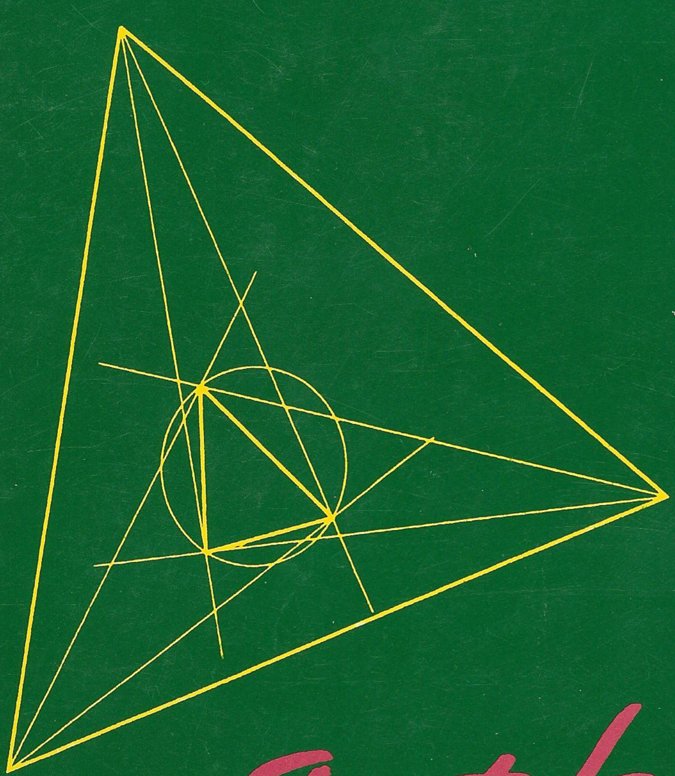
اعداد مختلط و هندسه

لیانگ - شین هان

ترجمهٔ محمد بهفروزی



$a+bi$

اعداد مختلط و هندسه

لیانگ ـ شین هان

ترجمهٔ محمد بهفروزی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر

۱۱۱

مرکز نشر دانشگاهی

۸۷۲

Complex Numbers & Geometry
Liang-Shin Hahn
The Mathematical Association of America, 1994

اعداد مختلط و هندسه
تألیف لیانگ ـ شین هان
ترجمهٔ محمد بهفروزی
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۶
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی : مرکز نشر دانشگاهی
چاپ : منفرد

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

هان، لیانگ ـ شین. Hahn, Liang - Shin
اعداد مختلط و هندسه / لیانگ ـ شین هان؛ ترجمهٔ محمد بهفروزی؛ ویراستهٔ محمدهادی شفیعیها. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.
چهار، ۱۷۹ ص. : مصور. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۸۷۲: ریاضی، آمار و کامپیوتر؛ ۱۱۱)
ISBN 964-01-0872-3
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی : Complex numbers & geometry.
۱. اعداد مختلط. ۲. هندسه جدید. الف. بهفروزی، محمد، ۱۳۱۱ ـ ، مترجم. ب. شفیعیها، محمدهادی، ۱۲۹۸ ـ ، ویراستار. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
۶ الف ۲ ه / QA ۲۵۵ ۵۱۶/۰۴
۱۳۷۶
کتابخانهٔ ملی ایران م ۷۶ ـ ۱۱۸۵۳

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

معرّفی مؤلّف

لیانگ شین هان[1] در تاینان[2] ، تایوان، به دنیا آمد. از دانشگاه استنفرد درجهٔ دکترا (Ph.D) گرفت، مدّت کوتاهی در دانشگاه جانز هاپکینز تدریس می‌کرد و سپس به دانشگاه نیومکزیکو منتقل شد، و تا کنون در آنجا اشتغال دارد. دارا بودن مقام استادی مدعوّ در دانشگاه سیاتل، دانشگاه دولتی تایوان (تایپه)، دانشگاه توکیو، دانشگاه بین‌المللی مسیحی (توکیو)، و دانشگاه سونیا (توکیو) به او این امتیاز را بخشیده است که ریاضیات را در سه کشور و به سه زبان تدریس کند.

مؤلف مسائل بسیاری را در ماهنامهٔ ریاضی امریکا مطرح نموده است و حدسیهٔ او دربارهٔ کسرهای مصری در بسیاری از جاها مورد استناد قرار گرفته است. تا سال ۱۹۹۰ طرّاح مسائل مسابقات ریاضی نیومکزیکو بوده است. وی از ستایشگران پروپا قرص شیوه‌های آموزش جرج پولیاست، و بازی پینگ‌پونگ، پرورش گل‌سرخ، گوش دادن به موسیقی کلاسیک، و نیز طرح معمّاهای ریاضی سرگرمیهای مورد علاقهٔ او هستند.

هدف وی در این کتاب این‌است که نشان دهد می‌توان اعداد مختلط و هندسه را به زیبایی در هم آمیخت و در نتیجه به برهانهای ساده و تعمیمهای طبیعی بسیاری از قضایای هندسهٔ مسطّحه مانند قضایای ناپلئون، بطلمیوس ـ اویلر، سیمسن و مورلی دست یافت.

این کتاب با شروع از ساختمان اعداد مختلط، خواننده را در ۱۷۶ صفحه‌ای که شامل مبادی و دستورهایی برای همه است، حتی آنانی را که اطلاعات پیشرفتهٔ ریاضی دارند، به سیر و تفرّج می‌کشاند.

1. Liang-shin Hahn 2. Tainan

کتاب خودکفاست، بدین‌معنی که بسیاری از فصلهای آن‌را می‌توان مستقلاً مطالعه کرد. متجاوز از ۱۰۰ تمرین در آن گنجانده شده است. این کتاب برای تدریس واحد درس هندسه، یا برای سمینار حل مسائل، و یا برای افزایش معلومات ریاضیِ دانشجویانی که می‌خواهند ریاضیات بیشتری بدانند، مناسب است.

پیشگفتار مؤلف

در حوزهٔ اعداد حقیقی، کوتاهترین راه بین دو واقعیّت راهی است که از حوزهٔ اعداد مختلط می‌گذرد.

ژ. آدامار

این کتاب دست‌آورد درسهایی است که برای دبیران آیندهٔ دبیرستانها در دانشگاه نیومکزیکو در نیمسال بهاری سال ۱۹۹۱ عرضه کرده‌ام. در عین حالی که معتقدم روش اصل موضوعی اهمّیت بسیار دارد، امّا تأکید خیلی زیاد بر آن در یک درس مقدماتی هندسه، دانشجو را نسبت به‌این موضوعِ دلزده می‌کند و امکان درک زیبایی و شوق‌انگیزی هندسه را ممکن است در آنها برای همیشه از بین ببرد. در دبیرستانهای ما، اعداد مختلط برای حّلِ معادلات درجهٔ دوم مطرح می‌شوند و پس از آن دیگر سخنی از آنها به میان نمی‌آید. دانش‌آموزان به حال خود گذاشته می‌شوند با این احساس که اعداد مختلط ساختگی هستند و فی‌نفسه فایده‌ای ندارند و فقط برای اینکه بتوانیم همهٔ معادله‌های درجهٔ دوّم را حل کنیم اختراع شده‌اند. در واقع، مطالعهٔ اعداد مختلط برای دبیران آینده و یا دانشجویانی که می‌خواهند آن‌را عمیقاً دنبال کنند موضوعی آرمانی است. مطالعهٔ اعداد مختلط به دانشجویان این مجال را می‌دهد که دستگاههای اعداد، بردارها، مثلثات، هندسه و مباحث زیاد دیگری را که در دبیرستان مورد بحث قرار می‌گیرند دوباره مرور کنند بی‌آنکه به دیدگاه واحد توابع مقدماتی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها مواجه می‌شویم نیاز پیدا کنند.

متأسفانه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی ما، اعداد مختلط و هندسه به‌کلّی به دست فراموشی سپرده شده‌اند. هدف این کتاب این‌است که ثابت کند این دو مبحث را می‌توان به زیبایی در هم آمیخت و در نتیجه به استدلالهای بسیار ساده و تعمیمهای طبیعی بسیاری از قضایای هندسهٔ

مسطحه مانند قضیّهٔ ناپلئون، قضیّهٔ سیمسن و قضیّهٔ مورلی دست یافت. راستش را بخواهید، دختری از دانشجویان من به من گفت که نمی‌تواند تصّور کند کسی که از خواندن مطالب این کتاب به شوق نیاید، هرگز بتواند به ریاضیات علاقه‌مند شود.

کتاب خودکفاست، یعنی نیاز به هیچ زمینهٔ قبلی از اعداد مختلط ندارد و مطالبش را می‌توان با خیال راحت در یک نیمسال تحصیلی تدریس کرد. فصلهای ۲ و ۳ را می‌توان مستقلاً مطالعه کرد. متجاوز از ۱۰۰ تمرین، از تمرینهای عملی گرفته تا تمرینهای فکری، در آن نهاده شده است و از خواننده جدّاً خواسته می‌شود که سعی کند دست کم نیمی از آنها را حل کند. هرچه که از هندسهٔ مقدماتی مورد نیاز است در پیوست الف آمده است. پیچیده‌ترین ابزاری که در این کتاب از آن استفاده شده فرمولهای جمع توابع سینوس و کسینوس و دترمینانهای مرتبهٔ سوم هستند: در چندین جا به ماتریسها اشاره شده است ولی جنبهٔ تکمیلی دارد و خوانندگانی که با ماتریسها آشنا نیستند می‌توانند با خیال راحت از خواندن این قسمتها صرفنظر کنند. معتقدم که این کتاب برای دانش‌آموزان دبیرستانها مفید است و مطالعهٔ آن بر معلومات آنها می‌افزاید.

برای من جای بسی مسرّت است که قدردانی خالصانهٔ خود را از همکاران و دوستانم، استادان جف‌دیویس، برنارد اپستاین، روبن هرش، فرانک کلی و دوشیزه موارا رابرتسن که همهٔ آنها در موارد بیشمار انگلیسی نپختهٔ مرا اصلاح نموده‌اند (انگلیسی زبان مادری‌ام نیست) ابراز دارم.

کلام آخر ولی نه آخرین کلام، از استاد راجر هورن، سرپرست هیأت تحریریه، که با شکیبایی تمام دستنویس مرا دستکاری و انگلیسی آن‌را اصلاح نموده است عمیقاً سپاسگزاری می‌کنم.

ل.ش.ه

۱

اعداد مختلط

۱.۱ آشنایی با اعداد انگاری

یکی از مهمترین ویژگیهای اعداد حقیقی این‌است که در آنها اعمالِ: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به استثنای تقسیم بر صفر) را می‌توان انجام داد. بدین‌سبب است که معادلهٔ خطّی کلّی

$$ax + b = ۰ \qquad (a \neq ۰)$$

را می‌توان در حوزهٔ اعداد حقیقی حل کرد و چنین نوشت: $x = -b/a$. ولی وضعیّت در مورد معادلهٔ درجهٔ دوّم کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^۲ + ۱ = ۰$$

را در حوزهٔ اعداد حقیقی نمی‌توان حل کرد و x را به دست آورد. مربع یک عدد حقیقی نمی‌تواند عددی منفی باشد. بنابراین

$$\text{به‌ازای هر عدد حقیقی } x، \qquad x^۲ + ۱ \geq ۱ > ۰$$

از این‌رو به‌ازای هر عدد حقیقی x، معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ ممتنع است. در چنین وضعیّتی حوزهٔ دستگاه اعداد حقیقی را طوری توسعه می‌دهیم که چنین معادله‌ای حل‌شدنی باشد. مثلاً برای یک طفل دبستانی که فقط اعداد درست مثبت را می‌شناسد معادله‌ای مانند

$$۷ + \square = ۳$$

نامعقول می‌نماید. و برای کسانی که فقط اعداد صحیح را می‌شناسند معادله‌های $5x = ۲$ و $x^۲ = ۱۷$ جواب ندارند. امّا با توسیع دستگاه اعداد به‌صورتی که اعداد منفی، کسری و اصمّ را نیز در بر گیرد، این معادلات به ترتیب جوابهای ۴−، ۲/۵ و $\pm\sqrt{۱۷}$ را خواهند داشت.

وضعیت برای معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ تقریباً همین‌طور است. دستگاه اعداد را چنان توسعه می‌دهیم تا اعدادی مثل $\sqrt{-۱}$، یعنی عددی را که مربعش ۱− است، نیز در بر گیرد. این‌گونه اعداد با احساس شهودی ما اصلاً جور در نمی‌آیند و در گذشته بسیاری از ریاضیدانان با معرّفی این‌گونه هیولاها مخالفت داشتند و از این‌رو آنها را اعداد انگاری نامیده‌اند. وضعیّت تا سدهٔ هیجدهم به همین منوال بود تا اینکه لئونهارت اویلر (۱۷۰۷_۱۷۸۳) با کارهای استادانه روی اعداد انگاری نتایج متعدد جالبی بدست آورد. ک.ف گاوس (۱۷۷۷_۱۸۵۵) با معرفی اعداد انگاری به‌صورت نقاط یک صفحه نام تازهٔ اعداد مختلط را بر آنها نهاد و از آنها برای یافتن نتایجی چشمگیر از نظریهٔ اعداد استفاده نمود. از این طریق عضویّت اعداد مختلط را در سلسلهٔ اعداد مسجّل ساخت. تقریباً در همان زمان اُ.ل. کوشی (۱۷۸۹_۱۸۵۷)، هنگام تلاش در پیدا کردن روشی یکنواخت برای محاسبهٔ انتگرالهای معین، حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع با متغیرهای مختلط را بررسی کرد. این امر سرآغاز نظریهٔ توابعی بود که زمینهٔ مساعدی برای کشف توابع بیضوی از سوی ن.ه.آبل (۱۸۰۲_۱۸۲۹) و کارل گوستاو یاکوبی (۱۸۰۴_۱۸۵۱) را فراهم ساخت. علاوه بر این، بسط هندسهٔ تصویری نشان داد که استفاده از اعداد مختلط در هندسه نیز امری اجتناب‌ناپذیر است. پیشرفت تحقیقات روشن کرده است که برای اینکه ریاضیات، حتی فقط حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌خوبی بفهمیم، محدودیّت غیرطبیعی حوزهٔ اعداد حقیقی به ما حکم می‌کند که برای دستیابی به مفاهیم یکنواختی و همسازی، اعداد مختلط را نیز دخالت دهیم.

رسم بر این‌است که i، حرف اوّل واژهٔ imaginary (انگاری) را برای $\sqrt{-۱}$ به‌کار بریم. بدین‌ترتیب اعداد مختلط اعدادی هستند به شکل $a + ib$ که a و b اعدادی هستند حقیقی و محاسبه با آنها همانند محاسبه با اعداد حقیقی است، با در نظر گرفتن اینکه به جای $i^۲$ باید، ۱− قرار داد. مثلاً

$$(a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$\begin{aligned}(a+ib)\cdot(c+id) &= ac + ibc + iad + i^۲bd \\ &= (ac - bd) + i(bc + ad)\end{aligned}$$

منظور از تقسیم دو عدد مختلط یعنی $(a+ib)/(c+id)$ یافتن عددی است مثل $x + iy$ که در تساوی

$$a + ib = (c+id)\cdot(x+iy)$$

صدق نماید، پس از محاسبهٔ رابطهٔ بالا داریم

$$a + ib = (cx - dy) + i(dx + cy)$$

پس کافی است اعداد x و y را چنان پیدا کنیم که در روابط $cx - dy = a$ و $dx + cy = b$ صدق کنند. این دستگاه معادلات یک جواب یکتای زیر را دارد.

$$x = \frac{ac + bd}{c^۲ + d^۲}, \qquad y = \frac{bc - ad}{c^۲ + d^۲}$$

مگر آنکه $c = d = ۰$. بنابراین

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^۲ + d^۲} + i\frac{bc - ad}{c^۲ + d^۲}$$

البته همین نتیجه را می‌توانستیم از ضرب صورت و مخرج کسر $(a + ib)/(c + id)$ در $c - id$ نیز به دست آوریم.

امّا چرا چنین اعمالی موجه‌اند؟ آیا جمع یک عدد حقیقی a با یک عدد انگاری ib و یافتن $a + ib$ همانند حاصل جمع $۱۷m^۲$ با ۴ کیلوگرم و یافتن ۲۱°C نیست؟ همین‌طور، $x^۲ + ۱ = ۰$، دو جواب دارد ولی i کدامیک از آنها است؟ توجّه کنید که $x^۲ - ۱ = ۰$ نیز دو جواب دارد که جواب مثبت آن ۱ است و جواب دیگر آن ۱−. امّا آیا گفتن اینکه نامثبت است معنی دارد؟

۲.۱ تعریف اعداد مختلط

برای پاسخگویی به ایراد اخیر، اکنون تعریفی صوری از اعداد مختلط ارائه می‌دهیم. ولی ابتدا ویژگیهای دستگاه حقیقی $\mathbb{R}$ را یادآور می‌شویم.

(i) ویژگیهای مربوط به عمل جمع

دو عدد حقیقی دلخواه a و b عدد سوّم یکتایی را معین می‌کنند به‌نام مجموع آنها که با $a + b$ نمایانده می‌شود، با ویژگیهای زیرین:

$A_۱$: قانون جابه‌جایی: به‌ازای هر دو عدد $a, b \in \mathbb{R}$، $a + b = b + a$

$A_۲$: قانون شرکتپذیری: به‌ازای هر سه عدد $a, b, c \in \mathbb{R}$، $(a + b) + c = a + (b + c)$

$A_۳$: عنصر همانی در جمع: عدد حقیقی یکتایی که با ۰ نمایانده می‌شود وجود دارد چنان‌که:

$$a + ۰ = ۰ + a = a, \quad a \in \mathbb{R} \text{ به‌ازای یک مقدار}$$

$A_۴$: عکس جمعی: به‌ازای هر عدد $a \in \mathbb{R}$، منحصراً یک عدد $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد چنان‌که:

$$a + x = x + a = ۰$$

این جواب یکتا را با $-a$ نمایش می‌دهند.

(ii) ویژگیهای مربوط به عمل ضرب
دو عدد حقیقی دلخواه a و b منحصراً یک عدد سوّمی به‌نام **حاصلضرب** را مشخص می‌سازند که با ab نمایش داده می‌شود، با ویژگیهای زیرین:

$M_۱$: قانون جابه‌جایی: به‌ازای همهٔ مقادیر $a, b \in \mathbb{R}$، $ab = ba$
$M_۲$: قانون شرکتپذیری: به‌ازای همهٔ مقادیر $a, b, c \in \mathbb{R}$، $(ab)c = a(bc)$
$M_۳$: عنصر همانی در ضرب: عدد حقیقی یکتایی وجود دارد که با ۱ نمایانده می‌شود، به‌طوری که به‌ازای همهٔ مقادیر

$$a \cdot ۱ = ۱ \cdot a = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$M_۴$: عکس ضربی: به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$، با $a \neq ۰$ عدد یکتایی مانند x وجود دارد چنان‌که:

$$ax = xa = ۱$$

این جواب یکتا را با $۱/a$ یا $a^{-۱}$ نشان می‌دهند.

(iii) قانون توزیعپذیری

$$\text{به‌ازای همهٔ مقادیر} \quad a(b + c) = ab + ac, \; a, b, c \in \mathbb{R}$$

هر مجموعه‌ای که این ویژگیها را داشته باشد، هیأت نامیده می‌شود. بدین‌ترتیب مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، یک هیأت است. همین‌طور، مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ مرکب از تمام اعداد گویا یک هیأت است، ولی نه مجموعهٔ همهٔ اعداد درست $\mathbb{Z}$یک هیأت تشکیل می‌دهند و نه مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$.

در بخش قبل گفتیم اعداد مختلط به‌صورت $a + ib$ هستند که a و b اعدادی حقیقی‌اند. از این‌رو اساساً اعداد مختلط عبارت‌اند از زوج اعداد حقیقی a و b. بدین‌ترتیب یک تعریف رسمی به‌صورت زیر می‌آوریم.

تعریف ۱.۲.۱. **یک عدد مختلط** زوج مرتب (a, b) از اعداد حقیقی است با ویژگیهای زیر: دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) فقط و فقط وقتی برابرند که $a = c$ و $b = d$. مجموع و

حاصلضرب دو عدد مختلط (a,b) و (c,d) چنین تعریف می‌شوند:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$$

توجه کنید که تعریف تساوی اعداد مختلط ویژگیهای زیر را دارد:

الف) انعکاسی: به‌ازای هر عدد مختلط (a,b)، $(a,b)=(a,b)$

ب) تقارن: $(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow (c,d)=(a,b)$

ج) ترایایی: $(a,b)=(c,d),\quad (c,d)=(e,f)\Longrightarrow (a,b)=(e,f)$

قضیهٔ ۱.۲.۲. با اعمال جمع و ضرب به‌صورتی که در بالا تعریف شدند، مجموعهٔ $\mathbb{C}$ مرکب از همهٔ اعداد مختلط یک هیأت تشکیل می‌دهند.

برهان. یک تمرین عملی است. ■

حال اعداد مختلط به شکل $(a,\circ)$ را در نظر می‌گیریم، پس

$$(a,\circ)\pm(b,\circ)=(a\pm b,\circ)$$
$$(a,\circ)\cdot(b,\circ)=(ab,\circ)$$
$$\frac{(a,\circ)}{(b,\circ)}=(\frac{a}{b},\circ)$$ (به شرط اینکه $b\neq\circ$)

که همانند اعمال میان دو عدد حقیقی a و b هستند. به عبارت دیگر اگر عدد مختلط $(a,\circ)$ را به عنوان عدد حقیقی a در نظر بگیریم هیچگونه اختلافی پیش نخواهد آمد. در نتیجه اعداد حقیقی را اعداد مختلط خاصی می‌گیریم که مؤلفهٔ دوّم آنها صفر هستند.

اکنون عدد مختلط $(\circ,۱)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$(\circ,۱)^۲=(\circ,۱)\cdot(\circ,۱)=(-۱,\circ)=-۱$$

یعنی عدد مختلط $(\circ,۱)$ متناظر با $\sqrt{-۱}$ در بخش قبلی است. طبیعی است که مربع $(\circ,-۱)$ نیز -۱ است، ولی چنانچه بنویسیم $i=(\circ,۱)$، آن‌گاه عدد مختلط دلخواه (a,b) را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(a,b)=(a,\circ)+(\circ,b)=(a,\circ)+(\circ,۱)\cdot(b,\circ)$$

که توجیه‌کنندهٔ عدد مختلط $a+ib$ است.

عدد مختلط i را واحد انگاری می‌نامند. پس در هر عدد مختلط

$$\alpha = (a, b) = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

a را جزء حقیقی عدد مختلط α می‌نامند و آن‌را با $\Re\alpha$ نمایش می‌دهند؛ همین‌طور b را جزء انگاری عدد α خوانند و آن‌را با $\Im\alpha$ نشان می‌دهند. از این‌رو اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که جزءانگاری آنها ۰ است. از سوی دیگر اعداد مختلطی را که جزء حقیقی‌شان ۰ باشد اعداد انگاری محض می‌نامند. دقیقاً توجّه نمایید که هر دو جزء حقیقی و انگاری اعداد مختلط، اعداد حقیقی‌اند.

برای یک عدد مختلط $\alpha = (a, b) = a + ib$ عدد مختلط $(a, -b) = a - ib$ را مزدوج مختلط α یا مزدوج عدد مختلط α می‌نامند و آن‌را با $\overline{\alpha}$ نمایش می‌دهند. به آسانی می‌توان روابط زیر را تحقیق نمود:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha \pm \beta} &= \overline{\alpha} \pm \overline{\beta} \\
\overline{\alpha\beta} &= \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} \\
\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \qquad (\beta \neq ۰) \\
\Re\alpha &= \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{۲} \qquad \Im\alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{۲i} \\
\overline{\overline{\alpha}} &= \alpha
\end{aligned}$$

برای هر عدد مختلط $\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$، حاصلضرب

$$\alpha\overline{\alpha} = a^۲ + b^۲$$

همواره عددی حقیقی و نامنفی است. ریشهٔ دوّم نامنفی این عدد را کالبد یا قدر مطلق عدد مختلط α گویند و آن‌را با $|\alpha|$ نمایش می‌دهند. از این‌رو

$$|\alpha| = \sqrt{a^۲ + b^۲} = (\alpha\overline{\alpha})^{۱/۲}$$

قضیهٔ ۱.۲.۳. $|\alpha| = ۰$، اگر و فقط اگر $\alpha = ۰$.

برهان. می‌نویسیم $(a, b \in \mathbb{R})$ ،$\alpha = a + ib$، پس $|\alpha|^۲ = a^۲ + b^۲$ بنابراین

$$|\alpha| = ۰ \iff a^۲ + b^۲ = ۰$$

امّا به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b، $a^2 \geq 0$ و $b^2 \geq 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 0 &\iff a^2 = 0,\ b^2 = 0 \\ &\iff a = 0,\ b = 0 \\ &\iff \alpha = 0 \end{aligned}$$

■

توجه کنید که در اینجا ما از این واقعیت که a و b اعدادی حقیقی هستند استفاده نمودیم. در غیر این‌صورت $a^2 + b^2 = 0$ مستلزم تساویهای $a = b = 0$ نیست. مثلاً اگر بنویسیم $a = 1$ و $b = i$، آنگاه $a^2 + b^2 = 0$ ولی نه تساوی $a = 0$ برقرار است و نه تساوی $b = 0$.

به آسانی می‌توان ثابت نمود که:

$$\begin{gathered} |\Re\alpha| \leq |\alpha|, \qquad |\Im\alpha| \leq |\alpha|, \qquad |\overline{\alpha}| = |\alpha| \\ |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \qquad (\text{به‌خصوص } |-\alpha| = |\alpha|) \\ \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \qquad (\text{به‌شرط } \beta \neq 0) \end{gathered}$$

قضیهٔ ۴.۲.۱. به‌ازای هر دو عدد مختلط α و β

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \ \text{ یا } \ \beta = 0$$

و یا هم‌ارز با آن

$$\alpha\beta \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \ \text{ و } \ \beta \neq 0$$

برهان. بنابر قضیّه قبلی

$$\begin{aligned} \alpha\beta = 0 &\iff |\alpha\beta| = 0 \\ &\iff |\alpha| \cdot |\beta| = 0 \end{aligned}$$

چون $|\alpha|$ و $|\beta|$ اعداد حقیقی‌اند

$$\begin{aligned} |\alpha| \cdot |\beta| = 0 &\iff |\alpha| = 0 \ \text{ یا } \ |\beta| = 0 \\ &\iff \alpha = 0 \ \text{ یا } \ \beta = 0 \end{aligned}$$

■

توجه: در مجموعه‌ای که عمل ضرب در آن تعریف شده است، اگر $\alpha\beta = 0$ ولی $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$، آنگاه α، β را **مقسوم‌علیه‌های صفر** گویند. قضیه قبلی مبیّن آن‌است که هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ مقسوم‌علیه صفر ندارد.

دستگاههایی جبری وجود دارند که مقسوم‌علیه‌های صفر دارند. به‌طور مثال مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای 2×2 به‌صورت

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

را در نظر می‌گیریم. جمع و ضرب در این مجموعه به‌ترتیب چنین تعریف می‌شوند

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

عنصر صفر عبارت‌است از

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس با اینکه

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

ولی داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

باید توجه داشت که در اثبات این قضیّه از این موضوع استفاده شده است که هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، مقسوم‌علیه صفر ندارد.

۳.۱ معادله‌های درجهٔ دوّم

چنان‌که در بخش ۲.۱ دیدیم عدد مختلط $i = (\circ, \text{۱})$ در معادلهٔ $x^{\text{۲}} + \text{۱} = \circ$ صدق می‌کند. امّا دربارهٔ سایر معادله‌های درجهٔ دوّم چه بگوییم؟ آیا آنها در $\mathbb{C}$ جواب دارند؟ آیا باید به افزودن اعضای جدید به دستگاه عددی خود ادامه دهیم؟ به معادلهٔ زیر توجه نمایید

مثال. به یافتن ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌پردازیم

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x^{\text{۲}} + (\text{۱} + i)x - i = \circ$$

حل. از نوشتن این معادله به‌صورت یک مربّع کامل خواهیم داشت

$$\{x + (\text{۱} + i)\}^{\text{۲}} = \text{۲}i + (\text{۱} + i)^{\text{۲}} = \text{۴}i$$
$$\therefore\ x + (\text{۱} + i) = \pm\text{۲}\sqrt{i}$$
$$x = -(\text{۱} + i) \pm \text{۲}\sqrt{i}$$

امّا ریشهٔ دوّم عدد i چیست؟ عددی است که باید مربّعش i شود. پس می‌نویسیم

$$u + iv = \sqrt{i} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

سپس با مربّع نمودن دو طرف خواهیم داشت

$$(u^{\text{۲}} - v^{\text{۲}}) + \text{۲}uvi = i$$
$$\therefore\ u^{\text{۲}} - v^{\text{۲}} = \circ, \qquad uv = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

از معادلهٔ اوّل، $u = \pm v$ به دست می‌آید و با قرار دادن $u = v$ در معادلهٔ دوّم خواهیم داشت

$$u = v = \pm\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

و از آنجا

$$\sqrt{i} = u + iv = \pm\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}(\text{۱} + i)$$

حالت $u = -v$ پیش نخواهد آمد، زیرا منجر به تساوی $u^2 = -1/2$ می‌شود که به‌ازای مقدار حقیقی u ناممکن است.[1] از اینجا نتیجه می‌شود که

$$x = -(1+i) \pm \sqrt{2}(1+i) = (-1 \pm \sqrt{2})(1+i)$$

بنابراین برای حل این معادلهٔ درجه دوّم لزومی ندارد که دستگاه اعداد مختلط را توسعه دهیم. (خواننده باید صدق نمودن نتایج به دست آمده را در معادلهٔ درجه دوّم مذکور عملاً تحقیق نماید).

اکنون صورت کلّی معادلهٔ درجهٔ دوّم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

چون دستگاه عددی خود را به اعداد مختلط توسعه داده‌ایم باید حالت $a, b, c \in \mathbb{C}$ را **مورد بحث** قرار دهیم. چون تا آنجا که به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم مربوط می‌شود، اعداد مختلط **از** همان قواعد اعداد حقیقی تبعیّت می‌کنند، از تقسیم طرفین معادلهٔ بالا بر a و تکمیل مربّع، مانند حالت با ضرائب حقیقی، خواهیم داشت

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

و با قرار دادن

$$\zeta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{و} \quad z = x + \frac{b}{2a}$$

مسأله بر می‌گردد به اینکه ببینیم آیا معادلهٔ $z^2 = \zeta$ را می‌توان به‌ازای عدد مختلط دلخواه ζ حل نمود یا نه؟ اگر قرار دهیم

$$z = u + iv \qquad \zeta = \alpha + i\beta$$

می‌توان مسأله را چنین بیان کرد: آیا همواره می‌توانیم دو عدد حقیقی u و v چنان پیدا کنیم که به‌ازای دو عدد حقیقی دلخواه α و β تساوی زیر برقرار باشد.

$$(u + iv)^2 = \alpha + i\beta$$

۱. با صرفنظر نمودن از حقیقی بودن u به حل معادلهٔ $u^2 = -\frac{1}{2}$ می‌پردازیم و چنین به‌دست می‌آوریم $u = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ v = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}i$. بدین‌ترتیب $\sqrt{i} = u + iv = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i(1-i) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$، که همان نتیجهٔ قبلی به دست آمد.

و یا

$$(u^۲ - v^۲) + ۲iuv = \alpha + i\beta$$

بدین‌ترتیب مسأله به حل دستگاه معادلات $\begin{cases} u^۲ - v^۲ = \alpha \\ ۲uv = \beta \end{cases}$ تبدیل می‌شود.

چون

$$(u^۲ + v^۲)^۲ = (u^۲ - v^۲)^۲ + (۲uv)^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲$$

و $(\because\ u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $\alpha^۲ + \beta^۲ \geq ۰$ و $u^۲ + v^۲ \geq ۰$ خواهیم داشت:

$$u^۲ + v^۲ = \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$u^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}\right), \qquad v^۲ = \frac{۱}{۲}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}\right)$$

با توجّه به

$$\frac{۱}{۲}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}\right) \geq ۰, \qquad \frac{۱}{۲}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}\right) \geq ۰$$

داریم

$$u = \pm\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}}{۲}\right)^{۱/۲} \quad \text{و} \quad v = \pm\left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}}{۲}\right)^{۱/۲}$$

که باید علامتها را چنان اختیار کرد که در تساوی $۲vu = \beta$ صدق نماید. یعنی ریشهٔ دوم

$\sqrt{\zeta}=u+iv$ چنین به دست می‌آید

$$\sqrt{\zeta}=\begin{cases}\pm\left(\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}{۲}\right)^{۱/۲}+i\left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}{۲}\right)^{۱/۲}\right) & \text{به‌ازای } \beta>۰\\ \pm\left(-\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}{۲}\right)^{۱/۲}+i\left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}{۲}\right)^{۱/۲}\right) & \text{به‌ازای } \beta<۰\\ \pm\sqrt{\alpha},\quad \beta=۰ \text{ و } \alpha\geq ۰ \text{ به‌ازای} \\ \pm i\sqrt{-\alpha},\quad \beta=۰ \text{ و } \alpha<۰ \text{ به‌ازای}\end{cases}$$

پس نشان دادیم که هر عدد مختلط (ناصفر) دو تا ریشهٔ دوّم دارد.

توجه: به‌ازای $\xi\in\mathbb{R}$، برای نمایش ریشهٔ دوم نامنفی آن هنگامی‌که $\xi\geq ۰$، از $\sqrt{\xi}$ و هنگامی‌که $\xi<۰$، از $\sqrt{\xi}=i\sqrt{-\xi}(=i\sqrt{|\xi|})$ استفاده شده است. ولی از این پس، برای یک عدد مختلط غیرحقیقی ξ، قرارداد $\sqrt{\xi}$، صرفاً به معنی ریشهٔ دوم ξ است و معرّف جذر عدد خاص دیگری نیست.

با توجه به قرارداد بالا هنگامی‌که ξ و η اعداد حقیقی منفی هستند، تساوی

$$\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\eta}=\sqrt{\xi\cdot\eta}$$

دیگر معتبر نیست و زمانی معتبر است که دو طرف تساوی را مجموعه‌های اعداد مختلط بگیریم.

پس قضیهٔ زیرین را اثبات کردیم

قضیهٔ ۱.۳.۱. معادلهٔ درجهٔ دوّم

$$ax^۲+bx+c=۰,\qquad a,b,c\in\mathbb{C},\qquad a\neq ۰$$

در $\mathbb{C}$ دو ریشه دارد که چنین‌اند

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

۴.۱ اهمیّت اعداد مختلط

در بخش قبل دیدیم که هر معادلهٔ درجهٔ دوم در هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ جوابهایی دارد. امّا در مورد معادله‌های درجهٔ سوم، درجهٔ چهارم و غیره چه؟ آیا هر بار که با معادله‌های درجهٔ بالا سروکار

داریم باید دستگاه اعداد را توسعه دهیم؟ یکی از زیباییهای دستگاه اعداد مختلط در معتبر بودن قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱.۴.۱. (قضیهٔ بنیادی جبر). معادلهٔ چندجمله‌یی:

$$a_{۰}x^n + a_{۱}x^{n-۱} + \ldots + a_{n-۱}x + a_n = ۰$$

که در آن $a_k \in \mathbb{C}$، $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n)$، و $a_{۰} \neq ۰$، و $n \geq ۱$، در $\mathbb{C}$ جواب دارد. به عبارت دیگر

$\mathbb{C}$ از لحاظ جبری بسته است

معادلهٔ بالا را معادلهٔ چندجمله‌یی از درجهٔ n (هنگامی که $a_{۰} \neq ۰$) گویند. از قضیهٔ بنیادی جبر نتیجه می‌شود که:

فرع ۲.۴.۱. معادلهٔ چندجمله‌یی، درجهٔ n، با احتساب ریشه‌های مکرّر n ریشه در $\mathbb{C}$ دارد.

مثال. معادلهٔ درجهٔ سوم $z^۳ + i = ۰$ را حل کنید.

حل. می‌نویسیم $z = u + iv$، $(u, v \in \mathbb{R})$. پس، چون

$$(u + iv)^۳ = u^۳ + ۳iu^۲v - ۳uv^۲ - iv^۳$$

باید داشته باشیم

$$\begin{cases} u^۳ - ۳uv^۲ = ۰ \\ ۳u^۲v - v^۳ + ۱ = ۰ \end{cases}$$

از معادلهٔ اوّل نتیجه می‌شود

$$u(u^۲ - ۳v^۲) = ۰$$

پس

$$u^۲ - ۳v^۲ = ۰ \quad \text{یا} \quad u = ۰$$

وقتی $u = ۰$، از معادلهٔ دوّم نتیجه می‌شود:

$$v^۳ - ۱ = ۰ \qquad (v - ۱)(v^۲ + v + ۱) = ۰$$

چون $v \in \mathbb{R}$، $v^۲ + v + ۱ \neq ۰$، لذا $v = ۱$ و $z = i$.:. هنگامی که $u^۲ - ۳v^۲ = ۰$، $u = \pm\sqrt{۳}v$. از قرار دادن این مقدار در معادلهٔ دوّم خواهیم داشت

$$۳\left(\pm\sqrt{۳}v\right)^۲ v - v^۳ + ۱ = ۰ \quad \text{یعنی،} \quad ۸v^۳ + ۱ = ۰$$
$$\therefore\ (۲v + ۱)(۴v^۲ - ۲v + ۱) = ۰$$

چون $v \in \mathbb{R}$، $۴v^۲ - ۲v + ۱ \neq ۰$ و لذا $v = -۱/۲$. پس

$$u = \mp\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \qquad z = \frac{\pm\sqrt{۳} - i}{۲}$$

بنابراین سه ریشه به‌دست می‌آید

$$z = i, \qquad \frac{\pm\sqrt{۳} - i}{۲}$$

گ. ف گاوس (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) در رساله‌اش چندین استدلال برای قضیه بنیادی جبر داده است. خوانندگان علاقه‌مند به‌این استدلالها می‌توانند به کتابهای درسی استانده در آنالیز مختلط مانند: آنالیز مختلط اثر باک و نیومن[1] و جاذبه‌های آنالیز مختلط اثر بوآز[2] مراجعه نمایند.

باید توجه داشت که قضیهٔ بنیادی جبر به وجود جوابها در $\mathbb{C}$ حکم می‌کند ولی از چگونگی پیدا کردن آنها صحبتی به‌میان نمی‌آورد. درواقع هیچ‌گونه دستور جبری کارساز برای یک چندجمله‌یی غیرمشخصی از درجهٔ ۵ (یا بالاتر) وجود ندارد.

۵.۱ رابطهٔ ترتیبی در هیأت اعداد مختلط

همواره می‌توانیم اندازهٔ دو عدد حقیقی را با هم مقایسه کنیم. یعنی در دو عدد مفروض $a, b \in \mathbb{R}$، یا $a > b$، یا $a = b$، و یا $b > a$. امّا آیا می‌توان این قضیه را برای اعداد مختلط هم تعمیم داد؟ برای پاسخگویی به‌این سؤال ابتدا رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{R}$ را دوباره بررسی می‌کنیم.

$P_۱$. (سه حالتی) به‌ازای هر عدد $a \in \mathbb{R}$ فقط و فقط یکی از سه رابطهٔ زیر برقرار است

$$a > ۰, \qquad a = ۰, \qquad -a > ۰$$

1. J. Bak and D. J. Newman's *Complex Analysis* [Springer-Verlag, New York, 1982].

2. R. P. Boas's *Invitation to Complex Analysis* [Random House, New York, 1987].

به‌ازای جمیع مقادیر $a, b \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$a > b \text{،} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad a - b > 0$$

در این‌صورت P_1 هم‌ارز است با این حکم که به‌ازای جمیع مقادیر $a, b \in \mathbb{R}$ فقط و فقط یکی از سه‌رابطهٔ زیر برقرار است

$$a > b, \qquad a = b, \qquad b > a$$

علاوه بر این رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{R}$ در احکام زیرین صدق می‌نماید.

.P_2 $\quad a > 0, b > 0 \Longrightarrow a + b > 0$

.P_3 $\quad a > 0, b > 0 \Longrightarrow ab > 0$ ·

از اینجا نتیجه می‌شود که همهٔ ویژگیهای رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{R}$ مانند:

$$a > b, b > c \Longrightarrow a > c$$

$$a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc$$

$$a > b, c < 0 \Longrightarrow ac < bc$$

از قطعی بودنِ اصلهای موضوع P_1،P_2، و P_3 نتیجه می‌شوند. به‌عبارت دیگر یک رابطهٔ ترتیبی فقط هنگامی مفید واقع می‌شود که هر سه اصل موضوع P_1، P_2، P_3 برقرار باشند.

قضیهٔ ۱.۵.۱. رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{R}$ را می‌توان برای $\mathbb{C}$ چنان تعمیم داد که P_1 و P_2 در آن برقرار باشد، ولی برقراری P_3 در آن ممکن نیست.

برهان. به ازای $\alpha = a + ib$، $(a, b \in \mathbb{R})$، تعریف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \qquad \text{یا} \\ a = 0 \quad \text{و} \quad b > 0 \end{cases}$$

.P_1 به‌ازای هر عدد مختلط $\alpha = a + ib$، $(a, b \in \mathbb{R})$، فقط باید یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$$a > 0, \qquad a = 0, \qquad -a > 0$$

الف) اگر $a > 0 \Longrightarrow \alpha > 0$

ب) اگر $-a > 0 \Longrightarrow -\alpha > 0$

ج) اگر $a = 0 \begin{cases} b > 0 \Longrightarrow \alpha > 0 \\ b = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \\ -b > 0 \Longrightarrow -\alpha > 0 \end{cases}$

پس ثابت کردیم که به‌ازای هر مقدار $\alpha \in \mathbb{C}$ فقط و فقط یکی از احکام زیر برقرار است:

$$\alpha > 0, \qquad \alpha = 0, \qquad -\alpha > 0$$

P_2. فرض می‌کنیم $\alpha > 0$ و $\alpha' > 0$ و

$$\alpha = a + ib, \qquad \alpha' = a' + ib' \qquad (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$$

پس

$$\{a = 0 \ \text{و}\ b > 0\} \ \text{یا}\ a > 0$$
$$\{a' = 0 \ \text{و}\ b' > 0\} \ \text{یا}\ a' > 0$$

باید همهٔ ترکیبهای این حالتها را بررسی کنیم

الف) $a > 0, a' > 0 \Longrightarrow a + a' > 0 \Longrightarrow \alpha + \alpha' > 0$

ب) $a > 0, \{a' = 0 \ \text{و}\ b' > 0\} \Longrightarrow a + a' > 0 \Longrightarrow \alpha + \alpha' > 0$

ج) $a' > 0, \{a = 0 \ \text{و}\ b > 0\} \Longrightarrow a + a' > 0 \Longrightarrow \alpha + \alpha' > 0$

د) بالاخره $\{a = 0$ و $b > 0\}$ و $\{a' = 0$ و $b' > 0\}$، در این صورت $a + a' = 0$ و $b + b' > 0$ و لذا $\alpha + \alpha' > 0$.

P_3. فرض می‌کنیم رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{R}$ را برای $\mathbb{C}$ چنان بسط داده باشیم که اصل P_2 را محفوظ داشته باشد. بنابراین، چون $i \neq 0$، به‌موجب P_1 باید داشته باشیم: $i > 0$ یا $-i > 0$. اگر $i > 0$، بنابر P_2 باید داشته باشیم $i.i > 0$ و این به‌معنی $-1 > 0$، و این ممتنع است. همین‌طور اگر $-i > 0$، باز بنابر P_2 باید داشته باشیم $(-i).(-i) > 0$ که مجدداً به نتیجهٔ ممتنع $-1 > 0$ می‌رسیم. ■

توجه: در عمل به راههای زیادی می‌توان رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{C}$ را چنان تعریف نمود که P_1 و P_2 برقرار باشند. در اینجا ما راه ترتیب الفبایی قاموسی را اختیار نمودیم. در نتیجه برای اعداد غیرحقیقی (مختلط) نامساویهایی نظیر $>$ یا $\geq$ را به‌کار نخواهیم برد.

۶.۱ نابرابری مثلثی

در بخشهای ۱ و ۲ قدرمطلق عدد مختلط $\alpha = a + ib$، $(a, b \in \mathbb{R})$، را چنین تعریف کردیم

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

و به چند ویژگی سادهٔ قدرمطلق اشاره کردیم: اکنون نابرابری مثلثی را که مهّم است اثبات می‌کنیم

قضیهٔ ۱.۶.۱. (نابرابری مثلثی). به‌ازای جمیع مقادیر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$،

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

برهان.

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1\overline{z}_1 + (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) + z_2\overline{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + 2\Re(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| + |z_2|^2 \quad (\because \Re\alpha \leq |\alpha|, \alpha \in \mathbb{C} \ \ \text{به‌ازای}) \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \quad (\because |\overline{z}_2| = |z_2|) \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

چون $|z_1 + z_2|$ و $|z_1| + |z_2|$ هر دو نامنفی‌اند خواهیم داشت

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

برای اثبات نابرابری دیگر باید توجه کرد که $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$

$$\begin{aligned}
\therefore |z_1| &= |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \\
&= |z_1 + z_2| + |z_2|
\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

با تعویض نقشهای z_1 و z_2 خواهیم داشت

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$$

$$\therefore\ \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \qquad \blacksquare$$

اکنون حالت تساوی را در نابرابری مثلثی درنظر می‌گیریم. حالت $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$، بدیهی است. از این‌رو حالتی را در نظر می‌گیریم که $z_1 \cdot z_2 \neq 0$. با مراجعه به برهان بالا ملاحظه می‌کنیم که تساوی هنگامی به‌دست می‌آید که

$$\Re(z_1\overline{z}_2) = |z_1\overline{z}_2|$$

امّا یک عدد مختلط α فقط و فقط وقتی در تساوی $\Re\alpha = |\alpha|$ صدق می‌کند که α عدد حقیقی نامنفی باشد. پس نامساوی فوق فقط و فقط هنگامی به تساوی بدل می‌شود که

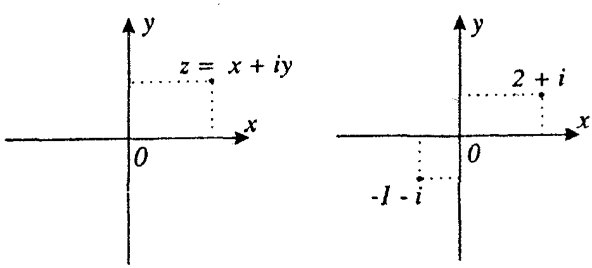
$$z_1\overline{z}_2 \geq 0$$

چون فرض کردیم $z_2 \neq 0$، از تقسیم طرفین این تساوی بر $(0 < z_2\overline{z}_2 =)|z_2|^2$، خواهیم داشت $z_1/z_2 > 0$.

گفته‌های خود را خلاصه کنیم، تساوی $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ فقط و فقط هنگامی برقرار است که $z_1/z_2 > 0$ مگر اینکه یا $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$. به‌عبارت دیگر یکی از دو مقدار z_1 و z_2 باید دارای این ویژگی باشد که مضرب مثبتی از دیگری باشد. یک برهان دیگر از این حکم را در انتهای بخش ۸.۱، نمایش قطبی اعداد مختلط، خواهیم آورد. دلیل نام «نابرابری مثلثی» در بخش بعدی روشن خواهد شد.

۷.۱ صفحهٔ مختلط

عدد مختلط را به‌صورت زوج مرتب اعداد حقیقی تعریف کردیم. امّا مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک‌به‌یک با نقاط (x, y) صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ دارد. بنابراین طبیعی است که یک عدد مختلط $z = x + iy$ را متناظر نقطهٔ (x, y) در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ بگیریم.



شکل ۱.۱

در تناظر بالا عدد حقیقی $x = x + i\circ$ متناظر با نقطهٔ $(x, \circ)$ روی محور xها و عدد انگاری محض $iy = \circ + iy$ با نقطهٔ $(\circ, y)$ روی محور yها متناظر می‌شود. از این‌رو محور xها را محور حقیقی و محور yها را محور انگاری نامیده‌اند. صفحه‌ای که مجهّز به محورهای حقیقی و انگاری باشد، صفحهٔ مختلط یا صفحهٔ گاوس نامیده می‌شود.

اکنون به حاصل‌جمع اعداد مختلط در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ می‌پردازیم:
فرض کنید

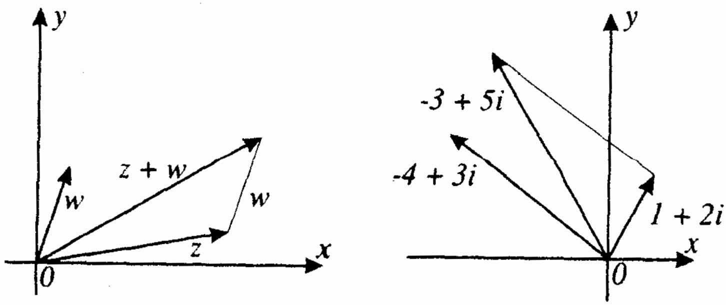
$$z = x + iy, \qquad w = u + iv \qquad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

پس

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

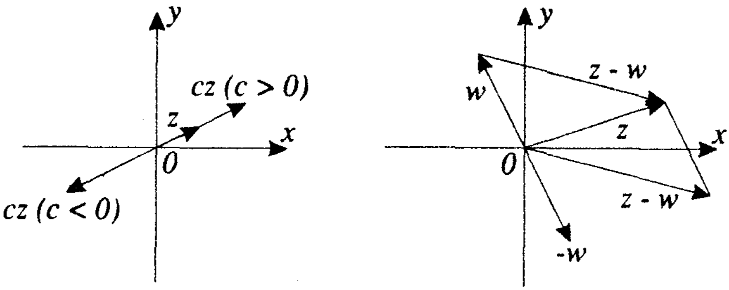
این رابطه، این مطلب را به ذهن القا می‌کند که بهتر است اعداد مختلط را به‌صورت بردار درنظر بگیریم. یعنی عدد مختلط $z = x + iy$ را برداری درنظر بگیریم که مبدأش، مبدأ مختصات و منتهایش عدد مختلط $z = x + iy$ باشد. به‌عبارت دیگر عدد مختلط $z = x + iy$ را برداری درنظر بگیریم که تصاویر قائم آن بر محورهای مختصات x و y باشند. طبیعی است که نظیر همین ملاحظات درمورد عدد مختلط w نیز صادق است. بدین‌ترتیب مجموع $z + w$ برداری است متناظر با قطر متوازی‌الاضلاعی (به مبدأ مرکز مختصات) که بر دو بردار z و w ساخته می‌شود. این گفته هم‌ارز است با رسم بردار z از مبدأِ مختصات و سپس رسم بردار w که مبدأش درِ مُنتهای z باشد. دراین‌صورت برداری که ابتدایش مبدأِ مختصات و منتهایش انتهای w است، نمایش بردار $z + w$ خواهد بود. (← شکل ۲.۱)

از این پس، هر عدد مختلط را با یک نقطه یا یک بردار در صفحهٔ مختلط (هر کدام که در موقعیت خاص مناسبتر باشد) مشخص می‌سازیم.



شکل ۲.۱

اکنون مضرب حقیقی از یک عدد مختلط را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $z = x + iy$ و $c \in \mathbb{R}$، داریم $cz = cx + icy$. در این‌صورت اگر $c > 0$، اصلاً طول بردار را در c **ضرب** می‌کنیم (در همان جهت). در صورتی که $c < 0$، طول بردار را در $|c|$ ضرب و بردار را در **جهت** مخالف رسم می‌کنیم.



شکل۱.۳

به‌خصوص، چون $-w = (-1)w$، خواهیم داشت:

$$z - w = z + (-w)$$

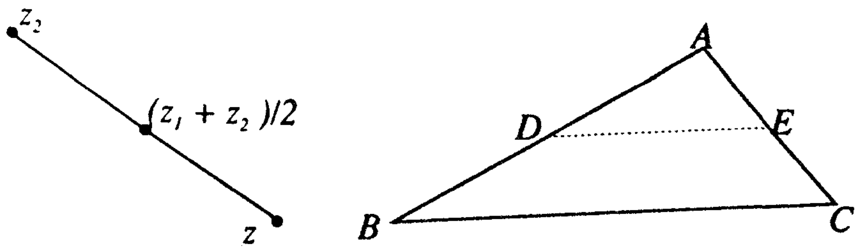
یعنی برای یافتن بردار $-w$، ابتدا جهت بردار w را عکس می‌کنیم و مبدأِ بردار $-w$ را **انتهای** z می‌گیریم. بدین‌ترتیب برداری که مبدأش، مبدأ z و انتهایش، انتهای $-w$ است، $z - w$ **را** نمایش خواهد داد. به‌عبارت دیگر بردار $z - w$ برداری است که مبدأِ آن منتهای w و منتهای آن، **منتهای** z باشد. (به‌شرط آنکه z و w یک مبدأ داشته باشند). باید توجه کرد که $z + w$ و $z - w$ **دو قطر** متوازی‌الاضلاعی هستند که $\overrightarrow{Oz}$ و $\overrightarrow{Ow}$ دو ضلع مجاور آن هستند.

مثال ۱. فرض کنید z_1 و z_2 دو نقطه در صفحهٔ مختلط باشند. پس وسط پاره‌خطی **که** دو نقطهٔ z_1 و z_2 را به هم وصل می‌کند،

$$z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

خواهد بود.

مثال ۲. در مثلث دلخواه $\triangle ABC$، اگر نقاط D و E را به‌ترتیب وسطهای اضلاع AB و AC بگیریم، DE موازی ضلع BC و طولش نصف طول BC خواهد شد.



شکل ۴.۱

حل. فرض کنید $\triangle ABC$ در صفحهٔ مختلط داده شده است، و $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ به‌ترتیب اعداد مختلط متناظر با رأسهای A، B و C هستند. در این‌صورت، وسطهای اضلاع AB، AC یعنی D و E به‌ترتیب متناظر با $۱/۲(z_۱ + z_۲)$ و $۱/۲(z_۱ + z_۳)$ خواهند شد. بنابراین بردار $\overrightarrow{DE}$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۳) - \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲) = \frac{۱}{۲}(z_۳ - z_۲)$$

امّا $z_۳ - z_۲$ دقیقاً بردار $\overrightarrow{BC}$ و بنابراین نتیجه حاصل است.

مثال ۳. نقطهٔ z واقع بر پاره‌خط واصل بین نقاط $z_۱$ و $z_۲$ که این فاصله را به‌نسبت m/n تقسیم می‌کند با تساوی زیر داده می‌شود

$$z = \frac{nz_۱ + mz_۲}{n + m}$$

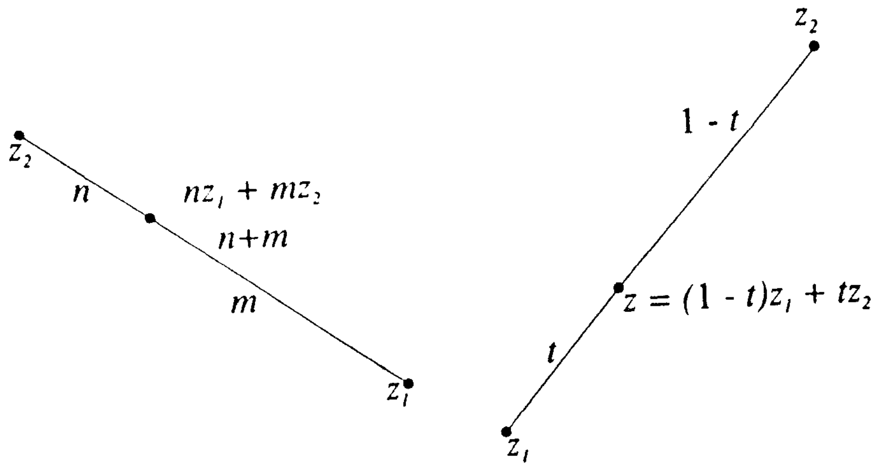
که در آن m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند. زیرا به‌آسانی می‌توان دید که

$$\frac{z - z_۱}{m} = \frac{z_۲ - z}{n}$$

که این رابطهٔ مطلوب را می‌دهد.

با بیانی هم‌ارز با بیان بالا، اگر z را نقطه‌ای دلخواه روی پاره‌خطّی که نقاط $z_۱$ و $z_۲$ را به‌هم وصل می‌کند بگیریم، آنگاه به‌ازای مقداری از $t \in \mathbb{R}$، $(۰ < t < ۱)$، داریم
$z - z_۱ = t(z_۲ - z_۱)$

$$\therefore\ z = (۱ - t)z_۱ + tz_۲ \qquad (۰ < t < ۱)$$



شکل۵.۱

به‌عکس، فرض کنید این رابطه برقرار باشد. پس چون استدلال مذکور دوسویی است، می‌توان نتیجه گرفت که z باید نقطه‌ای بر پاره‌خطّی در صفحهٔ مختلط باشد، که $z_۱$ و $z_۲$ را به‌هم وصل می‌کند.

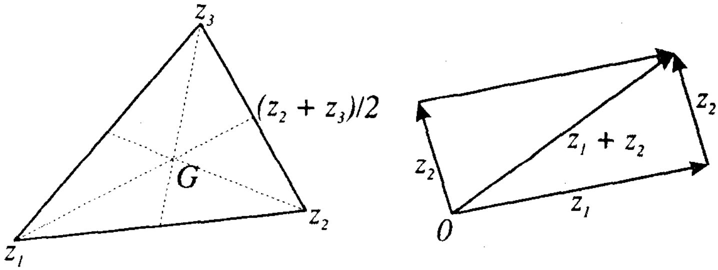
مثال ۴. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$، و $z_۳$ سه نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختلط باشند. پس وسط پاره‌خط واصل بین نقاط $z_۲$ و $z_۳$ نقطهٔ $(z_۲ + z_۳)/۲$ است و بنابراین معادلهٔ پارامتری میانهٔ مارّ بر رأس $z_۱$ از $\triangle z_۱z_۲z_۳$ چنین است

$$z = (۱ - t)z_۱ + t \cdot \frac{z_۲ + z_۳}{۲} \qquad (۰ < t < ۱)$$

پس نقطه‌ای که این میانه را به‌طور درونی به نسبت ۲/۱ تقسیم می‌کند با قرار دادن $t = ۲/۳$ در عبارت بالا به‌دست می‌آید، یعنی

$$z = \frac{۱}{۳}(z_۱ + z_۲ + z_۳)$$

امّا این عبارت نسبت به $z_۱$، $z_۲$، و $z_۳$ متقارن است، و لذا این نقطه میانه‌های مارّ از رئوس $z_۲$ و $z_۳$ را نیز به‌طور درونی به نسبت ۱/۲ تقسیم می‌نماید. بنابراین سه میانهٔ مثلث دلخواه در یک نقطه متقاطع‌اند. این نقطه را مرکزوار یا مرکز ثقل $\triangle z_۱z_۲z_۳$ گویند.



شکل۱.۶

به ازای $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$، قدر مطلق z را چنین تعریف می‌کنیم.

$$|z| = (z\overline{z})^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

یعنی، $|z|$ طول بردار z است. به‌عبارت دیگر $|z|$ فاصلهٔ z از مبدأ مختصات است، که با حالتی که z حقیقی باشد توافق دارد.

باید توجه کرد که $|z_1|$، $|z_2|$ و $|z_1 + z_2|$ طولهای سه ضلع یک مثلث‌اند و لذا نام نابرابری مثلثی (قضیهٔ ۱.۶.۱)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

نامی است با مسمّی. از لحاظ هندسی روشن است که این نابرابری فقط هنگامی به‌تساوی تبدیل می‌شود که مثلث به پاره‌خط بدل شود. به‌این موضوع در انتهای بخش بعد باز خواهم گشت.

۸.۱ نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی

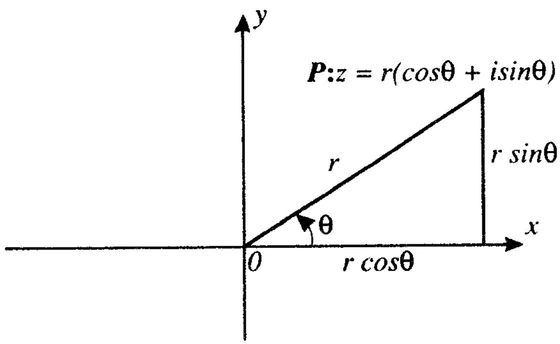
تا اینجا فقط جنبهٔ برداری اعداد مختلط را به‌کارگرفته‌ایم و به قدرت واقعی اعداد مختلط توجّهی نکرده‌ایم. عمل ضرب برای اعداد مختلط عملی است خوشتعریف. درصورتی‌که برای بردارها چنین نیست. حاصلضرب نقطه‌ای (حاصلضرب داخلی) دو بردار، یک عددوار است نه یک بردار، درصورتی‌که ضرب خارجی دو بردار واقع در یک صفحه برداری است که دیگر در این صفحه نیست. (ضرب خارجی فقط در فضای سه‌بعدی مفید است.) اساس کاربرد اعداد مختلط در هندسهٔ مسطحه بر این واقعیت استوار است که حاصلضربهای اعداد مختلط، اعدادی هستند مختلط.

برای ضرب اعداد مختلط بجاست که از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده کنیم. برای نقطه‌ای مانند $(P = x + iy)$ یا $P = (x, y)$ در صفحهٔ مختصات، بردار $\overrightarrow{OP}$ (O مبدأِ مختصات) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید θ زاویهٔ بین $\overrightarrow{OP}$ و جهت مثبت محور xها باشد و $r = \overline{OP}$، پس $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$.

طبیعی است که θ با تقریب به پیمانهٔ 2π یعنی θ تعیین می‌شود. یعنی، اگر از اختلاف مضرب صحیح 2π صرفنظر کنیم، θ به‌طور یکتا تعیین می‌شود. زاویهٔ θ را شناسهٔ عدد مختلط z می‌گویند.

در سراسر این کتاب همواره تساویهایی که متضمن شناسه باشند همنهشت به پیمانه 2π به‌حساب می‌آیند، مگر آنکه به‌صراحت خلاف آن عنوان شود، یعنی اختلاف مضارب 2π نادیده گرفته شود.

(r, θ) را مختصات قطبی نقطهٔ P می‌گویند.



شکل ۷.۱

مبدأِ مختصات نقطهٔ منحصربه‌فردی است که در آن $r = 0$. شناسهٔ θ در مبدأِ مختصات تعریف نشده است.

اگر $z = x + iy\ (\neq 0)$، نمایش قطبی z را می‌توانیم چنین بنویسیم.

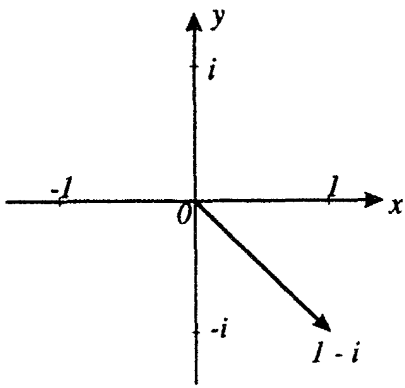
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

یعنی $r = |z|$، $\theta = \arg z$ معرّف شناسهٔ z است.

مثال ۱. به‌ازای $z \in \mathbb{C}$، $z \neq 0$،

$$z \text{ حقیقی است} \iff \arg z = n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$z \text{ انگاری محض است} \iff \arg z = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$$



شکل۱.۸

مثال ۲.

$$|-۱| = ۱, \qquad \arg(-۱) = (۲n+۱)\pi \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$|i| = ۱, \qquad \arg(i) = \frac{\pi}{۲} + ۲n\pi \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$|۱-i| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}, \qquad \arg(۱-i) = -\frac{\pi}{۴} + ۲n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

مثال ۳. فرض کنید $\omega = \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}$.
پس

$$|\omega| = \sqrt{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲} = ۱$$

قرار می‌دهیم $\theta = \arg\omega$ در این‌صورت

$$\cos\theta = -\frac{۱}{۲}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

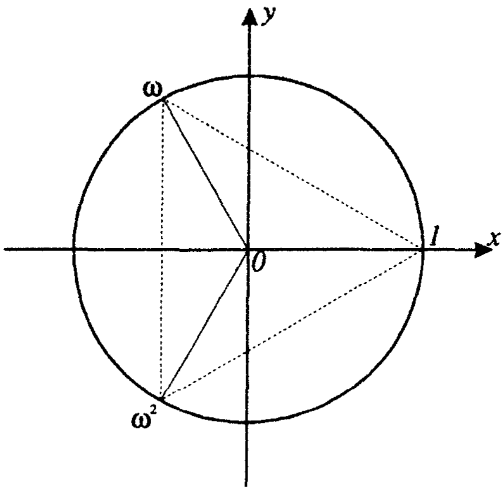
لذا $\theta = \frac{۲\pi}{۳} + ۲n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$. به‌علاوه

$$|\overline{\omega}| = ۱, \qquad \arg\overline{\omega} = -\frac{۲\pi}{۳} + ۲n\pi$$

توجّه داشته باشید که

$$\omega^{۲} = \overline{\omega}, \qquad \omega^{۲} + \omega + ۱ = ۰, \qquad \omega^{۳} = ۱$$

نقاط ω و $\omega^{۲}$ به‌انضمام ۱، سه‌رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد را تشکیل می‌دهند.



شکل۱.۹

نمایش قطبی برای ضرب اعداد مختلط به‌علّت زیر مناسب است:

قضیهٔ ۱.۸.۱. فرض کنید

$$z_{۱} = r_{۱}(\cos\theta_{۱} + i\sin\theta_{۱}), \qquad z_{۲} = r_{۲}(\cos\theta_{۲} + i\sin\theta_{۲}),$$

در این صورت

$$z_{۱}z_{۲} = r_{۱}r_{۲}\{\cos(\theta_{۱} + \theta_{۲}) + i\sin(\theta_{۱} + \theta_{۲})\}$$

یعنی

$$|z_{۱}z_{۲}| = |z_{۱}| \cdot |z_{۲}|, \qquad \arg(z_{۱}z_{۲}) = \arg z_{۱} + \arg z_{۲}$$

به‌عبارت دیگر، قدرمطلق حاصلضرب، مساوی حاصلضرب قدرمطلقها و شناسهٔ حاصلضرب مساوی مجموع شناسه‌هاست.

برهان. بنا بر فرمولهای جمع داریم

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) \\ &\quad + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$ ■

توجه: با محدود نمودن شناسهٔ z به بازهٔ $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ شناسهٔ z به ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ (بجز $z = 0$) به‌طور یکتا مشخص می‌شود، ولی در این صورت رابطهٔ

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

معتبر نخواهد بود و $\arg z$ تابعی پیوسته از z نخواهد شد.

فرع ۱.۸.۲.

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_n|$$
$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n$$

فرع ۱.۸.۳. **(دموآور).** به‌ازای $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $n \in \mathbb{Z}$،

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

یعنی

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

برهان. فقط حالت $n = -1$ را ثابت می‌کنیم. داریم

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

از تقسیم دو طرف این تساوی بر $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} &= \frac{۱}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= \frac{۱}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}\end{aligned}$$

زیرا $\cos(-\theta) = \cos\theta$ و $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$$\therefore\ |z^{-۱}| = |z|^{-۱}, \qquad \arg(z^{-۱}) = -\arg(z)$$ ■

فرع ۴.۸.۱.

$$\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}, \qquad \arg\frac{z_۱}{z_۲} = \arg z_۱ - \arg z_۲$$

(به شرط $z_۲ \neq ۰$)

مثال ۱. از فرمول دوموآور می‌توان فرمولهای توابع سینوس و کسینوس را استخراج نمود. اگر در آن فرمول r را مساوی ۱ بگیریم، خواهد شد:

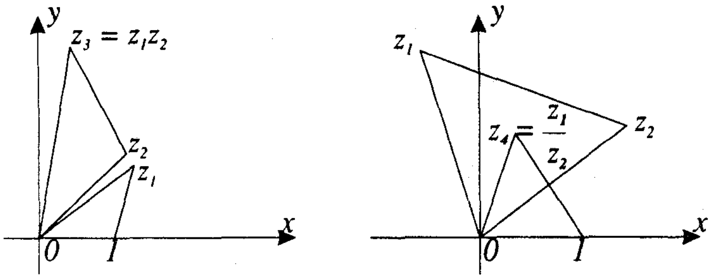
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

بویژه به‌ازای $n = ۳$

$$\begin{aligned}\cos ۳\theta + i\sin ۳\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^۳\\ &= \left(\cos^۳\theta - ۳\cos\theta\cdot\sin^۲\theta\right) + i\left(۳\cos^۲\theta\cdot\sin\theta - \sin^۳\theta\right)\\ \therefore\ \cos ۳\theta &= \cos^۳\theta - ۳\cos\theta\cdot\sin^۲\theta = ۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta\\ \sin ۳\theta &= ۳\cos^۲\theta\cdot\sin\theta - \sin^۳\theta = ۳\sin\theta - ۴\sin^۳\theta\end{aligned}$$

این قضیه می‌گوید که ضرب در z در صفحهٔ مختلط به‌معنی بزرگ کردن (یا کوچک کردن) شکل به وسیلهٔ ضرب در عامل $|z|$، و دوران آن (پادساعتسو) به زاویهٔ $\arg z$ است. به‌ویژه ضرب در i، یعنی دوران (پادساعتسو) به زاویهٔ $\pi/۲$ است.

با این مقدمات، اگر نقاط $z_۱$ و $z_۲$ در صفحهٔ مختلط داده شده باشند، می‌توانیم حاصلضرب $z_۳ = z_۱z_۲$ را به‌طور هندسی رسم کنیم. آنچه که باید توجه کنیم این است که $\triangle O۱z_۱$ و $\triangle Oz_۲z_۳$ متشابه (و هم‌جهت)‌اند.



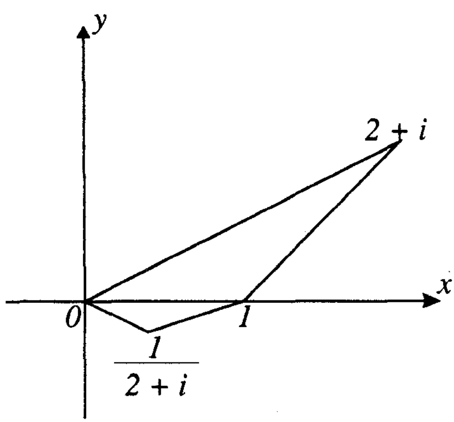
شکل۱۰.۱

همچنین برای رسم خارج قسمت $z_۴ = (z_۱/z_۲)$ از راه هندسی، کافی است توجّه کنیم که $\triangle O z_۲ z_۱$ و $\triangle O ۱ z_۴$ متشابه (و هم‌جهت)اند.

مثال ۲. مطلوب است نمایش هندسی $۱/(۲+i)$. فرض کنید $z_۱ = ۲ + i$ و $z_۲ = ۱/(۲+i)$. پس $\triangle O ۱ z_۱$ و $\triangle O z_۲ ۱$ متشابه (و هم جهت)اند و $z_۲$ را طبق شکل ۱۱.۱ رسم می‌کنیم.

اکنون به‌حالتی برمی‌گردیم که نابرابری مثلثی (قضیهٔ ۱.۶.۱)

$$|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$$



شکل۱۱.۱

به تساوی بدل می‌شود. با بررسی برهان متوجه می‌شویم که تساوی هنگامی و فقط هنگامی برقرار می‌شود که یکی از شرایط هم ارز زیر برقرار باشد:

۱) $\Re(z_1\overline{z}_2) = |z_1\overline{z}_2|$.

۲) $z_1\overline{z}_2$ عدد حقیقی نامنفی باشد.

۳) z_1/z_2 عدد حقیقی مثبتی باشد یا $z_1z_2 = 0$.

۴) z_1 و z_2 یک شناسه (به پیمانهٔ 2π) داشته باشند.

۵) z_1 و z_2 بر یک شعاع که از مبدأ مختصات رسم می‌شود قرار داشته باشند.

۶) بردارهای $\overrightarrow{Oz_1}$ و $\overrightarrow{Oz_2}$ یک امتداد داشته باشند.

۹.۱ ریشه‌های n ام عدد۱

دایرهٔ یکه (دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱) را می‌توان چنین بیان کرد

$$|\zeta| = 1 \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

برحسب نمایش قطبی می‌توان آن را چنین نوشت

$$|\zeta| = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

به‌ازای این ζ، اگر $z \in \mathbb{C}$ داریم

$$|\zeta z| = |\zeta| \cdot |z| = |z|, \quad \arg(\zeta z) = \arg\zeta + \arg z$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ضرب در ζ فقط به معنی دور z حول مبدأ مختصات است به زاویهٔ $\theta(= \arg\zeta)$.

فرض کنید $z = x + iy$، $\zeta z = x' + iy'$. پس

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ \therefore\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

که این عمل یک تبدیل خطّی را تداعی می‌کند. چنانچه $x+iy$ و $x'+iy'$ را به ترتیب بردارهای $\binom{x}{y}$ و $\binom{x'}{y'}$ بگیریم، روابط بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

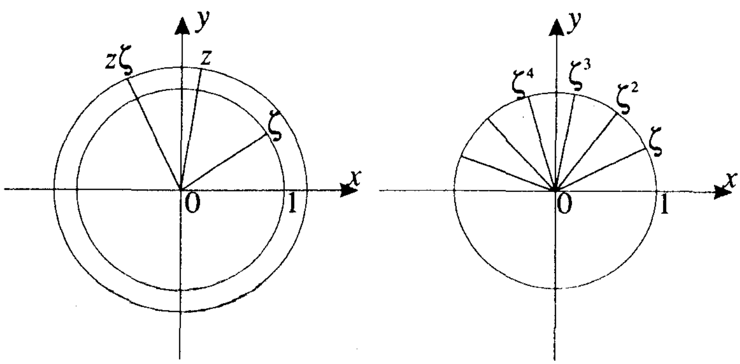
به‌عکس، چنانچه این روابط برقرار باشد، آنگاه

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$$

و لذا ضرب $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$ در $z = x + iy$ درست همان ضرب ماتریس دوران

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

در بردار $\binom{x}{y}$ است.



شکل۱.۱۲

مثال ۱. برای $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$، $\zeta^{۲}$ از دوران ζ به زاویه θ به دست می‌آید، یک دوران دیگر به زاویهٔ θ، $\zeta^{۳}$ را نتیجه می‌دهد و قس علیهذا.

مثال ۲. برای $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، $\alpha^{۲}$از دوران α به زاویهٔ θ و بزرگ نمودن (یا کوچک نمودن) طول آن از راه ضرب در r به‌دست می‌آید.

مثال ۳. اکنون می‌خواهیم همهٔ ریشه‌های سوم عدد ۱ را پیدا کنیم. یعنی می‌خواهیم معادلهٔ $z^{۳} = ۱$ را حل کنیم.

می‌نویسیم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. در این‌صورت به موجب فرمول دموآور داریم:

$$r^{۳}(\cos ۳\theta + i\sin ۳\theta) = ۱$$
$$\therefore\ r^{۳} = ۱, \qquad \cos ۳\theta + i\sin ۳\theta = ۱$$

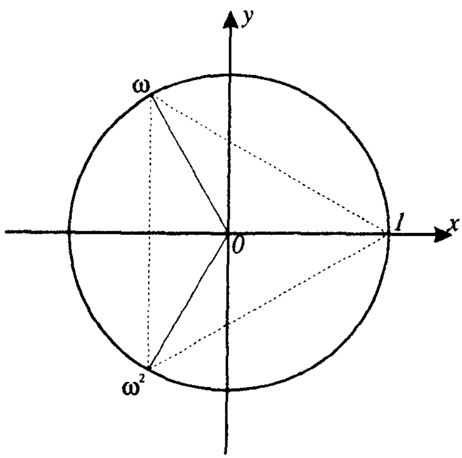
چون r یک عدد حقیقی مثبت است خواهیم داشت:

$$r = ۱, \qquad \cos ۳\theta = ۱, \qquad \sin ۳\theta = ۰$$
$$\therefore\ ۳\theta = ۲k\pi; \quad \text{یعنی}, \qquad \theta = \frac{۲k\pi}{۳} \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \cdots)$$

به‌موجب قضیهٔ بنیادی جبر (قضیهٔ ۱.۴.۱)، درست سه ریشه باید وجود داشته باشد، که باز به تعداد نامتناهی ریشه ظاهر می‌شود. ولی با توجه به دوره‌یی بودن توابع سینوسی و کسینوسی داریم

$$\begin{aligned}
\omega_۰ &= ۱ + i۰ = \omega_۳ = \omega_۶ = \omega_۹ = \cdots = \omega_{-۳} = \omega_{-۶} = \cdots \\
\omega_۱ &= \cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳} = \frac{-۱ + i\sqrt{۳}}{۲} \\
&= \omega_۴ = \omega_۷ = \omega_{۱۰} = \cdots = \omega_{-۲} = \omega_{-۵} = \cdots \\
\omega_۲ &= \cos\frac{۴\pi}{۳} + i\sin\frac{۴\pi}{۳} = \frac{-۱ - i\sqrt{۳}}{۲} \\
&= \omega_۵ = \omega_۸ = \omega_{۱۱} = \cdots = \omega_{-۱} = \omega_{-۴} = \cdots
\end{aligned}$$

این سه نقطه رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ یکه هستند که یک رأس آن در نقطهٔ ۱ است. توجه داریم که اگر قرار دهیم $\omega_۱ = \omega$ آنگاه $\overline{\omega} = \omega^۲ = \omega_۲$ و $\omega^۲ + \omega + ۱ = ۰$ (← شکل ۱۳.۱)



شکل ۱۳.۱

اکنون به یافتن همهٔ جوابهای معادلهٔ

$$z^n = ۱$$

می‌پردازیم. فرض کنیم یک جواب آن در دستگاه قطبی به‌صورت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

باشد. بنابر فرمول دموآور

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$\therefore\ r = ۱, \qquad \cos n\theta + i\sin n\theta = ۱$$

بنابراین

$$n\theta = ۲k\pi, \qquad \theta = \frac{۲k\pi}{n} \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots)$$

به‌عکس، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$z_k = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n} \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots)$$

در معادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند. حال می‌گوئیم که اگر $k' \equiv k$ (پیمانهٔ n)، آنگاه $z_{k'} = z_k$
بی‌آنکه از کلیّت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم

$$k' = k + jn \qquad (j \in \mathbb{Z}, ۰ \le k < n)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} z_{k'} &= \cos\frac{۲k'\pi}{n} + i\sin\frac{۲k'\pi}{n} \\ &= \cos\left(\frac{۲k\pi}{n} + ۲j\pi\right) + i\sin\left(\frac{۲k\pi}{n} + ۲j\pi\right) \\ &= \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n} = z_k \end{aligned}$$

پس حداکثر n ریشهٔ متمایز متناظر با اعداد $k = ۰, ۱, \cdots, n - ۱$ وجود دارد. به‌عکس، اگر $z_{k'} = z_k$، یعنی اگر

$$\cos \frac{۲k'\pi}{n} + i \sin \frac{۲k'\pi}{n} = \cos \frac{۲k\pi}{n} + i \sin \frac{۲k\pi}{n}$$

آنگاه به‌ازای مقداری مانند $m \in \mathbb{Z}$ داریم

$$\frac{۲k'\pi}{n} = \frac{۲k\pi}{n} + ۲m\pi$$

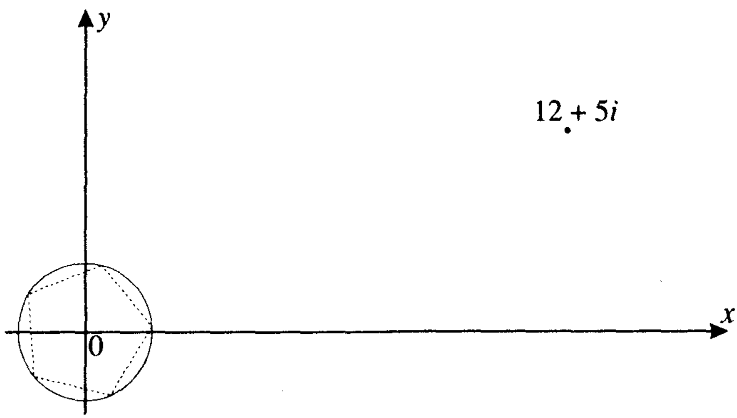
که ایجاب می‌کند داشته باشیم: $k' \equiv k$ (پیمانهٔ n).

گفته‌های خود را خلاصه می‌کنیم. دقیقاً n ریشهٔ

$$\cos \frac{۲k\pi}{n} + i \sin \frac{۲k\pi}{n}$$

متناظر با مقادیر $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n - ۱$ وجود دارد. این ریشه‌ها رأسهای یک nـضلعی منتظم محاط در دایرهٔ یکه را تشکیل می‌دهند، که یک رأس آن در نقطهٔ ۱ است.

مثال ۴. ریشه‌های $z^۵ = ۱۲ + ۵i$ را بیابید.



شکل۱.۱۴

حل. فرض می‌کنیم $\varphi = \arg(۱۲ + ۵i) = \arg ۵/۱۲$، چون $|۱۲ + ۵i| = ۱۳$، اگر قرار دهیم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، آنگاه

$$r^۵(\cos ۵\theta + i\sin ۵\theta) = ۱۳(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\therefore r = \sqrt[۵]{۱۳}, \quad \theta = \frac{\varphi}{۵} + \frac{۲k\pi}{۵} \quad (k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴)$$

در این صورت این ۵ ریشه رأسهای یک پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات هستند که یک رأس آن در نقطهٔ $\sqrt[۵]{۱۳}(\cos\varphi/۵ + i\sin\varphi/۵)$ واقع است ($\leftarrow$ شکل ۱۴.۱). خواننده باید روش نمایش قطبی را با روش بخشهای ۳.۱ و ۴.۱ مقایسه کند.

مثال ۵. فرض کنید $z = \cos ۲\pi/۵ + i\sin ۲\pi/۵$ پس، $z^۵ = ۱$ و $z \neq ۱$ داریم

$$z^۴ + z^۳ + z^۲ + z + ۱ = ۰$$

از تقسیم دو طرف بر $z^۲(z^۲ \neq ۰)$، خواهیم داشت

$$\left(z^۲ + \frac{۱}{z^۲}\right) + \left(z + \frac{۱}{z}\right) + ۱ = ۰$$

یعنی

$$\left(z + \frac{۱}{z}\right)^۲ + \left(z + \frac{۱}{z}\right) - ۱ = ۰$$

امّا $z + \frac{۱}{z} = ۲\cos ۲\pi/۵$، پس خواهیم داشت

$$۴\cos^۲\frac{۲\pi}{۵} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۵} - ۱ = ۰ \qquad \therefore \cos\frac{۲\pi}{۵} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۴}$$

ولی $\cos ۲\pi/۵ > ۰$، پس

$$\cos\frac{۲\pi}{۵} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$$

این نتیجه می‌رساند که یک پنج‌ضلعی منتظم را می‌توان با یک ستاره و پرگار ساخت.

آزمون. مقدار دیگر $-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$ از کجا می‌آید؟ آیا اساساً این یک عدد بی‌معنی است که باید دور انداخت؟

۱۰.۱ تابع نمایی

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال* آموخته‌ایم که به‌ازای همهٔ مقادیر $x \in \mathbb{R}$،

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

اگر به‌جای x، $i\theta$ قرار دهیم چه خواهد شد؟ طرف چپ این تساوی $e^{i\theta}$ می‌شود، امّا اینکه تابع نمایی با متغیر مختلط چیست؟ نمی‌دانیم. پس ابتدا نگاهی به طرف راست این تساوی می‌اندازیم. هر جملهٔ $(i\theta)^n/n!$ کاملاً تعبیر خوبی دارد پس جملات را براساس آنهایی که i دارند و آنهایی که i ندارند دسته‌بندی می‌کنیم (چون این سری همگرای مطلق است، ترتیب مجموعیابی را می‌توانیم در سری نامتناهی تغییر دهیم)، و خواهد شد

$$\begin{aligned}&\left\{۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} + \frac{\theta^۶}{۶!} + \cdots + (-۱)^n \frac{\theta^{۲n}}{(۲n)!} + \cdots\right\}\\ &\qquad + i\left\{\theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۵}{۵!} + \frac{\theta^۷}{۷!} + \cdots + (-۱)^n \frac{\theta^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \cdots\right\}\\ &\qquad = \cos\theta + i\sin\theta\end{aligned}$$

باز هم به چیزی رسیدیم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموخته بودیم. چون $e^{i\theta}$ معنایی ندارد، می‌توانیم از این نتیجه برای تعریف آن استفاده کنیم.

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$$

بنابراین فرمول دموآور یعنی

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

به

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

* خواننده‌ای که زمینه‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال ندارد، می‌تواند این بخش را رها نماید، $e^{i\theta}$ را به‌عنوان تلخیصی برای عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ تلقّی نماید، با این شرط که $e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ را نیز صورت دیگری از $(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$ تلقی کند.

تبدیل می‌شود که فرمولی پیش‌پا افتاده است. از قرار دادن $\theta = \pi$ در تساویِ معرّف $e^{i\theta}$، خواهیم داشت

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -۱, \qquad \therefore\ e^{i\pi} + ۱ = ۰$$

که پنج عدد ۰، ۱، π، e، و i را بهم مربوط می‌کند؛ و می‌توان ثابت کرد که این ۵ عدد مهمترین اعداد در ریاضیات هستند.

امّا تابع نمایی $f(x) = e^x$، $(x \in \mathbb{R})$، با ویژگی:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad \text{یعنی} \qquad f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$$

(و شرط اولیّهٔ ۱ $= (۰)'f$) مشخص می‌شود. آیا باز هم این ویژگی هنگامی که به متغیر مختلط گسترش داده شود معتبر می‌ماند؟ پاسخ مثبت از آب درمی‌آید. یک استدلال استادانه در کتاب «آنالیز ریاضی» تاکاگی[1] آمده و آن این است که از یک سری با توان مختلط می‌توان در داخل قرص همگرائی جمله به جمله مشتق گرفت. فرض کنید

$$f(z) = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^۲}{۲!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

با مشتقگیری جمله به جمله از آن بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$f^{(n)}(z) = f(z)$$

به‌ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ و جمیع مقادیر $n \in \mathbb{N}$.

بنابراین از بسط تابع $f(z+w)$ به سری تیلر در حول نقطهٔ z خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f(z) + \frac{f'(z)}{۱!}w + \frac{f''(z)}{۲!}w^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}w^n + \cdots \\ &= f(z)\left\{۱ + \frac{w}{۱!} + \frac{w^۲}{۲!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \cdots\right\} \\ &= f(z)\cdot f(w) \end{aligned}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

1. T. Takagi, *Mathematical Analysis*, Iwanami, Tokyo, 1986, p. 190.

از جمع و تفریق تساویهای

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

و

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

خواهیم داشت

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{۲i}$$

و از ضرب این دو رابطه تساوی

$$\cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta = ۱$$

به‌دست می‌آید.

مثال ۱. نشان دهید که

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) = ۲^{n/۲} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{۴}\right) \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \cdots)$$

حل. این کار را می‌توان به‌وسیلهٔ استقرای ریاضی انجام داد. امّا محاسبات زیرین بینشی را به ما می‌دهد که موجب توجیه تعمیم می‌شود.

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left\{\Re e^{(۱+i)x}\right\} \\
&= \Re\left\{\frac{d^n}{dx^n} e^{(۱+i)x}\right\} \\
&= \Re\left\{(۱+i)^n \cdot e^{(۱+i)x}\right\} \\
&= \Re\left\{\left(\sqrt{۲} \cdot e^{i(\pi/۴)}\right)^n \cdot e^{(۱+i)x}\right\} \\
&= ۲^{n/۲} \cdot \Re\left\{e^x \cdot e^{i(x+(n\pi/۴))}\right\} \\
&= ۲^{n/۲} \cdot e^x \cdot \cos\left(x + \frac{n\pi}{۴}\right)
\end{aligned}$$

مثال ۲. درستی تساوی زیر را به‌ازای $\circ \le r < ۱$، نشان دهید.

$$۱ + ۲(r\cos\theta + r^{۲}\cos ۲\theta + \cdots + r^n \cos n\theta + \cdots) = \frac{۱ - r^{۲}}{۱ - ۲r\cos\theta + r^{۲}}$$

حل.

$$\begin{aligned}
۱ + ۲\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \cos n\theta &= ۱ + ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \Re(r^n e^{in\theta}) \\
&= ۱ + ۲\Re\left\{\sum_{n=۱}^{\infty}(re^{i\theta})^n\right\} \\
&= ۱ + ۲\Re\left\{\frac{re^{i\theta}}{۱ - re^{i\theta}}\right\} \\
&= ۱ + ۲\frac{\Re\{re^{i\theta}(۱ - re^{-i\theta})\}}{(۱ - re^{i\theta})(۱ - re^{-i\theta})} \\
&= ۱ + \frac{۲(r\cos\theta - r^{۲})}{۱ - ۲r\cos\theta + r^{۲}} \\
&= \frac{۱ - r^{۲}}{۱ - ۲r\cos\theta + r^{۲}}
\end{aligned}$$

که این رابطهٔ مهّم هستهٔ پوآسون است. با به‌کارگیری قسمت انگاری به‌جای قسمت حقیقی در محاسبات بالا، مزدوج هستهٔ پوآسون به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{۱ - ۲r\cos\theta + r^{۲}} \qquad (\circ \le r < ۱)$$

مثال ۳. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$\int_{\circ}^{۲\pi} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} ۲\pi & (n = \circ); \\ \circ & (n = \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \cdots) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{\circ}^{۲\pi} \cos^{۴}\theta d\theta &= \int_{\circ}^{۲\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲}\right)^{۴} d\theta \\
&= \frac{۱}{۲^{۴}} \int_{\circ}^{۲\pi} (e^{۴i\theta} + ۴e^{۲i\theta} + ۶ + ۴e^{-۲i\theta} + e^{-۴i\theta}) d\theta \\
&= \frac{۶}{۱۶} \int_{\circ}^{۲\pi} d\theta = \frac{۳\pi}{۴}
\end{aligned}$$

به‌طور کلّیتر، به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۲\pi} \sin^{۲n}\theta d\theta = \int_{۰}^{۲\pi} \cos^{۲n}\theta d\theta &= \binom{۲n}{n} \cdot \frac{۲\pi}{۲^{۲n}} \\ &= \frac{(۲n)!}{(n!)^{۲}} \cdot \frac{۲\pi}{۲^{۲n}} \\ &= \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdots (۲n-۳)\cdot(۲n-۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdots (۲n-۲)\cdot(۲n)} \cdot ۲\pi \qquad \text{(والیس)}\end{aligned}$$

تمرینها

۱. اعمال زیر را انجام دهید و هر یک از اعداد را به‌شکل $x+iy$، $(x, y \in \mathbb{R})$، بدل کنید:

الف) $(۱-i)(۲-i)(۳-i)$؛

ب) $\left(\sqrt{۳}+i\right)^{۶}$؛

ج) $\dfrac{۴+۳i}{۳-۴i}$؛

د) $\dfrac{۵-z}{۵+z}$، که در آن $z = ۴+۳i$.

۲. اعداد حقیقی x و y و u و v را که در روابط زیر صدق می‌کنند پیدا کنید.

$$\begin{aligned} z &= x+i, & w &= ۳+iy, \\ z+w &= u-i, & zw &= ۱۴+iv \end{aligned}$$

۳. فرض می‌کنیم $z = a+ib$، $(a, b \in \mathbb{R})$.

الف) $|\Re(z^{۲})|^{۲} + |\Im(z^{۲})|^{۲} = |z|^{۴}$ را برحسب a و b بیان کنید.

ب) اگر $z = ۲+i$، از این تساوی نتیجه می‌شود $۵^{۲} = ۴^{۲}+۳^{۲}$. آیا می‌توانید سه‌تایی فیثاغورسی دیگری بیابید؟

۴. نشان دهید که هر عدد مختلط z با $|z| = ۱$ و $z \neq -۱$، را می‌توان با انتخاب پارامتر حقیقی tی مناسب، چنین نوشت

$$z = \frac{۱+it}{۱-it}$$

۵. فرض کنید $z = a+ib\,(a, b \in \mathbb{R})$. برای a و b شرایطی پیدا کنید که:

الف) $z^{۴}$ حقیقی باشد.

ب) $z^{۴}$ انگاری محض باشد.

۶. قدرمطلقهای اعداد زیر را بیابید:

الف) $۳ + ۲i$؛

ب) $-۱ + i\sqrt{۳}$؛

ج) $-i(۱ + i)(۲ - ۳i)(۴ + ۳i)$؛

د) $\dfrac{(۳ - i)(-۱ + ۲i)}{۲ - ۳i}$.

۷. فرض کنید $w = c + id$، $z = a + ib$، $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

الف) عبارت $|z\overline{w}| = |z||w| = |zw|$ را برحسب a، b، c، و d بیان کنید.

ب) با انتخاب $z = ۲ + i$، $w = ۲ + ۳i$ در (الف)، خواهیم داشت $۸^۲ + ۱ = ۴^۲ + ۷^۲$. اعداد صحیح دیگر p و q و r ($p \neq ۱$ ،$q \neq ۱$) را که در معادلهٔ $r^۲ + ۱ = p^۲ + q^۲$ صدق می‌کنند پیدا کنید.

ج) نشان دهید که مجموعهٔ

$$S = \{p \in \mathbb{N}; p = m^۲ + n^۲ \quad \text{به‌ازای برخی مقادیر } m, n \in \mathbb{N}\}$$

تحت عمل ضرب بسته است. یعنی $p, q \in S \Longrightarrow pq \in S$.

۸. الف) قانون متوازی اضلاع: تساوی

$$|\alpha + \beta|^۲ + |\alpha - \beta|^۲ = ۲(|\alpha|^۲ + |\beta|^۲)$$

را برای اعداد مختلط اختیاری α و β ثابت کنید.

ب) فرض کنید $|\beta| = |\alpha|$. نشان دهید که به‌ازای هر $\gamma \in \mathbb{C}$،

$$|\alpha + \gamma|^۲ + |\alpha - \gamma|^۲ = |\beta + \gamma|^۲ + |\beta - \gamma|^۲$$

ج) تساویهای (الف) و (ب) را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

۹. چنانچه $|\alpha| < ۱$ و $|z| \leq ۱$، نشان دهید که $\left|\dfrac{z + \alpha}{۱ + \overline{\alpha}z}\right| \leq ۱$. چه وقت تساوی برقرار می‌شود؟

۱۰. مجموعهٔ همهٔ مقادیر $z \in \mathbb{C}$ را چنان بیابید که در شرایط زیر صدق نمایند:

الف) $\Re z \geq \Im z$؛

ب) $|z - ۱ + ۳i| < ۴$؛

ج) $|z - ۱| + |z + i| = ۲$؛

د) $|z - ۱ + i| - |z + ۱ - i| \geq ۲$.

۱۱. فرض کنید $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = ۱$.

الف) با فرض $\alpha+\beta+\gamma \neq ۰$، نشان دهید که $۱ = \left|\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right|$

ب) نشان دهید که $\dfrac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{R}$

۱۲. معادله‌های درجهٔ دوّم زیر را حل کنید:

الف) $۱/۲z^۲+(۱-i)z+i=۰$. (با مثال بخش ۳.۱ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توانید از آن بگیرید؟)

ب) $(۱-i)z^۲-۳z-(۱+i)=۰$. (مبیّن آن چیست؟ آیا ریشه‌های آن حقیقی‌اند؟)

۱۳. الف) نشان دهید که اگر α یک ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌یی با ضرایب حقیقی (یعنی همهٔ ضرایب حقیقی باشند) باشد، $\overline{\alpha}$ نیز یک ریشهٔ آن است.

ب) نشان دهید که یک معادلهٔ چندجمله‌یی با ضرایب حقیقی و از درجهٔ فرد باید دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

۱۴. اشتباه «استدلال» زیر چیست؟

$$۱=\sqrt{۱^۲}=\sqrt{(-۱)^۲}=\left(\sqrt{-۱}\right)^۲=i^۲=-۱ \qquad \therefore ۲=۰$$

۱۵. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $z^۳-i=۰$؛

ب) $z^۴+۱=۰$؛

ج) $z^۵+۳۲=۰$؛

د) $z^۶-۱=۰$.

۱۶. مثال دیگری از رابطهٔ ترتیبی در $\mathbb{C}$ ارائه دهید که در اصلهای موضوع $P_۱$ و $P_۲$ بخش ۵.۱ صدق کند.

۱۷. a و b و c را در $\mathbb{R}$ اختیار کنید. از اصلهای موضوع $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ بخش ۵.۱ نتیجه بگیرید:

الف) $a>b, b>c \Longrightarrow a>c$؛

ب) $a>b, c>۰ \Longrightarrow ac>bc$؛

ج) $a>b, c<۰ \Longrightarrow ac<bc$.

۱۸. چنانچه $\zeta^۵=۱$، نشان دهید که

الف) $\dfrac{\zeta}{۱+\zeta^۲}+\dfrac{\zeta^۲}{۱+\zeta^۴}+\dfrac{\zeta^۳}{۱+\zeta}+\dfrac{\zeta^۴}{۱+\zeta^۳}=۲$؛

ب) $(\zeta\neq ۱)$ $\dfrac{\zeta}{۱-\zeta^۲}+\dfrac{\zeta^۲}{۱-\zeta^۴}+\dfrac{\zeta^۳}{۱-\zeta}+\dfrac{\zeta^۴}{۱-\zeta^۳}=۰$

۱۹. فرض کنید $\omega^۲+\omega+۱=۰$.

الف) نشان دهید که هر عدد مختلط $z \in \mathbb{C}$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت

$$z = a + b\omega \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

بیان کرد.

ب) a و b، $(a, b \in \mathbb{R})$، را چنان تعیین کنید که $\frac{۷ + ۵\omega + ۳\omega^۲}{۱ - ۲\omega} = a + b\omega$

۲۰. نشان دهید که برای مقادیر دلخواه $z_۱, z_۲, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$، داریم

$$|z_۱ + z_۲ + \cdots + z_n| \leq |z_۱| + |z_۲| + \cdots + |z_n|$$

چه وقت تساوی برقرار است؟

۲۱. سه رأس $۳ + i$، $۲i - ۱$ و $-۲ + ۴i$ از یک متوازی‌الاضلاع داده شده‌اند. رأس چهارم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

۲۲. نشان دهید که اقطار متوازی‌الاضلاع منصّف یکدیگرند.

۲۳. نشان دهید که در یک چهارضلعی دلخواه، وسطهای چهار ضلع، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۲۴. در بخش ۷.۱ دیدیم که نقطهٔ z فقط و فقط هنگامی بر پاره‌خط واصل بین نقاط $z_۱$ و $z_۲$ قرار دارد که،

$$z = (۱ - t)z_۱ + tz_۲ \qquad \text{به‌ازای مقدای مانند } t \in (۰, ۱)\text{، تساوی،}$$

برقرار باشد. اگر $t \in \mathbb{R}$ در این حوزهٔ مقادیر نباشد چه؟

۲۵. الف) نشان دهید که سه نقطهٔ $z_۱, z_۲, z_۳ \in \mathbb{C}$ فقط و فقط هنگامی بر یک خط قرار دارند که سه عدد حقیقی γ, β, α وجود داشته باشند چنان‌که

$$\alpha z_۱ + \beta z_۲ + \gamma z_۳ = ۰, \qquad \alpha + \beta + \gamma = ۰$$

ب) آیا می‌توان این مطلب را برای چهار نقطه یا بیشتر تعمیم داد؟

۲۶. یک شش‌ضلعی داده شده است. اگر وسطهای اضلاع آن را یک در میان بهم وصل کنیم، رأسهای دو مثلث به‌دست می‌آید. نشان دهید که مرکزوارهای این دو مثلث برهم منطبق‌اند.

۲۷. در مثلث $\triangle ABC$ نقاط C', B', A' به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB (یا بر امتداد آنها) چنان‌اند که:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}}$$

که در آنها جهتهای پاره‌خطهای منظور شده‌اند. یعنی $\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} > 0$ اگر $\overrightarrow{BA'}$ و $\overrightarrow{BC}$ همجهت باشند $\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} < 0$، اگر مختلف‌الجهت باشند؛ همچنین است برای نسبتهای دیگر. نشان دهید که مرکزوارهای $\triangle A'B'C'$ و $\triangle ABC$ بر هم منطبق‌اند.

۲۸. الف) چهار نقطهٔ z_1, z_2, z_3, z_4 در صفحهٔ مختلط مفروض‌اند. مرکزوارهای $\triangle z_2z_3z_4$، $\triangle z_1z_3z_4$ و $\triangle z_1z_2z_4$ و $\triangle z_1z_2z_3$ را به‌ترتیب w_1، w_2، w_3 و w_4 می‌گیریم (چنانچه بخواهید می‌توانید فرض کنید هیچ سه نقطه‌ای از این چهار نقطه بر یک خط راست نیستند.) نشان دهید که ۴ پاره‌خطی که نقاط z_1 و w_1، z_2 و w_2، z_3 و w_3، z_4 و w_4 را بهم وصل می‌کنند در یک نقطه متقاطع‌اند.

ب) مسأله را تعمیم دهید.

۲۹. الف) ۳ نقطه داده شده‌اند. مثلثی بسازید که این سه نقطه وسطهای اضلاع آن باشند.

ب) ۵ نقطه داده شده‌اند. یک پنج‌ضلعی (که ممکن است خودش را قطع کند) بسازید که این پنج نقطه وسطهای اضلاع آن باشند.

ج) مسأله را تعمیم دهید.

د) اگر تعداد نقاط زوج باشد چه خواهد شد؟

۳۰. z_1, z_2, z_3 را نقاط دلخواهی در صفحهٔ مختلط بگیرید:

الف) یک نقطه مانند z وقتی و فقط وقتی درون یا بر مرز $\triangle z_1z_2z_3$ قرار دارد که اعدادی حقیقی و نامنفی مانند α, β, γ وجود داشته باشند به قسمی که:

$$z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

ب) مکان هندسی نقاطی را بیابید که برای آنها $\alpha = 1/3$.

ج) همچنین نشان دهید که اگر $\triangle z_1z_2z_3$ تباهیده نشود، تناظر بین مجموعه نقاط z در مثلّثِ بسته (یعنی مثلث به‌انضمام مرزِ آن) و مجموعهٔ سه‌تاییهای مرتب

$$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

یک به یک است [(α, β, γ) را مختصات گرانیگاهی[1] نقطهٔ z گویند]

۳۱. الف) z_1، z_2، ...، z_n را نقاط دلخواهی در صفحهٔ مختلط می‌گیریم ($n \geq 2$). نشان دهید که یک نقطه مانند z وقتی و فقط وقتی در داخل کوچکترین چندضلعی محدّب بستهٔ شامل این n نقطه قرار دارد که اعدادی حقیقی و نامنفی مانند $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ وجود داشته باشند

1. barycentric coordinates

به‌طوری که،

$$z=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j, \qquad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$$

ب) فرض کنیم z_1، z_2، $\cdots$، z_n رئوس یک n ضلعی محدّب باشند. آیا در نمایش مسألهٔ قبلی با یکتایی مواجه می‌شویم؟

۳۲. الف) فرض می‌کنیم $0 \le \arg w - \arg z < \pi$، نشان دهید که مساحت $\triangle Ozw$ برابر است با

$$\frac{1}{2}\Im(\overline{z}w)$$

ب) فرض کنید $0 \le \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$، نشان دهید که مساحت چندضلعی با رأسهای z_1، z_2، $\cdots$، z_n برابر است با

$$\frac{1}{2}\Im\left\{\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_{k-1}z_k\right\} \qquad (z_0=z_n)$$

ج) نشان دهید که نتیجهٔ قسمت (ب) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{1}{4!}\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})(\overline{z}_k+\overline{z}_{k-1})$$

۳۳. الف) $z\in\mathbb{C}$ مفروض است، نشان دهید که مقادیری مانند $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ با شرایط $|\alpha|=|\beta|=1$ وجود دارند به‌قسمی که $z=\alpha+\beta$، فقط و فقط اگر $|z|\le 2$.

ب) $z\in\mathbb{C}$ مفروض است. نشان دهید که مقادیری مانند $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ با شرایط $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ وجود دارند به قسمی که $z=\alpha+\beta+\gamma$، فقط و فقط اگر $|z|\le 3$.

ج) مسأله را تعمیم دهید.

۳۴. الف) شرطی برای $a,b\in\mathbb{R}$ پیدا کنید که دستگاه معادلات $\begin{cases}\cos x+\cos y=a\\ \sin x+\sin y=b\end{cases}$ دارای جواب $x,y\in\mathbb{R}$ باشد.

ب) جواب دستگاه بالا را برای حالت $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $b=\frac{\sqrt{6}}{2}$ بیابید.

ج) دستگاه معادلات $\begin{cases}\sin x+\cos y=-\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \cos x+\sin y=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$ را حل کنید.

د) دستگاه معادلات $\begin{cases}5\sin x+3\cos y=-\frac{7\sqrt{2}}{2}\\ 5\cos x+3\sin y=\frac{7\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ را حل کنید.

۳۵. الف) اگر $z_۱ + z_۲ + z_۳ = ۰$ و $|z_۱| = |z_۲| = |z_۳| = ۱$، نشان دهید که $z_۱, z_۲, z_۳$ رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط در دایرهٔ یکه‌اند.

ب) اگر $z_۱ + z_۲ + z_۳ + z_۴ = ۰$ و $|z_۱| = |z_۲| = |z_۳| = |z_۴| = ۱$، در مورد چهارضلعی با رأسهای $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ چه می‌توانیم بگوییم؟

۳۶. به‌ازای هر عدد مختلط $a \neq ۰$، نشان دهید که a، $-a$، $\frac{۱}{\bar{a}}$، $-\frac{۱}{\bar{a}}$ و O همخط‌اند.

۳۷. نمایش قطبی اعداد زیر را بیابید:

الف) $۱ + i$؛

ب) $۴ - ۳i$؛

ج) $۱ + \omega$؛

د) $\frac{۱}{\omega}$ که در آن $\omega^۲ + \omega + ۱ = ۰$.

۳۸. شرط $۰ \leq \arg z < ۲\pi$، یک مثال نقض برای $\arg(z_۱z_۲) = \arg z_۱ + \arg z_۲$ بیاورید. اگر شرط ما $-\pi < \arg z \leq \pi$ باشد، چه خواهد شد؟

۳۹. الف) نشان دهید که $۱ + z + z^۲ + \cdots + z^n = \frac{۱ - z^{n+۱}}{۱ - z}$، ($z \neq ۱$).

ب) فرض کنید $\zeta^{۱۷} = ۱$، ($\zeta \neq ۱$)، نشان دهید که:

$$۱ + \zeta^k + \zeta^{۲k} + \cdots + \zeta^{۱۶k} = ۰$$

که k عدد صحیح دلخواهی است که مضربی از ۱۷ نیست.

۴۰. فرض می‌کنیم θ زاویهٔ خارجی یک nضلعی منتظم باشد. نشان دهید که:

الف) $۱ + \cos\theta + \cos ۲\theta + \cdots + \cos(n - ۱)\theta = ۰$ ؛

ب) $۱ + \sin\theta + \sin ۲\theta + \cdots + \sin(n - ۱)\theta = ۰$.

۴۱. الف) اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{k=۰}^{n} \cos k\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{۲} \cdot \sin \frac{(n+۱)\theta}{۲}}{\sin \frac{\theta}{۲}},$$
$$\sum_{k=۱}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{۲} \cdot \sin \frac{(n+۱)\theta}{۲}}{\sin \frac{\theta}{۲}} \qquad (۰ < \theta < ۲\pi)$$

ب) با استفاده از اتّحادهای (الف) مجموعهای زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=۱}^{n} k = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$$
$$\sum_{k=۱}^{n} k^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲$$

[از این روابط برای بررسی درستی نتایج مذکور در (الف) استفاده می‌شود].
راهنمایی: $\lim_{\theta\to \circ} \frac{\sin k\theta}{\theta} =?$, $\quad \lim_{\theta\to \circ} \frac{1-\cos k\theta}{\theta^{2}} =?$

۴۲. نشان دهید که

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-+\cdots=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$$
$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-+\cdots=2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

راهنمایی: $(1+z)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}z+\cdots+\binom{n}{n}z^n$.

۴۳. الف) $1+i\sqrt{3}$ را به‌صورت قطبی بنویسید.
ب) عبارت $(1+i\sqrt{3})^{1991}+(1-i\sqrt{3})^{1991}$ را ساده کنید.
ج) $(1+i)^{1991}+(1-i)^{1991}, (1+i)^{1991}-(1-i)^{1991}$ را ساده کنید.

۴۴. فرض کنید $x_n+iy_n=(1+i\sqrt{3})^n$، $(x_n, y_n\in\mathbb{R})$. نشان دهید که

$$x_ny_{n+1}-x_{n+1}y_n=2^{2n}\sqrt{3},$$
$$x_{n+1}x_n+y_{n+1}y_n=2^{2n}$$

۴۵. کوچکترین اعداد صحیح و مثبت m و n را بیابید که در تساوی:

$$(1+i\sqrt{3})^m=(1-i)^n$$

صدق کنند.

۴۶. فرض کنید $x=a+b$، $y=a\omega+b\omega^{2}$ و $z=a\omega^{2}+b\omega$ که در آنها $\omega^{2}+\omega+1=0$.
$x^{3}+y^{3}+z^{3}$ را برحسب a و b بیان کنید.

۴۷. فرض کنید $\omega^{2}+\omega+1=0$:
الف) دو چندجمله‌یی $p(z)$ و $q(z)$ داده شده‌اند. نشان دهید که چندجمله‌ییهای

$$f(z)=p(z)p(\omega z)p(\omega^{2}z),$$
$$g(z)=p(\omega z)q(\omega^{2}z)+p(\omega^{2}z)q(z)+p(z)q(\omega z)$$

فقط وقتی ضرایب ناصفر b_k, a_k دارند که k مضربی از ۳ باشد. b_k, a_k به‌ترتیب ضرایب z^k در $f(z)$ و $g(z)$ هستند.

ب) ثابت کنید که هر تابع $\varphi(z)$ را (که به‌ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ تعریف شده است) می‌توان به‌صورت

$$\varphi(z) = f(z) + g(z) + h(z)$$

بیان کرد که در آن به‌ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$، $f(\omega z) = f(z)$، $g(\omega z) = \omega g(z)$، $h(\omega z) = \omega^۲ h(z)$.

ج) مسأله را تعمیم دهید.

۴۸. نشان دهید که

الف)

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\sin ۳\theta = ۴\sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۳} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۳} + \theta\right)$$

$$\sin ۴\theta = ۸\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right)$$

$$\sin ۵\theta = ۱۶\sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۵} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{۲\pi}{۵} - \theta\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi}{۵} + \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{۲\pi}{۵} + \theta\right)$$

ب)

$$\cos ۲\theta = ۲\sin\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right)$$

$$\cos ۳\theta = ۴\cos\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۶} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۶} + \theta\right)$$

$$\cos ۴\theta = ۸\sin\left(\frac{\pi}{۸} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{۳\pi}{۸} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۸} + \theta\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{۳\pi}{۸} + \theta\right)$$

$$\cos ۵\theta = ۱۶\cos\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۱۰} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{۳\pi}{۱۰} - \theta\right) \times \\ \sin\left(\frac{\pi}{۱۰} + \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{۳\pi}{۱۰} + \theta\right)$$

ج) مسأله را تعمیم دهید.

۴۹. الف) فرض کنید $\zeta = e^{۲\pi i/n}$، نشان دهید که

$$\prod_{k=۱}^{n}(z-\zeta^k)=z^n-۱$$
$$\prod_{k=۱}^{n-۱}(z-\zeta^k)=۱+z+\cdots+z^{n-۱}$$

ب) نشان دهید که

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{۲\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-۱)\pi}{n}=\frac{n}{۲^{n-۱}}\qquad(n\geq ۲)$$

۵۰. با استفاده از یک ستاره و پرگار تنها، یک پنج‌ضلعی منتظم رسم کنید.

۵۱. فرض می‌کنیم $z+\frac{۱}{z}=۱$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{w_k\}_{k=۰}^{\infty}$ که در آن $w_k=z^k+\frac{۱}{z^k}$، دنباله‌ای متناوب است، و دورهٔ تناوب آن را بیابید.

۵۲. الف) نشان دهید که چندجمله‌یی $z^{۲n}+z^n+۱$، $(n\in\mathbb{N})$، بر $z^۲+z+۱$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر n مضربی از ۳ نباشد.

ب) شرطی لازم وکافی برای اعداد طبیعی p و q بیابید به‌طوری که چندجمله‌یی $z^p+z^q+۱$، $(p,q\in\mathbb{N})$، بر $z^۲+z+۱$ بخشپذیر باشد.

۵۳. نشان دهید[۱] که

الف) به‌ازای هر عدد طبیعی n چندجمله‌ییهایی مانند $p_n(x)$ و $q_n(x)$ (با ضرایب حقیقی) وجود دارند که در تساویهای

$$\cos n\theta=p_n(\tan\theta)\cdot\cos^n\theta$$
$$\sin n\theta=q_n(\tan\theta)\cdot\cos^n\theta$$

صدق می‌کنند.

ب)
$$p_n(x)=\frac{۱}{۲}\{(۱+ix)^n+(۱-ix)^n\}$$
$$q_n(x)=\frac{۱}{۲i}\{(۱+ix)^n-(۱-ix)^n\}$$

ج)
$$p'_n(x)=-nq_{n-۱}(x),\qquad q'_n(x)=np_{n-۱}(x)\qquad(n>۱)$$

۵۴. روابط مشابهی برای مثال بخش ۱۰.۱ حدس بزنید و اثبات کنید:

---

۱. مسألهٔ ۵۳، به‌استثنای قسمت (ب)ی آن، از امتحان ورودی دانشگاه توکیو، ژاپن، ۲۵ فوریه ۱۹۹۱ گرفته شده است.

الف) $$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \cdot \sin x)$$

ب) $$\frac{d^n}{dx^n}(e^{\sqrt{۲}x} \cdot \cos x)$$

ج) $$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \cdot \sin \sqrt{۳}x)$$

۵۵. حساب کنید:

الف) $$H = \int e^{ax} \cdot \cos bx dx$$

ب) $$K = \int e^{ax} \cdot \sin bx dx$$

راهنمایی: $H + iK = ?$

۲

کاربرد در هندسه

۱.۲ مثلثها

اکنون به کاربردهای اعداد مختلط در هندسهٔ مسطّحه می‌پردازیم. یک مطلب مهم که باید به خاطر داشته باشیم این است که اعداد مختلط فقط بردار نیستند، و می‌توانند در یکدیگر ضرب شوند. در کاربردهای اعداد مختلط در هندسه، از این ویژگی کاملاً استفاده خواهیم کرد. بویژه در حل برخی از نمونه‌های مسائل، اعداد مختلط کارایی زیادی دارند، امّا ممکن است در برخی مسائل، که با روشهای مقدماتی قابل حل هستند، دست و پاگیر باشند.

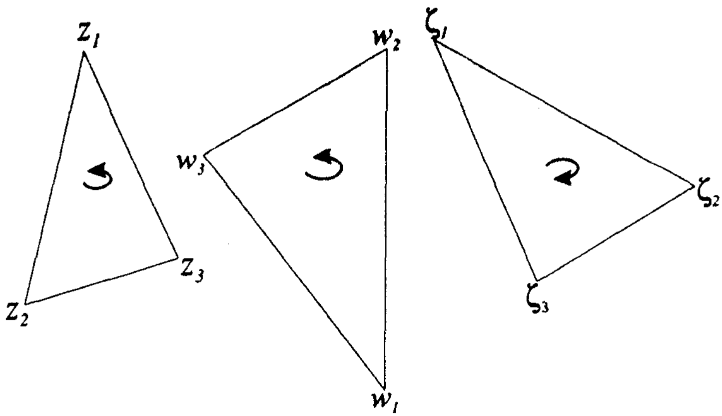
در هندسهٔ مقدّماتی، مثلثها در حکم بلوکهای ساختمانی هستند و موضوع قابلّیت انطباق و مشابهت در آنها اساسیترین مفاهیم هستند. مطلب را از شرایط تشابه دو مثلث، برحسب اعداد مختلط آغاز می‌کنیم. ابتدا به ذکر قراردادهای نمادی و مرور برخی نکات می‌پردازیم. در سراسر این فصل می‌گوییم $\triangle z_۱z_۲z_۳$ با $\triangle w_۱w_۲w_۳$ متشابه است اگر، و فقط اگر، دو مثلث در زاویهٔ z_k با زاویهٔ w_k برابر (و در نتیجه z_k متناظر با w_k، ۳، ۲، ۱ $= k$) و همجهت (هر دو ساعتسو یا هر دو پادساعتسو) باشند. و می‌نویسیم

$$\triangle z_۱z_۲z_۳ \sim \triangle w_۱w_۲w_۳$$

و چنانچه در خلاف جهت یکدیگر (یکی ساعتسو و دیگری پادساعتسو) باشند، می‌نویسیم:

$$\triangle z_۱z_۲z_۳ \sim \triangle w_۱w_۲w_۳ \quad \text{(در جهت عکس)}$$

توجه داشته باشید که باز هم z_k باید متناظر با w_k $(k = ۱, ۲, ۳)$ باشد.



شکل ۱.۲

طبق معمول، نمادهای $\perp, \|$ را به‌ترتیب برای نمودن توازی دو خط (پاره‌خط یا بردار) و تعامد آنها به‌کار می‌بریم.

چون به‌ازای نقاط متمایز $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$\text{زاویهٔ جهتدار بردار } \overrightarrow{\alpha\gamma} \text{ با بردار } \overrightarrow{\alpha\beta}{}^{1} = \arg(\beta-\alpha) - \arg(\gamma-\alpha) = \arg\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ همخط‌اند} \iff \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \in \mathbb{R}$$
$$\iff \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}$$

و

$$\overrightarrow{\alpha\beta} \perp \overrightarrow{\alpha\gamma} \iff \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \text{ انگاری محض است}$$
$$\iff \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} + \frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}} = 0$$

و کلّیتر بگوییم به‌ازای چهار نقطهٔ متمایز $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

$$\overrightarrow{\alpha\beta} \parallel \overrightarrow{\gamma\delta} \iff \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} \in \mathbb{R}$$

۱. منظور از زاویهٔ جهتدار $\overrightarrow{\alpha\beta}$ با بردار $\overrightarrow{\alpha k}$ زاویه‌ای است که مبدأ آن بردار $\overrightarrow{\alpha k}$ است.ـم.

$$\Longleftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}=\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}$$

وانگهی $\overrightarrow{\alpha\beta}$ و $\overrightarrow{\gamma\delta}$، همجهت (یا مختلف الجهت) هستند، اگر و فقط اگر، $\frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}$ عدد حقیقی مثبت (یا منفی) باشد؛ و

$$\overrightarrow{\alpha\beta}\perp\overrightarrow{\gamma\delta} \Longleftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} \quad \text{انگاری محض است}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}+\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}=0$$

در نتیجه، هرگاه $\alpha\beta\neq 0$، آنگاه

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad \frac{\alpha}{\beta}>0$$

قضیهٔ ۱.۱.۲. $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle w_1w_2w_3$

$$\Longleftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

برهان. دو مثلث فقط و فقط هنگامی متشابه‌اند که نسبتهای دو ضلع متناظرشان برابر و زوایای (متناظر) بین آنها نیز برابر باشند (از جمله جهت آنها یکی باشد). از این رو

$$\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle w_1w_2w_3$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}\right| \quad \text{و} \quad \arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\arg\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

■

فرع ۳.۱.۲. $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle w_1w_2w_3$ (در جهت عکس)

$$\iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{\overline{w}_3 - \overline{w}_1}$$

$$\iff \begin{vmatrix} z_1 & \overline{w}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{w}_2 & 1 \\ z_3 & \overline{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

برهان. $\because\ \triangle \overline{w}_1\overline{w}_2\overline{w}_3 \sim \triangle w_1w_2w_3$ (در جهت عکس)

$\therefore\ \triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle w_1w_2w_3$ (در جهت عکس) $\iff \triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle \overline{w}_1\overline{w}_2\overline{w}_3$ ■

مثال ۱. سه نقطهٔ z_1, z_2, z_3 همخطاند

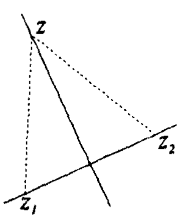
$$\iff \triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle \overline{z}_1\overline{z}_2\overline{z}_3$$

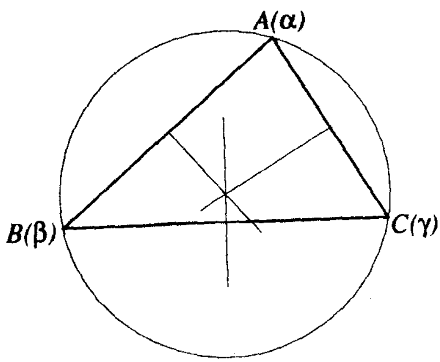
$$\iff \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال ۲. دو نقطهٔ متمایز z_1 و z_2 داده شده‌اند. پیدا کنید معادلات:

الف) خطّی را که از z_1 و z_2 می‌گذرد.

ب) عمود منصّف پاره‌خطی را که از نقاط z_1 و z_2 می‌گذرد.





شکل۲.۲

جوابها:

الف)
$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & ۱ \\ z_۱ & \overline{z}_۱ & ۱ \\ z_۲ & \overline{z}_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ب)
$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & ۱ \\ z_۱ & \overline{z}_۲ & ۱ \\ z_۲ & \overline{z}_۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

مثال ۳. عمود منصّفهای سه ضلع یک مثلث دلخواه دریک نقطه متلاقی‌اند. این نقطهٔ تلاقی را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث گویند.

حل. سه رأس C, B, Aی مثلث را به‌ترتیب با اعداد مختلط α، β، γ نمایش می‌دهیم. در این صورت معادلهٔ عمود منصّف ضلع BC خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & ۱ \\ \beta & \overline{\gamma} & ۱ \\ \gamma & \overline{\beta} & ۱ \end{vmatrix} = ۰;$$

یعنی

$$(\overline{\beta} - \overline{\gamma})z + (\beta - \gamma)\overline{z} = |\beta|^۲ - |\gamma|^۲$$

همین‌طور برای عمود منصّفهای اضلاع AB, CA به ترتیب خواهیم داشت:

$$(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})z + (\gamma - \alpha)\overline{z} = |\gamma|^۲ - |\alpha|^۲,$$
$$(\overline{\alpha} - \overline{\beta})z + (\alpha - \beta)\overline{z} = |\alpha|^۲ - |\beta|^۲,$$

از جمع هر دو معادله‌ای از این سه معادله، معادلهٔ سومی به دست می‌آید که می‌رساند جواب هر دو معادله‌ای از این معادلات خود به خود در معادلهٔ سوم صدق می‌کند. به عبارت دیگر، نقطهٔ تلاقی هر دو عمود منصّف، بر عمود منصف دیگر قرار دارد. از حل دستگاه همزمان هر دو معادله از این سه معادله مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به‌دست می‌آید:

$$z = \frac{|\alpha|^۲(\beta - \gamma) + |\beta|^۲(\gamma - \alpha) + |\gamma|^۲(\alpha - \beta)}{\overline{\alpha}(\beta - \gamma) + \overline{\beta}(\gamma - \alpha) + \overline{\gamma}(\alpha - \beta)}$$

دقت کنید که با توجه به تقارن ، دوباره می‌بینیم که این جواب در معادلهٔ دیگر صدق می‌کند.

مثال ۱. $\triangle z_1 z_2 z_3$ متساوی‌الاضلاع است

$$\iff \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle z_2 z_3 z_1$$

$$\iff \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0$$

$$\iff (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)\cdot(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \qquad (\omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

$$\iff z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \quad \text{یا} \quad z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$$

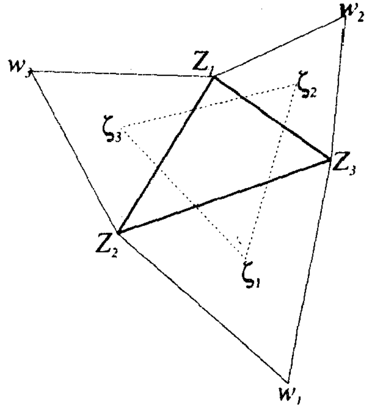
$$\iff \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

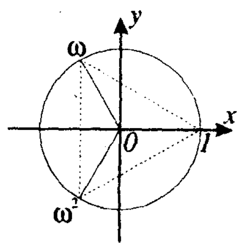
$$\iff \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle 1 \omega \omega^2 \quad \text{یا} \quad \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle 1 \omega^2 \omega$$

مثال ۲. (ناپلئون) بر هر یک از اضلاع یک مثلث و در خارج آن، مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌سازیم. مرکزوارهای این سه مثلث متساوی الاضلاع رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

برهان. $\triangle z_1 z_2 z_3$ را مثلث مفروض و

$$\triangle w_1 z_3 z_2 \qquad \triangle z_3 w_2 z_1, \qquad \triangle z_2 z_1 w_3$$





شکل ۳.۲

را مثلثهای متساوی‌الاضلاع مورد نظر همجهت، مثلاً با $\triangle 1\omega\omega^2$ (که در آن $\omega^2+\omega+1=0$) با مرکزوارهای ζ_1، ζ_2، ζ_3 می‌گیریم. پس

$$w_1+\omega z_3+\omega^2 z_2=0,$$
$$z_3+\omega w_2+\omega^2 z_1=0,$$
$$z_2+\omega z_1+\omega^2 w_3=0$$

پس
برای اثبات متساوی‌الاضلاع بودن $\triangle\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ عبارت $\zeta_1+\omega\zeta_2+\omega^2\zeta_3$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\zeta_1+\omega\zeta_2+\omega^2\zeta_3\\
&=\frac{1}{3}(w_1+z_3+z_2)+\frac{\omega}{3}(z_3+w_2+z_1)+\frac{\omega^2}{3}(z_2+z_1+w_3)\\
&=\frac{1}{3}\{(w_1+\omega z_3+\omega^2 z_2)+(z_3+\omega w_2+\omega^2 z_1)+(z_2+\omega z_1+\omega^2 w_3)\}\\
&=0
\end{aligned}$$

بنابراین $\triangle\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. ■

برهان دیگر. چون $\triangle O1\omega \sim \triangle\zeta_1 z_3 z_2$، داریم

$$\begin{vmatrix}\zeta_1 & 0 & 1\\ z_3 & 1 & 1\\ z_2 & \omega & 1\end{vmatrix}=0$$

یعنی

$$(1-\omega)\zeta_1-z_2+\omega z_3=0$$
$$\therefore\ \zeta_1=\frac{z_2-\omega z_3}{1-\omega}$$

همین‌طور

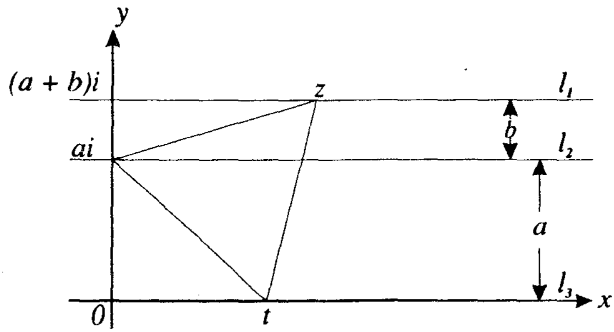
$$\zeta_2=\frac{z_3-\omega z_1}{1-\omega},\qquad \zeta_3=\frac{z_1-\omega z_2}{1-\omega}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \zeta_1+\omega\zeta_2+\omega^2\zeta_3&=\frac{1}{1-\omega}\{(z_2-\omega z_3)+\omega(z_3-\omega z_1)+\omega^2(z_1-\omega z_2)\}\\
&=0
\end{aligned}$$
■

قضیهٔ بالا را عموماً به ناپلئون نسبت می‌دهند. مشهور است که ناپلئون مدرسهٔ پلی‌تکنیک را در ۱۷۹۴ تأسیس نمود بسیاری از ریاضیدانان فرانسوی را در اوائل سدهٔ نوزدهم در آنجا گرد آورد. بسیارند کسانی که هنوز هم تردید دارند که ناپلئون آنقدر هندسه می‌دانسته که این قضیه را کشف کند. اتفاقاً ناپلئون بناپارت یکی از معدود کسانی در تاریخ معاصر است که به‌نام (نه به لقب) شناخته شده‌است. گالیلئو گالیله (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) نمونهٔ دیگری از آنهاست.

مثال. خطوط $\ell_۱$، $\ell_۲$، $\ell_۳$ با یکدیگر موازی‌اند و $\ell_۲$ بین $\ell_۱$ و $\ell_۳$ واقع است. فاصلهٔ بین $\ell_۱$ و $\ell_۲$ برابر a و فاصلهٔ بین $\ell_۲$ و $\ell_۳$ برابر b است. مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را که هر رأس آن بر یکی از این سه خط موازی قرار داشته باشد، بر حسب a و b بیان کنید.

حل. محورهای مختصات را به‌صورتی که در شکل ۴.۲ آمده است اختیار می‌کنیم. یک رأس



شکل۴.۲

آن، ai را ثابت نگاه می‌داریم و رأس دیگر t، را بر محور حقیقی حرکت می‌دهیم و سعی می‌کنیم مکان هندسی رأس سوم یعنی z را بیابیم

داریم

$$z + aiw + t\omega^۲ = ۰ \qquad (\omega^۲ + \omega + ۱ = ۰)$$

$$\therefore\ z = \frac{۱}{۲}\left\{(a\sqrt{۳} + t) + i(a + t\sqrt{۳})\right\}$$

هنگامی که رأس سوم یعنی z بر خط $\Im z = a + b$ واقع باشد، داریم:

$$t = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(a + ۲b) \quad \text{یعنی} \quad \frac{۱}{۲}(a + t\sqrt{۳}) = a + b$$

از این رو مربّع طول یک ضلع برابر است با

$$|t-ai|^{۲}=\frac{۱}{۳}(a+۲b)^{۲}+a^{۲}=\frac{۴}{۳}(a^{۲}+ab+b^{۲})$$

پس، مساحت مطلوب چنین است

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۴}{۳}(a^{۲}+ab+b^{۲})\cdot\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(a^{۲}+ab+b^{۲})$$

۲.۲ قضیهٔ بطلمیوس ـ اویلر

به ازای هر چهار عدد مختلط α، β، γ، δ به‌آسانی می‌توان تساوی زیر را تحقیق کرد

$$(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)\cdot(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)\cdot(\beta-\delta)$$

و با توجه به نابرابری مثلثی خواهیم داشت

$$|\alpha-\beta|\cdot|\gamma-\delta|+|\alpha-\delta|\cdot|\beta-\gamma|\geq|\alpha-\gamma|\cdot|\beta-\delta|$$

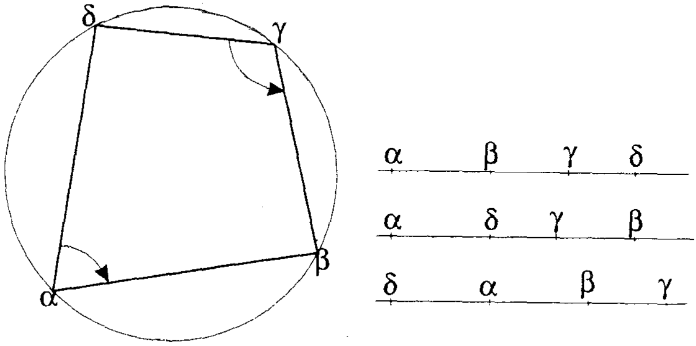
اکنون به بررسی حالتی می‌پردازیم که این نابرابری به برابری بدل شود. در حالت نابرابری مثلثی،

$$|z_{۱}+z_{۲}|\leq|z_{۱}|+|z_{۲}|$$

تساوی، فقط و فقط هنگامی برقرار خواهد شد که $\frac{z_{۱}}{z_{۲}}$ یک عدد حقیقی مثبت (به‌شرط $z_{۱}z_{۲}\neq ۰$) باشد. پس به جستجوی شرطی می‌پردازیم که ضامن مثبت و حقیقی بودن عدد

$$\begin{aligned}
&\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)} \quad \text{عدد مثبت حقیقی بودن}\\
\Longleftrightarrow&\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\Big/\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\delta} \quad \text{عدد منفی حقیقی بودن}\\
\Longleftrightarrow&\arg\left\{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\Big/\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\delta}\right\}\\
&=\arg\left\{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\right\}-\arg\left\{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\delta}\right\}\equiv\pi \quad (\text{پیمانهٔ } ۲\pi)
\end{aligned}$$

یعنی α، β، γ، δ همدایره هستند (به فرع الف ۳.۲ در پیوست الف رجوع کنید) و α و γ در دو طرف وتر واصل بین دو نقطهٔ δ و β قرار دارند، که نتیجهٔ آن به‌ترتیب الفبایی قرار گرفتن این نقاط (ساعتسو یا پادساعتسو) است. پس قضیّهٔ زیر را ثابت کردیم



شکل ۵.۲

قضیهٔ ۱.۲.۲. به‌ازای هرچهار نقطهٔ A، B، C، D در صفحه داریم

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

تساوی هنگامی و فقط هنگامی برقرار می‌شود که این چهار نقطه همدایره (یا همخط) باشند و به‌ترتیب الفبایی (ساعتسو یا پادساعتسو) قرار گرفته باشند.

حالت تساوی توسط ک. بطلمیوس (حدود ۸۵ـ۱۶۵ ب. م) کشف گردید، درصورتی‌که حالت کلّی متجاوز از هزار سال بعد توسط ل. اویلر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳) پیدا شد. ولی با استفاده از اعداد مختلط نتایج آن را می‌توان فقط در یک سطر به‌دست آورد.

عبارت

$$(\alpha,\beta;\gamma,\delta):=\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\right)\Big/\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}\right)$$

را نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ α، β، γ، δ گویند، این نسبت نقش مهمّی در بخشهای مختلف ریاضیات، به‌خصوص در هندسهٔ تصویری، که مسلماً یکی از زیباترین شاخه‌های ریاضیات است ایفا می‌کند.

فرع ۲.۲.۲. چهار نقطهٔ α، β، γ، δ همدایره (همخط)اند، اگر و فقط اگر

$$(\alpha,\beta;\gamma,\delta)\in\mathbb{R}$$

در مطالب بعد، همخطی، حالت خاص (تباهیده) همدایرگی در نظر گرفته می‌شود.

هنگامی‌که چهارضلعی محاطی به مستطیل بدل شود، قضیه بطلمیوس به‌صورت زیر در می‌آید:

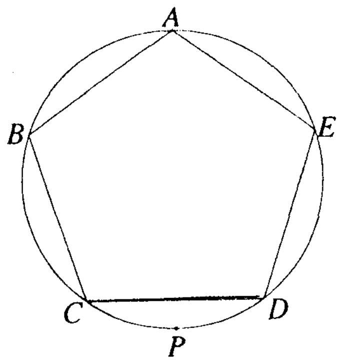
فرع ۳.۲.۲. (فیثاغورس) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، قائمه در رأس C، داریم:

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$$

مثال. فرض می‌کنیم $ABCDE$ پنج ضلعی منتظمی به ضلع ℓ محاط در دایره‌ای به شعاع r و P وسط $\widehat{CD}$ و d طول یک قطر آن باشد. با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس ۱.۲.۲ برای چهار ضلعیهای $ACPD, ACDE$ خواهیم داشت:

$$2xd = 2r\ell \quad \text{و} \quad d\ell + \ell^2 = d^2$$

که در آن x طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\frac{d}{\ell} = \frac{r}{x} =: \varphi$ در تساوی $\varphi^2 = \varphi + 1$ صدق می‌کند.



شکل۶.۲

بنابراین نسبت شعاع r به طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاطی، x، نسبت زرّین معروف را می‌دهد:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad (\because \ \varphi > 0)$$

بویژه همان‌طوری که قبلاً در انتهای بخش ۹.۱ دیده‌ایم، یک پنج ضلعی منتظم را می‌توان با یک ستاره و پرگار رسم کرد.

۳.۲ قضیه‌های کلیفرد

در این بخش[1] دنباله‌ای نامتناهی از قضیه‌هایی را که و.ک. کلیفرد (۱۸۴۵ـ۱۸۷۹) کشف نموده، اثبات می‌کنیم. مرحلهٔ حسّاس در این کار حلّ لم زیرین است که در بخشهای دیگر نیز از آن استفاده می‌شود.

۱. غیر از این لم مطالب دیگر این بخش برای بقیهٔ کتاب مورد نیاز نیست. لذا در مطالعهٔ اوّل می‌توان از آن صرفنظر کرد.

لم ۱.۳.۲. چهار دایرهٔ C_1، C_2، C_3، C_4 را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. فرض کنید C_1 و C_2 یکدیگر را در z_1 و w_1، C_2 و C_3 یکدیگر را در z_2 و w_2، C_3 و C_4 یکدیگر را در z_3 و w_3، بالاخره C_4 و C_1 یکدیگر را در z_4 و w_4 قطع کنند. در این صورت نقاط z_1، z_2، z_3، z_4 همدایره خواهند بود، اگر و فقط اگر w_1، w_2، w_3، w_4 همدایره باشند.

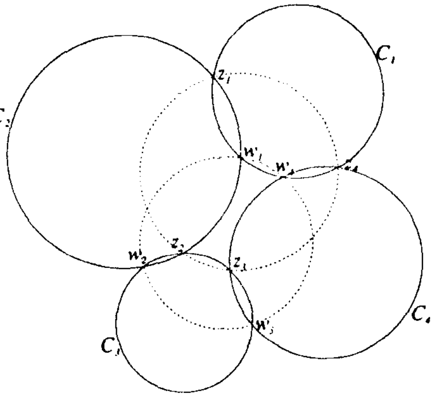
برهان. بنابه فرض چهار نسبت ناهمساز زیر حقیقی‌اند

$$(z_1, w_2;\ z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \Big/ \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1}$$
$$(z_2, w_3;\ z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \Big/ \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2}$$
$$(z_3, w_4;\ z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \Big/ \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}$$
$$(z_4, w_1;\ z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \Big/ \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}$$

از این رو

$$\begin{aligned}
&\frac{(z_1, w_2; z_2, w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \cdot \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)} \\
&= \left\{ \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2}\right) \Big/ \left(\frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4}\right) \right\} \\
&= (z_1, z_3; z_2, z_4) \cdot (w_1, w_3; w_2, w_4)
\end{aligned}$$

حقیقی است. پس $(z_1, z_3; z_2, z_4)$ حقیقی است اگر و فقط اگر $(w_1, w_3; w_2, w_4)$ حقیقی باشد. ■



شکل ۷.۲

n خط در یک صفحه را در وضعیت کلّی گوییم، اگر هیچ دو تای آنها متوازی و هیچ سه‌تای آنها متقارب نباشند.

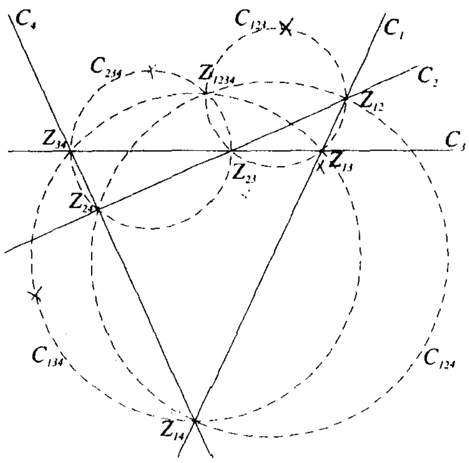
نقطهٔ تلاقی دو خط در وضعیت کلی را نقطهٔ کلیفرد آنها می‌نامیم. از سه خط در وضعیت کلی سه نقطهٔ کلیفرد، با انتخاب دو تا از آنها در هر بار به دست می‌آید، دایره‌ای را که از این سه نقطه می‌گذرد (دایرهٔ محیطی مثلث حاصل از این سه خط)، دایرهٔ کلیفرد این سه خط می‌نامیم.

اکنون گیریم چهار خطّ $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، $C_۴$ در وضعیت کلی داده شده‌اند. فرض می‌کنیم z_{jk} نقطهٔ تلاقی خطوط C_j و C_k (بجز ∞) و C_{lmn} دایرهٔ محیطی $\triangle z_{mn}z_{nl}z_{lm}$ (بدون در نظر گرفتن جایگشتهای اندیسها مثلاً $z_{jk} = z_{kj},\ C_{lmn} = C_{nlm}$) باشند. با به‌کارگیری لم ۱.۳.۲ برای $C_{۲۳۴}$، $C_۲$، $C_۱$، $C_{۱۳۴}$ و ملاحظه اینکه

$C_۲$ و $C_{۲۳۴}$ در نقطه‌های $z_{۲۳}$ و $z_{۲۴}$؛
$C_۱$ و $C_۲$ در نقطه‌های ∞ و $z_{۱۲}$؛
$C_۱$ و $C_{۱۳۴}$ در نقطه‌های $z_{۱۳}$ و $z_{۱۴}$؛
$C_{۱۳۴}$ و $C_{۲۳۴}$ در نقطه‌های $z_{۳۴}$ و $z_{۱۲۳۴}$،

متقاطع‌اند و $z_{۱۲۳۴}$ نقطهٔ تلاقی «مجدّد» $C_{۲۳۴}$ و $C_{۱۳۴}$ (یعنی بجز $z_{۳۴}$) است، پس چون $z_{۲۳}$، ∞، $z_{۱۳}$، $z_{۳۴}$ همخط (واقع بر $C_۳$)اند، نتیجه می‌گیریم که $z_{۲۴}$، $z_{۱۲}$، $z_{۱۴}$، $z_{۱۲۳۴}$ همدایره‌اند. امّا دایرهٔ محیطی $\triangle z_{۲۴}z_{۱۲}z_{۱۴}$ دایرهٔ $C_{۱۲۴}$ است. بنابراین دایره‌های $C_{۲۳۴}$، $C_{۱۳۴}$، $C_{۱۲۴}$ در نقطهٔ $z_{۱۲۳۴}$ همدیگر را قطع می‌کنند.

از سوی دیگر، اگر توجّه کنیم که با همان $C_{۲۳۴}$، $C_۲$، $C_۱$، $C_{۱۳۴}$ نقاط $z_{۲۴}$، ∞، $z_{۱۴}$، $z_{۳۴}$ همخط (همه واقع بر $C_۴$) هستند، نتیجه می‌گیریم که نقاط $z_{۲۳}$، $z_{۱۲}$، $z_{۱۳}$، $z_{۱۲۳۴}$ همدایره هستند.



شکل ۸.۲

امّا دایرهٔ محیطی $\triangle z_{23}z_{12}z_{13}$ دایرهٔ C_{123} است، پس دایره‌های C_{234}، C_{134}، C_{123} در نقطهٔ z_{1234} همدیگر را تلاقی می‌کنند.

پس، نشان دادیم که دوایر C_{234}، C_{134}، C_{124}، C_{123}، در نقطهٔ z_{1234} که آن را نقطهٔ کلیفرد چهار خط C_1، C_2، C_3، C_4 می‌نامیم، همدیگر را می‌برند.

پیش از پرداختن به حالت پنج خط، اشاره می‌کنیم که: نقطهٔ z_{jk} فصل مشترک خطوط C_j و C_k است؛ دایرهٔ C_{lmn} از نقاط z_{mn}، z_{ln}، z_{lm} می‌گذرد و نقطهٔ z_{klmn} فصل مشترک دوایر C_{lmn}، C_{kmn}، C_{kln}، C_{klm} است. به‌خصوص دوایر C_{lmn} و C_{kmn} در نقاط z_{klmn} و z_{mn} متقاطع‌اند. حال آماده‌ایم که به مرحلهٔ بعدی بپردازیم.

فرض کنید پنج خط C_1، C_2، C_3، C_4، C_5 در وضعیت کلی داده شده‌باشند. با حفظ نمادهایی که در بالا به‌کار بردیم و در نظر گرفتن چهار خط در هر بار، پنج نقطهٔ کلیفرد z_{2345}، z_{1345}، z_{1245}، z_{1235}، z_{1234} را به دست می‌آوریم. حال می‌گوییم که این پنج نقطهٔ کلیفرد همدایره‌اند. برای اثبات آن کافی است ثابت کنیم که هر چهار نقطه از این پنج نقطهٔ کلیفرد همدایره‌اند. مثلاً چهار نقطهٔ z_{1345}، z_{1245}، z_{1235}، z_{1234} را در نظر می‌گیریم. این نقاط را می‌توان به‌ترتیب فصل مشترک دایره‌های: C_{134} و C_{135}، C_{125} و C_{145}، C_{123} و C_{125}، C_{124} و C_{134} در نظر گرفت. دوّمین نقطهٔ تقاطع این زوج دایره‌ها عبارت‌اند از نقاط z_{13}، z_{15}، z_{12}، z_{14} که همخط‌اند (همه بر C_1 قرار دارند) و لذا بنابر لم ۱.۳.۲ نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌آوریم. دایره‌ای که بدین‌ترتیب به دست می‌آید دایرهٔ کلیفرد خطوط C_1، C_2، C_3، C_4، C_5 نامیده می‌شود و با C_{12345} نشان داده می‌شود.

حال شش خط در وضعیت کلّی C_1، C_2، C_3، C_4، C_5، C_6 داده شده‌اند. با گرفتن پنج خط در هر بار، شش دایرهٔ کلیفرد به دست می آوریم. می‌گوییم که این شش دایره در یک نقطه، نقطهٔ کلیفرد شش خط، متلاقی‌اند. برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که هر سه دایره از شش دایره در یک نقطه متلاقی‌اند. به‌دقت توجه کنید: ارائهٔ مثالی از چهار دایره که هر سه‌تای آنها در یک نقطه متلاقی باشند بدون اینکه هر چهار دایره در یک نقطه متلاقی باشند آسان است، امّا در مورد پنج دایره یا بیشتر این امر میسّر نیست.

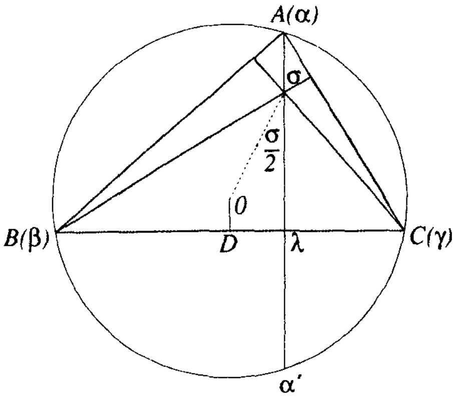
فرض کنید می‌خواهیم نشان دهیم که دایره‌های C_{23456}، C_{13456}، C_{12456} در یک نقطه متلاقی‌اند. رشته‌ای مرکب از چهار دایرهٔ C_{23456}، C_{245}، C_{145}، C_{13456} را در نظر می‌گیریم. این دو دایره دو به دو در نقاط: z_{2345} و z_{2456}، z_{45} و z_{1245}، z_{1345} و z_{1456}، z_{3456} و z_{123456} که z_{123456} فصل مشترک C_{23456} و C_{13456} غیر از نقطهٔ z_{3456} است، همدیگر را قطع می‌کنند. امّا نقاط z_{2345}، z_{45}، z_{1345}، z_{3456} همه بر دایرهٔ C_{345} قرار دارند. لذا نقاط z_{2456}، z_{1245}، z_{1456}، و z_{123456} باید همدایره باشند. ولی اوّلین سه نقطه از این چهار نقطه بر دایرهٔ C_{12456} قرار دارند، بنابراین دایرهٔ C_{12456} از فصل مشترک C_{23456}، C_{13456} می‌گذرد.

اکنون دیگر می‌توان با کمک گرفتن از استقرای ریاضی کار را به‌همین نحو ادامه داد.

۴.۲ دایرهٔ نه‌نقطه

مثلث ABC داده شده است. مرکز دایرهٔ محیطی آن O، را مبدأ در صفحهٔ مختلط می‌گیریم و فرض می‌کنیم α، β، γ اعداد مختلطی به‌ترتیب معرّف رأسهای A، B، C باشند. بی‌آنکه از کلّیت کاسته شود می‌توان شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را ۱ فرض کرد، یعنی $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = ۱$. پس طبیعی است سؤال کنیم که نقطهٔ $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ درکجاست؟

چون داریم $\sigma - \alpha = \beta + \gamma$ و به‌علاوه $\frac{\beta+\gamma}{۲}$، نقطهٔ D وسط ضلع BC است، σ بر عمود مرسوم از رأس A بر ضلع BC واقع و طول $|\sigma - \alpha|$ دو برابر طول OD خواهد شد. با توجه به تقارن، σ بر عمود وارد از B بر CA و همچنین بر عمود مرسوم از C بر AB نیز قرار دارد. یعنی σ، همان نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای $\triangle ABC$ است. توجه دارید که نشان دادیم سه‌عمود مرسوم از رأسهای مثلث براضلاع مقابل در یک نقطه که مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ نامیده می‌شود متقارب‌اند.



شکل ۹.۲

امّا $\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sigma}{۲}$ نقطهٔ وسط پاره‌خطی است که مرکز دایرهٔ محیطی O را به H، مرکز ارتفاعات، وصل می‌کند. فاصلهٔ $\frac{\sigma}{۲}$ تا نقطهٔ D، وسط ضلع BC، برابر است با

$$\left|\frac{\beta+\gamma}{۲} - \frac{\sigma}{۲}\right| = \left|\frac{\alpha}{۲}\right| = \frac{۱}{۲}$$

همین‌طور فاصلهٔ $\frac{\sigma}{۲}$ تا نقطهٔ E وسط ضلع CA، و تا نقطهٔ F وسط ضلع AB همه برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

علاوه براین فاصلهٔ نقطهٔ $\frac{\sigma}{۲}$ تا وسط پاره‌خطی که مرکز ارتفاعات H را به رأس A وصل می‌کند

برابر است با

$$\left|\frac{\alpha+\sigma}{۲}-\frac{\sigma}{۲}\right|=\frac{|\alpha|}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

همین‌طور فاصلهٔ $\frac{\sigma}{۲}$ تا وسط BH و نیز تا وسط CH همه برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

برای یافتن λ، پای عمود وارد از رأس A بر ضلع BC، ابتدا نقطهٔ α'، محل تلاقی دیگر این عمود را با دایرهٔ محیطی مثلث حساب می‌کنیم. بنابراین α' باید در شرایط

$$\overrightarrow{\alpha\alpha'}\perp\overrightarrow{\beta\gamma},\qquad |\alpha'|=۱,\qquad \alpha'\neq\alpha$$

صدق می‌نماید. از شرط اوّل نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}\quad \text{انگاری محض است}$$

یعنی

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}+\frac{\overline{\alpha}-\overline{\alpha'}}{\overline{\beta}-\overline{\gamma}}=۰$$

با قرار دادن $\overline{\alpha}=\frac{۱}{\alpha}$ و غیزه، این رابطه به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}\left\{۱+\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\right\}=۰$$

پس

$$\alpha'=-\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

برای آزمایش درستی محاسبات، ملاحظه می‌کنیم که $|\alpha'|=۱$ و $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\alpha'}=-۱$، و نیز $\arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\arg\left(\frac{\gamma}{\alpha'}\right)=\pi$ که می‌رساند، $\overrightarrow{\alpha\alpha'}\perp\overrightarrow{\beta\gamma}$، یعنی α' نقطهٔ تلاقی دیگر عمود مرسوم از رأس A بر ضلع BC با دایرهٔ محیطی است.

امّا فواصل رأس B از α' و σ به‌ترتیب برابرند با

$$\left|\beta+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right|=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\cdot|\alpha+\gamma|=|\alpha+\gamma|$$
$$|\sigma-\beta|=|(\alpha+\beta+\gamma)-\beta|=|\alpha+\gamma|$$

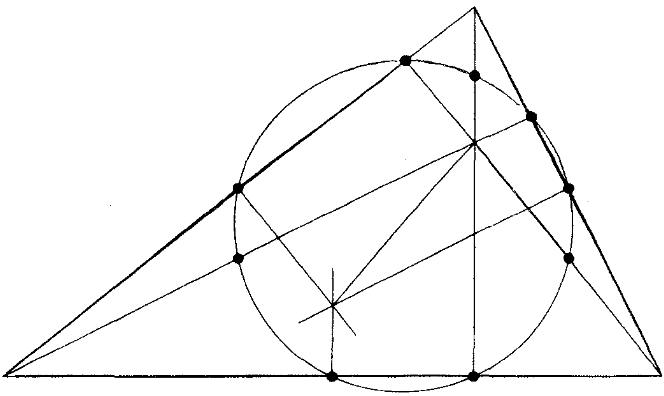
پس $\triangle\beta\alpha'\alpha$ یک مثلث متساوی‌الساقین است و

$$\lambda = \frac{۱}{۲}(\sigma + \alpha') = \frac{۱}{۲}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که فاصلهٔ $\frac{\sigma}{۲}$ تا λ (پای عمود مرسوم از رأس A بر ضلع BC) چنین است

$$\left|\lambda - \frac{\sigma}{۲}\right| = \left|\frac{\alpha'}{۲}\right| = \frac{۱}{۲}$$

همین‌طور فاصلهٔ $\frac{\sigma}{۲}$ تا پاهای دیگر عمودها نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



شکل۲.۱۰

به‌طور خلاصه چنین به‌دست آورده‌ایم.

قضیهٔ ۲.۴.۱. (دایرهٔ نه‌نقطه). در هر مثلث:

الف) پاهای عمودهای وارد از رأسها بر اضلاع مقابل؛

ب) وسطهای اضلاع؛ و

ج) وسطهای پاره‌خطهایی که مرکز ارتفاعات را به سه رأس وصل می‌کنند،

همه بر دایره‌ای واقع‌اند که مرکز آن وسط پاره‌خطی است که مرکز ارتفاعات را به مرکز دایرهٔ محیطی وصل می‌کند و شعاع آن نصف شعاع دایرهٔ محیطی است.

خط مارّ بر مرکز ارتفاعات، مرکز دایرهٔ محیطی، مرکزوار، و مرکز دایرهٔ نه‌نقطه به خط اویلر مثلث معروف است.

فرض می‌کنیم $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ سه نقطهٔ دلخواه بر دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ باشند. پس مرکز دایرهٔ محیطی، مرکزوار، مرکز دایرهٔ نه‌نقطه و مرکز ارتفاعات $\triangle z_۱z_۲z_۳$ به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$۰, \quad \frac{۱}{۳}(z_۱ + z_۲ + z_۳), \quad \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲ + z_۳), \quad (z_۱ + z_۲ + z_۳)$$

و شعاع دایرهٔ نه‌نقطه برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

فرض می‌کنیم چهار نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ بر دایرهٔ واحد داده شده باشند. اگر هر بار سه نقطه از این چهار نقطه را اختیار کنیم، چهار مثلث به دست می‌آید (که همهٔ آنها محاط در این دایرهٔ واحدند).

مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle z_۲z_۳z_۴$ نقطهٔ $\tau_۱ = \frac{۱}{۲}(z_۲ + z_۳ + z_۴)$ است،
مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle z_۱z_۳z_۴$ نقطهٔ $\tau_۲ = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۳ + z_۴)$ است،
مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle z_۱z_۲z_۴$ نقطهٔ $\tau_۳ = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲ + z_۴)$ است،
مرکز دایرهٔ نه‌نقطه $\triangle z_۱z_۲z_۳$ نقطهٔ $\tau_۴ = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲ + z_۳)$ است،
و شعاع همهٔ آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.
نقطهٔ

$$\tau = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲ + z_۳ + z_۴)$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

$$|\tau - \tau_۱| = |\tau - \tau_۲| = |\tau - \tau_۳| = |\tau - \tau_۴| = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین دایره‌های نه‌نقطهٔ مثلثهای:

$$\triangle z_۲z_۳z_۴, \quad \triangle z_۱z_۳z_۴, \quad \triangle z_۱z_۲z_۴, \quad \triangle z_۱z_۲z_۳$$

همه از نقطهٔ

$$\tau = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲ + z_۳ + z_۴)$$

می‌گذرند. به‌خصوص مراکز چهار دایرهٔ نه‌نقطهٔ فوق بر دایره‌ای به مرکز τ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ قرار دارند. این دایره را دایرهٔ نه‌نقطهٔ چهار ضلعی $z_۱z_۲z_۳z_۴$ می‌نامیم.

اکنون فرض می‌کنیم پنج نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4، z_5 بر دایرهٔ واحد داده شده باشند. پس مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ چهار ضلعی $z_2z_3z_4z_5$ نقطهٔ

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + z_4 + z_5),$$

است و هکذا برای چهار ضلعیهای دیگر، و فاصله‌های این مراکز تا نقطهٔ

$$\mu = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$$

برابرند با

$$|\mu - \mu_1| = \frac{1}{2} \quad \text{و غیره.}$$

پس مراکز دوایر نه‌نقطهٔ چهار ضلعیهای

$$z_1z_2z_3z_4، \quad z_1z_2z_3z_5، \quad z_1z_2z_4z_5، \quad z_1z_3z_4z_5، \quad z_2z_3z_4z_5$$

بر دایره‌ای به مرکز $\mu = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارند. این دایره را دایرهٔ نه‌نقطهٔ پنج ضلعی $z_1z_2z_3z_4z_5$ می‌نامیم.

سپس، فرض کنید شش نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4، z_5، z_6 بر دایرهٔ واحد داده شده باشند و . . . از این‌رو یک رشتهٔ نامتناهی قضیه داریم که ج. ل. کولیج* آنها را کشف کرده است.

۵.۲ خط سیمسن

این بخش را با شرح مقدماتی دربارهٔ معادلهٔ خط آغاز می‌کنیم.

خطّی مانند ℓ داده شده‌است. فرض می‌کنیم α بردار واحد عمود بر ℓ و p فاصلهٔ مبدأ تا خط ℓ باشند. در این صورت به‌ازای هر نقطهٔ z بر ℓ، $z - p\alpha$ برداری است واقع بر خطّ ℓ، و چون α برداری است عمود بر ℓ، داریم:

$$\frac{z - p\alpha}{\alpha} \quad \text{یک عدد انگاری محض است،}$$

---

* Julian. Lowell Coolidge، ریاضیدان معروف امریکایی مؤلف کتابهای، اصول هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ حوزهٔ اعداد مختلط، خمهای جبری مسطّح و . . . .

یعنی

$$\frac{z-p\alpha}{\alpha}+\frac{\overline{z}-p\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}=\circ$$

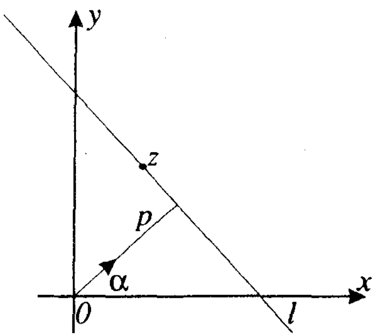
پس معادلهٔ خط ℓ چنین داده می‌شود

$$\therefore\ |k|=\text{۱} \text{ و } k=\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} \text{ و } p\in\mathbb{R} \text{ که، } z+k\overline{z}=\text{۲}p\alpha \quad \text{یعنی} \quad \frac{z}{\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=\text{۲}p$$

برای به‌دست آوردن معادلهٔ خط عمود بر ℓ فقط به‌جای α مقدار $i\alpha$ می‌گذاریم

$$\frac{z}{i\alpha}-\frac{\overline{z}}{i\overline{\alpha}}=\text{۲}q \qquad q\in\mathbb{R} \text{ به‌ازای مقداری مانند }$$

$$\left(k=\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\right)، \quad z-k\overline{z}=\text{۲}qi\alpha \quad \text{یعنی ؛} \quad \frac{z}{\alpha}-\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=\text{۲}qi$$



شکل۱۱.۲

که در آن ثابت طرف راست را می‌توان طوری اختیار کرد که خط از نقطهٔ مشخّصی بگذرد.

باید توجّه داشت که یک معادلهٔ خطّی برحسب z و $\overline{z}$ فقط و فقط وقتی معادلهٔ یک خط راست است که خودـمزدوج باشد؛ یعنی نتیجهٔ مزدوج مختلط گرفتن از طرفین معادله باید معادله‌ای هم ارز با معادلهٔ اولیّه به‌دست دهد. مثلاً اگر مزدوج مختلط معادلهٔ:

$$z+k\overline{z}=\text{۲}p\alpha \qquad \left(k=\frac{\alpha}{\overline{\alpha}},\ p\in\mathbb{R} \quad \text{که در آن:}\right)$$

را به‌دست آوریم، خواهد شد:

$$\bar{z}+\bar{k}z=۲p\bar{\alpha}$$

با قرار دادن $\bar{k}=\frac{۱}{k}$ این معادله به معادلهٔ:

$$k\bar{z}+z=۲p\bar{\alpha}k=۲p\alpha$$

بدل می‌شود که همان معادلهٔ اولیّه است. همین‌طور است در مورد معادلهٔ

$$z-k\bar{z}=۲qi\alpha \qquad \left(q\in\mathbb{R},\, k=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)$$

به‌خصوص، لازم (ولی نه کافی) است که ضرائب α و βی z و $\bar{z}$ در معادلهٔ

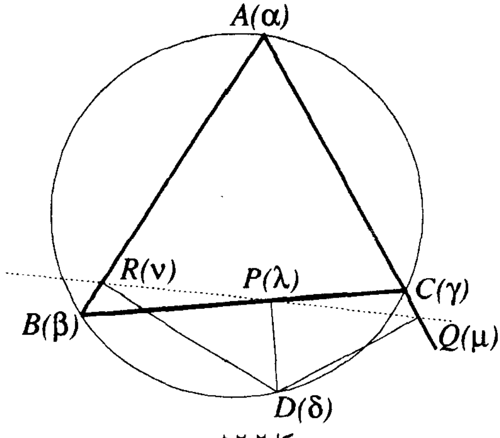
$$\alpha z+\beta\bar{z}=\gamma$$

قدرمطلقهای برابر داشته باشند؛ یعنی $|\beta|=|\alpha|$. از اینجا نتیجه می‌شود که معادله‌هایی مانند $z+\bar{z}=i$ یا $۲z-\bar{z}=۱$ معادله‌های خط نیستند.

اکنون آمادهٔ اثبات قضیهٔ سیمسن هستیم.

قضیهٔ ۱.۵.۲. نقطه‌ای مانند D و $\triangle ABC$ داده شده‌اند. فرض می‌کنیم P، Q، R پاهای عمودهای مرسوم از D به‌ترتیب بر اضلاع BC،CA،AB باشند. دراین صورت P،Q،R همخط‌اند، اگر و فقط اگر D بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ باشد.

برهان. بدون اینکه خللی بر کلیّت مسأله وارد آید، می‌توان فرض نمود که $\triangle ABC$ در دایره‌ای به شعاع واحد محاط شده‌است و نقاط A، B، C، D را به‌ترتیب با اعداد مختلط α، β، γ، δ



شکل۲.۱۲

نمایش می‌دهیم. در این صورت، معادلهٔ خط BC عبارت است از

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & ۱ \\ \beta & \overline{\beta} & ۱ \\ \gamma & \overline{\gamma} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

یعنی

$$(\overline{\beta} - \overline{\gamma})z - (\beta - \gamma)\overline{z} + (\beta\overline{\gamma} - \overline{\beta}\gamma) = ۰$$

با استفاده از روابط $\overline{\beta} = \frac{۱}{\beta}$ و $\overline{\gamma} = \frac{۱}{\gamma}$ می‌توان این معادله را چنین نوشت

$$z + \beta\gamma\overline{z} = \beta + \gamma$$

از این رو، معادلهٔ عمود مرسوم از $D(\delta)$ بر ضلع BC چنین می‌شود

$$z - \beta\gamma\overline{z} = \delta - \beta\gamma\overline{\delta}$$

بنابراین، نقطهٔ $P(\lambda)$، فصل مشترک این دو خط، از حل این دو معادله به‌دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{۱}{۲}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\overline{\delta})$$

همین‌طور $Q(\mu)$ و $R(\nu)$ از روابط

$$\mu = \frac{۱}{۲}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\overline{\delta})$$
$$\nu = \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\overline{\delta})$$

به‌دست می‌آیند. امّا،

$$P(\lambda),\ Q(\mu),\ R(\nu)\ \text{همخط‌اند} \iff \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} \in \mathbb{R}$$

ولی با قرار داد $r = |\delta|$ (بنابراین $\overline{\delta} = \frac{r^۲}{\delta}$)، داریم

$$\frac{\lambda-\nu}{\mu-\nu}=\frac{(\gamma-\alpha)(۱-\beta\overline{\delta})}{(\gamma-\beta)(۱-\alpha\overline{\delta})}$$
$$=\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right)\Big/\left(\frac{\alpha-\delta r^{-۲}}{\beta-\delta r^{-۲}}\right)$$
$$=(\alpha,\beta;\ \gamma,\delta r^{-۲})$$

بنابراین

$$R,\ Q,\ P\ \text{همخط‌اند} \iff \left(\alpha,\beta;\ \gamma,\delta r^{-۲}\right)\in\mathbb{R}$$
$$\iff \alpha,\beta,\gamma,\delta r^{-۲}\ \text{همدایره‌اند}$$
$$\iff |\delta r^{-۲}|=۱$$
$$\iff r=|\delta|=۱$$

■

این خط را عموماً خط سیمسن نقطهٔ D نسبت به $\triangle ABC$ گویند. ولی مورّخان بیهوده این خط را در آثار رابرت سیمسن* (۱۶۸۷ ـ ۱۷۶۸) جستجو کرده‌اند. به‌نظر می‌رسد که اولّین بار ویلیام والاس (۱۷۶۸ ـ ۱۸۴۳) در ۱۷۹۷ آن را مطرح کرده باشد.

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خط سیمسن را پیدا کنیم. همان قراردادهای قبلی را به‌کار می‌گیریم؛ به‌خصوص فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ محاط در دایرهٔ واحد باشد و نقطهٔ $D(\delta)$ بر این دایرهٔ واحد قرار داشته باشد. پس نقطهٔ P، پای عمود وارد از $D(\delta)$ بر ضلع BC، چنین خواهد بود

$$z=\frac{۱}{۲}\left(\beta+\gamma+\delta-\frac{\beta\gamma}{\delta}\right)$$

اکنون نمادهای

$$\sigma_۱=\alpha+\beta+\gamma,\qquad \sigma_۲=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta,\qquad \sigma_۳=\alpha\beta\gamma$$

را وارد می‌کنیم. پس

$$\overline{\sigma}_۱=\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\gamma}=\frac{\sigma_۲}{\sigma_۳}$$
$$\overline{\sigma}_۳=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\overline{\gamma}=\frac{۱}{\alpha\beta\gamma}=\frac{۱}{\sigma_۳}$$

* Robert Simson، هندسه‌دان اسکاتلندی.

بدین‌ترتیب عبارتی که در بالا برای z به دست می‌آید چنین خواهد شد

$$z = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

و

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_1 - \overline{\alpha} + \overline{\delta} - \frac{\overline{\sigma}_3}{\overline{\delta}\,\overline{\alpha}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3}\right)\end{aligned}$$

و از حذف α بین دو رابطه خواهیم داشت

$$\delta z - \sigma_3\overline{z} = \frac{1}{2}\left(\delta^2 + \sigma_1\delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta}\right)$$

این رابطه‌ای است که باید پای عمود $P(\lambda)$، وارد از $D(\delta)$ بر ضلع BC در آن صدق نماید. ولی، چون این رابطه فقط شامل σ_1، σ_2، σ_3 و لذا نسبت به α، β، γ متقارن است، نتیجه می‌شود که نقاط $Q(\mu)$ و $R(\nu)$، یعنی پاهای عمودهای مرسوم از نقطهٔ $D(\delta)$ به‌ترتیب بر اضلاع CA و AB نیز باید در آن صدق کنند. ولی این معادله، معادلهٔ یک خط مستقیم است، لذا پاهای عمودهای P، Q، R همخط‌اند، و معادلهٔ به‌دست آمده، معادلهٔ خط سیمسن مربوطه است. این برهان دیگری است برای قسمت شرط لازم قضیهٔ ۱.۵.۲.

قضیهٔ ۲.۵.۲. گیریم L، M، N سه نقطه بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ باشند. شرط لازم و کافی برای تقارب خطوط سیمسن نقاط L، M، N نسبت به $\triangle ABC$ برقراری همنهشتی زیر است.

$$\widehat{AL} + \widehat{BM} + \widehat{CN} \equiv 0 \quad (\text{پیمانهٔ } 2\pi)$$

برهان. دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ را دایرهٔ واحد و u_1، u_2، u_3 را به‌ترتیب اعداد مختلط متناظر با نقاط L، M، N می‌گیریم. پس معادله‌های سه خط سیمسن مورد نظر عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}u_1 z - \sigma_3\overline{z} &= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)\\ u_2 z - \sigma_3\overline{z} &= \frac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)\\ u_3 z - \sigma_3\overline{z} &= \frac{1}{2}\left(u_3^2 + \sigma_1 u_3 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_3}\right)\end{aligned}$$

پس فصل مشترک دو خط اوّل سیمسن، نقطهٔ

$$z = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_1 u_2}\right)$$

و فصل مشترک دو خط دیگر، نقطهٔ

$$z = \frac{1}{2}\left(u_2 + u_3 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_2 u_3}\right)$$

است، بنابراین، شرط لازم و کافی برای انطباق این دو نقطه، برقراری تساوی $\sigma_3 = u_1 u_2 u_3$ یعنی $\alpha\beta\gamma = u_1 u_2 u_3$ است.

چون α، β، γ، u_1، u_2، u_3 اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ هستند، با برابر گرفتن شناسه‌های آنها به‌ترتیب با θ_1، θ_2، θ_3، φ_1، φ_2، φ_3 خواهیم داشت.

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \ \ (\text{پیمانهٔ } 2\pi)$$
$$\therefore\ (\theta_1 - \varphi_1) + (\theta_2 - \varphi_2) + (\theta_3 - \varphi_3) \equiv 0 \ \ (\text{پیمانهٔ } 2\pi)$$

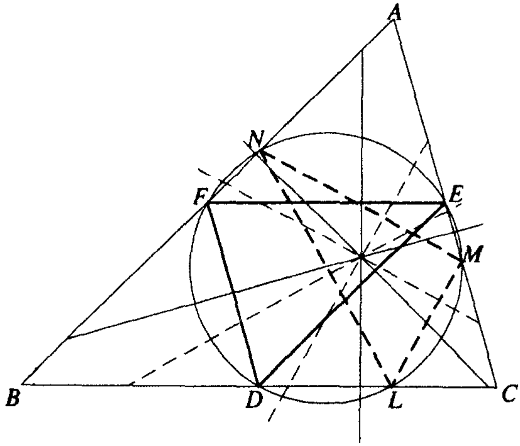
که شرط مطلوب است. ■

باید توجه کنیم که اگر این شرط برقرار باشد، نقطهٔ فصل مشترک با تساوی زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + u_1 + u_2 + u_3) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + u_1 + u_2 + u_3) \end{aligned}$$

با توجه به تقارن این رابطه نسبت به مقادیر α، β، γ، u_1، u_2، u_3 فرع زیر به‌دست می‌آید.

فرع ۳.۵.۲. A، B، C، L، M، N را شش نقطه بر یک دایره در نظر می‌گیریم. در این صورت خطهای سیمسنِ نقاط L، M، N نسبت به $\triangle ABC$ متقارب‌اند، اگر و فقط اگر خطوط سیمسنِ نقاط A، B، C نسبت به $\triangle LMN$ متقارب باشند. به‌علاوه، در این حالت، هر شش خط سیمسن در وسط پاره‌خطی که مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ و $\triangle LMN$ را به‌هم وصل می‌کند، متقارب‌اند.



شکل ۱۳.۲

فرع ۴.۵.۲. فرض می‌کنیم D، E، F به‌ترتیب وسطهای اضلاع BC، CA، AB از $\triangle ABC$ و L، M، N به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از رأسهای A، B، C بر اضلاع مقابل باشند. در این صورت شش نقطهٔ D،E،F،L،M،N بر دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle ABC$ واقع‌اند و خطوط سیمسنِ نقاط L، M، N نسبت به $\triangle DEF$ متقارب‌اند. عکس این فرع نیز صحیح است.

برهان. دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ را دایرهٔ واحد می‌گیریم و فرض می‌کنیم رأسهای A، B، C به‌ترتیب با اعداد مختلطِ α، β، γ متناظر باشند. در این صورت با توجّه به بحث مربوط به دایرهٔ نه‌نقطه، نقاط L، M، N به‌ترتیب متناظر با اعداد مختلط:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\gamma\alpha}{\beta}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$$

و نقاط D، E، F متناظر با اعداد مختلط

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma), \quad \frac{1}{2}(\gamma+\alpha), \quad \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

خواهند شد. علاوه بر این، همهٔ این شش نقطه بر دایرهٔ نه‌نقطه‌یی واقع‌اند که مرکز آن، K، نقطهٔ $\frac{\sigma_1}{2}$ و شعاع آن $\frac{1}{2}$ است. از این رو داریم

$$\overrightarrow{KL} : -\frac{\beta\gamma}{2\alpha}, \quad \overrightarrow{KM} : -\frac{\gamma\alpha}{2\beta}, \quad \overrightarrow{KN} : -\frac{\alpha\beta}{2\gamma}$$
$$\overrightarrow{KD} : -\frac{\alpha}{2}, \quad \overrightarrow{KE} : -\frac{\beta}{2}, \quad \overrightarrow{KF} : -\frac{\gamma}{2}$$

و چون

$$\left(-\frac{\beta\gamma}{۲\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{\gamma\alpha}{۲\beta}\right)\cdot\left(-\frac{\alpha\beta}{۲\gamma}\right)=\left(-\frac{\alpha}{۲}\right)\ \left(-\frac{\beta}{۲}\right)\ \left(-\frac{\gamma}{۲}\right)$$

حکم برقرار و قضیه ثابت شده است. ■

۶.۲ تعمیمهای قضیهٔ سیمسن

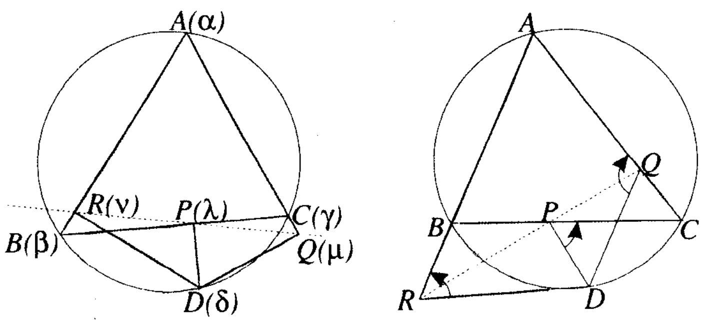
اکنون برهان سادهٔ دیگری برای قضیهٔ سیمسن ۱.۵.۲ اقامه می‌کنیم که تعمیم آن است.

قضیهٔ ۱.۶.۲. فرض کنید P، Q، R پاهای عمودهای وارد از نقطهٔ دلخواه D، به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA، AB از $\triangle ABC$ باشند. در این صورت P، Q، R همخط‌اند، اگر و فقط اگر، D بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد.

برهان. چون $\angle DPC=\angle DRB(=\frac{\pi}{۲})$، نقاط P، R، B، D همدایره‌اند. این دایره را S_B می‌نامیم. همین‌طور نقاط P، Q، C، D نیز همدایره‌اند. این دایره را S_C می‌نامیم. اکنون لم ۱.۳.۲ برای قضیه‌های کلیفرد را در مورد S_B، AB، AC، S_C به‌کار می‌بریم:

دایرهٔ S_B و خط AB در B و R متلاقی‌اند؛
خطوط AB و AC در A و ∞ متلاقی‌اند؛
خط AC و دایرهٔ S_C در C و Q متلاقی‌اند؛
دایره‌های S_C و S_B در D و P متلاقی‌اند؛

بنابراین: P، Q، R همخط‌اند $\Longleftrightarrow$ R، ∞، Q، P همدایره‌اند $\Longleftrightarrow$ B، A، C، D همدایره‌اند. ■



شکل ۱۴.۲

قضیهٔ ۲.۶.۲. فرض می‌کنیم P، Q، R به‌ترتیب نقطه‌هایی بر اضلاع BC، CA، AB

(یا امتداد آنها) از $\triangle ABC$ باشند و فرض می‌کنیم D نقطه‌ای با خصوصیت زیر باشد:

$$\angle DPC \equiv \angle DQA \equiv \angle DRB \qquad (\text{پیمانهٔ } \pi)$$

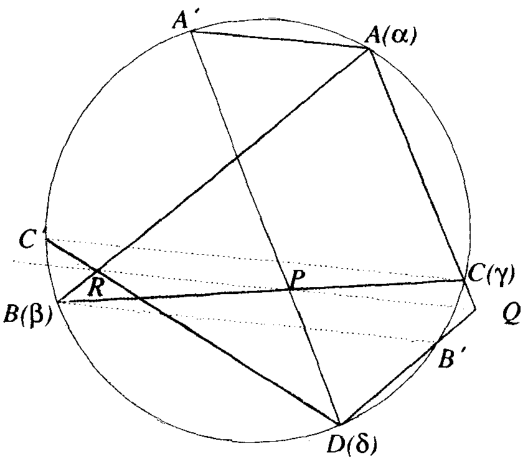
که در آن همهٔ زوایا جهت‌دار فرض شده‌اند. در این صورت نقاط P، Q، R همخط‌اند، اگر و فقط اگر نقطهٔ D بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد.

برهان. درست به همان صورت قضیهٔ قبلی است. ■

به‌عنوان فرع، قضیهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۳.۶.۲. (اُبِر[1]). فرض کنید A،A'،B،B'،C،C'،D هفت نقطهٔ همدایره چنان باشند که $AA'||BB'||CC'$ و P، Q، R به‌ترتیب فصل مشترکهای: $A'D$ و BC، $B'D$ و CA، $C'D$ و AB باشند، در این صورت P، Q، R همخط‌اند و خطی که از این سه نقطه می‌گذرد موازی AA'، BB' و CC' است.

برهان دیگر. بدون اینکه از کلّیت کاسته شود، می‌توان دایرهٔ مورد نظر را دایرهٔ واحد فرض کرد. فرض کنید نقاط A، B، C، D به‌ترتیب با اعداد مختلط α، β، γ، δ نمایش داده شده‌اند. پس



شکل ۱۵.۲

معادلات خطوط موازی AA'، BB'، CC' به‌ترتیب چنین خواهند شد

$$z + k\bar{z} = \alpha + k\bar{\alpha}, \qquad z + k\bar{z} = \beta + k\bar{\beta}, \qquad z + k\bar{z} = \gamma + k\bar{\gamma}$$

1. Aubert

که در آن k عدد مختلط مناسبی است با $|k| = ۱$. از اینجا نتیجه می‌شود که نقاط A'، B'، C' به‌ترتیب با اعداد مختلط $k\overline{\alpha}$، $k\overline{\beta}$، و $k\overline{\gamma}$ داده می‌شوند. پس نقطهٔ P، فصل مشترک خطوط BC و $A'D$ باید جواب دستگاه همزمان

$$z + \beta\gamma\overline{z} = \beta + \gamma, \qquad z + \delta k\overline{\alpha z} = \delta + k\overline{\alpha}$$

باشد. از حذف z بین این دو معادله

$$\therefore\ (\beta\gamma - k\delta\overline{\alpha})\overline{z} = \beta + \gamma - \delta - k\overline{\alpha}$$

از ضرب طرفین این تساوی در α خواهیم داشت

$$(\alpha\beta\gamma - k\delta)\overline{z} = \alpha\beta + \gamma\alpha - \delta\alpha - k$$

با استفاده از قراردادهای

$$\sigma_۱ = \alpha + \beta + \gamma, \qquad \sigma_۲ = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \qquad \sigma_۳ = \alpha\beta\gamma$$

تساوی اخیر به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$(\sigma_۳ - k\delta)\overline{z} = \sigma_۲ - \frac{\sigma_۳}{\alpha} - \delta\alpha - k$$

با گرفتن مزدوج مختلط و ضرب طرفین آن در $k\delta\sigma_۳$ خواهیم داشت

$$(k\delta - \sigma_۳)z = \sigma_۱ k\delta - k\delta\alpha - \frac{k\sigma_۳}{\alpha} - \sigma_۲\delta$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود که

$$(k\delta - \sigma_۳)(z + k\overline{z}) = k^۲ + \sigma_۱ k\delta - \sigma_۲ k - \sigma_۳\delta$$

این رابطه‌ای است که باید نقطهٔ P در آن صدق نماید. امّا این رابطه نسبت به α، β، γ متقارن است، پس نقاط Q و R نیز در آن صدق می‌نمایند. از طرف دیگر، این معادله، معادلهٔ خطی است موازی با AA'، BB'، CC' (به‌شرط $k\delta - \sigma_۳ \neq ۰$). بنابراین، نقاط P، Q، R همخط‌اند و خطی که از این سه نقطه می‌گذرد موازی با AA'، BB'، CC' است.

در حالتی که $k\delta = \sigma_۳$، داریم

$$BC||A'D, \quad CA||B'D, \quad AB||C'D$$

و لذا نقاط R،Q،P بر نقطهٔ بینهایت منطبق‌اند و نتیجه به‌طور بدیهی صحیح است. ■

در پایان این بخش، یک دنبالهٔ نامتناهی دیگری را معرفی می‌نماییم. امّا ابتدا مطلب را با حالت چهار نقطه آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۶.۲. فرض می‌کنیم چهار ضلعی $A_۱ A_۲ A_۳ A_۴$ محاط در یک دایره و P نقطه‌ای دلخواه بر دایرهٔ محیطی آن باشد. در این صورت $D_۱$،$D_۲$،$D_۳$،$D_۴$ پاهای عمودهای وارد از P بر خطوط سیمسنِ نقطهٔ P نسبت به مثلثهای

$$\triangle A_۲A_۳A_۴, \quad \triangle A_۱A_۳A_۴, \quad \triangle A_۱A_۲A_۴, \quad \triangle A_۱A_۲A_۳$$

همخط‌اند. این خط را خط سیمسن نقطهٔ P نسبت به چهار ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ گویند.

برهان. بی‌آنکه از کلّیت کاسته شود، می‌توان دایرهٔ محیطی چهار ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ را دایرهٔ واحد فرض کرد، و اعداد مختلط $u_۱$،$u_۲$، $u_۳$،$u_۴$، و u را به‌ترتیب معرّف نقاط $A_۱$،$A_۲$، $A_۳$،$A_۴$، و P گرفت. در این صورت معادلهٔ خط سیمسنِ نقطهٔ $P(u)$ نسبت به $\triangle A_۲A_۳A_۴$ چنین خواهد شد

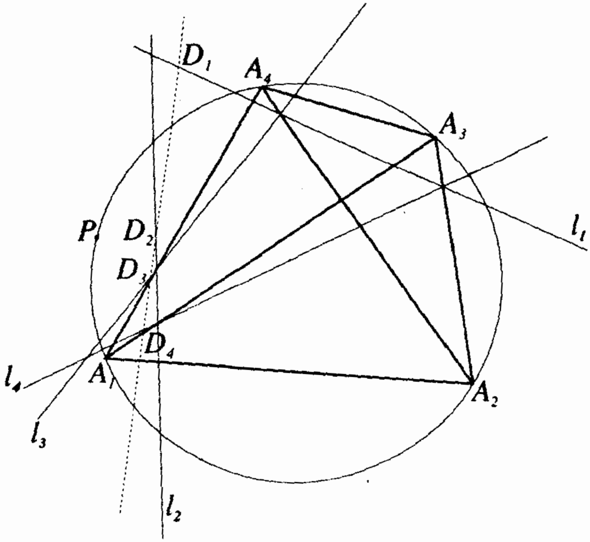
$$\begin{aligned} u_z - u_۲u_۳u_۴\overline{z} = & \frac{۱}{۲}\Big\{ u^۲ + (u_۲ + u_۳ + u_۴)u \\ & -(u_۳u_۴ + u_۴u_۲ + u_۲u_۳) - \frac{u_۲u_۳u_۴}{u}\Big\} \end{aligned}$$

پس معادلهٔ خط عمود مرسوم از نقطهٔ $P(u)$ بر این خط سیمسن چنین خواهد شد

$$uz + u_۲u_۳u_۴\overline{z} = u^۲ + \frac{u_۲u_۳u_۴}{u}$$

بنابراین $D_۱$، نقطهٔ تلاقی این دو خط از تساوی

$$۲uz = \frac{۱}{۲}\left\{۳u^۲ + (u_۲ + u_۳ + u_۴)u - (u_۳u_۴ + u_۴u_۲ + u_۲u_۳) + \frac{u_۲u_۳u_۴}{u}\right\}$$



شکل۲.۱۶

به‌دست می‌آید. با استفاده از قراردادهای

$$\sigma_۱ = u_۱ + u_۲ + u_۳ + u_۴$$
$$\sigma_۲ = u_۱u_۲ + u_۱u_۳ + u_۱u_۴ + u_۲u_۳ + u_۲u_۴ + u_۳u_۴$$
$$\sigma_۳ = u_۲u_۳u_۴ + u_۱u_۳u_۴ + u_۱u_۲u_۴ + u_۱u_۲u_۳$$
$$\sigma_۴ = u_۱u_۲u_۳u_۴$$

رابطهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} u^۲ z &= \frac{۱}{۴}\left\{۳u^۳ + (\sigma_۱ - u_۱)u^۲ - (\sigma_۲ - \sigma_۱ u_۱ + u_۱^۲)u + \frac{\sigma_۴}{u_۱}\right\} \\ &= \frac{۱}{۴}\left\{(۳u^۳ + \sigma_۱ u^۲ + \sigma_۲ u) - (u_۱ u^۲ - \sigma_۱ u_۱ u + u_۱^۲ u) + \frac{\sigma_۴}{u_۱}\right\} \end{aligned}$$

با گرفتن مزدوج مختلط از دو طرف این رابطه و استفاده از روابط

$$\overline{\sigma_۱} = \frac{\sigma_۳}{\sigma_۴}, \qquad \overline{\sigma_۲} = \frac{\sigma_۲}{\sigma_۴}, \qquad \overline{\sigma_۴} = \frac{۱}{\sigma_۴}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\overline{z} = \frac{u^{۲}}{۴}\left\{\left(\frac{۳}{u^{۳}} + \frac{\sigma_{۳}}{\sigma_{۴}u^{۲}} - \frac{\sigma_{۲}}{\sigma_{۴}u}\right) - \left(\frac{۱}{u_{۱}u^{۲}} - \frac{\sigma_{۳}}{\sigma_{۴}u_{۱}u} + \frac{۱}{u_{۱}^{۲}u}\right) + \frac{u_{۱}}{\sigma_{۴}}\right\}$$
$$\therefore\ \sigma_{۴}\overline{z} = \frac{۱}{۴}\left\{\left(\frac{۳\sigma_{۴}}{u} + \sigma_{۳} - \sigma_{۲}u\right) - \left(\frac{\sigma_{۴}}{u_{۱}} - \frac{\sigma_{۳}u}{u_{۱}} + \frac{\sigma_{۴}u}{u_{۱}^{۲}}\right) + u_{۱}u^{۲}\right\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} u^{۲}z + \sigma_{۴}\overline{z} =& \frac{۱}{۴}\left\{\left(۳u^{۳} + \sigma_{۱}u^{۲} - \sigma_{۲}u + \sigma_{۳} + \frac{۳\sigma_{۴}}{u}\right)\right. \\ & \left. + u\left(\sigma_{۱}u_{۱} - u_{۱}^{۲} - \sigma_{۲} + \frac{\sigma_{۳}}{u_{۱}} - \frac{\sigma_{۴}}{u_{۱}^{۲}}\right)\right\} \\ =& \frac{۱}{۴}\left\{\left(۳u^{۳} + \sigma_{۱}u^{۲} - \sigma_{۲}u + \sigma_{۳} + \frac{۳\sigma_{۴}}{u}\right)\right. \\ & \left. - \frac{u}{u_{۱}^{۲}}(u_{۱}^{۴} - \sigma_{۱}u_{۱}^{۳} + \sigma_{۲}u_{۱}^{۲} - \sigma_{۳}u_{۱} + \sigma_{۴})\right\} \end{aligned}$$

چون $u_{۱}$ یک ریشهٔ معادلهٔ

$$u^{۴} - \sigma_{۱}u^{۳} + \sigma_{۲}u^{۲} - \sigma_{۳}u + \sigma_{۴} = ۰$$

است، خواهیم داشت

$$u^{۲}z + \sigma_{۴}\overline{z} = \frac{۱}{۴}\left(۳u^{۳} + \sigma_{۱}u^{۲} - \sigma_{۲}u + \sigma_{۳} + \frac{۳\sigma_{۴}}{u}\right)$$

این رابطه، رابطه‌ای است که $D_{۱}$ در آن صدق می‌کند. ولی به‌دلیل تقارن، $D_{۲}$، $D_{۳}$، $D_{۴}$ نیز باید در آن صدق کنند. از طرف دیگر، این معادله، معادلهٔ یک خط راست است، بنابراین نقاط $D_{۱}$، $D_{۲}$، $D_{۳}$، $D_{۴}$ همخط‌اند. ■

حال فرض کنید یک پنج ضلعی محاط در یک دایره، و P نقطه‌ای بر دایرهٔ محیطی آن باشد و . . . .

۷.۲ قضیّه‌های کانتور

باز مطلب را با حالت سادهٔ ذیل آغاز می‌کنیم.

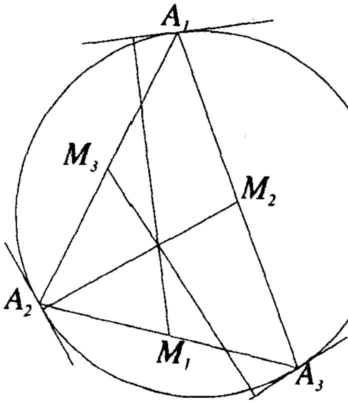
قضیهٔ ۱.۷.۲. (م. ب. کانتور). سه عمود وارد از وسطهای اضلاع یک مثلث بر مماسهای مرسوم بردایرهٔ محیطی آن در رأسهای متقابل، در مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ این مثلث متقارب‌اند.

برهان. بی‌آنکه از کلیّت کاسته شود، می‌توان دایرهٔ محیطی $\triangle A_۱A_۲A_۳$ را دایرهٔ واحد فرض کرد. خاطرنشان می‌سازیم که معادلهٔ خطی که از نقاط α و β واقع بر دایرهٔ واحد می‌گذرد چنین است

$$z + \alpha\beta\overline{z} = \alpha + \beta$$

چون خط مماس بر دایرهٔ واحد در α، همان حالت خاص قاطع است وقتی که β بر α منطبق شود، پس معادلهٔ مماس در α چنین خواهد شد

$$z + \alpha^۲\,\overline{z} = ۲\alpha$$



شکل۱۷.۲

اعداد مختلط متناظر با رأسهای $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ را به‌ترتیب با $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ نمایش می‌دهیم. پس معادلهٔ مماس در نقطهٔ $A_۱$ عبارت است از

$$z + u_۱^۲\overline{z} = ۲u_۱$$

بنابراین معادلهٔ عمود وارد از نقطهٔ $M_۱$ $(\frac{u_۲+u_۳}{۲})$، وسط ضلع $A_۲A_۳$، براین خط مماس چنین خواهد شد

$$z - u_۱^۲\overline{z} = \frac{۱}{۲}\{(u_۲ + u_۳) - u_۱^۲(\overline{u}_۲ + \overline{u}_۳)\}$$

از قرار دادن مختصات مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle A_۱A_۲A_۳$، یعنی $\frac{۱}{۲}(u_۱+u_۲+u_۳)$، در طرف چپ این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}\{(u_۱+u_۲+u_۳)-u_۱^۲(\overline{u}_۱+\overline{u}_۲+\overline{u}_۳)\}$$
$$=\frac{۱}{۲}\{(u_۲+u_۳)-u_۱^۲(\overline{u}_۲+\overline{u}_۳)\} \qquad (\because u_۱\overline{u}_۱=۱),$$

که درست برابر طرف راست معادله است. از این رو مرکز دایرهٔ نه‌نقطه در معادلهٔ عمود مرسوم از $M_۱$ بر مماس در $A_۱$ صدق می‌کند. همین‌طور، مرکز دایرهٔ نه نقطه، بر عمودهای مرسوم از $M_۲$ و $M_۳$ بر مماسهای در رأسهای مقابل مربوطه نیز واقع است. ■

قضیهٔ ۲.۷.۲. (م. ب. کانتور). فرض می‌کنیم n نقطه بریک دایره داده شده باشند. از مرکزوار هر $n-۱$ نقطه از این نقاط، عمودی بر مماس مرسوم بر دایره در نقطهٔ باقیمانده، وارد می‌نمائیم. در این صورت، این n عمود در یک نقطه متقارب‌اند.

برهان. اثبات این قضیه، عملاً درست به‌همان صورت قضیهٔ قبلی صورت می‌گیرد. n نقطهٔ $u_۱$، $u_۲$، $\cdots$، u_n را بر دایرهٔ واحد اختیار می‌کنیم. معادلهٔ مماس در $u_۱$ بر دایره چنین است: $z+u_۱^۲\overline{z}=۲u_۱$. پس معادلهٔ عمود مرسوم از مرکزوار نقاط $u_۲$،$u_۳$،$\cdots$،u_n یعنی نقطهٔ

$$\frac{۱}{n-۱}(u_۲+u_۳+\cdots+u_n)=\frac{(\sigma-u_۱)}{n-۱} \qquad (\sigma=u_۱+u_۲+\cdots+u_n)$$

بر این مماس عبارت است از:

$$z-u_۱^۲\overline{z}=\frac{۱}{n-۱}\{(u_۲+u_۳+\cdots+u_n)-u_۱^۲(\overline{u}_۲+\overline{u}_۳+\cdots+\overline{u}_n)\}$$
$$=\frac{۱}{n-۱}\{(\sigma_۱-u_۱)-u_۱^۲(\overline{\sigma}_۱-\overline{u}_۱)\}$$
$$=\frac{۱}{n-۱}(\sigma-u_۱^۲\overline{\sigma}_۱)$$

واضح است که نقطهٔ

$$\frac{۱}{n-۱}(u_۱+u_۲+\cdots+u_n)=\frac{\sigma_۱}{n-۱}$$

در این معادله صدق می‌کند. ■

هم‌اکنون به‌بیان دنبالهٔ نامتناهی دیگری از قضایا که م. ب. کانتور (۱۸۲۹ ـ ۱۹۲۰) کشف کرده مبادرت می‌ورزیم.

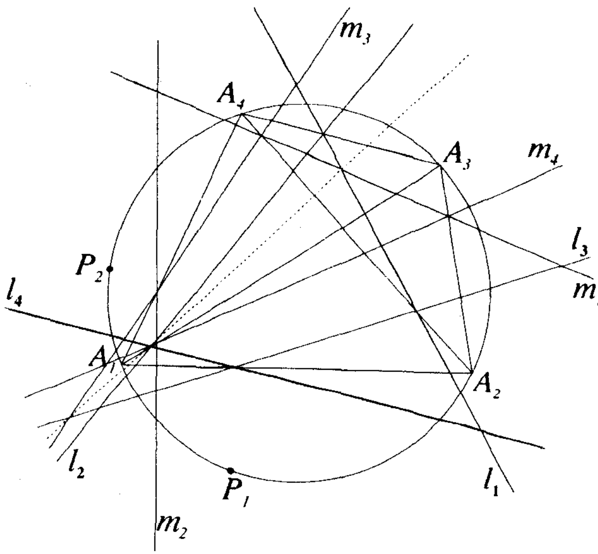
قضیهٔ ۳.۷.۲. A_1، A_2، A_3، A_4، P_1، P_2 را شش نقطهٔ همدایره می‌گیریم. چهار نقطهٔ اشتراک چهار زوج سیمسنِ مربوط به نقاط P_1 و P_2 نسبت به مثلثهای

$$\triangle A_2A_3A_4,\qquad \triangle A_1A_3A_4,\qquad \triangle A_1A_2A_4,\qquad \triangle A_1A_2A_3$$

همخط‌اند. این خط را **خط کانتورِ** دو نقطهٔ P_1 و P_2 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ گویند.

برهان. بی‌آنکه به کلیت مطلب خللی وارد آید، می‌توان فرض کرد که هر شش نقطه بر دایرهٔ واحد قرار دارند و این نقاط را به‌ترتیب با اعداد مختلط u_1،u_2،u_3،u_4 و t_1،t_2 نمایش می‌دهیم. بنابراین **معادله‌های خطوط سیمسن نقاط** $P_1(t_1)$ و $P_2(t_2)$ نسبت به $\triangle A_2A_3A_4$ چنین خواهند شد

$$\begin{aligned} t_1z - u_2u_3u_4\overline{z} &= \frac{1}{2}\left\{t_1^2 + (u_2+u_3+u_4)t_1 - (u_3u_4+u_4u_2+u_2u_3) - \frac{u_2u_3u_4}{t_1}\right\},\\ t_2z - u_2u_3u_4\overline{z} &= \frac{1}{2}\left\{t_2^2 + (u_2+u_3+u_4)t_2 - (u_3u_4+u_4u_2+u_2u_3) - \frac{u_2u_3u_4}{t_2}\right\}.\end{aligned}$$



شکل۱۸.۲

پس نقطهٔ تلاقی این دو خط چنین خواهد شد

$$z = \frac{۱}{۲}\left[t_۱ + t_۲ + (u_۲ + u_۳ + u_۴) + \frac{u_۲u_۳u_۴}{t_۱t_۲}\right]$$

با قرار دادن

$$\begin{aligned}\sigma_۱ &= u_۱ + u_۲ + u_۳ + u_۴,\\ \sigma_۲ &= u_۱u_۲ + u_۱u_۳ + u_۱u_۴ + u_۲u_۳ + u_۲u_۴ + u_۳u_۴\\ \sigma_۳ &= u_۲u_۳u_۴ + u_۱u_۳u_۴ + u_۱u_۲u_۴ + u_۱u_۲u_۳\\ \sigma_۴ &= u_۱u_۲u_۳u_۴\end{aligned}$$

رابطهٔ بالا چنین نوشته می‌شود

$$z = \frac{۱}{۲}\left\{t_۱ + t_۲ + \sigma_۱ - u_۱ + \frac{\sigma_۴}{t_۱t_۲u_۱}\right\}$$

و بنابراین

$$\overline{z} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} + \frac{\sigma_۳}{\sigma_۴} - \frac{۱}{u_۱} + \frac{t_۱t_۲u_۱}{\sigma_۴}\right\}$$

با حذف $u_۱$ از این دو رابطه، خواهیم داشت

$$t_۱t_۲z + \sigma_۴\overline{z} = \frac{۱}{۲}\left\{(t_۱ + t_۲)t_۱t_۲ + \sigma_۱t_۱t_۲ + \sigma_۳ + \frac{\sigma_۴(t_۱ + t_۲)}{t_۱t_۲}\right\}$$

این رابطه‌ای است که باید نقطهٔ تلاقی خطوط سیمسن نقاط $P_۱$ و $P_۲$ نسبت به $\triangle A_۲A_۳A_۴$ در آن صدق نماید. امّا این رابطه نسبت به $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، $u_۴$ متقارن است و لذا باید نقطهٔ تقاطع دو خط سیمسن نقاط $P_۱$ و $P_۲$ نسبت به $\triangle A_۱A_۳A_۴$، $\triangle A_۱A_۲A_۴$، $\triangle A_۱A_۲A_۳$ در آن صدق کند. ازطرف دیگر این رابطه معادلهٔ یک خط راست است. بنابراین، این چهار نقطهٔ تلاقی همخط‌اند. ■

قضیهٔ ۴.۷.۲. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$، $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ هفت نقطهٔ همدایره باشند. سه‌خط کانتورِ سه‌زوج. نقاط: $P_۲$ و $P_۳$، $P_۳$ و $P_۱$، $P_۱$ و $P_۲$، نسبت به چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ متقارب‌اند. این نقطهٔ تقارب را **نقطهٔ کانتورِ** سه‌نقطهٔ $P_۱$،$P_۲$،$P_۳$ نسبت به چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ گویند.

برهان. به‌روال پیش، فرض می‌کنیم دایرهٔ موردنظر، دایرهٔ واحد باشد و u_1، u_2، u_3، u_4، t_1، t_2، t_3 اعداد مختلطی به‌ترتیب معرّف نقاط A_1، A_2، A_3، A_4، P_1، P_2، P_3 هستند. بنابراین معادله‌های خطوط کانتور زوجهای نقاط: P_2 و P_3،P_3 و P_1 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ چنین خواهد شد:

$$t_2t_3z + \sigma_4\overline{z} = \frac{1}{2}\left\{(t_2+t_3)t_2t_3 + \sigma_1 t_2t_3 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4(t_2+t_3)}{t_2t_3}\right\},$$
$$t_3t_1z + \sigma_4\overline{z} = \frac{1}{2}\left\{(t_3+t_1)t_3t_1 + \sigma_1 t_3t_1 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4(t_3+t_1)}{t_3t_1}\right\}.$$

لذا نقطهٔ تقاطع آنها چنین است

$$z = \frac{1}{2}\left\{t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - \frac{\sigma_4}{t_1t_2t_3}\right\}.$$

امّا این عبارت نسبت به t_1، t_2، t_3 متقارن است و لذا خط کانتورِ دونقطهٔ P_1 و P_2 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ نیز از این نقطه می‌گذرد. بنابراین، این نقطه باید نقطهٔ کانتورِ سه‌نقطهٔ P_1، P_2، P_3 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ باشد. ■

قضیهٔ ۵.۷.۲. فرض می‌کنیم A_1، A_2، A_3، A_4، A_5، P_1، P_2، P_3 هشت نقطهٔ همدایره باشند. در این صورت پنج نقطهٔ کانتورِ سه نقطهٔ P_1 و P_2،P_3 نسبت به چهارضلعیهای

$$A_2A_3A_4A_5,\quad A_1A_3A_4A_5,\quad A_1A_2A_4A_5,\quad A_1A_2A_3A_5,\quad A_1A_2A_3A_4$$

همخط‌اند. این خط را **خط کانتورِ** ۳ نقطهٔ P_1،P_2، و P_3 نسبت به پنج‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5$ گویند.

برهان. همانند قبل، فرض می‌کنیم دایرهٔ موردنظر دایرهٔ واحد باشد، و u_1، u_2، u_3، u_4، u_5، t_1، t_2، t_3 اعداد مختلطی باشند که به‌ترتیب نقاط A_1، A_2، A_3، A_4، A_5، P_1، P_2، P_3 را نشان می‌دهند. بنابراین نقطهٔ کانتورِ سه‌نقطهٔ P_1،P_2،P_3 نسبت به چهارضلعی $A_2A_3A_4A_5$ چنین است.

$$z = \frac{1}{2}\left\{t_1 + t_2 + t_3 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - \frac{u_2u_3u_4u_5}{t_1t_2t_3}\right\}.$$

با قرار دادن

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= u_1+u_2+u_3+u_4+u_5,\\
\sigma_2 &= u_1u_2+u_1u_3+u_1u_4+u_1u_5+u_2u_3\\
&\quad +u_2u_4+u_2u_5+u_3u_4+u_3u_5+u_4u_5,\\
\sigma_3 &= u_1u_2u_3+u_1u_2u_4+u_1u_2u_5+u_1u_3u_4+u_1u_3u_5\\
&\quad +u_1u_4u_5+u_2u_3u_4+u_2u_3u_5+u_2u_4u_5+u_3u_4u_5,\\
\sigma_4 &= u_2u_3u_4u_5+u_1u_3u_4u_5+u_1u_2u_4u_5+u_1u_2u_3u_5+u_1u_2u_3u_4,\\
\sigma_5 &= u_1u_2u_3u_4u_5,
\end{aligned}$$

رابطهٔ بالا چنین می‌شود

$$z=\frac{1}{2}\left\{t_1+t_2+t_3+\sigma_1-u_1-\frac{\sigma_5}{u_1t_1t_2t_3}\right\}.$$
$$\therefore\ \ \bar{z}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{\sigma_4}{\sigma_5}-\frac{1}{u_1}-\frac{u_1t_1t_2t_3}{\sigma_5}\right\}.$$

با حذف u_1 از این دو رابطه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&t_1t_2t_3z-\sigma_5\bar{z}\\
&=\frac{1}{2}\left\{(t_1+t_2+t_3)t_1t_2t_3+\sigma_1t_1t_2t_3-\sigma_4-\frac{\sigma_5(t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2)}{t_1t_2t_3}\right\}.
\end{aligned}$$

این رابطه‌ای است که باید نقطهٔ کانتور سه‌نقطهٔ P_1،P_2،P_3 نسبت به چهارضلعی $A_2A_3A_4A_5$ در آن صدق کند. ولی این رابطه نسبت به A_1،A_2،A_3،A_4،A_5 متقارن است و بنابراین بایستی سه‌نقطهٔ کانتور P_1،P_2،P_3 نسبت به چهارضلعیهای $A_1A_3A_4A_5$، $A_1A_2A_4A_5$، $A_1A_2A_3A_5$، $A_1A_2A_3A_4$، نیز در آن صدق کنند. از طرف دیگر این معادله، معادلهٔ یک خط راست است. پس این پنج نقطهٔ کانتور باید همخط باشند. ■

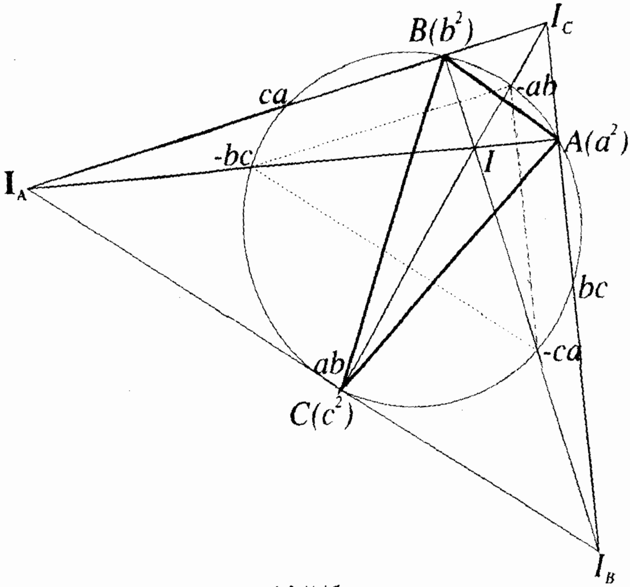
اکنون فرض کنید نُه‌نقطهٔ همدایرهٔ A_1،A_2،A_3،A_4،A_5،P_1،P_2،P_3،P_4 را داشته باشید، پس، . . . .

۸.۲ قضیهٔ فویرباخ

فرض می‌کنیم H مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ باشد. با توجه به‌اینکه دایرهٔ نه نقطهٔ $\triangle ABC$، دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle HBC$، $\triangle HCA$ و $\triangle HAB$ نیز هست، قضیهٔ زیر منسوب به ک. و. فویرباخ

(۱۸۰۰ ـ ۱۸۳۴)، دبیر دبیرستان ارلانگِن، آلمان، که درسال ۱۸۲۲ آن‌را کشف کرده، به‌راستی جالب است.

قضیهٔ ۱.۸.۲. (فویرباخ). دایرهٔ نُه‌نقطهٔ مثلث، بر دایرهٔ محاطی داخلی و سه‌دایرهٔ محاطی خارجی آن مماس است (شکل ۱۹.۲).



شکل۱۹.۲

برهان. بی‌آنکه خللی در کلّیت حاصل شود، می‌توان فرض‌کرد $\triangle ABC$ در دایرهٔ واحد محاط است. برای اجتناب از به‌کار بردن علامتهای دست‌وپاگیر ریشهٔ دوم، فرض می‌کنیم رأسهای A، B، C به‌ترتیب با اعداد مختلط $a^۲$، $b^۲$، $c^۲$ نمایش داده شوند.

نیمساز (داخلی) رأس A از وسط آن کمان $\widehat{BC}$ که شامل رأس A (در خود $\angle A$) نیست می‌گذرد، درصورتی که نیمساز خارجی رأس A از وسط آن کمان $\widehat{BC}$ که‌شامل رأس A (درخود $\angle A$) است می‌گذرد. نقطهٔ اخیر را نقطهٔ bc می‌نامیم. پس نقطهٔ اوّلی باید $-bc$ باشد. همین‌طور اگر وسط آن کمان $\widehat{CA}$ را که شامل رأس B (در خود $\angle B$) است، ca بگیریم، وسط آن کمان $\widehat{CA}$ که شامل رأس B (در خود $\angle B$) نیست، $-ab$ خواهد شد. (توجه کنید که همواره این‌کار، در صورت لزوم، با تغییر علامت(های) a، b، یا c میسر است. مثلاً فرض می‌کنیم A، B، C به‌طور پادساعتسو بر دایرهٔ واحد واقع باشند و نقطهٔ A در $z = ۱$ باشد. a، b، c را چنان اختیار می‌کنیم که $a = -۱$، $\pi < \arg b < ۰$ و $۰ < \arg c < -\pi$). بنابراین معادلات سه نیمساز (داخلی)

به‌ترتیب خواهند شد:

$$z - a^{2}bc\overline{z} = a^{2} - bc,$$
$$z - ab^{2}c\overline{z} = b^{2} - ca,$$
$$z - abc^{2}\overline{z} = c^{2} - ab,$$

از حل این دستگاه همزمان با انتخاب دو معادله از این سه معادله داریم

$$z = -(bc + ca + ab).$$

طبق معمول، چنانچه قرار دهیم

$$\sigma_{1} = a + b + c, \qquad \sigma_{2} = bc + ca + ab, \qquad \sigma_{3} = abc,$$

نقطهٔ تلاقی فوق $z = -\sigma_{2}$ خواهدشد. واضح است که این نقطه در معادلهٔ سوّم باقی‌مانده (بنابر تقارن) صدق خواهد کرد. پس نشان داده‌ایم که سه نیمساز داخلی یک مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند. این نقطهٔ تقاطع را مرکز درونی مثلث گویند.

امّا نقطهٔ $I\ :\ -\sigma_{2} = -bc - ca - ab$، نیز مرکز ارتفاعهای مثلثی است با رأسهای $-bc$ ، $-ca$ ، $-ab$. این مطلب از مقایسهٔ معادلهٔ نیمساز (داخلی) رأس A و معادلهٔ خطی که دونقطهٔ $-ab$ و $-ca$ را بهم وصل می‌کند یعنی:

$$z + a^{2}bc\overline{z} = -ca - ab.$$

روشن می‌شود. این امر برای دونیمساز دیگر نیز درست است.

مشاهدهٔ مشابه نشان می‌دهد که مراکز دوایر محاطی خارجی I_A، I_B، I_C مرکز ارتفاعات مثلثهایی به رأسهای:

$$-bc,\ ab,\ \ ca;$$
$$-ca,\ bc,\ \ ab;$$
$$-ab,\ ca,\ \ bc;$$

هستند. چون همهٔ این مثلثها محاط در دایرهٔ واحدند، داریم:

$$I_A \ : \ -bc+ab+ca$$
$$I_B \ : \ -ca+bc+ab$$
$$I_C \ : \ -ab+ca+bc$$

اکنون d، فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle ABC$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\sigma_2\right| \\ &= \frac{1}{2}|a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)| \\ &= \frac{1}{2}|(a+b+c)^2| = \frac{1}{2}\sigma_1\overline{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3} \end{aligned}$$

می‌دانیم که شعاع دایرهٔ نه‌نقطه $\frac{1}{2}$ است. r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را حساب می‌کنیم: معادلهٔ خط BC عبارت است از:

$$z+b^2c^2\overline{z}=b^2+c^2$$

و لذا معادلهٔ عمود مرسوم از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $I(-\sigma_2)$ برضلع BC چنین است

$$z-b^2c^2\overline{z}=-\sigma_2+b^2c^2\overline{\sigma}_2=-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}$$

پس پای این عمود با

$$z=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}\right)$$

داده می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی عبارت است از

$$\begin{aligned} r &= \left|\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}\right)+\sigma_2\right| \\ &= \frac{1}{2}|a(b^2+c^2)+a\sigma_2+bc\sigma_1| \\ &= \frac{1}{2}|\sigma_1\sigma_2-\sigma_3| \\ &= \left|\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3}-\frac{1}{2}\right| = \left|d-\frac{1}{2}\right| \end{aligned}$$

که در آن از واقعیت $|\sigma_۳| = ۱ = |a|$ استفاده شده‌است. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که: $d \leq \frac{۱}{۲}$، بنابراین داریم:

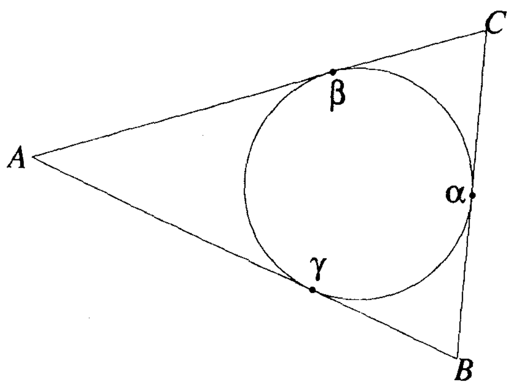
$$d = \frac{۱}{۲} - r \quad \text{یعنی} \quad r = \frac{۱}{۲} - d$$

که نشان می‌دهد دایرهٔ نه‌نقطه و دایرهٔ محاطی داخلی مماس داخل‌اند.

برای اینکه ثابت کنیم دایرهٔ نه‌نقطه بر دایرهٔ محاطی خارجی I_A مماس است، فقط باید به‌جای a، $-a$ قرار دهیم و استدلال بالا را تکرار کنیم. ■

برهان دیگر. در برهانی که در کتاب پ. ج. دیویس تحت عنوان، تابع شوارتز و کاربردهای آن[1] آمده است، دایرهٔ واحد، نه به‌عنوان دایرهٔ محیطی، بلکه به‌عنوان دایرهٔ محاطی داخلی $\triangle ABC$ گرفته شده است. فرض می‌کنیم نقاط تماس اضلاع BC، CA، و AB با دایرهٔ واحد به‌ترتیب α، β، و γ باشند. پس معادلات این سه‌ضلع چنین هستند

$$z + \alpha^۲\overline{z} = ۲\alpha, \quad z + \beta^۲\overline{z} = ۲\beta, \quad z + \gamma^۲\overline{z} = ۲\gamma$$



شکل ۲.۲۰

از حل این دستگاههای معادلات همزمان دو به دو، رأسهای A، B، و C با اعداد مختلط زیر مشخص می‌شوند.

$$A : \frac{۲\beta\gamma}{\beta + \gamma}, \quad B : \frac{۲\gamma\alpha}{\gamma + \alpha}, \quad C : \frac{۲\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

1. *The Schwarz Function and its Applications*, P. J. Davis, M.A.A. Washington, D.C., 1974, pp. 16-18.

از این رو نقطهٔ L وسط ضلع BC خواهد شد

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)&=\frac{(۲\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)(\alpha\beta+\gamma\alpha)}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\\&=\frac{(\sigma_۲+\beta\gamma)(\sigma_۲-\beta\gamma)}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}=\frac{\sigma_۲^۲-(\beta\gamma)^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}\\&=\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}-\frac{\sigma_۳^۲}{\alpha^۲(\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳)}\end{aligned}$$

که در آن

$$\sigma_۱=\alpha+\beta+\gamma,\qquad \sigma_۲=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta,\qquad \sigma_۳=\alpha\beta\gamma$$

همین‌طور نقاط M، N وسطهای CA، AB عبارت‌اند از

$$M:\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}-\frac{\sigma_۳^۲}{\beta^۲(\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳)}\qquad N:\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}-\frac{\sigma_۳^۲}{\gamma^۲(\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳)}$$

فرض می‌کنیم K نقطه‌ای باشد که با $\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}$ نمایش داده شده است، بنابراین واضح است که

$$\overline{KL}=\overline{KM}=\overline{KN}=\frac{۱}{|\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳|}$$

بنابراین K باید مرکز دایرهٔ نه‌نقطه باشد و شعاع آن $۱/|\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳|$ است. لذا معادلهٔ دایرهٔ نه‌نقطه چنین خواهد شد

$$\left|z-\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}\right|=\frac{۱}{|\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳|}$$

یعنی

$$\left(z-\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}\right)\left(\overline{z}-\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}\right)=\left(\frac{\sigma_۳^۲}{\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۳}\right)^۲$$

که در آن از روابط

$$\overline{\sigma}_۱=\frac{\sigma_۲}{\sigma_۳},\qquad \overline{\sigma}_۲=\frac{\sigma_۱}{\sigma_۳},\qquad \overline{\sigma}_۳=\frac{۱}{\sigma_۳}$$

استفاده شده است. از بسط رابطهٔ اخیر خواهیم داشت

$$z\overline{z} - \left(\frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} + \frac{\sigma_2^2 \overline{z}}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}\right) + \frac{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} = 0$$

از حل دستگاه معادلات همزمان متشکل از معادلهٔ اخیر (معادلهٔ دایرهٔ نه‌نقطه) و معادلهٔ دایرهٔ محاطی داخلی $z\overline{z} = 1$، خواهیم داشت

$$\sigma_1^2 z^2 - 2\sigma_1\sigma_2 z + \sigma_2^2 = 0;$$

یعنی

$$(\sigma_1 z - \sigma_2)^2 = 0$$

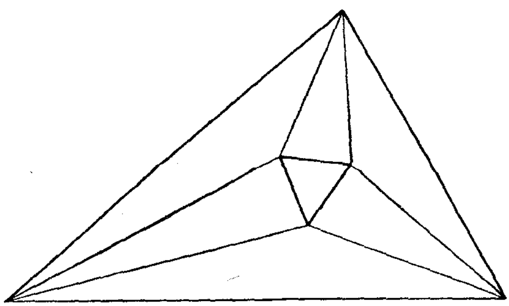
از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $\sigma_1 \neq 0$، دستگاه معادله‌های این دو دایره، ریشهٔ مضاعف خواهد داشت، که می‌رساند این دو دایره برهم مماس‌اند. اگر $\sigma_1 = 0$، مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع (تمرین ۳۵.۱) و دایره‌های نه‌نقطه و محاطی داخلی برهم منطبق می‌شوند.

محاسبهٔ بالا، بدون تغییر، معتبر است، حتّی اگر دو تا از نقاط α، β، و γ در امتداد اضلاع مربوطه قرار داشته باشند (یعنی دایرهٔ واحد، دایرهٔ محاطی خارجی باشد) بدین‌ترتیب برهان، کامل می‌شود.■

۹.۲ قضیهٔ مورلی

قضیهٔ زیر را فرانک مورلی (۱۸۶۰_۱۹۳۴) در اوایل این سده کشف کرده و مطمئناً یکی از زیباترین قضایای ریاضی است.

قضیهٔ ۱.۹.۲. (مورلی). نقاط تلاقی خطوط مجاور به هر ضلع از خطوطی که هر زاویهٔ مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.



شکل ۲۱.۲

پیش از شروع به اثبات این قضیه به لم زیر نیاز داریم:

لم ۲.۹.۲. فرض کنید t_1، t_2، t_3، t_4 چهار نقطه بر دایرهٔ نه‌نقطه باشند. پس (امتداد) وترهای واصل بین نقاط t_1، t_2 و نیز t_3، t_4 در نقطهٔ

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4}$$

یکدیگر را قطع می‌کنند.

برهان. می‌دانیم معادلات خطوطی که از نقاط t_1 و t_2 و نیز از نقاط t_3 و t_4 می‌گذرند به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$z + t_1t_2\bar{z} = t_1 + t_2, \qquad z + t_3t_4\bar{z} = t_3 + t_4$$

پس فصل مشترک این دو خط نقطهٔ زیر خواهد شد

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4} \qquad \blacksquare$$

برهان قضیه. بی‌آنکه خللی در کلیت وارد آید، می‌توان فرض کرد که $\triangle ABC$ در دایرهٔ واحد محاط شده و رأس A از آن در نقطهٔ ۱ است. فرض می‌کنیم

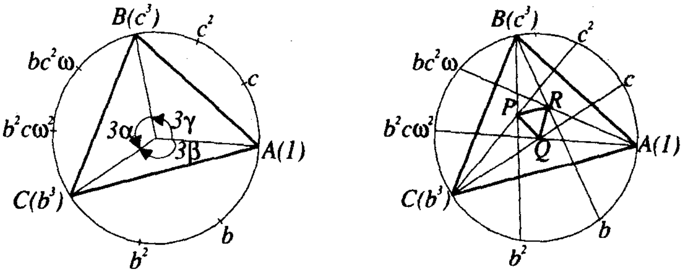
$$\begin{aligned}
\angle AOB &= 3\gamma \qquad \left(0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}\right),\\
\angle AOC &= 3\beta \qquad \left(-\frac{2\pi}{3} < \beta < 0\right),\\
\angle BOC &= 3\alpha \qquad \left(\alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0\right).
\end{aligned}$$

پس شناسه‌هایی که کمان $\overset{\frown}{BC}$ را (که حاوی نقطهٔ A نیست) به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند عبارت‌اند از

$$\alpha + 3\gamma = \beta + 2\gamma + \frac{2\pi}{3}$$

و

$$2\alpha + 3\gamma = 2\beta + \gamma + \frac{4\pi}{3}$$



شکل ۲۲.۲

بنابراین اگر نقاطی که $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند به‌ترتیب c، c^2 و نیز b، b^2 بگیریم، مقادیر نقاط B، C، c^3 و b^3 خواهند شد، و نقاطی که $\widehat{BC}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند با $bc^2\omega$ و $b^2c\omega^2$ (که در آن $\omega^2+\omega+1=0$) مشخص می‌شوند.

فرض می‌کنیم $P(\lambda)$، $Q(\mu)$، $R(\nu)$ به‌ترتیب نقاط تلاقی ثلث‌سازهای زوایای B و C، C و A، A و B باشند. پس بنابر لم فوق

$$\lambda = \frac{b^{-2}+c^{-3}-b^{-3}-c^{-2}}{b^{-2}c^{-3}-b^{-3}c^{-2}} = \frac{bc^3+b^3-c^3-b^3c}{b-c}$$

$$= \frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)-bc(b^2-c^2)}{b-c} = (b^2+bc+c^2)-bc(b+c)$$

$$\mu = \frac{1+b^{-2}c^{-1}\omega^{-2}-b^{-3}-c^{-1}}{b^{-2}c^{-1}\omega^{-2}-b^{-3}c^{-1}} = \frac{b^3c+b\omega-c-b^3}{b\omega-1}$$

$$= \frac{c(b^3-1)-b(b^2-\omega)}{\omega(b-\omega^2)} = \omega^2\{c(b^2+b\omega^2+\omega)-b(b+\omega^2)\},$$

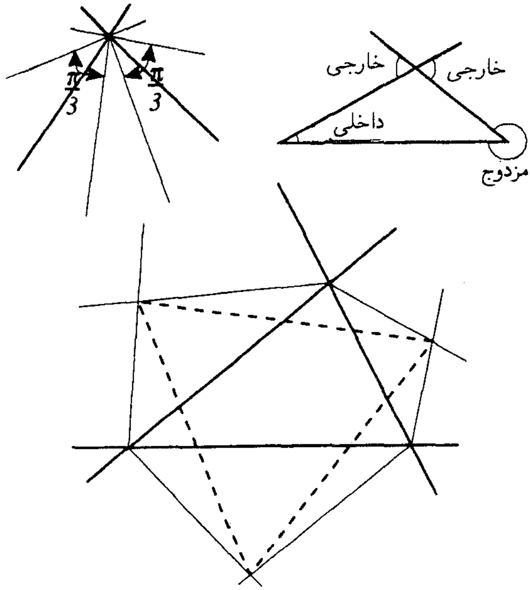
$$\nu = \frac{1+b^{-1}c^{-2}\omega^{-1}-b^{-1}-c^{-3}}{b^{-1}c^{-2}\omega^{-1}-b^{-1}c^{-3}} = \frac{bc^3+c\omega^2-c^3-b}{c\omega^2-1}$$

$$= \frac{b(c^3-1)-c(c^2-\omega^2)}{\omega^2(c-\omega)} = \omega\{b(c^2+c\omega+\omega^2)-c(c+\omega)\}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lambda+\omega\mu+\omega^2\nu &= b^2+bc+c^2-b^2c-bc^2\\ &\quad +b^2c+bc\omega^2+c\omega-b^2-b\omega^2\\ &\quad +bc^2+bc\omega+b\omega^2-c^2-c\omega\\ &=0,\end{aligned}$$

و بنابراین به آنچه که می‌خواستیم دست یافتیم.

به‌خوبی می‌دانیم که اگر به‌جای ثلث‌سازهای زوایای داخلی، ثلث‌سازهای زوایای خارجی گذاشته شوند، قضیه مورلی بازهم معتبر می‌ماند. چگونه می‌توان برهان قضیه را تغییر داد تا شامل این حالت شود؟ بدین‌منظور ابتدا ملاحظه می‌کنیم که ثلث‌سازهای داخلی و خارجی یک زاویه، با هم زاویه $\pi/3$ می‌سازند. چون زاویهٔ مرکزی دو برابر زاویهٔ محاطی است، نقطهٔ P (که فصل مشترک



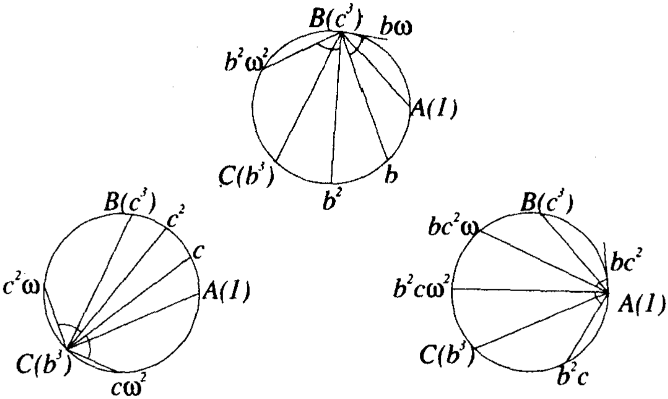
شکل۲.۲۳

خطوط مارّ بر نقاط b^3، c^2 و c^3، b^2 است) فصل مشترک خطوط مار بر نقاط b^3، $c^2\omega$ و c^3، $b^2\omega^2$ می‌شود؛ نقطهٔ Q (که فصل مشترک خطوط مار بر نقاط b^3، c و ۱ ، $b^2c\omega^2$ است) فصل مشترک خطوط مار بر نقاط b^3، $c\omega^2$ و ۱، b^2c می‌شود؛ در صورتی که نقطهٔ R (که فصل مشترک خطوط مار بر نقاط c^3، b و ۱، $bc^2\omega$ است) فصل مشترک خطوط مار بر زوج نقاط c^3، $b\omega$ و ۱، bc^2 خواهد شد.

امّا این امر برابر است با گذاردن $b\omega$ به‌جای b و $c\omega^2$ به‌جای c در برهان اولیه، و روشن است که با این تبدیل، محاسبهٔ اولیه معتبر خواهد ماند! از این رو، حالت ثلث‌سازهای زوایای خارجی بدون زحمت اضافی ثابت می‌شود.

امّا آیا تبدیلهای دیگری نیز وجود دارند؟ برای پی‌گیری این پرسش تبدیلهای:

$$T_b(b) = b\omega, \quad T_b(c) = c; \qquad T_c(b) = b, \quad T_c(c) = c\omega;$$



شکل۲۴.۲

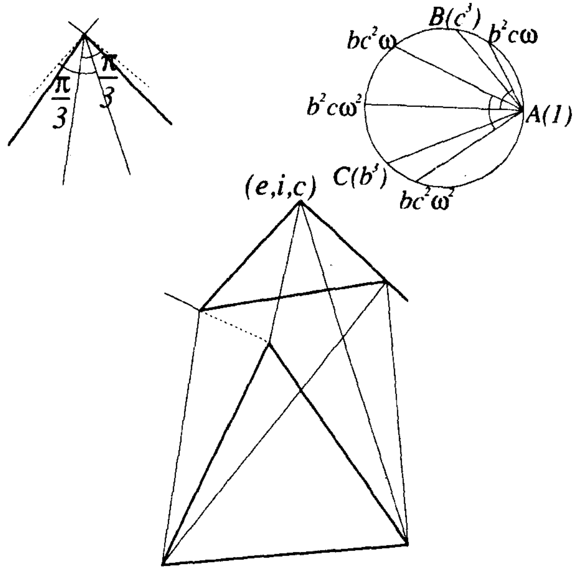
را وارد می‌کنیم. یعنی T_b، b را به $b\omega$ بدل می‌کند ولی c را بدون تغییر نگه می‌دارد. در صورتی‌که T_c، b را تغییر نمی‌دهد و c را به $c\omega$ بدل می‌کند. به‌عنوان مثال.

$$T_bT_c^2(b)=b\omega,\qquad T_bT_c^2(c)=c\omega^2$$

از این رو در حالت ثلث‌سازهای زوایای خارجی، صرفاً با استفاده از تبدیل $T_bT_c^2(=T_c^2T_b)$، نتیجه حاصل می‌شود. ولی روشن است که برهان اولیه، تحت تبدیلهای دیگر مثلاً $T_b^2T_c(=T_cT_b^2)$، نیز معتبر است. معنی هندسی استفاده از تبدیل $T_b^2T_c$، یعنی گذاشتن $b\omega^2$ به‌جای b و $c\omega$ به‌جای c، چیست؟ به‌آسانی دیده می‌شود که این عمل دقیقاً عمل تعویض همهٔ ثلث‌سازهای زاویه‌های داخلی با مزدوج آنهاست. از این رو قضیهٔ مورلی در این حالت نیز درست است.

چون $T_c^3 =$ تبدیل همانی $= T_b^3$، ۹ حالت زیر حاصل می‌شود که در آن مثلاً (i,e,c)، معرّف گرفتن ثلث‌سازهای داخلی، خارجی و مزدوج رأسهای A،B،C به‌ترتیب است.

	I	T_b	T_b^2
I	(i,i,i)	(c,e,i)	(e,c,i)
T_c	(e,i,c)	(i,e,c)	(c,c,c)
T_c^2	(c,i,e)	(e,e,e)	(i,c,e)



شکل ۲۵.۲

درعمل می‌توان، کار دیگری کرد. در ۹ حالت بالا، هر یک از سه رأس مثلث را ثابت نگه‌داشته‌ایم، ولی آنچه را که نیاز داریم، ثابت نگاه نداشتن خود مثلث است. لذا تبدیل S را وارد می‌کنیم.

$$S(b) = c, \qquad S(c) = b.$$

به عبارت دیگر، S نقشهای b و c را با هم عوض می‌کند. تبدیل S ممکن است هیچ اثری روی ثلث‌سازهای رأسهای B و C نداشته باشد (فقط نقشها را عوض می‌کند) ولی ثلث‌سازهای زاویهٔ داخلی رأس A را با مزدوج ثلث‌سازهای زاویه در رأس A عوض می‌کند. چون $S^۲$ تبدیل همانی است، دوباره ۹ حالت خواهیم داشت که در جدول زیر آمده است.

S	I	T_b	$T_b^۲$
I	(c,i,i)	(i,i,c)	(e,i,e)
T_c	(e,e,i)	(c,e,c)	(i,e,e)
$T_c^۲$	(i,c,i)	(e,c,c)	(c,c,e)

مثلاً

$$ST_b(b) = c\omega, \qquad ST_b(c) = b;$$
$$ST_b^2T_c(b) = c\omega^2, \qquad ST_b^2T_c(c) = b\omega,$$

که به‌ترتیب به نوعهای (i, i, c) و (i, e, e) منجر می‌شود.

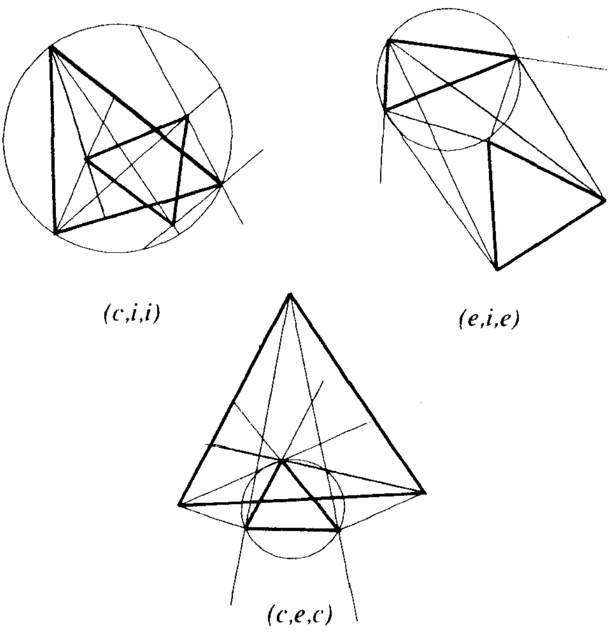
به‌طور خلاصه داریم:

۱) یک جایگشت برای هر یک از (i, i, i)، (e, e, e)، (c, c, c)؛

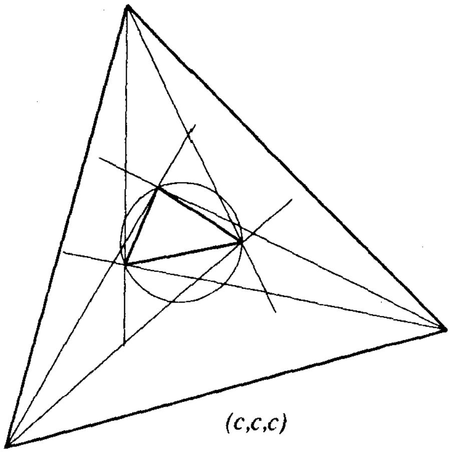
۲) شش جایگشت از (i, e, c)؛

۳) سه جایگشت برای هر یک از (i, e, e)، (e, c, c)، (c, i, i)؛

پس کلاً ۱۸ مثلث متساوی‌الاضلاع داریم با ۷ نوع مختلف؛



شکل ۲.۲۶



(c,c,c)

شکل۲.۲۷

حالتهایی مانند (i,c,c)، (e,i,i)، (c,e,e) که آورده نشده‌اند مثلثهای متساوی‌الاضلاع نمی‌دهند.

شایان ذکر است که برای رسم این ۱۸ مثلث متساوی‌الاضلاع لازم است ۱۸ ثلث‌ساز زاویه رسم شود و هر یک از این ۱۸ ثلث‌ساز دقیقاً از ۳ رأس (از ۱۸ مثلث متساوی‌الاضلاع) می‌گذرد، و هر یک از این ۲۷ رأس دقیقاً دو بار مورد استفاده واقع شود.

تمرینها

۱. الف) بر هر یک از اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه و در خارج آن یک مربع رسم می‌کنیم. نشان دهید دو پاره خطّی که مراکز دو مربع متقابل را به‌هم وصل می‌کنند بر یکدیگر عمودند و طولهای آنها برابرند.

ب) حالتی را که این مربعها در داخل چهارضلعی رسم می‌شوند مورد بحث قرار دهید.

ج) چنانچه یکی از اضلاع چهارضلعی به یک نقطه بدل شود چه خواهد شد؟

۲. الف) بر هر یک از اضلاع یک متوازی‌الاضلاع دلخواه و در خارج آن یک مربع بنا می‌کنیم. نشان دهید که مراکز این مربعها خود رئوس یک مربع هستند.

ب) اگر این مربعها در داخل متوازی‌الاضلاع بنا شوند، چه پیش می‌آید؟

۳. الف) فرض می‌کنیم ثابتهای $a,b\in\mathbb{C}$ و $a\neq ۰$ وجود دارند که در تساوی

$$w_k = az_k + b \qquad (k=۱,۲,۳)$$

صدق می‌کنند. نشان دهید که $\triangle w_1w_2w_3 \sim \triangle z_1z_2z_3$.

ب) آیا عکس مطلب هم صحیح است؟

ج) از لحاظ هندسی شرط مذکور را تعبیر کنید.

۴. الف) نشان دهید که شرط لازم وکافی برای برقراری $\triangle w_1w_2w_3 \sim \triangle z_1z_2z_3$ وجود مقادیری مانند $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ است که همه همزمان صفر نیستند و

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0, \quad \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

ب) اگر نسبت $\triangle w_1w_2w_3 \sim \triangle z_1z_2z_3$ برقرار باشد چه می‌شود؟

ج) فرض می‌کنیم ۴ نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4 در رابطهٔ

$$z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 = 0$$

صدق کنند. دربارهٔ چهارضلعی $z_1z_2z_3z_4$ چه می‌توان گفت؟

۵. الف) (و. ه. اِکلز)[1] فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ مثلثهای متساوی‌الاضلاع همجهت باشند. نشان دهید که اوساط پاره‌خطهای AA'، BB'، CC' رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

ب) چنانچه به‌جای وسطهای پاره‌خطهای قسمت (الف) نقاطی را که AA'، BB'، CC' را به نسبت عدد ثابتی مثل $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌نماید، بگذاریم چه خواهد شد؟

ج) اگر به‌جای متساوی‌الاضلاع بودن، تشابه $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ را قرار دهیم چه پیش می‌آید؟

۶. الف) (و. ه. اِکلز) فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و $\triangle GHI$ متساوی‌الاضلاع و همجهت باشند. اگر P، Q، R را به‌ترتیب مرکزوارهای $\triangle ADG$ و $\triangle BEH$ و $\triangle CFI$ بگیریم. نشان دهید $\triangle PQR$ متساوی‌الاضلاع است.

ب) اگر به‌جای «متساوی‌الاضلاع» در (الف) «متشابه» قرار دهیم چه پیش می‌آید؟

ج) اگر به‌جای مرکزوارهای مثلثها، نقاطِ با مختصاتِ گرانیگاهیِ این مثلثها را بگذاریم چه خواهد شد؟

۷. (ژ. پترسن ـ پ. ه. اسکوت) فرض می‌کنیم

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \quad \text{و} \quad \triangle AA_1A_2 \sim \triangle BB_1B_2 \sim \triangle CC_1C_2$$

نشان دهید:

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$$

1. W. H. Echols

۸. فرض می‌کنیم A' و B' و C' نقاطی بر اضلاع BC، CA، AB از مثلث ABC باشند که این اضلاع را به نسبت ثابت m/n تقسیم کند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای برقراری

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

این است که یا $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع باشد (که در این صورت m/n دلخواه است) یا $m : n = ۱ : ۱$ (که در این صورت شکل $\triangle ABC$ دلخواه است).

۹. مثلث ABC مفروض است. بر اضلاع AB و AC به‌ترتیب مربعهای $ABDE$ و $ACFG$ را در خارج آن رسم می‌کنیم:

الف) M را وسط ضلع سوم BC می‌گیریم. نشان دهید که

$$\overline{EG} = ۲\overline{AM} \quad \text{و} \quad EG \perp AM$$

ب) H را پای عمود وارد از رأس A بر ضلع BC می‌گیریم. نشان دهید که امتداد AH، از وسط EG می‌گذرد.

۱۰. بر اضلاع AB و BC از متوازی‌الاضلاع دلخواه $ABCD$ و در خارج آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع AEB و BFC ساخته شده‌اند. نشان دهید $\triangle DEF$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۱. بر هریک از دو ضلع مقابل یک چهارضلعی دلخواه و در خارج آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم، و بر هر یک از دو ضلع مقابل دیگر این چهار ضلعی و در داخل آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌کشیم. نشان دهید چهار رأس جدید، رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۱۲. الف) نشان دهید که در قضیهٔ ناپلئون، اگر به‌جای «مثلثهای متساوی‌الاضلاع خارجی»، «مثلثهای متساوی‌الاضلاع داخلی» بگذاریم باز هم قضیه متغییر است.

ب) نشان دهید که مرکزوارهای داخلی و خارجی مثلثهای ناپلئون یکی هستند.

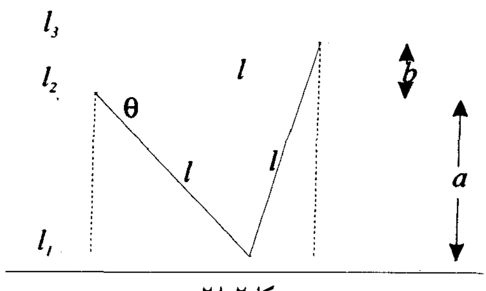
۱۳. الف) بر اضلاع یک مثلث دلخواه، مثلثهای متساوی‌الاضلاع طوری بسازید که دو تای آنها خارجی باشند و دیگری داخلی باشد. نشان دهید که مرکزوار مثلث داخلی با دو مرکزوار مثلثهای خارجی یک مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویهٔ $۲\pi/۳$ تشکیل می‌دهند.

ب) نشان دهید که اگر نقش داخلی و خارجی را در (الف) با هم عوض نمائیم، نتیجه همچنان معتبر خواهد ماند.

۱۴. الف) بر اضلاع یک مثلث دلخواه ABC و در خارج آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع LBC و MCA و NAB را بنا می‌کنیم. نشان دهید که LA و MB و NC، یک طول دارند، در یک نقطه متقارب‌اند و زاویهٔ بین آنها در این نقطهٔ تلاقی برابر $۲\pi/۳$ است.

ب) اگر مثلثهای متساوی‌الاضلاع داخلی باشند چه می‌شود؟

۱۵. الف) مثلثی رسم کنید که سه نقطهٔ مفروض، مرکز مربعهایی باشند که بر روی اضلاع آن و در خارج آن ساخته می‌شوند.
ب) مثلثی رسم کنید که سه نقطهٔ مفروض رأسهای سوم مثلثهای متساوی‌الاضلاعهایی باشند که بر اضلاع آن و در خارج آن ساخته می‌شوند.
۱۶. الف) بر اضلاع $\triangle A_1A_2A_3$ مثلثهای متشابه: $P_1A_3A_2$ و $A_3P_2A_1$ و $A_2A_1P_3$ را می‌سازیم و فرض می‌کنیم G_1 و G_2 و G_3 مرکزوارهای آن مثلثهای متشابه باشند. نشان دهید $\triangle G_1G_2G_3$ چهارمین مثلث متشابه را تشکیل می‌دهد. این قضیه تعمیم قضیهٔ ناپلئون است. درواقع با قرار دادن «نقاط با مختصاتِ گرانیگاهی در مثلثهای مشابه مربوط» به‌جای «مرکزوارها»، (توجه کنید که از ترتیبی که رأسهای مثلثهای مشابه را نام گذاردیم، رأسهای P_1 و P_2 و P_3، رأسهای متناظر این مثلثهای متشابه نیستند) می‌توان قضیه را بیشتر تعمیم داد.
ب) فرض کنید $\triangle Q_1A_3A_2$ و $\triangle A_3Q_2A_1$ و $\triangle A_2A_1Q_3$ قرینه‌های سه مثلث متشابه در (الف) به‌ترتیب نسبت به A_2A_3، A_3A_1، و A_1A_2 و G'_1 و G'_2 و G'_3 مرکزوارهای این مثلثهای متشابه باشند. نشان دهید که فقط و فقط هنگامی مرکزوارهای $\triangle G_1G_2G_3$ و $\triangle G'_1G'_2G'_3$ بر هم منطبق‌اند که $\triangle P_1A_3A_2$ و $\triangle Q_1A_3A_2$ و غیره مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند.
۱۷. در صفحهٔ xoy یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی را در $(\circ, a)$ ثابت نگهمیداریم و رأس دیگر (x, y) آن را در طول محور xها حرکت می‌دهیم. نشان دهید که مکان هندسی رأس سوم (x, y) دو خط مستقیم به‌معادلات $y + a = \pm\sqrt{3}x$ هستند.
۱۸. دو خط ℓ و m و نقطهٔ A که بر هیچ یک‌از این دو خط واقع نیست مفروض‌اند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بسازید به‌طوری که رأس B بر خط ℓ واقع باشد و رأس C بر خط m. مسأله چند جواب دارد؟
۱۹. یکی از دو راه حل زیرین در مورد مثال انتهای بخش ۱.۲ غلط است. این راه حل کدام است؟ دلیل خود را بیان کنید.
الف) **راه حل مثلثاتی**: قراردادهای شکل ۲۸.۲ را وارد می‌کنیم. پس



شکل ۲۸.۲

$$
\begin{aligned}
a &= \ell \sin\theta, \\
b &= \ell \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\cos\theta - \frac{a}{2}. \\
\therefore\ \ell\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b) \\
\therefore\ \ell^2 &= a^2 + \frac{1}{3}(a+2b)^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2) \\
\text{مساحت} &= \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}
$$

ب) **راه حل ماهرانه.** فرض می‌کنیم $f(a,b)$ مساحت مطلوب باشد. رعایت ابعاد، به ما اجازه می‌دهد بنویسیم:

$$f(a,b) = pa^2 + qab + rb^2$$

که در آن p و q و r ضرائبی هستند که باید تعیین شوند. اگر ℓ_2 و ℓ_3 بر هم منطبق باشند، آنگاه $b = 0$، و داریم:

$$f(a,0) = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ p = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

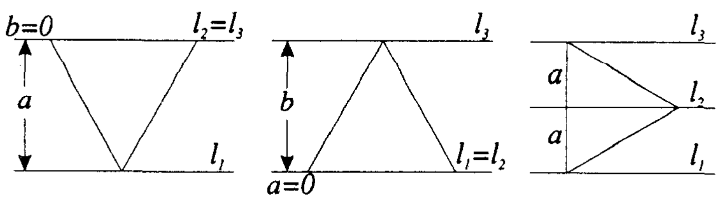
و به موجب تقارن، داریم $r = p = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

اگر $a = b$، آنگاه

$$f(a,a) = \sqrt{3}a^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + q\right)a^2 \qquad \therefore\ q = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

بنابراین

$$f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a^2 + ab + b^2).$$



شکل ۲.۲۹

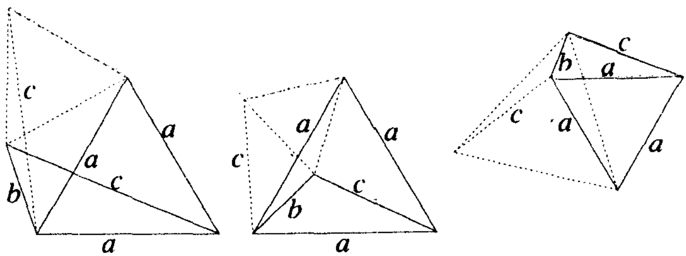
۲۰. الف) سه دایرهٔ متحدالمرکز مفروض‌اند. مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازید که هر رأس آن بر یکی از این سه دایره واقع باشد. مسأله چند جواب دارد؟

ب) مساحت این مثلثهای متساوی‌الاضلاع را برحسب شعاعهای این دوایر متحدالمرکز پیدا کنید.

راهنمایی: فرض کنید $|z| = a$، $|z| = b$، $|z| = c$ این سه دایرهٔ متحدالمرکز باشند. یک رأس را در $z = a$ ثابت بگیرید، رأس دیگر را $z = be^{i\theta}$ فرض کنید. پس رأس سوّم z «باید» در معادلهٔ

$$z + be^{i\theta}\omega + a\omega^{۲} = ۰ \qquad \text{یعنی} \qquad z = -\omega(a\omega + be^{i\theta})$$

صدق کند. اگر $|z| = c$، خواهیم داشت $a^{۲} - ۲ab\cos(\theta + \frac{\pi}{۳}) + b^{۲} = c^{۲}$. معنی این تساوی این است که اگر مثلثی با سه‌ضلع a، b، و c بسازیم، زاویهٔ مقابل به ضلع با طول c برابر $\theta + \frac{\pi}{۳}$ خواهد بود. این نکته ما را به ترسیم زیر راهنمایی می‌کند (خواننده باید جزئیات کار را انجام دهد و دربارهٔ امکان ترسیم بحث کند.)



شکل ۲.۳۰

۲۱. از قضیهٔ بطلمیوس ۱.۲.۲ با محاط کردن یک ذوذنقه در یک دایره، قانون کسینوسها را استخراج کنید.

۲۲. الف) فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. به‌ازای هر نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ محیطی این مثلث، نشان دهید که طول بزرگترین پاره‌خط از پاره‌خطهای PA، PB، PC، برابر است با مجموع طولهای دوپاره خط دیگر.

ب) فرض می‌کنیم نقطهٔ P بر $\widehat{AD}$ از دایرهٔ محیطی مربع $ABCD$ باشد. نشان دهید

$$\overline{PB}\,(\,\overline{PB} + \overline{PD}\,) = \overline{PC}\,(\,\overline{PA} + \overline{PC}\,)$$

ج) $ABCDE$ را یک پنج ضلعی منتظم می‌گیریم. به‌ازای نقطهٔ دلخواه P واقع بر دایرهٔ

محیطی آن، نشان دهید که از میان پاره‌خطهای PA، PB، PC، PD، PE مجموع طولهای بزرگترین و دو پاره خط کوچکترین با مجموع دو طول باقیمانده برابر است.

۲۳. چهار نقطهٔ A و B و C و D بر دایره‌ای مفروض‌اند. نشان دهید که پاهای عمودهای مرسوم از A و B بر خط CD و پاهای عمودهای مرسوم از C و D بر خط AB همدایره‌اند.

۲۴. به ازای هر $a \neq 0$، نشان دهید که نقاط: a و $\overline{a}$- و $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{\overline{a}}$- و ۱ و ۱- همدایره‌اند.

۲۵. الف) چهار نقطهٔ A و B و C و D داده شده‌اند. A' و B' و C' و D' را به‌ترتیب مرکزوارهای مثلثهای BCD و ACD و ABD و ABC می‌گیریم. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه A' و B' و C' و D' همدایره باشند، این است که A و B و C و D همدایره باشند.

ب) اگر به‌جای «مرکزوارها»، «مراکز ارتفاعات» را بگذاریم چه خواهد شد؟ «مراکز دایره‌های نه‌نقطه» را چطور؟

۲۶. الف) مثلث $\triangle ABC$ و نقاط P و Q و R به‌ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB (بر امتداد آنها) مفروض‌اند. نشان دهید که دوایر محیطی $\triangle AQR$ و $\triangle BRP$ و $\triangle CPQ$ در یک نقطه متلاقی‌اند.

ب) چهارضلعی $ABCD$ و نقاط P و Q و R و S به‌ترتیب بر اضلاع AB و BC و CD و DA (بر امتداد آنها) داده شده‌اند، به‌طوری که این چهار نقطه همدایره‌اند. نشان دهید که چهار نقطهٔ تلاقی جدید دوایر محیطی مجاور $\triangle APS$ و $\triangle BQP$ و $\triangle CRQ$ و $\triangle DSR$ همدایره‌اند.

۲۷. الف) مثالی برای چهار دایره‌ای بیاورید که هر سه‌تای آنها متقارب باشند ولی هر چهارتای آنها متقارب نباشند.

ب) نشان دهید که اگر هر سه دایره از پنج دایره متقارب باشند، همهٔ این پنج دایره متقارب‌اند.

۲۸. D را نقطه‌ای دلخواه بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ و A' و B' و C' را محل تلاقی عمودهای وارد از D به‌ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB با دایرهٔ محیطی بگیرید. نشان دهید AA' و BB' و CC' با خط سیمسنِ نقطهٔ D نسبت به $\triangle ABC$ موازی‌اند.

۲۹. تحقیق کنید که معادلهٔ خط سیمسن خود ـ مزدوج است.

۳۰. (ی. اشتاینر) ثابت کنید که خط سیمسنِ یک نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، پاره خطی را که این نقطه را به‌مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ وصل می‌کند، نصف می‌کند. همچنین ثابت کنید که این نقطهٔ تلاقی بر دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle ABC$ قرار دارد.

۳۱. فرض می‌کنیم D نقطه‌ای دلخواه بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، و P و Q و R پاهای عمودهای مرسوم از D به‌ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB باشند. نشان دهید:

$$\text{قطر دایرهٔ محیطی مثلث} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{CA}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{QR}}$$

۳۲. یک چهار ضلعی محاط در دایره‌ای داده شده است. نشان دهید که چهار خط سیمسنِ یک

رأس نسبت به مثلثی که از سه رأس دیگر تشکیل می‌شود، متقارب‌اند و نقطهٔ تقارب مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ این چهار ضلعی است.

۳۳. نشان دهید که خطوط سیمسنِ هر دو نقطهٔ متقاطر واقع بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ بر یکدیگر عمودند و نقطهٔ تلاقی آنها بر دایرهٔ نه‌نقطهٔ $\triangle ABC$ واقع است.

۳۴. فرض کنید D نقطه‌ای بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ باشد، و EF وتری عمود بر خط سیمسنِ D نسبت به $\triangle ABC$ باشد. نشان دهید خطوط سیمسنِ نقاط D و E و F نسبت به $\triangle ABC$ متقارب‌اند.

۳۵. $\triangle ABC$ و نقطهٔ D داده شده‌اند. فرض می‌کنیم L و M و N به‌ترتیب قرینه‌های نقطهٔ D نسبت به اضلاع BC و CA و AB باشند. نشان دهید شرط لازم و کافی برای این‌که نقاط L و M و N همخط باشند، این است که D بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد. در این حالت خطی که از نقاط L و M و N می‌گذرد از نقطهٔ H مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ نیز می‌گذرد و با خط سیمسنِ D نسبت به $\triangle ABC$ موازی است.

راهنمایی: $\triangle LBC \sim \triangle DBC$ (درجهت عکس).

۳۶. (م. ب. کانتور) n نقطه بر یک دایره داده شده‌اند. از مرکزوارهای $n-۲$ تا از این n نقطه، عمودهایی بر خطوط واصل بین دو نقطهٔ باقیمانده رسم می‌کنیم. نشان دهید که این $\binom{n}{۲}$ عمود متقارب‌اند.

۳۷. $\triangle ABC$ با $\angle ABC = \frac{۲\pi}{۳}$ داده شده است. A' و B' و C' را فصل مشترکهای نیمسازهای رئوس A و B و C با اضلاع مقابل می‌گیریم. نشان دهید $\angle A'B'C' = \frac{\pi}{۲}$.

۳۸. R و r را به‌ترتیب شعاعهای دوایر محیطی و محاطی داخلی $\triangle ABC$ می‌گیریم. اگر d فاصلهٔ بین مراکز این دو دایره باشد، نشان دهید:

$$d^{۲} = R(R-۲r)$$

در نتیجه، $R \geq ۲r$.

۳۹. کوچکترین گروهی را بیابید که شامل تبدیلهای T_b و T_c و S در برهان قضیهٔ مورلی ۱.۹.۲ باشد. این گروه چند عضو دارد؟

۴۰. الف) (ب. پاسکال) فرض می‌کنیم A و B و C و D و E و F شش نقطه بر یک دایره‌اند، و P و Q و R به‌ترتیب فصل مشترکهای (امتدادهای) «اضلاع متقابل» AB و DE، BC و EF، CD و FA باشند. نشان دهید که نقاط P و Q و R همخط‌اند. این خط را خط پاسکال شش نقطهٔ A و B و C و D و E و F گویند.

ب) چون حرف‌گذاری شش نقطه را می‌توان با هر ترتیبی انجام داد، با تغییر حرف‌گذاری، خط پاسکال متفاوتی (هر بار برای یک شش نقطه) به‌دست می‌آید. چند تا خط پاسکال برای این شش نقطهٔ واقع بر یک دایره می‌توانند وجود داشته باشند؟

۴۱. الف) $\triangle ABC$ مثلثی دلخواه و P و Q و R فصل مشترکهای خطوط مماس بر دایرهٔ محیطی در رئوس با امتدادهای اضلاع متقابل مربوطه هستند. نشان دهید نقاط P و Q و R همخط‌اند.

ب) گیریم $ABCD$ یک چهارضلعی محاط در دایره و P و Q به‌ترتیب فصل مشترکهای (امتدادهای) AB و CD، AC و BD باشند، و فرض می‌کنیم R و S به‌ترتیب فصل مشترکهای خطوط مماس بر دایرهٔ محیطی در A و D و نیز در B و C باشند. نشان دهید که نقاط P و Q و R و S همخط‌اند.

ج) نقطه‌ای بر یک دایره داده شده است. فقط بااستفاده از ستاره، مماسی در این نقطه بر دایره رسم کنید.

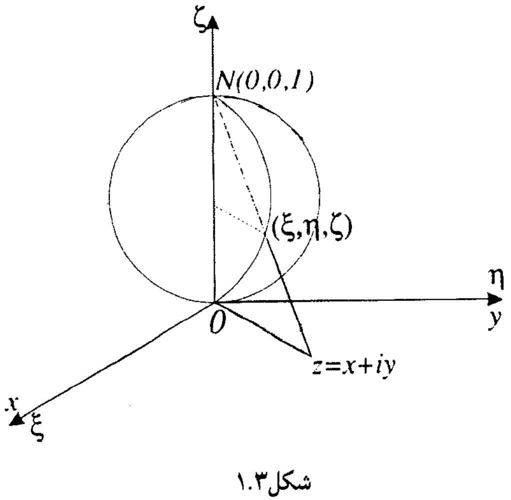
۳

تبدیلهای موبیوس

۱.۳ تصویر گنجنگاشتی

تاکنون اعداد مختلط را با نقاط یک صفحه نمایش داده‌ایم. ولی اغلب نیاز داریم که آنها را به‌صورت نقاط واقع بر یک کره هم درنظر بگیریم.

کره‌ای به‌قطر واحد، مماس بر صفحهٔ مختلط در مبدأ مختصات را درنظر می‌گیریم. معادلهٔ این کره در دستگاه مختصات متعامد (ξ, η, ζ)



شکل ۱.۳

به‌صورت

$$\xi^۲ + \eta^۲ + \left(\zeta - \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$$

خواهد بود. به‌ازای هر نقطهٔ $z = x + iy$ در صفحهٔ مختلط، پاره‌خطّی که قطب شمال $(۰, ۰, ۱)$ را به این نقطه وصل می‌کند، کره را در نقطهٔ یکتایی (غیر از قطب شمال) قطع می‌کند. به‌عکس به‌ازای هر نقطهٔ واقع بر کره، غیر از قطب شمال، امتداد پاره‌خطّ واصل بین این نقطه و قطب شمال، صفحهٔ مختلط را در نقطهٔ یکتایی می‌بَرَد. بدین‌ترتیب یک تناظر یک به یک بین صفحهٔ مختلط و کرهٔ ریمان که قطب شمال آن حذف شده است، به‌وجود می‌آید. برای برداشتن این استثنا، یک نقطهٔ آرمانی به‌نام نقطهٔ بینهایت را (که با ∞ نشان داده می‌شود)، متناظر با قطب شمال N، به صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ اضافه می‌کنیم. این صفحهٔ مختلطِ توسیع یافته را با $\hat{\mathbb{C}}$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

فرض می‌کنیم $z = x + iy \in \mathbb{C}$، متناظر با نقطهٔ (ξ, η, ζ) از کرهٔ ریمان باشد، پس با درنظر گرفتن مثلثهای متشابه داریم:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{۱}{۱ - \zeta} \qquad \therefore\ x = \frac{\xi}{۱ - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{۱ - \zeta}$$

یعنی:

$$z = \frac{\xi + i\eta}{۱ - \zeta}, \qquad x^۲ + y^۲ = \frac{\zeta}{۱ - \zeta}$$

به‌عکس اگر ξ، η، ζ را برحسب x و y و z پیدا کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{۱ + |z|^۲} = \frac{z + \overline{z}}{۲(۱ + |z|^۲)} \\ \eta &= \frac{y}{۱ + |z|^۲} = \frac{z - \overline{z}}{۲i(۱ + |z|^۲)} \\ \zeta &= \frac{|z|^۲}{۱ + |z|^۲} \end{aligned}$$

برای یافتن نگارهٔ یک دایره (یا یک خط) از صفحه بر کرهٔ ریمان، این روابط را در معادلهٔ یک دایره (یک خط اگر $A = ۰$) از صفحه، یعنی:

$$A(x^۲ + y^۲) + Bx + Cy + D = ۰$$

قرار می‌دهیم (که در آن A ، B ، C ، $D \in \mathbb{R}$ و $B^۲ + C^۲ \geq ۴AD$)، تا معادلهٔ خطی زیر به‌دست آید

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(۱ - \zeta) = ۰$$

باید توجّه داشت که شرط تقاطع این صفحه با کرهٔ ریمان، برقراری رابطهٔ:

$$\left|\frac{\frac{۱}{۲}(A-D)+D}{\sqrt{B^۲+C^۲+(A-D)^۲}}\right| \leq \frac{۱}{۲}$$

است که دقیقاً همان شرط $B^۲ + C^۲ \leq ۴AD$ و مبیّن آن است که معادلهٔ اصلی در صفحهٔ مختلط، واقعاً معادلهٔ یک دایره است. به‌علاوه اگر $A = ۰$، قطب شمال $(۰, ۰, ۱)$ در معادلهٔ یک صفحه صدق می‌کند. چون فصل مشترک یک صفحه با کره یک دایره است، نیمهٔ اوّل قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید:

قضیهٔ ۳.۱.۱. دوایر و خطوط واقع در صفحه، بر دوایر کره نگاشته می‌شوند. خطوط مستقیم، بر دوایر مارّ بر قطب شمال نگاشته می‌شوند. به‌عکس دوایر کره بر دوایر و خطوط صفحه نگاشته می‌شوند.

برهان. برای اثبات عکس قضیه، ملاحظه می‌کنیم که یک دایرهٔ واقع بر کره، فصل مشترک این کره با صفحه‌ای است مانند:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = ۰$$

و برای حصول اطمینان از تقاطع کره و صفحه باید شرط:

$$\left|\frac{\frac{۱}{۲}C+D}{\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}}\right| \leq \frac{۱}{۲} \quad \text{، یعنی} \quad A^۲ + B^۲ \geq ۴D(C+D)$$

برقرار باشد. این معادله برحسب x و y به‌صورت

$$(C+D)(x^۲+y^۲) + Ax + By + D = ۰$$

در می‌آید. اگر $C + D \neq ۰$، این معادله معرف یک دایره است؛ و چنانچه $C + D = ۰$، (یعنی هنگامی‌که دایرهٔ واقع بر کره از قطب شمال بگذرد)، این معادله معرّف یک خط مستقیم است. ■

به‌ویژه این مطلب می‌رساند که هر دو خط واقع در صفحه یکدیگر را در نقطهٔ بینهایت قطع می‌کنند. یک ویژگی مهم دیگر تصویر گنجنگاشتی، ویژگی زیر است:

قضیهٔ ۲.۱.۳. تصویر گنجنگاشتی حافظ زاویه است.

برهان. بی‌آنکه از کلیّت مسأله کاسته شود، می‌توانیم دو منحنی متقاطع در صفحه را دو خط مستقیم بگیریم. اما دو خط مستقیم در صفحه که در نقطهٔ (x_0, y_0) متقاطع باشند، بر دو دایره از کرهٔ ریمان نگاشته می‌شوند که در نقطهٔ (ξ_0, η_0, ζ_0) و قطب شمال یکدیگر را قطع می‌کنند و این دو دایره در نقاط تقاطع، زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ دو خط می‌سازند. اگر دو خط واقع در صفحه، خطوط:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{و} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

باشند، نگاره‌های گنجنگاشتی آنها به‌ترتیب در صفحات

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1(1-\zeta) = 0 \quad \text{و} \quad A_2 \xi + B_2 \eta + C_2(1-\zeta) = 0$$

قرار خواهند داشت. مماسهای مرسوم بر دوایر متناظر در قطب شمال، فصل مشترکهای این صفحات با صفحهٔ $\zeta = 1$ خواهند بود، که معادله‌های آنها به‌ترتیب:

$$\begin{cases} A_1 \xi + B_1 \eta + C_1(1-\zeta) = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} A_2 \xi + B_2 \eta + C_2(1-\zeta) = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

خواهند شد واضح است که زاویهٔ بین دو خط در صفحهٔ مختلط، درست همان زاویهٔ بین دو خط مماس در قطب شمال بر دو دایرهٔ متناظر است (زیرا صفحهٔ $\zeta = 1$ با صفحهٔ مختلط موازی است). ■

باید توجه داشت، که اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید ثابت کنیم که در تصویر گنجنگاشتی ویژگی دارا بودن یک مماس محفوظ می‌ماند. امّا این کار مستلزم استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

۲.۳ تبدیلهای موبیوس

اکنون به توابع مقدماتی ولی مفیدِ معروف به تبدیلهای موبیوس (تبدیلهای خطی کسری، تبدیلهای دوخطی، تبدیلهای همساز و غیره) می‌پردازیم. ولی ابتدا به یک نکته توجه می‌کنیم.

برای مطالعهٔ رفتار یک تابع حقیقی ـ مقدار از یک متغیّر حقیقی، صفحهٔ (x, y) را، برای رسم نمودار آن به کار می‌بریم (x به‌عنوان متغیر و y به‌عنوان تابع) ـ این کار بینش و شهود ما را افزایش می‌دهد، ولی در مورد توابعِ مختلط ــ مقدار از یک متغیّر مختلط این کار میسّر نیست ــ در اینجا به فضای چهار بعدی نیاز داریم (دو بعد برای متغّیر z و دو بعد برای تابع w)، که فراسوی جهان

مادّی ماست. پس برای مطالعهٔ تابع مختلط ـ مقدار از دو صفحهٔ مختلط استفاده می‌کنیم، صفحهٔ z برای متغیّر z و صفحهٔ w برای تابع w. این روش به‌اندازهٔ حالت توابع حقیقی ـ مقدار از یک متغیر حقیقی، کمال مطلوب نیست ولی این بهترین کاری است که می‌توانیم انجام دهیم.

تبدیلهای موبیوس با توابع گویای خاصی به‌صورت

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

تعریف می‌شوند. شرط $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$، شرط حصول اطمینان از ثابت نبودن تابع T است. تبدیلهای موبیوس در همه‌جای صفحهٔ مختلط بجز در نقطهٔ $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ تعریف شده‌اند، و تبدیل عکس آن

$$z = T^{-1}w = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

(با توجه به $\begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$) نیز یک تبدیل موبیوس است و نشان می‌دهد که در همه‌جای صفحهٔ w بجز نقطهٔ $w = \frac{\alpha}{\gamma}$، یک پیشنگارهٔ (یکتا) دارد. بهتر است این استثناها را با در نظر گرفتن تبدیلهای موبیوس به‌عنوان نگاشتی از کرهٔ ریمانی بر روی خودش، و این تعریف که نگارهٔ $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ همان $w = \infty$، و پیشنگارهٔ $w = \frac{\alpha}{\gamma}$، همان $z = \infty$ است، از میان برداریم. با توجه به اینکه عکس تبدیل موبیوس یک تبدیل تکمقداری است، این بسطِ تعریفِ تبدیلهای موبیوس، به ما امکان می‌دهد که تبدیلهای موبیوس را نگاشتهایی دوسویی (یک به یک و پوشا)، از صفحهٔ مختلط توسیع یافتهٔ $\hat{\mathbb{C}}$ بر روی خودش تلقی کنیم.

روشن است که نگاشت همانی یک تبدیل موبیوس است $(\alpha = \delta, \beta = \gamma = 0)$. علاوه بر این، ترکیب تبدیلهای موبیوس، یک تبدیل موبیوس است، یعنی اگر صفحهٔ z را بر روی صفحهٔ w_1 با ضابطهٔ

$$w_1 = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

و صفحهٔ w_1 را بر روی صفحهٔ w با ضابطهٔ

$$w = Sw_1 = \frac{aw_1 + b}{cw_1 + d}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

بنگاریم، نتیجهٔ آن یک تبدیل موبیوس از صفحهٔ z بر روی صفحهٔ w می‌شود که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$w = STz = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

با شرط

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq ۰$$

به‌طریقی مشابه می‌توان شرکتپذیری را تحقیق نمود و بنابراین قضیهٔ زیر اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۱.۲.۳. مجموعهٔ $\mathcal{M}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوس، یک **گروه** تشکیل می‌دهد؛ یعنی چهار اصل موضوع زیر در آن صدق می‌کند:

الف). به‌ازای هر دو تبدیل $T, S \in \mathcal{M}$، **حاصلضرب** (ترکیب) آنها TS، معیّن و عنصری از $\mathcal{M}$ است. یعنی $TS \in \mathcal{M}$.

ب). $\mathcal{M}$ دارای عنصری مانند I به‌نام عنصر **همانی** است با این ویژگی که: به‌ازای هر $T \in \mathcal{M}$، $TI = IT = T$.

ج). به هر عنصر $T \in \mathcal{M}$ عنصری مانند $T^{-۱} \in \mathcal{M}$، به‌نام عکس T، متناظر است، که ویژگی زیر را دارد

$$TT^{-۱} = T^{-۱}T = I$$

د). قانون شرکتپذیری در $\mathcal{M}$ برقرار است: به‌ازای همهٔ تبدیلهای $T, S, U \in \mathcal{M}$، $(TS)U = T(SU)$

عبارتی که برای حاصلضرب تبدیلهای موبیوس به‌دست آوردیم، ماتریسها را در ذهن ما تداعی می‌کند. اگر تبدیلهای موبیوس S, T در فوق را به ترتیب با

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نمایش دهیم، آنگاه:

$$ST = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

یعنی این نماد با عمل ضرب ماتریسها تطابق دارد، یا بهتر بگوییم گروه همهٔ ماتریسهای وارونپذیر ۲×۲ با گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس همریخت است.

زیرمجموعه‌ای از یک گروه را هنگامی زیرگروه گویند که خودش (با همان عمل گروهی) تشکیل گروه دهد. در اینجا مثالهایی از زیرگروه موبیوس $\mathcal{M}$ می‌آوریم.

مثال ۱. مجموعهٔ همهٔ انتقالها:

$$w = Tz = z + b \quad (\text{به‌ازای مقدار ثابتی مانند } b \in \mathbb{C})$$

مثال ۲. مجموعهٔ همهٔ اتّساعها:

$$w = Tz = \alpha z \quad (\text{به‌ازای مقدار ثابت ناصفر } \alpha \in \mathbb{C})$$

درواقع این زیرگروه شامل دو زیرگروه مهم است.

الف) بزرگنماییها:

$$w = Tz = az \quad (\text{که } a \text{ مقدار ثابت مثبت است})$$

این، همان بزرگ (کوچک) کردن به نسبت a است.

ب) دورانها:

$$w = Tz = kz \quad (\text{که در آن: } |k| = ۱)$$

این همان دوران حول مبدأ با شناسهٔ k است. باید توجه کرد که بزرگنماییها و دورانها جابه‌جایی هستند و هر اتّساع، حاصلضرب یک بزرگنمایی در یک دوران است.

مثال ۳. زیرمجموعهٔ $\mathcal{M}$ متشکل از عنصر همانی و عکس آن:

$$w = Tz = \frac{۱}{z}$$

(به‌تنهایی) نیز یک زیرگروه است.

اکنون تابع گویای معرّف تبدیل موبیوس، یعنی:

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq ۰$$

را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم. دو امکان وجود دارد:
الف) اگر $\gamma = 0$، آنگاه $\delta \neq 0$ و داریم

$$w = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$$

ب) اگر $\gamma \neq 0$، آنگاه:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma}{\gamma z + \delta}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که یک تبدیل موبیوس حاصلضرب اتّساعها، انتقالها و یک عکس کردن است.
روشن است که انتقال و اتساع، خطوط را به خطوط، و دوایر را به دوایر می‌نگارند. این امر درمورد عمل عکس درست نیست. ولی خانوادهٔ همهٔ خطوط مستقیم و دوایر در عمل عکس پایا می‌مانند. فرض کنید.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (B^2 + C^2 > 4AD)$$

و یا به‌صورت دیگر معادلهٔ:

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \qquad (|b|^2 > ac)$$

(که $a = A$ و $c = D$ اعداد حقیقی و $b = \frac{1}{2}(B + iC)$ عددی مختلط)، معادلهٔ یک دایره (یک خطّ، اگر $a = 0$) در صفحه است. با انجام عمل عکس $w = \frac{1}{z}$ داریم:

$$a + \bar{b}\bar{w} + bw + cw\bar{w} = 0$$

که معادله‌ای از همان نوع است و قضیهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.
قضیهٔ ۲.۲.۳. تبدیلهای موبیوس، خانوادهٔ همهٔ دوایر و خطوط مستقیم صفحه را بر خودشان می‌نگارند.
همان‌گونه که در فصل ۲ گفتیم، خطوط مستقیم حالات خاص دوایر درنظر گفته می‌شوند.

۳.۳ نسبتهای ناهمساز

هر تبدیل موبیوس را نسبتهای بین ضرایبش کاملاً مشخص می‌کند، لذا با داشتن سه شرط باید بتوانیم یک تبدیل موبیوس را که در این شرایط صدق می‌کند تعیین کنیم. به‌خصوص، از آنجا که هر

دایره با سه نقطه مشخّص می‌شود، پس باید بتوانیم تبدیل موبیوسی پیدا کنیم که یک دایرهٔ مفروض از صفحهٔ z را بر دایرهٔ مفروضی از صفحهٔ w بنگارد.

مطلب را با مشاهدهٔ زیر آغاز می‌کنیم. فرض کنید:

$$\frac{aw+b}{cw+d}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

اگر w را برحسب z حساب کنیم، تبدیل موبیوس w برحسب z به‌دست می‌آید. به‌علاوه، اگر صورت یکی از دو طرف صفر شود، صورت طرف دیگر نیز باید صفر شود و مخرجها متناظراً به هم مربوط باشند. بدین‌ترتیب اگر یک تبدیل موبیوس z_1، z_2، z_3 را به‌ترتیب بر w_1، w_2، w_3 بنگارد، آنگاه می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}=k\frac{z-z_2}{z-z_3}$$

که باید ثابت k تعیین شود. بدون درنظرگرفتن مقدار k، تبدیل موبیوسی که با این معادله مشخّص می‌شود z_2 و z_3 را به‌ترتیب بر w_2 و w_3 می‌نگارد. بنابراین کافی است k را چنان انتخاب کنیم که z_1 با w_1 متناظر شود. یعنی

$$\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=k\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

از اینجا k را به‌دست آورده آن را در رابطهٔ قبلی می‌گذاریم (یا از تقسیم این دو تساوی بر هم و حذف k) خواهیم داشت

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}\Big/\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}\Big/\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

این تبدیل موبیوسی است که z_1، z_2، z_3 را به‌ترتیب بر w_1، w_2، w_3 می‌نگارد. امّا اگر این تبدیل موبیوس z_0 رانیز بر w_0 بنگارد، باید داشته باشیم

$$\frac{w_0-w_2}{w_0-w_3}\Big/\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z_0-z_2}{z_0-z_3}\Big/\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

یعنی:

$$(w_0,w_1;w_2,w_3)=(z_0,z_1;z_2,z_3)$$

پس قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیهٔ ۱.۳.۳. نسبت ناهمساز بر اثر تبدیلهای موبیوس ناوردا می‌ماند.

فرع ۲.۳.۳. شرط لازم و کافی برای این که تبدیل موبیوسی وجود داشته باشد که $z_۰$، $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ را به‌ترتیب بر $w_۰$، $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$ بنگارد، این است که تساوی زیر برقرار باشد:

$$(w_۰, w_۱; w_۲, w_۳) = (z_۰, z_۱; z_۲, z_۳)$$

برای اینکه صحّت این قضیه را با کلیت تمام بیان کنیم تعریف نسبت ناهمساز را برای حالتی که یکی از نقاط ∞ باشد تعمیم می‌دهیم، بدین‌صورت‌که اصلاً عواملی را که شامل این نقطه هستند حذف می‌کنیم. مثلاً اگر $z_۰ = \infty$، خواهیم داشت:

$$(z_۰, z_۱; z_۲, z_۳) := \frac{z_۱ - z_۳}{z_۱ - z_۲}$$

زیرا با توجّه به روابط:

$$\begin{aligned}(z_۰, z_۱; z_۲, z_۳) &= \frac{z - z_۲}{z - z_۳}\Big/\frac{z_۱ - z_۲}{z_۱ - z_۳}\\ &= \left(\frac{۱ - \frac{z_۲}{z}}{۱ - \frac{z_۳}{z}}\right) \cdot \left(\frac{z_۱ - z_۳}{z_۱ - z_۲}\right)\\ &\to \frac{z_۱ - z_۳}{z_۱ - z_۲} \qquad (\text{وقتی}\ \ z \to \infty)\end{aligned}$$

این نسبت به‌طور خیلی طبیعی به‌دست می‌آید.

از اینجا نتیجه می‌شود که همواره می‌توان تبدیل موبیوسی را که سه نقطهٔ مفروض $z_۱, z_۲, z_۳ \in \hat{\mathbb{C}}$ را به سه نقطهٔ متمایز از پیش تعیین‌شدهٔ $w_۱, w_۲, w_۳ \in \hat{\mathbb{C}}$ می‌برد با نوشتن:

$$\frac{w - w_۲}{w - w_۳}\Big/\frac{w_۱ - w_۲}{w_۱ - w_۳} = \frac{z - z_۲}{z - z_۳}\Big/\frac{z_۱ - z_۲}{z_۱ - z_۳}$$

و حل این معادله نسبت به w به‌دست آورد. چون تناظر $w_j \to z_j(j = ۱, ۲, ۳)$ این تبدیل موبیوس را کاملاً معیّن می‌کند، تبدیل موبیوس مطلوب به‌دست می‌آید.

چون یک دایره با سه نقطه‌اش معین می‌شود و یک تبدیل موبیوس یک «دایره» را بر یک «دایره» می‌نگارد. پس می‌توان تبدیلهای موبیوسی را که یک دایرهٔ مفروض صفحهٔ z را بر یک دایرهٔ مفروض صفحهٔ w می‌نگارد به‌دست آورد. به‌علاوه سه نقطهٔ متمایز دلخواهِ دایرهٔ اول را می‌توان بر سه نقطهٔ دلخواه دایرهٔ دوم نگاشت.

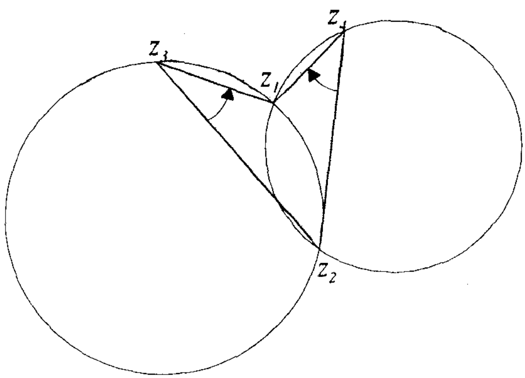
مثال ۱. چهار نقطهٔ $z_۰$،$z_۱$،$z_۲$،$z_۳$ همدایره (یا همخط)اند، اگر و فقط اگر نسبت ناهمساز آنها، $(z_۰, z_۱; z_۲, z_۳)$، حقیقی باشد.

برهان دیگر. این همان فرع ۲.۲.۲ است که تاکنون در مواردی چند از آن استفاده نموده‌ایم، ولی در اینجا برهان دیگری برای آن می‌آوریم. چهار نقطه همدایره (همخط) هستند، اگر و فقط اگر یک تبدیل موبیوس چنان وجود داشته باشد که این نقاط را بر نقاط محور حقیقی بنگارد. چون نسبت ناهمساز چهار عدد حقیقی، عددی حقیقی است، پس قضیّه ثابت شده است.

قضیهٔ ۳.۳.۳. هر تبدیل موبیوس یک تبدیل همدیس است، یعنی یک تبدیل موبیوس زاویهٔ بین دو منحنی متقاطع (اندازه و جهت آن) را محفوظ نگاه می دارد.

برهان. بی‌آنکه از کلیّت کاسته شود، می‌توان فرض کرد که این دو منحنی دایره‌اند. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$ نقاط تقاطع این دو دایره باشند، $z_۳$ را بر یکی از این دوایر و $z_۴$ را بر دیگری اختیار می‌کنیم. در این صورت:

$$\begin{aligned}\arg(z_۳, z_۴; z_۱, z_۲) &= \arg\left(\frac{z_۳ - z_۱}{z_۳ - z_۲}\right) - \arg\left(\frac{z_۴ - z_۱}{z_۴ - z_۲}\right)\\ &= \angle z_۲ z_۳ z_۱ - \angle z_۲ z_۴ z_۱\end{aligned}$$



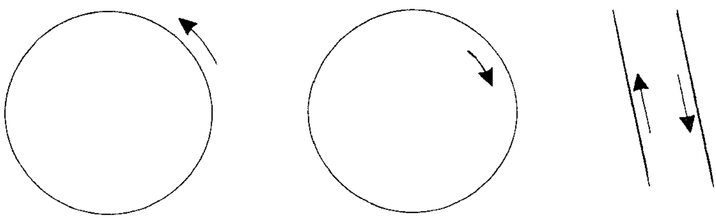
شکل۲.۳

فرض کنید $z_۳$ و $z_۴$ هر یک بر دایرهٔ مربوطهٔ خود به سمت $z_۱$، میل کنند، در این صورت بنابر فرع پ.۴.۲[1] سمت راست این رابطه زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع خواهد شد. (خواننده‌ای که با هندسهٔ مقدماتی آشنایی ندارد می‌تواند استدلال بخشِ بعدی را دنبال کند). اما نسبت ناهمساز بر اثر هر تبدیل موبیوس پایاست و بنابراین، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. ■

۱. پیوست ۴.۲ در پایان کتاب.

فرض کنید که یک تبدیل موبیوس T دایرهٔ C در صفحهٔ z را به دایرهٔ C' در صفحهٔ w نگاشته است. دایرهٔ C صفحهٔ z را به دو ناحیهٔ Δ_1 و Δ_2، و دایرهٔ C' صفحهٔ w را به دو ناحیهٔ Δ'_1 و Δ'_2 تقسیم می‌نماید. هر دو نقطهٔ z_1 و z_2 در صفحهٔ z را می‌توان با یک کمان ℓ از دایره و یا پاره‌خطی که دایرهٔ C را قطع نکند به هم وصل کرد. در این صورت نگارهٔ ℓ بر اثر تبدیل موبیوس T کمانی از دایره (یا پاره‌خطی) است که نگاره‌های z_1 و z_2 را بهم وصل می‌کند و دایرهٔ C' را قطع نمی‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که نگاره‌های z_1 و z_2 یا هر دو در Δ'_1 قرار دارند یا هر دو در Δ'_2. همین امر درمورد نقاط دلخواه Δ_2 نیز صادق است. چون هر تبدیل موبیوس دوسوئی است، چنانچه به‌ازای مقداری مانند $z \in \Delta_1$، نگاره‌اش $T_z \in \Delta'_1$، آنگاه نگارهٔ Δ_1 بر اثر تبدیل T باید تمامی Δ'_1 باشد؛ درصورتی که اگر $T_z \in \Delta'_2$، نگارهٔ Δ_1 بر اثر T باید تمامی Δ'_2 باشد.

اکنون یک دایرهٔ C و یکی از شعاعهای آن را درنظر می‌گیریم. نگاره‌های آنها بر اثر هر تبدیل موبیوس T یک دایرهٔ C' و یک قوس مستدیری هستند که یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. چون هر تبدیل موبیوس جهت زوایا را نیز محفوظ نگاه می‌دارد، بلافاصله متوجه می‌شویم که اگر



شکل ۳.۳

با یک تبدیل موبیوس T داخل دایرهٔ C به داخل دایرهٔ C' نگاشته شود، هنگامی که یک نقطهٔ z در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بر دایرهٔ C تغییرمکان دهد، نگارهٔ آن، w، نیز در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بر دایرهٔ C' تغییرمکان خواهد داد. از طرف دیگر، اگر داخل C، بر خارج C' نگاشته شود، آنگاه هنگامی که یک نقطهٔ z در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بر دایرهٔ C حرکت نماید، نگاره‌اش w در جهت عقربه‌های ساعت بر دایرهٔ C' حرکت خواهد کرد.

به‌عکس اگر یک نقطهٔ z و نگاره‌اش w بر اثر یک تبدیل موبیوس T بر دوایر مربوطه در یک جهت حرکت نمایند، آنگاه T داخل دایرهٔ C را به داخل دایرهٔ C' می‌برد، درصورتی‌که اگر z و w در دو جهت مختلف حرکت نمایند، T داخل دایرهٔ C را به‌خارج دایرهٔ C' می‌برد.

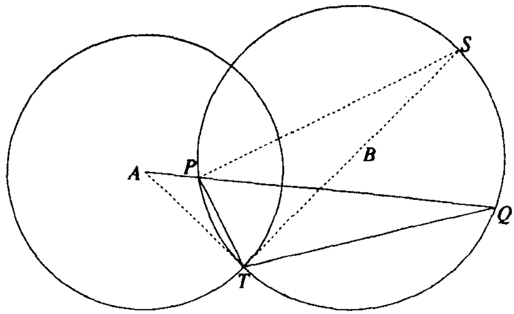
مناسبتر این است که قرارداد ذیل را بپذیریم: یک دایره (یا یک منحنی) را به‌صورت یک منحنی جهتدار (معمولاً با معادلات پارامتریش) درنظر می‌گیریم، در این صورت هنگامی که نقطه‌ای بر این دایره (منحنی بسته) حرکت می‌کند ناحیه‌ای را که ناظر در «طرف چپ» می‌بیند، بنابر تعریف، داخل می‌گیریم. با این قرارداد یک تبدیل موبیوس داخل (یک دایره) را به داخل (یک دایره) می‌نگارد.

۴.۳ اصل تقارن

فرض می‌کنیم دو دایره به مراکز A و B یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع کرده‌اند. فرض کنید شعاعی که از A می‌گذرد دایرهٔ B را در نقاط P و Q قطع کند.

T را یکی از دو نقطهٔ تقاطع دوایر A و B (استدلال ما به این امر که T کدام یک از نقاط تقاطع باشد وابسته نیست ـ همچنین اگر جاهای P و Q باهم عوض شوند، فقط اندک اصلاحاتی مورد نیاز واقع می‌شود) و TS را قطری از دایرهٔ B می‌گیریم. پس:

$$\angle AQT = \angle PST = \frac{\pi}{۲} - \angle PTS = \angle ATP$$
$$\therefore\ \Delta ATP \sim \Delta AQT$$



شکل۴.۳

(توجه کنید که در این فصل دیگر روی همجهت بودن دو مثلث متشابه پافشاری نمی‌کنیم.) از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AQ}$$
$$\therefore\ \overline{AP}\cdot\overline{AQ} = \overline{AT}^{۲} = r^{۲}$$

که در آن r شعاع دایرهٔ A است. بویژه نقطهٔ Q فقط به دایرهٔ B بستگی دارد، بدین‌معنی که دایرهٔ B بر دایرهٔ A عمود است و از نقطهٔ P می‌گذرد. اما بینهایت از این دوایر وجود دارند.

دو نقطهٔ P و Q را قرینه یا منعکس یکدیگر نسبت به دایرهٔ A گویند، هرگاه هر دو نقطهٔ P و Q روی شعاعی باشند که از نقطهٔ A (مرکز دایره) می‌گذرد و $\overline{AP}\cdot\overline{AQ} = r^{۲}$، که r شعاع دایرهٔ A است

مرکز این دایره و نقطهٔ بینهایت قرینهٔ یکدیگرند و قرینهٔ یک نقطهٔ واقع بر دایره بر خودش منطبق است. اگر دایره به خط بدل شود، دو نقطه فقط و فقط وقتی قرینهٔ یکدیگرند که نسبت به این خط قرینهٔ یکدیگر باشند.

بحث فوق، نیمهٔ اول برهان لم زیر است:

لم ۱.۴.۳. اگر دایرهٔ B.بر یک دایرهٔ A عمود باشد و از نقطه‌ای مانند P بگذرد، آنگاه باید از نقطهٔ Q، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به دایره‌ی A، نیز بگذرد. به‌عکس، اگر دایره‌ای مانند B از دو نقطهٔ P و Q، که نسبت به دایرهٔ A قرینهٔ یکدیگرند بگذرند، آنگاه دو دایرهٔ A و B برهم عمودند.

برهان. برهان عکس قضیه تنها با معکوس کردن استدلال فوق، حاصل می‌شود. با نمادهای فوق بنا به فرض داریم:

$$\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AQ} \quad \text{یعنی} \quad \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AT}^{۲}$$

در نتیجه:

$$\therefore\ \Delta ATP \sim \Delta AQT$$

بنابراین:

$$\angle ATP = \angle AQT = \angle PST = \frac{\pi}{۲} - \angle PTS$$

$$\therefore\ \angle ATB = \frac{\pi}{۲}$$ ■

قضیهٔ ۲.۴.۳. (اصل تقارن). تبدیل موبیوس، تقارن را حفظ می‌کند.

برهان. فرض می‌کنیم دو نقطهٔ P و Q نسبت به دایرهٔ A متقارن باشند و تبدیل موبیوس T نقاط P و Q را به‌ترتیب به نقاط P' و Q' بنگارد و دایرهٔ A را به دایرهٔ A' می‌خواهیم نشان دهیم که نقاط P' و Q' نسبت به دایرهٔ A' قرینه‌اند.

فرض کنید B' دایرهٔ دلخواهی باشد که از نقطهٔ P' گذشته و بر دایرهٔ A' عمود است. پس پیشنگارهٔ $T^{-۱}B'$ دایره‌ای است عمود بر دایرهٔ A (زیرا $T^{-۱}$ تبدیلی موبیوس، و لذا همدیس است) و از نقطهٔ $T^{-۱}P' = P$ می‌گذرد. با توجه به لم پیش، دایرهٔ $T^{-۱}B'$ نیز باید از نقطهٔ Q بگذرد. از اینجا نتیجه می‌شود که دایرهٔ B' باید از نقطهٔ Q' بگذرد، یعنی Q' قرینهٔ P' نسبت به‌دایرهٔ A' باشد. ■

مثال ۱. تبدیل موبیوسی که دایرهٔ یکّهٔ $|z| = ۱$ را بر دایرهٔ یکّهٔ $|w| = ۱$ می‌نگارد باید

به‌صورت زیر باشد:

$$w = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \quad (|k| = 1, |\alpha| \neq 1)$$

اثبات. فرض کنید α $(\alpha \neq \infty, |\alpha| \neq 1)$ نقطه‌ای باشد که بر $w = 0$ نگاشته شده است. پس نگارهٔ قرینه‌اش $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ (نسبت به دایرهٔ یکه) باید $w = \infty$ باشد.

$$\therefore\ w = k'\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}} = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \quad (k = -\bar{\alpha}k')$$

چون تساوی $|w| = 1$ وقتی برقرار است که داشته باشیم $|z| = 1$، با قرار دادن $z = 1$، خواهیم داشت:

$$1 = |k|\cdot\left|\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}\right| = |k|$$

اگر $\alpha = \infty$، داریم $w = \frac{k}{z}$ و $|k| = 1$. به‌عکس، اگر

$$w = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad (|k| = 1, |\alpha| \neq 1)$$

آنگاه به‌ازای $|z| = 1$،

$$|w| = |k|\cdot\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = \left|\frac{\bar{z}(z-\alpha)}{1-\bar{\alpha}z}\right| = \left|\frac{1-\alpha\bar{z}}{1-\bar{\alpha}z}\right| = 1$$

بنابراین تبدیل موبیوسی که چنین به‌دست آید در آن شرط صدق می‌کند. داخل دایرهٔیکهٔ صفحهٔ z به‌ترتیب بر داخل یا خارج دایرهٔ یکهٔ صفحهٔ w نگاشته می‌شود هرگاه $|\alpha| < 1$ یا $|\alpha| > 1$.

مثال ۲. هر تبدیل موبیوس که محور حقیقیِ صفحهٔ z را بر دایرهٔ $|w| = 1$ در صفحهٔ w بنگارد، باید به شکل

$$w = k\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}} \quad (|k| = 1, \mu \notin \mathbb{R})$$

اثبات. نقاط صفحهٔ z متناظر با $w = 0, \infty$ باید نسبت به محور حقیقی قرینه یکدیگر، یعنی مزدوج مختلط یکدیگر باشند. بنابراین:

$$w = k\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}} \quad (\mu \notin \mathbb{R})$$

هنگامی که z حقیقی است، داریم $\left|\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}}\right| = ۱$، و w باید بر دایرهٔ یکّه واقع باشد. یعنی $|w| = ۱$، و از آنجا $|k| = ۱$. به‌عکس، روشن است که تبدیلهای موبیوس به شکل بالا در شرایط مطلوب صدق خواهند کرد. نیمهٔ بالائی صفحهٔ z بر داخل یا خارج دایرهٔ یکّهٔ $|w| = ۱$ نگاشته می‌شود. بسته به اینکه $\Im\mu > ۰$ یا $\Im\mu < ۰$.

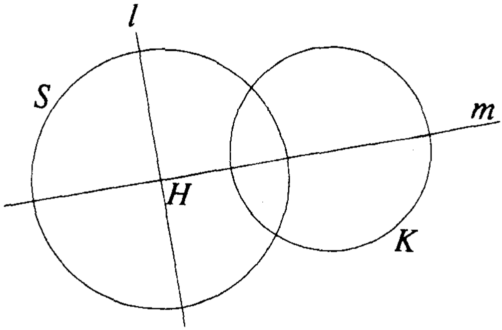
۵.۳ یک جفت دایره

قبلاً دیده‌ایم که با یک تبدیل موبیوس می‌توان یک دایرهٔ دلخواه از صفحهٔ z را بر یک دایرهٔ مشخّصی در صفحهٔ w نگاشت. امّا درمورد یک جفت دایره چطور؟ آیا همواره می‌توان با یک تبدیل موبیوس یک جفت دایرهٔ دلخواه $C_۱$ و $C_۲$ در صفحهٔ Z را بر یک جفت دایرهٔ مشخص $C'_۱$ و $C'_۲$ درصفحهٔ w نگاشت؟ چون تبدیل موبیوس همدیس است واضح است که اگر $C_۱$ و $C_۲$ یکدیگر را به زاویهٔ θ قطع کنند، $C'_۱$ و $C'_۲$ نیز باید یکدیگر را به‌زاویهٔ θ قطع کنند. اما اگر این شرط برقرار باشد، آیا می‌توانیم وجود چنین تبدیل موبیوسی را تضمین کنیم؟

پاسخ مثبت است. برای اثبات این حکم کافی است ثابت کنیم که می‌توان با یک تبدیل موبیوس یک جفت دایرهٔ دلخواه $C_۱$ و $C_۲$ را، که یکدیگر را به زاویهٔ θ قطع می‌کنند، بر محور حقیقی و خط $x\sin\theta - y\cos\theta$ نگاشت. (چرا کافی است؟). اما انجام این کار ساده است. خیلی ساده، یکی از دو دایرهٔ متقاطع $C_۱$ و $C_۲$ را بر نقطهٔ ∞ می‌نگاریم. بدین‌ترتیب نگاره‌های $C_۱$ و $C_۲$ دو خط متقاطع می‌شوند که زاویهٔ بین آنها θ است. حال نقطهٔ تقاطع این دو خط را به مبدأ انتقال می‌دهیم و با یک دوران مناسب کار تمام می‌شود.

در استدلال بالا فرض کردیم که (پیمانه π) $\theta \not\equiv ۰$. (در کجا از این فرض استفاده کردیم؟) خوب، اگر این دو دایره بر هم مماس بودند چطور؟ می‌گوییم که با یک تبدیل موبیوس، دو دایرهٔ مماس بر هم دلخواه را می‌توان بر یک جفت دایرهٔ مماس بر هم مشخصِ $C'_۱$ و $C'_۲$ نگاشت. باز کافی است ثابت کنیم که یک جفت دایرهٔ مماس بر همِ دلخواه $C_۱$ و $C_۲$ را می‌توان با یک تبدیل موبیوس بر دو خط موازی $y = ۰$ و $y = ۱$ نگاشت. باز هم انجام این کار ساده است: نقطهٔ تماس این دو دایره را بر نقطهٔ بینهایت می‌نگاریم، که در این‌صورت نگاره‌های دوایر $C_۱$ و $C_۲$ یک جفت خط موازی خواهند شد. حال با یک انتقال و یک اتساع (یعنی یک دوران و به‌دنبال آن یک بزرگنمایی) به منظور خود می‌رسیم.

می‌ماند حالت[۱] دو دایره‌ای که متقاطع نیستند. گوییم با یک تبدیل موبیوس همواره می‌توان یک جفت دایرهٔ نامتقاطع را بر یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز نگاشت. برای اثبات این ادّعا، ابتدا نقطه‌ای بر یکی از این دو دایره، مثلاً $C_۲$، اختیار کرده آن را بر نقطهٔ بینهایت می‌نگاریم. در این صورت نگاره‌های $C_۱$ و $C_۲$، دایره و خطی می‌شوند که یکدیگر را قطع نمی‌کنند.این دایره را k و این خط را ℓ می‌نامیم. فرض کنید m خطی باشد که از مرکز دایرهٔ k گذشته و بر خط ℓ عمود باشد. H را



شکل ۵.۳

فصل مشترک خطهای ℓ و m می‌گیریم. توجّه داریم که H خارج دایرهٔ k است. دایره‌ای مانند S به مرکز H و عمود بر k رسم می‌کنیم. (برای این منظور کافی است شعاع این دایره را طول مماس مرسوم از H بر این دایره بگیریم. لذا دایرهٔ S مشخص می‌شود). بالأخره یکی از نقاط تقاطع خط m و دایره‌ی S (هر کدام را که خواستید) را بر نقطهٔ بینهایت می‌نگاریم. پس نگاره‌های دایرهٔ k و خط ℓ دو دایره هستند که هر دو بر نگاره‌های دایرهٔ S و خط ℓ عمودند. اما نگاره‌های دایرهٔ S و خط m، دو خط متعامدند. بنابراین باید نگاره‌های دایرهٔ k و خط ℓ یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز باشند.

به‌دقت توجه کنید؛ چنین نیست که می‌توان یک‌جفت دایرهٔ نامتقاطع دلخواه را بر یک‌جفت دایرهٔ هم‌مرکز قبلاً مشخص شده‌ای نگاشت. چه، اگر دو دایرهٔ نامتقاطع داده شده باشند، نسبت شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکزی که بتوان دو دایرهٔ مفروض را بر آنها نگاشت عددی است مشخّص و در اختیار ما نیست.

مثال. فرض می‌کنیم $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq ۱\}$ قرص بستهٔ دایرهٔ یکه باشد و D' قرص بستهٔ دیگری درون D. (به‌ویژه دوایر مرزی بستهٔ D و D' یکدیگر را قطع نمی‌کنند.) می‌خواهیم نشان دهیم که تبدیل موبیوسی وجود دارد که این قرص دایرهٔ بستهٔ یکه را بر خودش و قرص D' را بر قرص $\{w \in \mathbb{C};\ |w| \leq r\}$، با یک شعاع متناسب r، بنگارد. به پیروی از شوینبرگ (۱۹۰۳ـ۱۹۹۱)* محاسبه را چنین دنبال می‌کنیم:

بی‌آنکه از کلیّت مسأله کاسته شود، درصورت لزوم با دورانی مناسب، می‌توان فرض کرد که مرکز D' بر محور حقیقی واقع است و خط

$$[a, b] = D' \cap \{z \in \mathbb{C}; \Im z = ۰\}$$

قطری از D' است. اگر $a + b = ۰$، مسأله اثبات شده است. پس بی‌آنکه از کلیّت کاسته شود

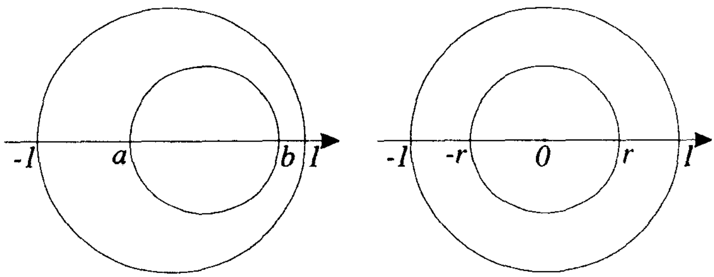
* *Mathematical Time Exposures,* Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1982, pp. 188-189.

می‌توان فرض کرد $a + b > \circ$. (در واقع حتی اگر $a + b < \circ$، با اصلاح جزئی استدلال ما معتبر خواهد بود).

با یادآوری مثالی از بخش قبل و توجه به این‌که دو قرص دایره در صفحهٔ z و نگاره‌های آنها در صفحهٔ w، همه نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند، می‌کوشیم تبدیل موبیوسی به‌صورت

$$w = \frac{z - \alpha}{\text{۱} - \alpha z}$$

پیدا کنیم که در آن α عدد حقیقی مناسبی باشد که باید تعیین کنیم. چون همهٔ ضرایب حقیقی‌اند، این تبدیل موبیوس محور حقیقی را بر خودش می‌نگارد. به‌علاوه ۱− و ۱ دونقطهٔ ثابت این تبدیل موبیوس‌اند. چون هر تبدیل موبیوس همدیس است، و مرز دایره‌های قرصهای D و D' محور حقیقی را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند، کافی است نشان دهیم که می‌توان عددی حقیقی مانند α



شکل۶.۳

چنان یافت که a و b را به $-r$ و r (r عددی حقیقی) بنگارد. معنی این، این است که معادلهٔ

$$\frac{a - \alpha}{\text{۱} - \alpha a} + \frac{b - \alpha}{\text{۱} - \alpha b} = \circ$$

باید ریشه‌های حقیقی داشته باشد. با مرتب نمودن این معادله برحسب α خواهیم داشت.

$$\alpha^{\text{۲}} - \frac{\text{۲}(\text{۱} + ab)}{a + b}\alpha + \text{۱} = \circ$$

با محاسبهٔ $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ مبیّنِ آن:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\text{۱} + ab}{a + b}\right)^{\text{۲}} - \text{۱} &= \frac{\text{۱} - a^{\text{۲}} - b^{\text{۲}} + a^{\text{۲}}b^{\text{۲}}}{(a + b)^{\text{۲}}} \\ &= \frac{(\text{۱} - a^{\text{۲}})(\text{۱} - b^{\text{۲}})}{(a + b)^{\text{۲}}} > \circ \qquad (\because -\text{۱} < a < b < \text{۱})\end{aligned}$$

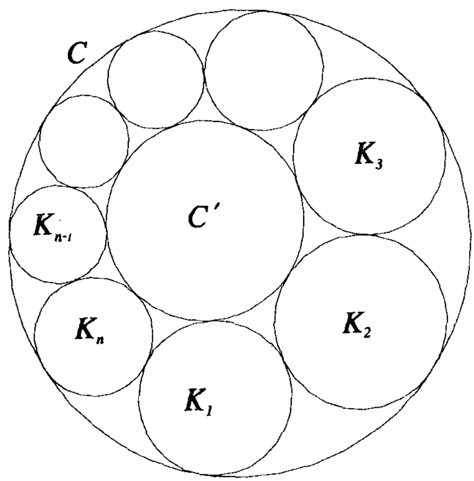
ملاحظه می‌کنیم که این معادله ریشه‌های حقیقی دارد. به‌علاوه از علامتهای ضرایب معادله دیده می‌شود که هر دو ریشه مثبت‌اند. چون حاصلضرب ریشه‌ها برابر ۱ است (با توجه به فرض ما که دوایر مرزی D و D' متقاطع نیستند، $\alpha = ۱$ ریشه نیست)، نتیجه می‌گیریم که یکی از ریشه‌ها بین ۰ و ۱ است و دیگری بزرگتر از ۱. ریشهٔ بین صفر و یک را αی خودمان می‌گیریم و کار تمام است.

تبصره. الف) درواقع، اگر صرفاً بخواهیم دو دایرهٔ مرزی را بر یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز بنگاریم، با یک انتخاب می‌توانیم این کار را انجام دهیم. انتخاب ما بستگی به این دارد که بخواهیم دایرهٔ کوچکتر را به یک دایرهٔ کوچکتر بنگاریم.

ب) حتی اگر $D \supset D'$ (یعنی $a < -۱$ و $b > ۱$)، فقط با اندکی اصلاح استدلال ما معتبر خواهد بود.

قضیهٔ ۱.۵.۳. (ی. اشتاینر). فرض می‌کنیم C و C' دو دایره در صفحه باشند که یکی (مثلاً C') درون دیگری (دایرهٔ C) واقع باشد. دایره‌ای مثل $K_۱$ رسم می‌کنیم که مماس داخل بر C و مماس خارجی بر C' باشد. بعد دایره‌ای مثل $K_۲$ رسم می‌کنیم که مماس داخلی بر C و مماس خارجی بر C' و $K_۱$ باشد. این روند را ادامه می‌دهیم تا یک رشته دایرهٔ $K_۱$، $K_۲$، $\cdots$، K_n $(n \geq ۳)$ که هر K_j مماس داخلی بر C و مماس خارجی بر $K_{j-۱}$، $K_{j+۱}(۲ \leq j \leq n-۱)$ و C' است، به‌دست آوریم. اگر چنین پیش آید که K_n بر $K_۱$ (و البته بر C و C' و همچنین بر $K_{n-۱}$) مماس شود، انتخاب جای دایرهٔ اولّیهٔ $K_۱$ هرچه باشد باز هم K_n بر $K_۱$ مماس خواهد شد.

برهان. وقتی دوایر C و C' را با یک تبدیل موبیوسی بر دو دایرهٔ هم‌مرکز بنگاریم، بداهت قضیه به‌روشنی دیده خواهد شد. ■



شکل ۷.۳

تبصره. برای حالتی که بتوان یک رشته از n دایرهٔ مماس بر هم در دایرهٔ C محاط کرد، اشتاینر رابطه‌ای بین r و r' یعنی شعاعهای دوایر C، C' و خط‌المرکزین dی این دو به‌دست آورده است:

$$d^۲ = (r - r')^۲ - ۴rr' \tan^۲ \left(\frac{\pi}{n}\right)$$

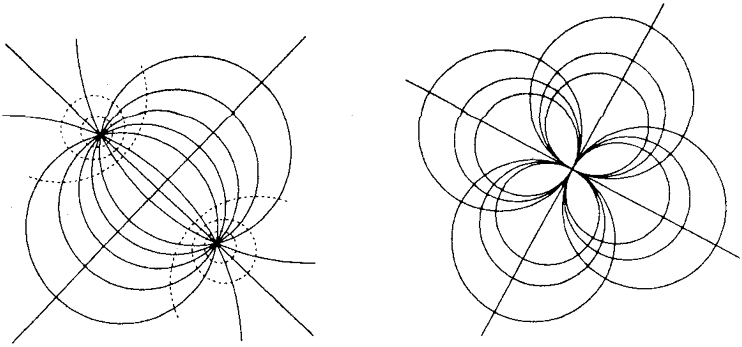
۶.۳ دسته دایره‌ها

دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ مفروض‌اند. مجموعهٔ همه دوایر عمود بر این دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ را دسته دایره‌های مزدوج $C_۱$ و $C_۲$ گویند.

ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ در صفحهٔ z متقاطع باشند. به‌موجب بحث بخش قبلی می‌توانیم $C_۱$ و $C_۲$ را با یک تبدیل موبیوس بر دو خط متقاطع در مبدأ صفحهٔ توسیعی w بنگاریم. چون شرط لازم و کافی برای اینکه یک دایره بر دو خط متقاطع عمود باشد این است که مرکزش بر نقطهٔ تقاطع این دو خط منطبق باشد، دسته دایره‌های مزدوج با دو دایرهٔ $C_۱$، $C_۲$ باید بر مجموعهٔ همهٔ دوایر هم‌مرکز به مرکز $w = ۰$ نگاشته شوند. به‌ازای هر نقطه از صفحهٔ توسیعی w، غیر از نقاط مبدأ و بینهایت، فقط و فقط یک دایرهٔ هم‌مرکز در این دسته دایره‌ها وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد. مبدأ و نقطهٔ بینهایت را نقاط حدی این دسته دایره‌ها می‌خوانند. در رابطه با شکل اولیّه در صفحهٔ z، معنی این نکته این است که از هر نقطهٔ صفحهٔ توسیعی z (غیر از نقاط تقاطع دوایر $C_۱$، $C_۲$) دقیقاً یک دایره از این دسته دایره می‌گذرد و هیچ دو دایره‌ای از این دوایر در دسته دایره‌ها، همدیگر را قطع نمی‌کنند. رشته‌های این نوع دایره‌ها را دسته‌های دایره‌های هذلولوی می‌نامند.

اکنون حالتی را مورد توجه قرار می‌دهیم که دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند. در این حالت با یک تبدیل موبیوس می‌توانیم این دو دایره را به دو دایرهٔ هم‌مرکز به مرکز مبدأ مختصات در صفحهٔ w بنگاریم. امّا یک «دایره» فقط و فقط هنگامی بر دو دایرهٔ هم‌مرکز عمود است که خطّی باشد که از مرکز این دوایر بگذرد. از این‌رو نگارهٔ دسته دایره‌های مزدوج با دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ باید مجموعهٔ همهٔ «دوایری» باشند که از مبدأ و نقطهٔ بینهایتِ صفحهٔ w می‌گذرند. در رابطه با شکل اوّلیه در صفحهٔ z، معنی این مطلب این است که دو نقطه وجود دارند به‌طوری که دوایر مارّ بر این دو نقطه فقط آن دوایری هستند که بر دو دایرهٔ مفروض $C_۱$ و $C_۲$ عمودند. این دونقطه تنها دو نقطه‌ای هستند که قرینهٔ یکدیگر نسبت به هر دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ هستند. این نقاط را نقاط مشترک این دسته دایره‌ها گویند. دسته دایره‌های متشکّل از همهٔ دوایر مارّ بر دو نقطهٔ ثابت را، دسته دایره‌های بیضوی گویند (شکل ۸.۳).

بالأخره حالتی را درنظر می‌گیریم که دو دایرهٔ مفروض $C_۱$ و $C_۲$ در صفحهٔ z بر هم مماس باشند. در این حالت می‌توانیم $C_۱$ و $C_۲$ را به دو خط متوازی در صفحهٔ w بنگاریم. یک «دایره» فقط و فقط، هنگامی بر دو خط متوازی عمود است که خطی باشد عمود بر آن دو خط موازی.



شکل۸.۳

بنابراین دسته دایره‌های اوّلیهٔ مزدوج با C_1 و C_2، باید با یک تبدیل موبیوس بر مجموعه‌ای از خطوط عمود بر این دو خط متوازی نگاشته شوند. در رابطه با شکل اوّلیه در صفحهٔ z، معنی این مطلب این است که از هر نقطه، بجز نقطهٔ تماس دو دایره، فقط و فقط یک دایره وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد و در نقطهٔ تماسِ دوایر C_1 و C_2 بر آنها عمود است. دوایر این دسته یک نقطهٔ مشترک دارند که در این نقطه بر هم مماس‌اند. این نوع دسته دایره‌ها را دسته دایره‌های سهموی نامند (شکل ۸.۳).

روشن است که نوع دسته بر اثر یک تبدیل موبیوس عوض نمی‌شود. چون دسته دایره‌های هم‌مرکز به مرکز مبدأ بر دسته خطّهای مارّ از مبدأ عمودند، ملاحظه می‌کنیم که یک دسته دایرهٔ هذلولوی ممکن است بر یک دسته دایرهٔ بیضوی عمود باشد. اگر دو دسته دایره این ویژگی را داشته باشند که هر دایره از این دسته بر هر دایره از دستهٔ دیگر عمود باشد، آنها را دسته دایره‌های مزدوج می‌نامند. از این‌رو هر دسته دایرهٔ هذلولوی دقیقاً یک دسته دایرهٔ مزدوج دارد که بیضوی است؛ و به‌عکس هر دسته دایرهٔ بیضوی یک دسته مزدوج دارد که هذلولوی است. دسته دایرهٔ سهموی را می‌توان دوبه‌دو با هم مزدوج گرفت، به‌خصوص اگر دو دایرهٔ دلخواه داده شده باشند، منحصراً یک دسته دایره وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست. این دسته دایره، برحسب اینکه دو دایرهٔ داده شده، ۰، ۱، یا دو نقطهٔ تقاطع داشته باشند، هذلولوی، سهموی یا بیضوی خواهند بود.

۷.۳ نقاط ثابت و رده‌بندی تبدیلهای موبیوس

یک نقطهٔ z_0 را نقطهٔ ثابت تبدیل موبیوس T گویند، هرگاه $Tz_0 = z_0$. نقطهٔ ثابت یک تبدیل موبیوس

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

باید در معادلهٔ

$$cz^{۲} + (d-a)z - b = ۰$$

صدق کند. چون این معادله، یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب z است، اگر تبدیل موبیوسی مانند T سه (یا بیشتر) نقطهٔ ثابت داشته باشد، تمام ضرائب معادلهٔ بالا باید صفر باشند؛ یعنی

$$c = ۰, \qquad d - a = ۰, \qquad b = ۰$$

و بنابراین T تبدیلی همانی است. در آنچه از این پس خواهد آمد، این حالت کنارگذارده خواهد شد.

الف) اگر $c = ۰$ و $a - d = ۰$، T معرّف انتقال:

$$w = Tz = z + k \qquad \left(k = \frac{b}{a}\right)$$

است، و لذا نقطهٔ بینهایت، نقطهٔ ثابت یکتای T است. اگر $c = ۰$ و $a - d \neq ۰$، T به‌صورت

$$w = Tz = \left(\frac{a}{d}\right) z + \left(\frac{b}{d}\right)$$

خواهد بود و دو نقطهٔ $b/(d-a)$ و بینهایت نقاط ثابت آن خواهند بود. در این حالت، اگر بنویسیم:

$$Sz = z - \frac{b}{d-a}$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} S(Tz) = Sw = w - \frac{b}{d-a} &= \left(\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}\right) - \frac{b}{d-a} \\ &= \frac{a}{d}\left(z - \frac{b}{d-a}\right) = \frac{a}{d}Sz \end{aligned}$$

یعنی

$$T = S^{-۱}US$$

که در آن $Uz = \frac{a}{d}z$ معرّف یک اتّساع است.

ب) اگر $c \neq ۰$ و $D \neq ۰$ (که $D = (d-a)^{۲} + ۴bc$ مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم مذکور است)، آنگاه T دو نقطهٔ ثابت متمایز

$$\alpha = \frac{a - d + \sqrt{D}}{۲c} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{a - d - \sqrt{D}}{۲c}$$

دارد. در این حالت، اگر بنویسیم:

$$Sz = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

یعنی:

$$S(Tz) = Sw = k(Sz) \qquad \therefore\ T = S^{-۱}US$$

که در آن

$$Uz = kz \qquad \left(k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c}\right)$$

یک اتّساع است. اگر $c \neq ۰$ و $D = ۰$، آنگاه T دارای یک نقطهٔ ثابت یکتای

$$\alpha = \beta = \frac{a-d}{۲c}$$

است. چون T، $z = \alpha$ را بر $w = \alpha$ می‌نگارد، به‌ازای مقادیر ثابت متناسب h و k می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{w-\alpha} = \frac{h}{z-\alpha} + k$$

با قرار دادن $z = \infty$، و $w = \frac{a}{c}$ و همچنین $z = ۰$، و $w = \frac{b}{d}$، برای مقادیر k و h خواهیم داشت:

$$k = \frac{۲c}{a+d}, \qquad h = ۱$$

بنابراین، اگر قرار دهیم

$$Sz = \frac{1}{z - \alpha}$$

آنگاه

$$S(Tz) = Sw = \frac{1}{w - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{2c}{a + d} = V(Sz)$$

یعنی

$$T = S^{-1}VS$$

که در آن $Vz = z + k$ یک انتقال است.

دو تبدیل موبیوس T_1 و T_2 را متشابه گویند هرگاه تبدیل موبیوس سوّمی مانند S چنان وجود داشته باشد که $T_2 = S^{-1}T_1S$.

پس قضیهٔ زیر را ثابت نمودیم:

قضیهٔ ۱.۷.۳. فرض می‌کنیم

$$w = Tz = \frac{az + b}{cz + d}$$

یک تبدیل موبیوس باشد و $D = (a - d)^2 + 4bc$.

الف) حالت $c = 0$. اگر $D = 0$، نقطهٔ بینهایت، نقطهٔ ثابت یکتای T است و T را می‌توان به‌صورت نرمال:

$$w = z + k \qquad \left(k = \frac{b}{d}\right)$$

نوشت. اگر $D \neq 0$، T دارای دو نقطهٔ ثابت متمایز $\gamma = b/(d - a)$ و نقطهٔ بینهایت است و T را می‌توان به صورت نرمال:

$$w - \gamma = k(z - \gamma) \qquad \left(k = \frac{a}{d}\right)$$

نوشت.

ب) حالت $c \neq 0$. اگر $D \neq 0$، T دونقطهٔ ثابت متمایز دارد:

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{D}}{۲c}, \qquad \beta = \frac{a-d-\sqrt{D}}{۲c}$$

و T را می‌توان به‌صورت نرمال:

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad \left(k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} = \frac{a+d-\sqrt{D}}{a+d+\sqrt{D}}\right)$$

نوشت. اگر $D = ۰$، T یک نقطهٔ ثابت یکتای $\alpha = (a-d)/۲c$ دارد و می‌توان T را به‌صورت نرمال

$$\frac{۱}{w-\alpha} = \frac{۱}{z-\alpha} + k \qquad \left(k = \frac{۲c}{a+d}\right)$$

نوشت:

به عبارت دیگر:

الف) یک تبدیل موبیوس T دارای دو نقطهٔ ثابت است، اگر و فقط اگر $D \neq ۰$، و در این حالت T با یک اتّساع مشابه است. امّا:

ب) T یک نقطهٔ ثابت یکتا دارد اگر و فقط اگر $D = ۰$، و در این حالت T با یک انتقال مشابه است.

تبصره. فرض می‌کنیم $U_۱ z = k_۱ z$ و $U_۲ z = k_۲ z$ دو اتساع باشند. $U_۱$ و $U_۲$ متشابه‌اند اگر و فقط اگر ضرایب $k_۱$ و $k_۲$ یا برابر باشند و یا عکس یکدیگر (یعنی یا $k_۱ = k_۲$ و یا $k_۱ = ۱/k_۲$). ولی چون هر انتقال $w = z + k$ را می‌توان به‌صورت $\left(\frac{w}{k}\right) = \left(\frac{z}{k}\right) + ۱$ نوشت، هر انتقالی (از طریق یک اتّساع) با انتقال $w = z + ۱$ مشابه است. به عبارت دیگر، هر دو انتقال با یکدیگر مشابه‌اند.

فرض کنید

$$w = Tz = \frac{az+b}{cz+d}$$

یک تبدیل موبیوس با $D = (d-a)^۲ + ۴bc \neq ۰$ باشد. در این‌صورت تبدیل موبیوسی مانند S با ویژگی $Sw = S(Tz) = U(Sz)$ یعنی $W = UZ$ $(Z = Sz,\ W = Sw)$، وجود دارد که $UZ = kZ$ یک اتّساع است. اگر $k > ۰$ (ولی $k \neq ۱$)، T را تبدیل هذلولوی موبیوس گویند، اگر $|k| = ۱$ (باز هم $k \neq ۱$)، T را بیضوی خوانند و در همهٔ حالات دیگر آن را ثابت زاویه $(loxodromic)$ می‌نامند.

اگر T هذلولوی باشد، U هر خط مارّ بر مبدأ از صفحهٔ Z را بر خودش می‌نگارد، ولی یک دایره به مرکز مبدأ را بر دایرهٔ دیگری می‌نگارد. دربارهٔ دوایر واقع در صفحهٔ اوّلیهٔ z و صفحهٔ w، این

بدین‌معنی است که هر دایره از دسته دایرهٔ (بیضوی) P که از دو نقطهٔ ثابت T بگذرد بر خودش نگاشته می‌شود، درصورتی که هر دایره از دسته دایره‌های مزدوج (هذلولوی) Q که نقاط حدّی آن دو نقطهٔ ثابت T باشند، بر دایرهٔ دیگری از همان دسته دایره‌ها نگاشته می‌شود. به‌ویژه یک دایرهٔ آپولونیوس

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = h$$

(که α و β نقاط ثابت T، و h عددی ثابت است) بر دایرهٔ آپولونیوس دیگر؛

$$\left|\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right| = hk$$

نگاشته می‌شود.

اگر T بیضوی باشد، U دورانی است (به شناسهٔ k) در صفحهٔ Z. پس کافی است فقط نقشهای دسته دایره‌های P و Q مذکور در بخش قبلی را با یکدیگر عوض کنیم.

اگر $D = \circ$، تبدیل موبیوس T را سهموی گوئیم، و در این حالت T نقطهٔ ثابت یکتایی دارد و با یک انتقال

$$W = VZ = Z + k$$

مشابه است. اما، V هر خط موازی با بردار k در صفحهٔ Z را بر خودش، و هر خط عمود بر بردار k را بر خط دیگری عمود بر بردار k، می‌نگارد. دربارهٔ دوایر واقع در صفحهٔ اولیهٔ z، این امر بدین‌معنی است که دسته دایره‌ای (سهموی) مانند P مماس بر یکدیگر در نقطهٔ ثابت یکتای T وجود دارد، با این ویژگی که هر دایره در P بر اثر T بر خودش نگاشته می‌شود درحالی‌که هر دایره از دسته دایره‌های (سهموی) مزدوج Q (دسته دایره‌هایی عمود بر P در نقطهٔ تماس مشترک دوایر در P) بر دایرهٔ **دیگری** از Q نگاشته می‌شود.

۸.۳ انعکاس

نقطهٔ P و دایره‌ای به مرکز O داده شده‌اند، منعکس نقطهٔ P نسبت به این دایره، بنا به تعریف، نقطه‌ای است مانند Q واقع بر شعاع مارّ بر P، به‌طوری که:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^{۲}$$

r شعاع دایرهٔ O است. O را مرکز انعکاس و دایرهٔ O را دایرهٔ انعکاس گویند. بیشترین قضایای مورد نیاز ما در انعکاس از قضیهٔ ۱.۸.۳ و قضایای متناظر با آن دربارهٔ تبدیلهای موبیوس نتیجه می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۸.۳. فرض می‌کنیم z_j^* منعکسهای z_jها $(j = ۰, ۱, ۲, ۳)$ نسبت به یک دایره باشند. در این صورت

$$(z_۰^*, z_۱^*; z_۲^*, z_۳^*) = \overline{(z_o, z_۱; z_۲, z_۳)}$$

برهان. فرض می‌کنیم T تبدیل موبیوسی است که دایرهٔ انعکاس را بر محور حقیقی می‌نگارد. چون تبدیل موبیوس، تقارن را محفوظ نگاه می‌دارد، نقاط z_j و z_j^* بر مزدوجهای مختلط‌شان نگاشته می‌شوند: یعنی اگر $w_j = Tz_j$، آنگاه $\overline{w}_j = Tz_j^*$ $(j = ۰, ۱, ۲, ۳)$. به‌علاوه، چون هر تبدیل موبیوس نسبتهای ناهمساز را محفوظ نگه می‌دارد، داریم

$$\begin{aligned}(z_۰^*, z_۱^*; z_۲^*, z_۳^*) &= (Tz_۰^*, Tz_۱^*; Tz_۲^*, Tz_۳^*) \\ &= (\overline{w}_۰, \overline{w}_۱; \overline{w}_۲, \overline{w}_۳) = \overline{(w_۰, w_۱; w_۲, w_۳)} \\ &= \overline{(Tz_۰, Tz_۱; Tz_۲, Tz_۳)} = \overline{(z_۰, z_۱; z_۲, z_۳)}\end{aligned} \quad \blacksquare$$

از آنجا که شرط لازم و کافی برای همدایره بودن چهار نقطه، حقیقی بودن نسبت ناهمساز آنهاست (و مزدوج مختلط یک عدد حقیقی خود آن عدد حقیقی است)، بلافاصله قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید:

قضیهٔ ۲.۸.۳. انعکاس دایره‌ها را محفوظ نگاه می‌دارد.

به‌آسانی می‌بینیم که انعکاس هم‌دایرهٔ انعکاس را بر خودش می‌نگارد و هم خط مارّ بر مرکز انعکاس را. به‌علاوه دایره‌ای که از مرکز انعکاس بگذرد بر خطی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد ولی موازی مماس بر این دایره در مرکز انعکاس است، نگاشته می‌شود. عکس این مطلب نیز درست است. زیرا فرض کنید O مرکز انعکاس و OA قطری از این دایره است که باید منعکسش را تعیین کنیم و B منعکس A است. در این صورت به‌ازای هر نقطهٔ P از این دایره و منعکس آن Q داریم

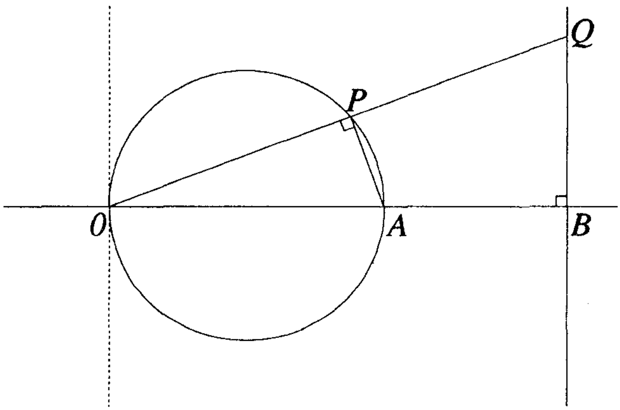
$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^۲ = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

(که r شعاع دایرهٔ انعکاس است). یعنی

$$\overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OQ} \qquad \therefore\ \triangle OAP \sim \triangle OQB$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\angle OBQ = \angle OPA = \frac{\pi}{۲}$$



شکل۹.۳

به‌عکس فرض کنید، خطی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد داده شده باشد. B را پای عمود وارد از O بر این خط و A را منعکس B می‌گیریم. پس به‌ازای هر نقطهٔ Q از این خط، و منعکس آن P، داریم:

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = \overline{OA}\cdot\overline{OB}; \qquad \overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OQ}$$
$$\therefore\ \triangle OAP \sim \triangle OQB$$

از این رو $\frac{\pi}{۲} = \angle OBQ = \angle OPA$، و لذا P بر دایره‌ای به قطر OA واقع است. بالأخره، دایره‌ای که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد بر دایرهٔ دیگری که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد نگاشته می‌شود.

با تأسّی به برهان قضیهٔ ۳.۳.۳ که تبدیلهای موبیوس همدیس‌اند (و با توجه به اینکه به‌ازای هر عدد مختلط: $\alpha \neq ۰$, $\arg\overline{\alpha} \equiv -\arg\alpha$ (پیمانه ۲π)، قضّیه زیر به‌دست می‌آید:

قضیهٔ ۳.۸.۳. انعکاس تبدیلی است حافظ زاویه؛ یعنی اندازهٔ زاویه را محفوظ نگاه می‌دارد ولی جهت آن‌را عوض می‌کند.

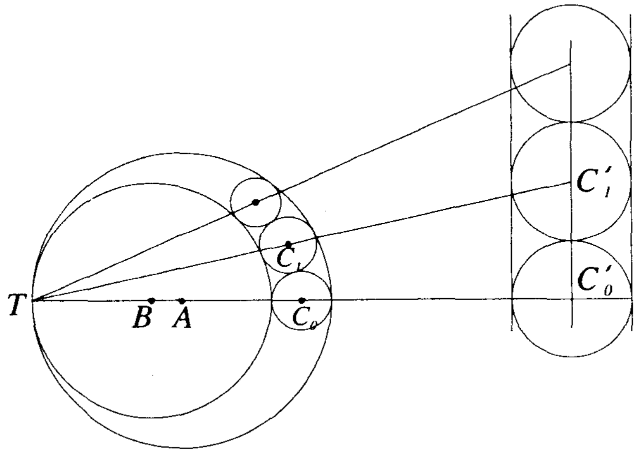
بنابراین، انعکاس، یک زوج دایرهٔ متقاطع را به یک زوج دایرهٔ متقاطع باهمان زاویهٔ نقطهٔ تقاطع (صرفنظر از جهت زوایا) می‌نگارد. به‌خصوص یک زوج دایرهٔ متعامد را بریک زوج دایرهٔ متعامد،

و یک زوج دایرهٔ مماس برهم را بر یک زوج دایرهٔ مماس می‌نگارد. به‌علاوه یک دایرهٔ عمود بر دایرهٔ انعکاس را بر خودش می‌نگارد (بنابه تعریف تقارن).

اوّلین استفادهٔ ما از انعکاس.

مثال. (پاپوس) فرض‌کنید دو دایرهٔ A و B مماس داخلی هستند و دایرهٔ B داخل دایرهٔ A است. $C_۰$ را دایره‌ای می‌گیریم که مرکزش بر خط AB و مماس داخلی بر دایرهٔ A و مماس خارجی بر دایرهٔ B است. فرض کنید $C_۱$، $C_۲$، ... دایره‌هایی هستند که: $C_۱$ مماس بر دوایر A، B، $C_۰$؛ $C_۲$ مماس بر دوایر A، B، $C_۱$؛ و به همین قیاس ... در این‌صورت

$$h_n = ۲nr_n$$



شکل۳.۱۰

که در آن h_n فاصلهٔ مرکز C_n تا خط AB و r_n شعاع دایرهٔ C_n است.

برهان. فرض می‌کنیم T، نقطهٔ تماس دوایر A و B، مرکز انعکاس باشد (شعاع دایرهٔ انعکاس را دلخواه می‌گیریم). پس دو دایرهٔ A و B بر دو خط موازی و عمود بر خط AB نگاشته می‌شوند، و دوایر $C_۰$، $C_۱$، $C_۲$، ... بر دوایر $C'_۰$، $C'_۱$، $C'_۲$، ... مماس بر این دو خط موازی (نگاره‌های دوایر A و B) نگاشته می‌شوند، و شعاعهای C'_n همگی برابر (مثلاً با r') هستند. پس

$$\frac{r_n}{r'} = \frac{\overline{TC_n}}{\overline{TC'_n}} = \frac{h_n}{C'_nC'_۰} = \frac{h_n}{۲nr'} \qquad \therefore\ h_n = ۲nr_n$$

برهانهای بسیاری برای قضیهٔ ۱.۸.۲، قضیهٔ فویرباخ، با استفاده از انعکاس موجودند، ولی

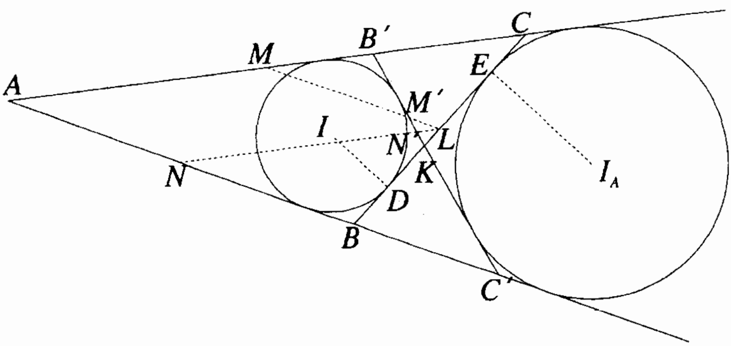
برهان زیر که در صفحات ۱۱۷_۱۱۹ کتاب «تجدید نظری در هندسه [1]» تألیف ه. س. م. کاکستر و س. ل. گرایتسر آمده است، شاید مقدماتی‌ترین برهان شناخته شده باشد. ..

قضیهٔ ۴.۸.۳. (فویرباخ). دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث بر دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی آن مماس است.

برهان. فرض می‌کنیم I و I_A به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مقابل به زاویهٔ A باشند. پس سه ضلع $\triangle ABC$ مماسهای مشترک دوایر I و I_A هستند. فرض می‌کنیم $B'C'$ چهارمین مماس مشترک آنها باشد که C', B' به ترتیب بر AC و امتداد AB واقع هستند و E, D به ترتیب پاهای عمودهای مرسوم از I و I_A بر ضلع BC باشند. طول اضلاع مقابل به زوایای A، B، C را به ترتیب، a، b، c می‌گیریم. و قرار می‌دهیم $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. در این‌صورت به آسانی می‌توان تحقیق کرد که:

$$\overline{BD} = s - b = \overline{CE}$$

پس نقطهٔ L، وسط ضلع BC، وسط DE نیز هست. بنابراین، دایرهٔ به قطر DE بر هر دو دایرهٔ محاطی داخلی I و محاطی خارجی I_A عمود است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که منعکسهای دایره‌های I و I_A نسبت به دایرهٔ L خود دایره‌های I و I_A هستند. چون دو دایره فقط و وقتی بر هم مماس‌اند که منعکسهای آنها هم برهم مماس باشند، کافی است نشان دهیم که منعکس دایرهٔ نه نقطه خط $B'C'$ است.



شکل ۱۱.۳

چون دایرهٔ نه نقطه از مرکز انعکاس L می‌گذرد، بر یک خط نگاشته می‌شود. به‌علاوه، دایرهٔ نه نقطه از نقاط M، N، وسطهای CA، AB، می‌گذرد، لذا می‌ماند نشان دهیم که منعکسهای

1. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer's *Geometry Revisited* [Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1967, pp. 117-119].

M و N (نسبت به دایرهٔ L) بر خط $B'C'$ قرار دارند.

فرض کنید K، M'، N' به ترتیب محل تلاقی $B'C'$ با BC، LM، LN باشند. چون BI نیمساز $\angle KBA$، و CI_A نیمساز زاویهٔ خارجی $\angle KCA$ هستند، بنابر لم پ.۱.۴، داریم

$$\overline{BK} : \overline{AB} = \overline{KI} : \overline{AI} = \overline{CK} : \overline{AC};$$

یعنی

$$\frac{\overline{BK}}{c} = \frac{\overline{CK}}{b} = \frac{a}{b+c} \qquad \therefore\ \overline{BK} = \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{CK} = \frac{ab}{b+c}$$

چون L وسط BC است، نتیجه می‌گیریم که

$$\overline{LK} = \frac{a|b-c|}{۲(b+c)}$$

اگر $b < c$، آنگاه فقط نقشهای B و C (و بنابراین نقشهای b و c) با هم عوض می‌شوند، ولی اگر $b = c$، قضیه بدیهی است، از این‌رو بدون اینکه از کلیّت کاسته شود، می‌توان فرض کرد که $b > c$. چون $\triangle KLM' \sim \triangle KBC'$، داریم:

$$\overline{LM'} : \overline{LK} = \overline{BC'} : \overline{BK};$$

یعنی

$$\overline{LM'} = \frac{(b-c)^۲}{۲c}$$

که در آن از:

$$\overline{BC'} = \overline{AC'} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AB} = b - c$$

$$\therefore\ \overline{LM} \cdot \overline{LM'} = \left(\frac{b-c}{۲}\right)^۲$$

استفاده شده است. همین‌طور از $\triangle KLN' \sim \triangle KCB'$ نتیجه می‌گیریم:

$$\overline{LN'} = \frac{(b-c)^۲}{۲b} \qquad \therefore\ \overline{LN} \cdot \overline{LN'} = \left(\frac{b-c}{۲}\right)^۲$$

اما

$$\overline{LD} = \frac{۱}{۲}\overline{DE} = \frac{۱}{۲}(b-c)$$

و کار تمام است. ■

پیش از ارائهٔ برهان دیگری برای قضیهٔ بطلیموس ـ اویلر ۱.۲.۲، به فرمولی نیاز داریم که اثر انعکاس را بر طول بیان کند.

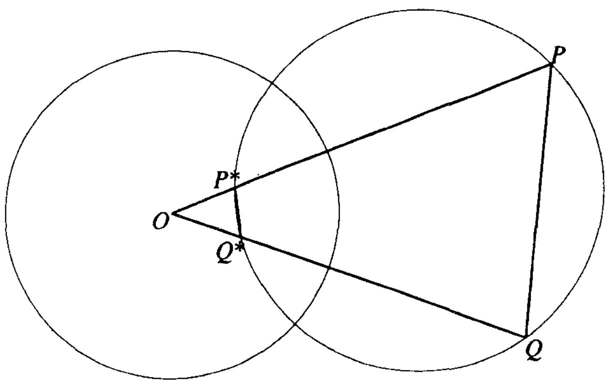
لم ۵.۸.۳. فرض کنید P^* و Q^* منعکسهای دو نقطهٔ P و Q نسبت به دایره‌ای به مرکز O و شعاع r باشند. در این‌صورت

$$\overline{P^*Q^*} = \frac{r^۲ \cdot \overline{PQ}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \quad \text{و} \quad \overline{PQ} = \frac{r^۲ \cdot \overline{P^*Q^*}}{\overline{OP^*} \cdot \overline{OQ^*}}$$

برهان. چون $\triangle OP^*Q^* \sim \triangle OQP$، داریم

$$\frac{\overline{P^*Q^*}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{OP^*}}{\overline{OQ}} = \frac{r^۲}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}, \qquad \therefore\ \overline{P^*Q^*} = \frac{r^۲ \cdot \overline{PQ}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}$$

تساوی دوم بلافاصله از اولی نتیجه می‌شود، زیرا P، Q به‌ترتیب منعکسهای P^*, Q^* هستند. ■



شکل۱۲.۳

قضیهٔ ۶.۸.۳. (بطلیموس ـ اویلر). به ازای چهار نقطهٔ دلخواه A، B، C، D داریم:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

تساوی فقط و فقط هنگامی برقرار است که A، B، C، D همدایره و به همین ترتیب باشند.

برهان. انعکاسی را در نظر گیرید که D مرکز آن باشد. پس بنابر نابرابری مثلثی، داریم

$$\overline{A^*B^*} + \overline{B^*C^*} \geq \overline{A^*C^*}$$

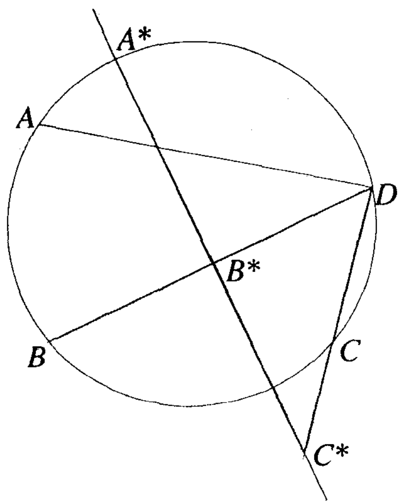
و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار خواهد شد که A^*، B^*، C^* همخط و به همین ترتیب باشند. بنابر لم قبل، این رابطه بر حسب A، B، C، D چنین خواهد شد:

$$\frac{r^۲ \cdot \overline{AB}}{\overline{AD} \cdot \overline{BD}} + \frac{r^۲ \cdot \overline{BC}}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}} \geq \frac{r^۲ \cdot \overline{AC}}{\overline{AD} \cdot \overline{CD}};$$

یعنی

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

تساوی فقط و فقط زمانی برقرار خواهد شد که A، B، C، D همدایره و به همین ترتیب باشند. ■



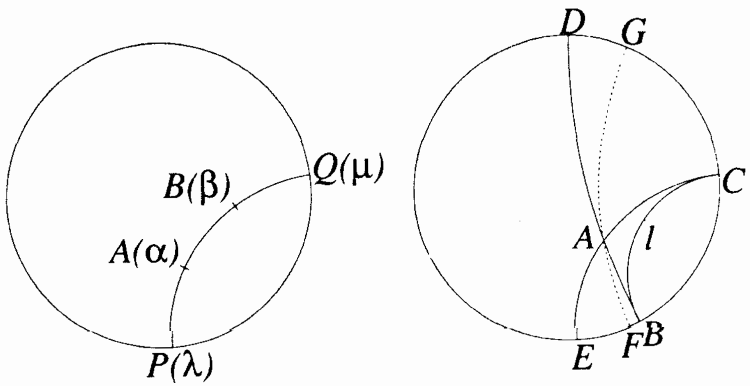
شکل۱۳.۳

۹.۳ الگوی پوانکاره برای هندسهٔ نااقلیدسی

یکی از اصول موضوع هندسهٔ اقلیدسی این‌است که از یک نقطهٔ واقع در خارج یک خط فقط وفقط یک خط موازی با خط مفروض می‌توان رسم کرد. (این، صورت اصلی بیان اقلیدس نیست ولی، هم‌ارز با آن‌است). چون اصل موضوع توازی همانند سایر اصول کاملاً بدیهی نیست، قرنها تلاش می‌کردند که این اصل موضوع توازی را از روی سایر اصول موضوع اثبات کنند.این کار تا قرن اخیر ادامه داشت تا اینکه ی. بویویی (۱۸۰۲ـ۱۸۶۰) و ن. ای. لباچفسکی (۱۷۹۳ـ۱۸۵۶) با ساختن هندسه‌ای که در آن اصل توازی برقرار نبود، به‌این تلاش خاتمه دادند. برای ابطال اصل موضوع توازی دو راه وجود دارد. یکی ساختن هندسه‌ای است که در آن هیچ خط موازی وجود نداشته باشد، یعنی هر دوخطی متقاطع باشند. یک الگو برای ساختن چنین هندسه‌ای بررسی سطح کره است، که در آن «خطوط» دایره‌های عظیمه‌اند. (برای اینکه دقیق سخن بگوییم، باید دو نقطهٔ متقاطر را یکی بگیریم. چرا؟). راه دیگر ساختن هندسه‌ای است که در آن از یک نقطه بیش از یک خط موازی با خط مفروض بتوان رسم کرد. اکنون با پیروی از هـ. پوانکاره (۱۸۵۴ـ۱۹۱۲) چنین الگویی را معرفی می‌کنیم:

جهان ما، یا بهتر بگوییم «صفحهٔ» ما یک قرص (باز) دایرهٔ یکّه است:

$$U = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < ۱\}$$



شکل۱۴.۳

و «خطوط مستقیم» قوسهای دوایری عمود بر این دایرهٔ یکّه‌اند. می‌توان تحقیق کرد که این الگوی ما در همهٔ اصول موضوع هندسهٔ اقلیدس بجز اصل توازی صدق می‌کند. مثلاً از دو نقطهٔ مفروض A و B در U فقط و فقط یک «خط مستقیم» وجود دارد که از A و B می‌گذرد. کافی است

دایره‌ای رسم کنیم که از نقاط A، B و A^*، منعکس نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ یکّه، بگذرد. (این دایره خودبه‌خود از نقطهٔ B^*، منعکس B، نیز خواهد گذشت). امّا با داشتن یک «خط مستقیم» مفروض $\ell(=\widehat{BC})$ و یک نقطهٔ A غیر واقع بر ℓ، می‌توانیم «خطوط مستقیم» $B\widehat{A}D$ و $C\widehat{A}E$ را رسم کنیم که ℓ را روی دایرهٔ یکه قطع کنند. چون نقاط واقع بر دایرهٔ یکه در «صفحهٔ» Uی ما نیستند، «خطوط مستقیم» $B\widehat{A}D$ و $C\widehat{A}E$ موازی با این «خط مستقیم» ℓ هستند و بینهایت «خط مستقیم» مانند $F\widehat{A}G$ در فاصلهٔ میان این دو خط وجود دارند که اصلاً ℓ را قطع نمی‌کنند.

«فاصلهٔ» بین دو نقطهٔ $z_1, z_2 \in U$ چنین تعریف می‌شود:

$$d(z_1, z_2) := |\log(z_1, z_2;\ \lambda, \mu)|$$

که در آن λ، μ فصل مشترکهای قوس دایرهٔ مارّ بر z_1، z_2 و دایرهٔ یکّه هستند. باید توجه داشت که تابع فاصلهٔ $d(z_1, z_2)$ خوشتعریف است: چون z_1, z_2, λ, μ همدایره‌اند، نسبت ناهمسازشان عددی است حقیقی و چون z_1، z_2 هر دو بین λ و μ قرار دارند، این نسبت ناهمساز مثبت است. به‌علاوه $d(z_1, z_2)$ مستقل از ترتیب انتخاب λ و μ است. زیرا

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2;\ \mu, \lambda) &= \frac{1}{(z_1, z_2;\ \lambda, \mu)}, \\
|\log(z_1, z_2;\ \mu, \lambda)| &= |-\log(z_1, z_2;\ \lambda, \mu)| \\
&= |\log(z_1, z_2;\ \lambda, \mu)|
\end{aligned}$$

بالأخره انتخاب پایه برای لگاریتم مهّم نیست، و فقط، هم‌ارز با تغییر مقیاس است.

می‌توان نشان داد که تابع فاصلهٔ ما در اصول موضوع متریک زیر صدق می‌کند.

الف) به‌ازای همهٔ مقادیر $z_1, z_2, \in U$، $d(z_1, z_2) \geq 0$. تساوی فقط و فقط هنگامی برقرار است که $z_1 = z_2$.

ب) به‌ازای همهٔ مقادیر $z_1, z_2 \in U$، $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$

ج) نابرابری مثلثی: به ازای هر سه نقطهٔ

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3) \qquad z_1, z_2, z_3 \in U$$

تحقیق درستی دو اصل موضوع اوّل در واقع یک کار عملی ساده است.

مفهوم زاویه در «صفحهٔ» U، همان مفهوم زاویهٔ معمولی در هندسهٔ اقلیدسی بین یک جفت دایرهٔ متقاطع است. امّا مجموع زوایای (داخلی) یک «مثلث» کمتر از π است.

در هندسهٔ اقلیدسی ویژگیهایی را مطالعه می‌کنیم که در اثر حرکت جسم صلب ناوردا

هستند ـ گروه تبدیلهای متشکل از انتقال، دوران و تقارن. همتای این تبدیلها در الگوی پوانکاره عبارت‌اند از گروه (!) همهٔ تبدیلهای موبیوس که قرص یکه را بر خودش می‌نگارند. چون تبدیلهای موبیوس همدیس و حافظ نسبت ناهمساز هستند، فاصلهٔ بین دو نقطه و زاویهٔ بین دو «خط مستقیم» بر اثر حرکت صلب، محفوظ می‌مانند.

تمرینها

۱. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$ نقاطی در صفحهٔ مختلط باشند که نگاره‌های گنجنگاشتی آنها بر کرهٔ ریمان، نقاط متقاطر این کره باشند. نشان دهید $z_۱\bar{z}_۲ = -۱$.

۲. نشان دهید که به ازای مقدار مناسب k، $(۰ < k < ۱)$، هر چهار نقطهٔ متمایز همدایره را می‌توان با یک تبدیل موبیوس به نقاط ± ۱ و $\pm k$ نگاشت.

۳. نشان دهید که شش تبدیل موبیوس زیر بر اثر ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهند:

$$z,\ \frac{۱}{z},\ ۱-z,\ \frac{۱}{۱-z},\ \frac{z}{z-۱},\ \frac{z-۱}{z}$$

۴. نشان دهید که نسبت ناهمساز متناظر با ۲۴ جایگشت چهار نقطهٔ $z_۰$، $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، فقط می‌تواند شش مقدار زیر را داشته باشد:

$$\lambda = (z_۰, z_۱; z_۲, z_۳),\ \frac{۱}{\lambda},\ ۱-\lambda,\ \frac{۱}{۱-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-۱},\ \frac{\lambda-۱}{\lambda}$$

۵. دو دایره به مرکزهای مبدأ مختصات و نقطهٔ ۱، هر دو به شعاع ۱ به انضمام خط $\Re z = \frac{۱}{۲}$، صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ را به شش ناحیه تقسیم می‌کنند. نشان دهید که هریک از این شش ناحیه دقیقاً شامل یکی از شش مقدار:

$$\lambda,\ \frac{۱}{\lambda},\ ۱-\lambda,\ \frac{۱}{۱-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-۱},\ \frac{\lambda-۱}{\lambda}$$

هستند، به شرط آنکه λ روی هیچ‌یک از مرزها نباشد.

۶. تابع غیر ثابت $f(z)$ را چنان بیابید که در معادلهٔ تابعی زیر صدق کند

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{۱}{z}\right) = f(۱-z) = f\left(\frac{۱}{۱-z}\right) \\ &= f\left(\frac{z}{z-۱}\right) = f\left(\frac{z-۱}{z}\right) \qquad (z \neq ۰, ۱) \end{aligned}$$

چند تا از این توابع وجود دارند؟

۷. یک تابع $f(z)$ پیدا کنید که به ازای همهٔ مقادیر $(z \neq ۰, ۱)$ در معادلهٔ تابعی:

$$f\left(\frac{۱}{۱-z}\right) + f\left(\frac{z-۱}{z}\right) = \frac{z}{z-۱}$$

صدق کند. آیا چنین تابعی یکتاست؟

۸. نقطهٔ $z_۰$ را نقطهٔ ثابت یک تبدیل T گویند، اگر $Tz_۰ = z_۰$:

الف) نشان دهید که تبدیل موبیوسی که نقاط ثابت آن ۰، ۱، ∞ باشند، باید تبدیل همانی باشد.

ب) نشان دهید، تبدیل موبیوسی که سه نقطهٔ ثابت متمایز داشته باشد، باید تبدیل همانی باشد.

ج) فرض کنید تبدیلهای موبیوس T و S این ویژگی را داشته باشند که به ازای سه نقطه متمایز z_i $(i = ۱, ۲, ۳)$، $Sz_i = Tz_i$، نشان دهید که $S = T$.

۹. تبدیل موبیوسی پیدا کنید که ۱ −، ۰، ۱ را به $-i$ ، ۱، i بنگارد.

۱۰. از راه محاسبه، ناوردا بودن نسبت ناهمساز را بر اثر انتقال، اتّساع و عکس کردن تحقیق کنید..

۱۱. با استفاده از این ویژگی که تبدیل موبیوس نسبت ناهمساز را حفظ می‌کند، نشان دهید که تبدیل موبیوس دایره را بر دایره می‌نگارد.

۱۲. دو دایرهٔ متقاطع مفروض‌اند. خط‌المرکزین آنها دو دایره را در چهار نقطه قطع می‌کند. نشان دهید که نسبت ناهمساز این چهار نقطه برابر $\sin^۲ \frac{\theta}{۲}$ است که θ زاویهٔ تقاطع دو دایره است.

۱۳. الف) نقطهٔ P خارج دایرهٔ C داده شده است. با استفاده از ستاره و پرگار، نقطهٔ Q قرینهٔ نقطهٔ P را نسبت به دایرهٔ C پیدا کنید.

ب) اگر نقطهٔ P درون دایرهٔ C باشد چه خواهد شد؟

ج) نقطهٔ P و دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر هر دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ عمود باشند.

د) دو دایرهٔ نامتقاطع داده شده‌اند. دو نقطه پیدا کنید که نسبت به هر دو دایره متقارن باشند.

۱۴. الف) نشان دهید که شرط لازم وکافی برای اینکه نقاط $z_۰$ و $z_۰^*$ نسبت به دایرهٔ $|z-a| = r$ قرینه باشند، این‌است که

$$(\overline{z}_۰ - \overline{a})(z_۰^* - a) = r^۲$$

ب) نشان دهید که $z_۰$ و $z_۰^*$ فقط و فقط هنگامی نسبت به دایرهٔ محیطی $\triangle z_۱z_۲z_۳$ متقارن‌اند که:

$$(z_۰^*, z_۱; z_۲, z_۳) = \overline{(z_۰, z_۱; z_۲, z_۳)}$$

ج) با استفاده از (ب)، اصل تقارن ۲.۴.۳ را ثابت کنید.

۱۵. الف) اگر $z_۰$ و $z_۰^*$ نسبت به یک دایرهٔ C متقارن باشند، و $z_۱$ و $z_۲$ دو نقطهٔ دلخواه بر دایرهٔ C باشند، نشان دهید که قدر مطلق نسبت ناهمساز $(z_۰, z_۰^*; z_۱, z_۲)$ برابر ۱ است.

ب) سه نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ داده شده‌اند. مجموعهٔ همهٔ $z_۰$هایی را که در تساوی:

$$|(z_۰, z_۱; z_۲, z_۳)| = ۱$$

صدق می‌کنند پیدا کنید.

۱۶. الف) نشان دهید که هر تبدیل موبیوسی که محور حقیقی را بر خودش بنگارد می‌تواند با ضرایب حقیقی بیان شود.

ب) نشان دهید که هر تبدیل موبیوسی که محور حقیقی صفحهٔ z را بر دایرهٔ یکّهٔ صفحهٔ w بنگارد می‌تواند به‌صورت

$$w = \frac{\alpha z - \beta}{\overline{\alpha}\, z - \overline{\beta}} \qquad \left(\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbb{R}\right)$$

بیان شود.

ج) نشان دهید که هر تبدیل موبیوسی که دایرهٔ یکّه را بر خودش بنگارد می‌تواند به صورت

$$w = \frac{\alpha z - \beta}{\overline{\beta}\, z - \overline{\alpha}} \qquad (|\alpha| \neq |\beta|)$$

بیان شود.

۱۷. الف) تبدیل موبیوسی بیابید که دوایر $|z| = ۱$ و $|z - \frac{۱}{۴}| = \frac{۱}{۴}$ را بر یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز بنگارد. نسبت شعاعهای این دو دایرهٔ هم‌مرکز چیست؟

ب) همین مسأله را برای دوایر $|z| = ۱$ و $|z + ۲| = ۴$، حل کنید.

۱۸. تبدیل موبیوسی پیدا کنید که محور حقیقی و دایرهٔ $|z - ۵i| = ۴$ را به دو دایرهٔ هم‌مرکز به مرکز مبدأ بنگارد. نسبت شعاعهای آنها چیست؟

۱۹. فرض کنید تبدیل موبیوسی یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز را بر یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز دیگر بنگارد. نشان دهید که نسبت شعاعهای آنها محفوظ می‌ماند.

۲۰. الف) تبدیل موبیوسی پیدا کنید که دو دایرهٔ $|z - ۱| = ۱$ و $|z - ۲| = ۲$ را بر دو دایرهٔ $|w - ۱| = ۱$ و $|w + ۱| = ۱$ بنگارد.

ب) تبدیل موبیوسی بیابید که دو دایرهٔ $|z| = ۱$ و $|z - \sqrt{۳}| = ۲$ را بر دو دایرهٔ $|w - ۱| = ۲$ و $|w + ۱| = ۲$ بنگارد.

ج) تبدیل موبیوسی پیدا کنید که دو دایرهٔ $|z| = ۱$ و $|z - ۵| = ۳$ را بر دو دایرهٔ هم‌مرکز بنگارد.

۲۱. نقاط ثابت تبدیلهای موبیوس زیر را بیابید:

الف) $w = \dfrac{z}{z-۱}$؛

ب) $w = \dfrac{z-۴}{z-۳}$؛

ج) $w = \dfrac{z}{۲-z}$؛

د) $w = \dfrac{۵z-۴}{۲z-۱}$.

کدام یک از این تبدیلها، بیضوی؟ هذلولوی؟ سهموی؟ ثابت ـ زاویه هستند؟ د؟

۲۲. الف) همهٔ تبدیلهای موبیوس T را بیابید که $T^۲$ همانی باشد.

ب) نشان دهید که T^n همانی است اگر و فقط اگر، T شکل نرمال

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad (k^n = ۱)$$

را داشته باشد.

۲۳. الف) آیا تقارن $w = Tz = \overline{z}$، نسبت به محور حقیقی، یک تبدیل موبیوس است؟

ب) در مورد انعکاس نسبت به دایرهٔ یکه چطور؟

۲۴. نگاره‌های خطوط و دوایر زیر را بر اثر انعکاس نسبت به دایرهٔ یکه بیابید.

الف) خط $y = x$؛

ب) خط $x = ۱$؛

ج) دایرهٔ $|z-۲| = ۱$؛

د) دایرهٔ $|z-۲| = ۲$.

۲۵. آیا انعکاس، حافظ تقارن است؟

۲۶. آیا ترکیب دو انعکاس، یک انعکاس است؟. آیا این ترکیب یک تبدیل موبیوس است؟

۲۷. خط ℓ و دایرهٔ C به مرکز A داده شده‌اند. فرض کنید B قرینهٔ A نسبت به خط ℓ و B^* منعکس B نسبت به دایرهٔ C باشند. نشان دهید که B^* مرکز دایرهٔ منعکس خط ℓ نسبت به دایرهٔ C است.

۲۸. الف) خط و دایره‌ای داده شده‌اند. نشان دهید که انعکاسی وجود دارد که یکی را بر دیگری بنگارد.

ب) همان مسأله را برای دو دایره (به جای یک خط و یک دایره) حل کنید.

۲۹. دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ که یکدیگر را قطع نمی‌کنند داده شده‌اند. نشان دهید که انعکاسی وجود دارد که $C_۱$ و $C_۲$ را بر دو دایرهٔ هم‌مرکز می‌نگارد.

۳۰. آیا تبدیل موبیوسی وجود دارد که قرص دایرهٔ یکه را بر خودش بنگارد و دو نقطهٔ مفروض از قرص یکه را با هم تعویض نماید؟ اگر جواب مثبت است چند تا از این تبدیلهای موبیوس وجود دارند؟

۳۱. در الگوی پوانکاره خطوط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ را با هم موازی بگیرید، و خطوط $\ell_۲$ و $\ell_۳$ را باهم. آیا لازم است که $\ell_۱$ و $\ell_۳$ با هم موازی باشند؟

۳۲. نشان دهید که در الگوی پوانکاره تابع فاصلهٔ $d(z_۱, z_۲)$، هنگامی‌که $z_۲$ به سمت نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ یکه میل کند، به ∞ میل خواهد کرد.

۳۳. فرض کنید نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ با همین ترتیب بر یک خط مستقیم قرار دارند. نشان دهید که

$$d(z_۱, z_۲) + d(z_۲, z_۳) = d(z_۱, z_۳)$$

۳۴. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$، $w_۱$، $w_۲$ نقاطی در صفحهٔ پوانکاره باشند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی $d(z_۱, z_۲) = d(w_۱, w_۲)$ این‌است که تبدیل موبیوسی وجود داشته باشد که قرص یکه را بر خودش بنگارد به‌طوری که $Tz_j = w_j \ (j = ۱, ۲)$.

راهنمایی: ابتدا تبدیل موبیوسی را پیدا کنید که $z_۲$ و $w_۲$ را بر مبدأ بنگارد.

۳۵. نابرابری مثلثی:

$$d(z_۱, z_۲) + d(z_۲, z_۳) \geq d(z_۱, z_۳) \qquad (z_۱, z_۲, z_۳, \in U)$$

را برای الگوی پوانکاره ثابت کنید.

راهنمایی: از تبدیل موبیوسی استفاده کنید که نقطهٔ $z_۲$ را بر مبدأ بنگارد.

۳۶. در الگوی پوانکاره دایره را توصیف کنید.

۳۷. «خط مستقیم» ℓ در الگوی پوانکاره داده شده است. مکان هندسی نقاطی مانند z که فاصله‌های آنها از این «خط مستقیم» مفروض ℓ مقدار ثابتی باشد چیست؟

۳۸. نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای موبیوس که قرص یکّه را بر خودش می‌نگارند، یک گروه تشکیل می‌دهند.

سخن آخر

امیدوارم توفیق یافته باشم که نشان دهم اعداد مختلط مفیدند، و می‌توانند برای ارائهٔ برهانهای ساده در بسیاری از قضایای زیبای هندسهٔ مسطحه به‌کار روند.

از آنجا که این موضوع قدمت زیادی دارد، به دشواری می‌توان مدّعی تازگی قضیه‌ای شد، ولی تا آنجا که من اطلاع دارم، به‌نظر نمی‌رسد برهانهای قضایای ۱.۵.۲، ۱.۶.۲، ۳.۶.۲ و ۱.۹.۲ و صورتهای مختلف آنها (به‌گونه‌ای که من در اینجا آورده‌ام) و همچنین قضیهٔ ۲.۶.۲ تاکنون در جایی منتشر شده باشد. اقلاً می‌توانم، به قول کاتس‌نلسن، سوگند یاد کنم که این براهین از آنِ خودِ من هستند. بدیهی است که بسیاری از مسائل تمرینها نیز ابتکارهای خودم، و به‌خصوص تمرینهای ۸ و ۱۶ (ب)ی فصل ۲ سخت مورد علاقه‌ام هستند.

در نوشتن فصل ۱ به کتاب هندسهٔ اعداد مختلط، تألیف ک. کاتایاما[1] (به زبان ژاپونی) و برای فصل ۲ به کتاب قضایای مشهور هندسه، اثر ک. یانو[2] (به زبان ژاپونی) کراراً مراجعه کرده‌ام.

در واقع، کتاب اخیر الهام‌بخش من در تنظیم دروس خود دربارهٔ اعداد مختلط بوده است، و عمیقاً مدیون این دو مؤلف هستم. بالاخره برای خوانندگانی که علاقه‌مند به ادامهٔ بیشتر این موضوع هستند کتاب ه. شورتفه‌گر هندسه و اعداد مختلط[3] را زیاد توصیه می‌کنم.

---

1. K. Katayama, *Geometry of Complex Numbers*, Iwanami, Tokyo, 1982.
2. K. Yano, *Famous Theorems in Geometry*, Kyoritsu, Tokyo, 1981.
3. H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Dover, New York, 1979.

پیوست الف

مقدماتی از هندسه

الف .۱ مرکزهای مثلث

الف .۱.۱ مرکزوار

لم الف .۱.۱. فرض کنید D و E وسطهای اضلاع AB و AC از $\triangle ABC$ باشند. در این صورت:

$$DE \| BC \quad \text{و} \quad \overline{DE} = \frac{۱}{۲}\overline{BC}$$

برهان. DE را تا نقطهٔ F امتداد می‌دهیم، به‌طوری که $\overline{DE} = \overline{EF}$. بنابراین در $\triangle ADE$ و $\triangle CFE$

$$\overline{AE} = \overline{CE}, \qquad \overline{DE} = \overline{FE}, \qquad \angle AED = \angle CEF$$
$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

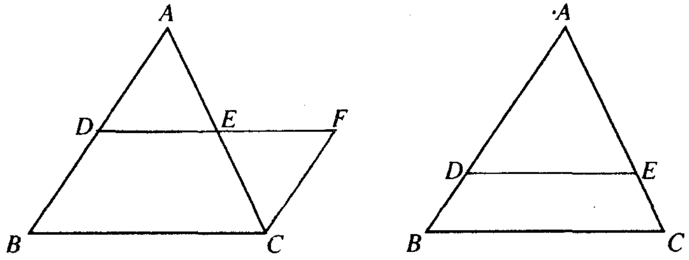
$$\overline{CF} = \overline{AD} = \overline{DB}$$

و

$$\angle CFE = \angle ADE. \qquad \therefore CF \| BD$$

از این رو چهارضلعی $BCFD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

$$\therefore\ \overline{DE} = \frac{۱}{۲}\overline{DF} = \frac{۱}{۲}\overline{BC} \quad \text{و} \quad DE \| BC \qquad \blacksquare$$



شکل‌الف ۱.

در واقع این لم حالت خاصی از قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ الف ۲.۱. فرض کنید D و E نقاطی بر اضلاع AB و AC از $\triangle ABC$ باشند به‌طوری که $BC \| DE$. دراین صورت:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

عکس آن نیز درست است.

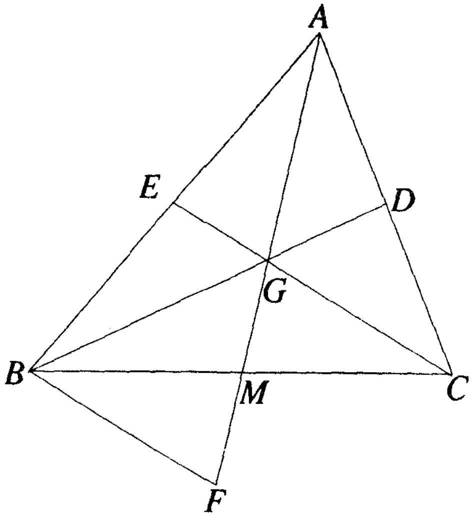
برهان. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ $\blacksquare$

قضیهٔ الف ۳.۱. سه‌میانهٔ مثلث دریک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکزوار مثلث گویند.

برهان. فرض کنید G نقطهٔ تلاقی میانهٔ BD و CE از $\triangle ABC$ باشد. AG را (ابتدا از G) تا نقطهٔ F امتداد می‌دهیم به‌طوری که $\overline{GF} = \overline{AG}$. دراین صورت E و G در $\triangle ABF$ به‌ترتیب وسطهای اضلاع AB و AF هستند. بنابراین به‌موجب لم پیش

$$BF \| EG \| GC$$

همین‌طور $GB \| CF$. بنابراین چهارضلعی $BFCG$ متوازی‌الاضلاع است، و از آنجا دو قطر در نقطه‌ای مثل M یکدیگر را نصف می‌کنند. پس نشان دادیم که امتداد AG از نقطهٔ M وسط



شکل الف .۲

ضلع BC می‌گذرد، یعنی سه‌میانهٔ مثلث دریک نقطه متقاطع‌اند. ■

باید توجه داشت که از برهان ما نتیجه می‌شود که:

$$\overline{AG} = \overline{GF} = ۲\overline{GM}, \qquad \overline{CG} = \overline{FB} = ۲\overline{GE}$$

و همین‌طور

$$\overline{BG} = ۲\overline{GD}$$

الف .۲.۱ مرکز دایرهٔ محیطی

لم الف .۴.۱. فرض‌کنید A و B دو نقطهٔ ثابت باشند. نقطه‌ای مانند P فقط و فقط وقتی بر عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد که $\overline{PA} = \overline{PB}$.

برهان. فرض کنید P بر عمودمنصف پاره‌خط AB واقع باشد. نقطهٔ P را به‌نقطهٔ M وسط AB وصل می‌کنیم، پس

$$\triangle PAM \cong \triangle PBM \qquad \text{(با دو ضلع و زاویهٔ بین)}$$

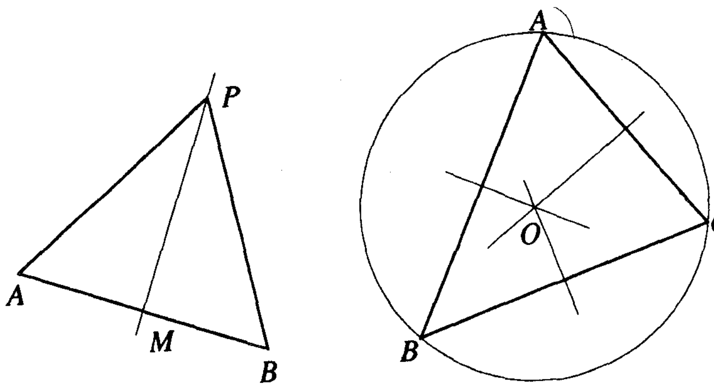
و لذا $\overline{PA} = \overline{PB}$.

به‌عکس، اگر $\overline{PA} = \overline{PB}$، آنگاه:

$$\triangle PAM \cong \triangle PBM \qquad \text{(با سه‌ضلع)}$$

که درآن M وسط پاره‌خط AB است از این‌رو:

$$\angle AMP = \angle BMP = \frac{\pi}{۲} \qquad \blacksquare$$



شکل الف .۳

قضیهٔ الف .۱. ۵. سه عمودمنصف اضلاع مثلث یکدیگر را دریک نقطه می‌برند. این نقطه را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث گویند.

برهان. فرض کنید O نقطهٔ تلاقی عمودمنصفهای اضلاع AB و AC باشد. پس، چون نقطهٔ O بر عمودمنصف AB قرار دارد، بنابر قسمت اوّل لم قبل، داریم $\overline{BO} = \overline{AO}$. همچنین، چون O بر عمودمنصف AC قرار دارد، داریم $\overline{AO} = \overline{CO}$. پس $\overline{BO} = \overline{CO}$، و لذا بنابر نیمهٔ دوّم لم، نقطهٔ O بر عمودمنصف ضلع BC قرار خواهد داشت. ■

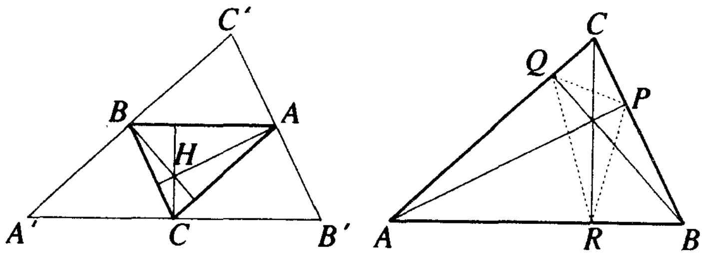
باید توجه کرد، که چون فاصله‌های O تا سه رأس مثلث برابرند، اگر دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع $\overline{OA}$ رسم کنیم دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ به‌دست می‌آید.

الف .۱. ۳. مرکز ارتفاعها

قضیهٔ الف .۱. ۶. سه‌عمود مرسوم از رأسهای یک مثلث بر اضلاع مقابل آن دریک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز ارتفاعهای مثلث گویند.

برهان. از هریک از رأسهای $\triangle ABC$ خطی موازی ضلع مقابل می‌کشیم تا $\triangle A'B'C'$ به‌دست آید. دراین صورت چهار ضلعیهای $ABCB'$، $ACBC'$ متوازی‌الاضلاع هستند، و بنابراین

$\overline{AB'} = \overline{BC} = \overline{C'A}$. چون $BC \parallel B'C'$، عمود وارد از رأس A بر ضلع BC عمودمنصف پاره‌خط $B'C'$ خواهد شد. به‌عبارت دیگر، سه عمود وارد از رأسهای $\triangle ABC$ براضلاع مقابل، عمودمنصفهای $\triangle A'B'C'$ هستند. از این رو بنابر قضیهٔ قبل، این سه‌خط متقارب‌اند. ■



شکل الف ۴.

برهان دیگر. فرض‌کنید P و Q و R به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از رأسهای A و B و C بر اضلاع مقابل BC و CA و AB از $\triangle ABC$ باشند. ملاحظه می‌کنیم که

$$\angle BQC = \angle BRC (\doteq \frac{\pi}{۲})$$

و از آنجا به‌موجب فرع الف ۲.۲ در ذیل، B و R و Q و C همدایره‌اند. همچنین C و P و R و A همدایره‌اند و A و Q و P و B هم همین‌طورند. از این‌رو بنابر لم الف۲.۱ در ذیل، داریم:

$$\angle APQ = \angle ABQ = \angle QCR = \angle APR$$

همچنین

$$\angle CRP = \angle CRQ, \quad \angle BQR = \angle BQP$$

پس نشان دادیم که سه ارتفاع $\triangle ABC$، سه نیمساز مثلث پادک PQR هستند. لذا، بنابر قضیهٔ الف ۸.۱ در ذیل، در مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $\triangle PQR$ همدیگر را تلاقی می‌کنند. ■

الف ۴.۱. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و سه‌مرکز دوایر محاطی خارجی

لم الف.۷.۱. فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در داخل $\angle BAC$ باشد. دراین صورت P بر نیمساز $\angle BAC$ واقع است اگر و فقط اگر، فاصله‌های نقطهٔ P از دو ضلع AB و AC برابر باشند.

برهان. فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی بر نیمساز $\angle BAC$ باشد و D، E به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از P بر AB و AC باشند. پس در $\triangle APD$ و $\triangle APE$ دو زوج زاویهٔ متناظر برابرند و لذا این دو مثلث متشابه‌اند. به‌علاوه هردو در ضلع AP مشترک‌اند. پس:

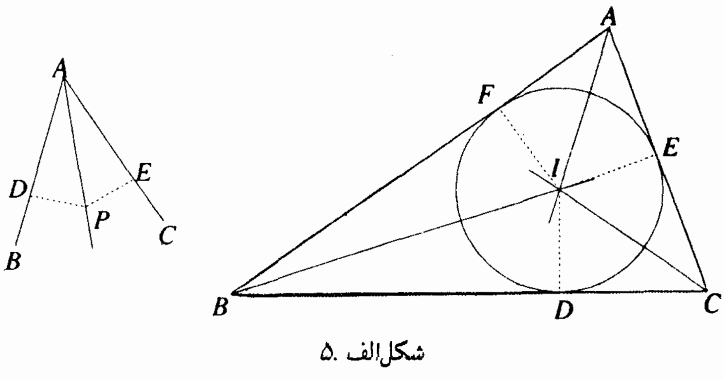
$$\triangle APD \cong \triangle APE \qquad \therefore\ \overline{PD} = \overline{PE}$$

به‌عکس فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در داخل $\angle BAC$ باشد چنان‌که $\overline{PD} = \overline{PE}$، که D و E به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از P بر AB و AC هستند. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس سه زوج اضلاع متناظر $\triangle APD$ و $\triangle APE$ باهم برابرند و لذا:

$$\triangle APD \cong APE \qquad \therefore\ \angle PAD = \angle PAE \qquad \blacksquare$$

قضیهٔ الف ۱.۸. سه‌نیمساز (داخلی) زوایای مثلث دریک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز دایرهٔ محاطی داخلی (درون‌ـمرکز) مثلث گویند.

برهان. فرض‌کنید I فصل‌مشترک نیمسازهای زوایای B و C از $\triangle ABC$ باشند، و D،E،F را به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از I بر سه‌ضلع BC، CA، AB می‌گیریم. پس چون I بر نیمساز $\angle ABC$ واقع است، بنابر قسمت اوّل لم فوق، داریم $\overline{IF} = \overline{ID}$. همچنین، چون I بر



شکل الف ۵.

نیمساز $\angle ACB$ نیز قرار دارد، داریم $\overline{ID} = \overline{IE}$ و در نتیجه $\overline{IE} = \overline{IF}$ $\therefore$. بنابراین با توجه به قسمت اوّل لم، I باید بر نیمساز $\angle BAC$ نیز باشد. $\blacksquare$

چون فاصله‌های مرکز دایرهٔ محاطی داخلی از سه‌ضلع مثلث برابرند، اگر دایره‌ای به مرکز I و به‌شعاع فاصلهٔ I از یک ضلع رسم کنیم، دایره‌ای مماس بر سه‌ضلع مثلث به‌دست می‌آید. این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث گویند.

قضیهٔ الف .۹.۱. در هر مثلث نیمسازهای خارجی دو رأس و نیمساز داخلی رأس دیگر در یک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز دایره محاطی خارجی (برون-مرکز) مثلث گویند، و این نقطه، مرکز دایره‌ای است بر ضلع سوّم و امتدادهای دو ضلع دیگر مثلث مماس است. هر مثلث سه مرکز دایرهٔ محاطی خارجی و سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد (شکل الف.۶ را ببینید).

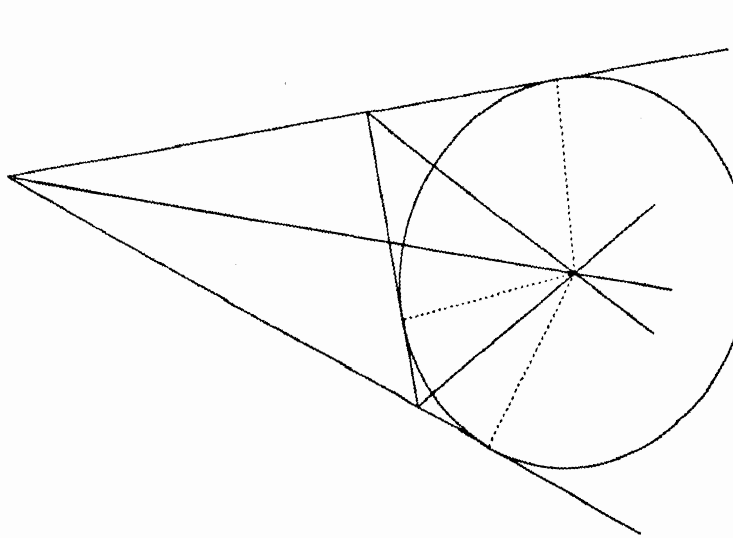
برهان. برهان اساساً همان برهان برای مرکز دایرهٔ محاطی داخلی (و دایرهٔ محاطی داخلی) است. ■

الف .۵.۱ قضیّه‌های سوا و منلائوس

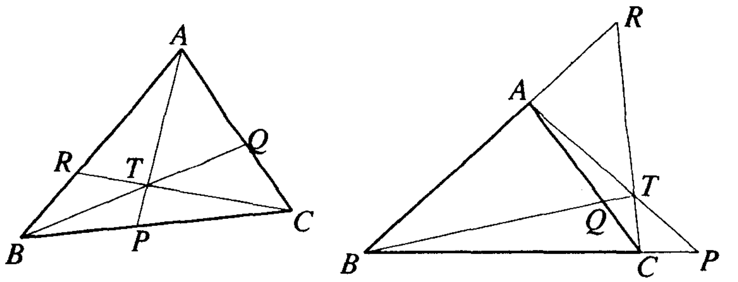
هریک از نقاطِ مرکزوار، مرکز ارتفاعها، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مراکز دایره‌های محاطی خارجی فصل مشترک سه‌خط هستند که از رأسهای مثلث می‌گذرند. برای این‌گونه مسائل قضیهٔ گ.سوا (۱۶۴۷ ـ ۱۷۳۴)، در زیر بسیار کارآمد است.

قضیهٔ الف .۱۰.۱. فرض کنید P، Q، R نقاطی به‌ترتیب بر اضلاع (یا امتدادهای) BC، CA، AB از $\triangle ABC$ باشند. در این صورت خطوط AP، BQ و CR متقارب‌اند اگر و فقط اگر:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = ۱$$



شکل الف .۶



شکل الف .۷

به‌عنوان مثال، برای اینکه ثابت کنیم سه‌میانهٔ مثلث متقارن‌اند با استفاده از نماد قبلی، داریم:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = ۱$$

و لذا شرط قضیهٔ سوا به روشنی برقرار است.

در مورد سه ارتفاع، فرض کنید

$$a = \overline{BC},\ \ b = \overline{CA},\ \ c = \overline{AB},\ \ \alpha = \angle A,\ \ \beta = \angle B,\ \ \gamma = \angle C,$$

و P، Q، R را به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از رأسهای A، B، C بر اضلاع مقابل می‌گیریم. پس $\overline{BP} = c\cos\beta$ و غیره، و بنابراین

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RA}} = \frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma} \cdot \frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha} \cdot \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta} = ۱$$

قضیه اثبات شده است.

برای اثبات اینکه سه نیمساز زوایا متقارب‌اند. U، V، W را به‌ترتیب فصل‌مشترکهای نیمسازهای رئوس A، B، C با اضلاع مقابل می‌گیریم. پس بنابر لم الف.۱.۴ برای دایرهٔ آپولونیوس در ذیل داریم

$$\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} = \frac{b}{c}$$

و غیره . . .

$$\therefore\quad \frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{CV}}{\overline{VA}} \cdot \frac{\overline{AW}}{\overline{WB}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = ۱$$

در مورد مرکز دایرهٔ محاطی خارجی، برهان اصولاً به‌همان صورت برهان مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است که آوردن آن به‌عهدهٔ خواننده گذارده می‌شود.

باقی می‌ماند که خود قضیهٔ سوا را ثابت کنیم. فرض کنید AP، BQ، CR در نقطه‌ای مثل T متقارب باشند. از A خطّی موازی BC رسم می‌کنم تا BQ، CR (یا امتداد آنها) را به‌ترتیب در B' و C' قطع کند. چون

$$\triangle BPT \sim \triangle B'AT \quad \text{و} \quad \triangle CPT \sim \triangle C'AT$$

داریم:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{AT}}, \frac{\overline{PT}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AC'}} \qquad \therefore \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{AC'}}$$

همچنین

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB'}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC}}$$

بنابراین از ضرب سه‌تساوی اخیر در یکدیگر، تساوی مطلوب به‌دست می‌آید.

برای اثبات عکس آن، T را فصل‌مشترک (امتدادهای) BQ و CR و P' را فصل‌مشترک (امتدادهای) AT و BC می‌گیریم. پس بنابه آنچه که ثابت نمودیم

$$\frac{\overline{BP'}}{\overline{P'C}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = ۱$$

از سوی دیگر، بنابر فرض نیز داریم

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = ۱ \qquad \therefore \frac{\overline{BP'}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$$

با افزودن ۱ به طرفین این تساوی اخیر خواهیم داشت

$$\frac{\overline{BP'} + \overline{P'C}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BP} + \overline{PC}}{\overline{PC}} \qquad \therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که $\overline{P'C} = \overline{PC}$ و لذا $P = P'$.

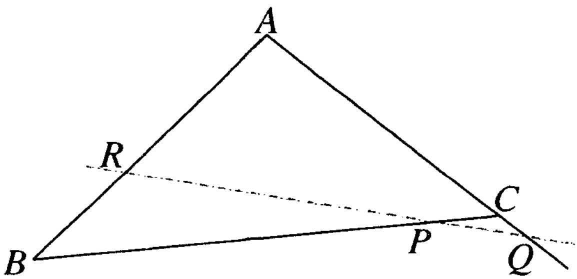
(ما عمداً از ضمیمه نمودن شکل خودداری نمودیم تا به خواننده فرصتی برای آزمون کارائی استدلال را برای همهٔ حالات داده باشیم).

چنان‌که خوانندهٔ دقیق توجه خواهد کرد، عکس آن فقط و فقط هنگامی صادق است که پاره‌خطها را جهتدار درنظر گیریم. یعنی $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} > ۰$، اگر BP و PC همجهت باشند. و $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} < ۰$، اگر BP و PC مختلف‌الجهت باشند. روشن است که ملاحظات متشابه برای نسبتهای دیگر صادق است.

قضیهٔ زیر را که ارتباط نزدیکی با قضیهٔ سوا دارد، منلائوس از علمای اسکندریه (حدود ۹۸ میلادی) کشف کرده است.

قضیهٔ الف ۱۱.۱. نقاط P، Q، R به‌ترتیب بر اضلاع (امتدادهای) BC و CA و AB از $\triangle ABC$ همخط‌اند، اگر فقط و فقط اگر:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -۱$$



شکل الف ۸.

برهان. چون نیازی به این قضیه نخواهیم داشت، فقط راه اثبات آن‌را نشان می‌دهیم و اثبات مشروح آن‌را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. برای این که ثابت کنیم این شرط لازم است، از نقطهٔ A خطی به‌موازات خطی که با نقاط P، Q، R مشخص می‌شود رسم می‌کنیم تا (امتداد) ضلع BC را در A' قطع کند. سپس همهٔ نسبتهای موجود را برحسب نسبتهای پاره‌خطهای واقع بر خط BC بیان می‌کنیم. برای اثبات کفایت قضیه، مانند برهان قضیهٔ سوا عمل می‌کنیم. ■

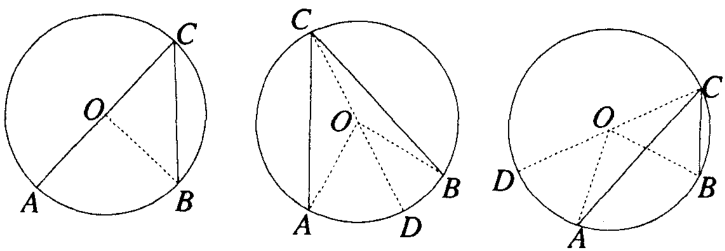
الف ۲. زاویه‌های محاطی

لم الف ۱.۲. زاویهٔ محاط در یک قوس دایره برابر نصف زاویهٔ مرکزی آن قوس است. به‌خصوص همهٔ زاویه‌های محاط دریک قوس برابرند.

برهان. نقاط A، B، C را بر دایرهٔ O درنظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض می‌کنیم مرکز O یا بر پاره‌خط AC یا بر پاره‌خط BC باشد. برای تثبیت قرارداد، مرکز O را بر وتر AC می‌گیریم: پس چون $\triangle OBC$ متساوی‌الساقین است، داریم $\angle OCB = \angle OBC$. ولی ازآنجا که $\angle AOB$ زاویهٔ خارجی $\triangle OBC$ است

$$\therefore \ \angle AOB = \angle OBC + \angle OCB = ۲\angle ACB.$$



شکل الف ۹.

حالت ۲. فرض می‌کنیم مرکز O داخل $\angle ACB$ باشد. قطر CD را درنظر می‌گیریم. پس از حالت ۱، داریم

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \angle ACD + \angle DCB \\ &= \frac{۱}{۲}(\angle AOD + \angle DOB) = \frac{۱}{۲}\angle AOB\end{aligned}$$

حالت ۳. فرض می‌کنیم مرکز O خارج $\angle ACB$ باشد. مانند پیش CD را یک قطر می‌گیریم. پس دوباره از حالت ۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \angle BCD - \angle ACD \\ &= \frac{۱}{۲}(\angle BOD - \angle AOD) = \frac{۱}{۲}\angle AOB\end{aligned}$$

■

قضیهٔ الف .۲.۲. فرض می‌کنیم نقاط C و D دریک طرف یک خط AB واقع باشند. در این صورت، نقاط A، B، C، D همدایره‌اند، اگر و فقط اگر، $\angle ACB = \angle ADB$.

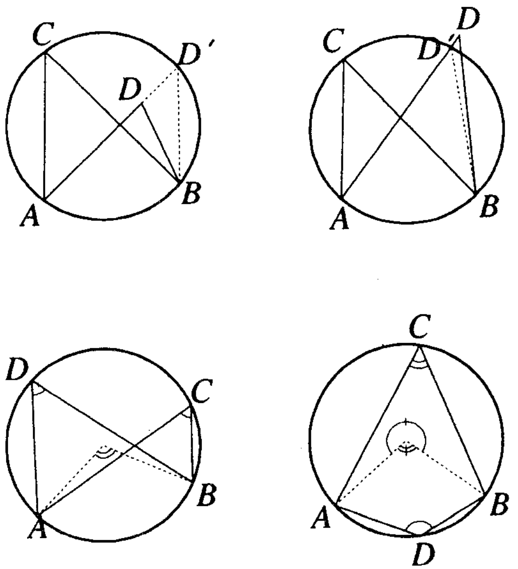
برهان. باقی می‌ماند که عکس آن‌را ثابت کنیم. دایره‌ای که از نقاط A، B و C بگذرد رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم D درون این دایره واقع باشد. D' را فصل‌مشترک این دایره در امتداد AD می‌گیریم. پس

$$\angle ADB = \angle AD'B + \angle DBD' > \angle AD'B = \angle ACB$$

ولی اگر نقطهٔ D خارج این دایره واقع باشد، D' را فصل‌مشترک دایره با AD می‌گیریم. در این صورت

$$\angle ADB < \angle ADB + \angle DBD' = \angle AD'B = \angle ACB.$$

از این‌رو، اگر $\angle ADB = \angle ACB$، آنگاه نقطهٔ D باید بر دایره‌ای باشد که از نقاط A و B و C می‌گذرد (و در این حالت، روشن است که بنا به لم قبل تساوی برقرار است). ■



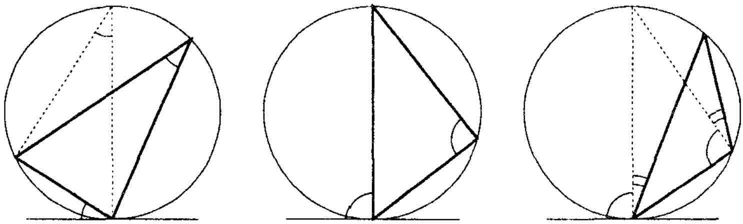
شکل الف .۱۰.

فرع الف .۳.۲. فرض می‌کنیم C و D در دو طرف یک خط AB واقع باشند. در این صورت نقاط A، B، C، D همدایره‌اند، اگر و فقط اگر:

$$\angle ACB + \angle ADB = \pi$$

فرع الف .۴.۲. زاویهٔ بین مماس بر دایره و یک وتر آن، برابر است با زوایایی محاط در قوس داخل این زاویه.

برهان. شکلها به‌اندازهٔ هزار واژه گویا هستند. ■



شکل‌الف .۱۱.

الف .۳ قضیهٔ ناپلئون

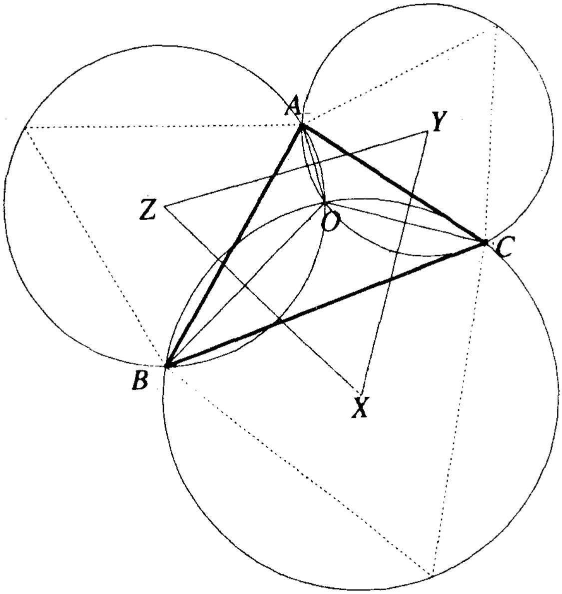
اگرچه قضیهٔ ناپلئون جزو زمینهٔ مورد نیاز درس ما نیست، برهان ذیل که توسط کی‌هاشیموتو[1] (یک دانش‌آموزکلاس دهم، مدرسهٔ لیکساید (Lakeside)، سیاتل) در ماه مه، ۱۹۹۲ آورده شده است به‌نحو ظریفی برهان رُس هانسبرگر[2]را ساده کرده است.

قضیهٔ الف.۱.۳. بر هر ضلع یک مثلث دلخواه، و در خارج آن مثلث متساوی‌الاضلاعی بنا می‌کنیم. مرکزوارهای این سه مثلث متساوی‌الاضلاع، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

برهان. $\triangle ABC$ داده شده است. فرض کنید X، Y، Z مرکزهای دوایر محیطی مثلثهای متساوی‌الاضلاعی باشند که به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA، AB و بیرون $\triangle ABC$ ساخته شده‌اند، و O فصل‌مشترک دوایر Y و Z (غیر از A) باشد. پس بنابر فرع الف.۲.۳ در بخش قبل، داریم $\angle AOC = \frac{2\pi}{3} = \angle AOB$. بنابراین $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$. از اینجا نتیجه می‌شود که دایرهٔ X نیز از نقطهٔ O می‌گذرد و (بازهم بنابر فرع الف.۲.۳). پس، نشان دادیم که سه دایرهٔ محیطی مذکور در O متلاقی هستند.

امّا، XY خط واصل بین دو مرکز، بر وتر مشترک OC عمود است. همین‌طور، XZ بر OB عمود است. ولی $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$ و بنابراین $\angle X = \frac{\pi}{3}$. و به‌طریق مشابه، $\angle Z = \frac{\pi}{3} = \angle Y$ و برهان تمام است. ■

1. Kay Hashimoto 2. *Mathematical Gems*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1973, pp. 34-36.



شکل الف .۱۲

الف .۴ دایرهٔ آپولونیوس

لم الف. ۱.۴. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های یک رأس مثلث، ضلع مقابل را به‌نسبت طولهای دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند.

برهان. فرض کنید نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A از $\triangle ABC$ ضلع BC را به‌ترتیب در D و E قطع کنند نقطهٔ F را بر امتداد ضلع AB طوری اختیار می‌کنیم که $AD \parallel CF$. پس

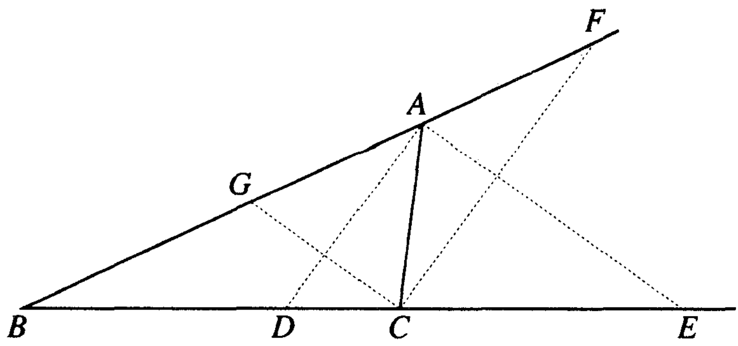
$$\angle AFC = \angle BAD = \angle DAC = \angle ACF$$

بنابراین، $\triangle ACF$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AF} = \overline{BA} : \overline{AC}$$

همچنین نقطهٔ G را بر AB چنان اختیار می‌کنیم که $AE \parallel CG$. پس

$$\angle AGC = \angle FAE = \angle EAC = \angle ACG$$



شکل الف .۱۳

بنابراین، $\triangle ACG$ مثلث متساوی‌الساقین است. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\overline{BE} : \overline{EC} = \overline{BA} : \overline{AG} = \overline{BA} : \overline{AC} \qquad \blacksquare$$

برهان دیگر. از همان قراردادهای برهان فوق استفاده می‌کنیم. چون D بر نیمساز $\angle ABC$ واقع است، طولهای عمودهای وارد از نقطهٔ D بر اضلاع AB و AC برابرند (بنابر الف.۱.۷). بنابراین نسبت مساحتهای $\triangle ABD$ و $\triangle ACD$ برابر است با $\overline{AB} : \overline{AC}$. ازطرف دیگر این دو مثلث در رأس A ارتفاع مشترک دارند. از این‌رو نسبت مساحتهای این دو مثلث نیز برابر $\overline{BD} : \overline{CD}$ است. و

$$\therefore\ \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

برای نیمساز خارجی AE از رأس A، $\triangle ABE$ و $\triangle ACE$ را درنظر می‌گیریم، و همان استدلال را به‌کار می‌بریم. $\blacksquare$

عکس این لم را از یکتا بودن نقطه‌ای که ضلع مثلث را به‌نسبت ثابتی تقسیم می‌کند، نتیجه می‌گیریم.

فرع الف .۲.۴. فرض می‌کنیم D، E به‌ترتیب بر ضلع BC و امتداد آن از $\triangle ABC$ طوری قرار داشته باشند که:

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{BC}$$

دراین صورت AD و AE نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A هستند.

قضیهٔ الف .۳.۴. (آپولونیوس). دو نقطهٔ A و B و نسبت ثابت $m : n$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم C و D نقاطی بر AB باشند چنان‌که

$$\overline{CA} : \overline{CB} = \overline{DA} : \overline{DB} = m : n$$

در این صورت یک نقطهٔ P بر دایرهٔ به‌قطر CD قرار دارد، اگر و فقط اگر

$$\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$$

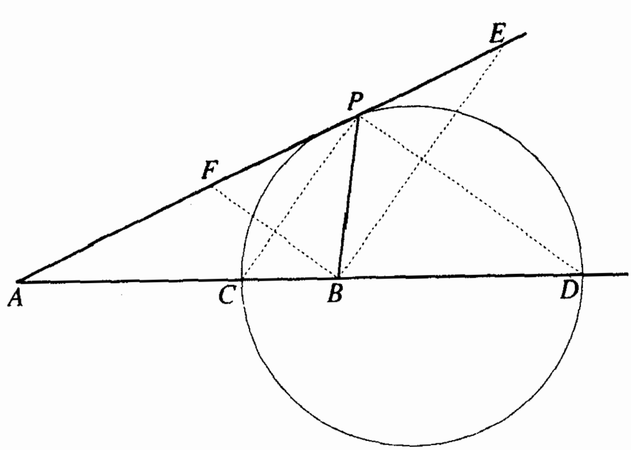
برهان. فرض کنید P نقطه‌ای است که در شرط:

$$\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{CA} : \overline{CB} \,(= \overline{DA} : \overline{DB})$$

صدق می‌کند. پس به‌موجب فرع الف.۲.۴، PC، PD نیمسازهای داخلی و خارجی رأس P از $\triangle PAB$ هستند. از این‌رو $\angle CPD = \frac{\pi}{2}$، و از آنجا نقطهٔ P بر دایره‌ای به‌قطر CD واقع است.

به‌عکس، فرض کنید P، نقطهٔ دلخواهی است بر دایره‌ای به‌قطر CD. نقاط E، F را به‌ترتیب بر AP و امتداد آن طوری اختیار می‌کنیم که $BF \parallel DP, BE \parallel CP$. پس

$$\overline{AP} : \overline{PE} = \overline{AC} : \overline{CB} = m : n$$



شکل الف .۱۴.

و

$$\overline{AP} : \overline{PF} = \overline{AD} : \overline{DB} = m : n$$

بنابراین، $\overline{PE} = \overline{PF}$. چون $BE \parallel CP$ و $BF \parallel DP$ و $\angle CPD = \frac{\pi}{2}$، داریم $\angle EBF = \frac{\pi}{2}$. از این‌رو P وسط وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ BEF است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\overline{PB} = \overline{PE}$ و بنابراین:

$$\overline{AP} : \overline{PB} m : n \quad \blacksquare$$

پیوست ب

معماهای سال‌نو

این «معّماهای سال‌نو» را مؤلف به‌صورت کارت تبریک در چندسال اخیر برای دوستانش فرستاده است. نظر به‌اینکه هدف، عمومیت دادن ریاضیات است، این معماها (احتمالاً به‌جز معمای سال ۱۹۸۶) مشکل طرح نشده‌اند. چون این معماها مابین دوستان مؤلف شهرت یافته‌اند، آنها را در اینجا می‌آوریم به‌این امید که خوانندگان نیز همین کار را انجام دهند.

۱۹۸۵

۱.

$$۱ = ۱ - \sqrt{۹} + ۸ - ۵ \qquad ۰ = (۱ - ۹ + ۸) \times ۵$$
$$۳ = -۱ - ۹ + ۸ + ۵ \qquad ۲ = ۱ + (-\sqrt{۹} + ۸)/۵$$
$$۵ = ۱ - ۹ + ۸ + ۵ \qquad ۴ = ۱ \times (-۹ + ۸) + ۵$$
$$۷ = ۱ + ۹ - ۸ + ۵ \qquad ۶ = ۱ \times (۹ - ۸) + ۵$$
$$۹ = \sqrt{-۱ + ۹ + ۸} + ۵ \qquad ۸ = ?$$
$$۱۰ = (۱ + ۹ - ۸) + ۵$$

آیا می‌توانید عبارت مشابهی برابر ۸ پیدا کنید؟ (مجازید فقط از جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر و پرانتز استفاده کنید. جواب یکتا نیست).

۲.

$$\square\square\square\square^{۲} = \square\,۱۹\,\square\square\,۸۵\,\square$$

۳. الف) مربع یک عدد درست n با ۱۹۸۵ شروع می‌شود:

$$n^{۲} = ۱۹۸۵\cdots$$

کوچکترین عدد درست و مثبت n را بیابید که این ویژگی را داشته باشد.
ب) آیا عدد درستی وجود دارد که مربع آن به ۱۹۸۵ ختم شود؟

۱۹۸۶

در تفریق $\begin{array}{r}\textbf{HAPPY}\\ -\textbf{TIGER}\\ \hline \textbf{YEAR}\end{array}$ به‌جای حروف عددهای یک‌رقمی بگذارید تا تفریق درست شود. به‌شرطی که بدانیم:

۱. $TIGER$ در میان ۱۲ حیوان

(rat, ox, tiger, rabbit, dragon, snake, horse, ram, monkey, cock, dog, boar)

(موش، گاونر، ببر، خرگوش، اژدها، مار، اسب، قوچ، میمون، خروس، سگ، خوک‌نر) مرتبهٔ سوم را دارد و عددی که با $TIGER$ نمایش داده شده است در تقسیم بر ۱۲ باقیماندهٔ ۳ دارد.

$$TIGER \equiv ۳ \quad (\text{پیمانهٔ } ۱۲)$$

۲. از آنجا که برای جایگذاری ۹ حرفی که در این مسئلهٔ حرفی ـ عددی آمده است، ده رقم ممکن ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹. وجود دارند، چنین بر می‌آید که باید یکی از ارقام را حذف کنید، ولی این رقم حذف‌شده، باقیماندهٔ تقسیم عدد $YEAR$ بر ۱۲ است.

۱۹۸۷

بدون استفاده از ارقام ۱، ۹، ۸، ۷، جاهای خالی را با اعداد یک رقمی پرکنید چنان‌که تساوی زیر برقرار شود

$$\frac{\square\,۱\,\square\,۹\,\square}{\square\,\square\,\square} = ۸۷$$

۱۹۸۸

.۱

$$\begin{aligned} ۱۹۸۸ &= ۱۲^۲ + ۲۰^۲ + ۳۸^۲ = ۸^۲ + ۳۰^۲ + ۳۲^۲ \\ &= ۸^۲ + ۱۸^۲ + ۴۰^۲ = ۴^۲ + ۲۶^۲ + ۳۶^۲ \\ &= ۴^۲ + ۶^۲ + ۴۴^۲ = \square^۲ + \square^۲ + \square^۲ \end{aligned}$$

یعنی، عبارت دیگری برابر ۱۹۸۸ به‌صورت مجموع مربعات سه عدد درست و مثبت بیابید.

۲. نشان دهید که ۱۹۸۸ را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد درست و مثبت بیان کرد.

۱۹۸۹

با ملاحظهٔ:

$$۱۹۸۹ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵)^{۲} + (۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹)^{۲}$$

چهار عدد طبیعی متوالی p، q، r، s و شش عدد طبیعی متوالی u، v، w، x، y، z پیدا کنید چنان‌که:

$$۱۹۸۹ = (p + q + r + s)^{۲} + (u + v + w + x + y + z)^{۲}$$

۱۹۹۰

فرض کنید.

$$P_n = ۲۱۹۱^n - ۸۰۳^n + ۶۰۸^n - ۱۱^n + ۷^n - ۲^n.$$

پس

$$P_{۲} = ۴۵۲۵۲۶۰ = ۱۹۹۰ \times ۲۲۷۴, \qquad P_{۱} = ۱۹۹۰$$

ثابت کنید به‌ازای هرعدد طبیعی n، P_n بر ۱۹۹۰ بخشپذیر است.

۱۹۹۱

۱. در یک مربّع جادوئی، مجموع عناصرِ هر سطر، ستون، و قطر برابرند. مثلاً شکل ۱ یک مربّع جادویی با مجموع جادویی ۳۴ است. جاهای خالی شکل ۲ را طوری پر کنید که یک مربع جادوئی حاصل شود.

۱	۸	۱۳	۱۲
۱۴	۱۱	۲	۷
۴	۵	۱۶	۹
۱۵	۱۰	۳	۶

شکل ۱

	۱۹	۹۱
۹۹		

شکل ۲

۲. آیا یک عدد درست دو یا چند رقمی، که تمام ارقام آن از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ تشکیل‌شده باشند (مثلاً اعدد ۱۹۹۱، ۱۷، ۷۳۱۵۹۱۳۷۵۱۷۹، و ۷۳۵ از این‌گونه اعدد درست‌اند) می‌تواند مربع یک عدد درست باشد؟

۱۹۹۲

پنج عدد از جدول شکل ۱ در زیر را طوری اختیار کنید که هیچ دوتا از آنها در یک سطر یا در یک ستون واقع نباشند، سپس این پنج عدد را باهم جمع کنید. همیشه عدد ۱۹۹۲ را به‌دست خواهید آورد. به‌طور مثال:

$$۱۹۹ + ۹۲ + ۱۷۷ + ۹۷۹ + ۵۴۵ = ۱۹۹۲$$

۴۷۰	۶۶۵	۶۰	۹۲	۱۹
۷۸۴	۹۷۹	۳۷۴	۴۰۶	۳۳۳
۵۴۵	۷۴۰	۱۳۵	۱۶۷	۹۴
۶۵۰	۸۴۵	۲۴۰	۲۷۲	۱۹۹
۵۸۷	۷۸۲	۱۷۷	۲۰۹	۱۳۶

شکل ۱

شکل ۲

جدول شکل ۲ را با ۹ عدد درست و مثبت متمایز چنان پر کنید که اگر هر سه عددی از آنها را طوری اختیار کنید که هیچ دوتائی از آنها در یک سطر یا یک ستون نباشند و آنها را در هم ضرب کنید، همواره عدد ۱۹۹۲ به‌دست آید. اصولاً چند جواب متفاوت می‌توانید پیدا کنید؟ [وقتی دو جواب را یکی می‌گیریم که بتوان یکی را از دیگری با برخی یا همهٔ اعمال زیر به‌دست آورد: (الف) دوران، (ب) تقارن محوری، (ج) تعویض ترتیب سطرها، (د) تعویض ترتیب ستونها].

۱۹۹۳

فرض کنید:

$$Q_n = ۱۲^n + ۴۳^n + ۱۹۵۰^n + ۱۹۸۱^n$$

در این صورت

$$Q_۱ = ۱۲ + ۴۳ + ۱۹۵۰ + ۱۹۸۱ = ۱۹۹۳ \cdot ۲$$

$$Q_۲ = ۱۴۴ + ۱۸۴۹ + ۳۸۰۲۵۰۰ + ۳۹۲۴۳۶۱$$
$$= ۷۷۲۸۸۵۴ = ۱۹۹۳ \cdot ۳۸۷۸$$

$$Q_۳ = ۱۷۲۸ + ۷۹۵۰۷ + ۷۴۱۴۸۷۵۰۰۰ + ۷۷۷۴۱۵۹۱۴۱$$
$$= ۱۵۱۸۹۱۱۵۳۷۶ = ۱۹۹۳ \cdot ۷۶۲۱۲۳۲$$

پیدا کنید همهٔ اعداد درست و مثبت n را که به‌ازای آنها Q_n بر ۱۹۹۳ بخشپذیر باشد.

۱۹۹۴

دنباله‌ای از اعداد داریم که عکس مربعات اعداد صحیح از ۱۹ تا ۹۴ هستند.

$$\frac{۱}{۱۹^۲}, \frac{۱}{۲۰^۲}, \frac{۱}{۲۱^۲}, \dots, \frac{۱}{۹۳^۲}, \frac{۱}{۹۴^۲}$$

فرض کنید به‌جای هر جفت عدد a و b از این اعداد بتوانیم عدد $a+b-ab$ را بگذاریم. مثلاً به‌جای دو عدد $\frac{۱}{۳۲^۲}$ و $\frac{۱}{۶۶^۲}$ می‌توانیم یک عدد تنهای $\frac{۱۶۳}{۱۳۵۱۶۸}$ را بگذاریم، زیرا

$$\frac{۱}{۳۲^۲} + \frac{۱}{۶۶^۲} - \frac{۱}{۳۲^۲} \cdot \frac{۱}{۶۶^۲} = \frac{۱۶۳}{۱۳۵۱۶۸}$$

این روش را تکرارکنید تا فقط یک عدد بماند. نشان‌دهید که عدد نهایی، مستقل از راه و ترتیبی است که اعداد جفت و تعویض‌شده‌اند. عدد نهایی کدام است؟

فهرست راهنما