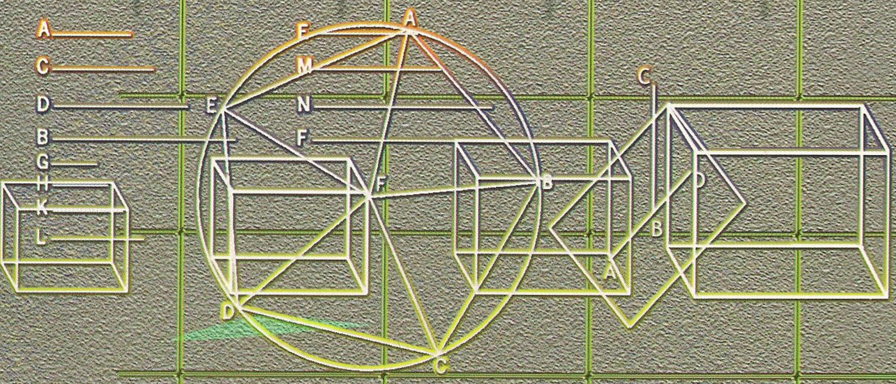
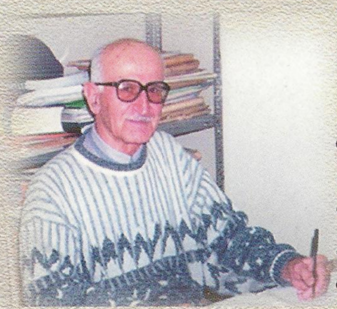
اصول اقلیدس

سیزده مقاله

تامس ال. هیث

ترجمهٔ محمد هادی شفیعیها





دکتر محمدهادی شفیعیها در اواخر سال ۱۲۹۸ خورشیدی در قزوین به دنیا آمد. تحصیلات مکتب‌خانه‌یی، دبستانی و دبیرستانی را در زادگاه خود به اتمام رسانید و در سال ۱۳۱۸ به دریافت دیپلم ریاضی نایل شد. در همان سال در دانشسرای عالی تهران (رشتهٔ ریاضیات) ثبت‌نام کرد و پس از دریافت لیسانس، برای تدریس در دبیرستانها، به اهواز اعزام شد (سال ۱۳۲۱). پس از مدتی تدریس در مسجدسلیمان و مدتی سرپرستی آموزش و پرورش قم در سال ۱۳۲۶ به تهران منتقل شد.

او در سال ۱۳۳۴ به دانشکده فنی دانشگاه تهران منتقل و به تدریس پرداخت. در سال ۱۳۳۹ برای ادامه تحصیل به دانشگاه کمبریج انگلستان اعزام شد و پس از مراجعت، در دانشکده فنی دانشگاه تهران به تدریس پرداخت. مدتی نیز معاون آموزشی و پژوهشی آن دانشکده بود.

دکتر شفیعیها در فروردین ماه ۱۳۶۱، سال تعطیلی دانشگاهها (انقلاب فرهنگی)، به تقاضای خود بازنشسته شد و از آن تاریخ تا یک ماه پیش از درگذشت، در مرکز نشر دانشگاهی در مقام ویراستاری و سرپرستی بخش ریاضی مشغول به کار بود. نامبرده متجاوز از ۵۰ جلد کتابهای ریاضی دانشگاهی را که توسط استادان دانشگاههای کشور تألیف یا ترجمه شده است، ویرایش کرده است.

او با زبانهای فرانسوی، انگلیسی، روسی و اندکی آلمانی آشنایی داشت. علایق و سرگرمی‌های او کوهنوردی، اسکی شنا و موسیقی بود. در کوهنوردی قسمت اعظم کوههای ایران را مانند: دماوند، دنا، سهند و سبلان، تخت سلیمان و زردکوه بختیاری را زیر پا گذاشته بود. شناگری ورزیده بود و در عبور از کانال مانش با شنا، شرکت کرده بود. از وی بیش از ۱۷ ترجمه و تألیف به‌جا مانده است.

این کتاب از مجموعهٔ کتابهایی است که به مناسبت «سال جهانی ریاضیات» (سال ۲۰۰۰ میلادی) و به منظور ترویج دانش ریاضی در کشور از سوی «ستاد ملی سال جهانی ریاضیات در ایران» برای ترجمه در نظر گرفته شد و با وجود دشواری و نامتعارف بودن متن، شادروان دکتر محمدهادی شفیعیها، از مترجمان برجستهٔ کشور، ترجمهٔ آن را به‌عهده گرفتند که حاصل زحمات ارزشمند او، به همت دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاهی، اینک پیش روی شماست.

«شورای خانه‌های ریاضیات ایران» که مسئولیت پیگیری امور به‌جا مانده از فعالیتهای ستاد ملی سال جهانی ریاضیات را در ایران به‌عهده دارد، امیدوار است که این اثر جاودانهٔ اقلیدس، که مطلقاً پرتیراژترین اثر علمی در جهان است، مورد توجه علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات، هندسه و آثار نفیس قرار گیرد و به‌ویژه فتح بابی برای انتشار آثار مشابه زبان ملی ما باشد.

شورای خانه‌های ریاضیات ایران

اصول اقلیدس

سیزده مقاله

تامس ال. هیث

ترجمهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

زندگینامه

اقلیدس، شکوفایی، حدود ۳۰۰ ق. م.

گفته‌اند که اقلیدس از نخستین شاگردانِ افلاطون (۴۲۷ـ۳۴۷ق.م.) از همه کوچکتر، ولی از ارشمیدس (ح.۲۸۷ـ۲۱۲ق.م.) بزرگتر بوده است. با این گفته دوران شکوفایی وی حدود ۳۰۰ ق.م. قرار می‌گیرد. وی تحصیلات ریاضی اوّلیّهٔ خود را احتمالاً در آتن، از شاگردان افلاطون کسب کرده است، زیرا بیشتر هندسه‌دانان و ریاضیدانانی که با آنان حشرونشر داشته از آن مکتب بوده‌اند. به گفتهٔ پروکلوس، نوافلاطونی سدهٔ پنجم، اقلیدس از نحلهٔ افلاطون بوده و با «آن فلسفه همدلی داشته است». ولی عقیدهٔ او ممکن است فقط بر این نظرش مبتنی باشد که اقلیدس بحث در پنج جسم منتظم («افلاطونی») را در مقالهٔ XIII «در پایان تمامیِ اصول» خود آورده است.

تنها امر مسلّم دیگر دربارهٔ اقلیدس این است که او در دوران فرمانروایی بطلمیوس I، که از ۳۰۶ تا ۲۸۳ ق.م. سلطنت می‌کرده، مکتبی را در اسکندریّه پایه‌گذاری و در آنجا تدریس کرده است. گواهِ اقامت وی در این محل نقلِ قولی است از پاپوس (سدهٔ چهارم ب.م.) حاکی از اینکه آپولونیوس «مدتی دراز با شاگردان اقلیدس در اسکندریّه به‌سر برده، و به همین سبب چنین سیرتِ علميِ تفکّر را آموخته است.» به گفتهٔ پروکلوس، این، بطلمیوس I بوده که از اقلیدس پرسیده است که آیا راهی کوتاهتر از راه اصول برای [آموختن] هندسه وجود ندارد؟ و این پاسخ را دریافت کرده است که: «راهی شاهانه به هندسه وجود ندارد»[1]. داستان دیگری از اقلیدس که از دوران کهن به ما رسیده مربوط به پاسخِ وی به شاگردی است که در پایان نخستین درسش در هندسه می‌پرسد که از فرا گرفتن این چیزها چه عایدش می‌شود، که بر اثر آن اقلیدس غلامش را فرا می‌خواند و می‌گوید «سکّه‌ای به او بده زیرا او باید از آنچه که فرا می‌گیرد عایدی‌ای ببرد».

۱. زیرا اقلیدس از راه شاهانهٔ روش تحلیلی (هندسهٔ تحلیلی) آگاه نبوده است.ـم.

از اظهارنظر پاپوس دربارهٔ اقلیدس این خصوصیّت اخلاقی وی آشکار می‌شود که «انصافِ بیش از اندازه و محبّت استثنایی نسبت به همهٔ کسانی داشته که در پیشبرد علم ریاضی، ولو اندک، تلاش کرده‌اند.» ولی سیاق عبارت وی نشان می‌دهد که پاپوس ظاهراً گزارش متداول رسمی از خصوصیّات اقلیدس نمی‌دهد، بلکه ضمن توضیح از پیشرفته‌تر بودن تحقیقات خود از اقلیدس یاد می‌کند که نتوانسته است در بررسی یکی از مسائل قطع مخروطی همپای او باشد.

کار معروف و مهم اقلیدس، ۱۳ مقالهٔ اصول، احتمالاً بلافاصله پس از انتشار به صورت یک اثر کلاسیک در آمده است. از زمان ارشمیدس این مقاله‌ها پیوسته مورد مراجعه بوده‌اند و به عنوان یک کتاب درسیِ اساسی مورد استفاده قرار می‌گرفته‌اند. در دوران کهن این نکته مورد قبول همگان واقع شده بود که اقلیدس همهٔ کارهای پیشینیان خود را گردآوری کرده است. به گفتهٔ پروکلوس بسیاری از قضیّه‌های ائودوکسوس و تئایتتوس را تکمیل کرده و برای آنهایی که پیشینیانش آنها را فقط به طور سطحی ثابت کرده بودند، اثباتِ قابل قبول و بی‌چون و چرایی آورده است. آثار موجود دیگرِ وی شامل معطیات (= داده‌ها) برای استفاده در حلّ مسائل از راه تحلیل هندسی، در تقسیم (شکلها)، نورشناخت، و نمودها (=عربی، الظواهر)، و رساله‌ای اندر هندسهٔ کرات برای استفاده در نجوم بوده است. اصول موسیقی گمشده‌اش ممکن است پایه‌ای برای تقسیم درجات الحان موجود دربارهٔ آموزهٔ فیثاغورسی موسیقی بوده است. از آثار هندسی گم‌شده‌اش همه، به استثنای یکی، در زمینهٔ هندسهٔ عالی هستند.

از آنجا که یونانیان بعدی چیزی از زندگی اقلیدس نمی‌دانستند مترجمان سده‌های میانه و گردآورندگان اصول هریک به سلیقهٔ خود در این بابِ اظهار نظرکرده‌اند. به علّت اشتباه با اقلئیدس، فیلسوفِ مگاراییِ معاصرِ افلاطون، او را معمولاً «مگارنسیس» نامیده‌اند. دانشمندان عربی‌نویس چنین دریافته بودند که نام اقلیدس، که آن را ترکیبی از $ucli$ (کلید) و dis (اندازه) می‌گرفتند، «کلید هندسه» را نشان می‌داده است. اینان مدّعی بودند که فلاسفهٔ یونان بر سردرِ مدرسه‌های خود این نوشتهٔ معروف را نقل می‌کردند که: «کسی که اصول اقلیدس را فرا نگرفته حقِ ورود ندارد.» و بدین ترتیب نوشتهٔ سردرِ آکادمی افلاطون را به سردرِ همهٔ آموزشگاهها نسبت می‌دادند و اصول را مرادف با هندسه می‌گرفتند.

مقالهٔ اول

تعاریف

۱. نقطه آن است که جزء ندارد.
۲. خط طولی است بدون عرض.
۳. هر خط به دو نقطه محدود است.
۴. خط راست خطی است که به گونه‌ای هموار بر نقطه‌های خودش قرار دارد.
۵. رویه آن است که فقط طول و عرض دارد.
۶. حدود هر رویه خطها هستند.
۷. رویهٔ مستوی رویه‌ای است که به گونه‌ای هموار بر خطهای راست خود قرار دارد.
۸. یک زاویهٔ مستوی میل دو خطّ واقع در یک صفحه است نسبت به هم، که یکدیگر را می‌برند و بر یک خط راست قرار ندارند.
۹. و وقتی خطهایی که زاویه را در بر دارند خطهای راست باشند زاویه را راست‌خط می‌نامند.
۱۰. وقتی خط راستی بر خط راستی فرود آید و دو زاویهٔ مجاور مساوی با هم بسازد هریک از آن زاویه‌ها یک قائمه است و خط راست فرود آمده بر خطّ اوّل عمود بر آن خط نامیده می‌شود.
۱۱. زاویهٔ منفرجه (باز) زاویه‌ای است بزرگتر از یک زاویهٔ قائمه.

۱۲. زاویهٔ حاده (تند) زاویه‌ای است کوچکتر از یک زاویهٔ قائمه.

۱۳. مرز یک چیز حدّ آن چیز است.

۱۴. شکل آن است که از یک یا چند مرز حادث شده است.

۱۵. دایره شکلی است مستوی، حادث از یک خط که همهٔ خطهای راستی که از یکی از نقطه‌های درون این شکل بر آن فرود می‌آیند با هم مساوی‌اند.

۱۶. و این نقطه مرکز دایره نامیده می‌شود.

۱۷. قطر دایره خط راستی است که از مرکز آن رسم و از هر دو سو به محیط دایره ختم می‌شود. و چنین خط راستی دایره را نیز نصف می‌کند.

۱۸. نیم‌دایره شکلی است حاصل از قطر و قسمتی از محیط که توسّط قطر جدا می‌شود. مرکز نیم‌دایره همان مرکز دایره است.

۱۹. شکلهای راست خط شکلهایی هستند که از خطهای راست حادث شده‌اند، شکلهای سه‌ضلعی از سه خط راست، و چهارضلعی از چهار خط راست، و چندضلعی از بیش از چهار خط راست.

۲۰. از شکلهای سه‌ضلعی، یا مثلث، مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه ضلع آن با هم مساوی‌اند، مثلث متساوی‌الساقین مثلثی است که فقط دو ضلع آن با هم مساوی هستند، و مثلث مختلف‌الاضلاع مثلثی است که هر سه ضلع آن با هم نامساوی باشند.

۲۱. باز، از شکلهای سه‌ضلعی، مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که یک زاویهٔ قائمه دارد، مثلث منفرج‌الزاویه مثلثی است که یک زاویهٔ منفرجه دارد، مثلث حادالزوایا مثلثی است که هر سه زاویه‌اش حادّه‌اند.

۲۲. از شکلهای چهارضلعی، مربع شکلی است که هم اضلاعش متساوی‌اند و هم چهار زاویه‌اش قائمه. مستطیل یک چهارضلعی است با زاویه‌های قائمه ولی اضلاع آن با هم مساوی نیستند؛ لوزی یک چهارضلعی است با چهار ضلع متساوی ولی زاویه‌هایش قائمه نیستند؛ متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که در آن ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو با هم، ولی نه متساوی‌الاضلاع است، و نه زاویه‌های قائمه دارد. چهارضلعیهایی جز اینها را چهارضلعیهای نامنتظم می‌نامند.

۲۳. خطهای راست متوازی خطهای راستی هستند در یک صفحه که اگر از دو سو تا بینهایت امتداد داده شوند یکدیگر را در هیچ طرف نمی‌برند.

اصلهای موضوع

حکمهای زیر را مسلّم می‌گیریم:

۱. هر دو نقطه را می‌توان با یک خطّ راست به هم وصل کرد.

۲. هر خط راست متناهی را می‌توان پیوسته به صورت خط راست امتداد داد.

۳. به هر مرکز و با هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد.

۴. همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵. اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و مجموع دو زاویهٔ درونی که در یک طرف خود تشکیل می‌دهد از دو قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر بینهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، می‌برند.

اصلهای بدیهی (بدیهیّات)

۱. چیزهای مساوی با یک چیز خود نیز با هم مساوی‌اند.

۲. اگر به چیزهای متساوی چیزهای متساوی افزوده شوند نتیجه‌ها با هم مساوی‌اند.

۳. اگر از چیزهای متساوی چیزهای متساوی کم شده باشند باقیمانده‌ها با هم مساوی‌اند.

۴. چیزهای قابل انطباق بر هم با هم مساوی‌اند.

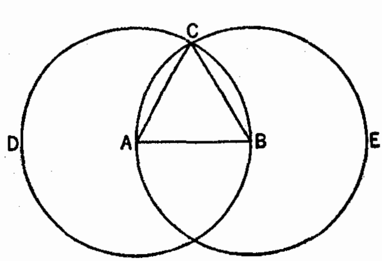
۵. کلّ بزرگتر از جزء است.

مقالهٔ I. قضیه‌ها

قضیهٔ I

مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر یک خط راست متناهی مفروض.

فرض می‌کنیم AB خط راستی متناهی باشد. پس مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر خط راست AB.



فرض می‌کنیم دایرهٔ BCD به مرکز A و شعاع AB رسم شده است؛ [اصـ.م.۳]
باز فرض می‌کنیم به مرکز B و شعاع BA دایرهٔ ACE رسم شده است؛ [اصـ.م.۳]
و C، نقطهٔ تلاقی دو دایره، به A و B وصل شده است. [اصـ.م.۱]

حال چون A مرکز دایرهٔ CDB است، AC و AB با هم برابرند. [تع.۱۵]

باز چون B مرکز دایرهٔ CAE است، BC با BA برابر است. [تع.۱۵]

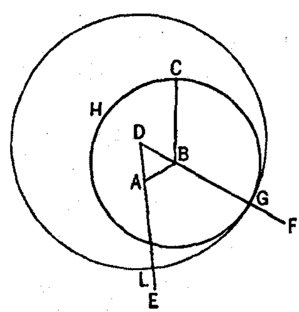
اما ثابت شده بود که CA هم با AB برابر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست CA و CB با AB برابر است. و چیزهای مساوی با یک چیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین CA هم با CB مساوی است. [اص. ب. ۱] بنابراین سه خط راست CA، AB، و BC با یکدیگر مساوی‌اند. لذا ABC مثلثی است متساوی‌الاضلاع که بر خط راست متناهی AB بنا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

مطلوب رسم خط راستی است از یک نقطهٔ مفروض، مساوی با خط راستی مفروض که آن نقطه یک سرِ آن باشد.

فرض می‌کنیم A نقطهٔ مفروض باشد و BC خطّ راست مفروض.



پس مطلوب رسم خط راستی است از نقطهٔ A مساوی با خط راست مفروضِ BC که A یک سَرِ آن باشد.

فرض می‌کنیم نقطهٔ A با خط راست AB به نقطهٔ B وصل شده است؛ [اص.م.۱]

و فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الاضلاع DAB رسم شده است. [I.۱]

فرض می‌کنیم AE و BF امتدادهای DA و DB باشند؛ [اص.م.۲]

به مرکز B و شعاع BC دایرهٔ CGH را رسم می‌کنیم؛ [اص.م.۳]

و باز به مرکز D و شعاع DG دایرهٔ GKL را رسم می‌کنیم. [اص.م.۳]

در این صورت چون نقطهٔ B مرکز دایرهٔ CGH است، BC با BG مساوی است.

باز چون D مرکز دایرهٔ GKL است DG با DL مساوی است. و از آنجا که DA با DB مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ AL با باقیماندهٔ BG مساوی است. [اص.ب.۳]

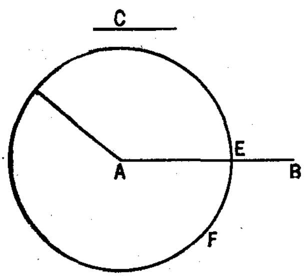
اما BC با BG مساوی بود؛ بنابراین هریک از خطهای راست AL و BC با BG مساوی می‌شود. و چیزهای مساوی با یک چیز نیز با هم مساوی‌اند؛ [اص.ب.۱]

بنابراین AL نیز با BC مساوی است. پس، از نقطهٔ مفروض A خط راست AL مساوی با خط راست مفروض BC رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

دو خطّ راست نامساوی داده شده‌اند. مطلوب جدا کردن خط راستی است مساوی با خطّ راست کوچکتر از خطّ راست بزرگتر.



فرض می‌کنیم AB و C دو خط راست نامساوی باشند و AB بزرگتر از C باشد. پس مطلوب جدا کردن طولی است از خط بزرگتر AB مساوی با خط کوچکتر C.

فرض می‌کنیم خط راست AD از نقطهٔ A مساوی با خط راست C کشیده شده است؛ [۲.I]

و به مرکز A به شعاع AD دایرهٔ DEF رسم شده است. [اص.م.۳]

حال، چون نقطهٔ A مرکز دایرهٔ DEF است، AE با AD مساوی است. [تع.۱۵]

اما C نیز با AD مساوی است.

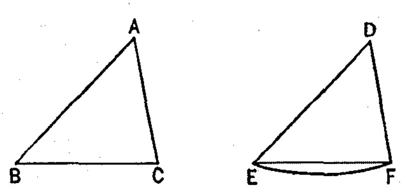
بنابراین هریک از خطهای راست AE و C با AD مساوی است؛ لذا AE نیز با C مساوی است. [اص.ب.۱]

بنابراین در دو خط راست مفروض AB و C از خط راست بزرگتر AB طول AE مساوی با خط کوچکتر C جدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر مساوی باشند ضلعهای سوم آنها نیز با هم مساوی‌اند، در نتیجه دو مثلث متساوی و زاویه‌های دیگر آنها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نیز نظیر به نظیر با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلثی باشند که اضلاع AB و AC از یکی به ترتیب با ضلعهای DE و DF از دیگری مساوی و زاویه‌های BAC و EDF نیز با هم مساوی باشند.

می‌گوییم که ضلع BC هم با ضلع EF و در نتیجه مثلث ABC با مثلث DEF مساوی است و زاویه‌های دیگر آنها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متساوی هم‌نظیر به نظیر با هم مساوی‌اند، یعنی زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF و زاویهٔ ACB با زاویهٔ DFE.

زیرا اگر مثلث ABC را بر مثلث DEF چنان بنهیم، که A بر D و AB بر DE قرار گیرد، نقطهٔ B نیز به علت تساوی AB و DE بر E منطبق خواهد شد.

باز وقتی AB بر DE منطبق شد، خط راست AC نیز، به علّت تساوی زاویه‌های BAC و EDF، بر DF منطبق می‌شود، و لذا C نیز بر F منطبق خواهد شد زیرا AC با DF مساوی است. اما B هم که بر E منطبق بود؛ بنابراین ضلع BC هم بر ضلع EF منطبق خواهد شد. [زیرا وقتی B بر E منطبق بود و C بر F، اگر قاعدهٔ BC بر قاعدهٔ EF منطبق نشود، این دو خط راست یک فضا را محصور خواهند کرد: که غیرممکن است. بنابراین BC بر EF منطبق و با آن مساوی خواهد شد]. [اص.ب.۴]

پس تمامی مثلث ABC بر تمامی مثلث DEF منطبق، و با آن مساوی خواهد شد. و بقیهٔ زاویه‌ها نیز بر بقیهٔ زاویه‌ها منطبق و با آنها مساوی خواهند شد، زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF، و زاویهٔ ACB با زاویهٔ DFE.

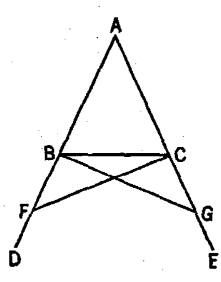
آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم.

قضیهٔ ۵

در مثلثهای متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده با هم مساوی‌اند، و اگر ساقهای متساوی امتداد داده شوند زاویه‌های زیر قاعده‌ها هم با هم مساوی‌اند.

فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الساقین با ساقهای AB و AC باشد؛ و خطهای راست BD و CE به ترتیب امتدادهای AB و AC باشند. [اص.م.۲]

می‌گوییم که زاویهٔ ABC با زاویهٔ ACB مساوی است، و زاویهٔ CBD با زاویهٔ BCE.



نقطهٔ دلخواه F را بر BD می‌گیریم؛ و بر AE که بزرگتر است AG را مساوی با خط کوچکتر AF جدا و F را. [I.۳] به C وصل می‌کنیم و G را به B. [اص.م.I]

در این صورت چون AF با AG مساوی است و AB با AC، و ضلعهای FA و AC نیز به ترتیب با ضلعهای GA و AB مساوی‌اند؛ لذا دو مثلث AFC و AGB، که در زاویهٔ FAG مشترک‌اند، با هم مساوی می‌شوند، و لذا قاعدهٔ FC با قاعدهٔ GB مساوی می‌شود. از تساوی همین دو مثلث زوایای متناظر آنها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متساوی نیز با هم مساوی خواهند شد، یعنی زاویهٔ ACF با زاویهٔ ABG و زاویهٔ AFC با زاویهٔ AGB. [I.۴]

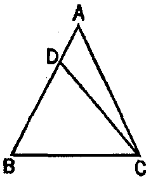
و چون تمام AF با تمام AG مساوی است، و در آنها AB مساوی است با AC، پس بقیهٔ BF با بقیهٔ CG مساوی می‌شود.

اما ثابت شده بود که FC هم با GB مساوی است؛ بنابراین دو ضلع BF و FC به ترتیب با دو ضلع CG و GB مساوی هستند؛ و زاویهٔ BFC هم با زاویهٔ CGB مساوی است، بنابراین مثلث BFC نیز با مثلث CGB مساوی خواهد شد، و بقیهٔ زاویه‌ها به ترتیب (روبه‌رو به ضلعهای متساوی) با هم مساوی می‌شوند، یعنی زاویهٔ FBC با زاویهٔ GCB، و زاویهٔ BCF با زاویهٔ CBG. از این‌رو، چون تساوی تمامی زاویهٔ ABG با تمامی زاویهٔ ACF ثابت شده بود، و در این زاویه‌ها زاویهٔ CBG با زاویهٔ BCF مساوی بود، لذا زاویهٔ ABC با زاویهٔ ACB مساوی می‌شود؛ و این دو زاویه زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلث ABC هستند. اما تساوی زاویهٔ FBC هم با زاویهٔ GCB ثابت شده بود که زاویه‌های زیر قاعده هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر در مثلثی دو زاویه با هم مساوی باشند اضلاع روبه‌رو به آنها نیز با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی است که در آن زاویهٔ ABC با زاویهٔ ACB مساوی است؛ می‌گوییم که ضلع AB نیز با ضلع AC مساوی است. زیرا اگر AB با AC مساوی نباشد، یکی از آنها بزرگتر از دیگری است.

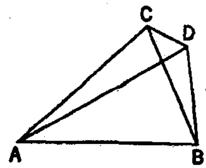
فرض می‌کنیم AB ضلع بزرگتر باشد؛ از AB طول DB را مساوی با ضلع کوچکتر AC جدا و D را به C وصل می‌کنیم. در این صورت در دو مثلث DBC و ACB چون DB با AC مساوی و CB مشترک است؛ و DB و BC به ترتیب با AC و BC مساوی‌اند و زاویهٔ DBC با زاویهٔ ACB مساوی است؛ بنابراین DC با AB و در نتیجه مثلث DBC با مثلث ACB مساوی می‌شود، یعنی مثلثِ کوچکتر با مثلثِ بزرگتر مساوی می‌شود: که نامعقول است. پس AB نامساوی با AC نیست؛ یعنی با آن مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

از دو سرِ خطّ راستی مفروض و در یک طرف آن، دو خطِ راست رسم شده‌اند که یکدیگر را در نقطه‌ای بریده‌اند. از دو سرِ همان خط راست (و در همان طرف) نمی‌توان دو خط راست دیگر

چنان رسم کرد که یکدیگر را در نقطهٔ دیگری ببرند و هریک با خط راست مرسومِ قبلیِ از همان سر مساوی باشد.



زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم دو خط راست AC و CB از دو سر خط راستِ AB رسم شده و یکدیگر را در نقطهٔ C بریده باشند، و فرض می‌کنیم دو خط راست دیگر AD و DB از دو سر همان خط راست AB و در همان طرف رسم شده‌اند و یکدیگر را در نقطهٔ دیگرِ D بریده‌اند و هر یک با خط راست مرسوم قبلی از همان سر مساوی‌اند، یعنی CA و DA که از یک سر A رسم شده‌اند با هم مساوی‌اند و CB و DB که از یک سر B رسم شده‌اند با هم؛ حال C را به D وصل می‌کنیم.

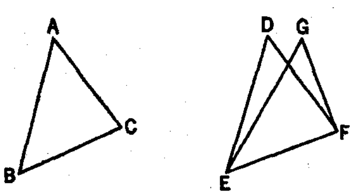
چون AC مساوی AD است، زاویهٔ ACD هم با زاویهٔ ADC مساوی است؛ [۵.I]

بنابراین زاویهٔ ADC از زاویهٔ DCB بزرگتر است؛ و لذا زاویهٔ CDB خیلی بزرگتر از زاویهٔ DCB است. باز چون CB با DB مساوی است؛ زاویهٔ CDB نیز با زاویهٔ DCB مساوی است. اما ثابت شده بود که CDB خیلی بزرگتر از DCB است: که غیرممکن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر دو ضلع از مثلثی به ترتیب با دو ضلع از مثلثی دیگر مساوی و قاعده‌های آنها هم با هم مساوی باشند، زاویه‌های بین آن دو ضلعِ متساوی هم با یکدیگر مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلثی باشند که دو ضلع AB و AC از اولی به ترتیب با دو ضلعِ DE و DF از دومی مساوی باشند؛ گیریم که قاعدهٔ BC با قاعدهٔ EF مساوی باشد؛ می‌گوییم که زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ EDF مساوی است.

زیرا اگر مثلث ABC را بر مثلث DEF بنهیم و نقطهٔ B را بر نقطهٔ E بگذاریم و خط راست BC را بر EF قرار دهیم، نقطهٔ C نیز بر F منطبق خواهد شد، زیرا BC مساوی است با EF.

در این صورت، وقتی BC بر EF منطبق شد، BA و AC نیز بر ED و DF منطبق خواهند شد. زیرا اگر قاعدهٔ BC بر قاعدهٔ EF منطبق شود و ضلعهای BA و AC بر ED و DF منطبق نشوند و به صورت EG و GF قرار گیرند، آنگاه از دو سر خط راستِ EF و در یک طرف آن خطهای راستِ متساویِ ED و EG و خطهای راست متساویِ DF و GF رسم

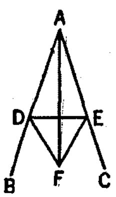
شده‌اند که یکدیگر را در دو نقطهٔ متمایز D و G بریده‌اند: که غیرممکن است. [۷.I]

بنابراین ممکن نیست که اگر قاعدهٔ BC بر قاعدهٔ EF نهاده شود، ضلعهای BA و AC بر ضلعهای ED و DF منطبق نشوند؛ لذا بر هم منطبق و با هم مساوی می‌شوند، و زاویهٔ BAC نیز بر زاویهٔ EDF منطبق و با آن مساوی می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

مطلوب نصف کردن یک زاویهٔ راست‌خطِ مفروض است.



فرض می‌کنیم زاویهٔ راست‌خط BAC داده شده باشد. پس مطلوب نصف کردن آن است. نقطهٔ دلخواه D را بر AB می‌گیریم و بر AC طول AE را مساوی با AD جدا می‌کنیم؛ [۳.I]

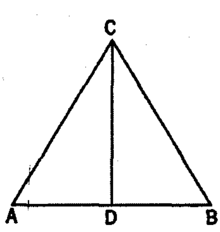
DE را وصل می‌کنیم و مثلث متساوی‌الاضلاع DEF را بر DE بنا و AF را وصل می‌کنیم. می‌گوییم که AF زاویهٔ BAC را نصف کرده است. زیرا در دو مثلثِ DAF و EAF، DA و AF به ترتیب با EA و AF مساوی‌اند و قاعده‌های DF و EF نیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین زاویهٔ DAF با زاویهٔ EAF مساوی است. [۸.I]

پس زاویهٔ راست‌خط BAC به وسیلهٔ خط راست AF نصف شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

مطلوب نصف کردن یک خط راست متناهیِ مفروض است.



فرض می‌کنیم AB خط راست متناهی مفروض باشد.

پس مطلوب نصف کردن آن است.

فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بر آن بنا شده، [۱.I]

وزاویهٔ ACB توسط خط CD نصف‌شده‌باشد؛ [۹.I]

می‌گوییم که خط راست AB در نقطهٔ D نصف شده است.

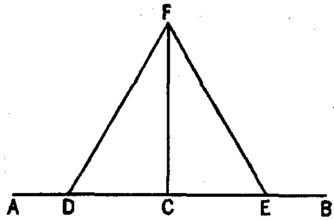
زیرا در دو مثلث ACD و BCD دو ضلع AC و CD از یکی به ترتیب با دو ضلع BC و CD از دیگری مساوی‌اند و زاویهٔ ACD با زاویهٔ BCD مساوی است؛ بنابراین ضلع AD با ضلع BD مساوی است. [۴.I]

لذا خط راست متناهیِ مفروض AB در نقطهٔ D نصف شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

مطلوب اخراج خط راستی است عمود بر خط راست مفروض از نقطهٔ مفروضی واقع بر آن.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض و C نقطهٔ داده شده‌ای بر آن باشد. پس مطلوب اخراج عمودی است از نقطهٔ C بر AB.

نقطهٔ اختیاری D را بر AC می‌گیریم و CE را مساوی با CD جدا می‌کنیم. [۳.I]

مثلث متساوی‌الاضلاع FDE را بر DE بنا می‌کنیم، [۱.I]

و F را به C وصل می‌کنیم.

می‌گوییم که خط راست FC از نقطهٔ داده شدهٔ C بر خط راست مفروض AB عمود شده است.

زیرا در دو مثلث DCF و ECF دو ضلع DC و CF از یکی به ترتیب با دو ضلع EC و CF از دیگری مساوی‌اند؛ و ضلع DF نیز با EF مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ DCF با زاویهٔ ECF مساوی است؛ [۸.I]

و این زاویه‌ها دو زاویهٔ مجاورند.

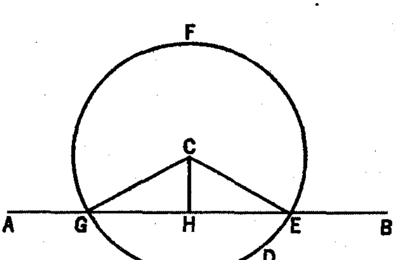
اما وقتی خط راستی بر خط راست دیگری فرود آمده باشد و دو زاویهٔ متساوی مجاور با هم بسازد، هر یک از آنها یک قائمه خواهد بود. [تع. ۱۰]

بنابراین هر یک از زاویه‌های DCF و FCE یک قائمه است. پس خط راست CF عمودی است بر خط راست مفروض AB که از نقطهٔ مفروض C بر آن اخراج شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

مطلوب رسم خط راستی است عمود بر یک خط راست نامتناهیِ مفروض، از نقطه‌ای مفروض ناواقع بر آن.



فرض می‌کنیم AB خط راست نامتناهی مفروض باشد، و C نقطهٔ مفروضی ناواقع بر آن. پس مطلوب رسم خط راستی است عمود بر خط راست نامتناهی مفروض AB از نقطهٔ مفروض C ناواقع بر آن.

فرض می‌کنیم D نقطهٔ دلخواهی در طرف دیگر خط راست AB باشد. به‌مرکز C

و شعاع CD دایرهٔ EFG را رسم می‌کنیم [اصـ.م.۳]

فرض می‌کنیم EG در نقطهٔ H نصف شده است، [I.۱۰]

و G به C و E به C و H به C وصل شده‌اند. [اصـ.م.۱]

می‌گوییم که CH خطی است که از نقطهٔ مفروض C ناواقع بر AB بر آن عمود شده است.

زیرا، در دو مثلث GCH و HCE دو ضلع GH و HC از یکی به ترتیب با دو ضلع EH و HC از دیگری مساوی‌اند، و ضلع CG با ضلع CE مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ CHG با زاویهٔ EHC مساوی است. [I.۸]

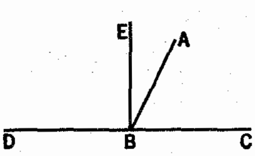
و این دو زاویه، دو زاویهٔ مجاورند. اما وقتی خط راستی بر خطی فرود آمده باشد و با آن دو زاویهٔ متساوی مجاور با هم ساخته باشد، هر یک از آنها مساوی یک زاویهٔ قائمه است و خط راست فرود آمده بر خط راستی که بر آن فرود آمده، عمود است. [تع. ۱۰]

بنابراین CH بر خط راستِ نامتناهی AB از نقطهٔ مفروض C ناواقع بر AB عمود شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر خط راستی بر خط راستی اخراج شود و دو زاویه با آن بسازد، یا دو زاویهٔ قائمه با آن می‌سازد یا زاویه‌های مساوی دو قائمه با آن می‌سازد.



فرض می‌کنیم خط راست دلخواه AB بر خط راست CD اخراج شده و با آن زاویه‌های CBA و ABD را بسازد.

می‌گوییم که زاویه‌های CBA و ABD یا دو زاویهٔ قائمه هستند یا [مجموع آنها] مساوی با دو قائمه است.

حال، اگر زاویهٔ CBA با زاویهٔ ABD مساوی باشد، این زاویه‌ها هر دو قائمه‌اند، [تع. ۱۰]

ولی، اگر مساوی نباشد فرض می‌کنیم BE از B بر CD عمود شده باشد؛ [I.۱۱]

بنابراین زاویه‌های CBE و EBD دو قائمه هستند.

در این صورت، چون زاویهٔ CBE با دو زاویهٔ CBA و ABE مساوی است، زاویهٔ EBD را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های CBE و EBD با سه زاویهٔ CBA و ABE و EBD مساوی می‌شوند. [اصـ.ب.۲]

باز، چون زاویهٔ DBA با دو زاویهٔ DBE و EBA مساوی است، زاویهٔ ABC را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های DBA و ABC با سه زاویهٔ DBE و EBA و ABC مساوی‌اند. [اصـ.ب.۲]

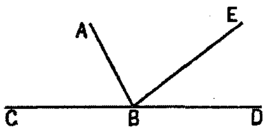
اما ثابت شده بود که زاویه‌های CBE و EBD با همین سه زاویه مساوی‌اند؛ و چیزهای مساوی با یک چیز خود نیز با یکدیگر مساوی‌اند؛ [اص.۱]

بنابراین زاویه‌های CBE و EBD نیز با زاویه‌های DBA و ABC مساوی‌اند. اما زاویه‌های CBE و EBD دو زاویهٔ قائمه‌اند؛ بنابراین زاویه‌های DBA و ABC نیز دو قائمه می‌شوند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر از نقطه‌ای واقع بر یک خط راست دو خط راست چنان رسم شوند که در یک طرف آن خط نباشند و دو زاویهٔ مجاور مساوی دو قائمه با آن بسازند، این دو خط راست بر یک خط راست واقع‌اند.



خط راستِ AB و نقطهٔ B واقع بر آن را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم دو خط راست BC و BD در یک طرفِ AB نباشند و زاویه‌های مجاورِ ABC و ABD مساوی با دو زاویهٔ قائمه باشند. می‌گوییم که BC و BD بر یک خط راست واقع‌اند.

زیرا، اگر BD با BC بر یک خط راست واقع نباشد، فرض می‌کنیم BE با BC بر یک خط راست واقع باشد.

در این صورت، چون خط راست AB بر خط راست CBE فرود آمده است، زاویه‌های ABC و ABE مساوی با دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

اما زاویه‌های ABC و ABD نیز مساوی با دو قائمه بودند؛ بنابراین زاویه‌های CBA و ABE با زاویه‌های CBA و ABD مساوی‌اند. [اص.م.۴ و، اص.ب.۱]

حال، زاویهٔ CBA را از هر یک از آنها کم می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های باقیماندهٔ ABE و ABD با هم مساوی‌اند [اص.ب.۳]

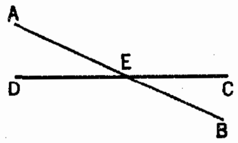
زاویهٔ کوچکتر با زاویهٔ بزرگتر مساوی شده: که غیرممکن است. بنابراین BE با CB بر یک خط راست واقع نیست.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که، هیچ خط راست دیگری جز BD با آن بر یک خط راست واقع نیست. بنابراین CB با BD بر یک خط راست واقع است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر دو خط راست یکدیگر را ببرند، زاویه‌های متقابل به رأس مساوی با هم می‌سازند.



زیرا فرض می‌کنیم خطهای AB و CD یکدیگر را در E بریده‌اند؛ می‌گوییم که زاویهٔ AEC با زاویهٔ DEB مساوی است، و زاویهٔ CEB با زاویهٔ AED. زیرا، چون خط راست AE بر خط راست CD فرود آمده و زاویه‌های CEA و AED را پدید آورده است، پس زاویه‌های CEA و AED مساوی با دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

باز چون خط راست DE بر خط راست AB فرود آمده و زاویه‌های AED و DEB را پدید آورده است، پس زاویه‌های AED و DEB مساوی دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

اما ثابت شده بود که زاویه‌های CEA و AED نیز مساوی دو قائمه‌اند؛ بنابراین زاویه‌های CEA و AED با زاویه‌های AED و DEB مساوی می‌شوند. [اصـ.۴م و، اصـ.ب.۱]

اگر زاویهٔ AED را از هر یک کم کنیم، زاویهٔ باقیماندهٔ CEA با زاویهٔ باقیماندهٔ BED مساوی می‌شود. [اصـ.ب.۳]

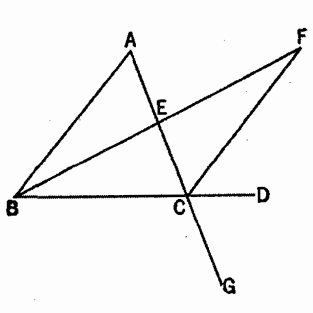
به همین طریق می‌توان ثابت کرد که زاویه‌های CEB و DEA نیز با هم مساوی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

[فرع. از این قضیه چنین بر می‌آید که اگر دو خط راست یکدیگر را ببرند، [مجموع] زاویه‌هایی که در نقطهٔ تقاطع می‌سازند مساوی است با چهار قائمه.]

قضیهٔ ۱۶

در هر مثلث اگر یکی از ضلعها را امتداد دهیم زاویهٔ خارجیِ حاصل، از هر یک از زاویه‌های داخلیِ غیرمجاورِ با آن بزرگتر است.



در مثلث ABC ضلع BC را تا D امتداد می‌دهیم؛ می‌گوییم که زاویهٔ خارجی ACD از هر یک از زاویه‌های داخلیِ غیرمجاورِ CBA و BAC بزرگتر است.

فرض می‌کنیم نقطهٔ E وسط AC باشد، [۱۰.I] E را به B وصل می‌کنیم و بر امتداد آن نقطهٔ F را چنان می‌گیریم که BE مساوی EF باشد، [۳.I] C را به F وصل می‌کنیم. [اصـ.م.۱]

و AC را تا G امتداد می‌دهیم. [اصـ.م.۲]

در این صورت در دو مثلث AEB و FEC، دو ضلع AE و BE از یکی به ترتیب با دو ضلع EC و EF از دیگری مساوی‌اند و زاویه‌های متقابل به رأس AEB و FEC با هم مساوی‌اند، [۱۵.I]

لذا AB با FC مساوی و این دو مثلث با هم مساوی و در نتیجه بقیّهٔ زاویه‌ها نظیر به نظیر با هم مساوی می‌شوند، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع مساوی با هم مساوی می‌شوند، بنابراین زاویهٔ ABE با زاویهٔ CFE مساوی می‌شود. [۴.I]

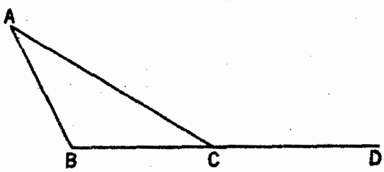
اما زاویهٔ ECD بزرگتر از زاویهٔ ECF است؛ [اصـ.ب.۵]

در نتیجه زاویهٔ ACD از زاویهٔ BAE بزرگتر است. به همین طریق اگر BC را نصف می‌کردیم، ثابت می‌شد که زاویهٔ BCG، یعنی زاویهٔ ACD، [۱۵.I]
از زاویهٔ ABC بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

در هر مثلث مجموع هر دو زاویه کمتر از دو قائمه است.



مثلث ABC را در نظر می‌گیریم؛ می‌گوییم که مجموع هر دو زاویه از این مثلث از دو قائمه کمتر است. زیرا، فرض می‌کنیم BC را تا نقطهٔ D امتداد داده‌ایم. [اصـ.م.۲]

در این صورت، چون زاویهٔ ACD زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، از هر یک از زاویه‌های درونی غیرمجاور ABC بزرگتر است. [۱۶.I]

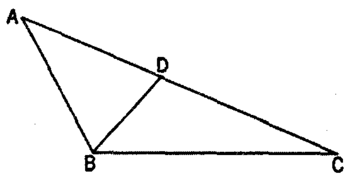
حال زاویهٔ ACB را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های ACD، و ACB از زاویه‌های ABC و BCA بزرگترند. اما ACD و ACB مساوی دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

بنابراین ABC و BCA از دو قائمه کمترند. به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که BAC و ACB نیز از دو قائمه کمترند، و زاویه‌های CAB و ABC هم کمتر از دو قائمه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

در هر مثلث ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر است.



فرض می‌کنیم در مثلث ABC ضلع AC بزرگتر از AB است. می‌گوییم که زاویهٔ ABC نیز از زاویهٔ BCA بزرگتر است.

چون AC بزرگتر از AB است، فرض می‌کنیم AD را مساوی با AB جدا کرده‌ایم، [۳.I]

B را به D وصل می‌کنیم.

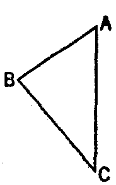
در این صورت، چون زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث BCD است از زاویهٔ داخلی غیرمجاور DCB بزرگتر است. [۱۶.I]

اما زاویهٔ ADB با زاویهٔ ABD مساوی است، زیرا ضلع AB با ضلع AD مساوی است. بنابراین زاویهٔ ABD نیز از زاویهٔ ACB بزرگتر است، لذا زاویهٔ ABC به طریق اولی بزرگتر از زاویهٔ ACB است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

در هر مثلث زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی باشد که در آن زاویهٔ ABC از زاویهٔ BCA بزرگتر است؛ می‌گوییم ضلع AC نیز از ضلع AB بزرگتر است. زیرا، اگر بزرگتر از AC نباشد یا با AB مساوی است یا از آن کوچکتر است. اما AC نمی‌تواند مساوی با AB باشد، زیرا در این صورت زاویهٔ ABC نیز باید با زاویهٔ ACB مساوی باشد، [۵.I]

که نیست؛ بنابراین AC مساوی با AB نیست.

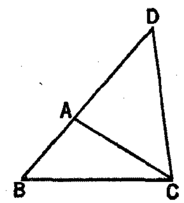
AC کوچکتر از AB هم نیست، زیرا در این صورت زاویهٔ ABC باید کوچکتر از زاویهٔ ACB باشد؛ [۱۸.I]

که نیست. بنابراین AC نه با AB مساوی است، و نه کوچکتر از آن، پس باید بزرگتر از آن باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی داده شده باشد. می‌گوییم مجموع هر دو ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است، یعنی مجموع BA و AC از BC بزرگتر است، مجموع AB و BC از AC بزرگتر است، و مجموع BC و CA از AB بزرگتر است. زیرا، فرض می‌کنیم BA را امتداد داده و بر آن DA را مساوی CA جدا، و DC را وصل کرده‌ایم. در این صورت، چون DA مساوی است با AC، زاویهٔ ADC نیز با زاویهٔ ACD مساوی است؛ [I.۵]

بنابراین زاویهٔ BCD از زاویهٔ ADC بزرگتر است، [اص.ب.۵]

و چون DCB مثلثی است که زاویهٔ BCDی آن از زاویهٔ BDC بزرگتر است، و زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است، [I.۱۹]

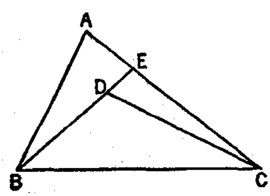
بنابراین DB از BC بزرگتر است. اما DA با AC مساوی است؛ لذا مجموع BA و AC از BC بزرگتر است.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که مجموع AB و BC نیز از CA بزرگتر است و مجموع BC و CA از AB.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

اگر از دو سر یک ضلع مثلثی و در یک طرف آن دو خط راست چنان رسم کنیم که یکدیگر را در داخل مثلث ببرند، مجموع این دو خط راست از مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچکتر ولی زاویهٔ بین آن دو از زاویهٔ سوم مثلث بزرگتر است.



در مثلث ABC از دو رأس B و C دو خط راست BD و DC چنان رسم شده‌اند که یکدیگر را درون مثلث بریده‌اند. می‌گوییم که مجموع BD و DC از مجموع دو ضلع BA و AC کوچکتر ولی زاویهٔ BDC از زاویهٔ BAC بزرگتر است.

زیرا، فرض می‌کنیم که امتداد BD ضلع AC را در E بریده است. چون در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است، [I.۲۰]

بنابراین در مثلث ABE مجموع AB و AE از BE بزرگتر است.

حال EC را به هریک اضافه می‌کنیم؛ لذا مجموع BA و AC از مجموع BE و EC بزرگتر است.

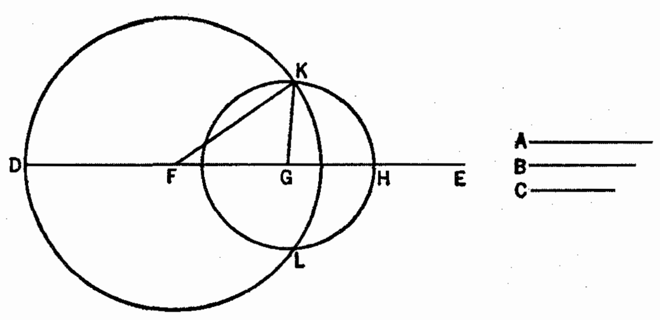
باز، چون در مثلث CED مجموع دو ضلع CE و ED از CD بزرگتر است، DB را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مجموع CE و EB از مجموع CD و DB بزرگتر است. اما ثابت شده بود که مجموع BA و AC از مجموع BE و EC بزرگتر است؛ بنابراین مجموع BA و AC به طریق اولی از مجموع BD و DC بزرگتر است.

باز، چون در هر مثلث زاویهٔ خارجی از زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگتر است، [۱۶.I]
بنابراین در مثلث CDE، زاویهٔ خارجی BDC از زاویهٔ داخلی CED بزرگتر است. به همین دلیل در مثلث ABE نیز زاویهٔ خارجی CEB از زاویهٔ BAC بزرگتر است. اما ثابت شده بود که زاویهٔ BDC از زاویهٔ CEB بزرگتر است؛ بنابراین زاویهٔ BDC از زاویهٔ BAC بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

مطلوب رسم مثلثی است که ضلعهای آن با سه خط راست مفروض مساوی باشند: پس لازم است که مجموع هر دو خط راست از این سه خط راست از سومی بزرگتر باشد. [۲۰.I]



فرض می‌کنیم A، B، و C سه خط راست مفروض باشند و مجموع هر دو خط از این سه خط از سومی بزرگتر باشد یعنی A و B بزرگتر از C باشد؛ A و C بزرگتر از B؛ B و C بزرگتر از A؛ پس مطلوب رسم مثلثی است با خطهای راستی مساوی با A، B، و C.

فرض می‌کنیم خط راست DE به منتهای D و به طول بینهایت در امتداد E باشد، بر آن طول DF را مساوی با A جدا می‌کنیم، و FG را مساوی با B، و GH را مساوی با C. [۳.I]

بهٔ مرکز F و شعاع FD دایرهٔ DKL را رسم می‌کنیم؛ باز به مرکز G و شعاع GH دایرهٔ KLH را می‌کشیم؛ و KF و KG را وصل می‌کنیم.

حال می‌گوییم که مثلث KFG مثلثی است که با سه خط راست مساوی با A، B، و C رسم شده است. زیرا، چون F مرکز دایرهٔ DKL است، FD مساوی است با FK. اما FD

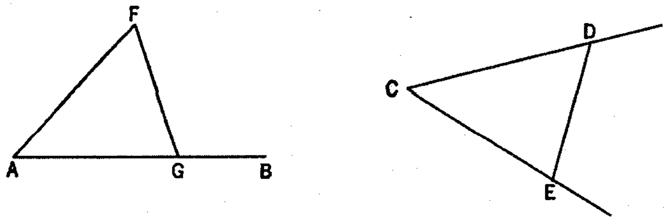
مساوی است با A؛ پس KF نیز مساوی با A است. باز، چون G مرکز دایرهٔ LKH است، GH مساوی است با GK. اما GH مساوی است با C؛ پس KG نیز مساوی است با C. و FG نیز مساوی با B است؛ بنابراین سه خط راست KF، FG، و GK مساوی با سه خط راست A، B، و C هستند.

لذا با سه خط راست KF، FG، و GK، که مساوی با سه خط راست مفروض A، B، و C هستند، مثلث KFG رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

مطلوب رسم زاویهٔ راست‌خطّی است بر خط راستی مفروض از نقطه‌ای واقع بر آن که با زاویهٔ راست خطّ مفروضی مساوی باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض باشد و A نقطه‌ای بر آن، و زاویهٔ DCE زاویهٔ راست‌خطِ مفروض؛ پس مطلوب رسم زاویهٔ راست‌خطّی است به ضلع AB و به رأس A که با زاویهٔ راست‌خطِ مفروض DCE مساوی باشد.

بر خطهای راست CD و CE به ترتیب نقاط دلخواه D، E را اختیار، و DE را وصل می‌کنیم، و با سه خط راست مساوی با سه خط راست CD، DE، و CE مثلث AFG را رسم می‌کنیم به طوری که CD مساوی با AF باشد، CE مساوی با AG، و DE مساوی با FG. [۲۲.I]

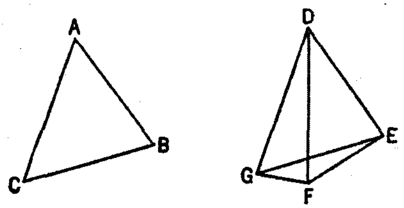
در این صورت، چون دو ضلع DC و CE به ترتیب با دو ضلعِ FA و AG مساوی‌اند، و قاعدهٔ DE با قاعدهٔ FG مساوی است، پس زاویهٔ DCE با زاویهٔ FAG مساوی است.[۸.I]

بنابراین بر خط راست مفروضِ AB و در نقطهٔ A بر آن، زاویهٔ راست‌خطِ FAG مساوی با زاویهٔ راست‌خطِ مفروضِ DCE رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند ولی زاویهٔ بین آنها در یکی از زاویهٔ نظیرش در دیگری بزرگتر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر هم در یکی از ضلع متناظرش در دیگری بزرگتر است.



گیریم ABC و DEF دو مثلث باشند که در آنها AB و AC به ترتیب با DE و DF مساوی باشند و زاویهٔ رأس A بزرگتر از زاویهٔ رأس D باشد. می‌گوییم که قاعدهٔ BC نیز از قاعدهٔ EF بزرگتر است.

زیرا، چون زاویهٔ BAC بزرگتر از زاویهٔ EDF است، از نقطهٔ D واقع بر خط راست DE زاویهٔ EDG به ضلع DE را مساوی با زاویهٔ BAC رسم می‌کنیم. [۲۳.I]

DG را مساوی با یکی از دو ضلع AC یا DF جدا، و EG و FG را وصل می‌کنیم. در این صورت چون AB مساوی با DE و AC مساوی با DG است، دو ضلع BA و AC به ترتیب با دو ضلع ED و DG مساوی می‌شوند، و زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDG مساوی است؛ بنابراین قاعدهٔ BC با قاعدهٔ EG مساوی می‌شود. [۴.I]

باز، چون DF با DG مساوی است، و زاویهٔ DGF نیز با زاویهٔ DFG مساوی است. [۵.I]

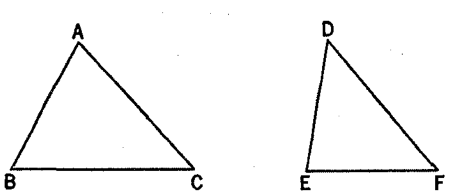
بنابراین زاویهٔ DFG از زاویهٔ EGF بزرگتر، و در نتیجه زاویهٔ EFG به طریق اولی از زاویهٔ EGF بزرگتر می‌شود، و در مثلث EFG، زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است، [۱۹.I]

و ضلع EG نیز از EF بزرگتر می‌شود. اما EG مساوی است با BC. بنابراین BC نیز از EF بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند ولی قاعدهٔ یکی از قاعدهٔ دیگری بزرگتر باشد، زاویهٔ بین دو ضلع متساوی نیز در یکی از زاویهٔ نظیرش در دیگری بزرگتر است.



در دو مثلث ABC و DEF فرض می‌کنیم ضلعهای AB و AC به ترتیب با دو ضلع DE و DF مساوی باشند و قاعدهٔ BC بزرگتر از قاعدهٔ EF باشد. می‌گوییم که زاویهٔ BAC نیز از زاویهٔ

EDF بزرگتر است. زیرا اگر BAC بزرگتر از EDF نباشد یا مساوی با آن است و یا کوچکتر از آن. اما زاویهٔ BAC مساوی با زاویهٔ EDF نیست؛ زیرا در این صورت قاعدهٔ BC نیز با قاعدهٔ EF مساوی خواهد شد، [۴.I]

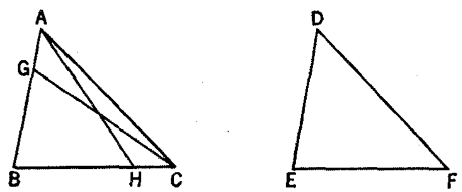
که چنین نیست، بنابراین زاویهٔ BAC مساوی با زاویهٔ EDF نیست. زاویهٔ BAC کوچکتر از زاویهٔ EDF هم نیست؛ زیرا در آن صورت قاعدهٔ BC نیزکوچکتر از قاعدهٔ EF خواهد شد، [۲۴.I]

که چنین نیست؛ بنابراین زاویهٔ BAC نه مساوی با زاویهٔ EDF است و نه کوچکتر از آن؛ پس بزرگتر از آن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

هرگاه در دو مثلث دو زاویه از یکی به ترتیب با دو زاویه از دیگری مساوی باشند و ضلع واقع بین دو زاویهٔ مساوی یا مقابل به یکی از زاویه‌های مساوی از یکی با ضلع نظیرش از دیگری مساوی باشد بقیّهٔ اضلاع با هم و زاویه‌های باقیمانده نیز با هم مساوی می‌شوند.



در دو مثلث ABC و DEF فرض می‌کنیم دو زاویهٔ ABC و BCA به ترتیب با دو زاویهٔ DEF و EFD مساوی باشند و یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری مساوی باشد؛ ابتدا فرض می‌کنیم ضلعهای واقع بین زاویه‌های مساوی، یعنی BC و EF، متساوی باشند. می‌گوییم که بقیهٔ ضلعهای دو مثلث نیز به ترتیب با هم مساوی می‌شوند، یعنی AB با DE و AC با DF؛ و زاویه‌های دیگر یعنی، BAC با EDF. زیرا اگر AB مساوی با DE نباشد یکی از آنها از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم AB بزرگتر باشد، BG را مساوی با DE جدا و GC را وصل می‌کنیم. در دو مثلث GBC و DEF دو ضلع GB و BC از یکی به ترتیب با دو ضلع DE و EF از دیگری مساوی‌اند و زاویهٔ GBC با زاویهٔ DEF مساوی است؛ بنابراین قاعدهٔ GC با قاعدهٔ DF مساوی می‌شود، و لذا این دو مثلث با هم مساوی و زاویه‌های باقیمانده، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نیز با هم مساوی می‌شوند. [۴.I]

بنابراین زاویهٔ GCB با زاویهٔ DFE مساوی می‌شود، اما زاویهٔ DFE بنا به فرض با زاویهٔ BCA مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ BCG با زاویهٔ BCA مساوی می‌شود، زاویهٔ کوچکتر با زاویهٔ

بزرگتر: که غیرممکن است. لذا AB نامساوی با DE نبوده و با آن مساوی است. اما BC نیز با EF مساوی است؛ پس دو ضلع AB و BC به ترتیب با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی است. پس، قاعدهٔ AC با قاعدهٔ DF مساوی و زاویهٔ سوم BAC با زاویهٔ سوم EDF مساوی می‌شود. [۴.I]

باز، فرض می‌کنیم ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های مساوی، مثلاً AB و DE متساوی باشند؛ باز می‌گوییم که بقیهٔ اضلاع با هم مساوی‌اند، یعنی AC با DF و BC با EF. و نیز زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDF مساوی است. زیرا اگر BC با EF مساوی نباشد یکی از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم، چنین چیزی ممکن، و BC بزرگتر باشد، BH را مساوی با EF جدا، و A را به H وصل می‌کنیم. در این صورت چون دو ضلع AB و BH به ترتیب با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها نیز مساوی‌اند، بنابراین قاعدهٔ AH با قاعدهٔ DF، و در نتیجه مثلث ABH با مثلث DEF مساوی است، و زاویه‌های دیگر، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی با هم مساوی‌اند؛[۴.I]

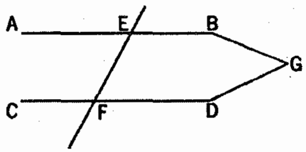
بنابراین زاویهٔ BHA با زاویهٔ EFD مساوی است. اما زاویهٔ EFD با زاویهٔ BCA مساوی بود؛ لذا در مثلثِ AHC زاویهٔ خارجی BHA با زاویهٔ داخلی غیرمجاور BCA مساوی می‌شود: که غیرممکن است. [۱۶.I]

بنابراین BC با EF نامساوی نیست و بنابراین با آن مساوی است. اما AB نیز با DE مساوی است؛ پس، دو ضلعِ AB و BC به ترتیب با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها نیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین قاعدهٔ AC با قاعدهٔ DF مساوی است، و مثلثِ ABC با مثلث DEF، و زاویه‌های دیگر BAC و EDF متساوی‌اند. [۴.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و با آنها دو زاویهٔ متبادل داخلی متساوی بسازد، آن دو خط راست متوازی‌اند.



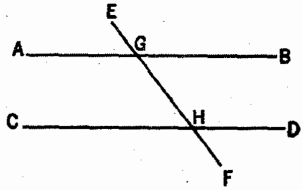
زیرا، فرض می‌کنیم خط راست EF بر دو خط راست AB و CD فرود آمده باشد و زاویه‌های متبادلِ داخلیِ AEF و EFD متساوی بسازد. می‌گوییم AB با CD موازی است. زیرا اگر موازی نباشند وقتی آنها را امتداد دهیم یا در امتداد B و D، یا در امتداد A و C یکدیگر را می‌برند. فرض می‌کنیم این دو خط راست در امتداد B و D یکدیگر را در G ببرند.

در این صورت، در مثلث GEF زاویهٔ خارجی AEF با زاویهٔ داخلی غیرمجاور EFG مساوی می‌شود: که غیرممکن است. [۱۶.I]
بنابراین AB و CD یکدیگر را در امتداد B و D نمی‌برند. به همین طریق می‌توان ثابت کرد که در امتداد A و C هم یکدیگر را نمی‌برند.
اما خطهایِ راستی که در هیچ طرفی یکدیگر را نبرند با هم موازی‌اند؛ [تع. ۲۳]
بنابراین AB با CD موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید، و دو زاویهٔ متقابل خارجی و داخلی متساوی یا دو زاویهٔ متقابل داخلی مساوی با دو زاویهٔ قائمه، با آنها بسازد، آن دو خط راست با یکدیگر موازی خواهند بود.



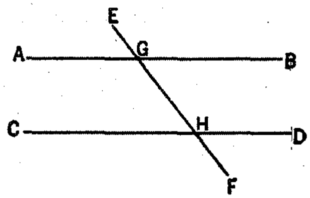
فرض می‌کنیم که خط راست EF بر دو خط راست AB و CD فرود آمده و زاویه‌های متقابل خارجی و داخلی EGB و GHD متساوی، یا زاویه‌های متقابل داخلی BGH و GHD مساوی با دو قائمه پدید آورده است. می‌گوییم AB با CD موازی است.

زیرا چون زاویهٔ EGB با زاویهٔ GHD مساوی است و زاویهٔ EGB با زاویهٔ AGH،[۱۵.I] پس زاویهٔ AGH نیز با زاویهٔ GHD مساوی است، که دو زاویهٔ متبادلِ داخلی‌اند. بنابراین AB با CD موازی است. [۲۷.I]
باز چون زاویه‌های BGH و GHD مساوی با دو قائمه‌اند و زاویه‌های AGH و BGH نیز مساوی با دو قائمه‌اند، [۱۳.I]
زاویه‌های AGH و BGH با زاویه‌های BGH و GHD مساوی‌اند. زاویهٔ BGH را از هر دو کم می‌کنیم. بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ AGH با زاویهٔ باقیماندهٔ GHD مساوی است و این دو زاویه متبادلِ داخلی هستند؛ بنابراین AB با CD موازی است. [۲۷.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

اگر خط راستی بر دو خط راستِ متوازی فرود آید، زاویه‌های متبادلِ داخلیِ متساوی، زاویه‌های متقابلِ خارجی و داخلیِ متساوی، و زاویه‌های متقابل داخلی مساوی با دو قائمه با آنها می‌سازد.



فرض می‌کنیم خط راست EF بر خطهای راست متوازی AB و CD فرود آمده است؛ می‌گوییم که زاویه‌های متبادلِ داخلی AGH و GHD با هم مساوی‌اند و زاویه‌های متقابلِ خارجی و داخلی EGB و GHD با هم؛ و زاویه‌های متقابل داخلی یعنی، BGH و GHD مساوی با دو قائمه‌اند.

زیرا، اگر زاویهٔ AGH با زاویهٔ GHD مساوی نباشد، یکی از آنها از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم AGH زاویهٔ بزرگتر باشد. زاویهٔ BGH را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مجموع زاویه‌های AGH و BGH از مجموع زاویه‌های BGH و GHD بزرگتر است. اما [مجموع] زاویه‌های AGH و BGH مساوی با دو قائمه است. [۱۳.I]

بنابراین [مجموع] زاویه‌های BGH و GHD کمتر از دو قائمه می‌شود. اما اگر خطهای راست را تا بینهایت امتداد دهیم، یکدیگر را در طرفی که مجموع زاویه‌ها کمتر از دو قائمه است می‌برند. [اص.م.۵]

بنابراین اگر AB و CD تا بینهایت امتداد داده شوند یکدیگر را خواهند برید. اما یکدیگر را نمی‌برند، زیرا بنا به فرض با هم موازی‌اند. بنابراین زاویهٔ AGH با زاویهٔ GHD نامساوی نیست، و لذا با هم مساوی‌اند.

باز زاویهٔ AGH با زاویهٔ EGB مساوی است؛ [۱۵.I]

بنابراین زاویهٔ EGB نیز با زاویهٔ GHD مساوی است. [اص.ب.۱]

حال زاویهٔ BGH را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های EGB و BGH با زاویه‌های BGH و GHD مساوی می‌شوند. [اص.ب.۲]

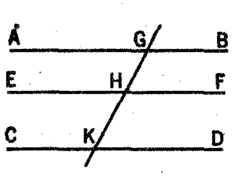
اما زاویه‌های EGB و BGH مساوی با دو قائمه‌اند؛ [۱۳.I]

بنابراین زاویه‌های BGH و GHB نیز مساوی با دو قائمه می‌شوند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

خطهای راست موازی با یک خط راست با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم هر یک از خطهای راست AB و CD با خط راست EF موازی باشد؛ می‌گوییم که AB هم با CD موازی است. زیرا فرض می‌کنیم خط راست GK بر آنها فرود آمده باشد. در این صورت، چون خط راست GK بر خطهای

راست AB و EF فرود آمده است، پس زاویهٔ AGK با زاویهٔ GHF مساوی است. [۲۹.I]

باز، چون خط راست GK بر خطهای راست EF و CD فرود آمده است، پس زاویهٔ GHF با زاویهٔ GKD مساوی است. [۲۹.I]

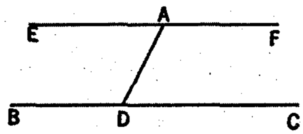
اما زاویهٔ AGK با زاویهٔ GHF مساوی بود؛ بنابراین زاویهٔ AGK نیز با زاویهٔ GKD مساوی است؛ [اصـ.ب.۱]

و این دو زاویه، متبادل داخلی هستند. لذا AB با CD موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

از نقطهٔ مفروض خط راستی به موازات خط راست مفروضی بکشید.



فرض می‌کنیم A نقطهٔ مفروض باشد، و BC خط راست مفروض. پس مطلوب رسم خط راستی است از نقطهٔ A به موازات خط راست BC.

نقطهٔ دلخواه D را بر BC می‌گیریم و A را به D وصل می‌کنیم. بر خط راست AD و از نقطهٔ A واقع بر آن زاویهٔ DAE را مساوی با زاویهٔ ADC رسم می‌کنیم؛ [۲۳.I]

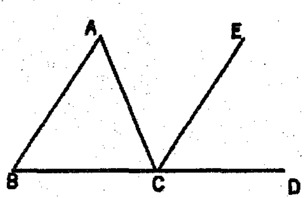
و فرض می‌کنیم AF در امتداد EA کشیده شده است. در این صورت، چون AD دو خط راست BC و EF را بریده و زاویه‌های متبادلِ داخلی متساوی EAD و ADC را درست کرده است، لذا EAF با BC موازی است. [۲۷.I]

بنابراین از نقطهٔ مفروضِ A خط راست EAF موازی با خط راست مفروضِ BC رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

در هر مثلث، اگر یک ضلع را امتداد دهیم، زاویهٔ خارجی حاصل با دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن مساوی است، و سه زاویهٔ داخلی مثلث برابر با دو قائمه است.



مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ضلع BC را تا D امتداد می‌دهیم. می‌گوییم که زاویهٔ خارجی ACD با دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن، یعنی CAB و ABC، مساوی است و سه زاویهٔ داخلی ABC، BCA، و CAB مساوی با دو قائمه‌اند.

زیرا، CE را از C به موازات AB رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

چون AB موازی با CE است و AC بر آنها فرود آمده است، زاویه‌های متبادلِ داخلیِ BAC و ACE با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

باز، چون AB موازی است با CE و BD بر آنها فرود آمده است دو زاویهٔ متقابل خارجی و داخلی ECD و ABC با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

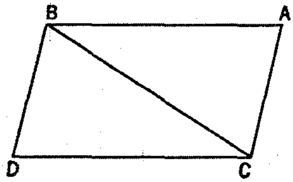
اما ثابت شده بود که زاویهٔ ACE نیز با زاویهٔ BAC مساوی است؛ بنابراین تمامی زاویهٔ ACD با دو زاویهٔ غیرمجاور داخلی BAC و ABC مساوی است. حال، زاویهٔ ACB را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین زاویه‌های ACD و ACB با سه زاویهٔ ABC، BCA، و CAB مساوی می‌شوند. اما زاویه‌های ACD و ACB مساوی با دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

بنابراین زاویه‌های ABC، BCA، و CAB نیز مساوی با دو قائمه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

خطهای راست هم جهت و اصل به دو سر خطهای راست متساوی و متوازی هم جهت، خود نیز متساوی و متوازی‌اند.



فرض می‌کنیم که AB و CD متساوی و متوازی و هم جهت هستند. خطهای راست هم جهت AC و BD را به ترتیب به دو سر آنها وصل می‌کنیم. می‌گوییم AC و BD نیز متساوی و متوازی‌اند. B را به C وصل می‌کنیم. چون AB با CD موازی و BC بر آنها فرود آمده است، زاویه‌های متبادل داخلی ABC و BCD با هم مساوی می‌شوند. [۲۹.I]

حال درِ دو مثلث ABC و BCD، AB با CD مساوی و BC در هر دو مشترک و زاویهٔ ABC با زاویهٔ BCD مساوی است، بنابراین قاعدهٔ BD با قاعدهٔ AC مساوی می‌شود، و مثلث ABC با مثلث DCB؛ در نتیجه زاویه‌های دیگر، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نظیر به نظیر با هم مساوی می‌شوند. [۴.I]

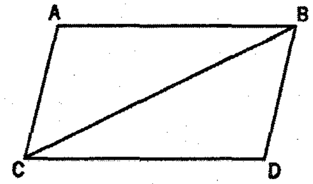
بنابراین زاویهٔ ACB با زاویهٔ CBD مساوی می‌شود. و چون خط راست BC بر خطهای راست AC و BD فرود آمده و زاویه‌های متبادل داخلی متساوی درست کرده است، پس AC با BD موازی است. [۲۷.I]

و ثابت شده بود که با آن مساوی هم هست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

در ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی، ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو با هم. و قطر ناحیه را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند.



فرض می‌کنیم $ACDB$ یک ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی باشد و BC قطر آن. می‌گوییم در این متوازی‌الاضلاع ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو با هم؛ و قطر BC، ناحیه را نصف می‌کند.

زیرا، چون AB با CD موازی و خط راست BC بر آنها فرود آمده است زاویه‌های متبادلِ داخلیِ ABC و BCD با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

باز، چون AC با BD موازی و BC بر آنها فرود آمده است، زاویه‌های ACB و CBD با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

بنابراین در دو مثلث ABC و DCB دو زاویهٔ ABC و BCA از یکی به ترتیب با دو زاویهٔ DCB و CBD از دیگری با هم مساوی‌اند و ضلع BC در هر دو مشترک است، پس این دو مثلث با هم مساوی می‌شوند و نیز ضلعها و زاویه‌های دیگر به ترتیب با هم مساوی می‌شوند؛ [۲۶.I]

یعنی ضلع AB با ضلع CD مساوی می‌شود و AC با BD، و زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ CDB مساوی می‌شود. و چون زاویهٔ ABC با زاویهٔ BCD، و زاویهٔ CBD با زاویهٔ ACB مساوی است، تمامی زاویهٔ ABD با تمامی زاویهٔ ACD مساوی خواهد شد. [اص.ب.۲]

اما ثابت شده بود که زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ CDB مساوی است. بنابراین در ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند، و زاویه‌های روبه‌رو با هم.

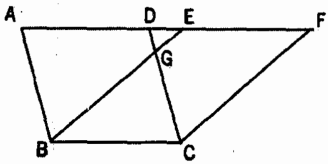
حال می‌گوییم که قطر ناحیه‌ها را نیز نصف می‌کند. زیرا در بالا ثابت کردیم اجزای مثلث ABC با اجزای مثلث DCB مساوی، و در نتیجه خود آنها با هم مساوی‌اند. [۴.I]

بنابراین قطر BC متوازی‌الاضلاع $ACDB$ را به دو قسمت متساوی تقسیم کرده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

متوازی‌الاضلاعهایی که یک قاعده داشته باشند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها بر یک خط راست واقع باشند با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم دو متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و $EBCF$ بر یک قاعدهٔ BC هستند و ضلعهای AD و EF از آنها بر یک خط AF واقع‌اند. می‌گوییم که $ABCD$ با $EBCF$ مساوی است.

زیرا، چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس AD با BC مساوی است. [۳۴.I]

به همین دلیل هم EF با BC مساوی است. لذا AD نیز با EF مساوی است؛ [اصـ.ب.۱]

و DE مشترک است؛ بنابراین تمام AE با تمام DF مساوی است. [اصـ.ب.۲]

اما AB نیز با DC مساوی است؛ [۳۴.I]

بنابراین در دو مثلث EAB و FDC دو ضلع EA و AB به ترتیب با دو ضلع FD و DC مساوی‌اند، و زاویهٔ FDC با زاویهٔ EAB متبادل داخلی و خارجی و در نتیجه با هم مساوی‌اند.[۲۹.I]

لذا قاعدهٔ EB با قاعدهٔ FC مساوی است و مثلث ABE با مثلث FDC. [۴.I]

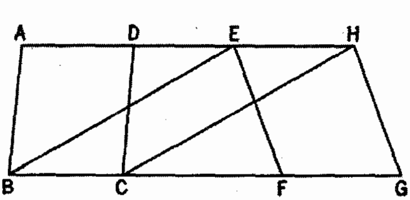
حال مثلث DGE را از هر دو کم می‌کنیم، بنابراین ذوزنقهٔ باقیماندهٔ $ABGD$ با ذوزنقهٔ باقیماندهٔ $EGCF$ مساوی است. [اصـ.ب.۳]

مثلث GBC را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین تمام متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با تمام متوازی‌الاضلاع $EBCF$ مساوی می‌شود. [اصـ.ب.۲]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۶

متوازی‌الاضلاعهایی که قاعده‌های آنها متساوی و بر یک خط راست واقع باشند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها نیز بر یک خط راست واقع باشند با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم $ABCD$ و $EFGH$ متوازی‌الاضلاعهایی باشند با قاعده‌های متساوی BC و FG که مطابق صورت قضیه رسم شده‌اند. می‌گوییم $ABCD$ با $EFGH$ مساوی است.

زیرا فرض می‌کنیم B به E وصل شده است و C به H. در این صورت، چون BC با FG مساوی است و FG با EH، BC نیز با EH مساوی است. [اصـ.ب.۱]

اما این دو خط راست متوازی نیز هستند و EB و HC آنها را به هم وصل می‌کنند؛ اما خطهای راست هم‌جهت و اصل به دو سر خطهای راست متساوی و متوازی هم‌جهت خود نیز

متساوی و متوازی‌اند. [۳۳.I]

بنابراین $EBCH$ متوازی‌الاضلاع است، [۳۴.I]

و با $ABCD$ مساوی؛ زیرا قاعده‌های آنها یکی هستند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها بر یک خط راست قرار دارند. [۳۵.I]

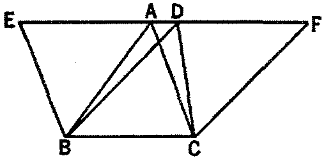
به همین دلیل $EFGH$ نیز با همان $EBCH$ مساوی است؛ [۳۵.I]

لذا متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نیز با $EFGH$ مساوی است. [اصـ.ب.۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۷

مثلثهایی که یک قاعده داشته باشند و رأسهای روبه‌رو به قاعده در آنها بر خط راستی موازی با قاعده واقع باشند با هم مساوی[1] اند.



فرض می‌کنیم ABC و DBC مثلثهایی با یک قاعدهٔ BC هستند که رأسهای A و D در آنها بر خط AD موازی با BC واقع‌اند. می‌گوییم که مثلثهای ABC و DBC متساوی‌اند. AD را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا خطهای مرسوم از B و C به موازات AC و BD را به ترتیب در نقطه‌های E و F ببرند. [۳۱.I]

در این صورت شکلهای $EBCA$ و $DBCF$ متوازی‌الاضلاعهای متساوی‌اند، زیرا یک قاعدهٔ BC دارند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها بر خط EF، موازی با BC، قرار دارند. [۳۵.I]

به علاوه مثلث ABC نصف متوازی‌الاضلاع $EBCA$ است، زیرا قطر AB آن را نصف کرده است. [۳۴.I]

و مثلث DBC نیز نصف متوازی‌الاضلاع $DBCF$ است، زیرا قطر CD آن را نصف کرده است. [۳۴.I]

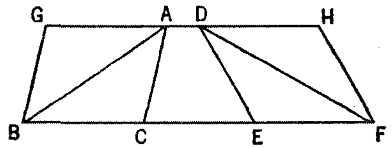
[اما نصفهای چیزهای متساوی، با هم مساوی‌اند]. بنابراین مثلث ABC با مثلث DBC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

۱. در اینجا منظور از تساوی دو مثلث، تساوی مساحتهای آنهاست.ـم.

قضیهٔ ۳۸

مثلثهایی که قاعده‌های آنها متساوی و بر یک خط راست قرار دارند و رأسهای روبه‌رو به قاعده‌ها در آنها بر خطی موازی با قاعده‌ها واقع‌اند با هم مساوی[1] اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF مثلثهایی با قاعده‌های متساوی BC و EF هستند که بر یک خط راست BF قرار دارند و رأسهای D و A نیز بر خط GH موازی با BF واقع‌اند.

می‌گوییم مثلث ABC با مثلث DEF مساوی است.

زیرا از B و F به ترتیب خطهایی به موازات AC و DE می‌کشیم تا امتداد AD را به ترتیب در نقطه‌های G و H ببرند. [I.۳۱]

در این صورت شکلهای $GBCA$ و $DEFH$ متوازی‌الاضلاعهایی متساوی‌اند، زیرا دارای قاعده‌های متساوی BC و EFاند که ضلعهای روبه‌رو به قاعده‌ها در آنها بر یک خط راست قرار دارند. [I.۳۶]

به علاوه مثلث ABC نصف متوازی‌الاضلاع $GBCA$ است؛ زیرا قطر AB آن را نصف کرده است. [I.۳۴]

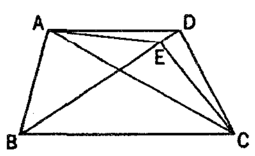
و مثلث DEF نیز نصف متوازی‌الاضلاع $DEFH$ است؛ زیرا قطر DF آن را نصف کرده است. [I.۳۴]

[اما نصفهای چیزهای متساوی، با هم مساوی‌اند.] بنابراین مثلث ABC با مثلث DEF مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۹

مثلثهای متساوی که یک قاعده داشته باشند و در یک طرف قاعده‌ها واقع باشند رأسهای‌شان بر خطی موازی قاعده قرار دارند.



فرض می‌کنیم که ABC و DBC مثلثهای متساوی با یک قاعدهٔ BC باشند که در یک طرف BC قرار دارند. [می‌گوییم که D و A بر خطی موازی BC قرار دارند]. [زیرا] فرض می‌کنیم D به A وصل شده است می‌گوییم که AD با BC موازی است. زیرا، اگر موازی نباشد، از A خط راست AE را به موازات BC می‌کشیم. [I.۳۱]

۱. منظور تساوی مساحتهای دو مثلث است.ـم.

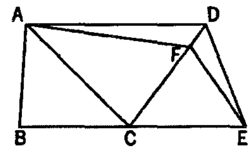
و C را به E وصل می‌کنیم. بنابراین مثلث ABC با مثلث EBC مساوی است؛ زیرا که قاعدهٔ آنها همان BC است و رأسهای آنها بر خطی موازی با قاعده‌ها قرار دارند. [۳۷.I]

اما ABC مساوی با DBC بود، بنابراین DBC نیز با EBC مساوی است، [اصـ.ب.۱] که مثلث بزرگتر با مثلث کوچکتر مساوی شده: که غیرممکن است. بنابراین AE با BC موازی نیست. همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط راست دیگری جز AD با BC موازی نیست. بنابراین AD با BC موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۰

مثلثهای متساوی که قاعده‌های آنها متساوی و بر یک خط راست و در یک طرف آن خط واقع‌اند رأسهای آنها نیز بر خطی موازی با همان خط قرار دارند.



فرض می‌کنیم ABC و CDE مثلثهای متساوی هستند با قاعده‌های متساویِ BC و CE واقع در یک طرف قاعده‌ها. می‌گوییم که D و A نیز بر خطی موازی با BE قرار دارند. A را به D وصل می‌کنیم و می‌گوییم که AD با BE موازی است. زیرا اگر موازی نباشد AF را از A به موازات BE می‌کشیم، [۳۱.I]
و F را به E وصل می‌کنیم.

بنابراین مثلث ABC با مثلث FCE مساوی است؛ زیرا قاعده‌های BC و CE در آنها متساوی و بر یک خط راست قرار دارند و رأسهای A و F بر خطی موازی با BE قرار دارند. [۳۸.I]

اما مثلث ABC با مثلث DCE مساوی است؛ بنابراین مثلث DCE با مثلث FCE نیز مساوی است، [اصـ.ب.۱]

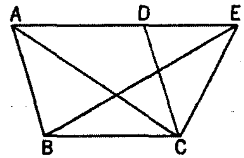
یعنی مثلث بزرگتر با مثلث کوچکتر مساوی است: که غیرممکن است. بنابراین AF با BE موازی نیست.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط دیگری جز AD با BE موازی نیست. بنابراین AD با BE موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۱

اگر متوازی‌الاضلاع و مثلثی یک قاعده داشته باشند و رأس مثلث بر امتداد ضلع موازی با قاعده از متوازی‌الاضلاع قرار داشته باشد متوازی‌الاضلاع دو برابر مثلث است.



زیرا فرض می‌کنیم قاعدهٔ BC از مثلث EBC با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ یکی است، و E بر امتداد ضلع AD، موازی با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، واقع است. می‌گوییم که متوازی‌الاضلاع $ABCD$ دو برابر مثلث BEC است.

زیرا فرض می‌کنیم C به A وصل شده است. در این صورت مثلث ABC با مثلث EBC مساوی است؛ زیرا قاعده‌های آنها یکی هستند و رأسهای آنها بر خط راستی موازی با قاعده‌ها قرار دارند. [۳۷.I]

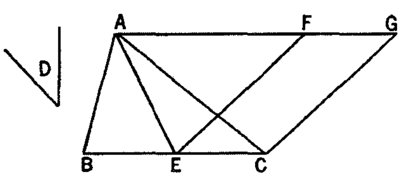
اما متوازی‌الاضلاع $ABCD$ دو برابر مثلث ABC است؛ زیرا قطر آن را به دو قسمت مساوی تقسیم‌کرده‌است. [۳۴.I]

پس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نیز دو برابر مثلث EBC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۲

مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی است به زاویهٔ راست‌خط مفروض، مساوی با مثلثی مفروض.



فرض می‌کنیم ABC مثلث مفروض است و D زاویهٔ راست‌خطِ مفروض. پس مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی به زاویهٔ راست‌خط D است که با مثلث ABC مساوی باشد.

فرض می‌کنیم E وسط BC باشد و A را به E وصل می‌کنیم. بر خط راست EC و در نقطهٔ E بر آن زاویهٔ CEF را مساوی با D می‌سازیم. [۲۳.I]

از A خطی به موازات BC و از C خطی به موازات EF می‌کشیم تا یکدیگر را در G ببرند. [۳۱.I]

در این صورت $FECG$ یک متوازی‌الاضلاع است. و، چون BE مساوی با EC است، مثلث ABE نیز با مثلث AEC مساوی است، زیرا قاعده‌های آنها، BE و EC، با هم مساوی‌اند و رأسهای روبه‌رو به قاعده‌ها بر خطی موازی با قاعده‌ها قرار دارند؛ [۳۸.I]

بنابراین مثلث ABC دو برابر مثلث AEC است. اما متوازی‌الاضلاع $FECG$ نیز دو برابر مثلث AEC است، زیرا قاعده‌های آنها یکی است، و رأس مثلث بر امتداد ضلع موازی با قاعده از متوازی‌الاضلاع قرار دارد؛ [۴۱.I]

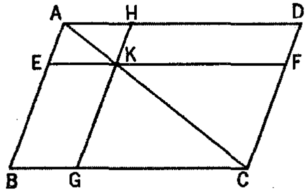
بنابراین متوازی‌الاضلاع $FECG$ با مثلث ABC مساوی و زاویهٔ CEF از آن با زاویهٔ مفروض D مساوی است.

بنابراین متوازی‌الاضلاع $FECG$ مساوی با مثلث مفروض ABC، به زاویهٔ CEF مساوی با D، رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۳

در هر متوازی‌الاضلاع، متممهای متوازی‌الاضلاعهای حول یک قطر با یکدیگر مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و AC یک قطر آن؛ و EH و FG متوازی‌الاضلاعهای حول این قطر هستند، و BK و KD به اصطلاح، متممهای آنها.

می‌گوییم که این متممها، یعنی BK و KD، با هم مساوی‌اند.

زیرا، چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و AC قطر آن است، پس مثلث ABC با مثلث ACD مساوی است. [۳۴.I]

باز، چون EH یک متوازی‌الاضلاع و AK قطر آن است، پس مثلث AEK با مثلث AHK مساوی است.

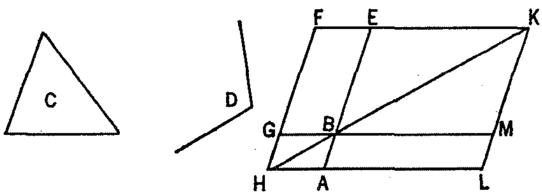
به همین دلیل مثلث KFC نیز با مثلث KGC مساوی است. اما، چون مثلث AEK با مثلث AHK مساوی، و KFC با KGC، پس مثلث AEK به اضافهٔ مثلث KGC با مثلث AHK به اضافهٔ KFC مساوی است. [اص.ب.۲]

و تمامی مثلث ABC نیز با تمامی مثلث ADC مساوی است؛ بنابراین متمم BK که باقی می‌ماند با متمم KD که باقیمانده است مساوی است. [اص.ب.۳]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۴

مطلوب اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی بر خط راستِ مفروض به زاویهٔ راست خط مفروض است که با مثلث مفروضی مساوی باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راستِ مفروض و C و D به ترتیب مثلث و زاویهٔ راست‌خطِّ مفروض‌اند. پس، مطلوب اضافه کردنِ متوازی‌الاضلاعی بر خط راست مفروض AB به زاویهٔ راست‌خط D است که با مثلث مفروض C مساوی باشد.

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع $BEFG$ مساوی با مثلث C به زاویهٔ EBG که مساوی با D است رسم شده است. [۴۲.I]

آن را طوری قرار می‌دهیم که BE با AB بر یک خط راست واقع شود. از A خطی به موازات BG یا EF رسم می‌کنیم تا امتداد FG را در H ببرد. [۳۱.I]

H را به B وصل می‌کنیم.

در این صورت چون خط راستِ HF بر موازیهای AH و EF فرود آمده است، زاویه‌های AHF و HFE مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۹.I]

بنابراین زاویه‌های BHG و GFE کمتر از دو قائمه‌اند؛ و اگر خطهای راست HB و FE تا بینهایت امتداد داده شوند، در طرفی یکدیگر را می‌برند که دو زاویه کمتر از دو قائمه‌اند؛[اص.م.۵]

فرض می‌کنیم امتداد آنها در K یکدیگر را ببرند؛ از نقطهٔ K خط راست KL را به موازات EA یا FH رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

تا امتدادهای HA و GB را در L و M ببرد. پس $HLKF$ یک متوازی‌الاضلاع است، و HK قطر آن. AG و ME متوازی‌الاضلاعهای حول قطرند، و LB و BF متممهای آنها حول HK؛ بنابراین LB با BF مساوی است؛ [۴۳.I]

اما BF با مثلث C مساوی است، بنابراین LB نیز با C مساوی است. [اص.ب.۱]

و چون زاویهٔ GBE با زاویهٔ ABM مساوی است، [۱۵.I]

و زاویهٔ GBE مساوی با D است، پس زاویهٔ ABM نیز با زاویهٔ D مساوی است.

بنابراین LB متوازی‌الاضلاعی است مساوی با مثلث مفروض C، به زاویهٔ ABM مساوی با D، که بر خط راست مفروض AB اضافه شده است.

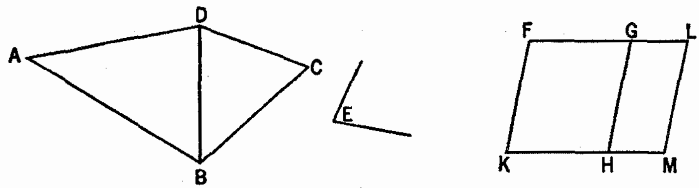
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۵

مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی است به زاویهٔ راست‌خط مفروض و مساوی[۱] با یک شکل راست خط مفروض.

فرض می‌کنیم $ABCD$ شکل راست خط مفروض است و E زاویهٔ راست خطِّ مفروض. پس مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی است به زاویهٔ E که با شکل راست خط $ABCD$ مساوی باشد.

۱. منظور مساوی از لحاظ مساحت است.ـم.



DB را وصل و فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع FH به زاویهٔ HKF مساوی با E، و مساوی با مثلث ABD رسم شده است. [۴۲.I]

متوازی‌الاضلاع GM به زاویهٔ GHM مساوی با E، را مساوی با مثلث DBC بر خط راست GH اضافه می‌کنیم. [۴۴.I]

چون هر یک از زاویه‌های HKF و GHM با E مساوی است، لذا خودِ این دو زاویه با هم مساوی می‌شوند. [اص.ب.۱]

حال زاویهٔ KHG را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین زاویه‌های FKH و KHG با زاویه‌های KHG و GHM مساوی می‌شوند. اما زاویه‌های FKH و KHG مساوی دو قائمه‌اند؛ [۲۹.I] بنابراین زاویه‌های KHG و GHM نیز مساوی با دو قائمه‌اند. بدین ترتیب از نقطهٔ H واقع بر GH و در دو طرف آن، دو خط راست KH و HM رسم شده و دو زاویهٔ مجاور مساوی با دو زاویهٔ قائمه ساخته‌اند، بنابراین KH و HM بر یک خط راست قرار دارند. [۱۴.I]

و چون خط راست HG بر موازیهای KM و FG فرود آمده است، دو زاویهٔ متبادل داخلی HGF و MHG با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

اکنون زاویهٔ HGL را به هر یک اضافه می‌کنیم بنابراین زاویه‌های MHG و HGL با زاویه‌های HGF و HGL مساوی‌اند. [اص.ب.۲]

اما زاویه‌های MHG و HGL مساوی با دو قائمه‌اند، [۲۹.I]

بنابراین زاویه‌های HGF و HGL نیز مساوی با دو قائمه‌اند. [اص.ب.۱]

از این‌رو FG با GL بر یک خط راست قرار دارند. [۱۴.I]

و، چون FK موازی و مساوی با HG است، [۳۴.I]

و HG هم مساوی و موازی با ML است، ML نیز مساوی و موازی است با KF؛ [اص.ب.۱؛ ۳۰.I]

و KM و FL واصل بین آنها هستند، بنابراین KM و FL نیز مساوی و موازی‌اند [۳۳.I]

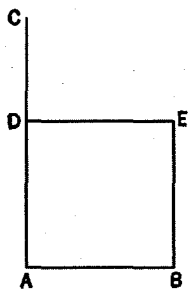
لذا $KFLM$ یک متوازی‌الاضلاع است. و، چون مثلث ABD با متوازی‌الاضلاع FH مساوی و DBC با متوازی‌الاضلاع GM مساوی است، پس تمامی شکل راست خط $ABCD$ با تمامی متوازی‌الاضلاع $KFLM$ مساوی است.

بنابراین $KFLM$ متوازی‌الاضلاعی است که مساوی با شکل راست‌خطِ مفروضِ $ABCD$، به زاویهٔ FKM مساوی با زاویهٔ مفروض E رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۶

مطلوب بنا کردن مربعی است بر خط راست مفروض.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض است؛ پس مطلوب بنا کردن مربعی است بر خط راست AB.

فرض می‌کنیم خط راست AC از نقطهٔ A واقع بر AB بر آن عمود، [۱۱.I]

و بر آن AD مساوی با AB جدا شده است؛ از نقطهٔ D خط راستِ DE را موازی با AB، و از نقطهٔ B، خط راست BE را موازی با AD رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

بنابراین $ADEB$ یک متوازی‌الاضلاع است؛ لذا، AB با DE مساوی است، و AD با BE. [۳۴.I]

اما AB با AD مساوی است؛ بنابراین چهار خط راست BA، AD، DE و EB با هم مساوی‌اند؛ و در نتیجه متوازی‌الاضلاع $ADEB$ متساوی‌الاضلاع است.

حال می‌گوییم که زاویه‌های آن نیز قائمه‌اند. زیرا، چون خط راست AD بر موازیهای AB و DE فرود آمده است، زاویه‌های BAD و ADE مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۹.I]

اما زاویهٔ BAD قائمه است، بنابراین زاویهٔ ADE نیز قائمه است. و در ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی اضلاع و زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی‌اند. [۳۴.I]

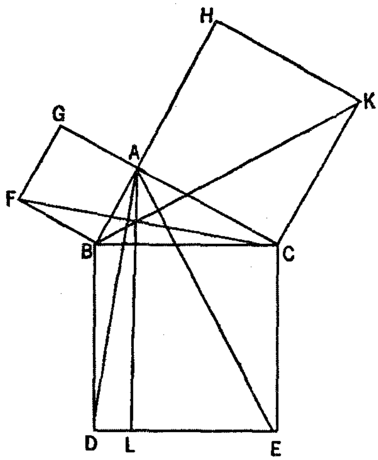
بنابراین هر یک از زاویه‌های ABE و BED نیز قائمه‌اند.

بنابراین هر چهار زاویهٔ $ABED$ قائمه هستند؛ متساوی‌الاضلاع بودن آن هم ثابت شده بود. پس چهارضلعی $ABED$ مربعی است که بر خط راست AB بنا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۷

در مثلثهای قائم‌الزاویه مربع ضلع روبه‌رو به زاویهٔ قائمه با مربعهای [مجموع] ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه مساوی است.



فرض می‌کنیم ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای به زاویهٔ قائمه BAC باشد.

می‌گوییم که مربع ضلع BC با مربعهای ضلعهای BA و AC مساوی است. زیرا، فرض می‌کنیم مربع $BDEC$ بر BC و مربعهای GB و HC به ترتیب بر ضلعهای BA و AC ساخته شده‌اند؛ [۴۶.I]

AL را از A به موازات BD یا CE می‌کشیم و AD و FC را وصل می‌کنیم.

چون هریک از زاویه‌های BAC و BAG یک قائمه است، پس نتیجه می‌شود که با یک خط راست BA و از نقطهٔ A بر آن، دو خط راست AC و AG در دو طرف آن رسم شده‌اند که زاویه‌های مجاور مساوی با دو قائمه ساخته‌اند، لذا AG و CA بر یک خط راست قرار دارند. [۱۴.I]

به همین دلیل BA و AH نیز بر یک خط راست قرار دارند. و چون زاویهٔ DBC و زاویهٔ FBA، به علت قائمه بودن، مساوی‌اند، اگر زاویهٔ ABC را به هر یک اضافه کنیم تمام زاویهٔ DBA با تمام زاویهٔ FBC مساوی می‌شود؛ [اص.ب.۲]

و به دلیل تساوی ضلعهای DB و FB به ترتیب با دو ضلع BC و BA و تساوی زاویه‌های ABD و FBC، قاعده‌های AD و FC با هم مساوی می‌شوند و مثلثهای ABD و FBC با هم؛[۴.I]

اما متوازی‌الاضلاع BL دو برابر مثلث ABD است، زیرا قاعدهٔ BD در آنها یکی است و رأس مثلث بر خط AL که موازی با قاعدهٔ BD است قرار دارد. [۴۱.I]

و مربع GB دو برابر مثلث FBC است، زیرا آنها هم در قاعدهٔ FB مشترک‌اند و رأس مثلث بر خط GC، موازی با FB قرار دارد. [۴۱.I]

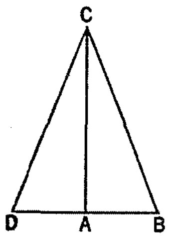
[اما دو برابرهای چیزهای مساوی، با هم مساوی‌اند.]. بنابراین متوازی‌الاضلاع BL نیز با مربع GB مساوی است. به همین طریق اگر E را به A و K را به B وصل کنیم، ثابت می‌شود که متوازی‌الاضلاع CL نیز با مربع HC مساوی است؛ بنابراین تمامی مربع $BDEC$ با دو مربع GB و HC مساوی است. [اص.ب.۲]

و مربع $BDEC$ بر BC رسم شده است و مربعهای GB و HC بر BA و AC؛ لذا مربع BC با مربعهای BA و AC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۸

اگر در مثلثی مربع یکی از ضلعها با [مجموع] مربعهای دو ضلع دیگر مثلث مساوی باشد، زاویهٔ بین این دو ضلعِ مثلث، قائمه است.



در مثلث ABC فرض می‌کنیم مربع ضلع BC با مربعهای ضلعهای BA و AC مساوی است؛

می‌گوییم که زاویهٔ BAC قائمه است.

فرض می‌کنیم AD از نقطهٔ A بر AC عمود شده و AD مساوی با BA جدا و DC وصل شده است. چون DA با AB مساوی است، مربع DA هم با مربع AB مساوی است.

مربع AC را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مربعهای DA و AC با مربعهای BA و AC مساوی می‌شوند. اما مربع DC با مربعهای DA و AC مساوی است، زیرا زاویهٔ DAC قائمه است؛ [۴۷.I]

و بنا به فرض مربع BC با مربعهای BA و AC مساوی است؛ بنابراین مربع DC با مربع BC مساوی است، لذا ضلع DC نیز با ضلع BC مساوی است، و چون در دو مثلث CAB و CAD، DA با AB مساوی و AC مشترک است، دو ضلع DA و AC با دو ضلع BA و AC مساوی می‌شوند؛ و DC با BC مساوی است؛ در نتیجه زاویهٔ DAC با زاویهٔ BAC مساوی می‌شود. [۸.I]

اما زاویهٔ DAC قائمه است، بنابراین زاویهٔ BAC نیز قائمه است.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ دوم

تعاریف

۱. متوازی‌الاضلاعی مستطیلی گفته می‌شود که دو خط راست شامل زاویهٔ قائمه داشته باشد.

۲. و در هر ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی یکی از دو متوازی‌الاضلاع حول قطر به انضمام دو متمم آن گونیا[۱] نامیده می‌شود.

مقالهٔ II. قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

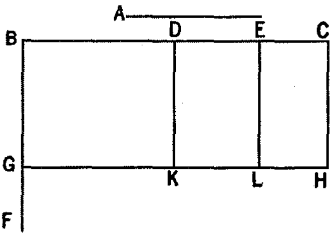
اگر از دو خط راست مفروض یکی به قطعه‌هایی دلخواه تقسیم شده باشد، مستطیل حاصل از این دو خط راست با [مجموع] مستطیلهای حاصل از خط راست تقسیم نشده و هر یک از قطعه‌های خط تقسیم شده مساوی است[۲].

---

۱. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، اگر از نقطهٔ N واقع بر قطر BD خطهای MNR و PNG را به موازات دو ضلع آن بکشیم، متوازی‌الاضلاع به چهار متوازی‌الاضلاع $MBGN$، $PDRN$، $MAPN$ و $RCGN$ تقسیم می‌شود که قطرهای دوتای آنها یعنی $MBGN$، $PDRN$ بر قطر متوازی‌الاضلاع اصلی منطبق‌اند که آنها را متوازی‌الاضلاعهای حول قطر می‌نامند و دوتای دیگر را متممهای متوازی‌الاضلاعهای اخیر می‌نامند. در شکل مقابل قسمت پرداز زده گونیا نامیده می‌شود.ـم.

۲. این قضیه با اتحاد جبری $A(BD+DE+EC) \equiv A\cdot BD + A\cdot DE + A\cdot EC$ هم‌ارز است.ـم.

فرض می‌کنیم A و BC دو خط راست مفروض‌اند و BC در نقطه‌های دلخواه D و E به قطعاتی تقسیم شده است. می‌گوییم که مستطیل حاصل از A و BC مساوی است با مستطیلهای A و BD، A و DE، و A و EC.



زیرا فرض می‌کنیم BF از B بر BC عمود شده، [۱۱.I]

و بر آن BG مساوی با A جدا شده است. [۳.I]

از G خط راست GH را به موازات BC می‌کشیم، [۳۱.I]

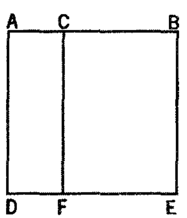
و از D، E و C خطوط راست DK و EL و CH را به موازات BG رسم می‌کنیم. پس BH با BK و DL و EH مساوی است. اما BH مستطیل حاصل از A و BC است، زیرا حاصل از GB و BC است که BG مساوی با A است؛ BK مستطیل حاصل از A و BD است، زیرا حاصل از GB و BD است که BG با A مساوی است؛ و DL مستطیل A و DE است، زیرا DK، یعنی BG، با A مساوی است.[۳۱.I]

همچنین EH نیز مستطیل A و EC است. بنابراین مستطیل A و BC با مستطیلهای A و BD، A و DE، و A و EC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

اگر خط راستی به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مستطیلهای حاصل از تمام خط و هر یک از قطعه‌ها با مربع تمام خط مساوی است[۱].



فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ دلخواه C به دو قسمت شده است.

می‌گوییم که مستطیل حاصل از AB و BC به علاوهٔ مستطیل حاصل از BA و AC با مربع AB مساوی است.

زیرا فرض می‌کنیم مربع $ADEB$ بر ضلع AB بنا شده است، [۴۶.I]

و CF از C به موازات AD یا BE رسم شده است. [۳۱.I]

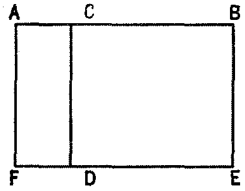
پس AE با AF و CE مساوی است. اما AE مربعی است به ضلع AB؛ AF مستطیل حاصل از BA و AC است، زیرا حاصل از DA و AC است، که AD با AB مساوی است؛ و CE مستطیل AB و BC است، زیرا BE با AB مساوی است.

۱. این قضیه با اتحاد جبری $(AC+CB)AC+(AC+CB)CB \equiv (AC+CB)^2$ هم‌ارز است.ـم.

بنابراین مستطیل BA و AC به علاوهٔ مستطیل AB و BC با مربع AB مساوی است.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر خط راستی به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مستطیل حاصل از تمامی خط و یکی از قطعه‌ها، با مستطیل حاصل از قطعه‌ها و مربع قطعهٔ مذکور مساوی است[۱].



فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ دلخواه C به دو قطعه تقسیم شده است.

می‌گوییم مستطیل حاصل از AB و BC با مستطیل حاصل از AC و CB به اضافهٔ مربع BC، مساوی است، زیرا فرض می‌کنیم مربع $CDEB$ بر ضلع CB بنا شده است. [۴۶.I]

ED را امتداد می‌دهیم تا خط مرسوم از A به موازات CD یا BE را در F ببرد. [۳۱.I]

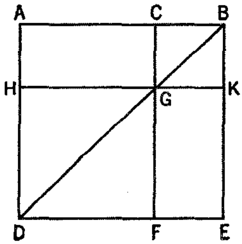
پس AE با AD و CE مساوی است. اما AE مستطیلی است حاصل از AB و BC، زیرا حاصل از AB و BE است که BE با BC مساوی است؛ AD مستطیل AC و CB است زیرا DC با CB مساوی است؛ و DB مربع CB است.

بنابراین مستطیل حاصل از AB و BC با مستطیل حاصل از AC و CB به اضافهٔ مربع BC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر خط راستی به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مربع تمامی خط با مربعهای هر یک از قطعه‌ها و دو برابر مستطیل حاصل از این قطعه‌ها مساوی است.



فرض می‌کنیم AB در نقطهٔ دلخواه C به دو قطعه تقسیم شده‌است؛ می‌گوییم که مربع AB با مربعهای AC و CB و دو برابر مستطیل حاصل از AC و CB مساوی است.

زیرا فرض می‌کنیم $ADEB$ مربع به ضلع AB باشد. [۴۶.I]

B را به D وصل می‌کنیم و CF را از C به موازات AD یا EB می‌کشیم، و از نقطهٔ G خط HK را موازی با AB یا DE رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

---

۱. این قضیه با اتحاد جبری $AB \cdot CB \equiv AC \cdot CB + CB^۲$ هم‌ارز است.ـم.

در این صورت چون CF با AD موازی و BD بر آنها فرود آمده است زاویه‌های متقابل داخلی و خارجی CGB و ADB با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

اما زاویه‌های ADB و ABD به علت تساوی BA و AD با هم مساوی‌اند؛ [۵.I]

بنابراین زاویهٔ CGB نیز با GBC مساوی است، در نتیجه ضلعهای BC و CG نیز مساوی می‌شوند [۶.I]

و اما CB با GK مساوی است، و CG با KB؛ در نتیجه GK نیز با KB مساوی و $CGKB$ متساوی‌الاضلاع است.

حال می‌گوییم که قائم‌الزاویه نیز هست. زیرا چون CG با BK موازی است، زاویه‌های KBC و GCB مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۹.I]

اما زاویهٔ KBC قائمه است، بنابراین زاویهٔ BCG نیز قائمه است، در نتیجه زاویه‌های متقابل داخلی CGK و GKB نیز قائمه‌اند. [۳۴.I]

بنابراین $CGKB$ قائم‌الزاویه است؛ و ثابت شده بود که متساوی‌الاضلاع نیز هست، بنابراین مربعی است به ضلع CB.

به همین دلیل HF نیز مربعی است به ضلع HG، یعنی AC. [۳۴.I]

بنابراین مربعهای HF و KC مربعهای AC و CB هستند. اما چون AG با GE متساوی است، و AG مستطیل AC و CB است، زیرا GC با CB مساوی است، بنابراین GE نیز با مستطیل AC و CB مساوی است. در نتیجه AG و GE با دو برابر مستطیل AC و CB مساوی است. اما مربعهای HF و CK نیز مربعهای AC و CB هستند؛ بنابراین چهار ناحیهٔ HF، CK، AG، و GE با مربعهای AC و CB و دو برابر مستطیل حاصل از AC و CB مساوی‌اند.

اما HF، CK، AG و GE تمامی $ADEB$ هستند، که همان مربع AB است. بنابراین مربع AB با مربعهای AC و CB و دو برابر مستطیل حاصل از AC و CB مساوی است[۱].

آنچه می‌خواستیم.

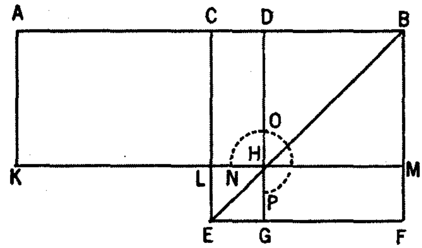
قضیهٔ ۵

اگر خط راستی به قطعه‌های مساوی و نامساوی تقسیم شده باشد، مستطیل حاصل از دو قطعهٔ نامساوی از تمامیِ خط، به اضافهٔ مربع خط راست بین نقاط، با مربع نیمهٔ خط مساوی است.[۲]

---

۱. این قضیه با اتحاد جبری $(AC+CB)^۲ \equiv AC^۲ + CB^۲ + ۲AC \cdot CB$ هم‌ارز است.ـم.

۲. این قضیه با اتحاد جبری $AD.DB + \{\frac{۱}{۲}(AD+DB) - DB\}^۲ \equiv \{\frac{۱}{۲}(AD+DB)\}^۲$ هم‌ارز است.ـم.



فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ C به قطعه‌های مساوی، و در نقطهٔ D به قطعه‌های نامساوی تقسیم شده است. می‌گوییم مستطیل حاصل از AD و DB به اضافهٔ مربع CD با مربع CB مساوی است.

زیرا فرض می‌کنیم $CEFB$ مربع به ضلع CB باشد. [I.۴۶]
قطر BE را رسم می‌کنیم و از D خط راست DG را به موازات BF یا CE، و از H خط راست KM را به موازات AB یا EF، و بالاخره AK را از A به موازات CL یا BM می‌کشیم.[I.۳۱]
حال، چون متممها، یعنی CH و HF با هم مساوی‌اند. [I.۴۳]
اگر DM را به هر یک اضافه کنیم، تمام CM با تمام DF مساوی می‌شود. اما CM با AL مساوی است، زیرا AC با CB مساوی است؛ [I.۳۶]
در نتیجه AL نیز با DF مساوی است. CH را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین تمامی AH با گونیا NOP مساوی می‌شود. اما AH مستطیل AD و DB است، زیرا DH با DB مساوی است، بنابراین گونیای NOP با مستطیل AD و DB نیز مساوی می‌شود. حال LG را که با مربع CD مساوی است به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین گونیای NOP و LG با مستطیل حاصل از AD و DB و مربع CD مساوی است. اما گونیای NOP و LG تمامی مربع $CEFB$ هستند، که بر CB بنا شده بودند؛ بنابراین مستطیل حاصل از AD و DB به اضافهٔ مربع CD با مربع CB مساوی است.

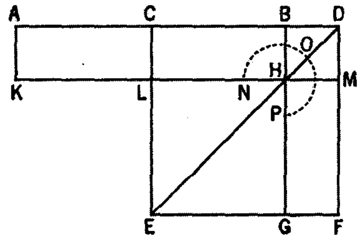
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر خط راستی نصف شده و بر امتداد آن خط راستی افزوده شده باشد، مستطیل حاصل از تمامی خط راست به دست آمده و خط راست افزوده شده به علاوهٔ مربع نصف خط راستِ اصلی با مربع خط راست حاصل از خط افزوده شده و نصف خط اصلی، مساوی است[۱].

فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ C نصف شده و خط راست BD بر امتداد آن افزوده شده است. می‌گوییم مستطیل حاصل از AD و DB به انضمام مربع به ضلع CB با مربع به ضلع CD مساوی است.

۱. این قضیه با اتحاد جبری $(۲CB + BD)BD + CB^۲ \equiv (CB + BD)^۲$ هم‌ارز است.ـم.



زیرا فرض می‌کنیم مربع $CEFD$ به ضلع CD رسم، [۴۶.I] و D به E وصل شده است؛ از نقطهٔ B، BG را به موازات CE یا DF می‌کشیم و از H، نقطهٔ تلاقی آن با قطر، KM را موازی با CD رسم می‌کنیم تا خط مرسوم از A به موازات CE را در K ببرد. [۳۱.I]

در این صورت، چون AC با CB مساوی است، AL نیز با CH مساوی است. [۳۶.I]

اما CH با HF مساوی است. [۴۳.I]

بنابراین AL نیز با HF مساوی است. حال CM را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین تمامی AM با گونیای NOP مساوی است. اما AM همان مستطیل AD و DB است، زیرا DM با DB مساوی است؛ لذا گونیای NOP نیز با مستطیل AD و DB مساوی استّ. فرض می‌کنیم LG، که با مربع BC مساوی است، به هر یک اضافه شود. بنابراین مستطیل حاصل از AD و DB همراه با مربع CB با گونیای NOP و LG مساوی است.

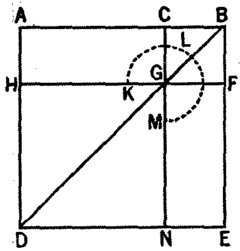
اما گونیای NOP و LG تمامی مربع $CEFD$ را می‌سازند که بر ضلع CD بنا شده است؛ بنابراین مستطیل حاصل از AD و DB همراه با مربع CB با مربع CD مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر خط راستی به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مربع تمامی خط و مربع یکی از قطعه‌ها بر روی هم، با دو برابر مستطیل حاصل از تمامی خط و قطعهٔ مذکور و مربع قطعهٔ دیگر مساوی است[۱].

فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ دلخواه C به دو قطعه تقسیم شده است. می‌گوییم مربع AB و مربع BC با دو برابر مستطیل حاصل از AB و BC و مربع CA مساوی است.



زیرا فرض می‌کنیم مربع $ADEB$ بر AB بنا شده، [۴۶.I] و شکل رسم شده است. پس چون AG با GE مساوی است، [۴۳.I]

CF را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین تمام AF با تمام CE مساوی است. بنابراین AF و CE دو برابر AF هستند. اما AF و CE گونیای KLM و مربع CF هستند؛ لذا

۱. این قضیه اتحاد جبری $(AC+CB)^{۲}+BC^{۲}\equiv ۲(AC+CB)BC+AC^{۲}$ هم‌ارز است.ـم.

گونیای KLM و مربع CF دو برابر AFاند. اما دو برابر مستطیل AB و BC نیز دو برابر AF است؛ زیرا BF با BC مساوی است؛ بنابراین گونیای KLM و مربع CF با دو برابر مستطیل AB و BC مساوی است؛ فرض می‌کنیم DG، که مربع AC است، به هر یک اضافه شود؛ در نتیجه گونیای KLM و مربعهای BG و GD با دو برابر مستطیل حاصل از AB و BC و مربع AC مساوی‌اند.

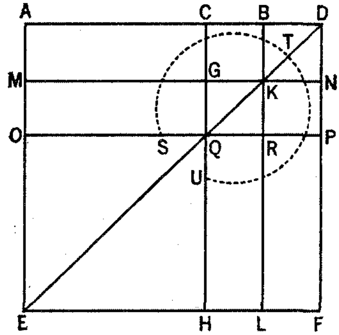
اما گونیای KLM و مربعهای BG و GD تمام $ADEB$ و CF هستند، که مربعهای به اضلاع AB و BC هستند؛ بنابراین مربع AB و مربع BC با دو برابر مستطیل حاصل از AB و BC و مربع AC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر خط راستی به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، چهار برابر مستطیل حاصل از تمامی خط و یکی از قطعه‌ها به علاوهٔ مربع قطعهٔ دیگر با مربع به ضلع تمامی خط راست متشکل از تمامی خط و قطعهٔ پیشگفته مساوی است[۱].

فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ دلخواه C به دو قطعه تقسیم شده است. می‌گوییم که چهار برابر مستطیل حاصل از AB و BC به علاوه مربع AC، با مربع خط راست متشکّل از AB و CB، مساوی است.



8

زیرا، فرض می‌کنیم خط راست AB به اندازهٔ BD مساوی با CB امتداد داده شده و مربع $AEFD$ بر AD بنا، و [نقاط تقسیم] این خط عیناً بر ضلع دیگر [DF] نیز تکرار شده است.

در این صورت، چون CB با BD مساوی است، و CB با GK، و BD با KN، بنابراین GK نیز با KN مساوی است. به همین دلیل QR هم با RP مساوی است. و چون BC با BD مساوی است، و GK با KN، بنابراین CK نیز با KD مساوی است، و GR با RN.[۳۶.I]

اما CK با RN مساوی است، زیرا متممهای متوازی‌الاضلاعی CP هستند؛ [۴۳.I]

بنابراین KD نیز با GR مساوی است؛ در نتیجه چهار مساحت DK، CK، GR، RN با هم مساوی‌اند. لذا این چهار مساحت چهار برابر CK می‌شوند.

۱. این قضیه با اتحاد جبری $\overline{\{(AC+CB)+CB\}^۲} \equiv ۴(AC+CB)BC+AC^۲$، یعنی با

$$۴ab+(a-b)^۲ \equiv (a+b)^۲$$

هم‌ارز است.ـ م.

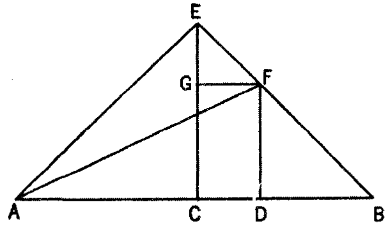
باز، چون CB با BD مساوی است، و BD با BK یعنی با CG، و CB با GK یعنی با GQ، بنابراین CG نیز با GQ مساوی است. و، چون CG با GQ مساوی است و QR با RP، AG نیز با MQ مساوی می‌شود، و QL با RF. [۳۶.I]

اما MQ با QL مساوی است، زیرا متممهای متوازی‌الاضلاعی ML هستند؛ [۴۳.I] بنابراین AG نیز با RF مساوی است؛ در نتیجه چهار مساحت AG، MQ، QL و RF با هم مساوی‌اند. لذا این چهار مساحت چهار برابر AG است. اما ثابت شده بود که چهار مساحت CK، KD، GR و RN چهار برابر CK هستند؛ بنابراین هشت مساحت، که گونیای STU را در بر می‌گیرند، چهار برابر AK هستند. اما، چون AK مستطیل AB و BD است، زیرا BK با BD مساوی است، بنابراین چهار برابر مستطیل AB و BD چهار برابر AK است. ولی ثابت شده بود که گونیای STU چهار برابر AK است؛ بنابراین چهار برابر مستطیل AB و BD با گونیای STU مساوی است. حال OH را که با مربع AC مساوی است به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین چهار برابر مستطیل AB و BD به اضافهٔ مربع AC با گونیای STU و OH مساوی می‌شود. اما گونیای STU و OH تمامی مربع $AEFD$ است، که بر AD بنا شده است؛ بنابراین چهار برابر مستطیل AB و BD به علاوهٔ مربع AC با مربع AD مساوی است. اما BD با BC مساوی است؛ بنابراین چهار برابر مستطیل حاصل از AB و BC به علاوهٔ مربع AC با مربع AD یعنی مربع بنا شده بر خط راست متشکل از AB و BC، مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

اگر خط راستی به قطعه‌های مساوی و نامساوی تقسیم شده باشد، مربعهای آن دو قطعهٔ نامساوی که مجموع آنها مساوی تمام خط است، با دو برابر مربعهای نیمهٔ خط و خط راست بین نقاط تقسیم، مساوی‌اند[۱].



فرض می‌کنیم خط راست AB در C به دو قطعهٔ مساوی و در D به دو قطعهٔ نامساوی تقسیم شده است؛

می‌گوییم که مربعهای AD و DB دو برابر مربعهای AC و CD هستند.

زیرا، از C عمودی بر AB اخراج، و بر آن

۱. این قضیه با اتحاد جبری $AD^2 + DB^2 \equiv 2(AC^2 + CD^2)$ یعنی $(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$ هم‌ارز است.ــم.

طول CE را مساوی با AC یا CB جدا، و E را به A و B وصل می‌کنیم. از نقطهٔ D خطی موازی با EC می‌کشیم تا EB را در F ببرد. FG را از F به موازات AB می‌کشیم و F را به A وصل می‌کنیم. حال، چون AC با CE مساوی است، زاویهٔ EAC نیز با زاویهٔ AEC مساوی است. و چون زاویهٔ ACE قائمه است پس زاویه‌های AEC و EAC مساوی یک قائمه می‌شوند. [۳۲.I] و مساوی نیز هستند. پس هر یک از زاویه‌های CEA و CAE نصف زاویهٔ قائمه است. به همین دلیل هر یک از زاویه‌های CEB و EBC نیز نصف زاویهٔ قائمه است. بنابراین تمامی زاویهٔ AEB یک قائمه است. و، چون زاویهٔ GEF نصف قائمه است، و EGF قائمه است، زیرا متقابل داخلی و خارجی با زاویهٔ ECB است، [۲۹.I]

زاویهٔ EFG نصف قائمه می‌شود؛ [۳۲.I]

لذا زاویهٔ GEF با زاویهٔ دیگر EFG مساوی است و از آنجا ضلع EG نیز با GF مساوی است. [۶.I]

باز، چون زاویهٔ B نصف قائمه است، و FDB قائمه است، زیرا باز متقابل داخلی و خارجی با ECB است، [۲۹.I]

زاویهٔ دیگر BFD نصف قائمه می‌شود؛ [۳۲.I]

بنابراین زاویهٔ B با زاویهٔ DFB مساوی است، از آنجا ضلع FD نیز با ضلع DB مساوی است. [۶.I]

اما، چون AC با CE مساوی است، مربع AC نیز با مربع CE مساوی است؛ بنابراین مربعهای AC و CE دو برابر مربع AC می‌شوند. اما مربع EA با مربعهای AC و CE مساوی است، زیرا زاویهٔ ACE قائمه است؛ [۴۷.I]

بنابراین مربع EA دو برابر مربع AC است. باز، چون EG با GF مساوی است، مربع EG نیز با مربع GF مساوی است؛ لذا مربعهای EG و GF دو برابر مربع GF هستند. اما مربع EF با مربعهای EG و GF مساوی است. در نتیجه مربع EF دو برابر مربع GF است. اما GF با CD مساوی است؛ [۳۴.I]

بنابراین مربع EF دو برابر مربع CD است. اما مربع EA نیز دو برابر مربع AC است؛ لذا مربعهای AE و EF دو برابر مربعهای AC و CD هستند. و مربع AF با مربعهای AE و EF مساوی است، زیرا زاویهٔ AEF قائمه است؛ [۴۷.I]

بنابراین مربع AF دو برابر مربعهای AC و CD است.

اما مربعهای AD و DF با مربع AF مساوی‌اند، زیرا زاویهٔ D قائمه است؛ [۴۷.I]

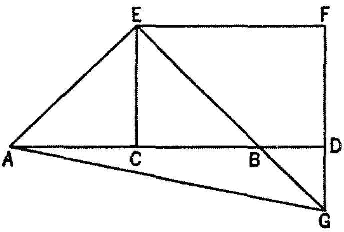
بنابراین مربعهای AD و DF دو برابر مربعهای AC و CD هستند. و DF با DB مساوی است؛ لذا مربعهای DA و DB دو برابر مربعهای AC و CD هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

اگر خط راست مفروضی نصف، و بر امتداد آن خط راستی افزوده شود، مربع تمام خط راستِ حاصل و مربع خط راست افزوده، بر روی هم، با دو برابر مربعهای نصف خط مفروض و خط راست متشکّل از نصف خط مفروض و خط راست افزوده، مساوی‌اند[۱].

فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ C نصف و بر امتداد آن خط راست BD افزوده شده است. می‌گوییم که مربعهای AD و DB دو برابر مربعهای AC و CD هستند.



زیرا فرض می‌کنیم از نقطهٔ C عمودی بر AB اخراج، [۱۱.I]
و بر آن طول CE را مساوی با AC یا CB جدا [۳.I] و EB و EA را وصل کرده‌ایم؛ از E خطی به موازات AD، و از D خطی به موازات EC می‌کشیم تا یکدیگر را در نقطهٔ F ببرند. [۳۱.I]

حال، چون خط راست EF بر دو خط راست موازی EC و FD فرود آمده است، زاویه‌های CEF و EFD مساوی با دو قائمه‌اند؛ [۲۹.I]
بنابراین زاویه‌های FEB و EFD کمتر از دو قائمه‌اند. اما امتدادهای خطوط راست در طرفی که کمتر از دو قائمه‌اند یکدیگر را می‌برند، [I.اصـ.م.۵]
لذا امتدادهای EB و FD در سمتهای B و D یکدیگر را می‌برند. فرض می‌کنیم این امتدادها در G یکدیگر را ببرند، و AG را وصل می‌کنیم. حال، چون AC با CE مساوی، و زاویهٔ EAC با زاویهٔ AEC مساوی، [۵.I]
و زاویهٔ C قائمه است؛ بنابراین هر یک از زاویه‌های EAC و AEC نصف قائمه است. [۳۲.I]
و به همین دلیل هر یک از زاویه‌های CEB و EBC نیز نصف قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ AEB قائمه است. و، چون زاویهٔ EBC نصف قائمه است، زاویهٔ DBG نیز نصف قائمه است.[۱۵.I]

اما زاویهٔ BDG نیز قائمه است، زیرا با زاویهٔ DCE متبادل داخلی است؛ [۲۹.I]
بنابراین زاویهٔ دیگر DGB نصف قائمه است؛ [۳۲.I]
لذا زاویهٔ DGB با زاویهٔ DBG مساوی است، از آنجا ضلع BD نیز با ضلع GD مساوی است. [۶.I]

باز، چون زاویهٔ EGF نصف قائمه است، و زاویهٔ F قائمه است، چون مقابل به زاویهٔ C و با آن مساوی است، [۳۴.I]

---

۱. این قضیه با اتحاد جبری $AD^2 + DB^2 \equiv 2(AC^2 + CD^2)$ یعنی $(b+a)^2 + (b-a)^2 \equiv 2(a^2 + b^2)$ هم‌ارز است.ـم.

زاویهٔ دیگر FEG نصف قائمه می‌شود؛ [۳۲.I]

بنابراین زاویه EGF و FEG با هم مساوی، و از آنجا ضلع GF نیز با ضلع EF مساوی می‌شود. [۶.I]

اما چون مربع EC با مربع CA مساوی است، مربعهای EC و CA دو برابر مربع CA می‌شوند.

اما مربع EA با مربعهای EC و CA مساوی است؛ [۴۷.I]

بنابراین مربع EA دو برابر مربع AC خواهد شد. [اص.ب.۱]

باز، چون FG با EF مساوی است، مربع FG نیز با مربع EF مساوی است؛ بنابراین مربعهای GF و FE دو برابر مربع EF هستند. اما مربع EG با مربعهای GF و FE مساوی است؛ [۴۷.I]

بنابراین مربع EG دو برابر مربع EF است. و EF با CD مساوی است [۳۴.I]

بنابراین مربع EG دو برابر مربع CD است. اما ثابت شده بود که مربع EA دو برابر مربع AC است؛ بنابراین مربعهای AE و EG دو برابر مربعهای AC و CD هستند. و مربع AG با مربعهای AE و EG مساوی است؛ [۴۷.I]

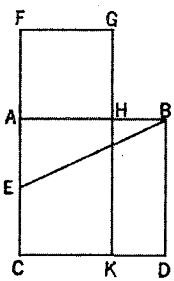
بنابراین مربع AG دو برابر مربعهای AC و CD است. اما مربعهای AD و DG با مربع AG مساوی‌اند. [۴۷.I]

لذا مربعهای AD و DG دو برابر مربعهای AC و CD هستند. و DG مساوی است با DB؛ بنابراین مربعهای AD و DB دو برابر مربعهای AC و CD هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

مطلوب تقسیم خط راست مفروضی به دو قطعه است به طوری که مستطیل حاصل از تمام خط و یکی از قطعه‌ها با مربع قطعهٔ دیگر مساوی باشد[۱].



فرض می‌کنیم AB خط مفروض است؛ پس مطلوب تقسیم AB به دو قطعه است به طوری که مستطیلِ حاصل از تمام AB و یکی از قطعه‌ها با مربع قطعهٔ دیگر مساوی باشد. فرض می‌کنیم مربع $ABDC$ بر AB بنا شده است. [۴۶.I]

AC را در نقطهٔ E نصف، و B را به E وصل می‌کنیم، و CA را امتداد می‌دهیم و بر آن EF را مساوی با BE جدا می‌کنیم. حال مربع FH را بر AF بنا می‌کنیم. GH را امتداد می‌دهیم تا CD را در K ببرد.

۱. این قضیه با معادلهٔ جبری $-x^۲ + ۳ax = a^۲$ هم‌ارز است.ـ م.

می‌گوییم که AB در نقطهٔ H به دو قطعهٔ HB و HA تقسیم شده است به گونه‌ای که مستطیل حاصل از AB و BH با مربع AH مساوی است.

زیرا، خط راست AC در نقطهٔ E نصف و FA به آن افزوده شده است، مستطیل حاصل از CF و FA همراه با مربع AE با مربع EF مساوی است. [۶.II]

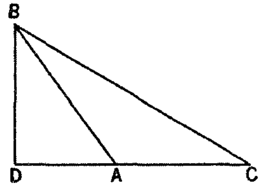
اما EF با EB مساوی است؛ بنابراین مستطیل CF و FA به علاوهٔ مربع AE با مربع EB مساوی است. اما مربعهای BA و AE با مربع EB مساوی است، زیرا زاویهٔ A قائمه است؛ [۴۷.I] بنابراین مستطیل CF و FA همراه با مربع AE با مربعهای BA و AE مساوی است. مربع AE را از هر یک کم می‌کنیم؛ لذا مستطیل CF و FA که باقی می‌ماند با مربع AB مساوی است.

اما مستطیل CF و FA همان FK است، زیرا AF با FG مساوی است؛ و مربع AB همان AD است؛ بنابراین FK با AD مساوی است. حال AK را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین FH که باقیمانده با DH مساوی است. و HD مستطیل AB و BH است، زیرا AB با BD مساوی است؛ و FH همان مربع AH است؛ بنابراین مستطیل حاصل از AB و BH با مربع HA مساوی است. لذا خط راست دادهٔ شدهٔ AB در نقطهٔ H به دو قطعه تقسیم شده است به طوری که مستطیل AB و BH با مربع HA مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

در مثلثهای منفرج‌الزاویه مربع ضلع روبه‌رو به زاویهٔ منفرجه از مربعهای اضلاع مجاور به این زاویه، به اندازهٔ دو برابر مستطیل حاصل از یکی از این دو ضلع و قطعه‌ای که بر امتداد همین ضلع بین رأس زاویهٔ منفرجه و پای ارتفاع وارد بر آن قرار دارد بزرگتر است.



فرض می‌کنیم ABC مثلث منفرج‌الزاویه به زاویهٔ منفرجهٔ BAC، و BD عمود وارد از B بر امتداد AC باشد. می‌گوییم که مربع BC از مربعهای BA و AC به اندازهٔ دو برابر مستطیل حاصل از AC و AD بزرگتر است.

زیرا، چون خط راست DC در نقطهٔ دلخواه A به دو قطعه تقسیم شده است، مربع DC با مربعهای CA و AD و دو برابرِ مستطیل حاصل از CA و AD مساوی است. [۴.II]

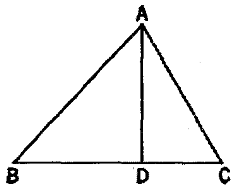
مربع DB را به هر یک اضافه می‌کنیم، بنابراین مربعهای CA، AD و DB و دو برابر مستطیل CA و AD با مربعهای CD و DB مساوی‌اند.

اما مربع CB با مربعهای CD و DB مساوی است، زیرا زاویهٔ D قائمه است؛ [۴۷.I]
و مربع AB با مربعهای AD و DB مساوی است؛ [۴۷.I]
بنابراین مربع CB با مربعهای CA و AB و دو برابر مستطیل حاصل از CA و AD مساوی است؛ لذا مربع CB از مجموع مربعهای AB و AC به اندازهٔ دو برابر مستطیل حاصل از AC و AD بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

در مثلثهای حادّالزوایا مربع ضلع روبه‌رو به یک زاویهٔ حادّه از مربعهای دو ضلع دیگر به اندازهٔ دو برابر مستطیل حاصل از یکی از این دو ضلع و قطعه‌ای از همین ضلع واقع بین رأس این زاویهٔ حادّه و پای ارتفاع وارد بر آن، کوچکتر است.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی است به زاویهٔ حادهٔ B و AD عمود وارد از A بر BC.

می‌گوییم که مربع AC از مربعهای AB و BC، به اندازهٔ دو برابر مستطیل حاصل از CB و BD، کوچکتر است.

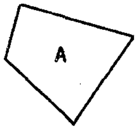
زیرا، چون خط راست BC در نقطهٔ دلخواه D به دو قطعه تقسیم شده است، مربعهای CB و BD با دو برابر مستطیل حاصل از CB و BD و مربع DC مساوی است. [۷.II]
مربع DA را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مربعهای CB و BD و DA با دو برابر مستطیل حاصل از CB و BD و مربعهای AD و DC مساوی‌اند.

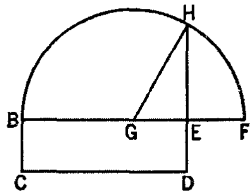
اما مربع AB با مربعهای BD و DA مساوی است، زیرا زاویهٔ D قائمه است؛ [۴۷.I]
و مربع AC بامربعهای AD و DC مساوی است؛ بنابراین مربعهای CB و BA با مربع AC و دو برابر مستطیل حاصل از CB و BD مساوی‌اند، از اینجا مربع AC به تنهایی از مربعهای CB و BA به اندازهٔ دو برابر مستطیل حاصل از CB و BD، کوچکتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

مطلوب رسم مربعی است که با شکل راست‌خطّ مفروضی مساوی باشد.





فرض می‌کنیم A شکل راست‌خطّ مفروض باشد. پس مطلوب رسم مربعی است که با شکل راست خطّ A مساوی باشد.

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع مستطیلی BD مساوی با شکل راست‌خطّ A رسم شده است. [۴۵.I]

پس اگر BE مساوی ED شود به آنچه خواسته‌شده دست یافته‌ایم؛ زیرا مربع BD مساوی با شکل راست‌خطّ A رسم شده است.

اما، اگر BE مساوی ED نباشد، یکی از دیگری بزرگتر است.

فرض می‌کنیم BE خط راست بزرگتر باشد؛ آن را امتداد می‌دهیم و بر آن FE را مساوی با ED جدا و فرض می‌کنیم نقطهٔ G وسط BF باشد. به مرکز G و شعاع GB یا GF نیم‌دایرهٔ BHF را رسم می‌کنیم و DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در H ببرد و GH را وصل می‌کنیم. پس، چون خط راست BF در G به قطعات مساوی، و در E به قطعات نامساوی تقسیم شده است مستطیل حاصل از BE و EF به اضافهٔ مربع EG با مربع GF مساوی است. [۵.II]

اما GF با GH مساوی است؛ بنابراین مستطیل حاصل از BE و EF به اضافهٔ مربع GE با مربع GH مساوی است. اما مربعهای HE و EG با مربع GH مساوی‌اند. [۴۷.I]

بنابراین مستطیل حاصل از BE و EF به اضافهٔ مربع GE با مربعهای HE و EG مساوی است. حال مربع GE را از هر یک کم می‌کنیم. بنابراین مستطیل باقیماندهٔ حاصل از BE و EF با مربع EH مساوی است. اما مستطیل BE و EF، همان مستطیل BD است، زیرا EF با ED مساوی است؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع BD با مربع HE مساوی است؛ و BD با شکل راست خطّ A مساوی است. بنابراین شکل راست خطّ A نیز با مربعی که می‌توان بر EH رسم کرد مساوی است.

بنابراین یک مربع، یعنی مربعی که می‌توان بر EH رسم کرد، مساوی با شکل راست خط مفروض A رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ سوم

تعاریف

۱. دایره‌های متساوی دایره‌هایی هستند که قطرها یا شعاعهای متساوی دارند.

۲. خط راستی را وقتی بر دایره مماس گویند که دایره را ببرد ولی امتداد آن از دایره عبور نکند.

۳. دو دایره را وقتی مماس بر هم گویند که یکدیگر را ببرند ولی از هم عبور نکنند.

۴. در یک دایره خطهای راست متساوی‌الفاصله از مرکز خطهای راستی هستند که عمودهای وارد از مرکز بر آنها با هم مساوی باشند.

۵. و خطی از مرکز دایره فاصلهٔ بیشتر دارد که عمود وارد از مرکز بر آن بزرگتر باشد.

۶. قطعهٔ دایره، شکلی است محدود به یک خط راست، به نام قاعدهٔ قطعه، و کمانی از یک دایره.

۷. زاویهٔ قطعه زاویهٔ حاصل از کمان و قاعدهٔ قطعه است در یکی از دو سرِ قاعده.

۸. زاویهٔ محاط در یک قطعه زاویهٔ حاصل از دو خط راستی است که یک نقطه از کمانِ قطعه را به دو سرِ قاعدهٔ آن وصل می‌کند.

۹. و، وقتی خطهای راستی که این زاویه را در بر می‌گیرند کمانی از دایرهِ را جدا کنند، می‌گویند زاویه روبه‌رو به آن کمان است.

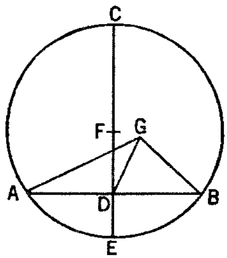
۱۰. قطاع دایره شکلی است محدود به زاویه‌ای به رأس مرکز و کمانی از دایره که دو ضلعِ زاویه از دایره جدا می‌کنند.

۱۱. قطعه‌های متشابه دایره‌ها قطعه‌هایی هستند که زاویه‌های آنها، یا زاویه‌های محاط در آنها با هم مساوی‌اند.

مقالهٔ III. قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

مطلوب پیدا کردن مرکز یک دایرهٔ مفروض است.



فرض می‌کنیم ABC دایرهٔ مفروض باشد. پس مطلوب پیدا کردن مرکز دایرهٔ ABC است.

خط راست دلخواه AB را در داخل آن رسم، و نقطهٔ D وسط آن را پیدا می‌کنیم. از D عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ E و C ببرد. نقطهٔ F وسط CE را پیدا می‌کنیم. می‌گوییم F مرکز دایرهٔ ABC است.

فرض می‌کنیم F مرکز دایره نباشد، بلکه G مرکز آن باشد. G را به A و D و B وصل می‌کنیم. در دو مثلث GAD و GBD، AD مساوی با BD، GD در هر دو مشترک، و GA مساوی با GB است، چون هر دو شعاع دایره‌اند. بنابراین زاویهٔ ADG با زاویهٔ BDG مساوی می‌شود. [۸.I]

اما وقتی خط راستی بر خط راستی فرود آید و دو زاویهٔ مجاور مساوی با یکدیگر بسازد، هر یک از آن زاویه‌ها یک قائمه است؛ [تع. ۱۰.I]

بنابراین زاویهٔ GDB قائمه است. اما زاویهٔ FDB نیز قائمه است. بنابراین زاویهٔ FDB با زاویهٔ GDB مساوی است، زاویهٔ بزرگتر با زاویهٔ کوچکتر مساوی شده است: که غیرممکن است.

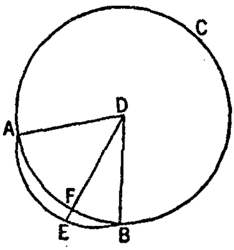
پس G مرکز دایرهٔ ABC نیست. به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ نقطه‌ای جز F مرکز نیست. پس F مرکز دایرهٔ ABC است.

فرع. از اینجا معلوم می‌شود که اگر در یک دایره خط راستی بر خط راستی عمود باشد و آن را به دو جزء متساوی تقسیم کند، مرکز دایره بر آن عمود قرار دارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

اگر بر محیط دایره‌ای دو نقطهٔ دلخواه بگیریم، خط راست واصل بین آنها در داخل دایره واقع می‌شود.



فرض می‌کنیم ABC یک دایره است و A و B دو نقطهٔ دلخواه بر آن هستند.

می‌گوییم که خط راست واصل از A به B در داخل دایره قرار دارد.

زیرا، فرض می‌کنیم در داخل قرار ندارد و در خارج آن به صورت AEB قرار دارد. مرکز دایرهٔ ABC را پیدا، [۱.III]

و فرض می‌کنیم D باشد. D را به A و B وصل می‌کنیم و از نقطهٔ D خط راست DFE را می‌کشیم. چون DA با DB مساوی است زاویهٔ DAE نیز با زاویهٔ DBE مساوی است. [۵.I]

و چون در مثلث DAE، EB امتداد ضلع AE است، زاویهٔ DEB از زاویهٔ DAE بزرگتر است. [۱۶.I]

اما زاویهٔ DAE با زاویهٔ DBE مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ DEB از زاویهٔ DBE بزرگتر است.

و زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است؛ [۱۹.I]

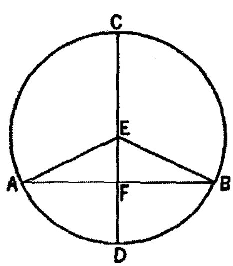
لذا DB از DE بزرگتر است. اما DB با DF مساوی است؛ بنابراین DF از DE بزرگتر است. یعنی خط راست کوچکتر از خط راست بزرگتر، بزرگتر شده است: که غیرممکن است. بنابراین خط راست واصل بین A و B بیرون دایره قرار نمی‌گیرد.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که بر محیط دایره هم قرار نمی‌گیرد. پس، در داخل آن قرار می‌گیرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر در یک دایره، خط راستی که از مرکز می‌گذرد خط راستی را که از مرکز نمی‌گذرد نصف کند، بر آن عمود نیز هست، و اگر بر آن عمود باشد آن را نصف هم می‌کند.



فرض می‌کنیم خط راست CD از مرکز دایرهٔ ABC گذشته و خط راست AB را که از مرکز نگذشته است در F نصف کند؛

می‌گوییم که بر آن عمود هم هست.

زیرا، فرض می‌کنیم مرکز دایره را پیدا کرده‌ایم و آن E است؛ EA و EB را وصل می‌کنیم. پس، چون AF مساوی با FB و FE مشترک است، دو ضلع با دو ضلع مساوی و EA با EB مساوی است، بنابراین زاویهٔ AFE با زاویهٔ BFE مساوی می‌شود. [۸.I]

اما اگر خط راستی بر خط راستی وارد شده باشد و با آن دو زاویهٔ مجاور مساوی بسازد، هر یک از آن زاویه‌ها یک قائمه است؛ [I.تع. ۱۰]

بنابراین هر یک از زاویه‌های AFE و BFE یک قائمه است. در نتیجه CD که از مرکز گذشته و AB را که از مرکز نگذشته نصف کرده است، آن را به زاویهٔ قائمه هم می‌برد.

باز فرض می‌کنیم CD بر AB عمود است؛ می‌گوییم که آن را نصف هم می‌کند، یعنی AF با FB مساوی است. زیرا، در همین شکل، چون EA با EB مساوی است، زاویهٔ EAF نیز با زاویهٔ EBF مساوی است. [I.۵]

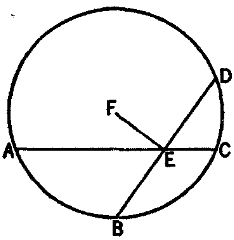
اما زاویهٔ قائمهٔ AFE با زاویهٔ قائمهٔ BFE مساوی است. بنابراین دو مثلث EAF و EBF دو زاویهٔ متساوی و یک ضلع مشترک با هم دارند، و این ضلع روبه‌رو به یکی از زاویه‌های مساوی است، لذا ضلعهای دیگر آنها با هم مساوی می‌شوند، [I.۲۶]

یعنی AF با BF مساوی می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر در یک دایره دو خط راست که از مرکز نمی‌گذرند متقاطع باشند، یکدیگر را نصف نمی‌کنند.



فرض می‌کنیم در دایرهٔ $ABCD$ دو خط راست AC و BD، که از مرکز نمی‌گذرند، یکدیگر را در E بریده‌اند.

می‌گوییم که این دو خط راست یکدیگر را نصف نمی‌کنند. زیرا، فرض می‌کنیم یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس AE و EC با هم مساوی‌اند، و BE و ED با هم؛ فرض می‌کنیم که F، مرکز دایره، را پیدا کرده‌ایم؛ [III.۱]

E را به F وصل می‌کنیم. در این صورت، چون خط راست FE، مارِّ بر مرکز، AC را که از مرکز نگذشته نصف کرده است، پس بر آن عمود است؛ [III.۳]

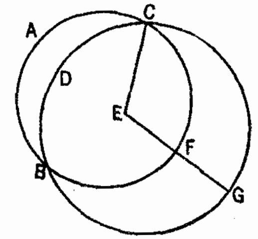
بنابراین زاویهٔ FEA قائمه است. باز چون خط راست FE خط راست BD را نصف کرده بر آن نیز عمود است؛ [III.۳]

بنابراین زاویهٔ FEB قائمه است. اما ثابت شده بود که زاویهٔ FEA نیز قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ FEA با زاویهٔ FEB مساوی است، زاویهٔ کوچکتر با زاویهٔ بزرگتر: که غیرممکن است. بنابراین AC و BD یکدیگر را نصف نمی‌کنند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

اگر دو دایره یکدیگر را ببرند، مرکزهای آنها یکی نیستند.



فرض می‌کنیم دو دایرهٔ ABC و CDG یکدیگر را در دو نقطهٔ C و B بریده‌اند.

می‌گوییم که مرکز این دو دایره یکی نیستند. زیرا، فرض می‌کنیم مرکز این دو دایره یکی و مثلاً، نقطهٔ E است؛ آن را به C وصل می‌کنیم و EFG را به دلخواه می‌کشیم.

در این صورت، چون E مرکز دایرهٔ ABC است، پس EC با EF مساوی است. [I.تع.۱۵]

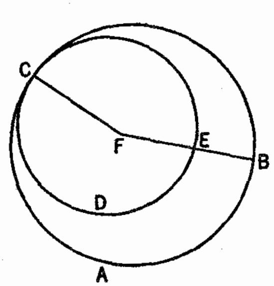
باز چون E مرکز دایرهٔ CDG است، پس EC با EG مساوی است. اما ثابت شده بود که EC با EF هم مساوی است؛ بنابراین EF هم با EG مساوی است، کوچکتر با بزرگتر: که غیرممکن است.

بنابراین نقطهٔ E مرکز دو دایرهٔ ABC و CDG نیست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر دو دایره بر هم مماس باشند، مراکز آنها یکی نیستند.



فرض می‌کنیم دو دایرهٔ ABC و CDE در نقطهٔ C بر هم مماس‌اند. می‌گوییم که یک مرکز ندارند.

زیرا، فرض می‌کنیم مرکز آنها یکی، یعنی نقطهٔ F باشد. F را به C وصل، و خط راست دلخواه FEB را رسم می‌کنیم.

پس، چون F مرکز دایرهٔ ABC است، FC با FB مساوی است.

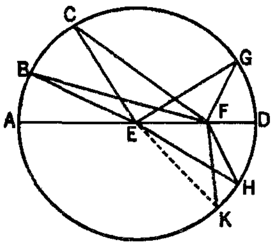
باز، چون F مرکز دایرهٔ CDE است، FE با FC مساوی است. اما ثابت شده بود که FB با FC مساوی است.

بنابراین FE نیز با FB مساوی است، کوچکتر با بزرگتر: که غیرممکن است. لذا F مرکز دو دایرهٔ ABC و CDE نیست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر بر قطر یک دایره نقطه‌ای غیر از مرکز بگیریم و از این نقطه خطهای راستی بر دایره فرود آوریم، آن یک که از مرکز می‌گذرد از همه بزرگتر است و بقیهٔ همین قطر از همه کوچکتر. از بقیهٔ خطها، آن یک که به خط راست مارّ بر مرکز نزدیکتر است، همواره از خط راستی که از مرکز دورتر است بزرگتر است، و به ازای هر خط راستی که از این نقطه بر دایره فرود می‌آید تنها یک خط راست مساوی با آن، فرود آمده از همان نقطه، وجود دارد که در طرف دیگر خط مارّ بر مرکز از این نقطه قرار دارد.



فرض می‌کنیم AD قطری از دایرهٔ $ABCD$ باشد. برآن، نقطهٔ F راکه مرکز دایره نیست اختیار، و فرض می‌کنیم E مرکز دایره باشد، و از F خطهای راست FB و FC و FG را بر دایرهٔ $ABCD$ فرود می‌آوریم.

می‌گوییم که FA بزرگترین خط راست است و FD کوچکترین. و از بقیه، FB از FC بزرگتر است و FC از FG. زیرا، فرض می‌کنیم E به B و C و G وصل شده است. چون در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است، [۲۰.I]

EB و EF از BF بزرگترند. اما AE با BE مساوی است؛ بنابراین AF از BF بزرگتر است.

باز، چون در دو مثلث EBF و ECF، BE با CE مساوی است، و FE در هر دو مشترک، دو ضلع BE و EF با دو ضلع CE و EF مساوی‌اند. اما زاویهٔ BEF نیز از زاویهٔ CEF بزرگتر است؛ بنابراین BF از CF بزرگتر است. [۲۴.I]

به همین دلیل CF نیز از FG بزرگتر است. باز چون GF و FE از EG بزرگترند، و EG با ED مساوی است، GF و FE بزرگتر از ED هستند.

حال EF را از هر یک کم می‌کنیم؛ در نتیجه GF که باقیمانده از FD که باقیمانده بزرگتر است. لذا FA بزرگترین خط راست و FD کوچکترین، و FB بزرگتر از FC است، و FC بزرگتر از FG.

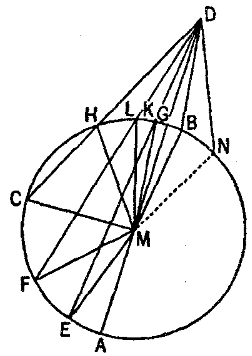
همچنین می‌گوییم که به ازای هر خط راستی که از نقطهٔ F بر دایره فرود می‌آید تنها یک خط راست مساوی با آن، فرود آمده از همان نقطه، وجود دارد که در طرف دیگر خط راست مار بر مرکز قرار دارد، زیرا از نقطهٔ E واقع بر خط راست EF زاویهٔ FEH را مساوی با زاویهٔ GEF رسم، [۲۳.I] و فرض می‌کنیم F به H وصل شده است. در این صورت، چون GE با EH مساوی است و EF در هر دو مشترک، دو ضلع GE و EF با دو ضلع HE و EF مساوی‌اند، و زاویهٔ GEF با زاویهٔ HEF مساوی است؛ بنابراین ضلع FG با ضلع FH مساوی است. [۴.I]

باز، می‌گوییم که از نقطهٔ F خط راست دیگری مساوی با FG بر دایره فرود نخواهد آمد. زیرا فرض کنیم خط دیگری مانند FK فرود آید. در این حال چون FK با FG مساوی است، و FH با FG. پس FK نیز با FH مساوی است. بدین طریق خط راست نزدیکتر به خط راست مارّ بر مرکز با خط راست دورتر نسبت به آن مساوی می‌شود: که غیرممکن است. بنابراین خط راست دیگری مساوی با FG از نقطهٔ F نمی‌توان بر دایره فرود آورد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر از نقطه‌ای واقع در بیرون یک دایره خطهای راستی بر دایره فرود آوریم که یکی از آنها از مرکز بگذرد و بقیه غیرمشخص باشند، از میان خطهای راستی که بر کمان مقعّر دایره فرود آمده‌اند آن یک که از مرکز گذشته از همه بزرگتر است، و از بقیه آن یک که به این خط راست نزدیکتر است همواره از آن یک که از آن دورتر است بزرگتر است؛ اما از خطهای راستی که بر کمان محدب دایره فرود آمده‌اند آن یک که بر امتداد قطر، بین نقطه و کمان، قرار دارد از همه کوچکتر است، و از میان بقیه آن یک که به این خط راست کوچکتر نزدیکتر است همواره که از آن یک از آن دورتر است کوچکتر است، و به ازای هر خط راستی که از این نقطه بر دایره فرود می‌آید تنها یک خط راست مساوی با آن، فرود آمده از همان نقطه، وجود دارد که در طرف دیگر خط مار بر مرکز دایره از این نقطه قرار دارد.



فرض می‌کنیم ABC یک دایره و D نقطه‌ای خارج آن باشد. خطهای راست DA و DE و DF و DC رسم شده‌اند که DA از مرکز گذشته است.

می‌گوییم از میان آنهایی که بر کمان مقعّر $AEFC$ی دایره فرود آمده خط راست DA که از مرکز گذشته از همه بزرگتر است، و DE از DF بزرگتر است، و DF از DC؛ اما از خطهای راستی که بر کمان محدّب $HLKG$ فرود آمده‌اند، خط راست DG، واقع بین نقطهٔ D و قطر AG، از همه کوچکتر است و آن یک که به DG نزدیکتر است همواره از آن یک که دورتر است کوچکتر است، یعنی DK از DL کوچکتر است و DL از DH.

زیرا، مرکز دایرهٔ ABC را پیدا، [۱.III]

و فرض می‌کنیم نقطهٔ M باشد، M را به E و F و C و K و L و H وصل می‌کنیم. در این

صورت، چون AM با EM مساوی است، MD را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین AD با [حاصل‌جمع] EM و MD مساوی است، اما EM و MD از ED بزرگترند؛ بنابراین AD نیز از ED بزرگتر است.

باز، چون ME با MF مساوی است، و MD مشترک است، بنابراین EM و MD با FM و MD مساوی‌اند؛ و زاویهٔ EMD از زاویهٔ FMD بزرگتر است؛ بنابراین ED از FD بزرگتر است. [۲۴.I]

به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که FD از CD بزرگتر است؛ بنابراین DA از همه بزرگتر است، و DE از DF بزرگتر است، و DF از DC.

حال، چون MK و KD از MD بزرگترند، [۲۰.I]

و MG با MK مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ KD از باقیماندهٔ GD بزرگتر است، و در نتیجه GD از KD کوچکتر است. و، چون بر MD، یکی از ضلعهای مثلث MLD، دو خط راست MK و KD بنا شده‌اند که یکدیگر را در داخل مثلث بریده‌اند، بنابراین MK و KD از ML و LD کوچکترند؛ [۲۱.I]

و MK با ML مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ DK از باقیماندهٔ DL کوچکتر است.

به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که DL نیز از DH کوچکتر است؛ بنابراین DG از همه کوچکتر است، و DK از DL کوچکتر است، و DL از DH.

همچنین می‌گوییم که به ازای هر خط راستی که از نقطهٔ D بر دایره فرود می‌آید تنها یک خط راست مساوی با آن، فرود آمده از همان نقطه، وجود دارد که در طرف دیگر خط راست مارّ بر مرکز از D قرار دارد.

بر خط راست MD و نقطهٔ M از آن، زاویهٔ DMB را مساوی با زاویهٔ KMD رسم، و B را به D وصل می‌کنیم. در این حال، در دو مثلث DBM و DKM، چون MK با MB مساوی و MD در هر دو مشترک است، دو ضلع KM و MD به ترتیب با دو ضلع BM و MD مساوی‌اند و زاویهٔ KMD با زاویهٔ BMD مساوی است، بنابراین DK با DB مساوی است. [۴.I]

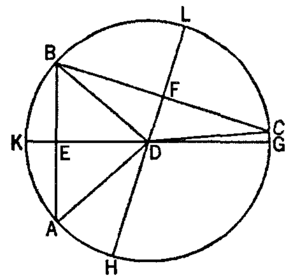
می‌گوییم که هیچ خط راست دیگری مساوی با DK از نقطهٔ D بر دایره فرود نمی‌آید. زیرا، فرض کنیم که چنین خط راستی نظیر DN مساوی با DK بر دایره فرود آمده است. پس، چون DK با DN مساوی و DK با DB مساوی است، بنابراین DB نیز با DN مساوی است؛ یعنی خط راست نزدیکتر به DG، که کوچکترین خط است، با خط راست دورتر نسبت به آن مساوی شده است: که غیرممکن است.

بنابراین، به ازای هر خط راستی که از D بر دایره فرود می‌آید تنها یک خط راست مساوی با آن، فرود آمده از همان نقطه، وجود دارد که در طرف دیگر خط مارّ بر مرکز دایره از نقطهٔ D قرار دارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

اگر نقطه‌ای در داخل یک دایره اختیار شود و از آن نقطه بیش از دو خط راست متساوی بر دایره فرود آید، آن نقطه مرکز دایره است.



فرض می‌کنیم نقطهٔ D در داخل دایرهٔ ABC اختیار شده و از آن بیش از دو خط راست متساوی، یعنی DA و DB و DC، بر دایره فرود آمده‌اند. می‌گوییم که نقطهٔ D مرکز دایرهٔ ABC است.

B را به A و C وصل می‌کنیم، و نقاط E و F، وسطهای خطهای راست حاصل را به‌دست می‌آوریم و ED و FD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط G و K و H و L ببرند.

در این حال، چون AE با EB مساوی و ED در دو مثلث BED و AED مشترک است، دو ضلع AE و ED با دو ضلع BE و ED مساوی‌اند؛ و DA با DB مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ AED با زاویهٔ BED مساوی است. [I.۸]

در نتیجه هر یک از زاویه‌های AED و BED یک قائمه است. [I.تع. ۱۰]

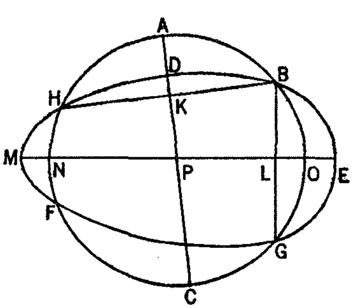
بنابراین GK، AB را به دو قطعهٔ مساوی تقسیم کرده و بر آن عمود است. و چون، اگر در یک دایره خط راستی، خط راستی را نصف کند. و بر آن عمود شود، مرکز دایره بر این خط راست نصف‌کننده قرار می‌گیرد، [III.۱، ف.]

پس، مرکز دایره بر GK قرار دارد. و به همین دلیل مرکز دایره بر HL نیز قرار دارد. و خطهای راست GK و HL نقطهٔ مشترک دیگری جز D ندارند. بنابراین نقطهٔ D مرکز دایرهٔ ABC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

دو دایره یکدیگر را در بیش از دو نقطه نمی‌برند.



زیرا، فرض می‌کنیم دو دایرهٔ ABC و DEF یکدیگر را در بیش از دو نقطه، یعنی در نقطه‌های H و F و G و B، بریده‌اند. B را به H و G وصل می‌کنیم و وسطهای خطهای راست حاصل یعنی K و L را به‌دست می‌آوریم، و از K و L خطهای KC و LM را به ترتیب بر BH و BG عمود می‌کنیم و

آنها را تا نقطه‌های A و E امتداد می‌دهیم. در این حال، چون در دایرهٔ ABC خط راست AC، خط راست BH را به دو جزء مساوی تقسیم کرده و بر آن عمود است، مرکز دایرهٔ ABC بر آن واقع است. [III.۱،ف.]

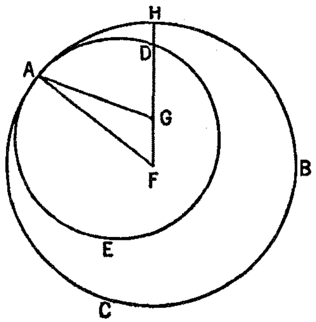
باز، چون در همین دایرهٔ ABC خط راست NO، BG را به دو جزء مساوی تقسیم کرده و بر آن عمود است، پس مرکز دایرهٔ ABC بر NO واقع است. اما ثابت شده بود که بر AC نیز واقع است، و خطهای راست AC و NO یکدیگر را جز در نقطهٔ P نمی‌برند. بنابراین نقطهٔ P مرکز دایرهٔ ABC است.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که P مرکز دایرهٔ DEF هم هست. بنابراین، این دو دایره که یکدیگر را بریده‌اند یک مرکز دارند: که غیرممکن است. [III.۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

اگر دو دایره بر هم مماس داخلی باشند و مرکزهای آنها را به دست آوریم، امتداد خط واصل بین مرکزهای آنها، [خط‌المرکزین]، از نقطهٔ تماس می‌گذرد.



فرض می‌کنیم دو دایرهٔ ABC و ADE در نقطهٔ A بر هم مماس داخلی هستند، و F را مرکز دایرهٔ ABC و G را مرکز دایرهٔ ADE می‌گیریم.

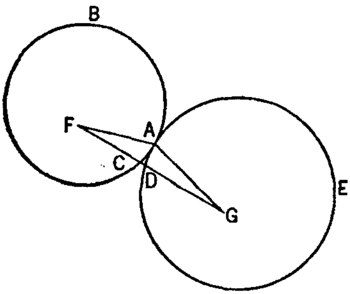
می‌گوییم که امتداد خط واصل بین نقطه‌های F و G از A می‌گذرد. زیرا، فرض می‌کنیم خط FG از A نگذرد، و مثلاً به صورت FGH درآید. A را به F و G وصل می‌کنیم. می‌دانیم که AG و FG از FA، یعنی از FH، بزرگترند. FG را از هریک کم می‌کنیم. بنابراین باقیماندهٔ AG از باقیماندهٔ GH بزرگتر است. اما AG با DG مساوی است؛ بنابراین DG نیز از GH بزرگتر است. یعنی کوچکتر از بزرگتر بزرگتر است: که غیرممکن است. بنابراین خط واصل از F به G از دو طرف نقطهٔ A نخواهد گذشت. بنابراین از A، یعنی از نقطهٔ تماس، می‌گذرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

اگر دو دایره بر هم مماس خارجی باشند، خط‌المرکزین آنها از نقطهٔ تماس می‌گذرد.

فرض می‌کنیم دو دایرهٔ ABC و ADE در نقطهٔ A مماس خارجی باشند. F را مرکز ABC و G را مرکز ADE می‌گیریم.



می‌گوییم که خط راست واصل بین G و F از نقطهٔ تماس A می‌گذرد.

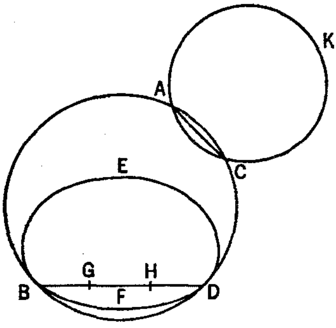
زیرا، اگر FG از نقطهٔ A نگذرد، باید مثلاً به صورت $FCDG$ در آید. A را به F و G وصل می‌کنیم. حال، چون نقطهٔ F مرکز دایرهٔ ABC است، FA با FC مساوی است. باز، چون G مرکز دایرهٔ ADE است، GA با GD مساوی است. اما ثابت شده بود که FA مساوی FC است؛ بنابراین FA و AG با FC و GD مساوی‌اند. به طوری که تمامی FG از FA و AG بزرگتر است، در صورتی که باید کوچکتر نیز باشد: [I. ۲۰]

که غیرممکن است. بنابراین خط راست FG نمی‌تواند از نقطهٔ تماس A نگذرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

هیچ دایره‌ای نمی‌تواند با یک دایره بیش از یک نقطهٔ تماس داشته باشد، خواه مماس داخلی باشد، خواه مماس خارجی.



زیرا، فرض می‌کنیم دایرهٔ $ABDC$ بر دایرهٔ $EBFD$ در بیش از یک نقطه، یعنی در دو نقطهٔ B و D مماس داخلی باشد. G را مرکز دایرهٔ $ABDC$ می‌گیریم و H را مرکز دایرهٔ $EBFD$.

بنابراین خط واصل بین G و H بر نقاط B و D فرود خواهد آمد، [III. ۱۱]

و فرض می‌کنیم به صورت $BGHD$ در آید. در این حال، چون G مرکز دایرهٔ $ABDC$ است، BG با GD مساوی است؛ بنابراین BG بزرگتر از HD، و در نتیجه BH خیلی بزرگتر از HD است. باز، چون H مرکز دایرهٔ $EBFD$ است، BH با HD مساوی است؛ اما همچنین ثابت شده بود خیلی از HD بزرگتر است: که این غیرممکن است.

بنابراین یک دایره نمی‌تواند به طور داخلی در بیش از یک نقطه با دایرهٔ دیگر مماس باشد.
می‌گوییم به طور خارجی هم نمی‌تواند در بیش از یک نقطه مماس باشد. زیرا، فرض می‌کنیم

ACK در بیش از یک نقطه، یعنی در دو نقطهٔ A و C، بر دایرهٔ $ABDC$ مماس باشد. A را به C وصل می‌کنیم. پس، چون بر محیط هر یک از دو دایرهٔ $ABDC$ و ACK دو نقطهٔ دلخواه A و C گرفته شده‌اند، خط راست واصل بین آنها درون هر دو دایره خواهد افتاد؛ [۲.III]

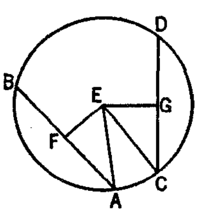
اما این خط، هم در داخل دایرهٔ $ABDC$ افتاده و هم در خارج آن، یعنی در داخل ACK: [III.تع.۳]

که بی‌معنی است. بنابراین یک دایره به طور خارجی نمی‌تواند در بیش از یک نقطه بر دایرهٔ دیگر مماس باشد. و ثابت شده بود که به طور داخلی هم نمی‌تواند در بیش، از یک نقطه مماس باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

در یک دایره خطوط راست متساوی از مرکز به یک فاصله‌اند، و خطوط راست متساوی‌الفاصله از مرکز متساوی‌اند.



فرض می‌کنیم AB و CD خطهای راست متساوی در دایرهٔ $ABDC$ باشند، می‌گوییم که AB و CD از مرکز به یک فاصله‌اند. فرض می‌کنیم نقطهٔ E، مرکز دایرهٔ $ABDC$، را پیدا کرده‌ایم؛ [۱.III]

از E عمودهای EG و EF را بر CD و AB وارد و E را به A و C وصل می‌کنیم. در این صورت، چون خط راست EF از مرکز بر خط راست AB که از مرکز نگذشته عمود شده است، آن را نصف خواهد کرد. [۳.III]

بنابراین AF با BF مساوی است و AB دو برابر AF است.

به همین دلیل CD نیز دو برابر CG است. و چون AB با CD مساوی است، AF نیز با CG مساوی می‌شود. و چون AE با EC مساوی است، مربع AE نیز با مربع EC مساوی است. اما مربعهای AF و EF، به دلیل قائمه بودن زاویهٔ F، با مربع AE مساوی‌اند؛ و مربعهای EG و CG، به دلیل قائمه بودن زاویهٔ G با مربع EC مساوی‌اند؛ [۴۷.I]

بنابراین مربعهای AF و EF با مربعهای CG و EG مساوی می‌شوند، که از آنجا، به دلیل تساوی AF و CG، مربع AF با مربع CG مساوی می‌شود؛ لذا مربع EF که باقی می‌ماند با مربع EG مساوی می‌شود، و بنابراین EF با EG مساوی است.

اما در یک دایره وقتی خطهای راست را متساوی‌الفاصله از مرکز می‌نامیم که عمودهای وارد از مرکز بر آنها متساوی باشند؛ [III.تع.۴]

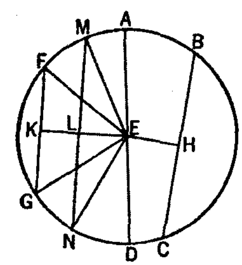
بنابراین AB و CD متساوی‌الفاصله از مرکزند. حال فرض می‌کنیم خطهای راست AB و CD متساوی‌الفاصله از مرکز باشند، یعنی EF با EG مساوی باشد، می‌گوییم AB نیز با CD مساوی است.

زیرا، در همین شکل، به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که AB دو برابر AF است و CD دو برابر CG. و چون AE با CE مساوی است، مربع AE با مربع CE مساوی می‌شود. اما مربعهای EF و AF با مربع AE مساوی‌اند، و مربعهای EG و CG با مربع CE. [۴۷.I]
بنابراین مربعهای EF و FA با مربعهای EG و GC مساوی‌اند؛ که از این میان مربع EF با مربع EG مساوی است، زیرا EF با EG مساوی است؛ بنابراین مربع AF که باقی می‌ماند با مربع CG مساوی است؛ در نتیجه AF با CG مساوی است؛ و AB دو برابر AF است، و CD دو برابر CG؛ بنابراین AB با CD مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

از میان خطهای راست داخل دایره قطر از همه بزرگتر است، و از بقیه، آن یک که به مرکز نزدیکتر است همواره از آن یک که از مرکز دورتر است بزرگتر است.



فرض می‌کنیم AD یک قطر دایرهٔ $ABCD$ است، و E مرکز آن. و فرض می‌کنیم BC نزدیکترین خط راست به قطر AD است، و FG دورترین؛ می‌گوییم که AD بزرگترین خط راست است، و BC بزرگتر از FG. زیرا، عمودهای EH و EK را از مرکز E بر BC و FG فرود می‌آوریم. چون BC به مرکز نزدیکتر و FG از مرکز دورتر است، EK از EH بزرگتر است. [تع.۵.III]

حال EL را مساوی با EH جدا می‌کنیم و از L خط راست LM را بر EK عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در N ببرد، و E را به M و N و F و G وصل می‌کنیم. در این حال، چون EH با EL مساوی است، BC نیز با MN مساوی است [۱۴.III]

باز، چون AE با ME مساوی است، و ED با EN، لذا AD با ME و EN مساوی است. اما ME و EN از MN بزرگترند، [۲۰.I]
و MN با BC مساوی است؛ بنابراین AD از BC بزرگتر است. و، چون دو ضلع ME و EN با دو ضلع FE و EG مساوی‌اند، و زاویهٔ MEN از زاویهٔ FEG بزرگتر است، بنابراین MN بزرگتر از FG است. [۲۴.I]

اما ثابت شده بود که MN با BC مساوی است، بنابراین قطر AD بزرگترین خط راست و BC از FG بزرگتر است.

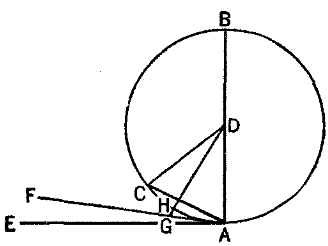
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

خط راستی که در یک سر قطر دایره‌ای بر آن عمود شود خارج دایره می‌افتد، و در فضای بین این خط راست و کمان دایره هیچ خط راستی نمی‌توان قرار داد؛ به علاوه زاویهٔ نیمدایره از هر زاویهٔ راست‌خط حاده بزرگتر است، و بقیهٔ زاویه از هر زاویهٔ راست‌خط حاده کوچکتر.

فرض می‌کنیم ABC دایره‌ای باشد به قطر AB و مرکز D؛

می‌گوییم خط راستی که از A بر AB عمود شود خارج دایره می‌افتد. زیرا فرض می‌کنیم که خارج نیفتد، و در داخل به صورت CA درآید؛ C را به D وصل می‌کنیم.



چون DA با DC مساوی است، زاویهٔ DAC نیز با زاویهٔ ACD مساوی است. [۵.I]
اما DAC قائمه است، پس ACD نیز قائمه است. یعنی در مثلث ACD دو زاویهٔ DAC و ACD مساوی دو قائمه شده‌اند: که غیرممکن است.[۱۷.I]
بنابراین خط راست عمود بر AB در نقطهٔ A، داخل دایره نمی‌افتد.

به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که روی دایره هم نخواهد افتاد، بنابراین خارج دایره خواهد افتاد. فرض می‌کنیم به صورت AE قرار گیرد؛ حال می‌گوییم که در فضای بین خط راست AE و کمان CHA خط راست دیگری نمی‌تواند قرار گیرد.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین خط راستی مثل AF قرار گرفته باشد؛ خط راست DG را از D بر FA عمود می‌کنیم. پس، چون زاویهٔ AGD یک قائمه و زاویهٔ DAG کمتر از یک قائمه است، لذا AD بزرگتر از DG است. [۱۹.I]
اما DA با DH مساوی است. بنابراین DH از DG بزرگتر است. یعنی خط کوچکتر از خط بزرگتر بزرگتر شده است: که ممکن نیست. بنابراین هیچ خط راستی نمی‌تواند در فضای بین آن خط راست و کمان دایره قرار گیرد.

به علاوه می‌گوییم که زاویهٔ نیمدایرهٔ حاصل از خط راست BA و کمان CHA از هر زاویهٔ راست‌خط حادهٔ دیگر بزرگتر است، و بقیهٔ زاویهٔ حاصل از کمان CHA و خط راست AE از هر

زاویهٔ راست‌خطّ حاده کوچکتر است. زیرا، اگر زاویهٔ راست‌خط دیگری بزرگتر از زاویهٔ حاصل از خط راست BA و کمان CHA وجود داشته باشد، و اگر زاویهٔ راست خط دیگری کوچکتر از زاویهٔ حاصل از کمان CHA و خط راست AE موجود باشد، آنگاه در فضای بین کمان دایره و خط راست AE خط راستی قرار خواهد گرفت که یک زاویه‌اش با AB از زاویهٔ حاصل از خط راست AB و کمان CHA بزرگتر است و زاویهٔ دیگرش با AE از زاویهٔ حاصل از AE و کمان CHA کوچکتر. اما چنین خط راستی نمی‌تواند موجود باشد.

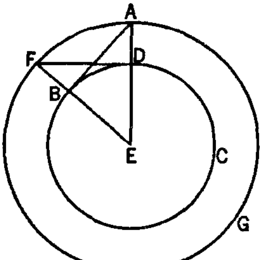
بنابراین، هیچ زاویهٔ حاده‌ای وجود ندارد که از زاویهٔ حاصل از AB و کمان CHA بزرگتر باشد، و هیچ زاویهٔ حاده‌ای وجود ندارد که از زاویهٔ حاصل از کمان CHA و خط راست AE کوچکتر باشد.

فرع. از اینجا معلوم می‌شود که خط راست عمود بر قطر دایره، در یکی از دو سر آن، بر دایره مماس است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

مطلوب رسم خط راستی است از نقطهٔ مفروض که بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد.



فرض می‌کنیم A نقطهٔ مفروض باشد، و BCD دایرهٔ مفروض. پس مطلوب رسم خط راستی است از A که بر دایرهٔ BCD مماس باشد. فرض می‌کنیم مرکز دایره، یعنی E، را پیدا کرده‌ایم. [۱.III]

E را به A وصل می‌کنیم، و به مرکز E و شعاع AE دایرهٔ AFG را می‌کشیم. از D عمود DF را بر AE اخراج می‌کنیم و E را به F و B را به A وصل می‌کنیم. می‌گوییم که AB خطی است که از A کشیده شده و بر دایرهٔ BCD مماس است.

زیرا، چون E مرکز دایره‌های BCD و AFG است، EA با EF مساوی است و ED با EB. بنابراین در دو مثلث DEF و BEA دو ضلع AE و EB از یکی با دو ضلع EF و ED از دیگری مساوی‌اند و زاویهٔ E در هر دو مشترک است. پس این دو مثلث با هم، و DF با AB و زاویه‌های باقیمانده با هم مساوی می‌شوند. [۴.I]

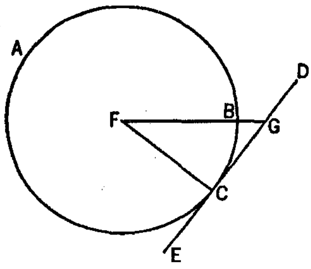
لذا زاویهٔ EDF با زاویهٔ EBA مساوی می‌شود. اما EDF قائمه است، پس EBA نیز قائمه است. اما EB شعاع است. و خط راست عمود بر قطر دایره در یکی از دو سر آن بر دایره مماس است. [۱۶.III، ف.]

بنابراین AB بر دایرهٔ BCD مماس است. لذا از نقطهٔ مفروض A خط راست AB بر دایرهٔ مفروض BCD مماس شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

اگر خط راستی بر دایره‌ای مماس باشد، خط راست واصل از مرکز دایره به نقطهٔ تماس بر مماس عمود خواهد شد.



زیرا، فرض می‌کنیم خط راست DE در نقطهٔ C بر دایرهٔ ABC مماس باشد. مرکز دایره یعنی F را پیدا و به C وصل می‌کنیم. می‌گوییم که FC بر DE عمود است.

زیرا، اگر FC عمود نباشد، FG را از F بر DE عمود می‌کنیم. چون زاویهٔ FGC قائمه است، زاویهٔ FCG حاده می‌شود. [۱۷.I]

و چون زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است، [۱۹.I]

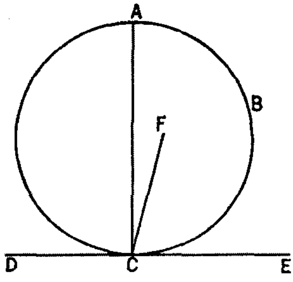
پس FC از FG بزرگتر می‌شود. اما FC با FB مساوی است. پس FB نیز از FG بزرگتر خواهد شد. خط کوچکتر از خط بزرگتر بزرگتر شده است: که غیرممکن است. بنابراین FG بر DE عمود نیست.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط راست دیگری جز FC بر DE عمود نیست. پس FC بر DE عمود است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

اگر خط راستی بر دایره‌ای مماس باشد و از نقطهٔ تماس خط راستی را بر مماس عمود کنیم مرکز دایره بر این عمود واقع خواهد شد.



زیرا، فرض می‌کنیم خط راست DE بر دایرهٔ ABC در نقطهٔ C مماس باشد، و از نقطهٔ C خط راست CA را بر DE عمود می‌کنیم. می‌گوییم که مرکز دایره بر AC قرار دارد.

فرض می‌کنیم چنین نباشد، و F مرکز دایره باشد. F را به C وصل می‌کنیم. چون خط راست DE بر

دایرهٔ ABC مماس است و FC از مرکز به نقطهٔ تماس وصل شده است، FC بر DE عمود است. [۱۸.III]

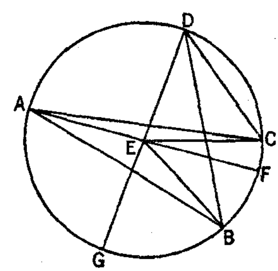
بنابراین زاویهٔ FCE قائمه است. اما زاویهٔ ACE هم قائمه بود. پس زاویهٔ FCE با زاویهٔ ACE مساوی است. زاویهٔ کوچکتر با زاویهٔ بزرگتر مساوی شده است: که غیرممکن است. بنابراین F مرکز دایرهٔ ABC نیست.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ نقطهٔ دیگری مرکز نیست مگر اینکه بر AC واقع باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

در هر دایره، یک زاویهٔ مرکزی دو برابر زاویهٔ محاطی است، وقتی که این زاویه‌های محاطی یک کمان به عنوان قاعده داشته باشند.



در دایرهٔ ABC فرض می‌کنیم BEC یک زاویهٔ مرکزی باشد و BAC زاویه‌ای محاطی که یک کمان BC به عنوان قاعده دارند. می‌گوییم که زاویهٔ BEC دو برابر زاویهٔ BAC است. A را به E وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در F ببرد. در این حال، چون EA با EB مساوی است، زاویهٔ EAB نیز با زاویهٔ EBA مساوی است. [۵ .I]

بنابراین زاویه‌های EAB و EBA دو برابر زاویهٔ EAB هستند. اما زاویهٔ BEF با زاویه‌های EAB و EBA مساوی است؛ [۳۲ .I]

بنابراین زاویهٔ BEF نیز دو برابر زاویهٔ EAB است.

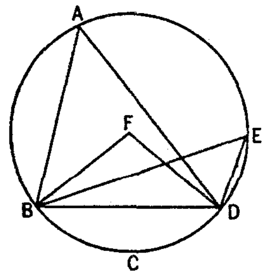
به همین دلیل زاویهٔ FEC نیز دو برابر زاویهٔ EAC است. بنابراین تمامی زاویهٔ BEC دو برابر تمام زاویهٔ BAC است. باز فرض می‌کنیم خط راست دیگری را در داخل دایره خم کرده و زاویهٔ BDC را پدید آورده‌ایم، D را به E وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در G ببرد.

به روشی مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که زاویهٔ GEC دو برابر زاویهٔ EDC است، که در آن GEB دو برابر زاویهٔ EDB است. بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ BEC دو برابر زاویهٔ BDC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

در یک دایره زاویه‌های محاط در یک قطعه با یکدیگر مساوی‌اند.



در دایرهٔ $ABCD$ فرض می‌کنیم زاویه‌های BAD و BED در یک قطعهٔ $BAED$ محاط باشند. می‌گوییم که زاویه‌های BAD و BED با هم مساوی‌اند.

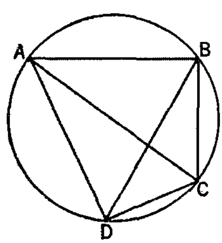
زیرا، فرض می‌کنیم F، مرکز دایره، را پیدا کرده‌ایم. F را به B و D وصل می‌کنیم. حال، چون زاویهٔ BFD زاویهٔ مرکزی است و BAD زاویهٔ محاطی است که هر دو روبه‌رو به یک کمان BCD، به عنوان قاعده هستند، بنابراین زاویهٔ BFD دو برابر زاویهٔ BAD است. [۲۰.III]

به همین دلیل زاویهٔ BFD دو برابر زاویهٔ BED است؛ بنابراین زاویهٔ BAD با زاویهٔ BED مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

در هر چهارضلعی محاط در دایره [مجموع] زاویه‌های روبه‌رو به هم مساوی با دو قائمه‌اند.



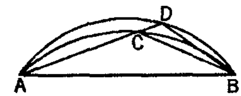
چهارضلعی $ABCD$ محاط در دایرهٔ $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم که زاویه‌های روبه‌رو به هم مساوی دو قائمه‌اند. A را به C و B را به D وصل می‌کنیم. در این حال، چون در هر مثلث سه زاویه مساوی دو قائمه‌اند، [۳۲.I] پس در مثلث ABC سه زاویهٔ CAB و ABC و BCA مساوی دو قائمه‌اند. اما زاویهٔ CAB با زاویهٔ BDC مساوی است، زیرا هر دو در یک قطعهٔ $BADC$ محاط‌اند؛ [۲۱.III] و زاویهٔ ACB با زاویهٔ ADB مساوی است، زیرا هر دو در یک قطعهٔ $ADCB$ محاط‌اند؛ بنابراین تمام زاویهٔ ADC با زاویه‌های BAC و ACB مساوی است. حال، ABC را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های ABC و BAC و ACB با زاویه‌های ABC و ADC مساوی‌اند. اما زاویه‌های ABC و BAC و ACB مساوی دو قائمه‌اند؛ بنابراین زاویه‌های ABC و ADC نیز مساوی دو قائمه‌اند.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که زاویه‌های BAD و DCB نیز مساوی دو قائمه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

بر یک خط راست و در یک طرف آن نمی‌توان دو قطعهٔ متشابه و نامتساوی از دو دایره رسم کرد.



زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم بر خط راست AB و در یک طرف آن دو قطعهٔ متشابه و نامتساوی از دایره‌های ACB و ADB رسم شده است.

خط راست ACD را رسم و B را به C و D وصل می‌کنیم. در این حال، چون قطعهٔ ACB با قطعهٔ ADB متشابه است، و قطعه‌های متشابه دایره‌ها آنهایی هستند که زاویه‌های محاط در آنها با هم مساوی‌اند، [III.تع.۱۱]

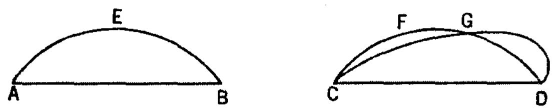
پس زاویهٔ ACB با زاویهٔ ADB، یعنی زاویهٔ داخلی با زاویهٔ خارجی غیرمجاور خود در مثلث CDB، با هم مساوی‌اند: که غیرممکن است. [I.۱۶]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

قطعه‌های متشابه از دایره‌های مرسوم بر خطهای راست متساوی، با هم مساوی‌اند.

فرض می‌کنیم AEB و CFD قطعه‌های متشابه از دایره‌های مرسوم بر خطهای راست متساوی AB و CD هستند؛ می‌گوییم که قطعهٔ AEB با قطعهٔ CFD مساوی است.



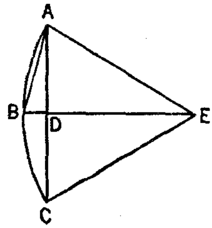
زیرا اگر قطعهٔ AEB بر قطعهٔ CFD اضافه شود، و نقطهٔ A بر C، و خط راست AB بر CD، نقطهٔ B نیز بر D منطبق خواهد شد، زیرا AB با CD مساوی است. و هنگامی که AB بر CD منطبق شد قطعهٔ AEB نیز بر قطعهٔ CFD منطبق خواهد شد. زیرا اگر منطبق نشود یا درون آن می‌افتد، یا بیرون آن، و یا کج به صورت CGD قرار می‌گیرد که در این صورت دو دایره یکدیگر را در بیش از دو نقطه بریده‌اند: که غیرممکن است. [III. ۱۰]

بنابراین اگر خط راست AB بر CD اضافه شود، قطعهٔ AEB هم نمی‌تواند بر CFD منطبق نشود؛ بنابراین بر آن منطبق و با آن مساوی می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

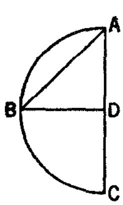
قضیهٔ ۲۵

قطعه‌ای از یک دایره مفروض است، مطلوب رسم دایرهٔ کاملی است که قطعهٔ مفروض یک قطعهٔ آن باشد.

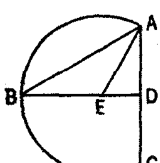


فرض می‌کنیم ABC قطعهٔ مفروضی از یک دایره باشد؛ پس مطلوب رسم دایرهٔ کاملی است که قطعهٔ ABC به آن متعلق باشد، یعنی قطعهٔ مفروض یک قطعهٔ آن باشد. فرض می‌کنیم AC در D نصف شده است؛ DB را از نقطهٔ D عمود بر AC رسم و B را به A وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ ABD یا از زاویهٔ BAD بزرگتر است، یا با آن مساوی است، و یا از آن کوچکتر.

ابتدا فرض می‌کنیم بزرگتر باشد؛ و بر خط راست BA و از نقطهٔ A بر آن زاویهٔ BAE را مساوی با زاویهٔ ABD رسم می‌کنیم و BD را امتداد می‌دهیم تا E به دست آید، و C را به E وصل می‌کنیم. در این حال، چون زاویهٔ ABE با زاویهٔ BAE مساوی است، خط راست EB نیز با EA مساوی است. [۶.I]
حال در دو مثلث ADE و CDE، دو ضلع AD و DE از یکی با دو ضلع CD و DE از دیگری مساوی و زاویهٔ ADE با زاویهٔ CDE، به دلیل قائمه بودن، مساوی است، در نتیجه AE با CE مساوی است. اما ثابت شده بود که AE با BE مساوی است؛ بنابراین BE نیز با CE مساوی است؛ بنابراین سه خط راست AE و EB و EC با یکدیگر مساوی‌اند، و لذا دایرهٔ به مرکز E و شعاع مثلاً AE، از دو نقطهٔ دیگر B و C نیز می‌گذرد، و دایره کامل می‌شود. [۹.III]
بنابراین قطعه‌ای از یک دایره داده شده است، و دایرهٔ کاملی که این قطعه جزئی از آن است رسم شده است. و روشن است که قطعهٔ ABC کمتر از نیمدایره است، زیرا مرکز E در خارج آن قرار گرفته است.



به طریق مشابه، حتی اگر زاویهٔ ABD با زاویهٔ BAD مساوی باشد، چون AD با هر یک از دو خط راست BD و DC مساوی است، سه خط راست DA و DB و DC با هم مساوی‌اند و D مرکز دایرهٔ مطلوب است. روشن است که در این حال ABC یک نیمدایره خواهد بود.



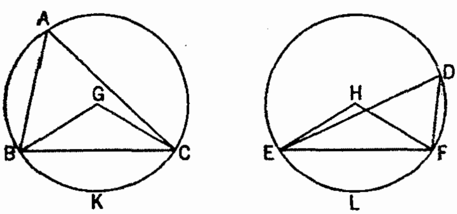
ولی اگر زاویهٔ ABD از زاویهٔ BAD کوچکتر باشد، و اگر بر خط راست BA و از نقطهٔ A بر آن، زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ ABD رسم کنیم، مرکز بر BD درون قطعه دایرهٔ ABC خواهد افتاد و روشن است که قطعهٔ ABC از نیمدایره بزرگتر است. بنابراین قطعه‌ای از یک دایره داده شده است و دایرهٔ کامل مربوط به آن رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

در دایره‌های متساوی، زاویه‌های متساوی روبه‌رو به کمانهای متساوی‌اند، خواه این زاویه‌ها مرکزی باشند، و خواه محاطی.

فرض می‌کنیم ABC و DEF دایره‌های متساوی‌اند و در آنها زاویه‌های مرکزی متساوی BGC و EHF و زاویه‌های محاطی متساوی BAC و EDF داده شده‌اند. می‌گوییم که کمان BKC با کمان ELF مساوی است.



زیرا فرض می‌کنیم B به C وصل شده است و E به F. حال، چون دایره‌های ABC و DEF با هم مساوی‌اند، شعاعهای آنها متساوی‌اند. از این‌رو دو خط راست BG و GC با دو خط راست EH و HF مساوی‌اند؛ و زاویهٔ G با زاویهٔ H مساوی است؛ بنابراین BC با EF مساوی است.[۴.I]

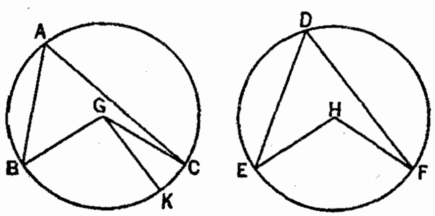
وچون زاویهٔ A با زاویهٔ D مساوی است، قطعهٔ BAC با قطعهٔ EDF مشابه‌است؛ [III.تع.۱۱]
و بر خطهای راستی مساوی با هم واقع شده‌اند.

اما قطعه‌های متشابه دایره‌های مرسوم بر خطهای راست متساوی با یکدیگر مساوی‌اند؛[III.۲۴]
بنابراین قطعهٔ BAC با قطعهٔ EDF مساوی است. اما تمام دایرهٔ ABC با تمام دایرهٔ DEF مساوی است؛ بنابراین کمان باقیماندهٔ BKC با کمان باقیماندهٔ ELF مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

در دایره‌های متساوی، زاویه‌های روبه‌رو به‌کمانهای متساوی، متساوی‌اند، خواه مرکزی باشند خواه محاطی.



در دایره‌های متساوی ABC و DEF، با کمانهای متساوی BC و EF، فرض می‌کنیم زاویه‌های BGC و EHF مرکزی هستند و زاویه‌های BAC و EDF محاطی. می‌گوییم زاویهٔ BGC با زاویهٔ EHF مساوی است و زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDF.

زیرا اگر زاویهٔ BGC با زاویهٔ EHF مساوی نباشد، یکی از آنها از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم BGC بزرگتر باشد، بر خط راست BG و در نقطهٔ G بر آن زاویهٔ BGK را مساوی با زاویهٔ EHF رسم می‌کنیم. [I.۲۳]

اما زاویه‌های مرکزی متساوی روبه‌رو به کمانهای متساوی‌اند؛ [III.۲۶]

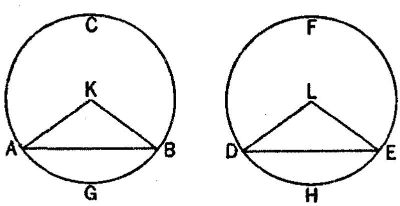
بنابراین کمان BK با کمان EF مساوی است. اما EF با BC مساوی است؛ لذا BK نیز با BC مساوی است، کمان کوچکتر با کمان بزرگتر: که غیرممکن است. بنابراین زاویهٔ BGC با زاویهٔ EHF نامساوی نیست، پس با آن مساوی است. و زاویهٔ A نصف زاویهٔ BGC است و زاویهٔ D نصف زاویهٔ EHF. [III.۲۰]

پس زاویهٔ A نیز با زاویهٔ D مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

در دایره‌های متساوی خطهای راست متساوی کمانهای متساوی جدا می‌کنند، کمان بزرگتر با کمان بزرگتر مساوی است و کمان کوچکتر با کمان کوچکتر.



در دایره‌های متساوی ABC و DEF، فرض می‌کنیم خطهای راست متساوی AB و DE کمانهای بزرگتر ACB و DFE و کمانهای کوچکتر AGB و DHE را از دایره‌ها جدا کرده‌اند. می‌گوییم که کمانهای بزرگتر ACB و DFE با هم مساوی‌اند، و کمانهای کوچکتر AGB و DHE با هم.

زیرا فرض می‌کنیم مرکزهای دایره‌ها، یعنی K و L را پیدا کرده‌ایم. K را به A و B، و L را به D و E وصل می‌کنیم. حال، چون دایره‌ها با هم مساوی‌اند، شعاعها نیز با هم مساوی‌اند، یعنی AK و KB با DL و LE. AB نیز با DE مساوی است. بنابراین زاویهٔ AKB با زاویهٔ DLE مساوی است. [I.۸]

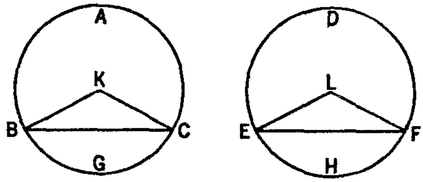
اما زاویه‌های مرکزی متساوی روبه‌رو به کمانهای متساوی‌اند. [III.۲۶]

بنابراین کمان AGB با کمان DHE مساوی است. اما تمام دایرهٔ ABC نیز با تمام دایرهٔ DEF مساوی است؛ در نتیجه کمانهای باقیماندهٔ ACB و DFE نیز با هم مساوی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

در دایره‌های متساوی کمانهای متساوی روبه‌رو به خطهای راست متساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دو دایرهٔ متساوی باشند که در آنها کمانهای متساوی BGC و EHF جدا شده‌اند؛ و خطهای راست BC و EF رسم شده‌اند؛ می‌گوییم که BC با EF مساوی است.

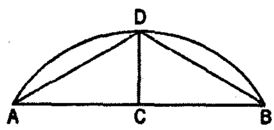
فرض می‌کنیم مرکزهای دایره‌ها، یعنی K و L را پیدا کرده‌ایم، K را به B و C، و L را به E و F وصل می‌کنیم. حال، چون کمان BGC با کمان EHF مساوی است، زاویهٔ BKC نیز با زاویهٔ ELF مساوی است. [۲۷.III]

و چون دایره‌های ABC و DEF با هم مساوی‌اند، شعاعهای آنها نیز با هم مساوی‌اند؛ حال در دو مثلث KBC و ELF ضلعهای BK و KC با دو ضلع EL و LF مساوی‌اند و زاویهٔ بین آنها نیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین BC با EF مساوی است. [۴.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

مطلوب نصف کردن کمان مفروض است.



فرض می‌کنیم ADB کمان مفروض باشد؛ پس مطلوب نصف کردن کمان ADB است. A را به B وصل می‌کنیم، و نقطهٔ C وسط آن را به دست می‌آوریم. از نقطهٔ C عمود CD را بر خط راست AB اخراج و D را به A و B وصل می‌کنیم. در این حال، چون در دو مثلث DCA و DCB، AC با CB مساوی و CD در هر دو مشترک است، و زاویه‌های DCB و DCA با هم مساوی‌اند زیرا هر دو قائمه‌اند، بنابراین AD و DB با هم مساوی‌اند.[۴.I]

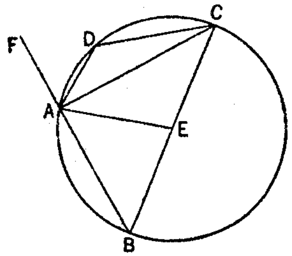
اما خطهای راست متساوی کمانهای متساوی جدا می‌کنند، کمانهای بزرگتر با هم مساوی‌اند، و کمانهای کوچکتر با هم؛ [۲۸.III]

و هر یک از کمانهای AD و DB کمتر از یک نیمدایره‌اند؛ بنابراین کمان AD با کمان DB مساوی است، یعنی کمان مفروض در نقطهٔ D نصف شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

در هر دایره زاویهٔ محاط در نصف دایره مساوی با یک قائمه است، و زاویهٔ محاط در قطعهٔ بزرگتر از نصف دایره، از یک قائمه کمتر، و زاویهٔ محاط در قطعهٔ کوچکتر از نصف دایره، از یک قائمه بیشتر است؛ و به علاوه زاویهٔ قطعهٔ بزرگتر، از یک قائمه بزرگتر است و زاویهٔ قطعهٔ کوچکتر، از یک قائمه کوچکتر.



فرض می‌کنیم $ABCD$ یک دایره باشد، BC قطر آن و E مرکز آن، A را به B و C و D وصل می‌کنیم و D را به C؛ می‌گوییم که زاویهٔ BAC محاط در نصف دایرهٔ BAC مساوی با یک قائمه است؛ و زاویهٔ ABC محاط در قطعهٔ بزرگتر از نصف دایره، یعنی قطعهٔ ABC، کوچکتر از یک قائمه است، و زاویهٔ ADC محاط در قطعهٔ کوچکتر از نصف دایره، یعنی قطعهٔ ADC بزرگتر از یک قائمه است. A را به E وصل می‌کنیم و BA را تا F امتداد می‌دهیم. در این حال، چون BE با AE مساوی است، زاویهٔ ABE نیز با زاویهٔ BAE مساوی است. [۵.I]

باز چون CE با EA مساوی است، زاویهٔ ACE نیز با زاویهٔ CAE مساوی است. [۵.I]

بنابراین تمام زاویهٔ BAC با دو زاویهٔ ABC و ACB مساوی است. اما زاویهٔ FAC، زاویهٔ خارجی مثلث ABC، نیز با دو زاویهٔ ABC و ACB مساوی است؛ [۳۲.I]

بنابراین زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ FAC مساوی و درنتیجه هریک مساوی یک قائمه است؛ [I. تع. ۱۰]

پس زاویهٔ BAC، محاط در نصف دایرهٔ BAC، مساوی با یک قائمه است.

حال، چون در مثلث ABC دو زاویهٔ ABC و BAC کوچکتر از دو قائمه‌اند، [۱۷.I]

و زاویهٔ BAC قائمه است، لذا زاویهٔ ABC کوچکتر از یک قائمه است؛ و این زاویه زاویه‌ای است محاط در قطعهٔ ABC که بزرگتر از نصف دایره است. حال، چون $ABCD$ یک چهارضلعی محاط در دایره است، زاویه‌های روبه‌رو به هم در آن مساوی با دو قائمه‌اند، [۲۲.III]

و زاویهٔ ABC کوچکتر از یک قائمه است، بنابراین زاویهٔ ADC که باقی‌مانده بزرگتر از یک قائمه است، و این زاویه زاویه‌ای است محاط در قطعهٔ ADC که کوچکتر از نصف دایره است.

بعد، می‌گوییم که زاویهٔ قطعهٔ بزرگتر یعنی زاویهٔ حاصل از کمان بزرگتر ABC و خط راست AC بزرگتر از یک قائمه است؛ و زاویهٔ قطعهٔ کوچکتر یعنی زاویهٔ حاصل از کمان ADC و خط راست AC کمتر از یک قائمه است. و این هم بلافاصله آشکار است. زیرا، چون زاویهٔ حاصل از

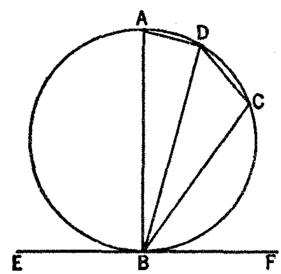
خطهای راست BA و AC قائمه است، زاویهٔ حاصل از کمان ABC و خط راست AC بزرگتر از یک قائمه است.

باز، چون زاویهٔ حاصل از خطهای راست AC و AF قائمه است، زاویهٔ حاصل از خط راست CA و کمان ADC کوچکتر از یک قائمه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

اگر خط راستی بر یک دایره مماس باشد و از نقطهٔ تماس قاطعی در دایره رسم کنیم هریک از دو زاویه‌ای که این قاطع با مماس می‌سازد با زاویه‌های محاطی در یکی از دو قطعهٔ دایره مساوی است.



فرض می‌کنیم خط راست EF در نقطهٔ B بر دایرهٔ $ABCD$ مماس است و از نقطهٔ B قاطع BD را در دایرهٔ $ABCD$ رسم کرده‌ایم. می‌گوییم هریک از دو زاویه‌ای که BD با مماس EF می‌سازد با زاویه‌های محاطی در یکی از دو قطعهٔ دایره مساوی است، یعنی زاویهٔ FBD با زاویهٔ محاطی مرسوم در قطعهٔ BAD مساوی است، و زاویهٔ EBD با زاویهٔ محاطی مرسوم در قطعهٔ BCD.

زیرا فرض می‌کنیم BA از B بر EF عمود شده است. نقطهٔ دلخواه C را بر کمان BD اختیار و D را به A و C، و B را به C وصل می‌کنیم. در این حال، چون خط راست EF در B بر دایرهٔ $ABCD$ مماس است و BA از نقطهٔ تماس بر آن عمود شده است، مرکز دایرهٔ $ABCD$ بر BA قرار دارد. [۱۹.III]

بنابراین BA قطر دایرهٔ $ABCD$ است. لذا، زاویهٔ ADB که در نصف دایره محاط شده مساوی با یک قائمه است. [۳۱.III]

بنابراین زاویه‌های باقیماندهٔ BAD و ABD مساوی با یک قائمه‌اند. [۳۲.I]

اما زاویهٔ ABF نیز یک قائمه است، پس زاویهٔ ABF با زاویه‌های BAD و ABD مساوی است. حال زاویهٔ ABD را از هریک کم می‌کنیم؛ لذا زاویهٔ باقیماندهٔ DBF با زاویهٔ BAD، محاط در یکی از دو قطعه مساوی است.

حال، چون $ABCD$ یک چهارضلعی محاط در یک دایره است زاویه‌های روبه‌رو به هم در آن مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۲.III]

اما زاویه‌های DBF و DBE نیز مساوی با دو قائمه‌اند. پس، زاویه‌های DBF و DBE با زاویه‌های BAD و BCD مساوی‌اند، که تساوی زاویهٔ BAD و زاویهٔ DBF در آنها ثابت شده بود؛ بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ DBE با زاویهٔ DCB محاط در قطعهٔ دیگر DCB از دایره مساوی است.

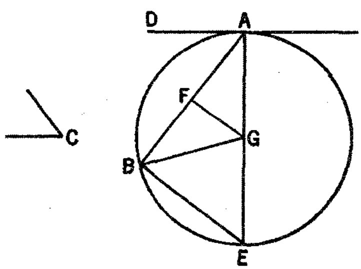
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

مطلوب رسم قطعه‌ای از یک دایره بر یک خط راست مفروض است که زاویهٔ آن با زاویهٔ راست خط مفروضی مساوی باشد.

فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض است، و C زاویهٔ راست‌خط مفروض. پس مطلوب رسم قطعه‌ای از یک دایره است بر خط راست AB که زاویهٔ آن با زاویهٔ C مساوی باشد.

زاویهٔ C یا حادّه است، یا قائمه، و یا منفرجه.



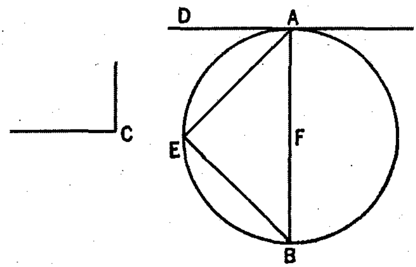
اول، فرض می‌کنیم زاویه، مانند شکل مقابل، حاده باشد. در نقطهٔ A بر خط راست AB، زاویهٔ BAD را مساوی با زاویهٔ C می‌کشیم؛ بنابراین زاویهٔ BAD نیز حاده است. AE را عمود بر AD رسم و فرض می‌کنیم F وسط AB باشد. عمود FG را از F بر AB اخراج و B را به G وصل می‌کنیم. در دو مثلث AFG و BFG ضلعهای AF و GF از یکی با دو ضلع BF و FG از دیگری مساوی‌اند، و زاویه‌های AFG و BFG با هم مساوی‌اند. در نتیجه ضلع AG با ضلع BG مساوی است. [۴.I]

بنابراین دایرهٔ به مرکز G و شعاع GA از B نیز خواهد گذشت.

فرض می‌کنیم این دایره رسم شده و ABE آن دایره است. E را به B وصل می‌کنیم. حال، چون AD از A، انتهای قطر AE، بر AE عمود شده است، پس بر دایرهٔ ABE مماس است. [III.۱۶، ف.]

چون خط راست AD بر دایرهٔ ABE مماس است، و از نقطهٔ تماس A، قاطع AB در دایرهٔ ABE کشیده شده است، زاویهٔ DAB با زاویهٔ AEB، محاط در یکی از دو قطعهٔ دایره مساوی است. [III.۳۲]

اما زاویهٔ DAB با زاویهٔ C مساوی است، پس زاویهٔ C نیز با زاویهٔ AEB مساوی است.



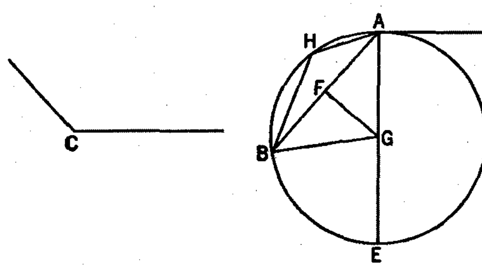
بدین ترتیب بر خط راست مفروض AB قطعهٔ AEB از یک دایره رسم شده است که در آن زاویهٔ AEB با زاویهٔ مفروض C مساوی است،

فرض می‌کنیم زاویهٔ C قائمه باشد؛ و باز مطلوب رسم قطعه‌ای از یک دایره بر AB است که زاویهٔ آن با زاویهٔ قائمه C مساوی باشد.

فرض می‌کنیم، مطابق با شکل فوق، زاویهٔ BAD مساوی با زاویهٔ قائمهٔ C رسم شده است. نقطهٔ F، وسط AB، را پیدا و به مرکز F و شعاع FA یا FB دایرهٔ AEB را رسم می‌کنیم. بنابراین خط راست AD بر دایرهٔ ABE مماس است، زیرا زاویهٔ A قائمه است. [III.۱۶،ف.]

و، زاویهٔ BAD با زاویهٔ محاط در قطعهٔ AEB، که یک نیمدایره است، مساوی و در نتیجه یک قائمه است. [III.۳۱]

اما زاویهٔ BAD نیز با C مساوی است، پس AEB نیز با C مساوی است.



در نتیجه، باز قطعهٔ AEB از یک دایره بر AB رسم شده است که زاویهٔ آن با زاویهٔ قائمهٔ C مساوی است.

بالاخره فرض می‌کنیم که زاویهٔ C منفرجه باشد.

بر نقطهٔ A از خط راست AB زاویهٔ BAD را، مطابق شکل بالا، مساوی با C می‌کشیم. AE را عمود بر AD رسم و F وسط AB را پیدا می‌کنیم. FG را عمود بر AB رسم و B را به G وصل می‌کنیم. حال، چون AF نیز با FB مساوی است پس در مثلثهای AFG و BFG، AF و FG از یکی با دو ضلع BF و FG از دیگری مساوی‌اند و زاویه‌های AFG و BFG نیز با هم مساوی‌اند، در نتیجه AG با BG مساوی است. [I.۴]

لذا دایرهٔ به مرکز G و شعاع GA بر B نیز می‌گذرد؛ فرض می‌کنیم AEB این دایره باشد. چون AD عمود بر قطر AE در انتهای آن رسم شده است پس بر دایرهٔ AEB مماس است، [III.۱۶،ف.]

و قاطع AB از نقطهٔ تماس A در آن رسم شده است؛ بنابراین زاویهٔ BAD با زاویهٔ محاط در قطعهٔ AHB از دایره مساوی است. [III.۳۲]

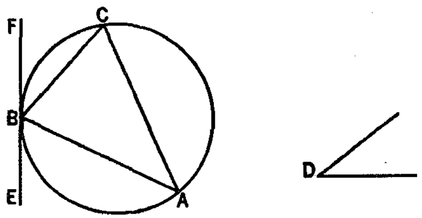
اما BAD با C مساوی است. لذا زاویهٔ محاط در قطعهٔ AHB نیز با C مساوی است.

بنابراین بر خط راست AB قطعهٔ AHB از یک دایره رسم شده است که زاویهٔ آن با زاویهٔ C مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

از دایره‌ای مفروض قطعه‌ای جدا کنید که زاویهٔ آن با زاویهٔ راست‌خط مفروضی مساوی باشد.



فرض می‌کنیم ABC دایرهٔ مفروض است، و D زاویهٔ راست‌خط مفروض. مطلوب جداکردن قطعه‌ای از دایرهٔ ABC است که زاویهٔ آن با زاویهٔ راست‌خط مفروض D مساوی باشد. EF را در نقطهٔ B مماس بر دایرهٔ ABC رسم می‌کنیم و بر خط راست FB، در نقطهٔ B از آن، زاویهٔ FBC را مساوی با زاویهٔ D می‌کشیم. [۲۳.I]

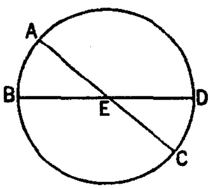
در این حال، چون خط راست EF بر دایرهٔ ABC مماس است و قاطع BC از نقطهٔ تماس B در دایره رسم شده است، زاویهٔ FBC با زاویهٔ محاط در قطعهٔ BAC مساوی است.[۳۲.III]

اما زاویهٔ FBC با D مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ محاط در قطعهٔ BAC با زاویهٔ D مساوی است. بنابراین از دایرهٔ مفروض ABC قطعهٔ BAC جدا شده است که زاویهٔ آن با زاویهٔ راست‌خط مفروض D مساوی است.

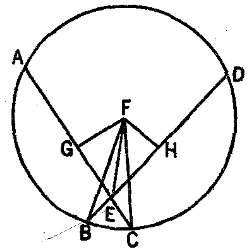
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

اگر در دایره‌ای دو خط راست یکدیگر را ببرند، مستطیل حاصل از قطعات یکی با مستطیل حاصل از قطعات دیگری مساوی است.



در دایرهٔ $ABCD$ فرض می‌کنیم دو خط راست AC و BD یکدیگر را در E ببرند؛ می‌گوییم که مستطیل حاصل از AE و EC با مستطیل حاصل از DE و EB مساوی است. حال، اگر AC و BD از مرکز گذشته باشند، پس E مرکز دایرهٔ $ABCD$ است.



روشن است که چون AE و EC و DE و EB با هم مساوی‌اند، مستطیل حاصل از AE و EC نیز با مستطیل حاصل از DE و EB مساوی است.

حال، فرض می‌کنیم AC و BD از مرکز نگذشته‌اند، فرض می‌کنیم مرکز $ABCD$ را پیدا کرده‌ایم و آن F است. از F عمودهای FG و FH را بر AC و BD فرود می‌آوریم و F را به B و C و E، وصل می‌کنیم.

در این حال، چون خط راست GF از مرکز بر خط راست AC که از مرکز نمی‌گذرد عمود شده است، آن را نصف هم می‌کند؛ [۳.III]

بنابراین AG با GC مساوی است. پس، چون خط راست AC در نقطهٔ G به اجزای متساوی و در E به اجزای نامتساوی تقسیم شده است، مستطیل حاصل از AE و EC به علاوهٔ مربع EG با مربع GC مساوی است؛ [۵.II]

مربع GF را به طرفین اضافه می‌کنیم. بنابراین مستطیل AE و EC به علاوهٔ مربعهای GE و GF با مربعهای CG و GF مساوی است.

اما مربع EF با مربعهای EG و GF مساوی است، و مربع FC با مربعهای CG و GF؛ [۴۷.I]

بنابراین مستطیل AE و EC به علاوهٔ مربع FE با مربع FC مساوی است. و FC با FB مساوی است؛ بنابراین مستطیل AE و EC به علاوهٔ مربع FE با مربع FB مساوی است.

به همین دلیل نیز مستطیل DE و EB به علاوهٔ مربع FE با مربع FB مساوی است.

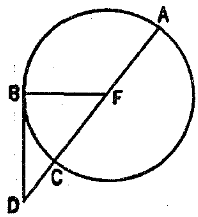
اما ثابت شده بود که مستطیل AE و EC به علاوهٔ مربع EF نیز با مربع FB مساوی است؛ بنابراین مستطیل AE و EC به علاوهٔ مربع FE با مستطیل DE و EB به علاوه مربع FE مساوی است.

مربع FE را از هر یک کم می‌کنیم. در نتیجه مستطیل حاصل از AE و EC که باقی می‌ماند، با مستطیل حاصل از DE و EB مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

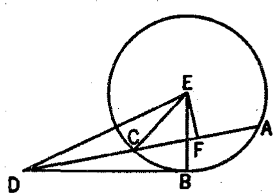
قضیهٔ ۳۶

اگر از نقطه‌ای در خارج یک دایره دو خط راست بر آن فرود آیند که یکی دایره را ببرد و دیگری بر آن مماس باشد، مستطیل حاصل از تمامی خط راستی که دایره را بریده است و قطعه‌ای از آن که در خارج دایره بین نقطهٔ مفروض و کمان محدّب دایره قرار دارد، با مربع مماس بر دایره مساوی است.



فرض می‌کنیم نقطهٔ D در بیرون دایرهٔ ABC اختیار شده، و از آن دو خط راست DCA و DB بر دایرهٔ ABC فرود آمده است. فرض می‌کنیم DCA دایره را بریده و DB بر آن مماس است. می‌گوییم که مستطیل حاصل از AD و DC با مربع BD مساوی است.

در این حالت یا DCA از مرکز می‌گذرد و یا نمی‌گذرد. ابتدا فرض می‌کنیم از مرکز بگذرد و این مرکز F باشد، و B را به F وصل می‌کنیم. پس زاویهٔ DBF قائمه است. [۱۸.III]
و، چون AC در F نصف، و CD به آن افزوده شده است، مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع FC با مربع FD مساوی است. [۶.II]
اما FC با FB مساوی است. لذا مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع FB با مربع FD مساوی است. و مربعهای FB و BD با مربع FD مساوی است؛ [۴۷.I]
بنابراین مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع FB با مربعهای FB و BD مساوی است. مربع FB را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین مستطیل AD و DC که باقی می‌ماند با مربع مماس DB مساوی است.



بار دیگر، فرض می‌کنیم DCA از مرکز دایرهٔ ABC نگذرد؛ مرکز آن E را پیدا می‌کنیم و از آن عمود EF را بر AC فرود می‌آوریم، و E را به B، و C را به D وصل می‌کنیم. پس زاویهٔ EBD قائمه است.[۱۸.III]
و چون خط راست EF، مارّ بر مرکز، خط راست AC را که از مرکز نگذشته به زاویهٔ قائمه بریده است، آن را نصف هم می‌کند. [۳.III]
بنابراین AF با FC مساوی است.

اما، چون خط راست AC در F نصف و CD بر آن افزوده شده است، مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع FC با مربع FD مساوی است. مربع EF را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربعهای CF و FE با مربعهای FD و FE مساوی است. اما مربع EC با مربعهای CF و FE مساوی است، زیرا زاویهٔ EFC قائمه است؛[۴۷.I]
و مربع ED با مربعهای DF و FE مساوی است؛ بنابراین مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع EC با مربع ED مساوی است. و EC با EB مساوی است. بنابراین مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع EB با مربع ED مساوی است.

اما مربعهای EB و BD با مربع ED مساوی است، زیرا زاویهٔ EBD قائمه است.[۴۷.I]

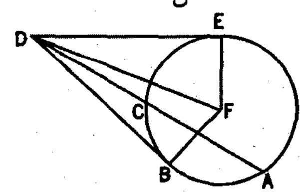
بنابراین مستطیل AD و DC به اضافهٔ مربع EB با مربعهای EB و BD مساوی است. حال، مربع EB را از هریک کم کنیم. بنابراین مستطیل AD و DC که باقی می‌ماند با مربع DB مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۷

اگر از نقطه‌ای در خارج یک دایره دو خط راست بر آن فرود آیند که یکی دایره را ببرد و دیگری بر آن فرود آید، و به علاوه اگر مستطیل حاصل از تمامی خط راستی که دایره را بریده است و قطعه‌ای از آن که در خارج دایره، بین نقطهٔ مفروض و کمان محدب دایره قرار دارد با مربع خط راستی که بر دایره فرود آمده مساوی باشد، آنگاه خط راستی که بر دایره فرود آمده بر دایره مماس است.

فرض می‌کنیم نقطهٔ D در خارج دایرهٔ ABC اختیار شده، و از آن دو خط راست DCA و DB بر دایرهٔ ABC فرود آمده‌اند، و فرض می‌کنیم DCA دایره را بریده و DB بر دایره فرود آمده است. اگر مستطیل AD و DC با مربع DB مساوی باشد، می‌گوییم که DB بر دایرهٔ ABC مماس است.



زیرا، فرض می‌کنیم DE را مماس بر ABC رسم کرده‌ایم، و F مرکز دایره، را پیدا و آن را به نقاط E و B و D وصل کرده‌ایم. در این صورت زاویهٔ FED قائمه است. [III.۱۸]

اما، چون DE بر دایرهٔ ABC مماس است و DCA آن را بریده است، مستطیل AD و DC با مربع DE مساوی است. [III.۳۶]

اما مستطیل AD و DC با مربع DB هم مساوی بود؛ پس مربع DE با مربع DB مساوی است؛ بنابراین DE با DB مساوی است. و FE با FB مساوی است؛ لذا دو ضلع DE و EF با دو ضلع DB و BF مساوی است، و FD قاعدهٔ مشترک مثلثهاست؛ در نتیجهٔ زاویهٔ DEF با زاویهٔ DBF مساوی است. [I.۸]

اما زاویهٔ DEF قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ DBF نیز قائمه است. اگر FB را امتداد دهیم قطر خواهد شد، و خط راست عمود بر قطر دایره در یک سر آن، بر دایره مماس است.[III.۱۶،ف.] بنابراین DB بر دایره مماس است.

به همین طریق می‌توانیم در حالتی که مرکز بر AC واقع باشد قضیه را ثابت کنیم.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ چهارم

تعاریف

۱. شکل راست‌خطی محاط در یک شکل راست‌خط گفته می‌شود که هر رأس آن بر یک ضلع شکلی که در آن محاط شده قرار گیرد.

۲. همچنین شکلی محیط بر یک شکل گفته می‌شود که هر ضلع آن بر یک رأس شکلی که بر آن محیط شده قرار گیرد.

۳. شکل راست‌خطی محاط در یک دایره گفته می‌شود که همهٔ رأسهای آن بر محیط دایره قرار گیرند.

۴. شکل راست خطی محیط بر یک دایره گفته می‌شود که همهٔ ضلعهای آن بر محیط دایره مماس باشند.

۵. همچنین دایره‌ای محاط در یک شکل گفته می‌شود که محیط آن بر هر یک از ضلعهای آن شکل مماس باشد.

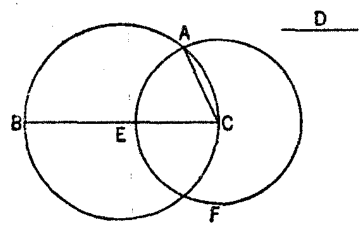
۶. دایره‌ای محیط بر یک شکل گفته می‌شود که محیط آن از همهٔ رأسهای آن شکل بگذرد.

۷. خط راستی در خور یک دایره گفته می‌شود که دو سرش بر محیط آن دایره قرار گیرند.

مقالهٔ IV. قضیه‌ها[۱]

قضیهٔ ۱

مطلوب رسم خط راستی است در خور دایره‌ای مفروض که با خط راست مفروضی که بزرگتر از قطر دایره نیست مساوی باشد.



فرض می‌کنیم که ABC دایرهٔ مفروض باشد و D خط راست مفروضی که بزرگتر از قطر دایره نیست؛ پس مطلوب رسم خط راستی است در خور دایرهٔ ABC مساوی با خط راست D.

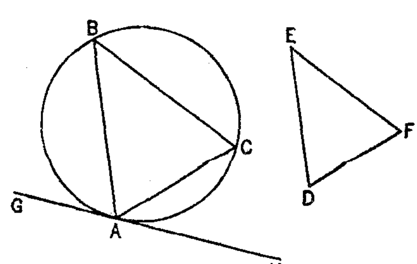
فرض می‌کنیم یک قطر BC از دایرهٔ ABC رسم شده است. حال اگر BC مساوی با D باشد، این همان خطی است که می‌خواهیم رسم کنیم. زیرا BC خط راستی است در خورِ دایرهٔ ABC مساوی با خط راست D.

اما اگر BC بزرگتر از D باشد، CE را مساوی D جدا می‌کنیم و به مرکز C و شعاع CE دایرهٔ EAF را رسم، و C را به A وصل می‌کنیم. در این صورت چون نقطهٔ C مرکز دایرهٔ EAF است CA با CE مساوی است. اما CE مساوی با D بود، بنابراین D هم با CA مساوی است. در نتیجه، CA که در خور دایرهٔ مفروض ABC رسم شده است، با خط راست مفروض D مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

مطلوب محاط کردن مثلثی است در یک دایرهٔ مفروض که با مثلثی مفروض هم‌زاویه باشد.



فرض می‌کنیم ABC دایرهٔ مفروض باشد و DEF مثلث مفروض. پس مطلوب محاط کردن مثلثی است در دایرهٔ ABC که با مثلث DEF هم‌زاویه باشد.

GH را بر دایرهٔ ABC در نقطهٔ A مماس می‌کنیم، [III.۱۶، ف.]

بر خط راست AH و از نقطهٔ A بر آن

---

۱. کلیهٔ قضیه‌های این مقاله مسئله هستند. ولی برای رعایت سبک نویسنده ما آنها را قضیه نامگذاری کرده‌ایم.ـم.

زاویهٔ HAC را مساوی با زاویهٔ DEF رسم می‌کنیم، و بر خط راست AG، از نقطهٔ A بر آن زاویهٔ GAB را مساوی با زاویهٔ DFE می‌کشیم [۲۳.I]
و C را به B وصل می‌کنیم. در این حال، چون AH بر دایرهٔ ABC مماس است، و از نقطهٔ تماس A قاطع AC در دایره رسم شده است، بنابراین زاویهٔ HAC با زاویهٔ ABC در قطعهٔ دیگر دایره مساوی است. [۳۲.III]
اما زاویهٔ HAC با زاویهٔ DEF مساوی است. لذا زاویهٔ ABC نیز با زاویهٔ DEF مساوی است.

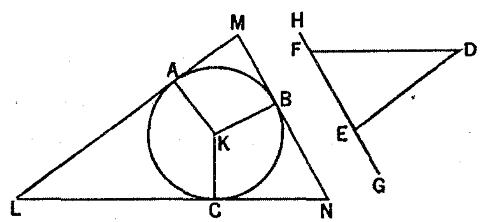
به همین دلیل زاویهٔ ACB نیز با زاویهٔ DFE مساوی است. لذا زاویهٔ باقیماندهٔ BAC نیز با زاویهٔ باقیماندهٔ EDF مساوی است. [۳۲.I]

بنابراین در دایرهٔ مفروض مثلثی هم‌زاویه با مثلث مفروض محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

مطلوب محیط کردن مثلثی است بر دایره‌ای مفروض که با مثلثی مفروض هم‌زاویه باشد.



فرض می‌کنیم ABC دایرهٔ مفروض باشد و DEF مثلث مفروض. پس مطلوب محیط کردن مثلثی است بر دایرهٔ ABC، هم‌زاویه با مثلث DEF.

EF را از دو طرف تا نقطه‌های H و G امتداد می‌دهیم. فرض می‌کنیم مرکز دایره، K، را پیدا [۱.III]
و خط راست قاطع KB را به دلخواه رسم کرده‌ایم. بر خط راست KB و از نقطهٔ K بر آن زاویهٔ BKA را مساوی با زاویهٔ DEG و زاویهٔ BKC را مساوی با زاویهٔ DFH رسم می‌کنیم؛[۲۳.I]
و از نقاط A و B و C مماسهای LM و MN و NL را بر دایرهٔ ABC می‌کشیم.[۱۶.III، ف.]

حال، چون LM و MN و NL در نقاط A و B و C بر دایرهٔ ABC مماس‌اند و KA و KB و KC از مرکز K به نقطه‌های تماس A و B و C وصل شده‌اند، پس در نقاط A و B و C زاویه‌ها قائمه‌اند؛ [۱۸.III]
و چون در چهارضلعی $AMBK$ چهار زاویه مساوی با چهار قائمه‌اند، به دلیل قابل تجزیه بودنش به دو مثلث، به علاوه چون زاویه‌های KAM و KBM قائمه‌اند، زاویه‌های AKB و AMB نیز مساوی دو قائمه می‌شوند. اما زاویه‌های DEG و DEF نیز مساوی دو قائمه‌اند؛ [۱۳.I]

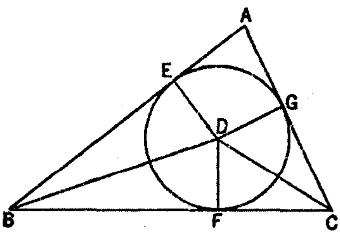
بنابراین زاویه‌های AKB و AMB با زاویه‌های DEG و DEF مساوی می‌شوند، که در آنها **زاویهٔ** AKB با زاویهٔ DEG مساوی است؛ در نتیجه زاویهٔ AMB که باقی می‌ماند با زاویهٔ DEF که باقی می‌ماند مساوی است.

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ LNB نیز با زاویهٔ DFE مساوی است. بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ MLN با زاویهٔ EDF مساوی است. [۳۲.I]
لذا مثلث LMN با مثلث DEF هم‌زاویه و بر دایرهٔ ABC محیط است. بنابراین بر دایرهٔ مفروض مثلثی هم‌زاویه با مثلث مفروض محیط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

مطلوب محاط کردن دایره‌ای است در مثلث مفروض.



فرض می‌کنیم ABC مثلث مفروض باشد. پس مطلوب محاط کردن دایره‌ای در مثلث ABC است. فرض می‌کنیم زاویه‌های ABC و ACB به وسیلهٔ خطهای راست BD و DC نصف شده‌اند، [۹.I]
و یکدیگر را در نقطهٔ D بریده‌اند. از D عمودهای DE و DF و DG را بر خطهای راست AB و BC و CA فرود می‌آوریم. حال، دو مثلث EBD و FBD دو زاویهٔ متساوی و یک ضلع مشترک BD، روبه‌رو به یکی از زاویه‌های متساوی، دارند. بنابراین ضلعهای دیگر آنها نیز نظیر به نظیر متساوی می‌شوند. [۲۶.I]
بنابراین DE با DF مساوی است. به همین دلیل DG نیز با DF مساوی است.
لذا خطهای راست DE و DF و DG با هم مساوی‌اند. لذا دایرهٔ به مرکز D و شعاع یکی از خطهای راست DE و DF و DG از دو نقطهٔ دیگر نیز می‌گذرد و در این نقطه‌ها بر AB و BC و CA مماس می‌شود، زیرا زاویه‌ها در نقطه‌های E و F و G قائمه‌اند؛ و اگر این دایره آنها را ببرد خط راست عمود بر قطر دایره در یکی از دو سر قطر، در داخل دایره می‌افتد که ثابت شده بود محال است. [۱۶.III]
بنابراین دایرهٔ به مرکز D و شعاع یکی از خطهای راست DE و DF و DG، ضلعهای مثلث ABC را نمی‌برد، و لذا بر آنها مماس خواهد بود، یعنی دایره‌ای است محاط در مثلث ABC. [IV. تع.۵]

فرض می‌کنیم این دایره FEG باشد. پس دایرهٔ FEG در مثلث مفروض ABC محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

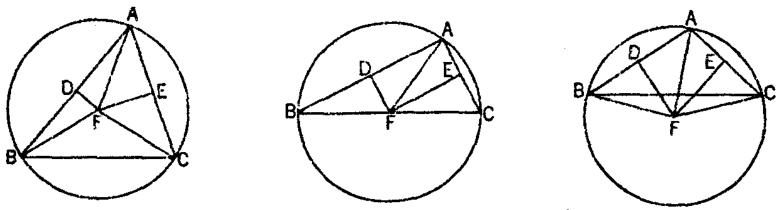
قضیهٔ ۵

مطلوب رسم دایره‌ای است محیط بر مثلث مفروض.

فرض می‌کنیم مثلث ABC داده شده است. پس مطلوب رسم دایره‌ای است محیط بر مثلث مفروض ABC.

خطهای راست AB و AC را در نقاط D و E نصف می‌کنیم، [I. ۱۰]

و از این نقاط عمودهای DF و EF را بر AB و AC اخراج می‌کنیم؛ این عمودها یا در داخل مثلث ABC، یا بر خط راست BC، و یا در بیرون خط راست BC یکدیگر را می‌برند.



ابتدا فرض می‌کنیم یکدیگر را در F، در داخل مثلث ABC، ببرند. F را به A و B و C وصل می‌کنیم. در این صورت، در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF و BDF، ضلع AD با BD مساوی و DF در هر دو مشترک و با آنها زاویهٔ قائمه ساخته است، لذا AF مساوی FB است. [I.۴]

به همین ترتیب ثابت می‌شود که CF با AF مساوی است، و BF نیز با FC؛ در نتیجه سه خط راست FA و FB و FC با هم مساوی‌اند. لذا دایره‌ای به مرکز F و شعاع یکی از خطهای راست FA و FB و FC، از دو نقطهٔ دیگر نیز می‌گذرد و دایره بر مثلث ABC محیط می‌شود.

فرض می‌کنیم این دایره که محیط شده ABC باشد.

بعد، فرض می‌کنیم DF و EF یکدیگر را در نقطهٔ F واقع بر خط راست BC، مانند شکل دوم، بریده‌اند و F را به A وصل می‌کنیم. در این صورت نیز به طریق مشابه، ثابت می‌شود که نقطهٔ F مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

باز فرض می‌کنیم DF و EF یکدیگر را در نقطهٔ F، نظیر شکل سوم، در بیرون مثلث ABC ببرند، F را به A و B و C وصل می‌کنیم. باز چون AD با BD مساوی است و DF در هر دو مشترک است و با آنها زاویهٔ قائمه می‌سازد، پس از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF و BDF نتیجه می‌شود که AF با BF مساوی است. [I.۴]

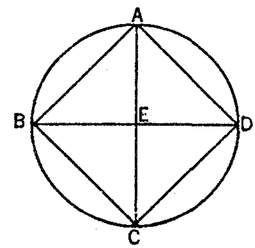
به همین ترتیب ثابت می‌شود که CF نیز با AF مساوی است، و لذا BF نیز با FC مساوی است؛ بنابراین دایرهٔ به مرکز F و شعاع یکی از خطهای راست FA و FB و FC از سه نقطهٔ A و B و C خواهد گذشت، و بدین ترتیب دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم شده است. بنابراین بر مثلث مفروض دایره‌ای محیط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

و روشن است که وقتی مرکز دایره در داخل مثلث ABC می‌افتد، زاویهٔ BAC که در قطعهٔ بزرگتر از نصف دایره قرار دارد از یک قائمه کمتر است. وقتی مرکز بر خط راست BC بیفتد، زاویهٔ BAC که در قطعهٔ نیم‌دایره قرار دارد مساوی یک قائمه است. و وقتی مرکزِ دایره در خارج مثلث بیفتد، زاویهٔ BAC که در قطعهٔ کمتر از نیم‌دایره قرار دارد، بزرگتر از یک قائمه است. [III.۳۱]

قضیهٔ ۶

مطلوب محاط کردن مربعی است در دایره‌ای مفروض.



فرض می‌کنیم دایرهٔ $ABCD$ داده شده است. پس مطلوب محاط کردن مربعی است در دایرهٔ $ABCD$. فرض می‌کنیم AC و BD دو قطر عمود بر هم از این دایره رسم شده‌اند؛ B و D را به A و C وصل می‌کنیم. در این صورت چون BE با ED مساوی است ـــ زیرا E مرکز دایره است ـــ و EA در دو مثلث AED و AEB مشترک و بر BE و ED عمود است، نتیجه می‌شود که AB با AD مساوی است. [I.۴]

به همین دلیل هر یک از خطهای راست BC و CD نیز با هر یک از خطهای راست AB و AD مساوی است. بنابراین چهارضلعی $ABCD$ متساوی‌الاضلاع است.

حال می‌گوییم که قائم‌الزاویه نیز هست. زیرا، چون BD قطر دایرهٔ $ABCD$ است، لذا BAD نیم‌دایره، و در نتیجه زاویهٔ BAD قائمه است. [III.۳۱]

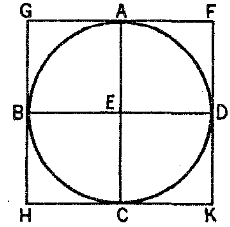
به همین دلیل هر یک از زاویه‌های ABC و BCD و CDA نیز قائمه است. بنابراین چهارضلعی $ABCD$ قائم‌الزاویه است؛ اما ثابت شده بود که متساوی‌الاضلاع نیز هست؛ بنابراین $ABCD$ مربع است؛ [I.تع.۲۲]

و در دایرهٔ $ABCD$ محاط شده است. بدین‌ترتیب در دایرهٔ مفروض، مربع $ABCD$ محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

مطلوب محیط کردن مربعی است بر دایره‌ای مفروض.



فرض می‌کنیم $ABCD$ دایرهٔ مفروض باشد. پس مطلوب محیط کردن مربعی است بر دایرهٔ $ABCD$.

دو قطر عمود بر هم AC و BD از دایرهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم، و از نقطه‌های A و B و C و D خطهای راست FG و GH و HK و KF را مماس بر دایرهٔ $ABCD$ می‌کشیم. [III.۱۶، ف.]

در این صورت چون FG بر دایرهٔ $ABCD$ مماس است، و EA از مرکز E به نقطهٔ تماس A وصل شده است، پس زاویه‌ها در A قائمه‌اند. [۱۸.III]

به همین دلیل زاویه‌ها در نقاط B و C و D نیز قائمه‌اند. اما چون زاویهٔ AEB قائمه و EBG هم قائمه است، بنابراین GH با AC موازی است. [۲۸.I]

به همین دلیل AC هم با FK موازی است، لذا GH نیز با FK موازی است. [۳۰.I]

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از خطهای راست GF و HK با BED موازی است. بنابراین GK و GC و AK و FB و BK متوازی‌الاضلاع‌اند. بنابراین GF با HK مساوی است و GH با FK. [۳۴.I]

و، چون AC با BD مساوی است، و AC نیز با هر یک از خطهای راست GH و FK مساوی است، و BD با هر یک از خطهای راست GF و HK مساوی است، [۳۴.I]

بنابراین چهارضلعی $FGHK$ متساوی‌الاضلاع است. حال، می‌گوییم که قائمه‌الزاویه نیز هست. زیرا، چون $GBEA$ متوازی‌الاضلاع است و زاویهٔ AEB قائمه است، بنابراین زاویهٔ AGB نیز قائمه است.

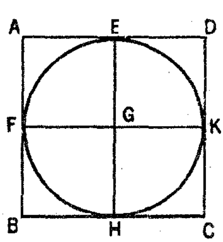
به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که زاویه‌ها در H و K و F قائمه‌اند. پس $FGHK$ قائم‌الزاویه است. اما ثابت شده بود که متساوی‌الاضلاع نیز هست. بنابراین مربع است، و بر دایرهٔ $ABCD$ محیط.

بنابراین بر دایرهٔ مفروض مربعی محیط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

مطلوب محاط کردن دایره‌ای است در مربعی مفروض.



فرض می‌کنیم $ABCD$ مربع مفروض باشد. پس مطلوب محاط کردن یک دایره در مربع مفروض $ABCD$ است.

فرض می‌کنیم خطهای راست AD و AB به ترتیب در نقطه‌های E و F نصف شده‌اند. [۱۰.I]

از نقطهٔ E خط راست EH را به موازات AB یا CD می‌کشیم، و از F، خط راست FK را به موازات AD یا BC رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

بنابراین هر یک از شکلهای AK و KB و AH و HD و AG و GC و BG و GD متوازی‌الاضلاع است و روشن است که اضلاع روبه‌رو در آنها با هم مساوی‌اند. [۳۴.I]

اما چون AD با AB مساوی است و AE نصف AD است و AF نصف AB؛ بنابراین

AE با AF مساوی است، و اضلاع روبه‌رو نیز متساوی‌اند، بنابراین FG با GE مساوی است.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از خطهای راست GH و GK با هر یک از خطهای راست FG و GE مساوی است؛ بنابراین چهار خط راست GE، GF، GH و GK با هم مساوی‌اند. لذا دایرهٔ محاطی به مرکز G و شعاع GE یا GF یا GH یا GK از هر چهار نقطهٔ E و F و H و K خواهد گذشت و بر خطهای راست AB و BC و CD و DA مماس خواهد شد، زیرا زاویه‌های موجود در نقطه‌های E و F و H و K قائمه‌اند.

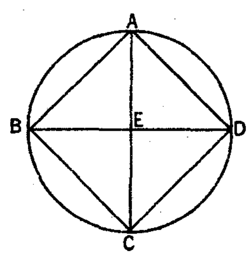
زیرا اگر این دایره AB و BC و CD و DA را ببرد، خط راست عمود بر قطر دایره در انتهای آن درون دایره خواهد افتاد، که ثابت کرده بودیم بی‌معنی است. [III.۱۶]

بنابراین دایرهٔ به مرکز G و شعاع یکی از خطهای راست GE و GF و GH و GK خطهای راست AB و BC و CD و DA را نخواهد برید، و لذا بر آنها مماس و محاط در مربع $ABCD$ است. پس در مربع مفروض دایره‌ای محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

مطلوب محیط کردن دایره‌ای است بر مربعی مفروض.



فرض می‌کنیم $ABCD$ مربع مفروض است. پس مطلوب محیط کردن دایره‌ای بر مربع $ABCD$ است. A را به C و B را به D وصل می‌کنیم تا یکدیگر را در E ببرند. چون دو ضلع DA و AC با دو ضلع BA و AC مساوی‌اند و DC نیز با BC مساوی است، بنابراین دو مثلث ADC و ABC به دلیل تساوی سه ضلع، متساوی‌اند؛ در نتیجه زاویهٔ DAC با زاویهٔ BAC مساوی است. [I.۸]

بنابراین AC نیمساز زاویهٔ DAB است. به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای راست AC و DB نیمسازهای زاویه‌های BCD و ABC و ADC هستند. اما چون زاویهٔ DAB با زاویهٔ ABC مساوی است، و زاویهٔ EAB نصف زاویهٔ DAB است و زاویهٔ EBA نصف زاویهٔ ABC، بنابراین زاویهٔ EAB نیز با زاویهٔ EBA مساوی است؛ در نتیجه ضلع EA نیز با ضلع EB مساوی است. [I.۶]

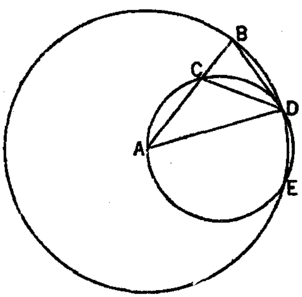
به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از خطهای راست EA و EB با هر یک از خطهای راست EC و ED مساوی است. بنابراین چهار خط راست EA و EB و EC و ED

با یکدیگر مساوی‌اند. لذا دایره به مرکز E و به شعاع یکی از خطهای راست EA و EB و EC و ED بر چهار رأس مربع $ABCD$ خواهد گذشت و بر آن محیط خواهد بود. بنابراین بر مربع مفروض دایره‌ای محیط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

مطلوب رسم مثلث متساوی‌الساقینی است که هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعده‌اش دو برابر زاویهٔ سوم آن باشد.



فرض می‌کنیم خط راست AB معلوم است و آن را در نقطهٔ C طوری بریده‌ایم که مستطیل حاصل از AB و BC با مربع CA مساوی است؛ [۱۱.II]

به مرکز A و شعاع AB دایرهٔ BDE را رسم و فرض می‌کنیم خط راست BD مساوی با خط راست AC، که بزرگتر از قطر دایرهٔ BDE نیست، در خور این دایره رسم شده است. [۱.IV]

D را به A و C وصل و فرض می‌کنیم دایرهٔ ACD بر مثلث ACD محیط شده است.[۵.IV]

بعد، چون مستطیل AB و BC با مربع AC مساوی است، و AC هم با BD مساوی است، بنابراین مستطیل AB و BC با مربع BD مساوی است. و چون از نقطهٔ B خارج دایرهٔ ACD دو خط راست BA و BD بر دایره فرود آمده‌اند و یکی از آنها دایره را قطع کرده است و دیگری بر آن فرود آمده است و مستطیل AB و BC با مربع BD مساوی شده است، بنابراین BD بر دایرهٔ ACD مماس است. [۳۷.III]

حال، چون BD بر آن مماس و DC قاطعی است که از نقطهٔ تماس D بر دایره رسم شده است، لذا زاویهٔ BDC با زاویهٔ DAC در قطعهٔ دیگر دایره مساوی است. [۳۲.III]

حال، چون زاویهٔ BDC با زاویهٔ DAC مساوی است، زاویهٔ CDA را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین تمامی زاویهٔ BDA با دو زاویهٔ CDA و DAC مساوی است. اما زاویهٔ خارجی BCD با زاویه‌های CDA و DAC مساوی است؛ [۳۲.I]

لذا زاویهٔ BDA نیز با زاویهٔ BCD مساوی است. اما زاویهٔ BDA با زاویهٔ CBD مساوی است، زیرا ضلع AD هم با AB مساوی است؛ [۵.I]

در نتیجه زاویهٔ DBA نیز با زاویهٔ BCD مساوی است. بنابراین سه زاویهٔ BDA و DBA و

BCD با هم مساوی‌اند. و، چون زاویهٔ DBC با زاویهٔ BCD مساوی است، ضلع BD نیز با ضلع DC مساوی می‌شود. [۶.I]

اما BD بنا به فرض با CA مساوی است؛ لذا CA نیز با CD مساوی است، در نتیجه زاویهٔ CDA نیز با زاویهٔ DAC مساوی است؛ [۵.I]

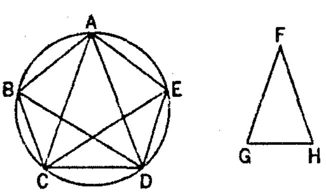
و زاویه‌های CDA و DAC دو برابر زاویهٔ DAC هستند. اما زاویهٔ BCD با زاویه‌های CDA و DAC مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ BCD نیز دو برابر زاویهٔ CAD است. اما زاویهٔ BCD با هر یک از زاویه‌های BDA و DBA مساوی است؛ بنابراین هر یک از زاویه‌های BDA و DBA نیز دو برابر زاویهٔ DAB است.

لذا مثلث متساوی‌الساقین ABD چنان ساخته شده است که هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ BD در آن دو برابر زاویهٔ سوم آن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

مطلوب محاط‌کردن یک پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا[1] در دایره‌ای مفروض است.



فرض می‌کنیم دایرهٔ $ABCDE$ مفروض است. پس مطلوب محاط کردن یک پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا در آن است. فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الساقین FGH که در آن هر یک از زاویه‌های G و H دو برابر زاویهٔ F است معلوم باشد. [۱۰.IV]

در دایرهٔ $ABCDE$ مثلث ACD را متساوی‌الزاویه با مثلث FGH محاط می‌کنیم به طوری که زاویهٔ CAD با زاویهٔ F مساوی باشد و زاویه‌های G و H به ترتیب با زاویه‌های ACD و CDA مساوی باشند؛ [۲.IV]

بنابراین هر یک از زاویه‌های ACD و CDA نیز دو برابر زاویهٔ CAD هستند.

حال فرض می‌کنیم زاویه‌های ACD و CDA به‌ترتیب توسط خطهای راست CE و BD نصف، [۹.I] و B به A و C و E به D و A وصل شده‌اند. در این صورت چون هر یک از زاویه‌های ACD و CDA دو برابر زاویهٔ CAD است و این زاویه‌ها توسط خطهای راست CE و DB نصف شده‌اند، بنابراین پنج زاویهٔ DAC و ACE و ECD و CDB و BDA با یکدیگر مساوی‌اند.

اما زاویه‌های متساوی روبه‌رو به کمانهای متساوی‌اند؛ [۲۶.III]

---

۱. در اصطلاح امروزی: پنج‌ضلعی منتظم.ـم.

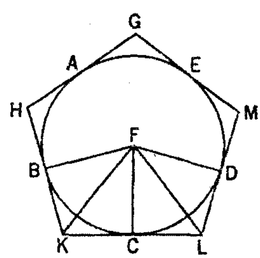
بنابراین پنج کمان AB و BC و CD و DE و EA با هم مساوی‌اند. لذا کمانهای متساوی روبه‌رو به خطهای راست متساوی‌اند؛ [۲۹.III]
بنابراین پنج خط راست AB و BC و CD و DE و EA با هم مساوی‌اند؛ لذا، پنج‌ضلعی $ABCDE$ متساوی‌الاضلاع است.

بعد می‌گوییم متساوی‌الزوایا نیز هست. زیرا چون کمان AB با کمان DE مساوی است، کمان BCD را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین تمام کمان $ABCD$ با تمام کمان $EDCB$ مساوی است. و زاویهٔ AED روبه‌رو به کمان $ABCD$ است و زاویهٔ BAE روبه‌رو به کمان $EDCB$.
بنابراین زاویهٔ BAE نیز با زاویهٔ AED مساوی است. [۲۷.III]
به همین دلیل هر یک از زاویه‌های ABC و BCD و CDE نیز با هر یک از زاویه‌های BAE و AED مساوی است؛ لذا پنج‌ضلعی $ABCDE$ متساوی‌الزوایا است. اما متساوی‌الاضلاع بودن آن نیز ثابت شده بود؛ بنابراین در دایرهٔ مفروض، یک پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع متساوی‌الزوایا محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

مطلوب محیط کردن پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع متساوی‌الزوایایی بر دایره‌ای مفروض است.



فرض می‌کنیم $ABCDE$ دایرهٔ مفروض باشد. لذا مطلوب محیط کردن پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا بر دایرهٔ $ABCDE$ است.

فرض می‌کنیم نقاط A و B و C و D و E رأسهای پنج‌ضلعی محاطی باشند. بنابراین کمانهای AB و BC و CD و DE و EA با هم مساوی‌اند؛ [۱۱.IV]
از نقاط A و B و C و D و E خطهای راست GH و HK و KL و LM و MG را بر این دایره مماس می‌کنیم؛ [۱۶.III، ف.]
فرض می‌کنیم نقطهٔ F مرکز دایرهٔ $ABCDE$ را پیدا، [۱.III]
و آن را به نقاط B و K و C و L و D وصل کرده‌ایم. در این صورت، چون خط راست KL در نقطهٔ C بر دایرهٔ $ABCDE$ مماس است، و FC از مرکز F به نقطهٔ تماس C وصل شده است، لذا FC بر KL عمود است؛ [۱۸.III]
بنابراین هر یک از زاویه‌ها در C قائمه است.

به همین دلیل زاویه‌ها در نقاط B و D نیز قائمه‌اند. و چون زاویهٔ FCK قائمه است، لذا مربع FK با مربعهای FC و CK مساوی است. به همین دلیل [۴۷.I]

مربع FK با مربعهای FB و BK مساوی است؛ در نتیجه مربعهای FC و CK با مربعهای FB و BK مساوی‌اند، که در آنها مربع FC با مربع FB مساوی است؛ بنابراین مربع CK با مربع BK، و در نتیجه BK با CK مساوی است. در دو مثلث BFK و CFK دو ضلع BF و FK از یکی به ترتیب با دو ضلع CF و FK از دیگری مساوی‌اند، BK با CK مساوی است، در نتیجه زاویهٔ BFK با زاویهٔ CFK مساوی است، [۸.I]
و زاویهٔ BKF با زاویهٔ CKF. بنابراین زاویهٔ BFC دو برابر زاویهٔ KFC است، و زاویهٔ BKC دو برابر زاویهٔ FKC.

به همین دلیل زاویهٔ CFD نیز دو برابر زاویهٔ CFL است، و زاویهٔ DLC دو برابر زاویهٔ FLC. اما چون کمان BC باکمان CD مساوی است، زاویهٔ BFC نیز با زاویهٔ CFD مساوی است. [۲۷.III]
و زاویهٔ BFC دو برابر زاویهٔ KFC است، و زاویهٔ DFC دو برابر زاویهٔ LFC. لذا زاویهٔ KFC با زاویهٔ LFC مساوی است. اما زاویهٔ FCK نیز با زاویهٔ FCL مساوی است؛ بنابراین FKC و FLC دو مثلث هستند که دو زاویه از یکی با دو زاویه از دیگری مساوی است و یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری، یعنی FC که در هر دو مشترک است. بنابراین بقیهٔ ضلعها با هم و زاویه‌ها با هم مساوی‌اند، [۲۶.I]
یعنی خط راست، KC با CL مساوی است و زاویهٔ FKC با زاویهٔ FLC. و چون KC با CL مساوی است، لذا KL دو برابر KC است.

به همین دلیل می‌توان ثابت کرد که HK نیز دو برابر BK است و BK با KC مساوی است. در نتیجه HK نیز با KL مساوی است؛

به همین طریق می‌توان ثابت کرد که هر یک از خطهای راست HG و GM و ML نیز با هر یک از خطهای راست HK و KL مساوی است، بنابراین پنج‌ضلعی $GHKLM$ متساوی‌الاضلاع است. حال می‌گوییم که متساوی‌الزوایا نیز هست. زیرا، چون زاویهٔ FKC با زاویهٔ FLC مساوی است، و ثابت شده بود که زاویهٔ HKL دو برابر زاویهٔ FKC است، و زاویهٔ KLM دو برابر زاویهٔ FLC، بنابراین زاویهٔ HKL نیز با زاویهٔ KLM مساوی است.

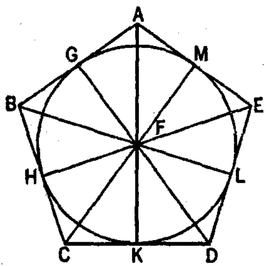
به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که هر یک از زاویه‌های KHG و HGM و GML نیز با هر یک از زاویه‌های HKL و KLM مساوی است؛ بنابراین پنج زاویهٔ GHK و HKL و KLM و LMG و MGH با همدیگر مساوی‌اند.

بنابراین پنج‌ضلعی $GHKLM$ متساوی‌الزوایاست. و متساوی‌الاضلاع بودن آن هم ثابت شده بود. و این پنج‌ضلعی بر دایرهٔ $ABCDE$ محیط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

مطلوب محاط کردن یک دایره در پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایای مفروض است.



فرض می‌کنیم $ABCDE$ پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایای مفروض باشد. پس مطلوب محاط کردن یک دایره در این پنج‌ضلعی است.

فرض می‌کنیم زاویه‌های BCD و CDE به ترتیب توسط خطهای راست CF و DF نصف شده‌اند. F، نقطهٔ تلاقی CF و DF، را به نقاط B و E و A وصل می‌کنیم. در این صورت، چون در دو مثلث BCF و DCF ضلع BC با ضلع CD مساوی است و CF در هر دو مشترک، لذا دو ضلع BC و CF از یکی با دو ضلع DC و CF از دیگری مساوی‌اند و زاویهٔ BCF با زاویهٔ DCF مساوی است، لذا BF با DF مساوی می‌شود، و مثلث BCF با مثلث DCF، و زاویه‌های دیگر هم با هم مساوی می‌شوند، یعنی آنها که روبه‌رو به ضلعهای متساوی قرار دارند. [۴.I]

لذا زاویهٔ CBF با زاویهٔ CDF مساوی است. و چون زاویهٔ CDE دو برابر زاویهٔ CDF است، و زاویهٔ CDE با زاویهٔ ABC مساوی است و زاویهٔ CDF با زاویهٔ CBF؛ بنابراین زاویهٔ CBA نیز دو برابر زاویهٔ CBF است؛ بنابراین زاویهٔ ABF با زاویهٔ FBC مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ ABC به توسط خط راست BF نصف شده است. به همین طریق می‌توان ثابت کرد که زاویه‌های BAE و AED نیز به ترتیب توسط خطهای راست FA و FE نصف شده‌اند.

حال از نقطهٔ F عمودهای FG و FH و FK و FL و FM را بر خطهای راست، AB و BC و CD و DE و EA فرود می‌آوریم. در این صورت، چون زاویهٔ HCF با زاویهٔ KCF مساوی است، و زاویه‌های قائمه FHC و FKC نیز با هم مساوی‌اند، مثلثهای FHC و FKC که دو زاویهٔ متساوی دارند و ضلع FC، روبه‌رو به یک زاویه مساوی، در هر دو مشترک است، با هم مساوی می‌شوند، و بقیهٔ اجزای آنها هم با هم مساوی می‌شوند؛ [۲۶.I]

بنابراین عمود FH با عمود FK مساوی می‌شود.

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که هر یک از خطهای راست FL و FM و FG نیز با هر یک از خطهای راست FH و FK مساوی است؛ بنابراین پنج خط راست FG و FH و FK و FL و FM با یکدیگر مساوی‌اند. در نتیجه دایرهٔ به مرکز F و شعاع یکی از خطهای راست FG و FH و FK و FL و FM از بقیهٔ نقطه‌ها می‌گذرد و بر خطهای راست AB و BC و CD و DE و EA مماس می‌شود، زیرا زاویه‌ها در نقطه‌های G و H و K و L و M قائمه‌اند.

چون اگر بر آنها مماس نباشد و آنها را ببرد نتیجه می‌شود که خط راست عمود بر قطر دایره در یک سر قطر درون دایره می‌افتد که ثابت شده بود محال است. [III.۱۶]

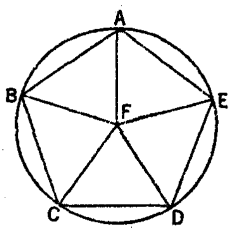
بنابراین دایرهٔ مرسوم به مرکز F به شعاع یکی از خطهای راست FG و FH و FK و FL و FM خطهای راست AB و BC و CD و DE و EA را نمی‌برد و بر آنها مماس است. و آن را مانند $GHKLM$ رسم می‌کنیم.

بنابراین در پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایای مفروض دایره‌ای محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

مطلوب محیط کردن دایره‌ای بر پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایای مفروض است.



فرض می‌کنیم $ABCDE$ پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایای مفروض باشد. پس مطلوب محیط کردن یک دایره بر این پنج‌ضلعی است.

فرض می‌کنیم زاویه‌های BCD و CDE به ترتیب به وسیلهٔ خطهای راست CF و DF نصف شده‌اند، و از نقطهٔ تلاقی آنها، F، خطهای راست FB و FA و FE را به نقاط B و A و E وصل می‌کنیم.

در این صورت، با روشی مشابه با روش قبل می‌توان ثابت کرد که زاویه‌های CBA و BAE و AED نیز به ترتیب به وسیلهٔ خطهای راست FB و FA و FE نصف شده‌اند. اما، چون زاویهٔ BCD با زاویهٔ CDE مساوی است، و زاویهٔ FCD نصف زاویهٔ BCD است، و زاویهٔ CDF نصف زاویهٔ CDE، بنابراین زاویهٔ FCD نیز با زاویهٔ CDF مساوی است. در نتیجه ضلع FC نیز با ضلع FD مساوی است. [I.۶]

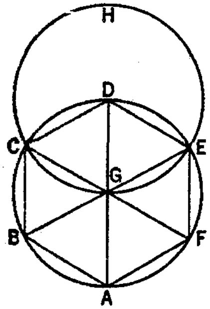
همچنین می‌توان ثابت کرد که هر یک از خطهای راست FA و FB و FE نیز با هر یک از خطهای راست FC و FD مساوی است؛ بنابراین پنج خط راست FA و FB و FC و FD و FE با یکدیگر مساوی‌اند و دایرهٔ به مرکز F و شعاع یکی از این خطهای راست از همهٔ رأسهای پنج‌ضلعی نیز خواهد گذشت و بر آن محیط خواهد شد. این دایره را رسم، و فرض می‌کنیم $ABCDE$ باشد.

بنابراین بر پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویهٔ مفروض یک دایره محیط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

مطلوب محاط کردن شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایایی در دایرهٔ مفروض است.



فرض می‌کنیم $ABCDEF$ دایرهٔ مفروض باشد. پس مطلوب محاط کردن یک شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا در دایرهٔ $ABCDEF$ است.

قطر AD از این دایره را رسم و مرکز دایره، G، را پیدا می‌کنیم و به مرکز D و شعاع DG دایرهٔ $EGCH$ را می‌کشیم و G را به E و C وصل می‌کنیم و تا نقاط B و F امتداد می‌دهیم و AB و BC و CD و DE و EF و FA را رسم می‌کنیم. می‌گوییم $ABCDEF$ شش‌ضلعی مطلوب است.

زیرا، چون نقطهٔ G مرکز دایرهٔ $ABCDEF$ است، GE با DG مساوی است. باز، چون نقطهٔ D مرکز دایرهٔ GCH است، DE با DG مساوی است. اما ثابت شده بود که GE با GD مساوی است، بنابراین GE نیز با ED مساوی است. لذا، مثلث EGD متساوی‌الاضلاع است، و سه زاویهٔ EGD و GDE و DEG با هم مساوی‌اند، زیرا در مثلثهای متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده با هم مساوی‌اند، [۵.I]

اما سه زاویهٔ هر مثلث مساوی با دو قائمه‌اند، [۳۲.I]

بنابراین زاویهٔ EGD مساوی با یک‌سوم دو قائمه است.

همچنین می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ DGC نیز مساوی با یک‌سوم دو قائمه است. و چون خط راست CG که EB را بریده است زاویه‌های مجاور EGC و CGB مساوی با دو قائمه می‌سازد، بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ CGB نیز مساوی با یک‌سوم دو قائمه است. پس زاویه‌های EGD و DGC و CGB با هم مساوی‌اند؛ و نیز زاویه‌های متقابل به رأس آنها یعنی BGA و AGF و FGE با هم مساوی‌اند. [۱۵.I]

در نتیجه شش زاویهٔ EGD و DGC و CGB و BGA و AGF و FGE با هم مساوی‌اند.

اما زاویه‌های متساوی روبه‌رو به کمانهای متساوی‌اند. [۲۶.III]

لذا شش کمان AB و BC و CD و DE و EF و FA با یکدیگر مساوی‌اند، و کمانهای متساوی روبه‌رو به خطهای راست متساوی‌اند؛ [۲۹.III]

لذا این شش خط راست با یکدیگر مساوی‌اند. پس شش‌ضلعی $ABCDEF$ متساوی‌الاضلاع است. حال، می‌گوییم که متساوی‌الزوایا نیز هست.

زیرا، چون کمان FA با کمان ED مساوی است، کمان $ABCD$ را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین تمام کمان $FABCD$ با تمام کمان $EDCBA$ مساوی است؛ و زاویهٔ FED روبه‌رو به کمان $FABCD$ است، و زاویهٔ AFE روبه‌رو به کمان $EDCBA$؛ بنابراین زاویهٔ AFE با زاویهٔ DEF مساوی است. [۲۷.III]

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که بقیهٔ زاویه‌های شش‌ضلعی $ABCDEF$ تک‌تک با هر یک از زاویه‌های AFE و FED مساوی‌اند؛ بنابراین شش‌ضلعی $ABCDEF$ متساوی‌الزوایا است. اما ثابت شده بود متساوی‌الاضلاع نیز هست؛ و در دایرهٔ $ABCDEF$ محاط شده است. بنابراین در دایرهٔ مفروض یک شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا محاط شده است.

آنچه می‌خواستیم.

فرع. از این قضیه آشکار می‌شود که ضلعهای این شش‌ضلعی با شعاع دایره مساوی‌اند.

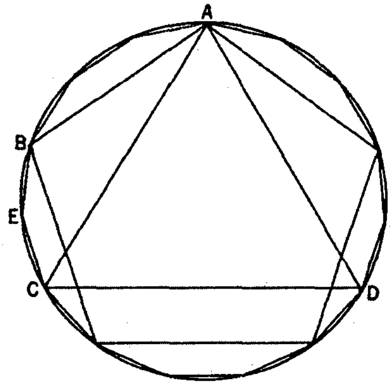
و، به همان روشی که در مورد پنج‌ضلعی گفته شد، اگر از نقاط تقسیم دایره مماسهایی بر دایره رسم کنیم، بر طبق آنچه که دربارهٔ پنج‌ضلعی گفته شد، شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایایی محیط بر یک دایره حاصل خواهد شد.

و به علاوه به همان ترتیبی که برای پنج‌ضلعی گفته شد، می‌توان دایره‌ای در یک شش‌ضلعی مفروض محاط و دایره‌ای بر آن محیط کرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

مطلوب محاط کردن یک پانزده ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا در دایره مفروض است.



فرض می‌کنیم $ABCD$ دایرهٔ مفروض باشد. پس مطلوب محاط کردن یک پانزده‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا در دایرهٔ $ABCD$ است.

فرض می‌کنیم یک ضلع AC از مثلثی متساوی‌الاضلاع در این دایره محاط شده است و یک ضلع AB از پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع.

بنابراین از پانزده قطعهٔ متساوی در دایرهٔ $ABCD$، پنج قطعه در کمان ABC خواهد بود که ثلث دایره است، و سه قطعه در کمان AB،

که یک‌پنجم دایره است؛ بنابراین در کمان باقیماندهٔ BC دو قطعه از قطعات متساوی وجود خواهند داشت.

فرض می‌کنیم BC در نقطهٔ E نصف شده است؛ [III.۳۰]
بنابراین هر یک از کمانهای BE و EC یک‌پانزدهم دایرهٔ $ABCD$ خواهد شد.

بنابراین اگر E را به B و C وصل کنیم و خطهای راستی مساوی با هر یک از آنها در خور دایرهٔ $ABCD$ به توالی هم رسم کنیم یک شکل پانزده‌ضلعی که هم متساوی‌الاضلاع است، و هم متساوی‌الزاویه در دایره محاط کرده‌ایم.

آنچه می‌خواستیم.

و، به همان روالی که در مورد پنج‌ضلعی عمل کردیم، اگر از نقاط تقسیم دایره مماسهایی بر دایره رسم کنیم یک شکل پانزده‌ضلعی محیط بر دایره به دست می‌آید که متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزوایا است.

و باز هم، با استدلالی شبیه به استدلالی که برای حالت پنج‌ضلعی به کار بردیم، می‌توانیم دایره‌ای در شکل پانزده‌ضلعی مفروضی محاط و یا بر آن محیط کنیم.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ پنجم

تعاریف

۱. یک کمیت وقتی جزئی[1] از یک کمیت، کوچکتر از بزرگتر، است که کمیت بزرگتر را به شمارد.
۲. کمیت بزرگتر وقتی مضربی از کمیت کوچکتر است که با کمیت کوچکتر شمرده شود.
۳. هر نسبت[2] نوعی رابطه از حیث اندازهٔ بین دو کمیت از یک نوع است.
۴. کمیتهایی را می‌گویند نسبتی با هم دارند که در صورت چند برابر شدن بتوانند از یکدیگر زیادتر شوند.
۵. کمیتهایی را می‌گویند به یک نسبت (یا متناسب)اند که نسبت اولی به دومی و نسبت سومی به چهارمی هنگامی که مضربهای متساوی دلخواهی از اولی و سومی و هر مضرب متساوی از دومی و چهارمی گرفته شوند، مضربهای متساوی قبلی و بعدی، به‌طور یکسان از هم بزرگتر یا با هم مساوی، یا از هم کوچکتر باشند، وقتی به همان ترتیب در نظر گرفته شوند.
۶. کمیتهایی را که نسبتهای آنها به هم یکی باشند متناسب[3] گویند.
۷. وقتی در مضربهای مساوی از چهار کمیت، مضرب کمیت اول از مضرب کمیّت دومی زیادتر شود ولی مضرب سومی از مضرب چهارمی زیادتر نشود، در این صورت می‌گویند که نسبت اولی به دومی از نسبت سومی به چهارمی بزرگتر است.

1. part 2. ratio 3. proportional

۸. کوچکترین تناسب ممکن تناسبی است با سه جمله.
۹. وقتی سه کمیت <به طور پیوسته>[۱] متناسب باشند نسبت اولی به سومی همچون مربع[۲] نسبت اولی به دومی است.[۳]
۱۰. وقتی چهار کمیت <به طور پیوسته> متناسب باشند، نسبت اولی به چهارمی همچون مکعب[۴] نسبت اولی به دومی است[۵]. به همین قیاس تعداد نسبتها هر چه باشد، نسبت اخیر همواره با توان بیشتر ظاهر می‌شود.
۱۱. در یک تناسب، اصطلاح کمیتهای متناظر برای صورتها با هم و مخرجها با هم به‌کار برده می‌شود.
۱۲. منظور از ابدال نسبت[۶] در یک تناسب، مساوی قرار دادن نسبت صورت به صورت است با مخرج به مخرج.
۱۳. منظور از نسبت عکس[۷] در یک نسبت، تعویض جای صورت و مخرج است با هم.
۱۴. منظور از ترکیب نسبت[۸] در یک نسبت، نسبت مجموع صورت و مخرج است به خود مخرج.
۱۵. منظور از تفضیل نسبت[۹] در یک نسبت، نسبت تفاضل صورت و مخرج است به خود مخرج.
۱۶. منظور از قلب نسبت[۱۰] در یک نسبت، نسبت صورت است به تفاضل صورت و مخرج.
۱۷. وقتی یک مجموعه از چند کمیت و مجموعهٔ دیگری با همان تعداد کمیت داشته باشیم که نسبت کمیتها دوبه‌دو [به‌طور متوالی] در مجموعهٔ اول با نسبت کمیتهای متناظرشان در مجموعهٔ دوم مساوی باشند و در نتیجه نسبت کمیتهای اولی به آخری در مجموعهٔ اول با نسبت کمیتهای متناظرشان از مجموعهٔ دوم مساوی شوند نسبت مساوات منتظم[۱۱] یا نسبت مساوات هموار پدید می‌آید.

به عبارت دیگر وقتی تساوی نسبتهای کمیتهای اول و آخر به یکدیگر در دو مجموعه، صرف‌نظر از نسبتهای کمیتهای بین آنها، برقرار باشد، نسبت مساوات منتظم یا نسبت مساوات هموار حاصل می‌شود.
۱۸. وقتی در دو مجموعه هر یک با سه کمیت، نسبت کمیت اول به کمیت دوم در مجموعهٔ اول با نسبت کمیت اول به کمیت دوم از مجموعهٔ دوم مساوی باشد، ولی نسبت کمیت دوم به

---

۱. منظور از اینکه چند کمیّت <به طور پیوسته> (continuously) متناسب‌اند، این است که در آنها نسبت اولی به دومی همچون نسبت دومی به سومی همچون نسبت سومی به چهارمی و... به همین قیاس است.

2. duplicate ratio

۳. یا نسبت اولی به سومی همچون نسبت اولی به دومی مثّناةبالتکّریر است. ابوریحان بیرونی.ـم.

4. triplicate ratio

۵. یا نسبت اولی به چهارمی همچون نسبت اولی به دومی مثلّثةبالتکّریر است. ابوریحان بیرونی.ـم.

6. alternate ratio 7. inverse ratio 8. composition of a ratio

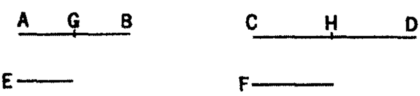
9. separation of a ratio 10. conversion of a ratio 11. ratio *ex aequali*

کمیت سوم در مجموعهٔ اول با نسبت کمیت سوم به کمیت اول از مجموعهٔ دوم مساوی باشد، نسبت مساوات آشفته[1] (یا مساوات مضطرب، ابوریحان بیرونی.ـم.) پدید می‌آید. در نتیجه نسبت کمیّت اول به کمیّت سوم از مجموعهٔ اول همچون نسبت کمیّت سوم به کمیّت دوم از مجموعهٔ دوم می‌شود.

مقالهٔ V. قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی کمیت داریم که به ترتیب مضربهای مساوی از کمیتهای دیگری با همان تعداد هستند. اگر یکی از کمیتهای اول مضربی از یکی از کمیتهای دوم باشد، همهٔ کمیتهای اول نیز همان مضرب از همهٔ کمیتهای دوم‌اند.[2]



فرض می‌کنیم کمیتهای دلخواه AB و CD به ترتیب مضربهای مساوی از دو کمیت E و F هستند. گوییم که AB هر مضربی از E باشد، AB و CD نیز همان مضرب از E و F خواهند بود.

زیرا، چون AB همان مضربی از E است که CD از F، پس هر چند کمیت مساوی با E در AB موجود باشد، همان تعداد کمیت مساوی با F نیز در CD وجود خواهد داشت. فرض می‌کنیم AB را به کمیتهای AG و GB مساوی با E تقسیم کرده‌ایم، و CD را به کمیتهای CH و HD مساوی با F؛ بنابراین تعداد کمیتهای AG و GB با تعداد کمیتهای CH و HD مساوی خواهد بود. اما چون AG با E مساوی است و CH با F؛ بنابراین AG با E مساوی است و AG و CH با E و F. به همین دلیل GB با E مساوی است و GB و HD با E و F.

بنابراین هر چند کمیت در AB مساوی با E وجود داشته باشد، همان تعداد کمیت هم در AB و CD مساوی با E و F وجود خواهد داشت. لذا AB هر مضربی از E باشد، AB و CD نیز همان مضرب از E و F خواهند بود.

آنچه می‌خواستیم.

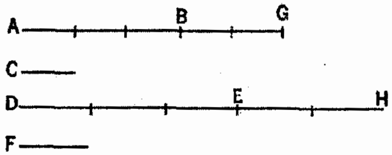
قضیهٔ ۲

اگر از چند کمیت نخستین کمیت همان مضرب از دومین کمیت باشد که سومین کمیت از چهارمین کمیت است، و نیز پنجمین کمیت همان مضرب از دومین کمیت باشد که ششمین کمیت از چهارمین

1. perturbed proprtion

۲. این قضیه با اتحاد جبری $ma + mb + mc + \cdots \equiv m(a + b + c + \cdots)$ هم‌ارز است.ـم.

کمیت است، آنگاه مجموع نخستین و پنجمین کمیت نیز همان مضرب از دومین کمیت است که مجموع سومین و ششمین کمیت از چهارمین کمیت است[1].



فرض می‌کنیم نخستین کمیت، AB، همان مضربی از دومین کمیت، C، باشد که سومین کمیت، DE، از چهارمین کمیت، F، است، و فرض می‌کنیم پنجمین کمیت، BG، نیز همان مضربی از دومین کمیت، C، باشد که ششمین کمیت، EH، از چهارمین کمیت، F، است؛ می‌گوییم که مجموع نخستین و پنجمین کمیت، AG، همان مضربی از دومین کمیت، C، است که مجموع سومین و ششمین کمیت، DH، از چهارمین کمیت، F، است.

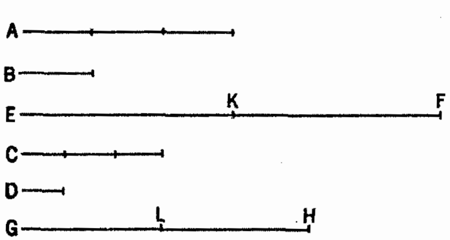
زیرا، چون AB همان مضربی از کمیت C است که DE از کمیت F است، بنابراین هر تعداد کمیت مساوی با C که در AB وجود داشته باشد همان تعداد کمیت مساوی با F نیز در DE وجود دارد. به همین دلیل نیز هر تعداد کمیت مساوی با C که در BG وجود داشته باشد همان تعداد کمیت مساوی با F نیز در EH وجود دارد؛ بنابراین هر تعداد کمیت مساوی با C که در تمامی AG وجود داشته باشد، همان تعداد کمیت مساوی با F نیز در تمامی DH وجود دارد. لذا AG هر مضربی از C باشد، DH نیز همان مضرب از F است.

بنابراین مجموع نخستین و پنجمین کمیت، AG، همان مضرب از کمیت دوم، C، است که مجموع سومین و ششمین کمیت، DH، از چهارمین کمیت، F، است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر از چهار کمیت همان مضرب از دومین کمیت باشد که سومی از چهارمی است، و اگر مضربهای مساوی از نخستین و سومین کمیت اختیار شوند، آنگاه، به مساوات همواره نیز از دو کمیت حاصل به ترتیب اولی همان مضربی از دومین کمیت خواهد بود که دومی از چهارمی[2].



فرض می‌کنیم نخستین کمیت A همان مضرب از دومین کمیت B باشد که سومین کمیت C از چهارمین کمیت D است. و فرض می‌کنیم EF و GH به ترتیب مضربهای مساوی از کمیتهای A و C هستند؛ می‌گوییم که EF همان

۱. این قضیه با اتحاد $ma + na \equiv (m+n)a$ هم‌ارز است.ـم.
۲. در این قضیه گفته می‌شود که: مضربهای مساویِ مضربهای مساوی، خود مضربهای مساوی‌اند.ـم.

مضربی از B است که GH از D. زیرا، چون EF همان مضربی از A است که GH از C، بنابراین همان تعداد کمیت مساوی با A که در EF وجود دارد همان تعداد هم کمیت مساوی با C در GH وجود دارد. فرض می‌کنیم EF را به کمیتهای EK و KF مساوی با A تقسیم کرده‌ایم، و GH را به کمیتهای GL و LH مساوی با C؛ پس تعداد کمیتهای EK و KF با تعداد کمیتهای GL و LH مساوی خواهد بود.

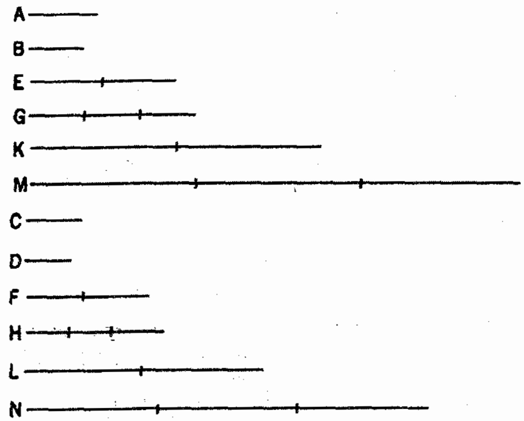
و، چون A همان مضربی از B است که C از D، و EK با A مساوی است و GL با C؛ بنابراین EK همان مضربی از B است که GL از D.

به همین دلیل KF همان مضربی از B است که LH از D. پس، چون نخستین کمیت EK همان مضربی از دومین کمیت B است که سومین کمیت GL از چهارمین کمیت D، و پنجمین کمیت KF نیز همان مضربی از دومین کمیت B است که ششمین کمیت LH از چهارمین کمیت D، لذا، مجموع نخستین و پنجمین کمیت، EF، نیز همان مضرب از دومین کمیت B است که مجموع سومین و ششمین کمیت، GH، از چهارمین کمیت D. [۲.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر از چهار کمیت نسبت نخستین کمیت به دومین کمیت مساوی با نسبت سومین کمیت به چهارمین کمیت باشد، نسبتهای هر مضرب مساوی از نخستین کمیت و سومین کمیت نیز به هر مضرب مساوی از دومین کمیت و چهارمین کمیت به ترتیب تناظر، با هم مساوی‌اند[۱].



فرض می‌کنیم نسبت نخستین کمیت A به دومین کمیت B مساوی نسبت سومین کمیت C به چهارمین کمیت D است، و فرض می‌کنیم E و F مضربهای مساوی از A و C هستند، و G و H مضربهای مساوی دلخواه دیگر از B و D. می‌گوییم نسبت E به G مثل نسبت F است به H. زیرا فرض می‌کنیم K و L مضربهای مساوی از E و F هستند و M و

۱. در این قضیه گفته می‌شود که اگر $a/b = c/d$، آنگاه $ma/nb = mc/nd$.ـم.

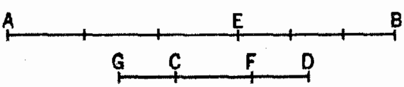
و N مضربهای مساوی دیگر از G و H. چون E همان مضربی از A است که F از C، و K و L مضربهای مساوی از E و F گرفته شده‌اند، بنابراین K همان مضربی از A است که L از C.[۳.V]

به همین دلیل M همان مضربی از B است که N از D. و چون نسبت A به B مثل نسبت C به D است، و K و L مضربهای مساوی از A و C گرفته شده‌اند و M و N نیز مضربهای مساوی دلخواه دیگری از B و D هستند، لذا، اگر K بزرگتر از M باشد، L نیز بزرگتر از N است؛ و اگر K مساوی با M باشد L نیز با N مساوی است، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است.[V.تع.۵]
و K و L مضربهای مساوی از E و Fاند و M و N نیز مضربهای مساوی دلخواه دیگری از G و H؛ بنابراین نسبت E به G مثل نسبت F است به H. [V.تع.۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

اگر کمیتی همان مضرب از کمیت دیگری باشد که یک جزء آن از یک جزء دیگری است، جزء باقیماندهٔ آن، نیز همان مضرب از جزء باقیماندهٔ دیگری است که تمامی آن از تمامی دیگری[۱].



فرض می‌کنیم کمیت AB همان مضربی از کمیت CD باشد که جزء AE از جزء CF است. می‌گوییم که باقیماندهٔ EB همان مضرب از باقیماندهٔ FD است که تمامی AB از تمامی CD.

زیرا، AE هر مضربی از CF باشد، EB را با همان مضرب از CG می‌سازیم. پس، چون AE همان مضربی از CF است که EB از GC، بنابراین AE همان مضربی از CF است که AB از GF. [۱.V]

اما، بنا به فرض، AE همان مضربی از CF است که AB از CD. بنابراین AB مضرب واحدی از هر یک از کمیتهای GF و CD است؛ پس GF با CD مساوی است. حال CF را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیماندهٔ GC با باقیماندهٔ FD مساوی است. و، چون AE همان مضربی از CF است که EB از GC، و GC با DF مساوی است، بنابراین AE همان مضربی از CF است که EB از FD.

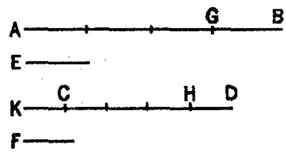
اما، بنا به فرض AE همان مضرب از CF است که AB از CD؛ بنابراین EB همان مضربی از FD است که AB از CD. یعنی، باقیماندهٔ EB همان مضرب از باقیماندهٔ FD است که تمامی AB از تمامی CD.

آنچه می‌خواستیم.

۱. این قضیه با اتحاد $ma - mb \equiv m(a-b)$ هم‌ارز است.ـم.

قضیهٔ ۶

اگر دو کمیت مضربهای مساوی از دو کمیت دیگر باشند و کمیتهایی از آنها کم کنیم که مضربهای مساوی از همان دو کمیت دیگر باشند باقیمانده‌ها نیز، یا با آن دو کمیت دیگر مساوی‌اند، یا مضربهای مساوی از آنها هستند[۱].



فرض می‌کنیم AB و CD مضربهای مساوی از دو کمیت E و F باشند و AG و CH را که مضربهای مساوی از همان دو کمیت E و F هستند از آنها کم می‌کنیم؛ می‌گوییم باقیمانده‌ها یعنی GB و HD نیز یا با E و F مساوی‌اند و یا مضربهای مساوی از آنها هستند.

زیرا، ابتدا فرض می‌کنیم GB با E مساوی باشد؛ می‌گوییم که HD نیز با F مساوی است. زیرا فرض می‌کنیم CK مساوی با F رسم شده باشد. چون AG همان مضربی از E است که CH از F، و در عین حال GB با E مساوی است و KC با F، بنابراین AB همان مضربی از E است که KH از F است. [۲.V]

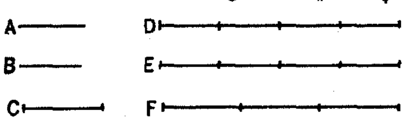
اما بنا به فرض AB همان مضربی از E است که CD از F؛ بنابراین KH همان مضربی از F است که CD از F. پس، چون هر یک از کمیتهای KH و CD مضرب واحدی از F هستند، بنابراین KH با CD مساوی است. حال CH را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیماندهٔ KC با باقیماندهٔ HD مساوی است. اما F با KC مساوی است؛ لذا HD نیز با F مساوی است. بنابراین اگر GB با E مساوی باشد، HD نیز با F مساوی است.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که، حتی اگر GB مضربی از E باشد، HD نیز همان مضرب از F است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

نسبتهای چند کمیت متساوی به یک کمیت، با هم مساوی‌اند، و همچنین‌اند نسبتهای یک کمیت به چند کمیت متساوی[۲].



فرض می‌کنیم A و B کمیتهای متساوی باشند و C کمیت دلخواهی دیگر. می‌گوییم که نسبتهای هر یک از کمیتهای A و B به C با هم مساوی‌اند، و نسبتهای C به هر یک از کمیتهای A و B نیز با هم مساوی‌اند.

۱. این قضیه با اتحاد $ma - na \equiv (m-n)a$ هم‌ارز است.ـم.
۲. این قضیه با: اگر $A = B$، آنگاه $A/C = B/C$ و $C/A = C/B$ هم‌ارز است.ـم.

زیرا فرض می‌کنیم D و E مضربهای متساوی A و B باشند و F مضرب دلخواهی از C باشد. پس، چون D همان مضربی از A است که E مضربی از B؛ و A با B مساوی است، بنابراین D با E مساوی است. اما F کمیت دلخواه دیگری است. بنابراین اگر D از F بزرگتر باشد، E نیز از F بزرگتر است، و اگر مساوی باشد، مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است. و D و E مضربهای مساوی از A و B هستند، و F مضرب دلخواه دیگری از C است. بنابراین نسبت A به C مثل نسبت B است به C. [V.تع.۵]

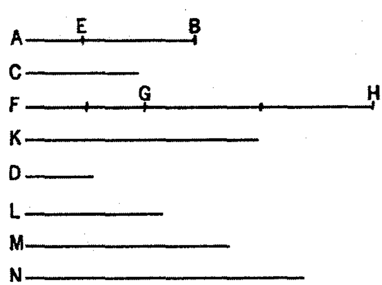
حال می‌گوییم که نسبتهای C به هر یک از کمیتهای A و B نیز با هم مساوی‌اند. زیرا، با همین ترسیمها، همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که D با E مساوی است؛ و F کمیت دیگری است. بنابراین اگر F از D بزرگتر باشد، از E نیز بزرگتر است، و اگر مساوی باشد، مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است. و F مضربی است از C، در حالی که D و E مضربهای مساوی دلخواه دیگری از A و B هستند. بنابراین نسبت C به A مثل نسبت C است به B. [V.تع.۵]

فرع. از اینجا روشن می‌شود که اگر کمیتهایی متناسب باشند، عکسهای آنها نیز متناسب‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

از کمیتهای نامساوی، نسبت کمیت بزرگتر به یک کمیت، از نسبت کمیت کوچکتر به همان کمیت، بزرگتر است؛ و نسبت یک کمیت به کمیت کوچکتر، از نسبت همان کمیت به کمیت بزرگتر، بزرگتر است[1].



فرض می‌کنیم AB و C کمیتهای نامساوی‌اند و AB کمیت بزرگتر است. فرض می‌کنیم D کمیت دلخواه دیگری باشد. می‌گوییم که نسبت AB به D از نسبت C به D بزرگتر است، و نسبت D به C از نسبت D به AB بزرگتر است.

زیرا، چون AB از C بزرگتر است کمیت BE را مساوی با C بر آن جدا می‌کنیم؛ پس، اگر از دو کمیت AE و EB، کمیت کوچکتر را چند برابر کنیم، زمانی از D بزرگتر خواهد شد. [V.تع.۴]

اول فرض می‌کنیم AE کوچکتر از EB باشد؛ AE را چند برابر کرده، فرض می‌کنیم FG مضربی از آن باشد که بزرگتر از D است؛ در این صورت، FG هر مضربی از AE باشد، GH را

۱. این قضیه با قضیه: اگر $A > B$، آنگاه $A/C > B/C$ و $C/B > C/A$ هم‌ارز است.ـم.

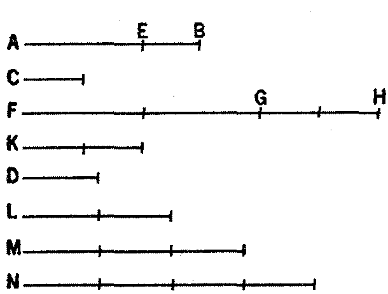
مساوی با همان مضرب از EB و K را مساوی با همان مضرب از C می‌سازیم؛ و فرض می‌کنیم L را دو برابر D و M را سه برابر آن، و مضربهای متوالی صعودی آن را با افزایش یکی در هر بار بگیریم تا به اولین مضربی از D برسیم که از K بزرگتر باشد. فرض می‌کنیم آن را پیدا کرده‌ایم و آن N است، که چهار برابر D و اولین مضربی از آن است که از K بزرگتر است.

پس، چون K از اولین مضرب D، یعنی N، کوچکتر است، پس از M کوچکتر نیست. و، چون FG همان مضربی از AE است که GH از EB است، بنابراین FG همان مضربی از AE است که FH از AB. [۱.V]

اما FG همان مضربی از AE است که K از C است، لذا FH همان مضربی از AB است که K از C است؛ بنابراین FH و K مضربهای مساوی از AB و C هستند. باز، چون GH همان مضربی از EB است که K از C است، و EB با C مساوی است، بنابراین GH با K مساوی است. اما K کوچکتر از M نیست؛ بنابراین GH هم کوچکتر از M نیست و FG بزرگتر از D است؛ بنابراین تمام FH از روی هم D و M بزرگتر است. اما روی هم D و M با N مساوی است، چون که M سه برابر D و M و D بر روی هم چهار برابر D است، و N نیز چهار برابر D است؛ از این‌رو M و D بر روی هم مساوی هستند با N.

اما FH بزرگتر از M و D است؛ بنابراین FH از N بزرگتر است، و K بزرگتر از N نیست. و FH و K مضربهای مساوی از AB و C هستند، و N مضرب دلخواه دیگری از D است؛ بنابراین، نسبت AB به D از نسبت C به D بزرگتر است. [۷.تع.V]

حال می‌گوییم که نسبت D به C هم از نسبت D به AB بزرگتر است. زیرا، با همان ترسیمها می‌توانیم به طریق مشابه ثابت کنیم که N از K بزرگتر است و N بزرگتر از FH نیست. و N مضربی است از D، و FH و K مضربهای مساوی دلخواه از AB و C هستند؛ بنابراین نسبت D به C از نسبت D به AB بزرگتر است. [۷.تع.V]



حال، فرض می‌کنیم AE بزرگتر از EB باشد. بنابراین کمیت کوچکتر، EB، اگر چند برابر شود، زمانی از D بزرگتر می‌شود. [۴.تع.V]

فرض می‌کنیم آن را چند برابر کرده‌ایم، و GH مضربی از EB و بزرگتر از D باشد؛ و GH هر مضربی از EB باشد، FG را با همان مضرب از AE و K را با همان مضرب از C می‌سازیم. در این صورت همچنین

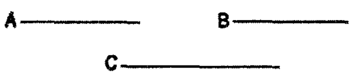
می‌توانیم ثابت کنیم FH و K مضربهای مساوی از AB و C هستند؛ و همچنین فرض می‌کنیم N را مضربی از D گرفته‌ایم، ولی اولین مضربی که بزرگتر از FG است، بنابراین همچون قبل نتیجه می‌گیریم که FG کوچکتر از M نیست.

اما GH از D بزرگتر است؛ بنابراین تمام FH بزرگتر از D و M، یعنی بزرگتر از N است. اما K بزرگتر از N نیست، زیرا FG نیز که بزرگتر از GH، یعنی بزرگتر از K است، بزرگتر از N نیست. و به همین طریق، با دنبال کردن استدلال فوق، اثبات خود را تمام می‌کنیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

کمیتهایی که نسبتهای آنها به یک کمیت یکی هستند با هم مساوی‌اند، و کمیتهایی که نسبتهای یک کمیت به آنها یکی هستند با هم مساوی‌اند.



زیرا، فرض می‌کنیم که نسبتهای هر یک از کمیتهای A و B به C یکی باشند. می‌گوییم A و B با هم مساوی‌اند. زیرا در غیر این صورت

نسبتهای هر یک از کمیتهای A و B به کمیت C یکی نخواهند بود؛ درصورتی‌که یکی هستند. [۸.V]

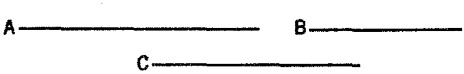
بنابراین A با B مساوی است و اکنون فرض می‌کنیم که نسبتهای C به هر یک از کمیتهای A و B یکی هستند، می‌گوییم A با B مساوی است. زیرا در غیر این صورت نسبت C به هر یک از کمیتهای A و B یکی نخواهد بود؛ [۸.V]

ولی این نسبت یکی است پس A و B با هم مساوی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

از کمیتهایی که نسبتی با یک کمیت دارند آن یک که نسبتش بزرگتر است، بزرگتر است. و از این کمیتها آن یک که نسبت یک کمیت به آن بزرگتر است، کوچکتر است.



فرض می‌کنیم که نسبت A به C از نسبت B به C بزرگتر است.

می‌گوییم که A از B بزرگتر است.

زیرا، اگر بزرگتر نباشد یا با آن مساوی است و یا از آن کوچکتر. اما A با B مساوی نیست؛ زیرا در این حالت نسبت هر یک از کمیتهای A و B به C یکی خواهد بود، [۷.V]

ولی چنین نیست. بنابراین A با B مساوی نیست. باز A کوچکتر از B هم نیست؛ زیرا در آن صورت نسبت A به C کوچکتر از نسبت B به C خواهد بود؛ [۸.V]

که چنین نیست، بنابراین A کوچکتر از B نیست. اما ثابت شده بود مساوی هم نیست بنابراین A بزرگتر از B است.

اکنون فرض می‌کنیم نسبت C به B از نسبت C به A بزرگتر باشد؛ می‌گوییم که B کوچکتر از A است. زیرا، اگر کوچکتر نباشد، یا با آن مساوی یا از آن بزرگتر است. اما B مساوی با A نیست، زیرا در آن صورت باید نسبت C به A مساوی نسبت C به B باشد؛ [۷.V]

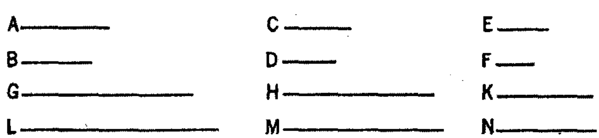
ولی چنین نیست. بنابراین A با B مساوی نیست. B بزرگتر از A هم نیست؛ زیرا در این صورت نسبت C به B کوچکتر از نسبت C به A خواهد بود؛ [۸.V]

که چنین نیست؛ بنابراین B بزرگتر از A نیست. اما ثابت شده بود که مساوی هم نیست؛ بنابراین B کوچکتر از A است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

نسبتهای مساوی با یک نسبت، خود نیز با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم که نسبت A به B مثل نسبت C به D است، و نسبت C به D مثل نسبت E به F. می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت E است به F. زیرا، از مضربهای مساوی A و C و E کمیتهای G و H و K را به دست می‌آوریم و از مضربهای دلخواه مساوی B و D و F کمیتهای L و M و N را. در این صورت چون نسبت A به B مثل نسبت C به D است، و از مضربهای مساوی A و C کمیتهای Gو H را به دست آورده‌ایم و از مضربهای دلخواه مساوی دیگر B و D کمیتهای L و M را.

بنابراین اگر G بیشتر از L باشد، H نیز بیشتر از M است، و اگر مساوی باشد، مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر است. باز، چون نسبت C به D مثل نسبت E است به F و از مضربهای مساوی C و E کمیتهای H و K درست شده‌اند و از مضربهای دلخواه مساوی دیگر D و F کمیتهای M و N.

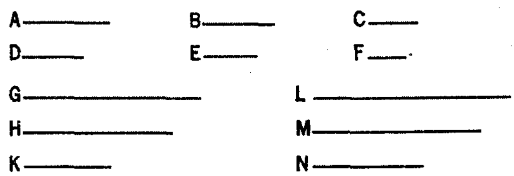
بنابراین اگر H بزرگتر از M باشد، K نیز بزرگتر از N است، و اگر مساوی باشد، مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است. اما دیدیم که اگر H بزرگتر از M باشد، G نیز از L بزرگتر است؛ اگر مساوی باشد، مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است؛ در نتیجه، علاوه بر این،

اگر G بزرگتر از L باشد، K نیز از N بزرگتر است؛ اگر مساوی باشد، مساوی است، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است. و G و K مضربهای مساوی A و E هستند، و L و N مضربهای دلخواه مساوی دیگر B و F؛ بنابراین نسبت A به B مثل نسبت E است به F.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

هرگاه تعدادی کمیت متناسب باشند، نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت همهٔ صورتها به همهٔ مخرجهاست.



فرض می‌کنیم کمیتهای A و B و C و D و E و F متناسب باشند به طوری که نسبت A به B مثل نسبت C به D و مثل نسبت E به F باشد. می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت A و C و E است به B و D و F.

زیرا از A و C و E مضربهای متساوی G و H و K را اختیار می‌کنیم، و از B و D و F مضربهای متساویِ دلخواه دیگر L و M و N را. در این صورت چون نسبت A به B مثل نسبت C به D، و مثل نسبت E به F است، و از A و C و E مضربهای متساوی G و H و K را اختیار کرده‌ایم، و از B و D و F مضربهای متساوی دلخواه دیگر L و M و N را، بنابراین اگر G بزرگتر از L باشد H نیز از M بزرگتر است و K از N، اگر مساوی باشد، مساوی‌اند. و اگر کوچکتر باشد، کوچکترند؛ لذا، گذشته از آن اگر G بزرگتر از L باشد، آنگاه G و H و K از L و M و N بزرگترند، اگر مساوی باشد، مساوی‌اند، و اگر کوچکتر باشد کوچکترند.

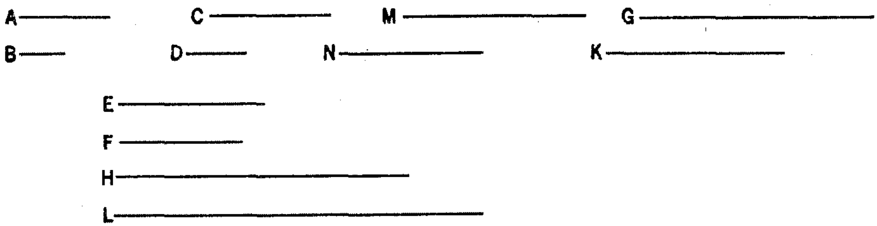
اما G، و G و H و K مضربهای متساوی A، و A و C و E هستند، زیرا اگر تعداد دلخواهی کمیت داشته باشیم به ترتیب مضربهای متساوی از کمیتهای با همان تعداد باشند، آنگاه هر مضربی که یکی از کمیتهای اول از یکی از کمیتهای دوم باشد، همهٔ کمیتهای اول نیز همان مضرب از همهٔ کمیتهای دوم است. [۱.V]

به همین دلیل L، و L و M و N نیز مضربهایی مساوی از B، و B و D و F هستند؛ بنابراین نسبت A به B مثل نسبتهای A و C و E هستند به B و D و F. [V.تع.۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر از چند کمیت، نسبت کمیت اول به کمیت دوم مثل کمیت سوم به کمیت چهارم باشد، و نسبت کمیت سوم به کمیت چهارم از نسبت کمیت پنجم، به کمیت ششم بزرگتر باشد، نسبت کمیت اول به کمیت دوم نیز از نسبت کمیت پنجم به کمیت ششم بزرگتر است.



فرض می‌کنیم نسبت کمیت اول A به کمیت دوم B مثل نسبت کمیت سوم C به کمیت چهارم D باشد، و نسبت کمیت سوم C به کمیت چهارم D از نسبت کمیت پنجم E به کمیت ششم F بزرگتر باشد، می‌گوییم که نسبت کمیت اول A به کمیت دوم B نیز از نسبت کمیت پنجم E به کمیت ششم F بزرگتر است.

زیرا چون مضربهای متساوی از C و E و مضربهای دلخواه متساوی دیگر از D و F وجود دارند به طوری که مضرب C بزرگتر از مضرب D است، ولی مضرب E بزرگتر از مضرب F نیست، [V.تع.۷]

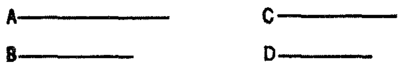
پس این مضربها را به دست می‌آوریم، و فرض می‌کنیم G و H مضربهای متساوی از C و E باشند، و K و L مضربهای متساوی دلخواه دیگر از D و F، در نتیجه G بزرگتر از K است، اما H بزرگتر از L نیست؛ و G هر مضربی از C باشد، فرض می‌کنیم M نیز همان مضرب از A باشد، و K هر مضربی از D باشد، فرض می‌کنیم N نیز همان مضرب از B باشد، اما چون نسبت A به B مثل نسبت C به D است، و از مضربهای متساوی A و C کمیتهای M و G به دست آمده‌اند، و از مضربهای دلخواه متساوی دیگر B و D کمیتهای N و K. بنابراین اگر M بزرگتر از N باشد. G نیز بزرگتر از K است. اگر مساوی باشد، مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است. [V.تع.۵]

اما G بزرگتر از K است، بنابراین M نیز بزرگتر از N است. اما H بزرگتر از L نیست؛ و M و H مضربهای متساوی از A و E هستند و N و L مضربهای متساوی دلخواه دیگر از B و F؛ بنابراین نسبت A به B بزرگتر است از نسبت E به F. [V.تع.۷]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر از چند کمیت، نسبت کمیت اولی به کمیت دوم مثل نسبت کمیت سوم به کمیت چهارم باشد، و اگر کمیت اول از کمیت سوم بزرگتر باشد کمیت دوم نیز از کمیت چهارم بزرگتر است؛ اگر مساوی باشد مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است.



فرض می‌کنیم نسبت کمیت اول A به کمیت دوم B مثل نسبت کمیت سوم C به کمیت چهارم D باشد؛ و فرض می‌کنیم A بزرگتر از C باشد؛ می‌گوییم که B نیز از D بزرگتر است.

زیرا چون A از C بزرگتر است و B کمیت دلخواه دیگر، بنابراین نسبت A به B از نسبت C به B بزرگتر است. [۸.V]

اما نسبت A به B مثل نسبت C به D است؛ بنابراین نسبت C به D هم از نسبت C به B بزرگتر است. [۱۳.V]

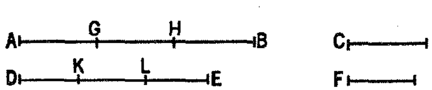
اما از دو کمیت آن‌یک که نسبت یک کمیت به آن بزرگتر است، کوچکتر است: [۱۰.V]

بنابراین D کوچکتر از B است، یعنی B بزرگتر از D است. همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که اگر A با C مساوی باشد، B نیز با D مساوی است، و اگر A کوچکتر از C باشد، B نیز از D کوچکتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

نسبت کمیتهای جزء همچون نسبت مضربهای متساوی متناظر آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم AB همان مضربی از C باشد که DE از F است.

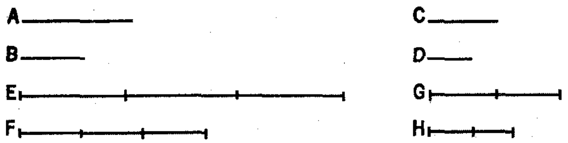
می‌گوییم نسبت C به F مثل نسبت AB است به DE. زیرا، چون AB همان مضربی از C است که DE از F است، هر چند کمیت مساوی با C که در AB باشد، همان تعداد کمیت مساوی با F نیز در DE هست. فرض می‌کنیم AB را به کمیتهای AG و GH و HB مساوی با C تقسیم کرده‌ایم و DE را به کمیتهای DK و KL و LE مساوی با F.

در این صورت تعداد کمیتهای AG و GH و HB با تعداد کمیتهای DK و KL و LE مساوی است. و چون AG و GH و HB با هم مساوی‌اند و DK و KL و LE نیز با هم، بنابراین

نسبت AG به DK، مثل نسبت GH است به KL مثل نسبت HB است به LE. [۷.V]
بنابراین نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت همهٔ صورتهاست به همهٔ مخرجها. [۱۲.V]
در نتیجه نسبت AG به DK مثل نسبت AB است به DE.
اما AG با C مساوی است و DK با F. بنابراین نسبت C به F مثل نسبت AB است به DE.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

اگر چهار کمیت متناسب باشند، ابدال نسبتهای آنها نیز متناسب‌اند.



فرض می‌کنیم A و B و C و D چهارکمیت متناسب باشند، به طوری که نسبت A به B مثل نسبت C به D باشد،

می‌گوییم ابدال نسبتهای آنها نیز متناسب‌اند، یعنی نسبت A به C مثل نسبت B به D است.
زیرا فرض می‌کنیم از مضربهای متساوی A و B کمیتهای E و F را ساخته‌ایم و از مضربهای دلخواه متساوی دیگر C و D کمیتهای G و H را.

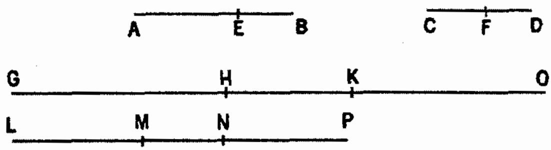
در این صورت، چون E همان مضربی از A است که F از B است، و نسبت کمیتهای جزء به یکدیگر مثل نسبت مضربهای متساوی آنهاست به یکدیگر، [۱۵.V]
بنابراین نسبت A به B مثل نسبت E است به F. اما نسبت A به B مثل نسبت C است به D؛ بنابراین نسبت C به D هم مثل نسبت E است به F. [۱۱.V]
باز، چون G و H مضربهای متساوی از C و D هستند، بنابراین نسبت C به D مثل نسبت G است به H. [۱۵.V]
اما نسبت C به D همچون نسبت E است به F؛ بنابراین نسبت E به F نیز همچون نسبت G است به H. [۱۱.V]
اما اگر چهارکمیت متناسب باشند و اولی از سومی بزرگتر باشد، دومی هم از چهارمی بزرگتر خواهد بود. و اگر اولی مساوی سومی باشد دومی هم با چهارمی مساوی است؛ و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر است؛ [۱۴.V]
بنابراین اگر E بیشتر از G باشد، F نیز بیشتر از H خواهد بود؛ و اگر مساوی باشد مساوی است، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر.

اما E و F مضربهای متساوی از A و B هستند، و G و H مضربهای متساوی دلخواه دیگر از C و D؛ بنابراین نسبت A به C مثل نسبت B است به D. [V.تع.۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

اگر در کمیتهای متناسب ترکیب نسبت در صورتها[1] برقرار باشد تفضیل نسبت[2] نیز برقرار است.



فرض می‌کنیم AB و BE و CD و DF کمیتهای متناسبی باشند که از ترکیب نسبت در صورتها پیدا شده‌اند، یعنی نسبت AB به BE همچون نسبت CD است به DF. می‌گوییم که کمیتهای حاصل از تفضیل نسبت در صورتها نیز متناسب‌اند، یعنی نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به DF.

زیرا فرض می‌کنیم از مضربهای متساوی AE و EB و CF و FD کمیتهای GH و HK و LM و MN را به دست آورده‌ایم و از مضربهای دلخواه متساوی دیگر EB و FD کمیتهای KO و NP را. پس، چون GH همان مضربی از AE است که HK از EB است، بنابراین GH همان مضربی از AE است که GK از AB است. [V.۱]

اما GH همان مضربی از AE است که LM از CF است؛ بنابراین GK همان مضربی از AB است که LM از CF است.

باز، چون LM همان مضربی از CF است که MN از FD است، بنابراین LM همان مضربی از CF است که LN از CD است. [V.۱]

اما LM همان مضربی از CF بود که GK از AB است؛ بنابراین GK همان مضربی از AB است که LN از CD است. بنابراین GK و LN مضربهای متساوی از AB و CD هستند. باز، چون HK همان مضربی از EB است که MN از FD است، و KO نیز همان مضربی از EB است که NP از FD است، بنابراین مجموع HO نیز همان مضربی از EB است که MP از FD است. [V.۲]

و، چون نسبت AB به BE مثل نسبت CD است به DF، و از مضربهای متساوی AB و CD کمیتهای GK و LN به دست آمده‌اند، و از مضربهای دلخواه متساوی دیگر EB و FD کمیتهای HO و MP، بنابراین اگر GK بیشتر از HO باشد، LN نیز از MP بیشتر است، و اگر مساوی باشد، مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر.

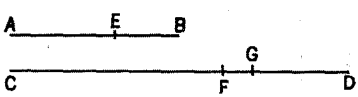
1. componendo 2. separando

فرض می‌کنیم GH بیشتر از KO باشد؛ در این صورت اگر HK به هر یک افزوده شود، GK نیز بیشتر از HO می‌شود. اما دیده‌ایم که اگر GK بزرگتر از HO باشد، LN نیز بیشتر از MP خواهد بود؛ بنابراین LN نیز بیشتر از MP است، و، اگر MN را از هر یک کم کنیم، LM نیز بیشتر از NP می‌شود؛ درنتیجه اگر GH بیشتر از KO باشد، LM نیز بیشتر از NP می‌شود. به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که اگر GH مساوی KO باشد، LM نیز با NP مساوی است؛ و اگر کمتر باشد، کمتر است. و GH و LM مضربهای متساوی از AE و CF هستند، و KO و NP مضربهای مساوی دلخواه دیگر از EB و FD؛ بنابراین نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

اگر در کمیتهای متناسب تفضیل نسبت در صورتها برقرار باشد ترکیب نسبت نیز برقرار است.



فرض می‌کنیم AE و EB و CF و FD کمیتهای متناسبی باشند که از تفضیل نسبت در صورتها پیدا شده‌اند، یعنی نسبت AE به EB مثل نسبت CF به FD است. می‌گوییم کمیتهای حاصل از ترکیب نسبت در صورتها نیز متناسب‌اند، یعنی نسبت AB به BE همچون نسبت CD است به DF.

زیرا اگر نسبت CD به DF مثل نسبت AB به BE نباشد، آنگاه نسبت AB به BE مثل نسبت CD است به کمیتی یا کوچکتر از DF یا بزرگتر از DF.

اول فرض می‌کنیم که نسبت AB به BE مثل نسبت CD به کمیتی کوچکتر از FD، یعنی DG باشد. در این صورت، چون نسبت AB به BE مثل نسبت CD است به DG، پس ترکیب نسبت در صورتها برقرار است، در نتیجه تفضیل نسبت در صورتها نیز برقرار است. [۱۷.V]

بنابراین نسبت AE به EB مثل نسبت CG است به GD.

اما، بنا به فرض، نسبت AE به EB نیز مثل CF است به FD. بنابراین نسبت CG به GD هم مثل نسبت CF است به FD. [۱۱.V]

اما اولین کمیت CG از سومین کمیت CF بزرگتر است، بنابراین دومین کمیت GD نیز از چهارمین کمیت FD بزرگتر است. [۱۴.V]

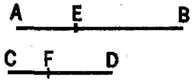
اما GD از FD کوچکتر نیز هست: که غیرممکن است. بنابراین نسبت AB به BE مثل

نسبت CD به کمیتی کوچکتر از FD نیست. همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که نسبت AB به BE مثل نسبت CD به کمیتی بزرگتر از FD نیست. بنابراین نسبت AB به BE مثل نسبت CD است به خود FD.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

اگر نسبت تمام کمیتی به تمام کمیت دیگر مثل یک جزء از کمیت اول به یک جزء از کمیت دوم باشد، نسبت جزء باقیمانده از کمیت اول به جزء باقیمانده از کمیت دوم نیز مثل نسبت تمام کمیت اول است به تمام کمیت دوم.



فرض می‌کنیم که نسبت تمام AB به تمام CD مثل نسبت جزء AE است به جزء CF. می‌گوییم که نسبت باقیماندهٔ EB به باقیماندهٔ FD نیز مثل تمام AB است به تمام CD.

زیرا، چون نسبت AB به CD مثل نسبت AE است به CF، ابدال نسبتهای آنها نیز متساوی‌اند؛ یعنی نسبت BA به AE مثل نسبت DC است به CF. [۱۶.V]

و، چون ترکیب نسبت در صورتها برقرار است تفضیل نسبت در صورتها نیز برقرار است.[۱۷.V] یعنی نسبت BE به EA مثل نسبت DF است به CF، و، با توجه به ابدال نسبتها، نسبت BE به DF مثل نسبت EA است به CF. [۱۶.V]

اما، بنا به فرض، نسبت AE به CF مثل نسبت تمام AB است به تمام CD.

بنابراین نسبت باقیماندهٔ EB به باقیماندهٔ FD نیز مثل نسبت تمام AB است به تمام CD. [۱۱.V]

فرع. از اینجا روشن می‌شود که اگر در کمیتهای متناسب ترکیب نسبت در صورت برقرار باشد ترکیب نسبت در مخرج[1] نیز برقرار است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

اگر سه کمیت در دست باشند و کمیتهای دیگری با همان تعداد که نسبت دوبه‌دو در اولی با نسبت کمیتهای متناظرشان در دومی مساوی است و اگر در این نسبت مساوات هموار اولی از سومی بزرگتر باشد چهارمی نیز از ششمی بزرگتر است، و اگر مساوی باشد مساوی است و اگر کوچکتر باشد کوچکتر.

1. convertendo

فرض می‌کنیم سه کمیت A و B و C داشته باشیم و کمیتهای دیگر D و E و F با همان تعداد، که نسبت دوبه‌دو در اولی با نسبت متناظرشان در دومی متناسب است، به طوری که نسبت A به B مثل نسبت D است به E، و نسبت B به C مثل نسبت E است به F؛ و فرض می‌کنیم در این مساوات هموار، A بزرگتر از C باشد؛ می‌گوییم که D نیز از F بزرگتر است؛ اگر A با C مساوی باشد D نیز با F مساوی است، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر.

زیرا، چون A از C بزرگتر است، و B کمیتی است دلخواه، و نسبت کمیت بزرگتر به این کمیت از نسبت کمیت کوچکتر به همین کمیت بزرگتر است، [۸.V]

بنابراین نسبت A به B از نسبت C به B بزرگتر است. اما چون نسبت A به B مثل نسبت D است به E، و نسبت C به B، به عکس، مثل $\acute{F}$ است به E؛ بنابراین نسبت D به E نیز از نسبت F به E بزرگتر است. [۱۳.V]

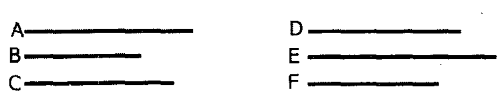
اما از کمیتهایی که نسبتی با یک کمیت دارند، آن یک که نسبت بزرگتری دارد، بزرگتر است؛ [۱۰.V] بنابراین D از F بزرگتر است.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که اگر A با C مساوی باشد، D نیز با F مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

اگر سه کمیت در دست باشند، و کمیتهای دیگری با همان تعداد که دوبه‌دو نظیر به نظیر با هم متناسب باشند و نسبت آنها آشفته باشد، در این صورت اگر با نسبت مساوات هموار، کمیت اول بزرگتر از کمیت سوم باشد، چهارمی نیز از ششمی بزرگتر خواهد بود، و اگر مساوی باشد مساوی است، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر.



فرض می‌کنیم سه کمیت A و B و C مفروض باشند، و کمیتهای D و E و F، با همان تعداد، در دست باشند که دوبه‌دو با هم یک نسبت آشفته دارند، به طوری که نسبت A به B مثل نسبت E است به F، و نسبت B به C مثل نسبت D است به E؛ و فرض می‌کنیم که در مساوات هموار A از C بزرگتر باشد؛ می‌گوییم که D هم از F بزرگتر است؛ و اگر A با C مساوی باشد D هم با F، مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر.

زیرا، چون A از C بزرگتر است و B کمیت دلخواهی است، بنابراین نسبت A به B از نسبت C به B بزرگتر است. [۸.V]

اما نسبت A به B مثل نسبت E است به F، و نسبت C به B، به عکس، مثل نسبت E است به D.

بنابراین نسبت E به F هم از نسبت E به D بزرگتر است. [۱۳.V]

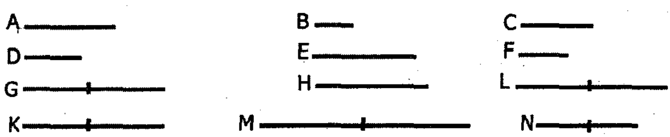
اما کمیتی که نسبت یک کمیت به آن بزرگتر باشد، کوچکتر است، [۱۰.V]

بنابراین F از D کوچکتر است؛ در نتیجه D از F بزرگتر است. به همین منوال می‌توانیم ثابت کنیم که اگر A با C مساوی باشد، D نیز با F مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

اگر تعداد دلخواهی کمیت داشته باشیم، و کمیتهای دیگری با همان تعداد که دوبه‌دو با هم به یک نسبت باشند، به مساوات هموار نیز به یک نسبت خواهند بود.



فرض می‌کنیم تعدادی کمیت A و B و C داشته باشیم و کمیتهای دیگر D و E و F با همان تعداد که دوبه‌دو با هم به یک نسبت‌اند چنانکه نسبت A به B مثل نسبت D است به E، و نسبت B به C مثل نسبت E است به F. می‌گوییم که به مساوات هموار نیز به یک نسبت خواهند بود؛ < یعنی نسبت A به C مثل نسبت D است به F >.

زیرا از مضربهای متساوی A و D کمیتهای G و H را به دست می‌آوریم، و از مضربهای متساوی دلخواه دیگر B و E کمیتهای K و L را؛ و بعد از مضربهای متساوی دلخواه دیگر C و F کمیتهای M و N را. در این صورت، چون نسبت A به B مثل D است به E، و از A و D مضربهای متساوی G و H را گرفته‌ایم، و از B و E مضربهای متساوی دلخواه دیگر K و L را، بنابراین نسبت G.به K مثل نسبت H است به L. [۴.V]

به همین دلیل نیز، نسبت K به M مثل نسبت L است به N.

در این صورت، چون سه کمیت G و K و M داریم، و کمیتهای دیگر H و L و N با همان تعداد، که دوبه‌دو با هم یک نسبت دارند، بنابراین، طبق مساوات هموار، اگر G زیادتر از M باشد، H نیز از N زیادتر است؛ و اگر G با M مساوی باشد، H نیز با N مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر است. [۲۰.V]

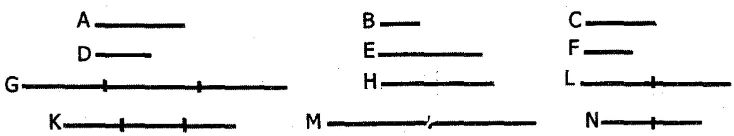
و G و H مضربهای متساوی از A و D هستند، و M و N مضربهای متساوی دلخواه دیگری از C و F.

بنابراین نسبت A به C مثل نسبت D است به F. [۵.تع.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

اگر سه کمیت در دست باشند، و کمیتهای دیگری با همان تعداد که نسبت دوبه‌دو در آنها با هم یکی شد، و نسبت آنها آشفته باشد، نسبت آنها مساوات هموار نیز خواهد بود.



فرض می‌کنیم سه کمیت A و B و C در دست‌اند و کمیتهای دیگر D و E و F با همان تعداد که نسبت دوبه‌دو در آنها با هم، مساوی است، و نسبت آنها آشفته است، به طوری که نسبت A به B مثل نسبت E است به F، و، نسبت B به C مثل نسبت D است به E؛ می‌گوییم که نسبت A به C مثل نسبت D است به F.

فرض می‌کنیم از مضربهای متساوی A و B و D کمیتهای G و H و K را به دست آورده‌ایم، و از مضربهای دلخواه متساوی دیگر C و E و F کمیتهای L و M و N را. در این حال، چون G و H مضربهای متساوی از A و B هستند، و اجزا همان نسبتی را با هم دارند که مضربهای آنها، [۱۵.V] بنابراین نسبت A به B مثل نسبت G است به H. به همین دلیل نیز، نسبت E به F، مثل نسبت M است به N. و، چون نسبت A به B مثل نسبت E است به F؛ بنابراین نسبت G به H هم مثل نسبت M است به N [۱۱.V]

بعد، چون نسبت B به C مثل نسبت D است به E، با توجه به ابدال نسبت، نسبت B به D هم مثل نسبت C است به E [۱۶.V]

و چون H و K مضربهای متساوی از B و D هستند، و نسبت اجزا به یکدیگر مثل نسبت مضربهای متساوی آنهاست به یکدیگر. بنابراین نسبت B به D مثل نسبت H است به K. [۱۵.V]

اما نسبت B به D مثل نسبت C است به E؛ بنابراین نسبت H به K هم مثل نسبت C است به E. [۱۱.V]

باز، چون L و M مضربهای متساوی از C و E هستند، بنابراین نسبت C به E مثل نسبت L است به M. [۱۵.V]

اما نسبت C به E مثل نسبت H است به K؛ بنابراین نسبت H به K هم مثل نسبت L است به M، [۱۱.V]

و با ابدال نسبت، نسبت H به L هم مثل نسبت K است به M. [۱۶.V]

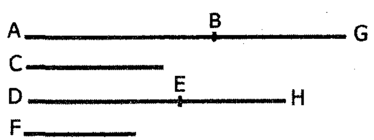
اما، همچنین ثابت شده بود که نسبت G به H مثل نسبت M است به N. در این صورت، چون سه کمیت G و H و L در دست‌اند و کمیتهای دیگر K و M و N با همان تعداد، که نسبت دوبه‌دو در آنها با هم یکی است و نسبت آنها آشفته است، بنابراین، در مساوات هموار، اگر G از L زیادتر باشد K نیز از N زیادتر است، اگر مساوی باشد، مساوی است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر. [۲۱.V]

و G و K مضربهای متساوی از A و D هستند، و L و N مضربهای متساوی از C و F، بنابراین نسبت A به C مثل نسبت D است به F.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

اگر نسبت یک کمیت اول به یک کمیت دوم مثل نسبت یک کمیت سوم به یک کمیت چهارم باشد، و همچنین نسبت یک کمیت پنجم به کمیت دوم مثل نسبت یک کمیت ششم باشد به کمیت چهارم، نسبت مجموع اول و پنجم به دوم مثل نسبت مجموع سوم و ششم است به چهارم[۱].



فرض می‌کنیم نسبت یک کمیت اول AB به یک کمیت دوم C مثل نسبت یک کمیت سوم DE باشد به یک کمیت چهارم F؛ و نیز فرض می‌کنیم که نسبت کمیت پنجم BG به کمیت دوم C مثل نسبت یک کمیت ششم EH باشد به کمیت چهارم F. می‌گوییم که نسبت مجموع اول و پنجم، AG، به دوم C مثل نسبت سوم و ششم، DH، است به کمیت چهارم F.

زیرا، چون نسبت BG به C مثل نسبت EH است به F. به عکس، نسبت C به BG مثل نسبت F است به EH. پس، چون نسبت AB به C مثل نسبت DE است به F، و نسبت C به BG، مثل نسبت F است به EH، بنابراین، در مساوات هموار، نسبت AB به BG مثل نسبت DE است به EH. [۲۲.V]

و، چون تفضیل نسبت درصورتها برقراراست ترکیب نسبت درصورتها نیزبرقراراست؛ [۱۸.V] بنابراین نسبت AG به GB مثل نسبت DH است به HE.

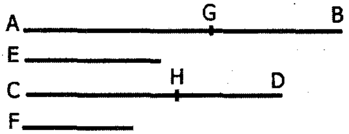
اما نسبت BG به C نیز مثل نسبت EH است به F؛ بنابراین، در مساوات هموار، نسبت AG به C مثل نسبت DH است به F. [۲۲.V]

آنچه می‌خواستیم.

۱. این قضیه از لحاظ جبری چنین بیان می‌شود: اگر $A/C = D/F$ و $B/C = E/F$، آنگاه $(A+B)/C = (D+E)/F$. ـ م.

قضیهٔ ۲۵

اگر چهار کمیت، متناسب باشند، مجموع بزرگترین و کوچکترین کمیتها از مجموع دو کمیت دیگر بزرگتر است[۱].



فرض می‌کنیم چهارکمیت AB و CD و E و F متناسب باشند به طوری که نسبت AB به CD مثل نسبت E باشد به F. و فرض می‌کنیم AB بزرگترین کمیت باشد و F کوچکترین.

می‌گوییم که AB و F بزرگترند از CD و E.

زیرا فرض می‌کنیم AG را مساوی با E گرفته‌ایم و CH را مساوی با F. چون نسبت AB به CD مثل نسبت E است به F. و E با AG مساوی است و F با CH، بنابراین نسبت AB به CD مثل نسبت AG است به CH. و چون نسبت تمام AB به تمام CD مثل نسبت جزء AG است به جز CH، نسبت باقیماندهٔ GB به باقیماندهٔ HD نیز مثل نسبت تمام AB است به تمام CD. [۱۹.۷]

اما AB بزرگتر از CD است؛ بنابراین GB نیز بزرگتر از HD است. و چون AG با E مساوی است و CH با F، بنابراین AG و F با CH و E مساوی‌اند. و اگر GB و HD نامساوی باشند، و GB بزرگتر باشد، AG و F را به GB اضافه می‌کنیم و CH و E را به HD، از اینجا نتیجه می‌شود که AB و F از CD و E بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

۱. این قضیه از لحاظ جبری چنین بیان می‌شود: اگر $A/B = C/D$، و A از همه بزرگتر (در نتیجه D از همه کوچکتر) باشد، آنگاه $A + D > B + C$.ـم.

مقالهٔ ششم

تعاریف

۱. شکلهای راست‌خط متشابه شکلهایی هستند که زاویه‌هاشان جداجدا با هم مساوی‌اند و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی با هم متناسب‌اند.

۲. وقتی می‌گوییم خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است که نسبت تمام خط به قطعهٔ بزرگتر مثل نسبت قطعهٔ بزرگتر باشد به قطعهٔ کوچکتر.

۳. ارتفاع یک شکل، عمودی است که از رأس بر قاعده فرود آمده باشد.

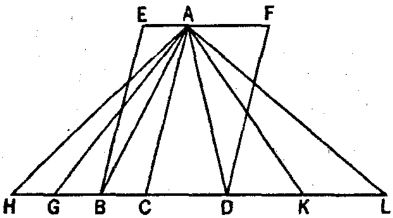
مقالهٔ VI

قضیهٔ ۱

نسبت مثلثها و متوازی‌الاضلاعهای[1] هم‌ارتفاع همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر.

---

۱. منظور از نسبت دو شکل، نسبت مساحتهای آنهاست به یکدیگر، و منظور از مضربی از یک شکل، مضربی از مساحت آن است.ـم.



فرض می‌کنیم مثلثهای ABC و ACD و متوازی‌الاضلاعهای EC و CF هم‌ارتفاع باشند؛ می‌گوییم که نسبت قاعدهٔ BC به قاعدهٔ CD مثل نسبت مثلث ABC به مثلث ACD و متوازی‌الاضلاع EC به متوازی‌الاضلاع CF، است.

زیرا BD را از دو طرف تا نقطه‌های H و L امتداد می‌دهیم، و فرض می‌کنیم BG و GH را [تعداد این قطعه‌ها هر چه باشد] مساوی با قاعدهٔ BC، و DK و KL و [این قطعه‌ها هر چه باشند] مساوی با قاعدهٔ CD، جدا و A را به G و H و K و L وصل کرده‌ایم؛ در این صورت، چون CB وَ BG و GH با هم مساوی‌اند، مثلثهای ABC و AGB و AHG نیز با هم مساوی‌اند. [۳۸.I]

بنابراین قاعدهٔ HC هر مضربی از قاعدهٔ BC باشد، مثلث AHC نیز همان مضرب از مثلث ABC است.

به همین دلیل، قاعدهٔ LC هر مضربی از قاعدهٔ CD باشد، مثلث ALC نیز همان مضرب از مثلث ACD است؛ و اگر قاعدهٔ HC با قاعدهٔ CL مساوی باشد، [مساحت] مثلث AHC نیز با [مساحت] مثلث ACL مساوی است، [۳۸.I]
و اگر قاعدهٔ HC از قاعدهٔ CL بزرگتر باشد، مثلث AHC نیز از مثلث ACL بزرگتر می‌شود، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر.

لذا، چهار کمیت داریم، دو قاعدهٔ BC و CD و دو مثلث ABC و ACD؛ مضربهای متساوی از قاعدهٔ BC و مثلث ABC، یعنی قاعدهٔ HC و مثلث AHC را اختیار کرده‌ایم؛ و از قاعدهٔ CD و مثلث ADC مضربهای متساوی دلخواه دیگر، یعنی قاعدهٔ LC و مثلث ALC را گرفته‌ایم؛ و ثابت شده بود که اگر قاعدهٔ HC بزرگتر از قاعدهٔ CL باشد، AHC نیز از ALC بزرگتر است، و اگر مساوی باشد، مساوی است؛ و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است. بنابراین نسبت قاعدهٔ BC به قاعدهٔ CD مثل نسبت مثلث ABC است به مثلث ACD. [V.تع.۵]

حال، چون متوازی‌الاضلاع EC دو برابر مثلث ABC است، [۴۱.I]
و متوازی‌الاضلاع FC دو برابر مثلث ACD، و نسبت اجزا به یکدیگر مثل نسبت مضربهای آنهاست، [۱۵.V]
بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث ACD مثل نسبت متوازی‌الاضلاع EC است به متوازی‌الاضلاع FC.

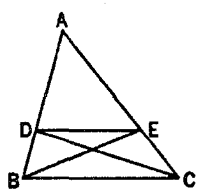
اما چون، ثابت شده بود که نسبت قاعدهٔ BC به قاعدهٔ CD مثل مثلث ABC است به مثلث ACD، و نسبت مثلث ABC به مثلث ACD مثل متوازی‌الاضلاع EC است به

متوازی‌الاضلاع CF، بنابراین نسبت قاعدهٔ BC به قاعدهٔ CD نیز، مثل نسبت متوازی‌الاضلاع EC است به متوازی‌الاضلاع FC. [۱۱.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

اگر خط راستی موازی با یکی از ضلعهای مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت می‌بُرد، و اگر ضلعهای مثلثی به یک نسبت بریده شده باشند خط راست واصل بین نقطه‌های بریدگی با ضلع سوم موازی است.



زیرا فرض می‌کنیم DE موازی با BC، یکی از ضلعهای مثلث ABC، رسم شده باشد. می‌گوییم نسبت BD به DA مثل نسبت CE است به EA.

E را به B و D را به C وصل می‌کنیم. بنابراین مثلث BDE با مثلث CDE مساوی است. زیرا هر دو دارای یک قاعدهٔ DE هستند و رأسهای آنها بر خط راست BC، موازی با قاعدهٔ DE قرار دارد. [۳۸.I]

و [مساحت] مثلث ADE مساحت دیگری است. اما نسبتهای کمیتهای متساوی به یک کمیت با هم مساوی‌اند. [۷.V]

بنابراین نسبت مثلث BDE به مثلث ADE مثل نسبت مثلث CDE است به مثلث ADE.

اما نسبت مثلث BDE به مثلث ADE، مثل نسبت BD است به DA؛ زیرا دارای یک ارتفاع‌اند که از E بر AB عمود می‌شود و نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت قاعده‌های آنهاست. [۱.VI]

به همین دلیل نیز نسبت مثلث CDE به مثلث ADE مثل نسبت CE است به EA.

بنابراین نسبت BD به DA نیز مثل نسبت CE است به EA. [۱۱.V]

باز فرض می‌کنیم در مثلث ABC ضلعهای AB و AC به یک نسبت بریده شده‌اند، به طوری که نسبت BD به DA مثل نسبت CE به EA است؛ و فرض می‌کنیم D به E وصل شده است.

می‌گوییم DE با BC موازی است.

زیرا در همان شکل، چون نسبت BD به DA مثل نسبت CE است به EA، اما نسبت BD به DA، مثل نسبت مثلث BDE است به مثلث ADE، و، نسبت CE به EA، مثل نسبت مثلث CDE است به مثلث ADE، [۱.VI]

بنابراین، نسبت مثلث BDE به مثلث ADE هم، مثل نسبت مثلث CDE است به مثلث ADE. [۱۱.V]

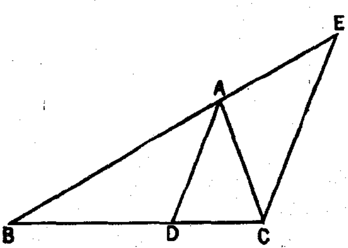
لذا نسبتهای هر یک از مثلثهای BDE و CDE به ADE، یکی هستند، بنابراین مثلث BDE با مثلث CDE مساوی است؛ [۹.V]
و قاعدهٔ هر دو آنها DE است. اما مثلثهای متساوی که یک قاعده داشته باشند رأسهای آنها نیز بر خط راستی موازی با قاعده قرار دارند. [۳۹.I]
بنابراین DE با BC موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر خط راستی یک زاویه از مثلثی را نصف کند و قاعدهٔ آن را نیز ببرد، نسبت قطعه‌های قاعده به یکدیگر همچون دو ضلع مثلث است به یکدیگر؛ و اگر نسبت قطعه‌های قاعده به یکدیگر، همچون نسبت دو ضلع مثلث است به یکدیگر؛ و اگر نسبت قطعه‌های قاعده به یکدیگر، همچون نسبت دو ضلع مثلث باشد، خط راست واصل از رأس به نقطهٔ بریدگی زاویهٔ رأس را نصف خواهد کرد.

فرض می‌کنیم خط راست AD زاویهٔ BAC از مثلث ABC را نصف کرده است. می‌گوییم نسبت BD به CD مثل نسبت AB است به AC.



زیرا فرض می‌کنیم CE از رأس C موازی با AD رسم شده و امتداد BA را در E بریده است.

در این صورت چون خط راست AC بر دو خط متوازی AD و EC فرود آمده است، زاویهٔ ACE با زاویهٔ CAD مساوی است. [۲۹.I]

اما زاویهٔ CAD بنا به فرض با زاویهٔ BAD مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ BAD نیز با زاویهٔ ACE مساوی است.

باز، چون خط راست BAE بر دو خط متوازی AD و EC فرود آمده است، دو زاویهٔ متقابل خارجی و داخلی BAD و AEC متساوی‌اند؛ [۲۹.I]

اما ثابت شده بود که زاویهٔ ACE نیز با زاویهٔ BAD مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ ACE نیز با زاویهٔ AEC مساوی است، لذا ضلع AE نیز با ضلع AC مساوی است. [۶.I]

و چون در مثلث BCE خط راست AD موازی با یکی از ضلعها یعنی EC رسم شده است، بنابراین نسبت BD به DC مثل نسبت BA است به AE. اما AE با AC مساوی است؛ [۲.VI]

بنابراین نسبت BD به DC مثل نسبت BA است به AC.

باز فرض می‌کنیم نسبت BA به AC مثل نسبت BD است به DC، و A به D وصل شده است؛

می‌گوییم خط راست AD زاویهٔ BAC را تصف می‌کند.

زیرا در همان شکل چون نسبت BD به DC مثل نسبت BA است به AC، و همچنین نسبت BD به DC مثل نسبت BA است به AE: زیرا در مثلث BCE خط راست AD موازی با یکی از ضلعها یعنی EC رسم شده است؛ [۲۰.VI]

بنابراین نسبت BA به AC هم مثل نسبت BA است به AE، [۱۱.V]

بنابراین AC با AE مساوی است. [۹.V]

در نتیجه زاویهٔ AEC نیز با زاویهٔ ACE مساوی است. [۵.I]

اما دو زاویهٔ متقابل داخلی و خارجی AEC و BAD متساوی‌اند. [۲۹.I]

و زاویه‌های ACE و CAD متبادلهٔ داخلی و در نتیجه مساوی‌اند. [۲۹.I]

لذا زاویهٔ BAD نیز با زاویهٔ CAD مساوی است.

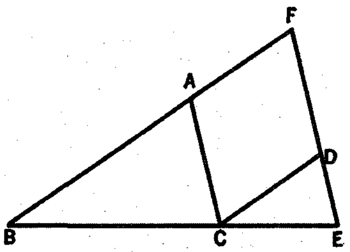
بنابراین خط راست AD زاویهٔ BAC را نصف کرده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

در مثلثهای متساوی‌الزوایا[۱] ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی، متناسب‌اند، و ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های متساوی متناظر.

فرض می‌کنیم مثلثهای ABC و DCE متساوی‌الزاویه‌اند که زاویهٔ ABC با زاویهٔ DCE مساوی است، و زاویهٔ BAC با زاویهٔ CDE، و به علاوه زاویهٔ ACB با زاویهٔ CED؛



می‌گوییم که در مثلثهای ABC و DCE، ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند، و ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های متساوی متناظر.

زیرا، فرض می‌کنیم که BC را با CE در یک امتداد قرار داده‌ایم. در این صورت، چون زویه‌های ABC و ACB کمتر از دو قائمه‌اند، [۱۷.I]

و زاویهٔ ACB با زاویهٔ DEC مساوی است، بنابراین زاویه‌های ABC و DEC کمتر از دو قائمه‌اند؛ لذا، اگر BA و DE را امتداد دهیم یکدیگر را می‌برند. [۱.I ص.م.۵]

فرض می‌کنیم آنها را امتداد داده‌ایم تا در F یکدیگر را بریده‌اند. حال، چون زاویهٔ DCE با زاویهٔ ABC مساوی است، پس BF با DC موازی است. [۲۸.I]

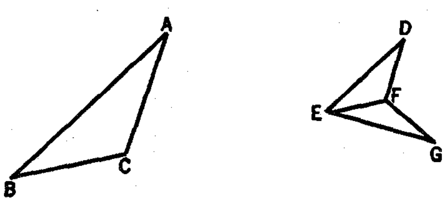
۱. مثلثهایی که زاویه‌ها در یکی با زاویه‌ها در دیگری مساوی‌اند. در قضیه‌های بعد برای روانیِ بیان به جای «متساوی‌الزوایا» عبارت «متساوی‌الزاویه» را به کار خواهیم برد.ـم.

باز، چون زاویهٔ ACB با زاویهٔ DEC مساوی است، AC با FE موازی است؛ [۲۸.I]
بنابراین $FACD$ متوازی‌الاضلاع است، درنتیجه FA با DC مساوی است و AC با FD. [۳۴.I]
و چون AC موازی با ضلع FE از مثلث FBE کشیده شده است، بنابراین نسبت BA به AF مثل نسبت BC است به CE؛ [۲.VI]
اما AF با CD مساوی است؛ بنابراین نسبت BA به CD مثل نسبت BC است به CE، و با ابدال نسبت، نسبت AB به BC مثل نسبت DC است به CE. [۱۶.V]
باز، چون CD با BF موازی است، در نتیجه، نسبت BC به CE، مثل نسبت FD است به DE. [۲.VI]
اما FD با AC مساوی است؛ بنابراین نسبت BC به CE، مثل AC است به DE، و با ابدال نسبت، نسبت BC به CA، مثل نسبت CE است به ED. [۱۶.V]
از آنجا که ثابت شده بود نسبت AB به BC مثل نسبت DC است به CE، و نسبت BC به CA، مثل نسبت CE است به ED، بنابراین، با توجه به نسبت مساوات هموار، نسبت BA به AC مثل نسبت CD است به DE. [۲۲.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

اگر ضلعهای دو مثلث متناسب باشند، مثلثها متساوی‌الزاویه‌اند، و زاویه‌های متساوی، زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متناظرند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلث هستند با ضلعهای متناسب، به طوری که نسبت AB به BC مثل نسبت DE است به EF، و نسبت BC به CA مثل نسبت EF است به FD، و به علاوه، نسبت BA به AC مثل ED است به DF؛

می‌گوییم که مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است، و زاویه‌های متساوی روبه‌رو به ضلعهای متناظرند. یعنی زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF متناظر است، و زاویهٔ BCA با زاویهٔ EFD، و به علاوه زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDF متناظر می‌شود.
زیرا، بر خط راست EF و در نقطه‌های E و F بر آن زاویهٔ FEG را مساوی با زاویهٔ ABC می‌سازیم، و زاویهٔ EFG را مساوی با زاویهٔ ACB؛ [۲۳.I]
بنابراین زاویهٔ سوم BAC با زاویهٔ سوم EGF مساوی است. [۳۲.I]

بنابراین مثلث ABC با مثلث GEF متساوی‌الزاویه است. لذا در مثلثهای ABC و GEF ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی، متناسب‌اند و ضلعهای متناظر روبه‌رو به زاویه‌های متساوی‌اند. [۴.VI]

بنابراین نسبت AB به BC مثل نسبت GE است به EF. اما، نسبت AB به BC، بنا به فرض، با نسبت DE به EF مساوی است؛ لذا نسبت DE به EF مثل نسبت GE است به EF. [۱۱.V]

در نتیجه نسبتهای هر یک از خطهای راست DE و GE به EF با هم مساوی‌اند؛ بنابراین DE با GE مساوی است. [۹.V]

به همین دلیل DF نیز با GF مساوی است. از آنجا که DE با EG مساوی است و EF در هر دو مشترک، دو ضلع DE و EF با دو ضلع GE و EF مساوی‌اند؛ و قاعدهٔ DF با قاعدهٔ FG مساوی است، بنابراین زاویهٔ DEF با زاویهٔ GEF مساوی است، [۸.I]

و مثلث DEF با مثلث GEF، و بقیهٔ زاویه‌ها، یعنی زاویه‌هایی که روبه‌رو به ضلعهای متساوی‌اند، با هم مساوی می‌شوند. [۴.I]

بنابراین زاویهٔ DFE نیز با زاویهٔ GFE مساوی می‌شود، و زاویهٔ EDF با زاویهٔ EGF.

و چون زاویهٔ FED با زاویهٔ GEF مساوی است، و زاویهٔ GEF با زاویهٔ ABC، بنابراین زاویهٔ ABC نیز با زاویهٔ DEF مساوی است.

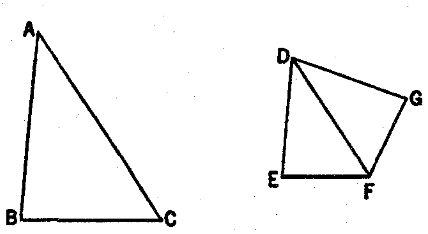
به همین دلیل زاویهٔ ACB نیز با زاویهٔ DFE مساوی است، و به علاوه زاویه در A با زاویه در D مساوی است. بنابراین مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر دو مثلث یک زاویهٔ مساوی با هم داشته باشند و ضلعهای مجاور به این زاویه‌های متساوی متناسب باشند، آن دو مثلث متساوی‌الزاویه‌اند و زاویه‌های متساوی روبه‌رو به ضلعهای متناظرند.

فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلث هستند که زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDF مساوی است و ضلعهای مجاور به این زاویه‌های متساوی متناسب‌اند، به طوری که نسبت BA به AC مثل نسبت ED است به DF.



می‌گوییم که مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است و زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی است، و زاویهٔ ACB با زاویهٔ DFE.

زیرا، بر خط راست DF و در نقطه‌های D و F واقع بر آن فرض می‌کنیم زاویهٔ FDG را مساوی با یکی از زاویه‌های BAC یا EDF، رسم شده است و زاویهٔ DFG مساوی با زاویهٔ ACB؛ [۲۳.I]
بنابراین زاویهٔ سوم در B با زاویهٔ سوم در G مساوی است [۳۲.I]
لذا مثلث ABC با مثلث DGF متساوی‌الزاویه است؛ در نتیجه ضلعهای آنها متناسب‌اند، یعنی نسبت BA به AC مثل نسبت GD است به DF. [۴.VI]

اما بنا به فرض، نسبت BA به AC نیز مثل نسبت ED است به DF. بنابراین نسبت ED به DF نیز مثل نسبت GD است به DF. [۱۱.V]

لذا ED با DG مساوی است؛ [۹.V]
و DF مشترک است، لذا دو ضلع ED و DF با دو ضلع GD و DF مساوی می‌شوند؛ و زاویهٔ EDF با زاویهٔ GDF مساوی می‌شود؛ بنابراین قاعدهٔ EF با قاعدهٔ GF مساوی است و مثلث DEF با مثلث DGF، و بقیهٔ زاویه‌ها با بقیهٔ زاویه‌ها مساوی‌اند، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی، متساوی‌اند. [۴.I]
بنابراین زاویهٔ DFG با زاویهٔ DFE مساوی است، و زاویهٔ DGF با زاویهٔ DEF.

اما، زاویهٔ DFG با زاویهٔ ACB مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ ACB نیز با زاویهٔ DFE مساوی است.

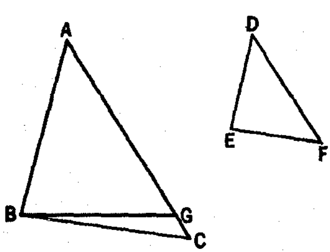
و بنا به فرض، زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ EDF مساوی است، لذا زاویهٔ دیگر B با زاویهٔ دیگر E مساوی است. [۳۲.I]
در نتیجه مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر در دو مثلث یک زاویه از یکی با یک زاویه از دیگری مساوی باشد و ضلعهای مجاور به زاویه‌های دیگر متناسب باشند، و از زاویه‌های دیگر، یکی یا هر دو، کمتر از یک قائمه باشد یا نباشد این دو مثلث متساوی‌الزاویه‌اند و آن زاویه‌هایی با هم مساوی‌اند که ضلعهای مجاور به آنها متناسب‌اند.

فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلث هستند که در آنها یک زاویه، یعنی BAC با EDF مساوی است و ضلعهای مجاور به زاویه‌های دیگر ABC و DEF متناسب‌اند، به طوری که نسبت AB به BC مثل نسبت DE است به EF، و اول، هر یک از زاویه‌های دیگر در C و F کمتر از یک قائمه است.



می‌گوییم که مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است، زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی و زاویهٔ دیگر یعنی زاویه در C با زاویهٔ دیگر در F مساوی است.

زیرا اگر زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی نباشد، یکی از آنها بزرگتر از دیگری است. فرض می‌کنیم زاویهٔ ABC بزرگتر باشد، و بر خط راست AB و در نقطهٔ B بر آن زاویهٔ ABG را مساوی با زاویهٔ DEF می‌سازیم. [۲۳.I]

در این حال، چون زاویهٔ در A با زاویه در D مساوی است، و زاویهٔ ABG با زاویهٔ DEF، بنابراین زاویهٔ دیگر AGB با زاویهٔ دیگر DFE مساوی است. [۳۲.I]

در نتیجه مثلث ABG با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است، لذا نسبت AB به BG مثل نسبت DE است به EF. [۴.VI]

اما چون بنا به فرض نسبت DE به EF مثل نسبت AB است به BC؛ بنابراین نسبتهای AB به هر یک از خطهای راست BC و BG یکی است. [۱۱.V]

لذا BC با BG مساوی است، [۹.V]

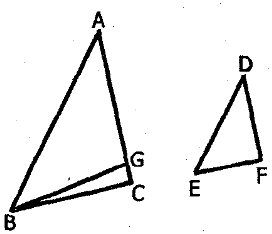
در نتیجه زاویه در C نیز با زاویهٔ BGC مساوی است. [۵.I]

اما بنا به فرض زاویه در C از یک قائمه کمتر است؛ بنابراین زاویهٔ BGC نیز از یک قائمه کمتر است، درنتیجه زاویهٔ AGB مجاور به آن، از یک قائمه بیشتر است. [۱۳.I]

و ثابت شده بود که AGB با زاویه در F مساوی است؛ بنابراین زاویه در F نیز از یک قائمه بیشتر است.

اما بنا به فرض این زاویه از یک قائمه کمتر است: که غیرممکن است. بنابراین زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF نامساوی نیست؛ در نتیجه با آن مساوی است. اما زاویه در A نیز با زاویه در D مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ دیگر در C با زاویهٔ دیگر در F مساوی است. [۳۲.I]

بنابراین مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است.



اما باز فرض می‌کنیم هیچ یک از زاویه‌ها در C و F کمتر از یک قائمه نیست؛

باز می‌گوییم که در این حالت هم، مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است. زیرا، با همان ساختمان می‌توانیم به طریق مشابه ثابت کنیم که BC با BG مساوی است، در نتیجه زاویه در C نیز با زاویهٔ BGC مساوی است. [۵.I]

اما زاویه در C کمتر از یک قائمه نیست؛ بنابراین زاویهٔ BGC نیز کمتر از یک قائمه نیست. از این‌رو در مثلث BGC دو زاویه داریم که کمتر از دو قائمه نیستند: که غیرممکن است. [۱۷.I]

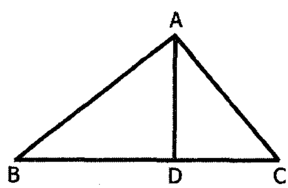
در نتیجه، این بار نیز، زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF نامساوی نیست؛ بنابراین با آن مساوی است. اما زاویه در A نیز با زاویه در D مساوی است؛ در نتیجه زاویهٔ دیگر در C با زاویهٔ دیگر در F مساوی است. [۳۲.I]

بنابراین مثلث ABC با مثلث DEF متساوی‌الزاویه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

در هر مثلث قائم‌الزاویه عمود وارد از رأس قائمه بر قاعده آن را به دو مثلث متشابه مجاور به این عمود که با تمامی مثلث نیز متشابه‌اند تقسیم می‌کند.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، قائمه در رأس A، فرض می‌کنیم AD از A بر BC عمود شده است. می‌گوییم که هر یک از مثلثهای ABD و ACD با تمامی مثلث ABC و در عین حال با یکدیگر متشابه‌اند.

زیرا، چون زاویهٔ BAC با زاویهٔ ADB، به دلیل قائمه بودن متساوی است، و زاویهٔ B در دو مثلث ABC و ABD مشترک است، بنابراین زاویهٔ دیگر ACB با زاویهٔ دیگر BAD مساوی است. [۳۲.I]

در نتیجه، مثلث ABC با مثلث ABD متساوی‌الزاویه است. لذا نسبت BC، که روبه‌رو به زاویهٔ قائمه در مثلث ABC است، به BA، که روبه‌رو به زاویهٔ قائمه در مثلث ABD است، مثل نسبت خود BA است، که روبه‌رو به زاویهٔ C در مثلث ABC است، به BD که روبه‌رو به زاویهٔ مساوی BAD در مثلث ABD است، و نیز مثل نسبت AC که روبه‌رو به زاویهٔ مشترک B در دو مثلث است به AD. [۴.VI]

بنابراین مثلث ABC با مثلث ABD، هم متساوی‌الزاویه است و هم ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب دارد. پس، مثلث ABC با مثلث ABD متشابه است. [VI.تع.۱]

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که مثلث ABC با مثلث ADC نیز متشابه است. بنابراین هر یک از مثلثهای ABD و ADC با تمام مثلث ABC متشابه است. اکنون می‌گوییم که مثلثهای ABD و ADC نیز با یکدیگر متشابه‌اند.

زیرا، چون زاویهٔ قائمهٔ BDA با زاویهٔ قائمهٔ ADC مساوی است، و به علاوه ثابت شده بود که زاویهٔ BAD نیز با زاویه در C مساوی است، بنابراین زاویهٔ دیگر B نیز با زاویهٔ دیگر DAC مساوی است؛ [۳۲.I]

پس، مثلث ABD با مثلث ADC متساوی‌الزاویه است. لذا نسبت BD، که روبه‌رو به زاویهٔ BAD در مثلث ABD است، به DA، که روبه‌رو به زاویه در C در مثلث ADC که مساوی با زاویهٔ BAD است، مثل نسبت خودِ AD است، که روبه‌رو به زاویهٔ در B در مثلث ABD است، به DC که روبه‌رو به زاویهٔ DAC در مثلث ADC است که با زاویه در B مساوی است، و نیز مثل نسبت BA است به AC، که این ضلعها روبه‌رو به زاویه‌های قائمه‌اند. [۴.VI]

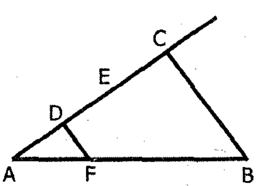
در نتیجه، مثلث ABD با مثلث ADC متشابه است. [VI.تع.۱]

فرع. از اینجا روشن می‌شود که اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه از رأس زاویهٔ قائمه عمودی بر قاعده فرود آوریم، این عمود واسطهٔ هندسی بین قطعاتی است که از قاعده جدا شده‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

مطلوب جدا کردن جزئی معین از یک خط راست مفروض است[1].



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض باشد. پس مطلوب جدا کردن جزئی معین از AB است.

فرض می‌کنیم این جزء معین یک‌سوم باشد. خط دلخواه AC را که با AB زاویهٔ دلخواهی بسازد از A رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه D را بر آن انتخاب و طولهای DE و EC را مساوی با AD جدا می‌کنیم، [۳.I]

و C را به B وصل، و از D خط DF را موازی با BC که یکی از ضلعهای مثلث ABC است، رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

در این صورت، چون FD موازی با یک ضلع مثلث ABC کشیده شده است، بنابراین نسبت CD به DA مثل نسبت BF است به FA. [۲.VI]

اما CD دو برابر DA است؛ بنابراین BF نیز دو برابر FA است؛ پس BA سه برابر AF است. لذا از خط راست مفروض AB جزء معین AF جدا شده است.

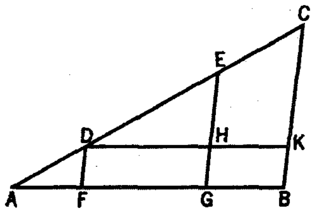
آنچه می‌خواستیم.

---

۱. قضیه‌های ۹ـ۱۱ در واقع مسئله هستند، نه قضیه. ولی چون در اصل کتاب به صورت قضایا آمده‌اند مترجم نیز همان قاعده را پیروی کرده است.ـم.

قضیهٔ ۱۰

مطلوب قسمت کردن یک خط راست تقسیم نشدهٔ مفروض است به قطعاتی متناسب با قطعات خط راستی تقسیم شده.



فرض می‌کنیم AB خط راست تقسیم نشدهٔ مفروض است و AC خط راستی که در نقطه‌های D و E به قطعاتی تقسیم شده است. این دو خط را طوری قرار می‌دهیم که زاویهٔ دلخواهی با هم بسازند؛ C را به B وصل می‌کنیم و DF و EG را از نقطه‌های D و E موازی با BC و DHK را از D موازی با AB رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

بنابراین هر یک از شکلهای FH و HB یک متوازی‌الاضلاع است؛ در نتیجه DH با FG مساوی است، و HK با GB. [۳۴.I]

اما چون HE موازی با KC، یکی از ضلعهای مثلث DKC، رسم شده است، بنابراین نسبت CE به ED مثل نسبت KH است به HD. [۲.VI]

اما KH با GB مساوی بود و HD با GF؛ بنابراین نسبت CE به ED مثل نسبت BG است به GF.

باز، چون FD موازی با GE، یکی از ضلعهای مثلث AGE، رسم شده است، لذا نسبت ED به DA، مثل نسبت GF است به FA. [۲.VI]

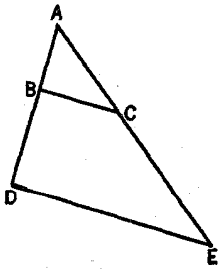
اما همچنین ثابت شده بود که نسبت CE به ED مثل نسبت BG است به GF؛ بنابراین نسبت CE به ED مثل نسبت BG است به GF، و نسبت ED به DA مثل نسبت GF است به FA. بنابراین خط تقسیم‌نشدهٔ مفروض AB به قطعاتی متناسب با قطعات خط راست تقسیم‌شدهٔ AC تقسیم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

دو خط راست مفروض‌اند. مطلوب پیدا کردن خط راستی است که سومین جزء از تناسب پیوسته[۱] بین آن دو خط راست باشد.

۱. به طور کلی، منظور از یک تناسب پیوسته یک تصاعد هندسی است به صورت $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \cdots$. یا $a : b : c : d \ldots$. لذا سومین جزء در تناسب پیوستهٔ بین دو عدد a و b عددی است مانند c که $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.ـ م.



فرض می‌کنیم BA و AC دو خط راست مفروض‌اند. و آنها را چنان پهلوی هم می‌گذاریم که زاویهٔ دلخواهی با هم بسازند. پس مطلوب پیدا کردن سومین جزء از تناسب پیوستهٔ بین BA و AC است.

فرض می‌کنیم آن دو خط راست را تا نقطه‌های D و E امتداد داده‌ایم. BD را مساوی AC جدا کرده، [۳.I]

و B را به C وصل و DE را از D موازی با BC رسم کرده‌ایم. [۳۱.I]

در این صورت، چون BC موازی با DE، یکی از ضلعهای مثلث ADE، رسم شده است، از لحاظ تناسب، نسبت AB به BD مثل نسبت AC است به CE. [۲.VI]

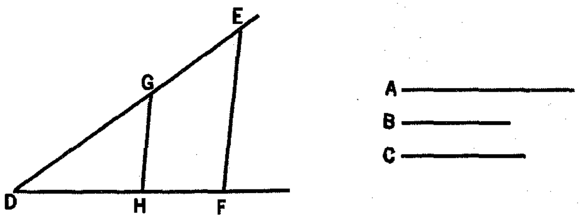
اما BD با AC مساوی بود، بنابراین نسبت AB به AC مثل نسبت AC است به CE.

بنابراین به ازای دو خط راست مفروض AB و AC سومین جزء، CE از تناسب پیوستهٔ بین AB و AC پیدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

سه خط راست مفروض‌اند. مطلوب پیدا کردن خط راستی است که چهارمین جزء تناسب بین آن سه خط باشد.



فرض می‌کنیم که A و B و C سه خط راست مفروض‌اند. مطلوب پیدا کردن چهارمین جزء تناسب بین A و B و C است.

فرض می‌کنیم دو خط راست DE و DF چنان قرار گرفته‌اند که زاویهٔ دلخواه EDF را با هم ساخته‌اند؛ DG را مساوی با A جدا می‌کنیم، GE را مساوی با B؛ و نیز DH را مساوی با C. H را به G وصل و EF را از E موازی با آن رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

چون GH موازی با EF، یکی از ضلعهای مثلث DEF، رسم شده است، پس نسبت DG به GE مثل نسبت DH است به HF. [۲.VI]

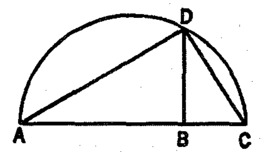
اما DG با A مساوی است، و GE با B و DH با C. بنابراین نسبت A به B مثل نسبت C است به HF.

بدین ترتیب، به ازای سه خط راست مفروض A و B و C، چهارمین جزء تناسب بین آنها، HF، پیدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

دو خط راست مفروض‌اند. مطلوب پیدا کردن واسطهٔ هندسی بین آنهاست.



فرض می‌کنیم AB و BC دو خط راست مفروض‌اند.

پس مطلوب یافتن واسطهٔ هندسی بین AB و BC است.

فرض می‌کنیم این دو خط راست به توالی یکدیگر بر یک امتداد قرار داده شده‌اند و نیم‌دایرهٔ ADC به قطر AC رسم شده است؛ BD را از نقطهٔ B بر خط راست AC عمود، و D را به A و C وصل می‌کنیم. چون زاویهٔ ADC محاط در یک نیم‌دایره است، اندازهٔ آن مساوی با یک قائمه است. [III.۳۱]

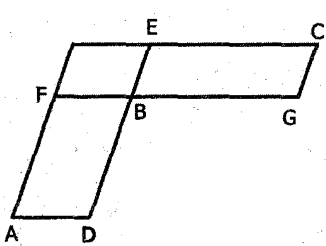
و چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، DB از رأس زاویهٔ قائمه بر قاعدهٔ AC عمود شده است، پس DB واسطهٔ هندسی بین قطعات AB و BC از قاعدهٔ AC است. [VI.۸،ف.]

بنابراین به ازای دو خط راست مفروض AB و BC واسطهٔ هندسی آنها، DB، پیدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

در متوازی‌الاضلاعهای متساوی[1] و متساوی‌الزاویه ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند، و متوازی‌الاضلاعهای متساوی‌الزاویه‌ای که در آنها ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب باشند، با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم AB و BC متوازی‌الاضلاعهای متساوی و متساوی‌الزاویه‌ای هستند که زاویه‌های آنها در رأس B متساوی‌اند. DB و BE را بر یک خط راست به توالی هم قرار می‌دهیم. بنابراین FB و BG نیز بر یک خط راست قرار می‌گیرند. [I.۱۴]

می‌گوییم که در متوازی‌الاضلاعهای AB و BC

۱. در این قضیه و قضیه‌های بعد منظور از دو شکل مساوی، دو شکل با «مساحتهای» مساوی است.ـم.

ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند، یعنی که نسبت DB به BE مثل نسبت GB است به BF.

زیرا، فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع FE کامل شده است. پس چون متوازی‌الاضلاع AB با متوازی‌الاضلاع BC مساوی است، و FE ناحیهٔ دیگری است، لذا نسبت متوازی‌الاضلاع AB به متوازی‌الاضلاع FE مثل نسبت متوازی‌الاضلاع BC است به متوازی‌الاضلاع FE، [۷.VI]

اما چون نسبت AB به FE مثل نسبت DB است به BE، [۱.VI]

و نسبت متوازی‌الاضلاع BC به متوازی‌الاضلاع FE مثل نسبت GB است به BF، [۱.VI]

بنابراین نسبت DB به BE نیز مثل نسبت GB است به BF. [۱۱.V]

در نتیجه در متوازی‌الاضلاعهای AB و BC ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند.

حال، فرض می‌کنیم نسبت GB به BF مثل نسبت DB است به BE؛ می‌گوییم که متوازی‌الاضلاع AB با متوازی‌الاضلاع BC مساوی است. زیرا، چون نسبت DB به BE مثل نسبت GB است به BF؛ و نسبت DB به BE مثل نسبت متوازی‌الاضلاع AB است به متوازی‌الاضلاع FE، [۱.VI]

و نسبت BG به BF مثل نسبت متوازی‌الاضلاع BC است به متوازی‌الاضلاع FE، [۱.VI]

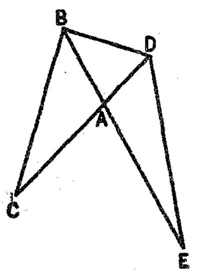
بنابراین نسبت متوازی‌الاضلاع AB به متوازی‌الاضلاع FE نیز مثل نسبت متوازی‌الاضلاع BC است به متوازی‌الاضلاع FE؛ [۱۱.V]

بنابراین متوازی‌الاضلاع AB با متوازی‌الاضلاع BC مساوی است. [۹.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

در مثلثهای متساوی که یک زاویهٔ متساوی داشته باشند، ضلعهای مجاور به این زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند؛ و مثلثهایی که یک زاویهٔ متساوی دارند و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند، با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC و ADE مثلثهایی متساوی‌اند که یک زاویهٔ متساوی دارند، یعنی زاویهٔ BAC با زاویهٔ DAE مساوی است.

می‌گوییم که در این مثلثها، ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند، یعنی نسبت CA به AD مثل نسبت EA است به AB.

زیرا، فرض می‌کنیم که آنها را طوری قرار داده‌ایم که CA با AD بر یک خط راست قرار گرفته‌اند. لذا AE نیز با AB بر یک خط راست قرار دارند. [۱۴.I]

B را به D وصل می‌کنیم. در این صورت چون مثلث ABC با مثلث ADE مساوی است، و BAD مساحت دیگری است، بنابراین نسبت مثلث CAB به مثلث BAD مثل نسبت مثلث EAD است به مثلث BAD. [۷.V]

اما، چون نسبت CAB به BAD مثل نسبت CA است به AD، [۱.VI]

و نسبت EAD به BAD مثل نسبت EA است به AB، [۱.VI]

بنابراین نسبت CA به AD نیز مثل نسبت EA است به AB. [۱۱.V]

لذا در مثلثهای ABC و ADE ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند.

حال، فرض می‌کنیم ضلعهای مثلثهای ABC و ADE معکوساً متناسب‌اند، یعنی نسبت EA به AB مثل نسبت CA است به AD؛ می‌گوییم که مثلث ABC با مثلث ADE مساوی است.

زیرا باز اگر D را به B را وصل کنیم، چون نسبت CA به AD مثل نسبت EA است به AB و نسبت CA به AD مثل نسبت مثلث ABC است به مثلث BAD، و نسبت EA به AB مثل نسبت مثلث EAD است به مثلث BAD. [۱.VI]

بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث BAD مثل نسبت مثلث EAD است به مثلث BAD، [۱۱.V]

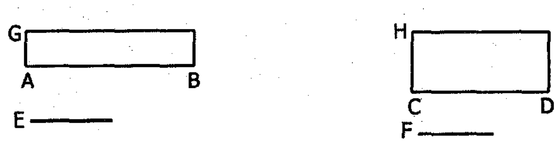
بنابراین نسبتهای هر یک از مثلثهای ABC و EAD به مثلث BAD با هم مساوی‌اند. در نتیجه مثلث ABC با مثلث EAD مساوی است. [۹.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

اگر چهار خط راست متناسب باشند، مستطیل حاصل از طرفین تناسب با مستطیل حاصل از وسطین تناسب مساوی است؛ و، اگر مستطیل حاصل از طرفین با مستطیل حاصل از وسطین مساوی باشد، چهار خط راست متناسب‌اند.

فرض می‌کنیم چهار خط راست AB و CD و E و F متناسب‌اند به طوری که نسبت AB به CD مثل نسبت E است به F؛



می‌گوییم که مستطیل حاصل از AB و F با مستطیل حاصل از CD و E مساوی است.

از نقطه‌های A و C عمودهای AG و CH را بر AB و CD اخراج، و AG را مساوی با F، و CH را مساوی با E جدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاعهای BG و DH را کامل کرده‌ایم. در این صورت، چون نسبت AB به CD مثل نسبت E است به F؛ و E با CH مساوی است و F با AG، بنابراین نسبت AB به CD مثل نسبت CH است به AG. لذا در متوازی‌الاضلاعهای BG و DH ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند.

اما متوازی‌الاضلاعهای متساوی‌الزاویه‌ای که در آنها ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب باشند مساوی‌اند. [۱۴.VI]

بنابراین متوازی‌الاضلاع BG با متوازی‌الاضلاع DH مساوی است؛ و BG مستطیل حاصل از AB و F است، زیرا AG با F مساوی است؛ و DH مستطیل حاصل از CD و E است، زیرا E با CH مساوی است؛ بنابراین مستطیل حاصل از AB و F با مستطیل حاصل از CD و E مساوی است.

حال، فرض می‌کنیم مستطیل حاصل از AB و F با مستطیل حاصل از CD و E مساوی است؛ می‌گوییم که این چهار خط راست با هم متناسب‌اند، به طوری که نسبت AB به CD مثل نسبت E است به F.

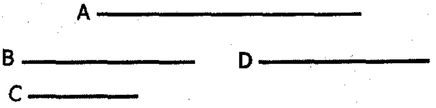
زیرا در همان شکل، چون مستطیل AB و F با مستطیل CD و E مساوی است، و مستطیل AB و F همان مستطیل BG است، زیرا AG با F مساوی است، و مستطیل CD و E همان مستطیل DH است، زیرا CH با E مساوی است، بنابراین BG با DH مساوی و متساوی‌الزاویه است. اما در متوازی‌الاضلاعهای متساوی و متساوی‌الزاویه ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند. [۱۴.VI]

بنابراین نسبت AB به CD مثل نسبت CH است به AG. اما CH با E مساوی است و AG با F؛ بنابراین نسبت AB به CD مثل نسبت E است به F.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

اگر سه خط راست [به‌طور پیوسته] متناسب باشند، مستطیل حاصل از طرفین (تناسب)، با مربع وسطی مساوی است؛ و اگر مستطیل حاصل از طرفین با مربع وسطی مساوی باشد، سه خط راست متناسب خواهند بود.



فرض می‌کنیم سه خط راست A و B و C متناسب باشند، چنانکه نسبت A به B مثل نسبت B باشد به C.

می‌گوییم که مستطیل حاصل از A و C با مربع B مساوی است. فرض می‌کنیم D مساوی با B رسم شده است. در این صورت، چون نسبت A به B مثل نسبت B است به C، و B با D مساوی است، بنابراین نسبت A به B مثل نسبت D است به C.

اما اگر چهار خط راست متناسب باشند، مستطیل حاصل از طرفین با مستطیل حاصل از وسطین مساوی است. [۱۶.VI]

بنابراین مستطیل A و C با مستطیل B و D مساوی است. اما مستطیل B و D همان مربع B است، زیرا B با D مساوی است. لذا مستطیل حاصل از A و C با مربع B مساوی است.

حال، فرض می‌کنیم مستطیل A و C با مربع B مساوی باشد؛ می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت B است به C.

زیرا، در همان شکل، چون مستطیل A و C با مربع B مساوی است، و مربع B همان مستطیل حاصل از B و D است، زیرا B با D مساوی است، بنابراین مستطیل A و C با مستطیل B و D مساوی است.

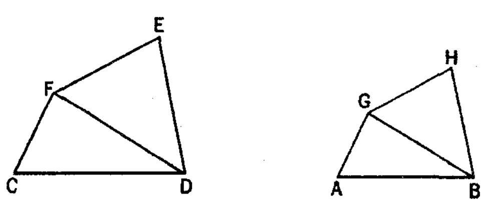
اما اگر مستطیل حاصل از طرفین با مستطیل حاصل از وسطین مساوی باشد، چهار خط راست متناسب‌اند. [۱۶.VI]

بنابراین نسبت A به B مثل نسبت D است به C؛ اما B با D مساوی است؛ بنابراین نسبت A به B مثل نسبت B است به C.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

مطلوب بنا کردن شکل راست خطی است متشابه و متشابه‌الوضع با شکل راست‌خطی مفروض.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض باشد و CE شکل راست‌خط مفروض. بنابراین مطلوب بنا کردن شکل راست‌خطی است متشابه و متشابه‌الوضع با شکل راست‌خط CE بر خط راست راست AB. F را به D وصل می‌کنیم، و بر خط راست AB و در نقطه‌های A و B از آن، زاویهٔ GAB را مساوی با زاویه در C بنا می‌کنیم و زاویهٔ ABG را مساوی با زاویهٔ CDF. [۲۳.I]

بنابراین زاویهٔ دیگر CFD با زاویهٔ AGB مساوی می‌شود؛ پس، مثلث FCD با مثلث GAB

متساوی‌الزاویه است. بنابراین نسبت FD به GB مثل نسبت FC است به GA و مثل نسبت CD است به AB.

باز، بر خط راست BG و در نقطه‌های B و G بر آن، زاویهٔ BGH را مساوی با DFE رسم می‌کنیم، و زاویهٔ GBH را مساوی با زاویهٔ FDE. [۲۳.I]
لذا زاویه دیگر در E با زاویه دیگر در H مساوی است؛ [۳۲.I]
بنابراین مثلث FDE با مثلث GBH متساوی‌الزاویه است؛ از اینجا نتیجه می‌گیریم که نسبت FD به GB مثل نسبت FE است به GH و مثل نسبت ED است به HB. [۴.VI]

ولی ثابت شده بود که نسبت FD به GB مثل نسبت FC است به GA و مثل نسبت CD است به AB؛ بنابراین نسبت FC به AG هم مثل نسبت CD است به AB و FE است به GH و مثل نسبت ED است به HB.

و، چون زاویهٔ CFD با زاویهٔ AGB مساوی است و زاویهٔ DFE با زاویهٔ BGH، در نتیجه تمام زاویهٔ CFE با تمام زاویهٔ AGH مساوی است.

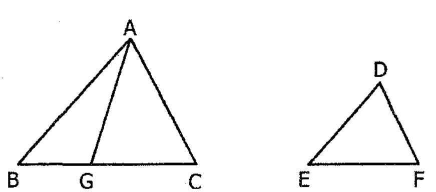
به همین دلیل زاویهٔ CDE نیز با زاویهٔ ABH مساوی است، و زاویه در C نیز با زاویه در A مساوی است، و زاویه در E با زاویه در H. بنابراین AH با CE متساوی‌الزاویه است؛ و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی در آنها متناسب‌اند؛ پس شکل راست‌خط AH با شکل راست‌خط CE متشابه است. [VI.تع.۱]

بنابراین بر خط راست مفروض AB شکل راست‌خط AH را بنا کرده‌ایم که با شکل راست‌خط مفروض CE متشابه و متشابه‌الوضع است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

نسبت مثلثهای متشابه به یکدیگر مثل نسبت مربعهای ضلعهای متناظر آنهاست.



فرض می‌کنیم ABC و DEF مثلثهایی متشابه با زاویه‌های متساوی B و E هستند به طوری که نسبت AB به BC مثل نسبت DE است به EF، که BC با EF متناظر است؛ [V.تع.۱۱]

می‌گوییم که نسبت مثلث ABC به مثلث DEF مثل نسبت مربع BC است به مربع EF.

فرض می‌کنیم BG، سومین جزء از تناسب پیوسته بین BC و EF است، در نتیجه BC به EF مثل نسبت EF است به BG؛ [۱۱.VI]
و G را به A وصل می‌کنیم.

از آنجا که نسبت AB به BC مثل نسبت DE است به EF؛ بنابراین، با ابدال نسبت، نسبت AB به DE مثل نسبت BC است به EF. [۱۶.V]

اما چون نسبت BC به EF مثل EF است به BG؛ بنابراین نسبت AB به DE نیز مثل نسبت EF است به BG. [۱۱.V]

بنابراین در مثلثهای ABG و DEF ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند. اما مثلثهایی که در آنها یک زاویه از یکی با یک زاویه از دیگری مساوی است و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند، متساوی‌اند. [۱۵.VI]
بنابراین مثلث ABG با مثلث DEF مساوی است.

اما چون نسبت BC به EF مثل نسبت EF است به BG، و اگر سه خط راست متناسب باشند، نسبت اولی به سومی مثل مربع نسبت اولی به دومی است، [V.تع.۹]
بنابراین نسبت BC به BG مثل مربع نسبت CB به EF است. اما چون نسبت CB به BG مثل نسبت مثلث ABC به مثلث ABG است؛ [۱.VI]
بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث ABG نیز مثل مربع نسبت BC به EF است.

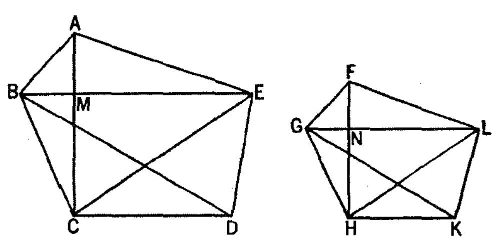
اما مثلث ABG با مثلث DEF مساوی است؛ بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث DEF نیز مثل مربع نسبت BC است به EF.

فرع. از اینجا معلوم می‌شود که اگر سه خط راست متناسب باشند، نسبت اولی به سومی مثل نسبت شکل بنا شده بر اولی است به شکلی متشابه و متشابه‌الوضع با آنکه بر دومی بنا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

چندضلعیهای متشابه به مثلثهای متشابه تجزیه می‌شوند، تعداد این مثلثها با هم مساوی است، و نسبت آنها مثل نسبت تمامی چندضلعیهاست به یکدیگر، و نسبت چندضلعیها مثل مربع نسبت ضلعهای متناظر آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم $ABCDE$ و $FGHKL$ چندضلعیهای متشابه‌اند، و AB متناظر با FG است؛ می‌گوییم که این چندضلعیها به مثلثهای متشابه تجزیه می‌شوند، تعداد این مثلثها

با هم مساوی است و نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت تمامی چندضلعیهاست و نسبت چندضلعی $ABCDE$ به چندضلعی $FGHKL$ مثل مربع نسبت AB به FG است.

فرض می‌کنیم E به B و C وصل شده است و L به G و H. حال، چون چندضلعی $ABCDE$ با چندضلعی $FGHKL$ متشابه است، زاویهٔ BAE با زاویهٔ GFL مساوی است؛ و نسبت BA به AE مثل نسبت GF است به FL. [VI.تع.۱]

پس چون ABE و FGL دو مثلث هستند که در آنها یک زاویه از یکی با یک زاویه از دیگری مساوی است، و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند، بنابراین مثلث ABE با مثلث FGL متساوی‌الزاویه است؛ [۶.VI]

و این دو مثلث متشابه نیز هستند؛ [۴.VI و تع.۱]

بنابراین زاویهٔ ABE با زاویهٔ FGL مساوی است. اما به علت تشابه چندضلعیها تمام زاویهٔ ABC نیز با تمام زاویهٔ FGH مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ EBC با زاویهٔ LGH مساوی است. و چون به دلیل تشابه مثلثهای ABE و FGL، نسبت EB به BA مثل نسبت LG است به GF، وانگهی به دلیل تشابه چندضلعیها نسبت AB به BC مثل نسبت FG است به GH، لذا بنا بر نسبت مساوات هموار، نسبت EB به BC مثل نسبت LG است به GH؛ [۲۲.V]

یعنی ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی EBC و LGH متناسب‌اند؛ بنابراین مثلث EBC با مثلث LGH متساوی‌الزاویه است، [۶.VI]

پس مثلث EBC نیز با مثلث LGH متشابه است. [۴.VI و تع.۱]

به همین دلیل مثلث ECD نیز با مثلث LHK متشابه است.

بنابراین چندضلعیهای متشابه $ABCDE$ و $FGHKL$ به مثلثهای متشابهی که تعدادشان با هم مساوی است، تجزیه شده‌اند.

می‌گوییم که نسبت تشابه این چندضلعیها همچون نسبت همهٔ مثلثها یعنی همان نسبت تشابه مثلثهاست به یکدیگر، و ABE و EBC و ECD صورتهای نسبتها هستند، و FGL و LGH و LHK مخرجهای آنها، و نسبت چندضلعی $ABCDE$ به چندضلعی $FGHKL$ مثل مربع نسبت ضلعهای متناظر آنها یعنی مربع نسبت AB به FG است.

زیرا فرض می‌کنیم A به C وصل شده است و F به H. پس چون زاویهٔ ABC با زاویهٔ FGH، به دلیل تشابه چندضلعیها، مساوی است و نسبت AB به BC مثل نسبت FG است به GH، پس مثلث ABC با مثلث FGH متساوی‌الزاویه است؛ [۶.VI]

بنابراین زاویهٔ BAC با زاویهٔ GFH مساوی است، و زاویهٔ BCA با زاویهٔ GHF. و چون زاویهٔ BAM با زاویهٔ GFN مساوی است و زاویهٔ ABM نیز با زاویهٔ FGN مساوی است، بنابراین زاویه‌های دیگر، یعنی AMB و FNG نیز با هم مساوی‌اند. [۳۲.I]

لذا مثلث ABM با مثلث FGN متساوی‌الزاویه است.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که مثلث BMC نیز با مثلث GNH متساوی‌الزاویه است. بنابراین نسبت AM به MB مثل نسبت FN است به NG، و نسبت BM به MC مثل نسبت GN است به NH؛ در نتیجه، به علاوه، بنا بر نسبت مساوات هموار، نسبت AM به MC مثل نسبت FN است به NH.

اما نسبت AM به MC مثل نسبت مثلث ABM است به مثلث MBC، و مثلث AME است به مثلث EMC؛ زیرا نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر؛[۱.VI]
همچنین نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت همهٔ صورتها به همهٔ مخرجهاست؛[۱۲.V]
بنابراین نسبت مثلث AMB به مثلث BMC مثل نسبت مثلث ABE است به مثلث CBE.
اما نسبت مثلث AMB به مثلث BMC مثل نسبت AM است به MC؛ بنابراین AM به MC نیز مثل نسبت مثلث ABE است به مثلث EBC.

به همین دلیل نیز نسبت FN به NH مثل نسبت مثلث FGL است به مثلث GLH.

و نسبت AM به MC مثل نسبت FN است به NH؛ بنابراین نسبت مثلث ABE به مثلث BEC نیز مثل نسبت مثلث FGL است به مثلث GLH؛ و، با ابدال نسبت، نسبت مثلث ABE به مثلث FGL مثل نسبت مثلث BEC است به مثلث GLH.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که، اگر D را به B و K را به G وصل کنیم، نسبت مثلث BEC به مثلث LGH، نیز مثل نسبت مثلث ECD است به مثلث LHK.

و چون نسبت مثلث ABE به مثلث FGL، مثل نسبت مثلث EBC است به مثلث LGH، و به علاوه مثل نسبت مثلث ECD است به مثلث LHK، بنابراین نسبت یکی از صورتها به مخرجش نیز مثل نسبت همهٔ صورتها به همهٔ مخرجهاست؛ [۱۲.V]
لذا، نسبت مثلث ABE به مثلث FGL مثل نسبت چندضلعی $ABCDE$ است به چندضلعی $FGHKL$.

اما نسبت مثلث ABE به مثلث FGL مثل مربع نسبت ضلع AB است به ضلع متناظرش FG. زیرا نسبت مثلثهای متشابه مثل نسبت مربعهای ضلعهای متناظر آنهاست. [۱۹.VI]

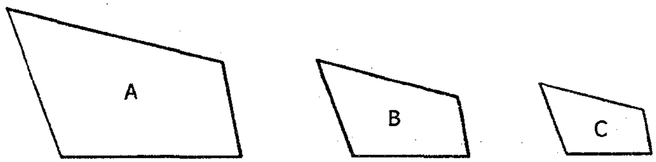
بنابراین نسبت چندضلعی $ABCDE$ نیز به چندضلعی $FGHKL$ مثل مربع نسبت ضلع AB به ضلع متناظرش FG است.

فرع. به همین طریق می‌توان ثابت کرد که در مورد چهارضلعیهای متشابه نیز نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت مربعهای ضلعهای متناظر آنهاست؛ برای مثلثها هم این مسأله ثابت شده بود؛ بنابراین در حالت کلی نیز نسبت شکلهای راست‌خط متشابه به یکدیگر مثل نسبت مربعهای ضلعهای متناظر آنهاست به یکدیگر.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

شکلهای متشابه با یک شکل راست‌خط، خود نیز با یکدیگر متشابه‌اند.



فرض می‌کنیم که هر یک از شکلهای راست‌خط A و B با شکل C متشابه باشند؛ می‌گوییم که A نیز با B متشابه است.

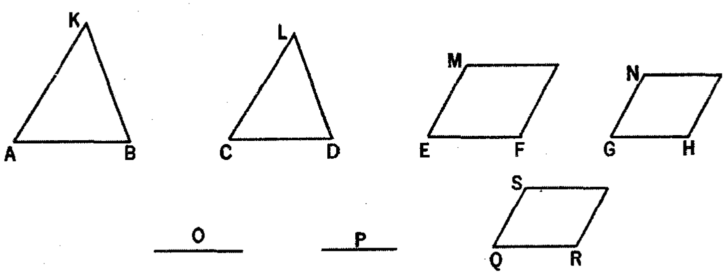
زیرا، چون A با C متشابه است، متساوی‌الزاویه با آن نیز هست؛ و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی، متناسب‌اند. [VI. تع.۱]

باز، چون B با C متشابه است، با آن متساوی‌الزاویه است و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند. بنابراین هر یک از شکلهای A و B با C متساوی‌الزاویه است و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب با آن دارد. بنابراین A با B متشابه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

اگر چهار خط راست متناسب باشند، شکلهای راست‌خط متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر آنها نیز متناسب‌اند؛ و اگر شکلهای راست‌خط متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر آن خطها متناسب باشند، خود خطهای راست نیز متناسب‌اند.



فرض می‌کنیم چهار خط راست AB و CD و EF و GH متناسب‌اند، به طوری که نسبت AB به CD مثل نسبت EF است به GH؛ و فرض می‌کنیم بر AB و CD شکلهای راست‌خط متشابه و متشابه‌الوضع KAB و LCD بنا شده‌اند، و بر EF و GH شکلهای راست‌خط متشابه و متشابه‌الوضع MF و NH.

می‌گوییم که نسبت KAB به LCD مثل نسبت MF است به NH.

زیرا فرض می‌کنیم که O، سومین جزء از تناسب پیوسته بین AB و CD و P، سومین جزء از تناسب پیوسته بین EF و GH را، [۱۱.VI]
پیدا کرده‌ایم.

در این صورت، از آنجا که نسبت AB به CD مثل نسبت EFاست به GH، و نسبت CD به O مثل نسبت GH است به P، لذا بنابر نسبت مساوات هموار نسبت AB به O مثل نسبت EF است به P. [۲۲.V]

اما نسبت AB به O مثل نسبت شکل راست‌خط KAB است به LCD، [۱۹.VI،ف.] و نسبت EF به P مثل نسبت شکل راست‌خط MF است به NH؛ بنابراین نسبت KAB به LCD نیز مثل نسبت MF است به NH. [۱۱.V]

حال، فرض می‌کنیم که نسبت MF به NH مثل نسبت KAB باشد به LCD؛ می‌گوییم که نسبت AB به CD نیز مثل نسبت EF است به GH.

زیرا، اگر نسبت EF به GH مثل نسبت AB به CD نباشد، فرض می‌کنیم نسبت EF به QR مثل نسبت AB به CD است، [۱۲.VI]
و بر QR شکل راست‌خط SR متشابه و متشابه‌الوضع با یکی از دو شکل MF و NH بنا شده است. [۱۸.VI]

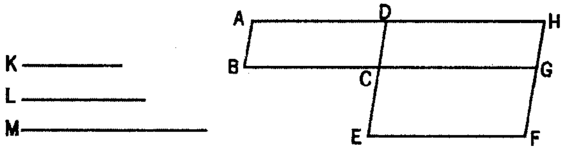
در این صورت، چون نسبت AB به CD مثل نسبت EF است به QR، و بر AB و CD شکلهای متشابه و متشابه‌الوضع KAB و LCD بنا شده‌اند، و بر EF و QR شکلهای متشابه و متشابه‌الوضع MF و SR، بنابراین نسبت KAB به LCD مثل نسبت MF است به SR.

اما همچنین بنا به فرض، نسبت KAB به LCD مثل نسبت MF به NH است بنابراین نسبت MF به SR نیز مثل نسبت MF است به NH. [۱۱.V]
در نتیجه نسبت MF به هر یک از شکلهای NH و SR با هم مساوی خواهد بود. لذا NH با SR مساوی است. [۹.V]
اما متشابه و متشابه‌الوضع با آن نیز هست، بنابراین GH با QR مساوی است. و، چون، نسبت AB به CD مثل نسبت EF است به QR، و QR با GH مساوی است، در نتیجه نسبت AB به CD مثل نسبت EF است به GH.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

نسبت متوازی‌الاضلاعهای متساوی‌الزاویه به یکدیگر مثل نسبت مؤلّف[1] نسبتهای ضلعهای آنهاست.



فرض می‌کنیم AC و CF متوازی‌الاضلاعهایی متساوی‌الزاویه هستند که در آنها زاویهٔ BCD با زاویهٔ ECG مساوی است.

می‌گوییم که نسبت متوازی‌الاضلاع AC به متوازی‌الاضلاع CF مثل نسبت مؤلف[2] نسبتهای ضلعهای آنهاست.

زیرا فرض می‌کنیم این دو متوازی‌الاضلاع را طوری قرار داده‌ایم که BC با CG بر یک خط راست قرار گرفته‌اند؛ بنابراین DC نیز با CE بر یک خط راست قرار می‌گیرند.

حال متوازی‌الاضلاع DG را کامل، و فرض می‌کنیم خط راست K اختیار، و چنان طرح شده است که نسبت BC به CG مثل نسبت K به L است و نسبت DC به CE مثل نسبت L به M. [۱۲.VI]

بنابراین نسبتهای K به L و L به M همان نسبتهای ضلعهای دو متوازی‌الاضلاع، یعنی نسبت BC به CG و نسبت DC به CE است.

اما نسبت K به M مؤلف نسبت K به L و نسبت L به M است؛ لذا نسبت K به M نیز مثل نسبت مؤلف نسبتهای ضلعهاست. حال چون نسبت BC به CG مثل نسبت متوازی‌الاضلاع AC است به متوازی‌الاضلاع CH، [۱.VI]

و نسبت BC به CG مثل نسبت K است به L؛ بنابراین نسبت K به L نیز مثل نسبت AC است به CH. [۱۱.V]

باز، چون نسبت DC به CE مثل نسبت متوازی‌الاضلاع CH است به متوازی‌الاضلاع CF، [۱.VI]

و نسبت DC به CE مثل نسبت L است به M، بنابراین نسبت L به M نیز مثل نسبت متوازی‌الاضلاع CH است به متوازی‌الاضلاع CF. [۱۱.V]

از آنجا که ثابت شده بود نسبت K به L مثل نسبت متوازی‌الاضلاع AC است به متوازی‌الاضلاع CH. و نسبت L به M مثل نسبت متوازی‌الاضلاع CH است به

۱. حاصل‌ضرب دو نسبت را نسبت مؤلّف آن دو نسبت گویند (ابوریحان بیرونی).ـم.

2. Compounded of the ratios

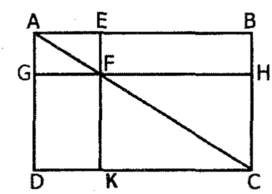
متوازی‌الاضلاع CF، لذا، بنا بر نسبت مساوات هموار، نسبت K به M مثل نسبت متوازی‌الاضلاع AC است به متوازی‌الاضلاع CF.

اما نسبت K به M همان نسبت مؤلّف نسبتهای ضلعهاست. بنابراین نسبت AC به CF نیز مثل نسبت مؤلف نسبتهای ضلعهاست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

در هر متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاعهای حول قطر، هم با تمام متوازی‌الاضلاع متشابه‌اند و هم با یکدیگر.



فرض می‌کنیم $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد، و AC یک قطر آن، و EG و HK متوازی‌الاضلاعهای حول این قطر هستند. می‌گوییم که هر یک از متوازی‌الاضلاعهای EG و HK، هم با تمام $ABCD$ متشابه‌اند، و هم با یکدیگر.

زیرا چون EF موازی با BC، یکی از ضلعهای مثلث ABC، کشیده شده است ضلعهای دیگر آن را به تناسب می‌برد، یعنی نسبت BE به EA مثل نسبت CF است به FA؛[۲.VI]

باز، چون FG موازی با CD، یکی از ضلعهای مثلث ACD کشیده شده است از لحاظ تناسب نسبت CF به FA مثل نسبت DG است به GA. [۲.VI]

اما ثابت شده بود که نسبت CF به FA مثل نسبت BE به EA نیز هست؛ بنابراین نسبت BE به EA نیز با نسبت DG به GA مساوی است؛ و در نتیجه، از ترکیب نسبت در صورت، نسبت BA به AE مثل نسبت DA است به AG، [۱۸.V]

و، پس از ابدال نسبت، نسبت BA به AD مثل نسبت EA است به AG. [۱۶.V]

بنابراین در متوازی‌الاضلاعهای $ABCD$ و EG ضلعهای مجاور به زاویهٔ مشترک BAD با هم متناسب‌اند. و، چون GF با DC موازی است، زاویهٔ AFG با زاویهٔ DCA مساوی است؛ و زاویهٔ DAC در دو مثلث ADC و AGF مشترک‌اند، بنابراین، این دو مثلث با هم متساوی‌الزاویه‌اند.

به همین دلیل مثلث ACB نیز با مثلث AFE متساوی‌الزاویه است، و تمام متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با متوازی‌الاضلاع EG متساوی‌الزاویه است. بنابراین از لحاظ تناسب نسبت AD به DC مثل نسبت AG است به GF، و نسبت DC به CA مثل نسبت GF است به FA، و

نسبت AC به CB مثل نسبت AF است به FE، و به علاوه، نسبت CB به BA مثل نسبت FE است به EA؛

و، چون ثابت شده بود که نسبت DC به CA مثل نسبت GF است به FA، و نسبت AC به CB مثل نسبت AF است به FE، لذا بنا بر نسبت مساوات هموار، نسبت DC به CB مثل نسبت GF است به FE. [۲۲.V]

در نتیجه در متوازی‌الاضلاعهای $ABCD$ و EG ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند؛

بنابراین متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با متوازی‌الاضلاع EG متشابه است. [VI.تع.۱]

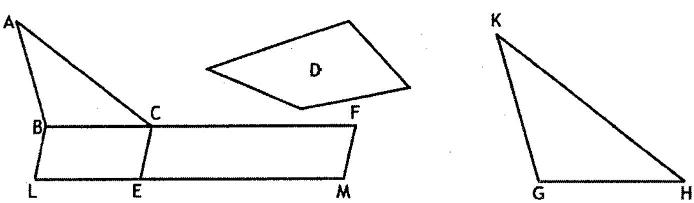
به همین دلیل متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با متوازی‌الاضلاع KH نیز متشابه است؛ بنابراین هر یک از متوازی‌الاضلاعهای EG و HK با $ABCD$ متشابه است؛ اما شکلهای متشابه با یک شکل راست‌خط، خودشان نیز با یکدیگر متشابه‌اند؛ [۲۱.VI]

بنابراین متوازی‌الاضلاع EG نیز با متوازی‌الاضلاع HK متشابه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

مطلوب رسم شکل یکتایی است که با شکل راست‌خط مفروضی متشابه باشد، و با شکل راست‌خط مفروض دیگری مساوی.



فرض می‌کنیم ABC شکل راست‌خط مفروضی است که می‌خواهیم شکل مرسوم با آن متشابه باشد، و D شکل راست‌خطی که می‌خواهیم با آن مساوی باشد. پس، مطلوب رسم شکل یکتای راست‌خطی است که با ABC متشابه باشد، و با D مساوی.

فرض می‌کنیم بر BC متوازی‌الاضلاع BE را مساوی با مثلث ABC بنا کرده‌ایم، [۴۴.I] و بر CE متوازی‌الاضلاع CM را مساوی با D بنا کرده‌ایم که در آن زاویهٔ FCE با زاویهٔ CBL مساوی است. [۴۵.I]

بنابراین BC با CF بر یک خط راست واقع است و LE با EM. حال GH را واسطهٔ هندسی بین BC و CF می‌گیریم، [۱۳.VI]

و بر GH مثلث KGH را متشابه و متشابه‌الوضع با ABC بنا می‌کنیم. [۱۸.VI]

در این صورت، چون نسبت BC به GH مثل نسبت GH است به CF، و اگر سه خط راست متناسب باشند، نسبت اولی به سومی مثل نسبت شکل بنا شده بر اولی به شکل متشابه و متشابه‌الوضع با آن بنا شده بر دومی است. [۱۹.VI، ف.]

بنابراین نسبت BC به CF مثل نسبت مثلث ABC است به مثلث KGH. اما نسبت BC به CF مثل نسبت متوازی‌الاضلاع BE به متوازی‌الاضلاع EF نیز هست. [۱.VI]

بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث KGH نیز مثل نسبت متوازی‌الاضلاع BE است به متوازی‌الاضلاع EF؛ در نتیجه، با ابدال نسبت، نسبت مثلث ABC به متوازی‌الاضلاع BE، مثل نسبت مثلث KGH است به متوازی‌الاضلاع EF. [۱۶.V]

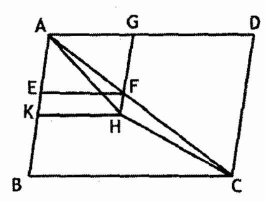
اما مثلث ABC با متوازی‌الاضلاع BE مساوی است؛ بنابراین مثلث KGH نیز با متوازی‌الاضلاع EF مساوی است.

اما متوازی‌الاضلاع EF با D مساوی است؛ پس KGH نیز با D مساوی است. و KGH با ABC نیز متشابه است. بنابراین شکل یکتای KGH متشابه با شکل راست‌خط مفروض ABC و مساوی با شکل مفروض دیگر D رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

اگر از یک متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاعی متشابه و متشابه‌الوضع که در یک زاویه با آن مشترک باشد جدا کنیم، این متوازی‌الاضلاع و تمامی متوازی‌الاضلاع حول یک قطر (هم‌قطر) هستند.



فرض می‌کنیم از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ متوازی‌الاضلاع AF را متشابه و متشابه‌الوضع با $ABCD$ که در زاویهٔ DAB با آن اشتراک دارد جدا کرده‌ایم. می‌گوییم که $ABCD$ و AF در حول یک قطر (هم‌قطر) هستند.

زیرا، فرض می‌کنیم AF و AC در حول یک قطر نباشند، بلکه AHC قطر <$ABCD$> باشد. GF را تا H امتداد می‌دهیم و HK را موازی با یکی از خطهای راست AD یا BC می‌کشیم. [۳۱.I]

پس، چون $ABCD$ و KG در حول یک قطرند، بنابراین نسبت DA به AB مثل نسبت GA است به AK. [۲۴.VI]

اما به دلیل تشابه $ABCD$ و EG نیز، نسبت DA به AB مثل نسبت GA است به AE؛ بنابراین نسبت GA به AK نیز مثل نسبت GA است به AE. [۱۱.V]

لذا نسبتهای GA به هریک از خطهای راست AK و AE با هم مساوی‌اند. در نتیجه AK با AE مساوی است، [۹.V]

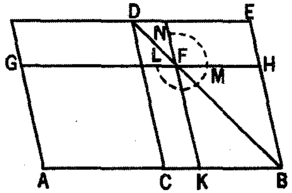
خط راست کوچکتر با خط راست بزرگتر: که غیرممکن است.

بنابراین $ABCD$ و AF نمی‌توانند در حول یک قطر نباشند؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و متوازی‌الاضلاع AF در حول یک قطر (هم‌قطر) هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

از همهٔ متوازی‌الاضلاعهای مضاف بر یک خط راست که به اندازهٔ شکلهای متوازی‌الاضلاعی متشابه و متشابه‌الوضع با متوازی‌الاضلاع مضاف بر نیمهٔ خط راست، کاستی داشته باشند، آن یک از همه بزرگتر است که بر نیمهٔ خط راست اضافه شده و با متوازی‌الاضلاع کاسته شده متشابه باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راستی است و C وسط آن؛ بر خط راست AB متوازی‌الاضلاع AD را که به اندازهٔ شکل متوازی‌الاضلاعی DB بنا شده بر نیمهٔ AB، یعنی CB، کاستی دارد، اضافه می‌کنیم. می‌گوییم که از متوازی‌الاضلاعهای مضاف بر AB، که به اندازهٔ شکلهای متوازی‌الاضلاعی متشابه و متشابه‌الوضع با DB کاستی دارند، AD از همه بزرگتر است.

زیرا فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع AF با کاستی شکل متوازی‌الاضلاعی FB، متشابه و متشابه‌الوضع با DB را بر AB اضافه کرده‌ایم. می‌گوییم که AD از AF بزرگتر است. زیرا، چون متوازی‌الاضلاع DB با متوازی‌الاضلاع FB متشابه است، پس با هم در حول یک قطرند. [۲۶.VI]

قطر مشترک آنها، BD، را رسم و شکل را بنا می‌کنیم. در این صورت، چون CF با FE مساوی، [۴۳.I]

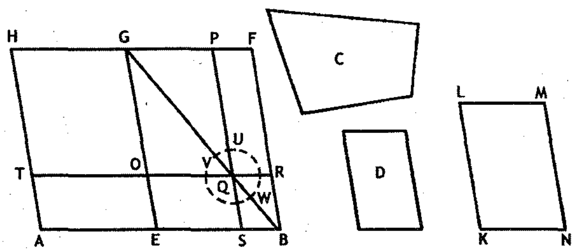
و FB مشترک است، پس تمام CH با تمام KE مساوی است. اما CH با CG مساوی است، زیرا AC نیز با CB مساوی است. [۳۶.I]

بنابراین GC نیز با EK مساوی است. CF را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ لذا تمام AF با گونیای LMN مساوی است؛ پس متوازی‌الاضلاع DB، یعنی AD، از متوازی‌الاضلاع AF بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

مطلوب اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی مساوی با شکل راست‌خط مفروض بر خط راست مفروض است که به اندازهٔ یک شکل متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروضی کاستی داشته باشد. بنابراین شکل راست‌خط مفروض نباید از متوازی‌الاضلاع بنا شده بر نیمهٔ خط راست و متشابه با کاستی، متوازی‌الاضلاع کاسته شده، بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض و C شکل راست‌خط مفروضی است مساوی با شکلی که باید بر AB اضافه شود و از متوازی‌الاضلاع بنا شده بر نیمهٔ AB و متشابه با کاستی، بزرگتر نباشد، و D متوازی‌الاضلاعی که می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع کاسته‌شده با آن متشابه باشد؛ پس مطلوب اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی است مساوی با شکل راست‌خط مفروض C بر خط راست AB که به اندازهٔ یک شکل متوازی‌الاضلاعی متشابه با D، کاستی داشته باشد.

فرض می‌کنیم E وسط AB است و بر EB شکل $EBFG$ متشابه و متشابه‌الوضع با D بنا شده است؛ [۱۸.VI]

متوازی‌الاضلاع AG راکامل می‌کنیم. در این حال، اگر AG مساوی با C باشد، آنچه که می‌خواستیم حاصل شده است؛ زیرا بر خط راست مفروض AB متوازی‌الاضلاع AG، مساوی با شکل راست خط مفروض C اضافه شده است که به اندازهٔ شکل متوازی‌الاضلاعی GB، متشابه با D، کاستی دارد.

اما اگر مساوی با C نباشد، فرض می‌کنیم HE بزرگتر از C باشد.

حال HE با GB مساوی است؛ بنابراین GB نیز از C بزرگتر است. بلافاصله $KLMN$ را مساوی با زیادتی GB بر C، و متشابه و متشابه‌الوضع با D رسم می‌کنیم. [۲۵.VI]

اما D با GB متشابه است؛ بنابراین KM نیز با GB متشابه است. [۲۱.VI]

در این حال فرض می‌کنیم KL متناظر با GE و LM متناظر با GF باشد. حال، چون GB با [مجموع] C و KM مساوی است، بنابراین، GB از KM بزرگتر است؛ پس GE نیز از KL بزرگتر است، و GF از LM بزرگتر.

GO را مساوی با KL جدا می‌کنیم، و GP را مساوی با LM. و متوازی‌الاضلاع $OGPQ$ را کامل می‌کنیم. لذا این متوازی‌الاضلاع با KM متشابه و مساوی است. پس GQ نیز با GB متشابه است؛ [۲۱.VI]

بنابراین GQ و GB در حول یک قطرند. [۲۶.VI]

فرض می‌کنیم GQB قطر آنها باشد و آن را رسم می‌کنیم. در این صورت، چون BG با C و KM مساوی است، و در آنها GQ با KM مساوی است، بنابراین باقیمانده، گونیای UWV، با باقیماندهٔ C مساوی است. و چون PR با OS مساوی است، QB را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین تمام PB با تمام OB مساوی است. اما OB با TE مساوی است، زیرا ضلع AE نیز با ضلع EB مساوی است؛ [۳۶.I]

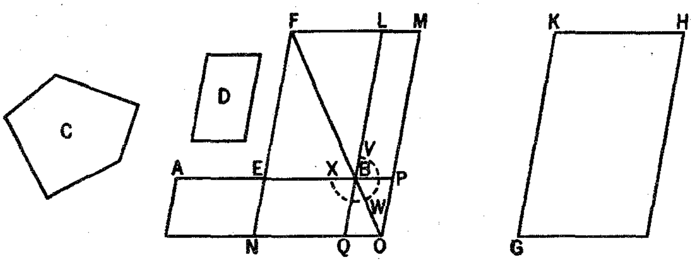
بنابراین TE نیز با PB مساوی است. OS را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ لذا تمام TS با تمام گونیای VWU مساوی است.

اما ثابت شده بود که گونیای VWU با C مساوی است؛ بنابراین TS نیز با C مساوی است. لذا بر خط راست مفروض AB متوازی‌الاضلاع ST، مساوی با شکل راست‌خط مفروض C اضافه شده است، که به اندازهٔ شکل متوازی‌الاضلاعی QB، متشابه با D، کاستی دارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

مطلوب اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی بر خط راست مفروض است که با شکل راست‌خط مفروضی مساوی باشد، و به اندازهٔ یک شکل متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروضی، زیادتی داشته باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض است، و C شکل راست‌خط مفروضی که می‌خواهیم با شکل مضاف بر AB مساوی باشد، و D شکلی که می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع زیادتی با آن متشابه باشد. پس، مطلوب اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی است مساوی با شکل راست‌خط C بر خط راست AB که به اندازهٔ شکل متوازی‌الاضلاعی متشابه با D، زیادتی داشته باشد؛

فرض می‌کنیم E وسط AB باشد؛ متوازی‌الاضلاع BF متشابه و متشابه‌الوضع با D را بر EB بنا، و فرض می‌کنیم GH چنان رسم شده باشد که با مجموع BF و C مساوی و با D متشابه و متشابه‌الوضع باشد. [۲۵.VI]

فرض می‌کنیم KH متناظر با FL باشد و KG متناظر با FE. حال، چون GH از FB بزرگتر است، لذا KH نیز از FL بزرگتر است و KG از FE. FL و FE را امتداد می‌دهیم، و فرض می‌کنیم FLM با KH مساوی باشد و FEN با KG، و MN را کامل می‌کنیم. بنابراین MN، هم با GH مساوی است و هم با آن متشابه.

اما GH با EL متشابه است؛ بنابراین MN نیز با EL متشابه است؛ [۲۱.VI]

لذا EL و MN در حول یک قطرند. [۲۶.VI]

قطر آنها، یعنی FO، را رسم و فرض می‌کنیم شکل رسم شده است چون GH با مجموع EL و C مساوی است، و GH با MN، بنابراین MN نیز با مجموع EL و C مساوی است. EL را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیمانده، گونیای XWV، با C مساوی است. اما، چون AE با EB مساوی است، AN نیز با NB مساوی است، [۳۶.I]

پس NB با LP مساوی است، [۴۳.I]

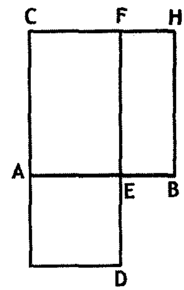
EO را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین تمام AO با گونیای VWX مساوی است. اما گونیای VWX با C مساوی است؛ بنابراین AO نیز با C مساوی است.

بنابراین بر خط راست مفروض AB متوازی‌الاضلاع AO مساوی با شکل راست‌خط C اضافه شده است، که به اندازهٔ شکل متوازی‌الاضلاعی QP، متشابه با D، زیادتی دارد. زیرا PQ نیز با EL متشابه است. [۲۴.VI]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

مطلوب تقسیم کردن خط راست متناهی مفروضی به نسبت ذات وسط و طرفین است.



فرض می‌کنیم AB خط راست متناهی مفروض باشد. پس مطلوب تقسیم کردن AB به نسبت ذات وسط و طرفین است.

مربع BC را بر AB بنا می‌کنیم، و متوازی‌الاضلاع CD را مساوی با BC؛ با زیادتی به اندازهٔ شکل AD، متشابه با BC، بر AC اضافه می‌کنیم. [۲۹.VI]

اما BC مربع است، بنابراین AD نیز مربع است. و، چون BC با CD مساوی است، CE را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیمانده‌ها

یعنی BF و AD با هم مساوی‌اند؛ اما متساوی‌الزاویه نیز هستند؛ بنابراین در BF و AD اضلاع مجاور به زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند. [۱۴.VI]

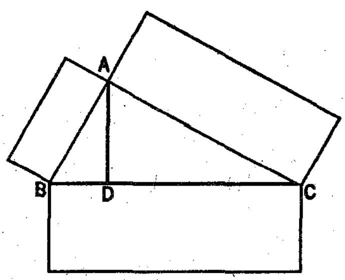
لذا نسبت FE به ED مثل نسبت AE است به EB.

اما FE با AB مساوی است، و ED با AE. بنابراین نسبت BA به AE مثل نسبت AE است به EB. و، چون AB از AE بزرگتر است، AE از EB نیز بزرگتر است. لذا خط راست AB در نقطهٔ E به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است، و قطعهٔ بزرگتر آن AE است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

در مثلثهای قائم‌الزاویه شکل بناشده بر ضلع روبه‌رو به زاویهٔ قائمه با شکلهای متشابه و متشابه‌الوضع بناشده بر ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه مساوی است.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی قائم‌الزاویه، قائمه در A، باشد. می‌گوییم که شکل بناشده بر BC با شکلهای متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر BA و AC مساوی است.

عمود AD را رسم می‌کنیم. چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمود AD از رأس زاویهٔ قائمهٔ A بر قاعدهٔ BC فرود آمده است، آن را به دو مثلث متشابه با تمام مثلث و متشابه با یکدیگر، تقسیم می‌کند، [۸.VI]

وچون ABC با ABD متشابه‌است، لذا نسبت CB به BA مثل نسبت AB است به BD. [VI.تع.۱]

و چون سه خط راست متناسب‌اند، نسبت اولی به سومی مثل نسبت شکل بنا شده بر اولی است به شکل متشابه و متشابه‌الوضع با آن، بنا شده بر دومی. [۱۹.VI، ف.]

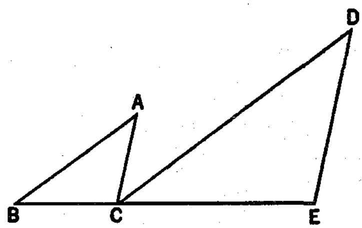
بنابراین نسبت CB به BD مثل نسبت شکل بناشده بر CB است به شکل متشابه و متشابه‌الوضع با آن بنا شده بر BA. به همین دلیل نیز نسبت BC به CD مثل نسبت شکل بنا شده بر BC است به شکل بنا شده بر CA؛ در نتیجه، علاوه بر این نسبت BC به مجموع BD و DC، مثل نسبت شکل بنا شده بر BC است به شکلهای متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر مجموع BA و AC.

اما BC با مجموع BD و DC مساوی است؛ بنابراین شکل بنا شده بر BC نیز با شکلهای متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر مجموع BA و AC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

اگر در دو مثلث که دو ضلع از یکی با دو ضلع از دیگری متناسب است، یک رأس آنها را چنان پهلوی هم قرار دهیم که ضلعهای متناظر آنها متوازی هم باشند، ضلعهای سوم آنها بر یک خط راست قرار می‌گیرند.



فرض می‌کنیم ABC و DCE دو مثلث هستند که در آنها دو ضلع BA و AC به ترتیب با دو ضلع DC و DE متناسب‌اند، به طوری که نسبت AB به AC مثل نسبت DC است به DE، و AB با DC موازی است و AC با DE.

می‌گوییم که BC و CE بر یک خط راست قرار دارند.

زیرا چون AB با DC موازی است، و خط راست AC بر آنها فرود آمده است، دو زاویهٔ متبادل درونی BAC و ACD با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

به همین دلیل زاویهٔ CDE نیز با زاویهٔ ACD مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ BAC با زاویهٔ CDE مساوی است. و، چون ABC و DCE دو مثلث هستند که زاویهٔ A از یکی با زاویهٔ D از دیگری مساوی است، و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند، به طوری که نسبت BA به AC مثل نسبت CD است به DE، بنابراین مثلثهای ABC و DCE متساوی‌الزاویه‌اند. [۶.VI]

بنابراین زاویهٔ ABC با زاویهٔ DCE مساوی است.

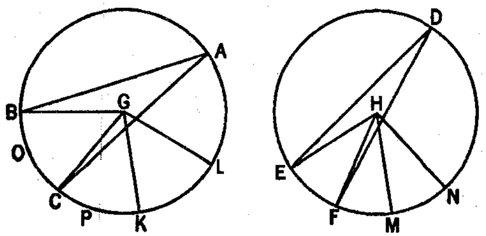
اما ثابت شده بود که زاویهٔ ACD نیز با زاویهٔ BAC مساوی است؛ بنابراین تمام زاویهٔ ACE با دو زاویهٔ ABC و BAC مساوی است؛ زاویهٔ ACB را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های ACE و ACB با زاویه‌های BAC و ACB و CBA مساوی‌اند. اما زاویه‌های BAC و ACB و ABC مساوی با دو قائمه‌اند؛ [۳۲.I]

بنابراین زاویه‌های ACE و ACB نیز مساوی با دو قائمه‌اند. لذا، با یک خط راست AC و در نقطهٔ C بر آن، دو خط راست BC و CE، ناواقع در یک طرف آن، زاویه‌های مجاور ACE و ACB مساوی با دو قائمه ساخته‌اند، بنابراین BC با CE بر یک خط راست قرار دارد. [۱۴.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

در دایره‌های متساوی نسبت زاویه‌ها به یکدیگر مثل نسبت کمانهای روبه‌روی آنهاست، خواه این زاویه‌ها در مراکز دایره‌ها باشند، خواه بر محیطهای آنها.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دایره‌های متساوی باشند، و فرض می‌کنیم زاویه‌های BGC و EHF زاویه‌هایی در مراکز G و H باشند، و زاویه‌های BAC و EDF زاویه‌هایی بر محیطهای دایره‌ها. می‌گوییم که نسبت کمان BC به کمان EF، مثل نسبت زاویهٔ BGC است به زاویهٔ EHF، و زاویهٔ BAC است به زاویهٔ EDF.

زیرا، تعدادی کمانهای متوالی دلخواه CK و KL را مساوی با کمان BC جدا می‌کنیم، و تعدادی کمانهای متوالی دلخواه متساوی FM و MN را مساوی با کمان EF؛ و G را به K و L، و H را به M و N وصل می‌کنیم.

در این حال، چون کمانهای BC و CK و KL با هم مساوی‌اند، زاویه‌های BGC و CGK و KGL نیز با هم مساوی‌اند. [۲۷.III]

بنابراین کمان BL هر مضربی از کمان BC باشد، زاویهٔ BGL نیز همان مضرب از زاویهٔ BGC است.

به همین دلیل نیز کمان EN هر مضربی از کمان EF باشد، زاویهٔ EHN نیز همان مضرب از زاویهٔ EHF است. پس اگر کمان BL با کمان EN مساوی باشد، زاویهٔ BGL نیز با زاویهٔ EHN مساوی است؛ [۲۷.III]

اگر کمان BL از کمان EN بزرگتر باشد، زاویهٔ BGL نیز از زاویهٔ EHN بزرگتر است، و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر است. بنابراین چهار کمیت داریم، دو کمان BC و EF، و دو زاویهٔ BGL و EHF.

از کمان BC و زاویهٔ BGC مضربهای متساوی، یعنی، کمان BL و زاویهٔ BGL را گرفته‌ایم، و از کمان EF و زاویهٔ EHF مضربهای متساوی، یعنی، کمان EN و زاویهٔ EHN را. و ثابت شده بود که اگر کمان BL از کمان EN بزرگتر باشد، زاویهٔ BGL نیز از زاویهٔ EHN بزرگتر است؛ اگر متساوی باشد، متساوی است، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر است.

بنابراین نسبت کمان BC به کمان EF مثل نسبت زاویهٔ BGC است به زاویهٔ EHF. [V.تع.۵]

اما، نسبت زاویهٔ BGC به زاویهٔ EHF، مثل نسبت زاویهٔ BAC است به زاویهٔ EDF (زیرا زاویه‌های اولی به ترتیب دو برابر زاویه‌های دومی هستند). بنابراین نسبت کمان BC نیز به کمان EF مثل نسبت زاویهٔ BGC است به زاویهٔ EHF، و زاویهٔ BAC است به زاویهٔ EDF.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ هفتم

تعاریف

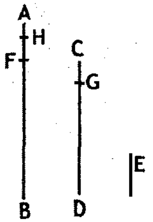
۱. واحد آن است که به وسیلهٔ آن هر یک از چیزهای موجود یکی نامیده می‌شود.
۲. یک عدد کثرتی است مرکب از واحدها.
۳. عددی را وقتی جزء (شمارنده، مقسوم‌علیه) یک عدد می‌نامند که کمتر از آن باشد و آن را بشمارد.
۴. اما آن را از اجزای [کسری از] آن عدد می‌نامند وقتی که آن را نشمارد.
۵. عدد بزرگتر را وقتی مضربی از عدد کوچکتر می‌نامند که عدد کوچکتر آن را بشمارد.
۶. عدد زوج عددی است که به دو جزء متساوی قابل تقسیم است.
۷. عدد فرد عددی است که به دو جزء متساوی قابل تقسیم نیست، یا عددی است که با عدد زوج یک واحد اختلاف دارد.
۸. عدد زوج‌الزوج عددی است که به دفعاتی زوج، توسط عددی زوج شمرده شود [مثل ۲^n].
۹. عدد زوج‌الفرد عددی است که به دفعاتی فرد، توسط عدد زوجی شمرده شود [مثل $(۲m+۱)۲^n$].
۱۰. عدد فردالفرد عددی است که به دفعاتی فرد توسط عددی فرد شمرده شود [مثل $(۲m+۱)(۲n+۱)$].

۱۱. عدد اول عددی است که تنها توسط واحد شمرده شود[۱].
۱۲. اعداد متباین (نسبت به هم اول) اعدادی هستند که تنها شمارندهٔ مشترک آنها واحد است.
۱۳. عدد مرکب عددی است که شمارنده‌ای آن را بشمارد.
۱۴. عددهای مرکب نسبت به هم عددهایی هستند که شمارندهٔ مشترکی دارند.
۱۵. وقتی می‌گویند عددی در یک عدد ضرب شده است که به تعداد واحدهای موجود در آن، عدد دیگر با خودش جمع شده باشد، و بدین ترتیب عدد تازه‌ای پدید آمده باشد.
۱۶. و، وقتی دو عدد در هم ضرب شوند عددی پدید می‌آورند که عدد مسطح نامیده می‌شود، و ضلعهای این عدد، عددهایی هستند که در هم ضرب می‌شوند.
۱۷. و، وقتی سه عدد در هم ضرب شوند عددی پدید می‌آورند که عدد مجسم نامیده می‌شود، و ضلعهای این عدد عددهایی هستند که در هم ضرب می‌شوند.
۱۸. یک عدد مربع عددی است که از ضرب یک عدد در عددی مساوی با خودش حاصل شده است.
۱۹. یک عدد مکعب عددی است که از ضرب یک عدد سه بار در خودش حاصل شده است.
۲۰. عددها وقتی متناسب‌اند که اولی همان مضرب، یا همان جزء یا همان اجزایی از دومی باشد که سومی از چهارمی[۲].
۲۱. عددهای مسطح متشابه و مجسم متشابه عددهایی هستند که ضلعهای آنها متناسب‌اند.
۲۲. عدد تام عددی است که با مجموع اجزای خود مساوی است.

مقالهٔ VII

قضیهٔ ۱

دو عدد نامتساوی معلوم‌اند؛ عدد کوچکتر را متوالیاً از عدد بزرگتر کم می‌کنیم، اگر هر باقیمانده باقیماندهٔ پیش از خود را نشمارد مگر آنکه خودش واحد باشد، آنگاه دو عدد نسبت به هم اول‌اند.



از دو عدد نامتساوی AB و CD، عدد کوچکتر را متوالیاً از بزرگتر کم، و فرض می‌کنیم که هر باقیمانده باقیماندهٔ پیش از خود را نشمارد مگر آنکه خودش واحد باشد؛

می‌گوییم که AB و CD نسبت به هم اول‌اند؛ یعنی تنها واحد، AB و CD را می‌شمارد.

زیرا، اگر AB و CD نسبت به هم اول نباشند، عددی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم این عدد E باشد؛ فرض می‌کنیم CD که BF را می‌شمارد، FA را باقی گذارد که از خودش کمتر است.

۱. در این مقاله عدد کمیت صحیحی غیر از واحد گرفته شده است.ـم.
۲. جزء یک عدد، شمارندهٔ آن عدد است واجزای یک عدد کسرهایی از آن عدد هستند (آن را نمی‌شمارند).ـم.

فرض می‌کنیم AF که DG را می‌شمارد، GC را که از خودش کمتر است باقی گذارد، و GC که FH را می‌شمارد، واحد HA را باقی گذارد. در این صورت، چون E، CD را می‌شمارد و CD، BF را؛ بنابراین E، BF را هم می‌شمارد. اما E تمامی BA را هم می‌شمارد؛ بنابراین باقیماندهٔ AF را نیز می‌شمارد.

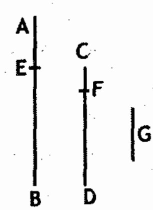
اما AF، DG را می‌شمارد، بنابراین E هم DG را می‌شمارد. اما E تمامی DC را هم می‌شمارد؛ بنابراین باقیماندهٔ CG را نیز خواهد شمرد. اما CG، FH را می‌شمارد؛ بنابراین E، FH را نیز می‌شمارد. اما E تمامی FA را نیز می‌شمارد. بنابراین، باقیمانده، یعنی واحد AH را نیز می‌شمارد، که E یک عدد است: و که این امر غیرممکن است.

لذا هیچ عددی، عددهای AB و CD را نمی‌شمارد؛ پس AB و CD نسبت به هم اول‌اند. [VII.تع.۱۲]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

دو عدد غیر اول نسبت به هم مفروض‌اند؛ مطلوب پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنهاست.



فرض می‌کنیم AB و CD دو عدد غیر اول نسبت به هم باشند. پس مطلوب پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک بین AB و CD است.

حال، اگر CD، AB را بشمارد ــ چون خودش را هم می‌شمارد ــ CD مقسوم‌علیه مشترک CD و AB خواهد بود. و آشکار است که این مقسوم‌علیه بزرگترین مقسوم‌علیه نیز هست؛ زیرا هیچ عددی بزرگتر از CD، CD را نخواهد شمرد.

اما اگر CD، AB را نشمارد، از اعداد AB و CD عدد کوچکتر را متوالیاً از بزرگتر کم می‌کنیم، عددی باقی خواهد ماند که باقیماندهٔ پیش از خودش را خواهد شمرد. زیرا، واحد باقی نخواهد ماند؛ چون در غیر این صورت AB و CD نسبت به هم اول خواهند بود [VII.۱] که مغایر با فرض است. بنابراین عددی باقی خواهد ماند که باقیماندهٔ پیش از خودش را خواهد شمرد.

اکنون فرض می‌کنیم CD، که BE را می‌شمارد، باقیماندهٔ EA را بدهد که از خودش کمتر است. و فرض می‌کنیم EA، که DF را می‌شمارد باقیماندهٔ FC را بدهد که از خودش کمتر است. و فرض می‌کنیم CF، AE را بشمارد. در این صورت چون CF، AE را می‌شمارد و AE، DF را، بنابراین CF، DF را نیز می‌شمارد. اما این عدد خودش را نیز می‌شمارد، لذا تمامی CD را می‌شمارد. اما CD، BE را می‌شمارد؛ بنابراین CF نیز BE را می‌شمارد.

اما CF، EA را هم می‌شمارد، در نتیجه تمامی BA را هم می‌شمارد. اما CF، CD را هم می‌شمارد، درنتیجه تمامی BA را هم می‌شمارد، اما CF، CD را هم می‌شمارد، بنابراین CF، AB و CD را می‌شمارد. لذا CF مقسوم‌علیه مشترک AB و CD است.

حال می‌گوییم که CF بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک نیز هست.

زیرا اگر CF بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک AB و CD نباشد عددی بزرگتر از CF عددهای AB و CD را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم چنین عددی که آنها را می‌شمارد عدد G باشد.

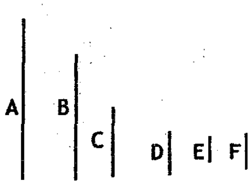
حال، چون G، CD را می‌شمارد، و CD، BE را؛ پس G، BE را نیز می‌شمارد. اما G تمام BA را هم می‌شمارد، بنابراین بقیهٔ EA را نیز می‌شمارد. اما AE، DF را می‌شمارد، بنابراین G نیز DF را می‌شمارد. اما G تمامی CD را نیز می‌شمارد؛ بنابراین باقیماندهٔ CF را نیز می‌شمارد، یعنی عدد بزرگتر عدد کوچکتر را می‌شمارد: که غیرممکن است. لذا، هیچ عددی که بزرگتر از CF باشد اعداد AB و CD را نخواهد شمرد؛ در نتیجه CF بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک AB و CD است.

فرع. از اینجا معلوم می‌شود که اگر عددی دو عدد را بشمارد، بزرگترین مقسوم‌علیه آنها را نیز خواهد شمرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

سه عدد غیر اول نسبت به هم داده شده‌اند، مطلوب پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنهاست.



فرض می‌کنیم A و B و C سه عدد داده شده باشند که نسبت به هم اول نیستند. پس مطلوب پیدا کردن عددی است که A و B و C را بشمارد. فرض می‌کنیم D، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد A و B را پیدا کرده‌ایم.[VII.۲]

حال، D، یا C را می‌شمارد یا نمی‌شمارد.

اول فرض می‌کنیم آن را بشمارد. اما A و B را نیز می‌شمارد؛ بنابراین D، A و B و C را می‌شمارد؛ پس D مقسوم‌علیه مشترک A و B و C است. می‌گوییم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک نیز هست. زیرا، اگر D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B و C نباشد، عدد دیگری بزرگتر از D عددهای A و B و C را خواهد شمرد.

فرض می‌کنیم چنین عددی که آنها را می‌شمارد E باشد. چون E، A و B و C را می‌شمارد، A و B را نیز خواهد شمرد. بنابراین بزرگترین مقسوم‌علیه آنها را نیز خواهد شمرد. [VII.۲،ف.]

اما بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B عدد D است؛ بنابراین E، D را می‌شمارد، یعنی

عدد بزرگتر عدد کوچکتر را می‌شمارد: که غیرممکن است. بنابراین هیچ عددی که بزرگتر از D باشد اعداد A و B و C را نخواهد شمرد؛ پس D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B و C است.

بعد، فرض می‌کنیم، D، C را نشمارد؛ می‌گوییم که D و C نسبت به هم اول نیستند؛ زیرا چون A و B و C نسبت به هم اول نیستند، عددی آنها را خواهد شمرد. اما عددی که A و B و C را می‌شمارد، A و B را نیز خواهد شمرد. [VII.۲، ف.]

اما این عدد، C را نیز می‌شمارد. بنابراین عددی عددهای C و D را خواهد شمرد؛ در نتیجه C و D نسبت به هم اول نیستند. فرض می‌کنیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها، E، را پیدا کرده‌ایم. [VII.۲]

در این صورت، چون E، D را می‌شمارد و D، A و B را؛ لذا E نیز A و B را می‌شمارد. اما E، C را هم می‌شمارد؛ بنابراین E، A و B و C را می‌شمارد؛ لذا E مقسوم‌علیه مشترک A و B و C است. اکنون می‌گوییم که E بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک نیز هست.

زیرا اگر E بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B و C نباشد، عدد دیگری که بزرگتر از E است اعداد A و B و C را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم این عدد F باشد. حال، چون F، A و B و C را می‌شمارد A و B را نیز می‌شمارد؛ بنابراین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B را خواهد شمرد. [VII.۲، ف.]

اما D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B است؛ بنابراین F، D را می‌شمارد؛ و F، C را هم می‌شمارد. بنابراین F، C و D را می‌شمارد؛ در نتیجه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک D و C را می‌شمارد. [VII.۲، ف.]

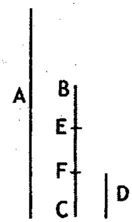
اما، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک D و C عدد E است؛ بنابراین F، E را می‌شمارد؛ بزرگتر کوچکتر را می‌شمارد: که غیرممکن است.

بنابراین هیچ عددی که بزرگتر از E باشد A و B و C را نخواهد شمرد. پس E بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B و C است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

از دو عدد نامتساوی، عدد کوچکتر یا جزئی از عدد بزرگتر است یا اجزای آن است.



فرض می‌کنیم A و BC دو عدد باشند و BC عدد کوچکتر باشد.

می‌گوییم که BC یا جزئی از A است یا اجزای A.

زیرا، A و BC یا نسبت به هم اول‌اند یا نیستند. اول فرض می‌کنیم A و BC نسبت به هم اول باشند در این صورت اگر BC به واحدهای خودش تقسیم شده باشد، هر واحد از واحدهای BC جزئی از A خواهد بود؛ لذا BC اجزای A است.

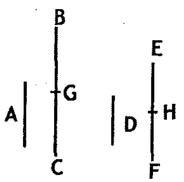
حال فرض می‌کنیم A و BC نسبت به هم اول نباشند. در این صورت BC یا A را می‌شمارد یا نمی‌شمارد. حال اگر BC، A را بشمارد جزئی از A است. والّا فرض می‌کنیم D، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و BC، را پیدا کرده‌ایم؛ [۲.VII]

و فرض می‌کنیم BC را به عددهای مساوی با D، یعنی BE و EF و FC، تقسیم کرده‌ایم. حال، چون D، A را می‌شمارد جزئی از A است. اما D با هر یک از اعداد BE و EF و FC مساوی است؛ بنابراین هر یک از اعداد BE و EF و FC نیز یک جزء A است؛ لذا BC اجزای A است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

از چهار عدد، اگر اولی جزئی[1] از دومی باشد، و سومی همان جزء از چهارمی، مجموع اول و سوم نیز همان مجموع از دوم و چهارم است.



فرض می‌کنیم عدد A جزئی از BC باشد، و عدد سوم D همان جزء از عدد چهارم EF باشد که A از BC است. می‌گوییم که مجموع A و D نیز همان جزء از مجموع BC و EF است که A از BC است.

زیرا چون، A هر جزئی از BC باشد، D نیز همان جزء از EF است، بنابراین در BC هر تعدادی A وجود داشته باشد، در EF نیز همان تعداد D وجود خواهد داشت. فرض می‌کنیم BC به تعدادی مساوی با A، یعنی BG و GC تقسیم شده است، و EF به تعدادی مساوی با D، یعنی EH و HF.

پس تعداد BG و GC با تعداد EH و HF مساوی خواهد بود. و چون BG با A مساوی است و EH با D، بنابراین BG و EH نیز با A و D مساوی‌اند.

به همین دلیل GC و HF نیز با A و D مساوی‌اند. بنابراین هر تعدادی A در BC وجود داشته باشد، همان تعداد هم A و D در BC و EF وجود خواهد داشت.

بنابراین BC هر مضربی از A باشد مجموع BC و EF نیز همان مضرب از مجموع A و D خواهد بود.

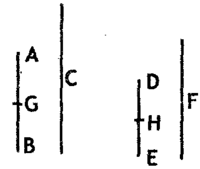
لذا، A هر جزئی از BC باشد مجموع A و D نیز همان جزء از مجموع BC و EF است.

آنچه می‌خواستیم.

۱. فراموش نکنیم که منظور از جزء یک عدد، شمارنده‌ای از آن عدد است.ــم.

قضیهٔ ۶

از چهار عدد اگر اولی، اجزای دومی باشد و سومی همان اجزا از چهارمی، مجموع اول و سوم نیز همان اجزا از مجموع دوم و چهارم است.



فرض می‌کنیم عدد AB اجزای عدد C باشد؛ و عدد سوم DE همان اجزا از عدد چهارم F باشد که AB از C است. می‌گوییم که مجموع AB و DE نیز همان اجزا از مجموع C و F است که A از C است،

زیرا چون AB هر اجزائی از C باشد، DE نیز همان اجزا از F است، بنابراین همان اجزائی از C که در AB موجودند همان اجزا از F نیز به همان تعداد در E موجود است.

فرض می‌کنیم AB به اجزای C یعنی AG و GB تقسیم شده است و DE به اجزای F یعنی DH و HE. پس تعداد AG و GB با تعداد DH و HE مساوی خواهد شد. و چون، AG هر جزئی از C باشد، DH نیز همان جزء از F است، بنابراین AG هر جزئی از C باشد، مجموع AG و DH نیز همان جزء از مجموع C و F است. [۵.VII]

به همین دلیل GB هر جزء از C باشد، GB و HE نیز همان جزء از مجموع C و F است.

بنابراین AB هر اجزائی از C که باشد، مجموع AB و DE نیز همان اجزا از مجموع C و F است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

از چهار عدد اگر اولی جزئی از دومی باشد و سومی همان جزء از چهارمی باشد که اولی از دومی است، تفاضل اولی و سومی نیز همان جزء از تفاضل دومی و چهارمی است، که اولی از دومی است.

فرض می‌کنیم عدد AB آن جزء از عدد CD است که عدد AE از عدد CF است؛ می‌گوییم که باقیماندهٔ $AB - AE = EB$ نیز همان جزء از باقیماندهٔ $CD - CF = FD$ است که AB از CD. زیرا AE هر جزء از CF باشد فرض می‌کنیم EB نیز همان جزء از CG است. اما چون، AE هر جزئی از CF باشد EB نیز همان جزء از CG است، بنابراین AE هر جزئی از CF باشد AB نیز همان جزء از GF است. [۵.VII]

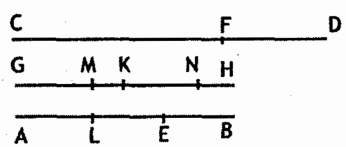
اما AE هر جزئی از CF باشد، بنا به فرض، AB نیز همان جزء از CD است؛ لذا AB

هر جزئی از GF باشد، همان جزء از CD نیز هست؛ در نتیجه GF با CD مساوی است. CF را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیماندهٔ GC با باقیماندهٔ FD مساوی است. اما چون AE هر جزئی از CF باشد، EB نیز همان جزء از GC است. و GC با FD مساوی است، بنابراین AE هر جزئی از CF باشد، EB نیز همان جزء از FD است. اما AE هر جزئی از CF باشد، AB نیز همان جزء از CD است، در نتیجه باقیماندهٔ EB نیز همان جزء از باقیماندهٔ FD است که تمامی AB از تمامی CD.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

از چهار عدد اگر اولی اجزائی از دومی باشد و سومی همان اجزا از چهارمی تفاضل اولی و سومی نیز همان اجزا از تفاضل دومی و چهارمی است.



فرض می‌کنیم عدد AB، اجزائی از عدد CD باشد و عدد AE همان اجزا از عدد CF. می‌گوییم که باقیماندهٔ $EB = AB - AE$ نیز همان اجزا از باقیماندهٔ $FD = CD - CF$ است، که AB از CD.

زیرا فرض می‌کنیم GH مساوی با AB رسم شده باشد. بنابراین GH هر اجزائی از CD که باشد، AE نیز همان اجزا از CF است.

فرض می‌کنیم GH را به اجزای CD، یعنی GK و KH تقسیم کرده‌ایم و AE را به اجزای CF یعنی AL و LE؛ بنابراین تعداد GK و KH با تعداد AL و LE مساوی خواهد بود.

اما چون GK هر جزئی از CD باشد، AL نیز همان جزء از CF است، و CD از CF بزرگتر است، بنابراین GK نیز از AL بزرگتر است.

فرض می‌کنیم GM مساوی با AL ساخته شده است؛ بنابراین GK هر جزئی از CD باشد، GM نیز همان جزء از CF است؛ لذا، باقیماندهٔ MK نیز همان جزء از باقیماندهٔ FD است که GK از CD. [۷.VII]

باز، چون KH هر جزئی از CD باشد، EL نیز همان جزء از CF است، و CD از CF بزرگتر است، بنابراین HK نیز از EL بزرگتر است.

فرض می‌کنیم KN را مساوی با EL جدا کرده‌ایم. بنابراین KH هر جزئی از CD باشد، KN نیز همان جزء از CF است؛ لذا، باقیماندهٔ NH نیز همان جزء از باقیماندهٔ FD است که KH از CD. [۷.VII]

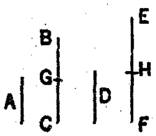
اما، ثابت شده بود که باقیماندهٔ MK همان جزء از باقیماندهٔ FD است که GK از CD. بنابراین مجموع MK و NH نیز همان اجزا از FD است که HG از CD.

اما مجموع MK و NH با EB مساوی است، و HG با BA مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ EB نیز همان اجزا از باقیماندهٔ FD است که AB از CD.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

از چهار عدد اگر اولی جزئی از دومی باشد و سومی همان جزء از چهارمی، با ابدال نسبت، اولی هر جزء یا اجزائی از سومی باشدْ دومی نیز همان جزء یا اجزا از چهارمی است.



فرض می‌کنیم عدد A جزئی از عدد BC باشد، وعدد سوم D همان جزء از عدد چهارم EF. می‌گوییم که، با ابدال نسبت، A هر جزء یا اجزائی از D باشد، BC نیز همان جزء یا اجزا از EF است.

زیرا چون، A هر جزئی از BC باشد، D نیز همان جزء از EF است؛ بنابراین در BC هر چند عددی مساوی با A موجود باشد در EF نیز همان قدر عدد مساوی D موجود است.

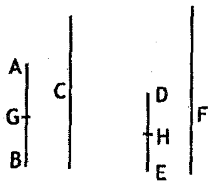
فرض می‌کنیم BC را به اعدادی مثل BG و GC مساوی با A تقسیم کرده‌ایم، و EF را به اعدادی مثل EH و HF، مساوی با D. پس تعداد BG و GC با تعداد EH و HF مساوی است. اما، چون اعداد BG و GC با هم مساوی‌اند، و اعداد EH و FH نیز با هم مساوی‌اند، و تعداد BG و GC با تعداد EH و HF مساوی است، بنابراین BG هر جزء یا اجزائی از EH باشد، GC نیز همان جزء یا اجزا از HF است؛ به طوری که، به علاوه، BG هر جزء یا اجزائی از EH باشد، مجموع BC نیز همان جزء یا اجزا از مجموع EF است. [۶ ،۵.VII]

اما BG با A مساوی است و EH با D؛ بنابراین A هر جزء یا اجزائی از D باشد، BC نیز همان جزء یا اجزا از EF است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

از چهار عدد اگر اولی اجزائی از دومی باشد و سومی همان اجزا از چهارمی، با ابدال نسبت، اولی نیز هر جزء یا اجزائی از سومی باشد، دومی نیز همان جزء یا اجزا از چهارمی است.



فرض می‌کنیم عدد AB اجزائی از عدد C باشد و عدد سوم DE همان اجزا از عدد چهارم F.

می‌گوییم، با ابدال نسبت AB نیز هر جزء یا اجزائی از DE باشد، C نیز همان جزء یا اجزا از F است. زیرا چون AB هر اجزائی از C باشد، DE نیز همان اجزا از F است، بنابراین همان اجزائی از C که در AB وجود دارند همان اجزا از F نیز به همان تعداد در E وجود دارند.

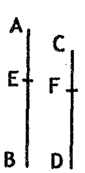
فرض می‌کنیم AB به اجزای C، یعنی AG و GB تقسیم شده است و DE به اجزای F، یعنی DH و HE؛ پس تعداد AG و GB با تعداد DH و HE مساوی است. اما، چون AG هر جزئی از C باشد DH نیز همان جزء از F است، به ابدال نسبت، AG نیز هر جزء یا اجزائی از DH باشد، C نیز همان جزء یا اجزا از F است. [VII.۹]

به همان دلیل هم GB هر جزء یا اجزائی از HE باشد، C نیز همان جزء یا اجزا از F است. بنابراین علاوه بر آن، AB هر جزء یا اجزائی از DE باشد C نیز همان جزء یا اجزا از F است. [VII.۵، ۶]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

از چهار عدد اگر نسبت اولی به دومی همچون نسبت سومی باشد به چهارمی نسبت تفاضل اولی و سومی به تفاضل دومی و چهارمی نیز همچون نسبت اولی است به دومی.



چون نسبت AB به CD مثل نسبت AE است به CF؛ می‌گوییم که نسبت $EB = AB - AE$ به $FD = CD - CF$ نیز مثل نسبت AB است به CD. چون نسبت AB به CD مثل نسبت AE است به CF، AB هر جزء یا اجزائی از CD باشد، AE نیز همان جزء یا اجزا از CF است. [VII.تع. ۲۰]

بنابراین باقیماندهٔ EB نیز همان جزء یا اجزای FD است که AB از CD. [VII.۷، ۸]

لذا نسبت EB به FD مثل نسبت AB است به CD. [VII.تع. ۲۰]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

اگر تعداد دلخواهی عدد، متناسب باشند، نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت همهٔ صورتهاست به همهٔ مخرجها.

فرض می‌کنیم A و B و C و D اعداد دلخواه متناسبی باشند چنانکه نسبت A به B مثل نسبت C باشد به D.

می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت A و C است به B و D.

زیرا چون نسبت A به B مثل نسبت C است به D، A هر جزء یا اجزائی از B باشد C نیز همان جزء یا اجزا از D است. [VII.تع. ۲۰]

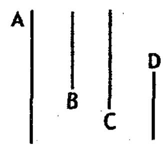
بنابراین مجموع A و C نیز همان جزء یا اجزا از مجموع B و D است که A از B. [VII.۵،۶]

لذا نسبت A به B مثل نسبت A و C است به B و D. [VII.تع. ۲۰]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر چهار عدد متناسب باشند، با ابدال نسبت نیز متناسب‌اند.



فرض می‌کنیم که چهار عدد A و B و C و D متناسب باشند، چنانکه نسبت A به B مثل نسبت C باشد به D؛

می‌گوییم که با ابدال نسبت نیز متناسب خواهند بود، یعنی نسبت A به C مثل نسبت B خواهد بود به D. زیرا، چون نسبت A به B مثل نسبت C است به D؛ بنابراین A هر جزء یا اجزائی از B باشد، C نیز همان جزء یا اجزا از D است. [VII.تع. ۲۰]

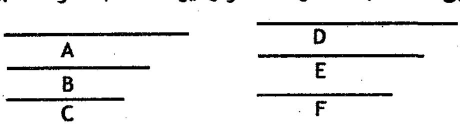
بنابراین، با ابدال نسبت، A هر جزء یا اجزائی از C باشد، B نیز همان جزء یا اجزا از D خواهد بود. [VII. ۱۰]

در نتیجه نسبت A به C مثل نسبت B است به D. [VII.تع. ۲۰]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر تعداد دلخواهی عدد مفروض باشند، و نیز تعدادی دیگر که از لحاظ تعداد با آنها مساوی‌اند؛ اگر نسبتهای اعداد اولی دو به دو (به توالی) همچون نسبتهای اعداد متناظرشان از دیگری باشند، این اعداد به مساوات هموار نیز متناسب خواهند بود.



فرض می‌کنیم A و B و C سه عدد دلخواه باشند و سه عدد دیگر D و E و F چنان باشند که نسبتهای اعداد A و B و C دو به دو (به توالی) مثل نسبتهای D و E و F به یکدیگر باشند به طوری که

نسبت A به B مثل نسبت D باشد به E و نسبت B به C مثل نسبت E باشد به F. می‌گوییم که به مساوات هموار نیز متناسب‌اند، یعنی نسبت A به C نیز مثل نسبت D است به F.

زیرا، چون نسبت A به B مثل نسبت D است به E، بنابراین با ابدال نسبت، نسبت A به D مثل نسبت B است به E. [۱۳.VII]

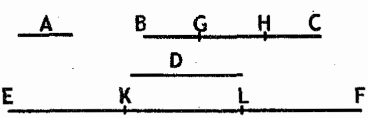
باز، چون نسبت B به C مثل نسبت E است به F، بنابراین با ابدال نسبت، نسبت B به E مثل نسبت C است به F. [۱۳.VII]

اما چون نسبت B به E مثل نسبت A است به D؛ بنابراین نسبت A به D هم مثل نسبت C است به F. بنابراین، با ابدال نسبت، نسبت A به C مثل نسبت D است به F. [۱۳.VII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر واحدی عددی را بشمارد و عدد دیگری عددی دیگر را به همان تعداد دفعات بشمارد، با ابدال نسبت این واحد عدد سوم را هم به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که دومی چهارمی را[۱].



فرض می‌کنیم واحد A عددی چون BC را بشمارد و عدد دیگر D یک عدد دیگر EF را به همان تعداد دفعات بشمارد؛ می‌گوییم، با ابدال نسبت، واحد A عدد D را هم به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که BC، EF را.

زیرا چون واحد A عدد BC را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که D، EF را؛ بنابراین در BC هرچند واحد وجود داشته باشد همان قدر عدد هم مساوی با D در EF وجود خواهد داشت.

فرض می‌کنیم BC به واحدهای خودش BG و GH و HC تقسیم شده است و EF به اعداد EK و KL و LF مساوی با D تقسیم شده است. بنابراین تعداد BG و GH و HC با تعداد EK و KL و LF مساوی است. و چون واحدهای BG و GH و HC با هم مساوی‌اند، و عددهای EK و KL و LF نیز با هم مساوی‌اند، و تعداد واحدهای BG و GH و HC با تعداد اعداد EK و KL و LF مساوی‌اند، بنابراین نسبت واحد BG به عدد EK مثل نسبت واحد GH است به عدد KL و مثل نسبت واحد HC است به عدد LF. لذا نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت همهٔ صورتها به همهٔ مخرجها خواهد بود؛ [۱۲.VII]

بنابراین نسبت واحد BG به عدد EK مثل نسبت BC است به EF.

اما، واحد BG با واحد A مساوی است، و عدد KE با عدد D.

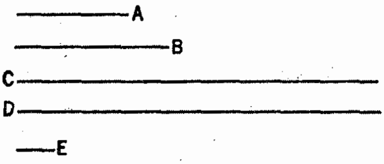
لذا نسبت واحد A به عدد D مثل نسبت BC است به EF. بنابراین واحد A عدد D را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که BC، EF را.

آنچه می‌خواستیم.

۱. این قضیه با قضیهٔ جبری: اگر $1/m = a/ma$، آنگاه $1/a = m/ma$، هم‌ارز است.ـم.

قضیهٔ ۱۶

اگر از ضرب دو عدد اعدادی حاصل آیند، این اعداد با یکدیگر مساوی‌اند[1].



فرض می‌کنیم که دو عدد A و B داشته باشیم که از ضرب A در B عدد C پدید آمده است و از ضرب B در A عدد D.

می‌گوییم C با D مساوی است. زیرا، چون از ضرب A در B عدد C حاصل شده است، لذا B عدد C را به دفعاتی به تعداد واحدهای موجود در A می‌شمارد.

اما واحد E نیز عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای موجود در آن می‌شمارد؛ بنابراین واحد E عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که B عدد C را.

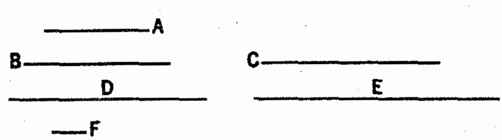
بنابراین، به‌ابدال نسبت، واحد E عدد B را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که A عدد C را. [۱۵.VII]

باز، چون از ضرب B در A عدد D حاصل شده است، لذا A عدد D را به دفعاتی به تعداد واحدهای موجود در B می‌شمارد. اما واحد E هم عدد B را به دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد؛ در نتیجه واحد E عدد B را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که A عدد D را؛ اما واحد E عدد B را به همان تعداد دفعاتی شمرده بود که A عدد C را؛ بنابراین A هر یک از اعداد C و D را به دفعاتی متساوی می‌شمارد، لذا C با D مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

اگر از ضرب عددی در دو عدد، اعدادی حاصل آیند، نسبت اعداد حاصل، مثل نسبت خود آن دو عدد است به هم.



فرض می‌کنیم از ضرب A در دو عدد B و C، اعداد D و E حاصل شده‌اند. می‌گوییم که نسبت B به C مثل نسبت D است به E.

زیرا، چون از ضرب A در B عدد D حاصل شده است، بنابراین B عدد D را به دفعاتی به تعداد واحدهای موجود در A می‌شمارد اما واحد F نیز عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای موجود در آن می‌شمارد؛ بنابراین واحد F عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که B عدد D را. در نتیجه نسبت واحد F به عدد A مثل نسبت B است به D. [تع. ۲۰.VII]

۱. این قضیه با قضیهٔ جبری $AB = BA$ هم‌ارز است.ـم.

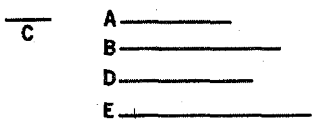
به همین دلیل نسبت واحد F به عدد A مثل نسبت C به E نیز هست.

بنابراین نسبت B به D نیز مثل نسبت C است به E. در نتیجه، به ابدال نسبت، نسبت B به C مثل نسبت D است به E. [۱۳.VII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

اگر دو عدد در عددی ضرب شوند، نسبت حاصل‌ضربها به هم مثل نسبت مضروب‌فیه‌هاست به هم.



فرض می‌کنیم از ضرب دو عدد A و B در C، اعداد D و E حاصل شده‌اند.

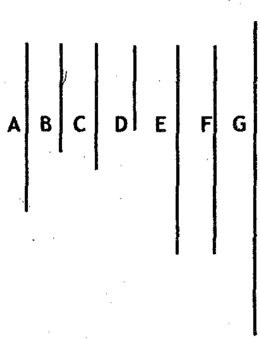
می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت D است به E. زیرا، چون A از ضرب در C، عدد D را پدید آورده است، بنابراین C نیز از ضرب در A، عدد D را پدید می‌آورد. [۱۶.VII]

به همین دلیل نیز C از ضرب در B، عدد E را پدید می‌آورد. در نتیجه عدد C از ضرب در دو عدد A و B اعداد D و E را پدید می‌آورد. پس نسبت A به B مثل نسبت D است به E. [۱۷.VII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

اگر چهار عدد متناسب باشند حاصل‌ضرب اولی و چهارمی با حاصل‌ضرب دومی و سومی مساوی است؛ و اگر حاصل‌ضرب اولی و چهارمی با حاصل‌ضرب دومی و سومی مساوی باشد، چهار عدد متناسب‌اند.



فرض می‌کنیم چهار عدد A و B و C و D متناسب‌اند به طوری که نسبت A به B مثل نسبت C است به D. فرض می‌کنیم حاصل‌ضرب A در D عدد E است و حاصل‌ضرب B در C عدد F. می‌گوییم که E با F مساوی است. زیرا، فرض می‌کنیم حاصل‌ضرب A در C عدد G است. پس، چون حاصل‌ضرب A در C عدد G است و حاصل‌ضرب A در D عدد E، حاصل‌ضرب A در دو عدد C و D دو عدد G و E است؛ بنابراین نسبت C به D مثل نسبت G است به E. [۱۷.VII]

اما نسبت C به D مثل نسبت A است به B؛ بنابراین نسبت A به B مثل نسبت G است

به E. باز، چون حاصل‌ضرب A در C مساوی با G است، و حاصل‌ضرب B هم در C مساوی است با F، حاصل‌ضربهای A و B در یک عدد C مساوی‌اند با G و F؛ بنابراین نسبت A به B مثل نسبت G است به F. [۱۸.VII]

اما نسبت A به B مثل نسبت G است به E، بنابراین نسبت G به E نیز مثل نسبت G است به F. از آنجا که نسبت G به هر دو عدد E و F یکی است، لذا E مساوی است با F. [ر.ک.۹.V]

باز، فرض می‌کنیم E مساوی با F است. می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت C است به D. زیرا در همان شکل، چون E با F مساوی است، پس نسبت G به E مثل نسبت G است به F. [ر.ک.۷.V]

اما نسبت G به E مثل نسبت C است به D، [۱۷.VII]

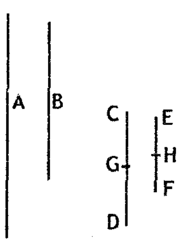
و نسبت G به F مثل A است به B، [۱۸.VII]

بنابراین نسبت A به B نیز مثل نسبت C است به D.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد و کوچکتر کوچکتر را.



فرض می‌کنیم CD و EF کوچکترین اعداد از اعدادی باشند که با A و B یک نسبت را دارند؛ می‌گوییم CD عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که EF عدد B را.

باید بدانیم که CD اجزای A نیست.

زیرا اگر اجزای A باشد، EF نیز همان اجزائی از B است که CD از A. [۱۳.VII و تع. ۲۰]

بنابراین تعداد اجزای A در CD با تعداد اجزای B در EF یکی است.

فرض کنیم CD به اجزای A، یعنی CG و GD، تقسیم شده است و EF به اجزای B، یعنی EH و HF؛ پس تعداد CG و GD با تعداد EH و HF مساوی است. اما چون اعداد CG و GD با هم مساوی‌اند و اعداد EH و HF نیز با هم، و تعداد CG و GD با تعداد EH و HF مساوی است، بنابراین نسبت CG به EH مثل نسبت GD است به HF. و همچنین نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت همهٔ صورتها به همهٔ مخرجهاست. [۱۲.VII]

بنابراین نسبت CG به EH مثل نسبت CD است به EF. لذا CG و EH با CD و EF، یک نسبت دارند در حالی که کوچکتر از آنها هستند: که غیرممکن است، زیرا بنا به فرض CD و EF کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که یک نسبت بین آنها برقرار است.

بنابراین CD اجزای A نیست؛ لذا جزئی از آن است؛ [۴.VII]

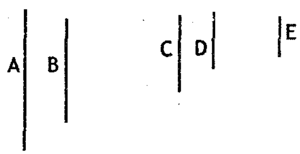
و EF همان جزئی از B است که CD از A. [۱۳.VII و تع. ۲۰]

لذا CD عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که EF عدد B را.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

اعداد نسبت به هم اول [متباین] کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که با آنها به یک نسبت‌اند.



فرض می‌کنیم A و B اعدادی نسبت به هم اول باشند.

می‌گوییم که A و B کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که با آنها به یک نسبت‌اند.

زیرا، اگر چنین نباشد، اعدادی کوچکتر از A و B وجود دارند که با A و B به یک نسبت‌اند. فرض می‌کنیم این اعداد C و D باشند.

پس، چون کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد و کوچکتر کوچکتر را، یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را، [۲۰.VII]

بنابراین C عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که D عدد B را. حال فرض می‌کنیم تعداد واحدهای E با تعداد دفعاتی که C عدد A را می‌شمارد یکی باشد. بنابراین D نیز B را به دفعاتی به تعداد واحدهای E می‌شمارد؛ و چون C عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای E می‌شمارد، لذا E نیز A را به دفعاتی به تعداد واحدهای C می‌شمارد. [۱۶.VII]

به همین دلیل E نیز B را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارد. [۱۶.VII]

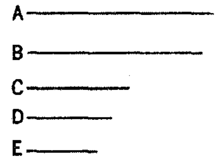
بنابراین E اعداد A و B را که نسبت به هم اول‌اند می‌شمارد: که غیرممکن است. [VII. تع. ۱۲]

لذا، هیچ اعدادی کوچکتر از A و B وجود ندارند که با A و B به یک نسبت باشند. در نتیجه A و B کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که با آنها به یک نسبت‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، نسبت به هم اول‌اند.



فرض می‌کنیم A و B کوچکترین اعداد از اعدادی باشند که این نسبت را با آنها دارند.

می‌گوییم که A و B نسبت به هم اول‌اند. زیرا، اگر نسبت به هم اول نباشند عددی آنها را خواهد شمرد.

فرض می‌کنیم آن عدد C باشد؛ و فرض می‌کنیم تعداد واحدهای D با تعداد دفعاتی که C، A را می‌شمارد یکی باشد، و تعداد واحدهای E با تعداد دفعاتی که C، B را می‌شمارد. چون C عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارد، پس، از ضرب C در D، A حاصل می‌شود. [VII.تع.۱۵]

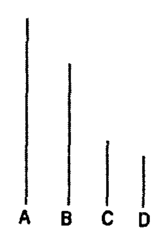
به همین دلیل، هم، از ضرب C در E، B حاصل می‌شود. بنابراین از ضرب C در دو عدد D و E اعداد A و B حاصل شده‌اند؛ لذا نسبت D به E مثل نسبت A است به B.[VII.۱۷]

بنابراین D و E، که کمتر از A و B هستند، نسبت A به B را دارند: که غیرممکن است. در نتیجه، هیچ عددی A و B را نمی‌شمارد، یعنی A و B نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند؛ عددی که یکی از آنها را بشمارد نسبت به دیگری اول است.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد نسبت به هم اول باشند، و عددی مانند C، A را بشمارد؛

می‌گوییم که C و B نیز نسبت به هم اول‌اند.

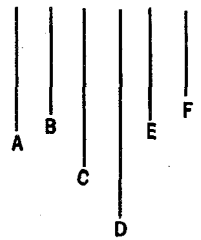
زیرا اگر C و B نسبت به هم اول نباشند، عددی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم آن عدد D باشد. چون D عدد C را می‌شمارد، و C عدد A را، پس D، A را نیز می‌شمارد. اما D، B را نیز می‌شمارد؛ بنابراین D اعداد A و B را، که نسبت به هم اول‌اند، می‌شمارد: که غیرممکن است. [VII.تع.۱۲]

لذا هیچ عددی اعداد C و B را نمی‌شمارد. در نتیجه C و B نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

اگر دو عدد نسبت به عددی اول باشند، حاصل‌ضرب آنها نیز نسبت به آن عدد اول خواهد بود.



فرض می‌کنیم دو عدد A و B نسبت به عددی مانند C اول باشند، و از ضرب A در B عدد D حاصل شود؛ می‌گوییم که C و D نسبت به هم اول‌اند.

زیرا اگر C و D نسبت به هم اول نباشند، عددی C و D را می‌شمارد. فرض می‌کنیم آن عدد E باشد. اما، چون C و A نسبت به هم اول‌اند، و عددی مانند E، عدد C را می‌شمارد، بنابراین A و E نسبت به هم اول‌اند. [۲۳.VII]

پس، فرض می‌کنیم که تعداد واحدهای F با تعداد دفعاتی که E عدد D را می‌شمارد یکی باشد. بنابراین F نیز D را به دفعاتی به تعداد واحدهای E می‌شمارد. [۱۶.VII]

پس، از ضرب E در F، عدد D حاصل می‌شود. [۱۵.تع.VII]

اما، به علاوه از ضرب A در B نیز D حاصل می‌شود، لذا حاصل‌ضرب E در F با حاصل‌ضرب A در B مساوی است. اما اگر حاصل‌ضرب طرفین مساوی با حاصل‌ضرب وسطین باشد، چهار عدد متناسب‌اند. [۱۹.VII]

بنابراین نسبت E به A مثل نسبت B است به F.

اما A و E نسبت به هم اول‌اند، اعداد نسبت به هم اول، در بین اعدادی که با آنها به یک نسبت‌اند، نیز کوچکترین اعدادند، [۲۱.VII]

و کوچکترین اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد و کوچکتر کوچکتر را. یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را؛ [۲۰.VII]

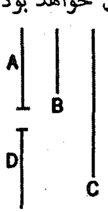
بنابراین E عدد B را می‌شمارد. اما E، C را هم می‌شمارد، بنابراین E اعداد B و C را که نسبت به هم اول‌اند می‌شمارد: که غیرممکن است. [۱۲.تع.VII]

لذا هیچ عددی اعداد C و D را نمی‌شمارد، بنابراین C و D نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، حاصل‌ضرب یکی از آنها در خودش با دیگری اول خواهد بود.



فرض می‌کنیم دو عدد A و B نسبت به هم اول باشند، و از ضرب A در خودش C حاصل شود،

می‌گوییم B و C نسبت به هم اول‌اند. زیرا، D را مساوی با A می‌گیریم.

چون A و B نسبت به هم اول‌اند، و A با D مساوی است، بنابراین D و B

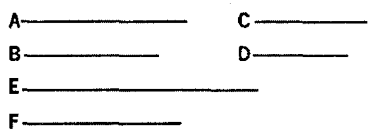
نیز نسبت به هم اول‌اند. لذا هر یک از دو عدد D و A نسبت به B اول‌اند؛ بنابراین حاصل‌ضرب D و A نیز نسبت به B اول است. [۲۴.VII]

اما عددی که از ضرب D و A پیدا شده C است، بنابراین C و B نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

اگر دو عدد نسبت به دو عدد، هر دو نسبت به هر یک، اول باشند حاصل‌ضربهای آنها نیز نسبت به هم اول‌اند.



فرض می‌کنیم دو عدد A و B نسبت به دو عدد C و D، هر دو نسبت به هر یک، اول باشند، و فرض می‌کنیم حاصل‌ضرب A در B عدد E باشد و حاصل‌ضرب C در D عدد F.

می‌گوییم که E و F نسبت به هم اول‌اند.

زیرا، چون هر یک از اعداد A و B نسبت به C اول‌اند، حاصل‌ضرب A و B نیز نسبت به C اول خواهد بود. [۲۴.VII]

اما، حاصل‌ضرب A در B با E مساوی است، بنابراین E و C نسبت به هم اول‌اند.

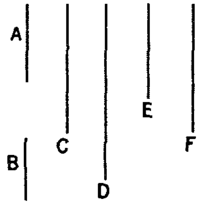
به همین دلیل E و D هم نسبت به هم اول‌اند؛ بنابراین هر یک از اعداد C و D نسبت به E اول است. بنابراین حاصل‌ضرب C و D نیز نسبت به E اول است. [۲۴.VII]

اما حاصل‌ضرب C و D با F مساوی است. در نتیجه E و F نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، از ضرب هریک در خودش حاصل‌ضربهایی پدید می‌آیند که نسبت به هم اول خواهند بود؛ و از ضرب اعداد اولیه در این حاصل‌ضربها مجدداً عددهایی پدید می‌آیند، این حاصل‌ضربها نیز نسبت به هم اول خواهند بود (و همواره چنین خواهد بود اگر این عمل ادامه یابد).



فرض می‌کنیم دو عدد A و B نسبت به هم اول باشند، و از ضرب A در خودش C حاصل شود، و از ضرب A در C عدد D؛ و فرض می‌کنیم از ضرب B در خودش عدد E حاصل شود و از ضرب B در E، عدد F.

می‌گوییم که هم C و E نسبت به هم اول‌اند، و هم D و F نسبت به هم.

زیرا، چون A و B نسبت به هم اول‌اند و از ضرب A در خودش C حاصل شده است، پس C و B نسبت به هم اول‌اند. [۲۵.VII]

چون C و B نسبت به هم اول‌اند، و از ضرب B در خودش E حاصل شده است، بنابراین C و E نسبت به هم اول‌اند [همان قضیه].

باز چون A و B نسبت به هم اول‌اند، و از ضرب B در خودش E حاصل شده است، بنابراین A و E نسبت به هم اول‌اند [همان قضیه].

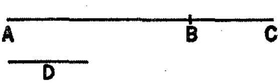
پس، چون دو عدد A و C نسبت به دو عدد B و E، هر دو نسبت به هر یک، اول‌اند، بنابراین حاصل‌ضرب A و C نیز نسبت به حاصل‌ضرب B و E اول است، [۲۶.VII]

و حاصل‌ضرب A و C مساوی با D است و حاصل‌ضرب B و E مساوی با F. بنابراین D و F نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، مجموع آنها نیز نسبت به هر یک از آنها اول است؛ و اگر مجموع دو عدد نسبت به هر یک از آن دو عدد اول باشد، آن دو عدد نیز نسبت به هم اول خواهند بود.



فرض می‌کنیم دو عدد AB و BC که نسبت به هم اول‌اند، با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که مجموع AC نیز نسبت به هر یک از دو عدد AB و BC اول خواهد بود.

زیرا اگر CA و AB نسبت به هم اول نباشند، عددی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم آن عدد D باشد. در این صورت چون D اعداد CA و AB را می‌شمارد، بنابراین باقیماندهٔ BC را نیز خواهد شمرد.

اما D، BA را نیز می‌شمارد، بنابراین D، AB و BC را که نسبت به هم اول‌اند می‌شمارد: که غیرممکن است. [VII.تع.۱۲]

بنابراین، هیچ عددی اعداد CA و AB را نخواهد شمرد؛ بنابراین CA و AB نسبت به هم اول‌اند. به همین دلیل AC و CB نیز نسبت به هم اول‌اند. بنابراین CA نسبت به هر یک از اعداد AB و BC اول است.

باز فرض می‌کنیم CA و AB نسبت به هم اول باشند، می‌گوییم AB و BC نیز نسبت به هم اول‌اند.

زیرا اگر AB و BC نسبت به هم اول نباشند عددی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم

آن عدد، D باشد. حال، چون D هر یک از اعداد AB و BC را می‌شمارد، تمامی CA را نیز خواهد شمرد.

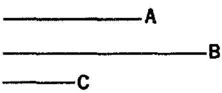
اما، D، AB را نیز می‌شمارد؛ بنابراین D، CA و AB را که نسبت به هم اول‌اند می‌شمارد: که غیرممکن است. [VII.تع.۱۲]

بنابراین هیچ عددی اعداد AB و BC را نخواهد شمرد؛ درنتیجه AB و BC نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

هر عدد اول نسبت به هر عددی که آن را نشمارد اول است.

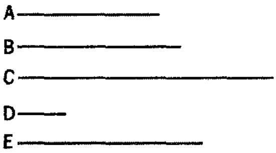


فرض می‌کنیم A عددی اول باشد و B را نشمارد. می‌گوییم A و B نسبت به هم اول‌اند. زیرا، اگر A و B نسبت به هم اول نباشند، عددی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم آن عدد C باشد. چون C، B را می‌شمارد و A، B را نمی‌شمارد، پس C با A برابر نیست. اما، چون C، B و A را می‌شمارد، لذا، A را نیز که اول است می‌شمارد اگرچه با آن برابر نیست: که غیرممکن است. بنابراین هیچ عددی A و B را نمی‌شمارد؛ پس A و B نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

اگر از ضرب دو عدد در هم عددی حاصل آید و اگر عددی اول این حاصل‌ضرب را بشمارد، یکی از آن دو عدد را نیز خواهد شمرد.



فرض می‌کنیم از ضرب دو عدد A و B در هم عدد C حاصل شود، و فرض می‌کنیم عدد اولی مانند D عدد C را بشمارد؛

می‌گوییم که D یکی از اعداد A و B را می‌شمارد.

زیرا، فرض می‌کنیم D، A را نشمارد. اما D اول است، بنابراین A و D نسبت به هم اول‌اند. [VII.۲۹]

و، فرض می‌کنیم که تعداد واحدهای E با تعداد دفعاتی که D، C را می‌شمارد یکی باشد. چون D، C را به دفعاتی به تعداد واحدهای E می‌شمارد، بنابراین از ضرب D در E، C حاصل می‌شود. [VII.تع.۱۵]

به علاوه از ضرب A در B نیز C حاصل می‌شود. بنابراین حاصل‌ضرب D و E با حاصل‌ضرب A و B مساوی است. از آنجا نسبت D به A مثل نسبت B است به E. [VII.۱۹]

اما D و A نسبت به هم اول‌اند، اولها کوچکترین نیز هستند. [VII.۲۱]

کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد، و کوچکتر کوچکتر را، یعنی مخرج مخرج را و صورت صورت را. [۲۰.VII]

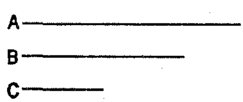
بنابراین D، B را می‌شمارد. همچنین می‌توانیم نشان دهیم که اگر D، B را نشمارد، A را خواهد شمرد.

لذا، D یکی از اعداد A و B را می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

هر عدد مرکبی با یک عدد اول شمرده می‌شود.



فرض می‌کنیم A عددی باشد مرکب؛ می‌گوییم که A با یک عدد اول شمرده می‌شود. زیرا چون A مرکب است، عددی آن را خواهد شمرد، فرض می‌کنیم آن عدد B باشد.

حال، اگر B اول باشد، قضیه اثبات شده است. همان چیزی است که می‌خواستیم. اما، اگر B مرکب باشد، عددی آن را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم آن عدد C باشد. پس، چون C، B را می‌شمارد، و B، A را، بنابراین C، A را نیز می‌شمارد. و اگر C اول باشد، آنچه که می‌خواهیم اثبات شده است.

ولی اگر C مرکب باشد، عددی آن را خواهد شمرد. لذا اگر بررسی به همین ترتیب ادامه یابد، عدد اولی پیدا خواهد شد که عدد پیش از آن را می‌شمارد، که A را هم خواهد شمرد.

زیرا، اگر پیدا نشود، یک رشتهٔ نامتناهی از اعداد، عدد A را خواهد شمرد که هر یک از دیگری کوچکتر است، که از لحاظ تعداد غیرممکن است.

بنابراین عدد اولی پیدا خواهد شد که یکی قبل از آن را می‌شمارد و A را نیز. بنابراین هر عدد مرکبی با یک عدد اول شمرده می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

هر عدد یا اول است یا با عدد اولی شمرده می‌شود.

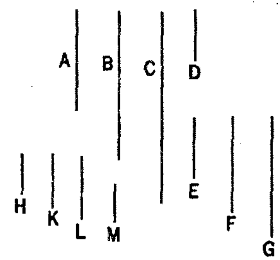
فرض می‌کنیم A یک عدد باشد..می‌گوییم که یا A اول است، یا با عدد اولی شمرده می‌شود. حال، اگر A اول باشد، مطلوب حاصل است. اما اگر A عدد مرکبی باشد، عدد اولی مثل آن را خواهد شمرد.[۳۱.VII]

بنابراین هر عدد یا اول است یا با عدد اولی شمرده می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

تعداد دلخواهی عدد داده شده‌اند. مطلوب پیدا کردن کوچکترین اعدادی است که با آنها یک نسبت دارند.



فرض می‌کنیم A و B و C اعداد داده شدهٔ دلخواهی هستند؛ پس مطلوب پیدا کردن کوچکترین اعدادی است که با A و B و C یک نسبت دارند. A و B و C یا نسبت به هم اول‌اند یا نیستند.

حال، اگر A و B و C نسبت به هم اول باشند خود آنها کوچکترین اعداد مطلوب‌اند. [۲۱.VII]

اما اگر نسبت به هم اول نباشند، فرض می‌کنیم D، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B و C را، پیدا کرده‌ایم. [۳.VII]

فرض می‌کنیم تعداد واحدهای هر یک از اعداد E و F و G به ترتیب با تعداد دفعاتی که D اعداد A و B و C را می‌شمارد برابر باشد. بنابراین اعداد E و F و G، به ترتیب اعداد A و B و C را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارند. [۱۶.VII]

بنابراین E و F و G به تعداد دفعات واحدی اعداد A و B و C را می‌شمارند، پس، E و F و G با A و B و C یک نسبت دارند. [VII.تع. ۲۰]

حال، می‌گوییم که این اعداد کوچکترین اعدادی هستند که چنین نسبتی را دارند.

زیرا، اگر E و F و G کوچکترین اعدادی نباشند که با A و B و C یک نسبت دارند، اعدادی کوچکتر از E و F و G وجود دارند که با A و B و C یک نسبت دارند.

فرض می‌کنیم این اعداد H و K و L باشند؛ بنابراین H، A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که K و L به ترتیب B و C را. حال فرض می‌کنیم تعداد واحدهای M با تعداد دفعاتی که H عدد A را می‌شمارد یکی باشد.

بنابراین اعداد K و L نیز B و C را به ترتیب به دفعاتی به تعداد واحدهای M می‌شمارند. و چون H عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای M می‌شمارد، M نیز A را به دفعاتی به تعداد واحدهای H می‌شمارد. [۱۶.VII]

به همین دلیل، M اعداد B و C را نیز به ترتیب به دفعاتی به تعداد واحدهای اعداد K و L می‌شمارد؛ بنابراین M اعداد A و B و C را می‌شمارد. اما، چون H عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای M می‌شمارد، پس، از ضرب H در M، A حاصل می‌شود. [VII.تع.۱۵]

به همین دلیل، از ضرب E در D، A حاصل می‌شود. بنابراین حاصل‌ضرب E و D با

حاصل‌ضرب H و M مساوی است. لذا نسبت E به H مثل نسبت M است به D.[۱۹.VII]

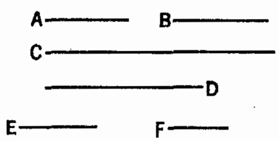
اما E از H بزرگتر است، پس M نیز از D بزرگتر است، و A و B و C را می‌شمارد: که غیرممکن است، زیرا بنا به فرض D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک A و B و C است.

بنابراین اعدادی کوچکتر از E و F و G نمی‌توانند وجود داشته باشند که با A و B و C یک نسبت داشته باشند. در نتیجه E و F و G کوچکترین اعدادی هستند که با A و B و C یک نسبت دارند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

دو عدد داده شده‌اند، مطلوب یافتن کوچکترین عددی است که آنها می‌شمارند.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد داده شده باشند، پس مطلوب پیدا کردن کوچکترین عددی است که آنها می‌شمارند. باید بدانیم که A و B یا نسبت به هم اول‌اند یا نیستند.

اول فرض می‌کنیم A و B نسبت به هم اول‌اند، و از ضرب A در B عدد C حاصل می‌شود؛ پس، از ضرب B در A نیز C حاصل می‌شود. بنابراین A و B عدد C را می‌شمارند. حال می‌گوییم که C کوچکترین عددی است که آنها می‌شمارند. زیرا، اگر چنین نباشد، A و B عددی را خواهند شمرد که کوچکتر از C است. فرض می‌کنیم آن عدد D باشد.

در این صورت، فرض می‌کنیم تعداد واحدهای E با تعداد دفعاتی که A، D را می‌شمارد یکی باشد و تعداد واحدهای F با تعداد دفعاتی که B، D را می‌شمارد.

بنابراین از ضرب A در E، D حاصل می‌شود، و از ضرب B در F هم عدد D؛[VII.تع.۱۵]

در نتیجه حاصل‌ضرب A و E با حاصل‌ضرب B و F مساوی است.

لذا نسبت A به B مثل نسبت F است به E. [۱۹.VII]

اما A و B نسبت به هم اول‌اند، و اعداد اول کوچکترینها نیز هستند، [۲۱.VII]

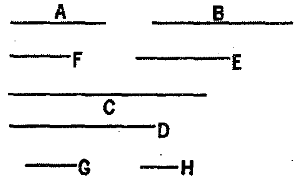
و کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است؛ اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد، و کوچکتر کوچکتر را؛ [۲۰.VII]

بنابراین B، E را می‌شمارد، یعنی مخرج مخرج را. و، چون از ضرب A در B و E اعداد C و D حاصل شده‌اند، بنابراین نسبت B به E مثل نسبت C است به D. [۱۷.VII]

اما B، E را می‌شمارد؛ بنابراین C نیز D را می‌شمارد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است.

بنابراین A و B، هیچ عدد کوچکتر از C را نمی‌شمارند. در نتیجه C کوچکترین عددی است که به وسیلهٔ A و B شمرده می‌شود.

حال، فرض می‌کنیم A و B نسبت به هم اول نباشند، و F و E، کوچکترین اعدادی را که یک نسبت را با A و B دارند، پیدا می‌کنیم. [۳۳.VII]



بنابراین حاصل‌ضرب A و E با حاصل‌ضرب B و F مساوی است. [۱۹.VII]

فرض می‌کنیم از ضرب A در E، C حاصل شود؛ لذا از ضرب B در F نیز C حاصل خواهد شد. بنابراین A و B، C را می‌شمارند.

اکنون می‌گوییم که C کوچکترین عددی نیز هست که A و B آن را می‌شمارند.

زیرا اگر چنین نباشد، A و B عددی را خواهند شمرد که کوچکتر از C است، و فرض می‌کنیم این عدد D باشد. و فرض می‌کنیم تعداد واحدهای G با تعداد دفعاتی که A عدد D را می‌شمارد، یکی باشد و تعداد واحدهای H با تعداد دفعاتی که B عدد D را می‌شمارد.

بنابراین از ضرب A در G عدد D حاصل می‌شود، و از ضرب B در H عدد D. لذا حاصل‌ضرب A و G با حاصل‌ضرب B و H مساوی است؛ پس نسبت A به B مثل نسبت H است به G. [۱۹.VII]

اما نسبت A به B مثل نسبت F است به E. بنابراین نسبت F به E نیز مثل نسبت H است به G. اما F و E کوچکترین هستند، و کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد، کوچکتر کوچکتر را. [۲۰.VII]

بنابراین E عدد G را می‌شمارد. و چون از ضرب A در E و G اعداد C و D حاصل شده‌اند، لذا نسبت E به G مثل نسبت C است به D. [۱۷.VII]

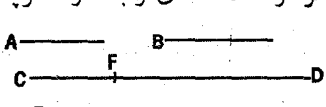
اما E، G را می‌شمارد و لذا C نیز D را می‌شمارد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است. بنابراین A و B، هیچ عددی را که کوچکتر از C باشد نمی‌شمارند.

در نتیجه C کوچکترین عددی است که به وسیلهٔ A و B شمرده می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

اگر دو عدد، عددی را بشمارند، کوچکترین عددی که آنها می‌شمارند نیز آن عدد را خواهد شمرد.



فرض می‌کنیم دو عدد A و B عددی مانند CD را بشمارند، و E کوچکترین عددی باشد که آنها می‌شمارند؛

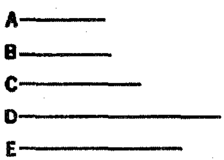
می‌گوییم که E نیز CD را می‌شمارد. زیرا اگر E، CD را نشمارد، فرض می‌کنیم DF را که قسمتی از CD است بشمارد و بقیهٔ آن، CF، را که کوچکتر از E است نشمارد.

حال، چون A و B، E را می‌شمارند، و E عدد DF را می‌شمارد، پس A و B، DF را نیز می‌شمارند؛ اما A و B تمامی CD را نیز می‌شمارند؛ بنابراینماندهٔ CF را هم که کوچکتر از E است می‌شمارند: که غیرممکن است. بنابراین E نمی‌تواند CD را نشمارد؛ در نتیجه آن را می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۶

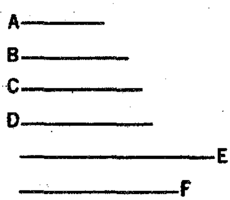
سه عدد داده شده‌اند، مطلوب یافتن کوچکترین عددی است که آنها می‌شمارند.



فرض می‌کنیم A و B و C سه عدد داده شده باشند؛ پس مطلوب پیدا کردن کوچکترین عددی است که آنها می‌شمارند.

فرض می‌کنیم D، یعنی کوچکترین عددی را که A و B می‌شمارند، پیدا کرده‌ایم. [۳۴.VII]

پس، C یا D را می‌شمارد یا نمی‌شمارد، اول، فرض می‌کنیم آن را بشمارد. اما A و B نیز D را می‌شمارند؛ بنابراین A و B و C، D را می‌شمارند. حال، می‌گوییم که این D کوچکترین عددی هم هست که آنها می‌شمارند.



زیرا اگر کوچکترین عدد نباشد، A و B و C عددی را که کوچکتر از D است خواهند شمرد. فرض می‌کنیم آن عدد E باشد. چون A و B و C، E را می‌شمارند، لذا A و B نیز E را می‌شمارند. پس کوچکترین عددی که A و B می‌شمارند، E را نیز خواهد شمرد. [۳۵.VII]

اما D کوچکترین عددی است که A و B می‌شمارند؛ بنابراین D، E را خواهد شمرد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است. بنابراین A و B و C هیچ عددی را که کوچکتر از D باشد نمی‌شمارند. در نتیجه D کوچکترین عددی است که A و B و C می‌شمارند. بار دوم فرض می‌کنیم که C، D را نمی‌شمارد و، F، کوچکترین عددی را که C و D می‌شمارند، پیدا کرده‌ایم. [۳۴.VII]

چون A و B، D را می‌شمارند، و D، E را می‌شمارد، لذا A و B، E را نیز می‌شمارند. اما C نیز E را می‌شمارد، بنابراین A و B و C نیز E را می‌شمارند. حال می‌گوییم این عدد کوچکترین عددی نیز هست که آنها می‌شمارند. زیرا اگر کوچکترین عدد نباشد، A و B و C

عددی کوچکتر از E را خواهند شمرد. فرض می‌کنیم آن عدد F باشد. چون A و B و C، F را می‌شمارند، بنابراین A و B نیز F را می‌شمارند. بنابراین کوچکترین عددی که A و B می‌شمارند نیز F را خواهد شمرد. [۳۵.VII]

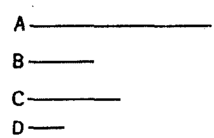
اما D کوچکترین عددی است که A و B می‌شمارند؛ بنابراین D، F را می‌شمارد. اما C نیز F را می‌شمارد، بنابراین D و C، F را می‌شمارند، پس کوچکترین عددی که D و C می‌شمارند نیز F را خواهد شمرد. اما E کوچکترین عددی است که C و D می‌شمارند. بنابراین E عدد F را می‌شمارد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است. بنابراین A و B و C هیچ عددی را که کوچکتر از E باشند نخواهند شمرد.

لذا، E کوچکترین عددی است که A و B و C می‌شمارند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۷

اگر عددی به‌وسیلهٔ عددی شمرده شود، عدد شمرده شده، جزئی به همان نام[1] عدد شمارنده خواهد داشت.



فرض می‌کنیم عدد A به وسیلهٔ عدد B شمرده شود، می‌گوییم که A جزئی به همان نام B دارد.

زیرا فرض می‌کنیم به تعداد دفعاتی که B، A را می‌شمارد واحد در C موجود باشد، چون B،A را به دفعاتی به تعداد واحدهای C می‌شمارد، و واحد D نیز عدد C را به دفعاتی به تعداد واحدهای C می‌شمارد، بنابراین واحد D، عدد C را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که B، A را. پس، با ابدال نسبت، واحد D عدد B را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که C، A را. [۱۵.VII]

لذا، واحد D هر چند جزء از عدد B باشد، C نیز همان تعداد جزء از A است. اما واحد D یک جزء از عدد B است که به همان نام B نامیده می‌شود.

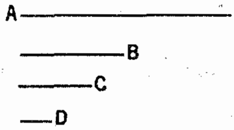
بنابراین C نیز جزئی از A است به همان نام B، در نتیجه A یک جزء C دارد به همان نام B.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۸

اگر عددی جزئی داشته باشد، با عددی به همان نام جزء شمرده می‌شود.

۱. یعنی شمارندهٔ دیگری نیز خواهد داشت.ـم.



فرض می‌کنیم A جزئی مثل B داشته باشد، و C عددی به همان نام جزء B باشد. می‌گوییم C، A را می‌شمارد.

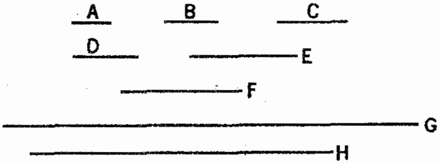
زیرا، چون B جزئی از A به همان نام C دارد، و واحد D نیز جزئی از C به همان نام آن‌است، بنابراین، واحد D هرجزئی از عدد C باشد، B نیز همان جزء از عدد A است. لذا واحد D عدد C را به همان عده دفعاتی می‌شمارد که B، A را. پس، به ابدال نسبت، واحد D عدد B را به همان عده دفعاتی می‌شمارد که C، A را. [۱۵.VII]

در نتیجه C، A را می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۹

مطلوب پیدا کردن کوچکترین عددی است که اعداد داده شده اجزای[1] آن باشند.



فرض می‌کنیم A و B و C اجزای داده شده باشند، پس مطلوب یافتن کوچکترین عددی است که A و B و C اجزای آن باشند. فرض می‌کنیم D و E و F اعدادی به همان نام اجزای A و B و C باشند، و

G کوچکترین عددی را که با D و E و F شمرده می‌شود پیدا کرده‌ایم. [۳۶.VII]

بنابراین G اجزائی به همان نام D و E و F دارد. [۳۷.VII]

اما، A و B و C اجزائی هستند که همان نام D و E و F را دارند؛ لذا A و B و C اجزای G هستند. حال می‌گوییم که G کوچکترین عدد نیز هست.

زیرا اگر G کوچکترین عدد نباشد، عددی کوچکتر از G وجود خواهد داشت که A و B و C اجزای آن باشند. فرض می‌کنیم این عدد H باشد. چون A و B و C اجزای H هستند، بنابراین H با اعدادی شمرده می‌شود که همان نام اجزای A و B و C را دارند. [۳۸.VII]

اما D و E و F اعدادی هستند با همان نام اجزای A و B و C. بنابراین H با D و E و F شمرده می‌شود. و H کوچکتر از G است: که غیرممکن است.

بنابراین، هیچ عددی کوچکتر از G وجود ندارد که A و B و C اجزای آن باشند.

آنچه می‌خواستیم.

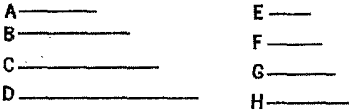
---

۱. به خاطر داریم که منظور از اجزا، یک عدد اعدادی هستند که آن را نمی‌شمارند.

مقالهٔ هشتم

قضیهٔ ۱

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته[1] باشند و اولین و آخرین آنها نسبت به هم اول باشند، این اعداد کوچکترین اعدادی هستند که چنین نسبتی [تناسبی] بین آنها برقرار است.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مثل A و B و C و D در تناسب پیوسته باشند، و اولین و آخرین آنها؛ A و D، نسبت به هم اول باشند. می‌گوییم که A و B و C و D کوچکترین اعدادی هستند که چنین نسبتی بین آنها برقرار است.

زیرا اگر چنین نباشد، فرض می‌کنیم E و F و G و H کوچکتر از A و B و C و D و به همان نسبت با آنها باشند.

حال، چون A و B و C و D با E و F و G و H به یک نسبت‌اند و تعداد اعداد A و B و C و D با تعداد اعداد E و F و G و H مساوی است، لذا طبق نسبت مساوات هموار، نسبت A به D مثل نسبت E است به H. [۱۴.VII]

۱. اعدادی را به تناسب پیوسته گویند که یک تصاعد هندسی تشکیل دهند. یعنی: $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{C}{D}=\cdots$ یا $A:B=B:C=C:D=\cdots$.

اما A و D نسبت به هم اول‌اند، و اولها کوچکترین نیز هستند، [۲۱.VII]
و کوچکترینها آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را، می‌شمارد و کوچکتر کوچکتر را، یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را. [۲۰.VII]

بنابراین A، E را می‌شمارد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است.

لذا E و F و G و H که کوچکتر از A و B و C و D هستند با آنها به یک نسبت نیستند.

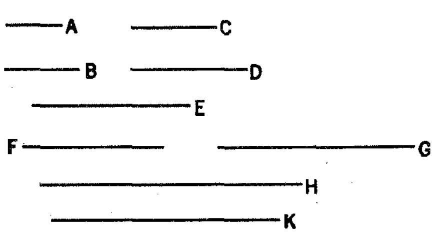
در نتیجه A و B و C و D کوچکترین اعدادی هستند که چنین نسبتی بین آنها برقرار است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

مطلوب یافتن اعدادی است به تناسب پیوسته و به تعداد خواسته‌شده که کوچکترین اعدادی باشند که نسبت مفروضی را دارند.

فرض می‌کنیم نسبت A به B نسبت مفروض با کوچکترین اعداد باشد؛ پس مطلوب پیدا کردن اعدادی است به تناسب پیوسته و به تعداد خواسته‌شده و کوچکترین اعدادی باشند که نسبت A به B را دارند.



فرض می‌کنیم تعداد اعداد خواسته شده چهار باشد. و فرض می‌کنیم از ضرب A در خودش C حاصل شود، و از ضرب A در B عدد D، و از ضرب B در خودش E؛ به علاوه فرض می‌کنیم از ضرب A در C و D و E، اعداد F و G و H حاصل شوند، و از ضرب B در E، عدد K به‌دست آید.

حال، چون از ضرب A در خودش عدد C حاصل شده است، و از ضرب A در B عدد D، بنابراین نسبت A به B مثل نسبت C است به D. [۱۷.VII]

باز، چون از ضرب A در B، D حاصل شده است، و از ضرب B در خودش E؛ بنابراین از ضرب A و B در B به ترتیب D و E به دست آمده‌اند؛ لذا نسبت A به B مثل نسبت D است به E. [۱۸.VII]

اما نسبت A به B مثل نسبت C است به D؛ بنابراین نسبت C به D هم مثل نسبت D است به E. و چون از ضرب A در C و D به ترتیب F و G حاصل شده است، بنابراین نسبت C به D مثل نسبت F است به G. [۱۷.VII]

اما نسبت C به D مثل نسبت A بود به B؛ پس نسبت A به B هم مثل نسبت F است به G.

باز، چون از ضرب A در D و E اعداد G و H حاصل شده‌اند، پس نسبت D به E مثل نسبت G است به H. [۱۷.VII]

اما نسبت D به E مثل نسبت A است به B، لذا نسبت A به B نیز مثل نسبت G است به H. و چون از ضرب A و B در E اعداد H و K حاصل شده‌اند، پس نسبت A به B مثل نسبت H است به K. [۱۷.VII]

اما نسبت D به E مثل نسبت A است به B، لذا نسبت A به B نیز مثل نسبت G است به H. و چون از ضرب A و B در E اعداد H و K حاصل شده‌اند، پس نسبت A به B مثل نسبت H است به K. [۱۸.VII]

اما نسبت A به B مثل نسبت F است به G و مثل نسبت G است به H. بنابراین نسبت F به G نیز مثل نسبت G است به H و مثل نسبت H است به K؛ در نتیجه C و D و E با هم و F و G و H و K با هم متناسب و به نسبت A به B هستند.

حال می‌گوییم این اعداد کوچکترین اعدادی هستند که چنین‌اند.

زیرا، چون A و B کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که نسبتی بین آنها برقرار است، و کوچکترین اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است نسبت به هم اول‌اند، [۲۲.VII]

بنابراین A و B نسبت به هم اول می‌شوند. و از ضرب اعداد A و B در خودشان به ترتیب اعداد C و E حاصل شده‌اند، و از ضرب A و B در C و E به ترتیب اعداد F و K؛ بنابراین C و E، و F و K به ترتیب نسبت به هم اول‌اند. [۲۷.VII]

اما، اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته باشند و اولین و آخرین آنها نسبت به هم اول باشند، این اعداد کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که چنین نسبتی بین آنها برقرار است. [۱.VIII]

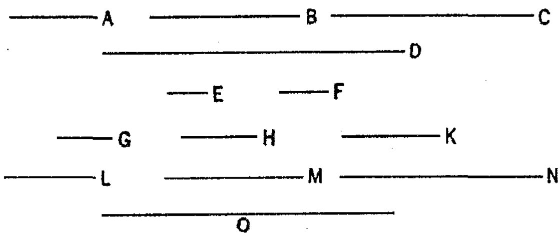
بنابراین C و D و E، و نیز F و G و H و K کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که نسبت A به B را دارند.

آنچه می‌خواستیم.

فرع. از اینجا روشن می‌شود که اگر سه عدد به تناسب پیوسته کوچکترین اعدادی باشند که نسبتی بین آنها برقرار است، اولین و آخرین آنها مربع‌اند، و اگر تعداد این اعداد چهار باشد، اولین و آخرین آنها مکعب‌اند.

قضیهٔ ۳

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته، کوچکترین اعدادی باشند که نسبتی بین آنها برقرار است، اولین و آخرین آنها نسبت به هم اول‌اند.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مثل A و B و C و D در تناسب پیوسته، کوچکترین اعداد از اعدادی باشند که نسبتی بین آنها برقرار است؛

می‌گوییم که اولین و آخرین آنها، A و D، نسبت به هم اول‌اند.

زیرا، فرض می‌کنیم دو عدد E و F، کوچکترین اعداد از اعدادی را که با A و B و C و D به یک نسبت‌اند، به دست آورده‌ایم، [۳۳.VII]

سپس سه عدد دیگر G و H و K را با همان ویژگی؛ و اعداد دیگر را، به‌طور پیوسته هر بار یکی بیشتر، [۲.VIII]

پیدا کرده‌ایم، تا اینکه تعداد اعداد یافته شده با تعداد A و B و C و D مساوی شده‌اند.

فرض می‌کنیم آنها را پیدا کرده‌ایم و L و M و N و O باشند.

حال، چون E و F کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که به یک نسبت‌اند، نسبت به هم اول‌اند. [۲۲.VII]

و چون اعداد E و F از ضرب در خود به ترتیب اعداد G و K را به دست داده‌اند، و از ضرب در G و K به ترتیب اعداد L و O را، [۲.VIII، ف.]

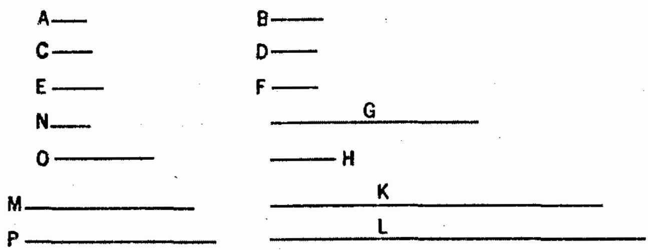
بنابراین هم G و K نسبت به هم اول‌اند و هم L و O. [۲۷.VII]

و، چون A و B و C و D کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که به یک نسبت‌اند و L و M و N و O کوچکترین اعدادی هستند که یک نسبت را با A و B و C و D دارند، و تعداد اعداد A و B و C و D با تعداد اعداد L و M و N و O مساوی است، بنابراین اعداد A و B و C و D به ترتیب با اعداد L و M و N و O مساوی‌اند؛ بنابراین A با L مساوی است و D با O. و L و O نسبت به هم اول‌اند، پس، A و D نیز نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

چند نسبت دلخواه از کوچکترین عددها داده شده‌اند. مطلوب یافتن اعدادی است به تناسب پیوسته که کوچکترین عددها با نسبتهای داده شده باشند.



فرض می‌کنیم که نسبتهای داده‌شده از کوچکترین اعداد، نسبتهای A به B و C به D و E به F باشند. پس، مطلوب یافتن اعدادی است به تناسب پیوسته که در نسبتهای A به B و C به D و E به F کوچکترین اعداد باشند.

فرض می‌کنیم G، کوچکترین عددی را که B و C می‌شمارند، پیدا کرده‌ایم. [۳۴.VII]
و، به تعداد دفعاتی که B، G را می‌شمارد A نیز H را بشمارد و به تعداد دفعاتی که C، G را می‌شمارد D نیز K را بشمارد.

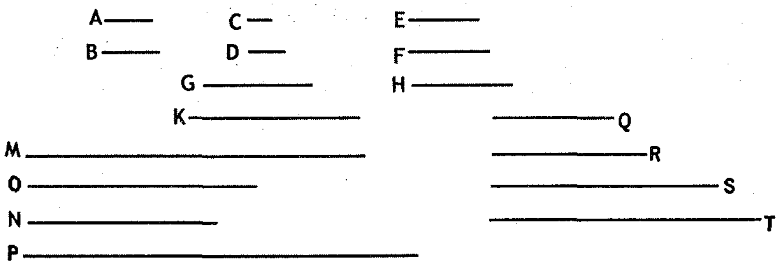
اما E یا K را می‌شمارد یا نمی‌شمارد.

ابتدا فرض می‌کنیم E، K را بشمارد. و به همان تعداد دفعاتی که E، K را می‌شمارد F هم L را بشمارد. اما، چون A به همان عده دفعاتی H را می‌شمارد که B، G را، بنابراین نسبت A به B مثل نسبت H است به G. [VII.تع.۲۰ و ۱۳.VII]
به همین دلیل هم نسبت C به D مثل نسبت G است به K، و نسبت E به F مثل نسبت K است به L؛ بنابراین H و G و K و L با نسبت A به B، با نسبت C به D، و با نسبت E به F به طور پیوسته متناسب‌اند. حالا می‌گوییم که این اعداد کوچکترین اعداد با این ویژگی نیز هستند. زیرا، اگر H و G و K و L کوچکترین اعدادی نباشند که با نسبتهای A به B، C به D، و E به F به طور پیوسته متناسب‌اند اعدادی مانند N و O و M و P چنین خواهند بود.

بنابراین، چون نسبت A به B مثل نسبت N است به O؛ و A و B کوچکترین اعدادند، و کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند و کوچکتر کوچکتر را می‌شمارد، یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را؛ بنابراین B، O را می‌شمارد. [۲۰.VII]

به همین دلیل C نیز O را می‌شمارد؛ پس B و C، O را می‌شمارند. لذا کوچکترین عددی نیز که B و C آن را می‌شمارند O را خواهد شمرد؛ [۳۵.VII]
اما G کوچکترین عددی است که B و C می‌شمارند؛ بنابراین G، O را می‌شمارد، عدد بزرگتر عدد کوچکتر را: که غیرممکن است. بنابراین، هیچ اعدادی کوچکتر از H و G و K و L وجود ندارند که با نسبتهای A به B، C به D، و E به F به طور پیوسته متناسب باشند.

اکنون، فرض می‌کنیم E، K را نشمارد.



گیریم M، کوچکترین عددی را که E و K می‌شمارند، پیدا کرده‌ایم. و به تعداد دفعاتی که K، M را می‌شمارد، H و G نیز به ترتیب N و O را بشمارند، و به تعداد دفعاتی که E، M را می‌شمارد، F نیز P را بشمارد.

چون H، N را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که G، O را؛ بنابراین نسبت H به G مثل نسبت N است به O. [۱۳.VII و تع. ۲۰]

اما نسبت H به G مثل نسبت A است به B؛ پس، نسبت A به B نیز مثل نسبت N است به O. به همین دلیل هم نسبت C به D مثل نسبت O است به M.

باز، چون E، M را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که F، P را، لذا نسبت E به F مثل نسبت M است به P؛ [۱۳.VII و تع. ۲۰]

بنابراین N و O و M و P با نسبتهای A به B، C به D، و E به F به طور پیوسته متناسب‌اند.

می‌گوییم که این اعداد کوچکترین اعداد در نسبتهای $A : B$ و $C : D$ و $E : F$ نیز هستند. زیرا، اگر چنین نباشد، اعدادی کمتر از N و O و M و P وجود دارند که با نسبتهای $A : B$، $C : D$، و $E : F$ به طور پیوسته متناسب‌اند. فرض می‌کنیم این اعداد Q و R و S و T باشند.

حال، چون نسبت Q به R مثل نسبت A است به B، و A و B کوچکترین اعدادند، و کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، یعنی صورت صورت را می‌شمارد و مخرج مخرج را، [۲۰.VII]

بنابراین B، R را می‌شمارد. به همین دلیل C نیز R را می‌شمارد؛ پس B و C، R را می‌شمارند. در این صورت، کوچکترین عددی نیز که B و C آن را می‌شمارند، R را خواهد شمرد. [۳۵.VII]

اما، G کوچکترین عددی است که B و C آن را می‌شمارند؛ بنابراین G، R را می‌شمارد. و،

نسبت G به R مثل نسبت K است به S: [۱۳.VII]

لذا K نیز S را می‌شمارد. اما، E نیز S را می‌شمارد؛ پس، E و K، S را می‌شمارند. در نتیجه کوچکترین عددی نیز که E و K آن را می‌شمارند S را خواهد شمرد. [۳۵.VII]

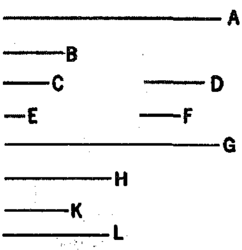
ولی M کوچکترین عددی است که E و K آن را می‌شمارند؛ بنابراین M، S را می‌شمارد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است.

بنابراین اعدادی کوچکتر از N و O و M و P وجود ندارند که با نسبتهای A به B، C به D، و E به F به طور پیوسته متناسب باشند. در نتیجه N و O و M و P کوچکترین اعدادی هستند که با نسبتهای $A : B$، $C : D$، $E : F$ به طور پیوسته متناسب‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

نسبت اعداد مسطح همچون نسبت حاصل‌ضرب (مؤلّفِ) نسبتهای اضلاع آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم A و B اعدادی مسطح باشند و اعداد C و D اضلاع A باشند و E و F اضلاع B.

می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت حاصل‌ضرب نسبتهای اضلاع آنهاست به یکدیگر. زیرا نسبتهای داده شده (نسبتهای اضلاع) نسبتهایی هستند که C به E دارد و D به F، فرض می‌کنیم کوچکترین اعداد G و H و K را که با نسبتهای $C : E$ و $D : F$ به طور پیوسته متناسب‌اند پیدا کرده‌ایم. در نتیجه، نسبت C به E مثل نسبت G است به H، و نسبت D به F مثل نسبت H است به K. [۴.VIII]

و فرض می‌کنیم از ضرب D در E، L حاصل شود.

اما، چون از ضرب D در C، A حاصل می‌شود، و از ضرب D در E، L؛ بنابراین نسبت C به E مثل نسبت A است به L. [۱۷.VII]

اما نسبت C به E مثل نسبت G است به H؛ بنابراین نسبت G به H نیز مثل نسبت A است به L.

باز، چون از ضرب E در D، L حاصل می‌شود، و به علاوه از ضرب E در F، B پیدا می‌شود، بنابراین نسبت D به F مثل نسبت L است به B. [۱۷.VII]

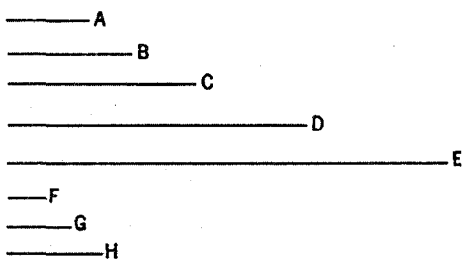
اما، نسبت D به F مثل نسبت H است به K؛ بنابراین نسبت H به K نیز مثل نسبت L است به B. اما ثابت شده بود که نسبت G به H مثل نسبت A است به L؛ بنابراین، طبق مساوات هموار، نسبت G به K مثل نسبت A است به B. [۱۴.VII]

اما نسبت G به K همان نسبت حاصل‌ضرب (مؤلّف) نسبتهای اضلاع است. بنابراین نسبت A به B نیز همان نسبت حاصل‌ضرب نسبتهای اضلاع است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته باشند و نخستین عدد دومی را نشمارد، هیچ‌یک از آنها هم دیگری را نخواهد شمرد.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مانند A و B و C و D و E به تناسب پیوسته باشند و A، B را نشمارد؛ می‌گوییم که هیچ‌یک از آنها هم دیگری را نخواهد شمرد.

اکنون روشن است که A و B و C و D و E یکدیگر را به‌ترتیب نمی‌شمارند؛ زیرا حتی A، B را نمی‌شمارد. پس می‌گوییم هیچ‌یک از این اعداد دیگری را نخواهد شمرد.

زیرا، فرض می‌کنیم A، C را بشمارد؛ و تعداد A و B و C هرچه باشد، به همان تعداد اعداد F و G و H، کوچکترین اعدادی را که با A و B و C یک نسبت را دارند، پیدا می‌کنیم.[VII.۳۳]

چون F و G و H با A و B و C یک نسبت را دارند و تعداد اعداد A و B و C با تعداد اعداد F و G و H مساوی است، لذا بنا بر نسبت مساوات هموار، نسبت A به C، مثل نسبت F است به H. [VII.۱۴]

و چون نسبت A به B مثل نسبت F است به G و A، B را نمی‌شمارد، پس F هم G را نمی‌شمارد؛ [VII.تع.۲۰]

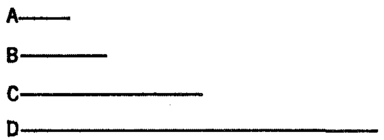
بنابراین F واحد نیست، زیرا واحد هر عددی را می‌شمارد. اما F و H نسبت به هم اول‌اند.[VIII.۳]

و نسبت F به H مثل نسبت A است به C؛ بنابراین A هم C را نمی‌شمارد. به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم، هیچ‌یک از آنها دیگری را نخواهد شمرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته باشند و اولی آخری را بشمارد، دومی را هم خواهد شمرد.



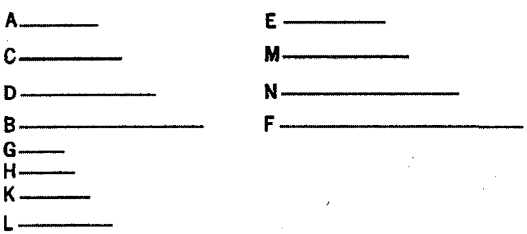
فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد، نظیر A و B و C و D به تناسب پیوسته باشند و A، D را بشمارد؛ می‌گوییم که A، B را نیز می‌شمارد.

زیرا، اگر A، B را نشمارد، هیچ‌یک از اعداد دیگر را هم نخواهد شمرد. [۶.VIII]
اما A، D را می‌شمارد. بنابراین A، B را نیز می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر بین دو عدد اعدادی به تناسب پیوسته با آنها درج شوند، آنگاه هرچند عدد به تناسب پیوسته بین آنها درج شوند، همان تعداد عدد نیز به تناسب پیوسته بین اعدادی که همان نسبت را با دو عدد اولیه دارند درج خواهد شد.



فرض می‌کنیم اعداد C و D بین دو عدد A و B به تناسب پیوسته با آنها درج شده‌اند، و فرض می‌کنیم E به F را با همان نسبت A به B ساخته‌ایم.

می‌گوییم که بین A و B هرچند عدد به تناسب پیوسته درج شوند، بین E و F نیز همان تعداد عدد به تناسب پیوسته درج خواهند شد.

زیرا تعداد A و B و C و D هرچه باشد، به همان تعداد اعداد G و H و K و L را پیدا می‌کنیم که کوچکترین اعدادی باشند که یک نسبت را با A و C و D و B دارند؛ [۳۳.VII]
بنابراین اولین و آخرین آنها، G و L، نسبت به هم اول‌اند. [۳.VIII]

اما، چون A و C و D و B با G و H و K و L به یک نسبت‌اند، و تعداد اعداد A و C و D و B با تعداد اعداد G و H و K و L یکی است، لذا به موجب نسبت مساوات هموار نسبت A به B مثل نسبت G است به L. [۱۴.VII]

اما نسبت A به B مثل نسبت E است به F. بنابراین نسبت G به L نیز مثل نسبت E است به F. اما G و L نسبت به هم اول‌اند، اولها کوچکترین نیز هستند؛ [۲۱.VII]
و کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است، اعدادی را که یک نسبت را با آنها

دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد و کوچکتر کوچکتر را، یعنی صورت صورت را و، مخرج مخرج را. [۲۰.VII]

بنابراین G، E را به همان تعداد از دفعاتی می‌شمارد که L، F را.

بعد، هر چند دفعه که G، E را بشمارد، فرض می‌کنیم H و K نیز، همان تعداد دفعه به ترتیب M و N را بشمارند. بنابراین اعداد G و H و K و L اعداد E و M و N و F را به همان تعداد از دفعات می‌شمارند. لذا G و H و K و L با E و M و N و F به یک نسبت‌اند. [VII.تع. ۲۰]

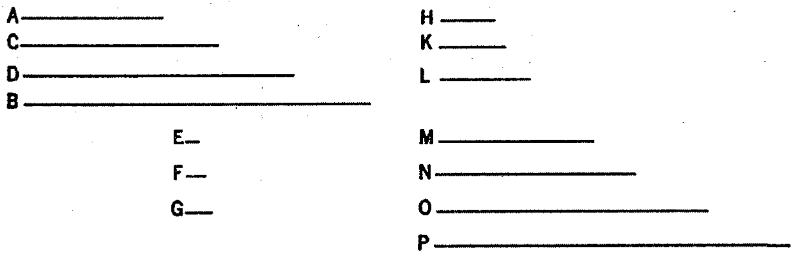
اما G و H و K و L با A و C و D و B به یک نسبت‌اند؛ بنابراین A و C و D و B نیز با E و M و Nو F به یک نسبت‌اند. ولی A و C و D و B به تناسب پیوسته‌اند. پس E و M و N و F نیز به تناسب پیوسته‌اند.

بنابراین هرچند عدد بین A و B به تناسب پیوسته با آنها درج شده باشند، همان تعداد عدد نیز بین E و F به تناسب پیوسته درج شده‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، و بین آنها اعدادی به تناسب پیوسته درج شوند، آنگاه، بین آنها. هرچند عدد به تناسب پیوسته درج شوند، همان تعداد عدد هم بین هر یک از آنها و یک واحد به تناسب پیوسته درج خواهند شد.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد نسبت به هم اول باشند، و C و D بین آنها به تناسب پیوسته درج شده باشند، و فرض می‌کنیم واحد E معین باشد؛ می‌گوییم که بین A و B هر چند عدد به تناسب پیوسته درج شوند، همان تعداد نیز بین هر یک از اعداد A و B و واحد E به تناسب پیوسته درج خواهد شد.

زیرا، فرض می‌کنیم دو عدد F و G، کوچکترین اعدادی را که با A و C و D و B به یک نسبت هستند، پیدا کرده‌ایم، سه عدد H و K و L را هم با همان ویژگی، و اعداد دیگر را متناوباً و با هر بار یکی بیشتر، تا اینکه تعداد آنها با تعداد A و C و D و B مساوی شود. [۲.VIII]

و، فرض می‌کنیم آنها را پیدا کرده‌ایم و آنها اعداد M و N و O و P باشند.

اکنون آشکار است که از ضرب F در خودش H حاصل شده است و از ضرب F در H، M، و از ضرب G در خودش L و از ضرب G در L، P حاصل شده است. [VIII.۲،ف.]

و چون M و N و O و P کوچکترین اعدادی هستند که یک نسبت را با F و G دارند، و A و C و D و B نیز کوچکترین اعدادی هستند که یک نسبت را با F و G دارند، [VIII.۱]

و تعداد اعداد M و N و O و P با تعداد اعداد A و C و D و B مساوی است، بنابراین M و N و O و P به ترتیب با A و C و D و B مساوی‌اند. لذا M با A مساوی است و P با B. اما چون از ضرب F در خودش H حاصل شده است، بنابراین F، H را به دفعاتی به تعداد واحدهای F می‌شمارد. اما واحد E نیز F را به دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد، بنابراین واحد E عدد F را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که F، H را.

لذا نسبت واحد E به عدد F مثل نسبت F است به H. [VII.تع.۲۰]

باز، چون از ضرب F در H، M حاصل شده است، بنابراین H، M را به دفعاتی به تعداد واحدهای F می‌شمارد.

اما واحد E نیز عدد F را به دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد؛ لذا واحد E، عدد F را به همان تعداد از دفعاتی می‌شمارد که H، M را.

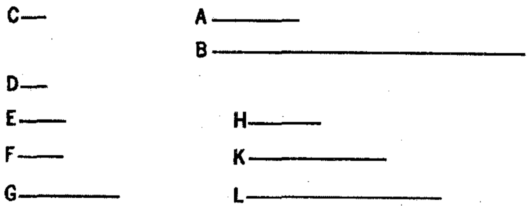
بنابراین نسبت واحد E به عدد F مثل نسبت H است به M. اما ثابت شده بود که نسبت واحد E به عدد F مثل نسبت F است به H؛ بنابراین نسبت واحد E هم به عدد F، مثل نسبت F است به H و مثل نسبت H است به M.

اما M با A مساوی است؛ بنابراین نسبت واحد E به عدد F مثل نسبت F است به H و مثل نسبت H است به A. به همین دلیل هم، نسبت واحد E به عدد G مثل نسبت G است به L و مثل نسبت L است به B. بنابراین بین A و B هرچند عدد به تناسب پیوسته درج شده باشد، همان تعداد عدد نیز بین هر یک از اعداد A و B و واحد E به تناسب پیوسته درج شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

اگر بین هر یک از دو عدد و یک واحد، اعدادی به تناسب پیوسته درج شوند، هرچند عدد که بین هر یک از آنها و واحد به تناسب پیوسته درج شوند، همان تعداد عدد نیز بین خود اعداد به تناسب پیوسته درج خواهند شد.



فرض می‌کنیم D و E، و F و G به ترتیب بین دو عدد A و B و واحد C، به تناسب پیوسته درج شوند؛ می‌گوییم هر چند عددکه بین هریک از اعداد A و واحد C، و B و واحد C به تناسب پیوسته درج شده باشند، همان تعداد عدد نیز بین A و B به تناسب پیوسته درج خواهند شد.

زیرا فرض می‌کنیم از ضرب D در F، H حاصل شود، و از ضرب D و F در H به ترتیب K و L. اما، چون نسبت واحد C به عدد D مثل نسبت D است به E. بنابراین واحد C عدد D را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که D، E را. [VII.تع. ۲۰]

اما، واحد C عدد D را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارد؛ بنابراین عدد D نیز E را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارد؛ لذا از ضرب D در خودش E حاصل می‌شود.

باز، چون نسبت C به عدد D مثل نسبت E است به A؛ بنابراین واحد C عدد D را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که E، A را.

اما واحد C عدد D را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارد؛ بنابراین E نیز A را به دفعاتی به تعداد واحدهای D می‌شمارد. لذا از ضرب D در E، A حاصل می‌شود.

به همین دلیل نیز از ضرب F در خودش G حاصل می‌شود و از ضرب F در G، B.

و، چون از ضرب D در خودش E و از ضرب D در F، H حاصل می‌شود، لذا نسبت D به F مثل نسبت E است به H. [۱۷.VII]

به همین دلیل نیز نسبت D به F مثل نسبت H است به G. [۱۸.VII]

بنابراین، نسبت E به H هم مثل نسبت H است به G.

باز، چون از ضرب D در اعداد E و H به ترتیب A و K حاصل می‌شود؛ بنابراین نسبت E به H مثل نسبت A است به K. [۱۷.VII]

اما نسبت E به H مثل نسبت Dاست به F؛ بنابراین نسبت D به F نیز مثل نسبت A است به K.

باز، چون از ضرب اعداد D و F در H به ترتیب K و L حاصل شده است، لذا نسبت D به F مثل نسبت K است به L. [۱۸.VII]

اما نسبت D به F مثل نسبت A است به K؛ بنابراین نسبت A به K نیز مثل نسبت K است به L.

به علاوه، چون از ضرب F در اعداد H و G به ترتیب L و B حاصل شده است، لذا نسبت H به G مثل نسبت L است به B. [۱۷.VII]

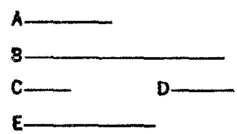
اما نسبت H به G مثل نسبت D است به F؛ بنابراین نسبت D به F نیز مثل نسبت L است به B. اما این نکته هم ثابت شده بود که نسبت D به F مثل نسبت A است به K و مثل نسبت K است به L. بنابراین نسبت A به K نیز مثل نسبت K است به L و مثل نسبت L است به B. لذا A و K و L و B به تناسب پیوسته هستند.

بنابراین همان تعداد عددی که بین هر یک از اعداد A و B و واحد C به تناسب پیوسته درج می‌شوند، همان تعداد نیز بین A و B به تناسب پیوسته درج خواهند شد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

بین دو عدد مربع، عددی وجود دارد که واسطهٔ هندسی بین آنهاست، و نسبت دو مربع مثل مربع نسبت ضلع یکی به ضلع دیگری است.



فرض می‌کنیم A و B اعداد مربع باشند، و C ضلع A باشد و D ضلع B. می‌گوییم که بین A و B یک واسطهٔ هندسی وجود دارد و نسبت A به B مثل مربع نسبت C به D است.

زیرا فرض می‌کنیم از ضرب C در D، E حاصل شود. اما چون A مربع است و C ضلع آن، پس از ضرب C در خودش A حاصل می‌شود. به همین دلیل نیز از ضرب D در خودش B حاصل می‌شود. پس، چون از ضرب C در اعداد C و D به ترتیب A و E حاصل شده است، بنابراین نسبت C به D مثل نسبت A است به E. [۱۷.VII]

به همین دلیل نیز نسبت C به D مثل نسبت E است به B. [۱۸ .VII]

بنابراین نسبت A به E نیز مثل نسبت E است به B. لذا بین دو عدد A و B یک عدد واسطهٔ هندسی وجود دارد. حال می‌گوییم که نسبت A به B نیز مثل مربع نسبت C به D است.

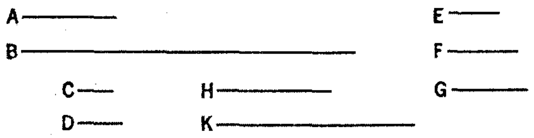
زیرا، چون A و E و B سه عدد به تناسب پیوسته‌اند، لذا نسبت A به B مثل مربع نسبت A به E است. [V. تع. ۹]

اما نسبت A به E مثل نسبت C به D است. بنابراین نسبت A به B مثل مربع نسبت ضلع C به ضلع D است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

بین دو عدد مکعب دو واسطهٔ هندسی وجود دارد، و نسبت مکعبها مثل مکعب نسبت اضلاع آنهاست به هم.



فرض می‌کنیم A و B اعداد مکعب باشند، و C ضلع A باشد و D ضلع B؛ می‌گوییم بین A و B دو واسطهٔ هندسی وجود دارد و نسبت A به B مثل مکعب نسبت C به D است.

زیرا گیریم از ضرب C در خودش E حاصل شده است و از ضرب C در D، F؛ و از ضرب D در خودش G. و فرض می‌کنیم از ضرب C و D در F به ترتیب H و K حاصل آیند.

حال، چون A مکعب و C یک ضلع آن است و از ضرب C در خودش E حاصل شده است، بنابراین از ضرب C در خودش E حاصل شده است و از ضرب C در E، A. به همین دلیل نیز از ضرب D در خودش G حاصل شده است، و از ضرب D در G، B. و، چون از ضرب C در اعداد C و D به ترتیب E و F حاصل شده‌اند، بنابراین نسبت C به D مثل نسبت E است به F. [۱۷.VII]

به همین دلیل هم نسبت C به D مثل نسبت F است به G. [۱۸.VII]

باز، چون از ضرب C در اعداد E و F به ترتیب A و H حاصل شده‌اند، بنابراین نسبت E به F مثل نسبت A است به H. [۱۷.VII]

اما نسبت E به F مثل نسبت C است به D. بنابراین نسبت C به D هم مثل نسبت A است به H.

باز، چون از ضرب اعداد C و D در F به ترتیب H و K حاصل شده‌اند، بنابراین نسبت C به D مثل نسبت H است به K. [۱۸.VII]

باز، چون از ضرب D در هر یک از اعداد F و G به ترتیب K و B حاصل شده‌اند، بنابراین نسبت F به G مثل نسبت K است به B. [۱۷.VII]

اما نسبت F به G مثل C است به D؛ بنابراین نسبت C به D نیز مثل A است به H و H است به K و K است به B. پس H و K دو واسطهٔ هندسی بین A و B هستند.

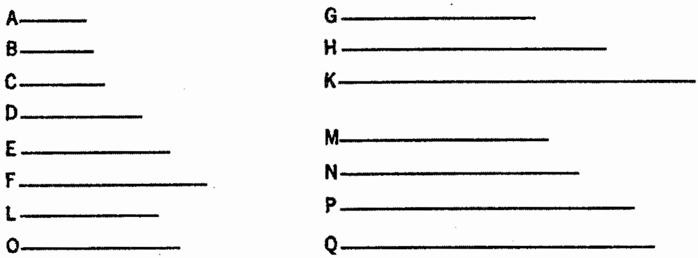
حال، می‌گوییم که نسبت A به B مثل مکعب نسبت C به D است. زیرا، چون A و H و K و B چهار عدد متناسب‌اند، بنابراین نسبت A به B مثل مکعب نسبت A است به H. [V.تع.۱۰]

اما، نسبت A به H مثل نسبت C است به D؛ بنابراین نسبت A به B مثل مکعب نسبت C به D است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته باشند، و هر یک از ضرب در خود عددی پدید آورد، حاصل‌ضربها متناسب خواهند بود. و اگر اعداد اولیه در این حاصل‌ضرب ضرب شوند، اعداد حاصل نیز متناسب خواهند بود.



فرض می‌کنیم اعدادی چند نظیر A و B و C به تناسب پیوسته‌اند، به طوری که نسبت A به B مثل نسبت B است به C. گیریم از ضرب هر یک از اعداد A و B و C در خود، به ترتیب اعداد D و E و F پدید آیند و از ضرب همین اعداد در D و E و F به ترتیب اعداد G و H و K.

می‌گوییم که D و E و F، و G و H و K به تناسب پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم از ضرب A در B، L حاصل شود، و از ضرب A و B در L به ترتیب M و N پدید آیند. و باز، فرض می‌کنیم از ضرب B در C، O حاصل شود، و از ضرب B و C در O به ترتیب P و Q پدید آیند.

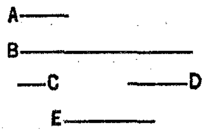
در این صورت به روشنی مشابه روش قبل، می‌توانیم ثابت کنیم که D و L و E، و همچنین G و M و N و H به تناسب پیوسته با نسبت A به B هستند. و به علاوه E و O و F، و همچنین H و P و Q و K به تناسب پیوسته با نسبت B به C.

اما نسبت A به B مثل نسبت B است به C؛ بنابراین D و L و E نیز همان نسبت را با E و O و F دارند، و به علاوه G و M و N و H با H و P و Q و K به یک نسبت‌اند. و تعداد D و L و E با تعداد E و O و F مساوی است، و تعداد G و M و N و H با تعداد H و P و Q و K؛ بنابراین طبق نسبت مساوات هموار، نسبت D به E مثل نسبت E است به F، و نسبت G به H مثل H است به K. [۱۴.VII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر مربعی، مربعی را بشمارد ضلع آن نیز ضلع آن را خواهد شمرد؛ اگر ضلعی، ضلعی را بشمارد مربع آن نیز مربع آن را خواهد شمرد.



فرض می‌کنیم A و B اعداد مربع باشند، و C و D اضلاع آنها، و فرض می‌کنیم A، B را بشمارد؛ می‌گوییم که C نیز D را می‌شمارد.

زیرا، فرض می‌کنیم از ضرب C در D، E حاصل شود؛ بنابراین A و E و B به تناسب پیوسته هستند با نسبت C به D. [VIII.۱۱]

و، چون A و E و B به تناسب پیوسته هستند و A، B را می‌شمارد، بنابراین A نیز E را می‌شمارد. [VIII.۷]

و، نسبت A به E مثل نسبت C است به D؛ بنابراین C نیز D را می‌شمارد. [VII. تع. ۲۰]

باز، فرض می‌کنیم C، D را بشمارد؛ می‌گوییم که A نیز B را می‌شمارد.

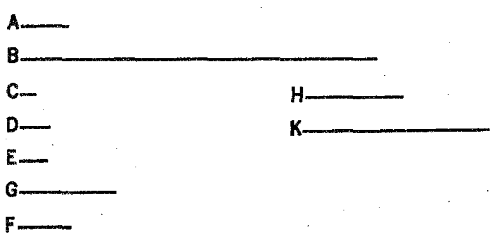
زیرا، در همین شکل می‌توانیم به روشی مشابه ثابت کنیم که A و E و B به تناسب پیوسته با نسبت C به D هستند. و، چون نسبت C به D مثل نسبت A است به E، و C، D را می‌شمارد، بنابراین A نیز E را می‌شمارد. [VII. تع. ۲۰]

و، A و E و B به تناسب پیوسته‌اند؛ بنابراین A نیز B را می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر عدد مکعبی عدد مکعبی را بشمارد، ضلع آن هم ضلع آن را خواهد شمرد؛ و اگر ضلع یکی ضلع دیگری را بشمارد، مکعب آن نیز مکعب آن را خواهد شمرد.



فرض می‌کنیم عدد مکعب A عدد مکعب B را بشمارد، و C ضلع A باشد و D ضلع B؛ می‌گوییم که C، D را می‌شمارد.

زیرا فرض می‌کنیم که از ضرب C در خودش E حاصل شود، و از ضرب D در خودش G؛ به علاوه، فرض می‌کنیم که از ضرب C در D، F حاصل آید، و از ضرب C و D در F، به ترتیب H و K حاصل شوند. حال، روشن است که E و F و G، و همچنین A و H و K و B به تناسب پیوسته هستند با نسبت C به D. [VIII.۱۱، ۱۲]

و، چون A و H و K و B به تناسب پیوسته هستند، و A، B را می‌شمارد، بنابراین A، H را نیز می‌شمارد. [VIII.۷]

و، نسبت A به H مثل نسبت C است به D، لذا C نیز D را می‌شمارد. [VII. تع. ۲۰]

حال، فرض می‌کنیم C، D را بشمارد، می‌گوییم که A نیز B را خواهد شمرد. زیرا، در همین

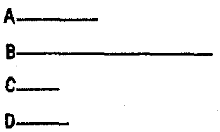
شکل، می‌توانیم به روشی مشابه ثابت کنیم که A و H و K و B به تناسب پیوسته هستند با نسبت C به D. و، چون C، D را می‌شمارد، و نسبت C به D مثل نسبت A است به H، بنابراین A نیز H را می‌شمارد، [VII.تع. ۲۰]

در نتیجه، A نیز B را می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

اگر عدد مربعی عدد مربعی را نشمارد، ضلع آن نیز ضلع آن را نمی‌شمارد؛ و اگر ضلع، ضلع را نشمارد، مربع آن نیز مربع آن را نمی‌شمارد.



فرض می‌کنیم A و B اعدادی مربع باشند، و C و D به ترتیب اضلاع آنها؛ و فرض می‌کنیم A، B را نشمارد؛ می‌گوییم که C هم D را نمی‌شمارد.

زیرا، اگر C، D را بشمارد، A نیز B را خواهد شمرد. [VIII.۱۴]

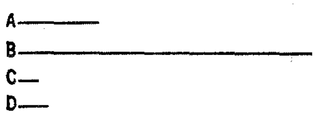
اما A، B را نمی‌شمارد. بنابراین C نیز D را نخواهد شمرد. باز، فرض می‌کنیم C، D را نشمارد؛ می‌گوییم که A نیز B را نخواهد شمرد. زیرا اگر A، B را بشمارد، C نیز D را خواهد شمرد. [VIII.۱۴]

اما C، D را نمی‌شمارد. پس A نیز B را نخواهد شمرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

اگر عدد مکعبی عدد مکعبی را نشمارد ضلع آن هم ضلع آن را نمی‌شمارد؛ و اگر ضلعی، ضلعی را نشمارد، مکعب آن نیز مکعب آن را نخواهد شمرد.



فرض می‌کنیم عدد مکعب A عدد مکعب B را نشمارد و C ضلع A باشد و D ضلع B؛ می‌گوییم که C، D را نخواهد شمرد. زیرا اگر C، D را بشمارد، A نیز B را خواهد شمرد؛ [VIII.۱۵]

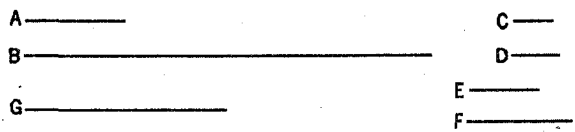
اما A، B را نمی‌شمارد؛ بنابراین C نیز D را نمی‌شمارد؛ باز، فرض می‌کنیم C، D را نشمارد؛ می‌گوییم که A نیز B را نخواهد شمرد. زیرا اگر A، B را بشمارد، C نیز D را خواهد شمرد؛ [VIII.۱۵]

اما C، D را نمی‌شمارد؛ پس A هم B را نمی‌شمارد.

آنچه که می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

بین دو عدد مسطح متشابه یک واسطهٔ هندسی وجود دارد؛ و نسبت دو عدد مسطح، مثل مربع نسبت اضلاع متناظر آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد مسطح متشابه باشند و اعداد C و D اضلاع A باشند و اعداد E و F اضلاع B. حال، چون اعداد مسطح متشابه اعدادی هستند که اضلاعشان متناسب‌اند، [VII.تع.۲۱]

بنابراین نسبت C به D مثل نسبت E است به F.

می‌گوییم که بین A و B یک واسطهٔ هندسی وجود دارد و نسبت A به B مثل مربع C به E یا مربع D به F است، یعنی مربع نسبت اضلاع متناظر آنها به یکدیگر. حال، چون نسبت C به D مثل نسبت E است به F، لذا به ابدال نسبت داریم نسبت C به E مثل نسبت D است به F. [VIII.۱۳]

و چون A مسطح است و C و D اضلاع آن هستند، لذا از ضرب D در C، A حاصل می‌شود. به همین دلیل نیز از ضرب E در F، B حاصل می‌شود.

حال، فرض می‌کنیم از ضرب D در E، G حاصل آید. پس، چون از ضرب D در C، A حاصل می‌شود، و از ضرب D در E، G؛ بنابراین نسبت C به E مثل نسبت A است به G.
[VII.۱۷]

اما نسبت C به E مثل D است به F، بنابراین نسبت D به F نیز مثل نسبت A است به G.

باز، چون از ضرب E در D، G حاصل شده است، و از ضرب E در F، B. بنابراین نسبت D به F مثل نسبت G است به B. [VII.۱۷]

اما ثابت شده بود که نسبت D به F مثل نسبت A است به G؛ بنابراین نسبت A به G مثل نسبت G است به B. لذا A و G و B به تناسب پیوسته هستند. پس بین A و B یک واسطهٔ هندسی موجود است.

حال، می‌گوییم که نسبت A به B مثل مربع نسبت اضلاعِ متناظر آنهاست به یکدیگر، یعنی مربع نسبت C به E یا مربع نسبت D به F.

زیرا، چون A و G و B به تناسب پیوسته‌اند، نسبت A به B مثل مربع نسبت A به G است. [V.تع.۹]

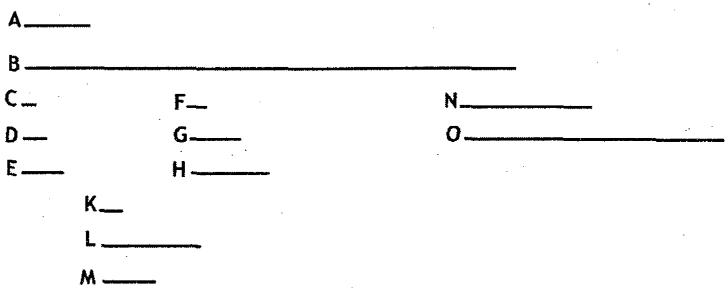
و نسبت A به G مثل نسبت C است به E و مثل نسبت D است به F.

بنابراین نسبت A به B هم مثل مربع نسبت C به E است یا مربع نسبت D به F.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

بین دو عدد مجسم متشابه دو واسطهٔ هندسی درج می‌شود؛ و نسبت هر عدد مجسم به عدد مجسم متشابهش مثل مکعب نسبت اضلاع متناظر آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد مجسم متشابه باشند و C و D و E اضلاع A باشند، و F و G و H اضلاع B. حال، چون اعداد مجسم متشابه اعدادی با اضلاع متناسب‌اند،[VII.تع.۲۱] بنابراین نسبت C به D مثل نسبت F است به G، و نسبت D به E، مثل نسبت G است به H.

می‌گوییم بین A و B دو واسطهٔ هندسی درج می‌شود و نسبت A به B مثل مکعب نسبت C به F، و D به G، و نیز E به H است.

زیرا فرض می‌کنیم از ضرب C در D، K حاصل شود و از ضرب F در G، L. اما چون نسبت C به D با نسبت F به G یکی است، و K حاصل‌ضرب C و D است، و L حاصل‌ضرب F و G؛ و K و L اعداد مسطح متشابه‌اند؛ [VII.تع.۲۱]

بنابراین بین K و L یک واسطهٔ هندسی وجود دارد، [۱۸.VIII]

و فرض می‌کنیم M آن واسطهٔ هندسی باشد. لذا، چنانچه در قضیهٔ قبل ثابت شد M حاصل‌ضرب D و F است. [۱۸.VIII]

اما چون از ضرب D در C عدد K حاصل شده است و از ضرب D در F، M. بنابراین نسبت C به F مثل نسبت K است به M. [۱۷.VII]

اما نسبت K به M مثل نسبت M است به L. بنابراین K و M و L به تناسب پیوسته به نسبت C به F هستند. و چون نسبت C به D مثل نسبت F است به G، به ابدال نسبت، نسبت C به F مثل نسبت D است به G. [۱۳.VII]

به همین دلیل نیز نسبت D به G مثل نسبت E است به H. بنابراین K و M و L به نسبت C به F، به نسبت D به G و نیز به نسبت E به H به طور پیوسته متناسب‌اند.

فرض می‌کنیم از ضرب E و H در M به ترتیب N و O حاصل شود. حال چون A یک

عدد مجسم است و C و D و E اضلاع آن هستند، لذا از ضرب E در حاصل‌ضرب C و D، A حاصل می‌شود. اما حاصل‌ضرب C و D مساوی با K است؛ بنابراین از ضرب E در K، A حاصل می‌شود.

به همین دلیل نیز از ضرب H در L، B حاصل می‌شود.

ولی، چون از ضرب E در K، A حاصل شده است، و به علاوه از ضرب E در M، N به دست آمده است، پس، نسبت K به M مثل نسبت A است به N. [۱۷.VII]

اما نسبت K به M مثل نسبت C است به F و مثل نسبت D است به G و نیز مثل نسبت E است به H؛ بنابراین نسبت C به F نیز مثل نسبت D به G و نسبت E به H و نسبت A به N است.

باز، چون از ضرب E و H در M به ترتیب N و O حاصل شده است، لذا نسبت E به H مثل نسبت N است به O، [۱۸.VII]

اما، چون نسبت E به H مثل نسبت C است به F و مثل نسبت D است به G؛ بنابراین نسبت C به F نیز مثل نسبت D است به G و نسبت E است به H و نسبت A است به N و نسبت N است به O.

باز، چون از ضرب H در M، O حاصل شده است، و از ضرب H در L هم B، بنابراین نسبت M به L مثل نسبت O است به B. [۱۷.VII]

اما نسبت M به L مثل نسبت C است به F و نسبت D است به G و نسبت E است به H. بنابراین نسبت C به F نیز مثل نسبت D است به G و نسبت E است به H، لذا نه فقط مثل نسبت O است به B بلکه همچنین مثل نسبت A است به N و نسبت N است به O. بنابراین A و N و O و B به نسبتهای اضلاع مذکور در فوق، به طور پیوسته متناسب‌اند. می‌گوییم که نسبت A به B نیز مثل مکعب نسبت اضلاع متناظر، یعنی C به F یا D به G و یا E به H است.

زیرا، چون A و N و O و B چهار عدد به تناسب پیوسته‌اند، لذا نسبت A به B مثل مکعب نسبت A به N است. [V.تع.۱]

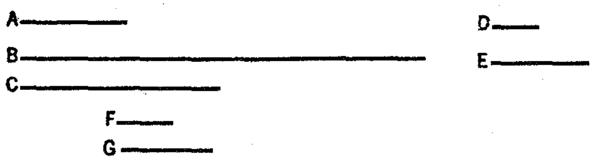
اما ثابت شده بود که نسبت A به N مثل نسبت C به F و نسبت D به G و نیز نسبت E است به H.

بنابراین نسبت A به B نیز مثل مکعب نسبت اضلاع متناظر یعنی نسبت C به F و D به G و نیز E به H است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

اگر بین دو عدد یک واسطهٔ هندسی درج شده باشد آن دو عدد اعداد مسطح متشابه‌اند.



فرض می‌کنیم یک واسطهٔ هندسی C بین دو عدد A و B درج شده است؛ می‌گوییم A و B اعداد مسطح متشابه‌اند.

D و E، کوچکترین اعدادی را که با A و C یک نسبت دارند، پیدا می‌کنیم؛ [۳۳.VII]

بنابراین D عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که E، C را. [۲۰.VII]

اکنون فرض می‌کنیم تعداد واحدهای F با تعداد دفعاتی که D، A را می‌شمارد یکی باشد؛ بنابراین از ضرب F در D، A حاصل می‌شود. لذا A مسطح است و D و F اضلاع آن هستند.

باز، چون D و E کوچکترین اعدادی هستند که با C و B یک نسبت دارند، بنابراین D، C را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که E، B را. [۲۰.VII]

حال فرض می‌کنیم تعداد واحدهای G با تعداد دفعاتی که E، B را می‌شمارد یکی باشد؛ بنابراین E، B را به دفعاتی به تعداد واحدهای G می‌شمارد. بنابراین از ضرب G در E، B حاصل می‌شود. لذا B مسطح است و E و G اضلاع آن هستند. پس، A و B اعدادی مسطح‌اند.

حال می‌گوییم که متشابه نیز هستند.

زیرا، چون از ضرب F در D، A پیدا شده و از ضرب F در E، C، بنابراین نسبت D به E مثل نسبت A به C، یعنی نسبت C به B است. [۱۷.VII]

باز، چون از ضرب E در F و G به ترتیب C و B حاصل شده است، بنابراین نسبت F به G مثل نسبت C است به B. [۱۷.VII]

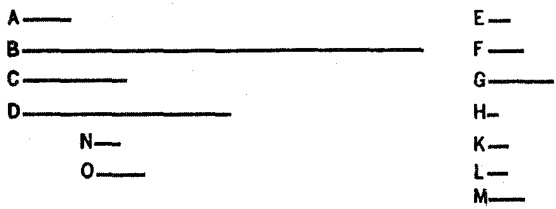
اما نسبت C به B مثل نسبت D است به E. بنابراین نسبت D به E نیز مثل نسبت F است به G. و به ابدال نسبت، نسبت D به F مثل نسبت E است به G. [۱۳.VII]

در نتیجه A و B اعداد مسطح متشابه‌اند، زیرا اضلاع آنها متناسب‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

اگر بین دو عدد دو واسطهٔ هندسی درج شوند آن دو عدد اعداد مجسم متشابه‌اند.



فرض می‌کنیم دو واسطهٔ هندسی C و D بین دو عدد A و B درج شده‌اند؛ می‌گوییم که A و B اعداد مجسم متشابه‌اند.

زیرا فرض می‌کنیم سه عدد E و F و G، کوچکترین اعدادی را که یک نسبت را با A و C و D دارند، پیدا کرده‌ایم؛ [۳۳.VII یا ۲ .VIII]

بنابراین اولین و آخرین آنها، E و G، نسبت به هم اول‌اند. [۳.VIII]

اما چون یک واسطهٔ هندسی F بین E و G درج شده است، پس E و G اعداد مسطح متشابه‌اند. [۲۰ .VIII]

حال، فرض می‌کنیم H و K اضلاع E باشند و L و M اضلاع G.

لذا، از قضیهٔ پیش از این قضیه آشکار می‌شود که E و F و G به طور پیوسته به نسبت H به L و نسبت K به M، متناسب‌اند.

حال، چون E و F و G کوچکترین اعدادی هستند که یک نسبت را با A و C و D دارند، و تعداد اعداد E و F و G با تعداد اعداد A و C و D یکی است، بنابراین، بنا به مساوات هموار، نسبت E به G مثل نسبت A است به D. [۱۴.VII]

اما E و G نسبت به هم اول‌اند و اعداد اول کوچکترین‌اند. [۲۱.VII]

و کوچکترین اعداد از اعدادی که نسبتی بین آنها برقرار است اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد و کوچکتر کوچکتر را، یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را. [۲۰ .VII]

بنابراین E، A را به همان تعداد از دفعاتی می‌شمارد که G، D را.

حال فرض می‌کنیم تعداد واحدهای N با تعداد دفعاتی که E، A را می‌شمارد یکی باشد، بنابراین از ضرب N در E، A حاصل می‌شود. اما E حاصل‌ضرب H و K است؛ بنابراین از ضرب N در حاصل‌ضرب H و K، A حاصل می‌شود. در نتیجه A مجسم است و H و K و N اضلاع آن هستند.

باز، چون E و F و G کوچکترین اعدادی هستند که یک نسبت را با C و D و B دارند، بنابراین E، C را به همان تعداد از دفعاتی می‌شمارد که G، B را.

حال، فرض می‌کنیم تعداد واحدهای O با تعداد دفعاتی که E، C را می‌شمارد یکی باشد. بنابراین G، B را به دفعاتی به تعداد واحدهای O می‌شمارد؛ لذا از ضرب O در G، B حاصل می‌شود. اما G مساوی حاصل‌ضرب L در M است؛ بنابراین از ضرب O در حاصل‌ضرب L و M، B به دست می‌آید. در نتیجه، B مجسم است و L و M و O اضلاع آن هستند. پس A و B مجسم‌اند.

می‌گوییم متشابه نیز هستند.

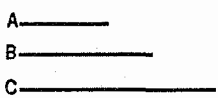
زیرا، چون از ضرب N و O در E، A و C حاصل شده‌اند، پس نسبت N به O مثل نسبت A به C، یعنی E است به F. [۱۸.VII]

اما نسبت E به F مثل نسبت H است به L و K است به M؛ بنابراین نسبت H به L مثل نسبت K است به M، و N است به O. و H و K و N اضلاع A هستند و O و L و M اضلاع B. پس A و B اعداد مجسم متشابه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

اگر سه عدد به تناسب پیوسته باشند، و اولی مربع باشد، سومی نیز مربع خواهد بود.



فرض می‌کنیم A و B و C سه عدد به تناسب پیوسته باشند و اولین عدد، A، مربع باشد؛ می‌گوییم که C، سومین عدد، نیز مربع است.

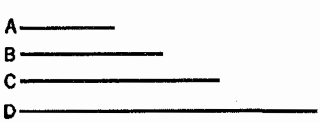
زیرا چون بین A و C یک واسطهٔ هندسی، B، وجود دارد، پس A و C اعداد مسطح متشابه‌اند. [۲۰.VIII]

اما A مربع است؛ پس C نیز مربع است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

اگر چهار عدد به تناسب پیوسته باشند، و اولی مکعب باشد، چهارمی نیز مکعب خواهد بود.



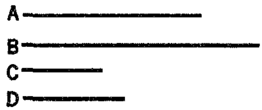
فرض می‌کنیم A و B و C و D به تناسب پیوسته باشند، و A مکعب باشد، می‌گوییم D نیز مکعب است. زیرا، چون بین A و D دو واسطهٔ هندسی B و C وجود دارند، لذا A و D اعداد مجسم متشابه‌اند، [۲۱.VIII]

اما A مکعب است، پس D نیز مکعب است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

اگر نسبت دو عدد به یکدیگر مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع باشد، و عدد اولی مربع باشد، دومی نیز مربع است.



فرض می‌کنیم نسبت دو عدد A و B به هم مثل نسبت عدد مربع C باشد به عدد مربع D، و A مربع باشد، می‌گوییم B نیز مربع است. زیرا، چون C و D مربع‌اند، پس C و D اعداد مسطح متشابه‌اند.

پس یک واسطهٔ هندسی بین C و D درج می‌شود، [۱۸.VIII]

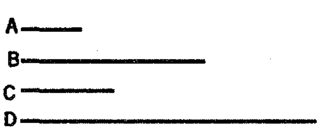
و نسبت C به D مثل نسبت A است به B. بنابراین یک واسطهٔ هندسی بین A و B نیز درج می‌شود. [۸.VIII]

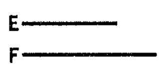
و A مربع است در نتیجه B نیز مربع است. [۲۲.VIII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

اگر نسبت دو عدد به یکدیگر مثل نسبت یک عدد مکعب به یک عدد مکعب باشد، و اولی مکعب باشد، دومی نیز مکعب خواهد بود.





فرض می‌کنیم نسبت دو عدد A و B به یکدیگر مثل نسبت یک عدد مکعب C به یک عدد مکعب D است، و فرض می‌کنیم A مکعب است، می‌گوییم B نیز مکعب است. زیرا، چون C و D مکعب‌اند، پس اعداد مجسم متشابه‌اند، بنابراین دو واسطهٔ هندسی بین آنها درج می‌شود. [۱۹.VIII]

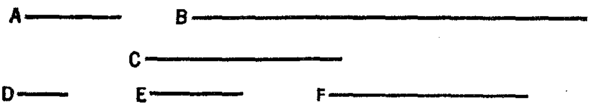
و هرچند عدد که بین C و D به تناسب پیوسته درج شود، همان تعداد عدد نیز بین اعدادی درج می‌شود که همان نسبت را با آنها دارند. [۸.VIII]

لذا دو واسطهٔ هندسی نیز بین A و B درج می‌شود. فرض می‌کنیم E و F این دو واسطه باشند. پس، چون چهار عدد A و E و F و B به تناسب پیوسته هستند، و A مکعب است، پس B نیز مکعب است. [۲۳.VIII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

نسبت اعداد مسطح متشابه به یکدیگر مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع.



فرض می‌کنیم A و B اعداد مسطح متشابه‌اند، می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع. زیرا، چون A و B اعداد مسطح متشابه‌اند، بنابراین یک واسطهٔ هندسی بین A و B درج می‌شود. [۱۸.VIII]

فرض می‌کنیم C آن واسطهٔ هندسی باشد؛ و اعداد D و E و F، کوچکترین اعدادی را که با A و C و B یک نسبت را دارند پیدا می‌کنیم. [۳۳.VII یا ۲.VIII]

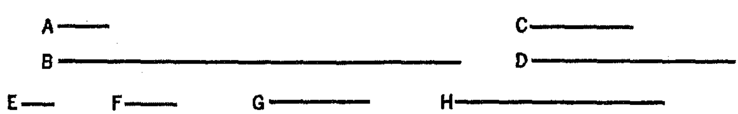
بنابراین اولین و آخرین آنها، D و F، مربع‌اند. [۲.VIII،ف.]

و چون نسبت D به F مثل نسبت A است به B، و D و F مربع هستند، لذا نسبت A به B همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

نسبت اعداد مجسم متشابه به یکدیگر، مثل نسبت یک عدد مکعب است به یک عدد مکعب.



فرض می‌کنیم A و B اعداد مجسم متشابه‌اند؛ می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت یک عدد مکعب است به یک عدد مکعب. زیرا، چون A و B اعداد مجسم متشابه‌اند، بنابراین دو واسطهٔ هندسی بین A و B درج می‌شود. [۱۹.VIII]

فرض می‌کنیم C و D آن دو واسطهٔ هندسی باشند، و E و F و G و H کوچکترین اعدادی را که یک نسبت را با A و C و D و B دارند، و تعدادشان با آنها مساوی است پیدا می‌کنیم، [۳۳.VII یا ۲.VIII]

بنابراین اولین و آخرین آنها، E و H، مکعب‌اند. [۲.VIII،ف.]

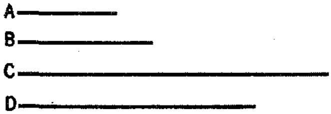
و نسبت E به H مثل A است به B. بنابراین نسبت A به B نیز مثل نسبت یک عدد مکعب است به یک عدد مکعب.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ نهم

قضیهٔ ۱

اگر دو عدد مسطح متشابه در یکدیگر ضرب شوند، حاصل‌ضرب عددی است مربع.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد مسطح متشابه باشند و از ضرب A در B عدد C حاصل شود.

می‌گوییم که C یک عدد مربع است.

زیرا فرض می‌کنیم که از ضرب A در خودش D حاصل شود. پس D مربع است.

از آنجا که از ضرب A در خودش D حاصل شده است و از ضرب در B، C. لذا نسبت A به B مثل نسبت D است به C. [۱۷.VII]

و چون A و B دو عدد مسطح متشابه‌اند، پس یک واسطهٔ هندسی بین A و B درج می‌شود. [۱۸.VIII]

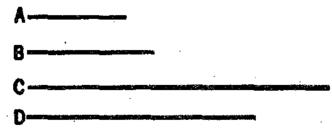
اما اگر بین دو عدد، اعدادی به‌تناسب پیوسته با آنها درج‌شوند، تعداد آنها هرچه باشد، همان تعداد عدد نیز به‌تناسب پیوسته بین اعدادی درج می‌شود که با اعداد اولیه به‌یک نسبت‌اند.[۸.VIII]

بنابراین یک واسطهٔ هندسی بین C و D نیز درج می‌شود. و، D مربع است؛ بنابراین C نیز مربع است. [۲۲.VIII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

اگر از ضرب دو عدد، عدد مربعی حاصل آید، آن دو عدد مسطح متشابه‌اند.



فرض می‌کنیم A و B دو عدد باشند که حاصل‌ضرب آنها عددی است مربع مانند C؛ می‌گوییم که A و B اعداد مسطح متشابه‌اند. زیرا فرض می‌کنیم از ضرب A در خودش D حاصل شده است؛ پس D مربع است. اما چون از ضرب A در خودش D حاصل شده است و از ضرب در B، C، بنابراین نسبت A به B مثل نسبت D است به C. [۱۷.VII]

و، چون D مربع است و C نیز مربع است، لذا D و C اعداد مسطح متشابه‌اند. بنابراین یک واسطهٔ هندسی بین D و C درج می‌شود. [۱۸.VIII]

و نسبت D به C مثل نسبت A است به B؛ بنابراین یک واسطهٔ هندسی نیز بین A و B درج می‌شود. [۸.VIII]

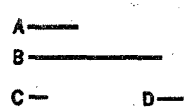
اما اگر یک واسطهٔ هندسی بین دو عدد درج شود آن دو عدد، اعداد مسطح متشابه‌اند؛[۲۰.VIII]

بنابراین A و B اعداد مسطح متشابه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر عدد مکعبی در خودش ضرب شود، عدد حاصل عددی است مکعب.



فرض می‌کنیم از ضرب عدد مکعب A در خودش B حاصل شود؛ می‌گوییم که B عددی است مکعب.

زیرا فرض می‌کنیم که ضلع A، یعنی C را پیدا کرده‌ایم. و فرض می‌کنیم از ضرب C در خودش D حاصل شود. پس روشن است که از ضرب C در D، A حاصل می‌شود. اما، چون از ضرب C در خودش D حاصل شده است، بنابراین C، D را به دفعاتی به تعداد واحدهای خودش می‌شمارد. اما واحد نیز عدد C را به دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد. لذا نسبت واحد به C مثل نسبت C است به D. [VII.تع.۲۰]

باز، چون از ضرب C در D، A حاصل شده است، بنابراین D، A را به دفعاتی به تعداد واحدهای C می‌شمارد. اما، واحد نیز C را به دفعاتی به تعداد واحدهای C می‌شمارد؛ بنابراین نسبت واحد به C مثل نسبت D است به A. ولی، نسبت واحد به C مثل نسبت C است به D؛ بنابراین نسبت واحد به C مثل نسبت C است به D، و D است به A. بنابراین بین واحد و عدد A دو واسطهٔ هندسی C و D به تناسب پیوسته درج شده‌اند.

باز، چون از ضرب A در خودش B حاصل شده است، بنابراین A، B را به دفعاتی به تعداد واحدهای خودش می‌شمارد. اما واحد نیز A را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد؛ بنابراین نسبت واحد به A مثل نسبت A است به B. [VII.تع. ۲۰]

اما بین واحد و A دو واسطهٔ هندسی درج شده‌اند، بنابراین بین A و B نیز دو واسطهٔ هندسی درج خواهند شد. [۸.VIII]

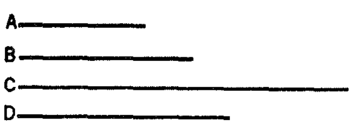
اما، اگر بین دو عدد دو واسطهٔ هندسی درج شود، و اولی مکعب باشد دومی نیز مکعب خواهد بود. [۲۳.VIII]

و A مکعب است، بنابراین B نیز مکعب است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر عدد مکعبی در عدد مکعبی ضرب شود، حاصل‌ضرب عددی است مکعب.



فرض می‌کنیم از ضرب عدد مکعب A در عدد مکعب B، عدد C حاصل شود. می‌گوییم C مکعب است.

زیرا از ضرب A در خودش D حاصل می‌شود؛

بنابراین D مکعب است. [۳.IX]

و، چون از ضرب A در خودش D حاصل شده است، و از ضرب در B، C؛ لذا نسبت A به B مثل نسبت D است به C. [۱۷.VII]

و، چون A و B مکعب هستند، پس اعداد مجسم متشابه‌اند. بنابراین دو واسطهٔ هندسی بین A و B درج می‌شود. [۱۹.VIII]

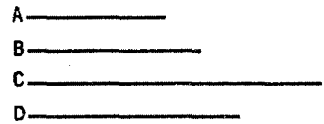
لذا، دو واسطهٔ هندسی نیز بین C و D درج خواهد شد. [۸.VIII]

و D مکعب است؛ بنابراین C نیز مکعب است. [۲۳.VIII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

اگر حاصل‌ضرب عدد مکعبی در یک عدد، عددی مکعب باشد، مضروب فیه نیز عددی است مکعب.



فرض می‌کنیم از ضرب عدد مکعب A در عددی مانند B، عدد مکعب C حاصل شده است؛ می‌گوییم که B عددی است مکعب.

زیرا، فرض می‌کنیم از ضرب A در خودش D به دست آید؛ بنابراین D عددی است مکعب. [۳.IX]

اما چون از ضرب A در خودش D حاصل شده است، و از ضرب در B، C.
بنابراین نسبت A به B مثل نسبت D است به C. [۱۷.VII]

و چون D و C مکعب هستند، پس اعداد مجسم متشابه‌اند. بنابراین دو واسطهٔ هندسی بین D و C درج می‌شود. [۱۹.VIII]

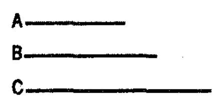
و نسبت D به C مثل نسبت A است به B؛ بنابراین دو واسطهٔ هندسی بین A و B نیز درج می‌شود. [۸.VIII]

و A مکعب است، پس B نیز مکعب است. [۲۳.VIII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر از ضرب عددی در خودش عدد مکعبی حاصل شود، خود آن عدد نیز مکعب است.



فرض می‌کنیم که از ضرب A در خودش عدد مکعب B حاصل شود؛ می‌گوییم که A نیز مکعب است.

زیرا، فرض می‌کنیم که از ضرب A در B، C به دست آید.

لذا، چون از ضرب A در خودش B حاصل شده است، و از ضرب در B، C، بنابراین C مکعب است. و، چون از ضرب A در خودش B حاصل شده است، بنابراین A، B را به دفعاتی به تعداد واحدهای خودش می‌شمارد. ولی واحد نیز A را به دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد. بنابراین نسبت واحد به A مثل نسبت A است به B. [VII.تع. ۲۰]

و چون از ضرب A در B، C حاصل شده است، بنابراین B، C را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد. اما واحد نیز A را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد، بنابراین نسبت واحد به A مثل نسبت B است به C. [VII.تع. ۲۰]

اما نسبت واحد به A مثل نسبت A است به B. بنابراین نسبت A به B نیز مثل نسبت B است به C. و، چون B و C مکعب‌اند، پس اعداد مجسم متشابه‌اند. بنابراین دو واسطهٔ هندسی بین B و C موجودند. [۱۹.VIII]

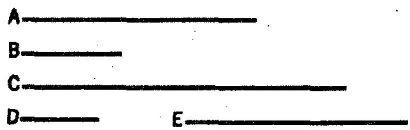
و، نسبت B به C مثل نسبت A است به B.

پس دو واسطهٔ هندسی نیز بین A و B وجود دارد، [۸.VIII]
و B مکعب است، بنابراین A نیز مکعب است. [۲۳.VIII]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر عدد مرکبی در عددی ضرب شود، حاصل‌ضرب عددی است مجسم.



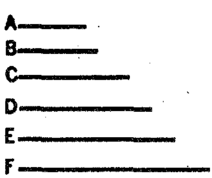
فرض می‌کنیم از ضرب عدد مرکب A در عدد B، عدد C حاصل شود، می‌گوییم C عددی است مجسّم. زیرا چون A مرکب است، عددی آن را می‌شمارد. [VII.تع.۱۳]

فرض می‌کنیم این عدد D باشد که تعداد واحدهای E با تعداد دفعاتی که D، A را می‌شمارد یکی باشد. پس، چون D، A را به دفعاتی به تعداد واحدهای E می‌شمارد، بنابراین از ضرب E در D، A حاصل می‌شود. [VII.تع.۱۵]
و، چون از ضرب A در B، C حاصل می‌شود، و A حاصل‌ضرب D و E است. بنابراین از ضرب حاصل‌ضرب D و E در B عدد C حاصل می‌شود. لذا C عددی است مجسم و D و E و B اضلاع آن هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر تعداد دلخواهی عدد با شروع از یک واحد به تناسب پیوسته باشند، سومین عدد و نیز اعدادی که پس از آن یک در میان پشت سر هم می‌آیند مربع خواهند بود؛ چهارمین عدد و نیز همهٔ اعدادی که پس از آن دو در میان می‌آیند مکعب‌اند؛ و هفتمین عدد در عین حال هم مربع است و هم مکعب، همچنین هستند اعدادی که پس از آن پنج در میان می‌آیند.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مثل A و B و C و D و E و F، با شروع از واحد به تناسب پیوسته باشند؛ می‌گوییم که B، سومین عدد، مربع است و همچنین‌اند همهٔ اعدادی که یک در میان می‌آیند؛ C، چهارمین عدد، مکعب است و همچنین‌اند همهٔ اعدادی که دو در میان می‌آیند؛ و F، هفتمین عدد، در عین حال هم مربع است و هم مکعب، و همچنین‌اند همهٔ اعدادی که پنج در میان ظاهر می‌شوند.

زیرا، چون نسبت واحد به A مثل نسبت A است به B، لذا واحد عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که A، B را. [VII.تع.۲۰]

اما واحد عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد، پس A نیز B را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد؛ بنابراین از ضرب A در خودش B حاصل می‌شود؛ پس، B مربع است. و چون B و C و D به تناسب پیوسته هستند و B مربع است، پس D نیز مربع است. [۲۲.VIII]

به همین دلیل F نیز مربع است.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که همهٔ اعدادی که یک در میان می‌آیند مربع‌اند.

حال می‌گوییم که C، چهارمین عدد، مکعب است و همچنین‌اند همهٔ اعدادی که دو در میان می‌آیند. زیرا، چون نسبت واحد به A مثل B است به C؛ بنابراین واحد عدد A را به همان عده دفعاتی می‌شمارد که B، C را. اما، واحد عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد؛ بنابراین B نیز C را به دفعاتی به تعداد واحدهای A می‌شمارد. لذا از ضرب A در B، C حاصل می‌شود.

پس چون از ضرب A در خودش B حاصل می‌شود و از ضرب A در B، C؛ بنابراین C مکعب است.

و چون C و D و E و F به‌تناسب پیوسته هستند و C مکعب است، بنابراین F نیز مکعب است. [۲۳.VIII]

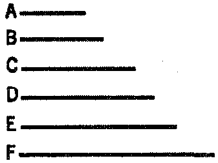
اما ثابت شده بود که F مربع هم هست؛ بنابراین هفتمین عدد، هم مربع است و هم مکعب.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که همهٔ اعدادی نیز که پس از آن پنج در میان می‌آیند هم مربع‌اند و هم مکعب.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

اگر تعداد دلخواهی عدد با شروع از واحد به تناسب پیوسته باشند، و عدد بعد از واحد مربع باشد، بقیه نیز همگی مربع خواهند بود، و اگر عدد بعد از واحد مکعب باشد، بقیه نیز همگی مکعب خواهند بود.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد، مانند A و B و C و D و E و F از واحد شروع شده و به تناسب پیوسته‌اند، و فرض می‌کنیم که A، عدد بعد از واحد، مربع است. می‌گوییم که بقیهٔ اعداد نیز همگی مربع‌اند.

هم‌اکنون ثابت شده که B، سومین عدد ابتدا از واحد، مربع است، و همچنین‌اند همهٔ آنها که یک در میان قرار گرفته‌اند. [۸.IX]

می‌گوییم که بقیه، همگی مربع‌اند.

زیرا، چون A و B و C به تناسب پیوسته‌اند، و A مربع است، لذا C نیز مربع است. [۲۲.VIII]
باز، چون B و C و D به تناسب پیوسته هستند، و B مربع است، D نیز مربع خواهد بود. [۲۲.VIII]
به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که بقیهٔ اعداد همگی مربع‌اند. حال، فرض می‌کنیم A مکعب باشد. می‌گوییم که بقیهٔ اعداد نیز همگی مکعب‌اند. اما ثابت کرده بودیم که C، چهارمین عدد از واحد مکعب است، و همچنین‌اند اعدادی که دو در میان هستند. [۸.IX]
می‌گوییم که بقیه اعداد همگی مکعب‌اند.

زیرا، چون نسبت واحد به A مثل A است به B، بنابراین واحد عدد A را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که A، B را.

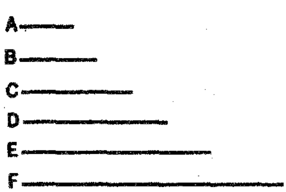
اما واحد عدد A را به دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد؛ لذا A نیز B را به دفعاتی به تعداد واحدهای خود می‌شمارد؛ بنابراین از ضرب A در خودش B حاصل می‌شود. و A مکعب است، ولی اگر عدد مکعبی در خودش ضرب شود حاصل‌ضرب عددی است مکعب؛ [۳.IX]
بنابراین B نیز مکعب است. و، چون چهار عدد A و B و C و D به تناسب پیوسته هستند، و A مکعب است، D نیز مکعب است. [۲۳.VIII]

به همین دلیل، E نیز مکعب است، و همچنین بقیه نیز همگی مکعب‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

اگر تعداد دلخواهی عدد، با شروع از واحد، به تناسب پیوسته باشند و عدد بعد از واحد مربع نباشد، هیچ‌یک از اعداد دیگر مربع نخواهد بود به استثنای سومی با شروع از واحد، و همهٔ آنهایی که یک در میان آمده‌اند؛ و اگر عدد بعد از واحد مکعب نباشد، هیچ‌یک از اعداد دیگر مکعب نخواهد بود به استثنای چهارمی با شروع از واحد، و همهٔ آنهایی که دو در میان پس از آن آمده‌اند.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد نظیر A و B و C و D و E و F با شروع از واحد به تناسب پیوسته‌اند، و A، عدد بعد از واحد، مربع نیست. می‌گوییم که هیچ‌یک از اعداد دیگر نیز مربع نیستند، به استثنای سومی، <و آنها که یک در میان آمده‌اند>.

زیرا فرض می‌کنیم، در صورت امکان، C مربع باشد. اما B نیز مربع است؛ [۸.IX]
[بنابراین نسبت B به C مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع]. و نسبت B به C همچون نسبت A به B است؛ لذا نسبت A به B مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ [لذا A و B اعداد مسطح متشابه‌اند]. [۲۶.VIII، و عکس آن]

و B مربع است؛ بنابراین A نیز مربع است؛ که مغایر با فرض است. بنابراین C مربع نیست. همچنین می‌توان ثابت کرد که هیچ‌یک از اعداد دیگر مربع نیست، بجز سومین عدد و اعدادی که یک در میان آمده‌اند.

فرض می‌کنیم A مکعب نباشد. می‌گوییم هیچ‌یک از اعداد دیگر مکعب نیست، جز عدد چهارم و اعدادی که دو در میان آمده‌اند.

زیرا فرض می‌کنیم، در صورت امکان، D مکعب باشد. در این صورت C نیز مکعب است؛ زیرا چهارمین عدد با شروع از واحد است. [۸.IX]

و چون نسبت C به D مثل نسبت B است به C، پس نسبت B به C نیز مثل نسبت یک مکعب است به یک مکعب؛ و C مکعب است، بنابراین B نیز مکعب است. [۲۵.VIII]

و، چون نسبت واحد به A مثل نسبت A است به B، و واحد A رابه دفعاتی به تعداد واحدهای آن می‌شمارد، بنابراین A نیز B را به دفعاتی به تعداد واحدهای خود می‌شمارد، لذا از ضرب A در خودش عدد مکعب B حاصل می‌شود. اما اگر از ضرب عددی در خودش یک عدد مکعب حاصل آید، آن عدد خود، مکعب است. [۶.IX]

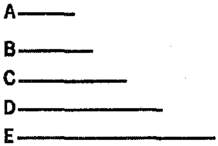
بنابراین A نیز مکعب است، که مغایر با فرض است. لذا D مکعب نیست.

همچنین می‌توان ثابت کرد که هیچ‌یک از اعداد دیگر مکعب نیست، جز چهارمین عدد و اعدادی که دو در میان آمده‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

اگر تعداد دلخواهی عدد، با شروع از یک واحد، به تناسب پیوسته باشند کوچکترین عدد بزرگترین عدد را برحسب یکی از اعدادی که در همین رشته عدد پیش از آخرین عدد آمده، می‌شمارد.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد، مانند B و C و D و E باشند که پس از واحد A آمده‌اند و به تناسب پیوسته هستند؛ می‌گوییم که B، کوچکترین عدد از اعداد B و C و D و E، عدد E را برحسب یکی از اعداد C و D می‌شمارد.

زیرا، چون نسبت واحد A به B مثل نسبت D است به E؛ بنابراین واحد A عدد B را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که D، E را. لذا، به ابدال نسبت، واحد A عدد D را به همان عده دفعاتی می‌شمارد که B، E را. [۱۵.VII]

اما واحد A، D را برحسب واحدهای آن می‌شمارد؛ بنابراین B نیز E را برحسب واحدهای

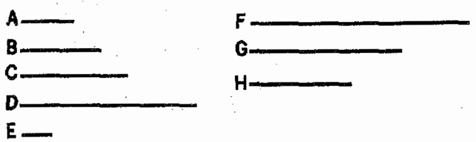
D می‌شمارد؛ پس عدد کوچکتر B عدد بزرگتر E را برحسب عددی از آن اعداد می‌شمارد که در همین رشته عدد، پیش از آخرین عدد آمده است.

فرع. روشن است که جای عدد شمارنده، با احتساب واحد، هر جا که باشد، همان‌جا را هم عددی دارد که عدد شمرده شده را، با احتساب عدد شمرده شده، در جهت عکس (یعنی پیش از آن) می‌شمارد.[۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

اگر تعداد دلخواهی عدد با شروع از یک واحد به تناسب پیوسته باشند، آخرین عدد با هر چند عدد اولی که شمرده شود، عدد پس از واحد نیز با همان اعداد شمرده خواهد شد.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مانند A و B و C و D با شروع از یک واحد به تناسب پیوسته‌اند؛ می‌گوییم که D با هر چند عدد اولی که شمرده شود، A نیز با همان اعداد اول شمرده می‌شود.

زیرا فرض می‌کنیم D با عدد اولی مانند E شمرده شود. می‌گوییم که E، A را می‌شمارد. زیرا، فرض می‌کنیم که E، A را نشمارد؛ چون E اول است، و هر عدد اول نسبت به هر عددی که آن را نشمارد اول است؛ [۲۹.VII]

بنابراین E و A نسبت به هم اول‌اند. و، چون E، D را می‌شمارد، فرض می‌کنیم آن را برحسب F بشمارد؛ لذا از ضرب E در F، D حاصل می‌شود.

باز، چون A، D را برحسب واحدهای C می‌شمارد؛ [۱۱.IX و ف.]

بنابراین از ضرب A در C، D حاصل می‌شود.

اما، به‌علاوه، از ضرب E در F نیز D حاصل شده است؛ بنابراین حاصل‌ضرب A و C با حاصل‌ضرب E و F مساوی است. بنابراین نسبت A به E مثل نسبت F است به C. [۱۹.VII]

اما A و E نسبت به هم اول و کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که با آنها به یک نسبت‌اند، [۲۱.VII]

و کوچکترینها آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، یعنی صورت صورت را می‌شمارد و مخرج مخرج را. [۲۰.VII]

بنابراین E، C را می‌شمارد.

۱. یعنی اگر در تصاعد هندسی $a, a^2, \dots a^r, a^{r+1}, \dots, a^n$ عدد a^r عدد a^n را بشمارد، خواهیم داشت $a^n = a^r \cdot a^{n-r}$ که در آن a^{n-r} عددی است که عدد شمرده شده (a^n) بر حسب آن نیز شمرده می‌شود. درواقع این فرع از لحاظ جبری با اتحاد $a^{n+m} \equiv a^n \cdot a^m$ هم‌ارز است.ـم.

فرض می‌کنیم آن را برحسب G بشمارد؛ بنابراین از ضرب E در G، C حاصل می‌شود. اما، به علاوه، به موجب قضیهٔ پیش، از ضرب A در B نیز C حاصل می‌شود. [IX.۱۱ و ف.]

لذا حاصل‌ضرب A و B با حاصل‌ضرب E و G مساوی است.

پس نسبت A به E مثل نسبت G است به B. [VII.۱۹]

اما A و E نسبت به هم اول و کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که با آنها به یک نسبت‌اند؛ [VII.۲۱]

و کوچکترینها آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به دفعات مساوی می‌شمارند، یعنی صورت صورت را می‌شمارد، و مخرج مخرج را. [VII.۲۰]

بنابراین E، B را می‌شمارد.

فرض می‌کنیم آن را برحسب H بشمارد، بنابراین از ضرب E در H، B حاصل شده است. اما بعد، A نیز از ضرب در خودش B را پدید آورده است؛ [IX.۸]

بنابراین حاصل‌ضرب E و H با مربع A مساوی است. لذا، نسبت E به A مثل نسبت A است به H. [VII.۱۹]

اما A و E نسبت به هم اول و کوچکترین اعداد از اعدادی هستند که با آنها به یک نسبت‌اند، [VII.۲۱]

و کوچکترینها آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، یعنی، صورت صورت را می‌شمارد و مخرج مخرج را. [VII.۲۰]

بنابراین E، A را می‌شمارد، صورت، صورت را.

اما، بنا به فرض، E، A را نمی‌شمارد، که غیرممکن است. بنابراین E و A نسبت به هم اول نیستند. لذا نسبت به هم مرکب‌اند.

اما اعداد نسبت به هم مرکب با عددی شمرده می‌شوند. [VII.تع.۱۴]

و چون E بنا به فرض اول است، و هر عدد اول با هیچ عددی جز خودش شمرده نمی‌شود، بنابراین E اعداد A و E را می‌شمارد. لذا E، A را می‌شمارد. [اما E، D را هم می‌شمارد، لذا E، A و D را می‌شمارد.]

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که D با هر چند عدد اولی شمرده شود، A نیز با همان اعداد شمرده خواهد شد.

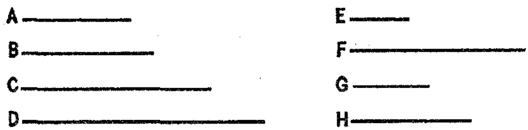
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر تعداد دلخواهی عدد با شروع از یک واحد، به تناسب پیوسته باشند و، عدد بعد از واحد اول

باشد، بزرگترین عدد با هیچ عددی شمرده نمی‌شود، جز اعدادی که در این تناسب پیوسته قبل از بزرگترین عدد آمده‌اند.

فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مثل A و B و C و D با شروع از یک واحد به تناسب پیوسته باشند،



و فرض می‌کنیم A، عدد بعد از واحد، اول باشد.

می‌گوییم که D، بزرگترین آنها، با هیچ عددی جز A و B و C شمرده نمی‌شود. زیرا، اگر شمرده شود، فرض می‌کنیم توسط E شمرده شود، و E با هیچ‌یک از اعداد A و B و C یکی نباشد. روشن است که E اول نیست. زیرا اگر اول باشد و D را بشمارد، A را نیز خواهد شمرد. [۱۲.IX]

که اول است و در عین حال با E یکی نیست: که غیرممکن است. بنابراین E اول نیست، پس مرکب است. اما هر عدد مرکب توسط عدد اولی شمرده می‌شود؛ [۳۱.VII]

لذا E توسط عدد اولی شمرده می‌شود. حال می‌گوییم که با هیچ عدد اولی جز A شمرده نمی‌شود.

زیرا اگر E توسط عدد دیگری شمرده شود چون E، D را می‌شمارد، آن عدد دیگر نیز D را خواهد شمرد؛ پس عدد A را هم خواهد شمرد، [۱۲.IX]

که اول است و در عین حال هم با آن یکی نیست: که غیرممکن است. در نتیجه A، E را می‌شمارد.

و، چون E، D را می‌شمارد، فرض می‌کنیم آن را برحسب F بشمارد. می‌گوییم که F با هیچ‌یک از اعداد A و B و C یکی نیست.

زیر اگر F با یکی از اعداد A و B و C یکی باشد، و D را برحسب E بشمارد، پس یکی از اعداد A و B و C نیز D را برحسب E می‌شمارد، اما یکی از اعداد A و B و C، D را برحسب یکی از اعداد A و B و C می‌شمارد. [۱۱.IX]

لذا E با یکی از اعداد A و B و C هم یکی است: که مغایر با فرض است.

بنابراین F با هیچ‌یک از اعداد A و B و C یکی نیست.

به طریق مشابه، باز با اثبات اینکه F اول نیست، می‌توانیم ثابت کنیم که F توسط A شمرده می‌شود. زیرا اگر F اول باشد چون D را می‌شمارد، A را نیز خواهد شمرد، [۱۲.IX]

که اول است و در عین حال هم با آن یکی نیست: اما این غیرممکن است؛ بنابراین F اول نیست، لذا مرکب است.

اما هر عدد مرکب با عدد اولی شمرده می‌شود؛ [۳۱.VII]

پس F با عدد اولی شمرده خواهد شد.

حال می‌گوییم که با هیچ عدد اولی جز A شمرده نمی‌شود.

زیرا اگر عدد اول دیگری F را بشمارد، چون F، D را می‌شمارد، این عدد اول دیگر نیز D را خواهد شمرد؛ لذا A را نیز خواهد شمرد، [۱۲.IX]

که اول است و در عین حال هم با آن یکی نیست: که غیرممکن است.

بنابراین A، F را می‌شمارد. اما چون E، D را برحسب F می‌شمارد، لذا از ضرب E در F، D حاصل می‌شود. اما گذشته از آن، A نیز از ضرب در C، D را به دست می‌دهد؛[۱۱.IX]

بنابراین حاصل‌ضرب A و C با حاصل‌ضرب E و F مساوی است. لذا اگر به صورت تناسب، بیان کنیم، نسبت A به E مثل نسبت F است به C. [۱۹.VII]

اما A، E را می‌شمارد؛ بنابراین F نیز C را می‌شمارد، و فرض می‌کنیم آن را برحسب G بشمارد؛ در این صورت، به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که G با هیچ‌یک از اعداد A و B یکی نیست، و با A شمرده می‌شود. و چون F، C را برحسب G می‌شمارد، بنابراین از ضرب F در G، C حاصل می‌شود. اما به علاوه از ضرب A در B نیز C حاصل می‌شود؛ [۱۱.IX]

پس حاصل‌ضرب A و B با حاصل‌ضرب F و G مساوی است. لذا اگر به صورت تناسب بیان کنیم، نسبت A به F مثل نسبت G است به B. [۱۹.VII]

اما A، F را می‌شمارد؛ بنابراین G نیز B را می‌شمارد.

فرض می‌کنیم G، B را برحسب H بشمارد.

در این صورت به روشی مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که H با A یکی نیست. و چون G، B را برحسب H می‌شمارد، بنابراین از ضرب G در H، B حاصل می‌شود. اما به علاوه از ضرب A در خودش نیز B حاصل می‌شود، [۸.IX]

لذا حاصل‌ضرب H و G با مربع A مساوی است. بنابراین نسبت H به A مثل نسبت A است به G. [۱۹.VII]

اما A، G را می‌شمارد؛ بنابراین H نیز A را می‌شمارد که اول است و در عین حال هم با آن یکی نیست، که محال است. بنابراین D، بزرگترین عدد، با هیچ عدد دیگری جز A و B و C شمرده نمی‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر عددی کوچکترین عددی باشد که توسط اعداد اولی شمرده شده است، این عدد توسط هیچ عدد اول دیگری، جز اعدادی که در ابتدا آن را شمرده‌اند، شمرده نخواهد شد[۱].

۱. این قضیه با این قضیه هم‌ارز است که حاصل تجزیهٔ یک عدد به عددهای اول یکتاست.ـم.

فرض می‌کنیم A کوچکترین عددی است که توسط اعداد اول B و C و D شمرده شده است. می‌گوییم که توسط هیچ عدد اول دیگری جز B و C و D شمرده نمی‌شود.

زیرا، در صورت شمرده شدن، فرض می‌کنیم توسط عدد اول E شمرده شود، و فرض می‌کنیم E با هیچ‌یک از اعداد B و C و D یکی نباشد.

حال، چون E، A را می‌شمارد، فرض می‌کنیم آن را برحسب F بشمارد؛ بنابراین از ضرب E در F، A حاصل می‌شود. و A توسط اعداد اول B و C و D شمرده شده است.

اما اگر از ضرب دو عدد در هم عددی حاصل آید؛ و عدد اولی این حاصل را بشمارد، این عدد یکی از دو عدد اولیه را نیز خواهد شمرد؛ [VII.۳۰]

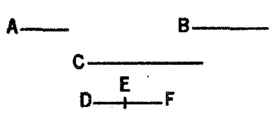
بنابراین B و C و D یکی از اعداد E و F را خواهند شمرد. اما این اعداد E را نخواهند شمرد؛ زیرا E اول است و با هیچ‌یک از اعداد B و C و D یکی نیست. پس F را خواهند شمرد که کمتر از A است: که غیرممکن است، زیرا بنا به فرض، A کوچکترین عددی است که توسط B و C و D شمرده شده است.

لذا هیچ عدد اولی جز B و C و D عدد A را نخواهد شمرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر سه عدد به تناسب پیوسته کوچکترین اعدادی باشند که نسبتی بین آنها برقرار است، حاصل جمع هر دو عدد از این سه عدد نسبت به عدد سوم، اول خواهد بود.



فرض می‌کنیم A و B و C سه عدد به تناسب پیوسته کوچکترین اعدادی باشند که نسبتی بین آنها برقرار است؛ می‌گوییم که هر دو عدد از این اعداد که با هم جمع شوند نسبت به عدد سوم اول خواهند بود، یعنی A و B نسبت به C؛ B و C نسبت به A؛ و همچنین A و C نسبت به B.

زیرا فرض می‌کنیم دو عدد DE و EF، کوچکترین اعداد به یک نسبت با A و B و C، را پیدا کرده‌ایم. [VIII.۲]

روشن است که از ضرب DE در خودش A حاصل می‌شود، و از ضرب در EF، B؛ و به علاوه از ضرب EF در خودش C به دست می‌آید. [VIII.۲]

اما، چون DE و EF کوچکترین اعدادند، نسبت به هم اول‌اند. [۲۲.VII]

ولی، اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، مجموع آنها نیز نسبت به هر یک اول خواهد بود؛ [۲۸.VII]

بنابراین DF نیز نسبت به هر یک از اعداد DE و EF اول خواهد بود.

اما، گذشته از آن DE نیز نسبت به EF اول است؛ لذا DF و DE نسبت به EF اول‌اند.

اما اگر دو عدد نسبت به عددی اول باشند، حاصل‌ضرب آنها نیز نسبت به آن عدد اول خواهد بود؛ [۲۴.VII]

لذا حاصل‌ضرب FD و DE نسبت به EF اول است؛ پس حاصل‌ضرب FD و DE نسبت به مربع EF نیز اول است. [۲۵.VII]

اما حاصل‌ضرب FD و DE با مربع DE به اضافهٔ حاصل‌ضرب DE و EF مساوی است؛ [۳.II]

بنابراین مربع DE به اضافهٔ حاصل‌ضرب DE و EF نسبت به مربع EF، اول است. و مربع DE برابر A است، حاصل‌ضرب DE و EF مساوی B است، و مربع EF مساوی C است؛ بنابراین مجموع A و B نسبت به C اول است.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که مجموع B و C نسبت به A اول است.

حال می‌گوییم که مجموع A و C نیز نسبت به B اول است.

زیرا چون DF نسبت به هر یک از اعداد DE و EF اول است، مربع DF نیز نسبت به حاصل‌ضرب DE و EF اول است. [۲۴.VII، ۲۵]

اما مجموع مربعهای DE و EF به انضمام دو برابر حاصل‌ضرب DE و EF با مربع DF مساوی است. [۴.II]

بنابراین روی هم مربعهای DE و EF با دو برابر حاصل‌ضرب DE و EF نسبت به حاصل‌ضرب DE و EF اول است.

از کم کردن حاصل‌ضرب DE و EF از این عبارت، روی هم مربعهای DE و EF نسبت به حاصل‌ضرب DE و EF اول می‌شوند. بنابراین، از کم کردن مجدد حاصل‌ضرب DE و EF از این عبارت، روی هم مربعهای DE و EF نسبت به حاصل‌ضرب DE و EF اول می‌شوند.

و مربع DE برابر A است، حاصل‌ضرب DE و EF برابر B، مربع EF برابر C. پس حاصل جمع A و C نسبت به B اول است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، نسبت دومی به هیچ عددی مثل نسبت اولی به دومی نخواهد بود.

فرض می‌کنیم دو عدد A و B نسبت به هم اول باشند، می‌گوییم که نسبت B به هیچ عددی مثل نسبت A به B نیست.

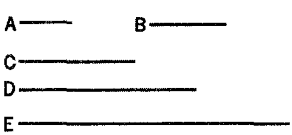
زیرا، فرض می‌کنیم چنین نسبتی ممکن باشد، مثلاً نسبت A به B مثل نسبت B باشد به C. اما A و B نسبت به هم اول‌اند، و اولها کوچکترین نیز هستند، [VII.۲۱]
و کوچکترینها آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را و کوچکتر کوچکتر را یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را؛ [VII.۲۰]

بنابراین A، B را می‌شمارد، یعنی صورت صورت را. اما A خودش را نیز می‌شمارد، بنابراین A، A و B را می‌شمارد که نسبت به هم اول‌اند: که غیرممکن است. بنابراین نسبت B به C مثل نسبت A به B نیست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته باشند، و اولین و آخرین آنها نسبت به هم اول باشند، نسبت عدد آخری به هیچ عددی مثل نسبت عدد اولی به عدد دومی نخواهد بود.



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد مانند A و B و C و D به تناسب پیوسته باشند، و، فرض می‌کنیم اولین و آخرین آنها، A و D، نسبت به هم اول باشند؛

می‌گوییم که نسبت D به هیچ عددی مثل نسبت A به B نیست. زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم مثلاً نسبت A به B مثل نسبت D به E باشد؛ بنابراین، به ابدال نسبت، نسبت A به D مثل B است به E. [VII.۱۳]

اما A و D نسبت به هم اول‌اند، اولها کوچکترین نیز هستند، [VII.۲۱]
و کوچکترینها آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به دفعات مساوی می‌شمارند، بزرگتر بزرگتر را و کوچکتر کوچکتر را، یعنی صورت صورت را و مخرج مخرج را. [VII.۲۰]
بنابراین A، B را می‌شمارد و نسبت A به B مثل نسبت B است به C.

بنابراین B هم C را می‌شمارد؛ لذا، A هم C را می‌شمارد.

و چون نسبت B به C مثل نسبت C است به D، و B، C را می‌شمارد، بنابراین C هم D را می‌شمارد. اما A، C را می‌شمارد؛ لذا A نیز D را می‌شمارد. اما A خودش را هم می‌شمارد؛

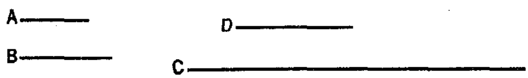
بنابراین A، A و D را که نسبت به هم اول‌اند می‌شمارد: که غیرممکن است.

بنابراین نسبت D به هیچ عددی مثل نسبت A به B نخواهد بود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

دو عدد داده شده‌اند. تحقیق کنید که در چه صورت می‌توان عدد سومی پیدا کرد که با آن دو، یک تناسب پیوسته بسازد.



فرض می‌کنیم که A و B دو عدد داده شده باشند. می‌خواهیم بدانیم در چه صورت می‌توانیم عدد سومی پیدا کنیم که با A و B یک تناسب پیوسته بسازد.

حال می‌گوییم A و B یا نسبت به هم اول‌اند، یا نیستند. و، اگر نسبت به هم اول باشند ثابت کرده بودیم که عدد سومی وجود ندارد که با A و B یک تناسب پیوسته بسازد. [۱۶.IX]

حال، فرض می‌کنیم A و B نسبت به هم اول نباشند، و فرض می‌کنیم از ضرب B در خودش C حاصل شود. در این حال یا A، C را می‌شمارد یا نمی‌شمارد.

ابتدا فرض می‌کنیم آن را برحسب D بشمارد. بنابراین از ضرب A در D، C حاصل می‌شود. اما، به علاوه، از ضرب B در خودش هم C حاصل می‌شود. بنابراین حاصل‌ضرب A و D با مربع B مساوی است. بنابراین نسبت A به B مثل نسبت B است به D؛ [۱۹.VII]

لذا D، سومین جزء در تناسب پیوسته با A و B پیدا شده است.

بعد، فرض می‌کنیم A، C را نشمارد؛ می‌گوییم غیرممکن است عددی پیدا کرد که سومین جزء در تناسب پیوسته با A و B باشد. زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم عدد سومی در تناسب پیوسته با A و B پیداکرده باشیم و آن D باشد. بنابراین حاصل‌ضرب A و D با مربع B مساوی می‌شود.

اما، مربع B برابر C است؛ بنابراین حاصل‌ضرب A و D مساوی است با C.

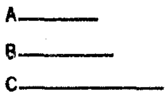
پس، از ضرب A در D، C حاصل شده است؛ لذا A، C را برحسب D می‌شمارد. اما بنا به فرض، A، C را نمی‌شمارد: که غیرممکن است.

بنابراین وقتی که A، C را نشمارد عدد سومی وجود ندارد که با A و B یک تناسب پیوسته بسازد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

سه عدد داده شده‌اند. تحقیق کنید که در چه صورت می‌توان چهارمین جزء تناسب بین آنها را پیدا کرد.

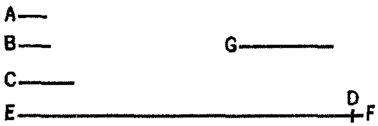


فرض می‌کنیم A و B و C سه عدد داده شده باشند. می‌خواهیم بدانیم که در چه صورت می‌توانیم چهارمین جزء تناسب بین آنها را پیدا کنیم.

[متن یونانی این قضیه خراب شده و قابل استفاده نیست. ولی، به طریق مشابه با گزارهٔ ۱۸، شرط وجود چهارمین جزء تناسب بین A و B و C این است که A حاصل‌ضرب B و C را بشمارد.]

قضیهٔ ۲۰

تعداد اعداد اول از هر تعدادی که در نظر بگیریم بیشتر است.



فرض می‌کنیم A و B و C اعداد اولی باشند که در نظر گرفته شده‌اند؛

می‌گوییم اعداد اول دیگری غیر از A و B و C موجودند. فرض می‌کنیم کوچکترین عددی را که توسط A و B و C شمرده می‌شود پیدا کرده‌ایم و آن DE باشد؛ واحد DF را به DE اضافه می‌کنیم.

حال EF یا اول است یا نیست. اول فرض می‌کنیم اول باشد؛ پس اعداد اول A و B و C و EF را پیدا کرده‌ایم که بیشتر از A و B و C شده‌اند.

حال، فرض می‌کنیم EF اول نباشد؛ بنابراین با عدد اولی شمرده می‌شود. [۳۱.VII]

فرض می‌کنیم آن عدد اول G باشد، می‌گوییم که G با هیچ‌یک از اعداد A و B و C یکی نیست.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد.

اما A و B و C، DE را می‌شمارند؛ بنابراین G نیز DE را خواهد شمرد؛ اما G، EF را هم می‌شمارد. بنابراین، G که یک عدد است، باقیمانده، یعنی واحد DF را خواهد شمرد: که غیرممکن است. بنابراین G با هیچ‌یک از اعداد A و B و C یکی نیست؛ و بنا به فرض اول است. پس، اعداد اول A و B و C و G پیدا شده‌اند که بیشتر از تعداد در نظر گرفته‌شدهٔ A و B و C هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

حاصل جمع هر تعدادی دلخواه عدد زوج، عددی است زوج.

فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد زوج مانند AB و BC و CD و DE با هم جمع شده‌اند. می‌گوییم تمامی AE عددی است زوج.

زیرا، چون هریک از اعداد AB و BC و CD و DE عددی است زوج، پس هریک نیمی دارد. [VII.تع.۶]

لذا تمامی AE نیز نیمی دارد. اما عدد زوج عددی است که به دو نیمهٔ مساوی تقسیم‌پذیر باشد [همان تعریف]، بنابراین AE زوج است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

حاصل جمع تعداد زوجی عدد فرد، عددی است زوج.

فرض می‌کنیم اعداد فرد AB و BC و CD و DE که تعداد آنها زوج است با هم جمع شده‌اند. می‌گوییم که تمامی AE عددی است زوج. زیرا، چون هریک از اعداد AB و BC و CD و DE فرد است، اگر از هرکدام یک واحد کم شود، باقیمانده‌ها هریک زوج خواهد بود، [VII.تع.۷]

بنابراین مجموع آنها زوج خواهد بود. [IX.۲۱]

اما تعداد واحدها نیز زوج است، بنابراین تمامی AE نیز زوج است. [IX.۲۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

حاصل‌جمع تعداد فردی عدد فرد، عددی است فرد.

فرض می‌کنیم تعداد فردی عدد فرد نظیر AB و BC و CD با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که تمامی AD نیز فرد است. واحد DE را از CD کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیماندهٔ CE زوج است. [VII.تع.۷]

اما CA نیز زوج است؛ [IX.۲۲]

بنابراین تمامی AE نیز زوج است. [IX.۲۱]

و DE یک واحد است، بنابراین AD فرد است. [VII.تع.۷]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

اگر از عددی زوج عدد زوجی کسر شود، باقیمانده زوج خواهد بود.

گیریم از عدد زوج AB عدد زوج BC کسر شده است: می‌گوییم که باقیماندهٔ CA زوج است. زیرا، چون

AB زوج است، نیمی دارد. [VII.تع.۶]

به همین دلیل BC نیز نیمی خواهد داشت؛ لذا مانده [CA نیز نیمی دارد، و] بنابراین AC زوج است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

اگر از عددی زوج عدد فردی کم شود، باقیمانده عددی فرد خواهد بود.

گیریم از عدد زوج AB عدد فرد BC کم شده است، می‌گوییم که باقیماندهٔ CA عددی است فرد.

زیرا فرض می‌کنیم واحد CD از BC کم شده است؛ بنابراین DB زوج است. [VII.تع.۷]

اما AB نیز زوج است؛ بنابراین باقیماندهٔ AD نیز زوج است. [IX.۲۴]

و CD یک واحد است؛ بنابراین CA فرد است. [VII.تع.۷]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

اگر از عددی فرد، عدد فردی کم شود، باقیمانده عددی زوج خواهد بود.

گیریم از عدد فرد AB عدد فرد BC کم شده است؛ می‌گوییم که باقیماندهٔ CA زوج است.

زیرا، چون AB فرد است، واحد BD را از آن کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیماندهٔ AD زوج است.
[VII.تع.۷]

به همین دلیل CD نیز زوج است؛ [VII.تع.۷]

لذا باقیماندهٔ CA نیز زوج است. [IX.۲۴]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

اگر از عدد فردی عدد زوجی کسر شود، باقیمانده فرد خواهد بود.

گیریم از عدد فرد AB عدد زوج BC کم شده است؛ می‌گوییم که باقیماندهٔ CA فرد است. فرض می‌کنیم واحد AD از AB کم شده است. بنابراین DB زوج است. [VII.تع.۷]

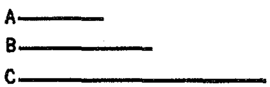
اما BC نیز زوج است؛ بنابراین باقیماندهٔ CD زوج است. [IX.۲۴]

در نتیجه CA فرد است. [VII.تع.۷]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

اگر عدد فردی در عددی زوج ضرب شود، حاصل عددی خواهد بود زوج.



فرض می‌کنیم عدد فرد A درعدد زوج B ضرب و عدد C حاصل شده است. می‌گوییم که C عددی است زوج.

زیرا، چون از ضرب A در B، C حاصل شده است، بنابراین C از تعدادی B نتیجه شده است که آن تعداد با واحدهای موجود در A مساوی است. [VII.تع.۱۵]

و B زوج است. بنابراین C از اعدادی زوج درست شده است.

اما، اگر تعداد دلخواهی عدد زوج با هم جمع شوند، حاصل عددی زوج خواهد بود.[IX.۲۱]

در نتیجه C عددی است زوج.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

حاصل‌ضرب یک عدد فرد در یک عدد فرد، عددی است فرد.

فرض می‌کنیم از ضرب عدد فرد A در عدد فرد B عدد C حاصل شده است؛ می‌گوییم C عددی است فرد.

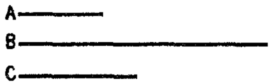
زیرا، چون عدد C از ضرب عدد A در B حاصل شده است، پس C از تعدادی B مساوی با واحدهای A درست شده است. [VII.تع.۱۵]

و هر یک از اعداد A و B فرد است؛ پس C از تعداد فردی عدد فرد حاصل شده است، لذا، C فرد است. [IX.۲۳]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

اگر عدد فردی عدد زوجی را بشمارد، نصف آن را نیز می‌شمارد.



فرض می‌کنیم عدد فرد A عدد زوج B را بشمارد، می‌گوییم که نصف آن را نیز می‌شمارد. زیرا، چون A، B را می‌شمارد، می‌گیریم که آن را به دفعاتی به تعداد واحدهای C بشمارد؛ می‌گوییم که C فرد نیست.

زیرا اگر فرض کنیم C فرد است، آنگاه چون A، B را به دفعاتی به تعداد واحدهای C می‌شمارد لذا B از حاصل‌ضرب A در C حاصل می‌شود.

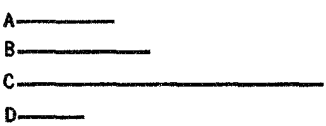
بنابراین B از عددهای فردی حاصل شده است که تعداد آنها فرد است. لذا B فرد است:[۲۳.IX] که غیرممکن است، زیرا بنا به فرض B زوج است. بنابراین C فرد نیست؛ پس زوج است.

از این‌رو A، B را به تعداد دفعاتی زوج می‌شمارد. پس به این دلیل نصف آن را هم می‌شمارد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

اگر عدد فردی نسبت به عددی اول باشد، نسبت به دو برابر آن هم اول خواهد بود.



فرض می‌کنیم که عدد فرد A نسبت به عدد غیرمشخص B اول باشد، و C را دو برابر B می‌گیریم. می‌گوییم که A نسبت به C اول است. زیرا اگر A و C نسبت به هم اول نباشند، عددی آنها را خواهد شمرد.

فرض می‌کنیم آن عدد D باشد. اما A فرد است، پس D نیز فرد است.

و چون D، که عددی است فرد، C را می‌شمارد، و C زوج است، بنابراین [D] نصف C را نیز می‌شمارد. [۳۰.IX]

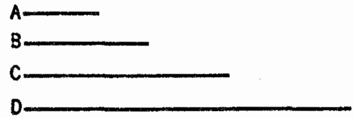
اما B نصف C است، لذا D، B را می‌شمارد.

ولی D، A را نیز می‌شمارد، لذا D، A و B را که نسبت به هم اول‌اند می‌شمارد: که محال است. بنابراین A چاره‌ای ندارد جز اینکه با C اول باشد. در نتیجه A و C نسبت به هم اول‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

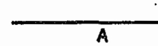
هر عدد که از یک عدد دو شروع شده و از ضرب متوالی در ۲ حاصل شده باشد فقط زوج‌الزوج است.



زیرا فرض می‌کنیم که تعداد دلخواهی عدد مثل B و C و D، با شروع از عدد A، یعنی دو، مرتباً دو برابر شده‌اند؛ می‌گوییم که B و C و D فقط زوج‌الزوج‌اند. زوج‌الزوج بودن هر یک از اعداد B و C و D که روشن است، زیرا هر یک از یک «دو» شروع و مرتباً دو برابر شده است. می‌گوییم که هر یک فقط زوج‌الزوج نیز هست. زیرا فرض می‌کنیم واحدی معلوم باشد، پس چون تعداد دلخواهی عدد با شروع از واحد به تناسب پیوسته هستند، و A، عدد بعد از واحد، عددی است اول، بنابراین D، بزرگترین عدد از اعداد A و B و C و D، با هیچ عدد دیگری جز A و B و C شمرده نمی‌شود.[IX.۱۳]
و هر یک از اعداد A و B و C زوج است؛ بنابراین D فقط زوج‌الزوج است. [VII.تع.۸]
به همین طریق می‌توانیم ثابت می‌کنیم که هر یک از اعداد B و C نیز فقط زوج‌الزوج است.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

اگر نصف عددی فرد باشد، آن عدد فقط زوج‌الفرد است.

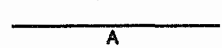


فرض می‌کنیم که نصف عدد A فرد باشد، می‌گوییم که A فقط زوج‌الفرد است. اما زوج‌الفرد بودن آن روشن است؛ زیرا نصف آن، که فرد است، آن را به تعداد دفعاتی زوج می‌شمارد. [VII.تع.۹]
بعد می‌گوییم که فقط زوج‌الفرد نیز هست.
زیرا اگر A زوج‌الزوج نیز باشد، با عددی زوج برحسب عددی زوج شمرده خواهد شد.[VII.تع.۸]
لذا نصف آن نیز، با اینکه فرد است، با عدد زوجی شمرده می‌شود: که محال است. بنابراین A فقط زوج‌الفرد است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

اگر عددی نه در شمار اعدادی باشد که از دو برابر شدن پیوسته از دو حاصل شده‌اند و نه عددی باشد که نصف آن فرد است، این عدد، هم زوج‌الزوج است و هم زوج‌الفرد.



فرض می‌کنیم A نه در شمار اعدادی باشد که از دو برابر شدن پشت سر هم از یک «دو» حاصل شده‌اند، و نه عددی باشد که نصف آن فرد است.
می‌گوییم که A هم زوج‌الزوج است و هم زوج‌الفرد.

زوج‌الزوج بودن عدد A که روشن است، زیرا نصف آن فرد نیست. [VII.تع.۸]
حال می‌گوییم که زوج‌الفرد نیز هست. زیرا اگر A را نصف کنیم و سپس نصف حاصل را نصف کنیم و این عمل را پشت سر هم ادامه دهیم به عدد فردی می‌رسیم که A را به تعداد دفعاتی زوج می‌شمارد.

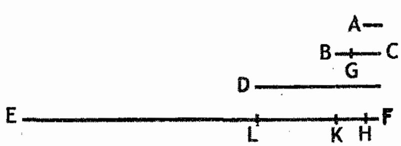
زیرا اگر نه، به یک عدد «دو» می‌رسیم و A در شمار اعدادی در خواهد آمد که از دو برابر شدن پیوسته از یک «دو» حاصل شده است: که مغایر با فرض ماست. بنابراین A زوج‌الفرد است. اما ثابت شده بود که زوج‌الزوج نیز هست.

بنابراین هم زوج‌الزوج است و هم زوج‌الفرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

اگر تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته باشند، و از اعداد دومی و آخری عددی مساوی با عدد اولی کم شود، آنگاه نسبت فزونی دومی به عدد اولی مثل نسبت فزونی آخری است به [مجموع] همهٔ اعداد قبل از آن.[1]



فرض می‌کنیم تعداد دلخواهی عدد به تناسب پیوسته مثل A و BC و D و EF، که A کوچکترین آنهاست مفروض باشند، و فرض می‌کنیم از BC و EF اعداد BG و FH، هریک مساوی با A کسر شده‌اند.

می‌گوییم که نسبت GC به A مثل نسبت EH است به A و BC و D.

زیرا، فرض می‌کنیم FK مساوی با BC جدا شده است، و FL مساوی با D.

در این صورت چون FK با BC مساوی است، و جزء FH با جزء BG، بنابراین ماندهٔ HK با ماندهٔ GC مساوی است. و، چون نسبت EF به D مثل نسبت D است به BC و نسبت BC است به A، و D با FL مساوی است، و BC با FK، و A با FH؛ لذا نسبت EF به FL، مثل نسبت LF است به FK، و FK است به FH. و با تفضیل نسبت در صورتها، نسبت EL به LF، مثل LK است به FK، و KH است به FH. [VII.۱۱، ۱۳]

و نیز نسبت یکی از صورتها به مخرجش مثل نسبت [مجموع] همهٔ صورتهاست به [مجموع] همهٔ مخرجها؛ [VII.۱۲]

بنابراین نسبت KH به FH مثل نسبت [مجموع] EL و LK و KH است به [مجموع]

[1] ۱. درواقع، در این قضیه روشی برای پیدا کردن مجموع جملات یک تصاعد هندسی داده شده است.ـم.

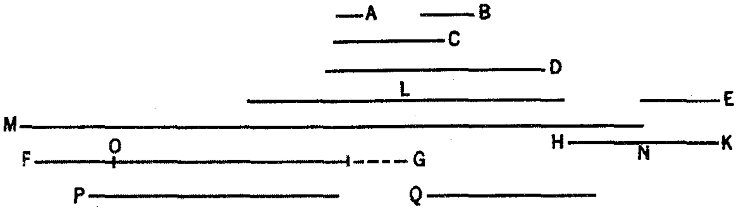
LF و FK و HF. اما KH با CG مساوی است، و FH با A، و LF و FK و HF با D و BC و A؛ بنابراین نسبت CG به A مثل نسبت EH است به [مجموع] D و BC و A.

لذا نسبت فزونی دومی به عدد اولی مثل نسبت فزونی آخری است به [مجموع] همهٔ اعداد قبل از آن.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۶

در تعدادی عدد که از دو برابر شدن پیوسته، با شروع از واحد، به دست آمده‌اند اگر مجموع اعداد حاصل یک عدد اول باشد، عددی که از ضرب این مجموع در آخرین عدد حاصل می‌شود، عددی است تام.[۱]



فرض می‌کنیم اعداد متوالی A و B و C و D از دو برابر شدن پیوسته، با شروع از واحد، به دست آمده‌اند. و مجموع همهٔ اعداد حاصل یک عدد اول شده است، فرض می‌کنیم که عدد اول E مجموع این اعداد باشد، و از ضرب E در D، FG حاصل شده است. می‌گوییم که FG عددی است تام.

زیرا، تعداد اعداد A و B و C و D هرچه باشد، به همان تعداد عددهای E و HK و L و M را از دو برابر کردن پیوسته، با شروع از E پیدا می‌کنیم؛ بنابراین طبق نسبت مساوات هموار، نسبت A به D مثل نسبت E است به M. [۱۴.VII]

لذا حاصل‌ضرب E و D با حاصل‌ضرب A و M مساوی است. [۱۹.VII]

و حاصل‌ضرب E و D با FG مساوی است؛ بنابراین حاصل‌ضرب A و M نیز با FG مساوی است.

پس از ضرب A در M، FG حاصل می‌شود؛ بنابراین M، FG را برحسب A می‌شمارد. و، A مساوی است با دو؛ بنابراین FG دو برابر M است.

اما M و L و HK و E متوالیاً دو برابر شده‌اند. بنابراین E و HK و L و M و FG به تناسب پیوسته هستند با نسبت دو.

---

۱. در این قضیه راهی برای تعیین اعداد تام داده شده است، یعنی،
$(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \times 2^{n-1} = 2^{n-1}(2^n - 1)$.—م.

حال فرض می‌کنیم از عدد دوم HK و عدد آخر FG به ترتیب اعداد HN و FO را مساوی با اولین عدد E کم کرده‌ایم؛ لذا نسبت فزونی دومی به اولی همچون نسبت فزونی آخری است به [مجموع] همهٔ اعداد قبل از آن. [IX.۳۵]

پس نسبت NK به E همچون نسبت OG است به [مجموع] M و L و KH و E. و NK با E مساوی است؛ بنابراین OG نیز با [مجموع] M و L و HK و E مساوی است. اما FO نیز با E مساوی است، و E با [مجموع] A و B و C و D و واحد مساوی است.

بنابراین تمامی FG با [مجموع] E و HK و L و M و A و B و C و D و واحد مساوی است، و با آنها شمرده می‌شود. همچنین می‌گوییم که FG با هیچ عدد دیگری جز A و B و C و D و E و HK و L و M و واحد شمرده نمی‌شود.

زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم عددی مانند P، FG را بشمارد، و فرض می‌کنیم که P با هیچ‌یک از اعداد A و B و C و D و E و HK و L و M یکی نباشد، و به تعداد دفعاتی که P، FG را می‌شمارد، واحد در Q باشد؛ بنابراین از ضرب Q در P، FG حاصل می‌شود.

اما گذشته از آن از ضرب E در D نیز FG حاصل شده است؛ بنابراین نسبت E به Q مثل نسبت P است به D. [VII.۱۹]

و چون A و B و C و D از دو برابر شدن پیوسته، با شروع از واحد، به دست امده‌اند، بنابراین D با هیچ عددی جز A و B و C شمرده نخواهد شد. [IX.۱۳]

و، بنا به فرض، P با هیچ‌یک از اعداد A و B و C یکی نیست. بنابراین P، D را نخواهد شمرد.

اما، نسبت P به D مثل نسبت E است به Q؛ بنابراین E هم Q را نمی‌شمارد. [VII.تع.۲۰]

و، E اول است، و هر عدد اول نسبت به هر عددی که آن را نشمارد اول است. [VII.۲۹]

بنابراین E و Q نسبت به هم اول‌اند.

اما اولها کوچکترین نیز هستند، [VII.۲۱]

و کوچکترین اعداد آن اعدادی را که آن نسبت را با آنها دارند به تعداد دفعات مساوی می‌شمارند؛ بزرگتر بزرگتر را می‌شمارد و کوچکتر، کوچکتر را، صورت، صورت را و مخرج، مخرج را؛ [VII.۲۰]

و، نسبت E به Q همچون نسبت P است به D؛ بنابراین E، P را به همان عده دفعاتی می‌شمارد که Q، D را.

اما D با هیچ عدد دیگری جز A و B و C شمرده نمی‌شود؛ بنابراین Q با یکی از اعداد A و B و C یکی است. فرض می‌کنیم با B یکی باشد. و، به تعداد اعداد B و C و D اعداد E و HK و L را با شروع از E به دست آورده‌ایم. اما E و HK و L با B و C و D به یک نسبت‌اند؛

بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت B به D مثل نسبت E است به L. [۱۴.VII]

لذا حاصل‌ضرب B و L با حاصل‌ضرب D و E مساوی است. [۱۹.VII]

اما حاصل‌ضرب D و E با حاصل‌ضرب P و Q مساوی است؛ پس، حاصل‌ضرب Q و P نیز با حاصل‌ضرب B و L مساوی است.

لذا، نسبت Q به B مثل نسبت L است به P. [۱۹.VII]

و Q با B یکی است؛ بنابراین L نیز با P یکی است: که غیرممکن است، زیرا به موجب فرض، P با هیچ‌یک از اعدادی که ذکر کرده‌ایم یکی نیست.

بنابراین FG را هیچ عددی جز A و B و C و D و E و HK و L و M و واحد، نمی‌شمارد. و ثابت شده بود که FG با [مجموع] A و B و C و E و HK و L و M و واحد مساوی است؛ و، عدد تام عددی است که با مجموع اجزای خودش مساوی است. [VII.تع.۲۲]

بنابراین FG عددی است تام.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ دهم (X)

تعریفهای I

۱. کمیتهایی نسبت به هم اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند که بتوان آنها را با واحد مشترکی اندازه‌گیری کرد، و آنهایی نسبت به هم اندازه‌ناپذیرند که واحد اندازه‌گیری مشترکی ندارند.

۲. خطهای راست زمانی از حیث مربع با هم اندازه‌پذیرند که مربعهایی را که بر آنها بنا می‌شوند بتوان با مساحت واحدی اندازه‌گیری کرد، و از حیث مربع با هم اندازه‌ناپذیرند وقتی که اندازه‌گیری مربعهای بناشده بر آنها با هیچ مساحت واحدی ممکن نباشد.

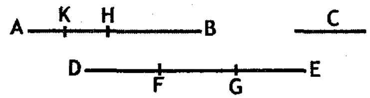
۳. با این فرضها ثابت می‌شود که تعداد بینهای خط راست وجود دراد که به‌ترتیب با خط راست مشخصی اندازه‌پذیر و اندازه‌ناپذیرند برخی فقط از حیث طول و بعضی هم از حیث مربع. پس آن خطهای راستی را که با این خط راست مشخص از حیث طول و از حیث مربع، یا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند گویا می‌نامیم، ولی آنهایی را که با این خط راست اندازه‌ناپذیرند گنگ می‌نامیم.

۴. بنا به فرض مربعی را که بر این خط راست مشخص [گویا] بنا شده گویا می‌نامیم، و مساحتهایی را که با این مربع اندازه‌پذیرند گویا می‌خوانیم. اما مساحتهایی را که با این مربع اندازه‌ناپذیرند و نیز خطهای راستی که آنها را پدید می‌آورند، گنگ می‌نامیم؛ یعنی در حالتی که مساحتها مربع‌اند خود اضلاع را، ولی در حالتی که مساحتها شکلهای راست‌خط دیگری هستند ضلعهای مربعهای مساوی با این مساحتها، بنا شده بر این خطها را، گنگ می‌نامیم.

مقالهٔ دهم (X) قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

دو کمیت نامتساوی داده شده‌اند، اگر از کمیت بزرگتر کمیتی بزرگتر از نصف آن را کم کنیم، و از باقیمانده کمیتی بزرگتر از نصف آن را کم کنیم و این عمل را مرتباً تکرار کنیم، سرانجام کمیتی باقی می‌ماند که از کمیت کوچکتری که در آغاز داده‌شده کمتر است.



فرض می‌کنیم AB و C دو کمیت نامتساوی، AB بزرگتر از C، داده شده‌اند: می‌گوییم اگر از AB کمیتی بزرگتر از نصف آن را کم کنیم، و از کمیت باقیمانده کمیتی بزرگتر از نصف آن را کم کنیم و این عمل را مرتباً تکرار کنیم، سرانجام کمیتی می‌ماند که از C کمتر است.

زیرا اگر C چند برابر شود، زمانی کمیتی بزرگتر از AB پدید می‌آورد. [V.تع.۴]

فرض می‌کنیم C چند برابر شده و DE، مضربی از C، بزرگتر از AB، حاصل شده است؛ گیریم DE به اجزای DF و FG و GE، مساوی با C، تقسیم شده است، از AB کمیت BH را که از نصف آن بزرگتر است کم می‌کنیم، و از AH، HK را که بزرگتر از نصف آن است کم می‌کنیم، و فرض می‌کنیم این فرایند مرتباً تکرار شود تا اینکه تعداد تقسیمات AB با تعداد تقسیمهای DE مساوی شود.

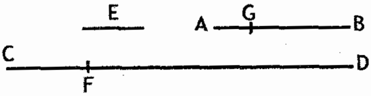
پس، فرض می‌کنیم AB به اجزای AK و KH و HB تقسیم شده است و AE به اجزای DF و FG و GE مساوی با همان تعداد تقسیم شده است. حال، چون DE بزرگتر از AB است، و از DE، EG که کوچکتر از نصف آن است کم شده است، و از AB، BH کم شده که بزرگتر از نصف آن است، بنابراین باقیماندهٔ GD از باقیماندهٔ HA بزرگتر است. و، چون GD بزرگتر از HA است، و از GD نصف آن یعنی GF کسر شده است، و از HA، HK که بزرگتر از نصف آن است کسر شده است، بنابراین باقیماندهٔ DF از باقیماندهٔ AK بزرگتر است. اما DF با C مساوی است؛ بنابراین C هم از AK بزرگتر است. لذا AK کوچکتر از C است.

بنابراین از کمیت AB کمیت AK باقی مانده است که از کمیت کوچکتر مفروض، یعنی C، کمتر است. و قضیه می‌تواند به همین نحو ثابت شود، حتی وقتی اجزائی که کم می‌شوند با نصف کمیتها مساوی باشند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

دو کمیت نامتساوی مفروض‌اند، اگر کمیت کوچکتر متوالیاً، یکی پس از دیگری، از کمیت بزرگتر کم شود و آنچه باقی می‌ماند هیچ‌وقت کمیت قبل از خود را نشمارد، آن دو کمیت اندازه‌ناپذیرند.



اگر دوکمیت نامتساوی AB و CD، AB کوچکتر از CD، در دست باشند، وقتی کمیت کوچکتر مرتباً، یکی پس از دیگری، از کمیت بزرگتر کم شود، فرض می‌کنیم قسمتی که باقی می‌ماند، هیچ‌وقت کمیت پیش از خودش را نشمارد؛ می‌گوییم AB و CD اندازه‌ناپذیرند.

زیرا اگر اندازه‌پذیر باشند، کمیتی آنها را خواهد شمرد.

فرض می‌کنیم، در صورت چنین امکانی، کمیتی که آن را E می‌نامیم آنها را بشمارد؛ گیریم AB پس از شمردن جزئی از CD مثل FD، CF را باقی گذارد که کمتر از خودش است، و CF پس از شمردن جزئی از AB، مثلاً BG، AG را باقی گذارد که کمتر از خودش است. گیریم این فرایند متوالیاً آنقدر تکرار شود تا اینکه کمیتی کمتر از E باقی بماند. فرض می‌کنیم این عمل صورت گرفته است و AG که کمتر از E است باقی مانده است.

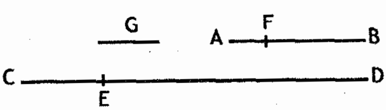
پس، چون E، AB را می‌شمارد، و AB، DF را، بنابراین E، FD را نیز می‌شمارد. اما E تمامی CD را نیز می‌شمارد؛ بنابراین E باقی‌ماندهٔ CF را نیز خواهد شمرد؛ اما، CF، BG را می‌شمارد؛ بنابراین E، BG را نیز می‌شمارد. اما E تمامی AB را نیز می‌شمارد؛ بنابراین باقیماندهٔ AG را نیز خواهد شمرد، کمیت بزرگتر کمیت کوچکتر را: که غیرممکن است.

بنابراین هیچ کمیتی AB و CD را نخواهد شمرد؛ لذا کمیتهای AB و CD اندازه‌ناپذیرند. [X.تع.۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

دو کمیت اندازه‌پذیر داده شده‌اند، مطلوب یافتن بزرگترین شمارندهٔ مشترک آنهاست.



فرض می‌کنیم دوکمیت اندازه‌پذیر AB و CD، AB کوچکتر از CD، داده شده‌اند. پس مطلوب پیدا کردن بزرگترین شمارندهٔ مشترک آنهاست.

حال کمیت AB یا CD را می‌شمارد یا نمی‌شمارد.

پس، اگر آن را بشمارد، ــ و خودش را نیز می‌شمارد ــ AB شمارندهٔ مشترک AB و CD

است. و آشکار است که بزرگترین شمارندهٔ مشترک نیز هست. زیرا کمیتی بزرگتر از کمیت AB، AB را نخواهد شمرد.

اکنون فرض می‌کنیم AB، CD را نشمارد.

پس اگر کمیت کوچکتر را مرتباً از بزرگتر کم کنیم، آنچه باقی می‌ماند، زمانی کمیت قبل از خودش را می‌شمارد، زیرا AB و CD اندازه‌ناپذیر نیستند. [۲.X]

فرض می‌کنیم AB پس از شمردن ED، EC را باقی بگذارد که کمتر از خودش است، و EC پس از شمردن FB، AF را باقی بگذارد که کمتر از خودش است. و، فرض کنیم AF، CE را بشمارد. پس، چون AF، CE را می‌شمارد، و CE، FB را، بنابراین AF نیز FB را می‌شمارد. اما AF خودش را هم می‌شمارد، بنابراین AF تمامی AB را نیز می‌شمارد. اما AB، DE را می‌شمارد، بنابراین AF هم ED را می‌شمارد. اما AF، CE را هم می‌شمارد، بنابراین AF تمامی CD را هم می‌شمارد. بنابراین AF شمارندهٔ مشترک AB و CD است.

حال، می‌گوییم AF بزرگترین شمارندهٔ مشترک نیز هست. زیرا، اگر نباشد کمیتی بزرگتر از AF وجود خواهد داشت که AB و CD را می‌شمارد.

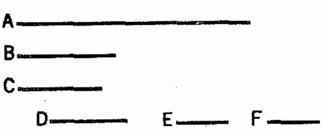
فرض می‌کنیم این کمیت G باشد. پس، چون G، AB را می‌شمارد، و AB، ED را، بنابراین G نیز، ED را خواهد شمرد. اما G تمامی CD را نیز می‌شمارد، بنابراین G باقیماندهٔ CE را نیز خواهد شمرد. اما CE، FB را می‌شمارد؛ لذا G هم FB را خواهد شمرد. اما G تمامی AB را نیز می‌شمارد، و، بنابراین باقیماندهٔ AF را خواهد شمرد، کمیت بزرگتر کمیت کوچکتر را: که غیرممکن است. درنتیجه هیچ کمیتی بزرگتر از AF، AB و CD را نخواهد شمرد. لذا AF بزرگترین شمارندهٔ مشترک AB و CD است. بدین ترتیب بزرگترین شمارندهٔ مشترک دو کمیت اندازه‌پذیر AB و CD پیدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

فرع. از اینجا این نکته آشکار می‌شود که اگر کمیتی دو کمیت را بشمارد، بزرگترین شمارندهٔ مشترک آنها را نیز خواهد شمرد.

قضیهٔ ۴

سه کمیت اندازه‌پذیر داده شده‌اند. مطلوب پیدا کردن بزرگترین شمارندهٔ مشترک آنهاست.



فرض می‌کنیم سه کمیت اندازه‌پذیر A و B و C داده شده‌اند؛ لذا مطلوب تعیین بزرگترین شمارندهٔ مشترک A و B و C است.

فرض می‌کنیم بزرگترین شمارندهٔ مشترک دو کمیت A و B را پیدا کرده‌ایم و آن D است؛[X.۳] پس، D یا C را می‌شمارد یا نمی‌شمارد.

ابتدا فرض می‌کنیم آن را بشمارد.

پس، چون D، C را می‌شمارد، و A و B را نیز؛ بنابراین D شمارندهٔ مشترک A و B و C است. و آشکار است که بزرگترین شمارندهٔ مشترک نیز هست؛ زیرا کمیتی بزرگتر از D، A و B را نمی‌شمارد.

حال، فرض می‌کنیم D، C را نشمارد.

می‌گوییم که اولاً C و D اندازه‌پذیرند.

زیرا، چون A و B و C اندازه‌پذیرند، کمیتی آنها را خواهد شمرد. و البته این کمیت A و B را نیز خواهد شمرد؛ لذا بزرگترین شمارندهٔ مشترک A و B یعنی D را نیز خواهد شمرد.[X.۳،ف.]

اما C را نیز می‌شمارد؛ در نتیجه کمیت مذکور C و D را خواهد شمرد؛ بنابراین C و D اندازه‌پذیرند.

اکنون فرض می‌کنیم بزرگترین شمارندهٔ مشترک D و C را پیدا کرده‌ایم و آن E است. [X.۳]

پس، چون E، D را می‌شمارد؛ و D، A و B را؛ بنابراین E، A و B را نیز خواهد شمرد. اما E، C را نیز می‌شمارد؛ بنابراین E، A و B و C را می‌شمارد. پس E شمارندهٔ مشترک A و B و C است.

اکنون، می‌گوییم که بزرگترین شمارندهٔ مشترک نیز هست.

زیرا، اگر E بزرگترین شمارندهٔ مشترک نباشد، فرض می‌کنیم کمیتی مانند F بزرگتر از E، بزرگترین شمارندهٔ مشترک باشد که A و B و C را بشمارد. حال، چون F، A و B و C را می‌شمارد، A و B را نیز خواهد شمرد؛ و، بزرگترین شمارندهٔ مشترک A و B را خواهد شمرد. [X.۳، ف.]

اما بزرگترین شمارندهٔ مشترک A و B، D بود؛ پس F، D را خواهد شمرد. اما F، C را هم می‌شمرد؛ بنابراین F، C و D را خواهد شمرد؛ بنابراین F بزرگترین شمارندهٔ مشترک C و D را نیز خواهد شمرد. [X.۳،ف.]

اما این بزرگترین شمارندهٔ مشترک E بود؛ پس F، E را خواهد شمرد، بزرگتر کوچکتر را: که غیرممکن است.

بنابراین هیچ کمیتی بزرگتر از E، کمیتهای A و B و C را نخواهد شمرد؛ در نتیجه، E بزرگترین شمارندهٔ مشترک A و B و C است اگر D، C را نشمارد. و، اگر C را بشمارد، خود D بزرگترین شمارندهٔ مشترک است.

لذا، بزرگترین شمارندهٔ مشترک سه کمیت اندازه‌پذیر را پیدا کرده‌ایم.

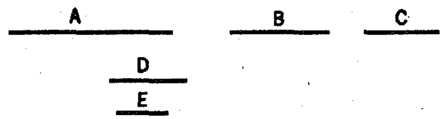
فرع. از اینجا معلوم می‌شود که اگر کمیتی سه کمیت را بشمارد، بزرگترین شمارندهٔ مشترک آنها را نیز خواهد شمرد.

همچنین اگر کمیتهای بیشتری در دست باشند، می‌توان بزرگترین شمارندهٔ مشترک آنها را پیدا کرد و این فرع را تعمیم داد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

نسبت کمیتهای اندازه‌پذیر به یکدیگر همچون نسبت یک عدد است به یک عدد.



فرض می‌کنیم A و B کمیتهایی اندازه‌پذیرند. می‌گوییم که نسبت A به B همچون نسبت یک عدد است به یک عدد. زیرا، چون A و B اندازه‌پذیرند، کمیتی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم، کمیتی آنها را بشمارد و آن کمیت C باشد. و فرض می‌کنیم به تعداد دفعاتی که C، A را می‌شمارد، واحد در D باشد؛ و به تعداد دفعاتی که C، B را می‌شمارد واحد در E.

پس، چون C، A را بر حسب واحدهای D می‌شمارد، و واحد نیز D را بر حسب واحدهای D می‌شمارد، بنابراین، واحد عدد D را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که کمیت C کمیت A را. لذا نسبت C به A مثل نسبت واحد است به D؛ [VII.تع. ۲۰]

بنابراین، به عکس، نسبت A به C همچون نسبت D است به واحد. [ر.ک. V. ۷، ف.]

باز چون C، B را بر حسب واحدهای E می‌شمارد، و واحد نیز E را برحسب واحدهای E می‌شمارد، بنابراین، واحد، E را به همان تعداد دفعاتی می‌شمارد که C، B را؛ از آنجا نسبت C به B مثل نسبت واحد است به E.

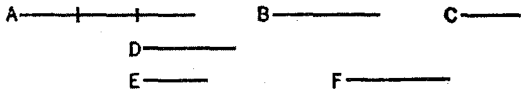
اما همچنین ثابت شده بود که نسبت A به C همچون نسبت D است به واحد؛ بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت A به B همچون عدد D است به عدد E. [V.۲۲]

لذا نسبت کمیتهای اندازه‌پذیر A و B به یکدیگر همچون نسبت عدد D است به عدد E.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر نسبت دو کمیت به یکدیگر همچون نسبت یک عدد به یک عدد باشد، آن دو کمیت اندازه‌پذیرند.



فرض می‌کنیم که نسبت دو کمیت A و B به یکدیگر همچون نسبت عدد D به عدد E باشد؛ می‌گوییم که کمیتهای A و B اندازه‌پذیرند. زیرا فرض می‌کنیم A به اجزائی مساوی با هم، به تعداد واحدهای موجود در D تقسیم شده است، و C مساوی با یکی از آنهاست. و، فرض می‌کنیم F از کمیتهایی مساوی با C به تعداد واحدهای موجود در E، درست شده است.

چون تعداد کمیتهای مساوی C در A با تعداد واحدهای موجود در D یکی است، واحد، هر جزئی از D باشد، C نیز همان جزء از A است؛ بنابراین نسبت C به A همچون نسبت واحد است به D. [VII.تع. ۲۰]

اما واحد، عدد D را می‌شمارد، پس C نیز A را می‌شمارد. و چون نسبت C به A همچون نسبت واحد است به D. لذا، به عکس، نسبت A به C همچون عدد D است به واحد.[ر.ک.V.۷، ف.]

باز، چون تعداد کمیتهای مساوی با C در F با تعداد واحدهای E یکی است، بنابراین نسبت C به F همچون نسبت واحد است به E. [VII.تع. ۲۰]

اما ثابت شده بود که نسبت A به C همچون D است به واحد؛ بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت A به F همچون نسبت D است به E. [V.۲۲]

اما نسبت D به E همچون نسبت A است به B؛ بنابراین نسبت A به B نیز همچون نسبت A است به F. [V.۱۱]

لذا A با هر یک از کمیتهای B و F یک نسبت دارد؛ پس B با F مساوی است. [V.۹]

اما C، F را می‌شمارد؛ بنابراین B را هم می‌شمارد.

به علاوه A را نیز می‌شمارد؛ لذا C، A و B را می‌شمارد. لذا A با B اندازه‌پذیر است.

فرع. از اینجا این نکته آشکار می‌شود که اگر دو عدد D و E و خط راستی مانند A داده شده باشند، می‌توان خط راستی مانند [F] پیدا کرد به طوری که نسبت خط راست داده شده به آن مثل نسبت عدد D باشد به عدد E.

و اگر واسطهٔ هندسی بین A و F، یعنی B، نیز به دست آید، نسبت A به F همچون نسبت مربع A خواهد بود به مربع B، یعنی، نسبت اولی به سومی همچون نسبت شکل مرسوم بر اولی است به شکلی متشابه و متشابه‌الوضع با آن مرسوم بر دومی. [VI.۱۹، ف.]

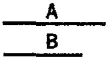
اما نسبت A به F همچون عدد D است به عدد E؛ بنابراین ترتیبی داده شده که نسبت

عدد D به عدد E نیز همچون نسبت شکل مرسوم بر خط راست A باشد به شکل مرسوم بر خط راست B.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

نسبت کمیتهای اندازه‌ناپذیر به یکدیگر همچون نسبت یک عدد به یک عدد نیست.



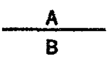
فرض می‌کنیم A و B کمیتهای اندازه‌ناپذیر باشند؛ می‌گوییم که نسبت A به B مثل نسبت یک عدد به یک عدد نیست. زیرا، اگر نسبت A به B همچون نسبت یک عدد به یک عدد باشد، A با B اندازه‌پذیر خواهد بود. [۶.X]

اما اندازه‌پذیر نیست؛ بنابراین نسبت کمیتهای اندازه‌ناپذیر به یکدیگر همچون نسبت یک عدد به یک عدد نیست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر نسبت دو کمیت به یکدیگر مثل نسبت یک عدد به یک عدد نباشد، آن کمیتها اندازه‌ناپذیر خواهند بود.



فرض می‌کنیم نسبت A به B همچون نسبت یک عدد به یک عدد نباشد؛ می‌گوییم که کمیتهای A و B اندازه‌ناپذیرند.

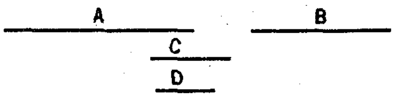
زیرا، اگر A و B اندازه‌پذیر باشند، نسبت A به B همچون نسبت یک عدد به یک عدد خواهد بود. [۵.X]

اما چنین نیست؛ بنابراین کمیتهای A و B اندازه‌ناپذیرند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

نسبت مربعهای بنا شده بر خطهای راست اندازه‌پذیر از حیث طول به یکدیگر، همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ و مربعهایی که نسبت‌شان به یکدیگر همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع است اضلاع‌شان از حیث طول اندازه‌پذیرند. اما نسبت مربعهای بنا شده بر خطهای راست اندازه‌ناپذیر از حیث طول به یکدیگر، همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ و مربعهایی که نسبت‌شان به یکدیگر همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، اضلاع‌شان هم از حیث طول اندازه‌پذیر نیستند.



فرض می‌کنیم A و B از حیث طول اندازه‌پذیرند؛ می‌گوییم که نسبت مربع بنا شده، بر A به مربع بنا شده بر B همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع.

زیرا، چون A از حیث طول با B اندازه‌پذیر است، بنابراین نسبت A به B همچون نسبت یک عدد است به یک عدد. [۵.X]

فرض می‌کنیم نسبت A به B مثل نسبت C به D است؛ در این صورت چون نسبت A به B همچون نسبت C به D است، ولی نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مثل مربع نسبت A است به B، زیرا، نسبت شکلهای متشابه همچون مربع نسبت اضلاع متناظر آنهاست به یکدیگر؛ [VI.۲۰، ف.]

و نسبت مربع C به مربع D مساوی مربع نسبت C به D است، زیرا بین دو عدد مربع یک واسطهٔ هندسی وجود دارد، و نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع، مساوی مربع نسبت ضلعهای آنهاست به یکدیگر؛ [VIII.۱۱]

بنابراین نسبت مربع بنا شده بر A هم به مربع بنا شده بر B همچون مربع C است به مربع D.

بعد، فرض می‌کنیم نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مثل مربع C است به مربع D؛ می‌گوییم که A از حیث طول با B اندازه‌پذیر است. زیرا چون نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مثل مربع C به مربع D است، و نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مثل مربع نسبت A است به B، و نسبت مربع C به مربع D مساوی مربع نسبت C به D است.

بنابراین نسبت A به B نیز همچون نسبت C است به D.

لذا A با B همان نسبتی را دارد که عدد C با عدد D دارد؛ در نتیجه A از حیث طول با B اندازه‌پذیر است. [۶.X]

اکنون فرض می‌کنیم A با B از حیث طول اندازه‌ناپذیر باشد؛ می‌گوییم که نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. زیرا اگر نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مساوی نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع باشد، A با B اندازه‌پذیر خواهد بود: که چنین نیست.

بنابراین نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مساوی نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

حال، فرض می‌کنیم نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مساوی نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نباشد. می‌گوییم که A از حیث طول با B اندازه‌ناپذیر است.

زیرا اگر A با B اندازه‌پذیر باشد، نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر B مساوی نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع: اما چنین نیست.

بنابراین A با B از حیث طول اندازه‌پذیر نیست.

فرع. از آنچه که تاکنون ثابت شد روشن می‌شود که خطهای راست اندازه‌پذیر از حیث طول همواره از حیث مربع نیز اندازه‌پذیرند، ولی خطهای راستی که از حیث مربع اندازه‌پذیرند، همیشه هم از حیث طول اندازه‌پذیر نیستند.

لم

در مقاله‌های مربوط به حساب ثابت شده است که نسبت اعداد مسطح متشابه به یکدیگر همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع. [۲۶.VIII]

و اگر نسبت دو عدد به یکدیگر مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع باشد، آن دو عدد مسطح متشابه‌اند [عکس قضیهٔ ۲۶.VIII]

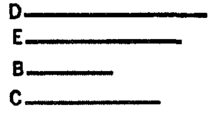
و از این قضیه‌ها آشکار می‌شود که نسبت اعدادی که مسطح متشابه نیستند، یعنی اعدادی که ضلعهای آنها متناسب نیستند همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. زیرا اگر چنین باشند، آن اعداد مسطح متشابه خواهند بود: که بر خلاف فرض است.

بنابراین نسبت اعدادی که مسطح متشابه نیستند به یکدیگر همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

مطلوب پیدا کردن دو خط راست اندازه‌ناپذیر است که یکی فقط از حیث طول با یک خط راست مشخص [گویا] اندازه‌ناپذیر باشد و دیگری هم از حیث طول و هم از حیث مربع.



فرض می‌کنیم که A خط راست مشخص است؛ پس مطلوب پیدا کردن دو خط راست اندازه‌ناپذیر است که یکی فقط از حیث طول با A اندازه‌ناپذیر باشد و دیگری، هم از حیث طول و هم از حیث مربع. فرض می‌کنیم دو عدد B و C پیدا کرده‌ایم که نسبت آنها به یکدیگر همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، یعنی، اعداد مسطح متشابه نیستند؛ و فرض می‌کنیم ترتیبی داده شده است که نسبت B به C همچون نسبت مربع بنا شده بر A باشد به مربع بنا شده بر D. زیرا ما یاد گرفته‌ایم چگونه این کار را انجام دهیم. [X.۶، ف.]

بنابراین مربع بنا شده بر A با مربع بنا شده بر D اندازه‌پذیر است [۶.X]

و چون نسبت B به C مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع بنا شده بر A به مربع بنا شده بر D هم مساوی نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

لذا A از حیث طول با D اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

فرض می‌کنیم E، واسطهٔ هندسی بین A و D، را پیدا کرده‌ایم؛ بنابراین نسبت A به D مثل نسبت مربع بنا شده بر A است به مربع بنا شده بر E. [۹.تع.V]

اما A از حیث طول با D اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین مربع بنا شده بر A هم با مربع بنا شده بر E اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

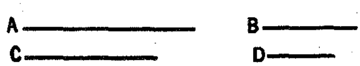
پس A از حیث مربع با E اندازه‌ناپذیر است.

بنابراین دو خط راست D و E پیدا کردیم که D فقط از لحاظ طول، و E هم از حیث طول و هم از حیث مربع، با خط راست مشخص A اندازه‌ناپذیرند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

اگر چهار کمیت متناسب باشند و اولی با دومی اندازه‌پذیر باشد، سومی نیز با چهارمی اندازه‌پذیر خواهد بود؛ اگر اولی با دومی اندازه‌ناپذیر باشد، سومی نیزباچهارمی اندازه‌ناپذیر خواهد بود.



فرض می‌کنیم A و B و C و D چهار کمیت متناسب‌اند به طوری که نسبت A به B مثل نسبت C است به D، و A با B اندازه‌پذیر است، می‌گوییم که C نیز با D اندازه‌ناپذیر است. زیرا، چون A با B اندازه‌پذیر است، بنابراین نسبت A به B همچون نسبت یک عدد است به یک عدد. [۵.X]

و، نسبت A به B مثل نسبت C است به D، بنابراین نسبت C به D نیز مثل نسبت یک عدد است به یک عدد. پس C با D اندازه‌پذیر است. [۶.X]

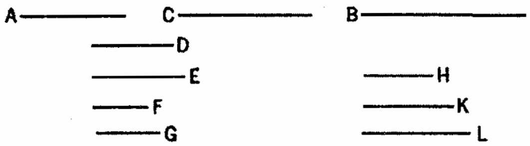
حال، فرض می‌کنیم که A با B اندازه‌ناپذیر باشد، می‌گوییم که C نیز با D اندازه‌ناپذیر است. زیرا، چون A با B اندازه‌ناپذیر است، پس نسبت A به B مثل نسبت یک عدد به یک عدد نیست. [۷.X]

و، نسبت A به B مثل نسبت C است به D؛ بنابراین نسبت C به D هم مثل نسبت یک عدد به یک عدد نیست؛ بنابراین، C با D اندازه‌ناپذیر است. [۸.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

کمیتهای اندازه‌پذیر با یک کمیت، خود نیز با هم اندازه‌پذیرند.



فرض می‌کنیم که هر یک از کمیتهای A و B با C اندازه‌پذیر است. می‌گوییم که A نیز با B اندازه‌پذیر است. زیرا، چون A با C اندازه‌پذیر است، بنابراین نسبت A به C مثل نسبت یک عدد است به یک عدد. [۵.X]

فرض می‌کنیم این نسبت نسبتی باشد که D به E دارد.

باز، چون C با B اندازه‌پذیر است، بنابراین نسبت C به B مثل نسبت یک عدد است به یک عدد. [۵.X]

فرض می‌کنیم این نسبت نسبتی باشد که F به G دارد. و، اگر چند نسبت دلخواه داده شده باشند، یعنی نسبتی که D به E دارد، و نسبتی که F به G دارد، اعداد H و K و L را به تناسب پیوسته با این نسبتها پیدا می‌کنیم، [ر. ک. ۴.VIII]

به طوری که نسبت D به E مثل نسبت H باشد به K، و نسبت F به G مثل نسبت K باشد به L.

در این صورت، چون نسبت A به C مثل نسبت D است به E، و نسبت D به E مثل نسبت H است به K، بنابراین نسبت A به C نیز همچون نسبت H است به K. [۱۱.V]

باز، چون نسبت C به B مثل نسبت F است به G، و نسبت F به G مثل نسبت K است به L، بنابراین نسبت C به B نیز مثل نسبت K است به L. [۱۱.V]

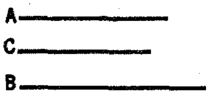
اما نسبت A به C نیز مثل نسبت H است به K؛ پس، طبق نسبت مساوات هموار نسبت A به B مثل نسبت H است به L. [۲۲.V]

لذا نسبت A به B همچون نسبت یک عدد است به یک عدد. در نتیجه A با B اندازه‌پذیر است. [۶.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر دو کمیت اندازه‌پذیر باشند و یکی از آنها با یک کمیت غیرمشخص اندازه‌ناپذیر باشد، کمیت دیگر نیز با این کمیت اندازه‌ناپذیر است.



فرض می‌کنیم A و B دو کمیت اندازه‌پذیر هستند و یکی از آنها، A، با کمیت دیگر C اندازه‌ناپذیر است، می‌گوییم B نیز با C اندازه‌ناپذیر است.

زیرا، اگر B با C اندازه‌پذیر باشد، در حالی که A نیز با B اندازه‌پذیر است، A نیز با C اندازه‌پذیر خواهد بود. [۱۲.X]

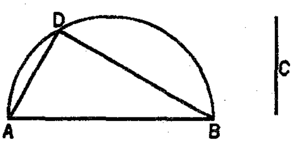
اما A با C اندازه‌ناپذیر نیز هست: که غیرممکن است.

پس B با C اندازه‌پذیر نیست. بنابراین با آن اندازه‌ناپذیر است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

دو خط راست نامساوی داده شده‌اند. مطلوب پیدا کردن خط راستی است که مربع خط راست بزرگتر، به اندازهٔ مربع آن از مربع خط راست کوچکتر، بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم که AB و C دو خط راست نامساوی داده شده‌اند و AB بزرگتر از C است. پس، می‌خواهیم خط راستی پیدا کنیم که مربع AB به اندازهٔ مربع آن از مربع C بزرگتر باشد.

فرض می‌کنیم نیم‌دایرهٔ ADB به قطر AB رسم و AD درخور آن مساوی با C کشیده شده است. [۱.IV]

DB را وصل می‌کنیم. روشن است که زاویهٔ ADB قائمه است، [۳۱.III]

و مربع AB به اندازهٔ مربع DB از مربع AD، یعنی C، بزرگتر است. [۴۷.I]

همچنین اگر دو خط راست داده شده باشند، به همین طریق می‌توانیم خط راستی پیدا کنیم که مربع آن با مجموع مربعهای آن دو خط راست مساوی باشد:

فرض می‌کنیم AD و DB دو خط راست داده شده باشند، و مطلوب پیدا کردن خط راستی است که مربع آن با مجموع مربعهای آن دو خط مساوی باشد. آن دو خط را چنان پهلوی هم قرار می‌دهیم که با هم زاویهٔ قائمه بسازند، یعنی زاویهٔ بین AD و DB مساوی با یک قائمه باشد، و AB را وصل می‌کنیم.

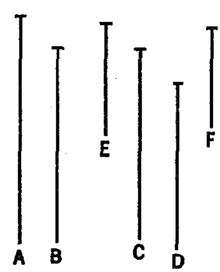
باز روشن است که AB خط راستی است که مربع آن با مجموع مربعهای AD و DB مساوی است. [۴۷.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر چهار خط راست متناسب باشند و مربع اولی از مربع دومی به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با اولی بزرگتر باشد، آنگاه مربع سومی نیزاز مربع چهارمی به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با سومی بزرگتر است.

و اگر مربع اولی از مربع دومی به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با اولی بزرگتر باشد، آنگاه مربع سومی نیز از مربع چهارمی به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با سومی بزرگتر است.



فرض می‌کنیم A و B و C و D چهار خط راست متناسب‌اند، به طوری که نسبت A به B مثل C است به D؛ و فرض می‌کنیم که مربع A به اندازهٔ مربع E از مربع B بزرگتر است، و مربع C به اندازهٔ مربع E از مربع D بزرگتر باشد؛ می‌گوییم که اگر A با E اندازه‌پذیر باشد، C نیز با F اندازه‌پذیر است، و اگر A با E اندازه‌ناپذیر باشد، C نیز با F اندازه‌ناپذیر است.

زیرا، چون نسبت A به B همچون نسبت C به D است، پس نسبت مربع A به مربع B نیز همچون نسبت مربع C است به مربع D. [۲۲.VI]

اما، مربعهای E و B با مربع A مساوی‌اند، و مربعهای D و F با مربع C. بنابراین نسبت مربعهای E و B به مربع B مثل نسبت مربعهای D و F است به مربع D؛ بنابراین از تفضیل نسبت در صورت خواهیم داشت، نسبت مربع E به مربع B همچون نسبت مربع F است به مربع D؛ [۱۷.V]
لذا نسبت E به B نیز همچون نسبت F است به D؛ [۲۲.VI]
بنابراین، به عکس، نسبت B به E مثل نسبت D است به F.

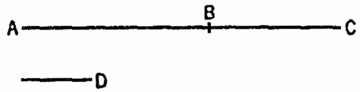
اما، نسبت A به B همچون نسبت C بود به D؛ بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت A به E همچون نسبت C است به F. [۲۲.V]

لذا اگر A با E اندازه‌پذیر باشد، C نیز با F اندازه‌پذیر است، و اگر A با E اندازه‌ناپذیر باشد، C نیز با F اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر دو کمیت اندازه‌پذیر با هم جمع شوند، حاصل جمع نیز با هر یک از آنها اندازه‌پذیر است؛ و اگر مجموع با یکی از آنها اندازه‌پذیر باشد، کمیتهای اولیه نیز با هم اندازه‌پذیر خواهند بود.



فرض می‌کنیم دو کمیت اندازه‌پذیر AB و BC با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که تمامی AC نیز با هر یک از کمیتهای AB و BC اندازه‌پذیر است.

زیرا، چون AB و BC اندازه‌پذیرند، کمیتی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم آن کمیت D باشد. پس چون D، AB و BC را می‌شمارد، تمامی AC را نیز خواهد شمرد.

اما D، AB و BC را نیز می‌شمارد؛ بنابراین AB و BC و AC را خواهد شمرد؛ بنابراین AC با هر یک از کمیتهای AB و BC اندازه‌پذیر است. [X.تع.۱]

حال، فرض می‌کنیم AC با AB اندازه‌پذیر باشد؛ می‌گوییم AB و BC نیز اندازه‌پذیرند.

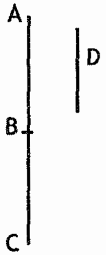
زیرا، چون AC و AB اندازه‌پذیرند، کمیتی آنها را می‌شمارد. فرض می‌کنیم آن کمیت D باشد. در این صورت چون D، CA و AB را می‌شمارد، باقیماندهٔ BC را نیز خواهد شمرد.

اما D، AB را نیز می‌شمارد؛ بنابراین D، AB و BC را خواهد شمرد؛ در نتیجه AB و BC اندازه‌پذیرند. [X.تع.۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

اگر دو کمیت اندازه‌ناپذیر با هم جمع شوند، حاصل با هر یک از آن دو کمیت اندازه‌ناپذیر خواهد بود؛ و اگر حاصل با یکی از آن دو کمیت اندازه‌ناپذیر باشد، کمیتهای اولیه نیز با هم اندازه‌ناپذیر خواهند بود.



فرض می‌کنیم دو کمیت اندازه‌ناپذیر AB و BC با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که تمامی AC نیز با هر یک از کمیتهای AB و BC اندازه‌ناپذیر است. زیرا، اگر CA و AB اندازه‌ناپذیر نباشند، کمیتی آنها را خواهد شمرد. فرض می‌کنیم این کمیت D باشد. چون D، CA و AB را می‌شمارد، BCی باقیمانده را نیز خواهد شمرد. اما D، AB را نیز می‌شمارد؛ بنابراین D، AB و BC را می‌شمارد. لذا AB و BC اندازه‌پذیرند؛ اما بنا به فرض، آنها اندازه‌ناپذیر بودند: که غیرممکن است.

لذا، هیچ کمیتی CA و AB را نخواهد شمرد؛ در نتیجه CA و AB اندازه‌ناپذیرند.[X.تع.۱]

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که AC و CB نیز اندازه‌ناپذیرند. بنابراین AC با هر یک از کمیتهای AB و BC اندازه‌ناپذیر است.

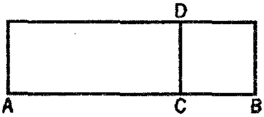
حال، فرض می‌کنیم AC با یکی از کمیتهای AB و BC اندازه‌ناپذیر باشد. ابتدا فرض می‌کنیم با AB اندازه‌ناپذیر باشد؛ می‌گوییم که AB و BC نیز اندازه‌ناپذیرند. زیرا، اگر اندازه‌پذیر باشند، کمیتی آنها را خواهد شمرد.

فرض می‌کنیم این کمیت D باشد. در این صورت D، AB و BC را می‌شمارد، بنابراین تمامی AC را نیز خواهد شمرد. اما AB را نیز می‌شمارد؛ پس D، CA و AB را می‌شمارد. بنابراین CA و AB اندازه‌پذیرند؛ اما این کمیتها نیز بنا به فرض اندازه‌ناپذیر بودند: که غیرممکن است. بنابراین هیچ کمیتی AB و BC را نخواهد شمرد؛ در نتیجه AB و BC اندازه‌ناپذیرند. [X.تع.۱]

آنچه می‌خواستیم.

لم

اگر متوازی‌الاضلاعی با کاستی یک شکل مربعی بر خط راستی اضافه شود، متوازی‌الاضلاع مضاف با مستطیل حاصل از قطعاتی که بر AB در نتیجهٔ این اضافه شدن پدید آمده، مساوی است.



فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع AD با کاستی شکل مربعی DB بر خط راست AB افزوده شده است. می‌گوییم که AD با مستطیل حاصل از AC و CB مساوی است. درواقع این مطلب بلافاصله دیده می‌شود.

زیرا، چون DB مربع است، DC با CB مساوی است، و AD مستطیل حاصل از AC و CD، یعنی مستطیل AC و CB است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

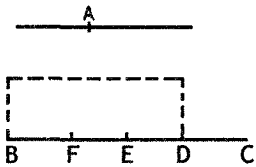
اگر دو خط راست نامساوی در دست باشند و بر خط بزرگتر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع خط کوچکتر و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شود، و اگر این عمل خط بزرگتر را به دو جزء اندازه‌پذیر از حیث طول تقسیم کند، مربع خط بزرگتر از مربع خط کوچکتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با خط بزرگتر، بزرگتر خواهد بود.

و، اگر مربع خط راست بزرگتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با خط بزرگتر، از مربع خط کوچکتر، بزرگتر باشد، و اگر بر خط بزرگتر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع خط کوچکتر و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شود، این عمل خط بزرگتر را به دو جزء اندازه‌پذیر از حیث طول تقسیم می‌کند.

فرض می‌کنیم A و BC دو خط راست نامساوی‌اند، و BC بزرگتر است؛ و فرض می‌کنیم بر BC متوازی‌الاضلاعی مساوی با ربع مربع خط راست کوچکتر، A، یعنی مساوی با مربع نصف A و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شده است. فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل BD و DC است، [رک. لم اخیر]

و BD از حیث طول با DC اندازه‌پذیر است؛ می‌گوییم که مربع BC به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با BC از مربع A بزرگتر است.

فرض می‌کنیم E وسط BC باشد، و EF را مساوی با DE جدا می‌کنیم. بنابراین DCی باقیمانده با BF مساوی است.



و، چون خط راست BC در E به اجزائی متساوی و در D به اجزائی نامساوی بریده شده است، بنابراین مستطیل حاصل از BD و DC همراه با مربع ED، با مربع EC مساوی است. [۵.II]

و همین امر برای چهار برابر آنها صادق است؛ لذا چهار برابر مستطیل BD و DC همراه با چهار برابر مربع DE با چهار برابر مربع EC مساوی است.

اما مربع A با چهار برابر مستطیل BD و DC مساوی است، و مربع DF با چهار برابر مربع DE، زیرا DF دو برابر DE است. و مربع BC با چهار برابر مربع EC مساوی است، زیرا باز BC دو برابر CE است.

لذا مربعهای A و DF با مربع BC مساوی‌اند، درنتیجه مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع DF بزرگتر است.

حال باید ثابت کنیم که BC نیز با DF اندازه‌پذیر است.

چون BD از حیث طول با DC اندازه‌پذیر است، بنابراین BC نیز از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

اما CD از حیث طول با CD و BF اندازه‌پذیر است، زیرا CD با BF مساوی است. [۶.X]

بنابراین BC از حیث طول با CD و BF نیز اندازه‌پذیر است، [۱۲.X]

لذا BC از حیث طول با FDی باقیمانده نیز اندازه‌پذیر است؛ [۱۵.X]

بنابراین مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با BC بزرگتر است.

حال، فرض می‌کنیم مربع BC به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با BC از مربع A بزرگتر است، بر BC متوازی‌الاضلاعی مساوی با ربع مربع A و کاستی یک شکل مربعی اضافه، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل BD و DC باشد.

باید ثابت کنیم که BD از حیث طول با DC اندازه‌پذیر است.

با همان شکل قبل، می‌توانیم به همان نحوکه قبلاً دیدیم ثابت کنیم که مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع FD بزرگتر است. اما مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با BC بزرگتر است. در نتیجه BC از حیث طول با FD اندازه‌پذیر است، از این‌رو BC از حیث طول، با باقیمانده، یعنی مجموع BF و DC، اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

اما مجموع BF و DC با DC اندازه‌پذیر است، [۶.X]

لذا BC نیز از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است؛ [۱۲.X]

و بنابراین، تفاضل آنها، BD، از حیث طول با DC اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

اگر دو خط راست نامساوی داده شده باشند، و بر خط بزرگتر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع خط کوچکتر و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شود، و اگر این عمل خط بزرگتر را به دو جزء اندازه‌ناپذیر از حیث طول تقسیم کند، مربع خط بزرگتر از مربع خط کوچکتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با خط بزرگتر، بزرگتر خواهد بود.

و اگر مربع خط بزرگتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با خط بزرگتر، از مربع خط کوچکتر بزرگتر باشد، و اگر بر خط بزرگتر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع خط کوچکتر و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شود، این عمل خط بزرگتر را به دو جزء اندازه‌ناپذیر از حیث طول تقسیم می‌کند[1].

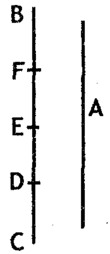
فرض می‌کنیم A و BC دو خط راست نامساوی‌اند، و BC بزرگتر است، و فرض می‌کنیم بر BC متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع خط کوچکتر، A، و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شده است.

فرض می‌کنیم این شکل مستطیل BD و DC است، [ر. ک. لم قبل از ۱۷.X]

و، BD از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است؛ می‌گوییم که مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BC بزرگتر است. زیرا با رسم شکلی مانند شکل قبل می‌توانیم به همان طریق ثابت کنیم که مربع BC به اندازهٔ مربع FD از مربع A بزرگتر است.

۱. این قضیه و قضیه قبل می‌گویند که ریشه‌های معادلهٔ $(BC-x)x=\frac{1}{4}A^2$ یا $(a-x)x=\frac{1}{4}b^2$ بر حسب اینکه $\sqrt{a^2-b^2}$ با a اندازه‌پذیر باشد یا نباشد، با a اندازه‌پذیر یا اندازه‌ناپذیرند.ـم.

باید ثابت کنیم که BC از حیث طول با DF اندازه‌ناپذیر است.



چون BD از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است، لذا BC نیز از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۱۶.X]

اما DC با مجموع BF و DC اندازه‌ناپذیر است؛ [۶.X]

بنابراین BC نیز با مجموع BF و DC اندازه‌ناپذیر است؛ [۱۳.X]

لذا BC از حیث طول با FDی باقیمانده نیز اندازه‌ناپذیر است. [۱۶.X]

و مربع BC به اندازهٔ مربع FD از مربع A بزرگتر است؛ بنابراین مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BC بزرگتر است.

باز فرض می‌کنیم مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BC بزرگتر باشد، و فرض می‌کنیم بر BC متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع A و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شده است.

فرض می‌کنیم این شکل مستطیل BD و DC باشد. باید ثابت کنیم که BD از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است.

زیرا با رسم شکلی مانند شکل قبل، می‌توانیم به همان طریق ثابت کنیم که مربع BC از مربع A به اندازهٔ مربع FD بزرگتر است.

اما مربع BC از مربع A، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BC بزرگتر است؛ بنابراین BC از حیث طول با FD اندازه‌ناپذیر است؛ در نتیجه BC با باقیمانده، مجموع BF و DC، نیز اندازه‌ناپذیر است. [۱۶.X]

اما مجموع BF و DC از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است؛ [۶.X]

بنابراین BC نیز از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است، [۱۳.X]

لذا، تفاضل آنها، BD، نیز از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است. [۱۶.X]

آنچه می‌خواستیم.

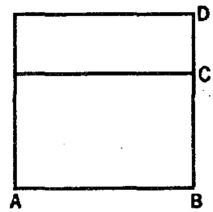
لم

قبلاً ثابت شده بود که خطهای راست اندازه‌پذیر از لحاظ طول همواره از حیث مربع نیز اندازه‌پذیرند، در حالی که خطهای راستی که از حیث مربع اندازه‌پذیرند همیشه از حیث طول هم اندازه‌پذیر نیستند، اما البته می‌توانند از حیث طول اندازه‌پذیر باشند یا نباشند؛ روشن است کهِ اگر خط راستی با خط راست گویای مفروضی از حیث طول اندازه‌پذیر باشد، آن خط را گویا و با دیگری، نه‌تنها از حیث طول بلکه از حیث مربع نیز اندازه‌پذیر گویند. زیرا خطهای راست اندازه‌پذیر از حیث طول، همواره از حیث مربع نیز اندازه‌پذیرند.

اما، اگر خط راستی با خط راست گویای دادهشدهای از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد، اگر از حیث طول هم با آن اندازه‌پذیر باشد، در این حالت آن خط گویا، هم از حیث طول و هم از حیث مربع با آن اندازه‌پذیر نامیده می‌شود؛ اما، باز اگر خط راستی که از حیث مربع با خط راست گویای دادهشده‌ای اندازه‌پذیر است، از حیث طول با آن اندازه‌ناپذیر باشد، در این حالت نیز آن خط گویا ولی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر گفته می‌شود.

قضیهٔ ۱۹

مستطیل حاصل از خطهای راست گویای اندازه‌پذیر از حیث طول، گویاست.



فرض می‌کنیم مستطیل AC از خطهای راست گویای AB و BC، اندازه‌پذیر از حیث طول، حاصل شده است؛ می‌گوییم AC گویاست. زیرا بر AB مربع AD را بنا می‌کنیم؛ بنابراین AD گویاست. [X.تع.۴]

و چون AB از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است، و AB با BD مساوی، بنابراین BD از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است. و چون نسبت BD به BC مثل نسبت DA است به AC. [VI.۱]

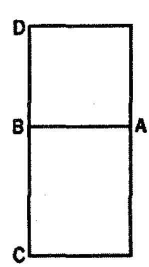
بنابراین DA با AC اندازه‌پذیر است. [X.۱۱]

اما DA گویاست، بنابراین AC نیز گویاست. [X.تع.۴]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

اگر مساحتی گویا بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنای این مساحت خط راستی است گویا و از حیث طول اندازه‌پذیر با خط راستی که بر آن اضافه شده است.



فرض می‌کنیم مساحت گویای AC بر AB، خط راستی آن هم گویا به هر طریقی که در قبل گفته‌ایم، اضافه شده است و پهنای BC را پدید آورده است. می‌گوییم که BC گویا و از حیث طول با BA اندازه‌پذیر است. زیرا فرض می‌کنیم بر AB مربع AD بنا شده است. بنابراین AD گویاست. [X.تع.۴]

اما AC نیز گویاست؛ بنابراین DA با AC اندازه‌پذیر است. و، نسبت DA به AC مثل نسبت DB است به BC. [VI.۱]

لذا DB نیز با BC اندازه‌پذیر است؛ [X.۱۱]

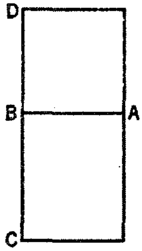
و DB با BA مساوی است، بنابراین AB نیز با BC اندازه‌پذیر است.

اما AB گویاست؛ بنابراین BC نیز گویا و از حیث طول با AB اندازه‌پذیر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

مستطیل حاصل از خطهای راست گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، گنگ است، و ضلع مربع مساوی با آن نیز گنگ است. ضلع این مربع را واسط[1] می‌نامیم.



فرض می‌کنیم مستطیل AC به ضلعهای خطهای راست گویای AB و BC که فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، داده شده است. می‌گوییم که AC گنگ است و ضلع مربع مساوی با آن گنگ؛ و این خط را واسط می‌نامیم. زیرا فرض می‌کنیم مربع AD بر AB بنا شده است. پس AD گویاست. [X.تع.۴]

و، چون AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است، زیرا بنا به فرض آنها فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و AB با BD مساوی است، بنابراین DB نیز از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است.

و چون نسبت DB به BC همچون نسبت AD است به AC. [VI.۱]

بنابراین DA با AC اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۱]

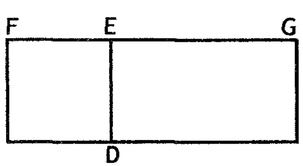
اما DA گویاست؛ بنابراین AC گنگ است، لذا ضلع مربع مساوی با AC نیز گنگ است.[X.تع.۴]

و ضلع این مربع واسط نامیده شده است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

اگر دو خط راست در دست باشند، نسبت اولی به دومی همچون نسبت مربع حاصل از اولی است به مستطیل حاصل از این دو خط راست.



فرض می‌کنیم FE و EG دو خط راست هستند. می‌گوییم که نسبت FE به EG همچون نسبت مساحت مربع FE است به مساحت مستطیل FE و EG. زیرا فرض می‌کنیم مربع DF بر EF بنا، و GD کامل شده است.

پس چون، نسبت FE به EG همچون نسبت FD است به DG، [VI.۱]

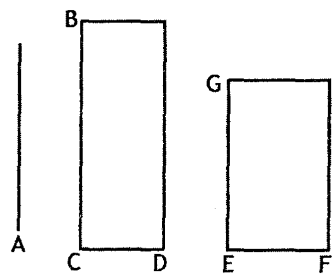
1. Medial

و FD مربع FE است، و DG مستطیل DE و EG، یعنی مستطیل FE و EG، بنابراین نسبت FE به EG همچون نسبت مربع FE است به مستطیل FE و EG. و نیز نسبت مستطیل GE و EF به مربع EF، یعنی نسبت GD به FD همچون نسبت GE است به EF.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

اگر مربع خط راستی واسط، بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد خط راستی است گویا و از حیث طول با خطی که بر آن اضافه شده، اندازه‌ناپذیر است.



گیریم که A واسط است و CB گویا، و فرض می‌کنیم مساحت مستطیلی شکل BD، مساوی با مربع A، بر BC اضافه شده و پهنای CD را پدید آورده است. می‌گوییم که CD گویا و از حیث طول با CB اندازه‌ناپذیر است.

زیرا، چون A واسط است، مربع آن با مساحت مستطیلی شکل حاصل از خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر، مساوی است. [۲۱.X]

فرض می‌کنیم مربع آن با GF مساوی است. اما مربع آن با BD نیز مساوی است؛ بنابراین BD با GF مساوی است. اما BD متساوی‌الزاویه نیز با آن هست؛ و در متوازی‌الاضلاعهای متساوی و متساوی‌الزاویه، اضلاع حول زاویه‌های متساوی معکوساً متناسب‌اند؛ [۱۴.VI]
بنابراین از لحاظ تناسب، نسبت BC به EG همچون نسبت EF است به CD.

لذا نسبت مربع BC به مربع EG هم، مثل نسبت مربع EF است به مربع CD. [۲۲.VI]

اما مربع CB با مربع EG اندازه‌پذیر است، زیرا هر یک از این خطهای راست گویاست؛ بنابراین مربع EF نیز با مربع CD اندازه‌پذیر است. [۱۱.X]

اما مربع EF گویاست؛ بنابراین مربع CD نیز گویاست. [X.تع.۴]

پس، CD گویاست.

و چون EF از حیث طول با EG اندازه‌ناپذیر است، زیرا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ و، نسبت EF به EG مثل نسبت مربع EF است به مستطیل FE و EG، [لم اخیر]
بنابراین مربع EF با مستطیل FE و EG اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

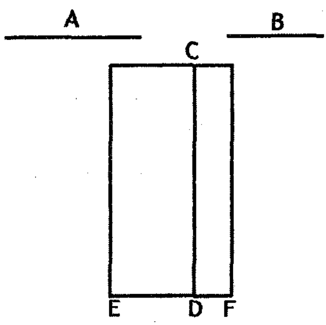
اما مربع CD با مربع EF اندازه‌پذیر است، زیرا این خطهای راست از حیث مربع گویا هستند؛

و مستطیل DC و CB با مستطیل FE و EG اندازه‌پذیر است، زیرا با مربع A مساوی‌اند؛
بنابراین مربع CD هم با مستطیل DC و CB اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]
اما چون نسبت مربع CD به مستطیل DC و CB همچون DC است به CB؛ [لم اخیر]
بنابراین DC از حیث طول با CB اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]
در نتیجه CD گویا و از حیث طول با CB اندازه‌ناپذیر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

هر خط راست اندازه‌پذیر با یک خط راست واسط، واسط است.



فرض می‌کنیم A واسط باشد و B با A اندازه‌پذیر.
می‌گوییم B نیز واسط است.
زیرا، فرض می‌کنیم یک خط راست گویای CD در دست است، و بر CD مساحت مستطیلی شکل CE مساوی با مربع A اضافه شده است، که پهنای ED را پدید آورده است؛ بنابراین ED گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، فرض می‌کنیم مساحت مستطیلی شکل CF، مساوی با مربع B، بر CD اضافه شده و پهنای DF را پدید آورده است. پس، چون A با B اندازه‌پذیر است، مربع A نیز با مربع B اندازه‌پذیر است. اما EC با مربع A مساوی است، و CF با مربع B؛ بنابراین EC با CF اندازه‌پذیر است. و، چون نسبت EC به CF همچون نسبت ED است به DF؛ [۱.VI]
بنابراین ED از حیث طول با DF اندازه‌پذیر است. [۱۱.X]
اما ED گویا و از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است، بنابراین DF نیز گویا [X.تع.۳]
و از حیث طول با DC اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]
لذا CD و DF گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.
اما خط راستی که مربع مضاف بر آن با مستطیل حاصل از خطهای راست گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، مساوی است واسط است؛ [۲۱.X]
لذا، ضلع مربع مساوی با مستطیل CD و DF، واسط است. [۲۱.X]
و B ضلع مربعی است مساوی با مستطیل CD و DF؛ در نتیجه B واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

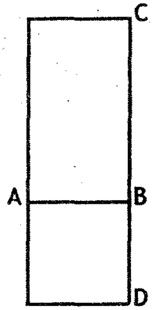
فرع. از اینجا آشکار می‌شود که یک مساحت اندازه‌پذیر با یک مساحت واسط، واسط است.

و به همین ترتیب، چنان‌که در حالت گویاها [لم پس از ۱۸.X] بیان شده بود، در باب واسطها، نتیجه می‌شود که یک خط راست اندازه‌پذیر از حیث طول با یک خط راست واسط، نه‌تنها از حیث طول، بلکه از حیث مساحت نیز واسط و اندازه‌پذیر با آن خوانده می‌شود، زیرا در حالت کلی، خطهای راست اندازه‌پذیر از حیث طول همواره از حیث مربع نیز اندازه‌پذیرند.

اما، اگر خط راستی از حیث مربع با خط راست واسطی اندازه‌پذیر باشد، اگر از حیث طول نیز با آن اندازه‌پذیر باشد، این خطهای راست، در این حالت نیز، واسط و اندازه‌پذیر هم از حیث طول و هم از حیث مربع، نامیده می‌شوند، ولی اگر فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشند، خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر خوانده می‌شوند.

قضیهٔ ۲۴

مستطیل حاصل از خطهای راست واسط اندازه‌پذیر از حیث طول، واسط است.



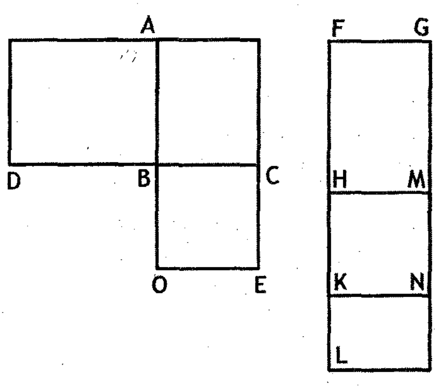
فرض می‌کنیم مستطیل AC حاصل از خطهای راست واسط AB و BC است که از حیث طول اندازه‌پذیرند؛ می‌گوییم که AC واسط است. زیرا فرض می‌کنیم مربع AD بر AB بنا شده است، بنابراین AD واسط است. و چون AB از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است، و AB با BD مساوی است، بنابراین DB نیز از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است؛ در نتیجه DA نیز با AC اندازه‌پذیر است. [۱.VI، ۱۱.X]

اما DA واسط است؛ در نتیجه AC نیز واسط است.[۲۳.X،ف.]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

مستطیل حاصل از خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، یا گویاست یا واسط.



فرض می‌کنیم مستطیل AC از خطهای راست واسط AB و BC که فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، حاصل شده است، می‌گوییم که AC یا گویاست یا واسط.

زیرا فرض می‌کنیم بر AB و BC مربعهای AD و BE بنا شده‌اند. بنابراین هر یک از مربعهای AD و BE واسط است. فرض می‌کنیم خط راست گویایی مانند FG معلوم است. متوازی‌الاضلاع

مستطیلی شکل GH را مساوی با AD بر آن بنا می‌کنیم که پهنای FH را پدید می‌آورد.

بر HM متوازی‌الاضلاع مستطیلی شکل MK مساوی با AC را اضافه می‌کنیم که پهنای HK را پدید می‌آورد. و، حال فرض می‌کنیم بر KN نیز، NL را مساوی با BE اضافه کرده‌ایم که پهنای KL را پدید آورده است. بنابراین FH و HK و KL بر یک خط راست قرار دارند.

پس، چون هر یک از مربعهای AD و BE واسط است، و AD با GH برابر است، و BE با NL، بنابراین هر یک از مستطیلهای GH و NL نیز واسط است. و این مستطیلها بر خط راست گویای FG اضافه شده‌اند؛ بنابراین هر یک از خطهای راست FH و KL گویا و از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است، [۲۲.X]

و، چون AD با BE اندازه‌پذیر است، بنابراین GH نیز با NL اندازه‌پذیر است. و نسبت GH به NL همچون نسبت FH است به KL؛ [۱.VI]

بنابراین FH از حیث طول با KL اندازه‌پذیر است. [۱۱.X]

لذا FH و KL خطهای راست گویای اندازه‌پذیر از حیث طول‌اند؛ پس، مستطیل FH و KL گویاست. [۱۹.X]

و، چون DB با BA مساوی است، و OB با BC، بنابراین نسبت DB به BC همچون نسبت AB است به BO. اما نسبت DB به BC همچون نسبت DA است به AC، [۱.VI]

و، AB به BO همچون AC است به CO؛ [همان قضیه]

بنابراین نسبت DA به AC همچون نسبت AC است به CO؛ اما AD با GH مساوی است، و AC با MK، و CO با NL؛ لذا نسبت GH به MK همچون نسبت MK است به NL؛ بنابراین، نسبت FH به HK نیز همچون نسبت HK است به KL. [۱۱.V ،۱.VI]

لذا مستطیل FH و KL با مربع HK مساوی است. [۱۷.VI]

اما مستطیل FH و KL گویاست؛ بنابراین مربع HK نیز گویا، و لذا HK گویاست. و، اگر از حیث طول با FG اندازه‌پذیر باشد، HN گویاست، [۱۹.X]

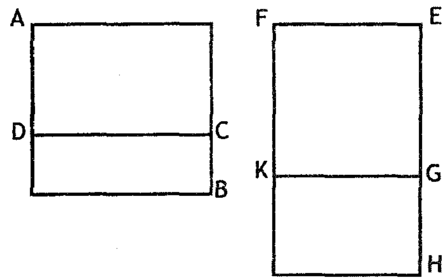
اما اگر از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر باشد، KH و HM خطهای راستی گویا، و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و لذا HN واسط است. [۲۱.X]

پس NH یا گویاست یا واسط. اما NH با AC مساوی است؛ بنابراین AC یا گویاست یا واسط.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

تفاضل یک مساحت واسط و یک مساحت واسط نمی‌تواند یک مساحت گویا باشد[1].



زیرا، اگر ممکن باشد، فرض می‌کنیم تفاضل مساحت واسط AB و مساحت واسط AC، مساحت گویای DB باشد، و فرض می‌کنیم خط راست گویای EF در دست است و متوازی‌الاضلاع مستطیلی شکل FH مساوی با AB برآن بنا شده و پهنای EH را پدید آورده است.

و فرض می‌کنیم مستطیل FG مساوی با AC از آن کم شده است؛ بنابراین BDی باقیمانده با KH باقیمانده مساوی است. اما DB گویاست؛ بنابراین KH نیز گویاست. در این صورت، چون هر یک از مستطیلهای AB و AC واسط است، و AB با FH مساوی است و AC با FG، بنابراین هر یک از مستطیلهای FH و FG نیز واسط است، و این مستطیلها بر خط راست گویای EF اضافه شده‌اند؛ بنابراین هر یک از خطهای راست HE و EG گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون [DB گویا و با KH مساوی است، بنابراین] KH [نیز] گویاست؛ و بر خط راست گویای EF اضافه شده است؛ لذا GH گویا و از حیث طول با EF اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

اما EG نیز گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است، بنابراین EG از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

و نسبت EG به GH همچون نسبت مربع EG است به مستطیل EG و GH؛ بنابراین مربع EG با مستطیل EG و GH اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما مربعهای EG و GH با مربع EG اندازه‌پذیرند، زیرا هر دو گویا هستند؛ و دو برابر مستطیل EG و GH با مستطیل EG و GH اندازه‌پذیر است، زیرا دو برابر آن است؛ [۶.X]

بنابراین مربعهای EG و GH با دو برابر مستطیل EG و GH اندازه‌ناپذیرند. [۱۳.X]

لذا مجموع مربعهای EG و GH و دو برابر مستطیل EG و GH، یعنی مربع EH، [۴.II] با مربعهای EG و GH اندازه‌ناپذیرند. [۱۶.X]

اما مربعهای EG و GH گویا هستند؛ بنابراین مربع EH گنگ است. [تع.۴.X]

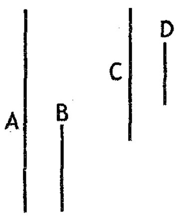
بنابراین EH گنگ است. اما گویا نیز هست: که غیرممکن است.

آنچه می‌خواستیم.

۱. یعنی تفاضل دو مساحت نظیر $\sqrt{K}\rho^{2}$ و $\sqrt{\lambda}\rho^{2}$ نمی‌تواند گویا باشد، که روشن است.ـم.

قضیهٔ ۲۷

مطلوب یافتن خطهای راست واسط اندازه‌پذیری فقط از حیث مربع است که مستطیل حاصل از آنها گویا باشد[۱].



فرض می‌کنیم دو خط راست گویای A و B اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، معلوم‌اند. فرض می‌کنیم واسطهٔ هندسی بین آنها، C، پیدا شده، [۱۳.VI]

و طوری ترتیب داده شده است که نسبت A به B همچون نسبت C است به D. [۱۲.VI]

در این صورت، چون A و B گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند،

مستطیل A و B، یعنی مربع C، [۱۷.VI]

واسط است. [۲۱.X]

بنابراین C واسط است. [۲۱.X]

و چون، نسبت A به B همچون نسبت C است به D، و A و B فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، لذا C و D نیز فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۱۱.X]

و C واسط است، بنابراین D نیز واسط است. [۲۳.X، و مطالب پس از فرع]

لذا C و D واسط و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

می‌گوییم که یک مستطیل گویا را نیز تولید می‌کنند.

زیرا، چون نسبت A به B همچون نسبت C است به D، بنابراین، به ابدال نسبت، نسبت A به C همچون نسبت B است به D. [۱۶.V]

اما، نسبت A به C همچون نسبت C است به B؛ بنابراین نسبت C به B نیز همچون نسبت B است به D؛ لذا مستطیل C و D با مربع B مساوی است. اما مربع B گویاست؛ بنابراین مستطیل C و D نیز گویاست.

بنابراین خطهای راست واسط اندازه‌پذیری فقط از حیث مربع پیدا کردیم که مستطیل گویایی را پدید می‌آورند.

آنچه می‌خواستیم.

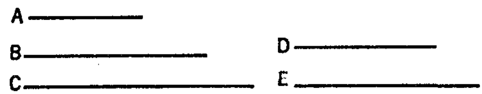
قضیهٔ ۲۸

مطلوب پیدا کردن خطهای راست واسط اندازه‌پذیری فقط از حیث مربع است که مستطیل واسطی را پدید آورند.[۲]

---

۱. مستطیلی به اضلاع $K^{\frac{۱}{۴}}\rho$ و $K^{\frac{۳}{۴}}\rho$.ـم.

۲. یعنی مستطیلی به اضلاع $K^{\frac{۱}{۴}}\rho$ و $\lambda^{\frac{۱}{۲}}\rho/K^{\frac{۱}{۴}}$.ـم.



فرض می‌کنیم خطهای راست گویای A و B و C اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع در دست‌اند. و گیریم که واسطهٔ هندسی بین A و B، یعنی D، پیدا شده است. [۱۳.VI]

و فرض می‌کنیم چنان تنظیم شده است که نسبت B به C همچون نسبت D است به E. [۱۲.VI]

چون A و B خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، لذا مستطیل A و B، یعنی مربع D، [۱۷.VI]

واسط است. [۲۱.X]

بنابراین D واسط است. و چون B و C فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و نسبت B به C همچون نسبت D است به E، بنابراین D و E نیز فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۱۱.X]

اما D واسط است؛ بنابراین E نیز واسط است. [۲۳.X، توضیح پس از فرع]

بنابراین D و E خطهای راست واسطی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند.

حال می‌گوییم که یک مستطیل واسط نیز پدید می‌آورند.

زیرا چون نسبت B به C همچون نسبت D است به E، بنابراین، به ابدال نسبت، نسبت B به D همچون نسبت C است به E. [۱۶.V]

اما نسبت B به D همچون نسبت D است به A؛ بنابراین نسبت D به A نیز همچون نسبت C است به E؛ لذا مستطیل A و C با مستطیل D و E مساوی است. [۱۶.VI]

اما مستطیل A و C واسط است؛ [۲۱.X]

بنابراین مستطیل D و E نیز واسط است. بنابراین خطهای راست اندازه‌پذیری فقط از حیث مربع پیدا شدند که مستطیل واسطی را پدید می‌آورند.

آنچه می‌خواستیم.

لم ۱

مطلوب یافتن دو عدد مربع است که مجموعشان نیز مربع باشد.

فرض می‌کنیم دو عدد AB و BC معلوم‌اند؛ و فرض می‌کنیم که یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد. در این صورت، چون دو عدد زوج یا دو عدد فرد را از هم کم کنیم باقیمانده عددی است زوج، [۲۶،۲۴.IX] بنابراین باقیماندهٔ AC زوج است.

فرض می‌کنیم AC در D نصف شده است همچنین فرض می‌کنیم AB و BC یا اعداد مسطح متشابه‌اند یا اعداد مربعی که خود مسطح متشابه نیز هستند.

اما، حاصل‌ضرب AB و BC به علاوهٔ مربع CD یا مربع BD مساوی است. [۶.II]

و حاصل‌ضرب AB و BC مربع است، زیرا ثابت شده بود که اگر دو عدد مسطح متشابه در هم ضرب شوند، حاصل‌ضرب عددی است مربع. [۱.IX]

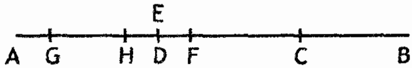
بنابراین دو عدد مربع، حاصل‌ضرب AB و BC، و مربع CD پیدا شدند که وقتی با هم جمع شوند مربع BD را پدید می‌آورند. و روشن است که دو عدد مربع، مربع BD و مربع CD، باز پیدا شدند که تفاضلشان، حاصل‌ضرب AB و BC، مربع است هر وقت که AB و BC اعداد مسطح متشابه باشند.

اما وقتی دو عدد مسطح متشابه نباشند، دو عدد مربع، مربع BD و مربع CD، پیدا شده‌اند که تفاضلشان، یعنی حاصل‌ضرب AB و BC، مربع نیست.

آنچه می‌خواستیم.

لم ۲

مطلوب پیدا کردن دو عدد مربع است که مجموعشان مربع نباشد.



فرض می‌کنیم حاصل‌ضرب AB و BC، چنان‌که گفتیم، مربع باشد، و CA زوج.

و فرض می‌کنیم CA در D نصف شده است.

پس، روشن است که مربع حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CD با مربع BD مساوی است. [لم ۱]

فرض می‌کنیم واحد DE از CD کم شده است؛ بنابراین حاصل‌ضرب AB و BC به علاوه مربع CE از مربع BD کمتر است.

حال، می‌گوییم که مربع حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CE، مربع نخواهد بود.

زیرا اگر مربع باشد، یا با مربع BE مساوی است و یا از مربع BE کمتر است. اما دیگر نمی‌تواند از آن بزرگتر باشد، زیرا تفاوت BD و BE فقط یک واحد است که واحد را نمی‌توان تقسیم کرد.

اولاً، اگر تساوی ممکن باشد، فرض می‌کنیم حاصل‌ضرب AB و BC به علاوهٔ مربع CE با مربع BE مساوی باشد، و فرض می‌کنیم GA دو برابر واحد DE باشد.

در این صورت، چون تمامی AC دو برابر تمامی CD است، و در آنها AG دو برابر DE است، بنابراین باقیماندهٔ GC نیز دو برابر باقیماندهٔ EC است؛ بنابراین GC در E نصف شده است.

در نتیجه حاصل‌ضرب GB و BC به اضافهٔ مربع CE با مربع BE مساوی است. [۶.II]

اما حاصل‌ضرب AB و BC به علاوهٔ مربع CE نیز، بنا به فرض، با مربع BE مساوی

است؛ بنابراین حاصل‌ضرب GB و BC به علاوهٔ مربع CE با حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CE مساوی است. و، اگر مربع CE را که در هر دو مشترک است کم کنیم، در نتیجه AB با GB مساوی می‌شود: که محال است.

بنابراین حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CE با مربع BE مساوی نیست.

حال، می‌گوییم که از مربع BE کمتر هم نیست. زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم با مربع BF مساوی باشد؛ و فرض می‌کنیم HA دو برابر DF باشد.

حال همچون قبل نتیجه می‌شود که HC دو برابر CF است، لذا CH نیز در F نصف شده است؛ و به همین دلیل حاصل‌ضرب HB و BC به علاوهٔ مربع FC با مربع BF مساوی است. [۶.II]

اما، بنا به فرض، حاصل‌ضرب AB و BC به علاوهٔ مربع EC با مربع BF مساوی است.

پس، حاصل‌ضرب HB و BC به علاوهٔ مربع CF با حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CE نیز مساوی خواهد شد: که محال است.

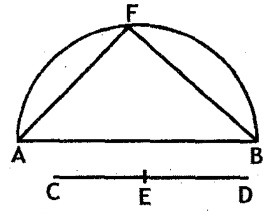
بنابراین حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CE از مربع BE کمتر نیست. و ثابت شده بود که با مربع BE مساوی هم نیست.

در نتیجه حاصل‌ضرب AB و BC به اضافهٔ مربع CE مربع نیست.[۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

مطلوب یافتن دو خط راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع است به طوری که مربع خط راست بزرگتر، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با خط بزرگتر، از مربع خط راست کوچکتر، بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم یک خط راست گویای AB و دو عدد مربع CD و DE در دست‌اند به طوری که تفاضل آنها، CE، مربع نیست. [لم.۱]

و فرض می‌کنیم نیم‌دایرهٔ AFB بر AB رسم شده است.

و فرض می‌کنیم چنان اختیار شده باشد که نسبت DC به CE همچون نسبت مربع BA باشد به مربع AF. [۶.X، ف.]

FB را رسم می‌کنیم. چون نسبت مربع BA به مربع AF، همچون نسبت DC است به CE، بنابراین نسبت مربع BA به مربع AF همچون نسبت عدد DC است به عدد CE؛ لذا مربع BA با مربع AF اندازه‌پذیر است. [۶.X]

۱. یکی از آن دو عدد $mp^۲ \cdot mq^۲$ و دیگری $\{\frac{۱}{۲}(mp^۲ - mq^۲) - ۱\}^۲$ است.ـم.

اما مربع AB گویاست؛ [X.تع.۴]

بنابراین مربع AF نیز گویاست؛ [X.تع.۴]

پس AF نیز گویاست. و، چون نسبت DC به CE همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، و نسبت مربع BA به مربع AF نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست بنابراین AB از حیث طول با AF اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

درنتیجه BA و AF خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند. و چون نسبت DC به CE مثل نسبت مربع BA است به مربع AF، بنابراین، از تفضیل نسبت در مخرج نتیجه می‌شود که نسبت DC به DE همچون نسبت مربع BA است به مربع BF. [V.۱۹، ف.،III.۳۱،I.۴۷]

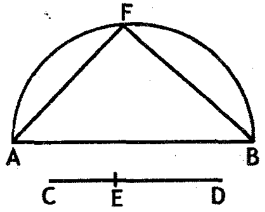
اما نسبت CD به DE همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع: بنابراین نسبت مربع AB به مربع BF همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ لذا، AB از حیث طول با BF اندازه‌پذیر است. [X.۹]

و مربع AB با مربعهای AF و BF مساوی است؛ بنابراین مربع AB به اندازهٔ مربع BF اندازه‌پذیر؛ AB، از مربع AF بزرگتر است. درنتیجه دو خط راست گویای BA و AF، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع پیدا شده‌اند که مربع خط بزرگتر، AB، به اندازه مربع BF اندازه‌پذیر با AB، از مربع AF بزرگتر است. درنتیجه دو خط راست گویای BA و AF، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع پیدا شده‌اند که مربع خط بزرگتر، AB، به اندازه مربع BF اندازه‌پذیر از حیث طول با AB، از مربع خط کوچکتر، AF، بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

مطلوب یافتن دو خط راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع است که مربع خط بزرگتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با خط بزرگتر، از مربع خط کوچکتر، بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم خط راست گویای AB معلوم است، و دو عدد مربع CE و ED که مجموع آنها مربع نیست، در دست‌اند. [لم ۲]

فرض می‌کنیم نیم‌دایرهٔ AFB بر AB رسم و ترتیبی داده شده است که نسبت DC به CE همچون نسبت مربع BA است به مربع AF. [X.۶، ف.]

F را به A و B وصل می‌کنیم.

در این صورت به روشی مشابه با قضیهٔ قبل می‌توانیم ثابت کنیم که BA و AF خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، و، چون نسبت DC به CE همچون نسبت مربع BA است به مربع AF، بنابراین از تفضیل نسبت در مخرج داریم، نسبت CD به DE همچون نسبت مربع AB است به مربع BF. [۱۹.V، ف.، ۳۱.III، ۴۷.I]

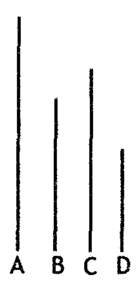
اما نسبت CD به DE همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین، نسبت مربع AB به مربع BF نیز، همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. لذا AB از حیث طول با BF اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

و مربع AB به اندازهٔ مربع FB اندازه‌ناپذیر با AB، از مربع AF بزرگتر است. بنابراین AB و AF خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند، و مربع AB به اندازهٔ مربع FB اندازه‌ناپذیر از حیث طول با AB، از مربع AF بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

مطلوب یافتن دو خط راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع است که مستطیل گویایی را پدید آورند، به طوری که مربع خط بزرگتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با خط بزرگتر، از مربع خط کوچکتر، بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم دو خط راست گویای A و B اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع معلوم‌اند، به طوری که مربع خط بزرگتر، A، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با A، از مربع خط کوچکتر، B، بزرگتر است. [۲۹.X]

و فرض می‌کنیم مربع C با مستطیل A و B مساوی باشد. اما مستطیل A و B واسط است؛ [۲۱.X]

بنابراین مربع C نیز واسط است؛ لذا، C نیز واسط است. [۲۱.X]

فرض می‌کنیم مستطیل C و D با مربع B مساوی است. اما مربع B گویاست؛ بنابراین مستطیل C و D نیز گویاست. و چون نسبت A به B همچون نسبت مستطیل A و B است به مربع B، و مربع C با مستطیل A و B مساوی است، و مستطیل C و D با مربع B، بنابراین نسبت A به B همچون نسبت مربع C است به مستطیل C و D.

اما، نسبت مربع C به مستطیل C و D، همچون نسبت C است به D؛ بنابراین نسبت A به B نیز همچون نسبت C است به D.

اما A با B فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است؛ بنابراین C نیز با D فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است. [X.۱۱]

و C واسط است؛ بنابراین D نیز واسط است. [X.۲۳، توضیح پس از فرع]

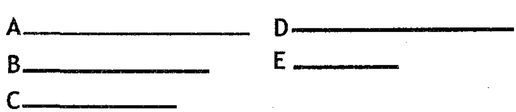
و چون نسبت A به B همچون نسبت C است به D، و مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با A، از مربع B بزرگتر است، بنابراین مربع C نیز به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با C، از مربع D بزرگتر است. [X.۱۴]

بنابراین دو خط راست واسط C و D، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع پیدا شده‌اند که مستطیل گویایی را پدید آورده‌اند، و مربع C، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با C، از مربع D بزرگتر است.

همچنین می‌توان ثابت کرد وقتی که مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با A، از مربع B بزرگتر باشد، مربع C، از مربع D به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با C زیادتر است. [X.۳۰]

قضیهٔ ۳۲

مطلوب پیدا کردن دو خط راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع است که مستطیل واسطی را پدید آورند، به طوری که مربع خط بزرگتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با خط بزرگتر، از مربع خط کوچکتر، بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم سه خط راست گویای A و B و C اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، معلوم‌اند، به‌طوری که مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با A، از مربع C، بزرگتر است. [X.۲۹]

و فرض می‌کنیم مربع D با مستطیل A و B مساوی است.

بنابراین مربع D واسط است، پس D نیز واسط است. [X.۲۱]

فرض می‌کنیم مستطیل D و E با مستطیل B و C مساوی است. پس، چون نسبت مستطیل A و B به مستطیل B و C همچون نسبت A است به C؛ و مربع D با مستطیل A و B مساوی است، و مستطیل D و E با مستطیل B و C، بنابراین نسبت A به C همچون نسبت مربع D است به مستطیل D و E.

اما نسبت مربع D به مستطیل D و E همچون نسبت D است به E؛ بنابراین نسبت A به C نیز همچون نسبت D است به E. اما A با C فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است؛ بنابراین D نیز فقط از حیث مربع با E اندازه‌پذیر است. [X.۱۱]

اما D واسط است، بنابراین E نیز واسط است. [X.۲۳، توضیح پس از فرع]

و چون نسبت A به C همچون نسبت D است به E، و مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با A از مربع C بزرگتر است، بنابراین مربع D نیز به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با D از مربع E بزرگتر خواهد بود. [X.۱۴]

حال می‌گوییم که مستطیل D و E نیز واسط است.

زیرا، چون مستطیل B و C با مستطیل D و E مساوی است، و مستطیل C و B واسط است، [X.۲۱]

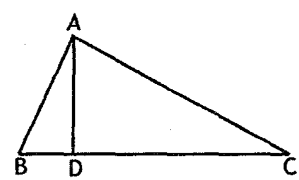
بنابراین مستطیل D و E نیز واسط است.

در نتیجه دو خط راست واسط D و E، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع پیدا شده‌اند که یک مستطیل واسط را پدید آورده‌اند، به طوری که مربع خط بزرگتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با خط بزرگتر، از مربع خط کوچکتر، بزرگتر است.

باز، به همین نحو می‌توان ثابت کرد که مربع D به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با D، از مربع E بزرگتر است، وقتی که مربع A به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با A، از مربع C بزرگتر باشد. [X.۳۰]

لم

فرض می‌کنیم ABC مثلثی قائم‌الزاویه در رأس A باشد، و AD ارتفاع وارد بر وتر آن. می‌گوییم که مستطیل CB و BD با مربع BA مساوی است، مستطیل BC و CD با مربع CA، مستطیل BD و DC با مربع AD، و به علاوه مستطیل BC و AD با مستطیل BA و AC مساوی است.



اول اینکه مستطیل CB و BD با مربع BA مساوی است.

زیرا، چون در مثلث قائم‌الزاویه AD خطی است که از رأس زاویهٔ قائمه بر وتر عمود شده است، بنابراین مثلثهای ABD و ADC با هم متشابه‌اند، و هر یک از این دو مثلث با تمامی مثلث ABC متشابه است. [VI.۸]

و، چون مثلث ABC با مثلث ABD متشابه است، بنابراین نسبت CB به BA همچون نسبت BA است به BD؛ [VI.۴]

بنابراین مستطیل CB و BD با مربع AB مساوی است. [VI.۱۷]

به همین دلیل مستطیل BC و CD نیز با مربع AC مساوی است. مساوی است. و، چون در

یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی بین قطعاتی است که از وتر جدا می‌کند، [۸.VI، ف.]

بنابراین نسبت BD به DA همچون نسبت AD است به DC. بنابراین مستطیل BD و DC با مربع AD مساوی است. [۱۷.VI]

می‌گوییم که مستطیل BC و AD نیز با مستطیل BA و AC مساوی است.

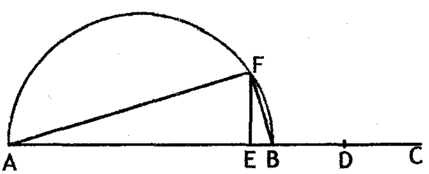
چنان‌که گفتیم، چون مثلث ABC با مثلث ABD متشابه است، بنابراین نسبت BC به CA همچون نسبت BA است به AD. [۴.VI]

لذا مستطیل BC و AD با مستطیل BA و AC مساوی است. [۱۶.VI]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

مطلوب یافتن دو خط راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع است که مجموع مربعهای آنها گویا اما مستطیلی که پدید می‌آورند واسط باشد.



فرض می‌کنیم دو خط راست گویای AB و BC اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع معلوم‌اند، به طوری که مربع خط بزرگتر، AB، از مربع خط کوچکتر، BC، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AB بزرگتر است. [۳۰.X]

فرض می‌کنیم BC در نقطهٔ D نصف شده است، و بر AB متوازی‌الاضلاعی اضافه شده است که با مربع یکی از خطهای راست BD و DC مساوی است و به اندازهٔ یک شکل مربعی کاستی دارد، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل AE و EB است؛ [۲۸.VI]

گیریم نیم‌دایره AFB به قطر AB رسم شده است. EF را عمود بر AB رسم و F را به A و B وصل می‌کنیم.

در این صورت، چون AB و BC خطهای راستی نامساوی‌اند، و مربع AB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AB از مربع BC بزرگتر است، و بر AB، متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع به ضلع BC، یعنی، مربعی به ضلع نصف آن، اضافه شده است که به اندازهٔ شکلی مربعی کاستی دارد و مستطیل AE و EB را پدید آورده است، بنابراین AE با EB اندازه‌ناپذیر است. [۱۸.X]

و، چون نسبت AE به EB همچون نسبت مستطیل BA و AE است به مستطیل AB و

BE، و مستطیل BA و AE با مربع AF مساوی است، و مستطیل AB و BE با مربع BF؛ بنابراین مربع AF با مربع FB اندازه‌ناپذیر است؛ لذا AF و FB از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند. و، چون AB گویاست، پس مربع AB نیز گویاست؛ درنتیجه مجموع مربعهای AF و FB نیز گویاست. [۴۷.I]

و، باز چون مستطیل AE و EB با مربع EF مساوی است، و بنا به فرض، مستطیل AE و EB نیز با مربع BD مساوی است، بنابراین FE با BD مساوی است؛ پس BC دو برابر FE است، بنابراین مستطیل AB و BC با مستطیل AB و EF اندازه‌پذیر است.

اما مستطیل AB و BC واسط است؛ [۲۱.X]

بنابراین مستطیل AB و EF نیز واسط است. [۲۳.X، ف.]

اما مستطیل AB و EF با مستطیل AF و FB مساوی است؛ [لم]

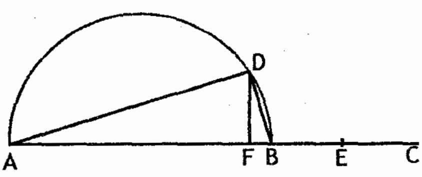
بنابراین مستطیل AF و FB نیز واسط است. اما همچنین ثابت شده بود که مجموع مربعهای این خطهای راست گویاست.

بنابراین دو خط راست AF و FB اندازه‌ناپذیر از حیث مربع پیدا شدند که مجموع مربعهای آنها گویاست، ولی مستطیلی که پدید می‌آورند واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

مطلوب یافتن دو خط راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع است که مجموع مربعهای آنها واسط، ولی مستطیلی که پدید می‌آورند گویا باشد.



فرض می‌کنیم دو خط راست واسط AB و BC، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، معلوم‌اند به طوری که مستطیلی که پدید می‌آورند گویاست و مربع AB از مربع BC، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AB، بزرگتر است. [۳۱.X]، و انتهای آن

فرض می‌کنیم نیم‌دایرهٔ ADB به قطر AB کشیده شده و BC هم در نقطهٔ E نصف شده است؛ فرض می‌کنیم بر AB متوازی‌الاضلاعی مساوی با مربع BE و با کاستی یک شکل مربعی، یعنی مستطیل AF و FB، اضافه شده است. [۲۸.VI]

بنابراین، AF با FB از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [۱۸.X]

فرض می‌کنیم FD را از F بر AB عمود و D را به A و B وصل کرده‌ایم. چون از AF

حیث طول با FB اندازه‌ناپذیر است، بنابراین مستطیل BA و AF نیز با مستطیل AB و BF اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما مستطیل BA و AF با مربع AD مساوی است، و مستطیل AB و BF با مربع DB؛ بنابراین، مربع AD نیز با مربع DB اندازه‌ناپذیر است.

و، چون مربع AB واسط است، لذا مجموع مربعهای AD و DB نیز واسط است. [۴۷.I،۳۱.III]

و، چون BC دو برابر DF است، پس مستطیل AB و BC نیز دو برابر مستطیل AB و FD است. اما مستطیل AB و BC گویاست؛ لذا مستطیل AB و FD نیز گویاست. [۶.X]

اما مستطیل AB و FD با مستطیل AD و DB مساوی است، [لم]

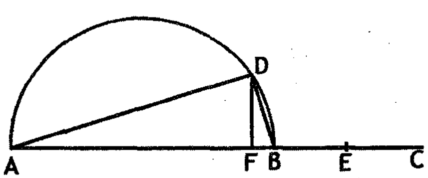
پس مستطیل AD و DB نیز گویاست.

بنابراین دو خط راست AD و DB اندازه‌ناپذیر از حیث مربع پیدا شده‌اند که مجموع مربعهای آنها واسط، ولی مستطیلی که پدید می‌آورند گویاست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

مطلوب پیدا کردن دو خط راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع است که مجموع مربعهای آنها واسط باشد و مستطیلی که پدید می‌آورند واسط و با مجموع مربعهای آنها اندازه‌ناپذیر باشد.



فرض می‌کنیم دو خط راست واسط AB و BC اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع معلوم‌اند، و مستطیلی که پدید می‌آورند واسط و چنان است که مربع AB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AB، از مربع BC بزرگتر است؛ [۳۲.X، انتهای آن]

نیم‌دایرهٔ ADB را بر AB رسم می‌کنیم و بقیهٔ شکل را مانند شکل قضیهٔ قبل تکمیل می‌کنیم.

در این صورت، چون AF از حیث طول با FB اندازه‌ناپذیر است، [۱۸.X]

AD نیز با DB از حیث مربع اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و، چون مربع AB واسط است، بنابراین مجموع مربعهای AD و DB نیز واسط است. [۴۷.I،۳۱.III]

و، چون مستطیل AF و FB با مربع هر یک از خطهای راست BE و DF مساوی است، بنابراین BE با DF مساوی است؛ پس BC دو برابر FD است، لذا مستطیل AB و BC نیز دو برابر مستطیل AB و FD است.

اما مستطیل AB و BC واسط است، بنابراین مستطیل AB و FD نیز واسط است. [X.۳۲، ف.]

و با مستطیل AD و DB مساوی است، [لم پس از X.۳۲]

بنابراین مستطیل AD و DB نیز واسط است. و، چون AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر و CB با BE اندازه‌پذیر است، بنابراین AB نیز از حیث طول با BE اندازه‌ناپذیر است، [X.۱۳]

در نتیجه مربع AB نیز با مستطیل AB و BE اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۱]

اما مجموع مربعهای AD و DB با مربع AB مساوی است، [I.۴۷]

و مستطیل AB و FD، یعنی مستطیل AD و DB، با مستطیل AB و BE مساوی است؛ بنابراین مجموع مربعهای AD و DB با مستطیل AD و DB اندازه‌ناپذیر است.

در نتیجه دو خط راست AD و DB اندازه‌ناپذیر از حیث مربع پیدا شدند که مجموع مربعهای آنها واسط، و مستطیلی که پدید می‌آورند واسط و مجموع مربعهای آنها اندازه‌ناپذیر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۶

اگر دو خط راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع با هم جمع شوند، حاصل خط راستی است گنگ، که آن را ذوالاسمین[1] می‌نامیم.

فرض می‌کنیم دو خط راست گویای AB و BC، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، با هم جمع شده‌اند. می‌گوییم که حاصل جمع، AC، خط راستی است گنگ.

زیرا، چون AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است ــ زیرا این دو، فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند ــ و، چون نسبت AB به BC همچون نسبت مستطیل AB و BC است به مربع BC، بنابراین مستطیل AB و BC با مربع BC اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۱]

اما دو برابر مستطیل AB و BC با مستطیل AB و BC اندازه‌پذیر است، [X.۶]

و مربعهای AB و BC با مربع BC اندازه‌پذیرند ــ زیرا AB و BC خطهای راستی گویا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند ــ . [X.۱۵]

بنابراین دو برابر مستطیل AB و BC با مربعهای AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]

و ترکیب آنها، دو برابر مستطیل AB و BC به اضافهٔ مربعهای AB و BC، یعنی، مربع AC، [II.۴]

با مجموع مربعهای AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۶]

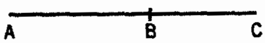
1. Binomial

اما مجموع مربعهای AB و BC گویاست؛ بنابراین مربع AC گنگ است. لذا AC نیز گنگ است. و ما آن را ذوالاسمین نامیده‌ایم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۷

اگر دو خط راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، که مستطیل گویایی پدید می‌آورند، با هم جمع شوند، حاصل آنها خط راستی است گنگ که آن را خط راست دوواسطی اول[1] می‌نامیم.



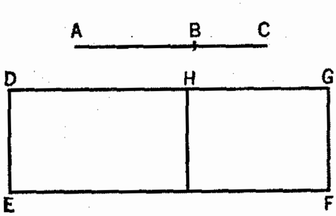
فرض می‌کنیم دو خط راست واسط AB و BC اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، که مستطیل گویایی پدید می‌آورند، بر هم افزوده شده‌اند، می‌گوییم که تمامی AC گنگ است.

زیرا چون AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است، بنابراین مربعهای AB و BC نیز با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است، [ر.ک. ۳۶.X، ۲۰.۹.II]
و، ترکیب آنها، مربعهای AB و BC به علاوهٔ دو برابر مستطیل AB و BC، یعنی، مربع AC، [۴.II]
با مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۱۶.X]
اما مستطیل AB و BC گویاست، زیرا بنا به فرض، AB و BC خطهای راستی هستند که مستطیل گویایی را پدید می‌آورند؛ بنابراین مربع AC، و در نتیجه خود AC گنگ است. [X.تع.۴]
و ما آن را خط راست دوواسطی اول نامیدیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۸

اگر دو خط راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع که مستطیل واسطی را پدید می‌آورند، با هم جمع شوند، تمامی خط حاصل گنگ است، و آن را خط راست دوواسطی دوم[2] می‌نامیم.



فرض می‌کنیم دو خط راست واسط AB و BC اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، که مستطیل واسطی را پدید می‌آورند، با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که مجموع آنها، AC، گنگ است.

زیرا، فرض می‌کنیم خط راست گویایی مانند DE معلوم باشد، و فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع DF مساوی با مربع AC بر DE اضافه شده، و پهنای DG را پدید آورده است. [۴۴.I]

1. first bimedial 2. second bimedial

در این صورت، چون مربع AC با مربعهای AB و BC و دو برابر مستطیل AB و BC مساوی است، [۴.II]

فرض می‌کنیم EH، مساوی با مربعهای AB و BC، بر DE اضافه شده است؛ بنابراین باقیماندهٔ HF با دو برابر مستطیل AB و BC مساوی است. و، چون هر یک از خطهای راست AB و BC واسط است، بنابراین مربعهای AB و BC نیز واسط‌اند.

اما، بنا به فرض، دو برابر مستطیل AB و BC نیز واسط است، و EH با مربعهای AB و BC مساوی است، و FH با دو برابر مستطیل AB و BC؛ بنابراین هر یک از مستطیلهای EH و HF واسط است. و این مستطیلها بر خط راست گویای DE اضافه شده‌اند؛ بنابراین هر یک از خطهای راست DH و HG گویاست و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

در این صورت، چون AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است، و نسبت AB به BC همچون نسبت مربع AB است به مستطیل AB و BC، بنابراین مربع AB با مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما مجموع مربعهای AB و BC با مربع AB اندازه‌پذیر است، [۱۵.X]

و دو برابر مستطیل AB و BC با مستطیل AB و BC اندازه‌پذیر است. [۶.X]

بنابراین مجموع مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

اما EH با مربعهای AB و BC مساوی است، و HF با دو برابر مستطیل BA و BC. بنابراین EH با HF اندازه‌ناپذیر است، در نتیجه، DH نیز از حیث طول با HG اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X ،۱.VI]

لذا، DH و HG خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ در نتیجه DG گنگ است. [۳۶.X]

اما DE گویاست؛ و مستطیلی که یک خط راست گنگ و یک خط راست گویا پدید می‌آورند گنگ است؛ [ر.ک. ۲۰.X]

بنابراین مساحت DF گنگ، و ضلع مربع مساوی با آن گنگ است. [X.تع.۴]

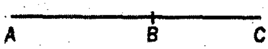
اما AC ضلع مربعی است مساوی با DF؛ بنابراین AC گنگ است؛ و ما آن را خط راست دوواسطی دوم نامیدیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۹

اگر دو خط راست اندازه‌ناپذیر ازحیث مربع، که مجموع مربعهای آنها گویاست ولی مستطیل واسطی پدید می‌آورند، با هم جمع شوند، تمامی خط راست حاصل گنگ است، که آن را مهاد[1] می‌نامیم.

1. major



فرض می‌کنیم دو خط راست AB و BC اندازه‌ناپذیر از حیث مربع را که در شرایط [X.۳۳] صدق می‌کنند با هم جمع کرده‌ایم. می‌گوییم AC گنگ است.

زیرا، چون مستطیل AB و BC واسط است، دو برابر مستطیل AB و BC نیز واسط است. [X.۶ و ۲۳، ف.]

اما مجموع مربعهای AB و BC گویاست؛ بنابراین دو برابر مستطیل AB و BC با مجموع مربعهای AB و BC، اندازه‌ناپذیر است؛

لذا مربعهای AB و BC به علاوهٔ دو برابر مستطیل AB و BC، که مربع AC است، نیز با مجموع مربعهای AB و BC اندازه‌ناپذیر است؛ [X.۱۶]

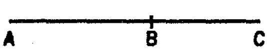
بنابراین مربع AC گنگ، و لذا AC نیز گنگ است. [X.تع.۴]

و، AC را مهاد نامیدیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۰

اگر دو خط راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که مجموع مربعهای آنها واسط است، ولی مستطیل گویایی پدید می‌آورند، با هم جمع شوند، تمامی خط راست حاصل، خط راستی است گنگ؛ و ما آن را ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط می‌نامیم.



فرض می‌کنیم دو خط راست AB و BC اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که در شرایط [X.۳۴] صدق می‌کنند با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که AC گنگ است.

زیرا چون مجموع مربعهای AB و BC واسط است، و دو برابر مستطیل AB و BC گویا، بنابراین مجموع مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC، اندازه‌ناپذیر است؛ لذا مربع AC نیز با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۶]

اما دو برابر مستطیل AB و BC گویاست؛ بنابراین مربع AC گنگ است؛ پس AC گنگ است، [X.تع.۴]

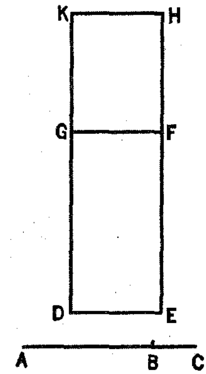
و آن را ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط نامیدیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۱

اگر دو خط راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع، که مجموع مربعهای آنها واسط است و مستطیلی

که پدید می‌آورند واسط و با مجموع مربعهای آنها نیز اندازه‌ناپذیر است، با هم جمع شوند، تمامی خط راست حاصل گنگ است؛ و آن را ضلع مجموع دو مساحت واسط می‌نامیم.



فرض می‌کنیم دو خط راست AB و BC اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که در شرایط مذکور در [۳۵.X] صدق می‌کنند با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که AC گنگ است.

فرض می‌کنیم یک خط راست گویای DE معلوم است، و فرض می‌کنیم بر DE مستطیل DF، مساوی با مربعهای AB و BC، و مستطیل GH مساوی با دو برابر مستطیل AB و BC اضافه شده‌اند؛ بنابراین تمامی DH با مربع AC مساوی است. [۴.II]

حال، چون مجموع مربعهای AB و BC واسط، و مساوی با DF است، بنابراین DF نیز واسط است. و بر خط راست گویای DE اضافه شده است؛ لذا DG گویا و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر است؛ [۲۲.X]

به همین دلیل GK نیز گویا و از حیث طول با GF، یعنی با DE، اندازه‌ناپذیر است. و، چون مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است، DF با GH اندازه‌ناپذیر است؛ در نتیجه، DG نیز با GK اندازه‌ناپذیر است، [۱.VI، ۱۱.X]

و این دو گویا هستند؛ لذا DG و GK خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند؛ بنابراین DK گنگ است و همان خطی است که ذوالاسمین نامیده شده است. [۳۶.X]

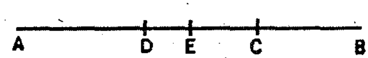
اما DE گویاست، بنابراین DH گنگ است، وضلع مربعی که باآن مساوی است گنگ است. [تع.X.۴]

ولی AC ضلع مربع مساوی با HD است؛ در نتیجه AC گنگ است، و آن را ضلع مجموع دو مساحت واسط نامیدیم.

آنچه می‌خواستیم.

لم

اکنون با ذکر این مقدمه که خطهای راست گنگ فوق‌الذکر فقط به یک طریق به خطهای راستی تقسیم می‌شوند که از مجموع آنها انواع موردنظر پدید می‌آیند، می‌خواهیم لم زیر را ثابت کنیم.



فرض می‌کنیم خط راست AB معلوم است، و تمام آن در هر یک از نقاط C و D به اجزائی نامساوی با هم تقسیم شده است، و فرض می‌کنیم که AC از DB بزرگتر است؛ می‌گوییم که مجموع مربعهای AC و CB از مجموع مربعهای AD و DB بزرگتر است.

زیرا فرض می‌کنیم که AB در نقطهٔ E نصف شده است؛ پس چون AC از DB بزرگتر است، فرض می‌کنیم DC از هر یک کم شده است، بنابراین باقیماندهٔ AD از باقیماندهٔ CB بزرگتر است.

اما، AE با EB مساوی است؛ بنابراین DE از EC کوچکتر است؛ لذا نقطه‌های C و D از E به یک فاصله نیستند. و، چون مستطیل AC و CB به علاوهٔ مربع EC با مربع EB مساوی است، [۵.II]

وانگهی مستطیل AD و DB به علاوهٔ مربع DE با مربع EB مساوی است، [۵.II]

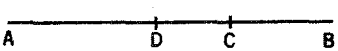
بنابراین مستطیل AC و CB به علاوهٔ مربع EC با مستطیل AD و DB به علاوهٔ مربع DE مساوی است. و در این تساوی مربع DE از مربع EC کوچکتر است؛ بنابراین باقیمانده، مستطیل AC و CB، نیز از مستطیل AD و DB کوچکتر است؛ لذا دو برابر مستطیل AC و CB نیز از دو برابر مستطیل AD و DB کوچکتر است.

بنابراین، باقیمانده، مجموع مربعهای AC و CB، نیز از مجموع مربعهای AD و DB بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۲

یک خط راست ذوالاسمین فقط در یک نقطه به نسبت اجزای خود تقسیم می‌شود[۱].



فرض می‌کنیم AB خط راست ذوالاسمینی است که در نقطهٔ C به اجزای خود تقسیم شده است؛ بنابراین AC و CB خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند. می‌گوییم که AB در نقطهٔ دیگری به نسبت دو خط راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع تقسیم نمی‌شود.

زیرا، در صورت امکان، فرض می‌کنیم در نقطهٔ دیگر D نیز چنین تقسیم شده باشد، لذا AD و DB نیز خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند.

در این صورت، روشن است که AC با DB یکی نیست. زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد، پس AD نیز با CB یکی خواهد بود. و نسبت AC به CB همچون نسبت BD خواهد بود به DA؛ از این‌رو AB در D نیز به همان طریقی تقسیم شده است که در نقطهٔ C: که مغایر با فرض است. بنابراین AC با DB یکی نیست.

به همین دلیل هم نقطه‌های C و D از وسط AB به یک فاصله نیستند. بنابراین تفاوت

---

۱. این قضیه با این قضیهٔ جبری هم‌ارز است که: اگر $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$، آنگاه $a = x$ و $b = y$. و اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$، آنگاه $a = x$ و $b = y$ یا $a = y$ و $b = x$.ـم.

مجموع مربعهای AC و CB با مجموع مربعهای AD و DB به اندازهٔ تفاوت دو برابر مستطیل AD و DB با دو برابر مستطیل AC و CB است، زیرا، مربعهای AC و CB به علاوهٔ دو برابر مستطیل AC و CB، و مربعهای AD و DB به علاوهٔ دو برابر مستطیل AD و DB هر دو با مربع AB مساوی‌اند. [۴.II]

اما مجموع مربعهای AC و CB با مجموع مربعهای AD و BD به اندازهٔ یک مساحت گویا اختلاف دارد، زیرا هر دو گویا هستند؛ بنابراین دو برابر مستطیل AD و DB نیز با دو برابر مستطیل AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا اختلاف دارد، در حالی‌که واسط هستند: [۲۱.X]

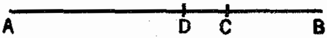
که محال است، زیرا اختلاف یک مساحت واسط با یک مساحت واسط یک مساحت گویا نیست. [۲۶.X]

بنابراین یک خط راست ذوالاسمین در نقطه‌های متفاوت به نسبت اجزای خود تقسیم نمی‌شود؛ لذا فقط در یک نقطه تقسیم می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۳

هر خط راست دوواسطی اول فقط در یک نقطه [به نسبت اجزای خود] تقسیم می‌شود.



فرض می‌کنیم AB، یک خط راست دوواسطی اول، در نقطهٔ C به اجزای خود تقسیم شده است، به طوری که AC و CB خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند و مستطیلی که پدید می‌آورند گویاست. [۳۷.X]

می‌گوییم که AB در نقطهٔ دیگری این‌گونه تقسیم نمی‌شود.

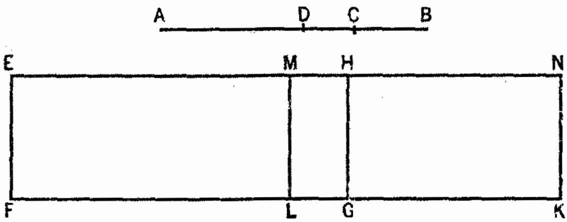
زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم در D نیز چنین تقسیم شده است، به طوری که AD و DB نیز خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند، و مستطیلی که پدید می‌آورند گویاست. لذا، در این صورت، تفاوت دو برابر مستطیل AD و DB با دو برابر مستطیل AC و CB به اندازهٔ تفاوت مجموع مربعهای AC و CB با مجموع مربعهای AD و DB است، و دو برابر مستطیل AD و DB با دو برابر مستطیل AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا تفاوت دارد ــ زیرا هر دو گویا هستند ــ بنابراین مربعهای AC و CB نیز با مربعهای AD و DB به اندازهٔ یک مساحت گویا متفاوت‌اند، با اینکه واسط‌اند: که محال است. [۲۶.X]

بنابراین یک خط راست دوواسطی اول در دو نقطهٔ متفاوت به نسبت اجزای خود تقسیم نمی‌شود؛ لذا فقط در یک نقطه تقسیم می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۴

هر خط راست دوواسطی دوم، فقط در یک نقطه [به نسبت اجزای خود] تقسیم می‌شود.



فرض می‌کنیم AB یک خط راست دوواسطی دوم در نقطهٔ C به اجزای خود تقسیم شده است به طوری که AC و CB خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند و مستطیلی که پدید می‌آورند واسط است. [۳۸.X]

در این صورت روشن است که C نقطهٔ وسط AB نیست، زیرا این قطعه‌ها از حیث طول اندازه‌پذیر نیستند. می‌گوییم که AB در هیچ نقطهٔ دیگر این‌گونه تقسیم نمی‌شود.

زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم در D نیز به همین نسبت تقسیم شود، به طوری که AC با DB یکی نباشد. و به فرض AC بزرگتر باشد؛ در این صورت روشن است که مربعهای AD و DB نیز، چنانکه در فوق ثابت کردیم [لم]، کوچکتر از مربعهای AC و CB هستند؛ و فرض می‌کنیم که AD و DB خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند و مستطیلی که پدید می‌آورند واسط است.

اکنون فرض می‌کنیم یک خط راست گویای EF معلوم است. متوازی‌الاضلاع مستطیلی‌شکل EK را بر EF مساوی با مربع AB اضافه و فرض می‌کنیم EG، مساوی با مربعهای AC و CB از آن کم شده است. بنابراین باقیماندهٔ HK با دو برابر مستطیل AC و CB مساوی است. [۴.II]

باز، EL را مساوی با مربعهای AD و DB، که ثابت شده بود از مربعهای AC و CB کوچکترند [لم]، کم می‌کنیم؛ بنابراین باقیماندهٔ MK نیز با دو برابر مستطیل AD و DB مساوی است. اما، چون مربعهای AC و CB واسط‌اند، لذا EG واسط است، و برخط راست گویای EF اضافه شده است؛ پس EH گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

به همین دلیل NH نیز گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. و، چون AC و CB خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند، لذا AC از حیث طول با CB اندازه‌ناپذیر است. اما نسبت AC به CB همچون نسبت مربع AC است به مستطیل AC و CB؛ بنابراین مربع AC با مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما مربعهای AC و CB با مربع AC اندازه‌پذیرند؛ زیرا AC و CB از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۱۵.X]

و، دو برابر مستطیل AC و CB با مستطیل AC و CB اندازه‌پذیر است. [۶.X]
بنابراین مربعهای AC و CB نیز با دو برابر مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]
اما EG با مربعهای AC و CB مساوی است، و HK با دو برابر مستطیل AC و CB؛ بنابراین EG با HK اندازه‌ناپذیر است، در نتیجه EH نیز از حیث طول با HN اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X،۱.VI]
و این دو خط گویا هستند؛ بنابراین EH و HN خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

اما، اگر دو خط راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع با هم جمع شوند، حاصل گنگ است که ذوالاسمین نامیده شده است. [۳۶.X]

بنابراین EN خط راست ذوالاسمینی است که در H تقسیم شده است.

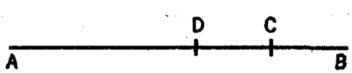
به همین طریق ثابت خواهد شد که EM و MN نیز خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و لذا EN خط راست ذوالاسمینی خواهد بود که در نقطه‌های متفاوت H و M تقسیم شده است. و EH با MN یکی نیست، زیرا مجموع مربعهای AC و CB از مجموع مربعهای AD و DB بزرگتر است. اما مجموع مربعهای AD و DB از دو برابر مستطیل AD و DB بزرگتر است؛ بنابراین مجموع مربعهای AC و CB، یعنی EG، نیز از دو برابر مستطیل AD و DB، یعنی MK، به مراتب بزرگتر است. در نتیجه EH نیز از MN بزرگتر است.

بنابراین EH با MN یکی نیست: که محال است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۵

هر خط راست مهاد فقط و فقط در یک نقطه به نسبت اجزای خود تقسیم شده است.



فرض می‌کنیم AB خط راست مهادی است که در C به اجزای خود تقسیم شده است، در نتیجه AC و CB اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند و مجموع مربعهای AC و CB گویاست، ولی مستطیلی که پدید می‌آورند واسط است؛ می‌گوییم که AB در هیچ نقطهٔ دیگر این گونه تقسیم نمی‌شود. زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم در D نیز این گونه تقسیم شده باشد، لذا AD و DB نیز از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند و مجموع مربعهای AD و DB گویاست، ولی مستطیلی که پدید می‌آورند واسط است.

چون تفاوت مجموع مربعهای AC و CB با مجموع مربعهای AD و DB به اندازهٔ تفاوت دو برابر مستطیل AD و DB با دو برابر مستطیل AC و CB است و مجموع مربعهای AC

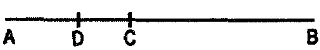
و CB به اندازهٔ مساحتی گویا از مجموع مربعهای AD و DB بزرگتر است ـ زیرا هر دو گویا هستند ـ بنابراین دو برابر مستطیل AD و DB نیز از دو برابر مستطیل AC و CB، به اندازهٔ یک مساحت گویا، بزرگتر است، در حالی که واسط‌اند: که غیرممکن است. [۲۶.X]

بنابراین یک خط راست مهاد در نقاط متفاوت به نسبت اجزای خود تقسیم نمی‌شود. بنابراین فقط و فقط در یک نقطه تقسیم می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۶

ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط فقط در یک نقطه به نسبت اجزای خود تقسیم می‌شود.



فرض می‌کنیم AB ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است که در C به اجزای خود تقسیم شده است، به گونه‌ای که AC و CB اندازه‌ناپذیر فقط از حیث مربع‌اند و مجموع مربعهای AC و CB واسط است ولی دو برابر مستطیل AC و CB گویاست؛ [۴۰.X]

می‌گوییم که AB در هیچ نقطهٔ دیگر این گونه تقسیم نمی‌شود.

زیرا فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد و AB در D نیز این گونه تقسیم شده باشد، به طوری که AD و DB نیز اندازه‌ناپذیر از حیث مربع باشند، و مجموع مربعهای AD و DB واسط باشد، ولی دو برابر مستطیل AD و DB گویا باشد.

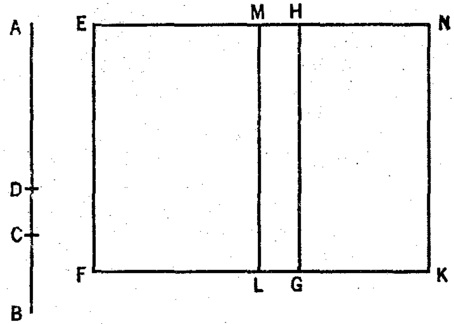
در این صورت، از آنجا که تفاوت دو برابر مستطیل AC و CB با دو برابر مستطیل AD و DB به اندازهٔ تفاوت مجموع مربعهای AD و DB با مجموع مربعهای AC و CB است، و دو برابر مستطیل AC و CB از دو برابر مستطیل AD و DB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتر است، بنابراین مجموع مربعهای AD و DB نیز از مجموع مربعهای AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتر است، با اینکه آنها واسط‌اند: که غیرممکن است. [۲۶.X]

بنابراین ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط در نقطه‌های مختلف به نسبت اجزای خود تقسیم نمی‌شود. در نتیجه فقط در یک نقطه تقسیم می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۷

ضلع مجموع دو مساحت واسط فقط در یک نقطه به نسبت اجزای خود تقسیم می‌شود.



فرض می‌کنیم AB در C به اجزای خود تقسیم شده است به طوری که AC و CB از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند و مجموع مربعهای AC و CB واسط‌اند، و مستطیل AC و CB واسط و با مجموع مربعهای آنها نیز اندازه‌ناپذیر است. می‌گوییم که AB در نقطهٔ دیگری به اجزای خود تقسیم نمی‌شود به طوری که شرایط مذکور را برآورده سازد.

زیرا فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد، و در نقطهٔ دیگر D هم تقسیم شود، به طوری که، البته، باز AC با BD یکی نباشد، ولی به فرض AC بزرگتر باشد؛ فرض می‌کنیم یک خط راست گویای EF معلوم است، و فرض می‌کنیم بر EF، مستطیل EG مساوی با مربعهای AC و CB اضافه شده است، و مستطیل HK با دو برابر مستطیل AC و CB مساوی است؛ بنابراین تمامی EK با مربع AB مساوی است. [۴.II]

باز، فرض می‌کنیم EL را مساوی با مربعهای AD و DB بر EF اضافه کرده‌ایم؛ بنابراین، باقیمانده، دو برابر مستطیل AD و DB، با باقیماندهٔ MK مساوی است.

و، چون بنا به فرض، مجموع مربعهای AC و CB واسط است، بنابراین EG نیز واسط است، و بر خط گویای EF اضافه شده است؛ لذا HE گویا و با EF از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

به همین دلیل، HN نیز گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. و، چون مجموع مربعهای AC و CB با دو برابر مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است، بنابراین، EG نیز با GN اندازه‌ناپذیر است، در نتیجه EH نیز با HN اندازه‌ناپذیر است. [۱.VI، ۱۱.X]

و این دو، گویا هستند؛ لذا EH و HN خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

بنابراین EN خط راست ذوالاسمینی است که در H تقسیم شده است. [۳۶.X]

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که EN در نقطهٔ M نیز تقسیم شده است. و EH با MN یکی نیست؛ پس، یک خط راست ذوالاسمین در نقطه‌های مختلف به اجزای خود تقسیم شده است: که محال است. [۴۲.X]

بنابراین ضلع مجموع دو مساحت واسط در نقطه‌های مختلف به اجزای خود تقسیم نمی‌شود؛ در نتیجه فقط در یک نقطه تقسیم خواهد شد.

آنچه می‌خواستیم.

تعاریف II

۱. یک خط راست گویا و یک ذوالاسمین که در یک نقطه به اجزایش تقسیم شده است داده شده‌اند، به طوری که مربع جزء بزرگتر از مربع جزء کوچکتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با جزء بزرگتر، بزرگتر است، در این صورت اگر جزء بزرگتر از حیث طول با خط راست گویای داده شده اندازه‌پذیر باشد، تمام آن خط راست را ذوالاسمین اول می‌نامیم.

۲. ولی اگر جزء کوچکتر از حیث طول با خط راست گویای داده شده اندازه‌پذیر باشد، تمامی آن را خط راست ذوالاسمین دوم می‌نامیم.

۳. و اگر، هیچ یک از اجزا از حیث طول با خط راست گویای داده شده اندازه‌پذیر نباشد، آن را خط راست ذوالاسمین سوم می‌نامیم.

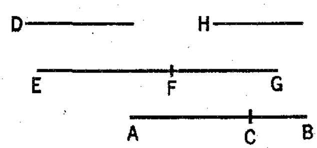
۴. باز اگر مربع جزء بزرگتر از مربع جزء کوچکتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با جزء بزرگتر، بزرگتر باشد، آنگاه اگر جزء بزرگتر از حیث طول با خط راست گویای داده شده اندازه‌پذیر باشد تمام آن را خط راست ذوالاسمین چهارم می‌نامیم.

۵. اگر جزء کوچکتر چنین باشد آن را خط راست ذوالاسمین پنجم می‌نامیم.

۶. اگر هیچ یک از دو جزء با خط راست گویای داده شده اندازه‌پذیر نباشد آن را خط راست ذوالاسمین ششم می‌نامیم.

قضیهٔ ۴۸

مطلوب پیدا کردن خط راستی است که ذوالاسمین اول باشد.



فرض می‌کنیم دو عدد AC و CB معلوم‌اند به طوری که نسبت مجموع آنها، یعنی AB، به BC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع است ولی نسبت این مجموع به CA همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ [لم۱ پس از X.۲۸]

فرض می‌کنیم یک خط راست گویای D معلوم است؛ و فرض می‌کنیم EF از حیث طول با D اندازه‌پذیر است. بنابراین EF نیز گویاست.

فرض می‌کنیم طولها چنان تنظیم شده‌اند که نسبت عدد BA به عدد AC همچون نسبت مربع EF است به مربع FG. [X.۶، ف.]

اما نسبت AB به AC همچون نسبت یک عدد است به یک عدد، بنابراین نسبت مربع EF به مربع FG همچون نسبت یک عدد است به یک عدد؛ لذا مربع EF با مربع FG اندازه‌پذیر است.[X.۶] و EF گویاست؛ بنابراین FG نیز گویاست.

و، چون نسبت BA به AC مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع EF هم به مربع FG همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین EF از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

لذا EF و FG خطهای راستی گویا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. بنابراین EG ذوالاسمین است. [۳۶.X]

می‌گوییم که خط راست ذوالاسمین اول نیز هست. زیرا، چون نسبت عدد BA به عدد AC، مثل نسبت مربع EF است به مربع FG، و BA از AC بزرگتر است، بنابراین مربع EF نیز از مربع FG بزرگتر است.

پس، فرض می‌کنیم مربعهای FG و H با مربع EF مساوی باشد.

اکنون، نسبت BA به AC همچون نسبت مربع EF است به مربع FG، لذا با تفضیل نسبت در مخرج، نسبت AB به BC همچون نسبت مربع EF است به مربع H.[۱۹.V، ف.]

اما نسبت AB به BC همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع. بنابراین نسبت مربع EF به مربع H نیز همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع.

بنابراین EF از حیث طول با H اندازه‌پذیر است. [۹.X]

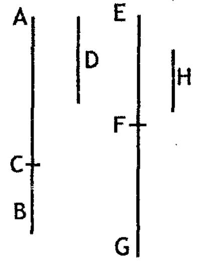
لذا مربع EF از مربع FG به اندازهٔ مربعی به ضلع خط راستی اندازه‌پذیر با EF، بزرگتر است. و EF و FG گویا هستند و EF از حیث طول با D اندازه‌پذیر است.

بنابراین EF خط راست ذوالاسمین اول است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۹

مطلوب یافتن یک خط راست ذوالاسمین دوم است.



فرض می‌کنیم دو عدد AC و CB معلوم‌اند به طوری که نسبت مجموع آنها، AB، به BC همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع، ولی نسبت AB به AC همچون یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم خط راست گویایی چون D معلوم است، و EF از حیث طول با D اندازه‌پذیر. بنابراین EF گویاست.

حال فرض می‌کنیم که EF چنان گرفته شده است که نسبت عدد CA به عدد AB همچون نسبت مربع EF است به مربع FG؛ [۶.X، ف.]

بنابراین مربع EF با مربع FG اندازه‌پذیر است. [۶.X]

لذا FG نیز گویاست. حال، چون نسبت عدد CA به عدد AB همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، نسبت مربع EF به مربع FG نیز مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین EF از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

لذا EF و FG خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ در نتیجه EG ذوالاسمین است. [۳۶.X]

حال باید ثابت کنیم که این خط یک خط راست ذوالاسمین دوم است.

زیرا با نوشتن عکس نسبت فوق، نسبت عدد BA به عدد AC همچون مربع GF است به مربع FE، و BA از AC بزرگتر است، بنابراین مربع FG از مربع FE بزرگتر است.

فرض می‌کنیم مربعهای EF و H با مربع GF مساوی است؛ بنابراین، از تفضیل نسبت در مخرج، داریم نسبت AB به BC همچون نسبت مربع FG است به مربع H. [۱۹.V، ف.]

اما نسبت AB به BC همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ بنابراین نسبت مربع FG به مربع H نیز همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع. لذا FG از حیث طول با H اندازه‌پذیر است؛ [۹.X]

در نتیجه مربع FG از مربع FE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با FG، بزرگتر است.

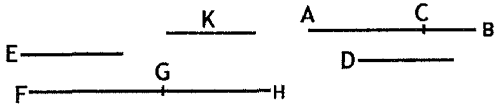
و FG و FE خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، و EF، یعنی جملهٔ کوچکتر از حیث طول با خط راست گویای معلوم D اندازه‌پذیر است.

بنابراین EG یک خط راست ذوالاسمین دوم است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۰

مطلوب یافتن یک خط راست ذوالاسمین سوم است.



فرض می‌کنیم دو عدد AC و CB معلوم‌اند، به طوری که نسبت مجموع آنها، AB، به BC همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع، ولی نسبت AB به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم یک عدد دیگر D نیز که مربع نیست معلوم است، و فرض می‌کنیم که نسبت D به هیچ‌یک از اعداد BA و AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم یک خط راست گویای E معلوم است، و فرض می‌کنیم چنان انتخاب شده است که نسبت D به AB همچون نسبت مربع E است به مربع FG. [X.۶، ف.]

بنابراین مربع E با مربع FG اندازه‌پذیر است. [X.۶]

و E گویاست؛ بنابراین FG هم گویاست. و چون نسبت D به AB همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، نسبت مربع E به مربع FG هم همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین E از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

حال، فرض می‌کنیم ترتیبی اختیار شده است که نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG است به مربع GH؛ [X.۶، ف.]

بنابراین مربع FG با مربع GH اندازه‌پذیر است. [X.۶]

اما FG گویاست، پس GH نیز گویاست.

و، چون نسبت BA به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، نسبت مربع FG به مربع HG هم همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین FG از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

لذا، FG و GH خطهای راستی گویا اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند؛ بنابراین FH ذوالاسمین است. [X.۳۶]

حال می‌گوییم که این یک خط راست، ذوالاسمین سوم نیز هست.

زیرا، چون نسبت D به AB مثل نسبت مربع E است به مربع FG، و نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG است به مربع GH؛ بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت D به AC همچون نسبت مربع E است به مربع GH. [V.۲۲]

اما نسبت D به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع E به مربع GH همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. لذا، E از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و چون نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG است به مربع GH، بنابراین مربع FG از مربع GH بزرگتر است.

پس، فرض می‌کنیم مربعهای GH و K با مربع FG مساوی است، بنابراین از تفضیل نسبت در مخرجها، خواهیم داشت نسبت AB به BC همچون نسبت مربع FG است به مربع K. [V.۱۹، ف.]

اما نسبت AB به BC همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ بنابراین نسبت مربع FG به مربع K نیز همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ لذا FG از حیث طول با K اندازه‌پذیر است. [X.۹]

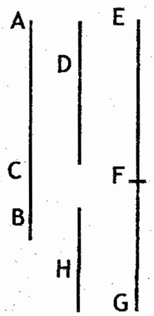
بنابراین مربع FG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با FG، از مربع GH بزرگتر است.
و FG و GH خطهای راستی گویا اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند و هیچ‌یک از آنها از حیث طول با E اندازه‌پذیر نیست.

در نتیجه FH یک خط راست ذوالاسمین سوم است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۱

مطلوب یافتن یک خط راست ذوالاسمین چهارم است.



فرض می‌کنیم که دو عدد AC و CB معلوم‌اند، چنانکه، هیچ‌یک از نسبتهای AB به BC و AB به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم یک خط راست گویای D معلوم است، و فرض می‌کنیم EF از حیث طول با D اندازه‌پذیر است؛ بنابراین EF نیز گویاست.

فرض می‌کنیم FG چنان انتخاب شده است که نسبت عدد BA به عدد AC همچون نسبت مربع EF است به مربع FG؛[X.۶، ف.]

بنابراین مربع EF با مربع FG اندازه‌پذیر است. [X.۶]

لذا، FG نیز گویاست.

اما چون نسبت BA به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، نسبت مربع EF به مربع FG نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین EF از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

لذا EF و FG خطهای راستی گویا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

درنتیجه EG ذوالاسمین است. حال، می‌گوییم که یک خط راست ذوالاسمین چهارم نیز هست.

زیرا، چون نسبت BA به AC همچون نسبت مربع EF است به مربع FG، بنابراین مربع EF از مربع FG بزرگتر است.

پس فرض می‌کنیم مربعهای FG و H با مربع EF مساوی است؛ بنابراین، از تفضیل نسبت در مخرجها داریم، نسبت عدد AB به عدد BC همچون نسبت مربع EF است به مربع H.
[V.۱۹، ف.]

اما نسبت AB به BC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین

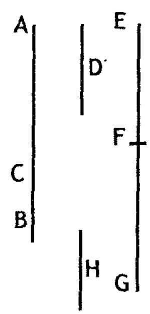
نسبت مربع EF به مربع H نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. لذا، EF از حیث طول با H اندازه‌ناپذیر است؛ [۹.X]
بنابراین مربع EF از مربع GF به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با EF، بزرگتر است. و EF و FG خطهای راستی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند، و EF از حیث طول با D اندازه‌پذیر است.

بنابراین EG یک خط راست ذوالاسمین چهارم است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۲

مطلوب پیدا کردن یک خط راست ذوالاسمین پنجم است.



فرض می‌کنیم دو عدد AC و CB معلوم‌اند، چنان که هیچ‌یک از نسبتهای AB به AC و AB به CB همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. فرض می‌کنیم خط راست گویای D معلوم است و EF از حیث طول با D اندازه‌پذیر، بنابراین EF گویاست.
فرض می‌کنیم ترتیبی اختیار شده است که نسبت CA به AB همچون نسبت مربع EF است به مربع FG. [۶.X، ف.]
اما نسبت CA به AB همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. بنابراین نسبت مربع EF به مربع FG هم همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. لذا EF و FG خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۹.X]
بنابراین EG ذوالاسمین است. [۳۶.X]

حال، می‌گوییم که این، یک خط راست ذوالاسمین پنجم نیز هست.

زیرا، چون نسبت CA به AB همچون نسبت مربع EF است به مربع FG، به عکس نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG است به مربع EF؛ بنابراین مربع GF از مربع FE بزرگتر است.

در این صورت، فرض می‌کنیم مربعهای EF و H با مربع GF مساوی باشد، بنابراین، پس از تفضیل نسبت در مخرج، نسبت عدد AB به عدد BC همچون نسبت مربع GF است به مربع H. [۱۹.V،ف.]
اما نسبت AB به BC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع FG به مربع H نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

لذا FG از حیث طول با H اندازه‌ناپذیر است؛ [۹.X]

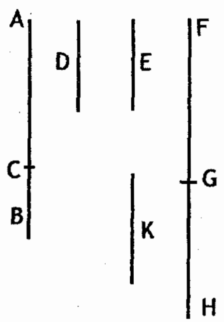
پس مربع FG به اندازهٔ مربع یک خط راست اندازه‌ناپذیر با FG، از مربع FE، بزرگتر است. و، GF و FE خطهای راستی گویا، فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و جملهٔ کوچکتر EF از حیث طول با خط راست گویای معلوم D اندازه‌پذیر است.

بنابراین EG یک خط راست ذوالاسمین پنجم است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۳

مطلوب یافتن یک خط راست ذوالاسمین ششم است.



فرض می‌کنیم دو عدد AC و CB معلوم‌اند چنان که نسبت AB به هیچ یک از آنها همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ و فرض می‌کنیم عدد دیگر D وجود دارد که مربع نیست و نسبت آن به هر یک از عددهای BA و AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم خط راست گویایی چون E معلوم است، و فرض می‌کنیم FG چنان اختیار شده است که نسبت D به AB همچون نسبت مربع E به مربع FG است. [۶.X، ف.]

بنابراین مربع E با مربع FG اندازه‌پذیر است. [۶.X]

و، E گویاست، بنابراین FG نیز گویاست. اما، چون نسبت D به AB همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، نسبت مربع E به مربع FG نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین E از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

باز فرض می‌کنیم HG چنان اختیار شده است که نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG به مربع GH است. [۶.X، ف.]

بنابراین مربع FG با مربع HG اندازه‌پذیر است. [۶.X]

لذا مربع HG گویاست؛ لذا HG گویاست. و چون نسبت BA به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، نسبت مربع FG به مربع GH نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ لذا FG از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

در نتیجه FG و GH خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، بنابراین FH ذوالاسمین است. [۳۶.X]

بعد هم باید ثابت شود که این یک خط راست ذوالاسمین ششم نیز هست.

زیرا، چون نسبت D به AB همچون نسبت مربع E است به مربع FG، و نیز نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG است به مربع GH، بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت D به AC همچون نسبت مربع E است به مربع GH. [۲۲.V]

اما نسبت D به AC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع E به مربع GH نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، لذا E از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

اما ثابت شده بود که E با FG نیز اندازه‌ناپذیر است، بنابراین هر یک از خطهای راست FG و GH از حیث طول با E اندازه‌ناپذیر است. و، چون نسبت BA به AC همچون نسبت مربع FG است به مربع GH، بنابراین مربع FG از مربع GH، بزرگتر است.

پس، فرض می‌کنیم مربعهای GH و K با مربع FG مساوی است؛ بنابراین، از تفضیل نسبت در مخرجها، نسبت AB به BC همچون نسبت مربع FG است به مربع K. [۱۹.V، ف.]

اما، نسبت AB به BC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع FG به مربع K نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. بنابراین FG از حیث طول با K اندازه‌ناپذیر است؛ [۹.X]

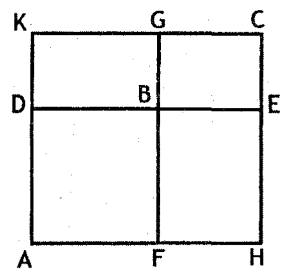
لذا مربع FG از مربع GH به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با FG، بزرگتر است. و، FG و GH خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، و هیچ‌یک از آنها از حیث طول با خط راست گویای معلوم E اندازه‌پذیر نیستند.

بنابراین FH یک خط راست ذوالاسمین ششم است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

فرض می‌کنیم دو مربع AB و BC در دست‌اند و طوری قرار داده شده‌اند که DB و BE بر یک خط راست قرار دارند؛ بنابراین FB و BG نیز بر یک خط راست قرار دارند.



فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع AC کامل شده است؛ می‌گوییم که AC مربع است، و DG واسطهٔ هندسی بین AB و BC است، و به علاوه DC واسطه هندسی بین AC و CB است.

زیرا، چون DB با BF مساوی است، و BE با BG، بنابراین تمامی DE با تمامی FG مساوی است؛

اما DE با هر یک از خطهای راست AH و KC مساوی است، و FG با هر یک از خطهای راست AK و HC؛ [۳۴.I]

بنابراین هر یک از خطهای راست AH و KC نیز با هر یک از خطهای راست AK و HC مساوی است، لذا متوازی‌الاضلاع AC متساوی‌الاضلاع است، و قائم‌الزاویه نیز هست، بنابراین AC مربع است. و چون نسبت FB به BG همچون نسبت DB است به BE، در حالی که نسبت FB به BG همچون نسبت AB است به DG، و، نسبت DB به BE همچون نسبت DG است به BC، [۱.VI]

بنابراین نسبت AB به DG نیز همچون نسبت DG است به BC. [۱۱.V]

لذا، DG واسطهٔ هندسی بین AB و BC است.

حال، می‌گوییم که DC نیز واسطهٔ هندسی بین AC و CB است.

زیرا، چون نسبت AD به DK همچون نسبت KG است به GC ــ زیرا به ترتیب با هم مساوی‌اندــ و، از ترکیب نسبت در صورت خواهیم داشت، نسبت AK به KD همچون نسبت KC است به CG، [۱۸.V]

و نسبت AK به KD همچون نسبت AC است به CD، و نسبت KC به CG همچون نسبت DC است به CB، [۱.VI]

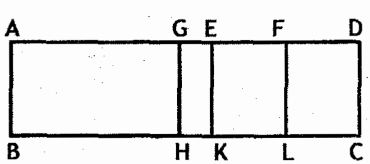
بنابراین نسبت AC به DC نیز همچون نسبت DC است به BC، [۱۱.V]

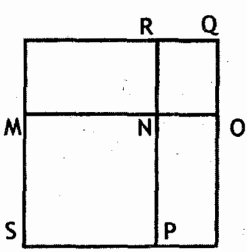
لذا، DC واسطهٔ هندسی بین AC و CB است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۴

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین اول حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت خط راست گنگی است که ذوالاسمین است.





فرض می‌کنیم مساحت AC از خط راست گویای AB و ذوالاسمین اول AD حاصل شده است.

می‌گوییم که «ضلع» مساحت AC خط راست گنگی است که ذوالاسمین است.

زیرا، چون AD خط راست ذوالاسمین اول است، فرض می‌کنیم در E به جمله‌های خود تقسیم شده است، و AE جملهٔ بزرگتر است. پس روشن است که AE و ED خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، مربع AE از مربع ED به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE بزرگتر است، و AE از حیث طول با خط راست گویای معلوم AB اندازه‌پذیر است. [X.تعر.II.۱]

فرض می‌کنیم ED در F نصف شده است، پس چون مربع AE از مربع ED اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE بزرگتر است، بنابراین اگر بر خط راست بزرگتر AE متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع کوچکتر، یعنی مساوی با مربع EF، و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه شود، این عمل آن را به دو جزء اندازه‌پذیر تقسیم می‌کند. [X.۱۷]

پس، فرض می‌کنیم مستطیل AG و GE مساوی با مربع EF، بر AE اضافه شده است. بنابراین AG از حیث طول با EG اندازه‌پذیر است.

فرض می‌کنیم GH و EK و FL از G و E و F به موازات یکی از خطهای راست AB و CD کشیده شده‌اند؛ فرض می‌کنیم مربع SN را مساوی با متوازی‌الاضلاع AH رسم کرده‌ایم و مربع NQ را مساوی با GK، [II.۱۴]

و فرض می‌کنیم آنها را طوری قرار داده‌ایم که MN با NO بر یک خط راست قرار گرفته است؛ بنابراین RN نیز با NP بر یک خط راست قرار خواهد گرفت. و متوازی‌الاضلاع SQ کامل می‌شود. لذا SQ مربع است. [لم]

حال، چون مستطیل AG و GE با مربع EF مساوی است، بنابراین نسبت AG به EF همچون نسبت EF است به EG؛ [VI.۱۷]

لذا نسبت AH به EL نیز همچون نسبت EL است به KG؛ [VI.۱]

بنابراین EL واسطهٔ هندسی بین AH و GK است. اما AH با SN مساوی است و GK با NQ؛ بنابراین EL واسطهٔ هندسی بین SN و NQ است. اما MR نیز واسطهٔ هندسی بین همان SN و NQ است؛ [لم]

لذا EL با MR مساوی است، پس با PO هم مساوی است.

اما AH و GK نیز با SN و NQ مساوی‌اند؛ بنابراین تمام AC با تمام SQ، یعنی با مربع MO مساوی است؛ بنابراین MO «ضلع» AC است.

حال می‌گوییم که MO ذوالاسمین است.

زیرا، چون AG با GE اندازه‌پذیر است، بنابراین AE نیز با هر یک از خطهای راست AG و GE اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]

اما AE نیز، بنا به فرض، با AB اندازه‌پذیر است؛ بنابراین AG و GE نیز با AB اندازه‌پذیرند. [۱۲.X]

و AB گویاست، بنابراین هر یک از خطهای راست AG و GE نیز گویاست؛ بنابراین هر یک از مستطیلهای AH و GK گویاست، [۱۹.X]

و AH با GK اندازه‌پذیر است. اما AH با SN مساوی است، و GK با NQ، بنابراین SN و NQ، یعنی مربعهای MN و NO گویا و اندازه‌پذیرند.

و، چون AE از حیث طول با ED اندازه‌ناپذیر است، در حالی که AE با AG اندازه‌پذیر است، و DE با EF، لذا AG نیز با EF اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

در نتیجه AH نیز با EL اندازه‌ناپذیر است. [۱.VI، ۱۱.X]

اما AH با SN مساوی است و EL با MR؛ بنابراین SN نیز با MR اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت SN به MR همچون نسبت PN است به NR؛ [۱.VI]

بنابراین PN با NR اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما PN با MN مساوی است و NR با NO؛ بنابراین MN با NO اندازه‌ناپذیر است. و مربع MN با مربع NO اندازه‌پذیر است، و هر یک گویاست؛ بنابراین MN و NO خطهای راستی گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند.

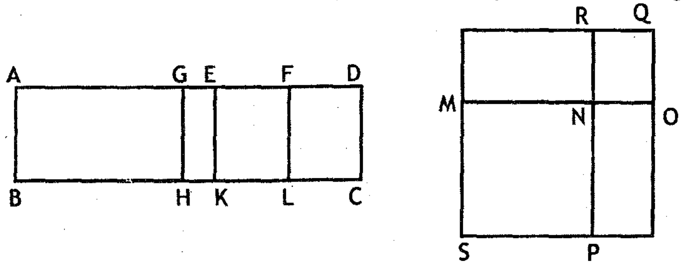
بنابراین MO ذوالاسمین، [۳۶.X]

و «ضلع» مساحت AC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۵

اگر مساحتی از خط راستی گویا و ذوالاسمین دوم حاصل شده باشد؛ «ضلع» این مساحت خط راست گنگی است که دوواسطی اول است.



فرض می‌کنیم مساحت $ABCD$ از خط راست گویای AB و ذوالاسمین دوم AD حاصل شده است، می‌گوییم که «ضلع» مساحت AC یک خط راست دوواسطی اول است.

زیرا چون AD یک خط راست ذوالاسمین دوم است، فرض می‌کنیم در نقطهٔ E به اجزای خود تقسیم شده است، به طوری که AE جملهٔ بزرگتر است؛ بنابراین AE و ED خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، مربع AE از مربع ED به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE، بزرگتر است، و جملهٔ کوچکتر ED از لحاظ طول با AB اندازه‌پذیر است. [X.تعر. II.۲]

فرض می‌کنیم ED در F نصف شده است، و بر AE مستطیل AG و GE، مساوی با مربع EF و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شده است؛ بنابراین AG از حیث طول با GE اندازه‌پذیر است. [X.۱۷]

فرض می‌کنیم خطهای راست GH و EK و FL از نقاط G و E و F به موازات AB و CD رسم شده‌اند، فرض می‌کنیم مربع SN مساوی با متوازی‌الاضلاع AH رسم شده است، و مربع NQ مساوی با GK، و این دو مربع چنان قرار داده شده‌اند که MN با NO بر یک خط راست قرار گرفته است؛ بنابراین RN نیز با NP بر یک خط راست قرار دارد.

فرض می‌کنیم مربع SQ کامل شده است. در این صورت، بنا به آنچه قبلاً ثابت شده بود، روشن می‌شود که MR واسطهٔ هندسی بین SN و NQ، و با EL مساوی است، و MO «ضلع» مساحت AC است.

اکنون باید ثابت کرد که MO یک خط راست دوواسطی اول است. چون AE از حیث طول با ED اندازه‌پذیر است در حالی که ED با AB اندازه‌پذیر است، بنابراین AE با AB اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]

و، چون AG با EG اندازه‌پذیر است، AE نیز با هر یک از خطهای راست AG و GE اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]

اما AE از حیث طول با AB اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین AG و GE نیز با AB اندازه‌ناپذیرند. [X.۱۳]

لذا BA و AG، و BA و GE، دو جفت خط راست گویا، فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ در نتیجه هر یک از مستطیلهای AH و GK واسط است. [X.۲۱]

بنابراین هر یک از مربعهای SN و NQ واسط است. لذا MN و NO نیز واسط‌اند.

و، چون AG از حیث طول با GE اندازه‌پذیر است، AH نیز با GK اندازه‌پذیر است، [VI.۱، X.۱۱]

یعنی SN با NQ اندازه‌پذیر است، یعنی مربع MN با مربع NO.

و، چون AE از حیث طول با ED اندازه‌ناپذیر است، در حالی که AE با AG اندازه‌پذیر است، و ED با EF، بنابراین AG با EF اندازه‌ناپذیر است؛ [X.۱۳]

در نتیجه AH نیز با EL، یعنی، SN با MR، یعنی PN با NR اندازه‌ناپذیر است، [۱۱.X ،۱.VI]
یعنی، MN از حیث طول با NO اندازه‌ناپذیر است. اما، ثابت شده بود که MN و NO هر دو واسط‌اند و از حیث مربع اندازه‌پذیر؛ بنابراین MN و NO خطهای راست واسط فقط اندازه‌پذیر از حیث مربع‌اند.

حال، می‌گوییم مستطیلی که پدید می‌آورند نیز گویاست.

زیرا، چون DE، بنا به فرض، باهر یک از خطهای راست AB و EF اندازه‌پذیر است، بنابراین
EF نیز با EK اندازه‌پذیر است. [۱۲.X]
و هر یک از آنها گویاست؛ بنابراین EL، یعنی MR، گویاست، [۱۹.X]
و MR مستطیل MN و NO است.

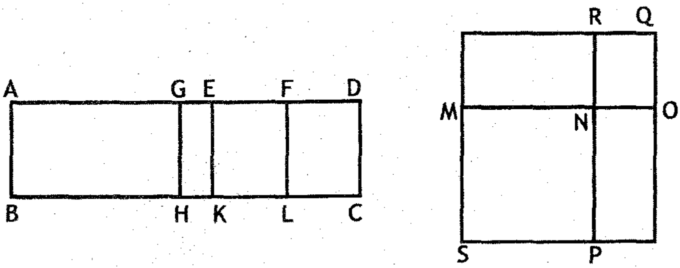
اما اگر دو خط راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، که مستطیل گویایی را دربر دارند با هم جمع شوند، حاصل خط راست گنگی است که دوواسطی اول نامیده می‌شود. [۳۷.X]

بنابراین MO یک خط راست دوواسطی اول است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۶

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و ذوالاسمین سوم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت خط راست گنگی است که دوواسطی دوم است.



فرض می‌کنیم مساحت $ABCD$، حاصل از خط راست گویای AB و ذوالاسمین سوم AD است که در E به جمله‌های خود تقسیم شده و AE قسمت بزرگتر آن است، می‌گوییم که «ضلع» مساحت AC، خط راست گنگی است که یک دوواسطی دوم است.

زیرا فرض می‌کنیم همان شکل قبلی را داشته باشیم. حال، چون AD یک خط راست ذوالاسمین سوم است، بنابراین AE و ED خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند، مربع AE از مربع ED به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE بزرگتر است، و هیچ یک از جمله‌های AE و ED از حیث طول با AB اندازه‌پذیر نیست. [۳.II.تعء.X]

سپس به همان روش گزارهٔ قبل می‌توان ثابت کرد که MO «ضلع» مساحت AC است، و MN و NO خطهای راست واسط اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند؛ در نتیجه MO دوواسطی است.

حال باید ثابت کنیم که خط راست دوواسطی دوم نیز هست.

چون DE از حیث طول با AB، یعنی با EK، اندازه‌ناپذیر است، و DE با EF اندازه‌پذیر، بنابراین EF از حیث طول با EK اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین FE و EK خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

لذا، EL، یعنی MR، واسط است. [۲۱.X]

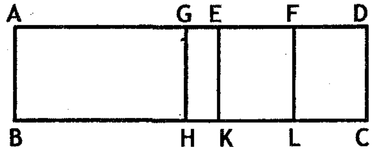
و پدید آمده از MN و NO؛ بنابراین مستطیل MN و NO واسط است.

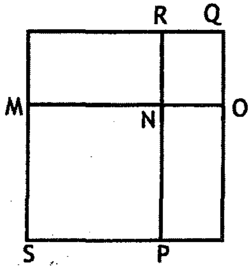
در نتیجه MO یک خط راست دوواسطی دوم است. [۳۸.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۷

اگر مساحتی حاصل از یک خط راست گویا و ذوالاسمین چهارم باشد، «ضلع» این مساحت، خط راست گنگی است مهاد.





فرض می‌کنیم مساحت AC حاصل از خط راست گویای AB و ذوالاسمین چهارم AD است که در E به جمله‌های خود تقسیم شده و AE جملهٔ بزرگتر آن است.

می‌گوییم که «ضلع» مساحت AC خط راست گنگی است که مهاد نام دارد.

زیرا، چون AD یک خط راست ذوالاسمین چهارم است، بنابراین AE و ED خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و مربع AE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AE، از مربع ED بزرگتر است، و AE از حیث طول با AB اندازه‌پذیر است. [X.تعه.II.۴]

فرض می‌کنیم DE در نقطهٔ F نصف شده است، و فرض می‌کنیم یک متوازی‌الاضلاع، مستطیل AG و GE، مساوی با مربع EF بر AE اضافه شده است؛ بنابراین AG از حیث طول با GE اندازه‌ناپذیر است. [۱۸.X]

فرض می‌کنیم GH و EK و FL موازی با AB کشیده شده‌اند، و فرض می‌کنیم بقیهٔ ترسیم مانند ترسیم قضیهٔ قبل باشد؛ پس روشن است که MO «ضلع» مساحت AC است.

حال باید ثابت کنیم که MO خط راست گنگی است که مهاد نام دارد.

چون AG با EG اندازه‌ناپذیر است، AH نیز با GK، یعنی SN با NQ، اندازه‌ناپذیر است.
[۱.VI، ۱۱.X]

بنابراین MN و NO از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند.

و، چون AE با AB اندازه‌پذیر است، AK گویاست؛ [۱۹.X]

و با مربعهای MN و NO مساوی است؛ بنابراین مجموع مربعهای MN و NO نیز گویاست.

و، چون DE از حیث طول با AB، یعنی با EK، اندازه‌ناپذیر است، در حالی که DE با EF اندازه‌پذیر است، بنابراین EF از حیث طول با EK اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

بنابراین EK و EF خطهای راستی گویا هستند که فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا LE، یعنی MR، واسط است [۲۱.X]

و پدید آمده از MN و NO است؛ بنابراین مستطیل MN و NO واسط است. و [مجموع] مربعهای MN و NO گویاست، و MN و NO از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند.

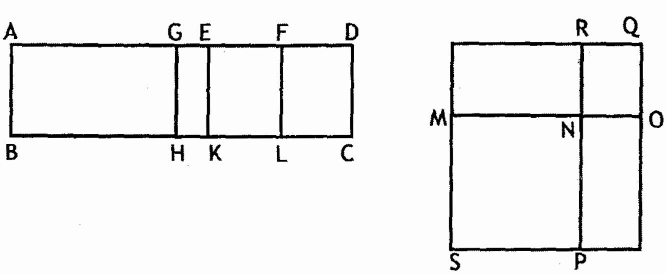
اما، اگر دو خط راست که از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند و مجموع مربعات آنها گویا، ولی مستطیل پدید آمده از آنها واسط است، با هم جمع شوند تمامی خط راست حاصل گنگ است و مهاد نامیده می‌شود. [۳۹.X]

بنابراین MO خط راستی است گنگ که مهاد نامیده شده، و «ضلع» مساحت AC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۸

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین پنجم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت خط راستی است گنگ که ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.



فرض می‌کنیم که مساحت AC از خط راست گویای AB و ذوالاسمین پنجم AD پدید آمده و در نقطهٔ E به اجزایش تقسیم شده است به طوری که AE جزء بزرگتر آن است؛ می‌گوییم که

«ضلع» مساحت AC خط راستی است گنگ که ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط نامیده می‌شود.

زیرا، فرض می‌کنیم شکلی مشابه با شکل قبل رسم شده است؛ پس روشن است که MO «ضلع» مساحت AC است. پس باید ثابت کنیم که MO ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.

زیرا چون AG با GE اندازه‌ناپذیر است، [۱۸.X]
بنابراین AH نیز با HE اندازه‌پذیر است، [۱.VI، ۱۱.X]
یعنی مربع MN با مربع NO اندازه‌پذیر است. بنابراین MN و NO از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند.

و، چون AD یک خط راست ذوالاسمین پنجم است و ED قطعهٔ کوچکتر آن، بنابراین ED از لحاظ طول با AB اندازه‌پذیر است. [X.تعر. II.۵]
اما AE با ED اندازه‌ناپذیر است، بنابراین AB نیز از حیث طول با AE اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]
بنابراین AK، یعنی مجموع مربعهای MN و NO واسط است. [۲۱.X]

و، چون DE از حیث طول با AB، یعنی با EK، اندازه‌پذیر است، و DE با EF اندازه‌پذیر است، بنابراین EF نیز با EK اندازه‌پذیر است. [۱۲.X]
و EK گویاست؛ لذا EL، یعنی MR، یعنی مستطیل MN و NO، نیز گویاست. [۱۹.X]

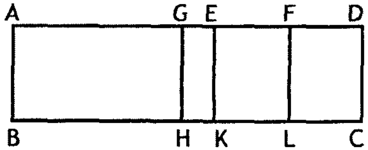
بنابراین MN و NO خطهای راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها واسط است، اما مستطیل حاصل از آنها گویاست.

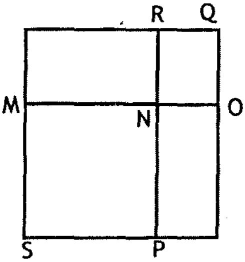
در نتیجه MO ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط [X. ۴۰]، و «ضلع» مساحت AC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵۹

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین ششم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت خط راستی است گنگ که ضلع مجموع دو مساحت واسط نامیده می‌شود.





فرض می‌کنیم مساحت $ABCD$ از خط راست گویای AB و ذوالاسمین ششم AD حاصل شده است که در نقطهٔ E به جمله‌هایش تقسیم شده است، به طوری که AE جملهٔ بزرگتر است؛ می‌گوییم که «ضلع» AC ضلع مجموع دو مساحت واسط است. فرض می‌کنیم همان ترسیم شکل قبل را داشته باشیم. پس روشن است که MO «ضلع» AC است و MN از حیث مربع با NO اندازه‌ناپذیر است.

حال، چون EA از حیث طول با AB اندازه‌ناپذیر است، بنابراین EA و AB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا AK، یعنی مجموع مربعهای MN و NO واسط است. [۲۱.X]

باز، چون ED از حیث طول با AB اندازه‌ناپذیر است، لذا FE نیز با EK اندازه‌ناپذیر است؛ [۱۳.X]

بنابراین FE و EK خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا EL، یعنی MR، یعنی مستطیل MN و NO واسط است. [۲۱.X]

و، چون AE با EF اندازه‌ناپذیر است، AK نیز با EL اندازه‌ناپذیر است. [۱.VI، ۱۱.X]

اما AK مجموع مربعهای MN و NO است، و EL مستطیل MN و NO؛ بنابراین مجموع مربعهای MN و NO با مستطیل MN و NO اندازه‌ناپذیر است. و، هر یک از آنها واسط است، و MN و NO از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند.

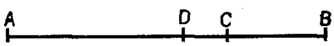
بنابراین MO ضلع مجموع دو مساحت واسط است، [۴۱.X]

و «ضلع» مساحت AC است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

اگر خط راستی به اجزای نامتساوی تقسیم شود، مربعهای این اجزا از دو برابر مستطیل حاصل از آنها بزرگتر است.



فرض می‌کنیم AB خط راستی باشد که در نقطهٔ C به اجزای نامتساوی تقسیم شده است، و

فرض می‌کنیم AC جزء بزرگتر باشد. می‌گوییم که مربعهای AC و CB از دو برابر مستطیل AC و CB بزرگتر است.

فرض می‌کنیم D وسط AB است.

در این صورت، چون یک خط راست در D به اجزای متساوی و در C به اجزای نامتساوی

تقسیم شده است، بنابراین مستطیل AC و CB به اضافهٔ مربع CD، با مربع AD مساوی است، [۵.II]

در نتیجه مستطیل AC و CB از مربع AD کمتر است؛ بنابراین دو برابر مستطیل AC و CB از دو برابر مربع AD کمتر است.

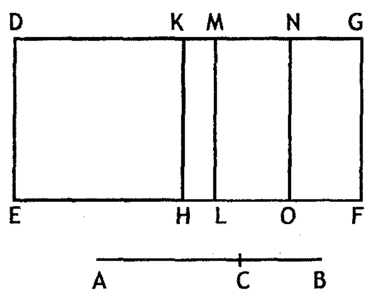
اما مربعهای AC و CB با دو برابر مربعهای AD و DC مساوی است؛ [۹.II]

بنابراین مربعهای AC و CB از دو برابر مستطیل AC و CB بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۰

اگر مربع به ضلع خط راست ذوالاسمینی بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنای شکل حاصل ذوالاسمین اول است.



فرض می‌کنیم AB خط راست ذوالاسمینی است که در C به اجزای خود تقسیم شده، و AC بزرگتر است؛ فرض می‌کنیم خط گویای DE معلوم است، و فرض می‌کنیم $DEFG$ مساوی با مربع به ضلع AB، بر DE اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است. می‌گوییم DG یک خط راست ذوالاسمین اول است.

زیرا فرض می‌کنیم بر DE مستطیل DH، مساوی با مربع به ضلع AC، و KL مساوی با مربع به ضلع CB اضافه شده است. بنابراین باقیمانده، دو برابر مستطیل AC و CB، با MF مساوی است.

فرض می‌کنیم MG در نقطهٔ N نصف، و NO موازی با [ML یا GF] رسم شده است. بنابراین هر یک از مستطیلهای MO و NF با یک برابر مستطیل AC و CB مساوی است.

حال، چون AB ذوالاسمینی است که در نقطهٔ C به اجزای خود تقسیم شده است، بنابراین AC و CB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ [۳۶.X]

لذا مربعهای AC و CB گویا و اندازه‌پذیر با یکدیگرند، در نتیجه مجموع مربعهای AC و CB نیز گویاست؛ [۱۵.X]

و، با DL مساوی است؛ بنابراین DL گویاست. و، بر خط راست گویای DE اضافه شده است.

بنابراین DM گویا و از حیث طول با DE اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

باز، چون AC و CB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین دو برابر مستطیل AC و CB، یعنی MF، واسط است. [X.۲۱]

و بر خط راست ML اضافه شده است؛ بنابراین MG نیز گویا و از حیث طول با ML، یعنی با DE، اندازه‌ناپذیر است. [X.۲۲]

اما MD نیز گویا و از حیث طول با DE اندازه‌پذیر است؛ بنابراین DM از حیث طول با MG اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]

و، هر دو گویا هستند؛ بنابراین DM و MG خطهای راستی گویا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین DG ذوالاسمین است. [X.۳۶]

حال، باید ثابت کرد که DG یک خط راست ذوالاسمین اول نیز هست.

چون مستطیل AC و CB واسطهٔ هندسی بین مربعهای AC و CB است، [لم پس از X.۵۳]
بنابراین MO نیز واسطهٔ هندسی بین DH و KL است.

لذا نسبت DH به MO همچون نسبت MO است به KL، یعنی نسبت DK به MN همچون نسبت MN است به MK؛ [VI.۱]

بنابراین مستطیل DK و KM با مربع به ضلع MN مساوی است. [VI.۱۷]

و، چون مربع به ضلع AC با مربع به ضلع CB اندازه‌پذیر است، DH نیز با KL اندازه‌پذیر است، لذا DK نیز با KM اندازه‌پذیر است. [VI.۱، X.۱۱]

و، چون مربعهای به اضلاع AC و CB از دو برابر مستطیل AC و CB بزرگتر است، [لم]
بنابراین DL نیز از MF بزرگتر است، لذا DM نیز از MG بزرگتر است. [VI.۱]

و مستطیل DK و KM با مربع به ضلع MN، یعنی با یک‌چهارم مربع به ضلع MG مساوی است، و DK با KM اندازه‌پذیر است.

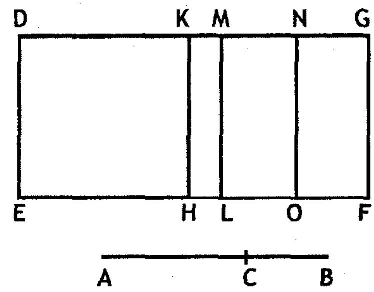
اما اگر دو خط راست نامساوی داشته باشیم و بر خط بزرگتر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع به ضلع خط کوچکتر و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شود، و آن را به اجزای اندازه‌پذیر تقسیم کند، مربع به ضلع بزرگتر به اندازهٔ مربع به ضلع خط راستی اندازه‌پذیر با بزرگتر، از مربع به ضلع کوچکتر، بزرگتر است. [X.۱۷]

بنابراین مربع به ضلع DM به اندازهٔ مربع به ضلع خط راستی اندازه‌پذیر با DM از مربع به ضلع MG، بزرگتر است. و، DM و MG گویا هستند، و DM که جملهٔ بزرگتر است، از حیث طول با خط راست گویای معلوم DE اندازه‌پذیر است، بنابراین DG خط راست ذوالاسمین اول است. [X.تعر.II.۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۱

اگر مربع یک خط راست دوواسطی اول بر خط راست گویایی اضافه شود پهنایی که پدید می‌آورد ذوالاسمین دوم است.



فرض می‌کنیم AB یک خط راست دوواسطی اول است که در نقطهٔ C به واسطهایش تقسیم شده و واسط AC بزرگتر است؛ فرض می‌کنیم یک خط راست گویای DE معلوم است، و متوازی‌الاضلاع DF، مساوی با مربع AB بر آن اضافه شده است که پهنای DG را پدید آورده است.

می‌گوییم DG خط راست ذوالاسمین دوم است.

زیرا فرض می‌کنیم ترسیم همان ترسیم قبلی است.

دراین صورت چون AB یک دوواسطی اول است که در C تقسیم شده است، بنابراین AC و CB خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند و مستطیل حاصل از آنها گویاست. [۳۷.X]

لذا مربعهای AC و CB نیز واسط‌اند. [۲۱.X]

بنابراین DL واسط است. [۱۵.X و ۲۳، ف.]

و بر خط راست گویای DE اضافه شده است. بنابراین MD گویاست و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر. [۲۲.X]

باز، چون دو برابر مستطیل AC و CB گویاست، MF نیز گویاست.

و بر خط راست گویای ML اضافه شده است؛ بنابراین MG نیز گویا و از حیث طول با ML، یعنی با DE، اندازه‌پذیر است؛ [۲۰.X]

بنابراین DM از حیث طول با MG اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

و هر دو گویا هستند. بنابراین DM و MG خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین DG ذوالاسمین است. [۳۶.X]

حال باید ثابت کنیم که یک خط راست ذوالاسمین دوم نیز هست.

زیرا چون مربعهای AC و CB از دو برابر مستطیل AC و CB بزرگتر است، بنابراین DL نیز از MF بزرگتر است؛ لذا DM نیز از MG بزرگتر است. [۱.VI]

و، چون مربع AC با مربع CB اندازه‌پذیر است، DH نیز با LK اندازه‌پذیر است، لذا DK نیز با KM اندازه‌پذیر است. [۱.VI، ۱۱.X]

و مستطیل DK و KM با مربع MN مساوی است؛ بنابراین مربع DM از مربع MG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با DM، بزرگتر است. [۱۷.X]

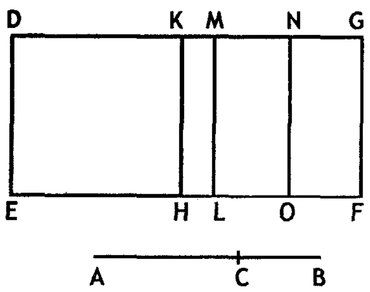
و، MG از حیث طول با DE اندازه‌پذیر است.

بنابراین DG یک خط راست ذوالاسمین دوم است. [X.تعر.II.۲]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۲

اگر مربع یک خط راست دوواسطی دوم بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد ذوالاسمین سوم است.



فرض می‌کنیم AB یک دوواسطی دوم است که در نقطهٔ C به واسطهای خود تقسیم شده است به طوری که AC قطعهٔ بزرگتر آن است؛ فرض می‌کنیم DE خط راست گویای دلخواهی است، و بر آن متوازی‌الاضلاع DF مساوی با مربع AB اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است.

می‌گوییم DG یک خط راست ذوالاسمین سوم است.

فرض می‌کنیم شکل همان ترسیم قبلی است. چون AB یک دوواسطی دوم است که در C تقسیم شده است بنابراین AC و CB خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، که مستطیل حاصل از آنها واسط است، [۳۸.X]

لذا مجموع مربعهای AC و CB نیز واسط است. [۱۵.X و ۲۳،ف.]

و مساوی است با DL؛ بنابراین DL نیز واسط است.

و بر خط راست گویای DE اضافه شده است؛ بنابراین MD نیز گویا و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

به همین دلیل MG نیز گویا و از حیث طول با ML، یعنی با DE، اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست DM و MG گویا و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر است.

و، چون AC از حیث طول با CB اندازه‌ناپذیر است، و نسبت AC به CB همچون نسبت مربع AC است به مستطیل AC و CB؛ بنابراین مربع AC نیز با مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

بنابراین مجموع مربعهای AC و CB با دو برابر مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است، [X.۱۲، ۱۳]

یعنی، DL با MF اندازه‌ناپذیر و لذا DM نیز با MG اندازه‌ناپذیر است. [VI.۱، X.۱۱]

و، هر دو گویا هستند؛ بنابراین DG ذوالاسمین است. [X.۳۶]

حال، باید ثابت کنیم که خط راست ذوالاسمین سوم نیز هست.

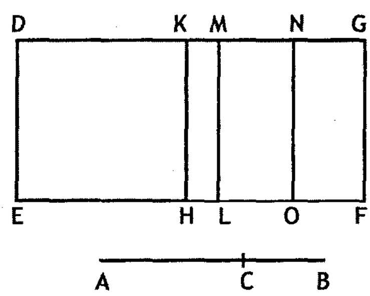
به همان روش قبل، می‌توانیم نتیجه بگیریم که DM از MG بزرگتر است، و DK با KM اندازه‌پذیر. و، مستطیل DK و KM با مربع MN مساوی است، بنابراین مربع DM از مربع MG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با DM، بزرگتر است.

و، هیچ‌یک از خطهای راست DM و MG از حیث طول با DE اندازه‌پذیر نیست، بنابراین DG خط راست ذوالاسمین سوم است. [X.تعر.II.۳]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۳

مربع خط راست مهادی که بر خط راستی گویا اضافه شود، مستطیلی پدید می‌آورد که پهنای آن ذوالاسمین چهارم است.



فرض می‌کنیم AB خط راست مهادی است که در نقطهٔ C به اجزای خود تقسیم شده و AC بزرگتر از CB است؛ فرض می‌کنیم DE خط راستی است گویا، و بر آن متوازی‌الاضلاع DF مساوی با مربع AB اضافه شده است که پهنای آن DG شده است؛ می‌گوییم که DG یک خط راست ذوالاسمین چهارم است.

فرض می‌کنیم شکل همان ترسیم قبلی باشد.

در این صورت چون AB خط راست مهادی است که در C تقسیم شده است، AC و CB خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که مجموع مربعهای آنها گویاست، ولی مستطیل حاصل از آنها واسط است. [X.۳۹]

در این صورت، چون مجموع مربعهای AC و CB گویاست، بنابراین DL گویاست؛ لذا DM نیز گویا و از حیث طول با DE اندازه‌پذیر است. [X.۲۰]

باز، چون دو برابر مستطیل AC و CB، یعنی MF، واسط است، و بر خط راست گویای

ML اضافه شده است، بنابراین MG نیز گویا و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر است.[۲۲.X]
لذا DM نیز از حیث طول با MG اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

بنابراین DM و MG خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا DG ذوالاسمین است. [۳۶.X]

حال باید ثابت کنیم که خط راست ذوالاسمین چهارم نیز هست.

به روشی مشابه با روش قبل می‌توانیم ثابت کنیم که DM از MG بزرگتر است، و مستطیل DK و KM با مربع MN مساوی است. در این صورت، چون مربع AC با مربع CB اندازه‌ناپذیر است، بنابراین DH نیز با KL اندازه‌ناپذیر است، درنتیجه DK نیز با KM اندازه‌ناپذیر است.[۱.VI، ۱۱.X]

اما اگر دو خط راست نامساوی در دست باشند و بر خط بزرگتر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع کوچکتر و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شود، و اگر این عمل آن را به اجزای اندازه‌ناپذیر تقسیم کند، آنگاه مربع بزرگتر از مربع کوچکتر به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با بزرگتر، بزرگتر است؛ [۱۸.X]

بنابراین مربع DM از مربع MG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با DM، بزرگتر است.

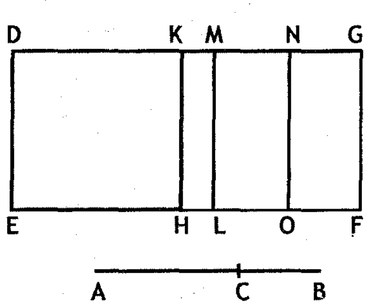
و، DM و MG خطهای راستی هستند اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، و DM با خط راست گویای معلوم DE اندازه‌پذیر است.

بنابراین DG یک خط راست ذوالاسمین چهارم است: [تعء.II.۴.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۴

مربع ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط که بر خط راست گویایی اضافه شده باشد، پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین پنجم است.



فرض می‌کنیم AB ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط باشد که در C به خطهای راست خود تقسیم شده است و AC قطعهٔ بزرگتر است؛ فرض می‌کنیم خط راست گویای DE معلوم است، و بر آن متوازی‌الاضلاع DF مساوی با مربع AB اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است.

می‌گوییم DG یک خط راست ذوالاسمین پنجم است.

فرض می‌کنیم شکلی نظیر شکل قبل رسم شده است.

در این صورت چون AB ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است که در C تقسیم شده است، بنابراین AC و CB خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها واسط است ولی مستطیل حاصل از آنها گویا. [X.۴۰]

پس، چون مجموع مربعهای AC و CB واسط است بنابراین DL واسط است؛ در نتیجه DM گویا و از حیث طول با DE اندازه‌ناپذیر است. [X.۲۲]

باز، چون دو برابر مستطیل AC و CB، یعنی، MF، گویاست، بنابراین MG گویاست و با DE اندازه‌پذیر. [X.۲۰]

بنابراین DM با MG اندازه‌ناپذیر است؛ [X.۱۳]

بنابراین DM و MG خطهای راست گویا هستند که فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین DG ذوالاسمین است. [X.۳۶]

حال می‌گوییم که یک خط راست ذوالاسمین پنجم نیز هست.

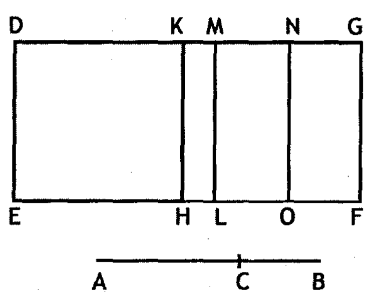
زیرا به روشی مشابه با روش قبل می‌توان ثابت کرد که مستطیل DK و KM با مربع MN مساوی است، و DK از حیث طول با KM اندازه‌ناپذیر است. بنابراین مربع DM از مربع MG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با DM، بزرگتر است. [X.۱۸]

و DM و MG فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و خط کوچکتر، MG، از حیث طول با DE اندازه‌پذیر است. بنابراین DG یک ذوالاسمین پنجم است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۵

مربع به ضلع مجموع دو مساحت واسط که بر خط راستی گویا اضافه شده باشد پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین ششم است.



فرض می‌کنیم AB ضلع مجموع دو مساحت واسط است که در C تقسیم شده است، و فرض می‌کنیم DE خط راستی است گویا، و متوازی‌الاضلاع DF مساوی با مربع AB بر DE اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است؛ می‌گوییم که DG یک خط راست ذوالاسمین ششم است.

زیرا فرض می‌کنیم شکل همان ترسیم قبلی باشد. در این صورت چون AB ضلع مجموع دو مساحت واسط است که در C تقسیم شده است، بنابراین AC و CB خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که مجموع مربعهای آنها واسط، مستطیل حاصل از آنها واسط، و به‌علاوه مجموع مربعهای آنها با مستطیل حاصل از آنها اندازه‌ناپذیر است، [X.۴۱]

لذا، به موجب آنچه که قبلاً ثابت شده بود، هر یک از مستطیلهای DL و MF واسط است. و بر خط راست گویای DE اضافه شده‌اند؛ بنابراین هر یک از خطهای راست DM وMG گویا و با DE از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [X.۲۲]

و، چون مجموع مربعهای AC و CB با دو برابر مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است، بنابراین DL با MF اندازه‌ناپذیر است.

لذا DM نیز با MG اندازه‌ناپذیر است؛ [VI.۱، X.۱۱]

پس DM و MG خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا DG ذوالاسمین است. [X.۳۶]

حال می‌گوییم که یک خط راست ذوالاسمین ششم نیز هست.

باز، به روشی مشابه روش قبل می‌توانیم ثابت کنیم که مستطیل DK و KM با مربع MN مساوی است، و DK از حیث طول با KM اندازه‌ناپذیر است؛ و، به همان دلیل که قبلاً دیدیم، مربع DM از مربع MG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با DM، بزرگتر است.

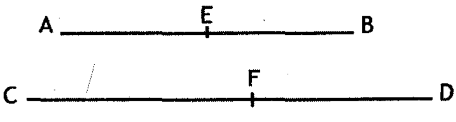
و، هیچ‌یک از خطهای راست DM و MG از حیث طول با خط راست گویای معلوم DE اندازه‌پذیر نیست.

بنابراین DG یک خط راست ذوالاسمین ششم است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۶

هر خط راست اندازه‌پذیر از حیث طول با یک خط راست ذوالاسمینی، خود نیز ذوالاسمینی است از همان نوع.



فرض می‌کنیم AB ذوالاسمین است، وCD از حیث طول باAB اندازه‌پذیر. می‌گوییم که CD ذوالاسمینی است از همان نوع AB. زیرا، چون AB ذوالاسمین است، فرض میکنیم در نقطهٔ E به جمله‌های خود تقسیم شده، و AE جملهٔ بزرگتر است؛ بنابراین AE و EB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [X.۳۶]

فرض می‌کنیم چنان انتخاب شده است که نسبت AB به CD همچون نسبت AE است به CF. [۱۲.VI]

بنابراین نسبت باقیماندهٔ EB به باقیماندهٔ FD نیز همچون نسبت AB است به CD. [۱۹.V]

اما AB از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است؛ بنابراین AE نیز با CF اندازه‌پذیر است، و EB با FD. [۱۱.X]

و، AE و EB گویا هستند، بنابراین CF و FD نیز گویا هستند. و نسبت AE به CF همچون نسبت EB است به FD. [۱۱.V]

بنابراین، به ابدال نسبت، نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD. [۱۶.V]

اما AE و EB فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین CF و FD نیز فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۱۱.X]

و گویا هستند؛ بنابراین CD ذوالاسمین است. [۳۶.X]

حال، می‌گوییم که از لحاظ نوع نیز با AB یکی است.

زیرا مربع AE از مربع EB، یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE، یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن، بزرگتر است.

پس، اگر مربع AE از مربع EB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE، بزرگتر باشد، مربع CF نیز از مربع FD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با CF، بزرگتر است. [۱۴.X]

و اگر AE با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، CF نیز با آن اندازه‌پذیر خواهد بود، [۱۲.X]

و به این دلیل هر یک از خطهای راست AB و CD ذوالاسمین اول، یعنی ذوالاسمینی از یک نوع‌اند. [X.تعر.II.۱]

اما اگر EB با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، FD نیز با آن اندازه‌پذیر است، [۱۲.X]

و به همین دلیل باز CD با AB از یک نوع خواهد بود؛ زیرا هر یک از آنها ذوالاسمین دوم خواهد بود. [X.تعر.II.۱]

اما، اگر هیچ‌یک از خطهای راست AE و EB با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر نباشد، هیچ‌یک از خطهای راست CF و FD هم با آن اندازه‌پذیر نخواهند بود، [۱۳.X]

و در این صورت هر یک از خطهای راست AB و CD ذوالاسمین سوم است. [X.تعر.II.۳]

اما، اگر مربع AE از مربع EB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AE، بزرگتر باشد، مربع CF نیز از مربع FD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با CF، بزرگتر خواهد بود. [۱۴.X]

و اگر AE با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، CF نیز با آن اندازه‌پذیر خواهد بود، و هر یک از خطهای راست AB و CD یک ذوالاسمین چهارم است. [X.تعر.II.۴]

اما، اگر EB اندازه‌پذیر باشد، FD نیز با آن اندازه‌پذیر است، و هر یک از خطهای راست AB و CD یک ذوالاسمین پنجم خواهد بود [X.تعر.II.۵]

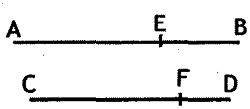
اما اگر هیچ‌یک از خطهای راست AE و EB با خط راست معلوم اندازه‌پذیر نباشند، هیچ‌یک از خطهای راست CF و FD نیز با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر نخواهد بود، و هریک از خطهای راست AB و CD ذوالاسمین ششم خواهد بود. [X.تعر.II.۶]

بنابراین یک خط راست اندازه‌پذیر از حیث طول با یک خط راست ذوالاسمین، خود نیز ذوالاسمینی است از همان نوع.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۷

هر خط راست اندازه‌پذیر از حیث طول با یک خط راست دوواسطی، خود نیز دوواسطی و از همان نوع است.



فرض می‌کنیم AB دوواسطی است و CD از حیث طول با AB اندازه‌پذیر؛ می‌گوییم که CD دوواسطی است از همان نوع AB.

زیرا، چون AB دوواسطی است، فرض می‌کنیم در E به واسطهای خود تقسیم شده است؛ بنابراین AE و EB خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [X.۳۷، ۳۸]

فرض می‌کنیم CF چنان اختیار شده است که نسبت AB به CD همچون نسبت AE است به CF. بنابراین نسبت باقیماندهٔ EB به باقیماندهٔ FD نیز همچون نسبت AB است به CD. [V.۱۹]

اما AB از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است؛ بنابراین AE و EB نیز به ترتیب با CF و FD اندازه‌پذیرند. [X.۱۱]

ولی AE و EB واسط‌اند؛ بنابراین CF و FD نیز واسط‌اند. [X.۲۳]

و چون نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD، [V.۱۱]

و AE و EB فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، CF و FD نیز فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [X.۱۱]

ولی ثابت شده بود که هر دو واسط‌اند؛ بنابراین CD دوواسطی است.

حال می‌گوییم که نوع آن هم با نوع AB یکی است.

زیرا چون نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD. بنابراین نسبت مربع AE به مستطیل AE و EB نیز همچون نسبت مربع CF است به مستطیل CF و FD؛ بنابراین به ابدال نسبت، نسبت مربع AE به مربع CF، همچون نسبت مستطیل AE و EB است به مستطیل CF و FD. [۱۶.V]

اما مربع AE با مربع CF اندازه‌پذیر است؛ بنابراین مستطیل AE و EB نیز با مستطیل CF و FD اندازه‌پذیر است؛ لذا اگر مستطیل AE و EB گویا باشد، مستطیل CF و FD نیز گویاست [و به همین دلیل CD دوواسطی اول است]؛ [۳۷.X]

اما اگر مستطیل AE و EB واسط باشد، دیگری نیز واسط است، [۲۳.X، ف.]

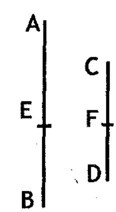
و هریک از خطهای راست AB و CD دوواسطی دوم است. [۳۸.X]

و به همین دلیل CD از همان نوع AB است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۸

هر خط راست اندازه‌پذیر با یک خط راست مهاد، خود نیز خط راستی است مهاد.



فرض می‌کنیم AB مهاد است و CD با AB اندازه‌پذیر؛ می‌گوییم CD مهاد است. فرض می‌کنیم AB در E تقسیم شده است؛ بنابراین AE و EB خطهای راستی از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند که مجموع مربعهای آنها گویاست، اما مستطیل حاصل از آنها واسط است. [۳۹.X]

فرض می‌کنیم شکلی نظیر شکل قبل انتخاب شده است.

در این صورت، چون نسبت AB به CD همچون نسبت AE است به CF، و EB است به FD، بنابراین نسبت AE به CF نیز همچون نسبت EB است به FD. [۱۱.V]

اما AB با CD اندازه‌پذیر است؛ بنابراین AE و EB نیز به‌ترتیب با CF و FD اندازه‌پذیرند. [۱۱.X]

و چون، نسبت AE به CF همچون نسبت EB است به FD، به ابدال نسبت نیز، نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD؛ [۱۶.V]

بنابراین از ترکیب نسبت در صورت نتیجه می‌گیریم، نسبت AB به BE همچون نسبت CD است به DF؛ [۱۸.V]

لذا، نسبت مربع AB به مربع BE نیز همچون نسبت مربع CD است به مربع DF. [۲۰.VI]

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که نسبت مربع AB به مربع AE همچون نسبت مربع CD است به مربع CF. بنابراین نسبت مربع AB به مربعهای AE و EB نیز همچون نسبت

مربع CD است به مربعهای CF و FD؛ لذا همچنین به ابدال نسبت، نسبت مربع AB به مربع CD همچون نسبت مربعهای AE و EB است به مربعهای CF و FD. [۱۶.V]
اما مربع AB با مربع CD اندازه‌پذیر است؛ بنابراین مربعهای AE و EB نیز با مربعهای CF و FD اندازه‌پذیرند. و مجموع مربعهای AE و EB گویاست؛ بنابراین مجموع مربعهای CF و FD نیز گویاست.

به همین ترتیب دو برابر مستطیل AE و EB هم با دو برابر مستطیل CF و FD اندازه‌پذیر است.

و دو برابر مستطیل AE و EB واسط است؛ بنابراین دو برابر مستطیل CF و FD نیز واسط است. [۲۳.X، ف.]

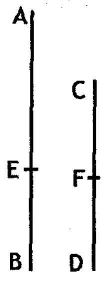
لذا CF و FD خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که، در عین حال، مجموع مربعهای آنها گویا، ولی مستطیل حاصل از آنها واسط است؛ بنابراین تمامی CD خط راست گنگی است که مهاد است. [۳۹.X]

در نتیجه هر خط راست اندازه‌پذیر با یک خط راست مهاد، مهاد است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶۹

هر خط راست اندازه‌پذیر با ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط، خود نیز ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.



فرض می‌کنیم AB ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است، و فرض می‌کنیم CD با AB اندازه‌پذیر است؛ باید ثابت کنیم CD نیز ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.

فرض می‌کنیم AB به خطهای راست خود در E تقسیم شده است؛ بنابراین AE و EB خطهای راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که مجموع مربعهای آنها واسط است، ولی مستطیل حاصل از آنها گویاست. [۴۰.X]

فرض می‌کنیم شکل همان شکل قبلی است.

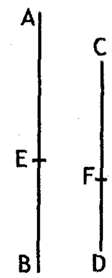
در این صورت می‌توانیم به طریق مشابه ثابت کنیم که CF و FD از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند، و مجموع مربعهای AE و EB با مجموع مربعهای CF و FD اندازه‌پذیر است، و مستطیل AE و EB با مستطیل CF و FD اندازه‌پذیر. لذا مجموع مربعهای CF و FD نیز واسط است و مستطیل CF و FD گویا.

در نتیجه CD ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۰

هر خط راست اندازه‌پذیر با ضلع مجموع دو مساحت واسط، ضلع مجموع دو مساحت واسط است.



فرض می‌کنیم AB ضلع مجموع دو مساحت واسط است و CD با AB اندازه‌پذیر، باید ثابت کنیم که CD نیز ضلع مجموع دو مساحت واسط است. زیرا، چون AB ضلع مجموع دو مساحت واسط است، فرض می‌کنیم در E به خطهای راست خود تقسیم شده است، بنابراین AE و EB خطهای راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها واسط است، مستطیل حاصل از آنها واسط است، و به‌علاوه مجموع مربعهای AE و EB با مستطیل AE و EB اندازه‌ناپذیر است. [۴۱.X]

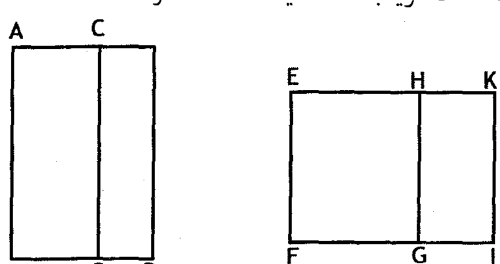
فرض می‌کنیم شکلی مشابه با شکل قبل رسم شده است. در این صورت می‌توانیم به طریق مشابه ثابت کنیم که CF و FD از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند، مجموع مربعهای AE و EB با مجموع مربعهای CF و FD اندازه‌پذیر است، و مستطیل AE و EB با مستطیل CF و FD اندازه‌پذیر؛ لذا مجموع مربعهای CF و FD نیز واسط است، مستطیل CF و FD واسط است و به‌علاوه مجموع مربعهای CF و FD با مستطیل CF و FD اندازه‌ناپذیر است.

در نتیجه CD ضلع مجموع دو مساحت واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۱

اگر یک مساحت گویا و یک مساحت واسط با هم جمع شوند، یکی از چهار خط راست گنگ را پدید می‌آورند، یعنی یا یک ذوالاسمین، یا یک دوواسطی اول، یا یک مهاد، یا یک ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط.



فرض می‌کنیم AB گویاست و CD واسط؛ می‌گوییم که «ضلع» مساحت AD یک ذوالاسمین یا یک دوواسطی اول یا یک مهاد یا یک ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.

زیرا AB یا بزرگتر از CD است یا کوچکتر از آن.

اول فرض می‌کنیم بزرگتر است؛ فرض می‌کنیم خط راست گویای EF معلوم است، و بر آن

مستطیل EG، مساوی با AB اضافه شده، که پهنای EH را پدید آورده است، و فرض می‌کنیم HI، مساوی با DC، بر EF اضافه شده و پهنای HK را پدید آورده است. پس چون AB گویا و با EG مساوی است، بنابراین EG نیز گویاست.

و بر EF اضافه شده، پهنای EH را پدید آورده است؛ بنابراین EH گویا و از حیث طول با EF اندازه‌پذیر است. [X. ۲۰]

باز، چون CD واسط و با HI مساوی است، بنابراین HI نیز واسط است.

و، بر خط گویای EF بنا شده و پهنای HK را پدید آورده است؛ بنابراین HK گویاست و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر. [X. ۲۲]

و، چون CD واسط است و AB گویا، بنابراین AB با CD اندازه‌ناپذیر است، لذا EG نیز با HI اندازه‌ناپذیر است. اما، نسبت EG به HI همچون نسبت EH است به HK؛ [VI. ۱]
بنابراین EH نیز از حیث طول با HK اندازه‌ناپذیر است. [X. ۱۱]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین EH و HK خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین EK خط راستی است ذوالاسمین که در H تقسیم شده است. [X. ۳۶]

و، چون AB از CD بزرگتر است، و AB با EG مساوی، و CD با HI؛ بنابراین EG نیز از HI بزرگتر است؛ لذا EH از HK بزرگتر است. پس، مربع EH از مربع HK یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با EH یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن، بزرگتر است.

اول، فرض می‌کنیم مربع آن به اندازهٔ مربع یک خط راست اندازه‌پذیر با FH بزرگتر است.

اما خط راست بزرگتر HE از حیث طول با خط راست گویای معلوم EF اندازه‌پذیر است؛
بنابراین EK یک ذوالاسمین اول است. [X. تعه. II. ۱]

اما EF گویاست؛ و اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین اول حاصل شده باشد، ضلع مربع مساوی با این مساحت، ذوالاسمین است. [X. ۵۴]

بنابراین «ضلع» EI ذوالاسمین است؛ لذا «ضلع» AD نیز ذوالاسمین است.

حال، فرض می‌کنیم مربع EH از مربع HK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با EH بزرگتر باشد.

اما خط راست بزرگتر EH از حیث طول با خط راست گویای معلوم EF اندازه‌پذیر است؛
بنابراین EK یک ذوالاسمین چهارم است. [X. تعه. II. ۴]

ولی EF گویاست؛ و اگر مساحتی از خط راستی گویا و ذوالاسمین چهارم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت خط راست گنگی است که مهاد است. [X. ۵۷]

بنابراین «ضلع» مساحت EI مهاد است؛ لذا «ضلع» مساحت AD نیز مهاد است.

حال، فرض می‌کنیم AB از CD کوچکتر است؛ بنابراین EG نیز از HI کوچکتر است، لذا EH نیز از HK کوچکتر است.

اما مربع HK از مربع EH یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با HK یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن، بزرگتر است.

اول، فرض می‌کنیم مربع HK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با HK، بزرگتر است.

اما خط راست کوچکتر EH از حیث طول با خط راست گویای معلوم EF اندازه‌پذیر است؛
بنابراین EK ذوالاسمین دوم است. [X.تعر.II.۲]

ولی EF گویاست، و اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین دوم حاصل شده باشد، ضلع مربع مساوی با آن، دوواسطی اول است؛ [X.۵۵]

بنابراین «ضلع» مساحت EI دوواسطی اول است، لذا «ضلع» AD نیز دوواسطی اول است.

حال، فرض می‌کنیم مربع HK از مربع HE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با HK، بزرگتر است. اما خط راست کوچکتر EH، با خط راست گویای معلوم EF اندازه‌پذیر است؛
بنابراین EK ذوالاسمین پنجم است. [X.تعر.II.۵]

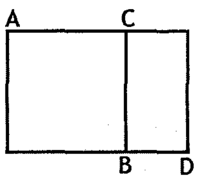
ولی EF گویاست، و اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین پنجم حاصل شده باشد، ضلع مربع مساوی با آن مساحت، ضلع یک مساحت گویا به‌علاوهٔ یک مساحت واسط است. [X.۵۸]

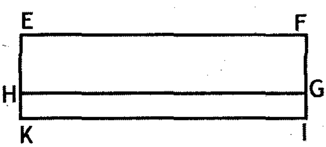
بنابراین «ضلع» مساحت EI، ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است، لذا «ضلع» مساحت AD نیز، ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۲

اگر دو مساحت واسط نسبت به هم اندازه‌ناپذیر، با یکدیگر جمع شوند، یکی از دو خط راست گنگ باقیماندهٔ دیگر را پدید می‌آورند، یعنی، یا یک دوواسطی دوم یا یک ضلع مجموع دو مساحت واسط.





فرض می‌کنیم دو مساحت واسط AB و CD اندازه‌ناپذیر با یکدیگر، با هم جمع شده‌اند؛ می‌گوییم که «ضلع» مساحت AD یا یک دوواسطی دوم است یا یک ضلع مجموع دو مساحت واسط. زیرا AB یا بزرگتر از CD است یا کوچکتر از آن.

اول، اگر تصادفاً AB بزرگتر از CD باشد؛ فرض می‌کنیم خط راست گویای EF معلوم است و بر EF مستطیل EG مساوی با AB اضافه شده است که پهنای EH را پدید آورده، و مستطیل HI مساوی با CD، که پهنای HK را پدید آورده است. اما، چون هریک از مساحتهای AB و CD واسط است، بنابراین هریک از مساحتهای EG و HI نیز واسط است.

و، هر دو بر خط راست گویای FE اضافه شده‌اند و پهناهای EH و HK را پدید آورده‌اند؛ بنابراین هریک از خطهای راست EH و HK گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون AB با CD اندازه‌ناپذیر است، و AB با EG مساوی است و CD با HI، بنابراین EG نیز با HI اندازه‌ناپذیر است.

ولی نسبت EG به HI مثل نسبت EH است به HK؛ [۱.VI]

بنابراین EH از حیث طول با HK اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

بنابراین EH و HK خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، لذا EK ذوالاسمین است. [۳۶.X]

اما مربع EH از مربع HK یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با EH بزرگتر است یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن.

اول، فرض می‌کنیم مربع آن به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با EH بزرگتر است.

اما هیچ‌یک از خطهای راست EH و HK از حیث طول با خط راست گویای معلوم EF اندازه‌پذیر نیست؛ بنابراین EK ذوالاسمین سوم است. [X.تعر.II.۳]

اما EF گویاست؛ و اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین سوم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت دوواسطی دوم است؛ [۵۶.X]

بنابراین «ضلع» EI، یعنی ضلع AD دوواسطی دوم است.

حال، فرض می‌کنیم مربع EH از مربع HK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با EH بزرگتر است. ولی هریک از خطهای راست EH و HK از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین EK ذوالاسمین ششم است. [X.تعر.II.۶]

اما اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست ذوالاسمین ششم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت ضلع مجموع دو مساحت واسط است؛ [۵۹.X]

لذا «ضلع» مساحت AD نیز ضلع مجموع دو مساحت واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

خط راست ذوالاسمین و خطهای راست گنگ پس از آن نه با واسط یکی هستند و نه با همدیگر. زیرا مربع یک واسط، اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که خط راستی است گویا و از حیث طول اندازه‌ناپذیر با خط راستی که بر آن اضافه شده است. [۲۲.X]

اما مربع ذوالاسمین، اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین اول است. [۶۰.X]

مربع دوواسطی اول، اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین دوم است. [۶۱.X]

مربع دوواسطی دوم، اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی ایجاد می‌کند که ذوالاسمین سوم است. [۶۲.X]

مربع مهاد اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین چهارم است. [۶۳.X]

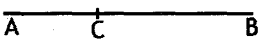
مربع ضلع یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط، اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین پنجم است. [۶۴.X]

مربع مجموع دو مساحت واسط اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که ذوالاسمین ششم است. [۶۵.X]

و پهناهای مذکور هم با اولی و هم با یکدیگر متفاوت‌اند: با اولی بدین علت که گویاست، و با یکدیگر بدین علت که نوع آنها با هم یکی نیست؛ لذا این خطهای راست گنگ، خود نیز با یکدیگر متفاوت‌اند.

قضیهٔ ۷۳

اگر از خط راستی گویا، خط راستی گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع با تمامی خط، کم شده باشد، باقیمانده گنگ است و آن را منفصل[1] می‌نامیم.



فرض می‌کنیم از خط راست گویای AB خط راست گویای BC، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع با تمامی خط، کم شده است.

می‌گوییم که باقیماندهٔ AC خط راست گنگی است که منفصل می‌نامیم.

زیرا، چون AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است، و نسبت AB به BC همچون نسبت مربع AB است به مستطیل AB و BC، بنابراین مربع AB با مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

1. apotome

اما مربعهای AB و BC با مربع AB اندازه‌پذیرند، [X.۱۵]

و دو برابر مستطیل AB و BC با مستطیل AB و BC اندازه‌پذیر است. [X.۶]

و، از آنجا که مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC به اضافهٔ مربع CA مساوی است، [II.۷]

بنابراین مربعهای AB و BC نیز با بقیه، مربع AC، اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳، ۱۶]

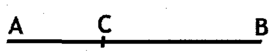
اما مربعهای AB و BC گویا هستند؛ بنابراین AC گنگ است. [X.تع.۴]

و آن را منفصل می‌نامیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۴

اگر از خط راست واسطی یک خط راست واسط را که با تمامی خط فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است و با تمام خط یک مستطیل گویا می‌سازد، کم کنیم باقیمانده گنگ است و آن را منفصل اول یک خط راست واسط می‌نامیم.



فرض می‌کنیم از خط راست واسط AB، خط راست واسط CB که با AB فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است و با AB مستطیل گویای AB و BC را می‌سازد کم شده است؛ می‌گوییم که باقیماندهٔ AC گنگ است؛ و آن را منفصل اول یک خط راست واسط می‌نامیم.

زیرا، چون AB و BC واسط هستند، مربعهای AB و BC نیز واسط‌اند.

اما دو برابر مستطیل AB و BC گویاست؛ بنابراین مجموع مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین دو برابر مستطیل AB و BC نیز با بقیه، مربع AC، اندازه‌ناپذیر است، [II.۷]

زیرا، اگر کل کمیت با یکی از دو کمیت اندازه‌ناپذیر باشد، دو کمیت اولیه نیز اندازه‌ناپذیر خواهند بود. [X.۱۶]

اما دو برابر مستطیل AB و BC گویاست؛ بنابراین مربع AC گنگ است؛ لذا AC گنگ است [X.تع.۴]

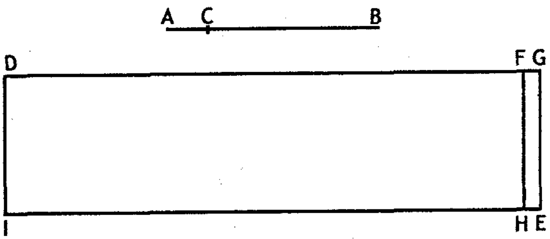
و AC را منفصل اول یک خط راست واسط می‌نامیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۵

اگر از یک خط راست واسط، خط راست واسطی را که با آن فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است

و مستطیل واسطی با آن می‌سازد کم کنیم، باقیمانده گنگ است، و آن را منفصل دوم یک خط راست واسط می‌نامیم.



فرض می‌کنیم از خط راست واسط AB خط راست واسط CB که با AB فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است و با آن مستطیل واسط AB و BC را می‌سازد، کم شده است؛ [۲۸.X]

می‌گوییم که باقیماندهٔ AC گنگ است و آن را منفصل دوم یک خط راست واسط می‌نامیم.

زیرا فرض می‌کنیم که خط راست گویای DI معلوم است، و فرض می‌کنیم DE، مساوی با مربعهای AB و BC، بر DI اضافه شده، و پهنای DG را پدید آورده است، و فرض می‌کنیم DH، مساوی با دو برابر مستطیل AB و BC، بر DI اضافه شده و پهنای DF را پدید آورده است. بنابراین باقیماندهٔ FE با مربع AC مساوی است. [۷.II]

حال، چون مربعهای AB و BC واسط و اندازه‌پذیرند، بنابراین DE نیز واسط است؛ [۱۵.X و ۲۳، ف.]

و بر خط راست گویای DI اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است، بنابراین DG گویا و از حیث طول با DI اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

باز، چون مستطیل AB و BC واسط است، لذا دو برابر مستطیل AB و BC نیز واسط است. [۲۳.X، ف.]

و مساوی است با DH؛ لذا DH نیز واسط است. و بر خط راست گویای DI اضافه شده و پهنای DF را پدید آورده است. بنابراین DF گویا و از حیث طول با DI اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون AB و BC فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین AB از حیث طول با BC اندازه‌ناپذیر است؛ لذا مربع AB نیز با مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما مربعهای AB و BC با مربع AB اندازه‌پذیرند، [۱۵.X]

و دو برابر مستطیل AB و BC با مستطیل AB و BC اندازه‌پذیر است؛ [۶.X]

بنابراین دو برابر مستطیل AB و BC با مربعهای AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

اما DE با مربعهای AB و BC مساوی است، و DH با دو برابر مستطیل AB و BC؛ بنابراین DE با DH اندازه‌ناپذیر است. ولی، نسبت DE به DH همچون نسبت GD است به DF؛ [۱.VI]

بنابراین GD با DF اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۱]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین GD و DF خطهای راستی گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند، بنابراین FG منفصل است. [X.۷۳]

اما DI گویا و مستطیل حاصل از یک خط راست گویا و یک خط راست گنگ، گنگ است، [نتیجه از X.۲۰]

و «ضلع» آن گنگ است، و AC «ضلع» FE است؛ بنابراین AC گنگ است.

و آن را منفصل دوم یک خط راست واسط می‌نامیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۶

اگر از یک خط راست خط راستی کم شود که با آن از حیث مربع اندازه‌ناپذیر باشد و مجموع مربعهای آن و تمامی خط راست اولیه گویا، ولی مستطیل پدید آمده از آنها واسط باشد، باقیمانده گنگ است و ما آن را کهاد[1] می‌نامیم.

فرض می‌کنیم از خط راست AB خط راست BC،

که از حیث مربع با تمامی آن، اندازه‌ناپذیر است و در شرایط داده شده صدق می‌کند، کم شده است. [X.۳۳]

می‌گوییم که باقیماندهٔ AC خط راستی است گنگ که کهاد نامیده می‌شود.

زیرا، چون مجموع مربعهای AB و BC گویاست و دو برابر مستطیل AB و BC واسط است، بنابراین مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. به بیان دیگر، مربعهای AB و BC با باقیمانده، یعنی، مربع AC، اندازه‌ناپذیر است. [II.۷، X.۱۶]

اما مربعهای AB و BC گویا هستند؛ بنابراین مربع AC گنگ است؛ لذا AC گنگ است؛ و ما آن را کهاد می‌نامیم.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۷

اگر از یک خط راست خط راستی کم شود که از حیث مربع با آن اندازه‌ناپذیر باشد و مجموع مربعهای آن و تمامی خط راست اولیه واسط، ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها گویا باشد، باقیمانده گنگ است؛ و ما آن را خطی می‌نامیم که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورد.

1. minor

فرض می‌کنیم از خط راست AB خط راست BC کم شده است که از حیث مربع با AB اندازه‌ناپذیر است، و در شرایط داده شده صدق می‌کند. [۳۴.X]
می‌گوییم که باقیماندهٔ AC خط راست گنگ مذکور در فوق است.

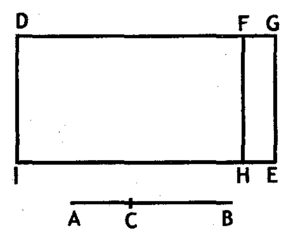
زیرا، چون مجموع مربعهای AB و BC واسط است، و دو برابر مستطیل AB و BC گویا، بنابراین مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است؛ لذا باقیمانده، مربع AC، نیز با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است. [۷.II، ۱۶.X]

و دو برابر مستطیل AB و BC گویاست؛ بنابراین مربع AC و در نتیجه خود AC گنگ است؛ و آن را خطی می‌نامیم که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۸

اگر از یک خط راست، خط راستی کم شده باشد که از حیث مربع با آن اندازه‌ناپذیر باشد، و مجموع مربعهای آن و تمامی خط راست اولیه واسط و دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط باشد، و به علاوه، مربعهای آنها با دو برابر مستطیل حاصل از آنها اندازه‌ناپذیر باشد، باقیمانده گنگ است. و آن را خطی می‌نامیم که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.



فرض می‌کنیم از خط راست AB، خط راست BC کم شده است که از حیث مربع با AB اندازه‌ناپذیر است و در شرایط داده شده صدق می‌کند. [۳۵.X]
می‌گوییم که باقیماندهٔ AC خط راستی است گنگ، خطی است که با یک مساحت واسط، یک واسط تمام پدید می‌آورد.

زیرا فرض می‌کنیم خط راست گویای DI معلوم است و DE مساوی با مربعهای AB و BC بر DI اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است، و DH مساوی با دو برابر مستطیل AB و BC را از DE کم می‌کنیم. بنابراین باقیماندهٔ FE با مربع AC مساوی است. [۷.II]
لذا AC «ضلع» EF است.

حال، چون مجموع مربعهای AB و BC واسط و با DE مساوی است، بنابراین DE واسط است.

و بر خط راست گویای DI اضافه شده و پهنای DG را پدید آورده است؛ بنابراین DG گویا و از حیث طول با DI اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

باز، چون دو برابر مستطیل AB و BC واسط و با DH مساوی است؛ بنابراین DH واسط است. و بر خط راست گویای DI اضافه شده و پهنای DF را پدید آورده است؛ بنابراین DF نیز گویا و از حیث طول با DI اندازه‌ناپذیر است. [X.۲۲]

و، چون مربعهای AB و BC با دو برابر مستطیل AB و BC اندازه‌ناپذیر است، بنابراین DE نیز با DH اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت DE به DH همچون نسبت DG به DF نیز هست. [VI.۱]

بنابراین DG با DF اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۱]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین GD و DF خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

بنابراین FG یک خط راست منفصل است. [X.۷۳]

و FH گویاست؛ اما مستطیل حاصل از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل گنگ است، [نتیجه‌گیری از X.۲۰]

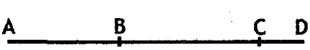
و «ضلع» آن گنگ است و AC «ضلع» FE است؛ بنابراین AC گنگ است.

و آن را خط راستی می‌نامیم که با یک مساحت واسط یک کل واسط پدید می‌آورد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷۹

به هر منفصل فقط یک خط راست گویا می‌توان افزود که با تمامی خط راست حاصل فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راستی منفصل است و BC خط راستی افزوده به آن؛ بنابراین AC و CB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [X.۷۳]

می‌گوییم که هیچ خط راست گویای دیگری نمی‌توان به AB افزود که با تمامی خط حاصل فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن است و BD با همان ویژگی افزوده شده است؛ بنابراین AD و DB نیز خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [X.۷۳]

حال، چون زیادتی مربعهای AD و DB بر دو برابر مستطیل AD و DB همان زیادتی مربعهای AC و CB بر دو برابر مستطیل AC و CB نیز هست، زیرا زیادتی هر دو یک اندازه، یعنی مربع AB است؛ [II.۷]

بنابراین، با ابدال نسبت، زیادتی مربعهای AD و DB بر مربعهای AC و CB، همان زیادتی

دو برابر مستطیل AD و DB است بر دو برابر مستطیل AC و CB. اما، مربعهای AD و DB از مربعهای AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتی دارد، زیرا هر دو گویا هستند؛ بنابراین دو برابر مستطیل AD و DB نیز از دو برابر مستطیل AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتی دارد: که غیرممکن است، زیرا هر دو واسط‌اند، [۲۱.X]
و یک مساحت واسط به اندازهٔ یک مساحت گویا از یک مساحت واسط زیادتی ندارد. [۲۶.X]

بنابراین هیچ خط راست گویای دیگری نمی‌توان به AB افزود که با تمامی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد.

لذا، فقط یک خط راست گویا ممکن است به یک منفصل افزود که با تمامی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۰

به هر منفصل اول یک خط راست واسط، فقط یک خط راست واسط می‌توان افزود که با تمامی خط راست حاصل فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد و مستطیل پدید آمده از آن و تمامی خط راست حاصل، گویا باشد.

فرض می‌کنیم AB منفصل اول یک خط راست واسط است، و فرض می‌کنیم که BC افزوده به AB است.

بنابراین AC و BC خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و مستطیل حاصل از AC و CB، گویاست. [۷۴.X]

می‌گوییم که هیچ خط راست واسط دیگری نمی‌توان به AB افزود که با تمامی خط راست حاصل، فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد و با آن یک مساحت گویا پدید آورد.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن است و DB نیز افزوده شده است؛ بنابراین AD و DB خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و مستطیل AD و DB که پدید می‌آورند، گویاست. [۷۴.X]

حال، چون زیادتی مربعهای AD و DB بر دو برابر مستطیل AD و DB همان زیادتی مربعهای AC و CB بر دو برابر مستطیل AC و CB است، زیرا یک زیادتی دارند که مربع AB است؛ [۷.II]

بنابراین زیادتی مربعهای AD و DB بر مربعهای AC و CB همان زیادتی دو برابر مستطیل AD و DB است بر دو برابر مستطیل AC و CB.

اما دو برابر مستطیل AD و DB به اندازهٔ یک مساحت گویا از دو برابر مستطیل AC و CB زیادتر است، زیرا هر دو گویا هستند.

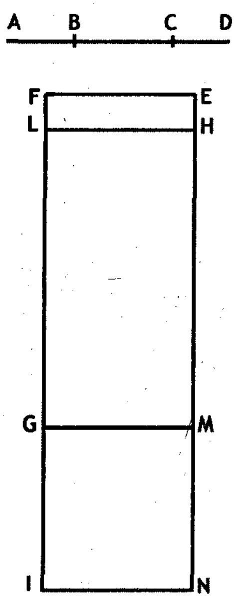
بنابراین مربعهای AD و DB نیز به اندازهٔ یک مساحت گویا از مربعهای AC و CB زیادتر است: که غیرممکن است، زیرا هر دو واسط‌اند، [۱۵.X و ۲۳، ف.]

و تفاضل یک مساحت واسط از یک مساحت واسط، یک مساحت گویا نیست. [۲۶.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۱

به هر منفصل دوم یک خط راست واسط، فقط یک خط راست واسط می‌توان افزود که با تمامی خط راست حاصل فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد و با آن یک مستطیل واسط پدید آورد.



فرض می‌کنیم AB منفصل دوم یک خط راست واسط است و BC افزوده به AB؛ بنابراین AC و CB خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و چنان‌اند که مستطیل حاصل از AC و CB واسط است. [۷۵.X]

می‌گوییم که هیچ خط راست واسط دیگری نمی‌توان به AB افزود که با تمام آن فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر باشد و با آن یک مستطیل واسط پدید آورد.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن، و BD چنین خط راستی افزوده به AB است؛ بنابراین AD و DB نیز خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند و چنان‌اند که مستطیل حاصل از AD و DB واسط است. [۷۵.X]

فرض می‌کنیم یک خط راست گویای EF معلوم است و EG مساوی با مربعهای AC و CB بر EF اضافه شده و پهنای EM را پدید آورده است، و HG مساوی با دو برابر مستطیل AC و CB از آن کم شده و پهنای HM پدید آمده است؛ بنابراین باقیماندهٔ EL با مربع AB مساوی است. [۷.II]

لذا AB «ضلع» EL است.

باز فرض می‌کنیم EI مساوی با مربعهای AD و DB بر EF اضافه شده و پهنای EN را پدید آورده است. اما EL نیز با مربع AB مساوی است؛ بنابراین بقیهٔ HI با دو برابر مستطیل AD و DB مساوی است. [۷.II]

حال، چون AC و CB خطهای راست واسط‌اند، بنابراین مربعهای AC و CB نیز واسط‌اند، و با EG مساوی؛ بنابراین EG نیز واسط است. [۱۵.X و ۲۳،ف.]

و بر خط راست گویای EF اضافه شده و پهنای EM را پدید آورده است؛ بنابراین EM گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

باز، چون مستطیل AC و CB واسط است، دو برابر مستطیل AC و CB نیز واسط است. [۲۳.X،ف.]

و با HG مساوی است؛ بنابراین HG نیز واسط است.

و بر خط راست گویای EF اضافه شده و پهنای HM را پدید آورده است؛ بنابراین HM نیز گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون AC و CB فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین AC با CB از حیث طول اندازه‌ناپذیر است.

اما، نسبت AC به CB همچون نسبت مربع AC است به مستطیل AC و CB، بنابراین مربع AC با مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

اما، مربعهای AC و CB با مربع AC اندازه‌پذیرند، و دو برابر مستطیل AC و CB با مستطیل AC و CB اندازه‌پذیر است؛ [۶.X]

بنابراین مربعهای AC و CB با دو برابر مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیرند. [۱۳.X]

و EG با مربعهای AC و CB مساوی است، و GH با دو برابر مستطیل AC و CB؛ بنابراین EG با HG اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت EG به HG همچون نسبت EM است به HM؛ [۱.VI]

بنابراین EM از حیث طول با MH اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین EM و MH خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین EH یک منفصل است و HM افزوده به آن. [۷۳.X]

به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که HN نیز افزوده به آن است؛ بنابراین، خطهای راست متفاوتی به یک خط راست منفصل افزوده شده‌اند که با تمام خط حاصل فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند: که غیرممکن است. [۷۹.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۲

به هر خط راست کهاد فقط یک خط راست می‌توان افزود که با تمامی خط راست حاصل از

حیث مربع اندازه‌ناپذیر، و مجموع مربعهای آن و خط راست حاصل، گویا، ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط باشد.

فرض می‌کنیم AB خط راستی است کهاد، و BC افزوده به آن؛ بنابراین AC و CB خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها گویا هستند، ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط است. [۷۶.X]

می‌گوییم که هیچ خط راست دیگری نمی‌توان به AB افزود که در شرایط فوق‌الذکر صدق کند.

زیرا، فرض می‌کنیم بتوان چنین کرد و BD خط راست افزوده است؛ بنابراین AD و DB نیز خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که در شرایط مذکور در فوق صدق می‌کنند.[۷۶.X]

حال، چون زیادتی مربعهای AD و DB بر مربعهای AC و CB همچون زیادتی دو برابر مستطیل AD و DB است بر دو برابر مستطیل AC و CB، و مربعهای AD و DB از مربعهای AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتر است، چون هر دو گویا هستند، بنابراین دو برابر مستطیل AD و DB نیز به اندازهٔ یک مساحت گویا از دو برابر مستطیل AC و CB زیادتر است: که غیرممکن است، زیرا هر دو واسط‌اند. [۲۶.X]

بنابراین به هر خط راست کهاد فقط یک خط راست می‌توان افزود که از حیث مربع با تمام خط راست حاصل اندازه‌ناپذیر باشد و مجموع مربعهای آنها گویا، ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۳

به هر خط راست که با یک مساحت گویا یک خط راست کل واسط پدید آورد، فقط یک خط راست می‌توان افزود که از حیث مربع با تمامی خط راست حاصل اندازه‌ناپذیر، و مجموع مربعهای آن و تمامی خط راست حاصل واسط، ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها گویا باشد.

فرض می‌کنیم AB خط راستی است که با یک مساحت گویا، یک خط راست کل واسط پدید آورده است و BC به AB افزوده شده است، بنابراین AC و CB خطهای راستی از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند که در شرایط داده شده صدق می‌کنند. [۷۷.X]

می‌گوییم که هیچ خط راست دیگری نمی‌توان به AB افزود که در همان شرایط صدق کند.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن است و BD هم به AB افزوده شده است؛ بنابراین AD و DB نیز خطهای راست اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که در شرایط داده شده صدق می‌کنند. [X.۷۷]

پس، در این صورت، مانند حالتهای قبل، زیادتی مربعهای AD و DB بر مربعهای AC و CB همان زیادتی دو برابر مستطیل AD و DB است بر دو برابر مستطیل AC و CB، و دو برابر مستطیل AD و DB از دو برابر مستطیل AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتر است، زیرا هر دو گویا هستند؛ بنابراین مربعهای AD و DB نیز از مربعهای AC و CB به اندازهٔ یک مساحت گویا زیادتر است: که غیرممکن است، زیرا هر دو واسط‌اند. [X.۲۶]

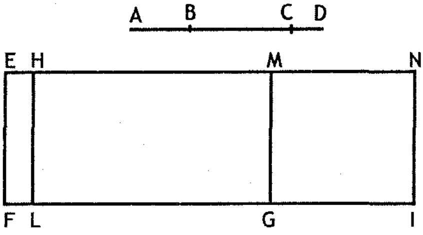
بنابراین هیچ خط راست دیگری نمی‌توان به AB افزود که از حیث مربع با تمامی خط راست حاصل اندازه‌ناپذیر باشد و تماماً در شرایط مذکور در فوق صدق کند؛ بنابراین فقط یک خط راست با خصوصیات فوق می‌توان افزود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۴

به هر خط راستی که با یک مساحت واسط یک کل واسط پدید آورد، فقط یک خط راست می‌توان افزود که از حیث مربع با تمامی خط راست حاصل اندازه‌ناپذیر باشد و مجموع مربعهای آن و خط راست حاصل واسط باشد و دو برابر مستطیل حاصل از آنها، هم واسط باشد و هم با مجموع مربعهای آنها اندازه‌ناپذیر.

فرض می‌کنیم AB خط راستی است که با یک مساحت واسط یک کل واسط تشکیل داده و BC افزوده‌ای به آن است؛ بنابراین AC و CB خطهای راستی هستند از حیث مربع اندازه‌ناپذیر که در شرایط فوق‌الذکر صدق می‌کنند. [X.۷۸]



می‌گوییم که هیچ خط راست دیگری نمی‌توان به AB افزود که در شرایط مذکور در فوق صدق کند. زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن است و خط راست دیگری مانند BD هم به آن افزوده شده است، در نتیجه AD و DB نیز خطهای راستی هستند از حیث مربع اندازه‌ناپذیر که مجموع مربعهای AD و DB واسط، دو برابر مستطیل AD و DB واسط، و نیز مربعهای AD و DB با دو برابر مستطیل AD و DB اندازه‌ناپذیر است. [X.۷۸]

فرض می‌کنیم خط راست گویای EF معلوم است، و فرض می‌کنیم EG مساوی با مربعهای AC و CB بر EF اضافه شده است و پهنای EM را پدید آورده است. و فرض می‌کنیم HG مساوی با دو برابر مستطیل AC و CB بر EF اضافه شده و پهنای HM را پدید آورده است.

بنابراین، بقیه، مربع AB، [۷.II]

مساوی است با EL؛ بنابراین AB «ضلع» EL است.

باز، فرض می‌کنیم EI مساوی با مربعهای AD و DB بر EF اضافه شده و پهنای EN را پدید آورده است.

اما مربع AB نیز با EL مساوی است؛ بنابراین بقیه، دو برابر مستطیل AD و DB، [۷.II] با HI مساوی است. حال، چون مجموع مربعهای AC و CB واسط و با EG مساوی است، بنابراین EG نیز واسط است. و، بر خط راست گویای EF اضافه شده، و پهنای EM را پدید آورده است؛ بنابراین EM گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

باز، چون دو برابر مستطیل AC و CB واسط و با HG مساوی است، بنابراین HG نیز واسط است. و بر خط راست گویای EF اضافه شده و پهنای HM را پدید آورده است؛ بنابراین HM گویا و از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [۲۲ .X]

و، چون مربعهای AC و CB با دو برابر مستطیل AC و CB اندازه‌ناپذیر است، EG نیز با HG اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین EM نیز از حیث طول با HM اندازه‌ناپذیر است. [۱.VI، ۱۱.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین EM و MH خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین EH خط راستی منفصل است و HM افزوده به آن. [۷۳ .X]

به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که باز EH خط راستی منفصل است و HN افزوده به آن.

بنابراین به یک خط راست منفصل خطهای راست گویای متفاوتی افزوده شده‌اند که با تمامی خط راست حاصل فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند: که ثابت شده بود نامکن است. [X. ۷۹]

بنابراین هیچ خط راست دیگری نمی‌توان به AB افزود.

بنابراین به AB فقط یک خط راست می‌توان افزود که از حیث مربع با تمام خط راست حاصل اندازه‌ناپذیر باشد و مجموع مربعهای آن و خط راست حاصل واسط باشد و دو برابر مستطیل حاصل از آنها، هم واسط باشد و هم با مجموع مربعهای آنها اندازه‌ناپذیر.

آنچه می‌خواستیم.

تعاریف III

۱. یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل داده شده‌اند، اگر مربع تمامی این دو، از مربع خط راست افزوده،به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با تمامی، بزرگتر

باشد و تمامی خط راست حاصل از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، این منفصل رامنفصل اول می‌نامیم.

۲. اما اگر خط راست افزوده از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد و مربع تمامی از مربع افزوده به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با تمامی، بزرگتر باشد، منفصل را منفصل دوم می‌نامیم.

۳. اما اگر نه تمامی خط از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد و نه خط راست افزوده، مربع تمامی از مربع افزوده به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با تمامی، بزرگتر باشد، منفصل را منفصل سوم می‌گوییم.

۴. باز، اگر مربع تمامی از مربع خط راست افزوده به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با تمامی، بزرگتر باشد، آنگاه اگر تمامی از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، منفصل را منفصل چهارم می‌نامیم.

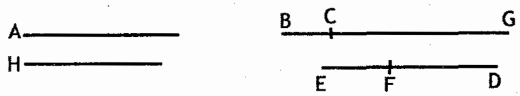
۵. اگر افزوده اندازه‌پذیر باشد، منفصل را منفصل پنجم می‌نامیم.

۶. و اگر نباشد، آن را منفصل ششم می‌نامیم.

قضیهٔ ۸۵

مطلوب یافتن خط راستی است که منفصل اول باشد.

فرض می‌کنیم یک خط راست گویای A معلوم است؛ و فرض می‌کنیم BG از حیث طول با A اندازه‌پذیر است. بنابراین BG نیز گویاست.



فرض می‌کنیم دو عدد مربع DE و EF معلوم‌اند، و تفاضل آنها، FD، مربع نیست. بنابراین نسبت ED به DF همچون یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

حال فرض می‌کنیم ترتیبی داده شده است که نسبت ED به DF همچون نسبت مربع BG است به مربع GC؛ [X.۶، ف.]

بنابراین مربع BG با مربع GC اندازه‌پذیر است. [X.۶]

اما مربع BG گویاست، لذا مربع GC و در نتیجه خود GC نیز گویاست. و، چون نسبت ED به DF همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع BG به مربع GC هم مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ لذا BG از حیث طول با GC اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و، هر دوگویا هستند؛ بنابراین BG و GC خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ پس BC خط راستی منفصل است. [۷۳.X]

حال می‌گوییم که منفصل اول نیز هست.

زیرا، فرض می‌کنیم مربع H مربعی است که به اندازهٔ آن مربع BG از مربع GC بزرگتر است. اما، چون نسبت ED به FD مثل نسبت مربع BG است به مربع GC، لذا پس از تفضیل نسبت در مخرج، [۱۹.V،ف.]

نسبت DE به EF مثل نسبت مربع GB است به مربع H.

اما نسبت DE به EF همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع، زیرا هرکدام یک عدد مربع است؛ بنابراین نسبت مربع GB نیز به مربع H مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ لذا BG از حیث طول با H اندازه‌پذیر است. [۹.X]

و مربع BG به اندازهٔ مربع H از مربع GC بزرگتر است، بنابراین مربع BG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از **حیث طول با** BG از مربع GC بزرگتر است. و تمامی BG از حیث طول با خط راست **گویای معلوم** A اندازه‌پذیر است.

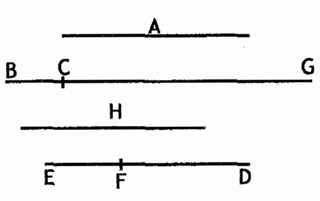
بنابراین BC یک خط راست منفصل اول است. [۱.III.تعه.X]

پس، چنانکه می‌خواستیم، خط راستی که منفصل اول باشد، BC، پیداشده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۶

مطلوب پیدا کردن خط راستی است که منفصل دوم باشد.



فرض می‌کنیم خط راست گویای A معلوم است، و GC از حیث طول با A اندازه‌پذیر و بنابراین GC گویاست.

فرض می‌کنیم دو عدد مربع DE و EF معلوم‌اند، و تفاضل آنها مربع نیست.

حال فرض می‌کنیم GB چنان اختیار شده است که نسبت FD به DE مثل مربع CG است به مربع GB. [۶.X،ف.]

بنابراین مربع CG با مربع GB اندازه‌پذیر است. [۶.X]

اما مربع CG گویاست؛ بنابراین مربع GB، و در نتیجه خود BG نیزگویاست و، چون نسبت مربع GC به مربع GB مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، CG از حیث طول با GB اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین CG و GB خطهای راست گویایی فقط از لحاظ مربع اندازه‌پذیرند؛ پس BC منفصل است. [۷۳.X]

حال می‌گوییم منفصل دوم نیز هست.

زیرا، فرض می‌کنیم مربع H مربعی است که مربع BG به اندازهٔ آن از مربع GC بزرگتر است. پس، چون نسبت مربع BG به مربع GC مثل عدد ED است به عدد DF، بنابراین از تفضیل نسبت در مخرج خواهیم داشت که نسبت مربع BG به مربع H، مثل DE است به EF. [۱۹.V،ف.]

و هر یک از اعداد DE و EF مربع است؛ بنابراین نسبت مربع BG به مربع H مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ بنابراین BG از حیث طول با H اندازه‌پذیر است.[۹.X]

و مربع BG از مربع GC به اندازهٔ مربع H، بزرگتر است. بنابراین مربع BG از مربع GC به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با BG بزرگتر است. و CG، خط راست افزوده، با خط راست گویای معلوم A اندازه‌پذیر است.

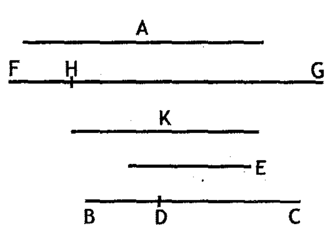
پس، BC منفصل دوم است. [X.تعر.III.۲]

بنابراین خط راستی که منفصل دوم باشد، BC، پیدا شده است.

آنچه که می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۷

مطلوب پیدا کردن خط راستی است که منفصل سوم باشد.



فرض می‌کنیم یک خط راست گویای A معلوم است و فرض می‌کنیم سه عدد E و BC و CD معلوم‌اند که نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، ولی نسبت CB به BD مانند نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع.

فرض می‌کنیم خط راست FG چنان انتخاب شده است که نسبت E به BC همچون نسبت مربع A است به مربع FG، و نسبت BC به CD همچون نسبت مربع FG است به مربع GH. [X.۶،ف.]

پس، چون نسبت E به BC همچون نسبت مربع A است به مربع FG؛ بنابراین مربع A با مربع FG اندازه‌پذیر است. [۶.X]

اما مربع A گویاست؛ بنابراین مربع FG نیز گویاست؛ پس FG گویاست. و، چون نسبت E به BC همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع A به مربع FG نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، پس A از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

باز، چون نسبت BC به CD مثل مربع FG است به مربع GH، بنابراین مربع FG با مربع GH اندازه‌پذیر است. [X.۶]

اما مربع FG گویاست، بنابراین مربع GH نیز گویاست؛ پس GH گویاست. و، چون نسبت BC به CD همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع FG به مربع GH نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. بنابراین FG از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و، هر دو گویا هستند؛ بنابراین FG و GH خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ پس، FH خط راستی منفصل است. [X.۷۳]

حال می‌گوییم که منفصل سوم نیز هست.

زیرا، چون نسبت E به BC همچون نسبت مربع A است به مربع FG، و نسبت BC به CD همچون نسبت مربع FG است به مربع HG، بنابراین، به موجب نسبت مساوات هموار، نسبت E به CD همچون نسبت مربع A است به مربع HG. [V.۲۲]

اما نسبت E به CD همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع A به مربع GH نیز همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. پس A از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

بنابراین خطهای راست FG و GH نیز از حیث طول با خط راست گویای معلوم A اندازه‌پذیر نیستند.

حال فرض می‌کنیم مربع K مربعی باشد که مربع FG، به اندازهٔ آن از مربع GH بزرگتر است. پس، چون نسبت BC به CD همچون نسبت مربع FG است به مربع GH؛ بنابراین از تفضیل نسبت در مخارج داریم، نسبت BC به BD همچون نسبت مربع FG است به مربع K. [V.۱۹، ف.]

اما، نسبت BC به BD همچون نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع؛ بنابراین نسبت مربع FG به مربع K هم مثل نسبت یک عدد مربع است به یک عدد مربع.

پس، FG از حیث طول با K اندازه‌پذیر است، [X.۹]

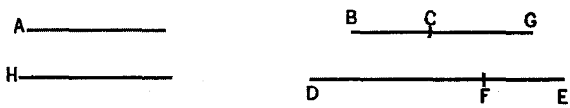
و مربع FG از مربع GH، به اندازهٔ مربع یک خط راست اندازه‌پذیر با FG، بزرگتر است؛ و،

خطهای راست FG و GH هم از حیث طول با خط راست گویای معلوم A اندازه‌پذیر نیستند؛ بنابراین FH منفصل سوم است. [X.تعء.III.۳]
لذا خط راستی که منفصل سوم باشد پیدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۸

مطلوب یافتن خط راستی است که منفصل چهارم باشد.



فرض می‌کنیم خط راست گویای A معلوم است، و BG از حیث طول با آن اندازه‌پذیر؛ بنابراین BG نیز گویاست.

فرض می‌کنیم دو عدد DF و FE معلوم‌اند به طوری که نسبت تمامی DE به هیچ‌یک از اعداد DF و EF نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم ترتیبی اتخاذ شده است که نسبت DE به EF مثل نسبت مربع BG است به مربع GC. [X.۶،ف.]

بنابراین مربع BG با مربع GC اندازه‌پذیر است. [X.۶]

اما مربع BG گویاست؛ بنابراین مربع GC و در نتیجه خود GC نیز گویاست. حال، چون نسبت DE به EF مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع BG به مربع GC نیز نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. لذا BG از حیث طول با GC اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین BG و GC خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین BC یک مُنفصل است. [X.۷۳]

حال، فرض می‌کنیم مربع H مربعی است که مربع BG به اندازهٔ آن از مربع GC، بزرگتر است.

پس، چون نسبت DE به EF همچون نسبت مربع BG است به مربع GC، بنابراین، از تفضیل نسبت در مخارج نیز خواهیم داشت نسبت ED به DF مثل نسبت مربع GB است به مربع H. [V.۱۹،ف.]

اما نسبت ED به DF نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع GB به مربع H نیز نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. بنابراین BG از حیث طول با H اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و مربع BG به اندازهٔ مربع H از مربع GC، بزرگتر است؛ بنابراین مربع BG از مربع GC به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BG، بزرگتر است.

و تمامی BG از حیث طول با خط راست گویای معلوم A اندازه‌پذیر است.

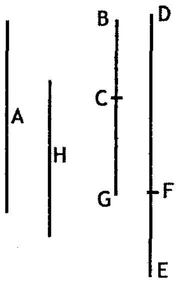
بنابراین BC یک منفصل چهارم است. [X.تعء.III.۴]

پس منفصل چهارم پیدا شد.

آنچه که می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸۹

مطلوب پیدا کردن منفصل پنجم است.



فرض می‌کنیم خط راست گویای A معلوم است و CG از حیث طول با A اندازه‌پذیر. بنابراین CG گویاست.

فرض می‌کنیم دو عدد DF و FE معلوم‌اند به طوری که باز نسبت DE به هیچ‌یک از اعداد DF و FE نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ و فرض می‌کنیم ترتیبی اتخاذ شده است که نسبت FE به ED همچون نسبت مربع CG است به مربع GB.

بنابراین مربع GB نیز گویاست، [X.۶]

پس BG نیز گویاست. حال، چون نسبت DE به EF همچون نسبت مربع BG است به مربع GC، و نسبت DE به EF نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع BG به مربع GC هم نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. پس BG با GC از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین BG و GC خطهای راستی گویا، و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ پس BC منفصل است. [X.۷۳]

اکنون می‌گوییم که منفصل پنجم نیز هست.

زیرا، فرض می‌کنیم مربع H مربعی است که مربع BG به اندازهٔ آن از مربع GC بزرگتر است. پس، چون نسبت مربع BG به مربع GC همچون نسبت DE است به EF، بنابراین، از تفضیل نسبت در مخرج، داریم که نسبت ED به DF همچون نسبت مربع BG است به مربع H.[V.۱۹،ف.]

اما، نسبت ED به DF نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع BG به مربع H نیز نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. پس BG از حیث طول با H اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و، مربع BG از مربع GC به اندازهٔ مربع H بزرگتر است؛ بنابراین مربع GB از مربع GC به

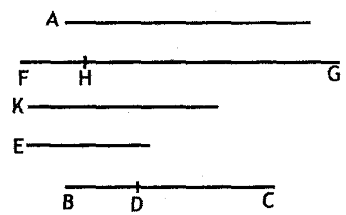
اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با GB، بزرگتر است، و افزودهٔ CG از حیث طول با خط راست گویای معلوم A اندازه‌پذیر است؛ بنابراین BC منفصل پنجم است. [X.تعر.III.۵]

در نتیجه خط راستی که منفصل پنجم باشد پیداشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۰

مطلوب پیدا کردن یک خط راست منفصل ششم است.



فرض می‌کنیم خط راست گویای A معلوم است، و سه عدد E و BC و CD داده شده‌اند به طوری که نسبت آنهابه یکدیگر نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ و به علاوه فرض می‌کنیم که نسبت CB به BD نیز نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست.

فرض می‌کنیم ترتیبی اتخاذ شده است که نسبت E به BC همچون نسبت مربع A است به مربع FG، و نسبت BC به CD نیز همچون نسبت مربع FG است به مربع GH. [X.۶،ف.]

حال، چون نسبت E به BC همچون نسبت مربع A است به مربع FG، بنابراین مربع A با مربع FG اندازه‌پذیر است. [X.۶]

اما مربع A گویاست. بنابراین مربع FG نیز گویاست، پس FG نیز گویاست.

و چون نسبت E به BC نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، لذا نسبت مربع A به مربع FG هم نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست. پس A از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

باز، چون نسبت BC به CD همچون نسبت مربع FG است به مربع GH، پس مربع FG با مربع GH اندازه‌پذیر است. [X.۶]

اما مربع FG گویاست؛ بنابراین مربع GH، و در نتیجه خود GH نیز گویاست. و چون نسبت BC به CD مثل نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع FG به مربع GH نیز نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ پس FG از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است. [X.۹]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین FG و GH خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین FH خط راستی منفصل است. [X.۷۳]

حال، می‌گوییم که منفصل ششم نیز هست.

زیرا، چون نسبت E به BC همچون نسبت مربع A است به مربع FG، و چون نسبت

BC به CD همچون نسبت مربع FG است به مربع GH، بنابراین، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت E به CD همچون نسبت مربع A است به مربع GH. [۲۲.V]

اما نسبت E به CD، نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین نسبت مربع A به مربع GH نیز، نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین A از حیث طول با GH اندازه‌ناپذیر است؛ [۹.X]

بنابراین هیچ یک از خطهای راست FG و GH با خط راست گویای A از حیث طول اندازه‌پذیر نیست.

حال فرض می‌کنیم مربع K مربعی است که مربع FG به اندازهٔ آن از مربع GH، بزرگتر است.

پس، چون نسبت BC به CD همچون نسبت مربع FG است به مربع GH، بنابراین از تفضیل نسبت درمخرج خواهیم داشت نسبت CB به BD همچون نسبت مربع FG است به مربع K. [۱۹.V، ف.]

اما نسبت CB به BD، نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین نسبت مربع FG به مربع K هم، نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین FG با K از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

و مربع FG از مربع GH به اندازهٔ مربع K، بزرگتر است؛ بنابراین مربع FG از مربع GH به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با FG بزرگتر است. و هیچ یک از خطهای راست FG و GH با خط راست گویای معلوم A اندازه‌پذیر نیست.

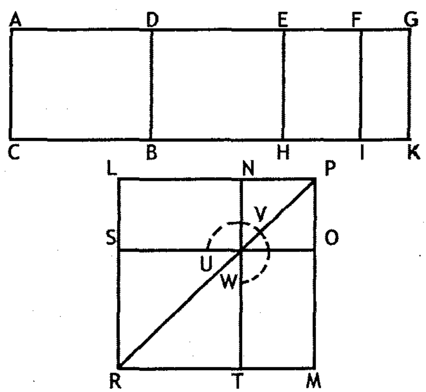
بنابراین FH منفصل ششم است. [X.تعع.III.۶]

لذا خط راستی که منفصل ششم باشد، پیدا شد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۱

اگر مساحتی حاصل از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل اول باشد، «ضلع» این مساحت منفصل است.



فرض می‌کنیم مساحت AB از خط راست گویای AC و خط راست منفصل اول AD حاصل شده است؛ می‌گوییم که «ضلع» مساحت AB منفصل است.

زیرا، چون AD منفصل اول است، فرض می‌کنیم DG افزودهٔ آن است؛ بنابراین AG و GD خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۷۳.X]

و تمامی AG با خط راست گویای معلوم AC اندازه‌پذیر است، و مربع AG از مربع GD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با AG، بزرگتر است؛ [X.تعر.III.۱]

پس اگر متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع DG و باکاستی یک شکل مربعی بر AG اضافه شود، این عمل آن را به اجزائی اندازه‌پذیر تقسیم می‌کند. [X.۱۷]

فرض می‌کنیم E وسط DG است، بر AG متوازی‌الاضلاعی اضافه می‌کنیم که با مربع EG برابر است و به اندازهٔ یک شکل مربعی کاستی دارد، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع، مستطیل AF و FG است؛ بنابراین AF با FG اندازه‌پذیر است.

و از نقاط E و F و G خطهای راست EH و FI و GK را موازی با AC رسم می‌کنیم.

حال چون AF با FG از حیث طول اندازه‌پذیر است، بنابراین AG نیز با هر یک از خطهای راست AF و FG از حیث طول اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]

اما AG با AC اندازه‌پذیر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست AF و FG از حیث طول با AC اندازه‌پذیر است. [X.۱۲]

و AC گویاست؛ بنابراین هر یک از خطهای راست AF و FG نیز گویاست. لذا هر یک از مستطیلهای AI و FK نیز گویاست. [X.۱۹]

حال، چون DE از حیث طول با EG اندازه‌پذیر است، بنابراین DG نیز از حیث طول با هر یک از خطهای راست DE و EG اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]

اما DG گویا از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست DE و EG نیز گویا و از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیر است؛ [X.۱۳]

بنابراین هر یک از مستطیلهای DH و EK واسط است. [X.۲۱]

حال فرض می‌کنیم مربع LM مساوی با AI رسم شده است، و مربع NO که در زاویهٔ LPM با آن مشترک و مساوی با FK است از آن کم شده است. بنابراین مربعهای LM و NO در حول یک قطرند. [VI.۲۶]

فرض می‌کنیم PR قطر این مربعهاست و شکل رسم شده است؛ پس، چون مستطیل حاصل از AF و FG با مربع EG مساوی است، بنابراین نسبت AF به EG همچون EG است به FG. [VI.۱۷]

اما نسبت AF به EG همچون نسبت AI است به EK، و نسبت EG به FG همچون نسبت EK است به KF؛ [VI.۱]

بنابراین EK واسطهٔ هندسی بین AI و KF است. [V.۱۱]

اما MN نیز واسطهٔ هندسی بین LM و NO است ــ چنانکه قبلاً ثابت شده است. [لم پس از X.۵۳]

و AI با مربع LM مساوی است و KF با NO؛ بنابراین MN نیز با EK مساوی است.

اما EK با DH مساوی است، و MN با LO؛ بنابراین DK با گونیای UVW و NO مساوی است؛ اما AK نیز با مربعهای LM و NO مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ AB با ST مساوی است.

اما ST مربع LN است؛ بنابراین مربع LN با AB مساوی است؛ پس LN «ضلع» AB است.

حال می‌گوییم که LN منفصل است. زیرا، چون مستطیلهای AI و FK گویا هستند و به ترتیب با LM و NO مساوی‌اند، بنابراین هر یک از مربعهای LM و NO، یعنی مربعهای LP و PN به ترتیب نیز گویاست؛ بنابراین هر یک از خطهای راست LP و PN نیز گویاست.

باز، چون DH واسط و با LO مساوی است؛ بنابراین LO نیز واسط است. پس، چون LO واسط است و NO گویا، بنابراین LO با NO اندازه‌ناپذیر است. اما نسبت LO به NO همچون نسبت LP است به PN؛ [۱.VI]

بنابراین LP با PN از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند، بنابراین LP و PN خطهای راستی گویا فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

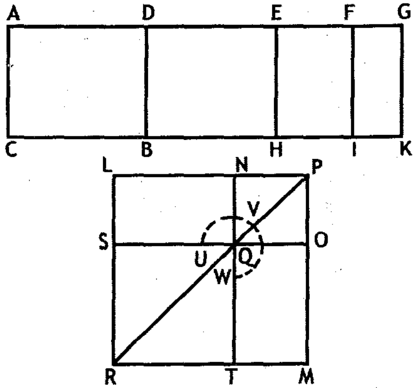
بنابراین LN منفصل است. [۷۳.X]

و «ضلع» مساحت AB است؛ بنابراین «ضلع» مساحت AB منفصل است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۲

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل دوم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت منفصل اول یک خط راست واسط است.



فرض می‌کنیم مساحت AB از یک خط راست گویای AC و یک خط راست منفصل دوم AD حاصل شده است، می‌گوییم که «ضلع» مساحت AB منفصل اول یک خط راست واسط است.

زیرا فرض می‌کنیم DG افزوده به AD است؛ بنابراین AG و GD خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، [۷۳.X]

و افزودهٔ DG با خط راست گویای معلوم AC اندازه‌پذیر است، و مربع تمامی AG از مربع افزودهٔ GD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با AG، بزرگتر است.[X.تعه.III.۲]

در این صورت چون مربع AG از مربع GD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AG، بزرگتر است؛ بنابراین، اگر بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع GD و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه شود، این عمل AG را به اجزائی اندازه‌پذیر تقسیم می‌کند. [۱۷.X]

در این صورت فرض می‌کنیم E وسط DG است و بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با مربع EG و با کاستی یک شکل مربعی اضافه شده است، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل AF و FG است؛ بنابراین AF با FG از حیث طول اندازه‌پذیر است. بنابراین AG نیز از حیث طول با هر یک از خطهای راست AF و FG اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

اما AG گویا و با AC از حیث طول اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست AF و FG نیز گویا و با AC از حیث طول اندازه‌ناپذیر است؛ [۱۳.X]

بنابراین هر یک از مستطیلهای AI و FK واسط است. [۲۱.X]

باز، چون DE با EG اندازه‌پذیر است، لذا DG نیز با هر یک از خطهای راست DE و EG اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

اما DG با AC از حیث طول اندازه‌پذیر است.

بنابراین هر یک از مستطیلهای DH و EK گویاست. [۱۹.X]

پس، فرض می‌کنیم مربع LM مساوی با AI رسم شده است و مربع NO که با FK مساوی و با LM در یک زاویهٔ LPM مشترک است از آن کم شده است. بنابراین مربعهای LM و NO حول یک قطرند. [۲۶.VI]

فرض می‌کنیم PR قطر آنهاست، و شکل رسم شده است. پس چون AI و FK واسط‌اند و با مربعهای LP و PN مساوی، مربعهای LP و PN نیز واسط‌اند؛ بنابراین LP و PN نیز خطهای راست واسط و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

و، چون مستطیل AF و FG با مربع EG مساوی است، بنابراین، نسبت AF به EG همچون نسبت EG است به FG، [۱۷.VI]

و نسبت AF به EG، همچون نسبت AI است به EK، و نسبت EG به FG همچون نسبت EK است به FK؛ [۱.VI]

بنابراین EK واسطهٔ هندسی بین AI و FK است. [۱۱.V]

اما MN نیز واسطهٔ هندسی بین مربعهای LM و NO است، و AI با LM مساوی است، و FK با NO؛ بنابراین MN نیز با EK مساوی است. اما DH با EK مساوی است و LO با MN؛ بنابراین تمامی DK با گونیای UVW و NO مساوی است.

در این صورت، چون تمامی AK با LM و NO مساوی است، و در این تساویها DK با گونیای UVW و NO مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ AB با TS مساوی است.

اما TS همان مربع LN است؛ بنابراین مربع LN با مساحت AB مساوی است؛ بنابراین LN «ضلع» مساحت AB است.

می‌گوییم که LN منفصل اول یک خط واسط است.

زیرا، چون EK گویا و با LO مساوی است، بنابراین LO، یعنی مستطیل LP و PN گویاست.

اما ثابت شده بود که NO واسط است؛ بنابراین LO با NO اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت LO به NO همچون نسبت LP است به PN؛ [۱.VI]

بنابراین LP و PN از حیث طول اندازه‌ناپذیرند. [۱۱.X]

لذا LP و PN خطهای راست واسطی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، که یک مستطیل گویا پدید آورده‌اند؛ بنابراین LN منفصل اول یک خط راست واسط، [۷۴.X]

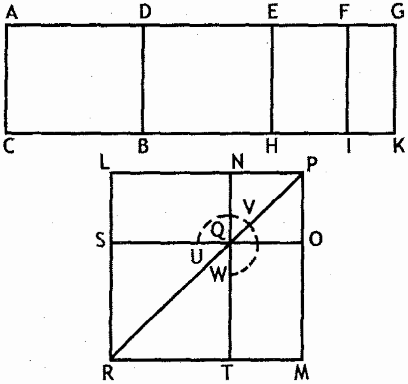
و «ضلع» مساحت AB است.

بنابراین «ضلع» مساحت AB منفصل اول یک خط راست واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۳

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل سوم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت منفصل دوم یک خط راست واسط است.



فرض می‌کنیم مساحت AB از خط راست گویای AC و خط راست منفصل سوم AD حاصل شده است.

می‌گوییم «ضلع» مساحت AB منفصل دوم یک خط راست واسط است.

زیرا فرض می‌کنیم DG افزوده به AD است؛ بنابراین AG و GD خطهای راست گویائی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، و هیچ یک از خطهای راستAG و GD از حیث طول با خط راست گویای معلوم AC اندازه‌پذیر نیست، و مربع

تمامی AG از مربع افزودهٔ DG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AG، بزرگتر است. [X.تعه.III.۳]

در این صورت، چون مربع AG از مربع GD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AG، بزرگتر است، بنابراین اگر بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع DG و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه کنیم، این شکل AG را به اجزائی اندازه‌پذیر تقسیم می‌کند. [X.۱۷]

پس فرض می‌کنیم E وسط DG باشد، بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با مربع EG و با کاستی یک شکل مربعی اضافه، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل AF و FG باشد.

فرض می‌کنیم EH و FI و GK را از نقاط E و F و G موازی با AC رسم کرده‌ایم.

بنابراین AF و FG اندازه‌پذیرند؛ لذا AI نیز با FK اندازه‌پذیر است. [VI.۱، X.۱۱]

و چون AF و FG از حیث طول اندازه‌پذیرند، بنابراین AG نیز از حیث طول با هر یک از خطهای راست AF و FG اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]

اما AG گویا و از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیر است؛ لذا AF و FG نیز از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیرند. [X.۱۳]

بنابراین هر یک از مستطیلهای AI و FK واسط است. [X.۲۱]

باز، چون DE با EG از حیث طول اندازه‌پذیر است، بنابراین DG نیز از حیث طول با هر یک از خطهای راست DE و EG اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]

اما GD گویا و از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست DE و EG نیز گویا و از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]

بنابراین هر یک از مستطیلهای DH و EK واسط است. [X.۲۱]

و، چون AG و GD فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین AG از حیث طول با GD اندازه‌ناپذیر است. اما AG از حیث طول با AF اندازه‌پذیر است و DG با EG؛ بنابراین AF از حیث طول با EG اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]

اما نسبت AF به EG همچون نسبت AI است به EK؛ [VI.۱]

بنابراین AI با EK اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۱]

حال، فرض می‌کنیم مربع LM مساوی با AI رسم شده است، و NO مساوی با FK و با یک زاویهٔ مشترک با LM، از آن کم شده است، بنابراین LM و NO در حول یک قطرند. [VI.۲۶]

فرض می‌کنیم PR قطر آنهاست و شکل رسم شده است.

حال، چون مستطیل AF و FG با مربع EG مساوی است، بنابراین نسبت AF به EG همچون نسبت EG است به FG. [VI.۱۷]

اما نسبت AF به EG همچون نسبت AI است به EK، و نسبت EG به FG مثل نسبت EK است به FK؛ [۱.VI]

بنابراین نسبت AI به EK نیز مثل نسبت EK است به FK. [۱۱.V]

بنابراین EK واسطهٔ هندسی بین AI و FK است.

اما MN نیز واسطهٔ هندسی بین مربعهای LM و NO است، و AI با LM مساوی است، و FK با NO؛ بنابراین EK نیز با MN مساوی است. اما MN با LO مساوی است و EK با DH؛ بنابراین تمامی DK نیز با گونیای UVW و NO مساوی است. اما AK نیز با LM و NO مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ AB با TS، یعنی با مربع LN مساوی است؛ بنابراین LN «ضلع» مساحت AB است.

می‌گوییم که LN منفصل دوم یک خط راست واسط است.

زیرا، چون ثابت شده بود AI و FK واسط‌اند و با مربعهای LP و PN مساوی، بنابراین هر یک از مربعهای LP و PN نیز واسط است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست LP و PN واسط است. و، چون AI با FK اندازه‌پذیر است، [۱۱.X ،۱.VI]

بنابراین مربع LP نیز با مربع PN اندازه‌پذیر است.

باز، چون ثابت شده بود AI با EK اندازه‌ناپذیر است، بنابراین LM نیز با MN، یعنی مربع LP با مستطیل LP و PN اندازه‌ناپذیر است. لذا LP نیز با PN از حیث طول اندازه‌ناپذیر است؛ [۱۱.X ،۱.VI]

بنابراین LP و PN خطهای راست واسط و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند.

حال، می‌گوییم که یک مستطیل واسط نیز پدید می‌آورند؛ زیرا، چون ثابت شده بود که EK واسط است و با مستطیل LP و PN مساوی، بنابراین مستطیل LP و PN نیز واسط است؛ لذا LP و PN خطهای راست واسط و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند که یک مستطیل واسط پدید آورده‌اند، بنابراین LN منفصل دوم یک خط راست واسط است؛ [۷۵.X]

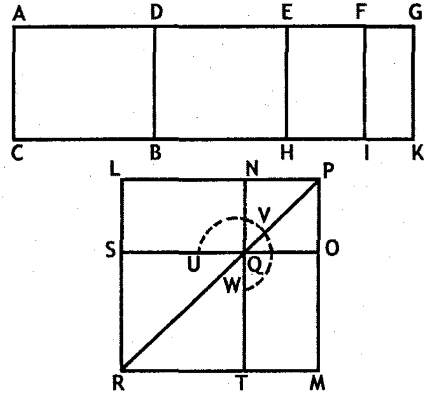
و «ضلع» مساحت AB است.

بنابراین «ضلع» مساحت AB منفصل دوم یک خط راست واسط است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۴

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل چهارم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت کهاد است.



فرض می‌کنیم مساحت AB از یک خط راست گویای AC و یک خط راست منفصل چهارم AD حاصل شده است. می‌گوییم که «ضلع» مساحت AB کهاد است.

زیرا فرض می‌کنیم DG افزوده به AD است؛ بنابراین AG و GD خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، AG از حیث طول با خط راست گویای معلوم AC اندازه‌پذیر است، و مربع تمامی AG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با AG، از مربع افزودهٔ DG بزرگتر است؛ [X.تعر.III.۴]

پس، از آنجا که مربع AG از مربع GD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با AG، بزرگتر است، بنابراین اگر بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع DG و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه کنیم، این عمل آن را به اجزای اندازه‌ناپذیر تقسیم می‌کند. [X.۱۸]

پس فرض می‌کنیم E وسط DG است، بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با مربع EG و با کاستی یک شکل مربعی اضافه، و فرض کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل AF و FG است؛ بنابراین AF با FG از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. خطهای راست EH و FI و GK را از نقاط E و F و G موازی با AC یا BD رسم می‌کنیم. پس، چون AG گویا و با AC از حیث طول اندازه‌پذیر است، بنابراین تمامی AK گویاست. [X.۱۹]

باز، چون DG از حیث طول با AC اندازه‌ناپذیر است، و هر دو گویا هستند، بنابراین DK واسط است. [X.۲۱]

باز، چون AF با FG از حیث طول اندازه‌ناپذیر است، لذا AI نیز با FK اندازه‌ناپذیر است. [VI.۱، X.۱۱]

حال، فرض می‌کنیم مربع LM مساوی با AI رسم شده است، و فرض می‌کنیم مربع NO مساوی با FK و مشترک در زاویهٔ LPM را، از آن کم کرده‌ایم. بنابراین مربعهای LM و NO حول یک قطرند. [VI.۲۶]

فرض می‌کنیم PR قطر آنهاست و شکل را رسم کرده‌ایم. لذا، چون مستطیل AF و FG با مربع EG مساوی است، بنابراین به صورت تناسب، نسبت AF به EG همچون نسبت EG است به FG. [VI.۱۷]

ولی نسبت AF به EG همچون نسبت AI است به EK؛ و نسبت EG به FG همچون نسبت EK است به FK؛ [۱.VI]

بنابراین EK واسطهٔ هندسی بین AI و FK است. [۱۱.V]

اما MN نیز واسطهٔ هندسی بین مربعهای LM و NO است، و AI با LM مساوی است و FK با NO؛ بنابراین EK نیز با MN مساوی است. اما DH با EK مساوی است و LO با MN؛ بنابراین تمامی DK با گونیای UVW و NO مساوی است.

پس، چون تمامی AK با مربعهای LM و NO مساوی است، و در این تساویها DK با گونیای UVW و مربع NO مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ AB با ST، یعنی با مربع LN، مساوی است. بنابراین LN «ضلع» مساحت AB است. می‌گوییم LN خط راست گنگی است که کهاد است. زیرا، چون AK گویا و با مربعهای LP و PN مساوی است، بنابراین مجموع مربعهای LP و PN گویاست.

باز، چون DK واسط است و DK با دو برابر مستطیل LP و PN مساوی است، بنابراین دو برابر مستطیل LP و PN واسط است. و، چون ثابت شده بود که AI با FK اندازه‌ناپذیر است، بنابراین مربع LP نیز با مربع PN اندازه‌ناپذیر است.

بنابراین LP و PN خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها گویاست، اما دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط است. بنابراین LN خط راستی است گنگ که کهاد است. [۷۶.X]

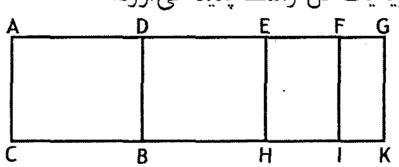
و «ضلع» مساحت AB است.

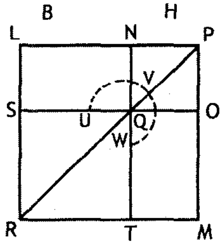
بنابراین «ضلع» مساحت AB کهاد است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۵

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل پنجم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد.





فرض می‌کنیم مساحت AB از خط راست گویای AC و خط راست منفصل پنجم AD حاصل شده است.

می‌گوییم «ضلع» مساحت AB خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا، فرض می‌کنیم DG افزوده به AD است؛ بنابراین AG و GD خطهای راست گویایی فقط

از حیث مربع اندازه‌پذیرند، افزودهٔ GD از حیث طول با خط راست گویای معلوم AC اندازه‌پذیر است. و مربع تمامی AG از مربع افزودهٔ DG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AG، بزرگتر است. [X.تعر.III.۵]

بنابراین اگر بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع DG و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه کنیم، آن را به اجزای اندازه‌ناپذیر تقسیم خواهد کرد. [X.۱۸]

پس، فرض می‌کنیم E وسط DG است، بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با مربع EG و با کاستی یک شکل مربعی اضافه، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع مستطیل AF و FG است؛ بنابراین AF با FG از حیث طول اندازه‌ناپذیر است.

حال، چون AG از حیث طول با CA اندازه‌ناپذیر است، و هر دو گویا هستند، بنابراین AK واسط است؛ [X.۲۱]

باز، چون DG گویاست و از حیث طول با AC اندازه‌پذیر، DK گویاست. [X.۱۹]

حال فرض می‌کنیم مربع LM مساوی با AI رسم شده است، و مربع NO مساوی با FK و مشترک در زاویهٔ LPM را، از آن کم می‌کنیم. بنابراین مربعهای LM و NO در حول یک قطرند. [VI.۲۶]

فرض می‌کنیم PR قطر آنهاست و شکل رسم شده است. اکنون به همان ترتیب که قبلاً دیدیم می‌توانیم ثابت کنیم که LN «ضلع» مساحت AB است. می‌گوییم که LN خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا، چون ثابت شده بود AK واسط و با مربعهای LP و PN مساوی است، بنابراین مجموع مربعهای LP و PN واسط است.

باز، چون DK گویا و با دو برابر مستطیل LP و PN مساوی است، خود این مستطیل نیز گویاست. و، چون AI با FK اندازه‌ناپذیر است، بنابراین مربع LP نیز با مربع PN اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین LP و PN خطهای راستی هستند اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که مجموع مربعهای آنها واسط است ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها گویا.

بنابراین باقیماندهٔ LN خط راستی است گنگ، که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد. [X.۷۷]

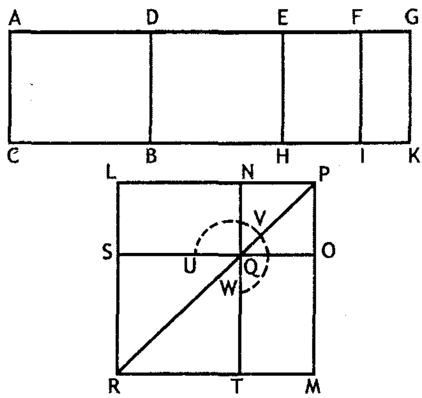
و، LN «ضلع» مساحت AB است.

بنابراین «ضلع» مساحت AB خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۶

اگر مساحتی از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل ششم حاصل شده باشد، «ضلع» این مساحت، خط راستی است که با یک مساحت واسط یک کل واسط پدید می‌آورد.



فرض می‌کنیم مساحت AB از خط راست گویای AC و خط راست منفصل ششم AD حاصل شده است. می‌گوییم که «ضلع» مساحت AB خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا فرض می‌کنیم DG افزوده به AD است؛ بنابراین AG و GD خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، هیچ یک از آنها از حیث طول با خط راست گویای معلوم AC اندازه‌پذیر نیست، و مربع تمام AG از مربع افزودهٔ DG به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با AG، بزرگتر است. [X.تعه.III.۶]

پس، چون مربع AG از مربع GD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر از حیث طول با AG، بزرگتر است، بنابراین اگر بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع DG و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه شود، آن را به اجزای اندازه‌ناپذیر تقسیم می‌کند. [X.۱۸]

پس، فرض می‌کنیم DG در E نصف شده است و بر AG متوازی‌الاضلاعی مساوی با مربع EG و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه شده است، و فرض می‌کنیم این متوازی‌الاضلاع، مستطیل AF و FG است. بنابراین AF با FG از حیث طول اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت AF به FG همچون نسبت AI است به FK؛ [VI.۱]

بنابراین AI با FK اندازه‌ناپذیر است. [X۱۱]

و، چون AG و AC خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، AK واسط است. [X.۲۱]

باز، چون AC و DG خطهای راست گویائی اندازه‌ناپذیر از حیث طول‌اند، DK نیز واسط است. [X.۲۱]

حال، چون AG و GD فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین AG از حیث طول با GD اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت AG به GD همچون نسبت AK است به KD، [۱.VI]

بنابراین AK با KD اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

حال، فرض می‌کنیم مربع LM مساوی با AI رسم شده است، و مربع NO مساوی با FK، و مشترک در یک زاویه، از آن کم شده است؛ بنابراین مربعهای LM و NO در حول یک قطرند. [۲۶.VI]

فرض می‌کنیم PR قطر آنهاست، و شکل رسم شده است. در این صورت با روشی مشابه روشهای قبل می‌توان ثابت کرد که LN «ضلع» مساحت AB است.

می‌گوییم LN خط راستی است که با یک مساحت واسط یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا، چون ثابت شده بود که AK واسط و با مربعهای LP و PN مساوی است، بنابراین مجموع مربعهای LP و PN واسط است. باز، چون ثابت شده بود DK واسط و مساوی با دو برابر مستطیل LP و PN است، دو برابر مستطیل LP و PN نیز واسط است. و، چون ثابت شده بود AK با DK اندازه‌ناپذیر است، مربعهای LP و PN نیز با دو برابر مستطیل LP و PN اندازه‌ناپذیر است. و، چون AI با FK اندازه‌ناپذیر است، بنابراین مربع LP نیز با مربع PN اندازه‌ناپذیر است؛ لذا LP و PN خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها واسط است، و دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط، و به علاوه، مربعهای آنها با دو برابر مستطیل حاصل از آنها اندازه‌ناپذیر است.

بنابراین LN خط راست گنگی است که با یک مساحت واسط، کل واسط پدید می‌آورد، [۷۸.X] و «ضلع» مساحت AB است.

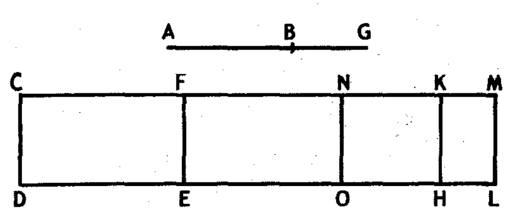
در نتیجه، «ضلع» مساحت AB خط راستی است که با یک مساحت واسط یک کل واسط پدید می‌آورد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۷

اگر مربع یک خط راست منفصل را بر خط راست گویایی اضافه کنیم، پهنایی پدید می‌آورد که منفصل اول است.

فرض می‌کنیم AB منفصل است و CD گویا، و CE مساوی با مربع AB بر CD اضافه شده است که پهنای CF را پدید آورده است.



می‌گوییم که CF منفصل اول است.

زیرا، فرض می‌کنیم BG افزوده به AB است؛ بنابراین AG و GB خطهای راست گویای اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع‌اند. [۷۳.X]

فرض می‌کنیم بر CD، CH مساوی با مربع AG اضافه شده است، و KL مساوی با مربع BG.

بنابراین تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و در این تساوی CE با مربع AB مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ FL با دو برابر مستطیل AG و GB مساوی است.[۷.II]

فرض می‌کنیم N وسط FM است و NO از N به موازات CD رسم شده است؛ بنابراین هر یک از مستطیلهای FO و LN با مستطیل AG و GB مساوی است. حال، چون مربعهای AG و GB گویا هستند و DM با مربعهای AG و GB مساوی است، بنابراین DM گویاست. و، بر خط راست گویای CD اضافه شده است و پهنای CM را پدید آورده است؛ بنابراین CM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

باز، چون دو برابر مستطیل AG و GB واسط است، و FL با دو برابر مستطیل AG و GB مساوی است، بنابراین FL واسط است. و، بر خط گویای CD اضافه شده و پهنای FM را به وجود آورده است؛ بنابراین FM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون مربعهای AG و GB گویا هستند، و دو برابر مستطیل AG و GB واسط است، بنابراین مربعهای AG و GB با دو برابر مستطیل AG و GB اندازه‌ناپذیر است. و CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و FL با دو برابر مستطیل AG و GB؛ بنابراین DM با FL اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت DM به FL همچون نسبت CM است به FM؛ [۱.VI]

بنابراین CM از حیث طول با FM اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند، بنابراین CM و MF خطهای راستی گویا هستند و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین CF منفصل است. [۷۳.X]

حال، می‌گوییم که این خط منفصل اول نیز هست.

زیرا، چون مستطیل AG و GB واسطهٔ هندسی بین مربعهای AG و GB است، و CH با مربع AG مساوی است، و KL با مربع BG، و NL با مستطیل AG و GB، بنابراین NL نیز واسطهٔ هندسی بین CH و KL است؛ بنابراین نسبت CH به NL مثل نسبت NL است به KL.

اما نسبت CH به NL مثل نسبت CK است به NM، و نسبت NL به KL مثل نسبت NM است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین مستطیل CK و KM با مربع NM، [۱۷.VI]

یعنی با یک‌چهارم مربع FM، مساوی است. و، چون مربع AG با مربع GB اندازه‌پذیر است، CH نیز با KL اندازه‌پذیر است.

اما نسبت CH به KL مثل نسبت CK است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین CK با KM اندازه‌پذیر است؛ [۱۱.X]

در این صورت، چون CM و MF دو خط راست نامساوی‌اند، و بر CM مستطیل CK و KM مساوی با یک‌چهارم مربع FM و با کاستی یک شکل مربعی، اضافه شده است و CK با KM اندازه‌پذیر است، بنابراین مربع CM از مربع MF به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر از حیث طول با CM، بزرگتر است، [۱۷.X]

و CM از حیث طول با خط راست گویای معلوم CD اندازه‌پذیر است.

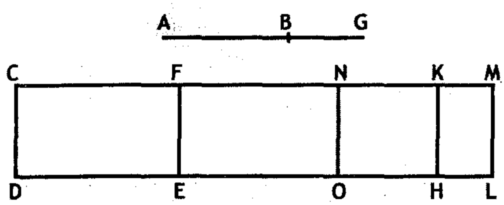
بنابراین CF منفصل اول است. [X.تعء.III.۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۸

اگر مربع خط راستی که منفصل اول یک خط راست واسط است، بر خط راست گویایی اضافه شود پهنایی پدید می‌آورد که منفصل دوم است.

فرض می‌کنیم AB منفصل اول یک خط راست واسط است و CD گویا؛ و CE مساوی با مربع AB بر CD اضافه شده است که پهنای CF را پدید آورده است. می‌گوییم که CF منفصل دوم است.



زیرا، فرض می‌کنیم BG افزوده به AB است، بنابراین AG و GB خطهای راست واسطی هستند اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع که مستطیلی گویا پدید می‌آورند. [۷۴.X]

فرض می‌کنیم بر CD، CH مساوی با مربع AG اضافه شده که پهنای CK را پدید آورده است، و KL مساوی با مربع GB که پهنای KM را. بنابراین تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است؛ بنابراین CL نیز واسط است؛ [۱۵.X و ۲۳، ف.]

و بر خط راست گویای CD اضافه شده و پهنای CM را پدید آورده است؛ بنابراین CM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

اما، چون CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و در این تساوی مربع AB با CE مساوی است، بنابراین بقیه، دو برابر مستطیل AG و GB، با FL مساوی است. [۷.II]

اما دو برابر مستطیل AG و GB گویاست؛ بنابراین FL گویاست. و بر خط راست گویای FE

اضافه شده و پهنای FM را پدید آورده است؛ بنابراین FM نیز گویا و از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

اما، چون مجموع مربعهای AG و GB، یعنی CL، واسط است و دو برابر مستطیل AG و GB، یعنی FL، گویاست، بنابراین CL با FL اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت CL به FL همچون نسبت CM است به FM. [۱.VI]

بنابراین CM از حیث طول با FM اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین CM و MF خطهای راستی هستند گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع؛ لذا CF منفصل است. [۷۳.X]

حال، می‌گوییم که منفصل دوم نیز هست.

زیرا، فرض می‌کنیم FM در نقطهٔ N نصف و NO از N موازی با CD رسم شده است. بنابراین هر یک از مستطیلهای FO و NL با مستطیل AG و GB مساوی است.

اما، چون مستطیل AG و GB واسطهٔ هندسی بین مربعهای AG و GB است، و مربع AG با CH مساوی است، و مستطیل AG و GB، با NL، و مربع BG با KL، بنابراین NL نیز واسطهٔ هندسی بین CH و KL است؛ لذا، نسبت CH به NL مثل نسبت NL است به KL.

اما نسبت CH به NL همچون نسبت CK است به NM، و نسب NL به KL مثل نسبت NM است به MK؛ [۱.VI]

بنابراین نسبت CK به NM مثل نسبت NM است به KM؛ [۱۱.V]

بنابراین مستطیل CK و KM با مربع NM مساوی است، [۱۷.VI]

یعنی با یک‌چهارم مربع FM.

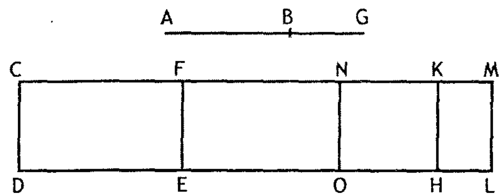
پس، چون CM و MF دو خط راست نامساوی هستند و مستطیل CK و KM مساوی با یک‌چهارم مربع FM و با کاستی یک شکل مربعی بر جزء بزرگتر، CM، اضافه شده و آن را به اجزائی اندازه‌پذیر تقسیم کرده است، بنابراین مربع CM از مربع MF به اندازهٔ مربع خط راستی از حیث طول اندازه‌پذیر با CM، بزرگتر است. [۱۷.X]

و افزودهٔ FM از حیث طول با خط راست گویای معلوم CD اندازه‌پذیر است؛ بنابراین CF یک منفصل دوم است. [X.تعر.III.۲]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹۹

اگر مربع خط راستی که منفصل دوم یک خط راست واسط است بر خط راست گویایی اضافه شود پهنایی پدید می‌آورد که منفصل سوم است.



فرض می‌کنیم AB منفصل دوم یک خط راست واسط است، و CD گویا؛ و فرض می‌کنیم بر CD، CE مساوی با مربع AB، اضافه شده‌است که پهنای CF را به وجود آورده است؛ می‌گوییم CF منفصل سوم است.

زیرا، فرض می‌کنیم BG افزوده به AB است؛ بنابراین AG و GB خطهای راست واسطی هستند اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع که یک مستطیل واسط پدید می‌آورند. [X.۷۵]

فرض می‌کنیم CH، مساوی با مربع AG بر CD اضافه شده و پهنای CK را پدید آورده است، و فرض می‌کنیم KL مساوی با مربع BG بر KH اضافه شده است و پهنای KM را به وجود آورده است؛ بنابراین تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است؛ بنابراین CL نیز واسط است. [X.۱۵ و ۲۳،ف.]

و بر خط راست گویای CD اضافه شده و پهنای CM را پدید آورده است. بنابراین CM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [X.۲۲]

اما، چون تمام CL با مربعهای AG و GB مساوی است و در این تساوی، CE با مربع AB مساوی است، بنابراین ماندهٔ LF با دو برابر مستطیل AG و GB مساوی است. [II.۷]

پس، فرض می‌کنیم N وسط FM است، و NO موازی با CD رسم شده است، بنابراین هر یک از مستطیلهای FO و NL با مستطیل AG و GB مساوی است. اما مستطیل AG و GB واسط است؛ بنابراین FL نیز واسط است. و بر خط راست گویای EF اضافه شده و پهنای FM را پدید آورده است؛ بنابراین FM نیز گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است.[X.۲۲]

و، چون AG و GB فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین AG از حیث طول با GB اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین مربع AG نیز با مستطیل AG و GB اندازه‌ناپذیر است. [VI.۱، X.۱۱]

اما مربعهای AG و GB با مربع AG اندازه‌پذیر است، و دو برابر مستطیل AG و GB با مستطیل AG و GB اندازه‌پذیر است؛ لذا مربعهای AG و GB با دو برابر مستطیل AG و GB اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]

اما CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و FL با دو برابر مستطیل AG و GB؛ بنابراین CL

نیز با FL اندازه‌ناپذیر است. اما نسبت CL به FL همچون نسبت CM است به FM. [۱.VI]

از این‌رو CM از حیث طول با FM اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین CM و MF خطهای راستِی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین CF منفصل است. [۷۳.X]

حال، می‌گوییم که منفصل سوم نیز هست.

زیرا، چون مربع AG با مربع GB اندازه‌پذیر است، بنابراین CH نیز با KL اندازه‌پذیر است، لذا CK نیز با KM اندازه‌پذیر است. [۱۱.X ،۱.VI]

و، چون مستطیل AG و GB واسطهٔ هندسی بین مربعهای AG و GB است، و CH با مربع AG مساوی است، KL با مربع GB، و NL با مستطیل AG و GB؛ بنابراین NL نیز واسطهٔ هندسی بین CH و KL است؛ بنابراین نسبت CH به NL همچون نسبت NL است به KL.

اما نسبت CH به NL مثل نسبت CK است به NM؛ و نسبت NL به KL همچون نسبت NM است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین نسبت CK به MN مثل نسبت MN است به KM. [۱۱.V]

بنابراین مستطیل CK و KM با [مربع MN، یعنی با] یک‌چهارم مربع FM مساوی است.

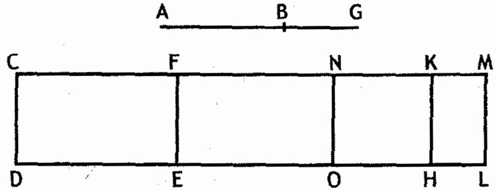
پس، چون CM و MF دو خط راست نامساوی‌اند، و متوازی‌اضلاعی مساوی با یک‌چهارم مربع FM و با کاستی یک شکل مربعی بر CM، اضافه شده است، و آن را به اجزای اندازه‌پذیر تقسیم کرده است، بنابراین مربع CM از مربع MF به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با CM، بزرگتر است. [۱۷.X]

و هیچ یک از خطهای راست CM و MF از حیث طول با خط راست گویای معلوم CD اندازه‌پذیر نیست؛ بنابراین CF منفصل سوم است. [۳.III.تعر.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۰

مربع خط راست کهادی که بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که منفصل چهارم است.



فرض می‌کنیم AB یک خط راست کهاد است، و CD خط راستی گویا، فرض می‌کنیم بر این خط راست گویای CD، CE مساوی با مربع AB اضافه شده و پهنای CF را پدید آورده است. می‌گوییم که CF منفصل چهارم است.

زیرا فرض می‌کنیم BG افزوده به AB است؛ بنابراین AG و GB خطهای راستی هستند اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که مجموع مربعهای آنها گویا ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها واسط است. [۷۶.X]

فرض می‌کنیم CH مساوی با مربع AG بر CD اضافه شده و پهنای CK را پدید آورده است، و KL مساوی با مربع BG بر CD اضافه شده و پهنای KM را پدید آورده است. بنابراین تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است. و مجموع مربعهای AG و GB گویاست. بنابراین CL نیز گویاست.

و بر خط راست گویای CD اضافه شده و پهنای CM را پدید آورده است. بنابراین CM نیز گویا و از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

و چون تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و در این تساوی CE با مربع AB مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ FL با دو برابر مستطیل AG و GB مساوی است.[۷.II]

فرض می‌کنیم N وسط FM است، و NO از N به موازات یکی از خطهای راست CD و ML کشیده شده است؛ بنابراین هر یک از مستطیلهای FO و NL با مستطیل AG و GB مساوی است.

و، چون دوبرابر مستطیل AG و GB واسط و با FL مساوی است، بنابراین FL نیز واسط است. و بر خط راست گویای FE اضافه شده است و پهنای FM را پدید آورده است. بنابراین FM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون مجموع مربعهای AG و GB گویا و دو برابر مستطیل AG و GB واسط است، مربعهای AG و GB با دو برابر مستطیل AG و GB اندازه‌ناپذیر است.

اما CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و FL با دو برابر مستطیل AG و GB؛ بنابراین CL با FL اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت CL به FL همچون نسبت CM است به MF. [۱.VI]

بنابراین CM از حیث طول با MF اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دوگویا هستند؛ بنابراین CM و MF خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. پس CF منفصل است. [۷۳.X]

می‌گوییم منفصل چهارم نیز هست.

زیرا چون AG و GB از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند، بنابراین مربع AG نیز با مربع GB اندازه‌ناپذیر است. و CH با مربع AG مساوی است، و KL با مربع GB؛ بنابراین CH با KL اندازه‌ناپذیر است. اما نسبت CH به KL همچون نسبت CK است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین CK از حیث طول با KM اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و، چون مستطیل AG و GB واسطهٔ هندسی بین مربعهای AG و GB است، و مربع AG با CH مساوی است، و مربع GB با KL؛ و مستطیل AG و GB با NL؛ بنابراین NL واسطهٔ هندسی بین CH و KL است؛ بنابراین نسبت CH به NL همچون نسبت NL است به KL.

اما نسبت CH به NL همچون نسبت CK است به NM، و نسبت NL به KL همچون نسبت NM است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین نسبت CK به MN همچون نسبت MN است به KM؛ [۱۱.V]

بنابراین مستطیل CK و KM با مربع MN، [۱۷.VI]

یعنی با یک‌چهارم مربع FM مساوی است.

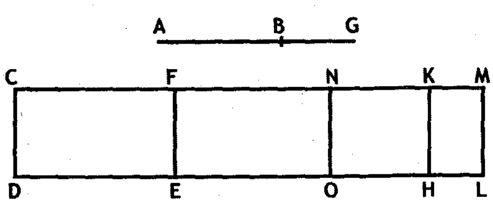
پس، چون CM و MF دو خط راست نامساوی‌اند، و مستطیل CK و KM مساوی با یک‌چهارم مربع MF و با کاستی یک شکل مربعی، بر CM اضافه شده است، و آن را به اجزائی اندازه‌ناپذیر تقسیم کرده است، بنابراین مربع CM از مربع MF به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با CM، بزرگتر است. [۱۸.X]

و تمامی CM از حیث طول با خط راست گویای معلوم CD اندازه‌پذیر است؛ بنابراین CF منفصل چهارم است. [X.تعء.III.۴]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۱

مربع خط راستی که با یک مساحت گویا یک کل واسط ایجاد می‌کند اگر بر خط راست گویایی اضافه شود پهنایی پدید می‌آورد که منفصل پنجم است.



فرض می‌کنیم AB خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط ایجاد می‌کند، و CD خط راستی‌گویاست، و فرض می‌کنیم CE مساوی با مربع AB بر CD اضافه شده و پهنای CF را پدید آورده است؛ می‌گوییم CF منفصل پنجم است.

زیرا فرض می‌کنیم BG افزوده به AB است؛ بنابراین AG و GB خطهای راستی هستند اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که مجموع مربعهای آنها واسط است ولی دو برابر مستطیل حاصل از آنها گویا. [۷۷.X]

فرض می‌کنیم CH مساوی با مربع AG بر CD اضافه شده است و KL مساوی با مربع GB بر آن اضافه شده است. بنابراین تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است.

اما مجموع مربعهای AG و GB روی هم واسط است؛ بنابراین CL واسط است. و بر خط راست گویای CD اضافه شده و پهنای CM را پدید آورده است. بنابراین CM گویا و با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و در این تساوی CE با مربع AB مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ FL با دو برابر مستطیل AG و GB مساوی است. [۷.II]

حال فرض می‌کنیم FM در N نصف، و از این نقطه خط راست NO موازی با یکی از خطهای راست CD و ML رسم شده است، بنابراین هر یک از مستطیلهای FO و NL با مستطیل AG و GB مساوی است. و، چون دو برابر مستطیل AG و GB گویا و با FL مساوی است، بنابراین FL گویاست. و بر خط راست گویای EF اضافه شده و پهنای FM را پدید آورده است؛ بنابراین FM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

حال، چون CL واسط است و FL گویا، بنابراین CL با FL اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت CL به FL همچون نسبت CM است به MF؛ [۱.VI]

بنابراین CM از حیث طول با MF اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند؛ بنابراین CM و MF خطهای راستی گویا، و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا CF منفصل است. [۷۳.X]

حال می‌گوییم که منفصل پنجم نیز هست.

زیرا، می‌توانیم همچنین ثابت کنیم که مستطیل CK و KM با مربع NM، یعنی با یک‌چهارم مربع FM مساوی است. و، چون مربع AG با مربع GB اندازه‌ناپذیر است،و مربع AG با CH مساوی است، و مربع GB با KL، بنابراین CH با KL اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت CH به KL همچون نسبت CK است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین CK از حیث طول با KM اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

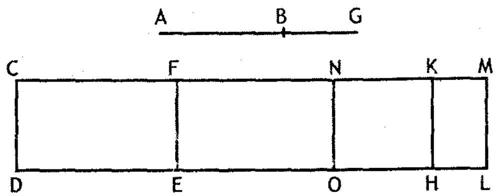
در این صورت، چون CM و MF دو خط راست نامساوی‌اند، و یک متوازی‌الاضلاع مساوی با یک‌چهارم مربع FM و با کاستی یک شکل مربعی بر CM، اضافه شده است و آن را به اجزای اندازه‌ناپذیر تقسیم کرده است، لذا مربع CM از مربع MF به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با CM، بزرگتر است. [۱۸.X]

و افزودهٔ FM با خط راست گویای معلوم CD اندازه‌پذیر است. بنابراین CF منفصل پنجم است. [۳.III.تعر.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۲

اگر مربع خط راستی که با یک مساحت واسط یک کل واسط می‌سازد، بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که منفصل ششم است.



فرض می‌کنیم AB خط راستی است که با یک مساحت واسط یک کل واسط پدید می‌آورد، و CD خط راستی گویاست، وفرض می‌کنیم CE مساوی با مربع AB بر CD اضافه شده و پهنای CF را پدید آورده است؛ می‌گوییم که CF منفصل ششم است.

زیرا، فرض می‌کنیم BG افزوده به AB است، بنابراین AG و GB خطهای راستی اندازه‌ناپذیر فقط از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها واسط است، دو برابر مستطیل AG و GB واسط، و مربعهای AG و GB با دو برابر مستطیل AG و GB اندازه‌ناپذیر است. [۷۸.X]

اکنون، فرض می‌کنیم CH مساوی با مربع AG بر CD اضافه شده و پهنای CK را پدید آورده است، و KL مساوی با مربع GB. بنابراین تمامی CL با مربعهای AG و GB مساوی است؛ لذا CL نیز واسط است و بر خط راست گویای CD اضافه شده و پهنای CM را پدید آورده است؛ بنابراین CM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

حال چون CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و در ضمن CE با مربع AB مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ FL با دوبرابر مستطیل AG و GB مساوی است. [۷.II]

و دو برابر مستطیل AG و GB واسط است؛ پس FL نیز واسط است. و برخط راست گویای FE اضافه شده و پهنای FM را پدید آورده است؛ بنابراین FM گویا و از حیث طول با CD اندازه‌ناپذیر است. [۲۲.X]

و، چون مربعهای AG و GB با دو برابر مستطیل AG و GB اندازه‌ناپذیر است، و CL با مربعهای AG و GB مساوی است، و FL با دو برابر مستطیل AG و GB، بنابراین CL با FL اندازه‌ناپذیر است.

اما نسبت CL به FL همچون نسبت CM است به MF؛ [۱.VI]

لذا CM از حیث طول با MF اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و هر دو گویا هستند.

بنابراین CM و MF خطهای راستی گویا، و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین CF منفصل است. [۷۳.X]

حال می‌گوییم منفصل ششم نیز هست.

زیرا، چون FL با دو برابر مستطیل AG و GB مساوی است، فرض می‌کنیم N وسط FM است، و NO از N موازی با CD رسم شده است. بنابراین هر یک از مستطیلهای FO و NL با مستطیل AG و GB مساوی است. و، چون AG و GB از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند، بنابراین مربع AG با مربع GB اندازه‌ناپذیر است. اما CH با مربع AG مساوی است، و KL با مربع GB؛ بنابراین CH با KL اندازه‌ناپذیر است. اما نسبت CH به KL همچون نسبت CK است به KM؛ [۱.VI]

بنابراین CK با KM اندازه‌ناپذیر است. [۱۱.X]

و، چون مستطیل AG و GB واسطهٔ هندسی بین مربعهای AG و GB است، و CH با مربع AG مساوی است، و KL با مربع GB، و NL با مستطیل AG و GB، بنابراین NL نیز واسطهٔ هندسی بین CH و KL است؛ بنابراین نسبت CH به NL همچون نسبت NL است به KL.

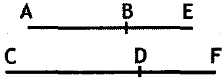
و به همان دلیل که در قضیهٔ قبل گفتیم مربع CM از مربع MF، به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با CM، بزرگتر است. [۱۸.X]

و هیچ‌یک از آنها با خط راست گویای معلوم CD اندازه‌پذیر نیست؛ در نتیجه CF منفصل ششم است. [X.تعه.III.۶]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۳

هر خط راست اندازه‌پذیر از حیث طول با خط راست منفصل، خط راست منفصلی است از همان نوع.



فرض می‌کنیم AB منفصل است، و CD از حیث طول با آن اندازه‌پذیر. می‌گوییم CD نیز خط راست منفصلی است از همان نوع AB.

زیرا، چون AB منفصل است، فرض می‌کنیم BE افزوده به آن است. بنابراین AE و EB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۷۳.X]

فرض می‌کنیم DF چنان اختیار شده است که نسبت BE به DF همچون نسبت AB است به CD؛ [۱۲.VI]

بنابراین نسبت یکی از صورتها به مخرجش همچون نسبت همهٔ صورتهاست به همهٔ مخرجها. [۱۲.V]

لذا، همچنین نسبت تمامی AE به تمامی CF همچون نسبت AB است به CD.

اما AB از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است، بنابراین AE نیز با CF اندازه‌پذیر است، و BE با DF. [۱۱.X]

و AE و EB خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین CF و FD نیز خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۱۳.X]

و اما، چون نسبت AE به CF همچون نسبت BE است به DF، بنابراین، به ابدال نسبت، نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD. [۱۶.V]

و مربع AE از مربع EB یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE، بزرگتر است، یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن. پس اگر مربع AE از مربع EB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با AE، بزرگتر باشد، مربع CF نیز از مربع FD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با CF، بزرگتر خواهد بود. [۱۴.X]

و اگر AE از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، CF نیز چنین است، [۱۲.X]

و اگر BE از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، DF نیز چنین است، [۱۲.X]

و اگر هیچ یک از خطهای راست AE و EB از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر نباشد، خطهای راست CF و DF نیز چنین خواهند بود. [۱۳.X]

اما اگر مربع AE از مربع EB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با AE بزرگتر باشد، مربع CF نیز از مربع FD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با CF بزرگتر خواهد بود. [۱۴.X]

و، اگر AE از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، CF نیز چنین است، [۱۲.X]

و اگر BE از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، DF نیز چنین است، [۱۲.X]

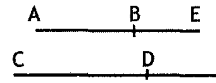
و اگر هیچ یک از خطهای راست AE و EB از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر نباشد، خطهای راست CF و DF نیز چنین خواهند بود. [۱۳.X]

لذا CD منفصلی است از همان نوع AB.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۴

هر خط راست اندازه‌پذیر با خط راست منفصلی از یک خط راست واسط، خط راست منفصلی از همان نوع از یک خط راست واسط است.



فرض می‌کنیم AB خط راست منفصلی از خط راستی است واسط، و CD از حیث طول با آن اندازه‌پذیر، می‌گوییم که CD نیز خط راست منفصلی از خط راستی است واسط از همان نوع AB. زیرا، چون AB خط راست منفصلی از خط راستی است واسط، فرض می‌کنیم EB افزوده به آن است. بنابراین AE و EB خطهای راست واسطی هستند اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع. [۷۵،۷۴.X]

فرض می‌کنیم DF چنان اختیار شده‌است که نسبت AB به CD همچون نسبت BE است به DF. [۱۲.VI]

بنابراین AE نیز با CF اندازه‌پذیر است، و BE با DF. [۱۱.X،۱۲.V]

· اما AE و EB خطهای راست واسطی هستند، اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع. بنابراین CF و FD نیز خطهای راست واسطی [۲۳.X]
فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ [۱۳.X]
بنابراین CD خط راست منفصلی از یک خط راست واسط است. [۷۵ ،۷۴.X]

اکنون می‌گوییم که نوع آن نیز با نوع AB یکی است.

چون نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD، بنابراین نسبت مربع AE به مستطیل AE و EB نیز، مثل مربع CF است به مستطیل CF و FD. اما مربع AE با مربع CF اندازه‌پذیر است؛ بنابراین مستطیل AE و EB نیز با مستطیل CF و FD اندازه‌پذیر است. [۱۱.X ،۱۶.V]

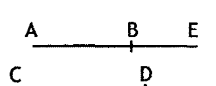
بنابراین، اگر مستطیل AE و EB گویا باشد، مستطیل CF و FD نیز گویا خواهد بود، [۴.تع.X]
و اگر مستطیل AE و EB واسط باشد، مستطیل CF و FD نیز واسط است. [۲۳.X، ف.]

در نتیجه CD خط راست منفصلی از یک خط راست واسط است از همان نوع AB. [۷۵،۷۴.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۵

هر خط راست اندازه‌پذیر با یک خط راست کهاد، کهاد است.



فرض می‌کنیم AB یک خط راست کهاد است، و CD اندازه‌پذیر با AB؛ می‌گوییم که CD نیز کهاد است.

فرض می‌کنیم ترسیم به‌صورت قبل انجام شده‌است؛ پس،

چون AE و EB از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند، [۷۶.X]

بنابراین CF و FD نیز از حیث مربع اندازه‌ناپذیرند. [۱۳.X]

و اما، چون نسبت AE به EB همچون نسبت CF است به FD، [۱۲.V، ۱۶.V]

بنابراین نسبت مربع AE به مربع EB نیز مثل نسبت مربع CF است به مربع FD.[۲۲.VI]

بنابراین، از ترکیب نسبت در صورت، داریم نسبت مربعهای AE و EB به مربع EB همچون نسبت مربعهای CF و FD است به مربع FD. [۱۸.V]

اما مربع BE با مربع DF اندازه‌پذیر است؛ بنابراین مجموع مربعهای AE و EB نیز با مجموع مربعهای CF و FD اندازه‌پذیر است. [۱۶.V، ۱۱.X]

اما مجموع مربعهای AE و EB گویاست، [۷۶.X]

بنابراین مجموع مربعهای CF و FD نیز گویاست. [تع.۴.X]

باز، چون نسبت مربع AE به مستطیل AE و EB همچون نسبت مربع CF است به مستطیل CF و FD، و مربع AE با مربع CF اندازه‌پذیر است، بنابراین مستطیل AE و EB نیز با مستطیل CF و FD اندازه‌پذیر است. اما مستطیل AE و EB واسط است؛ [۷۶.X]

بنابراین مستطیل CF و FD نیز واسط است؛ [۲۳.X، ف.]

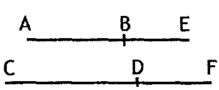
لذا CF و FD خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع‌اند که مجموع مربعهای آنها گویا، ولی مستطیل حاصل از آنها واسط است.

بنابراین CD کهاد است. [۷۶.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۶

هر خط راست اندازه‌پذیر با خط راستی که با یک مساحت گویا، کل واسطی پدید می‌آورد، خط راستی است که با یک مساحت گویا کل واسطی پدید می‌آورد.



فرض می‌کنیم AB خط راستی است که با یک مساحت گویا کل واسطی پدید می‌آورد، و CD با AB اندازه‌پذیر است. می‌گوییم CD نیز خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا، فرض می‌کنیم BE افزوده به AB است؛ بنابراین AE و EB خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که مجموع مربعهای آنها واسط، ولی مستطیل حاصل از آنها گویاست. [۷۷.X]

فرض می‌کنیم، ترسیم به صورت قبل انجام گرفته است.

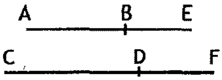
بنابراین می‌توانیم با روشی مشابه با روش قبل ثابت کنیم که نسبت CF به FD مثل نسبت AE است به EB، و مجموع مربعهای AE و EB با مجموع مربعهای CF و FD اندازه‌پذیر است، و مستطیل AE و EB با مستطیل CF و FD؛ لذا CF و FD نیز خطهای راستی اندازه‌ناپذیر از حیث مربع هستند که مجموع مربعهای آنها، $DF^۲ + CF^۲$، واسط است، ولی مستطیل حاصل از آنها گویا.

بنابراین CD خط راستی است که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورد. [۷۷.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۷

خط راست اندازه‌پذیر با خط راستی که با یک مساحت واسط، کل واسطی پدید می‌آورد، خود نیز خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.



فرض می‌کنیم AB خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد، و فرض می‌کنیم CD با AB اندازه‌پذیر است؛ می‌گوییم که CD نیز خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا فرض می‌کنیم BE افزوده به AB است و ترسیم به صورت قبل انجام گرفته است؛ بنابراین AE و EB خطهای راست اندازه‌ناپذیری از حیث مربع هستند که مجموع مربعهای آنها واسط است و مستطیل حاصل از آنها واسط، و به علاوه، مجموع مربعهای آنها با مستطیل حاصل از آنها اندازه‌ناپذیر است. [۷۸.X]

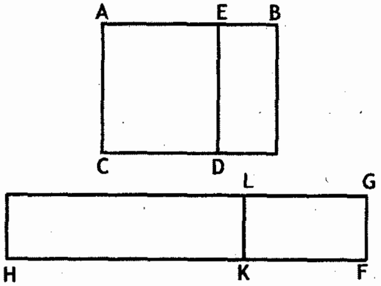
اما، چنانکه ثابت شده بود، AE و EB با CF و FD اندازه‌پذیرند، مجموع مربعهای AE و EB با مجموع مربعهای CF و FD، و مستطیل AE و EB با مستطیل CF و FD. بنابراین CF و FD نیز خطهای راستی هستند اندازه‌ناپذیر از حیث مربع که مجموع مربعهای آنها واسط، مستطیل حاصل از آنها واسط، و به علاوه مجموع مربعهای آنها با مستطیل حاصل از آنها اندازه‌ناپذیر است.

بنابراین CD خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد. [۷۸.X]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۸

اگر از مساحتی گویا یک مساحت واسط کم شود، «ضلع» مساحت باقیمانده یکی از دو خط راست گنگ خواهد بود، یا یک خط راست منفصل یا یک خط راست کهاد.



فرض می‌کنیم از مساحت گویای BC مساحت واسط BD کم شده است. می‌گوییم که «ضلع» باقیماندهٔ EC یکی از دو خط راست گنگ است، یا یک خط راست منفصل یا یک خط راست کهاد.

زیرا، فرض می‌کنیم یک خط راست گویای FG معلوم است. بر FG متوازی‌الاضلاع مستطیلی شکل GH، مساوی با BC اضافه، و GK مساوی با DB از آن کم شده است، بنابراین باقیماندهٔ EC با LH مساوی است.

پس، چون BC گویا و BD واسط است، و BC با GH مساوی است، و BD با GK؛ لذا GH گویاست و GK واسط.

و بر خط راست گویای FG اضافه شده‌اند؛ بنابراین FH گویا و از حیث طول با FG اندازه‌پذیر است، [۲۰.X]

و FK گویا و از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر؛ [۲۲.X]

بنابراین FH از حیث طول با FK اندازه‌ناپذیر است. [۱۳.X]

لذا FH و FK خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین KH یک خط راست منفصل است. [۷۳.X]

و KF افزوده به آن.

و اما مربع HF از مربع FK به اندازهٔ مربع خط راستی یا اندازه‌پذیر با HF، یا اندازه‌ناپذیر با آن، بزرگتر است.

اول فرض می‌کنیم مربع آن به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با آن، بزرگتر است. و اما تمامی HF از حیث طول با خط راست گویای معلوم FG اندازه‌پذیر است. بنابراین KH یک خط راست منفصل اول است. [X.تعر.III.۱]

اما «ضلع» مستطیل حاصل از خط راستی گویا و یک خط راست منفصل اول، یک خط راست منفصل است. [۹۱.X]

بنابراین «ضلع» LH، یعنی «ضلع» EC یک خط راست منفصل است. اما اگر مربع HF از

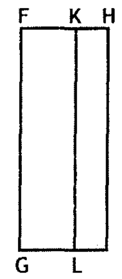
مربع FK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با HF، بزرگتر باشد، چون تمامی FH از حیث طول با خط راست گویای معلوم FG اندازه‌پذیر است، KH منفصل چهارم است.[X.تعر.III.۴]

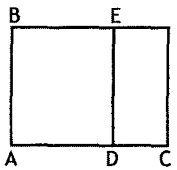
اما «ضلع» مستطیل حاصل از خط راستی گویا و یک خط راست منفصل چهارم، کهاد است. [X.۹۴]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰۹

اگر از یک مساحت واسط مساحت گویایی کم شود، یکی از دو خط راست گنگ باقیمانده پدید می‌آید: یا خط راستی که منفصل اول یک خط راست واسط است یا خط راستی که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورد.





فرض می‌کنیم از مساحت واسط BC مساحت گویای BD کم شده است.

می‌گوییم که «ضلع» باقیماندهٔ EC یکی از دوخط راست گنگ است، یا یک منفصل اول یک خط راست واسط است یا خط راستی که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورد.

زیرا فرض می‌کنیم یک خط راست گویای FG معلوم است، و مساحتها مانند شکل قبل به آن اضافه شده‌اند. پس، از اینجا نتیجه می‌شود که FH گویا و از حیث طول با FG اندازه‌ناپذیر است، در حالی که KF گویا و با FG از حیث طول اندازه‌پذیر است؛ بنابراین FH و FK خطهای راست گویایی، فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ [X.۱۳]

بنابراین KH یک منفصل است، و FK افزوده به آن. [X.۷۳]

اما مربع HF از مربع FK یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با HF یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن، بزرگتر است.

پس، اگر مربع HF از مربع FK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با HF بزرگتر باشد، چون افزودهٔ FK از حیث طول با خط راست گویای معلوم FG اندازه‌پذیر است، KH یک خط راست منفصل دوم است؛ [X.تعر.III.۲]

اما FG گویاست؛ لذا «ضلع» LH، یعنی «ضلع» EC، منفصل اول یک خط راست واسط است. [X.۹۲]

اما، اگر مربع HF از مربع FK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با HF، بزرگتر باشد،

و افزودهٔ FK از حیث طول با خط راست گویای معلوم FG اندازه‌پذیر باشد، KH منفصل پنجم است. [X.تعع.III.۵]

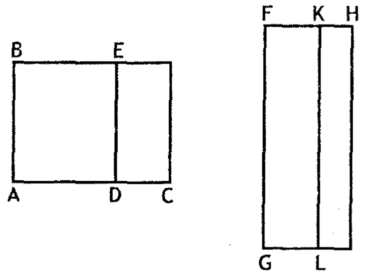
لذا «ضلع» EC خط راستی است که با یک مساحت گویا یک کل واسط پدید می‌آورد.[X.۹۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱۰

اگر از مساحت واسطی یک مساحت واسط اندازه‌ناپذیر با تمام کم شود، یکی از دو خط راست گنگ باقیمانده پدید می‌آید، یا خط راستی که منفصل دوم یک خط راست واسط است، یا خط راستی که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.

همانند شکلهای قبل، فرض می‌کنیم از مساحت واسط BC مساحت واسط BD اندازه‌ناپذیر با تمام، کم شده است. می‌گوییم که «ضلع» EC یکی از دو خط راست گنگ است، یا یک خط راست منفصل دوم یک خط راست واسط است یا خط راستی که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.



زیرا، چون هر یک از مستطیلهای BC و BD واسط است و BC با BD اندازه‌ناپذیر، در نتیجه هر یک از خطهای راست FH و FK گویا و با FG از حیث طول اندازه‌ناپذیر است. [X.۲۲]

و، چون BC با BD، یعنی GH با GK، اندازه‌ناپذیر است، HF نیز با FK اندازه‌ناپذیر است؛ [VI.۱، X.۱۱]

بنابراین FH و FK .خطهای راست گویایی اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع هستند؛ بنابراین KH منفصل است. [X.۷۳]

پس اگر مربع FH از مربع FK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با FH، بزرگتر باشد، چون هیچ یک از خطهای راست FH و FK با خط راست معلوم FG از حیث طول اندازه‌پذیر نیست، KH یک منفصل سوم است. [X.تعع.III.۳]

اما KL گویاست، و مستطیل حاصل از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل سوم، گنگ است، و «ضلع» آن گنگ است و منفصل دوم یک خط راست واسط نامیده شده است. [X.۹۳]

لذا «ضلع» LH، یعنی ضلع EC، منفصل دوم یک خط راست واسط است.

اما، اگر مربع FH از مربع FK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با FH، بزرگتر باشد، چون هیچ یک از خطهای راست HF و FK اندازه‌پذیر از حیث طول با FG نیست، KH منفصل ششم است. [X.تعع.III.۶]

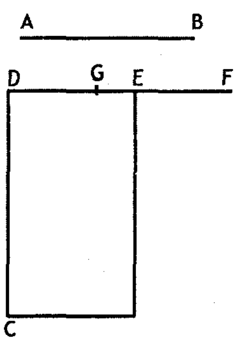
اما «ضلع» مستطیل حاصل از یک خط راست گویا و یک خط راست منفصل ششم، خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد. [X.۹۶]

بنابراین «ضلع» LH، یعنی «ضلع» EC، خط راستی است که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱۱

خط راست منفصل، با خط راست ذوالاسمین یکی نیست.



فرض می‌کنیم AB خط راستی منفصل است؛ می‌گوییم AB با خط راست ذوالاسمین یکی نیست.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن و AB ذوالاسمین باشد. فرض می‌کنیم یک خط راست گویای DC معلوم است و بر CD مستطیل CE مساوی با مربع AB اضافه شده و پهنای DE را پدید آورده است.

در این صورت، چون AB منفصل است، DE منفصل اول است. [X.۹۷]

فرض می‌کنیم EF افزوده به آن است؛ بنابراین DF و FE خطهای راستی هستند گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، مربع DF از مربع FE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با DF، بزرگتر است، و DF از حیث طول با خط راست گویای معلوم DC اندازه‌پذیر است. [X.تعع.III.۱]

باز، چون AB ذوالاسمین است، بنابراین DE یک خط راست ذوالاسمین اول است. [X.۶۰]

فرض می‌کنیم DE در G به جمله‌هایش تقسیم شده و DG جملهٔ بزرگتر است؛ بنابراین DG و GE خطهای راست گویایی هستند اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع، مربع DG از مربع GE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با DG، بزرگتر است و جملهٔ بزرگتر DG از حیث طول با خط راست گویای معلوم DC اندازه‌پذیر است. [X.تعع.II.۱]

بنابراین DF نیز از حیث طول با DG اندازه‌پذیر است؛ [X.۱۲]

بنابراین باقیماندهٔ GF نیز از حیث طول با DF اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]
اما DF از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است؛ بنابراین FG نیز از حیث طول با EF اندازه‌ناپذیر است. [X.۱۳]
بنابراین GF و FE خطهای راست گویایی هستند اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع؛ پس EG یک خط راست منفصل است. [X.۷۳]

اما گویا نیز هست: که غیرممکن است.

بنابراین خط راست منفصل با خط راست ذوالاسمین یکی نیست.

آنچه می‌خواستیم.

خط راست منفصل و خطهای راست گنگ ناشی از آن، نه با خط راست واسط یکی هستند، و نه با همدیگر.

زیرا مربع هر خط راست واسط اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد خط راستی است گویا و اندازه‌ناپذیر از حیث طول با خط راستی که بر آن اضافه شده است، [X.۲۲]
در حالی که مربع یک خط راست منفصل، اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که منفصل اول است، [X.۹۷]
مربع خط راستی که منفصل اول یک خط راست واسط باشد، اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که منفصل دوم است، [X.۹۸]
مربع خط راستی که منفصل دوم یک خط راست واسط باشد، اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد منفصل سوم است، [X.۹۹]
مربع یک خط راست کهاد، اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد خط راست منفصل چهارم است، [X.۱۰۰]
مربع خط راستی که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورد، اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد خط راست منفصل پنجم است، [X.۱۰۱]
و مربع خط راستی که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید آورد، اگر بر خط راستی گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که منفصل ششم است. [X.۱۰۲]

پس، چون پهناهای مذکور، با پهنای اول، به علت گویا بودن، و با یکدیگر، به علت یکی نبودن نوع، متفاوت‌اند، روشن است که این خطهای راست گنگ، خود نیز با یکدیگر متفاوت‌اند.

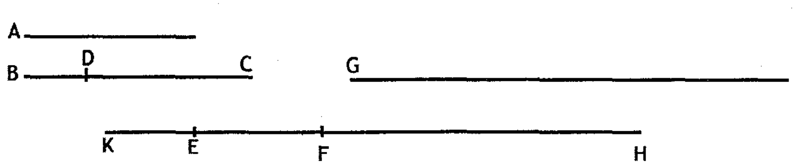
و، اما ثابت شده بود که خط راست منفصل با خط راست ذوالاسمین یکی نیست، [X.۱۱۱]
لذا اگر مربعهای حاصل از خطهای راست منفصل به خط راست گویایی اضافه شوند، بسته به «نوع»شان، پهناهای منفصل متفاوت پدید می‌آورند، و اگر مربعهای حاصل از خطهای راست

ذوالاسمین به خط راست گویایی اضافه شوند، بسته به «نوع»شان، پهناهای ذوالاسمین متفاوت پدید می‌آورند، بنابراین آنها که از منفصل به دست می‌آیند با هم متفاوت‌اند و آنها که از خط راست ذوالاسمین نتیجه می‌شوند با هم متفاوت، لذا روی هم رفته، درست، سیزده خط راست گنگ پدید می‌آیند،

- واسط،
- ذوالاسمین،
- دوواسطی اول،
- دوواسطی دوم،
- مهاد،
- «ضلع» یک مساحت گویا به اضافهٔ یک مساحت واسط،
- «ضلع» مجموع دو مساحت واسط،
- منفصل،
- منفصل اول یک خط راست واسط،
- منفصل دوم یک خط راست واسط،
- کهاد،
- که با یک مساحت گویا، یک کل واسط پدید می‌آورند،
- که با یک مساحت واسط، یک کل واسط پدید می‌آورند.

قضیهٔ ۱۱۲

مربع خط راست گویایی که بر خط راست ذوالاسمینی اضافه شود، پهنای منفصلی پدید می‌آورد که اجزای آن با اجزای خط راست ذوالاسمین اندازه‌پذیر، و به علاوه به یک نسبت‌اند؛ و خط راست منفصلی که این گونه پدید می‌آید از لحاظ «نوع» با خط راست ذوالاسمین مذکور یکی است.



فرض می‌کنیم A خط راستی است گویا، و BC یک خط راست ذوالاسمین که جزء بزرگترش DC است؛ و مستطیل BC و EF با مربع A مساوی است. می‌گوییم که EF منفصلی است که اجزای آن با CD و DB اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند، و به علاوه EF از لحاظ نوع با BC یکی است.

زیرا، باز فرض می‌کنیم مستطیل BD و G با مربع A مساوی است. پس، چون مستطیل BC و EF با مستطیل BD و G مساوی است، بنابراین نسبت CB به BD همچون نسبت G است به EF. [۱۶.VI]

اما CB از BD بزرگتر است؛ بنابراین G نیز از EF بزرگتر است. [۱۶.V، ۱۴.V]

فرض می‌کنیم EH با G مساوی است. بنابراین نسبت CB به BD همچون نسبت HE است به EF؛ لذا از تفضیل نسبت در صورت خواهیم داشت نسبت CD به BD همچون نسبت HF است به FE. [۱۷.V]

فرض می‌کنیم چنان ترتیب داده شده است که نسبت HF به FE همچون نسبت FK است به KE؛ بنابراین نسبت تمامی HK نیز به تمامی KF همچون نسبت FK است به KE؛ زیرا نسبت یکی از صورتها به مخرجش همچون نسبت همهٔ صورتهاست به همهٔ مخرجها.[۱۲.V]

اما نسبت FK به KE همچون نسبت CD است به DB؛ [۱۱.V]

بنابراین نسبت HK به KF نیز همچون نسبت CD است به DB. [۱۱.V]

اما مربع CD با مربع DB اندازه‌پذیر است؛ [۳۶.X]

بنابراین مربع HK نیز با مربع KF اندازه‌پذیر است؛ [۲۲.VI، ۱۱.X]

و، نسبت مربع HK به مربع KF همچون نسبت HK است به KE، زیرا سه خط راست HK و KF و KE متناسب‌اند. [تع.۹.V]

بنابراین HK از حیث طول با KE اندازه‌پذیر است، لذا HE نیز از حیث طول با EK اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

و اما، چون مربع A با مستطیل EH و BD مساوی است، و مربع A گویاست، پس مستطیل EH و BD نیز گویاست. و بر خط راست گویای BD اضافه شده است؛ بنابراین EH گویا و از حیث طول با BD اندازه‌پذیر است. [۲۰.X]

لذا EK هم که با آن اندازه‌پذیر است گویا و از حیث طول با BD اندازه‌پذیر است.

پس، چون نسبت CD به DB همچون نسبت FK است به KE، و CD و DB خطهای راستی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین FK و KE نیز فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [۱۱.X]

اما KE گویاست؛ بنابراین FK نیز گویاست.

لذا FK و KE خطهای راست گویایی فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین FE منفصل است. [۷۳.X]

و اما مربع CD از مربع DB یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با CD یا به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با آن، بزرگتر است.

حال، اگر مربع CD از مربع DB به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با CD بزرگتر باشد، مربع FK نیز از مربع KE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با FK بزرگتر خواهد بود. [۱۴.X]
و اگر CD از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، FK نیز چنین است. [۱۲،۱۱.X]

اگر BD به همین نحو اندازه‌پذیر باشد، KE نیز به همین نحو اندازه‌پذیر است؛ [۱۲.X]
اما اگر هیچ یک از خطهای راست CD و DB چنین اندازه‌پذیر نباشند، هیچ یک از خطهای راست FK و KE نیز چنین اندازه‌پذیر نخواهند بود.

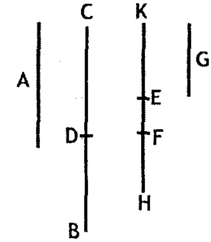
اما اگر مربع CD از مربع BD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با CD، بزرگتر باشد، مربع FK نیز از مربع KE به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با FK، بزرگتر خواهد بود. [۱۴.X]
و، اگر CD از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، FK نیز چنین خواهد بود، و اگر BD به همین نحو اندازه‌پذیر باشد، KE نیز به همین نحو اندازه‌پذیر خواهد بود. اما اگر هیچ یک از خطهای راست CD و DB چنین اندازه‌پذیر نباشند، هیچ یک از خطهای راست FK و KE نیز چنین اندازه‌پذیر نیستند.

لذا FE خط راست منفصلی است که اجزایش، FK و KE، با CD و DB، اجزای خط راست ذوالاسمین، اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند و نوع آن با نوع BC یکی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱۳

مربع خط راستی گویا، اگر بر منفصلی اضافه شود، پهنایی که پدید می‌آورد خط راست ذوالاسمینی است که اجزایش با اجزای خط راست منفصل اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند. و به علاوه نوع خط راست ذوالاسمینی که بدین ترتیب پدید می‌آید با نوع منفصل یکی است.



فرض می‌کنیم A خط راستی است گویا و BD منفصل، و فرض می‌کنیم مستطیل BD و KH با مربع A مساوی است، لذا مربع خط راست گویای A وقتی بر منفصل BD اضافه شود، پهنای KH را پدید می‌آورد؛ می‌گوییم که KH یک خط راست ذوالاسمین است که جمله‌های آن با جمله‌های BD اندازه‌پذیرند و با آنها به یک نسبت؛ وگذشته از آن نوع KH با نوع BD یکی است.

زیرا فرض می‌کنیم DC افزوده به BD است؛ بنابراین BC و CD خطهای راستی هستند گویا و اندازه‌پذیر فقط از حیث مربع. [۷۳.X]

فرض می‌کنیم مستطیل BC و G نیز با مربع A مساوی است.

اما مربع A گویاست، بنابراین مستطیل BC و G نیز گویاست. و بر خط راست گویای BC اضافه شده است؛ بنابراین G گویا و از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است. [X.۲۰]

و اما چون مستطیل BC و G با مستطیل BD و KH مساوی است، بنابراین از لحاظ تناسب، نسبت CB به BD همچون نسبت KH است به G. [VI.۱۶]

اما BC از BD بزرگتر است؛ بنابراین KH نیز از G بزرگتر است. [V.۱۶، V.۱۴]

فرض می‌کنیم KE مساوی با G اختیار شده است؛ بنابراین KE از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است. و چون نسبت CB به BD همچون نسبت HK است به KE؛ بنابراین از تفضیل نسبت در مخرج داریم، نسبت BC به CD همچون نسبت KH است به HE. [V.۱۹، ف.]

فرض می‌کنیم FE چنان اختیار شده است که نسبت KH به HE همچون نسبت HF است به FE؛ بنابراین نسبت KF، باقیمانده، نیز به FH مثل نسبت KH است به HE، یعنی همچون نسبت BC است به CD. [V.۱۹]

اما BC و CD فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند، بنابراین KF و FH نیز فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. [X.۱۱]

وچون نسبت KH به HE همچون نسبت KF است به FH، و نسبت KH به HE همچون نسبت HF است به FE، بنابراین نسبت KF به FH نیز همچون نسبت HF است به FE، [V.۱۱]
لذا، نسبت اولی به سومی نیز همچون نسبت مربع اولی است به مربع دومی؛ [V.تع.۹]
بنابراین، نسبت KF به FE نیز همچون نسبت مربع KF است به مربع FH.

اما مربع KF با مربع FH اندازه‌پذیر است، زیرا KF و FH از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛
بنابراین KF نیز از حیث طول با FE اندازه‌پذیر است؛ [X.۱۱]
لذا KF نیز از حیث طول با KE اندازه‌پذیر است. [X.۱۵]
اما KE گویا و از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است؛ بنابراین KF نیز گویا و از حیث طول با BC اندازه‌پذیر است. [X.۱۲]

و چون نسبت BC به CD همچون نسبت KF است به FH، و به ابدال نسبت، نسبت BC به KF همچون نسبت DC است به FH. [V.۱۶]

اما BC با KF اندازه‌پذیر است؛ بنابراین FH نیز از حیث طول با CD اندازه‌پذیر است. [X.۱۱]

اما BC و CD خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین KF و FH نیز خطهای راستی گویا [X.تع.۳]
و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ بنابراین KH ذوالاسمین است. [X.۳۶]

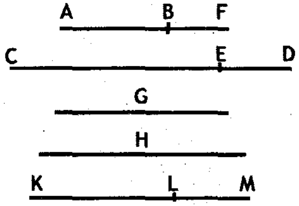
حال اگر مربع BC از مربع CD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با BC، بزرگتر باشد، مربع KF نیز از مربع FH به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌پذیر با KF، بزرگتر است.[۱۴.X] و، اگر BC از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، KF نیز از حیث طول با خط راست معلوم اندازه‌پذیر است. اگر CD از حیث طول با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، FH نیز چنین است، اما اگر هیچ یک از خطهای راست BC و CD اندازه‌پذیر نباشند، آنگاه هیچ یک از خطهای راست KF و FH اندازه‌پذیر نخواهند بود.

اما اگر مربع BC از مربع CD به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BC، بزرگتر باشد، مربع KF نیز از مربع FH به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با KF، بزرگتر است.[۱۴.X] و، اگر BC باخط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، KF نیز با آن اندازه‌پذیر است؛ اگر CD با خط راست گویای معلوم اندازه‌پذیر باشد، FH نیز با آن اندازه‌پذیر است؛ ولی اگر هیچ یک از خطهای راست BC و CD اندازه‌پذیر نباشند، خطهای راست KF و FH نیز اندازه‌پذیر نخواهند بود.

بنابراین KH خط راست ذوالاسمینی است که اجزای آن، KF و FH، با اجزای خط راست منفصل، BC و CD، اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند، و به علاوه نوع KH با نوع BD یکی است.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱۴

اگر مساحتی از یک خط راست منفصل و خط راست ذوالاسمینی حاصل شده باشد که اجزای آن با اجزای منفصل اندازه‌پذیر و به یک نسبت باشند، «ضلع» این مساحت گویاست.



فرض می‌کنیم مساحتی، مستطیل AB و CD، حاصل از یک خط راست منفصل AB و خط راست ذوالاسمین CD است، و فرض می‌کنیم CE جملهٔ بزرگتر خط راست ذوالاسمین است و جمله‌های CE و ED از خط راست ذوالاسمین با جمله‌های AF و FB از خط راست منفصل اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند؛ وفرض می‌کنیم G «ضلع» مستطیل AB و CD باشد؛ می‌گوییم که G گویاست.

زیرا، فرض می‌کنیم یک خط راست گویای H معلوم است، و فرض می‌کنیم بر CD مستطیلی مساوی با مربع H اضافه شده است که پهنای KL را پدید آورده است. بنابراین KL منفصل است. فرض می‌کنیم KM و ML، اجزای این خط راست منفصل، با اجزای CE و ED از خط راست ذوالاسمین اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند. [۱۱۲.X]

اما CE و ED نیز با AF و FB اندازه‌پذیر و به یک نسبت‌اند؛ بنابراین نسبت AF به FB همچون نسبت KM است به ML.

بنابراین، به ابدال نسبت، نسبت AF به KM همچون نسبت BF است به LM؛ بنابراین نسبت باقیمانده، AB، به باقیمانده، KL، همچون نسبت AF است به KM. [۱۹.V]

ولی، AF با KM اندازه‌پذیر است؛ [۱۲.X]

بنابراین AB نیز با KL اندازه‌پذیر است. [۱۱.X]

و، نسبت AB به KL همچون مستطیل CD و AB است به مستطیل CD و KL؛ [۱.VI]

بنابراین مستطیل CD و AB نیز با مستطیل CD و KL اندازه‌پذیر است. [۱۱.X]

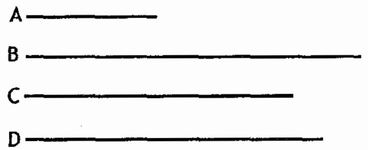
اما مستطیل CD و KL با مربع H مساوی است؛ بنابراین مستطیل CD و AB با مربع H اندازه‌پذیر است. اما مربع G با مستطیل CD و AB مساوی است؛ بنابراین مربع G با مربع H اندازه‌پذیر است. اما مربع H گویاست؛ بنابراین مربع G نیز گویاست؛ بنابراین G گویاست، و «ضلع» مستطیل CD و AB است. بنابراین . . . .

فرع. از این قضیه ضمناً معلوم می‌شود که از خطهای راست گنگ ممکن است مساحتی گویا حاصل شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱۵

از هر خط راست واسط تعداد بینهایت خط راست گنگ پدید می‌آید که با هیچ یک از خطهای راست قبل از خود یکی نیست.



فرض می‌کنیم A یک خط راست واسط است؛ می‌گوییم که از A تعداد بینهایت خط راست گنگ پدید می‌آید که هیچ یک از آنها با هیچ یک از خطهای راست قبلی یکی نیست.

فرض می‌کنیم خط راست گویای B معلوم است، و فرض می‌کنیم مربع C با مستطیل A و B مساوی است.

بنابراین C گنگ است؛ [X.تع.۴]

زیراکه مساحت حاصل از یک خط راست گنگ و یک خط راست گویا، گنگ است؛ [استنتاج از X. ۲۰]

و با هیچ یک از خطهای راست قبلی یکی نیست؛ زیرا مربع هر یک از خطهای راست قبلی اگر به یک خط راست گویا اضافه شود، پهنایی پدید می‌آورد که خط راست واسط نیست.

باز فرض می‌کنیم مربع D با مستطیل B و C مساوی است؛ بنابر این مربع D گنگ است.
[استنتاج از X. ۲۰]

بنابراین D گنگ است، و با هیچ یک از خطهای راست قبلی یکی نیست، زیرا مربع هیچ یک از خطهای راست قبل، اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنای C را پدید نمی‌آورد.

به همین منوال اگر این عمل را تا بینهایت ادامه دهیم روشن می‌شود که از یک خط راست واسط خطهای راستی گنگ به تعداد بینهایت پدید می‌آیند که هیچ یک از آنها با هیچ یک از خطهای راست قبل از خود یکی نیست.

آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ یازدهم

تعاریف

۱. جسم آن است که طول و عرض و ارتفاع دارد.
۲. هر جسم به رویه‌هایی محدود است.
۳. یک خط راست زمانی بر یک صفحه عمود است که بر همهٔ خطهای راستی از صفحه که از نقطهٔ تلاقی آن با صفحه می‌گذرند عمود باشد.
۴. دو صفحه زمانی بر هم عمودند که خطهای راستی که در یکی از آنها بر فصل مشترک دو صفحه عمود می‌شوند بر صفحهٔ دیگر عمود باشند.
۵. میل یک خط راست مفروض نسبت به یک صفحه، زاویهٔ حاصل از آن خط راست و خط واصل بین پای عمود وارد برصفحه از یک نقطه از آن خط راست و محل تلاقی آن با صفحه است.
۶. میل [فرجه یا مسطحهٔ] یک صفحه نسبت به صفحهٔ دیگر زاویهٔ حادهٔ حاصل از دو خط راست عمود بر فصل مشترک از یک نقطه از فصل مشترک در دو صفحه است.
۷. یک صفحه نسبت به یک صفحه را با یک صفحه نسبت به صفحهٔ دیگر متشابه [متساوی]المیل گویند، اگر زاویه‌های میل آنها نسبت به هم متساوی باشند.

۸. صفحه‌های متوازی صفحه‌هایی هستند که یکدیگر را نمی‌برند.
۹. شکلهای فضایی [یا مجسم] متشابه شکلهایی هستند که از تعداد مساوی صفحهٔ [چندضلعی] متشابه درست شده‌اند.
۱۰. شکلهای فضایی که یا مجسم متشابه و متساوی[1] شکلهایی هستند که از تعداد مساوی صفحه [چندضلعی] متشابه و متساوی پدید آمده‌اند.
۱۱. کنج (زاویهٔ فضایی یا مجسم) شکل حاصل از میلهای بیش از دو خط متقارب، ناواقع بر یک رویه نسبت به همهٔ خطهای دیگر است.
به بیان دیگر: کنج شکل حاصل از بیش از دو زاویهٔ مستوی ناواقع در یک صفحه است که رأسهای آنها یکی هستند.
۱۲. هرم شکلی است مجسم (یا فضایی) متشکل از چند صفحه که از یک نقطه گذشته‌اند و یک صفحه همهٔ آنها را بریده است.
۱۳. منشور شکلی است مجسم متشکل از صفحه‌هایی که دو تا از آنها، یعنی آن دو که روبه‌رو به یکدیگرند [دو قاعده]، متساوی، متشابه، و متوازی‌اند و بقیه متوازی‌الاضلاع هستند.
۱۴. وقتی یک قطر نیم‌دایره‌ای ثابت بماند و نیم‌دایره حول آن دوران کند و مجدداً به وضع اول برگردد، شکلی که این گونه پدید آمده است کره نام دارد.
۱۵. محور کره خط راست ثابتی است که نیم‌دایره حول آن دوران می‌کند.
۱۶. مرکز کره همان مرکز نیم‌دایره است.
۱۷. قطر کره خط راستی است که از مرکز آن رسم و از دو سمت به سطح کره منتهی شده است.
۱۸. اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمه ثابت بماند و مثلث حول این ضلع دوران کند و دوباره به وضع اول برگردد، شکلی که این گونه به دست می‌آید، مخروط است.
و، اگر خط راستی که ثابت می‌ماند با ضلع دیگرزاویهٔ قائمه که به دور آن می‌گردد مساوی باشد، مخروط قائم‌الزاویه است؛ اگر کوچکتر باشد مخروط منفرج‌الزاویه است، و اگر بزرگتر باشد حادالزاویه است.
۱۹. محور مخروط خط راستی است که ثابت می‌ماند و مثلث حول آن دوران می‌کند.
۲۰. و قاعدهٔ مخروط دایره‌ای است که از دوران ضلع دیگر زاویهٔ قائمه حول محور به دست می‌آید.
۲۱. اگر در یک متوازی‌الاضلاع مستطیلی یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه ثابت بماند و متوازی‌الاضلاع حول آن دوران کند تا به وضع اولیه خود برگردد، شکلی که چنین به دست می‌آید استوانه است.
۲۲. محور استوانه خط راستی است که ثابت می‌ماند و متوازی‌الاضلاع حول آن دوران می‌کند.

۱. منظور از دو شکل متساوی، دو شکلی است که مساحتهای آنها برابرند.ـم.

۲۳. و، قاعده‌های استوانه دایره‌هایی هستند که از دوران دو ضلع روبه‌رو به هم که می‌چرخند به دست می‌آیند.

۲۴. مخروطهای متشابه و استوانه‌های متشابه، مخروطها و استوانه‌هایی هستند که محورها و قطرهای قاعده‌ها در آنها متناسب‌اند.

۲۵. مکعب شکلی است فضایی که از شش مربع متساوی حاصل شده است.

۲۶. هشت‌وجهی شکلی است فضایی که از هشت مثلث متساوی‌الاضلاع متساوی حاصل شده است.

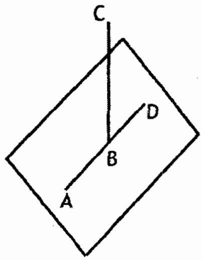
۲۷. بیست‌وجهی شکلی است فضایی که از بیست مثلث متساوی‌الاضلاع متساوی حاصل شده است.

۲۸. دوازده‌وجهی شکلی است فضایی که از دوازده پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع متساوی‌الزاویهٔ متساوی تشکیل شده است.

مقالهٔ XI. قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

یک خط راست نمی‌تواند یک جزء در صفحهٔ مقایسه داشته باشد و یک جزء در صفحهٔ دیگری که صفحهٔ مقایسه را بریده است.



زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم یک جزء AB از خط راست ABC در صفحهٔ مقایسه قرار دارد و جزء BC از آن در صفحهٔ دیگری که صفحهٔ مقایسه را بریده است.

پس، در صفحهٔ مقایسه خط راستی وجود خواهد داشت که با AB بر یک خط راست باشد.

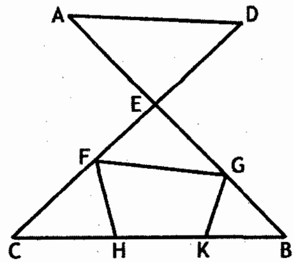
فرض می‌کنیم این خط راست BD است؛ بنابراین AB قطعهٔ مشترک دو خط راست ABC و ABD است: که غیرممکن است؛ زیرا که اگر دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB رسم کنیم قطرهای ABD و ABC کمانهای نامتساوی از دایره جدا خواهند کرد.

بنابراین یک خط راست نمی‌تواند یک جزء در صفحهٔ مقایسه داشته باشد و یک جزء در صفحهٔ دیگر.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

اگر دو خط راست یکدیگر را ببرند، در یک صفحه‌اند، و هر مثلث در یک صفحه است.



فرض می‌کنیم دو خط راست AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ E ببرند؛ می‌گوییم که AB و CD در یک صفحه‌اند، و هر مثلث در یک صفحه است.

زیرا فرض می‌کنیم نقاط F و G را به دلخواه بر EC و EB اختیار کرده‌ایم، و فرض می‌کنیم C را به B و F را به G وصل کرده‌ایم، و FH و GK را در داخل شکل کشیده‌ایم؛ اولاً، می‌گوییم که مثلث ECB در یک صفحه است. زیرا اگر جزئی از مثلث ECB، یعنی FHC یا GBK در صفحهٔ مقایسه واقع باشد و بقیه در صفحهٔ دیگر، یک جزء از خطهای راست EC و EB نیز در صفحهٔ مقایسه واقع می‌شود و یک جزء در صفحهٔ دیگر.

اما اگر جزء $FCBG$ از مثلث ECB در صفحهٔ مقایسه باشد و بقیه در صفحهٔ دیگر، یک جزء از هر دو خط راست EC و EB نیز در صفحهٔ مقایسه واقع می‌شود و یک جزء در صفحهٔ دیگر، که ثابت شده بود محال است. [۱.XI]

بنابراین مثلث ECB در یک صفحه است.

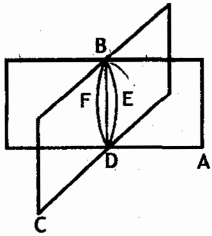
اما، مثلث ECB در هر صفحه که باشد هر یک از خطهای راست EC و EB نیز در همان صفحه است، و هر یک از خطهای راست EC و EB در هر صفحه که باشد AB و CD نیز در همان صفحه خواهند بود. [۱.XI]

بنابراین خطهای راست AB و CD در یک صفحه‌اند، و هر مثلث در یک صفحه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر دو صفحه یکدیگر را ببرند فصل مشترک آنها یک خط راست است.



فرض می‌کنیم دو صفحهٔ AB و BC یکدیگر را بریده‌اند و خط DB فصل مشترک آنهاست؛ می‌گوییم که DB یک خط راست است.

زیرا اگر خط راست نباشد خط راست DEB را از D به B در صفحهٔ AB رسم می‌کنیم، و خط راست DFB را

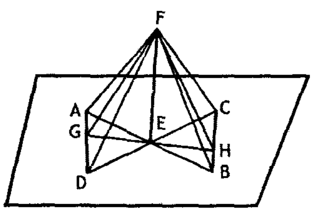
در صفحهٔ BC. پس دو خط راست DFB و DEB در دو سر مشترک‌اند، و واضح است مساحتی را محصور می‌کنند: که بی‌معنی است. بنابراین DEB و DFB خطهای راست نیستند.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط راست دیگری بجز BD، فصل مشترک دو صفحهٔ AB و BC، D را به B وصل نمی‌کند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر خط راستی بر دو خط راست متقاطع، در نقطهٔ تقاطع‌شان عمود باشد، بر صفحهٔ مارّ بر آن دو خط نیز عمود است.



فرض می‌کنیم عمود EF از نقطهٔ E بر خطهای راست AB و CD که یکدیگر را در E بریده‌اند اخراج شده است. می‌گوییم که EF بر صفحهٔ مارّ بر AB و CD نیز عمود است.

زیرا، فرض می‌کنیم AE و EB و CE و ED را مساوی با یکدیگر جدا کرده‌ایم، و فرض می‌کنیم خط راست دلخواه GEH را از نقطهٔ E در داخل شکل رسم و A را به D و B را به C وصل کرده‌ایم. اکنون، فرض می‌کنیم از نقطهٔ دلخواه F <بر EF> به نقاط A و G و D و C و H و B وصل کرده‌ایم. حال، چون دو خط راست AE و ED با دو خط راست CE و EB مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها نیز با هم مساوی‌اند، [۱۵.I] بنابراین AD با CB مساوی است، و مثلث AED با مثلث CEB مساوی خواهد شد؛ [۴.I] لذا زاویهٔ DAE نیز با زاویهٔ EBC مساوی خواهد شد.

اما زاویهٔ AEG نیز با زاویهٔ BEH مساوی است؛ [۱۵.I]

بنابراین AGE و BEH دو مثلث‌اند که به ترتیب دو زاویه مساوی با هم دارند و یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری، یعنی ضلعهای مجاور به زاویه‌های مساوی، AE با EB، مساوی است، بنابراین بقیهٔ اضلاع نیز با بقیهٔ اضلاع مساوی‌اند. [۲۶.I]

بنابراین GE با EH مساوی است و AG با BH. و، چون AE با EB مساوی است و EF مشترک و عمود بر آنها، بنابراین FA با FB مساوی است. [۴.I]

به همین دلیل FC نیز با FD مساوی است. و، چون AD با CB مساوی است، و FA هم با FB مساوی است، دو ضلع FA و AD به ترتیب با دو ضلع FB و BC مساوی‌اند؛ و ثابت شده بود که FD با FC مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ FAD نیز با زاویهٔ FBC مساوی است. [۸.I]

و، باز، چون ثابت شده بود AG با BH مساوی است، و به علاوه FA نیز با FB مساوی است، دو ضلع FA و AG با دو ضلع FB و BH مساوی‌اند. و، ثابت شده بود که زاویهٔ FAG با زاویهٔ FBH مساوی است؛ بنابراین FG با FH مساوی است. [۴.I]

اما، باز، چون ثابت شده بود GE با EH مساوی است، و EF مشترک، دو ضلع GE و EF با دو ضلع HE و EF مساوی‌اند؛ و FG با FH مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ GEF با زاویهٔ HEF مساوی است. [۸.I]

لذا هر یک از زاویه‌های GEF و HEF یک قائمه است. بنابراین FE بر GH، که از نقطهٔ دلخواه E رسم شده، عمود است.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که FE بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه قرار دارند عمود است.

اما، یک خط راست زمانی بر یک صفحه عمود است که بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در آن صفحه قرار دارند عمود باشد. [XI.تع.۳]

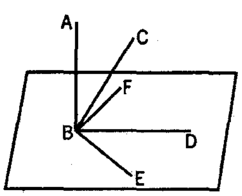
بنابراین FE بر صفحهٔ مقایسه عمود است. اما صفحهٔ مقایسهٔ صفحهٔ مارّ بر خطهای راست AB و CD است.

بنابراین FE بر صفحهٔ مارّ بر AB و CD عمود است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

اگر خط راستی سه خط راست متقارب را در نقطهٔ تلاقی آنها ببرد و بر هر سه عمود باشد، آن سه خط راست در یک صفحه‌اند.



فرض می‌کنیم خط راست AB بر سه خط راست BC و BD و BE در نقطهٔ تلاقی آنها B عمود باشد. می‌گوییم که BC و BD و BE در یک صفحه‌اند.

زیرا فرض می‌کنیم در یک صفحه نباشند، اما در صورت امکان BD و BE در صفحهٔ مقایسه باشند، و BC در صفحهٔ دیگری باشد. فرض می‌کنیم صفحهٔ مارّ بر AB و BC امتداد داده شده و فصل مشترک آن با صفحهٔ مقایسه یک خط راست است. [۳.XI]

فرض می‌کنیم این خط راست BF باشد.

بنابراین سه خط راست AB و BC و BF در یک صفحه‌اند که بر AB و BC گذشته

است. اما، چون AB بر هر یک از خطهای راست BD و BE عمود است، بنابراین بر صفحهٔ مارّ بر BD و BE نیز عمود است. [۴.XI]

اما صفحهٔ مارّ بر BD و BE صفحهٔ مقایسه است. بنابراین AB بر صفحهٔ مقایسه عمود است. از این رو AB بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه هستند نیز عمود است. [تع.۳.XI]

اما BF که در صفحهٔ مقایسه است آن را می‌برد؛ بنابراین زاویهٔ ABF قائمه است.

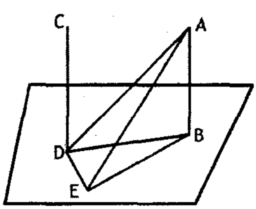
اما بنا به فرض زاویهٔ ABC هم قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ ABF با زاویهٔ ABC مساوی است. و در یک صفحه‌اند: که غیرممکن است.

بنابراین خط راست BC در صفحهٔ دیگری جز صفحهٔ مقایسه قرار ندارد. لذا سه خط راست BC و BD و BE در یک صفحه‌اند. پس اگر خط راستی سه خط متقارب را در نقطهٔ تلاقی آنها ببرد و بر آنها عمود باشد، آن سه خط راست در یک صفحه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

دو خط راست عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم دو خط راست AB و CD بر صفحهٔ مقایسه عمودند. می‌گوییم که AB با CD موازی است. زیرا، فرض می‌کنیم این دو خط راست صفحهٔ مقایسه را در دو نقطهٔ B و D بریده‌اند. B را به D وصل، و DE را در صفحهٔ مقایسه بر BD عمود می‌کنیم. DE را مساوی با AB جدا و D را به A و E را به A و B وصل می‌کنیم.

حال، چون AB بر صفحهٔ مقایسه عمود است بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه قرار دارند، عمود است. [تع.۳.XI]

اما هر یک از خطهای راست BD و BE در صفحهٔ مقایسه است و AB را بریده است. بنابراین هر یک از زاویه‌های ABD و ABE قائمه است. به همین دلیل هر یک از زاویه‌های CDB و CDE نیز قائمه است. و، چون AB با DE مساوی و BD مشترک است، دو ضلع AB و BD با دو ضلع ED و DB مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها نیز قائمه‌اند، بنابراین ضلع AD با ضلع BE مساوی است. [۴.I]

و، چون AB با DE مساوی است و AD نیز با BE مساوی است، دو ضلع AB و BE

با دو ضلع ED و DA مساوی‌اند و AE ضلع مشترک در آنهاست؛ بنابراین زاویهٔ ABE با زاویهٔ EDA مساوی است. [۸.I]

اما زاویهٔ ABE قائمه است، پس زاویهٔ EDA نیز قائمه است؛ بنابراین ED بر DA عمود است.

اما ED بر هر یک از خطهای راست BD و DC نیز عمود است، بنابراین ED بر سه خط راست BD و DA و DC در نقطهٔ تلاقی‌شان عمود شده است؛ لذا سه خط راست DB و DA و DC در یک صفحه‌اند. [۵.XI]

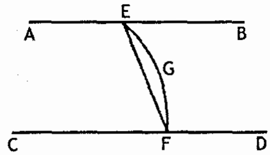
اما DB و DA در هر صفحه که باشند AB هم در آن صفحه است، زیرا هر مثلث در یک صفحه است. [۲.XI]

بنابراین خطهای راست AB و BD و DC در یک صفحه‌اند، و هر یک از زاویه‌های ABD و BDC قائمه است؛ بنابراین AB با CD موازی است. [۲۸.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر دو خط راست با هم موازی باشند، و بر هر یک نقطهٔ دلخواهی اختیار شود، خط راست واصل بین این دو نقطه در همان صفحهٔ دو خط موازی قرار دارد.



فرض می‌کنیم AB و CD دو خط راست موازی با هم باشند، و فرض می‌کنیم نقاط دلخواه E و F به ترتیب بر آنها اختیار شده‌اند، می‌گوییم که خط راست واصل بین دو نقطهٔ E و F در همان صفحهٔ دو خط راست موازی واقع است.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین نیست، و خط واصل بین دو نقطهٔ E و F مثلاً در صفحهٔ دیگر EFG واقع است. فرض می‌کنیم یک صفحه بر EGF گذشته است که فصل مشترکش با صفحهٔ مقایسه یک خط راست است. [۳.XI]

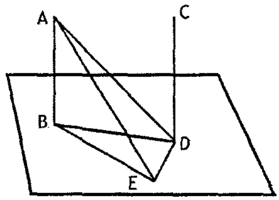
فرض می‌کنیم این فصل مشترک EF است؛ بنابراین دو خط راست EGF و EF مساحتی را محصور خواهند کرد: که غیرممکن است.

بنابراین خط راست واصل بین دو نقطهٔ E و F در صفحهٔ دیگر قرار ندارد؛ لذا خط راست واصل بین E و F در صفحهٔ مار بر خطهای متوازی AB و CD واقع است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر یکی از دو خط راست متوازی بر صفحه‌ای عمود باشد، دیگری نیز بر آن عمود است.



فرض می‌کنیم AB و CD دو خط راست متوازی‌اند، و یکی از آنها، AB، بر صفحهٔ مقایسه عمود است، می‌گوییم که دیگری، CD، نیز بر این صفحه عمود است.

زیرا، فرض می‌کنیم AB و CD صفحهٔ مقایسه را در نقاط B و D بریده‌اند، و فرض می‌کنیم B به D وصل شده است. بنابراین AB و BD و DC در یک صفحه‌اند. [۷.XI]

DE را در صفحهٔ مقایسه بر BD عمود می‌کنیم، و DE را مساوی با AB جدا، و B را به E و A را به D و E وصل می‌کنیم. حال، چون AB بر صفحهٔ مقایسه عمود است، بنابراین بر همهٔ خطوطی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه قرار دارند عمود است. [XI.تع.۳]

بنابراین زاویه‌های ABD و ABE قائمه‌اند.

و، چون خط راست BD بر خطهای متوازی AB و CD فرود آمده است، لذا زاویه‌های ABD و CDB مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۹.I]

اما زاویهٔ ABD قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ CDB نیز قائمه است؛ لذا CD بر BD عمود است.

و، چون AB با DE مساوی است، و BD مشترک، دو ضلع AB و BD با دو ضلع ED و DB مساوی‌اند و زاویهٔ ABD با زاویهٔ EDB مساوی است، زیرا هر یک برابر با یک قائمه است؛ بنابراین AD با BE مساوی است.

و، چون AB با DE مساوی است، و BE با AD، لذا دو ضلع AB و BE به ترتیب با دو ضلع ED و DA مساوی‌اند و AE در آنها (در دو مثلث AED و ABE) مشترک است، بنابراین زاویهٔ ABE با زاویهٔ EDA مساوی است.

اما زاویهٔ ABE قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ EDA نیز قائمه است؛ پس ED بر AD عمود است. اما ED بر DB هم عمود بود، پس ED بر صفحهٔ مار بر BD و AD عمود است. [۴.XI]

بنابراین ED بر همهٔ خطهای راست واقع در صفحهٔ مار بر BD و DA که آن را می‌برند نیز عمود است. اما DC در صفحهٔ مار بر BD و DA واقع است، زیرا AB و BD در صفحهٔ مار بر BD و DA واقع‌اند، [۲.XI]

و DC نیز در صفحهٔ AB و BD قرار دارد؛ در نتیجه ED بر CD عمود است، لذا CD نیز

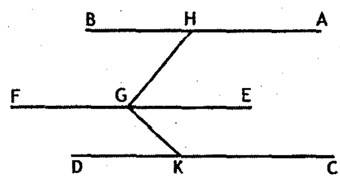
بر DE عمود است. اما CD بر BD نیز عمود است. بنابراین CD بر دو خط راست DE و BD، که یکدیگر را بریده‌اند در نقطهٔ تقاطع‌شان، D، عمود است. لذا CD بر صفحهٔ مار بر DE و DB عمود است. [۴.XI]

اما صفحهٔ مار بر DE و DB همان صفحهٔ مقایسه است؛ بنابراین CD بر صفحهٔ مقایسه عمود است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

خطهای راستی که با یک خط راست موازی باشند و با آن در یک صفحه نباشند، خود نیز با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم هر یک از خطهای راست AB و CD با خط راست EF، که با آن در یک صفحه نیستند، موازی باشد. می‌گوییم AB با CD موازی است.

زیرا فرض می‌کنیم نقطهٔ دلخواه G را بر EF گرفته‌ایم و از آن GH را در صفحهٔ مار بر EF و AB بر EF عمود می‌کنیم، و GK را در صفحهٔ مار بر FE و CD باز بر همان EF عمود می‌کنیم. حال، چون EF بر هر یک از خطهای راست GH و GK عمود است، بنابراین بر صفحهٔ مار بر GH و GK نیز عمود است. [۴.XI]

و، EF با AB موازی است؛ بنابراین AB نیز بر صفحهٔ مار بر GH و GK عمود است.[۸.XI]

به همین دلیل CD نیز بر صفحهٔ مار بر HG و GK عمود است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست AB و CD بر صفحهٔ مار بر HG و GK عمود است.

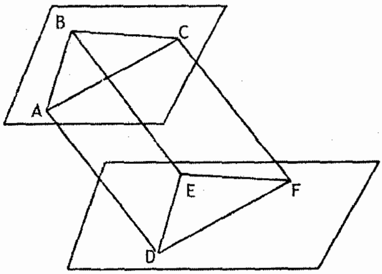
اما اگر دو خط راست بر یک صفحه عمود باشند با هم موازی‌اند. [۶.XI]

لذا AB با CD موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

اگر دو خط راست متقاطع با دوخط راست متقاطع دیگری که با آنها در یک صفحه نیستند، موازی باشند زاویه‌های بین این خطهای راست با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم دو خط راست متقاطع AB و BC با دو خط راست متقاطع DE و EF که با آنها در یک صفحه نیستند موازی‌اند؛ می‌گوییم زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی است. زیرا فرض می‌کنیم BA و BC و ED و EF مساوی با هم جدا شده‌اند، و فرض می‌کنیم A به D و C به F و B به E وصل شده است، و C به F و D و E به B.

حال، چون BA با ED مساوی و موازی است، بنابراین AD نیز با BE مساوی و موازی است. [۳۳.I]

به همین دلیل CF نیز با BE مساوی و موازی است. بنابراین هر یک از خطهای راست AD و CF با BE مساوی و موازی است.

اما خطهای راستی که با یک خط راست موازی‌اند و با آن در یک صفحه نیستند با هم موازی‌اند. [۹.XI]

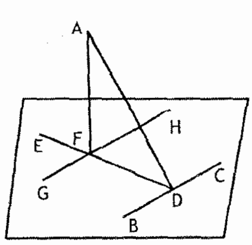
بنابراین AD با CF مساوی و موازی است. و AC و DF واصل بین آنها هستند. بنابراین AC نیز با DF مساوی و موازی است. [۳۳.I]

اما، چون دوضلع AB و BC با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و AC با DF مساوی است، بنابراین زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی است. [۸.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

مطلوب رسم خط راستی است عمود بر صفحهٔ مفروض از نقطهٔ مفروضی در خارج آن.



فرض می‌کنیم A نقطهٔ مفروضی در خارج صفحه باشد، و صفحهٔ مقایسه صفحهٔ مفروض. پس مطلوب رسم خط راستی است از A عمود بر صفحهٔ مقایسه.

فرض می‌کنیم خط راست BC، به دلخواه، در صفحهٔ مقایسه رسم شده است، و فرض می‌کنیم AD از A بر BC عمود شده است. [۱۲.I]

حال اگر AD بر صفحهٔ مقایسه نیز عمود باشد، آنچه می‌خواستیم حاصل شده است. اما،

اگر نه، فرض می‌کنیم DE از نقطهٔ D در صفحهٔ مقایسه بر BC عمود شده است. [۱۱.I]

AF را از A بر DE عمود، [۱۲.I]

و فرض می‌کنیم GH از نقطهٔ F به موازات BC رسم شده است. [۳۱.I]

حال، چون BC بر هر یک از خطهای راست DA و DE عمود است، بنابراین BC بر صفحهٔ مار بر ED و DA نیز عمود است. [۴.XI]

و، GH با آن موازی است؛ اما اگر دو خط راست موازی باشند و یکی از آنها بر صفحه‌ای عمود باشد دیگری نیز بر آن صفحه عمود است، [۸.XI]

بنابراین GH نیز بر صفحهٔ مار بر ED و DA عمود است.

لذا، GH بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مار بر ED و DA قرار دارند نیز عمود است. [XI.تع.۳]

اما AF آن را می‌برد و در صفحهٔ مار بر ED و DA واقع است؛ بنابراین GH بر FA عمود است، لذا FA نیز بر GH عمود است.

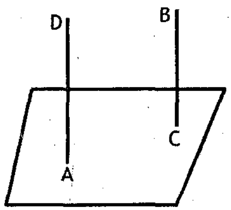
اما AF نیز بر DE عمود است. بنابراین AF بر هر یک از خطهای راست GH و DE عمود است. اما اگر خط راستی بر دو خط راستی که یکدیگر را بریده‌اند در نقطهٔ تلاقی‌شان عمود باشد، بر صفحهٔ مار بر آن دو خط نیز عمود است. [۴.XI]

بنابراین FA بر صفحهٔ مار بر ED و GH عمود است. اما صفحهٔ مار بر ED و GH همان صفحهٔ مقایسه است. بنابراین AF بر صفحهٔ مقایسه عمود است. در نتیجه، ازنقطهٔ مفروض A واقع در خارج صفحهٔ مقایسه خط راست AF بر صفحهٔ مقایسه عمود شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

مطلوب اخراج خط راستی است عمود بر صفحهٔ مفروض از نقطهٔ مفروضی واقع بر آن.



فرض می‌کنیم صفحهٔ مقایسه صفحهٔ مفروض باشد، و A نقطه‌ای بر آن. پس مطلوب اخراج خط راستی است از نقطهٔ A عمود بر صفحهٔ مقایسه.

نقطه‌ای مانند B در خارج صفحهٔ مقایسه در نظر می‌گیریم؛

از B عمود BC را بر صفحهٔ مقایسه فرود می‌آوریم، [۱۱.XI]

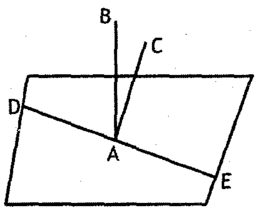
و از نقطهٔ A، AD را موازی با BC رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

در این صورت، چون AD و CB دو خط راست متوازی‌اند و یکی از آنها، BC، بر صفحهٔ

مقایسه عمود است، بنابراین خط راست دیگر، AD، نیز بر صفحهٔ مقایسه عمود است. [۸.XI]
در نتیجه، از نقطهٔ A واقع بر صفحهٔ مفروض خط راست AD عمود بر آن اخراج شده است.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

از یک نقطهٔ واقع در یک صفحه نمی‌توان دو خط راست عمود بر آن صفحه و در یک طرف آن اخراج کرد.



زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد، و از یک نقطهٔ A در صفحهٔ مقایسه دو خط راست AB و AC در یک طرف صفحه و عمود بر آن اخراج شده است، و فرض می‌کنیم بر BA و AC صفحه‌ای مرور کرده است که فصل مشترکش با صفحهٔ مقایسه خط راستی است که بر A می‌گذرد. [۳.XI]

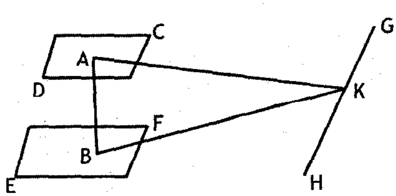
فرض می‌کنیم این خط راست DAE است؛ بنابراین خطهای راست AB و AC و DAE در یک صفحه‌اند. و، چون CA بر صفحهٔ مقایسه عمود است، بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه قرار دارند، نیز عمود است. [XI.تع.۳]
اما DAE این خط راست را می‌برد و در صفحهٔ مقایسه واقع است؛ بنابراین زاویهٔ CAE قائمه است.

به همین دلیل زاویهٔ BAE نیز قائمه است. بنابراین زاویهٔ CAE با زاویهٔ BAE مساوی است، و این دو زاویه در یک صفحه قرار دارند: که غیرممکن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

صفحه‌های عمود بر یک خط راست، با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم خط راست دلخواه AB بر هر یک از صفحه‌های CD و EF عمود است. می‌گوییم که این دو صفحه با هم موازی‌اند. زیرا، اگر با هم موازی نباشند امتدادهای آنها یکدیگر را می‌برند.

فرض می‌کنیم امتدادهای این دو صفحه یکدیگر را ببرند؛ فصل مشترک آنها یک خط راست است. [۳.XI]

فرض می‌کنیم این فصل مشترک GH باشد. نقطهٔ K را، به دلخواه، بر GH اختیار می‌کنیم و آن را به A و B وصل می‌کنیم.

حال، چون AB بر صفحهٔ EF عمود است، پس بر BK هم که خط راستی در قسمت امتداد یافتهٔ صفحهٔ EF است عمود است. [XI.تع.۳]

بنابراین زاویهٔ ABK قائمه است. به همین دلیل زاویهٔ BAK نیز قائمه است. لذا در مثلث ABK دو زاویهٔ ABK و BAK مساوی با دو قائمه‌اند: که غیرممکن است. [I.۱۷]

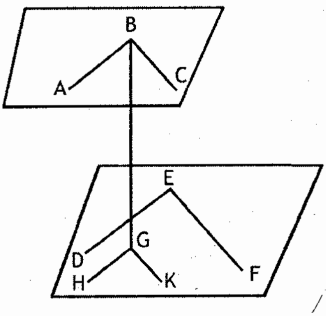
بنابراین امتدادهای صفحه‌های CD و EF یکدیگر را نمی‌برند. در نتیجه صفحه‌های CD و EF با هم موازی‌اند. [XI.تع.۸]

لذا صفحه‌های عمود بر یک خط راست با هم موازی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر دو خط راست متقاطع با دو خط راست متقاطع دیگر که با آنها در یک صفحه نیستند موازی باشند، صفحه‌های مار بر آنها با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم دو خط راست متقاطع AB و BC با دو خط راست متقاطع DE و EF، که با آنها در یک صفحه نیستند، موازی باشند. می‌گوییم که امتدادهای صفحهٔ مار بر AB و BC و صفحهٔ مار بر DE و EF یکدیگر را نمی‌برند.

زیرا، فرض می‌کنیم BG از نقطهٔ B بر صفحهٔ مار بر DE و EF عمود شده است. [XI.۱۱] و، فرض می‌کنیم این صفحه را در نقطهٔ G بریده است. از G، GH را موازی با ED، و GK را موازی با EF رسم می‌کنیم. [I.۳۱]

حال، چون BG بر صفحهٔ مار بر DE و EF عمود است، پس بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در این صفحه واقع‌اند نیز عمود است. [XI.تع.۳]

اما، هر یک از خطهای راست GH و GK آن را می‌برند و در صفحهٔ مار بر DE و EF واقع‌اند؛ بنابراین هر یک از زاویه‌های BGH و BGK قائمه است.

و، چون BA با GH موازی است، [XI.۹]

لذا زاویه‌های GBA و BGH مساوی با دو قائمه‌اند. [I.۲۹]

اما زاویهٔ BGH قائمه است؛ بنابراین زاویهٔ GBA نیز قائمه است؛ پس GB بر BA عمود است.

به همین دلیل GB بر BC نیز عمود است. در این صورت، چون خط راست GB بر دو خط راست BA و BC که یکدیگر را بریده‌اند عمود است، بنابراین، GB بر صفحهٔ مار بر BA و BC نیز عمود است. [۴.XI]

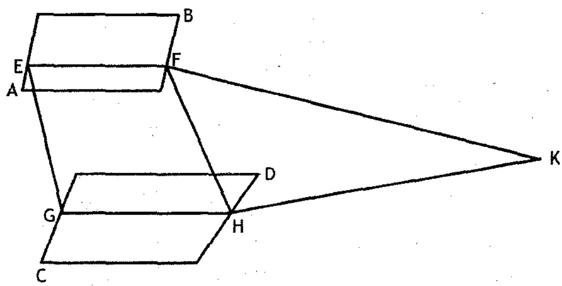
اما صفحه‌های عمود بر یک خط راست با هم موازی‌اند؛ [۱۴.XI]

بنابراین صفحهٔ مار بر AB و BC با صفحهٔ مار بر DE و EF موازی است. لذا اگر دو خط راست متقاطع با دو خط راست دیگری که با آنها در یک صفحه نیستند موازی باشند، صفحه‌های مار بر آنها با هم موازی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

اگر دو صفحهٔ متوازی با صفحه‌ای دلخواه بریده شده باشند، فصل مشترکها با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم دو صفحهٔ متوازی AB و CD با صفحهٔ $EFGH$ بریده شده است، و فرض می‌کنیم EF و GH فصل مشترکهای آنها هستند. می‌گوییم EF با GH موازی است.

زیرا اگر موازی نباشند، امتدادهای آنها یا در جهت F و H یکدیگر را می‌برند، یا در جهت E و G.

اول فرض می‌کنیم امتدادهای آنها در جهت F و H یکدیگر را در K ببرند. حال، چون EFK در صفحهٔ AB است، بنابراین همهٔ نقاط واقع بر EFK نیز در صفحهٔ AB است.[۱.XI]

اما K یکی از نقاط واقع بر خط راست EFK است؛ بنابراین K در صفحهٔ AB است. به همین دلیل K در صفحهٔ CD نیز هست. پس امتدادهای صفحه‌های AB و CD یکدیگر را می‌برند.

اما این صفحه‌ها یکدیگر را نمی‌برند، زیرا بنا به فرض موازی‌اند؛ بنابراین خطهای راست EF و GH وقتی در جهت F و H امتداد داده شوند یکدیگر را نمی‌برند.

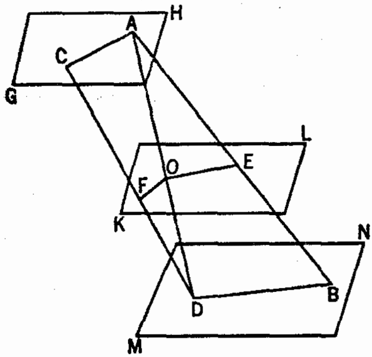
به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که امتدادهای خطهای راست EF و GH در جهت E و G هم یکدیگر را نمی‌برند. اما خطهای راستی که در هیچ یک از دو جهت یکدیگر را نبرند با هم موازی‌اند. [I. تع. ۲۳]

بنابراین EF با GH موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

هرگاه دو خط راست با صفحه‌های متوازی بریده شوند، به یک نسبت بریده خواهند شد.



فرض می‌کنیم دو خط راست AB و CD با صفحه‌های متوازی GH و KL و MN در نقاط A و E و B، و C و F و D بریده شده‌اند.

می‌گوییم که نسبت خط راست AE به EB مثل نسبت CF است به FD.

زیرا فرض می‌کنیم A به C و D وصل شده و B به D. فرض می‌کنیم صفحهٔ AD صفحهٔ KL را در نقطهٔ O بریده است و O به E و F وصل شده است. حال، چون دو صفحهٔ متوازی KL و MN با صفحهٔ $EBDO$ بریده شده‌اند فصل مشترکهای آنها، EO و BD، با هم موازی‌اند. [۱۶.XI]

به همین دلیل، چون دو صفحهٔ متوازی GH و KL با صفحهٔ $AOFC$ بریده شده‌اند فصل مشترکهای آنها AC و OF با هم موازی‌اند. [همان قضیه]

و، چون خط راست EO با BD، یکی از اضلاع مثلث ABD، موازی است بنابراین از لحاظ تناسب داریم نسبت AE به EB مثل نسبت AO است به OD. [۲.VI]

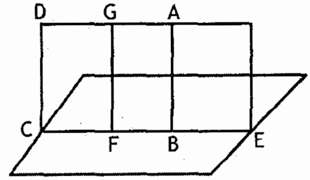
باز چون خط راست OF با AC، یکی از اضلاع مثلث ADC، موازی است، از لحاظ تناسب داریم نسبت AO به OD مثل نسبت CF است به FD. [همان قضیه]

اما ثابت شده بود که نسبت AO به OD مثل نسبت AE است به EB؛ بنابراین نسبت AE به EB نیز مثل نسبت CF است به FD. [۱۱.V]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، همهٔ صفحه‌های مار بر آن نیز بر آن صفحه عمودند.



فرض می‌کنیم خط راست AB بر صفحهٔ مقایسه عمود باشد؛ می‌گوییم همهٔ صفحه‌های مار بر AB نیز بر صفحهٔ مقایسه عمود است.

زیرا، فرض می‌کنیم صفحهٔ DE بر AB گذشته است و CE، فصل مشترک این صفحه با صفحهٔ مقایسه است.

نقطهٔ دلخواه F را بر CE می‌گیریم و از F عمود FG را در صفحهٔ DE بر CE اخراج می‌کنیم. [۱۱.I]

حال، چون AB بر صفحهٔ مقایسه عمود است، بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه واقع‌اند نیز عمود است. [XI.تع.۳]

لذا AB بر CE نیز عمود است. بنابراین زاویهٔ ABF قائمه است. اما زاویهٔ GFB نیز قائمه است، لذا AB با FG موازی است. [۲۸.I]

اما AB بر صفحهٔ مقایسه عمود است، بنابراین FG هم بر صفحهٔ مقایسه عمود است.[۸.XI]

اما یک صفحه زمانی بر یک صفحه عمود است که خطهای راستی که در یکی از آنها بر فصل مشترک دو صفحه عمودند، بر صفحهٔ دیگر عمود باشند، [XI.تع.۴]

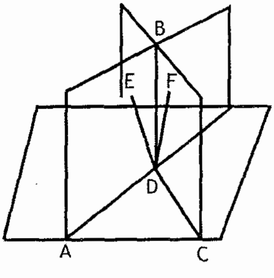
و FG که در یکی از صفحه‌ها، یعنی DE، بر CE، فصل مشترک دو صفحه، عمود است، ثابت شده بود که بر صفحهٔ مقایسه عمود است، بنابراین صفحهٔ DE بر صفحهٔ مقایسه عمود است.

همچنین به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که همهٔ صفحه‌های مار بر AB بر صفحهٔ مقایسه عمودند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

اگر دو صفحه که یکدیگر را بریده‌اند بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آنها نیز بر آن صفحه عمود است.



فرض می‌کنیم دو صفحهٔ AB و BC بر صفحهٔ مقایسه عمودند. و فرض می‌کنیم BD فصل مشترک آنهاست. می‌گوییم که BD بر صفحهٔ مقایسه عمود است.

زیرا، فرض می‌کنیم عمود نیست، و از نقطهٔ D عمود DE را در صفحهٔ AB بر خط راست AD اخراج می‌کنیم و عمود DF را در صفحهٔ BC بر CD اخراج می‌کنیم.

حال، چون صفحهٔ AB بر صفحهٔ مقایسه عمود است و DE در صفحهٔ AB بر فصل مشترک آنها، یعنی AD، عمود شده است، بنابراین DE بر صفحهٔ مقایسه عمود است.[XI.تع.۴]

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که DF نیز بر صفحهٔ مقایسه عمود است.

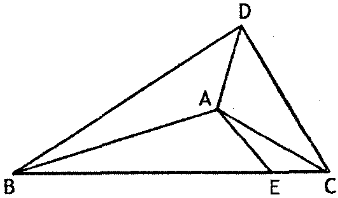
لذا، از یک نقطهٔ D دو خط راست عمود بر صفحهٔ مقایسه و در یک طرف آن اخراج شده است: که غیرممکن است. [۱۳.XI]

بنابراین هیچ خط راست دیگری جز فصل مشترک صفحه‌های AB و BC، یعنی DB، نمی‌توان از نقطه D اخراج کرد که بر صفحهٔ مقایسه عمود باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

اگر کنجی که از سه زاویهٔ مستوی تشکیل شده است، هر دو زاویه روی هم، به هر طریق که گرفته شوند، از سومی بزرگترند.



فرض می‌کنیم کنج A از سه زاویهٔ مستوی BAC و CAD و DAB درست شده است. می‌گوییم که هر دو زاویه از سه زاویهٔ BAC و CAD و DAB به هر طریق که اختیار شوند، از زاویهٔ سومی بزرگترند. حال، اگر زاویه‌های BAC و CAD و DAB با هم مساوی باشند روشن است که هر دو زاویه با هم از زاویهٔ سوم بزرگترند.

اما اگر مساوی نباشند، فرض می‌کنیم BAC زاویهٔ بزرگتر باشد، و بر خط راست AB و در نقطهٔ A از آن زاویهٔ BAE را مساوی با زاویهٔ DAB در صفحهٔ مار بر BA و AC جدا می‌کنیم، و AE را مساوی با AD اختیار، و فرض می‌کنیم از نقطهٔ E خط راست BEC را رسم کرده‌ایم که AB و AC را در نقاط B و C بریده است؛ و D را به B و C وصل می‌کنیم. حال، چون DA با AE مساوی و AB مشترک است، دو ضلع با دو ضلع مساوی و زاویهٔ DAB با زاویهٔ BAE مساوی است؛ بنابراین DB با BE مساوی است. [۴.I]

و، چون [مجموع] دو ضلع BD و DC از BC بزرگتر است، [۲۰.I]

و ثابت شده بود که DB با BE مساوی است، بنابراین باقیماندهٔ DC از باقیماندهٔ EC بزرگتر است.

اما، چون DA با AE مساوی و AC مشترک است، و DC از EC بزرگتر است، بنابراین زاویهٔ DAC از زاویهٔ EAC بزرگتر است. [۲۵.I]

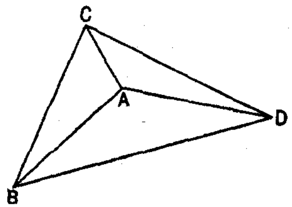
اما زاویهٔ DAB مساوی با زاویهٔ BAE جدا شده بود، بنابراین [مجموع] زاویه‌های DAB و DAC از زاویهٔ BAC بزرگتر است.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که زاویه‌های دیگر نیز دو به دو، به هر طریق گرفته شوند، روی هم از سومی بزرگترند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

هر کنج از زاویه‌هایی مستوی تشکیل شده است که [مجموع آنها] از چهار قائمه کمتر است.



فرض می‌کنیم کنج A از زاویه‌های مستوی BAC و CAD و DAB تشکیل شده است. می‌گوییم که [مجموع] زاویه‌های BAC و CAD و DAB از چهار قائمه کمتر است.

زیرا نقاط دلخواه B و C و D را به ترتیب بر خطهای راست AB و AC و AD اختیار و B را به C وصل می‌کنیم، و C را به D، و D را به B. حال، چون کنج B شامل سه زاویهٔ مستوی CBA و ABD و CBD است، [مجموع] هر دو زاویه روی هم از زاویهٔ سوم بزرگتر است؛ [XI.۲۰]

بنابراین [مجموع] زاویه‌های CBA و ABD از زاویهٔ CBD بزرگتر است.

به همین دلیل [مجموع] زاویه‌های BCA و ACD نیز از زاویهٔ BCD بزرگتر است، و [مجموع] زاویه‌های CDA و ADB از زاویهٔ CDB بزرگتر است. بنابراین [مجموع] شش زاویهٔ CBA و ABD و BCA و ACD و CDA و ADB از [مجموع] سه زاویهٔ CBD و BCD و CDB بزرگتر است.

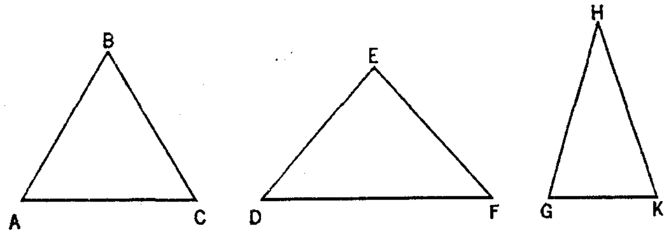
اما [مجموع] سه زاویهٔ CBD و BDC و BCD مساوی با دو قائمه‌اند؛ [I.۳۲]

بنابراین [مجموع] شش زاویهٔ CBA و ABD و BCA و ACD و CDA و ADB بزرگتر از دو قائمه است. و، چون [مجموع] سه زاویهٔ هر یک از مثلثهای ABC و ACD و ADB مساوی با دو قائمه‌اند، بنابراین [مجموع] نه زاویهٔ این سه مثلث، یعنی زاویه‌های CBA و ACB و BAC و ACD و CDA و CAD و ADB و DBA و BAD مساوی با شش قائمه است. و از آنها روی هم شش زاویهٔ ABC و BCA و ACD و CDA و ADB و DBA از دو قائمه بزرگتر است. بنابراین [مجموع] سه زاویهٔ باقی‌ماندهٔ BAC و CAD و DAB، که کنج را تشکیل می‌دهند، از چهار قائمه کمتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

اگر سه زاویهٔ مستوی در دست باشند که روی هم هر دو زاویهٔ آنها به هر طریق گرفته شوند از سومی بزرگتر باشد و ضلعهای این زاویه‌ها همه با هم مساوی باشند، با سه خط راست حاصل از وصل کردن دو سر ضلعهای مساوی در هر زاویه به یکدیگر، می‌توان یک مثلث ساخت.

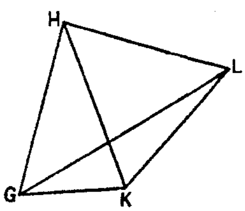


فرض می‌کنیم زاویه‌های ABC و DEF و GHK سه زاویهٔ مستوی مفروض‌اند که به هر طریق گرفته شوند، روی هم هر دو تای آنها از سومی بزرگتر است، یعنی [مجموع] زاویه‌های ABC و DEF از زاویهٔ GHK بزرگتر است و زاویه‌های DEF و GHK از زاویهٔ ABC، و نیز زاویه‌های GHK و ABC از زاویهٔ DEF. فرض می‌کنیم خطهای راست AB و BC و DE و EF و GH و HK با هم مساوی باشند، و A را به C، و F را به D، و K را به G وصل می‌کنیم.

می‌گوییم که از خطهای راستی مساوی با AC و DF و GK می‌توان یک مثلث ساخت، یعنی که [مجموع] هر دو خط راست AC و DF و GK از سومی بزرگتر است.

حال، اگر زاویه‌های ABC و DEF و GHK با هم مساوی باشند، روشن است که AC و DF و GK نیز با هم مساوی‌اند، و می‌توان با سه خط راست مساوی با AC و DF و GK مثلثی بنا کرد.

اما، اگر نه، فرض می‌کنیم نامساوی‌اند و بر خط راست HK و از نقطهٔ H بر آن زاویهٔ KHL را مساوی با زاویهٔ ABC بنا، و فرض می‌کنیم LH مساوی با یکی از خطهای راست AB و BC و DE و EF و GH و HK اختیار، و L به K و G وصل شده است.



حال، چون دو ضلع AB و BC با دو ضلع KH و HL مساوی‌اند، و زاویهٔ B با زاویهٔ KHL مساوی است، بنابراین AC با KL مساوی است. [۴.I]

و، چون [مجموع] زاویه‌های ABC و GHK از زاویهٔ DEF بزرگتر است، و زاویهٔ ABC با زاویه KHL مساوی است، بنابراین زاویهٔ GHL از زاویهٔ DEF بزرگتر است.

و، چون دو ضلع GH و HL با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویهٔ GHL از زاویهٔ DEF بزرگتر است، بنابراین GL از DF بزرگتر است. [۲۴.I]

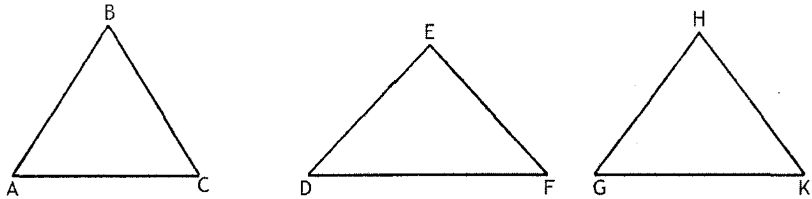
اما GK و KL از GL بزرگترند. بنابراین GK و KL به مراتب از DF بزرگترند. اما KL با AC مساوی است؛ بنابراین روی هم AC و GK از خط راست دیگر DF بزرگتر است. به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که روی هم AC و DF از GK بزرگتر است، و نیز DF و GK از AC.

بنابراین می‌توان از سه خط راست مساوی با AC و DF و GK مثلثی بنا کرد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

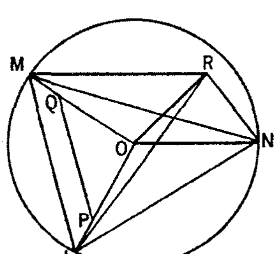
مطلوب رسم کنجی از سه زاویهٔ مستوی است که در آنها هر دو زاویه روی هم به هر طریق گرفته شوند از زاویهٔ سوم بزرگتر باشد: بنابراین سه زاویه باید کمتر از چهار قائمه باشد.



فرض می‌کنیم زاویه‌های ABC و DEF و GHK سه زاویهٔ مستوی مفروض هستند که مجموع هر دو تای آنها به هر طریق گرفته شوند از سومی بزرگتر است، و به علاوه مجموع هر سه زاویه از چهار قائمه کمتر است. بنابراین مطلوب ساختن کنجی است از زاویه‌هایی مساوی با زاویه‌های ABC و DEF و GHK.

خطهای راست AB و BC و DE و EF و GH و HK را مساوی با هم جدا و A را به C وصل می‌کنیم، و D را به F، و G را به K؛ بنابراین می‌توان با خطهای راست مساوی با AC و DF و GK مثلثی بنا کرد. [۲۲.XI]

فرض می‌کنیم مثلث LMN چنان رسم شده است که AC با LM مساوی است؛ و DF با MN، و نیز GK با LN؛ و دایرهٔ محیطی مثلث LMN را رسم و فرض می‌کنیم مرکز آن O است؛ O را به L و M و N وصل می‌کنیم. می‌گوییم که AB از LO بزرگتر است. زیرا، اگر AB بزرگتر از LD نباشد، یا با آن مساوی است و یا از آن کوچکتر.



ابتدا، فرض می‌کنیم مساوی است، پس در این صورت چون AB با LO مساوی است، و AB با BC، و OL با OM، دو ضلع AB و BC به ترتیب با دو ضلع LO و MO مساوی‌اند؛ و بنا به فرض AC با LM مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ ABC با زاویهٔ LOM مساوی است. [۸.I]

به همین دلیل زاویهٔ DEF نیز با زاویهٔ MON مساوی است، و نیز زاویهٔ GHK با زاویهٔ NOL مساوی است. بنابراین سه زاویهٔ ABC و DEF و GHK با سه زاویهٔ LOM و MON و NOL مساوی‌اند.

اما [مجموع] سه زاویهٔ LOM و MON و NOL مساوی با چهار قائمه است. بنابراین

[مجموع] زاویه‌های ABC و DEF و GKH مساوی با چهار قائمه است. اما، بنا به فرض [مجموع] این زاویه‌ها از چهار قائمه کمتر نیز هست: که محال است.

بنابراین AB با LO مساوی نیست. حال، می‌گوییم AB از LO کوچکتر هم نیست.

زیرا، فرض می‌کنیم، در صورت امکان، AB از LO کوچکتر باشد. OP را مساوی با AB، و OQ را مساوی با BC، می‌گیریم و Q را به P وصل می‌کنیم.

در این صورت، چون AB با BC مساوی است، OP نیز با OQ مساوی است، لذا LP که به جا مانده با QM مساوی است. بنابراین LM با PQ موازی است، [۲.VI]

و LMO با PQO متساوی‌الزاویه است؛ [۲۹.I]

بنابراین نسبت OL به LM همچون نسبت OP است به PQ؛ [۴.VI]

و با ابدال نسبت، نسبت LO به OP همچون نسبت LM است به PQ. [۱۶.V]

اما LO از OP بزرگتر است؛ بنابراین LM نیز از PQ بزرگتر است. اما LM مساوی با AC گرفته شده بود؛ بنابراین AC نیز از PQ بزرگتر است.

از این‌رو، چون دو ضلع AB و BC با دو ضلع PO و OQ مساوی‌اند، و AC از PQ بزرگتر است، بنابراین زاویهٔ ABC از زاویهٔ POQ بزرگتر است. [۲۵.I]

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که زاویهٔ DEF نیز از زاویهٔ MON بزرگتر است، و زاویهٔ GHK از زاویهٔ NOL. بنابراین [مجموع] سه زاویهٔ ABC و DEF و GHK از [مجموع] سه زاویهٔ LOM و MON و NOL بزرگتر است.

اما بنا به فرض [مجموع] زاویه‌های ABC و DEF و GHK کمتر از چهار قائمه است؛ بنابراین [مجموع] زاویه‌های LOM و MON و NOL به مراتب کمتر از چهار قائمه است. اما [مجموع] این زاویه‌ها مساوی با چهار قائمه نیز هست: که محال است.

بنابراین AB کمتر از LO نیست؛ و ثابت شده بود که مساوی با آن هم نیست؛ بنابراین AB از LO بزرگتر است.

حال عمود OR را از نقطهٔ O بر صفحهٔ دایرهٔ LMN اخراج، [۱۲.XI]

و فرض می‌کنیم مربع OR مساوی با مساحتی باشد که مربع AB به اندازهٔ آن از مربع OL بزرگتر است؛ [لم بعد]

فرض می‌کنیم نقطهٔ R به نقطه‌های L و M و N وصل شده است. در این صورت، چون RO بر صفحهٔ دایرهٔ LMN عمود است، بنابراین RO بر هر یک از خطهای راست LO و MO و NO نیز عمود است.

و، چون LO با OM مساوی است، و OR مشترک و بر هر دو عمود، بنابراین RL با RM مساوی است. [۴.I]

به همین دلیل RN نیز با هر یک از خطهای راست RL و RM مساوی است؛ بنابراین سه خط راست RL و RM و RN با یکدیگر مساوی‌اند.

حال، چون بنا به فرض مربع OR مساوی با مساحتی است که مربع AB به اندازهٔ آن از مربع OL بزرگتر است، بنابراین مربع AB با مربعهای LO و RO مساوی است.

اما مربع LA با مربعهای LO و RO مساوی است، زیرا زاویهٔ LOR قائمه است؛ [۴۷.I]
بنابراین مربع AB با مربع RL مساوی است؛ لذا AB با RL مساوی است.

اما، هر یک از خطهای راست BC و DE و EF و GH و HK با AB مساوی است، و هر یک از خطهای راست RM و RN با RL؛ بنابراین هر یک از خطهای راست AB و BC و DE و EF و GH و HK با هر یک از خطهای راست RL و RM و RN مساوی است.
و، چون دو ضلع LR و RM با دو ضلع AB و BC مساوی‌اند و LM بنا به فرض با AC مساوی است، لذا زاویهٔ LRM با زاویهٔ ABC مساوی است. [۸.I]

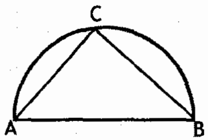
به همین دلیل زاویهٔ MRN نیز با زاویهٔ DEF مساوی است، و زاویهٔ LRN با زاویهٔ GHK.

بنابراین از سه زاویهٔ مستوی LRM و MRN و LRN، که با سه زاویهٔ مفروض ABC و DEF و GHK مساوی‌اند، کنج R درست شده است که شامل زاویه‌های LRM و MRN و LRN است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

اما می‌توانیم به ترتیب زیر نشان دهیم که چگونه ممکن است مربع OR را مساوی با مساحتی اختیار کرد که مربع AB به اندازهٔ آن از مربع LO بزرگتر باشد.



فرض می‌کنیم خطهای راست AB و LO معلوم‌اند و AB بزرگتر است؛ نیم‌دایرهٔ ABC را به قطر AB می‌کشیم، AC را درخور نیم‌دایره، مساوی با خط راست LO، که بزرگتر از قطر AB نیست، رسم می‌کنیم؛ [۱.IV]
C را به B وصل می‌کنیم.

در این صورت، چون زاویهٔ ACB محاط در نیم‌دایرهٔ ACB است، بنابراین زاویهٔ ACB قائمه است. [۳۱.III]

بنابراین مربع AB با مربعهای AC و CB مساوی است. [۴۷.I]

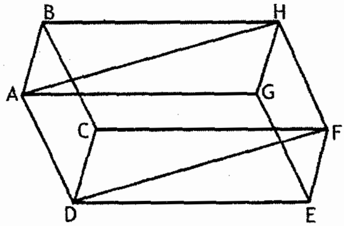
لذا مربع AB از مربع AC به اندازهٔ مربع CB بزرگتر است. اما، AC با LO مساوی است.

بنابراین مربع AB از مربع LO به اندازهٔ مربع CB بزرگتر است. پس اگر OR را مساوی با BC جدا کنیم، مربع AB از مربع LO به اندازهٔ مربع OR بزرگتر خواهد بود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

اگر جسمی از صفحه‌های متوازی حاصل شده باشد، صفحه‌های روبه‌رو در آن متساوی و متوازی‌الاضلاعی‌اند.



فرض می‌کنیم جسم $CDHG$ از صفحه‌های متوازی AC و GF؛ AH و DF؛ BF و AE حاصل شده است. می‌گوییم که صفحه‌های روبه‌رو در آن با هم مساوی و متوازی‌الاضلاعی هستند.

زیرا، چون دو صفحهٔ متوازی BG و CE با صفحهٔ AC بریده شده‌اند، فصل مشترکهای آنها با هم موازی‌اند. [۱۶.XI]

بنابراین AB با CD موازی است.

باز، چون دو صفحهٔ متوازی BF و AE با صفحهٔ AC بریده شده‌اند، فصل مشترکهای آنها با هم موازی‌اند. [۱۶.XI]

بنابراین BC با AD موازی است. اما ثابت شده بود که AB نیز با CD موازی است؛ بنابراین AC متوازی‌الاضلاع است.

به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از صفحه‌های DF و FG و GB و BF و AE متوازی‌الاضلاع است. A را به H، و D را به F وصل می‌کنیم.

در این صورت چون AB با DC موازی است، و BH با CF؛ دوخط راست AB و BH که یکدیگر را بریده‌اند با دو خط راست DC و CF که یکدیگر را بریده‌اند موازی‌اند و در یک صفحه نیستند؛ بنابراین زاویه‌های حاصل از آنها با هم مساوی‌اند؛ [۱۰.XI]

لذا زاویهٔ ABH با زاویهٔ DCF مساوی است.

و، چون دو ضلع AB و BH با دو ضلع DC و CF مساوی‌اند، [۳۴.I]

و زاویهٔ ABH با زاویهٔ DCF مساوی است، بنابراین AH با DF مساوی است، و مثلث ABH با مثلث DCF. [۴.I]

و متوازی‌الاضلاع BG دو برابر مثلث ABH است و متوازی‌الاضلاع CE دو برابر مثلث DCF.
[۳۴.I]

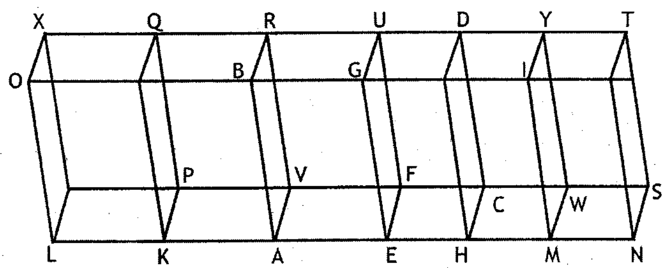
بنابراین، متوازی‌الاضلاع BG با متوازی‌الاضلاع CE مساوی است.

به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که AC نیز با GF مساوی است و AE با BF.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

اگر یک جسم متوازی‌السطوحی با صفحه‌ای موازی با دو وجه روبه‌رو بریده شده باشد، نسبت قاعده به قاعده در دو جسم حاصل، همچون نسبت جسم یکی است به جسم دیگری[۱].



فرض می‌کنیم جسم متوازی‌السطوحی $ABCD$ با صفحهٔ FG که موازی با وجه‌های روبه‌روی RA و DH است بریده شده است. می‌گوییم که نسبت قاعدهٔ $AEFV$ به قاعدهٔ $EHCF$ همچون نسبت جسم $ABFU$ است به جسم $EGCD$.

فرض می‌کنیم AH از دو طرف امتداد داده شده و بر آن تعدادی دلخواه خط راست مثل AK و KL مساوی با AE جدا شده‌اند و تعدادی دلخواه خط راست مانند HM و MN مساوی با EH؛ و فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاعهای LP و KV و HW و MS و جسمهای LQ و KR و DM و MT رسم شده‌اند.

در این صورت چون خطهای راست LK و KA و AE با هم مساوی‌اند، متوازی‌الاضلاعهای LP و KV و AF نیز با هم مساوی‌اند، و KO و KB و AG با هم؛ و به علاوه LX و KQ و AR با هم مساوی‌اند، زیرا روبه‌رو به یکدیگرند. [۲۴.XI]

به همین دلیل متوازی‌الاضلاعهای EC و HW و MS نیز با یکدیگر مساوی‌اند، و HG و HI و IN با هم، و به علاوه DH و MY و NT با هم مساوی‌اند. بنابراین در جسمهای LQ و KR و AU سه صفحه با سه صفحه مساوی‌اند.

اما هر یک از این سه صفحه با سه صفحهٔ روبه‌روی خود مساوی است؛ بنابراین سه جسم

۱. منظور از تساوی دو جسم، تساوی حجمهای آنها و منظور از نسبت دو جسم نسبت حجمهای آنهاست.ـم.

LQ و KR و AU با هم مساوی‌اند. به همین دلیل سه جسم ED و DM و MT نیز با هم مساوی‌اند.

بنابراین، قاعدهٔ LF هر مضربی از قاعدهٔ AF باشد، جسم LU نیز همان مضرب از جسم AU است. به همین دلیل، قاعدهٔ NF هر مضربی از قاعدهٔ FH باشد، جسم NU نیز همان مضرب از جسم HU است.

و، اگر قاعدهٔ LF با قاعدهٔ NF مساوی باشد، جسم LU نیز با جسم NU مساوی است؛ اگر قاعدهٔ LF از قاعدهٔ NF بزرگتر باشد، جسم LU نیز از جسم NU بزرگتر است؛ و اگر یکی کوچکتر از دیگری باشد آن یکی نیز از دیگری کوچکتر است.

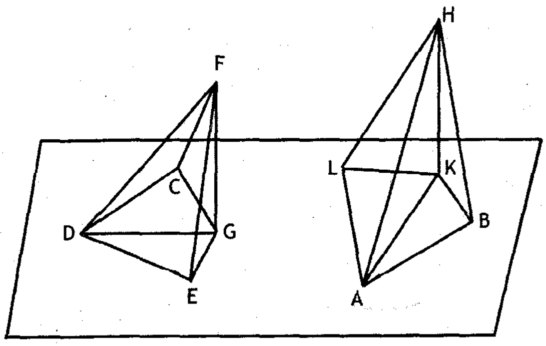
بنابراین چهار کمیت در دست‌اند، دو قاعدهٔ AF و FH و دو جسم AU و UH؛ مضربهای متساوی از قاعدهٔ AF و جسم AU گرفته شده‌اند، یعنی قاعدهٔ LF و جسم LU، و مضربهای متساوی از قاعدهٔ HF و جسم HU یعنی قاعدهٔ NF و جسم NU؛ و ثابت شده است که اگر قاعدهٔ LF بزرگتر از قاعدهٔ FN باشد، جسم LU نیز از جسم NU بزرگتر است؛ اگر قاعده‌ها با هم مساوی باشند جسمها با هم مساوی‌اند، و اگر یک قاعده کوچکتر باشد جسم آن هم کوچکتر است؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ AF به قاعدهٔ FH همچون جسم AU است به جسم UH.[V.تع.۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

مطلوب بنا کردن یک کنج در نقطهٔ مفروضی از یک خط راست مفروض است، که با کنج مفروضی مساوی باشد.

فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض است و A نقطهٔ مفروض بر آن، و کنج مفروض D از سه زاویهٔ EDC و EDF و FDC، تشکیل شده است. پس، مطلوب بنا کردن کنجی است در نقطهٔ A از



خط راست AB که با کنج D مساوی باشد.

فرض می‌کنیم یک نقطهٔ F به دلخواه بر DF گرفته شده و از F عمود FG بر صفحهٔ مار

بر ED و DC فرود آمده که صفحه را در G بریده است، [۱۱.XI]

G را به D وصل می‌کنیم، بر خط راست AB و در نقطهٔ A بر آن زاویهٔ BAL را مساوی با زاویهٔ EDC و زاویهٔ BAK را مساوی با زاویهٔ EDG رسم می‌کنیم، [۲۳.I]

و AK را مساوی با DG جدا و از نقطهٔ K عمود KH را بر صفحهٔ مار بر BA و AL اخراج می‌کنیم [۱۲.XI]

و KH را مساوی با GF جدا و H را به A وصل می‌کنیم؛ می‌گوییم که کنج A، حاصل از زاویه‌های BAL و BAH و HAL با کنج D، حاصل از زاویه‌های EDC و EDF و FDC مساوی است.

زیرا، فرض می‌کنیم AB و DE مساوی با هم جدا و B به K و H، و E به F و G وصل شده است. در این صورت، چون FG بر صفحهٔ مقایسه عمود است، بر تمام خطهایی نیز که آن را می‌برند و در صفحهٔ مقایسه واقع‌اند، عمود خواهد بود؛ [XI.تع.۳]

بنابراین هر یک از زاویه‌های FGD و FGE قائمه است. به همین دلیل هر یک از زاویه‌های HKA و HKB نیز قائمه است.

و، چون دو ضلع KA و AB به ترتیب با دو ضلع GD و DE مساوی و زاویه‌های بین آنها با هم مساوی‌اند، لذا KB با GE مساوی است. [۴.I]

اما، KH نیز با GF مساوی است و زاویه‌های بین KH و KB، و GF و GE قائمه‌اند، بنابراین HB نیز با FE مساوی است. [۴.I]

باز، چون دو ضلع AK و KH با دو ضلع DG و GF مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها قائمه‌اند، لذا AH با FD مساوی است. [۴.I]

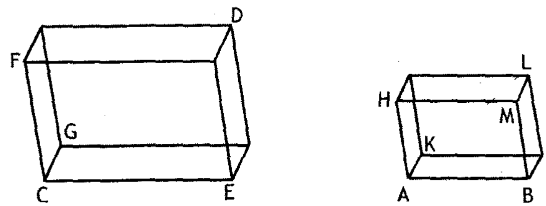
اما AB نیز با DE مساوی است؛ بنابراین دو ضلع HA و AB با دو ضلع DF و DE مساوی‌اند، و HB با FE مساوی است؛ لذا زاویهٔ BAH با زاویهٔ EDF مساوی است. [۸.I]

به همین دلیل زاویهٔ HAL نیز با زاویهٔ FDC مساوی است، و زاویهٔ BAL نیز با زاویهٔ EDC مساوی است. بنابراین بر خط راست AB و در نقطهٔ A بر آن کنجی بنا شده است که با کنج مفروض D مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

مطلوب ساختن یک جسم متوازی‌السطوحی بر خط راستی مفروض است که با یک جسم متوازی‌السطوحی مفروض، متشابه و متشابه‌الوضع باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض است و CD جسم متوازی‌السطوحی مفروض؛ پس، مطلوب رسم جسم متوازی‌السطوحی بر خط راست AB است که با جسم متوازی‌السطوحی CD متشابه و متشابه‌الوضع باشد.

برای این کار، بر خط راست AB و در نقطهٔ A بر آن کنجی مشتمل بر زاویه‌های BAH و HAK و KAB مساوی با کنج C می‌سازیم به طوری که زاویهٔ BAH با زاویهٔ ECF مساوی باشد و زاویهٔ BAK با زاویهٔ ECG و زاویهٔ KAH با زاویهٔ GCF؛ و فرض می‌کنیم ترتیبی داده شده باشد که نسبت EC به CG همچون نسبت BA باشد به AK، و نسبت GC به CF همچون نسبت KA باشد به AH. [۱۲.VI]

بنابراین همچنین، طبق مساوات هموار، نسبت EC به CF همچون نسبت BA است به AH. [۲۲.V]

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع HB و جسم AL به طور کامل رسم شده است. حال، چون نسبت EC به CG همچون نسبت BA است به AK، و ضلعهای حول زاویه‌های متساوی ECG و BAK متناسب‌اند، بنابراین متوازی‌الاضلاع GE با متوازی‌الاضلاع KB متشابه است. به همین دلیل متوازی‌الاضلاع KH نیز با متوازی‌الاضلاع GF، و به علاوه FE با HB متشابه‌اند. بنابراین سه متوازی‌الاضلاع از جسم CD با سه متوازی‌الاضلاع از جسم AL متشابه‌اند.

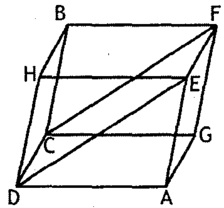
اما سه متوازی‌الاضلاع اولی با سه متوازی‌الاضلاع روبه‌روی خود، هم مساوی‌اند و هم متشابه، و سه‌تای دومی هم با متوازی‌الاضلاعهای روبه‌روی خود مساوی‌اند و متشابه؛ بنابراین تمام جسم CD با تمام جسم AL متشابه است. [تع.۹.XI]

در نتیجه، بر خط راست مفروض AB، جسم متوازی‌السطوحی AL متشابه و متشابه‌الوضع با جسم متوازی‌السطوحی مفروض CD رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

اگر یک جسم متوازی‌السطوحی با صفحهٔ مار بر قطرهای دو وجه روبه‌رو بریده شود، به وسیلهٔ این صفحه به دو قسمت متساوی تقسیم خواهد شد.



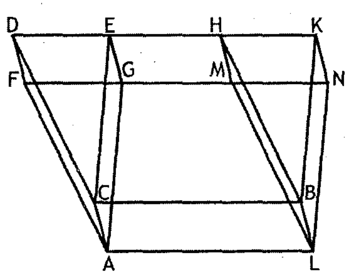
فرض می‌کنیم جسم متوازی‌السطوحی AB با صفحهٔ $CDEF$ مار بر قطرهای CF و DE از دو وجه روبه‌رو بریده شده است. می‌گوییم که جسم AB با صفحهٔ $CDEF$ به دو نیمهٔ متساوی تقسیم شده است.

زیرا، چون مثلث CGF با مثلث CFB مساوی است، [I.۳۴]
و مثلث ADE با مثلث DEH، و متوازی‌الاضلاع CA نیز با متوازی‌الاضلاع EB، به دلیل روبه‌رو بودن، مساوی است، و متوازی‌الاضلاع GE با متوازی‌الاضلاع CH، بنابراین منشور حاصل از دو مثلث CGF و DAE و سه متوازی‌الاضلاع GE و AC و CE نیز با منشور حاصل از دو مثلث CFB و DEH و سه متوازی‌الاضلاع CH و BE و CE مساوی‌اند؛ زیرا از صفحه‌هایی تشکیل شده‌اند که هم از لحاظ تعداد با هم مساوی‌اند، و هم از لحاظ اندازه. [XI.تع. ۱۰]

بنابراین تمامی جسم AB با صفحهٔ $CDEF$ به دو قسمت مساوی با هم تقسیم شده است.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

جسمهای متوازی‌السطوحی با یک قاعده و یک ارتفاع که سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها بر دو خط راست متوازی قرار دارند، با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم CM و CN جسمهای متوازی‌السطوحی باشند با یک قاعدهٔ AB و یک ارتفاع. و، فرض می‌کنیم سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها، یعنی، AG و AF و LM و LN و CD و CE و BH و BK، بر دو خط راست متوازی FN و DK قرار دارند.

می‌گوییم که جسم CM با جسم CN مساوی است.

زیرا، چون هر یک از شکلهای CH و CK متوازی‌الاضلاع است، CB با هر یک از خطهای راست DH و EK مساوی است. [I.۳۴]

از این‌رو DH نیز با EK مساوی است. حال، EH را از هر یک کم می‌کنیم؛ بنابراین بقیه، یعنی DE با بقیه، یعنی HK، مساوی است.

بنابراین مثلث DCE نیز با مثلث HBK مساوی است، [I.۸، ۴]
و متوازی‌الاضلاع DG با متوازی‌الاضلاع HN. [I.۳۶]

به همین دلیل مثلث AFG نیز با مثلث MLN مساوی است.

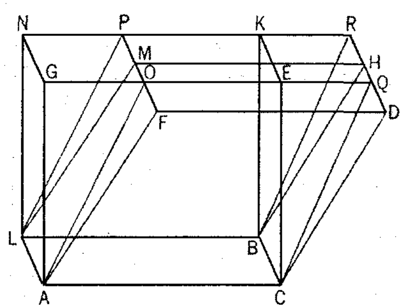
اما متوازی‌الاضلاع CF با متوازی‌الاضلاع BM مساوی است، و CG با BN، زیرا روبه‌رو به یکدیگرند. بنابراین منشور حاصل از دو مثلث AFG و DCE و سه متوازی‌الاضلاع AD و DG و CG با منشور حاصل از دو مثلث MLN و HBK و سه متوازی‌الاضلاع BM و HN و BN مساوی است.

حال، جسمی راکه قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع AB است و $GEHM$ وجه روبه‌رو به آن، به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین تمامی جسم متوازی‌السطوحی CM با تمامی جسم متوازی‌السطوحی CN مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

جسمهای متوازی‌السطوحی با یک قاعده و یک ارتفاع که سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها بر دو خط راست متوازی قرار ندارند، با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم CM و CN جسمهای متوازی‌السطوحی باشند با یک قاعدهٔ AB و یک ارتفاع. و فرض می‌کنیم سر دیگر یالهای وارد بر قاعده، یعنی، AF و AG و LM و LN و CD و CE و BH و BK بر دو خط راست متوازی قرار ندارند. می‌گوییم جسم CM با جسم CN مساوی است.

زیرا فرض می‌کنیم NK و DH را امتداد داده‌ایم تا یکدیگر را در R بریده‌اند، و به علاوه FM را تا P، و GE را تا Q امتداد داده‌ایم. حال، A را به O، P را به L، و C را به Q و B را به R وصل می‌کنیم. در این صورت، جسم CM که متوازی‌الاضلاع $ACBL$ قاعدهٔ آن است و $FDHM$ وجه روبه‌روی آن، با جسم CP که قاعده‌اش متوازی‌الاضلاع $ACBL$ است و $OQRP$ وجه روبه‌روی آن، با هم مساوی‌اند؛ زیرا دارای یک قاعدهٔ $ACBL$ و یک ارتفاع هستند و سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها، یعنی AF و AO و LM و LP و CD و CQ و BH و BR بر دو خط راست متوازی قرار دارند. [۲۹.XI]

اما، جسم CP که متوازی‌الاضلاع $ACBL$ قاعدهٔ آن و متوازی‌الاضلاع $OQRP$ وجه روبه‌روی آن است با جسم CN که متوازی‌الاضلاع $ACBL$ قاعدهٔ آن و $GEKN$ وجه روبه‌روی

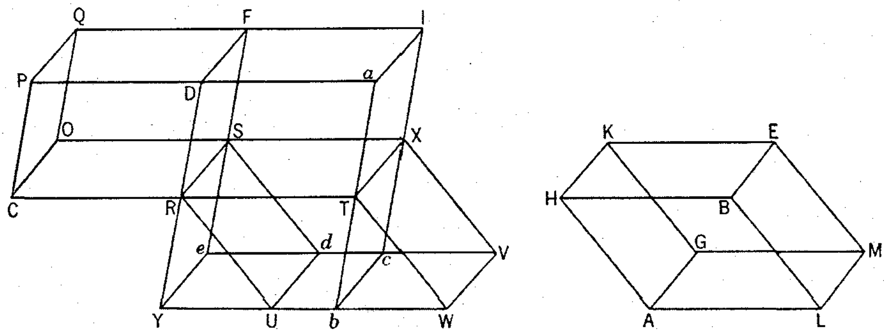
آن است، مساوی است؛ زیرا باز یک قاعدهٔ $ACBL$ دارند و یک ارتفاع، و سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها، یعنی، AG و AO و CE و CQ و LN و LP و BK و BR بر دو خط راست متوازی GQ و NR قرار دارند.

بنابراین جسم CM با جسم CN مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

جسمهای متوازی‌السطوحی که قاعده‌های آنها متساوی و دارای یک ارتفاع‌اند با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم جسمهای متوازی‌السطوحی AE و CF، با یک ارتفاع و قاعده‌های متساوی AB و CD در دست هستند. می‌گوییم که جسم AE با جسم CF مساوی است.

ابتدا فرض می‌کنیم یالهای وارد بر قاعده، یعنی HK و BE و AG و LM و PQ و DF و CO و RS بر قاعده‌های AB و CD عمود باشند؛ فرض می‌کنیم خط راست RT را در یک امتداد با خط راست CR کشیده‌ایم. بر خط راست RT و در نقطهٔ R بر آن زاویهٔ TRU را مساوی با زاویهٔ ALB رسم می‌کنیم، [۲۳.I]

RT را مساوی با AL، و RU را مساوی با LB جدا، قاعدهٔ RW و جسم XU را کامل می‌کنیم.

حال چون دو ضلع TR و RU با دو ضلع AL و LB مساوی، و زاویه‌های بین آنها نیز مساوی‌اند، بنابراین متوازی‌الاضلاع RW با متوازی‌الاضلاع HL مساوی و متشابه است. باز، چون AL با RT مساوی است و LM با RS، و زاویه‌های بین آنها قائمه‌اند، لذا متوازی‌الاضلاع RX با متوازی‌الاضلاع AM مساوی و متشابه است.

به همین دلیل LE نیز با SU مساوی و متشابه است؛ بنابراین سه متوازی‌الاضلاع جسم AE با سه متوازی‌الاضلاع جسم XU مساوی و متشابه‌اند.

اما سه متوازی‌الاضلاع اولی با سه متوازی‌الاضلاع روبه‌روی خود مساوی و متشابه‌اند و سه‌تای دومی با سه‌تای روبه‌روی خود مساوی و متشابه‌اند. [۲۴.XI]

بنابراین تمامی جسم متوازی‌السطوحی AE با تمامی جسم متوازی‌السطوحی XU مساوی است. [XI.تع.۱۰]

فرض می‌کنیم DR و WU را امتداد داده‌ایم تا یکدیگر را در Y بریده‌اند، فرض می‌کنیم aTb را از T موازی با DY رسم کرده و PD را تا a امتداد داده‌ایم و رسم جسمهای YX و RI را کامل کرده‌ایم. پس جسم XY که متوازی‌الاضلاع RX قاعدهٔ آن و Yc وجه روبه‌روی آن است با جسم XU که متوازی‌الاضلاع RX قاعدهٔ آن و UV وجه روبه‌روی آن است مساوی است، زیرا یک قاعدهٔ RX و یک ارتفاع دارند، و سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها، یعنی، RY و RU و Tb و TW و Se و Sd و Xc و XV بر دو خط راست متوازی YW و eV قرار دارند. [XI.۲۹]

اما جسم XU با جسم AE مساوی است؛ بنابراین جسم XY نیز با جسم AE مساوی است.

و، چون متوازی‌الاضلاع $RUWT$ با متوازی‌الاضلاع YT مساوی است، زیرا قاعدهٔ RT در آنها یکی است و بر خطهای موازی واحد RT و YW قرار دارند، [I.۳۵]
و $RUWT$ با CD مساوی است، زیرا با AB نیز مساوی است؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع YT نیز با CD مساوی است.

اما DT متوازی‌الاضلاع دیگری است؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ CD به قاعدهٔ DT همچون نسبت YT است به DT. [V.۷]

و، چون جسم متوازی‌السطوحی CI با صفحهٔ RF، موازی با دو وجه روبه‌رو، بریده شده است، لذا، نسبت قاعدهٔ CD به قاعدهٔ DT، مثل جسم CF است به جسم RI. [XI.۲۵]

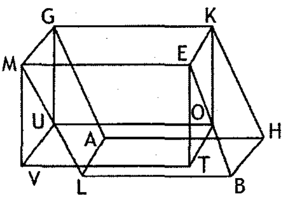
به همین دلیل، چون جسم متوازی‌السطوحی YI با صفحهٔ RX که با دو وجه روبه‌رو موازی است، بریده شده است، نسبت قاعدهٔ YT به قاعدهٔ DT، همچون نسبت جسم YX است به جسم RI. [XI.۲۵]

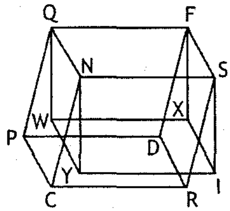
اما، نسبت قاعدهٔ CD به قاعدهٔ DT، همچون نسبت YT است به DT؛ بنابراین نسبت جسم CF به جسم RI نیز، همچون نسبت جسم YX است به RI. [V.۱۱]

بنابراین نسبت هر یک از جسمهای CF و YX به RI یکی است؛ لذا جسم CF با جسم YX مساوی است. [V.۹]

اما ثابت شده بود که YX با AE مساوی است؛ بنابراین AE نیز با CF مساوی است.

حال، فرض می‌کنیم یالهای فرود آمده بر قاعده، یعنی AG و HK و BE و LM و CN و PQ و DF و RS بر قاعده‌های AB و CD عمود نیستند؛ باز می‌گوییم که جسم AE با جسم CF مساوی است.





زیرا از نقاط K و E و G و M و Q و F و N و S عمودهای KO و ET و GU و MV و QW و FX و NY و SI را بر صفحهٔ مقایسه وارد و فرض می‌کنیم این عمودها صفحه را در نقاط O و T و U و V و W و X و Y و I ببرند، و O را به T و U، و V را به T و U، و W را به X و Y، و I را به Y و X وصل می‌کنیم. پس جسم KV با جسم QI مساوی است، زیرا قاعده‌های آنها یعنی KM و QS یکی و ارتفاع آنها هم یکی است، و یالهای وارد بر قاعده‌ها، بر قاعده‌هاشان عمود شده‌اند. [قسمت اول قضیه]

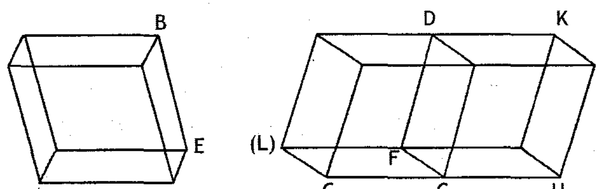
اما جسم KV با جسم AE مساوی است، و QI با CF؛ زیرا قاعده‌های آنها یکی و ارتفاع آنها هم یکی است، و سر دیگر یالهای وارد بر قاعده در آنها بر دو خط راست متوازی قرار ندارند. [۳۰.XI]

بنابراین جسم AE نیز با جسم CF مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

نسبت جسمهای متوازی‌السطوحی هم ارتفاع همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به همدیگر.



فرض می‌کنیم جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD هم ارتفاع باشند؛ می‌گوییم که نسبت جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به همدیگر، یعنی نسبت قاعدهٔ AE به قاعدهٔ CF همچون نسبت جسم AB است به جسم CD.

زیرا، فرض می‌کنیم FH را مساوی با AE بر FG اضافه کرده‌ایم. [۴۵.I]

و بر FH، به عنوان قاعده، جسم متوازی‌السطوحی GK را با همان ارتفاعی که CD دارد کامل کرده‌ایم. در این صورت جسم AB با جسم GK مساوی است؛ زیرا قاعده‌های AE و FH در آنها با هم مساوی‌اند و ارتفاعهای آنها نیز با هم. [۳۱.XI]

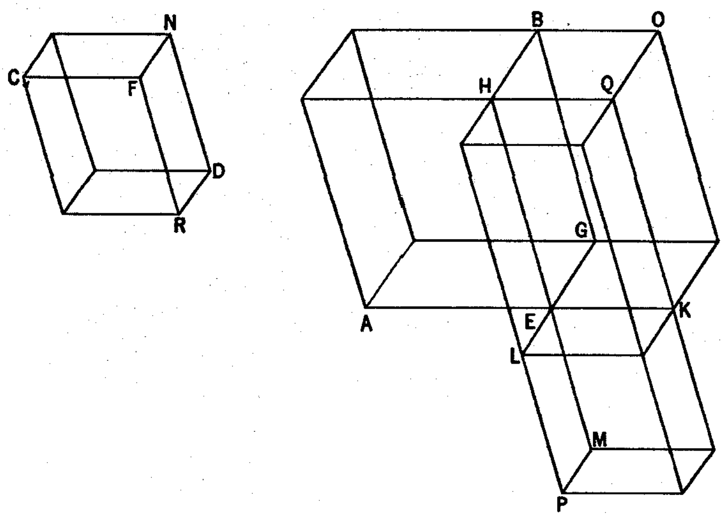
و، چون جسم متوازی السطوحی CK با صفحهٔ DG که موازی با دو وجه روبه‌رو است بریده شده، بنابراین نسبت قاعدهٔ CF به قاعدهٔ FH مثل نسبت جسم CD است به جسم DH.
[۲۵.XI]

اما قاعدهٔ FH با قاعدهٔ AE مساوی است، و جسم GK با جسم AB؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ AE به قاعدهٔ CF نیز همچون نسبت جسم AB است به جسم CD.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

نسبت جسمهای متوازی‌السطوحی متشابه همچون مکعب نسبت اضلاع متناظر آنهاست به همدیگر.



فرض می‌کنیم AB و CD جسمهای متوازی‌السطوحی متشابه باشند، و فرض می‌کنیم AE ضلع متناظر با CF باشد؛ می‌گوییم که نسبت جسم AB به جسم CD همچون مکعب نسبت AE به CF است.

زیرا، فرض می‌کنیم EK و EL و EM را به ترتیب در امتداد AE و GE و HE رسم کرده‌ایم و فرض می‌کنیم EK را مساوی با CF، و EL را مساوی با FN، و به علاوه EM را مساوی با FR جدا، و متوازی‌الاضلاع KL و جسم KP را کامل کرده‌ایم.

حال، چون دو ضلع KE و EL با دو ضلع CF و FN مساوی‌اند، و زاویهٔ KEL نیز با زاویهٔ CFN مساوی است ــ زیرا زاویهٔ AEG نیز با زاویهٔ CFN به دلیل مشابهت جسمهای AB و

CD مساوی است ــ بنابراین متوازی‌الاضلاع KL با متوازی‌الاضلاع CN مساوی <ومتشابه> است. به همین دلیل متوازی‌الاضلاع KM نیز با متوازی‌الاضلاع CR مساوی و متشابه است، و به علاوه EP با DF مساوی و متشابه است.

بنابراین سه متوازی‌الاضلاع از جسم KP با سه متوازی‌الاضلاع از جسم CD مساوی و متشابه‌اند.

اما سه متوازی‌الاضلاع اولی با متوازی‌الاضلاعهای روبه‌رویشان مساوی و متشابه‌اند و سه متوازی‌الاضلاع دومی هم با متوازی‌الاضلاعهای روبه‌رویشان مساوی و متشابه‌اند. [۲۴.XI]
بنابراین تمامی جسم KP با تمامی جسم CD مساوی و متشابه است. [XI.تع.۱۰]

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع GK کامل شده است، و بر متوازی‌الاضلاعهای GK و KL به عنوان قاعده، جسمهای EO و LQ را، با همان ارتفاع مساوی با ارتفاع AB کامل می‌کنیم. پس، چون به علت تشابه جسمهای AB و CD، نسبت AE به CF، همچون نسبت EG است به FN، و همچون نسبت EH است به FR، و CF با EK مساوی است، و FN با EL، و FR با EM، بنابراین نسبت AE به EK همچون نسبت GE است به EL و مثل نسبت HE است به EM. اما نسبت AE به EK همچون نسبت AG است به متوازی‌الاضلاع GK، نسبت GE به EL همچون نسبت GK است به KL، و نسبت HE به EM همچون نسبت QE است به KM؛ [۱.VI]
بنابراین نسبت متوازی‌الاضلاع AG به GK نیز همچون نسبت GK است به KL، و مثل نسبت QE است به KM.

اما نسبت AG به GK همچون نسبت جسم AB است به جسم EO؛ و نسبت GK به KL، همچون نسبت جسم OE است به جسم QL، و نسبت QE به KM، همچون نسبت جسم QL است به جسم KP؛ [۳۲.XI]
بنابراین نسبت جسم AB به جسم EO هم، مثل نسبت EO است به QL، و مثل نسبت QL است به KP.

اما اگر چهار کمیت به تناسب پیوسته باشند نسبت اولی به چهارمی همچون مکعب نسبت اولی به دومی است؛ [V.تع.۱۰]
بنابراین نسبت جسم AB به جسم KP همچون مکعب نسبت AB به EO است.

اما نسبت AB به EO همچون نسبت متوازی‌الاضلاع AG است به متوازی‌الاضلاع GK، و مثل نسبت خط راست AE است به خط راست EK؛ [۱.VI]
بنابراین نسبت جسم AB به جسم KP، نیز همچون مکعب نسبت AE به EK است. اما

جسم KP با جسم CD مساوی است، و خط راست EK با خط راست CF؛ بنابراین نسبت جسم AB به جسم CD هم مثل مکعب نسبت ضلعهای متناظر آنها یعنی مکعب نسبت AE به CF است.

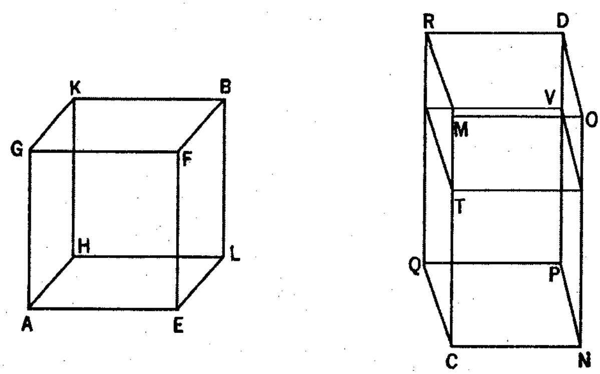
آنچه می‌خواستیم.

فرع. از اینجا روشن می‌شود که اگر چهار خط راست به تناسب <پیوسته> باشند، نسبت اولی به چهارمی همچون نسبت جسم متوازی‌السطوحی بناشده بر اولی است. به جسم متوازی‌السطوحی متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر دومی، زیرا نسبت اولی به چهارمی مثل مکعب نسبت اولی بر دومی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

در جسمهای متوازی‌السطوحی متساوی، قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، و جسمهای متوازی‌السطوحی که در آنها قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب باشند، متساوی‌اند.



فرض می‌کنیم AB و CD جسمهای متوازی‌السطوحی متساوی باشند. می‌گوییم که در جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، یعنی، نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ همچون نسبت ارتفاع جسم CD است به ارتفاع جسم AB.

ابتدا فرض می‌کنیم ضلعهای فرود آمده یعنی AG و EF و LB و HK و CM و NO و PD و QR بر قاعده‌هایشان عمود باشند، می‌گوییم که نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ همچون نسبت CM است به AG. حال فرض می‌کنیم قاعدهٔ EH با قاعدهٔ NQ مساوی است، و چون جسم AB نیز با جسم CD مساوی است، CM نیز با AG مساوی خواهد شد.

از آنجا که نسبت جسمهای متوازی‌السطوحی هم ارتفاع به یکدیگر همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر، [۳۲.XI]

پس نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ همچون نسبت CM خواهد شد به AG، و روشن است که در جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند. حال، فرض می‌کنیم قاعدهٔ EH با قاعدهٔ NQ مساوی نباشد، بلکه EH بزرگتر باشد. چون جسم AB با جسم CD مساوی است؛ بنابراین CM نیز بزرگتر از AG است.

پس فرض می‌کنیم CT را مساوی با AG جدا و جسم متوازی‌السطوحی VC را بر NQ به عنوان قاعده بنا و با ارتفاع CT کامل کرده‌ایم. حال، چون جسم AB با جسم CD مساوی است، و CV با آنها نامساوی است، و نسبتهای کمیتهای متساوی به یک کمیت با هم برابرند، [۷.V]
بنابراین نسبت جسم AB به جسم CV، همچون نسبت جسم CD است به جسم CV.

اما نسبت جسم AB به جسم CV، همچون نسبت قاعدهٔ EH است به قاعدهٔ NQ، زیرا جسمهای AB و CV ارتفاع مساوی دارند؛ [۳۲.XI]
و، نسبت جسم CD به جسم CV، همچون نسبت قاعدهٔ MQ است به قاعدهٔ TQ. [۲۵.XI]
و همچون نسبت CM است به CT؛ [۱ .VI]
لذا نسبت قاعده EH به قاعدهٔ NQ هم مثل نسبت MC است به CT. اما CT با AG مساوی است؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، مثل نسبت MC به AG نیز هست. بنابراین در جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند.

بار دیگر، فرض می‌کنیم در جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب باشند؛ یعنی، نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم CD باشد به ارتفاع جسم AB؛ می‌گوییم که جسم AB با جسم CD مساوی است.

باز، فرض می‌کنیم یالهای فرود آمده، بر قاعده عمود باشند. حال، اگر قاعدهٔ EH با قاعدهٔ NQ مساوی باشد، و نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم CD به ارتفاع جسم AB باشد، ارتفاع جسم CD نیز با ارتفاع جسم AB مساوی خواهد بود.

اما، جسمهای متوازی السطوحی با قاعده‌های متساوی که یک ارتفاع داشته باشند؛ با هم مساوی‌اند؛ [۳۱.XI]
بنابراین جسم AB با جسم CD مساوی است. حال فرض می‌کنیم قاعدهٔ EH با قاعدهٔ NQ مساوی نباشد، اما EH بزرگتر باشد؛ بنابراین ارتفاع جسم CD نیز از ارتفاع جسم AB بزرگتر است، یعنی CM از AG بزرگتر است.

باز فرض می‌کنیم CT مساوی با AG جدا و رسم جسم CV نیز کامل شده است. چون، نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت CM است به AG، و AG با AT مساوی است، بنابراین نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت CM است به CT.

اما، نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت جسم AB است به جسم CV، زیرا جسمهای AB و CV ارتفاعهای متساوی دارند؛ [۳۲.XI]

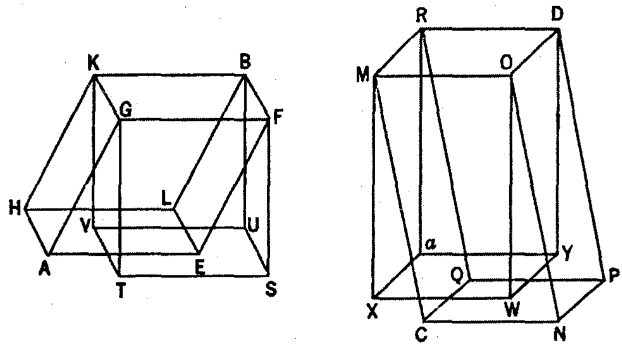
و نسبت CM به CT، همچون نسبت قاعدهٔ MQ است به قاعدهٔ QT. [۱.VI]

و همچون نسبت جسم CD است به جسم CV. [۲۵.XI]

بنابراین نسبت جسم AB به جسم CV، نیز همچون نسبت جسم CD است به جسم CV؛ لذا نسبت هر یک از جسمهای AB و CD به CV یکی است؛ در نتیجه جسم AB با جسم CD مساوی است. [۹.V]

حال فرض می‌کنیم یالهای فرود آمده، یعنی FE و BL و GA و HK و ON و DP و MC و RQ بر قاعده‌های خود عمود نباشند؛ از نقاط F و G و B و K و O و M و D و R عمودهایی بر صفحه‌های مار بر EH و NQ فرود می‌آوریم و فرض می‌کنیم این عمودها صفحه‌ها را در S و T و U و V و W، X و Y و a ببرند، و فرض می‌کنیم رسم جسمهای FV و Oa کامل شده است.

می‌گوییم که در این حالت نیز اگر جسمهای AB و CD مساوی باشند قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، یعنی نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم CD است به ارتفاع جسم AB.



چون جسم AB با جسم CD مساوی است، و AB با BT مساوی است، زیرا قاعدهٔ آنها FK یکی و ارتفاع آنها با هم مساوی است؛ [۳۰،۲۹.XI]

و جسم CD با جسم DX مساوی است، زیرا، باز آنها با یک قاعدهٔ RO و یک ارتفاع هستند؛ [۳۰،۲۹.XI]

بنابراین جسم BT نیز با جسم DX مساوی است. در نتیجه نسبت قاعدهٔ FK به قاعدهٔ OR، همچون نسبت ارتفاع جسم DX است به ارتفاع جسم BT. [قسمت اول اثبات قضیه]

اما قاعدهٔ FK با قاعدهٔ EH مساوی است، و قاعدهٔ OR با قاعدهٔ NQ؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم DX است به ارتفاع جسم BT. اما ارتفاع جسمهای DX و BT به ترتیب با ارتفاع جسمهای DC و BA برابر است؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم DC است به ارتفاع جسم AB. بنابراین در جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند.

باز در جسمهای متوازی‌السطوحی AB و CD فرض می‌کنیم قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب باشند، یعنی نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم CD باشد به ارتفاع جسم AB؛ می‌گوییم که جسم AB با جسم CD مساوی است.

زیرا، در شکلی مشابه شکل قبل، چون نسبت قاعدهٔ EH به قاعدهٔ NQ، همچون نسبت ارتفاع جسم CD است به ارتفاع جسم AB، و قاعدهٔ EH با قاعدهٔ FK مساوی است، و NQ با OR، بنابراین نسبت قاعدهٔ FK به قاعدهٔ OR، همچون نسبت ارتفاع جسم CD است به ارتفاع جسم AB. اما ارتفاع جسمهای AB و CD، به ترتیب با ارتفاع جسمهای BT و DX برابر است؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ FK به قاعدهٔ OR، همچون نسبت ارتفاع جسم DX است به ارتفاع جسم BT.

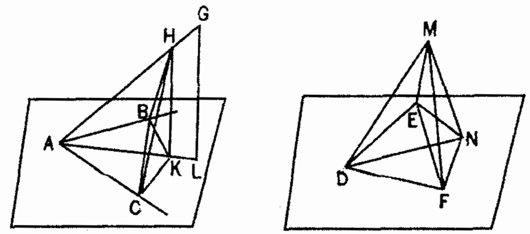
بنابراین در جسمهای متوازی‌السطوحی BT و DX قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند؛
لذا جسم BT با جسم DX مساوی است. [قسمت اول، اثبات قضیه]

اما BT با BA مساوی است، زیرا یک قاعدهٔ FK دارند و یک ارتفاع؛ [XI.۲۹، ۳۰]
و جسم DX با جسم DC مساوی است. [همان قضایای قبل]
بنابراین جسم AB نیز با جسم CD مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

اگر دو زاویهٔ مستوی و متساوی در دست باشند و از رأس هر یک خط راستی متقاطع با صفحه‌اش رسم شود به طوری که زاویه‌های حاصل از این خطهای راست با ضلعهای زاویهٔ اصلی در یکی به ترتیب با زاویهٔ نظیرش از دیگری مساوی باشد، و اگر از نقطه‌ای دلخواه بر هر یک از این دو خط راست عمودی بر صفحه‌های زاویه‌های اصلی فرود آید و پای هر عمود با خط راستی به رأس زاویه اصلی وصل شود زاویه‌های حاصل از این خطهای راست و خطهای راست اولیه با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم BAC و EDF دو زاویهٔ راست‌خط متساوی باشند و از نقطه‌های A و D خطهای راست AG و DM را متقاطع با صفحهٔ آنها رسم می‌کنیم چنان که زاویه‌های هر یک از این خطهای راست با ضلع زاویهٔ اصلی از یکی به ترتیب با زاویهٔ نظیرش از دیگری مساوی باشد، یعنی زاویهٔ MDE با زاویهٔ GAB مساوی باشد و زاویهٔ MDF با زاویهٔ GAC؛ نقطه‌های G و M را به دلخواه بر AG و DM می‌گیریم و عمودهای GL و MN را از این نقطه‌ها بر صفحه‌های مار بر BA و AC، و ED و DF فرود می‌آوریم تا صفحه‌ها را در نقطه‌های L و N تلاقی کنند، و L را به A و N را به D وصل می‌کنیم. می‌گوییم زاویهٔ GAL با زاویهٔ MDN مساوی است.

AH را مساوی با DM جدا می‌کنیم و از نقطهٔ H، HK را موازی با GL می‌کشیم. اما GL بر صفحهٔ مار بر BA و AC عمود است، بنابراین KH نیز بر صفحهٔ مار بر BA و AC عمود است. [۸.XI]

از نقطه‌های K و N عمودهای KC و NF و KB و NE را بر خطهای راست AC و DF و AB و DE فرود می‌آوریم و C را به H و B، و F را به M و E وصل می‌کنیم.

چون مربع HA با مربعهای HK و KA مساوی است و مربعهای KC و CA با مربع KA، [۴۷.I]

بنابراین مربع HA با مربعهای HK و KC و CA نیز مساوی است؛ اما مربع HC با مربعهای HK و KC مساوی است؛ [۴۷.I]

بنابراین مربع HA با مربعهای HC و CA مساوی است. لذا زاویهٔ HCA قائمه است. [۴۸.I]

به همین دلیل زاویهٔ DFM نیز قائمه است. بنابراین زاویهٔ ACH با زاویهٔ DFM مساوی است. اما زاویهٔ HAC نیز با زاویهٔ MDF مساوی است؛ بنابراین MDF و HAC دو مثلث هستند که در آنها دو زاویه از یکی به ترتیب با دو زاویه از دیگری مساوی است و یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری، یعنی ضلعهای روبه‌روبه زاویه‌های متساوی متناظر متساوی‌اند، یعنی HA با MD مساوی است؛ بنابراین ضلعهای دیگر آنها نیز به ترتیب با هم مساوی‌اند. [۲۶.I]

در نتیجه AC با DF مساوی است.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که AB نیز با DE مساوی است. در این صورت چون

AC با DF مساوی است، و AB با DE، دو ضلع CA و AB با دو ضلع FD و DE مساوی‌اند.

اما زاویهٔ CAB نیز با زاویهٔ FDE مساوی است، بنابراین ضلع BC با ضلع EF مساوی است و مثلث با مثلث، و بقیهٔ زاویه‌ها با بقیهٔ زاویه‌ها؛ [۴.I]

بنابراین زاویهٔ ACB با زاویهٔ DFE مساوی است. اما زاویهٔ قائمه ACK نیز با زاویهٔ قائمهٔ DFN مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ BCK نیز با زاویهٔ باقیماندهٔ EFN مساوی است. به همین دلیل زاویهٔ CBK نیز با زاویهٔ FEN مساوی است.

در نتیجه BCK و EFN دو مثلث هستند که دو زاویه از یکی به ترتیب با دو زاویه از دیگری و یک ضلع آنها با هم، یعنی ضلع مجاور به زاویه‌های متساوی، BC و EF مساوی‌اند؛ لذا بقیهٔ اضلاع آنها نیز با هم مساوی‌اند. [۲۶.I]

لذا CK با FN مساوی است. اما AC نیز با DF مساوی است؛ بنابراین دو ضلع AC و CK با دو ضلع DF و FN مساوی‌اند، و زاویهٔ بین آنها قائمه است. بنابراین ضلع AK با ضلع DN مساوی است. [۴.I]

و، چون AH با DM مساوی است، مربع AH نیز با مربع DM مساوی است.

اما [مجموع] مربعهای AK و KH با مربع AH مساوی است، زیرا زاویهٔ AKH قائمه است؛ [۴۷.I]

و [مجموع] مربعهای DN و NM با مربع DM مساوی است، زیرا زاویهٔ DNM قائمه است؛ [۴۷.I]

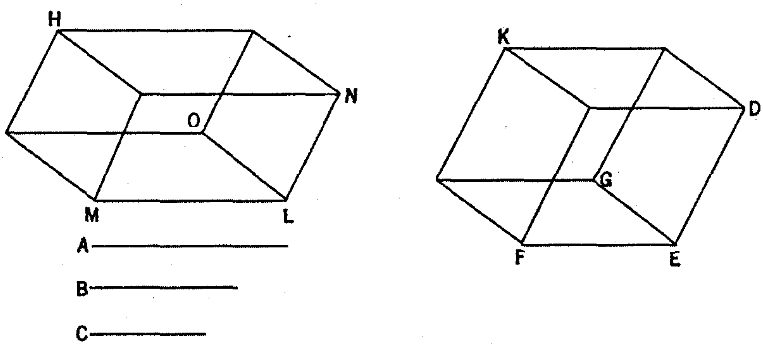
بنابراین مربعهای AK و KH با مربعهای DN و NM مساوی‌اند؛ و در این تساوی مربع AK با مربع DN مساوی است؛ بنابراین مربع ضلع KH با مربع NM مساوی است؛ یعنی HK با MN مساوی است؛ و، چون دو ضلع HA و AK به ترتیب با دو ضلع MD و DN مساوی‌اند، و ثابت شد که ضلع HK با ضلع MN مساوی است، بنابراین زاویهٔ HAK با زاویهٔ MDN مساوی است. [۸.I]

فرع. از اینجا معلوم می‌شود که اگر از رأسهای هر یک از دو زاویهٔ مستوی و متساوی خطهای راستی متقاطع با صفحهٔ زاویه‌ها و به طولهای متساوی چنان رسم شوند که هر یک از دو زاویه‌ای که هر یک از این خطهای راست با ضلعهای زاویهٔ اصلی در یکی می‌سازد به ترتیب با زاویهٔ نظیرش از دیگری مساوی باشد، عمودهای وارد از انتهای این دو خط بر صفحه‌های زاویه‌های اصلی با هم مساوی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۶

اگر سه خط راست متناسب باشند، جسم متوازی السطوحی حاصل از آنها با جسم متوازی‌السطوحی متساوی الاضلاع به ضلع خط راست وسطی که با جسم مذکور متساوی‌الزاویه باشد مساوی است.



فرض می‌کنیم سه خط راست A و B و C متناسب‌اند، به طوری که نسبت A به B همچون نسبت B است به C؛ می‌گوییم که جسم حاصل از A و B و C با جسم متوازی‌السطوحی متساوی الاضلاع به ضلع B که با جسم مذکور متساوی‌الزاویه باشد مساوی است.

فرض می‌کنیم کنج E از سه زاویهٔ DEG و GEF و FED درست شده است. و فرض می‌کنیم که هر یک از خطهای راست DE و GE و EF مساوی با B جدا شده و جسم متوازی‌السطوحی EK کامل شده است. فرض می‌کنیم LM مساوی با A رسم شده و بر خط راست LM و در نقطهٔ L بر آن کنجی مساوی با کنج E، یعنی با زاویه‌های NLO و OLM و MLN ساخته شده است؛ فرض می‌کنیم LO مساوی با B جدا شده است، و LN مساوی با C.

حال، چون نسبت A به B همچون نسبت B است به C، و A با LM مساوی است، و B با هر یک از خطهای راست LO و ED، و C با LN، بنابراین نسبت LM به EF همچون نسبت DE است به LN.

از این رو ضلعهای مجاور به زاویه‌های مساوی NLM و DEF معکوساً متناسب‌اند؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع MN با متوازی‌الاضلاع DF مساوی است. [۱۴.VI]

و، چون زاویه‌های DEF و NLM دو زاویهٔ راست‌خط مستوی متساوی هستند و خطهای راست LO و EG با طولهای متساوی بر آنها فرود آمده‌اند و هر یک زاویه‌هایی با ضلعهای زاویه‌های اصلی ساخته است که با زاویه‌های متناظرش در دیگری مساوی است، بنابراین عمودهای مرسوم از نقطه‌های G و O بر صفحه‌های مار بر NL و LM، و DE و EF با هم مساوی‌اند؛ [XI.۳۵،ف.]

بنابراین جسمهای LH و EK دارای یک ارتفاع‌اند.

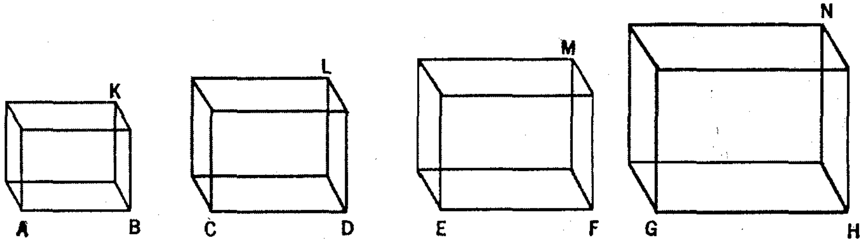
اما جسمهای متوازی‌السطوحی با قاعده‌های مساوی و ارتفاعهای مساوی با هم مساوی‌اند؛ [۳۱.XI]

بنابراین جسم HL با جسم EK مساوی است؛ و LH جسم حاصل از A و B و C است و EK جسم حاصل از B؛ بنابراین جسم متوازی‌السطوحی حاصل از A و B و C با جسم متساوی‌الاضلاع به ضلع B که با آن متساوی‌الزاویه باشد مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۷

اگر چهار راست متناسب باشند، جسمهای متوازی‌السطوحی متشابه و متشابه الوضع بنا شده بر آنها نیز متناسب‌اند؛ و اگر جسمهای متوازی السطوحی متشابه و متشابه‌الوضع بنا شده بر آنها متناسب باشند، خود آن خطهای راست نیز متناسب‌اند.



فرض می‌کنیم چهار خط راست AB و CD و EF و GH متناسب‌اند به طوری که نسبت AB به CD همچون نسبت EF است به GH؛ و فرض می‌کنیم بر AB و CD و EF و GH اجسام متوازی‌السطوحی متشابه و متشابه‌الوضع KA و LC و ME و NG بنا شده‌اند؛ می‌گوییم که نسبت KA به LC همچون نسبت ME است به NG.

زیرا، چون جسم متوازی‌السطوحی KA با جسم LC متشابه است، لذا نسبت KA به LC همچون مکعب نسبت AB به CD است. [۳۳.XI]

به همین دلیل نسبت ME به NG نیز همچون مکعب نسبت EF به GH است.[همان گزاره]

و چون نسبت AB به CD همچون نسبت EF است به GH. بنابراین نسبت AK به LC نیز همچون نسبت ME است به NG. حال، فرض می‌کنیم که نسبت جسم AK به جسم LC همچون نسبت جسم ME باشد به جسم NG. می‌گوییم که نسبت خط راست AB به خط راست CD همچون نسبت خط راست EF است به خط راست GH.

زیرا، باز چون نسبت KA به LC همچون مکعب نسبت AB به CD است، [۳۳.XI]

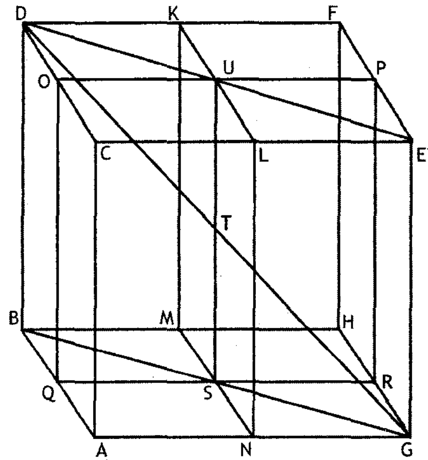
و ME به NG نیز همچون مکعب نسبت EF به GH است، [همان گزاره]

و نسبت KA به LC همچون نسبت ME است به NG، بنابراین نسبت AB به CD نیز همچون نسبت EF است به GH.

آنچه می‌خواستیم.

قضیه ۳۸

اگر ضلعهای صفحه‌های روبه‌روی یک مکعب نصف شده باشند و صفحه‌هایی بر این نقطه‌ها بگذرانیم فصل مشترک این صفحه‌ها و قطر مکعب یکدیگر را نصف می‌کنند.



فرض می‌کنیم ضلعهای صفحه‌های روبه‌روی CF و AH از مکعب AF در نقطه‌های K و L و M و N و O و Q و P و R نصف شده‌اند، و صفحه‌های KN و OR از این نقطه‌های وسط ضلعها گذشته‌اند و US فصل مشترک آنها، و DG قطر مکعب AF است. می‌گوییم که TU با TS مساوی است و DT با TG. زیرا فرض می‌کنیم U را به E و D، و S را به B و G وصل کرده‌ایم.

در این حال، چون DO با PE موازی است زاویه‌های متبادل درونی DOU و UPE با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

و، چون DO با PE مساوی است و OU با UP، و زاویه‌های بین آنها با هم مساوی‌اند، در نتیجه DU با UE مساوی است و مثلث DOU با مثلث PUE، و بقیهٔ زاویه‌ها با بقیهٔ زاویه‌ها مساوی‌اند. [۴.I]

بنابراین زاویهٔ OUD با زاویهٔ PUE مساوی است. به این دلیل DUE یک خط راست است. [۱۴.I]

به همین دلیل BSG نیز یک خط راست است و BS با SG مساوی است. حال، چون CA با DB مساوی و موازی است و CA با EG نیز مساوی و موازی است، بنابراین DB نیز با EG مساوی و موازی است. [۹ .XI]

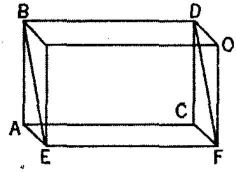
و خطهای راست DE و BG دو سر آنها را به هم وصل کرده‌اند، بنابراین DE با BG موازی است. [۳۳.I]

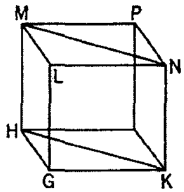
لذا زاویهٔ EDT با زاویهٔ BGT مساوی است، زیرا متبادل درونی هستند؛ [۲۹.I]
و زاویهٔ DTU با زاویهٔ GTS مساوی است. [۱۵.I]
بنابراین DTU و GTS دو مثلث هستند که دو زاویه از یکی با دو زاویه از دیگری مساوی‌اند و یک ضلع مساوی با یک ضلع، که ضلعهای روبه‌رو به یکی از زاویه‌های متساوی‌اند، یعنی DU و GS، زیرا نصفهای DE و BG هستند. بنابراین بقیهٔ ضلعهای آنها نیز با هم مساوی‌اند.[۲۶.I]
بنابراین DT با TG مساوی است، و UT با TS.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۹

اگر دو منشور با ارتفاعهای متساوی در دست باشند، و قاعدهٔ یکی متوازی‌الاضلاع باشد و قاعدهٔ دیگری مثلث، و اگر متوازی‌الاضلاع دو برابر مثلث باشد، دو منشور با هم مساوی خواهند بود.





فرض می‌کنیم $ABCDEF$ و $GHKLMN$ دو منشور با ارتفاعهای متساوی باشند، فرض می‌کنیم قاعدهٔ یکی متوازی‌الاضلاع AF است و قاعدهٔ دیگری مثلث GHK؛ و فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع AF دو برابر مثلث GHK است؛ می‌گوییم که منشور $ABCDEF$ با منشور $GHKLMN$ مساوی است. زیرا فرض می‌کنیم رسم جسمهای AO و GP کامل شده است.

چون متوازی‌الاضلاع AF دو برابر مثلث GHK، و متوازی‌الاضلاع HK نیز دو برابر مثلث GHK است، [۳۴.I]
بنابراین متوازی‌الاضلاع AF با متوازی‌الاضلاع HK مساوی است. اما جسمهای متوازی‌السطوحی که قاعده‌های متساوی و ارتفاعهای متساوی داشته باشند با هم مساوی‌اند. [۳۱.XI]
بنابراین جسم AO با جسم GP مساوی است، و منشور $ABCDEF$ نصف جسم AO است، و منشور $GHKLMN$ نصف جسم GP؛ [۲۸.XI]
بنابراین منشور $ABCDEF$ با منشور $GHKLMN$ مساوی است.

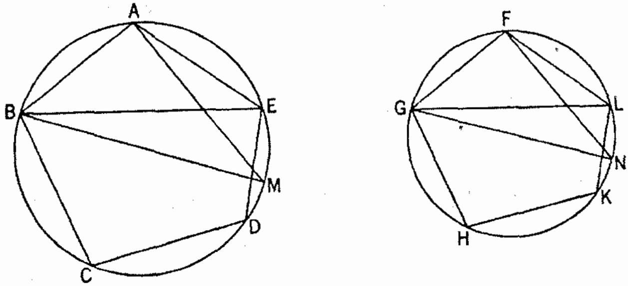
آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ دوازدهم

قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

نسبت چندضلعیهای متشابه محاط در دو دایره همچون نسبت مربعهای قطرهای دو دایره است به یکدیگر.



فرض می‌کنیم ABC و FGH دو دایره‌اند، و $ABCDE$ و $FGHKL$ چندضلعیهای متشابه محاط در آنها هستند، و BM و GN قطرهای دایره‌ها. می‌گوییم که نسبت مربع BM به مربع GN همچون نسبت چندضلعی $ABCDE$ است به چندضلعی $FGHKL$. زیرا، B را به E وصل می‌کنیم، و A را به M، و G را به L، و F را به N.

حال، چون چندضلعی $ABCDE$ با چندضلعی $FGHKL$ متشابه است، زاویهٔ BAE با GFL مساوی است، و نسبت BA به AE همچون نسبت GF است به FL. [VI.تع.۱]

بنابراین BAE و GFL دو مثلث هستند که یک زاویهٔ BAE و یک زاویهٔ GFL متساوی دارند و ضلعهای مجاور به این زاویه‌ها متناسب‌اند؛ لذا مثلث ABE با مثلث FGL متساوی‌الزاویه است. [۶.VI]

بنابراین زاویهٔ AEB با زاویهٔ FLG مساوی است.

اما زاویهٔ AEB با زاویهٔ AMB مساوی است، زیرا روبه‌رو به یک کمان‌اند؛ [۲۷.III]
و زاویهٔ FLG با زاویهٔ FNG مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ AMB نیز با زاویهٔ FNG مساوی است؛ اما زاویهٔ قائمهٔ BAM نیز با زاویهٔ قائمهٔ GFN مساوی است؛ [۳۱.III]
بنابراین بقیهٔ زاویه‌ها هم با یکدیگر مساوی می‌شوند. [۳۲.I]

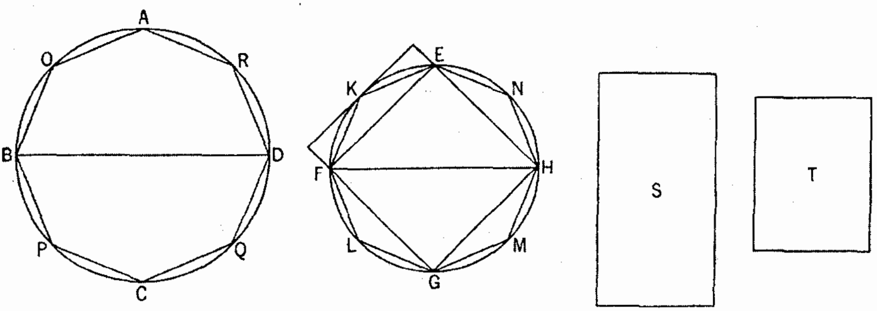
بنابراین مثلث ABM با مثلث FGN متساوی‌الزاویه است؛ در نتیجه اضلاع آنها متناسب‌اند، یعنی نسبت BM به GN همچون نسبت BA است به GF. [۴.VI]

اما نسبت مربع BM به مربع GN همچون مربع نسبت BM به GM است. و نسبت چندضلعی $ABCDE$ به چندضلعی $FGHKL$ همچون مربع نسبت BA به GF است؛ [۲۰.VI]
در نتیجه نسبت مربع BM به مربع GN نیز همچون نسبت چندضلعی $ABCDE$ است به چندضلعی $FGHKL$.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

نسبت دو دایره به یکدیگر همچون نسبت مربعهای قطرهای آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم $ABCD$ و $EFGH$ دو دایره باشند و BD و FH قطرهای آنها. می‌گوییم که نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ همچون نسبت مربع BD است به مربع FH. زیرا،

اگر نسبت مربع BD به مربع FH همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ نباشد، پس، نسبت مربع BD به مربع FH همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ خواهد بود به مساحتی یا کوچکتر از دایرهٔ $EFGH$ یا بزرگتر از آن.

اول فرض می‌کنیم که این نسبت همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به مساحتی مانند S باشد که کوچکتر از دایرهٔ $EFGH$ است. فرض می‌کنیم مربع $EFGH$ در دایرهٔ $EFGH$ محاط شده است. پس این مربع محاطی از نصف دایرهٔ $EFGH$ بزرگتر است. زیرا که اگر در نقاط E و F و G و H مماسهایی بر دایره رسم کنیم، مربع $EFGH$ نصف مربع محیط بر دایره است و دایره از مربع محیطی کوچکتر است؛ بنابراین مربع محاطی $EFGH$ از نصف دایرهٔ $EFGH$ بزرگتر است.

حال فرض می‌کنیم کمانهای EF و FG و GH و HE در نقطه‌های K و L و M و N نصف، و K به E و F وصل شده است و L به F و G، و M به G و H، و N به H و E. بنابراین هر یک از مثلثهای EKF و FLG و GMH و HNE نیز از نصف قطعهٔ دایرهٔ محیطی‌اش بزرگتر است، زیرا اگر از نقطه‌های K و L و M و N مماسهایی بر دایره رسم و متوازی‌الاضلاعهای به خطهای راست EF و FG و GH و HE را کامل کنیم، هر یک از مثلثهای EKF و FLG و GMH و HNE نصف متوازی‌الاضلاع محیطی آن مثلث است، و قطعهٔ محیطی‌اش از متوازی‌الاضلاع کوچکتر است. بنابراین هر یک از مثلثهای EKF و FLG و GMH و HNE از نصف قطعهٔ دایرهٔ محیطی‌اش بزرگتر است.

بنابراین با نصف کردن کمانهای دیگر و وصل کردن خطهای راست، و ادامهٔ کار زمانی می‌رسد که قطعه‌هایی از دایره به جامانده است که از زیادتی دایرهٔ $EFGH$ بر مساحت S کوچکتر است.

زیرا در اولین قضیهٔ مقالهٔ دهم ثابت شده بود که اگر دو کمیت نامتساوی داده شده باشند، و اگر از کمیت بزرگتر کمیتی بزرگتر از نصف آن را کم کنیم و از باقیمانده کمیتی بزرگتر از نصف آن را کم کنیم، و این فرایند را مرتباً ادامه دهیم، سرانجام کمیتی می‌ماند که از کمیت کوچکتر معلوم اولیه کوچکتر خواهد بود.

فرض می‌کنیم قطعه‌های باقی مانده چنان باشند که شرح دادیم، و فرض می‌کنیم قطعه‌های دایرهٔ $EFGH$ در EK و KF و FL و LG و GM و MH و HN و NE از زیادتی دایرهٔ $EFGH$ بر مساحت S کوچکتر باشند. بنابراین باقیمانده، یعنی چندضلعی $EKFLGMHN$، از مساحت S بزرگتر است.

همچنین فرض می‌کنیم چندضلعی $AOBPCQDR$ متشابه با چندضلعی $EKFLGMHN$ در دایرهٔ $ABCD$ محاط شده است؛ بنابراین نسبت مربع BD به مربع FH همچون نسبت چندضلعی $AOBPCQDR$ است به چندضلعی $EKFLGMHN$.[XII.۱]

اما نسبت مربع BD به مربع FH، همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به مساحت S نیز هست، بنابراین نسبت دایرهٔ $ABCD$ به مساحت S نیز همچون نسبت چندضلعی $AOBPCQDR$ است به چندضلعی $EKFLGMHN$. [۱۱.V]

بنابراین، با ابدال نسبت، نسبت دایره $ABCD$ به چندضلعی محاطی‌اش همچون نسبت مساحت S است به چندضلعی $EKFLGMHN$. [۱۶.V]

اما دایرهٔ $ABCD$ از چندضلعی محاطی‌اش بزرگتر است؛ بنابراین مساحت S نیز از چندضلعی $EKFLGMHN$ بزرگتر است.

اما کوچکتر نیز هست: که غیر ممکن است.

بنابراین نسبت مربع BD به مربع FH همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به هر مساحتی کوچکتر از دایرهٔ $EFGH$ نیست.

به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که نسبت دایرهٔ $EFGH$ به هر مساحتی کوچکتر از دایرهٔ $ABCD$ نیز همچون نسبت مربع FH به مربع BD نیست.

حال، می‌گوییم که نسبت دایرهٔ $ABCD$ به هر مساحتی بزرگتر از دایرهٔ $EFGH$ نیز همچون نسبت مربع BD به مربع FH نیست.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد و همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ باشد به مساحتی مانند S، بزرگتر از دایرهٔ $EFGH$. بنابراین، به عکس، نسبت مربع FH به مربع DB همچون نسبت مساحت S است به دایرهٔ $ABCD$. اما نسبت مساحت S به دایرهٔ $ABCD$ همچون نسبت دایرهٔ $EFGH$ است به مساحتی کوچکتر از دایرهٔ $ABCD$؛ بنابراین نسبت مربع FH به مربع BD نیز همچون نسبت دایرهٔ $EFGH$ است به مساحتی کوچکتر از دایرهٔ $ABCD$:[۱۱.V] که ثابت شده بود غیر ممکن است.

بنابراین نسبت مربع BD به مربع FH همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به هر مساحتی بزرگتر از دایرهٔ $EFGH$ نیست. و ثابت شده بود که همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به هر مساحتی کوچکتر از دایرهٔ $EFGH$ هم نیست؛ در نتیجه نسبت مربع BD به مربع FH همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ است به دایرهٔ $EFGH$.

آنچه می‌خواستیم.

لم

مساحت S را وقتی بزرگتر از مساحت دایرهٔ $EFGH$ گوییم که نسبت مساحت S به مساحت دایرهٔ $ABCD$ همچون نسبت مساحت دایرهٔ $EFGH$ به مساحتی کمتر از مساحت دایرهٔ $ABCD$ باشد.

زیرا، فرض می‌کنیم طوری ترتیب داده شده است که نسبت مساحت S به مساحت دایرهٔ $ABCD$ همچون نسبت مساحت دایرهٔ $EFGH$ به مساحتی مانند T است. می‌گوییم که مساحت T از مساحت دایرهٔ $ABCD$ کوچکتر است.

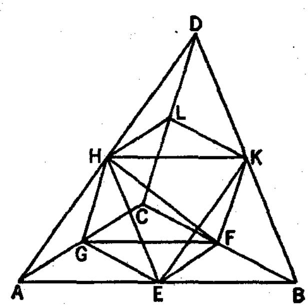
زیرا، چون نسبت مساحت S به دایرهٔ $ABCD$ همچون نسبت دایرهٔ $EFGH$ به مساحت T است، بنابراین با ابدال نسبت، نسبت مساحت S به دایرهٔ $EFGH$ همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به مساحت T است. [۱۶.V]

اما مساحت S از دایرهٔ $EFGH$ بزرگتر است؛ بنابراین دایرهٔ $ABCD$ نیز از مساحت T بزرگتر است. در نتیجه، نسبت مساحت S به دایرهٔ $ABCD$، همچون نسبت دایرهٔ $EFGH$ به مساحتی کمتر از دایرهٔ $ABCD$ است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

هر هرم مثلث القاعده به دو هرم مثلث القاعدهٔ متساوی و متشابه و مشابه با تمامی هرم، و دو منشور متساوی تقسیم می‌شود؛ و [مجموع] این دو منشور از نصف تمامی هرم بزرگتر است.



فرض می‌کنیم هرم مثلث القاعدهٔ به رأس D و قاعدهٔ ABC داده شده است؛ می‌گوییم که هرم $ABCD$ به دو هرم مثلث القاعدهٔ متساوی و متشابه، و مشابه با تمامی هرم، و دو منشور متساوی تقسیم می‌شود و [مجموع] این دو منشور از نصف تمامی هرم بزرگتر است.

زیرا، فرض می‌کنیم AB و BC و CA و AD و DB و DC به ترتیب در نقاط E و F و G و H و K و L نصف شده‌اند و H به نقاط E و G و K و L و F، و K به L و F، و F به G وصل شده است. چون AE با EB مساوی است، و AH با DH، بنابراین EH با DB موازی است. [۲.VI]

به همین دلیل HK نیز با AB موازی است، بنابراین $HEBK$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین HK با EB مساوی است. [۳۴.I]

اما EB با EA مساوی است؛ بنابراین AE نیز با HK مساوی است: اما AH نیز با HD مساوی است؛ بنابراین دو ضلع EA و AH به ترتیب با دو ضلع HK و HD مساوی‌اند، و زاویهٔ EAH با زاویهٔ KHD مساوی است؛ بنابراین EH با KD مساوی است. [۴.I]

بنابراین مثلث AEH با مثلث HKD مساوی و متشابه است. به همین دلیل، مثلث AHG نیز با مثلث HLD مساوی و متشابه است.

اما، چون دو خط راست EH و HG، که یکدیگر را بریده‌اند با دو خط راست KD و DL که یکدیگر را بریده‌اند و در یک صفحه نیستند، موازی‌اند، زاویه‌های بین آنها با هم مساوی خواهند بود. [۱۰.XI]

بنابراین زاویهٔ EHG با زاویهٔ KDL مساوی است.

و، چون دو خط راست EH و HG به ترتیب با دو خط راست KD و DL مساوی‌اند، و زاویهٔ EHG با زاویهٔ KDL مساوی است، بنابراین EG با KL مساوی است؛ [۴.I]

در نتیجه مثلث EHG با مثلث KDL مساوی و متشابه است. به همین دلیل مثلث AEG نیز با مثلث HKL مساوی و متشابه است.

لذا هرم با قاعدهٔ مثلث AEG و به رأس H با هرمی که قاعدهٔ آن مثلث HKL و رأس آن نقطهٔ D است مساوی و متشابه است. [۱۰.تع.XI]

و، چون HK با AB، یک ضلع مثلث ADB، موازی رسم شده است، مثلث ADB با مثلث DHK متساوی‌الزاویه است، [۲۹.I]

و ضلعهای آنها متناسب‌اند؛ بنابراین مثلث ADB با مثلث DHK متشابه است. [۱.تع.VI]

به همین دلیل مثلث DBC نیز با مثلث DKL متشابه است و مثلث ADC با مثلث DLH.

اما چون دو خط راست BA و AC، که یکدیگر را بریده‌اند، با دو خط راست KH و HL که یکدیگر را بریده‌اند، موازی‌اند و در یک صفحه نیستند زاویه‌های بین آنها با هم مساوی خواهند بود. [۱۰.XI]

بنابراین زاویهٔ BAC با زاویهٔ KHL مساوی است.

و، نسبت BA به AC مثلث نسبت KH است به HL؛ بنابراین مثلث ABC با مثلث HKL متشابه است. لذا هرم با قاعدهٔ مثلث ABC و رأس D نیز با هرم با قاعدهٔ مثلث HKL و رأس D متشابه است.

اما ثابت شده بود که هرم با قاعدهٔ مثلث HKL و رأس D، با هرم با قاعدهٔ مثلث AEG و رأس H متشابه است. لذا، هر یک از هرمهای $AEGH$ و $HKLD$ با تمامی هرم $ABCD$ متشابه است.

حال، چون BF با FC مساوی است، متوازی‌الاضلاع $EBFG$ دو برابر مثلث GFC است. و، چون اگر دو منشور با ارتفاع متساوی، یکی با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع و دیگری با قاعدهٔ

مثلث در دست باشند، و اگر متوازی‌الاضلاع دو برابر مثلث باشد، دو منشور متساوی‌اند،[XI.۳۹] بنابراین منشور حاصل از دو مثلث BKF و EHG و سه متوازی‌الاضلاع $EBFG$ و $EBKH$ و $HKFG$ با منشور حاصل از دو مثلث GFC و HKL و سه متوازی‌الاضلاع $KFCL$ و $LCGH$ و $HKFG$ مساوی است.

و روشن است که هر یک از منشورها، یعنی منشور با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $EBFG$ که خط راست HK روبه روی آن است، و منشور با قاعدهٔ مثلث GFC که مثلث HKL روبه‌روی آن است، از هر یک از هرمهای مثلث القاعدهٔ AEG و HKL و به رأسهای H و D بزرگتر است، زیرا اگر خطهای راست EF و EK را رسم کنیم منشور با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $EBFG$ که خط راست HK روبه روی آن است از هرم با قاعدهٔ مثلث EBF و رأس K بزرگتر است.

اما هرمی که قاعدهٔ آن مثلث EBF و رأس آن نقطهٔ K است با هرمی که قاعدهٔ آن مثلث AEG و رأس آن نقطهٔ H است مساوی است، زیرا از صفحه‌های متساوی و متشابه تشکیل شده‌اند. بنابراین منشوری که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع $EBFG$ و خط راست HK روبه‌روی آن است نیز از هرمی که قاعدهٔ آن مثلث AEG و نقطهٔ H رأس آن است، بزرگتر است.

اما منشوری که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع $EBFG$ و خط راست HK روبه‌روی آن است با منشوری که مثلث GFC قاعدهٔ آن و مثلث HKL وجه روبه‌روی آن است، مساوی است، و هرمی که قاعدهٔ آن مثلث AEG و نقطهٔ H رأس آن است با هرمی که قاعدهٔ آن مثلث HKL و رأس آن نقطهٔ D است مساوی است.

بنابراین دو منشور مذکور بزرگتر از دو هرمی هستند که قاعده‌های آنها مثلثهای AEG و HKL و رأسهای آنها نقاط H و D هستند، بزرگترند. در نتیجه تمامی هرمی که قاعدهٔ آن مثلث ABC و رأس آن D است، به دو هرم مساوی با هم و دو منشور متساوی تقسیم شده است، و [مجموع] دو منشور از نصف تمامی هرم بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر دو هرم مثلث القاعدهٔ هم ارتفاع در دست باشند و هر یک از آنها به دو هرم مثلث القاعدهٔ مساوی با یکدیگر و متشابه با تمام، و دو منشور متساوی تقسیم شده باشند، آنگاه نسبت قاعدهٔ یک هرم به قاعدهٔ هرم دیگر همچون نسبت همهٔ منشورهای یک هرم است به همهٔ منشورهای هرم دیگر، که تعداد آنها در هر دو هرم با هم مساوی است.

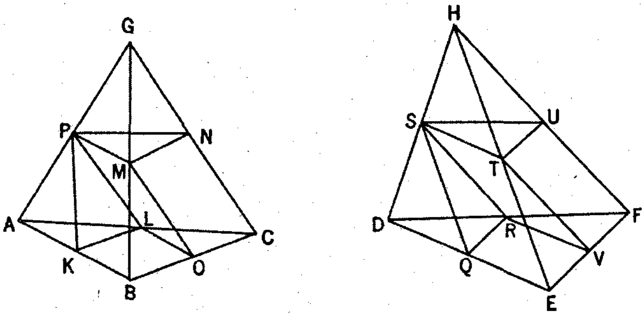
فرض می‌کنیم دو هرم هم ارتفاع مثلث القاعده با قاعده‌های ABC و DEF و رأسهای G

و H دردست‌اند، و فرض می‌کنیم هر یک از آنها به دو هرم مساوی با یکدیگر و متشابه با تمام، و دو منشور متساوی تقسیم شده است؛ [۳.XII]

می‌گوییم که نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت همهٔ منشورهای هرم $ABCG$ است به همهٔ منشورهای هرم $DEFH$، که تعدادشان در هر دو هرم با هم مساوی است.

زیرا، چون BO با OC مساوی است و AL با LC، بنابراین LO با AB موازی است، و مثلث ABC با مثلث LOC متشابه است.

به همین دلیل مثلث DEF نیز با مثلث RVF متشابه است.



و، چون BC دو برابر CO و EF دو برابر FV است، بنابراین نسبت BC به CO همچون نسبت EF است به FV. و، بر BC و CO شکلهای راست‌خط متشابه و متشابه‌الوضع ABC و LOC بنا شده‌اند، و بر EF و FV شکلهای راست‌خط متشابه و متشابه‌الوضع DEF و RVF؛ بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث LOC همچون نسبت مثلث DEF است به مثلث RVF؛ [۲۲.VI]

لذا، با ابدال نسبت، نسبت مثلث ABC به مثلث DEF همچون نسبت مثلث LOC است به مثلث RVF. [۱۶ .V]

اما نسبت مثلث LOC به مثلث RVF همچون نسبت منشوری است که قاعدهٔ آن LOC و وجه روبه‌روی آن PMN است به منشوری که قاعدهٔ آن RVF و وجه روبه‌رویش STU است. [لم بعد] بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث DFE نیز همچون نسبت منشور به قاعدهٔ LOC است که وجه روبه‌روی آن PMN است به منشوری که در آن مثلث RVF قاعده و وجه روبه‌روی به آن STU است.

اما نسبت منشورهای مذکور به یکدیگر، همچون نسبت منشور با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $KBOL$ است که خط راست روبه‌رویش PM است به منشور با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $QEVR$ که خط راست روبه‌رویش ST است. [۳.XII ،۳۹.XI]

بنابراین نسبت دو منشور، یکی با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $KBOL$ و خط راست روبه‌روی آن PM به منشور دیگری با قاعدهٔ مثلث LOC و وجه روبه‌روی آن PMN نیز همچون نسبت منشور با قاعدهٔ $QEVR$ است که خط راست روبه‌روی آن ST است به منشور با قاعدهٔ مثلث RVF که وجه روبه‌روی آن STU است. [۱۲.V]

و لذا نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF نیز همچون نسبت دو منشور مذکور اولی است به دو منشور مذکور دومی.

و همچنین اگر هرمهای $PMNG$ و $STUH$ به دو منشور و دو هرم تقسیم شوند، نسبت قاعدهٔ PMN به قاعدهٔ STU، همچون نسبت دو منشور در هرم $PMNG$ است به دو منشور در هرم $STUH$. اما نسبت قاعدهٔ PMN به قاعدهٔ STU همچون نسبت قاعدهٔ ABC است به قاعدهٔ DEF؛ زیرا مثلثهای PMN و STU به ترتیب با مثلثهای LOC و RVF مساوی‌اند.

بنابراین نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF نیز همچون نسبت چهار منشور است به چهار منشور.

و به همین ترتیب نیز اگر هرمهای باقیمانده را به دو هرم و دو منشور تقسیم کنیم، نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت همهٔ منشورها در هرم $ABCG$ است به همهٔ منشورهای موجود در هرم $DEFH$، که تعدادشان در هر دو هرم با هم مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

اما این نکته را که نسبت مثلث LOC به مثلث RVF همچون نسبت منشوری است که مثلث LOC قاعدهٔ آن و PMN وجه روبه‌روی آن است به منشوری که مثلث RVF قاعدهٔ آن و STU وجه روبه‌روی آن، بایستی به طریق زیر اثبات کنیم.

زیرا، در همان شکل فرض کنید عمودهایی از G و H بر صفحه‌های ABC و DEF فرود آمده‌اند. البته این عمودها با هم مساوی‌اند، زیرا بنابه فرض هرمها هم ارتفاع‌اند.

حال، چون دو خط راست GC و عمود مرسوم از G به وسیلهٔ صفحه‌های متوازی ABC و PMN بریده شده‌اند، به یک نسبت بریده خواهند شد. [۱۷.XI]

و GC توسط صفحهٔ PMN در نقطهٔ N نصف شده است، بنابراین عمود مرسوم از G بر صفحهٔ ABC نیز به وسیلهٔ صفحهٔ PMN نصف خواهد شد.

به همین دلیل عمود مرسوم از H بر صفحهٔ DEF نیز توسط صفحهٔ STU نصف خواهد شد. و، عمودهای مرسوم از G و H بر صفحه‌های ABC و DEF با هم مساوی‌اند، بنابراین

عمودهای مرسوم از رأسهای مثلثهای PMN و STU بر صفحه‌های ABC و DEF نیز با هم مساوی‌اند.

لذا منشورهایی که مثلثهای LOC و RVF قاعده‌های آنها و PMN و STU وجه‌های روبه‌روی آنها هستند ارتفاعهای متساوی دارند.

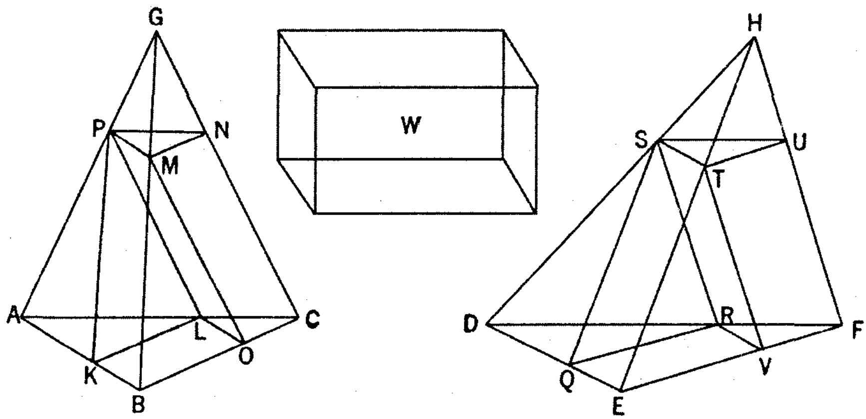
از این رو جسمهای متوازی‌السطوحی حاصل از منشورهای مذکور ارتفاعهای متساوی دارند و نسبت آنها همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر. [۳۲.XI]

بنابراین نسبت نیمه‌های آنها، یعنی نسبت منشورهای مذکور به یکدیگر همچون نسبت قاعدهٔ LOC است به قاعدهٔ RVF.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

نسبت هرمهای مثلث القاعدهٔ هم ارتفاع همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم هرمهایی هم ارتفاعی در دست‌اند که قاعده‌های آنها مثلثهای ABC و DEF و رأسهای آنها به ترتیب نقاط G و H هستند؛ می‌گوییم که نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت هرم $ABCG$ است به هرم $DEFH$.

زیرا، اگر نسبت هرم $ABCG$ به هرم $DEFH$ همچون نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF نباشد، آنگاه نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت هرم $ABCG$ است به جسمی یا کوچکتر از هرم $DEFH$ یا بزرگتر از آن.

ابتدا فرض می‌کنیم همچون نسبت $ABCG$ باشد به جسم کوچکتری مانند W، و فرض می‌کنیم هرم $DEFH$ به دو هرم مساوی با هم و متشابه با تمامی، و دو منشور متساوی تقسیم شده است؛ در این صورت دو منشور از نصف تمامی هرم بزرگترند. [۳.XII]

باز، فرض می‌کنیم هرمهایی که از این تقسیم پدید آمده‌اند به همین نحو تقسیم شده‌اند، و فرض می‌کنیم این عمل پیوسته ادامه یافته است تا اینکه هرمهایی که از هرم $DEFH$ باقی مانده‌اند از زیادتی هرم $DEFH$ بر جسم W کوچکترند. [۱.X]

فرض می‌کنیم چنین هرمهایی باقی مانده‌اند، و برای سهولت استدلال فرض می‌کنیم باقیمانده‌ها $DQRS$ و $STUH$ هستند. بنابراین باقیمانده‌ها، یعنی منشورهایی محاط در هرم $DEFH$، از جسم W بزرگترند.

فرض می‌کنیم هرم $ABCG$ نیز به همان نحو و به تعداد دفعاتی مشابه با هرم $DEFH$ تقسیم شده است؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت منشورهای محاط در هرم $ABCG$ است به منشورهای محاط در هرم $DEFH$. [۴.XII]

اما نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت هرم $ABCG$ است به جسم W. بنابراین نسبت هرم $ABCG$ به جسم W نیز همچون نسبت منشورهای محاط در هرم $ABCG$ است به منشورهای محاط در هرم $DEFH$. [۱۱.V]

لذا، با ابدال نسبت، نسبت هرم $ABCG$ به منشورهای محاط در آن همچون نسبت جسم W است به منشورهای محاط در هرم $DEFH$. [۱۶.V]

اما هرم $ABCG$ از منشورهای محاطی‌اش بزرگتر است؛ بنابراین جسم W نیز از منشورهای محاطی در هرم $DEFH$ بزرگتر است. اما کوچکتر از آن نیز هست: که غیر ممکن است.

بنابراین نسبت هرم $ABCG$ به هیچ جسمی کوچکتر از هرم $DEFH$، همچون نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF نیست. به همین نحو می‌توان ثابت کرد که نسبت هرم $DEFH$ به هیچ جسمی کوچکتر از هرم $ABCG$، همچون نسبت قاعدهٔ DEF به قاعدهٔ ABC نیست.

حال، می‌گوییم که نسبت هرم $ABCG$ به هیچ جسمی بزرگتر از هرم $DEFH$ همچون نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF نیست. زیرا، در صورت امکان فرض می‌کنیم که همچون نسبت $ABCG$ باشد به جسم بزرگتری مانند W؛ بنابراین به عکس، نسبت قاعدهٔ DEF به قاعدهٔ ABC همچون نسبت جسم W است به هرم $ABCG$. اما نسبت جسم W به جسم $ABCG$، چنانکه ثابت شده بود: [۴.XII، لم]

همچون نسبت هرم $DEFH$ است به جسمی کوچکتر از هرم $ABCG$؛ بنابراین نسبت قاعدهٔ DEF به قاعدهٔ ABC نیز همچون نسبت هرم $DEFH$ است به جسمی کوچکتر از هرم $ABCG$: [۱۱.V]

که ثابت شده بود محال است.

بنابراین نسبت هرم $ABCG$ به جسمی بزرگتر از هرم $DEFH$ همچون نسبت قاعدهٔ ABC

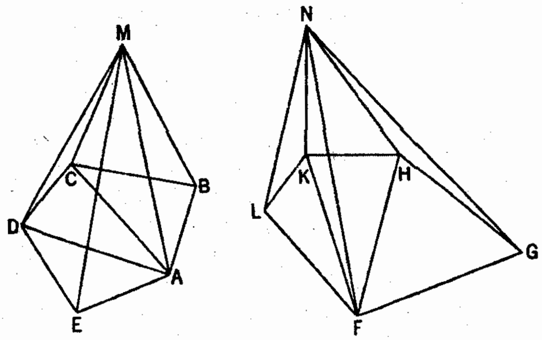
به قاعدهٔ DEF نیست. اما، ثابت شده بود که نسبت هرم $ABCG$ به جسم کوچکتر هم نمی‌تواند همچون نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF باشد. در نتیجه نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت هرم $ABCG$ است به هرم $DEFH$.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

نسبت هرمهای هم ارتفاع با قاعده‌های چند ضلعی همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر.

فرض می‌کنیم هرمهای هم ارتفاعی در دست‌اند که قاعده‌های آنها چند ضلعیهای $ABCDE$ و $FGHKL$ هستند و رأسهای آنها به ترتیب نقطه‌های M و N. می‌گوییم که نسبت قاعدهٔ $ABCDE$ به قاعدهٔ $FGHKL$ همچون نسبت هرم $ABCDEM$ است به هرم $FGHKLN$.



فرض می‌کنیم A به C و D وصل شده است و F به H و K. دراین صورت چون $ABCM$ و $ACDM$ دو هرم مثلث القاعده هستند که ارتفاع متساوی دارند، نسبت آنها به یکدیگر همچون نسبت قاعده‌های آنهاست؛ [۵.XII]

بنابراین نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ ACD همچون نسبت هرم $ABCM$ است به هرم $ACDM$. و، از ترکیب نسبت در صورت خواهیم داشت، نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ ACD، همچون نسبت هرم $ABCDM$ است به هرم $ACDM$ [۱۸.V]

اما نسبت قاعدهٔ ACD به قاعدهٔ ADE نیز همچون نسبت هرم $ACDM$ است به هرم $ADEM$. [۵ .XII]

لذا، طبق نسبت مساوات هموار، نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ ADE، همچون نسبت هرم $ABCDM$ است به هرم $ADEM$. [۲۲.V]

و باز، از ترکیب نسبت در صورت، داریم نسبت قاعدهٔ $ABCDE$ به قاعدهٔ ADE همچون نسبت هرم $ABCDEM$ است به هرم $ADEM$. [۱۸.V]

همچنین به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که نسبت قاعدهٔ $FGHKL$ به قاعدهٔ FGH،

همچون نسبت هرم $FGHKLN$ است به هرم $FGHN$. و، چون $ADEM$ و $FGHN$ دو هرم هستند که قاعده‌های آنها مثلث‌اند و ارتفاعهای آنها متساوی، بنابراین نسبت قاعدهٔ ADE به قاعدهٔ FGH همچون نسبت هرم $ADEM$ است به هرم $FGHN$. [۵.XII]

اما نسبت قاعدهٔ ADE به قاعدهٔ $ABCDE$ همچون نسبت هرم $ADEM$ بود به هرم $ABCDEM$.

لذا، بنابر نسبت مساوات هموار، نسبت قاعدهٔ $ABCDE$ به قاعدهٔ FGH نیز همچون نسبت هرم $ABCDEM$ است به هرم $FGHN$. [۲۲.V]

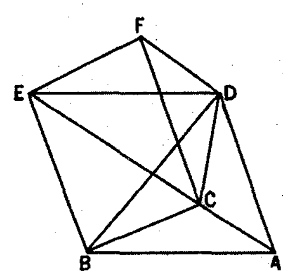
اما، به علاوه، نسبت قاعدهٔ FGH به قاعدهٔ $FGHKL$ نیز مثل نسبت هرم $FGHN$ بود به هرم $FGHKLN$.

در نتیجه، بنابر نسبت مساوات هموار، نسبت قاعدهٔ $ABCDE$ به قاعدهٔ $FGHKL$ نیز همچون نسبت هرم $ABCDEM$ است به هرم $FGHKLN$. [۲۲.V]

آنچه می‌خواستیم

قضیهٔ ۷

هر منشور مثلث القاعده به سه هرم مثلث القاعدهٔ متساوی تقسیم می‌شود.



فرض می‌کنیم منشوری به قاعدهٔ مثلث ABC با وجه روبه‌روی DEF در دست است؛ می‌گوییم که منشور $ABCDEF$ به سه هرم مثلث القاعدهٔ متساوی تقسیم می‌شود.

زیرا، فرض می‌کنیم D به B و C وصل شده است و E به C. چون $ABED$ متوازی‌الاضلاع است و BD قطر آن، بنابراین مثلث ABD با مثلث EBD مساوی است؛[۳۴.I]

لذا هرمی هم که قاعدهٔ آن مثلث ABD و رأس آن نقطهٔ C است با هرمی که قاعدهٔ آن مثلث DEB و راس آن نقطهٔ C است مساوی است.

اما هرمی که مثلث DEB قاعده و C رأس آن است با هرمی که قاعدهٔ آن مثلث EBC و D رأس آن است یکی است؛ زیرا وجه‌های هردو یکی هستند.

بنابراین هرم به قاعدهٔ مثلث ABD و رأس C نیز با هرم به قاعدهٔ مثلث EBC و رأس D مساوی است. باز، چون $FCBE$ متوازی‌الاضلاع است، و CE قطر آن، مثلث CEF با مثلث CBE مساوی است. [۳۴.I]

بنابراین هرم به قاعدهٔ مثلث BCE و رأس D نیز با هرم به قاعدهٔ مثلث ECF و رأس D مساوی است. [۵.XII]

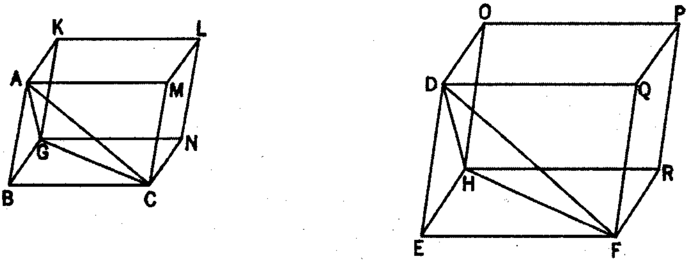
اما ثابت شده بود که هرم به قاعدهٔ مثلث BCE و رأس D با هرم به قاعدهٔ مثلث ABD و رأس C مساوی است؛ لذا هرمی هم که مثلث CEF قاعده و D رأس آن است با هرمی که مثلث ABD قاعده و C رأس آن است مساوی است. بنابراین منشور $ABCDEF$ به سه هرم مساوی با هم تقسیم شده است که مثلث القاعده‌اند.

و، چون هرم به قاعدهٔ مثلث ABD و رأس C همان هرم به قاعدهٔ مثلث CAB و رأس D است، زیرا وجه‌های هر دو یکی هستند و ثابت شده بود که هرم به قاعدهٔ مثلث ABD و رأس C، ثلث منشور به قاعدهٔ مثلث ABC با وجه روبه‌روی DEF است، بنابراین هرم به قاعدهٔ مثلث ABC و رأس D نیز ثلث منشوری است به همین قاعدهٔ مثلث ABC و وجه روبه‌روی DEF.

فرع. از اینجا روشن می‌شود که هر هرم، ثلث منشوری است به همان قاعده و ارتفاع هرم.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

نسبت هرمهای مثلث القاعدهٔ متشابه همچون مکعب نسبت ضلعهای متناظر آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم هرمهای مثلث القاعدهٔ متشابه و متشابه‌الوضع با قاعده‌های ABC و DEF و با رأسهای G و H در دست‌اند؛

می‌گوییم که نسبت هرم $ABCG$ به هرم $DEFH$ همچون مکعب نسبت BC به EF است.

زیرا فرض می‌کنیم جسمهای متوازی السطوحی $BGML$ و $EHQP$ کامل شده‌اند.

اما چون هرم $ABCG$ با هرم $DEFH$ متشابه است، بنابراین زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی است. و زاویهٔ GBC با زاویهٔ HEF، و زاویهٔ ABG با زاویهٔ DEH؛ و نسبت AB به DE همچون نسبت BC است به EF، و نسبت BG است به EH.

و، چون نسبت AB به DE، همچون نسبت BC است به EF، و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند، بنابراین متوازی‌الاضلاع BM با متوازی‌الاضلاع EQ متشابه است.

به همین دلیل BN نیز با ER متشابه است و BK با EO؛ بنابراین سه متوازی‌الاضلاع MB و BK و BN با سه متوازی‌الاضلاع EQ و EO و ER متشابه‌اند.

اما سه متوازی‌الاضلاع MB و BK و BN با سه وجه روبه‌روی خود مساوی و متشابه‌اند، و سه متوازی‌الاضلاع EQ و EO و ER با سه وجه روبه‌روی خود مساوی و متشابه‌اند.[۲۴.XI]

بنابراین جسمهای $BGML$ و $EHQB$ از صفحه‌های متشابه و از لحاظ تعداد مساوی حاصل شده‌اند. بنابراین جسم $BGML$ با جسم $EHQP$ متشابه است.

اما نسبت جسمهای متوازی‌السطوحی متشابه همچون مکعب نسبت ضلعهای متناظرشان است به یکدیگر. [۳۳.XI]

لذا نسبت جسم $BGML$ به جسم $EHQP$، همچون مکعب نسبت ضلع BC به ضلع متناظرش EF است.

اما نسبت جسم $BGML$ به جسم $EHQP$، همچون نسبت هرم $ABCG$ است به هرم $DEFH$، چون هرم برابر یک ششم جسم است، زیرا منشوری که نصف جسم متوازی السطوحی است. [۲۸.XI]

سه برابر هرم است. [۷.XII]

بنابراین، نسبت هرم $ABCG$ به هرم $DEFH$ نیز برابر مکعب نسبت BC به EF است.

آنچه می‌خواستیم.

فرع. از اینجا روشن می‌شود که نسبت هرمهای متشابهی که قاعده‌های چندضلعی دارند همچون مکعب نسبت ضلعهای متناظر آنهاست به یکدیگر.

زیرا، اگر این هرمها به هرمهای مثلث القاعدهٔ محصور در خود تقسیم شوند، به موجب این واقعیت که چندضلعیهای متشابه تشکیل دهندهٔ قاعده‌های آنها نیز به مثلثهای متشابهی تقسیم می‌شوند که تعداد آنها در هر دو قاعده با هم یکی است، [۲۰.VI]

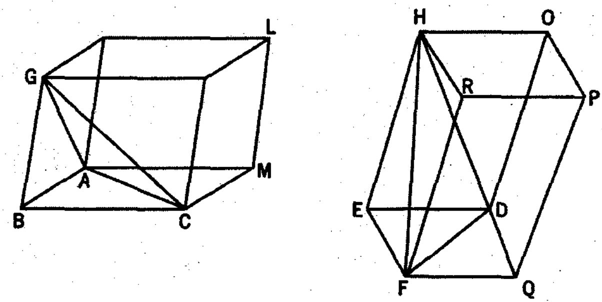
نسبت هرم مثلث القاعدهٔ واقع در تمامی یک هرم به هرم مثلث القاعدهٔ واقع در تمامی هرم دیگر، همچون نسبت همهٔ هرمهای مثلث القاعدهٔ واقع در یک هرم است به همهٔ هرمهای مثلث القاعدهٔ واقع در هرم دیگر، [۱۲.V]

یعنی نسبت خود هرمی که قاعده‌اش یک چندضلعی است به هرم دیگری که قاعده‌اش یک چندضلعی است.

اما نسبت یک هرم مثلث القاعده به یک هرم مثلث القاعده همچون مکعب نسبت ضلعهای متناظر آنهاست به یکدیگر. بنابراین نسبت هرمی که قاعده‌اش یک چندضلعی است به هرمی با قاعدهٔ متشابه با آن همچون مکعب نسبت ضلع یکی به ضلع دیگری است.

قضیهٔ ۹

در هرمهای مثلث‌القاعدهٔ متساوی قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، و هرمهایی که در آنها قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، متساوی‌اند.



فرض می‌کنیم هرمهای مثلث القاعدهٔ متساوی به قاعده‌های ABC و DEF و به‌ترتیب به رأسهای G و H در دست‌اند؛ می‌گوییم که در هرمهای $ABCG$ و $DEFH$ قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، یعنی نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت ارتفاع هرم $DEFH$ است به ارتفاع هرم $ABCG$. زیرا، فرض می‌کنیم جسمهای متوازی‌السطوحی $BGML$ و $EHQP$ کامل شده‌اند.

حال، چون هرم $ABCG$ با هرم $DEFH$ مساوی است، و جسم $BGML$، شش برابر هرم $ABCG$ است، و جسم $EHQP$ شش برابر هرم $DEFH$، بنابراین جسم $BGML$ با جسم $EHQP$ مساوی است. اما در جسمهای متوازی‌السطوحی قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند. [۳۴.XI]

بنابراین نسبت قاعدهٔ BM به قاعدهٔ EQ همچون نسبت ارتفاع جسم $EHQP$ است به ارتفاع جسم $BGML$.

اما نسبت قاعدهٔ BM به قاعدهٔ EQ همچون نسبت مثلث ABC است به مثلث DEF. [۳۴.I]

بنابراین نسبت مثلث ABC به مثلث DEF نیز، همچون نسبت ارتفاع جسم $EHQP$ است به ارتفاع جسم $BGML$. [۱۱.V]

اما ارتفاع جسم $EHQP$ با ارتفاع هرم $DEFH$ یکی است و ارتفاع جسم $BGML$ با ارتفاع هرم $ABCG$، بنابراین نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت ارتفاع هرم $DEFH$ است به ارتفاع هرم $ABCG$.

بنابراین در هرمهای $ABCG$ و $DEFH$ قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند. اکنون، در هرمهای $ABCG$ و $DEFH$ فرض می‌کنیم قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند؛ یعنی، نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت ارتفاع هرم $DEFH$ است به ارتفاع هرم $ABCG$.

می‌گوییم که هرم $ABCG$ با هرم $DEFH$ مساوی است.

زیرا، در همان شکل قبل، چون نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF همچون نسبت ارتفاع هرم $DEFH$ است به ارتفاع هرم $ABCG$، و نسبت قاعدهٔ ABC به قاعدهٔ DEF، همچون نسبت متوازی‌الاضلاع BM است به متوازی‌الاضلاع EQ، بنابراین نسبت متوازی‌الاضلاع BM به متوازی‌الاضلاع EQ نیز همچون نسبت ارتفاع هرم $DEFH$ است به ارتفاع هرم $ABCG$. [۱۱.V]

اما ارتفاع هرم $DEFH$ با ارتفاع متوازی‌السطوح $EHQP$ یکی است، و ارتفاع هرم $ABCG$ با ارتفاع متوازی‌السطوح $BGML$؛ لذا نسبت قاعدهٔ BM به قاعدهٔ EQ، همچون نسبت ارتفاع متوازی‌السطوح $EHQP$ است به ارتفاع متوازی السطوح $BGML$.

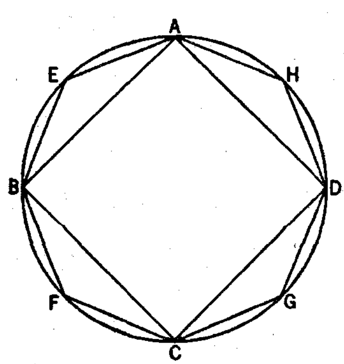
اما، آن جسمهای متوازی‌السطوحی که در آنها قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، با هم مساوی‌اند. [۳۴.XI]

بنابراین جسم متوازی‌السطوحی $BGML$ با جسم متوازی‌السطوحی $EHQP$ مساوی است. و، هرم $ABCG$ یک ششم متوازی‌السطوح $BGML$ است و هرم $DEFH$ یک ششم متوازی‌السطوح $EHQP$؛ بنابراین هرم $ABCG$ با هرم $DEFH$ مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

هر مخروط یک سوم استوانه‌ای است به همان قاعده و همان ارتفاع.



فرض می‌کنیم مخروطی با یک استوانه دارای یک قاعده، دایرهٔ $ABCD$، و یک ارتفاع باشد. می‌گوییم که مخروط یک سوم استوانه، یا استوانه سه برابر مخروط است.

زیرا، اگر استوانه سه برابر مخروط نباشد یا بزرگتر از سه برابر مخروط است یا کوچکتر از سه برابر آن.

اول فرض می‌کنیم بزرگتر از سه برابر مخروط باشد، و فرض می‌کنیم مربع $ABCD$ در دایرهٔ $ABCD$ محاط شده است. [۶.IV]

در این صورت مربع $ABCD$ از نصف دایرهٔ $ABCD$ بزرگتر است.

فرض می‌کنیم بر مربع $ABCD$ منشوری با ارتفاع مساوی با ارتفاع استوانه بنا شده است. در این صورت، منشوری که چنین بنا شده از نصف استوانه بزرگتر است، زیرا، اگر مربعی هم بر دایرهٔ $ABCD$ محیط کنیم، [۷.IV]

مربع محاط در دایرهٔ $ABCD$ نصف مربع محیط بر آن است و جسمهایی که بر آنها بنا می‌شوند منشورهای متوازی السطوحی متساوی الارتفاع‌اند؛ و نسبت جسمهای متوازی السطوحی هم ارتفاع به یکدیگر همچون نسبت قاعده‌های آنهاست؛ [۳۲.XI]

بنابراین منشوری هم که بر مربع $ABCD$ بنا می‌شود نصف منشوری است که بر مربع محیط بر دایرهٔ $ABCD$ بنا می‌شود. [رک. XI. ۲۸ یا XII. ۶ و ۷، ف.]

و استوانه کوچکتر از منشوری است که از مربع محیط بر دایرهٔ $ABCD$ حاصل شده است؛ بنابراین منشور حاصل از مربع $ABCD$ با ارتفاعی مساوی با ارتفاع استوانه، از نصف استوانه بزرگتر است.

فرض می‌کنیم کمانهای AB و BC و CD و DA به‌ترتیب در نقاط E و F و G و H نصف شده‌اند، و E به A و B وصل شده است، و F به B و C، و G به C و D، و H به D و A. در این صورت هر یک از مثلثهای AEB و BFC و CGD و DHA، چنانکه قبلاً ثابت کرده‌ایم، [۲.XII]

از نصف قطعه‌ای از دایرهٔ $ABCD$، که محیط بر آن است، بزرگتر است.

حال، بر هر یک از مثلثهای AEB و BFC و CGD و DHA منشوری با ارتفاع برابر با ارتفاع استوانه بنا می‌کنیم؛ بنابراین هر یک از منشورهایی که این گونه بنا شده است از نصف آن قطعه‌ای از استوانه که محیط بر آن است بزرگتر است؛ زیرا اگر از نقاط E و F و G و H خطهای راستی به موازات AB و BC و CD و DA رسم و متوازی‌الاضلاعهای مرسوم بر AB و BC و CD و DA را کامل و بر آنها جسمهای متوازی السطوحی با ارتفاعهای مساوی با ارتفاع استوانه بنا کنیم، منشورهایی که برمثلثهای AEB و BFC و CGD و DHA بنا می‌شوند نیمه‌های چند جسم بنا شده‌اند؛ و قطعه‌های استوانه از جسمهای متوازی‌السطوحی بنا شده کوچکترند؛ از این‌رو منشورهای بنا شده بر مثلثهای AEB و BFC و CGD و DHA نیز از نصف قطعه‌های استوانهٔ محیطی آنها بزرگترند.

به همین ترتیب، با نصف کردن کمانهای باقیمانده و وصل کردن نقاط حاصل به هم و بنا کردن منشورهای مثلث القاعده با ارتفاع مساوی با ارتفاع استوانه بر هر یک، و ادامهٔ این عمل، قطعه‌هایی از استوانه باقی می‌گذاریم که از زیادتی استوانه بر سه برابر مخروط کمتر است. [X. ۱]

فرض می‌کنیم چنین قطعه‌هایی باقی‌مانده‌اند و این قطعه‌ها AE و EB و BF و FC و CG

و GD و DH و HA باشند. بنابراین بقیه، یعنی منشوری که چندضلعی $AEBFCGDH$ قاعدهٔ آن و ارتفاعش همان ارتفاع استوانه است از سه برابر مخروط بزرگتر است.

اما منشوری که قاعدهٔ آن چندضلعی $AEBFCGDH$ و ارتفاعش همان ارتفاع استوانه است سه برابر هرمی است که چندضلعی $AEBFCGDH$ قاعدهٔ آن است و رأسش همان رأس مخروط. [XII.۷،ف.]

بنابراین هرمی هم که قاعدهٔ آن چندضلعی $AEBFCGDH$، و رأسش همان رأس مخروط است از مخروطی که دایرهٔ $ABCD$ قاعدهٔ آن است بزرگتر است.

اما کوچکتر نیز هست، زیرا در آن محصور شده است: که ناممکن است. بنابراین استوانه از سه برابر مخروط بزرگتر نیست. حال می‌گوییم که استوانه از سه برابر مخروط کوچکتر هم نیست، زیرا، اگر فرض کنیم چنین باشد و استوانه از سه برابر مخروط کوچکتر باشد، بنابراین به عکس، مخروط از ثلث استوانه بزرگتر است.

فرض می‌کنیم مربع $ABCD$ در دایرهٔ $ABCD$ محاط شده است؛ بنابراین مربع $ABCD$ از نصف دایرهٔ $ABCD$ بزرگتر است.

اکنون فرض می‌کنیم بر مربع $ABCD$ هرمی با همان رأس مخروط بنا شده است؛ بنابراین هرمی که بدین گونه بنا شده از نصف مخروط بزرگتر است، زیرا چنانکه ثابت کردیم اگر مربعی بر این دایره محیط کنیم، مربع $ABCD$ نصف مربع محیط بر دایره است، و اگر از مربعها جسمهای متوازی السطوحی مساوی با ارتفاع مخروط بسازیم، که آنها را هم منشور می‌نامیم، جسم ساخته شده از مربع $ABCD$ نصف جسم ساخته شده از مربع محیط بر دایره است؛ زیرا نسبت آنها به یکدیگر همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به همدیگر. [XI.۳۲]

بنابراین ثلثهای آنها نیز همین نسبت را با هم خواهند داشت؛ لذا هرمی که قاعدهٔ آن مربع $ABCD$ است نصف هرمی است که از مربع محیط بر دایره ساخته شده است. و هرمی که از مربع محیط بر دایره ساخته شده از مخروط بزرگتر است، زیرا آن را محصور کرده است. بنابراین هرمی که قاعدهٔ آن مربع $ABCD$ و رأسش با رأس مخروط یکی است، از نصف مخروط بزرگتر است.

فرض می‌کنیم کمانهای AB و BC و CD و DA به ترتیب در نقاط E و F و G و H نصف شده‌اند؛ و فرض می‌کنیم E به A و B وصل شده است، و F به B و C، و G به C و D، و H به D و A. بنابراین هر یک از مثلثهای AEB و BFC و CGD، و DHA نیز از نصف قطعه‌ای از دایرهٔ $ABCD$ که محیط بر آن است، بزرگتر است.

اکنون بر هر یک از مثلثهای AEB و BFC و CGD و DHA هرمهایی بنا می‌کنیم که

رأسهای آنها همان رأس مخروط باشد. بنابراین هر یک از هرمهایی هم که این گونه بنا شده‌اند، به همین ترتیب از نصف قطعه‌ای از مخروط محیط بر آن بزرگتر است.

بدین ترتیب از نصف کردن کمانهای باقی مانده و وصل کردن نقاط وسط آنها به هم با خطهای راست، و بنا کردن هرمهایی بر هر یک از مثلثها با همان رأس مخروط و ادامهٔ این عمل، قطعه‌هایی از مخروط به جا می‌گذاریم که از زیادتی مخروط بر ثلث استوانه کمتر خواهد شد. [X.۱]

فرض می‌کنیم چنین قطعه‌هایی باقی مانده باشند و این باقیمانده‌ها قطعه‌هایی بنا شده بر AE و EB و BF و FC و CG و GD و DH و HA باشند؛ بنابراین بقیه، یعنی هرمی که چندضلعی $AEBFCGDH$ قاعدهٔ آن، و رأسش همان رأس مخروط است، از ثلث استوانه بزرگتر است.

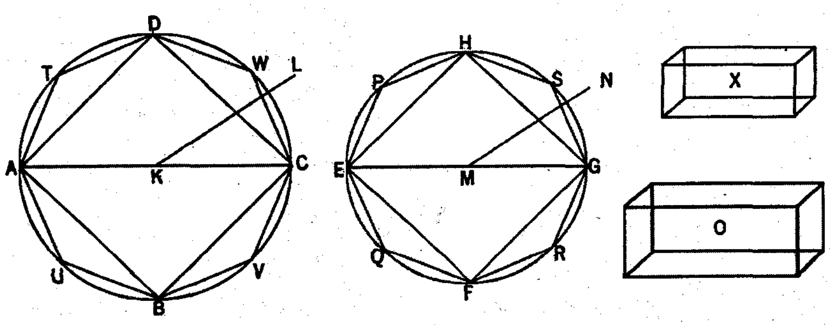
اما هرمی که قاعدهٔ آن $AEBFCGDH$ و رأس آن همان رأس مخروط است، ثلث منشوری است که چندضلعی $AEBFCGDH$ قاعدهٔ آن و ارتفاعش با ارتفاع استوانه مساوی است؛ بنابراین منشور با قاعدهٔ $AEBFCGDH$ و ارتفاع مساوی با ارتفاع استوانه، از استوانه‌ای که دایرهٔ $ABCD$ قاعدهٔ آن است، بزرگتر است.

اما این منشور از این استوانه کوچکتر هم هست زیرا در آن محصور شده است: که غیر ممکن است. بنابراین استوانه از سه برابر مخروط کوچکتر نیست و اما ثابت شده بود که از سه برابر آن بزرگتر هم نیست. بنابراین استوانه سه برابر مخروط است. در نتیجه مخروط ثلث استوانه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

نسبت مخروطها و استوانه‌های هم ارتفاع همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم مخروطها و استوانه‌های هم ارتفاعی در دست‌اند، و دایره‌های $ABCD$ و $EFGH$ قاعده‌های آنها هستند، و KL و MN محورهای آنها، و AC و EG قطرهای قاعده‌های آنها.

می‌گوییم که نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ همچون نسبت مخروط AL است به مخروط EN.

زیرا اگر چنین نسبتی بر قرار نباشد، نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ همچون نسبت مخروط AL است به جسمی کوچکتر از مخروط EN یا بزرگتر از آن.

ابتدا فرض می‌کنیم چنین نسبتی با یک جسم O، کوچکتر از مخروط EN، برقرار باشد، و فرض می‌کنیم جسم X با جسمی مساوی باشد که جسم O به اندازهٔ آن از مخروط EN کوچکتر است؛ بنابراین مخروط EN با جسمهای O و X مساوی است.

فرض می‌کنیم مربع $EFGH$ در دایرهٔ $EFGH$ محاط شده است؛ لذا این مربع از نصف دایره بزرگتر است. حال فرض می‌کنیم بر مربع $EFGH$ هرمی با ارتفاع مساوی با ارتفاع مخروط بنا کرده‌ایم؛ بنابراین هرمی که این گونه حاصل شده از نصف مخروط بزرگتر است، زیرا اگر مربعی بر دایره محیط کنیم و بر آن هرمی با ارتفاع مساوی با ارتفاع مخروط بسازیم، هرم محاط شده نصف هرم محیط شده است؛ زیراکه نسبتهای آنها همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر، [۶.XII] و مخروط از هرم محیطی کوچکتر است.

فرض می‌کنیم کمانهای EF و FG و GH و HE به ترتیب در نقطه‌های P و Q و R و S نصف شده‌اند، و P به H و E وصل شده است، و Q به E و F، و R به F و G، و S به G و H.

بنابراین هر یک از مثلثهای HPE و EQF و FRG و GSH از نصف قطعهٔ دایرهٔ $EFGH$ که محیط بر آن است، بزرگتر است. حال، بر هر یک از مثلثهای HPE و EQF و FRG و GSH هرمی هم ارتفاع با مخروط بنا می‌کنیم؛ بنابراین هر یک از هرمهایی هم که این گونه پدید می‌آید از نصف قطعه‌ای از مخروط که محیط بر آن است، بزرگتر است.

بدین ترتیب از نصف کردن کمانهایی که باقی مانده و وصل کردن نقاط وسط آنها با خطهای راست به یکدیگر و ساختن هرمهایی مثلث القاعده و هم ارتفاع با مخروط بر هر یک از مثلثها و ادامهٔ این عمل قطعه‌هایی از مخروط به جا می‌گذاریم که [مجموع] از جسم X کوچکتر خواهد بود. [۱.X]

فرض می‌کنیم چنین قطعه‌هایی به جامانده‌اند و اینها قطعه‌هایی هستند بنا شده بر HP و PE و EQ و QF و FR و RG و GS و SH؛ بنابراین بقیه، یعنی هرمی که چندضلعی $HPEQFRGS$ قاعدهٔ آن و هم ارتفاع با مخروط است، از جسم O بزرگتر است.

همچنین فرض می‌کنیم در دایرهٔ $ABCD$ چندضلعی $DTAUBVCW$ متشابه و متشابه‌الوضع با چندضلعی $HPEQFRGS$ محاط و بر آن هرمی، هم ارتفاع با مخروط AL بنا شده است. در این صورت چون، نسبت مربع AC به مربع EG، همچون نسبت چندضلعی

$DTAUBVCW$ است به چندضلعی $HPEQFRGS$؛ [۱.XII]

و نسبت مربع AC به مربع EG همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ است به دایرهٔ $EFGH$،[۲.XII] بنابراین نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ نیز همچون نسبت چندضلعی $DTAUBVCW$ است به چندضلعی $HPEQFRGS$.

اما نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$، همچون نسبت مخروط AL است به جسم O، و نسبت چندضلعی $DTAUBVCW$ به چندضلعی $HPEQFRGS$ همچون نسبت هرم به قاعدهٔ چندضلعی $DTAUBVCW$ و با رأس نقطهٔ L است به هرمی به قاعدهٔ چندضلعی $HPEQFRGS$ و رأس نقطهٔ N. [۶.XII]

بنابراین نسبت مخروط AL به جسم O نیز همچون نسبت هرم به قاعدهٔ چندضلعی $DTAUBVCW$ و رأس L است به هرم به قاعدهٔ چندضلعی $HPEQFRGS$ و رأس N؛ [۱۱.V]

بنابراین، با ابدال نسبت، نسبت مخروط AL به هرم محاط در آن همچون نسبت جسم O است به هرم محاط در مخروط EN. [۱۶.V]

اما مخروط AL از هرم محاط در آن بزرگتر است؛ بنابراین جسم O نیز از هرم محاط در مخروط EN بزرگتر است. اما O کوچکتر نیز بود: که محال است.

بنابراین نسبت مخروط AL به هیچ جسمی کوچکتر از مخروط EN، همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ نیست.

به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که نسبت مخروط EN به هیچ جسمی کوچکتر از مخروط AL، همچون نسبت دایرهٔ $EFGH$ به دایرهٔ $ABCD$ نیست.

حال می‌گوییم که نسبت مخروط AL به هیچ جسمی بزرگتر از مخروط EN همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ نیست. زیرا، در صورت امکان، فرض می‌کنیم چنین نسبتی برقرار باشد، و در این نسبت O، جسم بزرگتر باشد؛ بنابراین، به عکس، نسبت دایرهٔ $EFGH$ به دایرهٔ $ABCD$ همچون نسبت جسم O است به مخروط AL.

اما نسبت جسم O به مخروط AL، همچون نسبت مخروط EN است به جسمی کوچکتر از مخروط AL؛ بنابراین نسبت دایرهٔ $EFGH$ به دایرهٔ $ABCD$ نیز همچون نسبت مخروط EN است به جسمی کوچکتر از مخروط AL: که ثابت شده بود غیر ممکن است.

بنابراین نسبت مخروط AL به هیچ جسمی بزرگتر از مخروط EN همچون نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ نیست.

اما ثابت شده بود که این نسبت برای یک جسم کوچکتر هم برقرار نیست؛ بنابراین نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ همچون نسبت مخروط AL است به مخروط EN.

اما نسبت مخروط به مخروط همچون نسبت استوانه است به استوانه، زیرا هر یک سه برابر دیگری است؛ [XII.۱۰]

بنابراین نسبت دایرهٔ $ABCD$ به دایرهٔ $EFGH$ نیز همچون نسبت استوانه‌هایی بنا شده بر آنهاست که ارتفاعهای آنها مساوی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

نسبت مخروطها و استوانه‌های متشابه همچون نسبت مکعب قطرهای قاعده‌های آنهاست به یکدیگر.

فرض می‌کنیم مخروطها و استوانه‌های متشابهی در دست‌اند و دایره‌های $ABCD$ و $EFGH$ قاعده‌ها و BD و FH قطرهای قاعده‌ها و KL و MN محورهای مخروطها و استوانه‌ها هستند.

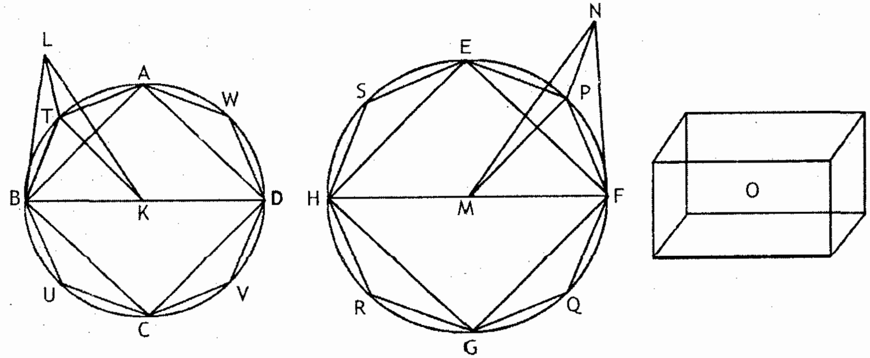
می‌گوییم که نسبت مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $ABCD$ و رأس L به مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $EFGH$ و رأس N همچون مکعب نسبت BD است به FH. زیرا، اگر نسبت مخروط $ABCDL$ به مخروط $EFGHN$ همچون مکعب نسبت BD به FH نباشد، مخروط $ABCDL$ این نسبت مکعب را یا به جسمی کوچکتر از مخروط $EFGHN$ دارد یا به جسمی بزرگتر از آن.

اول، فرض می‌کنیم این نسبت مکعب را به جسم کوچکتری مانند O داشته باشد.

فرض می‌کنیم مربع $EFGH$ در دایرهٔ $EFGH$ محاط شده است؛ [IV.۶]

بنابراین مربع $EFGH$ از نصف دایرهٔ $EFGH$ بزرگتر است.

حال فرض می‌کنیم بر مربع $EFGH$ هرمی که رأسش همان رأس مخروط است بنا شده است؛ لذا هرمی که این گونه بنا شده از نصف مخروط بزرگتر است.



فرض می‌کنیم کمانهای EF و FG و GH و HE به ترتیب در نقاط P و Q و R و S نصف شده‌اند، و فرض می‌کنیم P به E و F وصل شده است، و Q به F و G، و R به G و H،

و S به H و E. بنابراین هر یک از مثلثهای EPF و FQG و GRH و HSE نیز از نصف آن قطعه از دایرهٔ $EFGH$ که محیط بر آن است بزرگتر است.

حال، بر هر یک از مثلثهای EPF و FQG و GRH و HSE هرمی به همان رأس مخروط بنا می‌کنیم؛ بنابراین هر یک از هرمهایی هم که این گونه بنا شده از نصف آن قطعه از مخروطی که بر آن محیط شده بزرگتر است.

بدین ترتیب، با نصف کردن کمانهای باقیمانده و وصل کردن نقاط وسط آنها با خطهای راست به هم، و بنا کردن هرمهایی، با همان رأس مخروط، بر هر یک از مثلثها، و ادامهٔ این عمل قطعه‌های مخروطی خواهیم داشت که از زیادتی مخروط $EFGHN$ بر جسم O کوچکتر است. [X.۱]

فرض می‌کنیم چنین قطعه‌هایی به جا مانده‌اند و این قطعه‌ها بنا شده بر EP و PF و FQ و QG و GR و RH و HS و SE هستند؛ بنابراین باقیمانده، هرمی با قاعدهٔ چندضلعی $EPFQGRHS$ و رأس N، از جسم O بزرگتر است.

همچنین فرض می‌کنیم چندضلعی $ATBUCVDW$ متشابه و متشابه‌الوضع با چندضلعی $EPFQGRHS$ در دایرهٔ $ABCD$ محاط شده است، و بر چند ضلعی $ATBUCVDW$ هرمی به همان رأس مخروط بنا شده است. و فرض می‌کنیم LBT یکی از مثلثهایی است که هرم به قاعدهٔ چندضلعی $ATBUCVDW$ و رأس L را پدید آورده است، و NFP یکی از مثلثهایی که هرم به قاعدهٔ $EPFQGRHS$ و رأس N را پدید آورده است، و فرض می‌کنیم K به T وصل شده است و M به P. حال، چون مخروط $ABCDL$ با مخروط $EFGHN$ متشابه است، بنابراین نسبت BD به FH همچون نسبت محور KL است به محور MN.[XI.تع.۲۴]

اما نسبت BD به FH همچون نسبت BK است به FM؛ بنابراین نسبت BK به FM نیز همچون نسبت KL است به MN. و با ابدال نسبت، نسبت BK به KL همچون نسبت FM است به MN. [V.۱۶]

و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی، زاویه‌های BKL و FMN، با هم متناسب‌اند؛ بنابراین مثلث BKL با مثلث FMN متشابه است. [VI.۶]

باز، چون نسبت BK به KT همچون نسبت FM است به MP؛ و این ضلعها مجاور به زاویه‌های متساوی، زاویه‌های BKT و FMP، هستند، و این زاویه‌ها متساوی‌اند زیرا زاویهٔ BKT هر چند جزء از زاویهٔ چهار قائمه در مرکز K باشد، زاویهٔ FMP نیز همان قدر جزء از زاویهٔ چهار قائمه در مرکز M خواهد بود؛ پس چون ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی متناسب‌اند، بنابراین مثلث BKT با مثلث FMP متشابه است. [VI.۶]

باز، چون ثابت شده بود که نسبت BK به KL همچون نسبت FM است به MN، و BK

با KT مساوی است و FM با PM، بنابراین نسبت TK به KL همچون نسبت PM است به MN؛ و ضلعهای مجاور به زاویه‌های متساوی، زاویه‌های TKL و PMN، متناسب‌اند، زیرا این زاویه‌ها قائمه‌اند؛ بنابراین مثلث LKT با مثلث NMP متشابه است. [۶.VI]

و، چون به دلیل تشابه مثلثهای LKB و NMF، نسبت LB به BK همچون نسبت NF است به FM، و به دلیل تشابه مثلثهای BKT و FMP، نسبت KB به BT همچون نسبت MF است به FP، بنابراین به موجب نسبت مساوات هموار، نسبت LB به BT همچون نسبت NF است به FP. [۲۲.V]

باز، چون به دلیل تشابه مثلثهای LTK و NPM، نسبت LT به TK همچون نسبت NP است به PM، و به دلیل تشابه مثلثهای TKB و PMF، نسبت KT به TB همچون نسبت MP است به PF؛ بنابراین به موجب نسبت مساوات هموار، نسبت LT به TB همچون نسبت NP است به PF. [۲۲.V]

اما ثابت شده بود که، نسبت TB به BL همچون نسبت PF است به FN؛ بنابراین به موجب نسبت مساوات هموار، نسبت TL به LB همچون نسبت PN است به NF.[۲۲.V]

لذا، در مثلثهای LTB و NPF ضلعها متناسب‌اند، بنابراین مثلثهای LTB و NPF متساوی‌الزاویه‌اند، [۵.VI]

و در نتیجه متشابه. [VI. تع. ۱]

بنابراین هرمی که مثلث BKT قاعده و L رأس آن است نیز با هرمی که مثلث FMP قاعده و N رأس آن است متشابه است، زیرا شامل صفحه‌های متشابه و از لحاظ تعداد متساوی‌اند.[XI.تع.۹]

اما نسبت هرمهای متشابه مثلث القاعده به یکدیگر، همچون مکعب نسبت ضلعهای متناظر آنهاست. [۸.XII]

بنابراین نسبت هرم $BKTL$ به هرم $FMPN$ همچون مکعب نسبت BK به FM است.

به طریق مشابه از وصل کردن نقاط A و W و D و V و C و U به نقطهٔ K، و نقاط E و S و H و R و G و Q به نقطهٔ M، و بنا کردن هرمهایی هم رأس با مخروطها بر هر یک از مثلثها، می‌توانیم ثابت کنیم که، نسبت هر یک از هرمهایی که این گونه بنا شده‌اند نیز به هرمی که این گونه بنا شده همچون مکعب نسبت ضلع BK به ضلع FM است یعنی مکعب نسبت BD به FH.

و نسبت یکی از صورتها به مخرج همچون نسبت همهٔ صورتهاست به همهٔ مخرجها؛ [۱۲.V]

بنابراین نسبت هرم $BKTL$ به هرم $FMPN$ نیز همچون نسبت تمامی هرم به قاعدهٔ چند ضلعی $ATBUCVDW$ و رأس L است به تمامی هرم به قاعدهٔ چندضلعی $EPFQGRHS$ و رأس نقطهٔ N. بنابراین نسبت هرم با قاعدهٔ $ATBUCVDW$ و رأس L هم به هرم با قاعدهٔ $EPFQGRHS$ و رأس N، همچون مکعب نسبت BD به FH است.

اما بنا به فرض، نسبت مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $ABCD$ و رأس L نیز به جسم O همچون مکعب نسبت BD به FH است. بنابراین نسبت مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $ABCD$ و رأس L به جسم O، همچون نسبت هرم با قاعدهٔ چندضلعی $ATBUCVDW$ و رأس L است به هرم با قاعدهٔ چند ضلعی $EPFQGRHS$ و رأس N.

لذا، با ابدال نسبت، نسبت مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $ABCD$ و رأس L به هرم محصور در آن با قاعدهٔ چندضلعی $ATBUCVDW$ و رأس L همچون نسبت جسم O است به هرم با قاعدهٔ چندضلعی $EPFQGRHS$ و رأس N. [۱۶.V]

اما مخروط مذکور بزرگتر از هرم محصور در آن است، زیرا آن را احاطه کرده است.

بنابراین جسم O نیز بزرگتر از هرم با قاعدهٔ چندضلعی $EPFQGRHS$ و رأس N است، اما جسم O کوچکتر نیز بود: که غیر ممکن است.

بنابراین نسبت مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $ABCD$ و رأس L به هیچ جسم کوچکتر از مخروط با قاعدهٔ دایرهٔ $EFGH$ و رأس N همچون مکعب نسبت BD به FH نیست. به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که نسبت مخروط $EFGHN$ به هیچ جسم کوچکتر از مخروط $ABCDL$ همچون مکعب نسبت FH به BD نیست.

اکنون می‌گوییم که نسبت مخروط $ABCDL$ به هیچ جسم بزرگتر از مخروط $EFGHN$ نیز همچون مکعب نسبت BD به FH نیست. زیرا، فرض می‌کنیم چنین نسبتی ممکن است، و در این نسبت جسم O بزرگتر است. بنابراین، برعکس، نسبت جسم O به مخروط $ABCDL$ همچون مکعب نسبت FH به BD است. اما نسبت جسم O به مخروط $ABCDL$ همچون نسبت مخروط $EFGHN$ است به جسمی کوچکتر از مخروط $ABCDL$.

بنابراین نسبت مخروط $EFGHN$ نیز به جسمی کوچکتر از مخروط $ABCDL$ همچون مکعب نسبت FH به BD است: که ثابت شده بود غیر ممکن است.

بنابراین نسبت مخروط $ABCDL$ به هیچ جسمی بزرگتر از مخروط $EFGHN$ همچون مکعب نسبت BD به FH نیست.

اما ثابت شده بود که این نسبت برای هیچ جسمی کوچکتر از مخروط $EFGHN$ نیز برقرار نیست. پس نسبت مخروط $ABCDL$ به مخروط $EFGHN$ همچون مکعب نسبت BD به FH است.

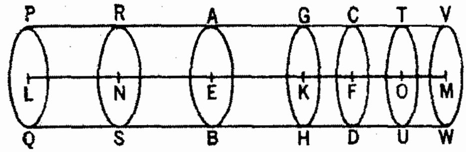
اما نسبت مخروط به مخروط همچون نسبت استوانه به استوانه است، زیرا استوانه‌ای که قاعده‌اش همان قاعدهٔ مخروط و ارتفاعش با ارتفاع آن مساوی است سه برابر مخروط است. [۱۰.XII]

بنابراین نسبت استوانه به استوانه نیز همچون مکعب نسبت BD به FH است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر استوانه‌ای با صفحه‌ای موازی با دو صفحهٔ روبه روی آن بریده شده باشد، نسبت استوانه‌های حاصل همچون نسبت محورهای آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم استوانهٔ AD با صفحهٔ GH موازی با صفحه‌های روبه‌روی AB و CD بریده شده است، و فرض می‌کنیم صفحهٔ GH محور را در نقطهٔ K بریده است.

می‌گوییم نسبت استوانهٔ BG به استوانهٔ GD همچون نسبت محور EK است به محور KF.

زیرا فرض می‌کنیم محور EF از دو طرف تا نقطه‌های L و M امتداد داده شده است و بر آن محورهای EN و NL، به تعداد دلخواه، مساوی با محور EK، و محورهای FO و OM، به تعداد دلخواه، مساوی با FK جدا شده‌اند. استوانهٔ PW بر محور LM و قاعده‌های دایره‌های PQ و VW را در نظر می‌گیریم، و از نقاط N و O صفحه‌هایی به موازات AB و CD و قاعده‌های استوانهٔ PW رسم و فرض می‌کنیم، این صفحه‌ها دایره‌های RS و TU به مراکز N و O را پدید آورده‌اند.

در این صورت، چون محورهای LN و NE و EK با هم مساوی‌اند، لذا نسبت استوانه‌های QR و RB و BG همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر. [۱۱.XII]

اما قاعده‌ها با هم مساوی‌اند، بنابراین استوانه‌های QR و RB و BG نیز با هم مساوی‌اند.

در این صورت چون محورهای LN و NE و EK با هم، و استوانه‌های QR و RB و BG نیز با هم مساوی‌اند، و تعداد محورها با تعداد استوانه‌ها مساوی‌اند، بنابراین محور KL هر مضربی از محور EK باشد، استوانهٔ QG نیز همان مضرب از استوانهٔ GB خواهد بود.

به همین دلیل محور MK هر مضربی از محور KF باشد، استوانهٔ WG نیز همان مضرب از استوانهٔ GD خواهد بود. و، اگر محور KL با محور KM مساوی باشد، استوانهٔ QG نیز با استوانهٔ GW مساوی خواهد بود، اگر محور یکی از محور دیگری بزرگتر باشد استوانهٔ آن نیز از استوانهٔ دیگری بزرگتر خواهد بود و اگر کوچکتر باشد، کوچکتر.

از این رو چهار کمیت در دست‌اند: محورهای EK و KF و استوانه‌های BG و GD؛ از محور EK و استوانهٔ BG مضربهای متساوی، یعنی محور LK و استوانهٔ QG را اختیار کرده‌ایم، و از محور KF و استوانهٔ GD مضربهای متساوی، یعنی محور KM و استوانهٔ GW را؛ و ثابت شده بود که اگر محور KL بزرگتر از محور KM باشد، استوانهٔ QG هم از استوانهٔ GW بزرگتر

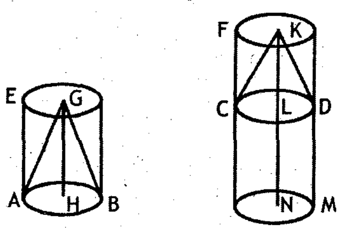
خواهد بود، و اگر مساوی باشد مساوی خواهد بود، و اگر کوچکتر باشد کوچکتر.

بنابراین نسبت محور EK به محور KF، همچون نسبت استوانهٔ BG است به استوانهٔ GD. [V. تع. ۵]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

نسبت مخروطها و استوانه‌هایی که قاعده‌های متساوی دارند، همچون نسبت ارتفاعهای آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم EB و FD استوانه‌هایی با قاعده‌های متساوی، دایره‌های AB و CD هستند؛ می‌گوییم که نسبت استوانهٔ EB به استوانهٔ FD همچون نسبت محور GH است به محور KL. فرض می‌کنیم محور KL را تا نقطهٔ N امتداد داده و LN را مساوی با محور GH اختیار کرده‌ایم؛ و استوانهٔ CM به محور LN را در نظر می‌گیریم.

در این صورت چون استوانه‌های EB و CM هم ارتفاع‌اند، نسبت آنها به یکدیگر همچون نسبت قاعده‌های آنهاست. [XII.۱۱]

اما قاعده‌ها با هم مساوی‌اند: بنابراین استوانه‌های EB و CM نیز با هم مساوی‌اند. و، چون استوانهٔ FM با صفحهٔ CD، موازی با صفحه‌های روبه‌رو، بریده شده است، لذا نسبت استوانهٔ CM به استوانهٔ FD همچون نسبت محور LN است به محور KL. [XII.۱۳]

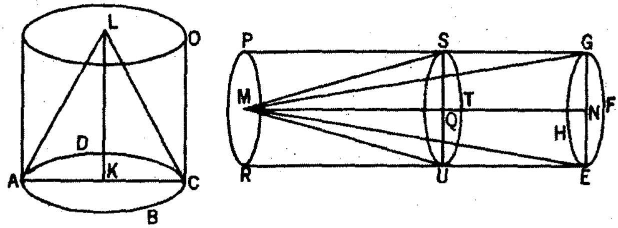
اما استوانهٔ CM با استوانهٔ EB مساوی است، و محور LN با محور GH؛ بنابراین نسبت استوانهٔ EB به استوانهٔ FD همچون نسبت محور GH است به محور KL. اما نسبت استوانهٔ EB به استوانهٔ FD همچون نسبت مخروط ABG است به مخروط CDK. [XII.۱۰]

بنابراین، نسبت محور GH به محور KL نیز همچون نسبت مخروط ABG است به مخروط CDK و همچون نسبت استوانهٔ EB است به استوانهٔ FD.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

در مخروطها و استوانه‌های متساوی، قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند؛ و مخروطها و استوانه‌هایی که در آنها قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم مخروطها و استوانه‌هایی متساوی در دست‌اند که قاعده‌های آنها دایره‌های $ABCD$ و $EFGH$ هستند. فرض می‌کنیم AC و EG قطرهای قاعده‌ها هستند، و KL و MN محورها، که ارتفاعهای مخروطها یا استوانه‌ها نیز هستند. فرض می‌کنیم استوانه‌های AO و EP کامل شده‌اند.

می‌گوییم که در استوانه‌های AO و EP قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، یعنی نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$ همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع KL. زیرا، ارتفاع KL یا با ارتفاع MN مساوی است یا مساوی نیست.

ابتدا فرض می‌کنیم مساوی باشند. ولی استوانهٔ AO نیز با استوانهٔ EP مساوی است. اما نسبت مخروطها و استوانه‌هایی که ارتفاع آنها یکی است همچون نسبت قاعده‌های آنهاست به یکدیگر؛ [۱۱.XII]

بنابراین قاعدهٔ $ABCD$ نیز با قاعدهٔ $EFGH$ مساوی است.

لذا، همچنین، به عکس، نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$ همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع KL. حال، فرض می‌کنیم ارتفاع LK با ارتفاع MN مساوی نیست، بلکه MN بزرگتر است؛ از ارتفاع MN، QN را مساوی با KL جدا می‌کنیم، از نقطهٔ Q استوانهٔ EP را با صفحهٔ TUS موازی با صفحه‌های دایره‌های $EFGH$ و RP می‌بریم و استوانهٔ ES را که بر قاعدهٔ دایرهٔ $EFGH$ و ارتفاع NQ بنا شده در نظر می‌گیریم.

حال، چون استوانه AO با استوانهٔ EP مساوی است، بنابراین نسبت استوانهٔ AO به استوانهٔ ES، همچون نسبت استوانهٔ EP است به استوانهٔ ES. [۷.V]

اما نسبت استوانهٔ AO به استوانهٔ ES همچون نسبت قاعدهٔ $ABCD$ است به قاعدهٔ $EFGH$، زیرا استوانه‌های AO و ES هم ارتفاع‌اند؛ [۱۱.XII]

و نسبت استوانهٔ EP به استوانهٔ ES همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع QN، زیرا استوانهٔ EP با صفحه‌ای موازی با صفحه‌های روبه رویش بریده شده است. [۱۳.XII]

بنابراین نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$ هم همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع QN. [۱۱.V]

اما ارتفاع QN با ارتفاع KL مساوی است؛ بنابراین، نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$ همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع KL.

لذا در استوانه‌های AO و EP قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند. اکنون، در استوانه‌های AO و EP فرض می‌کنیم قاعده‌ها با ارتفاعها معکوساً متناسب‌اند، یعنی، نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$، همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع KL؛ می‌گوییم استوانه AO با استوانهٔ EP مساوی است.

زیرا، در همان شکل، چون نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$، همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع KL، و ارتفاع KL با ارتفاع QN مساوی است، بنابراین نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$ همچون نسبت ارتفاع MN است به ارتفاع QN.

اما نسبت قاعدهٔ $ABCD$ به قاعدهٔ $EFGH$ همچون نسبت استوانهٔ AO است به استوانهٔ ES، زیرا ارتفاعهای آنها یکی هستند؛ [۱۱.XII]

و نسبت ارتفاع MN به ارتفاع QN همچون نسبت استوانهٔ EP است به استوانهٔ ES. [۱۳.XII]

بنابراین نسبت استوانهٔ AO به استوانهٔ ES همچون نسبت استوانهٔ EP است به استوانهٔ ES. [۱۱.V]

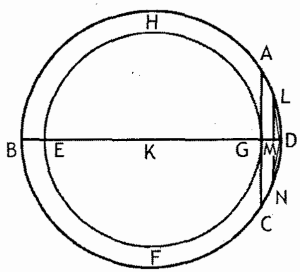
در نتیجه استوانهٔ AO با استوانهٔ EP مساوی است. [۹.V]

و عین همین احکام برای مخروطها نیز برقرارند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

دو دایرهٔ هم مرکز مفروض‌اند، مطلوب محاط کردن یک چند ضلعی متساوی‌الاضلاع در دایرهٔ بزرگتر است که تعداد ضلعهایش زوج باشد و بر دایرهٔ کوچکتر مماس نباشد.



فرض می‌کنیم دو دایرهٔ هم مرکز $ABCD$ و $EFGH$ به مرکز K داده شده‌اند؛ پس مطلوب محاط کردن یک چند ضلعی متساوی‌الاضلاع در دایرهٔ بزرگتر $ABCD$ است که تعداد ضلعهایش زوج باشد و بر دایرهٔ $EFGH$ مماس نباشد.

برای این منظور، فرض می‌کنیم خط راست BKD از مرکز K رسم شده و از نقطهٔ G عمود GA بر خط راست BD اخراج و تا نقطهٔ C امتداد داده شده است. بنابراین AC بر دایرهٔ $EFGH$ مماس است. [۱۶.III، ف.]

سپس با نصف کردن کمان BAD، و نصف کردن نصف آن دوباره، و ادامهٔ این عمل به کمانی کوچکتر از AD دست خواهیم یافت. [۱.X]

فرض می‌کنیم به چنین کمانی دست یافته‌ایم و آن LD است؛ LM را از L بر BD عمود می‌کنیم و آن را تا N امتداد می‌دهیم و D را به L و N وصل می‌کنیم؛ بنابراین LD با DN مساوی است. [۳.III، ۴.I]

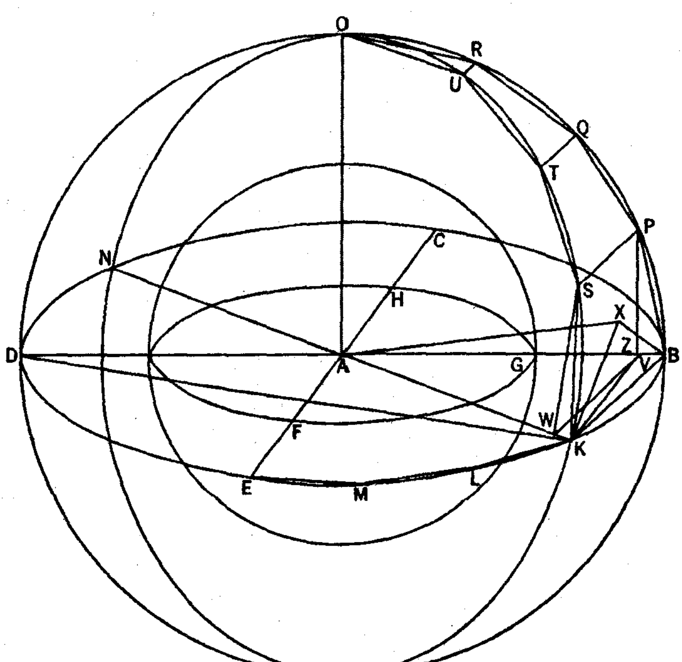
حال، چون LN با AC موازی است، و AC بر دایرهٔ $EFGH$ مماس، بنابراین LN بر دایرهٔ $EFGH$ مماس نیست؛ لذا LD و DN به طریق اولی بر دایرهٔ $EFGH$ مماس نخواهند بود.

پس اگر خطهای راستی مساوی با خط راست LD در خور دایرهٔ $ABCD$ رسم کنیم و این عمل را ادامه دهیم یک چندضلعی متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ $ABCD$ پیدا خواهیم کرد که تعداد اضلاع آن زوج است و بر دایرهٔ کوچکتر $EFGH$ مماس نیست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

دو کرهٔ هم مرکز داده شده‌اند؛ مطلوب محاط کردن یک چند وجهی در کرهٔ بزرگتر است که بر کرهٔ کوچکتر مماس نباشد.



فرض می‌کنیم دو کرهٔ هم مرکز، به مرکز A، در نظرند؛ پس مطلوب محاط کردن یک جسم چند وجهی در کرهٔ بزرگتر است که بر کرهٔ کوچکتر مماس نباشد.

فرض می‌کنیم این کره‌ها با صفحه‌ای مار بر مرکز بریده شده‌اند؛ پس مقطعها دو دایره خواهند بود. از آنجا که کره از دوران نیمدایره حول یک قطر ثابت پدید می‌آید؛ [XI. تع.۱۴]

این نیمدایره را به هر وضعی تصور کنیم، صفحهٔ مار بر آن دایره‌ای بر محیط کره پدید خواهد آورد. و، واضح است که این دایره بزرگترین دایرهٔ ممکن بر سطح کره است، زیرا که قطر کره، که البته هم قطر نیمدایره است و هم قطر دایره، بزرگتر از همهٔ خطهای راستی است که در دایره یا کره رسم می‌شوند.

پس، فرض می‌کنیم $BCDE$ دایره‌ای در کرهٔ بزرگتر باشد، و FGH دایره‌ای در کرهٔ کوچکتر. فرض می‌کنیم BD و CE دو قطر عمود بر هم در آنها رسم شده‌اند؛ پس دو دایرهٔ هم مرکز $BCDE$ و FGH داده شده‌اند، و فرض می‌کنیم چندضلعی متساوی‌الاضلاع با تعداد ضلعهای زوج در دایرهٔ بزرگتر $BCDE$ محاط شده است که بر دایرهٔ کوچکتر FGH مماس نیست، و فرض می‌کنیم BK و KL و LM و ME ضلعهای آن در ربع دایرهٔ BE از دایرهٔ بزرگتر باشند. K را به A وصل می‌کنیم و آن را تا N امتداد می‌دهیم، فرض می‌کنیم عمود AO از نقطهٔ A بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ اخراج شده است و سطح کره را در O بریده است؛ و بر AO و هر یک از خطهای راست BD و KN صفحه‌هایی مرور می‌دهیم، این صفحه‌ها بزرگترین دایره‌ها را بر سطح کره پدید می‌آورند، به دلیلی که قبلاً ذکر کردیم.

فرض می‌کنیم این صفحه‌ها چنین کرده‌اند و نیمدایره‌های BOD و KON به قطرهای BD و KN را پدید آورده‌اند. حال، چون OA بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ عمود است، لذا همهٔ صفحه‌های ماربر OA نیز بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ عمودند؛ [XI.۱۸]

بنابراین نیمدایره‌های BOD و KON نیز بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ عمودند. و، چون نیمدایره‌های BED و BOD و KON با هم مساوی‌اند، زیرا به قطرهای متساوی BD و KN رسم شده‌اند، بنابراین ربع دایره‌های BE و BO و KO نیز با هم مساوی‌اند. بنابراین تعداد خطهای راست مساوی با BK و KL و LM و ME در ربع دایره‌های BO و KO، به اندازهٔ تعداد ضلعهای چندضلعی در ربع دایرهٔ BE است.

فرض می‌کنیم این خطهای راست رسم شده‌اند و BP و PQ و QR و RO، و KS و ST و TU و UO این خطها هستند، و S را به P وصل می‌کنیم، و Q را به T، و R را به U. و از P و S عمودهایی بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ فرود می‌آوریم؛ [XI.۱۱]

این عمودها بر BD و KN، فصل مشترکهای صفحه‌ها، فرود می‌آیند، زیرا صفحه‌های BOD و KON نیز بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ عمودند. [ر.ک. XI. تع. ۴]

فرض می‌کنیم این عمودها PV و SW هستند و V به W وصل شده است.

حال، چون در نیم‌دایره‌های متساوی BOD و KON خطهای راست متساوی BP و KS جدا، و عمودهای PV و SW رسم شده‌اند، لذا PV با SW مساوی است و BV با KW. [۲۶ .I ،۲۷ .III]

اما تمامی BA نیز با تمامی KA مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ VA نیز با باقیماندهٔ WA مساوی است؛ لذا نسبت BV به VA همچون نسبت KW است به WA. بنابراین WV با KB موازی است. [۲.VI]

و، چون هر یک از خطهای راست PV و SW بر صفحهٔ دایرهٔ $BCDE$ عمود است، پس PV با SW موازی است. [۶.XI]

اما ثابت شده بود که با آن مساوی نیز هست؛ بنابراین WV و SP نیز با هم مساوی و موازی‌اند. [۳۳.I]

و، چون WV با SP موازی است، و WV با KB، لذا SP نیز با KB موازی است. [۹.XI]
و BP و KS دوسر آنها را به هم وصل کرده‌اند، لذا چهار ضلعی $KBPS$ در یک صفحه است، زیرا اگر دو خط راست متوازی باشند و نقاط دلخواهی بر هر یک اختیار شوند خط راست واصل بین این نقاط در همان صفحهٔ دو خط متوازی قرار دارند. [۷.XI]

به همین دلیل هر یک از چهارضلعیهای $SPQT$ و $TQRU$ نیز در یک صفحه‌اند.

اما مثلث URO نیز در یک صفحه است. [۲.XI]

پس اگر خطهای راست واصل از نقاط P و S و Q و T و R و U به A را درنظر بگیریم یک جسم چند وجهی بین کمانهای BO و KO حاصل می‌شود که متشکل از هرمهایی است که چهار ضلعیهای $KBPS$ و $SPQT$ و $TQRU$ و مثلث URO قاعده‌های آنها هستند و رأس آنها نقطهٔ A است. و، اگر همین شکل را در مورد هر یک از ضلعهای KL و LM و ME، مانند حالت BK، و سپس در مورد سه ربع باقیمانده رسم کنید. یک چند وجهی محاط در کره حاصل می‌شود که از هرمهایی با قاعده‌های چهار ضلعیهای مذکور و مثلث URO و دیگر چهار ضلعیها و مثلثهای مربوط تشکیل شده‌اند که رأس آنها نقطهٔ A است. می‌گوییم که چند وجهی مذکور بر کرهٔ کوچکتر در سطحی که دایرهٔ FGH در آن واقع است، مماس نیست.

فرض می‌کنیم AX از نقطهٔ A بر صفحهٔ چهار ضلعی $KBPS$ عمود شده و صفحه را در نقطهٔ X بریده است؛ [۱۱.XI]

X را به B و K وصل می‌کنیم. در این صورت، چون AX بر صفحهٔ چهار ضلعی $KBPS$ عمود است، لذا بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ چهار ضلعی قرار دارند عمود است. [XI. تع. ۳]

بنابراین AX بر هر یک از خطهای راست BX و XK عمود است. و، چون AB با AK مساوی

است، مربع AB نیز با مربع AK مساوی است. و [مجموع] مربعهای AX و XB با مربع AB مساوی است، زیرا زاویهٔ X قائمه است؛ [۴۷.I]

و [مجموع] مربعهای AX و XK با مربع AK مساوی است. [همان گزاره]

بنابراین مربعهای AX و XB با مربعهای AX و XK مساوی‌اند.

حال مربع AX را از هر یک کم می‌کنیم؛ در نتیجه باقیمانده، مربع BX، با باقیمانده، مربع XK، مساوی است؛ پس BX با XK مساوی است.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای راست واصل از X به P و S با هر یک از خطهای راست BX و XK مساوی‌اند. بنابراین دایرهٔ به مرکز X و شعاع یکی از خطهای راست XB و XK از S و P نیز خواهد گذشت؛ و $KBPS$ یک چهار ضلعی محاط در دایره خواهد بود. اما چون KB از WV بزرگتر است، و WV با SP مساوی است، بنابراین KB از SP بزرگتر است. اما KB با هر یک از خطهای راست KS و BP مساوی است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست KS و BP از SP بزرگتر است.

و، چون $KBPS$ یک چهار ضلعی محاط در دایره است، و KB و BP و KS با هم مساوی‌اند و PS کوچکتر است، و BX شعاع دایره است، بنابراین مربع KB از دو برابر مربع BX بزرگتر است. KZ را از K بر BV عمود می‌کنیم.

پس، چون BD از دو برابر DZ کوچکتر است و نسبت BD به DZ همچون نسبت مستطیل DB و BZ است به مستطیل DZ و ZB، اگر مربعی بر BZ بنا شود، و متوازی‌الاضلاع مرسوم بر ZD کامل شود، مستطیل DB و BZ نیز از دو برابر مستطیل DZ و ZB کوچکتر خواهد شد. و اگر K را به D وصل کنیم مستطیل DB و BZ با مربع BK مساوی می‌شود، و مستطیل DZ و ZB با مربع KZ. [III. ۳۱، VI. ۸ و ف.]

بنابراین مربع KB از دو برابر مربع KZ کوچکتر است. اما مربع KB از دو برابر مربع BX بزرگتر است؛ بنابراین مربع KZ از مربع BX بزرگتر است. و، چون BA با KA مساوی است، مربع BA با مربع AK مساوی خواهد بود.

و [مجموع] مربعهای BX و XA با مربع BA مساوی است و [مجموع] مربعهای KZ و ZA با مربع KA؛ [۴۷.I]

بنابراین مربعهای BX و XA با مربعهای KZ و ZA مساوی‌اند، و از این مربعها، مربع KZ از مربع BX بزرگتر است؛ بنابراین باقیمانده، مربع ZA، از مربع XA کوچکتر خواهد بود.

بنابراین AX از AZ بزرگتر است؛ لذا AX به طریق اولی از AG بزرگتر است. و AX بر یک قاعدهٔ چند وجهی عمود است، و AG بر سطح کرهٔ کوچکتر عمود است؛ از این رو این چند وجهی بر کرهٔ کوچکتر مماس نخواهد شد.

بنابراین اگر دو کرهٔ هم مرکز داده شده باشند، یک جسم چند وجهی در کرهٔ بزرگتر محاط می‌شود که بر کرهٔ کوچکتر مماس نیست.

آنچه می‌خواستیم.

فرع. اما اگر در کرهٔ دیگر نیز یک جسم چند وجهی متشابه با جسم محاط در کرهٔ $BCDE$، محاط شده باشد، نسبت جسم چند وجهی محاط در کرهٔ $BCDE$ به جسم چند وجهی محاط در کرهٔ دیگر همچون مکعب نسبت قطر کرهٔ $BCDE$ به قطر کرهٔ دیگر است. زیرا، وقتی جسمها از لحاظ تعداد و ترتیب به طور مشابه به هرمهای خود تقسیم شده باشند، هرمها متشابه خواهند بود.

اما نسبت هرمهای متشابه همچون نسبت مکعب ضلعهای متناظر آنهاست به یکدیگر. [XII.۸،ف.]

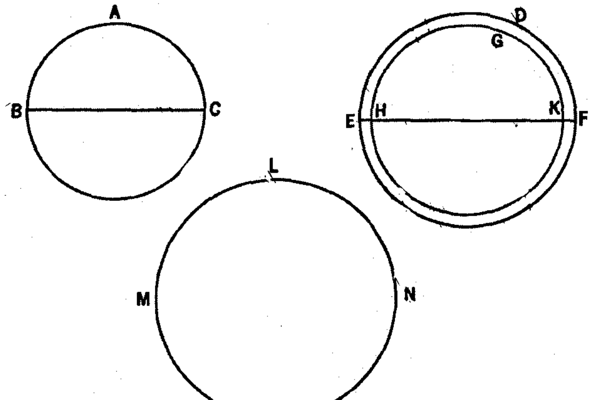
بنابراین نسبت هرمی که چهار ضلعی $KBPS$ قاعدهٔ آن و نقطهٔ A رأس آن است به هرمی که به طور مشابه در کرهٔ دیگر مرتب شده است همچون مکعب نسبت دو ضلع متناظر به یکدیگر است، یعنی نسبتی که شعاع AB از کرهٔ به مرکز A دارد به شعاع کرهٔ دیگر.

به همین ترتیب نیز نسبت هر یک از هرمهای محاط در کرهٔ به مرکز A بر هر یک از هرمهای محاط در کرهٔ دیگر که به طور مشابه مرتب شده‌اند همچون مکعب نسبتی است که AB دارد به شعاع کرهٔ دیگر. و، نسبت صورت به مخرج در یکی از کسرها همچون نسبت همهٔ صورتهاست به همهٔ مخرجها، بنابراین نسبت تمامی جسم چند وجهی محاط در کرهٔ به مرکز A به تمامی جسم چند وجهی محاط در کرهٔ دیگر همچون مکعب نسبت AB به شعاع کرهٔ دیگر است، یعنی نسبتی که قطر BD دارد به قطر کرهٔ دیگر.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

نسبت دو کره به یکدیگر همچون مکعب نسبت قطرهای آنهاست به یکدیگر.



فرض می‌کنیم کره‌های ABC و DEF اختیار شده‌اند و BC و EF به‌ترتیب قطرهای آنها

هستند. می‌گوییم که نسبت کرهٔ ABC به کرهٔ DEF همچون مکعب نسبت BC به EF است.

زیرا اگر نسبت کرهٔ ABC به کرهٔ DEF همچون مکعب نسبت BC به EF نباشد، پس نسبت کرهٔ ABC به کره‌ای کوچکتر از کرهٔ DEF یا به کره‌ای بزرگتر از آن همچون مکعب نسبت BC به EF خواهد بود.

اول فرض می‌کنیم این نسبت با کرهٔ کوچکتر GHK برقرار باشد.

فرض می‌کنیم DEF با GHK هم مرکز درنظر گرفته شده است، و در کرهٔ بزرگتر DEF یک جسم چند وجهی محاط شده است که با کرهٔ کوچکتر GHK مماس نیست، [XII.۱۷] و فرض می‌کنیم در کرهٔ ABC نیز یک جسم چند وجهی متشابه با جسم چند وجهی محاط در کرهٔ DEF، محاط شده است؛ بنابراین نسبت جسم چند وجهی محاط در ABC به جسم چند وجهی محاط در DEF همچون مکعب نسبت BC به EF است. [XII. ۱۷، ف.]

اما نسبت کرهٔ ABC به کرهٔ GHK نیز همچون مکعب نسبت BC به EF است؛ بنابراین نسبت کرهٔ ABC به کرهٔ GHK همچون نسبت جسم چند وجهی محاط در کرهٔ ABC است به جسم چند وجهی محاط در کرهٔ DEF؛ و، با ابدال نسبت، نسبت کرهٔ ABC به جسم چند وجهی محاط در آن همچون نسبت کرهٔ GHK است به جسم چند وجهی محاط در کرهٔ DEF [V.۱۶]

اما کرهٔ ABC از چند وجهی محاط در آن بزرگتر است. بنابراین کرهٔ GHK نیز از چند وجهی محاط در کرهٔ DEF بزرگتر است. اما کوچکتر نیز هست، زیرا در آن محصور شده است. بنابراین نسبت کرهٔ ABC به کره‌ای کوچکتر از کرهٔ DEF همچون مکعب نسبت قطر BC به قطر EF نیست.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که نسبت کرهٔ DEF به کره‌ای کوچکتر از کرهٔ ABC نیز همچون مکعب نسبت EF به BC نیست.

حال می‌گوییم که نسبت کرهٔ ABC به هیچ کره‌ای بزرگتر از کرهٔ DEF نیز همچون مکعب نسبت BC به EF نخواهد بود.

زیرا، فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد، و این نسبت با کرهٔ بزرگتر LMN برقرار باشد؛ بنابراین، به عکس، نسبت کرهٔ LMN به کرهٔ ABC همچون مکعب نسبت قطر EF به قطر BC است.

اما چون LMN بزرگتر از DEF است، بنابراین نسبت کرهٔ LMN به کرهٔ ABC همچون نسبت کرهٔ DEF است به کره‌ای کوچکتر از کرهٔ ABC، همان گونه که ثابت شده بود. [XII. ۲، لم]

بنابراین نسبت DEF نیز به کره‌ای کوچکتر از کرهٔ ABC همچون مکعب نسبت EF به BC است: که ثابت شده بود غیر ممکن است. بنابراین نسبت کرهٔ ABC به هیچ کره‌ای بزرگتر از کرهٔ DEF همچون مکعب نسبت BC به EF نیست. اما ثابت شده بود که نسبت به کره‌ای کوچکتر نیز چنین نیست.

در نتیجه، نسبت کرهٔ ABC به کرهٔ DEF همچون مکعب نسبت BC به EF است.

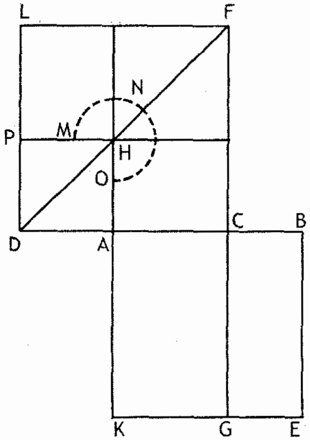
آنچه می‌خواستیم.

مقالهٔ سیزدهم

قضیه‌ها

قضیهٔ ۱

اگر خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد مربع «قطعهٔ بزرگتر و نصف تمام»، با پنج برابر مربع نصف آن مساوی است.



فرض می‌کنیم خطّ راست AB در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و AC قطعهٔ بزرگتر است، خط راست AD را در امتداد با خطّ راست CA، و مساوی با نصف AB جدا می‌کنیم؛ می‌گوییم که مربع CD با پنج برابر مربع AD مساوی است.

زیرا، فرض می‌کنیم مربّعهای AE و DF بر AB و DC بنا، و شکل DF رسم شده است؛ FC را تا G امتداد می‌دهیم. حال، چون AB در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است،

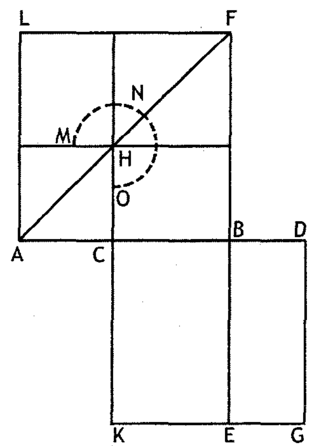
بنابراین مستطیل AB و BC با مربع AC مساوی است. [VI.تع.۳، VI.۱۷]
و CE مستطیل AB و BC است و FH مربع AC؛ بنابراین CE با FH مساوی است. و چون BA دو برابر AD است، و BA با KA مساوی است، و AD با AH، بنابراین KA نیز دو برابر AH است. اما نسبت KA به AH، همچون نسبت CK است به CH؛ [VI.۱]
بنابراین CK دو برابر CH است.

اما [مجموع] LH و HC نیز دو برابر CH است. بنابراین KC با LH و HC مساوی است. اما ثابت شده بود که CE نیز با HF مساوی است؛ لذا مربع تمام AE با گونیای MNO مساوی است. و چون BA دو برابر AD است، مربع BA چهار برابر مربع AD است؛ یعنی AE، چهار برابر DH است. اما AE با گونیای MNO مساوی است؛ پس گونیای MNO نیز چهار برابر AP است؛ لذا تمامی DF پنج برابر AP است.

و DF مربع DC است، و AP مربع DA؛ بنابراین مربع CD پنج برابر مربع DA است.
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

اگر مربع خط راستی پنج برابر مربع قطعه‌ای از آن باشد، وقتی دو برابر قطعهٔ مذکور به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، قطعهٔ بزرگتر جزء باقیماندهٔ خط راست اصلی است.



فرض می‌کنیم مربع خط راست AB پنج برابر مربع قطعهٔ AC از آن است. و فرض می‌کنیم CD دو برابر AC است، می‌گوییم که اگر CD به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود، CB قطعهٔ بزرگتر است.

فرض می‌کنیم مربعهای AF و CG به ترتیب بر AB و CD بنا شده‌اند؛ و قطر AF در شکل AF کشیده شده و BF تا BE امتداد داده شده است. حال، چون مربع AB پنج برابر مربع AC است، AF پنج برابر AH است. بنابراین گونیای MNO چهار برابر AH است. و، چون DC دو برابر CA است، بنابراین مربع DC چهار برابر مربع CA است، یعنی CG چهار برابر AH است.

اما ثابت شده بود که گونیای MNO چهار برابر AH است؛ بنابراین گونیای MNO با CG مساوی است. و، چون DC دو برابر CA است، و DC با CK مساوی است و AC با CH، بنابراین KB نیز دو برابر BH است. [VI.۱]

اما LH و HB هم دو برابر HB هستند؛ بنابراین KB با LH و HB مساوی است.

اما ثابت شده بود که تمامی گونیای MNO نیز با تمامی CG مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ HF با BG مساوی است. و BG مستطیل CD و DB است، زیرا CD با DG مساوی است؛ و HF مربع CB است؛ بنابراین مستطیل CD و DB با مربع CB مساوی است. لذا، نسبت DC به CB، همچون نسبت CB است به BD. اما DC بزرگتر از CB است؛ لذا CB نیز از BD بزرگتر است. در نتیجه اگر خط راست CD به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، CB قطعهٔ بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

پس این مطلب که دو برابر AC از BC بزرگتر است باید ثابت شود.

اگر بزرگتر نباشد، فرض می‌کنیم در صورت امکان BC مساوی دو برابر CA است. بنابراین مربع BC چهار برابر مربع CA است لذا مربعهای BC و CA پنج برابر مربع CA هستند. اما، بنابه فرض، مربع BA نیز پنج برابر مربع CA است؛ بنابراین مربع BA با مربعهای BC و CA مساوی است: که غیر ممکن است. [۴.II]

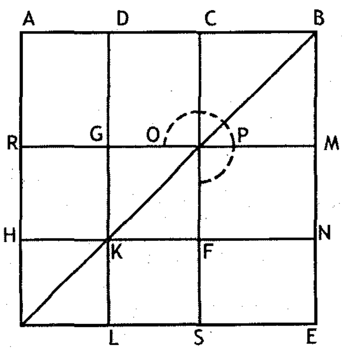
پس BC دو برابر CA مساوی نیست.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط راستی کوچکتر از CB با دو برابر CA مساوی نیست؛ زیرا محال بودن آن به مراتب بیشتر است. بنابراین دو برابر AC از CB بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

اگر خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، مربع «قطعهٔ کوچکتر و نصف قطعهٔ بزرگتر»، پنج برابر مربع نصف قطعهٔ بزرگتر است.



فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است و AC، قطعهٔ بزرگتر، در نقطهٔ D نصف شده است. می‌گوییم که مربع BD پنج برابر مربع DC است.

زیرا، فرض می‌کنیم مربع AE بر AB بنا، و همان تقسیمهای AB برضلع دیگر $[BE]$ نیز عیناً منتقل شده است. چون AC دو برابر DC است، لذا، مربع AC چهار برابر مربع DC است، یعنی

RS چهار برابر FG است. و، چون مستطیل AB و BC با مربع AC مساوی است، و CE مستطیل AB و BC است، بنابراین CE با RS مساوی است.

اما RS چهار برابر FG است، بنابراین CE نیز چهار برابر FG است. باز، چون AD با DC مساوی است، HK نیز با KF مساوی است. بنابراین مربع GF نیز با مربع HL مساوی است. پس GK با KL مساوی است، یعنی MN با NE؛ بنابراین MF نیز با FE مساوی است.

اما MF با CG مساوی است؛ بنابراین CG نیز با FE مساوی است.

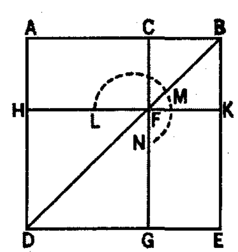
حال، CN را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین گونیای OPQ با CE مساوی است. اما ثابت شده بود که CE چهار برابر GF است؛ بنابراین گونیای OPQ نیز چهار برابر مربع FG است؛ لذا گونیای OPQ و مربع FG پنج برابر FG هستند.

اما گونیای OPQ و مربع FG همان مربع DN هستند. و DN مربع DB است و FG مربع DC. بنابراین مربع DB پنج برابر مربع DC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

اگر خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، مربع تمام خط و مربع قطعهٔ کوچکتر بر روی هم، سه برابر مربع قطعهٔ بزرگتر است.



فرض می‌کنیم AB خط راستی است که در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و AC قطعهٔ بزرگتر است؛ می‌گوییم که [مجموع] مربعهای AB و BC سه برابر مربع CA است. زیرا فرض می‌کنیم مربع $ADEB$ بر AB بنا، و شکل فوق رسم شده است.

در این صورت، چون AB در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و AC قطعهٔ بزرگتر است، بنابراین مستطیل AB و BC با مربع AC مساوی است. [VI.تع.۳، VI.۱۷]

و AK مستطیل AB و BC است و HG مربع AC؛ بنابراین AK با HG مساوی است. و، چون AF با FE مساوی است، CK را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ در نتیجه تمام AK با تمام CE مساوی است؛ لذا [مجموع] AK و CE دو برابر AK است.

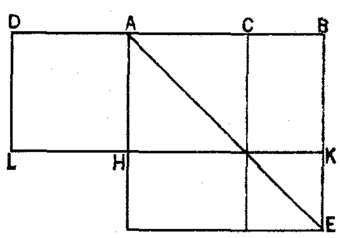
اما [مجموع] AK و CE گونیای LMN و مربع CK است؛ بنابراین گونیای LMN و مربع CK دو برابر AK هستند.

اما، به علاوه، ثابت شده بود AK نیز با HG مساوی است؛ بنابراین [مجموع] گونیای LMN و مربعهای CK و HG سه برابر مربع HG هستند. وگونیای LMN و مربعهای CK و HG تمام مربع AE و CK هستند، یعنی مربعهای AB و BC؛ و HG مربع AC است. بنابراین [مجموع] مربعهای AB و BC سه برابر مربع AC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۵

اگر خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد و به آن خط راستی مساوی با قطعهٔ بزرگتر اضافه شود، تمام خط راست حاصل به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌شود، و خط راست اولیه قطعهٔ بزرگتر آن است.



فرض می‌کنیم خط راست AB در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و AC قطعهٔ بزرگتر است. و فرض می‌کنیم AD با AC مساوی است.

می‌گوییم که خط راست DB در نقطهٔ A به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و خط راست اولیهٔ AB قطعهٔ بزرگتر است.

زیرا، فرض می‌کنیم مربع AE بر AB بنا، و شکل فوق رسم شده است. چون AB در C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است، بنابراین مستطیل AB و BC با مربع AC مساوی است. [۱۷.VI،۳.تع.VI]

و، CE مستطیل AB و BC است و CH مربع AC؛ بنابراین CE با HC مساوی است. اما HE با CE مساوی است، و DH با HC؛ بنابراین DH نیز با HE مساوی است. لذا تمام DK با تمام AE مساوی است.

و DK مستطیل BD و DA است، زیرا AD با DL مساوی است؛ و AE مربع AB است؛ لذا مستطیل BD و DA با مربع AB مساوی است. بنابراین نسبت DB به BA، همچون نسبت BA است به AD. [۱۷.VI]

و DB از BA بزرگتر است؛ بنابراین BA نیز از AD بزرگتر است. [۱۴.V]

در نتیجه DB در نقطهٔ A به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و AB قطعهٔ بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر خط راست گویایی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، هر یک از قطعه‌های آن خط راستی است گنگ به نام منفصل.

فرض می‌کنیم AB خط راستی است گویا که در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و AC قطعهٔ بزرگتر آن است. می‌گوییم که هر یک از خطهای راست AC و CB خط راستی است گنگ به نام منفصل. زیرا فرض می‌کنیم AD را بر امتداد BA و برابر با نصف آن جدا کرده‌ایم. پس چون خط راست AB به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده، و AD که نصف AB است بر قطعهٔ بزرگتر AC اضافه شده است، بنابراین مربع CD پنج برابر مربع DA است. [۱.XIII]

بنابراین نسبت مربع CD به مربع DA، همچون نسبت یک عدد است به یک عدد؛ بنابراین مربع CD با مربع DA اندازه‌پذیر است. [۶.X]

اما مربع DA گویاست، زیرا DA گویاست، چون نصف خط راست گویای AB است؛ بنابراین مربع CD نیز گویاست؛ [تع.۴.X]

پس CD نیز گویاست. و، چون نسبت مربع CD به مربع DA همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست، بنابراین CD از حیث طول با DA اندازه‌ناپذیر است؛ [۹.X]

بنابراین CD و DA خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند؛ لذا AC یک منفصل است. [۷۳.X]

باز، چون AB به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده، و AC قطعهٔ بزرگتر است، بنابراین مستطیل AB و BC با مربع AC مساوی است. [۱۷.VI،۳.تع.VI]

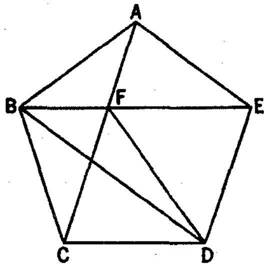
لذا اگر مربع منفصل AC بر خط راست گویای AB اضافه شود، پهنای BC را پدید می‌آورد. اما مربع منفصلی اگر بر خط راست گویایی اضافه شود، پهنایی پدید آورد که منفصل اول است. [۹۷.X]

در نتیجه CB یک منفصل اول است. و ثابت شده بود که CA نیز یک منفصل است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

اگر سه زاویهٔ متوالی یا نامتوالی از یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع با هم مساوی باشند، این پنج ضلعی متساوی‌الزاویه است.



زیرا در پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع $ABCDE$ ابتدا فرض می‌کنیم سه زاویهٔ متوالی A و B و C با هم مساوی‌اند؛ می‌گوییم پنج ضلعی $ABCDE$ متساوی‌الزاویه است. زیرا فرض می‌کنیم A به C وصل شده است، و B به E، و F به D. حال، چون دو ضلع CB و BA به‌ترتیب با دو ضلع BA و AE مساوی‌اند و زاویهٔ CBA با زاویهٔ BAE مساوی است، بنابراین AC با BE مساوی است، و مثلث ABC با مثلث ABE مساوی است، و بقیهٔ زاویه‌ها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نیز با هم مساوی می‌شوند، [۴.I]
یعنی زاویهٔ BCA با زاویهٔ BEA مساوی است؛ و زاویهٔ ABE با زاویهٔ CAB. بنابراین ضلع AF نیز با ضلع BF مساوی است. [۶.I]

اما، ثابت شده بود که تمام AC نیز با تمام BE مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ FC نیز با باقیماندهٔ FE مساوی است. اما CD نیز با DE مساوی است. بنابراین دو ضلع FC و CD با دو ضلع FE و ED مساوی‌اند؛ و FD در آنها مشترک است؛ بنابراین زاویهٔ FCD با زاویهٔ FED مساوی است. [۸.I]

اما ثابت شده بود که زاویهٔ BCA نیز با زاویهٔ AEB مساوی است؛ بنابراین تمام زاویهٔ BCD نیز با تمام زاویهٔ AED مساوی است؛ اما بنابه فرض، زاویهٔ BCD با زاویه‌های A و B مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ AED نیز با زاویه‌های A و B مساوی است. به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که زاویهٔ CDE نیز با زاویه‌های A و B و C مساوی است؛ بنابراین پنج ضلعی $ABCDE$ متساوی‌الزاویه است.

حال، فرض می‌کنیم زاویه‌های متساوی، متوالی نباشند، ولی زاویه‌های A و C و D با هم مساوی باشند؛ می‌گوییم در این حالت نیز پنج ضلعی $ABCDE$ متساوی‌الزاویه است. زیرا، فرض می‌کنیم B به D وصل شده است. در این صورت، چون دو ضلع BA و AE با دو ضلع BC و CD مساوی‌اند، و زاویه‌های بین آنها نیز با هم، در نتیجه BE با BD مساوی است و مثلث ABE با مثلث BCD، و بقیهٔ زاویه‌ها با بقیهٔ زاویه‌ها مساوی‌اند، یعنی زاویه‌هایی که روبه‌رو به ضلعهای متساوی‌اند؛ [۴.I]
بنابراین زاویهٔ AEB با زاویهٔ CDB مساوی است.

اما زاویهٔ BED با زاویهٔ BDE نیز مساوی است، زیرا ضلع BE نیز با ضلع BD مساوی است. [۵.I]

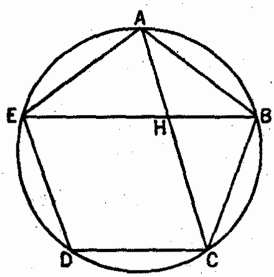
لذا تمام زاویهٔ AED با تمام زاویهٔ CDE مساوی است. اما زاویهٔ CDE، بنا به فرض، با

زاویه‌های A و C مساوی است، لذا زاویهٔ AED نیز با زاویه‌های A و C مساوی است. به همین دلیل زاویهٔ ABC نیز با زاویه‌های A و C و D مساوی است. در نتیجه پنج ضلعی $ABCDE$ متساوی‌الزاویه است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیه ۸

در یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی الزاویه، قطرهای روبه‌رو به دو زاویهٔ متوالی یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کنند و قطعه‌های بزرگتر آنها با ضلع پنج ضلعی مساوی‌اند.



در پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی الزاویهٔ $ABCDE$، فرض می‌کنیم قطرهای AC و BE که یکدیگر را در نقطهٔ H بریده‌اند، روبه‌رو به دو زاویهٔ متوالی A و B گرفته شده‌اند؛ می‌گوییم که هر یک از این دو قطر در نقطهٔ H به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده‌اند و قطعه‌های بزرگتر آنها با ضلع پنج ضلعی مساوی‌اند.

زیرا فرض می‌کنیم دایرهٔ $ABCDE$ محیط بر پنج‌ضلعی $ABCDE$ است. [۱۴.IV]

در این صورت چون دو خط راست EA و AB با دو خط راست AB و BC مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها با هم مساوی‌اند، بنابراین BE با AC مساوی است، مثلث ABE با مثلث ABC مساوی است، و بقیهٔ زاویه‌ها به‌ترتیب با بقیهٔ زاویه‌ها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی [۴.I]

متساوی‌اند. بنابراین زاویهٔ BAC با زاویهٔ ABE مساوی است؛ لذا زاویهٔ AHE دو برابر زاویهٔ BAH است. [۳۲.I]

اما زاویهٔ EAC نیز دو برابر زاویهٔ BAC است، زیرا که کمان EDC نیز دو برابر کمان CB است. [۳۳.VI،۲۸.III]

بنابراین زاویهٔ HAE با زاویهٔ AHE مساوی است؛ در نتیجه خط راست HE با EA، یعنی با AB. [۶.I]

مساوی است. و، چون خط راست BA با AE مساوی است، زاویهٔ ABE نیز با زاویهٔ AEB مساوی است. [۵.I]

اما ثابت شده بود که زاویهٔ ABE با زاویهٔ BAH مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ BEA نیز با

زاویهٔ BAH مساوی است. و زاویهٔ ABE در دو مثلث ABE و ABH مشترک است؛ لذا زاویهٔ باقیماندهٔ BAE با زاویهٔ باقیمانده AHB مساوی است؛ [۳۲.I]

بنابراین مثلث ABE با مثلث ABH متساوی‌الزاویه است. لذا با توجه به تشابه دو مثلث داریم، نسبت EB به BA همچون نسبت AB است به BH. [۴.VI]

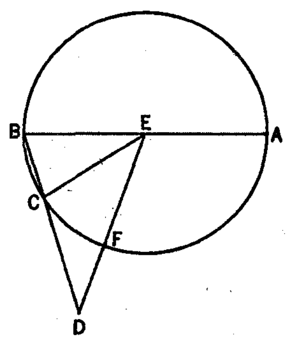
اما BA با EH مساوی است؛ پس نسبت BE به EH همچون نسبت EH است به HB. و BE از EH بزرگتر است؛ بنابراین EH نیز از HB بزرگتر است. [۱۴.V]

در نتیجه BE در H به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و قطعهٔ بزرگتر HE با ضلع پنج ضلعی مساوی است. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که AC نیز در نقطهٔ H به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و قطعهٔ بزرگتر CH با ضلع پنج ضلعی مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

اگر ضلع شش ضلعی و ضلع ده ضلعی محاط در یک دایره با هم جمع شوند، تمامی خط راست حاصل به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌شود و ضلع شش ضلعی قطعهٔ بزرگتر آن است.



فرض می‌کنیم ABC یک دایره است؛ از شکلهای محاط در دایرهٔ ABC فرض می‌کنیم BC ضلع ده ضلعی است، و CD ضلع شش ضلعی، و هر دو بر یک خط راست قرار دارند؛ می‌گوییم تمام خط راست BD در نقطهٔ C به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و CD قطعهٔ بزرگتر آن است.

فرض می‌کنیم نقطهٔ E مرکز دایره پیدا و به B و C و D وصل شده است، و BE تا A امتداد یافته است.

چون BC ضلع یک ده ضلعی متساوی‌الاضلاع است، بنابراین کمان ACB پنج برابر کمان BC است؛ بنابراین کمان AC چهار برابر کمان CB است.

اما نسبت کمان AC به کمان CB همچون نسبت زاویهٔ AEC است به زاویه CEB. [۳۳.VI]

بنابراین زاویهٔ AEC چهار برابر زاویهٔ CEB است. و، چون زاویهٔ EBC با زاویهٔ ECB مساوی است، [۵.I]

بنابراین زاویهٔ AEC دو برابر زاویهٔ ECB است. [۳۲.I]

و، چون خط راست EC با CD مساوی است، زیرا هر یک از آنها با ضلع شش ضلعی محاط در دایرهٔ ABC مساوی است، [۱۵.IV، ف.]

زاویهٔ CED نیز با زاویهٔ CDE مساوی است؛ [۵.I]

بنابراین زاویهٔ ECB دو برابر زاویهٔ EDC است. [۳۲.I]

اما ثابت شده بود که زاویهٔ AEC دو برابر زاویهٔ ECB است؛ بنابراین زاویهٔ AEC چهار برابر زاویهٔ EDC است.

اما ثابت شده بود که زاویهٔ AEC نیز چهار برابر زاویهٔ BEC است؛ بنابراین زاویهٔ EDC با زاویهٔ BEC مساوی است.

اما زاویهٔ EBD در دو مثلث BEC و BED مشترک است؛ در نتیجه زاویهٔ باقیماندهٔ BED با زاویهٔ باقیماندهٔ ECB مساوی است؛ [۳۲.I]

بنابراین مثلث EBD با مثلث EBC متساوی‌الزاویه است. لذا، از لحاظ تناسب داریم نسبت DB به BE، مثل نسبت EB است به BC. [۴.VI]

اما EB با CD مساوی است. بنابراین، نسبت BD به DC همچون نسبت DC است به CB.

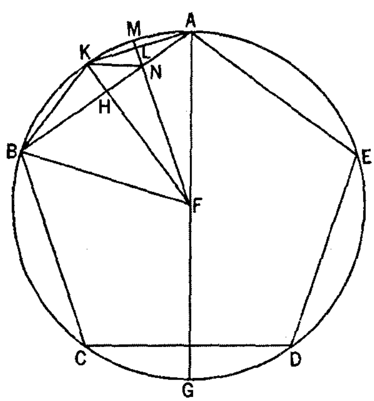
و BD بزرگتر از DC است؛ بنابراین DC نیز از CB بزرگتر است.

درنتیجه خط راست BD به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و DC قطعهٔ بزرگتر آن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

اگر یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع در دایره‌ای محاط شده باشد، مربع ضلع این پنج ضلعی با مربعهای ضلعهای شش ضلعی و ده ضلعی محاط در همان دایره مساوی است.



فرض می‌کنیم $ABCDE$ یک دایره است و پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع $ABCDE$ در آن محاط شده است. می‌گوییم مربع ضلع پنج ضلعی $ABCDE$ با مربعهای ضلعهای شش ضلعی و ده ضلعی محاط در دایرهٔ $ABCDE$ مساوی است.

زیرا، فرض می‌کنیم مرکز دایره، نقطهٔ F، به دست آمده و به A وصل شده و تا G امتداد یافته و F به B وصل شده است، از

F عمود FH را بر AB فرود آورده، آن را تا K امتداد می‌دهیم، K را به A و B وصل، و باز فرض می‌کنیم از F عمود FL را بر AK فرود آورده و آن را تا M امتداد می‌دهیم و K را به N وصل می‌کنیم.

چون کمان $ABCG$ با کمان $AEDG$ مساوی است، و در این تساوی ABC با AED مساوی است، بنابراین کمان باقیماندهٔ CG، با کمان باقیماندهٔ GD مساوی است. اما CD ضلع پنج ضلعی است، پس CG ضلع یک ده ضلعی است. و، چون FA با FB مساوی، و FH بر AB عمود است، بنابراین زاویهٔ AFK نیز با زاویهٔ KFB مساوی است. [۲۶.I،۵.I]

لذا، کمان AK نیز با کمان KB مساوی است؛ [۲۶.III]

بنابراین کمان AB دو برابر کمان BK است؛ در نتیجه خط راست AK ضلع یک ده ضلعی است. به همین دلیل AK هم دو برابر KM است.

حال، چون کمان AB دوبرابر کمان BK است، و کمان CD با کمان AB مساوی است، بنابراین کمان CD نیز دو برابر کمان BK است. اما کمان CD نیز دو برابر کمان CG است؛ بنابراین کمان CG با کمان BK مساوی است.

اما BK دوبرابر KM است، زیرا KA هم دوبرابر آن است؛ بنابراین CG هم دو برابر KM است. اما، علاوه بر آن، کمان CB نیز دوبرابر کمان BK است، زیرا کمان CB با کمان BA مساوی است. بنابراین تمام کمان GB نیز دوبرابر کمان BM است؛ لذا زاویهٔ GFB نیز دوبرابر زاویهٔ BFM است. [۳۳.VI]

اما زاویهٔ GFB نیز دوبرابر زاویهٔ FAB است، زیرا زاویهٔ FAB با زاویهٔ ABF مساوی است. بنابراین زاویهٔ BFN نیز با زاویهٔ FAB مساوی است.

اما زاویهٔ ABF در دو مثلث ABF، BFN مشترک است؛ بنابراین زاویهٔ باقیمانده AFB با زاویهٔ باقیماندهٔ BNF مساوی است؛ [۳۲.I]

لذا مثلث ABF با مثلث BFN متساوی‌الزاویه است.

بنابراین، از لحاظ تناسب داریم، نسبت خط راست AB به BF، همچون نسبت FB است به BN؛ [۴.VI]

پس، مستطیل AB و BN با مربع BF مساوی است. [۱۷.VI]

باز، چون AL با LK مساوی است، و LN در دو مثلث مشترک و بر AK عمود است، بنابراین KN با AN مساوی است؛ [۴.I]

و زاویهٔ A در دو مثلث AKB و AKN مشترک است، در نتیجه زاویهٔ LKN نیز با زاویهٔ LAN مساوی است.

اما زاویهٔ LAN با زاویهٔ KBN مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ LKN هم با زاویهٔ KBN مساوی است. و زاویهٔ A در دو مثلث AKB و AKN مشترک است، در نتیجه، زاویهٔ باقیمانده AKB با زاویهٔ باقیماندهٔ KNA مساوی است. [۳۲.I]

لذا مثلث KBA با مثلث KNA متساوی‌الزاویه است. پس از لحاظ تناسب، نسبت خط راست BA به AK همچون نسبت KA است به AN؛ [۴.VI]

لذا مستطیل BA و AN با مربع AK مساوی است. [۱۷.VI]

اما ثابت شده بود که مستطیل AB و BN با مربع BF مساوی است؛ بنابراین مستطیل AB و BN به علاوهٔ مستطیل BA و AN، یعنی مربع BA، [۲.II]

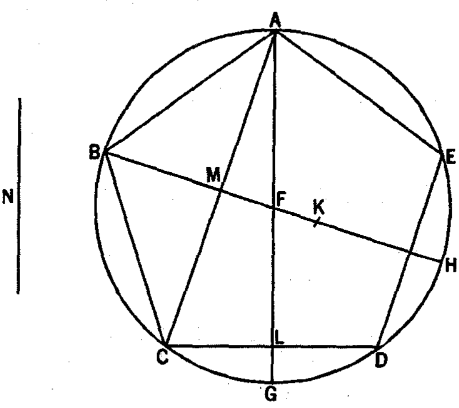
با مربع BF به علاوهٔ مربع AK مساوی است. و BA ضلع پنج‌ضلعی است، BF ضلع شش ضلعی، [۱۵.IV، ف.]

و AK ضلع ده ضلعی.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

اگر در دایره‌ای که قطر آن گویاست پنج ضلعی متساوی‌الاضلاعی محاط شده باشد، ضلع این پنج ضلعی خط راستی است گنگ به نام کهاد.



فرض می‌کنیم در دایرهٔ $ABCDE$ که قطرش گویاست پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع $ABCDE$ محاط شده است؛ می‌گوییم که ضلع این پنج ضلعی خط راستی است گنگ به نام کهاد.

زیرا فرض می‌کنیم F، مرکز دایره، پیدا و به A و B وصل شده و تا G و H امتداد یافته است. A را به C وصل، و فرض می‌کنیم FK را برابر یک چهارم AF جدا کرده‌ایم، اما AF گویاست، پس FK نیز گویاست؛ اما BF نیز گویاست؛ پس تمام BK گویاست.

و، چون کمان ACG با کمان ADG مساوی است، و در این تساوی ABC با AED مساوی است، بنابراین کمان باقیماندهٔ CG با کمان باقیماندهٔ GD مساوی است. و، اگر A را به

L وصل کنیم نتیجه می‌گیریم که زاویه‌های L قائمه‌اند، و CD دوبرابر CL است. به همین دلیل زاویه‌های M نیز قائمه‌اند و AC دوبرابر CM است.

در این صورت چون زاویهٔ ALC با زاویهٔ AMF مساوی است، و زاویهٔ LAC در دو مثلث ACL و AMF مشترک است، بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ ACL با زاویهٔباقیماندهٔ MFA مساوی است؛ [۳۲.I]

بنابراین مثلث ACL با مثلث AMF متساوی‌الزاویه است؛ لذا، از لحاظ تناسب، نسبت LC به CA همچون نسبت MF است به FA. و می‌توانیم صورتها را دوبرابر کنیم، بنابراین نسبت دو برابر LC به CA همچون نسبت دوبرابر MF است به FA. اما نسبت دوبرابر MF به FA همچون نسبت MF است به نصف FA. بنابراین نسبت دوبرابر LC به CA نیز همچون نسبت MF است به نصف FA. و مخرجها را نصف می‌کنیم؛ بنابراین نسبت دو برابر LC به نصف CA، همچون نسبت MF است به یک چهارم FA. و CD دوبرابر LC است و CM نصف CA، و FK یک چهارم FA؛ بنابراین نسبت DC به CM، همچون نسبت MF است به FK.

از ترکیب نسبت در صورت نیز داریم: نسبت مجموع DC و CM به CM همچون نسبت MK است به KF؛ [۱۸.V]

بنابراین نسبت مربع مجموع DC و CM به مربع CM نیز، همچون نسبت مربع MK است به مربع KF. و، چون وقتی قطری، نظیر AC، روبه‌رو به دو ضلع متوالی پنج ضلعی به ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، قطعهٔ بزرگتر با ضلع پنج ضلعی، یعنی با DC مساوی است. [۸.XIII]

و مربع قطعهٔ بزرگتر و نصف تمام، با پنج برابر مربع نصف تمام مساوی است، [۱.XIII]
و CM نصف تمام AC است، بنابراین مربع DC و CM به عنوان یک خط راست، پنج برابر مربع CM است.اما ثابت شده بود که، نسبت مربع DC و CM به عنوان یک خط راست، پنج برابر مربع CM است. اما ثابت شده بود که، نسبت مربع DC و CM به عنوان یک خط راست به مربع CM، همچون نسبت مربع MK است مربع KF؛ بنابراین مربع MK پنج برابر مربع KF است.

اما مربع KF گویاست، چون قطر گویاست؛ بنابراین مربع MK نیز گویاست؛ پس MK گویاست. و، چون BF چهار برابر FK است، بنابراین BK پنج برابر KF است؛ در نتیجه مربع BK بیست‌وپنج برابر مربع KF است. اما مربع MK پنج برابر مربع KF است؛ در نتیجه مربع BK پنج برابر مربع KM است؛ بنابراین نسبت مربع BK به مربع KM همچون نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین BK از حیث طول با KM اندازه‌ناپذیر است. [۹.X]

و هر یک از آنها گویاست.

بنابراین BK و KM خطهای راستی گویا و فقط از حیث مربع اندازه‌پذیرند. اما اگر از یک خط راست گویا، خط راست گویایی که با تمام فقط از حیث مربع اندازه‌پذیر است، کم شود؛ باقیمانده گنگ، یعنی یک منفصل است؛ بنابراین MB یک منفصل است و MK افزوده به آن. [۷۳.X]

حال، می‌گوییم که MB یک منفصل چهارم نیز هست. فرض می‌کنیم مربع N با مربعی مساوی باشد که مربع BK به اندازهٔ آن از مربع KM بزرگتر است؛ بنابراین مربع BK از مربع KM به اندازهٔ مربع N بزرگتر است. و، چون KF با FB اندازه‌پذیر است، ترکیب آنها نیز، یعنی KB، با FB اندازه‌پذیر است. [۱۵.X]

اما BF با BH اندازه‌پذیر است؛ بنابراین BK نیز با BH اندازه‌پذیر است. [۱۲.X]

و، چون مربع BK پنج برابر مربع KM است، بنابراین نسبت مربع BK به مربع KM همچون نسبت ۵ است به ۱. لذا از تفضیل نسبت در مخرج خواهیم داشت، نسبت مربع BK به مربع N همچون نسبت ۵ است به ۴. [۱۹.V، ف.]

و این نسبت، نسبت یک عدد مربع به یک عدد مربع نیست؛ بنابراین BK با N اندازه‌ناپذیر است؛ [۹.X]

در نتیجه، مربع BK به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BK از مربع KM بزرگتر است.

از آنجا که مربع تمامی BK از مربع افزودهٔ KM به اندازهٔ مربع خط راستی اندازه‌ناپذیر با BK بزرگتر است، و تمامی BK با خط راست گویای معلوم BH اندازه‌پذیر است، بنابراین MB یک منفصل چهارم است. [X.تع.III.۴]

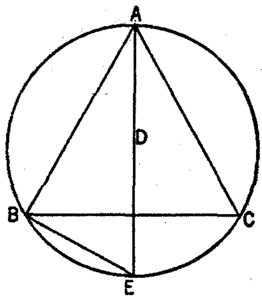
اما مستطیل حاصل از یک خط راست گویا و یک منفصل چهارم گنگ است، و جذر آن گنگ است، و کهاد نامیده می‌شود. [۹۴.X]

اما مربع AB با مستطیل HB و BM مساوی است، زیرا، وقتی H به A وصل شود، مثلث ABH با مثلث ABM متساوی‌الزاویه است، و نسبت HB به BA همچون نسبت AB است به BM. بنابراین ضلع پنج ضلعی، AB، خط راستی است گنگ به نام کهاد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع در دایره‌ای محاط باشد، مربع ضلع مثلث با سه برابر مربع شعاع دایره مساوی است.



فرض می‌کنیم ABC یک دایره است، و ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع محاط در آن. می‌گوییم که مربع ضلع مثلث ABC سه برابر مربع شعاع دایره است.

زیرا فرض می‌کنیم مرکز دایره، نقطهٔ D، به دست آمده، A به D وصل و تا E امتداد داده شده و B به E وصل شده است. پس، چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین کمان BEC یک سوم محیط دایرهٔ ABC است. بنابراین کمان BE یک ششم محیط دایره است؛ بنابراین خط راست BE ضلع یک شش ضلعی است، و لذا با شعاع دایره، DE، مساوی است. [IV.۱۵،ف.]

و، چون AE دو برابر DE است، مربع AE چهار برابر مربع ED، یعنی چهار برابر مربع BE است. اما مربع AE با مربعهای AB و BE مساوی است؛ [III.۳۱،I.۴۷]

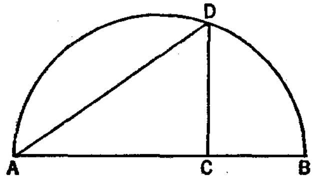
بنابراین [مجموع] مربعهای AB و BE چهار برابر مربع BE است. لذا، از حذف جمله‌های مساوی از دو طرف مربع AB با سه برابر مربع BE مساوی خواهد شد. اما BE با DE مساوی است. بنابراین مربع AB سه برابر مربع DE است.

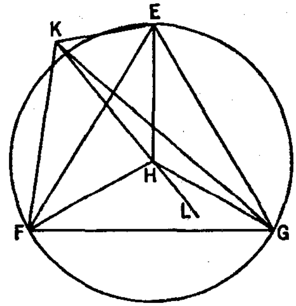
بنابراین مربع ضلع مثلث سه برابر مربع شعاع دایره است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

مطلوب ساختن یک هرم و جای دادن آن در کره‌ای مفروض و اثبات این نکته است که مربع قطر کره یک و نیم برابر مربع ضلع هرم است.





فرض می‌کنیم قطر AB از کرهٔ مفروض، معلوم است و در نقطهٔ C چنان تقسیم شده است که AC دو برابر CB است. فرض می‌کنیم نیم‌دایرهٔ ADB بر AB رسم، و از نقطهٔ C، CD بر

AB عمود و D به A وصل شده است. و فرض می‌کنیم دایرهٔ EFG با شعاعی مساوی با CD معلوم است، و مثلث متساوی‌الاضلاع EFG در دایرهٔ EFG محاط شده است. [۲.IV]
فرض می‌کنیم نقطهٔ H مرکز دایره، پیدا و به نقاط E و F و G وصل شده است. از نقطهٔ H، KH را بر صفحهٔ دایرهٔ EFG عمود، [۱۲.XI]
و HK را بر آن مساوی با AC جدا می‌کنیم، و K را به نقاط E و F و G وصل می‌کنیم.

حال، چون KH بر صفحهٔ دایرهٔ EFG عمود است، بنابراین بر همهٔ خطهای راستی که آن را می‌برند و در صفحهٔ دایرهٔ EFG قرار دارند عمود است. [XI.تع.۳]

اما خطهای راست HE و HF و HG آن را می‌برند: بنابراین HK بر هر یک از خطهای راست HE و HF و HG عمود است. و، چون AC با HK مساوی است، و CD با HE، و زاویه‌های بین آنها قائمه‌اند، بنابراین DA با KE مساوی است. [۴.I]

به همین دلیل هر یک از خطهای راست KF و KG نیز با DA مساوی است. بنابراین سه خط راست KE و KF و KG با یکدیگر مساوی‌اند. و، چون AC دو برابر CB است، لذا AB سه برابر BC است. اما نسبت ABبه BC، همچون نسبت مربع AD است به مربع DC، چنانچه بعداً ثابت خواهد شد. لذا مربع AD سه برابر مربع DC است.

اما مربع FE نیز سه برابر مربع EH است، [۱۲.XIII]
و DC با EH مساوی است؛ بنابراین DA نیز با EF مساوی است. اما ثابت شده بود که DA با هر یک از خطهای راست KE و KF و KG مساوی است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست EF و FG و GE با هر یک از خطهای راست KE و KF و KG نیز مساوی است؛ بنابراین چهار مثلث EFG و KEF و KFG و KEG متساوی‌الاضلاع‌اند. بنابراین هرمی از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع درست شده که مثلث EFG قاعدهٔ آن است و نقطهٔ K رأس آن.

حال، مطلوب جای دادن این هرم در کرهٔ مفروض و اثبات این نکته است که مربع قطر کره یک و نیم برابر مربع ضلع هرم است.

فرض می‌کنیم خط راست HL را بر امتداد خط راست KH، مساوی با CB، جدا کرده‌ایم.
حال، چون نسبت AC به CD همچون نسبت CD است به CB، [۸.VI، ف.]
و AC با HK مساوی است، و CD با HE، و CB با HL، بنابراین نسبت KH به HE همچون نسبت EH است به HL؛ لذا مستطیل KH و HL با مربع EH مساوی است. [۱۷.VI]

و هر یک از زاویه‌های KHE و EHL قائمه است؛ بنابراین نیم‌دایرهٔ مرسوم بر KL از E نیز می‌گذرد. [رک. VI. ۸، III. ۳۱]

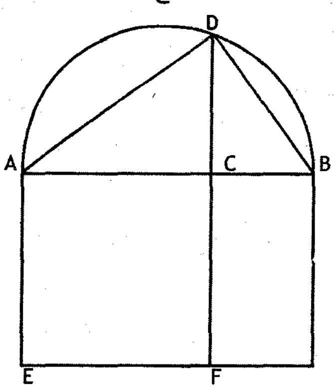
پس اگر KL ثابت بماند و نیم‌دایره در حول آن دوران کند تا به وضع اول بازگردد، در ضمن حرکت از نقاط F و G نیز خواهد گذشت، زیرا، اگر L را به F و G وصل کنیم زاویه‌های F و G به همان دلیل قائمه خواهند شد؛ و هرم در کرهٔ مفروض جای داده خواهد شد. زیرا KL، قطر کره، با قطر AB از کرهٔ مفروض مساوی است، زیرا KH با AC مساوی بود و HL با CB. حال، می‌گوییم که مربع قطر کره یک‌ونیم برابر مربع ضلع هرم است.

زیرا، چون AC دو برابر CB است، پس AB سه برابر BC است؛ از حذف BC از این دوتساوی نتیجه می‌شود BA یک‌ونیم برابر AC است. اما نسبت BA به AC همچون نسبت مربع BA است به مربع AD. بنابراین مربع BA نیز یک‌ونیم برابر مربع AD است. و BA قطر کرهٔ مفروض است و AD با ضلع هرم مساوی است. بنابراین مربع قطر کره یک‌ونیم برابر مربع ضلع هرم است.

آنچه می‌خواستیم.

لم

باید ثابت کنیم که نسبت AB به BC همچون نسبت مربع AD است به مربع DC.



زیرا، فرض می‌کنیم شکل نیم‌دایره معلوم و D به B وصل شده است. فرض می‌کنیم مربع EC بر AC بنا شده و متوازی‌الاضلاع FB کامل شده است.

پس، چون مثلث DAB با مثلث DAC متساوی‌الزاویه است، نسبت BA به AD، همچون نسبت DA است به AC، [۴.VI،۸.VI]

بنابراین مستطیل BA و AC با مربع AD مساوی است. [۱۷.VI]

و چون، نسبت AB به BC همچون نسبت EB است به BF، [۱.VI]

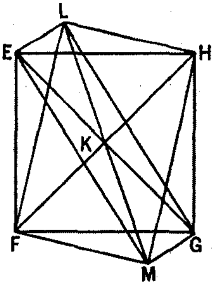
و EB مستطیل BA و AC است، زیرا EA با AC مساوی است، و BF مستطیل AC و CB است، در نتیجه نسبت AB به BC همچون نسبت مستطیل BA و AC است به مستطیل AC و CB. و مستطیل BA و AC با مربع AD مساوی است، و مستطیل AC و CB با مربع DC؛ زیرا ارتفاع DC واسطه هندسی بین قطعه‌های AC و CB از قاعده است زاویهٔ ADB قائمه است. [۸.VI،ف.]

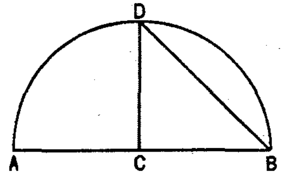
بنابراین نسبت AB به BC همچون نسبت مربع AD است به مربع DC.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

مطلوب ساختن یک هشت وجهی و جای دادن (محاط کردن) آن، مانند حالت قبل، در یک کره است؛ و اثبات اینکه مربع قطر کره دو برابر مربع ضلع هشت وجهی است.





فرض می‌کنیم AB قطر کرهٔ مفروض معلوم و در نقطهٔ C نصف شده است؛ نیم‌دایرهٔ ADB را به قطر HD رسم، و از نقطهٔ C عمود CD را بر AB اخراج، و D را به B وصل می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم مربع $EFGH$ به ضلعی مساوی با DB رسم شده است؛ E را به G وصل می‌کنیم و H را به F. از نقطهٔ K خط راست KL را عمود بر صفحهٔ مربع $EFGH$ اخراج می‌کنیم، [۱۲.XI] و آن را به طرف دیگر صفحه، به صورت KM، امتداد می‌دهیم؛ فرض می‌کنیم از این خط راست طولهای KL و KM به ترتیب به اندازهٔ یکی از خطهای راست EK و FK و GK و HK جدا شده و نقطه‌های L و M به نقطه‌های E و F و G و H وصل شده‌اند.

پس، چون KE با KH مساوی، و زاویهٔ EKH قائمه است، بنابراین مربع HE دو برابر مربع EK است. [۴۷.I]

باز، چون LK با KEمساوی و زاویهٔ LKE قائمه است، بنابراین مربع EL دو برابر مربع EK است. [همان قضیه]

اما ثابت شده بود که مربع HE نیز دو برابر مربع EK است. بنابراین مربع LE با مربع EH و در نتیجه LE با EH مساوی است. به همین دلیل LH نیز با HE مساوی است؛ بنابراین مثلث LEH متساوی‌الاضلاع است. به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از مثلثهای باقیمانده که اضلاع مربع $EFGH$ قاعده‌های آنها هستند، و نقاط L و M رأسهای آنها، متساوی‌الاضلاع‌اند. بنابراین یک هشت وجهی ساخته شده که شامل هشت مثلث متساوی‌الاضلاع است.

حال، مطلوب جای دادن آن در کرهٔ مفروض است و اثبات اینکه مربع قطر کره دو برابر مربع ضلع هشت وجهی است.

زیرا، چون سه خط راست LK و KM و KE با هم مساوی‌اند، بنابراین نیم‌دایرهٔ مرسوم بر LM از E نیز خواهد گذشت. و به همین دلیل، اگر LM ثابت بماند، و نیمدایره حول آن دوران

کند و به وضع اولیهٔ خود برگردد، از نقاط F و H و G نیز خواهد گذشت و هشت وجهی در کره جای داده خواهد شد. حال می‌گوییم که این هشت وجهی در کرهٔ مفروض نیز جای داده شده است.

زیرا، چون LK با KM مساوی است، و KE مشترک، و زاویهٔ بین آنها قائمه، در نتیجهٔ LE با EM مساوی است. [۴.I]

و، چون زاویهٔ LEM قائمه است، زیرا محاط در یک نیمدایره است، [۳۱.III]

بنابراین مربع LM دوبرابر مربع LE است. [۴۷.I]

باز، چون AC با CB مساوی است، AB دو برابر BC است.

اما نسبت AB به BC همچون نسبت مربع AB است به مربع BD؛ بنابراین مربع AB دو برابر مربع BD است. اما ثابت شده بود که مربع LM نیز دوبرابر مربع LE است. و مربع DB با مربع LE مساوی است، زیرا EH با DB مساوی گرفته شده بود. بنابراین مربع AB نیز با مربع LM مساوی است، و در نتیجه AB با LM مساوی است. و AB قطر کرهٔ مفروض است؛ لذا LM با قطر کرهٔ مفروض مساوی است.

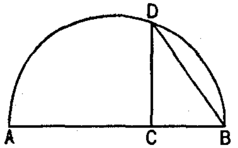
لذا، این هشت‌وجهی در کرهٔ مفروض جای داده شده و در ضمن ثابت شده است که مربع قطر کره دو برابر مربع ضلع هشت‌وجهی است.

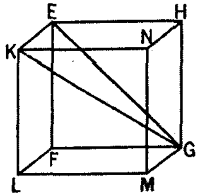
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

مطلوب ساختن یک مکعب و جای دادن آن، مانند هرم، در یک کره است، و اثبات اینکه مربع قطر کره سه برابر مربع ضلع مکعب است.

فرض می‌کنیم قطر AB از کرهٔ مفروض معلوم، و در نقطهٔ C طوری تقسیم شده که AC دو برابر CB است؛ نیم‌دایرهٔ ADB به قطر AB را رسم، و فرض می‌کنیم CD از C بر AB





عمود و D به B وصل شده است؛ فرض می‌کنیم مربع $EFGH$ با ضلعی مساوی با DB مشخص و عمودهای EK و FL و GM و HN، به ترتیب از نقاط E و F و G و H بر صفحهٔ مربع $EFGH$ اخراج شده‌اند. فرض می‌کنیم از EK و FL و GM و HN به ترتیب

طولهای EK و FL و GM و HN مساوی با یکی از خطهای راست EF و FG و GH و HE جدا شده‌اند، و K و M به L و N وصل شده‌اند، لذا مکعب FN که به شش مربع متساوی محصور است ساخته شده است.

حال مطلوب جای دادن آن در کرهٔ مفروض و اثبات این است که مربع قطر کره سه برابر مربع ضلع مکعب است. زیرا فرض می‌کنیم G به E و K وصل شده است. در این صورت چون زاویهٔ KEG قائمه است، زیرا KE بر صفحهٔ EG و البته برخط راست EG نیز عمود است. [XI. تع. ۳]

بنابراین نیم‌دایره به قطر KG از نقطهٔ E نیز خواهد گذشت. باز، چون GF بر هر یک از خطهای راست FL و FE عمود است، پس بر صفحهٔ FK نیز عمود است؛ لذا، اگر F را به K وصل کنیم، GF بر FK عمود خواهد شد، و باز به همین دلیل نیم‌دایره مرسوم بر GK از F نیز خواهد گذشت. به همین ترتیب نیم‌دایره مرسوم بر GK از بقیهٔ رأسهای مکعب خواهد گذشت.

پس، اگر KG ثابت بماند، و نیمدایره حول آن دوران کند تا به وضع اول بازگردد، مکعب در یک کره جای داده خواهد شود. بعد، می‌گوییم در کرهٔ مفروض نیز جای داده شده است.

زیرا، چون GF با FE مساوی و زاویهٔ F قائمه است، بنابراین مربع EG دو برابر مربع EF است. اما EF با EK مساوی است؛ بنابراین مربع EG دو برابر مربع EK است؛ لذا مربعهای GE و EK، یعنی مربع GK، [۴۷.I]

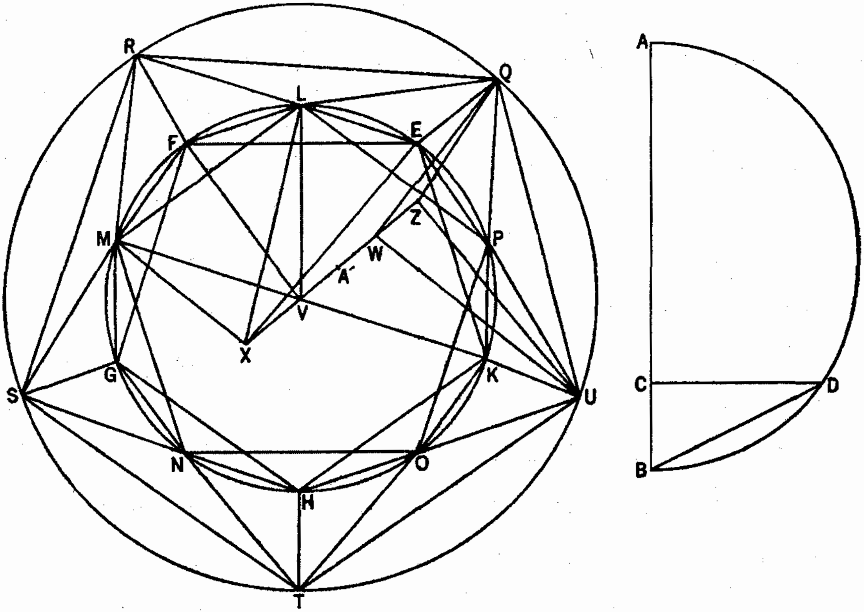
سه برابر مربع EK است. و، چون AB سه برابر BC است، و نسبت AB به BC مثل نسبت مربع AB است به مربع BD. پس مربع AB سه برابر مربع BD است.

اما، ثابت شده بود که مربع GK سه برابر مربع KE است. و KE مساوی با BD گرفته شده بود؛ بنابراین KG نیز با AB مساوی است. و AB قطر کرهٔ مفروض است؛ بنابراین KG نیز با قطر کرهٔ مفروض مساوی است. در نتیجه این مکعب در کرهٔ مفروض جای داده شده و در ضمن ثابت شده است که مربع قطر کره سه برابر مربع ضلع مکعب است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۶

مطلوب ساختن یک بیست وجهی و جای دادن (محاط کردن) آن، مانند شکلهای قبلاً گفته شده، در یک کره است؛ و اثبات اینکه ضلع بیست‌وجهی خط راستی است گنگ به نام کهاد.



فرض می‌کنیم قطر کرهٔ مفروض، AB، معلوم و در نقطهٔ C چنان تقسیم شده است که AC چهار برابر BC است؛ فرض می‌کنیم نیم‌دایرهٔ ADB به قطر AB رسم شده است، از نقطهٔ C عمود CD را بر AB اخراج و B را به D وصل و فرض می‌کنیم دایرهٔ $EFGHK$ به شعاع DB مشخص شده و پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویهٔ $EFGHK$ در دایرهٔ $EFGHK$ محاط شده است. فرض می‌کنیم کمانهای EF و FG و GH و HK و KE به ترتیب در نقاط L و M و N و O و P نصف شده‌اند، و M به L و N وصل شده است، و O به N و P، و P به L و E. بنابراین پنج‌ضلعی $LMNOP$ نیز متساوی‌الاضلاع است و خط راست EP ضلع یک ده ضلعی است.

حال فرض می‌کنیم عمودهای EQ و FR و GS و HT و KU از نقاط E و F و G و H و K، بر صفحهٔ دایرهٔ اخراج و با شعاع دایرهٔ $EFGHK$ مساوی گرفته شده‌اند. فرض می‌کنیم R به Q و S وصل شده است، و T به U و S، و Q به U و L، و R به L و M، و S به M و N، و T به N و O، و U به P و O، و Q به P.

حال، چون هر یک از خطهای راست EQ و KU بر یک صفحه عمود است، بنابراین EQ با KU موازی است. [۶ .XI]

اما مساوی با آن نیز هست؛ و خطهای راستی که دو سر خطهای راست متساوی و متوازی را در یک جهت به هم وصل می‌کنند، با هم مساوی و موازی‌اند. [۳۳.I]

بنابراین QU با EK مساوی و موازی است.

اما EK ضلع یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع است. بنابراین QU نیز ضلع یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع محاط در دایره $EFGHK$ است. به همین دلیل هر یک از خطهای راست QR و RS و ST و TU نیز ضلع یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ $EFGHK$ است؛ بنابراین، پنج ضلعی $QRSTU$ متساوی‌الاضلاع است.

و، چون QE ضلع یک شش ضلعی است، و EP ضلع یک ده ضلعی، و زاویهٔ QEP قائمه است لذا QP ضلع یک پنج ضلعی است؛ زیرا مربع ضلع پنج ضلعی با مربع ضلع شش ضلعی و مربع ضلع ده ضلعی محاط در یک دایره مساوی است. [۱۰.XIII]

به همین دلیل PU نیز ضلع یک پنج ضلعی است.

اما QU نیز ضلع یک پنج ضلعی است؛ بنابراین مثلث QPU متساوی‌الاضلاع است. به همین دلیل هر یک از مثلثهای QLR و RMS و SNT و TOU نیز متساوی‌الاضلاع است.

و، چون ثابت شده بود که هر یک از خطهای راست QL و QP ضلع یک پنج ضلعی است، و LP نیز ضلع یک پنج ضلعی است، بنابراین مثلث QLP متساوی‌الاضلاع است. به همین دلیل هر یک از مثلثهای LRM و MSN و NTO و OUP نیز متساوی‌الاضلاع است..

فرض می‌کنیم مرکز دایرهٔ $EFGHK$، نقطهٔ V، پیدا شده است؛ از V عمود VZ را بر صفحهٔ دایره اخراج می‌کنیم و در جهت دیگر، به صورت VX، امتداد می‌دهیم و VW را به اندازهٔ ضلع یک شش ضلعی جدا می‌کنیم؛ و هر یک از خطهای راست VX و WZ ضلعهای یک ده‌ضلعی‌اند، Q را به Z و W وصل می‌کنیم، و U را به Z، و V را به E و L، و X را به L و M.

حال، چون هر یک از خطهای راست VW و QE بر صفحهٔ دایره عمود است بنابراین VW با QE موازی است. [۶.XI]

اما، مساوی نیز هستند؛ بنابراین EV و QW با هم مساوی و موازی‌اند. [۳۳.I]

اما EV ضلع یک شش ضلعی است، پس QW نیز ضلع یک شش ضلعی است. و، چون QW ضلع یک شش ضلعی است و WZ ضلع یک ده ضلعی و زاویهٔ QWZ قائمه، بنابراین QZ ضلع یک پنج ضلعی است. [۱۰.XIII]

به همین دلیل UZ نیز ضلع یک پنج ضلعی است، زیرا اگر V را به K وصل کنیم، و W را به U، این خطهای راست متساوی و مختلف‌الجهت‌اند، و VK یک شعاع، یعنی ضلع یک شش ضلعی است؛ [۱۵.IV،ف.]

بنابراین WU نیز ضلع یک شش ضلعی است. اما، WZ ضلع یک ده ضلعی است، و زاویهٔ UWZ قائمه؛ بنابراین UZ ضلع یک پنج ضلعی است. [۱۰.XIII]

اما QU نیز ضلع یک پنج ضلعی است؛ لذا مثلث QUZ متساوی‌الاضلاع است. به همین دلیل هر یک از مثلثهای دیگری که قاعده‌های آنها خطهای راست QR و RS و ST و TU هستند و نقطهٔ Z رأس آنهاست، نیز متساوی‌الاضلاع است.

باز، چون VL ضلع یک شش ضلعی است، و VX ضلع یک ده ضلعی، و زاویهٔ LVX قائمه، بنابراین LX ضلع یک پنج ضلعی است. [۱۰.XIII]

به همین دلیل اگر MV را، که ضلع یک شش ضلعی است، رسم کنیم، معلوم می‌شود که MX نیز ضلع یک پنج ضلعی است. اما LM نیز ضلع یک پنج ضلعی است، بنابراین مثلث LMX متساوی‌الاضلاع است.

همچنین می‌توان ثابت کرد که هر یک از مثلثهای دیگر که قاعده‌های آنها MN و NO و OP و PL هستند و رأس آنها نقطهٔ X است نیز متساوی‌الاضلاع است. بنابراین یک بیست‌وجهی ساخته شده است که شامل بیست مثلث متساوی‌الاضلاع است.

حال مطلوب جای دادن آن در کرهٔ مفروض و اثبات این است که ضلع بیست وجهی خط راست گنگی است که کهاد نام دارد. زیرا چون VW ضلع یک شش ضلعی است، و WZ ضلع یک ده ضلعی، بنابراین VZ در نقطهٔ W به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است و VW قطعهٔ بزرگتر است؛ [۹.XIII]

بنابراین نسبت ZV به VW، همچون نسبت VW است به WZ. اما VW با VE مساوی است، و WZ با VX؛ بنابراین نسبت ZV به VE همچون نسبت EV است به VX و زاویه‌های ZVE و EVX قائمه‌اند. بنابراین اگر خط راست EZ را رسم کنیم، زاویهٔ XEZ، به دلیل متشابه بودن مثلثهای XEZ و VEZ، قائمه خواهد بود.

به همین دلیل، باز چون نسبت ZV به VW، همچون نسبت VW است به WZ؛ و ZV با XW مساوی است، و VW با WQ؛ بنابراین نسبت XW به WQ همچون نسبت QW است به WZ. و باز، به همان دلیل اگر X را به Q وصل کنیم، زاویهٔ Q قائمه خواهد بود؛[۸.VI]

بنابراین نیم‌دایرهٔ به قطر XZ از Q نیز خواهد گذشت. [۳۱.III]

و، اگر XZ ثابت بماند و نیم‌دایره حول آن دوران کند و به وضع اول خود بازگردد، از Q و دیگر رأسهای بیست‌وجهی خواهد گذشت، و بیست‌وجهی در یک کره جای داده خواهد شد. حال، می‌گویم که در کرهٔ مفروض نیز جای داده (محاط) خواهد شد.

زیرا، فرض می‌کنیم VW در A' نصف شده است. پس، چون خط راست VZ در نقطهٔ W به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و ZW قطعهٔ کوچکتر آن است، بنابراین مربع (ZW و نصف قطعهٔ بزرگتر)، یعنی WA' پنج برابر مربع نصف قطعهٔ بزرگتر است؛ [۳.XIII]

بنابراین مربع ZA' پنج برابر مربع $A'W$ است. و ZX دو برابر ZA' است، و VW دو برابر $A'W$؛ بنابراین مربع ZX پنج برابر مربع WV است. و، چون AC چهار برابر CB است، بنابراین AB پنج برابر BC است.

اما، نسبت AB به BC، همچون نسبت مربع AB است به مربع BD؛ [VI.۸.V.تع.۹] بنابراین مربع AB پنج برابر مربع BD است. اما ثابت شده بود که مربع ZX نیز پنج برابر مربع VW است. و DB با VW مساوی است، زیرا هر یک از آنها با شعاع دایرهٔ $EFGHK$ مساوی است؛ بنابراین AB نیز با XZ مساوی است. و AB قطر کرهٔ مفروض است؛ بنابراین XZ نیز با قطر کرهٔ مفروض مساوی است. لذا بیست‌وجهی در کرهٔ مفروض جای داده (محاط) شده است.

حال می‌گوییم که ضلع بیست‌وجهی خط راستی است گنگ موسوم به کهاد. زیرا، چون قطر کره گویاست، و مربع آن پنج برابر مربع شعاع دایرهٔ $EFGHK$ است؛ بنابراین شعاع دایرهٔ $EFGHK$ نیز گویاست؛ لذا قطر آن نیز گویاست. اما، اگر یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع در دایره‌ای محاط شود که قطرش گویا باشد ضلع این پنج ضلعی خط راستی است گنگ به نام کهاد. [XIII.۱۱] و ضلع پنج ضلعی $EFGHK$ ضلع بیست‌وجهی است، بنابراین ضلع بیست‌وجهی خط راستی است گنگ به نام کهاد.

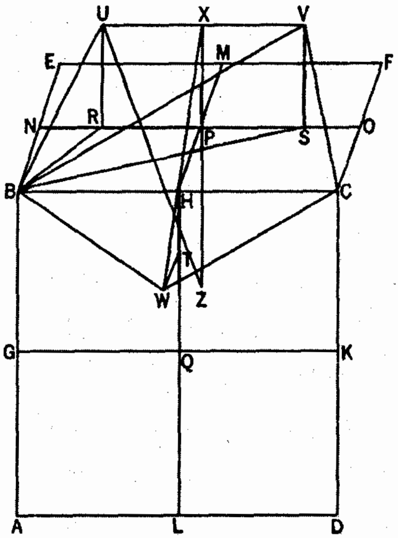
فرع. از اینجا آشکار می‌شود که مربع قطر کره، پنج برابر مربع شعاع دایره‌ای است که بیست‌وجهی از روی آن ترسیم شده است، و قطر کره از ضلع شش ضلعی و دو ضلع ده‌ضلعی محاط در همان دایره تشکیل شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

مطلوب رسم یک دوازده وجهی و جای دادن آن، نظیر شکلهایی که قبلاً گفتیم، در یک کره است و اثبات اینکه ضلع دوازده وجهی خط راست گنگی است به نام منفصل.

فرض می‌کنیم $ABCD$ و $CBEF$ دو وجه متعامد، از مکعبی که قبلاً گفتیم، معلوم‌اند و اضلاع AB و BC و CD و DA و EF و EB و FC به‌ترتیب در نقاط G و H و K و L و M و N و O نصف شده‌اند؛ و G به K وصل شده است، و H به L و M، و N به O. فرض می‌کنیم خطهای راست NP و PO و HQ به ترتیب در نقاط R و S و T به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده‌اند، و RP و PS و TQ قطعات بزرگتر آنها هستند؛ عمودهای RU و SV و TW را از نقاط R و S و T بر وجه‌های مکعب و متوجه به سمت بیرون آن، اخراج و طولهای آنها را مساوی با RP و PS و TQ جدا نموده و B را به U و W وصل می‌کنیم، و C را به V و W، و U را به V.



می‌گوییم که پنج ضلعی $UBWCV$ متساوی‌الاضلاع و در یک صفحه، و به علاوه متساوی‌الزاویه است. زیرا، فرض می‌کنیم B به R و S و V وصل شده است. پس، چون خط راست NP در R به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و RP قطعهٔ بزرگتر آن است، بنابراین [مجموع] مربعهای PN و NR سه برابر مربع RP است. [۴.XIII] اما PN با NB مساوی است و PR با RU؛ بنابراین [مجموع] مربعهای BN و NR سه برابر مربع RU است.

اما مربع BR با مربعهای BN و NR مساوی است؛ [۴۷.I]

بنابراین مربع BR سه برابر مربع RU است؛ لذا [مجموع] مربعهای BR و RU چهار برابر مربع RU است. اما مربع BU با مربعهای BR و RU مساوی است؛ بنابراین مربع BU چهار برابر مربع RU است؛ لذا BU دو برابر RU است. اما VU نیز دوبرابر UR است؛ چون SR نیز دوبرابر PR، یعنی دوبرابر RU، است بنابراین BU با UV مساوی است. همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از خطهای راست BW و WC و CV با هر یک از خطهای راست BU و UV نیز مساوی است. بنابراین پنج ضلعی $BUVCW$ متساوی‌الاضلاع است.

حال می‌گوییم که در یک صفحه نیز هست.

زیرا، فرض می‌کنیم PX از P موازی با هر یک از خطهای راست RU و SV، متوجه به بیرون مکعب رسم، و H به X و W وصل شده است؛ می‌گوییم که XHW یک خط راست است. زیرا، چون HQ در T به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و QT قطعهٔ بزرگتر آن است، بنابراین نسبت HQ به QT، همچون نسبت QT است به TH. اما HQ با HP مساوی است، و QT با هر یک از خطهای راست TW و PX؛ بنابراین نسبت HP به PX همچون نسبت WT است به TH. و، HP با TW موازی است، زیرا هر یک از آنها بر صفحهٔ BD عمود است؛ [۶.XI]

و TH با PX موازی است، زیرا هر یک از آنها بر صفحهٔ BF عمود است؛ [همان گزاره قبل]

اما، اگر دو مثلث، نظیر XPH و HTW، که دو ضلع از یکی با دو ضلع از دیگری متناسب‌اند

طوری در یک رأس پهلوی هم قرار داده شوند که ضلعهای متناظر با هم موازی شوند، ضلعهای دیگر بر امتداد یک خط راست قرار می‌گیرند؛ [۳۲.VI]

بنابراین XH با HW بر یک خط راست قرار دارند. اما هر خط راست در یک صفحه واقع است؛ [۱.XI]

بنابراین پنج ضلعی $UBWCV$ در یک صفحه است. حال می‌گوییم که متساوی‌الزاویه نیز هست. زیرا، چون خط راست NP در R به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و PR قطعهٔ بزرگتر آن است، و PR با PS مساوی است، بنابراین NS نیز در P به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و NP قطعهٔ بزرگتر آن است؛ [۵.XIII]

بنابراین [مجموع] مربعهای NS و SP سه‌برابر مربع NP است. [۴.XIII]

اما، NP با NB مساوی است و PS با SV؛ بنابراین [مجموع] مربعهای NS و SV سه‌برابر مربع NB است، لذا [مجموع] مربعهای VS و SN و NB چهار برابر مربع NB است.

اما مربع SB با مربعهای SN و NB مساوی است؛ بنابراین مربعهای BS و SV، یعنی، مربع BV ـ به دلیل قائمه بودن زاویهٔ VSB ـ چهار برابر مربع NB است. بنابراین VB دو برابر BN است. اما BC نیز دوبرابر BN است؛ بنابراین BV با BC مساوی است. و، چون دو ضلع BU و UV با دو ضلع BW و WC مساوی‌اند، و قاعدهٔ BV با قاعدهٔ BC مساوی است، بنابراین زاویهٔ BUV با زاویهٔ BWC مساوی است. [۸.I]

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که زاویهٔ UVC نیز با زاویهٔ BWC مساوی است؛ بنابراین سه زاویهٔ BWC و BUV و UVC با هم برابرند.

اما اگر در یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع، سه زاویه با هم مساوی باشند، آن پنج ضلعی متساوی‌الزاویه است. [۷.XIII]

بنابراین پنج ضلعی $BUVCW$ متساوی‌الزاویه است. و ثابت شده بود متساوی‌الاضلاع نیز هست؛ بنابراین پنج ضلعی $BUVCW$ متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویه است و بر یک طرف ضلع BC از مکعب قرار دارد.

بنابراین، اگر همین ساختمان را در مورد هر یک از دوازده ضلع مکعب انجام دهیم جسمی ساخته خواهد شد که دارای دوازده پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی الزاویه است و دوازده وجهی نام دارد.

حال مطلوب جای دادن (محاط کردن) آن در کرهٔ مفروض است، و اثبات اینکه ضلع دوازده وجهی خط راستی است گنگ به نام منفصل.

فرض می‌کنیم XP امتداد داده شده و این خط راست امتداد داده شده XZ است. بنابراین

PZ و قطر مکعب یکدیگر را می‌برند و یکدیگر را نصف می‌کنند، مطلبی که در قضیهٔ ماقبل آخر مقالهٔ یازدهم، [۳۸.XI]
ثابت شده است. فرض می‌کنیم آنها یکدیگر را در نقطهٔ Z بریده‌اند؛ بنابراین Z مرکز کره‌ای است که مکعب را در خود جای داده است و ZP نصف ضلع مکعب است. U را به Z وصل می‌کنیم. حال، چون خط راست NS در P به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده، و NP قطعهٔ بزرگتر آن است، بنابراین مربعهای NS و SP سه برابر مربع NP هستند. [۴.XIII]

اما NS با XZ مساوی است، زیرا NP نیز با PZ مساوی است، و XP با PS. اما، گذشته از آن، PS نیز با XU مساوی است، زیرا با RP نیز مساوی است؛ بنابراین [مجموع] مربعهای ZX و XU سه برابر مربع NP است.

اما مربع UZ با مربعهای ZX و XU مساوی است؛ پس مربع UZ سه برابر مربع NP است. اما مربع شعاع کره‌ای که مکعب را در خود جای داده نیز سه‌برابر مربع نصف ضلع مکعب است، زیرا قبلاً نشان داده شده بود که چگونه یک مکعب بسازیم، و آن را در کره‌ای جای دهیم و ثابت کنیم که مربع قطر کره سه برابر مربع ضلع مکعب است. [۱۵.XIII]

ولی، اگر نسبتی بین تمام و تمام برقرار باشد، بین نصف و نصف هم برقرار خواهد بود؛ و NP نصف ضلع مکعب است؛ بنابراین UZ با شعاع کره‌ای که مکعب را در خود جای داده مساوی است. و Z مرکز کره‌ای است که مکعب را در خود جای داده است؛ بنابراین نقطهٔ U برسطح کره واقع است.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که هر یک از رأسهای دیگر دوازده وجهی نیز بر سطح کره واقع است؛ پس دوازده وجهی در کرهٔ مفروض جای داده شده است.

اکنون می‌گوییم که ضلع دوازده وجهی خط راستی است گنگ به نام منفصل. زیرا، وقتی NP به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و RP قطعهٔ بزرگتر آن است، و وقتی PO به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و PS قطعهٔ بزرگتر آن است، بنابراین وقتی تمام NO به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده، RS قطعهٔ بزرگتر آن است.

[از این رو، چون نسبت NP به PR همچون نسبت PR است به RN، عین همین نسبتها، برای دو برابرهای آنها نیز برقرارند، زیرا نسبت اجزاء به یکدیگر همچون نسبت مضربهای مساوی آنهاست. [۱۵.V]
بنابراین نسبت NO به RS همچون نسبت RS است به مجموع NR و SO. اما NO از RS بزرگتر است؛ لذا RS نیز از مجموع NR و SO بزرگتر است؛ بنابراین NO به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و RS قطعهٔ بزرگتر آن است].

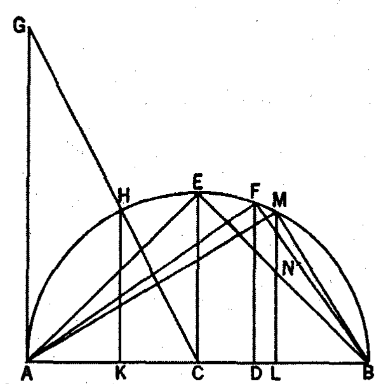
اما RS با UV مساوی است؛ بنابراین وقتی NO به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده، UV قطعهٔ بزرگتر آن است. و، چون قطر کره گویا، و مربع آن سه برابر مربع ضلع مکعب است، بنابراین NO، که یک ضلع مکعب است، گویاست. [اما اگر خط گویایی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، هر یک از قطعه‌های آن یک منفصل و گنگ است.] بنابراین UV، که یک ضلع دوازده وجهی است، یک منفصل و گنگ است. [۶.XIII]

فرع. از اینجا معلوم می‌شود که اگر ضلع مکعبی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، قطعهٔ بزرگتر آن ضلع دوازده وجهی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

مطلوب تعیین ضلعهای پنج شکل و مقایسهٔ آنهاست با یکدیگر.



فرض می‌کنیم AB، قطر کرهٔ مفروض، معلوم است و فرض می‌کنیم در نقطهٔ C چنان تقسیم شده که AC با CB مساوی است، و در D چنان تقسیم شده که AD با دو برابر DB مساوی است؛ نیم‌دایرهٔ AEB را بر AB رسم می‌کنیم، از C و D عمودهای CE و DF را بر AB اخراج، و E و F را به A و B وصل می‌کنیم. پس، چون AD دو برابر DB است، لذا AB سه برابر BD است. به عکس BA یک و نیم برابر AD است.

اما نسبت BA به AD همچون نسبت مربع BA است به مربع AF، [V.تع.۹،۸.VI] چون مثلث AFB با مثلث AFD متساوی‌الزاویه است، بنابراین مربع BA یک و نیم برابر مربع AF است. اما مربع قطر کره نیز یک و نیم برابر مربع ضلع هرم است. [۱۳.XIII] و AB قطر کره است؛ بنابراین AF با ضلع هرم مساوی است.

باز، چون AD دو برابر DB است، پس AB سه برابر BD است. اما نسبت AB به BD همچون نسبت مربع AB است به مربع BF؛ [VI. ۸، V. تع. ۹] بنابراین مربع AB سه برابر مربع BF است. اما مربع قطر کره نیز سه برابر مربع ضلع مکعب است. [۱۵.XIII]

و AB قطر کره است؛ بنابراین BF ضلع مکعب است. و، چون AC با CB مساوی است، لذا AB دو برابر BC است. اما، نسبت AB به BC همچون نسبت مربع AB است به مربع BE؛ بنابراین مربع AB دو برابر مربع BE است. اما مربع قطر کره نیز دو برابر مربع ضلع هشت‌وجهی است. [۱۴.XIII]

و AB قطر کرهٔ مفروض است؛ بنابراین BE ضلع هشت وجهی است.

حال، فرض می‌کنیم عمود AG از نقطهٔ A بر خط راست AB اخراج، و AG مساوی با AB جدا شده است، G را به C وصل می‌کنیم و از H عمود HK را بر AB فرود می‌آوریم.

در این صورت، چون GA دو برابر AC است، زیرا GA با AB مساوی، و نسبت GA به AC همچون نسبت HK است به KC؛ بنابراین HK نیز دوبرابر KC است. در نتیجه مربع HK چهار برابر مربع KC است؛ بنابراین مربعهای HK و KC، یعنی، مربع HC پنج برابر مربع KC است.

اما HC با CB مساوی است؛ بنابراین مربع BC پنج برابر مربع CK است. و، چون AB دو برابر CB است، و در این تساوی AD دو برابر DB است، بنابراین باقیماندهٔ BD دو برابر باقیماندهٔ DC است. لذا BC سه برابر CD است؛ بنابراین مربع BC نه برابر مربع CD است.

اما مربع BC پنج برابر مربع CK است؛ بنابراین مربع CK از مربع CD بزرگتر است، لذا CK از CD بزرگتر است. فرض می‌کنیم CL را مساوی با CK گرفته‌ایم، عمود LM را از L بر AB اخراج و B را به M وصل می‌کنیم. حال، چون مربع BC پنج برابر مربع CK است، و AB دو برابر BC است، و KL دو برابر CK، بنابراین مربع AB پنج برابر مربع KL است.

اما مربع قطر کره نیز پنج برابر مربع شعاع دایره‌ای است که ضلع بیست‌وجهی از روی آن پیدا شده است؛ [۱۶.XIII، ف.]

و AB قطر کره است؛ بنابراین KL شعاع دایره‌ای است که ضلع بیست‌وجهی از روی آن پیدا شده است؛ بنابراین KL ضلع شش ضلعی محاط در دایرهٔ مذکور است. [IV. ۱۵، ف.]

و، چون قطر کره از ضلع شش ضلعی و دو ضلع ده ضلعی محاطی در یک دایره درست شده، [XIII. ۱۶، ف.]

و AB قطرکره است، و KL یک ضلع شش ضلعی، و AK با LB مساوی است، بنابراین هر یک از خطهای راست AK و LB ضلع ده ضلعی محاط در دایره‌ای است که ضلع بیست‌وجهی از روی آن درست شده است.

و، چون LB ضلع یک ده ضلعی است، و ML ضلع یک شش ضلعی، و ML با KL

مساوی است، زیرا آن نیز با HK، که از مرکز به یک فاصله است، مساوی است، و هر یک از خطهای راست HK و KL-دو برابر KC است، بنابراین MB ضلع یک پنج ضلعی است. [۱۰.XIII]

اما ضلع پنج ضلعی، ضلع بیست‌وجهی است؛ [۱۶.XIII]

بنابراین MB ضلع بیست‌وجهی است.

اکنون چون FB یک ضلع مکعب است، فرض می‌کنیم در نقطهٔ N به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است، و NB قطعهٔ بزرگتر آن است؛ بنابراین NB ضلع یک دوازده‌وجهی است [XIII. ۱۷، ف.]

و ثابت شده بود مربع قطر کره یک و نیم برابر مربع ضلع AF از هرم، و دو برابر مربع ضلع BE از هشت‌وجهی، و سه برابر مربع ضلع FB از مکعب است، بنابراین اگر مربع قطر کره را به شش جزء مساوی تقسیم کنیم، مربع ضلع هرم شامل چهار جزء، مربع ضلع هشت‌وجهی شامل سه جزء، و مربع ضلع مکعب شامل دو جزء آن است. بنابراین مربع ضلع هرم چهار سوم مربع ضلع هشت‌وجهی، و دو برابر مربع ضلع مکعب است؛ و مربع ضلع هشت‌وجهی یک و نیم برابر مربع ضلع مکعب. بنابراین نسبت ضلعهای مذکور از سه شکل، یعنی هرم، هشت‌وجهی و مکعب به همدیگر، نسبتهایی هستند گویا.

اما نسبت ضلعهای دو شکل دیگر، یعنی ضلع بیست‌وجهی و ضلع دوازده‌وجهی یا به یکدیگر یا به ضلعهای شکلهایی که قبلاً گفتیم نسبتهایی گویا نیستند، زیرا گنگ‌اند که یکی کهاد است. [۱۶.XIII]

و دیگری منفصل [XIII. ۱۷]

این نکته را که ضلع بیست‌وجهی، MB، از ضلع دوازده‌وجهی، NB، بزرگتر است، می‌توانیم به ترتیب زیر ثابت کنیم.

چون مثلث FDB با مثلث FAB متساوی‌الزاویه است، [VI. ۸]

از لحاظ تناسب داریم: نسبت DB به BF همچون نسبت BF است به BA. [VI. ۴]

و، چون سه خط راست متناسب‌اند، نسبت اولی به سومی، همچون نسبت مربع اولی است به مربع دومی؛ [V. تع. ۹، VI. ۲۰، ف.]

بنابراین نسبت DB به BA همچون نسبت مربع DB است به مربع BF؛ لذا برعکس، نسبت AB به BD همچون نسبت مربع FB است به مربع BD.

اما AB سه برابر BD است؛ بنابراین مربع FB سه برابر مربع BD است. اما مربع AD نیز چهار برابر مربع DB است، زیرا، AD دو برابر DB است؛ بنابراین مربع AD از مربع FB بزرگتر است؛ در نتیجه AD از FB بزرگتر است، لذا AL از FB به مراتب بزرگتر است.

و، وقتی AL به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، KL قطعهٔ بزرگتر است، زیرا KL ضلع یک شش ضلعی است و KA ضلع یک ده ضلعی؛ [XIII. ۹]
و وقتی FB به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، NB قطعهٔ بزرگتر، و در نتیجهٔ KL از NB بزرگتر است.

اما KL با LM مساوی است؛ بنابراین LM از NB بزرگتر است. بنابراین MB که یک ضلع بیست‌وجهی است، از NB که یک ضلع دوازده‌وجهی است به مراتب بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

حال می‌گوییم که غیر از پنج شکل مذکور، هیچ شکل دیگری نمی‌توان ساخت که از شکلهای متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویهٔ مساوی با یکدیگر حاصل شده باشد.

زیرا، یک کنج نمی‌تواند از دو مثلث، یا در واقع از دو صفحه ساخته شود. با سه مثلث، کنج هرم ساخته می‌شود، با چهار مثلث کنج هشت‌وجهی، و با پنج مثلث کنج بیست‌وجهی؛ اما یک کنج نمی‌تواند از کنار هم نهادن شش مثلث متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویه در یک نقطه تشکیل شود؛ زیرا، زاویهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با دو سوم قائمه است وشش زاویه از چنین مثلثی با چهار قائمه مساوی می‌شود: که غیر ممکن است، زیرا [مجموع] زاویه‌های هر کنج کمتر از چهار قائمه است. [XI. ۲۱]

به همین دلیل یک کنج نمی‌تواند از بیش از پنج زاویهٔ مستوی تشکیل شود.

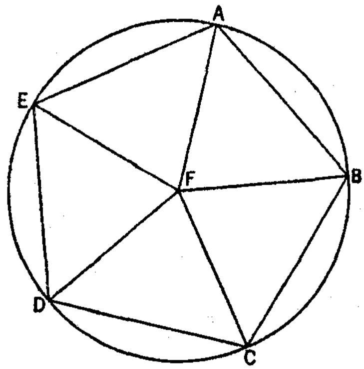
از سه مربع کنج مکعب حاصل می‌شود؛ اما از چهار مربع ممکن نیست یک کنج حاصل شود، زیرا در این صورت هم زاویه‌ها چهار قائمه می‌شوند؛ از سه پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویه، کنج دوازده وجهی حاصل می‌شود، اما با چهار پنج ضلعی از این نوع تشکیل کنج غیر ممکن است، زیرا هر زاویهٔ یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع برابر با یک و یک پنجم قائمه است؛ چهار زاویه‌اش از چهار قائمه بیشتر خواهد شد: که غیر ممکن است.

باز به همین دلیل غیر ممکن بودن، پنج کنج دیگری نمی‌تواند از شکلهای چند ضلعی دیگر پدید آید.

آنچه می‌خواستیم.

لم

اما این مطلب را که زاویهٔ پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویه برابر با یک و یک پنجم زاویهٔ قائمه است، باید ثابت کنیم.



فرض می‌کنیم $ABCDE$ یک پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الزاویه است، و فرض می‌کنیم دایرهٔ $ABCDE$ بر آن محیط شده و مرکز آن F پیدا شده است. F را به نقاط A و B و C و D و E وصل می‌کنیم. بنابراین، این خطهای راست، زاویه‌های A و B و C و D و E از پنج ضلعی را نصف می‌کنند. و، چون زاویه‌ها در نقطهٔ F متساوی و مساوی با چهار قائمه‌اند، بنابراین یکی از آنها، مثلاً زاویهٔ AFB از یک قائمه یک پنجم کمتر است؛ بنابراین زاویه‌های دیگر FAB و ABF برابر با یک و یک پنجم قائمه خواهند شد.

اما زاویهٔ FAB با زاویهٔ FBC مساوی است؛ بنابراین تمام زاویهٔ ABC از پنج ضلعی، از یک و یک پنجم قائمه تشکیل شده است.

آنچه می‌خواستیم.