد. همچنین قسمت (۲) نادرست باشد. یعنی هیچ نقطه‌ای از A یک نقطهٔ انباشتگی S نباشد. لذا، به ازای هر $x \in A$، عددی مانند $r_x > ۰$ هست به طوری که $B(x, r_x) \cap (S \sim \{x\}) = \varnothing$. توجه کنید که $B(x, r_x) \cap S \subseteq \{x\}$. واضح است که $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ برقرار است، و در پرتو فشردگی A عناصری مانند $x_۱, ..., x_n \in A$ وجود دارند که $A \subseteq \bigcup^n_{i=۱} B(x_i, r_{x_i})$. ولی، در این صورت،

$$S = A \cap S \subseteq \bigcup^n_{i=۱} B(x_i, r_{x_i}) \cap S \subseteq \{x_۱, ..., x_n\},$$

نشانگر آنکه S باید یک مجموعهٔ متناهی باشد که با فرض ما در تضاد است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳). فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از A باشد. هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ فقط تعدادی متناهی مقدار متمایز بگیرد، آنگاه چیزی برای اثبات نداریم (زیرا این دنباله باید زیردنباله‌ای ثابت داشته باشد).

لذا، فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ بی‌نهایت مقدار متمایز بگیرد. این وجود زیردنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ از $\{x_n\}$ را ایجاب می‌کند که هروقت $n \neq m$، $y_n \neq y_m$. (برای مشاهدهٔ این امر، قرار می‌دهیم $k_۱ = ۱$ و به استقرا عمل می‌کنیم: هرگاه $k_۱ < ... < k_n$ انتخاب شده باشند، آنگاه $k_{n+۱} > k_n$ ی را با $x_{k_{n+۱}} \neq x_{k_i}$ به ازای $۱ \leq i \leq n$ انتخاب می‌کنیم. یک چنین عدد صحیح $k_{n+۱}$ باید موجود باشد زیرا $\{x_n\}$ بی‌نهایت مقدار متمایز می‌گیرد. دنبالهٔ $y_n = x_{k_n}$ خواص مطلوب را دارد.)

حال مجموعهٔ $\{y_۱, y_۲, ...\}$ یک زیرمجموعهٔ نامتناهی A است؛ درنتیجه، بنابر فرض ما، یک نقطهٔ انباشتگی در A مانند x دارد. می‌توان فرض کرد به ازای هر n، $y_n \neq x$. هرگاه به ازای k ای $x = y_k$، آنگاه $\{y_n\}$ را با $\{y_{k+n}\}$ عوض می‌کنیم.

حال $m_۱$ را با خاصیت $d(y_{m_۱}, x) < ۱$ اختیار می‌کنیم. به استقرا می‌رویم: اگر $m_۱ < ... < m_n$ انتخاب شده باشند، $m_{n+۱}$ را طوری می‌گیریم که

$$d(y_{m_{n+1}}, x) < \min\{1/(n+1), d(y_1, x), d(y_2, x), \dots, d(y_{m_n}, x)\}.$$

واضح است که $m_{n+1} > m_n$ باید برقرار باشد. این نشان می‌دهد که $\{y_{m_n}\}$ زیردنباله‌ای از $\{y_n\}$ است و لذا زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ می‌باشد. در پرتو $d(y_{m_n}, x) < 1/n$ نتیجه می‌شود که، طبق مطلوب، $\lim y_{m_n} = x$.

(۱) $\Rightarrow$ (۳). فرض کنیم $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ یک پوشش باز برای A باشد.

حکم یک. عددی مانند $\delta > 0$ هست به طوری که به ازای هر $x \in A$ برای دست کم یک $i \in I$ داشته باشیم $B(x, \delta) \subseteq \mathcal{O}_i$. (هر چنین عدد $\delta > 0$ را یک **عدد لبگ** (Lebesgue) برای پوشش باز $\{\mathcal{O}_i : i \in I\}$ می‌نامیم.)

فرض کنیم حکم ما درست نباشد. این یعنی به ازای هر n عنصری مانند $x_n \in A$ باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$، $B(x_n, 1/n) \cap \mathcal{O}_i^c \neq \varnothing$. فرض کنیم $x \in A$ حد زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ باشد. $i \in I$ ی با $x \in \mathcal{O}_i$ اختیار کرده و سپس $r > 0$ ی با $B(x, r) \subseteq \mathcal{O}_i$ انتخاب می‌کنیم. سپس n را طوری می‌گیریم که $1/n < r/2$ و $d(x, x_n) < r/2$. پس $B(x_n, 1/n) \subseteq B(x, r) \subseteq \mathcal{O}_i$ که با انتخاب x_n در تضاد است. این اعتبار حکم ما را به ثبوت می‌رساند.

حکم دو. به ازای هر $r > 0$ عناصری مانند $x_1, \dots, x_n \in A$ هست به طوری که

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r).$$

برای اثبات این امر، فرض می‌کنیم $r > 0$ و حکم را نادرست می‌گیریم. $x_1 \in A$ ی را ثابت گرفته و سپس $x_2 \in A \sim B(x_1, r)$ را انتخاب می‌کنیم. به طور کلی، $x_{n+1} \in A \sim \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$ را انتخاب می‌کنیم. واضح است که به ازای $n \neq m$، $d(x_n, x_m) \geq r$ برقرار است. این ایجاب می‌کند که هیچ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ نمی‌تواند همگرا باشد، که با فرض ما در تضاد است. لذا، حکم دو معتبر خواهد بود.

برای اتمام برهان، یک عدد لبگ مانند $\delta > 0$ برای $\{\mathcal{O}_i : i \in I\}$ اختیار کرده و سپس $x_1, \dots, x_n \in A$ را چنان می‌گیریم که $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta)$. حال، به ازای هر j، فرض می‌کنیم $i_j \in I$ در $B(x_j, \delta) \subseteq \mathcal{O}_{i_j}$ صدق نماید. لذا،

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_{i_j}$$

برقرار است. یعنی A فشرده است و برهان تمام خواهد بود.

زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضاهای اقلیدسی دقیقاً زیرمجموعه‌های بسته و کراندارند. این نتیجه [که به قضیهٔ هاینه ـ بورل (Heine–Borel) معروف است] به تعریف حاضر از فشردگی منجر شد. جزئیات در زیر آمده است.

قضیهٔ ۲۱.۵ (هاینه ـ بورل). ***یک زیرمجموعه از فضای اقلیدسی فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد.***

برهان. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی R^k باشد. همچنین d فاصلهٔ اقلیدسی بر R^k باشد؛ یعنی

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-y_i\right)^2\right]^{1/2}.$$

فرض کنیم A یک مجموعهٔ فشرده باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که A کراندار است. چون $A \subseteq \bigcup_{x\in A}B(x, 1)$، تعدادی متناهی نقطه مانند $x_1, ..., x_n$ از A هست که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}B(x_i, 1)$. قرار می‌دهیم $M = \max\{d(x_i, x_j) : i, j = 1, ..., n\}$. هرگاه $x, y \in A$، آنگاه i و j را چنان اختیار می‌کنیم که $x \in B(x_i, 1)$ و $y \in B(x_j, 1)$. بنابراین،

$$d(x, y) \le d(x, x_i)+d(x_i, x_j)+d(x_j, y) < M+2 < \infty;$$

درنتیجه A کراندار است.

حال نشان می‌دهیم A بسته است و این کار را با اثبات اینکه A شامل نقاط بست خود است انجام می‌دهیم. فرض کنیم $x \in \bar{A}$. بنابر قضیهٔ ۸.۵، یک دنباله مانند $\{x_n\}$ از A هست که $x = \lim x_n$. اما، طبق قضیهٔ ۲۰.۵، $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که همگرا به نقطه‌ای از A است. چون هر زیردنباله از $\{x_n\}$ باید به x همگرا باشد، پس $x \in A$. یعنی $\bar{A} \subseteq A$ برقرار است؛ درنتیجه A بسته می‌باشد.

برای عکس، فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار R^k باشد. $M > 0$ ی چنان اختیار می‌کنیم که $d(x, y) \le M$ به ازای هر $x, y \in A$ برقرار باشد. عنصر $y \in A$ را ثابت می‌گیریم. هرگاه $a = (a_1, ..., a_k) \in A$، آنگاه

$$|a_i| \le d(a, 0) \le d(a, y)+d(y, 0) \le M+d(y, 0)$$

به ازای هر $1 \le i \le k$ برقرار است. لذا، مجموعهٔ اعداد حقیقی مرکب از مختصات i م عناصر A یک مجموعهٔ کراندار است.

حال فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از A باشد. چون دنبالهٔ مرکب از مختصات اول $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی است، از قضایای ۵.۳ و ۷.۳ نتیجه می‌شود که یک زیردنباله مانند $\{x_n^1\}$ از $\{x_n\}$ هست به طوری که مختصات اولش دنباله‌ای همگرا در R تشکیل می‌دهند. حال به صورت زیر عمل می‌کنیم: زیردنبالهٔ $\{x_n^2\}$ از $\{x_n^1\}$ را طوری می‌گیریم که مختصات دوم $\{x_n^2\}$ دنباله‌ای همگرا در R تشکیل دهند، و همین طور تا آخر. پس از k مرحله، دنبالهٔ $\{x_n^k\}$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ است با این

خاصیت که به ازای هر $1 \le i \le k$، مختصات i م آن یک دنبالهٔ همگرا تشکیل می‌دهند. حال نتیجه می‌شود که $\{x_n^k\}$ در R^k همگرا است، و چون A بسته است، به نقطه‌ای از A همگراست. لذا، هر دنباله از A زیردنباله‌ای همگرا در A دارد. بنابر قضیهٔ ۲۰.۵، A یک مجموعهٔ فشرده است و برهان تمام خواهد بود.

به طور کلی، قضیهٔ هاینه ـ بورل برای فضاهای متری برقرار نیست. همانند برهان فوق، اگر زیرمجموعه‌ای از یک فضای متری فشرده باشد، این مجموعه بسته و کراندار است. اما یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار یک فضای متری لزوماً فشرده نیست. در اینجا یک مثال ساده می‌آوریم.

فرض کنیم X یک مجموعهٔ نامتناهی بوده و d فاصلهٔ گسسته بر X باشد [یعنی $d(x, y) = 1$ اگر $x \neq y$، و $d(x, x) = 0$]. توجه کنید که به ازای هر $x \in X$، $B(x, 1) = \{x\}$. واضح است که X (نسبت به این فاصله) بسته و کراندار است و $X = \bigcup_{x \in X} B(x, 1)$. ولی این پوشش باز نمی‌تواند به یک زیرپوشش متناهی تقلیل یابد. درواقع، اگر X شمارش‌ناپذیر باشد، حتی نمی‌توان آن را به یک زیرپوشش شمارشپذیر تقلیل داد.

نتیجهٔ زیر به ما می‌گوید که نقشهای پیوستهٔ مجموعه‌های فشرده نیز مجموعه‌هایی فشرده‌اند.

قضیهٔ ۲۲.۵. ***فرض کنیم $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ یک تابع پیوسته بوده و A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد. در این صورت، $f(A)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Y است.***

برهان. فرض کنیم $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ یک پوشش باز باشد. در این صورت، $A \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ و، بنابر پیوستگی f، هر $f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ زیرمجموعهٔ بازی از X است. بنابر فشردگی A، اندیسهایی چون $i_1, \ldots, i_n$ وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}_{i_m})$. لذا،

$$f(A) \subseteq f\left[\bigcup_{m=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}_{i_m})\right] = \bigcup_{m=1}^{n} f\left[f^{-1}(\mathcal{O}_{i_m})\right] \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} \mathcal{O}_{i_m};$$

درنتیجه $f(A)$ فشرده می‌باشد.

از آخرین نتیجه و قضیهٔ ۲۱.۵ به آسانی معلوم می‌شود که هرگاه $f: (X, d) \to R$ پیوسته باشد، آنگاه f ماکزیمم و مینیمم خود را بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X می‌گیرد.

هر زیرمجموعهٔ بستهٔ یک فضای متری فشردهٔ (X, d) فشرده است. درواقع، هرگاه C بسته و

$\{\Theta_i:\ i \in I\}$ یک پوشش باز آن باشد، آنگاه $X = C^c \cup \{\bigcup_{i \in I} \Theta_i\}$ یک پوشش باز X است. چون X فشرده است، اندیسهایی مانند $i_1, ..., i_n$ وجود دارند به طوری که $X = C^c \cup \Theta_{i_1} \cup ... \cup \Theta_{i_n}$. ولی در این صورت $C \subseteq \Theta_{i_1} \cup ... \cup \Theta_{i_n}$؛ و درنتیجه C فشرده است.

تابع $f: (X,\ d) \to (Y, \rho)$ یک **نگاشت باز** نام دارد اگر $f(A)$ به ازای هر A ی باز، باز باشد. به همین نحو، f را یک **نگاشت بسته** نامیم اگر $f(A)$ به ازای هر A ی بسته، بسته باشد.

قضیهٔ ۲۳.۵. *فرض کنیم $(X,\ d)$ فشرده بوده و $f: (X,\ d) \to (Y, \rho)$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت، f یک نگاشت بسته است.*

به خصوص، هرگاه f یک به یک و برو باشد، آنگاه f یک همانریختی است.

برهان. فرض کنیم C زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد. در این صورت، C زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X است و، بنابر قضیهٔ ۲۲.۵، مجموعهٔ $f(C)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از Y است. لذا، $f(C)$ بسته است؛ و درنتیجه f یک نگاشت بسته می‌باشد.

حال اگر f یک به یک و برو نیز باشد، آنگاه رابطهٔ $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است. ولی در این صورت از قسمت اول و قضیهٔ ۹.۵ (پنج) نتیجه می‌شود که f^{-1} نیز پیوسته است؛ و لذا، f یک همانریختی می‌باشد.

یک تابع پیوسته لزوماً به طور یکنواخت پیوسته نیست. ولی یک تابع پیوسته که قلمروش فشرده باشد همواره به طور یکنواخت پیوسته است.

قضیهٔ ۲۴.۵. *فرض کنیم $f:\ (X,\ d) \to (Y, \rho)$ یک تابع پیوسته باشد. هرگاه $(X,\ d)$ فشرده باشد، آنگاه f به طور یکنواخت پیوسته است.*

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. بنابر پیوستگی f، به ازای هر x عددی مانند $r_x > 0$ هست به طوری که هروقت $d(x,\ y) < 2r_x$، $\rho(f(y),\ f(x)) < \varepsilon$. در این صورت، گردایهٔ گویهای باز $B(x,\ r_x)$ مجموعهٔ X را می‌پوشاند، و چون X فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $x_1, ..., x_n$ در X هست به طوری که $X = \bigcup_{i=1}^{n} B\ (x_i\ ,\ r_{x_i})$. قرار می‌دهیم $\delta = \min\{r_{x_1}, ..., r_{x_n}\} > 0$.

حال فرض کنیم $x, y \in X$ در $d(x,\ y) < \delta$ صدق نمایند. عدد صحیحی مانند i $(1 \le i \le n)$ وجود دارد به طوری که $d(x,\ x_i) < r_{x_i}$. واضح است که $\rho(f(x),\ f(x_i)) < \varepsilon$. بنابر نامساوی مثلثی،

$$d(y, x_i) \leq d(y, x)+d(x, x_i) < \delta+r_{x_i} \leq ۲r_{x_i}.$$

بنابراین،

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_i))+\rho(f(x_i), f(y)) < \varepsilon+\varepsilon = ۲\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که f به طور یکنواخت پیوسته است و کار تمام خواهد بود.

فضای متری (X, d) ***کلاً کراندار*** است اگر به ازای هر $r > ۰$ تعدادی متناهی نقطه مانند $x_۱, ..., x_n$ باشند به طوری که $X = \bigcup^n_{i=۱} B(x_i, r)$. یک فضای متری فشرده کلاً کراندار است ولی یک فضای متری کلاً کراندار لزوماً فشرده نیست؛ مثلاً، فرض کنید $X = (۰, ۱)$ و $d(x, y) = |x - y|$.

نتیجهٔ بعدی رابطهٔ بین فشردگی و تمامیت را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲۵.۵. *یک فضای متری فشرده است اگر و فقط اگر تام و کلاً کراندار باشد.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم (X, d) فشرده باشد. واضح است که (X, d) کلاً کراندار است. بنابر قضیهٔ ۲۰.۵، هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ یک نقطهٔ حدی مانند x در X دارد؛ و لذا، اگر $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی باشد، $\lim x_n = x$. بنابراین، (X, d) تام نیز هست.

حال فرض کنیم (X, d) تام و کلاً کراندار باشد. بنابر قضیهٔ ۲۰.۵، باید نشان دهیم که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از X یک نقطهٔ انباشتگی دارد. برای این کار، فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از X باشد. می‌نویسیم (فقط در این برهان) $C(a, r) = \{x \in X: d(a, x) \leq r\}$. چون X کلاً کراندار است، زیرمجموعه‌ای متناهی مانند F از X هست به طوری که $X = \bigcup_{x \in F} C(x, ۱)$. ولی در این صورت (چون A نامتناهی است) $x_۱ \in F$ ای هست به طوری که $A \cap C(x_۱, ۱)$ یک مجموعهٔ نامتناهی است. اما، بنابر استقرا، هرگاه $x_۱, ..., x_n$ چنان انتخاب شده باشند که مجموعهٔ $A \cap C(x_۱, ۱) \cap ... \cap C(x_n, ۱/n)$ یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه مثل بالا استدلال کرده و $x_{n+۱}$ را طوری می‌گیریم که مجموعهٔ

$$A \cap C(x_۱, ۱) \cap ... \cap C(x_n, ۱/n) \cap C(x_{n+۱}, ۱/(n+۱))$$

نامتناهی باشد. حال به ازای هر n قرار می‌دهیم $E_n = C(x_۱, ۱) \cap ... \cap C(x_n, ۱/n)$. واضح است که هر E_n ناتهی و بسته است. همچنین $E_{n+۱} \subseteq E_n$ و $d(E_n) \leq ۲/n$ به ازای هر n برقرار است. بنابر قضیهٔ ۱۱.۵، $a \in X$ ای هست به طوری که به ازای هر n، $a \in E_n$. توجه کنید که اگر $y \in A \cap C(x_۱, ۱) \cap ... \cap C(x_n, ۱/n)$، داریم $d(a, y) \leq d(a, x_n)+d(x_n, y) < ۲/n$، که از این معلوم می‌شود که a یک نقطهٔ انباشتگی A است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

بحث فضاهای متری را با اثبات اینکه هر فضای متری یک فضای **نرمال** است پایان می‌دهیم؛ یعنی به ازای هر جفت مجموعهٔ بستهٔ از هم جدای A و B یک جفت مجموعهٔ باز از هم جدا مانند $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ هست به طوری که $A \subseteq \mathcal{O}_1$ و $B \subseteq \mathcal{O}_2$.

اگر A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای متری (X, d) باشد، تابع $f_A: X \to R$ را با $f_A(x) = \inf\{d(x, y): y \in A\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، $f_A(x)$ **فاصلهٔ** x تا A نام دارد و گاهی با $d(x, A)$ نموده می‌شود. همچنین توجه کنید که $f_A(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x \in \bar{A}$. به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر $x, y \in X$، $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$؛ و درنتیجه f_A یک تابع به طور یکنواخت پیوسته بر X است. حال اگر A و B دو زیرمجموعهٔ از هم جدای بستهٔ ناتهی از X باشند، تابع پیوستهٔ $f: X \to R$ با تعریف $f(x) = f_A(x) - f_B(x)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که مجموعه‌های باز $\mathcal{O}_1 = f^{-1}((-\infty, 0))$ و $\mathcal{O}_2 = f^{-1}((0, \infty))$ مجموعه‌های از هم جدایی هستند که $A \subseteq \mathcal{O}_1$ و $B \subseteq \mathcal{O}_2$.

تمرینات

۱. به ازای زیرمجموعه‌های A و B از فضای متری (X, d) نشان دهید که

آ. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

ب. $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

پ. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

ت. $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

ث. اگر B باز باشد، $\bar{A} \cap B \subseteq \overline{A \cap B}$.

۲. نشان دهید که در فضای اقلیدسی R^n با فاصلهٔ اقلیدسی، بست هر گوی باز $B(a, r)$ گوی بستهٔ $\{x \in R^n: d(x, a) \leq r\}$ است. یک فضای متری تام مثال بزنید که حکم نظیر برای آن نادرست باشد.

۳. فرض کنید $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ یک تابع باشد. نشان دهید f پیوسته است اگر و فقط اگر تحدید f به زیرمجموعه‌های فشردهٔ X پیوسته باشد.

[**راهنمایی.** هرگاه $\lim x_n = x$، آنگاه مجموعهٔ $\{x_n: n \in N\} \cup \{x\}$ فشرده است.]

۴. فرض کنید $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ یک تابع باشد. نشان دهید f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر زیرمجموعهٔ B از Y، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

۵. نشان دهید که مرز یک مجموعهٔ بسته یا باز در یک فضای متری هیچ جا چگال است. آیا این حکم

به ازای هر زیرمجموعهٔ دلخواه درست است؟

۶. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد گنگ اجتماع شمارشپذیری از زیرمجموعه‌های بستهٔ R نیست.
[**راهنمایی.** از قضیهٔ بئر استفاده کنید.]

۷. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. نشان دهید هرگاه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنبالهٔ کشی در X باشند، آنگاه $\{d(x_n, y_n)\}$ در R همگراست.

۸. گوییم یک فضای متری **جدایی‌پذیر** است اگر شامل زیرمجموعه‌ای شمارشپذیر باشد که در فضا چگال است. نشان دهید هر فضای متری فشردهٔ (X, d) جدایی‌پذیر است.
[**راهنمایی.** به ازای هر n، زیرمجموعهٔ متناهی F_n از X را طوری اختیار کنید که $X = \bigcup_{x \in F_n} B(x, 1/n)$. نشان دهید که $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ در X چگال است.]

۹. نشان دهید هرگاه (X, d) یک فضای متری جدایی‌پذیر باشد (برای تعریف، ر.ک. تمرین ۸)، آنگاه $\operatorname{card} X \leq c$.

۱۰. فرض کنید $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ فضاهایی متری بوده و $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. اگر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$، قرار دهید

$$D_1(x, y) = \sum_{m=1}^{n} d_m(x_m, y_m) \quad \text{و} \quad D_2(x, y) = \left[\sum_{m=1}^{n} \left[d_m(x_m, y_m)\right]^2\right]^{1/2}.$$

آ. نشان دهید که D_1 و D_2 بر X فاصله‌اند.

ب. نشان دهید که D_1 با D_2 هم‌ارز است.

پ. نشان دهید که (X, D_1) تام است اگر و فقط اگر هر (X_i, d_i) تام باشد.

ت. نشان دهید که (X, D_1) فشرده است اگر و فقط اگر هر (X_i, d_i) فشرده باشد.

۱۱. فرض کنید $\{(X_n, d_n)\}$ دنباله‌ای از فضاهای متری بوده و $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. به ازای هر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ در X تعریف کنید

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

آ. نشان دهید که d یک فاصله بر X است.

ب. نشان دهید که (X, d) یک فضای متری تام است اگر و فقط اگر هر (X_n, d_n) تام باشد.

پ. نشان دهید که (X, d) فشرده است اگر و فقط اگر (X_n, d_n) فشرده باشد.

۱۲. گوییم خانوادهٔ $\mathscr{F}$ از مجموعه‌ها دارای ***خاصیت اشتراک متناهی*** است اگر هر اشتراک متناهی از مجموعه‌های $\mathscr{F}$ ناتهی باشد. نشان دهید یک فضای متری فشرده است اگر و فقط اگر هر خانواده

از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی دارای اشتراک ناتهی باشد.

۱۳. فرض کنید $f: X \to X$ تابعی از مجموعهٔ X به توی خودش باشد. نقطهٔ $a \in X$ را یک **نقطهٔ ثابت** f نامیم اگر $f(a) = a$. فرض کنید (X, d) یک فضای متری فشرده بوده و $f: X \to X$ در $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ به ازای $x \neq y$ صدق کند. نشان دهید f دارای نقطهٔ ثابت منحصر به فرد است.

[**راهنمایی.** نشان دهید که تابع $g(x) = d(x, f(x))$ ماکزیمم خود را می‌گیرد، که باید صفر باشد.]

۱۴. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. تابع $f: X \to X$ را یک ***انقباض*** نامیم اگر عددی مانند $0 < \alpha < 1$ باشد به طوری که $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$؛ α را ***ثابت انقباض*** می‌نامیم. نشان دهید که هر انقباض f بر فضای متری تام (X, d) نقطهٔ ثابت منحصر به فرد دارد؛ یعنی نشان دهید نقطهٔ منحصر به فردی مانند $x \in X$ هست به طوری که $f(x) = x$.

[**راهنمایی.** $a \in X$ را اختیار کرده و دنباله را با $x_1 = a$ و $x_{n+1} = f(x_n)$ به ازای $n \geq 1$ تعریف کنید. نشان دهید که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی بوده و حدش یک نقطهٔ ثابت f است.]

۱۵. یک خاصیت از یک فضای متری را یک ***خاصیت توپولوژیک*** نامیم اگر در فضاهای متری همانریخت حفظ شود.

آ. نشان دهید که فشردگی یک خاصیت توپولوژیک است.

ب. نشان دهید که تمامیت، کرانداری، و کرانداری کل خواص توپولوژیک نیستند.

۱۶. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. فاصلهٔ دو زیرمجموعهٔ ناتهی A و B در X را به صورت زیر تعریف کنید:

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y): y \in B \text{ و } x \in A\}.$$

آ. دو مجموعهٔ بستهٔ A و B از یک فضای متری مثال بزنید که $A \cap B = \varnothing$ و $d(A, B) = 0$.

ب. هرگاه $A \cap B = \varnothing$، A بسته بوده، و B فشرده باشد (و البته هر دو ناتهی باشند)، آنگاه نشان دهید که $d(A, B) > 0$.

۱۷. فرض کنید X یک فضای متری فشرده بوده و $f: X \to X$ یک یکمتری باشد؛ یعنی $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ به ازای هر $x, y \in X$ برقرار باشد. در این صورت، نشان دهید که f برو است. اگر X فشرده نباشد، آیا این نتیجه برقرار می‌ماند؟

مسائل دوره‌ای

۱. نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ با تعریف

$$x_1 = 1 \text{ و } x_{n+1} = \frac{1}{3+x_n} \text{ به ازای } n = 1, 2, \dots$$

همگراست و حدش را تعیین کنید.

۲. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

۳. هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf \sqrt[n]{x_n} \le \limsup \sqrt[n]{x_n} \le \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

۴. $\limsup$ و $\liminf$ دنبالهٔ $\{x_n\}$ با تعریف زیر را بیابید:

$$x_1 = \frac{1}{3}\text{، به ازای } n = 1, 2, \dots\text{، } x_{2n} = \frac{1}{3}x_{2n-1} \text{ و } x_{2n+1} = \frac{1}{3} + x_{2n}.$$

۵. عکس زیر از قضیهٔ ۲۲.۵ را ثابت کنید: هرگاه هر تابع حقیقی پیوسته بر فضای متری X ماکزیمم خود را بگیرد، آنگاه X یک فضای متری فشرده است.

۶. در این تمرین، عکس قضیهٔ ۲۴.۵ ارائه می‌شود. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد به طوری که هر تابع پیوستهٔ حقیقی بر X به طور یکنواخت پیوسته است.

آ. نشان دهید که X یک فضای متری تام است.

ب. یک فضای متری غیرفشرده با خاصیت فوق مثال بزنید.

پ. هرگاه X تعدادی متناهی نقطهٔ تنها داشته باشد (عنصر $a \in X$ را یک ***نقطهٔ تنها*** گوییم اگر عددی مانند $r > 0$ چنان موجود باشد که $B(a, r)\cap(X\sim\{a\}) = \varnothing$)، آنگاه نشان دهید که X یک فضای متری فشرده است.

۷. این مسئله در رابطه با فضاهای متری همبند است. گوییم فضای متری (X, d) **همبند** است اگر $\varnothing$ و X تنها زیرمجموعه‌های X باشند که همزمان باز و بسته‌اند. زیرمجموعهٔ A از فضای متری (X, d) را **همبند** گوییم اگر (A, d) یک فضای متری همبند باشد. خواص زیر را در فضاهای متری همبند و مجموعه‌های همبند به ثبوت رسانید.

آ. فضای متری (X, d) همبند است اگر و فقط اگر هر تابع پیوستهٔ $f: X\to\{0, 1\}$ ثابت باشد، که در آن مجموعهٔ دو نقطه‌ای $\{0, 1\}$ یک فضای متری با فاصلهٔ گسسته در نظر گرفته می‌شود.

ب. هرگاه در فضای متری (X, d) داشته باشیم $B \subseteq A \subseteq X$، آنگاه مجموعهٔ B یک زیرمجموعهٔ همبند (A, d) است اگر و فقط اگر B یک زیرمجموعهٔ همبند (X, d) باشد.

پ. هرگاه $f: (X, d)\to(Y, \rho)$ یک تابع پیوسته بوده و A زیرمجموعهٔ همبند X باشد، آنگاه $f(A)$ زیرمجموعهٔ همبندی از Y است.

ت. هرگاه $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند از یک فضای متری باشد به طوری که $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$، آنگاه $\bigcup_{i \in I} A_i$ نیز یک مجموعهٔ همبند است.

ث. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از یک فضای متری بوده و $a \in A$، آنگاه وسیعترین زیرمجموعهٔ همبند (نسبت به شمول) مانند C_a از A هست که شامل a می‌باشد. (مجموعهٔ همبند C_a را **مؤلفهٔ** a نسبت به A می‌نامند.)

ج. هرگاه a و b تعلق به زیرمجموعهٔ A از یک فضای متری داشته و C_a و C_b مؤلفه‌های a و b در A باشند، آنگاه $C_a = C_b$ یا $C_a \cap C_b = \varnothing$. لذا، اتحاد $A = \bigcup_{a \in A} C_a$ نشان می‌دهد که A را می‌توان به صورت اجتماع از هم جدایی از مجموعه‌های همبند نوشت.

چ. یک زیرمجموعهٔ ناتهی از R با دست کم دو عنصر یک مجموعهٔ همبند است اگر و فقط اگر یک بازه باشد. با استفاده از این و قسمت (ج) ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ باز R را می‌توان حداکثر به صورت یک اجتماع شمارشپذیر از بازه‌های باز از هم جدا نوشت.

۸. نشان دهید که R^n با فاصلهٔ اقلیدسی یک فضای متری همبند است. با استفاده از این نتیجه، ثابت کنید هرگاه اشتراک دو زیرمجموعهٔ باز از R^n یک مجموعهٔ فشرده باشد، آنگاه دو مجموعهٔ باز باید از هم جدا باشند.

۹. فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای متری X باشند به طوری که $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. نشان دهید دو مجموعهٔ باز از هم جدا مانند U و V هست به طوری که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$.

۱۰. هرگاه A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از R باشد، آنگاه نشان دهید که مجموعهٔ

$$B = \{a \in \overline{A} : (a, a + \varepsilon) \cap A = \varnothing \text{ هست که } \varepsilon > 0 \text{ عددی مانند } \}$$

حداکثر شمارشپذیر است.

۱۱. به ازای تابع دلخواه $f : R \to R$، نشان دهید که مجموعهٔ

$$A = \{a \in R : \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a) \text{ وجود دارد و } \lim_{x \to a} f(x)\}$$

حداکثر شمارشپذیر است.

۱۲. فرض کنید $\{r_1, r_2, \ldots\}$ شمارشی از تمام اعداد گویا در بازهٔ $[0, 1]$ بوده و به‌ازای هر $x \in [0, 1]$ قرار دهید $A_x = \{n \in N : r_n \leq x\}$. تابع $f : [0, 1] \to R$ را با فرمول

$$f(x) = \sum_{n \in A_x} \frac{1}{2^n}, \; x \in [0, 1]$$

تعریف کنید. نشان دهید که تحدید f به مجموعهٔ اعداد گنگ $[0, 1]$ پیوسته است.

۱۳. فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ناتهی از R باشد. نشان دهید که تابع $f : C \to R$ پیوسته است

اگر و فقط اگر بتوان آن را به یک تابع حقیقی پیوسته بر R وسعت داد.

۱۴. تابع $f: (X, d)\to(Y, \rho)$ را بین دو فضای متری در نظر بگیرید. نمودار G_f از f زیرمجموعه‌ای از $X\times Y$ است که با

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

تعریف می‌شود. هرگاه (Y, ρ) یک فضای متری فشرده باشد، آنگاه نشان دهید f پیوسته است اگر و فقط اگر G_f زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $X\times Y$ باشد که در آن $X\times Y$ یک فضای متری با فاصلهٔ $D((x, y), (u, v)) = d(x, u) + \rho(y, v)$ در نظر گرفته می‌شود؛ ر.ک. مسئلهٔ ۵.۱۰. اگر (Y, ρ) فشرده نباشد، آیا نتیجهٔ فوق باز هم برقرار است؟

۱۵. یک پوشش $\{V_i : i \in I\}$ از مجموعهٔ X را یک **پوشش نقطه به نقطه متناهی** نامیم اگر هر $x \in X$ تعلق به حداکثر تعدادی متناهی از V_i ها داشته باشد. نشان دهید که یک فضای متری فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز نقطه به نقطه متناهی فضا شامل زیرپوششی متناهی باشد.

کتابنامه

1. G. Birkhoff and S. Maclane, *A Survey of Modern Algebra,* 3rd Ed. New York: Macmillan, 1965.
2. A. Fraenkel, *Abstract Set Theory,* 4th Ed. Amsterdam: North-Holland, 1976.
3. P. R. Halmos, *Naive Set Theory.* New York: Van Nostrand, 1960.
4. I. Kaplansky, *Set Theory and Metric Spaces.* Boston: Allyn and Bacon, 1972.
5. K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1968.
6. G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1963.

فصل ۲

توپولوژی عمومی و فضاهای تابعی

نقش مجموعه‌های باز و بسته در فضاهای متری قبلاً مورد بحث قرار گرفت. حال مفهوم اساسی مجموعهٔ باز را با معرفی فضای توپولوژیک تعمیم می‌دهیم. در این محدوده خواص مجموعه‌های باز و بسته مطالعه خواهد شد. همهٔ این فصل به فضاهای توپولوژیک و تابعی اختصاص دارد و بر نتایج لازم در این کتاب تأکید می‌شود. برای مطالعهٔ مشروح توپولوژی عمومی، خواننده را به کتاب کلاسیک [۴] ارجاع می‌دهیم.

مطالب را در سه بخش تدوین کرده‌ایم. در بخش اول نظریهٔ فضاهای توپولوژیک مطرح می‌شود. بخش دوم به خواص توابع پیوسته و حقیقی پرداخته و شبکه‌های برداری و فضاهای تابعی را معرفی می‌کند. مفاهیم همگرایی نقطه به نقطه و یکنواخت دنباله‌ها و روابطشان با یکدیگر نیز بررسی می‌شوند. بالأخره، در بخش سه، قضیهٔ کلاسیک استون ـ وایراشتراس (Stone–Weierstrass) به طور مشروح مطالعه خواهد شد.

۶. فضاهای توپولوژیک

در بخش قبل خواص اصلی فضاهای متری مطرح شدند. مجموعه‌های باز و بسته نقشی اساسی در این بحث داشتند. در این بخش، مفاهیم فضای متری را با معرفی فضای توپولوژیک تعمیم می‌دهیم. در این محدوده، خواصی نظیر بسته بودن، همگرایی، و پیوستگی مطالعه خواهد شد.

نقطهٔ شروع، تعریف مجموعه‌های باز است.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های X را یک ***توپولوژی*** بر X گوییم اگر τ در خواص زیر صدق نماید:

۱. $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$.

۲. هرگاه U و V متعلق به τ باشند، آنگاه $U \cap V \in \tau$.

۳. هرگاه $\{V_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد، آنگاه $\bigcup_{i \in I} V_i \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی بر مجموعهٔ X باشد، آنگاه جفت (X, τ) یک ***فضای توپولوژیک*** نام دارد. اگر ابهامی در توپولوژی τ نباشد، گاهی به خاطر سادگی به جای (X, τ) می‌نویسیم X. اعضای τ را

مجموعه‌های باز X می‌نامیم.

در زیر چند مثال از فضاهای توپولوژیک می‌آوریم. از خواننده انتظار داریم توپولوژی بودن این گردایه‌ها را نشان دهد.

مثال ۶.۲. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. در این صورت، $\tau = \{\varnothing, X\}$ یک توپولوژی بر X است به نام ***توپولوژی ناگسسته***. این توپولوژی کوچکترین توپولوژی ممکن (نسبت به شمول) بر X است.

مثال ۶.۳. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. در این صورت، $\tau = \mathcal{P}(X)$ یک توپولوژی بر X است. در اینجا هر زیرمجموعهٔ X یک مجموعهٔ باز است. این توپولوژی را ***توپولوژی گسسته*** می‌نامند، و این "بزرگترین" توپولوژی ممکن بر X است.

مثال ۶.۴. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری بوده و X شمارش‌ناپذیر باشد. همچنین، τ گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های $\mathcal{O}$ از X باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathcal{O}$ عددی مانند $r > 0$ و یک زیرمجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر مانند A از X (هر دو تابع x) باشند به طوری که $x \notin A$ و $B(x, r) \sim A \subseteq \mathcal{O}$. در این صورت، τ یک توپولوژی بر X است.

مثال ۶.۵. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. در این صورت، گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز X از خواص یک توپولوژی بهره‌مند است؛ ر.ک. قضیهٔ ۵.۵. لذا، هر فضای متری یک فضای توپولوژیک است.

مثال ۶.۶. فرض کنیم $X = R^*$ اعداد حقیقی وسعت یافته باشد. همچنین، τ گردایهٔ زیرمجموعه‌های X باشد که به قرار زیر تعریف می‌شود. زیرمجموعهٔ $\mathcal{O}$ از X متعلق به τ است اگر در خواص زیر صدق نماید:

۱. به ازای هر $x \in \mathcal{O} \cap R$ عددی مانند $r > 0$ (تابع x) باشد به طوری که $(x-r, x+r) \subseteq \mathcal{O}$.

۲. هرگاه $\infty \in \mathcal{O}$، آنگاه $a \in R$ ای باشد به طوری که $(a, \infty] \subseteq \mathcal{O}$.

۳. هرگاه $-\infty \in \mathcal{O}$، آنگاه $a \in R$ ای باشد به طوری که $[-\infty, a) \subseteq \mathcal{O}$.

در این صورت، τ یک توپولوژی بر R^* است.

مثال ۷.۶. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و Y زیرمجموعه‌ای از X باشد. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های Y را با

$$\tau_Y = \{V \cap Y : V \in \tau\}$$

تعریف می‌کنیم. (Y, τ_Y) یک فضای توپولوژیک است. توپولوژی τ_Y را توپولوژی ***القا شده*** به وسیلهٔ τ بر Y یا ***توپولوژی نسبی*** τ بر Y می‌نامند.

در بحث فعلی‌مان فرض است (مگر خلافش گفته شود) که (X, τ) یک فضای توپولوژیک ثابت است.

حال مجموعه‌های بسته را مانند فضاهای متری تعریف می‌کنیم. زیرمجموعهٔ A از X را **بسته** گوییم اگر متممش A^c باز باشد (یعنی $A^c \in \tau$). خواص زیر از مجموعه‌های بسته را می‌توان با متمم گرفتن مستقیماً از تعریف ۱.۶ به دست آورد:

۱. $\emptyset$ و X (علاوه بر باز بودن) مجموعه‌هایی بسته‌اند.

۲. اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته‌اند.

۳. اشتراکهای دلخواه از مجموعه‌های بسته، بسته‌اند.

در این محدوده، گویهای فضای متری با همسایگیها عوض می‌شوند. یک **همسایگی** نقطهٔ x مجموعهٔ باز دلخواه شامل x است. لذا، یک مجموعهٔ باز همسایگی جمیع نقاط خود می‌باشد. به خصوص، زیرمجموعهٔ A از X باز است اگر و فقط اگر هر نقطهٔ $x \in A$ یک همسایگی مانند V_x **داشته** باشد که $V_x \subseteq A$. (درواقع، هرگاه A این خاصیت را داشته باشد، آنگاه $A = \bigcup_{x \in A} V_x$ یک **مجموعهٔ** باز است زیرا اجتماعی از مجموعه‌های باز می‌باشد.)

درون A° زیرمجموعهٔ A از X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^\circ = \{x \in X : \text{یک همسایگی مانند } V \text{ از } x \text{ هست که } V \subseteq A\}.$$

اعضای A° را ***نقاط درونی*** A می‌نامیم. واضح است که A° یک مجموعهٔ باز است و $A^\circ \subseteq A$. به علاوه، A° وسیعترین مجموعهٔ باز مشمول در A است. همچنین، واضح است که A باز است اگر و **فقط اگر** $A = A^\circ$.

بست و نقاط انباشتگی یک مجموعه همانند فضاهای متری تعریف می‌شوند. گوییم نقطهٔ $x \in X$ یک **نقطهٔ بست** مجموعهٔ A است اگر هر همسایگی V از x شامل (دست کم) یک نقطه از A باشد (یعنی اگر به ازای هر همسایگی V از x، $V \cap A \neq \emptyset$). مجموعهٔ تمام نقاط بست A با $\overline{A}$ نموده و **بست** A

نامیده می‌شود. واضح است که $A\subseteq\overline{A}$. همانند برهان قضیهٔ ۷.۵، می‌توان نشان داد که $\overline{A}$ کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای (نسبت به شمول) است که شامل A می‌باشد. از این معلوم می‌شود که مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $A=\overline{A}$. چند خاصیت مفید دیگر عملگر بست به قرار زیرند:

آ. هرگاه $A\subseteq B$، آنگاه $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

ب. به ازای هر دو زیرمجموعهٔ A و B، $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

پ. به ازای هر زیرمجموعهٔ A، $A^\circ=(\overline{A^c})^c$.

گوییم زیرمجموعهٔ A از X در X **چگال** است اگر $\overline{A}=X$.

گوییم نقطهٔ x از X یک ***نقطهٔ انباشتگی*** A است اگر هر همسایگی x شامل نقطه‌ای از A غیر از x باشد؛ یعنی اگر $(V\sim\{x\})\cap A\neq\varnothing$ به ازای هر همسایگی V از x برقرار باشد. مجموعهٔ تمام نقاط انباشتگی A با A' نموده شده و **مجموعهٔ مشتق** A نامیده می‌شود. واضح است که $A'\subseteq\overline{A}$. همچنین، به آسانی معلوم می‌شود که $\overline{A}=A\cup A'$ و از این معلوم می‌شود که مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $A'\subseteq A$.

گوییم نقطهٔ $x\in X$ یک ***نقطهٔ مرزی*** مجموعهٔ A است اگر $V\cap A\neq\varnothing$ و $V\cap A^c\neq\varnothing$ به ازای هر همسایگی V از x برقرار باشد. مجموعهٔ تمام نقاط مرزی A با ∂A نموده شده و **مرز** A نامیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که

$$\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c};$$

و درنتیجه ∂A همواره یک مجموعهٔ بسته است. همچنین، بی‌درنگ معلوم می‌شود که $\partial A=\partial A^c$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است. به علاوه، $\overline{A}=A\cup\partial A$ نیز برقرار است.

گوییم زیرمجموعهٔ A از X **هیچ جاچگال** است اگر $(\overline{A})^\circ=\varnothing$. مجموعهٔ A را یک **مجموعهٔ نحیف** (یا یک مجموعه از ***رستهٔ اول***) نامیم اگر دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از مجموعه‌های هیچ جا چگال موجود باشد که $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. ملاحظه می‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ نحیف لزوماً نحیف است.

دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای توپولوژیک (X,τ) را ***همگرا*** به x گوییم (و با $\lim x_n=x$ نشان می‌دهیم) اگر به ازای هر همسایگی V از x عددی صحیح مانند k (تابع V) باشد به طوری که به ازای هر $n\geq k$، $x_n\in V$. اولین چیزی که توجه را جلب می‌کند این است که، برخلاف فضاهای متری، یک دنباله می‌تواند بیش از یک حد داشته باشد. مثلاً، هر دنباله در فضای توپولوژیک مثال ۲.۶ به هر نقطهٔ X همگراست.

اما، در فضای توپولوژیک هاسدورف، هر دنباله حداکثر یک حد دارد. گوییم فضای توپولوژیک (X,τ) یک ***فضای هاسدورف*** (Hausdorff) است اگر به ازای هر جفت $x,y\in X$ که $x\neq y$ همسایگیهای V از x و U از y وجود داشته باشند که $V\cap U=\varnothing$. یعنی یک فضای توپولوژیک

هاسدورف فضایی است که در آن هر دو نقطهٔ متمایز را می‌توان با همسایگیهای از هم جدا از یکدیگر سوا کرد. همهٔ فضاهای توپولوژیک این کتاب هاسدورف‌اند مگر خلافش گفته شود.

حال به توابع پیوسته می‌پردازیم. گوییم تابع $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ بین دو فضای توپولوژیک **در نقطهٔ** $a \in X$ **پیوسته** است اگر به ازای هر همسایگی V از $f(a)$ یک همسایگی مانند W از a باشد به طوری که هروقت $x \in W$، $f(x) \in V$. هرگاه f در هر نقطه از X پیوسته باشد، آنگاه f را یک **تابع پیوسته** می‌نامیم.

نتیجهٔ بعد توابع پیوسته را توصیف می‌کند و به موازات قضیهٔ ۹.۵ است.

قضیهٔ ۸.۶. *احکام زیر به ازای تابع* $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ ***بین دو فضای توپولوژیک هم‌ارزند:***

۱. ***f یک تابع پیوسته است.***

۲. ***هرگاه $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از Y باشد، آنگاه $f^{-1}(\mathcal{O})$ نیز باز است.***

۳. ***به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X،*** $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

۴. ***هرگاه C زیرمجموعهٔ بسته‌ای از Y باشد، آنگاه $f^{-1}(C)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است.***

برهان. (۲) $\Rightarrow$ (۱). فرض کنیم $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از Y بوده و $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$. در این صورت، یک همسایگی مانند V از a هست به‌طوری که به ازای هر $x \in V$، $f(x) \in \mathcal{O}$. لذا، $V \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$؛ و درنتیجه a یک نقطهٔ درونی $f^{-1}(\mathcal{O})$ است. چون a دلخواه است، پس $f^{-1}(\mathcal{O})$ باز می‌باشد.

(۳) $\Rightarrow$ (۲). به ازای $A \subseteq X$ قرار می‌دهیم $B = \overline{f(A)}$. چون B بسته است، B^c باز است؛ و لذا، طبق فرض، $f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c$ نیز باز است. ولی این ایجاب می‌کند که $f^{-1}(B)$ بسته باشد. حال، به خاطر $A \subseteq f^{-1}(B)$، به دست می‌آوریم $\overline{A} \subseteq f^{-1}(B)$. بنابراین، طبق مطلوب، $f(\overline{A}) \subseteq B = \overline{f(A)}$.

(۴) $\Rightarrow$ (۳). فرض کنیم C زیرمجموعهٔ بسته‌ای از Y باشد. قرار می‌دهیم $A = f^{-1}(C)$. در این صورت، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$ برقرار است نشانگر آنکه $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C) = A$. بنابراین، $A = \overline{A}$؛ و درنتیجه $A = f^{-1}(C)$ یک مجموعهٔ بسته می‌باشد.

(۱) $\Rightarrow$ (۴). فرض کنیم $a \in X$ و V را یک همسایگی $f(a)$ می‌گیریم. چون V^c بسته است، $f^{-1}(V^c) = \left[f^{-1}(V)\right]^c$ طبق فرض نیز بسته است؛ و درنتیجه $W = f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ باز است. حال ملاحظه می‌کنیم که $a \in W$؛ و لذا W یک همسایگی a می‌باشد. واضح است که $x \in W$ ایجاب می‌کند که $f(x) \in V$؛ درنتیجه f در $x = a$ پیوسته است. چون a دلخواه است، f بر X پیوسته می‌باشد.

دو فضای توپولوژیک (X, τ) و (Y, τ_1) را **همانریخت** نامیم اگر یک تابع یک به یک و برو مانند $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ باشد به طوری که f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند.

یک اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های بسته لزوماً بسته نیست، و یک اشتراک شمارشپذیر از مجموعه‌های باز لزوماً باز نمی‌باشد. با اینحال، این مجموعه‌ها از اهمیتی برخوردارند. گوییم یک مجموعه یک F_σـ **مجموعه** (یا از نوع F_σ) است اگر اجتماع تعدادی شمارشپذیر از مجموعه‌های بسته باشد. به همین نحو، گوییم یک مجموعه یک G_δ – **مجموعه** (یا از نوع G_δ) است اگر اشتراک تعدادی شمارشپذیر از مجموعه‌های باز باشد.

قضیهٔ زیر به ما می‌گوید که مجموعه‌های فوق یک رابطهٔ دوگان با هم دارند.

قضیهٔ ۹.۶. یک مجموعه F_σـ مجموعه است اگر و فقط اگر متممش یک G_δ – مجموعه باشد. به همین نحو، یک مجموعه G_δ – مجموعه است اگر و فقط اگر متممش یک F_σـ مجموعه باشد.

برهان. فرض کنیم A یک F_σـ مجموعه باشد؛ درنتیجه $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که در آن هر A_n بسته است. در این صورت، $A^c=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ اشتراک شمارشپذیری از مجموعه‌های باز است؛ و لذا G_δـ مجموعه می‌باشد. اثبات اینکه متمم یک G_δـ مجموعه یک F_σـ مجموعه است به همین نحو خواهد بود.

اجتماع گردایه‌ای شمارشپذیر از F_σـ مجموعه‌ها مجدداً یک F_σـ مجموعه است، و اشتراک شمارشپذیری از G_δـ مجموعه‌ها یک G_δـ مجموعه می‌باشد. همچنین، به آسانی می‌توان دید که اجتماع یا اشتراک متناهی از F_σـ مجموعه‌ها (G_δـ مجموعه‌ها) مجدداً یک F_σـ مجموعه (یک G_δـ مجموعه) می‌باشد.

حال یک تابع حقیقی در نظر می‌گیریم که بر فضای توپولوژیک (X, τ) تعریف شده است؛ یعنی $f:X\to R$. ممکن است f همه جا ناپیوسته باشد. به عنوان مثال، تابع $f:R\to R$ که در هر عدد گنگ ۱ و در هر عدد گویا ۰ است در هر نقطه ناپیوسته می‌باشد. آموزنده است که مجموعهٔ نقاطی که یک تابع در آنها پیوسته است یا مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی یک تابع بررسی شود. برای این کار، به یک بحث مقدماتی نیاز خواهد بود.

ما گردایهٔ تمام همسایگیهای نقطهٔ x را با $\mathfrak{R}_x$ نشان می‌دهیم. ***نوسان*** $\omega_f(x)$ تابع f در نقطهٔ x عدد حقیقی وسعت یافتهٔ نامنفی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_f(x) = \inf\{\sup\{|f(z)-f(y)|: z, y \in V\}: V \in \mathfrak{R}_x\}.$$

استدلال سرراست نشان می‌دهد که f در نقطهٔ x پیوسته است اگر و فقط اگر $\omega_f(x) = 0$. حکم اخیر را می‌توان این طور گفت که f در نقطهٔ x ناپیوسته است اگر و فقط اگر $\omega_f(x) > 0$. لذا، هرگاه

$D_n = \{x \in X: \omega_f(x) \geq 1/n\}$ و D مجموعهٔ تمام نقاط ناپیوستگی f باشد، آنگاه $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ برقرار است.

قضیهٔ ۶.۱۰. ***فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک بوده و $f: X \to R$. در این صورت، مجموعهٔ D تمام نقاط ناپیوستگی f یک F_σ ـ مجموعه است.***

به خصوص، مجموعهٔ نقاط پیوستگی f یک G_δ ـ مجموعه می‌باشد.

برهان. بنا بر بحث پیش از قضیه، داریم $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ که در آن $D_n = \{x \in X: \omega_f(x) \geq 1/n\}$. کافی است نشان دهیم که هر D_n یک مجموعهٔ بسته است.

برای این کار فرض می‌کنیم $x \notin D_n$. در این صورت، $\omega_f(x) < 1/n$. از تعریف $\omega_f(x)$ معلوم می‌شود که یک همسایگی مانند V از x هست به طوری که $\sup\{|f(z)-f(y)|: z, y \in V\} < 1/n$. چون V همسایگی هر عضو خود است، به ازای هر $a \in V$ به آسانی خواهیم داشت

$$\omega_f(a) \leq \sup\{|f(z)-f(y)|: z, y \in V\} < 1/n.$$

لذا، $V \subseteq D_n^c$ نشانگر آنکه x یک نقطهٔ درونی D_n^c است. چون x دلخواه است، D_n^c باز و لذا D_n بسته می‌باشد. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

بحث را با معرفی مجموعه‌های فشرده ادامه می‌دهیم. تعریف آنها صورت مجرد تعریفی است که در فضاهای متری داده شده است.

تعریف ۶.۱۱. گوییم زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک (X, τ) **فشرده** است اگر هر پوشش باز A را بتوان به یک زیرپوشش متناهی تقلیل داد.

به خصوص، هرگاه X خود یک مجموعهٔ فشرده باشد، آنگاه (X, τ) را یک فضای توپولوژیک فشرده می‌نامیم.

از تعریف فوق واضح است که هر زیرمجموعهٔ متناهی از یک فضای توپولوژیک باید فشرده باشد. همچنین روشن است که هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های فشرده باید فشرده باشد.

قضیهٔ ۶.۱۲. ***هرگاه $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ یک تابع پیوسته بوده و A زیرمجموعهٔ فشردهٔ X باشد،***

آنگاه $f(A)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Y است.

به خصوص، هر تابع حقیقی پیوسته بر فضای توپولوژیک (X, τ) ماکزیمم و مینیمم خود را بر یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ X می‌گیرد.

برهان. برای اثبات قسمت اول، برهان قضیهٔ ۲۲.۵ را تکرار می‌کنیم.

برای اثبات قسمت دوم، فرض می‌کنیم A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X بوده و $f: X \to R$ پیوسته باشد. بنابر فوق، $f(A)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۲۱.۵، $f(A)$ بسته و کراندار است. لذا، هرگاه $a = \sup\{f(x): x \in A\}$ و $b = \inf\{f(x): x \in A\}$، آنگاه چون $a, b \in f(A)$، دو نقطه مانند x و y در A وجود دارند به طوری که $a = f(x)$ و $b = f(y)$. در اینجا برهان قضیه تمام است.

در قضیهٔ زیر خواص دیگری از مجموعه‌های فشرده گنجانده شده است.

قضیهٔ ۱۳.۶. ***احکام زیر در فضای توپولوژیک هاسدورف (X, τ) برقرارند:***

۱. هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X بسته است.

۲. هرگاه B زیرمجموعهٔ بسته‌ای از مجموعهٔ فشردهٔ A باشد، آنگاه B فشرده است.

برهان. (۱) فرض کنیم A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد. باید نشان دهیم که A^c باز است. لذا، فرض می‌کنیم $x \in A^c$. در این صورت، به ازای هر $y \in A$ یک همسایگی مانند V_y از y و یک همسایگی مانند U_y از x هست به طوری که $V_y \cap U_y = \varnothing$. واضح است که $A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$. چون A فشرده است، $y_1, \ldots, y_n \in A$ هست به طوری که $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} V_{y_m}$. فرض کنیم $\mathcal{O} = \bigcap_{m=1}^{n} U_{y_m}$. در این صورت، $\mathcal{O}$ یک همسایگی x است به طوری که $\mathcal{O} \cap A = \varnothing$. پس داریم $\mathcal{O} \subseteq A^c$؛ درنتیجه x یک نقطهٔ درونی A^c است. لذا، A^c باز و درنتیجه A بسته می‌باشد.

(۲) فرض کنیم $\{\mathcal{O}_i: i \in I\}$ یک پوشش باز B باشد. در این صورت، خانوادهٔ $\{B^c\} \cup \{\mathcal{O}_i: i \in I\}$ از مجموعه‌ها یک پوشش باز برای A است. اندیسهای $i_1, \ldots, i_n$ را چنان می‌گیریم که $A \subseteq B^c \cup \mathcal{O}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{i_n}$. ولی، در این صورت، $B \subseteq \mathcal{O}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{i_n}$ برقرار است نشانگر آنکه B یک مجموعهٔ فشرده می‌باشد.

برهان قسمت (۱) قضیهٔ قبل نتیجهٔ جداسازی زیر را نیز به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۴.۶. ***فرض کنیم A یک مجموعهٔ فشرده از یک فضای توپولوژیک هاسدورف بوده و $x \notin A$. در این صورت، مجموعه‌های بازی چون V و W وجود دارند به طوری که $x \in V$، $A \subseteq W$، و $V \cap W = \varnothing$ (و درنتیجه، نیز $x \notin \overline{W}$).***

فضای توپولوژیک (X, τ) را **موضعاً فشرده** نامیم اگر هر نقطه از X همسایگیی داشته باشد که بستش فشرده باشد.

واضح است که هر فضای فشرده موضعاً فشرده است. بنابر قضیهٔ ۲۱.۵، یک زیرمجموعهٔ R^n فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد. لذا، فضای اقلیدسی R^n فشرده نیست ولی موضعاً فشرده است.

خاصیت جداسازی زیر بعدها لازم خواهد بود.

قضیهٔ ۱۵.۶. ***فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف باشد. همچنین، V یک مجموعهٔ باز و A یک مجموعهٔ فشرده باشد به طوری که $A \subseteq V$. در این صورت، مجموعهٔ بازی چون $\mathcal{O}$ با بست فشرده هست به طوری که $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{O}} \subseteq V$.***

برهان. چون هر نقطه از A همسایگیی با بست فشرده دارد و A را می‌توان با تعدادی متناهی از این همسایگیها پوشاند، به آسانی معلوم می‌شود که مجموعهٔ بازی مانند W با بست فشرده هست به طوری که $A \subseteq W$. از تعویض W با $W \cap V$ (در صورت لزوم) می‌توان فرض کرد که $A \subseteq W \subseteq V$.

هرگاه $\overline{W} \cap V^c = \varnothing$، آنگاه $\mathcal{O} = W$ در $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{O}} \subseteq V$ صدق می‌کند. در غیر این صورت، هرگاه $x \in \overline{W} \cap V^c$، آنگاه $x \notin A$؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۴.۶، مجموعهٔ بازی چون U_x هست به طوری که $A \subseteq U_x$ و $x \notin \overline{U_x}$. حال ملاحظه می‌کنیم که $\left\{ \left[\overline{U_x}\right]^c : x \in \overline{W} \cap V^c \right\}$ یک پوشش باز مجموعهٔ فشردهٔ $\overline{W} \cap V^c$ است (فشردگی این مجموعه از قضیهٔ ۱۳.۶ نتیجه می‌شود). لذا، یک زیرمجموعهٔ متناهی مانند F از $\overline{W} \cap V^c$ هست به طوری که $\overline{W} \cap V^c \subseteq \bigcup_{x \in F} \left[\overline{U_x}\right]^c$. توجه کنید که $(\bigcap_{x \in F} \overline{U_x}) \cap \overline{W} \cap V^c = \varnothing$.

حال قرار می‌دهیم $\mathcal{O} = \cap_{x \in F}(U_x \cap W)$ و توجه می‌کنیم که $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز است به طوری که $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq W$. پس داریم $\overline{\mathcal{O}} \subseteq \overline{W}$؛ و درنتیجه

$$\overline{\mathcal{O}} \cap V^c = \overline{\mathcal{O}} \cap \overline{W} \cap V^c \subseteq (\cap_{x \in F} \overline{U_x}) \cap \overline{W} \cap V^c = \varnothing.$$

بنابراین، $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{O}} \subseteq V$ برقرار بوده و برهان تمام می‌شود.

تمرینات

۱. نشان دهید که به ازای زیرمجموعهٔ A از یک فضای توپولوژیک،

آ. $A^\circ = \left[\overline{A^c}\right]^c$.

ب. $\partial A = \overline{A} \sim A^\circ$.

پ. $\left[A \sim A^\circ\right]^\circ = \varnothing$.

۲. هرگاه A و B دو زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک باشند، آنگاه نشان دهید که

آ. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$؛

ب. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

۳. فرض کنید $X = R$ و τ توپولوژی تعریف شده در مثال ۴.۶ بر X باشد. به عبارت دیگر، $A \in \tau$ اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in A$ عددی مانند $\varepsilon > 0$ و مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیری مانند B (هر دو تابع x) باشند به طوری که $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \sim B \subseteq A$.

آ. نشان دهید که τ یک توپولوژی بر X است.

ب. تحقیق کنید که $0 \in \overline{(0, 1)}$.

پ. نشان دهید که دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از $(0, 1)$ با $\lim x_n = 0$ وجود ندارد.

۴. هرگاه A زیرمجموعهٔ چگالی از یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه نشان دهید که $\mathcal{O} \subseteq \overline{A \cap \mathcal{O}}$ به ازای هر مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ برقرار است.

۵. هرگاه (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، آنگاه نشان دهید که

آ. هر زیرمجموعهٔ متناهی از X بسته است؛

ب. هر دنبالهٔ X به حداکثر یک نقطه همگراست.

۶. فرض کنید $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ یک تابع باشد. نشان دهید f پیوسته است اگر و فقط اگر $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left[f^{-1}(B)\right]^\circ$ به ازای هر زیرمجموعهٔ B از Y برقرار باشد.

۷. اگر $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ و $g: (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$ توابعی پیوسته باشند، نشان دهید که ترکیب آنها $g \circ f: (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$ نیز پیوسته است.

۸. به ازای تابع $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ نشان دهید که

آ. هرگاه τ توپولوژی گسسته باشد، آنگاه f پیوسته است؛

ب. هرگاه τ توپولوژی ناگسسته و τ_1 یک توپولوژی هاسدورف باشد، آنگاه ثابت کنید f پیوسته است اگر و فقط اگر f یک تابع ثابت باشد.

۹. فرض کنید f و g دو تابع پیوسته از (X, τ) به توی فضای هاسدورف (Y, τ_1) باشند. همچنین،

یک زیرمجموعهٔ چگال مانند A از X باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$، $f(x) = g(x)$. نشان دهید به ازای هر $x \in X$، $f(x) = g(x)$ برقرار است.

۱۰. نشان دهید که اجتماع متناهی از مجموعه‌های هیچ جا چگال یک مجموعهٔ هیچ جا چگال است. آیا این حکم برای اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های هیچ جا چگال نیز درست است؟

۱۱. نشان دهید که مرز یک مجموعهٔ باز یا بسته هیچ جا چگال است.

۱۲. فرض کنید $f: (X, \tau) \to R$ و D مجموعهٔ تمام نقاطی از X باشد که f در آنها ناپیوسته است. هرگاه D^c در X چگال باشد، آنگاه نشان دهید که D یک مجموعهٔ نحیف است.

۱۳. نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای متری یک G_δ ـ مجموعه و هر زیرمجموعهٔ باز یک F_σ ـ مجموعه است.

۱۴. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در فضای توپولوژیک (X, τ) باشد. هرگاه به ازای هر x در یک مجموعهٔ باز دلخواه V، $B \in \mathcal{B}$ ای باشد که $x \in B \subseteq V$، آنگاه $\mathcal{B}$ را یک **پایه** برای τ می‌نامیم.

گردایهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X را یک **پایه** گوییم اگر

۱. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ و

۲. به ازای هر جفت $A, B \in \mathcal{B}$ و $x \in A \cap B$، $C \in \mathcal{B}$ ای باشد به طوری که $x \in C \subseteq A \cap B$.

نشان دهید هرگاه $\mathcal{B}$ یک پایه برای مجموعهٔ X باشد، آنگاه

$\tau = \{ V \subseteq X:$ $\forall x \in V$ عنصری مانند $B \in \mathcal{B}$ با خاصیت $x \in B \subseteq V$ موجود است $\}$

یک توپولوژی بر X است که $\mathcal{B}$ را به عنوان پایه دارد.

۱۵. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک بوده و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی τ باشد (برای تعریف، ر.ک. تمرین پیش). نشان دهید که یک زیرمجموعهٔ چگال مانند A از X هست به طوری که $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} \mathcal{B}$.

۱۶. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. هرگاه τ یک توپولوژی بر X باشد، آنگاه توپولوژی خارج قسمتی τ_f معین شده به وسیلهٔ f بر Y با $\tau_f = \{ \mathcal{O} \subseteq Y: f^{-1}(\mathcal{O}) \in \tau \}$ تعریف می‌شود.

آ. نشان دهید که τ_f درواقع یک توپولوژی بر Y است و تابع $f: (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ پیوسته است.

ب. هرگاه $g: (Y, \tau_f) \to (Z, \tau_1)$ یک تابع باشد، آنگاه نشان دهید که $g o f: (X, \tau) \to (Z, \tau_1)$ پیوسته است اگر و فقط اگر g پیوسته باشد.

پ. فرض کنید $f: X \to Y$ برو بوده و τ^* یک توپولوژی بر Y باشد به طوری که $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$

یک نگاشت باز بوده (یعنی مجموعه‌های باز از X را به روی مجموعه‌های باز از Y می‌برد) و پیوسته است. نشان دهید که $\tau^* = \tau_f$.

۱۷. در این تمرین مثالی از یک مجموعهٔ فشرده می‌زنیم که بست آن فشرده نیست. بازهٔ $[0, 1]$ را با توپولوژی τ تولید شده به‌وسیلهٔ متر $d(x, y) = |x-y|$ در نظر بگیرید. واضح است که $([0,1], \tau)$ یک فضای فشرده است. حال قرار دهید $\{..., 4, 3, 2\} \cup [0, 1] = N \cup [0, 1]$ و تعریف کنید

$$\tau^* = \tau \cup \{[0, 1] \cup A: A \subseteq N\}.$$

آ. نشان دهید که τ^* یک توپولوژی غیرهاسدورف بر X است و τ^* توپولوژی τ را به $[0, 1]$ القا می‌کند.

ب. نشان دهید که (X, τ^*) یک فضای توپولوژیک فشرده است.

پ. نشان دهید که $[0, 1]$ یک زیرمجموعهٔ فشرده از (X, τ^*) است.

ت. نشان دهید که $[0, 1]$ در X چگال است (و درنتیجه، بست آن فشرده نیست).

ث. چرا این امر قضیهٔ ۱۳.۶ (۱) را نقض نمی‌کند؟

۱۸. گوییم فضای توپولوژیک (X, τ) **همبند** است اگر زیرمجموعه‌ای از X که هم بسته و هم باز باشد (که آن را **بسباز** نیز می‌گوییم) مجموعهٔ تهی یا تمام X باشد.

آ. نشان دهید (X, τ) همبند است اگر و فقط اگر تنها توابع پیوسته از (X, τ) به توی $\{0, 1\}$ (با توپولوژی گسسته) تابعهای ثابت باشند.

ب. فرض کنید $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ برو و پیوسته باشد. هرگاه (X, τ) همبند باشد، آنگاه نشان دهید که (Y, τ^*) نیز همبند است.

۱۹. نشان دهید که تابعی مانند $f: R \to R$ وجود ندارد که اعداد گنگ را به عنوان مجموعهٔ ناپیوستگیهای خود داشته باشد.

[**راهنمایی**. از تمرین ۶ در بخش ۵ و قضیهٔ ۱۰.۶ استفاده کنید.]

۷. توابع حقیقی پیوسته

خواص فضاهای توپولوژیک ابزارهایی برای مطالعهٔ توابع حقیقی پیوسته می‌باشند. در این بخش بسیاری از خواص مهم توابع پیوسته مورد بحث قرار گرفته، و فضاهای تابعی مطرح خواهند شد. همچنین، رفتار حد یک دنباله از توابع پیوسته به تفصیل مطالعه می‌شود.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گردایهٔ تمام توابع حقیقی پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ $C(X)$ تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است؛ یعنی هرگاه f و g اعضای $C(X)$

باشند، آنگاه توابع $f + g$ و αf با تعریفهای

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$ تعلق به $C(X)$ دارند. واضح است که $C(X)$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

همچنین، $C(X)$ دارای یک ترتیب جزئی با تعریف $f \geq g$ است اگر $f(x) \geq g(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد. به علاوه، $C(X)$ چیزی است که ما شبکهٔ برداری می‌نامیم. این یعنی به ازای هر جفت $f, g \in C(X)$، کوچکترین کران بالایی $f \vee g$ و نیز بزرگترین کران پایینی $f \wedge g$ هر دو در $C(X)$ وجود دارند. اینها با فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

به ازای هر $x \in X$،

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

قدر مطلق $|f|$ تابع $f \in C(X)$ با $|f| = f \vee (-f)$ تعریف می‌شود؛ یعنی $|f|(x) = |f(x)|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. واضح است که $|f| \in C(X)$. همچنین، توجه کنید که $f \vee g$ و $f \wedge g$ در اتحادهای زیر صدق می‌کنند:

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|),$$
$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|).$$

روابط فوق نشان می‌دهند که $f \vee g$ و $f \wedge g$ توابعی پیوسته‌اند زیرا آنها را می‌توان به صورت مجموعی از تابعهای پیوسته نوشت.

چون اغلب فضاهای توابع که شخص با آنها مواجه می‌شود شبکه‌های برداری‌اند، شایسته است قدری تأمل کرده و آنها را از نزدیک مورد بررسی قرار دهیم.

به یاد آورید که رابطهٔ $\geq$ بر مجموعهٔ ناتهی X را یک ***رابطهٔ ترتیبی*** نامیم اگر از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱. به ازای هر $u \in X$، $u \geq u$ (انعکاس).

۲. هرگاه $u \geq v$ و $v \geq u$، آنگاه $u = v$ (پاد تقارن).

۳. هرگاه $u \geq v$ و $v \geq w$، آنگاه $u \geq w$ (تعدی).

علامت $v \leq u$ نمادی دیگر برای $u \geq v$ است.

فضای برداری مرتب یک فضای برداری حقیقی مانند E است همراه با یک رابطهٔ ترتیبی که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

۴. هرگاه $u \geq v$، آنگاه به ازای هر $w \in E$، $u + w \geq v + w$.

۵. هرگاه $u \geq v$، آنگاه به ازای هر $\alpha \geq 0$، $\alpha u \geq \alpha v$.

عنصر u از E را **مثبت** نامیم اگر $u \geq 0$ برقرار باشد. مجموعهٔ تمام عناصر مثبت را با E^+ نشان می‌دهیم.

شبکهٔ برداری E یک فضای برداری مرتب است با این خاصیت که به ازای هر دو عنصر $u, v \in E$، سوپرمم $u \vee v$ و اینفیمم $u \wedge v$ در E موجود باشند. یادآور شویم که دو عنصر $u, v \in E$ دارای سوپرمم w در E اند اگر $w \geq u$ و $w \geq v$ و هروقت z یک کران بالایی $\{u, v\}$ باشد، $z \geq w$ برقرار باشد. واضح است که $w = u \vee v$ به طور منحصر معین است. به عبارت دیگر، $u \vee v$ کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $\{u, v\}$ است. تعریف $u \wedge v$ مشابه خواهد بود.

هرگاه u، v، و w عنصرهایی از شبکهٔ برداری E باشند، آنگاه اتحادهای زیر برقرارند:

آ. $u \vee v = -[(-u) \wedge (-v)]$؛

ب. $u \vee v + w = (u + w) \vee (v + w)$؛

پ. $u \wedge v + w = (u + w) \wedge (v + w)$؛

ت. به ازای هر $\alpha \geq 0$، $\alpha(u \vee v) = (\alpha u) \vee (\alpha v)$.

برای آنکه به اثبات این اتحادها در یک شبکهٔ برداری اشاره کنیم، اتحاد (ب) را ثابت می‌کنیم. قرار می‌دهیم $f = u \vee v + w$ و $g = (u + w) \vee (v + w)$. کافی است نشان دهیم که هر دوی $f \geq g$ و $g \geq f$ برقرارند.

ابتدا توجه می‌کنیم که $f = u \vee v + w$ ایجاب می‌کند که $f - w = u \vee v$؛ و درنتیجه $u \leq f - w$ و $v \leq f - w$. لذا، $u + w \leq f$ و $v + w \leq f$ برقرارند؛ درنتیجه $f \geq (u + w) \vee (v + w) = g$. از آن سو، $g = (u + w) \vee (v + w)$ ایجاب می‌کند که $u + w \leq g$ و $v + w \leq g$. بنابراین، $u \leq g - w$ و $v \leq g - w$ که از آنها خواهیم داشت $u \vee v \leq g - w$. بنابراین، $f = u \vee v + w \leq g$ نیز برقرار است.

هرگاه E یک شبکهٔ برداری بوده و $u \in E$، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$u^+ = u \vee 0, \quad u^- = (-u) \vee 0, \quad |u| = u \vee (-u).$$

عنصر u^+ ***قسمت مثبت***، عنصر u^- ***قسمت منفی***، و $|u|$ ***قدر مطلق*** u نام دارد.

قضیهٔ ۱.۷. ***اتحادهای زیر برای هر عنصر u در یک شبکهٔ برداری برقرارند:***

۱. $u = u^+ - u^-$؛

۲. $|u| = u^+ + u^-$؛

۳. $u^+ \wedge u^- = 0$.

برهان. (۱) با استفاده از اتحاد (ب) فوق داریم

$$u^- + u = (-u)\vee 0 + u = 0 \vee u = u^+,$$

که از آن $u = u^+ - u^-$ حاصل می‌شود.

(۲) با استفاده از قسمتهای (ب) و (ت) داریم

$$|u| = u\vee(-u) = (2u)\vee 0 - u = 2(u\vee 0) - u = 2u^+ - u = 2u^+ - (u^+ - u^-)$$
$$= u^+ + u^-.$$

(۳) با استفاده از قسمتهای (پ) و (آ) داریم

$$u^+\wedge u^- = (u^+ - u^-)\wedge 0 + u^- = u\wedge 0 + u^- = -[(-u)\vee 0] + u^- = -u^- + u^- = 0.$$

مثالهای نوعی از شبکه‌های برداری فضاهای تابعی‌اند. ***فضای تابعی*** L یک فضای برداری از توابع حقیقی است که بر مجموعه‌ای ناتهی مانند X چنان تعریف شده‌اند که توابع $f\vee g$ و $f\wedge g$ به ازای هر جفت $f, g \in L$ تعلق به L دارند، که

$$(f\vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$
$$(f\wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

به ازای هر $x \in X$ برقرارند.

توجه کنید که به ازای هر تابع f در فضای تابعی L، عنصرهای f^+، f^-، و $|f|$ از L در روابط

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

به ازای هر $x \in X$ صدق می‌کنند. در اینجا چند مثال از فضاهای تابعی را ذکر می‌کنیم:

۱. فضای برداری R^X تمام توابع حقیقی تعریف شده بر X؛

۲. فضای برداری $B(X)$ تمام توابع حقیقی کراندار تعریف شده بر X؛

۳. فضای برداری $C(X)$ تمام توابع حقیقی پیوسته بر X (البته به این شرط که X یک فضای توپولوژیک باشد)؛

۴. فضای برداری $C_b(X)$ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار بر فضای توپولوژیک X.

دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعهٔ X که $\lim f_n(x)$ در R به ازای هر $x \in X$

موجود است را در نظر می‌گیریم. در این صورت، تابع جدید f را می‌توان با $f(x) = \lim f_n(x)$ به ازای هر $x \in X$ تعریف کرد. هرگاه این رخ دهد، آنگاه گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ **نقطه به نقطه همگرا** به f است (یا f **حد نقطه به نقطهٔ** $\{f_n\}$ است) و می‌نویسیم $f_n \to f$. به عبارت دیگر، $f_n \to f$ اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $x \in X$ عددی مانند $n_۰$ (تابع هر دوی ε و x) باشد به طوری که به ازای هر $n \geq n_۰$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

مفهوم قویتر همگرایی یک دنباله از توابع حقیقی همگرایی یکنواخت است. گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع حقیقی **به طور یکنواخت همگرا** به تابعی مانند f بر X است اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $n_۰$ (فقط تابع ε) باشد به طوری که به ازای هر $n \geq n_۰$ و هر $x \in X$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. واضح است که همگرایی یکنواخت همگرایی نقطه به نقطه را ایجاب می‌کند.

ما می‌خواهیم خواص تابع "حد" یک دنباله از توابع پیوسته را تعیین کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که حد نقطه به نقطهٔ یک دنباله از توابع پیوسته لزوماً تابعی پیوسته نیست. به عنوان مثال، $X = [۰, ۱]$ را اختیار کرده و فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع با تعریف $f_n(x) = x^n$ به ازای $x \in [۰, ۱]$ باشد. در این صورت، هر f_n یک تابع پیوسته است و $f_n \to f$ که f با $f(x) = ۰$ اگر $x \in [۰, ۱)$ و $f(۱) = ۱$ تعریف می‌شود. واضح است که f پیوسته نیست. همچنین، به آسانی معلوم می‌شود که همگرایی یکنواخت نیست.

اولین نتیجهٔ ما می‌گوید که حد یکنواخت یک دنباله از توابع پیوسته یک تابع پیوسته است.

قضیهٔ ۲.۷. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک بوده و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از $C(X)$ باشد. هرگاه $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر X همگرا باشد، آنگاه $f \in C(X)$؛ یعنی f یک تابع پیوسته است.*

برهان. باید نشان دهیم که f در هر نقطه از X پیوسته است. لذا، فرض می‌کنیم $a \in X$ و $\varepsilon > ۰$. چون $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر X همگراست، kای هست به طوری که به ازای هر $x \in X$، $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. از آن سو، چون f_k یک تابع پیوسته است، یک همسایگی مانند V از a هست به طوری که به ازای هر $x \in V$، $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$. ولی، در این صورت،

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = ۳\varepsilon$$

به ازای هر $x \in V$ برقرار است نشانگر آنکه f در $x = a$ پیوسته است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی بوده و $B(X)$ گردایهٔ تمام توابع حقیقی کراندار تعریف شده بر X باشد. واضح است که $B(X)$ یک فضای تابعی است. **نرم یکنواخت** (یا **نرم سوپرمم**) تابع $f \in B(X)$ به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

نرم یکنواخت در سه خاصیت مشخصهٔ نرم بر یک فضای برداری صدق می‌کند؛ یعنی:

۱. به ازای هر $f \in B(X)$، $\|f\|_\infty \geq 0$ و $\|f\|_\infty = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$.

۲. به ازای هر $f \in B(X)$ و هر $\alpha \in R$، $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \, \|f\|_\infty$.

۳. به ازای هر $f, g \in B(X)$، $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

هرگاه به ازای $f, g \in B(X)$ قرار دهیم $D(f, g) = \|f - g\|_\infty$، آنگاه D یک فاصله بر $B(X)$ است به نام ***فاصلهٔ یکنواخت*** (یا **متر**) به طوری که $(B(X), D)$ یک فضای متری تام است؛ ر.ک. مثال ۱۶.۵. به علاوه، با یک استدلال سر راست می‌توان نشان داد که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از $B(X)$ همگرا بـه $f \in B(X)$ ی نسبت به D است [یعنی $\lim D(f_n, f) = 0$] اگر و فقط اگر $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر X همگرا باشد. این نام "فاصلهٔ یکنواخت" را توجیه خواهد کرد.

حال فضای توپولوژیک فشردهٔ X را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۱۲.۶، هر تابع $f \in C(X)$ کراندار است؛ و لذا، $C(X) \subseteq B(X)$. بنابراین، $C(X)$ همراه با فاصلهٔ یکنواخت یک فضای متری است که، همانطور که نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد، درواقع تام می‌باشد.

قضیهٔ ۳.۷. ***هرگاه X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد، آنگاه $C(X)$ یک فضای متری تام (با فاصلهٔ یکنواخت) است.***

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $C(X)$ باشد. نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \qquad (*)$$

ایجاب می‌کند که $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in X$ یک دنبالهٔ کشی از اعداد حقیقی است. به ازای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم $f(x) = \lim f_n(x)$. حکم می‌کنیم که $f \in C(X)$ و $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$.

بـرای ایـن کـار فـرض مـی‌کنیم $\varepsilon > 0$. n_0 را طوری مـی‌گیریم کـه بـه ازای هـر $n, m \geq n_0$، $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. از نامساوی $(*)$ معلوم می‌شود که نـامساوی $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ بـه ازای هـر $n, m \geq n_0$ و هـر $x \in X$ بـرقرار است. ولی، در ایـن صـورت، بـه ازای هـر $n \geq n_0$ و هـر $x \in X$، $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. یعنی $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر X همگراست. بنابرایـن، طـبق قـضیهٔ ۲.۷، $f \in C(X)$، و به وضوح $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$.

گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع حقیقی بر مجموعهٔ X ***صعودی*** است اگر $f_n \leq f_{n+1}$ به ازای هر n برقرار

باشد (و، البته، **نزولی** است اگر $f_{n+1} \leq f_n$ به ازای هر n برقرار باشد). هر دنبالهٔ صعودی یا نزولی از توابع را یک دنبالهٔ **یکنوا** از توابع می‌نامیم.

دیدیم که همگرایی نقطه به نقطه لزوماً همگرایی یکنواخت را ایجاب نمی‌کند. نتیجهٔ مفید بعد، شرطی به ما می‌دهد که تحت آن همگرایی نقطه به نقطه همگرایی یکنواخت را ایجاب می‌کند، که نتیجه‌ای کلاسیک است به نام قضیهٔ دینی (Dini).

قضیهٔ ۴.۷. (دینی). ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد. هرگاه دنبالهٔ یکنوایی از $C(X)$ نقطه به نقطه به یک تابع پیوسته همگرا باشد، آنگاه به طور یکنواخت نیز همگراست.***

برهان. فرض کنیم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از $C(X)$ صعودی و به $f \in C(X)$ ی نقطه به نقطه همگرا باشد؛ یعنی، به ازای هر $x \in X$، $f_n(x) \uparrow f(x)$.

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$. به ازای هر n تعریف می‌کنیم $\mathcal{O}_n = \{x \in X: f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$. واضح است که هر $\mathcal{O}_n$ باز است. همچنین توجه می‌کنیم که چون $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است، پس $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ به ازای هر n برقرار می‌باشد. به علاوه، چون $f_n(x) \uparrow f(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است، به آسانی معلوم می‌شود که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$.

به خاطر فشردگی X، k ای هست به طوری که $X = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_k$؛ و درنتیجه، به ازای $n \geq k$، $X = \mathcal{O}_n$. ولی این صرفاً یعنی به ازای هر $n \geq k$ و هر $x \in X$، $0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$. به عبارت دیگر، $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر X همگرا می‌باشد.

هرگاه $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی باشد، آنگاه استدلالهای فوق را در مورد دنبالهٔ $\{-f_n\}$ به کار برید.

فرض کنیم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع پیوسته نقطه به نقطه به تابعی مانند f همگرا باشد. با آنکه f لزوماً یک تابع پیوسته نیست، اما راجع به نقاط ناپیوستگی f می‌توان چیزی گفت. نشان خواهیم داد که مجموعهٔ تمام نقاط ناپیوستگی f یک مجموعهٔ نحیف است. به یاد آورید که یک مجموعه را نحیف گوییم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع شمارشپذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال نوشت. برای این کار، به یک لم نیاز داریم.

لم ۵.۷. ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد؛ همچنین، دنبالهٔ $\{f_n\}$ از $C(X)$ نقطه به نقطه به تابعی مانند f همگرا باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ قرار می‌دهیم***

$$V_n(\varepsilon) = \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\} \text{ و } \mathcal{O}(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{V}_n(\varepsilon).$$

در این صورت، مجموعهٔ نقاطی از X که f در آنها پیوسته است مساوی $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $a \in X$ یک نقطهٔ پیوستگی f بوده و $\varepsilon > 0$. چون $\lim f_n(a) = f(a)$، k ای هست به طوری که $|f_k(a) - f(a)| < \varepsilon$. همچنین، بنابر پیوستگی f و f_k در $x = a$، یک همسایگی مانند U از a هست به طوری که به ازای هر $x \in U$، $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ و $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$. در این صورت، به ازای $x \in U$ داریم

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f_k(a)| + |f_k(a) - f_k(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

لذا، $U \subseteq V_k^{\circ}(3\varepsilon)$؛ درنتیجه، به ازای هر $\varepsilon > 0$، $a \in \mathcal{O}(3\varepsilon)$ نشانگر آنکه

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}(\frac{1}{n}).$$

حال فرض می‌کنیم $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}(\frac{1}{n})$. برای اتمام برهان، باید نشان دهیم که f در $x = a$ پیوسته است. لذا، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. n را طوری می‌گیریم که $\frac{1}{n} < \varepsilon$. از $a \in \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ نتیجه می‌شود که k ای هست به طوری که $a \in V_k^{\circ}(\frac{1}{n})$. این به نوبهٔ خود یعنی یک همسایگی مانند U از a هست که $U \subseteq V_k(\frac{1}{n})$؛ یعنی $|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ به ازای هر $x \in U$ برقرار است. چون f_k در $x = a$ پیوسته است، یک همسایگی مانند W از a هست به طوری که به ازای $x \in W$، $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$. لذا، هرگاه $a \in U \cap W$، آنگاه

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

نشانگر آنکه f در $x = a$ پیوسته است.

حال برای اثبات اینکه مجموعهٔ ناپیوستگیهای یک تابع که حد نقطه به نقطهٔ یک دنباله از توابع پیوسته است مجموعه‌ای نحیف می‌باشد حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ ۶.۷. ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک بوده و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از $C(X)$ باشد. هرگاه $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به f همگرا باشد، آنگاه مجموعهٔ D ی تمام نقاط ناپیوستگی f یک مجموعهٔ نحیف است.***

برهان. بنا بر لم قبل، داریم $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\mathcal{O}(\frac{1}{n})]^c$. برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که هر مجموعه به شکل $[\mathcal{O}(\varepsilon)]^c$ یک مجموعهٔ نحیف است؛ در این صورت، D یک مجموعهٔ نحیف است زیرا اجتماعی شمارشپذیر از مجموعه‌های نحیف می‌باشد.

لذا، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. به ازای هر m، تعریف می‌کنیم

$$F_m(\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in X: \left|f_m(x)-f_{m+i}(x)\right|\leq\varepsilon\},$$

و توجه می‌کنیم که هر $F_m(\varepsilon)$ یک مجموعهٔ بسته است. همچنین، از اینکه به ازای هر $x \in X$ داریم $\lim f_n(x) = f(x)$، به آسانی معلوم می‌شود که $X=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)$.

اگر بار دیگر از این امر استفاده کنیم که به ازای هر $x \in X$، $f_n(x) = f(x)$، به آسانی معلوم می‌شود که $F_m(\varepsilon)\subseteq V_m(\varepsilon)$ برقرار است. بنابراین، $\mathring{F}_m(\varepsilon)\subseteq \mathring{V}_m(\varepsilon)\subseteq \mathcal{O}(\varepsilon)$ برقرار است؛ و درنتیجه $\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathring{F}_m(\varepsilon)\subseteq \mathcal{O}(\varepsilon)$ نیز برقرار است. حال ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}[\mathcal{O}(\varepsilon)]^c&=X\sim\mathcal{O}(\varepsilon)\subseteq X\sim\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathring{F}_m(\varepsilon)\\&=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)\sim\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathring{F}_m(\varepsilon)\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}[F_m(\varepsilon)\sim\mathring{F}_m(\varepsilon)]=\bigcup_{m=1}^{\infty}\partial F_m(\varepsilon),\end{aligned}$$

که در آن آخرین تساوی برقرار است زیرا $F_m(\varepsilon)$ یک مجموعهٔ بسته می‌باشد. حال ملاحظه می‌کنیم که چون هر $F_m(\varepsilon)$ بسته است، مرز آن $\partial F_m(\varepsilon)$ یک مجموعهٔ هیچ جا چگال است؛ و لذا، بنابر آخرین رابطه، $[\mathcal{O}(\varepsilon)]^c$ یک مجموعهٔ نحیف می‌باشد. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

ممکن است تنها توابع پیوستهٔ حقیقی بر یک فضای توپولوژیک تابعهای ثابت باشند. به عنوان مثال، هر فضای توپولوژیک ناگسسته از این خاصیت بهره‌مند است. این فضاها مورد توجه ما نیستند. اما، همانطور که نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد، تعداد زیادی تابع حقیقی (غیرثابت) پیوسته بر یک فضای توپولوژیک هاسدورف موضعاً فشرده وجود دارد. قضیهٔ زیر صورت موضعاً فشردهٔ یک نتیجهٔ کلیتر است که به لم اوریزون (Urysohn) معروف است.

قضیهٔ ۷.۷. (اوریزون). *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف بوده و A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد. هرگاه V یک مجموعهٔ باز باشد به طوری که $A\subseteq V$، آنگاه یک تابع پیوسته مانند $f:X\to[0,1]$ هست به طوری که به ازای هر $x \in A$، $f(x) = 1$ و به ازای هر $x \in V^c$، $f(x) = 0$.*

برهان. قرار می‌دهیم $r_0 = 0$، $r_1 = 1$، و فرض می‌کنیم $r_2, r_3, \ldots$ شمارشی از اعداد گویا در بازهٔ $(0, 1)$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۵.۶، دو مجموعهٔ باز V_{r_0} و V_{r_1} با بستهای فشرده وجود دارند به طوری که $A\subseteq V_{r_1}\subseteq \overline{V}_{r_1}\subseteq V_{r_0}\subseteq \overline{V}_{r_0}\subseteq V$.

حال به استقرا عمل می‌کنیم. فرض کنیم مجموعه‌های باز $V_{r_\circ}$, ..., V_{r_n} انتخاب شده باشند که بستهای فشرده داشته و $r_j > r_i$ ایجاب کند که $A \subseteq V_{r_j} \subseteq \overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_i}$. ملاحظه می‌کنیم که در بین $r_\circ, r_1, ..., r_n$ دو عدد گویا مانند r_i و r_j هست به طوری که $r_i < r_{n+1} < r_j$ برقرار است، و هیچ عدد گویای دیگری بین $r_\circ, r_1, ..., r_n$ نیست که در بازهٔ باز (r_i, r_j) قرار داشته باشد. واضح است که

$$r_i = \max\{r_k: \circ \leq k \leq n \text{ و } r_k < r_{n+1}\}.$$

به همین نحو،

$$r_j = \min\{r_k: \circ \leq k \leq n \text{ و } r_{n+1} < r_k\}.$$

بنابر قضیهٔ ۱۵.۶، مجموعهٔ بازی مانند $V_{r_{n+1}}$ با بست فشرده هست به طوری که

$$\overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_i}.$$

لذا، اگر Q مجموعهٔ تمام اعداد گویا باشد، گردایه‌ای از مجموعه‌های باز $\{V_r: r \in Q \cap [\circ, 1]\}$ با خواص زیر به دست می‌آید:

۱. به ازای هر $r \in Q \cap [\circ, 1]$، $A \subseteq V_r \subseteq V$.

۲. هر $\overline{V}_r$ فشرده است.

۳. هرگاه $s, r \in Q \cap [\circ, 1]$ در $s > r$ صدق کنند، آنگاه $\overline{V}_s \subseteq V_r$ برقرار است.

حال تابع $f: X \to [\circ, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $f(x) = \circ$ اگر $x \notin V_\circ$ و $f(x) = \sup\{r: x \in V_r\}$ به ازای $x \in V_\circ$. واضح است که به ازای هر $x \in A$، $f(x) = 1$ و به ازای هر $x \in V^c$، $f(x) = \circ$. برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که f پیوسته است. برای این کار، فرض کنیم $a \in X$ و $\varepsilon > \circ$.

ابتدا فرض می‌کنیم $\circ \leq f(a) < 1$. دو عدد گویای s و t را در $[\circ, 1]$ چنان می‌گیریم که $f(a) < s < t < f(a) + \varepsilon$. از $\overline{V}_t \subseteq V_s$ و $f(a) < s$ نتیجه می‌شود که $a \notin \overline{V}_t$.

هرگاه $f(a) > \circ$، آنگاه عدد گویایی مانند r در $(\circ, 1)$ هست به طوری که $f(a) - \varepsilon < r < f(a)$ و $a \in V_r$. قرار می‌دهیم $U = V_r \sim \overline{V}_t$. واضح است که U یک همسایگی a است. همچنین، توجه می‌کنیم که اگر $x \in U$، $r \leq f(x) \leq t$ برقرار است. لذا، $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ به ازای هر $x \in U$ برقرار می‌باشد.

اگر $f(a) = \circ$، قرار می‌دهیم $U = X \sim \overline{V}_t$. در این صورت، U یک همسایگی a است، و به ازای $x \in U$ داریم $\circ \leq f(x) \leq t$. بنابراین، $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ به ازای هر $x \in U$ برقرار است. لذا، در هر حالت، f در a پیوسته می‌باشد.

بالأخره، در حالت $f(a) = 1$، عدد گویایی مانند $r \in (\circ, 1)$ چنان اختیار می‌کنیم که $a \in V_r$ و

$r > r - \varepsilon$. واضح است که V_r یک همسایگی a است. همچنین، هرگاه $x \in V_r$، آنگاه $r \leq f(x) \leq 1$، که از این به ازای هر $x \in V_r$، $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ نتیجه می‌شود.

مطالب فوق نشان می‌دهند که f در هر نقطهٔ $a \in X$ پیوسته است؛ و درنتیجه f یک تابع پیوسته می‌باشد. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

به عنوان کاربردی از لم اوریزون، نتیجهٔ مفیدی را ارائه می‌دهیم که در رابطه با "افرازهای واحد" است.

هرگاه $f: X \to R$ یک تابع باشد، آنگاه بست مجموعهٔ $Y = \{x \in X: f(x) \neq 0\}$ را **محافظ** f نامیم و آن را با $\operatorname{Supp} f$ نشان می‌دهیم. یعنی $\operatorname{Supp} f = \overline{Y}$. گوییم یک تابع محافظ فشرده دارد اگر محافظش مجموعه‌ای فشرده باشد.

قضیهٔ ۸.۷. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف بوده و A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد. هرگاه $V_1, \dots, V_n$ مجموعه‌های بازی باشند به طوری که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$، آنگاه توابع پیوسته‌ای مانند $f_1, \dots, f_n$ بر X صادق در خواص زیر وجود دارند:*

۱. *$0 \leq f_i(x) \leq 1$ **به ازای هر** $x \in X$ **و هر** $1 \leq i \leq n$ **برقرار است.***

۲. ***هر** f_i **محافظ فشرده دارد و** $\operatorname{Supp} f_i \subseteq V_i$.*

۳. *$\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ **به ازای هر** $x \in A$ **برقرار است.***

برهان. فرض کنیم $x \in A$. در این صورت، اندیسی مانند i $(1 \leq i \leq n)$ هست به طوری که $x \in V_i$. چون $\{x\}$ یک مجموعهٔ فشرده است، از قضیهٔ ۱۵.۶ معلوم می‌شود که یک همسایگی مانند U_x از x با بست فشرده هست به طوری که $\overline{U}_x \subseteq V_i$؛ یعنی هر $x \in A$ دارای یک همسایگی U_x با بست فشرده است که در $\overline{U}_x \subseteq V_i$ به ازای i ی صدق می‌کند.

فرض کنیم $x_1, \dots, x_m$ تعدادی متناهی نقطه از A باشند به طوری که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. به ازای هر i $(1 \leq i \leq n)$ مجموعهٔ $\mathcal{O}_i$ را اجتماع تمام U_{x_j} هایی می‌گیریم که $\overline{U}_{x_j} \subseteq V_i$ برقرار باشد (هرگاه یک چنین U_{x_j} موجود نباشد، آنگاه قرار می‌دهیم $\mathcal{O}_i = \varnothing$). واضح است که هر $\mathcal{O}_i$ مجموعهٔ بازی با بست فشرده است که در $\overline{\mathcal{O}}_i \subseteq V_i$ صدق می‌کند. به علاوه، $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ برقرار است. بنابر قضیهٔ ۱۵.۶، به ازای هر i مجموعهٔ بازی مانند B_i با بست فشرده هست به طوری که $\overline{\mathcal{O}}_i \subseteq B_i \subseteq \overline{B}_i \subseteq V_i$.

بنابر قضیهٔ ۷.۷، به ازای هر i یک تابع پیوسته مانند $g_i: X \to [0, 1]$ هست به طوری که به ازای هر $x \in \overline{\mathcal{O}}_i$، $g_i(x) = 1$ و به ازای هر $x \notin B_i$، $g_i(x) = 0$. همچنین، بنابر همان قضیه، تابع پیوسته‌ای مانند

$h:X\to[\circ, 1]$ هست به طوری که به ازای هر $x \in A$، $h(x) = 1$ و به ازای هر $x\in \left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i\right]^c$، $h(x) = \circ$. قرار می‌دهیم $g=(1-h)+\sum_{i=1}^{n} g_i$ و توجه می‌کنیم که g یک تابع پیوسته با $g(x)>\circ$ به ازای هر $x \in X$ است. حال، به ازای $i = 1, \dots, n$، قرار می‌دهیم $f_i = g_i / g$.

تحقیق برخورداری $f_1, \dots, f_n$ از خواص مطلوب را به خواننده محول می‌کنیم.

هر گردایه از توابع $f_1, \dots, f_n$ که از خواص قضیهٔ ۸.۷ برخوردار باشند یک ***افراز واحد*** برای A تحت پوشش باز $V_1, \dots, V_n$ نام دارد.

آخرین نتیجهٔ این بخش توصیف کلاسیک زیرمجموعه‌های فشردهٔ (یکنواخت) $C(X)$ است. برای این کار، به یک تعریف نیاز خواهیم داشت.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک بوده و S زیرمجموعه‌ای از $C(X)$ باشد. در این صورت، گوییم مجموعهٔ S در نقطهٔ $x \in X$ **همپیوسته** است اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$ یک همسایگی مانند V از x باشد به طوری که $y \in V$ نامساوی $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$ را به ازای هر $f \in S$ ایجاب کند. هرگاه S در هر نقطه از X همپیوسته باشد، آنگاه S را یک **مجموعهٔ همپیوسته** می‌نامیم.

همانطور که قبلاً دیدیم، در یک فضای متری یک مجموعهٔ بسته و کراندار لزوماً فشرده نیست. اما، هرگاه X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد، آنگاه یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار (نسبت به متر یکنواخت) از $C(X)$ فشرده است اگر و فقط اگر همپیوسته باشد. این امر به قضیهٔ آسکولی ـ آرزلا (Ascoli–Arzelà) معروف است و در زیر بیان می‌شود.

قضیهٔ ۹.۷ (آسکولی ـ آرزلا). *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و S زیرمجموعه‌ای از $C(X)$ باشد. در این صورت، احکام زیر هم‌ارزند:*

۱. *S زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای متری $C(X)$ (البته همراه با متر یکنواخت) است.*

۲. *S بسته، کراندار، و همپیوسته است.*

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱). از قبل می‌دانیم که یک مجموعهٔ فشرده بسته و کراندار است. آنچه می‌ماند اثبات همپیوسته بودن S است.

برای این کار، فرض کنیم $\varepsilon > \circ$. توابع $f_1, \dots, f_n \in S$ را چنان می‌گیریم که $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$. هرگاه $x \in X$، آنگاه همسایگی V_x از x را طوری می‌گیریم که به ازای هر $y \in V_x$ و هر $i = 1, \dots, n$، $|f_i(y)-f_i(x)| < \varepsilon$ برقرار باشد. حال فرض کنیم $y \in V_x$ و $f \in S$. i ی با $f \in B(f_i, \varepsilon)$ اختیار می‌کنیم.

در این صورت،

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f_i(y)|+|f_i(y)-f_i(x)|+|f_i(x)-f(x)| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = ۳\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که S در x همپیوسته است، و چون x دلخواه است، S همه جا همپیوسته می‌باشد.

(۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از S باشد. بنابر قضیهٔ ۵.۲۰، کافی است نشان دهیم که $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد.

برای این کار، $M>۰$ی صادق در $|f(x)| \leq M$ به ازای هر $x \in X$ و $f \in S$ اختیار می کنیم. با استفاده از همپیوستگی S و فشردگی X، به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر k زیرمجموعه‌ای متناهی مانند F_k از X و همسایگیهای $\{V_y: y \in F_k\}$ هست به طوری که $X=\bigcup_{y\in F_k}V_y$ و به ازای هر $x \in V_y$ و $f \in S$، $|f(x)-f(y)| < ۱/k$.

فرض کنیم $F=\bigcup_{i=۱}^{\infty}F_i$. واضح است که F حداکثر شمارشپذیر است. فرض کنیم $F = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$ شمارشی از F باشد. چون $|f_n(x_۱)| \leq M$ به ازای هر n برقرار است، زیردنباله‌ای مانند $\{g_n^۱\}$ از $\{f_n\}$ هست به طوری که $\lim g_n^۱(x_۱)$ در R وجود دارد. به همین نحو، زیردنباله‌ای مانند $\{g_n^۲\}$ از $\{g_n^۱\}$ هست به طوری که $\lim g_n^۲(x_۲)$ در R وجود دارد. اگر به همین نحو ادامه دهیم، می‌توانیم (به استقرا) دنباله‌های $\{g_n^i\}$ $(i = ۱, ۲, \ldots)$ را چنان اختیار کنیم که

آ. $\{g_n^۱\}$ زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ باشد،

ب. $\{g_n^{i+۱}\}$ زیردنباله‌ای از $\{g_n^i\}$ به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots$ بوده، و

پ. $\lim_{n\to\infty} g_n^i(x_i)$ به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots$ در R موجود باشد.

حال دنبالهٔ قطری $h_n=g_n^n$ را در نظر گرفته و توجه می‌کنیم که $\{h_n\}$ زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ است به طوری که $\lim_{n\to\infty} h_n(x_i)$ به ازای هر i در R وجود دارد. به علاوه، $\{h_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $C(X)$ است. درواقع، هرگاه k داده شده باشد، آنگاه $n_۰$ را طوری می‌گیریم که به ازای هر $n, m > n_۰$ و هر $y \in F_k$، $|h_n(y)-h_m(y)| < ۱/k$. حال اگر $x \in X$، $y \in F_k$ را طوری می‌گیریم که $x \in V_y$ و توجه می‌کنیم که

$$|h_n(x)-h_m(x)| \leq |h_n(x)-h_n(y)|+|h_n(y)-h_m(y)|+|h_m(y)-h_m(x)| < \frac{۱}{k}+\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k} = \frac{۳}{k}$$

به ازای هر $n, m > n_۰$ برقرار است. یعنی

$$\| h_n-h_m \|_\infty = \sup\{|h_n(x)-h_m(x)|: x \in X\} \leq ۳/k$$

به ازای هر $n, m > n_۰$ برقرار است؛ درنتیجه $\{h_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $C(X)$ است.

بنابر قضیهٔ ۳.۷، $\{h_n\}$ به $h \in C(X)$ی همگراست. چون S بسته است، $h \in S$ و برهان قضیه تمام خواهد بود.

فرض کنیم S زیرمجموعهٔ همپیوستهٔ کرانداری از $C(X)$ باشد که در آن X فشرده است. به آسانی معلوم می‌شود که بست (یکنواخت) $\overline{S}$ از S نیز کراندار و همپیوسته است؛ و لذا، طبق قضیهٔ آسکولی ـ آرزلا، $\overline{S}$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $C(X)$ است. این ایجاب می‌کند که هر دنبالهٔ S زیردنباله‌ای دارد که به طور یکنواخت همگراست. به خصوص، هر دنبالهٔ همپیوستهٔ کراندار زیردنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا دارد. نکتهٔ اخیر در اثبات وجود جوابهای معادلات دیفرانسیل بسیار مفید است.

تمرینات

۱. هرگاه u، v، و w عنصرهایی از یک شبکهٔ برداری باشند، آنگاه نشان دهید که اتحادهای زیر برقرارند:

آ. $u \vee v + u \wedge v = u + v$؛

ب. $u - v \vee w = (u-v) \wedge (u-w)$؛

پ. $u - v \wedge w = (u-v) \vee (u-w)$؛

ت. اگر $\alpha \geq 0$، $\alpha(u \wedge v) = (\alpha u) \wedge (\alpha v)$؛

ث. $|u-v| = u \vee v - u \wedge v$؛

ج. $u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u-v|)$؛

چ. $u \wedge v = \frac{1}{2}(u + v - |u-v|)$.

۲. نشان دهید که فضای برداری مرکب از همهٔ چند جمله‌ایها (با ضرایب حقیقی) بر R یک فضای تابعی نیست. نتیجهٔ مشابه را برای فضای برداری تمام توابع مشتقپذیر حقیقی بر R ثابت کنید.

۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. گردایهٔ L مرکب از تمام توابع حقیقی بر X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = \{f \in R^X:\ \exists \{f_n\} \subseteq C(X) \text{ به طوری که } \lim f_n(x) = f(x) ،\forall x \in X\}.$$

نشان دهید L یک فضای تابعی است.

۴. فرض کنید L یک فضای برداری از توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعهٔ X باشد. اگر به ازای هر تابع $f \in L$، تابع $|f|$ [با تعریف $|f|(x) = |f(x)|$ به ازای $x \in X$] متعلق به L باشد، ثابت کنید L یک فضای تابعی است.

۵. هر عدد گویا را به شکل m/n بنویسید که در آن $n > 0$ و اعداد صحیح m و n بدون عامل مشترک باشند. واضح است که این نمایش منحصر به فرد است. حال $f: R \to R$ را با $f(x) = 0$ اگر x گنگ باشد و $f(x) = 1/n$ اگر $x = m/n$ تعریف کنید. نشان دهید f در هر عدد گنگ پیوسته و در هر

عدد گویا ناپیوسته است.

۶. تابع $f:(X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ را یک **نگاشت باز** نامیم اگر $f(V)$ به ازای Vی باز، باز باشد. ثابت کنید هرگاه $f: R \to R$ یک نگاشت باز پیوسته باشد، آنگاه f یک تابع اکیداً یکنوا (و درنتیجه همانریختی) می‌باشد.

۷. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ صعودی باشد [یعنی $x < y$ نامساوی $f(x) \leq f(y)$ را ایجاب می‌کند]. نشان دهید که مجموعهٔ نقاطی که f در آنها ناپیوسته است حداکثر شمارشپذیر است.

[**راهنمایی.** هرگاه f در $x = c$ ناپیوسته بوده و $a < c < b$، آنگاه عدد گویایی مانند r چنان اختیار کنید که $\lim_{x\uparrow c} f(x) < r < \lim_{x \downarrow c} f(x)$.]

۸. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی باشد که بر فضای توپولوژیک X تعریف شده و به تابع پیوستهٔ f بر X به طور یکنواخت همگراست. هرگاه $\lim x_n = x$ در X برقرار باشد، آنگاه نشان دهید که $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

۹. فرض کنید $f_n: [0, 1] \to R$ با $f_n(x) = x^n$ به ازای $x \in [0, 1]$ تعریف شده باشد. نشان دهید که $\{f_n\}$ نقطه به نقطه همگراست و تابع حدی آن را بیابید. آیا همگرایی یکنواخت است؟

۱۰. فرض کنید $g: [0, 1] \to R$ یک تابع پیوسته با $g(1) = 0$ باشد. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع با تعریف $f_n(x) = x^n g(x)$ به ازای $x \in [0, 1]$ به تابع ثابت صفر به طور یکنواخت همگراست.

۱۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده‌اند، و $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله در $[a, b]$ باشند به طوری که $\lim a_n = a$ و $\lim b_n = b$. هرگاه $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت به f همگرا باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

۱۲. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته باشد که بر فضای متری X تعریف شده‌اند به طوری که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابعی مانند f بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X همگراست. نشان دهید که f یک تابع پیوسته است.

۱۳. فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دو دنبالهٔ به طور یکنواخت کراندار از توابع حقیقی بر مجموعهٔ X باشند. هرگاه هر دوی $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ به طور یکنواخت بر X همگرا باشند، آنگاه نشان دهید که $\{f_n g_n\}$ نیز بر X به طور یکنواخت همگراست.

۱۴. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی یکنوا باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده‌اند و همه لزوماً

صعودی یا نزولی نیستند. نشان دهید هرگاه $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به تابع پیوستهٔ f بر $[a, b]$ همگرا باشد، آنگاه $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر $[a, b]$ همگراست.

[**راهنمایی.** از این امر استفاده کنید که f باید بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته باشد.]

۱۵. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح ثابت $n > ۱$، مجموعهٔ توابع $f \in C[۰, ۱]$ با این خاصیت که به ازای $x \in [۰, ۱-۱/n]$ ی،

$$\text{هروقت } ۰ < h < ۱/n \text{، } |f(x+h) - f(x)| \leq nh$$

در $C[۰, ۱]$ (با متر یکنواخت) هیچ جا چگال است.

با استفاده از نتیجهٔ فوق و قضیهٔ بئر نتیجه بگیرید که یک تابع حقیقی پیوسته هست که بر $[۰, ۱]$ تعریف شده است و در هیچ نقطه از $[۰, ۱]$ مشتقپذیر نیست.

۱۶. فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ همپیوسته در $C(X)$ باشد، که در آن X لزوماً فشرده نیست. هرگاه به ازای تابعی چون $f: X \to R$ رابطهٔ $\lim f_n(x) = f(x)$ را برای هر $x \in X$ داشته باشیم، نشان دهید که $f \in C(X)$.

۱۷. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ همپیوسته در $C(X)$ باشد. همچنین، تابعی مانند $f \in C(X)$ و زیرمجموعهٔ چگالی مانند A از X باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$، $\lim f_n(x) = f(x)$ برقرار است. در این صورت، نشان دهید که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f همگراست.

۱۸. هرگاه u و v عنصرهایی در یک شبکهٔ برداری باشند، آنگاه نشان دهید که

آ. $|u+v| \vee |u-v| = |u| + |v|$ و

ب. $|u+v| \wedge |u-v| = \big||u| - |v|\big|$.

به خصوص، نشان دهید که $|u| \wedge |v| = ۰$ برقرار است اگر و فقط اگر $|u+v| = |u-v|$ برقرار باشد.

[**راهنمایی.**

$$\begin{aligned} |u+v| \vee |u-v| &= (u+v) \vee (-u-v) \vee (u-v) \vee (-u+v) \\ &= (|u|+v) \vee (|u|-v) = |u| + |v|.] \end{aligned}$$

۸. قضیهٔ تقریب استون ـ وایراشتراس

در این بخش چند شرط ارائه می‌دهیم که تحت آنها یک زیرفضای خطی از $C(X)$، که در آن X فشرده است، در $C(X)$ نسبت به متر یکنواخت چگال است. نتیجهٔ اصلی از این نوع به قضیهٔ تقریب استون ـ

وایراشتراس معروف است، که یک نتیجهٔ کلاسیک می‌باشد. پیش از اثبات این قضیه، به یک بحث مقدماتی نیاز داریم.

گوییم گردایهٔ L از توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعهٔ X **نقاط X را جدا می‌کند** اگر به ازای هر جفت از نقاط متمایز x و y از X تابعی مانند $f \in L$ باشد به طوری که $f(x) \neq f(y)$.

اولین نتیجهٔ ما در رابطه با خاصیتی از یک فضای برداری از توابع است که نقاط را جدا می‌کند. تابع **ثابت ۱** تابعی است که مقدارش در هر نقطه مساوی ۱ است.

لم ۱.۸. ***فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی بوده و L فضای برداری توابع حقیقی بر X باشد که نقاط X را جدا کرده و شامل تابع ثابت ۱ است. در این صورت، به ازای هر دو نقطهٔ متمایز x و y از X و اعداد حقیقی a و b، تابعی مانند $f \in L$ هست به طوری که $f(x) = a$ و $f(y) = b$.***

برهان. چون L نقاط X را جدا می‌کند، $g \in L$ ای هست به طوری که $g(x) \neq g(y)$. قرار می‌دهیم $c = g(x) - g(y)$. در این صورت، تابع

$$f = c^{-1}[(a-b)g + (bg(x) - ag(y))1]$$

از L در $f(x) = a$ و $f(y) = b$ صدق می‌کند.

نتیجهٔ زیر یک خاصیت تقریب موضعی را ارائه می‌دهد که با آن می‌توان یک تابع را از بالا در یک نقطهٔ داده شده تقریب کرد.

لم ۲.۸. ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و L یک فضای تابعی از توابع پیوسته باشد که شامل تابع ثابت ۱ بوده و نقاط X را جدا می‌کند. در این صورت، به ازای تابع $g \in C(X)$، نقطهٔ $a \in X$، و $\varepsilon > 0$، تابعی مانند $f \in L$ هست به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(a) = g(a)$ و $f(x) > g(x) - \varepsilon$.***

برهان. به ازای هر $x \in X$، طبق لم ۱.۸ تابعی مانند $f_x \in L$ هست به طوری که $f_x(a) = g(a)$ و $f_x(x) = g(x)$. چون f_x و g توابع پیوسته‌ای هستند، یک همسایگی مانند V_x از x هست به طوری که به ازای هر $y \in V_x$، $f_x(y) > g(y) - \varepsilon$.

چون $X = \bigcup_{x \in X} V_x$ و X فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $x_1, \ldots, x_n$ از X هست به طوری

که $X=\bigcup_{m=1}^{n}V_{x_m}$. فرض کنیم $f=f_{x_1}\vee\ldots\vee f_{x_n}$. واضح است که $f\in L$ و $f(a)=g(a)$. همچنین، هرگاه $x\in X$، آنگاه m ی هست به طوری که $x\in V_{x_m}$. لذا، $f(x)\geq f_{x_m}(x)>g(x)-\varepsilon$ برقرار است؛ یعنی تابع f در خواص مطلوب صدق می‌کند.

در زیر صورت شبکه‌ای قضیهٔ استون ـ وایراشتراس ارائه می‌شود.

قضیهٔ ۳.۸ (استون ـ وایراشتراس). ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و L یک فضای تابعی از توابع پیوسته باشد که نقاط X را جدا می‌کند و شامل تابع ثابت ۱ است. در این صورت، L در $C(X)$ نسبت به متر یکنواخت چگال است.***

برهان. فرض کنیم $g\in C(X)$ و $\varepsilon>0$. به ازای هر $x\in X$، با استفاده از لم ۲.۸، تابع پیوستهٔ $f_x\in L$ را چنان اختیار می‌کنیم که $f_x\geq g-\varepsilon$ و $f_x(x)=g(x)$. بنابر پیوستگی f_x و g، یک همسایگی مانند V_x از x هست به طوری که به ازای هر $y\in V_x$، $f_x(y)<g(y)+\varepsilon$. چون X فشرده است، نقاطی مانند $x_1,\ldots,x_n$ هست به‌طوری که $X=\bigcup_{m=1}^{n}V_{x_m}$. قرار می‌دهیم $f=f_{x_1}\wedge\ldots\wedge f_{x_n}$. واضح است که $f\in L$.

همچنین، از اینکه $f_{x_m}\geq g-\varepsilon$، به آسانی معلوم می‌شود که $f\geq g-\varepsilon$. از آن سو، هرگاه $x\in X$، آنگاه m ی هست به طوری که $x\in V_{x_m}$؛ و درنتیجه $f(x)\leq f_{x_m}(x)<g(x)+\varepsilon$ برقرار است. لذا، به ازای هر $x\in X$، $g(x)-\varepsilon\leq f(x)\leq g(x)+\varepsilon$ برقرار است؛ و درنتیجه

$$\|f-g\|_\infty=\sup\{|f(x)-g(x)|:\ x\in X\}\leq\varepsilon.$$

در اینجا برهان قضیه تمام می‌شود.

نتیجهٔ بعدی ما در رابطه با تقریب یکنواخت تابع ریشهٔ دوم به وسیلهٔ چند جمله‌ایهاست.

لم ۴.۸. ***دنباله‌ای از چندجمله‌ایها هست که در بازهٔ $[0,1]$ به طور یکنواخت به $\sqrt{x}$ همگراست.***

برهان. با تعریف $P_1(x)=0$ به ازای هر $x\in[0,1]$ آغاز کرده و سپس به استقرا به ازای $n\geq 1$ قرار می‌دهیم

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}[x-(P_n(x))^2].$$

واضح است که $\{P_n\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایهاست. حکم می‌کنیم که $0\leq P_n(x)\leq\sqrt{x}$ به ازای هر n و

هر $x \in [0, 1]$ برقرار است. اثبات این حکم را به استقرا انجام می‌دهیم. حکم به ازای $n=1$ بدیهی است. حال فرض کنیم $0 \le P_n(x) \le \sqrt{x}$ به ازای هر $x \in [0, 1]$ و n ی برقرار باشد. واضح است که $0 \le P_{n+1}(x)$ به ازای هر $x \in [0, 1]$ برقرار است. همچنین،

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}\left[x - \left[P_n(x)\right]^2\right]$$
$$= \left[\sqrt{x} - P_n(x)\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x} + P_n(x)\right]\right],$$

و دو عامل آخرین حاصل ضرب طبق فرض استقرای ما نامنفی‌اند. بنابراین، به ازای هر $x \in [0, 1]$، $P_{n+1}(x) \le \sqrt{x}$.

حال از تعریف P_{n+1} و اینکه به ازای $x \in [0, 1]$، $(P_n(x))^2 \le x$، نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\{P_n\}$ صعودی و کراندار بر $[0, 1]$ است. لذا، $\{P_n\}$ نقطه به نقطه به تابع مثبتی مانند f بر $[0, 1]$ همگراست. به آسانی نتیجه می‌شود که به ازای هر $x \in [0, 1]$، $(f(x))^2 = x$ و درنتیجه $f(x) = \sqrt{x}$.

بالأخره، چون $\sqrt{x}$ یک تابع پیوسته و $\{P_n\}$ صعودی است، قضیهٔ دینی (قضیهٔ ۴.۷) نشان می‌دهد که $\{P_n\}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت به $\sqrt{x}$ همگراست.

فضای برداری $\mathcal{A}$ از توابع حقیقی بر مجموعهٔ X یک **جبر** از توابع نام دارد اگر حاصل ضرب هر دو تابع در $\mathcal{A}$ مجدداً در $\mathcal{A}$ باشد. لذا، مجموعهٔ $\mathcal{A} \subseteq R^X$ یک جبر است اگر به ازای هر جفت $f, g \in \mathcal{A}$ و اعداد حقیقی a و b، $af + bg$ و fg در $\mathcal{A}$ باشند [که البته $(fg)(x) = f(x)g(x)$].

قضیهٔ استون ـ وایراشتراس در زیر بیان شده است.

قضیهٔ ۵.۸ (استون ـ وایراشتراس). ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع حقیقی پیوسته بر X باشد که نقاط X را جدا می‌کند و شامل تابع ثابت ۱ است. در این صورت، $\mathcal{A}$ تحت متر یکنواخت در $C(X)$ چگال است.***

برهان. فرض کنیم $\overline{\mathcal{A}}$ بست $\mathcal{A}$ در $C(X)$ نسبت به متر یکنواخت باشد. در این صورت، $\overline{\mathcal{A}}$ یک جبر بسته شامل تابع ثابت ۱ بوده و نقاط X را جدا می‌کند. باید نشان دهیم که $\overline{\mathcal{A}} = C(x)$. بنابر قضیهٔ ۳.۸، کافی است نشان دهیم که $\overline{\mathcal{A}}$ یک فضای تابعی است.

برای این کار، فرض کنیم $f \in \overline{\mathcal{A}}$ به طوری که $f \neq 0$. قرار می‌دهیم $a = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} > 0$. فرض کنیم $\{P_n\}$ دنبالهٔ چند جمله‌ایهای معین شده به

وسیلهٔ لم ۴.۸ باشد که بر $[\circ, ۱]$ به طور یکنواخت به $\sqrt{x}$ همگراست. چون $\overline{\mathfrak{A}}$ یک جبر است، تابع $g_n = P_n(f^۲/a^۲)$ به ازای هر n تعلق به $\overline{\mathfrak{A}}$ دارد. به علاوه، دنبالهٔ $\{g_n\}$ بر X به طور یکنواخت به $\sqrt{f^۲/a^۲} = |f|/|a|$ همگراست. لذا، $|f|/|a| \in \overline{\mathfrak{A}}$؛ و درنتیجه $|f| \in \overline{\mathfrak{A}}$. بنابراین، $\overline{\mathfrak{A}}$ شامل قدرمطلق هر تابع در $\overline{\mathfrak{A}}$ است. ولی، در این صورت، چون

$$f \vee g = \frac{۱}{۲}(f+g+|f-g|),$$
$$f \wedge g = \frac{۱}{۲}(f+g-|f-g|),$$

پس $f \vee g$ و $f \wedge g$ به ازای جفت $f, g \in \overline{\mathfrak{A}}$ تعلق به $\overline{\mathfrak{A}}$ دارند. به عبارت دیگر، $\overline{\mathfrak{A}}$ یک فضای تابعی است، و برهان قضیه تمام می‌شود.

چون گردایهٔ تمام چندجمله‌ایها بر R یک جبر از توابع پیوسته تشکیل می‌دهد که شامل تابع ثابت ۱ بوده و نقاط R را جدا می‌کند، نتیجهٔ اصلی زیر از کا. وایراشتراس فوراً از آخرین قضیه حاصل خواهد شد.

نتیجهٔ ۶.۸ (وایراشتراس). ***هر تابع حقیقی پیوسته بر زیرمجموعهٔ فشردهٔ A از R حد یکنواخت یک دنباله از چندجمله‌ایها بر A است.***

تمرینات

۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد. به ازای زیرمجموعهٔ L از $C(X)$، فرض کنید $\overline{L}$ بست یکنواخت L در $C(X)$ باشد. نشان دهید که
   آ. هرگاه L یک فضای تابعی باشد، آنگاه $\overline{L}$ نیز چنین است.
   ب. هرگاه L یک جبر باشد، آنگاه $\overline{L}$ نیز چنین است.

۲. فرض کنید L گردایهٔ تمام توابع قطعه قطعه خطی پیوسته باشد که بر $[\circ, ۱]$ تعریف شده‌اند. یعنی $f \in L$ اگر و فقط اگر $f \in C[\circ, ۱]$ و تعدادی متناهی نقطه مانند $\circ = x_\circ < x_۱ < \dots < x_n = ۱$ (تابع f) موجود باشند به طوری که f بر هر بازهٔ $[x_{m-۱}, x_m]$ خطی باشد. نشان دهید که L یک فضای تابعی است ولی یک جبر نیست. به علاوه، نشان دهید که L در $C[\circ, ۱]$ نسبت به متر یکنواخت چگال است.

۳. هرگاه f یک تابع پیوسته بر $[\circ, ۱]$ باشد به طوری که به ازای $n = \circ, ۱, \dots$، $\int_\circ^۱ x^n f(x)dx = \circ$، آنگاه نشان دهید که به ازای هر $x \in [\circ, ۱]$، $f(x) = \circ$.

۴. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع حقیقی پیوسته باشد که بر فضای توپولوژیک فشردهٔ X تعریف شده و نقاط X را جدا می‌کند. نشان دهید که بست $\overline{\mathcal{A}}$ از $\mathcal{A}$ در $C(X)$ نسبت به متر یکنواخت یا همهٔ $C(X)$ است یا $a \in X$ ای هست به طوری که $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X): f(a) = ۰\}$.

[**راهنمایی.** با نگاهی به برهان لم ۴.۸ معلوم می‌شود که چندجمله‌ایهای $P_n(x)$ که $\sqrt{x}$ را به طور یکنواخت بر $[۰, ۱]$ به $\sqrt{x}$ تقریب می‌کنند دارای جملات ثابت صفرند. این ایجاب می‌کند که به ازای هر $f \in \overline{\mathcal{A}}$، $|f|$ و $\sqrt{|f|}$ در $\overline{\mathcal{A}}$ می‌باشند.]

۵. فرض کنید $\mathcal{A}$ فضای برداری تولید شده به وسیلهٔ توابع $۱, \sin x, \sin^۲ x, \sin^۳ x, \ldots$ باشد که بر $[۰, ۱]$ تعریف شده‌اند؛ یعنی $f \in \mathcal{A}$ اگر و فقط اگر عدد صحیح نامنفی k و اعداد حقیقی $a_۰, \ldots, a_k$ (همه تابع f) وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in [۰, ۱]$، $f(x) = \sum_{n=۰}^{k} a_n \sin^n x$. نشان دهید که $\mathcal{A}$ یک جبر است و $\mathcal{A}$ در $C[۰, ۱]$ نسبت به متر یکنواخت چگال می‌باشد.

۶. فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ R باشد. نشان دهید که $C(X)$ یک فضای متری جدایی‌پذیر (تحت متر یکنواخت) است.

۷. تمرین قبل را به صورت زیر تعمیم دهید: نشان دهید هرگاه (X, d) یک فضای متری فشرده باشد، آنگاه $C(X)$ یک فضای متری جدایی‌پذیر است.

[**راهنمایی.** فرض کنید $\{x_n\}$ یک زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر از X بوده و $f_n(x) = d(x, x_n)$. اگر $\mathcal{A}$ جبر تولید شده به وسیلهٔ توابع $۱, f_۱, f_۲, \ldots$ باشد، نشان دهید که $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$.]

۸. نشان دهید که جبر تولید شده به وسیلهٔ مجموعهٔ $\{۱, x^۲\}$ در $C[۰, ۱]$ چگال است ولی در $C[-۱, ۱]$ نیست.

۹. فرض کنید X و Y دو فضای متری فشرده باشند. حاصل ضرب دکارتی $X \times Y$ همراه با فاصلهٔ $D_۱$ داده شده در تمرین ۱۰ از بخش ۵ را در نظر بگیرید؛ درنتیجه $X \times Y$ یک فضای متری فشرده است. نشان دهید هرگاه $f \in C(X \times Y)$ و $\varepsilon > ۰$، آنگاه توابعی مانند $\{f_۱, \ldots, f_n\} \subseteq C(X)$ و $\{g_۱, \ldots, g_n\} \subseteq C(Y)$ وجود دارند به طوری که

$$\left| f(x, y) - \sum_{i=۱}^{n} f_i(x) g_i(y) \right| < \varepsilon$$

به ازای هر $(x, y) \in X \times Y$ برقرار است.

[**راهنمایی.** جبر تولید شده در $C(X \times Y)$ به وسیلهٔ توابع $F(x, y) = f(x)$ و $G(x, y) = g(y)$ به ازای $f \in C(X)$ و $g \in C(Y)$ را در نظر بگیرید.]

مسائل دوره‌ای

۱. هرگاه $\{\mathcal{O}_i:\ i \in I\}$ یک پوشش باز برای فضای توپولوژیک X باشد، آنگاه نشان دهید که زیرمجموعهٔ A از X بسته است اگر و فقط اگر $A \cap \mathcal{O}_i$ در $\mathcal{O}_i$ به ازای هر i بسته باشد (که $\mathcal{O}_i$ با توپولوژی نسبی مجهز است).

۲. هرگاه A زیرمجموعهٔ دلخواهی از یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، آنگاه نشان دهید که مجموعهٔ مشتقش A' یک مجموعهٔ بسته است.

۳. فرض کنید $f, f_۱, f_۲, \ldots$ توابعی حقیقی باشند که بر فضای متری فشردهٔ (X, d) تعریف شده‌اند به طوری که $x_n \to x$ در X ایجاب کند که $f_n(x_n) \to f(x)$ در R. هرگاه f پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع به f به طور یکنواخت همگراست.

۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک بوده و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوستهٔ حقیقی باشد که بر X تعریف شده‌اند. همچنین، تابعی مانند $f: X \to R$ باشد به طوری که $f(x) = \lim f_n(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد. نشان دهید f در نقطهٔ a پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و هر m یک همسایگی مانند V از a و $k > m$ ای باشد به طوری که به ازای هر $x \in V$، $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ برقرار است.

۵. به ازای هر n، فرض کنید $f_n: R \to R$ یک تابع یکنوا (صعودی یا نزولی) باشد. هرگاه زیرمجموعهٔ چگالی مانند A از R باشد به طوری که $\lim f_n(x)$ در R به ازای هر $x \in A$ موجود باشد، آنگاه $\lim f_n(x)$ در R حداکثر به ازای همه جز تعدادی شمارشپذیر x وجود دارد.

۶. تابع پیوستهٔ $f: [۰, \infty) \to R$ را در نظر بگیرید. به ازای هر n، تابع پیوستهٔ $f_n: [۰, \infty) \to R$ را با $f_n(x) = f(x^n)$ تعریف کنید. نشان دهید که مجموعهٔ توابع پیوستهٔ $\{f_۱, f_۲, \ldots\}$ در $x = ۱$ همپیوسته است اگر و فقط اگر f یک تابع ثابت باشد.

۷. فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ به طور یکنواخت کراندار از توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ باشد. نشان دهید که دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از توابع تعریف شده با $\phi_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ به ازای هر $x \in [a, b]$ شامل یک زیردنبالهٔ به طور یکنواخت همگرا بر $[a, b]$ است.

۸. فرض کنید (X, d) یک فضای متری فشرده بوده و $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ همپیوسته‌ای از $C(X)$ باشد. نشان دهید که $\mathcal{A}$ به طور یکنواخت همپیوسته است؛ یعنی نشان دهید که به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ هست به طوری که $x, y \in X$ و $d(x, y) < \delta$ ایجاب می‌کنند که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

۹. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند بوده (برای تعریف، ر.ک. مسئلهٔ ۱۸.۶) و $\mathcal{A}$

زیرمجموعهٔ همپیوسته‌ای از $C(X)$ باشد. هرگاه به ازای $x_\circ \in X$ی، مجموعهٔ اعداد حقیقی $\{f(x_\circ):\ f \in \mathfrak{A}\}$ کراندار باشد، آنگاه نشان دهید که $\{f(x): f \in \mathfrak{A}\}$ نیز به ازای هر $x \in X$ کراندار است.

۱۰. نشان دهید که تابع پیوستهٔ $f:(\circ,\ ۱) \to R$ حد یکنواخت دنباله‌ای از چند جمله‌ایها بر $(\circ,\ ۱)$ است اگر و فقط اگر توسیع پیوسته‌ای به $[\circ,\ ۱]$ را بپذیرد.

۱۱. هرگاه f یک تابع پیوسته بر $[\circ,\ ۱]$ باشد به طوری که به ازای $n = \circ,\ ۱,\ ۲,\ \ldots$، $\int_\circ^۱ f\left(\sqrt[۲n+۱]{x}\right) dx = \circ$، آنگاه نشان دهید که به ازای هر $x \in [\circ,\ ۱]$، $f(x) = \circ$. آیا این نتیجه درصورت تعویض بازهٔ $[\circ,\ ۱]$ با $[-۱,\ ۱]$ هنوز برقرار است؟

۱۲. نشان دهید که تابع به طور یکنواخت کراندار پیوستهٔ $f: [\circ,\ \infty) \to R$ متحد صفر است (یعنی $f = \circ$) اگر و فقط اگر به ازای هر $n = ۱,\ ۲,\ ۳,\ \ldots$، $\int_۱^\infty f(x)e^{-nx}dx = \circ$.

۱۳. نشان دهید که تابع به طور یکنواخت کراندار پیوستهٔ $f: [۱,\ \infty) \to R$ متحد صفر است اگر و فقط اگر به ازای هر $n = ۸,\ ۹,\ ۱۰,\ \ldots$، $\int_۱^\infty x^{-n}f(x)dx = \circ$.

کتابنامه

1. J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis.* New York: Academic Press, 1969.
2. C. Goffman, *Real Functions.* New York: Prindle, Weber & Schmidt, 1953.
3. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* Heidelberg: Springer–Verlag, 1965.
4. J.L. Kelley, *General Topology.* Princeton, NJ: Van Nostrand, 1955.
5. W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* 2nd Ed. New York: McGraw–Hill, 1974.
6. G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw–Hill, 1963.

فصل ۳

نظریهٔ اندازه

در پایان قرن نوزده ریاضیدانان می‌دانستند که خواص توابع پیوسته و نظریهٔ انتگرالگیری ریمان (Riemann) برای حل مسائل زیادی در آنالیز کافی نیستند. ناکافی بودن توابع پیوسته آنها را به تحقیق در رده‌های متفاوتی از توابع که جواب مسائل مختلف را به دست دهند واداشت.

در آغاز قرن بیستم، نظریهٔ اندازه پا گرفت. در آن زمان معلوم شد که برای درک بهتری از ساختار توابع باید زیرمجموعه‌های فضاهای اقلیدسی بررسی جامعی بشوند. برای مطالعهٔ این مجموعه‌ها معلوم شد که مفاهیمی چون "طول" و "سطح" باید تعمیم یابند. تحقیق در طرق انتساب "اندازه" به یک مجموعه از نقاط ریشه در این دوره دارد.

ای بورل (E.Borel) [۱] در سال ۱۸۹۸ نخستین کسی بود که نظریهٔ اندازه را بر زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی که امروزه به مجموعه‌های بورل معروفند پایه گذارد. چیزی نگذشت (در سال ۱۹۰۲) که اچ. لبگ (H.Lebesgue) [۴] اندازهٔ لبگ را ارائه داد و کمی بعد (حدود ۱۹۱۸) سی. کاراتئودوری (C.Carathéodory) خواص اندازه‌های خارجی را معرفی و مطالعه کرد. پس از آن نظریهٔ اندازه به سرعت توسعه یافت و در این راه معروفترین ریاضیدان نیمهٔ اول این قرن شرکت داشتند.

در این فصل، نظریهٔ اندازه به تفصیل مطرح می‌شود. بحث را با معرفی مفهوم نیم حلقه از مجموعه‌ها آغاز کرده و سپس خواص اندازه‌ها بر نیم حلقه‌ها را مطالعه می‌کنیم. سپس مفهوم مهم اندازهٔ خارجی معرفی و مطالعه می‌شود. بعد از آن مجموعه‌های اندازه‌پذیر و توابع اندازه‌پذیر به تفصیل بررسی می‌شوند. سپس به خواص توابع ساده و پله‌ای و خواص اصلی اندازهٔ لبگ می‌پردازیم. بالأخره، فصل با بررسی همگرایی در اندازه پایان خواهد یافت.

۹. نیم حلقه‌ها و جبرهای مجموعه‌ها

در این بخش مفهوم نیم حلقه از مجموعه‌ها معرفی شده و خواص آن مطالعه می‌شود. یک نیم حلقه از مجموعه‌ها ساده‌ترین خانواده از مجموعه‌هاست که می‌توان نظریهٔ اندازه را برای آن ساخت. معلوم شده است که "معقولترین" گردایه‌ها از مجموعه‌ها در خواص نیم حلقه صدق می‌کنند.

تعریف ۱.۹. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. گردایهٔ S از زیرمجموعه‌های X را یک **نیم**

حلقه نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

۱. مجموعهٔ تهی متعلق به S باشد؛ یعنی $\varnothing \in S$.

۲. هرگاه $A, B \in S$، آنگاه $A \cap B \in S$.

۳. به ازای هر دو مجموعه از S، تفاضلشان را بتوان به صورت اجتماعی متناهی از اعضای از هم جدای S نوشت. یعنی، به ازای هر $A, B \in S$، مجموعه هایی چون $C_1, \ldots, C_n$ در S (تابع A و B) وجود داشته باشند که $A \sim B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ و اگر $i \neq j$، $C_i \cap C_j = \varnothing$.

حال فرض کنیم S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های X باشد. زیرمجموعهٔ A از X را یک **σـ مجموعه** نسبت به S (یا فقط یک σ ـ مجموعه) نامیم اگر دنباله‌ای از هم جدا مانند $\{A_n\}$ از S (یعنی، اگر $n \neq m$، $A_n \cap A_m = \varnothing$) موجود باشد به طوری که $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. هرگاه $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ با $A_1, \ldots, A_n \in S$ و به ازای $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \varnothing$، آنگاه A یک σ- مجموعه است. برای مشاهدهٔ این امر، به ازای $i > n$ قرار می‌دهیم $A_i = \varnothing$. از تعریف ۱.۹ به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر جفت A و B از S، $A \sim B$ یک σ- مجموعه است.

در قضیهٔ زیر خواص اصلی σ- مجموعه‌ها بیان شده است.

قضیهٔ ۲.۹. *احکام زیر برای نیم حلقهٔ S برقرارند:*

۱. ***هرگاه $A \in S$ و $A_1, \ldots, A_n \in S$، آنگاه $A \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از مجموعه‌های از هم جدا از S نوشت (و درنتیجه، یک σ- مجموعه است).***

۲. ***به ازای هر دنبالهٔ $\{A_n\}$ از S، مجموعهٔ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ یک σ- مجموعه است.***

۳. ***اجتماعهای شمارشپذیر و اشتراکهای متناهی از σ- مجموعه‌ها، σ- مجموعه‌اند.***

برهان. (۱) روی n استقرا می‌کنیم. به ازای $n = 1$، حکم طبق تعریف نیم حلقه درست است. حال فرض کنیم حکم به ازای nی درست باشد. فرض کنیم $A \in S$ و $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \in S$. بنابر فرض استقرا، $B_1, \ldots, B_k \in S$ هست به‌طوری که $B = A \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ و $B_i \cap B_j = \varnothing$ اگر $i \neq j$. درنتیجه،

$$A \sim \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = B \sim A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (B_i \sim A_{n+1}).$$

بنابر خاصیت (۳) از تعریف ۱.۹، هر $B_i \sim A_{n+1}$ را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از مجموعه‌های از هم جدا از S نوشت. چون به ازای $i \neq j$ داریم $B_i \cap B_j = \varnothing$، به آسانی معلوم می‌شود که

$A \sim \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از مجموعه‌های از هم جدا از S نوشت. این استقرا برهان (۱) را تمام خواهد کرد.

(۲) فرض کنیم $\{A_n\} \subseteq S$. قرار می‌دهیم $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و می‌نویسیم $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ با $B_1 = A_1$ و به ازای $n \geq 1$، $B_{n+1}=A_{n+1} \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. ملاحظه می‌کنیم که اگر $i \neq j$، $B_i \cap B_j = \varnothing$، و بنابر حکم (۱)، هر B_i یک σ- مجموعه است. حال به آسانی معلوم می‌شود که A یک σ- مجموعه است.

(۳) اثبات از قسمت (۲) و خاصیت (۲) تعریف ۱.۹ حاصل می‌شود.

تبصره. از برهان قسمت (۲) و قضیهٔ قبل می‌توان به آسانی دید که هرگاه $\{A_n\}$ دنباله‌ای از S باشد، آنگاه یک دنبالهٔ از هم جدا مانند $\{C_n\}$ از S هست به طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ و به ازای هر n عددی مانند k هست که $C_n \subseteq A_k$.

بعضی از گردایه‌های طبیعی از مجموعه‌ها در خواص دیگری که از خواص نیم حلقه قویترند صدق می‌کنند. "جبر مجموعه‌ها" یکی از این گردایه‌هاست، و تعریفش در زیر آمده است.

تعریف ۳.۹. فرض کنیم S گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌ها از مجموعهٔ ناتهی X باشد. گردایهٔ S را یک ***جبر از مجموعه‌ها*** (یا فقط یک **جبر**) نامیم اگر در خواص زیر صدق نماید:

یک. هرگاه $A, B \in S$، آنگاه $A \cap B \in S$.

دو. هرگاه $A \in S$، آنگاه $A^c \in S$.

در قضیهٔ زیر خواص اصلی یک جبر بیان شده است.

قضیهٔ ۴.۹. *احکام زیر برای یک جبر از مجموعه‌ها مانند S برقرارند:*

۱. $\varnothing, X \in S$.

۲. ***جبر S تحت اجتماعها و اشتراکهای متناهی بسته است.***

۳. ***S یک نیم حلقه است.***

برهان. (۱) چون S ناتهی است، $A \in S$ای وجود دارد. حال، طبق فرض، $A^c \in S$؛ و درنتیجه $\varnothing = A \cap A^c \in S$. به علاوه، $X = \varnothing^c \in S$.

(۲) فرض کنیم $A, B \in S$. در این صورت، $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in S$، و بقیهٔ برهان را می‌توان به

آسانی به استقرا کامل کرد.

(۳) فقط باید خاصیت (۳) تعریف ۱.۹ را تحقیق کنیم. ولی این امر به خاطر رابطهٔ $A\sim B = A\cap B^c$ واضح است.

بحث را با توضیح مفاهیم نیم حلقه و جبر مجموعه‌ها به وسیلهٔ مثالها ادامه می‌دهیم.

مثال ۵.۹. به ازای هر مجموعهٔ ناتهی X، گردایهٔ $S = \{\varnothing, X\}$ یک جبر از مجموعه‌هاست. این "کوچکترین" جبر ممکن (نسبت به شمول) می‌باشد.

مثال ۶.۹. به ازای هر مجموعهٔ ناتهی X، مجموعهٔ توانی‌اش $\mathcal{P}(X)$ (یعنی گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های X) یک جبر تشکیل می‌دهد. این "بزرگترین" جبر ممکن خواهد بود.

مثال ۷.۹. هرگاه $a, b \in R$ در $a \le b$ صدق کنند، آنگاه می‌نویسیم $[a, b) = \varnothing$ اگر $a = b$ و (طبق معمول) اگر $a < b$، $[a, b) = \{x \in R : a \le x < b\}$. در این صورت، گردایهٔ $S = \{[a, b) : a \le b$ و $a, b \in R\}$ یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های R است که یک جبر نیست [به عنوان مثال، $[0, 1)\cup[2, 3) \notin S$].

نیم حلقهٔ مثال پیش به‌دلیل کاربردهای بی‌شمارش بسیار مهم است. در زیر، مشابه آن در ابعاد بالاتر عرضه شده است.

مثال ۸.۹. فرض کنیم S گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های A از R^n باشد که به ازای آن بازه‌هایی چون $[a_1, b_1), \ldots, [a_n, b_n)$ با $a_i \le b_i$ به ازای $1 \le i \le n$ موجودند به طوری که $A = [a_1, b_1)\times\ldots\times[a_n, b_n)$. [هرگاه به ازای i ی، $a_i = b_i$، آنگاه $[a_i, b_i) = \varnothing$؛ و درنتیجه $A = \varnothing$] در این صورت، S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های R^n است. برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا توجه می‌کنیم که فقط خاصیت سوم نیم‌حلقه نیاز به تحقیق دارد؛ دو خاصیت دیگر بدیهی می‌باشند. برهان مبتنی بر اتحاد زیر میان مجموعه‌های A، B، C، و D است:

$$A\times B \sim C\times D = [(A\sim C)\times B]\cup[(A\cap C)\times(B\sim D)], \qquad (*)$$

که در آن مجموعه‌های آمده در اجتماع سمت راست ازهم جدایند.

برای اثبات، روی n استقرا می‌کنیم. به ازای $n = 1$، نتیجه سرراست است. حال فرض کنیم به ازای

nی درست باشد. باید نشان دهیم که هر مجموعه به شکل

$$[a_1, b_1)\times\ldots\times[a_n, b_n)\times[a_{n+1}, b_{n+1}) \sim [c_1, d_1)\times\ldots\times[c_n, d_n)\times[c_{n+1}, d_{n+1})$$

را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از مجموعه‌های از هم جدا از گردایهٔ $(n+1)$ بعدی S نوشت. ولی این را می‌توان به آسانی با قرار دادن

$$A = [a_1, b_1)\times\ldots\times[a_n, b_n), B = [a_{n+1}, b_{n+1}),$$
$$C = [c_1, d_1)\times\ldots\times[c_n, d_n), D = [c_{n+1}, d_{n+1})$$

در $(*)$ و استفاده از فرض استقرا نشان داد.

یک مفهوم میانی بین نیم حلقه‌ها و جبرها حلقهٔ مجموعه‌هاست. یک ***حلقه از مجموعه‌ها*** (یا فقط یک **حلقه**) گردایه‌ای ناتهی از مجموعه‌ها مانند R بر مجموعهٔ X است که از دو خاصیت زیر بهره‌مند است:

آ. هرگاه $A, B \in R$، آنگاه $A\cup B \in R$.

ب. هرگاه $A, B \in R$، آنگاه $A\sim B \in R$.

هر حلقهٔ R شامل مجموعهٔ تهی است. درواقع، چون R ناتهی است، $A \in R$ای وجود دارد؛ و درنتیجه $\varnothing = A\sim A \in R$. واضح است که هر جبر از مجموعه‌ها یک حلقه از مجموعه‌هاست. همچنین، حلقهٔ R لزوماً یک نیم حلقه است. درواقع، هرگاه $A, B \in R$، آنگاه رابطهٔ $A\cap B = A\sim(A\sim B)$ نشان می‌دهد که $A\cap B \in R$.

مفهوم مفید دیگر σ- جبر از مجموعه‌ها می‌باشد.

تعریف ۹.۹. جبر S از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X را یک **σ- جبر** نامیم اگر هر اجتماع از یک گردایهٔ شمارشپذیر از اعضای S مجدداً در S باشد. یعنی، علاوه بر اینکه S یک جبر است، اجتماع $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ به ازای هر دنبالهٔ $\{A_n\}$ از S تعلق به S داشته باشد.

از رابطهٔ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right]^c$ به آسانی معلوم می‌شود که هر σ- جبر از مجموعه‌ها تحت اشتراکهای شمارشپذیر نیز بسته است.

هر گردایه از زیرمجموعه‌های $\mathscr{F}$ از مجموعهٔ ناتهی X مشمول کوچکترین (نسبت به رابطهٔ شمول) σ- جبر است. این σ- جبر اشتراک تمام σ- جبرهایی است که شامل $\mathscr{F}$ اند [$\mathcal{P}(X)$ یکی از آنهاست]، و آن را ***σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ $\mathscr{F}$*** می‌نامند.

یک σ- جبر مهم از مجموعه‌ها σ- جبر تمام مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک است. تعریف آن در زیر آمده است.

تعریف ۹.۱۰. مجموعه‌های بورل فضای توپولوژیک (X, τ) اعضای σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ مجموعه‌های باز (یعنی به وسیلهٔ τ) می‌باشند.

σ- جبر تمام مجموعه‌های بورل (X, τ) را با $\mathcal{B}$ نشان خواهیم داد.

تمرینات

۱. فرض کنید S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X بوده و $Y \subseteq X$. نشان دهید که $S_Y = \{Y \cap A : A \in S\}$ یک نیم حلقه از Y (به نام **تحدید** S به Y) است.

۲. فرض کنید S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد. چه شرطهای دیگری باید برای S برقرار باشند تا یک پایه برای یک توپولوژی بر X گردد؟ (برای تعریف پایه، ر.ک. تمرین ۱۴ از بخش ۶.) ثابت کنید که در این صورت هر عضو S در این توپولوژی هم باز و هم بسته است.

۳. ثابت کنید σ- مجموعه‌های نیم حلقهٔ

$$S = \{[a, b) : a \le b \text{ و } a, b \in R\}$$

یک توپولوژی برای اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

۴. فرض کنید S گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های $[0, 1)$ باشد که بتوان آنها را به صورت اجتماعهای متناهی از زیرمجموعه‌های $[0, 1)$ به شکل $[a, b)$ همراه با مجموعهٔ تهی نوشت. نشان دهید که S یک جبر از مجموعه‌هاست ولی یک σ- جبر نیست.

۵. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی بوده و $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. نشان دهید که هر عنصر از σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ $\mathcal{F}$ تعلق به σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ زیرگردایه‌ای شمارشپذیر از $\mathcal{F}$ دارد.

۶. فضاهای متری X که در آنها مجموعه‌های باز یک σ- جبر تشکیل می‌دهند را توصیف نمایید.

۷. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ثابت از مجموعهٔ X باشد. دو σ- جبر از زیرمجموعه‌های X تولید شده به وسیلهٔ

آ. $\{A\}$،

ب. $\{B : A \subseteq B \subseteq X\}$

را معین نمایید.

۸. σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ زیرمجموعه‌های هیچ جا چگال یک فضای توپولوژیک را معین نمایید.

۹. فرض کنید X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر باشد، و قرار دهید

$$S = \{ E \subseteq X : \text{حداکثر شمارشپذیر است } E^c \text{ یا } E \}.$$

نشان دهید که S، σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ زیرمجموعه‌های یک نقطه‌ای X است.

۱۰. نشان دهید که هر σ- جبر نامتناهی از مجموعه‌ها تعدادی شمارش‌ناپذیر از مجموعه‌ها را دارد.

۱۱. نشان دهید کـه هـر F_σ- زیـرمجموعه و G_δ- زیـرمجموعه از یک فـضای تـوپولوژیک یک مجموعهٔ بورل است.

۱۲. فرض کنید $A_1, \ldots, A_n$ مجموعه‌های نیم حلقهٔ S باشند. نشان دهید که تعدادی متناهی مجموعهٔ دو بدو از هم جدا مانند $B_1, \ldots, B_m$ از S هست به طوری که هـر A_i را مـی‌توان بـه صـورت اجتماعی از مجموعه‌ها از $B_1, \ldots, B_m$ نوشت.

[**راهنمایی.** از استقرا روی n و قضیهٔ ۲.۹ (۱) استفاده نمایید.]

۱۰. اندازه‌ها روی نیم حلقه‌ها

اگر نخواهیم روی نیم حلقه‌ها اندازه تعریف کنیم، نیم حلقه‌ها اهمیتی برای ما ندارند. مفهوم اندازه را می‌توان تعمیمی از مفاهیم طول و سطح گرفت و تعریفش در زیر داده شده است.

تعریف ۱.۱۰. فرض کنیم S نیم حـلقه‌ای از زیـرمجموعه‌های مـجموعه‌ای مـانند X بـاشد. تـابع (مجموعه‌ای) $\mu : S \to [0, \infty]$ را یک ***اندازه*** بر S نامیم اگر از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱. $\mu(\varnothing) = 0$.

۲. هرگاه $\{A_n\}$ دنباله‌ای از هم جدا از S با $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ باشد، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

برقرار است؛ یعنی μ، σ- جمعی است.

سه تایی (X, S, μ) که در آن X یک مجموعهٔ ناتهی، S زیرحلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X، و μ یک اندازه روی S است، یک ***فضای اندازه*** نام دارد.

قضیهٔ ۲.۱۰. ***احکام زیر برای فضای اندازهٔ*** (X, S, μ) ***برقرارند:***

۱. هرگاه $A_1, ..., A_n \in S$ دو به دو از هم جدا بوده و $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$؛ یعنی μ به طور متناهی جمعی است.

۲. هرگاه $A, B \in S$ در $A \subseteq B$ صدق کنند، آنگاه $\mu(A) \le \mu(B)$ برقرار است؛ یعنی μ یکنوا می‌باشد.

برهان. (۱) اگر $A_1, ..., A_n \in S$ مجموعه‌های دوبدو از هم جدا باشند به طوری که $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$، به ازای $i > n$ قرار می‌دهیم $A_i = \varnothing$. در این صورت، $\{A_i\}$ یک دنبالهٔ از هم جدا از S است که در $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \in S$ صدق می‌کند. لذا، طبق σ- جمعی بودن μ، داریم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

که در آن به خاطر $\mu(\varnothing) = 0$ تساوی آخر برقرار است.

(۲) فرض کنیم $A, B \in S$ در $A \subseteq B$ صدق کنند. گردایهٔ متناهی از مجموعه‌های از هم جدای $C_1, ..., C_n$ از S را چنان اختیار می‌کنیم که $B \sim A = \bigcup_{i=1}^n C_i$. در این صورت، $B = A \cup C_1 \cup ... \cup C_n$ یک اجتماع متناهی از مجموعه‌های از هم جدا از S است. لذا، طبق (۱)،

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + ... + \mu(C_n) \ge \mu(A)$$

برقرار است، و برهان قضیه تمام خواهد بود.

بحث را با چند مثال از فضاهای اندازه ادامه می‌دهیم.

مثال ۳.۱۰ (اندازهٔ شمارشی). فرض کنیم X یک مجموعه بوده و $S = \mathcal{P}(X)$. $\mu: S \to [0, \infty]$ را این طور تعریف می‌کنیم که اگر A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از X باشد، $\mu(A) = \infty$ و اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد عناصر $A = \mu(A)$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که (X, S, μ) یک فضای اندازه است.

مثال ۴.۱۰ [اندازهٔ دیراک (Dirac)]. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی بوده و $S = \mathcal{P}(X)$. عنصر $a \in X$ را ثابت گرفته و $\mu: S \to [0, \infty]$ را با $\mu(A) = 0$ اگر $a \notin A$ و $\mu(A) = 1$ اگر $a \in A$ تعریف می‌کنیم. به آسانی معلوم می‌شود که (X, S, μ) یک فضای اندازه است.

مثال ۵.۱۰. فرض کنیم تابع $f: R \to R$ نانزولی و پیوستهٔ چپ باشد [یعنی $\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a)$ به

ازای هر $a \in R$ برقرار است]. نیم حلقهٔ $S = \{[a, b): a \leq b$ و $a, b \in R\}$ را در نظر می‌گیریم؛ ر.ک. مثال ۷.۹. حال $\mu: S \to [\circ, \infty]$ را با $\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$ اگر $a \leq b$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\mu(\varnothing) = \circ$.

برای مشاهدهٔ σ- جمعی بودن μ، فرض می‌کنیم $a < b$ و $[a, b) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$ که در آن دنبالهٔ $\{[a_n, b_n)\}$ از هم جداست. همچنین $s = \sum_{n=1}^{\infty} \mu([a_n, b_n))$. هرگاه $[a_1, b_1), \ldots, [a_k, b_k)$ ناتهی باشند، آنگاه، با تجدید آرایش آنها، می‌توان فرض کرد که

$$a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k .$$

چون f صعودی است،

$$\Sigma_{i=1}^{k} \left[f(b_i)-f(a_i)\right] \leq f(b_k)-f(a_1) \leq f(b)-f(a)$$

ایجابگر آنکه

$$s \leq f(b) - f(a) = \mu([a, b)) .$$

برای نامساوی عکس، فرض کنیم $\delta > \circ$ و $b-a > \varepsilon > \circ$. به ازای هر n، $c_n < a_n$ ی چنان می‌گیریم که وقتی $c_n < x \leq a_n$، $f(a_n)-f(x) < 2^{-n}\delta$. چون $[a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(c_n, b_n)$ و $[a, b-\varepsilon]$ فشرده است، پس $[a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{n=1}^{k}(c_n, b_n)$ باید به‌ازای k ای برقرار باشد. فرض کنیم $a_1 = a$. هرگاه $b_1 < b - \varepsilon$، آنگاه، با تجدید آرایش، می‌توان فرض کرد $b_1 \in (c_2, b_2)$. چون $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = \varnothing$، پس $c_2 < b_1 \leq a_2$. اگر این فرایند را ادامه دهیم، بازه‌های

$$(c_1, b_1), \ldots, (c_m, b_m), \ 1 \leq m \leq k$$

را به دست می‌آوریم که در آنها $b - \varepsilon \leq b_m$ و اگر $m \geq 2$، به ازای $1 \leq i \leq m-1$ خواهیم داشت $c_{i+1} < b_i < a_{i+1}$. توجه کنید که $\Sigma_{i=1}^{m-1} \left[f(a_{i+1}) - f(b_i)\right] \leq \delta$. درنتیجه

$$s \geq \sum_{i=1}^{m} \left[f(b_i)-f(a_i)\right] = f(b_m)-f(a_1)-\sum_{i=1}^{m-1} \left[f(a_{i+1})-f(b_i)\right] > f(b-\varepsilon)-f(a)-\delta \cdot$$

چون $\delta > \circ$ و $b-a > \varepsilon > \circ$ دلخواهند، پیوستگی چپ f در b ایجاب می‌کند که

$$s \geq f(b) - f(a).$$

لذا، $s = f(b) - f(a)$؛ درنتیجه μ، σ- جمعی می‌باشد.

یک حالت خاص مهم از مثال قبل وقتی است که به ازای هر $x \in R$، $f(x) = x$. اندازهٔ حاصل ***اندازهٔ لبگ*** بر S نام دارد و با λ نموده می‌شود؛ یعنی $\lambda([a, b)) = b - a$. بعدها قلمرو این اندازه چنان وسعت می‌یابد که همهٔ مجموعه‌های باز و بسته را شامل خواهد شد.

مثال ۶.۱۰. نیم حلقهٔ S مثال ۸.۹ را درنظر می‌گیریم. یعنی نیم حلقهٔ S از تمام زیرمجموعه‌های R^n به شکل $[a_1, b_1)\times\ldots\times[a_n, b_n)$ که در آنها به ازای $1 \le i \le n$، $a_i < b_i$ را همراه با مجموعهٔ تهی درنظر می‌گیریم. $\lambda: S\to[0, \infty)$ را با $\lambda(\varnothing) = 0$ و

$$\lambda\left([a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، λ یک اندازه است به نام ***اندازهٔ لبگ*** بر S. ما اثبات σ- جمعی بودن λ را تا بخش ۱۵ به تعویق می‌اندازیم. در قضیهٔ ۱.۱۵ برهانی عرضه می‌شود که نیاز به زمینه‌ای اضافی دارد.

قضیهٔ زیر توابع مجموعه‌ای بر نیم حلقه‌ها که اندازه‌اند را توصیف خواهد کرد.

قضیهٔ ۷.۱۰. ***فرض کنیم S یک نیم حلقه بوده و $\mu: S\to[0, \infty]$ یک تابع مجموعه‌ای باشد. در این صورت، μ یک اندازه بر S است اگر و فقط اگر μ در شرایط زیر صدق نماید:***

۱. $\mu(\varnothing) = 0$.

۲. ***هرگاه $A \in S$ و $A_1, \ldots, A_n \in S$ در $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ و $A_i\cap A_j = \varnothing$ به ازای $i \ne j$ صدق کنند، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \le \mu(A)$ برقرار است.***

۳. ***هرگاه $A \in S$ و $\{A_n\} \subseteq S$ در $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ صدق کند، آنگاه $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ برقرار است؛ یعنی μ، σ- زیرجمعی است.***

برهان. فرض کنیم μ یک اندازه بر S باشد. در این صورت، بنابر تعریف، $\mu(\varnothing) = 0$.

در مورد (۲)، فرض کنیم $A \in S$ و مجموعه‌های ازهم‌جدای $A_1, \ldots, A_n$ از S در $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ صدق نمایند. بنابر قضیهٔ ۲.۹ (۱)، مجموعه‌های ازهم جدایی چون $B_1, \ldots, B_m$ از S هستند به‌طوری که $A\sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. قرار می‌دهیم $C_1 = A_1, \ldots, C_n = A_n$ و به ازای $1 \le i \le m$، $C_{n+i} = B_i$. در این صورت، مجموعه‌های $C_1, \ldots, C_{n+m}$ از هم جدایند و $A = \bigcup_{i=1}^{m+n} C_i$. از خاصیت جمعی متناهی μ (قضیهٔ ۲.۱۰) داریم

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m+n} \mu(C_i) \ge \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

برای σ- زیرجمعی بودن μ، فرض می‌کنیم $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ به ازای $A \in S$ و $\{A_n\}\subseteq S$ برقرار باشد. قرار می‌دهیم $B_1 = A_1$ و به‌ازای $n \ge 1$، $B_{n+1} = A_{n+1} \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. دراین‌صورت، $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به‌ازای هر n، $B_n \subseteq A_n$، دنبالهٔ $\{B_n\}$ از هم جداست و، بنابر قضیهٔ ۲.۹ (۱)، هر B_n یک σ- مجموعه است. به ازای هر n، دنبالهٔ از هم جدای $\{C_i^n\}$ از S را چنان می‌گیریم که

$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i^n$. توجه کنید که، بنابر (۲) و $\bigcup_{i=1}^{m} C_i^n \subseteq A_n$ به ازای هر m، نتیجه می‌شود که $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^n) \le \mu(A_n)$. حال ملاحظه می‌کنیم که

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}(C_i^n\cap A)$$

یک اجتماع از هم جداست. لذا، از σ- جمعی بودن μ به دست می‌آوریم

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^n\cap A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

به عکس، هرگاه تابع مجموعه‌ای $\mu: S\to[0, \infty]$ در سه شرط فوق صدق کند، آنگاه از تلفیق (۲) و (۳) معلوم می‌شود که μ، σ- جمعی است. لذا، μ یک اندازه می‌باشد.

این بخش را با تعریف اندازهٔ به طور متناهی جمعی پایان می‌بخشیم. تابع مجموعه‌ای $\mu: S\to[0, \infty]$، که در آن S نیم حلقه است، یک ***اندازهٔ به طور متناهی جمعی*** بر S است اگر در خواص زیر صدق نماید:

آ. $\mu(\emptyset) = 0$.

ب. هرگاه $A_1, ..., A_n \in S$ از هم جدا بوده و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

برقرار است.

به آسانی معلوم می‌شود که هر اندازهٔ به طور متناهی جمعی μ یکنواست؛ یعنی، هرگاه $A, B \in S$ در $A \subseteq B$ صدق کنند، آنگاه $\mu(A) \le \mu(B)$ برقرار است. بنابر قضیهٔ ۲.۱۰، هر اندازه یک اندازهٔ به طور متناهی جمعی است ولی عکس مطلب درست نیست. ر.ک. تمرین ۸ از این بخش.

تمرینات

۱. فرض کنید S یک نیم حلقه بوده و $\mu: S\to[0, \infty]$ یک تابع مجموعه‌ای باشد به طوری که به ازای هر $A \in S$ ای، $\mu(A) < \infty$. هرگاه μ یک σ- جمعی باشد، آنگاه نشان دهید که μ یک اندازه است.

۲. فرض کنید X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر بوده و σ- جبر زیر را درنظر بگیرید:

$$S = \{E\subseteq X: \text{ حداکثر شمارشپذیر است } E^c \text{ یا } E\};$$

همچنین، ر.ک. تمرین ۹ از بخش ۹. نشان دهید $\mu: S\to[0, \infty)$ با تعریف $\mu(E) = 0$ اگر E حداکثر شمارشپذیر باشد و $\mu(E) = 1$ اگر E^c حداکثر شمارشپذیر باشد یک اندازه بر S است.

۳. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد. قرار دهید $\mu(\varnothing) = 0$ و به ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی A از N قرار دهید $\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$. نشان دهید که $\mu: \mathcal{P}(N) \to [0, \infty]$ یک اندازه است.

۴. فرض کنید $\{\mu_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی از اندازه‌ها بر نیم حلقهٔ S باشد؛ یعنی $\mu_n(A) \le \mu_{n+1}(A)$ به ازای هر $A \in S$ و هر n برقرار باشد. $\mu: S \to [0, \infty]$ را با $\mu(A) = \sup\{\mu_n(A)\}$ به ازای هر $A \in S$ تعریف کنید. نشان دهید که μ یک اندازه است.

۵. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی بوده و $f: X \to [0, \infty]$ یک تابع باشد. μ را با $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$ اگر $A \neq \varnothing$ و حداکثر شمارشپذیر باشد، $\mu(A) = \infty$ اگر A شمارش‌ناپذیر باشد، و $\mu(\varnothing) = 0$ تعریف کنید. نشان دهید که μ یک اندازه است.

۶. فرض کنید S یک نیم حلقه بوده و $\mu: S \to [0, \infty]$ یک اندازهٔ به طور متناهی جمعی باشد. نشان دهید هرگاه μ، σ- زیرجمعی باشد، آنگاه μ یک اندازه است.

۷. نشان دهید هر اندازهٔ به طور متناهی جمعی یکنوا است.

۸. نیم‌حلقهٔ $S = \{A \subseteq R:$ حداکثر شمارشپذیر است $A\}$ را درنظر گرفته و $\mu: S \to [0, \infty]$ را با $\mu(A) = 0$ اگر A متناهی باشد و $\mu(A) = \infty$ اگر A شمارشپذیر باشد تعریف کنید. نشان دهید که μ یک اندازهٔ به طور متناهی جمعی است که یک اندازه نمی‌باشد.

۱۱. اندازه‌های خارجی و مجموعه‌های اندازه‌پذیر

در این بخش نظریهٔ اندازه‌های خارجی ارائه می‌شود. مفهوم اندازهٔ خارجی از سی. کاراتئودوری، ریاضیدان برجستهٔ یونانی، است که در ریاضیات کارهای بسیار دیگر نیز انجام داده است. بحث را با تعریف اندازهٔ خارجی آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۱ (کاراتئودوری). تابع مجموعه‌ای $\mu: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ تعریف شده بر مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ای مانند X یک ***اندازهٔ خارجی (یا بیرونی)*** نام دارد اگر در خواص زیر صدق نماید:

۱. $\mu(\varnothing) = 0$.

۲. اگر $A \subseteq B$، $\mu(A) \le \mu(B)$؛ یعنی μ یکنواست.

۳. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ به ازای هر دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های X برقرار است؛ یعنی μ، σ- زیرجمعی است.

اندازهٔ خارجی μ لازم نیست بر $\mathcal{P}(X)$، σ- جمعی باشد. اما خواهیم دید که یک σ- جبر از

زیرمجموعه‌ها (به نام مجموعه‌های اندازه‌پذیر) هست که μ بر آن σ- جمعی است. جزئیات در زیر شرح داده شده است.

تا پایان این بخش، μ یک اندازهٔ خارجی ثابت است. تعریف بعد، مجموعه‌های اندازه‌پذیر را توصیف می‌کند و منسوب به سی. کاراتئودوری می‌باشد.

تعریف ۲.۱۱ (کاراتئودوری). زیرمجموعهٔ E از X را ***اندازه‌پذیر*** (یا به طور دقیقتر، μ- اندازه‌پذیر) نامیم اگر

$$\mu(A) = \mu(A\cap E) + \mu(A\cap E^c)$$

به ازای هر $A \subseteq X$ برقرار باشد.

گردایهٔ تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر با $\wedge$ نموده می‌شود؛ یعنی

$$\wedge = \{E\subseteq X: \mu(A) = \mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c) \text{ ،}A \subseteq X \text{ به ازای هر }\}.$$

اگر برای وضوح باید μ نیز ذکر شود، به جای $\wedge$ می‌نویسیم $\wedge_\mu$.

اولین مجموعه‌های اندازه‌پذیری که مطرح خواهیم کرد مجموعه‌هایی هستند که اندازه‌های خارجی‌شان صفر است. پیش از این کار، این مجموعه‌ها را نامگذاری می‌کنیم.

تعریف ۳.۱۱. مجموعهٔ E را یک **مجموعهٔ پوچ** نامیم اگر $\mu(E) = 0$.

از خاصیت σ- زیرجمعی بودن μ واضح است که هر اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های پوچ، مجموعه‌ای پوچ است. مجموعه‌های پوچ نقش مهمی در نظریهٔ انتگرالگیری ایفا خواهند کرد.

قضیهٔ ۴.۱۱. ***هر مجموعهٔ پوچ اندازه‌پذیر است.***

برهان. فرض کنیم $E \subseteq X$ و $\mu(E) = 0$. در این صورت، یکنوایی μ ایجاب می‌کند که به ازای هر $A \subseteq X$، $\mu(A\cap E) = 0$. درنتیجه، به ازای هر A،

$$\mu(A) \le \mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c) = \mu(A\cap E^c) \le \mu(A),$$

که در آن نامساوی اول به خاطر σ- زیرجمعی بودن μ برقرار است. لذا، E اندازه‌پذیر می‌باشد.

برای اثبات خواص دیگری از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، به لم مفید زیر نیازمندیم.

لم ۱۱.۵. فرض کنیم مجموعه‌های $E_1, \ldots, E_n$ از هم جدا و اندازه‌پذیر باشند. در این صورت،

$$\mu\left[A \cap\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right]=\sum_{i=1}^{n} \mu\left(A \cap E_i\right)$$

به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است.

برهان. برهان به استقرا بر n صورت می‌گیرد. واضح است که نتیجه به ازای $n = 1$ برقرار است. حال فرض کنیم نتیجه به ازای nی برقرار بوده و مجموعه‌های $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}$ از هم جدا و اندازه‌پذیر باشند. هرگاه $A \subseteq X$، آنگاه

$$A \cap\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1}=A \cap E_{n+1},$$

$$A \cap\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1}^c=A \cap\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right].$$

بنابراین، طبق اندازه‌پذیری E_{n+1}، داریم

$$\mu\left[A \cap\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right]\right]=\mu\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap E_{n+1}\right]+\mu\left[A \cap\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap \bigcup E_{n+1}^{n}\right]\right.$$

$$=\mu\left(A \cap E_{n+1}\right)+\mu\left[A \cap\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right]=\sum_{i=1}^{n+1} \mu\left(A \cap E_i\right),$$

که در آن تساوی آخر طبق فرض استقرا برقرار است. حال استقرا کامل بوده و برهان تمام می‌شود.

حال برای اثبات اینکه گردایهٔ تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک σ- جبر است حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ ۱۱.۶. گردایهٔ ۸ مرکب از تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های X است.

برهان. از تعریف مجموعه‌های اندازه‌پذیر واضح است که هرگاه $E \in$ ۸، آنگاه $E^c \in$ ۸؛ یعنی ۸ تحت متمم‌گیری بسته است. چون $\mu(\varnothing) = 0$، داریم $\varnothing \in$ ۸. بنابراین، $X \in$ ۸.

حال نشان می‌دهیم هرگاه $E_1, E_2 \in$ ۸، آنگاه $E = E_1 \cup E_2 \in$ ۸. درواقع، ابتدا توجه می‌کنیم که $E = E_1 \cup (E_1{}^c \cap E_2)$، و سپس گوییم به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، روابط

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$$

$$\leq [\mu(A\cap E_1)+\mu((A\cap E_1^c)\cap E_2)]+\mu((A\cap E_1^c)\cap E_2^c)$$
$$= \mu(A\cap E_1)+[\mu((A\cap E_1^c)\cap E_2)+\mu((A\cap E_1^c)\cap E_2^c)]$$
$$= \mu(A\cap E_1)+\mu(A\cap E_1^c) = \mu(A)$$

ایجاب می‌کنند که $E_1\cup E_2 \in$ ۸.

حال به آسانی معلوم می‌شود که ۸ تحت اجتماعهای متناهی و اشتراکهای متناهی بسته است. همچنین، هرگاه $E_1, E_2 \in$ ۸، آنگاه $E_1\sim E_2 = E_1\cap E_2^c \in$ ۸. لذا، ۸ یک جبر از مجموعه‌ها می‌باشد.

برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که ۸ یک σ- جبر از مجموعه‌هاست. برای این کار، فرض کنیم $\{E_n\} \subseteq$ ۸. قرار می‌دهیم $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ و تعریف می‌کنیم $G_1 = E_1$ و به ازای $n \geq 1$، $G_{n+1}=E_{n+1}\sim\bigcup_{i=1}^{n} E_i$. در این صورت، $\{G_n\}\subseteq$ ۸، اگر $n \neq m$، $G_n\cap G_m =\varnothing$، و $E= \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. به ازای $n \geq 1$ قرار می‌دهیم $F_n=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ و توجه می‌کنیم که هر F_n یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است به طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n=E$. حال اگر $A \subseteq X$،

$$\mu(A) = \mu(A\cap F_n)+\mu(A\cap F_n^c) \geq \mu(A\cap F_n)+\mu(A\cap E^c)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} \mu(A\cap G_i)+\mu(A\cap E^c)$$

به ازای هر n برقرار است، و تساوی آخر به خاطر لم ۵.۱۱ برقرار می‌باشد. لذا،

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A\cap G_i)+\mu(A\cap E^c) \geq \mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c) \geq \mu(A);$$

و درنتیجه $E \in$ ۸. بنابراین، ۸ یک σ- جبر می‌باشد.

نتیجهٔ مهم زیر نشان می‌دهد که μ یک اندازه بر ۸ می‌باشد.

قضیهٔ ۷.۱۱. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ خارجی بر X باشد. در این صورت، $(X,$ ۸$, \mu)$ یک فضای اندازه است؛ یعنی μ، σ- جمعی بر ۸ می‌باشد.*

برهان. فرض کنیم $\{E_n\}$ یک دنبالهٔ از هم جدا از ۸ باشد. قرار می‌دهیم $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. بنابر خاصیت σ- زیرجمعی بودن μ، داریم

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

از آن سو، لم ۵.۱۱ نشان می‌دهد که

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)= \mu\left[E \cap \left[\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right]\right] \leq \mu(E)$$

به ازای هر k برقرار است. لذا، $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E)$؛ درنتیجه $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ و برهان تمام

می‌شود.

تذکر. وقتی μ به $\mathcal{M}$ محدود شود، اغلب آن را اندازهٔ القا شده به وسیلهٔ اندازهٔ خارجی μ می‌نامند.

دانستن اینکه μ بر مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازهٔ متناهی تفریق‌پذیر است سودمند می‌باشد.

قضیهٔ ۸.۱۱. ***فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر باشند به طوری که $A \subseteq B$ و $\mu(B) < \infty$. در این صورت، $\mu(B\sim A) = \mu(B) - \mu(A)$ برقرار است.***

برهان. می‌نویسیم $B = A\cup(B\sim A)$ و سپس از جمعی بودن μ استفاده کرده به دست می‌آوریم $\mu(B) = \mu(A)+\mu(B\sim A)$. چون $\mu(B) < \infty$، نتیجه می‌شود که

$$\mu(B\sim A) = \mu(B) - \mu(A).$$

تمرینات

در تمرینهای زیر، μ یک اندازهٔ خارجی بر مجموعه‌ای مانند X است مگر خلافش تصریح شود.

۱. نشان دهید که هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های پوچ، مجموعه‌ای پوچ است.

۲. هرگاه A یک مجموعهٔ پوچ باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\mu(B\cup A) = \mu(B\sim A) = \mu(B)$$

به ازای هر زیرمجموعهٔ B از X برقرار است.

۳. نشان دهید که زیرمجموعهٔ A از X اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر مانند E باشد به طوری که $E \subseteq A$ و $\mu(A\sim E) < \varepsilon$.

۴. فرض کنید زیرمجموعهٔ A از X دارای این خاصیت باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر مانند E هست که $\mu(A\Delta E) < \varepsilon$. نشان دهید که A یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است.

۵. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X بوده و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از هم جدا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید که

$$\mu\left[A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right]\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A\cap E_n).$$

۶. فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. همچنین، دنباله‌ای از هم جدا مانند $\{B_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر موجود باشد که $A_n \subseteq B_n$ به ازای هر n برقرار است. نشان دهید که

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n).$$

۷. هرگاه E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از X باشد، آنگاه نشان دهید که به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، تساوی زیر برقرار است:

$$\mu(E \cup A) + \mu(E \cap A) = \mu(E) + \mu(A).$$

۸. هرگاه $\mathscr{A}$ زیرمجموعهٔ اندازه ناپذیری از X بوده و E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد به طوری که $A \subseteq E$، آنگاه نشان دهید که $\mu(E \sim \mathscr{A}) > 0$.

۹. فرض کنید $\mathfrak{A}$ گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از X با اندازهٔ متناهی باشد. یعنی $\mathfrak{A} = \{A \in \Lambda : \mu(A) < \infty\}$.

آ. نشان دهید که $\mathfrak{A}$ یک نیم حلقه است.

ب. رابطهٔ $\approx$ را بر $\mathfrak{A}$ با $A \approx B$ اگر $\mu(A \Delta B) = 0$ تعریف کنید. نشان دهید که $\approx$ یک رابطهٔ هم‌ارزی بر $\mathfrak{A}$ است.

پ. فرض کنید D مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\mathfrak{A}$ باشد. به ازای $A \in \mathfrak{A}$، فرض کنید A° ردهٔ هم‌ارزی A در D باشد. به ازای $A^\circ, B^\circ \in D$ تعریف کنید $d(A^\circ, B^\circ) = \mu(A \Delta B)$. نشان دهید که d خوش تعریف است و (D, d) یک فضای متری تام می‌باشد.

۱۰. این تمرین به ما طرز ساختن اندازه‌های خارجی را بازگو می‌کند. فرض کنید $\mathscr{F}$ گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X بوده و $f: \mathscr{F} \to [0, \infty]$ یک تابع باشد. $\mu: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ را با $\mu(\varnothing) = 0$ و

$$\mu(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ و } \{A_n\} \subseteq \mathscr{F} \right\}.$$

به ازای هر $A \neq \varnothing$ با $\inf \varnothing = \infty$ تعریف کنید. نشان دهید که μ یک اندازهٔ خارجی است.

۱۲. اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ یک اندازه

در این بخش، اندازهٔ μ به یک اندازهٔ خارجی مانند μ^* توسیع می‌یابد. نشان می‌دهیم که σ- جبر تمام زیرمجموعه‌های μ^*- اندازه‌پذیر از X شامل اعضای نیم حلقهٔ S است. در این صورت، واضح است که نیم حلقه‌ها کوچکترین گردایه‌ها از مجموعه‌هایند که بر آنها می‌توان یک نظریهٔ اندازه بنا کرد.

در سراسر این بخش، (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ ثابت است. به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \text{است } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ دنباله‌ای از } S \text{ با خاصیت } \{A_n\} \}.$$

هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از S نباشد که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، آنگاه قرار می‌دهیم $\mu^*(A) = \infty$. یعنی قرارداد $\inf \varnothing = \infty$ را محترم می‌شماریم.

قضیهٔ ۱.۱۲. *تابع مجموعه‌ای μ^* یک اندازهٔ خارجی (به نام اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ μ یا توسیع کاراتئودوری μ) است.*

برهان. واضح است که $\mu^*(A) \geq 0$ به ازای هر $A \subseteq X$ برقرار است. هرگاه به ازای هر n، $A_n = \varnothing$، آنگاه $0 \leq \mu^*(\varnothing) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varnothing) = 0$؛ درنتیجه $\mu^*(\varnothing) = 0$.

برای یکنوایی μ^*، فرض کنیم $A \subseteq B$. هرگاه $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ با $\{A_n\} \subseteq S$، آنگاه $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$؛ و درنتیجه $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. [هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از S نباشد که B را بپوشاند، آنگاه $\mu^*(B) = \infty$ و $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ واضح می‌باشد.] لذا،

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ و } \{A_n\} \subseteq S \right\}.$$

برای σ- زیرجمعی بودن μ^*، فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$، آنگاه واضح است که $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. بنابراین، فرض می‌کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$. همچنین $\varepsilon > 0$. به ازای هر i، دنبالهٔ $\{A^i_n\}$ از S را چنان می‌گیریم که $A_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^i_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^i_n) \leq \mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon$. در این صورت، به ازای هر i و n، $A^i_n \in S$، و

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A^i_n .$$

لذا، به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\mu^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A^i_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon;$$

درنتیجه $\mu^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

به‌طور کلی، μ^* یک اندازه نیست زیرا ممکن است بر $\mathcal{P}(X)$، σ- جمعی نباشد. اما، هرگاه μ^* به σ- جبر تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر محدود شود، آنگاه از قبل بنابر قضیهٔ ۷.۱۱ می‌دانیم که σ- جمعی است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اندازهٔ خارجی μ^* درواقع یک توسیع μ از S به $\mathcal{P}(X)$ است.

قضیهٔ ۲.۱۲. *هرگاه $A \in S$، آنگاه $\mu^*(A) = \mu(A)$ برقرار است.*

برهان. فرض کنیم $A \in S$. قرار می‌دهیم $A_1 = A$ و به ازای $n \geq 2$، $A_n = \varnothing$. در این صورت، $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

حال فرض می‌کنیم $\{A_n\} \subseteq S$ با $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. بنابر σ- زیرجمعی بودن μ (قضیهٔ ۷.۱۰)، $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ برقرار است، که از این فوراً معلوم می‌شود که $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. بنابراین، $\mu(A) = \mu^*(A)$.

چون μ^* یک توسیع μ است، از حالا به بعد، عبارت "اندازهٔ خارجی A" "اندازهٔ A" نیز گفته می‌شود. مجموعه‌های اندازه‌پذیر با یک اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ یک اندازه ویژگیهای مفیدی دارند. بعضی از آنها در قضیهٔ زیر بیان شده‌اند.

قضیهٔ ۳.۱۲. ***فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و μ^* اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ μ باشد. به ازای زیرمجموعهٔ E از X، احکام زیر هم‌ارز می‌باشند:***

۱. ***E نسبت به μ^* اندازه‌پذیر است.***

۲. ***$\mu(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ به ازای هر $A \in S$ با $\mu(A) < \infty$ برقرار است.***

۳. ***$\mu(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ به ازای هر $A \in S$ با $\mu(A) < \infty$ برقرار است.***

۴. ***به ازای هر $A \subseteq X$، نامساوی $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ برقرار است.***

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱) و (۳) $\Leftarrow$ (۲) واضح‌اند.

(۴) $\Leftarrow$ (۳). فرض کنیم $A \subseteq X$. هرگاه $\mu^*(A) = \infty$، آنگاه (۴) بداهتاً برقرار است. لذا، فرض می‌کنیم $\mu^*(A) < \infty$. همچنین $\varepsilon > 0$. دنبالهٔ $\{A_n\}$ از S را با خاصیت $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$ اختیار می‌کنیم. به ازای هر n داریم $\mu(A_n) < \infty$؛ و درنتیجه طبق فرض، $\mu^*(A_n \cap E) + \mu^*(A_n \cap E^c) \leq \mu(A_n)$ به ازای هر n برقرار است. بنابراین، به ازای هر ε،

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C) \leq \mu^*\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \cap E\right) + \mu^*\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \cap E^c\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap E^c)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu^*(A_n \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\right]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon;$$

درنتیجه $\mu^*(A) \geq \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c)$.

(۱) $\Leftarrow$ (۴). بنابر خاصیت σ- زیرجمعی بودن μ^*، داریم $\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$؛ و درنتیجه، به ازای هر $A \subseteq X$، $\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$. لذا، E اندازه‌پذیر است.

زیرمجموعهٔ E از فضای اندازهٔ (X, S, μ) را ***اندازه‌پذیر*** (به طور دقیقتر، ***μ- اندازه‌پذیر***) نامیم اگر E نسبت به اندازهٔ خارجی μ^* تولید شده به وسیلهٔ μ اندازه‌پذیر باشد.

قضیهٔ ۴.۱۲. *هر عضو S اندازه‌پذیر است؛ یعنی $S \subseteq \Lambda$.*

برهان. فرض کنیم $E \in S$. باید نشان دهیم که E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است. هرگاه $A \in S$، آنگاه تعدادی متناهی مجموعهٔ از هم جدا مانند $B_1, \ldots, B_n$ از S هست به طوری که $A\sim E=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$. توجه کنید که $A\cap E, B_1, \ldots, B_n$ گردایه‌ای ازهم جدا از اعضای S است به طوری که $A = (A\cap E)\cup B_1\cup\ldots\cup B_n$.

بنابر خاصیت σ- زیرجمعی بودن μ^*، داریم

$$\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) \leq \mu(A\cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i)$$
$$= \mu(A\cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(A),$$

که در آن دو تساوی آخر به خاطر قضیهٔ ۲.۱۲ و σ- جمعی بودن μ بر S برقرارند. بنابر قضیهٔ ۳.۱۲، E اندازه‌پذیر است و لذا، $S \subseteq \Lambda$.

می‌نویسیم $A_n \uparrow A$ و این بدان معنی است که دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های X در $A_n \subseteq A_{n+1}$ به ازای هر n صدق می‌کند و $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. به همین نحو، $A_n \downarrow A$ یعنی به ازای هر n، $A_{n+1} \subseteq A_n$ و $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

قضیهٔ ۵.۱۲. *فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد. در این صورت، احکام زیر برقرارند:*

۱. *هرگاه $E_n \uparrow E$، آنگاه $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$.*

۲. *هرگاه $E_n \downarrow E$ و $\mu^*(E_k) < \infty$ به ازای kای برقرار باشد، آنگاه $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$.*

برهان. (۱) قرار می‌دهیم $B_1 = E_1$ و به ازای $n \geq 2$، $B_n = E_n \sim E_{n-1}$. در این صورت، هر B_n اندازه‌پذیر است و اگر $i \neq j$، $B_i \cap B_j = \varnothing$. همچنین، $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ و $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. لذا، طبق قضیهٔ ۷.۱۱، داریم

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i) .$$

ولی $\mu^*(E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i)$ و لذا، $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$ برقرار است.

(۲) بی‌آنکه به کلیت آسیبی برسد، می‌توان فرض کرد $\mu^*(E_1) < \infty$. داریم $E_1 \sim E_n \uparrow E_1 \sim E$؛ و درنتیجه، بنابر (۱)، $\lim \mu^*(E_1 \sim E_n) = \mu^*(E_1 \sim E)$. با اعمال قضیهٔ ۸.۱۱ به دست می‌آوریم

$$\lim (\mu^*(E_1) - \mu^*(E_n)) = \mu^*(E_1) - \mu^*(E),$$

که از آن $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$ نتیجه می‌شود.

به عنوان کاربردی از نتایج تاکنون به دست آمده، نشان می‌دهیم که اندازهٔ خارجی لبگ بر R مفهوم عادی طول را تعمیم می‌دهد. به یاد آورید که اندازهٔ لبگ λ اندازه‌ای است که بر نیم حلقهٔ $S = \{[a, b): a \leq b \text{ و } a, b \in R\}$ با $\lambda([a, b)) = b - a$ تعریف شده است. رسم است (و ما نیز می‌پذیریم) که اندازهٔ خارجی λ^* تولید شده به وسیلهٔ λ را اندازهٔ لبگ بر R می‌نامند.

زیرمجموعهٔ I از R را یک **بازه** نامیم اگر به ازای هر $x, y \in I$ که $x < y$، داشته باشیم $[x, y] \subseteq I$. هرگاه I به یکی از اشکال $[a, b)$، $[a, b]$، $(a, b]$، یا (a, b) با $-\infty < a < b < \infty$ باشد، آنگاه I یک ***بازهٔ کراندار*** نام دارد و طولش با $|I| = b - a$ تعریف می‌شود. هرگاه I بی‌کران باشد، آنگاه گوییم طولش نامتناهی است و آن را به صورت $|I| = \infty$ می‌نویسیم.

مثال ۶.۱۲. هر بازهٔ I از R اندازه‌پذیر لبگ است و $\lambda^*(I) = |I|$.

برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا توجه می‌کنیم که، بنابر قضیهٔ ۴.۱۲، هر مجموعه به شکل $[a, b)$ با $-\infty < a < b < \infty$ اندازه‌پذیر لبگ است. به علاوه، قضیهٔ ۲.۱۲ نشان می‌دهد که $\lambda^*([a, b)) = \lambda([a, b)) = b-a = |[a, b)|$.

ما دو حالت دیگر را ثابت کرده و بقیه را به خواننده وامی‌گذاریم. اولین حالت یک بازهٔ کراندار به شکل $I = [a, b]$ است. به ازای هر n قرار می‌دهیم $E_n = [a, b+1/n)$. در این صورت، هر E_n اندازه‌پذیر لبگ است و $E_n \downarrow I$ برقرار است. لذا، I اندازه‌پذیر لبگ است و، بنابر قضیهٔ ۵.۱۲ (۲)، به دست می‌آوریم

$$\lambda^*(I) = \lim \lambda^*([a, b + \frac{1}{n})) = \lim (b + \frac{1}{n} - a) = b - a = |I| .$$

حالت دوم بازه‌ای به شکل $I = [a, \infty)$ است. به ازای هر n قرار می‌دهیم $F_n = [a, a+n)$ و توجه می‌کنیم که $F_n \uparrow I$ برقرار است. لذا، I اندازه‌پذیر لبگ است و، بنابر قضیهٔ ۵.۱۲ (۱)، داریم

$$\lambda^*(I) = \lim \lambda^*([a, a+n)) = \lim n = \infty = |I| .$$

در زیر، دو ردهٔ مهم از فضاهای اندازه معرفی می‌شوند.

تعریف ۷.۱۲. گوییم فضای اندازهٔ (X, S, μ)

۱. **متناهی** است اگر $\mu^*(X) < \infty$،

۲. **σ- متناهی** است اگر دنباله‌ای مانند $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد به طوری که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و به ازای هر n، $\mu^*(X_n) < \infty$.

واضح است که هر فضای اندازهٔ متناهی σ- متناهی است. فضای اندازهٔ (X, S, μ)، σ- متناهی است اگر و فقط اگر دنباله‌ای ازهم جدا مانند $\{X_n\}$ از S باشد به طوری که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و به ازای هر n، $\mu(X_n) < \infty$.

برای مشاهدهٔ قسمت "فقط اگر" آخرین حکم، فرض می‌کنیم (X, S, μ)، σ- متناهی باشد. دنبالهٔ $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر را طوری می‌گیریم که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و به ازای هر n، $\mu^*(X_n) < \infty$. حال، به ازای هر i، دنبالهٔ $\{A_n^i\}$ از S را طوری می‌گیریم که $X_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i) < \mu^*(X_i) + 1$. در این صورت، $A_n^i \in S$، به ازای هر n و i، $\mu(A_n^i) < \infty$ و $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$. حال، با اعمال قضیهٔ ۲.۹ (و تبصرهٔ بعد از آن)، می‌توان حکم فوق‌الذکر را ثابت کرد.

مجموعه‌های اندازه‌پذیر از یک فضای اندازهٔ متناهی ویژگی ساده‌ای دارند.

قضیهٔ ۸.۱۲. ***فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی بوده و E زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت، E اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر***

$$\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(X) .$$

برهان. واضح است که اگر E اندازه‌پذیر باشد، $\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(X)$ برقرار است. برای عکس مطلب، فرض می‌کنیم $\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(X)$ برقرار باشد. همچنین $A \in S$. اگر اندازه‌پذیری A را بر E و E^c اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c),$$
$$\mu^*(E^c) = \mu^*(E^c\cap A) + \mu^*(E^c\cap A^c).$$

از جمع دو تساوی اخیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mu^*(X) &= \mu^*(E) + \mu^*(E^c)\\ &= \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E^c\cap A) + \mu^*(E\cap A^c) + \mu^*(E^c\cap A^c)\\ &\geq \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(X),\end{aligned}$$

که در آن تساوی آخر مجدداً به خاطر اندازه‌پذیری A برقرار است. بنابراین،

$$\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E^c\cap A) + \mu^*(E\cap A^c) + \mu^*(E^c\cap A^c).$$

به خاطر روابط

$$\mu^*(A^c) \leq \mu^*(E\cap A^c) + \mu^*(E^c\cap A^c)$$

و $\mu^*(X) < \infty$، از تساوی اخیر داریم

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c).$$

نامساوی اخیر همانی است که در قضیهٔ ۳.۱۲ برای اندازه‌پذیری E لازم است، و برهان قضیه تمام می‌شود.

از تلفیق قضیهٔ ۴.۱۲ با قضیهٔ ۲.۹ معلوم می‌شود که برای تعریف μ^* می‌توان فقط دنباله‌های از هم جدا از S را درنظر گرفت. یعنی، به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X (با $\inf \varnothing = \infty$)،

$$\mu^*(A) = \inf\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : A\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \text{ و } \{A_n\} \text{ از هم جداست، } \{A_n\}\subseteq S\}.$$

از این نکته در برهان نتیجهٔ زیر که یکتایی توسیع μ به σ- جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیرش را توصیف می‌کند استفاده خواهد شد.

قضیهٔ ۹.۱۲. ***فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی بوده، Σ یک نیم‌حلقه از مجموعه‌ها باشد به طوری که $S \subseteq \Sigma \subseteq \Lambda$، و ν یک اندازه بر Σ باشد. هرگاه $\nu = \mu$ بر S، آنگاه $\nu = \mu^*$ بر Σ.***

به خصوص، در این حالت معلوم می‌شود که μ^* تنها توسیع μ به یک اندازه بر Λ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم ν^* اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ (X, Σ, ν) باشد. همچنین $A \subseteq X$ و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از S باشد که $A\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. چون μ و ν بر S توافق دارند،

$$\nu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

برقرار است. این نشان می‌دهد که $\nu^*(A) \leq \mu^*(A)$ به ازای هر $A \subseteq X$ برقرار است.

حال فرض کنیم $A \in \sum$ در $\mu^*(A) < \infty$ صدق نماید. نشان می‌دهیم که $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ برقرار است؛ و لذا، $\mu^*(A) = \nu(A)$ در این حالت ثابت می‌شود. برای این کار، فرض کنیم $\varepsilon > 0$. دنبالهٔ از هم جدای $\{A_n\}$ از S را چنان می‌گیریم که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. قرار می‌دهیم $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و توجه می‌کنیم که $\mu^*(B) < \mu^*(A) + \varepsilon$. ملاحظه می‌کنیم که

$$\nu^*(B \sim A) \leq \mu^*(B \sim A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) < \varepsilon$$

برقرار است. بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \nu^*(B) = \nu^*(A) + \nu^*(B \sim A) < \nu(A) + \varepsilon .$$

لذا، $\mu^*(A) \leq \nu(A)$.

برای حالت کلی، فرض کنیم $\{X_n\}$ دنباله‌ای از هم جدا از S باشد که X را پوشانده و به ازای هر n، $\mu^*(X_n) < \infty$. هرگاه $A \in \sum$، آنگاه، بنابر بحث فوق، $\mu^*(X_n \cap A) = \nu(X_n \cap A)$ به ازای هر n برقرار است؛ و درنتیجه

$$\mu^*(A) = \mu^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap A]\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X_n \cap A)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n \cap A) = \nu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap A]\right] = \nu(A),$$

و برهان تمام خواهد بود.

زیرمجموعهٔ A از فضای اندازهٔ (X, S, μ) را σ- **متناهی** گوییم اگر دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از S باشد به طوری که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر n، $\mu(A_n) < \infty$. دنبالهٔ $\{A_n\}$ را می‌توان از هم جدا اختیار کرد.

اگر برهان قضیهٔ اخیر را تکرار کنیم، می‌توانیم صورت کلی زیر را به ثبوت رسانیم:

فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده، $\sum$ یک نیم حلقه از مجموعه‌ها باشد به طوری که $S \subseteq \sum \subseteq \Lambda$، و ν یک اندازه بر $\sum$ باشد. هرگاه $\nu = \mu$ بر S، آنگاه $\nu(A) = \mu^*(A)$ به ازای هر σ- مجموعهٔ متناهی از $\sum$ برقرار است.

باید توجه داشت که فرض σ- متناهی در قضیهٔ ۹.۱۲ را نمی‌توان حذف کرد. به عنوان مثال، فرض کنیم $X = R$، S نیم حلقهٔ مرکب از مجموعهٔ تهی و زیرمجموعه‌های R به شکل $[a, b)$ باشد، و تعریف می‌کنیم $\mu(\emptyset) = 0$ و $\mu([a, b)) = \infty$. در این صورت، (X, S, μ) یک فضای اندازه است که σ- متناهی نیست. به علاوه، $\Lambda = \mathcal{P}(X)$ و به ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی A از X، $\mu^*(A) = \infty$. حال به

آسانی معلوم می‌شود که اندازهٔ شمارشی (ر.ک. مثال ۳.۱۰) توسیعی از μ به ۸ است که با μ^* متفاوت است.

در قضیهٔ زیر، خاصیت یکتایی دیگر μ^* توصیف شده است.

قضیهٔ ۱۰.۱۲. فرض کنید (X, S, μ) یک *فضای اندازه* بوده و $\sum$ یک *نیم حلقه* باشد به طوری که $S \subseteq \sum \subseteq$ ۸. هرگاه ν تحدید μ^* به $\sum$ باشد، آنگاه *اندازهٔ خارجی* ν^* تولید شده به وسیلهٔ فضای اندازهٔ $(X, \sum, \nu)$ دقیقاً مساوی μ^* است. یعنی $\nu^*(A) = \mu^*(A)$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq X$. هرگاه دنبالهٔ $\{A_n\}$ از $\sum$ در $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ صدق کند، آنگاه، بنابر σ-زیرجمعی بودن μ^*، $\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. بنابراین،

$$\nu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ و } \{A_n\} \subseteq \sum \right\} \ge \mu^*(A).$$

از آن سو، هرگاه $\mu^*(A) < \infty$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از S (و درنتیجه $\sum$) هست به طوری که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. ولی چون $\nu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$، به ازای هر $\varepsilon > 0$ به دست می‌آوریم $\nu^*(A) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. لذا، $\nu^*(A) \le \mu^*(A)$؛ و درنتیجه $\nu^*(A) = \mu^*(A)$. هرگاه $\mu^*(A) = \infty$، آنگاه $\nu^*(A) = \mu^*(A) = \infty$ بداهتاً برقرار است و برهان تمام خواهد شد.

بحث را با یک خاصیت تقریب از یک مجموعهٔ دلخواه به وسیلهٔ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۱.۱۲. فرض کنیم (X, S, μ) یک *فضای اندازه* باشد. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه یک *مجموعهٔ اندازه‌پذیر* مانند E هست به طوری که $A \subseteq E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

به خصوص، هرگاه S یک σ- جبر باشد، آنگاه به ازای هر $A \subseteq X$ مجموعه‌ای مانند $E \in S$ هست که $A \subseteq E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq X$. هرگاه $\mu^*(A) = \infty$، آنگاه $E = X$ در خواص ذکر شده صدق می‌کند؛ درنتیجه فرض می‌کنیم $\mu^*(A) < \infty$.

به ازای هر i، دنباله‌ٔ $\{A_n^i\}$ از S را چنان می‌گیریم که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i) < \mu^*(A) + \frac{1}{i}.$$

فرض کنیم $E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$. در این صورت، هر E_i یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است به طوری که $A \subseteq E_i$. قرار می‌دهیم $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. پس داریم $A \subseteq E$ و E اندازه‌پذیر است (و، البته، اگر S یک σ- جبر باشد، $E \in S$). همچنین،

$$\mu^*(A) \le \mu^*(E) \le \mu^*(E_i) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i) < \mu^*(A) + \frac{1}{i}$$

به ازای هر i ایجاب می‌کند که $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

تبصره. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه بسیاری از نویسندگان هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر E صادق در $A \subseteq E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$ را یک ***پوشش اندازه‌پذیر*** A می‌نامند.

طبیعی است که بپرسیم آیا هر مجموعه یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است یا نه. مثال کلاسیک زیر از جی. ویتالی (G.Vitali) به این سؤال جواب منفی می‌دهد.

مثال ۱۲.۱۲ (ویتالی). فرض کنیم λ^* اندازهٔ خارجی تولید شده بر R به وسیلهٔ اندازهٔ لبگ λ باشد. رابطهٔ $\sim$ را بر $[0, 1]$ این طور تعریف می‌کنیم که گوییم $x \sim y$ اگر $x - y$ یک عدد گویا باشد. به آسانی معلوم می‌شود که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی بر $[0, 1]$ است. لذا، $\sim$ بازهٔ $[0, 1]$ را به رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از $[0, 1]$ باشد که هر ردهٔ هم‌ارزی را درست در یک نقطه قطع کند. بنابر اصل موضوع انتخاب، یک چنین مجموعه وجود دارد. حکم می‌کنیم که E اندازه‌پذیر لبگ نیست.

برای مشاهدهٔ این امر، به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم E اندازه‌پذیر لبگ باشد. فرض کنیم $r_1, r_2, \ldots$ شمارشی از اعداد گویای $[-1, 1]$ باشد. به ازای هر n قرار می‌دهیم $E_n = \{r_n + x : x \in E\}$ و توجه می‌کنیم که هر E_n اندازه‌پذیر لبگ است. به آسانی معلوم می‌شود که اگر $n \neq m$، $E_n \cap E_m = \varnothing$ برقرار است و (چون λ^* پایای انتقال است) به ازای هر n، $\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E)$. به علاوه، $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2]$. بنابر σ- جمعی بودن λ^*، داریم

$$\lambda^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = \lim\left[n\lambda^*(E)\right] \le \lambda^*\left([-1, 2]\right) = 3.$$

این ایجاب می‌کند که $\lambda^*(E) = 0$؛ و درنتیجه $\lambda^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = 0$. از آن سو، $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ نشان می‌دهد که $1 \le \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ که ناممکن است. بنابراین، E اندازه‌پذیر لبگ نیست.

تمرینات

۱. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از X باشد. قرار دهید $S_E = \{E \cap A: A \in S\}$، یعنی تحدید S به E. نشان دهید که (E, S_E, μ^*) یک فضای اندازه است.

۲. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. نشان دهید که

$$\mu^*(A) = \inf\{ \mu^*(B): A \subseteq B \text{ به طوری که } B \text{ یک } \sigma\text{- مجموعه است} \}$$

به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است.

۳. جزئیات مثال ۶.۱۲ را کامل کنید.

۴. نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ شمارشپذیر از R دارای اندازهٔ لبگ صفر است.

۵. به ازای زیرمجموعهٔ A از R و اعداد حقیقی a و b، تعریف کنید

$$aA + b = \{ax + b: x \in A\}.$$

نشان دهید که

آ. $\lambda^*(aA + b) = |a|\lambda^*(A)$ و

ب. هرگاه A اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه $aA + b$ نیز چنین است.

۶. فرض کنید S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X بوده و $\mu: S \to [0, \infty]$ یک اندازهٔ به طور متناهی جمعی باشد که اندازه نیست. به ازای هر $A \subseteq X$ (طبق معمول) تعریف کنید

$$\mu^*(A) = \lim \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n): A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ و } \{A_n\} \subseteq S \right\}.$$

با مثال نقض نشان دهید که ممکن است $\mu \neq \mu^*$ بر S. چرا این امر قضیهٔ ۲.۱۲ را نقض نمی‌کند؟ [**راهنمایی.** از تمرین ۸ در بخش ۱۰ استفاده کنید.]

۷. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. نشان دهید هرگاه زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری مانند E از X باشد که $A \subseteq E$، $\mu^*(E) < \infty$، و $\mu^*(E) = \mu^*(A) + \mu^*(E \sim A)$، آنگاه A اندازه‌پذیر است.

۸. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از R با $\lambda^*(A) > 0$ باشد. نشان دهید زیرمجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر مانند B از R هست به طوری که $B \subseteq A$.

۹. یک دنبالهٔ ازهم جدا مانند $\{E_n\}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای اندازه مانند (X, S, μ) مثال بزنید که

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

[**راهنمایی.** دنبالهٔ $\{E_n\}$ توصیف شده در مثال ۱۲.۱۲ را به کار برید.]

۱۰. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که $A_n \subseteq A_{n+1}$ به ازای هر n برقرار است. هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، آنگاه نشان دهید که $\mu^*(A_n) \uparrow \mu^*(A)$.

[**راهنمایی.** از قضایای ۱۱.۱۲ و ۵.۱۲ (۱) استفاده کنید.]

۱۱. به ازای زیرمجموعه‌های فضای اندازهٔ (X, S, μ)، روابط تقریباً همه جا (ت. ه.) زیر را تعریف کنید:

آ. $A \subseteq B$ ت. ه. اگر $\mu^*(A \sim B) = 0$؛

ب. $A = B$ ت. ه. اگر $\mu^*(A \Delta B) = 0$؛

پ. $A_n \uparrow A$ ت. ه. اگر به ازای هر n، $A_n \subseteq A_{n+1}$ ت. ه. و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ت. ه. (معنی $A_n \downarrow A$ ت. ه. مشابه است).

قضیهٔ ۵.۱۲ را به صورت زیر تعمیم دهید. هرگاه $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد، آنگاه نشان دهید که

۱. هرگاه $E_n \uparrow E$ ت. ه.، آنگاه $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$.

۲. هرگاه $E_n \downarrow E$ ت. ه. و به ازای k ای $\mu^*(E_k) < \infty$، آنگاه $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$.

آیا حکم (۱) بدون فرض اندازه‌پذیری برای مجموعه‌های E_n درست است؟

۱۲. به ازای دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X، تعریف کنید

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \quad \text{و} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i .$$

حال فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید که

۱. $\mu^*(\liminf E_n) \leq \liminf \mu^*(E_n)$؛

۲. هرگاه $\mu^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] < \infty$، آنگاه $\mu^*(\limsup E_n) \geq \limsup \mu^*(E_n)$.

۱۳. دنبالهٔ $\{E_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر از یک فضای اندازه مانند (X, S, μ) مثال بزنید که $E_{n+1} \subseteq E_n$ به ازای هر n برقرار بوده و

$$\lim \mu^*(E_n) > \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

۱۴. دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای اندازه مانند (X, S, μ) مثال بزنید که به ازای هر n، $A_{n+1} \subseteq A_n$، $\mu^*(A_1) < \infty$، و

$$\lim \mu^*(A_n) > \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

[*راهنمایی.* هرگاه $\{E_n\}$ دنبالهٔ مجموعه‌های توصیف شده در مثال ۱۲.۱۲ باشد، آنگاه قرار دهید $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$.]

۱۵. فرض کنید (X, S_1, μ_1) و (X, S_2, μ_2) دو فضای اندازه باشند. نشان دهید که μ_1 و μ_2 اندازهٔ خارجی یکسانی بر X تولید می‌کنند اگر و فقط اگر $\mu_1 = \mu_2^*$ بر S_1 و $\mu_1^* = \mu_2$ بر S_2 هر دو برقرار باشند.

۱۶. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. مجموعهٔ اندازه‌پذیر A را **اتم** نامیم اگر $\mu^*(A) > 0$ و به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از A داشته باشیم $\mu^*(E) = 0$ یا $\mu^*(A \sim E) = 0$. هرگاه (X, S, μ) دارای اتم نباشد، آنگاه آن را یک فضای اندازهٔ **غیراتمی** می‌نامیم.

۱. اتمهای فضاهای اندازهٔ مثالهای ۳.۱۰ و ۴.۱۰ را بیابید.

۲. نشان دهید که خط حقیقی با اندازهٔ لبگ یک فضای اندازهٔ غیراتمی است.

۱۳. توابع اندازه‌پذیر

روابط تقریباً همه جا نقش مهمی در نظریهٔ انتگرالگیری دارند. هرگاه μ یک اندازهٔ خارجی X باشد، آنگاه گوییم یک رابطهٔ مستلزم عناصر X **تقریباً همه جا** برقرار است (یا به ازای تقریباً هر x برقرار است) اگر مجموعهٔ A جمیع نقاطی که رابطه در آنها برقرار نیست یک مجموعهٔ پوچ باشد [یعنی $\mu(A) = 0$]. به عنوان مثال، هرگاه f و g دو تابع حقیقی تعریف شده بر X باشند، آنگاه $f \leq g$ تقریباً همه جا یعنی $\mu(\{x \in X: f(x) > g(x)\}) = 0$. به همین نحو، $\{f_n\}$ تقریباً همه جا به f همگراست اگر مجموعه‌ای مانند A از اندازهٔ صفر باشد به طوری که $\lim f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \notin A$ برقرار باشد.

هرگاه (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد، آنگاه وقتی می‌گوییم یک رابطه **تقریباً همه جا** برقرار است (علامت اختصاری: ت. ه.) یعنی رابطه نسبت به اندازهٔ خارجی μ^* تولید شده به وسیلهٔ μ تقریباً همه جا برقرار است. در زیر، روابط تقریباً همه جای اساسی که در این کتاب به کار می‌روند خلاصه شده‌اند.

فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و f و g توابع حقیقی تعریف شده بر X باشند.

۱. $f = g$ ت. ه. اگر $\mu^*(\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

۲. $f \geq g$ ت. ه. اگر $\mu^*(\{x \in X: f(x) < g(x)\}) = 0$.

۳. $f_n \to f$ ت. ه. اگر $\mu^*(\{x \in X: f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$.

۴. $f_n \uparrow f$ ت. ه. اگر به ازای هر n، $f_n \leq f_{n+1}$ ت. ه. و $f_n \to f$ ت. ه.

۵. $f_n \downarrow f$ ت. ه. اگر به ازای هر n، $f_{n+1} \leq f_n$ ت. ه. و $f_n \to f$ ت. ه.

در سراسر این بخش، (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ ثابت می‌باشد.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنیم $f: X \to R$ یک تابع باشد. هرگاه $f^{-1}(\mathcal{O})$ به ازای هر زیرمجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ از R اندازه‌پذیر باشد، f را یک ***تابع اندازه‌پذیر*** می‌نامیم.

هر تابع ثابت اندازه‌پذیر است. درواقع، هرگاه به ازای هر $x \in X$، $f(x) = c$ و $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از R باشد، آنگاه $f^{-1}(\mathcal{O}) = \varnothing$ اگر $c \notin \mathcal{O}$ و $f^{-1}(\mathcal{O}) = X$ اگر $c \in \mathcal{O}$.

به یاد آورید که مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک اعضای σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ مجموعه‌های بازند. اولین قضیه چند ویژگی مفید از توابع اندازه‌پذیر را به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۲.۱۳. ***احکام زیر برای تابع $f: X \to R$ هم‌ارزند:***

۱. ***f اندازه‌پذیر است.***

۲. ***$f^{-1}((a, b))$ به ازای هر بازهٔ بازکراندار (a, b) از R اندازه‌پذیر است.***

۳. ***$f^{-1}(C)$ به ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ C از R اندازه‌پذیر است.***

۴. ***$f^{-1}([a, \infty))$ به ازای هر $a \in R$ اندازه‌پذیر است.***

۵. ***$f^{-1}((-\infty, a])$ به ازای هر $a \in R$ اندازه‌پذیر است.***

۶. ***$f^{-1}(B)$ به ازای هر زیرمجموعهٔ بورل B از R اندازه‌پذیر است.***

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱). واضح است.

(۳) $\Leftarrow$ (۲). از رابطهٔ $f^{-1}(C) = \left[f^{-1}(C^c)\right]^c$ و این امر که C^c را می‌توان بـه صـورت اجتماعی شمارش‌پذیر از بازه‌های بازکراندار نوشت به دست می‌آید.

(۴) $\Leftarrow$ (۳). واضح است.

(۵) $\Leftarrow$ (۴). ابتدا توجه می‌کنیم که $f^{-1}((-\infty, a)) = \left[f^{-1}\left([a, \infty)\right)\right]^c$ به ازای هر $a \in R$ اندازه‌پذیر است. حال نتیجه از اتحاد زیر به دست می‌آید:

$$f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[(-\infty, a+\frac{1}{n})\right].$$

(۶) $\Leftarrow$ (۵). فرض کنیم

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq R: \text{ اندازه‌پذیر است } f^{-1}(A)\}.$$

به آسانی معلوم می‌شود که $\mathcal{A}$ یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های R است به طوری که $(-\infty, a]$ به ازای هر $a \in R$ طبق فرض تعلق به $\mathcal{A}$ دارد. به آسانی معلوم می‌شود که $\mathcal{A}$ شامل زیرمجموعه‌های باز R است و درنتیجه شامل مجموعه‌های بـورل نـیز هست. لذا، $f^{-1}(B)$ بـه ازای هـر زیـرمجموعهٔ بـورل B از R

اندازه‌پذیر است.

(۱) $\Rightarrow$ (۶). واضح است.

دو تابع که تقریباً همه جا مساوی باشند یا هر دو اندازه پذیرند یا هردو اندازه‌ناپذیر. جزئیات را در زیر می‌بینید.

قضیهٔ ۳.۱۳. هرگاه f یک تابع *اندازه‌پذیر* بوده و $g:X\to R$ در $g = f$ ت. هـ. صدق کند، *آنگاه* g یک *تابع اندازه‌پذیر است.*

برهان. هرگاه $A = \{x \in X: f(x) \neq g(x)\}$، آنگاه از فرض داریم $\mu^*(A) = 0$؛ و درنتیجه A اندازه‌پذیر است. حال فرض می‌کنیم $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از R باشد. چون f یک تابع اندازه‌پذیر است، $f^{-1}(\mathcal{O})$ اندازه‌پذیر است؛ و درنتیجه $A^c\cap g^{-1}(\mathcal{O}) = A^c\cap f^{-1}(\mathcal{O})$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر می‌باشد. همچنین، چون $A\cap g^{-1}(\mathcal{O})$ دارای اندازهٔ خارجی صفر است، اندازه‌پذیر است. لذا،

$$g^{-1}(\mathcal{O}) = [A\cap g^{-1}(\mathcal{O})]\cup[A^c\cap g^{-1}(\mathcal{O})]$$

یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است؛ درنتیجه g یک تابع اندازه‌پذیر می‌باشد.

بحث را با خواص دیگری از توابع اندازه‌پذیر ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۴.۱۳. هرگاه f و g توابع *اندازه‌پذیری باشند، آنگاه* سه مجموعهٔ زیر همه *اندازه‌پذیرند:*

آ. $\{x \in X: f(x) > g(x)\}$،

ب. $\{x \in X: f(x) \geq g(x)\}$، و

پ. $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$.

برهان. (آ) هرگاه $r_1, r_2, \ldots$ شمارشی از اعداد گویای در R باشد، آنگاه

$$\{x\in X: f(x)>g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\{x\in X: f(x)>r_n\}\cap \{x\in X: g(x)<r_n\}],$$

که اندازه‌پذیر است زیرا اجتماعی شمارشپذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌باشد.

(ب) توجه کنید که

$$\{x \in X: f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X: g(x) > f(x)\}^c,$$

که بنابر (آ) اندازه‌پذیر است.

(پ) ملاحظه می‌کنیم که

$$\{x \in X: f(x) = g(x)\} = \{x \in X: f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X: g(x) \geq g(x)\},$$

که بنابر (ب) اندازه‌پذیر است.

نتیجهٔ زیر به ما می‌گوید که ترکیبات جبری معمولی از توابع اندازه‌پذیر، توابع اندازه‌پذیر به دست می‌دهند.

قضیهٔ ۵.۱۳. *احکام زیر برای توابع اندازه‌پذیر f و g برقرارند:*

۱. $f + g$ ***یک تابع اندازه‌پذیر است.***

۲. fg ***یک تابع اندازه‌پذیر است.***

۳. $|f|$ ، f^{+}، و f^{-} ***توابعی اندازه‌پذیرند.***

۴. $f \vee g$ و $f \wedge g$ ***توابعی اندازه‌پذیرند.***

برهان. (۱) ابتدا توجه می‌کنیم که اگر c عدد ثابتی باشد، $c - g$ یک تابع اندازه‌پذیر است. [**دلیل.** هرگاه $a \in R$، آنگاه

$$\{x \in X: c - g(x) \geq a\} = \{x \in X: g(x) \leq c - a\}$$

یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است.] حال اگر $a \in R$، مجموعهٔ

$$(f+g)^{-1}([a, \infty)) = \{x \in X: f(x) + g(x) \geq a\} = \{x \in X: f(x) \geq a - g(x)\}$$

طبق ملاحظات فوق و قضیهٔ ۴.۱۳ اندازه‌پذیر است. لذا، طبق قضیهٔ ۲.۱۳، $f + g$ یک تابع اندازه‌پذیر می‌باشد.

(۲) ابتدا توجه می‌کنیم که f^{2} یک تابع اندازه‌پذیر است. درواقع، هرگاه $a \in R$، آنگاه $\{x \in X: f^{2}(x) \leq a\} = \varnothing$ اگر $a < 0$ و $\{x \in X: f^{2}(x) \leq a\} = f^{-1}([-\sqrt{a}, \sqrt{a}])$ اگر $a \geq 0$. لذا، f^{2} طبق قضیهٔ ۲.۱۳ یک تابع اندازه‌پذیر است. همچنین، هرگاه c یک عدد ثابت باشد، آنگاه cf اندازه‌پذیر است. [**دلیل.** هرگاه $A = \{x \in X: cf(x) \geq a\}$، آنگاه به ازای $c > 0$، $A = \{x \in X: f(x) \geq a/c\}$ و به ازای $c < 0$، $A = \{x \in X: f(x) \leq a/c\}$.] حال نتیجه از نکات فوق در ترکیب با (۱) و رابطهٔ

$$fg = \frac{1}{2}[(f + g)^{2} - f^{2} - g^{2}]$$

به دست می‌آید.

(۳) اندازه‌پذیری $|f|$ از روابط زیر حاصل می‌شود:

هرگاه $a < 0$، $\{x \in X: |f(x)| \le a\} = \varnothing$.

هرگاه $a \ge 0$، $\{x \in X: |f(x)| \le a\} = \{x \in X: f(x) \le a\} \cap \{x \in X: f(x) \ge -a\}$. برای اندازه‌پذیری f^+ و f^-، از اتحادهای زیر استفاده کنید:

$$f^+ = \tfrac{1}{2}(|f| + f) \text{ و } f^- = \tfrac{1}{2}(|f| - f).$$

(۴) اتحادهای

$$f \vee g = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ و } f \wedge g = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

نشان می‌دهند که $f \vee g$ و $f \wedge g$ توابعی اندازه پذیرند.

نتیجهٔ زیر می‌گوید که حد تقریباً همه جای یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر، تابعی اندازه‌پذیر است.

قضیهٔ ۶.۱۳. ***احکام زیر برای دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر برقرارند:***

۱. هرگاه $f_n \to f$ ت. هـ.، آنگاه f یک تابع اندازه‌پذیر است.

۲. هرگاه $\{f_n(x)\}$ به ازای هر x دنباله‌ای کراندار باشد، آنگاه $\limsup f_n$ و $\liminf f_n$ توابعی اندازه پذیرند.

برهان. (۱) فرض کنیم $A = \{x \in X: \lim f_n(x) = f(x)\}$. چون $f_n \to f$ ت. هـ.، داریم $\mu^*(A^c) = 0$. لذا، A^c اندازه‌پذیر است؛ و درنتیجه A نیز اندازه‌پذیر می‌باشد. حال فرض کنیم $a \in R$. ملاحظه می‌کنیم که تساوی

$$A \cap f^{-1}((a, \infty)) = A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left[\left[a + \frac{1}{n}, \infty\right]\right]\right]$$

و اندازه‌پذیری هر f_i نشان می‌دهد که $A \cap f^{-1}((a, \infty))$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. همچنین، $A^c \cap f^{-1}((a, \infty))$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است زیرا زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه از اندازهٔ صفر می‌باشد. لذا،

$$f^{-1}((A, \infty)) = [A \cap f^{-1}((a, \infty))] \cup [A^c \cap f^{-1}((a, \infty))]$$

یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر می‌باشد. حال از قضیهٔ ۲.۱۳ به آسانی معلوم می‌شود که f یک تابع اندازه‌پذیر است.

(۲) فرض کنیم $\{f_n(x)\}$ به ازای هر x کراندار باشد. نشان می‌دهیم که $\limsup f_n$ یک تابع اندازه‌پذیر است. در این صورت، اندازه پذیری $\liminf f_n$ از اتحاد $\liminf f_n = -\limsup(-f_n)$ نتیجه می‌شود.

ابتدا توجه می‌کنیم که $\limsup \wedge_{n=1}^{\infty} \vee_{m=n}^{\infty} f_m$. عدد طبیعی n را ثابت می‌گیریم. در این

صورت، تابع $h_n = f_{m+1} \vee \dots \vee f_{m+n}$ به ازای هر n [طبق قضیهٔ ۵.۱۳ (۴)] اندازه‌پذیر است، و چون $h_n \uparrow \bigvee_{i=m}^{\infty} f_i = g_m$ (همه جا)، از قسمت (۱) معلوم می‌شود که هر g_m یک تابع اندازه‌پذیر است. چون $g_m \downarrow \limsup f_n$ (همه‌جا)، از (۱) مجدداً نتیجه می‌شود که $\limsup f_n$ یک تابع اندازه‌پذیر است و برهان قضیه کامل خواهد شد.

دو قضیهٔ اخیر نشان می‌دهند که گردایهٔ تمام توابع اندازه‌پذیر یک فضای تابعی تشکیل می‌دهند که شامل حدود دنباله‌های خود که تقریباً همه جا همگرایند می‌باشد. به علاوه، این گردایه تحت ضرب نقطه به نقطه یک جبر است. به عبارت دیگر، اعمال معمولی بر توابع اندازه‌پذیر مجدداً توابع اندازه‌پذیر تولید می‌کنند.

بنابراین، طبیعی است بپرسیم آیا تابعی هست که اندازه‌پذیر نیست. واضح است که اگر هر زیرمجموعهٔ X اندازه‌پذیر باشد [یعنی $\Lambda = \mathcal{P}(X)$]، هر تابع حقیقی بر X اندازه‌پذیر است. از آن سو، هرگاه مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر موجود باشند، آنگاه توابع اندازه‌ناپذیر نیز وجود دارند. درواقع، هرگاه E یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر باشد، آنگاه تابع f با تعریف $f(x) = 1$ اگر $x \in E$ و $f(x) = 0$ اگر $x \notin E$ اندازه‌پذیر نیست صرفاً به این خاطر که $E = f^{-1}(1)$ اندازه‌پذیر نیست.

این بخش را با یک قضیهٔ اساسی که تقریباً همه جا همگرایی و همگرایی یکنواخت را به هم ربط می‌دهد پایان می‌بخشیم. نتیجه به دی. اگوروف (D. Egoroff) منسوب است.

قضیهٔ ۷.۱۳ (اگوروف). ***فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که $f_n \to f$ ت. ه. و E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از X باشد به طوری که $\mu^*(E) < \infty$. در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > 0$، زیرمجموعهٔ اندازه پذیری مانند F از E هست به طوری که $\mu^*(F) < \varepsilon$ و $\{f_n\}$ به f بر $E \sim F$ به طور یکنواخت همگراست.***

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که با حذف یک مجموعهٔ پوچ از X می‌توان بدون لطمه زدن به کلیت فرض کرد $\lim f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. به ازای هر جفت عدد صحیح مثبت n و k، قرار می‌دهیم

$$E_{n,k} = \{x \in E: \ |f_m(x) - f(x)| < 2^{-n} \text{ به ازای هر } m \geq k\}.$$

واضح است که هر $E_{n,k}$ یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از X است. به علاوه، $E_{n,k} \subseteq E_{n,k+1}$ به ازای هر k و n برقرار است. چون $\lim f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است، به آسانی معلوم می‌شود که

به ازای هر n ثابت، $E_{n,\,k} \uparrow_k E$

و، بنابر قضیهٔ ۵.۱۲،

به ازای هر n ثابت، $\mu^*(E_{n,\,k}) \uparrow_k \mu^*(E)$.

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$. چون به ازای هر n، $\mu^*(E) < \infty$، عدد صحیحی مانند k_n هست به طوری که

$$\mu^*(E \sim E_{n,\,k_n}) = \mu^*(E) - \mu^*(E_{n,\,k_n}) < 2^{-n}\varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $F = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \sim E_{n,\,k_n})$. در این صورت، F اندازه‌پذیر است، $F \subseteq E$، و

$$\mu^*(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \sim E_{n,\,k_n}) < \varepsilon.$$

همچنین، هرگاه $x \in E \sim F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k_n}$، آنگاه $|f_m(x) - f(x)| < 2^{-n}$ به ازای هر $m \geq k_n$ برقرار است. این نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر $E \sim F$ همگراست. در اینجا برهان قضیه کامل خواهد شد.

تمرینات

۱. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. به ازای تابع $f: X \to R$ نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند:

آ. f یک تابع اندازه‌پذیر است.

ب. $f^{-1}((-\infty, a))$ به ازای هر $a \in R$ اندازه‌پذیر است.

پ. $f^{-1}((a, \infty))$ به ازای هر $a \in R$ اندازه‌پذیر است.

۲. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و A زیرمجموعهٔ چگالی از R باشد. نشان دهید که تابع $f: X \to R$ اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $\{x \in X: f(x) \geq a\}$ به ازای هر $a \in A$ اندازه‌پذیر باشد.

۳. یک تابع اندازه‌ناپذیر لبگ $f: R \to R$ چنان مثال بزنید که $f^{-1}(a)$ به ازای هر $a \in R$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد.

۴. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $f: X \to R$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید که

آ. $|f|^p$ به ازای هر $p \geq 0$ یک تابع اندازه‌پذیر است و

ب. هرگاه به ازای $x \in X$، $f(x) \neq 0$، آنگاه $1/f$ یک تابع اندازه‌پذیر است.

۵. تابع اندازه‌ناپذیر f را چنان مثال بزنید که $|f|$ اندازه‌پذیر باشد.

۶. نشان دهید هرگاه $f: R \to R$ ت. هـ. پیوسته باشد، آنگاه f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ است.

۷. فرض کنید $f:R\to R$ یک تابع مشتقپذیر باشد. نشان دهید که f' اندازه‌پذیر لبگ است.

۸. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر فضای اندازهٔ (X, S, μ) باشد به طوری که $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in X$ یک دنبالهٔ کراندار باشد. تعریف کنید

$$E = \{x \in X: \lim f_n(x) \text{ وجود دارد}\}$$

و نشان دهید E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است.

۹. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. همچنین $f:X\to R$ یک تابع اندازه‌پذیر بوده و $g:R\to R$ یک تابع پیوسته باشد. نشان دهید که $g\circ f$ یک تابع اندازه‌پذیر است.

۱۴. تابعهای ساده و پله‌ای

از این بخش به بعد، خواص توابع مشخصه لازم خواهند شد. به این دلیل، خواص آنها را در زیر ذکر کرده‌ایم و از خواننده انتظار داریم بتواند آنها را تحقیق نماید. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه **تابع مشخصهٔ** χ_A از A یک تابع حقیقی است که بر X با $\chi_A(x) = 1$ اگر $x \in A$ و $\chi_A(x) = 0$ اگر $x \notin A$ تعریف می‌شود.

روابط زیر به ازای زیرمجموعه‌های A و B از X برقرارند:

۱. $\chi_\varnothing = 0$ و $\chi_X = 1$.

۲. هرگاه $A \subseteq B$، آنگاه $\chi_A \le \chi_B$.

۳. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A \wedge \chi_B$.

۴. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A \vee \chi_B$.

۵. $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$.

۶. هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\{A_n\}$ دنباله‌ای ازهم‌جدا از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.

۷. $\chi_{A\times B} = \chi_A \cdot \chi_B$. (در اینجا مجموعهٔ B را می‌توان زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ دیگری چون Y در نظر گرفت.)

مجدداً، در سراسر این بخش، (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ ثابت گرفته می‌شود. هرگاه تابع اندازه‌پذیر $\phi:X\to R$ فقط تعدادی متناهی مقدار بگیرد، آنگاه ϕ یک **تابع ساده** نام دارد. واضح است که مجموعهای متناهی، حاصل ضربهای متناهی، و سوپرممها و اینفیمم‌های متناهی از توابع ساده مجدداً توابعی ساده‌اند. به عبارت دیگر، گردایهٔ تمام توابع ساده یک فضای تابعی تشکیل می‌دهد که یک جبر نیز می‌باشد.

هرگاه تابع سادهٔ ϕ مقادیر ناصفر متمایز $a_1, ..., a_n$ را بگیرد، آنگاه مجموعه‌های $A_i = \{x \in X: \phi(x)=a_i\}$ همه اندازه‌پذیر و دوبدو از هم جدایند و $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ برقرار است. این عبارت **نمایش متعارف** ϕ نام دارد. همچنین می‌پذیریم که نمایش متعارف تابع ثابت صفر مساوی $\chi_\varnothing$ باشد. به طور کلی، تابع سادهٔ ϕ را می‌توان به بیش از یک راه به شکل $\phi = \sum_{j=1}^{m} a_i\chi_{B_j}$ نوشت، که در آن مقادیر b_j اعداد حقیقی بوده و مجموعه‌های B_j همه اندازه‌پذیر باشند.

تابع سادهٔ ϕ یک ***تابع پله‌ای*** نام دارد اگر ϕ نمایشی به شکل $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ داشته باشد، که در آن هر A_i یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر از اندازهٔ متناهی است [یعنی $\mu^*(A_i) < \infty$]. واضح است که یک تابع ساده تابعی پله‌ای است اگر و فقط اگر خارج یک مجموعه از اندازهٔ متناهی صفر شود.(1) همچنین روشن است که گردایهٔ تمام توابع پله‌ای یک فضای تابعی تشکیل می‌دهد که یک جبر از توابع نیز هست. توابع پله‌ای "سنگهای ساختمانی" نظریهٔ انتگرالگیری می‌باشند.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنیم ϕ یک تابع پله‌ای با نمایش متعارف $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ باشد، یعنی $a_1, ..., a_n$ مقادیر ناصفر متمایز ϕ باشند و $A_i = \{x \in X: \phi(x) = a_i\}$. در این صورت، ***انتگرال لبگ*** ϕ (یا فقط ***انتگرال*** ϕ) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu^*(A_i) .$$

انتگرال ϕ را معمولاً با $\int_X \phi\, d\mu$ یا فقط $\int \phi\, d\mu$ نشان می‌دهند. فعلاً از $I(\phi)$ برای نمایش انتگرال ϕ استفاده کرده و بعدها به نماد مرسوم رو خواهیم آورد.

اولین قضیهٔ ما خاصیت خطی انتگرال برای توابع پله‌ای را توصیف می‌کند. مشکل برهان در این امر نهفته است که نمایش متعارف مجموع دو تابع ساده لزوماً مجموع نمایشهای متعارف آنها نیست.

قضیهٔ ۲.۱۴. *هرگاه ϕ و ψ دو تابع پله‌ای باشند، آنگاه*

$$I(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha I(\phi) + \beta I(\psi)$$

به ازای هر $\alpha, \beta \in R$ برقرار است.

---

(۱) توجه کنید که تعریف تابع پله‌ای از تعریف آشنایی که در رابطه با انتگرال ریمان می‌شود کلیتر است. در آنجا تابع $\phi: [a, b] \to R$ یک تابع پله‌ای است اگر افرازی مانند $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ از $[a, b]$ باشد به طوری که ϕ بر هر زیربازهٔ باز (x_{i-1}, x_i) ثابت باشد. بسیاری از مؤلفان تابع پله‌ای را یک تابع ساده با محافظ متناهی نامیده‌اند.

برهان. واضح است که $I(\alpha\phi) = \alpha I(\phi)$ به ازای هر تابع پله‌ای ϕ و هر $\alpha \in R$ برقرار است. لذا، آنچه باید ثابت شود این است که هرگاه ϕ و ψ توابعی پله‌ای باشند، آنگاه $I(\phi + \psi) = I(\phi) + I(\psi)$ برقرار است.

فرض کنیم $\phi = \sum_{i=۱}^{n} a_i\chi_{A_i}$ و $\psi = \sum_{j=۱}^{m} b_i\chi_{B_j}$ نمایشهای متعارف ϕ و ψ باشند. قرار می‌دهیم $E = \left[\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\right] \cup \left[\bigcup_{j=۱}^{m} B_j\right]$ و توجه می‌کنیم که $\mu^*(E) < \infty$. حال قرار می‌دهیم $A_{۰} = E \sim \bigcup_{i=۱}^{n} A_i$، $B_{۰} = E \sim \bigcup_{j=۱}^{m} B_j$، و $a_{۰} = b_{۰} = ۰$. در این صورت، A_i ها دو بدو ازهم جدایند، B_j ها دو بدو از هم جدایند، و $\bigcup_{i=۰}^{n} A_i = \bigcup_{j=۰}^{m} B_j = E$.

حال به صورت نمایش متعارف می‌نویسیم $\phi + \psi = \sum_{k=۱}^{r} c_k\chi_{C_k}$. چون $\phi(x) + \psi(x) \neq ۰$ ایجاب می‌کند که $\phi(x) \neq ۰$ یا $\psi(x) \neq ۰$، به آسانی معلوم می‌شود که $\bigcup_{k=۱}^{r} C_k \subseteq E$. قرار می‌دهیم $C_{۰} = E \sim \bigcup_{k=۱}^{r} C_k$ و $c_{۰} = ۰$. در این صورت، C_k ها دوبدو از هم جدایند و

$$C_k = \bigcup_{i=۰}^{n} \bigcup_{j=۰}^{m} (C_k \cap A_i \cap B_j)$$

یک اجتماع از هم جدا به ازای هر $۰ \leq k \leq r$ می‌باشد. لذا،

$$\mu^*(C_k) = \sum_{i=۰}^{n} \sum_{j=۰}^{m} \mu^*(C_k \cap A_i \cap B_j)\ .$$

به علاوه، توجه کنید که

$$c_k\, \mu^*(C_k \cap A_i \cap B_j) = (a_i + b_j)\mu^*(C_k \cap A_i \cap B_j)$$

به ازای هر i، j، و k برقرار است. درواقع، هرگاه $C_k \cap A_i \cap B_j = \varnothing$، آنگاه تساوی بداهتاً برقرار است، و هرگاه $x \in C_k \cap A_i \cap B_j$، آنگاه تساوی به خاطر رابطهٔ $c_k = \phi(x) + \psi(x) = a_i + b_j$ برقرار است.

اگر مطالب فوق را جمعبندی کرده و از جمعی بودن μ^* بر $\mathcal{M}$ استفاده کنیم، به دست می‌آوریم

$$I(\phi+\psi) = \sum_{k=۱}^{r} c_k\mu^*(C_k) = \sum_{k=۰}^{r} c_k\mu^*(C_k) = \sum_{k=۰}^{r} \sum_{i=۰}^{n} \sum_{j=۰}^{m} c_k\mu^*(C_k \cap A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} \sum_{j=۰}^{m} \sum_{k=۰}^{r} (a_i+b_j)\mu^*(C_k \cap A_i \cap B_j) = \sum_{i=۰}^{n} \sum_{j=۰}^{m} = (a_i+b_j)\mu^*(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} a_i \sum_{j=۰}^{m} \mu^*(A_i \cap B_j) + \sum_{j=۰}^{m} b_j \sum_{i=۰}^{n} \mu^*(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} a_i\mu^*(A_i) + \sum_{j=۰}^{n} b_j\, \mu^*(B_j) = I(\phi) + I(\psi)$$

و برهان تمام می‌شود.

از قضیهٔ قبل واضح است که اگر ϕ یک تابع پله‌ای با نمایش $\phi = \sum_{j=۱}^{m} b_i\chi_{B_j}$ باشد که هر b_j در R بوده و هر B_j اندازه‌پذیر با اندازهٔ متناهی است، رابطهٔ $I(\phi) = \sum_{j=۱}^{m} b_j\mu^*(B_j)$ برقرار است. به عبارت دیگر، انتگرال یک تابع پله‌ای به نمایش خاصی از آن بستگی ندارد.

بحث را با خاصیت یکنوایی انتگرال ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۱۴. *احکام زیر به ازای توابع پله‌ای ϕ و ψ برقرارند:*

۱. **هرگاه $\phi \geq 0$ ت. هـ.، آنگاه $I(\phi) \geq 0$. به خصوص، هرگاه $\phi \geq \psi$ ت. هـ.، آنگاه $I(\phi) \geq I(\psi)$.**

۲. **هرگاه $\phi = 0$ ت. هـ.، آنگاه $I(\phi) = 0$. به خصوص، هرگاه $\phi = \psi$ ت. هـ.، آنگاه $I(\phi) = I(\psi)$.**

برهان. (۱) فرض کنیم $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ نمایش متعارف ϕ باشد. چون $\phi \geq 0$ ت. هـ.، توجه می‌کنیم که اگر $a_i < 0$ به ازای i ای برقرار باشد. لزوماً به ازای آن i داریم $\mu^*(A_i) = 0$. لذا، $I(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu^*(A_i) \geq 0$.

حال اگر $\phi \geq \psi$ ت. هـ.، داریم $\phi - \psi \geq 0$ ت. هـ.؛ و درنتیجه $I(\phi) - I(\psi) = I(\phi - \psi) \geq 0$. لذا، $I(\phi) \geq I(\psi)$.

(۲) هرگاه $\phi = 0$ ت. هـ.، آنگاه $\phi \geq 0$ ت. هـ. و $-\phi \geq 0$ ت. هـ. هر دو برقرارند. لذا، طبق قسمت (۱)، $I(\phi) \geq 0$ و $-I(\phi) \geq 0$ هر دو برقرارند. بنابراین، $I(\phi) = 0$.

حال اگر $\phi = \psi$ ت. هـ.، داریم $\phi - \psi = 0$ ت. هـ.؛ و درنتیجه، بنابر فوق، $I(\phi) - I(\psi) = I(\phi - \psi) = 0$. یعنی $I(\phi) = I(\psi)$.

قضیهٔ زیر یک خاصیت پیوستگی اساسی انتگرال را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۴.۱۴. *فرض کنیم $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد. هرگاه $\phi_n \downarrow 0$ ت. هـ.، آنگاه $I(\phi_n) \downarrow 0$. به خصوص، هرگاه ϕ یک تابع پله‌ای بوده و $\phi_n \uparrow \phi$ ت. هـ.، آنگاه $I(\phi_n) \uparrow I(\phi)$.*

برهان. فرض کنیم $\phi_n \downarrow 0$ ت. هـ. همچنین $A_n = \{x \in X: \phi_{n+1}(x) > \phi_n(x)\}$ و $A_0 = \{x \in X: \phi_n(x) \not\to 0\}$ قرار می‌دهیم. طبق فرض، به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $\mu^*(A_n) = 0$. $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. در این صورت، $\mu^*(A) = 0$ (برای مشاهدهٔ این امر، از σ- زیرجمعی بودن μ^* استفاده کنید)، و توجه کنید که $\phi_n(x) \downarrow 0$ به ازای هر $x \in A^c$ برقرار است. همچنین، هرگاه $\psi_n = \phi_n\chi_{A^c}$، آنگاه به ازای هر n، $\psi_n = \phi_n$ ت. هـ.، به ازای هر $x \in X$، $\psi_n(x) \downarrow 0$ و، بنابر قضیهٔ ۳.۱۴، به ازای هر n داریم $I(\psi_n) = I(\phi_n)$. لذا، از تعویض $\{\phi_n\}$ با $\{\psi_n\}$ در صورت لزوم، می‌توان بدون لطمه زدن به کلیت فرض کرد $\phi_n(x) \downarrow 0$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد.

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$. قرار می‌دهیم $M = \max\{\phi_1(x): x \in X\}$ و

$B = \{x \in X: \phi_1(x) > 0\}$. واضح است که $\mu^*(B) < \infty$. به ازای هر n تعریف می‌کنیم $E_n = \{x \in X: \phi_n(x) \geq \varepsilon\}$. در این صورت، $\mu^*(E_1) < \infty$، هر E_n اندازه‌پذیر است، و $E_n \downarrow \varnothing$ به خاطر آنکه به ازای هر $x \in X$، $\phi_n(x) \downarrow 0$ برقرار است. بنابر قضیهٔ ۵.۱۲، داریم $\mu^*(E_n) \downarrow 0$. عدد صحیح k را طوری می‌گیریم که $\mu^*(E_k) < \varepsilon$. حال اگر $n \geq k$، داریم

$$0 \leq \phi_n \leq \phi_k = \phi_k\chi_{E_k} + \phi_k\chi_{B\sim E_k} \leq M\chi_{E_k} + \varepsilon\chi_B$$

که از آن نتیجه می‌شود که به ازای هر $n \geq k$،

$$0 \leq I(\phi_n) \leq M\mu^*(E_k) + \varepsilon\mu^*(B) < \varepsilon[M + \mu^*(B)].$$

بنابراین، $\lim I(\phi_n) = 0$.

حال اگر ϕ یک تابع پله‌ای بوده و $\phi_n \uparrow \phi$ ت. ه. برقرار باشد، $\phi - \phi_n \downarrow 0$ ت. ه. نیز برقرار است؛ و درنتیجه، بنابر حالت قبل، $I(\phi - \phi_n) \downarrow 0$. لذا، $I(\phi_n) \uparrow I(\phi)$ و برهان تمام است.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ اخیر، نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۵.۱۴. فرض کنیم دو دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ از توابع پله‌ای در $\phi_n \uparrow f$ ت. ه. و $\psi_n \uparrow f$ ت. ه.، که $f: X \to R^*$ یک تابع معلوم است، صدق نمایند. در این صورت،

$$\lim I(\phi_n) = \lim I(\psi_n)$$

برقرار است، که در آن حدود می‌توانند نامتناهی باشند.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که به ازای هر m ثابت، داریم

$$\phi_m \wedge \psi_n \uparrow_n \phi_m \wedge f = \phi_m \text{ ت. ه.}$$

بنابراین، طبق قضیهٔ ۴.۱۴، $\lim_n I(\phi_m \wedge \psi_n) = I(\phi_m)$.

حال، به خاطر برقراری $\phi_m \wedge \psi_n \leq \psi_n$ به ازای هر n، معلوم می‌شود که به ازای هر m، $I(\phi_m) = \lim_n I(\phi_m \wedge \psi_n) \leq \lim I(\psi_n)$. لذا، $\lim I(\phi_n) \leq \lim I(\psi_n)$ برقرار است. به همین نحو، $\lim I(\psi_n) \leq \lim I(\phi_n)$؛ و درنتیجه، $\lim I(\phi_n) = \lim I(\psi_n)$.

نتیجهٔ زیر خاصیت مفید دیگری از توابع پله‌ای را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۶.۱۴. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از X باشد که $\phi_n \uparrow \chi_A$ ت. ه.، آنگاه A یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر بوده و $\lim I(\phi_n) = \mu^*(A)$ برقرار است.

برهان. اندازه‌پذیری A از قضیهٔ ۶.۱۳ (۱) نتیجه می‌شود. می‌توان فرض کرد $\phi_n(x) \uparrow \chi_A(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

به ازای هر n، مجموعهٔ $A_n = \{x \in X: \phi_n(x) > 0\}$ اندازه‌پذیر با اندازهٔ متناهی است و $A_n \uparrow A$ برقرار است. پس داریم $\chi_{A_n} \uparrow \chi_A$ و لذا، طبق قضیهٔ ۵.۱۴،

$$\lim I(\phi_n) = \lim I(\chi_{A_n}) = \lim \mu^*(A_n) = \mu^*(A),$$

که در آن تساوی آخر به خاطر قضیهٔ ۵.۱۲ برقرار است.

این بخش را با یک قضیهٔ تقریب مهم خاتمه می‌دهیم.

قضیهٔ ۷.۱۴. ***فرض کنیم*** $f: X \to R$ ***یک تابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که به ازای هر*** x، $f(x) \geq 0$. ***در این صورت، دنباله‌ای مانند*** $\{\phi_n\}$ ***از توابع ساده هست به طوری که*** $0 \leq \phi_n(x) \uparrow f(x)$ ***به ازای هر*** $x \in X$ ***برقرار است.***

برهان. به ازای هر n قرار می‌دهیم

$$A_n^i = \{x \in X: (i-1)2^{-n} \leq f(x) < i2^{-n}\},$$

که در آن $i = 1, \ldots, n2^n$، و توجه می‌کنیم که اگر $i \neq j$، $A_n^i \cap A_n^j = \varnothing$. چون f اندازه‌پذیر است، همهٔ A_n^i ها مجموعه‌هایی اندازه پذیرند.

حال به ازای هر n تعریف می‌کنیم $\phi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} 2^{-n}(i-1)\chi_{A_n^i}$ و توجه می‌کنیم که $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است. همچنین، به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر x و هر n، $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq f(x)$. به علاوه، هرگاه x ثابت باشد، آنگاه $0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq 2^{-n}$ به ازای همهٔ n های به قدر کافی بزرگ برقرار است. لذا، به ازای هر x، $\phi_n(x) \uparrow f(x)$ و برهان تمام است.

هرگاه $f: X \to R$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که به ازای تقریباً هر x، $f(x) \geq 0$، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع سادهٔ مثبت هست به طوری که $\phi_n \uparrow f$ ت. هـ. برقرار است. برای مشاهدهٔ این امر، قرار دهید $E = \{x \in X: f(x) \geq 0\}$ و سپس قضیهٔ ۷.۱۴ را بر تابع $f\chi_E$ اعمال نمایید.

تمرینات

۱. اتحادهای مربوط به توابع مشخصه در ص ۱۳۲ را تحقیق کنید.

۲. فرض کنید ϕ یک تابع پله‌ای و ψ یک تابع ساده باشد به طوری که $0 \leq \psi \leq \phi$ ت. هـ. نشان دهید

که ψ یک تابع پله‌ای است.

۳. نشان دهید هرگاه (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه هر تابع ساده یک تابع پله‌ای است.

۴. نشان دهید به ازای هر تابع پله‌ای ϕ، $|I(\phi)| \leq I(|\phi|)$.

۵. فرض کنید ϕ یک تابع پله‌ای باشد به طوری که $I(|\phi|) = ۰$. نشان دهید که $\phi = ۰$ ت. ه. برقرار است.

۶. فرض کنید ϕ یک تابع پله‌ای باشد. قرار دهید $A = \{x \in X: \phi(x) \neq ۰\}$ و $M = \max\{|\phi(x)|: x \in X\}$. نشان دهید که $|I(\phi)| \leq M\mu^*(A)$.

۷. فرض کنید $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد. نشان دهید هرگاه ϕ یک تابع پله‌ای بوده و $\phi_n \downarrow \phi$ ت. ه. برقرار باشد، آنگاه $I(\phi_n) \downarrow I(\phi)$ نیز برقرار است.

۸. فرض کنید $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای بوده و ϕ یک تابع ساده باشد به طوری که $۰ \leq \phi_n \uparrow \phi$ ت. ه. برقرار باشد. نشان دهید هرگاه $\lim I(\phi_n) < \infty$، آنگاه ϕ یک تابع پله‌ای است.

۹. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $f: X \to R$ یک تابع ساده با نمایش متعارف $\phi = \sum_{i=۱}^{n} a_i \chi_{A_i}$ باشد. هرگاه $\phi \geq ۰$ ت. ه.، آنگاه مجموع $\sum_{i=۱}^{n} a_i \mu^*(A_i)$ به عنوان یک عدد حقیقی وسعت یافته معنی دارد (ممکن است نامتناهی باشد). این عدد حقیقی وسعت یافته را ***انتگرال لبگ*** ϕ نامیده و می‌نویسیم

$$I(\phi) = \sum_{i=۱}^{n} a_i \mu^*(A_i) .$$

آ. هرگاه ϕ و ψ توابع ساده‌ای باشند به طوری که $\phi \geq ۰$ ت. ه. و $\psi \geq ۰$ ت. ه.، آنگاه نشان دهید که $I(\phi+\psi) = I(\phi)+I(\psi)$.

ب. هرگاه ϕ و ψ توابع ساده‌ای باشند به طوری که $۰ \leq \phi \leq \psi$ ت. ه.، آنگاه نشان دهید که $I(\phi) \leq I(\psi)$.

پ. نشان دهید هرگاه $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ دو دنباله از توابع ساده بوده و $f: X \to R^*$ چنان باشد که $۰ \leq \phi_n \uparrow f$ ت. ه. و $۰ \leq \psi_n \uparrow f$ ت. ه.، آنگاه $\lim I(\phi_n) = \lim I(\psi_n)$ برقرار است (ممکن است حدود نامتناهی باشند).

ت. فرض کنید $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده باشد به طوری که $۰ \leq \psi_n \uparrow \chi_A$ ت. ه. برقرار است. نشان دهید که $\lim I(\phi_n) = \mu^*(A)$.

ث. دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از توابع ساده بر یک فضای اندازه را چنان مثال بزنید که $\phi_n \downarrow ۰$ (همه جا) و $\lim I(\phi_n) \neq ۰$.

۱۰. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $\phi: X \to R$ یک تابع باشد. نشان دهید f یک تابع اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع ساده باشد به طوری که $\lim \phi_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد.

۱۱. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی بوده و $f: X \to R$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x) \geq \circ$. نشان دهید که یک دنباله مانند $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای هست به طوری که $\circ \leq \phi_n(x) \uparrow f(x)$ به ازای هر x برقرار است.

۱۵. اندازهٔ لبگ

مفهوم اندازهٔ لبگ تعمیم طبیعی مفاهیم طول، سطح، و حجم است. به خصوص، اندازهٔ لبگ یک شکل هندسی در $R^{۲}$ مساوی سطح آن و اندازهٔ لبگ یک جسم هندسی در $R^{۳}$ برابر حجمش می‌باشد.

هدف از این بخش مطالعهٔ تفصیلی خواص اندازهٔ لبگ بر R^n است. در این بحث، S نیم حلقهٔ مرکب از مجموعهٔ تهی و تمام مجموعه‌ها به شکل $A = \prod_{i=۱}^{n} [a_i, b_i)$ با $-\infty < a_i < b_i < \infty$ به ازای هر i است. این نیم حلقه در مثال ۸.۹ مطرح شد. در مثال ۶.۱۰ به خواننده قول دادیم نشان دهیم که تابع مجموعه‌ای $\lambda: S \to [\circ, \infty)$ با تعریف $\lambda(\emptyset) = \circ$ و $\lambda\left[\prod_{i=۱}^{n} [a_i, b_i)\right] = \prod_{i=۱}^{n} (b_i - a_i)$، σ- جمعی است. در زیر، این کار را انجام می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۱۵. *تابع مجموعه‌ای $\lambda: S \to [\circ, \infty)$ با تعریف فوق یک اندازه است که آن را اندازهٔ لبگ بر S می‌نامند.*

برهان. اثبات به استقرا بر بعد R^n صورت می‌گیرد. نیم حلقهٔ S بر R^n را با S_n و تابع مجموعه‌ای نظیر را با λ_n نشان می‌دهیم. به ازای $n = ۱$، نتیجه در مثال ۵.۱۰ حاصل شده است. حال فرض کنیم مطلب به ازای n درست باشد. باید نشان دهیم که $\lambda_{n+۱}$ بر $S_{n+۱}$، σ- جمعی است.

برای این کار، فرض کنیم $A \times [a,b) = \bigcup_{i=۱}^{\infty} \left[A_i \times [a_i, b_i)\right]$ که در آن $A \in S_n$ و به‌ازای هر i، $A_i \in S_n$، و دنبالهٔ $\{A_i \times [a_i, b_i)\}$ دو بدو ازهم جدا باشند. به آسانی معلوم می‌شود که $\chi_{A \times [a,b)} = \sum_{i=۱}^{\infty} \chi_{A_i \times [a_i, b_i)}$. اما، به ازای $x = (x_۱, ..., x_n) \in R^n$ و $t \in R$، از تساوی اخیر داریم

$$\chi_A(x) \cdot \chi_{[a,b)}(t) = \sum_{i=۱}^{\infty} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{[a_i, b_i)}(t).$$

$x = (x_۱, ..., x_n) \in R^n$ را ثابت گرفته و قرار می‌دهیم

$$\phi_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{[a_i, b_i)}(t).$$

در این صورت، هر ϕ_k یک تابع پله‌ای [برای (R, S_1, λ_1)] است به طوری که به ازای هر $t \in R$، $\phi_k(t) \uparrow \chi_A(x) \cdot \chi_{[a,b)}(t)$. بنابر قضیهٔ ۴.۱۴، به ازای هر $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ داریم $\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \chi_{A_i}(x) \uparrow (b-a)\chi_A(x)$. چون، طبق فرض استقرا، (R^n, S_n, λ_n) یک فضای اندازه است، اگر قضیهٔ ۴.۱۴ را بار دیگر به کار بریم، به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \lambda_n(A_i) \uparrow (b-a)\lambda_n(A);$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n+1} \left[A_i \times [a_i, b_i)\right] = \lambda_{n+1}(A \times [a,b)).$$

لذا، λ_{n+1}، σ- جمعی است و برهان تمام خواهد بود.

یک **بازه از** R^n مجموعه‌ای است به شکل $\prod_{i=1}^{n} I_i$ که در آن هر I_i یک بازه از R است. هرگاه هر I_i یک بازهٔ باز کراندار از R نیز باشد، آنگاه $\prod_{i=1}^{n} I_i$ را یک **بازهٔ باز کراندار** از R^n می‌نامیم. مانند مثال ۶.۱۲، می‌توان نشان داد که هر بازه از R^n اندازه‌پذیر لبگ است و، به علاوه، $\lambda^*(\prod_{i=1}^{n} I_i) = \prod_{i=1}^{n} |I_i|$ که در آن $|I_i|$ طول I_i می‌باشد.

در این بخش، $d(x, y)$ فاصلهٔ اقلیدسی بردارهای $x = (x_1, ..., x_n)$ و $y = (y_1, ..., y_n)$ از R^n است. یعنی $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$.

فرمول زیر برای اندازهٔ لبگ خارجی یک فرمول مفید است: به ازای هر زیرمجموعهٔ A از R^n،

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(I_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ و هر } I_i \text{ یک بازهٔ باز کراندار است}\}.$$

برای اثبات این فرمول، ابتدا توجه می‌کنیم که هرگاه $A = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ (یعنی $A \in S$)، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، بازهٔ باز کراندار $I_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \varepsilon, b_i)$ در $A \subseteq I_\varepsilon$ صدق می‌کند، و

وقتی $\varepsilon \to 0$، $\lambda^*(I_\varepsilon) - \lambda(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + \varepsilon) - \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \to 0$.

هرگاه $\lambda^*(A) = \infty$، آنگاه فرمول بداهتاً برقرار است. هرگاه $\lambda^*(A) < \infty$، آنگاه به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، دنبالهٔ $\{A_i\}$ از S را طوری می‌گیریم که $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) < \lambda^*(A) + \varepsilon$. بنابر بحث فوق، به ازای هر i، یک بازهٔ باز کراندار I_i هست به طوری که $A_i \subseteq I_i$ و $\lambda^*(I_i) - \lambda(A_i) < 2^{-i}\varepsilon$. در این صورت، $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ و

$$\lambda^*(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(I_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda(A_i) + 2^{-i}\varepsilon\right] < \lambda^*(A) + 2\varepsilon,$$

که برقراری فرمول را نشان می‌دهد.

از حالا به بعد، به خاطر سادگی، λ^* را با λ نشان داده و آن را اندازهٔ لبگ بر R^n می‌نامیم.

واضح است که هر زیرمجموعهٔ متناهی از R^n دارای اندازهٔ لبگ صفر است. لذا، طبق σ-زیرجمعی‌بودن λ، هر زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر از R^n دارای اندازهٔ لبگ صفر می‌باشد.

نتیجهٔ بعدی ما در رابطه با یک خاصیت تقریب مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ به وسیلهٔ مجموعه‌های باز می‌باشد.

قضیهٔ ۲.۱۵. *زیرمجموعهٔ E از R^n اندازه‌پذیر لبگ است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک مجموعهٔ باز مانند $\mathcal{O}$ باشد به طوری که $E \subseteq \mathcal{O}$ و $\lambda(\mathcal{O}\sim E) < \varepsilon$.*

برهان. فرض کنیم E اندازه‌پذیر لبگ باشد. ابتدا حالت $\lambda(E) < \infty$ را درنظر می‌گیریم. به ازای $\varepsilon > ۰$، دنبالهٔ $\{I_i\}$ از بازه‌های باز کراندار را چنان می‌گیریم که $E \subseteq \bigcup_{i=۱}^{\infty} I_i$ و $\sum_{i=۱}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda^*(E)+\varepsilon$. در این صورت، $\mathcal{O}=\bigcup_{i=۱}^{\infty} I_i$ یک مجموعهٔ باز است به طوری که $E \subseteq \mathcal{O}$ و $\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{i=۱}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda(E)+\varepsilon$ برقرار است. چون E اندازه‌پذیر است، به دست می‌آوریم $\lambda(\mathcal{O}\sim E) = \lambda(\mathcal{O})-\lambda(E) < \varepsilon$.

حال فرض کنیم $\lambda(E) = \infty$. به ازای هر i قرار می‌دهیم $B_i = \{x \in R^n:\ d(x,\ ۰) \leq i\}$ و $E_i = E \cap B_i$. در این صورت، $E= \bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i$، و هر E_i یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ است به طوری که $\lambda(E_i) < \infty$. بنابر آنچه در بالا نشان داده شد، به ازای هر i یک مجموعهٔ باز مانند $\mathcal{O}_i$ هست به طوری که $E_i \subseteq \mathcal{O}_i$ و $\lambda(\mathcal{O}_i\sim E_i) < ۲^{-i}\varepsilon$. قرار می‌دهیم $\mathcal{O}=\bigcup_{i=۱}^{\infty} \mathcal{O}_i$. واضح است که $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز است، $E \subseteq \mathcal{O}$، و

$$\lambda(\mathcal{O}\sim E) \leq \sum_{i=۱}^{\infty} \lambda(\mathcal{O}_i\sim E_i) < \varepsilon$$

برقرار است زیرا $\mathcal{O}\sim E \subseteq \bigcup_{i=۱}^{\infty} \lambda(\mathcal{O}_i\sim E_i)$.

برای قسمت عکس، فرض کنیم به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک مجموعهٔ باز مانند $\mathcal{O}$ باشد به طوری که $E \subseteq \mathcal{O}$ و $\lambda(\mathcal{O}\sim E) < \varepsilon$. به ازای هر i، مجموعهٔ باز $\mathcal{O}_i$ را چنان می‌گیریم که $E \subseteq \mathcal{O}_i$ و $\lambda(\mathcal{O}_i\sim E) < i^{-۱}$. قرار می‌دهیم $G= \bigcap_{i=۱}^{\infty} \mathcal{O}_i$. در این صورت، G یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ است به طوری که $E \subseteq G$. همچنین $\lambda(G\sim E) \leq \lambda(\mathcal{O}_i\sim E) < i^{-۱}$ به ازای هر i ایجاب می‌کند که $\lambda(G\sim E) = ۰$؛ و درنتیجه $G\sim E$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ است. حال اندازه پذیری E از رابطهٔ $E = G\sim(G\sim E)$ نتیجه شده و برهان به اتمام خواهد رسید.

نتیجهٔ بعد به ما می‌گوید که هر مجموعهٔ بورل اندازه‌پذیر لبگ است. گردایهٔ تمام مجموعه‌های

اندازه‌پذیر لبگ (طبق معمول) با Λ نموده می‌شود.

قضیهٔ ۳.۱۵. ***هر زیرمجموعهٔ بورل از R^n اندازه‌پذیر لبگ است.***

برهان. فرض کنیم به ازای $i = 1, ..., n$، $-\infty < a_i < b_i < \infty$. m را طوری می‌گیریم که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i + (1/m) < b_i$. رابطهٔ

$$\Pi_{i=1}^{n} (a_i,\ b_i) = \bigcup_{k=m}^{\infty} \left[\Pi_{i=1}^{n} [a_i + \frac{1}{k},\ b_i)\right]$$

و $\sigma-$ جبر بودن Λ ایجاب می‌کنند که $\Pi_{i=1}^{n} (a_i,\ b_i) \in \Lambda$. ولی چون هر مجموعهٔ باز را می‌توان به صورت اجتماعی شمارشپذیر از این مجموعه‌ها نوشت، پس Λ شامل هر مجموعهٔ باز است. بنابراین، Λ باید شامل هر مجموعهٔ بورل باشد، زیرا مجموعه‌های بورل اعضای $\sigma-$ جبر تولید شده به وسیلهٔ مجموعه‌های باز می‌باشند.

در این کتاب خواهیم دید که رابط بین نظریهٔ اندازه، توپولوژی، و آنالیز مفهوم اندازه‌های بورل منتظم است. تعریف آن به قرار زیر می‌باشد.

تعریف ۴.۱۵. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف بوده و $\mathscr{B}$، $\sigma-$ جبر مجموعه‌های بورل آن باشد.

اندازهٔ $\mu: \mathscr{B} \to [0, \infty]$ یک ***اندازهٔ بورل منتظم*** نام دارد اگر خواص زیر برقرار باشند:

۱. به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K، $\mu(K) < \infty$.

۲. هرگاه B یک مجموعهٔ بورل از X باشد، آنگاه

$$\mu(B) = \inf\{\mu(\mathcal{O}):\ B \subseteq \mathcal{O} \text{ و } \mathcal{O} \text{ باز است}\}.$$

۳. هرگاه $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز از X باشد، آنگاه

$$\mu(\mathcal{O}) = \sup\{\mu(K):\ K \subseteq \mathcal{O} \text{ و } K \text{ فشرده است}\}.$$

اندازهٔ μ بر مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک که در $\mu(K) < \infty$ به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K صدق کند یک ***اندازهٔ بورل*** نام دارد.

باید توجه کرد که اگر μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر فضایی توپولوژیک باشد، آنگاه

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K):\ K \subseteq B \text{ و } K \text{ فشرده است}\}$$

به ازای هر مجموعهٔ بورل B با $\mu(B) < \infty$ برقرار است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم B یک مجموعهٔ بورل با $\mu(B) < \infty$ بوده و $\varepsilon > ۰$. مجموعهٔ باز V را با $B \subseteq V$ و $\mu(V) < \mu(B)+\varepsilon$ اختیار می‌کنیم. به همین نحو، مجموعهٔ باز W را چنان می‌گیریم که $V{\sim}B \subseteq W \subseteq V$ و

$$\mu(W) < \mu(V{\sim}B) + \varepsilon = \mu(V) - \mu(B) + \varepsilon < ۲\varepsilon.$$

حال مجموعهٔ فشردهٔ C را طوری می‌گیریم که $C \subseteq V$ و $\mu(V) < \mu(C)+\varepsilon$. قرار می‌دهیم $K = C \cap W^c$ و توجه می‌کنیم که K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ B است. به علاوه،

$$\begin{aligned} ۰ &\leq \mu(B) - \mu(K) = \mu(B{\sim}K) \leq \mu(V{\sim}K) = \mu((V{\sim}C)\cup W) \\ &\leq [\mu(V) - \mu(C)]+\mu(W) < ۳\varepsilon \end{aligned}$$

برقرار است، که ادعای ما را به ثبوت می‌رساند.

مهم است درک کنیم که اندازهٔ لبگ یک اندازهٔ بورل منتظم است. جزئیات در زیر خواهد آمد.

قضیهٔ ۵.۱۵. ***اندازهٔ لبگ بر R^n یک اندازهٔ بورل منتظم است.***

برهان. (۱) فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشرده از R^n باشد. در این صورت، K کراندار است؛ و درنتیجه $A=\prod_{i=۱}^{n}(a_i, b_i)$ای با $K \subseteq A$ وجود دارد. بنابراین، $\lambda(K) \leq \lambda(A) < \infty$.

(۲) فرض کنیم B یک مجموعهٔ بورل بوده و $\varepsilon > ۰$. بنابر قضیهٔ ۲.۱۵، یک مجموعهٔ باز مانند V هست به طوری که $B \subseteq V$ و $\lambda(V{\sim}B) < \varepsilon$. بنابراین،

$$\begin{aligned} \lambda(B) &\leq \inf\{\lambda(\mathcal{O}):\ B\subseteq\mathcal{O} \text{ و } \mathcal{O} \text{ باز است}\} \\ &\leq \lambda(V) = \lambda(V{\sim}B)+\lambda(B) \leq \lambda(B)+\varepsilon \end{aligned}$$

به ازای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است، که از آن تساوی مطلوب نتیجه خواهد شد.

(۳) فرض کنیم $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از R^n باشد. دنبالهٔ $\{K_i\}$ از مجموعه‌های فشرده با خاصیت $\mathcal{O}=\bigcup_{i=۱}^{\infty}K_i$ را اختیار می‌کنیم؛ به عنوان مثال، فرض کنیم $\{K_۱, K_۲, \ldots\}$ یک شمارش از همهٔ گویهای بسته با مرکز "گویا" و شعاع گویا باشد که جزء $\mathcal{O}$اند. حال به ازای هر i قرار می‌دهیم $C_i=\bigcup_{m=۱}^{i}K_m$، و توجه می‌کنیم که هر C_i فشرده است و $C_i\uparrow\mathcal{O}$. نتیجه می‌شود که $\lambda(C_i)\uparrow\lambda(\mathcal{O})$؛ و درنتیجه

$$\lambda(\mathcal{O}) = \sup\{\lambda(K):\ K \subseteq \mathcal{O} \text{ و } K \text{ فشرده بوده}\}$$

برقرار است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

تذکر. بعدها یک نتیجهٔ کلی (قضیهٔ ۴.۲۸) را ثابت می‌کنیم متضمن آنکه هر اندازهٔ بورل بر R^n لزوماً

یک اندازهٔ بورل منتظم است.

هرگاه A زیرمجموعه‌ای از R^n بوده و $a \in R^n$، آنگاه مجموعهٔ $a+A = \{a+x: x \in A\}$ **انتقال** A به وسیلهٔ عنصر a نام دارد. نماد دیگر برای $a+A$ عبارت است از $A+a$. به آسانی معلوم می‌شود که $\lambda(A) = \lambda(a+A)$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از R^n و هر a برقرار است. همچنین، با استفاده از اتحادهای

$E\cap(a+A) = a+(E-a)\cap A$ و $E\cap(a+A)^c = a+(E-a)\cap A^c$،

به آسانی می‌توان نشان داد که زیرمجموعهٔ A از R^n اندازه‌پذیر لبگ است اگر و فقط اگر $a+A$ به ازای هر $a \in R^n$ اندازه‌پذیر لبگ باشد.

فرض کنیم $\mathscr{B}$ گردایهٔ تمام مجموعه‌های بورل از R^n باشد. در این صورت، به ازای هر $A \in \mathscr{B}$ و هر a، $a+A \in \mathscr{B}$. درواقع، هرگاه $\mathfrak{A} = \{A \in \mathscr{B}:\ a+A \in \mathscr{B}$ به ازای هر $a \in R^n\}$، آنگاه $\mathfrak{A}$ یک σ-جبر مجموعه‌های شامل زیرمجموعه‌های باز R^n است؛ درنتیجه $\mathfrak{A} = \mathscr{B}$.

گوییم اندازهٔ $\mu: \mathscr{B} \to [\circ, \infty]$ ***پایای انتقال*** است اگر $\mu(A) = \mu(a+A)$ به ازای هر $A \in \mathscr{B}$ و هر $a \in R^n$ برقرار باشد. سؤال زیر یک سؤال طبیعی خواهد بود.

اندازه‌های بورل پایای انتقال بر R^n چیستند؟

برای جواب دادن به این سؤال نشان می‌دهیم که، صرف نظر از یک عامل ضرب، تنها اندازهٔ بورل پایای انتقال بر R^n اندازهٔ لبگ است. برای اثبات این امر، نتیجهٔ زیر در رابطه با توابع جمعی لازم است. به یاد آورید که $f: R \to R$ **جمعی** است اگر $f(x+y) = f(x) + f(y)$ به ازای هر $x, y \in R$ برقرار باشد.

لم ۶.۱۵. فرض کنیم $f: R \to R$ یک تابع جمعی باشد. هرگاه f در صفر پیوسته باشد، آنگاه ثابتی چون c هست به طوری که به ازای هر $x \in R$، $f(x) = cx$ برقرار است.

به خصوص، هرگاه $f: R^n \to R$ به ازای هر متغیر در صفر پیوسته بوده و به ازای هر متغیر جداگانه جمعی باشد، آنگاه ثابتی چون c هست به طوری که

$$f(x_1, \ldots, x_n) = cx_1 \ldots x_n$$

به ازای هر $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ برقرار است.

برهان. هرگاه $f: R \to R$ جمعی باشد، آنگاه f در خواص زیر صدق می‌کند:

۱. $f(\circ) = \circ$ [دلیل: $f(\circ) = f(\circ+\circ) = f(\circ)+f(\circ)$]؛

۲. به ازای هر $x \in R$، $f(-x) = -f(x)$ [دلیل: $\circ = f(\circ) = f(x-x) = f(x)+f(-x)$]؛

۳. به ازای هر عدد گویای $r \in R$ و هر $x \in R$، $f(rx) = rf(x)$.

اثبات قسمت (۳) گام به گام پیش می‌رود. هرگاه n یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$f(nx) = f(x + ... + x) = f(x) + ... + f(x) = nf(x);$$

و درنتیجه $nf(x/n) = f(nx/n) = f(x)$ نشانگر آنکه $f((1/n)x) = (1/n)f(x)$. لذا، اگر m و n دو عدد صحیح مثبت باشند،

$$f(\frac{m}{n}x) = mf(\frac{1}{n}x) = \frac{m}{n}f(x).$$

لذا، $f(rx) = rf(x)$ به ازای هر r گویا و هر $x \in R$ برقرار است.

چون f در صفر پیوسته است، رابطهٔ $f(x-y) = f(x) - f(y)$ نشان می‌دهد که f در هر نقطه از R پیوسته است. حال اگر $x \in R$، دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{r_n\}$ هست به‌طوری‌که $\lim r_n = x$. درنتیجه،

$$f(x) = \lim f(r_n) = \lim r_n f(1) = xf(1) = cx,$$

که در آن $c = f(1)$ ثابت است، و نتیجه در حالت ۱- بعدی به ثبوت می‌رسد.

اکنون حالت کلی را می‌توان به استقرا ثابت کرد. ذکر جزئیات را به عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم.

حال برای اثبات این امر که، صرف نظر از یک عامل ضرب، اندازهٔ لبگ تنها اندازهٔ بورل پایای انتقال بر R^n است حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ ۷.۱۵. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل پایای انتقال بر R^n باشد. در این صورت، ثابتی چون c هست به طوری که به ازای هر مجموعهٔ بورل A از R^n، $\mu(A) = c\lambda(A)$.*

برهان. به ازای هر $x \in R$ قرار می‌دهیم $I_x = \varnothing$ اگر $x = 0$، $I_x = [0, x)$ اگر $x > 0$، و $I_x = [x, 0)$ اگر $x < 0$. همچنین، به ازای هر $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ قرار می‌دهیم $\mathrm{Sgn}\, x = 1$ اگر $\Pi_{i=1}^n x_i \geq 0$ و $\mathrm{Sgn}\, x = -1$ اگر $\Pi_{i=1}^n x_i < 0$.

حال فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل ناصفر پایای انتقال بر R^n باشد. $f: R^n \to R$ را با

$$f(x_1, ..., x_n) = \mathrm{Sgn} x . \mu\left[\Pi_{i=1}^n I_{x_i}\right]$$

که در آن $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$، تعریف می‌کنیم. در این صورت، f نسبت به هر متغیر جداگانه جمعی است. به عنوان مثال، برای آنکه ببینیم f نسبت به متغیر اول جمعی است، حالت $a > 0$، $b < 0$ با $a+b > 0$ را درنظر می‌گیریم. $x_2, ..., x_n$ را ثابت گرفته و قرار می‌دهیم $s = \mathrm{Sgn}(x_2, ..., x_n)$ و $I = \Pi_{i=2}^n I_{x_i}$. واضح است که

$$[\circ, a)\sim[a+b, a) = [\circ, a+b)$$

و

$$[a+b, a)\times I = (a, \circ, ..., \circ) + [b, \circ)\times I.$$

چون μ پایای انتقال است،

$$\mu([b, \circ)\times I) = \mu([a+b, a)\times I).$$

لذا،

$$\begin{aligned} f(a, x_۲, ..., x_n) + f(b, x_۲, ..., x_n) &= s[\mu(\circ, a)\times I) - \mu([b, \circ)\times I)] \\ &= s[\mu([\circ, a)\times I) - \mu([a+b, a)\times I)] \\ &= s\mu(([\circ, a)\sim[a+b, a))\times I) \\ &= s\mu([\circ, a+b)\times I) \\ &= f(a+b, x_۲, ..., x_n). \end{aligned}$$

حالات دیگر را می‌توان به آسانی به همین نحو به ثبوت رسانید.

حال توجه می‌کنیم که f به ازای هر متغیر جداگانه در صفر پیوسته است. درواقع، اگر $a_k\uparrow\circ$ و $I=\Pi_{i=۲}^n I_{x_i}$، داریم $[a_k, \circ)\times I\downarrow\varnothing$. لذا، طبق قضیهٔ ۵.۱۲، $\mu([a_k, \circ)\times I)\downarrow\circ$ نشانگر آنکه $\lim_{k\to\infty}f(a_k, x_۲, ..., x_n) = \circ$. یعنی f به ازای متغیر اول در صفر پیوستهٔ چپ است. از آن سو، $f(b, x_۲, ..., x_n) = -f(-b, x_۲, ..., x_n)$ ایجاب می‌کند که f نسبت به متغیر اول از راست نیز پیوسته است. بنابراین، f نسبت به هر متغیر جداگانه در صفر پیوسته می‌باشد.

بنابر لم ۶.۱۵، ثابتی مانند c هست به طوری که $f(x_۱, ..., x_n) = cx_۱...x_n$. چون $\mu\neq\circ$، نتیجه می‌شود که $c>\circ$.

حال فرض کنیم $I=\Pi_{i=۱}^n[a_i, b_i)$ که در آن به ازای هر i، $-\infty<a_i<b_i<\infty$. چون $A=(a_۱, ..., a_n)+\Pi_{i=۱}^n[\circ, b_i-a_i)$، به دست می‌آوریم

$$\mu(A) = \mu\Pi_{i=۱}^n[\circ, b_i-a_i) = f(b_۱-a_۱, ..., b_n-a_n) = c\Pi_{i=۱}^n(b_i-a_i) = \lambda(A).$$

لذا، $\lambda = c^{-۱}\mu$ بر S. ولی در این صورت قضیهٔ ۹.۱۲ نشان می‌دهد که $\lambda = c^{-۱}\mu$ بر $\mathscr{B}$ برقرار است. یعنی $\mu(A) = c\lambda(A)$ به ازای هر $A\in\mathscr{B}$ برقرار است.

سؤال طبیعی که ممکن است مطرح شود این است که آیا هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ یک مجموعهٔ بورل است یا نه. جواب منفی است؛ یعنی مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ وجود دارند که مجموعه‌های بورل نیستند. یک راه اثبات این امر به وسیلهٔ استدلال در اصلیت است. می‌توان نشان داد که گردایهٔ مجموعه‌های بورل دارای اصلیت c است ولی گردایهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ اصلیت ۲^c دارد. لذا،

این دو گردایه یکی نیستند؛ ر.ک. [۳، ص. ۱۳۳].

حال برهان دیگری از وجود یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ که یک مجموعهٔ بورل نیست ارائه می‌دهیم که مراحل آن مستقلاً مورد توجه‌اند. به خاطر سادگی، استدلالها برای حالت ۱- بعدی داده می‌شود. درواقع، مثال عبارت است از زیرمجموعه‌ای از $[۰, ۱]$. برای این کار، به یک بحث مقدماتی نیاز داریم.

در مثال ۱۲.۵ مجموعهٔ کانتور C توصیف شده است. معلوم شده است که طول کل بازه‌های باز حذف شده از $[۰, ۱]$ برای به دست آوردن C مساوی یک است. از این نتیجه می‌شود که $\lambda(C) = ۰$. لذا، هر زیرمجموعهٔ C دارای اندازهٔ لبگ صفر است؛ و درنتیجه هر زیرمجموعهٔ C اندازه‌پذیر لبگ می‌باشد.

حال مجموعهٔ ε-کانتور را توصیف می‌کنیم. فرایند ساختن شبیه روند مثال ۱۲.۵ است. فرض کنیم $۰ < \varepsilon < ۱$ و قرار می‌دهیم $\delta = ۱ - \varepsilon$. با $A_۰ = [۰, ۱]$ شروع کرده و از مرکز $A_۰$ یک بازهٔ باز به طول $۲^{-۱}\delta$ را حذف می‌کنیم. فرض کنیم $A_۱$ مجموعهٔ باقیمانده باشد؛ یعنی

$$A_۱ = [۰, (۱/۲)-(\delta/۴)]\cup[(۱/۲)+(\delta/۴), ۱].$$

توجه کنید که $A_۱$ مرکب است از $۲ = ۲^۱$ بازهٔ بستهٔ ازهم جدا به طول مساوی و $\lambda(A_۱) = ۱-۲^{-۱}\delta$. در مرحلهٔ بعد، از مرکز هر یک از بازه‌های بستهٔ از هم جدای $A_۱$ یک بازهٔ باز به طول $۲^{-۳}\delta$ را حذف می‌کنیم. لذا، طول کل حذف شده از $A_۱$ مساوی $۲^{-۲}\delta$ است. فرض کنیم $A_۲$ اجتماع $۲^۲$ بازهٔ بستهٔ ازهم جدای باقیمانده به طول مساوی باشد. همچنین توجه کنید که

$$\lambda(A_۲) = \lambda(A_۱)-۲^{-۲}\delta = ۱-(۲^{-۱} + ۲^{-۲})\delta.$$

در مرحلهٔ کلی، فرض کنیم A_n اجتماع ۲^n بازهٔ بستهٔ از هم جدا به طول مساوی و صادق در $\lambda(A_n) = ۱-(۲^{-۱}+...+۲^{-n})\delta$ باشد. از مرکز هر یک از این ۲^n بازهٔ بسته یک بازهٔ باز به طول $۲^{-۲n-۱}\delta$ حذف می‌کنیم. فرض کنیم $A_{n+۱}$ اجتماع $۲^{n+۱}$ بازهٔ بستهٔ ازهم جدای باقیمانده به طول مساوی باشد. چون طول کل حذف شده از A_n مساوی $۲^{-n-۱}\delta$ است، پس

$$\lambda(A_{n+۱}) = ۱-(۲^{-۱}+...+۲^{-n}+۲^{-n-۱})\delta.$$

در این صورت، به ازای هر n، $A_{n+۱} \subseteq A_n$ و **مجموعهٔ ε-کانتور** مساوی $C_\varepsilon = \bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n$ تعریف می‌شود. واضح است که C_ε یک مجموعهٔ بسته بوده و در $[۰, ۱]$ هیچ جا چگال است. همچنین،

$$\lambda(C_\varepsilon)=\lim\lambda (A_n)=۱-\left[\sum_{i=۱}^{\infty}۲^{-n}\right]\delta=۱-\delta=\varepsilon.$$

لم ۸.۱۵. *به ازای هر $۰ < \varepsilon < ۱$، یک تابع پیوسته مانند $f: [۰, ۱]\to[۰, ۱]$ هست که در خواص زیر صدق می‌کند:*

۱. f بروست.

۲. *f اکیداً صعودی است (و درنتیجه f یک به یک است).*

۳. *f مجموعهٔ ε-کانتور C_ε را به روی مجموعهٔ کانتور C می‌نگارد.*

برهان. فرض کنیم $\{I_1, I_2, \ldots\}$ بازه‌های باز حذف شده از $[0, 1]$ در ساختن C_ε باشد (در فرایند ساختن به استقرا، بازه‌ها از چپ به راست شماره می‌شوند). به همین نحو، فرض کنیم $\{J_1, J_2, \ldots\}$ بازه‌های باز حذف شده از $[0, 1]$ برای به دست آوردن مجموعهٔ کانتور C باشند (مجدداً از چپ به راست شماره می‌شوند).

به ازای هر n قرار می‌دهیم $I_n = (a_n, b_n)$ و $J_n = (c_n, d_n)$. حال $f: [0, 1] \to [0, 1]$ را با مراحل زیر تعریف می‌کنیم.

۱. $f(0) = 0$.

۲. به ازای $x \in I_n = (a_n, b_n)$، تعریف می‌کنیم

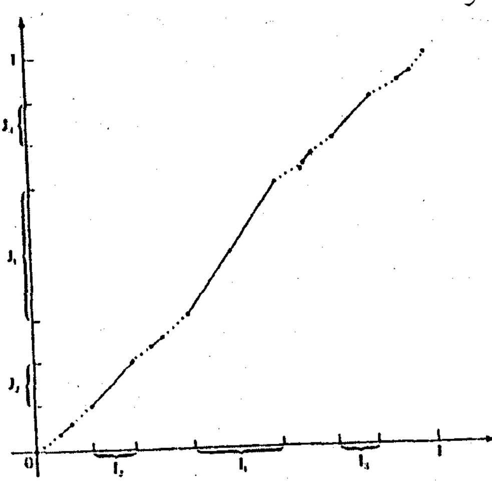
$$f(x) = [(d_n - c_n/(b_n - a_n)](x - a_n) + c_n.$$

توجه کنید که f بازهٔ I_n را به روی J_n می‌نگارد.

۳. اگر $x \neq 0$ و $x \in C_\varepsilon$، تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sup\left\{f(y): y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ و } y < x\right\}.$$

در شکل ۲ بخشی از نمودار یک تابع نوعی f دیده می‌شود. تحقیق صدق کردن f در خواص مذکور در لم به خواننده واگذار می‌شود.



شکل ۲

چون مجموعهٔ کانتور C دارای اصلیت c است (ر.ک. مثال ۱۲.۵)، از لم ۸.۱۵ معلوم می‌شود که هر

مجموعهٔ ε- کانتور نیز دارای اصلیت c است.

در پرتو مثال ۱۲.۱۲ می‌بینیم که زیرمجموعه‌هایی از $[\circ, 1]$ وجود دارند که اندازه‌پذیر لبگ نیستند. نتیجهٔ زیر خاصیت جالبی از زیرمجموعه‌های اندازه‌ناپذیر لبگ از $[\circ, 1]$ را توصیف می‌کند.

لم ۹.۱۵. *فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیر لبگ از $[\circ, 1]$ باشد. در این صورت، عددی مانند $\circ < \varepsilon < 1$ هست به طوری که، به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E از $[\circ, 1]$ با $\lambda(E) \geq \varepsilon$، مجموعهٔ $A \cap E$ اندازه‌پذیر لبگ نیست.*

برهان. به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم نتیجه درست نباشد. در این صورت، به ازای هر $\circ < \varepsilon < 1$، یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ مانند E_ε از $[\circ, 1]$ هست به طوری که $\lambda(E_\varepsilon) \geq \varepsilon$ و $A \cap E_\varepsilon$ اندازه‌پذیر لبگ است. دنبالهٔ $\{\varepsilon_n\}$ از $(\circ, 1)$ را چنان می‌گیریم که $\lim \varepsilon_n = 1$.
قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\varepsilon_n}$ و توجه می‌کنیم که E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از $[\circ, 1]$ است. به علاوه، به ازای هر n، $\varepsilon_n \leq \lambda(E_{\varepsilon_n}) \leq \lambda(E) \leq 1$؛ و لذا، $\lambda(E) = 1$. حال چون $\lambda(A \cap E^c) \leq \lambda([\circ, 1] \sim E) = \circ$، داریم $\lambda(A \cap E^c) = \circ$؛ و درنتیجه $A \cap E^c$ اندازه‌پذیر لبگ است. ولی، در این صورت،

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c) = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_{\varepsilon_n}) \right] \cup (A \cap E^c)$$

برقرار است و نشان می‌دهد که A یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ می‌باشد. به علاوه، این یک تناقض است و برهان تمام خواهد بود.

قبلاً دیدیم که هر زیرمجموعه از مجموعهٔ کانتور اندازه‌پذیر لبگ است (زیرا دارای اندازهٔ لبگ صفر است). حال در وضعی هستیم که می‌توانیم وجود یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ که یک مجموعهٔ بورل نیست را نشان دهیم.

قضیهٔ ۱۰.۱۵. *مجموعهٔ کانتور زیرمجموعه‌ای دارد که یک مجموعهٔ بورل نیست.*

برهان. زیرمجموعهٔ A از $[\circ, 1]$ که اندازه‌پذیر لبگ نیست را اختیار می‌کنیم. بنابر لم ۹.۱۵، عددی مانند $\circ < \varepsilon < 1$ هست به طوری که $A \cap E$ به ازای جمیع زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ E از $[\circ, 1]$ با $\lambda(E) \geq \varepsilon$ اندازه‌پذیر لبگ نیست.

حال تابع f لم ۸.۱۵ را درنظر می‌گیریم که مجموعهٔ ε- کانتور C_ε را به روی مجموعهٔ کانتور C می‌برد. بنابر پیوستگی f، f اندازه‌پذیر لبگ است (که البته فرض است که اندازهٔ لبگ به $[0, 1]$ محدود شده است). چون $\lambda(C_\varepsilon) = \varepsilon$، مجموعهٔ $B = A \cap C_\varepsilon$ اندازه‌پذیر لبگ نیست. بنابراین، زیرمجموعهٔ $f(B)$ از مجموعهٔ کانتور، که اندازه‌پذیر لبگ است، نمی‌تواند یک مجموعهٔ بورل باشد [زیرا $f^{-1}(f(B)) = B$ اندازه‌پذیر لبگ نیست]. در اینجا برهان قضیه تمام می‌شود.

حال یک نتیجهٔ جالب [منسوب به اچ. اشتاین هاوس (H. Steinhaus)] در رابطه با مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ ارائه می‌شود. نشان خواهیم داد که هرگاه A یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از R^n باشد که $\lambda(A) > 0$، آنگاه صفر یک نقطهٔ درونی $A-A$ است. به یاد آورید که اگر A و B زیرمجموعه‌های R^n باشند، $A - B = \{a - b: b \in B \text{ و } a \in A\}$. مجموعهٔ $A - B$ ***تفاضل جبری*** B از A نام دارد.

برای اثبات این نتیجه، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱۱.۱۵. فرض کنیم E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از R^n باشد به طوری که $\lambda(E) > 0$. در این صورت، به ازای هر $0 < \varepsilon < 1$، یک بازهٔ بازکراندار I از R^n هست به طوری که $\varepsilon\lambda(I) < \lambda(E \cap I)$.

برهان. فرض کنیم $0 < \varepsilon < 1$ و E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ باشد به طوری که $\lambda(E) > 0$. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد $\lambda(E) < \infty$. درواقع، هرگاه $B_k = \{x \in R^n: d(x, 0) \le k\}$، آنگاه $\lambda(E \cap B_k) > 0$ باید به ازای k ای برقرار باشد، و چون $E \cap B_k \subseteq E$، E را با $E \cap B_k$ عوض می‌کنیم.

چون $0 < \varepsilon < 1$، دنباله‌ای مانند $\{I_i\}$ از بازه‌های بازکراندار هست به طوری که $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ و $\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda(E)$. برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم که i ی هست به طوری که $\varepsilon\lambda(I_i) < \lambda(E \cap I_i)$. درواقع، هرگاه این طور نباشد، آنگاه $\lambda(E \cap I_i) \le \varepsilon\lambda(I_i)$ به ازای هر i برقرار است؛ و درنتیجه

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E \cap I_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E \cap I_i) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda(E),$$

که ناممکن است. این برهان لم را کامل خواهد کرد.

قضیهٔ ۱۲.۱۵ (اشتاین هاوس). هرگاه E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از R^n باشد به طوری که $\lambda(E) > 0$، آنگاه عنصر صفر یک نقطهٔ درونی $E - E$ است.

برهان. فرض کنیم E اندازه‌پذیر باشد که $\lambda(E) > 0$. بنابر لم ۱۱.۱۵، یک بازهٔ باز کراندار مانند $I=\Pi_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ هست به طوری که $\lambda(E\cap I) > (3/4)\lambda(I)$.

حال $\delta > 0$ را طوری می‌گیریم که $\lambda(I_\delta) < (3/2)\lambda(I)$ در $I_\delta=\Pi_{i=1}^{n}(a_i-\delta,b_i+\delta)$ صدق کند و قرار می‌دهیم $J = (-\delta, \delta)\times\ldots\times(-\delta, \delta) \subseteq R^n$. برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم که $J \subseteq E - E$.

برای این کار، فرض کنیم $x \in J$. در این صورت،

$$(E\cap I)\cup(x + E\cap I) \subseteq I\cup(x + I) \subseteq I_\delta$$

برقرار است. بنابراین،

$$\lambda((E\cap I)\cup(x+E\cap I)) \leq \lambda(I_\delta) < (3/2)\lambda(I),$$

که رابطهٔ $(E\cap I)\cap(x+E\cap I) \neq \varnothing$ را ایجاب می‌کند. درواقع، هرگاه $(E\cap I)\cap(x+E\cap I) = \varnothing$، آنگاه

$$\lambda((E\cap I)\cup(x+E\cap I)) = 2\lambda(E\cap I) > (3/2)\lambda(I),$$

که ناممکن است. عنصر y را در $(E\cap I)\cap(x+E\cap I)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، $y \in E$ و $z \in E$ ی هست به طوری که $x + z = y$. یعنی $x = y - z \in E - E$؛ درنتیجه $J \subseteq E - E$ و برهان تمام است.

تمرینات

۱. فرض کنید $I=\Pi_{i=1}^{n} I_i$ یک بازه از R^n باشد. نشان دهید I اندازه‌پذیر لبگ است و $\lambda(I) = \Pi_{i=1}^{n} |I_i|$، که در آن $|I_i|$ طول بازهٔ I است.

۲. فرض کنید $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از R باشد. نشان دهید یک گردایهٔ حداکثر شمارشپذیر مانند $\{I_\alpha: \alpha \in A\}$ از بازه‌های باز دو بدو از هم جدا هست به طوری که $\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. همچنین، نشان دهید که $\lambda(\mathcal{O}) = \sum_{\alpha\in A}|I_\alpha|$.

۳. نشان دهید که مجموعه‌های بورل از R^n درست اعضای σ- جبر تولید شده به وسیلهٔ مجموعه‌های فشرده‌اند.

۴. نشان دهید که زیرمجموعهٔ E از R^n اندازه‌پذیر لبگ است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای مانند F از R^n باشد به طوری که $F \subseteq E$ و $\lambda(E\sim F) < \varepsilon$.

۵. نشان دهید هرگاه E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از R^n باشد، آنگاه یک F_σ- مجموعه مانند A و یک G_δ- مجموعه مانند B هست به طوری که $A \subseteq E \subseteq B$ و $\lambda(B\sim A) = 0$.

۶. نشان دهید هرگاه زیرمجموعهٔ E از $[0, 1]$ در $\lambda(E) = 1$ صدق کند، آنگاه E در $[0, 1]$ چگال است.

۷. هرگاه $E \subseteq R^n$ در $\lambda(E) = \circ$ صدق کند، آنگاه نشان دهید که $E^\circ = \varnothing$.

۸. نشان دهید که اندازهٔ لبگ یک مثلث در $R^{۲}$ مساوی مساحت آن است. همچنین، اندازهٔ لبگ یک قرص در $R^{۲}$ را تعیین کنید.

۹. هرگاه μ یک اندازهٔ بورل پایای انتقال بر R^n باشد، آنگاه نشان دهید که $c \geq \circ$ ای هست به طوری که به ازای هر زیرمجموعهٔ A از R^n، $\mu^*(A) = c\lambda(A)$.

۱۰. فرض کنید G یک زیرگروه جمعی حقیقی از R^n باشد. هرگاه G یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه نشان دهید که $\lambda(G) = \circ$. [**راهنمایی.** از قضیهٔ ۱۲.۱۵ استفاده کنید.]

۱۱. فرض کنید $f\colon R\to R$ جمعی [یعنی، به ازای هر $x, y \in R$، $f(x+y) = f(x)+f(y)$] و اندازه‌پذیر لبگ باشد. نشان دهید که f پیوسته است [و درنتیجه به شکل $f(x) = cx$ می‌باشد].

[**راهنمایی.** با استفاده از خواص f نموده شده در جریان اثبات لم ۶.۱۵، نشان دهید که $f^{-1}((\circ, \varepsilon))$ به ازای هر $\varepsilon > \circ$ اندازهٔ لبگ مثبت دارد و سپس، با استفاده از قضیهٔ ۱۲.۱۵، نشان دهید f در صفر پیوسته است.]

۱۲. فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ هیچ جا چگال بسته از R^n باشد به طوری که $\lambda(C) > \circ$. نشان دهید که تابع مشخصهٔ χ_C نمی‌تواند بر متمم یک مجموعهٔ پوچ لبگ از R^n پیوسته باشد. همچنین، نشان دهید χ_C بر متمم یک مجموعهٔ بازی که مناسب اختیار شده و اندازهٔ لبگ آن را می‌توان بدلخواه کوچک کرد پیوسته است.

۱۳. فرض کنید $f\colon R^n\to R$ یک تابع پیوسته باشد. نشان دهید که نمودار

$$G = \{(x_۱, ..., x_n, f(x_۱, ..., x_n))\colon (x_۱, ..., x_n) \in R^n\}$$

از f دارای اندازهٔ لبگ $(n+۱)$ بعدی صفر است.

[**راهنمایی.** اگر

$$G_k = \{(x_۱, ..., x_n, f(x_۱, ..., x_n))\colon |x_i| \leq k \text{ ،به ازای } i = ۱, ..., n\},$$

نشان دهید که $\lambda(G_k) = \circ$ و سپس از رابطهٔ $G_k \uparrow G$ استفاده کنید.]

۱۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف بوده و μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر X باشد. نشان دهید:

آ. هرگاه A یک زیرمجموعهٔ دلخواه از X باشد، آنگاه

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(\mathcal{O})\colon A \subseteq \mathcal{O} \text{ و } \mathcal{O} \text{ باز است}\};$$

ب. هرگاه A یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از X با $\mu^*(A) < \infty$ باشد، آنگاه

$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده است}\};$$

پ. هرگاه μ، σ- متناهی بوده و A زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از X باشد، آنگاه
$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(K):\ K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده است}\}.$$

۱۶. همگرایی در اندازه

فرض کنیم (X, S, μ) مجدداً یک فضای اندازه باشد. گردایهٔ تمام توابع μ- اندازه‌پذیر حقیقی تعریف شده بر X را با m نشان می‌دهیم؛ یعنی
$$m = \{f \in R^X:\ f\text{، } \mu\text{- اندازه‌پذیر است}\}.$$
از قضیهٔ ۵.۱۳ واضح است که m تحت اعمال جبری معمولی و شبکه‌ای بسته است؛ یعنی m یک فضای تابعی و یک جبر است. یک مفهوم سودمند از همگرایی دنباله‌ها در فضای m به قرار زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱۶. گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر ***همگرا*** به $f \in m$ ***در اندازه*** (یا ***در احتمال***) است و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{\mu} f$ اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$،
$$\lim \mu^*(\{x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$
در نتیجهٔ بعد، خواص اصلی همگرایی در اندازه خلاصه شده است.

قضیهٔ ۲.۱۶. ***فرض کنیم $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دو دنباله از توابع اندازه‌پذیر بوده و $f, g \in m$. در این صورت، احکام زیر برقرارند:***

۱. ***هرگاه $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$، آنگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in R$، $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\mu} \alpha f + \beta g$.***

۲. ***هرگاه $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$، آنگاه $f = g$ ت. هـ. برقرار است.***

برهان. (۱) می‌توان فرض کرد $\alpha, \beta \neq 0$. از نامساوی
$$|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - [\alpha f(x) + \beta g(x)]| \leq |\alpha|\,|f_n(x) - f(x)| + |\beta|\,|g_n(x) - g(x)|$$
نتیجه می‌شود که
$$\{x \in X:\ |\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - [\alpha f(x) + \beta g(x)]| \geq \varepsilon\}$$
$$\subseteq \{x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\} \cup \{x \in X:\ |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}.$$
حال نتیجه به آسانی به دست می‌آید.

(۲) فرض کنیم $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$. به ازای $\varepsilon > 0$، از نامساوی مثلثی داریم
$$\{x \in X:\ |f(x) - g(x)| \geq 2\varepsilon\}$$

$$\subseteq\{x \in X:\ |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}\cup\{x \in X:\ |f_n(x)-g(x)| \geq \varepsilon\},$$

که از آن به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $\mu^*(\{x \in X:\ |f(x)-g(x)| \geq ۲\varepsilon\}) = ۰$.
بنابراین،

$$\mu^*\left[\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}\right] = \mu^*\left[\bigcup_{n=۱}^{\infty}\left\{x \in X: |f(x)-g(x)| \geq \frac{۱}{n}\right\}\right] = ۰;$$

درنتیجه $f = g$ ت. ه. برقرار است.

اعمال شبکه‌ای نسبت به همگرایی در اندازه نیز پیوسته‌اند.

قضیهٔ ۳.۱۶. ***فرض کنیم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر در $f_n \xrightarrow{\mu} f$ صدق کند. در این صورت، احکام زیر برقرارند:***

۱. $f_n^+ \xrightarrow{\mu} f^+$.

۲. $f_n^- \xrightarrow{\mu} f^-$.

۳. $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$.

برهان. احکام فوق به آسانی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$|f_n^+ - f^+| \leq |f_n - f|$، $|f_n^- - f^-| \leq |f_n - f|$، و $\big||f_n| - |f|\big| \leq |f_n - f|$.

همگرایی در اندازه به صورت زیر با همگرایی نقطه به نقطه ارتباط دارد.

قضیهٔ ۴.۱۶. ***هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که به ازای $f \in \mathcal{M}$ ای، $f_n \xrightarrow{\mu} f$، آنگاه زیردنباله‌ای مانند $\{f_{k_n}\}$ از $\{f_n\}$ هست به طوری که $f_{k_n} \to f$ ت. ه.***

برهان. فرض کنیم $f_n \xrightarrow{\mu} f$. به آسانی معلوم می‌شود که یک دنبالهٔ اکیداً صعودی مانند $\{k_n\}$ از اعداد صحیح مثبت هست به طوری که به ازای هر $k > k_n$،

$$f^*(\{x \in X:\ |f_k(x) - f(x)| \geq n^{-۱}\}) < ۲^{-n}.$$

به ازای هر n قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X:\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geq n^{-۱}\}$، و فرض می‌کنیم $E = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. در این صورت،

$$\mu^*(E) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(E_k) \leq ۲^{-n+۱}$$

به ازای هر n برقرار است؛ درنتیجه $\mu^*(E) = ۰$. همچنین، هرگاه $x \notin E$، آنگاه n ی هست به طوری که

$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$؛ و درنتیجه به ازای هر $m \geq n$، $|f_{k_m}(x) - f(x)| \leq m^{-1}$. بنابراین، به ازای هر $x \in E^c$، $\lim f_{k_n}(x) = f(x)$؛ و درنتیجه $f_{k_n} \to f$ ت. هـ. برقرار است.

همگرایی نقطه به نقطه همگرایی در اندازه را ایجاب نمی‌کند. به عنوان مثال، فرض کنیم $X = R$ با اندازهٔ لبگ λ باشد و به ازای هر n تعریف می‌کنیم $f_n = \chi_{[n,\, n+1]}$. واضح است که به ازای هر $x \in R$، $\lim f_n(x) = \circ$. از آن سو، چون به ازای هر n،

$$\lambda(\{x \in X:\ |f_n(x)| \geq 1\}) = \lambda([n,\, n+1]) = 1,$$

$\{f_n\}$ همگرا به صفر در اندازه نیست.

اما، هرگاه فضای اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه همگرایی نقطه به نقطه همگرایی در اندازه را ایجاب می‌کند.

قضیهٔ ۵.۱۶. فرض کنیم $\mu^*(X) < \infty$. هرگاه دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر در $f_n \to f$ ت. هـ. صدق کند، آنگاه $f_n \to f$ نیز برقرار است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > \circ$. به ازای هر n قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. چون $\mu^*(X) < \infty$، از قضیهٔ اگوروف (قضیهٔ ۷.۱۳) معلوم می‌شود که به ازای $\delta > \circ$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند A هست به طوری که $\mu^*(A) < \delta$ و $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f بر A^c همگراست. k را طوری می‌گیریم که $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ به ازای هر $x \in A^c$ و هر $n \geq k$ برقرار باشد. در این صورت، $E_n \subseteq A$ به ازای هر $n \geq k$ برقرار است؛ و درنتیجه، به ازای هر $n \geq k$، $\mu^*(E_n) \leq \mu^*(A) < \delta$. لذا، $\lim \mu^*(E_n) = \circ$ و برهان تمام خواهد شد.

جالب است توجه شود که دنباله‌هایی از توابع اندازه‌پذیر وجود دارند که همگرا در اندازه‌اند، ولی در هیچ نقطه همگرا نیستند. در زیر، یک مثال از این نوع ارائه شده است.

مثال ۶.۱۶. بازهٔ $[\circ,\, 1]$ را همراه با اندازهٔ لبگ λ درنظر می‌گیریم. به ازای هر n، $[\circ,\, 1]$ را به n زیربازهٔ

$$[\circ,\, 1/n],\ [1/n,\, 2/n],\ \ldots,\ [(n-1)/n,\, 1]$$

تقسیم می‌کنیم. این بازه‌ها را به صورت زیر شماره می‌کنیم:

$$[\circ,\, \tfrac{1}{2}],\ [\tfrac{1}{2},\, 1],\ [\circ,\, \tfrac{1}{3}],\ [\tfrac{1}{3},\, \tfrac{2}{3}],\ [\tfrac{2}{3},\, 1],\ [\circ,\, \tfrac{1}{4}],$$

$$[\frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۴}], [\frac{۲}{۴}, \frac{۳}{۴}], [\frac{۳}{۴}, ۱], [۰, \frac{۱}{۵}], \ldots$$

فرض کنیم f_n تابع مشخصهٔ بازهٔ nم دنبالهٔ فوق باشد. به آسانی معلوم می‌شود که $f_n \xrightarrow{\lambda} ۰$ برقرار است و $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in [۰, ۱]$ به صفر همگرا نیست.

تمرینات

۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بوده و $f: X \to R$. همچنین، $\lim \mu^*(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = ۰$ به ازای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار باشد. نشان دهید که f یک تابع اندازه‌پذیر است.

۲. فرض کنید $\{f_n\} \subseteq m$ در $f_n \uparrow$ و $f_n \xrightarrow{\mu} f$ صدق نماید. نشان دهید که $f_n \uparrow f$ ت. ه. برقرار است.

۳. هرگاه $\{f_n\} \subseteq m$ در $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $f_n \geq ۰$ ت. ه. به ازای هر n صدق کند، آنگاه نشان دهید که $f \geq ۰$ ت. ه. برقرار است.

۴. فرض کنید $\{f_n\} \subseteq m$ و $\{g_n\} \subseteq m$ در $f_n \xrightarrow{\mu} f$، $g_n \xrightarrow{\mu} g$، و $f_n = g_n$ ت. ه. به ازای هر n صدق کند. نشان دهید که $f = g$ ت. ه. برقرار است.

۵. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی باشد. همچنین، دو دنبالهٔ $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ از m در $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ صدق نمایند. نشان دهید که $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$. اگر $\mu^*(X) = \infty$، آیا این حکم درست است؟

۶. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر بر یک فضای اندازهٔ متناهی همگرا به f در اندازه است اگر و فقط اگر هر زیردنبالهٔ $\{f_n\}$ خود زیردنباله‌ای داشته باشد که همگرا به f ت. ه. باشد.

۷. دنبالهٔ $\{f_n\}$ از m را μ- کشی نامیم اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و $\delta > ۰$ عددی مانند k (تابع ε و δ) باشد به طوری که $\mu^*(\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta$ به ازای هر $n, m \geq k$ برقرار باشد. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از m یک دنبالهٔ μ- کشی است اگر و فقط اگر یک تابع اندازه‌پذیر مانند f باشد که $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

مسائل دوره‌ای

۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک بوده، $\mathscr{B}$، σ- جبر مجموعه‌های بورل آن بوده، و Y زیرمجموعهٔ دلخواهی از X باشد. هرگاه Y دارای توپولوژی القایی بوده و $\mathscr{B}_Y$، σ- جبر مجموعه‌های بورل (Y, τ) باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\mathscr{B}_Y = \{A \cap Y: A \in \mathscr{B}\}.$$

۲. تابع مجموعه‌ای μ تعریف شده در مثال ۵.۱۰ را در نظر بگیرید؛ یعنی تابع نانزولی و پیوستهٔ چپ $f: R \to R$ را درنظر گرفته و تابع مجموعه‌ای $\mu: S \to [0, \infty)$ را با $\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$ تعریف کنید، که در آن S نیم حلقهٔ $S = \{[a, b): -\infty < a \leq b < \infty\}$ است. به نحو دیگر ثابت کنید μ یک اندازه است.

۳. فرض کنید E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر دلخواه از فضای اندازهٔ (X, S, μ) باشد و فضای اندازهٔ (E, S_E, ν) را درنظر بگیرید که در آن $S_E = \{E \cap A: A \in S\}$ و $\nu(E \cap A) = \mu^*(E \cap A)$ (ر.ک. مسئلهٔ ۱.۱۲). خواص زیر را در رابطه با فضای اندازهٔ (E, S_E, ν) اثبات نمایید.

آ. اندازهٔ خارجی ν^* تحدید μ^* به E است؛ یعنی، به ازای هر $B \subseteq E$، $\nu^*(B) = \mu^*(B)$.

ب. مجموعه‌های ν- اندازه‌پذیر از فضای اندازهٔ (E, S_E, ν) دقیقاً مجموعه‌هایی به شکل $E \cap A$ اند که در آن A یک زیرمجموعهٔ μ- اندازه‌پذیر از X است؛ یعنی

$$\Lambda_\nu = \{F \subseteq E: F \in \Lambda_\mu\}.$$

۴. هرگاه دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای اندازه در $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$ صدق کند، آنگاه نشان دهید که مجموعهٔ

$$\{x \in X: \text{به ازای بی‌نهایت } n\text{، } x \text{ تعلق به } A_n \text{ دارد}\}$$

یک مجموعهٔ پوچ است.

۵. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر (لبگ) ناتهی از $[0, 1]$ باشد که در $\lim \lambda(E_n) = 1$ صدق می‌کند.

آ. نشان دهید که به ازای هر $0 < \varepsilon < 1$، زیردنباله‌ای مانند $\{E_{k_n}\}$ از $\{E_n\}$ هست به طوری که $\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}\right) > \varepsilon$.

ب. نشان دهید که رابطهٔ $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \varnothing$ به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ممکن است.

۶. نشان دهید که یک گردایهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر دو بدو از هم جدا از R که هر یک اندازهٔ مثبت دارد حداکثر شمارشپذیر است.

۷. هرگاه A زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از R با اندازهٔ مثبت بوده و $0 < \delta < \lambda(A)$، آنگاه نشان دهید که زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری مانند B از A صادق در $\lambda(B) = \delta$ وجود دارد.

۸. نشان دهید که یک اجتماع دلخواه از بازه‌های حقیقی R یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ است.

۹. فرض کنید به ازای تابع $f: R \to R$ ثابتی چون $C > 0$ هست به طوری که به ازای هر $x, y \in R$ نامساوی $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ برقرار است. نشان دهید که f مجموعه‌های پوچ لبگ را به روی مجموعه‌های پوچ می‌نگارد.

۱۰. نشان دهید که زیرمجموعهٔ دلخواه E از فضای اندازهٔ (X, S, μ) اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر به

ازای هر $\varepsilon > 0$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند A_ε و زیرمجموعه‌های B_ε و C_ε باشند که در روابط زیر صدق کنند:

$$E = (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \sim C_\varepsilon ,\ \mu^*(B_\varepsilon) < \varepsilon ,\ \text{و}\ \mu^*(C_\varepsilon) < \varepsilon .$$

۱۱. تابع اندازه‌ناپذیر f را چنان مثال بزنید که $|f|$ اندازه‌پذیر بوده و $f^{-1}(a)$ به ازای هر $a \in R$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد.

۱۲. نشان دهید که تابع $f: X \to [0, \infty)$ بر یک فضای اندازه، اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر ثابتهایی نامنفی مانند $c_1, c_2, \ldots$ و مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر مانند $E_1, E_2, \ldots$ باشند به طوری که به ازای هر $x \in X$،

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x).$$

کتابنامه

1. E. Borel, *Leçons Sur la Théorie des Fonctions.* Paris: Gauthier–Villars, 1898.(3rd Ed., 1928.)
2. P. R. Halmos, *Measure Theory.* New York: Van Nostrand, 1950.
3. E. Hewitt and K.Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* Heidelberg: Springer–Verlag, 1965.
4. H. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire,* Annali Mat. Pura Appl., Ser. 3, 7:231–359 (1902).
5. A. E.Taylor, *General Theory of Functions and Integration.* Waltham, MA: Blaisdell, 1965.
6. A. C. Zaanen, *Integration.* Amsterdam: North–Holland. 1967.

فصل ۴

انتگرال لبگ

طبق تعریف، یک تابع انتگرالپذیر ریمان کراندار و قلمروش یک بازهٔ بسته است. این دو قید انتگرال ریمان را در بسیاری از مسائل علمی از کار می‌اندازند. اچ. لبگ در اثر کلاسیک خود ([۴]) انتگرالی را (که امروزه ***انتگرال لبگ*** نام دارد) مبتنی بر نظریهٔ اندازه تعریف کرد که تعمیم انتگرال ریمان است. این انتگرال این مزیت را دارد که به توابع کراندار و بی‌کران همزمان پرداخته و اجازه می‌دهد که قلمروها مجموعه‌های کلیتری باشند. همچنین، قضایای همگرایی قویتر و مفیدتری از انتگرال ریمان به دست می‌دهد.

در این فصل به مطالعهٔ انتگرال لبگ می‌پردازیم. ابتدا مفهوم تابع بالایی و انتگرال لبگ آن را معرفی می‌کنیم. سپس، توابع انتگرالپذیر لبگ به وسیلهٔ تابعهای بالایی معرفی و خواص اصلی آنها مطالعه می‌شود. قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ که (تحت شرایطی) فرایند حد و انتگرالگیری را عوض می‌کند ثابت شده و کاربردهای مختلفی از این نتیجهٔ قوی ارائه خواهد شد. بعد نشان می‌دهیم که هر تابع انتگرالپذیر ریمان انتگرالپذیر لبگ است و در این حالت دو انتگرال (ریمان و لبگ) یکی هستند. به علاوه، رابطهٔ بین انتگرال ریمان مجازی و انتگرال لبگ را به دست می‌آوریم. بالأخره، فصل با بررسی اندازه‌های حاصل ضربی و انتگرالهای مکرر خاتمه خواهد یافت.

در این فصل، (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ ثابت است، و همهٔ خواص تابعها تلویحاً در رابطه با این فضای اندازه است مگر خلافش تصریح شود.

۱۷. تابعهای بالایی

قبلاً گفتیم که توابع پله‌ای "سنگهای ساختمانی" انتگرال لبگ‌اند. به یاد آورید که تابع ϕ یک تابع پله‌ای است اگر و فقط اگر گردایه‌ای متناهی مانند $\{A_1, ..., A_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر با خاصیت $\mu^*(A_i) < \infty$ به ازای $i = 1, ..., n$ و اعدادی حقیقی مانند $a_1, ..., a_n$ وجود داشته باشند که $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ برقرار باشد. عدد حقیقی $I(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$ ***انتگرال لبگ*** ϕ نام دارد، و قبلاً (در بخش ۱۴) دیدیم که این عدد از نمایش خاص ϕ مستقل است. از حالا به بعد، انتگرال لبگ ϕ را با علامت قراردادی آن $\int \phi d\mu$ یا $\int_X \phi d\mu$ نشان می‌دهیم. اگر بخواهیم بر متغیر تأکید داشته باشیم، از نماد $\int \phi(x) d\mu(x)$ استفاده خواهیم کرد. لذا، $\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$.

گردایهٔ همهٔ توابع پله‌ای دارای ساختار یک جبر و یک فضای تابعی می‌باشد.

قضیهٔ ۱.۱۷. ***گردایهٔ تمام توابع پله‌ای تحت اعمال معمولی یک فضای تابعی و یک جبر است.***

برهان. اثبات اینکه توابع پله‌ای یک جبر تشکیل می‌دهند سرراست است. برای مشاهدهٔ آنکه این گردایه یک فضای تابعی نیز هست، توجه می‌کنیم که اگر تابع پله‌ای ϕ نمایش متعارف $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ را داشته باشد، $\phi^+ = \sum_{i=1}^{n} \max\{a_i , 0\} \chi_{A_i}$ برقرار است. لذا، ϕ^+ یک تابع پله‌ای است و نتیجه حاصل می‌باشد.

در بخش ۱۴ خواص اصلی انتگرال لبگ برای توابع پله‌ای مطرح شدند. در اینجا با حدود تقریباً همه جای دنباله‌های صعودی از توابع پله‌ای سر و کار داریم. این حدود در تعریف توابع بالایی به کار می‌روند.

تعریف ۲.۱۷. تابع $f: X \to R$ را یک ***تابع بالایی*** نامیم اگر دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای باشد به طوری که

۱. $\phi_n \uparrow f$ ت. هـ. و

۲. $\lim \int \phi_n d\mu < \infty$.

هر دنباله از توابع پله‌ای صادق در (۱) و (۲) تعریف پیش را یک ***دنبالهٔ مولد*** برای f می‌نامیم. به خصوص، توجه کنید که، بنابر قضیهٔ ۶.۱۳، هر تابع بالایی یک تابع اندازه‌پذیر است. گردایهٔ تمام توابع بالایی را با $\mathcal{U}$ نشان می‌دهیم. واضح است که هر تابع پله‌ای یک تابع بالایی است. همچنین، ملاحظه می‌کنیم که یک تابع بالایی لزوماً یک تابع مثبت نیست.

هرگاه f یک تابع بالایی با دنبالهٔ مولد $\{\phi_n\}$ بوده و $\{\psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد که $\psi_n \uparrow f$ ت. هـ.، آنگاه از قضیهٔ ۵.۱۴ نتیجه می‌شود که $\lim \int \phi_n d\mu = \lim \int \psi_n d\mu$ برقرار است. لذا، $\{\psi_n\}$ نیز یک دنبالهٔ مولد برای f است؛ و لذا، تعریف زیر خوش تعریف است.

تعریف ۳.۱۷. فرض کنیم f یک تابع بالایی بوده و $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد به طوری که $\phi_n \uparrow f$ ت. هـ. برقرار باشد. در این صورت، ***انتگرال لبگ*** (یا فقط ***انتگرال***) f با $\int f d\mu = \lim \int \phi_n d\mu$

تعریف می‌شود.

مجدداً تأکید می‌کنیم که مقدار انتگرال لبگ یک تابع بالایی مستقل از دنبالهٔ انتخاب شده از توابع پله‌ای است. همچنین واضح است که اگر f یک تابع بالایی و g تابع دیگری باشد به طوری که $f = g$ ت. هـ.، g نیز یک تابع بالایی است و $\int g d\mu = \int f d\mu$ برقرار است.

بقیهٔ این بخش به خواص توابع بالایی اختصاص دارد.

قضیهٔ ۴.۱۷. احکام زیر برای توابع بالایی f و g برقرارند:

۱. $f + g$ یک تابع بالایی است و $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ برقرار است.

۲. به ازای هر $\alpha \geq 0$، αf یک تابع بالایی است و $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$.

۳. $f \vee g$ و $f \wedge g$ توابع بالایی می‌باشند.

برهان. دنباله‌های مولد $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ را برای f و g اختیار می‌کنیم.

(۱) واضح است که $\{\phi_n + \psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است و $\phi_n + \psi_n \uparrow f + g$ ت. هـ. برقرار است. حال نتیجه با توجه به اینکه

$$\int (\phi_n + \psi_n) d\mu = \int \phi_n d\mu + \int \psi_n d\mu \uparrow \int f d\mu + \int g d\mu$$

حاصل می‌شود.

(۲) سرراست است.

(۳) توجه کنید که هر دوی $\{\phi_n \wedge \psi_n\}$ و $\{\phi_n \vee \psi_n\}$ دنباله‌هایی از توابع پله‌ای‌اند. حال $\phi_n \wedge \psi_n \uparrow f \wedge g$ ت. هـ. و $\lim \int \phi_n \wedge \psi_n d\mu \leq \lim \int \phi_n d\mu < \infty$ نشان می‌دهند که $f \wedge g$ یک تابع بالایی است.

برای اثبات اینکه $f \vee g$ یک تابع بالایی است، توجه می‌کنیم که $\phi_n \vee \psi_n \uparrow f \vee g$ ت. هـ. برقرار است، و سپس از اتحاد

$$\phi_n \vee \psi_n = \phi_n + \psi_n - \phi_n \wedge \psi_n$$

استفاده کرده، به دست می‌آوریم

$$\int \phi_n \vee \psi_n d\mu = \int \phi_n d\mu + \int \psi_n d\mu - \int \phi_n \wedge \psi_n d\mu \uparrow$$
$$\int f d\mu + \int g d\mu - \int f \wedge g d\mu < \infty.$$

این امر برهان قضیه را خاتمه می‌دهد.

قضیهٔ زیر می‌گوید که انتگرال یک تابع یکنوا بر $\mathcal{U}$ است.

قضیهٔ ۵.۱۷. هرگاه f و g دو تابع بالایی باشند به طوری که $f \geq g$ ت. ه.، آنگاه $\int f d\mu \geq \int g d\mu$ برقرار است.

به خصوص، هرگاه $f \in \mathcal{U}$ در $f \geq 0$ ت. ه. صدق کند، آنگاه $\int f d\mu \geq 0$ برقرار است.

برهان. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ دو دنبالهٔ مولد برای f و g باشند. در این صورت، $\phi_n \wedge \psi_n \uparrow g$ ت. ه. برقرار است؛ و درنتیجه $\{\phi_n \wedge \psi_n\}$ نیز یک دنبالهٔ مولد برای g است. بنابر قضیهٔ ۳.۱۴، به ازای هر n داریم $\int \phi_n d\mu \geq \int \phi_n \wedge \psi_n d\mu$. بنابراین،

$$\int f d\mu = \lim \int \phi_n d\mu \geq \lim \int \phi_n \wedge \psi_n d\mu = \int g d\mu$$

و برهان تمام می‌شود.

هرگاه "تابعهای بالایی $\mathcal{U}$" را بگیریم، آنگاه مجدداً $\mathcal{U}$ به دست می‌آید. جزئیات در قضیهٔ بعد آمده است.

قضیهٔ ۶.۱۷. فرض کنیم $f: X \to R$ یک تابع باشد. هرگاه دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ از توابع بالایی باشد به طوری که $f_n \uparrow f$ ت. ه. و $\lim \int f_n d\mu < \infty$، آنگاه f یک تابع بالایی بوده و $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

برهان. به ازای هر i، دنبالهٔ $\{\phi_n^i\}$ از توابع پله‌ای را چنان اختیار می‌کنیم که $\phi_n^i \uparrow_n f_i$ ت. ه. برقرار باشد. حال به ازای هر n قرار می‌دهیم $\psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} \phi_n^i$ و توجه می‌کنیم که هر ψ_n یک تابع پله‌ای است به طوری که $\psi_n \uparrow f$ ت. ه. برقرار است. همچنین، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر n، $\psi_n \leq f_n$ ت. ه. برقرار است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵.۱۷،

$$\lim \int \psi_n d\mu \leq \lim \int f_n d\mu < \infty.$$

این نشان می‌دهد که f یک تابع بالایی است.

حال چون به ازای هر i ی ثابت نامساوی $\phi_n^i \leq \psi_n$ برای هر $n \geq i$ برقرار است، پس $\int f_i d\mu = \lim_n \int \phi_n^i d\mu \leq \lim \int \psi_n d\mu$ به ازای هر i برقرار است. بنابراین، $\lim \int f_n d\mu = \lim \int \psi_n d\mu = \int f d\mu$ و برهان تمام است.

انتگرال در یک خاصیت همگرایی مهم برای دنباله‌های نزولی صدق می‌کند.

قضیهٔ ۷.۱۷. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بالایی باشد به طوری که $f_n \downarrow 0$ ت. هـ.، آنگاه $\int f_n d\mu \downarrow 0$ برقرار است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. به ازای هر n، تابع پله‌ای ϕ_n را چنان اختیار می‌کنیم که $0 \leq \phi_n \leq f_n$ ت. هـ. و $\int (f_n - \phi_n)d\mu = \int f_n d\mu - \int \phi_n d\mu < \varepsilon 2^{-n}$ (به خاطر آورید که $-\phi_n$ یک تابع بالایی است). به ازای هر n قرار می‌دهیم $\psi_n = \wedge_{i=1}^{n} \phi_i$. در این صورت، $\{\psi_n\}$ یک دنباله از توابع پله‌ای است، و $\psi_n \downarrow 0$ ت. هـ. برقرار است زیرا $f_n \downarrow 0$ ت. هـ. بنابر قضیهٔ ۴.۱۴، داریم $\lim \int \psi_n d\mu = 0$. عدد صحیح k را طوری می‌گیریم که به ازای هر $n \geq k$، $\int \psi_n d\mu < \varepsilon$. حال زنجیر

$$0 \leq f_n - \psi_n = \vee_{i=1}^{n} (f_n - \phi_i) \leq \vee_{i=1}^{n} (f_i - \phi_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (f_i - \phi_i)$$

از نامساویهای تقریباً همه جا ایجاب می‌کند که

$$\int f_n d\mu - \int \psi_n d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \int (f_i - \phi_i) d\mu \leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \right) = \varepsilon.$$

لذا،

$$0 \leq \int f_n d\mu < \varepsilon + \int \psi_n d\mu < 2\varepsilon$$

به ازای هر $n \geq k$ درست است نشانگر آنکه $\int f_n d\mu \downarrow 0$ برقرار می‌باشد.

بالأخره، متذکر می‌شویم که $\mathfrak{A}$ در حالت کلی یک فضای برداری نیست، زیرا تحت ضرب اسکالر در اعداد منفی بسته نیست. در تمرین ۲ این بخش مثالی از این نوع ارائه شده است.

تمرینات

۱. فرض کنید L گردایهٔ همهٔ توابع پله‌ای ϕ باشد به‌طوری‌که تعدادی متناهی اعضای $A_1, \ldots, A_n$ از S همه از اندازهٔ متناهی و اعدادی حقیقی مانند $a_1, \ldots, a_n$ باشند به‌طوری‌که $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. نشان دهید L یک فضای تابعی است. آیا L یک جبر از توابع است؟
[**راهنمایی.** از تمرین ۱۲ در بخش ۹ استفاده کنید.]

۲. تابع $f: R \to R$ با تعریف $f(x) = 0$ اگر $x \notin (0, 1]$ و $f(x) = \sqrt{n}$ اگر به ازای n ی $x \in (1/(n+1), 1/n]$ را در نظر بگیرید. نشان دهید f یک تابع بالایی است و $-f$ یک تابع بالایی نیست.
[**راهنمایی.** یک تابع پله‌ای لزوماً کراندار است.]

۳. $\int f d\lambda$ را برای تابع بالایی f تمرین پیش حساب کنید.

۴. تحقیق کنید که هر تابع پیوستهٔ $f: [a, b] \to R$ یک تابع بالایی (نسبت به اندازهٔ لبگ بر $[a, b]$) است.

۵. فرض کنید A یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر و f یک تابع بالایی باشد. هرگاه $f \le \chi_A$ ت. ه.، آنگاه نشان دهید که $\mu^*(A) < \infty$.

۶. فرض کنید f یک تابع بالایی بوده و A مجموعه‌ای اندازه‌پذیر از اندازهٔ متناهی باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$، $a \le f(x) \le b$ برقرار باشد. در این صورت، نشان دهید که

آ. $f\chi_A$ یک تابع بالایی است، و

ب. $a\mu^*(A) \le \int f\chi_A d\mu \le b\mu^*(A)$.

۷. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی بوده و f یک تابع اندازه‌پذیر مثبت باشد. نشان دهید f یک تابع بالایی است اگر و فقط اگر عددی حقیقی مانند M باشد به طوری که $\int \phi d\mu \le M$ به ازای هر تابع پله‌ای ϕ با خاصیت $\phi \le f$ ت. ه. برقرار باشد. همچنین، نشان دهید هرگاه چنین باشد، آنگاه

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \phi d\mu : \text{ است . ه. ت } \phi \le f \text{ یک تابع پله‌ای با } \phi\right\}.$$

۱۸. تابعهای انتگرالپذیر

قبلاً دیدیم که گردایهٔ $\mathcal{U}$ تمام توابع بالایی یک فضای برداری تشکیل نمی‌دهند. اما اگر گردایهٔ تمام توابعی را درنظر بگیریم که بتوان آنها را تقریباً همه جا به صورت تفاضل دو تابع بالایی نوشت، این مجموعه یک فضای تابعی خواهد بود. اعضای این گردایه توابع انتگرالپذیر لبگ می‌باشند. جزئیات در زیر آمده است.

تعریف ۱.۱۸. تابع $f: X \to R$ را ***انتگرالپذیر لبگ*** (یا فقط ***انتگرالپذیر***) نامیم اگر دو تابع بالایی مانند u و v باشند به طوری که $f = u - v$ ت. ه. برقرار باشد. ***انتگرال*** (لبگ) f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int f d\mu = \int u d\mu - \int v d\mu .$$

توجه کنید که مقدار انتگرال از نمایش f به صورت تفاضل دو تابع بالایی مستقل است. درواقع، هرگاه $f = u - v = u_1 - v_1$ ت. ه. و u، u_1، v، و v_1 همه توابعی بالایی باشند، آنگاه $u + v_1 = u_1 + v$ ت. ه. برقرار است و، بنابر قضیهٔ ۴.۱۷ (۱)، داریم $\int u d\mu + \int v_1 d\mu = \int u_1 d\mu + \int v d\mu$.
بنابراین،

$$\int u d\mu - \int v d\mu = \int u_1 d\mu - \int v_1 d\mu .$$

یک تابع انتگرالپذیر لزوماً اندازه‌پذیر است، و هر تابع بالایی انتگرالپذیر لبگ می‌باشد. همچنین، به آسانی معلوم می‌شود که اگر تابع f انتگرالپذیر لبگ بوده و g تابع دیگری باشد که $f = g$ ت. هـ.، g نیز انتگرالپذیر لبگ بوده و $\int g d\mu = \int f d\mu$ برقرار است.

یادداشت تاریخی. مقدمهٔ مذکور در فوق راجع به انتگرال لبگ فرم اصلاح شدهٔ روشی است که به پی. ج. دانیل (P.J.Daniell) [۱] منسوب است.

روش کلی انتگرالگیری دانیل با یک فضای تابعی L بر مجموعه‌ای ناتهی مانند X همراه با یک "انتگرال" مانند I بر L آغاز می‌شود. گوییم تابع $I: L \to R$ یک انتگرال است اگر

۱. به ازای هر $\alpha, \beta \in R$ و $\phi, \psi \in L$، $I(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha I(\phi) + \beta I(\psi)$ برقرار باشد،

۲. هروقت $\phi \geq 0$، $I(\phi) \geq 0$ برقرار باشد، و

۳. هروقت $\{\phi_n\} \subseteq L$ به ازای هر $x \in X$ در $\phi_n(x) \downarrow 0$ صدق کند، $I(\phi_n) \downarrow 0$ برقرار باشد.

تابع $u: X \to R$ یک تابع بالایی نام دارد اگر دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\} \subseteq L$ باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\phi_n(x) \uparrow u(x)$ و $\lim I(\phi_n) < \infty$. همانند برهان قضیهٔ ۵.۱۴، $\lim\ I(\phi_n)$ از دنبالهٔ "نمایش" $\{\phi_n\}$ مستقل است. عدد حقیقی $I(u) = \lim\ I(\phi_n)$ انتگرال u است. بالأخره، گوییم $f: X \to R$ انتگرالپذیر است اگر دو تابع بالایی مانند u و v با $f = u - v$ موجود باشند. در این صورت، انتگرال f با $I(f) = I(u) - I(v)$ تعریف می‌شود.

در اینجا روش ما در انتگرال لبگ را می‌توان "روش نظری اندازهٔ دانیل" ملحوظ کرد.

گردایهٔ تمام توابع انتگرالپذیر خواص زیبایی دارد که انتظارش می‌رود.

قضیهٔ ۲.۱۸. ***گردایهٔ تمام توابع انتگرالپذیر لبگ یک فضای تابعی است.***

برهان. فرض کنیم f و g دو تابع انتگرالپذیر با نمایشهای $f = u - v$ ت. هـ. و $g = u_1 - v_1$ ت. هـ. باشند. در این صورت، اتحادهای تقریباً همه جای

$$f + g = (u + u_1) - (v + v_1),$$

$\alpha f = \alpha u - \alpha v$ اگر $\alpha \geq 0$ و $\alpha f = [(-\alpha)v] - [(-\alpha)u]$ اگر $\alpha < 0$،

و

$$f^+ = (u - v)^+ = u \vee v - v$$

توابع فوق را به صورت تفاضل دو تابع بالایی تجزیه می‌کنند. این نشان می‌دهد که گردایهٔ توابع انتگرالپذیر یک فضای تابعی است.

لذا، هرگاه f انتگرالپذیر باشد، آنگاه $|f|$ نیز یک تابع انتگرالپذیر است. به خصوص، از آخرین قضیه معلوم می‌شود که تابع f انتگرالپذیر لبگ است اگر و فقط اگر f^+ و f^- هر دو انتگرالپذیر باشند.

نتیجهٔ بعد، خاصیت خطی انتگرال را توصیف می‌کند. برهان ساده‌اش مستقیماً از تعریف ۱.۱۸ نتیجه می‌شود و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

قضیهٔ ۳.۱۸. ***هرگاه f و g دو تابع انتگرالپذیر باشند، آنگاه***

$$\int(\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha\int f d\mu + \beta\int g d\mu$$

به ازای هر $\alpha, \beta \in R$ برقرار است.

هر تابع انتگرالپذیر مثبت لزوماً یک تابع بالایی است؛ قضیهٔ زیر این امر را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۴.۱۸. ***هرگاه تابع انتگرالپذیر f در $f \geq 0$ ت. هـ. صدق کند، آنگاه f یک تابع بالایی است.***

برهان. دو تابع بالایی u و v را چنان می‌گیریم که $f = u - v$ ت. هـ. برقرار باشد. چون هر یک از u و v حد تقریباً همه جای یک دنباله از توابع پله‌ای است، دنباله‌ای مانند $\{\psi_n\}$ از توابع پله‌ای هست به طوری که $\psi_n \to f$ ت. هـ. چون $f \geq 0$ ت. هـ.، پس $\psi^+_n \to f$ ت. هـ. نیز برقرار است.

بنابر قضیهٔ ۷.۱۴، دنباله‌ای مانند $\{s_n\}$ از توابع پله‌ای هست به طوری که $0 \leq s_n \uparrow f$ ت. هـ. برقرار است. حال به ازای هر n قرار می‌دهیم $\phi_n = s_n \wedge \left(\vee_{i=1}^{n} \psi_i\right)$. در این صورت، $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $0 \leq \phi_n \uparrow f$ ت. هـ. برقرار است. برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم که $\{\int\phi_n d\mu\}$ کراندار است. درواقع، از $\phi_n + v \leq f + v = u$ ت. هـ. و قضیهٔ ۵.۱۷ معلوم می‌شود که $\int\phi_n d\mu + \int v d\mu \leq \int u d\mu$؛ و درنتیجه $\int\phi_n d\mu \leq \int u d\mu - \int v d\mu < \infty$ به ازای هر n برقرار است. در اینجا برهان قضیه کامل خواهد شد.

نتیجهٔ مفید زیر کاربردی از قضیهٔ قبل خواهد بود.

قضیهٔ ۵.۱۸. ***هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ اندازه‌پذیر $\{x \in X: |f(x)| \geq \varepsilon\}$ دارای اندازهٔ متناهی است.***

برهان. قرار می‌دهیم $A = \{x \in X: |f(x)| \geq \varepsilon\}$ و توجه می‌کنیم که $\varepsilon\chi_A \leq |f|$ برقرار است. اما $(1/\varepsilon)|f|$ یک تابع انتگرالپذیر است و، درواقع، بنابر قضیهٔ ۴.۱۸، یک تابع بالایی است. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد به طوری که $\phi_n \uparrow (1/\varepsilon)|f|$ ت. ه. در این صورت، $\{\phi_n \wedge \chi_A\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $\phi_n \wedge \chi_A \uparrow \chi_A$ ت. ه. برقرار است. لذا، طبق قضیهٔ ۶.۱۴،

$$\mu^*(A) = \lim\int\phi_n \wedge \chi_A d\mu \leq \lim\int\phi_n d\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int|f|d\mu < \infty,$$

و برهان خاتمه می‌یابد.

هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۴.۱۸، f^+ و f^- هر دو تابع بالایی‌اند؛ و درنتیجه $f = f^+ - f^-$ تجزیه‌ای از f به صورت تفاضل دو تابع بالایی مثبت است. به خصوص، $\int fd\mu = \int f^+d\mu - \int f^-d\mu$.

قضیهٔ ۶.۱۸. ***فرض کنیم f یک تابع اندازه‌پذیر باشد. هرگاه دو تابع انتگرالپذیر مانند h و g باشند به طوری که $h \leq f \leq g$ ت. ه.، آنگاه f نیز یک تابع انتگرالپذیر است.***

برهان. با نوشتن نامساوی داده شده به شکل $0 \leq f - h \leq g - h$ ت. ه.، معلوم می‌شود که می‌توان بدون صدمه زدن به کلیت فرض کرد $0 \leq f \leq g$ ت. ه. برقرار باشد.

بنابر قضیهٔ ۴.۱۸، g یک تابع بالایی است. دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای را چنان می‌گیریم که $0 \leq \phi_n \uparrow g$ ت. ه. برقرار باشد. بنابر قضیهٔ ۷.۱۴، دنباله‌ای مانند $\{\psi_n\}$ از توابع ساده هست به طوری که $0 \leq \psi_n \uparrow f$ ت. ه. برقرار است. ولی، در این صورت، $\{\phi_n \wedge \psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $\phi_n \wedge \psi_n \uparrow f$ ت. ه. و به ازای هر n، $\int\phi_n \wedge \psi_n d\mu \leq \lim\int\phi_n d\mu = \int gd\mu < \infty$. لذا، $f \in \mathcal{U}$؛ و درنتیجه f یک تابع انتگرالپذیر است.

در قضیهٔ زیر خواص دیگری از انتگرال گنجانده شده‌اند.

قضیهٔ ۷.۱۸. ***احکام زیر برای توابع انتگرالپذیر f و g برقرارند:***

۱. ***$\int|f|d\mu = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ت. ه. برقرار باشد.***

۲. ***هرگاه $f \geq g$ ت. ه.، آنگاه*** $\int fd\mu \geq \int gd\mu$.

۳. $|\int fd\mu| \leq \int|f|d\mu$.

برهان. (۱) واضح است که اگر $f = \circ$ ت. هـ.، $\int|f|d\mu = \circ$ برقرار است. از آن سو، فرض می‌کنیم $\int|f|d\mu = \circ$. چون، بنابر قضیهٔ ۴.۱۸، $|f|$ یک تابع بالایی است، دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای هست به طوری که $\circ \le \phi_n \uparrow |f|$ ت. هـ. برقرار است. از قضیهٔ ۵.۱۷ نتیجه می‌شود که به ازای هر n، $\int\phi_n d\mu = \circ$؛ و درنتیجه، به ازای هر n، $\phi_n = \circ$ ت. هـ. لذا، $|f| = \circ$ ت. هـ.؛ و درنتیجه $f = \circ$ ت. هـ. برقرار است.

(۲) چون $f - g \ge \circ$ ت. هـ.، از قضیهٔ ۴.۱۸ نتیجه می‌شود که $f - g$ یک تابع بالایی است. ولی در این صورت قضیهٔ ۵.۱۷ ایجاب می‌کند که

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f - g) d\mu \ge \circ;$$

درنتیجه $\int f d\mu \ge \int g d\mu$ برقرار است.

(۳) نتیجه از قسمت (۲) و نامساوی $-|f| \le f \le |f|$ حاصل می‌شود.

خواننده احتمالاً متوجه شده است که توابع مورد نظر تا اینجا حقیقی بودند. اما معمولاً یک تابع می‌تواند مقادیر نامتناهی بگیرد مشروط بر اینکه مجموعهٔ تمام نقاطی که تابع در آنها $-\infty$ یا ∞ است یک مجموعهٔ پوچ باشد. دلیلش این است که نه ویژگی انتگرالپذیری و نه مقدار انتگرال یک تابع با تغییر مقادیرش بر یک مجموعهٔ پوچ تغییر نمی‌کند. به علاوه، انتساب مقدار به مجموع دو تابع در نقاطی که به شکل $\infty - \infty$ است بر انتگرالپذیری و مقدار انتگرال تابع مجموع (تا وقتی مجموعهٔ نقاط همهٔ این برخوردها از اندازهٔ صفر است) اثری ندارد. هرگاه نخواهیم با توابعی که مقادیر نامتناهی می‌گیرند (البته بجز مجموعه‌های پوچ) سروکار داشته باشیم، آنگاه می‌توان مقادیر نامتناهی را به مقادیر متناهی تغییر داد (مثلاً، تمام مقادیر نامتناهی را صفر قرار می‌دهیم) بدون آنکه چیزی در رابطه با انتگرالپذیری از دست برود. وقتی می‌گوییم تابع حقیقی وسعت یافتهٔ f یک ***تابع انتگرالپذیر تعریف می‌کند*** منظور این است که f مقادیر نامتناهی (یا تعریف نشده) را بر یک مجموعهٔ پوچ می‌گیرد، و هرگاه به این نقاط مقادیر متناهی منتسب کنیم، آنگاه f به صورت یک تابع انتگرالپذیر در می‌آید. حال مطالب فوق را خلاصه می‌کنیم: توابعی که تقریباً همه جا مساویند خواص انتگرالپذیری یکسان داشته و می‌توان آنها را یکی گرفت.

بحث را با قضیه‌ای از بی. لوی (B.Levi) که خاصیت یکنوایی اساسی انتگرال را توصیف می‌کند ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۸.۱۸ (لوی). ***فرض کنیم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع انتگرالپذیر در $f_n \le f_{n+1}$ ت. هـ. به ازای هر n صدق کرده و $\lim\int f_n d\mu < \infty$. در این صورت، یک تابع انتگرالپذیر مانند f هست به طوری که $f_n \uparrow f$ ت. هـ. (و درنتیجه $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$ برقرار است).***

برهان. از تعویض $\{f_n\}$ با $\{f_n - f_1\}$ در صورت لزوم، می‌توان بدون صدمه زدن به کلیت فرض کرد $f_n \geq 0$ ت. ه. به ازای هر n برقرار باشد. همچنین، به آسانی معلوم می‌شود که می‌توان فرض کرد $0 \leq f_n(x) \uparrow$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد. قرار می‌دهیم $I = \lim \int f_n d\mu < \infty$.

به ازای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم $g(x) = \lim f_n(x)$ و $E = \{x \in X\colon g(x) = \infty\}$. در این صورت، $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > i\} \right]$ برقرار است؛ و درنتیجه E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است. حال نشان می‌دهیم که $\mu^*(E) = 0$.

بنابر قضیهٔ ۴.۱۸، هر f_n یک تابع بالایی است. لذا، به ازای هر i یک دنباله مانند $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای هست به‌طوری‌که $0 \leq \phi_n \uparrow_n f_i$ ت. ه. برقرار است. به ازای هر n قرار می‌دهیم $\psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} \phi_n$ و توجه می‌کنیم که $\{\psi_n\}$ یک دنباله از توابع پله‌ای است به‌طوری‌که $\psi_n \uparrow g$ ت. ه. و $\lim \int \psi_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = I$. به خصوص، به ازای هر k، دنبالهٔ $\{\psi_n \wedge k\chi_E\}$ از توابع پله‌ای در $\psi_n \wedge k\chi_E \uparrow_n k\chi_E$ ت. ه. صدق می‌کند. از قضیهٔ ۶.۱۴ نتیجه می‌شود که $\mu^*(E) < \infty$ و به ازای هر k، $k\mu^*(E) \leq \lim \int \psi_n d\mu = I$. لذا، $\mu^*(E) = 0$.

حال $f\colon X \to R$ را با $f(x) = g(x)$ اگر $x \notin E$ و $f(x) = 0$ اگر $x \in E$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، $f_n \uparrow f$ ت. ه. برقرار است، و نتیجه از قضیهٔ ۶.۱۷ حاصل می‌باشد.

مشابه سریی قضیهٔ قبل در زیر ارائه شده است.

قضیهٔ ۹.۱۸. ***فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر نامنفی باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu < \infty$. در این صورت، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ معرف یک تابع انتگرالپذیر بوده و $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$ برقرار است.***

برهان. به ازای هر n قرار می‌دهیم $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ و توجه می‌کنیم که هر g_n یک تابع انتگرالپذیر است به طوری که $g_n \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ ت. ه. برقرار است. حال، بنابر قضیهٔ لوی، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ معرف یک تابع انتگرالپذیر بوده و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \lim \int g_n d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu$$

برقرار است.

نتیجهٔ بعد، در نظریهٔ انتگرالگیری به لم فاتو (Fatou) معروف است.

قضیهٔ ۱۰.۱۸. (لم فاتو). *فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر باشد به طوری که به ازای هر n، $f_n \geq 0$ ت. هـ. و $\liminf \int f_n d\mu < \infty$. در این صورت، $\liminf f_n$ معرف یک تابع انتگرالپذیر است و*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

برقرار است.

برهان. بدون صدمه زدن به کلیت می‌توان فرض کرد $f_n(x) \geq 0$ به ازای هر $x \in X$ و هر n برقرار باشد.

فرض کنیم n داده شده باشد. به ازای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم $g_n(x) = \inf\{f_i(x): i \geq n\}$. در این صورت، هر g_n یک تابع اندازه‌پذیر است و $0 \leq g_n \leq f_n$ به ازای هر n برقرار است. لذا، طبق قضیهٔ ۶.۱۸، هر g_n یک تابع انتگرالپذیر است. حال ملاحظه می‌کنیم که $g_n \uparrow$ و $\lim \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu < \infty$ برقرار است. لذا، طبق قضیهٔ ۸.۱۸، یک تابع انتگرالپذیر مانند g هست به طوری که $g_n \uparrow g$ ت. هـ. برقرار است. پس $g = \liminf f_n$ ت. هـ. و لذا، $\liminf f_n$ معرف یک تابع انتگرالپذیر می‌باشد. به علاوه،

$$\int \liminf f_n d\mu = \int g d\mu = \lim \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

و برهان تمام خواهد بود.

حال در وضعی هستیم که قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ، یعنی سنگ بنای نظریهٔ انتگرالگیری، را ثابت نماییم.

قضیهٔ ۱۱.۱۸ (قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ). *فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر باشد که در $|f_n| \leq g$ ت. هـ. به ازای هر n و تابع انتگرالپذیر ثابتی چون g صدق کند. هرگاه $f_n \to f$ ت. هـ.، آنگاه f یک تابع انتگرالپذیر است و*

$$\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu .$$

برهان. واضح است که $|f| \leq g$ ت. هـ. برقرار است و انتگرالپذیری f از قضیهٔ ۶.۱۸ نتیجه می‌شود. حال ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ $\{g - f_n\}$ در مفروضات لم فاتو صدق می‌کند و $\liminf(g - f_n) = g - f$ ت. هـ. لذا،

$$\int gd\mu - \int fd\mu = \int (g-f)d\mu = \int \liminf (g-f_n)d\mu$$
$$\le \liminf \int (g-f_n)d\mu = \int gd\mu - \limsup \int f_n d\mu \,;$$

و درنتیجه

$$\limsup \int f_n d\mu \le \int fd\mu .$$

به همین نحو، با اعمال لم فاتو بر دنبالهٔ $\{g+f_n\}$ داریم

$$\int gd\mu + \int fd\mu = \int (f+g)d\mu = \int \liminf (g+f_n)d\mu$$
$$\le \liminf \int (g+f_n)d\mu = \int gd\mu + \liminf \int f_n d\mu \,;$$

و درنتیجه

$$\int fd\mu \le \liminf \int f_n d\mu .$$

بنابراین، $\lim \int f_n d\mu$ در R وجود دارد و $\lim \int f_n d\mu = \int fd\mu$ برقرار است.

به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر زیرمجموعهٔ E از X، گردایهٔ $S_E = \{E \cap A: A \in S\}$ از زیرمجموعه‌های E (به نام **تحدید S به E**) یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های E است. هرگاه، علاوه بر این، E زیرمجموعهٔ اندازه پذیری از X باشد، آنگاه تحدید μ به S_E نیز یک اندازه است. یعنی $(E,\ S_E,\ \mu)$ یک فضای اندازه برای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از X است. همچنین، به آسانی معلوم می‌شود که زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از $(E,\ S_E,\ \mu)$ درست زیرمجموعه‌های E اند که زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X می‌باشند.

هرگاه E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از X باشد، آنگاه گوییم تابع $f: E \to R$ روی E انتگرالپذیر است اگر f نسبت به فضای اندازهٔ $(E,\ S_E,\ \mu)$ انتگرالپذیر باشد. البته، قلمرو f را می‌توان با انتساب مقدار $f(x) = 0$ اگر $x \notin E$ به تمام X وسعت داد. در این صورت، fی که به این نحو تعریف شود یک تابع انتگرالپذیر از X است، و در این حالت، $\int_X fd\mu = \int_E fd\mu$ برقرار است. گوییم تابع $f: X \to R$ روی زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از X انتگرالپذیر است اگر تابع $f\chi_E$ روی X انتگرالپذیر باشد یا، معادلاً، اگر تحدید f به E نسبت به فضای اندازهٔ $(E,\ S_E,\ \mu)$ انتگرالپذیر باشد. در این حالت خواهیم نوشت $\int f\chi_E d\mu = \int_E fd\mu$.

اثبات سادهٔ نتیجهٔ زیر به عنوان تمرین به خوانند واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۱۲.۱۸. *هر تابع انتگرالپذیر f روی هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر X انتگرالپذیر است. به علاوه،*

$$\int_E fd\mu + \int_{E^c} fd\mu = \int fd\mu$$

به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از X برقرار است.

تا پایان این بخش به انتگرالهای لبگ نامتناهی خواهیم پرداخت. هرگاه $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ نمایش متعارف تابع سادهٔ مثبت ϕ باشد، آنگاه مجموع $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^* (A_i)$ به عنوان یک عدد حقیقی نامنفی وسعت یافته معنی دارد. هرگاه $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^* (A_i) = \infty$ ، معمولاً می‌نویسیم $\int \phi d\mu = \infty$ و می‌گوییم انتگرال لبگ ϕ نامتناهی است. حال فرض کنیم $f: X \to R^*$ تابعی باشد که به ازای آن دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع سادهٔ مثبت هست به طوری که $\phi_n \uparrow f$ ت. ه. برقرار است. در این صورت، $\lim \int \phi_n d\mu$ به عنوان یک عدد حقیقی وسعت‌یافته وجود دارد، و به آسانی می‌توان دید که $\lim \int \phi_n d\mu$ از دنبالهٔ انتخابی $\{\phi_n\}$ مستقل است. در حالتی که $\lim \int \phi_n d\mu = \infty$، می‌نویسیم $\int f d\mu = \infty$ و می‌گوییم انتگرال لبگ f نامتناهی است (ولی تابع را انتگرالپذیر نمی‌نامیم!). همچنین، ر.ک. تمرین ۹ از بخش ۱۴. در *این* معنی هر تابع اندازه‌پذیر مثبت f دارای انتگرال لبگ (متناهی یا نامتناهی) است صرفاً به این خاطر که، بنابر قضیهٔ ۷.۱۴، دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع سادهٔ مثبت هست به طوری که $\phi_n \uparrow f$ ت. ه. برقرار است.

با انجام تعمیم فوق می‌توان چند قضیه را بدون فرضهای انتگرالپذیری بر توابع بیان مجدد کرد. به عنوان مثال، لم فاتو را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که $f_n \geq 0$ ت. ه. به ازای هر n برقرار باشد، آنگاه

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

برقرار است (که البته دو طرف نامساوی ممکن است نامتناهی باشند).

تمرینات

۱. با مثال نقض نشان دهید که توابع انتگرالپذیر یک جبر تشکیل نمی‌دهند.

۲. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی بوده و δ اندازهٔ دیراک بر X نسبت به نقطهٔ a باشد (ر.ک. مثال ۴.۱۰). نشان دهید که هر تابع $f: X \to R$ انتگرالپذیر است و $\int f d\delta = f(a)$.

۳. فرض کنید μ اندازهٔ شمارشی بر N باشد (ر.ک. مثال ۳.۱۰). نشان دهید که تابع $f: N \to R$ انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f(n) \right| < \infty$. همچنین، نشان دهید که در این حالت $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

۴. نشان دهید که تابع اندازه‌پذیر f انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $|f|$ انتگرالپذیر باشد. یک تابع انتگرال‌ناپذیر مثال بزنید که قدرمطلقش انتگرالپذیر باشد.

۵. فرض کنید f یک تابع انتگرالپذیر بوده و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از هم جدا

از X باشد. هرگاه $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$، آنگاه نشان دهید که

$$\int_E fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}fd\mu .$$

۶. فرض کنید f یک تابع انتگرالپذیر باشد. نشان دهید به ازای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ ای (تابع ε) هست به طوری که $|\int_E fd\mu|<\varepsilon$ به ازای جمیع مجموعه‌های اندازه‌پذیر با خاصیت $\mu^*(E)<\delta$ برقرار است.

[**راهنمایی.** ابتدا مطلب را برای توابع پله‌ای ثابت کنید.]

۷. نشان دهید که به ازای هر تابع انتگرالپذیر f، مجموعهٔ $\{x\in X:\ f(x)\neq 0\}$ را می‌توان به صورت اجتماعی شمارشپذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر از اندازهٔ متناهی نوشت (یعنی یک مجموعهٔ σ− متناهی است).

۸. فرض کنید $f:R\to R$ نسبت به اندازهٔ لبگ انتگرالپذیر باشد. نشان دهید که تابع $g:[0,\infty)\to R$ با تعریف

$$g(t)=\sup\{\int|f(x+y)-f(x)|d\lambda(x):\ |y|\leq t\}$$

به ازای $t\geq 0$ در $t=0$ پیوسته است.

۹. فرض کنید g یک تابع انتگرالپذیر بوده و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر باشد به طوری که به ازای هر n، $|f_n|\leq g$ ت. ه. برقرار است. نشان دهید هرگاه $f_n\xrightarrow{\mu}f$، آنگاه f یک تابع انتگرالپذیر بوده و $\lim\int|f_n-f|d\mu=0$ برقرار است.

[**راهنمایی.** قضیهٔ ۴.۱۶ را با قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ تلفیق نمایید.]

۱۰. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر (ت. ه.) مثبت بوده و به ازای هر عدد صحیح i،

$$e_i=\mu^*(\{x\in X:\ 2^{i-1}<f(x)\leq 2^i\}).$$

نشان دهید f انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $\sum_{i=-\infty}^{\infty}2^i e_i<\infty$.

۱۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر باشد به طوری که $0\leq f_{n+1}\leq f_n$ ت. ه. به ازای هر n برقرار است. در این صورت، نشان دهید که $f_n\downarrow 0$ ت. ه. برقرار است اگر و فقط اگر $\int f_n d\mu\downarrow 0$.

۱۲. فرض کنید f یک تابع انتگرالپذیر باشد به طوری که $f(x)>0$ به ازای تقریباً هر x برقرار است. هرگاه A یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد به طوری که $\int_A fd\mu=0$، آنگاه نشان دهید که $\mu^*(A)=0$.

۱۳. فرض کنید f یک تابع انتگرالپذیر مثبت باشد. تابع مجموعه‌ای $\nu:\Lambda\to[0,\infty)$ را با $\nu(A)=\int_A fd\mu$ به ازای هر $A\in\Lambda$ تعریف کرده، نشان دهید که

۱. (X,Λ,ν) یک فضای اندازه است.

۲. هرگاه Λ_ν مجموعهٔ زیرمجموعه‌های ν- اندازه‌پذیر X باشد، آنگاه نشان دهید که $\Lambda \subseteq \Lambda_\nu$. مثالی بزنید که $\Lambda \neq \Lambda_\nu$.

۳. هرگاه $\mu^*(\{x \in X: f(x) = 0\}) = 0$، آنگاه نشان دهید که $\Lambda = \Lambda_\nu$.

۴. هرگاه g یک تابع انتگرالپذیر نسبت به فضای اندازهٔ (X, Λ, ν) باشد، آنگاه نشان دهید که fg نسبت به فضای اندازهٔ (X, S, μ) انتگرالپذیر بوده و $\int g d\nu = \int gf d\mu$ برقرار است. (به خاطر تساوی اخیر، معمولاً می‌نویسیم $d\nu = f d\mu$ و f را **مشتق** ν نسبت به μ می‌نامیم؛ با علامات: $d\nu/d\mu = f$.)

۱۴. (فرمول تغییر متغیر) فرض کنید I یک بازه از R بوده و $f: I \to R$ یک تابع انتگرالپذیر نسبت به اندازهٔ لبگ باشد. به ازای جفت a و b از اعداد حقیقی با $a \neq 0$، قرار دهید $J = \{(x - b)/a: x \in I\}$. نشان دهید که تابع $g: J \to R$ با تعریف $g(x) = f(ax + b)$ به ازای $x \in J$ انتگرالپذیر بوده و $\int_I f d\lambda = |a| \int_J g d\lambda$ برقرار است.

[**راهنمایی.** ابتدا مطلب را برای توابع پله‌ای ثابت کنید.]

۱۵. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی باشد. به ازای هر جفت از توابع اندازه‌پذیر مانند f و g، قرار دهید

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

۱. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر در $f_n \xrightarrow{\mu} f$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $\lim d(f_n, f) = 0$.

۲. نشان دهید هرگاه دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر در $d(f_n, f_m) \to 0$ وقتی $n, m \to \infty$ صدق کند، آنگاه یک تابع اندازه‌پذیر مانند f هست به طوری که $\lim d(f_n, f) = 0$.

۱۹. انتگرال ریمان به عنوان انتگرال لبگ

در این بخش نشان می‌دهیم که انتگرال لبگ درواقع تعمیمی از انتگرال ریمان است. بحث را با مرور تعریف انتگرال ریمان آغاز می‌کنیم. به خاطر سادگی، شرح مطلب برای توابع یک متغیره داده شده و در آخر طرز رسیدن به همان نتایج برای توابع چند متغیره نشان داده خواهد شد. در سراسر بحث، f یک تابع حقیقی کراندار ثابت تعریف شده بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ از R است مگر خلافش تصریح شود.

گردایهٔ $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ از نقاط را یک ***افراز*** از $[a, b]$ نامیم اگر $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ برقرار باشد. هر افراز $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ بازهٔ $[a, b]$ را به n زیربازهٔ بستهٔ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ... [x_{n-1}, x_n]$ تقسیم می‌کند. طول بزرگترین زیربازه در فوق **مش** P نام دارد و با $|P|$

نموده می‌شود؛ یعنی

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1}: i = 1, ..., n\}.$$

گوییم افراز P از افراز Q **ظریفتر** است اگر $Q \subseteq P$ برقرار باشد. هرگاه P و Q دو افراز باشند، آنگاه $P \cup Q$ نیز یک افراز است که از هر دوی P و Q ظریفتر است.

فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد. به ازای $i = 1, ..., n$ قرار می‌دهیم $m_i = \inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ و $M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

در این صورت، **مجموع پایینی** $S_*(f, P)$ از f نظیر افراز P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_*(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

به همین نحو، **مجموع بالایی** $S^*(f, P)$ از f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^*(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

واضح است که $S_*(f, P) \leq S^*(f, P)$ به ازای هر افراز P از $[a, b]$ برقرار است.

لم ۱.۱۹. هرگاه افراز P از افراز Q ظریفتر باشد (یعنی $Q \subseteq P$)، آنگاه $S_*(f, Q) \leq S_*(f, P)$ و $S^*(f, P) \leq S^*(f, Q)$.

برهان. نشان می‌دهیم که $S_*(f, Q) \leq S_*(f, P)$ برقرار است. نامساوی دیگر را می‌توان به همین نحو ثابت کرد.

برای اثبات نامساوی، کافی است فرض کنیم P فقط یک نقطه از Q، مثلاً t، بیشتر داشته باشد. لذا، فرض می‌کنیم $Q = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ و $P = Q \cup \{t\}$. در این صورت، k ای $(1 \leq k \leq n)$ هست به طوری که $x_{k-1} < t < x_k$؛ و لذا،

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_{k-1}, t, x_k, ..., x_n\}.$$

قرار می‌دهیم $c_1 = \inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, t]\}$ و $c_2 = \inf\{f(x): x \in [t, x_k]\}$. ملاحظه می‌کنیم که $m_k \leq c_1$ و $m_k \leq c_2$ برقرارند. بنابراین،

$$S_*(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \neq k} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{i \neq k} m_i(x_i - x_{i-1}) + c_1(t - x_{k-1}) + c_2(x_k - t) = S_*(f, P)$$

برقرار است و برهان تمام خواهد بود.

لم ۲.۱۹. *به ازای هر جفت از افرازهای P و Q*،

$$S_*(f, P) \leq S^*(f, Q).$$

برهان. بنابر لم ۱.۱۹،

$$S_*(f, P) \leq S_*(f, P \cup Q) \leq S^*(f, P \cup Q) \leq S^*(f, Q)$$

برقرار است.

لم فوق می‌گوید که هر مجموع بالایی یک کران بالایی برای گردایهٔ تمام مجموعهای پایینی f است، و به همین نحو، هر مجموع پایینی یک کران پایینی برای گردایهٔ تمام مجموعهای بالایی می‌باشد.

لذا، هرگاه ***انتگرال ریمان پایینی*** f را با

$$I_*(f) = \sup\{S_*(f, P): \text{است } [a, b] \text{ افرازی از } P\}$$

و ***انتگرال ریمان بالایی*** f را با

$$I^*(f) = \inf\{S^*(f, P): \text{است } [a, b] \text{ افرازی از } P\}$$

تعریف کنیم، آنگاه

$$S_*(f, P) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^*(f, Q)$$

به ازای هر جفت از افرازهای P و Q از $[a, b]$ برقرار است.

تعریف ۳.۱۹. تابع کراندار $f: [a, b] \to R$ را ***انتگرالپذیر ریمان*** نامیم اگر $I_*(f) = I^*(f)$.
در این حالت، این مقدار مشترک ***انتگرال ریمان*** f نام دارد و با $\int_a^b f(x)dx$ نموده می‌شود.
یک توصیف از انتگرالپذیری ریمان یک تابع به **شرط ریمان** معروف است و در زیر عنوان شده است.

قضیهٔ ۴.۱۹ (ریمان). ***تابع کراندار $f: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر ریمان است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P از $[a, b]$ باشد به طوری که $S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$ برقرار باشد.***

برهان. فرض کنیم f انتگرالپذیر ریمان بوده و $\varepsilon > 0$. همچنین $I = \int_a^b f(x)dx$. در این صورت، دو افراز مانند P_1 و P_2 از $[a, b]$ وجود دارند به طوری که $I - S_*(f, P_1) < \varepsilon$ و $S^*(f, P_2) - I < \varepsilon$. پس (طبق لم ۱.۱۹) افراز $P = P_1 \cup P_2$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) \le S^*(f, P_2) - S_*(f, P_1)$$
$$= [S^*(f, P_2) - I] + [I - S_*(f, P_1)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

به عکس، هرگاه شرط برقرار باشد، آنگاه چون $0 \le I^*(f) - I_*(f) \le S^*(f, P) - S_*(f, P)$ به ازای هر افراز P از $[a, b]$ برقرار است، به ازای هر $\varepsilon > 0$ داریم $0 \le I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$. لذا، $I^*(f) - I_*(f) = 0$. بنابراین، $I_*(f) = I^*(f)$ برقرار است نشانگر آنکه f انتگرالپذیر ریمان می‌باشد.

فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد. گوییم گردایهٔ $T = \{t_1, ..., t_n\}$ از نقاط یک ***انتخاب از نقاط*** برای P است اگر $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ به ازای $i = 1, ..., n$ برقرار باشد. می‌نویسیم

$$S_f(P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

قضیهٔ زیر چند فرمول تقریب مفید برای انتگرال ریمان به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۵.۱۹. ***فرض کنیم*** $f: [a, b] \to R$ ***انتگرالپذیر ریمان بوده و*** $\{P_n\}$ ***دنباله‌ای از افرازهای*** $[a, b]$ ***باشد به طوری که*** $\lim |P_n| = 0$. ***در این صورت،***

$$\lim S_*(f, P_n) = \lim S^*(f, P_n) == \int_a^b f(x)dx.$$

به خصوص، هرگاه به ازای هر n، T_n ***انتخابی از نقاط برای افراز*** P_n ***باشد که*** $\lim |P_n| = 0$، ***آنگاه***

$$\lim S_f(P_n, T_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

برهان. ثابت $c > 0$ را چنان می‌گیریم که $|f(x)| < c$ به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. بنابر قضیهٔ ۴.۱۹، افراز $P = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ از $[a, b]$ هست به طوری که $S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$. n_0 را طوری می‌گیریم که $|P_n| < \varepsilon/(2cm)$ و به ازای هر $n \ge n_0$، $|P_n| < \min\{x_j - x_{j-1}: j = 1, ..., m\}$.

$n \ge n_0$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $P_n = \{t_0, t_1, ..., t_k\}$. قرار می‌دهیم:

به ازای $j = 1, ..., m$، $M_j^P = \sup\left\{f(x): x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]\right\}$؛

به ازای $i = 1, ..., k$، $M_i = \sup\left\{f(x): x \in \left[t_{i-1}, t_i\right]\right\}$

تعریفهای m_j^P و m_i مشابهند (سوپرمم‌ها را با اینفیمم‌ها عوض کنید). در این صورت،

$$0 \le \int_a^b f(x)dx - S_*(f, P_n) \le S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})=V+W,$$

که در آن V مجموع جملات $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ است که به ازای آنها $[t_{i-1}, t_i]$ کاملاً در زیربازه‌ای از افراز P قرار دارد، و W مجموع جملات باقیمانده می‌باشد. مجموعهای V و W را جداگانه تخمین می‌زنیم.

ابتدا V را تخمین می‌زنیم. توجه کنید که $V = \sum_1 + \ldots + \sum_m$، که در آن هر $\sum_j$ مجموع جملات $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ است که $[t_{i-1},t_i] \subseteq [x_{j-1},x_j]$ برقرار است. ولی هرگاه $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [x_{j-1}, x_j]$، آنگاه $M_i-m_i \le M_j^P-m_j^P$ برقرار است. همچنین، مجموع طولهای زیربازه‌هایی از افراز P_n که در $[x_{j-1},x_j]$ قراردارندهرگزاز x_j-x_{j-1} تجاوزنمی‌کند.لذا، $\sum_j \le \left[M_j^P-m_j^P\right](x_j-x_{j-1})$ برقراراست؛و درنتیجه

$$V\le\sum_{j=1}^{m}\left[M_j^P-m_j^P\right])(x_j-x_{j-1})=S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon.$$

حال W را تخمین می‌زنیم. فرض کنیم $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ جمله‌ای از مجموع W باشد. چون $|P_n| < \min\{x_j - x_{j-1}: j = 1, \ldots, m\}$، درست یک $j\ (1 \le j \le m)$ هست که $x_{j-1} < t_{i-1} < x_j < t_i < x_{j+1}$. لذا، مجموع W حداکثر m جمله دارد، و چون

$$(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \le 2c|P_n| < 2c\frac{\varepsilon}{2cm} = \frac{\varepsilon}{m},$$

پس $W < m(\varepsilon/m) = \varepsilon$. لذا، به ازای هر $n \ge n_0$،

$$0\le\int_a^b f(x)dx-S_*(f,P_n)\le V+W<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

یعنی $\lim S_*(f,P_n)=\int_a^b f(x)dx$.

به همین نحو،

$$0\le S^*(f,P_n)-\int_a^b f(x)dx\le V+W<2\varepsilon$$

به ازای هر $n \ge n_0$ برقرار است؛ و درنتیجه $S^*(f,P_n)=\int_a^b f(x)dx$. قسمت اخیر فوراً از نامساویهای زیر نتیجه می‌شود:

$$S_*(f, P_n) \le S_f(P_n, T_n) \le S^*(f, P_n).$$

در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

حال آماده‌ایم ثابت کنیم که انتگرال لبگ تعمیمی از انتگرال ریمان است. در اینجا ”f انتگرالپذیر لبگ است“ یعنی f نسبت به اندازهٔ لبگ انتگرالپذیر است.

قضیهٔ ۶.۱۹. ***هر تابع انتگرالپذیر ریمان $f: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر لبگ است، و در این حالت دو***

انتگرال یکی هستند. یعنی

$$\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

برهان. به ازای هر n، فرض می‌کنیم $P_n = \{x_۰, x_۱, \ldots, x_{۲^n}\}$ افرازی باشد که $[a, b]$ را به ۲^n زیربازه همه با طول $(b - a)۲^{-n}$ تقسیم می‌کند؛ یعنی $x_i = a + i(b - a)۲^{-n}$. قرار می‌دهیم

$$\phi_n = \sum_{i=۱}^{۲^n} m_i \chi_{[x_{i-۱}, x_i)} \text{ و } \psi_n = \sum_{i=۱}^{۲^n} M_i \chi_{[x_{i-۱}, x_i)}،$$

که در آنها $m_i = \inf\{f(x): x \in [x_{i-۱}, x_i]\}$ و $M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-۱}, x_i]\}$. واضح است که $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ دو دنباله از توابع پله‌ای هستند که در $\phi_n(x) \uparrow \le f(x) \le \psi_n(x) \downarrow$ به ازای هر $x \in [a, b)$ صدق می‌کنند.

حال اگر $\phi_n(x) \uparrow g(x)$ و $\psi_n(x) \downarrow h(x)$، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۶.۱۸، هر دو تابع g و h انتگرالپذیر لبگ‌اند و $g(x) \le f(x) \le h(x)$ به ازای هر $x \in [a, b)$ برقرار است. همچنین، طبق تعریف، $\int \phi_n d\lambda = S_*(f, P_n)$ و $\int \psi_n d\lambda = S^*(f, P_n)$. بنابراین، چون $\psi_n(x) - \phi_n(x) \downarrow h(x) - g(x) \ge ۰$، پس

$$۰ \le \int (h - g)d\lambda = \lim \int (\psi_n - \phi_n)d\lambda = \lim \int \psi_n d\lambda - \lim \int \phi_n d\lambda$$
$$= \lim S^*(f, P_n) - \lim S_*(f, P_n) = ۰,$$

که در آن تساوی اخیر به خاطر قضیهٔ ۵.۱۹ برقرار است. این ایجاب می‌کند که $h - g = ۰$ ت. هـ.؛ و درنتیجه $f = g = h$ ت. هـ. برقرار است. به خصوص، $\phi_n \uparrow f$ ت. هـ. و $\psi_n \downarrow f$ ت. هـ. برقرار است نشانگر آنکه f انتگرالپذیر لبگ (درواقع، یک تابع بالایی) است. بالأخره،

$$\int f d\lambda = \lim \int \phi_n d\lambda = \lim S_*(f, P_n) = \int_a^b f(x)dx,$$

و برهان قضیه تمام می‌شود.

قضیهٔ زیر، که منسوب به اچ. لبگ است، توابع انتگرالپذیر ریمان را بر حسب ناپیوستگیهای آنها توصیف می‌کند. (روابط تقریباً همه جا نسبت به اندازهٔ لبگ درنظر گرفته می‌شود.)

قضیهٔ ۷.۱۹ (لبگ). ***تابع کراندار $f: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر ریمان است اگر و فقط اگر تقریباً همه جا پیوسته باشد.***

برهان. به ازای هر n، فرض می‌کنیم P_n، ϕ_n، و ψ_n به صورت مذکور در برهان قضیهٔ ۶.۱۹ باشند.

ابتدا فرض می‌کنیم f انتگرالپذیر ریمان باشد. با نگاهی به برهان قضیهٔ ۶.۱۹ معلوم می‌شود که یک زیرمجموعهٔ پوچ (لبگ) مانند A از $[a, b]$ هست به طوری که $\phi_n(x) \uparrow f(x)$ و $\psi_n(x) \downarrow f(x)$ به ازای هر $x \notin A$ برقرارند. واضح است که $D = A \cup \{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\}$ دارای اندازهٔ لبگ صفر است، و حکم می‌کنیم که f بر $[a, b] \sim D$ پیوسته است.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $s_\circ \in [a, b] \sim D$ و $\varepsilon > \circ$. n را طوری می‌گیریم که $f(s_\circ) - \phi_n(s_\circ) < \varepsilon$ و $\psi_n(s_\circ) - f(s_\circ) < \varepsilon$. در این صورت، زیربازه‌ای مانند $[x_{i-1}, x_i]$ از افراز P_n هست که $s_\circ \in (x_{i-1}, x_i)$. واضح است که $\phi_n(s_\circ) = m_i$ و $\psi_n(s_\circ) = M_i$. بنابراین، هرگاه $x \in (x_{i-1}, x_i)$، آنگاه

$$-\varepsilon < m_i - f(s_\circ) \leq f(x) - f(s_\circ) \leq M_i - f(s_\circ) < \varepsilon.$$

چون (x_{i-1}, x_i) یک همسایگی $s_\circ$ است، نامساوی اخیر نشان می‌دهد که f در $s_\circ$ پیوسته است. این ثابت می‌کند که f تقریباً همه جا پیوسته است.

برای عکس مطلب، فرض کنیم f تقریباً همه جا پیوسته باشد. همچنین $s_\circ \neq b$ یک نقطهٔ پیوستگی برای f باشد. هرگاه $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد، آنگاه $\delta > \circ$ ی را طوری می‌گیریم که

$$f(s_\circ) - \varepsilon < f(x) < f(s_\circ) + \varepsilon \qquad (*)$$

به ازای هر $x \in [a, b]$ که $|x - s_\circ| < \delta$ برقرار باشد. k را طوری می‌گیریم که $|P_k| < \delta$. در این صورت، به ازای زیر بازه‌ای مانند $[x_{i-1}, x_i]$ از P_k، باید داشته باشیم $s_\circ \in [x_{i-1}, x_i)$. به خصوص، $|x - s_\circ| < \delta$ باید به ازای هر $x \in [x_{i-1}, x_i]$ برقرار باشد؛ و درنتیجه از رابطهٔ $(*)$ به دست می‌آوریم

$$f(s_\circ) - \varepsilon \leq m_i = \phi_k(s_\circ) < f(s_\circ) + \varepsilon.$$

چون $\phi_n(s_\circ) \uparrow$، به آسانی معلوم می‌شود که $\phi_n(s_\circ) \uparrow f(s_\circ)$. به همین نحو، $\psi_n(s_\circ) \downarrow f(s_\circ)$ برقرار می‌باشد.

چون f تقریباً همه جا پیوسته است، پس $\phi_n \uparrow f$ ت. ه. و $\psi_n \downarrow f$ ت. ه. برقرارند. این نشان می‌دهد که f انتگرالپذیر لبگ است. به علاوه، از قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ داریم

$$S_*(f, P_n) = \int \phi_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda \quad \text{و} \quad S^*(f, P_n) = \int \psi_n d\lambda \downarrow \int f d\lambda.$$

لذا، $\lim\, [S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n)] = \circ$، و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۴.۱۹، تابع f انتگرالپذیر ریمان است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

از قضیهٔ ۷.۱۹ نتیجهٔ فوری زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۸.۱۹. *گردایهٔ تمام توابع انتگرالپذیر ریمان بر یک بازهٔ بسته یک فضای تابعی تشکیل می‌دهد و یک جبر توابع می‌باشد.*

به آسانی می‌توان مثالهایی از توابع انتگرالپذیر لبگ کراندار ساخت که انتگرالپذیر ریمان نیستند. مثال زیر از این نوع خواهد بود.

مثال ۹.۱۹. فرض کنیم $f: [۰, ۱] \to R$ با $f(x) = ۰$ اگر x یک عدد گویا باشد و $f(x) = ۱$ اگر x گنگ باشد تعریف شده باشد (به عبارت دیگر، f تابع مشخصهٔ مجموعهٔ اعداد گنگ $[۰, ۱]$ است). در این صورت، f در هر نقطهٔ $[۰, ۱]$ ناپیوسته است؛ و لذا، طبق قضیهٔ ۷.۱۹، f انتگرالپذیر ریمان نیست. به عبارت دیگر، $f = ۱$ ت. ه. (زیرا مجموعهٔ اعداد گویا دارای اندازهٔ لبگ صفر است)؛ و درنتیجه f انتگرالپذیر لبگ است. همچنین، توجه کنید که $\int f d\lambda = ۱$ برقرار است.

از قضیهٔ ۷.۱۹ نتیجه می‌شود که اگر $f: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر ریمان باشد، تحدید f به هر زیربازهٔ بستهٔ $[a, b]$ نیز در آنجا انتگرالپذیر ریمان است. به علاوه، بنا بر همان قضیه، هرگاه دو تابع f و g به ترتیب بر $[a, c]$ و $[c, b]$ انتگرالپذیر ریمان باشند، آنگاه تابع h با تعریف $h(x) = f(x)$ اگر $x \in [a, c]$ و $h(x) = g(x)$ اگر $x \in (c, b]$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر ریمان است.

واضح است که، بنابر قضیهٔ ۷.۱۹، هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته انتگرالپذیر ریمان است. برای محاسبهٔ انتگرال ریمان (و درنتیجه انتگرال لبگ) یک تابع پیوسته، معمولاً از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده می‌شود؛ شکلی از این قضیه در زیر ذکر شده است. چون هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال "مناسب" برهانی از این نتیجهٔ مهم را داراست، برهانش را حذف می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰.۱۹ (قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال). *فرض کنیم $f: [a, b] \to R$ یک تابع پیوسته باشد. همچنین $F: [a, b] \to R$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که به ازای هر $x \in (a, b)$، $F'(x) = f(x)$ برقرار باشد. در این صورت،*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

معمولاً انتگرال $\int_b^a f(x)dx$ را مساوی $-\int_a^b f(x)dx$ تعریف می‌کنند؛ یعنی $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. همچنین، $\int_a^a f(x)dx$ را مساوی صفر تعریف می‌کنیم. با این کار، اتحاد مفید

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^e f(x)dx + \int_e^d f(x)dx$$

صرف نظر از ترتیب موجود بین نقاط c، d، و e در $[a, b]$ برقرار است.

حال نحوهٔ تعمیم نتایج فوق به توابع چند متغیره را نشان می‌دهیم.

در حالت کلی، بازهٔ $[a, b]$ با **سلول** $J = [a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ عـوض شـده و انـدازهٔ لبگ آن مساوی است با $\lambda(J) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. **افراز** P از J مجموعه‌ای از نقاط به شکل $P = P_1\times\ldots\times P_n$ است، که در آن P_i افرازی از $[a_i, b_i]$ به ازای هر $i = 1, \ldots, n$ است. واضح است که هر افراز P، J را به تعدادی متناهی زیرسلول تقسیم می‌کند.

حال اگر $f: J\to R$ یک تابع کراندار بوده و افراز P، J را به زیرسلولهای $J_1, \ldots, J_k$ تقسیم کند، مجدداً اعداد زیر را تعریف می‌کنیم:

$$m_i = \inf\{f(x_1, \ldots, x_n):\ (x_1, \ldots, x_n) \in J_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x_1, \ldots, x_n):\ (x_1, \ldots, x_n) \in J_i\}.$$

مجموعهای پایینی و بالایی نظیر افراز P با فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

$$S^*(f, P) = \sum_{i=1}^k M_i\lambda(J_i) \quad \text{و} \quad S_*(f, P) = \sum_{i=1}^k m_i\lambda(J_i).$$

انتگرال ریمان پایینی f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_*(f) = \sup\{S_*(f, P):\ \text{است } J \text{ یک افراز } P\},$$

و ***انتگرال ریمان بالایی*** f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^*(f) = \inf\{S^*(f, P):\ \text{است } J \text{ یک افراز } P\}.$$

همانند حالت ۱ـ بعدی، نامساویهای

$$-\infty < I_*(f) \le I^*(f) < \infty$$

برقرار است. تابع f را ***انتگرالپذیر ریمان*** نامیم اگر $I_*(f) = I^*(f)$. این عدد مشترک را ***انتگرال ریمان*** f نامیم و با

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

نشان می‌دهیم.

همهٔ نتایج داده شده در این بخش در این محدودهٔ کلی برقرارند. برهانهای آنها به موازات برهانهایی است که در اینجا ارائه می‌شوند، و به این دلیل آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

تمرینات

۱. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر ریمان باشد. نشان دهید که f بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر ریمان است. همچنین، نشان دهید که

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^e f(x)dx + \int_e^d f(x)dx$$

به ازای هر سه نقطهٔ c، d، و e از $[a, b]$ برقرار است.

۲. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر ریمان باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left[a+i\frac{b-a}{n}\right].$$

۳. (آرزلا). فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر ریمان بر $[a, b]$ باشد به طوری که $\lim f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار بوده و f انتگرالپذیر ریمان است. و نیز فرض کنید ثابتی مانند M باشد به طوری که $|f_n(x)| \leq M$ به ازای هر $x \in [a, b]$ و هر n برقرار است. نشان دهید که

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

۴. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر ریمان بر $[a, b]$ باشد به طوری که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابع f همگرا است. نشان دهید f انتگرالپذیر ریمان است و

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

۵. به ازای هر n، فرض کنید $f_n: [0, 1] \to R$ با $f_n(x) = (nx^{n-1})/(1 + x)$ به ازای هر $x \in [0, 1]$ تعریف شده باشد. نشان دهید $\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$.

[**راهنمایی.** از انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنید.]

۶. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ یک تابع صعودی باشد. نشان دهید f انتگرالپذیر ریمان است.

[**راهنمایی.** تحقیق کنید که f در شرط ریمان صدق می‌کند.]

۷. اگر $f: [a, b] \to R$ یک تابع انتگرالپذیر ریمان باشد، $F: [a, b] \to R$ را با $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ به ازای هر $x \in [a, b]$ تعریف کرده و نشان دهید که

آ. F یک تابع پیوسته است؛

ب. هرگاه f در نقطه‌ای مانند x از $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه F در x مشتقپذیر بوده و $F'(x) = f(x)$ برقرار است.

۸. فرض کنید C مجموعهٔ کانتور باشد (ر.ک. مثال ۱۲.۵). نشان دهید که χ_C روی $[0, 1]$ انتگرالپذیر

ریمان است و $\int_0^1 \chi_C(x)dx = 0$.

۹. انتگرالهای ریمان پایینی و بالایی تابع مثال ۹.۱۹ را تعیین کنید.

۱۰. فرض کنید $0 < \varepsilon < 1$ و مجموعهٔ ε-کانتور C_ε از $[0, 1]$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که χ_{C_ε} روی $[0, 1]$ انتگرالپذیر ریمان نیست. همچنین، $I_*(\chi_{C_\varepsilon})$ و $I^*(\chi_{C_\varepsilon})$ را معین نمایید. [**راهنمایی.** نشان دهید که مجموعهٔ تمام ناپیوستگیهای χ_{C_ε} مساوی C_ε است.]

۱۱. برهانی از انتگرالپذیری ریمان یک تابع پیوسته ارائه دهید که مبتنی بر پیوستگی یکنواخت آن باشد (قضیهٔ ۵.۲۴).

۱۲. فرض کنید $f: [0, 1] \to [0, \infty)$ بر هر زیربازهٔ بستهٔ $(0, 1]$ انتگرالپذیر ریمان باشد. نشان دهید f روی $[0, 1]$ انتگرالپذیر لبگ است اگر و فقط اگر $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$ در R موجود باشد. همچنین، نشان دهید هرگاه در این حالت باشیم، آنگاه $\int f d\lambda = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$.

۱۳. به عنوان کاربردی از تمرین قبل، نشان دهید که تابع $f: [0, 1] \to R$ با تعریف $f(x) = x^p$ اگر $x \in (0, 1]$ و $f(0) = 0$ انتگرالپذیر لبگ است اگر و فقط اگر $p > -1$. همچنین، نشان دهید هرگاه f انتگرالپذیر لبگ باشد، آنگاه

$$\int f d\lambda = \frac{1}{p+1}.$$

۱۴. فرض کنید $f: [0, 1] \to R$ (نسبت به اندازهٔ لبگ) انتگرالپذیر لبگ باشد. همچنین، f در $x = 0$ مشتقپذیر بوده و $f(0) = 0$. نشان دهید تابع $g: [0, 1] \to R$ با تعریف $g(x) = f(x)x^{-3/2}$ به ازای $x \in (0, 1]$ و $g(0) = 0$ انتگرالپذیر لبگ است.

۱۵. فرض کنید $f: [a, b] \times [c, d] \to R$ یک تابع پیوسته باشد. نشان دهید که انتگرال ریمان f را می‌توان با دو انتگرالگیری مکرر حساب کرد؛ یعنی

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy.$$

این امر را به یک تابع پیوستهٔ n متغیره تعمیم دهید.

۱۶. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ و $g: [a, b] \to R$ دو تابع پیوسته باشند به طوری که $f(x) \le g(x)$ به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار باشد. قرار دهید

$$A = \{(x, y) \in R^2: f(x) \le y \le g(x) \text{ و } x \in [a, b]\}.$$

آ. نشان دهید که A یک مجموعهٔ بسته (و درنتیجه، یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر R^2) است.

ب. هرگاه $h: A \to R$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید h روی A انتگرالپذیر لبگ است و

$$\int h d\lambda = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right] dx.$$

۲۰. کاربردهای انتگرال لبگ

هرگاه تابع $f: [a, \infty) \to R$ (که در آن البته $a \in R$) روی هر زیربازهٔ بستهٔ $[a, \infty)$ انتگرالپذیر ریمان باشد، آنگاه انتگرال ریمان مجازی‌اش با

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{r \to \infty} \int_a^r f(x)dx$$

تعریف می‌شود مشروط بر اینکه حد طرف راست در R موجود باشد. وجود حد فوق را این طور نیز بیان می‌کنند که می‌گویند انتگرال (ریمان مجازی) $\int_a^\infty f(x)dx$ وجود دارد. به همین نحو، هرگاه $f: (-\infty , a] \to R$ بر هر زیربازهٔ بستهٔ $(-\infty , a]$ انتگرالپذیر ریمان باشد، آنگاه $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{r \to -\infty} \int_r^a f(x)dx$$

مشروط به اینکه حد موجود باشد. واضح است که اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود باشد، $\int_b^\infty f(x)dx$ نیز به ازای هر $b > a$ وجود دارد و

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

برقرار است.

قضیهٔ ۱.۲۰. ***فرض کنیم $f: [a, \infty) \to R$ بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[a, \infty)$ انتگرالپذیر ریمان باشد. در این صورت، $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $M > 0$ (تابع ε) باشد به طوری که $\left| \int_s^t f(x)dx \right| < \varepsilon$ به ازای هر $s , t \geq M$ برقرار باشد.***

برهان. فرض کنیم $I = \int_a^\infty f(x)dx$ موجود باشد. $M > 0$ را چنان می‌گیریم که $\left| I - \int_a^r f(x)dx \right| < \varepsilon$ به ازای هر $r \geq M$ برقرار باشد. هرگاه $s , t \geq M$، آنگاه

$$\left|\int_s^t f(x)dx\right| = \left|\int_a^t f(x)dx - \int_a^s f(x)dx\right|$$

$$\leq \left|I - \int_a^t f(x)dx\right| + \left|I - \int_a^s f(x)dx\right| < ۲\varepsilon.$$

به عکس، فرض کنیم شرط برقرار باشد. هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای از $[a, \infty)$ باشد به طوری که $\lim a_n = \infty$، آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که دنبالهٔ $\left\{\int_a^{a_n} f(x)dx\right\}$ کشی است. لذا، $A = \lim\int_a^{a_n} f(x)dx$ موجود است. حال فرض کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای دیگر از $[a, \infty)$ با $\lim b_n = \infty$ باشد. قرار می‌دهیم $B = \lim\int_a^{b_n} f(x)dx$. چون

$$|A - B| \leq \left|A - \int_a^{a_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right| + \left|B - \int_a^{b_n} f(x)dx\right|,$$

به آسانی معلوم می‌شود که $|A - B| < \varepsilon$ به ازای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است. لذا، $A = B$؛ و درنتیجه حد از دنبالهٔ انتخاب شده مستقل است. این نشان می‌دهد که $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود است و برهان تمام می‌شود.

از قضیهٔ قبل و نامساوی $\left|\int_s^t f(x)dx\right| \leq \int_s^t |f(x)|\,dx$ به ازای $s < t$ فوراً معلوم می‌شود که اگر $f: [a, \infty) \to R$ بر هر زیربازهٔ بسته از $[a, \infty)$ انتگرالپذیر ریمان بوده و $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ موجود باشد، $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز وجود دارد. عکس حکم اخیر نادرست است؛ یعنی توابعی چون f وجود دارند که انتگرالهای ریمان مجازی $\int_a^\infty f(x)dx$ آنها موجودند ولی $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ وجود ندارد. یک مثال معروف تابع $f(x) = \sin x/x$ [با $f(۰) = ۱$] روی $[۰, \infty)$ است. ما بعدها خواهیم دید که $\int_۰^\infty (\sin x/x)dx = \pi/۲$ ولی $\int_۰^\infty (|\sin x|/x)\,dx$ موجود نیست. برای مشاهدهٔ مطلب اخیر، توجه کنید که

$$\int_{(k-۱)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \geq \frac{۱}{k\pi}\int_{(k-۱)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \frac{۲}{k\pi}$$

به ازای هر k برقرار است. بنابراین،

$$\int_۰^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{k=۱}^{n}\int_{(k-۱)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \geq \frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k},$$

نشانگر آنکه $\int_۰^\infty (|\sin x|/x)\,dx$ (در R) وجود ندارد.

هرگاه انتگرال ریمان مجازی یک تابع موجود باشد، آنگاه طبیعی است بپرسیم آیا تابع انتگرالپذیر لبگ هست یا نه. به طور کلی، این وضع درست نیست. ولی اگر انتگرال ریمان مجازی قدر مطلق تابع موجود باشد، تابع انتگرالپذیر لبگ است. شرح مطلب در زیر آمده است.

قضیهٔ ۶.۲۰. فرض کنیم $f: [a, \infty) \to R$ بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[a, \infty)$ انتگرالپذیر ریمان باشد. در این صورت، f انتگرالپذیر لبگ است اگر و فقط اگر انتگرال ریمان مجازی $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ موجود باشد. به علاوه، در این حالت،

$$\int f d\lambda = \int_a^\infty f(x) dx.$$

برهان. فرض کنیم f روی $[a, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ باشد. در این صورت، f^+ نیز روی $[a, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ است. فرض کنیم $\{r_n\}$ دنباله‌ای از $[a, \infty)$ باشد به طوری که $\lim r_n = \infty$. به ازای هر n، قرار می‌دهیم $f_n(x) = f^+(x)$ اگر $x \in [a, r_n]$ و $f_n(x) = ۰$ اگر $x > r_n$. در این صورت، $\lim f_n(x) = f^+(x)$ و $۰ \le f_n(x) \le f^+(x)$ به ازای هر $x \in [a, \infty)$ برقرارند. به علاوه، بنابر قضیهٔ ۶.۱۹، $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر لبگ است به طوری که $\int f_n d\lambda = \int_a^{r_n} f^+(x) dx$. لذا، طبق قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ،

$$\int f^+ d\lambda = \lim \int f_n d\lambda = \lim \int_a^{r_n} f^+(x) dx.$$

این نشان می‌دهد که $\int_a^\infty f^+(x) dx$ موجود است و $\int_a^\infty f^+(x) dx = \int f^+ d\lambda$. به همین نحو، $\int_a^\infty f^-(x) dx$ موجود است و $\int_a^\infty f^-(x) dx = \int f^- d\lambda$. ولی، در این صورت، از روابط $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$ معلوم می‌شود که هر دو انتگرال ریمان مجازی $\int_a^\infty f(x) dx$ و $\int_a^\infty |f(x)| dx$ وجود دارند. به علاوه،

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int f d\lambda \quad \text{و} \quad \int_a^\infty |f(x)| dx = \int |f| d\lambda.$$

حال فرض کنیم انتگرال ریمان مجازی $\int_a^\infty |f(x)| dx$ موجود باشد. واضح است که $\lim \int_a^{a+n} |f(x)|\, dx = \int_a^\infty |f(x)| dx$. تعریف می‌کنیم: $f_n(x) = |f(x)|$ اگر $x \in [a, a+n]$ و $f_n(x) = ۰$ اگر $x > a + n$ به ازای هر n. توجه کنید که $۰ \le f_n(x) \uparrow |f(x)|$ به ازای هر $x \ge a$ برقرار است. چون f_n انتگرالپذیر ریمان بر $[a, a+n]$ است، f_n یک تابع بالایی بر $[a, \infty)$ است که در $\int f_n d\lambda = \int_a^{a+n} f_n(x) dx = \int_a^{a+n} |f(x)|\, dx$ صدق می‌کند. لذا، طبق قضیهٔ ۶.۱۷، $|f|$ یک تابع بالایی (و درنتیجه، انتگرالپذیر لبگ) است به طوری که $\int |f| d\lambda = \int_a^\infty |f(x)|\, dx$. حال انتگرالپذیری لبگ f از قضیهٔ ۶.۱۸ با توجه به اینکه f یک تابع اندازه‌پذیر است نتیجه می‌شود، زیرا یک تابع اندازه‌پذیر بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[a, \infty)$ می‌باشد. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

نتیجهٔ بعد در رابطه با تعویض اعمال حد و انتگرالگیری است.

قضیهٔ ۳.۲۰. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه، J یک بازه از R، و $f:X\times J\to R$ تابعی باشد که $f(\cdot, t)$ یک تابع اندازه‌پذیر به ازای هر $t \in J$ است. و نیز فرض کنیم یک تابع انتگرالپذیر مانند g باشد به طوری که $|f(x, t)| \leq g(x)$ به ازای تقریباً هر x و هر $t \in J$ برقرار باشد. هرگاه به ازای یک نقطهٔ بست مانند $t_\circ$ (به‌انضمام احتمالاً $\pm\infty$) از J تابعی مانند h باشد به طوری که $\lim_{t\to t_\circ} f(x, t) = h(x)$ به ازای تقریباً هر x برقرار است، آنگاه

۱. h **یک تابع انتگرالپذیر است، و**

۲. $\lim_{t\to t_\circ}\int f(x, t)d\mu(x) = \int\lim_{t\to t_\circ} f(x, t)d\mu(x) = \int hd\mu$.

برهان. فرض کنیم $f:X\times J\to R$ در مفروضات قضیه صدق نماید. همچنین $\{t_n\}$ دنباله‌ای از J باشد به طوری که $\lim t_n = t_\circ$. به ازای $x \in X$ قرار می‌دهیم $h_n(x) = f(x, t_n)$، و توجه می‌کنیم که $|h_n| \leq g$ ت. هـ. به ازای هر n برقرار است و $h_n\to h$ ت. هـ. بنا بر قضیهٔ ۶.۱۸، هر h_n انتگرالپذیر است و، بنابر قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ، h نیز انتگرالپذیر بوده و

$$\lim\int f(x, t_n)d\mu(x) = \lim\int h_n d\mu = \int hd\mu$$

برقرار است، که از این نتیجهٔ دوم حاصل خواهد بود.

هرگاه $f:X\times(a, b)\to R$ یک تابع بوده و $t_\circ \in (a, b)$، آنگاه تابع خارج قسمت تفاضلی در $t_\circ$ بـه صورت زیر تعریف می‌شود: به ازای هر $x \in X$ و هر $t \in (a, b)$ که $t\neq t_\circ$،

$$D_{t_\circ}(x, t) = \frac{f(x, t) - f(x, t_\circ)}{t - t_\circ}.$$

بـرای آنکـه $D_{t_\circ}$ در هـمهٔ نـقاط تـعریف شـده بـاشد، بـه ازای هـر $x \in X$ نـیز تـعریف مـی‌کنیم $D_{t_\circ}(x, t_\circ) = \circ$.

طبق معمول، $\lim_{t\to t_\circ}D_{t_\circ}(x, t)$ در صورت وجود **مشتق جزئی** f نسبت به t در نقطهٔ $(x, t_\circ)$ نام دارد و با $(\partial f/\partial t)(x, t_\circ)$ نموده می‌شود. یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_\circ) = \lim_{t\to t_\circ}D_{t_\circ}(x, t) = \lim_{t\to t_\circ}\frac{f(x, t) - f(x, t_\circ)}{t - t_\circ}.$$

نتیجهٔ زیر در رابطه با مشتقگیری از تابعی است که با انتگرال تعریف شده است.

قضیهٔ ۴.۲۰. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $f:X\times(a, b)\to R$ تـابعی بـاشد کـه $f(\circ, t)$ به ازای هر $t \in (a, b)$ انتگرالپذیر لبگ است. همچنین، به ازای $t_\circ \in (a, b)$ ای، مشتق جزئی $(\partial f/\partial t)(x, t_\circ)$ به ازای تقریباً هر x وجود داشته باشد. و نـیز یک تـابع انـتگرالپـذیر مـانند g و یک

همسایگی مانند V از $t_\circ$ باشد به طوری که $|D_{t_\circ}(x, t)| \le g(x)$ به ازای تقریباً هر x و هر $t \in V$ برقرار است. در این صورت،

۱. $(\partial f/\partial t)(\cdot, t_\circ)$ یک تابع انتگرالپذیر تعریف می‌کند، و

۲. تابع $F: (a, b) \to R$ با تعریف $F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$ در $t_\circ$ مشتقپذیر است و

$$F'(t_\circ) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_\circ) d\mu(x).$$

برهان. در هر نقطهٔ x که مشتق جزئی وجود ندارد قرار می‌دهیم $(\partial f/\partial t)(x, t_\circ) = \circ$. در این صورت، $\lim_{t\to t_\circ} D_{t_\circ}(x, t) = (\partial f/\partial t)(x, t_\circ)$ به ازای تقریباً هر x برقرار است. لذا، طبق قضیهٔ ۳.۲۰، $(\partial f/\partial t)(\circ, t_\circ)$ معرف یک تابع انتگرالپذیر است و، وقتی $t \to t_\circ$،

$$\frac{F(t) - F(t_\circ)}{t - t_\circ} = \int \frac{f(x, t) - f(x, t_\circ)}{t - t_\circ} d\mu(x)$$
$$= \int D_{t_\circ}(x, t) d\mu(x) \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_\circ) d\mu(x).$$

این نشان می‌دهد که F در $t_\circ$ مشتقپذیر بوده و $F'(t_\circ) = \int (\partial f/\partial t)(x, t_\circ) d\mu(x)$ برقرار است.

برای امتحان کرانداری تابع خارج قسمت تفاضلی $D_{t_\circ}(x, t)$ به وسیلهٔ یک تابع انتگرالپذیر، محکی وجود دارد که در کاربردها بسیار مفید است. این محک نیاز به وجود یک همسایگی مانند V از $t_\circ$ دارد به طوری که

۱. مشتق جزئی $(\partial f/\partial t)(x, t)$ به ازای هر $t \in V$ و تقریباً هر x وجود داشته باشد، و

۲. یک تابع انتگرالپذیر مانند g باشد به طوری که به ازای هر $t \in V$ و تقریباً هر x، $|(\partial f/\partial t)(x, t)| \le g(x)$.

درواقع، اگر دو شرط فوق برقرار باشند، از قضیهٔ مقدار میانگین به آسانی معلوم می‌شود که $|D_{t_\circ}(x, t)| \le g(x)$ به ازای هر $t \in V$ و تقریباً هر x برقرار است.

حال، به عنوان کاربردهایی از دو قضیهٔ اخیر، چند انتگرال ریمان مجازی کلاسیک را حساب می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۲۰. [اویلر (Euler)]. $\int_\circ^\infty e^{-x^۲} dx = \sqrt{\pi}/۲$.

برهان. وجود انتگرال ریمان مجازی از نامساویهای $\circ \le e^{-x^۲} \le e^{-x}$ به ازای $x \ge ۱$ و $\int_۱^\infty e^{-x} dx = e^{-۱}$ نتیجه می‌شود. همچنین، چون به ازای هر x، $e^{-x^۲} \ge \circ$، انتگرال فوق یک انتگرال لبگ روی $[\circ, \infty)$ است. حال تابعهای

$$g(t)=\int_{\circ}^{\backslash}\frac{e^{-t^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}}dx \quad \text{و} \quad f(t)=\left[\int_{\circ}^{t}e^{-x^{\text{۲}}}dx\right]^{\text{۲}}$$

را به ازای $t \geq \circ$ در نظر می‌گیریم. مشتق تابعهای فوق جداگانه تعیین می‌شوند. برای f از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. لذا،

$$\text{به ازای } t > \circ \text{،} \quad f'(t)=\text{۲}e^{-t^{\text{۲}}}\int_{\circ}^{t}e^{-x^{\text{۲}}}dx.$$

در مورد g، ملاحظه می‌کنیم که

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{-t^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}}\right]\right|=\left|-\text{۲}te^{-t^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})}\right|\leq M$$

به ازای هر $x \in [\circ, \text{۱}]$ و هر $t > \circ$ در یک همسایگی کراندار نقطهٔ ثابتی چون $t_{\circ} > \circ$ برقرار است. البته، ثابت M به انتخاب همسایگی $t_{\circ}$ بستگی دارد. بنابر قضیهٔ ۴.۲۰ و این امر که انتگرالهای لبگ انتگرالهای ریمان‌اند، به دست می‌آوریم:

$$\text{به ازای } t > \circ \text{،} \quad g'(t)=\int_{\circ}^{\text{۱}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{-t^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}}\right]dx=-\text{۲}e^{-t^{\text{۲}}}\int_{\circ}^{\text{۱}}te^{-x^{\text{۲}}t^{\text{۲}}}dx.$$

با جانشانی $u = xt$ (به ازای $t > \circ$)، به دست می‌آوریم:

$$\text{به ازای } t > \circ \text{،} \quad g'(t)=-\text{۲}e^{-t^{\text{۲}}}\int_{\circ}^{t}e^{-u^{\text{۲}}}du=-\text{۲}e^{-t^{\text{۲}}}\int_{\circ}^{t}e^{-x^{\text{۲}}}dx.$$

لذا، $f'(t) + g'(t) = \circ$ به ازای هر $t > \circ$ برقرار است؛ و درنتیجه $f(t)+g(t) = c$ به ازای هر $t > \circ$ برقرار می‌باشد. بنابر پیوستگی f و g، به ازای هر $t \geq \circ$ داریم $f(t) + g(t) = c$. به خصوص،

$$c = f(\circ) + g(\circ) = \int_{\circ}^{\text{۱}}\frac{dx}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}=\frac{\pi}{\text{۴}};$$

و درنتیجه، به ازای $t \geq \circ$، $f(t) + g(t) = \frac{\pi}{\text{۴}}$.

حال ملاحظه می‌کنیم که

$$\text{به ازای هر } x \text{،} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}}=\circ$$

و

$$\left|\frac{e^{-t^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}}\right|\leq\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}}$$

به ازای هر $t > \circ$ و هر x برقرار است. لذا، طبق قضیهٔ ۳.۲۰، $\lim_{t\to\infty}g(t) = \circ$. درنتیجه،

$$\frac{\pi}{\text{۴}}=\lim_{t\to\infty}f(t)+\lim_{t\to\infty}g(t)=\left[\int_{\circ}^{\infty}e^{-x^{\text{۲}}}dx\right]^{\text{۲}},$$

که از آن خواهیم داشت $\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}dx = \sqrt{\pi}/2$.

قضیهٔ ۶.۲۰. *به ازای هر $t \in R$،*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}\cos(2xt)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^{2}}.$$

برهان. به ازای هر $t \in R$ قرار می‌دهیم $F(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}\cos(2xt)dx$. چون $|e^{-x^{2}}\cos(2xt)| \le e^{-x^{2}}$ به ازای هر x و t برقرار است، انتگرال ریمان مجازی وجود دارد و، علاوه بر این، یک انتگرال لبگ روی $[0, \infty)$ است. اما

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}[e^{-x^{2}}\cos(2xt)]\right| = |-2xe^{-x^{2}}\sin(2xt)| \le 2xe^{-x^{2}} = g(x)$$

به ازای هر $x \ge 0$ و هر $t \in R$ برقرار است. لذا، چون تابع g بر $[0, \infty)$ مثبت است و انتگرال ریمان مجازی $\int_{0}^{\infty} g(x)dx$ وجود دارد (مقدارش ۱ است)، g روی $[0, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ است. بنابراین، طبق قضیهٔ ۴.۲۰ (و تبصرهٔ بعد از آن)، داریم

$$F'(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}[e^{-x^{2}}\cos(2xt)]dx = -2\int_{0}^{\infty} xe^{-x^{2}}\sin(2xt)dx.$$

با انتگرالگیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$-2\int_{0}^{\infty} xe^{-x^{2}}\sin(2xt)dx = e^{-x^{2}}\sin(2xt)\Big|_{0}^{\infty} - 2t\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}\cos(2xt)dx$$
$$= -2t\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}\cos(2xt)dx.$$

لذا، $F'(t) = -2tF(t)$ به ازای هر t برقرار است. با حل معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آوریم $F(t) = F(0)e^{-t^{2}}$. بنابر قضیهٔ ۵.۲۰، $F(0) = \sqrt{\pi}/2$؛ و درنتیجه $F(t) = (\sqrt{\pi}/2)e^{-t^{2}}$ که همان مطلوب ما می‌باشد.

در نتیجهٔ بعد، مقدار $\sin x/x$ در ۰ مساوی ۱ گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۷.۲۰. *هرگاه $t \ge 0$، آنگاه*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

برقرار است.

برهان. حالات $t > 0$ و $t = 0$ جداگانه بحث می‌شوند.

حالت ۱. $t > \circ$. به ازای هر $t > \circ$ ثابت، توجه می‌کنیم که $|e^{-xt}(\sin x/x)| \leq e^{-xt}$ به ازای هر $x \geq \circ$ برقرار است. لذا، انتگرال ریمان مجازی به عنوان یک انتگرال لبگ روی $[\circ, \infty)$ وجود دارد. به ازای $t > \circ$ قرار می‌دهیم $F(t) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-xt}(\sin x/x)dx$. در این صورت، F در خواص زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \circ, \tag{$*$}$$

$$\text{به ازای هر } t > \circ\text{،}\quad F'(t) = -\frac{\text{۱}}{\text{۱} + t^{\text{۲}}}. \tag{$**$}$$

برای اثبات $(*)$، توجه می‌کنیم که اگر $g(x) = \text{۱}$ به ازای $x \in [\circ, \text{۱}]$ و $g(x) = e^{-x}$ به ازای $x > \text{۱}$، g روی $[\circ, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ است و $|e^{-xt}(\sin x/x)| \leq g(x)$ به ازای هر x و هر $t > \text{۱}$ برقرار است. از آن سو، $\lim_{t\to\infty} e^{-xt}(\sin x/x) = \circ$ به ازای هر $x > \circ$ برقرار است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۳.۲۰، $\lim_{t\to\infty} F(t) = \circ$.

برای مشاهدهٔ $(**)$، ابتدا توجه می‌کنیم که $(\partial/\partial t)[e^{-xt}(\sin x/x)] = -e^{-xt}\sin x$ به ازای هر $x > \circ$ برقرار است و، به ازای هر $a > \circ$ ی ثابت، نامساوی $|e^{-xt}(\sin x/x)| \leq e^{-ax}$ به ازای هر $t \geq a$ و $x \geq \circ$ برقرار است. بنابر قضیهٔ ۴.۲۰، به ازای هر $t > a$ (و هر $a > \circ$)، $F'(t) = -\int_{\circ}^{\infty} e^{-xt}\sin x dx$، که تساوی اخیر به خاطر آنکه انتگرال ریمان مجازی یک انتگرال لبگ است برقرار می‌باشد. لذا، $F'(t) = -\int_{\circ}^{\infty} e^{-xt}\sin x dx$ به ازای هر $t > \circ$ برقرار است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی داریم

$$\int_{\circ}^{r} e^{-xt}\sin x dx = -\frac{e^{-rt}(t\sin r + \cos r)}{\text{۱} + t^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱}+t^{\text{۲}}}$$

و درنتیجه، با فرض $r \to \infty$ به دست می‌آوریم:

$$\text{به ازای } t > \circ\text{،}\quad F'(t) = -\text{۱}/(\text{۱}+t^{\text{۲}}).$$

حال با انتگرالگیری از $(**)$ خواهیم داشت

$$F(t) - F(c) = -\int_{c}^{t} \frac{dx}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} = \arctan c - \arctan t,$$

و با فرض $c \to \infty$ نتیجه می‌شود که $F(t) = (\pi/\text{۲}) - \arctan t$.

حالت دو. $t = \circ$. در این حالت $\sin x/x$ انتگرالپذیر لبگ نیست. ولی انتگرال ریمان مجازی $\int_{\circ}^{\infty}(\sin x/x)dx$ وجود دارد. درواقع، هرگاه $t > s > \circ$، آنگاه انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int_{s}^{t} \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{s}^{t} - \int_{s}^{t}\frac{\cos x}{x^{\text{۲}}}dx = \frac{\cos s}{s} - \frac{\cos t}{t} - \int_{s}^{t}\frac{\cos x}{x^{\text{۲}}}\,dx;$$

و لذا،

$$\left|\int_{s}^{t}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{\text{۱}}{s} + \frac{\text{۱}}{t} + \int_{s}^{t}\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}}\,dx = \frac{\text{۲}}{s}.$$

بنابر قضیهٔ ۱.۲۰، $\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ وجود دارد. به خصوص، توجه کنید که $\int_n^{n+1} (\sin x/x)dx = 0$.

حال به ازای هر n تعریف می‌کنیم: به ازای $t \geq 0$، $f_n(t) = \int_0^n e^{-xt}(\sin x/x)dx$، و توجه می‌کنیم که رابطهٔ $|f_n(n)| \leq \int_0^n e^{-xn}dx = (1/n)(1 - e^{-n^2}) \leq 1/n$ ایجاب می‌کند که $\lim f_n(n) = 0$. بنابر قضیهٔ ۴.۲۰، داریم

$$f'_n(t) = -\int_0^n e^{-xt}\sin x dx = \frac{e^{-nt}(t\sin n + \cos n) - 1}{1 + t^2};$$

و درنتیجه، به ازای هر $t > 0$، $\lim_{n\to\infty} f'_n(t) = -1/(1 + t^2)$ برقرار است. همچنین، به ازای هر $t > 0$،

$$|f'_n(t)| \leq [1 + (1 + t)e^{-t}]/(1 + t^2)$$

برقرار است، و تابع تسلطی برای $\{f'_n\}$ روی $[0, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $g_n = f'_n\chi_{[0, n]}$ و توجه می‌کنیم که $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر لبگ روی $[0, \infty)$ است و نیز، چون $|g_n| \leq |f'_n|$ و به ازای $t > 0$،

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = -1/(1 + t^2),$$

قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌دهد که

$$\lim\int_0^\infty g_n(t)dt = \lim\int_0^n f'_n(t)dt = -\int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

چون $\int_0^n f'_n(t)dt = f_n(n) - f_n(0)$، به دست می‌آوریم $\lim f_n(0) = \frac{\pi}{2}$. حال نتیجه با فرض $n \to \infty$ از رابطهٔ

$$\int_0^{n+1} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n \frac{\sin x}{x}dx + \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x}dx = f_n(0) + \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x}dx$$

حاصل خواهد شد.

تمرینات

۱. نشان دهید که

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ برقرار است.

۲. نشان دهید که به ازای هر $t > 0$، $\int_0^\infty e^{-tx^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/t}$.

۳. نشان دهید که تابع $f(x) = \ln x/x^2$ روی $[1, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ بوده و $\int f d\lambda = 1$.

۴. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_۰^n \left[۱+\frac{x}{n}\right]^n e^{-۲x}dx = ۱\,.$$

۵. نشان دهید که انتگرالهای ریمان مجازی $\int_۰^\infty \cos(x^۲)dx$ و $\int_۰^\infty \sin(x^۲)dx$ [به نام ***انتگرالهای فرنل*** (Fresnel)] وجود دارند. همچنین نشان دهید که $\cos(x^۲)$ و $\sin(x^۲)$ روی $[۰, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ نیستند.

۶. نشان دهید که $\int_۰^\infty (\sin^۲ x/x^۲)dx = \pi/۲$.

۷. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه، T یک فضای متری، و $f: X\times T \to R$ یک تابع باشد. همچنین $f(۰, t)$ به ازای هر $t\in T$ یک تابع اندازه‌پذیر بوده و $f(x, ۰)$ به ازای هر $x \in X$ یک تابع پیوسته باشد. و نیز یک تابع انتگرالپذیر مانند g باشد به طوری که به ازای هر $t\in T$ و تقریباً هر x داشته باشیم $|f(x, t)| \le g(x)$. نشان دهید که تابع $F: T\to R$ با تعریف

$$F(t) = \int f(x, t)d\mu(x)$$

به ازای $t\in T$ یک تابع پیوسته است.

۸. نشان دهید که $\int_۰^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}\,dx = \ln t$ به‌ازای هر $t > ۰$ برقرار است.

۹. به ازای هر $t > ۰$، قرار دهید

$$F(t) = \int_۰^\infty [e^{-xt}/(۱ + x^۲)]dx\,.$$

آ. نشان دهید که این انتگرال به عنوان انتگرال ریمان مجازی و به عنوان انتگرال لبگ وجود دارد.

ب. نشان دهید F دارای مشتق مرتبهٔ دو بوده و $F''(t) + F(t) = ۱/t$ به ازای هر $t > ۰$ برقرار است.

۱۰. نشان دهید که انتگرال ریمان مجازی $\int_۰^{\pi/۲} \ln(t\cos x)dx$ به ازای هر $t > ۰$ وجود دارد و یک انتگرال لبگ نیز هست. همچنین نشان دهید که $\int_۰^{\pi/۲} \ln(t\cos x)dx = (\pi/۲)\ln(t/۲)$ به ازای هر $t > ۰$ برقرار است.

۱۱. ***تابع گاما*** به ازای $t > ۰$ با یک انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(t) = \int_۰^\infty x^{t-۱}e^{-x}dx.$$

آ. نشان دهید که

$$\int_۰^\infty x^{t-۱}e^{-x}dx \left[= \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to ۰^+}} \int_\varepsilon^r x^{t-۱}e^{-x}dx \right]$$

به عنوان انتگرال ریمان مجازی، و درنتیجه به عنوان انتگرال لبگ، وجود دارد.

ب. نشان دهید که $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

پ. نشان دهید که $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$ به ازای هر $t>0$ برقرار است، و با استفاده از این نشان دهید که به ازای $n=1, 2, \ldots$، $\Gamma(n+1)=n!$.

ت. نشان دهید Γ در هر $t>0$ مشتقپذیر است و

$$\Gamma'(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\ln x dx$$

برقرار است.

ث. نشان دهید Γ از هر مرتبه مشتق دارد و

$$\Gamma^{(n)}(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$$

به ازای $n=1, 2, \ldots$ و هر $t>0$ برقرار است.

۲۱. تقریب تابعهای انتگرالپذیر

مسئلهٔ تقریب زیر معمولاً در آنالیز مطرح می‌شود.

به ازای تابع انتگرالپذیر f، خانوادهٔ $\mathscr{F}$ از توابع انتگرالپذیر، و $\varepsilon>0$، معین کنید آیا تابع $g\in\mathscr{F}$ با خاصیت $\int|f-g|d\mu<\varepsilon$ وجود دارد یا خیر.

طبق تعریف یک تابع انتگرالپذیر، نتیجهٔ زیر فوراً حاصل است.

قضیهٔ ۱.۲۱. ***فرض کنیم f یک تابع انتگرالپذیر بوده و $\varepsilon>0$. در این صورت، یک تابع پله‌ای مانند ϕ هست به طوری که $\int|f-\phi|d\mu<\varepsilon$.***

گردایهٔ تمام توابع پله‌ای ϕ که به ازای آنها مجموعه‌های $A_1, \ldots, A_n\in S$ همه از اندازهٔ متناهی و اعداد حقیقی $a_1, \ldots, a_n$ (همه تابع ϕ) وجود دارند که $\phi=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ برقرار است را با L نشان می‌دهیم. در این صورت، L یک فضای تابعی است؛ ر.ک. تمرین ۱ از بخش ۱۷.

قضیهٔ ۲.۲۱. ***فرض کنیم f یک تابع انتگرالپذیر بوده و $\varepsilon>0$. در این صورت، یک تابع مانند $\phi\in L$ هست به طوری که $\int|f-\phi|d\mu<\varepsilon$.***

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم به ازای مجموعهٔ اندازه‌پذیری چون A با $\mu^*(A)<\infty$، $f=\chi_A$. دنبالهٔ از

هم جدای $\{A_n\}$ از S را چنان می‌گیریم که $A\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. قرار می‌دهیم $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و توجه می‌کنیم که دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از L با تعریف $\phi_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$ در $\phi_n \uparrow \chi_B$ صدق می‌کند. حال n را طوری می‌گیریم که $\int(\chi_B - \phi_n)\,d\mu < \varepsilon$. ولی، در این صورت،

$$\int|\chi_A - \phi_n|\,d\mu \le \int|\chi_A - \chi_B|\,d\mu + \int|\chi_B - \phi_n|\,d\mu$$
$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) - \mu^*(A)\right] + \int(\chi_B - \phi_n)\,d\mu < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

و نتیجه در این حالت خاص برقرار است.

اکنون به حالت کلی می‌پردازیم. بنابر قضیهٔ ۱.۲۱، یک تابع پله‌ای مانند ψ هست به‌طوری که $\int|f-\psi|\,d\mu < \varepsilon$. فرض کنیم $\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ نمایش متعارف ψ باشد. قرار می‌دهیم $c = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. به ازای هر i $(1 \le i \le n)$، تابع $\psi_i \in L$ را طوری می‌گیریم که $\int|\chi_{A_i} - \psi_i|\,d\mu < \varepsilon/(nc)$ و قرار می‌دهیم $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i \in L$. در این صورت،

$$\int|f-\phi|\,d\mu \le \int|f-\psi|\,d\mu + \int|\psi-\phi|\,d\mu < \varepsilon + \sum_{i=1}^{n}|a_i|\int|\chi_{A_i} - \psi_i|\,d\mu$$
$$< \varepsilon + nc\frac{\varepsilon}{nc} = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

و برهان تمام خواهد شد.

نتیجهٔ بعد، در رابطه با تقریب توابع انتگرالپذیر به وسیلهٔ توابع پیوسته است. به یاد آورید که اگر X یک فضای توپولوژیک بوده و $f: X\to R$ یک تابع باشد، بست مجموعهٔ $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ ***محافظ*** f نام دارد (و با $\operatorname{Supp} f$ نموده می‌شود). هرگاه محافظ f یک مجموعهٔ فشرده باشد، آنگاه گوییم f دارای محافظ فشرده است.

قضیهٔ ۳.۲۱. ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف بوده و μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر X باشد. همچنین f یک تابع انتگرالپذیر نسبت به فضای اندازهٔ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ باشد. در این صورت، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک تابع پیوسته مانند $g: X\to R$ با محافظ فشرده هست به طوری که*** $\int|f-g|\,d\mu < \varepsilon$.

برهان. بنابر قضیهٔ ۲.۲۱، می‌توان بدون صدمه زدن به کلیت فرض کرد f تابع مشخصهٔ یک مجموعهٔ بورل از اندازهٔ متناهی باشد. لذا، فرض می‌کنیم به ازای مجموعه‌ای بورل مانند A با $\mu(A) < \infty$، $f = \chi_A$.

چون μ یک اندازهٔ بورل منتظم است، یک مجموعهٔ فشرده مانند K هست به طوری که $K \subseteq A$ و

$\mu(A) - \mu(K) < \varepsilon$ (ر.ک. بحث بعد از تعریف ۴.۱۵) و یک مجموعهٔ باز مانند V هست به طوری که $A \subseteq V$ و $\mu(V) - \mu(A) < \varepsilon$. بنابر قضیهٔ ۸.۷، یک تابع پیوسته مانند $g: X \to [0, 1]$ هست (و درنتیجه، g اندازه‌پذیر بورل است) با محافظ فشرده به طوری که به ازای هر $x \in K$، $g(x) = 1$ و $\operatorname{Supp} g \subseteq V$. واضح است که g انتگرالپذیر است و $|\chi_A - g| \le \chi_V - \chi_K$ برقرار است. بنابراین،

$$\int |\chi_A - g| d\mu \le \int |\chi_V - \chi_K| d\mu = \mu(V) - \mu(K) < 2\varepsilon,$$

و برهان قضیه تمام خواهد شد.

قضیهٔ زیر یک خاصیت مهم از توابع انتگرالپذیر لبگ تعریف شده بر R را توصیف می‌کند. این قضیه را معمولاً **لم ریمان ـ لبگ** می‌نامند.

قضیهٔ ۴.۲۱ (ریمان ـ لبگ). ***هرگاه $f: R \to R$ انتگرالپذیر لبگ باشد، آنگاه***

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\cos(nx) d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int f(x)\sin(nx) d\lambda(x) = 0.$$

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که نامساوی $|f(x)\cos(nx)| \le |f(x)|$ به ازای هر x همراه با قضیهٔ ۶.۱۸ نشان می‌دهد که $f(x)\cos(nx)$، به ازای هر n، یک تابع انتگرالپذیر لبگ است. همچنین، طبق قضیهٔ ۲.۲۱، برای اثبات قضیه کافی است توابع به شکل $\chi_{[a, b)}$ را در نظر بگیریم. لذا، فرض می‌کنیم $f = \chi_{[a, b)}$. در این حالت انتگرالهای لبگ انتگرالهای ریمان‌اند و، وقتی $n \to \infty$،

$$\left| \int f(x)\cos(nx) d\lambda(x) \right| = \left| \int_a^b \cos(nx) dx \right| = \frac{1}{n} |\sin(nb) - \sin(na)| \le \frac{2}{n} \to 0.$$

به همین نحو، $\lim_{n\to\infty} \int f(x)\sin(nx) d\lambda(x) = 0$ و برهان قضیه تمام است.

دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع انتگرالپذیر را **همگرا در میانگین** به تابعی چون f گوییم اگر $\lim \int |f_n - f| d\mu = 0$ برقرار باشد.

قضیهٔ ۵.۲۱. ***فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر باشد. هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر باشد به طوری که $\lim \int |f_n - f| d\mu = 0$، آنگاه یک زیردنباله مانند $\{f_{k_n}\}$ از $\{f_n\}$ هست به طوری که $f_{k_n} \to f$ ت. ه. برقرار است.***

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. به ازای هر n قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}$ و

توجه می‌کنیم که (بنابر قضیهٔ ۵.۱۸) هر E_n یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر از اندازهٔ متناهی است. حال چون $\varepsilon X_{E_n} \le |f_n - f|$ به ازای هر n برقرار است، نتیجه می‌شود که $\varepsilon\mu^*(E_n) \le \int|f_n - f|d\mu$ نیز به ازای هر n برقرار است. لذا، $\lim\mu^*(E_n) = ۰$؛ و درنتیجه $f_n \xrightarrow{\mu} f$. حال نتیجه فوراً از قضیهٔ ۴.۱۶ حاصل خواهد شد.

یک دنباله از توابع انتگرالپذیر که به تابعی در میانگین همگراست لزوماً نقطه به نقطه بـه آن تـابع همگرا نیست. دنبالهٔ $\{f_n\}$ مثال ۶.۱۶ مثالی از این وضع خواهد بود.

تمرینات

۱. فرض کنید $f: R\to R$ یک تابع انتگرالپذیر لبگ باشد. نشان دهید که

$$\lim_{t\to\infty}\int f(x)\cos(xt)\,d\lambda(x) = \lim_{t\to\infty}\int f(x)\sin(xt)\,d\lambda(x) = ۰.$$

۲. گوییم تابع $f: R^n\to R$ یک **تابع** C^∞ است اگر f دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه باشد.

آ. تابع $\rho: R\to R$ با تعریف $\rho(x) = \exp[۱/(x^۲ - ۱)]$ اگر $|x| < ۱$ و $\rho(x) = ۰$ اگر $|x| \ge ۱$ را درنظر بگیرید. نشان دهید که ρ یک تابع C^∞ است به طوری که $\operatorname{Supp}\rho = [-۱, ۱]$. (در اینجا استقرا و قاعدهٔ هوپیتال (L'Hôpital) لازم است.)

ب. به ازای $\varepsilon > ۰$ و $a \in R$ نشان دهید که تابع $f(x) = \rho[(x - a)/\varepsilon]$ نیز یک تـابع C^∞ بـا $\operatorname{Supp} f = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ است.

۳. فرض کنید $[a, b]$ یک بازه بوده، و $\varepsilon > ۰$ چنان باشد که $a + \varepsilon < b - \varepsilon$، و ρ همانند تمرین ۲ باشد. $h: R\to R$ را با $h(x) = \int_a^b \rho[(t - x)/\varepsilon]dt$ به ازای هر $x\in R$ تعریف کرده و نشان‌دهیدکه

آ. $\operatorname{Supp} h \subseteq [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

ب. به ازای هر $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$، (یک ثابت ناصفر) $h(x) = c$.

پ. h یک تابع C^∞ است و $h^{(n)}(x) = \int_a^b (\partial^n/\partial x^n)\rho\,[(t-x)/\varepsilon]dt$ به ازای هـر $x \in R$ بـرقرار است.

ت. تابع C^∞، $f = (۱/c)h$ در $۰ \le f(x) \le ۱$ به ازای هـر $x \in R$ و $f(x) = ۱$ بـه ازای هـر $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ صدق می‌کند و نیز $\int|\chi_{[a, b)} - f|d\lambda < ۴\varepsilon$.

۴. فرض کنید $f: R\to R$ یک تابع انتگرالپذیر نسبت به اندازهٔ لبگ بوده و $\varepsilon > ۰$. نشان دهید که یک تابع C^∞ مانند g هست به طوری که $\int|f - g|d\lambda < \varepsilon$.

[**راهنمایی.** از قضیهٔ ۲.۲۱ و تمرین ۳ استفاده کنید.]

۵. هدف از این تمرین اثبات نتیجهٔ کلی زیر است: ***هرگاه*** $f: R^n\to R$ ***یک تابع انتگرالپذیر (نسبت به***

اندازهٔ لبگ) بوده و $\varepsilon > 0$***، آنگاه یک تابع*** C^∞ ***مانند*** g ***هست به طوری که*** $\int|f - g|d\lambda < \varepsilon$.

آ. فرض کنید به ازای $i = 1, \ldots, n$، $a_i < b_i$ و قرار دهید $J = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$. $\varepsilon > 0$ را طوری بگیرید که به ازای هر i، $a_i + \varepsilon < b_i - \varepsilon$. با استفاده از تمرین ۳، به ازای هر i یک تابع C^∞ مانند $f_i: R \to R$ را طوری اختیار کنید که $0 \le f_i(x) \le 1$ به ازای هر x، $f_i(x) = 1$ اگر $x \in [a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon]$ و $\operatorname{Supp} f_i \subseteq [a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon]$ برقرار باشد. حال $h: R^n \to R$ را با $h(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ تعریف کرده و نشان دهید h یک تابع C^∞ بر R^n است و

$$\int |\chi_J - h|d\lambda \le 2\left[\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 2\varepsilon) - \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\right].$$

ب. فرض کنید $f: R^n \to R$ انتگرالپذیر لبگ بوده و $\varepsilon > 0$. با استفاده از قسمت (آ) نشان دهید که یک تابع C^∞ مانند g با محافظ فشرده هست به طوری که

$$\int |f - g|d\lambda < \varepsilon.$$

۶. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر R^n بوده، f یک تابع μ- انتگرالپذیر باشد، و $\varepsilon > 0$. نشان دهید یک تابع C^∞ مانند g هست به طوری که $\int|f - g|d\mu < \varepsilon$.

۷. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ یک تابع انتگرالپذیر لبگ بوده و $\varepsilon > 0$. نشان دهید یک چند جمله‌ای مانند p هست به طوری که $\int|f - p|d\lambda < \varepsilon$، که در آن انتگرال البته روی $[a, b]$ در نظر گرفته شده است.

[**راهنمایی.** از قضیهٔ تقریب استون ـ وایراشتراس استفاده کنید.]

۲۲. اندازه‌های حاصل ضربی و انتگرالهای مکرر

در سراسر این بخش، (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازهٔ ثابت‌اند. ***نیم حلقهٔ حاصل ضربی*** $S \times \Sigma$ از زیرمجموعه‌های $X \times Y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S \times \Sigma = \{A \times B: A \in S \text{ و } B \in \Sigma\}.$$

گردایهٔ $S \times \Sigma$ فوق واقعاً یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های $X \times Y$ است. این امر بی‌درنگ از اتحادهای

۱. $(A \times B) \cap (A_1 \times B_1) = (A \cap A_1) \times (B \cap B_1)$،

۲. $A \times B \sim A_1 \times B_1 = [(A \sim A_1) \times B] \cup [(A \cap A_1) \times (B \sim B_1)]$،

و اینکه $A \sim A_1$ و $B \sim B_1$ را می‌توان به ترتیب به صورت اجتماعهای از هم جدای متناهی از اعضای S و Σ نوشت حاصل می‌شود.

حال تابع مجموعه‌ای $\mu \times \nu: S \times \Sigma \to [0, \infty]$ را با $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A).\nu(B)$ به ازای هر $A \times B \in S \times \Sigma$ تعریف می‌کنیم (به یاد آورید که $0.\infty = 0$). این تابع مجموعه‌ای یک اندازه بر نیم حلقهٔ

حاصل ضربی $S\times\Sigma$ به نام ***اندازهٔ حاصل ضربی*** μ و ν است. شرح مطلب در زیر آمده است.

قضیهٔ ۱.۲۲. تابع مجموعه‌ای $\mu\times\nu: S\times\Sigma\to[0,\ \infty]$ با تعریف

$$\mu\times\nu(A\times B) = \mu(A).\nu(B)$$

به ازای هر $A\times B\in S\times\Sigma$ یک اندازه است.

برهان. واضح است که $\mu\times\nu(\varnothing) = 0$. برای σ- جمعی بودن $\mu\times\nu$، فرض می‌کنیم $A\times B\in S\times\Sigma$ و $\{A_n\times B_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دو بدو از هم جدا از $S\times\Sigma$ باشد که $A\times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\times B_n$. باید ثابت کنیم که

$$\mu(A).\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).\nu(B_n). \qquad (*)$$

واضح است که اگر A یا B از اندازهٔ صفر باشد، $(*)$ برقرار است. لذا، فرض می‌کنیم $\mu(A)\neq 0$ و $\nu(B)\neq 0$.

چون $\chi_{A\times B} = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n\times B_n}$، معلوم می‌شود که

$$\chi_A(x).\chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x).\chi_{B_n}(y)$$

به ازای هر x و y برقرار است. حال $y\in B$ را ثابت می‌گیریم. چون $\chi_{B_n}(y)$ مساوی یک یا صفر است، پس $\chi_A(x) = \sum_{i\in K}\chi_{A_i}(x)$ که در آن $K = \{i\in N: y\in B_i\}$. توجه کنید که گردایهٔ $\{A_i:\ i\in K\}$ باید از هم جدا باشد (چرا؟) و لذا، $\mu(A) = \Sigma_{i\in K}\mu(A_i)$ برقرار است. بنابراین،

$$\mu(A).\chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).\chi_{B_n}(y) \qquad (**)$$

به ازای هر $y\in Y$ برقرار است. چون یک جمله با $\mu(A_n) = 0$ مجموع آمده در $(*)$ یا $(**)$ را تغییر نمی‌دهد، می‌توان فرض کرد به ازای هر n، $\mu(A_n)\neq 0$.

حال اگر هر دوی A و B از اندازهٔ متناهی باشند، با استفاده از قضیهٔ ۹.۱۸ و انتگرالگیری جمله به جمله از $(**)$ معلوم می‌شود که $(*)$ برقرار است. از آن سو، هرگاه A یا B از اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).\nu(B_n)=\infty$ باید برقرار باشد.

درواقع، هرگاه مجموع اخیر متناهی باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۹.۱۸، $\mu(A)\chi_B(y)$ یک تابع انتگرالپذیر تعریف می‌کند که ناممکن است. لذا، در این حالت، $(*)$ با دو طرف نامتناهی برقرار است و برهان تمام خواهد بود.

چند نتیجهٔ بعد، خواص اساسی اندازهٔ حاصل ضربی $\mu\times\nu$ را آشکار می‌سازند. طبق معمول،

$(\mu \times \nu)^*$ اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ فضای اندازهٔ $(X\times Y, S\times \Sigma, \mu \times \nu)$ بر $X\times Y$ است.

قضیهٔ ۲.۲۲. هرگاه $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مجموعه‌هایی *اندازه‌پذیر با اندازهٔ متناهی باشند، آنگاه*

$$(\mu\times\nu)^*(A\times B) = \mu^*\times\nu^*(A\times B) = \mu^*(A).\nu^*(B).$$

برهان. واضح است که $S\times \Sigma \subseteq \Lambda_\mu \times \Lambda_\nu$ برقرار است. حال فرض کنیم $\{A_n\times B_n\}$ دنباله‌ای از $S\times\Sigma$ باشد به طوری که $A\times B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\times B_n$. چون، طبق قضیهٔ ۱.۲۲، $\mu^*\times\nu^*$ یک اندازه بر نیم حلقهٔ $\Lambda_\mu \times \Lambda_\nu$ است، از قضیهٔ ۷.۱۰ معلوم می‌شود که

$$\mu^*\times\nu^*(A\times B) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^* \times \nu^*(A_n\times B_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu \times \nu(A_n\times B_n);$$

و درنتیجه

$$\mu^*\times\nu^*(A\times B) \leq (\mu \times\nu)^*(A\times B).$$

از آن سو، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، دو دنباله مانند $\{A_n\} \subseteq S$ و $\{B_n\} \subseteq \Sigma$ با خاصیت $A\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $B\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ وجود دارند به‌طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \mu^*(A)+\varepsilon$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\nu(B_n) < \nu^*(B)+\varepsilon$. ولی، در این صورت، $A\times B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} A_n\times B_m$ برقرار است؛ و درنتیجه، به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$(\mu \times \nu)^*(A\times B) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu \times \nu(A_n\times B_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_n).\nu(B_m)$$
$$= [\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)]\cdot[\sum_{m=1}^{\infty} \nu(B_m)] < [\mu^*(A)+\varepsilon]\cdot[\nu^*(B)+\varepsilon].$$

یعنی

$$(\mu \times\nu)^*(A\times B) \leq \mu^*(A).\nu^*(B) = \mu^*\times\nu^*(A\times B).$$

بنابراین،

$$(\mu \times\nu)^*(A\times B) = \mu^*\times\nu^*(A\times B)$$

برقرار می‌باشد.

انتظار می‌رود که اعضای $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ زیرمجموعه‌های $\mu\times\nu$- اندازه پذیری از $X\times Y$ باشند؛ یعنی $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu \subseteq \Lambda_{\mu\times\nu}$ برقرار باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این امر واقعیت دارد.

قضیهٔ ۳.۲۲. هرگاه A *زیرمجموعهٔ μ- اندازه پذیری از X بوده و B یک زیرمجموعهٔ ν- اندازه‌پذیر از Y باشد، آنگاه $A\times B$ یک زیرمجموعهٔ $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر از $X\times Y$ است.*

برهان. فرض کنیم $C\times D \in S\times\Sigma$ با خاصیت $\mu\times\nu(C\times D) = \mu(C).\nu(D) < \infty$ باشد. برای اثبات $\mu\times\nu$- اندازه پذیری $A\times B$، طبق قضیهٔ ۳.۱۲ کافی است نشان دهیم

$$(\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B)) + (\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B)^c) \leq \mu\times\nu(C\times D).$$

هرگاه $\mu\times\nu(C\times D) = 0$، آنگاه نامساوی فوق واضح است (هر دو طرف صفرند). لذا، می‌توان فرض کرد $\mu(C) < \infty$ و $\nu(D) < \infty$. واضح است که

$$(C\times D)\cap(A\times B) = (C\cap A)\times(D\cap B),$$

$$(C\times D)\cap(A\times B)^c = [(C\cap A^c)\times(D\cap B)] \cup [(C\cap A)\times(D\cap B^c)] \cup [(C\cap A^c)\times(D\cap B^c)]$$

برقرار بوده و هر عضو اجتماع فوق اندازهٔ متناهی دارد.

حال از زیرجمعی بودن $(\mu\times\nu)^*$ همراه با قضیهٔ ۲.۲۲ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
&(\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B)) + (\mu\times\nu)^*(C\times D)\cap(A\times B)^c) \\
&\leq \mu^*(C\cap A).\nu^*(D\cap B) + \mu^*(C\cap A^c).\nu^*(D\cap B) \\
&+ \mu^*(C\cap A).\nu^*(D\cap B^c) + \mu^*(C\cap A^c).\nu^*(D\cap B^c) \\
&= [\mu^*(C\cap A) + \mu^*(C\cap A^c)].[\nu^*(D\cap B) + \nu^*(D\cap B^c)] \\
&= \mu(C).\nu(D) = \mu\times\nu(C\times D)
\end{aligned}$$

که همان مطلوب ماست.

در حالت کلی، اندازهٔ $\mu^*\times\nu^*$ تنها توسیع $\mu\times\nu$ از $S\times\Sigma$ به یک اندازه بر $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ نیست. ولی، اگر هر دوی (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) فضاهای اندازهٔ σ- متناهی باشند، $(X\times Y, S\times\Sigma, \mu\times\nu)$ نیز یک فضای اندازهٔ σ- متناهی است؛ و لذا، طبق قضیهٔ ۹.۱۲، $\mu^*\times\nu^*$ تنها توسیع $\mu\times\nu$ به یک اندازه بر $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ است. به علاوه، به خاطر $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu \subseteq \Lambda_{\mu\times\nu}$ و این امر که $(\mu\times\nu)^*$ یک اندازه بر $\Lambda_{\mu\times\nu}$ است، در این حالت معلوم می‌شود که $(\mu\times\nu)^* = \mu^*\times\nu^*$ بر $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ برقرار است.

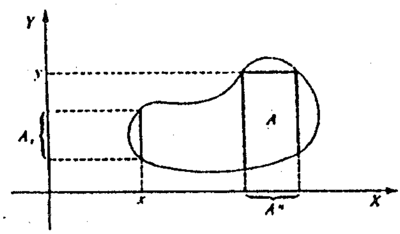
حال توجه خود را معطوف خواص زیرمجموعه‌های دلخواه $X\times Y$ می‌کنیم. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از $X\times Y$ بوده و $x\in X$، آنگاه x- **مقطع** A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_x = \{y\in Y:\ (x, y)\in A\}.$$

واضح است که A_x زیرمجموعه‌ای از Y است. به همین نحو، هرگاه $y\in Y$، آنگاه y- **مقطع** A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^y = \{x\in X:\ (x, y)\in A\}.$$

واضح است که $A^y \subseteq X$. در شکل ۳ تعبیرهای هندسی xو y- مقطع دیده می‌شوند.



شکل ۳

اتحادهای زیر در رابطه با مقاطع مجموعه‌ها برقرارند:

آ. $(\bigcup_{i\in I} A_i)_x = \bigcup_{i\in I} (A_i)_x$ و $(\bigcup_{i\in I} A_i)^y = \bigcup_{i\in I} (A_i)^y$؛

ب. $(\bigcap_{i\in I} A_i)_x = \bigcap_{i\in I} (A_i)_x$ و $(\bigcap_{i\in I} A_i)^y = \bigcap_{i\in I} (A_i)^y$؛

پ. $(A\sim B)_x = A_x\sim B_x$ و $(A\sim B)^y = A^y\sim B^y$.

اثبات روابط فوق سرراست است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ زیر رابطهٔ بین زیرمجموعه‌های $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر از $X\times Y$و زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از X و Y را نشان می‌دهد و یک نتیجهٔ کلیدی در این بخش می‌باشد.

به یاد آورید که تابع حقیقی وسعت یافتهٔ fکه بر مجموعه‌ای از اندازهٔ صفر تعریف نشده است یک تابع انتگرالپذیر است اگر یک تابع انتگرالپذیر مانند g باشد که تقریباً همه جا $f = g$؛ یعنی هرگاه بر مجموعهٔ نقاطی که fتعریف نشده یا مقدار نامتناهی دارد به تابع مقادیر دلخواه بدهیم، آنگاه fبه صورت یک تابع انتگرالپذیر درمی‌آید. (البته مقدار انتگرال به انتخاب این مقادیر بستگی ندارد.)

قضیهٔ ۴.۲۲. *فرض کنیم E یک زیرمجموعهٔ $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر از $X\times Y$ با $(\mu\times\nu)^*(E) < \infty$ باشد. در این صورت، به ازای μ- تقریباً هر x، مجموعهٔ E_x یک زیرمجموعهٔ ν- اندازه‌پذیر از Y است و تابع $x\to\nu^*(E_x)$ یک تابع انتگرالپذیر روی Xاست به طوری که*

$$(\mu\times\nu)^*(E) = \int_X \nu^*(E_x)d\mu(x).$$

به همین نحو، به ازای ν- تقریباً هر y، مجموعهٔ E^y یک زیرمجموعهٔ μ- اندازه‌پذیر از Xبوده و تابع $y\to\mu^*(E^y)$ یک تابع انتگرالپذیر روی Yاست به طوری که

$$(\mu\times\nu)^*(E) = \int_Y \mu^*(E^y)d\nu(y).$$

برهان. به خاطر تقارن وضع، کافی است نخستین فرمول را ثابت کنیم. اثبات طی چند مرحله صورت می‌گیرد.

مرحلهٔ یک. *فرض کنیم* $E = A\times B \in S\times\Sigma$. واضح است که $E_x = B$ اگر $x \in A$ و $E_x = \varnothing$ اگر $x \notin A$. لذا، به ازای هر $x \in X$، E_x یک زیرمجموعهٔ ν- اندازه‌پذیر از Y است و

$$\nu(E_x) = \nu(B)\chi_A(x) \qquad (***)$$

به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

چون

$$(\mu\times\nu)^*(E) = (\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A).\nu(B) < \infty ,$$

دو حالت داریم:

آ. هر دوی A و B از اندازهٔ متناهی‌اند.

در این حالت (***) نشان می‌دهد که $x\mapsto\nu^*(E_x)$ یک تابع انتگرالپذیر است (درواقع، یک تابع پله‌ای است) به طوری که

$$\int_X \nu^*(E_x)d\mu(x) = \int \nu(B)\chi_A d\mu = \mu(A).\nu(B) = (\mu\times\nu)^*(E).$$

ب. A یا B از اندازه نامتناهی است.

در این حالت مجموعهٔ دیگر باید از اندازهٔ صفر باشد؛ و درنتیجه رابطهٔ (***) نشان می‌دهد که به ازای μ- تقریباً هر x، $\nu(E_x) = \circ$. لذا، $x\mapsto\nu^*(E_x)$ معرف تابع صفر است؛ و لذا،

$$\int_X \nu^*(E_x)d\mu(x) = \circ = (\mu\times\nu)^*(E).$$

مرحلهٔ دو. *فرض کنیم* E یک σ- *مجموعه از* $S\times\Sigma$ *باشد.* دنبالهٔ از هم جدای $\{E_n\}$ از $S\times\Sigma$ را طوری اختیار می‌کنیم که $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. از رابطهٔ $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ و مرحلهٔ قبل معلوم می‌شود که به ازای هر $x \in X$، E_x یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از Y است.

حال به ازای هر $x \in X$ و هر n تعریف می‌کنیم $f(x) = \nu^*(E_x)$ و $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\nu((E_i)_x)$. بنابر مرحلهٔ ۱، هر f_n یک تابع انتگرالپذیر است و

$$\int f_n d\mu = \sum_{i=1}^{n}\int_X \nu((E_i)_x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n}\mu\times\nu(E_i)\uparrow(\mu\times\nu)^*(E) < \infty .$$

چون $\{(E_n)_x\}$ یک دنبالهٔ از هم جدا از Σ است، داریم $\nu^*(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu((E_n)_x)$؛ و درنتیجه $f_n(x)\uparrow f(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. لذا، طبق قضیهٔ لوی (قضیهٔ ۸.۱۸)، f یک تابع انتگرالپذیر

است و

$$\int_X \nu^*(E_x)d\mu(x)=\int fd\mu=\lim\int f_n d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\times\nu(E_i)=(\mu\times\nu)^*(E).$$

مرحلهٔ سه. *فرض کنیم E اشتراک شمارشپذیری از σ- مجموعه‌ها از اندازهٔ صفر باشد.* دنبالهٔ $\{E_n\}$ از σ- مجموعه‌ها را طوری می‌گیریم که $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$، $(\mu\times\nu)^*(E_1)<\infty$، و به ازای هر n، $E_{n+1}\subseteq E_n$.

به ازای هر n قرار می‌دهیم $g_n(x)=0$ اگر $\nu^*((E_n)_x)=\infty$ و $g_n(x)=\nu^*((E_n)_x)$ اگر $\nu^*((E_n)_x)<\infty$. بنابر مرحلهٔ دو، هر g_n یک تابع انتگرالپذیر روی X است به طوری که $\int g_n d\mu=(\mu\times\nu)^*(E_n)$ برقرار است. از رابطهٔ $E_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ معلوم می‌شود که E_x به ازای هر $x\in X$ یک مجموعهٔ ν- اندازه‌پذیر است. همچنین، چون $\nu^*((E_1)_x)<\infty$ به ازای μ- تقریباً هر x برقرار است، از قضیهٔ ۵.۱۲ معلوم می‌شود که $g_n(x)=\nu^*((E_n)_x)\downarrow\nu^*(E_x)$ به ازای μ- تقریباً هر x برقرار است. لذا، $x\to\nu^*(E_x)$ معرف یک تابع انتگرالپذیر است و

$$\int_X \nu^*(E_x)d\mu(x)=\lim\int g_n d\mu=\lim(\mu\times\nu)^*(E_n)=(\mu\times\nu)^*(E),$$

که در آن آخرین تساوی مجدداً طبق قضیهٔ ۵.۱۲ برقرار است.

مرحلهٔ چهار. *فرض کنیم* $(\mu\times\nu)^*(E)=0$. اگر مانند برهان قضیهٔ ۱۱.۱۲ استدلال کنیم، می‌بینیم که یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند G هست که اشتراک شمارشپذیری از σ- مجموعه‌ها از اندازهٔ متناهی است به طوری که $E\subseteq G$ و $(\mu\times\nu)^*(G)=0$.

بنابر مرحلهٔ سه، $\int_X \nu^*(G_x)d\mu(x)=(\mu\times\nu)^*(G)=0$؛ و درنتیجه، طبق قضیهٔ ۷.۱۸ (۱)، $\nu^*(G_x)=0$ به ازای μ- تقریباً هر x برقرار است. به خاطر رابطهٔ $E_x\subseteq G_x$ به ازای هر x باید به ازای μ- تقریباً هر x داشته باشیم $\nu^*(E_x)=0$. بنابراین، E_x به ازای μ- تقریباً هر x، ν- اندازه‌پذیر بوده و $x\to\nu^*(E_x)$ معرف تابع صفر است. لذا،

$$\int_X \nu^*(E_x)d\mu(x)=0=(\mu\times\nu)^*(E).$$

مرحلهٔ پنج. *حالت کلی.* یک مجموعهٔ $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر مانند F اختیار می‌کنیم که اشتراک شمارشپذیری از σ- مجموعه‌هایی باشد که همه از اندازهٔ متناهی بوده و $E\subseteq F$ و $(\mu\times\nu)^*(F)=(\mu\times\nu)^*(E)$. قرار می‌دهیم $G=F\sim E$. در این صورت G یک مجموعهٔ پوچ است؛ و لذا، طبق مرحلهٔ چهار،

$\circ = v^*(G_x)$ به ازای μ- تقریباً هر x برقرار است. بنابراین، E_x، v- اندازه‌پذیر بوده و $v^*(E_x) = v^*(F_x)$ به ازای μ- تقریباً هر x برقرار است. بنابر مرحلهٔ سه، $x \to v^*(F_x)$ معرف یک تابع انتگرالپذیر است؛ و در نتیجه، $x \to v^*(E_x)$ معرف یک تابع انتگرالپذیر بوده و

$$(\mu \times v)^*(E) = (\mu \times v)^*(F) = \int_X v^*(F_x) d\mu(x) = \int_X v^*(E_x) d\mu(x)$$

برقرار است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

فرض کنیم $f: X \times Y \to R$ یک تابع باشد. در این صورت، به ازای هر $x \in X$ ثابت، علامت f_x نمایش تابع $f_x: Y \to R$ است که به ازای هر $y \in Y$ با $f_x(y) = f(x, y)$ تعریف می‌شود. به همین نحو، به ازای هر $y \in Y$، نماد f^y یعنی تابع $f^y: X \to R$ که به ازای هر $x \in X$ با $f^y(x) = f(x, y)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۲۲. فرض کنیم $f: X \times Y \to R$ یک تابع باشد. در این صورت، گوییم انتگرال مکرر $\int\int f d\mu dv$ موجود است اگر به ازای v- تقریباً هر y، f^y روی X یک تابع انتگرالپذیر بوده و تابع $g(y) = \int f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ معرف یک تابع انتگرالپذیر روی Y باشد.

انتگرال مکرر $\int\int f d\mu dv$ را این طور حساب می‌کنیم که با انتگرالگیری از داخل شروع کرده و انتگرالگیری بعدی را به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$\int\int f d\mu dv = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x)\right] dv(y),$$

که در آن وقتی روی X انتگرالگیری می‌کنیم، y را ثابت می‌گیریم.

معنی انتگرال مکرر $\int\int f dv d\mu$ مشابه خواهد بود؛ یعنی

$$\int\int f dv d\mu = \int_X \left[\int_Y f(x, y) dv(y)\right] d\mu(x).$$

هرگاه E یک زیرمجموعهٔ $\mu \times v$- اندازه‌پذیر از $X \times Y$ با خاصیت $(\mu \times v)^*(E) < \infty$ باشد، آنگاه از قضیهٔ ۴.۲۲ به آسانی معلوم می‌شود که هر دو انتگرال مکرر $\int\int \chi_E d\mu dv$ و $\int\int \chi_E dv d\mu$ موجودند و

$$\int\int \chi_E d\mu dv \int\int \chi_E dv d\mu = \int \chi_E (\mu \times v) = (\mu \times v)^*(E).$$

چون هر تابع $\mu \times v$- پله‌ای ترکیبی خطی از توابع مشخصهٔ مجموعه‌های $\mu \times v$- اندازه‌پذیر از اندازهٔ متناهی است، از ملاحظات فوق معلوم می‌شود که اگر ϕ یک تابع $\mu \times v$- پله‌ای باشد، هر دو انتگرال مکرر $\int\int \phi d\mu dv$ و $\int\int \phi dv d\mu$ وجود دارند و، به علاوه،

$$\int\int \phi d\mu d\nu = \int\int \phi d\nu d\mu = \int \phi d(\mu \times \nu).$$

اتحادهای فوق در رابطه با انتگرالهای مکرر، حالات خاصی از یک نتیجهٔ کلیتر به نام قضیهٔ فوبینی (Fubini) می‌باشند.

قضیهٔ ۶.۲۲ (فوبینی). ***فرض کنیم $f: X\times Y \to R$ یک تابع $\mu \times \nu$- انتگرالپذیر باشد. در این صورت، هر دو انتگرال مکرر موجودند و***

$$\int f d(\mu\times\nu) = \int\int f d\mu d\nu = \int\int f d\nu d\mu$$

برقرار است.

برهان. بی‌آنکه به کلیت آسیبی وارد آید، می‌توان فرض کرد $f(x, y) \geq 0$ به ازای هر x و y برقرار است. دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای را طوری می‌گیریم که رابطهٔ $0 \leq \phi_n(x, y) \uparrow f(x, y)$ به ازای هر x و y برقرار باشد. لذا،

$$\int_X \left[\int_Y \phi_n(x, y) d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int \phi_n d(\mu\times\nu) \uparrow \int f d(\mu\times\nu) < \infty . \qquad (۱)$$

بنابر قضیهٔ ۴.۲۲، تابع

$$g_n(x) = \int (\phi_n)_x d\nu = \int_Y \phi_n(x,y) d\nu(y)$$

به ازای هر n معرف یک تابع انتگرالپذیر روی X است؛ و $g_n(x) \uparrow$ به‌وضوح به ازای μ- تقریباً هر x برقرار است. ولی در این صورت، طبق قضیهٔ لوی (قضیهٔ ۸.۱۸)، یک تابع μ- انتگرالپذیر مانند $g: X \to R$ وجود دارد به طوری که $g_n(x) \uparrow g(x)$، μ- ت. ه. برقرار است. یعنی یک زیرمجموعهٔ μ- پوچ مانند A از X هست به طوری که $\int (\phi_n)_x d\nu \uparrow g(x) < \infty$ به ازای هر $x \notin A$ برقرار است. چون $(\phi_n)_x \uparrow f_x$ به ازای هر x برقرار است، پس f_x به ازای هر $x \notin A$، ν- انتگرالپذیر بوده و

$$g_n(x) = \int (\phi_n)_x d\nu = \int_Y \phi_n(x, y) d\nu(y) \uparrow \int_Y f_x d\nu$$

به ازای هر $x \notin A$ برقرار است.

حال رابطهٔ (۱) در تلفیق با قضیهٔ ۶.۱۷ ایجاب می‌کند که تابع $x \to \int_Y f_x d\nu$ یک تابع انتگرالپذیر است به طوری که

$$\int f d(\mu\times\nu) = \int_X \left[\int_Y f_x d\nu\right] d\mu = \int\int f d\nu d\mu.$$

به همین نحو، $\int f d(\mu\times\nu) = \int\int f d\mu d\nu$ و برهان قضیه تمام خواهد شد.

وجود انتگرالهای مکرر به هیچوجه کافی برای انتگرالپذیری تابع روی فضای حاصل ضربی نیست. به عنوان مثال، $X = Y = [0, 1]$، $\mu = \nu = \lambda$(اندازهٔ لبگ)، و اگر $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2+y^2)^2$ $(x, y)\neq(0, 0)$ و $f(0, 0) = 0$ را در نظر می‌گیریم. به آسانی معلوم می‌شود که

$$\int\int f d\mu d\nu = -\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \int\int f d\nu d\mu = \frac{\pi}{4}.$$

البته قضیهٔ فوبینی نشان می‌دهد که f روی $[0, 1]\times[0, 1]$ انتگرالپذیر نیست.

اما عکس قضیهٔ فوبینی نیز وجود دارد که بنابر آن وجود یکی از انتگرالهای مکرر برای انتگرالپذیری تابع روی فضای حاصل ضربی کافی است. این امر به قضیهٔ تونلی (Tonelli) معروف است و کراراً در کاربردها به کار می‌رود.

قضیهٔ ۷.۲۲ (تونلی). *فرض کنیم (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازهٔ σ- متناهی بوده و $f: X\times Y\to R$ یک تابع $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر باشد. هرگاه یکی از انتگرالهای مکرر $\int\int|f|d\mu d\nu$ یا $\int\int|f|d\nu d\mu$ موجود باشد، آنگاه تابع f، $\mu\times\nu$- انتگرالپذیر است (و درنتیجه، انتگرال مکرر دیگر موجود بوده و*

$$\int f d(\mu\times\nu) = \int\int f d\mu d\nu = \int\int f d\nu d\mu$$

برقرار است).

برهان. واضح است که می‌توان بدون صدمه زدن به کلیت فرض کرد $f(x, y) \geq 0$ به ازای هر x و y برقرار است. چون (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) فضاهای اندازهٔ σ- متناهی‌اند، به آسانی معلوم می‌شود که فضای حاصل ضربی نیز یک فضای اندازهٔ σ- متناهی است. دنبالهٔ $\{A_n\}$ از مجموعه‌های $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر را چنان اختیار می‌کنیم که به ازای هر n، $(\mu\times\nu)^*(A_n) < \infty$ و $A_n \uparrow X\times Y$. بنابر قضیهٔ ۷.۱۴، یک دنباله مانند $\{\psi_n\}$ از توابع $\mu\times\nu$- ساده هست به طوری که $0 \leq \psi_n(x, y)\uparrow f(x, y)$ به ازای هر x و y برقرار است. به ازای هر n قرار می‌دهیم $\phi_n = \psi_n\chi_{A_n}$. در این صورت $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع $\mu\times\nu$- پله‌ای هست به طوری که $0 \leq \phi_n(x, y)\uparrow f(x, y)$ به ازای هر x و y برقرار است.

حال، فرض کنیم $\int\int f d\mu d\nu$ موجود باشد. این یعنی به ازای ν- تقریباً هر y، انتگرال $\int f(x, y)d\mu(x)$ موجود بوده و معرف یک تابع ν- انتگرالپذیر است. از رابطهٔ $\phi_n(x, y)\uparrow f(x, y)$ نتیجه می‌شود که $\int\phi_n(x, y)d\mu(x)\uparrow\int f(x, y)d\mu(x)$ به ازای ν- تقریباً هر y برقرار است. ولی در این صورت، با اعمال قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ، به دست می‌آوریم

$$\int\phi_n d(\mu\times\nu) = \int_Y\left[\int_X \phi_n(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y) \uparrow \int\int f d\mu\, d\nu < \infty.$$

این نشان می‌دهد که f یک تابع $\mu\times\nu$- بالایی است و $\int fd(\mu\times\nu) = \int\int fd\mu d\nu$ برقرار است. بقیهٔ برهان از قضیهٔ فوبینی حاصل می‌شود.

در علوم کاربردی، قضایای فوبینی و تونلی را معمولاً «روش محاسبهٔ انتگرال مضاعف به وسیلهٔ تغییر ترتیب انتگرالگیری» می‌نامند.

تعیین اینکه تابع $f:X\times Y\to R$، $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر است یک مسئلهٔ مشکل می‌باشد. ولی، در بعضی از کاربردها، $\mu\times\nu$- اندازه پذیری f را می‌توان از ملاحظات توپولوژیک به دست آورد. به عنوان مثال، هرگاه $X = Y = R$ و اندازهٔ لبگ $= \nu = \mu$، آنگاه اندازهٔ حاصل ضربی $\mu\times\nu$ بر R^2 دقیقاً اندازهٔ لبگ بر R^2 است. بنابراین، هر تابع حقیقی پیوسته بر R^2 لزوماً $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر است.

تمرینات

۱. فرض کنید (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازه بوده و $A\times B \in \wedge_\mu \times \wedge_\nu$.

آ. نشان دهید که $\mu^*(A).\nu^*(B) \leq (\mu\times\nu)^*(A\times B)$.

ب. نشان دهید هرگاه $\mu^*(A).\nu^*(B)\neq 0$، آنگاه $(\mu\times\nu)^*(A\times B) = \mu^*(A).\nu^*(B)$.

پ. مثالی بزنید که در آن $(\mu\times\nu)^*(A\times B)\neq \mu^*(A).\nu^*(B)$.

۲. فرض کنید (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازهٔ σ- متناهی باشند. نشان دهید که $(\mu\times\nu)^*(A\times B) = \mu^*(A).\nu^*(B)$ به ازای هر $A\times B \in \wedge_\mu \times \wedge_\nu$ برقرار است.

۳. فرض کنید (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازه باشند. همچنین A و B به ترتیب زیرمجموعهٔ X و Y باشند به طوری که $\infty > \mu^*(A) > 0$ و $\infty > \nu^*(B) > 0$. در این صورت نشان دهید که $A\times B$، $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر هر دوی A و B در فضاهای نظیر خود اندازه‌پذیر باشند. اگر یکی از مجموعه‌های A یا B از اندازهٔ صفر باشد، آیا حکم فوق برقرار است؟

۴. فرض کنید (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازهٔ σ- متناهی بوده و $f:X\times Y\to R$ یک تابع $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید که به ازای μ- تقریباً هر x، تابع f_x یک تابع ν- اندازه‌پذیر است. به همین نحو، نشان دهید که به ازای ν- تقریباً هر y، تابع f^y، μ- اندازه‌پذیر است.

۵. نشان دهید هرگاه $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ و $f(0, 0) = 0$، آنگاه

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)dy\right]dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy = \frac{-\pi}{4}.$$

۶. نتیجهٔ زیر را که به **اصل کاوالیری** (Cavalieri) معروف است، اثبات نمایید. فرض کنید (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازه بوده و E و F دو زیرمجموعهٔ $\mu \times \nu$- اندازه‌پذیر از $X \times Y$ از اندازهٔ متناهی باشند. هرگاه $\nu^*(E_x) = \nu^*(F_x)$ به ازای μ- تقریباً هر x برقرار باشد، آنگاه

$$(\mu \times \nu)^*(E) = (\mu \times \nu)^*(F).$$

۷. فرض کنید $X = Y = N$، گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های N = Σ = S، و اندازهٔ شمارشی $\mu = \nu =$. قضیهٔ فوبینی را در این حالت تعبیر نمایید.

۸. در این تمرین، λ اندازهٔ لبگ بر R است. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی بوده و $f: X \to R$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که $f(x) \geq ۰$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. نشان دهید که

آ. مجموعهٔ $A = \{(x, y) \in X \times R:\ ۰ \leq y \leq f(x)\}$، به نام **مجموعهٔ عرضی** f، یک زیرمجموعهٔ $\mu \times \lambda$- اندازه‌پذیر از $X \times R$ است.

ب. مجموعهٔ $B = \{(x, y) \in X \times R:\ ۰ \leq y < f(x)\}$ یک زیرمجموعهٔ $\mu \times \lambda$- اندازه‌پذیر از $X \times R$ بوده و $(\mu \times \lambda)^*(A) = (\mu \times \lambda)^*(B)$ برقرار است.

پ. مجموعهٔ $G = \{(x, f(x)):\ x \in X\}$، به نام **گراف** f، یک زیرمجموعهٔ $\mu \times \lambda$- اندازه‌پذیر از $X \times R$ است.

ت. هرگاه f، μ- انتگرالپذیر باشد، آنگاه $(\mu \times \lambda)^*(A) = \int f d\mu$ برقرار است.

ث. هرگاه f، μ- انتگرالپذیر باشد، آنگاه $(\mu \times \lambda)^*(G) = ۰$ برقرار است.

۹. فرض کنید $g: X \to R$ یک تابع μ- انتگرالپذیر بوده و $h: Y \to R$ یک تابع ν- انتگرالپذیر باشد. $f: X \times Y \to R$ را به ازای هر x و y با $f(x, y) = g(x)h(y)$ تعریف کرده و نشان دهید f، $\mu \times \nu$- انتگرالپذیر است و

$$\int f d(\mu \times \nu) = \left[\int_X g d\mu\right] \cdot \left[\int_Y h d\nu\right].$$

۱۰. با استفاده از قضیهٔ تونلی، تحقیق کنید که

$$\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_۰^\infty \left[\int_\varepsilon^r e^{-xy} \sin x\, dx\right] dy$$

به ازای هر $r > \varepsilon > ۰$ برقرار است. با فرض $\varepsilon \to ۰^+$ و $r \to \infty$ (و توجیه مراحلی که می‌پیمایید)، برهان دیگری از فرمول

$$\int_۰^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{۲}$$

به دست دهید.

۱۱. نشان دهید هرگاه به ازای هر x و y داشته باشیم $f(x, y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$، آنگاه

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,y)dx\right] dy = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,y)dy\right] dx.$$

با استفاده از تساوی فوق، برهان دیگری از فرمول

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

به دست دهید.

۱۲. نشان دهید که

$$\int_0^\infty \left[\int_0^r e^{-xy^2}\sin x dx\right] dy = \int_0^r \left[\int_0^\infty e^{-xy^2}\sin x dy\right] dx$$

به ازای هر $r > 0$ برقرار است. با فرض $r \to \infty$ نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

به همین نحو، نشان دهید که $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

۱۳. با استفاده از نتایج تمرین پیش (و یک تغییر متغیر مناسب)، نشان دهید که مقادیر انتگرالهای فرنل (ر.ک. تمرین ۵ در بخش ۲۰) عبارتند از

$$\int_0^\infty \sin (x^2)dx = \int_0^\infty \cos (x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

۱۴. فرض کنید $X = Y = [0, 1]$، اندازهٔ لبگ بر $[0, 1]$ = μ، و اندازهٔ شمارشی بر $[0, 1]$ = ν. "قطر" $\Delta = \{(x, x): x \in X\}$ از $X\times Y$ را در نظر گرفته، نشان دهید که

آ. Δ یک زیرمجموعهٔ $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر $X\times Y$ است؛ و درنتیجه χ_Δ یک تابع $\mu\times\nu$- اندازه‌پذیر مثبت می‌باشد.

ب. هر دو انتگرال مکرر $\int\int\chi_\Delta d\mu d\nu$ و $\int\int\chi_\Delta d\nu d\mu$ وجود دارند.

پ. تابع χ_Δ، $\mu\times\nu$- انتگرالپذیر نیست. چرا این با قضیهٔ تونلی در تضاد نیست؟

۱۵. فرض کنید $f: R\to R$ اندازه‌پذیر لبگ باشد. نشان دهید که توابع $f(x + y)$ و $f(x - y)$ هر دو $\lambda\times\lambda$-

اندازه پذیرند.

[**راهنمایی.** ابتدا $f = \chi_V$ را به ازای مجموعهٔ بازی چون V در نظر بگیرید.]

مسائل دوره‌ای

۱. فرض کنید $f: [0, \infty) \to R$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که $\lim_{x\to\infty} f(x) = \delta$. نشان دهید که به ازای هر $a > 0$، $\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(nx)dx = a\delta$.

۲. فرض کنید $f: R\to R$ یک تابع انتگرالپذیر لبگ باشد. به ازای هر بازهٔ متناهی I، قرار دهید $f_I = \frac{1}{\lambda(I)}\int_I f d\lambda$ و $E_I = \{x \in I: f(x) > f_I\}$ و نشان دهید که

$$\int_I |f - f_I| \, d\lambda = 2\int_{E_I} (f - f_I) d\lambda.$$

۳. هرگاه $f: R\to R$ یک تابع انتگرالپذیر لبگ باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{t\to 0} \int |f(x) - f(x+t)| d\lambda(x) = 0 .$$

۴. فرض کنید $f: [0, \infty) \to R$ یک تابع انتگرالپذیر لبگ باشد به طوری که به ازای هر $t \geq 0$، $\int_0^t f(x)d\lambda(x) = 0$. نشان دهید که به ازای تقریباً هر x، $f(x) = 0$.

۵. فرض کنید $f: [0, \infty) \to (0, \infty)$ یک تابع پیوسته، نزولی، و انتگرالپذیر لبگ باشد. نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(s)ds = 0$ اگر و فقط اگر به ازای هر $t > 0$، $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+t)}{f(x)} = 0$.

۶. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و ... ,f, f_1, f_2 توابع انتگرالپذیر نامنفی باشند به طوری که $f_n \to f$ ت. هـ. و $\int f_n d\mu = \int f d\mu$. هرگاه E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

۷. فرض کنید $f: [0, \infty) \to R$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که به ازای هر $x \geq 0$، $f(x + 1) = f(x)$. هرگاه $g: [0, 1] \to R$ یک تابع پیوستهٔ دلخواه باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(x)f(nx)dx = \left[\int_0^1 g(x)dx\right] \cdot \left[\int_0^1 f(x)dx\right].$$

۸. هرگاه تابع انتگرالپذیر لبگ $f: [0, 1] \to R$ در $\int_0^1 x^{2n} f(x)d\lambda(x) = 0$ به ازای هر

$n = 0, 1, 2, \ldots$ صدق کند، آنگاه $f = 0$ ت. ه.

۹. به ازای هر n، افراز $\{0, 1/2^n, 2/2^n, \ldots, (2^n - 1)/2^n, 1\}$ از بازهٔ $[0, 1]$ را درنظر گرفته و تابع $r_n: [0, 1] \to R$ را به صورت زیر تعریف کنید:
$r_n(1) = -1$ و به ازای $\frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k}{2^n}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$، $r_n(x) = (-1)^{k-1}$.

آ. گرافهای r_1 و r_2 را رسم نمایید.

ب. نشان دهید هرگاه $f: [0, 1] \to R$ یک تابع انتگرالپذیر لبگ باشد، آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 r_n(x) f(x) d\lambda(x) = 0.$$

۱۰. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ یک تابع مشتقپذیر با مشتقهای یکطرفه در نقاط انتهایی باشد. هرگاه f' بر $[a, b]$ به طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه نشان دهید که f' انتگرالپذیر لبگ است و

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda = f(b) - f(a).$$

۱۱. فرض کنید $\{\varepsilon_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد به طوری که به ازای هر n، $1 > \varepsilon_n > 0$.
همچنین دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ از $[0, 1]$ با $\{\varepsilon_n\}$ سازگار باشد هر وقت به ازای هر n، $\lambda(A_n) = \varepsilon_n$. خواص زیر از $\{\varepsilon_n\}$ را ثابت نمایید.

آ. دنبالهٔ $\{\varepsilon_n\}$ همگرا به صفر است $(\lim \varepsilon_n = 0)$ اگر و فقط اگر یک دنبالهٔ سازگار $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از $[0, 1]$ باشد به طوری که به ازای تقریباً هر x، $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) < \infty$.

ب. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر دنبالهٔ سازگار $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از $[0, 1]$، نامساوی $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) < \infty$ به ازای تقریباً هر x برقرار باشد.

۱۲. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی بوده و $f: X \to R$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد.

آ. نشان دهید که f^n به ازای هر n انتگرالپذیر است و $\lim \int f^n d\mu$ در R وجود دارد اگر و فقط اگر نامساوی $|f(x)| \leq 1$ به ازای تقریباً هر x برقرار باشد.

ب. هرگاه f^n به ازای هر n انتگرالپذیر باشد، آنگاه نشان دهید که به ازای $n = 1, 2, \ldots$، $\int f^n d\mu = c$ (ثابت) اگر و فقط اگر به ازای زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری مانند A از X، $f = \chi_A$.

کتابنامه

1. P. J Daniell, A general form of integral, *Annals Math.* 19: 279-294 (1917).
2. P. R. Halmos, *Measure Theory.* New York: Van Nostrand, 1950.
3. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* Heidelberg: Springer-Verlag, 1965.
4. H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Annali Mat. Pura Appl., Ser. 3,* 7: 231-359 (1902).
5. F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional Analysis,* transl. L. Boron. New York: F. Ungar, 1955.
6. A. E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration.* Waltham. MA: Blaisdell, 1965.
7. A. C. Zaanen, *Integration.* Amsterdam: North-Holland, 1967.

فصل ۵

فضاهای نرمدار و فضاهای Lp

مدتی است که نظریهٔ جبری فضاهای برداری بخشی از ریاضیات جدید شده است. در آنالیز فضاهای برداری از دیدگاه توپولوژیک و این فرض که قبلاً ساختار جبری وجود دارد مطالعه می‌شود. بهترین مطالعه وقتی است که به هر بردار یک عدد حقیقی به نام نرم بردار منتسب شود. نرم را می‌توان تعمیمی از مفهوم طول گرفت. یک فضای نرمدار که (با متر القا شده به وسیلهٔ نرم) تام باشد یک فضای باناخ (Banach) نام دارد.

مسائل مختلف از شاخه‌های متفاوت ریاضی (و به طور کلی علوم) را می‌توان در چهارچوب نظریهٔ فضاهای باناخ ترجمه و به روشهای توانای آن حل کرد. به این دلیل، امروزه نظریهٔ فضاهای باناخ پیشتاز تحقیقات ریاضی می‌باشد.

این فصل مقدمهٔ کوتاهی از نظریهٔ فضاهای نرمدار و باناخ را ارائه می‌دهد. پس از ذکر خواص اصلی فضاهای نرمدار، سه قضیهٔ اصلی آنالیز تابعی (یعنی اصل کرانداری یکنواخت، قضیهٔ نگاشت باز، و قضیهٔ هان (Hahn) ـ باناخ) ثابت می‌شوند. سپس بخشی را به مطالعهٔ شبکه‌های باناخ، یعنی فضاهای باناخی که نرمهایشان با ساختار شبکه‌ای فضاها سازگار است، اختصاص می‌دهیم. همانطور که خواهید دید، بسیاری از شبکه‌های باناخ درواقع دوستان قدیمی هستند. بالأخره، فضاهای L_p کلاسیک بررسی شده و نظریهٔ انتگرالگیری در وضعیت مناسب خود قرار خواهد گرفت.

۲۳. فضاهای نرمدار و فضاهای باناخ

تابع حقیقی $\|\cdot\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را یک **نرم** نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق نماید:

۱. به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$، و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲. به ازای هر x و $\alpha \in R$، $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$؛

۳. به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

خاصیت (۳) را ***نامساوی مثلثی*** می‌نامیم و این نامساوی هم ارز حکم زیر است: به ازای هر x، y، و z در X،

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را یک ***فضای برداری نرمدار*** یا فقط یک ***فضای نرمدار*** می‌نامیم. برای احتراز از بدیهیات، فضاهای برداری را تلویحاً مخالف $\{0\}$ می‌گیریم. و نیز فرض می‌کنیم همهٔ آنها فضاهای برداری حقیقی باشند.

بر فضای برداری نرمدار X یک متر بر حسب نرم $\|\cdot\|$ به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف می‌کنیم. از خواص نرم معلوم می‌شود که $d(x, y)$ یک متر بر X است. گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X ***همگرا در نرم*** به x است اگر $\lim \|x - x_n\| = 0$؛ یعنی اگر $\{x_n\}$ نسبت به فاصلهٔ القا شده به وسیلهٔ نرم همگرا به x باشد.

در پرتو نامساوی مثلثی، نامساوی

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x - y\|$$

به ازای هر x و y در X برقرار است. از این فوراً معلوم می‌شود که اگر نرم را به صورت تابع $x \to \|x\|$ از X به توی R در نظر بگیریم، به طور یکنواخت پیوسته است. همچنین، از نامساوی مثلثی به آسانی این مطلب مهم ثابت می‌شود که هرگاه $x_n \to x$ و $y_n \to y$ در X و $\alpha_n \to \alpha$ در R، آنگاه $x_n + y_n \to x + y$ و $\alpha_n x_n \to \alpha x$ برقرارند.

گوییم زیرمجموعهٔ A از یک فضای نرمدار ***کراندار نرمی*** (یا فقط ***کراندار***) است اگر $M > 0$ ی باشد به طوری که $\|x\| \leq M$ به ازای هر $x \in A$ برقرار باشد. هر دنبالهٔ کشی $\{x_n\}$ از یک فضای نرمدار کراندار است. درواقع، برای مشاهدهٔ این امر، k را طوری می‌گیریم که به ازای $n, m \geq k$، $\|x_n - x_m\| < 1$، و قرار می‌دهیم $M = \max\{1 + \|x_i\| : 1 \leq i \leq k\}$. در این صورت، نامساوی $\|x_n\| \leq 1 + \|x_k\|$ به ازای $n \geq k$ ایجاب می‌کند که $\|x_n\| \leq M$ به ازای هر n برقرار باشد.

فضای نرمدار M که نسبت به متر القا شده به وسیلهٔ نرمش تام است یک ***فضای باناخ*** نام دارد. یعنی X یک فضای باناخ است اگر به ازای هر دنبالهٔ کشی $\{x_n\}$ از X عنصری مانند $x \in X$ باشد به طوری که $\lim \|x_n - x\| = 0$. لذا، فضاهای باناخ نمونه‌های خاصی از فضاهای متری تام می‌باشند.

در زیر، چند مثال از فضاهای باناخ ارائه می‌شود.

مثال ۱.۲۳. فضای برداری R^n با نرم $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$ به ازای هر $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ یک فضای باناخ است. این نرم را ***نرم اقلیدسی*** می‌نامیم و متر اقلیدسی را به دست خواهد داد.

مثال ۲.۲۳. فرض کنید X یک فضای ناتهی بوده و $B(X)$ فضای برداری همهٔ توابع حقیقی کراندار تعریف شده بر X باشد. در این صورت، $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ به ازای هر $f \in B(X)$ معرف

یک نرم بر $B(X)$ به نام **نرم سوپرمم** است. بنابر مثال ۱۶.۵، فضای برداری $B(X)$ با نرم سوپرمم یک فضای باناخ است.

مثال ۳.۲۳. فرض کنیم l_1 گردایهٔ تمام دنباله‌های حقیقی $x = (x_1, x_2, \dots)$ باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. به آسانی معلوم می‌شود که l_1 تحت اعمال جبری

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \text{ و } \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$$

یک فضای برداری است. به علاوه، هرگاه به ازای هر $x \in l_1$ تعریف کنیم $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$، آنگاه $\|\cdot\|_1$ یک نرم بر l_1 است. تحقیق خواص نرم به خواننده محول می‌شود. حال نشان می‌دهیم که l_1 واقعاً یک فضای باناخ است.

برای این کار، فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از l_1 باشد؛ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند k باشد به طوری که $\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$ به ازای هر $n, m > k$ برقرار است. پس عددی مانند $M > 0$ هست به طوری که به ازای هر n، $\|x_n\|_1 \le M$. به ازای هر n قرار می‌دهیم $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$. رابطهٔ

$$|x_i^n - x_i^m| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m| = \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

به ازای $n, m > k$ ایجاب می‌کند که به ازای هر i ی ثابت، دنبالهٔ $\{x_i^n\}$ از اعداد حقیقی کشی است. به ازای هر i قرار می‌دهیم $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. حال، از نامساویهای

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i| \le \sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| + \sum_{i=1}^{p} |x_i^n| \le \sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| + \|x_n\|_1$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n|\right] + \|x_n\|_1 \le \varepsilon + M < \infty$$

به ازای هر p، نتیجه می‌شود که $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1$. همچنین، به خاطر آنکه به ازای هر $n, m > k$، $\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n| \le \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$، داریم:

به ازای هر p و هر $n > k$،

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n|\right) \le \varepsilon.$$

لذا، $\|x - x_n\|_1 \le \varepsilon$ به ازای هر $n > k$ برقرار است؛ درنتیجه $\{x_n\}$ همگرا به x در l_1 است. یعنی l_1 یک فضای باناخ است.

مثال ۴.۲۳. بازهٔ $[a, b]$ و عدد طبیعی k را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $C^k[a, b]$ گردایهٔ تمام توابع حقیقی تعریف شده بر $[a, b]$ باشد که بر $[a, b]$ مشتق kام پیوسته (در نقاط انتهایی، مشتقهای راست و

چپ) دارند. واضح است که $C^k[a, b]$ با اعمال جبری معمولی یک فضای برداری است. به علاوه، هرگاه به ازای هر $f \in C^k[a, b]$ قرار دهیم

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(k)}\|_\infty,$$

آنگاه $\|.\|$ معرف یک نرم است که تحت آن $C^k[a, b]$ یک فضای باناخ می‌باشد.

به آسانی معلوم می‌شود که $\|.\|$ یک نرم است. برای اثبات تام بودن $C^k[a, b]$ تحت $\|.\|$، فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $C^k[a, b]$ باشد. در این صورت، به آسانی معلوم می‌شود که توابع پیوسته‌ای مانند $g_k ,\dots, g_1 , g_0$ هست به طوری که به ازای هر $k ,\dots, 1 , i = 0$، دنبالهٔ $\left\{f_n^{(i)}\right\}$ از توابع به طور یکنواخت به g_i همگراست. حال اگر $1 \le i \le k$،

$$f_n^{(i-1)}(x) = f_n^{(i-1)}(a) + \int_a^x f_n^{(i)}(t)dt \qquad (*)$$

به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار است. لذا، طبق همگرایی یکنواخت دنباله‌های $\left\{f_n^{(i)}\right\}$، از رابطهٔ $(*)$ داریم

$$g_{i-1}(x) = g_{i-1}(a) + \int_a^x g_i(t)dt$$

که به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار است. بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، g_{i-1} (به ازای $1 \le i \le k$) مشتقپذیر است و به ازای هر $x \in [a, b]$، $g'_{i-1}(x) = g_i(x)$. به خصوص، توجه کنید که به ازای $i = 1, \dots, k$، $g_i = g_0^{(i)}$. بنابراین، $g_0 \in C^k[a, b]$ و $\lim \|f_n - g_0\| = 0$ برقرار است؛ درنتیجه $C^k[a, b]$ یک فضای باناخ است.

گوییم نرمهای $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ بر فضای برداری X **هم‌ارزند** اگر ثابتهایی چون $K > 0$ و $M > 0$ باشند به طوری که

$$K\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$$

به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد. بر خواننده است تحقیق کند که دو نرم هم‌ارزند اگر و فقط اگر مجموعه‌های باز یکسانی را تولید نمایند.

توجه کنید که اگر دو نرم بر فضای برداری X هم‌ارز باشند، X نسبت به یکی از آنها یک فضای باناخ است اگر و فقط اگر X نسبت به دیگری یک فضای باناخ باشد. همچنین، ملاحظه کنید که اگر $\|.\|_1$ هم‌ارز $\|.\|_2$ و $\|.\|_2$ هم‌ارز $\|.\|_3$ باشند، $\|.\|_1$ باید هم‌ارز $\|.\|_3$ باشد.

در یک فضای برداری نرمدار همهٔ گویهای باز «شبیه هم هستند». به طور دقیقتر، هر دو گوی باز همانریخت‌اند. درواقع، هرگاه $B(a, r)$ یک گوی باز دلخواه باشد، آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که $x \to a + rx$ یک همانریختی از $B(0, 1)$ به روی $B(a, r)$ است. به این دلیل، گوی $B(0, 1)$ نقش مهمی

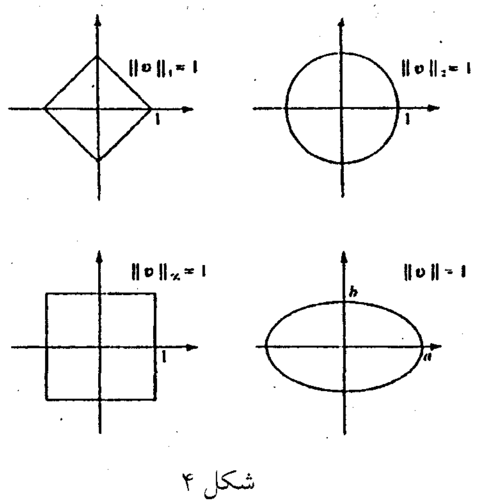
در مطالعهٔ فضاهای نرمدار ایفا می‌کند و آن را **گوی یکهٔ باز** فضا می‌نامند (به همین نحو، $\{x: \|x\| \leq 1\}$ **گوی یکهٔ بسته** نامیده می‌شود).

مثال ۵.۲۳. شایسته است نرمهای مختلفی بر R^2 را درنظر بگیریم. به‌ازای $v=(x, y)\in R^2$ تعریف می‌کنیم

$$\|v\|_1 = |x| + |y|,$$
$$\|v\|_2 = (x^2 + y^2)^{1/2},$$
$$\|v\|_\infty = \max(|x|, |y|),$$
$$\|v\| = (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^{1/2},$$

که در آن a و b دو عدد مثبت ثابت‌اند. بر خواننده است تحقیق کند که توابع فوق همه نرم بوده و در واقع هم‌ارز می‌باشند.

در شکل ۴، فرم هندسی گوی یکهٔ بسته به ازای هر نرم دیده می‌شود.



شکل ۴

هم‌ارز بودن همهٔ نرمهای مثال قبل یک امر تصادفی نیست.

قضیهٔ ۶.۲۳. ***در یک فضای برداری با بعد متناهی همهٔ نرمها هم‌ارزند.***

برهان. بی‌آنکه به کلیت آسیبی وارد آید، می‌توان فرض کرد فضای برداری با بعد متناهی R^n باشد.

فرض کنیم $\|\cdot\|_{2}$ نرم اقلیدسی آن باشد؛ یعنی

$$\|x\|_{2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

هرگاه $\|\cdot\|$ نرم دیگری بر R^n باشد، آنگاه کافی است ثابت کنیم که $\|\cdot\|$ با $\|\cdot\|_{2}$ هم‌ارز است.

هرگاه $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ (که در آن e_iها بردارهای یکهٔ اساسی متعارف‌اند)، آنگاه از نامساوی مثلثی داریم

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \le \left[\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\right] \cdot \|x\|_{2}.$$

لذا، هرگاه $M = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$، آنگاه

$$\|x\| \le M \|x\|_{2}$$

به ازای هر $x \in R^n$ برقرار است. این نیمی از نامساوی مطلوب را ثابت می‌کند. به علاوه، نامساویهای

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\| \le M\|x - y\|_{2}$$

نشان می‌دهند که تابع $x \to \|x\|$ از R^n با نرم اقلیدسی به توی R پیوسته است.

فرض کنیم $S = \{x \in R^n: \|x\|_{2} = 1\}$ "کرهٔ یکه" به ازای نرم اقلیدسی باشد. در این صورت، S بسته و کراندار است؛ و لذا، طبق قضیهٔ هاینه ـ بورل (قضیهٔ ۲۱.۵)، S به ازای نرم اقلیدسی فشرده است. به خصوص، تابع $x \to \|x\|$ بر S (مثلاً در x_0) مینیمم خود را می‌گیرد. لذا، $\|x\| \ge \|x_0\|$ به ازای هر $x \in S$ برقرار است. فرض کنیم $K = \|x_0\|$. چون $\|x_0\|_{2} = 1$، پس $x_0 \neq 0$؛ و درنتیجه $K > 0$.

حال اگر $x \in R^n$ ناصفر باشد، $\|x/\|x\|_{2}\| \ge K$؛ و درنتیجه

$$K\|x\|_{2} \le \|x\|$$

به ازای هر $x \in R^n$ برقرار است. این نیم دیگر نامساوی مطلوب را ثابت کرده و برهان قضیه را تمام خواهد کرد.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ اخیر، نتیجهٔ مفید زیر را به ثبوت می‌رسانیم.

قضیهٔ ۷.۲۳. *هر زیرفضای برداری با بعد متناهی از یک فضای نرمدار بسته است.*

برهان. فرض کنیم Y یک زیرفضای برداری با بعد متناهی از فضای نرمدار X باشد. در این صورت، Y را می‌توان (به طور یکریخت خطی) با R^nی یکی کرد. لذا، طبق قضیهٔ ۶.۲۳، تحدید نرم X به Y باید با نرم اقلیدسی هم‌ارز باشد. به خصوص، Y یک فضای متری تام است؛ و درنتیجه (بنا بر قضیهٔ ۱۰.۵)، Y بسته می‌باشد.

ساختار گوی یکهٔ باز (یا بسته) خواص توپولوژیک و هندسی همهٔ گویها را منعکس می‌سازد. مثلاً، یک فضای نرمدار موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر گوی یکهٔ بسته‌اش فشرده باشد. (به یاد آورید که یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده است اگر هر نقطه در همسایگیی باشد که بستش فشرده است.)

قضیهٔ بعد به ما می‌گوید که فضاهای نرمدار با بعد متناهی تنها فضاهای نرمدار موضعاً فشرده‌اند.

قضیهٔ ۸.۲۳. ***یک فضای نرمدار موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر با بعد متناهی باشد.***

برهان. هرگاه فضای نرمدار با بعد متناهی باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۶.۲۳، نرم آن هم‌ارز نرم اقلیدسی است. بنابر قضیهٔ ۲۱.۵، گوی یکهٔ بسته با نرم اقلیدسی فشرده است، و از این معلوم می‌شود (چگونه؟) که فضا موضعاً فشرده می‌باشد.

در مورد عکس، فرض کنیم X یک فضای نرمدار موضعاً فشرده باشد. چون همهٔ گویهای بسته همانریختند، گوی یکهٔ بستهٔ $V = \{x \in X: \|x\| \leq ۱\}$ باید فشرده باشد. $x_۱, ..., x_n \in V$ را چنان اختیار می‌کنیم که $V \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} B(x_i, ۱/۲)$، و فرض می‌کنیم Y زیرفضای خطی تولید شده به وسیلهٔ $\{x_۱, ..., x_n\}$ باشد. نشان می‌دهیم که $Y = X$، و این برهان قضیه را تمام خواهد کرد.

به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم $Y \neq X$. لذا، $x_\circ \in X$ی هست که $x_\circ \notin Y$. چون (طبق قضیهٔ ۷.۲۳) Y بسته است، به آسانی معلوم می‌شود که

$$d(x_\circ, Y) = \inf\{\|x_\circ - y\|: y \in Y\} > \circ$$

(همچنین، ر.ک. بحث بعد از قضیهٔ ۲۵.۵). $y \in Y$ی با خاصیت $\|x_\circ - y\| < ۲d(x_\circ, Y)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، به ازای $۱ \leq i \leq n$، باید داشته باشیم

$$(x_\circ - y)/\|x_\circ - y\| \in B(x_i, ۱/۲).$$

چون $y + \|x_\circ - y\|x_i$ تعلق به Y دارد، پس

$$\frac{۱}{۲} > \left\|\frac{x_\circ - y}{\|x_\circ - y\|} - x_i\right\| = \frac{\|x_\circ - (y + \|x_\circ - y\|x_\circ)\|}{\|x_\circ - y\|} \geq \frac{d(x_\circ, Y)}{\|x_\circ - y\|} > \frac{۱}{۲},$$

که نامممکن است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

عملگرهای خطی (یا **تبدیلات**) اهمیت خاصی دارند. تابع $T: X \to Y$ بین دو فضای برداری یک **عملگر خطی** (یا فقط **عملگر**) است اگر $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in R$ برقرار باشد. توجه کنید که هر عملگر خطی T در $T(\circ) = \circ$ صدق می‌کند.

هرگاه X و Y دو فضای نرمدار باشند، آنگاه از علامت $\|\cdot\|$ برای نرم هر دو فضا استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۹.۲۳. فرض کنیم $T:X\to Y$ یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار باشد. دراین‌صورت، نرم T با

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|:\ \|x\| = 1\}$$

تعریف می‌شود.

هرگاه $\|T\|$ متناهی باشد، آنگاه T یک ***عملگر کراندار*** نام دارد (و البته اگر $\|T\| = \infty$، T یک ***عملگر بی‌کران*** نامیده می‌شود).

ملاحظه می‌کنیم که

$$\|T(x)\| \leq \|T\| . \|x\|$$

به ازای هر $x \in X$ برقرار است. برای مشاهدهٔ این امر، توجه می‌کنیم که اگر $x\neq 0$، $y = x/\|x\|$ در $\|y\| = 1$ صدق می‌کند؛ و درنتیجه

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| = \|T(y)\| \leq \|T\|$$

برقرار است. به خصوص، از نامساوی اخیر معلوم می‌شود که

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|:\ \|x\| \leq 1\}.$$

در زیر چند مثال ملموس از عملگرها ارائه شده است.

مثال ۱۰.۲۳. فرض کنیم $X = C[0,\ 1]$ با نرم سوپرمم باشد. $T:X\to X$ را با $T(f)(x) = xf(x)$ به ازای هر $f \in X$ و $x \in [0,\ 1]$ تعریف می‌کنیم. واضح است که T یک عملگر خطی است به طوری که به ازای هر $f \in X$، $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. این نشان می‌دهد که $\|T\| \leq 1$ (درواقع، $\|T\| = 1$)؛ و درنتیجه T یک عملگر کراندار است.

مثال زیر یک عملگر بی‌کران به ما می‌دهد.

مثال ۱۱.۲۳. فرض کنیم X فضای برداری همهٔ توابع حقیقی بر $[0,\ 1]$ باشد که با نرم سوپرمم مشتقهای پیوسته دارند. به همین نحو، فرض کنیم $Y = C[0,\ 1]$ با نرم سوپرمم باشد. $D:\ X\to Y$ را با $D(f) = f'$ (عملگر دیفرانسیل) تعریف می‌کنیم. به آسانی معلوم می‌شود که D یک عملگر خطی است. اما $\|D\| = \infty$. درواقع، هرگاه $f_n(x) = x^n$، آنگاه $\|f_n\|_\infty = 1$ و $\|D(f_n)\|_\infty = \sup\{nx^{n-1}: x \in [0,\ 1]\} = n$ به ازای هر n برقرار است ایجابگر آنکه $\|D\| = \infty$.

بنابراین، D یک عملگر بی‌کران می‌باشد.

مثال بعد از ردهٔ مهمی از عملگرها که عموماً «عملگرهای انتگرال» نام دارند اخذ شده است.

مثال ۱۲.۲۳. فرض کنیم $[a, b]$ یک بازهٔ بستهٔ متناهی بوده و $K: [a, b]\times[a, b]\to R$ یک تابع پیوسته باشد. $C[a, b]$ را با نرم سوپرمم درنظر گرفته و $T: C[a, b]\to C[a, b]$ را با

$$T(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

به ازای هر $f \in C[a, b]$ تعریف می‌کنیم. (در اینجا می‌توان از پیوستگی یکنواخت K بر $[a, b]\times[a, b]$ برای تحقیق $T(f) \in C[a, b]$ به ازای هر $f \in C[a, b]$ استمداد کرد.) تابع $K(x, y)$ را معمولاً **هستهٔ** عملگر T می‌نامیم.

واضح است که T یک عملگر خطی است. از آن سو، هرگاه

$$M = \sup\{|K(x, y)|:\ (x, y) \in [a, b]\times[a, b]\},$$

آنگاه تخمین $|T(f)(x)| \leq M(b - a)\|f\|_\infty$ نشان می‌دهد که $\|T(f)\|_\infty \leq M(b - a)\|f\|_\infty$. لذا، $\|T\| \leq M(b - a) < \infty$؛ و درنتیجه T یک عملگر کراندار است.

شایسته است تحقیق کنیم که T در خاصیت مهم دیگری نیز صدق می‌کند؛ یعنی: هرگاه $B = \{f \in C[a, b]:\ \|f\|_\infty < 1\}$ گوی یکهٔ باز $C[a, b]$ باشد، آنگاه $\overline{T(B)}$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $C[a, b]$ است.

برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $\overline{T(B)}$ بسته و کراندار است. لذا، طبق قضیهٔ آسکولی - آرزلا، کافی است نشان دهیم که $T(B)$ همپیوسته است. $x_0 \in [a, b]$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. چون (طبق قضیهٔ ۲۴.۵) K به طور یکنواخت پیوسته است، $\delta > 0$ ای هست به طوری که $|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < \varepsilon$ به ازای $|x_1 - x_2| < \delta$ برقرار است. بنابراین، هرگاه $x \in [a, b]$ در $|x - x_0| < \delta$ صدق کند، آنگاه

$$|T(f)(x) - T(f)(x_0)| = \left|\int_a^b [K(x, y) - K(x_0, y)]f(y)dy\right| \leq (b - a)\varepsilon$$

به ازای هر $f \in B$ برقرار است. این نشان می‌دهد که $T(B)$ در x_0 همپیوسته است. چون x_0 دلخواه است، $T(B)$ همه جا همپیوسته می‌باشد. لذا، $\overline{T(B)}$ فشرده خواهد بود.

خاصیت فوق را می‌توان صرفاً این طور بیان کرد که T یک عملگر فشرده است. به طور کلی، عملگر $T: X\to Y$ بین فضاهای باناخ را یک **عملگر فشرده** نامیم اگر $\overline{T(B)}$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Y باشد (که در آن B گوی یکهٔ باز X است).

مثال بعدی ما از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل گرفته شده است.

مثال ۱۳.۲۳. فرض کنیم $C^k[a, b]$ فضای باناخ مثال ۴.۲۳ باشد. $C[a, b]$ را با نرم سوپرمم $\|\cdot\|_\infty$ در نظر گرفته و k تابع $p_0, p_1, ..., p_{k-1}$ را در $C[a, b]$ ثابت می‌گیریم. حال $L: C^k[a, b] \to C[a, b]$ را به ازای هر $y \in C^k[a, b]$ با

$$L(y) = y^{(k)} + p_{k-1}y^{(k-1)} + ... + p_1 y' + p_0 y$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که L یک عملگر (دیفرانسیل) خطی است. از آن سو، هرگاه

$$M = 1 + \|p_0\|_\infty + \|p_1\|_\infty + ... + \|p_{k-1}\|_\infty,$$

آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که

$$\|L(y)\|_\infty \leq M(\|y^{(k)}\|_\infty + \|y^{(k-1)}\|_\infty + ... + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty) = M\|y\|$$

برقرار است. این نشان می‌دهد که L یک عملگر کراندار است.

همچنین جالب است توجه شود که L بروست. این امر از قضیهٔ وجودی متعارف جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی نتیجه می‌شود.

مهم است بدانیم که عملگرهای کراندار دقیقاً عملگرهای خطی پیوسته‌اند. قضیهٔ بعد، وضعیت را توضیح خواهد داد.

قضیهٔ ۱۴.۲۳. ***احکام زیر به ازای عملگر خطی $T: X \to Y$ بین دو فضای نرمدار هم‌ارزند:***

۱. ***T یک عملگر کراندار است.***

۲. ***یک عدد حقیقی مانند M هست به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.***

۳. ***T در صفر پیوسته است.***

۴. ***T پیوسته است.***

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱). قبلاً دیدیم که $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. لذا، اگر T یک عملگر کراندار باشد، قسمت (۲) به ازای هر انتخاب از عدد حقیقی M با خاصیت $M \geq \|T\|$ برقرار است.

(۳) $\Leftarrow$ (۲). واضح است که $\lim \|x_n\| = 0$ همراه با رابطهٔ $\|T(x_n)\| \leq M\|x_n\|$ ایجاب می‌کند که $\lim \|T(x_n)\| = 0$؛ یعنی T در صفر پیوسته است.

(۴) $\Leftarrow$ (۳). پیوستگی T فوراً از رابطهٔ $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\|$ و این نکتهٔ ساده که

$\lim x_n = x$ برقرار است اگر و فقط اگر $\lim (x_n - x) = 0$ نتیجه خواهد شد.

(۱) $\Leftarrow$ (۴). به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم $\|T\| = \infty$. در این صورت یک دنباله مانند $\{x_n\}$ از X با $\|x_n\| = 1$ و $\|T(x_n)\| \geq n$ به ازای هر n وجود دارد. به ازای هر n قرار می‌دهیم $y_n = n^{-1}x_n$ و توجه می‌کنیم که $\|y_n\| = n^{-1}$ ایجاب می‌کند که $\lim y_n = 0$. ولی در این صورت، طبق پیوستگی T، باید داشته باشیم $\lim T(y_n) = 0$ که با $\|T(y_n)\| = n^{-1}\|T(x_n)\| \geq 1$ به ازای هر n تناقض دارد. لذا، $\|T\| < \infty$ برقرار است و برهان قضیه تمام خواهد بود.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. گردایهٔ تمام عملگرهای خطی کراندار از X به توی Y را با $L(X, Y)$ نشان می‌دهیم. از قضیهٔ ۱۴.۲۳ معلوم می‌شود که $L(X, Y)$ تحت اعمال جبری

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x) \text{ و } (T + S)(x) = T(x) + S(x)$$

یک فضای برداری است. درواقع، $L(X, Y)$ تحت نرم $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|: \|x\| = 1\}$ یک فضای برداری نرمدار است. شرح مطلب در زیر آمده است.

قضیهٔ ۱۵.۲۳. ***فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. در این صورت $L(X, Y)$ یک فضای برداری نرمدار است.***

به علاوه، هرگاه Y یک فضای باناخ باشد، آنگاه $L(X, Y)$ نیز یک فضای باناخ است.

برهان. ابتدا تحقیق می‌کنیم که $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|: \|x\| = 1\}$ یک نرم بر $L(X, Y)$ است. از تعریف واضح است که $\|T\| \geq 0$ به ازای هر $T \in L(X, Y)$ برقرار است. همچنین نامساوی $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$ نشان می‌دهد که $\|T\| = 0$ اگر و فقط اگر $T = 0$. اثبات اتحاد $\|\alpha T\| = |\alpha|.\|T\|$ سرراست است.

در مورد نامساوی مثلثی، فرض می‌کنیم $T, S \in L(X, Y)$ و $x \in X$ با خاصیت $\|x\| = 1$ باشد. در این صورت

$$\|(T + S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq \|T\| + \|S\|$$

برقرار است نشانگر آنکه $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$. لذا، $L(X, Y)$ یک فضای برداری نرمدار است.

حال فرض کنیم Y یک فضای باناخ باشد. برای اتمام برهان، باید نشان دهیم که $L(X, Y)$ یک فضای باناخ است. برای این کار، فرض می‌کنیم $\{T_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $L(X, Y)$ باشد. از رابطهٔ $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|.\|x\|$ معلوم می‌شود که به ازای هر $x \in X$، دنبالهٔ $\{T_n(x)\}$

کشی و لذا در Y همگراست. فرض کنیم به ازای هر x، $T(x) = \lim T_n(x)$، و توجه می‌کنیم که T یک عملگر خطی از X به توی Y است. چون $\{T_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است، $M > 0$ ی هست به طوری که به ازای هر n، $\|T_n\| \leq M$. ولی در این صورت رابطهٔ

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|.\|x\| \leq M\|x\|$$

همراه با پیوستگی نرم نشان می‌دهد که $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. بنابراین، طبق قضیهٔ ۱۴.۲۳، $T \in L(X, Y)$.

بالأخره، نشان می‌دهیم که $\lim T_n = T$ در $L(X, Y)$ برقرار است. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. k را طوری می‌گیریم که $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ به ازای هر $n, m \geq k$ برقرار باشد. ولی در این صورت رابطهٔ

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|.\|x\| < \varepsilon\|x\|$$

به ازای هر $n, m \geq k$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $n \geq k$ و $x \in X$،

$$\|T(x) - T_n(x)\| = \lim_{m\to\infty}\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

یعنی به ازای هر $n \geq k$ داریم $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$؛ و لذا، $\lim T_n = T$ در $L(X, Y)$ برقرار است.

به ازای فضای نرمدار X، فضای باناخ $L(X, R)$ ***دوگان نرمی*** X نام دارد و با X^* نموده می‌شود. یعنی X^* از همهٔ توابع $f: X \to R$ تشکیل شده است که هم خطی و هم پیوسته‌اند. اعضای X^* را ***تابعیهای خطی پیوسته*** بر X می‌نامیم. دوگان نرمی X^* نقش مهمی در نظریهٔ فضاهای باناخ ایفا می‌کند، و بخشی از این نظریه به خواص و ساختار X^* می‌پردازد.

گوییم زیرمجموعهٔ A از $L(X, Y)$ ***نقطه به نقطه کراندار*** است اگر به ازای هر $x \in X$، زیرمجموعهٔ $\{T(x): T \in A\}$ از Y کراندار نرمی باشد.

هرگاه زیرمجموعهٔ A از $L(X, Y)$ کراندار نرمی باشد (یعنی $M > 0$ ی باشد به طوری که به ازای هر $T \in A$، $\|T\| \leq M$)، آنگاه از رابطهٔ $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\| \leq M\|x\|$ به ازای هر $T \in A$ نتیجه می‌شود که A نقطه به نقطه کراندار است. یعنی هر مجموعهٔ کراندار نرمی نقطه به نقطه کراندار است. عکس این مطلب نیز صحیح است مشروط به اینکه X یک فضای باناخ باشد. این نتیجه بـه «اصل کرانداری یکنواخت» یا «قضیهٔ باناخ ـ اشتاین هاوس» معروف است و یک قضیهٔ بسیار توانا می‌باشد.

قضیهٔ ۱۶.۲۳ (اصل کرانداری یکنواخت). ***فرض کنیم X یک فضای باناخ بوده و Y یک فضای نرمدار باشد. در این صورت یک زیرمجموعه از $L(X, Y)$ کراندار نرمی است اگر و فقط اگر نقطه به نقطه کراندار باشد.***

برهان. از قبل می‌دانیم که هر زیرمجموعهٔ کراندار نرمی از $L(X, Y)$ نقطه به نقطه کراندار است. برای عکس مطلب، فرض کنیم $A \subseteq L(X, Y)$ نقطه به نقطه کراندار باشد. با توجه به اینکه به ازای هر n، مجموعهٔ

$$E_n = \{x \in X: \ \|T(x)\| \le n \text{ ،} T \in A \text{ به ازای هر}\}$$

بستهٔ نرمی است آغاز می‌کنیم. همچنین، چون A نقطه به نقطه کراندار است، $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ برقرار است. به خاطر تمامیت X و قضیهٔ ۱۵.۵، kای هست که $\mathring{E}_k \neq \varnothing$. $y \in E_k$ و $r > 0$ را چنان می‌گیریم که $\|x - y\| \le r$ ایجاب می‌کند که $x \in E_k$.

حال فرض کنیم $T \in A$ و $x \in X$ با خاصیت $\|x\| = 1$ باشد. چون $\|(y + rx) - y\| = r$، پس $y + rx \in E_k$. ولی در این صورت

$$r\|T(x)\| = \|T(rx)\| = \|T(y + rx) - T(y)\| \le \|T(y + rx)\| + \|T(y)\| \le 2k.$$

لذا، $\|T(x)\| \le 2kr^{-1} = M$ به ازای هر $x \in X$ با خاصیت $\|x\| = 1$ برقرار است؛ و لذا، $\|T\| \le M$ به ازای هر $T \in A$ برقرار است. یعنی A یک زیرمجموعهٔ کراندار نرمی از $L(X, Y)$ است.

نتیجهٔ زیر اغلب حالت خاص مفیدی از «اصل کرانداری یکنواخت» در کاربردها خواهد بود.

نتیجهٔ ۱۷.۲۳. ***فرض کنید X یک فضای باناخ، Y یک فضای نرمدار، و $\{T_n\}$ دنباله‌ای از $L(X, Y)$ باشد. هرگاه $\lim T_n(x) = T(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد، آنگاه T یک عملگر کراندار است.***

در قضیهٔ ۱۶.۲۳ این فرض که X یک فضای باناخ است یک فرض اساسی است. مثال زیر وضعیت را روشن خواهد کرد.

مثال ۱۸.۲۳. فضای برداری X مرکب از تمام دنباله‌های حقیقی که جملاتشان مآلاً صفرند را درنظر می‌گیریم. X همراه با نرم سوپرمم یک فضای نرمدار است. از آن سو، خواننده می‌تواند به آسانی تحقیق کند که X یک فضای باناخ نیست. حال به ازای هر n، $f_n: X \to R$ را با

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx_k$$

به ازای هر $x = \{x_k\}$ در X تعریف می‌کنیم. چون $\|x\|_\infty \left[\sum_{k=1}^{n} k\right] \ge |f_n(x)|$، پس $\{f_n\} \subseteq L(X, R)$. به علاوه، $\lim f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. (ملاحظه کنید که

سری درواقع تعدادی متناهی جملهٔ ناصفر دارد.) لذا، $\{f_n\}$ نقطه به نقطه کراندار است. اما به آسانی معلوم می‌شود که $\|f_n\| \geq n$ به ازای هر n برقرار است؛ درنتیجه $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار نرمی نیست. لذا، در حالت کلی، اصل کرانداری یکنواخت در صورتی که X تام فرض نشود برقرار نیست.

هدف بعدی ما اثبات نتیجهٔ مهم دیگری از آنالیز است به نام «قضیهٔ نگاشت باز». همانطور که از نامش برمی‌آید، قضیه می‌گوید که یک عملگر خطی برو بین دو فضای باناخ یک نگاشت باز است (به این معنی که مجموعه‌های باز را به روی مجموعه‌های باز می‌نگارد). برای اثبات این نتیجه، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱۹.۲۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی پیوستهٔ برو باشد. هرگاه صفر یک نقطهٔ درونی زیرمجموعهٔ A از X باشد، آنگاه صفر یک نقطهٔ درونی $T(A)$ نیز هست.

برهان. قرار می‌دهیم $V = \{x \in X: \|x\| \leq ۱\}$ و ملاحظه می‌کنیم که $rV = \{rx: x \in V\}$ گوی بسته به مرکز صفر و شعاع r است. چون صفر یک نقطهٔ درونی A است، $r > ۰$ ی هست که $rV \subseteq A$. بنابر خطی بودن T باید داشته باشیم $T(rV) = rT(V) \subseteq T(A)$. لذا، برای اثبات نتیجه کافی است نشان دهیم که صفر یک نقطهٔ درونی $T(V)$ است.

واضح است که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} nV$ برقرار است، و چون T یک عملگر خطی بروست، $Y = \bigcup_{n=۱}^{\infty} nT(V)$ نیز برقرار است. بنابر قضیهٔ ۱۵.۵، k ای هست به طوری که $\overline{kT(V)}$ دارای درون ناتهی است. چون $\overline{kT(V)} = k\overline{T(V)}$، پس $\overline{T(V)}$ یک نقطهٔ درونی دارد. یعنی عنصری مانند $y_۰ \in \overline{T(V)}$ و عددی مانند $r > ۰$ هست به طوری که $B(y_۰, ۲r) \subseteq \overline{T(V)}$. حال اگر $y \in Y$ در $\|y\| < ۲r$ صدق کند، داریم $y - y_۰ \in \overline{T(V)}$. بنابراین،

$$y = (y - y_۰) + y_۰ \in \overline{T(V)} + \overline{T(V)} \subseteq ۲\overline{T(V)},$$

که در آن آخرین نتیجه به آسانی از $V + V = ۲V$ حاصل می‌شود. یعنی $\{y \in Y: \|y\| < r\} \subseteq \overline{T(V)}$. از خطی بودن T نتیجه می‌شود که

$$\{y \in Y: \|y\| < r۲^{-n}\} \subseteq ۲^{-n}\overline{T(V)} = \overline{T(۲^{-n}V)}$$

به ازای هر n برقرار است.

حال فرض کنیم $y \in Y$ ثابت باشد به طوری که $\|y\| < r۲^{-۱}$. چون $y \in \overline{T(۲^{-۱}V)}$،

$x_1 \in 2^{-1}V$ ی هست به طوری که $\| y - T(x_1) \| < r2^{-2}$. حال به استقرا می‌رویم. فرض کنیم x_n طوری اختیار شده‌باشد که $x_n \in 2^{-n}V$ و $\| y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \| < r2^{-n-1}$. واضح است که $y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \in \overline{T(2^{-n-1}V)}$؛ و درنتیجه $x_{n+1} \in 2^{-n-1}V$ی هست که $\| y - \sum_{i=1}^{n+1} T(x_i) \| < r2^{-n-2}$.
لذا، دنبالهٔ $\{x_n\}$ طوری اختیار شده است که $\| x_n \| \leq 2^{-n}$ و

$$\| y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \| = \| y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i) \| < r2^{-n-1}$$

به ازای هر n برقرار است. حال به ازای هر n تعریف می‌کنیم $s_n = x_1 + \dots + x_n$ و توجه می‌کنیم که

$$\| s_{n+p} - s_n \| = \| \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i \| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \| x_i \| \leq 2^{-n}$$

به ازای هر n و p نشان می‌دهد که $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است. فرض کنیم $x = \lim s_n$ در X باشد. در این صورت $\| x \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \leq 1$ (یعنی $x \in V$) و، بنابر پیوستگی و خطی بودن T،

$$T(x) = \lim T(s_n) = \lim \sum_{i=1}^{n} T(x_i) = y .$$

یعنی $y \in T(V)$؛ و درنتیجه $\{y \in Y: \| y \| < r/2\} \subseteq T(V)$. در اینجا برهان لم کامل خواهد شد.

قضیهٔ نگاشت باز در زیر بیان شده است. این نتیجه به اس. باناخ منسوب است.

قضیهٔ ۲۰.۲۳ (قضیهٔ نگاشت باز). ***فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. هرگاه T برو باشد، آنگاه T یک نگاشت باز است (و درنتیجه، هرگاه T یک به یک نیز باشد، آنگاه یک همانریختی است).***

برهان. فرض کنیم $\mathcal{O}$ زیرمجموعهٔ بازی از X بوده و $y \in T(\mathcal{O})$. نقطهٔ $x \in \mathcal{O}$ را چنان اختیار می‌کنیم که $y = T(x)$ و توجه می‌کنیم که $y - T(\mathcal{O}) = T(x - \mathcal{O})$ برقرار است. حال ملاحظه می‌کنیم که صفر یک نقطهٔ درونی $x - \mathcal{O}$ است و در نتیجه، طبق لم ۱۹.۲۳، صفر یک نقطهٔ درونی $T(x - \mathcal{O}) = y - T(\mathcal{O})$ نیز هست. این ایجاب می‌کند که y یک نقطهٔ درونی $T(\mathcal{O})$ است. چون y دلخواه است، $T(\mathcal{O})$ یک مجموعهٔ باز است و برهان قضیه تمام می‌شود.

دو فضای نرمدار X و Y را درنظر می‌گیریم. می‌توان یک نرم بر $X \times Y$ را با $\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \|$ تعریف کرد. این نرم را ***نرم حاصل ضربی*** می‌نامیم. تحقیق کنید که این تابع خواص یک نرم را دارد. نرمهای زیر (که اغلب به کار می‌روند) با نرم حاصل ضربی هم‌ارزند:

$$\| (x, y) \| = (\| x \|^2 + \| y \|^2)^{1/2}$$

و

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

باید توجه داشت که $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ در $X\times Y$ نسبت به نرم حاصل ضربی برقرار است اگر و فقط اگر $\lim x_n = x$ در X و $\lim y_n = y$ در Y هر دو برقرار باشند. به علاوه، هرگاه هر دوی X و Y فضاهایی باناخ باشند، آنگاه $X\times Y$ نسبت به نرم حاصل ضربی نیز یک فضای باناخ است. ما حاصل ضرب دکارتی دو فضای نرمدار را یک فضای نرمدار تحت نرم حاصل ضربی درنظر خواهیم داشت مگر خلافش را تصریح نماییم.

مثال زیر کاربردی از قضیهٔ نگاشت باز در معادلات دیفرانسیل را نشان می‌دهد.

مثال ۲۱.۲۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(k)} + p_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = q \qquad (1)$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن $q, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ توابع پیوستهٔ ثابتی‌اند که بر بازهٔ بستهٔ (متناهی) $[a, b]$ تعریف شده‌اند. هرگاه y جواب (۱) بوده و $c \in [a, b]$، آنگاه k عدد حقیقی $y(c), y'(c), \dots, y^{(k-1)}(c)$ را **مقادیر اولیهٔ** y در c می‌نامیم. از قضایای متعارف معادلات دیفرانسیل معمولی می‌دانیم که به ازای $c \in [a, b]$ و k عدد حقیقی $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ داده شده، درست یک جواب y از (۱) هست که $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ مقادیر اولیهٔ آن در c اند [یعنی y در $y(c) = \alpha_1, y'(c) = \alpha_2, \dots, y^{(k-1)}(c) = \alpha_k$ صدق می‌کند].

چیزی که در اینجا می‌خواهیم (با استفاده از قضیهٔ نگاشت باز) نشان دهیم این است که جوابهای (۱) به طور پیوسته به مقادیر اولیه شان وابسته‌اند. یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که «تغییرات کوچک» در مقادیر اولیه موجب «تغییرات کوچک» در جوابها می‌شود. برای این کار، باید مسئله را در چهارچوب فضاهای باناخ بیان داریم.

فضای باناخ $C^k[a, b]$ مثال ۴.۲۳ را درنظر می‌گیریم. واضح است که نرمش

$$\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty + \dots + \|y^{(k)}\|_\infty$$

«اندازهٔ» توابع و مشتقهای آنها را کنترل می‌کند. همچنین، عملگر خطی کراندار $L:C^k[a, b]\to C[a, b]$ مثال ۱۳.۲۳ را در نظر می‌گیریم؛ یعنی

$$L(y) = y^{(k)} + p_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + p_1y' + p_0y.$$

حال $c \in [a, b]$ را ثابت گرفته و $T: C^k[a, b]\to C[a, b]\times R^k$ را با

$$T(y) = (L(y), y(c), y'(c), \dots, y^{(k-1)}(c))$$

به ازای هر $y \in C^k[a, b]$ تعریف می‌کنیم. به آسانی معلوم می‌شود که T خطی و پیوسته است. از آن سو، وجود و یکتایی جوابهای (۱) با مقادیر اولیهٔ مقرر تضمین می‌کند که T یک به یک و بروست. لذا، طبق قضیهٔ نگاشت باز، T^{-1} (که وجود دارد و خطی است) باید پیوسته باشد.

پیوستگی T^{-1} یعنی به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده $\delta > 0$ای هست به طوری که هروقت (f, x) و (g, z) از $C[a, b]\times R^k$ در $\|f - g\|_\infty + \|x - z\|_\infty < \delta$ صدق کنند، $\|T^{-1}(f, x) - T^{-1}(g, z)\| < \varepsilon$ برقرار باشد. اگر این عبارت را در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) ترجمه کنیم، خواهیم داشت: فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ (۱) باشند که در شرایط اولیهٔ

$$y_1(c) = \alpha_1, y'_1(c) = \alpha_2, ..., y_1^{(k-1)}(c) = \alpha_k$$

و

$$y_2(c) = \beta_1, y'_2(c) = \beta_2, ..., y_2^{(k-1)}(c) = \beta_k$$

صدق می‌کنند. هرگاه $|\alpha_i - \beta_i| < \delta$ به ازای هر $i = 1, ..., k$ برقرار باشد، آنگاه

$$\|y_1 - y_2\|_\infty + \|y'_1 - y'_2\|_\infty + ... + \|y_1^{(k-1)} - y_2^{(k-1)}\|_\infty < \varepsilon.$$

یعنی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به طور پیوسته به مقادیر اولیه‌شان وابسته‌اند.

به یاد آورید که هرگاه $T{:}X\to Y$ یک تابع باشد، آنگاه زیرمجموعهٔ

$$G = \{(x, T(x)): x \in X\}$$

از $X\times Y$ **گراف** T نام دارد. حال اگر X و Y دو فضای برداری بوده و T یک عملگر خطی باشد، G یک زیرفضای برداری $X\times Y$ است. به علاوه، هرگاه T یک عملگر کراندار باشد، آنگاه می‌توان تحقیق کرد که G یک زیرفضای بستهٔ $X\times Y$ است. عکس مطلب اخیر برای فضاهای باناخ برقرار است. نتیجه به «قضیهٔ گراف بسته» معروف است و کاربردهای مختلفی در آنالیز دارد.

قضیهٔ **۲۲.۲۳**. (قضیهٔ گراف بسته). ***فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T{:}X\to Y$ یک عملگر خطی باشد. هرگاه گراف T زیرفضای بسته‌ای از $X\times Y$ باشد، آنگاه T یک عملگر کراندار است.***

برهان. چون گراف G از T زیرفضای بسته‌ای از فضای باناخ $X\times Y$ است، خود یک فضای باناخ است. تابع $(x, T(x))\to x$ یک عملگر خطی از G به روی X است که به وضوح یک به یک و کراندار است. [کرانداری آن به خاطر

$$\|x\| \le \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|$$

می‌باشد.] بنابر قضیهٔ نگاشت باز، $x \to (x, T(x))$ یک همانریختی است. یعنی $(x, T(x)) \to x$ یک تابع پیوسته از X به روی G است. حال ملاحظه می‌کنیم که $(x, T(x)) \to T(x)$ پیوسته است. بنابراین، $x \to T(x)$ از X به توی Y پیوسته است زیرا ترکیب دو تابع پیوسته است و برهان قضیه تمام می‌شود.

به ازای هر فضای برداری نرمدار X، تابعیهای خطی کراندار به قدر کافی وجود دارند که نقاط X را جدا می‌سازند. یعنی، به ازای هر جفت از بردارهای متمایز x و y از X، یک تابعی خطی کراندار بر X هست که $f(x) \neq f(y)$. این نتیجه (و نتایج بسیار دیگر) بر یک نتیجهٔ کلاسیک به نام «قضیهٔ هان ـ باناخ» استوار است که یکی از سنگهای ساختمانی آنالیز می‌باشد. ما در زیر به این قضیه خواهیم پرداخت.

نگاشت $p: X \to R$، که در آن X یک فضای برداری است، یک **نگاشت زیرخطی** است اگر از دو خاصیت زیر برخوردار باشد:

آ. به ازای هر $x, y \in X$، $p(x + y) \le p(x) + p(y)$؛ و

ب. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \ge 0$، $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

اصل برهان قضیهٔ هان ـ باناخ در لم زیر نهفته است.

لم ۲۳.۲۳. ***فرض کنیم p یک نگاشت زیرخطی بر فضای برداری X بوده، Y یک زیرفضای برداری X باشد، و $x_0 \notin Y$. هرگاه f یک تابعی خطی بر Y باشد به طوری که $f(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in Y$ برقرار است، آنگاه f را می‌توان به یک تابعی خطی g بر زیرفضای برداری Z تولید شده به وسیلهٔ Y و x_0 چنان وسعت داد که $g(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in Z$ برقرار باشد.***

برهان. واضح است که $Z = \{x + \alpha x_0 : \alpha \in R \text{ و } x \in Y\}$. فرض کنیم g یک تابعی خطی بر Z باشد که با f بر Y توافق دارد. در این صورت

$$g(x + \alpha x_0) = f(x) + \alpha g(x_0)$$

به ازای هر $x \in Y$ و $\alpha \in R$ برقرار است؛ و درنتیجه g به وسیلهٔ مقدار $g(x_0)$ معین است. قرار می‌دهیم $c = g(x_0)$. لذا، هر عدد حقیقی c یک تابعی خطی بر Z به دست می‌دهد که با f بر Y توافق دارد. هدف ما نشان دادن این امر است که مقداری از c هست به طوری که

$$f(x) + \alpha c \le p(x + \alpha x_0) \tag{*}$$

به ازای هر $x \in Y$ و $\alpha \in R$ برقرار است. به ازای $\alpha > 0$ و $x \in Y$، نامساوی (*) هم‌ارز

و $-f(\alpha^{-1}x) - p(-\alpha^{-1}x - x_\circ) \le c$ به ازای $x \in Y$ و $\alpha < \circ$ و هم‌ارز $c \le p(\alpha^{-1}x + x_\circ) - f(\alpha^{-1}x)$ می‌باشد. این نامساویها [و درنتیجه $(*)$] مسلماً با انتخابی از c که

$$-f(x) - p(-x - x_\circ) \le c \le p(x + x_\circ) - f(x) \qquad (**)$$

به ازای هر $x \in Y$ درست باشد، برقرارند.

هرگاه $x, y \in Y$، آنگاه روابط

$$f(y) - f(x) = f(y - x) \le p(y - x) = p(y + x_\circ + (-x - x_\circ))$$
$$\le p(y + x_\circ) + p(-x - x_\circ)$$

نشان می‌دهند که

$$-f(x) - p(-x - x_\circ) \le p(y + x_\circ) - f(y)$$

به ازای هر $x, y \in Y$ برقرار است. درنتیجه، هرگاه

$$s = \sup\{-f(x) - p(-x - x_\circ) \colon x \in Y\}$$

و

$$t = \inf\{p(y + x_\circ) - f(y) \colon y \in Y\},$$

آنگاه هر دوی s و t اعداد حقیقی بوده و $s \le t$. ولی، در این صورت، هر عدد حقیقی c که $s \le c \le t$ در $(**)$ و لذا در $(*)$ صدق می‌کند. این برهان لم را کامل خواهد کرد.

در زیر، قضیهٔ کلاسیک هان ـ باناخ ذکر می‌شود. این قضیه قلب آنالیز جدید است و کاربردهای بسیار گسترده‌ای دارد.

قضیهٔ ۲۴.۲۳. (هان ـ باناخ). ***فرض کنیم p یک نگاشت زیرخطی بر فضای برداری X بوده و Y یک زیرفضای برداری X باشد. هرگاه f یک تابعی خطی بر Y باشد به طوری که $f(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in Y$ برقرار باشد، آنگاه f را می‌توان به یک تابعی خطی مانند g بر تمام X چنان وسعت داد که $g(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد.***

برهان. فرض کنیم $\mathcal{C}$ گردایهٔ تمام جفتهای (g, Z) باشد به طوری که Z یک زیرفضای برداری X شامل Y و g یک تابعی خطی بر Z صادق در $g(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in Y$ و در $g(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in Z$ است. گردایهٔ $\mathcal{C}$ ناتهی است زیرا $(f, Y) \in \mathcal{C}$. حال یک رابطهٔ ترتیبی بر $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $(g_1, Z_1) \le (g_2, Z_2)$ هر وقت $Z_1 \subseteq Z_2$ و به ازای هر $x \in Z_1$، $g_1(x) = g_2(x)$. به آسانی معلوم می‌شود که $\le$ واقعاً یک رابطهٔ ترتیبی بر $\mathcal{C}$ است.

حال یک زنجیر مانند $\{(g_i, Z_i): i \in I\}$ از $\mathcal{C}$ را درنظر می‌گیریم [یعنی، به ازای هر جفت $i, j \in I$، $(g_i, Z_i) \le (g_j, Z_j)$ یا $(g_j, Z_j) \le (g_i, Z_i)$ برقرار است]. قرار می‌دهیم $Z = \bigcup_{i\in I} Z_i$ و توجه می‌کنیم که Z یک زیرفضای برداری از X است. حال $g: Z \to R$ را با $g(x) = g_i(x)$ اگر $x \in Z_i$ تعریف می‌کنیم. چون $\{(g_i, Z_i): i \in I\}$ یک زنجیر است، مقدار $g(x)$ از اندیس انتخابی i مستقل است. واضح است که g یک تابعی خطی است. به علاوه، $g(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in Y$ برقرار است و به ازای هر $x \in Z$، $g(x) \le p(x)$. لذا، $(g, Z) \in \mathcal{C}$، و واضح است که $(g_i, Z_i) \le (g, Z)$ به ازای هر $i \in I$ برقرار است. بنابراین، هر زنجیر از $\mathcal{C}$ دارای کران بالایی در $\mathcal{C}$ است. بنابر لم زرن (Zorn)، $\mathcal{C}$ یک عنصر ماکزیمال مانند (g, Z) دارد.

برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که $Z = X$. درواقع، هرگاه $Z \neq X$، آنگاه $x_\circ \in X$ ی هست که $x_\circ \notin Z$. فرض کنیم M زیرفضای برداری تولید شده به وسیلهٔ Z و $x_\circ$ باشد. بنابر لم ۲۳.۲۳، یک تابعی خطی مانند h بر M هست به طوری که به ازای هر $x \in Z$، $h(x) = g(x)$ و به ازای هر $x \in M$، $h(x) \le p(x)$. ولی، در این صورت، $(h, M) \in \mathcal{C}$ و $(g, Z) \le (h, M)$ با $(g, Z) \neq (h, M)$ برقرار است، که با خاصیت ماکزیمالی (g, Z) در تضاد است. لذا، $Z = X$ و برهان قضیه تمام خواهد بود.

سه قضیهٔ بعد کاربردهایی از قضیهٔ هان ـ باناخ‌اند. اولین نتیجه به ما می‌گوید که یک تابعی خطی پیوستهٔ تعریف شده بر یک زیرفضا را می‌توان به یک تابعی خطی پیوسته بر تمام فضا با حفظ نرم اصلی‌اش وسعت داد.

قضیهٔ ۲۵.۲۳. *فرض کنیم Y یک زیرفضای برداری از فضای نرمدار X بوده و f یک تابعی خطی پیوسته بر Y باشد. در این صورت f را می‌توان به یک تابعی خطی پیوسته مانند g بر X چنان وسعت داد که $\|g\| = \|f\|$.*

برهان. به ازای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم $p(x) = \|f\| . \|x\|$. توجه کنید که p یک نگاشت زیرخطی بر X است به طوری که $f(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in Y$ برقرار است. بنابر قضیهٔ هان ـ باناخ، یک توسیع خطی مانند g از f به تمام X هست به طوری که $g(x) \le p(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. ولی، در این صورت، $|g(x)| \le \|f\| . \|x\|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است؛ و درنتیجه $\|g\| \le \|f\|$. از آن سو،

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|:\ \|x\| \leq ۱ \text{ و } x \in Y\}$$
$$\leq \sup\{|g(x)|:\ \|x\| \leq ۱ \text{ و } x \in X\} = \|g\|$$

نیز برقرار است؛ درنتیجه $\|f\| = \|g\|$. لذا، g یک توسیع مطلوب f به تمام X می‌باشد.

نقاط یک فضای برداری نرمدار را همیشه می‌توان با تابعیهای خطی پیوستهٔ آن جدا ساخت.

قضیهٔ ۲۶.۲۳. ***هرگاه x برداری در فضای نرمدار X باشد، آنگاه یک تابعی خطی پیوسته مانند f بر X هست به طوری که $\|f\| = ۱$ و $\|x\| = f(x)$. به خصوص، X^* نقاط X را جدا می‌سازد.***

برهان. هرگاه $x = ۰$، آنگاه هر $f \in X^*$ با خاصیت $\|f\| = ۱$ در $\|x\| = f(x)$ صدق می‌کند. (وقتی $X \neq \{۰\}$، قضیهٔ ۲۵.۲۳ تضمین می‌کند که $X^* \neq \{۰\}$.) لذا، فرض می‌کنیم $x \neq ۰$.

فرض کنیم $Y = \{\alpha x:\ \alpha \in R\}$. در این صورت Y یک زیرفضای برداری X است، و $g(\alpha x) = \alpha\|x\|$ یک تابعی خطی پیوسته بر Y چنان تعریف می‌کند که $\|g\| = ۱$ و $\|x\| = g(x)$. بنابر قضیهٔ ۲۵.۲۳، یک توسیع خطی پیوسته مانند f از g به تمام X هست که $۱ = \|g\| = \|f\|$ و $\|x\| = f(x)$، که همان مطلوب ما می‌باشد.

برای مشاهدهٔ اینکه X^* نقاط X را جدا می‌سازد، فرض می‌کنیم $x, y \in X$ چنان باشند که $x \neq y$. بنابر مطالب فوق، $f \in X^*$ ای هست به طوری که $f(x) - f(y) = f(x - y) = \|x - y\| \neq ۰$. لذا، $f(x) \neq f(y)$ برقرار است و برهان قضیه تمام خواهد شد.

همیشه می‌توان یک نقطه را از یک زیرفضای بسته که شامل آن نیست به وسیلهٔ یک تابعی خطی پیوسته جدا ساخت. شرح مطلب در نتیجهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۲۷.۲۳. ***فرض کنیم Y یک زیرفضای برداری فضای برداری نرمدار X بوده و $x_۰ \notin \overline{Y}$. در این صورت، تابعی مانند $f \in X^*$ هست به طوری که به ازای هر $x \in Y$، $f(x) = ۰$ و $f(x_۰) = ۱$.***

برهان. چون $x_۰ \notin \overline{Y}$، $r > ۰$ ای هست به طوری که $\|x - x_۰\| > r$ به ازای هر $x \in Y$ برقرار است. فرض کنیم $Z = \{x + \alpha x_۰:\ \alpha \in R \text{ و } x \in Y\}$ زیرفضای برداری تولید شده به وسیلهٔ Y و $x_۰$ باشد. حال $f: Z \to R$ را با $f(x + \alpha x_۰) = \alpha$ تعریف می‌کنیم. در این صورت f یک تابعی خطی است و

$$r|f(x + \alpha x_۰)| = r|\alpha| \leq |\alpha|.\|\alpha^{-۱}x + x_۰\| = \|x + \alpha x_۰\|$$

به ازای هر $x \in Y$ و $\alpha \in R$ برقرار است. پس f یک تابعی خطی پیوسته بر Z است که نرمش از r^{-1} متجاوز نیست. همچنین، به ازای هر $x \in Y$، $f(x) = 0$ و $f(x_0) = 1$. حال، با اعمال قضیهٔ ۲۵.۲۳، f را به یک تابعی پیوسته بر X وسعت می‌دهیم.

فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. همانطور که در قضیهٔ ۱۵.۲۳ دیدیم، دوگان نرمی $[X^* = L(X, R)]$ از X همواره یک فضای باناخ است. به خصوص، دوگان نرمی $(X^*)^*$ از X^* نیز یک فضای باناخ است. این فضای باناخ را **دوگان دوم** X نامیم و آن را با X^{**} نشان می‌دهیم. یعنی $X^{**} = (X^*)^*$.

هر عنصر x از X یک تابعی خطی پیوستهٔ $\hat{x}$ بر X^* با فرمول

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

به ازای هر $f \in X^*$ به دست می‌دهد. درواقع، $\hat{x}$ به وضوح بر X^* خطی است و رابطهٔ

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \le \|f\|.\|x\| = \|x\|.\|f\|$$

نشان می‌دهد که $\hat{x} \in X^{**}$ و $\|\hat{x}\| \le \|x\|$. از آن سو، بنابر قضیهٔ ۲۶.۲۳، $f \in X^*$ ای هست به طوری که $\|f\| = 1$ و $f(x) = \|x\|$. لذا، $\|x\| = f(x) = |\hat{x}f(x)| \le \|\hat{x}\|$؛ و درنتیجه $\|\hat{x}\| = \|x\|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

نگاشت $x \to \hat{x}$ (از X به توی X^{**}) ***نشانندهٔ طبیعی*** از X به توی دوگان دومش X^{**} نام دارد. با خلاصه کردن مطالب فوق، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۲۸.۲۳. *نشانندهٔ طبیعی $x \to \hat{x}$ از X به توی X^{**} یک عملگر خطی نرم نگهدار است (و درنتیجه X را می‌توان یک زیرفضای X^{**} در نظر گرفت).*

عملگر خطی $T: X \to Y$ صادق در $\|T(x)\| = \|x\|$ به ازای هر $x \in X$ یک **یکمتری خطی** نام دارد. با این اصطلاح، قضیهٔ قبل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: ***نشانندهٔ طبیعی $x \to \hat{x}$ یک یکمتری خطی است.***

به طور کلی، $x \to \hat{x}$ یک نگاشت برو نیست؛ درنتیجه X (وقتی در X^{**} نشانده شود) در حالت کلی زیر فضای حقیقی X^{**} است. هرگاه X یک فضای باناخ نباشد، آنگاه $x \to \hat{x}$ نمی‌تواند برو باشد صرفاً به این خاطر که X^{**} یک فضای باناخ است. هرگاه نشانندهٔ طبیعی فضای باناخ X به توی دوگان دومش X^{**} برو باشد، آنگاه X یک ***فضای باناخ انعکاسی*** است و این امر با $X = X^{**}$ نموده می‌شود. در بسیاری از

کاربردها از خواص نشانندهٔ طبیعی X به توی دوگان دومش X^{**} استفاده می‌شود؛ در زیر بعضی از آنها توضیح داده شده است.

هرگاه Y یک زیرفضای برداری فضای نرمدار X باشد، آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که بست آن $\overline{Y}$ نیز یک زیرفضای برداری است (چرا؟). به خصوص، هرگاه X یک فضای باناخ باشد، آنگاه $\overline{Y}$ تتمیم Y است. از این نکات در برهان قضیهٔ بعد استفاده خواهد شد.

قضیهٔ ۲۳.۲۹. *تتمیم یک فضای نرمدار یک فضای باناخ است.*

برهان. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. X را در X^{**} به وسیلهٔ نشانندهٔ طبیعی‌اش می‌نشانیم. در این صورت X^{**} یک فضای باناخ است و بر X نرم اصلی‌اش را القا می‌کند. لذا، $\overline{X}$ تتمیم X است که یک فضای باناخ می‌باشد.

نتیجهٔ بعد را می‌توان «دوگان» اصل کرانداری یکنواخت درنظر گرفت.

قضیهٔ ۲۳.۳۰. *فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای نرمدار X باشد به طوری که $\{f(x): x \in A\}$، به ازای هر $f \in X^*$، زیرمجموعهٔ کرانداری از R است. در این صورت A یک زیرمجموعهٔ کراندار نرمی X می‌باشد.*

برهان. X را در X^{**} می‌نشانیم. در این صورت A به عنوان زیرمجموعه‌ای از X^{**} نقطه به نقطه بر فضای باناخ X^* کراندار است. لذا، طبق اصل کرانداری یکنواخت (قضیهٔ ۲۳.۱۶)، A در X^{**} کراندار نرمی است. پس A نیز در X کراندار نرمی است و برهان تمام خواهد بود.

تمرینات

۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. نشان دهید که X یک فضای باناخ است اگر و فقط اگر «کرهٔ یکه‌اش» $\{x \in X: \|x\| = ۱\}$ (تحت متر $d(x, y) = \|x - y\|$) یک فضای متری تام باشد.

۲. فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار بوده و $B = \{x \in X: \|x\| < ۱\}$. نشان دهید که $\overline{B} = \{x \in X: \|x\| \leq ۱\}$.

۳. فرض کنید X یک فضای نرمدار بوده و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از X باشد به طوری که $\lim x_n = x$ برقرار است. هرگاه به ازای هر n، $y_n = n^{-۱}(x_۱ + \ldots + x_n)$، آنگاه نشان دهید که $\lim y_n = x$.

۴. فرض کنید X فضای برداری همهٔ توابع حقیقی تعریف شده بر $[0, 1]$ باشد که مشتقهای مرتبهٔ اول پیوسته دارند. نشان دهید که $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ یک نرم بر X است که با نرم $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ هم‌ارز است.

۵. نشان دهید که تابعی خطی f بر فضای نرمدار X پیوسته است اگر و فقط اگر هسته‌اش یک مجموعهٔ بسته باشد [هسته به صورت $\{x \in X: f(x) = 0\}$ تعریف می‌شود].

۶. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ بوده و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. نشان دهید که T بروست یا $T(X)$ یک مجموعهٔ نحیف است.

۷. گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ در یک فضای نرمدار به بردار x **همگرا** است اگر $\lim \|x - \sum_{i=1}^{n} x_i\| = 0$. طبق معمول، می‌نویسیم $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **به طور مطلق مجموعپذیر** است اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ برقرار باشد.

نشان دهید که فضای نرمدار X یک فضای باناخ است اگر و فقط اگر هر سری به طور مطلق مجموعپذیر همگرا باشد.

۸. فرض کنید X یک فضای باناخ، $T: X \to X$ یک عملگر کراندار، و I عملگر همانی بر X باشد. هرگاه $\|T\| < 1$، آنگاه نشان دهید که $I - T$ معکوسپذیر است.

[**راهنمایی.** نشان دهید که $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.]

۹. نشان دهید که یک زیرفضای برداری حقیقی بسته از یک فضای برداری نرمدار هیچ جا چگال است.

۱۰. یک عملگر خطی بی‌کران از یک فضای نرمدار به یک فضای باناخ مثال بزنید که گرافش بسته باشد.

[**راهنمایی.** عملگر مثال ۱۱.۲۳ را درنظر بگیرید.]

۱۱. دو نرم زیر را بر $C[0, 1]$ در نظر بگیرید:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in [0, 1]\} \quad \text{و} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

نشان دهید که عملگر همانی $I: (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ پیوسته و بروست ولی باز نیست. چرا این امر با قضیهٔ نگاشت باز در تضاد نیست؟

۱۲. عکس قضیهٔ ۱۵.۲۳ را ثابت کنید؛ یعنی نشان دهید هرگاه X و Y دو فضای نرمدار (نابدیهی) بوده و $L(X, Y)$ یک فضای باناخ باشد، آنگاه Y یک فضای باناخ است.

[**راهنمایی.** فرض کنید $\{y_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از Y باشد. $f \in X^*$ را با خاصیت $f \neq 0$ اختیار کرده و دنبالهٔ $\{T_n\}$ از $L(X, Y)$ را با تعریف $T_n(x) = f(x)y_n$ در نظر بگیرید.]

۱۳. فرض کنید X یک فضای برداری باشد که نسبت به هر یک از نرمهای $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ تام است. هرگاه عددی حقیقی مانند $M > 0$ باشد به طوری که $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است، آنگاه نشان دهید که این دو نرم باید هم‌ارز باشند.

۱۴. فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار باشد. نشان دهید هرگاه X^* جدایی‌پذیر باشد (به این معنی که شامل زیرمجموعه‌ای چگال و شمارشپذیر باشد)، آنگاه X نیز جدایی‌پذیر است.
[**راهنمایی.** فرض کنید $\{f_1, f_2, \ldots\}$ یک زیرمجموعهٔ چگال شمارشپذیر از X^* باشد. به ازای هر n، $x_n \in X$ ی با خاصیت $\|x_n\| = 1$ و $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$ اختیار کرده و فرض کنید Y زیرفضای بستهٔ تولید شده به وسیلهٔ $\{x_1, x_2, \ldots\}$ باشد. با استفاده از قضیهٔ ۲۷.۲۳، نشان دهید که $Y = X$.]

۱۵. فرض کنید X، Y، و Z سه فضای باناخ باشند. همچنین $T: X \to Y$ یک عملگر خطی بوده و $S: Y \to Z$ یک عملگر خطی کراندار و یک به یک باشد. نشان دهید T یک عملگر کراندار است اگر و فقط اگر عملگر خطی مرکب $S \circ T$ (از X به توی Z) کراندار باشد.
[**راهنمایی.** از قضیهٔ گراف بسته استفاده کنید.]

۱۶. نشان دهید فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر X^* انعکاسی باشد.
[**راهنمایی.** هرگاه $X \neq X^{**}$، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۲۷.۲۳، عنصر ناصفری چون $F \in X^{***}$ هست به طوری که به ازای هر $x \in X$، $F(x) = 0$.]

۲۴. شبکه‌های باناخ

همانطور که دیدیم، توابع پیوسته و توابع اندازه‌پذیر هر دو دارای ترتیبی طبیعی‌اند که تحت آنها شبکه می‌باشند. به این دلیل، شبکه گرفتن فضاهای باناخ اهمیت دارد. بحث را با مرور چند نکتهٔ اصلی راجع به شبکه‌های برداری از بخش ۷ آغاز می‌کنیم.

فضای برداری جزئی مرتب X یک فضای برداری حقیقی X همراه با یک رابطهٔ ترتیبی $\leq$ است که با ساختار جبری به صورت زیر توافق دارد:

۱. هرگاه $x \leq y$، آنگاه $x + z \leq y + z$ به ازای هر $z \in X$ برقرار است.

۲. هرگاه $x \leq y$، آنگاه $\alpha x \leq \alpha y$ به ازای هر $\alpha \geq 0$ برقرار است.

مجموعهٔ $X^+ = \{x \in X: 0 \leq x\}$ را ***مخروط مثبت*** X و اعضایش را ***عنصرهای مثبت*** X می‌نامیم. واضح است که مجموع دو عنصر مثبت مجدداً یک عنصر مثبت است.

فضای برداری جزئی مرتب X را یک ***شبکهٔ برداری*** (یا یک ***فضای ریس*** (Riesz)) نامیم اگر به ازای

هر جفت نقاط x, y در X، $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ موجود باشند. طبق معمول، $\sup\{x, y\}$ با $x \vee y$ و $\inf\{x, y\}$ با $x \wedge y$ نموده می‌شود؛ یعنی $x \vee y = \sup\{x, y\}$ و $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

در یک شبکهٔ برداری، قسمت مثبت، قسمت منفی، و قدرمطلق عنصر x به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$x^+ = x \vee 0$، $x^- = (-x) \vee 0$، و $|x| = x \vee (-x)$.

بنابر قضیهٔ ۱.۷، اتحادهای زیر برقرارند:

$x = x^+ - x^-$ و $|x| = x^+ + x^-$.

حال چند نامساوی مفید به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۲۴. هرگاه x، y، و z *عنصرهایی از یک شبکهٔ برداری باشند، آنگاه نامساویهای زیر برقرارند:*

۱. $|x + y| \le |x| + |y|$؛

۲. $||x| - |y|| \le |x - y|$؛

۳. $|x^+ - y^+| \le |x - y|$؛

۴. $|x \vee z - y \vee z| \le |x - y|$؛

۵. $|x \wedge z - y \wedge z| \le |x - y|$.

برهان. (۱) از نامساویهای $x \le |x|$ و $y \le |y|$ نتیجه می‌شود که $x + y \le |x| + |y|$. به همین نحو، $-(x + y) \le |x| + |y|$ برقرار است؛ و لذا،

$$|x + y| = (x + y) \vee [-(x + y)] \le |x| + |y|.$$

(۲) از نامساوی (۱) معلوم می‌شود که $|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|$؛ و درنتیجه $|x| - |y| \le |x - y|$. به همین نحو، $|y| - |x| \le |x - y|$؛ و درنتیجه $||x| - |y|| \le |x - y|$.

(۳) توجه کنید که $x^+ = \frac{1}{2}(x + |x|)$. حال برای اثبات نامساوی مطلوب، از (۱) و (۲) به قرار زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|x^+ - y^+| &= |\tfrac{1}{2}(x + |x|) - \tfrac{1}{2}(y + |y|)| = \tfrac{1}{2}|(x - y) + (|x| - |y|)| \\ &\le \tfrac{1}{2}|x - y| + \tfrac{1}{2}||x| - |y|| \le |x - y|.\end{aligned}$$

(۴) توجه کنید که

$$x \vee z - y \vee z = [(x - z) \vee 0 + z] - [(y - z) \vee 0 + z] = (x - z)^+ - (y - z)^+$$

برقرار است. (ر.ک. اتحادهای مذکور در بخش ۷ در ص ۷۶.) لذا، طبق (۳)، داریم

$$|x \vee z - y \vee z| = |(x-z)^+ - (y-z)^+| \leq |(x-z) - (y-z)| = |x-y|.$$

(۵) چون $x \wedge z = -[(-x) \vee (-z)]$ و $y \wedge z = -[(-y) \vee (-z)]$، از نامساوی (۴) داریم

$$|x \wedge z - y \wedge z| = |(-y) \vee (-z) - (-x) \vee (-z)| \leq |-y - (-x)| = |x-y|$$

و برهان قضیه تمام است.

فرض کنیم X یک شبکهٔ برداری باشد. زیرمجموعهٔ A از X ***کراندار ترتیبی*** نام دارد اگر عنصری مانند $y \in X$ باشد به طوری که $|x| \leq y$ به ازای هر $x \in A$ برقرار باشد. یک تابعی خطی بر X را ***کراندار ترتیبی*** نامیم اگر زیرمجموعه‌های کراندار ترتیبی X را به روی زیرمجموعه‌های کراندار R ببرد؛ یعنی تابعی خطی f بر X کراندار ترتیبی است اگر به ازای هر $y \in X^+$ عددی مانند $M > \circ$ باشد به طوری که $|f(x)| \leq M$ به ازای هر $x \in X$ که $|x| \leq y$ برقرار باشد.

تابعی خطی f بر X را **مثبت** نامیم اگر $f(x) \geq \circ$ به ازای هر $x \in X^+$ برقرار باشد. واضح است که هر تابعی خطی مثبت کراندار ترتیبی است. همانطور که در قضیهٔ بعد خواهیم دید، هر تابعی خطی کراندار ترتیبی را می‌توان به صورت تفاضل دو تابعی خطی مثبت نوشت.

گردایهٔ تمام تابعیهای خطی کراندار ترتیبی بر شبکهٔ برداری X را با $\tilde{X}$ نشان داده و آن را ***دوگان مرتب*** X می‌نامیم. واضح است که $\tilde{X}$ (تحت اعمال جبری معمولی) یک فضای برداری است. به علاوه، هرگاه $f \leq g$ وقتی به ازای هر $x \in X^+$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ تعریف شود، آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که $\tilde{X}$ همراه با $\leq$ یک فضای برداری جزئی مرتب است. درواقع، همانطور که نتیجهٔ زیر از اف. ریس نشان می‌دهد، $\tilde{X}$ یک شبکهٔ برداری می‌باشد.

قضیهٔ ۲.۲۴ (اف. ریس). ***هرگاه X یک شبکهٔ برداری باشد، آنگاه دوگان ترتیبی آن $\tilde{X}$ نیز یک شبکهٔ برداری است. به علاوه،***

$$f^+(x) = \sup\{f(y): \ \circ \leq y \leq x\},$$

$$f^-(x) = \sup\{-f(y): \ \circ \leq y \leq x\},$$

و

$$|f|(x) = \sup\{f(y): \ |y| \leq x\}$$

به ازای هر $f \in \tilde{X}$ و $x \in X^+$ برقرارند.

برهان. در پرتو اتحادهای

$$f \vee g = (f-g)^{+}+g \quad \text{و} \quad f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)]$$

نشان می‌دهیم که $\tilde{X}$ یک شبکهٔ برداری است و این کار را با اثبات وجود f^{+} به ازای هر $f \in \tilde{X}$ انجام می‌دهیم.

برای این کار، فرض کنیم $f \in \tilde{X}$. $g: X^{+} \to R$ را با

$$g(x) = \sup\{f(y): 0 \le y \le x\}$$

به ازای هر $x \in X^{+}$ تعریف می‌کنیم. سوپرمم متناهی است زیرا f کراندار ترتیبی است. واضح است که $g(x) \ge 0$، $g(x) \ge f(x)$، و $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ به ازای هر $x \in X^{+}$ و $\alpha \ge 0$ برقرارند.

حکم می‌کنیم که $g(x + y) = g(x) + g(y)$ به ازای هر $x, y \in X^{+}$ برقرار است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $x, y \in X^{+}$. هرگاه u و v در $x \ge u \ge 0$ و $y \ge v \ge 0$ صدق کنند، آنگاه $0 \le u + v \le x + y$ برقرار است؛ و لذا،

$$f(u) + f(v) = f(u + v) \le g(x + y).$$

درنتیجه

$$g(x) + g(y) \le g(x + y).$$

از آن سو، هرگاه $0 \le z \le x + y$، آنگاه قرار می‌دهیم $u = x \wedge z$، $v = z - u$، و (با استفاده از اتحادهای بخش ۷ در ص ۷۶) توجه می‌کنیم که

$$0 \le v = z - x \wedge z = z + (-x) \vee (-z) = (z - x) \vee 0 \le y \vee 0 = y.$$

بنابراین، $0 \le u \le x$ و $0 \le v \le y$. لذا،

$$f(z) = f(u + v) = f(u) + f(v) \le g(x) + g(y)$$

برقرار است، که از آن داریم $g(x + y) \le g(x) + g(y)$؛ یعنی $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

حال به ازای $x \in X$ دلخواه تعریف می‌کنیم $g(x) = g(x^{+}) - g(x^{-})$. توجه کنید که اگر $x = u - v$ که در آن u و v مثبت‌اند، داریم $x^{+} + v = u + x^{-}$؛ و درنتیجه

$$g(x^{+}) + g(v) = g(u) + g(x^{-})$$

به خاطر جمعی بودن g بر X^{+} برقرار است. بنابراین، $g(x) = g(x^{+}) - g(x^{-}) = g(u) - g(v)$؛ و درنتیجه مقدار $g(x)$ به نمایش خاصی از x به صورت تفاضل دو عنصر مثبت بستگی ندارد. ملاحظات فوق همراه با $g(x + y) = g(x) + g(y)$ و $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ به ازای هر $x, y \in X^{+}$ و $\alpha \ge 0$ ایجاب می‌کنند که g یک تابعی خطی از X باشد.

بالأخره نشان می‌دهیم که $g = f^{+}$ در $\tilde{X}$ برقرار است. درواقع، هرگاه h یک تابعی خطی مثبت باشد

که $f \le h$، آنگاه چون $f(y) \le h(y) \le h(x)$ به ازای هر $x \ge y \ge \circ$ برقرار است، پس به ازای هر $x \in X^+$ داریم $g(x) \le h(x)$. بنابراین، g کوچکترین کران بالایی f و صفر است؛ یعنی $g = f^+$ در $\tilde{X}$ برقرار است. این نشان می‌دهد که $\tilde{X}$ یک شبکهٔ برداری است و $f^+(x) = \sup\{f(y):\ \circ \le y \le x\}$ برقرار است.

فرمول مربوط به f^- از $f^- = (-f)^+$ به دست می‌آید. و فرمول مربوط به قدرمطلق از $|f| = f^+ + f^-$ حاصل می‌شود.

تبصره. فرمول $|f|(|x|) = \sup\{f(y):\ |y| \le |x|\}$ نامساوی مفید

$$|f(x)| \le |f|(|x|)$$

را به ازای هر $f \in \tilde{X}$ و $x \in X$ ایجاب می‌کند.

بنابر تساوی $f \vee g = (f-g)^+ + g$ و قضیهٔ ۲.۲۴، اتحادهای زیر برقرارند: به ازای هر $f, g \in \tilde{X}$ و $x \in X^+$،

$$f \vee g(x) = \sup\{f(y) + g(x-y):\ \circ \le y \le x\}$$

و

$$f \wedge g(x) = \inf\{f(y) + g(x-y):\ \circ \le y \le x\}.$$

گاهی دانستن اینکه فرمولهای "دوگان" قضیهٔ ۲.۲۴ نیز برقرارند اهمیت دارد. به طور دقیقتر، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۳.۲۴. ***فرض کنیم X شبکهٔ برداری بوده و f یک تابعی خطی مثبت باشد. در این صورت اتحادهای زیر به ازای هر $x \in X$ برقرارند:***

$$f(x^+) = \sup\{g(x):\ \circ \le g \le f \text{ و } g \in \tilde{X}\};$$

$$f(x^-) = \sup\{-g(x):\ \circ \le g \le f \text{ و } g \in \tilde{X}\};$$

$$f(|x|) = \sup\{g(x):\ |g| \le f \text{ و } g \in \tilde{X}\}.$$

برهان. فرمول مربوط به $f(x^+)$ را ثابت می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که هرگاه $\circ \le g \le f$، آنگاه $g(x) \le g(x^+) \le f(x^+)$؛ و درنتیجه

$$\sup\{g(x):\ \circ \le g \le f \text{ و } g \in \tilde{X}\} \le f(x^+).$$

برای نامساوی عکس، تابع $p: X \to R$ را با تعریف $p(u) = f(x^+)$ در نظر می‌گیریم. به آسانی معلوم

می‌شود که p یک نگاشت زیرخطی بر X است به طوری که $p(u) \geq 0$ به ازای هر $u \in X$ برقرار است. حال فرض کنیم $Y = \{\alpha x: \alpha \in R\}$ و $h: Y \to R$ را با $h(\alpha x) = \alpha f(x^+)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $h(u) \leq p(u)$ به ازای هر $u \in Y$ برقرار است و، بنابر قضیهٔ هان ـ باناخ (قضیهٔ ۲۴.۲۳)، h را می‌توان به طور خطی به تمام X چنان وسعت داد که نامساوی $h(u) \leq p(u)$ به ازای هر $u \in X$ حفظ شود. حال ملاحظه می‌کنیم که اگر $u \geq 0$، $h(u) \leq p(u) = f(u^+) = f(u)$ برقرار است و، به علاوه،

$$-h(u) = h(-u) \leq p(-u) = f((-u)^+) = f(0) = 0;$$

یعنی $0 \leq h \leq f$ برقرار است. بنابراین،

$$f(x^+) = h(x) \leq \sup\{g(x):\ 0 \leq g \leq f \text{ و } g \in \tilde{X}\};$$

درنتیجه

$$f(x^+) = \sup\{g(x):\ 0 \leq g \leq f \text{ و } g \in \tilde{X}\}.$$

حال دو فرمول دیگر به آسانی از روابط $f(x^-) = f((-x)^+)$ و $f(|x|) = f(x^+) + f(x^-)$ به دست می‌آیند.

گوییم نرم $\|\cdot\|$ بر شبکهٔ برداری X یک **نرم شبکه‌ای** است (یا $\|\cdot\|$ با ساختار شبکه‌ای X سازگار است) اگر $|x| \leq |y|$ در X نامساوی $\|x\| \leq \|y\|$ را ایجاب نماید. **شبکهٔ برداری نرمدار** یک شبکهٔ برداری است که با یک نرم شبکه‌ای مجهز شده باشد. هرگاه شبکهٔ برداری نرمدار X تام باشد، آنگاه X را یک **شبکهٔ باناخ** می‌نامیم.

فرض کنیم X یک شبکهٔ برداری نرمدار باشد. واضح است که $\||x|\| = \|x\|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است. همچنین، در پرتو قضیهٔ ۱.۲۴، نامساویهای زیر به ازای هر $x, y \in X$ برقرارند:

$$\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\| \text{ و } \||x| - |y|\| \leq \|x - y\|.$$

به خصوص، این نامساویها ایجاب می‌کنند که نگاشتهای $x \mapsto x^+$ و $x \mapsto |x|$ (هر دو از X به توی X) به طور یکنواخت پیوسته‌اند.

جالب است توجه شود که اغلب فضاهای نرمدار در آنالیز، شبکه‌های برداری نرمدار یا شبکه‌های باناخ‌اند. چند مثال در زیر آمده است.

مثال ۴.۲۴. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. گردایهٔ تمام توابع کراندار حقیقی تعریف شده بر X با $B(X)$ نموده می‌شود. در این صورت $B(X)$ تحت ترتیب $f \leq g$ وقتی $f(x) \leq g(x)$ به ازای هر

$x \in X$ برقرار باشد یک شبکهٔ برداری (درواقع، یک فضای تابعی) است. همچنین، تحت نرم سوپرمم $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$ ، شبکهٔ برداری $B(X)$ یک شبکهٔ باناخ است. ر.ک. مثال ۱۶.۵.

مثال ۵.۲۴. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. طبق معمول، $C_c(X)$ گردایهٔ توابع حقیقی پیوسته بر X است که محافظ فشرده دارند. به عبارت دیگر، $f \in C(X)$ تعلق به $C_c(X)$ دارد اگر و فقط اگر مجموعهٔ $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ بست فشرده داشته باشد. [در حالتی که X فشرده است، $C_c(X) = C(X)$.] در این صورت $C_c(X)$ تحت ترتیب نقطه به نقطه [یعنی $f \leq g$ اگر $f(x) \leq g(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد] و نرم سوپرمم یک شبکهٔ برداری نرمدار است.

مثال ۶.۲۴. $C[0, 1]$ را با ترتیب نقطه به نقطه درنظر گرفته و نرم را با $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، $C[0, 1]$ تحت این نرم یک شبکهٔ برداری نرمدار است ولی یک شبکهٔ باناخ نیست.

مثال ۷.۲۴. فرض کنیم l_1 گردایهٔ تمام دنباله‌های حقیقی $x = \{x_n\}$ باشد که $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty$. l_1 با اعمال جبری معمولی و شبکه‌ای یک فضای تابعی است. شبکهٔ برداری l_1 تحت نرم $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ به صورت یک شبکهٔ باناخ درمی‌آید (ر.ک. مثال ۳.۲۳).

زیرفضای برداری Y از شبکهٔ برداری X را یک **زیرشبکهٔ برداری** X نامیم اگر به ازای هر جفت x و y از Y، عنصرهای $x \vee y$ و $x \wedge y$ متعلق به Y باشند؛ یعنی Y یک زیرشبکهٔ برداری X است اگر تحت اعمال شبکه‌ای X بسته باشد. زیرفضای برداری A از شبکهٔ برداری X را یک ***ایده‌آل*** (یا گاهی یک ***ایده‌آل مرتب***) نامیم اگر $|y| \leq |x|$ و $y \in A$ عضویت $x \in A$ را ایجاب نمایند. در پرتو اتحاد $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ معلوم می‌شود که هر ایده‌آل یک زیرشبکهٔ برداری است.

فرض کنیم X یک شبکهٔ برداری نرمدار و A زیرمجموعهٔ کراندار مرتبی از X باشد. $y \in X$ را چنان اختیار می‌کنیم که به ازای هر $x \in A$، $|x| \leq y$ ؛ و درنتیجه، به ازای هر $x \in A$، $\|x\| \leq \|y\|$ ؛ یعنی هر مجموعهٔ کراندار مرتب کراندار نرمی است. از این نتیجه می‌شود که هر تابعی خطی پیوسته بر X زیرمجموعه‌های کراندار مرتب X را به روی زیرمجموعه‌های کراندار R می‌نگارد. به عبارت دیگر، دوگان نرمی X^* یک زیرفضای برداری دوگان مرتب $\tilde{X}$ است. همانطور که نتیجهٔ بعد نشان می‌دهد، X^* درواقع یک ایده‌آل $\tilde{X}$ می‌باشد.

قضیهٔ ۸.۲۴. *دوگان نرمی X^* شبکهٔ برداری نرمدار X یک ایده‌آل دوگان مرتب $\tilde{X}$ است (و در نتیجه، X^* خود یک شبکهٔ برداری می‌باشد).*

برهان. فرض کنیم $|g| \leq |f|$ در $\tilde{X}$ با $g \in X^*$ و $f \in \tilde{X}$ برقرار باشد. باید نشان دهیم که $f \in X^*$. فرض کنیم $x \in X$ چنان باشد که $\|x\| = 1$. در این صورت، به ازای هر $y \in X$ که $|y| \leq |x|$، داریم $\|y\| \leq \|x\| = 1$. بنابراین،

$$|f(x)| \leq |f|(|x|) \leq |g|(|x|) = \sup\{g(y): |y| \leq |x|\} \leq \|g\|,$$

که در آن تساوی وسطی به خاطر قضیهٔ ۲.۲۴ برقرار است. این امر نشان می‌دهد که $f \in X^*$ و $\|f\| \leq \|g\|$.

استدلالهای قبل نیز نشان می‌دهند که، در شبکهٔ برداری نرمدار X، رابطهٔ $|f| \leq |g|$ در X^*ایجاب می‌کند که $\|f\| \leq \|g\|$؛ یعنی X^* یک شبکهٔ برداری نرمدار است. چون X^* یک فضای باناخ نیز هست (قضیهٔ ۱۵.۲۳)، نتیجهٔ زیر برقرار است.

قضیهٔ ۹.۲۴. *دوگان نرمی یک شبکهٔ برداری نرمدار یک شبکهٔ باناخ است.*

هرگاه X یک شبکهٔ برداری نرمدار باشد، آنگاه قضیهٔ ۸.۲۴ نشان می‌دهد که $X^* \subseteq \tilde{X}$ برقرار است. اما دوگان نرمی یک شبکهٔ باناخ همیشه بر دوگان ترتیبی خود منطبق است.

قضیهٔ ۱۰.۲۴. *هرگاه X یک شبکهٔ باناخ باشد، آنگاه $X^* = \tilde{X}$ برقرار است.*

برهان. فرض کنیم $f \in \tilde{X}$. به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم f پیوسته نباشد؛ یعنی فرض می‌کنیم $\|f\| = \sup\{|f(x)|: \|x\| = 1\} = \infty$. در این صورت دنباله‌ای از بردارهای $\{x_n\}$ هست به طوری که $\|x_n\| = 1$ و، به ازای هر n، $|f(x)| \geq n^3$. فرض کنیم $y_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-2}|x_k|$. در این صورت

$$\|y_{n+p} - y_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} k^{-2}|x_k|\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} k^{-2}$$

به ازای هر n و p برقرار است؛ و درنتیجه $\{y_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در X است. چون X تام است، $y \in X$ ی هست که $\lim y_n = y$. واضح است که $0 \leq y_n \leq y_{n+1}$ و حکم می‌کنیم که $0 \leq y_n \leq y$ به ازای هر n برقرار است. درواقع، ابتدا توجه می‌کنیم که نامساویهای

$$0 \leq (y_n - y)^+ \leq (y_{n+p} - y)^+ \leq |y_{n+p} - y|$$

ایجاب می‌کنند که به ازای هر n و p، $\|(y_n - y)^+\| \le \|y_{n+p} - y\|$. بنابراین،

$$\circ \le \|(y_n - y)^+\| \le \lim_{p\to\infty}\|y_{n+p} - y\| = \circ;$$

و درنتیجه، به ازای هر n، $(y_n - y)^+ = \circ$. ولی در این صورت به ازای هر n،

$$y_n - y \le (y_n - y) \vee \circ = (y_n - y)^+ = \circ$$

ایجاب می‌کند که $\circ \le y_n \le y$. اما چون $n^{-2}|x_n| \le y_n \le y$، پس به ازای هر n داریم

$$n \le n^{-2}|f(x_n)| \le n^{-2}|f|(|x_n|) \le |f|(y_n) \le |f|(y) < \infty$$

که ناممکن است. لذا، f پیوسته است؛ و درنتیجه $X^* = \breve{X}$ برقرار می‌باشد.

فرض کنیم X یک شبکهٔ برداری نرمدار بوده و Y یک زیرشبکهٔ برداری X باشد. از قبل می‌دانیم که $\overline{Y}$ یک زیرفضای برداری X است و، به خاطر پیوستگی $x \to x^+$، به آسانی معلوم می‌شود که $\overline{Y}$ یک زیرشبکهٔ برداری X است.

همچنین می‌دانیم که نشانندهٔ طبیعی $x \to \widehat{x}$ یک فضای نرمدار در دوگان دومش خطی و نرم نگهدار است. هرگاه X یک شبکهٔ برداری نرمدار باشد، آنگاه $x \to \widehat{x}$ شبکه نگهدار نیز هست. درواقع، به ازای هر $x \in X$ و $\circ \le f \in X^*$، اگر قضایای ۲.۲۴ و ۳.۲۴ را همراه با این امر که X^* یک ایده‌آل $\breve{X}$ است متوالیاً اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\widehat{x})^+(f) &= \sup\{\widehat{x}(g):\ \circ \le g \le f \text{ و } g \in X^*\}\\ &= \sup\{g(x):\ \circ \le g \le f \text{ و } g \in X^*\}\\ &= \sup\{g(x):\ \circ \le g \le f \text{ و } g \in \breve{X}\} = f(x^+) = \widehat{x^+}(f);\end{aligned}$$

یعنی $(\widehat{x})^+ = \widehat{x^+}$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است و این نشان می‌دهد که $x \to \widehat{x}$ اعمال شبکه را حفظ می‌کند. لذا، X در X^{**} چنان "می‌نشیند" که نرم و ساختارهای جبری و شبکه‌ای‌اش حفظ خواهد شد. چون بست X در شبکهٔ باناخ X^{**} تتمیم X است، از نکات فوق معلوم می‌شود که تتمیم X یک شبکهٔ باناخ است.

اگر بحث را خلاصه کنیم، نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۱۱.۲۴. *تتمیم هر شبکهٔ برداری نرمدار یک شبکهٔ باناخ است.*

یکمتری خطی $T: X \to Y$ بین دو شبکهٔ برداری نرمدار که در $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ به ازای هر $x, y \in X$ صدق می‌کند یک **یکمتری شبکه‌ای** نام دارد. دو شبکهٔ برداری نرمدار X و Y را **یکریخت** نامیم اگر یک یکمتری شبکه‌ای از X به روی Y وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، X و Y یکریخت‌اند

اگر یک نگاشت از X به روی Y باشد که همهٔ ساختارها (نرم، جبری، و شبکه‌ای) را حفظ نماید.

عملگر $T: X \to Y$ بین دو شبکهٔ برداری را **مثبت** نامیم اگر $T(x) \geq \circ$ به ازای هر $x \geq \circ$ برقرار باشد. وقتی X یک شبکهٔ باناخ و Y یک شبکهٔ برداری نرمدار باشد، هر عملگر مثبت از X به توی Y لزوماً پیوسته است. (برای مشاهدهٔ این امر، برهان قضیهٔ ۱۰.۲۴ را تکرار نمایید.)

این بخش را با یک خاصیت همگرایی جالب [منسوب به پی. پی. کوروکین (P.P.Korovkin)] راجع به دنباله‌ها از عملگرهای مثبت بر $C[\circ, 1]$ پایان می‌بخشیم. نتیجهٔ کوروکین سودمندی ساختارهای ترتیب را نشان خواهد داد.

هرگاه $T: C[\circ, 1] \to C[\circ, 1]$ یک عملگر باشد، آنگاه (برای سادگی) به جای $T(f)$ می‌نویسیم Tf. در بحث زیر، $C[\circ, 1]$ با نرم سوپرمم $\|\cdot\|_\infty$ مجهز شده است. مثلاً، $\lim f_n = f$ در $C[\circ, 1]$ یعنی $\lim \|f_n - f\|_\infty = \circ$. همچنین ۱، x، و x^2 سه تابع از $C[\circ, 1]$ اند که با $1(t) = 1$، $x(t) = t$، و $x^2(t) = t^2$ به ازای هر $t \in [\circ, 1]$ تعریف می‌شوند.

قضیهٔ ۱۲.۲۴. (کوروکین). *فرض کنیم $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای مثبت از $C[\circ, 1]$ به توی $C[\circ, 1]$ باشد. هرگاه $\lim T_n f = f$ وقتی f مساوی ۱، x، و x^2 است برقرار باشد، آنگاه $\lim T_n f = f$ به ازای هر $f \in C[\circ, 1]$ برقرار می‌باشد.*

برهان. فرض کنیم $f \in C[\circ, 1]$. هدف ما نشان دادن این است که به ازای $\varepsilon > \circ$ ثابتهایی چون C_1، C_2، و C_3 باشند به طوری که

$$\|T_n f - f\|_\infty \leq \varepsilon + C_1 \|T_n x^2 - x^2\|_\infty + C_2 \|T_n x - x\|_\infty + C_3 \|T_n 1 - 1\|_\infty .$$

اگر این کار انجام شود، فرض ما ایجاب می‌کند که $\|T_n f - f\|_\infty < 2\varepsilon$ باید به ازای جمیع nهای به قدر کافی بزرگ برقرار باشد. لذا، این ثابت می‌کند که $\lim T_n f = f$ به ازای هر $f \in C[\circ, 1]$ برقرار است.

برای این کار، با توجه به اینکه به ازای هر $t \in [\circ, 1]$، تابع $\circ \leq g_t \in C[\circ, 1]$ با تعریف $g_t(s) = (s-t)^2$ در $g_t = x^2 - 2xt + t^2 1$ صدق می‌کند آغاز می‌کنیم. چون هر T_n مثبت است، $T_n g_t$ یک تابع مثبت می‌باشد. به خصوص، به ازای هر $t \in [\circ, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} \circ \leq T_n g_t(t) &= (T_n x^2 - 2t T_n x + t^2 T_n 1)(t) \\ &= (T_n x^2 - x^2)(t) - 2t(T_n x - x)(t) + t^2(T_n 1 - 1)(t) \qquad (1) \\ &\leq \|T_n x^2 - x^2\|_\infty + 2\|T_n x - x\|_\infty + \|T_n 1 - 1\|_\infty . \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $M = \|f\|_\infty$ و فرض می‌کنیم $\varepsilon > \circ$. بنابر پیوستگی یکنواخت f بر

[۰, ۱]، $\delta > 0$ ای هست بــه طـوری کـه هـروقت $s, t \in [0, 1]$ در $|s - t| < \delta$ صـدق کـنند، $-\varepsilon < f(s) - f(t) < \varepsilon$. حال ملاحظه می‌کنیم که

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}(s-t)^2 \leq f(s) - f(t) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(s-t)^2 \qquad (2)$$

به ازای هر $s, t \in [0, 1]$ برقرار است. درواقع، هرگاه $|s - t| < \delta$، آنگاه روابط (۲) از

$$-\varepsilon < f(s) - f(t) < \varepsilon$$

نتیجه می‌شوند. از آن سو، هرگاه $|s - t| \geq \delta$، آنگاه (۲) از نامساویهای زیر نتیجه می‌شود:

$$-\frac{2M}{\delta^2}(s-t)^2 \leq -2M \leq f(s) - f(t) \leq 2M \leq \frac{2M}{\delta^2}(s-t)^2.$$

چون هر T_n مثبت و خطی است، از (۲) معلوم می‌شود که

$$-\varepsilon T_n 1 - \frac{2M}{\delta^2} T_n g_t \leq T_n f - f(t) T_n 1 \leq \varepsilon T_n 1 + \frac{2M}{\delta^2} T_n g_t. \qquad (3)$$

حال قرار می‌دهیم $K = 2M/\delta^2$ و با محاسبهٔ (۳) در t به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |[T_n f - f(t)T_n 1](t)| &\leq \varepsilon T_n 1(t) + K T_n g_t(t) \\ &= \varepsilon + \varepsilon[(T_n 1 - 1)(t)] + K T_n g_t(t) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \| T_n 1 - 1 \|_\infty + K T_n g_t(t). \end{aligned}$$

به خصوص، توجه کنید که

$$\begin{aligned} |(T_n f - f)(t)| &\leq |[T_n f - f(t) T_n 1](t)| + |f(t)| . |(T_n 1 - 1)(t)| \qquad (4) \\ &\leq \varepsilon + K T_n g_t(t) + (M + \varepsilon) \| T_n 1 - 1 \|_\infty \end{aligned}$$

به ازای هر $t \in [0, 1]$ برقرار است. لذا، با توجه به (۱)، از (۴) داریم

$$\| T_n f - f \|_\infty \leq \varepsilon + K \| T_n x^2 - x^2 \|_\infty + 2K \| T_n x - x \|_\infty + (K + M + \varepsilon) \| T_n 1 - 1 \|_\infty.$$

در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

تمرینات

۱. فــرض کـنید X یک شـبکهٔ بـرداری بـوده و $f: X^+ \to [0, \infty)$ یک تـابع جـمعی بـاشد [یـعنی $f(x + y) = f(x) + f(y)$ به ازای هر $x, y \in X^+$ برقرار است]. نشان دهید که یک تابعی خطی منحصر به فرد مانند g بر X هست به طوری که به ازای هر $x \in X^+$، $g(x) = f(x)$.

[**راهنمایی.** با استفاده از برهان لم ۶.۱۵، ابتدا نشان دهید که $f(rx) = rf(x)$ به ازای هر $x \in X^+$ و هر عددگویای $r \geq 0$ برقراراست. سپس به ازای هر $x \in X$ تعریف کنید $g(x) = f(x^+) - f(x^-)$.]

۲. یک شبکهٔ برداری را **تام ترتیبی** نامیم اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی که از بالا کراندار است کوچکترین

کران بالایی (که سوپرمم مجموعه نیز نامیده می‌شود) داشته باشد. نشان دهید هرگاه X یک شبکهٔ برداری باشد، آنگاه دوگان ترتیبی آن $\tilde{X}$ یک شبکهٔ برداری تام ترتیبی است.

[**راهنمایی.** اگر A یک مجموعهٔ ناتهی از تابعیهای خطی مثبت باشد به طوری که $f \le g$ در $\tilde{X}$ به ازای هر $f \in A$ برقرار باشد، به ازای هر $x \in X^+$ قرار دهید

$$h(x) = \sup\{\left[\vee_{i=1}^{n} f_i\right](x): f_i \in A\}.$$

با استفاده از تمرین پیش نشان دهید که h به یک تابعی خطی مثبت وسعت می‌یابد و $h = \sup A$.]

۳. نشان دهید گردایهٔ تمام توابع کراندار بر $[0, 1]$ یک ایده‌آل از $R^{[0, 1]}$ است. همچنین نشان دهید که $C[0, 1]$ یک زیرشبکهٔ برداری از $R^{[0, 1]}$ است ولی ایده‌آل نیست.

۴. فرض کنید X یک شبکهٔ برداری باشد. نشان دهید که نرم $\|\cdot\|$ بر X یک نرم شبکه‌ای است اگر و فقط اگر در دو خاصیت زیر صدق نماید:

آ. هرگاه $0 \le x \le y$، آنگاه $\|x\| \le \|y\|$؛ و

ب. به ازای هر $x \in X$، $\|\,|x|\,\| = \|x\|$ برقرار باشد.

۵. نشان دهید که در شبکهٔ برداری نرمدار X، مخروط مثبت آن X^+ یک مجموعهٔ بسته است.

[**راهنمایی.** $X^+ = \{x \in X: x^- = 0\}$.]

۶. این تمرین نشان می‌دهد که در شبکهٔ برداری نرمدار X، دوگان نرمی آن X^* ممکن است یک ایده‌آل حقیقی از دوگان ترتیبی‌اش $\tilde{X}$ باشد. فرض کنید X گردایهٔ تمام دنباله‌های $\{x_n\}$ باشد به طوری که به ازای همه جز تعدادی متناهی جمله (که تابع دنباله است) $x_n = 0$. نشان دهید که

آ. X یک فضای تابعی است.

ب. X همراه با نرم سوپرمم یک شبکهٔ برداری نرمدار است ولی یک شبکهٔ باناخ نیست.

پ. هرگاه $f: X \to R$ به ازای هر $x = \{x_n\} \in X$ با $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n$ تعریف شده باشد، آنگاه f یک تابعی خطی مثبت بر X است که پیوسته نیست.

۷. تتمیم نرمی شبکهٔ برداری نرمدار تمرین پیش را معین نمایید.

۸. تتمیم نرمی شبکهٔ برداری نرمدار مثال ۵.۲۴ را در حالتی که X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف است معین سازید.

۹. فرض کنید X یک شبکهٔ برداری نرمدار باشد. همچنین $\{x_n\}$ دنباله‌ای از X باشد که $x_n \le x_{n+1}$ به ازای هر n برقرار است. نشان دهید هرگاه $\lim x_n = x$ در X برقرار باشد، آنگاه بردار x کوچکترین کران بالایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X است. با علامات، $x_n \uparrow x$ برقرار است.

[**راهنمایی.** از رابطهٔ $(x_n - x_{n+p})^+ = 0$ همراه با پیوستگی تابع $x \to x^+$ استفاده نمایید.]

۱۰. فرض کنید X و Y دو شبکهٔ برداری بوده و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند:

۱. $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ به ازای هر $x, y \in X$ برقرار است.

۲. $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ به ازای هر $x, y \in X$ برقرار است.

۳. $T(x) \wedge T(y) = 0$ در Y برقرار است هروقت $x \wedge y = 0$ در X برقرار باشد.

۴. $|T(x)| = T(|x|)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

(عملگر خطی T صادق در احکام هم‌ارز فوق را یک **همریختی شبکه‌ای** می‌نامند.)

۱۱. فرض کنید l_∞ شبکهٔ باناخ تمام دنباله‌های حقیقی کراندار باشد؛ یعنی $l_\infty = B(N)$، و $\{r_1, r_2, ...\}$ شمارشی از اعداد گویای موجود در $[0, 1]$ باشد. نشان دهید که نگاشت $T: C[0, 1] \to l_\infty$ با تعریف $T(f) = (f(r_1), f(r_2), ...)$ یک یکمتری شبکه‌ای است که برو نیست.

۱۲. فرض کنید X یک شبکهٔ برداری نرمدار باشد. نشان دهید که عنصر $x \in X$ در $x \geq 0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $f(x) \geq 0$ به ازای هر تابعی خطی مثبت پیوستهٔ f بر X برقرار باشد.

[**راهنمایی.** برای قسمت "اگر" از فرمول دوم قضیهٔ ۳.۲۴ استفاده کرده و به ازای هر تابعی خطی مثبت پیوستهٔ f به دست آورید $f(x^-) = 0$.]

۱۳. فرض کنید X یک شبکهٔ باناخ باشد. هرگاه $x \in X$ ≤ ۰، آنگاه نشان دهید که

$$\|x\| = \sup\{f(x): \ \|f\| = 1 \text{ و } 0 \leq f \in X^*\}.$$

۱۴. فرض کنید $T: X \to Y$ یک عملگر مثبت بین دو شبکهٔ برداری نرمدار باشد. هرگاه X یک شبکهٔ باناخ باشد، آنگاه نشان دهید که T پیوسته است.

۱۵. نشان دهید که هر دو نرم شبکه‌ای تام بر یک شبکهٔ برداری باید هم‌ارز باشند.

[**راهنمایی.** تمرین قبل را به کار گیرید.]

۱۶. هرگاه $f \in C[0, 1]$، آنگاه چند جمله‌ایهای

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

که در آنها $\binom{n}{k}$ ضریب دو جمله‌ای تعریف شده با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

است، ***چند جمله‌ایهای برنشتاین*** (Bernstein) f نام دارند.

نشان دهید هرگاه $f \in C[0, 1]$، آنگاه دنبالهٔ $\{B_n\}$ از چندجمله‌ایهای برنشتاین f به طور یکنواخت به f همگراست.

[**راهنمایی.** دنبالهٔ $\{T_n\}$ از عملگرهای مثبت با تعریف

$$T_nf(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$$

را درنظر بگیرید.]

۱۷. فرض کنید $T: C[0, 1] \to C[0, 1]$ یک عملگر مثبت باشد. نشان دهید هرگاه $Tf = f$ وقتی f مساوی ۱، x، و x^2 است برقرار باشد، آنگاه T عملگر همانی است (یعنی $Tf = f$ به ازای هر $f \in C[0, 1]$ برقرار است).

۱۸. (کوروکین) فرض کنید $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای مثبت از $C[0, 1]$ به توی $C[0, 1]$ صادق در $\lim T_n 1 = 1$ باشد. هرگاه $c \in [0, 1]$ای باشد به طوری که $\lim T_n g = 0$ به ازای تابع $g(t) = (t-c)^2$ برقرار باشد، آنگاه نشان دهید که $\lim T_n f = f(c)$ به ازای هر $f \in C[0, 1]$ برقرار است.

۲۵. فضاهای L_p

حال نظر خود را از فضاهای نرمدار کلی به فضاهای تابعی می‌گردانیم. بسیاری از فضاهای کلاسیک در آنالیز از توابع اندازه‌پذیر تشکیل شده‌اند، و اغلب نرمهای مهم بر این فضاها با انتگرال تعریف شده‌اند. نظریهٔ انتگرالگیری به ما توان مطالعهٔ خواص جالب این فضاها را می‌دهد. در اینجا فضاهای L_p کلاسیک مطرح می‌شوند. همانطور که خواهیم دید، اینها مثالهای خاصی از شبکه‌های باناخ می‌باشند.

در این بخش (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ ثابت است، و همهٔ خواص توابع در رابطه با این فضای اندازه‌اند مگر خلافش تصریح شود. به خاطر داشته باشید که اگر f یک تابع اندازه‌پذیر باشد، $|f|^p$ نیز به ازای هر $p > 0$ اندازه‌پذیر است.

تعریف ۱.۲۵. فرض کنیم $0 < p < \infty$. در این صورت گردایهٔ تمام توابع اندازه‌پذیر f که $|f|^p$ انتگرالپذیر است با $L_p(\mu)$ نموده می‌شود.

اگر نمایش فضای اندازهٔ X نیز لازم باشد، $L_p(\mu)$ را با $L_p(X)$ نشان خواهیم داد.

به آسانی معلوم می‌شود که $L_p(\mu)$ یک فضای برداری است. درواقع، هرگاه $f \in L_p(\mu)$، آنگاه واضح است که $\alpha f \in L_p(\mu)$ به ازای هر $\alpha \in R$ برقرار است. از آن سو، نامساوی زیر بین اعداد حقیقی

$$|a + b|^p \leq ۲^p(|a|^p + |b|^p)$$

نشان می‌دهد که $L_p(\mu)$ تحت جمع بسته است. به علاوه، هرگاه $f \in L_p(\mu)$، آنگاه نامساویهای $|f| \leq f^+ \leq ۰$ و $|f| \leq f^- \leq ۰$ ایجاب می‌کنند که f^+، f^-، و $|f|$ تعلق به $L_p(\mu)$ دارند. به عبارت دیگر، $L_p(\mu)$ یک شبکهٔ برداری است.

به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{۱/p}.$$

عدد $\|f\|_p$ را **نرم** L_p تابع f می‌نامیم. واضح است که $\|f\|_p \geq ۰$ و رابطهٔ $\|\alpha f\|_p = |\alpha|.\|f\|_p$ به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ و $\alpha \in R$ برقرار است.

برای به دست آوردن خواص دیگر نرمهای L_p به یک نامساوی نیاز داریم.

لم ۲.۲۵. هرگاه $۰ < t < ۱$، آنگاه

$$a^t b^{۱-t} \leq ta + (۱ - t)b$$

به ازای هر جفت عدد حقیقی نامنفی a و b برقرار است.

برهان. اگر a یا b مساوی صفر باشد، نامساوی فوق بدیهی است. لذا، فرض می‌کنیم $a > ۰$ و $b > ۰$. تابع $f(x) = (۱ - t) + tx - x^t$ را به ازای $x > ۰$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $f'(x) = t(۱ - x^{t-۱})$؛ و درنتیجه $x = ۱$ تنها نقطهٔ بحرانی f می‌باشد. پس f مینیمم خود را در $x = ۱$ می‌گیرد. لذا، $f(۱) = ۰ \leq (۱-t) + tx - x^t$ به ازای هر $x > ۰$ برقرار است. حال، با قرار دادن $x = a/b$، نامساوی مطلوب به دست می‌آید.

در زیر، یک نامساوی مهم بین نرمهای L_p به نام **نامساوی هولدر** (Hölder) ذکر شده است.

قضیهٔ ۳.۲۵. (نامساوی هولدر). ***فرض کنیم $۱ < p < \infty$ و $۱ < q < \infty$ چنان باشند که $۱/p + ۱/q = ۱$. هرگاه $f \in L_p(\mu)$ و $g \in L_q(\mu)$، آنگاه $fg \in L_۱(\mu)$ و***

$$\int |fg| d\mu \leq (\int |f|^p d\mu)^{۱/p}.(\int |g|^q d\mu)^{۱/q} = \|f\|_p . \|g\|_q.$$

برهان. هرگاه $f = ۰$ ت. ه. یا $g = ۰$ ت. ه. برقرار باشد، آنگاه نامساوی بدیهی است. درنتیجه فرض

می‌کنیم $f \neq 0$ ت. ه. و $g \neq 0$ ت. ه. در این صورت $\|f\|_p > 0$ و $\|g\|_q > 0$. حال لم ۲.۲۵ را به ازای $t = 1/p$، $a = (|f(x)|/\|f\|_p)^p$، و $b = (|g(x)|/\|g\|_q)^q$ به کار برده به دست می‌آوریم

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_p)^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{(\|g\|_q)^q}.$$

بنابر قضیهٔ ۶.۱۸، $fg \in L_1(\mu)$ و، با انتگرالگیری، به دست می‌آوریم

$$\frac{\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

یعنی $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$، که همان مطلوب ما می‌باشد.

در حالت خاص $p = q = 2$، نامساوی هولدر به **نامساوی کشی ـ شوارتز** (Schwarz) معروف است. نامساوی مثلثی تابع $\|.\|_p$ را **نامساوی مینکوفسکی** (Minkowski) می‌نامند. شرح مطلب در زیر آمده است.

قضیهٔ ۴.۲۵. (نامساوی مینکوفسکی). *فرض کنیم $1 \leq p < \infty$. در این صورت، به ازای هر جفت $f, g \in L_p(\mu)$، نامساوی زیر برقرار است:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

برهان. نامساوی به ازای $p = 1$ برقرار است. لذا، فرض می‌کنیم $1 < p < \infty$. فرض کنیم $1 < q < \infty$ چنان باشد که $1/p + 1/q = 1$.

از قبل می‌دانیم که اگر f و g تعلق به $L_p(\mu)$ داشته باشند، $f + g$ نیز تعلق به $L_p(\mu)$ دارد. حال ملاحظه می‌کنیم که چون $(p-1)q = p$، پس $|f + g|^{p-1} \in L_q(\mu)$. لذا، طبق قضیهٔ ۳.۲۵، هر دوی

$$|g| . |f + g|^{p-1} \text{ و } |f| . |f + g|^{p-1}$$

تعلق به $L_1(\mu)$ دارند و

$$\begin{cases} \int |f| . |f+g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \cdot (\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu)^{1/q} = \|f\|_p \cdot (\|f + g\|_p)^{p/q}, \\ \int |g| . |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \cdot (\|f + g\|_p)^{p/q}. \end{cases}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} (\|f + g\|_p)^p &= \int |f + g|^p d\mu \leq \int |f| . |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| . |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \cdot (\|f + g\|_p)^{p/q} + \|g\|_p \cdot (\|f + g\|_p)^{p/q} \end{aligned}$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p).(\|f+g\|_p)^{p/q}$$

که از آن به آسانی معلوم می‌شود که

$$\|f+g\|_p = (\|f+g\|_p)^{p-q/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

بحث فوق را خلاصه می‌کنیم: هرگاه $1 \leq p < \infty$، آنگاه

آ. $\|f\|_p \geq 0$،

ب. $\|\alpha f\|_p = |\alpha|.\|f\|_p$، و

پ. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

به ازای هر $f, g \in L_p(\mu)$ و $\alpha \in R$ برقرارند.

واضح است که، بنابر قضیهٔ ۷.۱۸، $\|f\|_p = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ت. ه. برقرار باشد. لذا، متأسفانه، تابع $\|\cdot\|_p$ بر $L_p(\mu)$ در شرط نرم که $\|f\|_p = 0$ رابطهٔ $f = 0$ را ایجاب می‌کند صدق نمی‌کند. برای پرهیز از این مشکل، معمولاً دو تابع از $L_p(\mu)$ را **هم‌ارز** نامیم اگر تقریباً همه جا مساوی باشند. واضح است که این یک رابطهٔ هم‌ارزی بر $L_p(\mu)$ می‌گذارد و $\|\cdot\|_p$ یک نرم بر رده‌های هم‌ارزی خواهد شد. به عبارت دیگر، اگر بین دو تابع که تقریباً همه جا مساوی‌اند تمایز نگذاریم، $L_p(\mu)$ به ازای $1 \leq p < \infty$ یک فضای نرمدار می‌شود. لذا، $L_p(\mu)$ درواقع از رده‌های هم‌ارزی از توابع تشکیل شده است، ولی این مسئله‌ای ایجاد نخواهد کرد. رده‌های هم‌ارزی در عمل به زمینه منتقل شده و عنصرهای $L_p(\mu)$ را تابع می‌گیریم (و دو تابع را یکی می‌گیریم اگر تقریباً مساوی باشند). مزیت دیگر یکی سازی توابعی که تقریباً همه جا مساویند چنین است: یک تابع از $L_p(\mu)$ می‌تواند مقادیر نامتناهی بگیرد یا حتی بر یک مجموعهٔ پوچ بدون تعریف بماند [زیرا، با انتساب مقادیر متناهی به این نقاط، تابع با یک تابع حقیقی از $L_p(\mu)$ هم‌ارز می‌شود].

همچنین واضح است که اگر g یک تابع اندازه‌پذیر بوده و $f \in L_p(\mu)$ در $|g| \leq |f|$ ت. ه. صدق کند، $g \in L_p(\mu)$ و $\|g\|_p \leq \|f\|_p$ برقرار است. به عبارت دیگر، $\|\cdot\|_p$ یک نرم شبکه‌ای است. بنابراین، به ازای $1 \leq p < \infty$، هر $L_p(\mu)$ یک شبکهٔ برداری نرمدار و، درواقع، همانطور که نتیجهٔ بعد نشان می‌دهد، یک شبکهٔ باناخ است.

قضیهٔ ۵.۲۵. [ریس ـ فیشر (Fischer)]. *هرگاه $1 \leq p < \infty$، آنگاه $L_p(\mu)$ یک شبکهٔ باناخ است.*

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی باشد. با انتقال به یک زیردنباله در صورت لزوم می‌توان بدون صدمه زدن به کلیت فرض کرد $\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n}$ به ازای هر n برقرار باشد. باید وجود $f \in L_p(\mu)$ ی که $\lim \|f - f_n\|_p = 0$ را نشان دهیم.

قرار می‌دهیم $g_1 = 0$ و به ازای $n \geq 2$،

$$g_n = |f_1| + |f_2 - f_1| + \dots + |f_n - f_{n-1}|.$$

در این صورت $0 \leq g_n \uparrow$ و

$$\int (g_n)^p d\mu = (\|g_n\|_p)^p \leq \left[\|f_1\|_p + \sum_{i=2}^{\infty} \|f_i - f_{i-1}\|_p\right]^p \leq (\|f_1\|_p + 1)^p$$

به ازای هر n برقرار است. بنابر قضیهٔ لوی (قضیهٔ ۸.۱۸)، $g \in L_p(\mu)$ ای هست به طوری که $0 \leq g_n \uparrow g$ ت. ه.

چون داریم

$$|f_{n+k} - f_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} (f_i - f_{i-1})\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i - f_{i-1}| = g_{n+k} - g_n,$$

پس $\{f_n\}$ نقطه به نقطه (ت. ه.) همگرا به تابعی چون f است. چون

$$|f_n| = \left|f_1 + \sum_{i=2}^{n} (f_i - f_{i-1})\right| \leq g_n \leq g \quad \text{ت. ه.}$$

پس $|f| \leq g$ ت. ه. برقرار است؛ و درنتیجه $f \in L_p(\mu)$. ولی، در این صورت، $|f - f_n| \leq 2g$ ت. ه. و $\lim |f_n - f|^p = 0$ همراه با قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ ایجاب می‌کنند که $\lim \|f - f_n\|_p = 0$ و برهان تمام خواهد بود.

تبصره. نگاهی به برهان قبل آشکار می‌سازد که اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از $L_p(\mu)$ با $1 \leq p < \infty$ باشد به طوری که $\lim \|f - f_n\|_p = 0$، زیردنباله‌ای مانند $\{f_{k_n}\}$ از $\{f_n\}$ و $g \in L_p(\mu)$ ای هست به طوری که $f_{k_n} \to f$ ت. ه. و به ازای هر n، $|f_{k_n}| \leq g$ ت. ه.

به طور کلی، $\lim \|f - f_n\|_p = 0$ رابطهٔ $f_n \to f$ ت. ه. را ایجاب نمی‌کند. به عنوان مثال، دنبالهٔ $\{f_n\}$ از مثال ۶.۱۶ در $\lim \|f_n\|_p = 0$ (به ازای هر $1 \leq p < \infty$) صدق می‌کند ولی $\{f_n(x)\}$ به ازای هیچ $x \in [0, 1]$ ی همگرا نیست.

به آسانی می‌توان دنباله‌ای از یک فضای L_p ساخت که نقطه به نقطه به تابعی از این فضا همگرا بوده ولی در نرم L_p همگرا نباشد. به عنوان مثال، R را با اندازهٔ لبگ درنظر گرفته و به ازای هر n، قرار می‌دهیم $f_n = \chi_{(n, n+1)}$. در این صورت، به ازای هر $x \in R$ و $f_n \in L_p(R)$ به ازای هر n و $\leq p < \infty$

۱ ، $f_n(x)\to 0$ برقرار است. از آن سو، به ازای هر n و $1 \le p < \infty$ ، $\|f_n\|_p = 1$ برقرار است؛ و درنتیجه $\{f_n\}$ نسبت به هیچ نرم L_p همگرا به صفر نیست.

نتیجهٔ مفید زیر شرطی برای آنکه همگرایی نقطه به نقطه همگرایی نرمی در فضاهای L_p را به دست می‌دهد خواهد بود.

قضیهٔ ۲۵.۶. فرض کنیم $1 \le p < \infty$ ***و*** $f \in L_p(\mu)$ ***و*** $\{f_n\}$ ***دنباله‌ای از*** $L_p(\mu)$ ***باشد به طوری که*** $f_n \to f$ ***ت. هـ. هرگاه*** $\lim \|f_n\|_p = \|f\|_p$***، آنگاه*** $\lim \|f_n - f\|_p = 0$.

برهان. برهان را با توجه به اینکه $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ به ازای هر جفت عدد حقیقی نامنفی a و b برقرار است آغاز می‌کنیم. درواقع، به ازای $p = 1$، نامساوی بدیهی است. از آن سو، هرگاه $1 < p < \infty$، آنگاه تحدب تابع $g(x) = x^p (x > 0)$ ایجاب می‌کند که

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(a^p + b^p);$$

و درنتیجه $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ برقرار است. به خصوص، به ازای هر جفت عدد حقیقی a و b، داریم

$$|a-b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

لذا، $0 \le 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ ت. هـ.، و با اعمال لم فاتو (قضیهٔ ۱۰.۱۸) و استفاده از فرض $\lim \int |f_n|^p d\mu = \int |f|^p d\mu$، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
2^p \int |f|^p d\mu &= \int \lim\, [2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p] d\mu \\
&\le \liminf \int [2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p] d\mu \\
&= 2^{p-1}\int |f|^p d\mu + 2^{p-1}\lim \int |f_n|^p d\mu + \liminf\left(-\int |f_n - f|^p d\mu\right) \\
&= 2^p \int |f|^p d\mu - \limsup \int |f_n - f|^p d\mu .
\end{aligned}$$

اما چون $\int |f|^p d\mu < \infty$، از نامساوی آخر داریم $\limsup \int |f_n - f|^p d\mu \le 0$. لذا،

$$\limsup \int |f_n - f|^p d\mu = \liminf \int |f_n - f|^p d\mu = 0;$$

درنتیجه

$$\lim \int |f_n - f|^p d\mu = 0 .$$

بنابراین، طبق مطلوب، $\lim \|f_n - f\|_p = 0$ برقرار است.

گوییم عدد حقیقی M یک **کران اساسی** برای تابع f است اگر $|f(x)| \le M$ به ازای تقریباً هر x برقرار باشد. یک تابع را **اساساً کراندار** نامیم اگر دارای کران اساسی باشد. بنابراین، یک تابع اساساً کراندار است اگر جز احتمالاً بر مجموعه‌ای از اندازهٔ صفر کراندار باشد. **سوپرمم اساسی** تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : \text{به ازای تقریباً هر } x \text{ برقرار است } |f(x)| \le M\}.$$

هرگاه f کران اساسی نداشته باشد، آنگاه فرض می‌کنیم $\|f\|_\infty = \infty$. توجه کنید که $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ به ازای تقریباً هر x برقرار است.

خواص زیر به آسانی ثابت می‌شوند و این کار را به عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم.

۱. هرگاه $f = g$ ت. هـ.، آنگاه $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

۲. به ازای هر تابع f، $\|f\|_\infty \ge \circ$، و $\|f\|_\infty = \circ$ اگر و فقط اگر $f = \circ$ ت. هـ.

۳. به ازای هر $\alpha \in R$، $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| . \|f\|_\infty$.

۴. $\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

۵. هرگاه $|f| \le |g|$، آنگاه $\|f\|_\infty \le \|g\|_\infty$.

تعریف ۷.۲۵. گردایهٔ تمام توابع اندازه‌پذیر اساساً کراندار با $L_\infty(\mu)$ نموده می‌شود.

در اینجا مجدداً دو تابع را یکی می‌گیریم اگر تقریباً همه جا مساوی باشند. واضح است که $L_\infty(\mu)$ با اعمال معمولی جبری و شبکه‌ای یک شبکهٔ برداری است. به علاوه، بنابر خواص مذکور در فوق، $L_\infty(\mu)$ مجهز به $\|\cdot\|_\infty$ یک شبکهٔ برداری نرمدار است که درواقع یک شبکهٔ باناخ می‌باشد.

قضیهٔ ۸.۲۵. $L_\infty(\mu)$ ***یک شبکهٔ باناخ است.***

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $L_\infty(\mu)$ باشد. باید نشان دهیم که $f \in L_\infty(\mu)$ ی هست به طوری که $\lim \|f - f_n\|_\infty = \circ$.

چون به ازای هر جفت اندیس m و n نامساوی $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty$ به ازای تقریباً هر x برقرار است، پس مجموعه‌ای مانند A از اندازهٔ صفر هست که نامساوی $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty$ به ازای هر m و n و هر $x \notin A$ برقرار است. ولی در این صورت $\lim f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \notin A$ در R وجود دارد و، به علاوه، f اندازه‌پذیر و اساساً کراندار است؛ یعنی $f \in L_\infty(\mu)$.

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$. k را طوری می‌گیریم که به ازای هر $n, m > k$، $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. چون به ازای هر $x \notin A$ و $n > k$ برقرار است، پس به ازای هر $n > k$ داریم $|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty}|f_m(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$ ... داریم $\|f - f_n\|_\infty \le \varepsilon$. این نشان می‌دهد که $\lim \|f - f_n\|_\infty = 0$ و برهان قضیه تمام خواهد بود.

به آسانی معلوم می‌شود که هر تابع پله‌ای تعلق به هر فضای L_p دارد. به علاوه، گردایهٔ تمام توابع پله‌ای یک زیرشبکهٔ برداری هر فضای L_p است. به علاوه، بنابر قضیهٔ ۱.۲۱، این زیرشبکه در $L_1(\mu)$ چگال نرمی است. نتیجهٔ زیر به ما می‌گوید که شبکهٔ برداری توابع پله‌ای درواقع در هر $L_p(\mu)$ با $1 \le p < \infty$ چگال نرمی است.

قضیهٔ ۹.۲۵. *به ازای هر $1 \le p < \infty$، گردایهٔ تمام توابع پله‌ای در $L_p(\mu)$ چگال نرمی است.*

برهان. فرض کنیم $0 \le f \in L_p(\mu)$. بنابر قضیهٔ ۷.۱۴، دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع ساده هست به طوری که $0 \le \phi_n \uparrow f$ ت. ه. واضح است که هر ϕ_n یک تابع پله‌ای است و $(f - \phi_n)^p \downarrow 0$ ت. ه. برقرار است. بنابر قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ، داریم

$$\|f - \phi_n\|_p = \left(\int |f - \phi_n|^p d\mu\right)^{1/p} \downarrow 0.$$

چون هر تابع $L_p(\mu)$ را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع مثبت از $L_p(\mu)$ نوشت، از بحث بالا معلوم می‌شود که توابع پله‌ای در $L_p(\mu)$ چگال نرمی‌اند.

در حالتی که اندازه یک اندازهٔ بورل منتظم باشد، توابع پیوسته با محافظ فشرده در هر $L_p(\mu)$ به ازای $1 \le p < \infty$ چگال نرمی‌اند. شرح مطلب در قضیهٔ زیر گنجانده شده است.

قضیهٔ ۱۰.۲۵. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف باشد. در این صورت گردایهٔ تمام توابع پیوسته با محافظ فشرده در $L_p(\mu)$ به ازای هر $1 \le p < \infty$ چگال نرمی است.*

برهان. واضح است که هر تابع پیوسته با محافظ فشرده تعلق به هر فضای L_p دارد. حال فرض کنیم $1 \le p < \infty$، $f \in L_p(\mu)$، و $\varepsilon > 0$. باید نشان دهیم که تابع پیوسته‌ای مانند g با محافظ فشرده هست

به طوری که $\|f - g\|_p < \varepsilon$. بنابر قضیهٔ ۹.۲۵، کافی است فرض کنیم $f = \chi_A$ که در آن A یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است به طوری که $\mu^*(A) < \infty$.

بنابر قضیهٔ ۳.۲۱، یک تابع پیوسته مانند $g: X \to [0, 1]$ با محافظ فشرده هست به طوری که $\int|\chi_A - g|d\mu < 2^{-p}\varepsilon^p$. (توجه کنید که $|\chi_A - g| \leq 2$ برقرار است.) ولی، در این صورت،

$$\|\chi_A - g\|_p = \left(\int|\chi_A - g|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int|\chi_A - g|.|\chi_A - g|^{p-1}d\mu\right)^{1/p}$$
$$\leq 2\left(\int|\chi_A - g|d\mu\right)^{1/p} < 2.2^{-1}\varepsilon = \varepsilon,$$

و برهان تمام است.

R را مجهز به اندازهٔ μ درنظر می‌گیریم که به هر زیرمجموعهٔ R مقدار صفر نسبت می‌دهد؛ یعنی $\mu = 0$. در این صورت μ یک اندازهٔ بورل منتظم است و، به وضوح، هر دو تابع بر R، μ- تقریباً همه جا مساویند. لذا، در این حالت، همهٔ توابع بر R را می‌توان با تابع صفر یکی کرد، وضعیتی که خیلی سودمند نخواهد بود.

بنابراین، مطلوب آن است که با اندازه‌های بورل منتظمی کار کنیم که توابع پیوستهٔ متمایز هم‌ارز نباشند. برای این کار، باید بدانیم که اندازه در کجای فضا «متمرکز» است.

قضیهٔ ۱۱.۲۵. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف X باشد. در این صورت یک زیرمجموعهٔ بستهٔ منحصر به فرد مانند E از X با دو خاصیت زیر وجود دارد:*

۱. $\mu(E^c) = 0$؛ و

۲. ***هرگاه V یک مجموعهٔ باز باشد به طوری که $E \cap V \neq \varnothing$، آنگاه*** $\mu(E \cap V) > 0$.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{O} = \cup\{V: \mu(V) = 0$ باز است و $V\}$. واضح است که $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز است و حکم می‌کنیم که $\mu(\mathcal{O}) = 0$.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathcal{O}$ باشد. از تعریف $\mathcal{O}$ معلوم می‌شود که مجموعه‌های بازی چون $V_1, \dots, V_n$ همه از اندازهٔ صفر وجود دارند به طوری که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$. لذا، $\mu(K) = 0$. حال حکم ما از $\mu(\mathcal{O}) = \sup\{\mu(K): K \subseteq \mathcal{O}$ فشرده بوده و $K\}$ به دست می‌آید؛ ر.ک. تعریف ۴.۱۵. حال قرار می‌دهیم $E = \mathcal{O}^c$. E یک مجموعهٔ بسته است و $\mu(E^c) = \mu(\mathcal{O}) = 0$. از آن سو، هرگاه V یک مجموعهٔ باز باشد به طوری که $E \cap V \neq \varnothing$، آنگاه $\mu(E \cap V) > 0$ باید

برقرار باشد. در غیر این صورت، هرگاه $\mu(E\cap V) = 0$ برقرار باشد، آنگاه $0 = \mu(V) = \mu(E\cap V) + \mu(E^c\cap V)$ نیز برقرار است ایجابگر آنکه $V \subseteq \mathcal{O} = E^c$ که با $E\cap V\neq\varnothing$ در تضاد است.

برای یکتایی E، فرض کنیم مجموعهٔ بستهٔ دیگری مانند F در (۱) و (۲) صدق نماید. از (۱) فوراً معلوم می‌شود که $F^c \subseteq \mathcal{O}$؛ و درنتیجه $E = \mathcal{O}^c \subseteq F$ برقرار است.

از آن سو، چون $\mu(\mathcal{O}\cap F) = 0$، از (۲) نتیجه می‌شود که $\mathcal{O}\cap F = \varnothing$. لذا، $F \subseteq \mathcal{O}^c = E$؛ درنتیجه $E = F$ و برهان تمام خواهد بود.

مجموعهٔ منحصر به فرد E معین شده با قضیهٔ ۱۱.۲۵ را **محافظ** μ نامیده و آن را با $\mathrm{Supp}\,\mu$ نشان می‌دهیم؛ یعنی $\mathrm{Supp}\,\mu = E$. اگر فضای اندازه را مجموعه‌ای بینگاریم که روی آن ماده‌ای توزیع شده است، $\mathrm{Supp}\,\mu$ نمایش بخشهایی از مجموعه است که جرم در آنها قرار دارد.

محافظ یک اندازهٔ بورل منتظم چقدر می‌تواند «بزرگ» باشد؟ هرگاه $X = R^n$، آنگاه مثلاً محافظ اندازهٔ صفر مجموعهٔ تهی است. از آن سو، اندازهٔ لبگ λ در $\mathrm{Supp}\,\lambda = R^n$ صدق می‌کند.

فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ X با $\mathrm{Supp}\,\mu = X$ باشد. در این صورت دو تابع حقیقی پیوسته مانند f و g بر X صادق در $f = g$ ت. هـ. هست اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$، $f(x) = g(x)$ برقرار باشد. این امر فوراً با توجه به اینکه هرگاه $f(a)\neq g(a)$ به ازای $a \in X$ ای برقرار باشد، آنگاه $f(x)\neq g(x)$ به ازای هر x در مجموعهٔ باز ناتهیی مانند V برقرار است به دست می‌آید. چون $\mu(V) > 0$، برقراری $f = g$ ت. هـ. ناممکن است. به خصوص، نتیجه می‌شود که $\|f\|_p = (\int|f|^p d\mu)^{1/p}$ معرف یک نرم شبکه‌ای بر $C_c(X)$، یعنی شبکهٔ برداری تمام توابع حقیقی پیوسته بر X با محافظ فشرده، می‌باشد. به طور کلی، $C_c(X)$ همراه با یک نرم L_p یک شبکهٔ باناخ نیست. اما، بنابر قضیهٔ ۱۰.۲۵، نتیجهٔ زیر برقرار می‌باشد.

قضیهٔ ۱۲.۲۵. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف X با $\mathrm{Supp}\,\mu = X$ باشد. در این صورت، به ازای هر $1 \leq p < \infty$، تتمیم $C_c(X)$ با نرم L_p شبکهٔ باناخ $L_p(\mu)$ است.*

به طور کلی، فضاهای L_p «قیاسپذیر» نیستند. به عنوان مثال، فرض کنیم $X = (0, \infty)$ با اندازهٔ لبگ باشد. در این صورت تابع $f(x) = x^{-1/2}$ به ازای $0 < x \leq 1$ و $f(x) = 0$ به ازای $x > 1$ تعلق به

$L_1(\mu)$ دارد، ولی متعلق به $L_2(\mu)$ نیست. از آن سو، تابع $g(x) = 0$ اگر $0 < x < 1$ و $g(x) = x^{-1}$ اگر $x \geq 1$ تعلق به $L_2(\mu)$ دارد ولی متعلق به $L_1(\mu)$ نیست.

در زیر دو نتیجهٔ مقایسهٔ فضاهای L_p ارائه شده است. اولی در حالتی است که (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی است.

قضیهٔ ۱۳.۲۵. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای *اندازهٔ متناهی* بوده و $1 \leq p < q \leq \infty$. در این صورت $L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$ برقرار است.

برهان. در این حالت واضح است که $L_\infty(\mu) \subseteq L_p(\mu)$ به ازای هر $1 \leq p < \infty$ برقرار است. لذا، فرض می‌کنیم $1 \leq p < q < \infty$.

قرار می‌دهیم $r = q/p > 1$ و $s > 1$ را چنان می‌گیریم که $1/r + 1/s = 1$. هرگاه $f \in L_q(\mu)$، آنگاه واضح است که $|f|^p \in L_r(\mu)$. چون تابع ثابت ۱ تعلق به $L_s(\mu)$ دارد، از قضیهٔ ۳.۲۵ معلوم می‌شود که $|f|^p = |f|^p.1 \in L_1(\mu)$؛ یعنی $f \in L_p(\mu)$ و برهان قضیه تمام خواهد بود.

تبصره. باید توجه داشت که اگر $L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$ برقرار باشد، $L_q(\mu)$ یک ایده‌آل از شبکهٔ برداری $L_p(\mu)$ است.

چند نمونهٔ مهم از فضاهای L_p با توجه به اندازهٔ شمارشی بر N به دست می‌آیند. در این حالت توابع بر N به صورت دنباله نموده شده و انتگرالگیری با جمعبندی عوض می‌شود. این فضاهای L_p «فضاهای L_p کوچک» نام دارند و با l_p نموده می‌شوند. به عبارت دیگر، هرگاه $0 < p < \infty$، آنگاه l_p از تمام دنباله‌های $x = \{x_n\}$ تشکیل شده است که $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$ که درآن $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$.
به همین نحو، l_∞ فضای برداری همهٔ دنباله‌های کراندار با نرم سوپرمم است.

فضاهای l_p، برخلاف فضاهای L_p کلی، همواره قیاسپذیرند. به تفاوت بین قضیهٔ بعد و قضیهٔ قبل توجه نمایید.

قضیهٔ ۱۴.۲۵. هرگاه $1 \leq p < q \leq \infty$، *آنگاه* $l_p \subseteq l_q$. به علاوه، شمول حقیقی می‌باشد.

برهان. ملاحظه می‌کنیم که اگر $x = \{x_n\}$ به فضای l_p ای که $1 \leq p < \infty$ تعلق داشته باشد، $\{x_n\}$ باید یک دنبالهٔ کراندار (درواقع، همگرا به صفر) بوده و درنتیجه $x \in l_\infty$؛ یعنی $l_p \subseteq l_\infty$ به ازای هر

$1 \leq p < \infty$ برقرار است.

لذا، فرض می‌کنیم $1 < q < \infty$ و $x = \{x_n\} \in l_p$. چون $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$، kای هست به طوری که به ازای هر $n \geq k$، $|x_n| < 1$. لذا، به ازای هر $n \geq k$، $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ برقرار است، و این نشان می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$. بنابراین، $x \in l_q$؛ و درنتیجه $l_p \subseteq l_q$.

برای قسمت آخر، توجه می‌کنیم که هرگاه به ازای هر n داشته باشیم $x_n = n^{-1/p}$، آنگاه $x = \{x_n\} \in l_q$ ولی $x \notin l_p$.

دو عدد p و q در $[1, \infty]$ را **نماهای مزدوج** نامیم اگر $1/p + 1/q = 1$. ما قرارداد $1/\infty = 0$ را حفظ می‌کنیم؛ لذا، ۱ و ∞ نماهای مزدوج می‌باشند.

فرض کنیم p و q دو نمای مزدوج باشند. هرگاه $g \in L_q(\mu)$، آنگاه از قضیهٔ ۳.۲۵ نتیجه می‌شود که به ازای هر $f \in L_p(\mu)$، $fg \in L_1(\mu)$. بنابراین، به ازای هر $g \in L_q(\mu)$، تابع F_g را می‌توان بر $L_p(\mu)$ با

$$F_g(f) = \int fg d\mu$$

به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ تعریف کرد. واضح است که F_g یک تابعی خطی است و، درواقع، همانطور که نتیجهٔ بعد نشان می‌دهد، یک تابعی خطی کراندار است.

قضیهٔ ۱۵.۲۵. فرض کنیم $1 < p \leq \infty$، q نمای مزدوج آن بوده، و $g \in L_q(\mu)$. در این صورت تابعی خطی با تعریف

$$F_g(f) = \int fg d\mu$$

به ازای $f \in L_p(\mu)$ یک تابعی خطی کراندار بر $L_p(\mu)$ است به طوری که $\|F_g\| = \|g\|_q$ برقرار است.

برهان. ابتدا حالت $p = \infty$ و $q = 1$ را درنظر می‌گیریم. از آنجا که به ازای هر $f \in L_\infty(\mu)$، $|F_g(f)| \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_\infty$، F_g یک تابعی خطی کراندار است و $\|F_g\| \leq \|g\|_1$ برقرار است. از آن سو، فرض کنیم $f = \operatorname{Sgn} g$ که در آن $\operatorname{Sgn} g(x) = 1$ اگر $g(x) \geq 0$ و $\operatorname{Sgn} g(x) = -1$ اگر $g(x) < 0$. در این صورت f تعلق به $L_\infty(\mu)$ داشته و در $\|f\|_\infty = 1$ و $F_g(f) = \int |g| d\mu = \|g\|_1$ صدق می‌کند. بنابراین، $\|F_g\| = \|g\|_1$.

حال فرض کنیم $1 < p < \infty$. بنابر نامساوی هولدر،

$$|F_g(f)| = \left|\int fg d\mu\right| \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_p$$

به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ برقرار است. لذا، F_g یک تابعی خطی کراندار است و $\|F_g\| \le \|g\|_q$ برقرار می‌باشد. حال فرض کنیم $f = |g|^{q-1}\operatorname{Sgn} g$. واضح است که f یک تابع اندازه‌پذیر بوده و $|f|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$ برقرار است؛ درنتیجه $f \in L_p(\mu)$. چون $fg = |g|^q$، پس

$$\begin{aligned} F_g(f) &= \int fg d\mu = \int |g|^q d\mu = \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/p} . \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q} \\ &= \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} . \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p . \|g\|_q ; \end{aligned}$$

یعنی $\|g\|_q \le \|F_g\|$. لذا، $\|F_g\| = \|g\|_q$ برقرار است و برهان قضیه تمام خواهد بود.

قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که به ازای هر $1 < p \le \infty$ می‌توان یکمتری خطی $g \to F_g$ از $L_q(\mu)$ به توی $L^*_p(\mu)$، یعنی دوگان نرمی $L_p(\mu)$، را تعریف کرد. توجه کنید که این یکمتری شبکه نگهدار نیز هست. درواقع، هرگاه $0 \le f \in L_p(\mu)$، آنگاه بنابر قضیهٔ ۲.۲۴،

$$\begin{aligned} (F_g)^+(f) &= \sup\{F_g(h) : 0 \le h \le f\} = \sup\left\{\int hg d\mu : 0 \le h \le f\right\} \\ &= \int fg^+ d\mu = F_{g^+}(f). \end{aligned}$$

بنابراین، $(F_g)^+ = F_{g^+}$ برقرار است ایجابگر آنکه $g \to F_g$ نیز یک یکمتری شبکه‌ای است.

آیا هر تابعی خطی کراندار بر $L_p(\mu)$ به صورت مذکور در قضیهٔ ۱۵.۲۵ با یک تابع $L_q(\mu)$ قابل نمایش است؟ اگر $1 < p < \infty$، جواب مثبت است. این یک نتیجهٔ کلاسیک از اف. ریس است. برهانی از این قضیه، و چند کاربرد آن، تا بخش ۲۷ به تعویق می‌افتد. بنابراین، $L_p^*(\mu)$ و $L_q(\mu)$ را می‌توان (تحت یکریختی فوق) به عنوان شبکه‌های باناخ یکسان درنظر گرفت. این اغلب این طور بیان می‌شود که می‌گوییم به ازای $1 < p < \infty$، دوگان نرمی $L_p(\mu)$ مساوی $L_q(\mu)$ است؛ با علامات، $L^*_p(\mu) = L_q(\mu)$.

وقتی $p = \infty$، یکمتری شبکه‌ای $g \to F_g$ از $L_1(\mu)$ به $L^*_\infty(\mu)$ بندرت بروست. مثال زیر وضعیت را شفاف خواهد ساخت.

مثال ۱۶.۲۵. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد به طوری که یک دنبالهٔ از هم جدا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مانند $\{E_n\}$ با خاصیت $\mu^*(E_n) > 0$ به ازای هر n و $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ وجود دارد. فرض کنیم L گردایهٔ تمام توابع حقیقی f تعریف شده بر X باشد که بر هر E_n مقدار ثابت $f(E_n)$ داشته، و $\lim f(E_n)$ در R وجود دارد. واضح است که L یک زیرشبکهٔ برداری $L_\infty(\mu)$ است.

حال تابعی خطی F بر L را با $F(f) = \lim f(E_n)$ به ازای هر $f \in L$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $|F(f)| \le \|f\|_\infty$ به ازای هر $f \in L$ برقرار است؛ و درنتیجه F یک تابعی خطی پیوسته است. بنابر

قضیهٔ ۲۵.۲۳، F را می‌توان با حفظ نرم اصلی‌اش به $L_\infty(\mu)$ وسعت داد. این توسیع را مجدداً با F نشان می‌دهیم.

حکم می‌کنیم که F را نمی‌توان با یک تابع از $L_1(\mu)$ نمایش داد. برای مشاهدهٔ این امر، به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم $g \in L_1(\mu)$ ای باشد که $F(f) = \int fg d\mu$ به ازای هر $f \in L_\infty(\mu)$ برقرار باشد. قرار می‌دهیم $G_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$ و $f_n = \chi_{G_n}$. در این صورت $\{f_n\}$ دنباله‌ای از L است و $F(f_n) = 1$ به ازای هر n برقرار است. از آن سو، به خاطر $|f_n g| \le |g|$ و $f_n g \to 0$، از قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ معلوم می‌شود که $F(f_n) = \int f_n g d\mu \to 0$ که ناممکن است. بنابراین، یکمتری شبکه‌ای $g \to F_g$ از $L_1(\mu)$ به $L^*_\infty(\mu)$ برو نیست.

بعدها (قضیهٔ ۱۰.۲۷) خواهیم دید که اگر فضای اندازه σ- متناهی باشد، آنگاه دوگان نرمی $L_1(\mu)$ با $L_\infty(\mu)$ یکی است.

قضیهٔ نمایش برای تابعیهای خطی کراندار بر فضاهای l_p را می‌توان مستقیماً ثابت کرد.

قضیهٔ ۱۷.۲۵. *فرض کنیم $1 \le p < \infty$ و f یک تابعی خطی پیوسته بر l_p باشد. در این صورت $y = \{y_n\} \in l_q$ منحصر به فرد [که $1/p + 1/q = 1$] وجود دارد به طوری که*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

به ازای هر $x = \{x_n\} \in l_p$ برقرار است.

برهان. به ازای هر n، e_n را دنباله‌ای می‌گیریم که در مختص n م مقدار یک و در هر مختص دیگر مقدار صفر دارد. واضح است که هرگاه $x = \{x_n\} \in l_p$، آنگاه $\lim \|x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|_p = 0$. لذا، $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)$ برقرار است. فرض کنیم به ازای هر n، $y_n = f(e_n)$. برای اتمام برهان باید نشان دهیم که $y = \{y_n\} \in l_q$. هرگاه $p = 1$، آنگاه $|y_n| = |f(e_n)| \le \|f\|$؛ درنتیجه $y \in l_\infty$.

حال به ازای $1 < p < \infty$ قرار می‌دهیم $a_n = y_n \cdot |y_n|^{q-2}$ اگر $y_n \neq 0$ و $a_n = 0$ اگر $y_n = 0$. در این صورت، به ازای هر n، $|a_n|^p = |y_n|^q = a_n y_n$. به علاوه،

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)$$

$$\le \|f\| \cdot \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_p = \|f\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}$$

$$= \|f\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/p}.$$

لذا، $\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \le \|f\| < \infty$ به ازای هر n برقرار است. این ایجاب می‌کند که $y = \{y_n\}$ تعلق به l_q دارد و، طبق مطلوب، $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

در یک فضای نرمدار داشتن مشخصه‌ای برای زیرمجموعه‌های فشردهٔ آن اغلب مفید است. قضیهٔ آسکولی ـ آرزلا یک چنین محک برای زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضاهای $C(X)$ را به دست می‌دهد. حال زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضاهای باناخ $L_p[0, 1]$ را توصیف می‌کنیم. برای این کار، به یک بحث مقدماتی نیاز داریم.

هر تابع $f \in L_p[(0,1])$ را بر تمام R با $f(t) = 0$ اگر $t \notin [0, 1]$ تعریف می‌کنیم. همچنین، به خاطر سادگی، به جای $\int_{[a, b]} f d\lambda$ می‌نویسیم $\int_a^b f(x)dx$. هرگاه $1 \le p \le \infty$، آنگاه به ازای $f \in L_p[(0,1])$ و $h > 0$ تعریف می‌کنیم: به ازای هر $t \in [0,1]$،

$$f_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(x)dx.$$

توجه کنید که انتگرال فوق وجود دارد زیرا، بنابر قضیهٔ ۱۳.۲۵، داریم $L_p([0, 1]) \subseteq L_1([0, 1])$.

هر f_h یک تابع پیوسته است. درواقع، هرگاه $\lim t_n = t$، آنگاه

$$g_n = f\chi_{(t_n - h,\ t_n + h)} \to f\chi_{(t - h,\ t + h)}$$

برقرار است. لذا، در پرتو $|g_n| \le |f|$، قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ ایجاب می‌کند که

$$\lim f_h(t_n) = \frac{1}{2h}\lim\int_{t_n-h}^{t_n+h} f(x)dx = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(x)dx = f_h(t).$$

به خصوص، توجه کنید که چون $C[0, 1] \subseteq L_p([0, 1])$، پس به ازای هر $h > 0$، $f_h \in L_p([0, 1])$.

لم ۱۸.۲۵. فرض کنیم $1 \le p < \infty$ و $f \in L_p([0, 1])$. در این صورت، به ازای هر $h > 0$، تابع f_h در روابط زیر صدق می‌کند:

آ. به ازای هر $t \in [0, 1]$، $|f_h(t)| \le (2h)^{-1/p}\|f\|_p$ **؛ و**

ب. $\|f_h\|_p \le \|f\|_p$.

برهان. هرگاه $p > 1$، آنگاه $1 < q < \infty$ را با $1/p + 1/q = 1$ اختیار کرده و با اعمال نامساوی

هولدر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|f_h(t)|^p &= \frac{1}{(2h)^p}\left|\int_{t-h}^{t+h} 1.f(x)dx\right|^p \\ &\leq \frac{1}{(2h)^p}\left[\int_{t-h}^{t+h} 1dx\right]^{p/q}.\int_{t-h}^{t+h}|f(x)|^p dx = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|f(x)|^p dx.\end{aligned}$$

لذا،

$$|f_h(t)|^p \leq \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|f(x)|^p dx \tag{1}$$

به ازای هر $1 < p < \infty$ و $t \in [0, 1]$ برقرار است. همچنین، نامساوی (۱) به ازای $p = 1$ درست است؛ و لذا، حکم (آ) فوراً نتیجه می‌شود.

از آن سو، از نامساوی (۱) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_h(t)|^p dt &\leq \frac{1}{2h}\int_0^1\left[\int_{t-h}^{t+h}|f(x)|^p dx\right]dt \\ &= \frac{1}{2h}\int_0^1\left[\int_{-h}^{h}|f(t+y)|^p dy\right]dt.\end{aligned} \tag{2}$$

(در اینجا از جانشانی $x = t + y$ استفاده کرده‌ایم؛ ر.ک. تمرین ۱۴ از بخش ۱۸.) چون $f(t + y)$ یک تابع اندازه‌پذیر لبگ بر R^2 است (ر.ک. تمرین ۱۵ از بخش ۲۲)، از قضیهٔ تونلی (قضیهٔ ۷.۲۲) معلوم می‌شود که

$$\int_0^1\left[\int_{-h}^{h}|f(t+y)|^p dy\right]dt = \int_{-h}^{h}\left[\int_0^1|f(t+y)|^p dt\right]dy \leq 2h\int_0^1|f(x)|^p dx.$$

لذا، رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که

$$\int_0^1 |f_h(t)|^p dt \leq \int_0^1 |f(x)|^p dx;$$

درنتیجه $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$ برقرار است.

ا. ان. کلموگروف (A.N.Kolmogorov) زیرمجموعه‌های فشردهٔ $L_p([0, 1])$ را وقتی $1 < p < \infty$ توصیف نمود. بعدها ا. تولاجکف (A. Tulajkov) ثابت کرد همین محک برای زیرمجموعه‌های فشردهٔ $L_1[0, 1]$ برقرار است. در زیر این نتیجه ارائه شده است.

قضیهٔ ۱۹.۲۵. (کلموگروف ـ تولاجکف). *فرض کنیم $1 \leq p < \infty$ و A یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار از $L_p([0, 1])$ باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:*

۱. مجموعهٔ A (نسبت به نرم L_p) فشرده است؛

۲. به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ هست به طوری که $\|f - f_h\|_p < \varepsilon$ به ازای هر $f \in A$ و $0 < h < \delta$ برقرار است.

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنیم $\varepsilon > 0$. چون (طبق قضیهٔ ۱۰.۲۵) $C[0, 1]$ (نسبت به نرم L_p) در $L_p([0, 1])$ چگال بوده و A فشرده است، به آسانی معلوم می‌شود که توابع پیوستهٔ $f_1, \ldots, f_n$ هست به طوری که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$.

بنابر پیوستگی یکنواخت هر f_i، $\delta > 0$ ای هست به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $t, x \in [0, 1]$ که $|x - t| < \delta$، داریم $|f_i(t) - f_i(x)| < \varepsilon$. به خصوص، هرگاه $0 < h < \delta$، آنگاه

$$\left|f_i(t)-(f_i)_h(t)\right| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h}\left[f_i(t)-f_i(x)\right]dx\right| \leq \varepsilon$$

برقرار است. لذا $\|f_i - (f_i)_h\|_p \leq \varepsilon$.

حال اگر $f \in A$، $1 \leq i \leq n$ را با $f \in B(f_i, \varepsilon)$ اختیار می‌کنیم. بنابر لم ۱۸.۲۵، داریم $\|f_h - (f_i)_h\|_p \leq \|f - f_i\|_p < \varepsilon$. بنابراین،

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - f_i\|_p + \|f_i - (f_i)_h\|_p + \|(f_i)_h - f_h\|_p < 3\varepsilon$$

به ازای هر $f \in A$ و $0 < h < \delta$ برقرار است.

(۱) $\Leftarrow$ (۲). بنابر قضیهٔ ۲۵.۵، کافی است نشان دهیم که A (نسبت به نرم L_p) کلاً کراندار است.

برای این کار، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. $h > 0$ را چنان می‌گیریم که $\|f - f_h\|_p < \varepsilon$ به ازای هر $f \in A$ برقرار باشد. حال $M > 0$ را طوری می‌گیریم که به ازای هر $f \in A$، $\|f\|_p \leq M$. در این صورت، بنابر لم ۱۸.۲۵، نتیجه می‌شود که

$$|f_h(t)| \leq M(2h)^{-1/p} = K$$

به ازای هر $t \in [0, 1]$ و $f \in A$ برقرار است. قرار می‌دهیم $A_h = \{f_{hh} : f \in A\}$، که در آن

$$f_{hh}(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f_h(x)dx.$$

واضح است که به ازای هر $t \in [۰, ۱]$ و $f \in A$، $K \leq |f_{hh}(t)|$؛ و درنتیجه A_h یک مجموعهٔ به طور یکنواخت کراندار است. حال حکم می‌کنیم که مجموعهٔ توابع پیوستهٔ A_h همپیوسته است.

برای مشاهدهٔ این امر، توجه می‌کنیم که اگر $f \in A$ و $t < s$،

$$|f_{hh}(s) - f_{hh}(t)| = \frac{۱}{۲h}\left| \int_{s-h}^{s+h} f_h(x)dx - \int_{t-h}^{t+h} f_h(x)dx \right|$$

$$= \frac{۱}{۲h}\left| \int_{t+h}^{s+h} f_h(x)dx - \int_{t-h}^{s-h} f_h(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{۱}{۲h}\left[\int_{t+h}^{s+h} |f_h(x)|\, dx + \int_{t-h}^{s-h} |f_h(x)|\, dx \right]$$

$$\leq \frac{۱}{۲h}[۲K(s-t)] = \frac{K}{h}(s-t)$$

برقرار است، و این نشان می‌دهد که A_h یک مجموعهٔ همپیوسته است.

حال، بنابر قضیهٔ آسکولی ـ آرزلا، A_h یک زیرمجموعهٔ کلاً کراندار از $C[۰, ۱]$ (نسبت به نرم سوپرمم) است. تابعهای $f_۱, \ldots, f_n \in A$ را چنان می‌گیریم که به ازای هر $f \in A$ عددی مانند $۱ \leq i \leq n$ باشد که $\|f_{hh} - (f_i)_{hh}\|_\infty < \varepsilon$. به خصوص، توجه می‌کنیم که

$$\|f - f_i\|_p \leq \|f - f_h\|_p + \|f_h - f_{hh}\|_p + \|f_{hh} - f_i\|_p < ۲\varepsilon + \|f_{hh} - f_i\|_p$$
$$< ۲\varepsilon + \|f_{hh} - (f_i)_{hh}\|_p + \|(f_i)_{hh} - (f_i)_h\|_p + \|(f_i)_h - f_i\|_p < ۵\varepsilon.$$

لذا، A (نسبت به نرم L_p) کلاً کراندار است و برهان قضیه تمام خواهد بود.

تمرینات

۱. فرض کنید $f \in L_p(\mu)$ و $\varepsilon > ۰$. نشان دهید که

$$\mu^*(\{x \in X: |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-p} \int |f|^p d\mu .$$

۲. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از $L_p(\mu)$ با خاصیت $۱ \leq p < \infty$ باشد. نشان دهید هرگاه $\lim \|f_n - f\|_p = ۰$ در $L_p(\mu)$ برقرار باشد، آنگاه $\{f_n\}$ در اندازه به f همگراست.

[**راهنمایی.** از تمرین پیش استفاده کنید.]

۳. نشان دهید که در نامساوی لم ۲.۲۵ تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a = b$. با استفاده از این نشان دهید هرگاه $f \in L_p(\mu)$ و $g \in L_q(\mu)$ که در آنها $۱ < p < \infty$ و $۱/p + ۱/q = ۱$، آنگاه $\int |fg|\, d\mu = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ برقرار است اگر و فقط اگر دو ثابت مانند $C_۱$ و $C_۲$ (که هر دو صفر نیستند) وجود داشته باشند به طوری که $C_۱ |f|^p = C_۲ |g|^q$ برقرار باشد.

۴. فرض کنید $\mu^*(X) = 1$ و $0 < p < q \leq \infty$. هرگاه f در $L_q(\mu)$ باشد، آنگاه نشان دهید که $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ برقرار است.

[**راهنمایی.** از نامساوی هولدر استفاده کنید.]

۵. فرض کنید $f \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$ و نشان دهید که

آ. به ازای هر $1 < p < \infty$، $f \in L_p(\mu)$؛

ب. هرگاه $\mu^*(X) < \infty$، آنگاه $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ برقرار است.

[**راهنمایی.** فرض کنید $\varepsilon > 0$. در این صورت $E = \{x \in X: |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ از اندازهٔ مثبت بوده و $(\|f\|_\infty - \varepsilon).\chi_E \leq |f|$ برقرار است.]

۶. نشان دهید به ازای $1 \leq p < \infty$، l_p یک شبکهٔ باناخ جدایی‌پذیر است.

۷. نشان دهید که l_∞ جدایی‌پذیر نیست.

[**راهنمایی.** گردایهٔ تمام دنباله‌ها با درایه‌های صفر و یک را در نظر بگیرید.]

۸. نشان دهید که $L_\infty([0, 1])$ با اندازهٔ لبگ جدایی‌پذیر نیست.

[**راهنمایی.** مجموعهٔ $\{\chi_{[0, x]}: 0 < x < 1\}$ را در نظر بگیرید.]

۹. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف بوده و نقطهٔ $a \in X$ ثابت باشد. همچنین اندازهٔ μ بر X بر تمام زیرمجموعه‌های X با $\mu(A) = 1$ اگر $a \in A$ و $\mu(A) = 0$ اگر $a \notin A$ تعریف شود. به بیان دیگر، μ اندازهٔ دیراک باشد (ر.ک. مثال ۴.۱۰). نشان دهید که μ یک اندازهٔ بورل منتظم بوده و $\text{Supp}\,\mu = \{a\}$.

۱۰. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر R^n باشد. نشان دهید گردایهٔ تمام توابع حقیقی بر R^n بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر چگال نرمی در $L_p(\mu)$ به ازای $1 \leq p < \infty$ است.

[**راهنمایی.** ر.ک. تمرین ۵ از بخش ۲۱.]

۱۱. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه با $\mu^*(X) = 1$ باشد. همچنین تابع $f \in L_1(\mu)$ به ازای تقریباً هر x در $f(x) \geq M > 0$ صدق نماید. نشان دهید که $\ln(f) \in L_1(\mu)$ و $\int \ln(f) d\mu \leq \ln(\int f d\mu)$ برقرار است.

[**راهنمایی.** در نامساوی $1 - 1/t \leq \ln t \leq t - 1$ قرار دهید $t = (f(x))/\|f\|_1$ و انتگرالگیری کنید.]

۱۲. با مثال نشان دهید که قضیهٔ ۶.۲۵ به ازای $p = \infty$ نادرست است.

۱۳. این تمرین نشان می‌دهد که قضیهٔ ۱۵.۲۵ به ازای $p = 1$ نادرست است و شرط لازم و کافی برای آنکه نگاشت $g \to F_g$ از $L_\infty(\mu)$ به توی $L^*_1(\mu)$ یکمتری باشد را ارائه می‌دهد.

آ. نشان دهید که به ازای هر $g \in L_\infty(\mu)$، تابعی خطی $F_g(f) = \int fg d\mu$ به ازای $f \in L_1(\mu)$ یک تابعی خطی کراندار بر $L_1(\mu)$ است به طوری که $\|F_g\| \leq \|g\|_\infty$ برقرار است.

ب. مجموعهٔ ناتهی X و اندازهٔ μ که بر هر زیرمجموعهٔ X با $\mu(\varnothing) = 0$ و $\mu(A) = \infty$ اگر $A \neq \varnothing$ تعریف شده است را درنظر بگیرید. نشان دهید که $L_1(\mu) = \{0\}$ و $L_\infty(\mu) = B(X)$ [توابع کراندار بر X] و از این نتیجه بگیرید که $g \in L_\infty(\mu)$ در $\|F_g\| = \|g\|_\infty$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $g = 0$.

پ. گوییم فضای اندازهٔ (X, S, μ) دارای **خاصیت زیرمجموعهٔ متناهی** است اگر هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر از اندازهٔ نامتناهی زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از اندازهٔ مثبت متناهی داشته باشد.
نشان دهید که نگاشت خطی $g \rightarrow F_g$ از $L_\infty(\mu)$ به توی $L^*_1(\mu)$ یک یکمتری شبکه‌ای است اگر و فقط اگر (X, S, μ) دارای خاصیت زیرمجموعهٔ متناهی باشد.

۱۴. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. همچنین مجموعه‌های اندازه‌پذیری مانند $E_1, \ldots, E_n$ باشند به طوری که به ازای $1 \leq i \leq n$، $0 < \mu(E_i) < \infty$، $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$، و هر E_i شامل یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر ناتهی حقیقی نیست. نشان دهید که $L^*_\infty(\mu) = L_1(\mu)$؛ یعنی نشان دهید که $g \rightarrow F_g$ از $L_1(\mu)$ به $L^*_\infty(\mu)$ بروست.
[**راهنمایی.** هرگاه $F \in L^*_\infty(\mu)$، قرار دهید $c_i = F(\chi_{E_i})$، $g = \sum \left[c_i / \mu^*(E_i) \right] \cdot \chi_{E_i}$ و نشان دهید که $F = F_g$ برقرار است.]

۱۵. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $0 < p < 1$.

آ. با مثال نقض نشان دهید که $\|\cdot\|_p$ یک نرم بر $L_p(\mu)$ نیست.

ب. به ازای هر $f, g \in L_p(\mu)$ قرار دهید

$$d(f, g) = \int |f - g|^p d\mu = (\|f - g\|_p)^p$$

و نشان دهید d یک متر بر $L_p(\mu)$ است و $L_p(\mu)$ همراه با d یک فضای متری تام است.
[**راهنمایی.** برای نامساوی مثلثی، توجه کنید که $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ به ازای هر جفت عدد حقیقی نامنفی a و b برقرار است.]

۱۶. فرض کنید $(0, \infty)$ به اندازهٔ لبگ مجهز شده و $1 < p < \infty$. به ازای هر $f \in L_p(\lambda)$، برای $x > 0$ قرار دهید $T(f)(x) = x^{-1} \int f \chi_{(0, x)} d\lambda$. نشان دهید T یک عملگر خطی کراندار یک به یک از $L_p((0,\infty))$ به توی خود است به طوری که $\|T\| = p/(p - 1)$.
[**راهنمایی.** فرض کنید $0 \leq f \in C_c((0, \infty))$. با انتگرالگیری جزء به جزء و استفاده از نامساوی هولدر به دست آورید

$$(\| T(f) \|_p)^p = \int_{\circ}^{\infty}\left[\frac{1}{x}\int_{\circ}^{x} f(t)dt\right]^p dx = \frac{1}{1-p}\int_{\circ}^{\infty}\left[\int_{\circ}^{x} f(t)dt\right]^p d(x^{1-p})$$

$$= \frac{p}{p-1}\int_{\circ}^{\infty} f(x)\left[T(f)(x)\right]^{p-1} dx$$

$$\leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \cdot \left[\int_{\circ}^{\infty}[T(f)(x)]^{q(p-1)}dx\right]^{1/q}$$

$$= \frac{p}{p-1}\|f\|_p \cdot (\| T(f) \|_p)^{p/q}.$$

حال قضیهٔ ۱۰.۲۵ را به کار گیرید. برای $\|T\|$ از دنبالهٔ توابع $f_n(x) = x^{(n^{-1}-1)p^{-1}}$ اگر $1 > x > \circ$ و $f_n(x) = \circ$ اگر $x \geq 1$ استفاده نمایید.]

۱۷. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی باشد. نشان دهید که قضیهٔ ۹.۲۵ به ازای $p = \infty$ درست است؛ یعنی نشان دهید که توابع پله‌ای چگال نرمی در $L_\infty(\mu)$ اند.

۱۸. نشان دهید که **مکعب هیلبرت** (Hilbert) [مجموعهٔ تمام $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ ها به طوری که $|x_n| \leq 1/n$ به ازای هر n برقرار است] زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از l_2 است.

مسائل دوره‌ای

۱. نشان دهید که تابعی خطی f بر فضای نرمدار X ناپیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in X$ و $r > \circ$،

$$f(B(a, r)) = \{f(x): \|a - x\| < r\} = R.$$

۲. هرگاه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای متری X باشد، آنگاه نشان دهید که یک اندازهٔ بورل منتظم مانند μ بر X هست که $\text{Supp}\ \mu = K$.

۳. هرگاه $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار نرمی از $L_2(\mu)$ باشد، آنگاه نشان دهید که $f_n/n \to \circ$ ت. ه.

۴. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد به طوری که $\mu^*(X) = 1$. هرگاه $f, g \in L_1(\mu)$ دو تابع مثبت باشند که به ازای تقریباً هر x در $f(x)g(x) \geq 1$ صدق کنند، آنگاه نشان دهید که

$$\left(\int f d\mu\right).\left(\int g d\mu\right) \geq 1.$$

۵. فضای اندازهٔ (X, S, μ) با خاصیت $\mu^*(X) = 1$ را درنظر گرفته و فرض کنید $f, g \in L_2(\mu)$. هرگاه $\int f d\mu = \circ$، آنگاه نشان دهید که

$$\left(\int fg d\mu\right)^2 \leq \left[\left(\int g^2 d\mu - \left(\int g d\mu\right)^2\right]\int f^2 d\mu .$$

۶. هرگاه دو تابع $f, g \in L_3(\mu)$ در

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int f^2 g d\mu = 1$$

صدق کنند، آنگاه نشان دهید که $g = |f|$ ت. ه.

۷. خواص زیر را برای تابع $f \in L_1(\mu) \cap L_2(\mu)$ به دست آورید:

آ. به ازای هر $1 \leq p \leq 2$، $f \in L_p(\mu)$؛ و

ب. $\lim_{p\to 1} \|f\|_p = \|f\|_1$.

۸. فرض کنید اعداد حقیقی مثبت $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ در $0 < \alpha_i \leq 1$ به ازای هر i صدق کنند و $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. هرگاه $f_1, \ldots, f_n$ توابع انتگرالپذیر مثبت بر یک فضای اندازه باشند، آنگاه نشان دهید که

آ. $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \in L_1(\mu)$؛ و

ب.

$$\int f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} d\mu \leq \left(\|f_1\|_1\right)^{\alpha_1} \left(\|f_2\|_1\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\|f_n\|_1\right)^{\alpha_n}.$$

۹. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد که به ازای هر n، $0 < \mu^*(A_n) < \infty$ و $\lim \mu^*(A_n) = 0$. $1 < p < \infty$ را ثابت گرفته و قرار دهید

$$g_n = [\mu^*(A_n)]^{-1/q} \chi_{A_n} (n = 1, 2, \ldots),$$

که در آن $1/p + 1/q = 1$. ثابت کنید به ازای هر $f \in L_p(\mu)$، $\int f g_n d\mu = 0$.

۱۰. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد به طوری که $\mu^*(X) = 1$. به ازای هر $1 < p < \infty$، مجموعهٔ زیر را تعریف نمایید:

$$\mathfrak{S}_p = \{f \in L_1(\mu):\ \int |f| d\mu = 1 \text{ و } \int |f|^p d\mu = 2\}.$$

نشان دهید که به ازای هر $0 < \varepsilon < 1$، $\delta_p > 0$ای هست به طوری که به ازای هر $f \in \mathfrak{S}_p$،

$$\mu^*(\{x \in X:\ |f(x)| > \varepsilon\}) \geq \delta_p.$$

۱۱. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و به ازای $1 \leq p < \infty$، $f \in L_p(\mu)$. نشان دهید که تابع $g: [0, \infty) \to [0, \infty]$ با تعریف

$$g(t) = pt^{p-1} \mu^*(\{x \in X:\ |f(x)| \geq t\})$$

روی $[0, \infty)$ انتگرالپذیر لبگ است و

$$\int |f|^p d\mu = \int_{[0, \infty)} g(t) d\lambda(t) = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu^*(\{x \in X:\ |f(x)| \geq t\}) dt.$$

۱۲. فضای برداری توابع $\{f$ یک تابع C^∞ با محافظ فشرده بوده و $\int_{R^n} f d\lambda = 0$ $E = \{f: R^n \to R \mid$

را در نظر گرفته و نشان دهید به ازای هر $\infty > p > ۱$ ، فضای برداری E در $L_p(R^n)$ چگال است.
آیا E در $L_۱(R^n)$ چگال است؟

کتابنامه

1. M. M. Day, *Normed Linear Spaces,* 3rd Ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
2. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators I.* New York: Wiley (Interscience), 1958.
3. C. Goffman and G. Pedrick, *First Course in Functional Analysis.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965.
4. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* Heidelberg: Springer-Verlag, 1965.
5. A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis,* 2nd Ed. New York: Wiley, 1980.
6. A. C. Zaanen, *Integration.* Amsterdam: North-Holland, 1967.

فصل ۶

چند مطلب خاص در انتگرالگیری

روشهای توانای نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری در بسیاری از قسمتهای علوم به کار گرفته می‌شوند. اما، در بعضی از کاربردها، توابع مجموعه‌ای که اندازه نیستند به طور طبیعی ظاهر می‌شوند. به این دلیل، بررسی توابع مجموعه‌ای کلیتر بسیار سودمند است. در این فصل توابع مجموعه‌ای به نام «اندازه‌های علامتدار» را بررسی خواهیم کرد.

به بیان نادقیق، اندازهٔ علامتدار یک تابع σ- جمعی حقیقی وسعت یافته بر یک σ- جبر از مجموعه‌هاست. بخش اول این فصل به ساختارهای جبری و شبکه‌ای اندازه‌های علامتدار می‌پردازد و بخش بعد از آن خواص مقایسه را مطرح خواهد کرد. مهمترین خواص مقایسه خواص «پیوستگی مطلق» و "انفراد" است. در رابطه با پیوستگی مطلق، قضیهٔ بانفوذ و کلاسیک رادون ـ نیکودیم (Radon-Nikodym) در اینجا ثابت می‌شود: هرگاه اندازهٔ علامتدار متناهی ν بر σ- جبر $\sum$ نسبت به اندازهٔ σ- متناهی μ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه یک تابع μ- انتگرالپذیر (منحصر به فرد) مانند f هست به طوری که

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است. از این قضیهٔ توانا برای اثبات اینکه $L^*_p(\mu)=L_q(\mu)$ به ازای هر $1<p<\infty$ برقرار است استفاده می‌شود.

پس از مقایسهٔ اندازه‌های علامتدار، توجه خود را معطوف اندازه‌های بورل منتظم بر فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف X می‌کنیم. نتیجهٔ کلاسیک دیگر، به نام "قضیهٔ نمایش ریس" ثابت می‌شود: هرگاه F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد، آنگاه یک اندازهٔ بورل منتظم منحصر به فرد مانند μ هست به طوری که

به ازای هر $f \in C_c(X)$، $F(f) = \int_A f d\mu$.

به عنوان کاربردی از این قضیه، دوگان نرمی $C_c(X)$ برحسب اندازه‌های بورل منتظم توصیف خواهد شد.

دو بخش آخر کتاب به مشتقگیری و انتگرالگیری در R^n اختصاص دارند. ابتدا به مشتقگیری اندازه‌های علامتدار بورل بر R^n می‌پردازیم. نشان خواهیم داد که هر اندازهٔ علامتدار بورل تقریباً همه جا

مشتقپذیر است. این قضیهٔ اساسی برای به دست آوردن نتایج کلاسیک راجع به مشتقهای معمولی از توابع با تغییر کراندار به طرز مؤثری به کار خواهد رفت. بالأخره، برهان مشروح "فرمول آشنای تغییر متغیر" ارائه خواهد شد.

۲۶. اندازه‌های علامتدار

در سراسر این بخش $\sum$ یک σ- جبر ثابت از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ Xاست و اندازه‌های مورد نظر بر $\sum$ تعریف شده‌اند. چون اندازه‌های مختلف مطالعه می‌شوند، معمولاً (به خاطر سادگی) اعضای $\sum$ را ***زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر*** X می‌نامیم.

فرض کنیم μو νدو اندازه بوده و $\alpha \geq 0$. در این صورت دو تابع مجموعه‌ای $\mu + \nu$ و $\alpha\mu$ تعریف شده به صورت

$$(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A),$$

$$(\alpha\mu)(A) = \alpha\mu(A)$$

به ازای هر $A \in \sum$ به‌وضوح اندازه‌اند؛ یعنی گردایهٔ تمام اندازه‌ها بر $\sum$ تحت جمع و نیز ضرب در اسکالرهای نامنفی بسته است. واضح است که این گردایه نمی‌تواند یک فضای برداری باشد زیرا ضرب در -1 توابع مجموعه‌ای منفی مقدار به دست می‌دهد.

رابطهٔ ترتیبی $\leq$ را می‌توان بین اندازه‌ها معرفی کرد به این نحو که بگوییم $\mu \leq \nu$اگر $\mu(A) \leq \nu(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار باشد. تحقیق کنید که $\leq$ واقعاً یک رابطهٔ ترتیبی است. جالب اینجاست که گردایهٔ تمام اندازه‌ها تحت این ترتیب یک شبکه است؛ یعنی، به ازای هر جفت μو ν از اندازه‌ها، کوچکترین کران بالایی $\mu \vee \nu$ و بزرگترین کران پایینی $\mu \wedge \nu$ وجود دارند. جزئیات در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۱.۲۶. ***گردایهٔ تمام اندازه‌ها بر $\sum$ یک شبکه تشکیل می‌دهند که در آن به ازای هر جفت اندازهٔ μو ν، اعمال شبکه به ازای هر $A \in \sum$ به صورت زیرند:***

$$\mu \vee \nu(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \sim B):\ B \subseteq A \text{ و } B \in \textstyle\sum\},$$

$$\mu \wedge \nu(A) = \inf\{\mu(B) + \nu(A \sim B):\ B \subseteq A \text{ و } B \in \textstyle\sum\}.$$

به علاوه،

$$\mu \wedge \nu + \mu \vee \nu = \mu + \nu.$$

برهان. فرض کنیم μ و ν یک جفت اندازه بر $\sum$ باشد. به ازای هر $A \in \sum$ تعریف می‌کنیم

$$\omega(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \sim B): B \subseteq A \text{ و } B \in \sum\}.$$

ابتدا تحقیق می‌کنیم که ω یک اندازه است و سپس نشان می‌دهیم که کوچکترین کران بالایی μ و ν است.

واضح است که $\omega(A) \geq 0$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است و $\omega(\varnothing) = 0$. کافی است نشان دهیم که ω، σ- جمعی است. برای این کار، فرض کنیم $\{A_n\}$ یک دنبالهٔ ازهم‌جدا از $\sum$ باشد. قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

هرگاه $B \in \sum$ در $B \subseteq A$ صدق کند، آنگاه

$$\mu(B) + \nu(A \sim B) = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right] + \nu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \sim B)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n \cap B) + \nu(A_n \sim A_n \cap B)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n);$$

و درنتیجه $\omega(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$ برقرار است.

برای نامساوی عکس، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $\omega(A) = \infty$، $\omega(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$ به وضوح درست است. لذا، فرض می‌کنیم $\omega(A) < \infty$ و $\varepsilon > 0$. واضح است که $\omega(A_n) \leq \omega(A) < \infty$ به ازای هر n برقرار است. لذا، به ازای هر n، $B_n \in \sum$ ی هست که $B_n \subseteq A_n$ و $\mu(B_n) + \nu(A_n \sim B_n) > \omega(A_n) - \varepsilon 2^{-n}$. واضح است که $\{B_n\}$ یک دنبالهٔ ازهم جدا از $\sum$ است، و هرگاه $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq A$، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \sim B_n) = A \sim B$ برقرار است. به علاوه،

$$\omega(A) \geq \mu(B) + \nu(A \sim B) = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right] + \nu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim B_n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(B_n) + \nu(A_n \sim B_n)] \geq \sum_{n=1}^{\infty} [\omega(A_n) - \varepsilon 2^{-n}] = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n) - \varepsilon$$

به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است؛ یعنی $\omega(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$؛ و در نتیجه، طبق مطلوب، $\omega(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$.

واضح است که $\mu \leq \omega$ و $\nu \leq \omega$ هر دو برقرارند. حال فرض کنیم اندازهٔ دیگر π در $\mu \leq \pi$ و $\nu \leq \pi$ صدق کند. همچنین $A \in \sum$. هرگاه $B \in \sum$ در $B \subseteq A$ صدق کند، آنگاه

$$\mu(B) + \nu(A \sim B) \leq \pi(B) + \pi(A \sim B) = \pi(B \cup (A \sim B)) = \pi(A);$$

و درنتیجه $\omega(A) \leq \pi(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است؛ یعنی $\omega \leq \pi$؛ و لذا، ω کوچکترین کران بالایی μ و ν است؛ یعنی $\mu \vee \nu = \omega$. اثبات در مورد اینفیمم به موازات استدلال فوق است و به خواننده محول می‌شود. برای مشاهدهٔ برقراری $\mu + \nu = \mu \vee \nu + \mu \wedge \nu$، فرض می‌کنیم $A \in \sum$. در

این صورت، به ازای هر $B \in \sum$ که $B \subseteq A$ داریم

$$\mu(B) + \nu(A\sim B) + \mu\vee\nu(A) \geq \mu(B) + \nu(A\sim B) + \mu(A\sim B) + \nu(B)$$
$$= \mu(A)+\nu(A),$$
$$\mu\wedge\nu(A) + \mu(B) + \nu(A\sim B) \leq \mu(A\sim B) + \nu(B) + \mu(B) + \nu(A\sim B)$$
$$= \mu(A) + \nu(A).$$

اگر روی همهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر $B \subseteq A$ اینفیمم و سوپرمم بگیریم، نامساویهای فوق ایجاب می‌کنند که $\mu\wedge\nu(A) + \mu\vee\nu(A) = \mu(A) + \nu(A)$ برقرار است و برهان قضیه تمام خواهد بود.

فرمول $\mu\wedge\nu + \mu\vee\nu = \mu + \nu$ یادآور اتحاد آشنا در شبکه‌های برداری می‌باشد. نتیجهٔ زیر یک خاصیت تمامیت ترتیب شبکهٔ تمام اندازه ها را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۲.۲۶. هرگاه دنبالهٔ $\{\mu_n\}$ از اندازه‌ها در $\mu_n \uparrow$ صدق کند (یعنی، به ازای هر n، $\mu_n \leq \mu_{n+1}$)، آنگاه تابع مجموعه‌ای $\mu(A) = \lim\mu_n(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ یک اندازه است. به علاوه، $\mu_n \uparrow \mu$ برقرار است؛ یعنی μ کوچکترین کران بالایی دنبالهٔ $\{\mu_n\}$ می‌باشد.

برهان. واضح است که $\infty \geq \mu(A) \geq 0$ به ازای هر $A \in \sum$ و $\mu(\varnothing) = 0$ برقرار است. همچنین، هرگاه $A \subseteq B$، آنگاه $\mu(A) \leq \mu(B)$ بداهتاً برقرار است.

برای σ- جمعی بودن، فرض کنیم $\{A_n\}$ یک دنبالهٔ ازهم جدا از $\sum$ باشد. قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. چون به ازای هر k داریم $\mu_k(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_k(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$، پس $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. از آن سو، به ازای هر k داریم

$$\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\mu_n(A_i) = \lim\mu_n\left[\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right] \leq \lim\mu_n(A) = \mu(A);$$

و درنتیجه $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \leq \mu(A)$ نیز برقرار است. لذا، طبق مطلوب، $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_n)$. تحقیق $\mu_n \uparrow \mu$ سرراست است.

همانطور که قبلاً گفتیم، ضرب یک اندازه در ۱- یک تابع مجموعه‌ای منفی مقدار به دست می‌دهد. به این دلیل، مطلوب آن است که توابع مجموعه‌ای σ- جمعی را درنظر بگیریم که مقادیر منفی وسعت یافته نیز بگیرند. اما، اگر این کار را انجام دهیم، فوراً به مشکل برمی‌خوریم. فرض کنیم تابع مجموعه‌ای

$\mu : \sum \to R^*$ در $\mu(A) = \infty$ و $\mu(B) = -\infty$ با $A \cap B = \emptyset$ صدق نماید. هرگاه μ جمعی باشد، آنگاه

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \infty - \infty$$

باید برقرار باشد، و ما با مسئلهٔ دادن معنی به عبارت $\infty - \infty$ مواجهیم.

مشکل فوق را می‌توان با حذف دست کم یکی از مقادیر نامتناهی از برد تابع مجموعه‌ای حل کرد. اگر این کار انجام شود، شکل $\infty - \infty$ ظاهر نمی‌شود، و خاصیت جمعی بودن مشکلی ایجاد نمی‌کند. برای تمایز با یک اندازه، یک چنین تابع σ – جمعی را معمولاً یک ***اندازهٔ علامتدار*** می‌نامیم. تعریف دقیق آن به قرار زیر است.

تعریف ۳.۲۶. گوییم تابع مجموعه‌ای $\mu : \sum \to R^*$ یک ***اندازهٔ علامتدار*** است اگر در خواص زیر صدق نماید:

آ. μ حداکثر یکی از مقادیر ∞ و $-\infty$ را بگیرد؛

ب. $\mu(\emptyset) = 0$؛ و

پ. μ، σ – جمعی باشد؛ یعنی هرگاه $\{A_n\}$ دنباله‌ای از هم جدا از اعضای $\sum$ باشد، آنگاه $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ برقرار است.

هرگاه μ یک اندازهٔ علامتدار بوده و دنبالهٔ ازهم جدای $\{A_n\}$ از $\sum$ در $\left|\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right| < \infty$ صدق کند، آنگاه (چون هر جایگشت از $\{A_n\}$ همان اجتماع دنبالهٔ اصلی را دارد) از قسمت (پ) تعریف قبل نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ پایای تجدید آرایش است. لذا، $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)|$ در R همگراست (ر.ک. تمرین ۸ از بخش ۴).

واضح است که هر اندازه یک اندازهٔ علامتدار است. همچنین قسمتهای (ب) و (پ) تعریف ۳.۲۶ با هم نشان می‌دهند که هر اندازهٔ علامتدار به طور متناهی جمعی است. چند نتیجهٔ زیر نشان می‌دهند که اندازه‌های علامتدار شبیه اندازه‌ها رفتار می‌کنند. نتیجهٔ اول می‌گوید که یک اندازهٔ علامتدار همواره تفریقی است.

قضیهٔ ۴.۲۶. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ بوده و $A \in \sum$ چنان باشد که $|\mu(A)| < \infty$. هرگاه $B \in \sum$ در $B \subseteq A$ صدق کند، آنگاه $|\mu(B)| < \infty$ و***

$$\mu(A \sim B) = \mu(A) - \mu(B).$$

برهان. اتحاد $A = (A\sim B) \cup B$ همراه با جمعی بودن μ ایجاب می‌کند که $\mu(A) = \mu(A\sim B) + \mu(B)$. چون $\mu(A)$ یک عدد حقیقی است و μ حداکثر یکی از مقادیر ∞ و $-\infty$ را می‌گیرد، پس هردوی $\mu(A\sim B)$ و $\mu(B)$ اعدادی حقیقی‌اند. حال می‌توان قضیه را فوراً نتیجه گرفت.

یک نتیجهٔ فوری و مفید از قضیهٔ قبل چنین است: هرگاه مجموعهٔ $A \in \sum$ زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازهٔ علامتدار نامتناهی داشته باشد، آنگاه A دارای اندازهٔ علامتدار نامتناهی است.

اندازه‌های علامتدار خواص معمولی پیوستگی اندازه‌ها را به ارث می‌برند.

قضیهٔ ۵.۲۶. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بوده و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از $\sum$ باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:***

آ. ***هرگاه $A_n \uparrow A$، آنگاه*** $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$ ؛

ب. ***هرگاه $A_n \downarrow A$ و $\mu(A_k)$ به ازای دست‌کم یک k عدد حقیقی باشد، آنگاه***

$$\lim \mu(A_n) = \mu(A).$$

برهان. برهان قضیهٔ ۵.۱۲ را با توجه به قضیهٔ ۴.۲۶ تکرار کنید.

گوییم مجموعهٔ اندازه‌پذیر A یک **مجموعهٔ مثبت** نسبت به اندازهٔ علامتدار μ است و آن را با علامت $A \geq 0$ نشان می‌دهیم اگر $\mu(E \cap A) \geq 0$ به ازای هر $E \in \sum$ برقرار باشد.

واضح است که مجموعهٔ تهی یک مجموعهٔ مثبت است. همچنین، هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از یک مجموعهٔ مثبت یک مجموعهٔ مثبت است. به علاوه، هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های مثبت مجموعه‌ای مثبت است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مثبت بوده و قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. حال فرض می‌کنیم $B_1 = A_1$ و به ازای هر $n \geq 1$، $B_{n+1} = A_{n+1} \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$، و توجه می‌کنیم که $\{B_n\}$ دنباله‌ای از هم جداست به طوری که $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. چون $B_n \subseteq A_n$ به ازای هر n برقرار است، پس هر B_n یک مجموعهٔ مثبت است. بنابراین، به ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر E، داریم

$$\mu(E \cap A) = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap B_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A) \geq 0;$$

درنتیجه A یک مجموعهٔ مثبت می‌باشد.

به همین نحو، مجموعهٔ اندازه‌پذیر A را یک **مجموعهٔ منفی** نسبت به μ نامیده و با $A \leq 0$ نشان می‌دهیم اگر $\mu(A\cap E) \leq 0$ به ازای هر $E \in \sum$ برقرار باشد. مانند فوق، زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از مجموعه‌های منفی منفی‌اند، و اجتماعهای شمارشپذیر از مجموعه‌های منفی نیز منفی می‌باشند.

لم زیر نتیجه‌ای اساسی در این بخش است و وجود مجموعه‌های مثبت ناتهی را تضمین خواهد کرد.

لم ۶.۲۶. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ بوده و $E \in \sum$ با خاصیت $\mu(E) > 0$ باشد. در این صورت یک مجموعهٔ مثبت مانند A هست به طوری که $A \subseteq E$ و $\mu(A) > 0$.***

برهان. هرگاه به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر B از E داشته باشیم $\mu(B) \geq 0$، آنگاه E یک مجموعهٔ مثبت است و چیزی برای اثبات وجود ندارد. لذا، فرض می‌کنیم $B \in \sum$ای باشد که $B \subseteq E$ و $\mu(B) < 0$.

بنابر لم زرن، یک گردایهٔ ماکزیمال مانند $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر دوبدو از هم جدا از E هست به طوری که $\mu(B) < 0$ به ازای هر $B \in \mathcal{C}$ برقرار است. حکم می‌کنیم که $\mathcal{C}$ حداکثر شمارشپذیر است. برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا توجه می‌کنیم که $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$ که در آن $\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{C}: \mu(B) < -1/n\}$. از آن سو، هرگاه $\mathcal{C}_n$ی متناهی نباشد، آنگاه باید شامل زیرمجموعه‌ای شمارشپذیر از $\mathcal{C}$ مانند $\{B_1, B_2, \ldots\}$ باشد. ولی در این صورت مجموعهٔ اندازه‌پذیر $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ در $B \subseteq E$ صدق می‌کند و $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i) = -\infty$. این نشان می‌دهد که

$$\mu(E) = \mu(E\sim B) + \mu(B) = -\infty$$

باید برقرار باشد، که یک تناقض است. لذا، $\mathcal{C}_n$ متناهی است؛ و درنتیجه $\mathcal{C}$ حداکثر شمارشپذیر است.

لذا، مجموعهٔ $C = \bigcup\{B: B\in\mathcal{C}\}$ تعلق به $\sum$ دارد، و حکم می‌کنیم که $A = E\sim C$ یک مجموعهٔ مثبت صادق در $\mu(A) > 0$ است. درواقع، چون $\mu(C) + \mu(A) = \mu(E) > 0$ و $\mu(C) \leq 0$، به آسانی معلوم می‌شود که $\mu(A) > 0$ برقرار است. از آن سو، هرگاه $\mu(F) < 0$ به ازای زیرمجموعهٔ اندازه پذیری از A برقرار باشد، آنگاه می‌توان F را با $\mathcal{C}$ تلفیق کرد و خاصیت ماکزیمالی $\mathcal{C}$ را نقض نمود؛ یعنی A یک مجموعهٔ مثبت بوده و برهان تمام خواهد بود.

هرگاه μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ بوده و دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر از هم جدا مانند A و B در $A \geq 0$، $B \leq 0$، و $A\cup B = X$ صدق نمایند، آنگاه جفت (A, B) را **تجزیهٔ هان** X نسبت به μ می‌نامند. به بیان نادقیق، یک تجزیهٔ هان یعنی تجزیهٔ فضای X به دو قطعه به طوری که μ بر یک قطعه

مثبت و بر دیگری منفی است. همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، این تجزیه همیشه وجود دارد و اصولاً منحصر به فرد است.

قضیهٔ ۷.۲۶. فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ باشد. در این صورت X دارای تجزیهٔ هان نسبت به μ است؛ یعنی یک مجموعهٔ مثبت مانند A و یک مجموعهٔ منفی مانند B هست به طوری که $X = A \cup B$ و $A \cap B = \varnothing$.

به علاوه، هرگاه (A, B) و (A_1, B_1) دو تجزیهٔ هان از X نسبت به μ باشند، آنگاه

آ. $\mu(A \Delta A_1) = \mu(B \Delta B_1) = 0$،

ب. $\mu(E \cap A) = \mu(E \cap A_1)$، و

پ. $\mu(E \cap B) = \mu(E \cap B_1)$

به ازای هر $E \in \sum$ برقرار است.

برهان. بدون صدمه زدن به کلیت می‌توان فرض کرد $\mu(E) \neq \infty$ به ازای هر $E \in \sum$ برقرار باشد (در غیر این صورت، μ را با $-\mu$ عوض می‌کنیم).

قرار می‌دهیم $a = \sup\{\mu(E) : E \geq 0\}$. واضح است که $a \geq 0$. دنبالهٔ $\{A_n\}$ از مجموعه‌های مثبت را چنان اختیار می‌کنیم که $\lim \mu(A_n) = a$. در این صورت $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ یک مجموعهٔ مثبت است، و چون $a \leq \mu(A_n) \leq \mu(A)$، پس $a = \mu(A) < \infty$.

حال حکم می‌کنیم که $B = X \sim A$ یک مجموعهٔ منفی نسبت به μ است. برای مشاهدهٔ این امر، به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ اندازه پذیری مانند C از B باشد که $\mu(C) > 0$. ولی در این صورت، بنابر لم ۶.۲۶، یک مجموعهٔ مثبت مانند E هست که $E \subseteq C$ و $\mu(E) > 0$. پس $A \cup E \geq 0$ و

$$a + \mu(E) = \mu(A) + \mu(E) = \mu(A \cup E) \leq a < \infty$$

که ناممکن است. لذا، (A, B) یک تجزیهٔ هان از X نسبت به μ است.

برای "یکتایی" تجزیهٔ هان، فرض می‌کنیم (A_1, B_1) تجزیهٔ هان دیگری از X باشد. چون $A \sim A_1 \subseteq A$ و $A \sim A_1 = A \cap A_1{}^c = A \cap B_1 \subseteq B_1$، پس داریم $\mu(A \sim A_1) \geq 0$ و $\mu(A \sim A_1) \leq 0$؛ یعنی $\mu(A \sim A_1) = 0$. به همین نحو، $\mu(A_1 \sim A) = 0$؛ و درنتیجه

$$\mu(A \Delta A_1) = \mu((A \sim A_1) \cup (A_1 \sim A)) = \mu(A \sim A_1) + \mu(A_1 \sim A) = 0.$$

حال اگر $E \in \sum$،

$$\begin{aligned}\mu(E\cap A) &= \mu(E\cap[(A\sim A_1)\cup(A\cap A_1)])\\ &= \mu(E\cap(A\sim A_1)) + \mu(E\cap A\cap A_1)\\ &= \mu(E\cap A\cap A_1) = \mu(E\cap(A_1\sim A)) + \mu(E\cap A\cap A_1)\\ &= \mu(E\cap[(A_1\sim A)\cup(A_1\cap A)]) = \mu(E\cap A_1).\end{aligned}$$

به خاطر تقارن وضع، فرمولهای نظیر برای B و B_1 نیز برقرارند و برهان تمام خواهد بود.

هرگاه (A, B) یک تجزیهٔ هان X نسبت به اندازهٔ علامتدار μ باشد، آنگاه تحدید μ و $-\mu$ به A و B اندازه‌اند. همانطور که خواهیم دید، این دو اندازه ساختار μ را معین خواهند کرد.

تعریف ۸.۲۶. فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ بوده و (A, B) یک تجزیهٔ هان X نسبت به μ باشد. در این صورت، به ازای هر $E \in \sum$، سه تابع مجموعه‌ای

$$\mu^+(E) = \mu(E\cap A),$$

$$\mu^-(E) = -\mu(E\cap B),$$

$$|\mu|(E) = \mu(E\cap A) - \mu(E\cap B) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

به ترتیب ***تغییر مثبت***، ***تغییر منفی***، ***و تغییر کل*** μ نام دارند.

با نگاهی به قضیهٔ ۷.۲۶ معلوم می‌شود که مقادیر μ^+، μ^-، و $|\mu|$ مستقل از تجزیهٔ هان انتخاب شده‌اند. همچنین واضح است که μ^+، μ^-، و $|\mu|$ اندازه‌هایی بر $\sum$اند.

گوییم اندازهٔ علامتدار μ یک ***اندازهٔ علامتدار متناهی*** است اگر $|\mu(A)| < \infty$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار باشد. توجه کنید که، به خاطر قضیهٔ ۴.۲۶، این حالت برقرار است اگر و فقط اگر $|\mu(X)| < \infty$ برقرار باشد. به همین نحو، عبارت "μ یک اندازهٔ متناهی است" یعنی $0 \le \mu(A) < \infty$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است. یک اندازهٔ متناهی μ (تعریف شده بر σ- جبر $\sum$) لزوماً کراندار است زیرا $0 \le \mu(A) \le \mu(X) < \infty$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است. بالأخره، اندازهٔ علامت μ را (طبق معمول) ***σ- متناهی*** تعریف می‌کنیم اگر دنباله‌ای از هم جدا مانند $\{A_n\}$ از $\sum$ باشد که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر n، $|\mu(A_n)| < \infty$.

از تعریف ۸.۲۶ معلوم می‌شود که

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

برقرار است. این اتحاد به ***تجزیهٔ ژردان*** (Jordan) اندازهٔ علامتدار μ معروف است. به علاوه، هرگاه

(A, B) یک تجزیهٔ هان باشد، آنگاه از نامساویهای $\mu^+(E) \le \mu(A)$ و $\mu^-(E) \le -\mu(B)$ به ازای هر $E \in \sum$ معلوم می‌شود که دست کم یکی از اندازه‌های μ^+ و μ^- یک اندازهٔ متناهی است. لذا، بالأخره، تجزیهٔ ژردان نشان می‌دهد که هر اندازهٔ علامتدار تفاضل دو اندازه است که دست کم یکی از آنها یک اندازهٔ متناهی می‌باشد.

در قضیهٔ زیر چند عبارت مفید دیگر برای تغییرات مختلف یک اندازهٔ علامتدار ارائه شده است.

قضیهٔ ۹.۲۶. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ باشد. در این صورت فرمولهای زیر به ازای هر $E \in \sum$ برقرارند:*

۱. $\mu^+(E) = \sup\{\mu(F)\colon F \subseteq E$ و $F \in \sum\}$؛

۲. $\mu^-(E) = \sup\{-\mu(F)\colon F \subseteq E$ و $F \in \sum\}$؛

۳. ***$\{F_i\}$ یک گردایهٔ از هم جدای متناهی از $\sum$ با $\cup F_i \subseteq E$ است:***

$$|\mu|(E) = \sup\{\textstyle\sum |\mu(F_i)|\}.$$

برهان. فرض کنیم (A, B) یک تجزیهٔ هان از X نسبت به μ بوده و $E \in \sum$.

(۱) واضح است که $\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \le \sup\{\mu(F)\colon F \subseteq E$ و $F \in \sum\}$ برقرار است. از آن سو، هرگاه $F \in \sum$ در $F \subseteq E$ صدق کند، آنگاه

$$\mu(F) = \mu(F\cap A) + \mu(F\cap B) \le \mu(F\cap A) \le \mu(E\cap A) = \mu^+(E);$$

درنتیجه $\sup\{\mu(F)\colon F \subseteq E$ و $F \in \sum\} \le \mu^+(E)$. بنابراین، اتحاد (۱) برقرار است.

(۲) این فرمول از فرمول (۱) با توجه به اینکه $\mu^- = (-\mu)^+$ نتیجه می‌شود.

(۳) قرار می‌دهیم

$v(E) = \sup\{\sum |\mu(F_i)|\colon$ $\{F_i\}$ یک گردایهٔ ازهم جدای متناهی از $\sum$ با $\cup F_i \subseteq E$ است$\}$.

در این صورت

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E) = \mu(E\cap A) - \mu(E\cap B)$$
$$= |\mu(E\cap A)| + |\mu(E\cap B)| \le v(E).$$

حال فرض می‌کنیم $\{F_1, \dots, F_n\}$ یک گردایهٔ از هم جدای متناهی از E باشد به طوری که

$$\cup_{i=1}^n F_i \subseteq E.$$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^n |\mu(F_i)| = \sum_{i=1}^n |\mu^+(F_i) - \mu^-(F_i)| \le \sum_{i=1}^n [\mu^+(F_i) + \mu^-(F_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\mu|(F_i) = |\mu| \left[\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right] \le |\mu|(E).$$

این ایجاب می‌کند که $|\mu|(E) \le \nu(E)$. لذا، $|\mu|(E) = \nu(E)$ برقرار است و برهان قضیه تمام خواهد بود.

نامساوی مهم زیر در رابطه با تغییر کل به آسانی قابل اثبات است:

به ازای هر $A \in \sum$، $|\mu(A)| \le |\mu|(A)$.

حال خواص تغییرات مختلف اندازهٔ علامتدار μ را به صورت اتحادهای زیر خلاصه می‌کنیم:

آ. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ و $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

ب. $\mu^+ \wedge \mu^- = 0$.

پ. $\mu^- = (-\mu)^+$.

البته اینها یادآور اتحادهای معمولی شبکه‌های برداری‌اند. به علاوه، پیشنهاد می‌کنند که مجموعهٔ تمام اندازه‌های علامتدار ممکن است یک شبکهٔ برداری باشد. متأسفانه این امر برقرار نیست. با آنکه مجموع (نقطه به نقطهٔ) دو اندازه همواره تعریف شده است، مجموع دو اندازهٔ علامتدار ممکن است موجود نباشد به این دلیل که با جمع نقطه به نقطهٔ اندازه‌های علامتدار به عبارت $\infty - \infty$ برخواهیم خورد.

اما، اگر خود را به گردایهٔ $M(\sum)$ تمام اندازه‌های علامتدار متناهی محدود کنیم، یک شبکهٔ برداری به دست می‌آوریم. ابتدا توجه می‌کنیم که اندازهٔ علامتدار μ در $\mu \in M(\sum)$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $|\mu|(X) < \infty$. درواقع، اگر $|\mu|(X) < \infty$، واضح است که $\mu \in M(\sum)$. از آن سو، اگر $\mu \in M(\sum)$، اتحاد $\mu = \mu^+ - \mu^-$ با دست کم یکی از μ^+ و μ^- متناهی نشان می‌دهد که μ^+ و μ^- هر دو متناهی‌اند؛ و درنتیجه $|\mu|(X) = \mu^+(X) + \mu^-(X) < \infty$. (به خاطر حکم اخیر، اندازه‌های علامتدار متناهی به اندازه‌های علامتدار با تغییر کل متناهی نیز معروفند.)

واضح است که اگر $\mu, \nu \in M(\sum)$، $\mu + \nu$ و $\alpha\mu$ تعلق به $M(\sum)$ دارند که البته به ازای هر $A \in \sum$ و $\alpha \in R$، $(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ و $(\alpha\mu)(A) = \alpha\mu(A)$؛ یعنی $M(\sum)$ یک فضای برداری است. حال اگر $\mu \le \nu$ به معنی $\mu(A) \le \nu(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ باشد، $\le$ یک رابطهٔ ترتیبی است که $M(\sum)$ تحت آن یک شبکهٔ برداری می‌باشد. اعمال شبکه‌ای به صورت زیر خواهند بود:

$$\mu \vee \nu(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \sim B): B \subseteq A \text{ و } B \in \textstyle\sum\},$$

$$\mu \wedge \nu(A) = \inf\{\mu(B) + \nu(A \sim B): B \subseteq A \text{ و } B \in \textstyle\sum\}.$$

فرمولهای فوق همراه با قضیهٔ ۹.۲۶ نشان می‌دهند که $\mu^+ = \mu \vee 0$، $\mu^- = (-\mu) \vee 0$، و

$(-\mu) \vee \mu = |\mu|$ در $M(\sum)$ دقیقاً تغییرات مثبت، منفی، و کل μ به صورت داده شده در تعریف ۸.۲۶ می‌باشند.

نکتهٔ دیگری که باید بدان توجه کرد این است که $\|\mu\| = |\mu|(X)$ معرف یک نرم بر $M(\sum)$ است. درواقع،

آ. $|\mu|(X) \geq 0$ برقرار است، و چون به ازای هر $A \in \sum$،
$\|\mu\| = |\mu|(X) \geq |\mu|(A) \geq |\mu(A)|$، داریم $\|\mu\| = 0$ اگر و فقط اگر $\mu = 0$.

ب. $\|\alpha\mu\| = |\alpha\mu|(X) = |\alpha|.|\mu|(X) = |\alpha|.(|\mu|(X)) = |\alpha|.\|\mu\|$.

پ. $\|\mu+\nu\| = |\mu+\nu|(X) \leq (|\mu|+|\nu|)(X) = |\mu|(X) + |\nu|(X) = \|\mu\| + \|\nu\|$.

همچنین $\|.\|$ یک نرم شبکه‌ای بر $M(\sum)$ است. درواقع، هرگاه $|\mu| \leq |\nu|$ برقرار باشد، آنگاه $\|\mu\| = |\mu|(X) \leq |\nu|(X) = \|\nu\|$. بنابراین، همانطور که نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد، $M(\sum)$ یک شبکهٔ برداری نرمدار است که درواقع یک شبکهٔ باناخ می‌باشد.

قضیهٔ ۱۰.۲۶. ***گردایهٔ تمام اندازه‌های علامتدار متناهی بر یک σ- جبر یک شبکهٔ باناخ تشکیل می‌دهد.***

برهان. بنابر بحث پیش، کافی است نشان دهیم که $M(\sum)$ یک فضای باناخ است. برای این کار فرض کنیم $\{\mu_n\}$ یک دنبالهٔ کشی از $M(\sum)$ باشد. باید نشان دهیم که $\mu \in M(\sum)$ای هست به طوری که

$$\lim \|\mu_n - \mu\| = 0.$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$. k را طوری می‌گیریم که به ازای هر $m, n \geq k$، $\|\mu_n - \mu_m\| < \varepsilon$. نامساویهای

$$|\mu_n(A) - \mu_m(A)| \leq |\mu_n - \mu_m|(A) \leq |\mu_n - \mu_m|(X) = \|\mu_n - \mu_m\| \qquad (*)$$

نشان می‌دهند که $\{\mu_n(A)\}$، به ازای هر $A \in \sum$، یک دنبالهٔ کشی از اعداد حقیقی است. فرض کنیم $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$؛ درنتیجه μ یک تابع مجموعه‌ای حقیقی است. از رابطهٔ $(*)$ معلوم می‌شود که

به ازای هر $A \in \sum$ و $n \geq k$، $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \varepsilon$. $\qquad (**)$

واضح است که $\mu(\varnothing) = \lim \mu_n(\varnothing) = 0$. برای σ- جمعی بودن μ، فرض می‌کنیم $\{A_n\}$ یک دنبالهٔ ازهم جدا از $\sum$ باشد و قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. در این صورت

$$\left|\sum_{i=1}^{p}[\mu_k(A_i) - \mu_n(A_i)]\right| \leq \sum_{i=1}^{p}|\mu_k(A_i) - \mu_n(A_i)|$$

$$\leq |\mu_k - \mu_n|(A) \leq \| \mu_k - \mu_n \| < \varepsilon$$

به ازای هر $n, p \geq k$ برقرار است. لذا، $|\sum_{i=1}^{p} [\mu_k(A_i) - \mu(A_i)]| \leq \varepsilon$ به ازای هر p برقرار است. حال n_1 را چنان می‌گیریم که به ازای هر $p > n_1$،

$$|\mu_k(A) - \sum_{i=1}^{p} \mu_k(A_i)| < \varepsilon$$

و توجه می‌کنیم که

$$|\mu(A) - \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \sum_{i=1}^{p} \mu_k(A_i)|$$
$$+ |\sum_{i=1}^{p} [\mu_k(A_i) - \mu(A_i)]| < ۳\varepsilon$$

به ازای هر $p \geq n_1$ برقرار است. بنابراین، $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$؛ و درنتیجه $\mu \in M(\sum)$.

بالأخره، از تلفیق (**) با قضیهٔ ۹.۲۶ به دست می‌آوریم

$$(\mu_n - \mu)^+(X) = \sup\{ \mu_n(A) - \mu(A) : A \in \sum\} \leq \varepsilon$$

و به ازای هر $n \geq k$، $(\mu_n - \mu)^-(X) \leq \varepsilon$. لذا،

$$\| \mu_n - \mu \| = (\mu_n - \mu)^+(X) + (\mu_n - \mu)^-(X) \leq ۲\varepsilon$$

به ازای هر $n \geq k$ برقرار است؛ یعنی، طبق مطلوب، $\lim \| \mu_n - \mu \| = ۰$.

تمرینات

۱. یک اندازهٔ علامتدار و دو تجزیهٔ هان (A, B) و (A_1, B_1) از X نسبت به این اندازهٔ علامتدار مثال بزنید که $A \neq A_1$ و $B \neq B_1$.

۲. هرگاه μ یک اندازهٔ علامتدار باشد، آنگاه نشان دهید که $\mu^+ \wedge \mu^- = ۰$.

۳. فرض کنید μ یک اندازهٔ علامتدار باشد. نشان دهید که به ازای هر $A \in \sum$،
$|\mu|(A) = \sup\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| :$ یک دنبالهٔ ازهم جدا از $\sum$ با $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ است $\{A_n\}\}$.

۴. تحقیق کنید که اگر μ و ν دو اندازهٔ علامتدار متناهی باشند، کوچکترین کران بالایی $\mu \vee \nu$ و بزرگترین کران پایینی $\mu \wedge \nu$ در $M(\sum)$ به صورت زیر داده می‌شوند: به ازای هر $A \in \sum$،

$$\mu \vee \nu(A) = \sup\{ \mu(B) + \nu(A \sim B) : B \subseteq A \text{ و } B \in \sum\},$$
$$\mu \wedge \nu(A) = \inf\{ \mu(B) + \nu(A \sim B) : B \subseteq A \text{ و } B \in \sum\}.$$

۵. فرض کنید λ اندازهٔ لبگ بر زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ از R باشد. هرگاه μ اندازهٔ دیراک [تعریف شده با $\mu(A) = ۰$ اگر $۰ \notin A$ و $\mu(A) = ۱$ اگر $۰ \in A$] باشد، آنگاه $\lambda \vee \mu$ و $\lambda \wedge \mu$ را توصیف کنید.

۶. نشان دهید که گردایهٔ تمام اندازه‌های σ- متناهی یک شبکهٔ پخشپذیر تشکیل می‌دهد؛ یعنی نشان

دهید هرگاه μ، ν، و ω اندازه‌های σ- متناهی باشند، آنگاه

$(\mu \wedge \nu) \vee \omega = (\mu \vee \omega) \wedge (\nu \vee \omega)$ و $(\mu \vee \nu) \wedge \omega = (\mu \wedge \omega) \vee (\nu \wedge \omega)$.

[**راهنمایی.** هر شبکهٔ برداری یک شبکهٔ پخشپذیر است.]

۷. فرض کنید μ و ν دو اندازه بر σ - جبر $\sum$ باشند که لااقل یکی از آنها متناهی است. همچنین S یک نیم حلقه باشد به طوری که $S \subseteq \sum$، $X \in S$، و σ - جبر تولید شده به وسیلهٔ S مساوی $\sum$ است. نشان دهید $\nu = \mu$ بر $\sum$ اگر و فقط اگر $\nu = \mu$ بر S.

[**راهنمایی.** ر.ک. قضیهٔ ۹.۱۲.]

۸. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $f \in L_1(\mu)$. نشان دهید که به ازای هر $A \in \wedge_\mu$،

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

یک اندازهٔ علامتدار متناهی بر $\wedge_\mu$ است. همچنین نشان دهید که

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \ \nu^-(A) = \int_A f^- d\mu, \ |\nu|(A) = \int_A |f| d\mu$$

به ازای هر $A \in \wedge_\mu$ برقرار است.

[**راهنمایی.** از قضیهٔ ۱۱.۱۲ استفاده کنید.]

۹. فرض کنید ν یک اندازهٔ علامتدار بر $\sum$ باشد. گوییم تابع $f: X \to R$، ν- انتگرالپذیر است اگر f همزمان ν^+ و ν^-- انتگرالپذیر باشد (در این حالت می‌نویسیم $\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^-$). نشان دهید که تابع f، ν- انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $f \in L_1(|\nu|)$.

۱۰. نشان دهید که تجزیهٔ ژردان به معنی زیر منحصر به فرد است. هرگاه ν یک اندازهٔ علامتدار بوده و μ_1 و μ_2 دو اندازه باشند به طوری که $\nu = \mu_1 - \mu_2$ و $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$، آنگاه $\mu_1 = \nu^+$ و $\mu_2 = \nu^-$.

۱۱. در یک شبکهٔ برداری $x_n \downarrow x$ یعنی به ازای هر n، $x_{n+1} \leq x_n$ و x بزرگترین کران پایینی دنبالهٔ $\{x_n\}$ است. گوییم شبکهٔ برداری نرمدار دارای **نرم پیوستهٔ σ- ترتیبی** است اگر $x_n \downarrow 0$ ایجاب کند که $\lim \|x_n\| = 0$.

آ. نشان دهید که هر $L_p(\mu)$ با $1 \leq p < \infty$ دارای نرم پیوستهٔ σ- ترتیبی است.

ب. نشان دهید که $L_\infty([0, 1])$ دارای نرم پیوستهٔ σ- ترتیبی نیست.

پ. فرض کنید $\sum$ یک σ- جبر از مجموعه‌ها بوده و $\{\mu_n\}$ دنباله‌ای از $M(\sum)$ باشد به طوری که $\mu_n \downarrow \mu$. نشان دهید که $\lim \mu_n(A) = \mu(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است.

ت.. نشان دهید که شبکهٔ باناخ $M(\sum)$ دارای نرم پیوستهٔ σ- ترتیبی است.

۱۲. خاصیت مشخصهٔ زیر از شبکهٔ باناخ $M(\sum)$ را ثابت کنید: هرگاه $\mu, \nu \in M(\sum)$ از هم جدا باشند (یعنی $|\mu| \wedge |\nu| = \circ$)، آنگاه $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ برقرار است.

[**راهنمایی.** در یک شبکهٔ برداری $|x| \wedge |y| = \circ$ ایجاب می‌کند که

$$|x + y| = |x| + |y|.$$

دلیل:

$$|x + y| \geq \big||x| - |y|\big| = |x| \vee |y| - |x| \wedge |y| = |x| \vee |y|$$
$$= |x| + |y| \geq |x + y|.]$$

۲۷. مقایسهٔ اندازه‌ها و قضیهٔ رادون ـ نیکودیم

مجدداً در این بخش $\sum$ یک σ- جبر ثابت از زیرمجموعه‌ها بر مجموعهٔ ناتهی X بوده و تمام توابع مجموعه‌ای بر $\sum$ تعریف شده‌اند.

در اینجا دو مفهوم مقایسهٔ مهم بین اندازه‌های علامتدار معرفی می‌شوند. هر دو مفهوم برحسب خواص اندازه تعریف می‌شوند. اولی را "مفهوم پیوستگی مطلق" نامیم و تعریفش در زیر آمده است.

تعریف ۱.۲۷. گوییم اندازهٔ علامتدار ν نسبت به اندازهٔ علامتدار دیگر μ به **طور مطلق پیوسته** است و می‌نویسیم $\nu \ll \mu$ اگر $A \in \sum$ و $|\mu|(A) = \circ$ ایجاب کنند که $\nu(A) = \circ$.

در نتیجهٔ زیر چندین مشخصهٔ پیوستگی مطلق مستلزم تغییرات مختلف آن ذکر شده است.

قضیهٔ ۲.۲۷. *احکام زیر به ازای هر جفت از اندازه‌های علامتدار μ و ν هم‌ارزند:*

آ. $\nu \ll \mu$؛

ب. $\nu^+ \ll |\mu|$ و $\nu^- \ll |\mu|$؛

پ. $|\nu| \ll |\mu|$.

برهان. (ب) $\Rightarrow$ (آ). فرض کنیم $A \in \sum$ در $|\mu|(A) = \circ$ صدق نماید. هرگاه $B \in \sum$ در $B \subseteq A$ صدق کند، آنگاه $|\mu|(B) = \circ$؛ و درنتیجه، طبق فرض، $\nu(B) = \circ$. لذا،

$$\nu^+(A) = \sup\{\nu(B): B \subseteq A \text{ و } B \in \sum\} = \circ.$$

به همین نحو، $\nu^-(A) = \circ$؛ و درنتیجه هر دو رابطهٔ $\nu^+ \ll |\mu|$ و $\nu^- \ll |\mu|$ برقرارند.

(پ) $\Rightarrow$ (ب). هرگاه $|\mu|(A) = ۰$، آنگاه طبق فرض $\nu^+(A) = \nu^-(A) = ۰$. چون $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$، پس $|\nu|(A) = ۰$ و لذا $|\nu| \ll |\mu|$.

(آ) $\Rightarrow$ (پ). از نامساوی $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$ نتیجه می‌شود.

هرگاه اندازهٔ ν نسبت به اندازهٔ دیگر μ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه طبعاً انتظار رابطه‌ای بین مجموعه‌های μ- اندازه‌پذیر و ν- اندازه‌پذیر داریم. قضیهٔ زیر به ما روابط دقیق را بازگو می‌نماید.

قضیهٔ ۳.۲۷. فرض کنیم μ و ν دو اندازه بر σ- جبر $\sum$ باشند. در این صورت احکام زیر برقرارند:

آ. هرگاه $\nu \ll \mu$ برقرار بوده و زیرمجموعهٔ E از X در $\mu^*(E) = ۰$ صدق کند، آنگاه $\nu^*(E) = ۰$ نیز برقرار است.

ب. هرگاه $\nu \ll \mu$ و μ، σ - متناهی باشد، آنگاه $\Lambda_\mu \subseteq \Lambda_\nu$ برقرار است. به خصوص، در این حالت، هر تابع μ- اندازه‌پذیر ν- اندازه‌پذیر نیز هست.

برهان. (آ) فرض کنیم $\mu^*(E) = ۰$. بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۲، $A \in \sum$ ای هست به طوری که $E \subseteq A$ و $\mu(A) = \mu^*(E)$. از $\nu \ll \mu$ معلوم می‌شود که $\nu(A) = ۰$. بنابراین، $۰ \leq \nu^*(E) \leq \nu(A) = ۰$؛ درنتیجه $\nu^*(E) = ۰$.

(ب) فرض کنیم E، μ- اندازه‌پذیر با خاصیت $\mu^*(E) < \infty$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۲، $A \in \sum$ ای هست که $E \subseteq A$ و $\mu(A) = \mu^*(E) < \infty$. ولی در این صورت $\mu^*(A \sim E) = ۰$ و، بنابر (آ)، $\nu^*(A \sim E) = ۰$. بنابراین، $A \sim E$، ν- اندازه‌پذیر است. حال ν- اندازه‌پذیری E از رابطهٔ $E = A \sim (A \sim E)$ نتیجه می‌شود. بالأخره، نتیجهٔ فوق همراه با σ- تناهی μ ایجاب می‌کند که $\Lambda_\mu \subseteq \Lambda_\nu$ برقرار است.

حال فرض کنیم μ و ν دو اندازه باشند. هرگاه $\nu \leq \mu$، واضح است که $\nu \ll \mu$ نیز برقرار است. عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال، $۲\mu \ll \mu$ به ازای هر اندازهٔ μ برقرار است، و $۲\mu \leq \mu$ فقط وقتی برقرار است که $\mu = ۰$. اما، اگر $\nu \ll \mu$ برقرار باشد، μ و ν (با تقریب یک عامل ضربی) "موضعاً" به مفهوم ترتیب قیاسپذیرند. جزئیات دقیق در زیر آمده است.

قضیهٔ ۴.۲۷. فرض کنیم ν یک اندازهٔ ناصفر متناهی بوده و μ یک اندازهٔ σ- متناهی باشد. هرگاه ν

نسبت به μ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه $\varepsilon > 0$ ی و $A \in \sum$ ای هست که $0 < \mu(A) < \infty$ و

$$\varepsilon \mu(B) \leq \nu(B)$$

به ازای هر $B \in \sum$ که $B \subseteq A$ برقرار است.

برهان. فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از هم جدا از $\sum$ باشد به طوری که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و به ازای هر n، $\mu(E_n) < \infty$. چون ν یک اندازهٔ ناصفر است، k ای هست که $\nu(E_k) > 0$. حال $\varepsilon > 0$ ی را طوری می‌گیریم که

$$\nu(E_k) - \varepsilon \mu(E_k) = (\nu - \varepsilon \mu)(E_k) > 0.$$

بنابر لم ۶.۲۶، زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر A از E_k هست که نسبت به اندازهٔ علامتدار $\nu - \varepsilon\mu$ یک مجموعهٔ مثبت بوده و $(\nu - \varepsilon\mu)(A) > 0$. واضح است که $\mu(A) < \infty$ برقرار است. حال ملاحظه می‌کنیم که $\mu(A) > 0$. درواقع، هرگاه $\mu(A) = 0$ برقرار باشد، آنگاه نامساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $\nu(A) > 0$ که با پیوستگی مطلق ν نسبت به μ در تضاد است. از آن سو، نامساوی $(\nu - \varepsilon\mu)(B) \geq 0$ به ازای هر $B \in \sum$ همراه با $B \subseteq A$ ایجاب می‌کند که $\varepsilon\mu(B) \leq \nu(B)$ و برهان قضیه تمام خواهد بود.

مفهوم مخالف پیوستگی مطلق انفراد است. دو اندازهٔ علامتدار μ و ν را **منفرد** (یا **متعامد**) گوییم و می‌نویسیم $\mu \perp \nu$ اگر دو مجموعهٔ ازهم جدای A و B از $\sum$ با خاصیت $A \cup B = X$ و $|\mu|(A) = |\nu|(B) = 0$ وجود داشته باشند.

هرگاه μ یک اندازهٔ علامتدار باشد، آنگاه قضیهٔ ۷.۲۶ نشان می‌دهد که μ^+ و μ^- دو اندازهٔ منفرد می‌باشند. مفهوم انفراد به صورت زیر بر حسب خواص شبکه توصیف می‌شود.

قضیهٔ ۵.۲۷. فرض کنیم μ و ν دو اندازهٔ علامتدار باشند. در این صورت $\mu \perp \nu$ برقرار است اگر و فقط اگر $|\mu| \wedge |\nu| = 0$.

برهان. فرض کنیم $\mu \perp \nu$. دو مجموعهٔ از هم جدای A و B از $\sum$ را با خواص $A \cup B = X$ و $|\mu|(A) = |\nu|(B) = 0$ اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$0 \leq |\mu| \wedge |\nu|(X) = |\mu| \wedge |\nu|(A) + |\mu| \wedge |\nu|(B) \leq |\mu|(A) + |\nu|(B) = 0;$$

درنتیجه $|\mu| \wedge |\nu| = 0$.

به عکس، فرض کنیم $|\mu| \wedge |\nu| = 0$. بنابر قضیهٔ ۱.۲۶، به ازای هر n مجموعه‌ای مانند $E_n \in \sum$

هست به طوری که $|\mu|(E_n) + |\nu|(E_n{}^c) \le ۲^{-n}$. فرض کنیم $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ و قرار می‌دهیم $A = \bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n$ و $B = A^c$. توجه کنید که

$$|\mu|(A) \le |\mu|(A_n) = |\mu|\left[\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right] \le \sum_{i=n}^{\infty} ۲^{-i} = ۲^{۱-n}$$

به ازای هر n برقرار است؛ و لذا، $|\mu|(A) = ۰$.

حال ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر $i \ge n$، $|\nu|(A_n{}^c) = |\nu|(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i^c) \le |\nu|(E_i^c) \le ۲^{-i}$ ایجاب می‌کند که برای هر n، $|\nu|(A_n{}^c) = ۰$. بنابراین، چون $B = A^c = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n^c$، پس $|\nu|(B) = ۰$. لذا، $X = A \cup B$ و $|\mu|(A) = |\nu|(B) = ۰$ برقرار است؛ درنتیجه $\mu \perp \nu$.

فهرست احکام زیر چند رابطهٔ مفید بین پیوستگی مطلق و انفراد ارائه می‌دهد. توابع مجموعه‌ای μ، ν، و ω اندازه‌های علامتدار بر $\sum$ می‌باشند.

۱. هرگاه $\mu \ll \omega$ و $\nu \ll \omega$، آنگاه $|\mu| + |\nu| \ll \omega$.

۲. هرگاه $\mu \perp \omega$ و $\nu \perp \omega$، آنگاه $|\mu| + |\nu| \perp \omega$.

۳. هرگاه $\mu \ll \omega$ و $|\nu| \le |\mu|$، آنگاه $\nu \ll \omega$.

۴. هرگاه $\mu \perp \omega$ و $|\nu| \le |\mu|$، آنگاه $\nu \perp \omega$.

۵. هرگاه $\nu \ll \mu$ و $\nu \perp \mu$، آنگاه $\nu = ۰$.

برهانهای آنها کاربردهای سرراست تعریفها و قضایای ۲.۲۷ و ۵.۲۷ اند. به عنوان مثال، برهان (۵) به قرار زیر است: چون $\nu \perp \mu$، $A \in \sum$ ای هست به طوری که $|\mu|(A^c) = |\nu|(A) = ۰$. بنابر $\nu \ll \mu$ و قضیهٔ ۲.۲۷، $|\nu|(A^c) = ۰$؛ و درنتیجه $|\nu|(X) = |\nu|(A) + |\nu|(A^c) = ۰$؛ یعنی $|\nu| = ۰$؛ درنتیجه $\nu = ۰$.

حال فرض کنیم μ یک اندازهٔ σ - متناهی باشد. یک نتیجهٔ کلاسیک از اچ. لبگ می‌گوید که هر اندازهٔ σ - متناهی دیگر ν را می‌توان به صورت مجموع دو اندازهٔ $\nu_۱$ و $\nu_۲$ که $\nu_۱ \ll \mu$ و $\nu_۲ \perp \mu$ نوشت. برهان این نتیجه مبتنی بر خاصیت سادهٔ زیر از شبکه‌های برداری است.

لم ۶.۲۷. در یک شبکهٔ برداری $x_n \uparrow x$ ایجاب می‌کند که به ازای هر y، $x_n \wedge y \uparrow x \wedge y$.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که $x_n \wedge y \uparrow \le x \wedge y$ برقرار است. از آن سو، اگر $x_n \wedge y \le z$ به ازای هر n و z ی برقرار باشد، قضیهٔ ۱.۲۴ (۵) نشان می‌دهد که

$$(x \wedge y - z)^+ \le (x \wedge y - x_n \wedge y)^+ \le |x \wedge y - x_n \wedge y| \le x - x_n.$$

لذا، $x \le (x \wedge y - z)^+ - x_n \le x$ به ازای هر n برقرار است. ولی در این صورت $x_n \uparrow x$ ایجاب می‌کند که $(x \wedge y - z)^+ = ۰$؛ و درنتیجه $x \wedge y \le z$؛ یعنی $x \wedge y$ کوچکترین کران بالایی $\{x_n \wedge y\}$ است؛ در نتیجه، همانطور که حکم شده، $x_n \wedge y \uparrow x \wedge y$ برقرار است.

حال برای اثبات قضیهٔ لبگ حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ ۷.۲۷. (لبگ). ***فرض کنیم μ و ν دو اندازهٔ σ - متناهی بر $\sum$ باشند. در این صورت دو اندازهٔ منحصر به فرد مانند $\nu_۱$ و $\nu_۲$ هست به طوری که***

$\nu = \nu_۱ + \nu_۲$، ***که در آن*** $\nu_۱ \ll \mu$ ***و*** $\nu_۲ \perp \mu$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم هر دوی μ و ν اندازه‌هایی متناهی باشند. در این صورت فرمول

$$\nu_۱(A) = \sup\{\nu \wedge n\mu(A):\ n = ۱, ۲, \ldots\} \le \nu(A)$$

معرف یک اندازهٔ متناهی بر $\sum$ است (قضیهٔ ۲.۲۶). به علاوه، هرگاه $\mu(A) = ۰$، آنگاه $\nu \wedge n\mu(A) = ۰$ به ازای هر n برقرار است. لذا، $\nu_۱(A) = ۰$؛ یعنی $\nu_۱ \ll \mu$. حال قرار می‌دهیم $\nu_۲ = \nu - \nu_۱$ و توجه می‌کنیم که $\nu_۲$ یک اندازهٔ متناهی است به طوری که $\nu_۱ + \nu_۲ = \nu$. اینک ملاحظه می‌کنیم که $\nu \wedge n\mu \uparrow \nu_۱$ ایجاب می‌کند که

$$\mu + \nu \wedge n\mu = (\mu + \nu) \wedge (n + ۱)\mu \uparrow \mu + \nu_۱;$$

و در نتیجه، بنابر لم ۶.۲۷،

$$\nu \wedge (n + ۱)\mu = \nu \wedge (\mu + \nu) \wedge (n + ۱)\mu \uparrow \nu \wedge (\mu + \nu_۱).$$

از آن سو، $\nu \wedge (n + ۱)\mu \uparrow \nu_۱$ ایجاب می‌کند که $\nu_۱ = \nu \wedge (\mu + \nu_۱)$. لذا،

$$۰ \le \nu_۲ \wedge \mu = (\nu - \nu_۱) \wedge \mu = \nu \wedge (\mu + \nu_۱) - \nu_۱ = \nu_۱ - \nu_۱ = ۰;$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵.۲۷، $\nu_۲ \perp \mu$.

در مورد یکتایی تجزیه، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $\nu_۱ \perp \nu_۲$. درواقع، چون $\nu_۲ \perp \mu$، دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر از هم جدا مانند A و B هست که $X = A \cup B$ و $\nu_۲(A) = \mu(B) = ۰$. در این صورت $\nu_۱ \ll \mu$ ایجاب می‌کند که $\nu_۱(B) = ۰$؛ درنتیجه $\nu_۱ \perp \nu_۲$. حال فرض کنیم جفت دیگری از اندازه‌های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در $\omega_۱ \ll \mu$، $\omega_۲ \perp \mu$، و $\nu = \omega_۱ + \omega_۲$ صدق می‌کند. در این صورت $\nu_۱ - \omega_۱ = \omega_۲ - \nu_۲$ برقرار است، و از یک سو $\nu_۱ - \omega_۱ \ll \mu$ و از سوی دیگر $\nu_۲ - \omega_۲ \perp \mu$. پس $\nu_۱ - \omega_۱ = \omega_۲ - \nu_۲ = ۰$؛ درنتیجه $\nu_۱ = \omega_۱$ و $\nu_۲ = \omega_۲$.

برای حالت کلی، دنبالهٔ از هم جدای $\{A_n\}$ از $\sum$ را با خواص $\nu(A_n) < \infty$، $\mu(A_n) < \infty$، و

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ اختیار می‌کنیم. فرض کنیم $\nu_n(A) = \nu(A \cap A_n)$ و $\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n)$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار باشند. در این صورت ν_n و μ_n اندازه‌های متناهی بر $\sum$ می‌باشند. بنابر حالت پیش، به ازای هر n یک جفت منحصر به فرد ν_1^n و ν_2^n با خواص $\nu_1^n \ll \mu_n$، $\nu_2^n \perp \mu_n$، و $\nu_n = \nu_1^n + \nu_2^n$ وجود دارد. حال به ازای هر $A \in \sum$ تعریف می‌کنیم

$$\nu_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_1^n(A) \text{ و } \nu_2(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_2^n(A).$$

تحقیق اینکه $\nu_1 \ll \mu$، $\nu_2 \perp \mu$، و $\nu = \nu_1 + \nu_2$ امری عادی است. یکتایی ν_1 و ν_2 به آسانی از یکتایی تجزیهٔ هر ν_n نتیجه می‌شود.

اتحاد $\nu = \nu_1 + \nu_2$ حاصل در قضیهٔ پیش (که $\nu_1 \ll \mu$ و $\nu_2 \perp \mu$) ***تجزیهٔ لبگ*** ν نسبت به μ نام دارد.

حال فرض کنیم μ یک اندازه بوده و $f \in L_1(\mu)$. در این صورت فرمول

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad (*)$$

به ازای هر $A \in \sum$ معرف یک اندازهٔ علامتدار متناهی نوعی است که نسبت به μ به طور مطلق پیوسته است. گاهی فرمول (*) را ***انتگرال نامعین*** f می‌نامند. مستقیماً می‌توان تحقیق کرد که

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ d\mu\,,\ \nu^-(A) = \int_A f^- d\mu\,,\ |\nu|(A) = \int_A |f| d\mu$$

به ازای هر $A \in \sum$ برقرارند.

طبیعی است بپرسیم: آیا عکس حکم قبل برقرار است؛ یعنی وقتی ν نسبت به μ به طور مطلق پیوسته است، آیا $f \in L_1(\mu)$ ای هست که ν با (*) داده شده باشد؟ جواب به طور کلی منفی است. ر.ک. تمرین ۷ در آخر بخش. از آن سو، وقتی μ، σ - متناهی و ν متناهی باشد، جواب مثبت است. این نتیجه به خاطر کاربردهای گسترده اهمیت زیادی دارد و به قضیهٔ رادون ـ نیکودیم معروف است. این قضیه (در سال ۱۹۱۳) توسط ج. رادون برای فضاهای اقلیدسی با اندازهٔ لبگ ثابت شد و بعدها (در سال ۱۹۳۰) او. نیکودیم آن را به حالت کلی تعمیم داد.

قضیهٔ ۸.۲۷ (رادون ـ نیکودیم). ***فرض کنیم ν یک اندازهٔ علامتدار متناهی باشد که نسبت به اندازهٔ σ - متناهی μ به طور مطلق پیوسته است. در این صورت یک تابع منحصر به فرد مانند f در $L_1(\mu)$ هست به طوری که***

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است.

برهان. (یکتایی). این قسمت سرراست است و به خواننده واگذار می‌شود؛ ر.ک. تمرین ۶ در آخر بخش.

(وجود). چون ν^+ و ν^- اندازه‌های متناهی‌اند، هر دو نسبت به μ به طور مطلق پیوسته‌اند و $\nu = \nu^+ - \nu^-$ برقرار است. بدون صدمه زدن به کلیت می‌توان فرض کرد ν خود یک اندازهٔ متناهی باشد. بنابر قضیهٔ ۳.۲۷، داریم $\Lambda_\nu \subseteq \Lambda_\mu \subseteq \sum$.

حال فرض کنیم

$$\mathcal{C} = \{g \in L_1(\mu): \int_A g d\mu \le \nu^*(A) \text{ ،} A \in \Lambda_\mu \text{ به ازای هر } \text{ و } g \ge 0\}.$$

ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{C}$ تحت سوپرممهای متناهی بسته است. درواقع، هرگاه $f, g \in \mathcal{C}$ و $A \in \Lambda_\mu$، آنگاه دو مجموعهٔ

$$E = \{x \in A: f(x) \ge g(x)\} \text{ و } F = \{x \in A: g(x) > f(x)\}$$

μ- اندازه‌پذیر (و لذا، ν - اندازه‌پذیر) و ازهم جدایند و $E \cup F = A$. بنابراین،

$$\int_A f \vee g d\mu = \int_E f \vee g d\mu + \int_F f \vee g d\mu = \int_E f d\mu + \int_F g d\mu$$
$$\le \nu^*(E) + \nu^*(F) = \nu^*(E \cup F) = \nu^*(A);$$

درنتیجه $f \vee g \in \mathcal{C}$.

چون $0 \in \mathcal{C}$، مجموعهٔ $\mathcal{C}$ ناتهی است. فرض کنیم

$$a = \sup\{\int g d\mu : g \in \mathcal{C}\} \le \nu(X) < \infty.$$

دنبالهٔ $\{g_n\}$ از $\mathcal{C}$ با $\int g_n d\mu = a$ را اختیار می‌کنیم. به ازای هر n تعریف می‌کنیم $f_n = g_1 \vee \dots \vee g_n$ و توجه می‌کنیم که $\{f_n\}$ دنباله‌ای از $\mathcal{C}$ با $0 \le f_n \uparrow$ بوده و $\lim \int f_n d\mu = a < \infty$. بنابر قضیهٔ لوی (قضیهٔ ۸.۱۸) تابعی چون $f \in L_1(\mu)$ هست به طوری که $f_n \uparrow f$ و $\int f d\mu = a$. در پرتو $0 \le f_n \chi_A \uparrow f\chi_A$، و قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ داریم: به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$، $\int f_n \chi_A d\mu = \int_A f_n d\mu \le \nu^*(A)$؛ یعنی $f \in \mathcal{C}$. برای اتمام برهان نشان می‌دهیم که به ازای هر $A \in \sum$، $\int_A f d\mu \le \nu^*(A)$، $\nu(A) = \int_A f d\mu$.

واضح است که $\omega(A) = \nu^*(A) - \int_A f d\mu$ به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$ یک اندازهٔ متناهی بر Λ_μ تعریف می‌کند که نسبت به μ^* به طور مطلق پیوسته است. به برهان خلف رفته و فرض می‌کنیم $\omega \neq 0$. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۴.۲۷، $\varepsilon > 0$ی و $B \in \Lambda_\mu$ای هست به طوری که $0 < \mu^*(B) < \infty$ و به ازای هر $E \in \Lambda_\mu$ که $E \subseteq B$، $\varepsilon \mu^*(E) \le \omega(E)$. به علاوه، تابع $g = f + \varepsilon \chi_B \ge 0$ تعلق به $L_1(\mu)$ دارد، و چون $a = \int f d\mu < \int g d\mu$، تابع g متعلق به $\mathcal{C}$ نیست. از آن سو، هرگاه $A \in \Lambda_\mu$، آنگاه

$$\int_A g d\mu = \int_A (f + \varepsilon \chi_B) d\mu = \int_A f d\mu + \varepsilon \mu^*(B \cap A) \le \int_A f d\mu + \omega(B \cap A)$$

$$= \int_A fd\mu + v^*(B\cap A) - \int_{B\cap A} fd\mu = \int_{A\sim B} fd\mu + v^*(B\cap A)$$
$$\leq v^*(A\sim B) + v^*(B\cap A) = v^*(A),$$

و لذا $g \in \mathcal{C}$ که تناقض است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

تابع (μ - ت. هـ.) منحصر به فرد f معین شده به وسیلهٔ قضیهٔ رادون ـ نیکودیم را **مشتق رادون ـ نیکودیم** v نسبت به μ نامیده و آن را با $dv/d\mu = f$ یا $dv = fd\mu$ نشان می‌دهیم. تابع f را **تابع چگالی** v نسبت به μ نیز می‌نامند.

در بخش ۲۵ نشان دادیم هرگاه (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $1 < p < \infty$، آنگاه به ازای هر $g \in L_q(\mu)$ که $1/p + 1/q = 1$، تابع

$$F_g(f) = \int fgd\mu \qquad (**)$$

به ازای $f \in L_p(\mu)$ یک تابعی خطی پیوسته بر $L_p(\mu)$ است به طوری که $\|F_g\| = \|g\|_q$. همچنین، در همان بخش ثابت شد که نگاشت $g \to F_g$ از $L_q(\mu)$ به $L^*_p(\mu)$ یک یکمتری شبکه‌ای است و به خواننده قول دادیم ثابت کنیم که این یکمتری شبکه‌ای برو نیز هست؛ یعنی (بنابر اف. ریس) هر عضو $L^*_p(\mu)$ را می‌توان از یک تابع $L_q(\mu)$ مانند در (**) به دست آورد. حال، به کمک قضیهٔ رادون ـ نیکودیم، در وضعیتی هستیم که این حکم را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۹.۲۷. (اف. ریس). ***فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده، $1 < p < \infty$، و F یک تابعی خطی پیوسته بر $L_p(\mu)$ باشد. در این صورت یک تابع منحصر به فرد مانند $g \in L_q(\mu)$ که $1/p + 1/q = 1$ هست به طوری که***

$$F(f) = \int fgd\mu$$

به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ برقرار است و $\|F\| = \|g\|_q$.

برهان. یکتایی g قبلاً مورد بحث قرار گرفته است. برهان "وجود" g دارای دو مرحله است.

مرحلهٔ ۱. ***فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ متناهی باشد.*** $v: \Lambda_\mu \to R$ را با $v(A) = F(\chi_A)$ به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $v(\emptyset) = 0$. همچنین، اگر $\{A_n\}$ یک دنبالهٔ از هم جدا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر بوده و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، داریم

$$\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} - \chi_A \|_p = [\mu^*(A) - \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)]^{1/p} \to 0.$$

بنابراین، طبق پیوستگی F،

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)=\sum_{i=1}^{n} F(\chi_{A_i})=F(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i})\to F(\chi_A)=\nu(A).$$

یعنی $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$ برقرار است؛ و درنتیجه ν یک اندازهٔ علامتدار متناهی بر Λ_μ است. به علاوه، هرگاه $A \in \Lambda_\mu$ در $\mu^*(A) = 0$ صدق کند، آنگاه $\chi_A = 0$. بنابراین، $\nu(A) = F(\chi_A) = F(0) = 0$؛ درنتیجه ν نسبت به μ^* به طور مطلق پیوسته است.

بنابر قضیهٔ رادون ـ نیکودیم، تابع منحصر به فرد g در $L_1(\mu)$ هست به طوری که $\nu(A) = \int_A g d\mu$ به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$ برقرار است. لذا، به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$، داریم $F(\chi_A) = \int \chi_A g d\mu$. از خطی بودن نتیجه می‌شود که به ازای هر تابع پله‌ای ϕ، $F(\phi) = \int \phi g d\mu$. حال قرار می‌دهیم

$$A = \{x \in X:\ g(x) \geq 0\},\ B = \{x \in X:\ g(x) < 0\},$$

و فرض می‌کنیم $0 \leq f \in L_p(\mu)$. دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای را چنان می‌گیریم که $0 \leq \phi_n \uparrow f$. در این صورت $\phi_n \chi_A g = \phi_n g^+ \uparrow fg^+$ و $\lim \|\phi_n\chi_A - f\chi_A\|_p = 0$. از پیوستگی F داریم

$$\lim \int \phi_n g^+\, d\mu = \lim F(\phi_n \chi_A) = F(f\chi_A) < \infty\,;$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ لوی، $fg^+ \in L_1(\mu)$ و $F(f\chi_A) = \int fg^+\ d\mu$. به همین نحو، $fg^- \in L_1(\mu)$ و $F(f\chi_B) = \int fg^- d\mu$. لذا، به ازای هر $f \in L_p(\mu)$، داریم $fg \in L_1(\mu)$ و $F(f) = \int fgd\mu$. برای اتمام برهان این حالت، کافی است نشان دهیم که $g \in L_q(\mu)$.

برای این کار، قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X:\ |g(x)| \leq n\}$ و تعریف می‌کنیم $f_n = |g|^{q-1}\chi_{E_n}\mathrm{Sgn}\ g$. چون هر f_n اساساً کراندار است، $\{f_n\} \subseteq L_p(\mu)$ برقرار است و، به علاوه، $f_n g = |f_n|^p = |g|^q\chi_{E_n} \uparrow |g|^q$. بنابراین،

$$\int |g|^q\chi_{E_n} d\mu = \int f_n g d\mu = F(f_n) \leq \|F\|.(\int |f_n|^p)^{1/p}$$
$$= \|F\|.\left[\int |g|^q \chi_{E_n} d\mu\right]^{1/p},$$

که از آن به ازای هر n داریم $(\int |g|^q\chi_{E_n} d)^{1/q} \leq \|F\| < \infty$. حال قضیهٔ لوی ایجاب می‌کند که $g \in L_q(\mu)$.

مرحلهٔ ۲. حالت کلی. به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$ می‌نویسیم $L_p(A) = \{f \in L_p(\mu):\ f = 0 \text{ بر } A^c\}$ و توجه می‌کنیم که $L_p(A) = \{f\chi_A:\ f \in L_p(\mu)\}$. همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathcal{C} = \{A \in \wedge_\mu : \mu^*(A) < \infty\}.$$

بنابر حالت قبل، واضح است که به ازای هر $A \in \mathcal{C}$ عنصر منحصر به فردی مانند $g_A \in L_q(A)$ هست به طوری که

$$F(f\chi_A) = \int f g_A d\mu$$

به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ برقرار است. به علاوه،

$$\|g_A\|_q = \sup\{|F(f\chi_A)|: \|f\|_p \leq ۱\} \leq \|F\| < \infty$$

برقرار است. فرض کنیم $a = \sup\{\|g_A\|_q: A \in \mathcal{C}\} \leq \|F\| < \infty$.

حال ملاحظه می‌کنیم که اگر $A, B \in \mathcal{C}$ در $A \subseteq B$ صدق کنند، بر A داریم $g_A = g_B$. بنابراین، $|g_A| \leq |g_B|$؛ و درنتیجه $\|g_A\|_q \leq \|g_B\|_q$. پس یک دنبالهٔ صعودی مانند $\{A_n\}$ از $\mathcal{C}$ هست به طوری که $\|g_{A_n}\|_q \uparrow a < \infty$. مطلب اخیر همراه با قضیهٔ لوی نشان می‌دهد که تابع g با تعریف $g(x) = \lim g_{A_n}(x)$ به ازای هر $x \in X$ تعلق به $L_q(\mu)$ دارد. واضح است که g خارج مجموعهٔ $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ صفر است.

حال حکم می‌کنیم که F روی $L_p(A^c)$ صفر است. درواقع، اگر F بر $L_p(A^c)$ صفر نباشد، در پرتو چگالش نرمی توابع پله‌ای، $B \in \mathcal{C}$ ای هست که $B \subseteq A^c$؛ درنتیجه F بر $L_p(B)$ صفر نمی‌شود. لذا، $g_B \neq ۰$، و چون به ازای هر n، $B \cap A_n = \varnothing$، معلوم می‌شود که برای هر n

$$a^q \geq \left(\|g_{B \cup A_n}\|_q\right)^q = \left(\|g_B\|_q\right)^q + \left(\|g_{A_n}\|_q\right)^q$$

برقرار است. چون $\lim \|g_{A_n}\|_q = a$، پس $\|g_B\|_q = ۰$ که ناممکن است. لذا، F بر $L_p(A^c)$ صفر خواهد شد.

حال فرض کنیم $f \in L_p(\mu)$. ابتدا توجه می‌کنیم که چون $g \in L_q(\mu)$، داریم $fg \in L_۱(\mu)$. لذا، از $fg_{A_n} \to fg$، $|fg_{A_n}| \leq |fg|$، و قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ معلوم می‌شود که $\lim \int fg_{A_n} d\mu = \int fg d\mu$. به همین نحو، داریم $\lim \|f\chi_{A_n} - f\chi_A\|_p = ۰$؛ و درنتیجه، بنابر پیوستگی F، باید داشته باشیم $\lim F(f\chi_{A_n}) = F(f\chi_A)$. بنابراین، طبق مطلوب،

$$\begin{aligned} F(f) &= F(f\chi_A + f\chi_{A^c}) = F(f\chi_A) + F(f\chi_{A^c}) = F(f\chi_A) \\ &= \lim F(f\chi_{A_n}) = \lim \int fg_{A_n} d\mu = \int fg d\mu. \end{aligned}$$

تساوی $\|g\|_q = \|F\|$ در قضیهٔ ۱۵.۲۵ ثابت شد. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

فضای مزدوج $L_۱(\mu)$ در زیر مطرح می‌شود. هرگاه فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ-

متناهی باشد، آنگاه دوگان نرمی $L_1(\mu)$ یک شبکهٔ یکریخت با $L_\infty(\mu)$ است. این ممکن است در یک فضای اندازهٔ کلی درست نباشد (ر.ک. تمرین ۱۳ از بخش ۲۵).

قضیهٔ ۲۷.۱۰. ***فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی بوده و F یک تابعی خطی پیوسته بر $L_1(\mu)$ باشد. در این صورت تابع منحصر به فردی مانند $g \in L_\infty(\mu)$ هست که***

$$F(f) = \int fg d\mu$$

به ازای هر $f \in L_1(\mu)$ برقرار است. به علاوه، $\|F\| = \|g\|_\infty$. به عبارت دیگر،

$$L_1^*(\mu) = L_\infty(\mu).$$

برهان. ابتدا فضای اندازهٔ متناهی (X, S, μ) را در نظر می‌گیریم. استدلالهای حالت ۱ در برهان قضیهٔ ۹.۲۷ در اینجا نیز به کارند و نشان می‌دهند که یک تابع منحصر به فرد مانند $g \in L_1(\mu)$ هست به طوری که $F(f) = \int fg d\mu$ به ازای هر $f \in L_1(\mu)$ برقرار است. حال نشان می‌دهیم که $g \in L_\infty(\mu)$ و $\|F\| = \|g\|_\infty$.

درواقع، هرگاه $\varepsilon > 0$ و $A = \{x \in X: \|F\| + \varepsilon < |g(x)|\}$، آنگاه

$$\begin{aligned}(\|F\| + \varepsilon)\mu^*(A) &\le \int_A |g| d\mu = \int_A g \operatorname{Sgn} g \, d\mu = F(\chi_A \operatorname{Sgn} g)\\ &\le \|F\| . \|\chi_A \operatorname{Sgn} g\|_1 = \|F\| \mu^*(A)\end{aligned}$$

برقرار است. لذا، $\mu^*(A) = 0$؛ و درنتیجه به ازای تقریباً هر x، $|g(x)| \le \|F\| + \varepsilon$. این نشان می‌دهد که $g \in L_\infty(\mu)$ و $\|g\|_\infty \le \|F\| + \varepsilon$. چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، $\|g\|_\infty \le \|F\|$ برقرار است. از آن سو، $\|F\| \le \|g\|_\infty$ بداهتاً برقرار است؛ و لذا $\|F\| = \|g\|_\infty$.

برای تعمیم قضیه به حالت σ- متناهی، فرض کنیم $\{X_n\}$ یک دنبالهٔ ازهم جدا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد که $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ و، به ازای هر n، $\mu^*(X_n) < \infty$. بنابر استدلالهای قبل، به ازای هر n تابع منحصر به فردی مانند $g_n \in L_\infty(\mu)$ هست که خارج X_n صفر است و $\|g_n\|_\infty \le \|F\|$ و $F(\chi_{X_n}) = \int fg_n d\mu$ به ازای هر $f \in L_1(\mu)$ برقرار است. فرض کنیم g تابعی باشد که بر هر X_n مساوی g_n است. واضح است که g اندازه‌پذیر است، و چون $\|g\|_\infty \le \|F\|$، پس $g \in L_\infty(\mu)$.

ذکر جزئیات تحقیق $F(f) = \int fg d\mu$ به ازای هر $f \in L_1(\mu)$ را به خواننده وا می‌گذاریم.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۹.۲۷، ثابت می‌کنیم که هر فضای L_p که $1 < p < \infty$ یک فضای باناخ انعکاسی است. به یاد آورید که یک فضای باناخ انعکاسی است اگر نشانندهٔ طبیعی فضا در دوگان دومش

برو باشد.

قضیهٔ ۱۱.۲۷. *فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. هرگاه $1 < p < \infty$، آنگاه $L_p(\mu)$ یک فضای باناخ انعکاسی است.*

برهان. فرض کنیم $\phi \in L_p^{**}(\mu)$. در این صورت $\psi(g) = \phi(F_g)$ به ازای $g \in L_q(\mu)$ معرف یک تابعی خطی کراندار بر $L_q(\mu)$ است زیرا

$$|\varphi(g)| = |\phi(F_g)| \leq \|\varphi\| . \|F_g\| = \|\varphi\| . \|g\|_q .$$

بنابر قضیهٔ ۹.۲۷، $f \in L_p(\mu)$ ای هست به طوری که $\varphi(g) = \int gfd\mu$ به ازای هر $g \in L_q(\mu)$ برقرار است. از آن سو،

$$\hat{f}(F_g) = F_g(f) = \int gfd\mu = \varphi(g) = \phi(F_g)$$

به ازای هر $g \in L_q(\mu)$ برقرار است، و این (بنابر قضیهٔ ۹.۲۷) نشان می‌دهد که $\hat{f} = \phi$؛ یعنی نشانندهٔ طبیعی $L_p(\mu)$ در دوگان دومش $L_p^{**}(\mu)$ برو است؛ و درنتیجه $L_p(\mu)$ یک فضای باناخ انعکاسی است.

تمرینات

۱. خواص زیر از اندازه‌های علامتدار را تحقیق کنید:

آ. $\mu \ll \mu$.

ب. $\mu \ll \nu$ و $\omega \ll \mu$ ایجاب می‌کنند که $\nu \ll \omega$.

پ. هرگاه $\mu \leq \nu \leq 0$، آنگاه $\mu \ll \nu$.

ت. هرگاه $0 \ll \mu$، آنگاه $\mu = 0$.

۲. احکام (۱) تا (۵) بعد از قضیهٔ ۵.۲۷ را تحقیق کنید.

۳. فرض کنید μ و ν دو اندازه بر σ - جبر $\sum$ باشند. هرگاه ν یک اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند:

آ. $\mu \gg \nu$ برقرار است.

ب. به ازای هر دنبالهٔ $\{A_n\}$ از $\sum$ با خاصیت $\lim \mu(A_n) = 0$، داریم $\lim \nu(A_n) = 0$.

پ. به ازای هر $0 < \varepsilon$ عددی مانند $0 < \delta$ (تابع ε) هست به طوری که هروقت $A \in \sum$ در $\mu(A) < \delta$ صدق کند، آنگاه $\nu(A) < \varepsilon$ برقرار است.

[**راهنمایی.** هرگاه (آ) قسمت (ب) را ایجاب نکند، آنگاه $0 < \varepsilon$ ی و دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از $\sum$

هست به طوری که $\mu(A_n) < ۲^{-n}$ و $\varepsilon < \nu(A_n)$. قرار می‌دهیم $A = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ و توجه می‌کنیم که $\mu(A) = ۰$ ولی $\nu(A) \geq \varepsilon$.]

۴. فرض کنید μ یک اندازهٔ متناهی بوده و $\{\nu_n\}$ دنباله‌ای از اندازه‌های متناهی (همه بر $\sum$) باشد به طوری که $\nu_n \ll \mu$ به ازای هر n برقرار است. به علاوه، فرض کنید $\lim \nu_n(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ در R موجود باشد. نشان دهید که

آ. به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ هست به طوری که هروقت $A \in \sum$ در $\mu(A) < \delta$ صدق کند، $\nu_n(A) < \varepsilon$ به ازای هر n برقرار است.

ب. تابع مجموعه‌ای $\nu(A) = \lim \nu_n(A)$ به ازای هر $A \in \sum$ یک اندازه است به طوری که $\nu \ll \mu$.

[**راهنمایی.** $\sum$ را مجهز به فاصلهٔ $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$ در نظر بگیرید که در آن اگر $\mu(A\Delta B) = ۰$، A و B را یکی می‌گیریم. در این صورت $(\sum, d)$ یک فضای متری تام است؛ ر.ک. تمرین ۹ از بخش ۱۱. حال، با استفاده از $\nu_n \ll \mu$، تحقیق کنید که هر ν_n یک تابع پیوستهٔ خوش تعریف بر $\sum$ است. به علاوه، هرگاه $\varepsilon > ۰$، آنگاه هر

$$\mathcal{C}_k = \{A \in \textstyle\sum\colon\ |\nu_n(A) - \nu_m(A)| \leq \varepsilon \text{ ،} n, m \geq k \text{ به ازای هر}\}$$

یک مجموعهٔ بسته است و $\sum = \bigcup_{k=۱}^{\infty} \mathcal{C}_k$ برقرار می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۱۵.۵، $\mathcal{C}_k$ای یک نقطهٔ درونی دارد. با استفاده از این و تمرین قبل، قسمت (آ) را ثابت کنید. قسمت (ب) از قسمت (آ) نتیجه می‌شود.]

۵. فرض کنید $\{\nu_n\}$ دنباله‌ای از اندازه‌های متناهی ناصفر باشد به طوری که $\lim \nu_n(A)$ در R به ازای هر $A \in \sum$ وجود دارد. نشان دهید که $\nu(A) = \lim \nu_n(A)$ به ازای $A \in \sum$ یک اندازهٔ متناهی است.

[**راهنمایی.** اندازهٔ متناهی $\mu(A) = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n}[\nu_n(A)/\nu_n(X)]$ را درنظر گرفته و تمرین قبل را به کار گیرید.]

۶. یکتایی مشتق رادون ـ نیکودیم را با اثبات حکم زیر تحقیق کنید:

هرگاه (X, S, μ) یک فضای اندازه بوده و $f \in L_۱(\mu)$ در $\int_A f d\mu = ۰$ به ازای هر $A \in S$ صدق کند، آنگاه $f = ۰$ ت. ه.

۷. این تمرین نشان می‌دهد که فرض σ- تناهی μ در قضیهٔ رادون ـ نیکودیم را نمی‌توان حذف کرد. فرض کنید $X = [۰, ۱]$، $\sum$، σ- جبر تمام زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ از $[۰, ۱]$ بوده، ν اندازهٔ لبگ بر $\sum$ باشد، و اندازهٔ μ با $\mu(\varnothing) = ۰$ و $\mu(A) = \infty$ اگر $A \neq \varnothing$ تعریف شده باشد.

(ضمناً، μ بزرگترین اندازه بر $\sum$ است.) نشان دهید که

آ. ν یک اندازهٔ متناهی است، μ، σ- متناهی نیست، و $\nu \ll \mu$.

ب. تابعی چون $f \in L_1(\mu)$ نیست که $\nu(A) = \int_A f d\mu$ به ازای هر $A \in \sum$ برقرار باشد.

۸. فرض کنید μ یک اندازهٔ علامتدار متناهی بر $\sum$ باشد. نشان دهید که $f \in L_1(|\mu|)$ ای منحصر به فرد هست که

$$\mu(A) = \int_A fd|\mu|$$

به ازای هر $A \in \sum$ برقرار است.

۹. فرض کنید ν یک اندازهٔ متناهی و μ یک اندازهٔ σ- متناهی باشد به طوری که $\nu \ll \mu$. همچنین $g = d\nu/d\mu \in L_1(\mu)$ مشتق رادون ـ نیکودیم ν نسبت به μ باشد. نشان دهید

آ. هرگاه $Y = \{x \in X: g(x) > 0\}$، آنگاه $Y \cap A$ به ازای هر مجموعهٔ ν - اندازه‌پذیر A یک مجموعهٔ μ- اندازه‌پذیر است.

ب. هرگاه $f \in L_1(\nu)$، آنگاه $fg \in L_1(\mu)$ و $\int fd\nu = \int fgd\mu$ برقرار است.

[**راهنمایی.** ابتدا توجه کنید که $\sum \subseteq \Lambda_\mu \subseteq \Lambda_\nu$ برقرار است و سپس ملاحظه کنید که، بنابر قضیهٔ ۹.۱۲، $\nu^*(A) = \int_A g d\mu$ باید به ازای هر $A \in \Lambda_\mu$ برقرار باشد. بنابراین، $\nu^*(Y^c) = 0$. در مورد (آ) از قضیهٔ ۳.۲۷ و اینکه $\sum$ یک σ- جبر است استفاده کنید. حال اگر $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ یک ν- تابع پله‌ای باشد، آنگاه

$$\int \phi d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \nu^*(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \nu^*(A_i \cap Y) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{A_i \cap Y} g d\mu = \int \phi g d\mu;$$

و درنتیجه $\phi g \in L_1(\mu)$. حال اگر $0 \leq f \in L_1(\nu)$، دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از ν - توابع پله‌ای را اختیار کنید که به ازای هر x، $0 \leq \phi_n(x) \uparrow f(x)$. برای اتمام برهان، ملاحظه کنید که $0 \leq \phi_n g \uparrow fg$ و $\int \phi_n g d\mu = \int \phi_n d\nu \uparrow \int f d\nu < \infty$.]

۱۰. قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقهای رادون ـ نیکودیم را ثابت کنید: هرگاه ω یک اندازهٔ σ- متناهی بوده و ν و μ دو اندازهٔ متناهی (همه بر $\sum$) باشند به طوری که $\nu \ll \mu$ و $\mu \ll \omega$، آنگاه $\nu \ll \omega$ و

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\omega} \ (\omega - \text{ت. ه.})$$

برقرار است.

[**راهنمایی.** از تمرین پیش استفاده کنید.]

۱۱. در اینجا همهٔ اندازه‌ها بر σ- جبر ثابت $\sum$ تعریف شده‌اند.

آ. دو اندازهٔ μ و ν را **هم‌ارز** نامیم (و می‌نویسیم $\nu \equiv \mu$) اگر $\nu \gg \mu$ و $\mu \gg \nu$ هر دو برقرار باشند. نشان دهید $\equiv$ یک رابطهٔ هم‌ارزی بین اندازه‌ها بر $\sum$ است.

ب. هرگاه μ و ν دو اندازهٔ σ- متناهی هم‌ارز باشند، آنگاه نشان دهید که $\Lambda_\nu = \Lambda_\mu$.

پ. نشان دهید هرگاه μ و ν دو اندازهٔ متناهی هم‌ارز باشند، آنگاه

$$\frac{d\mu}{d\nu}.\frac{d\nu}{d\mu} = ۱$$

ت. هـ. برقرار است.

ت. هرگاه μ و ν دو اندازهٔ متناهی هم‌ارز باشند، آنگاه نشان دهید که $f \to f.(d\mu/d\nu)$ از $L_۱(\mu)$ به $L_۱(\nu)$ یک یکمتری شبکه‌ای بروست. لذا، $L_۱(\mu) = L_۱(\nu)$ تحت این انطباق برقرار است.

ث. قسمت (ت) را به اندازه‌های σ- متناهی هم‌ارز تعمیم دهید؛ یعنی هرگاه μ و ν دو اندازهٔ σ- متناهی هم‌ارز باشند، آنگاه نشان دهید که شبکه‌های باناخ $L_۱(\mu)$ و $L_۱(\nu)$ یکمتر شبکه‌ای‌اند.

ج. نشان دهید هرگاه μ و ν دو اندازهٔ σ- متناهی هم‌ارز باشند، آنگاه شبکه‌های باناخ $L_p(\mu)$ و $L_p(\nu)$ به ازای هر $۱ \leq p \leq \infty$ یکمتر شبکه‌ای‌اند.

۱۲. فرض کنید μ یک اندازهٔ σ- متناهی بوده و $AC(\mu)$ گردایهٔ تمام اندازه‌های علامتدار متناهی باشد که نسبت به μ به طور مطلق پیوسته‌اند؛ یعنی

$$AC(\mu) = \{\nu \in M(\textstyle\sum):\ \nu \ll \mu\}.$$

آ. نشان دهید $AC(\mu)$ با نرم $\|\nu\| = |\nu|(X)$ یک شبکهٔ باناخ است.

ب. به ازای هر $f \in L_۱(\mu)$، μ_f را اندازهٔ علامتدار متناهی با تعریف $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$ به ازای هر $A \in \sum$ بگیرید. نشان دهید که $f \to \mu_f$ یک یکمتری شبکه‌ای از $L_۱(\mu)$ به روی $AC(\mu)$ است.

۱۳. فرض کنید $\sum$ یک σ- جبر زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X و μ یک اندازه بر $\sum$ باشد. همچنین $\sum^*$ یک σ- جبر زیرمجموعه‌های مجموعهٔ Y بوده و $T: X \to Y$ دارای این ویژگی باشد که به ازای هر $A \in \sum^*$، $T^{-۱}(A) \in \sum$.

آ. نشان دهید که $\nu(A) = \mu(T^{-۱}(A))$ به ازای هر $A \in \sum^*$ یک اندازه بر $\sum^*$ است.

ب. هرگاه $f \in L_۱(\nu)$، آنگاه نشان دهید که $f \circ T \in L_۱(\mu)$ و

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ T d\mu.$$

پ. هرگاه μ یک اندازهٔ متناهی و ω یک اندازهٔ σ- متناهی بر $\sum^*$ باشد به طوری که $\nu \ll \omega$، آنگاه تابعی مانند $g \in L_۱(\omega)$ هست به طوری که

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_Y f g d\omega$$

به ازای هر $f \in L_۱(\nu)$ برقرار است.

۱۴. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی و g یک تابع اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید هرگاه به ازای $1 \leq p < \infty$ و هر $f \in L_p(\mu)$ داشته باشیم $fg \in L_1(\mu)$، آنگاه $g \in L_q(\mu)$ که در آن $1/p + 1/q = 1$.

همچنین، با مثال نقض نشان دهید که به ازای $1 < p < \infty$، σ- تناهی μ را نمی‌توان حذف کرد.

[**راهنمایی.** می‌توان فرض کرد $g \geq 0$ (چرا؟). در این صورت $F(f) = \int fgd\mu$ به ازای $f \in L_p(\mu)$ معرف یک تابعی خطی مثبت بر $L_p(\mu)$ است. بنابر قضیهٔ ۱۰.۲۴، F پیوسته است. اما، بنابر قضیهٔ ۹.۲۷ و ۱۰.۲۷، $h \in L_q(\mu)$ ی هست به طوری که به ازای هر $f \in L_p(\mu)$، $\int fgd\mu = \int fhd\mu$. نشان دهید که $g = h$ ت. ه. برقرار است.]

۱۵. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازهٔ σ- متناهی، g یک تابع اندازه‌پذیر بوده، و $1 \leq p < \infty$. همچنین عددی حقیقی مانند $M > 0$ باشد به طوری که $\phi g \in L_1(\mu)$ و $\int \phi g d\mu \leq M \|\phi\|_p$ به ازای هر تابع پله‌ای ϕ برقرار است. نشان دهید که

آ. $g \in L_q(\mu)$، که در آن $1/p + 1/q = 1$، و

ب. $\int fgd\mu \leq M \|f\|_p$ به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ برقرار است.

۲۸. قضیهٔ نمایش ریس

در این بخش X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف است.

به یاد آوریم که $C_c(X)$ شبکهٔ برداری تمام توابع پیوستهٔ حقیقی بر X با محافظ فشرده است؛ یعنی $f: X \to R$ تعلق به $C_c(X)$ دارد اگر و فقط اگر f پیوسته بوده و خارج یک مجموعهٔ فشرده پیوسته باشد. در اینجا هدف اصلی بحث توصیف تابعیهای خطی مثبت بر $C_c(X)$ است. به یاد آورید که تابعی خطی F بر $C_c(X)$ را **مثبت** گوییم اگر هروقت $0 \leq f \in C_c(X)$، رابطهٔ $F(f) \geq 0$ برقرار باشد.

واضح است که هر تابع پیوسته بر X اندازه‌پذیر بورل است. لذا، هرگاه μ یک اندازهٔ بورل بر X باشد [یعنی μ یک اندازه بر σ- جبر $\mathscr{B}$ تولید شده به وسیلهٔ مجموعه‌های باز و صادق در $\mu(K) < \infty$ به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K است]، آنگاه

$$F(f) = \int fd\mu \quad \text{به ازای} \; f \in C_c(X)$$

معرف یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ است. به طور کلی، هرگاه F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ بوده و اندازهٔ بورل μ بر X در $F(f) = \int fd\mu$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ صدق کند، آنگاه μ یک ***اندازهٔ نمایشی*** برای F نام دارد (یا گوییم μ، F را ***نمایش می‌دهد***). نتیجهٔ اساسی زیر (به نام قضیهٔ نمایش ریس) را

خواهیم داشت: هر تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ با یک اندازهٔ بورل منتظم منحصر به فرد نمایش داده می‌شود.

به یاد آورید که اندازهٔ بورل μ بر X را یک ***اندازهٔ بورل منتظم*** نامیم (ر.ک. تعریف ۴.۱۵) اگر μ دو خاصیت زیر را نیز داشته باشد:

آ. به ازای هر مجموعهٔ بورل B، $\mu(B) = \inf\{\mu(V): B \subseteq V$ و V باز است$\}$؛ و

ب. به ازای هر مجموعهٔ باز V، $\mu(V) = \sup\{\mu(K): K \subseteq V$ و K فشرده است$\}$.

البته دو شرط فوق تضمین می‌کنند که هروقت مجموعهٔ بورل B اندازهٔ متناهی داشته باشد، رابطهٔ

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K): K \subseteq B \text{ و } K \text{ فشرده است}\}$$

برقرار است؛ ر.ک. بحث بعد از تعریف ۴.۱۵.

بحث را با چند نماد متعارف آغاز می‌کنیم. فرض کنیم V یک مجموعهٔ باز بوده و $f \in C_c(X)$. $f < V$ یعنی $0 \le f(x) \le 1$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است و $\operatorname{Supp} f \subseteq V$. به همین نحو، به ازای مجموعهٔ فشردهٔ K و تابع $f \in C_c(X)$، نماد $K < f$ یعنی $0 \le f(x) \le 1$ به ازای هر $x \in X$ برقرار بوده و به ازای هر $x \in K$، $f(x) = 1$. نماد $K < f < V$ یعنی $K < f$ و $f < V$ هر دو برقرارند. با این اصطلاحات، مثلاً قضیهٔ ۸.۷ را می‌توان این طور بیان کرد: ***هرگاه $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ برقرار بوده و K فشرده و هر V_i باز باشد، آنگاه توابعی مانند $f_1, \ldots, f_n \in C_c(X)$ وجود دارند به طوری که به ازای هر i، $f_i < V_i$ و $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$ بر K.***

حال فرض کنیم F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد. به ازای هر زیرمجموعهٔ باز V از X، تعریف می‌کنیم

$$\mu(V) = \sup\{F(f): f < V\}.$$

واضح است که $0 \le \mu(V) \le \infty$ به ازای هر مجموعهٔ باز V برقرار است. بی‌درنگ معلوم می‌شود که $\mu(V) \le \mu(W)$ به ازای هر جفت مجموعهٔ باز با خاصیت $V \subseteq W$ برقرار است (زیرا $f < V$ رابطهٔ $f < W$ را ایجاب می‌کند). این نکات به ما اجازه می‌دهند که با تعریف

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V): A \subseteq V \text{ و } V \text{ باز است}\}$$

تابع مجموعه‌ای μ را از مجموعه‌های باز به تمام زیرمجموعه‌های A از X وسعت دهیم. همانطور که انتظار می‌رود، تابع مجموعه‌ای μ یک اندازهٔ خارجی می‌باشد.

قضیهٔ ۱.۲۸. ***فرض کنیم F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد. در این صورت تابع مجموعه‌ای μ (تعریف شده در فوق) یک اندازهٔ خارجی بر X است.***

برهان. واضح است که $0 \le \mu(A) \le \infty$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است. چون $f < \varnothing$ اگر و فقط اگر $f = 0$، پس $\mu(\varnothing) = 0$. همچنین واضح است که اگر $A \subseteq B$، رابطهٔ $\mu(A) \le \mu(B)$ برقرار است. برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که μ، σ- زیرجمعی است.

برای این کار، فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$، آنگاه $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ واضح است. لذا، فرض می‌کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. همچنین $\varepsilon > 0$. به ازای هر n، مجموعهٔ باز V_n را طوری می‌گیریم که $A_n \subseteq V_n$ و $\mu(V_n) < \mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$. قرار می‌دهیم $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. هرگاه $f < V$، آنگاه $K = \operatorname{Supp} f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ و، به خاطر فشردگی K، mی هست به طوری که $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} V_n$. بنابر قضیهٔ ۸.۷، توابع $f_1, \dots, f_m \in C_c(X)$ وجود دارند به طوری که به ازای $n = 1, \dots, m$، $f_n < V_n$ و $\sum_{n=1}^{m} f_n = 1$ بر K. واضح است که $f \le \sum_{n=1}^{m} f_n$ برقرار است و، به خاطر مثبت بودن F،

$$F(f) \le \sum_{n=1}^{\infty} F(f_n) \le \sum_{n=1}^{m} \mu(V_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon.$$

لذا، چون نامساوی دوم به ازای هر $f < V$ برقرار است، پس $\mu(V) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$. ولی در این صورت $A \subseteq V$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\mu(A) \le \mu(V) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$، که از آن داریم

$$\mu(A) = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

اندازهٔ خارجی μ معین شده به وسیلهٔ تابعی خطی مثبت F ***اندازهٔ خارجی القا شده به وسیلهٔ*** F بر X (یا ***اندازهٔ خارجی مربوط به*** F) نام دارد. هدف بعدی نشان دادن آن است که μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر $\mathscr{B}$ است.

قضیهٔ ۲.۲۸. ***فرض کنیم F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ بوده و μ اندازهٔ خارجی القا شدهٔ آن باشد. در این صورت هر مجموعهٔ بورل μ- اندازه‌پذیر است (یعنی $\mathscr{B} \subseteq \Lambda_\mu$) و تحدید μ به $\mathscr{B}$ یک اندازهٔ بورل منتظم می‌باشد.***

برهان. برهان مرحله به مرحله پیش می‌رود.

مرحلهٔ ۱. ***به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K داریم*** $\mu(K) < \infty$. فرض کنیم K یک مجموعهٔ فشرده

باشد. مجموعهٔ باز V با بست فشرده را طوری می‌گیریم که $K \subseteq V$. بنابر قضیهٔ ۸.۷، یک تابع مانند $g \in C_c(X)$ هست به طوری که $\overline{V} < g$. حال اگر $f < V$ برقرار باشد، داریم $f \leq g$؛ و درنتیجه $F(f) \leq F(g)$. بنابراین،

$$\mu(K) \leq \mu(V) = \sup\{F(f): f < V\} \leq F(g) < \infty .$$

مرحلهٔ دو. هرگاه $K_۱$ و $K_۲$ *مجموعه‌های فشردهٔ از هم جدایی باشند، آنگاه* $\mu(K_۱ \cup K_۲) = \mu(K_۱) + \mu(K_۲)$. در پرتو σ- زیرجمعی بودن μ، کافی است ثابت کنیم که $\mu(K_۱) + \mu(K_۲) \leq \mu(K_۱ \cup K_۲)$.

چون $K_۱ \subseteq K_۲{}^c$ برقرار است، (بنابر قضیهٔ ۱۵.۶) مجموعهٔ بازی چون $V_۱$ با بست فشرده هست به طوری که $K_۱ \subseteq V_۱ \subseteq \overline{V}_۱ \subseteq K_۲{}^c$. لذا، $K_۲ \subseteq (\overline{V}_۱)^c$ برقرار است. قرار می‌دهیم $V_۲ = (\overline{V}_۱)^c$ و توجه می‌کنیم که $V_۱$ و $V_۲$ دو مجموعهٔ باز از هم جدا می‌باشند.

حال فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. مجموعهٔ باز V را طوری می‌گیریم که $K_۱ \cup K_۲ \subseteq V$ و $\mu(V) < \mu(K_۱ \cup K_۲) + \varepsilon$. واضح است که $K_۱ \subseteq V \cap V_۱$ و $K_۲ \subseteq V \cap V_۲$. حال دو تابع f و g را طوری می‌گیریم که $f < V \cap V_۱$، $g < V \cap V_۲$، $\mu(V \cap V_۱) < F(f) + \varepsilon$، و $\mu(V \cap V_۲) < F(g) + \varepsilon$. توجه کنید که $f + g < V$ [زیرا $V_۱ \cap V_۲ = \varnothing$]. ولی در این صورت

$$\mu(K_۱) + \mu(K_۲) \leq \mu(V \cap V_۱) + \mu(V \cap V_۲) < F(f) + F(g) + ۲\varepsilon$$
$$= F(f + g) + ۲\varepsilon \leq \mu(V) + ۲\varepsilon < \mu(K_۱ \cup K_۲) + ۳\varepsilon$$

به ازای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است. بنابراین، همانطور که حکم شده،

$$\mu(K_۱) + \mu(K_۲) \leq \mu(K_۱ \cup K_۲).$$

مرحلهٔ سه. *به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X داریم*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V): A \subseteq V \text{ و } V \text{ باز است}\}.$$

این دقیقاً تعریف μ می‌باشد.

مرحلهٔ چهار. *به ازای هر مجموعهٔ باز V داریم* $\mu(V) = \sup\{\mu(K): K \subseteq V \text{ و } K \text{ فشرده است}\}$.

فرض کنیم V یک مجموعهٔ باز بوده و $r \in R$ چنان باشد که $r < \mu(V)$. $f < V$ را با خاصیت $r < F(f)$ اختیار کرده و فرض می‌کنیم $K = \operatorname{Supp} f$. هرگاه W یک مجموعهٔ باز باشد به طوری که $K \subseteq W$، آنگاه $f < W$ برقرار است؛ و درنتیجه $r < F(f) \leq \mu(W)$. بنابراین،

$$\mu(V) \geq \mu(K) = \inf\{\mu(W) : K \subseteq W \text{ و } W \text{ باز است}\} \geq F(f) > r$$

به ازای هر $r \in R$ با خاصیت $r < \mu(V)$ برقرار است و اتحاد مطلوب حاصل می‌شود.

مرحلهٔ پنج. هر مجموعهٔ بورل μ- *اندازه‌پذیر است؛* یعنی $\mathscr{B} \subseteq \wedge_\mu$.

ابتدا توجه می‌کنیم که اگر K یک مجموعهٔ فشرده و V مجموعهٔ بازی جدا از K باشد، $\mu(K) + \mu(V) = \mu(K \cup V)$ برقرار است. درواقع، بنابر مرحلهٔ دو، به ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K_1 از V داریم

$$\mu(K) + \mu(K_1) = \mu(K \cup K_1) \leq \mu(K \cup V) \leq \mu(K) + \mu(V),$$

و حکم ما از اتحاد مرحلهٔ چهار حاصل خواهد شد.

چون $\wedge_\mu$ یک σ- جبر است، کافی است نشان دهیم که $\wedge_\mu$ شامل هر مجموعهٔ باز است. لذا، فرض می‌کنیم V یک مجموعهٔ باز باشد. باید نشان دهیم که $\mu(A \cap V) + \mu(A \cap V^c) \leq \mu(A)$ به ازای هر $A \subseteq X$ برقرار است. هرگاه $\mu(A) = \infty$، آنگاه نامساوی واضح است. لذا، می‌توان فقط حالت $\mu(A) < \infty$ را درنظر گرفت.

ابتدا فرض می‌کنیم A نیز یک مجموعهٔ باز باشد. همچنین K یک مجموعهٔ فشرده باشد به طوری که $K \subseteq A \cap V$. در این صورت مجموعهٔ باز $W = A \sim K$ در $K \cap W = \varnothing$ و $A \cap V^c \subseteq W \subseteq A$ صدق می‌کند. لذا، طبق ملاحظات فوق،

$$\mu(K) + \mu(A \cap V^c) \leq \mu(K) + \mu(W) = \mu(K \cup W) \leq \mu(A)$$

به ازای جمیع مجموعه‌های فشردهٔ K با خاصیت $K \subseteq A \cap V$ برقرار است. از اتحاد مرحلهٔ چهار نامساوی مطلوب به آسانی به دست می‌آید.

حال فرض کنیم A یک مجموعهٔ دلخواه باشد. هرگاه W یک مجموعهٔ باز باشد به طوری که $A \subseteq W$، آنگاه، بنابر حالت فوق،

$$\mu(A \cap V) + \mu(A \cap V^c) \leq \mu(W \cap V) + \mu(W \cap V^c) \leq \mu(W)$$

برقرار است. لذا، طبق اتحاد مرحلهٔ سه، داریم

$$\mu(A \cap V) + \mu(A \cap V^c) \leq \mu(A)$$

که همان مطلوب است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

حال به نتیجهٔ اصلی این بخش می‌رسیم: اندازهٔ بورل القا شده به وسیلهٔ تابعی خطی مثبت F بر $C_c(X)$ تنها اندازهٔ بورل منتظمی است که F را نمایش می‌دهد.

قضیهٔ ۳.۲۸. (قضیهٔ نمایش ریس). ***به ازای هر تابعی خطی مثبت F بر $C_c(X)$ یک اندازهٔ بورل منتظم منحصر به فرد مانند μ هست به طوری که***

$$F(f) = \int f d\mu$$

به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است. به علاوه، اندازهٔ نمایشی اندازهٔ بورل منتظم القا شده به وسیلهٔ F بر X است.

برهان. (یکتایی). فرض کنیم μ و ν دو اندازهٔ بورل منتظم بر X باشند به طوری که $\int fd\mu = \int fd\nu$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است. نشان می‌دهیم که $\mu(A) = \nu(A)$ به ازای هر مجموعهٔ بورل A برقرار است. به خاطر خواص انتظام μ و ν، کافی است ثابت کنیم $\mu(K) = \nu(K)$ به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K برقرار است.

برای این کار، فرض کنیم K یک مجموعهٔ فشرده باشد. به ازای $\varepsilon > ۰$ مجموعهٔ باز V را طوری می‌گیریم که $K \subseteq V$ و $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$. بنابر قضیهٔ ۸.۷، تابعی مانند $f \in C_c(X)$ هست به طوری که $K < f < V$. ولی در این صورت چون $\chi_K \leq f \leq \chi_V$، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ داریم

$$\nu(K) = \int \chi_K d\nu \leq \int fd\nu = \int fd\mu \leq \int \chi_V d\mu = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon.$$

یعنی $\nu(K) \leq \mu(K)$. به همین نحو، $\mu(K) \leq \nu(K)$؛ و درنتیجه، طبق مطلوب، $\mu(K) = \nu(K)$.

(وجود). فرض کنیم F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ بوده و μ اندازهٔ خارجی القا شدهٔ آن باشد. بنابر قضیهٔ ۲.۲۸، تحدید μ به مجموعه‌های بورل X یک اندازهٔ بورل منتظم است. نشان می‌دهیم که $F(f) = \int fd\mu$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است.

برای این کار، فرض کنیم $f \in C_c(X)$. مجموعهٔ باز V را طوری می‌گیریم که $K = \operatorname{Supp} f \subseteq V$ و $\mu(V) < \infty$. همچنین $c > ۰$ را با این خاصیت که به ازای هر $x \in X$، $|f(x)| < c$ اختیار می‌کنیم.

به ازای $\varepsilon > ۰$، n را طوری می‌گیریم که $۲c/n < \varepsilon$ و به ازای $i = ۰, ۱, ..., n$، $y_i = -c + i(۲c/n)$؛ یعنی $\{y_۰, y_۱, ..., y_n\}$ افرازی از $[-c, c]$ با $y_i - y_{i-۱} = ۲c/n$ به ازای $i = ۱, ..., n$ است. به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم $A_i = \{x \in K: y_{i-۱} < f(x) \leq y_i\}$ و توجه می‌کنیم که مجموعهٔ باز $W_i = \{x \in V: y_i - \varepsilon < f(x) < y_i + \varepsilon\}$ در $A_i \subseteq W_i$ صدق می‌کند. بنابر انتظام μ، به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ مجموعهٔ بازی چون V_i هست به طوری که $A_i \subseteq V_i \subseteq W_i$ و $\mu(V_i) - \mu(A_i) < \varepsilon/n$ برقرار است. واضح است که $K \subseteq \bigcup_{i=۱}^n V_i \subseteq V$. بنابر قضیهٔ ۸.۷، توابعی چون $g_۱, ..., g_n \in C_c(X)$ وجود دارند به طوری که به ازای $i = ۱, ..., n$، $g_i < V_i$ و به ازای هر

$x \in K$، $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$. توجه کنید که $fg_i \le (y_i + \varepsilon)g_i$ به ازای هر i برقرار است و $f = \sum_{i=1}^{n} fg_i$.
بنابراین،

$$\begin{aligned} F(f) - \int f d\mu &= \sum_{i=1}^{n} F(fg_i) - \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} f d\mu \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(y_i + \varepsilon)F(g_i) - \sum_{i=1}^{n}(y_i - \varepsilon)\mu(A_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(y_i + \varepsilon)\mu(V_i) - \sum_{i=1}^{n}(y_i - \varepsilon)\mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i + \varepsilon)[\mu(V_i) - \mu(A_i)] + 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(c + \varepsilon).\frac{\varepsilon}{n} + 2\varepsilon\mu(K) = \varepsilon[c + \varepsilon + 2\mu(K)]. \end{aligned}$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، $F(f) - \int f d\mu \le 0$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است. اگر f را با $-f$ عوض کنیم، به دست می‌آوریم $F(f) - \int f d\mu \ge 0$. لذا، $F(f) = \int f d\mu$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است و برهان قضیه تمام خواهد شد.

یک اندازهٔ بورل که اندازهٔ بورل منتظم نباشد را می‌توان حالت "بیمارگونه" تلقی کرد. نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد که اندازه‌های بورل غیرمنتظم نمی‌توانند با فضاهای توپولوژیک "مناسب" ظاهر شوند. به یاد آورید که یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک σ - **فشرده** نام دارد اگر اجتماع گردایه‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های فشرده باشد.

قضیهٔ ۴.۲۸. ***فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف باشد که مجموعه‌های باز σ- فشرده‌اند (مثلاً، هر فضای اقلیدسی R^n این خاصیت را دارد). در این صورت هر اندازهٔ بورل بر X یک اندازهٔ بورل منتظم است.***

برهان. فرض کنیم ν یک اندازهٔ بورل بر X باشد. در این صورت هر تابع پیوسته با محافظ فشرده ν - انتگرالپذیر است؛ و درنتیجه $F(f) = \int f d\nu$ به ازای $f \in C_c(X)$ معرف یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ است. بنابر قضیهٔ نمایش ریس، یک اندازهٔ بورل منتظم مانند μ هست به طوری که $F(f) = \int f d\mu$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است. برای اتمام برهان نشان می‌دهیم که $\nu = \mu$.

هرگاه K فشرده و V باز باشد به طوری که $K \subseteq V$، آنگاه تابعی مانند $f \in C_c(X)$ با خاصیت $K \prec f \prec V$ وجود دارد. بنابراین،

$$\nu(K) = \int \chi_K d\nu \le \int f d\nu = \int f d\mu \le \int \chi_V d\mu = \mu(V),$$

و درنتیجه، بنابر انتظام μ، $\nu(K) \le \mu(K)$ به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K برقرار است.

حال فرض کنیم $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز باشد. چون (طبق فرض) $\mathcal{O}$، σ- فشرده است، دنباله‌ای مانند $\{K_n\}$ از مجموعه‌های فشرده هست که $K_n \uparrow \mathcal{O}$. ولی در این صورت نامساویهای $\nu(K_n) \le \mu(K_n)$ ایجاب می‌کنند که

$$\nu(\mathcal{O}) = \lim \nu(K_n) \le \lim \mu(K_n) = \mu(\mathcal{O}).$$

از آن سو، به ازای هر n تابعی مانند $f_n \in C_c(X)$ هست که $K_n < f_n < \mathcal{O}$؛ و درنتیجه

$$\mu(K_n) = \int \chi_{K_n} d\mu \le \int f_n d\mu = \int f_n d\nu \le \nu(\mathcal{O})$$

به ازای هر n برقرار است. پس داریم $\mu(\mathcal{O}) \le \nu(\mathcal{O})$؛ و لذا، به ازای هر مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$، $\nu(\mathcal{O}) = \mu(\mathcal{O})$.

حال فرض کنیم K یک مجموعهٔ فشرده باشد. مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ را که $K \subseteq \mathcal{O}$ و $\mu(\mathcal{O}) < \infty$ اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$\mu(\mathcal{O}) - \mu(K) = \mu(\mathcal{O} \sim K) = \nu(\mathcal{O} \sim K) = \nu(\mathcal{O}) - \nu(K);$$

و درنتیجه، به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K، $\nu(K) = \mu(K)$.

بالأخره، هرگاه B یک مجموعهٔ بورل، K یک مجموعهٔ فشرده، و $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز باشد که $K \subseteq B \subseteq \mathcal{O}$، آنگاه رابطهٔ

$$\mu(K) = \nu(K) \le \nu(B) \le \nu(\mathcal{O}) = \mu(\mathcal{O}),$$

همراه با انتظام μ ایجاب می‌کند که $\nu(B) = \mu(B)$. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد شد.

$C_c(X)$، با اعمال جبری و شبکه‌ای معمولی و نرم سوپرمم، یک شبکهٔ برداری نرمدار است. هدف بعدی ما توصیف دوگان نرمی $C_c(X)$ است. برای این کار به چند خاصیت جبری و شبکه‌ای اندازه‌های بورل منتظم نیاز داریم.

قضیهٔ ۵.۲۸. *فرض کنیم μ و ν دو اندازهٔ بورل منتظم بر X باشند. در این صورت*

۱. *$\mu + \nu$ و $\alpha\mu$ به ازای $\alpha \ge 0$ اندازه‌های بورل منتظم‌اند.*

۲. *$\mu \vee \nu$ یک اندازهٔ بورل منتظم است.*

۳. **هرگاه μ و ν هر دو σ- متناهی باشند، آنگاه $\mu \wedge \nu$ نیز یک اندازهٔ بورل منتظم است.**

برهان. (۱) واضح است.

(۲) به یاد آورید که

$$\mu \vee \nu(A) = \sup \{ \mu (B) + \nu(A\sim B): B \subseteq A \text{ و } B \in \mathscr{B}\}$$

به ازای هر $A \in \mathscr{B}$ برقرار است.

(آ) فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد. چون

$$\mu \vee \nu (K) \leq \mu (K) + \nu(K) < \infty$$

برقرارند، پس $\mu \vee \nu$ یک اندازهٔ بورل است.

(ب) فرض کنیم $A \in \mathscr{B}$ در $\mu \vee \nu(A) < \infty$ صدق نماید. در این صورت $\mu (A) < \infty$ و $\nu(A) < \infty$ برقرار اند. قرار می‌دهیم

$$a = \sup \{ \mu \vee \nu(K): K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده است}\}.$$

هرگاه $B \in \mathscr{B}$ در $B \subseteq A$ صدق کند، آنگاه، بنابر انتظام μ و ν، دو مجموعهٔ فشردهٔ K_1 و K_2 وجود دارند به طوری که $K_1 \subseteq B$، $K_2 \subseteq A\sim B$، $\mu (K_1) > \mu (B) - \varepsilon$، و $\nu(K_2) > \nu(A\sim B) - \varepsilon$، که در آنها البته ε یک عدد مثبت داده شده است. در این صورت $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ و

$$\begin{aligned}\mu \vee \nu(A) \geq a \geq \mu \vee \nu(K_1 \cup K_2) &\geq \mu (K_1) + \nu(K_2)\\ &> \mu (B) - \varepsilon + \nu(A\sim B) - \varepsilon = \mu (B) + \nu(A\sim B) - 2\varepsilon;\end{aligned}$$

درنتیجه، به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\mu \vee \nu(A) \geq a \geq \mu \vee \nu(A) - 2\varepsilon$. بنابراین، $a = \mu \vee \nu(A)$.

حال فرض کنیم A مجموعهٔ بازی باشد به طوری که $\mu \vee \nu(A) = \infty$. چون $\mu \vee \nu \leq \mu + \nu$ برقرار است، پس $\mu (A) = \infty$ یا $\nu(A) = \infty$.

می‌توان فرض کرد که $\mu (A) = \infty$. چون $\mu \leq \mu \vee \nu$ و

$$\sup \{ \mu (K): K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده است}\} = \mu (A) = \infty ,$$

به آسانی معلوم می‌شود که

$$\sup \{ \mu \vee \nu(K): K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده است}\} = \infty = \mu \vee \nu(A).$$

(پ) فرض کنیم $A \in \mathscr{B}$. قرار می‌دهیم

$$b = \inf \{ \mu \vee \nu(V): A \subseteq V \text{ و } V \text{ باز است}\}.$$

هرگاه $\mu \vee \nu(A) = \infty$، آنگاه $b = \mu \vee \nu(A) = \infty$ واضح است. لذا، فرض می‌کنیم $\mu \vee \nu(A) < \infty$. واضح است که $\mu (A) < \infty$ و $\nu(A) < \infty$ هر دو برقرارند. چون μ و ν اندازه‌های بورل منتظم‌اند، یک مجموعهٔ باز مانند $\mathcal{O}$ هست به طوری که $A \subseteq \mathcal{O}$، $\mu (\mathcal{O}) < \infty$، و $\nu(\mathcal{O}) < \infty$.

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$. بنابر (آ) یک مجموعهٔ فشرده مانند K هست به طوری که $K \subseteq \mathcal{O}\sim A$ و

$\mu \vee \nu(K) > \mu \vee \nu(\mathcal{O} - A) - \varepsilon$؛ و درنتیجه

$$\mu \vee \nu(K) > \mu \vee \nu(\mathcal{O}) - \mu \vee \nu(A) - \varepsilon.$$

لذا، مجموعهٔ باز $V = \mathcal{O} \sim K$ در $A \subseteq V$ صدق می‌کند و

$$\mu \vee \nu(A) + \varepsilon > \mu \vee \nu(\mathcal{O}) - \mu \vee \nu(K) = \mu \vee \nu(\mathcal{O} \sim K) = \mu \vee \nu(V) \geq \mu \vee \nu(A).$$

این ایجاب می‌کند که $b = \mu \vee \nu(A)$ برقرار است و لذا $\mu \vee \nu$ یک اندازهٔ بورل منتظم می‌باشد.

(۳) چون $\mu \wedge \nu \leq \mu$، به آسانی معلوم می‌شود که $\mu \wedge \nu$ یک اندازهٔ بورل است. به یاد آورید که به ازای هر $A \in \mathscr{B}$،

$$\mu \wedge \nu(A) = \inf\{\, \mu(B) + \nu(A \sim B) \text{: } B \subseteq A \text{ و } B \in \mathscr{B}\}.$$

(آ) فرض کنیم $A \in \mathscr{B}$. قرار می‌دهیم

$$c = \inf\{\, \mu \wedge \nu(V) \text{: } A \subseteq V \text{ و } V \text{ باز است}\}.$$

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. به ازای $B \in \mathscr{B}$ و $B \subseteq A$، $V_۱$ و $V_۲$ باز را طوری می‌گیریم که $B \subseteq V_۱$، $A \sim B \subseteq V_۲$، $\mu(V_۱) \leq \mu(B) + \varepsilon$، و $\nu(V_۲) \leq \nu(A \sim B) + \varepsilon$. در این صورت

$$\mu \wedge \nu(A) \leq c \leq \mu \wedge \nu(V_۱ \cup V_۲) \leq \mu \wedge \nu(V_۱) + \mu \wedge \nu(V_۲)$$
$$\leq \mu(V_۱) + \nu(V_۲) \leq \mu(B) + \varepsilon + \nu(A \sim B) + \varepsilon = \mu(B) + \nu(A \sim B) + ۲\varepsilon.$$

لذا، $\mu \wedge \nu(A) \leq c \leq \mu \wedge \nu(A) + ۲\varepsilon$ به ازای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است؛ و درنتیجه $c = \mu \wedge \nu(A)$.

(ب) فرض کنیم $A \in \mathscr{B}$ در $\mu \vee \nu(A) < \infty$ صدق نماید. در این صورت رابطهٔ

$$\mu \wedge \nu(K) = \mu(K) + \nu(K) - \mu \vee \nu(K)$$

به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq A$ و انتظام μ، ν، و $\mu \vee \nu$ به آسانی ایجاب می‌کنند که

$$\mu \wedge \nu(A) = \sup\{\, \mu \wedge \nu(K) \text{: } K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده است}\}. \tag{*}$$

از آن سو، با استفاده از نتیجهٔ قبل و اینکه μ و ν هردو σ- متناهی‌اند، به آسانی معلوم می‌شود که (*) به ازای هر مجموعهٔ باز A برقرار است. (توجه کنید که این تنها جایی است که از σ- تناهی μ و ν استفاده شده است.) لذا، $\mu \wedge \nu$ یک اندازهٔ بورل منتظم است و برهان قضیه تمام خواهد بود.

توجه کنید که هرگاه μ و ν دو اندازهٔ بورل منتظم باشند، آنگاه $\mu + \nu$ و $\alpha\mu$ (به ازای $\alpha \geq ۰$) در روابط

$$\int f d(\alpha\mu) = \alpha \int f d\mu \quad \text{و} \quad \int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu$$

به ازای هر $f \in C_c(X)$ صدق می‌کنند.

لم زیر در تشخیص یکریختیهای شبکه‌ای میان عملگرهای مثبت بین دو شبکهٔ برداری اغلب بسیار سودمند است.

لم ۶.۲۸. *فرض کنیم $T{:}X\to Y$ یک عملگر خطی یک به یک و برو بین دو شبکهٔ برداری باشد. هرگاه T و T^{-1} هر دو مثبت باشند، آنگاه T یک یکریختی شبکه‌ای است.*

برهان. فرض کنیم $x, y \in X$. چون $x \le x \vee y$ برقرار است، از مثبت بودن T نتیجه می‌شود که $T(x) \le T(x \vee y)$. به همین نحو، $T(y) \le T(x \vee y)$؛ و درنتیجه

$$T(x) \vee T(y) \le T(x \vee y). \tag{**}$$

اگر نقشهای T، x، و y را با T^{-1}، $T(x)$، و $T(y)$ عوض کنیم، نامساوی (**) به صورت زیر در می‌آید:

$$x \vee y = T^{-1}(T(x)) \vee T^{-1}(T(y)) \le T^{-1}[T(x) \vee T(y)].$$

با اعمال T بر نامساوی آخر به دست می‌آوریم $T(x \vee y) \le T(x) \vee T(y)$؛ یعنی $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$، طبق مطلوب، برقرار است.

حال دوگان نرمی $C_c(X)$ را شناسایی می‌کنیم. از قبل می‌دانیم که $C_c^*(X)$ یک شبکهٔ باناخ است (قضیهٔ ۹.۲۴)؛ و درنتیجه هر تابعی خطی پیوسته بر $C_c(X)$ را می‌توان به صورت تفاضل دو تابعی خطی پیوستهٔ مثبت نوشت.

فرض کنیم $M_b(X)$ گردایهٔ تمام اندازه‌های علامتدار متناهی باشد که بتوان آنها را به صورت تفاضل دو اندازهٔ بورل منتظم مثبت متناهی نوشت؛ یعنی

$M_b(X) = \{\mu \in M(\mathscr{B}){:}\mu = \mu_۱ - \mu_۲$ که $\mu_۱$ و $\mu_۲$ هستند اندازه‌های بورل منتظم متناهی$\}$.

واضح است که $M_b(X)$ یک زیرفضای برداری $M(\mathscr{B})$ (شبکهٔ باناخ تمام اندازه‌های علامتدار متناهی بر $\mathscr{B}$) است (ر.ک. قضیهٔ ۱۰.۲۶). به علاوه، چون $\mu^+ = (\mu_۱ - \mu_۲)^+ = \mu_۱ \vee \mu_۲ - \mu_۲$ و (بنابر قضیهٔ ۵.۲۸) $\mu_۱ \vee \mu_۲$ یک اندازهٔ بورل منتظم متناهی است، پس μ^+ در $M_b(X)$ است. بنابراین، $M_b(X)$ یک زیرشبکهٔ برداری $M(\mathscr{B})$ است. لذا، $M_b(X)$ یک شبکهٔ برداری نرمدار است که البته تغییر کل آن نرم آن خواهد بود؛ یعنی، به ازای هر $\mu \in M_b(X)$، $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

همچنین به آسانی معلوم می‌شود که اگر $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازهٔ بورل منتظم متناهی باشند، $(\mu_۱ - \mu_۲)^+ = \mu_۱ \vee \mu_۲ - \mu_۲$ نیز یک اندازهٔ بورل منتظم متناهی است. این ایجاب می‌کند که $M_b(X)$ قابل تعریف به صورت زیر است:

$M_b(X) = \{\mu \in \mathrm{M}(\mathscr{B}){:}$ μ^+ و μ^- هر دو اندازه‌های بورل منتظم متناهی‌اند $\}$.

حال فرض کنیم $\mu = \mu_۱ - \nu_۲ = \nu_۱ - \mu_۲$ که در آن $\mu_۱, \mu_۲$ و $\nu_۱, \nu_۲$ اندازه‌های بورل منتظم متناهی‌اند. دراین‌صورت $\mu_۱ + \nu_۲ = \nu_۱ + \mu_۲$؛ و درنتیجه $\int f d\mu_۱ + \int f d\nu_۲ = \int f d\nu_۱ + \int f d\mu_۲$ به

ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است. بنابراین، به ازای هر $f \in C_c(X)$،

$$\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2 .$$

این نشان می‌دهد که اگر $\mu = \mu_1 - \mu_2 \in M_b(X)$،

$$F_\mu(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$$

معرف یک تابعی خطی بر $C_c(X)$ است که از نمایش μ به صورت تفاضل دو اندازهٔ بورل منتظم متناهی مستقل است. [همچنین رسم است که به جای $F_\mu(f)$ می‌نویسند $\int f d\mu$.] به علاوه، تخمین خام

$$|F_\mu(f)| \leq \left|\int f d\mu_1\right| + \left|\int f d\mu_2\right| \leq [\mu_1(X) + \mu_2(X)]. \|f\|_\infty$$

نشان می‌دهد که F_μ یک تابعی خطی پیوسته است؛ یعنی $F_\mu \in C_c^*(X)$. لذا، نگاشت $\mu \to F_\mu$ از $M_b(X)$ به $C_c^*(X)$ را می‌توان داشت. واضح است که این نگاشت خطی است و، همانطور که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد، بروست و یک یکمتری شبکه‌ای می‌باشد.

قضیهٔ ۷.۲۸. نگاشت $\mu \to F_\mu$ (تعریف شده در فوق) یک یکمتری شبکه‌ای از $M_b(X)$ به روی $C_c^*(X)$ است؛ یعنی $C_c^*(X) = M_b(X)$ برقرار است.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که $\mu \to F_\mu$ یک به یک است. درواقع، هرگاه $\mu = \mu_1 - \mu_2$ و $F_\mu = 0$، آنگاه $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ برقرار است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ نمایش ریس، $\mu_1 = \mu_2$؛ یعنی $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$.

حال فرض کنیم F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ بوده و μ اندازهٔ بورل منتظم نمایشی آن باشد [یعنی، به ازای هر $f \in C_C(X)$، $F(f) = \int f d\mu$]. چون $0 \leq f \in C_c(X)$ در $\|f\|_\infty \leq 1$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $f < X$، پس داریم

$$\mu(X) = \sup\{F(f): f < X\} = \sup\{F(f): \|f\|_\infty \leq 1\} = \|F\|. \tag{***}$$

لذا، F پیوسته است اگر و فقط اگر $\mu(X) < \infty$ [یعنی اگر و فقط اگر $\mu \in M_b(X)$]. از این و اینکه هر تابعی خطی پیوسته را می‌توان به صورت تفاضل دو تابعی خطی پیوستهٔ مثبت نوشت معلوم می‌شود که $\mu \to F_\mu$ بروست. به علاوه، به آسانی دیده می‌شود که $\mu \geq 0$ در $M_b(X)$ برقرار است اگر و فقط اگر $F_\mu \geq 0$. لذا، طبق لم ۶.۲۸، $\mu \to F_\mu$ یک یکریختی شبکه‌ای از $M_b(X)$ به روی $C_c^*(X)$ است.

بالأخره، چون هردوی $C_c^*(X)$ و $M_b(X)$ شبکه‌های برداری نرمدارند، از رابطهٔ (***) معلوم می‌شود که

$$\| F_\mu \| = \| \, |F_\mu| \, \| = \| F_{|\mu|} \| = |\mu|(X) = \| \mu \|;$$

درنتیجه $\mu \to F_\mu$ یک یکمتری شبکه‌ای است. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

توجه کنید که قضیهٔ ۷.۲۸ برهان غیر مستقیمی از شبکهٔ باناخ بودن $M_b(X)$ به دست می‌دهد. اعضای $M_b(X)$ را ***اندازه‌های علامتدار بورل منتظم*** (متناهی) بر X نیز می‌نامند و به صورت زیر توصیف می‌شوند:

اندازهٔ علامتدار متناهی μ بر $\mathscr{B}$ تعلق به $M_b(X)$ دارد اگر و فقط اگر به ازای هر $A \in \mathscr{B}$ و $\varepsilon > 0$ یک مجموعهٔ فشردهٔ K و یک مجموعهٔ باز V باشد که $K \subseteq A \subseteq V$ به طوری که $|\mu(B)| < \varepsilon$ به ازای هر $B \in \mathscr{B}$ که $B \subseteq V \sim K$ برقرار باشد. ر.ک. تمرین ۱۰ در آخر این بخش.

بالأخره، معمولاً اندازهٔ علامتدار μ بر $\mathscr{B}$ را ***اندازهٔ علامتدار بورل*** نامند اگر $|\mu(K)| < \infty$ به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K برقرار باشد. این البته همارز آن است که بگوییم μ^+ و μ^- هر دو اندازه‌های بورل‌اند. درواقع، اگر چنین باشد، در پرتو $\mu = \mu^+ - \mu^-$ به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K داریم $|\mu(K)| < \infty$. از آن سو، هرگاه μ یک اندازهٔ علامتدار بورل باشد، آنگاه چون دست کم یکی از اندازه‌های μ^+ و μ^- اندازهٔ متناهی است، هر دوی μ^+ و μ^- اندازه‌های بورل‌اند.

تمرینات

در تمرینهای زیر، X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف است مگر خلافش گفته شود.

۱. هرگاه X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد، آنگاه نشان دهید که تابعی خطی پیوستهٔ F بر $C(X)$ مثبت است اگر و فقط اگر $\|F\| = F(1)$ برقرار باشد.

۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و F و G دو تابعی خطی مثبت بر $C(X)$ باشند. هرگاه $\|F - G\| \geq F(1) + G(1)$، آنگاه نشان دهید که $F \wedge G = 0$.

[**راهنمایی.** نشان دهید که $\|F - G\| = F \vee G(1)$.]

۳. فرض کنید

$c_0(X) = \{f \in C(X): |f(x)| < \varepsilon$ ،$x \notin K$ به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ فشرده‌ای مانند K هست که به ازای هر $\}$.

نشان دهید که

آ. $c_0(X)$ مجهز به نرم سوپرمم یک شبکهٔ باناخ است.

ب. تتمیم نرمی $C_c(X)$ شبکهٔ باناخ $c_0(X)$ است.

۴. فرض کنید F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ بوده و μ اندازهٔ خارجی القا شده به وسیلهٔ F بر X

باشد. نشان دهید هرگاه μ^* اندازهٔ خارجی تولید شده به وسیلهٔ فضای اندازهٔ $(X, \mathscr{B}, \mu)$ باشد، آنگاه $\mu^*(A) = \mu(A)$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X برقرار است.

۵. فرض کنید μ و ν دو اندازهٔ بورل منتظم بر X باشند. نشان دهید که $\mu \geq \nu$ برقرار است اگر و فقط اگر به ازای هر $f \in C_c(X)^+$، $\int f d\mu \geq \int f d\nu$.

۶. نقطهٔ $x \in X$ را ثابت گرفته و به ازای هر $f \in C_c(X)$ تعریف کنید $F(f) = f(x)$. نشان دهید F یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ است و اندازهٔ بورل منتظم منحصر به فرد μ صادق در $F(f) = \int f d\mu$ به ازای هر $f \in C_c(X)$ را توصیف نمایید. محافظ μ چیست؟

۷. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده باشد. هرگاه μ و ν دو اندازهٔ بورل منتظم باشند، آنگاه نشان دهید که اندازه‌های بورل منتظم $\mu \vee \nu$ و $\mu \wedge \nu$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

آ. $\mathrm{Supp}(\mu \vee \nu) = \mathrm{Supp}\,\mu \cup \mathrm{Supp}\,\nu$، و

ب. $\mathrm{Supp}(\mu \wedge \nu) \subseteq \mathrm{Supp}\,\mu \cap \mathrm{Supp}\,\nu$.

با استفاده از (ب) نشان دهید هرگاه $\mathrm{Supp}\,\mu \cap \mathrm{Supp}\,\nu = \varnothing$، آنگاه $\mu \perp \nu$ برقرار است. همچنین مثالی بزنید که در آن

$$\mathrm{Supp}\,(\mu \wedge \nu) \neq \mathrm{Supp}\,\mu \cap \mathrm{Supp}\,\nu.$$

۸. تابعیهای خطی مثبت F را که همریختیهای شبکه‌ای بر $C_c(X)$ نیز هستند توصیف نمایید؛ یعنی $F(f \vee g) = \max\{F(f), F(g)\}$ به ازای هر جفت $f, g \in C_c(X)$ برقرار است.

[**راهنمایی.** فرض کنید μ اندازهٔ بورل منتظم نمایشی برای F باشد. نشان دهید که $\mathrm{Supp}\,\mu$ شامل حداکثر یک نقطه است.]

۹. هرگاه X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه نشان دهید که

آ. $C_c{}^*(X)$ جدایی‌پذیر نیست، و

ب. $C[0, 1]$ (با نرم سوپرمم) یک فضای باناخ انعکاسی نیست.

[**راهنمایی.** به ازای هر $x \in X$ تابعی خطی $F_x(f) = f(x)$ را تعریف کنید. نشان دهید اگر $x \neq y$، $\|F_x - F_y\| = 2$. برای (ب)، قسمت (آ) را با تمرین ۱۴ از بخش ۲۳ و تمرین ۶ از بخش ۸ تلفیق نمایید.]

۱۰. نشان دهید که احکام زیر به ازای اندازهٔ علامتدار متناهی μ از $\mathscr{B}$ هم‌ارزند:

آ. μ تعلق به $M_b(X)$ دارد.

ب. μ^+ و μ^- هر دو اندازهٔ بورل منتظم متناهی‌اند.

پ. به ازای هر $A \in \mathscr{B}$ و $\varepsilon > 0$ یک مجموعهٔ فشرده مانند K و یک مجموعهٔ باز مانند V هست

که $K \subseteq A \subseteq V$ و $\varepsilon > |\mu(B)|$ به ازای هر $B \in \mathscr{B}$ که $B \subseteq V - K$ برقرار است.

۱۱. گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ در یک فضای نرمدار **به طور ضعیف همگرا به** عنصری مانند x است اگر $\lim f(x_n) = f(x)$ به ازای هر تابعی خطی پیوستهٔ f برقرار باشد.

آ. نشان دهید یک دنباله در یک فضای نرمدار می‌تواند حداکثر یک حد ضعیف داشته باشد.

ب. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشردهٔ هاسدورف باشد. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ از $C(X)$ به طور ضعیف به تابعی مانند f همگراست اگر و فقط اگر $\{f_n\}$ کراندار نرمی بوده و $\lim f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد.

[**راهنمایی.** در مورد (ب) از قضیهٔ ۱۶.۲۳ و قضیهٔ نمایش ریس استفاده کنید.]

۱۲. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر X بوده و $f \in L_1(\mu)$. نشان دهید که اندازهٔ علامتدار متناهی ν با تعریف

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

به ازای هر مجموعهٔ بورل E یک اندازهٔ علامتدار بورل منتظم (متناهی) است. به عبارت دیگر، نشان دهید که $\nu \in M_b(X)$.

[**راهنمایی.** از این مطلب که $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ یک مجموعهٔ σ- متناهی است استفاده نمایید.]

۱۳. این تمرین طرز شناسایی دوگان ترتیبی $C_c^{\sim}(X)$ از $C_c(X)$ را به دست می‌دهد. گردایهٔ $\mathscr{M}(X)$ تمام عبارات صوری $\mu_1 - \mu_2$ که در آنها μ_1 و μ_2 اندازه‌های بورل منتظم‌اند را در نظر بگیرید؛ یعنی

$$\mathscr{M}(X) = \{ \mu_1 - \mu_2 : \text{اند} \ X \ \text{اندازه‌های بورل منتظم بر} \ \mu_2 \ \text{و} \ \mu_1 \}.$$

آ. $\mu_1 - \mu_2 \equiv \nu_1 - \nu_2$ در $\mathscr{M}(X)$ را به این معنی تعریف کنید که به ازای هر $A \in \mathscr{B}$،

$$\mu_1(A) + \nu_2(A) = \nu_1(A) + \mu_2(A).$$

نشان دهید که $\equiv$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب. گردایهٔ تمام رده‌های هم‌ارزی را مجدداً با $\mathscr{M}(X)$ نشان دهید؛ یعنی $\mu_1 - \mu_2$ و $\nu_1 - \nu_2$ را یکی می‌گیریم اگر $\mu_1 + \nu_2 = \nu_1 + \mu_2$ برقرار باشد. در $\mathscr{M}(X)$ اعمال جبری زیر را تعریف کنید:

$$(\mu_1 - \mu_2) + (\nu_1 - \nu_2) = (\mu_1 + \nu_1) - (\mu_2 + \nu_2),$$

$$\alpha(\mu_1 - \mu_2) = \begin{cases} \alpha\mu_1 - \alpha\mu_2 & \text{اگر} \ \alpha \geq 0 \ ، \\ (-\alpha)\mu_2 - (\alpha)\mu_1 & \text{اگر} \ \alpha < 0 \ ، \end{cases}$$

نشان دهید که این اعمال خوش تعریف‌اند (یعنی نشان دهید که اینها فقط به رده‌های هم‌ارزی بستگی دارند) و $\mathscr{M}(X)$ را یک فضای برداری می‌سازند.

پ. یک ترتیب در $\mathscr{M}(X)$ را با $\mu_1 - \mu_2 \geq \nu_1 - \nu_2$ تعریف کنید اگر $\mu_1(A) + \nu_2(A) \geq \nu_1(A) + \mu_2(A)$ به ازای هر $A \in \mathscr{B}$ برقرار باشد. نشان دهید $\geq$ خوش تعریف است و یک رابطهٔ ترتیبی بر $\mathscr{M}(X)$ است که $\mathscr{M}(X)$ تحت آن یک شبکهٔ برداری می‌باشد.

ت. نگاشت $\mu = \mu_1 - \mu_2 \to F_\mu$ از $\mathscr{M}(X)$ به $C_c^{\sim}(X)$ با تعریف

$$F_\mu(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$$

به ازای هر $f \in C_c(X)$ را درنظر بگیرید. نشان دهید که F_μ خوش تعریف است و $\mu \to F_\mu$ یک یکریختی شبکه‌ای (در اینجا لم ۶.۲۸ می‌تواند مفید باشد) از $\mathscr{M}(X)$ به روی $C_c^{\sim}(X)$ است؛ یعنی نشان دهید که $C_c^{\sim}(X) = \mathscr{M}(X)$ برقرار است.

۱۴. این تمرین نشان می‌دهد که $C_c^*(X)$ به ازای یک فضای غیرفشرده عموماً یک ایده‌آل حقیقی $C_c^{\sim}(X)$ است.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف باشد که در آن دنبالهٔ $\{\mathcal{O}_n\}$ از مجموعه‌های باز چنان است که به ازای هر n، $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ و $\mathcal{O}_n \neq \mathcal{O}_{n+1}$ و نیز $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$.

آ. نشان دهید هرگاه X، σ - فشرده بوده ولی یک فضای فشرده نباشد، آنگاه X دارای دنبالهٔ $\{\mathcal{O}_n\}$ از مجموعه‌های باز با خواص فوق است.

ب. $x_1 \in \mathcal{O}_1$ و $x_n \in \mathcal{O}_n \sim \mathcal{O}_{n-1}$ را به ازای $n \geq 2$ اختیار کرده و نشان دهید که

$$F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) \text{ ،} f \in C_c(X) \text{ به ازای}$$

یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ است که پیوسته نیست.

پ. اندازهٔ بورل منتظم (منحصر به فرد) μ را بر X چنان تعریف کنید که F را نمایش دهد. محافظ μ چیست؟

۲۹. مشتقگیری و انتگرالگیری

در این بخش خواص مشتقگیری از یک اندازهٔ علامتدار بورل بر R^k مطالعه می‌شوند. مشتق یک اندازه همیشه نسبت به اندازهٔ لبگ گرفته می‌شود. برای نظریهٔ مشتقگیری از توابع مجموعه‌ای دلخواه در محدوده‌ای کلیتر، خوانندهٔ علاقمند می‌تواند به فصل ۸ از مرجع [۷] رجوع نماید. از نتایج به دست آمده راجع به مشتقگیری از اندازه‌های علامتدار برای رسیدن به خواص کلاسیک توابع با تغییر کراندار استفاده

خواهد شد.

در این بخش، قلمرو تمام اندازه‌های علامتدار، σ- جبر $\mathscr{B}$ همهٔ مجموعه‌های بورل در R^k است. همچنین، عبارت "تقریباً همه جا" مترادف "تقریباً همه جا نسبت به اندازهٔ لبگ" است مگر خلافش تصریح شود. مجموعه‌های بورل اصلی که برای مشتقگیری ملحوظ می‌شوند گویهای بازند. به یاد آورید که گوی باز به مرکز x و شعاع r زیرمجموعه‌ای از R^k است که با $\{y \in R^k: \|x-y\| < r\}$ تعریف می‌شود، که در آن

$$\|x-y\| = \left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}.$$

گاهی اندازه‌های تعریف شده بر زیرمجموعه‌های بورل مجموعهٔ باز V از R^k ظاهر می‌شوند. با انتساب مقدار صفر به زیرمجموعه‌های بورل V^c، به آسانی معلوم می‌شود که این اندازه‌ها را می‌توان بر جمیع مجموعه‌های بورل از R^k تعریف شده گرفت. بدین ترتیب، از قضایای مربوط به اندازه‌های بورل بر R^k می‌توان در یک چنین وضعیت استفاده نمود.

فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر σ- جبر تمام مجموعه‌های بورل از R^k باشد. به ازای هر $x \in R^k$ و $r > 0$ دو عدد حقیقی وسعت یافتهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\Delta_r^*(x) = \sup\left\{\frac{\mu(B)}{\lambda(B)} : x \in B \text{ و } B \text{ یک گوی باز به شعاع نابیشتر از } r \text{ است}\right\};$$

$$\Delta_r(x) = \inf\left\{\frac{\mu(B)}{\lambda(B)} : x \in B \text{ و } B \text{ یک گوی باز به شعاع نابیشتر از } r \text{ است}\right\}.$$

ملاحظه می‌کنیم که لازم نیست x مرکز گویهای باز B باشد که در آنها سوپرمم و اینفیمم گرفته می‌شود. واضح است که

$$-\infty \le \Delta_r(x) \le \Delta_r^*(x) \le \infty$$

به ازای هر $x \in R^k$ و $r > 0$ برقرار است.

همچنین واضح است که هرگاه $0 < r < s$، آنگاه $\Delta_r^*(x) \le \Delta_s^*(x)$ و $\Delta_s(x) \le \Delta_r(x)$ هر دو به ازای هر x برقرارند. بنابراین،

$$D_* \mu(x) = \lim_{r \downarrow 0} \Delta_r(x) \text{ و } D^* \mu(x) = \lim_{r \downarrow 0} \Delta_r^*(x)$$

در R^* موجودند و در نامساویهای

$$-\infty \le D_* \mu(x) \le D^* \mu(x) \le \infty$$

به ازای هر $x \in R^k$ صدق می‌کنند. اعداد حقیقی وسعت یافتهٔ $D_* \mu(x)$ و $D^* \mu(x)$ را **مشتقهای پایینی و بالایی** μ (نسبت به λ) در نقطهٔ x می‌نامیم. هرگاه اینها حقیقی و مساوی باشند، آنگاه این مقدار مشترک را **مشتق μ در x** می‌نامیم.

تعریف ۱.۲۹. فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر $\mathscr{B}$ بوده و $x \in R^k$. هرگاه

$$- \infty < D_* \mu (x) = D^* \mu (x) < \infty$$

برقرار باشد، آنگاه گوییم μ در نقطهٔ x **مشتقپذیر** است.

مقدار مشترک فوق را **مشتق** μ در x نامیم و آن را $D\mu (x)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$D\mu (x) = D_* \mu (x) = D^* \mu (x).$$

تعریف فوق را می‌توان چنین بیان کرد: عدد حقیقی m در $m = D \mu (x)$ صدق می‌کند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ باشد به طوری که $|\mu (B)/\lambda(B) - m| < \varepsilon$ به ازای هر گوی باز B که $x \in B$ و شعاعی کمتر از δ برقرار باشد.

تعریفی دیگر با استفاده از دنباله‌ها به قرار زیر است: اندازهٔ علامتدار μ بر $\mathscr{B}$ در نقطه‌ای مانند $x \in R^k$ مشتقپذیر است اگر و فقط اگر عددی حقیقی مانند m باشد به طوری که $\lim \mu (B_n)/\lambda(B_n) = m$ به ازای هر دنبالهٔ $\{B_n\}$ از گویهای باز شامل x که شعاعهایشان به صفر میل می‌کنند برقرار باشد. [البته عدد m مشتق $D\mu(x)$ می‌باشد.]

عبارت ″ $D\mu(x)$ موجود است″ (طبق معمول) مترادف است با ″ μ در x مشتقپذیر است.″ به آسانی معلوم می‌شود که اگر دو اندازهٔ علامتدار μ و ν در نقطهٔ x مشتقپذیر بوده و مجموعشان $\mu + \nu$ یک اندازهٔ علامتدار باشد، $\mu + \nu$ نیز در x مشتقپذیر است و

$$D(\mu + \nu)(x) = D\mu(x) + D\nu(x)$$

برقرار است. به همین نحو، هرگاه $\mu - \nu$ یک اندازهٔ علامتدار باشد، آنگاه

$$D(\mu - \nu)(x) = D\mu(x) - D\nu(x).$$

اولین هدف ما نشان دادن آن است که یک اندازهٔ بورل علامتدار متناهی که نسبت به اندازهٔ لبگ به طور مطلق پیوسته است تقریباً همه جا مشتقپذیر است و مشتق $D\mu$ با مشتق رادون ـ نیکودیم $d\mu /d\lambda$ یکی است. این نتیجهٔ کلیدی مشتقگیری در این بخش است. برای اثبات این قضیه به یک بحث مقدماتی نیاز داریم.

به آسانی می‌توانید خاصیت زیر از اندازهٔ لبگ را تحقیق نمایید:

هرگاه A زیرمجموعه‌ای از R^k بوده و $r > 0$، آنگاه مجموعهٔ $rA = \{rx\colon x \in A\}$ در $\lambda(rA) = r^k\lambda(A)$ صدق می‌کند.

این همراه با پایای انتقال بودن λ نشان می‌دهد که اگر B یک گوی باز به شعاع r بوده و B^* گوی باز دیگری به شعاع αr باشد، $\lambda(B^*) = \alpha^k\lambda(B)$ برقرار است. رابطهٔ اخیر در برهان لم بعد به کار خواهد رفت.

لم ۲.۲۹. فرض کنیم $B_1, \ldots, B_n$ گویهای بازی در R^k باشند. در این صورت گویهای دو بدو از هم جدایی مانند $B_{k_1}, \ldots, B_{k_m}$ در بین $B_1, \ldots, B_n$ وجود دارند که

$$\lambda\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] \leq 3^k \sum_{j=1}^{m} \lambda(B_{k_j}).$$

برهان. فرض کنیم r_i شعاع B_i باشد. با تغییر آرایش گویها می‌توان بدون صدمه زدن به کلیت فرض کرد $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n$.

قرار می‌دهیم $k_1 = 1$ و فرض می‌کنیم k_2 کوچکترین عدد صحیحی باشد که B_{k_2} با B_{k_1} (در صورت وجود) از هم جداست. فرض کنیم k_3 کوچکترین عدد صحیحی باشد که B_{k_3} با B_{k_1} و B_{k_2} از هم جداست. این فرایند را آنقدر ادامه می‌دهیم که مجموعهٔ متناهی $\{B_1, \ldots, B_n\}$ افنا شود. با این کار گویهای باز $B_{k_1}, \ldots, B_{k_m}$ به دست می‌آیند و حکم می‌کنیم که این گویها از خاصیت مذکور در لم برخوردارند.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم A_{k_i} گوی باز با همان مرکز B_{k_i} بوده ولی شعاعش سه برابر شعاع B_{k_i} باشد. توجه کنید که هر B_i باید B_{k_j} ای را قطع کند. پس $B_i \subseteq A_{k_j}$ باید به ازای این j برقرار باشد. لذا، $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} A_{k_j}$؛ و درنتیجه، طبق مطلوب،

$$\lambda\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] \leq \lambda\left[\bigcup_{j=1}^{m} A_{k_j}\right] \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda(A_{k_j}) = 3^k \sum_{j=1}^{m} \lambda(B_{k_j}).$$

فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بر R^k باشد. از تعریف $\Delta^*_r(x)$ به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر $a \in R$ و $r > 0$، مجموعهٔ $\{x \in R^k \colon \Delta^*_r(x) > a\}$ یک مجموعهٔ باز است. لذا، هرگاه $\{r_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت با $r_n \downarrow 0$ باشد، آنگاه اتحاد

$$\{x \in R^k \colon \Delta^* \mu(x) > a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in R^k \colon \Delta^*_{r_n}(x) > a + \frac{1}{m}\right\}$$

نشان می‌دهد که $\{x \in R^k \colon \Delta^* \mu(x) > a\}$ به ازای هر $a \in R$ یک مجموعهٔ بورل است. از این نکات در لم کلیدی زیر استفاده خواهد شد.

لم ۳.۲۹. فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل بر R^k بوده و A یک مجموعهٔ بورل باشد به طوری که $\mu(A) = 0$. در این صورت به ازای تقریباً هر نقطهٔ x از A، $D\mu(x) = 0$.

برهان. چون μ یک اندازه است، $0 \leq D_*\mu(x) \leq D^*\mu(x)$ به ازای هر x برقرار است. برای اثبات لم

باید نشان دهیم که

$$\lambda(\{x \in A:\ D^*\mu(x) > \circ\}) = \circ.$$

برای این کار کافی است نشان دهیم که به ازای هر $\circ < \varepsilon$،

$$\lambda(\{x \in A:\ D^*\mu(x) > \varepsilon\}) = \circ.$$

برای این کار، فرض می‌کنیم $\circ < \varepsilon$. قرار می‌دهیم

$$E = \{x \in A:\ D^*\mu(x) > \varepsilon\}$$

و توجه می‌کنیم که E یک مجموعهٔ بورل است. فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ دلخواه E بوده و V یک مجموعهٔ باز دلخواه باشد به طوری که $A \subseteq V$. اما اگر $x \in K$، $D^*\mu(x) > \varepsilon$ برقرار است؛ و درنتیجه گوی بازی مانند B شامل x هست که $B \subseteq V$ و $\mu(B) > \varepsilon\lambda(B)$. به خاطر فشردگی K، تعدادی متناهی گوی باز از این نوع مانند $B_\backslash, \ldots, B_n$ هست که K را می‌پوشانند. فرض کنیم $B_{k_\backslash}, \ldots, B_{k_m}$ گویهای باز از هم جدا در بین $B_\backslash, \ldots, B_n$ باشند که در لم ۲.۲۹ صدق می‌کنند. در این صورت

$$\lambda(K) \le \lambda\left[\bigcup_{i=\backslash}^{n} B_i\right] \le \text{۳}^k \sum_{j=\backslash}^{m} \lambda(B_{k_j}) \le \frac{\text{۳}^k}{\varepsilon} \sum_{j=\backslash}^{m} \mu(B_{K_j})$$

$$= \frac{\text{۳}^k}{\varepsilon}\mu\left[\bigcup_{j=\backslash}^{m} B_{k_j}\right] \le \frac{\text{۳}^k}{\varepsilon}\mu(V).$$

چون μ یک اندازهٔ بورل منتظم نیز هست (قضیهٔ ۴.۲۸)، پس به ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از E، $\lambda(K) = \circ$. ولی در این صورت انتظام λ ایجاب می‌کند که $\lambda(E) = \circ$ و کار تمام است.

حال به قضیهٔ اصلی مشتقگیری در اندازه‌های بورل می‌رسیم.

قضیهٔ ۴.۲۹. هرگاه μ *یک اندازهٔ بورل علامتدار متناهی بر* R^k بوده و $\mu \ll \lambda$ برقرار باشد، آنگاه μ *تقریباً همه جا مشتقپذیر است. به علاوه،* $D\mu$ *(البته ت. ه.) با مشتق رادون ـ نیکودیم* $d\mu/d\lambda$ *یکی است؛ یعنی* $D\mu = d\mu/d\lambda$ برقرار است.

برهان. فرض کنیم $f = d\mu/d\lambda \in L_\backslash(\lambda)$ مشتق رادون ـ نیکودیم حاصل از قضیهٔ ۸.۲۷ باشد؛ یعنی $\mu(E) = \int_E f d\lambda$ به ازای هر مجموعهٔ بورل E برقرار است.

عدد حقیقی r را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $A = \{x \in R^k:\ f(x) \ge r\}$. واضح است که A انتگرالپذیر لبگ است و، بنابر قضیهٔ ۵.۱۸، $\lambda(A) < \infty$. همچنین، بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۲، یک مجموعهٔ بورل مانند F هست به طوری که $A \subseteq F$ و $\lambda(F) = \lambda(A)$. واضح است که $\lambda(F \sim A) = \circ$.

حال اندازهٔ بورل ν بر R^k را به ازای هر مجموعهٔ بورل E با

$$\nu(E) = \int_{F\cap E} [f(x) - r]d\lambda(x) = \int_{A\cap E} [f(x) - r]d\lambda(x)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر B یک گوی باز باشد،

$$\mu(B) - r\lambda(B) = \int_B [f(x) - r]d\lambda(x) \leq \int_{B\cap A} [f(x) - r]d\lambda(x) = \nu(B)$$

برقرار است. لذا،

$$\frac{\mu(B)}{\lambda(B)} \leq r + \frac{\nu(B)}{\lambda(B)}$$

به ازای هر گوی باز B برقرار است، که از این داریم:

(*) به ازای هر $x \in R^k$، $D^*\mu(x) \leq r + D^*\nu(x)$.

چون $\nu(F^c) = 0$، از لم ۳.۲۹ معلوم می‌شود که $D\nu(x) = 0$ به ازای تقریباً هر $x \in F^c$ برقرار است. لذا، (*) ایجاب می‌کند که به ازای تقریباً هر $x \in F^c$، $D^*\mu(x) \leq r$ و درنتیجه، به ازای تقریباً هر $x \in A^c$، $D^*\mu(x) \leq r$. چون $f(x) < r$ ایجاب می‌کند که $x \in A^c$، پس

$$E_r = \{x \in R^k: f(x) < r < D^*\mu(x)\} \subseteq A^c;$$

و لذا، طبق آخرین نتیجه، هر E_r از اندازهٔ لبگ صفر است. ولی در این صورت

$$\{x \in R^k: D^*\mu(x) > f(x)\} \subseteq \cup_{r\in Q} E_r,$$

که در آن Q مجموعهٔ تمام اعداد گویاست، نشان می‌دهد که

$$\{x \in R^k: D^*\mu(x) > f(x)\}$$

از اندازهٔ لبگ صفر است. اگر استدلالهای فوق را بر $-\mu$ اعمال و به روابط $d(-\mu)/d\lambda = -f$ و $D^*(-\mu) = -D_*\mu$ توجه کنیم، به آسانی درمی‌یابیم که

$$\{x \in R^k: D_*\mu(x) > < f(x)\}$$

از اندازهٔ لبگ صفر است. به عبارت دیگر،

$$D^*\mu(x) \leq f(x) \leq D_*\mu(x)$$

به ازای تقریباً هر $x \in R^k$ برقرار است؛ یعنی $D\mu(x)$ به ازای تقریباً هر x موجود بوده و $D\mu = f$ ت. هـ. برقرار است، که همان مطلوب می‌باشد.

به عنوان اولین کاربرد از قضیهٔ قبل، نتیجهٔ کلاسیک زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۲۹. هرگاه E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از R باشد، آنگاه

۱. *به ازای تقریباً هر x در E،* $\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\lambda(E\cap(x-\varepsilon, x+\varepsilon))}{2\varepsilon} = 1$، *و*

۲. *به ازای تقریباً هر x در E^c،* $\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\lambda(E\cap(x-\varepsilon, x+\varepsilon))}{2\varepsilon} = 0$.

برهان. بدون صدمه زدن به کلیت می‌توان فرض کرد $\lambda(E) < \infty$. اندازهٔ بورل متناهی بر R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(A) = \lambda(E\cap A) = \int_B \chi_E d\lambda.$$

واضح است که $\mu \ll \lambda$ و $d\mu/d\lambda = \chi_E$. بنابر قضیهٔ ۴.۲۹، $D\mu = \chi_E$ ت. هـ. برقرار است و فرمولهای (۱) و (۲) فوق نتیجه می‌شوند.

نقطهٔ x در زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E از R که به ازای آن فرمول (۱) مذکور در قضیهٔ فوق برقرار باشد یک **نقطهٔ چگالی** E نام دارد. با این اصطلاح، قضیهٔ ۵.۲۹ (۱) معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود: هرگاه E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ R باشد، آنگاه تقریباً هر نقطه از E یک نقطهٔ چگالی خواهد بود.

حال فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل علامتدار باشد. هرگاه μ نسبت به اندازهٔ لبگ λ منفرد باشد، آنگاه نشان می‌دهیم که مشتقش تقریباً همه جا مساوی صفر است. این همراه با قضیهٔ ۴.۲۹ نتیجهٔ مشتقگیری مهم زیر را به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۶.۲۹. *هر اندازهٔ علامتدار بورل بر R^k تقریباً همه جا مشتقپذیر است.*

برهان. فرض کنیم μ یک اندازهٔ علامتدار بورل بر R^k باشد. اگر قسمتهای مثبت و منفی μ را جداگانه درنظر بگیریم، بدون صدمه زدن به کلیت می‌توانیم μ را یک اندازهٔ بورل فرض کنیم. واضح است که μ، σ- متناهی است. فرض کنیم $\mu = \mu_1 + \mu_2$ تجزیهٔ لبگ μ باشد (قضیهٔ ۷.۲۷)، که در آن $\mu_1 \ll \lambda$ و $\mu_2 \perp \lambda$.

هرگاه $B_n = \{x \in R^k: \|x\| < n\}$، آنگاه تابع مجموعه‌ای با تعریف $\nu_n(E) = \mu_1(E\cap B_n)$ به ازای هر مجموعهٔ بورل E یک اندازهٔ بورل متناهی صادق در $\nu_n \ll \lambda$ است. لذا، طبق قضیهٔ ۴.۲۹، ν_n به ازای تقریباً همهٔ نقاط B_n مشتقپذیر است و به آسانی معلوم می‌شود که به ازای تقریباً هر $x \in B_n$، $D\mu_1(x) = D\nu_n(x)$. چون $B_n \uparrow R^k$، پس μ_1 تقریباً همه جا مشتقپذیر است.

از آن سو، $\mu_2 \perp \lambda$ وجود مجموعهٔ بورل A با $\mu_2(A) = \lambda(A^c) = 0$ را ایجاب می‌کند. اما، طبق لم ۳.۲۹، $D\mu_2(x) = 0$ به ازای تقریباً هر نقطهٔ x از A برقرار است؛ و لذا [چون $\lambda(A^c) = 0$]، به ازای

تقریباً همهٔ نقاط x از R^k داریم $D\mu_2(x) = 0$. بنابراین،

$$D\mu(x) = D\mu_1(x) + D\mu_2(x) = D\mu_1(x)$$

به ازای تقریباً هر $x \in R^k$ برقرار است و برهان تمام می‌باشد.

حال که خواص اصلی مشتقگیری از اندازه‌ها ثابت شدند، توجه خود را به رابطهٔ بین اندازه‌ها و توابع حقیقی تعریف شده بر R معطوف می‌کنیم. در بحث زیر چند تا از عمیقترین نتایج کلاسیک از مشتقهای معمولی را به دست می‌آوریم.

به یاد آورید که تابع $f: R \to R$ صادق در $f(x) \leq f(y)$ به ازای هر $x \leq y$ یک تابع **صعودی** نام دارد [و اگر $f(x) \geq f(y)$ به ازای هر $x \leq y$ برقرار باشد، f ***نزولی*** نام دارد.] هر تابع صعودی یا نزولی را یک تابع ***یکنوا*** می‌نامیم. هر تابع یکنوای f دارای این خاصیت است که هر دو رابطهٔ

$$f(x+) = \lim_{t \downarrow x} f(t) \quad \text{و} \quad f(x-) = \lim_{t \downarrow x} f(t)$$

به ازای هر x در R وجود دارند. به علاوه، ***نوسان*** f در نقطهٔ x عبارت است از:

$$\omega_f(x) = |f(x+) - f(x-)| < \infty .$$

بنابراین، ناپیوستگیهای یک تابع یکنوا ناپیوستگیهای جهشی‌اند و، همانطور که نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد، تعداد آنها حداکثر شمارشپذیر است.

قضیهٔ ۷.۲۹. ***مجموعهٔ تمام ناپیوستگیهای یک تابع یکنوا حداکثر شمارشپذیر است.***

برهان. فرض کنیم $f: R \to R$ یکنوا باشد. از تعویض f با $-f$ (در صورت لزوم) می‌توان فرض کرد f صعودی باشد. چون $R = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$، کافی است نشان دهیم که تعداد ناپیوستگیهای f در هر بازهٔ باز متناهی حداکثر شمارشپذیر است. برای این کار، فرض کنیم (a, b) یک بازهٔ باز متناهی باشد.

هرگاه D مجموعهٔ تمام ناپیوستگیهای f در (a, b) باشد، آنگاه $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ که در آن

$$D_n = \{x \in (a, b): f(x+) - f(x-) \geq 1/n\}.$$

از آن سو، هرگاه $a < x_1 < \ldots < x_k < b$ متعلق به D_nی باشند، آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که

$$\frac{k}{n} \leq \sum_{i=1}^{k} [f(x_i+) - f(x_i-)] \leq f(b) - f(a) < \infty$$

برقرار است ایجابگر آنکه هر D_n متناهی است. لذا، D حداکثر شمارشپذیر است و برهان تمام خواهد بود.

یک نتیجهٔ فوری و بسیار مفید از قضیهٔ اخیر آن است که یک تابع یکنوا در هر بازهٔ باز یک نقطهٔ پیوستگی دارد. این مطلب در کاربردها به صورت زیر بیان می‌شود: هرگاه f یک تابع یکنوا باشد، آنگاه به ازای هر نقطهٔ x دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ وجود دارند که $x_n \downarrow x$، $y_n \uparrow x$، و f در هر x_n و y_n پیوسته است.

به یاد آورید که اگر تابع $f: R \to R$ صعودی و پیوستهٔ چپ باشد [یعنی $\lim_{t \uparrow x} f(t) = f(x)$ به ازای هر x برقرار است]، تابع مجموعه‌ای μ_f را می‌توان بر نیم‌حلقهٔ $S = \{[a, b): a \le b\}$ با $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$ تعریف کرد. در مثال ۵.۱۰ دیدیم که μ_f به واقع یک اندازه است. واضح است که هر مجموعهٔ بورل μ_f- اندازه‌پذیر است. بنابراین، تحدید اندازهٔ خارجی μ_f^* به $\mathscr{B}$ یک اندازهٔ بورل است. به خاطر سادگی، تحدید μ_f^* به $\mathscr{B}$ را مجدداً با μ_f نشان داده و آن را ***اندازهٔ بورل القا شده به وسیلهٔ f*** می‌نامیم. به آسانی معلوم می‌شود که

$$\mu_f((a, b)) = f(b) - f(a+)$$

به ازای هر بازهٔ باز (a, b) برقرار است. از آن سو، به ازای $a < b$، رابطهٔ

$$f(b) - f(a) = \mu_f([a, b)) = \mu_f(\{a\}) + \mu_f((a, b))$$

نشان می‌دهد که f در $a \in R$ ای پیوسته است اگر و فقط اگر $\mu_f(\{a\}) = ۰$ برقرار باشد.

در قضیهٔ مهم زیر اولین رابطهٔ "مشتقگیری" بین f و μ_f بیان شده است. توجه کنید که گویهای باز R درست بازه‌های باز متناهی می‌باشند.

قضیهٔ ۸.۲۹. *فرض کنیم $f: R \to R$ یک تابع پیوستهٔ چپ صعودی بوده و $x_۰ \in R$. در این صورت اندازهٔ بورل μ_f در $x_۰$ مشتقپذیر است اگر و فقط اگر f در $x_۰$ مشتقپذیر باشد.*

به علاوه، در این حالت،

$$D\mu_f(x_۰) = f'(x_۰).$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم f در $x_۰$ مشتقپذیر باشد. قرار می‌دهیم $m = f'(x_۰)$. به ازای $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ هست به طوری که

$$\text{هروقت } ۰ < |x - x_۰| < \delta \text{، } m - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} < m + \varepsilon. \qquad (**)$$

هرگاه بازهٔ باز (a, b) چنان باشد که $x_۰ \in (a, b)$ و $b - a < \delta$، آنگاه از $(**)$ به آسانی معلوم می‌شود که

$$m - \varepsilon < [f(b) - f(a)]/(b - a) < m + \varepsilon.$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که

$$\left|\frac{\mu_f((a, b))}{\lambda((a, b))} - m\right| = \left|\frac{f(b) - f(a+)}{b - a} - m\right| \le \varepsilon$$

به ازای هر بازهٔ باز (a, b) با خاصیت $x_\circ \in (a, b)$ و $b - a < \delta$ برقرار است. بنابراین، $D\mu_f(x_\circ) = m$ برقرار است.

برای عکس، فرض می‌کنیم $m = D\mu_f(x_\circ)$ در R موجود باشد و $\varepsilon > \circ$. $\delta > \circ$ ی را چنان می‌گیریم که هروقت $x_\circ \in (a, b)$ و $b - a < \delta$، داشته باشیم

$$\left|\frac{\mu_f((a, b))}{b - a} - m\right| < \varepsilon.$$

فرض کنیم $b > x_\circ$ در $b - x_\circ < \delta$ صدق نماید. چون f تعداد حداکثر شمارشپذیر ناپیوستگی دارد (قضیهٔ ۷.۲۹)، دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ هست به طوری که $a_n < x_\circ$، $\lim a_n = x_\circ$، $b - a_n < \delta$، و f در هر a_n پیوسته است. لذا،

$$\mu_f((a_n, b)) = f(b) - f(a_n +) = f(b) - f(a_n);$$

و درنتیجه، به ازای هر n،

$$\left|\frac{f(b) - f(a_n)}{b - a_n} - m\right| < \varepsilon.$$

از پیوستگی چپ f نتیجه می‌شود که به ازای هر $b > x_\circ$ که $b - x_\circ < \delta$ داریم

$$\left|\frac{f(b) - f(x_\circ)}{b - x_\circ} - m\right| \leq \varepsilon.$$

این یعنی f از راست در $x_\circ$ مشتقپذیر و لذا در $x_\circ$ پیوستهٔ راست می‌باشد. (دلیل:

$$\lim_{b \downarrow x_\circ}([f(b) - f(x_\circ)] = \lim_{b \downarrow x_\circ}[\frac{f(b) - f(x_\circ)}{b - x_\circ}.(b - x_\circ)] = m.\circ = \circ.)$$

حال، بنابر تقارن وضع، به ازای هر $a < x_\circ$ که $x_\circ - a < \delta$ داریم

$$\left|\frac{f(a) - f(x_\circ)}{a - x_\circ} - m\right| \leq \varepsilon.$$

لذا، $f'(x_\circ)$ وجود دارد و $f'(x_\circ) = m$. در اینجا برهان قضیه تمام می‌شود.

بنابر قضیهٔ ۷.۲۹، یک تابع یکنوا تعدادی حداکثر شمارشپذیر ناپیوستگی دارد. حال برای اثبات اینکه یک تابع یکنوا تقریباً در هر نقطه مشتق دارد حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ ۹.۲۹. (لبگ). *هر تابع یکنوا تقریباً همه جا مشتقپذیر است.*

برهان. فرض کنیم f یک تابع یکنوا باشد. از تعویض f با $-f$ (در صورت لزوم) می‌توان فرض کرد که f صعودی است. تابع جدید $f_*: R \to R$ را با $f_*(x) = f(x-) = \lim_{t \uparrow x} f(t)$ تعریف می‌کنیم. واضح است

که $f(x) \le f_*(x)$ به ازای هر x برقرار است. به علاوه، f_* صعودی و پیوستهٔ چپ است. [درواقع، به ازای هر x، یک دنباله مانند $\{x_n\}$ هست به طوری که $x_n \uparrow x$ و f در هر x_n پیوسته است. بنابراین،

$$f_*(x-) = \lim f_*(x_n) = \lim f(x_n) = f(x-) = f_*(x).]$$

همچنین، استدلالی مشابه نشان می‌دهد که

$$\omega_{f*}(x) = \omega_f(x) = f(x+) - f(x-)$$

به ازای هر x برقرار است. این به خصوص نشان می‌دهد که f و f_* دقیقاً نقاط پیوستگی یکسانی دارند.

حال فرض کنیم μ_{f*} اندازهٔ بورل القا شده به وسیلهٔ f_* باشد. بنابر قضیهٔ ۶.۲۹، μ_{f*} تقریباً همه جا مشتقپذیر است و لذا، طبق قضیهٔ ۸.۲۹، f_* نیز تقریباً همه جا مشتقپذیر است.

فرض کنیم $m = f'_*(a)$ در نقطه‌ای مانند a موجود باشد. در این صورت f_* در $x = a$ پیوسته است؛ و درنتیجه $f_*(a) = f(a)$. به ازای $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ را چنان می‌گیریم که

هروقت $۰ < |x - a| < \delta$، $m - \varepsilon < \dfrac{f_*(x) - f(a)}{x - a} < m + \varepsilon$ برقرار باشد.

حال x را با خاصیت $۰ < |x - a| < \delta$ ثابت گرفته و دنبالهٔ $\{x_n\}$ را چنان اختیار می‌کنیم که $x_n \downarrow x$، $۰ < |x_n - a| < \delta$، و f در هر x_n پیوسته باشد. پس داریم

$$\begin{aligned} m - \varepsilon < \frac{f_*(x) - f(a)}{x - a} &\le \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(x+) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \le m + \varepsilon. \end{aligned}$$

لذا، وقتی $۰ < |x - a| < \delta$،

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m\right| \le \varepsilon.$$

بنابراین، $f'(a)$ وجود دارد و $f'(a) = f'_*(a) = m$ برقرار است؛ یعنی در هر نقطه که f_* مشتقپذیر است f نیز چنین می‌باشد. بنابراین، f تقریباً همه‌جا مشتقپذیر است.

تا آخر این بخش، فقط توابع حقیقی تعریف شده بر بازهٔ بستهٔ (متناهی) $[a, b]$ در نظر گرفته می‌شوند. برای ساده کردن مطالب (وقتی لازم باشد) برای تابع f تعریف شده بر $[a, b]$ تلویحاً فرض می‌کنیم با $f(x) = f(a)$ اگر $x < a$ و $f(x) = f(b)$ اگر $x > b$ بر تمام R تعریف شده باشد.

بحث را با مرور چند خاصیت اساسی توابع با تغییر کراندار آغاز می‌کنیم. به یاد آورید که $P = \{t_۰, t_۱, ..., t_n\}$ یک افراز بازهٔ $[a, b]$ است اگر $a = t_۰ < t_۱ < ... < t_n = b$ برقرار باشد.

فرض کنیم $f: [a, b] \to R$ یک تابع باشد. در این صورت **تغییر (کل)** V_f از f روی $[a, b]$ به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$V_f = \sup\{\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| : \text{است}[a, b]\text{ افرازی از } P = \{t_0, \dots, t_n\}\}.$$

هرگاه $V_f < \infty$ برقرار باشد، آنگاه گوییم f ***با تغییر کراندار*** است.

یک تابع با تغییر کراندار لزوماً یک تابع کراندار است. [دلیل: هرگاه $a < x < b$، آنگاه

$$(|f(x)| - |f(a)|) + (|f(x)| - |f(b)|) \le |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le V_f.]$$

همچنین به آسانی معلوم می‌شود که اگر f و g دو تابع با تغییر کراندار (بر $[a, b]$) بوده و $\alpha \in R$، $f + g$، αf، fg، و $|f|$ همه توابعی با تغییر کراندارند. لذا، هرگاه $BV[a, b]$ گردایهٔ تمام توابع حقیقی با تغییر کراندار بر $[a, b]$ باشد، آنگاه مطلب اخیر نشان می‌دهد که $BV[a, b]$ یک فضای تابعی و یک جبر از توابع است.

هر تابع یکنوای f با تغییر کراندار بوده و $V_f = |f(b) - f(a)|$ برقرار است. [درواقع، هرگاه f صعودی بوده و $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}[f(t_i) - f(t_{i-1})] = f(b) - f(a).]$$

بنابراین، هر تابع را که بتوان به صورت تفاضل دو تابع یکنوا نوشت با تغییر کراندار است. درواقع، اینها تنها انواعی از توابع‌اند که با تغییر کراندارند. بحث زیر این وضع را توضیح می‌دهد.

هرگاه $f: [a, b] \to R$ یک تابع با تغییر کراندار باشد، آنگاه تحدید f به هر زیربازهٔ بستهٔ $[c, d]$ از $[a, b]$ در آن با تغییر کراندار است (چرا؟). حال می‌توان تابع حقیقی جدید $V_f(x)$ را با $V_f(a) = 0$ و $V_f(x)$ مساوی تغییر f روی $[a, x]$ به ازای $a < x \le b$ تعریف کرد. توجه کنید که $V_f(b) = V_f$. تابع $V_f(x)$ را ***تابع تغییر*** f می‌نامیم و خواص اصلی‌اش در قضیهٔ زیر گنجانده شده است.

قضیهٔ ۱۰.۲۹. ***تابع با تغییر کراندار*** $f: [a, b] \to R$ ***در احکام زیر صدق می‌کند:***

۱. $V_f(x)$ ***یک تابع صعودی است.***

۲. $|f(y) - f(x)| \le V_f(y) - V_f(x)$ ***به ازای هر*** $a \le x < y \le b$ ***برقرار است.***

۳. ***تابع*** $g: [a, b] \to R$ ***با تعریف*** $g(x) = V_f(x) - f(x)$ ***یک تابع صعودی است.***

برهان. (۱) فرض کنیم $a < x < y \le b$. هرگاه $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = x < y$ برقرار باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(y) - f(x)| \le V_f(y).$$

لذا،

$$V_f(x) \le V_f(x) + |f(y) - f(x)| \le V_f(y)$$

برقرار است.

(۲) نامساوی فوق فوراً (۲) را به ما می‌دهد.

(۳) هرگاه $a \le x < y \le b$ برقرار باشد، آنگاه (۲) ایجاب می‌کند که

$$f(y) - f(x) \le |f(y) - f(x)| \le V_f(y) - V_f(x);$$

درنتیجه

$$g(y) - g(x) = [V_f(y) - f(y)] - [V_f(x) - f(x)] \ge 0.$$

قضیهٔ زیر کاربرد فوری قضیهٔ پیش است.

قضیهٔ ۱۱.۲۹. ***هرگاه $f: [a, b] \to R$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه***

۱. ***f تفاضل دو تابع صعودی است، و***

۲. ***f تقریباً همه جا مشتقپذیر است.***

برهان. برای (۱) قضیهٔ ۱۰.۲۹ را در مورد $f(x) = V_f(x) - [V_f(x) - f(x)]$ به کار برید و برای (۲) از قضیهٔ ۹.۲۹ استفاده کنید.

فرض کنیم $f: [a, b] \to R$ یک تابع صعودی باشد. همچنین، با فرض $f(x) = f(b)$ اگر $x > b$ و $f(x) = f(a)$ اگر $x < a$، f را بر تمام R تعریف می‌کنیم. در این صورت تابع مجموعه‌ای

$$\mu_f([c, d)) = f(d-) - f(c-)$$

یک اندازه بر نیم‌حلقهٔ $\{[c, d): c \le d \text{ و } c, d \in R\}$ است. واضح است که مجموعه‌های اندازه‌پذیر μ_f شامل مجموعه‌های بورل R اند؛ و درنتیجه μ_f یک اندازهٔ بورل است. همچنین μ_f خارج $[a, b]$ صفر است؛ یعنی $\operatorname{Supp} \mu_f \subseteq [a, b]$ و لذا μ_f یک اندازهٔ بورل متناهی می‌باشد.

حال تابع با تغییر کراندار $f: [a, b] \to R$ را در نظر می‌گیریم. مجدداً، f با فرض $f(x) = f(b)$ اگر $x > b$ و $f(x) = f(a)$ اگر $x < a$ بر تمام R درنظر گرفته می‌شود. بنابر قضیهٔ ۱۱.۲۹، دو تابع صعودی g و h تعریف شده بر $[a, b]$ هست که $f = g - h$ بر $[a, b]$. در این صورت تابع مجموعه‌ای

$$\mu_f(E) = \mu_g(E) - \mu_h(E)$$

به ازای هر زیرمجموعهٔ بورل E از R یک اندازهٔ علامتدار بورل متناهی است. به آسانی معلوم می‌شود (طبق قضیهٔ ۹.۱۲) که مقدار $\mu_f(E)$ تابع نمایش خاص f به صورت تفاضل دو تابع صعودی نیست. به

علاوه، توجه کنید که μ_f خارج $[a, b]$ صفر است و

$$\mu_f([c, d)) = f(d-) - f(c-) \text{ و } \mu_f(\{x\}) = f(x+) - f(x-).$$

اندازهٔ علامتدار بورل متناهی μ_f را **اندازهٔ لبگ ـ اشتیل یس** (Stieltjes) تولید شده به وسیلهٔ f می‌نامیم.

اندازه‌های لبگ ـ اشتیل یس کدامها نسبت به اندازهٔ لبگ به طور مطلق پیوسته‌اند؟ قضیه زیر جواب این امر را خواهد داد.

قضیهٔ ۱۲.۲۹. *احکام زیر به ازای تابع پیوسته و با تغییر کراندار $f: [a, b] \to R$ هم‌ارزند:*

۱. μ_f نسبت به اندازهٔ لبگ به طور مطلق پیوسته است.

۲. به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ هست به طوری که هرگاه $(a_۱, b_۱), \ldots, (a_n, b_n)$ زیربازه‌های باز ازهم جدای $[a, b]$ باشند که $\sum_{i=۱}^n (b_i - a_i) < \delta$، آنگاه $\sum_{i=۱}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ برقرار است.

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم (۲) برقرار نباشد. در این صورت $\varepsilon > ۰$ ی هست به طوری که به ازای هر $\delta > ۰$ زیربازه‌های باز ازهم جدایی مانند $(a_۱, b_۱), \ldots, (a_n, b_n)$ از $[a, b]$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_{i=۱}^{n} (b_i - a_i) < \delta \text{ و } \sum_{i=۱}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \geq \varepsilon.$$

توجه کنید که مجموعهٔ باز $\mathcal{O} = \bigcup_{i=۱}^n (a_i, b_i)$ در $\lambda(\mathcal{O}) = \sum_{i=۱}^n (b_i - a_i) < \delta$ و

$$\varepsilon \leq \sum_{i=۱}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i=۱}^{n} |\mu_f((a_i, b_i))| \leq \sum_{i=۱}^{n} |\mu_f|((a_i, b_i)) = |\mu_f|(\mathcal{O})$$

صدق می‌کند. لذا، به ازای هر n مجموعهٔ بازی مانند $\mathcal{O}_n \subseteq (a, b)$ هست به طوری که $\lambda(\mathcal{O}_n) < ۲^{-n}$ و $|\mu_f|(\mathcal{O}_n) \geq \varepsilon$. قرار می‌دهیم $A = \bigcap_{n=۱}^\infty \bigcup_{i=n}^\infty \mathcal{O}_i$ و توجه می‌کنیم که A یک مجموعهٔ بورل است. چون

$$\lambda(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{O}_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \lambda(\mathcal{O}_i) < ۲^{۱-n},$$

پس داریم $\lambda(A) = ۰$. از آن سو،

$$|\mu_f|(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{O}_i) \geq |\mu_f|(\mathcal{O}_n) \geq \varepsilon$$

به ازای هر n برقرار است؛ و درنتیجه

$$|\mu_f|(A) = \lim |\mu_f|(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{O}_i) \geq \varepsilon$$

که با $|\mu_f| \ll \lambda$ در تضاد است (به یاد آورید که $|\mu_f| \ll \lambda$ اگر و فقط اگر $\mu_f \ll \lambda$). لذا، (۲) باید درست باشد.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم A یک مجموعهٔ بورل با خاصیت $\lambda(A) = ۰$ باشد. می‌توان فرض کرد

$A \subseteq (a, b)$. همچنین $\varepsilon > \circ$. عدد $\delta > \circ$ را چنان می‌گیریم که حکم (۲) برقرار باشد.

چون μ_f یک اندازهٔ علامتدار بورل منتظم متناهی است و $\lambda(A) = \circ$ برقرار است، مجموعهٔ بازی چون $\mathcal{O}$ هست به طوری که $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq (a, b)$، $|\mu_f(\mathcal{O}) - \mu_f(A)| < \varepsilon$، و $\lambda(\mathcal{O}) < \delta$. فرض کنیم $\mathcal{O} = \cup(a_i, b_i)$ به صورت اجتماعی (حداکثر شمارشپذیر) از بازه‌های باز ازهم جدا نوشته شده باشد. به آسانی معلوم می‌شود که

$$|\mu_f(\mathcal{O})| = |\sum \mu_f((a_i, b_i))| = |\sum[f(b_i) - f(a_i)]| \leq \sum|f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

بنابراین،

$$|\mu_f(A)| \leq |\mu_f(A) - \mu_f(\mathcal{O})| + |\mu_f(\mathcal{O})| < ۲\varepsilon$$

به ازای هر $\varepsilon > \circ$ برقرار است؛ یعنی $\mu_f(A) = \circ$؛ درنتیجه $\mu_f \ll \lambda$ و برهان قضیه تمام است.

حکم (۲) قضیهٔ قبل به عنوان تعریف پیوستگی مطلق توابع گرفته می‌شود.

تعریف ۱۳.۲۹. گوییم تابع $f: [a, b] \to R$ **به طور مطلق پیوسته** است اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی مانند $\delta > \circ$ باشد به طوری که هروقت $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ بازه‌های باز ازهم جدایی از $[a, b]$ باشند که در $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ صدق کنند، نامساوی $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ برقرار باشد.

واضح است که یک تابع به طور مطلق پیوسته لزوماً پیوسته است. عکس مطلب درست نیست؛ ر.ک. تمرینهای ۷ و ۸ در آخر این بخش.

همچنین به آسانی معلوم می‌شود که اگر f و g دو تابع به طور مطلق پیوسته بر $[a, b]$ بوده و $\alpha \in R$، $f + g$، αf، fg، و $|f|$ همه توابعی به طور مطلق پیوسته‌اند. لذا، گردایهٔ $A \subset [a, b]$ تمام توابع به طور مطلق پیوسته یک فضای تابعی و یک جبر از توابع تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ۱۴.۲۹. ***احکام زیر به ازای تابع به طور مطلق پیوستهٔ $f: [a, b] \to R$ برقرارند:***

۱. f با تغییر کراندار است؛ و درنتیجه $AC[a, b]$ یک زیرشبکهٔ برداری از $BV[a, b]$ می‌باشد.

۲. تابع تغییر $V_f(x)$ به طور مطلق پیوسته است؛ و درنتیجه f تفاضل دو تابع به طور مطلق پیوستهٔ صعودی است.

برهان. (۱) به ازای هر زیربازهٔ بستهٔ $[c, d]$ از $[a, b]$، $V_f(c, d)$ را تغییر (کل) f روی $[c, d]$ می‌گیریم. به آسانی معلوم می‌شود (تحقیق کنید) که اگر $c < e < d$،

$$V_f(c, d) = V_f(c, e) + V_f(e, d).$$

حال $\delta > 0$ را چنان می‌گیریم که تعریف پیوستگی مطلق به ازای $\varepsilon = 1$ برقرار باشد. عدد طبیعی n را چنان می‌گیریم که $(b - a)/n < \delta$، و فرض می‌کنیم $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ افرازی از $[a, b]$ باشد که $t_i - t_{i-1} = (b - a)/n$. واضح است که $V_f(t_{i-1}, t_i) \le 1$ به ازای $i = 1, \dots, n$ برقرار است؛ و لذا

$$V_f = V_f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} V_f(t_{i-1}, t_i) \le n < \infty .$$

(۲) هرگاه $[c, d]$ زیربازهٔ بسته‌ای از $[a, b]$ بوده و $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ افرازی از $[c, d]$ باشد، آنگاه می‌نویسیم

$$v(c, d, P) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

توجه کنید که

$$V_f(d) - V_f(c) = V_f(c, d) = \sup \{v(c, d, P)\text{: است } [c, d] \text{ افرازی از } P\}.$$

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$. $\delta > 0$ ی را چنان می‌گیریم که تعریف پیوستهٔ مطلق f برقرار باشد. فرض کنیم $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ زیربازه‌های باز دو بدو از هم جدا از $[a, b]$ باشند به طوری که $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$. به ازای هر $1 \le i \le n$، P_i را افراز دلخواهی از (a_i, b_i) می‌گیریم. هر P_i بازهٔ (a_i, b_i) را به تعدادی متناهی زیربازهٔ باز تقسیم می‌کند. واضح است که این زیربازه‌ها جمعاً دو بدو از هم جدایند و مجموع طولشان مساوی $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ است. با اعمال پیوستگی مطلق f بر این بازه‌های باز به دست می‌آوریم

$$v(a_1, b_1, P_1) + \dots + v(a_n, b_n, P_n) < \varepsilon.$$

پس داریم

$$\sum_{i=1}^{n} [V_f(b_i) - V_f(a_i)] \le \varepsilon;$$

درنتیجه $V_f(x)$ به طور مطلق پیوسته است.

قضیهٔ نهایی این بخش یک نتیجهٔ کلاسیک است. این قضیه می‌گوید که "قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال" در انتگرالگیری لبگ برای توابع به طور مطلق پیوسته برقرار است. (معمولاً اندازهٔ لبگ بر R را با dt نشان می‌دهند.)

قضیهٔ ۱۵.۲۹. تابع $f: [a, b] \to R$ به طور مطلق پیوسته است اگر و فقط اگر $f' \in L_1([a, b])$ و

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار باشد.

برهان. فرض کنیم f به طور مطلق پیوسته باشد. بنابر قضیهٔ ۱۴.۲۹، می‌توان فرض کرد f صعودی است. همچنین، بنابر قضیهٔ ۱۲.۲۹، $\mu_f \ll \lambda$ برقرار است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ رادون ـ نیکودیم، $\mu_f(E) = \int_E g d\lambda$ به ازای $g \in L_1([a, b])$ ای برقرار است. حال، از تلفیق قضایای ۴.۲۹ و ۸.۲۹، به دست می‌آوریم $g = f'$ ت. هـ. برای به دست آوردن اتحاد ذکر شده، قرار می‌دهیم $E = [a, x)$.

عکس مطلب سرراست است و به عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود. همچنین، ر.ک. تمرین ۳ از بخش ۲۷.

تمرینات

۱. هرگاه μ یک اندازهٔ بورل بر R^k باشد، آنگاه نشان دهید که $\mu \perp \lambda$ برقرار است اگر و فقط اگر به ازای تقریباً هر x، $D\mu(x) = \circ$.

۲. قضیهٔ ۵.۲۹ را به زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ از R^k تعمیم دهید؛ یعنی نشان دهید که اگر E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از R^k باشد، تقریباً همهٔ نقاط E نقاط چگالی‌اند.

۳. گوی باز به مرکز $a \in R^k$ و شعاع r را با $B_r(a)$ نشان می‌دهیم. هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر لبگ بر R^k باشد، آنگاه نقطهٔ $a \in R^k$ را یک **نقطهٔ لبگ** برای f نامیم اگر

$$\lim_{r \to \circ+} \frac{1}{\lambda(B_r(a))} \int_{B_r(a)} |f(x) - f(a)| d\lambda(x) = \circ.$$

نشان دهید هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر لبگ بر R^k باشد، آنگاه تقریباً همهٔ نقاط R^k نقاط لبگ‌اند. [**راهنمایی.** فرض کنید Q مجموعهٔ تمام اعداد گویا در R باشد. با اعمال قضیهٔ ۴.۲۹ نتیجه بگیرید که به ازای هر $a \in Q$ یک مجموعهٔ پوچ مانند E_a هست به طوری که

$$\lim_{r \to \circ+} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(t) - a| d\lambda(t) = |f(x) - a|$$

به ازای هر $x \notin E_a$ برقرار است. قرار دهید $E = \bigcup_{a \in Q} E_a$ و نشان دهید که هر نقطه از E^c یک نقطهٔ لبگ است.]

۴. فرض کنید $f: R \to R$ یک تابع صعودی و پیوستهٔ چپ باشد. مستقیماً (یعنی بدون استفاده از قضیهٔ ۴.۲۸) نشان دهید که اندازهٔ لبگ ـ اشتیل یس μ_f یک اندازهٔ بورل منتظم است.

۵. (فوبینی) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع صعودی تعریف شده بر $[a, b]$ باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in [a, b]$ در R همگرا است. نشان دهید f تقریباً همه جا

مشتقپذیر است و $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ به ازای تقریباً هر x برقرار است.

[راهنمایی. از تعویض f_n با $f_n - f_n(a)$ می‌توان فرض کرد $f_n \geq 0$ به ازای هر n برقرار است. قرار دهید $s_n = f_1 + \ldots + f_n$ و توجه کنید که هر s_n صعودی است و به ازای هر x، $s_n(x) \uparrow f(x)$. بنابر قضیهٔ ۹.۲۹، f و همهٔ f_nها و s_nها تقریباً همه جا مشتقپذیرند. چون ($s_{n+1} - s_n = f_{n+1}$ صعودی) $=$ باید به ازای تقریباً هر x برقرار باشد؛ $s'_{n+1}(x) \geq s'_n(x)$، به همین نحو، به ازای تقریباً هر x، $f'(x) \geq s'_n(x)$. حال زیردنبالهٔ $\{s_{k_n}\}$ از $\{s_n\}$ را چنان می‌گیریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(x)-s_{k_n}(x)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} [f(b)-s_{k_n}(b)] < \infty .$$

ملاحظه می‌کنیم که $\{f - s_{k_n}\}$ یک دنباله از توابع صعودی است. با استفاده از استدلالهای قبل خواهیم داشت $s'_{k_n}(x) \to f'(x)$ ت. ه. و نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = f'$ ت. ه. برقرار است.]

۶. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع صعودی بر $[a, b]$ بوده و f یک تابع صعودی بر $[a, b]$ باشد به طوری که $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$. ثابت کنید $f'(x) = \lim f'_n(x)$ به ازای تقریباً هر x برقرار است.

۷. این تمرین چند خاصیت اساسی توابع با تغییر کراندار بر بازهٔ $[a, b]$ را نشان می‌دهد.

آ. هرگاه f در هر نقطه مشتقپذیر بوده و $|f'(x)| \leq M < \infty$ به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار باشد، آنگاه نشان دهید که f به طور مطلق پیوسته (و درنتیجه با تغییر کراندار) است.

ب. نشان دهید که تابع $f: [0, 1] \to R$ با تعریف $f(0) = 0$ و $f(x) = x^2\cos(x^{-2})$ به ازای $0 < x \leq 1$ در هر x مشتقپذیر است ولی با تغییر کراندار نیست (و درنتیجه f پیوسته است ولی به طور مطلق پیوسته نیست).

پ. هرگاه f یک تابع با تغییر کراندار بوده و $|f(x)| \geq M > 0$ به ازای هر $x \in [a, b]$ برقرار باشد، آنگاه نشان دهید که $g(x) = (f(x))^{-1}$ یک تابع با تغییر کراندار است.

ت. گوییم تابع $f: [a, b] \to R$ در **شرط لیپ شیتس** (Lipschitz) صدق می‌کند اگر عددی حقیقی مانند M باشد به طوری که $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ به ازای هر $x, y \in [a, b]$ برقرار است. نشان دهید که هر تابع صادق در شرط لیپ شیتس به طور مطلق پیوسته است.

۸. در این تمرین مثالی از یک تابع صعودی پیوسته (و درنتیجه با تغییر کراندار) ارائه می‌شود که به طور مطلق پیوسته نیست.

مجموعهٔ کانتور C را به صورت ساخته شده در مثال ۱۲.۵ درنظر بگیرید. به یاد آورید که C از $[0, 1]$ با حذف بازه‌های باز به طور گام به گام به دست آمد. در مرحلهٔ اول بازهٔ یکسوم میانی باز حذف شد. در مرحلهٔ nم 2^{n-1} بازهٔ بسته داشتیم که همه به طول مساوی بودند و ما بازهٔ یکسوم میانی هر یک از آنها را حذف کردیم. فرض کنیم $I_1^n, \ldots, I_{2^{n-1}}^n$ (با شمارش از چپ به راست)

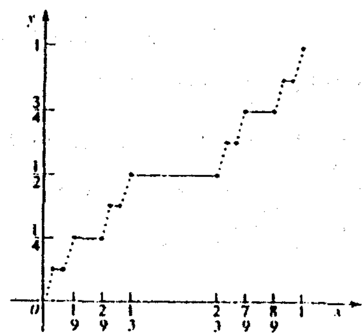
بازه‌های باز حذف شده در مرحلهٔ nم باشند. تابع $f: [\circ, 1] \to [\circ, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

آ. $f(\circ) = \circ$؛

ب. هرگاه به ازای اندیسی مانند $1 \leq i \leq 2^{n-1}$، $x \in I_i^n$، آنگاه $f(x) = (2i - 1)/2^n$؛ و

پ. هرگاه $x \in C$ که $x \neq \circ$، آنگاه $f(x) = \sup \{f(t): t \in [\circ, 1] \sim C$ و $t < x\}$.

در شکل ۵ بخشی از نمودار f دیده می‌شود.



شکل ۵

۱. نشان دهید که f یک تابع پیوستهٔ صعودی از $[\circ, 1]$ به روی $[\circ, 1]$ است.

۲. نشان دهید که به ازای تقریباً هر x، $f'(x) = \circ$.

۳. نشان دهید که f به طور مطلق پیوسته نیست.

۴. نشان دهید که $\lambda \perp \mu_f$ برقرار است.

۹. فرض کنید $f: [a, b] \to R$ یک تابع به طور مطلق پیوسته باشد. نشان دهید که f یک تابع ثابت است اگر و فقط اگر $f'(x) = \circ$ به ازای تقریباً هر x برقرار باشد.

۱۰. فرض کنید f و g دو تابع پیوستهٔ چپ (بر R) باشند. نشان دهید $\mu_f = \mu_g$ برقرار است اگر و فقط اگر $f - g$ یک تابع ثابت باشد.

۱۱. این تمرین مشخصهٔ دیگری از دوگان نرمی $C[a, b]$ را نشان می‌دهد. فرض کنید L گردایهٔ تمام توابع با تغییر کراندار بر $[a, b]$ باشد که پیوستهٔ چپ بوده و در $x = a$ صفرند.

آ. نشان دهید که L تحت اعمال معمولی جبری یک فضای برداری است و $f \to \mu_f$ از L به $M_b([a, b])$ خطی، یک به یک، و بروست.

ب. $f \geq g$ یعنی $f - g$ یک تابع صعودی است. (توجه کنید که $f \geq g$ رابطهٔ $f \geq g$ را ایجاب

نمی‌کند. نشان دهید که L تحت $\geq$ یک فضای برداری جزئی مرتب است به طوری که $f \geq g$ در L اگر و فقط اگر $\mu_f \geq \mu_g$ در $M_b([a, b])$.

پ. ثابت کنید L با نرم $\|f\| = V_{|f|}$ یک شبکهٔ باناخ است.

ت.. با تعبیری مناسب نشان دهید که $L = C^*[a, b]$.

۱۲. هرگاه $f: [a, b] \to R$ یک تابع صعودی باشد، آنگاه نشان دهید که $f' \in L_1([a, b])$ و $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$ برقرار است. مثالی بزنید که در آن $\int_a^b f'(x)dx < f(b) - f(a)$ برقرار باشد.

[**راهنمایی.** فرض کنید به ازای هر n و $x \in [a, b]$،

$$g_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)].$$

توجه کنید که $g_n \to f'$ ت. ه. برقرار است. حال لم فاتو را بر دنبالهٔ $\{g_n\}$ اعمال کنید.]

۱۳. هرگاه $f: [a, b] \to R$ یک تابع به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که

$$V_f = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

برقرار است.

۳۰. فرمول تغییر متغیر

در این بخش هدف اثبات فرمولی است که به "فرمول تغییر متغیر" معروف است. برای این کار به یک بحث مقدماتی نیاز داریم. تا پایان بخش، V و W دو مجموعهٔ باز ثابت از فضای اقلیدسی R^k اند. همچنین، $\|.\|$ همواره نرم اقلیدسی بر R^k است.

ما نمایش یک نگاشت خطی بر R^k به وسیلهٔ ماتریس را به خواننده یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم $T: R^k \to R^k$ یک نگاشت خطی بوده و $\{e_1, ..., e_k\}$ پایهٔ متعارف R^k باشد (یعنی مختص iام e_j مساوی ۱ است اگر $i = j$ و ۰ است اگر $i \neq j$). به ازای هر j، ثابتهایی چون $a_{1j}, ..., a_{kj}$ (که به طور منحصر به فرد معین‌اند) وجود دارند به طوری که $T(e_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij}e_i$. اگر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

آنگاه

$$T(x) = Ax$$

به ازای هر $x \in R^k$ برقرار است. ماتریس A را **نمایش ماتریسی** نگاشت خطی T (نسبت به پایهٔ متعارف) می‌نامند. به عکس، هر ماتریس $k\times k$ مانند $A = [a_{ij}]$ معرف یک عملگر خطی مانند $T: R^k \to R^k$ به وسیلهٔ فرمول $T(x) = Ax$ به ازای هر $x \in R^k$ است. همچنین به آسانی دیده می‌شود که اگر $M = k.\max\{|a_{ij}|: i, j = ۱, ..., k\}$، نامساوی $\|Ax\| \leq M\|x\|$ برقرار است؛ درنتیجه هر ماتریس معرف یک عملگر خطی پیوسته می‌باشد. **دترمینان** T دترمینان ماتریس A می‌باشد؛ یعنی $\det T = \det A$.

گوییم تابع $T: V \to R^k$ در نقطهٔ a از (مجموعهٔ باز) V **مشتقپذیر** است اگر یک عملگر خطی مانند $A: R^k \to R^k$ و عددی مانند $r > ۰$ باشد به طوری که

$$T(x) = T(a) + A(x - a) + o(x - a)$$

به ازای هر $x \in V$ که $\|x - a\| < r$ برقرار باشد. در اینجا (طبق معمول) $o(x - a)$ تابعی است از V به R^k به طوری که

$$\lim_{x \to a} \frac{o(x - a)}{\|x - a\|} = ۰.$$

عملگر خطی A با $T'(a)$ نموده شده و **مشتق** T در نقطهٔ a نامیده می‌شود. واضح است که اگر T در $x = a$ مشتقپذیر باشد، T باید در a پیوسته باشد.

گوییم تابع $T: V \to R^k$ **مشتقپذیر** است اگر $T'(x)$ به ازای هر نقطهٔ $x \in V$ موجود باشد. به علاوه، هرگاه $T = (T_۱, ..., T_n)$ مشتقپذیر باشد، آنگاه هر مشتق جزئی

$$\frac{\partial T_j}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{T_j(x + he_i) - T_j(x)}{h}$$

در هر نقطهٔ $x \in V$ وجود دارد. به علاوه، نمایش ماتریسی $T'(x)$ مساوی است با

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_۱}{\partial x_۱}(x) & \cdots & \frac{\partial T_۱}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_k}{\partial x_۱}(x) & \cdots & \frac{\partial T_k}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix}$$

این ماتریس **ماتریس ژاکوبی** نام دارد و دترمینانش را **ژاکوبین** می‌نامیم. دترمینان ژاکوبی را با $J_T(x)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$J_T(x) = \det T'(x) = \det [(\partial T_i/\partial x_j)(x)].$$

گوییم تابع $T: V \to R^k$، $C^۱$ - **مشتقپذیر** است اگر T مشتقپذیر بوده و تمام مشتقات جزئی‌اش توابع

پیوسته‌ای بر V باشند. توجه کنید که اگر T، $C^۱$- مشتقپذیر باشد، ژاکوبین $J_T(x)$ به ازای $x \in V$ یک تابع حقیقی پیوسته بر V است.

مهم است بدانیم که نگاشتهای $C^۱$- مشتقپذیر مجموعه‌های پوچ را بـه روی مـجموعه‌های پـوچ می‌برند. شرح مطلب در زیر آمده است.

لم ۱.۳۰. فرض کنیم $V \subseteq R^k$ باز بوده و $T: V \to R^k$ یک تابع $C^۱$ - مشتقپذیر باشد. هرگاه $A \subseteq V$ در $\lambda(A) = ۰$ صدق کند، آنگاه $\lambda(T(A)) = ۰$ نیز برقرار است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $M > ۰$ ی باشد به طوری که $|(\partial T_i/\partial x_j)(x)| \leq M$ به ازای هر $x \in V$ و $i, j = ۱, \ldots, k$ برقرار است. قرار می‌دهیم $C = kM + ۱$. هرگاه $a \in V$، آنگاه بنابر مشتقپذیری T، گوی بازی چون $B_a \subseteq V$ به مرکز a هست که

$$\| T(x) - T(a) \| < kM \| x - a \| + \| x - a \| = c \| x - a \|$$

به ازای هر $x \in B_a$ برقرار است.

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ را چنان می‌گیریم که $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq V$ و $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$ و دنبالهٔ $\{K_n\}$ از مجموعه‌های فشرده را چنان اختیار می‌کنیم که $\mathcal{O} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} K_n$. چون T پیوسته است، هر $T(K_n)$ فشرده بوده و اتحاد $T(\mathcal{O}) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} T(K_n)$ نشان می‌دهد که $T(\mathcal{O})$ یک مجموعهٔ بورل می‌باشد.

حال فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشردهٔ دلخواهی از $T(\mathcal{O})$ باشد. به ازای هر $y \in K$، $z \in \mathcal{O}$ ی را چنان می‌گیریم که $y = T(z)$. بنابر بحث فوق، یک گوی باز مانند $B_y \subseteq \mathcal{O}$ به مرکز z هست به طوری که

$$\| T(x) - y \| < C \| x - z \|$$

به ازای هر $x \in B_y$ برقرار است. فرض کنیم B_y^* گوی باز به مرکز y و شعاع C ضربدر شعاع B_y باشد. واضح است که $T(B_y) \subseteq B_y^*$. چون K فشرده است، $y_۱, \ldots, y_n \in K$ وجود دارند که $K \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} B_{y_i}^*$.

بنابر لم ۲.۲۹، گویهای دو بدو از هم جدا مانند $B_۱^*, \ldots, B_m^*$ در میان $B_{y_۱}^*, \ldots, B_{y_n}^*$ وجود دارند به طوری که

$$\lambda\left[\bigcup_{i=۱}^{n} B_{y_i}^*\right] \leq ۳^k \leq \sum_{j=۱}^{m} \lambda(B_j^*) = (۳C)^k \sum_{j=۱}^{m} \lambda(B_j).$$

توجه کنید که $B_۱, \ldots, B_m$ نظیر لزوماً گویهای باز دو بدو از هم جدایند. بنابراین،

$$\lambda(K) \leq \lambda\left[\bigcup_{i=۱}^{n} B_{y_i}^*\right] \leq (۳C)^k \sum_{j=۱}^{m} \lambda(B_j) = (۳C)^k \lambda\left[\bigcup_{i=۱}^{n} B_j\right]$$

$$\leq (۳C)^k \lambda(\mathcal{O}) < (۳C)^k \varepsilon$$

به ازای هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ K از $T(\mathcal{O})$ برقرار است. چون $T(\mathcal{O})$ یک مجموعهٔ بورل است، انتظام λ ایجاب می‌کند که $\lambda(T(\mathcal{O})) \leq (۳C)^k\varepsilon$؛ و در نتیجه، به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $\lambda(T(A)) \leq \lambda(T(\mathcal{O})) \leq (۳C)^k\varepsilon$؛ یعنی $\lambda(T(A)) = ۰$.

در حالت کلی، فرض کنیم $B_۱, B_۲, \ldots$ شمارشی از گویهای باز به مرکز "گویا" و شعاع گویا باشد که بستشان کاملاً در V قرار دارد. واضح است که $V = \bigcup_{n=۱}^{\infty} B_n$. چون هر $\bar{B}_n$ فشرده بوده و T، $C^۱$ - مشتقپذیر است، به آسانی معلوم می‌شود که $T: B_n \to R^k$ در مفروضات حالت پیش صدق می‌کند. لذا، $\lambda(T(A \cap B_n)) = ۰$ به ازای هر n برقرار است؛ و درنتیجه، طبق مطلوب،

$$\lambda(T(A)) = \lambda(\bigcup_{n=۱}^{\infty} T(A \cap B_n)) = ۰.$$

مفهوم وابرریختی نقش مهمی در این بخش دارد. تعریفش به قرار زیر است.

تعریف ۲.۳۰. فرض کنیم V و W دو مجموعهٔ باز از R^k باشند. تابع $T: V \to W$ را یک ***وابرریختی*** گوییم اگر

آ. T یک به یک و برو باشد،

ب. T، $C^۱$ - مشتقپذیر باشد،

پ. $J_T(x) \neq ۰$ به ازای هر $x \in V$ برقرار باشد، و

ت. T یک همانریختی (از V به روی W) باشد.

متذکر می‌شویم که (آ)، (ب)، و (پ) تضمین می‌کنند که T یک نگاشت باز و لذا یک همانریختی است. اما خاصیت (ت) را از اینجهت به تعریف وابرریختی افزوده‌ایم که بر اهمیت آن تأکید نماییم. همچنین باید گفت که نگاشت معکوس $T^{-۱}: W \to V$ لزوماً یک وابرریختی است. برای شرح مطلب راجع به این و سایر خواص توابع مشتقپذیر، ر.ک. [۱].

قضیهٔ زیر به ما می‌گوید که یک وابرریختی مجموعه‌های بورل و اندازه‌پذیر لبگ را حفظ خواهد کرد.

قضیهٔ ۳.۳۰. *فرض کنیم $T: V \to W$ یک وابرریختی بین دو زیرمجموعهٔ باز از R^k بوده و E زیرمجموعه‌ای از V باشد. در این صورت*

آ. $T(E)$ یک مجموعهٔ بورل است اگر و فقط اگر E یک مجموعهٔ بورل باشد.

ب. $T(E)$ اندازه‌پذیر لبگ است اگر و فقط اگر E اندازه‌پذیر لبگ باشد.

برهان. (آ) فرض کنیم $\mathscr{B}_V$ و $\mathscr{B}_W$ به ترتیب مجموعه‌های بورل V و W باشند. واضح است که $T(\mathscr{B}_V) = \{T(E): E \in \mathscr{B}_V\}$ یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های W است که شامل مجموعه‌های باز W است؛ درنتیجه $\mathscr{B}_W \subseteq T(\mathscr{B}_V)$. بنابر تقارن وضع، $\mathscr{B}_V \subseteq T^{-1}(\mathscr{B}_W)$ برقرار است، و از این خواهیم داشت $T(\mathscr{B}_V) = \mathscr{B}_W$. حال نتیجه به آسانی از آخرین اتحاد حاصل خواهد شد.

(ب) فرض کنیم E اندازه‌پذیر لبگ باشد. می‌توان فرض کرد که $\lambda(E) < \infty$ (چرا؟). مجموعهٔ بورل B را با خواص $E \subseteq B \subseteq V$ و $\lambda(B\sim E) = 0$ اختیار می‌کنیم. بنابر لم ۱.۳۰، $\lambda(T(B\sim E)) = 0$؛ درنتیجه $T(B\sim E)$ اندازه‌پذیر لبگ است. حال از قسمت (آ) معلوم می‌شود که $T(B)$ یک مجموعهٔ بورل است؛ و لذا رابطهٔ

$$T(E) = T(B) \sim T(B\sim E)$$

نشان می‌دهد که $T(E)$ اندازه‌پذیر لبگ است. عکس مطلب از تقارن وضعیت واضح است.

حال فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یک وابرریختی باشد. از قضیهٔ اخیر به آسانی معلوم می‌شود که تابع مجموعه‌ای

$$\mu(E) = \lambda(T(E))$$

تعریف شده به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E از V یک اندازه است. از آن سو، از لم ۱.۳۰ معلوم می‌شود که $\mu \ll \lambda$ برقرار است. برهان "فرمول تغییر متغیر" مبتنی بر این امر است که مشتق رادون - نیکودیم $d\mu/d\lambda$ در رابطهٔ $(d\mu/d\lambda)(x) = |J_T(x)|$ به ازای هر $x \in V$ صدق می‌کند.

برای اثبات این اتحاد، لازم است نحوهٔ تغییر حجم مکعب یکه از R^k تحت یک عملگر خطی را بدانیم.

لم ۴.۳۰. هرگاه $A: R^k \rightarrow R^k$ یک عملگر خطی باشد، آنگاه

$$\lambda(A(E)) = |\det A| . \lambda(E)$$

به ازای جمیع زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ E از R^k برقرار است.

برهان. هرگاه A معکوس‌پذیر نباشد، آنگاه A فضای R^k را به روی یک زیرفضای خطی با بعد پایین‌تر و درنتیجه به روی مجموعه‌ای از اندازهٔ صفر می‌نگارد (چرا؟). لذا، $\lambda(A(E)) = |\det A| . \lambda(E) = 0$ بداهتاً برقرار است.

حال فرض کنیم A معکوسپذیر باشد. واضح است که A یک وابرریختی است. فرض کنیم $\mu(E) = \lambda(A(E))$ به ازای هر مجموعهٔ بورل E برقرار باشد. در این صورت μ یک اندازهٔ بورل است و، بنابر قضیهٔ ۹.۱۲، کافی است ثابت کنیم که، بر مجموعه‌های بورل، $|\det A|.\lambda = \mu$. اثبات را با توجه به اینکه μ یک پایای انتقال اندازهٔ بورل بر R^k است و در نتیجه، طبق قضیهٔ ۶.۱۵، ثابتی مانند C هست که $\mu = C\lambda$ برقرار است آغاز می‌کنیم. به خصوص، هرگاه $U = [\circ, \text{۱}]\times\ldots\times[\circ, \text{۱}]$، آنگاه $C = \mu(U)$. برای اتمام برهان باید نشان دهیم که $C = |\det A|$.

برای این کار، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $A = A_\text{۱}\circ A_\text{۲}$ و $C, C_\text{۱}, C_\text{۲}$ ثابتهای مربوط به $A, A_\text{۱}, A_\text{۲}$ باشند، داریم

$$C = \lambda(A(U)) = \lambda(A_\text{۱}(A_\text{۲}(U))) = C_\text{۱}\lambda(A_\text{۲}(U)) = C_\text{۱}C_\text{۲}\lambda(U) = C_\text{۱}C_\text{۲}.$$

هرگاه نمایش ماتریسی A را نیز با A نشان دهیم، آنگاه ماتریس A را می‌توان به صورت حاصل ضربی از ماتریسهای $A = A_\text{۱}\ldots A_n$ نوشت که در آن هر A_i

۱. ماتریس حاصل از ماتریس همانی $(k\times k)$ به وسیلهٔ ضرب یکی از سطرهایش در یک ثابت ناصفر است یا

۲. ماتریس حاصل از ماتریس همانی به وسیلهٔ تعویض دو تا از سطرهایش است یا

۳. ماتریس حاصل از ماتریس همانی به وسیلهٔ افزودن مضرب ناصفری از یک سطر همانی به سطر دیگری از آن می‌باشد.

(سه نوع ماتریس توصیف شده در فوق را ***ماتریسهای مقدماتی*** می‌نامند). لذا، چون $C = C_\text{۱}\ldots C_n$ [که در آن $C_i = \lambda(A_i(U))$] و $\det A = \det A_\text{۱}\ldots\det A_n$، برای اتمام برهان کافی است فرمول را به ازای سه نوع ماتریس فوق تحقیق نماییم.

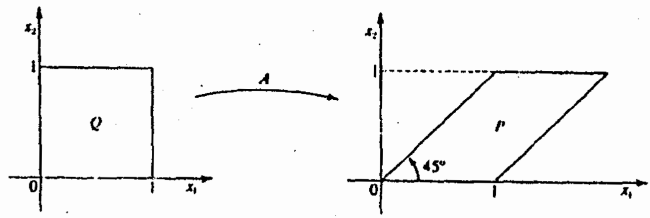
نوع ۱. بی‌آنکه به کلیت صدمه بخورد می‌توان فرض کرد ماتریس A از ماتریس همانی به وسیلهٔ ضرب سطر اولش در یک عدد ناصفر α به دست آمده است. توجه کنید که $\det A = |\alpha|$. در اینجا U به روی $[\circ, \alpha]\times[\circ, \text{۱}]\times\ldots\times[\circ, \text{۱}]$ نگاشته می‌شود اگر $\alpha > \circ$ و به روی $[\alpha, \circ]\times[\circ, \text{۱}]\times\ldots\times[\circ, \text{۱}]$ نگاشته می‌شود اگر $\alpha > \circ$. در هر حالت، $C = \lambda(A(U)) = |\alpha| = |\det A|$.

نوع ۲. در این حالت $\det A = -\text{۱}$. از آن سو، به آسانی معلوم می‌شود که در این حالت U تحت A به روی U نگاشته می‌شود. لذا، $C = \lambda(A(U)) = \lambda(U) = \text{۱} = |\det A|$.

نوع ۳. به آسانی معلوم می‌شود که این حالت به حالتی که ماتریس A از ماتریس همانی به وسیلهٔ افزودن سطر اولش به سطر دوم به دست می‌آید تحویل می‌شود. واضح است که $\det A = \text{۱}$.

حال ملاحظه می‌کنیم که اگر $x = (x_\text{۱}, x_\text{۲}, \ldots, x_k)$، داریم $Ax = (x_\text{۱} + x_\text{۲}, x_\text{۲}, x_\text{۳}, \ldots, x_k)$. به

خصوص، وقتی $k = ۲$، مربع یکه در $R^۲$ تحت A به روی متوازی‌الاضلاع P طبق شکل ۶ نگاشته می‌شود.



شکل ۶

واضح است که $\lambda(P)=۱$. از آن سو، هرگاه اندازهٔ لبگ بر R^k (که $k > ۲$) را اندازهٔ حاصل ضربی اندازهٔ لبگ بر $R^۲$ و اندازهٔ لبگ بر $R^{k-۲}$ درنظر بگیریم، آنگاه U تحت A به روی مجموعهٔ $P \times U_۱$ نگاشته می‌شود که در آن $U_۱$ مکعب یکهٔ $(k - ۲)$ بعدی است. بنابر قضیهٔ ۲.۲۲،

$$\lambda(A(U)) = \lambda(P).\lambda(U_۱) = ۱ = |\det A|,$$

و برهان لم تمام خواهد بود.

حال در وضعیتی هستیم که می‌توانیم اتحاد $|J_T| = d\mu/d\lambda$ را ثابت نماییم.

قضیهٔ ۵.۳۰. فرض کنیم $T: V \to W$ یک وابرریختی بین دو زیرمجموعهٔ باز R^k باشد. هرگاه به ازای هر مجموعهٔ بورل E داشته باشیم $\mu(E) = \lambda(T(E))$، آنگاه μ یک اندازهٔ بورل بر V است که مشتقش در

$$D\mu(x) = |J_T(x)|$$

به ازای هر $x \in V$ صدق می‌کند.

برهان. فرض کنیم $a \in V$. به وسیلهٔ تعویض T با $S(x) = T(a + x) - T(a)$ می‌توان فرض کرد $a = ۰$ و $T(۰) = ۰$.

ابتدا نتیجه را در حالتی که ماتریس ژاکوبی مساوی ماتریس همانی $k \times k$ ی J است ثابت می‌کنیم؛ و در نتیجه $J_T(۰) = ۱$.

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. عدد $۰ < \alpha < ۱/۴$ را چنان می‌گیریم که

$$۱ - \varepsilon < (۱ - ۲\alpha)^k < (۱ + ۲\alpha)^k < ۱ + \varepsilon$$

و سپس $\delta > 0$ ی را چنان می‌گیریم که

$$\| T(x) - x \| < \alpha \|x\|$$

به ازای هر $x \in V$ و $\|x\| < \delta$ برقرار باشد.

حال فرض کنیم $B \subseteq V$ یک گوی باز شامل صفر به مرکز x_0 و شعاع $r < \delta / 2$ باشد. همچنین B_1 و B_2 گویهای باز به مرکز x_0 و شعاعهای $(1-2\alpha)r$ و $(1+2\alpha)r$ باشند. حکم می‌کنیم که

$$B_1 \subseteq T(B) \subseteq B_2.$$

درواقع، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $x \in B$،

$$\|x\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| < 2r < \delta ;$$

و درنتیجه، به ازای هر $x \in B$،

$$\| T(x) - x_0 \| \leq \| T(x) - x \| + \|x - x_0\| < \alpha \|x\| + r < (1+2\alpha)r$$

نشانگر آنکه $T(B) \subseteq B_2$. حال می‌نویسیم

$$B_1 = [B_1 \cap T(B)] \cup [B_1 \sim T(B)],$$

و توجه می‌کنیم که دو مجموعه در اجتماع فوق از هم جدایند. چون T یک وابرریختی است، $T(B)$ یک مجموعهٔ باز است؛ و لذا $B_1 \cap T(B)$ نیز باز است. چون

$$\| T(x_0) - x_0 \| < \alpha \|x_0\| < 2\alpha r < (1-2\alpha)r,$$

پس $T(x_0) \in B_1 \cap T(B)$؛ و درنتیجه $B_1 \cap T(B) \neq \varnothing$. همچنین، هرگاه $\|x - x_0\| = r$ برقرار باشد، آنگاه $\|x\| < 2r < \delta$ ایجاب می‌کند که

$$r = \|x - x_0\| \leq \|x - T(x)\| + \| T(x) - x_0 \| < 2\alpha r + \| T(x) - x_0 \| ;$$

و درنتیجه $\| T(x) - x_0 \| > (1-2\alpha)r$. این نشان می‌دهد که هیچ نقطهٔ مرزی B تحت T به توی B_1 نگاشته نمی‌شود. به عبارت دیگر، $B_1 \sim T(B) = B_1 \sim T(\overline{B})$ برقرار است. چون T پیوسته است، $T(\overline{B})$ فشرده است؛ و درنتیجه $B_1 \sim T(B)$ نیز یک مجموعهٔ باز است. ولی در این صورت داریم $B_1 \sim T(B) = \varnothing$ (ر.ک. تمرین ۱ در آخر این بخش)؛ و درنتیجه $B_1 = B_1 \cap T(B) \subseteq T(B)$ برقرار است.

حال اگر c اندازهٔ لبگ گوی باز به مرکز صفر و شعاع یک باشد،

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon)\lambda(B) &= c(1 - \varepsilon)r^k < c(1 - 2\alpha)^k r^k = \lambda(B_1) \leq \lambda(T(B)) \\ &= \mu (B) \leq \lambda(B_2) = c(1 + 2\alpha)^k r^k < (1+\varepsilon)cr^k = (1+\varepsilon)\lambda(B).\end{aligned}$$

لذا، $1 - \varepsilon < \mu (B)/\lambda(B) < 1 + \varepsilon$ به ازای جمیع گویهای باز $B \subseteq V$ شامل صفر و شعاع کمتر از $\delta/2$ برقرار است؛ یعنی $D\mu(0) = 1$ برقرار است.

در حالت کلی، فرض کنیم A ماتریس ژاکوبی در صفر باشد. چون $\det A = J_T(0) \neq 0$، ماتریس A

معکوسپذیر است. در این صورت $S(x) = A^{-1}(T(x))$ یک وابریختی بین V و $A^{-1}(W)$ است که ماتریس ژاکوبی‌اش در صفر مساوی I است. بنابر حالت قبل، اندازهٔ بورل $\nu(E) = \lambda(S(E))$ در $D\nu(0) = 1$ صدق می‌کند. حال اتحاد

$$\nu(E) = |\det A^{-1}|.\lambda(T(E)) = |\det A^{-1}|.\ \mu(E)$$

فوراً ایجاب می‌کند که $D\mu(0) = |\det A| = |J_T(0)|$. در اینجا برهان قضیه تمام خواهد بود.

در زیر حالت خاصی از "فرمول تغییر متغیر" بیان شده است.

قضیهٔ ۶.۳۰. ***فرض کنیم $T: V \to W$ یک وابریختی بین زیرمجموعه‌های باز R^k باشد به طوری که $\lambda(W) < \infty$. در این صورت، به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E از V، داریم***

$$\lambda(T(E)) = \int_E |J_T|\, d\lambda.$$

برهان. به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E از V، $\mu(E) = \lambda(T(E))$. در این صورت، بنابر لم ۱.۳۰، $\mu \ll \lambda$ برقرار است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ رادون ـ نیکودیم، $\mu(E) = \int_E (d\mu/d\lambda) d\lambda$ به ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E برقرار است. حال با تلفیق قضیهٔ ۴.۲۹ و قضیهٔ قبل به دست می‌آوریم $d\mu/d\lambda = D\mu = |J_T|$. بنابراین،

$$\lambda(T(E)) = \int_E |J_T|\, d\lambda$$

به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E از V برقرار است.

حال به نتیجهٔ اصلی در این بخش می‌رسیم.

قضیهٔ ۷.۳۰. ***فرض کنیم $T: V \to W$ یک وابریختی بین دو مجموعهٔ باز از R^k باشد. در این صورت، به ازای هر تابع $f \in L_1(W)$، تابع $(f \circ T).|J_T|$ تعلق به $L_1(V)$ دارد و***

$$\int_W f\, d\lambda = \int_V (f \circ T).\, |J_T|\, d\lambda$$

برقرار است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\lambda(W) < \infty$. همچنین $f = \chi_E$ که در آن E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ W است. بنابر قضیهٔ ۶.۳۰، داریم

$$\int_W f\, d\lambda = \lambda(E) = \lambda(T(T^{-1}(E))) = \int_{T^{-1}(E)} |J_T|\, d\lambda$$
$$= \int_V (\chi_E \circ T).\, |J_T|\, d\lambda = \int_V (f \circ T).\, |J_T|\, d\lambda.$$

لذا، نتیجه برای توابع مشخصهٔ زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ W برقرار است. پس فرمول برای توابع پله‌ای درست است و درنتیجه، با یک استدلال پیوستگی ساده، به ازای هر $f \in L_1(W)$ برقرار است.

حال اگر $\lambda(W) = \infty$، قرار می‌دهیم $W_n = \{x \in W: \ \|x\| < n\}$ و $V_n = T^{-1}(W_n)$. واضح است که به ازای هر n، $\lambda(W_n) < \infty$؛ و درنتیجه، هرگاه $0 \leq f \in L_1(W)$، آنگاه بنابر حالت قبل (و قضیهٔ لوی)

$$\int_W fd\lambda = \lim \int_{W_n} fd\lambda = \lim \int_{V_n} (f \circ T).\, |J_T|\, d\lambda = \int_V (f \circ T).\, |J_T|\, d\lambda$$

و نتیجه حاصل خواهد بود.

فرمول آمده در قضیهٔ قبل به "فرمول تغییر متغیر" معروف است و معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{T(V)} f(y)dy = \int_V f(T(x)).\, |J_T(x)|\, dx.$$

صورت زیر از قضیهٔ ۷.۳۰ اغلب در کاربردها به کار می‌رود و برهانش فوراً از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۸.۳۰. *فرض کنیم* $T: A \to B$ ***یک نگاشت بین دو زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ از*** R^k ***باشد. همچنین مجموعه‌های باز*** $V \subseteq A$ ***و*** $W \subseteq B$ ***وجود داشته باشند به طوری که*** $T(V) = W$، $T: V \to W$ ***یک وابرریختی باشد، و*** $\lambda(A \sim V) = \lambda(B \sim W) = 0$***. در این صورت، به ازای هر*** $f \in L_1(B)$***، تابع*** $(f \circ T).\, |J_T|$ ***(ت. هـ. تعریف شده بر*** A***) تعلق به*** $L_1(A)$ ***دارد و***

$$\int_B fd\lambda = \int_A (f \circ T).\, |J_T|\, d\lambda$$

برقرار است.

تمرینات

۱. نشان دهید که هر گوی باز در یک فضای باناخ یک مجموعهٔ همبند است؛ یعنی نشان دهید هرگاه B یک گوی باز در یک فضای باناخ باشد به طوری که $B = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ به ازای مجموعه‌های باز و از هم جدای $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ برقرار باشد، آنگاه $\mathcal{O}_1 = \varnothing$ یا $\mathcal{O}_2 = \varnothing$.

[**راهنمایی.** هرگاه $a \in \mathcal{O}_1$ و $b \in \mathcal{O}_2$، آنگاه قرار دهید

$$\alpha = \inf\{t \in [0, 1]: \ ta + (1 - t)b \in \mathcal{O}_1\}$$

و توجه کنید که $c = \alpha a + (1 - \alpha)b \in B$. برای رسیدن به تناقض نشان دهید که $c \notin \mathcal{O}_1$ و $c \notin \mathcal{O}_2$.]

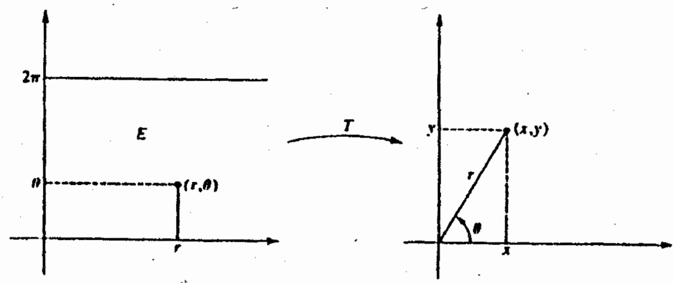
۲. فرض کنید $T: V \to R^k$، C^1 - مشتقپذیر باشد. نشان دهید که نگاشت $x \to T'(x)$ از V به توی $L(R^k, R^k)$ یک تابع پیوسته است.

۳. نشان دهید که اندازهٔ لبگ بر R^2 پایای "دوران" است.

۴. (مختصات قطبی). فرض کنید $E = \{(r, \theta) \in R^2: 0 \le \theta \le 2\pi, r \ge 0\}$. تبدیل $T: E \to R^2$ با تعریف $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$، یا به صورتی که معمولاً می‌نویسند

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta,$$

تبدیل مختصات قطبی بر R^2 نام دارد و در شکل ۷ نموده شده است.



شکل ۷

آ. نشان دهید که $\lambda(E \sim \mathring{E}) = 0$.

ب. هرگاه $A = \{(x, 0): x \ge 0\}$، آنگاه نشان دهید A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از R^2 است که اندازهٔ لبگ (۲- بعدی) آن صفر است.

پ. نشان دهید که $T: \mathring{E} \to R^2 \sim A$ یک وابرریختی است که دترمینان ژاکوبی‌اش در $J_T(r, \theta) = r$ به ازای هر $(r, \theta) \in \mathring{E}$ صدق می‌کند.

ت. نشان دهید هرگاه G یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E باشد که $\lambda(G \sim \mathring{G}) = 0$، آنگاه $T(G)$ یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ R^2 است. به علاوه، نشان دهید هرگاه $f \in L_1(T(G))$، آنگاه

$$\int_{T(G)} f d\lambda = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

برقرار است.

۵. در این تمرین از مختصات قطبی (معرفی شده در تمرین قبل) برای ارائهٔ برهانی دیگر از فرمول $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ استفاده می‌شود.

آ. به ازای هر $r > 0$ قرار دهید

$$C_r = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \le r^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

و $S_r = [\circ, r]\times[\circ, r]$ و نشان دهید که $C_r \subseteq S_r \subseteq C_{r\sqrt{\text{۲}}}$.

ب. هرگاه $f(x, y) = e^{-(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}})}$، آنگاه نشان دهید

$$\int_{C_r} f d\lambda \leq \int_{S_r} f d\lambda \leq \int_{C_{r\sqrt{\text{۲}}}} f d\lambda,$$

که در آن λ اندازهٔ لبگ ۲- بعدی است.

پ. با استفاده از تغییر متغیر به مختصات قطبی و قضیهٔ فوبینی، نشان دهید که

$$\int_{C_r} f d\lambda = \int_{\circ}^{\pi/\text{۲}} \int_{\circ}^{r} e^{-t^{\text{۲}}} t\, dt\, d\theta = \frac{\pi}{\text{۴}}(\text{۱}-e^{-r^{\text{۲}}}).$$

ت. با استفاده از (ب) نشان دهید که

$$\frac{\pi}{\text{۴}}\left[\text{۱}-e^{-r^{\text{۲}}}\right] \leq \left[\int_{\circ}^{r} e^{-x^{\text{۲}}} dx\right]^{\text{۲}} \leq \frac{\pi}{\text{۴}}\left[\text{۱}-e^{-\text{۲}r^{\text{۲}}}\right]$$

و سپس با فرض $r \to \infty$ فرمول مطلوب را به دست آورید.

۶. مختصات قطبی "مضاعف" در $R^{\text{۴}}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi,\ w = \rho\sin\phi.$$

فرمول تغییر متغیر برای این تبدیل را نوشته و با استفاده از آن نشان دهید که "حجم" گوی باز در $R^{\text{۴}}$ به مرکز صفر و شعاع a مساوی $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}a^{\text{۴}}$ است.

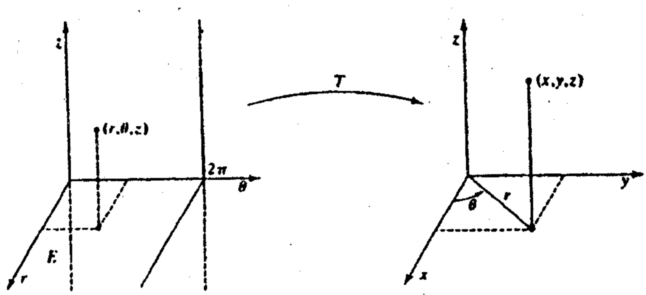
۷. (مختصات استوانه‌ای). فرض کنید

$$E = \{(r, \theta, z) \in R^{\text{۳}}:\ r \geq \circ,\ \circ \leq \theta \leq \text{۲}\pi,\ z \in R\}.$$

تبدیل $T: E \to R^{\text{۳}}$ با تعریف $T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$، یا به صورتی‌که معمولاً نوشته می‌شود:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$$

تبدیل مختصات استوانه‌ای نام دارد و در شکل ۸ نموده شده است.



شکل ۸

آ. نشان دهید که $\lambda(E \sim \mathring{E}) = \circ$.

ب. هرگاه $A = \{(x, \circ, z): x \geq \circ, z \in R\}$، آنگاه نشان دهید A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $R^۳$ است که اندازهٔ لبگ (۳ بعدی) آن صفر است.

پ. نشان دهید $T: \overset{\circ}{E} \to R^۳ \sim A$ یک وابرریختی است که دترمینان ژاکوبی آن در $J_T(r, \theta, z) = r$ به ازای هر $(r, \theta, z) \in \overset{\circ}{E}$ صدق می‌کند.

ت. نشان دهید هرگاه G یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E با خاصیت $\lambda(G \sim \overset{\circ}{G}) = \circ$ باشد، آنگاه $T(G)$ یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ $R^۳$ است. به علاوه، نشان دهید هرگاه $f \in L_۱(T(G))$، آنگاه

$$\int_{T(G)} f d\lambda = \iiint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz$$

برقرار است.

۸. (مختصات کروی). فرض کنید

$$E = \{ (r, \theta, \phi) \in R^۳: r \geq \circ, \circ \leq \theta \leq ۲\pi, \circ \leq \phi \leq \pi \}.$$

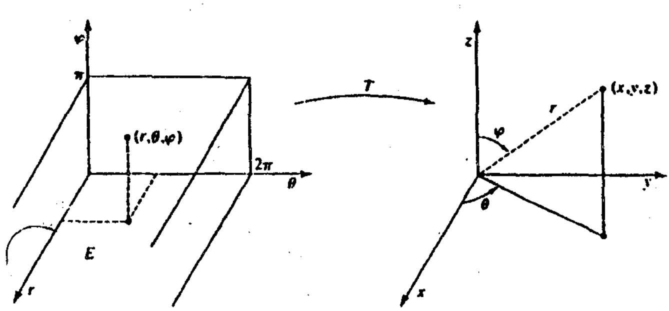
تبدیل $T: E \to R^۳$ با تعریف

$$T(r, \theta, \phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi),$$

یا به صورتی که معمولاً نوشته می‌شود:

$$x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi,$$

تبدیل مختصات کروی نامیده شده و در شکل ۹ نموده شده است.



شکل ۹

آ. نشان دهید که $\lambda(E \sim \overset{\circ}{E}) = \circ$.

ب. هرگاه $A = \{(x, \circ, z): z \in R \text{ و } x \geq \circ\}$، آنگاه نشان دهید A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $R^۳$ است که اندازهٔ لبگ (۳ بعدی) آن صفر است.

پ. نشان دهید $T: \overset{\circ}{E} \to R^۳ \sim A$ یک وابرریختی است که دترمینان ژاکوبی‌اش در

$J_T(r, \theta, \phi) = -r^2\sin\phi$ صدق می‌کند.

ت. نشان دهید هرگاه G یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ E با خاصیت $\lambda(G \sim \mathring{G}) = 0$ باشد، آنگاه $T(G)$ یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر R^3 است. به علاوه، نشان دهید هرگاه $f \in L_1(T(G))$، آنگاه

$$\int_{T(G)} f d\lambda = \iiint_G f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) r^2 \sin\phi\, dr d\theta d\phi$$

برقرار است.

مسائل دوره‌ای

۱. هرگاه $\sum$ یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X بوده و $\mu: \sum \to R^*$ یک اندازهٔ علامتدار باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\wedge_{\mu^+} \cap \wedge_{\mu^-} = \wedge_{|\mu|}.$$

۲. نشان دهید هر اندازهٔبورل متناهی بر یک فضای متری جدایی‌پذیر تام یک اندازهٔ بورل منتظم است. با استفاده از این نتیجه، برهان دیگری از این امر که اندازهٔ لبگ یک اندازهٔ بورل منتظم است را ارائه دهید.

۳. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل بر R^k بوده و ثابتی مانند $c > 0$ باشد به طوری که هرگاه مجموعهٔ بورل E در $\lambda(E) = c$ صدق کند، آنگاه $\mu(E) = c$. نشان دهید μ با λ یکی است؛ یعنی نشان دهید $\mu = \lambda$.

۴. قسمت (۳) قضیهٔ ۵.۲۸ را به صورت زیر تعمیم دهید: هرگاه μ و ν دو اندازهٔ بورل منتظم بر فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ هاسدورف بوده و یکی از آنها σ- متناهی باشد، آنگاه نشان دهید که $\mu \wedge \nu$ نیز یک اندازهٔ بورل منتظم است.

۵. فرض کنید $\sum$ یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X بوده و $\{\mu_n\}$ دنبالهٔ از هم جدایی از $M(\sum)$ باشد. هرگاه دنبالهٔ $\{\mu_n\}$ از اندازه‌های علامتدار کراندار ترتیبی باشد، آنگاه نشان دهید که $\lim \|\mu_n\| = 0$.

۶. فرض کنید $\sum$ یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X بوده و $\mu \in M(\sum)$. نشان دهید که مجموعهٔ اندازه‌های علامتدار

$$AC(\mu) = \{\nu \in M(\sum): \nu \ll \mu\}$$

یک ایده‌آل بستهٔ نرمی از $M(\sum)$ است.

۷. فرض کنید μ و ν دو اندازهٔ σ- متناهی بر σ- جبر $\sum$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X باشند به

طوری که $\nu \ll \mu$ و $\nu \neq 0$. نشان دهید که مجموعه‌ای مانند $E \in \sum$ و عدد صحیحی مانند n هست به طوری که

آ. $\nu(E) > 0$؛ و

ب. $A \in \sum$ و $A \subseteq E$ ایجاب می‌کنند که $(1/n)\, \mu(A) \le \nu(A) \le n\, \mu(A)$.

۸. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل متناهی بر $[1, \infty)$ باشد به طوری که

آ. $\mu \ll \lambda$؛ و

ب. به ازای هر $a \geq 1$ و هر زیرمجموعهٔ بورل B از $[1, \infty)$ که $aB = \{ab: b \in B\}$، داریم $\mu(B) = a\mu(aB)$.

هرگاه مشتق رادون ـ نیکودیم یک تابع پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که ثابتی چون $c \geq 0$ هست به طوری که به ازای هر $x \geq 1$، $[d\mu/d\lambda](x) = c/x^2$.

۹. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل متناهی بر $(0, \infty)$ باشد به طوری که

آ. $\mu \ll \lambda$؛ و

ب. به ازای هر $a > 0$ و هر زیرمجموعهٔ بورل B از $(0, \infty)$، $\mu(aB) = \mu(B)$.

هرگاه مشتق رادون ـ نیکودیم یک تابع پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که ثابتی مانند $c \geq 0$ هست به طوری که به ازای هر $x > 0$، $[d\mu/d\lambda](x) = c/x$.

۱۰. خواص زیر را برای تابع به طور پیوسته مشتقپذیر $f: [a, b] \to R$ به ثبوت رسانید.

آ. اندازهٔ علامتدار μ_f نسبت به اندازهٔ لبگ به طور مطلق پیوسته است و $d\mu_f/d\lambda = f'$ ت. هـ.

ب. هرگاه $g: [a, b] \to R$ انتگرالپذیر ریمان باشد، آنگاه gf' نیز انتگرالپذیر ریمان است و

$$\int g\, d\mu_f = \int_a^b g(x) f'(x)\, dx.$$

۱۱. تابع پیوستهٔ صعودی $f_n: R \to R$ را به ازای هر n به صورت زیر تعریف کنید:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0\text{،} \\ n(x-1)+1 & \text{اگر } 1-\frac{1}{n} < x < 1\text{،} \\ 0 & \text{اگر } x \leq 1-\frac{1}{n}\text{،} \end{cases}$$

هرگاه $f: R \to R$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که

آ. f به ازای هر n، μ_{f_n} ـ انتگرالپذیر است؛ و

ب. $\lim \int f\, d\mu_{f_n} = f(1)$.

کتابنامه

1. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis,* 2nd. Ed. Reading, MA: Addison - Wesley, 1974.
2. B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis.* San Fransisco: Holden-Day, 1964.
3. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* Heidelberg: Springer - Verlag, 1965.
4. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis,* transl. L. Boron. New York: F. Ungar, 1955.
5. W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1974.
6. G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications,* 2nd Ed. New York: Academic Press, 1980.
7. A. C. Zaanen, *Integration.* Amsterdam: North - Holland, 1967.

واژه‌نامه

فارسی به انگلیسی

اتم	ATOM
اجتماع	UNION
مجموعه‌ها	OF SETS
استقرا	INDUCTION
ریاضی	MATHEMATICAL
اشتراک	INTERSECTION
مجموعه‌ها	OF SETS
اصل	PRINCIPLE
خوش ترتیبی	WELL ORDERING
کرانداری	BOUNDEDNESS
اصل موضوع	AXIOM
پیوستگی	CONTINUITY
ترتیب	ORDER
تمامیت	COMPLETENESS
میدان	FIELD
اصلیت	CARDINALITY
پیوستار	OF CONTINUUM
افراز	PARTITION
واحد	OF UNITY
انتخاب	SELECTION
نقاط	OF POINTS
انتگرال	INTEGRAL
مجازی	IMPROPER
مکرر	ITERATED
نامعین	INDEFINITE
اندازه(ها)	MEASURE(S)
بیرونی (خارجی)	EXTERIOR
جمعی	ADDITIVE
خارجی	OUTER
شمارشی	COUNTING
علامتدار	SIGNED
متعامد	ORTHOGONAL
منفرد	SINGULAR
نمایشی	REPRESENTING
هم ارز	EQUIVALENT
ایده‌آل	IDEAL
مرتب	ORDER
اینفیمم	INFIMUM
بازه	INTERVAL
بخش	SECTION
برد	RANGE

بزرگترین	GREATEST
کران پایینی	LOWER BOUND
بست	CLOSURE
بی‌نهایت	INFINITY
پایایی	INVARIANCE
انتقال	TRANSLATION
پایه	BASE
برای توپولوژی	FOR TOPOLOGY
پوشش	COVER
اندازه‌پذیر	MEASURABLE
باز	OPEN
نقطه به نقطه متناهی	POINTWISE FINITE
پیوستار	CONTINUUM
پیوستگی	CONTINUITY
مطلق	ABSOLUTE
یکنواخت	UNIFORM
تابع	FUNCTION
اساساً کراندار	ESSENTIALLY BOUNDED
انتگرالپذیر	INTEGRABLE
اندازه‌پذیر	MEASURABLE
بالایی	UPPER
برو	ONTO
پله‌ای	STEP
پوشا	SURJECTIVE
پیوسته	CONTINUOUS
جمعی	ADDITIVE
چگالی	DENSITY
خطی	LINEAR
ساده	SIMPLE
صعودی	INCREASING
گاما	GAMMA
مشتقپذیر	DIFFERENTIABLE
مشخصه	CHARACTERISTIC
نزولی	DECREASING
یک به یک	ONE-TO-ONE
تابعی	FUNCTIONAL
مثبت	POSITIVE
تتمیم	COMPLETION
تجزیه	DECOMPOSITION
ترتیب	ORDER
جزئی	PARTIAL
تساوی	EQUALITY
تفاضل	DIFFERENCE
جبری	ALGEBRAIC
متقارن	SYMMETRIC
تغییر	VARIATION
کراندار	BOUNDED
کل	TOTAL
مثبت	POSITIVE
منفی	NEGATIVE
تقریب	APPROXIMATION
تقریباً همه جا	ALMOST EVERYWHERE
تمامیت	COMPLETENESS
تناظر	CORRESPONDENCE

یک به یک ONE-TO-ONE
توپولوژی TOPOLOGY
القایی INDUCED
غیر گسسته INDISCRETE
گسسته DISCRETE
نسبی RELATIVE
توسیع EXTENSION
اندازه OF MEASURE

جایگشت PERMUTATION
مجموعه OF SET
جبر ALGEBRA
تابعها OF FUNCTIONS
مجموعه‌ها OF SETS
جداسازی SEPARATION
نقاط OF POINTS
جفت PAIR
مرتب ORDERED

چندجمله‌ای POLYNOMIAL

حاصل ضرب PRODUCT
دکارتی CARTESIAN
حد LIMIT
حلقه RING

خاصیت PROPERTY
ارشمیدسی ARCHIMEDEAN

اشتراک متناهی FINITE INTERSECTION
توپولوژیک TOPOLOGICAL
زیرمجموعهٔ متناهی FINITE SUBSET
خانواده FAMILY
دوبدو از هم جدا PAIRWISE DISJOINT
مجموعه‌ها OF SETS

دترمینان DETERMINANT
ژاکوبی JACOBIAN
درون INTERIOR
دنباله SEQUENCE
ثابت CONSTANT
صعودی INCREASING
کراندار BOUNDED
مولد GENERATING
نزولی DECREASING
دوگان DUAL
دوم SECOND
مرتب ORDER
نرمی NORM

رابطه REALATION
ترتیبی ORDER
عضویت MEMBERSHIP
هم ارزی EQUIVALENCE
رده CLASS
هم ارزی EQIVALENCE

زنجیر	CHIAN
زیر پوشش	SUBCOVER
زیر جمعی	SUBADDITIVITY
زیر دنباله	SUBSEQUENCE
زیر شبکه	SUBLATTICE
زیر مجموعه	SUBSET
ژاکوبین	JACOBIAN
سری	SERIES
به‌طور مشروط همگرا	CONDITIONALLY CONVERGENT
به‌طور مطلق مجموع‌پذیر	ABSOLUTELY SUMMABLE
پایای تجدید آرایش	REARRANGEMENT INVARIANT
سلول	CELL
سوپرمم	SUPREMUM
اساسی	ESSENTIAL
شبکه	LATTICE
برداری	VECTOR
همریختی	HOMOMORPHISM
شرط	CONDITION
طول	LENGTH
عدد	NUMBER
جبری	ALGEBRAIC
حقیقی	REAL
طبیعی	NATURAL
عملگر	OPERATOR
بی‌کران	UNBONDED
پیوسته	CONTINUOUS
خطی	LINEAR
دیفرانسیل	DIFFERENTIAL
کراندار	BOUNDED
مثبت	POSITIVE
عنصر	ELEMENT
ماکزیمال	MAXIMAL
مثبت	POSITIVE
مجموعه	OF SETS
فاصله	DISTANCE
اقلیدسی	EUCLIDEAN
گسسته	DISCRETE
هم ارز	EQUIVALENT
یکنواخت	UNIFORM
فرض	HYPOTHESIS
پیوستار	CONTINUUM
فشرده	COMPACT
فضای	SPACE
فضا	SPACE
اقلیدسی	EUCLIDEAN
اندازه	MEASURE
انعکاسی	REFLEXIVE
با بعد متناهی	FINITE DIMENSIONAL
برداری	VECTOR
توپولوژیک	TOPOLOGICAL

فشرده	COMPACT
متری	METRIC
قانون	LAW
قدر مطلق	ABSOLUTE VALUE
قسمت	PART
مثبت	POSITIVE
منفی	NEGATIVE
قضیه	THEOREM
اساسی	FUNDAMENTAL
تجزیه	DECOMPOSITION
تقریب	APPROXIMATION
رسته‌ای	CATEGORY
نمایش	REPRESENTATION
همگرایی	CONVERGENCE
قطر	DIAMETER
قطعه	SEGMENT
قلمرو	DOMAIN
تابع	OF FUNCTION
کران	BOUND
اساسی	ESSENTIAL
بالایی	UPPER
پایینی	LOWER
گوی	BALL
باز	OPEN
لم	LEMMA
ماتریس	MATRIX
ژاکوبین	JACOBIAN
مقدماتی	ELEMENTARY
متر	METRIC
یکنواخت	UNIFORM
متمم	COMPLEMENT
مجموع	SUM
بالایی	UPPER
پایینی	LOWER
مجموعه	SET
اندازه‌پذیر	MEASURABLE
اندازه‌ناپذیر	NONMEASURABLE
باز	OPEN
بسته	CLOSED
پوچ	NULL
توانی	POWER
تهی	EMPTY
چگال	DENSE
خالی	VOID
شمارشپذیر	COUNTABLE
شمارش‌ناپذیر	UNCOUNTABLE
کراندار	BOUNDED
متناهی	FINITE
مشتق	DERIVED
منفی	NEGATIVE
نامتناهی	INFINITE

نحیف	MEAGER
محافظ	SUPPORT
فشرده	COMPACT
مختصات	COORDINATES
استوانه‌ای	CYLINDRICAL
قطبی	POLAR
کروی	SPHERICAL
مرز	BOUNDARY
مش	MESH
افراز	OF PARTITION
مشتق	DERIVATIVE
جزئی	PARTIAL
مشتقگیری	DIFFERENTIATION
مکعب	CUBE
نامساوی	INEQUALITY
مثلثی	TRIANGLE
نرم	NORM
اقلیدسی	EUCLIDEAN
سوپرمم	SUP
یکنواخت	UNIFORM
نشاننده	EMBEDDING
طبیعی	NATURAL
نقش	IMAGE
معکوس	INVERSE
نقطه	POINT
انباشتگی	ACCUMULATION
بست	CLOSURE

تنها	ISOLATED
ثابت	FIXED
چگالی	DENSITY
حدی	LIMIT
خوشه‌ای	CLUSTER
درونی	INTERIOR
مرزی	BOUNDARY
نگاشت	MAPPING
انقباض	CONTRACTION
باز	OPEN
بسته	CLOSED
زیر خطی	SUBLINEAR
نما	EXPONENT
نمایش	REPRESENTATION
نمودار (گراف)	GRAPH
نوسان	OSCILLATION
نیم حلقه	SEMIRING
وابرریختی	DIFFEOMORPHISM
هسته	KERNEL
همانریختی	HOMEOMORPHISM
همپیوستگی	EQUICONTINUITY
همسایگی	NEIGHBORHOOD
همگرایی	CONVERGENCE
ضعیف	WEAK
کراندار	BOUNDED
میانگینی	MEAN

نقطه به نقطه	POINTWISE
یکنواخت	UNIFORM

یکمتری	ISOMETRY
خطی	LINEAR
یکنوا	MONOTONE
تابع	FUNCTION
دنباله	SEQUENCE

واژه‌نامه

انگلیسی به فارسی

ABSOLUTE	مطلق
CONTINUITY	پیوستگی
VALUE	قدر
ABSOLUTELY	به طور مطلق
SUMMABLE	مجموعپذیر
ACCUMULATION	انباشتگی
POINT	نقطهٔ
ADDITIVE	جمعی
FUNCTION	تابع
ALGEBRA	جبر
OF FUNCTIONS	توابع
OF SETS	مجموعه‌ها
ALGEBRAIC	جبری
DIFFERENCE	تفاضل
NUMBER	عدد
ALMOST EVERYWHERE	تقریباً همه‌جا
APPROXIMATION	تقریب
ARCHIMEDEAN	ارشمیدسی
PROPERTY	خاصیت
ATOM	اتم
AXIOM	اصل موضوع
OF CHOICE	انتخاب
OF COMPLETENESS	تمامیت
OF CONTINUITY	پیوستگی

BALL	گوی
BASE	پایه
FOR TOPOLOGY	برای توپولوژی
BOUND	کران
ESSENTIAL	اساسی
LEAST UPPER	کوچکترین...بالایی
LOWER	پایینی
UPPER	بالایی
BOUNDARY	مرز
POINT	نقطهٔ
BOUNDED	کراندار
OPERATOR	عملگر
SEQUENCE	دنبالهٔ
SET	مجموعهٔ
VARIATION	با تغییر

CARDINAL	اصلی
NUMBER	عدد
CARDINALITY	اصلیت
OF CONTINUUM	پیوستار
CARTESIAN	دکارتی
PRODUCT	حاصل‌ضرب
CELL	سلول
CHAIN	زنجیر
CHANGE	تغییر
OF VARIABLE	متغیر
CHARACTERISTIC	مشخصه
FUNCTION	تابع
CLOSED	بسته
MAPPING	نگاشت
SET	مجموعهٔ
CLOSURE	بست
POINT	نقطهٔ
CLUSTER	خوشه‌ای
POINT	نقطهٔ
COMPACT	فشرده
METRIC SPACE	فضای متری
OPERATOR	عملگر
SET	مجموعهٔ
SUPPORT	محافظ
TOPOLOGICAL SPACE	فضای توپولوژیک
COMPLEMENT	متمم
COMPLETE	تام
METRIC SPACE	فضای متری
COMPLETENESS	تمامیت
AXIOM	اصل موضوع
COMPLETION	تتمیم
OF MEASURE	اندازه
CONJUGATE	مزدوج
EXPONENTS	نماهای
CONNECTED	همبند
METRIC SPACE	فضای متری
TOPOLOGICAL SPACE	فضای توپولوژیک
CONSTANT	ثابت
SEQUENCE	دنبالهٔ
CONTINUITY	پیوستگی
AXIOM	اصل موضوع
CONTINUOUS	پیوسته
FUNCTION	تابع
OPERATOR	عملگر
CONTINUUM	پیوستار
HYPOTHESIS	فرض
CONTRACTION	انقباض
MAPPING	نگاشت
CONVERGENCE	همگرایی
ALMOST EVERYWHERE	تقریباً همه‌جا
IN MEAN	در میانگین
IN MEASURE	در اندازه
IN NORM	در نرم
OF SEQUENCE	دنباله
OF SERIES	سری

چگالی	DENSITY	نقطه‌به‌نقطه	POINTWISE
نقطهٔ	POINT	یکنواخت	UNIFORM
مشتق	DERIVATIVE	ضعیف	WEAK
جزئی	PARTIAL	مختصات	COORDINATES
مشتق	DERIVED	استوانه‌ای	CYLINDRICAL
مجموعهٔ	SET	قطبی	POLAR
دترمینان	DETERMINANT	کروی	SPHERICAL
ژاکوبین	JACOBIAN	تناظر	CORRESPONDENCE
قطر	DIAMETER	یک به یک	ONE TO ONE
مجموعه	OF SET	شمارشپذیر	COUNTABLE
وابرریختی	DIFFEOMORPHISM	مجموعهٔ	SET
تفاضل	DIFFERENCE	شمارشپذیر	COUNTABLY
مجموعه‌ها	OF SETS	جمعی	ADDITIVE
مشتقپذیر	DIFFERENTIABLE	شمارش (شمارشی)	COUNTING
تابع	FUNCTION	اندازهٔ	MEASURE
دیفرانسیل	DIFFERENTIAL	پوشش	COVER
عملگر	OPERATOR	اندازه‌پذیر	MEASURABLE
مشتقگیری	DIFFERENTIATION	باز	OPEN
گسسته	DISCRETE	نقطه‌به‌نقطه متناهی	POINTWISE FINITE
فاصلهٔ	DISTANCE	استوانه‌ای	CYLINDRICAL
توپولوژی	TOPOLOGY	مختصات	COORDINATES
از هم جدا	DISJOINT		
مجموعه‌های	SETS	تجزیه	DECOMPOSITION
فاصله	DISTANCE	نزولی	DECREASING
گسسته	DISCRETE	تابع	FUNCTION
هم‌ارز	EQUIVALENT	دنبالهٔ	SEQUENCE
اقلیدسی	EUCLIDEAN	چگال	DENSE
یکنواخت	UNIFORM	مجموعهٔ	SET

DOMAIN	قلمرو
OF FUNCTION	تابع
DOMINATED	تسلطی
CONVERGENCE	همگرایی
DUAL	دوگان
NORM	نرمی
ORDER	ترتیبی
SECOND	دوم
ELEMENT	عنصر
OF SETS	مجموعه
ELEMENTARY	مقدماتی
MATRIX	ماتریس
EMPTY	تهی
SET	مجموعهٔ
EQUALITY	تساوی
OF SETS	مجموعه‌ها
EQUICONTINUITY	همپیوستگی
EQUIVALENCE	هم‌ارزی
CLASS	ردهٔ
RELATION	رابطهٔ
EQUIVALENT	هم‌ارز
DISTANCES	فاصله‌های
MEASURES	اندازه‌های
NORMS	نرمهای
SETS	مجموعه‌های
ESSENTIAL	اساسی
BOUND	کران
SUPREMUM	سوپرمم
EUCLIDEAN	اقلیدسی
DISTANCE	فاصلهٔ
NORM	نرم
SPACE	فضای
EXPONENT	نما
EXTENDED	وسعت یافته
REAL NUMBERS	اعداد حقیقی
EXTENSION	توسیع
OF MEASURE	اندازه
EXTERIOR	خارجی
MEASURE	اندازهٔ
FAMILY	خانواده
OF SETS	مجموعه‌ها
FIELD	میدان
AXIOMS	اصول موضوع
FINER	ظریفتر
PARTITION	افراز
FINITE	متناهی
DIMENSIONAL	با بعد
INTERSECTION	اشتراک
MEASURE	اندازهٔ
POINTWISE	نقطه‌به‌نقطه
SET	مجموعهٔ
SUBSET	زیرمجموعهٔ
FINITELY	به طور متناهی
ADDITIVE	جمعی

FIRST اول
  CATEGORY رستهٔ
FIXED ثابت
  POINT نقطهٔ
FUNCTION تابع (ی)
  ADDITIVE جمعی
  CHARACTERISTIC مشخصهٔ
  CONTINUOUS پیوسته
  CONTINUOUSLY DIFFERENTIABLE
  به‌طور پیوسته مشتقپذیر
  DECREASING نزولی
  DIFFRENTIABLE مشتقپذیر
  ESSENTIALLY BOUNDED اساساً کراندار
  GAMMA گاما
  INCREASING صعودی
  INTEGRABLE انتگرالپذیر
  INVERSE معکوس
  MEASURABLE اندازه‌پذیر
  MONOTONE یکنوا
  ONE TO ONE یک‌به‌یک
  ONTO برو
  OSCILLATION نوسان
  SIMPLE ساده
  SPACE فضای
  STEP پله‌ای
  SURJECTIVE پوشا
  UNIFORMLY CONTINUOUS
  به‌طور یکنواخت پیوسته
  UPPER بالایی
FUNCTIONAL تابعی
  CONTINUOUS پیوسته
  LINEAR خطی
  POSITIVE مثبت
FUNDAMENTAL اساسی

GAMMA گاما
  FUNCTION تابع
GENERATING مولد
  SEQUENCE دنبالهٔ
GRAPH گراف (نمودار)
GREATEST بزرگترین
  LOWER BOUND کران پایینی

HOMEOMORPHIC همانریخت
  METRIC SPACES فضاهای متری
  TOPOLOGICAL SPACES فضاهای توپولوژیک
HOMEOMORPHISM همانریختی
HOMOMORPHISM همریختی
  LATTICE شبکه‌ای

IDEAL ایده‌آل
IMAGE نقش
  OF SETS مجموعه
IMPROPER مجازی
  INTEGRAL انتگرال
  INCREASING صعودی

تابع	FUNCTION
نقش	IMAGE
تنها	ISOLATED
نقطهٔ	POINT
یکمتر	ISOMETRIC
فضاهای متری	METRIC SPACES
یکمتری	ISOMETRY
شبکه‌ای	LATTICE
خطی	LINEAR
یکریخت	ISOMORPHIC
شبکه‌های برداری	VECTOR LATTICES
مکرر	ITERATED
انتگرال	INTEGRAL
ژاکوبین	JACOBIAN
ماتریس	MATRIX
هسته	KERNEL
شبکه(ای)	LATTICE
همریختی	HOMOMORPHISM
یکمتری	ISOMETRY
نرم	NORM
عملگر	OPERATION
برداری	VECTOR
کوچکترین	LEAST
کران بالایی	UPPER BOUND
طول	LENGTH

تابع	FUNCTION
دنبالهٔ	SEQUENCE
نامعین	INDEFINITE
انتگرال	INTEGRAL
غیرگسسته	INDISCRETE
توپولوژی	TOPOLOGY
القایی	INDUCED
توپولوژی	TOPOLOGY
استقرا	INDUCTION
نامساوی	INEQUALITY
مثلثی	TRIANGLE
اینفیمم	INFIMUM
نامتناهی	INFINITE
عدد اصلی	CARDINAL
مجموعهٔ	SET
بی‌نهایت	INFINITY
انتگرالپذیر	INTEGRABLE
تابع	FUNCTION
انتگرال	INTEGRAL
مجازی	IMPROPER
نامعین	INDEFINITE
مکرر	ITERATED
عملگر	OPERATOR
درون (ی)	INTERIOR
نقطهٔ	POINT
اشتراک	INTERSECTION
بازه	INTERVAL
معکوس	INVERSE

اندازه‌پذیر MEASURABLE
پوشش COVER
تابع FUNCTION
مجموعهٔ SET
اندازه MEASURE
ABSOLUTELY CONTINUOUS
به‌طور مطلق پیوسته
شمارشی COUNTING
خارجی EXTERIOR
متناهی FINITE
به‌طور متناهی جمعی FINITELY ADDITIVE
غیر اتمی NONATOMIC
متعامد ORTHOGONAL
خارجی OUTER
حاصل‌ضربی PRODUCT
علامتدار SIGNED
منفرد SINGULAR
فضای SPACE
پایای انتقال TRANSLATION INVARIANT
عضویت MEMBERSHIP
رابطهٔ RELATION
مش MESH
افراز OF PARTITION
فضاهای متری METRIC SPACES
کراندار BOUNDED
فشرده COMPACT
تام COMPLETE
همبند CONNECTED

حد (ی) LIMIT
نقطهٔ POINT
خطی LINEAR
تابعی FUNCTIONAL
یکمتری ISOMETRY
عملگر OPERATOR
موضعاً LOCALLY
فضای...فشرده COMPACT SPACE
پایینی LOWER
کران BOUND
مجموع SUM
نگاشت MAPPING
بسته CLOSED
انقباض CONTRACTION
باز OPEN
زیرخطی SUBLINEAR
ریاضی MATHEMATICAL
استقرای INDUCTION
ماتریس MATRIX
مقدماتی ELEMENTARY
ژاکوبین JACOBIAN
ماکزیمال MAXIMAL
عنصر ELEMENT
نحیف MEAGER
مجموعهٔ SET
میانگین(ی) MEAN
همگرایی CONVERGENCE

عدد NUMBER
جبری ALGEBRAIC
اصلی CARDINAL
حقیقی وسعت یافته EXTENDED REAL
طبیعی NATURAL
حقیقی REAL

یک‌به‌یک ONE TO ONE
تابع FUNCTION
برو ONTO
تابع FUNCTION
باز OPEN
گوی BALL
پوشش COVER
نگاشت MAPPING
مجموعهٔ SET
عملگر OPERATOR
کراندار BOUNDED
فشرده COMPACT
پیوسته CONTINUOUS
دیفرانسیل DIFFERENTIAL
انتگرال INTEGRAL
خطی LINEAR
مثبت POSITIVE
بی‌کران UNBOUNDED
ترتیب(ی) ORDER
تمامیت COMPLETENESS
دوگان DUAL

یکمتر ISOMETRIC
جدایی‌پذیر SEPARABLE
کلاً کراندار TOTALLY BOUNDED
یکنوا MONOTONE
تابع FUNCTION
دنبالهٔ SEQUENCE

طبیعی NATURAL
نشانندهٔ EMBEDDING
عدد NUMBER
منفی NEGATIVE
قسمت PART
مجموعهٔ SET
تغییر VARIATION
همسایگی NEIGHBORHOOD
غیراتمی NONATOMIC
اندازه‌ناپذیر NONMEASURABLE
مجموعهٔ SET
نرم NORM
دوگان DUAL
اقلیدسی EUCLIDEAN
شبکه LATTICE
حاصل‌ضربی PRODUCT
یکنواخت UNIFORM
هیچ‌جا NOWHERE
چگال DENSE
پوچ NULL
مجموعهٔ SET

IDEAL	ایده‌آل
RELATION	رابطهٔ
SET	مجموعه
ORDERED	مرتب
PAIR	جفت
ORTHOGONAL	متعامد
MEASURES	اندازه‌های
OSCILLATION	نوسان
OUTER	خارجی
MEASURE	اندازهٔ
PAIRWISE	دوبدو
DISJOINT	ازهم‌جدا
PARTIAL	جزئی
ORDER	ترتیب
PARTIALLY ORDERED	جزئی مرتب
PARTITION	افراز
OF UNITY	واحد
PERMUTATION	جایگشت
POINT	نقطه
ACCUMULATION	جایگشت
BOUNDARY	مرزی
CLOSURE	بست
CLUSTER	خوشه‌ای
FIXED	ثابت
INTERIOR	درونی
ISOLATED	تنها
LIMIT	حدی

POINTWISE	نقطه‌به‌نقطه
BOUNDED	کراندار
CONVERGENCE	همگرایی
FINITE	متناهی
POLAR	قطبی
COORDINATES	مختصات
POSITIVE	مثبت
ELEMET	عنصر
FUNCTIONAL	تابعی
OPERATOR	عملگر
PART	قسمت
SET	مجموعهٔ
VARIATION	تغییر
POWER	توان (ی)
SET	مجموعهٔ
PRINCIPLE	اصل
PRODUCT	حاصل‌ضرب (ی)
CARTESIAN	دکارتی
MEASURE	اندازهٔ
NORM	نرم
SEMIRING	نیم‌حلقهٔ
QUOTIENT	خارج‌قسمت (ی)
TOPOLOGY	توپولوژی
RANGE	برد
OF FUNCTION	تابع
REAL	حقیقی

کراندار	BOUNDED
ثابت	CONSTANT
همگرا	CONVERGENT
نزولی	DECREASING
صعودی	INCREASING
یکنوا	MONOTONE
نقطه‌به‌نقطه همگرا	POINTWISE CONVERGENT
به‌طور ضعیف همگرا	WEAKLY CONVERGENT
سری	SERIES
به‌طور مطلق مجموع‌پذیر	ABSOLUTELY SUMMABLE
همگرا	CONVERGENT
پایای تجدید آرایش	REARANGEMENT INVARIANT
به‌طور غیرمشروط همگرا	UNCONDITIONALLY CONVERGENT
مجموعه(ها)	SET
کراندار	BOUNDED
بسته	CLOSED
فشرده	COMPACT
شمارش‌پذیر	COUNTABLE
چگال	DENSE
مشتق	DERIVED
تفاضلی	DIFFERENCE
تهی	EMPTY
تساوی	EQUALITY
همپیوسته	EQUICONTINUOUS

عدد	NUMBER
تجدید آرایش	REARRANGEMENT
انعکاسی	REFLEXIVE
فضای	SPACE
منتظم	REGULAR
رابطه	RELATION
تقریباً همه‌جا	ALMOST EVERYWHERE
هم‌ارزی	EQUIVALENCE
عضویت	MEMBERSHIP
ترتیبی	ORDER
نسبی	RELATIVE
توپولوژی	TOPOLOGY
نمایش (ی)	REPRESENTING
اندازهٔ	MEASURE
حلقه	RING
دوم	SECOND
دوگان	DUAL
بخش	SECTION
قطعه	SEGMENT
انتخاب	SELECTION
نقاط	OF POINTS
نیم‌حلقه	SEMIRING
جدایی‌پذیر	SEPARABLE
فضای متری	METRIC SPACE
جداسازی	SEPARATION
نقاط	OF POINTS
دنباله	SEQUENCE

FINITE	متناهی
FUNCTION	تابع
INFINITE	نامتناهی
INTERSECTION	اشتراک
MEAGER	نحیف
MEASURABLE	اندازه‌پذیر
NEGATIVE	منفی
NONMEASURABLE	اندازه‌ناپذیر
NOWHERE DENSE	هیچ‌جا چگال
NULL	پوچ
OPEN	باز
ORDER BOUNDED	مرتب کراندار
POINTWISE BOUNDED	نقطه‌به‌نقطه کراندار
POSITIVE	مثبت
UNCOUNTABLE	شمارش‌ناپذیر
UNION	اجتماع
VOID	خالی
SIGNED	علامتدار
MEASURE	اندازهٔ
SIMPLE	ساده
FUNCTION	تابع
SINGULAR	منفرد
MEASURE	اندازهٔ
SPACE	فضای
COMPACT	فشرده
CONNECTED	همبند
DUAL	دوگان
FINITE	متناهی
LOCALLY COMPACT	موضعاً فشرده
MEASURE	اندازه
METRIC	متری
NONATOMIC	غیراتمی
NORMAL	نرمال
NORMED	نرمدار
REFLEXIVE	انعکاسی
SEPARABLE	جدایی‌پذیر
TOPOLOGICAL	توپولوژیک
SPHERICAL	کروی
COORDINATES	مختصات
STEP	پله(ای)
FUNCTION	تابع
SUBADDITIVITY	زیرجمعی
SUBCOVER	زیرپوشش
SUBLATTICE	زیرشبکه
SUBLINEAR	زیر خطی
MAPPING	نگاشت
SUBSEQUENCE	زیردنباله
SUBSET	زیرمجموعه
SUM	مجموع
SUP NORM	نرم سوپرمم
SUPPORT	محافظ
COMPACT	فشرده
SUPREMUM	سوپرمم
ESSENTIAL	اساسی
SURJECTIVE	پوشا
FUNCTION	تابع

SYMMETRIC	متقارن
DIFFERENCE	تفاضل
TOPOLOGICAL	توپولوژیک
PROPERTY	خاصیت
SPACE	فضای
TOPOLOGY	توپولوژی
DISCRETE	گسسته
INDISCRETE	غیرگسسته
INDUCED	القایی
QUOTIENT	خارج‌قسمتی
RELATIVE	نسبی
TOTAL	کل
VARIATION	تغییر
TOTALLY	کلاً
BOUNDED SET	مجموعهٔ...کراندار
ORDERED SET	مجموعهٔ...مرتب
TRANSLATION	انتقال
INVARIANCE	پایایی
TRIANGLE	مثلث(ی)
INEQUALITY	نامساوی
UNBOUNDED	بی‌کران
OPERATOR	عملگر
UNCONDITIONALLY	به‌طور غیر مشروط
CONVERGENT	همگرا
UNCOUNTABLE	شمارش‌ناپذیر
SET	مجموعهٔ
UNIFORM	یکنواخت
BOUNDEDNESS	کرانداری
CONTINUITY	پیوستگی
CONVERGENCE	همگرایی
METRIC	متر
NORM	نرم
UNION	اجتماع
OF SETS	مجموعه‌ها
UPPER	بالایی
BOUND	کران
FUNCTION	تابع
SUM	مجموع
VARIATION	تغییر
BOUNDED	کراندار
FUNCTION	تابع
NEGATIVE	منفی
POSITIVE	مثبت
TOTAL	کل
VECTOR	بردار(ی)
LATTICE	شبکهٔ
SPACE	فضای
SUBLATTICE	زیرشبکهٔ
VOID	خالی
SET	مجموعهٔ
WEAK	ضعیف
CONVERGENCE	همگرایی

WELL ORDERING خوش‌ترتیبی

PRINCIPLE اصل

x-SECTION x ـ مقطع

y-SECTION y ـ مقطع

فهرست راهنما