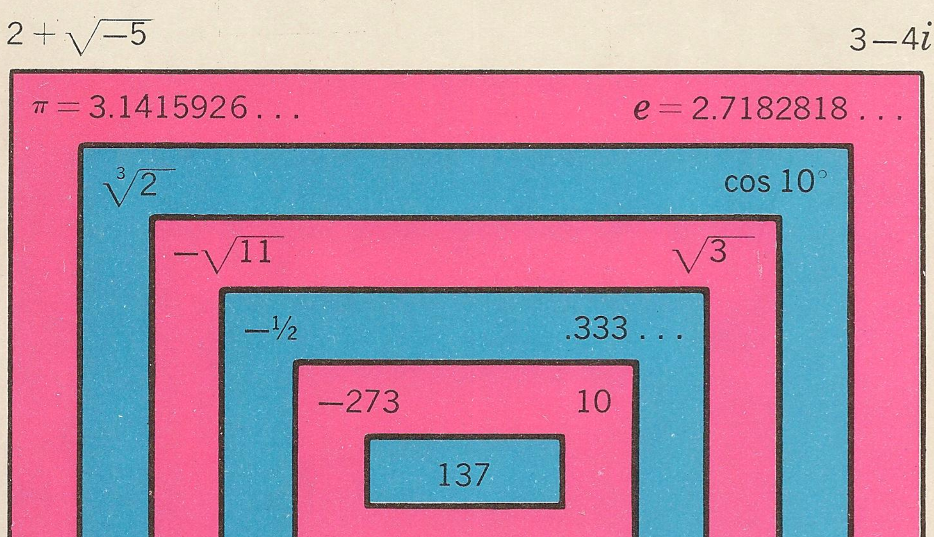
اعداد: گویا و گنگ

ایوان نیون

ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا



(ریاضیات پیش دانشگاهی - ۱)

اعداد: گویا و گنگ

(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۱)

ایوان نیون

ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۳۹۴

ریاضی، آمار و کامپیوتر
۴۳

Numbers: Rational and Irrational
New Mathematical Library (1)
Ivan Niven
The Mathematical Association of America, 1961

اعداد: گویا و گنگ
تألیف ایوان نیون
ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا
ویراستهٔ دکتر مهدی بهزاد
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۷
تعداد: ۲۰۰۰
حروفچینی: هویزه
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: نوبهار

Niven, Ivan Morton, 1915 -
نیون، ایوان‌مورتون. ۱۹۱۵ -
اعداد: گویا و گنگ
عنوان اصلی: Numbers: rational and irrational
۱. نظریهٔ اعداد. الف. اخلاقی‌نیا، غلامحسین، ،مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
QA۲۴۱ ۵۱۲/۷

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آمــوزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ کمی این توانایی را دارند که در آن زمینهٔ علمی، و با رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش آموزان به‌چنین کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جــامعهٔ ریاضـــی آمریــکا مجموعه‌ای از ایــن‌گونه کتابها را زیــر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد از آنها را منتشرکرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده وهرکدام، چه درآمریکا وچه درکشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به آنها باز گشت، زیرا بسیار پیش می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هرمسأله را خود حل کند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات وپیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ کار وگسترش این گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار چاپ دهم

در ترجمهٔ روسی این کتاب که در اتحادجماهیرشوروی سوسیالیستی به‌چاپ‌رسیده، پیوست دیگری هم به‌توسط ریاضیدان، اسحاق موئیسیه یوپیچ‌یاگلوم،[1] به‌آن افزوده شده‌است ، که در آن ویژگی گنگ بودن تقریباً همهٔ مقادیر تابعهای مثلثاتی بـا شناسه‌های گویا برحسب درجه ، به‌اثبات رسیده است. چنین به‌نظرم رسید که این پیوست باید درچاپ‌انگلیسی‌نیز آورده شود، و از شرکت‌انتشاراتی راندوم هاوس[2] به‌خاطر موافقت فوری با افزودن این پیوست سپاسگزارم. ازاین‌رو، در این چاپ پیوست جدید تحت عنوان عددهای مثلثاتی گنجانیده شده است،که اثبات همان نتایج متن روسی را ، منتها، به‌اعتقاد من ، بـا روشی ساده‌تر در دسترس می‌گذارد. همچنین در این‌چاپ تغییراتی جزئی، بیشتر برای روشنی بیان، داده شده‌است. من خود را مرهون تنی‌چند می‌شمارم که اصلاحاتی را پیشنهاد کرده‌اند.

---

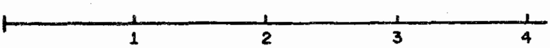
1. I. M. Yaglom　　2. Random House

مقدمه

ساده‌ترین اعداد، عددهای درست مثبت‌اند که برای شمارش به‌کار می‌روند، مانند ۱، ۲، ۳، و غیره. این عددها ، اعداد طبیعی نامیده مـی‌شوند و آن‌قدر هزاره‌هایی را با ما گذرانده‌اند که **کرونکر**، ریاضی‌دان نامدار بارها گفته است: «خداوند عددهای طبیعی را آفرید وبقیه را انسان».

نیازهای اساسی زندگی روزمره منجر به‌ابداع کسرهای متعارفی مثل ۱/۲، ۲/۳، ۵/۴، وغیره* گردید. این‌قبیل عددها را اعداد گویا می‌نامند، «نه به‌این‌خاطر که این‌عددها «زبان»دارند بلکه به‌این‌مناسبت که مفهومی صریح و روشن دارند».**

می‌توانیم عددهـای طبیعی را بـه‌صورت نقطه‌هایی کـه روی یك خط مستقیم نمایش داده‌شده‌اند ، درنظر بگیریم (شکل ۱)، همانندعددهای نشان‌دهندهٔ سانتیمتر



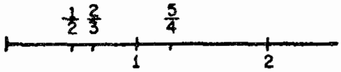
شکل ۱

درامتداد یك خط‌کش،که هر نقطه به‌اندازهٔ یك واحدطول ازنقطهٔ قبلی فاصله دارد. عددهای گویا را هم می‌توانیم روی یك خط مستقیم نمایش دهیم (شکل ۲) و آنها را به‌عنوان جزءهایی از واحد طول در نظر بگیریم.

---

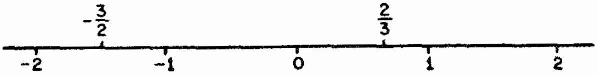
* دراین متن به‌علل گرفتاریهای چاپ کسرهای $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۵}{۴}$ ، و غیره را باکمك یك خط مورب به‌صورت ۱/۲ ، ۲/۳ و ۵/۴ نمایش می‌دهیم.

** درزبان انگلیسی برای عددهای‌گویا اصطلاح Rational به کار می‌رودکه از ریشهٔ Ratio به‌معنی نسبت است، ازآن‌روکه هرعدد گویا نسبتی ازدو عدد صحیح است. ـم.



شکل ۲

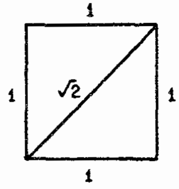
بعدها، هندوها مهمترین عدد، یعنی ۰ ، را ابداع نمودند، ودر آستانهٔ عصر جدید، جبردانان ایتالیایی عددهای منفی را اختراع کردند.* این عددها را نیز می‌توان مانند شکل ۳، روی یك خط مستقیم نمایش داد.



شکل ۳

وقتی ریاضیدانان ازعددهای گویا صحبت می‌کنند مقصودشان عددهای درست مثبت و منفی (که می‌توان آنها را نیز به‌صورت نسبتهایی مانند ۲ = ۲/۱ = ۶/۳ و غیره نشان داد)، صفر، و کسرهای متعارفی است. عددهای درست مثبت و منفی و صفررا اعداد صحیح می‌نامند، بنابراین ردهٔ عددهای گویاشامل ردهٔ عددهای‌صحیح هم هست.

کشف اینکه کسرهای متعارفی برای هدفهای علم هندسه کافی نیست، توسط یونانیها دربیشتراز ۲۵۰۰ سال قبل صورت گرفت. آنها باشگفتی ونومیدی‌دریافتند که طول قطر مربعی‌که درازای هرضلعش یك واحد طول است (شکل ۴) با هیچ



شکل ۴

عددگویایی قابل بیان نیست. (این‌مطلب را درفصل ۳ ثابت خواهیم‌کرد.) امروزه این موضوع را این‌طور بیان می‌کنیم که جذر عدد ۲ (که بنا به‌قضیهٔ فیثاغورس برابر طول قطر چنین مربعی است) یك عدد گنگ است . معنای هندسی این مطلب

---

* ازآثار باقیمانده از ریاضیدانان قدیم هند برمی‌آیدکه آنان به‌وجود عددهای منفی پی‌برده وآنها را به‌کارمی‌برده‌اند. دراین‌باره به‌کتابهای تاریخ ریاضیات رجوع‌شود. ـم.

این است که هیچ واحد مشترکی، هیچ تقسیم بندی مشترکی، هراندازه هم ظریف، برای طول وجود نداردکه بتواند به‌تعداد درستی از دفعات هم روی ضلع مربع و هم روی قطر آن بگنجد. به‌عبارت دیگر، هیچ واحد طولی، هراندازه هم کوچك، وجود ندارد به‌طوری که طول ضلع وطول قطر یك مربع، مضربهایی از آن واحد باشند. برای یونانیها، این کشف ناخوشایندی بود، زیرا آنان دربسیاری ازاثباتهای هندسی‌خودفرض کرده بودند که برای‌هردوپاره خط مفروض، یك واحد طول‌مشترك وجوددارد. بنابراین شکافی درساختار منطقی هندسهٔ اقلیدسی، نقصی‌درمبحث نسبتها و تناسب طولها، وجود داشت. دربخش ۷.۳ نشان خواهیم دادکه چگونه می‌توان این شکاف را پر و نظریهٔ تناسب راکامل کرد.

همچنین، نسبت‌محیط دایره به‌قطر آن، یك‌عددگنگ، به‌نام π ، است. عددهای گنگ دیگری هم به‌هنگام بررسی بعضی از تابعهای اساسی در ریاضیات، ظاهر می‌شوند. مثلاً ، اگربخواهیم مقادیریك تابع‌مثلثاتی، فرضاً $\sin x$ وقتی که x برابر $60°$ است، را به‌دست آوریم به‌عدد گنگ $\sqrt{3}/2$ می‌رسیم. همچنین، اگر تابع لگاریتمی $\log x$ را، حتی برای مقادیر گویای x، ارزیابی کنیم، معمولاً به‌عددهای گنگ برمی‌خوریم. اگرچه عددهایی که درجدولهای تابعهای لگاریتمی و مثلثاتی فهرست می‌شوند ظاهراً گویا هستند، ولی در حقیقت آنها فقط تقریبهای گویای مقادیر واقعی می‌باشندکه به‌استثنای بعضی از آنها، همه گنگ هستند. ازاین‌رو در ریاضیات مقدماتی، عددهای گنگ به‌صورتهای طبیعی گوناگونی نموده می‌شوند.

اعداد حقیقی از همهٔ عددهای گویا و گنگ تشکیل می‌شوند و دستگاه اصلی اعداد را برای ریاضیات بنیان می‌گذارند. درهندسه هر بحثی دربارهٔ طول، مساحت، یا حجم درنهایت ما را به‌درك عدد حقیقی رهنمون می‌سازد. هندسه در واقع وسیلهٔ شهودی ساده‌ای را برای توصیف عددهای حقیقی فراهم می‌آورد یعنی عددهایی راتوجیه می‌کندکه اندازه‌گیری تمام طولهای ممکن‌را برحسب واحدطول مفروض عملی می‌سازند. اگر مجدداً نمایش عددها را به‌صورت نقطه‌های روی یك خط مستقیم درنظر بگیریم، درمی‌یابیم که اگرچه هرپاره خط، هراندازه‌هم کوچك، شامل بینهایت نقطهٔ گویاست، نقطه‌های بسیار دیگری هم وجود دارند (مثل $\sqrt{2}$، π، و غیره) که نمایانگر طولهایی هستند که به‌وسیلهٔ عددهای گویا قابل بیان نیستند. اما همین که همهٔ عددهای حقیقی باهم به‌حساب آورده شوند، هر نقطه روی خط دقیقاً به یك عدد حقیقی، وهرعدد حقیقی به‌یك نقطه روی خط نظیر می‌شود. این مطلب که همهٔ طولهارا می‌توان باعددهای حقیقی بیان کرد به ویژگی‌کمال این‌عددها معروف است وکل توسعهٔ آنالیز ریاضی به‌این ویژگی وابسته است.

بنا بر این عددهای حقیقی بردو نوعند، گویا و گنگ. تقسیم‌بندی بسیار جدید دیگری ازعددهای حقیقی به‌دوطبقهٔ، عددهای جبری وعددهای متعالی نیزوجوددارد. یك عدد حقیقی، جبری نام دارد اگر دریك معادلهٔ جبری باضریبهای صحیح صدق کند. مثلاً $\sqrt{2}$ یك عدد جبری است. زیرادرمعادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ صدق می‌کند. اگر عددی جبری نباشد، متعالی‌نامیده می‌شود. ازاین تعریف معلوم نمی‌شودکه عددهای متعالی، یعنی غیر جبری ، وجود دارنـد . در ۱۸۵۱، لیوویل[1] ریاضیدان فرانسوی ثابت‌کردکه عددهای متعالی وجود دارند. لیوویل این‌کاررا از راه معرفی عددهایی انجام دادکه غیرجبری بودن آنها را ثابت‌کرد. درفصل ۷ روش لیوویل را برای اثبات وجود عددهای متعالی بیان خواهیم‌کرد.

بعدها درقرن نوزده، ثابت شدکه π یك عدد متعالی‌است، واین‌نتیجه تکلیف یك مسألهٔ قدیمی‌ترسیم هندسی‌معروف به «تربیع دایره» را روشن‌کرد. این‌موضوع درفصل ۵ موردبحث قرار گرفته‌است. پیشرفت دیگری درقرن نوزده توسط کانتور[2] ریاضیدان آلمانی انجام پذیرفت، وی وجود عددهـای متعالی را با روشی به‌کلی متفاوت ثابت‌کرد. اگرچه راه کانتور، برخلاف روش‌لیوویل، یك عدد متعالی را به شکلی صریح به‌نمایش‌نمی‌گذارد، اما این برتری را داردکه نشان می‌دهد عددهای متعالی به‌معنای خاص، به‌مراتب بیشتر ازعددهای جبری هستند. ازآنجاکه بینهایت عدد جبری وبینهایت عدد متعالی وجود دارد، چنین بیانی مقایسهٔ رده‌های بی‌پایان‌را ایجاب می‌کند. این مفاهیم تا اندازه‌ای از مباحث اصلی ایـن کتاب کنار گذاشته شده‌اند، ازاین‌رو اثبات کانتور در مورد وجود عددهای متعالی در پیوست پ ارائه شده‌است.

طرح کتاب چنین است‌که عددهای طبیعی، عددهای صحیح، عددهای گویا، وعددهای حقیقی‌را درسه فصل اول بیان می‌کند. سپس درفصل ۴ یك روش‌متعارف رابرای تشخیص‌هویت عددهای گنگ به‌دست‌می‌دهد. فصل۵ باعددهای به‌اصطلاح مثلثاتی و لگاریتمی سروکار دارد، یعنی عددهایی‌که مقادیرشان به‌صورت تقریبی در جدولهای تابعهای مثلثاتی و لگاریتمی ارائه می‌شوند . فصل ۶ در مورد این سؤال بحث‌می‌کندکه بااستفاده ازعددهای گویا باچه دقتی می‌توان عددهای گنگ‌راتقریب کرد. ایـن فصل مشکلتر و تخصصی‌تـر از فصلهای پیشین است. این فصل ازآن‌رو گنجانیده شده‌است تـا بعضی از خوانندگان مجال مطالعهٔ مباحث ریاضی از نوع جدید را هم داشته‌باشند.

فصل ۷ وپیوست پ دو اثبات کاملاً مستقل را درمورد وجود عددهای‌متعالی

---

1. Liouville 2. Cantor

به‌دست‌می‌دهند؛ فصل ۷ باروش لیوویل وپیوست پ باروش کانتور. تکنیکها به‌طور محسوسی متفاوت هستند وخواننده هر کدام را که دنبال کند به‌نتیجهٔ مطلوب خواهد رسید. اثبات نموده شدهٔ درفصل ۷ مملو ازجزئیات فنی اجتناب ناپذیر است، وجهت درك مباحث، خواننده ناچار است، حتی بیش از فصلهای قبل، از قلم وکاغذ استفاده کند. در واقع ممکن است خواننده فصلهای ۱ تا ۵ را نه‌چندان پرزحمت، فصل ۶ رانسبتاً مشکل وفصل ۷ را واقعاً غیرممکن بیابد. درچنین حالتی پیشنهاد می‌شود که خواننده مطالعهٔ فصل ۷ را تا کسب تجربهٔ بیشتری از ریاضی به‌تعویق اندازد. از طرف دیگر، خواننده‌ای که درگذر ازفصلهای ۱ تا ۵ بامشکل خیلی کمی روبرو می‌شود، ممکن است ترجیح دهد فصل ۷ را پیش ازفصل ۶ مطالعه کند. در واقع، فصل ۷ جزدرمورد نتیجهٔ معروفی‌دربارهٔ نابرابریها که دربخش ۱.۶ ارائه شده‌مستقل ازبقیهٔ کتاب است.

پیوست پ را می‌توان بدون ارتباط بافصل ۷ مطالعه کرد، بجز درموردقضیهٔ عامل، قضیهٔ ۲.۷، که لازم است. اگرخواننده بانظریهٔ مجموعه‌ها آشنا نباشد، مطالب پیوست پ را خیلی تازه خواهد یافت.

پیوست الف، درمورد نامتناهی بودن عددهای اول، برای مباحث مطرح شدهٔ دراین‌کتاب ضروری نیست، بااین همه به‌خاطر ارتباط نزدیکش باموضوع اصلی، ونیز بدین‌جهت که این موضوع ظریف به‌زمان اقلیدس برمی‌گردد، گنجانیده شده است. پیوست ب، درمورد قضیهٔ بنیادی حساب، برای استدلالهای ما، به‌ویژه برای استدلالهای فصلهای ۴ و ۵، لازم است؛ اثبات این قضیه از آن‌جهت در یك‌پیوست آورده شده است‌که درمقایسه بااثباتهای پنج فصل اول تااندازه‌ای طولانی ومشکل است. خواننده‌ای‌که از نظر ریاضی کم‌تجربه باشد، می‌تواند قضیهٔ بنیادی حساب را به‌طور تعبدی بپذیرد.

تمرینهای زیادی در پایان هرقسمت آمده است‌که خواننده برای آزمایش میزان درك خود از کتاب باید تعداد مناسبی از آنها را حل‌کند. (ریاضیات را نمی‌توان با تماشای کار دیگران فرا گرفت!) بعضی از مسأله‌ها با ستاره مشخص شده‌اند تا مشکلتر بودن آنها نشان داده شود. اگرخواننده به‌حل همهٔ این مسأله‌ها موفق نگردد، الزاماً نباید ناراحت شود. کامیابی وی غالباً به‌پختگی‌اش درریاضی، یعنی به‌آشناییش بامجموعهٔ نسبتاً وسیعی ازتجربه‌های ریاضی حاصل از دیگر مطالعاتش در ریاضیات، بستگی‌دارد. پاسخهای مسأله‌ها وهمچنین پیشنهادهایی برای حل‌بعضی ازمسأله‌های مشکلتر، درپایان کتاب ارائه شده است.

دستگاه عددهای حقیقی، گویا وگنگ، درهریك ازچندسطح دقت قابل بررسی

است. (کلمهٔ «دقت» در ریاضیات به‌صورت یك اصطلاح فنی به‌کار برده‌می‌شود تا معلوم کند که موضوع مورد بررسی در چه درجهٔ ازیك وضع منطقی دقیق تا وضع شهودی‌تری قرار دارد که در آن‌صحت حکمهای تا حدی‌موجه، یا به‌خودی‌خود واضح، مورد قبول واقع می‌شود). هدف ما آن است که در جهت تا حدی شهودی، نظری اجمالی‌در بارهٔ موضوع را ارائه دهیم. بنابراین، هیچ اصل موضوع یا اصل‌متعارفی را مبنای بررسی قرار نمی‌دهیم. خواننده‌ای که می‌خواهد ریاضیدان بشود و این کتاب به‌دستش افتاده است روزی باید به‌این راه بیفتد که گسترش با روش اصل موضوعی ودقیق دستگاه عددهای حقیقی را بررسی کند. چرا؟ به‌این دلیل که‌دیدگاه ما در اینجا آن قدر توصیفی است که بعضی از پرسشهای اساسی را بدون پاسخ می‌گذارد. مثلاً، درفصل ۳ می‌گوییم که عددهای حقیقی را می‌توان به این‌راه، آن راه، وراهی دیگرهم توصیف نمود. ولی چگونه می‌توانیم مطمئن باشیم که این روشهای گوناگون همه توصیفهای یك دستگاه هستند؟ به‌عنوان یك مثال ملموس، نمونه‌ای از پرسشهایی راکه دراین‌کتاب پاسخ نمی‌دهیم دراینجا مطرح می‌کنیم: چگونه بفهمیم که $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ یا $\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۷}=\sqrt[۳]{۳۵}$ ؟ برای پاسخ دادن به چنین پرسشهایی باید تعریف دقیقی از اعمال روی عددهای گنگ را ارائه نمود. این کار دراینجا انجام نخواهد شد زیرا آنقدرهم که به‌نظر می‌رسد آسان نیست. وبهتر است که این نوع بررسیها تازمانی به‌تعویق افتد که دانش‌آموز نه‌تنها مهارت ریاضی بیشتری کسب کند؛ بلکه از ماهیت و معنای اثبات ریاضی هم درك بهتری به‌دست آورد. همان‌طور که ریاضیدان امریکایی مور[1] گفته است: «برای هر روز، دقتی درخور آن روزکافی است.»

«ماهیت ومعنای اثبات ریاضی!» درحال‌حاضر ودراینجا ممکن نیست‌توصیف دقیقی ازآنچه که یك اثبات را تشکیل می‌دهد ارائه نمود و درهمین‌جاست که برای دانشجوی تازه کار ریاضی یکی از ترسناکترین کابوسها نهفته است. اگر ماهیت اثبات‌را نتوان توصیف کرد یاباجزئیات تدوین‌نمود چگونه می‌توان آن‌را آموخت؟ بااستفاده ازیك قیاس بسیار ساده، به‌همان صورت که کودك یاد می‌گیرد رنگها را تمیز دهد؛ یعنی از راه «مشاهده وسپس تقلید» ازشخص دیگری که رنگهای سبز، آبی وغیره‌را تشخیص می‌دهد. ممکن‌است درابتدا خطاهایی ناشی از درك نارسای طبقه‌بندیها یا الگوها وجودداشته باشد، ولی درنهایت، شخص آموزنده لم کار را یاد می‌گیرد. درمورد معمای اثبات ریاضی نیزچنین است. هدف بعضی ازمبحثهای

---

1. E.H. Moore

ما این است که الگوهای فنون اثبات را روشن کنند ودرنتیجه خواننده را بامفهومها و روشهای اثبات آشنا سازند. بنابراین در حالی کـه نمی‌توانیم هیچ دستور عمل مطمئنی را برای اینکه یك اثبات معتبرچه هست وچه نیست، ارائه کنیم، مطلبهایی را دربارهٔ موضوع می‌گوییم وامیدواریم که خواننده قبل از به‌پایان رساندن این کتاب نه‌تنها بتواند اثباتهای معتبررا تشخیص دهد، بلکه خود نیزموفق به‌بیان آنها گردد.

۱

عددهای طبیعی و عددهای صحیح

در ریاضیات، دستگاه اعداد با عددهای معمولی،که برای شمارش به‌کار می‌روند، شروع می‌شود،

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, \ldots$$

اینها عددهای درست مثبت هستند که عددهای طبیعی خوانده می‌شوند. کوچکترین عدد طبیعی ۱ است، ولی بزرگترین عدد طبیعی وجود ندارد، زیرا هرعدد بزرگی که انتخاب شود، عددهای بزرگتر از آن‌هم وجود دارند. بنا بر این می گوییم که بینهایت عدد طبیعی وجود دارد.

اگر هردو عدد طبیعی باهم جمع شوند، حاصل یك عدد طبیعی خواهد شد؛ مثلا $۴+۴=۸$ و $۴+۷=۱۱$. به‌طور مشابه، هرگاه دوعدد طبیعی درهم ضرب شوند، حاصلضرب عددی طبیعی خواهد شد؛ مثلاً $۴\times۷=۲۸$. این‌دو ویژگی‌را به‌طورخلاصه چنین می‌توان بیان کرد که عددهای‌طبیعی نسبت به عمل جمع و نسبت به عمل ضرب بسته هستند. به‌عبارت دیگر اگر دسته‌ای از اشیاء (مثل مجموعهٔ همهٔ عددهای‌طبیعی) و یك عمل (مثل‌جمع) داشته باشیم به‌طوری که حاصل‌عمل، قطع نظر از اینکه روی کدام‌یك از عضوهای‌آن مجموعه، (مثلاً ۴ و ۷)، انجام شود، دوباره

عضوی از همان دستهٔ اصلی باشد، آن گاه می گوییم که آن مجموعه نسبت به آن عمل بسته است. فرض کنید فقط عددهای ۱، ۲، ۳ را درنظر بگیریم. این مجموعهٔ صرفاً سه عضوی نسبت به عمل جمع بسته نیست، زیرا ۴ = ۳ + ۱ و ۴ عضوی از این مجموعه نیست. وقتی ازمجموعهٔ عددهای طبیعی صحبت می کنیم منظورمان مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی است. اگر بخواهیم فقط بعضی ازآنها را درنظر بگیریم، مشخص خواهیم کرد که مجموعهٔ موردنظر کدام یك از آنها را شامل است. بنابراین دریافتیم که مجموعهٔ عددهای طبیعی نسبت به عمل جمع بسته است، اما مجموعهٔ ویژهٔ متشکل از تنها سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ چنین نیست.

عددهای طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته نیستند. برای پی بردن به این مطلب فقط باید معلوم سازیم که حاصل تفریق دوعدد طبیعی، همواره یك عدد طبیعی *نیست*. مثلاً، اگر ۷ را از ۴ کم کنیم حاصل، ۳ −، عددی طبیعی *نیست*. البته اگر ۴ را از ۷ کم کنیم، حاصل آن عدد طبیعی ۳ است؛ با این وجود طبق تعریف نمی توانیم بگوییم مجموعه‌ای از عددها نسبت به عمل تفریق بسته است، مگر این که حاصل هر تفریق قابل تصور درآن مجموعه عضوی از آن مجموعه باشد. به‌طور مشابه، مجموعهٔ عددهای طبیعی نسبت به عمل تقسیم بسته نیست، زیرا مثلاً اگر ۴ بر ۷ تقسیم شود، حاصل کسر ۴/۷ است که یك عدد طبیعی نیست.

دربسیاری ازحالتها اتفاق می‌افتد که می‌توان با تقسیم دوعدد طبیعی بر هم به‌عنوان نتیجه یك عدد طبیعی به‌دست آورد، مثلاً حاصل تقسیم ۳۵ بر ۵ برابر ۷ می‌شود. دراین حالت می گوییم که ۵ یك مقسوم علیه دقیق ۳۵ است، یا به‌طور خلاصه‌تر، ۵ یك مقسوم علیه یا یك عامل ۳۵ است. به‌عکس، می گوییم که ۳۵ مضربی از ۵ است. درحالت کلی، فرض کنیم b و d دوعدد طبیعی را نمایش می‌دهند، اگر عدد طبیعی سومی مانند q وجود داشته باشد به‌طوری که $b = dq$، آن گاه d را یك مقسوم علیه b، یا b را یك مضرب d می‌نامند. درمثال فوق داریم $b = ۳۵$ و $d = ۵$ که مقدار q برابر ۷ است. حرفهای d و q مخصوصاً انتخاب شده‌اند، زیرا یادآور کلمات «divisor» و «quotient» هستند.

۱.۱ عددهای اول

عدد ۳۵ چند مقسوم‌علیه دارد؟ همان‌طور که با فهرست کردن همهٔ مقسوم‌علیه‌ها: ۱، ۵، ۷، ۳۵، ملاحظه می‌شود، پاسخ ۴ است. ازآنجا که ۳۵ عددطبیعی نسبتاً کوچکی است، پاسخ این پرسش مشکل نیست. اما حال پرسش زیر را درنظر بگیرید: عدد ۱۸۷ چند مقسوم‌علیه دارد؟ پاسخ، چندان ساده نیست، اما وقتی که ۱، ۲، ۳ وغیره

را امتحان می‌کنیم، معلوم می‌شود که باز هم پاسخ ۴ است: ۱، ۱۱، ۱۷، ۱۸۷. برای خواننده کوشش مختصری لازم است تا مقسوم‌علیه‌های ۱۱ و ۱۷ را بیابد، ولی وجود مقسوم‌علیه‌های ۱ و ۱۸۷ بدیهی است. به‌طور مشابه، واضح است که ۱۷۹ دارای مقسوم‌علیه‌های ۱ و ۱۷۹ است، و ثابت می‌شود که این دو عدد تنها مقسوم‌علیه‌های آن هستند؛ هرگاه یك عدد طبیعی، مانند ۱۷۹، دقیقاً دو مقسوم‌علیه داشته باشد، اول یا عدد اول نامیده می‌شود. طریقهٔ دیگر بیان این مطلب چنین است که: یك عدد اول عددی است طبیعی که تنها مقسوم‌علیه‌هایش ۱ و خود آن عدد باشند. نخستین چند عدد اول به‌ترتیب بزرگی عبارتند از:

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ...

توجه داشته باشید که ۱ به‌عنوان یك عدد اول فهرست نشده است. این مطلب که ۱ عددی اول نیست، یك قرارداد یا یك توافق در ریاضیات است، یا به‌عبارت دیگر بنا به‌تعریف می‌باشد. ریاضیدانان توافق کرده‌اند که ۱ را عدد اول نشناسند. این تصمیم می‌توانست به‌نحو دیگری باشد و ۱ یکی از عددهای اول قلمداد شود. اما با مستثنی کردن ۱، آن‌چنان‌که بعداً نشان داده خواهد شد، می‌توان گزاره‌های راجع به‌عددهای اول را بدون ذکر استثناها یا قیدهایی بیان کرد.

مجموعه مسأله‌های ۱

[در مجموعه‌های مسأله‌ها، آن مسأله‌هایی که با * مشخص می‌شوند از بقیه مشکلتر هستند.]

۱. معلوم کنید از حکمهای زیر کدام درست و کدام نادرست است:

(الف) مجموعهٔ ۱، ۰، ۱ — نسبت به‌عمل جمع بسته است.

(ب) مجموعهٔ ۱، ۰، ۱ — نسبت به‌عمل ضرب بسته است.

(پ) مجموعهٔ ۱، ۰، ۱ — نسبت به‌عمل تفریق بسته است.

(ت) مجموعهٔ توانهای مثبت ۲، یعنی مجموعهٔ $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، $۲^{۴}$، $۲^{۵}$، $۲^{۶}$، $۲^{۷}$ ... نسبت به‌عمل ضرب بسته است.

*(ث) مجموعهٔ توانهای مثبت عدد ۲ نسبت به عمل جمع بسته است.

۲. عدد ۳۰ چند مقسوم‌علیه دارد؟

۳. عدد ۱۶ چند مقسوم‌علیه دارد؟

۴. کوچکترین عدد طبیعی که دقیقاً ۳ مقسوم‌علیه دارد کدام است؟

۵. همهٔ عددهای اول بین ۵۰ و ۱۰۰ را پیدا کنید.

۶*. ثابت کنید اگر ۳ مقسوم‌علیهی از دوعدد باشد، مقسوم‌علیهی ازمجموع و تفاضل آنها نیز هست . این مطلب را تعمیم دهید و ثابت کنید اگر d مقسوم‌علیهی از دوعدد b_1 و b_2 باشد، آن‌گاه d مقسوم‌علیهی از b_1+b_2 و b_1-b_2 نیز هست.

۲.۱ تجزیهٔ یکتا به عاملهای اول

هر اندازه عددهای طبیعی بزرگتر و بزرگتر را درنظر بگیریم عددهای اول کمیابتر می‌شوند. برای توضیح این مفهوم خاطرنشان می‌کنیم که

۱۶۸ عدداول بین ۱ تا ۱۰۰۰

۱۳۵ عدداول بین ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰

۱۲۷ عدداول بین ۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰

۱۲۰ عدداول بین ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰

۱۱۹ عدداول بین ۴۰۰۰ تا ۵۰۰۰

وجود دارد. با این‌حال، فهرست عددهای اول بی پایان‌است، یعنی بینهایت عدداول وجود دارد. این‌مطلب درپیوست الف در پایان کتاب ثابت شده‌است. اثبات آن به‌هیچ دانش ویژه‌ای نیاز ندارد، و بنابراین، خواننده درصورت تمایل‌می‌تواند هم‌اکنون به‌آن رجوع کرده و اثبات را مطالعه نماید. این اثبات را از آن جهت در یك پیوست آورده‌ایم که نتیجهٔ آن برای اثبات هیچ حکم دیگری در این کتاب مورد لزوم نیست. اثبات بدین‌لحاظ ارائه شده‌که نتیجهٔ آن درنوع خودجالب است.

هرعدد طبیعی، غیر از ۱، یا اول‌است یا می‌تواند به‌عددهای اول تجزیه‌شود. مثلاً عدد طبیعی ۹۴۸۶۰ را درنظر بگیرید، که مسلماً اول نیست، زیرا

$$۹۴۸۶۰ = ۱۰ \times ۹۴۸۶$$

به‌علاوه، ۹۴۸۶ بر ۲، وهمچنین بر ۳، و درواقع بر ۹، بخش‌پذیر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} ۹۴۸۶۰ &= ۱۰ \times ۲ \times ۹ \times ۵۲۷ \\ &= ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۵۲۷ \end{aligned}$$

اگر ۵۲۷ اول باشد، عبارت‌فوق یك تجزیهٔ ۹۴۸۶۰ به عددهای‌اول خواهد بود.

ولی ۵۲۷ اول نیست، زیرا ۳۱ × ۱۷ = ۵۲۷. درنتیجه می‌توان تجزیهٔ به‌عاملهای اول را به صورت

$$۹۴۸۶۰ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۱۷ \times ۳۱$$

نوشت. ما با عدد ویژهٔ ۹۴۸۶۰ شروع کردیم، اما این روش در مورد هر عدد طبیعی دیگر n هم کارایی دارد. زیرا یا n اول هست یا نیست. اگر اول نباشد می‌تواند به‌دو عدد کوچکتر مثلاً a و b تجزیه شود، به‌طوری که $n = ab$. هریك از عددهای a و b به نوبت خود، یا اول است یا می‌توانند به عددهای کوچکتر تجزیه شود. با ادامهٔ این فرایند بالاخره n را به‌طور کامل به عددهای اول تجزیه می‌کنیم.

جملهٔ اول پاراگراف قبل عددهای اول را از دیگر عددهای طبیعی مستثنی می‌کند. در ریاضیات غالباً مطلوب این است که تعاریف چنان تعمیم داده‌شوند که دسته‌بندی به‌چندین حالت نیاز نباشد. به‌عنوان‌مثال، مقصود از «تجزیهٔ به‌عاملهای اول» عددی مانند ۱۲، نمایش آن به‌صورت حاصلضرب چند عدد اول، ۲ × ۲ × ۳، است. حال می‌خواهیم مفهوم «تجزیهٔ به عاملهای اول» را چنان تعمیم دهیم که عددهای اول را هم شامل بشود. مثلاً عامل تنهای ۲۳ به عنوان تجزیهٔ به عاملهای اول عدد اول ۲۳ تلقی شود. با این مفهوم تعمیم یافتهٔ «تجزیهٔ به‌عاملهای اول»، حکم زیر را می‌توان جایگزین حکم اصلی کرد «هرعدد طبیعی غیر از ۱، را می‌توان به عاملهای اول تجزیه کرد.» بدین ترتیب ما جمله را مختصر کردیم و حداقل درمورد تقریر حکم مربوط به‌تجزیهٔ عددها به عاملهای اول ضرورت مستثنی کردن عددهای اول را حذف کردیم.

یکی از قضیه‌های اساسی در ریاضیات این است که تجزیهٔ یك عدد طبیعی به عددهای اول را فقط به یك صورت می‌توان انجام داد. مثلاً ۹۴۸۶۰ نمی‌تواند به عددهای اول دیگری، غیر از عددهای ارائه شدهٔ در بالا، تجزیه گردد. البته ترتیب عاملها می‌تواند متفاوت باشد: مثلاً

$$۹۴۸۶۰ = ۳ \times ۱۷ \times ۲ \times ۵ \times ۳۱ \times ۳ \times ۲$$

ولی صرف‌نظر از این تفاوتهای مربوط به ترتیب عاملها، راه دیگری برای تجزیهٔ ۹۴۸۶۰ وجود ندارد. این قضیه به نام قضیهٔ تجزیهٔ یکتا به عاملهای اول یا قضیهٔ بنیادی حساب معروف است که به‌طور رسمی به شرح زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ بنیادی حساب. هرعدد طبیعی غیر از ۱، صرف نظر از ترتیب عاملها، فقط به‌یك صورت به عاملهای اول تجزیه می‌شود.

این قضیه در پیوست ب ثابت می‌شود، و قضیه‌ای است که در سراسر بحث مورد

استفاده قرار می گیرد . دلیل اینکه اثبات قضیه در پیوست آورده می‌شود این است که تا اندازه‌ای پیچیده است. در هرحال، هیچ یك‌از مطالبی که بعداً در کتاب‌عرضه خواهد شد دراثبات‌مورداستفاده قرار نگرفته‌اند، بنابراین‌خواننده درصورت تمایل می‌تواند از هم اکنون به پیوست ب رجوع کند. یا می‌تواند به خاطرآنکه نخست به درك مفهومهای ساده‌تر و سپس به درك مفهومهای مشکلتر پرداخته باشد ، مطالعهٔ پیوست‌ب‌را به تعویق‌اندازد.

صورت قضیهٔ بنیادی حساب به شرح بالا ، ما را توجیه می کند که چرا ۱ به‌عنوان یك عدد اول به‌حساب‌نمی‌آید. برای اینکه اگر ۱جزءعددهای اول منظور می‌شد، آن گاه مثلاً می‌توانستیم بنویسیم

$$۳۵ = ۵ \times ۷ = ۱ \times ۵ \times ۷$$

و درنتیجه عدد ۳۵ (یاهرعدد طبیعی‌دیگر) به‌بیش‌از یك‌طریق به‌صورت‌حاصلضرب عددهای اول‌قابل‌تجزیه بود. البته قضیهٔ بنیادی حساب بازهم درست‌می‌بود اما بیان آن استفاده از عبارتهای مشروط‌تری نظیر «به غیر از ...» یا «مگر ...» را ایجاب می‌نمود. بنابراین باکنارگذاشتن ۱ از فهرست‌عددهای اول، می‌توان‌نتایج‌را زیباتر و خلاصه‌تر بیان کرد.

۳.۱ عددهای صحیح

مجموعهٔ عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ... نسبت به عملهای جمع وضرب بسته‌است، اما نسبت به عملهای تفریق و تقسیم بسته نیست . بسته بودن نسبت به عمل تفریق می‌تواند در مجموعه‌ای تعمیم یافته که شامل صفر و عددهای منفی

$$۰, -۱, -۲, -۳, -۴, \ldots$$

نیز باشد تحقق‌یابد. این عددها همراه با عددهای طبیعی، عددهای‌صحیح یاعددهای درست را تشکیل می‌دهند:

$$\ldots, -۵, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots$$

شاید خواننده با ویژگیهای زیر آشنا باشد:

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba, \qquad a\cdot ۰ = ۰\cdot a = ۰,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad (ab)c=a(bc), \qquad (-a)(-b)=ab,$$
$$a+۰=۰+a=a, \qquad a\cdot ۱ = ۱\cdot a = a,$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

که a، b، c می‌توانند هرعدد صحیحی باشند. این ویژگیها در مورد همهٔ دستگاههای اعداد مورد بحث در این کتاب برقرار هستند. قصد ما این نیست که در بارهٔ مبدأ این ویژگیهای خاص بحث کنیم. چنین بحثی ما را به‌مطالعهٔ پایه‌های دستگاه اعداد رهنمون می‌سازد (که موضوع یکی‌دیگر ازکتابهای این‌مجموعه‌است) و از موضوع موردبحث این‌کتاب خارج است. هدف ما آن‌است که ازراه قبول مبانی،ویژگیهای گوناگون عددها، به‌ویژه عددهای گنگ، را استنتاج کنیم.

بنابراین، عددهای صحیح نسبت به‌عملهای جمع، تفریق و ضرب بسته هستند. این عددها نسبت به‌عمل تقسیم بسته نیستند، زیرا مثلاً، حاصل تقسیم ۲ بر ۳ یك عدد درست نیست و از این‌رو به‌خارج از ردهٔ عددهای صحیح رهنمون می‌شویم.

قبل از اینکه تقسیم عددهای صحیح را تعریف کنیم، به‌بررسی عملهای دیگر و نتایج آن می‌پردازیم. وقتی عمل جمع عددهای صحیح را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که نه‌تنها مجموع دوعدد صحیح، بازهم یك‌عدد صحیح است، بلکه تنها یك عدد صحیح هم وجود داردکه برابراین مجموع باشد. مثلاً، مجموع ۳ و ۱ — عدد ۲ است، نه ۵ ونه‌هیچ عدد دیگر. این‌واقعیت را می‌توانیم این‌طور بیان کنیم‌که برای دو عدد صحیح مفروض، عدد صحیح سوم یکتایی وجود دارد که مجموع آن دوعدد است. همچنین درمورد ضرب؛ برای دوعدد صحیح مفروض،عدد صحیح سوم یکتایی وجود داردکه حاصلضرب آن دوعدد است.

وقتی از تقسیم عددهای طبیعی صحبت کردیم، ملاحظه نمودیم که این مطلب همیشه درست نیست که برای هر دو عدد طبیعی مفروض، مثل b و d، عدد طبیعی سومی، خارج قسمت آنها، وجود دارد، به‌طوری که $b=dq$. در هرحال، هرگاه چنین عدد طبیعی‌سومی، چون q ، وجود داشته‌باشد، واضح است که فقط همین‌یکی است، بنابراین لزومی‌ندیدیم بگوییم که q عددطبیعی یکتایی‌باید باشدکه $b=dq$.
با این وجود، وقتی‌همان مفاهیم تقسیم را درمجموعهٔ عددهای صحیح تعریف‌می‌کنیم باید این شرط را که خارج قسمت یکتا باشد، اضافه نماییم. حال ببینیم چرا این شرط ضروری است.

در ابتدا باید بپذیریم‌که مطلوب آن است‌که برای هریك از پرسشهای زیر فقط یك پاسخ داشته‌باشیم: حاصل $7-3$ چیست؟ حاصل $(-3)\times(-2)$ چیست؟ حاصل $8\div4$ چیست؟ به‌بیان دیگر، مایلیم نتیجهٔ منحصربه‌فردی برای عملهای‌خود به‌دست آوریم. حال، ببینیم وقتی تقسیم در مجموعهٔ عددهای صحیح درنظر گرفته شود چه رخ می‌دهد. دوباره فرض کنید b و d دو عدد صحیح مفروض باشند و خارج قسمت q را عدد صحیحی تعریف کنید که $b=dq$. مثلاً ، فرض کنید

$-۱۲=۳\times(-۴)$ زیرا ، $q=-۴$ بدیهی است . $d=۳$ و $b=-۱۲$.

qی‌مناسبی وجود دارد ویکتاست. حال فرض کنید b هرعددصحیح و d عدد صحیح ۰ باشد. باید یك q بیابیم به‌طوری که $b=۰\times q$. اگر $b\neq۰$*، این معادله قابل‌حل نیست، یعنی هیچ q وجودنداردکه به‌ازای آن، این‌رابطه درست باشد. اگر $b=۰$، آن‌گاه معادله به‌صورت $q\times۰=۰$ درمی‌آید و هرعدد صحیحی‌مثل q در آن‌صدق می‌کند. به‌بیان دیگر، اگردراصل جوابی برای $b=۰\times q$ وجودداشته‌باشد، یکتا نیست. ازآنجاکه نتایج یکتا درمورد عملهای اصلی حساب مهم هستند، باید چنان دستگاه عددی بنا کنیم که نه‌تنها خارج‌قسمت دوعدد صحیح وجود داشته‌باشد، بلکه یکتا نیز باشد. راه چاره، صرفاً مجاز ندانستن تقسیم برصفر است. حـال می‌توانیم بگوییم که عددصحیح d یك مقسوم‌علیه عددصحیح b نامیده می‌شود اگرعددصحیح یکتایی مانند q وجود داشته باشد کـه $b=dq$، (البته بنا به تحلیل فوق $d\neq۰$.) یامی‌توانیم بگوییم که عددصحیح غیرصفر d، یك مقسوم‌علیه b نامیده می‌شود اگر عددصحیح q وجود داشته‌باشدکه $b=dq$. (ازآنجاکه ۰ رابه‌عنوان یك‌مقسوم‌علیه ممکن کنار گذاشتیم، خارج قسمت به‌طور خود به‌خود یکتا می‌شود.)

در بحث پیشین این پرسش را مطرح کردیم : عدد ۳۵ چند مقسوم‌علیه دارد؟ درآن موقع بحث به‌عددهای طبیعی محدود بود ودرنتیجه پاسخ این پرسش چهار بود؛ عددهای ۱، ۵، ۷ و ۳۵. حال اگـر پرسش را بـه‌این معنی تفسیر کنیم که مقسوم‌علیه‌هاعددهای صحیح باشند، پاسخ هشت است: ±۱، ±۵، ±۷، و±۳۵.

مجموعه مسأله‌های ۲

۱. آیا ۵ــ یك مقسوم‌علیه ۳۵ است؟

۲. آیا ۵ یك مقسوم‌علیه ۳۵ــ است؟

۳. آیا ۵ــ یك مقسوم‌علیه ۳۵ــ است؟

۴. آیا ۳ یك مقسوم‌علیه ۳۵ــ است؟

۵. آیا ۱ یك مقسوم‌علیه ۳۵ــ است؟

۶. آیا ۱ یك مقسوم‌علیه ۰ است؟

۷. آیا ۰ یك مقسوم‌علیه ۱ است؟

---

* علامت $\neq$ یعنی «مساوی نیست با»

۸. آیا ۱ یك مقسوم‌علیه ۱ است؟

۹. آیا ۰ یك مقسوم‌علیه ۰ است؟

۱۰. آیا ۱ یك مقسوم‌علیه هرعدد صحیحی است؟

۱۱. آیا ۰ مضربی از ۳۵ است؟

۱۲. ثابت کنید بیست‌وپنج عدد اول بین ۱ تا ۱۰۰ و بیست‌ویك عدداول بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ وجود دارد.

۴.۱ عددهای صحیح زوج و فرد

یك عدد صحیح زوج نامیده می‌شود اگر بر ۲ بخش‌پذیر باشد. در غیر این صورت فرد نام دارد. بنابراین عددهای صحیح زوج عبارت‌اند از:

$$\ldots, -۸, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, \ldots$$

و عددهای صحیح فرد عبارت‌اند از:

$$\ldots, -۷, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, ۷, \ldots$$

ازآنجاکه یك عدد صحیح زوج بر ۲ بخش‌پذیر است، هر عدد صحیح زوج را می‌توان به‌صورت $۲n$ نوشت، دراین‌جا نماد n به‌جای هرعدد صحیحی قرار می‌گیرد. هرگاه نمادی (مانند حرف n در بحث ما) برای نشان دادن هرعضوی از مجموعهٔ مشخصی از اشیاء (در این حالت مجموعهٔ عددهای صحیح) پذیرفته شود، آن مجموعهٔ مشخص را دامنهٔ مقادیر آن نماد می‌نامند. در موضوع مورد بررسی می‌گوییم که هرعدد صحیح زوج را می‌توان به‌صورت $۲n$ نوشت، که درآن دامنهٔ n مجموعهٔ عددهای صحیح است. مثلاً ملاحظه می‌شود که عددهای صحیح و زوج ۱۸، ۳۴، ۱۲ و ۶۲- به‌صورت $۲n$ می‌باشند که در آن n به‌ترتیب عبارت است از ۹، ۱۷، ۶ و ۳۱-. هیچ دلیل ویژه‌ای برای استفادهٔ ازحرف n وجود ندارد. به‌جای اینکه بگوییم عددهای صحیح زوج، عددهای صحیح به‌صورت $۲n$ هستند، می‌توانیم بگوییم که آنها عددهای صحیح به صورت $۲m$، یا به‌صورت $۲j$، یا به‌صورت $۲k$ هستند.

اگر دو عدد صحیح زوج را با هم جمع کنیم، حاصل، یك عدد صحیح زوج است. این مطلب بامثالهای زیر روشن می‌شود:

۱۲	۳۰	۴۶	$-$۱۰
۱۴	۲۲	$-$۱۴	$-$۴۶
۲۶	۵۲	۳۲	$-$۵۶

بااین‌وجود، اثبات اصل کلی‌که عددهای صحیح زوج نسبت به‌عمل جمع بسته‌هستند، مستلزم چیزی بیشتر ازچند مثال است. برای ارائهٔ این‌اثبات، از نماد $2n$ برای یك عدد صحیح زوج، و مثلاً $2m$ برای عدد صحیح زوج‌دیگر، استفاده می‌کنیم. پس عمل جمع را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$2m+2n=2(m+n)$$

مجموع $2m+2n$ به‌صورت $2(m+n)$ نوشته شده است تا بخش‌پذیری آن را بر ۲ نشان دهد. نوشتن

$$2n+2n=4n$$

کفایت نمی‌کرد، زیرا این‌عبارت مجموع یك عدد صحیح زوج باخودش را نشان می‌دهد. به‌بیان دیگر، به‌جای اینکه ثابت‌کنیم مجموع هردوعدد صحیح زوج ، یك عدد صحیح زوج است، ثابت می‌کردیم که دوبرابر یك عدد صحیح زوج ، بازهم یك‌عدد صحیح زوج (درواقع بخش‌پذیر بر۴) است. بدین‌جهت نماد $2n$ را برای یك عدد صحیح زوج و $2m$ را بـرای دیگری به‌کار بردیم تا نشان دهیم که آنها الزاماً یکی نیستند.

برای نشان دادن هرعددفرد چه علامتی می‌توانیم به‌کار ببریم؟ توجه‌کنید‌که هرگاه ۱ را به‌عدد صحیح زوجی اضافه‌کنیم، یك عدد صحیح فرد حاصل می‌شود. بنابراین می‌توانیم بگوییم که هرعدد صحیح فـرد را مـی‌توان به‌صورت $2n+1$ نوشت. این صورت، تنها صورت ممکن نیست. باهمان‌کیفیت می‌توانیم بگوییم که هرگاه ۱ را از عدد صحیح زوجی کم کنیم، یك عدد صحیح فرد به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توانیم بگوییم که هر عدد صحیح فـرد به‌صورت $2n-1$ هم نوشته می‌شود. به‌همین جهت می‌توان گفت‌که هرعدد فرد، می‌تواند به‌صورت $2n+3$، به‌صورت $2n-3$، یا به‌صورت $2k-5$ وغیره هم نوشته شود.

آیا می‌توانیم بگوییم‌که هر عدد صحیح فردرا می‌توان به‌صورت $2n^2+1$ نوشت؟ اگر به‌جای n مقادیر صحیح

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

را قرار دهیم، برای $۲n^۲+۱$ مجموعهٔ عددهای صحیح

$$\ldots, ۵۱, ۳۳, ۱۹, ۹, ۳, ۱, ۳, ۹, ۱۹, ۳۳, ۵۱, \ldots$$

را به‌دست می‌آوریم. هریك ازاین عددها، فردهستند، اما آنها همهٔ عددهای فرد را تشکیل نمی‌دهند. مثلاً عددصحیح فرد ۵ را نمی‌توان به‌این‌صورت نوشت. بنابراین نادرست است که بگوییم هرعددصحیح فردرا می‌توان به‌صورت $۲n^۲+۱$ نوشت. اما این درست است که بگوییم هـر عدد صحیح به‌صورت $۲n^۲+۱$، فرد است. همچنین، نادرست است که بگوییم هرعدد صحیح زوج را می‌توان به‌صورت $۲k^۲$ نوشت، که در آن دامنهٔ k مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح است؛ مثلاً ۶، صرف‌نظر از اینکه چه عدد صحیحی برای k انتخاب شود، به‌صورت $۲k^۲$ نیست.

ارتباط بین‌این حکمها مثل ارتباط بین حکمهای «همهٔ گربه‌ها حیوان هستند» و«همهٔ حیوانات گربه هستند» می‌باشد. بدیهی‌است، اولی درست ودومی نادرست است. این ارتباط وقتی روشنتر خواهد شد که حکمهای شامل ادوات شرط «اگر»، «فقط اگر» یا «اگر وفقط اگر» مورد بررسی قرارگیرند. (بخش ۳.۲ را ببینید.)

مجموعه مسأله‌های ۳

کدام‌یك‌ازعبارتهای زیردرست وکدام‌یك‌نادرست‌اند؟ (دامنهٔ‌مقادیر n، m، j، ... مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح است.)

۱. هر عدد صحیح فرد را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد:

(الف) $۲j-۱$ (ت) $۲n^۲+۳$

(ب) $۲n+۷$ (ث) $۲n^۲+۲n+۱$

(پ) $۴n+۱$ (ج) $۲m-۹$

۲. هرعددصحیح به‌صورت (الف) دربالا، فرد است؛ در مورد (ب)، (پ)، (ت)، (ث) و (ج) نیزچنین است.

۳. هرعدد صحیح زوج را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد:

(الف) $۲n+۴$ (ت) $۲-۲m$

(ب) $۴n+۲$ (ث) $n^۲+۲$

(پ) $۲m-۲$

۴. هرعدد صحیح به‌صورت (الف) درمسئلهٔ قبل، زوج است؛ درمورد (ب)، (پ)،

(ت) و (ث) نیزچنین است.

۵۰۱ ویژگی بسته بودن

دوگزارهٔ زیر، درفصل بعد مورد استفاده قرارخواهندگرفت.

(۱) مجموعهٔ عددهای صحیح زوج نسبت به‌عمل ضرب بسته است.

(۲) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد نسبت به‌عمل ضرب بسته است.

برای اثبات حکم (۱) باید ثابت کنیم که حاصلضرب هردوعدد صحیح زوج یك عدد زوج است . می‌توانیم هردوعدد صحیح زوج را به‌طور نمادی با $۲m$ و $۲n$ نشان دهیم. پس از ضرب کردن داریم

$$(۲m)(۲n)=۴mn=۲(۲mn)$$

این حاصلضرب بر ۲ بخش‌پذیر، و بنابراین زوج است.

برای اثبات حکم (۲) باید ثابت‌کنیم که حاصلضرب دوعدد صحیح فرد یك عدد فرد است. با نمایش دادن دوعدد صحیح فرد به‌صورت $۲m+۱$ و $۲n+۱$ و ضرب آنها، داریم

$$(۲m+۱)(۲n+۱)=۴mn+۲m+۲n+۱=۲(۲mn+m+n)+۱$$

حال، هر عدد صحیحی که به جای m و n در این عبارت گذاشته شود، عدد $۲(۲mn+m+n)$ زوج و بنابراین عدد $۲(۲mn+m+n)+۱$ فرد است.

حکمهای (۱) و(۲) را می‌توان با استفاده ازنتیجهٔ تجزیهٔ یکتا به‌عاملهای‌اول هم ثابت نمود، اما راجع به‌این‌روش، دیگر وارد جزئیات نمی‌شویم. (ممکن‌است خواننده داوطلبانه بخواهداین‌کاررا انجام‌دهد، خاطرنشان‌می‌کنیم که یك‌عددصحیح، زوج است اگر وفقط اگر درتجزیهٔ آن به‌عاملهای اول، عامل ۲ ظاهرشود.)

ما تاکنون عددهای صحیح زوج وفرد، یعنی عددهای صحیح به‌صورت $۲m$ و $۲m+۱$ رادرنظرداشته‌ایم.زوج بودن وفردبودن عددهای‌صحیح به‌بخش‌پذیری آنها بر ۲ بستگی دارد. به‌همین‌قیاس می‌توانیم ردهٔ عددهای صحیح بخش‌پذیر بر ۳، یعنی

$$\ldots, -۱۲, -۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹, ۱۲, \ldots$$

را درنظر بگیریم. این عددها، مضربهای ۳ هستند. آنها را همچنین می‌توان به‌عنوان ردهٔ عددهای صحیح به‌صورت $۳n$ نیز توصیف نمود. عددهای صحیح به‌صورت $۳n+۱$ عبارت‌اند از

$$\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

وعددهای صحیح به‌صورت $3n+2$ عبارت‌اند از

$$\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$$

این‌سه فهرست ازعددهای صحیح، همهٔ عددهای صحیح را شامل‌می‌شوند؛ درنتیجه می‌توانیم بگوییم که هرعدد صحیح دقیقاً به‌یکی ازصورتهای $3n$ ، $3n+1$ ، یا $3n+2$ است.

۶.۱ نکته‌ای دربارهٔ ماهیت اثبات

قبلاً گفتیم برای اثبات اینکه عددهای صحیح زوج نسبت به‌عمل‌جمع بسته هستند، یعنی اثبات اینکه مجموع هردوعدد صحیح زوج یك عدد زوج است، بررسی تنها چند مثال ویژه، مثل $26 = 14 + 12$، کافی نیست. ازآنجاکه بینهایت‌عدد صحیح زوج وجود دارد، نمی‌توان همهٔ حالتهای مجموع‌جفتهای ویژه‌ای ازعددهای‌صحیح زوج را مورد رسیدگی‌قرارداد. بنابراین لازم‌شد به‌نوعی نمادگرایی جبری‌متوسل شویم، مثلاً نماد $2n$، که می‌تواند برای بیان هرعدد صحیح زوج به‌کار رود، ومارا قادرساخت تا بسته بودن مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح زوج نسبت به‌عمل ضرب را ثابت کنیم.

باوجود این، برای اثبات گزاره‌ای سالب، مثل «عددهای صحیح فرد نسبت به‌عمل جمع بسته نیستند» مجبور نیستیم از هیچ نماد کلی جبری نظیر $2m+1$ استفاده‌کنیم. دلیل این امر این است که حکم سالب نظیر این را می‌توان تنها با ارائهٔ یك مثال ثابت نمود. برای اثبات هرحکمی که ادعا می‌کند همهٔ عضوهای‌یك مجموعه ویژگی معینی را ندارند، تنها کافی است که عضوی ازآن مجموعه رایافت که آن ویژگی را نداشته باشد. برای اثبات اینکه همهٔ پسرها چشمهای قهوه‌ای ندارند، تنها کافی است که پسری باچشمهای آبی یاچشمهای میشی پیداکنیم. برای اثبات اینکه همهٔ حاصل جمعهای دوعدد صحیح فرد، فرد نیستند، ملاحظه می‌کنیم که $8 = 5 + 3$، یك جفت عددصحیح فرد ارائه شده‌که مجموع آنها زوج است و همین یك مورد، برای اثبات حکم کافی است. در صورتی که، اگر بخواهیم ثابت کنیم که مجموع هر دوعدد صحیح‌فرد یك عددصحیح زوج‌است، ارائهٔ $8 = 5 + 3$ کافی نیست. حتی اگرچند حالت $18 = 11 + 7$ ، $58 = 53 + 5$ و غیره را نیز ارائه دهیم یك اثبات ریاضی صحیحی ازاین گزاره نخواهیم داشت.

مثال دیگری ازیك گزارهٔ سالب این‌است: «هر عدد اول فرد نیست.» برای

اثبات این‌مطلب فقط لازم‌است خاطرنشان‌کنیم که عدد زوج ۲، یك عدد اول است.

مجموعه مسأله‌های ۴

(سه مسألهٔ اول گزاره‌های سالب را شامل‌اند وبنابراین با ارائهٔ تنها یك‌مثال عددی می‌توان آنها را حل کرد.)

۱. ثابت‌کنید عددهای صحیح فرد نسبت به‌عمل تفریق بسته نیستند.

۲. ثابت‌کنید عددهای صحیح به‌صورت $3n+1$ نسبت به‌عمل جمع بسته نیستند.

۳. ثابت کنید عددهای صحیح به‌صورت $3n+2$ نسبت به‌عمل ضرب بسته نیستند.

۴. ثابت کنید مجموع هردوعدد صحیح فرد، یك عدد صحیح زوج است.

۵. ثابت‌کنیدکه مجموعه‌های زیر نسبت به‌عمل ذکرشده بسته هستند:
(الف) عددهای صحیح به‌صورت $3n+1$، نسبت به‌عمل ضرب؛
(ب) عددهای صحیح به‌صورت $3n$، نسبت به‌عمل جمع؛
(پ) عددهای صحیح به‌صورت $3n$، نسبت به‌عمل ضرب.

۶. در مسأله‌های زیر در مورد بسته بودن مجموعه نسبت به‌عمل ذکر شده، تصمیم بگیرید، ودرهرحالت اثباتی را ارائه کنید:
(الف) عددهای صحیح به‌صورت $6n+3$، نسبت به‌عمل جمع؛
(ب) عددهای صحیح به‌صورت $6n+3$، نسبت به‌عمل ضرب؛
(پ) عددهای صحیح به‌صورت $6n$، نسبت به‌عمل جمع؛
(ت) عددهای صحیح به‌صورت $6n+1$، نسبت به‌عمل تفریق؛
(ث) عددهای صحیح به‌صورت $6n+1$، نسبت به‌عمل ضرب؛
(ج) عددهای صحیح به‌صورت $3n$، نسبت به‌عمل ضرب؛
(چ) عددهای صحیحی‌که به‌صورت $3n$ نیستند، نسبت به‌عمل ضرب.

۲

عددهای گویا

۱.۲ تعریف عددهای گویا

دیدیم که عددهای طبیعی ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ... نسبت به‌عملهای جمع و ضرب بسته‌اند و عددهای صحیح

$$\ldots, -۵, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots$$

نسبت به‌عملهای جمع، ضرب و تفریق بسته هستند. با این‌حال‌هیچ‌یك از این‌مجموعه‌ها نسبت به‌عمل تقسیم بسته نیستند ، زیرا تقسیم عددهای صحیح می‌تواند به‌کسرهایی نظیر ۴/۳، ۶/۷، ۵/۲— و غیره منجر شود. دستهٔ کامل این قبیل کسرها عددهای گویا را تشکیل می‌دهد. بنا براین، یك عدد گویا (یا یك کسر گویا) عددی است‌که می‌تواند به‌صورت a/d ارائه شود،که در آن a و d عددهای صحیح‌هستند و d صفر نیست. حال چند نکته را درمورد این‌تعریف بیان می‌کنیم:

(۱) لازم دانسته‌ایم که d مخالف صفر باشد. این شرط، که به‌طور ریاضی به‌شکل $d\neq ۰$ بیان می‌شود، لازم است، زیرا d به‌منزلهٔ یك مقسوم‌علیه‌است. موارد زیر را درنظر بگیرید:

حالت (الف) $a=۲۱$، $d=۷$، $\frac{a}{d}=\frac{۲۱}{۷}=\frac{۳}{۱}=۳$؛

حالت (ب) $a=۲۵$، $d=۷$، $\frac{a}{d}=\frac{۲۵}{۷}=۳\frac{۴}{۷}$.

درحالت (الف)، d یک مقسوم‌علیه ، به‌همان مفهوم فصل قبل است ، یعنی ۷ یک مقسوم‌علیه دقیق ۲۱ می‌باشد. درحالت (ب)، d بازهم یک مقسوم‌علیه است، اما به‌مفهومی متفاوت ، زیرا ۷ یك مقسوم‌علیه دقیق ۲۵ نیست. ولی اگر ۲۵ را مقسوم و ۷ را مقسوم‌علیه بنامیم، خارج قسمتی‌چون ۳ وباقیمانده‌ای مثل ۴ به‌دست‌می آید. بنابراین کلمهٔ مقسوم‌علیه را به‌مفهوم عمومی‌تری به‌کار می‌بریم‌تا حالتهای گوناگون و وسیعتری از فصل ۱ را دربر گیرد . با این‌حال مفهوم مقسوم‌علیه از فصل ۱ در مواردی مثل‌حالت (الف) در بالا، بازهم‌مصداق دارد. ازاین‌رو، مثل‌فصل ۱ حالت $d=۰$ را باید مستثنی کنیم.

(۲) توجه داشته باشیدکه هرچند اصطلاحات عدد گویا و کسر گویا همسانند، اما کلمهٔ کسر تنها برای نشان دادن هرعبارت جبری با یك صورت و مخرج به‌کار می‌رود، مثل

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\quad,\quad\frac{۱۷}{x}\quad,\quad \text{یا}\quad \frac{x^۲-y^۲}{x^۲-y^۲}$$

(۳) تعریف‌عددگویا این واژه‌ها را در برداشت: «عددی که می‌تواند به‌صورت a/d نموده شود که در آن a و d عددهای صحیحی هستند و $d\neq ۰$.» چرا بیان «عددی به‌صورت a/d که درآن a و d عددهای صحیحی هستند و $d\neq ۰$» کافی نیست؟ دلیل این‌است‌که بینهایت راه برای نمودن‌کسر مفروضی وجود دارد (مثلاً ۲/۳ می‌تواند، تنها به‌عنوان نمونه ، به‌صورتهای ۴/۶، ۶/۹، ... ،یا $۲\pi/۳\pi$ یا $۲\sqrt{۳}/۳\sqrt{۳}$ ، یا ۱۰/۵ــ ــ نیز نموده شود.) و نمی‌خواهیم تعریف ما از عدد گویا به راه ویژه‌ای بستگی داشته‌باشدکه شخص برای نمودن آن انتخاب می‌کند. تعریف یك‌کسر به‌گونه‌ای‌است‌که اگرصورت ومخرج آن هر دو در یك مقدارضرب شوند، مقدار آن تغییر نمی‌کند، ولی صرفاً با نگاه کردن به‌کسر مفروضی همیشه نمی‌توان گفت‌که آن‌کسر گویاست یا نه. مثلاً عددهای

$$\frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۳}}\quad \text{و}\quad \frac{\sqrt{۱۵}}{\sqrt{۳}}$$

را درنظربگیرید، هیچ یك ازآنها، به‌شکلی‌که نوشته شده‌اند، به‌صورت a/d، که

در آن a و d عددهای صحیح باشند، نیستند. با این حال، با انجام دادن چند محاسبهٔ معین ماهرانه روی کسر اول می‌توانیم داشته باشیم:

$$\frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۴\times۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۱}$$

در نتیجه به عددی مساوی کسر مفروض، اما به‌صورت ویژهٔ: $a=۲$، $d=۱$، می‌رسیم. بنا بر این می‌بینیم که $\sqrt{۱۲}/\sqrt{۳}$ گویاست، ولی اگر در تعریف قید شده بود که در همان ابتدا عدد باید به شکل صحیح خود باشد، دیگر حائز این کیفیت نمی‌شد. در مورد $\sqrt{۱۵}/\sqrt{۳}$ عملیات

$$\frac{\sqrt{۱۵}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۵}\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۵}$$

عدد $\sqrt{۵}$ را نتیجه می‌دهد. در فصلهای بعد خواهیم آموخت که $\sqrt{۵}$ را نمی‌توان به‌صورت نسبتی از عددهای صحیح بیان نمود و بدین جهت یك عدد گنگ است.

(۴) توجه داشته باشید که هر عدد صحیح یك عدد گویاست. این مطلب را در مورد عدد صحیح ۲ دیدیم. به‌طور کلی عددهای صحیح را می‌توان به‌صورت کسرهایی با مخرج ۱ نوشت؛

$$\ldots,\frac{-۵}{۱},\ \frac{-۴}{۱},\ \frac{-۳}{۱},\ \frac{-۲}{۱},\ \frac{-۱}{۱},\ \frac{۰}{۱},\ \frac{۱}{۱},\ \frac{۲}{۱},\ \frac{۳}{۱},\ \frac{۴}{۱},\ \frac{۵}{۱},\ldots$$

مجموعه مسأله‌های ۵

۱. ثابت کنید که عدد صحیح ۲ را می‌توان، با بینهایت راه، به‌صورت گویای a/d (با عددهای صحیح a و d) نوشت.

۲. ثابت کنید که عدد گویای ۱/۳ را می‌توان، با بینهایت راه، به‌صورت گویای a/d نوشت.

۳. ثابت کنید که عدد صحیح ۰ را می‌توان، با بینهایت راه، به‌صورت گویای a/d نوشت.

۴. ثابت کنید که هر عدد گویا بینهایت نمایش به‌صورت گویا دارد.

۵. تعریف. فرض کنید k یك عدد صحیح باشد، پس معکوس k عدد دیگری است،

فرضاً l ، به‌طوری که $k \times l = ۱$. نتیجهٔ این تعریف این‌است که همهٔ عددها، بجز ۰ ، معکوس دارند ، $k \neq ۰$ مفروض است، بنا به تعریف، معکوس آن در معادلهٔ $k \times l = ۱$ صدق می‌کند، ازاین‌رو

$$l = \frac{۱}{k}$$

که فقط برای $k \neq ۰$ دارای معنی است. ثابت کنید معکوس هرعدد گویا (بجز صفر) گویاست.

۲.۲ عددهای اعشاری پایان‌دار و بی‌پایان

نمایش دیگری از عددگویای ۱/۲ نیز وجود دارد،که با صورتهای ۲/۴، ۳/۶، ۴/۸ و غیره متفاوت است، و آن عدد اعشاری ۰٫۵ است. نمایش اعشاری بعضی‌از کسرها، پایان‌دار یا متناهی‌است، مثلاً

$$\frac{۱}{۲} = ۰٫۵, \qquad \frac{۲}{۵} = ۰٫۴, \qquad \frac{۱}{۸} = ۰٫۱۲۵$$

با این‌وجود کسر های دیگری‌هم هستند که نمایش‌اعشاری بی‌پایان یا نامتناهی‌دارند، مثلاً

$$\frac{۱}{۳} = ۰٫۳۳۳۳۳\ldots, \quad \frac{۱}{۶} = ۰٫۱۶۶۶۶\ldots, \quad \frac{۵}{۱۱} = ۰٫۴۵۴۵۴۵\ldots$$

این عددهای اعشاری نامتناهی را می‌توان از راه تقسیم صورت برمخرج کسرها به‌دست آورد. مثلاً در مورد ۵/۱۱، عدد ۵ را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم و حاصل ۰٫۴۵۴۵۴۵ . . . را به‌دست می‌آوریم.

کدام یك از کسرهای گویای a/b نمایش اعشاری پایان‌دار دارند؟ قبل از اینکه به‌این پرسش درحالت کلی پاسخ دهیم به‌بررسی یك مثال، فرضاً عدداعشاری پایان‌دار ۰٫۸۶۲۵ می‌پردازیم. می‌دانیم که

$$۰٫۸۶۲۵ = \frac{۸۶۲۵}{۱۰۰۰۰}$$

و اینکه هرعدد اعشاری پایان‌دار را می‌توان به‌شکل یك کسر گویا نوشت که مخرج آن ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، یا توان دیگری از ۱۰ باشد. اگرکسر سمت راست مثال

بالا را به‌ساده‌ترین صورت تحویل کنیم، خواهیم داشت

$$۰٫۸۶۲۵ = \frac{۸۶۲۵}{۱۰۰۰۰} = \frac{۶۹}{۸۰}$$

مخرج ۸۰ از تقسیم ۱۰۰۰۰ بر ۱۲۵ ، بزرگترین عامل مشترك ۱۰۰۰۰ و ۸۶۲۵، به‌دست آمده‌است. حال، عدد ۸۰، نظیر ۱۰۰۰۰، در تجزیهٔ کامل خود به‌عاملهـای اول فقط دوعامل اول ۲ و ۵ را دارد. اگـر به‌جای ۰٫۸۶۲۵ بـا هرعدد اعشاری پایان‌دار دیگری شروع کرده بودیم، متناظر آن، کسر گویای a/b را می‌داشتیم که به‌ساده‌ترین‌صورت*، همین‌ویژگی‌را می‌داشت. یعنی، مخرج b می‌توانست عددهای ۲ و ۵ را به‌عنوان عاملهای اول‌داشته باشد، و نه‌عددهای دیگری را، زیرا b همیشه عاملـی است از توانهایی از ۱۰ و ۱۰ = ۵ × ۲. این نکته، کلید حل معماست و ما حکم کلی زیر را ثابت خواهیم‌کرد:

کسر گویایـی چون a/b ، کـه به ساده‌تـرین صورت باشد، بسط اعشاری پایان‌دار دارد، اگر وفقط اگر عدد صحیح b هیچ عامل اولـی غیر از ۲ و ۵ نـداشته باشد.

باید دانست‌که b مجبور نیست هم ۲ و هم ۵ را به‌عنوان عاملهای اول داشته‌باشد، ممکن‌است فقط یکی‌ازاین دو را داشته باشد، یا شاید هیچ‌کدام ازآنها را به‌عنوان عامل اول نداشته باشد:

$$\frac{۱}{۲۵} = ۰٫۰۴,\qquad \frac{۱}{۱۶} = ۰٫۰۶۲۵,\qquad \frac{۷}{۱} = ۷٫۰$$

دراینجا، b مقادیر ۲۵، ۱۶ و ۱ را داراست. نکتهٔ مهم این است که b نباید هیچ عامل اولی غیر از ۲ و ۵ را داشته باشد.

توجه کنید که گزارهٔ فوق شامل واژه‌های اگر و فقط اگر است. آنچه تا اینجا ثابت‌کرده‌ایم‌مربوط به‌قسمت فقط اگر است، زیرا نشان دادیم که یك بسط‌پایان‌دار وجود خواهد داشت فقط اگر b بر هیچ عدد اولی غیر از ۲ و ۵ بخش‌پذیرنباشد. (به‌بیان دیگر، اگر b برعددهای اولی غیر از ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد، آنگاه کسر a/b ، که به‌ساده‌ترین صورت باشد، بسط اعشاری پایان‌داری نخواهد داشت.)

قسمت اگر گزاره حاکی است که: اگر عدد صحیح b عامل اولی غیر از ۲

---

* عددگویایی چون a/b به‌ساده‌ترین صورت است، اگـر a و b هیچ مقسوم‌علیه مشترك بزرگتر از ۱ نداشته باشند.

و ۵ نداشته باشد، آن گاه کسر a/b ، کــه به‌ساده‌ترین صورت باشد، بسط اعشاری پایان‌داری دارد. برای اثبات قسمت «اگر»، باید از ساده‌ترین صورت هر کسری چون a/b ، شروع کنیم. فرض می‌کنیم که عاملهای b حداکثر ۲ و ۵ باشند و ثابت می‌کنیم کــه بسط اعشاری متناظر آن کسر، از نوع پایان‌دار است. نخست ، مثالــی در نظر می گیریم، مانند

$$\frac{a}{b}=\frac{۹۷۴۱}{۳۲۰۰}=\frac{۹۷۴۱}{۲^{۷}\times ۵^{۲}}$$

برای برگرداندن این کسر به‌اعشاری، فقط آن را به‌کسری که مخرجش توانی از ۱۰ باشد، تغییر می‌دهیم. و برای این کار باید صورت و مخرج، هردو را در $۵^{۵}$ ضرب کنیم:

$$\frac{۹۷۴۱}{۲^{۷}\times ۵^{۲}}=\frac{۹۷۴۱\times ۵^{۵}}{۲^{۷}\times ۵^{۷}}=\frac{۳۰۴۴۰۶۲۵}{۱۰^{۷}}=۳{,}۰۴۴۰۶۲۵$$

این استدلال مربوط به‌این حالت خاص را می‌توان برای هر مورد دلخواه دیگر ، به‌طریق زیر تعمیم داد: فــرض کنید b به‌صورت $۲^{m}\times ۵^{n}$ باشد، که در آن m و n عددهای صحیح مثبت یا صفر هستند. حال، یا n کوچکتر از m یا مساوی آن است (که نوشته می‌شود $n\leqslant m$) یا n بزرگتر از m است (که نوشته می‌شود $n>m$).

درحالت $n\leqslant m$ ، صورت و مخرج کسر، هردو را در ۵^{m-n} ضرب می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{۲^{m}\times ۵^{n}}=\frac{a\times ۵^{m-n}}{۲^{m}\times ۵^{n}\times ۵^{m-n}}=\frac{a\times ۵^{m-n}}{۲^{m}\times ۵^{m}}=\frac{a\times ۵^{m-n}}{۱۰^{m}}$$

ازآنجا که $m-n$ مثبت یا صفر است ، ۵^{m-n} یــك عدد صحیح است ، و بنابراین $a\times ۵^{m-n}$ نیز عددی صحیح مانند c است. ازاین‌رو می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{۱۰^{m}}$$

و از آنجا که تقسیم عدد صحیح c بر ۱۰^{m} صرفاً مستلزم قرار دادن ممیز در جای درست خود است، عدد اعشاری پایان‌داری به‌دست می‌آوریم.

درحالت $n>m$ ، صورت و مخرج a/b را در ۲^{n-m} ضرب می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{۲^{m}\times ۵^{n}}=\frac{a\times ۲^{n-m}}{۲^{m}\times ۵^{n}\times ۲^{n-m}}=\frac{a\times ۲^{n-m}}{۲^{n}\times ۵^{n}}=\frac{a\times ۲^{n-m}}{۱۰^{n}}$$

با نوشتن d به‌جای عدد صحیح $a \times ۲^{n-m}$ خواهیم داشت

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{۱۰^{n}}$$

بنابراین، مانند حالت قبل، یك عدد اعشاری پایان‌دار را داریم.

مجموعه مسأله‌های ۶

۱. کسرهای زیر را به‌صورت عددهای اعشاری پایان‌دار نشان دهید:

(الف) $\frac{۱}{۴}$، (ب) $\frac{۳}{۲۰۰}$، (پ) $\frac{۳۲۱}{۴۰۰}$، (ت) $\frac{۷}{۶۲۵}$، (ث) $\frac{۳۵۲}{۱۲۵}$، (ج) $\frac{۳۱۴۹}{۲۵۰۰}$.

۳.۲ چند راه بیان و اثبات گزاره‌ها

عبارت اگر و فقط اگر را بدون بیان یك تعریف دقیق به‌کاربردیم. برای بیان توضیحی مختصر در بارهٔ اصطلاحاتی که در بیان عبارتهای ریاضی به‌کار می‌روند وارتباطی که این اصطلاحات بـا منطق دارند ، فعلاً بحث مربوط به عددهای گویا را مسکوت می‌گذاریم. در ریاضیات دونوع اساسی حکم یا گزاره وجود دارد:

اگر A ، آن‌گاه B.

اگر A ، آن‌گاه B، و به‌عکس.

اینها را به‌نوبت تفسیر می‌کنیم.

وقتی می‌گوییم «اگر m و n عددهای صحیح زوج باشند، آن‌گاه mn زوج است» همچنانکه در بخش ۵.۱ گفتیم، یـك حکم از نوع «اگر A، آن‌گاه B» را داریم. باری، چنین حکمی ممکن است به‌چند طریق بیان شود، مانند فهرست زیر:

راههای بیان «اگر A ، آن‌گاه B»

[۱] اگر A درست باشد، آن‌گاه B درست است.

[۲] اگر A برقرار باشد، آن‌گاه B برقرار است.

[۳] A ایجاب می‌کند B را.

[۴] B از A نتیجه می‌شود.

[۵] B تالی A است.

[۶] A یك شرط کافی برای B است.
[۷] B یك شرط لازم برای A است.
[۸] B درست است مشروط براینکه A درست باشد.
[۹] B درست است اگر A درست باشد.
[۱۰] A درست است فقط اگر B درست باشد.
[۱۱] غیرممکن است که در آن واحد A درست و B نادرست باشد.
[۱۲] اگر B نادرست باشد، آن گاه A نادرست است.

این فهرست فقط شامل متداولترین صورتهاست و کامل نیست، چرا که واقعاً هیچ حدی برای تعداد صورتهای ممکن این‌حکم وجود ندارد. با اینکه بعضی از این صورتها، مثلاً [۶] و [۷]، دراین کتاب به‌کار نمی‌روند، ولی برای تکمیل افزوده شده‌اند. همه، بجز [۱۲] را می‌توان به‌عنوان تعریفهایی از اصطلاحاتی مانند «ایجاب می‌کند»، «شرط لازم»، «شرط کافی» و «فقط اگر» درنظر گرفت.

مثلاً، [۱۰] رادرنظر بگیرید، که کاربردفنی اصطلاح «فقط اگر» در ریاضیات را تعریف می‌کند. با قرار دادن حکمهای مربوط به m و n از مبحث قبل به جای A و B، نتیجه می‌گیریم که گزاره‌های زیر، هر دو، یك چیز را بیان می‌کنند:

«اگرعددهای صحیح m وn زوج باشند، آن گاه عدد صحیح mn زوج است.»

«عددهای صحیح m وn زوج هستند، فقط اگر عدد صحیح mn زوج باشد.»

اگر خواننده احساس می‌کند که آنها یك چیز را بیان نمی‌کنند، احساس او ازکاربرد روزمرهٔ کلمهٔ «فقط» سرچشمه می‌گیرد، که به‌آن عادت کرده است. و دراین صورت باید تفاوتی بین زبان فنی ریاضیات و کاربرد روزمرهٔ زبان محاوره‌ای قائل شود. در عین حال که این زبانها در چیزهای زیادی باهم مشترك هستند، نقاط افتراقی‌هم، مانند مثال مورد بحث، دارند. (بعد از اینکه شخص در به‌کارگیری زبان ریاضی ماهر شد، در صورت تمایل می‌تواند آن را به عنوان شکل محاورهٔ روزمره‌اش هم به‌کار برد. دراین صورت چنین فردی به نظر عوام‌الناس ملانقطی، متظاهر، یاحداقل مغرور، خواهد بود.)

آنچه تاکنون در مورد فهرست راههای بیان «اگر A، آن گاه B» گفته‌ایم، این‌است که‌صورتهای [۱] تا [۱۱] چیزی بیشتراز توافقهایی دربارهٔ نحوهٔ استفادهٔ اززبان در ریاضیات نیستند. صورت [۱۲] نه تنها متضمن جمله‌بندی جدیدی‌است، بلکه یکی از اصلهای موضوع بنیادی منطق نیز هست. این واقعیت که [۱۲] همان

مطلب «اگر A، آن گاه B» را می‌رساند، مبنای منطقی دارد و صرفاً ترتیب دیگری از واژه‌ها نیست. این اصل موضوع از منطق، که بدان اشاره شد (و به‌قانون طرد شق ثالث معروف است) بیان می‌کند که A یا درست است یا نادرست، و منظور از A هرعبارت قابل تحلیل است. اساساً این اصل موضوع، هرحدوسط بین درستی و نادرستی A را کنار می‌گذارد. فرض می‌کنیم این اصل موضوع مسلم باشد، آن گاه ثابت می‌کنیم که صورتهای [۱] و [۱۲] یك چیز را بیان می‌کنند.

برای این منظور، باید ثابت کنیم که [۱]، [۱۲] را ایجاب می‌کند و به‌عکس [۱۲]، [۱] را. نخست، [۱] را مسلم فرض می‌کنیم، و آن گاه [۱۲] را در نظر می‌گیریم:

«اگر B نادرست باشد، آن گاه A نادرست است.»

ممکن است این نتیجه‌گیری غلط باشد، یعنی داشته باشیم «A درست است»؟ اگر چنین باشد، آن گاه با توجه به [۱] نتیجه می‌گیریم که B درست است. ولی این مطلب، مقدم [۱۲] را نقض می‌کند.* بنابراین، استنتاج «A نادرست است» صحیح است.

به عکس، [۱۲] را مسلم فرض‌می‌کنیم، و [۱] را از آن نتیجه می‌گیریم:

«اگر A درست باشد، آن گاه B درست است.»

می‌پرسیم آیا این نتیجه‌گیری غلط است، یعنی «B نادرست است»؟ اگر چنین باشد، آن گاه با توجه به [۱۲] نتیجه می‌گیریم که A نادرست است. ولی این مطلب، مقدم [۱] را نقض می‌کند. بنابراین، «B درست است» یك نتیجه‌گیری صحیح است.

صورتهای [۱۱] و [۱۲] نشان ازماهیت اثبات غیر مستقیم دارند. فرض کنید که می‌خواهیم حکم «اگر A، آن گاه B» را ثابت کنیم. یك اثبات مستقیم آن است که عبارت A را دانسته یا فرض شده می‌پنداریم و آن گاه عبارت B را از آن نتیجه می‌گیریم. ولی اگر صورت [۱۱] را بررسی کنیم، می‌بینیم که با فرض همزمان درستی A و نادرستی B و استنتاج یك تناقض از آن، می‌توانیم اثباتی ارائه کنیم. این، یك برهان خلف است، ویکی از راههای اثبات غیر مستقیم. از روی مشاهدهٔ مقدمات بیان‌شده در اثبات، می‌توان به‌این نوع اثبات پی برد، و معمولاً از شخص خواسته‌می‌شود که ابتدا حکمی را که در واقع باید ثابت کند، نادرست فرض نماید. اثباتهای

---

* درگزارهٔ «اگر A آن گاه B»، A را مقدم و B را تالی می‌گویند. ـ م.

غیرمستقیم را می‌توان از روی عبارتی که در پایان اثبات قرار می‌گیرد نیز تشخیص داد، مثل «... و به این ترتیب به یك تناقض می‌رسیم و قضیه ثابت می‌شود.»

نوع متداول دیگری از اثبات غیر مستقیم توسط[۱۲] تداعی می‌شود. بنا بر این برای اثبات «اگر A، آن گاه B» می‌توانیم فرض کنیم که B نادرست است و آن گاه نتیجه بگیریم که A نادرست است. سه نوع اثباتی را که ما شناخته‌ایم عبارت‌اند از:

A را درست فرض کنید، و درستی B را نتیجه بگیرید. (اثبات مستقیم)

A را درست و B را نادرست فرض کنید، و از آن تناقضی را نتیجه بگیرید. (یك صورت از اثبات غیرمستقیم)

B را نادرست فرض کنید و نتیجه بگیرید که A نادرست است. (صورت دیگری از اثبات غیرمستقیم)

موضوع عجیب در بارهٔ روش تدوین کتابهای ریاضی (حتی کتاب حاضر) این است که این سه نوع اثبات را به طور آزاد به کار می‌گیرند و اغلب هیچ گونه اشاره‌ای هم به اینکه در هر مورد خاص کدام روش را به‌کار گرفته‌اند، نمی‌کنند! در واقع، از خواننده حل معمای کوچکی انتظار می‌رود و آن، این است که نوع اثبات به‌کار رفته را، جهت فرایند ذهنی خودش، تشخیص دهد. درهرحال، این معمای مشکلی نیست وخواننده معمولاً می‌تواند مقدماتی را که به‌وسیلهٔ نویسنده در شروع اثبات پذیرفته شده‌است، مشخص کند. حال می‌خواهیم نوع دوم گزارهٔ ریاضی، یعنی

«اگر A، آن گاه B، و به‌عکس»

را که در شروع این بخش ذکر شد، مورد بررسی قراردهیم. واژه‌های وبه‌عکس مبین «اگر B، آن گاه A» هستند و این مطلب، معکوس «اگر A آن گاه B» است. شاید خواننده آگاه باشد که یك عبارت و معکوس آن، دو چیز متفاوت هستند. بسته به مقتضیات، ممکن است یکی درست باشد و دیگری نادرست، ممکن است هردو درست، یا هردو نادرست باشند. مثلاً عبارت «اگر m و n زوج باشند، آنگاه mn زوج است» درست است، در صورتی که معکوس آن «اگر mn زوج باشد، آنگاه m و n زوج هستند» نادرست است.

حال، فهرست پیشین خود رامقایسه و راههای گوناگون بیان «اگر A، آن گاه B و به عکس» را تعیین می‌کنیم:

اگر B، آن گاه A، و به‌عکس.

A درست است اگر و فقط اگر B درست باشد.
B درست است اگر و فقط اگر A درست باشد.
A نادرست است اگر و فقط اگر B نادرست باشد.
B نادرست است اگر و فقط اگر A نادرست باشد.
A، B را موجب می‌شود و به‌عکس.
B، A را موجب می‌شود و به‌عکس.
A شرطی لازم و کافی برای B است.
B شرطی لازم و کافی برای A است.
A و B حکمهای هم‌ارز هستند.

همهٔ این حکمها یك مطلب را بیان می‌کنند.

اکنون، تنوع زیاد روشهای اثبات معتبر، جهت برقراری «اگر A، آن‌گاه B و به‌عکس» را یادآوری می‌کنیم. همچنان‌که پیشتر دیدیم، سه روش اساسی برای اثبات «اگر A، آن‌گاه B» وجود دارد. همچنین، برای «اگر B، آن‌گاه A» هم سه روش اثبات وجود دارد. از آنجا که هریك از سه راه نخست‌را می‌توان باهریك از سه راه دوم ترکیب نمود، نه طریقهٔ اثبات برای «اگر A، آن‌گاه B و به عکس» وجود دارد. شاید متداولترین الگو، اثبات مستقیم هر راه باشد، یعنی:

(۱) A را فرض کنید و B را نتیجه بگیرید.
(۲) B را فرض کنید و A را نتیجه بگیرید.

الگوی متداول دیگر این است:

(۱) A را فرض کنید و B را نتیجه بگیرید.
(۲) A را نادرست فرض کنید و نتیجه بگیرید که B نادرست است.

در اثباتهای تا حدی پیچیده، این الگوها اغلب ترکیب می‌شوند. یك اثبات برای «اگر A، آن‌گاه F» ممکن است به وسیلهٔ زنجیره‌ای از حکمهای: «اگر A، آن‌گاه B»، «اگر B، آن‌گاه C»، «اگر C، آن‌گاه D»، «اگر D، آن‌گاه E»، «اگر E، آن‌گاه F»، پایه‌ریزی شود. دراین حالت، هرحکم دلالت بر حکم بعدی دارد. حال، اگرهر حکم و عکس آن را بتوان با یکی ازالگوهای فوق ثابت‌نمود، آن‌گاه «اگر F، آن‌گاه E»، «اگر E، آن‌گاه D»، «اگر D، آن‌گاه C»، «اگر C، آن‌گاه B»، «اگر B، آن‌گاه A» را نیز داریم. بنابراین عکس حکم اصلی، یعنی «اگر F، آن‌گاه A» نیز برقرار است. وقتی نویسنده‌ای می‌گوید که «عکس آن‌را می‌توان

به ترتیب عکس ، ثابت نمود»، منظورش همین است.

همهٔ این الگوها را می‌توان درکتابهای ریاضی پیداکرد، و همچنان که قبلاً گفتیم، نویسنده‌اغلب به اثبات قضیه‌ای اقدام می‌کند، بدون اینکه به وضوح اظهار کندکه از چه الگویی پیروی می‌کند، نویسنده از خواننده توقع داردکه ماهیت فن اثبات را نزد خودش مجسم نماید.

مجموعه مسأله‌های ۷

۱. ثابت‌کنید حکم «اگر mn زوج باشد، آن‌گاه m و n زوج‌هستند» نادرست‌است.

۲. کدام‌یك از حکمهای زیر درست وکدام‌یك نادرست هستند؟
کسر گویای a/b که به‌ساده‌ترین‌صورت است، نمایش اعشاری پایان داری‌دارد:
(الف) اگر و فقط اگر b بر هیچ عدد اولی‌غیر از ۲ بخش‌پذیر نباشد.
(ب) اگر b برهیچ عدد اولی غیر از ۲ بخش‌پذیر نباشد.
(پ) فقط اگر b بر هیچ عدد اولی غیر از ۲ بخش‌پذیر نباشد.
(ت) اگر و فقط اگر b بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.
(ث) اگر b بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.
(ج) فقط اگر b بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.

۳. کدام‌یك از حکمهای زیر درست وکدام‌یك نادرست هستند؟
کسر گویای a/b بسط اعشاری پایان‌داری دارد:
(الف) اگر و فقط اگر b هیچ عامل اولی غیر از ۲ و ۵ نداشته باشد،
(ب) اگر b هیچ عامل اولی غیر از ۲ و ۵ نداشته باشد،
(پ) فقط اگر b هیچ عامل اولی غیر از ۲ و ۵ نداشته باشد.
یادآوری: توجه داشته باشید، مشخص نشده است که a/b به ساده‌ترین صورت خودش است.

۴. کتاب جدیدی راجع به جبر[1] عبارت زیر را به عنوان یك اصل‌موضوع به‌کار می‌گیرد: «$ab=0$ فقط‌اگر $a=0$ یا $b=0$.» این مطلب را به‌صورت «اگر A، آن‌گاه B» بنویسید.

۵. (الف) ثابت‌کنید اگر β (بتا) عددگویایی باشد، آن‌گاه β^2 نیز گویاست.

---

1. W.W. Sawyez , *A Concrete Approach to Abstract Algebra* p. 30.

(ب) آیا این مطلب ثابت می‌کند که اگر $\beta^۲$ گنگ باشد، آنگاه β گنگ است؟

۴.۲ عددهای اعشاری دوره‌ای

اکنون، به بحث مربوط به عددهای گویا برمی‌گردیم. کسرهای گویا را به دو نوع تقسیم کردیم؛ آنها که با عددهای اعشاری پایان‌دار معادلند و آنها که با عددهای اعشاری بی‌پایان. اکنون، می‌توانیم ثابت کنیم که هر عدد اعشاری نامتناهی، یك الگوی تکراری دارد، مانند

$$\frac{۵}{۱۱}=۰٫۴۵۴۵۴۵\ldots \quad \text{و} \quad \frac{۳۰۹۷}{۹۹۰۰}=۰٫۳۱۲۸۲۸۲۸\ldots$$

برای سادگی، نماد سنتی‌را برای نشان دادن عددهای اعشاری دوره‌ای به‌کار می‌بریم و آن، استفاده از یك خط برروی جزء تکراری است:

$$\frac{۵}{۱۱}=۰٫\overline{۴۵}\ ،\quad \frac{۳۰۹۷}{۹۹۰۰}=۰٫۳۱\overline{۲۸}\ ،\quad \frac{۱}{۳}=۰٫\overline{۳}\ ،\quad \frac{۱}{۶}=۰٫۱\overline{۶}$$ ، وغیره.

روش سنتی برگرداندن یك کسر، مثلاً ۲/۷، به صورت اعشاری، دلیل وجود الگویی تکراری از ارقام را به‌دست می‌دهد:

```
۲٫۰۰۰۰۰۰۰ | ۷
۱۴        | ۰٫۲۸۵۷۱۴
 ۶۰
 ۵۶
  ۴۰
  ۳۵
   ۵۰
   ۴۹
    ۱۰
     ۷
    ۳۰
    ۲۸
     ۲
```

$$\frac{۲}{۷}=۰٫\overline{۲۸۵۷۱۴}$$

در فرایند تقسیم ، باقیمانده‌های متوالی عبارت‌اند از: ۶، ۴، ۵، ۱، ۳، ۲ . وقتی باقیمانده به ۲ می‌رسد دورهٔ گردش کامل است واز تقسیم ۲۰ بر ۷ یك بازگشت داریم. همهٔ باقیمانده‌ها کمتر از مقسوم‌علیه ۷ هستند، بنابراین، ازآنجا که فقط شش امکان برای باقیمانده وجود دارد، باید یك بازگشت داشته‌باشیم. (باقیماندهٔ ۰ نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا عددهای اعشاری پایان دار را بررسی نمی‌کنیم.)

در مثال فوق، وقتی تقسیم ۲۰ بر ۷ برای دومین مرتبه ظاهر شد ، بازگشت اتفاق افتاد. درطول فرایند تقسیم، اولین مرحله تقسیم ۲۰ بر ۷ بود. درحالی که همواره لازم نیست مرحلهٔ اول همان باشد که تکرار می‌شود. مثلاً ، برگردان ۲۰۹/۷۰۰ به‌صورت اعشاری را در نظر بگیرید:

```
۲۰۹٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰ | ۷۰۰
۱۴۰ ۰          |---------
------         ۰٫۲۹۸۵۷۱۴۲
 ۶۹ ۰۰
 ۶۳ ۰۰
 ------
  ۶ ۰۰۰
  ۵ ۶۰۰
  ------
    ۴۰۰۰
    ۳۵۰۰
    -----
     ۵۰۰۰
     ۴۹۰۰
     -----
      ۱۰۰۰
       ۷۰۰
      -----
       ۳۰۰۰
       ۲۸۰۰
       -----
        ۲۰۰۰
        ۱۴۰۰
        -----
         ۶۰۰
```

$$\frac{209}{700} = 0.29\overline{857142}$$

در این‌جا، بازگشت وقتی اتفاق می‌افتد که به باقیماندهٔ ۶۰۰ برسیم که چند مرحله جلوتر رخ داده بود. درمورد ۷۰۰، به عنوان مقسوم‌علیه، می‌دانیم که باقیمانده‌های ممکن عبارت‌اند از عددهای ۱، ۲، ۳، ... ، ۶۹۹. بنابراین، ما از تکرار یکی‌از باقیمانده‌ها مطمئن هستیم ، اگرچه ناگزیر باشیم مراحل بسیاری را برای رسیدن

به‌آن بگذرانیم.

درحالت‌کلی a/b هم می‌توان به روش مشابهی بحث‌کرد. زیرا، وقتی عدد صحیح a بـرعدد صحیح b تقسیم می‌شود، تنها باقیمانده‌های ممکن عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، . . . ، $b-۲$، $b-۱$؛ و بنابراین در فرایند تقسیم، بازگشت حتمی است. وقتی فرایند تقسیم تکرار می‌شود، یك دورهٔ‌گردش شروع می‌گردد، و حاصل آن یك عدد اعشاری دوره‌ای است.

آنچه تابه‌حال ثابت‌کرده‌ایم نیمی ازگزارهٔ زیر است:

هرکسرگویای a/b، به صورت یك عدد اعشاری پایان‌دار یا یك‌عدداعشاری دوره‌ای نامتناهی قابل بیان است؛ به عکس، هر بسط اعشاری پایان‌داریادوره‌ای نامتناهی، مساوی عددگویایی است.

عکس مطلب، با دونوع عدد اعشاری سروکار دارد، پایان‌دار و دوره‌ای نامتناهی. قبلاً عددهـای اعشاری پایان‌دار را مورد بحث قرار دادیـم و دیدیم کـه آنها مبین عددهای گویا هستند. حال می‌خواهیم به عـددهای اعشاری دوره‌ای نامتناهی بپردازیم. نخست با به‌کارگرفتن روشی‌که می‌تواند برای پوشش همهٔ حالات تعمیم یابد، نشان خواهیم‌دادکه یك عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی ویژه، گویاست. بعداز بحث در بارهٔ یك‌حالت ویژه، همان روش رابرای هر عدد اعشاری دوره‌ای‌دلخواه به‌کار خواهیم بست.

عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی

$$x = ۲۸٫۱۲۳۴۵۶۴۵۶\ldots \qquad \text{یا} \qquad x = ۲۸٫۱۲۳\overline{۴۵۶}$$

را درنظر بگیرید. نخست‌آن را در یك عدد و سپس درعددی دیگر ضرب‌می‌کنیم؛ این عددها را چنان انتخاب می‌کنیم‌که هرگاه اختلاف دو حاصلضرب را به دست آوریم، قسمت دوره‌ای نامتناهی حذف‌گردد. در این مثال، عددهای $۱۰^۶$ و $۱۰^۳$ این هدف را تأمین می‌کنند، زیرا

$$۱۰^۶ \times x = ۲۸۱۲۳۴۵۶٫\overline{۴۵۶}$$

و

$$۱۰^۳ \times x = ۲۸۱۲۳٫\overline{۴۵۶}$$

در نتیجه، اختلاف $۱۰^۶ \times x - ۱۰^۳ \times x$ عبارت است از

$$999000x = 28095333$$

بنابراین

$$x = \frac{28095333}{999000}$$

که نشان می‌دهد x، عددی گویاست.

در تعمیم این روش نشان خواهیم داد که عددهای 10^6 و 10^3 را مثل تردستها «از یك کلاه بیرون نیاورده» بلکه با شیوه‌ای معین آنها را انتخاب کرده‌ایم. قسمت صحیح عدد اعشاری (یعنی بخش متناظر با عدد ۲۸ در مثال بالا) را حذف می‌کنیم، زیرا هیچ نقش قاطعی را در فرایند بازی نمی‌کند. بنابراین، هر عدد اعشاری تکراری (بدون قسمت صحیح) را می‌توانیم به صورت*

$$x = 0/a_1a_2 \cdots a_s\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$

بنویسیم، که در آن a_1، a_2، …، a_s، تعداد s رقم متوالی در قسمت غیر تکراری و b_1، b_2، … b_t تعداد t رقم در قسمت تکراری را نشان می‌دهند. (در مثال بالا $s=3$، $t=3$، $a_1=1$، $a_2=2$، $a_3=3$، $b_1=4$، $b_2=5$ و $b_3=6$.) اگر نخست x را در 10^{s+t}، سپس در 10^s ضرب کنیم، و بعد عمل تفریق را انجام دهیم، به دست می‌آوریم

$$10^{s+t}\times x = a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t + 0/\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$
$$10^s\times x = a_1a_2\cdots a_s + 0/\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$

و

$$(10^{s+t}-10^s)x = a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t - a_1a_2\cdots a_s$$

بنابراین

$$x = \frac{a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t - a_1a_2\cdots a_s}{10^{s+t}-10^s}$$

---

* توجه کنید، نماد $a_1a_2\ldots a_s\, b_1b_2\ldots b_t$ که در اینجا به‌کار رفته است، نماد جبری معمولی نیست و حاصلضرب عددهای a_1، a_2، … b_t را نشان نمی‌دهد؛ در اینجا مقصود، عددی است که رقمهایش a_1، a_2، … ، b_t هستند. به‌علاوه علامتهای ۱، ۲، … ، s در نماد a_1، a_2، …، a_s «زیرنویس» نام‌دارند و معنایی بجز تشخیص هویتها ندارند؛ درواقع، بدون استفاده از زیرنویس، حروف ما به‌زودی تمام می‌شد.

که به صورت تقسیم عدد صحیح بر عدد صحیح می‌باشد. بنابراین ثابت شد که آن عدد گویاست.

مجموعه مسأله‌های ۸

۰۱ عددهای گویای مساوی عددهای اعشاری زیر را بیابید:

(الف) ۰ر۱۱۱... (ب) ۵ر۶۶۶۶... (پ) $۰ر۳۷\overline{۴۳}$

(ت) $۰ر۹\overline{۹۸۷}$ (ث) $۰ر۰۰\overline{۰۱}$ (ج) $۰ر\overline{۹}$

۵۰۲ هر عدد اعشاری پایان‌دار را می‌توان به‌صورت عدد اعشاری دوره‌ای نوشت

در این فصل ثابت کردیم که بعضی از عددهای گویا را می‌توان به صورت عددهای اعشاری پایان‌دار بیان نمود، و نیز معلوم شد که عددهای گویای دیگر معادل عددهای اعشاری نامتناهی یا بی‌پایان هستند. در کمال شگفتی، هر عدد اعشاری پایان‌دار (بجز صفر) را می‌توان به صورت بی‌پایان نیز بیان نمود. البته وقتی ۶ر۸ را به صورت ...۶ر۸۰۰۰، یعنی با توالی بی‌پایانی از صفر بنویسیم، باروشی بسیار روشن این کار را انجام داده‌ایم. ولی غیر از این فرایند واضح، یعنی تبدیل یك عدداعشاری پایان‌دار به‌یك عدداعشاری بی‌پایان از راه ضمیمه کردن ردیف کاملی از صفر به‌آن، راه دیگری هم وجود دارد که کمی شگفت‌آور است. با بسط اعشاری ۱/۳ شروع می‌کنیم که برای ما آشناست:

$$\frac{۱}{۳} = ۰ر۳۳۳۳۳...$$

اگر هردوطرف این معادله را در ۳ ضرب کنیم، نتیجهٔ به‌ظاهر عجیب زیر را به‌دست می‌آوریم

$$۱ = ۰ر۹۹۹۹۹... \qquad (۱)$$

بنابراین، بین عدد اعشاری پایان دار ۱ یا ۰ر۱ و عدد اعشاری بی پایان ...۰ر۹۹۹۹۹ تساوی برقرار است.

حال، از دید دیگری به معادلهٔ (۱) نگاه می‌کنیم. فرض کنید عدد اعشاری بی‌پایان ...۰ر۹۹۹۹۹ را به x نشان دهیم، یعنی

$$x=۰٫۹۹۹۹۹\ldots \qquad (۲)$$

بعد از ضرب در ۱۰

$$۱۰x=۹٫۹۹۹۹۹۹\ldots=۹+۰٫۹۹۹۹۹۹\ldots$$

به دست می‌آید. پس از کم کردن معادلهٔ (۲) از این معادله، داریم

$$۹x=۹ \qquad \text{یا} \qquad x=۱$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) را از راهی متفاوت با راه اول هم ثابت کردیم.

حال، پس از تقسیم دوطرف معادلهٔ (۱) بر ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و غیره، نتایج متوالی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} ۰٫۱&=۰٫۰۹۹۹۹۹\ldots\\ ۰٫۰۱&=۰٫۰۰۹۹۹۹۹\ldots \qquad (۳)\\ ۰٫۰۰۱&=۰٫۰۰۰۹۹۹۹۹\ldots\\ ۰٫۰۰۰۱&=۰٫۰۰۰۰۹۹۹۹۹\ldots \end{aligned}$$
و غیره.

از این نتایج می‌توان برای برگرداندن هرعدد اعشاری پایان‌دار به‌صورت بی‌پایان استفاده نمود. مثلاً می‌توانیم بنویسیم

$$۶٫۸=۶٫۷+۰٫۱=۶٫۷+۰٫۰۹۹۹۹۹\ldots=۶٫۷۹۹۹۹۹\ldots$$

چند مثال دیگر:

$$۰٫۴۳=۰٫۴۲+۰٫۰۱=۰٫۴۲+۰٫۰۰۹۹۹۹۹\ldots=۰٫۴۲۹۹۹۹۹\ldots$$

$$\begin{aligned} ۰٫۷۵۸&=۰٫۷۵۷+۰٫۰۰۱=۰٫۷۵۷+۰٫۰۰۰۹۹۹۹۹\ldots\\ &=۰٫۷۵۷۹۹۹۹۹\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۰٫۱۰۲&=۰٫۱۰۱+۰٫۰۰۱=۰٫۱۰۱+۰٫۰۰۰۹۹۹۹۹\ldots\\ &=۰٫۱۰۱۹۹۹۹۹\ldots \end{aligned}$$

$$۶٫۸۱=۶٫۸+۰٫۰۱=۶٫۸+۰٫۰۰۹۹۹۹۹\ldots=۶٫۸۰۹۹۹۹۹\ldots$$

این وسیله ما را قادر می‌سازد که هر عدد اعشاری پایان دار را به صورت بی‌پایان بنویسیم. به‌عکس، معادله‌های (۱) و (۳) را می‌توان برای برگرداندن هرعدداعشاری که یك توالی نامتناهی ۹ داشته‌باشد، به یك عدد اعشاری پایان‌دار، مورد استفاده قرار داد:

۰ر۴۶۹۹۹۹۹... = ۰ر۴۶ + ۰ر۰۰۹۹۹۹۹... = ۰ر۴۶ + ۰ر۰۱ = ۰ر۴۷

۱۸ر۰۹۹۹۹۹... = ۱۸ + ۰ر۰۹۹۹۹۹... = ۱۸ + ۰ر۱ = ۱۸ر۱

این پرسش که برای عدد مفروضی چند نمایش اعشاری وجود دارد، متضمن نوعی تفسیر است. زیرا، علاوه بر نوشتن ۰ر۴۳ به صورت ...۰ر۴۲۹۹۹، می‌توانیم این عدد را به صورتهای زیر نیز بنویسیم:

۰ر۴۳۰،　۰ر۴۳۰۰،　۰ر۴۳۰۰۰،　۰ر۴۳۰۰۰۰،　...

با این وجود، تفاوت اینها باخود ۰ر۴۳ آنقدر جزئی است که ما آنها را در ردیف نمایشهای اساساً متفاوت نمی‌گذاریم. وقتی به صورت اعشاری عددی نظیر ۰ر۴۳، اشاره می‌کنیم، مقصودمان ...۰ر۴۲۹۹۹ است و نه ...۰ر۴۳۰۰۰.

مجموعه مسأله‌های ۹

۱. هریك از عددهای زیر را به صورت یك عدد اعشاری پایان‌دار بنویسید:

(الف) ...۰ر۱۱۹۹۹　(ب) ...۰ر۲۹۹۹۹۹　(پ) ...۴ر۷۹۹۹۹

(ت) ...۹ر۹۹۹

۲. هریك از عددهای زیر را به صورت یك عدد اعشاری بی‌پایانی بنویسید:

(الف) ۰ر۷۳　(ب) ۰ر۰۰۹۹　(پ) ۱۳

۳. بین عددهای گویای a/b، کدام یك دارای دو نمایش اعشاری اساساً متفاوت هستند؟

۴. بین عددهای گویای a/b کدام یك دارای سه نمایش اعشاری اساساً متفاوت هستند؟

۶.۲ خلاصه

دو نوع عدد گویای a/b را شناختیم، آنهایی که عدد صحیح b هیچ عاملی غیر از ۲ و ۵ ندارد و کل بقیه. (فرض می‌شود که a/b به ساده‌ترین صورت باشد.) عددهای نوع اول را می‌توان به هردوشکل اعشاری متناهی و نامتناهی نوشت؛ مثلاً

$$\frac{۱}{۲} = ۰ر۵ = ۰ر۴۹۹۹۹۹...$$

عددهای نوع دوم را می‌توان فقط به صورت اعشاری نامتناهی نوشت، مثلاً

$$\frac{۱}{۳} = ۰ر۳۳۳۳۳...$$

این نمایشها، تنها نمایشهای ممکن هستند، به این معنی که ۱/۲ و ۱/۳ را نمی‌توان به هیچ صورت اعشاری دیگری، البته بجز حالات بدیهی، نظیر ۵۰۰ر۰، بیان نمود. در فصل بعد توضیح خواهیم داد که چرا چنین است.

تأکید ما روی عددهای گویا و نمایشهای اعشاری آنها بوده است. با عوض کردن موضوع، می‌خواهیم لحظه‌ای روی نمایشهای اعشاری تأمل کنیم. در این فصل همهٔ بسطهای اعشاری نامتناهی، دوره‌ای بوده‌اند. عددهای اعشاری غیر دوره‌ای، نظیر

$$q = ۰٫۱۰۱\,۰۰۱\,۰۰۰\,۱۰۰\,۰۰۱\,۰۰۰\,۰۰۱\,۰۰۰\,۰۰۰\,۱\ldots$$

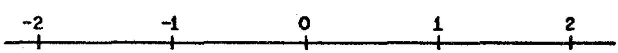
که از یک سری ۱ تشکیل می‌شود و به وسیلهٔ صفرهایی، نخست یک صفر، بعد دو صفر، سپس سه صفر، وغیره، ازهم جدا می‌شوند، چطور؟ اگر q عدد باشد، چه نوع عددی است؟ از مطالعات خود در فصل حاضر می‌دانیم که q یک عدد گویا نیست. در فصل بعد، بررسی خود را وسعت خواهیم بخشید تا عددهایی نظیر q راهم دربرگیرد.

۳

عددهای حقیقی

۱.۳ دیدگاه هندسی

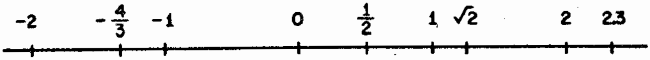
در هندسه، هرگـاه مختصات را معرفی می‌کنند، یك خط مستقیم را فـرضاً به‌محور xها تخصیص‌می‌دهند واین‌محور را چنان‌مدرج می‌کنند که هرنقطه به‌یك عدد نسبت داده می‌شود . این عمل با انتخاب دو نقطهٔ دلخواه (اما متمایز) روی خط به‌عنوان مکانهایی برای ۰ و ۱ انجام می‌گیرد به‌طوری‌که فاصلهٔ بین این دو نقطه یك واحد طول یا طول واحد باشد. انتخاب نقطهٔ ۱ در سمت راست نقطهٔ ۰ قراردادی است (شکل ۵). بنابراین نقاط سمت چپ نقطهٔ ۰ بـه عددهای منفی منسوب می‌گردند.



شکل ۵

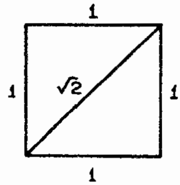
نقطهٔ ۰ مبدأ نام دارد. مثلاً نقطهٔ ۷، به‌فاصلهٔ ۷ واحدطول‌درطرف راست مبدأ قرار دارد. نقطهٔ متعلق به ۷ــ ، به فاصلهٔ ۷ واحد طول به‌طرف چپ مبدأ است. در این روش به‌هر نقطه یك عدد مربوط می‌شود، عددی‌که نمایانگر فاصلهٔ آن نقطه تامبدأ، است ویا باعلامت مثبت است، هرگاه نقطه درسمت راست مبدأ باشد، یا با علامت

منفی است، هر گاه نقطه درطرف چپ مبدأ باشد. همان‌طور که در شکل ۶ نشان داده شده است، جای عددهای گویایی نظیر ۴/۳ −، ۱/۲ و ۲/۳ به‌وسیلهٔ رابطهٔ آنها با طول واحد، به‌سهولت مشخص می گردد.



شکل ۶

نماد $\sqrt{۲}$ عددی را نشان می‌دهد که هرگاه درخودش ضرب شود، عدد ۲ را نتیجه دهد، یعنی $\sqrt{۲}\times\sqrt{۲} = ۲$. برای درك معنی هندسی $\sqrt{۲}$، یك مربع یکه، آن‌چنان که در شکل ۷ نشان داده شده، در نظر می‌گیریم، و از قضیهٔ فیثاغورس درمی‌یابیم که توان دوم طول قطر آن ۲ است. ازاین‌رو، طول قطر را با $\sqrt{۲}$ نشان



شکل ۷. یك مربع با اضلاعی به‌طول ۱

می‌دهیم و عدد $\sqrt{۲}$ را به‌آن نقطه از روی خط نظیر می‌کنیم که فاصله‌اش از مبدأ برابر طول قطر مربع یکه باشد.

ازآنجاکه هر نقطه روی محور دارای فاصله‌ای از مبدأ است، به‌طور شهودی روشن‌است که به‌هریك ازچنین نقطه‌هایی‌عددی متناظرمی گردد. منظورما ازعددهای حقیقی، گردآوردهٔ همهٔ عددهای متناظر با تمام این نقاط است. به‌این دلیل که‌برای هرعددگویا فاصلهٔ مناسبی ازمبدأ وجود دارد، عددهای‌حقیقی، تمامی عددهای گویا را شامل می‌شوند. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که ردهٔ عددهای‌گویا زیرردهٔ‌ای از عددهای حقیقی‌است.

اما عددهایی حقیقی وجود دارند که گویا نیستند. بعداً، در این فصل، ثابت خواهیم‌کرد که عدد $\sqrt{۲}$ گویا نیست. هر عدد حقیقی، مثل $\sqrt{۲}$، که گویا نباشد، گنگ نامیده می‌شود. بنا به‌نحوهٔ تعریفی‌که انجام گرفت هرعدد حقیقی یا گویاست یا گنگ. خط مستقیم، یا محور، که هر نقطهٔ آن به‌طریقی که در بالا توصیف شد

به‌عددی منسوب شده‌باشد، خط حقیقی نامیده می‌شود. نقطه‌های روی این خط را ، بسته به‌اینکه متناظر باعددهای گویا یا گنگ باشند، نقاط گویا یا نقاط گنگ می‌نامند.

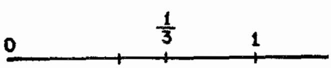
توجه کنید که تعریف فوق دربارهٔ یك عدد گنگ منجر می‌شود به‌اینکه: هر عددحقیقی راکه نتوان به‌صورت نسبت a/b ازدوعدد صحیح بیان‌کرد، عددگنگ نامیده می‌شود.

۲۰۳ نمایش اعشاری

جای عدد ۱/۳ روی خط‌حقیقی، درنقطه‌ای از ثلث فاصلهٔ بین دونقطهٔ صفرو واحد، به‌سادگی‌مشخص می‌شود (شکل ۸). حال، نمایش اعشاری ۱/۳ را درنظر بگیرید:

$$\frac{۱}{۳}=۰٫۳۳۳۳۳\ldots=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰}+\ldots$$

این معادله ، ۱/۳ را به‌صورت مجموعی از بینهایت جمله بیان می‌کند، حتی اگر هیچ‌پایانی‌هم برای‌تعداد جملات تصورنشود، مجموع، مقدارمعینی دارد، یعنی۱/۳.

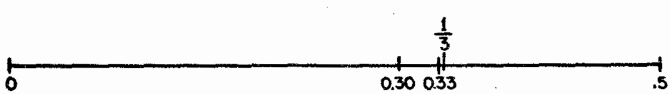


شکل ۸

اگر روی خط حقیقی، جای نقطه‌های متناظر با

$$۰٫۳ \quad , \quad ۰٫۳۳ \quad , \quad ۰٫۳۳۳ \quad , \quad ۰٫۳۳۳۳,\ldots$$

را مشخص کنیم، دنباله‌ای از نقاط به‌دست می‌آیدکه به‌نقطهٔ ۱/۳ گرایش دارند. این مطلب در شکل ۹ ، که در آن طول واحد را بزرگ انتخاب کرده‌ایم نشان داده شده است. به‌همین طریق، هرعدد اعشاری نامتناهی به نقطهٔ ویژه‌ای از خط



شکل ۹

حقیقی تعلق دارد . نقطهٔ نمایش عدد اعشاری نامتناهی ... ۰٫۹۹۹۹۹ ، نقطه‌ای است که نقاط متناظر بااعداد

۰ر۹، ۰ر۹۹، ۰ر۹۹۹، ۰ر۹۹۹۹ ۰ر۹۹۹۹۹، وغیره

به‌آن می‌گرایند. همچنان‌که درشکل ۱۰ نشان داده شده است، این نقطه‌ها، برطبق معادلهٔ ... ۰ر۹۹۹۹۹ = ۱، ازفصل قبل، به‌نقطهٔ ۱ می‌گرایند.

شکل ۱۰

حال، اگر به‌عدد

$q =$ ۰ر۱۰۱ ۰۰۱ ۰۰۰ ۱۰۰ ۰۰۱ ۰۰۰ ۰۰۱ ۰۰۰ ۰۰۰ ۱...

کـه قبلا به‌عنوان یك مثال به‌کار رفته بود، برگردیم، درمی‌یابیم کـه این عدد نیز به‌نقطهٔ ویژه‌ای ازخط حقیقی تعلق دارد. این نقطه را می‌توان به‌عنوان نقطهٔ‌همگرایی زنجیرهٔ نقطه‌های زیر درنظر گرفت:

۰ر۱

۰ر۱۰۱

۰ر۱۰۱۰۰۱

۰ر۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱

۰ر۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱، و غیره

از آنجا کـه q عدد اعشاری غیر دوره‌ای است، یك عـدد گنگ می‌باشد، و نقطهٔ متناظرش، نقطه‌ای گنگ است.

این مطلب، راه دیگری را برای تعبیرعددهای حقیقی نشان می‌دهد، عددهای حقیقی عبارت‌اند از گردآوردهٔ همهٔ بسطهای اعشاری، متناهی یا نامتناهی، مثل

۱۷ر۳۴ , ۲ر۱۷۶ , −۶ر۰۳۷۲۲۲۲... , $q =$ ۰ر۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱...

بنا به‌بررسیهایی که درفصل قبل‌داشتیم، می‌توانیم این‌بسطهای اعشاری را به‌عددهای گویا و گنگ تفکیك کنیم. عددهای گویا، آن عددهای اعشاری هستندکه یا پایان‌دارندیا دوره‌ای. عددهای گنگ، مانندعدد q دربالا، آنهایی‌هستند که غیردوره‌ای‌اند. به‌علاوه، دیدیم که هرعدد اعشاری پایان‌دار (یاهرعدداعشاری، نظیر...۰ر۴۳۰۰۰،

با توالی بی‌پایانی از صفر) رامی‌توان به‌صورت عدداعشاری دوره‌ای حقیقتاً نامتناهی هم نوشت؛ می‌توان موافقت نمود که دراین بخش همهٔ عددهای گویا را به‌صورت عددهای اعشاری دوره‌ای نامتناهی بنویسیم. (باچنین توافقی، مثلاً ۴۳ر۰ را به‌صورت ۴۲۹۹۹ر۰ ... خواهیم نوشت؛ ممکن است این مطلب ناخوشایند به نظر برسد، اما، بحث زیررا ساده خواهدکرد.)

اکنون، نشان‌می‌دهیم که عددهای حقیقی، نمایش یکتایی، به‌صورت عددهای اعشاری نامتناهی دارند. یعنی دوعدد اعشاری نامتناهی مساوی هستند فقط اگر رقم به‌رقم یکسان باشند.

چرا نمایش اعشاری نامتناهی یکتاست؟ این پرسش را به شرح زیر پاسخ می‌دهیم: دوعدد با نمایشهای اعشاری نامتناهی متفاوت را درنظر بگیرید. از آنجا که نمایشها متفاوت هستند، دست‌کم یك رقم وجودداردکه در آن‌می‌توان این‌تفاوت را عملا مشاهده نمود؛ مثلاً

$$a=۱۷ر۹۲۳۴۱۶\cdots$$
$$b=۱۷ر۹۲۳۴۱۵\cdots$$

توالی بی‌پایان رقمهایی‌که به‌دنبال ۶ در عدد a می‌آیند، بجز توالی بی‌پایانی از صفر، ممکن است به‌میل خواننده، هردسته‌ای تصور شود. تذکرمشابهی درموردعدد b نیزداده می‌شود. حال، ازاین مطلب که توالی‌بی‌پایانی ازصفررا مستثنی کرده‌ایم، برمی‌آیدکه a مسلماً از ۱۷ر۹۲۳۴۱۶ بزرگتراست، که برحسب نمادها به‌صورت:

$$a>۱۷ر۹۲۳۴۱۶$$

نموده‌می‌شود. ازطرف‌دیگر، b حداکثر ۱۷ر۹۲۳۴۱۶ است، زیرا وقتی که‌رقمهای متوالی بعد از «۵» در b، همه ۹ باشند، یعنی وقتی که $b=۱۷ر۹۲۳۴۱\overline{۵۹}$، می‌توانیم داشته‌باشیم $b=۱۷ر۹۲۳۴۱۶$. این حکم‌که b حداکثر ۱۷ر۹۲۳۴۱۶ است به‌طور نمادی به‌صورت

$$b\leqslant ۱۷ر۹۲۳۴۱۶ \quad \text{یا} \quad ۱۷ر۹۲۳۴۱۶\geqslant b$$

نوشته می‌شود. این نابرابریها درمورد a و b می‌رسانندکه:

$$a>۱۷ر۹۲۳۴۱۶\geqslant b$$

و ازاین‌رو $a>b$. پس نتیجه‌گرفته‌ایم که a از b بزرگتر است، والبته این مطلب،

امکان تساوی‌را رد می‌کند. استدلال ما در موردخاصی ازدوعدد ویژهٔ a و b به‌کار رفته است، اما این استدلال، به‌سادگی به‌هرجفتی از عددها که نمایشهای اعشاری نامتناهی متفاوت داشته‌باشند، تعمیم می‌یابد.

۳.۳ گنگ بودن $\sqrt{۲}$

اکنون، اثبات غیرمستقیم سنتی مربوط به‌گنگ‌بودن $\sqrt{۲}$ رابیان می‌کنیم، ودرفصل بعد، بازهم اثبات دیگری، ازراهی بسیار عمومی‌تر را ارائه خواهیم‌کرد.

درفصل ۱، نشان دادیم که عددهای صحیح زوج و همچنین عددهای صحیح فرد، نسبت به‌عمل ضرب بسته‌اند. به‌ویژه، مربع هرعدد صحیح زوج یك عدد زوج است ومربع یك عددصحیح فرد یك عددفرد. حال، فرض‌کنیدکه $\sqrt{۲}$ عددگویایی باشد، فرضاً

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$$

که‌درآن a و b عددهای‌صحیح هستند. فرض‌می‌کنیم که‌کسر گویای a/b به‌ساده‌ترین صورت باشد، واین فرض برای استدلال ماضروری است. به‌ویژه، این مطلب راکه a و b هر دو زوج نیستند، مورد استفاده قرار خواهیم داد، زیرا اگر هر دو زوج باشند، کسر به‌ساده‌ترین صورت نخواهد بود. با مجذور کردن معادلهٔ فوق و ساده کردن آن به‌دست می‌آوریم:

$$۲=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}, \quad a^{۲}=۲b^{۲}$$

جملهٔ $۲b^{۲}$، عدد صحیح زوجی‌را نمایش‌می‌دهد، بنابراین، $a^{۲}$ یك عدد صحیح‌زوج است، ولذا a باید عدد صحیح زوجی باشد، فرضاً $a=۲c$، کـه در آن c عددی صحیح است. باقراردادن $۲c$ به‌جای a در معادلهٔ $a^{۲}=۲b^{۲}$، داریم:

$$(۲c)^{۲}=۲b^{۲}, \quad ۴c^{۲}=۲b^{۲}, \quad ۲c^{۲}=b^{۲}$$

جملهٔ $۲c^{۲}$ عدد صحیح زوجی را نشان می‌دهد، بنابراین، $b^{۲}$ یك عدد صحیح زوج است واز این‌رو، b عدد صحیح زوجی می‌باشد. تااین‌جا نتیجه گرفته‌ایم که a و b هردوعددهای صحیح زوج هستند، درصورتی‌که فرض شده‌بود a/b به‌ساده‌ترین صورت باشد. این تناقض ما را وامی‌دارد نتیجه بگیریم کـه بیان $\sqrt{۲}$ بـه‌صورت

گویای a/b ممکن نیست، و بدین جهت $\sqrt{۲}$ گنگ است.

۴.۳ گنگ بودن $\sqrt{۳}$

یکی از روشهای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۳}$ مشابه‌است باروش اثبات گنگ‌بودن $\sqrt{۲}$، که در بالا ارائه گردید، جزاینکه دراین‌جا نکتهٔ اصلی بخش‌پذیری بر ۳ است، نه بر ۲. به‌عنوان مقدمه‌ای براثبات، ثابت می‌کنیم که مربع یك عدد صحیح بر ۳ بخش‌پذیر است اگر وفقط اگر خود آن عدد صحیح بر ۳ بخش‌پذیر باشد. برای بیان این مطلب، توجه داریم که هرعدد صحیح بخش‌پذیر بر۳، به‌صورت $۳n$است، درصورتی که عددصحیح بخش‌ناپذیر بر۳ به‌صورت $۳n+۱$، یا به‌صورت $۳n+۲$ است. پس معادله‌های

$$(۳n)^۲ = ۹n^۲ = ۳(۳n^۲)$$
$$(۳n+۱)^۲ = ۹n^۲+۶n+۱ = ۳(۳n^۲+۲n)+۱$$
$$(۳n+۲)^۲ = ۹n^۲+۱۲n+۴ = ۳(۳n^۲+۴n+۱)+۱$$

ادعای فوق را تأیید می‌کنند.

حال، فرض کنید $\sqrt{۳}$ عددگویایی باشد، فرضاً $\sqrt{۳}=a/b$، که درآن a و b عددهای صحیح هستند. مجدداً، مثل حالت $\sqrt{۲}$، فرض می‌کنیم که a/b به‌ساده‌ترین صورت باشد، بنابراین، a و b هردو بر۳ بخش‌پذیر نیستند. بامجذورکردن وساده کردن معادله، به‌دست می‌آوریم:

$$۳ = \frac{a^۲}{b^۲}, \quad a^۲ = ۳b^۲$$

عدد صحیح $۳b^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است، یعنی $a^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین، خود a بر ۳ بخش‌پذیر می‌باشد. فرضاً $a=۳c$، که در آن c عدد صحیحی است. باقراردادن $۳c$ به‌جای a، درمعادلهٔ $a^۲=۳b^۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$(۳c)^۲ = ۳b^۲, \qquad ۹c^۲ = ۳b^۲, \qquad ۳c^۲ = b^۲$$

این، نشان می‌دهدکه $b^۲$ بر۳ بخش‌پذیر واز این‌رو b بر۳ بخش‌پذیر است. به‌این نتیجه رسیده‌ایم که a و b هردو بر ۳ بخش‌پذیرند واین مغایر بافرض است که a/b به‌ساده‌ترین صورت می‌باشد. بنابراین $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۵.۳ گنگ بودن $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

روشهای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ به‌ویژگیهای بخش‌پذیری عددهای صحیح به‌ترتیب بر ۲ و ۳، وابسته بود، ولی روش اثبات مربوط به گنگ بودن $\sqrt{۶}$ را می‌توان چنان عرضه کرد که به‌بخش‌پذیری بر ۲ یا بر ۳ وابسته باشد. مثلا، اگر مانند اثبات مربوط به $\sqrt{۲}$ عمل کنیم، فرض می کنیم

$$\sqrt{۶}=\frac{a}{b}$$

که در آن a و b هردو زوج نیستند. بامجذور کردن به‌دست می‌آوریم

$$۶=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}, \qquad a^{۲}=۶b^{۲}$$

حال، $۶b^{۲}$ زوج است، بنابراین $a^{۲}$ زوج است، پس a زوج است، فرضاً $a=۲c$. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$a^{۲}=۶b^{۲}, \qquad (۲c)^{۲}=۶b^{۲}, \qquad ۴c^{۲}=۶b^{۲}, \qquad ۲c^{۲}=۳b^{۲}$$

ازاین تساوی برمی‌آید که $۳b^{۲}$ زوج است، بنابراین $b^{۲}$ زوج ودر نتیجه b زوج است. ولی فرض شده بود که a و b هردو زوج نباشند، بنابراین $\sqrt{۶}$ گنگ است. خواننده می‌تواند، به عنوان یك تمرین، به وسیلهٔ اثباتی شبیه اثبات $\sqrt{۳}$، همین نتیجه را استنباط کند.

به‌عنوان آخرین مثال گنگ بودن دراین فصل، حالت $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ را باوابسته کردن آن به‌مورد $\sqrt{۶}$، بررسی می کنیم. فرض کنید $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گویا، فرضاً r، باشد، بنابراین

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=r$$

با مجذور کردن وخلاصه کردن به‌دست می‌آوریم:

$$۲+۲\sqrt{۶}+۳=r^{۲} \qquad ۲\sqrt{۶}=r^{۲}-۵, \qquad \sqrt{۶}=\frac{r^{۲}-۵}{۲}$$

حال، عددهای گویا نسبت به‌چهارعمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (بجز تقسیم بر صفر) بسته هستند، وبنابراین، $(r^{۲}-۵)/۲$ یك عدد گویاست. ولی $\sqrt{۶}$ گنگ است و در نتیجه یك تناقض داریم. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

گنگ است.

برای هرعددصحیح‌مفروض $n = a \times b$، درصورتی که بدانیم $\sqrt{n} = \sqrt{a \times b}$ گنگ است، با تقلید از اثبات فوق، می‌توانیم استنباط کنیم که عبارت $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ گنگ است.

مجموعه مسأله‌های ۱۰

۱. دو اثبات ارائه‌کنید مبنی براینکه مربع یك عدد صحیح بر ۵ بخش‌پذیر است اگر وفقط اگرخود آن عدد صحیح بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

(الف) نخست، اثباتی مشابه تحلیل متن درمورد بخش‌پذیری بر ۳ ارائه‌کنید. از این مطلب که هر عدد صحیح به یکی از پنج صورت $5n$، $5n+1$، $5n+2$، $5n+3$ یا $5n+4$ است، شروع نمایید.

(ب) بعد، با استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب، اثباتی ارائه کنید. این قضیه را می‌توان در فصل ۱، یا در پیوست ب یافت.

۲. ثابت کنید $\sqrt{5}$ گنگ است.

۳. ثابت کنید $\sqrt{15}$ گنگ است.

۴. ثابت کنید $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ گنگ است.

۵. ثابت کنید $\sqrt[3]{2}$ گنگ است.

۶. فرض کنید α(آلفا) یك عدد گنگ باشد. ثابت کنید $1/\alpha = \alpha^{-1}$ نیز گنگ است.

۷. آیا ۰ گویاست یا گنگ.

۶.۳ واژه‌هایی که به‌کارمی‌بریم

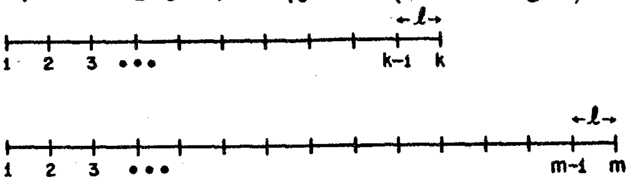
اصطلاحاتی را که برای توصیف رده‌های گوناگون عددها بکارمی‌بریم، قسمتی از میراث تاریخی ماست. بنابراین، شایسته نیست که آنها را تغییر دهیم، هرچند که بعضی از واژه‌ها را کمی غریب احساس می‌کنیم. مثلاً، در محاورهٔ روزمره، هرگاه چیزی، را به‌عنوان «گنگ» توصیف می‌کنیم، اغلب، مقصودمان این است که قابل فهم نیست و بنابراین نارساست. ولی‌البته ما عددهای گنگ را نارسا تلقی نمی‌کنیم. ظاهراً، وقتی یونانیها عددهای گنگ راکشف کردند، شگفت‌زده شدند، زیرا آنها

گمان کرده بودند که به‌ازای هردو پاره‌خط مستقیم مفروضی ، مثل ضلع و قطر یك مربع، عددهای صحیحی‌مانند a و b وجود دارند به‌طوری که نسبت طولهای قطعات a/b باشد. بنا براین، کلمهٔ «گویا» به‌مفهوم ریاضی‌اش به‌این نسبت عددهای درست اشاره دارد و کلمهٔ «گنگ» به‌فقدان چنین نسبتی اشاره می کنند.*

کلمهٔ «هم‌سنج» نیز برای توصیف دو طول که نسبت آنها عدد گویایی باشد، به‌کارمی‌رود. دوطول هم‌سنج نسبت به‌هم چنان‌اند که یکی‌می‌تواند به‌وسیلهٔ دیگری، به‌مفهوم زیر، «سنجیده»شود: اگرعدد صحیح k وجود داشته باشد به‌طوری که وقتی پاره‌خط نخست به k قسمت مساوی، هرقسمت به‌طول l، تقسیم شود، نتیجه‌گردد که پاره‌خط دوم تعداد درستی، فرضاً m، ازهمان تقسیمات به طول l، را دربردارد، در این‌صورت، نسبت طولهای دوپاره‌خط برابر با

$$\frac{kl}{ml}=\frac{k}{m}$$

یعنی گویاست (شکل ۱۱ را ببینید). اما اگر پاره‌خطها طوری باشند که‌نسبت طولهای



شکل ۱۱

آنها گنگ باشد، (مثل ضلع وقطریك مربع)، آن‌گاه عمل فوق، هراندازه هم k را بزرگ انتخاب‌کنیم (وهراندازه l راکوچك درنظر بگیریم) به‌هیچ‌وجه‌انجام‌پذیر نیست! در این‌حالت، پاره‌خطهای مفروض ناهم‌سنج نامیده می‌شوند.

به‌عددهایی نظیر $\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{24}$، یا به‌طور کلی $\sqrt[n]{a}$ که‌در آن a عددگویا و n عددی صحیح باشد، رادیکالی می گویند.

اصطلاح «عددهای حقیقی» میراث دیگری‌از گذشته است. اگرامروزآنها را نامگذاری می کردیم، شایدآنها را «عددهای یك‌بعدی» می‌خواندیم. درهرصورت، عددهای خارج از حوزهٔ عددهای حقیقی را «غیرحقیقی» تلقی نمی‌کنیم . شاید

---

* همان‌گونه‌که درپاورقی‌صفحهٔ‌اول مقدمه یادآوری شد، اصطلاح انگلیسی Rational که برای عددهای گویا به‌کارمی‌رود از ریشهٔ Ratio به‌معنی نسبت است.ـ م.

خواننده باعددهای مختلط، که عددهای حقیقی زیررده‌ای از آنها را تشکیل می‌دهند، آشنا باشد. یك عدد مختلط عددی است به‌صورت $a+bi$، که در آن a و b حقیقی هستند و i در فرمول درجهٔ دوم $i^2=-1$ صدق می‌کند. این تعریف را صرفاً جهت ختم بحث رده‌های عددها یادآوری کردیم. موضوع این کتاب به عددهای حقیقی محدود می‌شود و بنابراین با ردهٔ وسیعتر عددهای مختلط کاری نداریم.

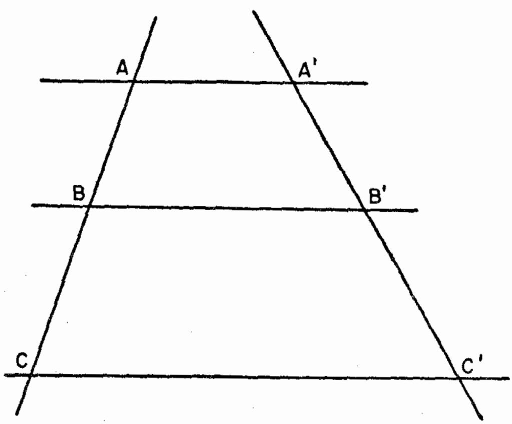
۷.۳ کاربردی درهندسه

اغلب کتابهای درسی دبیرستانی مربوط به‌هندسه، دربعضی از اثباتهایی که به‌عددهای گنگ مربوط می‌شود، شکافی باقی می‌گذارند. این شکاف وقتی پدید می‌آید که اثبات یك نتیجه فقط درحالت گویا ارائه می‌شود وحالت گنگ ناتمام باقی می‌ماند. غالباً این مطلب درمورد نتیجهٔ زیراتفاق می‌افتد.

قضیهٔ ۱.۳. اگرسه‌خط موازی به‌وسیلهٔ دوخط مورب قطع شوند، و همچنان‌که درشکل ۱۲ نشان‌داده شده‌است، نقاط A، B، C، A'، B'، C' را پدیدآورند، آن‌گاه

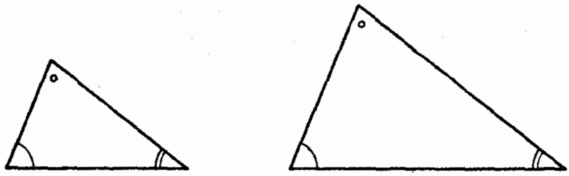
$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

که درآن مثلاً، AB طول پاره‌خط از A تا B را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲

این قضیه را می‌توان بـرای اثبات قضیهٔ اساسی مثلثهای متشابه به‌کار برد : اگـر سه زاویهٔ مثلثی به‌ترتیب با سه زاویه از مثلث دیگری مساوی باشند ، آن‌گاه ضلعهای متناظر متناسب‌اند (شکل ۱۳) . این نتیجه نیز اغلب بـرای اثبات قضیهٔ



شکل ۱۳

فیثاغورس به‌کار می‌رود و بنا بر این مثلثات و هندسهٔ تحلیلی بر اساس این سه قضیه بنا می‌شوند .

حال، قضیهٔ ۱.۳ را برای حالتی که AB/AC گنگ باشد ، ثابت می‌کنیم . قضیهٔ ۱.۳ را در حالتی که AB/AC گویا باشد ، مسلم فرض خواهیم کرد ، زیرا معمولاً این بخش از قضیه در کتابهای هندسهٔ مقدماتی ثابت می‌شود. قبل از اثبات قضیهٔ ۱.۳ ، در حالتی که AB/AC گنگ است ، اثبات نتیجهٔ مقدماتی زیر مفید خواهد بود.

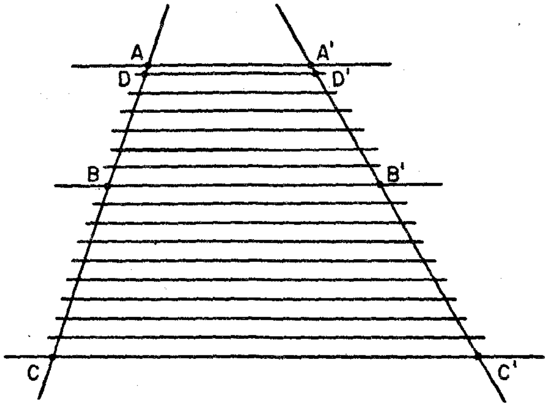
قضیهٔ ۲.۳. اگر m و n عددهای صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که

$$\frac{m}{n}<\frac{AB}{BC}$$

آن‌گاه

$$\frac{m}{n}<\frac{A'B'}{B'C'}$$

اثبات. با یـک ترسیم شروع می‌کنیم . پاره‌خط BC را به n قسمت مساوی تقسیم وطول هر قسمت را α می‌نامیم، بنا بر این $BC=n\alpha$. آن‌گاه در امتداد پاره‌خط BA تعداد m قطعه از پاره‌خطهای به‌طول α را جدا می‌کنیم تا اینکه نقطهٔ D بدست آید. نخست ثابت می‌کنیم که مطابق با شکل ۱۴ ، D بین A و B قرار می‌گیرد . از آنجا که $BC=n\alpha$ و $DB=m\alpha$، می‌توانیم بنویسیم :



شکل ۱۴

$$\frac{DB}{BC}=\frac{m\alpha}{n\alpha}=\frac{m}{n}$$

بنا به‌فرض

$$\frac{m}{n}<\frac{AB}{BC}$$

و بنا بر این

$$\frac{DB}{BC}<\frac{AB}{BC}$$

این آخرین نابرابری ایجاب می‌کند که $DB<AB$، زیرا، مخرج هردوکسر BC است. بنا بر این، از آنجا که DB کوتاه‌تر از AB است، نتیجه می‌گیریم که D در داخل پاره‌خط AB قرار دارد.

حال، از همهٔ این نقطه‌های تقسیم، مثل شکل ۱۴، خطهایی به‌موازات AA' رسم می‌کنیم و نقطهٔ متناظر D، درسمت راست را D' می‌نامیم. بنا بر این بنا به قضیهٔ ۱.۳ در حالت گویا (که مسلم فرض کرده بودیم) $B'C'$ به n قسمت مساوی و $D'B'$ به m قسمت مساوی از همان طول تقسیم می‌شود، بنا بر این

$$\frac{D'B'}{B'C'}=\frac{m}{n}$$

در عین حال از شکل ۱۴ متوجه می‌شویم که $D'B'<A'B'$ ، و از این رو نتیجه می گیریم که

$$\frac{D'B'}{B'C'}<\frac{A'B'}{B'C'}, \qquad \frac{m}{n}<\frac{A'B'}{B'C'}$$

نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۳. اگر $\frac{m}{n}>\frac{AB}{BC}$ ، آن‌گاه $\frac{m}{n}>\frac{A'B'}{B'C'}$.

این نتیجه شبیه قضیهٔ ۲.۳ است و بنا براین، اثبات مشابهی دارد.

تا این‌جا قضیهٔ ۲.۳ ویك نتیجه را ثابت کرده‌ایم، حال اینها را برای اثبات قضیهٔ ۱.۳ درحالت گنگ به‌کار می‌بریم. فرض کنیم β نشان دهندهٔ عدد گنگی باشد که نسبت AB/BC را نمایش می‌دهد . از نمایش اعشاری β طبق بخش ۲.۳ استفاده می کنیم.

برای نشان دادن اینکه چه می‌خواهیم انجام دهیم، فرض می کنیم β مثلاً مقدار $\pi=$ ۳٫۱۴۱۵۹ . . . را داشته باشد . آن گاه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۳}{۱}<\beta<\frac{۴}{۱}$$

$$\frac{۳۱}{۱۰}<\beta<\frac{۳۲}{۱۰}$$

$$\frac{۳۱۴}{۱۰۰}<\beta<\frac{۳۱۵}{۱۰۰} \qquad (۱)$$

$$\frac{۳۱۴۱}{۱۰۰۰}<\beta<\frac{۳۱۴۲}{۱۰۰۰}\text{، . . . و غیره}$$

کسرهای‌سمت‌چپ با برداشتن ۳ ، ۳٫۱ ، ۳٫۱۴ ، ۳٫۱۴۱ وغیره از بسط اعشاری، به‌دست می آیند. کسرهای سمت راست با افزودن ۱ ، ۰٫۱ ، ۰٫۰۱ ، ۰٫۰۰۱ و غیره به‌این عددها، حاصل می‌شوند.

زنجیرهٔ نابرابریهای (۱) ، از نظر تعداد ، نامتناهی است؛ ما فقط چهارتای

اول آن را نوشته‌ایم. این نابرابریها مقدار مخصوص βی مورد بحث ما را، که همان π باشد، مشخص می‌کنند. بدین معنی که اگر β در همهٔ نابرابریهای(۱) صدق کند، آن‌گاه آن عدد مساوی π است.

نابرابریهای(۱) در رابطهٔ با یك مثال توضیحی، که در آن β مقدار π را دارا بود، نوشته شده‌اند. حال این‌مثال را مسکوت می‌گذاریم ولی خاطرنشان می‌سازیم که β دارای هرمقدار گنگی که باشد، نمایش اعشاری آن، زنجیره‌ای از نابرابریهای

$$\frac{a_1}{1}<\beta<\frac{1+a_1}{1}$$
$$\frac{a_2}{10}<\beta<\frac{1+a_2}{10}$$
$$\frac{a_3}{100}<\beta<\frac{1+a_3}{100} \qquad (2)$$
$$\frac{a_4}{1000}<\beta<\frac{1+a_4}{1000}\text{، . . . و غیره}$$

رافراهم می‌آورد، که β را به‌طور یکتا مشخص می‌کند و در هر نابرابری β بین دوعدد گویاست. نمادهای a_1 ، a_2 ، a_3 . . . عددهای صحیح را نشان می‌دهند.

طرح ما این است که فرض کنیم β' نسبت $A'B'/B'C'$ را نشان می‌دهد و ثابت کنیم که β' نیز، درست مانند β ، در نابرابریهای (۲) صدق می‌کند. ولی این نابرابریها عدد β را مشخص می‌کنند و ازاین‌رو β' با β یکی می‌شود، بنابراین

$$\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\beta'$$

آنچه باقی‌می‌ماند نشان‌دادن این است که β' درهمهٔ نابرابریهای(۲) صدق می‌کند. برای این منظور قضیهٔ ۲.۳ را به‌کار می‌بریم. نخست یکی از کسرهای $a_1/1$ ، $a_2/10$ ، $a_3/100$ و غیره، فرضاً $a_3/100$ را انتخاب می‌کنیم و این را به جای عددگویای m/n از قضیهٔ ۲.۳ تعبیر می‌کنیم. آنگاه فرض قضیهٔ ۲.۳ یعنی

$$\frac{m}{n}<\frac{AB}{BC}$$

به صورت

$$\frac{a_۳}{۱۰۰} < \beta$$

در می‌آید، و این رابطه به دلیل نابرابریهـای (۲) معتبر است. حال از قضیهٔ ۲.۳ برمی‌آید که

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$$

یعنی

$$\frac{a_۳}{۱۰۰} < \beta'$$

بنابراین می‌بینیم که β' در نابرابریهای

$$\frac{a_۱}{۱} < \beta' \text{ ،} \quad \frac{a_۲}{۱۰} < \beta' \text{ ،} \quad \frac{a_۳}{۱۰۰} < \beta' \text{ ،} \quad \frac{a_۴}{۱۰۰۰} < \beta' \text{ ، و غیره}$$

صدق می‌کند.

به‌وسیلهٔ کاربرد مشابهی از نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۳، به نابرابریهای

$$\beta' < \frac{۱+a_۱}{۱} \text{ ،} \quad \beta' < \frac{۱+a_۲}{۱۰} \text{ ،} \quad \beta' < \frac{۱+a_۳}{۱۰۰} \text{ ،} \quad \beta' < \frac{۱+a_۴}{۱۰۰۰} \text{ ، و غیره}$$

دست مـی‌یابیم. ازایـن‌رو β' هم، درست مثل β، درنابرابریهای(۲)صدق‌می‌کند. بنابراین $\beta=\beta'$ و اثبات قضیهٔ ۱.۳ کامل است.

۸.۳ خلاصه

دراین فصل نشان دادیم که هر عدد حقیقی را می‌توان دقیقاً به یك نقطه روی «خط حقیقی» مربوط نمود. همچنین دیدیم که هر عدد حقیقی دقیقاً یك نمایش به شکل اعشاری نامتناهی دارد. (مشروط براینکه در نمایشها، توالی بی‌پایان صفرها، یعنی عددهای اعشاری پایان‌دار، را مستثنی‌کنیم.) در بخش ۷.۳ این نمایش، به وسیلهٔ عددهای‌اعشاری نامتناهی را درمورد یك قضیهٔ‌کلیدی هندسهٔ مقدماتی، به‌کار بردیم. به‌علاوه گنگ بودن عددهای معینی مثل $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ وغیره‌را به‌اثبات

رساندیم. با این وجود، روش ما نسبتاً موضعی بود و هیچ روند کاملاً کلی، برای تعیین اینکه عدد مفروضی گویاست یا خیر، ارائه نکردیم.

در فصل بعد، به‌طریقی بسیار منظمتر عددهای گنگ را مطالعه خواهیم کرد و روشی را به‌دست خواهیم آورد که توسط آن بتوان ردهٔ وسیعی از عددها را، به عنوان عددهای گنگ، رده‌بندی کنیم.

۴

عددهای گنگ

در ضمن این فصل و فصل بعد خواهیم آموخت که عددهای حقیقی رامی‌توان نه‌تنها به عددهای گویا و گنگ، بلکه به دو دستهٔ دیگر نیز رده‌بندی کرد. یك دسته شامل عددهای به‌اصطلاح جبری است یعنی آن عددهایی که جوابهای معادله‌های جبری با ضریبهای‌صحیح هستند، و دستهٔ دیگرشامل همهٔعددهای باقیمانده‌است، که به‌عددهای متعالی موسوم‌اند. این تمایز، با مطلبهای زیر بامعنی‌تر می‌شود. با این‌وجود،متذکر می‌شویم که بعضی از عددهای جبری، گویا و بعضی گنگ‌اند، اما همهٔ عددهای متعالی گنگ می‌باشند.

هدف کلی این فصل، تدبیر روش منظمی است برای تعیین اینکه عدد جبری مفروضی گویاست یاخیر. (عملاً، ما با ردهٔ عددهای جبری، درکلیترین حالت آن، مواجه نخواهیم شد، بلکه روش خود را در مورد چندین مثال به‌کار خواهیم برد.) ولی قبل از اینکه این روش‌را استنتاج کنیم بعضی از ویژگیهای‌سادهٔ عددهای گنگ را مطالعه می‌نماییم.

۱.۴ ویژگی بسته بودن

برخلاف عددهای گویا، که نشان داده شد نسبت به عملهای جمع، تفریق ، ضرب و

تقسیم (بجز صفر) بسته هستند، عددهای گنگ هیچ یك از این ویژگیها را ندارند. قبل از نشان دادن این مطلب، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که ما را قادر می‌سازد تا از عدد گنگ مفروضی بینهایت عدد گنگ دیگر را به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۱.۴. اگر α یك عدد گنگ و r عددگویایی غیر از صفر باشد، آن‌گاه از جمع، تفریق، ضرب وتقسیم r و α، عددهای گنگی به‌دست می‌آیند. همچنین $-\alpha$ و α^{-1} هم‌گنگ هستند.

اثبات. این نتایج، به‌وسیلهٔ اثباتهای غیر مستقیم، به سهولت ثابت می‌شوند. درآغاز فرض کنید $-\alpha$ گویا باشد، فرضاً $-\alpha=r'$، که در آن r' عددگویای مفروض را نشان می‌دهد. آن گاه خواهیم داشت $\alpha=-r'$ و $-r'$ نیز عددگویایی است. بنا براین، یك تناقض داریم، زیرا α گنگ است.

قضیه بیان می‌کند که $-\alpha$ ، $\alpha^{-1}=1/\alpha$، $\alpha+r$، $\alpha-r$، $r-\alpha$، $r\alpha$، α/r و r/α گنگ هستند. ما در مورد $-\alpha$ بحث کردیم. برای اثبات گنگ بودن α^{-1} ، ملاحظه می‌کنیم که این موردحالت خاصی است از r/α با $r=1$. بنا براین بحث در بارهٔ این حالت به‌طور جداگانه، لازم نیست.

حال، می‌خواهیم همهٔ شش حالت باقیمانده را یك دفعه و به‌طوریکجا ثابت کنیم. اگر یکی یا چند عدد از این عبارتها گویا باشند، آن‌گاه یك یا چند عدد از معادله‌های زیر برقرار خواهند بود که در آنها r_1، r_2، r_3، r_4، r_5 و r_6 عددهای گویایی را نشان می‌دهند:

$$\alpha+r=r_1,\quad \alpha-r=r_2,\quad r-\alpha=r_3,\quad r\alpha=r_4,\quad \frac{\alpha}{r}=r_5,\ \frac{r}{\alpha}=r_6$$

از حل این معادله‌ها، برحسب α، به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=r_1-r,\ \ \alpha=r_2+r,\ \ \alpha=r-r_3,\ \ \alpha=\frac{r_4}{r},\quad \alpha=rr_5,\quad \alpha=\frac{r}{r_6}$$

به دلیل ویژگی بسته بودن عددهای گویا ، عبارتهای طرف راست این معادله ها ، عددهای گویا هستند. ولی، ازآنجا که α گنگ است هیچ یك از این معادله‌ها درست نیست. ازاین رو، ممکن نیست که‌عددهای $\alpha+r$، $\alpha-r$ وغیره گویا باشند. بنا براین، اثبات قضیه کامل است.

به‌کمك قضیهٔ ۱.۴، از یك عدد گنگ تنها، مثلاً از $\sqrt{۲}$، می‌توانیم ردهٔ وسیعی از عددهای گنگ بسازیم. با به‌کاربستن هرحکم قضیه می‌توان ادعا کرد که مثلاً

$$\frac{۴}{\sqrt{۲}}،\ \frac{\sqrt{۲}}{۷}،\ -۲\sqrt{۲}،\ ۳-\sqrt{۲}،\ \sqrt{۲}+۵،\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}،\ -\sqrt{۲}$$

همگی گنگ هستند. چون بینهایت عدد گویا وجود دارد که می‌توان در هر یك از حکمهای قضیه به‌کار برد، واضح است که بینهایت عدد گنگ رامی‌توان ساخت.

به علاوه، هریك از عددهایی که بدین طریق ساخته شد، فرضاً $\sqrt{۲}+۵$، باز هم‌می‌تواند به‌عنوان عدد گنگ جدیدی چون α، در قضیه‌به‌کار گرفته‌شود. بنا براین، از آن یك عدد گنگ می‌توان بینهایت عدد گنگ دیگر را پدید آورد، مانند:

$$-\sqrt{۲}-۵،\ \frac{۱}{\sqrt{۲}+۵}،\ \sqrt{۲}+۸،\ ۵\sqrt{۲}+۲۵،\ \frac{\sqrt{۲}+۵}{۷}،\ \text{وغیره}$$

آیا عددهای گنگ نسبت به عمل جمع بسته هستند؟ خیر، بسته نیستند. اثبات این مطلب، فقط مستلزم آن است که‌دوعدد گنگ رانشان بدهیم که مجموع آنها گویا باشد. درفصل قبل نشان داده‌شد که $\sqrt{۲}$ گنگ است، بنا براین از قضیهٔ ۱.۴ برمی‌آید که $-\sqrt{۲}$ نیز گنگ است. ولی مجموع $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ صفر است، که‌گویاست؛ همچنین، مثلاً مجموع $۳+\sqrt{۲}$ و $۵-\sqrt{۲}$ گویاست. به‌طور کلیتر، مجموع دوعدد گنگ $r_۱+\alpha$ و $r_۲-\alpha$ (که درآنها $r_۱$ و $r_۲$ گویا و r گنگ باشد) گویاست.

این گزاره که عددهای گنگ نسبت به عمل جمع بسته نیستند، به این معنی نیست که اگر هردو عدد گنگ را باهم جمع کنیم مجموع آنها گویا خواهدبود، بلکه فقط این معنی را می‌دهد که حداقل حالتی‌وجود داردکه‌مجموع آنها گویاست. وقتی دو عدد گنگ باهم جمع می‌شوند، نتیجهٔ حاصل، بسته به‌آن دوعدد، ممکن است گویا یا گنگ باشد. درحالی که مجموع $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ یك عدد گویاست، مجموع $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$، همان‌طور که در فصل قبل ثابت کردیم، عدد گنگ است.

آیا عددهای گنگ نسبت به‌عمل تفریق‌بسته هستند؟ خیر، زیرا مثلاً اگر $\sqrt{۲}$ را از خودش کم کنیم، عددگویای ۰ را به‌دست می‌آوریم.

همچنین، عددهای گنگ نسبت به عمل ضرب یا تقسیم بسته نیستند. بین این قضیه‌ها و آنچه دربالا گفته شد چنان تشابهی وجود دارد که اثبات آنها را درمجموعه مسأله‌های زیر به خواننده واگذار می‌کنیم.

مجموعه مسأله‌های ۱۱

(در بعضی از این‌مسأله‌ها، به‌کار بستن بعضی از قضیه‌های بیان شدهٔ در فصل قبل، نظیر اینکه $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گنگ هستند، ممکن است مفید باشد.)

۱. دو عدد گنگ نشان دهید که تفاوت آنها گنگ باشد.

۲. دو عدد گنگ نشان دهید که حاصلضرب آنها گویا باشد و از آنجا، ثابت کنید که عددهای گنگ نسبت به عمل ضرب بسته نیستند.

۳. دو عدد گنگ نشان دهید که حاصلضرب آنها گنگ باشد.

۴. دو عدد گنگ نشان‌دهید که خارج قسمت آنها گویا باشد، ودر نتیجه ثابت کنید که عددهای گنگ نسبت به عمل تقسیم بسته نیستند.

۵. دو عدد گنگ نشان دهید که خارج قسمت آنها گنگ باشد.

۶°. ثابت کنید که $(\sqrt{۶}-۳)\sqrt{۳}$ گنگ است.

۷. فرض کنید α عدد گنگ مثبتی باشد، ثابت کنید $\sqrt{\alpha}$ گنگ است.

۸. فرض کنید دو عدد α و β گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

۲.۴ معادله‌های چند جمله‌ای

در فصل قبل ثابت‌شد که $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۶}$ گنگ هستند. همان‌طور که می‌توان انتظار داشت (یا شاید همان گونه که خواننده از قبل اطلاع دارد) عددهایی مثل $\sqrt{۷}$، $\sqrt[۳]{۵}$ و $\sqrt[۵]{۹۱}$ نیز گنگ هستند. آنچه را که می‌خواهیم انجام دهیم اثبات گنگ بودن همهٔ این عددها با طرحی مشترك است و نه بحثهایی جداگانه برای تك تك آنها. برای این منظور، توجه خود را، به جای عددها به معادله‌های جبری ساده‌ای معطوف می‌داریم که آن عددها ریشه‌های آنها هستند. مثلاً، $\sqrt{۲}$ یك ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲}-۲=۰$ است. این‌مطلب به‌گونه‌های زیر نیز بیان می‌شود: «$\sqrt{۲}$ یك جواب $x^{۲}-۲=۰$ است» یا «$\sqrt{۲}$ در معادلهٔ $x^{۲}-۲=۰$ صدق می‌کند.» دیگر عددهای مورد نظر نیز در معادله‌هایی از گونهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\sqrt{۳},\quad x^{۲}-۳=۰$$
$$\sqrt{۶},\quad x^{۲}-۶=۰$$

$$\sqrt{۷},\quad x^{۲}-۷=۰$$
$$\sqrt[۳]{۵},\quad x^{۳}-۵=۰$$
$$\sqrt[۵]{۹۱},\quad x^{۵}-۹۱=۰$$

هدف، اثبات این مطلب است که این معادله‌ها، و به‌طور کلیتر همهٔ معادله‌هایی که در شرایط معینی صدق می‌کنند، هیچ ریشهٔ گویا ندارند. برای شروع، باید اصطلاحاتی را که در توصیف معادله‌ها به کار می‌روند، تعریف کنیم.

منظور ما از یك چندجمله‌ای درجهٔ دوم نسبت به x، عبارتی به صورت $ax^{۲}+bx+c$ است، که a، b و c ضریبهای آن نام‌دارند. یك چندجمله‌ای مکعبی، یا یك چندجمله‌ای از درجهٔ ۳، عبارت است از: $ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$. این روش نمایش چند جمله ایها ایجاب می‌کند وقتی که درجه افزایش می‌یابد، حرفهای جدیدی را به‌کار ببریم. برای پرهیز از این کار، چندجمله‌ای درجهٔ سوم را به‌صورت

$$c_{۳}x^{۳}+c_{۲}x^{۲}+c_{۱}x+c_{۰}$$

و چندجمله‌ای از درجهٔ n را (که n عدد صحیح مثبتی است) و در آن c_n صفر نیست، به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$c_nx^{n}+c_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+c_{۱}x+c_{۰}$$

یك معادلهٔ چندجمله‌ای، گزاره‌ای از یك تساوی به شکل

$$c_nx^{n}+c_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+c_{۱}x+c_{۰}=۰ \qquad (۱)$$

است که $c_{۰}$، $c_{۱}$، $c_{۲}$، ...، c_n ضریبهای آن نامیده می‌شوند.

مثال. مقادیر n، c_n و غیره را وقتی که معادلهٔ

$$۳x^{۶}+۲x^{۵}-x^{۴}+۱۰x^{۳}+۴x-۷=۰$$

صورت کلی (۱) را داشته باشد، مشخص کنید.

حل. با مقایسهٔ مستقیم، می‌بینیم که

$$c_{۰}=-۷,\quad c_{۱}=۴,\quad c_{۲}=۰,\quad c_{۳}=۱۰,\quad c_{۴}=-۱,\quad c_{۵}=۲,$$
$$c_{۶}=۳,\quad n=۶$$

در نظر داشته باشید که شرط اینکه ضریبهای معادلهٔ (۱) عددهای صحیح باشند،

صریحتر از این شرط نیست که ضریبها گویا باشند، زیرا اگر ضریبها گویا باشند، آن‌گاه $c_۰ = a_۰/b_۰$، $c_۱ = a_۱/b_۱$، $c_۲ = a_۲/b_۲$، . . . که در آن aها و bها عددهای صحیح هستند. همهٔ این کسرها را می‌توان چنان نوشت که دارای مخرج مشترکی مثلاً حاصلضرب $b_۰b_۱b_۲ \ldots b_n$ باشند. در این صورت می‌توان هر دو طرف معادله را در آن ضرب کرد و معادلهٔ جدیدی به‌دست آورد که ضریبهای آن عددهای صحیح و ریشه‌های آن همان ریشه‌های معادلهٔ اصلی باشند.

یادآوری می‌کنیم که ریشهٔ معادله‌ای برحسب x، مقداری‌است که وقتی به‌جای x قرار گیرد، در آن صدق کند. مثلاً چنان‌که قبلاً ملاحظه کردیم $\sqrt{۷}$ یك ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ - ۷ = ۰$ است:

مثال. آیا ۲/۵ یك ریشهٔ معادلهٔ $۱۰x^۳ + ۶x^۲ + x - ۲ = ۰$ است؟

حل. با قراردادن ۲/۵ به‌جای x، به دست می‌آوریم

$$۱۰\left(\frac{۲}{۵}\right)^۳ + ۶\left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ + \frac{۲}{۵} - ۲ = ۰$$

که بنا به‌علم حساب، یك گزارهٔ درست است. بنابراین ۲/۵ یك ریشهٔ معادله است.

حال، آماده‌ایم که به‌موضوع اصلی باز گردیم. تکرار می‌کنیم، روشی را که در پی گسترش آن هستیم تا بتوانیم در بارهٔ گنگ بودن یا نبودن عدد مفروضی تصمیم بگیریم فقط و فقط وقتی قابل استفاده است که بتوانیم یك چندجمله‌ای بنویسیم که عدد مورد بحث یك ریشهٔ آن باشد. این روش نه تنها می‌تواند برای عددهایی به‌کار رود که گنگ بودن آنها را درفصل قبل ثابت کردیم، بلکه برای هرعددی که بتواند به‌صورت ترکیب با پایانی از نمادهای $+$، $-$، $\times$، $\div$، و رادیکالهای $\sqrt[n]{\ }$ از عددهای گویا نوشته شود، نیز قابل استفاده است. مثلاً

$$\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \sqrt{\sqrt[۱۰]{۷}-\sqrt[۱۱]{۷}}}{\sqrt[۱۵۶]{۲۵}}$$

یك حالت پیچیده از چنین عددهایی است.

در این کتاب، ثابت نمی‌کنیم که همهٔ چنین عددهایی ریشه‌های معادله‌های چندجمله‌ای، باضریبهای صحیح هستند، بلکه معادله‌های چندجمله‌ای را درنظر می‌گیریم که این گونه ازعددها درآنها صدق می‌کنند.

مجموعه مسأله‌های ۱۲

۱. هرگاه معادله‌های زیر صورت کلی معادلهٔ (۱) را داشته باشند، مقادیر n، c_n، و غیره را مشخص کنید:

(الف) $۱۵x^۳-۲۳x^۲+۹x-۱=۰$

(ب) $۳x^۳+۲x^۲-۳x-۲=۰$

(پ) $۲x^۳+۷x^۲-۳x-۱۸=۰$

(ت) $۲x^۴-x^۲-۳x+۵=۰$

(ث) $۳x^۵-۵x^۳+۶x^۲-۱۲x+۸=۰$

(ج) $x^۴-۳x^۲-۵x+۹=۰$

۲. (الف) آیا ۱/۳ یك ریشهٔ (الف) بالاست؟
(ب) آیا ۲/۳ – یك ریشهٔ (ب) بالاست؟
(پ) آیا ۳/۲ یك ریشهٔ (پ) بالاست؟
(ت) آیا ۲ یك ریشهٔ (ت) بالاست؟
(ث) آیا ۲ – یك ریشهٔ (ث) بالاست؟
(ج) آیا ۱/۲ یك ریشهٔ (ج) بالاست؟

۳. ثابت کنید که $\sqrt{۷}$ یك ریشهٔ $\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۷}{۳}=۰$ است.

۴. ثابت کنید اگر عددی یك ریشهٔ یك معادلهٔ چندجمله‌ای مثل

$$\frac{a_۳}{b_۳}x^۳+\frac{a_۲}{b_۲}x^۲+\frac{a_۱}{b_۱}x+\frac{a_۰}{b_۰}=۰$$

با ضریبهای گویا باشد، آن‌گاه آن عدد یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح نیز هست.

۵. نتیجهٔ مسألهٔ قبل را، از معادله‌های درجهٔ ۳، به معادله‌های درجهٔ n تعمیم دهید.

۳.۴ ریشه‌های گویای معادله‌های چندجمله‌ای

اکنون هدف ما استنتاج قاعدهٔ ساده‌ای است که ما را قادر سازد تا همهٔ ریشه‌های گویای هر معادلهٔ چندجمله‌ای مفروض، با ضریبهای صحیح، را به‌دست‌آوریم. این قاعده تحت عنوان قضیهٔ ۳.۴ در زیر ارائه می‌شود. بنابراین قضیه، به‌تفکیك ریشه‌های

گویا و ریشه‌های گنگ یك معادله از یکدیگر قادر خواهیم بود و بدین طریق گنگ‌بودن ردهٔ وسیعی از عددها را ثابت می‌کنیم.

ولی، نخست به قضیهٔ کمکی زیر نیازمندیم.

قضیهٔ ۲۰۴. هرگاه u، v و w عددهای صحیحی باشند، به‌گونه‌ای که u یك مقسوم‌علیه vw باشد و u و v هیچ عامل اول مشترکی نداشته باشند. آن‌گاه u یك مقسوم‌علیه w است. به‌طور کلیتر، اگر u یك مقسوم‌علیه $v^n w$ باشد، که در آن n عدد صحیح مثبت است، و اگر u و v هیچ عامل اول مشترکی نداشته باشند، آن‌گاه u یك مقسوم علیه w است.

قبل از ارائهٔ اثبات، این قضیه را با چند مثال روشن می‌کنیم:

(۱) فرض کنیم $u=۲$، $v=۳$ و $vw=۱۲$. عددهـای، ۲ و ۳ هیچ عامل اول مشترکی ندارند. همچنین، ۲ یك‌مقسوم‌علیه ۱۲ است. بنابراین، فرضهای قضیهٔ ۲۰۴ برقرار می‌باشد. این نتیجه هم که ۲ یك مقسوم علیه $w=۱۲/v=۴$ هست، معتبر است.

(۲) فرض کنیم $u=۴$، $v=۵$ و $v^۳w=۵۰۰$. عددهای ۴ و ۵ هیچ‌عامل‌اول مشترکی ندارند و ۴ عدد ۵۰۰ را می‌شمارد. نتیجهٔ حکم کلی بالا، یعنی اینکه ۴ عدد $w=۵۰۰/۱۲۵=۴$ را می‌شمارد، بازهم پابرجاست.

اثبات. عنصر اصلی دراین اثبات، قضیهٔ بنیادی حساب است، که در پیوست ب، درپایان کتاب، ثابت می‌شود وما را مطمئن می‌کندکه فقط یك راه برای تجزیهٔ u، v و w به عاملهای اول وجود دارد. از آنجا که u عدد vw را می‌شمارد، همهٔ عاملهای اول u در vw نیزظاهرمی‌شوند؛ به‌علاوه، اگرهرعدد اول p، باتوان α در u ظاهر شود، آن‌گاه این عدد باحداقل همان توان در vw نیز ظاهر می‌شود، یعنی این عدد در vw باتوان β پدیدار می‌شودکه $\beta \geqslant \alpha$. حال، ازآنجاکه u و v هیچ عامل اول مشترکی ندارند، نتیجه می‌گیریم که همهٔ عاملهای اول u، حداقل با همان توان درتجزیهٔ w پدیدارمی‌شوند. بنابراین u یك مقسوم‌علیه w است.

آخرین حکم این قضیه را می‌توان به‌راه مشابهی ثابت کرد. این فرض‌که u و v هیچ عامل اول مشترکی ندارند، ما را مطمئن می‌کندکه u و v^n هم هیچ عامل اول مشترکی‌ندارند. بنابراین، باز نتیجه می‌گیریم این واقعیت‌که u یك مقسوم‌علیه $v^n w$ است، مستقل از اثر v^n است وبنابراین u باید یك مقسوم‌علیه w باشد. اکنون برای بیان واثبات قضیهٔ زیرآمادگی کافی را به‌دست‌آورده‌ایم:

قضیهٔ ۳.۴. یك معادلهٔ چندجمله‌ای باضریبهای صحیح مفروض است:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (1)$$

اگر این معادله یك ریشهٔ گویای a/b داشته باشدکه a/b به‌ساده‌ترین صورت خود فرض شود آن‌گاه a یك مقسوم‌علیه c_0 و b یك مقسوم‌علیه c_n است.

قبل از ارائهٔ اثبات مجدداً این مطلب را با یك مثال روشن می‌کنیم. معادلهٔ

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

رادر نظر بگیرید. قضیه حکم می‌کند که اگر a/b یك ریشهٔ گویا به‌ساده‌ترین صورت خود باشد، آن گاه a یك مقسوم‌علیه ۳ — و b یك مقسوم علیه ۲ است. بنا بر این، مقادیر ممکن برای a عبارتند از ۱+، ۱ —، ۳+، ۳ — و مقادیر ممکن برای b عبارتند از ۱+، ۱ —، ۲+، ۲ —. با ترکیب این امکانات درمی‌یابیم که مجموعهٔ زیر شامل همهٔ ریشه‌های ممکن است:

$$\frac{+1}{+1},\ \frac{+1}{-1},\ \frac{+1}{+2},\ \frac{+1}{-2},\ \frac{-1}{+1},\ \frac{-1}{-1},\ \frac{-1}{+2},\ \frac{-1}{-2}$$

$$\frac{+3}{+1},\ \frac{+3}{-1},\ \frac{+3}{+2},\ \frac{+3}{-2},\ \frac{-3}{+1},\ \frac{-3}{-1},\ \frac{-3}{+2},\ \frac{-3}{-2}$$

این فهرست، شامل تنها ۸ عددمتمایز، یعنی ۱، ۱ —، ۱/۲، ۱/۲ —، ۳، ۳ —، ۳/۲ و ۳/۲ — است. همان گونه که خواننده می‌تواند باجایگزینی ثابت نماید، ازاینها فقط عددهای ۱، ۱/۲ و ۳ عملاً ریشه‌های معادله هستند.

اثبات. گیریم a/b یك ریشهٔ معادلهٔ (۱) باشد. این می‌رساند که اگر a/b به‌جای x قرار گیرد، آن گاه:

$$c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0 \qquad (2)$$

اثبات رااز حالت ویژه‌ای که در آن $n=3$ باشد شروع می‌کنیم، زیرادرك آن برای خواننده ساده‌ترخواهدبود. سپس استدلال مشابهی برای حالت کلی ارائه می‌کنیم.

در حالت $n=3$، معادلهٔ (۲) به‌صورت سادهٔ

$$c_3\left(\frac{a}{b}\right)^3 + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$$

درمی‌آید. باضرب کردن در b^3، به‌دست می‌آوریم

$$c_3a^3+c_2a^2b+c_1ab^2+c_0b^3=0 \qquad (3)$$

این معادله را به‌صورت

$$c_3a^3=-c_2a^2b-c_1ab^2-c_0b^3$$

یا

$$c_3a^3=b(-c_2a^2-c_1ab-c_0b^2)$$

می‌نویسیم. این تساوی نشان می‌دهد که b یك مقسوم‌علیه c_3a^3 است. حال قضیهٔ ۲.۴ را باقرار دادن a ، b و c_3 به‌ترتیب به‌جای u ، v و w به‌کار می‌بریم. فرض قضیهٔ ۲.۴ که u و v هیچ عامل اول مشترکی ندارند برقراراست، زیرا a/b به‌ساده‌ترین صورت است ، لذا a و b هیچ عامل اول مشترکی ندارند. بنابراین، از قضیهٔ ۲.۴ می‌توانیم نتیجه بگیریم که b یك مقسوم‌علیه c_3 است. تااین‌جا بخشی ازنتیجه‌گیری مطلوب درقضیهٔ ۳.۴ محقق است، زیرا در این حالت $n=3$، و در نتیجه c_n همان c_3 است.

حال، معادلهٔ (۳) را به‌صورت

$$c_0b^3=-c_1ab^2-c_2a^2b-c_3a^3$$

یا

$$c_0b^3=a(-c_1b^2-c_2ab-c_3a^2)$$

می‌نویسیم. این نشان می‌دهد که a یك‌مقسوم‌علیه c_0b^3 است. بااستدلالی کاملاً همانند بااستدلال قبل، یعنی با به‌کار بردن مجددقضیهٔ ۲.۴،نتیجه می‌گیریم که a یك مقسوم‌علیه c_0 است. بنابراین، اثبات در حالت $n=3$ کامل است.

برای اثبات قضیه درمورد هر n ، به معادلهٔ (۲) برمی‌گردیم و آن را در b^n ضرب می‌کنیم، تا

$$c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+c_2a^2b^{n-2}+c_1ab^{n-1}+c_0b^n=0 \qquad (4)$$

را به‌دست آوریم. حال، (۴) را می‌توان به‌صورت

$$c_na^n=-c_{n-1}a^{n-1}b-\ldots-c_2a^2b^{n-2}-c_1ab^{n-1}-c_0b^n$$

یا

$$c_na^n=b(-c_{n-1}a^{n-1}-\ldots-c_2a^2b^{n-3}-c_1ab^{n-2}-c_0b^{n-1})$$

نوشت. این نشان می‌دهد که b یك مقسوم‌علیه $c_n a^n$ است. قضیهٔ ۲.۴ را باقراردادن a، b و c_n به‌ترتیب به جای u، v و w به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که b یك مقسوم‌علیه c_n است.

حال، معادلهٔ (۴) را به‌شکل

$$c_0 b^n = a(-c_n a^{n-1} - \dots - c_2 a b^{n-2} - c_1 b^{n-1})$$

می‌نویسیم. این نشان می‌دهد که a یك مقسوم‌علیه $c_0 b^n$ است. مجدداً با به‌کار بردن قضیهٔ ۲.۴، باقرار دادن a، b، c_0 به‌ترتیب به‌جای u، v و w نتیجه می‌گیریم که a یك مقسوم‌علیه c_0 است. این‌مطلب، اثبات قضیهٔ ۳.۴ راکامل می‌کند.

می‌توانستیم از بحث آخرین پاراگراف خودداری کنیم، زیرا مشاهده می‌شود که درمعادلهٔ (۴) تقارنی وجود دارد ودراین معادله، b دررابطهٔ با c_n درست‌همان حالتی را داردکه a در رابطهٔ با c_0 داراست.

اکنون حالت $c_n = 1$ را بررسی می‌کنیم.

نتیجهٔ ۱. معادله‌ای به‌صورت

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

که ضریبهای آن عددهای صحیح هستند مفروض است. اگرچنین‌معادله‌ای یك ریشهٔ گویا داشته باشد، آن ریشه یك عدد صحیح است وبه‌علاوه یك مقسوم‌علیه c_0است.

اثبات. یك ریشهٔ گویای a/b را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم که b یك عدد صحیح مثبت است، زیرا اگر b منفی باشد می‌توانیم علامت منفی را در a منظورکنیم. بنا به‌قضیهٔ ۳.۴، b باید یك مقسوم‌علیه c_n، یعنی یك مقسوم‌علیه ۱ باشد. ولی ۱+ و ۱− تنها مقسوم‌علیه‌های ۱ هستند و بنا براین باید داشته باشیم $b = +1$، زیرا برای b مقادیر منفی را کنار گذاشتیم. در نتیجه هر ریشهٔ گویا به‌صورت $a/1$ و با عدد صحیح a برابر است. همچنین بنا به قضیهٔ ۳.۴ می‌دانیم که a یك مقسوم‌علیه c_0 است. بنا براین اثبات این نتیجه‌کامل است.

مثال. ثابت کنیدکه $\sqrt{7}$ گنگ است.

حل. $\sqrt{7}$ یك ریشهٔ $x^2 - 7 = 0$ است. در این جا، طبق نماد گذاری ما، $c_2 = 1$ و $c_0 = -7$.

حال، دو راه بـرای اقدام وجود دارد. یك راه این است کـه از نتیجهٔ ۱

استفاده کنیم و بگوییم: اگر $x^{۲}-۷=۰$ ریشهٔ گویایی، چون a/b، داشته باشد، آن‌گاه آن ریشهٔ گویا باید عدد صحیحی باشد. می‌توانیم نشان دهیم که $\sqrt{۷}$ یك عدد صحیح نیست و بنابراین، ریشهٔ گویایی برای $x^{۲}-۷=۰$ وجود ندارد. از این‌رو $\sqrt{۷}$ باید یك ریشهٔ گنگ باشد. روشن است که $\sqrt{۷}$ یك عدد صحیح نیست، زیرا بین دوعدد صحیح متوالی ۲ و ۳ قرار دارد، و این مطلب از نابرابریهای زیر نتیجه می‌شود:

$$۴<۷<۹$$
$$\sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹}$$
$$۲<\sqrt{۷}<۳$$

راه دیگر، نتیجهٔ (۱) را در شکل کامل خود به‌کار می‌گیرد، بدین‌صورت که هر ریشهٔ گویای $x^{۲}-۷=۰$ عدد صحیحی است که یك مقسوم‌علیه دقیق ۷− است. تنها مقسوم‌علیه‌های ۷− عبارت‌اند از ۱، ۱−، ۷ و ۷−. ولی همان‌طور که با یك بررسی ساده می‌توان دید هیچ‌یك از اینها ریشهٔ معادله نیستند، در واقع، معادله‌های

$$۱^{۲}-۷=۰،\quad (-۱)^{۲}-۷=۰\quad ۷^{۲}-۷=۰\quad (-۷)^{۲}-۷=۰$$

همه نادرست‌اند. ازاین‌رو معادلهٔ $x^{۲}-۷=۰$ ریشهٔ صحیح، و بنابراین ریشهٔ گویا ندارد و $\sqrt{۷}$ یك عدد گنگ است.

مثال. ثابت کنید $\sqrt[۳]{۵}$ گنگ است.

حل. $\sqrt[۳]{۵}$ یك ریشهٔ $x^{۳}-۵=۰$ است. بنا به‌نتیجهٔ ۱، اگر این معادله یك ریشهٔ گویا داشته‌باشد، آن ریشه باید عدد صحیحی باشد که یك مقسوم‌علیه ۵ است. مقسوم‌علیه‌های ۵ عبارت‌اند از: ۱+، ۱−، ۵+ و ۵−. ولی هیچ‌یك از اینها ریشهٔ معادله نیستند، زیرا معادله‌های

$$۱^{۳}-۵=۰\quad (-۱)^{۳}-۵=۰\quad ۵^{۳}-۵=۰\quad (-۵)^{۳}-۵=۰$$

همه نادرست هستند. ازاین‌رو $x^{۳}-۵=۰$ هیچ ریشهٔ گویا ندارد و بنابراین، $\sqrt[۳]{۵}$ گنگ است.

این دومثال حالتهای ویژه‌ای از نتیجهٔ کلیتر زیر هستند:

نتیجهٔ ۲. هر عدد به‌صورت $\sqrt[n]{a}$، که درآن a و n عددهای صحیح مثبت‌اند، یا گنگ است یا یك عدد صحیح؛ درحالت‌دوم، a توان n ام یك عدد صحیح‌است.

اثبات. این حکم ازنتیجهٔ ۱ حاصل‌می‌شود، زیرا $\sqrt[n]{a}$ یك ریشهٔ $x^n - a = ۰$ است و اگر این معادله ریشهٔ گویایی داشته باشد، این ریشه باید یك عدد صحیح باشد. به‌علاوه، اگر $\sqrt[n]{a}$ عدد صحیحی، فرضاً k، باشد،آن گاه $a = k^n$.

مجموعه مسأله‌های ۱۳

۱. ثابت کنید $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt[۵]{۹۱}$ گنگ هستند.

۲. ثابت کنید $(۴\sqrt{۱۳}-۳)/۶$ گنگ است.

۳. ثابت کنید $\sqrt{۱۵}$ گنگ است.

۴. ثابت کنید $(۱۶-۲\sqrt{۱۵})/۴$ گنگ است.

۵. ثابت کنید $\sqrt[۳]{۶}$ گنگ است.

۶. ثابت کنید $\frac{۱}{۳}(۲\sqrt[۳]{۶}+۷)$ گنگ است.

۷. ثابت کنیدکه اگردرقضیهٔ ۳.۴، عبارت «فرض کنید a/b به‌ساده‌ترین صورت خود باشد» حذف شود، قضیه به‌حکم نادرستی تبدیل می‌شود.

۴.۴ چند مثال دیگر

درفصل ۳، باروشی‌که دررده نسبتاً وسیعی ازعددها به‌کار می‌رود، ثابت‌کردیم که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گنگ است. بااین وجود، به کمك نتیجهٔ ۱ می‌توان ردهٔ وسیعتری از آن را هم بررسی کرد.

مجدداً $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ راموردبحث‌قرارمی‌دهیم. اگربنویسیم $x=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$، آن‌گاه داریم

$$x-\sqrt{۲}=\sqrt{۳}$$

با مجذور کردن دوطرف به‌دست می‌آوریم

$$x^۲-۲x\sqrt{۲}+۲=۳$$

و با مرتب کردن جمله‌ها داریم

$$x^{۲}-۱=۲x\sqrt{۲}$$

اگرمجدداً این عبارت را مجذور کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$x^{۴}-۲x^{۲}+۱=۸x^{۲}$$

یا

$$x^{۴}-۱۰x^{۲}+۱=۰ \qquad (۵)$$

از روشی که طی آن معادلهٔ (۵) ساخته شده است برمی‌آید که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ یك ریشهٔ آن است. حال، بااستفاده از نتیجهٔ ۱ نشان می‌دهیم که معادلهٔ (۵) ریشهٔ گویا ندارد وازاین نکته درمی‌یابیم که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گنگ است.

چنانچه نتیجهٔ ۱ رادر مورد معادلهٔ (۵) به‌کار ببریم درمی‌یابیم که اگراین معادله ریشه‌های گویایی داشته‌باشد، آنها باید عددهای صحیحی باشند که ۱ را می‌شمارند. ولی تنها مقسوم علیه‌های ۱ عبارت‌اند از ۱+ و ۱−، که هیچ کدام ریشهٔ $x^{۴}-۱۰x^{۲}+۱=۰$ نیستند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ (۵) ریشهٔ گویا ندارد و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گنگ است.

راه دیگررسیدن به‌همین نتیجه این‌است: به‌جای آزمایش اینکه ۱+ و ۱− ریشه‌های معادلهٔ (۵) هستند یا خیر، ممکن است به‌صورت زیر استدلال کنیم. حتی اگر ۱+ یا ۱−، یا هر دو، ریشه‌های معادلهٔ (۵) باشند، می‌توانیم ملاحظه کنیم که ریشهٔ $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ با ۱+ و ۱− متفاوت است، مثلاً می‌توانیم استدلال کنیم که هم $\sqrt{۲}$ و هم $\sqrt{۳}$ از ۱ بزرگترند، بنابراین مجموع آنها خیلی بزرگتر از آن است که مساوی ۱+ یا ۱− باشد. از این‌رو صرفنظر از اینکه ۱+ یا ۱− ریشه‌های واقعی باشند یا نباشند، $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ درزمرهٔ ریشه‌های گویای ممکن برای معادلهٔ (۵) نیست. این، می‌رساند که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گنگ است.

مثال • ثابت کنید که $\sqrt[۳]{۲}-\sqrt{۳}$ گنگ است.

حل . بانوشتن $x=\sqrt[۳]{۲}-\sqrt{۳}$، می‌بینیم که

$$x+\sqrt{۳}=\sqrt[۳]{۲}$$

حال، با به‌توان سوم رساندن دوطرف، داریم

$$x^3+3\sqrt{3}x^2+9x+3\sqrt{3}=2$$

هرگاه جمله‌ها را مرتب کنیم

$$x^3+9x-2=-3\sqrt{3}(x^2+1)$$

با مجذور کردن

$$x^6+18x^4-4x^3+81x^2-36x+4=27(x^4+2x^2+1)$$

یا

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0$$

این معادله طوری ساخته شده است که $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$ یك ریشهٔ آن است. ولی تنها ریشه‌های گویای ممکن برای این معادله عددهای صحیحی هستند که مقسوم‌علیه‌های -23 باشند. از این رو تنها ریشه‌های گویای ممکن عبارت‌اند از $+1$، -1، $+23$ و -23. ولی همچنان که جایگزینی مستقیم نشان می‌دهد، هیچ یك از اینها ریشهٔ معادله نیستند:

$+1$: $\quad 1^6-9(1)^4-4(1)^3+27(1)^2-36(1)-23=0$ (نادرست!)

-1: $(-1)^6-9(-1)^4-4(-1)^3+27(-1)^2-36(-1)-23=0$
(نادرست!)

23: $\quad (23)^6-9(23)^4-4(23)^3+27(23)^2-36(23)-23=0$
(نادرست، زیرا مثلاً $(23)^6$ خیلی بزرگتر از آن است که به‌وسیلهٔ جمله‌های دیگر حذف شود!)

-23: $(-23)^6-9(-23)^4-4(-23)^3+27(-23)^2$
$-36(-23)-23=0$ (نادرست!)

ازاین‌رو، هیچ ریشهٔ گویایی برای معادله وجود ندارد وبنابراین $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$ گنگ است.

مانند مثال قبل، به این آزمایش نیازی نیست که $+1$، -1، $+23$ و -23 ریشه‌های معادله هستند یا خیر. در عوض می‌توانیم استدلال کنیم که $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$ با

هر یك ازچهار ریشهٔ گویای‌ممکن،متفاوت‌است.ملاحظه می کنیم که $\sqrt[3]{۲}$ درنزدیکیهای ۲ر۱ و $\sqrt{۳}$ درنزدیکیهای ۷ر۱ است. در نتیجه، $\sqrt{۳}-\sqrt[3]{۲}$ تقریباً برابر ۵ر۰ — است وازاین‌رو با هیچ‌یك از مقادیر ۱+، ۱—، ۲۳+ یا ۲۳ — برابر نیست. این نکته می‌رساند که $\sqrt{۳}-\sqrt[3]{۲}$ گنگ است، زیرا بـا همهٔ ریشه‌های گویای ممکن متفاوت است.

مجموعه مسأله‌های ۱۴

۱. ثابت کنید $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ گنگ است.

۲. ثابت کنید $\sqrt{۲}+\sqrt[3]{۳}$ گنگ است.

۳. ثابت کنید $\sqrt{۳}-\sqrt[3]{۵}$ گنگ است.

۵.۴ خلاصه

دراین فصل با به‌اصطلاح «گنگ بودن از نظر جبری» سروکار داشتیم. دیدیم کـه بینهایت عدد گنگ وجود دارد و راههای ساختن بعضی‌ازآنها را، باکمك یك عدد گنگ مفروض، مطالعه کردیم.

همچنین روش زیررا برای آزمون اینکه عدد مفروضی چون k گنگ است یا نه پیداکردیم.

نخست به‌دنبال یك معادلهٔ چندجمله‌ای، چون

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$$

می گردیم، که مقدار $x=k$ درآن صدق کند. (اگـر نتوانیم چنین معادله‌ای را بیابیم، نمی‌توانیم این روش را به‌کار ببریم.)

آن‌گاه، قضیهٔ ۳.۴، یا اگر $c_n=1$ باشد، نتیجهٔ ۱، را به‌کار می‌بریم. غالباً واضح است که معادله اصلاً ریشهٔ گویایی ندارد. آن‌گـاه به‌روشنی، k یك ریشهٔ گنگ است. بعضی وقتها، بایك نظراجمالی می بینیم که k ازتمامی نامزدهای ممکن بـرای ریشه‌هـای گـویای معادله متفاوت است و بنابـراین، گنگ بودن k را می‌توانیم نتیجه بگیریم. یا با جایگزینی مستقیم همهٔ نامزدها، آن عددهای گویایی را برمی گزینیم که ریشه‌های واقعی معادله باشند.آن‌گاه برای‌اثبات اینکه k گنگ

است باید نشان دهیم که k با همهٔ ریشه‌های گویا متفاوت است.

درفصل بعد، از روشهای این‌فصل برای اثبات گنگ بودن بسیاری ازعددهای مثلثاتی استفاده خواهیم کرد، و قضیهٔ بنیادی حساب را برای اثبات گنگ بودن بسیاری ازعددهای لگاریتمی به‌کار می‌بریم. به‌علاوه، درخواهیم‌یافت‌که عددهای گنگی وجود دارندکه ریشه‌های معادله‌های جبری نیستند.

۵

عددهای مثلثاتی ولگاریتمی

بدون شك خواننده با تابعهای مثلثاتی، ازقبیل $\sin\theta$ و $\cos\theta$ آشناست.* و می‌داند که‌هریك ازاین تابعها به‌هر زاویهٔ θ یك‌عدد حقیقی نظیر می‌سازد. خواننده احتمالاً با تابع لگاریتمی $\log x$ هم که یك عدد حقیقی را با عدد حقیقی ومثبت x نظیر می‌سازد،آشنایی دارد.

اگر θ برحسب درجه و گویا باشد ، آن‌گاه تابعهای مثلثاتی θ، مگر درچند مورد، گنگ هستند؛ همچنین‌اگر x گویا باشد، آن‌گاه $\log x$ هم‌مگر درچند حالت خاص ، گنگ است.**

اگرچه دراین‌فصل بررسی‌ما به‌برخی‌مثالهای ساده محدود می‌شود، ولی نتیجهٔ بسیارمهمتری، به‌روشی پیشرفته‌تر ومشکلتر،درپیوست ت عرضه می‌گردد.

۱.۵ مقادیر گنگ تابعهای مثلثاتی

از راه به‌کاربردن روشهای فصل قبل وچند اتحاد مثلثاتی اساسی، نشان خواهیم داد

---

* خوانندگانی که تاکنون مبحث مثلثات یا لگاریتم را مطالعه نکرده‌اند ، می‌توانند مقدمه‌ای دراین‌زمینه‌ها را درکتاب زیرمطالعه کنند؛

Plane Trigonometry, by A.L. Nelson, K.W. Folley, Harper,1956,

** جدولهایی که عددها را به‌صورت اعشاری فهرست می‌کنند باید رقمهای هرعدد را به تعدادمعینی‌محدود کنند. ازاین‌رو درچنین‌جدولهایی‌عددهای گنگ‌با تقریب ضبط‌می‌شوند.

که برای بسیاری‌از مقادیر زاویهٔ θ، مقادیر متناظر تابعهای مثلثاتی گنگ هستند.
به‌این‌منظور نخست فرمولهای مثلثاتی اساسی زیر را یادآوری می‌کنیم:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \tag{۱}$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \tag{۲}$$

اگر به‌جای A و B یك مقدار، فرضاً θ، را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\cos ۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta \tag{۳}$$

$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta \tag{۴}$$

حال، اگر در (۱)، ۲θ را جایگزین A و θ را جایگزین B کنیم، به‌دست‌می‌آوریم

$$\cos ۳\theta=\cos ۲\theta\cos\theta-\sin ۲\theta\sin\theta$$

با به‌کاربردن (۳) و (۴) و نیز اتحاد مصروف $\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$ ، داریم

$$\begin{aligned}\cos ۳\theta&=(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)\cos\theta-(۲\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\&=\cos^۳\theta-۳\sin^۲\theta\cos\theta\\&=\cos^۳\theta-۳(۱-\cos^۲\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

یا

$$\cos ۳\theta=۴\cos^۳\theta-۳\cos\theta. \tag{۵}$$

حال ، عدد $\cos ۲۰^\circ$ را در نظر بگیرید. به‌فرض $\theta=۲۰^\circ$ ، از (۵) نتیجه می‌شود

$$\cos ۶۰^\circ=۴\cos^۳ ۲۰^\circ-۳\cos ۲۰^\circ.$$

اگر x را به‌جای $\cos ۲۰^\circ$ قرار دهیم واز تساوی $\cos ۶۰^\circ=۱/۲$ استفاده‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}=۴x^۳-۳x$$

یا

$$۸x^۳-۶x-۱=۰ \tag{۶}$$

به‌دلیل نحوهٔ ایجاد معادلهٔ (۶) می‌دانیم که $\cos ۲۰^\circ$ یك ریشهٔ آن است. با به‌کار گرفتن قضیهٔ ۳.۴ برای معادلهٔ (۶)، می‌بینیم که تنها ریشه‌های گویای ممکن این معادله عبارت‌اند از ± ۱، $\pm ۱/۲$، $\pm ۱/۴$ و $\pm ۱/۸$. ولی هیچ‌یك ازاین ۸ امکان، همچنان‌که با قراردادن در معادلهٔ (۶) می‌توان دید، یك ریشهٔ واقعی نیست. ازاین‌رو نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ (۶) هیچ ریشهٔ گویا ندارد وبنابراین $\cos ۲۰^\circ$ یك عدد گنگ است.

بدون‌این‌که ریشه‌های گویای ممکن ± ۱، $\pm ۱/۲$، $\pm ۱/۴$، و $\pm ۱/۸$ را آزمایش‌کردکه آیا ریشه‌های واقعی معادلهٔ (۶) هستند یا نه، نیزمی‌توان این نتیجه را به‌دست‌آورد. کافی است نشان‌داده شودکه $\cos ۲۰^\circ$ باهریك ازاین هشت مقدار متفاوت است. این کار را می‌توان از راه ملاحظهٔ مقدار ارائه شده برای $\cos ۲۰^\circ$ دریك جدول تابعهای مثلثاتی انجام داد. (البته چنین جدولی تنها مقدار تقریبی را ارائه می‌کند.) یا می‌توان ملاحظه کرد که مقدار $\cos ۲۰^\circ$ بین مقادیر $\cos ۰^\circ$ و $\cos ۳۰^\circ$ قرار دارد و تابع کسینوس به ازای این مقادیر یك تابع نزولی است. ازاین راه درمی‌یابیم که مقدار $\cos ۲۰^\circ$ بین ۱ و $\sqrt{۳}/۲$ یعنی بین ۱ و ۰٫۸ واقع است و درنتیجه $\cos ۲۰^\circ$ نمی‌تواند با هیچ یك از ریشه‌های گویای ممکن معادلهٔ (۶) مساوی باشد. بنابراین، $\cos ۲۰^\circ$ یك عدد گنگ است.

مثال. ثابت‌کنید $\sin ۱۰^\circ$ گنگ است.

راه حل نخست. یك راه حل این مسأله استفاده از اتحاد مثلثاتی مربوط به $\sin ۳\theta$ است.

$$\sin ۳\theta = ۳\sin\theta - ۴\sin^۳\theta, \qquad (۷)$$

که می‌توان آن را از (۲)، به‌همان روشی‌که (۵) از (۱) حاصل‌شد، به‌دست آورد. با قراردادن ۱۰° به‌جای θ در (۷) واستفاده ازتساوی $\sin ۳۰^\circ = ۱/۲$، داریم

$$\frac{۱}{۲} = ۳\sin ۱۰^\circ - ۴\sin^۳ ۱۰^\circ$$

وچون x را به‌جای $\sin ۱۰^\circ$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲} = ۳x - ۴x^۳, \qquad ۸x^۳ - ۶x + ۱ = ۰$$

حال، به‌همان‌روش که درمورد معادلهٔ(۶) به‌کار رفت، به‌سادگی معلوم می‌شود که‌معادلهٔ $۸x^۳-۶x+۱=۰$ هیچ ریشهٔ گویا ندارد. ازاین‌رو $\sin ۱۰^\circ$ گنگ است.

راه‌حل دوم. معادلهٔ (۳) دوصورت دیگرهم دارد

$$\cos ۲\theta = ۱-۲\sin^۲\theta, \qquad \cos ۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱ \tag{۸}$$

که هردو را می‌توان با به‌کاربردن اتحاد اساسی

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$

از(۳) به‌دست آورد. اگردرصورت دوم(۸) مقدار ۱۰° رابه‌جای θ قراردهیم، داریم

$$\cos ۲۰^\circ = ۱-۲\sin^۲ ۱۰^\circ \tag{۹}$$

حال، فرض کنید که $\sin ۱۰^\circ$ گویا باشد، آن‌گاه، هم $\sin^۲ ۱۰^\circ$ وهم $۱-۲\sin^۲ ۱۰^\circ$ گویا هستند. اما همان‌طور که قبلاً ثابت شده‌است، $\cos ۲۰^\circ$ گنگ است. ازاین‌رو یك تناقض داریم و درنتیجه $\sin ۱۰^\circ$ گنگ است.

مجموعه مسأله‌های ۱۵

درحل این‌مسأله‌ها (هرجاکه مفید باشد) ازنتیجه‌های به‌دست‌آمده چه درمتن‌وچه در خود مسأله‌ها استفاده کنید.

۱. ثابت کنید که عددهای زیر گنگ هستند:

(الف) $\cos ۴۰^\circ$، (ب) $\sin ۲۰^\circ$، (پ) $\cos ۱۰^\circ$، (ت) $\sin ۵۰^\circ$

۲. اتحاد (۷) را ثابت کنید.

۳. (الف) اتحاد زیررا ثابت کنید: $\cos ۵\theta = ۱۶\cos^۵\theta - ۲۰\cos^۳\theta + ۵\cos\theta$

(ب) ثابت کنید که $\cos ۱۲^\circ$ گنگ است.

۴. کدامیك ازمقادیر زیرگویا هستند؟

(الف) $\sin ۰^\circ$	(ت) $\sin ۳۰^\circ$	(چ) $\sin ۴۵^\circ$	(د) $\sin ۶۰^\circ$
(ب) $\cos ۰^\circ$	(ث) $\cos ۳۰^\circ$	(ح) $\cos ۴۵^\circ$	(ذ) $\cos ۶۰^\circ$
(پ) $\tan ۰^\circ$	(ج) $\tan ۳۰^\circ$	(خ) $\tan ۴۵^\circ$	(ر) $\tan ۶۰^\circ$

۲۰۵ یک شیوهٔ زنجیره‌ای

روشهای به‌کار گرفته شده در بخش ۱۰۵ را می‌توان بـرای اثبات گنگ بـودن تابعهای مثلثاتی هر زاویه‌ای که عدد درستی از درجه، دقیقه وثانیه باشد، مگر در چند مورد استثنایی و واضـح، تعمیم داد. منظور زاویه‌هایی نظیـر $14° 41' 33''$ است. برای زاویه‌های $0°$، $30°$، $45°$، $60°$، ونیزهر زاویه‌ای که از اضافه‌کردن مضرب‌درستی از $90°$ به‌یکی ازاین‌چهار زاویه به‌دست‌می‌آید، باید استثنا قائل شد. این بدین معنی نیست که مثلاً همهٔ تابعهای مثلثاتی $30°$ گویا هستند،ولی حداقل یك تابع مثلثاتی $30°$ گویاست.

این حکمها را در عمومی‌ترین حالتها ثابت نخواهیم کرد، زیرا معادله‌های حاصل از عددهایی نظیر $\cos 14° 41' 13''$، پیچیده‌ترازآن هستند که درحیطهٔ کار ما قرارگیرند. با این حال، اصل ساده‌ای وجود دارد که مقدار زیادی ما را به‌پیش می‌برد، وآن این است:

اگر θ زاویه‌ای باشدکه $\cos 2\theta$ گنگ باشد، آن‌گاه $\cos\theta$، $\sin\theta$ و $\tan\theta$ نیزگنگ هستند.

برای اثبات این مطلب، نخست معادلهٔ (۸) را به‌کارمی‌بریم. اگر $\cos\theta$ گویا باشد، آن‌گاه $\cos^2\theta$ و $2\cos^2\theta - 1$ نیز گویا خواهد بود. ولی $2\cos^2\theta - 1$ برابر $\cos 2\theta$ وگنگ است.

همچنین اگر $\sin\theta$ گویا باشد، آن گاه $\sin^2\theta$وبنابراین $1 - 2\sin^2\theta$ گویا خواهدبود. ولی این عبارت مجدداً برابر $\cos 2\theta$ است.

سرانجام، اگر $\tan\theta$ گویا باشد،آن گاه $\tan^2\theta$ گویاخواهد بود، ومی‌توانیم اتحادمثلثاتی معروف‌را به‌کارببریم و ببینیم که$\cos^2\theta$ باید گویا باشد. ولی بازازمعادلهٔ

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

(۸) نتیجه‌می‌شودکه $\cos 2\theta$ گویاست وبنابراین یك تناقض داریم. ازاین‌رو $\tan\theta$ بایدگنگ باشد.

با استفادهٔ مکرر از اصل بالا، می‌توان گنگ بـودن بینهایت عدد مثلثاتی را ثابت‌کرد. مثلاً ازگنگ بودن $\cos 20°$ نتیجه می‌شودکه تابعهای زیر گنگ‌هستند:

$\cos 10°$	$\sin 10°$	$\tan 10°$
$\cos 5°$	$\sin 5°$	$\tan 5°$

$\tan ۲^\circ ۳۰'$	$\sin ۲^\circ ۳۰'$	$\cos ۲^\circ ۳۰'$
$\tan ۱^\circ ۱۵'$	$\sin ۱^\circ ۱۵'$	$\cos ۱^\circ ۱۵'$
$\tan ۳۷' ۳۰''$	$\sin ۳۷' ۳۰''$	$\cos ۳۷' ۳۰''$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

مجموعه مسأله‌های ۱۶

۱. ثابت کنید عددهای زیر گنگ هستند

(الف)	$\cos ۱۵^\circ$	$\sin ۱۵^\circ$	$\tan ۱۵^\circ$
(ب)	$\cos ۷^\circ ۳۰'$	$\sin ۷^\circ ۳۰'$	$\tan ۷^\circ ۳۰'$
(پ)	$\cos ۲۲^\circ ۳۰'$	$\sin ۲۲^\circ ۳۰'$	$\tan ۲۲^\circ ۳۰'$
(ت)*	$\cos ۳۵^\circ$	$\sin ۳۵^\circ$	$\tan ۳۵^\circ$
(ث)*	$\cos ۲۵^\circ$	$\sin ۲۵^\circ$	$\tan ۲۵^\circ$

۲. ثابت کنید که $۱۴^\circ ۴۱' ۱۳''$ مساوی است با حاصلضرب یك عدد گویا در ۹۰°، یعنی ثابت کنید که $۱۴^\circ ۴۱' ۱۳''$ مضرب گویایی از ۹۰° است.

۳. (الف) ثابت کنید اگر $\cos \theta$ گویا باشد، آن‌گاه $\cos ۳\theta$ نیز گویاست.
(ب) آیا عبارت (الف) معادل است با اثبات اینکه اگر $\cos ۳\theta$ گنگ باشد، آن‌گاه $\cos\theta$ گنگ است؟

۴. ثابت کنید که اگر $\sin ۳\theta$ گنگ باشد، آن‌گاه $\sin\theta$ گنگ است.

۳.۵ مقادیر گنگ لگاریتم معمولی

همهٔ لگاریتمهای مورد بحث در این کتاب، در پایهٔ ۱۰ می‌باشند، بنابراین، نیازی به‌ذکر این پایه درهیچ مورد نخواهد بود. یادآوری می‌کنیم که بنا به‌تعریف، لگاریتم عدد حقیقی مثبت مفروضی چون y، در پایهٔ ۱۰، عددی مثل k است که $۱۰^k = y$. بنابراین، برای هر $y > ۰$، دوعبارت

$$\log y = k$$

و

$$۱۰^k = y$$

معادل هستند . همهٔ اثباتها بر پایهٔ قضیهٔ بنیادی حساب بیان می‌شوند ؛ این قضیه در پیوست ب ثابت می‌شود وحاکی از این است که هرعدد صحیح یك تجزیهٔ یکتا به عاملهای اول دارد.

مثال ۱. ثابت کنید $\log ۲$ گنگ است.

حل. برعکس، فرض کنید $\log ۲ = a/b$، که درآن a و b عددهای صحیح مثبت باشند. منطقی است که a و b را مثبت بگیرید ، زیرا $\log ۲$ مثبت است. معنی این تساوی این است که

$$۲ = ۱۰^{a/b}$$

چون دوطرف را به‌توان b برسانید، به‌دست می‌آورید

$$۲^b = ۱۰^a = ۲^a \times ۵^a$$

که یك تساوی بین عددهای صحیح‌مثبت است،بنابراین می‌توانید قضیهٔ بنیادی‌حساب را به‌کار گیرید. در واقع قضیهٔ بنیادی نشان می‌دهدکه این معادله نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا ۲^b، صرفنظر از مقدار b، عدد صحیحی است‌که بر ۵ بخش‌پذیر نیست. درصورتی‌که چون a عدد صحیح‌مثبتی است، $۲^a۵^a$ بر ۵ بخش‌پذیراست. ازاین‌رو $\log ۲$ گنگ است.

مثال ۲. ثابت کنید $\log ۲۱$ گنگ است.

حل. برعکس، فرض کنیدکه عددهای‌صحیح‌مثبتی، چون a و b، وجود داشته باشند، به‌طوری که

$$\log ۲۱ = \frac{a}{b} \qquad \text{یا} \qquad ۲۱ = ۱۰^{a/b}.$$

دوطرف را به‌توان b برسانید تا

$$۲۱^b = ۱۰^a$$

به‌دست‌آید. ولی، این تساوی‌نمی‌تواند درست باشد، زیرا ۲۱^b عاملهای اول ۳ و ۷ را دارد، درحالی‌که ۱۰^a عاملهای اول ۲ و ۵ را داراست.

مثال ۳. فرض کنید که c و d دو عدد صحیح غیرمنفی متفاوت باشند. ثابت کنید که $\log(۲^c۵^d)$ گنگ است.

حل. مجدداً یك استدلال غیرمستقیم به‌کار ببرید. بنا بر آنچه دربارهٔ c و d فرض شد نتیجه می‌شود که $۲^c۵^d$ از ۱ بزرگتر است، بنابراین $\log(۲^c۵^d)$ مثبت است. فرض کنید که

$$\log(۲^c۵^d)=\frac{a}{b}$$

که در آن a و b عددهای صحیح مثبت هستند. پس بنا به‌تعریف لگاریتم،

$$۲^c۵^d=۱۰^{a/b}$$

چون دوطرف را به‌توان b برسانید بدست می‌آورید

$$۲^{bc}۵^{bd}=۱۰^a=۲^a۵^a$$

بنا به‌قضیهٔ بنیادی حساب، این تساوی تنها وقتی برقراراست که $bc=a$ و $bd=a$، یعنی وقتی که $bc=bd$. ولی ازآنجا که c و d دو عدد صحیح متفاوت هستند bc و bd نیزمتفاوت‌اند. ازاین‌رو $\log(۲^c۵^d)$ گنگ است.

مجموعه مسأله‌های ۱۷

۱. ثابت کنید $\log ۳/۲$ گنگ است.

۲. ثابت کنید $\log ۱۵$ گنگ است.

۳. ثابت کنید $\log ۵+\log ۳$ گنگ است.

*۴. ثابت کنید عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰۰ را می‌توان به سه ردهٔ مجزای متمایز تقسیم نمود؛

ردهٔ A: عددهای صحیح ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰.

ردهٔ B: عددهای صحیح به‌صورت $۲^c۵^d$، که درآن c و d نابرابرهستند.

ردهٔ C: عددهای صحیح بخش‌پذیر برحداقل یك عدد اول فرد p، که مساوی ۵ نباشد؛

و نیز ثابت کنید که $\log n$ گویاست اگر و فقط اگر n در ردهٔ A باشد.

۴.۵ عددهای متعالی

علاوه بر رده‌بندی عددهای حقیقی به گویا و گنگ، رده‌بندی دیگری هم به جبری و متعالی وجود دارد. اگر یك‌عدد حقیقی درمعادله‌ای باضریبهای صحیح به‌صورت

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

صدق کند، آن را یك عدد جبری می‌نامند. اگریك‌عدد حقیقی درچنین معادله‌ای‌صدق نکند، آن را یك عدد متعالی می‌نامند. (عددهای مختلط هم درست به‌همین‌روش به عددهای جبری ومتعالی تقسیم می‌شوند، ولـی ما بحث خود را به عددهای حقیقی محدود می‌کنیم.)

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که هرعددگویا یك‌عدد جبری است. مثلاً، ۵/۷ در معادلهٔ $7x - 5 = 0$ صدق می‌کند، واین معادله ازنوع تعیین شده است. در حالت کلیتر، هرعددگویای a/b در معادلهٔ $bx - a = 0$ صدق می‌کند، و بنابراین، یك عدد جبری است.

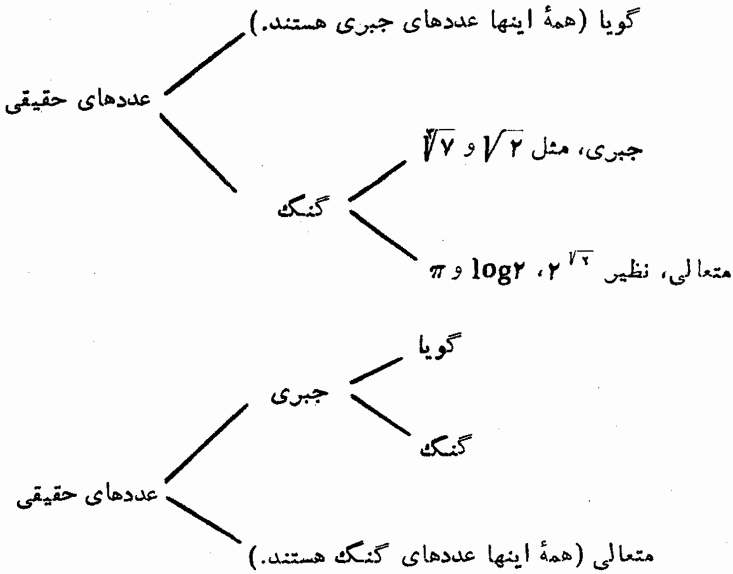
از آنجا که هرعدد گویا جبری است نتیجه می‌گیریم که هر عدد غیرجبری غیرگویاست (به بخش ۳.۲، دوازده راه بیان، اگر A، آن‌گاه B، صورت [۱۲] رجوع کنید.) یا به‌بیان‌مرسوم‌تر، هرعدد متعالی گنگ است.این مطلب را می‌توانیم به‌صورت نموداری مانند شکل ۱۵ نشان دهیم.

دراین شکل، $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{7}$ را به‌عنوان مثالهایی از عددهای جبری آورده‌ایم. این عددها ازآن جهت جبری هستند که به‌ترتیب درمعادله‌های جبری

$$x^3 - 7 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 - 2 = 0$$

صدق می‌کنند. ازطرف دیگر، عددهای $\log 2$ و π به‌عنوان عددهای متعالی قلمداد شده‌اند. (عدد π بامقدار ۳٫۱۴۱۵۹ . . .، نسبت‌طول محیط به‌قطر هردایره‌است.) در این‌جا نمی‌توانیم ثابت کنیم که این عددها متعالی هستند، زیرا چنین اثباتهایی متضمن روشهایی است که ازآنچه ما به‌کارمی‌بریم خیلی عمیقترند. به‌متعالی بودن π درسال ۱۸۸۲ پی بردند ولی‌متعالی بودن $2^{\sqrt{2}}$ و $\log 2$ را خیلی جدیدترشناسایی کردند و به سال ۱۹۳۴ مربوط می‌شود. وقتی در سال ۱۹۰۰، ریاضیدان بزرگ دیویدهیلبرت[1]، فهرست مشهوری از ۲۳ مسأله‌ای‌را عرضه‌کردکه به‌نظرش‌سؤالهای ریاضی حل نشدهٔ برجسته‌ای بودند، ازعدد $2^{\sqrt{2}}$ هم به‌عنوان یك مثال ویژه نام‌برده

1. D.Hilbert



شکل ۱۵

بود. به‌ویژه، مسألهٔ هفتم هیلبرت تصمیم‌گیری دراین‌باره بود که وقتی α و β عددهای جبری هستند آیا α^{β} جبری است یا متعالی. (حالتهای $\alpha = ۰$، $\alpha = ۱$ و حالتی که β گویا باشد، مستثنی شده بودند، زیرا دراین موارد، اثبات اینکه α^{β} جبری است، نسبتاً ساده است.) در سال ۱۹۳۴ توسط ا. گلفند[1] و جداگانه توسط ث. شنیدر[2]، قطعی شد که α^{β} متعالی است. البته متعالی بودن $۲^{\sqrt{۲}}$ حالت خاصی از این نتیجهٔ کلی است. نتیجهٔ ویژهٔ دیگر، متعالی بودن $\log ۲$ است، زیرا اگر $\log ۲$ را با β و ۱۰ را با α نشان دهیم، آن‌گاه بنابه‌تعریف لگاریتم معمولی داریم

$$۱۰^{\log ۲} = \alpha^{\beta} = ۲$$

اگر β جبری و گنگ باشد، آن‌گاه بنابه قضیهٔ گلفند-شنیدر، ۲ باید متعالی باشد. ولی، چنین چیزی درست نیست، بنابراین $\beta = \log ۲$ یا گویاست یا متعالی. دیده‌ایم که $\log ۲$ گویا نیست، ازاین‌رو $\log ۲$ متعالی است.

قضیهٔ گلفند-شنیدر درحالت کلیتر ثابت می‌کند که اگر r گویا و $\log r$ گنگ

---

1. A. Gelfond 2. Th. Schneider

باشد، آن گاه $\log r$ متعالی است. نظر به آنچه هم اکنون در بخش ۳.۵ ثابت کردیم (مسألهٔ ۴ مجموعهٔ ۱۷ را هم ببینید)، می‌توان گفت که هر گاه r عدد گویای مثبتی، بجز موارد زیر، باشد، $\log r$ متعالی است:

$$\ldots, 10^{5}, 10^{4}, 10^{3}, 10^{2}, 10^{1}, 10^{0}, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$$

باید فراموش نکنیم که همهٔ لگاریتمهای ذکر شده در این کتاب لگاریتم معمولی، یعنی لگاریتم در پایهٔ ۱۰ هستند.

بنابراین، اگر n عدد صحیح بین ۱ و ۱۰۰۰ باشد، بجز $n=1$، $n=10$، $n=100$ و $n=1000$، آن گاه عددهای $\log n$ متعالی‌اند. از طرف دیگر، عددهای مثلثاتی نظیر $\cos 20^\circ$ که در اوایل این فصل گنگ بودنشان ثابت شد، عددهای جبری هستند. نتیجهٔ کلی این است: فرض کنید r یك عدد گویا باشد و فرض کنید $(90r)^\circ$ زاویه‌ای را نشان دهد که از ضرب کردن 90° در r به دست آمده است، آن گاه

$$\sin(90r)^\circ \text{، } \cos(90r)^\circ \quad \text{و} \quad \tan(90r)^\circ$$

عددهای جبری هستند. (تنها قیدی که در این حکم باید گنجانیده شود مربوط به $\tan(90r)^\circ$ است، در این مورد عدد گویای r باید به مقادیری محدود شود که این تابع مثلثاتی، به عنوان یك عدد حقیقی، وجود داشته باشد. مثلاً، $r=1$ پذیرفته نیست، زیرا، $\tan 90^\circ$ یك عدد حقیقی نیست.)

در بالا گفتیم که π یك عدد متعالی است. این، می‌رساند که π یك عدد گنگ است، و اگرچه اثبات گنگ بودن π از اثبات متعالی بودنش ساده‌تر است، حتی همین هم از حد این کتاب خارج است.

مجموعه مسأله‌های ۱۸

۱. ثابت کنید که عددهای زیر جبری هستند:

(الف) $\sqrt{3}$، (ب) $\sqrt[3]{5}$، (پ) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$، (ت) $\cos 20^\circ$، (ث) $\sin 10^\circ$

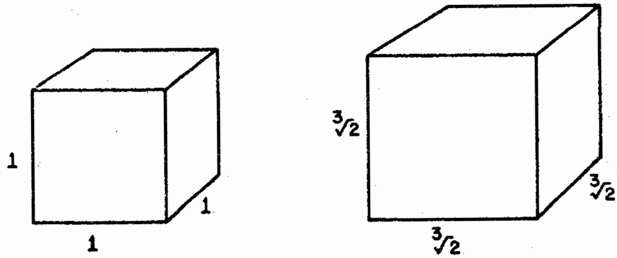
۲*. فرض کنید π یك عدد متعالی باشد، ثابت کنید 2π نیز یك عدد متعالی است.

۵.۵ سه مسألهٔ ترسیمی مشهور

نظریهٔ عددهای جبری و متعالی، ریاضیدانان را قادر ساخته‌است تا سه‌مسألهٔ معروف هندسه را که از پیشینیان به یادگار مانده‌است سامان بخشند. این سه مسأله که به

«تضعیف مکعب» ، «تثلیث زاویه» و «تربیع دایره» شهرت دارند متضمن ترسیماتی هستند که، تنها به‌روشهای خط‌کش و پرگاری هندسهٔ اقلیدسی باید انجام گیرند؛

(۱) «تضعیف مکعب» یا «دوبرابر کردن مکعب»، به‌معنی ساختن مکعبی است که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد. اگرچه یك مکعب شکلی است مربوط به هندسهٔ فضایی، اما این مسأله در واقع به هندسهٔ مسطحه مربوط می‌شود. چراکه اگر یال مکعب مفروض را به عنوان واحد طول اختیارکنیم (شکل ۱۶)،



شکل ۱۶

مسأله منجر می‌شود به ساختن خطی به طول $\sqrt[3]{2}$ ، زیرا، این‌طول، طول یال مکعبی خواهدبود که حجم آن دوبرابر حجم مکعب مفروض است.

(۲) «تثلیث یك زاویه» ، به معنی یافتن روشی است که فقط با استفاده از ابزارهای تعیین‌شده بتوان هر زاویه‌ای را ثلث کرد. زاویه‌های ویژه‌ای نظیر ۴۵° و ۹۰° وجود دارندکه می‌توان آنها را با خط‌کش و پرگار ثلث‌کرد ولی زاویهٔ به‌اصطلاح«کلی» را نمی‌توان با ابزارهای‌تعیین شده به‌سه‌قسمت‌مساوی تقسیم نمود.

(۳) «تربیع دایره»، به‌معنی رسم مربعی‌است که درمساحت با دایرهٔ مفروضی برابر باشد، یا اینکه رسم دایره‌ای است که ازنظر مساحت با مربع مفروضی برابر باشد.

اکنون برما معلوم‌شده‌است که این سه‌ترسیم غیرممکن هستند، یعنی انجام‌دادن آنها با روشهای خط‌کش و پرگاری تعیین شده در هندسهٔ اقلیدسی ، عملی نیست. غیرحرفه‌ایهای زیادی، بدون‌اینکه بدانند کوششان بیهوده است، هنوز هم روی‌این مسأله‌ها کارمی‌کنند. اگرچه اینان می‌دانندکه هیچ ریاضیدانی تاکنون قادر به‌انجام دادن این ترسیمها نبوده‌است، ولی ظاهراً آنان مطلع نیستندکه غیرممکن‌بودن این ترسیمها به‌اثبات رسیده است. چیزی‌که گهگاه یك ریاضیدان غیرحرفه‌ای به‌آن دست می‌یابد راه‌حل تقریبی یکی از این مسأله‌هاست و نه هرگز یك راه‌حل دقیق. تفاوت روشن است: مثلاً، مسألهٔ تضعیف مکعب جورکردن ترسیمی است که با

وسایل رسم، خطی نه به طول تقریباً $\sqrt[3]{2}$ ، بلکه خطی به طول دقیقاً $\sqrt[3]{2}$ را به‌دست دهد. برای مثال، حتی با ترسیم خطی به‌طول $10(8-\sqrt{62})$ مسأله حل نمی‌شود، با اینکه عددهای $10(8-\sqrt{62})$ و $\sqrt[3]{2}$ تا شش رقم اعشار مساوی هستند.

مایهٔ ویژهٔ سوء‌تعبیر درمورد مسألهٔ تثلیث‌زاویه مصداق دارد؛ اگر مدرج کردن خط‌کش مجاز باشد ثلث کردن هر زاویه‌ای ممکن است. بنابراین، ادعای ناممکن بودن تثلیث یك زاویه را در حالت کلی فقط با این توافق می‌توان پذیرفت که فرایندهای ترسیم مجاز شامل پرگار و خط‌کش غیرمدرج باشند.

اکنون، به‌دلیل آشفتگی قابل‌ملاحظه‌ای که این سه مسألهٔ کلاسیك را احاطه کرده است، به توضیح اجمالی در این باره می‌پردازیم که چگونه می‌توان ثابت کرد که این ترسیمها غیرممکن هستند. نظر به اینکه جزئیات مطلب نسبتاً فنی است نمی‌توانیم اثبات کاملی را ارائه کنیم. با این حال امیدواریم بتوانیم موضوع را موجه جلوه دهیم. اگر خواننده‌ای بخواهد موضوع را دنبال کند، بررسی کاملی از مسألهٔ تثلیث زاویه و تضعیف مکعب درکتاب ریاضیات چیست؟ تألیف ر.کورانت و ه.رابینز، چاپ دانشگاه آکسفورد، صفحه‌های ۱۲۷–۱۳۸، یافت می‌شود.[1] اثبات ناممکن بودن تربیع دایره خیلی مشکلتر از دو اثبات دیگر است.

اثبات اینکه این ترسیمها غیرممکن هستند چگونه میسر است؟ قدم نخست، درك این‌موضوع است‌که با مفروض‌بودن طول واحد، چه‌نوع طولهایی را می‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد. بدون‌اثبات بیان‌می‌کنیم(هرشخص‌آشنا با ترسیمات هندسی تشخیص خواهد داد که این ادعا موجه است) که از جمله طولهایی که می‌توان رسم نمود جذرهای متوالی عددهای گویاست، به عنوان مثال عددهای

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{1+\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}\ ,\ \sqrt{1+\sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}} \qquad (10)$$

همه جبری هستند. این چهارعدد، که در(۱۰) به‌عنوان مثال فهرست‌شده‌اند، به‌ترتیب ریشه‌های معادله‌های زیر هستند:

$$x^2-2=0 \qquad (11)$$

$$x^4-2x^2-1=0 \qquad (12)$$

$$x^8-20x^6+132x^4-320x^2+94=0 \qquad (13)$$

---

1. R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford University Press, pp.127–138.

$$x^{16}-8x^{14}+8x^{12}+64x^{10}-98x^{8}-184x^{6}+200x^{4}+224x^{2}-113=0 \qquad (14)$$

یکی از اینها، فرضاً (۱۳)، را انتخاب و آن را اثبات می‌کنیم. با

$$x=\sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

شروع می‌کنیم. با مجذورکردن داریم

$$x^{2}=5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

با جابه‌جا کردن یك جمله و مجذور نمودن مجدد به‌دست می‌آوریم

$$x^{2}-5=-3\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$x^{4}-10x^{2}+25=9+9\sqrt{2}$$

$$x^{4}-10x^{2}+16=9\sqrt{2}$$

مجذورکردن نهایی دو طرف، به (۱۳) ختم می‌شود.

حال، نه‌تنها عددهای (۱۰) ریشه‌های معادله‌های (۱۱) تا (۱۴) هستند، بلکه هیچ‌یك از این عددها ریشهٔ معادله‌ای با ضریبهای صحیح از درجهٔ پایین‌تر نیستند. مثلاً، عدد $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ را در نظر بگیرید. این عدد در معادلهٔ (۱۲) از درجهٔ ۴ صدق می‌کند، ولی درهیچ معادله‌ای با ضریبهای صحیح از درجهٔ ۳، ۲ یا ۱ صدق نمی‌کند. (این ادعا را ثابت نمی‌کنیم.) هرگاه یك عدد جبری ریشه‌ای ازیك معادلهٔ با ضریبهای صحیح از درجهٔ n باشد، ولی ریشه‌ای ازیك معادلهٔ با ضریبهای صحیح از درجهٔ کمتر نباشد، می‌گوییم که آن عدد یك عدد جبری از درجهٔ n است. بنا براین، عددهای (۱۰) به‌ترتیب عددهای جبری از درجهٔ ۲، ۴، ۸ و ۱۶ هستند. موضوع مربوط به طولهایی که می‌توان با روشهای هندسهٔ اقلیدسی ترسیم نمود، الهام‌بخش واقعیت اساسی زیر است:

قضیهٔ ترسیمات هندسی. با شروع از یك خط مستقیم به‌طول واحد، هرطولی را که بتوان به وسیلهٔ روشهای خط‌کش و پرگاری ترسیم کرد نمایانگر عددی جبری است از درجهٔ ۱، یا ۲، یا ۴، یا ۸، ... یعنی، به‌طورکلی عددی جبری است که درجهٔ آن توانی از ۲ است.

اگرخواننده این نتیجه را مسلم فرض کند، می‌توانیم نشان‌دهیم که چگونه‌این سه ترسیم مشهور غیر ممکن می‌شوند.*

با تضعیف یا دوبرابرکردن مکعب شروع می‌کنیم. همچنان‌که درموقع طرح مسأله دیدیم، این مسأله به ترسیم خطی به طول $\sqrt[3]{2}$ از طول واحد مفروضی منجر می‌شود. ولی آیا $\sqrt[3]{2}$ طولی قابل‌ترسیم‌است؟ این‌عدد درمعادلهٔ

$$x^3 - 2 = 0 \qquad (15)$$

صدق می‌کند، و این، می‌رساند که $\sqrt[3]{2}$ یك عدد جبری از درجهٔ ۳ است. حقیقتاً هم چنین‌است و برای اثبات آن تنها باید ثابت‌کنیم که $\sqrt[3]{2}$ درهیچ معادله‌ای باضریبهای صحیح از درجهٔ ۱ یا ۲ صدق نمی‌کند. اگرچه این‌کار مشکلی نیست‌ولی کمی‌مهارت می‌خواهد و اثبات آن را تا بخش بعد به تعویق می‌اندازیم.

از آنجا که $\sqrt[3]{2}$ یك عدد جبری از درجهٔ ۳است، بنابه قضیهٔ‌ترسیمات‌هندسی، که در بالا بیان‌شد، قابل ترسیم نیست. از این رو نتیجه می‌گیریم که تضعیف مکعب ناممکن است.

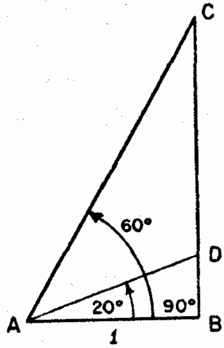
حال، مسألهٔ تثلیث زاویه را در نظر بگیرید. برای اثبات غیرممکن بودن آن کافی است نشان دهیم که به‌وسیلهٔ روشهای تعیین شده، زاویهٔ ویژه‌ای را نمی‌توان ثلث کرد. زاویهٔ ویژه‌ای راکه بر می‌گزینیم 60° است. ثلث‌کردن یك زاویهٔ 60° به معنی‌ترسیم‌یك زاویهٔ 20° است. این موضوع به‌ترسیم‌پاره‌خطی‌به طول $\cos 20^\circ$ از پاره‌خط مفروضی به طول ۱ منجر می‌شود. برای پی‌بردن به این نکته، مثلثی به قاعدهٔ ۱ و به‌زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ 60° و 90°، آنچنان‌که درشکل ۱۷ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. بنابراین مثلثی داریم با قاعدهٔ $AB = 1$، زاویهٔ $BAC = 60^\circ$ و زاویهٔ $ABC = 90^\circ$. فرض کنید روی‌خط BC نقطهٔ D چنان‌انتخاب شده‌باشدکه زاویهٔ $BAD = 20^\circ$. از درسهای مثلثات مقدماتی به یاد داریم که

$$AD = \frac{AD}{1} = \frac{AD}{AB} = \sec 20^\circ$$

بنابراین، ثلث‌کردن زاویهٔ 60° به ترسیم‌پاره خطی به طول $\sec 20^\circ$ منجرمی‌شود. ولی، این هم به ترسیم پاره‌خطی به طول $\cos 20^\circ$ برمی‌گردد، زیرا $\cos 20^\circ$ و

---

* خواننده به خاطر خواهد آورد (بخش ۳.۲، [۱۲] را ببینید) که این قضیه عبارت زیر رابیان‌می‌کند: عددهای جبری از درجهٔ m، که m توانی از ۲ نباشد، به‌وسیلهٔ‌خط‌کش و پرگار قابل ترسیم نیستند. عددهای متعالی نیز با این روش قابل ترسیم نمی‌باشند.



شکل ۱۷

$\sec 20^\circ$ معکوس هم هستند، و به‌خوبی می‌دانیم که اگر قطعه خط معینی قابل ترسیم باشد، آن‌گاه قطعهٔ با طول معکوس آن نیز قابل ترسیم است.

بنابراین، سؤال این است: آیا می‌توان از پاره خط مفروضی بــه طول ۱، پاره‌خطی به‌طول $\cos 20^\circ$ رسم نمود؟ ازمعادلهٔ (۶) می‌دانیم که $\cos 20^\circ$ ریشه‌ای از یك معادلهٔ مکعبی، یعنی معادلهٔ درجهٔ ۳ است. به علاوه می‌گوییم (بدون اثبات، زیرا اثبات آن کمی عمیق است) که $\cos 20^\circ$ در هیچ معادله‌ای با ضریبهای صحیح از درجهٔ ۱ یا درجهٔ ۲ صدق نمی‌کند. بنابراین $\cos 20^\circ$ هم‌مثل $\sqrt[3]{2}$، یك عددجبری ازدرجهٔ ۳است، و بدین ترتیب بنا به قضیهٔ ترسیمات هندسی، $\cos 20^\circ$ قابل ترسیم نیست. از این‌رو ثلث کردن زاویــهٔ 60° به وسیلهٔ روشهای خط کش و پرگاری غیرممکن است.

در پایان، مسألهٔ تربیع‌دایره را درنظر بگیرید. می‌توان شعاع دایرهٔ‌مفروضی را به عنوان واحد طول در نظر گرفت. با این واحد، مساحت دایره π واحد مربع است. مربعی به‌این‌اندازه، ضلعی به طول $\sqrt{\pi}$ خواهد داشت. بنابراین‌مسألهٔ تربیع دایره به‌ترسیم‌خطی به‌طول $\sqrt{\pi}$ ازواحد طول‌مفروضی منجر می‌گردد. حال، به‌خوبی می‌دانیم که بنا به نظریهٔ ترسیمات هندسی، از پاره خطهای به طول ۱ و a می‌توان پاره‌خطی به طول a^2 را رسم‌کرد. بنابراین اگر پاره‌خطی به طول $\sqrt{\pi}$ قابل ترسیم باشد، پاره‌خطی به طول π نیز قابل ترسیم است.

ولی در بخش قبل حکم‌کردیم‌که π یك عدد متعالی است، یعنی π یك عــدد جبری نیست . از این رو بنا به قضیهٔ ترسیمات هندسی ، رسم پاره‌خطی به طول π ممکن نیست. بنابراین، حل مسألهٔ «تربیع دایره» غیر ممکن است.

مجموعه مسأله‌های ۱۹

(مسأله‌های ۲ و ۳ برای دانش‌آموزانی‌است که از ترسیمات هندسی آگاهی‌دارند.)

۰۱ ثابت کنید که عددهای اول، دوم و چهارم در فهرست (۱۰) به ترتیب ریشه‌های معادله‌های (۱۱)، (۱۲) و (۱۴) هستند.

۰۲ پاره خطهایی به طول ۱ و به‌طول $\sin 20^\circ$ مفروض‌اند، ثابت کنید که پاره‌خطی به طول $\cos 20^\circ$ را می‌توان با روشهای خط‌کش و پرگاری ترسیم نمود.

۰۳ پاره خطهایی به طول ۱و به‌طول $\tan 20^\circ$ مفروض‌اند، ثابت کنید که پاره‌خطی به طول $\cos 20^\circ$ را می‌توان با روشهای خط‌کش و پرگاری ترسیم نمود.

۶.۵ تحلیل بیشتری در مورد $\sqrt[3]{2}$

در بخش قبل ادعا کردیم که $\sqrt[3]{2}$ یك عددجبری از درجهٔ ۳ است. یعنی $\sqrt[3]{2}$ یك ریشهٔ معادلهٔ $x^3 - 2 = 0$ است، ولی ریشهٔ هیچ معادلهٔ با ضریبهای صحیح از درجهٔ ۱ یا درجهٔ ۲ نیست. حال، این ادعا را ثابت می‌کنیم.

برای اثبات اینکه $\sqrt[3]{2}$ ریشهٔ هیچ معادلهٔ با ضریبهای صحیح از درجهٔ ۱ نیست، باید ثابت کنیم که عددهای صحیحی چون a و b، با a مخالف صفر، وجود ندارند به طوری که

$$a\sqrt[3]{2}+b=0$$

اگر چنین عددهای صحیحی وجود داشته باشند، آن‌گاه داریم $\sqrt[3]{2} = -b/a$، بنا براین $\sqrt[3]{2}$ عددی است گویا. ولی بنا به نتیجهٔ ۲ بخش ۳.۴ می‌دانیم که $\sqrt[3]{2}$ گنگ است.

اثبات اینکه $\sqrt[3]{2}$ ریشهٔ هیچ معادلهٔ درجهٔ دوم با ضریبهای صحیح، مانند

$$ax^2+bx+c=0$$

نیست، کار مشکلتری است . فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{2}$ ریشهٔ چنین معادله‌ای باشد و آن‌گاه تناقضی را نتیجه می‌گیریم. بنا براین، فرض می‌کنیم که

$$a(\sqrt[3]{2})^2+b\sqrt[3]{2}+c=0$$

یعنی که

$$a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}=-c$$

با مجذورکردن دو طرف و خلاصه نمودن آن به دست می‌آوریم

$$b^{۲}\sqrt[۳]{۴}+۲a^{۲}\sqrt[۳]{۲}=c^{۲}-۴ab$$

دو معادلهٔ آخر را می‌توان به‌عنوان یك دستگاه دو معادله خطی بر حسب کمیتهای $\sqrt[۳]{۴}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ در نظر گرفت. این دستگاه، بسته به اینکه جفت ضریبهای a، b و $b^{۲}$، $۲a^{۲}$ متناسب باشند یا نباشند، قابل حل است یا قابل حل نیست.

اگر دستگاه قابل حل باشد، مثلاً با حذف $\sqrt[۳]{۴}$ به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt[۳]{۲}=\frac{۴a^{۲}b-ac^{۲}-b^{۲}c}{b^{۳}-۲a^{۳}}$$

ولی $\sqrt[۳]{۲}$ گنگ است. بنابراین، یك تناقض داریم.

امکان دیگر این است که جفت ضریبها متناسب باشند، یعنی که

$$\frac{a}{b}=\frac{b^{۲}}{۲a^{۲}} \quad , \quad ۲=\frac{b^{۳}}{a^{۳}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{۳} \quad , \quad \sqrt[۳]{۲}=\frac{b}{a}$$

مجدداً یك تناقض داریم و بنابراین، نتیجه می گیریم که $\sqrt[۳]{۲}$ یك عددجبری از درجهٔ ۳ است.

مجموعه مسأله‌های ۲۰

۱. ثابت کنید $\sqrt{۲}$ یك عدد جبری از درجهٔ ۲ است.

۲. ثابت کنید $\sqrt[۳]{۳}$ یك عدد جبری از درجهٔ ۳ است.

۷.۵ خلاصه

در این فصل، روشهایی راکه قبلاً به‌دست آورده بودیم به‌کار بردیم تا نشان دهیم تابعهای مثلثاتی و لگاریتم معمولی، دراغلب حالات فهرست شده درجدولهای مقدماتی، مقادیر گنگ دارند. سپس عددهای حقیقی را به‌دو ردهٔ جدید، عددهای جبری وعددهای متعالی، تقسیم کردیم ودیدیم که چگونه این رده‌ها با رده‌بندی قبلی عددهای حقیقی به‌عددهای گویا و گنگ در ارتباط هستند. بدون اثبات، آموختیم که اگرازطول واحد مفروضی بتوان به‌وسیلهٔ خط کش و پرگارطولی را ترسیم نمود، آن طول یك عددجبری از درجهٔ ۲^{k} می باشد که در آن k عدد صحیح غیر منفی است. (خواننده‌ای که با

هندسهٔ تحلیلی کاملاً آشنا باشد می‌تواند به وسیلهٔ تحلیل مفهوم جبری ترسیماتی که با خط‌کش و پرگار انجام‌پذیر هستند، درمورد درستی این قضیهٔ مربوط به ترسیمات هندسی تاحدی خودرا متقاعد سازد. سه‌حالت قابل‌تصور عبارت‌اند از: خط‌مستقیمی که خط مستقیمی راقطع می‌کند، خط مستقیمی که دایره‌ای راقطع می‌کند ودایره‌ای که دایره‌ای را قطع می‌نماید.) بنابراین، با منتفی شدن امکان رسم خط مستقیمی‌که طول آن یك عدد جبری از درجهٔ ۳ باشد دیدیم که با روشهای تعیین شده‌نه‌می‌توان مکعبی را دو برابر کرد ونه یك زاویه‌را در حالت کلی ثلث نمود. به دلیل ناممکن‌بودن رسم خط مستقیمی که طول آن یك عدد متعالی است، تکلیف تربیع دایره نیز تعیین گردید و دیدیم که این ترسیم هم ممکن نیست.

۶

تقریب عددهای گنگ به‌وسیلهٔ عددهای گویا

این فصل دربارهٔ دقت تقریب یك عدد گنگ به‌وسیلهٔ عددهای گویاست. همچنان‌که خواهیم دید، می‌توانیم عددهای گویایی پیدا کنیم که به‌اندازهٔ دلخواه، به‌مثلاً $\sqrt{2}$، نزدیك باشند. عددهای گویایی چون a/b وجود دارند که با تفاوتی به‌اندازهٔ 10^{-10}، یا با تفاوتی به‌اندازهٔ 10^{-20}، یا با تفاوتی به‌هراندازهٔ دیگر که بخواهیم به $\sqrt{2}$ نزدیك هستند. و این، نه‌فقط برای $\sqrt{2}$، بلکه درمورد هرعدد گنگی صادق است.

اما برای یافتن عدد گویای a/b که اختلاف آن با عددی گنگ، کمتر از 10^{-20} باشد، باید درپی کسری مثل a/b با مخرج خیلی بزرگ باشیم. اگر b را به بزرگی 10^{20} اختیار کنیم، می‌توانیم کسری چون a/b با ویژگیهای مورد نظر را پیدا کنیم. اگر b را محدود کنیم که از 10^{15} یا 10^{10} بیشتر نباشد، چه اتفاق می‌افتد؟ مسأله عمیقتر و پرزحمت‌تر می‌شود. دربررسی این‌قبیل پرسشها با این‌مطلب سروکار خواهیم داشت که نه‌فقط درمورد حالتهای ویژه‌ای نظیر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ بلکه در مورد هر عدد گنگ چه می‌توان گفت.

برای بحث دربارهٔ تقریب یك عدد به‌وسیلهٔ عدد دیگر، باید زبان خاص نابرابریها و نمادگذاری مربوط به‌آنها را مورد استفاده قرار دهیم. پس با این موضوع کار خود را آغاز می‌کنیم.

۱۰۶ نابرابریها*

هرگاه u از v بزرگتر باشد، می‌نویسیم $u>v$، و این، بدین معنی است که $u-v$ مثبت است. البته هرگاه u از v بزرگتر باشد، نتیجه می‌گیریم که v از u کوچکتر است و با نمادگذاری ریاضی به‌صورت $v<u$ می‌نویسیم. در نتیجه، چهار نابرابری

$$u>v \ , \ u-v>0 \ , \ v<u \ , \ v-u<0$$

چیزی جز چهار طریق بیان یک رابطهٔ اساسی بین u و v نیستند. همچنین $u\geqslant v$، بدین‌معنی‌است که u بزرگتر است از، یا مساوی است با v، و این ایجاب می‌کند که بگوییم $u-v$ مثبت یا صفر است، ولی منفی نیست.

قضیهٔ ۱۰۶

(الف) اگر $u>v$ و w هرعددی باشد، آن‌گاه $u+w>v+w$.

(ب) اگر $u>v$ و w هرعددی باشد، آن‌گاه $u-w>v-w$.

(پ) اگر $u>v$ و w هرعدد مثبتی باشد، آن‌گاه $uw>vw$.

(ت) اگر $u>v$ و w هرعدد مثبتی باشد، آن‌گاه $u/w>v/w$.

(ث) اگر $u>v$ و اگر u و v مثبت باشند، آن‌گاه $u^2>v^2$ ولی $1/u<1/v$.

(ج) اگر $u>v$ و $v>w$، آن‌گاه $u>w$.

(چ) اگر به‌جای علامتهای $>$ و $<$ همه‌جا علامتهای $\geqslant$ و $\leqslant$ قرار داده شود، همهٔ این نابرابریها درست هستند.

اثبات. دو اصل را مسلم فرض خواهیم کرد: مجموع و حاصلضرب دو عدد مثبت، عددهای مثبت هستند.

(الف) فرض‌می‌کنیم $u-v$ مثبت باشد و ثابت می‌کنیم $(u+w)-(v+w)$ مثبت است. این واضح است، زیرا

$$u-v=(u+w)-(v+w)$$

(ب) مجدداً فرض می‌کنیم که $u-v$ مثبت باشد و ثابت می‌کنیم که $(u-w)-(v-w)$ مثبت است. مانندحالت قبل، این نتیجه‌گیری درست است، زیرا

---

* برای مطالعهٔ بحث دقیقی دربارهٔ نابرابریها، کتاب «آشنایی با نابرابریها» از این مجموعه‌کتابها را ملاحظه کنید.

$$u-v=(u-w)-(v-w)$$

(پ) فرض می‌کنیم که $u-v$ و w مثبت باشند و ثابت می‌کنیم $uw-vw$ مثبت‌است. ازاین‌رابطه‌که $uw-vw=w(u-v)$ و اینکه حاصلضرب دوعددمثبت عددی مثبت است، نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

(ت) این حکم در واقع در قسمت (پ) گنجانیده شده‌است، زیرا اگر w مثبت‌باشد، $۱/w$ نیز مثبت است. درنتیجه می‌توان به‌جای w درقسمت (پ)، $۱/w$ را به‌کار برد، بنابراین: اگر $u>v$ ،آن‌گاه $u(۱/w)>v(۱/w)$.

(ث) ازآنجاکه u و v مثبت هستند $u+v$ هم‌مثبت‌است. ولی $u>v$ ایجاب می‌کند که $u-v$ نیز مثبت باشد، و ازاین‌رو حاصلضرب $(u+v)(u-v)$ مثبت است. بنابراین داریم

$$(u+v)(u-v)>۰, \qquad u^۲-v^۲>۰, \qquad u^۲>v^۲$$

از طرف دیگر، اگر قسمت (پ) را برای توجیه عمل ضرب دو طرف $u>v$ در $۱/uv$ به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم

$$u\times\frac{۱}{uv}>v\times\frac{۱}{uv}$$

و ازاین‌رو

$$\frac{۱}{u}<\frac{۱}{v} \qquad \text{یا} \qquad \frac{۱}{v}>\frac{۱}{u}$$

(ج) فرض می‌کنیم $u-v$ و $v-w$ مثبت باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم $u-w$ مثبت است. درهرحال

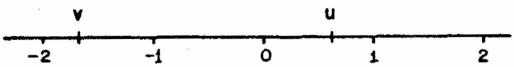
$$u-w=(u-v)+(v-w)$$

بنابراین بازهم باید فقط از این اصل که مجموع دو عدد مثبت عددی مثبت است، استفاده کنیم.

(چ) یك راه اثبات قسمت (چ) بررسی اجمالی‌قسمتهای (الف)، (ب)،...، (ج) و ارائهٔ‌تحلیل تازه‌ای برای هرحالت است. درعین‌حال، راه ساده‌تری هم‌وجود دارد. اثباتهای‌قسمتهای (الف) تا (ج) براین‌اصول پایه‌ریزی شده‌بودندکه مجموع وحاصلضرب دوعدد مثبت، عددهای مثبت هستند. اکنون، درحالی‌که $u>v$ به‌معنی

مثبت بودن $u-v$ است، $u\geqslant v$ بدین‌معنی است که $u-v$ مثبت یا صفر است، یعنی $u-v$ نامنفی می‌باشد. به‌علاوه مجموع و حاصلضرب هردو عدد نامنفی، عددهای نامنفی هستند، و براین اساس همهٔ اثباتهای (الف) تا (ج) به‌طور خودبه‌خودی از حالت $>$ به‌حالت $\geqslant$ تعمیم می‌یابند.

اگر عددهای u و v به‌همان‌صورت که درفصل ۳ توضیح دادیم، روی خط حقیقی ترسیم شوند، نامساوی $v<u$ این‌معنی را می‌دهد که v در سمت چپ u است، یا u در سمت راست v قرار دارد (شکل ۱۸). نابرابریهای $w<v<u$ بدین‌معنی هستند



شکل ۱۸ نمایش $v<u$

که $w<v$ و $v<u$، بنابراین v بین w و u قرار دارد (شکل ۱۹). باید کاربرد

شکل ۱۹ نمایش $w<v<u$

کلمهٔ «بین» را توضیح دهیم. اگر بنویسیم $w<v<u$، مقصودمان این است که v «اکیداً بین» w و u است و نه می‌تواند بر w منطبق گردد و نه بر u؛ ولی اگر بگوییم «بین» یا بنویسیم $w\leqslant v\leqslant u$، امکان مساوی شدن v با w یا با u را در نظر می‌گیریم. ممکن است بخواهیم فقط یکی از این امکانها را بپذیریم، مثلاً $w<v\leqslant u$ یا $w\leqslant v<u$. درهرمورد، نمادها کاملاً معنی را روشن می‌کنند.

مجموعه مسأله‌های ۲۱

۱. فرض کنید $u^2>v^2$ و u و v مثبت باشند، ثابت کنید $u>v$.

۲. فرض کنید $r>s$ ثابت کنید $-r<-s$.

۳. ثابت کنید جمله‌های نابرابریها را می‌توان از یک طرف به طرف دیگر برد، مشروط بر اینکه علامتهای آنها تغییر کنند. به ویژه ثابت کنید اگر $a+b-c>d+e-f$، آن‌گاه $a-e+f>d-b+c$.

۴. عددهای صحیح و مثبت n و k با شرط $n\leqslant k$ مفروض‌اند. ثابت کنید

$$\frac{۱}{n} \geqslant \frac{۱}{k} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{n^۲} \geqslant \frac{۱}{kn} .$$

۵. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:
(الف) اگر $r > s$، آن گاه $r^۲ > s^۲$.
(ب) اگر $r > s$ و c هرعددی باشد، آن گاه $cr > cs$.
(پ) اگر $-۱/۲ < \lambda < ۱/۲$ برقرار باشد، آن گاه $-۱ < \lambda < ۱$ برقرار است.*
(ت) اگر $-۱/۲ < \lambda < ۱/۲$ برقرار باشد، آن گاه $-۳/۲ < \lambda < ۳/۲$ برقرار است.
(ث) اگر $۰ < \lambda < ۱/۲$ برقرار باشد، آن گاه $-۱/۲ < \lambda < ۱/۲$ برقرار است.
(ج) اگر $-۱/۲ < \lambda < ۱/۲$ برقرار باشد، آن گاه $-۱/۳ < \lambda < ۱/۳$ برقرار است.
(چ) اگر $-۱/۲n < \lambda < ۱/۲n$ برقرار باشد، آن گاه $-۱/n < \lambda < ۱/n$ برقرار است.

۶. عدد گنگ معین λ اکیداً بین ۱۰ — و ۱۰ قرار دارد. این مطلب را با نماد ریاضی بنویسید.

۷. اگر w منفی باشد و $u > v$، ثابت کنید که: $uw < vw$.

۸. (الف) فرض کنید u و v دو عدد صحیح متفاوتی باشند که از بین عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰ انتخاب شده‌اند. ثابت کنید $-۹ \leqslant u - v \leqslant ۹$.
(ب) اگر در (الف) مقرر نمی‌کردیم که عددهای صحیح u و v متفاوت باشند، آیا هنوز هم $-۹ \leqslant u - v \leqslant ۹$ درست می‌بود؟

۶.۲ تقریب به‌وسیلهٔ عددهای صحیح

اگر هرعدد حقیقی را به‌وسیلهٔ جایگزین کردن با نزدیکترین عدد صحیح به‌آن، گرد (= سرراست) کنیم، خطای انجام شده حداکثر ۱/۲ خواهد بود. مثلاً اگر

---

* نماد λ یك حرف یونانی است که «لامبدا» خوانده می‌شود (و فارسی زبانان به‌آن «لاندا» می‌گویند. ـ م.)

۶ را به‌جای ۳ر۶ ، یا ۱۰ را به‌جای ۷ر۹ ، یا ۷ یا ۸ را به‌جای ۷ر۵ قراردهیم، درهرحالت خطا بیشتر از ۱/۲ نیست. اگر به‌جای یك عدد گنگ نزدیکترین عدد صحیح آن را قرار دهیم، بازهم خطا کمتر از ۱/۲ است، حال ، نظریهٔ تقریبها را با این حالت ساده شروع می کنیم.

قضیهٔ ۲۰۶. متناظر با هر عدد گنگ α ، عدد صحیح یکتایی چون m وجود دارد به‌طوری که

$$-\frac{۱}{۲}<\alpha-m<\frac{۱}{۲}$$

اثبات. m را نزدیکترین عدد صحیح به α انتخاب می کنیم . مثلاً اگر $\alpha=\sqrt{۳}=۱ر۷۳...$ باشد m را برابر ۲ برمی گزینیم، یا اگر $\alpha=۲\sqrt{۳}=۳ر۴۶...$ آن گاه $m=۳$ را انتخاب‌می کنیم. بنابراین، m می تواند عدد صحیح صرفاً بزرگتر از α یا صرفاً کوچکتر از α ، هرکدام که نزدیکتر است ، باشد. (روشن است که یکی ازآنها به α نزدیکتر است تا دیگری وگرنه α در نیمه راه بین دوعددصحیح متوالی،فرضاً n و $n+۱$، قرار دارد. اما دراین‌صورت α مساوی $n+۱/۲$ می باشد که یك عدد گویاست و این ، فرض ما را نقض می کند.) می توانیم این مطلب را به طریق دیگری بیان کنیم. هرپاره‌خط AB به‌طول واحد (یعنی با درازای یك واحد) که روی خط حقیقی مثل شکل ۲۰، جدا شده باشد، دقیقاً شامل یك‌عدد صحیح‌است، مگراینکه تصادفاً A و B نقاط‌صحیح‌باشند. حال، A را نقطهٔ متناظر عدد $\alpha-۱/۲$ و

شکل ۲۰

B را نقطهٔ متناظر $\alpha+۱/۲$ بگیرید . ازآنجاکه $\alpha-۱/۲$ و $\alpha+۱/۲$ عددهای صحیح نیستند (آنها حتی گویا هم‌نیستند ـ قضیهٔ ۱۰۴، فصل۴، را ببینید) ، می‌دانیم که A و B نمی‌توانند نقاط صحیح باشند. با نشان دادن عدد صحیح یکتای واقع در قطعهٔ AB با m ، می‌بینیم که m اکیداً بین $\alpha-۱/۲$ و $\alpha+۱/۲$ قرار دارد. بنابراین

$$\alpha-\frac{۱}{۲}<m<\alpha+\frac{۱}{۲}$$

با کم کردن α داریم

$$-\frac{۱}{۲}<m-\alpha<\frac{۱}{۲}$$

حال، اگرعدد $m-\alpha$ بین ۱/۲ــ و ۱/۲ قرار داشته‌باشد، عدد حاصل از تغییر علامت آن هم بین ۱/۲ــ و ۱/۲ قرار می‌گیرد. و ازاین رو $\alpha-m$ نیز بین ۱/۲ــ و ۱/۲ واقع است. بنابراین نابرابریهای قضیهٔ ۲.۶ به‌دست می‌آیند.

عدد صحیح m یکتاست، زیرا اگر عدد صحیح دیگری چون n وجود داشته باشدکه درنابرابریهای

$$-\frac{۱}{۲}<\alpha-n<\frac{۱}{۲}$$

صدق کند، آن‌گاه n باید در نابرابریهای

$$-\frac{۱}{۲}<n-\alpha<\frac{۱}{۲}$$

نیز صدق نماید. با افزودن α به‌این نابرابریها می‌بینیم‌که n در نابرابریهای

$$\alpha-\frac{۱}{۲}<n<\alpha+\frac{۱}{۲}$$

صدق می‌کند. ولی قطعهٔ AB شامل تنها یك عدد صحیح می‌باشد، بنابراین n همان m است

مجموعه مسأله‌های ۲۲

(دراین مجموعه مسأله‌ها، وبعدازآن، خواننده دربه‌کاربردن $\sqrt{۲}=۱٫۴۱۴۲۱...$، $\sqrt{۳}=۱٫۷۳۲۰۵...$، $\pi=۳٫۱۴۱۵۹...$ مجاز است.)

۱. نزدیکترین عددهای صحیح به‌عددهای زیر را بیابید:

(الف) $\sqrt{۲}$ (ب) $۲\sqrt{۲}$ (پ) $۳\sqrt{۲}$ (ت) $۴\sqrt{۲}$ (ث) $۳\sqrt{۳}$

(ج) $۴\sqrt{۳}$ (چ) π (ح) ۱۰π (خ) $-\sqrt{۳}$ (د) -۷π

۲. عددگنگ α مفروض است، ثابت کنید عدد صحیح یکتایی چون q وجود دارد

به‌طوری که:

$$0<\alpha-q<1$$

۳.۶ تقریب به‌وسیلهٔ عددهای گویا

یك راه تقریب عدد گنگی نظیر $\sqrt{2}$، به‌کار بردن صورت اعشاری

$$\sqrt{2}=1/41421\ldots$$

می باشد. عددهای ۱، ۱٫۴، ۱٫۴۱، ۱٫۴۱۴، ۱٫۴۱۴۲، ۱٫۴۱۴۲۱، ... یك رشته از تقریبهای نزدیکتر ونزدیکتر به $\sqrt{2}$ را تشکیل می‌دهند. این تقریبها همه عددهای گویا هستند و بنابراین، برای $\sqrt{2}$ دنبالهٔ بی‌پایانی از تقریبهای گویا داریم:

$$\frac{1}{1},\ \frac{14}{10},\ \frac{141}{100},\ \frac{1414}{1000},\ \frac{14142}{10000},\ \frac{141421}{100000},\ \ldots \qquad (1)$$

همچنان که همراه این رشته به‌پیش می‌رویم، این عددها به $\sqrt{2}$ نزدیکتر و نزدیکتر می‌شوند. به‌علاوه می‌توانیم نابرابریهای زیر را بنویسیم

$$\frac{1}{1}<\sqrt{2}<\frac{2}{1}$$

$$\frac{14}{10}<\sqrt{2}<\frac{15}{10}$$

$$\frac{141}{100}<\sqrt{2}<\frac{142}{100}$$

$$\frac{1414}{1000}<\sqrt{2}<\frac{1415}{1000}$$

$$\frac{14142}{10000}<\sqrt{2}<\frac{14143}{10000}$$

$$\frac{141421}{100000}<\sqrt{2}<\frac{141422}{100000}$$

و غیره.

این نابرابریها نشان می‌دهند که تعداد بینهایت از جمله‌های (۱) وجود دارند که هر اندازه بخواهیم به $\sqrt{2}$ نزدیك هستند. فرض کنید مثلا مایلیم بدانیم که بینهایت عدد گویا

درفاصلهٔ ۰٫۰۰۰۱ از عدد $\sqrt{۲}$ وجود دارند. این عددها را می‌توانیم باانتخاب همهٔ دنباله، بجزچهارجملهٔ اول، به‌دست آوریم.

درهرحال، عددهای گویای (۱) شکل ویژه‌ای دارندکه مخرج آنها توانهایی از ۱۰ هستند. ممکن‌است برای $\sqrt{۲}$ درمیان عددهای دیگر، بدون هیچ محدودیتی درمورد مخرجها، تقریبهای بهتری هم وجود داشته‌باشد.

حال، به‌عدد گنگ π، به عنوان مثال معروفی‌که بحث مارا روشن می‌کنند، برمی‌گردیم. ازآنجاکه π مقدار ...۳٫۱۴۱۵۹ را دارد، دنبالهٔ نظیر (۱) برای π عبارت است از:

$$\frac{۳}{۱}, \frac{۳۱}{۱۰}, \frac{۳۱۴}{۱۰۰}, \frac{۳۱۴۱}{۱۰۰۰}, \frac{۳۱۴۱۵}{۱۰۰۰۰}, \frac{۳۱۴۱۵۹}{۱۰۰۰۰۰}, \ldots \qquad (۲)$$

بااین‌وجود، می‌دانیم‌که ۲۲/۷ تقریب‌نزدیکتری‌است به π تا ۳۱/۱۰. درواقع، ۲۲/۷ از ۳۱۴/۱۰۰ هم به π نزدیکتراست، ولی ازجمله‌های بعدی دنبالهٔ(۲) نزدیکتر نیست.

برای گریز از وابستگی به‌مخرجهای ۱۰، $۱۰^۲$، $۱۰^۳$ و غیره، نخست نشان می‌دهیم‌که هرعدد گنگ را می‌توان به‌وسیلهٔ یك‌عدد گویا، با هرمخرج دلخواهی‌که داشته باشد، تقریب نمود.

قضیهٔ ۳.۶. فرض‌کنید λ یك عدد گنگ وn عدد صحیحی باشد.آن‌گاه عدد گویایی با مخرج n، فرضاً m/n، وجود دارد، به‌طوری‌که

$$-\frac{۱}{۲n}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{۱}{۲n}$$

باارائهٔ یك‌مثال،اثبات این‌قضیه‌را شروع می‌کنیم. فرض‌کنید λ برابر $\sqrt{۲}$ و n برابر ۲۳ باشد. عددگنگ $۲۳\sqrt{۲}$ را درنظر بگیریدکه بااستفاده از بسط اعشاری ...۱٫۴۱۴۲۱ برای $\sqrt{۲}$، مقدار تقریبی

$$۲۳\sqrt{۲}=۳۲٫۵۲\ldots$$

را دارد. بنابراین، نزدیکترین عدد صحیح به $۲۳\sqrt{۲}$، عدد ۳۳ است، واین همان «m» از قضیهٔ ۲.۶ است‌که برای $\alpha=۲۳\sqrt{۲}$ نابرابریهای

$$-\frac{۱}{۲}<۲۳\sqrt{۲}-۳۳<\frac{۱}{۲}$$

را به‌دست می‌دهد. ولی ۳۳ مقدار «m» از قضیهٔ ۳.۶ نیز هست، زیرا بنا به قضیهٔ ۱.۶ می‌توانیم این نابرابریها را بر ۲۳ تقسیم کنیم و

$$-\frac{۱}{۴۶}<\sqrt{۲}-\frac{۳۳}{۲۳}<\frac{۱}{۴۶}$$

را به‌دست آوریم.

اثبات . درحالت کلی، باعدد گنگ λ و عـدد صحیح مثبتی مانند n شروع وخاطرنشان می‌کنیم که بنا به قضیهٔ ۱.۴ فصل ۴، عدد $n\lambda$ گنـگ است. آن گاه m را نزدیکترین عدد صحیح به $n\lambda$ تعریف می‌کنیم ودرنتیجه، بنا به قضیهٔ ۲.۶ داریم

$$-\frac{۱}{۲}<n\lambda-m<\frac{۱}{۲}$$

طبق قضیهٔ ۱.۶ ، این نابرابریها را می‌توان برهرعدد صحیح مثبت n تقسیم نمود تـا نابرابریهای

$$-\frac{۱}{۲n}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{۱}{۲n}$$

به‌دست آیند و به این ترتیب قضیهٔ ۳.۶ ثابت می‌شود.

مثال . مانند قضیهٔ ۳.۶، درمورد $\lambda=\sqrt{۲}$، عددهای گویای m/n را برای $n=۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰$ بیابید.

حل. بامحاسبهٔ ساده، نزدیکترین عددهای صحیح به

$$\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}, ۴\sqrt{۲}, ۵\sqrt{۲}, ۶\sqrt{۲}, ۷\sqrt{۲}, ۸\sqrt{۲}, ۹\sqrt{۲}, ۱۰\sqrt{۲}$$

عبارت‌اند از ۱، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴. ازاین‌رو عددهای گویای مطلوب عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۶}{۴}, \frac{۷}{۵}, \frac{۸}{۶}, \frac{۱۰}{۷}, \frac{۱۱}{۸}, \frac{۱۳}{۹}, \frac{۱۴}{۱۰}$$

و خطا در هریك از این تقریبها از $۱/۲n$ کمتر است، کـه درآن n عدد صحیح مخرج می‌باشد.

این مثال نشان می‌دهد که کسرهای گویای قضیهٔ ۳.۶، الزاماً به ساده‌ترین صورت نیستند.

مجموعه مسأله‌های ۲۳

۱. مثل قضیهٔ ۳.۶، برای $\lambda=\sqrt{3}$ و $n=$ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، عددهای گویای m/n را بیابید.

۲. مانند قضیهٔ ۳.۶، برای $\lambda=\pi=$ ۳٫۱۴۱۵۹... و $n=$ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، عددهای گویای m/n را بیابید.

۳. عدد گنگ λ و عدد صحیح مثبت n مفروض‌اند، ثابت کنید عددصحیحی چون m وجود دارد، به‌طوری که

$$-\frac{1}{n}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{n}$$

۴*. برای عدد گنگ ثابتی چون λ و عدد صحیح مثبتی مانند n، ثابت کنید که تنها یك عدد صحیح m وجود دارد که در نابرابریهای قضیهٔ ۳.۶ صدق می‌کند.

۵*. ثابت کنید اگر در صورت قضیهٔ ۳.۶، راجع به m/n، واژه‌های «به‌ساده‌ترین صورت» را اضافه کنیم، یعنی بنویسیم: «... آن گاه عدد گویایی به ساده‌ترین صورت با مخرج n، فرضاً m/n، وجود دارد ...» قضیه نادرست خواهد بود.

۴.۶ تقریبهای بهتر

قضیهٔ ۳.۶ بیان می‌کند که هر عدد گنگ λ را می‌توان به‌وسیلهٔ عدد گویایی چون m/n «درحد $1/2n$»، یعنی با خطایی کمتر از $1/2n$، تقریب کرد. آیا این عمل را می‌توان درحد $1/3n$، یا $1/4n$، یا شاید نزدیکتر، انجام داد؟ جواب، آری است. درقضیهٔ بعد نشان می‌دهیم که λ را می توان به‌وسیلهٔ m/n درحد $1/kn$، برای هر kی دلخواه: $k=3$، $k=4$، $k=1000$ و غیره تقریب نمود. اگرچه در قضیهٔ ۳.۶، تقریب درحد $1/2n$ را برای هرعدد صحیح ومثبت n می‌توان حاصل نمود، اما تقریب درحد $1/kn$ را نمی‌توان با kی توصیف شده درقضیهٔ ۴.۶ برای تمام nها به‌دست آورد.

آیا می‌توانیم هرعدد گنگ λ را به‌وسیلهٔ m/n، درحد $1/n^2$، یا $1/n^3$، یا حتی نزدیکتر، تقریب کنیم؟ درحد $1/n^2$ آری، درحد $1/n^3$ خیر. ولی اینها

بحثهای بخشهای بعدی هستند. بنا براین، با تقریبهای λ به وسیلهٔ m/n درحد $1/kn$ شروع می کنیم.

قضیهٔ ۴.۶. عددگنگ λ وعدد صحیح مثبت n مفروض‌اند، عدد گویای m/n که مخرج n آن از k فراتر نمی‌رود، وجود دارد به‌طوری‌که

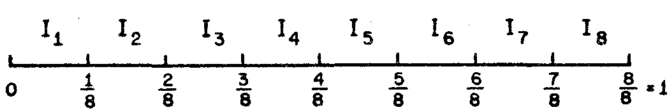
$$-\frac{1}{nk}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{nk}$$

قبل از ارائهٔ اثبات قضیهٔ ۴.۶، که برای هر λ وهر k معتبراست، قضیه را برای یك مثال ویژه، یعنی برای $\lambda=\sqrt{3}$ و $k=8$، ثابت می کنیم. نخست، مضربهای λ از $1\times\lambda$ تا $k\times\lambda$ را برمی‌شماریم. مضربهای $\sqrt{3}$ را با نوشتن هرمضرب به‌صورت مجموعی ازدوعددمثبت، یکی عدد صحیح ودیگری عددی کمتراز یك فهرست می کنیم:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{3}=1+0.732\ldots, & \sqrt{3}-1=0.732\ldots,\\
2\sqrt{3}=3+0.464\ldots, & 2\sqrt{3}-3=0.464\ldots,\\
3\sqrt{3}=5+0.196\ldots, & 3\sqrt{3}-5=0.196\ldots,\\
4\sqrt{3}=6+0.928\ldots, & 4\sqrt{3}-6=0.928\ldots,\\
5\sqrt{3}=8+0.660\ldots, & 5\sqrt{3}-8=0.660\ldots,\\
6\sqrt{3}=10+0.392\ldots, & 6\sqrt{3}-10=0.392\ldots,\\
7\sqrt{3}=12+0.124\ldots, & 7\sqrt{3}-12=0.124\ldots,\\
8\sqrt{3}=13+0.856\ldots, & 8\sqrt{3}-13=0.856\ldots,
\end{array}$$

عبارتهای ستون سمت راست، از روی عبارتهای سمت چپ با تفریق قسمت صحیح، به‌دست آمده‌اند.

حال، فاصلهٔ واحد را به ۸ قسمت I_1، I_2، ...، I_8، به‌صورتی که درشکل ۲۱



شکل ۲۱

نشان داده‌شده است، تقسیم می‌کنیم. بنابراین $I_۱$ ازعددهای بین ۰ و ۱/۸ تشکیل می‌شود، $I_۲$ ازعددهای بین ۱/۸ و ۲/۸، $I_۳$ ازاعداد بین ۲/۸ و ۳/۸ و به‌همین ترتیب.* سپس هشت جزء اعشاری‌مضربهای $\sqrt{۳}$ را به‌دسته‌های $I_۱$، $I_۲$، $I_۳$، ...، $I_۸$ به‌صورت زیر، رده‌بندی می‌کنیم:

۰٫۷۳۲۰... در $I_۶$ (زیرا ۰٫۷۳۲۰... بین ۵/۸ و ۶/۸ است)

۰٫۴۶۴۰... در $I_۴$

۰٫۱۹۶۰... در $I_۲$

۰٫۹۲۸۰... در $I_۸$

۰٫۶۶۰۰... در $I_۶$

۰٫۳۹۲۰... در $I_۴$

۰٫۱۲۴۰... در $I_۱$

۰٫۸۵۶۰... در $I_۷$

درفهرست فوق، عددی‌راکه در $I_۱$ هست، به‌کارمی‌بریم:

۰٫۱۲۴۰... در $I_۱$ است، یعنی $۷\sqrt{۳}-۱۲$ در $I_۱$ است.

ولی عددهای بین ۰ و ۱/۸ در $I_۱$ قراردارند، بنابراین

$$۰<۷\sqrt{۳}-۱۲<\frac{۱}{۸}$$

حال، ازآنجاکه $۷\sqrt{۳}-۱۲$ بین ۰ و ۱/۸ قراردارد، این‌عدد مسلماً بین ۱/۸ — و ۱/۸ قرارمی گیرد، بنابراین

$$-\frac{۱}{۸}<۷\sqrt{۱۳}-۱۲<\frac{۱}{۸}$$

---

* ازآنجاکه خواهان استنتاج نابرابریهای اکید هستیم، تفسیر کردن «بین» به‌عنوان «اکیداً بین» مناسب است، بنابراین، فاصلهٔ I_j شامل همهٔ نقطه‌هایی مانند u است، به‌طوری که

$$\frac{j-۱}{۸}<u<\frac{j}{۸}$$

با تقسیم این نابرابری بر ۷، به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{۱}{۷\times۸}<\sqrt{۳}-\frac{۱۲}{۷}<\frac{۱}{۷\times۸}$$

این نتیجه به‌همان صورتی است که در قضیهٔ ۴.۶، با $k=۸$، $n=۷$ و $m=۱۲$، بیان شده‌است.

استدلال ما براین واقعیت پایه‌گذاری شد که $۷\sqrt{۳}-۱۲$ در $I_۱$ بود. اگر هیچ عددی در فاصلهٔ $I_۱$ نباشد چه خواهیم کرد؟ جواب این‌است که اگرهیچ عددی در $I_۱$ نباشد،آن گاه یکی‌ازفاصله‌های $I_۲$، $I_۳$، ...، $I_۷$ شامل دوعدد یا بیشترخواهند شد. درمثال‌حاضر، نه‌تنها در $I_۱$ عددی هست، بلکه دوتا در $I_۴$ و دوتا در $I_۶$ وجود دارند. جفت موجود در $I_۶$ را درنظر بگیرید:

...۰٫۷۳۲۰ در $I_۶$ است، یعنی $\sqrt{۳}-۱$ در $I_۶$ است؛

و

...۰٫۶۶۰ در $I_۶$ است، یعنی $۵\sqrt{۳}-۸$ در $I_۶$ است.

حال، هرگاه در $I_۶$ (یا درهریك ازاین فاصله‌ها) دوعدد باشد، این دو عدد درفاصلهٔ ۱/۸ هستند، بنابراین تفاوت آنها بین ۱/۸ — و ۱/۸ قرار دارد. به‌ویژه،درمورد دوعدد در $I_۶$ داریم

$$-\frac{۱}{۸}<(۵\sqrt{۳}-۸)-(\sqrt{۳}-۱)<\frac{۱}{۸}$$

$$-\frac{۱}{۸}<۴\sqrt{۳}-۷<\frac{۱}{۸}$$

با تقسیم بر ۴ به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{۱}{۴\times۸}<\sqrt{۳}-\frac{۷}{۴}<\frac{۱}{۴\times۸}$$

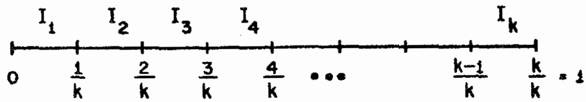
و این نتیجهٔ دیگری است که به‌صورت قضیهٔ ۴.۶ در مورد $\lambda=\sqrt{۳}$ و $k=۸$ بیان می‌شود ولی این بار با $n=۴$ و $m=۷$.

اثبات‌قضیهٔ ۴.۶ مثالهای ویژه‌ای که تاکنون موردبحث قرارداده‌ایم‌می‌توانند

به‌عنوان الگوهایی برای اثبات قضیهٔ ۴.۶ به‌کار روند. عدد گنگی چون λ و عدد صحیح مثبتی مانند k را درنظر بگیرید. تعداد k عدد λ، ۲λ، ۳λ، ۴λ، ...، $k\lambda$ را برمی‌گزینیم و هریك ازاین عددها را به‌صورت یك عدد صحیح به‌اضافهٔ یك کسر، یا جزء اعشاری، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\lambda &= a_۱ + \beta_۱, & \lambda - a_۱ &= \beta_۱,\\
۲\lambda &= a_۲ + \beta_۲, & ۲\lambda - a_۲ &= \beta_۲,\\
۳\lambda &= a_۳ + \beta_۳, & ۳\lambda - a_۳ &= \beta_۳,\\
۴\lambda &= a_۴ + \beta_۴, & ۴\lambda - a_۴ &= \beta_۴,\\
&\vdots & &\vdots\\
k\lambda &= a_k + \beta_k, & k\lambda - a_k &= \beta_k.
\end{aligned}$$

نمادهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k عددهای صحیح را نشان می‌دهند، در حالی‌که نمادهای $\beta_۱$، $\beta_۲$، ...، β_k نشان‌دهندهٔ عددهای بین ۰ و ۱ هستند. حال، فاصلهٔ واحد را به k قسمت $I_۱$، $I_۲$، ...، I_k که هرقسمت به‌طول $۱/k$ باشد (شکل ۲۲) تقسیم می‌کنیم. بنابراین، فاصلهٔ $I_۱$ از عددهای بین ۰ و $۱/k$، فاصلهٔ $I_۲$ از عددهای بین $۱/k$ و $۲/k$، فاصلهٔ $I_۳$ ازعددهای بین $۲/k$ و $۳/k$، و غیره تشکیل می‌شود. کلمهٔ «بین» دراین‌جا به‌معنی اکیداً به‌کار می‌رود، بنابراین، مثلاً عددهای $۲/k$ و $۳/k$ خودشان



شکل ۲۲

عضوهای فاصلهٔ $I_۳$ نیستند. توجه داشته‌باشیدکه بنا به‌قضیهٔ ۱.۴ فصل ۴، همهٔ عددهای $\beta_۱$، $\beta_۲$، ...، β_k گنگ هستند. در نتیجه هیچ βای نمی‌تواند با هیچ‌یك ازعددهای گویای

$$۰, \frac{۱}{k}, \frac{۲}{k}, \frac{۳}{k}, \ldots, \frac{k-۱}{k}, \frac{k}{k}$$

مساوی باشد. بنابراین، هر β دقیقاً در یکی‌از فاصله‌های $I_۱$، $I_۲$، $I_۳$، ...، I_k قراردارد.

درمورد I_1 دوامکان وجوددارد: یا I_1 یکی یا بیشتر از βها را شامل‌می‌شود، یا I_1 هیچ βای را شامل نمی‌شود. این‌دوامکان‌را به‌طورجداگانه بررسی می کنیم.

حالت ۱ . فاصلهٔ I_1 شامل یك β یا بیشتراست. بنابراین، یك β ، فرضاً β_n، درفاصلهٔ I_1 وجوددارد. نماد n عددی ازمیان ۱، ۲، ...، k را نشان می‌دهد. عدد β_n همان $n\lambda - a_n$ است. بنابراین، می‌دانیم که

$$0 < n\lambda - a_n < \frac{1}{k}$$

زیرا I_1 فاصلهٔ از ۰ تا $1/k$ است. این مطلب می‌رساند که

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - a_n < \frac{1}{k}$$

و اگر همه را بر n تقسیم کنیم، به‌دست می آوریم

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{a_n}{n} < \frac{1}{kn}$$

بنابراین، قضیهٔ ۴.۶ دراین حالت ثابت می‌شود، زیرا می‌توانیم m را مساوی عدد صحیح a_n فرض کنیم.

حالت ۲. فاصلهٔ I_1 شامل‌هیچ‌یك ازβها نیست. دراین‌حالت، k عددمفروض در $k - 1$ فاصلهٔ

$$I_2, I_3, \ldots, I_{k-1}$$

قرار دارند. حال ، اصل لانهٔ کبوتر دیریکله را به‌کار می‌بریم که می گوید اگر k کبوتر در $k - 1$ لانه‌باشند، حداقل دریك لانه باید دوکبوتر یا بیشتر وجود داشته باشد. بنابراین، یك فاصله باید شامل دوتا یا بیشتراز βها باشد. فرض می کنیم β_r و β_j در یکی از این فاصله‌ها باشند، در این جا r و j دو عدد متفاوت از میان $1, 2, 3, \ldots, k$ هستند. با فرض اینکه j از r بزرگتر باشد، می‌دانیم که $j - r$ عدد صحیح مثبتی‌است کمتر از k.

ازآنجاکه β_r و β_j داخل یك‌فاصلهٔ به‌طول $1/k$ قراردارند، تفاضل آنها بین $-1/k$ و $1/k$ قرار می گیرد. بنابراین

$$-\frac{1}{k}<\beta_j-\beta_r<\frac{1}{k}$$

ولی $\beta_j=j\lambda-a_j$ و $\beta_r=r\lambda-a_r$، پس

$$-\frac{1}{k}<(j\lambda-a_j)-(r\lambda-a_r)<\frac{1}{k}$$

یا

$$-\frac{1}{k}<(j-r)\lambda-(a_j-a_r)<\frac{1}{k}$$

n را به‌صورت $j-r$ و m را به‌صورت a_j-a_r تعریف می‌کنیم، پس داریم

$$-\frac{1}{k}<n\lambda-m<\frac{1}{k}$$

می‌بینیم که n بنا به تعریف عددصحیح مثبتی است، بنا بر این به‌موجب قضیهٔ ۱.۶ (ت) می‌توانیم نابرابریهای فوق را بر n تقسیم کنیم و نابرابریهای

$$-\frac{1}{kn}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{kn}$$

را به‌دست آوریم. به‌علاوه، از آنجاکه n مساوی $j-r$ است می‌دانیم که کمتر از k است و بنا بر این، اثبات قضیهٔ ۴.۶ کامل می‌شود.

توجه داشته باشید که عدد m/n الزاماً به‌ساده‌ترین صورت نیست. اگر $j-r$ و a_j-a_r هیچ عامل مشترکی نداشته باشند، m/n به‌ساده‌ترین صورت است و در غیراین‌صورت، نیست.

مجموعه مسأله‌های ۲۴

۱. به‌دنبال صورت قضیهٔ ۴.۶ مثالی با فرض $\lambda=\sqrt{۳}$ و $k=۸$ ارائه شد. اگر به‌جای دوعدد در $I_۶$ دوعدد ...۰٫۴۶۴ و ...۰٫۳۹۲ در $I_۴$ را درنظر گرفته بودیم، چه‌مقدارهایی برای m و n به‌دست می‌آمد؟

۲. روش ارائه شدهٔ دراثبات قضیهٔ ۴.۶ را برای هریك ازحالتهای زیر به‌کار برید و با کمك آن مقدارهای m و nی را که درنابرابریهای قضیهٔ ۴.۶ صدق می‌کنند، به‌دست آورید:

(الف) $\lambda=\sqrt{3}$، $k=2$؛ (ح) $\lambda=\sqrt{2}$، $k=8$؛
(ب) $\lambda=\sqrt{3}$، $k=4$؛ (خ) $\lambda=\sqrt{2}$، $k=10$؛
(پ) $\lambda=\sqrt{3}$، $k=6$؛ (د) $\lambda=\sqrt{2}$، $k=14$؛
(ت) $\lambda=\sqrt{3}$، $k=10$؛ (ذ) $\lambda=\pi$، $k=2$؛
(ث) $\lambda=\sqrt{2}$، $k=2$؛ (ر) $\lambda=\pi$، $k=4$؛
(ج) $\lambda=\sqrt{2}$، $k=4$؛ (ز) $\lambda=\pi$، $k=6$؛
(چ) $\lambda=\sqrt{2}$، $k=6$؛ (ژ) $\lambda=\pi$، $k=8$.

۵.۶ تقریبهای درحد $1/n^2$

درآغاز بخش ۴.۶ جهت بررسیهای خودرا نشان دادیم و گفتیم که می‌کوشیم تا تقریبهای بهتری برای هرعدد گنگ λ پیدا کنیم. از تقریب λ به‌وسیلهٔ m/n درحد $1/2n$ به‌ازای هر n در قضیهٔ ۳.۶، به‌تقریب درحد $1/kn$، برای $n\leqslant k$، درقضیهٔ ۴.۶، رسیدیم. حال، تقریبهای درحد $1/n^2$ را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۵.۶. عدد گنگی چون λ مفروض است، بینهایت عدد گویای m/n به‌ساده‌ترین صورت، وجود دارند به‌طوری که

$$-\frac{1}{n^2}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^2}$$

اثبات. نخست ملاحظه می‌کنیم که هر عدد گویای m/n، که در نابرابری قضیهٔ ۴.۶ صدق کند، خودبه‌خود درنابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ هم صدق می‌کند. دلیل این مطلب این است: ازآنجاکه n از k فراتر نمی‌رود با به‌کاربردن قضیهٔ ۱.۶، قسمتهای (ت)، (ث) و (ج)، از $n\leqslant k$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \frac{1}{kn}\leqslant\frac{1}{n^2}$$

ازاین‌رو هرعدد که بین $1/kn$ — و $1/kn$ قرار داشته‌باشد، حتماً باید درحوزهٔ بین

$-1/n^2$ و $1/n^2$ هم قرار گیرد.

حال، نشان می‌دهیم که اگر هر عدد گویایی چون m/n، نه به‌ساده‌ترین صورت، در نابرابریهای قضیه صدق کند، آن گاه همان عدد گویا، به ساده‌ترین صورت، باید در نابرابریهایی مقتضی نیز صدق کند. M/N را به‌عنوان ساده‌ترین صورت m/n درنظر می‌گیریم. با تخصیص علامت منفی به‌صورت، می‌توانیم فرض کنیم که n و N هردو مثبت هستند. ازاین‌رو داریم

$$\frac{m}{n}=\frac{M}{N}, \ 0<N<n$$

زیرا، تبدیل به‌ساده‌ترین صورت، مقدار کسر را تغییر نمی‌دهد ولی اندازهٔ مخرج را کاهش می‌دهد. از قضیهٔ ۱.۶ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{N} \quad و \quad \frac{1}{n^2}<\frac{1}{N^2}$$

و بنابراین اگر λ در نابرابریهای

$$-\frac{1}{n^2}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^2}$$

صدق کند، آن گاه به‌خودی خود درنابرابریهای

$$-\frac{1}{N^2}<\lambda-\frac{M}{N}<\frac{1}{N^2}$$

نیز صدق می‌کند.

برای تکمیل قضیهٔ ۵.۶ تنها مطلبی که باید ثابت کنیم این است که بینهایت عدد گویای m/n، به‌ساده‌ترین صورت، وجود دارند که درنابرابریها صدق‌می‌کنند. به‌عکس، فرض کنید فقط تعداد متناهی از این کسرها، فرضاً

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ \ldots, \ \frac{m_i}{n_i}$$

وجود داشته باشند، حال تعداد i عدد

$$\lambda-\frac{m_1}{n_1}, \lambda-\frac{m_2}{n_2}, \lambda-\frac{m_3}{n_3}, \ \ldots, \lambda-\frac{m_i}{n_i}$$

را درنظر بگیرید. بنا به‌قضیهٔ ۱.۴ فصل ۴، همهٔ این عددها گنگ هستند و بنا براین هیچ‌یك ازآنها صفر نیست. بعضی‌ازآنها ممکن است مثبت وبعضی دیگرمنفی باشند و لذا عدد صحیحی چون k را آن‌چنان بزرگ انتخاب می‌کنیم که $1/k$ بین صفر و همهٔ این عددهای مثبت و نیز $-1/k$ بین صفر و همهٔ این عدد هـای منفی قرار گیرد. این کار را می‌توانیم انجام دهیم، زیرا هرچه k را بزرگتر انتخاب کنیم، $1/k$ و $-1/k$ به ۰ نزدیکتر می‌شوند. بنابراین، k را آن‌چنان بزرگ انتخاب می‌کنیم، که همهٔ نابرابریهای زیر نادرست باشند:

$$-\frac{1}{k}<\lambda-\frac{m_1}{n_1}<\frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{k}<\lambda-\frac{m_2}{n_2}<\frac{1}{k} \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{k}<\lambda-\frac{m_i}{n_i}<\frac{1}{k}$$

بااین مقدار k، قضیهٔ ۴.۶ را به‌کار می‌بریم و عدد گویـایی مانند m/n به دست می‌آوریم به‌طوری که

$$-\frac{1}{kn}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{kn}$$

حال، از این رابطه برمی‌آید که $\lambda-m/n$ بین $-1/kn$ و $1/kn$ قرار دارد و بنابراین $\lambda-m/n$ باید بین $-1/k$ و $1/k$ قرارداشته‌باشد، یعنی به‌طورنمادی:

$$-\frac{1}{k}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{k}$$

ولی ازآنجا که همهٔ نابرابریهای (۳) نادرست هستند، نتیجه می‌گیریم که m/n بـا هریك از i عدد

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_i}{n_i}$$

متفاوت است. بنا براین، کسر گویای دیگری هم که درنا برا بریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق می‌کند، به‌دست آورده‌ایم.

مثال. برای عدد گنگ π چهار تقریب گویای (به‌ساده‌ترین صورت) وکاملا نزدیك را بیابید که درنا برابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق کنند.

حل. نخست مشاهده می‌کنیم که چون $\pi = ۳٫۱۴۱۵۹...$،

$$-\frac{۱}{۱^۲} < \pi - \frac{۳}{۱} < \frac{۱}{۱^۲} \quad و \quad -\frac{۱}{۱^۲} < \pi - \frac{۴}{۱} < \frac{۱}{۱^۲}.$$

برای یافتن دوتای دیگر، می‌توانیم روش قضیهٔ ۳.۶ را برای به دست آوردن نزدیکترین عددهای گویا با مخرجهای ۲، ۳ و غیره به‌کار ببریم:

$$\frac{۶}{۲}, \frac{۹}{۳}, \frac{۱۳}{۴}, \frac{۱۶}{۵}, \frac{۱۹}{۶}, \frac{۲۲}{۷}, \ldots$$

۶/۲ و ۹/۳ را که به‌ساده‌ترین صورت نیستند نمی‌پذیریم وبقیه‌را درنا برابریهای قضیهٔ ۵.۶ آزمایش می‌کنیم؛ مثلاً

$$-\frac{۱}{۳۶} < \pi - \frac{۱۹}{۶} < \frac{۱}{۳۶} \quad (\text{درست !})$$

بنا براین به نپذیرفتن ۱۳/۴ و ۱۶/۵ وپذیرفتن ۱۹/۶ و۲۲/۷ رهنمون‌می‌شویم. پس یك‌مجموعه از پاسخهای این پرسش ۳/۱ , ۴/۱ , ۱۹/۶ و۲۲/۷ خواهدبود.

عددگویای ۲۲/۷ تقریب خیلی‌خوبی برای π است. هیچ‌عددگویایی بامخرج بین ۱ و ۵۶ که نزدیکتر از ۲۲/۷ به π باشد وجود ندارد. عددگویای ۱۷۹/۵۷ از ۲۲/۷ کمی به π نزدیکتراست‌ولی در نابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق‌نمی‌کند. عددگویای ۳۵۵/۱۱۳ درنابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق می‌کند و به‌طورمحسوسی از ۲۲/۷ به π نزدیکتر است. درواقع تا شش رقم اعشار دقیق است.

قضیهٔ ۵.۶ را می‌توان درحالت قویتر به‌صورت زیر نیزثابت کرد: عددگنگی چون λ مفروض است، بینهایت عدد گویای m/n، به‌ساده‌ترین صورت‌وجود دارند به‌طوری که :

$$-\frac{۱}{n(n+۱)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{۱}{n(n+۱)}$$

با کمك این قضیه، عدد ۴/۱ از مثال بالا را (که تقریب نسبتاً ضعیفی برای π است) می‌توان حذف کرد.

برای اثبات حالت قویتر قضیهٔ ۵.۶ به‌حالت قویتری از قضیهٔ ۴.۶ نیاز داریم. اما تنها به‌نکته‌های اصلی اثبات اشاره می‌کنیم و جزئیات را به خواننده وامی‌گذاریم.

در اثبات قضیهٔ ۴.۶، اصل لانهٔ کبوتر دیریکله‌را به‌کار گرفتیم تا استدلال کنیم که با k عدد توزیع شده روی k فاصلهٔ مفروض، یا یك عدد در فاصلهٔ نخست وجود دارد یا یك‌فاصله‌یافت‌می‌شود که حداقل‌دوتا از این‌عددهارا شامل‌شود. برای به‌دست‌آوردن حالت قویتر قضیهٔ ۴.۶، فاصلهٔ واحد خود را به $k+1$ زیرفاصله تقسیم واستدلال می‌کنیم که: از k عدد توزیع شده روی $k+1$ فاصلهٔ مفروض، یا یك عدد در فاصلهٔ نخست وجود دارد، یا یك عدد در فاصلهٔ آخر، یا یك فاصله وجود دارد که شامل حداقل دو عدد باشد. این‌کاربرد اصل لانهٔ کبوتر ما را قادر می‌سازد که بدون تغییر بقیهٔ قسمتهای صورت قضیهٔ ۴.۶، نابرابریهای قویتر

$$-\frac{1}{n(k+1)}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{n(k+1)}$$

را به‌جای نابرابریهای موجود در آن قراردهیم. دراین‌صورت اثبات حالت قویتر قضیهٔ ۵.۶ به‌سادگی میسراست.

مجموعه مسأله‌های ۲۵

۱. برای عدد گنگ مفروض λ، ثابت کنید که دوتا از «بینهایت عدد گویای m/n» قضیهٔ ۵.۶ دارای مخرج $n=1$ هستند، یعنی عددهایی صحیح می‌باشند.

۲. گیریم λ عدد گنگ مفروضی باشد. ثابت کنید که صرفنظر از یك استثنا، هرعدد گویایی که در نابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق کند به‌خودی‌خود در نابرابریهای قضیهٔ ۳.۶ نیز صدق می‌کند.

۳. دوعددگویا بیابید که صحیح نباشند وبه‌ازای

(الف) $\lambda=\sqrt{2}$، (ب) $\lambda=\sqrt{3}$، (پ) $\lambda=\sqrt{5}$

در نابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق کنند.

۴. (الف) از پنج عدد نخست دنبالهٔ (۱) از قسمت ۳.۶، کدام‌یك درنابرابریهای

قضیهٔ ۳.۶ با $\lambda=\sqrt{۲}$، صدق می‌کنند؟

(ب) کدام‌یك درنا برابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق می‌کنند؟

۵. (الف) از پنج عدد نخست در دنبالهٔ (۲) از ۳.۶ کدام‌یك در نا برابریهای قضیهٔ ۳.۶، با $\lambda=\pi$ صدق می‌کنند؟

(ب) کدام‌یك در نا برابریهای قضیهٔ ۵.۶ صدق می‌کنند؟

۶*. ثابت کنید که صورت قضیهٔ ۵.۶، درحالت $\lambda=۳/۵$، نادرست است.

۷*. (الف) گیریم a/b و m/n عددهای گویای به‌ساده‌ترین صورت با مخرجهای مثبت باشند. ثابت کنید که این دو عدد درحالت $n>b$ باهم مساوی نیستند. از آنجا ثابت کنید که برای $n>b$ نابرابریهای زیر نادرست‌اند:

$$-\frac{۱}{bn}<\frac{a}{b}-\frac{m}{n}<\frac{۱}{bn}$$

(ب) ثابت کنید اگر λ عدد گویای ثابتی، فرضاً $\lambda=a/b$، باشد، صورت قضیهٔ ۵.۶ نادرست است.

۸*. اثبات حالت قویتر قضیهٔ ۵.۶ را (با توجه به نکته‌های اساسی که قبل از این مجموعه مسأله‌ها ارائه شد) کامل کنید ونشان دهید که $۴/۱-\pi$ و $۱۹/۶-\pi$ در نابرابریهای قویتر صدق نمی‌کنند ولی $۲۲/۷-\pi$ صدق می‌کند.

۶.۶ محدودیت روی تقریبها

در قضیهٔ ۳.۶ ثابت کردیم که متناظر با هرعدد گنگ λ، بینهایت عدد گویای m/n وجود دارند به‌طوری که:

$$-\frac{۱}{۲n}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{۱}{۲n}$$

سپس درقضیهٔ ۵.۶ نشان دادیم که بینهایت عدد m/n وجود دارند به‌طوری که:

$$-\frac{۱}{n^{۲}}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{۱}{n^{۲}}$$

آیا اثبات اینکه بینهایت عدد m/n وجود دارند به‌طوری که:

$$-\frac{۱}{۲n^۲} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{۱}{۲n^۲}$$

ممکن است؟ جواب، آری است، اگرچه آن را دراین‌جا ثابت نمی‌کنیم. درواقع قضیهٔ مشهوری وجود داردکه بیان می‌کند متناظر با هرعددگنگ λ بینهایت عـدد m/n وجود دارند به‌طوری‌که

$$-\frac{۱}{\sqrt{۵}n^۲} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{۱}{\sqrt{۵}n^۲}$$

و به‌علاوه، $\sqrt{۵}$ ثابتی است‌که بهترین تقریب ممکن ازاین نوع را به‌دست می‌دهد. این مطلب می‌رساندکه اگر $\sqrt{۵}$ با هرثابت بزرگتری تعویض گردد، حکم نادرست می‌شود.

جهت ارائهٔ تصوری از چگونگی امکان اثبات اینکه‌برای مقدار ثابت‌حدی وجود دارد، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم: بینهایت عدد گویای m/n وجود ندارند به‌طوری‌که:

$$-\frac{۱}{۵n^۲} < \sqrt{۲} - \frac{m}{n} < \frac{۱}{۵n^۲} \qquad (۴)$$

در واقع ثابت می‌کنیم که (۴) برای هر عدد صحیح n بزرگتر از ۱۰ غیرممکن است.

اثبات، غیرمستقیم است. فرض‌می‌کنیم‌که (۴) برای بعضی‌از عددهای صحیح m و n، با شرط $n > ۱۰$ برقرار باشد، نابرابری

$$-\frac{۱}{۵n^۲} < \sqrt{۲} - \frac{m}{n}$$

می‌رساندکه برای $n > ۱۰$ داریم

$$\frac{m}{n} < \sqrt{۲} + \frac{۱}{۵n^۲} < \sqrt{۲} + \frac{۱}{۵۰۰} < ۲ \qquad (۵)$$

ازطرف دیگر، نابرابری

$$\sqrt{۲} - \frac{m}{n} < \frac{۱}{۵n^۲}$$

می‌رساند که برای $n>10$ داریم

$$\frac{m}{n}>\sqrt{2}-\frac{1}{5n^2}>\sqrt{2}-\frac{1}{500}>1 \qquad (6)$$

حال، اگر m/n را به‌جمله‌های نابرابریهای (۴) اضافه‌کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{5n^2}<\sqrt{2}<\frac{m}{n}+\frac{1}{5n^2} \qquad (7)$$

بنا به‌قضیهٔ ۱.۶ (ث)، هریك از این سه قسمت را، مشروط براینکه ثابت‌کنیم هر قسمت مثبت است ، می‌توان مجذورکرد و نابرابریها را حفظ نموده بنا به (۶) می‌بینیم که

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{5n^2}>1-\frac{1}{5n^2}>1-\frac{1}{500}>0$$

از این‌رو، همهٔ قسمتهای (۷) مثبت هستند و بنابراین سرتاسرآن‌را مجذور می‌کنیم تا نابرابریهای

$$\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{5n^2}\right)^2<2<\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{5n^2}\right)^2$$

$$\frac{m^2}{n^2}-\frac{2m}{5n^3}+\frac{1}{25n^4}<2<\frac{m^2}{n^2}+\frac{2m}{5n^3}+\frac{1}{25n^4}$$

به‌دست‌آیند. با ضرب‌کردن در n^2، نابرابریهای

$$m^2-\frac{2m}{5n}+\frac{1}{25n^2}<2n^2<m^2+\frac{2m}{5n}+\frac{1}{25n^2} \qquad (8)$$

حاصل می‌شوند. حال، بنا به (۵) می‌بینیم که

$$m^2+\frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{25n^2}<m^2+\frac{2}{5}(2)+\frac{1}{25n^2}$$

$$<m^2+\frac{4}{5}+\frac{1}{2500}<m^2+1 \qquad (9)$$

ازطرف دیگر، بنا به (۵) می‌توانیم بنویسیم

$$m^{۲}-\frac{۲}{۵}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{۱}{۲۵n^{۲}}>m^{۲}-\frac{۲}{۵}\left(\frac{m}{n}\right)>m^{۲}-\frac{۴}{۵}>m^{۲}-۱ \qquad (۱۰)$$

با به‌کار بردن (۹) و (۱۰) در(۸)، نابرابریهای

$$m^{۲}-۱<m^{۲}-\frac{۲}{۵}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{۱}{۲۵n^{۲}}<۲n^{۲}$$

$$<m^{۲}+\frac{۲m}{۵n}+\frac{۱}{۲۵n^{۲}}<m^{۲}+۱$$

را به‌دست می‌آوریم. ولی $۲n^{۲}$ یك عدد صحیح است، از این‌رو اگر بین دو عدد صحیح $m^{۲}-۱$ و $m^{۲}+۱$ واقع شود، باید مساوی $m^{۲}$ باشد. بنابراین، نتیجه می گیریم

$$۲n^{۲}=m^{۲}, \quad ۲=\frac{m^{۲}}{n^{۲}}, \quad \sqrt{۲}=\frac{m}{n}$$

و این یك تناقض است، زیرا درحالی که فرض شده‌بود m و n عددهای صحیح هستند نسبتهای آنها $\sqrt{۲}$ و گنگ است.

مجموعه مسأله‌های ۲۶

۱. (الف) ثابت کنید هیچ عدد گویایی چون m/n، با $n>۱۰$ وجود ندارد به‌طوری که:

$$-\frac{۱}{۵n^{۲}}<\sqrt{۳}-\frac{m}{n}<\frac{۱}{۵n^{۲}}$$

(ب) همهٔ عددهای گویای m/n را بیابید که در این نابرابریها صدق کنند.

۲. (الف) ثابت کنیدهیچ‌عددگویای m/n، با $n>۱۰$، وجود ندارد به‌طوری که:

$$-\frac{۱}{n^{۳}}<\sqrt{۲}-\frac{m}{n}<\frac{۱}{n^{۳}}$$

(ب) همهٔ عددهای گویای m/n راکه دراین‌نابرابریهاصدق می کنند، پیدا کنید.

۰۳ (الف) ثابت کنید هیچ عدد گویای m/n، با $n>10$، وجود ندارد به‌طوری که:

$$-\frac{1}{n^3}<\sqrt{3}-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^3}$$

(ب) همهٔ عددهای گویایی‌راکه دراین نابرابریها صدق می‌کنند، بیابید.

۷.۶ خلاصه

دربارهٔ اینکه باچه دقتی‌عدد گنگی چون λ را می‌توان به‌وسیلهٔ بینهایت عدد گویای m/n تقریب کرد، چند قضیه را ثابت کردیم. قویترین قضیه حاکی بودکه λ را می‌توان تا حد $1/n^2$ تقریب نمود. سپس در بخش ۶.۶ یك استنباط سالب‌را ثابت کردیم و آن‌اینکه بینهایت عدد گویای m/n تاحد $1/5n^2$ برای $\sqrt{2}$ وجود ندارد. استنباط سالب مشابهی هم درمورد هرعدد جبری صادق است. این مطلب درست است که برای هرعددجبری λ بینهایت عدد گویای m/n تا حد $1/n^3$ وجودندارد ولی این موضوع دراین‌جا ثابت نشد. این مطلب‌را به‌طورکلی نمی‌توان دربارهٔ همهٔ عددهای متعالی بیان نمود،البته درمورد بعضی از عددهای متعالی درست‌است ولی نه برای همه. درفصل بعد عددی‌را نمایش خواهیم دادکه می‌توانند به‌وسیلهٔ بینهایت m/n نه‌تنها تا حد $1/n^3$، بلکه تاحد $1/n^4$، $1/n^{100}$، و در واقع تاحد $1/n^j$، برای هر j هرچندبزرگ‌که خواننده مایل باشد، تقریب شود. ثابت خواهد شدکه چنین عددی جبری نیست، وبدین ترتیب‌نشان خواهیم دادکه چنین عددهایی هم به‌عنوان عددهای متعالی وجود دارند. تاکنون دربارهٔ این‌عددها، بدون کمترین اطلاعی از وجودشان، بارها صحبت‌کرده‌ایم!

۷

وجود عددهای متعالی

ازکجا می‌دانیم که عددهای متعالی وجود دارند؟ به‌این پرسش در این فصل پایانی پاسخ خواهیم داد. نمایش یك عدد متعالی به اندازهٔ کافی ساده است، ولی اثبات اینکه این‌عدد متعالی‌است مطلب کاملا متفاوتی است. عدد ویژه‌ای که متعالی بودنش را ثابت خواهیم کرد دارای این کیفیت مهم‌است که بسط اعشاری آن عمدتاً از صفر تشکیل می‌شود. این عددرا با α نشان می‌دهیم و مقدار آن

$$\alpha = ۰٫۱۱۰۰۰۱۰۰۰۰...$$

است که در آن ۱ها درمرتبه‌های اعشاری به‌شماره‌های

$$۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, ۷۲۰, ۵۰۴۰, ...$$

یا به‌اصطلاح درمرتبه‌های اعشاری به‌شماره‌های

$$۱!, ۲! ۳!, ۴!, ۵!, ۶!, ۷!, ...$$

قرار می‌گیرند. علامت $k!$ که درآن k یك عدد طبیعی است، k فاکتوریل خوانده می‌شود وحاصلضرب همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا k را نشان می‌دهد؛ بنابراین

$$k! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times (k-۲) \times (k-۱) \times k$$

همهٔ رقمهای بسط اعشاری α، بجز آنها که موقعیتشان با عددهای فاکتوریل مشخص شد، صفر هستند. درنتیجه α را می‌توان به‌صورت مجموعی از توانهای منفی ۱۰ نوشت، یعنی:

$$\alpha = ۱۰^{-۱!} + ۱۰^{-۲!} + ۱۰^{-۳!} + ۱۰^{-۴!} + ۱۰^{-۵!} + \cdots \qquad (۱)$$

$$= ۱۰^{-۱} + ۱۰^{-۲} + ۱۰^{-۶} + ۱۰^{-۲۴} + ۱۰^{-۱۲۰} + \cdots$$

$$= ۰٫۱ + ۰٫۰۱ + ۰٫۰۰۰۰۰۱ + \cdots$$

عدد α را به خاطر ریاضیدان فرانسوی، که برای اولین مرتبه نشان داد عددهای متعالی وجود دارند، عددلیوویل می‌نامند.

برای اینکه ثابت کنیم α یك عدد جبری نیست ازکدام خاصیت ملموس عدد متعالی α می‌توانیم استفاده کنیم؟ جواب این است که α را می‌توان با بینهایت عدد گویای m/n، نه تنها تاحد $۱/n^۲$ (این‌کار را می‌توان برای هر عدد گنگی انجام داد، به‌فصل ۶ رجوع کنید.) بلکه تا حد $۱/n^۳$ و $۱/n^۴$، و در واقع تا حد $۱/n^r$ که درآن r هرعدد مثبت دلخواهی می‌تواند باشد، تقریب‌کرد. هیچ عدد جبری دارای این‌خاصیت نیست. اگر λ عددی گنگ باشد، همان‌طورکه در قضیهٔ ۵.۶ دیدیم، می‌توان آن‌را با بینهایت عددگویای m/n تا حد $۱/n^۲$ تقریب نمود. ولی اگر λ یك عددجبری باشد، نه می‌تواند با بینهایت m/n تا حد $۱/n^۳$ تقریب‌شود و نه‌حتی تا حد $۱/n^{۲٫۱}$؛ بلکه تقریب $۱/n^۲$ بهترین تقریب ممکن از میان کلیهٔ $۱/n^r$هاست. یافتن‌چنین نتیجه‌ای در مورد عددهای جبری، برای سالهای متمادی، یکی از مسأله‌های حل نشدهٔ برجسته بود. درسال ۱۹۵۵، ریاضیدان انگلیسی ك.ف. روت[1] به‌این مسأله پاسخ داد. وی به‌خاطر این‌کار ابتکاری، درسال ۱۹۵۸ درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در ادینبرو اسکاتلند موفق به‌دریافت یك مدال فیلدز گردید. این قضیه به نام تیو- سیگل- روت معروف است، زیرا ا. تیو[2] و سی. ال. سیگل[3] قبلاً به‌نتایجی اساسی دست‌یافته بودند و کار روت بر آن اساس بود.

همانطورکه گفتیم، اثبات متعالی بودن α مطلبی مشکلتر از آن است که صرفاً بسط اعشاری α را بنویسیم. از مفاهیم مربوط به نابرابریها از بخش ۱.۶ استفاده خواهیم‌کرد. همچنین به‌مفهوم قدرمطلق نیاز داریم. شاید خواننده با این مفهوم آشنا

1. K. F. Roth 2. A. Thue 3. C. L. Siegel

باشد، با این وجود مقدمهٔ کوتاهی در بارهٔ این‌موضوع وهمچنین در بارهٔ قضیهٔ عامل ارائه می‌کنیم.

۱۰۷ پیش‌درآمدهایی از جبر

هرعدد حقیقی a یا مثبت است یا منفی و یا صفر. برای چنین عددی «قدرمطلق a» را که با علامت $|a|$ نشان داده می‌شود، تعریف می‌کنیم.* اگر a مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق a را با معادلهٔ $|a|=a$ و اگر a منفی باشد، با معادلهٔ $|a|=-a$ تعریف می‌کنیم. مثلاً

$$|۰|=۰,\quad |۷|=۷,\quad |-۴|=۴,\quad |-۶|=۶,$$
$$|۳|=۳,\quad |-۵|=۵,\quad |-۱۰۰۰|=۱۰۰۰.$$

به‌جای تفکیك تعریف به‌حالتهایی که a مثبت، صفر یا منفی است، می‌توانیم قدرمطلق a را به‌وسیلهٔ تنها معادلهٔ زیر تعریف کنیم:

$$|a|=\sqrt{a^۲} \qquad (۲)$$

زیرا طبق قرارداد $\sqrt{a^۲}$ هرگز یك مقدار منفی را نمی‌پذیرد.

یك نتیجهٔ اساسی این است که اگر دوعدد مساوی باشند، قدرمطلقهای آنها مساوی هستند. به‌صورت‌نمادی: اگر $a=b$، آن‌گاه $|a|=|b|$. نتیجهٔ سادهٔ دیگر تعریف (۲) این است که مقدار a هرچه‌باشد، a و $-a$ قدرمطلق برابر دارند. به‌صورت نمادی: $|a|=|-a|$.

نتیجهٔ مهم دیگر این‌است که $|ab|=|a|\cdot|b|$. این مطلب را می‌توانیم با استفادهٔ از (۲) به‌سادگی به‌صورت زیر ثابت‌کنیم:

$$|a|=\sqrt{a^۲},\qquad |b|=\sqrt{b^۲},\qquad |ab|=\sqrt{a^۲b^۲}$$

پس

$$|ab|=|a|\cdot|b|$$

حال، چه رابطه‌ای بین $|a+b|$ و $|a|+|b|$ برقرار است؟ نشان خواهیم داد که

---

* برای بررسی مفهوم قدرمطلق به‌فصل ۳ ازکتاب آشنایی با نابرابریها از این‌مجموعه کتابها مراجعه‌کنید.

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$. برای اثبات این نتیجه، که در دستگاه وسیعتر عددهای مختلط به نابرابری مثلث موسوم است، مسأله را به حالتهای مختلف تفکیک می کنیم. اگر a و b هردومثبت باشند، آن گاه

$$|a+b|=a+b, \qquad |a|=a, \qquad |b|=b,$$

بنابراین

$$|a+b|=|a|+|b|.$$

اگر a و b هردومنفی باشند، آن گاه

$$|a+b|=-a-b, \qquad |a|=-a, \qquad |b|=-b$$

پس، مجدداً

$$|a+b|=|a|+|b|$$

اگر علامتهای a و b مختلف باشند، یکی مثبت و دیگری منفی، آن گاه در $a+b$ تاحدی یکدیگر را حذف می کنند و می توان گفت که

$|a+b|$ از بیشترین مقدار از مقدارهای $|a|$ و $|b|$ کمتر است.

نتیجه، اینکه دراین حالت: $|a+b|<|a|+|b|$.

اگر یکی از عددها صفر باشد، مثلاً اگر $b=0$ ، آن گاه

$$|a+b|=|a+0|=|a|, \qquad |b|=|0|=0$$

پس دراین حالت:

$$|a+b|=|a|+|b|$$

به‌طورخلاصه، درهمهٔ حالتها یکی از دو رابطهٔ زیر صادق است:

$$|a+b|=|a|+|b| \quad \text{یا} \quad |a+b|<|a|+|b|.$$

برای راحتی کار، همهٔ نتایج درمورد قدرمطلقها را در قضیهٔ زیر یکجا بیان می کنیم.

قضیهٔ ۷.۱۰ برای همهٔ عددهای حقیقی a و b داریم:

(۱) اگر $a=b$، آن‌گاه $|a|=|b|$؛
(۲) $|a|=|-a|$؛
(۳) $|ab|=|a|\cdot|b|$؛
(۴) $|a+b|\leqslant|a|=|b|$.

اکنون، قضیهٔ عامل‌ازجبر راثابت می‌کنیم. عملاً، به‌خاطرمقاصد بعدی خود، صورت خاصی از قضیه را به اثبات می‌رسانیم.

قضیهٔ ۲۰۷. گیریم $f(x)$ یك چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح، و عددگویای β یك ریشهٔ $f(x)=0$ باشد، آن‌گاه، $x-\beta$ یك عامل $f(x)$ است، یعنی، یك چندجمله‌ای مانند $q(x)$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)=(x-\beta)q(x)$. به‌علاوه $q(x)$ دارای ضریبهای‌گویاست و درجهٔ آن از درجهٔ $f(x)$ یکی کمتر است.

اثبات. اگر $f(x)$ را بر $x-\beta$ تقسیم‌کنیم، خارج قسمتی مانند $q(x)$ و باقیمانده‌ای مانند r خواهیم داشت. از آنجا که درجهٔ باقیمانده همیشه از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر است (که در این مورد مقسوم‌علیه چند جمله‌ای درجهٔ اول $x-\beta$ است) می‌بینیم که r مقدار ثابتی است مستقل از x. بنابراین

$$f(x)=(x-\beta)q(x)+r$$

و ازآنجاکه مراحل فرایندتقسیم به‌اصطلاح عملهای گویا هستند، ملاحظه می‌شودکه $q(x)$ باید ضریبهای گویا داشته‌باشد. معادلهٔ‌فوق یك‌اتحادبرحسب x است، بنابراین می‌توان β را به‌جای x قرار داد و $f(\beta)=r$ را به‌دست آورد. در هر صورت $f(\beta)=0$، زیرا β یك‌ریشهٔ $f(x)=0$ است. ازاین‌رو $r=0$. بنابراین باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-\beta$ صفر است و لذا $f(x)=(x-\beta)q(x)$. بالاخره، درجهٔ $f(x)$ هرچه باشد ملاحظه می‌شودکه درجهٔ $q(x)$ یکی‌کمتر ازآن است.

مجموعه مسأله‌های ۲۷

۱. مقدارهای $|۲|$، $|-۲|$، $|-۸|$ و $|۱۰^{-۱}|$ را بنویسید.

۲. در متن ثابت شد که اگر $a=b$، آن‌گاه $|a|=|b|$. آیا عکس‌این مطلب درست است؟

۳. ثابت‌کنیدکه: $|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$.

۴. (الف) ثابت کنید $|x+7|=x+7$ اگر $x\geqslant -7$، ولی $|x+7|=-x-7$ اگر $x\leqslant -7$.

(ب) تحلیل مشابهی برای $|x-7|=x-7$ ارائه کنید.

۵. به‌ازای چه مقدارهایی از x، درصورت وجود، تساویهای زیر برقرارند؟

(الف) $|x+7|=5+|x|$؛ (ب) $|x+7|+|x-7|=|x|+7$؛

(پ) $|x|=|x-4|$؛ (ت) $|2x|=2|x|$.

۶. ثابت کنید که نابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ از فصل ۶، یعنی

$$-\frac{1}{n^2}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^2}$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left|\lambda-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}$$

۷. ثابت کنید $8!=8(7!)$، وهمچنین ثابت کنید $(j+1)!=(j+1)j!$.

۸. ثابت کنید $j(j!)=(j+1)!-j!$.

۹. نشان دهید که ۳/۲ یك ریشهٔ $2x^4-13x^3+27x^2-4x-21=0$ است. آن‌گاه این چندجمله‌ای را بـا $f(x)$ نشان دهید و قضیهٔ ۲.۷ را بـا محاسبهٔ خارج‌قسمت $q(x)$ از طریق تقسیم $f(x)$ بر $x-3/2$ بررسی کنید.

۲.۷ یك تقریب برای α

دلیل واقعی متعالی بودن α این است که به‌طرز بسیارخوبی‌می‌تواند به‌وسیلهٔ عددهای گویای معینی تقریب شود. این مطلب را اکنون توضیح می‌دهیم. یك تقریب گویای خوب برای α را می‌توان با انتخاب تعداد متناهی ازجمله‌های سری (۱)، که α را تعریف می‌کند، به‌دست آورد. β را به‌عنوان مجموع j جملهٔ اول α، آن‌چنان که در (۱) ارائه شده‌است، تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$\beta=10^{-1!}+10^{-2!}+10^{-3!}+\dots+10^{-j!} \qquad (3)$$

مقدار عدد صحیح j بعد مشخص خواهد شد. و ملاحظه می‌کنیم کـه β گویاست،

زیرا می‌توان آن را به‌صورت مجموع کسرهایی نوشت که مخرجهای آنها توانهایی از ۱۰ هستند؛

$$\beta=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\cdots+\frac{1}{10^{j!}}$$

همهٔ این کسرها را می‌توان با مخرج مشترك $10^{j!}$ نوشت، و بنابراین می‌توان آنها را باهم جمع کرد و یك کسر تنهای

$$\beta=\frac{t}{10^{j!}} \qquad (4)$$

را به‌دست آورد، که در آن صورت t عدد صحیحی را نشان می‌دهد ومقدار دقیق آن مهم نیست.

عددگویای β بسیار نزدیك به α است. از معادله‌های (۱) و (۳) می‌بینیم که

$$\alpha-\beta=10^{-(j+1)!}+10^{-(j+2)!}+10^{-(j+3)!}+\cdots$$

بسط اعشاری $\alpha-\beta$، نظیر خود α، کلاً از صفر و یك تشکیل می‌شود. رقم ۱، نخست در مرتبهٔ $(j+1)!$ ظاهرمی‌شود، سپس درمرتبهٔ $(j+2)!$ و به‌همین ترتیب. بنابراین عدد $\alpha-\beta$ از عدد

$$0{,}000000\ldots000002$$

که رقمهای آن، بجز رقم ۲ درمرتبهٔ $(j+1)!$، صفرهستند، کمتر است. طریق‌دیگر بیان این مطلب چنین است

$$\alpha-\beta<\frac{2}{10^{(j+1)!}} \qquad (5)$$

به‌چند نابرابری‌سادهٔ دیگرمتضمن α و β هم نیازداریم. ازآنجا که α و β مثبت هستند، همهٔ‌توانهای α و β هم‌مثبت می‌باشند. به‌علاوه ازآنجاکه $\alpha<1$ و $\beta<1$، می‌بینیم که به‌ازای هرعـدد صحیح و مثبت r و s آن‌گاه $\alpha^r<1$ و $\beta^s<1$ و نیز $\alpha^r\beta^s<1$، بنابراین داریم:

$$0<\alpha^r<1, \qquad 0<\beta^s<1, \qquad 0<\alpha^r\beta^s<1 \qquad (6)$$

۳.۷ طرح اثبات

برای اثبات اینکه α متعالی است، دقیقاً عکس آن را فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم α جبری است و یك تناقض به‌دست می‌آوریم. فرض اینکه α جبری است چنین معنی می‌دهد که α در یك معادلهٔ جبری با ضریبهای صحیح صدق می‌کند. از میان همهٔ معادله‌های جبری باضریبهای صحیح که به‌وسیلهٔ α برآورده می‌شوند، یکی با پایین‌ترین درجه، فرضاً

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_n = 0 \qquad (7)$$

را انتخاب می‌کنیم. به‌جهت اختصار، چند جمله‌ای طرف چپ (۷) را به‌صورت $f(x)$ می‌نویسیم. این‌چند جمله‌ای $f(x)$ در سراسر بقیهٔ فصل نقش اصلی‌راخواهد داشت. به‌خاطرداشته‌باشیدکه فرضهای اساسی درمورد $f(x)$ عبارت‌اند از:

(۱) $f(x)$ ضریبهای گویا دارد؛
(۲) عدد α یك‌ریشهٔ $f(x)=0$ است، پس $f(\alpha)$ متحد با صفراست [منظور از $f(\alpha)$ نتیجهٔ‌تعویض x با α در $f(x)$ است]؛
(۳) عدد α ریشهٔ هیچ معادلهٔ با ضریبهای صحیح ازدرجهٔ‌کمتر از n نیست.

عدد $f(\beta)$ که با تعویض x با β در $f(x)$ به دست آمد، در این تحلیل نیز نقش اصلی‌را دارد.

طرح اثبات چنین‌است. به‌عدد $f(\alpha)-f(\beta)$ [یا $f(\beta)$ — که همان عدد است زیرا $f(\alpha)=0$] به دوطریق متفاوت نگاه خواهیم‌کرد. از یك طرف به $f(\beta)$ — به‌عنوان یك‌چندجمله‌ای‌نسبت به β باضریبهای صحیح‌می‌نگریم. از آنجا که β گویاست، $f(\beta)$ — نیز گویاست وخواهیم دیدکه قدرمطلق آن نسبتاً بزرگ است. راه دیگر بررسی $f(\alpha)-f(\beta)$ به عنوان تفاضل دوچندجمله‌ای است و در بخش بعد نشان خواهیم دادکه این‌تفاضل همان مرتبهٔ بزرگی $\alpha-\beta$ را، که نسبتاً کوچك است، دارا می‌باشد [معادلهٔ(۵) را ببینید]. بنابراین بافرض‌اینکه α جبری است برای $f(\alpha)-f(\beta)$ دومرتبهٔ‌بزرگی ناسازگار را نتیجه‌خواهیم گرفت و از آنجا تناقضی را نشان می‌دهیم.

در بخش بعد با نشان دادن اینکه $f(\beta)$ صفر نیست و اینکه $f(\alpha)-f(\beta)$ همان مرتبهٔ بزرگی $\alpha-\beta$ را دارد وسایل این‌کار را فراهم خواهیم کرد.

مجموعه مسأله‌های ۲۸

۱. اتحادهای زیررا بررسی کنید:

(الف) $$\alpha^4-\beta^4=(\alpha-\beta)\,(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)$$

(ب) $$\alpha^5-\beta^5=(\alpha-\beta)\,(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)$$

(پ) $$\alpha^6-\beta^6=(\alpha-\beta)\,(\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4+\alpha^5)$$

۲. اتحادی بنویسید که $\alpha^7-\beta^7$ را به‌صورت حاصلضرب یك چندجمله‌ای درجهٔ ۶ در $\alpha-\beta$ بیان کند.

۳. ثابت کنید که هرعدد جبری یك ریشه از تعداد بینهایت معادلهٔ جبری باضریبهای صحیح است.

۴.۷ ویژگیهای چندجمله‌ایها

قضیهٔ ۳.۷. عدد β ریشهٔ معادلهٔ (۷) نیست، یعنی $f(\beta)\neq 0$.

اثبات. اگر β یك ریشهٔ (۷) باشد، آن‌گاه بنا به‌قضیهٔ ۲.۷ بایستی $x-\beta$ عاملی برای $f(x)$ باشد، فرضاً

$$f(x)=(x-\beta)\;q(x)$$

همچنین بنا به‌قضیهٔ ۲.۷ چندجمله‌ای $q(x)$ ضریبهای گویا دارد و درجهٔ آن یکی کمتر از درجهٔ $f(x)$ است. حال، ازآنجاکه α یك ریشهٔ $f(x)$ است، داریم

$$f(\alpha)=(\alpha-\beta)q(\alpha)=0$$

ولی این‌حاصلضرب فقط وقتی صفر است که حداقل یکی‌ازعاملها صفر باشد. عامل $\alpha-\beta$ صفر نیست، زیرا α با β متفاوت است. از این‌رو $q(\alpha)=0$، یعنی α یك ریشهٔ $q(x)$ و $q(x)$ از درجهٔ $n-1$ است. اگرحاصلضرب همهٔ مخرجهای گویای $q(x)$ را با k نشان دهیم، آن‌گاه حاصلضرب $kq(n)$ ضریبهای صحیح دارد و α یك ریشهٔ $kq(x)=0$ است. ولی‌این نتیجه مغایر با این مطلب‌است که α در هیچ معادله‌ای با درجهٔ کمتر از n با ضریبهای صحیح، صدق نمی‌کند. از آنجاکه فرض $f(\beta)=0$ به‌یك تناقض منجرشد نتیجه می‌گیریم که $f(\beta)\neq 0$.

اکنون با دنبال کردن طرح ارائه شده در بخش اخیر، نشان می‌دهیم که $|f(\alpha)-f(\beta)|$ از همان مرتبهٔ بزرگی $|\alpha-\beta|$، که خیلی کوچك است، می‌باشد (بخش ۲.۷ را ببینید).

قضیهٔ ۴۰۷. عددی چون N، که تنها به ضریبهای $f(x)$ و درجهٔ آن بستگی دارد، وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(\alpha)-f(\beta)|<N(\alpha-\beta)$$

اثبات. عدد N به‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$N=n|c_n|+(n-۱)|c_{n-۱}|+(n-۲)|c_{n-۲}|+\cdots+۲|c_۲|+c_۱ \quad (۸)$$

تعریف می‌شود. به‌ویژه توجه داشته باشید که N مستقل از عدد صحیح j است که در تعریف β به‌کار رفت.

ضمن اثبات، به‌تجزیهٔ $\alpha^k-\beta^k$ و به‌یك نابرابری که به‌وسیلهٔ $\alpha^k-\beta^k$ برآورده شود، نیز نیازخواهیم داشت. تجزیه توسط

$$\alpha^k-\beta^k=(\alpha-\beta)\,(\alpha^{k-۱}+\alpha^{k-۲}\beta+\alpha^{k-۳}\beta^۲+\cdots+\alpha^۲\beta^{k-۳}$$
$$+\alpha\beta^{k-۲}+\beta^{k-۱}) \quad (۹)$$

به‌دست می‌آید، که در آن k عدد صحیح مثبتی است. این تجزیه‌را می‌توان باضرب عاملهای طرف راست (۹) ثابت کرد:

$$\alpha(\alpha^{k-۱}+\alpha^{k-۲}\beta+\cdots+\alpha\beta^{k-۲}+\beta^{k-۱})=\alpha^k+\alpha^{k-۱}\beta$$
$$+\cdots+\alpha^۲\beta^{k-۲}+\alpha\beta^{k-۱}$$

و

$$\beta(\alpha^{k-۱}+\alpha^{k-۲}\beta+\cdots+\alpha\beta^{k-۲}+\beta^{k-۱})=\alpha^{k-۱}\beta+\alpha^{k-۲}\beta^۲$$
$$+\cdots+\alpha\beta^{k-۱}+\beta^k$$

هرگاه این‌دو معادله را ازهم کم کنیم مشاهده می‌کنیم که همهٔ جمله‌ها، بجز نخستین جمله از معادلهٔ اول وآخرین جمله ازمعادلهٔ دوم، حذف می‌شوند. بنابراین، فقط $\alpha^k-\beta^k$ باقی می‌ماند.

با ملاحظه طرف راست معادلهٔ (۹) می‌بینیم که هریك از جمله‌های $\alpha^{k-۱}$، $\alpha^{k-۲}\beta$ و غیره بنا به نابرابریهای (۶)، از ۱ کمتراست. ولی ازآنجا که این جمله‌ها دقیقاً به‌تعداد k وجود دارند و ازآنجا که $\alpha-\beta$ مثبت است می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha^k-\beta^k<(\alpha-\beta)\,(۱+۱+۱+\cdots+۱+۱+۱)=k(\alpha-\beta) \quad (۱۰)$$

حال، با به‌کار بردن معادلهٔ (۷) مقدارهای $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را محاسبه و $f(\beta)$ را از $f(\alpha)$ کم می‌کنیم. بنابراین، داریم

$$f(\alpha)-f(\beta)=c_n(\alpha^n-\beta^n)+c_{n-1}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+\cdots+c_1(\alpha-\beta)$$

اتحاد (۹)را برای حذف عامل‌مشترك $\alpha-\beta$ از همهٔ جمله‌های طرف‌راست به‌کار می‌بریم. این مطلب به‌تساوی

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)[&c_n(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})\\&+c_{n-1}(\alpha^{n-2}+\alpha^{n-3}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-3}+\beta^{n-2})\\&+\cdots+c_1]\end{aligned}$$

منجر می‌شود. با قدرمطلق گرفتن وبااستفاده ازقضیهٔ ۱.۷ و نابرابری (۱۰) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|f(\alpha)-f(\beta)|-f(\beta)<|\alpha-\beta|[n|c_n|+(n-1)|c_{n-1}|\\+\cdots+|c_1|]\end{aligned}$$

با توجه به‌اینکه $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$ و با استفاده از معادلهٔ (۸) برای تعریف N، در نهایت داریم $|f(\alpha)-f(\beta)|<N(\alpha-\beta)$ و قضیه‌ثابت می‌شود.

۵.۷ متعالی بودن α

اکنون، به‌تکمیل اثبات متعالی بودن α، که‌توسط (۱) تعریف شده،می‌پردازیم. نخست از یك دیدگاه دیگر $f(\alpha)-f(\beta)$ را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۷. عدد

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\times 10^{n\times j} \qquad (11)$$

صرفنظر از اینکه چه مقداری به‌عدد صحیح مثبت j نسبت داده شود، یك عدد صحیح مثبت است.

اثبات. چون $f(\alpha)=0$ پس عدد مورد بحث را می‌توان به‌صورت

$$|f(\beta)|\times 10^{n\times j!} \qquad \text{یا} \qquad |-f(\beta)|\times 10^{n\times j!}$$

نوشت. از معادله‌های (۷) و (۴) ملاحظه می‌کنیم که

$$f(\beta)=c_n\beta^n+c_{n-1}\beta^{n-1}+c_{n-2}\beta^{n-2}+\cdots+c_1\beta+c_0$$
$$=\frac{c_nt^n}{10^{n\times j!}}+\frac{c_{n-1}t^{n-1}}{10^{(n-1)j!}}+\frac{c_{n-2}t^{n-2}}{10^{(n-2)j!}}+\cdots+\frac{c_1t}{10^{j!}}+c_0$$

با ضرب کردن دوطرف در $10^{n\times j!}$ داریم

$$f(\beta)\times 10^{n\times j!}=c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}10^{j!}+c_{n-2}t^{n-2}10^{2\times j!}$$
$$+\cdots+c_1t10^{(n-1)j!}+c_0 10^{n\times j!}$$

و طرف راست یك عدد صحیح است. این عدد صحیح نمی‌تواند صفر باشد، زیرا بنا به قضیهٔ ۳.۷ داریم $f(\beta)\neq 0$. با قدرمطلق گرفتن، می بینیم که

$$|f(\beta)\times 10^{n\times j!}| \qquad \text{یا} \qquad |f(\beta)|\times 10^{n\times j!}$$

یك‌عدد صحیح مثبت است و بنابراین، قضیه ثابت می‌شود.

حال، بااثبات اینکه عدد ارائه شدهٔ به‌وسیلهٔ (۱۱) بین ۰ و ۱ قرار دارد، تناقض آشکاری با قضیهٔ ۵.۷ به‌دست می‌آوریم. برای انجام دادن این‌کار باید عدد صحیح j را، که در تعریف β به‌کاررفته است، طوری انتخاب کنیم که در

$$\frac{2N\times 10^{n\times j!}}{10^{(j+1)!}}<1 \qquad (12)$$

صدق کند. آیا این کار انجام‌پذیر است؟ آری، زیرا این نابرابری معادل نابرابری

$$\frac{2N}{10^{(j+1)-n\times j!}}<1$$

است، که در آن نمای مخرج می‌تواند به‌صورت

$$(j+1)!-n\times j!=(j+1)j!-n\times j!=(j+1-n)j!$$

نوشته شود. به‌ازای n ثابت، باانتخاب j خیلی بزرگ، می‌توان این نما را تاحد دلخواه بزرگ کرد. حال، n و N، بنا به‌معادله‌های (۷) و(۸) ثابت هستند، ولی‌از آنجاکه j نه به n وابسته است ونه به‌N، می‌توانیم آن‌را چنان‌بزرگ انتخاب کنیم که درمعادلهٔ (۱۲) صدق کند.

حال، با به‌کار بردن قضیهٔ ۴.۷ و نابرابری (۵) نشان می‌دهیم عددی که توسط (۱۱) ارائه شده‌است بین ۰ و ۱ قرار دارد؛ بنابراین:

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\times ۱۰^{n\times j!}<N(\alpha-\beta)\times ۱۰^{n\times j!}$$
$$<\frac{۲N\times ۱۰^{n\times j!}}{۱۰^{(j+۱)!}}$$
$$<۱$$

که در آن، در آخرین مرحله از (۱۲) استفاده کردیم. البته عدد (۱۱)، بنا به قضیهٔ ۳.۷ مثبت است.

از این رو یك تناقض داریم و نتیجه می‌گیریم که α نمی‌تواند در هیچ معادله‌ای به‌صورت (۷) صدق کند. بنابراین، α یك عدد متعالی است.

۶.۷ خلاصه

در این فصل به‌پرسش: «آیا عددهای متعالی وجود دارند؟»، عملاً از طریق به نمایش گذاشتن عدد لیوویل و با اثبات اینکه این عدد متعالی است ، یعنی جبری نیست ، پاسخ دادیم.

از آنجا که جزئیات اثبات ممکن است استدلال را مبهم کرده باشد اجازه دهید تمامی اثبات را به‌طور مختصر تکرار کنیم. درشروع فصل گفتیم ایدهٔ اصلی این است که عدد

$$\alpha=۱۰^{-۱!}+۱۰^{-۲!}+۱۰^{-۳!}+۱۰^{-۴!}+\dots$$

را می‌توان با عددهای گویا به‌طور خیلی نزدیك تقریب کرد. این مطلب در نابرابری (۵) بیان شده است که عملاً می‌گوید $\alpha-\beta$ در مقایسهٔ با β خیلی کوچك است. یادآوری می‌کنیم که β عدد گویایی است با مخرج $۱۰^{j!}$ (معادلهٔ (۴) را ببینید) ولی $\alpha-\beta$ از مرتبهٔ $۱۰^{-(j+۱)!}$ است. در قضیهٔ ۴.۷، این مرتبهٔ بزرگی، که خیلی هم کوچك است، از $\alpha-\beta$ به $f(\alpha)-f(\beta)$ تعمیم داده شد، که در آن $f(x)$ یك چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح است و همانطور که بیان شد به‌ازای $x=\alpha$ صفر می‌شود.

از طرف دیگر، با بررسی $f(\alpha)-f(\beta)$، با روشی کاملاً متفاوت، در قضیهٔ ۵.۷، نشان دادیم که بزرگی $f(\alpha)-f(\beta)$ از برآورد قبلی بزرگتر است. (عامل $۱۰^{n\times j!}$ در قضیهٔ ۵.۷ هیچ نقش اساسی بازی نمی‌کند؛ حضورش برای این است که تمایز دو مرتبهٔ بزرگی $f(\alpha)-f(\beta)$ را کاملاً روشن سازد.) این کار، با توجه

به این نکته که $f(\alpha) - f(\beta)$ چیزی جز $-f(\beta)$ نیست و $f(\beta)$ هم‌عدد گویایی است با مخرج $10^{n \times j!}$، انجام پذیرفت. لذا، این فرض که α در $f(x) = 0$ صدق می کند ما را به اثبات اینکه $f(\alpha) - f(\beta)$ خیلی بزرگتر از چیزی است که محاسبهٔ قبلی نشان داد، قادر می‌سازد. این تناقض ثابت می کند که α متعالی است.

پیوست الف

اثبات اینکه بینهایت عدد اول وجود دارد

استدلالی که در این‌جا ارائه‌می‌شود یك اثبات به‌اصطلاح غیرمستقیم معروف به‌برهان خلف است.* در این نوع اثبات فرض‌می کنیم که گزاره نادرست باشد و آن‌گاه از این فرض تناقضی را نتیجه می گیریم. بنابراین، درمورد گزارهٔ حاضر فرض می کنیم که تنها تعدادی متناهی عدد اول وجود داشته باشد.

حال، یك دستگاه نماد برای عددهای اول درنظرمی گیریم. چون تعداد آنها متناهی‌است، اجازه دهیدآنها را با

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$$

نشان بدهیم. این علامت گذاری می‌رساند که دقیقاً k عدد اول وجود دارد، که در آن k یك عدد طبیعی است. اگر این عددهای اول را به‌صورتی که فهرست‌شده‌اند به‌ترتیب اندازه‌شان تلقی کنیم، آن‌گاه مسلماً $p_1 = ۲$، $p_2 = ۳$، $p_3 = ۵$، $p_4 = ۷$ و غیره. باوجود این، در این اثبات به‌کار بردن نماد p_1، p_2، p_3 وغیره به‌جای ۲، ۳، ۵ وغیره مناسبتر است.

ازآنجا که هرعدد طبیعی را می‌توان به عددهای اول تجزیه کرد، ملاحظه می کنیم که هرعدد طبیعی باید حداقل بریکی ازعددهای اول

---

* درلاتین به‌آن reductio ad absurdum می گویند و به‌معنی نفی نقیض گزاره است ازطریق نشان دادن پوچی نتیجه.ـ م.

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$$

بخش‌پذیر باشد، زیرا بنا به‌فرض خودمان هیچ عدد اولی غیرازاینها وجود ندارد. ولی‌عدد طبیعی n راکه از حاصلضرب عددهای‌اول وسپس‌افزودن ۱ به‌آن به‌دست می‌آید، درنظر بگیرید:

$$n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times P_k + 1$$

این عدد بر p_1 بخش‌پذیر نیست، زیرا اگر n را بر p_1 تقسیم‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{خارج قسمت} = p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k, \qquad \text{باقیمانده} = 1$$

درحالی‌که اگر n بر p_1 بخش‌پذیر باشد باقیمانده باید صفر گردد، بنابراین، n بر p_1 بخش‌پذیر نیست.

اثبات مشابهی نشان می‌دهدکه n بر p_2 یا p_3 یا p_4، . . . ، یا p_k بخش‌پذیر نیست.

عددی مانند n (وخارج از لیست عددهای‌اول) نشان داده‌ایم‌که برهیچ عدد اولی بخش‌پذیر نیست وچنین موردی ممتنع است. پس،فرض‌اینکه تنها تعدادی متناهی ازعددهای اول وجود دارد به یك تناقض منطقی منجر می‌گردد و در نتیجه ، این فرض باید نادرست باشد. از این‌رو، بینهایت عدد اول وجود دارد.

پیوست ب

اثبات قضیهٔ بنیادی حساب

دراین پیوست ثابت می‌کنیم که: هرعدد طبیعی غیراز ۱ را می‌توان تنها به‌یك صورت صرفنظر از ترتیب عاملها، به‌عددهای اول تجزیه‌کرد. این مطلب را می‌پذیریم که هر عدد طبیعی، نظیر ۲۳، که خودش اول است، به‌همان صورتی که هست یك «تجزیهٔ به‌عددهای اول» است. حال، این نتیجه را می‌توان درمورد عددهای طبیعی کوچك بی‌درنگ بررسی کرد. مثلاً، ۱۰ را می‌توان به‌صورت ۵ × ۲ تجزیه نمود و به‌تجربه می‌دانیم که هیچ تجزیهٔ دیگری برای آن وجودندارد. این‌مطلب درمورد همهٔ عددها تا ۱۰ درست است:

$$
\begin{aligned}
۲ &= ۲ \\
۳ &= ۳ \\
۴ &= ۲ \times ۲ \\
۵ &= ۵ \\
۶ &= ۲ \times ۳ \\
۷ &= ۷ \\
۸ &= ۲ \times ۲ \times ۲ \\
۹ &= ۳ \times ۳ \\
۱۰ &= ۲ \times ۵
\end{aligned}
$$

این فهرست را می‌توان ادامه داد، ولی چنین فهرستی، هر اندازه هم طویل باشد، نمی‌تواند به عنوان یك اثبات پذیرفته شود. زیرا، می‌دانیم که بینهایت عدد طبیعی

وجود دارد و ما نمی‌توانیم تجزیهٔ همهٔ آنها را بررسی کنیم.

بنا براین ، باید درپی یك استدلال ریاضی باشیم. هر یك از عددهای طبیعی از ۲ تا ۱۰ با تجزیهٔ یکتای خود به عاملهای اول فهرست شده‌اند. حال، یا این فهرست را می توان به‌طور نامحدود چنان تعمیم داد که برای هر عدد طبیعی تجزیهٔ یکتایی به عاملهای اول به‌دست آید، یا در یك جا، درادامهٔ فهرست، ویژگی تجزیهٔ یکتا به‌عاملهای اول ازهم می‌پاشد. تنها این‌دوامکان وجود دارد وبس. اثبات امکان نخست از این دو امکان، موردنظر ماست وآن را با یك استدلال غیرمستقیم انجام می‌دهیم. فرض می کنیم که امکان دوم صحیح باشد، بدین‌معنی که درفهرست عددهای طبیعی ویژگی تجزیهٔ یکتا به عاملهای اول در یك‌جا ازهم می‌پاشد، ونشان می‌دهیم که این فرض به‌یك تناقض منجر می‌شود.

قبل از وارد شدن به‌جزئیات این استدلال طولانی، برای راهنمایی‌خواننده رئوس مطالب را ارائه می کنیم.

اولین عدد صحیحی‌را که می‌تواند به بیشتر از یك صورت به عددهای اول تجزیه شود با m نشان می‌دهیم. دوتجزیهٔ متفاوت m به‌عددهای اول‌را می‌نویسیم. در بخش I اثبات نشان می‌دهیم که هیچ یك از عددهای اول موجود در یکی از تجزیه‌ها در دیگری ظاهرنمی‌شود. بااثبات این مطلب، اگر m در واقع دو تجزیهٔ متفاوت داشته باشد، همهٔ عددهای اول موجود در یکی با همهٔ عددهای اول موجود در دیگری متفاوت‌اند ، بالاخره در بخش II اثبات، عددی چون n را می‌سازیم که کوچکتر از m باشد و دوتجزیهٔ متفاوت به‌عددهای اول هم داشته باشد. این‌مطلب، فرض ما راکه m کوچکترین عدد صحیح با دوتجزیهٔ متفاوت به‌عددهای اول‌است را نقض می کند و بدین ترتیب، اثبات کامل می‌شود.

اولین عدد صحیحی راکه می‌توان به بیشتر از یك صورت به عددهای اول تجزیه نمود با m نشان می‌دهیم . به عبارت دیگر، فرض می کنیم که هر عدد طبیعی کوچکتر از m ویژگی‌تجزیهٔ یکتا به‌عاملهای اول‌را دارد ولی m دارای‌بیش‌ازیك تجزیه است. بنا براین، می‌دانیم که حداقل دو تجزیهٔ متفاوت برای m به‌صورتهای

$$m=p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_r \quad \text{و} \quad m=q_1\times q_2\times q_3\times\cdots\times q_s$$

وجود دارد. مقصود از این علامت‌گذاری چیست؟ مقصود این است که m را می‌توان به‌عددهای اول p_1، p_2، p_3 و غیره تا p_r تجزیه‌کرد وراه دیگری برای تجزیهٔ m به‌عددهای‌اول q_1، q_2، q_3 وغیره تا q_s هم وجود دارد. چرا q_1، q_2، q_3، و غیره تا q_r نه؟ زیرا نمی‌توانیم فرض کنیم که تعداد عاملهای اول در دو تجزیه

یکسان هستند؛ ممکن است آنها درهمه چیز متفاوت باشند.

این علامت‌گذاری به‌توضیح بیشتری نیاز دارد. همچنان‌که در پیوست الف گفتیم مقصود این نیست که p_1 عیناً برچسب دیگری است برای عدد اول ۲، p_2 برچسب دیگری برای عدد اول ۳ وغیره. به‌هیچ‌وجه چنین نیست. نمی‌دانیم که آیا عدد اول ۲ در دستهٔ p_1، p_2، . . .، p_r هست یا نه. بنابراین، p_1 ممکن است ۲ باشد، یا ممکن است ۲۳ باشد، یا ممکن است ۴۷ باشد، یا ممکن است هیچ کدام از اینها نباشد. p_1 چیزی جز یك عدد اول نیست. به‌طور مشابه، p_2 صرفاً یك‌عدد اول است. ممکن است همان عدد اول p_1 باشد یا ممکن است نباشد. تنها چیزی که فرض شده این است که عدد طبیعی m می‌تواند به دوطریق متفاوت به عددهای اول تجزیه شود.

بخش I اثبات. نخستین مطلبی را که می‌توانیم نشان دهیم این است که عددهای اول p_1، p_2، . . .، p_r در دستهٔ نخست کاملاً با عددهای اول q_1، q_2، . . .، q_s، در دستهٔ دوم، فرق دارند. به‌عبارت دیگر، اگر عدد r در دستهٔ نخست ظاهر شود، نمی‌تواند در دستهٔ دوم هم ظاهر شود. از آنجا که این مطلب به‌هیچ‌وجه روشن نیست باید دلیلی ارائه کنیم. اگر دو دسته یك عدد اول مشترك داشته باشند می‌توانیم نماد را طوری مرتب کنیم که عدد اول مشترك درهردسته عدد نخست باشد، بنابراین $p_1=q_1$. (این کاررا می‌توانیم انجام دهیم، زیرا درهر تجزیه ترتیب عددهای اول مهم نیست.) از آنجا که $p_1=q_1$، می‌توان p_1 را به‌جای q_1 نوشت، پس دو تجزیه عبارت‌اند از

$$m=p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_r \qquad \text{و} \qquad m=p_1\times q_2\times q_3\times\cdots\times q_s$$

با تقسیم این معادلات بر p_1 داریم

$$\frac{m}{p_1}=p_2\times p_3\times\cdots\times p_r \qquad \text{و} \qquad \frac{m}{p_1}=q_2\times q_3\times\cdots\times q_s$$

برای عدد طبیعی m/p_1 دوتجزیهٔ متفاوت داریم، چراکه درمورد m با دو تجزیهٔ متفاوت شروع کردیم. ولی، این غیرممکن است، زیرا m کوچکترین عددی بود که بیش از یك تجزیه داشت و m/p_1 از m کوچکتر است.

بخش II اثبات. بنابراین، ثابت کرده‌ایم که عددهای اول p_1، p_2، ...، p_r حاصل از تجزیهٔ به عاملهای اول m کاملاً با عددهای اول q_1، q_2، . . .، q_s حاصل از تجزیهٔ دوم، تفاوت دارند. به‌ویژه می‌دانیم که p_1 با q_1 مساوی نیست،

به نماد ریاضی : $p_1 \neq q_1$. فرض می‌کنیم که p_1 کوچکترین این دو باشد، یعنی $p_1 < q_1$. حق‌داریم این‌طور فرض کنیم، زیرا علامت‌گذاری بین دو دستهٔ عددهای اول کاملاً متقارن است. بنابراین، اگر بتوانیم اثبات درحالت $p_1 < q_1$ را تکمیل کنیم باید بتوانیم به‌طریق مشابهی درمورد $p_1 > q_1$، پس از تعویض pها و qها با یکدیگر، اثبات متقارنی ارائه نماییم.

اکنون، با فرض $p_1 < q_1$، عددی کوچکتر از m، با دوتجزیهٔ متفاوت، را به‌نمایش می‌گذاریم. این مطلب، اثبات را کامل خواهدکرد، زیرا در آغاز فرض کردیم که m کوچکترین عدد با بیش از یك تجزیه‌است، وما این‌را نقض می‌کنیم. یك عدد طبیعی که مشخصات تعیین شده‌را دارد عبارت‌است از

$$n = (q_1 - p_1) q_2 \times q_3 \times q_4 \times \cdots \times q_s$$

توجه‌کنید که n چگونه به‌دست می‌آید: حاصلضرب $q_1 - p_1$ است درعددهای اول q_2، q_3، ...، q_s. این‌را می‌توان به‌صورت یك تفاضل

$$n = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s - p_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s$$

یا

$$n = m - p_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s$$

نوشت، و از آنجاکه $p_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s$ عددمثبتی‌است، می‌بینیم که n از m کوچکتراست.

درپایان، ثابت می‌کنیم که عدد طبیعی n دوتجزیهٔ متفاوت دارد. بدین‌منظور، نحوهٔ عرضهٔ n، یعنی

$$n = (q_1 - p_1) q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s$$

را درنظر می‌گیریم. هریك ازعاملهای q_2، q_3، ...، q_s یك عدد اول است ولی عامل نخست، $q_1 - p_1$، الزاماً یك عدد اول نیست. اگر $q_1 - p_1$ را به عددهای اول تجزیه‌کنیم، برای n یك تجزیه به‌عاملهای اول به‌دست می‌آوریم که شامل‌عدد اول p_1 به‌عنوان یکی از عاملها، نیست. برای پی‌بردن به‌این مطلب، همان‌طورکه دربخش I اثبات نشان داده شد،نخست ملاحظه‌می‌کنیم که عدد p_1 درمیان عددهای اول q_2، q_3، ...، q_s نیست. دوم، بدون توجه به چگونگی تجزیهٔ $q_1 - p_1$ به‌عددهای اول، عدداول p_1 نمی‌تواند درآن ظاهرشود؛ زیرا اگر p_1 یك عامل‌در

تجزیهٔ p_1-q_1 به‌عددهای اول باشد، آن‌گاه p_1 یك مقسوم‌علیه p_1-q_1 خواهد بود، یعنی معادلهٔ

$$q_1-p_1=p_1b$$

که در آن b خارج قسمت در فرایند تقسیم است، برقرار می‌باشد. ولی، این مطلب به معادله‌های

$$q_1=p_1+p_1b \qquad \text{و} \qquad q_1=p_1(1+b)$$

منجر می‌شود و دومی را می‌توان به عنوان بیان این مطلب تلقی کرد که p_1 یك مقسوم‌علیه q_1 است، که غیرممکن است، چرا که هیچ عدد اولی نمی‌تواند مقسوم‌علیه عدد اول دیگر باشد.

اکنون، نشان می‌دهیم که n را می‌توان به‌طریق دیگری نیز، که p_1 یکی از عاملهای اولش باشد، تجزیه کرد. برای این کار به معادلهٔ قبلی یعنی

$$n=m-p_1\times q_2\times q_3\times\cdots\times q_s$$

برمی‌گردیم و به‌جای m صورت خودش، یعنی

$$m=p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_r$$

را قرار می‌دهیم و بنابراین

$$\begin{aligned}n&=p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_r-p_1\times q_2\times q_3\times\cdots\times q_s\\&=p_1(p_2\times p_3\times\cdots\times p_r-q_2\times q_3\times\cdots\times q_s)\end{aligned}$$

عامل داخل پرانتز الزاماً یك عدد اول نیست، ولی اگر آن‌را به‌عددهای اول تجزیه کنیم، برای n تجزیهٔ به‌عاملهای اولی خواهیم داشت که شامل عدد اول p_1 است. بنابراین، دوتجزیه برای n، بلکه دو روش برای به دست آوردن تجزیهٔ n، یکی بدون عدد اول p_1 درمیان عاملها و دیگری با عدد اول p_1، به نمایش گذاشته‌ایم. به‌عبارت دیگر، عدد n، که کوچکتر از m است، دوتجزیهٔ به‌عاملهای اول متفاوت را دارد. این‌مطلب، اثبات‌راکامل می‌کند.

پیوست پ

اثبات کانتور دربارهٔ وجود عددهای متعالی

درفصل ۷ وجود عددهای متعالی‌را با به‌نمایش گذاشتن یك عدد ثابت کـردیم. در این پیوست برای وجود این عددها با روشی کاملاً متفاوت، اثبات مستقلی ارائه می‌کنیم، ضمناً نشان می‌دهیم که بینهایت عدد متعالی وجود دارد. در واقع، ثابت می‌کنیم که، به‌معنای مشخصی، تعداد عددهای متعالی بیشتر از عددهای جبری‌است.

درابتدا، اجازه دهید تصریح کنیم که توجه خودرا به عددهای جبری حقیقی و عددهای متـعالی حقیقی محدود می‌کنیم. مثلاً، ریشه‌های معـادلهٔ $x^۲+۱=۰$ عددهای‌جبری‌هستند ولی‌جبری حقیقی نیستند. اگرچه نتایج‌عرضه‌شده واثباتهایشان درحالت مختلط نیزقابل قبول‌اند،ولی بامحدودکردن توجه خود به‌عددهای حقیقی، ازچند مشکل فرعی اجتناب می‌کنیم.

منظور از مجموعه‌ای مانند S دسته‌ای‌از اشیای معین‌کاملاً مشخص شده‌است. این اشیا به عضوهای مجموعهٔ S، یا عنصرهای مجموعهٔ S موسوم‌اند. مجموعه‌ای چون S ممکن است پایان‌دار باشد، مثل مجموعهٔ عددهای اول کمتر از ۲۰

$$S=\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\}$$

یا بی‌پایان باشد، مانند مجموعهٔ عددهای طبیعی

$$S=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots\}$$

یك مجموعهٔ‌بی‌پایان، شمارا (یا شمارش‌پذیر) خوانده می‌شود اگرعضوهای آن را بتوان به‌صورت دنباله‌ای چون

$$a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, \cdots$$

نوشت که شامل همهٔ عضوهای مجموعه باشد. مثلاً، مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج را می‌توان به‌صورت

$$۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, \cdots$$

نوشت، که در آن جملهٔ nام دنباله $۲n$ است، و لذا این مجموعه، یك مجموعهٔ شماراست.

مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح شماراست، زیرا می‌تواند به‌صورت دنبالهٔ

$$۰, \quad ۱, -۱, \quad ۲, -۲, \quad ۳, -۳, \quad ۴, -۴, \ldots$$

نوشته شود. این مجموعه به‌شکلهای دیگرهم می‌تواند به‌صورت یك دنباله نوشته شود ولی برای نشان دادن اینکه مجموعه شماراست، یك طریق کافی است.

برای اینکه نتیجه بگیریم مجموعه‌ای شماراست لازم نیست برای جملهٔ nام دنبالهٔ مربوط فرمول مخصوصی دردست داشته باشیم. مثلاً مجموعهٔ عددهای اول

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \cdots$$

شماراست، هرچند مقدار دقیق عدد اول مرتبهٔ صد میلیونیوم را هم ندانیم. آگهی به‌اینکه چنین عدد اولی وجود دارد و درنتیجه یك نظم دنباله‌ای برای کل مجموعه قابل تصور باشد، کافی است.

حال، ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا شماراست. توجه داریم که هرعدد گویا ریشهٔ یك معادلهٔ خطی $ax+b=۰$، با ضریبهای صحیح a و b، است. به‌علاوه، بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم a را به‌عددهای مثبت محدود کنیم. مثلاً عدد گویای $۳/۵$ یك ریشهٔ $۵x-۳=۰$ است. می‌گوییم شاخص معادله $ax+b=۰$ عبارت است از:

$$۱+a+|b|$$

بنابراین، شاخص هرمعادله یك عدد صحیح مثبت است. مثلاً، شاخص معادلهٔ $۵x-۳=۰$ عدد ۹ است. هیچ معادله‌ای باشاخص ۱ وجودندارد وتنها یك‌معادله، یعنی $x=۰$، دارای شاخص ۲ است. جدول پ۱ همهٔ معادله‌های خطی باشاخصهای تا ۵ را شامل می‌گردد. عددهای گویای معرفی شده به‌وسیلهٔ معادله‌های جدول پ۱ را نیز می‌توان به‌ترتیب بزرگی، آن‌طور که در جدول پ۲ نشان داده شده

است، به‌صورت جدول نوشت.

جدول پ ۱

شاخص	معادله‌ها
۲	$x=0$
۳	$2x=0,\quad x+1=0,\quad x-1=0$
۴	$3x=0,\ 2x+1=0,\ 2x-1=0,\ x+2=0,\ x-2=0$
۵	$4x=0,\ 3x+1=0,\ 3x-1=0,\ 2x+2=0,\ 2x-2=0$ $x+3=0,\ x-3=0$

جدول پ ۲

شاخص	عددهای گویای معرفی شده
۲	0
۳	$-1,\ 1$
۴	$-2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2$
۵	$-3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3$

واضح است که به‌ازای هر شاخص j تنها تعداد محدودی معادلهٔ خطی وجود دارد. در واقع تعداد $j-۳$ معادلهٔ باشاخص j وجود دارد (تعداد دقیق آن واقعاً مهم نیست). بنابراین، باهر افزایش شاخص تنها تعداد باپایانی عدد گویای جدید معرفی می‌شود. از این‌رو، می‌توانیم عددهای گویا را با فهرست کردن ریشه‌های معادلهٔ با شاخص ۲، سپس ریشه‌های همهٔ معادله‌های با شاخص ۳، و به‌همین ترتیب درمورد شاخصهای بالاتر، یکی‌یکی، به‌صورت دنباله‌ای چون

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ -3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3,\ \ldots$$

بنویسیم. از آنجا که همهٔ عددهای گویا در این دنباله ظاهر می‌شوند، می‌توان گفت که عددهای گویا شمارا هستند.

همین دلیل را می‌توان برای اثبات اینکه مجموعهٔ عددهای جبری شماراست به‌کار برد. ولی نخست باید درمورد تعداد ریشه‌های یك معادلهٔ جبری اطلاعاتی داشته‌باشیم. به‌خاطر آورید، عددجبری عددی‌است که درمعادلهٔ $f(x)=0$ از نوع

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad (1)$$

با ضریبهای صحیح، صدق کند. می‌توان فرض کرد که a_n مثبت‌است، زیرا اگرمنفی باشد بدون اینکه ریشه‌ها تغییر کنند می‌توانیم معادله را در -1 ضرب کنیم.

قضیهٔ پ۱۰. هرمعادلهٔ به‌صورت (۱) حداکثر n ریشهٔ متفاوت دارد.

اثبات. برخلاف آنچه که قراراست ثابت شود، فرض کنیم معادلهٔ (۱) تعداد $n+1$ ریشهٔ متفاوت، فرضاً $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$، را داشته باشد. حال قضیهٔ ۲.۷ (فصل ۷)، یا ترجیحاً شکل جزئی تغییر یافتهٔ آن‌را، به‌کار می‌بریم. اثبات آن قضیه مارا مطمئن می‌کندکه اگر β یك ریشهٔ $f(x)=0$ باشد، آن‌گاه $x-\beta$ یك‌عامل $f(x)$ است، خواه β یك عددگویا باشد یا نباشد. درحالتی که β گنگ است ضریبهای خارج قسمت $q(x)$ گنگ هستند، ولی این موضوع در این جا اهمیتی ندارد. بنابراین، با این شرایط می‌بینیم که $x-\beta_1$ یك‌عامل $f(x)$، فرضاً با خارج قسمت $q_1(x)$ است:

$$f(x)=(x-\beta_1)q_1(x)$$

از آنجا که β_2 ریشهٔ دیگری از $f(x)=0$ است، می‌بینیم که β_2 باید یك ریشهٔ $q_1(x)=0$ باشد و در نتیجه $x-\beta_2$ یك عامل $q_1(x)$، فرضاً با خارج قسمت $q_2(x)$ است:

$$q_1(x)=(x-\beta_2)q_2(x)$$

$$f(x)=(x-\beta_1)q_1(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)q_2(x)$$

با ادامهٔ این فرایند درمورد β_3، β_4، ...، β_n ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ را می‌توان به صورت

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdots(x-\beta_n)q_n(x) \qquad (2)$$

تجزیه کرد. ولی چون $f(x)$ ازدرجهٔ n است، $q_n(x)$ باید مقدار ثابتی باشد، در واقع برای اینکه این تجزیه بامعادلهٔ (۱) وفق دهد، $q_n(x)$ باید a_n باشد.

حال ریشهٔ $\beta_{n+۱}$ راکه با سایر ریشه‌ها متفاوت است درنظر بگیرید. از این مطلب که $f(\beta_{n+۱})=۰$ و باکمك (۲) نتیجه می گیریم که

$$(\beta_{n+۱}-\beta_۱)(\beta_{n+۱}-\beta_۲)(\beta_{n+۱}-\beta_۳)\cdots(\beta_{n+۱}-\beta_n)a_n=۰$$

و این، غیرممکن است، چراکه حاصلضرب عاملهای غیرصفرنمی‌تواند صفر باشد. بنابراین، قضیهٔ پ. ۱ ثابت می‌شود.

قضیهٔ پ. ۲. مجموعهٔ عددهای جبری شماراست.

اثبات. می گوییم شاخص معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$n+a_n+|a_{n-۱}|+|a_{n-۲}|+\cdots+|a_۲|+|a_۱|+|a_۰|$$

چون a_n مثبت است، این‌عدد، صحیح ومثبت است، واین یك تعمیم ساده ازتعریف شاخص یك معادلهٔ خطی است. مجدداً می‌توانیم برای مقادیرکوچك شاخص، همهٔ معادله‌ها را طبق جدول پ ۳ تنظیم کنیم.

جدول پ ۳

شاخص	معادله‌ها
۲	$x=۰$
۳	$x^۲=۰,\ ۲x=۰,\ x+۱=۰,\ x-۱=۰$
۴	$x^۳=۰,\ ۲x^۲=۰,\ x^۲+x=۰,\ x^۲-x=۰,\ x^۲+۱=۰,$ $x^۲-۱=۰,\ ۳x=۰,\ ۲x+۱=۰,$ $۲x-۱=۰,\ x+۲=۰,\ x-۲=۰$

مانند حالت‌معادله‌های خطی، همهٔ‌عددهای جبری جدیدی‌راکه ازمعادله‌های جدول پ ۳ حاصل می‌شوند، فهرست‌می کنیم. اگر برای هرشاخص، آن عددها را

به ترتیب بزرگی مرتب کنیم، دنبالهٔ

$$۰; -۱, ۱; -۲, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۲; -۳, -\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}, -\sqrt{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲},$$

(۳)

$$-\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}, ۳; -۴, \ldots .$$

را به‌دست می‌آوریم. عدد ۰ از تنها معادلهٔ با شاخص ۲ حاصل می‌شود؛ عددهای ۱— و۱+ از معادله‌های با شاخص ۳، عددهای ۲—، ۱/۲—، ۱/۲، ۲ از معادله‌های با شاخص ۴ و غیره. تعداد معادله‌های باشاخص ثابت n، متناهی‌است، زیرا درجهٔ n وضریبهای a_0، ...، a_n به‌مجموعهٔ پایان‌داری ازعددهای صحیح محدود می‌شوند. همچنین بنا به‌قضیهٔ پ.۱ می‌دانیم که هریك ازاین‌معادله‌ها حداکثر n ریشه دارد. از این‌رو، دنبالهٔ (۳) همهٔ عددهای جبری حقیقی را شامل می‌شود. بااین وجود، بایدتوجه داشت که هرچه به‌طرف شاخصهای بالاترمی‌رویم، اگرچه در هرمرحله می‌توانیم تمام معادله‌های هرشاخص مفروض را فهرست کنیم، ولی نمی‌توانیم به‌آن صورت که درمورد چند عدد نخست در(۳) عمل کردیم، به‌فهرست کردن فرم ریشه‌های مشخص ادامه دهیم.

می‌خواهیم از قضیهٔ پ.۲ این نتیجه را بگیریم که مجموعهٔ عددهای جبری حقیقی بین ۰ و ۱ شماراست. این مطلب از یك اصل کلی ساده نتیجه می‌شود که ما آن‌را درمورد به‌اصطلاح زیرمجموعه‌ها به‌صورت یك‌قضیه بیان‌می‌کنیم. مجموعهٔ M زیرمجموعهٔ مجموعهٔ S نامیده می‌شود اگر هرعضو M عضوی از S باشد.

قضیهٔ پ.۳ . هرزیرمجموعه بی‌پایان ازیك مجموعهٔ شمارا، خود شماراست.

اثبات . گیریم M یك زیر مجموعهٔ بی‌پایان ازمجموعهٔ شمارایی مانند S، فرضاً $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ است. فرض کنیم a_{i_1} اولین‌عضو S باشدکه در M هست، a_{i_2}، دومی وغیره. آن‌گاه M مجموعهٔ

$$M=\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots\}$$

است که به‌وضوح شمارا می‌باشد.

تا این‌جا هرمجموعهٔ بی‌پایانی که درنظر گرفته‌ایم شمارا بوده است؛ حال،

مجموعهٔ متفاوتی‌را مطرح می‌کنیم که ناشمار است.

قضیهٔ پ. ۴. مجموعهٔ عددهای حقیقی ناشماراست.

اثبات. نظر به‌قضیهٔ پ. ۳، اثبات این‌مطلب درمورد عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ کافی خواهد بود، به‌ویژه اگر عددهای حقیقی چون x را در نظر بگیریم که در نابرابری $0 < x \leqslant 1$، که ۱ را شامل می‌شود و ۰ را شامل نمی‌شود، صدق بکنند. فرض‌کنید مجموعهٔ عددهای‌حقیقی بین ۰ و ۱ شمارا، فرضاً به‌شکل

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \cdots$$

باشد. این عددها را به‌صورت اعشاری می‌نویسیم، ضمناً بااستفاده ازشکل دوره‌ای نامتناهی عددهای اعشاری پایان‌دار، از درج این‌عددها به‌صورت‌پایان‌دار، اجتناب می‌کنیم (بخش ۵.۲ را ببینید). مثلاً عدد ۱/۲ را، به‌جای ۵ر۰، به صورت ...۴۹۹۹۹۹ر۰ می‌نویسیم. بنابراین، داریم

$$r_1 = 0/a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\cdots$$

$$r_2 = 0/a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\cdots$$

$$r_3 = 0/a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\cdots$$ ، وغیره.

اکنون، عدد

$$\beta = 0/b_1b_2b_3b_4\cdots$$

را به‌صورت زیر می‌سازیم. فرض‌می‌کنیم b_1 رقمی دلخواه بین ۱ و ۹، ولی‌متفاوت با a_{11} باشد. همچنین، فرض می‌کنیم b_2 یك رقم غیرصفر، مخالف با a_{22} باشد. به‌طورکلی، فرض می‌کنیم b_k یك رقم غیرصفر، متمایز از a_{kk} باشد. از این‌رو، عدد β با r_1 متفاوت است (زیرا، آنها در اولین رقم اعشاری متفاوت‌اند) با r_2 فرق دارد (زیرا، آنها در دومین رقم اعشاری تفاوت دارند) و به‌طورکلی با r_k متفاوت است (زیرا، آنها در kامین رقم اعشاری تفاوت دارند). بنابراین، β با هریك از rها متفاوت است. ولی β یك عددحقیقی بین ۰ و ۱ است ودر نتیجه یك تناقض داریم.

از این قضیه می‌توانیم نتیجه‌بگیریم که چون‌عددهای جبری بین ۰ و ۱ شمارا هستند ولی‌عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ شمارا نیستند، باید عددهای حقیقی‌که جبری

هم نیستند وجود داشته باشند. اینها، همان عددهای متعالی می باشند، که بدین ترتیب وجودشان به اثبات می رسد.

قضیهٔ پ. ۵. مجموعهٔ عددهای حقیقی متعالی ناشماراست.

اثبات . فرض کنید عددهای حقیقی متعالی شمارا، فرضاً به‌صورت

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots$$

باشند . از آنجا که بنا به قضیهٔ پ. ۲ ، عددهای جبری شمارا ، فرضاً به صورت $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ هستند، برخلاف قضیهٔ پ . ۴، عددهای حقیقی را می توان به‌صورت دنباله‌ای مانند

$$t_1, a_1, t_2, a_2, t_3, a_3, t_4, a_4, \cdots$$

فهرست نمود. بنا براین، یك تناقض داریم و قضیهٔ پ.۵ ثابت می‌شود.

در پایان، توجه شما را به این نکته جلب می کنیم که قضیه‌های پ.۲ و پ.۵ را می‌توان چنین تعبیر نمود که عددهای متعالی «بیشتر» از عددهای جبری هستند . عددهای جبری را می‌توان در یك دنبالهٔ بی‌پایان فهرست کرد ولی عددهای متعالی بیشتر از آن هستند که به‌ما چنین امکانی را بدهند.

مجموعه مسأله‌های ۲۹

۱. (الف) همهٔ معادله‌های خطی با شاخص ۶ را فهرست کنید، و(ب) همهٔ ریشه‌های این معادله‌ها را کـه ریشه‌های معادله‌هـای با شاخصهای پایینتر نیستند، فهرست کنید.

۲. ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح فرد، مثبت ومنفی، شماراست .

۳. ثابت کنید مجموعهٔ چندجمله‌ایهـای $a+bx^4$ ، که درآن a و b همهٔ عددهای طبیعی را می پذیرند، شماراست.

۴. همهٔ معادله‌های با شاخص (۵) را فهرست کنید، و سپس دنبالهٔ (۳) تا عنصر ۳ را بررسی نمایید.

۵. ثابت کنید مجموعهٔ عددهای به‌صورت $a+b\sqrt{3}$، که در آن a و b همهٔ عددهای گویا را می‌پذیرند، شماراست.

۶. ثابت کنید اگر مجموعهٔ A را بتوان به‌دومجموعهٔ شمارای B و C تفکیک نمود، آن گاه A شماراست.

۷. ثابت کنید مجموعهٔ عددهای حقیقی (اکیداً) بین ۰ و ۱٫۰ ناشماراست.

۸. ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ عددهای گنگ ناشماراست.

پیوست ت

عددهای مثلثاتی

در بخشهای ۱.۵ و ۲.۵ نشان دادیم که عددهای مشخصی از مبحث مثلثـات گنگ هستند. حال، بااستفاده از یك روش پیچیده‌تر، حکمهای کلی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ت. ۱ اگر θ زاویه‌ای باشدکه اندازهٔ آن برحسب درجه یك عدد گویا باشد، همچنین اگر $0 < \theta < 90^\circ$، آن‌گاه $\cos\theta$، $\sin\theta$ و $\tan\theta$، بجزسه‌استثنای

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2},\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \tan 45^\circ = 1$$

عددهای گنگ هستند.

یك نظر اجمالی به‌مجموعه مسأله‌های بخشهای ۱.۵ و ۲.۵ معلوم می‌نماید که قضیهٔ ت.۱ همهٔ مثالهای عددهای گنگ مورد بحث درآن بخشها وچندین حالت دیگر بحث نشده در فصل ۵ را شامل می گردد.

اثبات این قضیه را با اثبات دو حکم از مثلثات آغاز می‌کنیم. نخست نشان می‌دهیم که اگر θ یك زاویه و n عدد صحیح مثبتی باشد، آن گاه

$$2\cos(n+1)\theta = \{2\cos n\theta\}\{2\cos\theta\} - 2\cos(n-1)\theta \qquad (1)$$

این اتحاد را می‌توان به‌طریق زیر به‌دست‌آورد. از اتحادهای اساسی

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

شروع می‌کنیم، اگر آنها را باهم جمع کنیم، آن گاه

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=۲\cos A\cos B$$

یا

$$\cos(A+B)=۲\cos A\cos B-\cos(A-B)$$

به‌دست می‌آید. حال، $n\theta$ را به‌جای A و θ را به‌جای B قرار می‌دهیم، درنتیجه $A+B=(n+۱)\theta$ و $A-B=(n-۱)\theta$، وآخرین رابطه به‌صورت

$$\cos(n+۱)\theta=۲\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-۱)\theta$$

درمی‌آید. با ضرب این اتحاد در ۲، اتحاد (۱) موردنظررا به‌دست می‌آوریم.

اکنون، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، عبارت $۲\cos n\theta$ را می‌توان به‌صورت

$$۲\cos n\theta=(۲\cos\theta)^n+c_{n-۱}(۲\cos\theta)^{n-۱}+\cdots+c_۱(۲\cos\theta)+c_۰$$
(۲)

نوشت، که درآن ضریبهای $c_۰$، $c_۱$، ...، $c_{n-۲}$، $c_{n-۱}$ عددهای صحیح هستند. قبل از اثبات، مفهوم این رابطه‌را برای عددهای صحیح مثبت وکوچك n بررسی می‌کنیم.

برای $n=۱$، معادلهٔ (۲) صورت سادهٔ $۲\cos\theta=۲\cos\theta$را دارد. برای $n=۲$، اتحاد معروف $\cos۲\theta=۲\cos^۲\theta-۱$ را به‌صورت

$$۲\cos۲\theta=(۲\cos\theta)^۲-۲$$

می‌نویسیم که صورت ویژهٔ دیگری از معادلهٔ (۲) است. برای $n=۳$، بامثلثات مقدماتی [یا بااستفاده ازاتحاد (۱) وفرض $n=۲$] به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$۲\cos۳\theta=(۲\cos\theta)^۳-۳(۲\cos\theta)$$

این رابطه هم با فرض $n=۳$، $c_۲=۰$، $c_۱=-۳$ و $c_۰=۰$ به همان صورت معادلهٔ (۲) می‌باشد.

البته باید دانست که مقدارهای ثابت $c_۰$، $c_۱$ و غیره در معادلهٔ (۲) برای مقدارهای متفاوت n، متفاوت‌اند. مثلاً، بااستفاده از اتحاد (۱) و با فرض $n=۳$

حالت بعدی

$$۲\cos ۴\theta = (۲\cos \theta)^{۴} - ۴(۲\cos \theta)^{۲} + ۲$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، به‌ازای $n = ۴$، ثابتهای معادلهٔ (۲) مقدارهای $c_{۳} = ۰$، $c_{۲} = -۴$، $c_{۱} = ۰$ و $c_{۰} = -۲$ را دارند.

بعداز بحث دربارهٔ چگونگی تفسیر معادلهٔ (۲)، اکنون حالت‌کلی آن را با استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. برای این کار باید ثابت‌کنیم که اگر عبارتی نظیر (۲) برای $۲\cos n\theta$ وجود داشته باشد، آن‌گاه عبارتی از نوع مشابه برای $۲\cos (n+۱)\theta$ هم وجود دارد. علاوه برآن با فرض درستی فرمول (۲) برای $۲\cos n\theta$، فرمول مرحلهٔ قبل از آن، یعنی

$$۲\cos (n-۱)\theta = (۲\cos \theta)^{n-۱} + b_{n-۲}(۲\cos \theta)^{n-۲} + \cdots + b_{۱}(۲\cos \theta) + b_{۰} \qquad (۳)$$

را نیزدرنظرمی‌گیریم که درآن‌ضریبها، عددهای‌صحیح هستند. حال، اگرمعادله‌های (۲) و (۳) را در اتحاد (۱) قراردهیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
۲\cos(n+۱)\theta &= \\
&= ۲\cos \theta[(۲\cos \theta)^{n} + c_{n-۱}(۲\cos \theta)^{n-۱} + \cdots + c_{۱}(۲\cos \theta) + c_{۰}] \\
&\quad -[(۲\cos \theta)^{n-۱} + b_{n-۲}(۲\cos \theta)^{n-۲} + \cdots + b_{۱}(۲\cos \theta) + b_{۰}] \\
&= (۲\cos \theta)^{n+۱} + c_{n-۱}(۲\cos \theta)^{n} + (c_{n-۲} - ۱)(۲\cos \theta)^{n-۱} \\
&\quad + (c_{n-۳} - b_{n-۲})(۲\cos \theta)^{n-۲} + \cdots + (c_{۰} - b_{۱})(۲\cos \theta) - b_{۰}
\end{aligned}$$

ازآنجاکه همهٔضریبها صحیح‌هستند، این‌عبارت که این‌مرتبه برای$۲\cos(n+۱)\theta$ است باز هم به‌صورت (۲) است. از این‌رو بنابه استقرای ریاضی، معادله‌ای به‌صورت (۲) برای همهٔ مقادیر n وجود دارد.

اکنون، درموقعیتی‌هستیم‌که قضیهٔ ت. ۱ راثابت‌کنیم. اگر θ زاویه‌ای باشد که اندازهٔ آن برحسب درجه یك عددگویاست پس عدد صحیحی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که $n\theta$ مضرب صحیحی از ۳۶۰° باشد. مثلاً، اگر θ برابر $۲۳/۷$ درجه باشد، می‌توانیم $n = ۷ \times ۳۶۰$ را برگزینیم. به‌طورکلی، اگر θ مساوی a/b درجه باشد، که در آن a و b عددهای صحیح هستند، $n = ۳۶۰b$ را

برمی گزینیم تا $n\theta=360a$ گردد. آن گاه $\cos n\theta=1$، زیرا $n\theta$ مضربی از $360°$ است. باقراردادن این مقدار در معادلهٔ (۲)، بعداز مرتب کردن جمله‌ها داریم

$$(2\cos\theta)^n+c_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+\cdots+c_1(2\cos\theta)+c_0-2=0 \qquad (4)$$

ولی این رابطه نشان می‌دهد که برای زاویهٔ θی مورد بحث، $2\cos\theta$ یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح

$$x^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\cdots+c_1x+c_0-2=0$$

است. حال، بنا به‌نتیجهٔ ۱ مندرج در صفحهٔ ۷۰ هر ریشهٔ گویای این معادله یك عدد صحیح است. بنا براین اگر $2\cos\theta$ گویا باشد، الزاماً عددی صحیح است. اما مقدار $\cos\theta$ حداکثر ۱ و حداقل ۱ — می‌تواند باشد. از این‌رو مقدار $2\cos\theta$ حداکثر ۲ و حداقل ۲ — است. درقضیهٔ ت. ۱ فرض شده است که $0<\theta<90$، بنا براین $\cos\theta$ بین ۱ و ۰ و درنتیجه $2\cos\theta$ بین ۲ و ۰ قرار دارد. تنها عدد صحیح بین ۲ و ۰ ، عدد ۱ است ، بنا براین اگر $2\cos\theta$ گویا باشد ، نتیجه می گیریم که

$$2\cos\theta=1,\quad \cos\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=60°$$

این استدلال قضیهٔ ت. ۱ را برای $\cos\theta$ ثابت می‌کند.

و اما در بارهٔ $\sin\theta$، اگر θ برحسب درجه گویا و $0<\theta<90°$ باشد، آن گاه‌مکمل آن $90°-\theta$ نیز برحسب‌درجه گویاست و به‌علاوه $0<90°-\theta<90°$. ازمثلثات مقدماتی می‌دانیم که

$$\sin\theta=\cos(90°-\theta)$$

و از این‌رو اگر $\sin\theta$ گویا باشد، $\cos(90°-\theta)$ نیز گویاست. ولی بنا به‌قسمتی از قضیهٔ ت. ۱ که هم اکنون ثابت شد $\cos(90°-\theta)$ تنها وقتی گویاست که $90°-\theta=60°$، یعنی $\theta=30°$. بنا براین، قضیهٔ ت. ۱ را برای $\sin\theta$ هم‌ثابت کردیم.

حال، برای اینکه به $\tan\theta$ بپردازیم، نخست مشاهده می کنیم که: اگراندازهٔ θ برحسب درجه گویا باشد و اگر $0<\theta<180°$ آن‌گاه $\cos\theta$ تنها در سه حالت $\theta=60°$، $\theta=90°$، $\theta=120°$ گویاست. این، تعمیم سادهٔ قضیهٔ ت. ۱ برای

کسینوس زاویه‌های بین ۰ و۱۸۰ درجه، ازاین‌جا نتیجه می‌شود که ۰ = $\cos ۹۰^\circ$ و $\cos\theta = -\cos(۱۸۰^\circ - \theta)$.

حال، اتحاد

$$\cos^{۲}\theta = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = \frac{\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta} = \frac{۱ - \tan^{۲}\theta}{۱ + \tan^{۲}\theta} \qquad (۵)$$

را به‌کار می‌گیریم. فرض‌کنیم $\tan\theta$ گویا باشد، پس $\tan^{۲}\theta$ گویاست ، آخرین کسر در (۵) هم گویاست و بنـابراین $\cos ۲\theta$ گویا خواهد بود. از آنجـا که $۰ < \theta < ۹۰^\circ$ پس ۲θ در $۱۸۰^\circ > ۲\theta > ۰$ صدق می‌کند. بنا به‌آنچه در بالا بیان شد ۲θ فقط می توا‌ند برابر با $۲\theta = ۶۰^\circ$ یا $۲\theta = ۹۰^\circ$ یا $۲\theta = ۱۲۰^\circ$ باشد، یعنی یا $\theta = ۳۰^\circ$ یا $\theta = ۴۵^\circ$ یا $\theta = ۶۰^\circ$. ولی

$$\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad \text{و} \quad \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

عددهای گنگ هستند. ازطرف دیگر ۱ = $\tan ۴۵^\circ$ عدد،گویاست. بنابراین اثبات قضیهٔ ت. ۱ کامل می‌شود.

پاسخها و پیشنهادهایی درمورد بعضی ازمسأله‌ها

مجموعهٔ ۱

۱. (الف) نادرست: $۲=۱+۱$.
   (ب) درست.
   (پ) نادرست: $۲=(۱-)-۱$.
   (ت) درست.
   *(ث) نادرست: $۶=۲^{۲}+۲^{۱}$، و ۶ توان درستی از ۲ نیست.

۲. هشت عدد، یعنی ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵، ۳۰.

۳. پنج عدد، یعنی ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶.

۴. ۴

۵. ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۷.

*۶. پیشنهاد. یك نماد مناسب برای مضربهای دقیق عددهای مفروض d انتخاب کنید.

مجموعهٔ ۲

۱. آری؛ $q=-۷$.
۲. آری؛ $q=-۷$.
۳. آری؛ $q=۷$.
۴. خیر.
۵. آری؛ $q=-۳۵$.
۶. آری؛ $q=۰$.
۷. خیر.
۸. آری؛ $q=۱$.
۹. خیر، زیرا q یکتا نیست.
۱۰. آری.
۱۱. آری.

مجموعهٔ ۳

۱. (الف)، (ب) و (ج) درست هستند؛ (پ)، (ت) و (ث) نادرست‌اند.

۲. درهمهٔ حالتها درست.

۳. (الف)، (پ) و (ت) درست هستند؛ (ب) و (ث) نادرست‌اند.

۴. (الف)، (ب)، (پ) و (ت) درست هستند؛ (ث) نادرست است.

مجموعهٔ ۴

۶. (الف) بسته نیست، (ب) بسته است، (پ) بسته است. (ت) بسته نیست، (ث) بسته است، (ج) بسته است، (چ) بسته‌است.

مجموعهٔ ۶

۱. (الف) ۰٫۲۵؛ (ب) ۰٫۰۱۵؛ (پ) ۰٫۸۰۲۵؛
(ت) ۰٫۰۱۱۲؛ (ث) ۲٫۸۱۶؛ (ج) ۱٫۲۵۹۶؛

مجموعهٔ ۷

۲. (الف) نادرست، به‌عنوان مثال درحالت $b = ۱۰$؛
(ب) درست؛
(پ) نادرست؛ به‌عنوان مثال درحالت $b = ۱۰$؛
(ت) نادرست؛ به‌عنوان مثال درحالت $b = ۷$؛
(ت) نادرست؛ به‌عنوان مثال درحالت $b = ۷$؛
(ج) درست.

۳. (الف) نادرست؛ به‌عنوان مثال درحالت کسر ۳/۶؛
(ب) درست؛
(پ) نادرست؛ به‌عنوان مثال درحالت کسر ۳/۶.

۴. اگر $ab = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

۵. (ب) آری.

مجموعهٔ ۸

۰۱ (الف) $\frac{۱}{۹}$؛ (ت) $\frac{۱۶۶۳}{۱۶۶۵}=\frac{۹۹۷۸}{۹۹۹۰}$؛

(ب) $\frac{۱۷}{۳}$، (ث) $\frac{۱}{۹۹۰۰}$؛

(پ) $\frac{۱۸۵۳}{۴۹۵۰}=\frac{۳۷۰۶}{۹۹۰۰}$؛ (ج) ۰۱

مجموعهٔ ۹

۰۱ (الف) ۱۲ر۰: (ب) ۳ر۰؛ (پ) ۸ر۴؛ (ت) ۰ر۱۰.

۰۲ (الف) ...۷۲۹۹۹ر۰؛ (ب) ...۰۰۹۸۹۹۹ر۰؛ (پ) ...۱۲ر۹۹۹.

۰۳ عددهای گویای a/b (به‌ساده‌ترین‌صورت) با این ویژگی که b برهیچ عدد اول دیگری غیراز ۲ و ۵ بخش‌پذیر نباشد و $a\neq ۰$.

۰۴ هیچ کدام.

مجموعهٔ ۱۰

۰۷ گویا.

مجموعهٔ ۱۱

۰۱ $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۲}$.

۰۲ $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$.

۰۳ $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$.

۰۴ $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$.

۰۵ $\sqrt{۳}$ و $۱/\sqrt{۲}$.

مجموعهٔ ۱۲

۰۱ (الف) $n=۳$، $c_۳=۱۵$، $c_۲=-۲۳$، $c_۱=۹$، $c_۰=-۱$؛

(ب) $n=۳$، $c_۳=۳$، $c_۲=۲$، $c_۱=-۳$، $c_۰=-۲$؛

(پ) $n=۳$، $c_۳=۲$، $c_۲=۷$، $c_۱=-۳$، $c_۰=-۱۸$؛
(ت) $n=۴$، $c_۴=۲$، $c_۳=۰$، $c_۲=-۱$، $c_۱=-۳$، $c_۰=۵$؛
(ث) $n=۵$، $c_۵=۳$، $c_۴=۰$، $c_۳=-۵$، $c_۲=۶$، $c_۱=-۱۲$؛
$c_۰=۸$؛
(ج) $n=۴$، $c_۴=۱$، $c_۳=۰$، $c_۲=-۳$، $c_۱=-۵$، $c_۰=۹$.

۲. (الف) آری؛ (ب) آری؛ (پ) آری؛ (ت) خیر؛ (ث) آری؛ (ج) خیر.

۴. پیشنهاد. معادله را در $b_۳b_۲b_۱b_۰$ ضرب کنید.

مجموعهٔ ۱۳

۲. پیشنهاد. از قضیهٔ ۱.۴ و یکی از نتیجه‌های مسألهٔ ۱ استفاده کنید.

۷. پیشنهاد. به‌عنوان مثال، ۲/۲ یکی از ریشه‌های $x^۲-۱=۰$ است.

مجموعهٔ ۱۵

۱. (الف) پیشنهاد. در معادلهٔ (۵) به‌جای θ مقدار ۴۰° را قرار دهید و از رابطهٔ $\cos ۱۲۰^\circ=-۱/۲$ استفاده کنید.

(ب) پیشنهاد. از نتیجهٔ مسألهٔ ۱ (الف) و معادلهٔ (۸) استفاده کنید.

(پ) پیشنهاد. از معادلهٔ (۸)، قسمت ۱، با $\theta=۱۰^\circ$، استفاده کنید.

(ت) پیشنهاد. از نتیجهٔ مسألهٔ ۱ (الف) و اتحاد $\cos\theta=\sin(۹۰^\circ-\theta)$ استفاده کنید.

۳. (الف) پیشنهاد. درمعادلهٔ (۱) ۳θ را به‌جای A و ۲θ را به‌جای B قرار دهید، و از معادله‌های (۳)، (۴)، (۵) و (۷) استفاده کنید.

۴. (الف)،(ب)، (پ)، (ت)، (خ)، (ذ) گویا هستند.

مجموعهٔ ۱۶

۱. (الف) پیشنهاد. از $\cos ۳۰^\circ=\sqrt{۳}/۲$ استفاده کنید.

(پ) پیشنهاد. از $\cos ۴۵^\circ=\sqrt{۲}/۲$ استفاده کنید.

(ت) پیشنهاد. از این مطلب که $\cos ۴۰^\circ$ گنگ است و اینکه $\cos ۲\times ۳۵^\circ=\cos ۷۰^\circ=\cos(۹۰^\circ-۲۰^\circ)=\sin ۲۰^\circ$ و غیره استفاده کنید.

۳. (ب) آری.

مجموعهٔ ۱۷

۳. پیشنهاد. به‌خاطر آورید که $\log m + \log n = \log mn$.

۴. پیشنهاد. از مثال ۳ متن استفاده کنید.

مجموعهٔ ۱۸

۱. (الف) پیشنهاد. این عدد یك ریشهٔ $x^۲ - ۳ = ۰$ است.
(ب) پیشنهاد. این عدد یك ریشهٔ $x^۳ - ۵ = ۰$ است.
(پ) پیشنهاد. این عدد یك ریشهٔ $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱ = ۰$ است. معادلهٔ (۵) از فصل ۴ را ببینید.
(ت) پیشنهاد. معادلهٔ (۶) از فصل ۵ را ببینید.

مجموعهٔ ۲۱

۵. (الف) نادرست، به‌عنوان مثال، اگر $r = -۲$ و $s = -۳$؛
(ب) نادرست، به‌عنوان مثال، اگر $r = ۴$، $s = ۳$ و $c = -۲$؛
(پ) درست؛
(ت) درست؛
(ث) درست؛
(ج) نادرست، به‌عنوان مثال، اگر $\lambda = ۲/۵$؛
(چ) درست.

۶. $-۱۰ < \lambda < ۱۰$.

۸. (ب) آری. این تفاوت طوری‌است که $u - v$ در (ب) می‌تواند ۰ شود، اما در (الف) نمی‌تواند.

مجموعهٔ ۲۲

۱. (الف) ۱، (ب) ۳، (پ) ۴، (ت) ۶، (ث) ۵، (ج) ۷، (چ) ۳، (ح) ۳۱، (خ) ۲-، (د) ۲۲-.

مجموعهٔ ۲۳

۱. $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۵}{۳}$، $\frac{۷}{۴}$، $\frac{۹}{۵}$، $\frac{۱۰}{۶}$، $\frac{۱۲}{۷}$، $\frac{۱۴}{۸}$، $\frac{۱۶}{۹}$، $\frac{۱۷}{۱۰}$.

۲. $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۶}{۲}$، $\frac{۹}{۳}$، $\frac{۱۳}{۴}$، $\frac{۱۶}{۵}$، $\frac{۱۹}{۶}$، $\frac{۲۲}{۷}$، $\frac{۲۵}{۸}$، $\frac{۲۸}{۹}$، $\frac{۳۱}{۱۰}$.

۳. پیشنهاد. این مطلب را از قضیهٔ ۳.۶ نتیجه بگیرید.

۵*. پیشنهاد. حالتی که درآن $\lambda=\sqrt{۲}$ و $n=۴$ را درنظر بگیرید و نشان دهید که کسر $m/۴$ بهساده‌ترین صورت (یعنی با m فرد) وجود ندارد به‌طوری که

$$-\frac{۱}{۸}<\lambda-\frac{m}{۴}<\frac{۱}{۸}$$

مجموعهٔ ۲۴

۱. $n=۴$، $m=۷$.

۲.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)	(ث)	(ج)	(چ)	(ح)	(خ)	(د)	(ذ)	(ر)	(ز)	(ژ)
n	۲	۳	۴	۴	۱	۳	۵	۵	۵	۵	۱	۱	۱	۷
m	۳	۵	۷	۷	۱	۴	۷	۷	۷	۷	۳	۳	۳	۲۲

مجموعهٔ ۲۵

۱. پیشنهاد. عدد صحیح ماقبل و مابعد λ را انتخاب کنید.

۲. پیشنهاد. ثابت کنید استثنا آن m/n است که درآن $n=۱$ و m آن یك‌ازعددهای صحیح ماقبل و مابعد λ است که به λ دورتراست.

۳. (الف) $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۴}{۳}$.

(ب) $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۵}{۳}$.

(پ) $\frac{۷}{۳}$ و $\frac{۹}{۴}$.

۴. (الف) همهٔ آنها.

(ب) ۱/۱، و نیز ۱۴/۱۰ مشروط براینکه آن را به‌صورت ۷/۵ تحویل کنیم.

۵. (الف) $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۳۱}{۱۰}$، $\frac{۳۱۴}{۱۰۰}$؛ (ب) $\frac{۳}{۱}$.

۶*. پیشنهاد. ثابت کنید نابرابریهای قضیهٔ ۵.۶ برای $\lambda=۳/۵$ و هر m/n با

$n>5$ نادرست هستند، به‌این صورت: $\lambda - m/n$ یا مثبت است یا منفی. نشان دهید اگر مثبت باشد حداقل $1/5n$ است؛ اگر منفی باشد حداکثر $-1/5n$ است.

۰۷* (الف) پیشنهاد. ازقضیهٔ بنیادی حساب، آن‌طورکه در پیوست ب ارائه شده، برای اثبات اینکه عددهای گویای مفروض‌مساوی نیستند، استفاده کنید.
(ب) پیشنهاد. ثابت کنیدنا برابریهای قضیهٔ ۵.۶ برای هرعددگویای m/n با n بزرگتر از b نمی‌توانند درست باشند.

مجموعهٔ ۲۶

۰۱ (ب) عددی وجود ندارد.

۰۲ (ب) $\frac{1}{1}$، $\frac{2}{1}$، $\frac{3}{2}$.

۰۳ (ب) $\frac{1}{1}$، $\frac{2}{1}$.

مجموعهٔ ۲۷

۰۱ ۲، ۲، ۸ و 10^{-1}.

۰۲ خیر.

۰۴ (ب) $|x-7| = x-7$ اگر $x \geqslant 7$؛ $|x-7| = -x+7$ اگر $x \leqslant 7$.

۰۵ (الف) $x = -1$؛ (ب) $x = 2$؛ (پ) $x = -7, x = 7$؛ (ت) همهٔ‌مقادیر x.

مجموعهٔ ۲۸

۰۲ $\alpha^7 - \beta^7 = (\alpha - \beta)(\alpha^6 + \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^5 + \beta^6)$

۰۳ پیشنهاد. هرریشهٔ $f(x) = 0$ یك ریشهٔ $f(x)g(x) = 0$ نیز هست.

مجموعهٔ ۲۹

۰۱ (الف) $5x = 0$، $4x \pm 1 = 0$، $3x \pm 2 = 0$، $2x \pm 3 = 0$، $x \pm 4 = 0$؛

(ب) -4، $-\frac{3}{2}$، $-\frac{2}{3}$، $-\frac{1}{4}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{3}{2}$، 4.

۲. به‌عنوان مثال، $0, 1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7, 9, -9, \ldots$

۳. پیشنهاد. $a+b$ را به‌عنوان شاخص $a+bx^4$ تعریف کنید؛ آن‌گاه ملاحظه کنید که تنها تعداد متناهی چندجمله‌ای با شاخص مفروض وجود دارد و همهٔ آنها را معین کنید.

۴. $x^4=0$، $2x^3=0$، $x^3\pm 1=0$، $x^3\pm x=0$، $x^3\pm x^2=0$، $3x^2=0$،
$2x^2\pm 1=0$، $x^2\pm 2=0$، $2x^2\pm x=0$، $x^2\pm x\pm 1=0$،
$x^2\pm 2x=0$، $4x=0$، $3x\pm 1=0$، $2x\pm 2=0$، $x\pm 3=0$.

۵. پیشنهاد. همهٔ این عددها جبری هستند؛ از قضیهٔ پ. ۳ استفاده کنید.

۶. پیشنهاد. فرض کنید $b_1, b_2, b_3, \ldots$ یک فهرست دنباله‌ای از عنصرهای B و $c_1, c_2, c_3, \ldots$ یک فهرست مشابه از عنصرهای C باشند؛ آن‌گاه A را می‌توان به‌شکل دنبالهٔ مانند زیر نوشت:

$$b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \ldots$$

۷. پیشنهاد. اثبات قضیهٔ پ. ۴ را دنبال کنید؛ اما درمورد اخیر عددهای a_{11}، a_{21}، a_{31}، ... همه صفر هستند. با انتخاب $b_1=0$، $b_2\neq a_{12}$ و $b_2\neq 0$، $b_3\neq a_{23}$ و $b_3\neq 0$ و به‌طور کلی $b_i\neq b_{i-1}$ و $b_i\neq 0$ عدد موردنظر را که درفهرست قرار ندارد بسازید.

فهرست راهنما