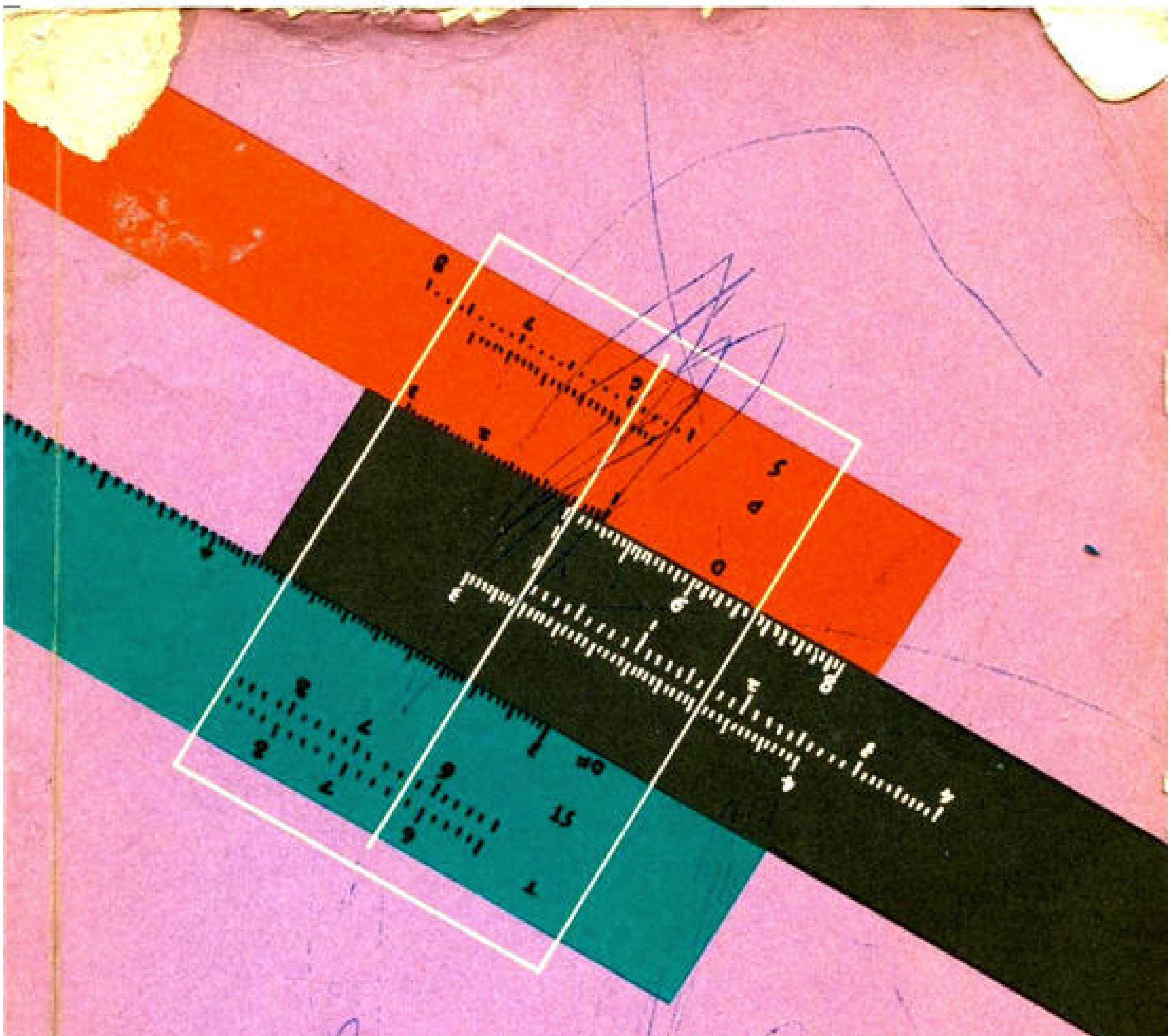
اصول خط کش محاسبه
و روش بکار بردن آن

چاپ سوم

نوشته م.ه. شفیعیها



اصول خط کش محاسبه
و روش بکار بردن آن

نوشتهٔ م. ه. شفیعیها

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

م . ه . شفیعیها

اصول خط‌کش محاسبه و روش بکار بردن آن

چاپ اول: ۱۳۴۳ ه. ش. ــ تهران
چاپ دوم با تجدید نظر، ۱۳۴۹ ه. ش ــ تهران
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ بیست و پنجم شهریور (شرکت سهامی افست)
تعداد ۲۲۰۰ نسخه

شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی ۹۹۳ به تاریخ ۴۹/۱۰/۱

فهرست

بخش اول

بخش دوم

بخش سوم

فهرست کتبی که در نوشتن این کتاب از آنها استفاده شده است

1— R. STENDER & K. K Mc KELVEY, the Modern Slide Rule, Cleaver-Hume Press LTD, London, 1960.
2— DENNERT & PAPE, Instructions for use of A.S. Slide Rule, Hamburg, Germany, 1953.
3— А. Ю. Ланов, Счётная Линейка, Москва, 1958.
4— WALTHER, Slide Rule instructions, F.C. Firm, by Nürnberg, 1958.

مقدمه

ازدیاد روزافزون ماشینهای خودکار و احتیاج به سرعت عمل در امور فنی لزوم فراگرفتن فن استفاده از خط کشهای محاسبه را بخوبی محسوس می‌سازد. عدم توانائی استفاده از آنها امروزه نقص بزرگی برای کارگرها و متخصصین فنی بشمار می‌آید. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه می‌کنیم: فرض کنیم که می‌خواهیم وزن یک میلهٔ چدنی به قطر ۱۳۰^{mm} و طول ۲۵۰^{mm} را بدست آوریم. اگر نتوانیم از خط‌کش محاسبه استفاده کنیم مسئله را باید با مداد و کاغذ بترتیب زیر حل کنیم:

مساحت قاعده $= ۳,۱۴ \times \frac{۱۳۰^۲}{۴} = ۳,۱۴ + \frac{۱۶۹۰۰}{۴} = ۱۳۲۶۶,۵$

حجم آن $= ۱۳۲۶۶'۵ \times ۲۵۰ = ۳۳۱۶۶۲۵^{mm^۳} = ۳,۳۱$ دسیمتر مکعب

و اگر وزن مخصوص چدن ۷,۲ فرض شود وزن تمام استوانه تقریباً خواهد شد:

$$۳,۳۱ \times ۷,۲ = ۲۳,۸^{kg}$$

برای کسی که کاملاً مسلط بر کارهای فکری باشد این عملیات یک دقیقه و نیم یعنی نود ثانیه طول خواهد کشید. در حالی که اگر انسان بر خط کش محاسبه مسلط باشد این عملیات را فقط در مدت ۱۰ ثانیه انجام خواهد داد و جواب تقریبی او $۲۳,۷^{kg}$ خواهد شد.

خط کش محاسبه جوابها را حداکثر تا ۳ پیکر صحیح به ما می‌دهد. ما هم در عمل به بیش از این احتیاجی نداریم. از آنجائی‌که کار کردن با خط کش خسته کننده نیست و مراجعهٔ به آن چندان اشکالی ندارد اگر سرعت عمل را نیز به این نکات اضافه کنیم رجحان استعمال آن بخوبی آشکار می‌شود.

توسعهٔ استعمال خط کش محاسبه تا حدی بستگی به سطح صنعتی یک کشور دارد. زیرا جائی که خط کش محاسبه رواج پیدا کند محاسبات «تقریبی» و «احتمالی» از بین می‌رود. علاوه برمهندسین، تکنیسینها و کارگرهای متخصص، کارگرهای عادی کارخانجات و مؤسسات صنعتی (لااقل برای محاسبات ساده) نیز باید بتوانند کاملاً ازآن استفاده کنند.

برای آموختن طرز کار خط کش گذشته از آنکه باید ساختمان و اصول عملیات و قضایای محاسبه با آن را فراگرفت باید عملاً نیز طرز محاسبه با آن را آموخت. کلیهٔ مشخصات یک حسابگر خوب (سرعت، سهولت استعمال، دقت، اطمینان درکار) را فقط با تمرین مداوم با آن می‌توان بدست آورد.

این جزوه طوری نوشته شده است که فارغ‌التحصیلان مدارس صنعتی و دانش‌آموزان سالهای پنجم و ششم متوسطه نیز بخوبی می‌توانند ازآن استفاده کنند. در اینجا «تئوری» و «مسئله» از یکدیگر جدا نشده بلکه به صورت کلی و دنبال هم ذکر شده است. و لذا هنگام مطالعه باید در عین حال کلیهٔ تمریناتی را که درج شده (بالاخص در همان جائی که ذکر شده است) با دقت انجام داد و الا مطالب بعدی بخوبی فهمیده نخواهد شد (رعایت این نکته بخصوص برای بخش اول ضروری است).

برای درک عمیق قضایا مطالعه بخش اول کتاب کافی است. بخش دوم برای شناسائی بیشتر و مشروح‌تر احکام باید مطالعه شود. برای سرعت مطالعه ممکن است از قرائت عباراتی که با حروف ریز نوشته شده است خودداری کرد. زیرا این قسمتها توضیحاتی است که برای علاقمندان به ریاضیات افزوده گردیده .

جوابهای مسائلی که جنبهٔ محاسبه دارند تا حدودی درآخر کتاب داده شده است. از این «جوابها» نباید قبلاً استفاده شود!

۱

اصول خط کش محاسبه

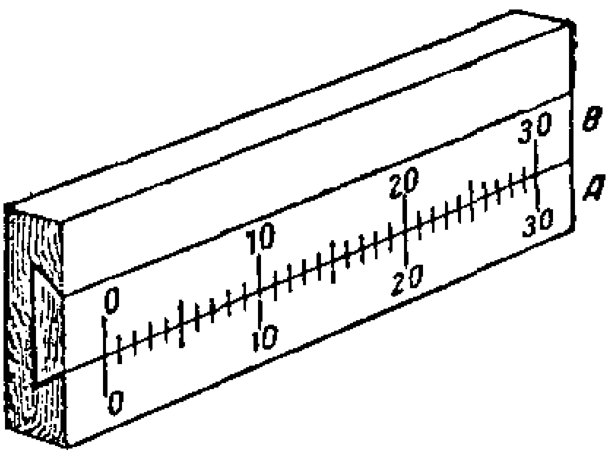
۱ـ جمع مکانیکی

منظور از «مکانیکی ساختن عملیات حسابی» تعبیهٔ دستگاهی است که بتواند جمع و ضرب و . . . اعداد را با حداقل فعالیت مغزی انجام و یا به‌عبارت دیگر اعمال حسابی را بطور هندسی نمایش دهد.

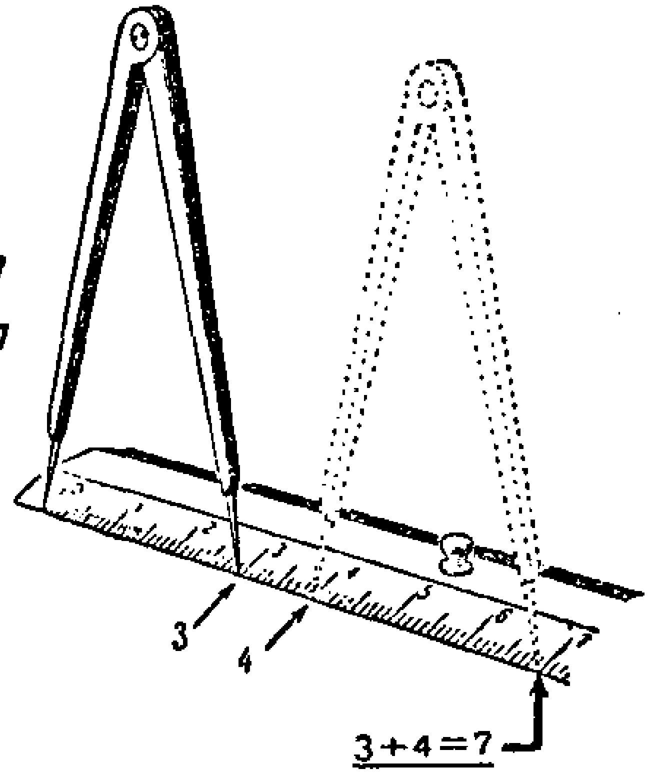
جمع را با هرنوع مقیاسی می‌توانیم انجام دهیم. مثلاً برای جمع اعداد ۳ و ۴ فرجهٔ پرگار را (به‌کمک مقیاسی) به اندازهٔ ۳ سانتیمتر باز می‌کنیم ویک نیش پرگار را روی رقم ۴ ازمقیاس قرار می‌دهیم تا نیش دیگر آن روی مجموع ۷ = ۴ + ۳ قرارگیرد (ش ۲).

اسبابی که برای نمایش جمع بکار می‌رود مدرجی است مانند A (ش۱) که در کشوی آن مدرج دیگری مانند B حرکت می‌کند. A و B هردو یکسان و با تقسیمات متساوی مدرج شده‌اند یعنی واحد مقیاس برای هردو یکی انتخاب شده است. استفاده از این اسباب بسیار ساده است. مثلاً برای جمع دو عدد ۸ و ۱۷ کافی است خط کش متحرک B را بنحوی حرکت دهیم که مبدأ (یعنی رقم‌صفر) آن مقابل رقم ۸ از خط کش ثابت A قرار گیرد. در این حال مجموع دو عدد ۸ و ۱۷ عددی است که روی خط کش A مقابل رقم ۱۷ از خط کش B (۲۵) دیده می‌شود (ش ۳).

در اینجا خط کش متحرک B و مدرجهای آن حکم همان پرگار را دارد.



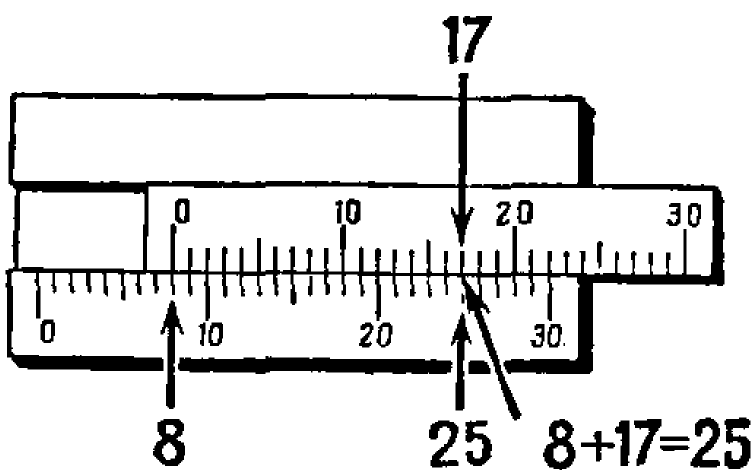
ش ۱



ش ۲

نمونهٔ چنین خط کشی را از دو نوار مقوائی هم می‌توانیم درست کنیم.

بسهولت دیده می‌شود که می‌توان از چنین خط کشی برای تعیین تفاضل دو عدد نیز استفاده کرد. چگونه؟

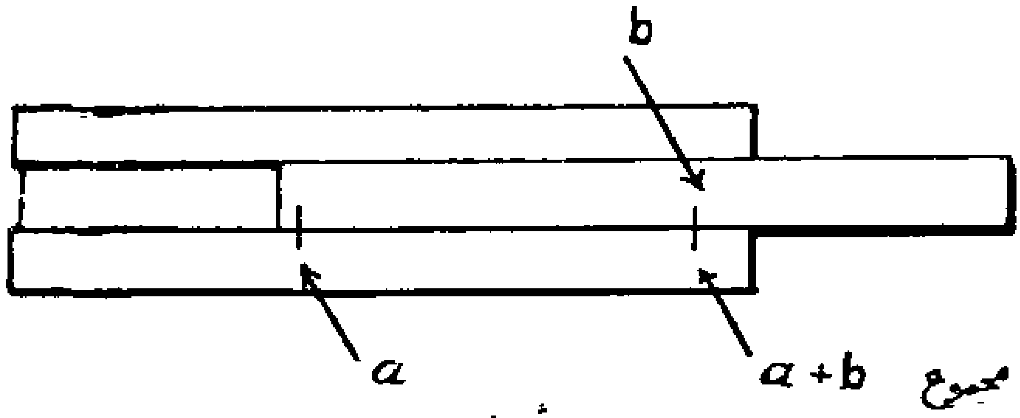


ش ۳

۲ ـ ضرب مکانیکی

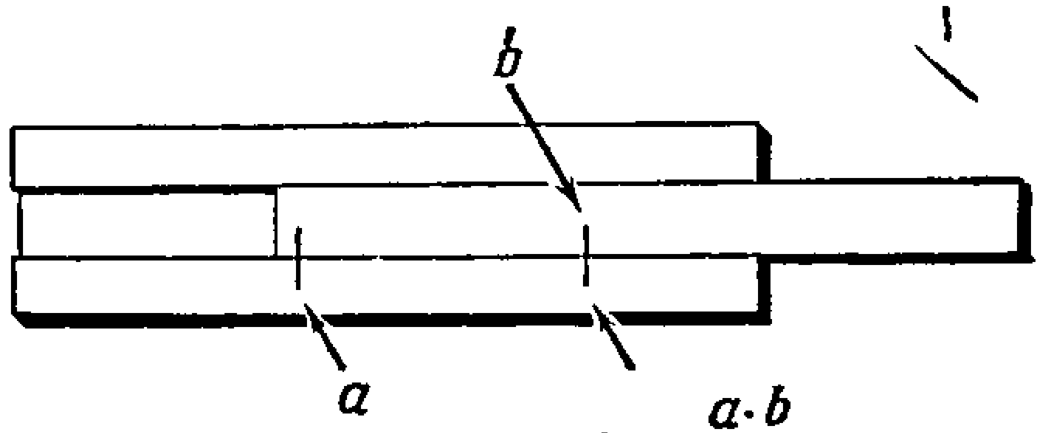
خط کشهای مذکور در فوق عملاً بهیچوجه ساخته نمی‌شوند. زیرا برای

جمع و تفریق دو عدد وسایل ساده‌تری در دست است. ولـی اصول ساختمانـی آنها نمونهٔ کاملی برای ساختن اسبابهائی است که بتوانیم توسط آنها عمل‌ضرب را نیز انجام دهیم. همانطوری که در بالا دیدیم برای جمع دو عدد a و b توسط خط کش، بـا یک حرکت خط کش متـحرک جـواب را بسهولت تـوانستیم بخوانیم (ش ۴).



ش ٤

بدیهی است اگر بتوانیم در مقابل عدد b از خط کش متحرک بـه جـای مجموع $a + b$ حاصلضرب $a\,b$ را روی خط کش ثابت پیدا کنیم حاصلـضرب را بطور مکانیکی بدست آورده‌ایم (ش ۵).

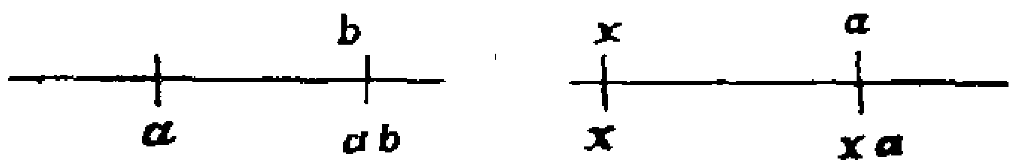


ش ٥

چنین اسبابی است که می‌تواند مشکل ما را حل کند. تنـها اشـکال کار انتخاب مقیاس است. ببینیم که چگونه مقیاسی بـرای عمل ضرب می‌تواند مفـید واقع شود؟

فرض می‌کنیم دو مقیاس داشته باشیم که همانگونه که مقیاسهای معمولی حاصل جمع را به‌ما می‌داد حاصلضرب را به ما بدهند. یعنی اگر مبدأ مقیاس اول را روی عدد a از مقیاس دوم گذاردیم حاصلضرب $a\,b$ را روی مقیاس دوم مقابل عدد b از مقیاس اول بتوانیم بخوانیم. قبل از همه ببینیم که مبدأهای این دومقیاس با چه اعدادی باید شروع شوند (توجه داریم که مبدأهای مقیاس جمع و تفریق با صفر شروع می‌شدند)؟

فرض می‌کنیم این عدد x باشد. در ابتدای عمل مقیاسها را طوری قرار می‌دهیم که مبدأهاشان بر هم منطبق باشد (اصطلاحاً در این حالت خط کش را «بسته» می‌گویند). لذا طبق خاصیت اساسی مقیاس باید عدد a از مقیاس فوقانی مقابل عدد ax از مقیاس تحتانی قرار گیرد (ش ۶ و ۷). ولی چون هردو مقیاس



ش ٦   ش ۷

یکسان هستند و رقومهای مبدأشان مقابل یکدیگر قرار گرفته یعنی خط کش بسته است پس باید $a\,x = a$ یعنی $x = 1$ باشد. پس معلوم می‌شود که مقیاسهای حاصلضرب باید با عدد ۱ شروع شوند[1].

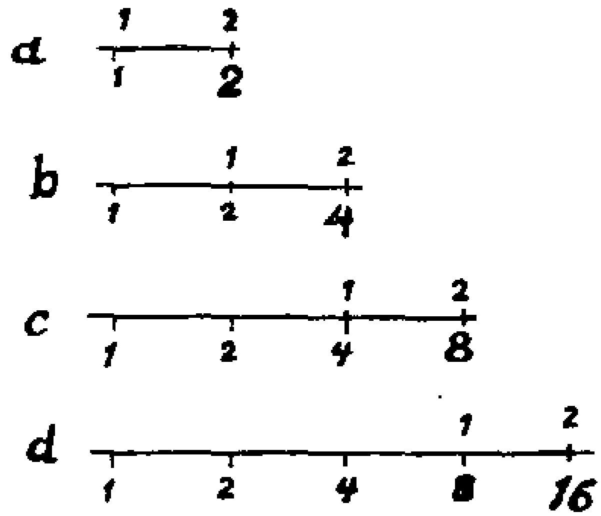
۳ـ یکنواخت نبودن تقسیمات مقیاسهای حاصلضرب

اکنون می‌خواهیم ساختمان مقیاسهای حاصلضرب یا به اصطلاح «مقیاسهای لگاریتمی» را بهتر بررسی کنیم.

برای این منظور به مدرج کردن آن می‌پردازیم. اول رقوم ۱ را در مبدأ آن ثبت و پس از انتخاب قطعهٔ از ۱ تا ۲ (مثلاً بطول ۱ سانتیمتر) رقوم ۲ را یادداشت می‌کنیم (ش ۸ . a).

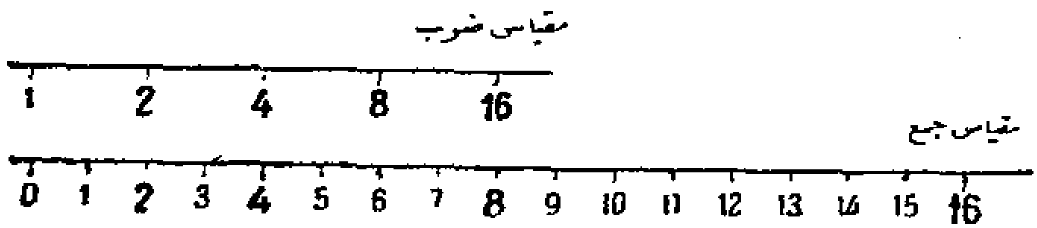
۱. این کیفیت نتیجهٔ مستقیم این مطلب است که عدد ۱ در عمل ضرب حکم عدد ۰ را در عمل جمع دارد. یعنی از ضرب عددی در ۱ و جمع آن با صفر تغییری در آن عدد حاصل نمی‌شود.

حال اگر همین طول را از رقوم ۲ به بعد روی مقیاس جدا کنیم باید برای رقوم منتهای آن حاصلضرب ۴ = ۲ × ۲ را داشته باشیم (ش ۸ ، b).



ش ۸

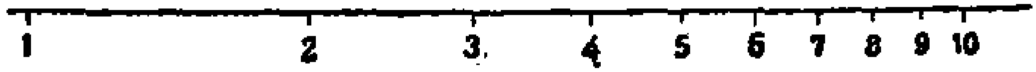
اگر به همین منوال و با همین استدلال عمل مدرج کردن مقیاس را ادامه دهیم رقومهای ۸ و ۱۶ و ۳۲ و . . . را روی مقیاس مشخص خواهیم ساخت (ش ۸ ، c و d). حال مقیاس بدست آمده را با مقیاسی که برای عمل جمع بکار می بردیم مقایسه می‌کنیم. اولاً می بینیم که طول این مقیاس از طول مقیاس جمع بمراتب کوتاهتر است (شکل ۹).



ش ۹

ثانیاً این مقیاس فشرده و در عین حال تقسیمات آن متساوی‌الفاصله نیست. اولین قسمت آن اندکی طویلتر از اولین قسمت مقیاس جمع است ولی در عوض هرقدر به انتهای آن نزدیکتر می‌شویم رفته رفته فواصل کوتاهتر می‌شوند بطوری که مثلاً فاصلهٔ ۸ تا ۱۶ در آن ۴ برابر کوچکتر است از فاصلهٔ بین ۸ تا ۱۶ درمقیاس جمع. لذا : تقسیمات مقیاس حاصلضرب متساوی‌الفاصله نیست.

در مقیاسی که اکنون مدرج کردیم فقط ارقام 2^n را نقل نمودیم. ولی اگر رقومهای متناظر تمام اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ را روی آن نقل می‌کردیم شکلی

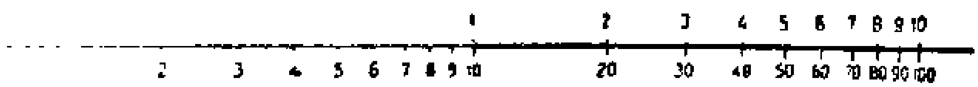


ش ۱۰

مشابــه شکـل ۱۰ بدست می‌آوردیم. در این شکل عدم تساوی فواصـل بخوبی مشهود است.[1]

۴ـ دوره‌ای بودن مقیاس حاصلضرب

اگر مقیاس حاصلضرب را از نقطه‌ای به رقوم ۱۰ به سمت راست و یا از نقطه‌ای به رقوم۱ به سمت چپ ادامه دهیم به خاصیت مهم دیگری بر می‌خوریم. اول مقیاس حاصلضرب دیگری می‌سازیم (همانگونه که در شکل ۱۰ نموده شده است) و آن را طوری پهلوی مقیاس اول قرار می‌دهیم که رقوم ۱ از آن مــقابل رقوم ۱۰ از مقیاس اول قرار گیرد (شکل ۱۱).



ش ۱۱

اکنون امتداد مقیاس اول را از نقطه‌ای به‌رقــوم ۱۰ به سمت راست مدرج

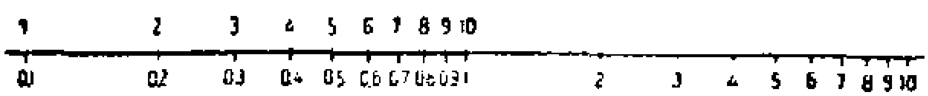
---

۱. خوانندگانی که با اصول تئوری لگاریتمها آشنائی دارند چگــونگی ساختمان مقیاس حاصلضرب را بسهولت درك می‌کنند. یکــی از خــواص اساسی لــگاریتمها رابطهٔ $\log (a \,.\, b) = \log a + \log b$ است یعــنی لــگاریتم حاصلضرب دو عدد مساوی مجموع لگاریتمهای آن دو عدد است. لــذا اگر عدد ۲ را رقوم انتهای پاره خطی به طـول $m \log ۲$ (در اینــجا m واحد مقــیاس و مساوی ۱۰۰^{mm} انتخاب شده است) اختیار کنیم رقوم ۳ در انتهای پــاره خطی به طول $m \log ۳$ و رقوم ۴ در انتهای پاره خطی به طول $m \log ۴$ و . . . قرار خواهد گرفت. لذا هنگام جمع دو پاره‌خط مثلاً پاره خـط از ۱ تا ۲ (بــه طول $m \log ۲$) و پاره خط از ۱ تا ۳ (به‌طول $m \log ۳$) طولـی پیدا می‌کنـیم که مساوی، $m \log ۲ + m \log ۳ = m\,(\log ۲ + \log ۳) = m \log ۶$ است. یعنی پاره خطی که در انتهای‌آن رقوم ۶ قرار دارد معرف حاصلضرب ۲×۳ می‌باشد.

درشکل۱۰مقیاس حاصلضرب به‌ازای $m = ۸۰^{mm}$ نشان داده شده است. چون داریم $\log ۱۰ = ۱$ لذا طول تمام قطعه خط از ۱ تــا ۱۰ مساوی ۸۰^{mm} خواهد بــود رقوم ۲ بــه فاصلهٔ $۸۰ \log ۲ = ۲۴/۱^{mm}$ و رقــوم ۳ بــه فاصلهٔ $۸۰ \log ۳ = ۳۸/۲^{mm}$ و . . . از مبدأ خط کش اختیار شده‌اند. این مطلب را از روی مقیاس می‌توان امتحان کـرد. رقوم مبدأ مقیاس ۱ می‌باشد کــه در آن $\log ۱ = ۰$ است.

می‌کنیم: طبق خاصیت اساسی مقیاس حاصلضرب در مقابل رقوم ۲ از مقیاس دوم رقوم ۲۰ = ۱۰ × ۲ و در مقابل رقوم ۳ رقوم ۳۰ = ۱۰ × ۳ و . . . و در مقابل رقوم ۱۰ رقوم ۱۰۰ = ۱۰ × ۱۰ را که مقابل رقوم انتهائی مقیاس دوم (یعنی رقوم ۱۰) است روی مقیاس اول ثبت می‌کنیم. بدین ترتیب امتداد مقیاس اول تا رقوم ۱۰۰ برای ما بدست می آید. اگر مبدأ مقیاس دوم را مقابل رقوم ۱۰۰ از منتهای مقیاس جدید بگذاریم می‌توانیم مثل حالت قبل مقیاس خود را تا ۱۰۰۰ (یعنی ۱۰ × ۱۰۰) و ... امتداد دهیم. می‌توانیم عین همین عمل را از نقطه‌ای بـه رقوم ۱ از مقیاس اول بـه سمت چپ ادامه دهیم. منتهای مقیاس دوم را پهلوی مبدأ مقیاس اول می‌گذاریم. در این حال رقوم ۱۰ از مقیاس دوم بر رقوم ۱ از مقیاس اول منطبق می‌شود. حال ببینیم که چه عددی باید در مبنای مقیاس دوم قرار گیرد؟ فرض می‌کنیم این عدد x باشد. طبق خاصیت اساسی مقیاس در مقابل رقوم ۱۰ از مقیاس دوم باید عدد $10x$ روی مقیاس اول دیده شود. ولی خود ما مقیاس دوم را طوری قراردادیم که رقوم ۱۰ از آن مقابل رقوم ۱ از مقیاس اول قرارگرفت. لذا داریم: $10x = 1$ یا $x = 0{,}1$.

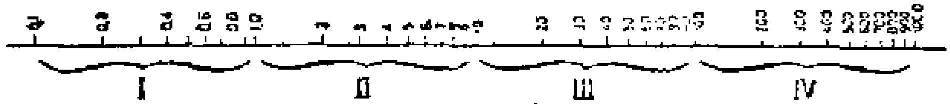
حالا دیگر به‌آسانی می‌توانیم تمام اعدادی را که باید روی مقیاس اول در مقابل اعداد ۲ و ۳ و . . . از مقیاس دوم واقع شوند پیدا کنیم. بدیهی است در مقابل عدد ۲ عدد ۰٫۲ (یعنی ۰٫۱ × ۲) و در مقابل عدد ۳ عدد ۰٫۳ و . . . و در مقابل عدد ۱۰ عدد ۱٫۰ را باید بنویسیم (شکل ۱۲). بدین‌ترتیب مقیاس را تا ۰٫۱ هم ادامه داده‌ایم. به همین نحو می‌توانیم آن را تا ۰٫۰۱ و بعد تا ۰٫۰۰۱ و . . . از سمت چپ نیز امتداد دهیم.



ش ۱۲

بدیهی است، در خط کشی که بدین‌ترتیب ساختیم طول قطعهٔ بین ۱ و ۲ مساوی طول قطعهٔ بین ۱۰ تا ۲۰ یا بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ یا بین ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ یا بین ۰٫۱ تا ۰٫۲ و . . . و همچنین طول بین قطعهٔ ۱ تا ۳ مساوی طول قطعهٔ بین ۱۰ تا ۳۰ یا بین ۱۰۰ تا ۳۰۰ یا بین ۰٫۱ تا ۰٫۳ و غیره است. یعنی خلاصه در سمت راست عدد ۱ تمام فواصل بین ۱۰ تا ۱۰۰ و ۱۰۰ تا ۱۰۰۰

و غیره، و در سمت چپ ۱ تمام فواصل بین ۰٫۱ تا ۱ و ۰٫۰۱ تا ۰٫۱ وغیره عیناً نظیر فاصلهٔ بین ۱ تا ۱۰ تکرار می‌شوند. فقط اعدادی که در مقابل تقسیمات نوشته می‌شوند ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۰٫۱ ... برابر بیشتر یا کمتر از اعدادی هستند که در مقابل تقسیمات اصلی نوشته شده‌اند (شکل ۱۳).



ش ۱۳

این خاصیت دوره‌ای بودن مدرج حاصلضرب بسیار اهمیت دارد. زیرا به جای اینکه طول مدرج را بینهایت بگیریم می‌توانیم فقط یک قسمت آن، مثلاً قسمت اساسی از ۱ تا ۱۰ را انتخاب کنیم. لذا برای تعیین حاصلضرب ۲۰ × ۴۰ اصولاً قسمتهای از ۱۰ تا ۱۰۰ و از ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ (چون حاصلضرب در فاصلهٔ اخیر قراردارد) لازم نیست. کافی است همان روشی را که برای تعیین حاصلضرب ۲ × ۴ بکار می‌بردیم در اینجا نیز بکار بریم به‌شرطی که در حاصلضرب صفرهای مضروب و مضروب فیه را رعایت کنیم. یعنی خلاصه همان قسمت از ۱ تا ۱۰ برای تعیین حاصلضرب جمیع اعداد در یکدیگر کافی است. لذا باید به خاطر بسپاریم که هر عدد در روی مدرج معرف جمیع اعدادی است که از ضرب آن در توانهای مختلف ۱۰ بدست می‌آید[۱].

۵ـ امثلهٔ حاصلضرب

مثال ۱ـ حاصلضرب ۲۰ × ۳۰ را تعیین کنید.

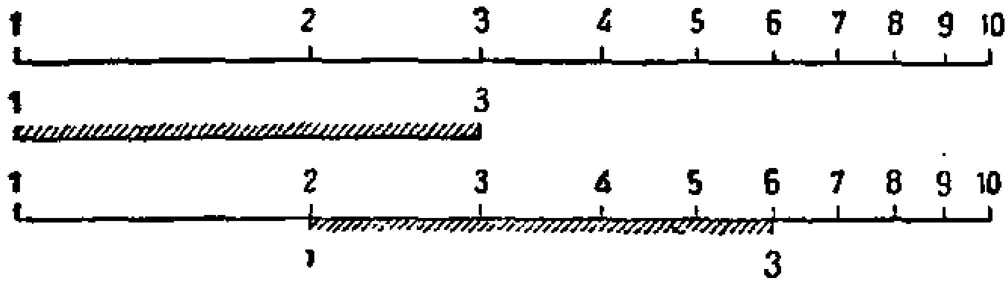
در شکل ۱۴ قطعه‌ای از مدرج حاصلضرب نشان داده شده است. در اینجا رقم ۲ معرف ۲۰ و رقم ۳ معرف ۳۰ می‌باشد. همانطور که در بالا ذکر شد حاصلضرب، عدد ۶ را که همان ۶۰۰ است به ما می‌دهد. زیرا هر یک ازعوامل

---

۱. آنهائی که با تئوری لگاریتمها آشنائی دارند علت دوره‌ای بودن مدرج حاصلضرب را بخوبی می‌دانند. زیرا داریم:

log۲۰۰=log۲+۲ و log۲۰=log۲+۱ و log۰٫۲=log۲−۱ و ...

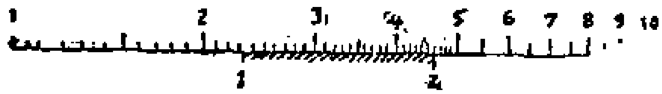
به عبارت دیگر مانتیس تمام این لگاریتمها یکی و فقط مفسر آنهاست که تفاوت دارد.



ش ۱۴

ضرب دارای یک صفر و در نتیجه حاصلضرب دارای دوصفر است.

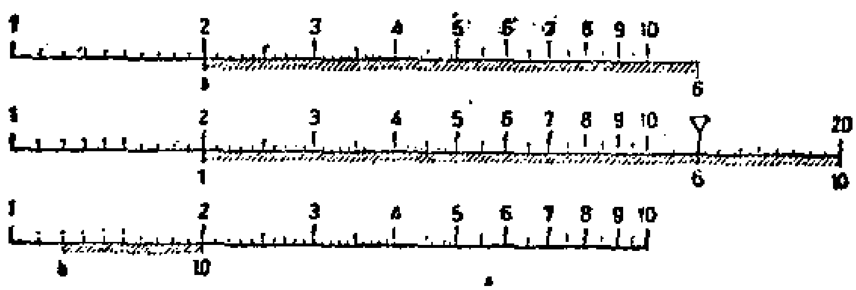
مثال ۲ــ حاصلضرب ۲۰ × ۲٫۳ را تعیین کنید.



ش ۱۵

برای انجام این ضرب به مقیاسی با تقسیمات ریزتر احتیاج داریم. در (شکل ۱۵) هر یک از ۵ فاصلهٔ اولیه به تقسیمات ریزتری که ارقام مراتب بعد را می‌دهند تقسیم شده است. با داشتن این تقسیمات می‌توانیم روی مقیاس جای عدد ۲٫۳ (که با جای اعداد ۲۳۰ و ۲۳ و ۰٫۰۰۲۳ و غیره یکی است) را به‌طریقهٔ معمولی بدست آوریم و اولین پیکر سمت چپ حاصلضرب عدد ۴ و پیکر بعد از آن ۶ می‌باشد. پس حاصلضرب ۴۶ است زیرا که یکی از عوامل یک صفر در سمت راست و عامل دیگر یک پیکر بعد از ممیز دارد.

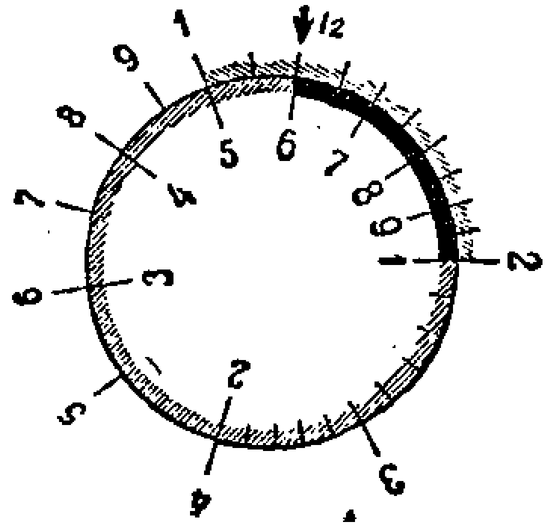
مثال ۳ــ حاصلضرب ۶۰ × ۲۰ را پیدا کنید.



ش ۱۶

اگر بخواهیم حاصلضرب را طبق طریقهٔ مذکور در فوق پیدا کنیم مقدور نیست زیرا که حاصلضرب درخارج از حدود مدرج بدست می‌آید (شکل ۱۶). برای اینکه ببینیم حاصلضرب را در این حال چگونه بدست می‌آوریم فرض می‌کنیم که قطعهٔ مدرج از ۱ تا ۱۰ را روی دایره‌ای نقل کرده باشیم (می‌توانیم مدرج خود را روی کاغذی رسم کنیم و در عالم خیال دو سر آن را مثل حلقه بهم بچسبانیم). و باز فرض می‌کنیم که مدرج دوم نیز روی دایرهٔ دیگری که در داخل دایرهٔ اول قرار دارد نقل شده

باشد (شکل ۱۷).

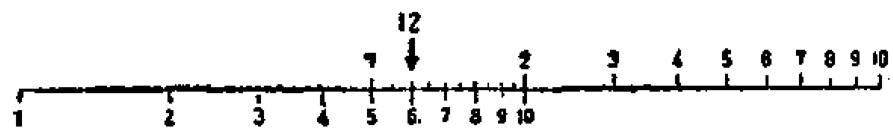


ش ۱۷

با چرخـانیدن یک دایره نسبت به دیگری، همانـطوری که در مـدرجهـای مستقیم‌الخط خط‌کشی را نسبت به دیگری حرکت می‌دادیم می‌توانیم هر حاصلضربی را بدست آوریـم. در اینجا حـاصلضرب ۶۰×۲۰ را به کمک این دستگاه بدست می‌آوریم. امتیاز دایـره‌ای بودن مـدرج، نسبت بـه مستقیم‌الخط بودن این است که مدرج دایـره‌ای انتها ندارد و وضعی که در شکل ۱۶ نشان داده شده است پیش نمی‌آید. با قراردادن رقوم ۱ از دایرهٔ داخلی در مقابل رقوم ۲ از دایرهٔ خارجی، جواب را روی دایرهٔ خارجی مقابل رقـوم ۶ از دایرهٔ داخلی بدست می‌آوریم. این جواب ۱۲۰۰ است زیـرا که پیکر اول سمت چپ آن ۱ و پیکر دومش ۲ می‌باشد و دو صفر هـم به عـلت وجود یک صفر در انتهای هریک از عوامل ضرب به حاصلضرب افزوده می‌شود.

بطوری که ملاحظه شد روی دایره به‌آسانی جواب را بدست آوردیم. این عمل را با مقیاسهای مستقیم‌الخط نیز می‌توانیم انجام دهیم. زیرا عـدد ۱۲ روی مقیاس مستقیم‌الخط نیز موجود است. فقط باید ببینیم که چگـونه می‌تـوانیم به این نتیجه برسیم؟

هنگام ضرب به کمک دایره مبدأ دایرهٔ داخلی را مقابل رقـوم ۲ از دایرهٔ خارجی قرار دادیم و جواب را مقابل رقوم ۶ از دایرهٔ داخلی روی دایرهٔخارجی خواندیم. ولی می‌توانیم این عمل را نوع دیگر توجیه کنیم و بگوئیم که منتهای (زیرا در دایره مبدأ و منتها بر هم منطبقند) دایـرهٔ داخلی را مقابل رقـوم ۲ از دایرهٔ خارجی قرار دادیم. تنها همین نکته بود که ما را به جواب رسانید. لـذا در مقیاس مستقیم‌الخط نیز همین روش را بکار می‌بریم یعنی منتهای مقیـاس اول را مقابل رقوم ۲ از مقیاس دوم می‌گذاریم و جواب را روی مقیاس دوم مقابل رقوم



ش ۱۸

۶ از مقیاس اول می‌خوانیم (شکل ۱۸).

این طریقهٔ تعیین حاصلضرب عیناً معادل همان ضربی است که قبلاً به آن اشاره کردیم و اغلب مورد احتیاج خواهد بود.

تمرین ۱- ثابت کنید که هر ضربی را می‌توان به یکی از دو طریقهٔ مذکور در فوق انجام داد.

از آنچه تاکنون گفتیم نتیجه می‌گیریم که با داشتن تقسیمات جزئی یك قطعه از مقیاس لگاریتمی، همیشه می‌توانیم هر حاصلضربی را بطور مکانیکی انجام دهیم.

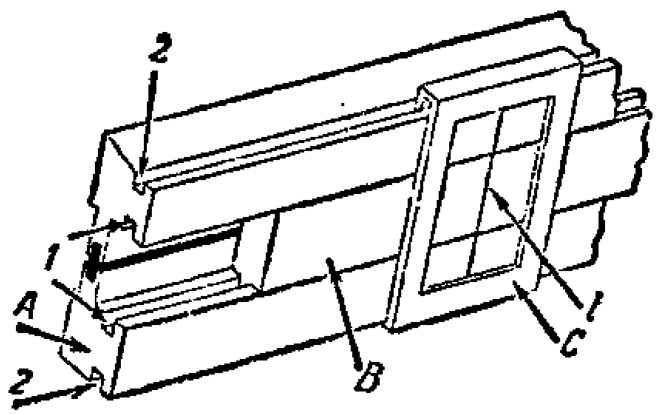
۶- ساختمان خط کش محاسبه

خط کش محاسبه که جزئی از آن (بطور ناقص) در (شکل۱۹) نشان داده شده روی هم رفته از ۳ قسمت تشکیل شده است:

A ـ خط کش ثابت.

B ـ خط کش متحرک.

C ـ شاخص یا عدد یاب (قابی فلزی است با شیشه‌ای که در وسط آن خط L موسوم به خط موئی یا خط رؤیت عمود بر امتداد خط کش رسم شده است).



ش ۱۹

روی شاخص معمولاً ۳ خط موئی رسم شده است ولی ما فعلاً از خط وسطی صحبت می‌کنیم و بحث از دو خط دیگر را به‌بعد موکول می‌نمائیم.
خط کش متحرک در شیارهای 1 از خط کش ثابت حرکت می‌کند و می‌تواند بیرون بیاید و بطور سروته یا وارونه درون شیارهای خط کش ثابت قرارداده شود. شاخص درون شیارهای ۲ از خط کش ثابت حرکت می‌کند و قسمت‌اساسی خط کش نیست بلکه صرفاً برای تسهیل قرائت بکار می‌رود.

۷- دستور مراقبت از خط‌کش محاسبه

خط کش محاسبه اصولاً ابزاری است بسیار ظریف و دقیق. لذا قبل از

فرا گرفتن طرز استفاده ازآن، باید نحوهٔ مواظبت ازآن را بخاطر سپرد:

۱ـ خط کش را نباید در جای گرم یا مرطوب نگه داشت. در مجاورت بخاری یا هوای گرم ویا حرارت خورشید خشک وکج می‌شود و از حیز انتفاع می‌افتد. در جای مرطوب هم باد می‌کند ومانع سهولت حرکت خط کش متحرک می‌شود (با آنکه اخیراً بعضی از خط کشها از مواد مخصوصی که ظاهراً آب در آنها اثری ندارد، ساخته شده‌اند معهذا باید حتی‌المقدور از نزدیک ساختن آنها با آب احتراز کرد).

۲ـ وقتی با خط کش کار نمی‌کنید نباید آن را بدون جلد بگذارید. اگر آن را بدون جلد روی میز یا درون کیف بگذارید بر اثر نوک قلم، پرگار یا قلمتراش خراش بر می‌دارد و بعد از اندک مدتی این خراشها کثافت می‌گیرند و مانع کارکردن می‌شوند. به همین جهت نباید از خط کش محاسبه به عنوان مقیاس برای رسم و غیره استفاده نمود.

۳ـ نباید گذاشت خط کش از روی میز یا از دست بزمین بیفتد زیرا در مقابل ضربت بسیار حساس است.

۴ـ اگر مدرجهای خط کش کثیف شد باید آن را با الکل شراب (ودکا) شست. بنزین، الکل غیر خالص، الکل چوب و آب مضر هستند. بنزین رنگ را پاک می‌کند. الکل غیر خالص والکل چوب هم سلولوئید را خراب می‌کند وآب نیز باعث تورم می‌شود. اگر کثافت جزئی باشد می‌توان آن را با مداد پاک کن پاک کرد.

(بعضی خط کشها مثل آریستو و فابرکاسل را با مادهٔ خاصی به نام Deparol باید تمیز نمود. کافی است پارچه‌ای را به آن آغشته کنیم و روی خط کش بکشیم و با دستمال خشک آن را پاک کنیم).

۵ ـ اگر شاخص بسختی حرکت کند باید آن را بیرون آورد و پهلوی آن را پارافین زد. بهیچ‌وجه نباید از چاقو یا شیء مشابه آن برای روان ساختن شاخص استفاده نمود.

۸ـ مدرجهای خط کش

کلیهٔ اشتباهاتی که هنگام کار با خط کش محاسبه رخ می‌دهد ناشی از عدم قرائت صحیح و عدم تثبیت صحیح اعداد روی مدرجهای آن است. به همین دلیل

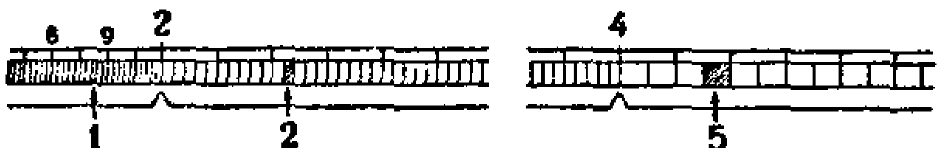
شناسائی مدرجهای خط کش محاسبه نخستین وظیفهٔ یک حسابگر خوب است. وقتی مدرجها را دقیقاً بخاطر سپردید ۵۰٪ بر خط کش مسلط شده‌اید.

مدرجهای خط‌کش: ساده‌ترین خط کشهای محاسبه اقلاً از چهار مدرج A و B و C و D تشکیل شده است که A و B عین یکدیگر و C و D نیز عین یکدیگر مدرج شده‌اند. ابتدا C و D را که مقیاسهای اصلی نامیده می‌شوند مطالعه می‌کنیم. در این دو مقیاس واحد طول فاصلهٔ بین دو عدد مبدأ و منتها یعنی فاصلهٔ بین ۱ و ۱۰ می‌باشد (معمولاً ۱۰ اینچ یا ۲۵ سانتیمتر). این واحد طول به ده قسمت تقسیم شده است (قسمتهای ۱ تا ۲ و ۲ تا ۳ و... و ۹ تا ۱۰) که آنها را تقسیمات اولیه و اعداد ۱ و ۲ و ۳ و... و ۹ را پیکرهای مرتبهٔ اول می‌نامیم (اولین پیکر سمت چپ هر عدد را پیکر مرتبهٔ اول و دومین پیکر از سمت چپ را پیکر مرتبهٔ دوم و سومین پیکر از سمت چپ را پیکر مرتبهٔ سوم و... می‌نامیم). لذا تمام اعدادی که با ۱ شروع می‌شوند (از سمت چپ) در فاصلهٔ ۱ تا ۲ و تمام اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند در فاصلهٔ ۲ تا ۳ و... و تمام اعدادی که با ۹ شروع می‌شوند در فاصلهٔ ۹ تا ۱۰ از تقسیمات اولیه قرائت و یا تثبیت می‌شوند. هر یک از این فواصل ما بین تقسیمات اولیه به نوبهٔ خود به ده فاصلهٔ کوچکتر به نام تقسیمات ثانوی تقسیم شده است که اگر آنها را هم با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و... و ۹ نشان دهیم این اعداد معرف پیکرهای مرتبهٔ دوم خواهند بود. در روی خط کش این تقسیمات توسط تیره‌هائی که قدری بلندتر از بقیه هستند نمایانده شده است. فواصل ما بین تقسیمات ثانوی مجدداً به تقسیمات مرحلهٔ سومی که پیکرهای مرتبهٔ سوم را مشخص می‌سازند تقسیم شده است. ولی طولهای این فواصل در تمام تقسیمات یکی نیست. علت این امر این است که فواصل ما بین تقسیمات ثانوی از چپ به راست بتدریج کوچکتر می‌شوند. بطوری که اگر طول فاصلهٔ اول (در ابتدای مقیاس) برابر 10^{mm} باشد طول آخرین فاصله فقط 1^{mm} می‌شود. لذا بدیهی است که تقسیم این فواصل بطور متشابه ممکن نیست و به همین جهت مثلاً اولین فاصلهٔ تقسیمات ثانوی را به ۱۰ قسمت و آخرین فاصلهٔ آن را به ۲ قسمت تقسیم کرده‌اند. روی همین اصل تقسیمات مرحلهٔ سوم روی خط کش سه نوع هستند. هر یک از تقسیمات ثانوی در فاصلهٔ ۱ تا ۲ به ۱۰ قسمت به نام تقسیمات نوع اول مرحلهٔ سوم و در فاصلهٔ ۲ تا ۴ به ۵ قسمت به نام تقسیمات نوع دوم مرحلهٔ سوم و بالاخره در فاصلهٔ ۴ تا ۱۰

به ۲ قسمت که تقسیمات نوع سوم مرحلهٔ سوم نامیده می‌شوند تقسیم شده است.

تقسیمات نوع اول از همه ساده‌ترند. زیرا که هریک از فواصل تقسیمات ثانوی را به ده جزء که هر جزء مربوط به یک واحد از مرتبهٔ سوم است تقسیم می‌کنند. تقسیمات نوع دوم هر یک از فواصل تقسیمات ثانوی را به ۵ جزء تقسیم می‌کنند که هر جزء دو واحد از پیکر مرتبهٔ سوم است (معادل ۲ برابر تقسیمات نوع اول). بالاخره هر یک از تقسیمات نوع سوم ۵ واحد از پیکر مرتبهٔ سوم است (معادل ۵ تقسیم از تقسیمات نوع اول).

برای تجسم این تقسیمات شکل ۲۰ را در نظر می‌گیریم. در این شکل بخوبی دیده می‌شود که هر یک از تقسیمات نوع سوم ۵ برابر و هر یک از تقسیمات نوع دوم دو برابر هر یک از تقسیمات نوع اول است (اگر یکنواخت بودند).



ش۲۰

درک «ارزش تقسیمات» یا به عبارت دیگر دانستن اینکه هر تقسیم معرف پیکرهای کدام مرتبه است اساس محاسبه با خط‌کش است. در بادی امر باید به‌تقسیمات نوع دوم (فاصلهٔ بین ۲ تا ۴) بیشتر توجه داشت. مبتدیان در این فواصل بیشتر دچار اشتباه می‌شوند زیرا به جای اینکه هر فاصلهٔ جزئی را دو واحد از پیکر مرتبهٔ سوم بگیرند یک واحد از مرتبهٔ سوم می‌گیرند.

تبصره ـ هریک از مقیاسهای A و B از دو قسمت که هر قسمت از ۱ تا ۱۰ مدرج شده تشکیل یافته است. تقسیمات جزء در هر یک از این دو قسمت در فواصل ۱ تا ۲ از نوع دوم و در فواصل ۲ تا ۵ از نوع سوم می‌باشد. در فاصلهٔ بین ۵ تا ۱۰ هر فاصله از تقسیمات اولیه فقط به ۱۰ قسمت به نام تقسیمات ثانوی تقسیم شده است و دیگر تقسیمات مرحلهٔ سوم در این فاصله وجود ندارد.

۹ـ قرائت و تثبیت اعداد روی خط کش

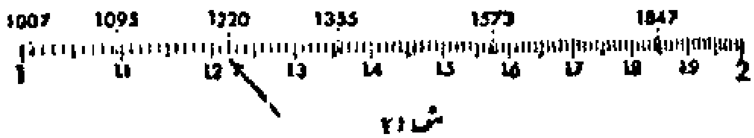
مسئلهٔ ۱ـ عددی مفروض است. جای آن را روی خط کش بیابید.

مسئلهٔ ۲ـ جائی در روی مقیاس مشخص شده است. چه عددی به آن

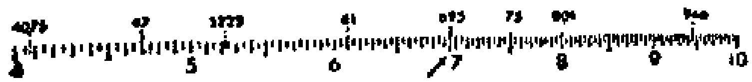
تعلق می‌گیرد؟

برای حل مسئلۀ اول عدد را روی مقیاس D قرار می‌دهیم. برای حل مسئلۀ دوم عدد را روی D می‌خوانیم.

با توجه به مطالب گذشته هنگام تثبیت یک عدد، از ممیز و صفرهای آخر آن صرفنظر می‌کنیم. مثلاً فرض می‌کنیم که بخواهیم جای عدد ۱۲۲۰ را مشخص کنیم. چون عدد با ۱ شروع می‌شود پس در فاصلۀ ۱ تا ۲ قراردارد. لذا پیکر مرتبۀ اول آن ۱ و پیکر مرتبۀ دوم آن ۲ و پیکر مرتبۀ سوم آن نیز ۲ می‌باشد (شکل ۲۱). به همین ترتیب جای اعداد ۶۹۵ و ۲۸۳ در شکل ۲۲ و a ۲۲ نشان داده شده است.



ش ۲۱



ش ۲۲

ش ۲۲ a

جای اعدادی را که در شکلهای ۲۱ و ۲۲ و a۲۲ نوشته شده است بدقت بخاطر بسپارید.

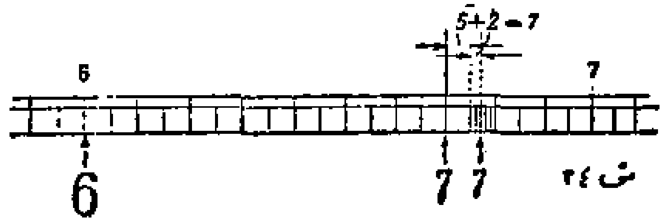
تمرین ۲- خط موئی شاخص را روی اعداد ۱,۳۶ و ۱۶,۴ و ۶,۵۴ و ۰,۲۷۶ و ۸۹۵ و ۴۲,۵ و ۳,۹۲ و ۱,۱۲ بگذارید.

تمرین ۳- آیا شکل ۲۳ اعداد ۲۰,۲ و ۳۲۰ را نشان می‌دهد یا نه؟

ش ۲۳

تمرین ۴- خط موئی شاخص را روی اعداد ۳,۶۴ و ۳,۶۶ و ۳,۶۵ و ۲,۳۵ و ۳,۴۷ و ۳,۲۹ و ۰,۰۲۳۳ و ۰,۳۰۱ و ۱,۴۵ قرار دهید (هنگام حل این تمرینات ملاحظه خواهید کرد که تقسیمات موجود در خط کش کافی نیست و بایستی وسط هر یک از تقسیمات جزء را هم نظراً تعیین کرد).

مثال ـ جای عدد ۶,۷۷ را پیدا کنید (شکل ۲۶).



ش ۲۶

در اینجا می‌بینیم که برای پیدا کردن پیکر مرتبهٔ سوم یعنی ۷ باید نظراً شاخص را طوری قرارداد که در $\frac{۲}{۵}$ فاصلهٔ تقسیم بعدی قرار گیرد. اینگونه تعیین نظری بسیار مورد احتیاج است و تمرین زیاد لازم دارد.

تمرین ۵- مستقیمی را به قطعات ۵ میلیمتری تقسیم کنید و بعداً نظراً $\frac{۲}{۵}$ قسمت اول و $\frac{۴}{۵}$ قسمت دوم و $\frac{۳}{۵}$ قسمت سوم و $\frac{۱}{۵}$ قسمت چهارم را مشخص سازید.

تمرین ۶- خط موئی شاخص را روی اعداد ۴,۷۶ و ۳۲۷ و ۵۶,۷ و ۰,۰۹۶۷ و ۷,۰۸ و ۸۹,۶ و ۶,۶۶ و ۱۴,۵۵ و ۱۶,۶۷ بگذارید.

تمرین ۷- اعداد ۶,۶۷ و ۶,۶۸ را پیدا کنید و سپس جای عدد ۶,۶۷۵ را بدست آورید. با توجه به‌این نکته جای اعداد ۵۳,۲۵ و ۷۹,۷۵ را تعیین نمایید.

مسئله: می‌خواهیم جای عدد ۶,۷۷۸۹ را پیدا کنیم.

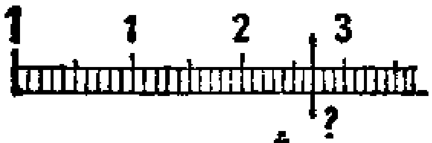
دیدیم که برای تعیین ۶,۷۷، ناگزیر شدیم رقم آخر آن را نظراً تعیین کنیم. ولی در عمل هیچکس نمی‌تواند نظراً $\frac{۲۸۹}{۵۰۰}$ یک پاره خط را اندازه بگیرد. به همین دلیل اگر ما به چنین عددی نیاز پیدا کردیم آن را مساوی ۶,۷۸ می‌گیریم و جای آن را بسهولت روی خط‌کش بدست می‌آوریم.

تکرار می‌کنیم که فقط اعداد ۳ پیکری و حداکثر ۴ پیکری را می‌توان با خط‌کش بدست آورد (اگر انسان مبتدی باشد اعدادی را که با ۱ شروع می‌شوند و اگر ورزیده باشد اعدادی را هم که با ۲ شروع می‌شوند می‌تواند با ۴ پیکر پیدا کند).

۱۰ـ خواندن اعداد روی مقیاس D.

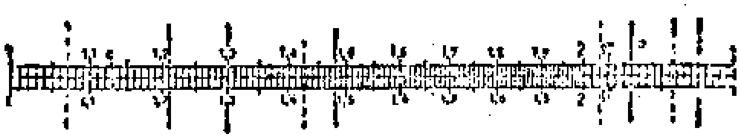
چه عددی روی شکل ۲۵ تعیین شده است؟

نزدیکترین عدد مرتبهٔ اول بـه آن عدد ۱ و نزدیکترین عدد مرتبهٔ دوم به آن ۲ و نزدیکترین عدد مـرتبهٔ سوم بـه آن ۷ مـی باشد. پس عدد مفروض یـا ۱۲۷ و یا ۰٫۰۱۲۷ و یا ۱٫۲۷ و . . . است. زیـرا وقتی کـه می‌خواستیم عددی را روی خطکشی تثبیت کنیم از ممیزها و صفرهای دست راست آن صرف نظـر می‌کردیم. حالا هم کـه آن را می‌خوانیم در باب ممیز و صفرهـای سمت راست آن اظهـار نظری نمی‌توانیم بکنیم. وقتی مـی‌گوئیم عددی را بخوانید منظور اینست که ارقام آن را به ترتیب توالی ذکر کنید. در باب ممیز بعداً صحبت خواهیم کرد.



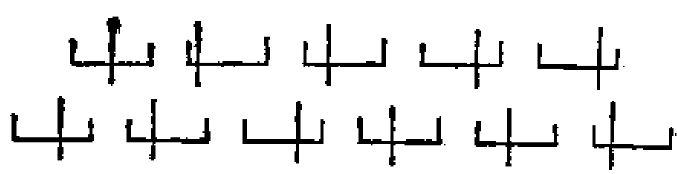
ش ۲۵

تمرین ۸ـ اعدادی را که روی شکل ۲۶ اولاً با رابطهای پر و ثانیاً بـا رابطهـای خـطچین نشان داده شده است بـخـوانید (بـدیهـی است هـنگـام خـوانـدن بعضی از آنها از تقسیمات نظری نیز باید استفاده کنید).



ش ۲۶

تمرین ۹ـ روی شکل ۲۷ نظراً بگویید که چند دهم هر یک از پاره‌خطهای زیـر بیـن مبدأ (سمت چپ) و رابطهـای عمـودی واقـع شده است. پس از اظـهار نـظـر با دقت آنها را انـدازه بگیرید تا صحت دید خود را تحقیق کنید.

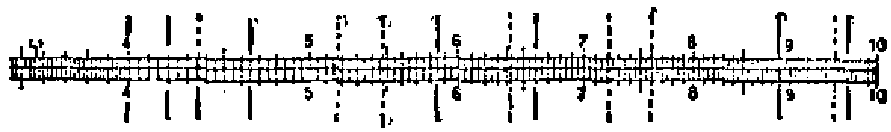


ش ۲۷

طول هـر پاره خط ۱۰ میلیمتر است.

تمرین ۱۰ـ اعدادی را که روی شکل ۲۸ اولاً با رابطهای پر و ثانیاً با رابطهای خطچین نشان داده شده است بخوانید (بدیهی است فقط خواندن ارقام آنها به ترتیب، مورد نظر است).

اگر بخواهیم عـددی را کاملاً بخوانیم باید «مرتبهٔ» آن را هم بـدانیم،



ش ۲۸

«مرتبهٔ» یک عدد به طریق زیر تعریف می‌شود:

اگر عدد بزرگتر از ۱ یا مساوی ۱ باشد «مرتبهٔ» آن تعداد پیکرهای قبل از ممیز آن است.

۲ـ اگر عدد کوچکتر از ۱ باشد «مرتبهٔ» آن تعداد صفرهایی است که بلافاصله بعد از ممیز می‌آید با علامت منفی. لذا مرتبهٔ اعداد بزرگتر از واحد و یا مساوی واحد مثبت و مرتبهٔ اعداد کوچکتر از واحد منفی است.

مثال: مرتبهٔ عدد	۱۷۸۰۰۰	مساوی	۶+
و « «	۶۴۰۲,۰۱	«	۴+
و « «	۲۷,۲۵	«	۲+
و « «	۱,۶	«	۱+
و « «	۰,۲۶	«	۰
و « «	۰,۰۶۷	«	۱ −
و « «	۰,۰۰۰۳۱	«	۳ − می‌باشد.

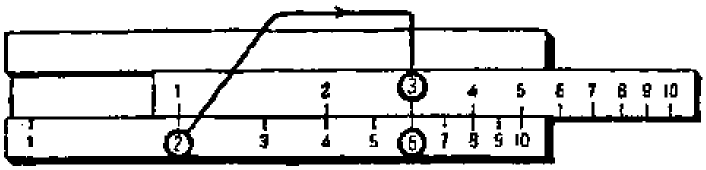
بنابراین، وقتی یک عدد کاملاً معین است که مرتبه و پیکرهای آن بطور توالی معلوم باشند. لذا برای اینکه عددی را روی خطکش کاملاً بخوانیم باید اولاً جای آن را روی خطکش و ثانیاً مرتبهٔ آن را بدانیم.

باید در نظر داشت که خواندن اعداد معمولاً قسمت اعظم وقت مبتدیان را می‌گیرد و خسته کننده‌ترین قسمت محاسبات است. لذا هرچه در این قسمت تمرین کنید بهتر است. دقیق و با احتیاط به خطکش نگاه کنید، و متوجه هیچ چیز جز آنچه چشم شما حکم می‌کند نباشید. نتیجه را تند بخوانید، اندازه‌ها را هم نظراً بدون اندازه‌گیری و با قطعیت تعیین کنید. اوایل این کار ممکن است برای شما مشکل باشد ولی رفته رفته به آن عادت خواهید کرد و دیگر خسته نخواهید شد.

۱۱ـ ضرب و تقسیم

مسئلهٔ ۱ـ حاصلضرب ۳ × ۲ را تعیین کنید.

خطکش متحرک را به سمت راست حرکت می‌دهیم تـا رقـوم ۱ از آن (مـبـدأ) روی عـدد ۲ از خـط کش ثابت قرار گیرد (شکل۲۹) و روی‌خطکش ثابت در مقابل رقوم ۳ از خط کش متحـرک جواب را می‌خوانیم.



ش ۲۹

تمرین ۱۱- حاصلضربهـای ۳,۱۶ × ۲,۱۲ و ۳,۱۲ × ۵,۴۵ را بدست آورید.

چنانکه مـی‌بینید در حـل مسئلهٔ دوم تمرین ۱۱ از مبدأ خطکش متحرک استفاده نمی‌کنیم بلکه با منتهای آن کار می‌کنیم. در بسیاری از مسائل ناگزیر به این عمل هستیم.

در ضرب ۳,۵ × ۱,۲ پیکرهای حاصلضرب ۲ — ۴ خواهند بود. ولی از صورت مسئله پیداست که حاصلضرب نمی‌تـواند ۴۲ یـا ۴۲۰ یا ۰,۴۲ و غیره باشد بلکه ۴,۲ خواهـد بود. امـا ایـن طریقهٔ تعیین ممیز تقریبی است و به همین دلیل احتیاج به قاعده‌ای داریم که با داشتن مراتب مضروب و مضروب‌فیه، مرتبهٔ حاصلضرب را به ما بدهد:

قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ حاصلضرب

اگر هنگام ضرب دوعدد، خطکش متحرک را به سمت راست حرکت دادیم (یعنی از مبدأ خطکش متحرک برای ضرب استفاده کردیـم) مرتبهٔ حاصلضرب برابر مجموع مراتب مضروب و مضروب فیه است منهای ۱. اگر آن را به سمت چپ حرکت دادیـم (یعنی بـرای ضـرب از منتهای خطکش متحرک استفاده کردیم) مرتبهٔ حاصلضرب مساوی مجموع مراتب عوامل ضرب خواهد شد.[۱]

۱. قاعدهٔ فوق بـر اساس استدلال زیـر نهاده شده است، اگـر p_a و p_b بترتیب مراتب اعـداد a و b بـاشند مـی‌دانیم کـه مـرتبهٔ هر عـدد همیشه یکی ←

تمرین ۱۲ـ حاصلضربهای زیر را بدست آورید:

۵,۲۵ × ۰,۸ و ۰,۰۱۵ × ۳,۵ و ۳۵ × ۲,۴ و ۲,۹۶ × ۷,۵

تمرین ۱۳ـ حاصلضربهای زیر را بدست آورید:

۱,۵۴ × ۳,۲۶ و ۲,۱۸ × ۴,۶۵ و ۰,۰۹۵ × ۱۷,۸ و ۶,۵۵ × ۲,۴۲

تبصرهٔ ۱ــ هنگام تعیین حاصلضرب باید سعی کرد خطکش متحرک دقیقاً در جای لازم قرار گیرد. این عمل دقت محاسبه را تا حد زیادی بالا می‌برد.

تبصرهٔ ۲ــ با اینکه قانون تعیین مرتبهٔ حاصلضرب بسیار آسان است معهذا نباید آن را بکار برد. زیرا استعمال آن باعث کندی محاسبه مـی‌شود. به همین علت باید عادت کرد که فقط در موارد بسیار ضروری از آن استفاده نمود. در اکثر محاسبات عملی مرتبهٔ حاصلضرب توسط خود صورت مسئله روشن می‌شود. مثلاً هنگام تعیین سرعت ترنی اگر ارقام ۲ — ۵ را بدست آوریم باید بدانیم که این عدد ۵,۲^{km} یا ۵۲۰^{km} در ساعت نیست بلکه همان ۵۲^{km} در ساعت است.

** بیشتر از مفسر لگاریتم آن است. فرض می‌کنیم،
$\log a = n_a + m_a$ و $\log b = n_b + m_b$ باشد (n_a و n_b مفسرها و m_a و m_b مـانتیسهـای a و b فـرض شـده‌انـد). لـذا داریـم $n_a = p_a - 1$ و $n_b = p_b - 1$ اما داریم،
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b = (n_a + n_b) + (m_a + m_b)$. در اینجا دو حالت ممکن است پیش بیاید، یا $m_a + m_b < 1$ و یا $m_a + m_b \geqslant 1$ است. مفسر $\log(a \cdot b)$ در حـالـت اول هـمـان $n_a + n_b$ و در حـالـت دوم $n_a + n_b + 1$ خواهد بود. لذا مرتبهٔ $a \cdot b$ در حالت اول:

$$p_{ab} = n_a + n_a + 1$$

و در حالت دوم $p_{ab} = n_a + n_b + 2$ خواهد شد.

پس برای حالت اول داریم،

$$p_{ab} = p_a - 1 + p_a - 1 + 1 = p_a + p_b - 1$$

و برای حالت دوم داریم:

$$p_{ab} = p_a - 1 + p_a - 1 + 2 = p_a + p_b$$

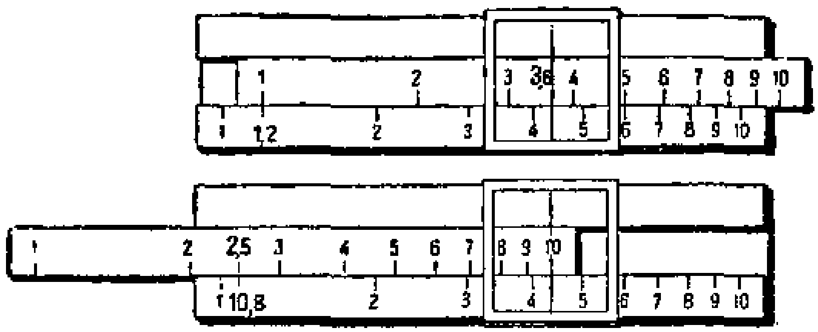
یعنی حکم ثابت می‌شود. در روی خطکش این وجه تمیزهـم به این صورت است کـه اگـر $m_a + m_b < 1$ بـاشـد خطکـش متحـرک بـه سمت راست و اگر $m_a + m_b \geqslant 1$ باشد خطکش محرک به سمت چپ حرکت می‌کند.

مسئله: حاصلضرب ۲,۵ × ۳,۶ × ۱,۲ را بدست آورید.

در اینجا باید دو مرتبه عمل ضرب را انجام داد:

$$(۱,۲ \times ۳,۶ = \text{نتیجه} \times ۲,۵ =)$$

ولی ما به نتیجهٔ ضرب اولی احتیاجی نداریم. برای اینکه بیهوده این نتیجه را نخوانیم به طریق زیر عمل می‌کنیم: پس از اینکه مبدأ خطکش متحرک را روی عدد ۱,۲ از خطکش ثابت قرار دادیم شاخص را روی عدد ۳,۶ از خطکش متحرک قرار می‌دهیم(شکل ۳۰). بعد بدون‌آنکه شاخص را حرکت دهیم خطکش متحرک را برای ضرب بعدی حرکت می‌دهیم و منتهای آن را مقابل خط رؤیت شاخص می‌گذاریم. در این حال روی خط کش ثابت، مقابل عدد



ش ۳۰

۲,۵ از خطکش متحرک، جواب نهائی را که ۱۰۸ باشد می‌خوانیم. بدیهی است مرتبهٔ این عدد مساوی مجموع مراتب عوامل ضرب است منهای آن قدر واحد که خطکش متحرک به سمت راست حرکت کرده است:

$$۱ + ۱ + ۱ - ۱ = ۲$$

پس جواب صحیح خواهد شد:

$$۱,۲ \times ۳,۶ \times ۲,۵ = ۱۰,۸$$

تمرین ۱۴ـ بدون خواندن نتایج واسطه، حاصلضربهای زیر را بدست آورید:

$۴,۶۵ \times ۰,۰۷۸۵ \times ۰,۱۹۶ \times ۲,۴۸$ و $۲,۶۵ \times ۱,۳۲ \times ۰,۷۵$ و $۲,۹۴ \times ۳,۶۶ \times ۰,۶۵$.

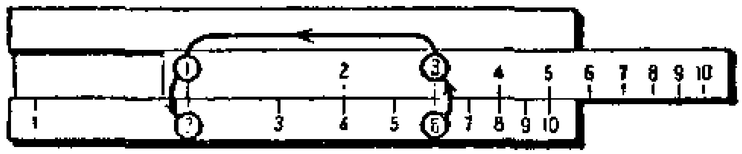
تمرین ۱۵ـ حساب کنید وزن تخته‌سیاهی از چوب بلوط به طول $۴,۷۵^m$ و عرض ۴۵^{cm} و ضخامت $۶,۵^{cm}$ را در صورتی که بدانیم وزن مخصوص چوب بلوط ۰,۵۶ می‌باشد.

تمرین ۱۶ـ چقدر آسفالت به ضخامت $۱,۲^{cm}$ برای پوشانیدن کف حیاط $۱۳۶^m \times ۴۸$ لازم است؟ وزن مخصوص آسفالت ۱,۱۰ می‌باشد.

۱۲ـ تقسیم

مثال ۱ــ خارج قسمت ۳ : ۶ را حساب کنید.

عــدد ۳ از خــطکش متحرک را در مقابل عــدد ۶ از خــطکش ثــابت می‌گذاریم و روی خطکش ثابت، در مقابل مبدأ خط کش متحرک، خارج قسمت را می‌خوانیم (شکل ۳۱).



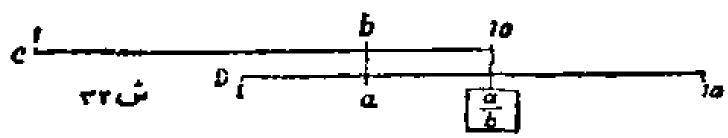
ش۳۱

تمرین ۱۷ـ این قاعدهٔ تقسیم روی کدامیک از خواص لگاریتمها بنا شده است؟

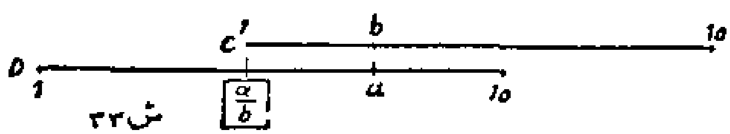
تمرین ۱۸ـ عدد ۲۰ را تـوسط خطکش چگونـه بر ۵ تقسیم می‌کنید؟ خارج قسمت در کجا و مقابل کدام رقوم خطکش متحرک واقع می‌شود؟

تمرین ۱۹ـ خــارج قسمتهـای ۳,۵ : ۱۴۷ و ۶,۴ : ۳,۲ را بــدست آورید.

خـارج قسمت $\frac{a}{b}$ بطور کـلی بــه یکی از دو طریق زیــر (شکل ۲۲) و (شکل ۳۳) بدست می‌آید.



ش۳۲



ش۳۳

نظیر حـاصلضرب، قاعـدهٔ زیر را برای تعیین مــرتبهٔ خارج قسمت ذکــر می‌کنیم:

قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ خارج قسمت

> اگر در هنگام تقسیم دو عدد خطکش متحرک را به سمت راست حرکت دادیم (یعنی خارج قسمت را به‌کمک رقوم مبدأ خطکش متحرک تعیین کردیم) مرتبهٔ خارج قسمت مساوی اختلاف مراتب مقسوم و مقسوم‌علیه است بعلاوهٔ ۱. و اگـر به سمت چپ حرکت دادیـم (یعنی خارج قسمت را به کمک رقـوم انتهائی خطکش متحرک تعیین کردیـم) مرتبهٔ خارج قسمت مساوی تفاضل مراتب مقسوم و مقسوم‌علیه خواهد شد.

مثال ۲ـ خارج قسمت ۰٫۱۳ : ۲٫۰۸ را تعیین کنید.

پس از انجام تقسیم عدد ۱۶ بدست می‌آید. ولی چون خطکش متحرک به سمت راست حرکت کرده و مرتبهٔ مقسوم ۱ و مرتبهٔ مقسوم علیه صفر است لذا مرتبهٔ خارج قسمت ۲ = ۱ + ۰ − ۱ خواهد شد لذا داریم:

$$۲٫۰۸ : ۰٫۱۳ = ۱۶$$

تبصره ــ در قاعدهٔ فوق یک حالت استثنائی وجود دارد. فـرض می‌کنیم که بخواهیم عـدد ۱ را بر ۵ تقسیم کنیم. ایـن عمل را به دو طریق می‌تـوانیم انجام دهیم:

۱ـ ممکن است رقوم ۵ از مدرج C را روی منتهای مدرج D قرارداد و جواب را روی مدرج D خواند. در ایـن حال چون خطکش متحرک به سمت راست حرکت کرده است طبق قاعدهٔ فوق، مرتبهٔ خارج قسمت برابر:

$$۱ - ۱ + ۱ = ۱$$

می‌شود. یعنی داریم:

$$۱ : ۵ = ۲$$

۲ـ ممکن است رقوم ۵ از مدرج C را روی واحـد طـرف چپ (مبدأ) مدرج D قرارداد و جواب را روی مدرج D خواند. در این حال چون خطکش متحرک به سمت چپ حرکت داده شده است مرتبهٔ خارج قسمت برابر:

$$۱ - ۱ = ۰$$

می‌شود. یعنی داریم:

$$۱ : ۵ = ۰٫۲$$

بدین ترتیب قاعده تعیین مرتبهٔ خارج قسمت همیشه صحیح است مگر در حالت زیر:

اگر خارج قسمت a : ۱ را با حرکت خطکش متحرک به سمت راست بدست آوریم قاعدهٔ مرتبهٔ خارج قسمت صحیح نیست. برای جلوگیری از اشتباه قرار می‌گذاریم که هنگام تقسیم a : ۱ همیشه از حرکت خطکش متحرک به‌سمت چپ استفاده می‌کنیم.[1]

تمرین ۲۰- خارج قسمتهای زیر را بدست آورید:

۳۲ : ۵,۲۵ و ۱,۷ : ۱۱,۳ و ۰,۴۸ : ۰,۱۹ و ۲,۷ : ۸۷

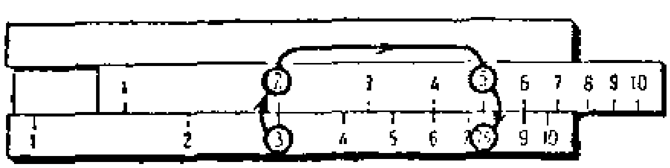
تمرین ۲۱- خارج قسمتهای زیر را بدست آورید:

۲,۲۶ : ۶,۱۵ و ۰,۱۴۸ : ۹,۸۵ و ۱,۰۴ : ۱۹,۶ و ۲,۷۴ : ۴۳,۵

تمرین ۲۲- اجرت تعمیر ماشینی ۳۵,۵۰ تومان است. زمانی که برای تعمیر آن صرف شده $\frac{۱}{۲}$ ۹ ساعت است. اجرت هر ساعت کار را تعیین کنید.

۱۳- ترکیب ضرب و تقسیم

مثال ۱ــ حاصل عبارت $\frac{۳ \times ۵}{۲}$ را حساب کنید. در اینجا ما با ۳ عامل یعنی با دو عمل سروکار داریم که احتیاجی به نتیجهٔ عمل اول نداریم. ابتدا ۳ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم یعنی عدد ۲ از مقیاس C را مقابل عدد ۳ از مقیاس D می‌گذاریم ولی نتیجه را روی D مقابل مبدأ مقیاس C نمی‌خوانیم بلکه بلافاصله آن را در ۵ ضرب می‌کنیم. یعنی اصولاً جواب را روی D در مقابل رقوم ۵ از مقیاس C می‌خوانیم (شکل ۳۴).



ش ۳۴

---

۱. علت این امر روشن است: زیرا تقسیم عدد ۱ بر a تنها تقسیمی است که می‌تواند با حرکت خطکش متحرک به هردو سمت صورت گیرد. و چون با هریک از این حرکات قاعده‌ای همراه است جواب نمی‌تواند دو صورت اختیار کند و لزوماً یکی از حالات غلط می‌شود.

مثال ۲ـ کسر $\frac{۳ \times ۵ \times ۱۰,۵}{۲ \times ۲۳}$ را حساب کنید. ابتدا همانطور که در مثال اول دیدیم مقدار $\frac{۳ \times ۵}{۲}$ را حساب می‌کنیم ولی دیگر جواب را نمی‌خوانیم بلکه فقط خط موئی شاخص را روی جواب قرار می‌دهیم. بعد بدون اینکه شاخص را حرکت دهیم عدد ۲۳ از مقیاس C را زیر این خط موئی می‌گذاریم و جواب را روی D مقابل عدد ۱۰,۵ از مقیاس C می‌خوانیم.

بطور کلی برای خلاصه کردن کسرهائی به صورت $\frac{a \times b \times c \times d}{e \times f \times g}$ باید طبق طرح زیر عمل نمود:

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & d \\ & \searrow \quad \nearrow & & \searrow \quad \nearrow & & \searrow \quad \nearrow & \\ & e & & f & & g & \end{array}$$

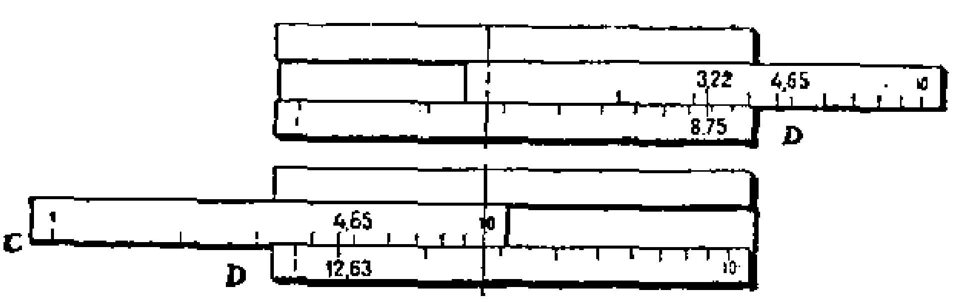
تمرین ۲۳ـ کسرهای:

$$\frac{۳,۵ \times ۴,۲۵ \times ۸,۵}{۹,۷۵ \times ۶,۴۲} \quad \text{و} \quad \frac{۴,۰۵ \times ۲,۶۶ \times ۱,۳۴ \times ۰,۹۶}{۶,۶۳ \times ۱۲,۴۵ \times ۸,۵۵}$$

را حساب کنید.

مثال ۳ـ کسر $\frac{۸,۷۵ \times ۴,۶۵}{۳,۲۲}$ را حساب کنید.

وقتی طبق روش کلی عمل کنیم می‌بینیم که بعد از عمل تقسیم، نمی‌توان جواب را در مقابل ۴۶۵ خواند. زیرا که این عدد روی مقیاس C در خارج مقیاس D قرار دارد (شکل ۳۵). در این حال باید خط موئی شاخص را روی مبدأ C قرارداد و بدون حرکت دادن شاخص، مقیاس C را آنقدر تغییر داد تا



ش ۳۵

منتهای آن به‌جای مبدأش قرار گیرد. دراین صورت جواب روی مقیاس D مقابل عدد ۴۶۵ از مقیاس C خوانده می‌شود.

در حل مسائل اغلب ما ناگزیریم که جای مبدأ و منتهای C را باهم عوض کنیم. این عمل تعویض را «جهش» خطکش متحرک می‌نامیم.

قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ کسر مرکب

> مرتبهٔ کسر مرکب: $\dfrac{a \times b \times c \times d}{e \times f \times g}$ مساوی اختلاف ما بین مجموعهٔ مراتب عوامل ضرب صورت و مجموعهٔ مراتب عوامل ضرب مخرج به اضافهٔ آنقدر مرتبهٔ واحد است که رقوم منتهای C به جای رقوم مبدأش جسته و یا منهای آنقدر مرتبه واحد که رقوم مبدأ آن به جای رقوم منتهایش جهش کرده است.[۱]

تمرین ۲۴ـ حاصل کسرهای زیر را حساب کنید:

---

۱ . برای اثبات قاعدهٔ فوق کافی است آن را برای کسر $\dfrac{a \times b}{c}$ بررسی کنیم. فرض می‌کنیم p_a و p_b و p_c مراتب a و b و c باشند. حالت اول وقتی است که نتیجه بدون جهش خوانده می‌شود. در این موقع هم تقسیم و هم ضرب فقط با یک تثبیت خطکش متحرک صورت گرفته است. اگر خطکش متحرک به سمت چپ حرکت کرده باشد مرتبهٔ $\dfrac{a}{c}$ برابر $p_a - p_c$ و مرتبهٔ $\dfrac{a \times b}{c}$ برابر $p_a - p_c + p_b$ خواهد شد. و اگر خطکش متحرک به سمت راست حرکت کرده باشد مرتبهٔ $\dfrac{a}{c}$ برابر $p_a - p_c + 1$ و مرتبهٔ $\dfrac{a \times b}{c}$ برابر $(p_a - p_c + p_b + 1) - 1 = p_a - p_c + p_b$ خواهد شد.

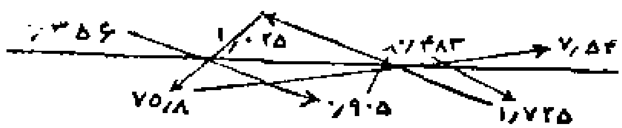
حالت دوم وقتی است که نتیجه باجهش خوانده می‌شود. لذا تقسیم با یک تثبیت و ضرب با تثبیت دیگر خطکش متحرک صورت می‌گیرد. بنابراین به مرتبهٔ نتیجه یک واحد اضافه و یا از آن یک واحد کسر می‌شود.

حالت دوم را مشروح‌تر رسیدگی کنید و ببینید که چه وقت یک واحد اضافه یا کسر می‌شود؟

$$\frac{۴,۷۵ \times ۶,۲ \times ۰,۵۲ \times ۲۲,۱}{۱۴,۰۶ \times ۳,۷۶ \times ۸,۱۴} \quad و \quad \frac{۹,۶۵ \times ۲,۱۷ \times ۰,۰۰۴۷}{۳۲,۶ \times ۱۸,۸۵}$$

هنگام انتخاب تقسیمها باید ترتیب عوامل را چنان انتخاب کرد که حتی‌المقدور کمتر به جهش احتیاج باشد.

مثال ۴: حل کسر $\frac{۰,۳۵۶ \times ۱,۰۲۵ \times ۰,۴۸۳ \times ۷,۵۴}{۷۵,۸ \times ۰,۹۰۵ \times ۱,۷۲۵}$ احتیاج به جهش خطکش متحرک دارد ولی اگر عوامل به ترتیب شکل:



انتخاب شوند جهش لزومی پیدا نمی‌کند.

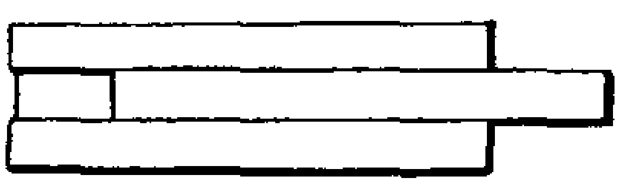
نکات زیر را باید همیشه بخاطر داشت:

۱ــ قانون تعیین مرتبه در کسرهای مرکب را فقط وقتی باید بکار برد که تعداد عوامل مخرج یکی کمتر از تعداد عوامل صورت باشد. در غیر این صورت باید مرتبهٔ خارج قسمت را تک تک بعد از هر عمل تعیین نمود.

۲ــ خواندن اعداد روی خطکش بیش از هرچیز وقت می‌گیرد و انسان را خسته می‌کند. لذا همیشه صرفه در این است که نتایج واسطه‌ها را نخوانیم و فقط شاخص را حرکت دهیم و تثبیت کنیم. با این عمل بر دقت محاسبه نیز تا حدودی افزوده‌ایم. زیرا با هر خواندن مختصر خطائی وجود دارد که در نتیجهٔ مجموعه مؤثر است. ولی تثبیت شاخص همیشه بدون خطا صورت می‌گیرد.

۳ــ فراموش نکنید که محاسبهٔ تقریبی ذهنی خود کمک بزرگی برای جلوگیری از اشتباه است.

۴ــ قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ حاصلضرب و خارج قسمت را اگر خطکش متحرک به سمت راست حرکت کرده باشد به ترتیب زیر بخاطر بسپارید:



ش ۳٦

$P - ۱$ ← مرتبهٔ ضرب

$Q + ۱$ ← مرتبهٔ تقسیم

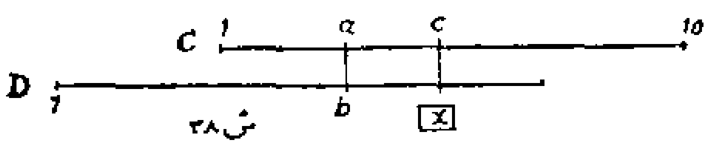
۲ تناسبات

۱۴ـ تناسبات

خطکش متحرک را به وضع دلخواهی قرار دهید. مثلاً عدد ۱۶ از مقیاس C را مقابل عدد ۲ از مقیاس D بگذارید. حال به اعدادی که روی این دو مقیاس مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند نگاه کنید. خواهید دید که نسبت هردو عدد از مقیاسهای C و D که مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند مقداری است ثابت. و این مقدار ثابت برای همه هم یکی است:

$$\frac{۱۶}{۲}=\frac{۱}{۰{,}۱۲۵}=\frac{۲}{۰{,}۲۵}=\frac{۴}{۰{,}۵}=\frac{۸}{۱}$$

اثبات این مطلب بسیار ساده است (شکل ۳۸).



ش ۳۸

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

بطوری که از شکل فوق پیداست داریم:

$$\log x - \log b = \log c - \log a$$

و یا:

$$\log \frac{x}{b} = \log \frac{b}{a}$$

پس: $$\frac{c}{a}=\frac{x}{b}$$

و از آنجا داریم: $$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

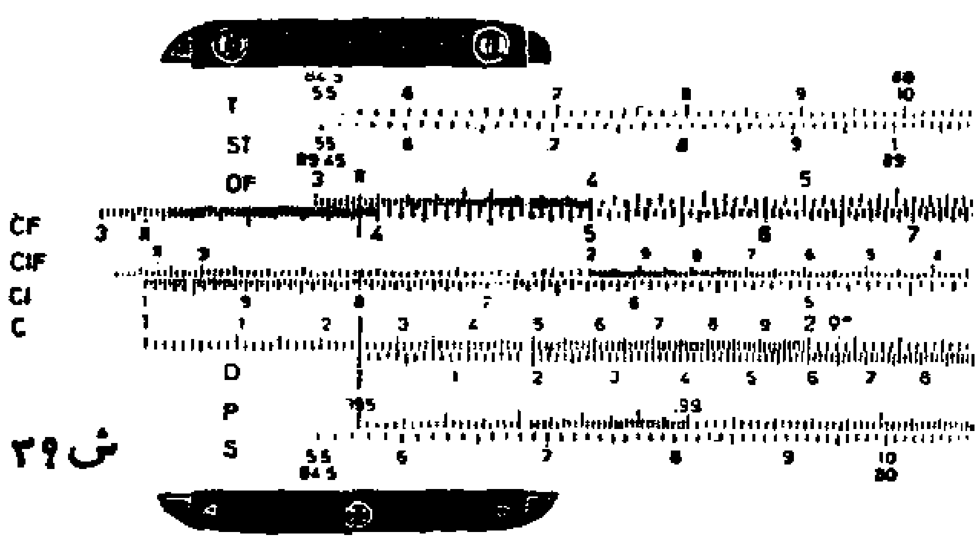
یعنی می‌توانیم بگوئیم که خط نازکی که مقیاسهای C و D را ازهم جدا می‌کند حکم خط کسری را دارد.

اگر $\frac{a}{b}$ را بـه کمک مقیاسهای C و D مشخص کنیم مقدار $\frac{c}{x}$ و کـلیهٔ نسبتهای مساوی با آن خود بخود روی خطکش دیده می‌شوند. به این دلیل است که اصل تناسبات به «قانون طلائی تکنیک خطکش محاسبه» موسوم شده است.

مثال ۱ــ مقادیر X و Y و Z و V و t را از تساویهای زیر بدست‌آورید:

$$\frac{X}{۱۲}=\frac{Y}{۱۴}=\frac{Z}{۱۲}=\frac{۱}{V}=۰,۱۲۵=\frac{t}{۱۷,۶}$$

حل ــ عدد ۰,۱۲۵ را به‌صورت $\frac{۰,۱۲۵}{۱}$ می‌نویسیم. حال اگر عـدد ۰,۱۲۵ از مدرج C را مقابل مبدأ مدرج D قرار دهیم روی مقیاس C در مقابل اعداد ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۷,۶ از مقیاس D به ترتیب مقادیر $X = ۱,۵۰$ و $Y = ۱,۷۵$ و $Z = ۲$ و $t = ۲,۲$ را می‌بینیم. روی مقیاس D مقابل عدد ۱ از مقیاس C هم مقدار $V = ۸$ را می‌خوانیم (شکل۳۹).



ش ۳۹

تمرین ۳۵ـ مقادیر $X_۱$ و $X_۲$ و $X_۳$ و $X_۴$ را از تساویهای زیر بدست آورید:

$$\frac{۱}{۱,۳۱}=\frac{X_۱}{۱,۶۱}=\frac{X_۲}{۳,۰۵}=\frac{X_۳}{۵,۷۵}=\frac{X_۴}{۱۰,۰۰}$$

تمرین ۳۶ـ مقادیر $y_۱$ و $y_۲$ و $y_۳$ را از معادلات زیر بدست آورید:

$$\frac{۱,۶۹}{y_۱}=\frac{۴,۶۴}{y_۲}=\frac{۶,۲۵}{y_۳}=۷,۷۰$$

قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ تناسبات

> برای هر زوج عدد x و y که روی مقیاسهای C و D مقابل یکدیگر واقع شده و کسرهای مساوی تشکیل داده‌اند تفاضل مراتب صورت و مخرج برای تمام کسرها (در یک تثبیت) یکی است[۱].

استعمال قاعدهٔ فوق بخصوص وقتی ساده است که اعداد $x_۱$ و $x_۲$ و ... و x_k (یا $y_۱$ و $y_۲$ و ... و y_k) هم‌مرتبه باشند. لذا از قاعدهٔ فوق نتیجه می‌شود که $y_۱$ و $y_۲$ و ... و y_k (یا $x_۱$ و $x_۲$ و ... x_k) هم باید هم مرتبه باشند.

تبصره ــ هنگام استفاده از این قاعده باید تبصرهٔ (مبحث ۱۴) را از نظر دور نداریم. یعنی اگر در نسبتهای ما رابطهٔ $\frac{a}{۱}$ که در آن ۱ واحد طرف راست

---

۱. اثبات این حکم بدین ترتیب است که اگر $p_۱$ و $p_۲$ و ... و p_k به ترتیب مراتب $x_۱$ و $x_۲$ و ... و x_k و $q_۱$ و $q_۲$ و ... و q_k مراتب $y_۱$ و $y_۲$ و ... و y_k باشند از رابطهٔ $\frac{x_۱}{y_۱}=\frac{x_۲}{y_۲}=\dots=\frac{x_k}{y_k}$ نتیجه می‌شود که اگر خطکش متحرک را به سمت راست حرکت داده باشیم داریم:

$$p_۱-q_۱+۱=p_۲-q_۲+۱=\dots=p_k-q_k+۱$$

و اگر خطکش متحرک را به سمت راست حرکت داده باشیم داریم:

$$p_۱-q_۱=p_۲-q_۲=\dots=p_k-q_k$$

یعنی حکم ثابت است.

مقیاس D است وجود داشته باشد باید مرتبهٔ نسبت را خصوصاً تعیین نمود و دیگر این مطلب که: «اگر مراتب مخارج مساوی باشند مراتب صورتها نیز مساویند» صحت ندارد.

مثال ۲ــ در تمرین ۲۵ چهار نسبت اول از قاعدهٔ فوق تبعیت می‌کنند یعنی مراتب تمام صورتها مثل مرتبهٔ صورت کسر اول برابر ۱ می‌باشد ولی اگر نسبت آخر را اضافه کنیم قانون بالا صادق نیست. مرتبهٔ مخرج ۲ است در حالی که مرتبهٔ صورت همان ۱ می‌ماند.

مثال ۳ــ تساویهای $\frac{۱}{۲,۶}=\frac{x_۴}{۱۶۵,۵}=\frac{x_۳}{۰,۰۲۴}=\frac{x_۲}{۳,۶۵}=\frac{x_۱}{۵,۷}$ را در نظر می‌گیریم، در اینجا چون مراتب مخارج متفاوتند مراتب صورتها هم متفاوت می‌شوند. اختلاف مراتب صورت و مخرج برای کسر $\frac{۱}{۱,۶}$ صفر است. یعنی این تفاضل برای تمام کسرهای دیگر هم باید صفر باشد. بنابراین مرتبهٔ $x_۱$ مساوی ۱ و مرتبهٔ $x_۲$ مساوی ۱ و مرتبهٔ $x_۳$ مساوی ۱ — و بالاخره مرتبهٔ $x_۴$ مساوی ۳ + می‌شود.

تمرین ۲۷ــ مقادیر a و b و M و N را از تساویهای زیر حساب کنید:

$$\frac{۱۵}{۱۹۲}=\frac{a}{۱۹۵۰}=\frac{b}{۲۵۱}=\frac{۳}{M}=\frac{۴۹۱}{N}$$

تمرین ۲۸ــ مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ و $x_۴$ را از روابط زیر بدست آورید:

$$\frac{x_۱}{۱۴,۶}=\frac{x_۲}{۰,۱۶۲}=\frac{x_۳}{۱,۸۹۵}=\frac{x_۴}{۲۰۲,۰}=\frac{۳۵,۶}{۲۹,۷}$$

تمرین ۲۹ــ مقادیر $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ و $S_۴$ را از تساویهای زیر بدست آورید:

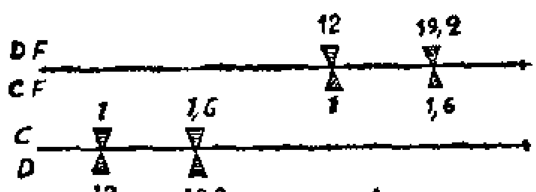
$$\frac{۳,۴۱}{۰,۲۹}=\frac{۴,۹۵}{S_۱}=\frac{۰,۵۸}{S_۲}=\frac{۰,۰۰۹۱}{S_۳}=\frac{۱۰۰}{S_۴}$$

۱۵ــ استفاده از مقیاسهای CF و DF برای ضرب و تقسیم و تناسبات

در اکثر خطکشهای جدید دو مقیاس دیگر CF و DF که همان تاشدهٔ

مقیاسهای C و D است ($\text{Folded} - C \,\&\, D$) نیز وجود دارد که به کمک آنها عملیات فوق سریعتر صورت می‌گیرد. این دو مقیاس، همانطور که از اسمشان پیداست، همان مقیاسهای C و D هستند که هریک از وسط تا شده و دو نیمه‌شان طوری مجدداً پهلوی‌هم گذاشته شده که رقوم ۱ آنها در وسط مدرجها قرارگرفته است. لذا از ۱ تا ۳ در طرف راست مقیاسها و از ۳ تا ۱۰ روی نیمهٔ چپ آنها واقع و رقومهای ۱ و ۱۰ از آنها برهم منطبق و بعلاوه مقیاس DF بالای مقیاس CF قرار گرفته است.

برای تعیین حاصلضرب ۱٫۶ × ۱۲ به کمک این دو مقیاس، رقوم ۱ از مقیاس CF را روی رقوم ۱۲ از مقیاس DF می‌گذاریم (شکل ۴۰). در این عمل بـا یک حقیقت مهم روبرو می‌شویم: همزمان بـا این حرکت، رقوم ۱ از مقیاس C نیز بر روی عدد ۱۲ از مقیاس D منتقل شده است.



ش ۴۰

حال اگر به اعدادی که روی دو زوج مقیاس (C و D) و (CF و DF) مقابل یکدیگر قـرار گرفته‌اند نگاه کنیم می‌بینیم که نسبت هـر عدد واقع روی D (یا DF) به عـدد مقابلش روی C (یا CF) در تمام طول خـطکش مقداری است ثـابت و بـالعکس. از اینجا نتیجه می‌گیریم که اولاً استقرار اولیه برای ضرب، توسط هریک از دو زوج خط کش ممکن است. ثـانیاً آنجائی کـه نتوانیم حاصلضرب را روی یکـی از دو زوج بخوانیم، روی زوج دیگر حتماً می‌توانیم.

مثلاً حاصلضرب ۵۶ = ۷ × ۸ را در نظر می‌گیریم و فـرض می‌کنیم که بخواهیم حاصلضرب جمیع اعداد در عـدد ۸ را بدست آوریـم. وقتی کـه استقرار اولیه را بـا CF و DF شروع کنیم دیگر لزومی ندارد کـه بدانیم بـا کدامیک از دوسر خطکش متحرک باید کارکنیم. حاصلضربهای جمیع اعداد در عدد ۸ روی C و D یا CF و DF دیده خـواهند شد. به عبارت دیگر وقتی از (C و D) و (CF و DF) تـوأماً استفاده کنیم دیگر احتیاجی به «جهش» پیدا نخواهیم کرد.

مثال ۱ـ (روی D) ۱۸ = ۰٫۲۸۵ = ۵٫۱۳

(روی DF) ۱۸ × ۷٫۸ = ۱۴۰٫۴

بخصوص ضربهائی که شامل مقدار ثابت π باشند در اینجا بسهولت انجام می‌گیرند. زیرا π های واقع روی مقیاسهای CF و DF، در حالتی که خطکش بسته است، مستقیماً در مقابل مبدأ و منتهای C و D به عنوان عامل ثابتی قید شده‌اند. مثلاً اگر قطر دایره‌ای ۶۵ اینچ باشد با قرار دادن خط موئی شاخص روی عدد ۶۵ از مقیاس D، زیر خط موئی روی مقیاس DF محیط دایره را که ۲۰۴ اینچ است مستقیماً بدست می‌آوریم و بالعکس. علت این امر روشن است. زیرا نقطه‌ای که در آن C و D را به‌اصطلاح به دوقسمت کرده‌اند تا مجموعشان CF و DF را بدهد نقطهٔ π انتخاب شده است. جدول زیر محیطهای دوایر را بر حسب مقادیر مختلف قطر آنها به ما می‌دهد:

قطر دایره	۱	۱۴,۲	۱۷,۲	۱۹,۱	۲۱,۸	۲۹,۶	۳۵,۰	۴۶,۲
محیط دایره	π	۴۴,۶	۵۴,۰	۶۰,۰	۶۸,۵	۹۳,۰	۱۱۰,۰	۱۴۵,۱
							۶,۶	۱۰,۵
							۲۰,۷	۳۳,۰

استفاده از مقیاسهای CF و DF در تقسیم هم مزایائی دارد. مقسوم را روی DF و مقسوم‌علیه را روی CF قرار می‌دهیم و خارج قسمت را بترتیب روی DF مقابل مبدأ CF یا روی D مقابل مبدأ C می‌خوانیم.

استفاده از دو مقیاس فوق‌الذکر توأم با مقیاسهای C و D در حل تناسبات و کسرهای مرکب هم بسیار مفید است و ما را از «جهش»های متوالی بی‌نیاز می‌سازد.

مثال ۲ــ فرض می‌کنیم که بخواهیم مقدار تابع $y = mx$ را وقتی $m = ۴,۵۷$ است به ازای x مساوی ۰,۲۳ و ۱,۳۶ و ۱,۷۸ و ۳,۲ و ۴,۹۲ و ۵,۸۵ و ۶,۷ و ۱۱,۳۸ و ۱۴,۰۵ پیدا کنیم.

منتهای مقیاس C را روی عدد ۴,۵۷ از مقیاس D می‌گذاریم. حال می‌توانیم جوابها یعنی مقادیر تابع mx را بخوانیم: روی مقیاس D مقابل عدد ۰,۲۳ از مقیاس C جواب متناظر آن یعنی ۱,۰۵۲ را می‌خوانیم. وقتی که $x = ۱,۳۶$ باشد بدون جهش نمی‌توانیم جوابی برای y روی D بدست آوریم. لذا شاخص را روی عدد ۱,۳۶ از مقیاس CF می‌گذاریم و مقابل آن روی مقیاس DF مقدار $y = ۶,۳۲$ را می‌بینیم. بعد شاخص را روی عدد ۱,۷۸ از CF می‌گذاریم و مقابل آن روی DF جواب را که ۸,۱۵ باشد

می‌خوانیم. مقادیر ۳,۲ و ۴,۹۲ و ۵,۸۵ و ۶,۷ در روی مقیاس C در دسترس هستند و به ترتیب جوابهای ۱۴,۶۲ و ۲۲,۵ و ۲۶,۷ و ۳۰,۶ را روی D به ما می‌دهند. بالاخره مقادیر ۱۱,۳۸ و ۱۴,۰۵ را مجدداً در روی CF می‌گذاریم و مقادیر تابع (حاصلضرب) را که به ترتیب برابر ۵۲,۰ و ۶۴,۳ می‌باشد روی DF می‌خوانیم.

مثال ۲ـ مطلوب است تعیین مقدار کسر:

$$x = \frac{۸,۳ \times ۶۳۸ \times ۴۱,۲ \times ۰,۷۳}{۱۶۵ \times ۰,۳۲ \times ۱,۰۸}$$

مرحلهٔ اول: عدد ۱۶۵ از مقیاس CF را مقابل عدد ۸۳ از مقیاس DF می‌گذاریم (خارج قسمت یعنی ۵۰۴ در مقابل منتهای C روی مقیاس D بدست می‌آید).

مرحلهٔ دوم: خط موئی شاخص را روی عدد ۶۳۸ از مقیاس C می‌گذاریم و بعد عدد ۳۲ از همین مقیاس را زیر خط موئی قرار می‌دهیم (خارج قسمت یعنی ۱۰۰۵ مقابل مبدأ C روی D بدست می‌آید).

مرحلهٔ سوم: خط موئی شاخص را روی عدد ۴۱۲ از مقیاس C می‌گذاریم و بعد عدد ۱۰۸ از همین مقیاس را در زیر خط موئی قرار می‌دهیم (خارج قسمت یعنی ۳۸۴ روی D).

مرحلهٔ چهارم: عدد ۱۰۸ از مقیاس C را زیر خط موئی می‌آوریم و بعد خط موئی را روی عدد ۷۳ از مقیاس CF می‌گذاریم و مقدار $x =$ ۲۸۱۰ را روی DF زیر همین خط موئی بدست می‌آوریم.

مثال ۳ـ می‌خواهیم جدولی برای تبدیل درجه به رادیان و بالعکس بسازیم:

درجه	۳۶۰°	۲۵°	۴۰,۵°	۵۳,۲°	۱۲۱°	۱۰۵°	۵۷,۳°	۶۸,۴°	۷۳,۹°	۸۸,۱°
رادیان	۶,۲۸	۰,۴۳۶	۰,۷۰۷	۰,۹۲۹	۲,۱۱	۱,۸۳۳	۱,۰۰۰	۱,۱۹۴	۱,۲۹۰	۱,۵۳۸

کافی است عدد ۳۶۰ از مقیاس C را مقابل عدد ۶۲۸ $(۶,۲۸ \approx ۲\pi = ۳۶۰^\circ)$ از مقیاس D قرار دهیم و با حرکت شاخص، در مقابل هرعدد از مقیاس C جواب متناظرش را برحسب رادیان روی D پیدا کنیم.

اگر بعضی جوابها به‌علت بیرون بودن مقیاس C، روی D در دسترس نبودند از مقیاسهای CF و DF استفاده می‌کنیم و دیگر خط‌کش متحرک را بهیچ وجه تکان نمی‌دهیم.

تمرین ۳۰ـ تمرین ۲۴ را با استفاده از مقیاسهای CF و DF حل کنید.

تبصره ـ مقیاسهای ST و D نیز باهم جدولی برای تبدیل درجه به رادیان و بالعکس را تشکیل می‌دهند. اگر خط موئی شاخص را روی عدد π از مقیاس D قرار دهیم عدد ۱۸۰ از مقیاس ST مقابل آن دیده خواهد شد. لذا برای تبدیل درجه به رادیان خط موئی شاخص را روی عدد درجه از مقیاس ST می‌گذاریم و مقدار آن را برحسب رادیان روی D در زیر خط موئی می‌خوانیم.

۱۶ـ مجذور و جذر

خط رؤیت شاخص را روی رقومهای ۲ یا ۳ از مدرج D قرار دهید و اعداد مقابل آنها را روی مدرجهای A و B بخوانید. چه ارتباطی بین اعداد مقابل، دو بدو موجود است؟

مجذور کردن و جذر گرفتن در روی خط‌کش آناً صورت می‌گیرد. مدرج A (یا مدرج B که عیناً مثل A مدرج شده) طوری تقسیم شده است که مقابل هر عدد از مدرج D مربع آن روی مدرج A خوانده می‌شود. لذا برای اینکه بتوانیم جذر یا مجذور عددی را بدست آوریم باید با مدرج A آشنا شویم.

در روی مدرج A تقسیمات ۲ برابر ریزتر از تقسیمات مدرج D می‌باشد. چون تقسیمات D متناسب با $\log n$ است لذا تقسیمات A متناسب با $\log n^{2} = 2\log n$ خواهد بود.

مدرجهای A و B ـ تمام مدرج A از دو نیمهٔ مساوی درست شده که عین یکدیگر از ۱ تا ۱۰ مدرج شده‌اند.

تمرین ۳۱ـ با دقت به نیمهٔ اول مقیاس A نگاه کنید و تقسیمات اولیه و ثانویه و تقسیمات مرحلهٔ سوم را پیدا کنید. ببینید که در فاصلهٔ ۱ تا ۲ به هر تقسیم مرحلهٔ سوم چند واحد از مرتبهٔ سوم تعلق می‌گیرد؟ در فاصلهٔ ۲ تا ۵ چطور؟ آیا در فاصلهٔ ۵ تا ۱۰ تقسیمات مرحلهٔ سوم وجود دارد یا نه؟

تمرین ۳۲ـ به نیمهٔ دوم مدرج A نگاه کنید. فواصل مربوط به هردو نیمه را باهم مقایسه کنید تا مطمئن شوید که تقسیمات روی این دو نیمهٔ مساوی، عین

یکدیگرند.

هر عددی را می‌توان هم روی نیمهٔ اول و هم روی نیمهٔ دوم مقیاس A قرار داد. ولی باید اختلاف مابین این دو نیمه معلوم باشد تا هنگام مجذور کردن یا جذر گرفتن مرتبهٔ جوابها به آسانی معلوم شود.

تمرین ۳۳ـ اعداد ۱۶۷ و ۲۴۸ و ۳۵۶ و ۶۴۵ و ۸۹۵ و ۵۶۴ را در نیمهٔ اول (طرف چپ) و اعداد ۱۹,۲ و ۲۶۵۰ و ۹۷,۵ را در نیمهٔ دوم (طرف راست) مقیاس A مشخص کنید.

در تمرین ۳۳ دیده می‌شود که وقتی می‌خواهیم عددی را روی مدرج A قرار دهیم باید بیشتر نظراً عمل کنیم (بر خلاف D). علت این امر روشن است. زیرا در اینجا تقسیمات کاملاً دقیق نیست و معمولاً در مقیاسهای بسیار ریز از تقسیمات خیلی کوچک صرف نظر می‌شود. لذا نتایج عملیاتی که روی مقیاسهای A و B بدست می‌آید دقتشان کمتر از نتایج عملیاتی است که از مقیاسهای C و D بدست می‌آید.

تعیین مجذور یك عدد: دیدیم که تعیین مجذور یک عدد بسیار ساده است. کافی است که خط رؤیت شاخص را روی عدد (واقع روی مدرج D) قرار داد و مجذور آن را روی مدرج A خواند. تنها باید بدانیم که مرتبهٔ مجذور را چگونه تعیین می‌کنیم:

قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ مجذور

اگر جواب (مجذور عدد مفروض) روی نیمهٔ راست مدرج A قرار گرفت مرتبهٔ مجذور مساوی ۲ برابر مرتبهٔ عددی است که مجذور شده. اگر جواب روی نیمهٔ چپ A بدست آمد مرتبهٔ آن مساوی ۲ برابر مرتبهٔ عدد مفروض منهای ۱ خواهد بود.

مثال ۱ــ حساب کنید $(۰,۰۰۲)^۲$ را. شاخص را روی عدد ۲ از مدرج D می‌گذاریم. جواب ۴ می‌شود که روی نیمهٔ چپ A قرار دارد. چون مرتبهٔ عدد مفروض ۲ — می‌باشد لذا مرتبهٔ مجذور ۵ — = ۱ — (۲ —) ۲ خواهد شد. یعنی داریم: $(۰,۰۰۲)^۲ = ۰,۰۰۰۰۰۴$

مثال ۱ــ حاصل $(۶,۸۸)^۲$ را بدست آورید. جواب ۴۷۳ می‌شود که در

نیمهٔ راست مدرج A قرار دارد. لذا مرتبهٔ مجذور ۲ خواهد بود یعنی داریم:

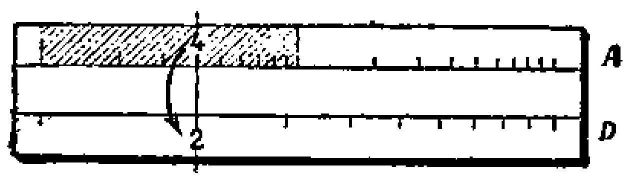
$$(۶,۸۸)^{۲} = ۴۷,۳$$

تمرین ۳۴ـ قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ مجذور را ثابت کنید (راهنمائی: باید خود عدد را روی مقیاسهای C و D در خودش ضرب کرد و دید که حاصلضرب روی کدام نیمهٔ A قرار می‌گیرد و در این حال خطکش متحرک چه موقع به‌راست یا به چپ حرکت می‌کند).

تمرین ۳۵ـ حساب کنید: $۲,۳۶^{۲}$ و $۰,۴۹۵^{۲}$ و $۷۹,۵^{۲}$ و $۱,۱۶۵^{۲}$ و $۰,۱۰۵^{۲}$ و $۰,۹۶۸^{۲}$ و $۳,۳۷^{۲}$ و $۰,۰۰۶۹۲^{۲}$ را.

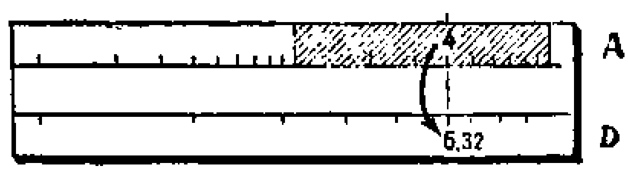
استخراج جذر: اگر عددی را روی مقیاس A قرار دهیم جذر آن را روی مقیاس D مقابل خودش پیدا می‌کنیم.

مثال ۱ــ حساب کنید $\sqrt{۴}$ را. خــط رؤیت شاخص را روی عــدد ۴ از مقیاس A مـی‌گذاریم و جواب را روی D می‌خوانیم (شکل ۴۱).



ش ۴۱

مثال ۲ــ حساب کنید $\sqrt{۴۰}$ را. خــط رؤیت شاخص را روی عــدد ۴۰ (نیمهٔ راست مقیاس A) می‌گذاریم و جــواب را کــه ۶,۳۲ مــی‌بــاشد روی D می‌خوانیم (شکل ۴۲).



ش ۴۲

عدد ۴ را درمثال اول، روی نیمهٔ اول و در مثال دوم روی نیمهٔ دوم مقیاس A قرار دادیم و در نتیجه جوابهای مختلف پیدا کردیم. لذا برای اینکه بدانیم چه موقعی باید عدد را روی نیمهٔ چپ و چه موقعی روی نیمهٔ راست A بگذاریم از قاعدهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

قاعدهٔ استخراج جذر

۱ــ عدد را به گروههای ۲ پیکری تقسیم می‌کنیم (اگر عدد بزرگتر یا مساوی واحد باشد از سمت چپ ممیز و اگر کوچکتر از ۱ باشد از سمت راست ممیز شروع می‌کنیم).
۲ــ ببینیم اگر عدد $\geqslant$ ۱ است چند پیکر در آخرین گروه سمت چپ و اگر عدد $<$ ۱ است چند پیکر با معنی در گروه بلافاصله بعد از گروههای صفر محض دارد.
۳ــ اگر تعداد این پیکرها یکی باشد عدد را روی نیمهٔ چپ واگر دوتا باشد آن را روی نیمهٔ راست A قرار می‌دهیم.
۴ــ اگر عدد زیر رادیکال $\geqslant$ ۱ باشد مرتبهٔ ریشه مساوی تعداد گروهها (منجمله گروههای ناقص) و اگر عدد زیر رادیکال $<$ ۱ باشد مرتبهٔ آن مساوی عدهٔ گروههای صفر محض است با علامت منفی.

این قاعده را با قاعدهٔ استخراج جذر در جبر مقایسه و به انطباق روشها در تعیین پیکرهای ریشه دقت کنید.

مثال ۳ــ حساب کنید $\sqrt{۳۰۰}$ و $\sqrt{۰٫۰۰۰۰۰۳}$ را.

۱ــ ۳٫۰۰ دارای دو گروه

۲ــ در گروه دوم فقط یک پیکر وجود دارد.

۳ــ پس عدد را روی نیمهٔ چپ A می‌گذاریم و جواب ۲ ــ ۳ ــ ۷ ــ ۱ می‌شود.

۴ــ چون تعداد گروهها ۲ بود مرتبهٔ ریشه ۲ + و جواب:

$\sqrt{۳۰۰} = ۱۷٫۳۲$

می‌شود.

۱ــ ۰٫۰۰،۰۰،۰۳ دارای دو گروه صفر محض.

۲ــ در گروه بعد از گروههای صفر محض فقط یک پیکر با معنی هست.

۳ــ پس عدد را روی نیمهٔ چپ A می‌گذاریم و جواب ۲ ــ ۳ ــ ۷ ــ ۱ می‌شود.

۴ــ چون تعداد گروههای صفر محض ۲ بود پس مرتبهٔ ریشه ۲ ــ و جواب:

$\sqrt{۰٫۰۰۰۰۰۳} = ۰٫۰۰۱۷۳۲$

می‌شود.

مثال ۴ــ حساب کنید $\sqrt{۵۰۰۰}$ و $\sqrt{۰٫۰۰۰۰۰۰۰۵۰}$ را.

۱ـ ۵۰٫۰۰ دارای دو گروه

۲ـ در گروه انتهائی دو پیکر داریم.

۳ـ پس عدد را در نیمهٔ راست A می‌گذاریم و داریم: ۷ ـ ۰ ـ ۷

۴ـ چون تعداد گروهها ۲ بود پس مرتبهٔ ریشه ۲ + و: $\sqrt{۵۰۰۰} = ۷۰٫۷$ می‌شود.

۱ـ ۰٫۰۰،۰۰،۰۰،۵۰ دارای ۳ گروه صفر محض.

۲ـ گروه بعد از گروههای صفر محض دارای دو پیکر با معنی است.

۳ـ عدد را روی نیمهٔ راست A می‌گذاریم و داریم: ۷ ـ ۰ ـ ۷

۴ـ چون تعداد گروههای صفر محض ۳ بود پس داریم:

$$\sqrt{۰٫۰۰۰۰۰۰۵۰} = ۰٫۰۰۰۷۰۷$$

تمرین ۳۶ـ مقادیر زیر را بدست آورید:

$\sqrt{۵۲٫۵}$ و $\sqrt{۰٫۶۳۵}$ و $\sqrt{۱۴٫۴}$ و $\sqrt{۰٫۰۷۱}$ و $\sqrt{۸۹۵}$ و $\sqrt{۰٫۰۰۰۲}$ و $\sqrt{۱۰۸}$ و $\sqrt{۱۰٫۵}$

تبصرهٔ ۱ـ برای تعیین مرتبهٔ جذر یا مجذور از طریقهٔ زیر نیز می‌توانیم استفاده کنیم. فرض کنیم می‌خواهیم مقدار $(۰٫۰۱۶۲)^۲$ را حساب کنیم می‌نویسیم:

$$(۰٫۰۱۶۲)^۲ = (۱٫۶۲ \times ۱۰^{-۲})^۲ = ۱٫۶۲^۲ \times ۱۰^{-۴}$$
$$= ۲٫۶۲ \times ۱۰^{-۴} = ۰٫۰۰۰۲۶۲$$

و همچنین برای محاسبهٔ $\sqrt{۱۶۲۰}$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{۱۶۲۰} = \sqrt{۱۶٫۲ \times ۱۰^۲} = ۴٫۰۲۵ \times ۱۰ = ۴۰٫۲۵$$

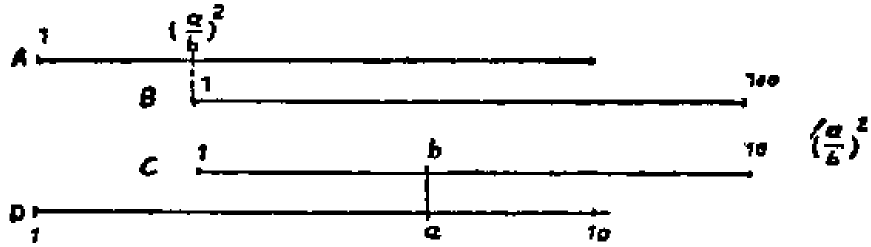
و بالاخره برای محاسبهٔ $\sqrt{۰٫۰۰۰۵}$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{۰٫۰۰۰۵} = \sqrt{۵٫۰ \times ۱۰^{-۴}} = ۲٫۲۴ \times ۱۰^{-۲} = ۰٫۰۲۲۴$$

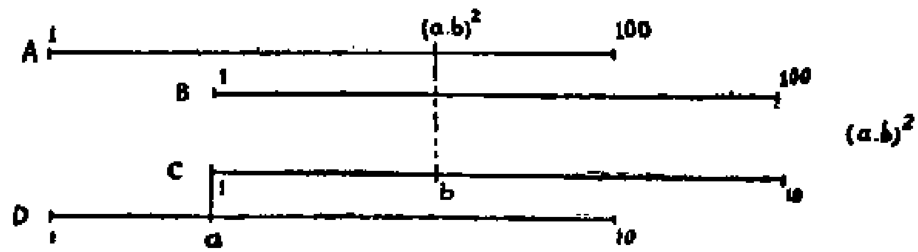
لذا قاعدهٔ زیر را بدست می‌آوریم: هنگام مجذور کردن عددی، آنقدر مضرب ۱۰ از آن جدا می‌کنیم تا باقیمانده کمتر از ۱۰ و هنگام جذر گرفتن، آنقدر مضرب زوج ۱۰ از آن جدا می‌کنیم تا باقیمانده کمتر از ۱۰۰ شود. استعمال این روش وسیله‌ای برای تحقیق ذهنی صحت مسئله هم هست.

تبصرهٔ ۲ـ با استفاده از مقیاسهای A و B و C و D مسائل زیر بسهولت حل می‌شوند (وقتی که محاسبه‌ای شامل مربع عددی مثل $a^۲$ بود حتماً باید از مقیاسهای C یا D شروع کنیم تا مجذور را روی A یا B ببینیم). شکلهای ۴۳ تا ۴۸ راه‌حلها را به ما ارائه می‌دهند:

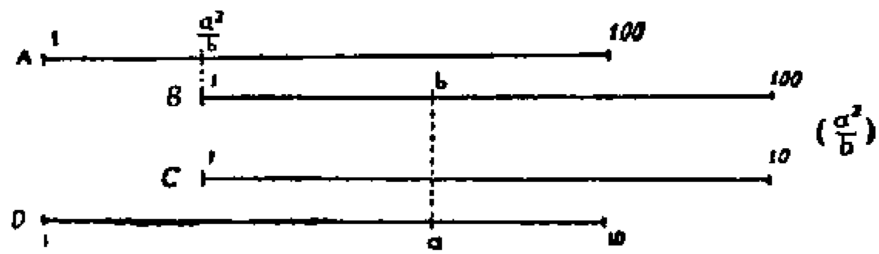
ش ٤٣



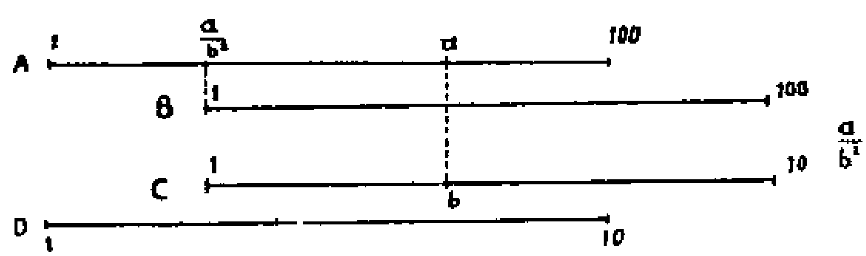
ش ٤٤



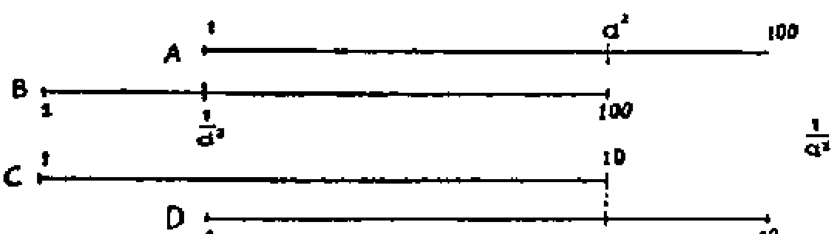
ش ٤٥



ش ٤٦

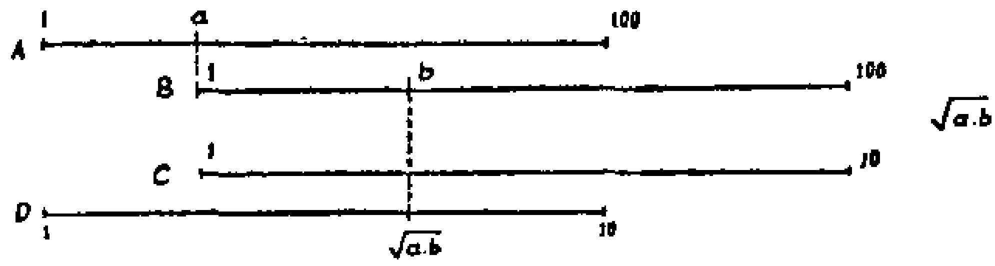


ش ٤٧

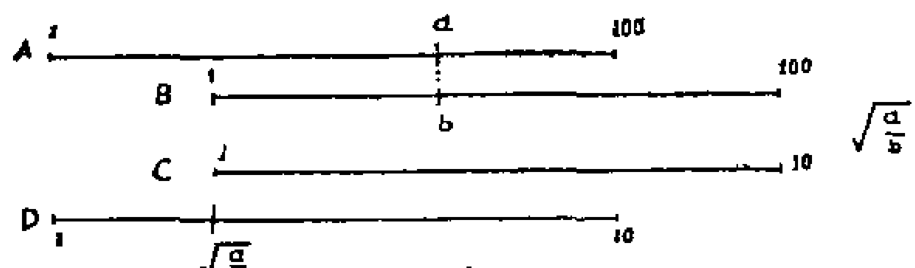


ش ٤٨

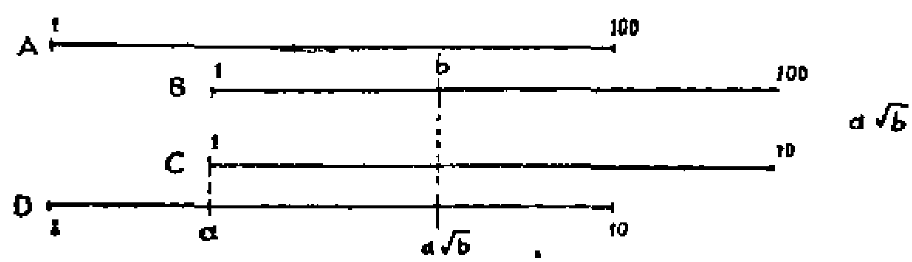
اگر در محاسبات، جذر عددی موجود باشد حتماً باید از مقیاسهای A یا B شروع کرد تا ریشه‌ها را روی مقیاسهای C و D دید. در این حال باید اعداد را با دقت روی نیمه‌های مدرج A یا B قرار داد. شکلهای ۴۹ تا ۵۴ حل چند مسئله را به ما می‌دهند.



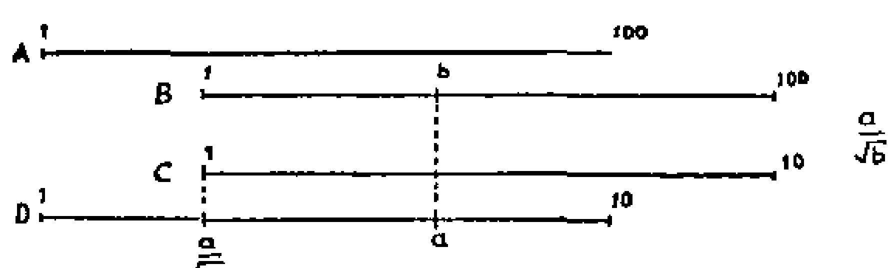
ش ۴۹



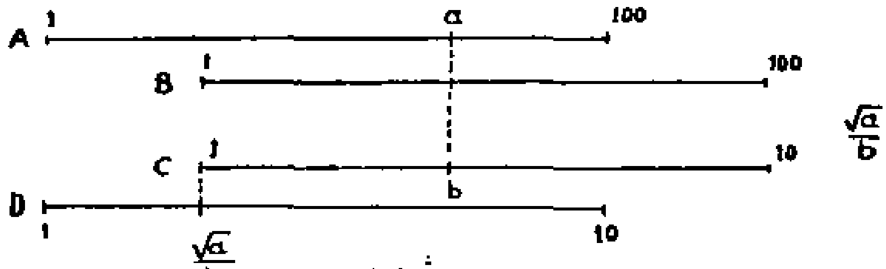
ش ۵۰



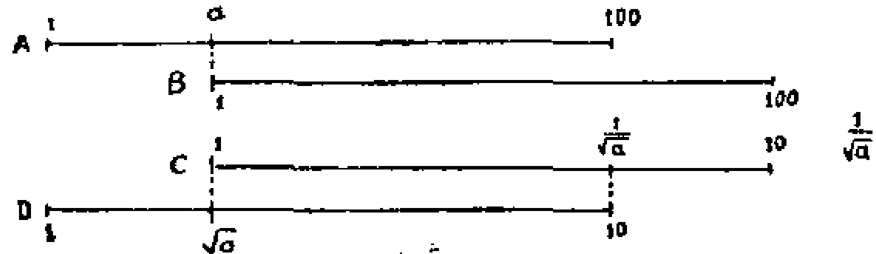
ش ۵۱



ش ۵۲



ش ۵۳



ش ۵۴

۱۷ـ حل چند مسئلهٔ اساسی

مسئلهٔ ۱ـ d طول قطر دایره‌ای در دست است. مساحت دایره را پیدا کنید.

حل ـ فرض می‌کنیم $c = \sqrt{\frac{۴}{\pi}} = ۱{,}۱۲۸$ باشد (این مقدار روی مقیاسهای C و D در بعضی خطکشها با حرف c نموده شده است). حال مساحت دایره را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \pi R^{۲} = \left(\frac{d^{۲}}{۴}\right)\pi = \frac{d^{۲}}{\frac{۴}{\pi}} = \frac{d^{۲}}{c^{۲}} = \left(\frac{d}{c}\right)^{۲}$$

دیده می‌شود که بسهولت این عبارت قابل محاسبه است.

محاسبهٔ مساحت دایره توسط خطکشهایی که شاخص آنها دارای ۳ خط موئی است، ساده‌تر از این می‌باشد. مقدار c به ترتیب زیر در محاسبه وارد می‌شود: روی شاخص در دو طرف خط موئی اصلی دو خط موئی کوتاه، یکی به محاذات A و B و دیگری به محاذات C و D عمود بر مقیاس رسم شده است. اگر طول خطکش برابر ۲۵^{cm} باشد فاصلهٔ بین هریک از این دو خط موئی تا خط موئی وسط برابر: $۲۵ \log c = ۱۲{,}۵ \log c^{۲}$ خواهد بود. لذا مثلاً اگر بخواهیم مساحت دایره‌ای به قطر $d = ۷۷{,}۸$ اینچ را پیدا کنیم خط

موئی کوتاه را روی عدد ۷۷٫۸ از مقیاس D می‌گذاریم و مساحت دایره را زیر خط موئی اصلی روی مقیاس A می‌خوانیم: $A = ۴۷۵۰^{in^۲}$. بالعکس اگر مساحت دایره‌ای $A = ۷۵۰^{cm^۲}$ باشد وقتی خط موئی اصلی را روی عدد ۷۵۰ از مدرج A قرار دهیم زیرخط موئی کوتاه روی مقیاس D طول قطر $d = ۳۰۹$ بدست می‌آید. (می‌توانستیم خط موئی کوتاه سمت چپ را روی عدد ۷۵۰ از مقیاس A بگذاریم و جواب را زیر خط موئی اصلی روی مقیاس D بخوانیم).

برای تهیهٔ جدولی برای مساحت و قطر دایره به طریق زیر عمل می‌کنیم: خط موئی اصلی را روی مبدأ A قرار می‌دهیم و خط‌کش متحرک را آنقدر حرکت می‌دهیم تا مبدأ B زیر خط موئی کوتاه طرف راست شاخص واقع شود. در این حال کمیات مقیاس D برعدد c تقسیم شده است بطوری که اگر خط موئی اصلی را روی عدد d از مقیاس D بگذاریم نسبت $\left(\frac{d}{c}\right)^۲$ یعنی مساحت A روی مقیاس B در زیر خط موئی اصلی بدست می‌آید:

d	۱۸	۲۷٫۳	۵٫۳۸	۴۳۷	۱۲٫۴	۹٫۶	۲۶٫۸	۳۸٫۲	۶٫۱۹
A	۲٫۵۵	۵۸۵	۲۲٫۸	۱۵۰۰۰۰	۱۲۰٫۸	۷۲٫۴	۵۶۴	۱۱۴۶	۳۰٫۱

در بعضی حالات ممکن است قرار دادن مساحت در روی مدرج A زیر خط موئی کوتاه طرف چپ مقدور نباشد. در این صورت به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: وقتی خط موئی اصلی را روی قطر d قرار دادیم خط‌کش متحرک را آنقدر تغییر مکان می‌دهیم تا مبدأ مدرج B زیر خط کوتاه طرف چپ شاخص قرار گیرد و جواب را روی مدرج A بالای منتهای خط‌کش متحرک می‌خوانیم. مثلاً اگر $d = ۱۰٫۶۴^{in}$ باشد مساحت دایره خواهد شد $A = ۸۸٫۹^{in^۲}$.

این حالت استثنا فقط موقعی پیش می‌آید که قطر دایره روی D در فاصلهٔ ۱ و ۱۱۲۸ واقع شود.

مسئلهٔ ۲ــ مطلوب تعیین جدولی است برای تبدیل اینچ به سانتیمتر و بالعکس.

حل ــ می‌دانیم که بین اینچ و سانتیمتر رابطهٔ زیر برقرار است:

$$C = ۲٫۵۴\, I$$

یعنی $۱^{in} = ۲,۵۴^{cm}$. پس اگر عدد ۲,۵۴ از مقیاس C را مقابل رقوم ۱ از مقیاس D قرار دهیم در مقابل اعداد ۲ و ۳ و ۴ و . . . از مقیاس D به ترتیب مقادیر $۲,۵۴^{cm} \times ۲$ و $۲,۵۴^{cm} \times ۳$ و $۲,۵۴^{cm} \times ۴$ و . . . روی C خوانده می‌شود مثلاً: $۱,۵۵^{in} = ۳۹,۴^{mm}$ است. بدیهی است برای محاسبهٔ مقادیری که روی مقیاس C خارج از مقیاس D قرار می‌گیرند باید از مقیاسهای DF و CF استفاده کرد:

سانتیمتر	۶۶	۳۰,۵	۴۸,۳	۵۵,۹	۷۸,۷	۹۶,۵	۱۱۴,۲	۱۳۲	۱۵۵
اینچ	۲۶	۱۲	۱۹	۲۲	۳۱	۳۸	۴۵	۵۲	۶۱

مسئلهٔ ۳ــ مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

$$\sqrt{\frac{\pi \times ۲۲,۹ \times ۱۲,۶۷^۲}{۶۳,۲ \times ۰,۰۵۶}}$$

حل ــ ابتدا مقدار زیر رادیکال را ساده می‌کنیم و بعد آن را از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم. مراحل عملیات:

۱ــ خط رؤیت شاخص را روی عدد π از مقیاس D گذارده عدد ۶۳۲ از مقیاس C را زیر این خط موئی قرار می‌دهیم.

۲ــ حال خط موئی شاخص را روی عدد ۲۲۹ از مقیاس C گذارده عدد ۵۶ از همین مقیاس را زیر خط موئی قرار می‌دهیم.

۳ــ خط رؤیت شاخص را روی رقم ۱ از منتهای مقیاس C گذارده واحد مبنای همین مقیاس را زیر خط موئی قرار می‌دهیم.

۴ــ خط رؤیت شاخص را روی عدد ۱۲۶۷ از مقیاس C می‌گذاریم و روی B زیر همین خط موئی عدد ۱۶۰۵ را می‌خوانیم. (یعنی $۱۲,۶۷^۲ = ۱۶۰۵$)

۵ ــ روی مقیاس D مقابل عدد ۱۶۰۵ از مقیاس C عدد ۳۲۵۵ را می‌بینیم. و اگر ممیز را طبق یکی از دو قاعده‌ای که قبلاً ذکر کرده‌ایم حساب کنیم خواهیم دید که جواب باید ۴ پیکر صحیح داشته باشد، یعنی برای مقدار زیر رادیکال داریم: ۳۲۵۵. محاسبهٔ جذر این عدد دیگر آسان است.

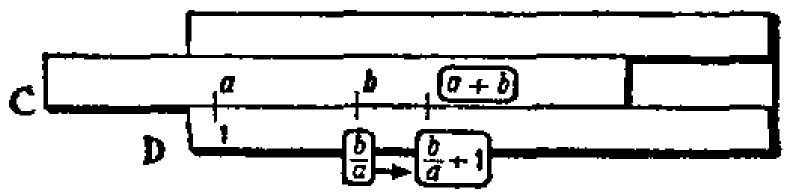
مسئلهٔ ۴ــ مطلوب است محاسبهٔ عباراتی نظیر:

$$\sqrt{x}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b} \text{ و } \sqrt{a^۲+b^۲}$$

حل ــ ابتدا ساده‌ترین صورت آن یعنی $a + b$ را حساب می‌کنیم. با توجه به قانون تناسبات (شکل ۵۵) داریم:

(b در روی C سمت راست a فرض شده است)

$$\frac{a}{۱}=\frac{b}{\frac{b}{a}}=\frac{a+b}{\frac{b}{a}+۱}$$



ش ۵۵

یعنی در مقابل عدد $۱ + \frac{b}{a}$ از مقیاس D، عدد $a + b$ روی مقیاس C قراردارد. پس برای بدست آوردن مجموع $a + b$ عامل سمت چپ (نسبت به b) یعنی عدد a از مقیاس C را مقابل مبدأ مقیاس D قرار می‌دهیم و در مقابل عامل دیگر b از مقیاس C، روی مقیاس D نسبت $\frac{b}{a}$ را می‌خوانیم و یکی به آن اضافه می‌کنیم تا $۱ + \frac{b}{a}$ روی D بدست آید. حال در مقابل این عدد روی مقیاس C مجموع $a + b$ خوانده می‌شود.

تمرین ۳۷- تفاضل $a - b$ را چطور پیدا می‌کنید؟

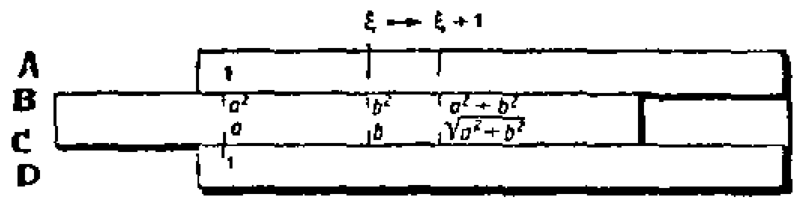
تمرین ۳۸- نتایج اعمال زیر را حساب کنید:

$۲ + ۳$ و $۵ + ۲$ و $۲,۵ + ۶,۵$ و $۸ + ۷$ و $۵ - ۲$ و $۵,۵ - ۴,۵$

بدیهی است استعمال خط کش برای محاسبهٔ جمع و تفریق بیمعنی است. ولی وقتی محاسبهٔ عباراتی به صورت $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ پیش می‌آید محاسبهٔ فوق سودمند واقع می‌شود.

برای محاسبهٔ $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ باید مربعهای اعداد a و b را با هم جمع کرد. لذ همان قاعدهٔ جمع $a + b$ را بکار می‌بریم منتها به جای مقیاس D از

مقیاس A استفاده می‌کنیم و نتیجهٔ $\sqrt{a^۲+b^۲}$ را همانطـور، مثـل حالت سادهٔ جمع $a+b$، روی C بدست مـی‌آوریم (شکـل ۵۶). در شکل زیر $\xi=\frac{b^۲}{a^۲}$ فرض شده است.



ش ۵۶

مـثلاً فرض کنیم محاسبهٔ مقـدار $x=\sqrt{۱,۲۵^۲+۲^۲}$ منظور بـاشد: ابتدا عدد ۱,۲۵ از مقیاس C را مقابل مبدأ D می‌گذاریم و مقـابل عـدد ۲ از مقیاس C، روی مقیاس A عدد $\xi=۲,۵۶$ را می‌خوانیم. بعـد در مقابـل عدد $۳,۵۶=۱+\xi$ از مقیاس A جواب را روی C می‌خوانیم: $x=۲,۳۶$.

همچنین برای محاسبهٔ $y=\sqrt{۳۲^۲+۴۸^۲}$ ابتدا عـدد ۳۲ از مقیاس C را مقابل مبدأ مقیاس D قـرار می‌دهیم و در مقابـل عـدد ۴۸ از مقیاس C روی مقیاس A عـدد $۲,۲۶=\xi$ را می‌خوانیم. بعد در مقابل عدد $۳,۲۶=۱+\xi$ از مقیاس A جواب را روی مقیاس C می‌یـابیم: $y=۵۷,۷$

تمرین ۳۹ ـ حساب کنید مقادیر:

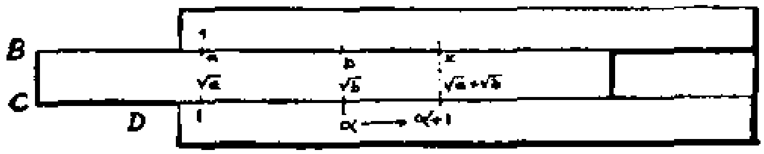
$\sqrt{۳,۴۶^۲+۴,۱۲^۲}$ و $\sqrt{۶,۹۵^۲+۱,۱۶^۲}$ و $\sqrt{۲,۴۷^۲+۵,۶۷^۲}$ و $\sqrt{۳,۱^۲-۱,۵^۲}$ را.

تمرین ۴۰ ـ حساب کنید مقادیر:

$\sqrt{۰,۹۲^۲+۱,۱۲^۲}$ و $\sqrt{۲,۱^۲-۱,۶^۲}$ را.

توجه: باید مرتبهٔ ξ را حساب و در صورت لـزوم از «جهش» استفـاده کـرد.

تبصره: شکل ۵۷ راه‌حل معادلاتی به صورت $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{x}$ را نشان می‌دهد ($\alpha=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ فرض شده است).



ش ۵۷

۱۸ ـ کعب و مکعبات

برای محاسبهٔ مکعبهای اعداد از مقیاس K استفاده می‌کنیم. این مقیاس از ۳ قسمت مساوی که عین یکدیگر مدرج شده‌اند تشکیل شده است. لذا هر یک از تقسیمات آن ۳ برابر ریزتر از تقسیم نظیرش در مقیاس D می‌باشد. چون تقسیمات D متناسب با : $\log d$ است (d عددی در روی D فرض شده است) پس تقسیمات مدرج K متناسب با : $۲۵ \log d = \frac{۲۵}{۳} \log k$ (k عددی روی مقیاس K و طول D برابر ۲۵ فرض شده است) ویا $\log k = ۳ \log d$ و یا $k = d^۳$ می‌باشد. بنابراین هر عدد از مقیاس D مقابل مکعب خودش در روی مقیاس K قرار گرفته است. قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ توان سوم و یا ریشهٔ سوم یک عدد :

قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ مکعب یك عدد

> اگر مکعب عددی در ثلث آخر (طرف راست) مدرج K قرار گیرد مرتبهٔ آن ۳ برابر مرتبهٔ عددی است که به توان سوم رسیده و اگر در ثلث دوم (وسط) K واقع شود مرتبهٔ آن ۳ برابر مرتبهٔ عددی است که به توان رسیده منهای ۱. و اگر در ثلث اول واقع شود مرتبهٔ آن ۳ برابر مرتبهٔ عدد مفروض است منهای ۲.

مثال ۱ـ حساب کنید مقدار $(۱,۷۲۵)^۳$ را. شاخص را روی عدد ۱۷۲۵ از مدرج D می‌گذاریم. جواب در ثلث اول K قرار می‌گیرد و برابر: $۵ - ۱ - ۳$ می‌شود چون مرتبهٔ عددی که به توان رسیده است ۱ می‌باشد پس مرتبهٔ مکعب آن برابر : $۱ = ۲ - (۱ +) \times ۳$ می‌شود. لذا داریم:

$$(۱,۷۲۵)^۳ = ۵,۱۳$$

قاعدهٔ ستخر ج کعب

۱ــ عدد زیر رادیکال را به گروههای ۳ پیکری تقسیم می‌کنیم. بدیهی است اگر عدد $\geqslant$ ۱ باشد تقسیمات از طرف چپ ممیز، و اگر عدد $<$ ۱ باشد از طرف راست ممیز شروع می‌شود.

۲ــ ببینیم که اگر عدد $\geqslant$ ۱ است چند پیکر درآخرین گروه سمت چپ و اگر عدد $<$ ۱ است چند پیکر با معنی در گروه بلافاصله بعد از گروههای صفر محض وجود دارد.

۳ــ اگر تعداد پیکرهای این گروه فقط یکی بود عدد را در ثلث اول (سمت چپ) و اگر دوتا بود در ثلث دوم و اگر ۳تا بود عدد را در ثلث سوم (طرف راست) مقیاس K قرار می‌دهیم.

مرتبهٔ ریشه اگر عدد زیر رادیکال $\geqslant$ ۱ باشد مساوی تعداد گروهها و اگر عدد $<$ ۱ باشد مساوی تعداد گروههای صفر محض است با علامت منفی.

مثال ۲ــ حساب کنید مقادیر $\sqrt[3]{۷۷۰۰}$ و $\sqrt[3]{۰٫۰۰۰۰۰۷۷}$ را.

۱ــ عد ۷٬۷۰۰ دارای دوگروه است.

۲ــ در گروه انتهائی نقط یک پیکر وجود دارد.

۳ــ پس عدد را در ثلث اول مدرج K می‌گذاریم:

۴ــ جواب را روی مقیاس D مقابل آن می‌خوانیم: ۵ — ۷ — ۹ — ۱

۵ــ چون ۲ گروه داریم مرتبهٔ عدد ۲ است.

لذا داریم $\sqrt[3]{۷۷۰۰} = ۱۹٫۷۵$

۱ــ ۰٬۰۰۰٬۰۰۷٬۷ دارای یک گروه صفر محض است.

۲ــ گروهی که بلافاصله بعد از گروه صفر محض می‌آید یک پیکر با معنی دارد.

۳ــ پس عدد را در ثلث اول مدرج K می‌گذاریم.

۴ــ جواب را روی D می‌خوانیم:

۵ — ۷ — ۹ — ۱

۵ ــ چون یک گروه صفر محض داریم مرتبهٔ عدد ۱ — است.

لذا داریم:

$\sqrt[3]{۰٫۰۰۰۰۰۷۷} = ۰٫۰۱۹۷۵$

تمرین ۴۱ ـ حاصل اعداد زیر را بدست آورید:

$۱,۶۲^۳$ و $۰,۰۷۱^۳$ و $۰,۶۴۵^۳$ و $۴,۲۳^۳$

تمرین ۴۲ ـ حاصل اعداد زیر را بدست آورید:

$\sqrt[۳]{۰,۰۰۴۳}$ و $\sqrt[۳]{۴,۶۲}$ و $\sqrt[۳]{۰,۱۰۶}$ و $\sqrt[۳]{۷۲,۵}$

۱۹ ـ تناسباتی که عناصر آنها شامل مربعات و مکعبات اعداد هستند

در مبحث ۱۴ دیدیم که اگر اعدادواقع روی مقیاس D را با x و اعداد واقع روی C را با y نمایش دهیم نسبت $\frac{x}{y}$ مقداری است ثابت و این مقدار ثابت برای تمام اعدادی که در یک تثبیت روی این دو مقیاس مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند، یکی است. حال اگر اعداد واقع روی A را با z و اعداد واقع روی K را با u نشان دهیم و این اعداد را با اعداد واقع روی C بسنجیم خواهیم داشت:

$$\frac{z_۱}{y_۱^۲} = \frac{z_۲}{y_۲^۲} = \dots = \frac{z_k}{y_k^۲} \quad \text{و} \quad \frac{u_۱}{y_۱^۳} = \frac{u_۲}{y_۲^۳} = \dots = \frac{u_k}{y_k^۳}$$

با توجه به‌این نکته، دو مسئلهٔ اخیر بسهولت حل می‌شود:

۱ـ مطلوب تعیین اعدادی است که با مربعات یک رشته اعداد مفروضی متناسب باشند.

۲ـ مطلوب تعیین اعدادی است که با مکعبات یک رشته اعداد مفروضی متناسب باشند.

مثال ۱ـ مقادیر $S = ۴۹۱t^۲$ را به‌ازای ۷,۷۵ و ۵,۶۵ و ۴,۲ و $t = ۴$ حساب کنید.

حل ـ اگر مقادیر t را روی C اختیار کنیم مقادیر S متناظر با آنها روی مقیاس A خوانده خواهد شد. از طرفی می‌بینیم که به ازای $t = ۱$ داریم: $S = ۴۹۱$. یعنی اگرمنتهای (یا مبدأ) خط‌کش متحرک را در مقابل عدد ۴۹۱ از مقیاس A قرار دهیم تمام اعداد خواسته شده متناظراً روی مقیاسهای C و A مقابل هم قرار خواهند گرفت.

مثال ۲ــ مقدار $u = z^{۱,۵} = \sqrt{z^۳}$ را به ازای مقدار معینی از z حساب کنید .

حل ــ اگر z را روی مقیاس A قرار دهیم بدیهی است u را مقابل آن روی مقیاس K پیدا خواهیم کرد، زیرا می‌دانیم که $u = y^۳$ و $z = y^۲$ و یا $y = \sqrt{z}$ است پس $u = (\sqrt{z})^۳ = \sqrt{z^۳}$ خواهد شد. مثلاً اگر بخواهیم $۲,۱^{۱,۵}$ را حساب کنیم عدد ۲,۱ را روی مقیاس A قرار می‌دهیم و جواب را مقابل آن روی مقیاس K می‌خوانیم: $u = ۳,۰۴$.

تمرین ۴۳ - مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ را از تساویهای زیر بدست آورید:

$$\frac{x_۱}{۱,۱۶^۲} = \frac{x_۲}{۱,۴۵^۲} = \frac{x_۳}{۱,۶۵^۲} = \frac{۶,۵۵}{۲,۰۱^۲}$$

تمرین ۴۴ - مقادیر a و b و c و d را از تساویهای زیر بدست آورید:

$$\frac{۴,۷۵}{a^۲} = \frac{۵,۶۲}{b^۲} = \frac{۶,۵۰}{c^۲} = \frac{۷,۱۰}{d^۲} = \frac{۸,۰۰}{۱,۶۲}$$

تمرین ۴۵ - مقادیر α و β و γ را از تساویهای زیر بدست آورید:

$$\frac{۲,۵۵}{\alpha^۳} = \frac{۴,۶۵}{\beta^۳} = \frac{۷,۷۰}{\gamma^۳} = \frac{۱۱,۲}{\pi} \quad (\pi = ۳,۱۴۱۶)$$

در کلیهٔ محاسباتی از این قبیل، خط کش محاسبه وسیلهٔ بسیار مناسب و ساده‌ای است. زیرا فقط با یک تثبیت یک رشته نتیجه بدست خواهیم آورد. برای تعیین مرتبهٔ نسبتها نیز می‌توان قاعده‌ای ذکر کرد ولی بهتراست که آن را ذهناً حساب کنیم. اگر در بعضی جاها ناگزیر به جهش دادن خط کش متحرک شدیم باید قاعدهٔ کلی زیر را رعایت کنیم:

اول باید تمام نتایجی را که بدون جهش بدست می‌آیند حساب و یادداشت کنیم آنگاه از جهش استفاده کنیم و بقیهٔ محاسبه را انجام دهیم. مثلاً در تساوی:

$$\frac{۹,۰}{۶,۳۵^۲} = \frac{۸,۰}{P^۲} = \frac{۳,۰}{Q^۲} = \frac{۰,۵}{R^۲} = \frac{۰,۲}{S^۲} = \frac{۰,۱۵}{T^۲}$$

وقتی ۳,۶۵ را روی مقیاس C در مقابل ۹,۰ از مقیاس A (در نیمهٔ چپ آن) قرار می‌دهیم $P = ۵,۹۸$ و $Q = ۳,۶۷$ می‌شود. برای پیدا کردن R باید از جهش خط کش متحرک استفاده کرد (۰,۵ را روی نیمهٔ راست مقیاس A قرار

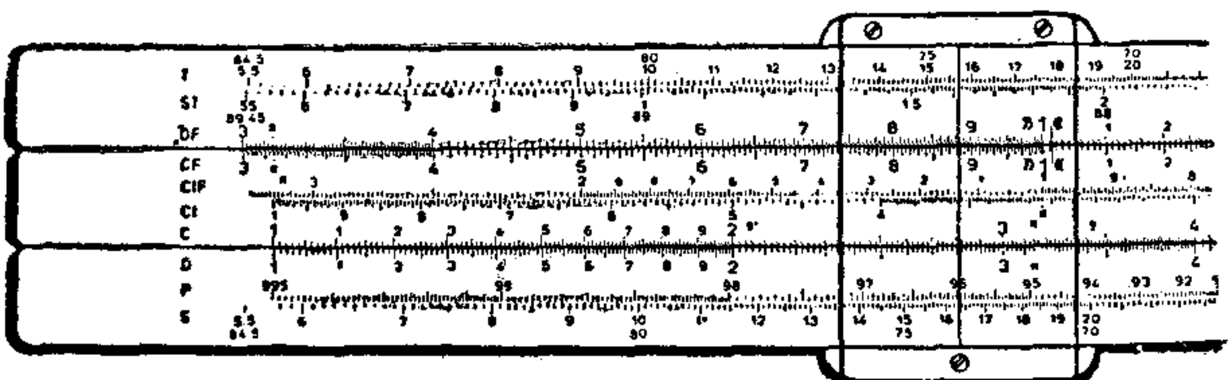
داد) ولی S و T مثل P و Q در همان نیمهٔ اول پیدا می‌شوند. بدین جهت باید اول مقادیر S و T را هم یادداشت کرد و بعد دنبال پیدا کردن R رفت.

۲۰ ـ CI یا مقیاس عکس اعداد و تا شدهٔ آن یعنی CFI

مقیاس CI (inverted — C) عین مقیاس C است با این تفاوت که در جهت عکس آن یعنی از راست به چپ مدرج شده است. وقتی خط کش بسته است دیده می‌شود که حاصلضرب هر دو عدد مقابل واقع روی C و CI مساوی ۱۰ است. زیرا اگر c عددی روی مقیاس C و $c_۱$ عدد مقابل آن روی مقیاس CI باشد داریم:

$$\log c + \log c_۱ = \log ۱۰ \text{ و یا } cc_۱ = ۱ \text{ و یا } c_۱ = \frac{۱}{c}$$

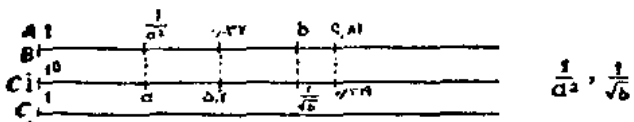
از اینجا معلوم می‌شود که در مقابل هر عدد از مقیاس C (یا D) عکس آن روی CI ثبت شده است. مثلاً در مقابل عدد ۲٫۸۲ از مقیاس D عکس آن یعنی ۰٫۳۵۵ روی CI خوانده می‌شود (شکل ۵۸).



ش ۵۸

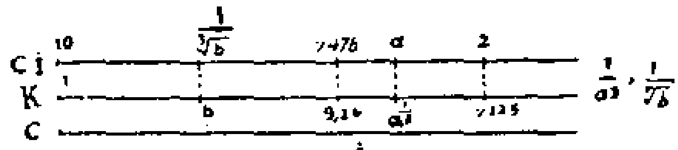
وقتی خط کش بسته است عکس مربعات وعکس جذر اعداد نیز بخوبی به‌کمک CI دیده می‌شود (شکل ۵۹). مثلاً داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۹,۸۱}} = ۰,۳۱۹ \text{ و } \frac{۱}{(۵,۲)^۲} = ۰,۰۳۷$$



ش ۵۹

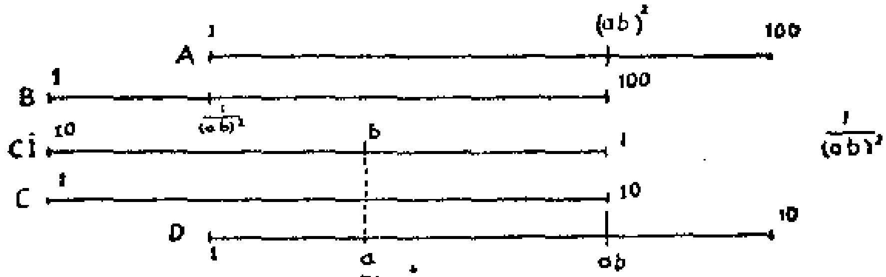
شکل ۶۰ عکس مکعبات و عکس ریشهٔ سوم اعداد را به ما می‌دهد:



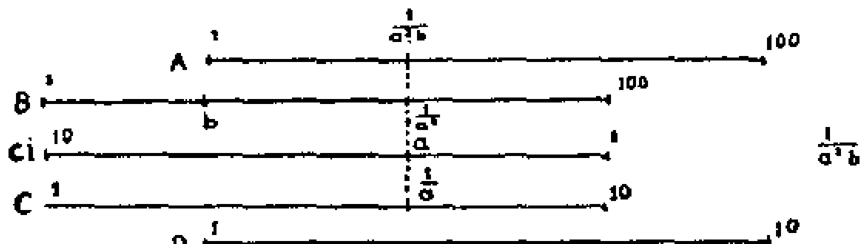
ش ۶۰

$$\frac{۱}{\sqrt{۹,۲۶}} = ۰,۴۷۴ \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲^۳} = ۰,۱۲۵$$

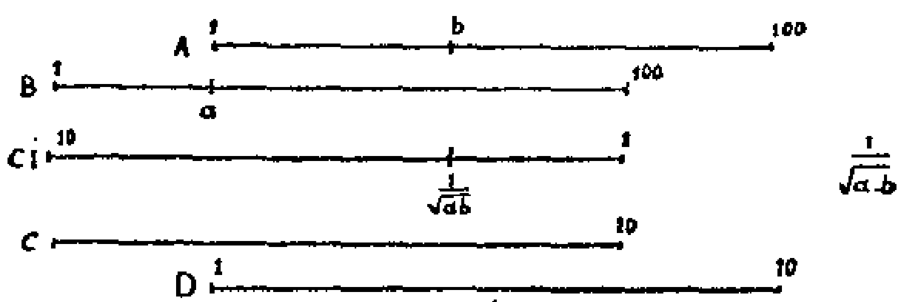
شکلهای ۶۱ و a ۶۱ و c ۶۱ و d ۶۱ راه حل چند مسئلهٔ ترکیبی را ارائه می‌دهند:



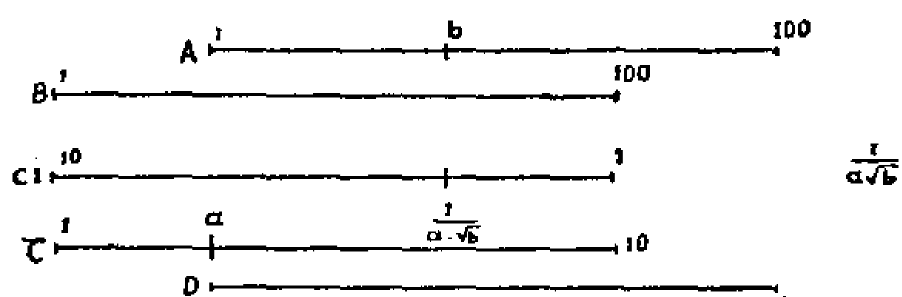
ش ۶۱



ش a ۶۱



ش c ۶۱



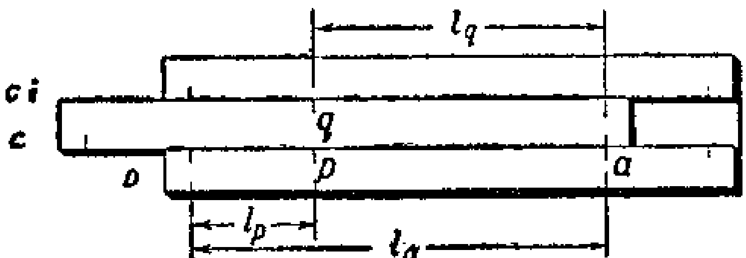
ش d ۶۱

تمرین ۴۶ - کسرهای زیر را حساب کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۰,۶۱۵}} \text{ و } \frac{۱}{\sqrt{۴۶,۵}} \text{ و } \frac{۱}{\sqrt{۱۳}} \text{ و } \frac{۱}{\sqrt{۵}} \text{ و } \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{و } \frac{۱}{۰,۷۲۵^{۲}} \text{ و } \frac{۱}{۰,۵۶^{۲}} \text{ و } \frac{۱}{۳,۴۸^{۲}} \text{ و } \frac{۱}{۲,۲۴^{۲}} \text{ و } \frac{۱}{۱,۲۶^{۲}}$$

چون در حالتی که خط کش بسته نیست باز هم حاصلضرب هر دو عدد از مقیاسهای D و CI که مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند مقداری است ثابت (شکل ۶۲)[۱] از این رو بسیاری از مسائل را می‌توانیم ساده‌تر حل کنیم و چنانکه بعداً خواهیم دید، این نکته در حل معادلات درجهٔ دوم نیز کمک مؤثری به‌ما خواهد کرد. از طرفی، چون هر ضربی که به‌کمک C و D صورت می‌گیرد معادل تقسیمی است که به‌کمک CI و D انجام می‌شود و بعلاوه هر تقسیمی را به‌«استقرار مجدد» خط کش متحرک می‌توان انجام داد لذا ساده‌تر این است که ضربهائی به صورت $a \cdot b$ را هم به صورت $\dfrac{a}{\frac{۱}{b}}$ بنویسیم تا حل مسائل ساده‌تر شود.



ش ۶۲

مثلاً برای حل معادلهٔ $۷,۸۴\,x = \dfrac{۰,۶۵۲}{۰,۳۸۴}$ آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x}{\frac{۱}{۷,۸۴}} = \frac{۰,۶۵۲}{۰,۳۸۴}$$

---

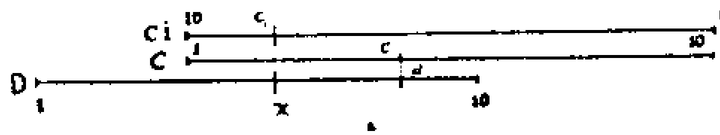
۱. علت این امر روشن است زیرا فرض می‌کنیم اعداد p و q مقابل یکدیگر و مبدأ cI مقابل عدد a از مقیاس D باشد. بدیهی است که داریم؛ $l_p + l_q = l_a$ که در آن l_a و l_p و l_q بترتیب فواصل نقاط به رقوم a و p و q است از مبدأها. چون داریم ،

$$l_a = m \log a \text{ و } l_q = m \log q \text{ و } l_p = m \log p$$

(واحد مقیاس m فرض شده است) پس داریم؛

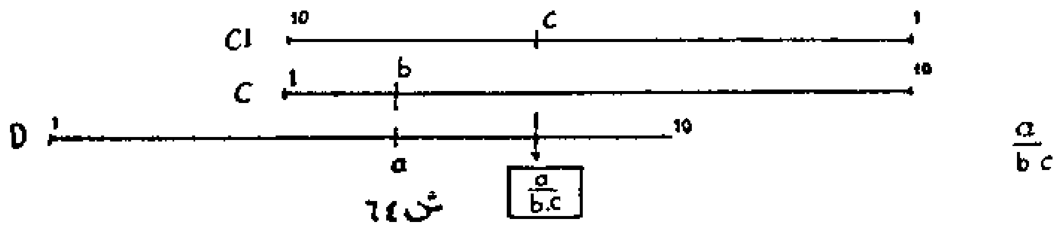
$m(\log p + \log q) = m \log a$ و یا $pq = a$ یعنی حکم ثابت است.

لذا اگر خط موئی شاخص را روی عدد ۶۵۲ از مقیاس D بگذاریم و بعد عدد ۳۸۴ از مقیاس C را زیر این خط موئی قراردهیم در این حال در مقابل عدد ۷۸۴ از مقیاس CI مقدار $x = $ ۰٫۲۱۶ را روی مقیاس D می‌بینیم: دیده می‌شود که خط کش متحرک فقط یک بار حرکت کرده است نه بیش (شکل ۶۳).

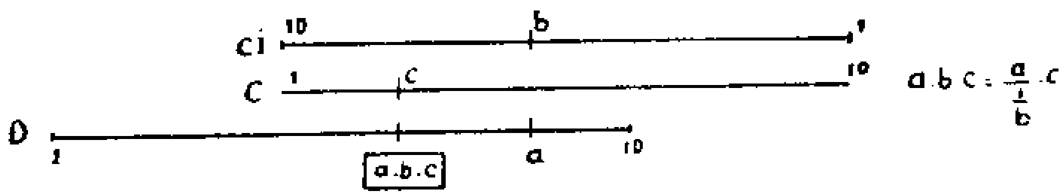


ش ۶۳

شکلهای ۶۴ و ۶۵ حل دو مسئله از این نوع را نشان می‌دهند:



ش ۶۴



ش ۶۵

مثال ۱ــ عدد ۲٫۶۷ را در چه عددی ضرب کنیم تا ۶٫۴۵ شود؟

حل ــ مبدأ CI را روی عدد ۶٫۴۵ از مقیاس D می‌گذاریم و در مقابل عدد ۲٫۶۷ از مقیاس CI روی مقیاس D جواب یعنی ۲٫۴۱ را می‌خوانیم.

مثال ۲ــ عبارت: ۲٫۶۱ × ۵٫۷۱ × ۳٫۲۴ را حساب کنید.

حل ــ ۲٫۶۱ از مقیاس D را مقابل ۵٫۷۱ از مقیاس CI می‌گذاریم و روی مقیاس D زیر عدد ۳٫۲۴ از مقیاس C جواب را می‌خوانیم: ۴۸٫۳.

مثال ۳ ــ حساب کنید عبارت :

۱٫۸۲۷ × ۲٫۶۸ × ۸۸ × ۰٫۴۳۶ × ۳۶۰ را.

حل ــ اول عبارت فوق را به صورت:

$$۱٫۸۲۷ \times \frac{۱}{\frac{۱}{۸۸}} \times ۲٫۶۸ \times \frac{۱}{\frac{۱}{۰٫۴۳۶}} \times ۳۶۰$$

می‌نویسیم و بعد به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ــ شاخص را روی عدد ۱۸۲۷ از مقیاس D می‌گذاریم و عــدد ۸۸ از مقیاس CI را مقابل آن قرار می‌دهیم.

۲ــ خط موئی شاخص را روی عدد ۲۶۸ از مقیاس C می‌گذاریم و عدد ۴۶۳ از مقیاس CI را زیر آن قرار می‌دهیم.

۳ــ خط موئی شاخص را روی عدد ۳۶۰ از مقیاس C می‌گذاریم و زیر آن، روی D پیکرهای با معنی جواب یعنی ۶۷۶ را می‌خوانیم.

۴ــ بعداً تعداد پیکرهای صحیح آن را حساب می‌کنــیم و جواب خواهد شد: ۶۷٫۶۰.

در حل مسئلهٔ اخیر ملاحظه شد که بهیچ‌وجه ما به «جهش» خط‌کش متحرک احتیاج پیدا نکردیم.

همچنین اگر بخواهیم عددی مانند d را بر چند عدد تقسیم کنیم و جدولی برای خارج قسمت درست کنیم از مقیاس CI استفاده می‌کنیم. بــرای این امــر کافی است که مبدأ خط‌کش متحرک را روی عدد d از مقیاس D بگذاریم و با تغییر مکانهای متوالی شاخص روی CI، بدون حرکت دادن خط‌کش متــحرک جوابها را روی D بخوانیم. مثلاً برای نسبت:

$$y = \frac{۳٫۶۸}{x} \text{ به ازاء: } x = ۱٫۵ \text{ و } ۲٫۱ \text{ و } ۲٫۵ \text{ و } ۳٫۲ \text{ و } ۳٫۹ \text{ و } ۴٫۶$$

داریم:

x	۱٫۵	۲٫۱	۲٫۵	۳٫۲	۳٫۹	۴٫۶
y	۲٫۴۵	۱٫۷۵۲	۱٫۴۷۲	۱٫۱۵۰	۰٫۹۴۴	۰٫۸۰۰

مثال ۴ــ عبــارت $\frac{1}{x} = \frac{1}{۱٫۹۳} + \frac{1}{۲٫۹۷}$ و یا بطور کلی:

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

را حساب کنید.

حل ــ عین روشی را که برای حــل مسئلهٔ ۴ یعنی مــحاسبهٔ $(a + b)$ در مبحث ۱۷ بکار می‌بردیم بکار می‌بریم. منتها به جای مقــیاس C از CI استفاده می‌کنیم. لذا ۲٫۹۷ از مقیاس CI را مقابل مبدأ D می‌گذاریم و در مقابــل عدد

۱,۹۳ از مقیاس CI روی مقیاس D عدد ۱,۵۴ را پیدا می‌کنیم. بعد در مقابل عدد ۲,۵۴ = ۱,۵۴ + ۱ از مقیاس D روی مقیاس CI جواب را می‌خوانیم:

$$x = ۱,۱۷$$

همانطوری که از مقیاسهای CF و DF برای محاسبهٔ πx و $\frac{x}{\pi}$ استفاده می‌کردیم از مقیاس CIF نیز می‌توانیم برای محاسبهٔ $\frac{\pi}{x}$ و $\frac{1}{x\pi}$ استفاده کنیم. مثلاً هنگامی که خط کش بسته است در مقابل عدد ۵,۷۳ از مقیاس CI روی مقیاس CF عدد $۰,۵۸ = \frac{\pi}{۵,۷۳}$ و در مقابل عدد ۲۱ از مقیاس C روی مقیاس CIF عدد $۰,۰۱۵۱۶ = \frac{۱}{۲۱\pi}$ را می‌توانیم پیدا کنیم.

تبصرهٔ ۱ــ می‌دانیم که بین عدد x از مقیاس D و عدد y از مقیاس CI رابطهٔ $xy = c^{te}$ و بین عدد z از مقیاس A و عدد y از CI رابطه: $zy^2 = c^{te}$ و بالاخره بین عدد w از مقیاس K و عدد y از CI رابطهٔ: $wy^3 = c^{te}$ برقرار است. لذا حل مسائلی از این قبیل، به کمک مقیاسهای CI و A و K صورت می‌گیرد که z و w روی CI و y^2 و y^3 به ترتیب روی A و K تعیین می‌شوند.

تبصرهٔ ۲ــ هنگام محاسبه با مقیاس CI از قاعدهٔ زیر برای تعیین مرتبهٔ نتیجه استفاده می‌کنیم:

قاعدهٔ تعیین مرتبه هنگام محاسبه با مقیاس CI

> هنگام محاسبه با CI برای هر زوج عدد x و y که روی مقیاسهای D و CI مقابل یکدیگر قرار گرفته و حاصلضربهای واحدی را تشکیل داده‌اند مجموع مراتب عوامل ضرب در یک استقرار برای همه یکی است[1].

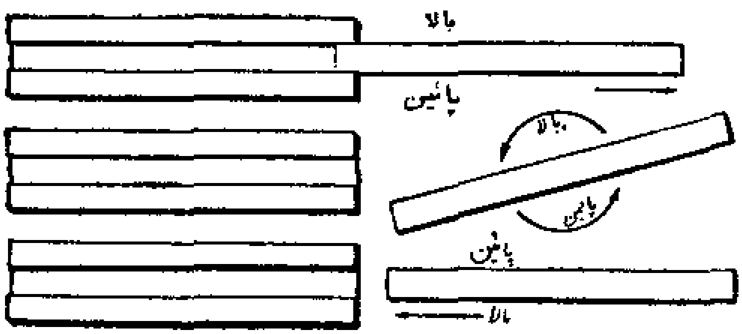
فایدهٔ این قاعده این است که اگر در یک استقرار اعداد x_1 و x_2 و ...

---

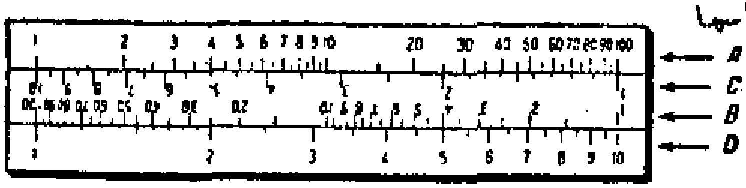
۱. اثبات این قاعده آسان است، چون تمام اعدادی که در یک استقرار روی D و CI مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند حاصلضربهای مساوی دارند، لذا ←

از مقیاس D بترتیب مقابل اعداد $y_۱$ و $y_۲$ و . . . از مقیاس CI واقع شوند و اعداد $x_۱$ و $x_۲$ و . . . همه دارای مرتبهٔ واحدی باشند می توان اطمینان داشت که $y_۱$ و $y_۲$ و . . . هم همه دارای مرتبهٔ واحدی هستند.

در خط کشهائی که فاقد مقیاس CI هستند می توانیم از همان مقیاس C استفاده کنیم. برای این منظور خط کش متحرک را از درون خط کش ثابت کاملاً بیرون میکشیم و آن را در صفحهٔ خود به اندازهٔ ۱۸۰° دوران میدهیم (شکل ۶۶) و مجدداً سر جای خود میگذاریم. بدین ترتیب مقیاسهای C و D حکم CI و D را پیدا خواهند کرد (شکل ۶۷).



ش ۶۶



ش ۶۷

قبل از خاتمهٔ این مبحث قاعدهٔ عملی زیر را یادآوری میکنیم: هنگام استفاده از مقیاسهای A و K برای اینکه بدانیم کدامیک از کمیات را روی کدام مقیاس نقل کنیم نکتهٔ زیر را بخاطر میسپاریم: هنگام استفاده از A و K با مقیاسهائی سروکار داریم که به ترتیب دو برابر و سه برابر از مقیاس CI ریزترند. پس اعداد ریزتر را هم باید روی این مقیاسها نقل نمود. مثلاً در عبارت $a^۳ b = k$ عدد b را روی K و در عبارت $\sqrt{x} \cdot y = k$ عدد x را روی A قرار میدهیم.

دو شکل صفحهٔ بعد (۶۸ و ۶۹) را خوب بخاطر بسپارید:

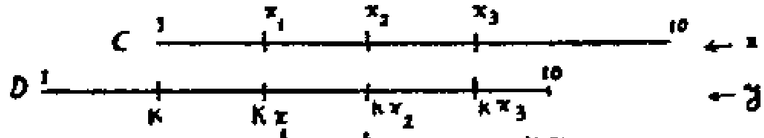
← مرتبهٔ این حاصلضربها همه با هم مساوی است. چون مرتبهٔ حاصلضرب یا مساوی مجموع مراتب عوامل و یا مساوی مجموع مراتب عوامل منهای ۱ است (زیرا حاصلضربها در شرایط واحدی بدست آمده‌اند) پس داریم:

$$p_۱ + q_۱ = p_۲ + q_۲ = \ldots = p_k + q_k$$

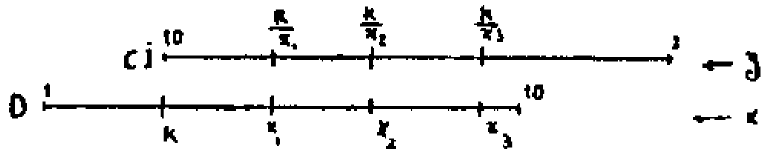
یا:

$$p_۱ + q_۱ - ۱ = p_۲ + q_۲ - ۱ = \ldots = p_k + q_k - ۱$$

یعنی قاعدهٔ فوق صادق است.



ش ۴۸ $y = Kx$



ش ۴۹ $y = \frac{K}{x}$

تمرین ۴۷ - معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{۱}{۷,۰۵} + \frac{۱}{۳,۱۵} = \frac{۱}{x} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۱,۱۶۵} + \frac{۱}{۲,۶۸} = \frac{۱}{x}$$

$$\text{و} \quad \frac{۱}{۵,۵۵} + \frac{۱}{۳,۹۶} = \frac{۱}{x}$$

۲۱ـ حل معادلات درجهٔ دوم

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم: $ax^۲ + bx + c = ۰$ ابتدا طرفین آن را بر a تقسیم و فرض می‌کنیم: $\frac{b}{a} = p$ و $\frac{c}{a} = q$ باشد. لذا معادله به صورت $x^۲ + px + q = ۰$ و یا به صورت $x + \frac{q}{x} = -p$ در می‌آید. صورت اخیر را «شکل نرمال» معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم. اگر $-p = r$ فرض شود شکل نرمال معادلهٔ فوق خواهد شد: $x + \frac{q}{x} = r$ با توجه به اینکه q و r بترتیب حاصلضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله هستند، دیده می‌شود که اگر x یک ریشهٔ معادله باشد $\frac{q}{x}$ ریشهٔ دیگر خواهد شد. لذا حل معادلهٔ درجهٔ دوم به تعیین دو عدد x و $\frac{q}{x}$ که مجموعشان r می‌باشد منجر می‌شود.

مثال ۱ـ شکل نرمال معادلهٔ $۲x^۲ + ۷x - ۵ = ۰$ خواهد شد:

$$x - \frac{۲,۵}{x} = -۳,۵$$

تمرین ۴۸ ـ شکل نرمال معادلات زیر را بنویسید :

$$۳,۲۵x^۲ + ۶,۰۱x + ۹,۶۲ = ۰ \text{ و } ۰,۲x^۲ - ۳,۱x + ۱,۷ = ۰$$

تمرین ۴۹ ـ مبدأ یا منتهای مقیاس CI را مقابل عدد q از مقیاس D بگذارید (با توجه به شکل ۶۹) و بگوئید که در مقابل عدد x از مقیاس D چه عددی روی CI قرار دارد. مثال عددی: $q = ۸$ و ۵ و ۴ و ۲ = x.

دیده می‌شود که اعداد x و $\frac{q}{x}$ یکی روی D و دیگری روی CI مقابل هم واقع شده‌اند. پس اگر به کمک خط موئی شاخص دو عدد از این اعدادی را که مقابل یکدیگر هستند چنان پیدا کنیم که مجموع جبری آنها r شود در این صورت عدد x روی D یک ریشه و $\frac{q}{x}$ روی CI ریشهٔ دیگر معادله خواهد شد.

مثال ۲ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳,۸۰x + ۲,۹۷ = ۰$ را پیدا کنید.

حل ـ شکل نرمال معادلهٔ فوق خواهد بود :

$$x + \frac{۲,۹۷}{x} = ۳,۸۰$$

ابتدا مبدأ CI را روی عدد ۲,۹۷ از مقیاس D می‌گذاریم و بعد شروع به‌انتخاب x می‌کنیم. برای این امر ملاحظه می‌کنیم که مجموع یک جفت عدد (۱ و ۲,۹۷) که عدد ۱ مربوط به مقیاس CI است برابر ۳,۹۷ یعنی بیشتر از آنچه که ما می‌خواهیم (۳,۸۰) می‌شود. پس روی مقیاس D به سمت چپ می‌آئیم. در مقابل عدد $x = ۲$ از مقیاس D عدد ۱,۴۸۵ را روی CI می‌یابیم که مجموع این دو عدد کمتر از آن مقداری است که ما می‌خواهیم. مجدداً به سمت راست D حرکت می‌کنیم و یک جفت عدد (۱,۱۹ و ۲,۵) را که مجموعشان ۳,۶۹ یعنی کمتر از مقدار مطلوب است اختیار می‌کنیم. مجدداً یک جفت عدد (۱,۱۴ و ۲,۶) را در نظر می‌گیریم که مجموع آنها ۳,۷۴ یعنی باز هم کمتر از مقدار مطلوب می‌شود. بالاخره یک زوج عدد (۱,۱۰ و ۲,۷) را در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که مجموع آنها ۳,۸۵ یعنی همان عددی که ما می‌خواستیم می‌شود. پس ریشه‌های ما ۱,۱۰ و ۲,۷ هستند.

مثال ۳ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۱,۶۰x - ۲,۹۷ = ۰$ را پیدا کنید.

حل ـ شکل نرمال معادله خواهد شد:

$$x - \frac{۲,۹۷}{x} = - ۱,۶۰$$

مانند مسئلهٔ قبل مبدأ CI را مقابل عدد ۲,۹۷ از مقیاس D می‌گذاریم و ضمناً علامت حاصل جمع را نیزکه باید منفی باشد در نظر می‌گیریم. چون حاصلضرب هم منفی است لذا قبلاً می‌فهمیم که ریشهٔ بزرگتر منفی است. پس جدول زیر را خواهیم داشت:

x	− ۲,۹۷	− ۲,۹۰	− ۲,۸۰	− ۲,۷۰
$\frac{q}{x}$	۱	۱,۰۲	۱,۰۶	۱,۱۰
r	− ۱,۹۷	− ۱,۸۸	− ۱,۷۴	− ۱,۶۰

دیده می‌شود که ریشه‌های ما ۲,۷۰ − و ۱,۱۰ می‌باشد.

مثال ۴ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۵,۰۵x + ۵,۸۵ = ۰$ را پیدا کنید.

حل ـ شکل نرمال معادلهٔ ما خواهد بود: $x + \frac{۵,۸۵}{x} = ۵,۰۵$. دیده می‌شود که هردو ریشه مثبت است. مجدداً با تجسس به جدول زیر می‌رسیم:

x	۵,۸۵	۴	۳	۳,۲۵
$\frac{q}{x}$	۱	۱,۴۶	۱,۹۵	۱,۸۰
r	۶,۸۵	۵,۴۶	۴,۹۵	۵,۰۵

یعنی ریشه‌های ما ۳,۲۵ و ۱,۸۰ هستند.

بطوری که ملاحظه می‌کنیم تعیین ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم تا حدی جنبهٔ تجسس پیدا می‌کند. در وهلهٔ اول چنین بنظر می‌آید که این تجسسات مستلزم صرف وقت زیاد است و بهتر است ریشه‌های معادله را از راه جبری و محاسبه بدست آوریم. در حالی که اینطور نیست. پس از اندک تمرین خواهید دید که به کمک خطکش محاسبه ریشه‌های معادله را تقریباً فوری می‌توانید پیدا کنید. نکات زیر کمک زیادی در این امر به ما خواهد کرد.

۲۲ـ طرز تعیین فاصله‌ای که ریشه‌ها در آن قرار دارند

برای تعیین سریع ریشه‌ها به کمک خطکش، باید اندازهٔ تقریبی آنها را

دانست. چون اغلب تعیین این مطلب از صورت ظاهر مسئله آسان نیست لذا قبل از همه بایدفواصلی را که ممکن است ریشه‌های ما در آن قرار گیرند، مشخص نمود.

می‌دانیم که مقیاس D معرف فواصل بین ۱ و ۱۰ یا ۱۰ و ۱۰۰ یا ... ۰,۱ و ۱ یا ۰,۰۱ و ۰,۱ و ... می‌باشد. تعیین اینکه ریشه‌ها به کدامیک از این فواصل تعلق می‌گیرند اولین قدمی است که ما برای حل مسئله برمی‌داریم. فرض کنیم معادلهٔ خود را به صورت نرمال تبدیل کرده و مبدأ مقیاس CI را روی عدد q از مقیاس D گذاشته باشیم. برای سهولت عمل، تعیین فاصله را از همانجائی که q واقع شده شروع می‌کنیم. مثلاً اگر $q = ۰,۰۴۵$ باشد بدیهی است که D فاصلهٔ بین ۰,۰۱ تا ۰,۱ را ارائه می‌دهد $(۰,۰۱ < ۰,۰۴۵ < ۰,۱)$

تمرین ۵۱- اگر q مساوی ۰,۶۹ یا ۰,۰۰۱۰۵ یا ۴ یا ۱۰۵ یا ۳,۰۶ باشد مقیاس D به‌کدام فواصل اختصاص می‌یابد؟

هنگام طرح این سؤال که ریشه‌ها به کدام فاصله متعلقند باید مقیاس D به دو قسمت یکی از مبدأ تا q و دیگری از q تا منتها تقسیم شود. علت این امر این است که فرض کنیم مبدأ CI را روی عدد q از D گذاشته باشیم. در این صورت ریشه را فقط در طرف چپ q یعنی در فاصلهٔ مبدأ D تا q جستجو می‌کنیم نه در طرف راست آن. زیرا که هیچ قسمت از CI در سمت راست q واقع نیست. اگر بنا بود که ریشه را در طرف راست q جستجو کنیم بایستی منتهای CI را روی عدد q از D می‌گذاشتیم.

حال برای نمونهٔ تجسس در سمت چپ q، معادلهٔ:

$$x^۲ - ۱۲,۶۵x + ۰,۶۳ = ۰$$

را در نظرمی‌گیریم و شکل نرمال آن $۱۲,۶۵ = \frac{۰,۶۳}{x} + x$ را می‌نویسیم.

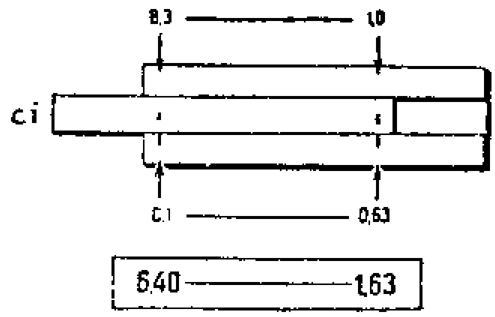
چون $q = ۰,۶۳$ است لذا قسمت چپ مقیاس D شامل اعدادی از ۰,۱ تا ۰,۶۳ خواهد بود. ولی آیا ریشه‌های ما در این فاصله واقعند؟ اگر چنین باشد باید به ازای مقدار معینی از x در این فاصله تساوی $۱۲,۶۵ = \frac{۰,۶۳}{x} + x$ برقرار باشد و این امر غیرممکن است. زیرا سمت چپ این معادله به‌ازای $x = ۰,۶۳$ (انتهای این فاصله) مساوی $۱,۶۳ = \frac{۰,۶۳}{۰,۶۳} + ۰,۶۳$ و برای $x = ۰,۱$

(مبدأ این فاصله) برابر:

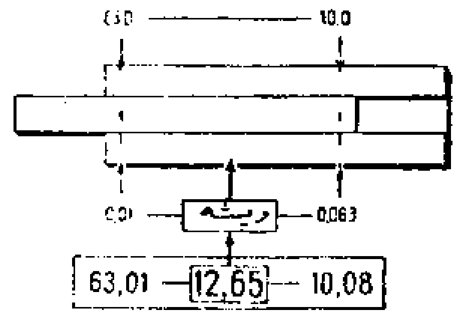
$$۰,۱ + ۶,۳۰ = ۶,۴۰$$

خواهد شد (شکل I ۶۸) یعنی به ازای مقادیر مختلف x در این فاصله مقدار $x + \frac{۰,۶۳}{x}$ بین ۱,۶۳ و ۶,۴۰ قرار خواهد گرفت. و لذا در این فاصله جوابی نداریم[1].

حال به فواصل دیگر می‌پردازیم. اگر مقیاس CI را به همین وضع نگهداریم می‌توانیم فواصل (۰,۰۶۳ و ۰,۰۱) یا (۰,۰۰۶۳ و ۰,۰۰۱) یا (۶,۳ و ۱) یا (۶۳ و ۱۰) و غیره را نیز بررسی کنیم. مثلاً فاصلهٔ (۰,۰۶۳ و ۰,۰۱) را در نظر



ش ۶۸ I



ش ۶۸ II

می‌گیریم (ش ۶۸ II). مقدار $x + \frac{۰,۶۳}{x}$ برای نقطهٔ انتهائی این فاصله برابر $۱۰,۰۶۳ = ۱۰ + ۰,۰۶۳$ و برای نقطهٔ مبدأ برابر $۶۳,۰۱ = ۶۳ + ۰,۰۱$ خواهدشد. یعنی ریشهٔ ما، در این فاصله است ($۶۳,۰۱ > ۱۲,۶۵ > ۱۰,۰۶۳$).

با اندک تجسسی دیده می‌شود که به ازای $x = ۰,۰۵$ خواهیم داشت:

$$x + \frac{۰,۶۳}{x} = ۰,۰۵ + ۱۲,۶۰ = ۱۲,۶۵$$

لذا ریشه‌های ما ۰,۰۵ و ۱۲,۶۰ هستند. با این وصف برای اطمینان به عمل خود می‌توانیم فواصل دیگر را نیز مطالعه کنیم. مثلاً ببینیم که مطالعهٔ فواصلی که در آنها $x > ۰,۰۱$ است فایده‌ای دارد یا نه؟ زیرا به ازای $x = ۰,۰۱$ داریم: $۶۳,۰۱ = ۶۳,۰۰ + ۰,۰۱$ و به ازای $x < ۰,۰۱$ باز اعداد بزرگتری بدست می‌آوریم. لذا این فاصله برای ما قابل استفاده نیست.

تمرین ۵۲- این تجسس را برای فواصل بین (۶,۳ و ۱) و (۶۳ و ۱۰)

---

۱. پس می‌بینیم که دربارهٔ وجود ریشه‌ها در داخل یک فاصله می‌توان از روی دوسرآن فاصله قضاوت کرد. و این موضوع اساسی‌ترین مطلب برای تعیین فاصله‌ای است که ریشه‌ها در آن قرار دارند.

بعمـل آورید و ببینید کـه در کدامیک از ایـن فواصل ممکن است ریشه داشته باشیم؟

تمام این تجسسها به‌کمک CI صورت گرفته است. بعضی اوقات ممکن است به «جهش» خط‌کش متحرک نیز احتیاج پیدا کنیم.

تمرین ۵۳- فـاصلـهٔ بین (۰٫۱ و ۰٫۰۶۳) و (۱۰ و ۶٫۳) را نیز امتحان کنید.

تمرین ۵۴- فاصلهٔ بین (۱٫۰ و ۰٫۶۳) را آزمایش کنید. آیا می‌توانیم بـه اتکای مقادیـر دو سرمقیاس نتیجه‌ای برای وجود یا عدم وجود ریشه‌ها بدست آوریم؟

فـاصله‌ای نظیر (۱٫۰ و ۰٫۶۳) کـه در تمریـن ۵۴ داده‌ایـم فاصله‌ای است استثنائی. برای هـر معادله فقط دو فاصله نظیر ایـن فاصله می‌تواند موجود باشد (یا ممکن است اصلاً چنین فواصلی نباشد). این فواصل را کـه: (از روی رقومهای دوسر آنها نباید به وجود یا عدم وجود ریشه در بین آنها قضاوت کرد) فواصل بحرانی می‌نامند. برای چنین فواصلی نباید خـود را به دو سر فاصله مقید ساخت بلکه باید در داخل این فواصل مقادیری به x داد و نتایج را بررسی کرد.

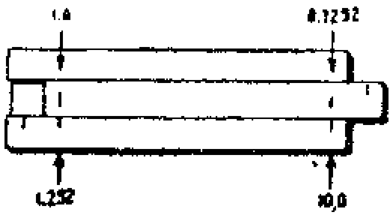
علامت فاصلهٔ بحرانی برای یک معادلهٔ درجهٔ دوم: یک فاصله تنها وقتی بحرانی است که شامل عدد $\sqrt{q}$ باشد. (اگر q منفی باشد اصولاً فاصلهٔ بحرانی وجود ندارد) و اگر $q > 0$ باشد دو فاصلهٔ بحرانی (کـه مربوط به $+\sqrt{q}$ و $-\sqrt{q}$ است) داریم که ریشه‌ها فقط در یکی از این فواصل می‌تـوانند وجـود داشته باشند (بر حسب علامت r).

با داشتن این علامت بـرای فـواصل بحرانی، می‌تـوان بـدون زحمت فواصلی را که ریشه‌های ما در آن واقعند، پیدا کنیم.

قاعدهٔ پیدا کردن فاصله‌ای که ریشه‌های ما در آن واقعند

برای اینکه بدانیم آیا ریشه‌های ما در فاصلهٔ مفروضی واقعند یـا نه اگـر این فاصله بحرانی نباشد مقدار $S = x + \dfrac{q}{x}$ را در طرف چپ و راست این فاصله حساب مـی‌کنیم، اگر یکی از این دو مقدار از r کمتر و دیگری از آن بیشتر باشد ریشه‌ها حتماً در این فاصله قرار دارند. اگر این مقادیـر هر دو از r کمتر و

یا هردو از آن بیشتر باشند در این فاصله ریشه‌ای وجـود ندارد. ولی اگـر این فاصله بحرانی باشد مطلب فوق کافی نیست بلکه باید مقدار S را در داخـل فاصله به ازای مقادیر مختلف x نیز حساب نمود تـا به وجود یا عدم وجـود ریشه‌ها در داخـل آن فـاصله پی برد. $x = \sqrt{q}$ مقدار ماکزیمم یا مینیمم S می‌باشد.[۱]



ش ۶۹

مثال‌ــ معادلهٔ $x^{۲} + ۳۷,۹۹۶x - ۱,۲۹۲ = ۰$ را حل کنید.

حل‌ــ شکل نرمال این معادله خواهد بود:

$$x - \frac{۱,۲۹۲}{x} = - ۳۷,۹۶۶$$

در اینجا معلوم است که باید منتهای CI را در مقابل ۱,۲۹۲ از مقیاس D قرار داد (شکل ۶۹). زیرا در غیر این صورت قسمت بسیار کمی از D درسمت چپ می‌ماند.

حال به تفحص می‌پردازیم. چـون داریـم: $\sqrt{۱,۲۹۲} = ۱,۱۳۷$ پس تمام فواصلی که در این تثبیت می‌توانند مورد بـررسی قرار گیرند (از شکل ۶۹ پیداست) غیر بحرانی هستند. از فاصلهٔ (۱۰ و ۱,۲۹۲) شروع می‌کنیم و قبلاً بخاطر می‌سپاریم که ریشه‌های ما مختلف‌العلامه هستند. مقادیر S در مبدأ و منتهای فاصله به ترتیب برابر ۰,۲۹۲ + و ۹,۸۷۰۸ است. پس باید تـا آنجا کـه می‌تـوانیم x را خیلی کمتر اختیار کنیم یعنی به سمتی برویم که x کـم می‌شود. فـاصلهٔ بین (۰,۱ و ۰,۰۱۲۹۲) را اختیار و از فـاصلهٔ (۱,۰ و ۰,۱۲۹۲) صرف نظر می‌کنیم. در این صورت برای S مقادیـر ۹۹,۹ — و ۱۲,۸۲ —

---

۱. اثبات. فرض می‌کنیم $f(x) = x + \frac{q}{x} - r$ باشد. پس داریم:

$f'(x) = ۱ - \frac{q}{x^{۲}}$ یعنی $x = \sqrt{q}$ نقطهٔ بحرانی است. لـذا در فواصلی کـه شامل $\sqrt{q}$ (نقطهٔ بحرانـی) نباشند، $f(x)$ بطـور یکنواخت تـرقی یـا تنزل می‌کند. باید توجه داشت که نقطهٔ $x = ۰$ یعنی نقطه‌ای که تابع $f(x)$ انفصالی است در هیچیک از این فواصل که روی CI بررسی می‌کنیم وجود ندارد.

در دو سر فاصله بدست می‌آید. پس ریشه‌های ما در این فاصله هستند و با اندک تفحص خواهیم دید که: $x_۱ = ۰,۰۳۴$ و $x_۲ = -۳۸,۰۰۰$ است.

تبصره ــ بطوری که ملاحظه می‌کنیم اصولاً احتیاجی به مقدار تحقیقی S نداریم بلکه محاسبهٔ تقریبی آن برای ما کافی است و به همین دلیل پیدا کردن فاصله‌ای که ریشه‌ها در آن واقعند کاری است بسیار آسان که پس از اندک تمرین خیلی سریع صورت خواهد گرفت. فراموش نمی‌کنیم که در مقابل عدد $x = q$ از متیاس D عدد ۱ و در مقابل عدد $x = \frac{q}{۱۰}$ از D عدد ۱۰ و در مقابل عدد $x = ۱۰q$ عدد $\frac{۱}{۱۰}$ روی CI واقع است و هکذا الی آخر.

بالاخره حسن دیگری که تعیین فاصله دارد این است که ما ضمن این عمل مرتبهٔ ریشه‌ها را هم که تعیین آن برای مبتدیان کار آسانی نیست، تعیین می‌کنیم.

تعیین ریشه‌ها: وقتی فاصله‌ای را که ریشه‌ها در آن قرار دارند تعیین کردیم مسئلهٔ پیدا کردن خود ریشه‌ها پیش می‌آید. دادن قاعدهٔ مناسبی برای این عمل دیگر ضرورتی ندارد و اندک تجسسی ما را به مقصود می‌رساند. به همین دلیل تنها توصیه‌ای که به مبتدیان می‌کنیم همان تمرین زیاد است و بس. اوائل ممکن است تا حدودی به تجسس احتیاج باشد ولی بعدها این عمل بطور مکانیکی صورت می‌گیرد و مقادیر ریشه‌ها بسیار سریع تعیین می‌شود. برای تسلط کامل بر خطکش بد نیست که مقدار $x + \frac{q}{x}$ را با تغییر شاخص در طول تمام مقیاس حساب کنید. این عمل که خصوصاً برای فواصل بحرانی ضروری است کمک شایانی برای حل مسائل در حالت کلی به شما خواهد کرد.

تمرین ۵۵ـ معادلات زیر را حل کنید:

$$x^۲ - ۹,۶۱x + ۸,۳۴ = ۰$$
$$x^۲ - ۱,۶۲x - ۳,۴۱ = ۰$$
$$x^۲ + ۱,۷۳x - ۲,۱۶ = ۰$$
$$x^۲ + ۸,۸۰x + ۱۵,۵۲ = ۰$$
$$x^۲ + ۰,۰۱۵۲۵x + ۱۵,۵۲ = ۰$$
$$۰,۰۱۷x^۲ + ۲,۵۳x + ۸۵,۷ = ۰$$

$$۵,۰x^۲ - ۵,۱x + ۱۰۰,۴ = ۰$$
$$۷,۲x^۲ - ۸۷,۱x + ۱۳۹,۶ = ۰$$
$$x^۲ + ۶,۰۸x + ۹,۲۴ = ۰$$
$$x^۲ - ۶x - ۱,۶۲ = ۰$$

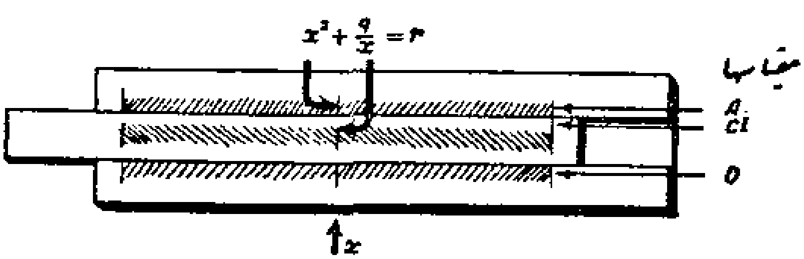
تمرین ۵۶- معادلهٔ $x^۲ + ۱,۸x + ۱,۲ = ۰$ را که ریشه‌های حقیقی ندارد در نظر بگیرید و ببینید اعمالی که برای حل یک معادله بکار می‌بردیم در اینجا به چه منجر می‌شوند. اگر ریشه‌های معادله اعداد مختلط باشند باید معادله را از راه معمولی جبری حل کرد.

۲۳- حل معادلات درجهٔ سوم

اگر حل معادلات درجهٔ دوم را بخوبی یاد گرفته باشیم حل معادلات درجهٔ سوم دیگر اشکالی نخواهد داشت. به همین علت بود که ما حل معادلات درجهٔ دوم را به تفصیل ذکر کردیم. ابتدا از معادلات درجهٔ سوم ناقص:

$$x^۳ + px + q = ۰$$

که شکل نرمال آن $r = x^۲ + \frac{q}{x}$ $(-p = r)$ است شروع می‌کنیم. اگر بتوانیم عددی مانند x چنان پیدا کنیم که مجموع $x^۲$ و $\frac{q}{x}$ مساوی r شود، x یک ریشهٔ معادلهٔ مفروض خواهد شد. طرز پیدا کردن x عیناً همانطوری است که در معادلات درجهٔ دوم عمل می‌کردیم با این تفاوت که در اینجا $x^۲$ را روی مقیاس A و $\frac{q}{x}$ را روی CI باهم جمع می‌کنیم. هردوی این مقادیر مقابل عدد x از مقیاس D واقع شده‌اند (ش ۷۰). بدیهی است هنگام جمع، مرتبه و علامات عوامل را هم باید درنظر بگیریم. تمام مطالبی‌را که در معادلات



ش ۷۰

درجهٔ دوم برای تعیین فاصله‌ای که ریشه‌ها در آن قرار دارند ذکر کردیم در اینجا

هم‌می‌پذیریم‌فقط باید به جای «علامت فاصلهٔ بحرانی» علامت زیر را قراردهیم:
علامت فاصلهٔ بحرانی در معادلات درجهٔ سوم:

فاصله فقط وقتی بحرانی است که شامل عدد $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ باشد[1].

تبصره: هر معادلهٔ درجهٔ سوم فقط یک فاصلهٔ بحرانی دارد. هنگام کعب گرفتن از $\frac{q}{2}$ باید علامت q را در نظر گرفت. بعلاوه عبارت $S = x^2 + \frac{q}{x}$ نیز به ازای $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ ماکزیمم یا مینیمم خواهد بود.

مثال: مطلوب است حل معادلهٔ: $x^3 - 6,66x + 2,97 = 0$.

حل_ شکل نرمال این معادله خواهد شد: $x^2 + \frac{2,97}{x} = 6,66$.

مبدأ CI را روی عدد ۲,۹۷ از مقیاس D قرار می‌دهیم و بررسی فواصل را آغاز می‌کنیم. قبل از همه فاصلهٔ بحرانی را معین می‌نمائیم. چون $q = 2,97$ است پس داریم $\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1,14$. یعنی فاصلهٔ بین (۲,۹۷ و ۱) فاصلهٔ بحرانی است. این فاصله را در همان مرحلهٔ اول بررسی می‌کنیم. مقدار $S = x^2 + \frac{q}{x}$، به ترتیب در منتهای سمت چپ و منتهای سمت راست فاصله، خواهد شد: ۳,۹۷ و ۹,۸۲. ولی چون این فاصله بحرانی است بازهم چند مقدار دیگر S را در داخل این فاصله حساب می‌کنیم تا این کمیت بهتر بررسی شده باشد. به ازای $x = 1,35$ داریم:

$x^2 = 1,82$ و $\frac{q}{x} = 2,20$ و $S = 1,82 + 2,20 = 4,02$. به‌ازای $x = 2,2$ مقدار S خواهد شد: $S = 5,55$. بالاخره به ازای $x = 2,32$

۱- **اثبات:** تابع $f(x) = x^2 + \frac{q}{x} - r$ به ازای $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ دارای ماکزیمم یا مینیمم است. زیرا، $f'(x) = 2x - \frac{q}{x^2}$ است.

داریم: $S = ۶,۶۶$ یعنی $x_{۱} = ۲,۳۲$ یک ریشهٔ معادله است.

اکنون فاصلهٔ (۲,۹۷ و ۱) را بررسی کردیم. بد نیست که فاصلهٔ (۲,۹۷ − و ۱ −) را نیز بررسی کنیم (زیرا قدر مطلق مقادیر $x^{۲}$ و $\frac{q}{x}$ تغییر نمی‌کند فقط برای پیدا کردن S باید $\frac{q}{x}$ از $x^{۲}$ کسر شود). به ازای $x = -۱,۰$ (یعنی منتهای چپ فاصله) داریم:

$$S = ۱,۰ - ۲,۹۷ = -۱,۹۷$$

و به ازای $x = -۲,۹۷$ داریم $S = ۷,۸۲$. از آنجائی که داریم:

$$-۱,۹۷ < ۶,۶۶ < ۷,۸۲$$

وبعلاوه فاصله، بحرانی هم نیست لذا معادله در این فاصله ریشه دارد. و با اندک آزمایشی می بینیم: $x_{۲} = -۲,۷۸$ است. تجسس خود را بازهم ادامه می‌دهیم. با همان تثبیت اولیهٔ خطکش فاصلهٔ (۰,۲۹۷ و ۰,۱) را نیز بررسی می‌کنیم. ولی این تحقیق نشان می‌دهد که معادله دراین فاصله ریشه‌ای ندارد. زیرا مقدار S برای انتهای چپ و راست فاصله به ترتیب برابر ۲۹,۷۱ و ۱۰,۰۰ می باشد. به همین ترتیب در فاصلهٔ (۰,۲۹۷ و ۰,۱ −) نیز ریشه‌ای نداریم. بنابراین دیگر رفتن به سمت چپ، چه برای مقادیرمثبت و چه برای مقادیر منفی x معنائی ندارد. خط‌کش متحرک را یک «جهش» می‌دهیم. مقادیر S را در فاصلهٔ (۲,۹۷ و ۱) برای هردو سر فاصله حساب کرده بودیم و داشتیم: ۱۰,۵۹ و ۳,۹۷. چون یکی از این دو مقدار کمتر و دیگری بیشتر از ۶,۶۶ است لذا مطمئناً می توانیم ریشهٔ سوم را در این فاصله پیدا کنیم و اندک تفحصی نشان می‌دهد که داریم: $x_{۳} = ۰,۴۶۱$. برای امتحان صحت جوابها می‌توانیم از رابطهٔ $x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} = ۰$ استفاده کنیم.

بطوری که ملاحظه می‌شود حل معادلهٔ درجهٔ سوم ناقص مشکلتر از حل معادلهٔ درجهٔ دوم نیست فقط اندکی بیشتر وقت می‌گیرد. زیرا که باید ۳ ریشه و هریک را هم جداگانه حساب کرد (برخلاف معادلهٔ درجهٔ دوم که ریشه‌های آن مقابل یکدیگر یکی روی CI و دیگری روی D قرار داشتند). ولی عملیات را می‌توان با توجه به مطلب زیر اندکی تقلیل داد: می‌توان ریشهٔ سوم را از عبارت

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ و یا $x_3 = \frac{-q}{x_1 x_2}$ حساب کرد (البته در این صورت دقت جوابها کمتر است).

در حالتی که معادلهٔ درجهٔ سوم ناقص دو ریشهٔ مختلط داشته باشد باید پس از پیدا کردن ریشهٔ حقیقی، معادله را بر $x - x_1$ تقسیم نمود و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل را (که مختلط هستند) از راه محاسبه پیدا کرد.

تمرین ۵۷- ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را پیدا کنید:

(۱) $x^3 - 3{,}92x + 6{,}05 = 0$

(۲) $x^3 - 1{,}05x - 3{,}75 = 0$

(۳) $x^3 - 2x + 1 = 0$

(۴) $x^3 + 6{,}72x + 1{,}55 = 0$

(۵) $x^3 + 1{,}03x - 10{,}3 = 0$

(۶) $x^3 - 0{,}32x + 0{,}015 = 0$

(۷) $x^3 + 0{,}256x - 1{,}455 = 0$

(۸) $x^3 + 12{,}5x + 2{,}61 = 0$

۲۴- حل معادلهٔ درجهٔ سوم کامل

معادلهٔ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را در نظر می‌گیریم. از تقسیم طرفین این معادله بر a داریم:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \left(A = \frac{b}{a} \text{ و } B = \frac{c}{a} \text{ و } C = \frac{d}{a}\right)$$

فرض می‌کنیم $Z = x + \frac{A}{3}$ باشد. اول Z و سپس x را از رابطهٔ:

$$x = Z - \frac{A}{3}$$

بدست می‌آوریم. برای محاسبهٔ Z به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: اگر به جای x در معادلهٔ $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ مقدارش را از رابطهٔ $x = Z - \frac{A}{3}$ بگذاریم خواهیم داشت: $Z^3 + pZ + q = 0$. زیرا داریم:

$$\left(Z-\frac{A}{3}\right)^3+A\left(Z-\frac{A}{3}\right)^2+B\left(Z-\frac{A}{3}\right)+C=0$$

که پس از ساده کردن و فرض:

$$q=\frac{2A^3}{27}-\frac{AB}{3}+C \text{ و } p=B-\frac{A^2}{3}$$

خواهیم داشت :

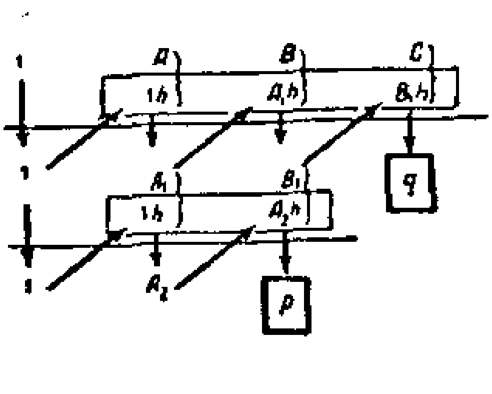
$$Z^3+pZ+q=0$$

ساده‌ترین روش برای محاسبهٔ ضرائب p و q روش زیر است:

$$\begin{array}{cccc}
1 & A & B & C \\
 & h & hA_1 & hB_1 \\
\hline
1 & A_1 & B_1 & q \\
 & h & hA_2 & \\
\hline
1 & A_2 & p &
\end{array}$$

ابتدا ضرائب معادلهٔ $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ را روی یک سطر به ترتیب فوق می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $h=-\frac{A}{3}$ باشد. آن را در ضریب اول یعنی ۱ ضرب می‌کنیم و زیر ضریب دوم یعنی A می‌نویسیم. A و $1\times h$ را با هم جمع می‌کنیم و حاصل را به A_1 می‌نمائیم. بعد A_1 را در h ضرب می‌کنیم و زیر ضریب سوم یعنی B می‌نویسیم و مجموع B و hA_1 را به B_1 می‌نمائیم. سپس B_1 را در h ضرب می‌کنیم و زیر C می‌نویسیم و مجموع C و hB_1 مقدار q را به ما می‌دهد. بعد همین عمل را با اعداد B_1 و A_1 و ۱ انجام می‌دهیم و ضریب p را پیدا می‌کنیم.

کلیهٔ این ضربها به‌کمک یک تثبیت خط‌کش متحرک صورت می‌گیرد (مبدأ خط کش متحرک روی h قرار داده می‌شود). برای اینکه ترتیب محاسبه را بخاطر بسپاریم ممکن است طرح مقابل را همیشه در نظر داشته باشیم :



تمرین ۸۵ - ثابت کنید که با چنین محاسبه‌ای خواهیم داشت :

$$q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C \quad \text{و} \quad p = B - \frac{A^2}{3}$$

مثال ۱ــ معادلهٔ $3{,}1x^3 - 10{,}7x^2 + 7{,}5x - 12{,}3 = 0$ را به صورت $Z^3 + pZ + q = 0$ تبدیل کنید.

حل ــ از تقسیم طرفین معادله بر ۳٫۱ خواهیم داشت :

$$x^3 - 3{,}45x^2 + 2{,}42x - 3{,}97 = 0$$

و از آنجا $A = -3{,}45$ و $h = 1{,}15$ و $x = Z + 1{,}15$ خواهد شد.
طبق طرح بالا عمل می‌کنیم :

	1	$-3{,}45$	$2{,}42$	$-3{,}97$
$h = 1{,}15$		$1{,}15$	$-2{,}65$	$-0{,}26$
	1	$-2{,}30$	$-0{,}23$	$\underline{-4{,}23}$
$h = 1{,}15$		$1{,}15$	$-1{,}32$	
	1	$-1{,}15$	$\underline{-1{,}55}$	

پس $p = -1{,}55$ و $q = -4{,}23$ است و در نتیجه معادلهٔ فوق به صورت زیر در می‌آید :

$$Z^3 - 1{,}55Z - 4{,}23 = 0$$

مثال ۲ــ معادلهٔ $x^3 + 4{,}80x^2 + 1{,}02x - 3{,}59 = 0$ را حل کنید.

حل ــ داریم : $h = -1{,}60$ و $x = Z + h = Z - 1{,}60$ و از آنجا طرح زیر را می‌کشیم :

1	$+4{,}80$	$+1{,}02$	$-3{,}59$
	$-1{,}60$	$-5{,}12$	$+6{,}55$
1	$+3{,}20$	$-4{,}10$	$\underline{+2{,}97}$
	$-1{,}60$	$-2{,}56$	
1	$+1{,}60$	$\underline{-6{,}66}$	

بنابراین معادلهٔ فوق بــه صورت $Z^3 - 6{,}66Z + 2{,}97 = 0$ در می‌آید که آن را قبلاً حل کردیم و ریشه‌های آن را بدست آوردیم :

$$Z_3 = -\,۲,۷۸ \text{ و } Z_2 = ۰,۴۶۱ \text{ و } Z_1 = ۲,۳۲$$

پس داریم:

$$x_1 = z_1 + h = ۰,۷۲$$
$$x_2 = z_2 + h = -\,۱,۱۳۹$$
$$x_3 = z_3 + h = -\,۴,۳۸$$

تمرین ۵۹ - معادلات زیر را حل کنید:

$$(۱)\quad x^3 - ۲,۹\,x^2 - ۳,۱\,x + ۱۰,۰ = ۰$$
$$(۲)\quad ۰,۶۸۵x^3 - ۶,۲۰\,x^2 + ۱۴,۰۵x - ۷,۵ = ۰$$
$$(۳)\quad ۲,۲۶\,x^3 + ۷,۰۱\,x^2 - ۸,۸۲۵x - ۴,۸۶ = ۰$$
$$(۴)\quad ۱,۲۱\,x^3 + ۷,۲۰\,x^2 + ۷,۲۰\,x - ۸,۵۴ = ۰$$
$$(۵)\quad ۰,۱۷\,x^3 - ۰,۵۳۱\,x^2 - ۰,۵۱۲\,x + ۱,۵۷۵ = ۰$$
$$(۶)\quad ۴,۸۵\,x^3 - ۱۸,۳۴\,x^2 + ۲۸,۷۲\,x - ۱۷,۴۶ = ۰$$

۳۵ - مقیاس L یا مقیاس مانتیسها

مقیاس L که اغلب «مقیاس لگاریتمها» نیز نامیده می‌شود برای تعیین مانتیس لگاریتم اعداد بکار می‌رود. نکتهٔ جالب این مقیاس تساوی تقسیمات آن است. یعنی همان طول معمولی مقیاس که ۲۵^{cm} است در اینجا به ده قسمت مساوی تقسیم شده که هر یک از آنها نیز به نوبهٔ خود ۵۰ قسمت مساوی شده است. هر پنج قسمت از تقسیمات اخیر توسط رابطی بلندتر از بقیه روی خط کش نموده شده است. یعنی هر فاصلهٔ کوچک معادل ۰,۰۰۲ تمام طول خط کش است. تثبیت و قرائت اعداد تا یک هزارم تقریب به دقت صورت می‌گیرد.

رابطهٔ بین مقیاس L و مقیاس D بر اصل ریاضی زیر نهاده شده است: چون D یک مقیاس تابعی لگاریتمی $y = \log x$: به ازای مقادیر x مابین ۱ و ۱۰ می‌باشد یعنی رقومهای آن معرف مقادیر متغیر و فواصل این رقومها از مبدأ برابر مقادیر تابع (یعنی $\log x$) به ازای این رقومهاست، پس اندازه گیری مستقیم یک قطعه از مقیاس، ابتدا از مبدأ، یک طول لگاریتمی به ما می‌دهد: به عبارت دیگر به ازای هر عدد از D مانتیس لگاریتم آن در روی L بدست می‌آید. بالعکس، به ازای هر لگاریتم واقع روی L یک عدد از D در مقابل آن مشخص خواهد شد. بطوری که خط کش محاسبه را می‌توانیم یک جدول

لگاریتم ۳ پیکری بدانیم. بدیهی است مفسر لگاریتمها را طبق معمول ذهناً باید محاسبه نمود.

مثال ۱ــ مطلوب است $\log ۳,۵$. خط رؤیت شاخص را روی عــدد ۳۵ از مقیاس D می‌گذاریم و در مقابل آن روی L عدد ۴ — ۴ — ۵ را که مانتیس لگاریتم عدد مفروض است می‌خوانیم. و چون مفسر آن باید صفر باشد پس :

$$\log ۳,۵ = ۰,۵۴۴$$

تمرین ۶۰ - لگاریتمهای زیر را حساب کنید :

$$\log ۶۵,۵ \text{ و } \log ۲,۴۴ \text{ و } \log ۰,۰۱۶۷$$

یافتن اعداد از روی لگاریتمشان نیز همینطور ساده است.

مثال ۲ــ می‌دانیم که $\log N = ۰,۱۶۷$ است. عدد N را پیدا کنید.

حل ــ خط موئی شاخص را روی عدد ۱۶۷ از مقیاس L می‌گذاریم و در زیر آن روی D عدد ۹ — ۶ — ۴ — ۱ را می‌خوانیم چون مفسر صفر است پس یک پیکر قبل از ممیز داریم یعنی :

$$N = ۱,۴۶۹$$

تمرین ۶۱ - اگر ۱,۹۶۰ یا ۰,۲۶۵ یا ۰,۹۶۷ یا ۲,۳۴۳ = $\log N$ یا ۱,۳۵۶ — یا ۰,۸۶۷ — باشد N چقدر می‌شود؟

تمرین ۶۲ - حساب کنید:

$۱۰^{۱,۶}$ و $۱۰^{۴,۲۳}$ و $۱۰^{۰,۰۹۱}$ و $۱۰^{۲,۰۷۵}$ و $۱۰^{-۲,۳۴}$ و $۱۰^{-۰,۱۶}$ را.

راهنمائی : اگر $\log N = x$ باشد ۱۰^{x} مساوی چیست؟

۳

محاسبات لگاریتمی با خط‌کش

۲۶ ـ محاسبات لگاریتمی با خط کش

این‌دسته مسائل شامل محاسبهٔ اعدادی است که به توانهای مختلف رسیده‌اند (کسری و صحیح) بـرای نمونه مثلاً مـی‌خواهیم مقدار $۲,۳۴^{۴}$ را پیدا کـنیم. می‌دانیم که $\log ۲,۳۴ = ۰,۳۶۹$ است. یک ضرب ذهنی ساده نشان می‌دهد که: $۴ \times ۰,۳۶۹ = ۱,۴۷۶$ می‌شود حال اگر آنتی لگـاریتم ۱,۴۷۶ را پیدا کنیم خواهیم داشت $\text{Anti log}\ ۱,۴۷۶ = ۳۰$ پس: $۲,۳۴^{۴} = ۳۰$ مـی‌شود. امتحان این مسئله آسان است. کـافی است ۲,۳۴ را دوبار مربع کنیم و جواب فـوق را بدست آوریم:

$$۲,۰۳۴^{۴} = (۵,۴۸)^{۲} = ۳۰$$

مثال ۱ ـ حساب کنید مقدار $x = ۱,۶۲^{۰,۹۱}$ را.

حل ـ داریم: $\log x = ۰,۹۱ \log ۱,۶۲$

خط رؤیت شاخص را روی عدد ۱,۶۲ از مقیاس D می‌گذاریم و در مقـابل آن روی مقیاس L عـدد ۱ — ۲ را می‌خوانـیم. پس $\log ۱,۶۲ = ۰,۲۱$. بعد می‌نویسیم:

$$\log x = ۰,۹۱ \times ۰,۲۱ = ۰,۱۹۱$$

حال خط رؤیت شاخص را روی عدد ۱۹۱ از مقیاس L می‌گذاریم و مقابـل آن روی D عدد ۲ — ۵ — ۵ — ۱ را می‌خوانیم. لذا $۱,۶۲^{۰,۹۱} = ۱,۵۵۲$.

تمرین ۶۳ ــ حساب کنید مقادیر:

$۲{,}۶۷^{۱{,}۵۵}$ و $۰{,}۰۹۳^{۳{,}۷۲}$ و $۱{,}۱۴^{-۲{,}۳۱}$ و $۲^{۰{,}۶}$ و $\pi^{۲{,}۱۲}$ و $e^{۱{,}۶}$ را.

برای محاسبهٔ اعدادی که به توانهای منفی می‌رسند (مثل a^{-x}) از تعریف توانهای منفی استفاده می‌کنیم.

مثال ۲ــ مقدار $۱۰^{-۳{,}۲۷}$ را حساب کنید.

حل ــ می‌نویسیم :

$$۱۰^{-۳{,}۲۷} = \frac{۱}{۱۰^{۳{,}۲۷}} = \frac{۱}{۱۰^{۳} \times ۱۰^{۰{,}۲۷}}$$

ابتدا مخرج را حساب می‌کنیم. یعنی در مقابل عدد ۲۷ از مقیاس L عدد ۱۸۶۲ را روی D بدست می‌آوریم. حال بدون اینکه خط کش متحرک یا شاخص را حرکت دهیم با پشت و رو کردن خط کش عکس آن را روی CI می‌خوانیم:

$$۱۰^{-۳{,}۲۷} = ۰{,}۰۰۰۵۳$$

تبصره ــ مقدار $\log e = ۰{,}۴۳۳$ را که در اغلب محاسبات مورداحتیاج است باید بخاطر سپرد.

۲۷ــ مقیاسهای log log

در مبحث ۲۶ دیدیم که چگونه از مقیاسهای لگاریتمی برای حل مسائلی از قبیل $۱{,}۶۲^{۰{,}۹۱}$ و یا $\sqrt[۰{,}۹۱]{۱{,}۶۱}$ با تبدیل آنها به صورتهای :

$$\frac{۱}{۰{,}۹۱}\log ۱{,}۶۲ \text{ یا } ۰{,}۹۱ \log ۱{,}۶۲$$

استفاده می‌کردیم. حال اگر بتوانیم این ضرب و تقسیم اخیر را هم به کمک مقیاسهای معمولی حذف و به‌جای آنها صرفاً از جمع و تفریق استفاده کنیم طبیعی است که مسئلهٔ ما بسیار ساده‌تر حل می‌شود. برای این‌کار عبارات فوق را به‌صورت مثلاً $\log\log ۱{,}۶۲ + \log ۰{,}۹۱$ باید درآوریم و بعد حساب کنیم. یعنی باید از مقیاسهائی که لگاریتم لگاریتمها را به ما می‌دهند استفاده کنیم. این مقیاسها که به نام مقیاسهای log log موسومند برخلاف مقیاسهای لگاریتمی که فقط مانتیسهای لگاریتمهای اعداد را به ما می‌دادند باید لگاریتم کامل لگاریتم یک عدد (یعنی مفسر و مانتیس را با هم) را به ما بدهند.

اکثر خط کشهای جدید دارای مقیاسهای log log هستند. این مدرجها به تفاوت در پشت خط کش متحرک یا در پشت خط کش ثابت نقل شده‌اند و

استفاده از آنها در حالت اول به کمک مقیاس D و در حالت دوم به کمک C صورت می‌گیرد.

تبصرهٔ ۱ــ در خط کشهائی که واجد این نوع مدرجها هستند استفاده از روش (مبحث ۲۶) برای بدست آوردن توانها و ریشه‌های اعداد امر درستی نیست.

نکتهٔ جالب دیگری که باید در بادی امر متوجه بود این است که برخلاف مقیاس L که مانتیس لگاریتم اعداد را در مبنای ۱۰ می‌داد مقیاسهای log log عملاً بدون استثنا لگاریتمها را نسبت به مبنای e (۲,۷۱۸۰۰ = e) به ما می‌دهند یعنی به کمک این مقیاسها لگاریتم نپری هر عدد بسهولت تعیین می‌شود. برای مقیاسهای log log که در روی خط کش با LL نشان داده شده‌اند بعضی اوقات علامت log ln را نیز بکار می‌برند.

در خط کشهای نسبتاً کامل مقیاسهای LL روی شش مدرج و در پشت خط کش ثابت نقل شده‌اند. مدرج اول که معمولاً به LL_1 نموده شده از ۱,۰۱ = $e^{0.01}$ تا ۱,۱۰۵ = $e^{0.1}$ و مدرج دوم یعنی LL_2 از ۱,۱۰۵ تا ۲,۷۱۸ = e و مدرج سوم یعنی LL_3 از ۲,۷۱۸ تا ۲۲۰۰۰ = e^{10} مدرج شده‌است (دقیق‌تر بگوئیم این سه مقیاس‌از ۱,۰۱ تا ۱۰۰۰۰۰ مدرج شده‌اند). این ۳ مدرج در پائین خط کش ثابت نقل شده‌اند. سه مدرج دیگر آنهائی هستند که در بالای خط کش ثابت نقل شده و به $LL_{.1}$ و $LL_{.2}$ و $LL_{.3}$ نموده شده‌اند و بترتیب از ۰,۹۹ = $e^{-0.01}$ تا ۰,۹۰۴۸ = $e^{-0.1}$ و از $e^{-0.1}$ تا ۰,۳۶۷۹ = $e^{-1.0}$ و از $e^{-1.0}$ تا ۰,۰۰۰۰۴۵ = $e^{-10.0}$ (یا بهتر بگوئیم روی هم رفته از ۰,۰۰۰۰۱ تا ۰,۹۹) مدرج شده‌اند.

محاسبهٔ $y = a^x$: با توجه به رابطهٔ:

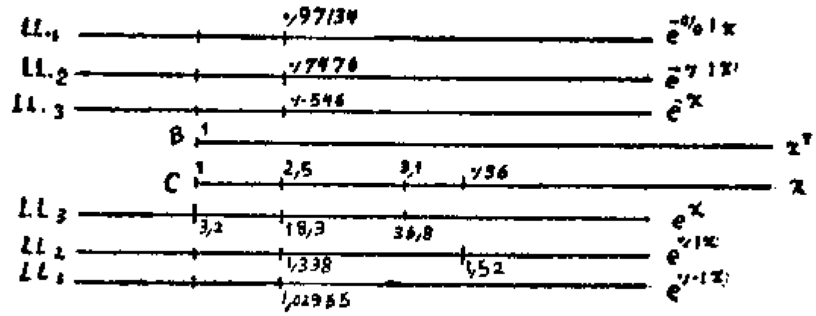
$$\log y = x \log a \quad \text{و} \quad \log\log y = \log x + \log\log a$$

(توجه داریم که x را لگاریتم y در مبنای a گویند) می‌بینیم که اگر لگاریتم توان x را روی مقیاس C (یا D) بگذاریم و با log log مقدار مبنای a که روی مقیاسهای LL گذارده می‌شوند جمع کنیم $\log\log y$ بدست می‌آید. یعنی پیدا کردن توانها به‌کمک مقیاسهای LL و C (یا D) شبیه پیدا کردن حاصلضرب دو عدد به کمک مقیاسهای C و D است.

مثال ۱ــ مقدار $4.5^{1.8}$ را پیدا کنید. اگر مبنای مقیاس C را روی عدد

۴,۵ از مقیاس LL_3 بگذاریم روی همین مقیاس، مقابل عدد ۱,۸ از مقیاس C جواب را می‌خوانیم: $۱۵ = {۴,۵}^{۱,۸}$.

طرز عمل بخوبی نشان می‌دهد که خط کش محاسبه جدولی است از توانهای مختلف اعداد. مثلاً اگر می‌خواستیم ${۴,۵}^{۰,۱۸}$ را پیدا کنیم کافی بود جواب را به جای اینکه روی LL_3 در مقابل عدد ۱۸ از مقیاس C پیدا کنیم جواب‌را روی LL_2 در مقابل همین عدد پیدا می‌کردیم. زیرا بدیهی است وقتی عددی به‌توان کمتر از واحد برسد از خودش‌کوچکترمی‌شود.



ش ۷۱

یعنی داریم:

$۱,۳۱ = {۴,۵}^{۰,۱۸}$. و همچنین برای محاسبهٔ توانهای مختلف ۴,۵ خط کش متحرک را در همین وضع نگاه می‌داریم و فقط شاخص را در طول مقیاس C تغییر داده و روی اعداد ۲ و ۳ و ۴ و . . . و غیره می‌گذاریم تا:

$۲۰,۲ = {۴,۵}^{۲}$ و $۹۰,۹ = {۴,۵}^{۳}$ و $۴۱۰ = {۴,۵}^{۴}$ و . . . و غیره بدست آیند.

مثال ۲ـ (شکل ۷۱):

روی LL_3 $\quad ۱۸,۳ = {۳,۲}^{۲,۵}$

روی LL_2 $\quad ۱,۳۳۸ = {۳,۲}^{۰,۲۵}$

روی LL_1 $\quad ۱,۰۲۹۵ = {۳,۲}^{۰,۰۲۵}$

روی $LL_{.3}$ $\quad ۰,۰۵۴۶ = {۳,۲}^{-۲,۵}$

روی $LL_{.2}$ $\quad ۰,۷۴۷۶ = {۳,۲}^{-۰,۲۵}$ و روی LL_3 $\quad ۳۶,۸ = {۳,۲}^{۳,۱}$

روی $LL_{.1}$ $\quad ۰,۹۷۱۳۴ = {۳,۲}^{-۰,۰۲۵}$ روی LL_2 $\quad ۱,۵۲۰ = {۳,۲}^{۰,۳۶}$

قواعد خواندن اعداد

۱ـ توانهای مثبت اعداد را روی مقیاسهای LL_1 تا LL_3 و توانهای منفی را روی $LL_{.3}$ تا $LL_{.1}$ می‌خوانیم.

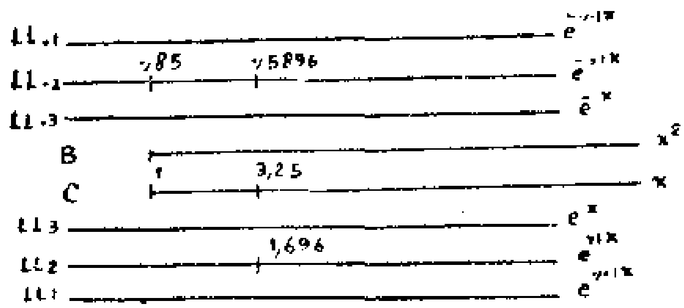
۲ـ با توجه به توانهای مختلف e که در سمت راست مقیاسهای LL ثبت

شده‌اند وقتی ممیز توان به سمت چپ نقل می‌شود، جواب باید در مقیاس مجاور آن خوانده شود.

۳ـ وقتی عددی را به کمک منتهای مقیاس C روی مقیاسهای LL می‌خوانیم جواب را باید روی مقیاس دیگر LL پیدا کنیم. مثلاً برای محاسبهٔ $۱,۸^{۵,۵}$ منتهای مقیاس C را روی عدد ۱,۸ از مقیاس $LL_{۲}$ می‌گذاریم و جواب را روی $LL_{۳}$ در مقابل عدد ۵,۵ از مقیاس C می‌خوانیم: $۱,۸^{۵,۵} = ۲۵,۴$.

بطور کلی یک توجه ذهنی برای خواندن جوابها همیشه لازم است.

۴ـ وقتی پایه یعنی a بین صفر و ۱ محصور باشد $(۰ < a < ۱)$ باید توانهای مثبت آن را روی $LL.۱$ تا $LL.۳$ و توانهای منفی آن را روی $LL_{۳}$ تا $LL_{۱}$ خواند (شکل ۷۲).



ش ۷۲

مثال ۳ـ $۰,۶۸۵^{۲,۷} = ۰,۳۶$ $\qquad$ $۰,۸۵^{۳,۲۵} = ۰,۵۸۹۶$

$۰,۶۸۵^{-۲,۷} = ۲,۷۸$ $\qquad$ $۰,۸۵^{-۳,۲۵} = ۱,۶۹۶$

نکتهٔ مهمی که از این مثالها نتیجه می‌شود این است که همیشه جوابهای دقیق مسائل را با تعیین مرتبه‌شان پیدا می‌کنیم. مثلاً: جواب مثال ۱ اعداد ۱۵۰ یا ۱,۵۰ یا ۰,۰۱۵ و غیره نیست بلکه همان ۱۵ می‌باشد.

تمرین ۶۴ ـ حساب کنید:

$۴,۲۲^{۱,۹۲}$ و $۱,۶۲^{۰,۹۱}$ و $۱,۸۲^{۲,۵}$ و $۲,۵^{۰,۱۷۲}$ و $۱,۴۶^{-۲,۷}$ و $۱,۴۶^{۲,۷}$ را

تبصرهٔ ۲ـ واضح است که مقیاسهای $LL_{۳}$ و $LL_{۲}$ و $LL_{۱}$ بترتیب عکس مقیاسهای $LL.۳$ و $LL.۲$ و $LL.۱$ هستند و از این‌رو می‌توان هنگام محاسبه توانهای منفی و همچنین عباراتی نظیر $\left(\frac{1}{a}\right)^{m} + a^{m}$ در بعضی مواقع از این خاصیت استفاده نمود.

۲۸ـ حالات استثنائی در محاسبهٔ $y = a^x$

چون حدود مدرجهای log log محدود است لذا محاسبهٔ مستقیم توانهای اعداد هنگامی که پایه یا توان اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک است دقیقاً میسر نیست. ذیلاً حالات مختلف را بررسی می‌کنیم:

حالت اول : $y > ۱۰۰۰۰۰$ و $y < ۰,۰۰۰۰۱$ است. اگر توان عددی بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک باشد بطوری که y یکی از دو وضع فوق را اختیار کند در این صورت باید توان عدد را تجزیه کرد :

مثال :

$$۳,۱۴^{۱۹} = ۳,۱۴^{۶+۶+۷} \doteq (۳,۱۴^{۶})^{۲} \times ۳,۱۴^{۷} =$$
$$= ۰,۹۵۵^{۲} \times ۱۰^{۶} \times ۳,۰۲ \times ۱۰^{۳} = ۲,۷۶ \times ۱۰^{۹}$$

وقتی توانها منفی هم باشند طرز عمل عین طریقهٔ فوق است.

حالت دوم : $۰,۹۹ < y < ۱,۰۱$ — وقتی توان بقدری کوچک باشد که این حالت پیش بیاید جواب را نمی‌توان توسط مقیاسهای LL بدست آورد بلکه باید از بسط سری زیر استفاده کرده مقدار تقریبی آن را حساب نمود:

$$a^{\pm x} = ۱ \pm \frac{x}{۱!}\log_e a + \frac{x^{۲}}{۲!}\log_e^{۲} a \pm \frac{x^{۳}}{۳!}\log_e^{۳} a + \cdots$$

و یا :

$$a^{\pm x} \simeq ۱ \pm x\log_e a \quad \text{اگر } |x| \leqslant ۱$$

وقتی که مبدأ مقیاس C را روی مبنای a از مقیاس LL بگذاریم، به کمک خط موئی شاخص مقدار $\log_e a$ خود بخود روی مقیاس D خوانده می‌شود (مبحث ۳۲) و ضرب آن در x توسط حرکت شاخص روی مقیاس C انجام می‌گیرد و بعد جواب $x \log_e a$ روی D دیده می‌شود.

مثال :

$$۳,۲^{۰,۰۰۲۵} \simeq ۱ + ۰,۰۰۲۵ \log_e ۳,۲ = ۱ + ۰,۰۰۲۵ \times ۱,۱۶۳ =$$
$$= ۱ + ۰,۰۰۲۹ = ۱,۰۰۲۹۰۸$$

و همچنین :

$$۳,۲^{-۰,۰۰۲۵} \simeq ۱ - ۰,۰۰۲۹۰۸ = ۰,۹۹۷۰۹۲$$

وقتی جای ممیز توان را تغییر دهیم، در جواب فقط تعداد صفرهای بعد از ممیز

یا تعداد ۹ های بعد از آن تغییر می‌کند. مثلاً :

$$۳,۲^{۰,۰۰۰۲۵} = ۱,۰۰۰۲۹۰۸ \quad \text{و} \quad ۳,۲^{-۰,۰۰۰۲۵} = ۰,۹۹۹۷۰۹۲$$

حالت سوم : $۰,۹۹ < a < ۱,۰۱$ است. در تابع $y = a^x$ وقتی این حالت پیش می‌آید محاسبهٔ y باز بطور تقریب به طریق زیر صورت می‌گیرد :

الآن دیدیم که $a^{\pm x} \approx ۱ \pm x \log_e a$. چون در این حال a نزدیک به ۱ است آن را به صورت $a = n \pm ۱$ می‌نویسیم. پس:

$$a^x = (۱ \pm n)^x = ۱ + x \log_e (۱ \pm n)$$

از طرفی :

$$\log_e (۱ \pm n) = \pm n - \frac{n^۲}{۲} \pm \frac{n^۳}{۳} - \cdots$$

از آنجا :

$$(۱ \pm n)^x \approx ۱ \pm nx$$
$$(۱ \pm n)^{-x} \approx ۱ \mp nx$$

چون در اینجا داریم : $\log_e (۱ \pm n) \approx \pm n$ لذا فرقی ندارد که $\log_e (۱ \pm n)$ را روی مقیاس LL و یا مقدار n را روی مقیاس D بگذاریم. هرقدر n کوچکتر باشد صحت و دقت جواب بیشتر است. از اینجا معلوم می‌شود که وقتی مقیاس LL تمام می‌شود مقیاس D می‌تواند به عنوان دنبالهٔ آن مورد استفاده قرار گیرد بشرطی که به جای $n \pm ۱$ مقدار $\pm n$ قرارداده شود. ممکن است وقتی که n را روی D می‌گذاریم بر مبدأ C منطبق شود، در این حال این تثبیت عملاً متحد با تثبیت $\log_e(۱ \pm n)$ روی یک مقیاس اضافی خیالی LL است که بترتیب از ۱,۰۰۱ تا ۱,۰۱ یا از ۰,۹۹۰ تا ۰,۹۹۹ مدرج شده باشد. در این صورت عمل به توان رسانیدن مثل حالت دوم ادامه پیدا می‌کند. زیرا در واقع هر جوابی که روی D خوانده می‌شود نتیجهٔ یک ضرب ساده است، و برای تکمیل آن باید برحسب اقتضا، یکی به آن اضافه یا آن را از ۱ کم کرد. وقتی که با افزایش توان، مقدار y خارج از حدود مقیاسهای LL واقع می‌شود قرائت مستقیماً توسط این مقیاسها صورت می‌گیرد.

مثال: $$۱,۰۰۲۳^{۳,۷} = (۱ + ۰,۰۰۲۳)^{۳,۷} = ۱,۰۰۸۵۱$$

روی مقیاس D بگذارید و روی همان D بخوانید و یکی به آن علاوه کنید.

$$۱,۰۰۲۳^{۳,۷} = ۱,۰۸۵۱$$

روی مقیاس D بگذارید و روی $LL_۱$ بخوانید.

$$۰,۹۹۷۷^{۳,۷} = (۱ - ۰,۰۰۲۳)^{۳,۷} = ۰,۹۹۱۴۹$$

روی D بگذارید و روی همان D بخوانید و از ۱ کم کنید.

$$۰,۹۹۷۷^{۳۷} = ۰,۹۱۸۴$$

روی مقیاس D بگذارید و روی $LL._۱$ بخوانید.

برای اندازه‌گیری خطائی که در محاسبه وارد شده کافی است خط موئی شاخص را روی مبدأ مقیاس D بگذاریم و فاصلهٔ آن را تا رابط ۱,۰۱ واقع روی $LL_۱$ اندازه بگیریم. حداکثر خطا موقعی پیدا می‌شود که هم تثبیت و هم خواندن هر دو توسط D صورت گیرد.

افزایش دقت: برای افزایش دقت باید اختلاف مابین خواندن روی مقیاس D و خواندن روی مقیاس log log را از میان برداشت. برای این منظور باید در بسط سریها علاوه بر جملهٔ درجهٔ اول از جملهٔ درجهٔ دوم نیز استفاده کرد.

برای تثبیت مبنا روی D باید از فورمول:

$$(A) \qquad \log_e (۱ \pm n) \approx \pm n\left(۱ \mp \frac{n}{۲}\right)$$

و برای خواندن در روی D باید از فورمول:

$$(B) \qquad e^{\pm x} \approx ۱ \pm x\left(۱ \pm \frac{x}{۲}\right)$$

استفاده نمود.

اگر نتیجه توسط مقیاس LL بدست آمده باشد قبل از تثبیت مبنا روی D، فقط باید از فورمول (A) استفاده کرد و اگر محاسبه منحصراً توسط D صورت گرفته باشد باید از (B) نیز برای خواندن جواب استفاده نمود.

مثال: در $۱,۰۰۲۳^{۳,۷} = ۱,۰۰۸۵۴$ به جای $n = ۰,۰۰۰۲۳$

مقدار: $$۰,۰۰۲۳\left(۱ - \frac{۱}{۲} \times ۰,۰۰۲۳\right) =$$

$$= ۰,۰۰۲۳ \times ۰,۹۹۸۸۵ = ۰,۰۰۲۲۷$$

را توسط مبدأ مقیاس C روی D می‌گذاریم. عمل به توان رسانیدن یعنی: $۳,۷ \times ۰,۰۰۲۲۹۷ + ۱$، جواب ۱,۰۰۸۵۰ را به ما می‌دهد. چون

قرائت روی D صورت می‌گیرد طبق فورمول (B) باید به طریق زیر تصحیح شود :

$$۰,۰۰۸۵۰\left(۱+\frac{۱}{۲}\times ۰,۰۰۸۵۰\right)=$$
$$=۰,۰۰۸۵۰\times ۱,۰۰۴۲۵=۰,۰۰۸۵۴$$

وقتی عدد ۱ را به آن اضافه کنیم جواب نهائی ۱,۰۰۸۵۴ (**درست همان** ۱,۰۰۸۵۳۶۲) خواهد شد. این تصحیح شاید به نظر کمی مشکل بیاید ولی در واقع بعد از اندک تمرین بحدی سهل خواهد شد که نظراً این تصحیح را انجام خواهید داد. وقتی مبنا کمتر از ۱,۰۰۱ باشد به علت دقت خط کش، دیگر این تصحیح لزومی پیدا نمی‌کند.

امثله :

$۸,۵^{۳,۷}=۲۷۵۰$ $\qquad$ $۱,۰۲۱^{۲,۴}=۱,۰۵۱۲$

$۲۵,۴^{-۲,۶}=۰,۰۰۰۲۲۳$ $\qquad$ $۱,۱۶۲^{-۴}=۰,۵۴۸۵$

$e^{-\pi}=۰,۰۴۳۲$ $\qquad$ $۲,۱۳^{۵,۳}=۵۵,۰$

$۰,۳^{۴}=۰,۰۰۸۱$ $\qquad$ $۲.۱۳^{۰,۵۳}=۱,۹۴۳$

$۰,۳^{-۴}=۱۲۳$ $\qquad$ $۲,۱۳^{-۰,۵۳}=۰,۶۶۹۸$

(تقریبی) $۱,۱۹^{۰,۰۳۱}=۱,۰۰۵۳۸$ $\qquad$ $۰,۴۹^{۲,۸}=۰,۱۳۵۷$

(با احتساب جملهٔ درجهٔ دوم):

$۱,۱۹^{۰,۰۳۱}=۱,۰۰۵۴۰$ $\qquad$ $۰,۴۹^{۱,۲}=۰,۴۲۵$

$۱,۱۹^{۰,۰۰۳۱}=۱,۰۰۰۵۳۸$ $\qquad$ $۰,۴۹^{۰,۱۲}=۰,۹۱۸$

(تقریبی) $۱,۰۰۴۸^{۱,۹}=۱,۰۰۹۱۲$ $\qquad$ $۰,۹۳^{۵,۱}=۰,۶۹۰۶$

(با احتساب جملهٔ درجهٔ دوم):

$۱,۰۰۴۸^{۱,۹}=۱,۰۰۹۱۴$ $\qquad$ $۰,۹۳^{-۵,۱}=۱,۴۴۸$

$۱,۰۰۰۲۱^{۴,۲}=۱,۰۰۰۸۸۳$ $\qquad$ $۱,۱۹^{۰,۳۱}=۱,۰۵۵۴$

۲۹ـ توانهای $y=e^x$ و ریشه‌های $z=\sqrt[x]{e}$

وقتی خطکش بسته است می‌توانیم آن را به‌عنوان جدولی برای مقادیر تابع $y=e^x$ بدانیم. کافی است شاخص را روی اعداد مثلاً ۰,۳۵ و ۲ و π از مقیاس D قرار دهیم و مقادیر ۱,۴۱۹ و ۷,۳۹ و ۲۳,۱ را روی مقیاسهای

LL به ترتیب برای $e^{۰,۳۵}$ و $e^{۲}$ و e^{π} بدست آوریم.

امثله:

$e^{۱,۴۸۹} = ۴,۴۳$ $\quad e^{-۱,۴۸۹} = ۰,۲۲۵۷$

$e^{۰,۱۴۸۹} = ۱,۱۶۰۵$ $\quad e^{-۰,۱۴۸۹} = ۰,۸۶۱۷$

$e^{۰,۰۱۴۸۹} = ۱,۰۱۵$ $\quad e^{-۰,۰۱۴۸۹} = ۰,۹۸۵۲۲$

و بالاخره $e^{۰,۰۰۱۴۸۹} = ۱,۰۰۱۴۸۹$ یعنی مجدداً به رابطهٔ $e^{\pm x} \approx ۱ \pm x$ می‌رسیم.

برای محاسبهٔ ریشه‌های مختلف e بهتر است آنها را به توان کسری نوشت و به کمک مقیاس CI جوابها را پیدا کرد. مثلاً برای محاسبهٔ:

$$\sqrt[۴]{e} = e^{\frac{۱}{۴}} = ۱,۲۸۴$$

عدد ۴ را روی مقیاس CI می‌گذاریم و مقابل آن روی $LL_۲$ جواب را می‌خوانیم.

امثله:

$$\sqrt[۳,۵]{e} = e^{\frac{۱}{۳,۵}} = ۱,۳۳۰۷ \text{ و } \sqrt[\frac{۱}{۰,۳۵}]{e} = e^{-\frac{۱}{۰,۳۵}} = ۰,۰۵۷۴$$

$$\sqrt[\frac{۱}{۳,۵}]{e} = e^{-\frac{۱}{۳,۵}} = ۰,۷۵۱۴$$

۳۰ـ محاسبهٔ $\sqrt[x]{a}$

استخراج ریشه به ترتیب عکس عمل توان رسانیدن صورت می‌گیرد.

مثال ۱ـ مطلوب است محاسبهٔ $\sqrt[۵,۲]{۶۲}$. عدد ۵۲ از مقیاس C را مقابل عدد ۶۲ از مقیاس $LL_۳$ می‌گذاریم و روی $LL_۲$ در مقابل منتهای C جواب را می‌خوانیم: $\sqrt[۵,۲]{۶۲} = ۲,۲۱$

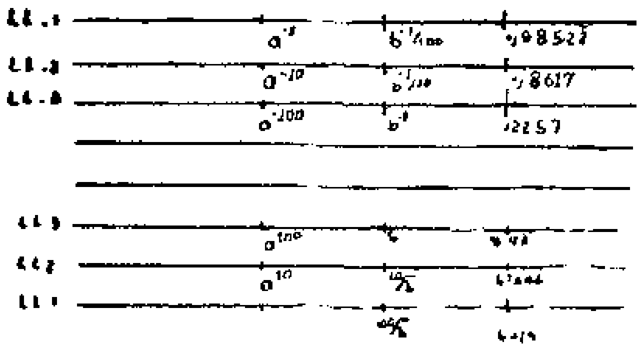
مثال ۲ـ مطلوب است محاسبهٔ $\sqrt[۱,۴۸]{۲۴۷}$. عدد ۱۴۸ از مقیاس C را روی عدد ۲۴۷ از مقیاس $LL_۳$ می‌گذاریم و جواب را روی همین مقیاس در مقابل مبدأ C می‌خوانیم: $\sqrt[۱,۴۸]{۲۴۷} = ۴۱,۵$

توجه: بطوری که از مثال ۱ پیداست، وقتی جواب در مقابل منتهای C یافت شود، نباید آن را روی همان مقیاس $LL(LL_۳)$ که عدد زیر رادیکال را

روی آن قــرار داده‌ایــم جستجو نمائیم بلکه باید آن را روی مقیاسی کــه یکی پائین‌تر از آن است ($LL_۲$) پیدا کنیم.

۳۱ـ محاسبهٔ توانها و ریشه‌های دهم و صدم اعداد

مقیاسهای LL طوری درست شده‌اند که اگر عدد a را روی یکی از آنها قرار دهیم تــوان ۱۰ و ریشهٔ دهم آن بــلافاصلــه بــه ترتیب روی مقیاس بالائی یــا زیرین آن دیده می‌شود (شکل ۷۳).



ش ۷۳

مــثلاً اگــر ۱,۲۰۴ را روی $LL_۲$ پیدا کنیم مقــابل آن روی $LL_۳$ خــواهــیــم داشت: $۱,۲۰۴^{۱۰} = ۶,۴$ و همــچنین اگــر ۱,۰۳۵ را روی $LL_۱$ بگذاریــم روی $LL_۲$ مقابــل آن خــواهیم داشت: $۱,۰۳۵^{۱۰} = ۱,۴۱$. بدیهی است بــا این مقیاسها حد اکثر تا $۳^{۱۰}$ را می‌توان حساب کرد.

امثله:

$$۱,۰۱۵^{-۱} = ۰,۹۸۵۲۲ \quad و \quad ۱,۰۱۵^{-۱۰۰} = ۰,۲۲۵۷$$
$$و \quad ۱,۰۱۵^{۱۰} = ۱,۱۶۰۵ \quad و \quad ۱,۰۱۵^{-۱۰} = ۰,۸۶۱۷$$
$$و \quad ۱,۰۱۵^{۱۰۰} = ۴,۴۳$$

همچنین ریشه‌هــای دهم هر عــدد را مستقیماً مقابل آن روی مدرج زیرین می‌خوانیم. مثلاً مقابل عدد ۷۵ از مقیاس $LL_۳$ روی مقیاس $LL_۲$ داریم:

$$\sqrt[۱۰]{۷۵} = ۱,۵۴$$

و در مقابل عدد ۱,۲۴۸ از مقیاس $LL_۲$ روی مقاس $LL_۱$ داریم: $\sqrt[۱۰]{۱,۲۴۸} = ۱,۰۲۲۴$. و کوچکترین عــددی که می‌توان ریشهٔ دهمش را با این مقیاسها حساب نمود عدد ۱,۱۰۵ است.

۳۲ـ لگاریتمهای اعداد در مبناهای مختلف: $\log_a x$

از رابطهٔ $a^x = y$ نتیجه می‌شود: $x = \log_a y$. یعنی پیداکردن لگاریتم

یک عدد را می‌توان دومین عمل عکس به توان رسانیدن آن تعریف نمود (اولین عمل عکس پیدا کردن ریشه‌ها بود) و از آنجا نتیجه‌گرفت که برای تعین لگاریتم یک عدد کافی است از عکس ترتیبی که هنگام به توان رسانیدن بکار می‌بردیم استفاده کنیم. یعنی مبنای a را روی LL قرار دهیم و مبدأ (یا منتهای) C را بر آن منطبق کنیم و در مقابل عدد x از مقیاس LL جواب $\log_a x$ را روی مدرج C بخوانیم. مثلاً برای تعیین $\log_۲ ۱۶$ منتهای مدرج C را روی عدد ۲ از $LL_۲$ می‌گذاریم و در مقابل عدد ۱۶ از $LL_۳$ روی مدرج C جواب را می‌خوانیم: $\log_۲ ۱۶ = ۴$. و همچنین برای محاسبهٔ $\log_۵ ۲۵$ مبدأ C را روی عدد ۵ از $LL_۳$ می‌گذاریم و در مقابل عدد ۲۵ از همین مقیاس روی C جواب را می‌خوانیم: $\log_۵ ۲۵ = ۲$. بنابراین وقتی که خط‌کش بسته است لگاریتم طبیعی اعداد (در مبنای e) مستقیماً در مقابل آنها روی C دیده می‌شود. مثلاً در مقابل عدد ۲۵ از مقیاس $LL_۳$ عدد ۳,۲۲ را روی C پیدا می‌کنیم یعنی:

$$\log_e ۲۵ = ۳,۲۲$$

و همچنین در مقابل عدد ۱,۳۱ از $LL_۲$ عدد ۰,۲۷ را روی C می‌بینیم یعنی: $\log_e ۱,۳۱ = ۰,۲۷$. و بالاخره در مقابل عدد ۱,۰۱۴۵ از $LL_۱$ روی C عدد ۰,۰۱۴۴ را می‌خوانیم یعنی داریم: $\log_e^{۱,۰۱۴۵} = ۰,۰۱۴۴$.

اگر مبدأ (یا منتهای) C را روی عدد ۱۰ از مقیاس $LL_۳$ بگذاریم لگاریتم اعشاری اعداد بدست می‌آید. مثلاً اگر در همین وضع با دقت به خط‌کش نگاه کنیم در مقابل عدد ۱۰۰ از $LL_۳$ عدد ۲ و در مقابل عدد ۱۰۰۰ از آن عدد ۳ را روی مقیاس C می‌بینیم. یعنی داریم: $\log ۱۰^۲ = ۲$ و $\log ۱۰^۳ = ۳$ به عبارت دیگر $۱۰۰ = ۱۰^۲$ و $۱۰۰۰ = ۱۰^۳$.

برای تعیین مرتبهٔ جواب از واقعیت $\log_a a = ۱$ استفاده می‌کنیم. وقتی مبدأ (یا منتهای) مقیاس متحرک را روی مبنای a از یک مقیاس LL گذاشتیم لگاریتم تمام اعدادی که در طرف راست a روی همین مقیاس LL قرار دارند از واحد بزرگتر و لگاریتم تمام اعدادی که در سمت چپ a روی آن واقعند از واحد کمترند. وقتی بترتیب $LL_۳$ و $LL_۲$ و $LL_۱$ یا $LL_{۰۳}$ و $LL_{۰۲}$ و $LL_{۰۱}$ از مقیاسی به مقیاس دیگر برویم ممیزها یکی به سمت چپ و اگر به ترتیب عکس ترتیب فوق از مقیاسی به مقیاس دیگر برویم ممیزها یکی به سمت راست حرکت می‌کنند. اگر در $\log_a x$، هم x و هم a هردو را روی مقیاسهای $LL_۱$ و

LL_2 و LL_3 یا هردو را روی مقیاسهای $LL._1$ و $LL._2$ و $LL._3$ بگذاریم مقدار لگاریتم مثبت و اگر یکی از این مقادیر را روی LL_1 یا LL_2 یا LL_3 و دیگری را روی $LL._1$ یا $LL._2$ یا $LL._3$ بگذاریم لگاریتم منفی خواهد شد.

امثله:

$$\log_{10} 0{,}5 = -0{,}3010 \text{ و } \log_{10} 1{,}03 = 0{,}01283 \text{ و}$$

$$\log_{10} 50 = 1{,}699$$

$$\log_{10} 0{,}05 = -1{,}301 \text{ و } \log_{10} 0{,}015 = -1{,}824$$

$$\text{و } \log_{10} 2 = 0{,}3010$$

وقتی توان عددی را به کمک منتهای C می‌یابیم، بدیهی است جواب در طرف چپ مقدار مبنا واقع می‌شود و چون از ۱ کوچکتر است ممیز، نسبت به مثالهای قبل، باید یکی به سمت چپ حرکت کند.

تمرین ۶۵ـ حساب کنید لگاریتمهای زیر را:

(۱) $\log_{10} 6$	(۴) $\log_2 16$	(۷) $\log_{0.25} 2$
(۲) $\log_{10} 1{,}14$	(۵) $\log_2 1{,}02$	(۸) $\log_e 0{,}05$
(۳) $\log_{10} 1{,}015$	(۶) $\log_2 0{,}25$	(۹) $\log_e 0{,}622$

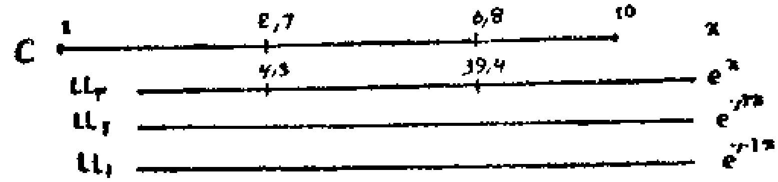
تبصره ـ از مقیاسهای LL برای محاسبهٔ عباراتی نظیر $\log_a {}^2 x$ و $\log_a {}^3 x$ و $\log_{10} \log_a x$ نیز استفاده می‌شود. وقتی مقیاسهای DF و CF و CIF را نیز بکار بریم از تثبیت مجدد خطکش متحرک هم جلوگیری خواهد شد.

محاسبهٔ عبارات: $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ و $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ به علت اینکه e^x و e^{-x} زیر یک خط موئی مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند نیز بسیار آسان است.

مسئله: حساب کنید مقدار:

$$y = \sqrt[2.7]{4{,}3^{6.8}} \text{ و یا } y^{2.7} = 4{,}3^{6.8} \text{ و یا } y = 4{,}3^{\frac{6.8}{2.7}} \text{ را.}$$

اگر از طرفین رابطهٔ وسط لگاریتم بگیریم داریم: $\dfrac{\log 4{,}3}{2{,}7} = \dfrac{\log y}{6{,}8}$. پس اگر عدد ۲,۷ از مقیاس C را مقابل عدد ۴,۳ از مقیاس LL_3 بگذاریم، در مقابل عدد ۶,۸ از مقیاس C روی مقیاس LL_3 جواب را خواهیم دید: $y = 39{,}4$ (شکل ۷۴).



ش ۲۴

۳۳ـ مقیاسهای خطوط مثلثاتی ـ اول مقیاس S

مقیاسهای S (جیب) و T (ظل) و ST (جیب و ظل زوایای کوچک) که با مقیاس D مربوط می‌باشند به مقیاسهای خطوط مثلثاتی موسومند. مقیاس S از $5°44'$ تا $90°$ (علت اینکه چرا از $5°44'$ شروع شده است را بعداً خواهیم دید) بطور غیر یکنواخت مدرج شده و بنابراین فواصل تقسیمات در آن غیر مساوی است. تقسیم بندی این تقسیمات بقرار زیر است:

قسمت اول از مبدأ تا $20°$. قسمت دوم از $20°$ تا $40°$. قسمت سوم از $40°$ تا $60°$. قسمت چهارم از $60°$ تا $80°$ و بالاخره قسمت پنجم از $80°$ تا $90°$.

علت عدم تساوی فواصل این است که هر قدر به سمت راست مقیاس نزدیکتر می‌شویم این مقیاس نسبت به مقیاسهای C و D فشرده‌تر می‌شود. در هریک از این قسمتها تقسیمات مرحلهٔ دوم دیگری برای مشخص ساختن دقایق نیز صورت گرفته است.

تمرین ۶۶ـ خط رؤیت شاخص را روی زوایای $8°$ و $11°$ و $12°$ و $34°$ و $35°$ و $28°$ و $46°$ و $53°$ و $60°$ و $62°$ و $68°$ و $76°$ از مقیاس S بگذارید.

گفتیم که فاصلهٔ مابین درجات به تقسیمات ریزتری نیز تقسیم شده است. اندازهٔ این تقسیمات ریز در قسمتهای مختلف مقیاس متفاوت است. در قسمت اول هریک از تقسیمات ریز معرف $\frac{1}{10}$ درجه (یعنی ۶ دقیقه) و در قسمت دوم هریک معرف $\frac{1}{6}$ درجه (یعنی ده دقیقه) و در قسمت سوم هریک $\frac{1}{2}$ درجه (یعنی ۳۰ دقیقه) و در قسمت چهارم هریک معرف ۱ درجه و بالاخره در قسمت پنجم

تمام فاصله معرف °۱۰ است.

تمرین ۶۷ـ زوایای زیر را روی مدرج S مشخص سازید:
و ۲۱°۲۰′ و ۲۱°۳۰′ و ۲۱°۴۰′ و ۸°۵′ و ۱۱°۵′ و ۱۶°۳۰′ و ۴۲°۳۰′
۷°۲۵′ و ۱۳°۵۰′ و ۲۴°۲۰′ و ۱۵°۵′ و ۱۱°۲۴′ و ۵۱°۴۰′ و ۳۷°۵۰′.

مقیاس ST ساده‌تر از مقیاس S و تقریباً بـا همان دقت مقیاسهای C و D درست شده و شامل فاصلهٔ بین ۳۴°,۲۸′ و ۵°۴۴′ است.

تمرین ۶۸ـ زوایای زیر را روی مدرج ST مشخص کنید:
۱°۲۰′ و ۳°۴′ و ۴°۳۰′ و ۵°۳۰′ و ۵°۴۰′

مقیاس T: چـون تقسیمات ایـن مقیاس بسیار ساده است مطـالعهٔ آن را بخوانندگان واگذار می‌کنیم.

*تبصره*ـ از آنجائی که در رشته‌های مهندسی و علوم جدید نمایش اجزای درجه به طریق اعشاری ساده‌تـر و متداولتر است لـذا معمولاً اجزای درجه را به اعشاری تبدیل می‌کنند و دیگر دقیقه و ثـانیه را ذکـر نمی‌کنند. مثلاً به جای ۳۶°۲۶′ می‌نویسند: ۳۶,۳۸° = ۳۶ $\frac{۲۳}{۶۰}$ = ۳۶°۲۳′ و همچنین بـه جـای ۵۸°۲۶′ می‌نویسند: ۵۸,۴۳°.

۳۴ـ طرز پیداکردن جیب و ظل زوایا و بالعکس

همانطوری کـه قبلاً اشاره کـردیم تمام مدرجهای مثلثاتی بـا مقیاس D بستگی دارند. ولی می‌دانستیم که هر عدد در روی مقیاس D تنها معرف یک عدد معینی نیست (مثلاً ۲,۴۳) بلکه معرف جمیع اعدادی است کـه از ضرب آن در توانهای مختلف ۱۰ بدست مـی‌آیـد (۰,۲۴۳ و ۲۴,۳ و ۰,۰۲۴۳ و ...). ولی در محاسبهٔ جیب و ظل، هرعـدد از مقیاس D فقط و فقط یک عـدد را در مقابل هر زاویه به ما می‌دهد یعنی مثلاً برای sin ۳۵° فقط یک جـواب بیشتر پیدا نمی‌کنیم.

مقیاس ST به این ترتیب مدرج شده است کـه مقیاس D را بین ۰,۱۰۰ و ۱,۰۰۰ مدرج شده فرض کرده‌ایم.

sin ۵°۴۳,۷۷′ = ۰,۰۹۹۹ ≈ ۰,۱۰۰

tg ۵°۴۳,۷۷′ = ۰,۱۰۰۳ ≈ ۰,۱۰۰

$$\sin ۹۰^\circ = ۱,۰۰$$
$$\mathrm{tg}\ ۴۵^\circ = ۱,۰۰$$

در واقـع مقیاس ST ادامهٔ مقیاسهای S و T از سمت چپ است. چـون مقادیر جیب و ظل زاویهٔ $۵^\circ ۴۳,۷۷'$ باهم مساویند لذا اگر مقدار زاویه کمتر از این انـدازه هم بـاشد مقدار جیب و ظل مساوی خواهند بود. از ایـن‌رو برای دنباله‌های S و T فقط یک مدرج ST که معرف مقیاسهای جیب و ظل زوایـای کوچک است بیشتر اختیار نشده است:

$$\left.\begin{array}{l}\sin ۰^\circ ۳۴,۳۸' = ۰,۰۰۹۹۹۹۸ \\ \mathrm{tg}\ ۰^\circ ۳۴,۳۸' = ۰,۰۱۰۰۰۰۳\end{array}\right\} \approx ۰,۰۱۰۰۰$$

بنابراین اعدادی که روی مقیاس D برای جوابهای S و T و همچنین ST بدست می‌آوریم به تـرتیب بین (۱,۰ و ۰,۱) و (۰,۱ و ۰,۰۱) قرار دارند. بدین ترتیب مرتبهٔ جوابها هم مشخص می‌شود.

مثال ۱ــ $\sin ۴۰^\circ$ را حساب کنید: خط رؤیت شاخص را روی زاویهٔ ۴۰° از مقیاس S می‌گذاریم و مقابل آن روی مقیاس D جواب را می‌خوانیم:

$$\sin ۴۰^\circ = ۰,۶۴۳$$

مثال ۲ــ $\mathrm{tg}\ ۱۵^\circ$ را پیدا کنید. خط رؤیت شاخص را روی زاویـهٔ ۱۵° از مقیاس T می‌گذاریم و مقابل آن روی D جواب را می‌خوانیم:

$$\mathrm{tg}\ ۱۵^\circ = ۰,۲۶۸$$

مثال ۳ــ $\sin ۳^\circ$ را پیدا کنید. چون زاویه کوچک است آن را در روی ST پیدا می‌کنیم و مقابل آن روی مقیاس D جواب را می‌خوانیم:

$$\mathrm{tg}\ ۳^\circ = \sin ۳^\circ = ۰,۰۵۲۳$$

تبصرهــ اگر $\alpha < ۵^\circ$ باشد داریم:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \sin \alpha \approx \text{قوس } \alpha \text{ برحسب رادیان}$$

لذا مقیاس ST برحسب رادیان مدرج ولی با درجه شماره گذاری شده است.

جیب تمام و ظل تمام زوایا نیز با توجه به روابط:

$$\mathrm{cotg}\ \alpha = \mathrm{tg}\ (۹۰^\circ - \alpha) \text{ و } \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$

بترتیب از مقیاسهای S و T بـدست مـی‌آیند و مقیاسهای جیب تمام (cos) و ظل تمام (cotg) را بوجود می‌آورند کـه مدرجهای آنها قرمز و بترتیب زیـر

مقیاس جیبها و بالای مقیاس ظلها قرار گرفته‌اند. مثلاً دیده می‌شود که:
$\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$ است

برای زوایای بین 80° و 90° قرائت نمی‌توانند بدقت صورت گیرد زیرا داریم: $\sin 80^\circ = 0{,}985$ و در حقیقت خطکش محاسبه به عنوان نمایش یک جدول لگاریتمی سه رقمی در نظر گرفته شده است نه بیش. لذا در چنین حالتی از رابطهٔ:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \sin^2 (90^\circ - \alpha)}$$

استفاده می‌کنیم که خود این رابطه با روش تقریبی زیر تبدیل می‌شود: اگر x بسیار کوچک باشد داریم: $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ بنابراین:

$$\sin \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 (90^\circ - \alpha)$$

فرض می‌کنیم که بخواهیم $\sin 84{,}1^\circ$ را بدقت حساب کنیم. ابتدا $\sin 5{,}9^\circ$ را روی D و مربع آن را روی مقیاس A بدست می‌آوریم:

$$\sin^2 5{,}9^\circ = 0{,}0106$$

پس داریم: $\sin 84{,}1^\circ = 1 - 0{,}0053 = 0{,}99470$ که اگر با جدول لگاریتم ۵ رقمی هم کار می‌کردیم عیناً همین جواب را بدست می‌آوردیم.

برای محاسبهٔ زوایائی که یکی از خطوط مثلثاتی آنها داده شده باشد ترتیب عمل، عکس ترتیب قبل است. مثلاً اگر $\sin \alpha = 0{,}586$ باشد این عدد را روی D قرار می‌دهیم و مقابل آن روی S جواب را می‌خوانیم:

$$\alpha = 35{,}9^\circ$$

تبصره ـ برای محاسبهٔ ظل زوایای بین 45° و $89{,}5^\circ$ از مقیاس CI استفاده می‌کنند.

ظل زوایای بین 45° و $84{,}5^\circ$ یک پیکر صحیح و ظل زوایای بین $84{,}5^\circ$ و $89{,}5^\circ$ دو پیکر صحیح دارند.

تمرین ۶۹ـ مقادیر زیر را حساب کنید: $\sin 36^\circ$ و $\sin 42^\circ 30'$ و $\sin 47^\circ 12'$ و $\mathrm{tg}\, 8^\circ 37'$ و $\mathrm{tg}\, 1^\circ 12{,}6'$ و $\cos 73^\circ 30'$ و $\mathrm{arc\,tg}\, 0{,}264$ و $\mathrm{arc\,sin}\, 0{,}67$ و $\mathrm{arc\,cos}\, 0{,}312$ و $\mathrm{arc\,tg}\, 0{,}3$ و $\mathrm{arc\,sin}\, 0{,}0355$ و $\mathrm{arc\,tg}\, 0{,}0725$ و $\mathrm{arc\,cos}\, 0{,}01575$.

۳۵ـ محاسبهٔ عباراتی که شامل خطوط مثلثاتی هستند

مثال ۱ــ مقدار $۲\text{tg}۱۵^\circ$ را حساب کنید. مبدأ مقیاس C را مقابل عدد ۱۵° از مقیاس T می‌گذاریم و جواب را روی مقیاس D مقابل عدد ۲ از مقیاس C می‌خوانیم: $۲\ \text{tg}\ ۱۵^\circ = ۰{,}۵۳۶$

تبصرهٔ ۱ــ برای محاسبهٔ $\text{cotg}\ \alpha$ از رابطهٔ :

$$\text{cotg}\ \alpha = \text{tg}\,(۹۰^\circ - \alpha) = \frac{۱}{\text{tg}\ \alpha}$$

نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

تبصرهٔ ۲ــ مجدداً یادآوری می‌کنیم کــه مرتبهٔ اعداد متناظر بـا مقیاسهای S و T صفر و مرتبهٔ اعداد متناظر با مقیاس ST برابر ۱ — است.

مثال ۲ــ مقدار کسر $\frac{۶۰{,}۵}{\text{tg}\ ۳۸^\circ ۲۰'}$ را حساب کنید. عدد ۶۰٫۵ از مقیاس C را مقابل عدد $۳۸^\circ ۲۰'$ از مقیاس T می‌گــذاریم و در مقـابل منتهای D روی مقیاس C جواب را می‌خوانیم :

$$\frac{۶۰{,}۵}{\text{tg}\ ۳۸^\circ ۲۰'} = ۷۶{,}۵$$

(مرتبهٔ جواب را طبق قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ خارج قسمت تعیین می‌کنیم).

مثال ۳ــ مقدار کسر $x = \frac{۰{,}۶۵ \times \text{tg}\ ۲۲^\circ}{\text{tg}\ ۲۴^\circ}$ را حساب کــنـید. ایـن عبارت شبیه $\frac{a \times b}{c}$ است. ابتدا $\frac{۰{,}۶۵}{\text{tg}\ ۲۴^\circ}$ را پیدا و در $\text{tg}\ ۲۲^\circ$ ضرب می‌کنیم.

طرز عمل : عدد ۶۵ از مقیاس C را مقابل عدد ۲۴ از مقیاس T قرار می‌دهــیم و بعد روی مقیاس C مقابل عدد ۲۲ از مقیاس T جواب را می‌خوانیم:

$$x = ۰{,}۵۹$$

تمرین ۷۰ ـ عبارات زیر را حساب کنید :

$$\frac{۰{,}۶\ \sin ۳۱^\circ}{\sin ۲۲^\circ} \text{ و } \text{tg}\ ۱۰{,}۵^\circ \text{ و } ۱{,}۴\ \sin ۱۲^\circ \text{ و } \frac{۴{,}۸۵\ \sin ۲۶^\circ}{\text{tg}\ ۳۹{,}۶۶^\circ} \text{ و }$$

$$S = \frac{\sin ۲^\circ \times \sin ۳^\circ \times \sin ۴^\circ}{\text{tg}\ ۱۰^\circ \times \text{tg}\ ۲۰^\circ}$$

تبصرهٔ ۳ـ مطالبی را که در باب تناسبات قبلاً گفته بودیم در اینجا نیز می‌توانیم بکار بریم. عدد ۱,۴۶ از مقیاس C را مقابل زاویهٔ $5^\circ 43{,}77'$ از مقیاس T می‌گذاریم. ببینیم چه رابطه‌ای بین ظلهای زوایای واقع روی T واعداد متناظرشان روی C برقرار است؟ در روی خط کش نسبتهای زیر دیده می‌شود:

$$\frac{\operatorname{tg} 5^\circ 43{,}77'}{1{,}46} = \frac{\operatorname{tg} 6^\circ 55'}{1{,}77} = \frac{\operatorname{tg} 9^\circ 25'}{2{,}42} = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ 15'}{3{,}98} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ 30'}{8{,}60} = \frac{\operatorname{tg} 34^\circ 25'}{10}$$

(علت این امر واضح است زیرا در واقع به جای مقیاس D مقیاس T گذاشته شده است). اما چون داریم: $\operatorname{tg} 5^\circ 43{,}77' = 0{,}1$ پس معلوم می‌شود که قدرنسبت تساویهای فوق برابر $\frac{1}{14{,}6} = \frac{0{,}1}{1{,}46}$ است. وچون مرتبهٔ صورتها همه مساوی و برابر صفر می‌باشد لذا مخرجها نیز باید هم مرتبه باشند. پس می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\operatorname{tg} 6^\circ 55'}{17{,}7} = \frac{\operatorname{tg} 9^\circ 25'}{24{,}2} = \cdots$$

ولی نمی‌توانیم بنویسیم: $\frac{\operatorname{tg} 6^\circ 55'}{17{,}7} = \frac{\operatorname{tg} 9^\circ 25'}{2{,}42} = \cdots$. معهذا نباید حالت استثنائی را که در قاعدهٔ تعیین مرتبهٔ خارج قسمت (تبصرهٔ مبحث ۱۲) برای کسر $\frac{a}{1}$ وقتی عدد ۱ منتهای مقیاس C می‌باشد از نظر دور داریم. مثلاً در نسبتهای:

$$\frac{\operatorname{tg} 5^\circ 43{,}77'}{1{,}46} = \frac{\operatorname{tg} 6^\circ 55'}{1{,}77} = \cdots = \frac{\operatorname{tg} 34^\circ 25'}{10}$$

تمام مخرجها از مرتبهٔ ۱ است بجز کسر آخری که مرتبهٔ مخرج آن ۲ می‌باشد. ولی بدیهی است تشخیص این مرتبه با توجه به کسرهای مجاور بسیار آسان صورت می‌گیرد.

مثال ۴ـ زاویهٔ x را از تناسب زیر بدست آورید:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 19^\circ 30'} = \frac{3}{5}$$

حل_ این تناسب را به صورت: $\frac{\operatorname{tg} ۱۹^\circ ۳۰'}{۵} = \frac{\operatorname{tg} x}{۳}$ مـی‌نـویسیم.

حال اگر عدد ۵ از مقیاس C را مقابل زاویهٔ $۱۹^\circ ۳۰'$ از مقیاس T بگذاریـم، در مقابل عدد ۳ از مقیاس C روی مقیاس T جواب را می‌بینیم: $x = ۱۲^\circ$.

تمرین ۷۱ـ x را از نسبتهای زیر بدست آورید:

$$\frac{۱,۷}{۲,۴} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} ۲۶^\circ} \text{ و } \frac{۱,۰۹}{۳,۲۶} = \frac{\operatorname{tg} ۹^\circ ۲۰'}{\operatorname{tg} x} \text{ و } \frac{۳}{۸} = \frac{\sin x}{\sin ۲۴^\circ} \text{ و }$$

$$۸\operatorname{tg} x = ۲,۲۴ \operatorname{tg} ۳۱^\circ \text{ و } \frac{\sin x}{\operatorname{tg} ۲۷^\circ} = \frac{۲}{۷}$$

تمرین ۷۲ـ حساب کنید:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{۳}{۷} \text{ و } \operatorname{arc\,tg} \frac{۲}{۹} \text{ و } \operatorname{arc\,tg} \frac{۱۴}{۱۵} \text{ و } \arcsin \frac{۳}{۵}$$ را.

(راهنمائی: اگر فرض‌کنیم $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{۳}{۷}$ بـاشد پس $\frac{۳}{۷} = \frac{\operatorname{tg} x}{۱}$ و یا $\frac{۳}{۷} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} ۴۵^\circ}$).

در تناسباتی که در اینجا ذکر کردیم مرتبهٔ تمام مخرجهای کسرهای: $\ldots = \frac{\operatorname{tg} \alpha_۲}{a_۲} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_۱}{a_۱}$ مساوی بودند. اکنون حالتی را در نظر بگیریم که این مراتب مساوی نباشند. در همان حالت قبل که عدد ۱,۴۶ از مقیاس C را مقابـل مبدأ مقیاس D قـرار داده بودیم اگـر به جـای مقیاس T مقیاس ST را در نظر بگیریم می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۰,۰۱}{۱,۴۶} = \frac{\operatorname{tg} ۴۱,۶'}{۱,۷۷} = \frac{\operatorname{tg} ۵۷'}{۲,۴۲} = \frac{\operatorname{tg} ۱^\circ ۲۳,۷'}{۳,۹۸} = \frac{\operatorname{tg} ۲^\circ ۱۴'}{۵,۷۰} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} ۳^\circ ۲۲,۵}{۸,۶۰} = \frac{\operatorname{tg} ۳^\circ ۵۵'}{۱۰}$$

$(\operatorname{tg} ۳۴,۳۸' = ۰,۰۱)$. ولی داریم: $\frac{۰,۰۱}{۱,۴۶} = \frac{۰,۱}{۱,۴۶} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۰,۱}{۱۴,۶}$

بنابراین می‌توانیم تمام نسبتهائی را کـه برای مقیاس ST نـوشته‌ایـم مساوی نسبتهائی که برای مقیاس T نوشته بودیم قرار دهیم بشرطی که مخرجهای روابط

مربوط به مقیاس T را ده برابر کنیم، زیرا واضح است که:

$$\frac{\operatorname{tg} ۶^\circ ۵۵'}{۱۷,۷} = \frac{\operatorname{tg} ۹^\circ ۲۵'}{۲۴,۲} = \frac{\operatorname{tg} ۱۵^\circ ۱۵'}{۳۹,۸} = \ldots = \frac{\operatorname{tg} ۳۴^\circ ۲۵'}{۱۰۰} =$$

$$= \frac{۰,۱}{۱۴,۶} = \frac{\operatorname{tg} ۴۱,۶'}{۱,۷۷} = \frac{\operatorname{tg} ۵۷'}{۲,۴۲} = \frac{\operatorname{tg} ۱^\circ ۲۳,۷'}{۳,۹۸} = \ldots$$

$$= \frac{\operatorname{tg} ۳^\circ ۵۵'}{۱۰} = \frac{۰,۱}{۱۴,۶}$$

نتیجه:

> اگر در نسبتهای: $\frac{\operatorname{tg} \alpha_۱}{a_۱} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_۲}{a_۲} = \ldots = \frac{\operatorname{tg} \alpha_k}{a_k}$ همهٔ مخرجها هم‌مرتبه نباشند و دوتا از آنها یک مرتبه باهم اختلاف داشته باشند در این صورت زوایای متناظر به مخرجهای بزرگتر روی مقیاس T و زوایای متناظر به مخرجهای کوچکتر روی مقیاس ST قرار خواهند گرفت.

واضح است که نتیجهٔ فوق برای مقیاسهای S و ST در نسبتهای:

$$\frac{\sin \alpha_۱}{a_۱} = \frac{\sin \alpha_۲}{a_۲} = \ldots = \frac{\sin \alpha_k}{a_k}$$

نیز صادق است. ولی اگر مخرج بزرگتر متعلق به مقیاس ST بود بدیهی است که نمی‌توان از این قاعده استفاده نمود. مثلاً نسبتهای: $\frac{\sin ۳^\circ}{۷۰} = \frac{\sin x}{۳}$ را نمی‌توان با استفاده از این قاعده روی خطکش قرار داد. همچنین تبصرهٔ (مبحث ۱۲) را نیز باید در نظر داشت.

برای اینکه قاعدهٔ فوق را بسهولت بخاطر بسپاریم توجه داریم که زوایای کوچکتر روی ST و زوایای بزرگتر روی S یا T واقعند. لذا قاعدهٔ فوق را به ترتیب زیر بیان می‌کنیم: مخرجهای بزرگتر با زوایای بزرگتر و مخرجهای کوچکتر با زوایای کوچکتر متناظرند.

مثال ۵ــ زوایای $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ را از نسبتهای زیر بدست آورید:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_۱}{۲} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_۲}{۳,۶} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_۳}{۱۷,۱} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_۴}{۸,۵} = \frac{\operatorname{tg} ۲۰^\circ}{۵۰}$$

حل ـ طبق قاعدهٔ فوق زاویهٔ $\alpha_۳$ روی مقیاس T و بقیهٔ زوایا روی ST واقع خواهند شد. عدد ۵ از مقیاس C را مقابل زاویهٔ ۲۰° از مقیاس T می‌گذاریم و جوابها را می‌خوانیم:

$$\alpha_۴ = ۳^\circ\ ۳۲{,}۵' \text{ و } \alpha_۳ = ۷^\circ\ ۵۵' \text{ و } \alpha_۲ = ۱^\circ\ ۳۰' \text{ و } \alpha_۱ = ۵۰'$$

مثال ۶ ـ x را از رابطهٔ $۵ \sin ۳^\circ = ۰{,}۷ \sin x$ بدست آورید. اول این رابطه را به صورت $\frac{\sin x}{۵} = \frac{\sin ۳^\circ}{۰{,}۷}$ می‌نویسیم. چون مرتبهٔ مخرج کسر طرف دوم یکی بیشتر از مرتبهٔ مخرج کسر طرف اول است لذا x را روی مقیاس S پیدا می‌کنیم: عدد ۷ از مقیاس C را مقابل زاویهٔ ۳° از مقیاس ST می‌گذاریم و مقابل عدد ۵ از مقیاس C روی مقیاس S جواب را می‌خوانیم:

$$x = ۲۱^\circ\ ۵۶'$$

مثال ۷ ـ مقدار x را از معادلهٔ $x = \operatorname{arc\ tg} \frac{۱۲}{۲۱۴}$ پیدا کنید.

حل ـ داریم: $\operatorname{tg} x = \frac{۱۲}{۲۱۴}$ و یا $\frac{\operatorname{tg} x}{۱۲} = \frac{\operatorname{tg} ۴۵^\circ}{۲۱۴} = \frac{۱}{۲۱۴}$. مرتبهٔ ۲۱۴ برابر ۳ و مرتبهٔ ۱۲ مساوی ۲ است. چون ۴۵° روی T قرار دارد پس x را روی ST جستجو می‌کنیم. عدد ۲۱۴ از مقیاس C را مقابل منتهای مقیاس T می‌گذاریم و روی ST مقابل عدد ۱۲ از مقیاس C جواب را می‌خوانیم:

$$x = ۳^\circ\ ۱۲{,}۶'$$

در بعضی مسائل اختلاف مراتب مخرج ممکن است خود بخود از بین برود. مثلاً در مثال $x = \operatorname{arc\ tg} \frac{۲۵}{۱۰۹}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{۲۵} = \frac{\operatorname{tg} ۴۵^\circ}{۱۰۹} = \frac{۱}{۱۰۹}$$

حال اگر بخواهیم عدد ۱۰۹ را در مقابل منتهای مقیاس T بگذاریم و x را روی ST پیدا کنیم ممکن نیست. زیرا عدد ۲۵ از مقیاس C خارج از حدود ST قرار می‌گیرد. برای بدست آوردن x باید از مبدأ T استفاده کنیم یعنی بنویسیم:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{۲۵} = \frac{۰{,}۱}{۱۰{,}۹}$$

اکنون می‌بینیم که مرتبهٔ مخارج یکی است و به همین دلیل x را باید روی مقیاس T مقابل عدد ۲۵ از مقیاس C جستجو کرد. اگر ۱۰,۹ از مقیاس C را مقابل مبدأ T بگذاریم خواهیم داشت: $x = ۱۲^\circ\ ۵۵'$

البته این کیفیت که جواب ممکن است روی T واقع شود قابل پیشگوئی است زیرا که داریم: $\frac{۲۵}{۱۰۹} > ۰,۱ = \frac{۱۰,۹}{۱۰۹}$ و بطوری که می‌دانیم زوایائی که ظل آنها از ۰,۱ بیشتر و از ۱ کمتر است روی T قرار می‌گیرند.

تمرین ۷۳ـ از نسبتهای زیر مجهولات را بدست آورید:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_۱}{۰,۰۲۴} = \frac{\operatorname{tg}\beta_۲}{۰,۰۳۶} = \frac{\operatorname{tg}\beta_۳}{۰,۰۵۷} = \frac{\operatorname{tg}\beta_۴}{۰,۱۲۳} = \frac{\operatorname{tg}\beta_۵}{۰,۱۶۳} = \frac{\operatorname{tg}\beta_۶}{۰,۲۴۰} = \frac{\operatorname{tg} ۲۲^\circ}{۰,۳۲۶}$$

تمرین ۷۴ـ حساب کنید زوایای $x_۱$ و $x_۲$ و $\ldots$ $x_۵$ را بشرطی که داشته باشیم:

$$\frac{\sin ۵۰^\circ}{۳} = \frac{\sin x_۱}{۲} = \sin x_۲ = \frac{\sin x_۳}{۰,۵} = \frac{\sin x_۴}{۰,۳} = \frac{\sin x_۵}{۰,۱}$$

تمرین ۷۵ـ مقادیر $a_۱$ و $a_۲$ و $\ldots$ و $a_۵$ را از تساویهای زیر بدست آورید:

$$\frac{\operatorname{tg} ۲۰^\circ}{۲۱۸} = \frac{\operatorname{tg} ۱۵^\circ}{a_۱} = \frac{\operatorname{tg} ۹^\circ}{a_۲} = \frac{\operatorname{tg} ۷^\circ}{a_۳} = \frac{\operatorname{tg} ۵^\circ}{a_۴} = \frac{\operatorname{tg} ۲^\circ}{a_۵}$$

تمرین ۷۶ـ مقدار x را از تساوی زیر بدست آورید:

$$۲۵,۶ \operatorname{tg} ۵^\circ = ۸,۱ \sin x$$

تمرین ۷۷ـ معادلهٔ $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{۵}{۳}$ را حل کنید. (راهنمائی: چون $\frac{۵}{۳} > ۱$ است پس $\operatorname{arc\,tg}$ مطلوب از ۴۵° بزرگتر است و لذا روی مقیاس T نیست. ولی می‌توانیم با توجه به فرمول $\operatorname{cotg} x = \frac{۳}{۵} = \operatorname{tg}(۹۰^\circ - x)$ ابتدا مقدار $(۹۰^\circ - x)$ و بعد x را حساب کنیم.)

تمرین ۷۸ - مثلث غیر مشخص ABC را با داشتن مشخصات زیر حل کنید :

$a = ۲۶,۳^{cm}$ $B = ۳۶^\circ$ $C = ۷۱^\circ$
$a = ۱۷,۱$ $B = ۴۵^\circ$ $C = ۶۰^\circ$
$a = ۰,۲۹۶$ $B = ۱۵^\circ$ $C = ۲۵^\circ$
$a = ۱۰۶$ $B = ۵^\circ$ $C = ۱۰^\circ$

(راهنمائی: $A + B + C = ۱۸۰^\circ$ و $\sin(۱۸۰^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ است) .

تمرین ۷۹ - مثلث غیر مشخص ABC را با معلومات زیر حل کنید :

$a = ۱۱,۶۵^{cm}$ $A = ۳۵^\circ$ $B = ۱۱۰^\circ$
$a = ۰,۷$ $A = ۵۳^\circ$ $B = ۶۳^\circ$
$a = ۲۹,۷$ $A = ۱۲۶^\circ$ $B = ۳۱^\circ$
$a = ۰,۶۱$ $A = ۲^\circ۳۰'$ $B = ۳^\circ۳۰'$

تمرین ۸۰ - مثلث غیر مشخص ABC را با معلومات زیر حل کنید :

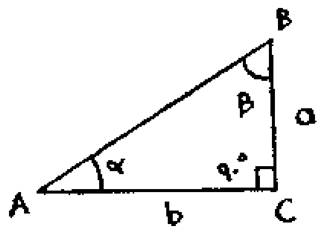
$a = ۹۰^{cm}$ $b = ۲۱۲^{cm}$ $A = ۲۰^\circ$
$a = ۴,۲۷$ $b = ۹,۴۵$ $A = ۱۲^\circ$
$a = ۱۸,۳$ $b = ۵۳,۵$ $A = ۲۰^\circ$
$a = ۰,۰۶$ $b = ۰,۱۵$ $A = ۲۵^\circ$

(قبل از حل تمرین ۸۰ قاعدهٔ حل مثلثی را که دو ضلع و زاویهٔ مقابل به یکی از این دو ضلع در دست است بخاطر بیاورید و تحقیق کنید که آیا مسئله یک جواب یا ۲ جواب دارد و یا اصولاً جوابی ندارد. بدون تحقیق خاص، فقط از روی جوابهائی که خط کش می‌دهد چگونه می‌توانید بفهمید که مسئلهٔ مفروضی دارای ۲ یا یک جواب است و یا اصولاً جوابی ندارد؟ وقتی‌که مسئله جوابی ندارد ببینید که مجموع زوایای مثلث چقدر شده است).

۳۶ ـ حل مثلث قائم‌الزاویه ـ تبدیل مختصات قطبی و دکارتی به همدیگر و تعیین مدول وارگومان نقطهٔ $Z = x + jy$

حل مثلث قائم‌الزاویه نیز مانند مثلث غیر مشخص با توجه به مسئلهٔ تناسبات بسیار ساده صورت می‌گیرد.

مثال ۱ــ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (ش ۷۵) قائمه در رأس C را با مفروضات $a = ۳$ و $c = ۵$ حل کنید:



ش ۷۵

از رابطهٔ: $\frac{\sin\alpha}{۳} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin ۹۰^\circ}{۵}$

دیده می‌شود که اگر عدد ۵ از مقیاس C را مقابل زاویهٔ ۹۰° از مقیاس S بگذاریم روی همین مقیاس، مقابل عدد ۳ از مقیاس C دیده می‌شود: $A = ۳۶^\circ ۵۰'$ و لذا $B = ۵۳^\circ ۱۰'$ خواهد شد و در مقابل این زاویه از مقیاس S روی مقیاس C دیده می‌شود: $b = ۴$.

مثال ۲ــ مثلث قائم‌الزاویهٔ فوق را با مفروضات $a = ۳$ و $b = ۴$ حل کنید. نزدیکترین راه حل مسئله این است که ابتدا از رابطهٔ $\operatorname{tg}\alpha = ۳ \times \frac{۱}{۴}$ مقدار α را پیدا کنیم. به این ترتیب که مبدأ CI را مقابل عدد ۳ از مقیاس D می‌گذاریم و روی T در مقابل عدد ۴ از مقیاس CI مقدار $\alpha = ۳۶^\circ ۵۰'$ را پیدا می‌کنیم. حال خط کش متحرک را به همین وضع نگه می‌داریم و خط رؤیت شاخص را روی این زاویه از مقیاس S قرار می‌دهیم و روی CI زیر خط موئی جواب: $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{۳}{\sin ۳۶^\circ ۵۰'} = ۵$ را پیدا می‌کنیم.

اگر $a = ۴$ و $b = ۳$ بود اول $\operatorname{cotg}\alpha = ۳ \times \frac{۱}{۴}$ راحساب می‌کردیم. یعنی باز مبدأ CI را مقابل عدد ۳ از مقیاس D می‌گذاردیم و روی مقیاس cotg (که در بالای T با مدرجهای قرمز نموده شده است) در مقابل عدد ۴ از مقیاس CI مقدار $\alpha = ۵۳^\circ ۱۰'$ را می‌خواندیم. بعد همین زاویه را (بازهم بدون حرکت دادن خط کش متحرک در وضع جدید) روی مقیاس cos (که در زیر مقیاس S با مدرجهای قرمز نموده شده است) می‌بردیم و در مقابل آن روی CI جواب: $c = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{۳}{\cos ۵۳^\circ ۱۰'} = ۵$ را می‌خواندیم.

در مثال ۲ بخوبی می‌بینیم که در هردو حالت $b < a$ و $a < b$ همیشه عدد کوچکتر را روی D و عدد بزرگتر را روی CI اختیار می‌کنیم با این تفاوت

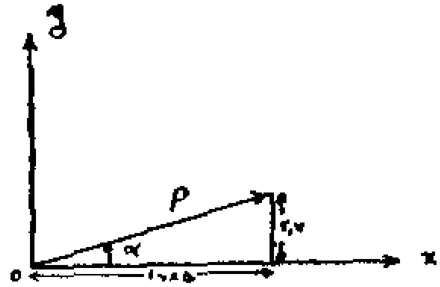
که در حالت دوم زوایا را روی مقیاسهائی که مدرجهای آنها قرمز است خوانده و نقل می‌کنیم.

مثال ۳ــ مدول و آرگومان نقطهٔ :

$$(j=\sqrt{-1})\ z = x + jy = ۱۰{,}۸۵ + ۲{,}۷\,j$$

را پیدا کنید.

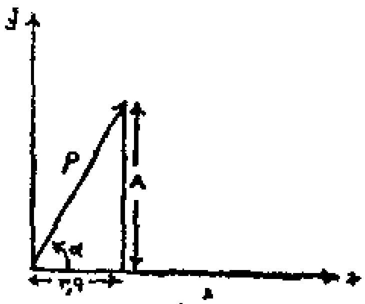
حل ــ برای حل این‌مسئله که عیناً مانند مسئلهٔ قبل است بهتر است ابتدا شکل را رسم کنیم (ش ۷۶). داریم :



ش ۷۶

$$\mathrm{tg}\alpha = ۲{,}۷ \times \frac{۱}{۱۰{,}۸۵}$$

پس منتهای مقیاس CI را روی عدد ۲٫۷ از مقیاس D می‌گذاریم و در مقابل عدد ۱۰٫۸۵ از مقیاس CI روی مقیاس T مقدار آرگومان $\alpha = ۱۴^\circ$ را می‌خوانیم. حال خط کش متحرک را در همین وضع نگه می‌داریم و شاخص را روی زاویهٔ ۱۴° از مقیاس S قرار می‌دهیم و روی CI اندازهٔ مدول :



ش ۷۷

$$\rho = \frac{b}{\sin\alpha} = ۲{,}۷ \times \frac{۱}{\sin ۱۴^\circ} = ۱۱{,}۲$$

را پیدا می‌کنیم.

مثال ۴ــ مدول و آرگومان نقطهٔ $z = ۳{,}۹ + ۸\,j$ را پیدا کنید.

حل ــ باز ابتدا شکل را رسم می‌کنیم (ش ۷۷).

داریم :

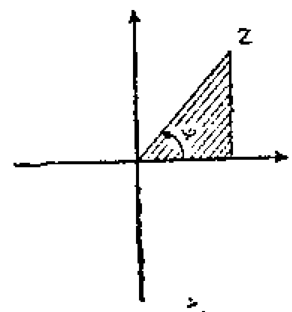
$$\mathrm{cotg}\,\alpha = ۳{,}۹ \times \frac{۱}{۸}$$

حال مبدأ CI را روی عدد ۳٫۹ از مقیاس D می‌گذاریم و روی مقیاس cotg ها در مقابل عدد ۸ از مقیاس CI مقدار آرگومان $\alpha = ۶۴^\circ$ را می‌خوانیم. بعد خط کش متحرک را به همین وضع نگاه می‌داریم و روی مقیاس CI در مقابل زاویهٔ ۶۴° از مقیاس cos، مقدار مدول :

$$\rho = \frac{a}{\cos\alpha} = ۶ \times \frac{۱}{\cos ۶۴^\circ} = ۸{,}۹$$

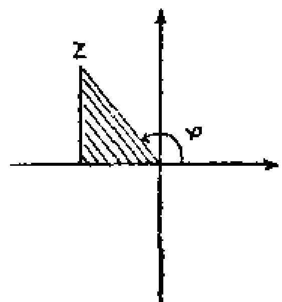
را پیدا می‌کنیم.

چنانکه قبلاً گفته بودیم می‌بینیم که همیشه بعد ازرسم تصویر عدد کوچکتر را روی D می‌گیریم تا نخستین کسر حاصل کوچکتر از واحد باشد. حال اگر این کسر معرف ظل آرگومان بود زوایا را روی T و S و اگر معرف ظل تمام‌آن بود زوایا را روی مقیاسهای cotg و cos می‌خوانیم و نقل می‌کنیم.



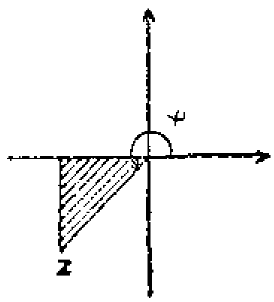
ش ۷۸a

$Z = ۱۰,۸۵ + ۲,۷j$



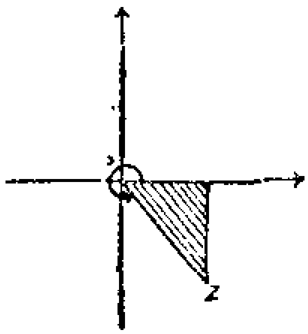
ش ۷۸b

$Z = -۱۰,۸۵ + ۲,۷j$



ش ۷۸c

$Z = -۱۰,۸۵ - ۲,۷j$



ش ۷۸d

$Z = ۱۰,۸۵ - ۲,۷j$

در صورتی که علامات a و b (یا بهتر بگوئیم x و y) به صورتهای مختلف باشند (شکل۷۸ a و b و c و d) اشکال فوق پدید می‌آید. چون زاویهٔ α که در مسائل قبل حساب کردیم همان زاویهٔ حادهٔ مثلثهای هاشورزدهٔ بالاست لذا برای پیدا کردن φ (آرگومان) پس از پیداکردن α بترتیب باید از روابط $\varphi = \alpha$ و $\varphi = ۱۸۰^\circ - \alpha$ و $\varphi = ۱۸۰ + \alpha$ و $\varphi = ۳۶۰ - \alpha$ استفاده کرد.

اگر اولین کسری که تشکیل می‌دهیم کمتر از ۰٫۱ باشد مسئله را نباید از این راه حل کنیم بلکه باید با استفاده از مسئلهٔ۴ صفحهٔ ۵۰ ابتدا وتر را محاسبه و بعد طبق مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۴ آن را تمام کنیم.

اگر مطلوب محاسبهٔ آرگومان و مدول نقطهٔ $z = \dfrac{۱}{x + jy}$ باشد اول آن را به صورت :

$$Z = \frac{x}{x^۲ + y^۲} - \frac{y}{x^۲ + y^۲}j \quad \text{ویا} \quad Z = \frac{۱}{x^۲ + y^۲}(x - jy)$$

می‌نویسیم و مانند سابق عمل می‌کنیم.

تبصره ــ می‌دانیم که اگر x و y مختصات دکارتی و ρ و φ مختصات

قطبی یک نقطه باشند داریم :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} Z = x + jy = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \rho e^{j\varphi}$$

تمرین ۸۱ - مختصات دکارتی نقاطی با مفروضات زیر را پیدا کنید :

$$(۱) \begin{cases} \rho = ۲,۳۶ \\ \varphi = ۳۶^\circ \end{cases} \qquad (۲) \begin{cases} \rho = ۷,۹۲ \\ \varphi = ۱۳۹^\circ \end{cases}$$

$$(۳) \begin{cases} \rho = ۶,۰۵ \\ \varphi = ۱۸۲^\circ ۳۰' \end{cases} \qquad (۴) \begin{cases} \rho = ۱,۳۱۶ \\ \varphi = ۹۴^\circ ۲۰' \end{cases}$$

تمرین ۸۲ - مختصات قطبی نقاط زیر را پیدا کنید :

$$(۱) \begin{cases} x = ۱,۳۲ \\ y = ۳,۹۷ \end{cases} \qquad (۲) \begin{cases} x = -۱۶,۳ \\ y = ۳۱,۵ \end{cases}$$

$$(۳) \begin{cases} x = -۵,۷۲ \\ y = -۰,۳۱ \end{cases} \qquad (۴) \begin{cases} x = ۲,۳۸ \\ y = -۱,۶۹ \end{cases}$$

تمرین ۸۳ - اعداد مختلط زیر را به صورت $\rho e^{j\varphi}$ تبدیل کنید :

$$(۱)\ ۵ + ۷j \quad (۲) - ۱,۷ + ۳,۶j \quad (۳) - ۰,۹ - ۱,۶j$$
$$(۴) - ۰,۰۳ - ۰,۶۱j$$

۳۷- $\sqrt{۱ - x^۲}$ یعنی مقیاس فیثاغورث یا مقیاس P

مقیاس P که از روی قضیهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ درست شده کمک بزرگی برای محاسبهٔ دقیق جیب زوایای بزرگتر از ۵۰° و جیب تمام زوایای کوچکتر از ۴۰° است. این مقیاس به ازای $x = ۰,۱$ تا $x = ۱$ از ۰,۹۹۵ تا ۰ مدرج شده است. مثلاً برای محاسبهٔ $\sqrt{۱ - (۰,۶)^۲}$ کافی است ۰,۶ را روی P بگذاریم و مقابل آن روی D مقدار رادیکال را ببینیم :

$$\sqrt{۱ - (۰,۶)^۲} = ۰,۸$$

همچنین اگر یکی‌از مقادیر جیب یا جیب‌تمام زاویه‌ای معلوم باشد دیگری را می‌توان از رابطهٔ :

$$\sin \alpha = \sqrt{۱ - \cos^۲ a} \quad \text{و یا} \quad \cos \alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲ \alpha}$$

حساب کرد. مثلاً اگر $\sin \alpha = ۰,۱۳۴$ باشد برای محاسبهٔ جیب تمام α

کافی است این عدد را روی مقیاس D بگذاریم و در مقابل آن روی P جواب را بخوانیم: $\cos\alpha = ۰,۹۹۱$. یا اگر $\cos\alpha = ۰,۱۴۷۸$ باشد چون این عدد را روی D قراردهیم مقابل آن روی P خواهیم داشت $\sin\alpha = ۰,۹۸۹$.
بدین‌ترتیب دیده می‌شود که جیب و جیب تمام هر زاویه در مقابل خود زاویه یکی روی D (یا P) و دیگری روی P (یا D) قرارگرفته‌اند. مثلاً اگر شاخص را روی زاویهٔ $۱۱,۸۱^\circ$ از مقیاس S بگذاریم جیب آن را روی D ($\sin ۱۱,۸۱^\circ = ۰,۲۰۴$) و جیب تمام آن را روی P:
($\cos ۱۱,۸۱^\circ = ۰,۹۷۸$) درست در مقابل خود زاویه زیر خط موئی شاخص پیدا می‌کنیم.

یکی دیگر از موارد استعمال P محاسبهٔ اضلاع زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه و همچنین تعیین جذر دقیق بعضی اعداد است: مثلاً برای محاسبهٔ $\sqrt{۹۱,۲۸}$ آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۹۱,۲۸} = \sqrt{۱۰۰-۸,۷۲} = ۱۰\sqrt{۱-۰,۰۸۷۲}$$

حال در مقابل عدد ۸۷۲ از مقیاس B روی مقیاس P عدد ۰,۹۵۵۴ را می‌بینیم. لذا داریم:

$$\sqrt{۹۱,۲۸} = ۱۰ \times ۰,۹۵۵۴ = ۹,۵۵۴$$

بالاخره از رابطهٔ $c^۲ = a^۲ + b^۲$ نتیجه می‌گیریم که:

$$b = c\sqrt{۱ - \left(\frac{a}{c}\right)^۲}$$

که چون $a = ۳,۴^{cm}$ و $c = ۵,۶^{cm}$ فرض شود خواهیم داشت:

$$b = ۴,۴۵^{cm}$$

۳۸ ـ تبدیل کیلووات (KW) به اسب بخار (PS یا CV)

در پشت شاخص روی خط موئی وسط، حروف KW و روی خط موئی بالائی طرف راست آن حروف PS نوشته شده است. اگر خط موئی وسط را روی کیلووات از مقیاس A بگذاریم خط موئی دست راست مقدار آن را برحسب اسب بخار روی مقیاس A به ما می‌دهد. مثلاً اگر خط موئی وسط را روی مبدأ A قرار دهیم (یعنی ۱ کیلووات) خط موئی دست راست، روی A معادل آن یعنی ۱,۳۶ اسب بخار را خواهد داد. یا اگر خط موئی وسط را روی عدد ۵

از مقیاس A (۵ کیلووات) بگـذاریم زیر خط موئی طـرف راست روی همین مدرج معادل آن یعنی ۶٫۸۰ اسب بخار را خواهیم داشت.

در بعضی خط کشها در روی شاخص، طـرف راست خط مـوئی مرکزی، خط موئی کوتاهی که به محاذات DF و CF می‌باشد نیز رسم شده است. اگـر خط موئی مرکزی را روی عدد m از مقیاس D بگذاریم این خط موئی کـوتاه ۳۶ m را روی DF به ما می‌دهد. بـه ایـن ترتیب به کمـک این خـط موئی می‌توان سال را بـه روز (یک سال معادل ۳۶۰ روز) و ساعـات را به ثوانی (یک ساعت مساوی ۳۶۰۰ ثانیه) ودرجه را به ثانیه (یک درجه مساوی ۳۶۰۰ ثانیه) تبدیل کرد.

۳۹ ـ نشانه‌های ρ° و ρ' و ρ'' در روی خطکش

بالاخره در اکثر خط کشها روی مقیاس C یا D (یا روی هردو) ۳ علامت ρ° و ρ' و ρ'' دیده می‌شود. به وسیلهٔ این نقاط می‌توان رادیان (ρ) را بـه درجه (ρ°) و دقیقه (ρ') و ثانیه (ρ'') تبدیل کرد و بالعکس :

$$\rho^\circ = \frac{۱۸۰}{\pi} = ۵۷٫۳۰$$

$$\rho' = \frac{۱۸۰}{\pi} \times ۶۰ = ۳۴۳۸$$

$$\rho'' = \frac{۱۸۰}{\pi} \times ۳۶۰۰ = ۲۰۶۲۶۵$$

مثال ۱ــ ۰٫۶ رادیان چند درجه است؟

حل ــ کافی است طبق قاعدهٔ ضرب حاصلضرب ρ° ۰٫۶ را حساب کنیم و خواهیم داشت :

$$۰٫۶ \text{ رادیان} = ۳۴٫۴^\circ = ۳۴^\circ۲۴'$$

تمرین ۸۴ ـ ۰٫۶ رادیان را به دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

(توجه ــ مرتبهٔ ρ مساوی ۲ و مرتبه ρ' مساوی ۴ و مرتبـهٔ ρ'' مساوی ۶ می‌باشد) .

تمرین ۸۵ ـ مقادیر ۰٫۰۲ و ۰٫۱۷۵ و ۱٫۰۶ و ۰٫۸۳۱ رادیان را به دقیقه تبدیل کنید .

تمرین ۸۶ - مقادیر ۰,۰۰۳ و ۰,۰۰۱۳۶۵ و ۰,۵۲ رادیان را به ثانیه بدل کنید.

مثال ۲ــ زاویهٔ $۱۸^\circ ۲۰' ۳۰''$ چند رادیان است؟

حل :

$$۱۸^\circ = \frac{۱۸}{\rho^\circ}\text{رادیان} = ۰,۳۱۴۱$$

$$۲۰' = \frac{۲۰}{\rho'}\text{رادیان} = \frac{۰,۰۰۵۸}{۲}$$

$$۳۲'' = \frac{۳۲}{\rho''}\text{رادیان} = \frac{۰,۰۰۰۱}{۵۵}$$

از جمع این ۳ مقدار داریم :

$$۱۸^\circ ۲۰' ۳۰'' = ۰,۳۲۰۱ \text{ رادیان}$$

تمرین ۸۷ - هریک از زوایای $۵۷^\circ ۳۶'$ و $۲۴^\circ ۱۹'$ و $۱۰^\circ ۳۵'$ چند رادیان است؟

تمرین ۸۸ - مساحت قطاع دایره‌ای به شعاع $۱,۶^m$ و زاویهٔ مرکزی $۸^\circ ۳۶'$ چقدر است؟

تمرین ۸۹ - هریک از زوایای $۲^\circ ۴۰' ۳۶''$ و $۵۷' ۳۶''$ و $۲' ۲۷,۳۶''$ چند رادیان است؟

تبصره ــ در بعضی خط کشها ρ وجود ندارد بنابراین باید مقدار آن را بخاطر سپرد.

مثال ۳ــ ۱۶° چند رادیان است؟

حل ــ در اینجا باید عبارت $\frac{۱۶\pi}{۱۸۰}$ را که شبیه $\frac{a \times b}{c}$ می‌باشد حساب کرد. جواب خواهد شد :

$$۱۶^\circ = ۰,۲۷۹۴ \text{ رادیان}$$

توجه : به کمک نشانه‌های ρ' و ρ'' جیب زوایای بسیار کوچک را نیز می‌توان محاسبه نمود: بدین ترتیب که اگر اندازهٔ زاویه برحسب دقیقه در دست باشد با قراردادن ρ' از مقیاس C در مقابل عدد زاویه از مقیاس D جیب آن در روی D، مقابل مبدأ یا منتهای مقیاس C خوانده خواهد شد.

$\sin ۲' = ۰,۰۰۰۸۷۳$

$\sin ۵' = ۰,۰۰۱۴۵۳$

$\sin ۱۷' = ۰,۰۰۴۹۴۹$

$\sin ۹۶' = ۰,۰۲۷۹۱$

ملاحظه می‌کنیم که اگر زاویه بین ′۱ و ′۳,۵ باشد جیب آن بعد از ممیز دارای ۳ صفر و اگر بین ′۳,۵ و ′۱۰ یا ′۱۰ و ′۳۵ باشد جیب آن بعد از ممیزدارای ۲ صفر و بالاخره اگر بین ′۳۵ و ′۱۰۰ باشد جیب آن بعد از ممیز دارای یک صفر خواهد بود.

ولی اگر زاویه برحسب ثانیه داده شده بود از ρ'' استفاده می‌کنیم : اگر ρ'' از مقیاس C درمقابل عدد زاویه از مقیاس D قرارداده شود جیب آن روی D در مقابل مبدأ یا منتهای C خوانده خواهد شد.

$\sin ۱,۵'' = ۰,۰۰۰۰۰۷۲۸$

$\sin ۵,۶'' = ۰,۰۰۰۰۲۷۱۴$

$\sin ۱۲'' = ۰,۰۰۰۰۵۸۲۴$

$\sin ۵۲'' = ۰,۰۰۰۲۶۳۵$

در اینجا هم باید متوجه بود که اگر اندازهٔ زاویه بین ″۱ و ″۲,۰۶ واقع باشد جیب‌آن بعد ازممیز دارای ۵ صفر واگربین ″۲,۰۶ و″۱۰ یابین″۱۰ و″۲۰,۶ واقع باشد جیب آن بعد از ممیز دارای ۴ صفر و بالاخره اگر بین ″۲۰,۶ و ″۱۰۰ واقع باشد جیب آن بعد از ممیز دارای ۳ صفر خواهد بود.

اگر زاویه بین °۱ و °۵,۷۴ باشد در جیب آن یک صفر بعد از ممیز وجود خواهد داشت.

جوابهای بعضی از مسائل

۴۰ ـ جوابهای بعضی از مسائل

۱۱ ـ ۶٫۷۰ و ۱۷٫۰۰

۱۲ ـ ۴٫۲۰ و ۰٫۰۵۲۵ و ۸۴ و ۲۲٫۲

۱۳ ـ ۵٫۰۲ و ۱۰٫۱۴ و ۱٫۶۹۱ و ۱۵٫۸۵

۱۴ ـ ۲٫۶۲ و ۰٫۱۷۷۴ و ۶٫۹۹

۱۵ ـ ۷۷٫۸ ^{kg}

۱۶ ـ ۸۶٫۸ تن

۱۷ ـ لگاریتم خارج قسمت مساوی تفاضل لگاریتمهای مقسوم و مقسوم‌علیه است.

۱۸ ـ خارج قسمت روی مقیاس D مقابل منتهای مقیاس C بدست می‌آید.

۱۹ ـ ۴۲ و ۰٫۵

۲۰ ـ ۰٫۱۶۴۱ و ۶٫۶۵ و ۰٫۳۹۶ و ۳۲٫۲۲

۲۱ ـ ۲٫۵ و ۶۶٫۶ و ۱۸٫۸۵ و ۱۵٫۸۸

۲۲ ـ ۳٫۷۳ تومان

۲۳ ـ ۲٫۰۸ و ۰٫۰۱۹۶۴

۲۴ ـ ۰٫۷۸۴ و ۰٫۰۰۰۱۶۰۲

۲۵ – $x_1 =$ ۱,۹۷۷ و $x_2 =$ ۲,۳۱ و $x_3 =$ ۴,۳۶ و
$x_4 =$ ۷,۵۸

۲۶ – $y_1 =$ ۰,۲۱۹۵ و $y_2 =$ ۰,۵۷۹ و $y_3 =$ ۰,۸۱۲

۲۷ – $a =$ ۱۵۲,۳ و $b =$ ۱۹,۶۱ و $M =$ ۳۸,۴ و
$N =$ ۶,۲۸ $\times$ ۱۰^{۳}

۲۸ – $x_1 =$ ۱۷,۵۰ و $x_2 =$ ۰,۱۹۴۲ و $x_3 =$ ۲,۲۷ و
$x_4 =$ ۲۴۲

۲۹ – $S_1 =$ ۰,۴۲۱ و $S_2 =$ ۰,۰۴۹۳ و $S_3 =$ ۰,۰۰۰۷۷۴ و
$S_4 =$ ۸,۵۰

۳۵ – ۵,۵۷ و ۰,۲۴۵ و ۶,۳۲ $\times$ ۱۰^{۳} و ۱,۳۵۷ و ۰,۰۱۱۰ و
۰,۹۳۷ و ۱۱,۳۶ و ۰,۰۰۰۰۴۷۹

۳۶ – ۷,۲۵ و ۰,۷۹۶ و ۳,۸۰ و ۰,۲۶۶ و ۲۹,۹ و ۰,۰۱۴۱۴
۱۰,۴ و ۳,۲۴

۳۹ – ۵,۳۸ و ۷,۰۵ و ۶,۱۸ و ۲,۷۱

۴۰ – ۱,۴۴۹ و ۱,۳۶

۴۱ – ۴,۲۵ و ۰,۰۰۰۳۵۸ و ۰,۲۶۸ و ۷۵,۱۵

۴۲ – ۰,۱۶۲۶ و ۱,۶۶۶ و ۰,۴۷۳ ر ۴,۱۷

۴۳ – $x_1 =$ ۲,۱۸ و $x_2 =$ ۳,۴۱ و $x_3 =$ ۴,۴۱

۴۴ – $a =$ ۰,۹۸۱ و $b =$ ۱,۰۶۷ و $c =$ ۱,۱۴۷ و
$d =$ ۱,۱۹۹

۴۵ – $\alpha =$ ۰,۸۹۴ و $\beta =$ ۱,۰۹۳ و $\gamma =$ ۱,۲۹۳

۴۶ – ۱,۲۷۵ و ۰,۱۴۶۶ و ۰,۲۷۷ و ۰,۴۴۷ و ۰,۷۰۷ و
۱,۹۰۲ و ۳,۱۹ و ۰,۰۶۷۸ و ۰,۱۹۹۳ و ۰,۶۳۰

۴۷ – ۲,۱۸ و ۰,۸۱۲ و ۲,۳۱

۶۱ – ۲۲۰,۳ و ۹,۲۷ و ۱,۸۴۱ و ۹۱,۲ و ۰,۱۳۵۸ و
۰,۰۴۳۹۵

۶۲ – ۳۹,۸ و ۱,۶۹۸ $\times$ ۱۰^{۴} و ۱,۲۳۳ و ۱۱۸,۸ و ۰,۰۰۴۵۷
و ۰,۶۹۲

۶۳ – ۴,۵۸ و ۰,۰۰۰۱۴۵۵ و ۰,۷۲۹ و ۱,۵۱۵ و ۱۱,۳۲ و

۴,۹۵

۶۴− ۱۵,۸ و ۱,۵۵۲ و ۴,۴۸ و ۱,۱۷۶ و ۰,۳۶ و ۲,۷۸

۶۵− ۰,۷۷۸ و ۰,۰۵۶۹ و ۰,۰۰۶۴۷ و ۴,۰ و ۰,۰۲۸۵۷ و
۲ − و ۰,۵ − و ۲,۹۹۴ − و ۰,۴۷۵ −

۶۹− ۰,۵۸۸ و ۰,۶۷۶ و ۰,۲۱۸ ۰,۷۳۴ و ۰,۱۵۱۵ و
۰,۰۲۱۱ و ۰,۲۸۴ و ۱۴°۴۷′ و ۴۲°۴′ و ۷۱°۴۹′ و
۱۶°۴۲′ و ۲°۲′ و ۴°۸′۴۱″ و ۸۹°۵′۵۱″

۷۰− ۰,۸۲۵ و ۰,۰۵۳۹ و ۲,۵۶ و ۰,۰۰۰۳۳۲

۷۱− ۱۹,۴′ و ۲۶°۱۱′ و ۱۴°۳۲′ و ۹°۳۳′ و ۸°۲۲′

۷۲− ۲۳°۱۲′ و ۱۲°۳۲′ و ۴۳°۲′ و ۳۶°۵۲′

۷۳− $\beta_۱ = ۱^\circ ۴۲' ۱۳''$ و $\beta_۲ = ۲^\circ ۳۳' ۲۳''$ و $\beta_۳ = ۴^\circ ۲' ۲۶''$ و
$\beta_۴ = ۸^\circ ۴۰'$ و $\beta_۵ = ۱۱^\circ ۲۵'$ و $\beta_۶ = ۱۶^\circ ۳۴'$

۷۴− $x_۱ = ۳۰^\circ ۴۳'$ و $x_۲ = ۱۴^\circ ۴۸'$ و $x_۳ = ۷^\circ ۲۰'$ و
$x_۴ = ۴^\circ ۲۳' ۳۶''$ و $x_۵ = ۱^\circ ۲۷' ۴۷''$

۷۵− $a_۱ = ۱۶۰,۵$ و $a_۲ = ۹۴,۹$ و $a_۳ = ۷۳,۶$ و
$a_۴ = ۵۲,۴$ و $a_۵ = ۲۰,۹$

۷۶− $x = ۱۶^\circ ۲'$

۷۷− ۵۹°۲′

۷۸− $c = ۲۶,۰$ و $b = ۱۶,۱۶$ و $A = ۷۳^\circ$
$c = ۱۵,۳۳$ و $b = ۱۲,۵۲$ و $A = ۷۵^\circ$
$c = ۰,۱۹۷۹$ و $b = ۰,۱۱۶۸$ و $A = ۱۳۹^\circ$
$c = ۷۱,۱$ و $b = ۳۵,۷$ و $A = ۱۶۵^\circ$

۷۹− $c = ۱۱۶,۵$ و $b = ۱۹۰,۹$ و $C = ۳۵^\circ$
$c = ۰,۷۸۸$ و $b = ۰,۷۸۱$ و $C = ۶۴^\circ$
$c = ۱۴,۳۴$ و $b = ۱۸,۹$ و $C = ۲۳^\circ$
$c = ۱,۴۶۲$ و $b = ۰,۸۵۴$ و $C = ۱۷۴^\circ$

۸۰−

۱− $c = ۲۵۲,۵$ و $C = ۱۰۶^\circ ۲۱'$ و $B = ۵۳^\circ ۳۹'$
$c = ۱۴۵,۸$ و $C = ۳۳^\circ ۳۹'$ و $B = ۱۲۶^\circ ۲۱'$

۲ـ $c = ۱۳,۰۳$ و $C = ۱۴۰^\circ ۳۶$ و $B = ۲۷^\circ ۲۴'$
$c = ۵,۴۵$ و $C = ۱۵^\circ ۲۴'$ و $B = ۱۵۲^\circ ۳۶'$
۳ـ $c = ۵۰,۳$ و $C = ۷۰^\circ$ و $B = ۹۰^\circ$

۴ـ جواب ندارد. زیرا در مقابل ۰٫۱۵ مقدار $۶^\circ ۴'$ را روی مقیاس S می‌بینیم. چون $۰,۰۶ < ۰,۱۵$ است پس باید $B = ۱۷۳^\circ ۵۶'$ $(= ۱۸۰^\circ - ۶^\circ ۴')$ باشد آن وقت $A + B > ۱۸۰^\circ$ می‌شود.

۸۱ـ

$$(۱)\begin{cases}x = ۱,۹۰۹\\ y = ۱,۳۸۷\end{cases} \qquad (۲)\begin{cases}x = -۵,۹۸\\ y = ۵,۲\end{cases}$$

$$(۳)\begin{cases}x = -۶,۰۴\\ y = -۰,۲۶۴\end{cases} \qquad (۴)\begin{cases}x = -۰,۰۹۹۴\\ y = ۱,۳۱۲\end{cases}$$

۸۲ـ

$$(۱)\begin{cases}\rho = ۴,۱۸۳۷\\ \varphi = ۷۱^\circ ۳۷'\end{cases} \qquad (۲)\begin{cases}\rho = ۳۵,۴۷\\ \varphi = ۱۱۷^\circ ۲۲'\end{cases}$$

$$(۳)\begin{cases}\rho = ۵,۸۲۸\\ \varphi = ۱۸۳^\circ ۶'\end{cases} \qquad (۴)\begin{cases}\rho = ۲,۸۷۸\\ \varphi = ۳۲۴^\circ ۳'\end{cases}$$

۸۳ـ (۱) $۸,۶۰e^{۰.۹۵۱j}$ (۲) $۳,۹۸e^{۲.۰۱j}$
(۳) $۱,۸۳۶e^{۴.۲j} = ۱,۸۳۶e^{-۲.۰۸j}$
(۴) $۰,۶۱۱e^{۴.۷۶j} = ۰,۶۱۱e^{-۱.۵۲j}$

۸۴ـ $۲,۰۶ \times ۱۰^۳$ دقیقه و $۱,۲۳۸ \times ۱۰^۵$ ثانیه.

۸۵ـ $۶۸,۸' = ۱^\circ ۸,۸'$ و $۶۰۲' = ۱۰^\circ ۲'$ و $۳۶۴۴' = ۶۰^\circ ۴۴'$
و $۲۸۵۷' = ۴۷^\circ ۳۷'$

۸۶ـ $۶۱۹'' = ۱۰'۱۹''$ و $۲۸۲'' = ۴'۴۲''$ و $۱,۰۷۳'' \times ۱۰^۵$

۸۷ـ ۱٫۰۰۵ و ۰٫۴۲۴ و ۰٫۱۸۴۷

۸۹ـ ۰٫۰۴۶۷ و ۰٫۰۱۶۷۶ و ۰٫۰۰۰۷۱۴

اضافات چاپ سوم

حل مسائل مربوط به مثلث، در حالت کلی شبیه به حالت مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۴ است. منظور ما در اینجا حل مثلث است وقتی که دو ضلع و زاویهٔ بین‌آن دو ــ که معمولاً درآباکهای با مقیاسهای متقارب مورد نیاز است ــ و یا سه ضلع از آن در دست باشد. روش حل این دو مسئله را با ذکر چند مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۱ــ مثلث ABC : $a = ۷$ و $b = ۶$ و $C = ۴۵^\circ$ مفروض است. حساب کنید زوایا و ضلع سوم آن را.

حل ــ داریم:

$$A + B = ۱۸۰^\circ - C = ۱۳۵^\circ \quad \text{و} \quad \frac{۷}{\sin A} = \frac{۶}{\sin B}$$

لذا باید دو زاویه چنان پیدا کنیم که در این دو رابطه صدق کنند. انجام این امر منظماً بترتیب زیر صورت می‌گیرد: ابتدا با توجه به نسبت فوق، باید A بزرگتر از B در نظر گرفته شود. سپس $A = ۷۰^\circ$ را مورد آزمایش قرار می‌دهیم، یعنی عدد ۷ از مقیاس C را در مقابل زاویهٔ ۷۰° از مقیاس S قرار می‌دهیم. در اینحال در مقابل عدد ۶ از مقیاس C زاویهٔ $B = ۵۳/۶^\circ$ را در روی S می‌خوانیم. اما چون مجموع $۵۳/۶^\circ + ۷۰^\circ$ از ۱۳۵° خیلی کمتر است زاویهٔ $A = ۷۴^\circ$ را آزمایش می‌کنیم. یعنی عدد ۷ از مقیاس C را این بار در مقابل

A	۷۰°	۷۴°	۷۵°	۷۷°	۷۸°
B	$۵۳/۶^\circ$	$۵۵/۵^\circ$	۵۶°	$۵۶/۶^\circ$	۵۷°
$A+B$	$۱۲۳/۶^\circ$	$۱۲۹/۵^\circ$	۱۳۱°	$۱۳۳/۶^\circ$	۱۳۵°

۷۴° از مقیاس S قرار می‌دهیم. در اینحال در مقابل عدد ۶ از مقیاس C، $B = ۵۵/۵°$ را در روی S می‌خوانیم. و باز چون $A + B$ از ۱۳۵° کمتر است باید چند زاویهٔ دیگر را آزمایش کنیم. برای این امر، A را بترتیب مساوی ۷۵°، ۷۷° و ۷۸° اختیار کرده عمل را مانند فوق تکرار می‌کنیم تا برای B بترتیب مقادیر ۵۶°، ۵۶/۶° و ۵۷° بدست آید. چون $۱۳۵° = ۵۷° + ۷۸°$ پس $A = ۷۸°$ و $B = ۵۷°$ جوابهای مطلوب خواهند بود. در همین حال در مقابل زاویهٔ ۴۵° از مقیاس S، اندازهٔ ضلع سوم را در روی مقیاس C می‌یابیم:

$$C = ۵/۰۶$$

مثال ۲ــ $a = ۱۳/۹$ و $b = ۷/۷$ و $C = ۱۱۷/۵°$.

حل ــ در اینجا داریم:

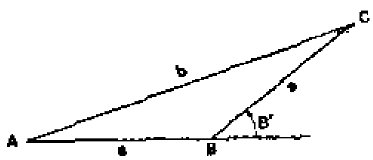
$$A + B = ۶۲/۵° \quad \text{و} \quad \frac{۱۳/۹}{\sin A} = \frac{۷/۷}{\sin B}$$

هنگام حل این مسئلهٔ بخصوص، به جهش خطکش احتیاج است. چون داریم $A > B$ ابتدا $A = ۴۰°$ را آزمایش می‌کنیم: اگر ۱۳/۹ از مقیاس C را در مقابل زاویهٔ ۴۰° از مقیاس S قرار دهیم ۷/۷ از مقیاس C، در خارج از خطکش (و مبدأ C در مقابل ۲۷/۲۷° از مقیاس S) قرار می‌گیرد. در اینحال از جهش استفاده می‌کنیم. یعنی منتهای مقیاس C را در مقابل زاویهٔ ۲۷/۲۷° از مقیاس S

A	۴۰°	۴۰/۵°	۴۱°	۴۱/۱°	
B	۲۰/۸°	۲۱/۲°	۲۱/۳°	۲۱/۴°	II
$A + B$	۶۰/۸°	۶۱/۷°	۶۲/۳°	۶۲/۵°	

می‌گذاریم. در این حال عدد ۷/۷ از مقیاس C در مقابل $B = ۲۰/۸°$ از مقیاس S قرار می‌گیرد و چون $۴۰° + ۲۰/۸°$ از ۶۲/۵° کمتر است به جای $A = ۴۰°$ زاویهٔ $A = ۴۰/۵°$ را برای آزمایش دوم انتخاب و عمل را عیناً مانند حالت اول به کمک یک جهش تکرار می‌کنیم تا $B = ۲۱/۲°$ بدست آید. باز چون مجموع $۴۰/۵° + ۲۱/۲°$ از ۶۲/۵° کمتر است عمل را برای بارهای سوم و چهارم بازاء $A = ۴۱°$ و $A = ۴۱/۱°$ تکرار می‌کنیم. در

حالت اخیر برای B مقدار $۲۱/۴^\circ$ بدست می‌آید و لذا $A + B = ۶۲/۵^\circ$ و از آنجا جوابهای مسئله $A = ۴۱/۱^\circ$ و $B = ۲۱/۴^\circ$ خواهد شد. بدیهی است درهمین حال در مقابل زاویهٔ $۶۲/۵^\circ$ از مقدار S اندازهٔ ضلع سوم در روی مقیاس C دیده می‌شود: $C = ۱۸/۷۳$. جدول II خلاصهٔ عملیات را نشان می‌دهد.



مثال ۳ــ $a = ۴۳/۶$ و $b = ۸۹/۶$ و $C = ۴۷/۷^\circ$. در این حال یکی از زوایای مطلوب منفرجه شده روابط موجود زیر بدست می‌آید:

$$\frac{۴۳/۶}{\sin A} = \frac{۸۹/۶}{\sin B} \text{ و } B' - A = C = ۴۷/۷^\circ$$

جدول زیر نحوهٔ عمل را نشان می‌دهد:

B'	۷۰°	۷۴°	۷۵°	$۷۵/۹^\circ$
A	$۲۷/۱^\circ$	$۲۷/۹^\circ$	$۲۸/۱^\circ$	$۲۸/۲^\circ$
$B' - A$	$۴۲/۹^\circ$	$۴۹/۱^\circ$	$۴۶/۹^\circ$	$۴۷/۷^\circ$

برای تعیین ضلع سوم، در آخرین مرحله، یعنی وقتی عدد ۸۹/۶ از مقیاس C در مقابل‌زاویهٔ $B' = ۷۵/۹^\circ$ قراردارد، در مقابل زاویهٔ $۴۷/۷^\circ$ از مقیاس S، مقدار آن را پیدا می‌کنیم: $C = ۶۸/۴$.

مثال ۴ــ سه ضلع مثلثی در دست است زوایای آن را حساب کنید:

$$a = ۱۴ \text{ و } b = ۱۵ \text{ و } c = ۱۶$$

حل ــ زوایای مطلوب باید هم در قانون سینوسها صدق کنند وهم مجموع آنها مساوی ۱۸۰° باشد. در اینجا هم مسئله را از راه تجسس حل می‌کنیم و با توجه به اینکه a (کوچکترین ضلع مثلث) باید مقابل به کوچکترین زاویه باشد ابتدا $A = ۵۰^\circ$ را آزمایش می‌کنیم یعنی عدد ۱۴ از مقیاس c را در مقابل

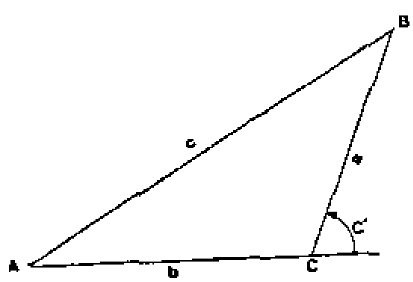
زاویهٔ °۵۰ از مقیاس S قرار می‌دهیم مقادیر $B =$ °۵۵/۲ و $C =$ °۶۱/۱ در روی S بترتیب در مقابل اعداد ۱۴ و ۱۵ از مقیاس c بدست می‌آیند. ولی چون مجموع سه زاویهٔ حاصل کمتر از °۱۸۰ است آزمایش را برای زوایای $A =$ °۵۲ و $A =$ °۵۳/۵ و بالاخره $A =$ °۵۳/۶ نظیر قسمت اول، تکرار می‌کنیم. برای $A =$ °۵۳/۶ مقادیر $B =$ °۵۹/۷ و $C =$ °۶۶/۷ بدست می‌آید که مجموع آنها °۱۸۰ می‌شود.

جدول زیر خلاصهٔ اعمال فوق را نشان می‌دهد.

A	°۵۰	°۵۲	°۵۳	°۵۳/۵	°۵۳/۶
B	°۵۵/۵	°۵۷/۷	°۵۸/۸	°۵۹/۵	°۵۹/۷
C	°۶۲/۱	°۶۴/۲	°۶۵/۸	°۶۶/۸	°۶۶/۷
$A + B + C$	°۱۶۷/۶	°۱۷۳/۹	°۱۷۷/۶	°۱۷۹/۸	°۱۸۰

مثال ۵ـ

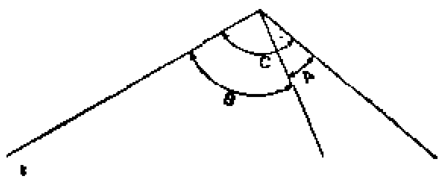
$a =$ ۱۲/۲, $b =$ ۱۴/۴, $c =$ ۲۲



حل ــ در این حال مثلث منفرج‌الزاویه خواهد شد.

جدول زیر مراحل مختلف عملیات را نشان می‌دهد:

C'	°۶۲	°۶۵	°۶۶	°۶۷	°۶۸	°۶۸/۵
A	°۲۹/۳	°۳۰/۲	°۳۰/۴۱	°۳۰/۷	°۳۰/۹	°۳۱
B	°۳۵/۲۲	°۳۶/۴	°۳۶/۷	°۳۷	°۳۷/۳	°۳۷/۵
$A + B$	°۶۴/۵۲	°۶۶/۶	°۶۷/۱۱	°۶۷/۷	°۶۸/۲	°۶۸/۵



بدین ترتیب زوایای A و B و در نتیجه $C = ۱۱۱/۵°$ بدست می‌آید.

تبصره ـ در حالت آباکهائی با مقیاسهای متقارب که مسائل آن معمولاً شبیه مثال ۱ است فقط تفاوت در این است که مجموع دو زاویهٔ A و B برابر زاویهٔ سوم C و همیشه کمتر از $۱۸۰°$ می‌باشد.

اصلاحات چاپ سوم

از خوانندگان گرامی خواهشمند است قبل از مطالعه اصلاحات زیر را به عمل آورند

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۵	۹	$۳/۱۴ + \frac{۱۶۹۰۰}{۴}$	$۳/۱۴ \times \frac{۱۶۹۰۰}{۴}$
۳۲	۱۶	$pa - p_c$	$p_a - p_c$
۴۹	۱	موئی کوتاه را	موئی‌کوتاه سمت راست‌را
۴۹	۴	موئی کوتاه روی	موئی کوتاه سمت راست را روی
۴۹	۹	طرف راست	طرف چپ
۴۹	۱۰	مقیاس D	مقیاس C
۴۹	۱۱	» »	» »
۴۹	۱۲	مقیاس B	مقیاس A
۴۹	۱۴	۲/۵۵	۲۵۵
۴۹	۱۴	۲۲/۸	۲۲/۷
۴۹	۱۷	قرار دادن	قرائت
۵۱	۱۱	$۱ + \frac{b}{a}$	$\frac{b}{a} + ۱$

تبصرهٔ زیر به آخر صفحهٔ ۵۴ افزوده شود:

تبصره ـ انتخاب روش تبصرهٔ ۱ صفحهٔ ۴۵ نیز راه مناسب دیگری است برای پیدا کردن مرتبه‌های مکعب یا کعب اعداد کوچکتر از واحد.

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۶۵	۱۴	ابتدا مبدأ	ابتدا مبدأ (منتهای سمت راست)
۶۷	آخر	و برای	و به ازای
۶۸	۱	؛	:

۸۰	۱۵	$۲/۰۳۴^{۴}$	$۲/۳۴^{۴}$
۸۱	۱۷	هم به	هم که به
۸۱	۱۸	معمولی حذف	معمولی صورت می‌گیرد حذف

صفحهٔ ۸۳ بعد از سطر ۲۴ اضافه شود:

توجه: مثال ۲ راهنمائی برای حل معادلاتی به صورت $a^x = b$ نیز هست.

۸۹	۱۳	$\sqrt[\frac{۱}{۰/۳۵}]{e}$	$\sqrt[-۰/۳۵]{e}$
۸۹	۱۴	$\sqrt[\frac{۱}{۲/۵}]{e}$	$\sqrt[-۲/۵]{e}$
۱۰۴	۱۶	بود	باشد
۱۰۴	۱۶	کردیم	کنیم
۱۰۴	۱۷	گذاردیم	گذاریم
۱۰۴	۱۹	خواندیم	خوانیم
۱۰۴	۲۱	بردیم	بریم
۱۰۴	۲۲	خواندیم	خوانیم
۱۱۱	۱	$\sin ۲'$	$\sin ۳'$
۱۱۱	۵	$۳/۵'$	$۳/۴۳۸'$
۱۱۱	۶	$۳/۵'$	$۳/۴۳۸'$
۱۱۱	۶	$۳۵'$	$۴/۳۸'$
۱۱۱	۷	$۳۵'$	$۴/۳۸'$
۱۱۱	۱۴	۰/۰۰۰۵۸۲۴	۰/۰۰۰۰۵۸۲۴
۱۱۴	۹	$۱۹/۴'$	$۱۹^{\circ}۴'$
۱۱۴	۹	$۲۶^{\circ}۱۱'$	$۱۸^{\circ}۴۸'$
۱۱۴	۹	$۱۴^{\circ}۳۲'$	$۸^{\circ}۴۷'$
۱۱۴	۹	$۸^{\circ}۲۲'$	$۱۱^{\circ}۷'$

کاوش در ریاضیات ۱