افسون ریاضیات

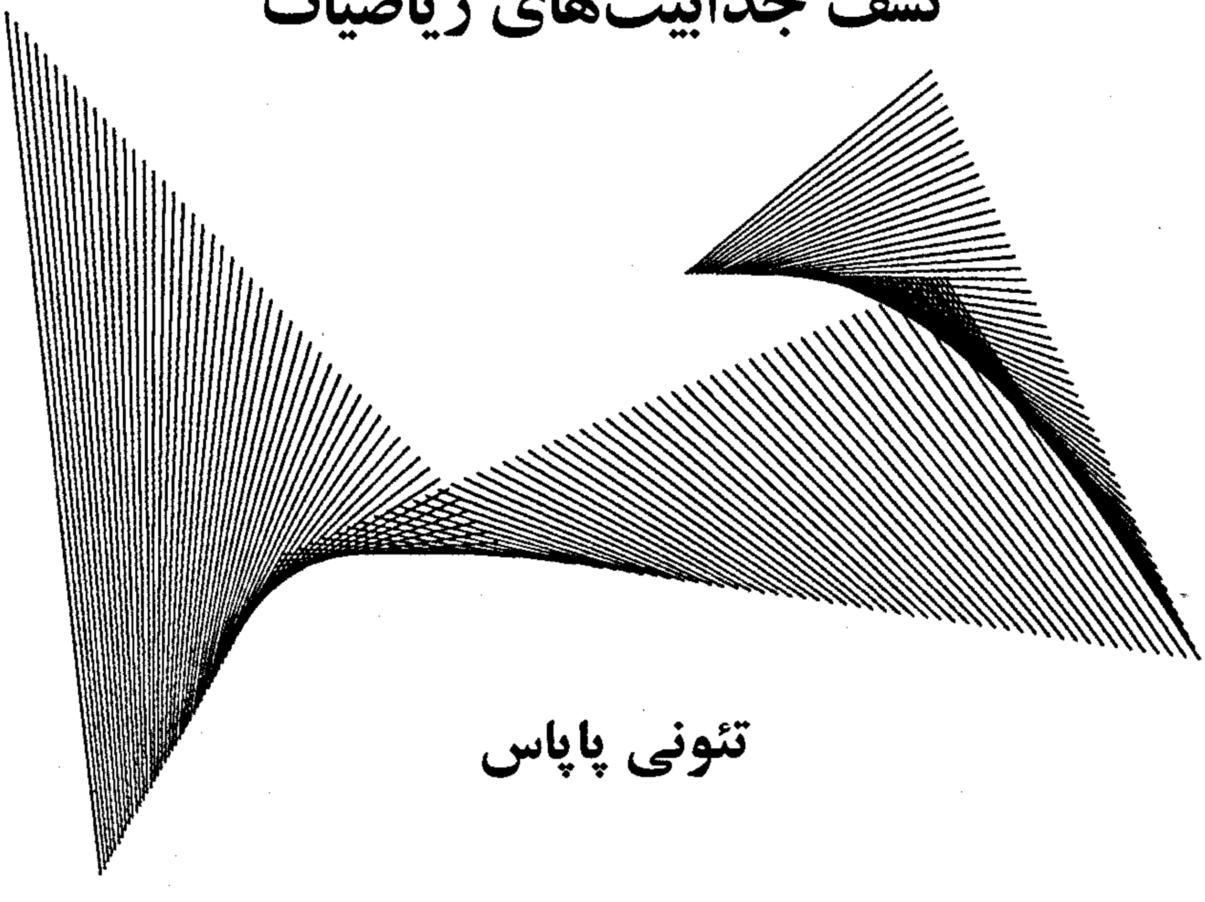
کشف افسون ریاضیات

تئونی پاپاس

ترجمه عباس علی کتیرایی

افسون ریاضیات

کشف جذابیت‌های ریاضیات



تئونی پاپاس

ترجمهٔ عباس علی کتیرائی

انتشارات مازیار

سرشناسنامه	: پاپاس، تئونی Pappas, Theoni
عنوان و نام پدیدآور	: افسون ریاضیات: کشف جذابیت‌های ریاضیات / تئونی پاپاس؛ ترجمه عباس علی کتیرائی.
مشخصات نشر	: تهران: مازیار، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری	: ۳۳۲ ص. : مصور؛ ۱۴/۵ × ۲۱/۵ س م.
فروست	: قلمرو علم
شابک	: 978-964-5676-83-2
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
یادداشت	: عنوانی اصلی: The magic of mathematics: discovering the spell of mathematics, c1994.
موضوع	: ریاضیات ــ به زبان ساده
شناسه افزوده	: کتیرایی، عباسعلی، مترجم.
رده‌بندی کنگره	: QA ۹۳ / ۲ پ ۲ الف ۷ ۱۳۸۸
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۰
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۷۹۲۱۴۵

www.mazyarpub.com

انتشارات مازیار

مقابل دانشگاه تهران، ساختمان ظروفچی طبقه اول، واحد ۴، تلفن ۶۶۴۶۲۴۲۱

افسون ریاضیات

تئونی پاپاس

ترجمه‌ی عباس‌علی کتیرایی

چاپ سوم ۱۳۹۲

شمارگان ۱۱۰۰

چاپ واژه

شابک ۲-۸۳-۵۶۷۶-۹۶۴-۹۷۸

فهرست مطالب

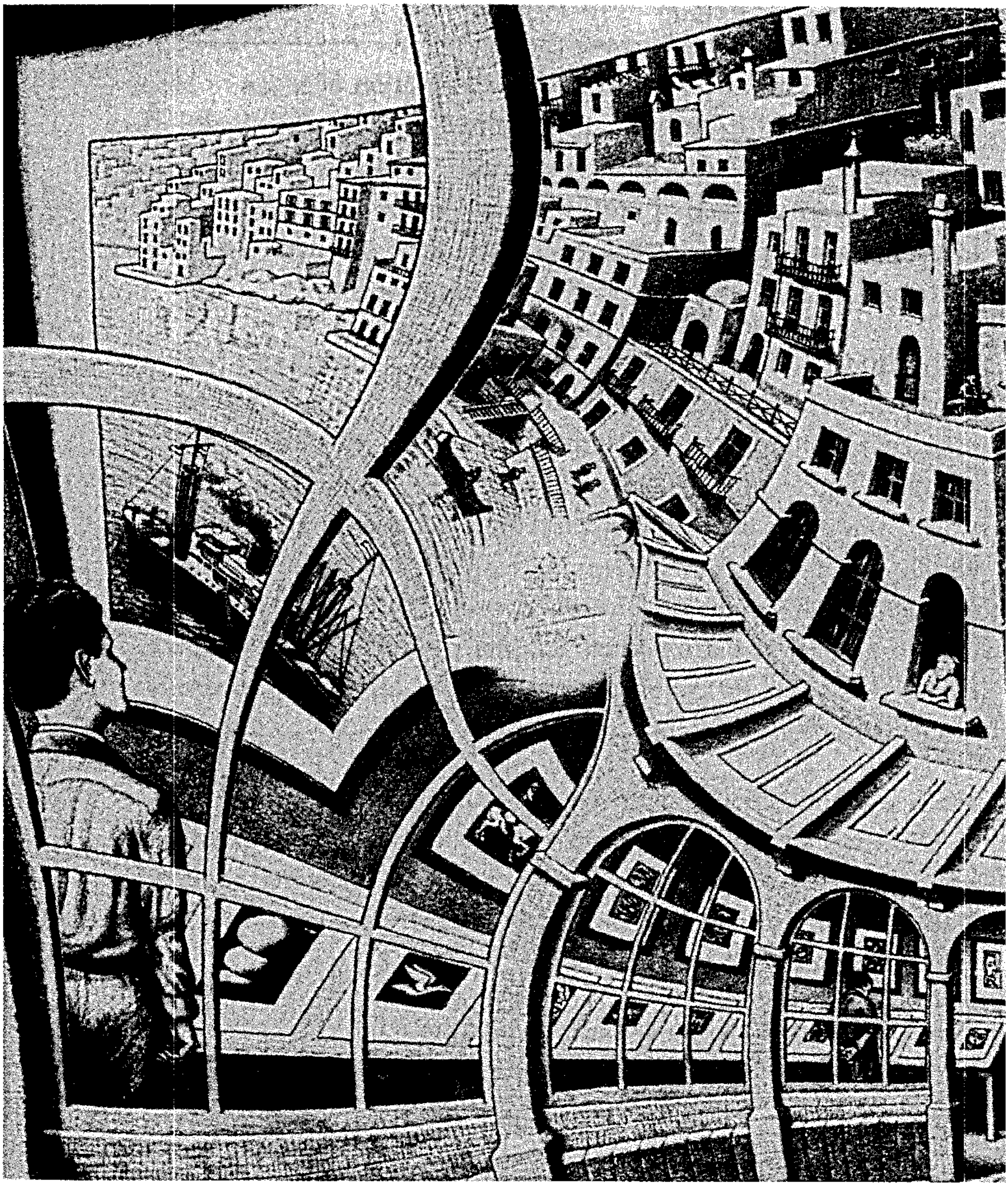
پیشگفتار

برای کشف افسون ریاضیات نیازی نیست مسأله حل کنیم یا ریاضیدان باشیم. این کتاب مجموعه‌ای از اندیشه‌هاست ــ اندیشه‌هایی که درونمایهٔ اصلی آنها ریاضیات است. این کتاب یک کتاب درسی نیست. انتظار نداشته باشید با آن در یک موضوع خبره شوید یا بر اندیشه‌ای کاملاً مسلط شوید. *افسون ریاضیات* به کندوکاو در جهان اندیشه‌ها می‌پردازد، نقشی را که جادوی ریاضیات در زندگی ما بازی می‌کند بررسی می‌کند و کمک می‌کند تا ریاضیات را در جاهایی کشف کنید که کمتر انتظار آن را دارید.

بسیاری از افراد ریاضیات را یک برنامهٔ درسی انعطاف‌ناپذیر و سخت می‌دانند. چنین چیزی اصلاً واقعیت ندارد. ذهن انسان دائم در حال آفریدن اندیشه‌های ریاضی و دنیاهای تازه و جذابی مستقل از جهان ماست و این اندیشه‌ها، درست مثل این‌که عصای جادوگر به حرکت درآمده باشد، به سرعت با جهان ما همراه می‌شوند. شیوه‌ای که در آن اجسام می‌توانند از یک بعد به بعد دیگری درآیند و همیشه می‌توان بین دو نقطه، نقطه‌ای جدید پیدا کرد، اعداد وارد عمل می‌شوند، معادله‌ها حل می‌شوند، نمودارها تصویر می‌سازند، بی‌نهایت مسایل را حل می‌کند، فرمول‌ها ساخته می‌شوند ــ به‌نظر می‌رسد که همه چیز کیفیتی جادویی دارد.

اندیشه‌های ریاضی تاروپود تخیل هستند. این اندیشه‌ها در دنیایی غریب وجود دارند و موضوعات آن از منطق محض و خلاقیت پدید می‌آید. یک مربع یا دایرهٔ کامل در جهان ریاضیات وجود دارد، در حالی‌که جهان ما تنها نمایش ریاضی از اشیا را در خود دارد.

موضوعات و مفاهیم مورد اشاره در هر فصل تنها منحصر به آن فصل نیست، بلکه مثال‌ها می‌توانند به راحتی از مرزهای اختیاری فصل‌ها بگذرند. منحصر کردن اندیشه‌ای ریاضی به یک محدودهٔ خاص، حتی اگر ممکن باشد، مطلوب نیست. در حقیقت هر یک از مباحث کاملاً مستقل است و می‌توان مستقلاً از آن لذت برد. امیدوارم این کتاب جای پایی برای ورود به دنیای ریاضیات باشد.



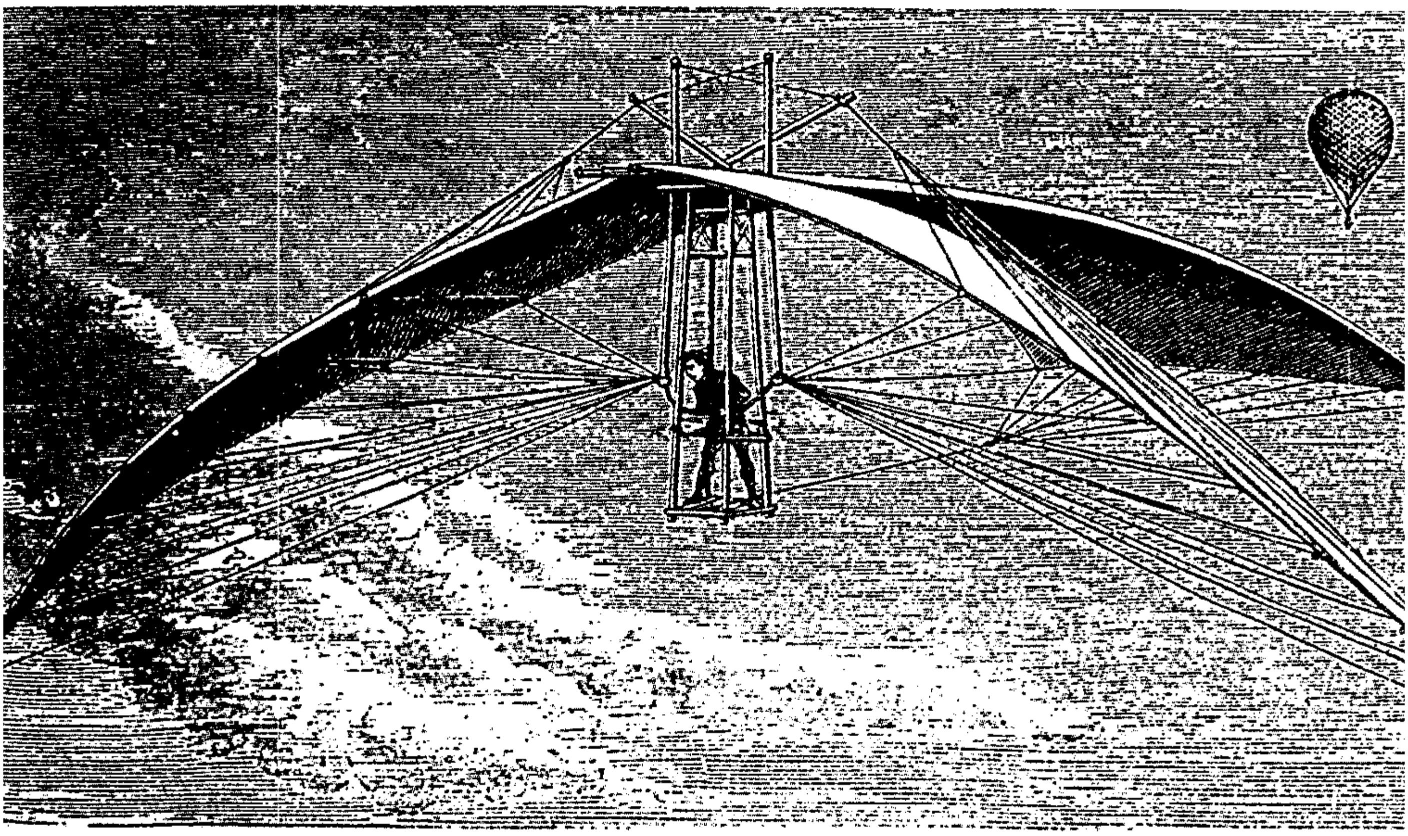
نگارخانه اثر موریس اشر

ریاضیات در زندگی روزمره

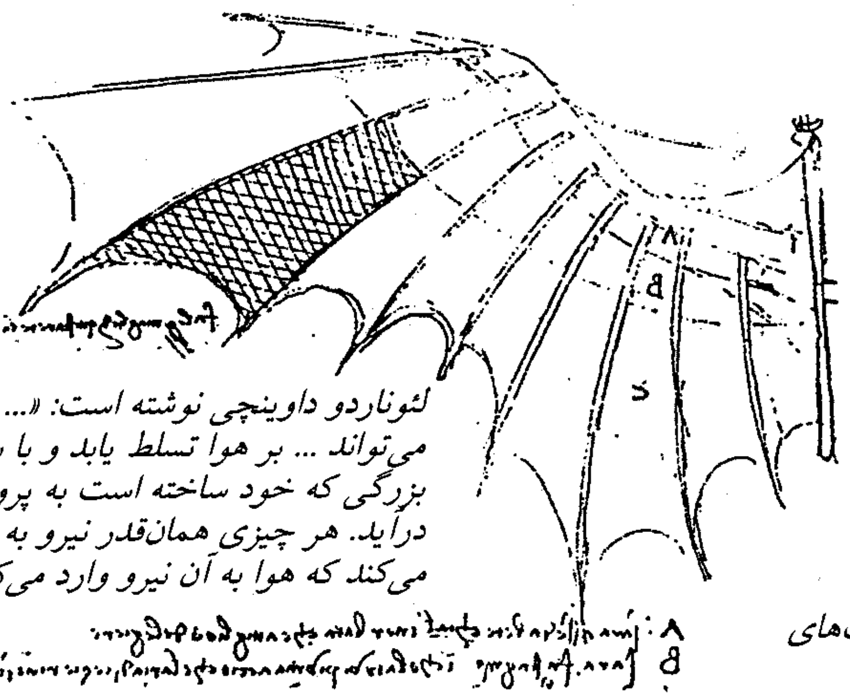
ریاضیات پرواز
ریاضیات در یک گفتگوی تلفنی
آینه‌های سهمی شکل و چراغ‌های جلو خودرو
پیچیدگی و زمان حال
ریاضیات و دوربین عکاسی
اعداد بازیافتی
دوچرخه، میز بیلیارد و بیضی
جستجو در طرح‌های کاشیکاری
تمبرهایی با موضوع ریاضیات
دم موش
یک دیدار ریاضی
تعدیل زمان
چرا دریچه‌های آدم‌رو دایره شکلند؟

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات، هر قدر هم انتزاعی باشد، ممکن نیست روزی در یکی از پدیده‌های جهان واقعی به‌کار نرود ـ ***نیکلای لباچفسکی***

بسیاری از چیزهایی که در کارهای روزمرهٔ خود با آنها سروکار داریم پایه یا ارتباطی ریاضی دارند. این چیزها از پرواز با هواپیما تا شکل دریچه‌های فاضلاب را دربرمی‌گیرند. اغلب هنگامی‌که کمتر انتظار می‌رود، خود را با ریاضیات درگیر می‌بینیم. آنچه درپی می‌آید، گزیده‌ای تصادفی از چنین موضوعاتی است.



ریاضیات پرواز



لئوناردو داوینچی نوشته است: «... انسان می‌تواند ... بر هوا تسلط یابد و با بال‌های بزرگی که خود ساخته است به پرواز درآید. هر چیزی همان‌قدر نیرو به هوا وارد می‌کند که هوا به آن نیرو وارد می‌کند.»

طرح‌هایی از دفتر یادداشت‌های لئوناردو داوینچی

شکوه و راحتی پرواز پرندگان همیشه برای انسان مایهٔ حسرت بوده است. داستان‌های قدیمی در بسیاری از فرهنگ‌ها، گواه علاقهٔ انسان به موجودات پرندهٔ گوناگون است. با نگاهی به گلایدرها پی‌می‌بریم که شاید دایدالوس و ایکاروس[1] تنها اسطوره‌هایی یونانی نیستند. امروزه هواپیماهای غول‌پیکر خود و بارشان را به قلمرو پرندگان می‌برند. همان‌طور که می‌دانیم، گام‌های تاریخی برای دست یافتن به پرواز، فراز و فرودهای بسیاری داشته است. سال‌های سال اندیشهٔ پرواز دانشمندان، مخترعان، هنرمندان، ریاضیدانان و بسیاری از متخصصان دیگر را برانگیخته است تا طرح‌ها، مدل‌ها و آزمایش‌هایی را در تلاش برای پرواز کردن بپرورانند.

آنچه در پی می‌آید طرحی فشرده‌ای از تاریخ پرواز است:

☐ *چینیان بادبادک را اختراع کردند (۴۰۰ تا ۳۰۰ پیش از میلاد).*

---

۱. ایکاروس، پسر دایدالوس، که پدرش بال‌هایی برای او ساخت و با موم بر بدن او چسباند؛ ایکاروس به پرواز درآمد، ولی موم بر اثر تابش خورشید آب شد، بال‌های ایکاروس کنده شد و او به دریا افتاد. فرهنگ *فارسی* اعلام از انتشارات فرهنگ معاصر.

□ *لئوناردو داوینچی پرواز پرندگان را مورد بررسی علمی قرار داد و طرح‌های گوناگونی از ماشین‌های پرنده کشید (۱۵۰۰).*

□ *جووانی بورلّی[1]، ریاضیدان ایتالیایی، ثابت کرد که عضلات انسان ضعیف‌تر از آن است که بتواند پرواز کند (۱۶۸۰).*

□ *ژان پیلاتر دُ روزیه[2] و مارکی دارلان[3] فرانسوی نخستین صعود را با بالن هوای گرم انجام دادند (۱۷۸۳).*

□ *سر جرج کیلی[4]، مخترع انگلیسی، سطح مقطع آیرودینامیکی برای هواپیما طراحی کرد، نخستین مدل هواپیمای بدون موتور (گلایدر) را ساخت و به پرواز درآورد (۱۸۰۴) و علم آیرودینامیک را پایه‌گذاری کرد.*

□ *اتو لیلینتال[5] آلمانی روشی برای اندازه‌گیری نیروی بالابرندهٔ بال‌های آزمایشی ابداع کرد و نخستین پروازهای موفق با گلایدرهای سرنشین‌دار را در سال‌های ۱۸۹۱ تا ۱۸۹۶ میلادی انجام داد.*

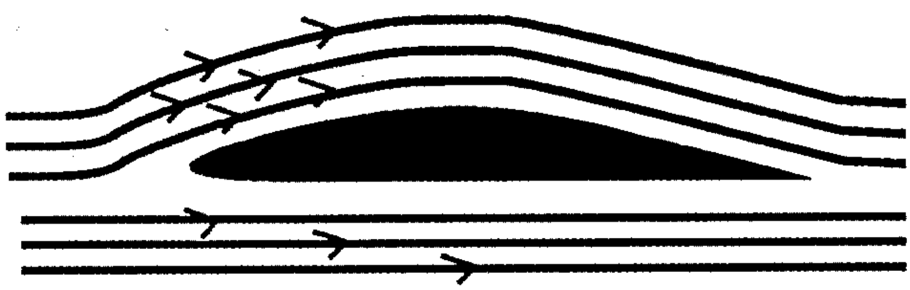
□ *در سال ۱۹۰۳ م. اورویل و ویلبر رایت نخستین پروازها را با هواپیمای موتوری ملخ‌دار انجام دادند. آنها با استفاده از تونل‌های باد و دستگاه‌های اندازه‌گیری، نیروی بالابرنده و نیروی مقاومت هوای وارد بر باله‌ها را آزمایش کردند و تکنیک‌های پرواز و ماشین‌های پرندهٔ خود را تا آنجا کامل کردند که توانستند در سال ۱۹۰۵ پروازی به‌مدت ۳۸ دقیقه و به مسافت ۳۰ کیلومتر انجام دهند!*

این‌گونه از زمین بلند می‌شویم:

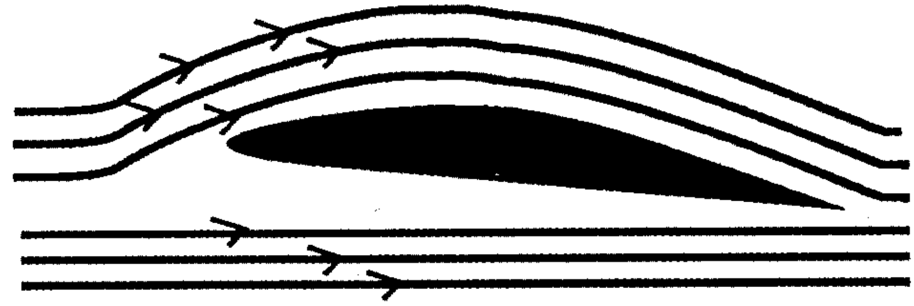
برای آنکه پرواز کنیم، باید نیروهای افقی و عمودی به تعادل درآیند. گرانش (نیروی قائم روبه پایین) ما را روی زمین نگه می‌دارد. برای غلبه بر نیروی گرانش، باید نیروی بالابرنده (نیروی قائم رو به بالا) را به‌وجود آورد. شکل بال‌ها و طراحی هواپیماها در ایجاد این نیرو عامل مهمی هستند. مطالعهٔ چگونگی طراحی بال‌ها و پرواز پرندگان در طبیعت کلید حل این مشکل است. به‌نظر می‌رسد تبدیل ظرافت و زیبایی پرواز پرندگان به اعداد، بی‌حرمتی به آنان است، اما بدون تجزیه و تحلیل ریاضی و فیزیکی مؤلفه‌های پرواز، هواپیماهای کنونی هرگز از زمین برنمی‌خاستند. انسان اغلب هوا را

1. Giovanni Barelli
2. Joan pilatre de Rozier
3. Marquis d'Arlandes
4. Sir George Cayley
5. Otto Lilienthal

به‌عنوان یک ماده به حساب نمی‌آورد، زیرا قابل دیدن نیست. با این وجود هوا نیز محیطی فراگیر مانند آب است. بال یک هواپیما، همچنین خود هواپیما، با عبور از میان هوا آن را می‌شکافد یا برش می‌دهد. دانیل برنولی (۱۷۸۲ تا ۱۷۰۰)، دانشمند سوئیسی، کشف کرد که با افزایش سرعت گاز یا سیال، فشار آن کاهش می‌یابد. اصل برنولی[1] بیان می‌کند چگونه شکل بال باعث ایجاد نیروی بالابرنده می‌شود. سطح بالای بال منحنی است و این انحنا سرعت هوا را افزایش می‌دهد، بنابراین فشار هوایی که از روی آن می‌گذرد کاهش می‌یابد. از آنجا که سطح زیر بال این خمیدگی را ندارد، سرعت هوای گذرنده از زیر آن کمتر و بنابراین فشار آن بیشتر است. فشار هوای بیشتر در زیر بال، به فشار هوای کمتر در بالای بال نیرو وارد می‌کند و هواپیما را در هوا بالا می‌برد. وزن (نیروی کششی گرانش) نیروئی قائم است که با نیروی بالابر هواپیما خنثی می‌شود.



کل بال باعث می‌شود که طول مت بالای آن بیشتر باشد، در جه هوا در بالای بال با سرعت ستری حرکت می‌کند و فشار ای بالا کمتر از فشار هوای ر بال می‌شود. فشار بیشتر زیر ، آن را به سوی بالا می‌راند.



گامی که بال زاویهٔ پرشیب‌تری رد، طول بالای بال بازهم بیشتر شود، بنابراین نیروی بالابرنده افزایش می‌یابد.

مقاومت هوا و رانش نیز نیروهایی افقی هستند که در پرواز تأثیر دارند. نیروی رانش هواپیما را به جلو و نیروی مقاومت هوا آن را به عقب می‌راند. یک پرنده با بال زدن نیروی رانش ایجاد می‌کند، در حالی که هواپیما را ملخ یا نیروی جت به پیش می‌راند. برای حفظ ارتفاع و پرواز هواپیما در مسیری مستقیم، باید تمام نیروهایی که به آن

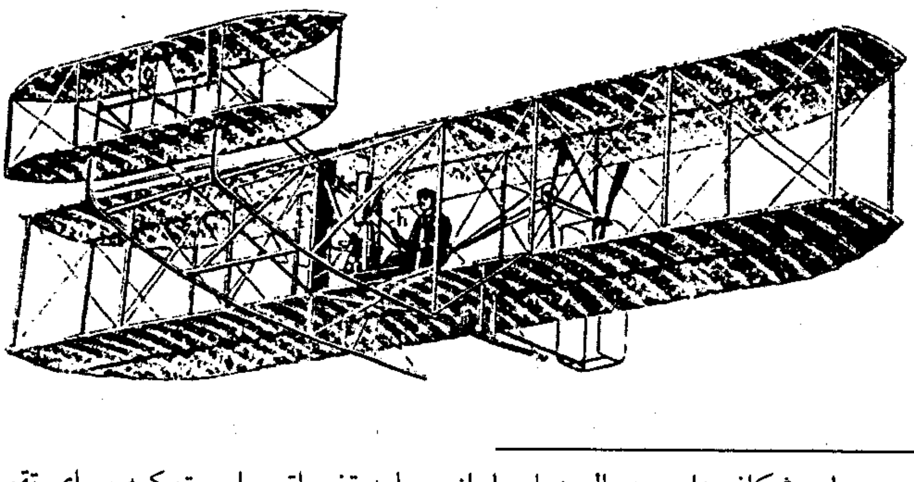
---

۱. قوانین حاکم بر جریان هوا برای هواپیماها، در مورد بسیاری از ابعاد زندگی ما مانند آسمان‌خراش‌ها، پل‌های معلق، بعضی دیسک‌گردان‌های کامپیوتر، پمپ‌های آب و گاز و توربین‌ها نیز صادق است.

اعمال می‌شوند با یکدیگر در تعادل باشند، یعنی برایند آنها صفر شود. نیروهای بالابرنده و گرانش باید یکدیگر را خنثی کنند و نیروهای رانش و مقاومت هوا باید متعادل باشند. در زمان برخاستن هواپیما از زمین، نیروی رانش باید بیش از مقاومت هوا باشد، اما در حین پرواز باید باهم مساوی باشند، در غیر این صورت سرعت هواپیما دایماً افزایش می‌یابد.

تماشای شیرجه رفتن و پریدن پرندگان دو عامل دیگر مؤثر در پرواز را آشکار می‌کند. هنگامی‌که سرعت هوا در بالای بال افزایش می‌یابد، نیروی بالابرنده نیز زیاد می‌شود. با افزایش *زاویهٔ بال* نسبت به جریان هوایی که به آن نزدیک می‌شود و *زاویهٔ حمله* نام دارد، سرعت هوای بالای بال می‌تواند افزایش بیشتری پیدا کند. اگر این زاویه به حدود ۱۵ درجه برسد یا از آن بیشتر شود، ممکن است نیروی بالابرنده ناگهان حذف شود و پرنده یا هواپیما به جای بالا رفتن، آغاز به سقوط کند. هنگامی‌که این اتفاق می‌افتد، آن را *زاویهٔ واماندگی* می‌نامند. در این زاویه، هوا در بالای بال به‌صورت گردباد درمی‌آید. این امر باعث ارتعاش بال و کم شدن نیروی بالابرنده و غلبهٔ نیروی گرانش بر آن می‌شود.

انسان که از لوازم پرواز پرندگان محروم است، از اصول ریاضی و فیزیک استفاده کرده است تا خود و چیزهای دیگر را از زمین بلند کند. طرح‌ها و تدابیر مهندسی[1] دایماً عملکرد هواپیماها را بهبود بخشیده‌اند.



۱. افزودن دریچه‌ها و شکاف‌هایی به بال هواپیما، از جمله تغییراتی است که برای تقویت نیروی بالابرنده اعمال شده است. دریچه قطعه‌ای لولایی است که می‌تواند انحنای بال را تغییر دهد و باعث افزایش نیروی بالابرنده شود. شکاف‌های روی بال نیز رسیدن به زاویهٔ واماندگی را چند درجه به تأخیر می‌اندازند.

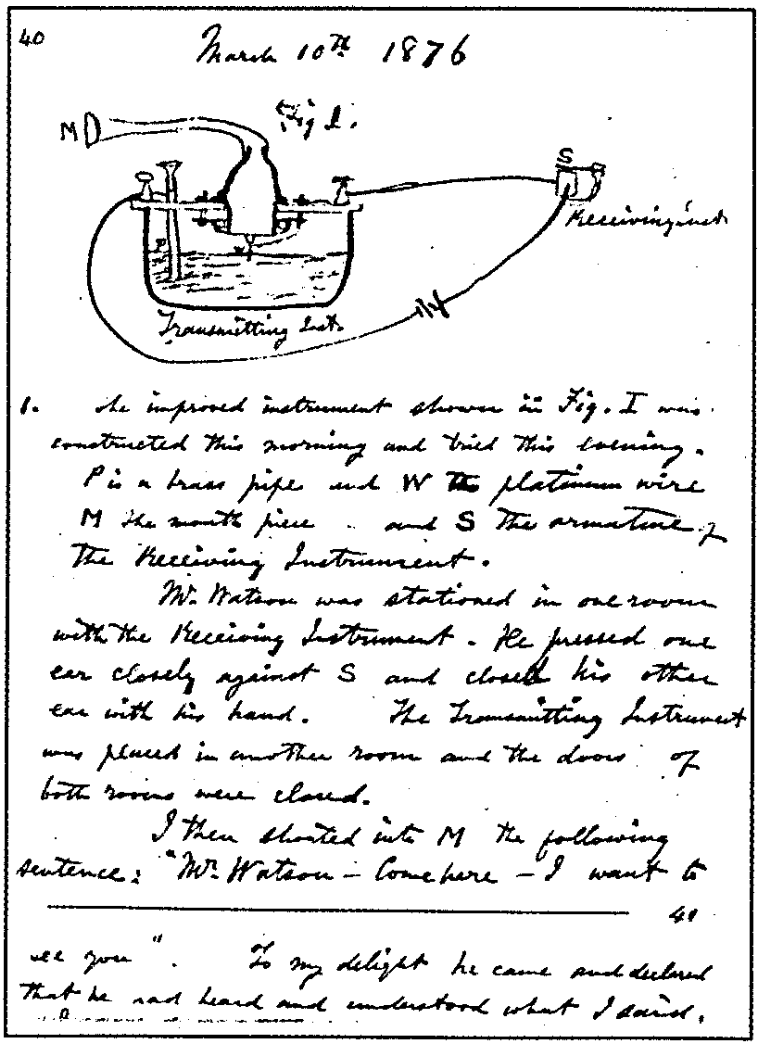
ریاضیات در یک گفتگوی تلفنی

هر بار که گوشی تلفن را برمی‌دارید تا با کسی تماس بگیرید، یا اطلاعاتی را با دورنگار یا مودم بفرستید، به شبکهٔ بسیار پیچیده و عظیمی وارد می‌شوید. شبکهٔ مخابراتی که کرهٔ زمین را دربرگرفته است، حیرت‌انگیز است. مشکل می‌توان تصور کرد که هر روز در این شبکه چه تعداد مکالمه برقرار می‌شود. سامانه‌ای که شبکه‌های گوناگون کشورهای مختلف و پهنهٔ دریاها آن را به اجزای متعدد تجزیه می‌کنند چگونه کار می‌کند؟ چگونه یک مکالمهٔ تلفنی به مقصدی در شهر، استان یا کشور شما راه خود را پیدا می‌کند؟

در سال‌های اولیهٔ اختراع تلفن، شخص گوشی را برمی‌داشت و دسته‌ای را می‌چرخاند تا با تلفنچی ارتباط برقرار کند. تلفنچی در مرکز تلفن محلی روی خط می‌آمد و شمارهٔ مورد نظر را می‌پرسید و از آنجا ارتباط شما را با طرف مقابل برقرار می‌کرد. امروزه این فرایند با وجود روش‌های گوناگون تبدیل و هدایت مکالمه‌های تلفن، رشدی قارچ گونه کرده است. ریاضیات با استفاده از برنامه‌ریزی‌های خطی پیچیده و نظام رمزنویسی دودویی، گره این وضعیت بالقوه متزلزل را می‌گشاید.

صدای شما چگونه منتقل می‌شود؟ صدای شما در گوشی تلفن به سیگنال‌های الکتریکی تبدیل می‌شود. امروزه می‌توان این پالس‌ها (تکانه‌ها)ی الکتریکی را به روش‌های گوناگونی تبدیل کرد و انتقال داد. ممکن است آنها به سیگنال‌های نور لیزر

تبدیل شوند که از طریق کابل‌های فیبر نوری انتقال یابند[۱]، یا به سیگنال‌های رادیویی تبدیل شوند و از طریق ارتباط رادیویی یا مایکروویو از برجی به برج دیگر در سراسر یک کشور انتقال یابند، یا به همان شکل سیگنال‌های الکتریکی در خطوط تلفن باقی بمانند. بیشتر مکالمات در آمریکا با سامانهٔ خودکار مراکز تلفن انجام می‌گیرد. در حال حاضر سامانهٔ مرکز تلفن الکترونیکی، سریع‌ترین سامانه است. این سامانه برنامه‌ای دارد که شامل اطلاعات موردنیاز برای تمام عملیات تلفنی است، در حالی‌که رد تلفن‌های در حال استفاده و مسیرهای قابل استفاده را نگه می‌دارد. مکالمات می‌توانند با جریان‌های الکتریکی در فرکانس‌های مختلف انتقال یابد یا به سیگنال‌های دیجیتالی تبدیل شود. با هر دو روش می‌توان چندین گفتگوی تلفنی را از سیم‌های مشترکی انتقال داد. در جدیدترین سامانه‌ها، مکالمات به سیگنال‌های دیجیتالی تبدیل می‌شود و آنگاه به‌صورت یک رشته اعداد در مبنای دو رمزگذاری می‌شود. بنابراین تمام مکالمات جداگانه و به‌طور «همزمان» با ترتیبی معین در خطوط انتقال می‌یابد تا در مقصد رمزگشایی شود.



1. The improved instrument shown in Fig. I was constructed this morning and tried this evening. P is a brass pipe and W the platinum wire M the mouth piece and S the armature of the Receiving Instrument.

Mr. Watson was stationed in one room with the Receiving Instrument. He pressed one ear closely against S and closed his other ear with his hand. The Transmitting Instrument was placed in another room and the doors of both rooms were closed.

I then shouted into M the following sentence: "Mr. Watson — Come here — I want to

41

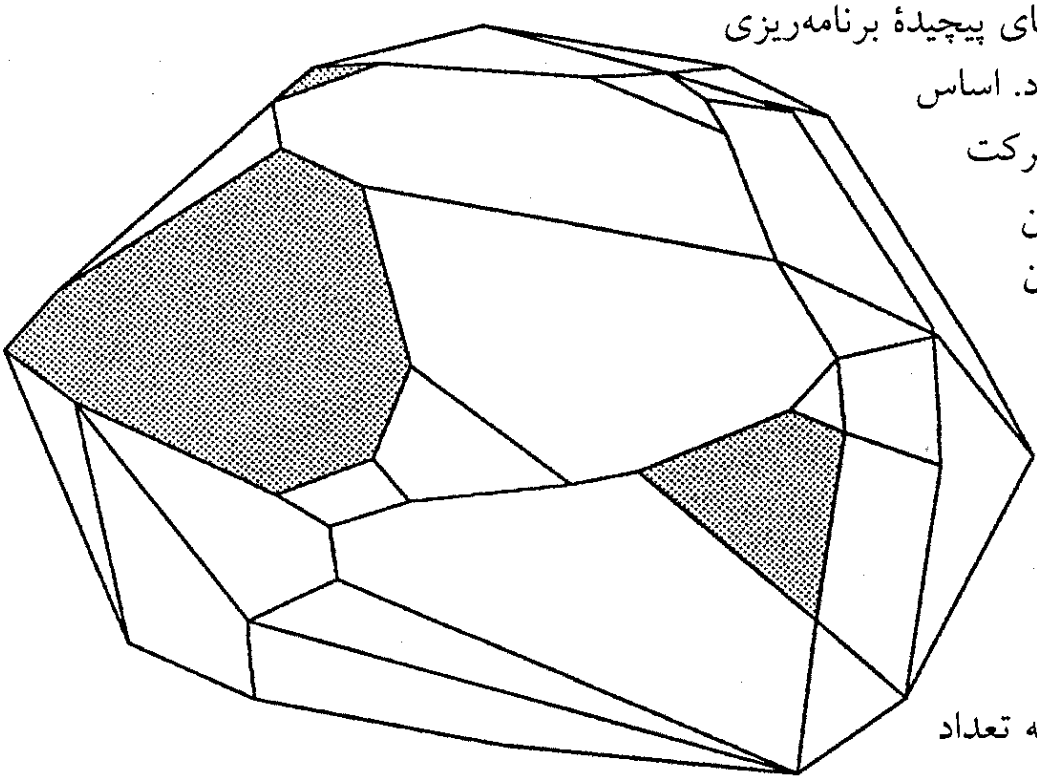
see you." To my delight he came and declared that he had heard and understood what I said.

صفحاتی از دفترچهٔ یادداشت الکساندر گراهام بل که در آن دربارهٔ نخستین پیام تلفنی که از طریق اختراع خود به دستیارش، آقای واتسون فرستاد، نوشته است: «آنگاه جملهٔ زیر را با فریاد گفتم: «آقای واتسون ـ بیا ـ می‌خواهم تو را ببینم» در میان شادی من او آمد و گفت صدایم را شنیده و آنچه را که گفته‌ام فهمیده است.»

---

۱. بسته به نوع خط مورد استفاده، تعداد مکالمات «همزمان» می‌تواند از ۹۶ تا ۱۳۰۰۰ باشد. سامانه‌های فیبر نوری می‌توانند اطلاعات بیشتری را نسبت به کابل‌های مسی و آلومینیومی مرسوم انتقال دهند.

این سیستم، برای برقراری هر مکالمه بهترین مسیر را انتخاب می‌کند و مجموعه‌ای از فرمان‌ها را برای برقراری ارتباط می‌فرستد. کل این فرایند در کسری از ثانیه انجام می‌شود. در بهترین حالت، سامانه مسیری مستقیم را به طرف مقابل انتخاب می‌کند ـ که از نظر صرفه‌جویی در مسافت و زمان مطلوب است. اما اگر خط مستقیم به دلیل مکالمات دیگر گنجایش نداشته باشد، ارتباط جدید از بهترین مسیر جایگزین برقرار می‌شود. اینجاست که برنامه‌ریزی خطی[1] نقش خود را ایفا می‌کند. مسألهٔ مسیریابی تلفن را به صورت شکلی هندسی با میلیون‌ها وجه تجسم کنید. هر یک از رأس‌های آن نشانهٔ یک راه حل ممکن است. مسأله، یافتن بهترین راه حل بدون آزمودن تک تک آنهاست. گئورگ ب. دانتزیگ ریاضیدان در سال ۱۹۴۷ *روش سیمپلکس* را برای یافتن راه حل مسأله‌های پیچیدهٔ برنامه‌ریزی خطی ابداع کرد. اساس این روش بر حرکت روی لبه‌های این شکل و آزمودن گوشه‌ها یکی پس از دیگری است، در حالی‌که پیوسته به دنبال بهترین راه حل است. تا وقتی‌که تعداد

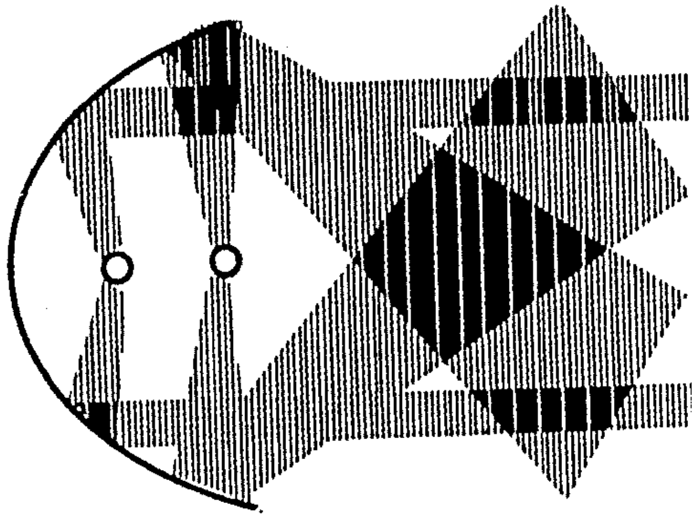


۱. از روش‌های برنامه‌ریزی خطی در حل مسایل مختلفی استفاده می‌شود. این مسایل معمولاً شرایط و متغیرهای زیادی دارند. یک نمونهٔ ساده می‌تواند مسأله‌ای مربوط به کشاورزی باشد: کشاورزی می‌خواهد کارآمدترین روش استفاده از زمین خود را برای به حداکثر رساندن تولید و سود آن انتخاب کند. شرایط و متغیرها می‌توانند دربرگیرندهٔ مواردی چون کشت محصولات مختلف، وسعت زمین موردنیاز هر محصول، میزان تولید محصول در هر هکتار و میزان درآمد حاصل از فروش محصول باشد. برای حل این مسأله نامعادله‌ها یا معادله‌هایی برای هر یک از شرایط نوشته می‌شود و نموداری دو بعدی از یک حوزهٔ چندضلعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

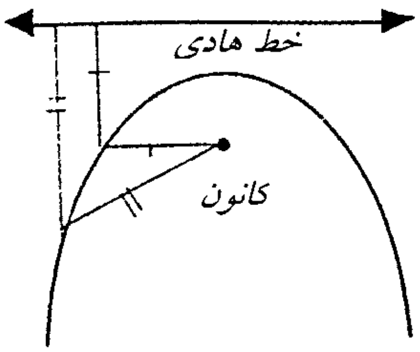
راه حل‌های ممکن بیش از ۱۵,۰۰۰ تا ۲۰,۰۰۰ نباشد این روش می‌تواند در یافتن راه حل مناسب مؤثر باشد. در سال ۱۹۸٤، نارندرا کارمارکار ریاضیدان، روشی کشف کرد که زمان حل مسایل بسیار دشوار برنامه‌ریزی خطی، مانند یافتن بهترین مسیر برای مکالمه‌های تلفنی راه‌دور را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهد. *الگوریتم کارمارکار* با عبور از میانهٔ شکل، از راه میان‌بُر استفاده می‌کند. این الگوریتم پس از انتخاب نقطه‌ای دلخواه درون این شکل هندسی، کل ساختار آن را پوشش می‌دهد و مسأله را با آوردن نقطهٔ انتخاب شده به مرکز شکل، به صورتی تازه درمی‌آورد. گام بعدی این است که نقطهٔ جدیدی برای یافتن بهترین راه حل مسأله و پوشش دوبارهٔ ساختار شکل پیدا کنیم. تصور غلطی است که انتظار داشته باشیم بدون چنین پوششی، هر بار دستورالعملی ظاهر شود و به ما بهترین راه را نشان دهد. این تبدیل‌های پیاپی بر مفاهیم هندسهٔ تصویری استوار است و به سرعت به یافتن بهترین راه حل می‌انجامد.

امروزه، خوشامدگویی قدیمی و «لطفاً شمارهٔ خود را بگویید» معنی دیگری یافته است. فرایند در گذشته سادهٔ برداشتن گوشی و تقاضای برقراری ارتباط، اینک شبکهٔ عظیم و پیچیده‌ای را به کار می‌اندازد که بر پایهٔ ریاضیات بنا شده است.

آینه‌های سهمی شکل
چراغ‌های جلو خودرو



وقتی کلید چراغ جلو خودرو خود را می‌زنید، ریاضیات وارد عمل شده است. به بیان دقیق‌تر، اصول سهمی‌ها هستند که این تردستی را ترتیب می‌دهند. بازتابنده‌های پشت چراغ‌ها (یا همان کاسه چراغ‌ها) سهمی[1] شکلند. در واقع آنها سهمی‌های سه بعدی حاصل از دوران یک سهمی به دور محور تقارن آنند. نور بالا با قرار گرفتن منبع نور در کانون بازتابنده‌های سهمی شکل به‌وجود می‌آید. بنابراین پرتوهای نور به صورت موازی با محور تقارن سهمی باز می‌تابند. با زدن کلید نور پایین، جای منبع نور عوض می‌شود. منبع نور دیگر در نقطهٔ کانونی نیست و در نتیجه پرتوهای نور نیز موازی با محور انتشار می‌یابند.



جهت پرتوها اینک به طرف بالا یا پایین است. پرتوهای روبه بالا حذف می‌شوند. بنابراین تنها پرتوهای روبه پایین در فاصله‌ای کوتاه‌تر از پرتوهای نور بالا، بازتاب می‌یابند.

سهمی یک منحنی قدیمی است که منایخموس (حدود ۳۷۵ــ۳۲۵ پ.م.) آن را هنگام تلاش برای یافتن ضلع مکعبی با حجم دو برابر مکعب مفروض کشف کرد. طی قرن‌ها، کاربردها و کشف‌های جدیدی با استفاده از سهمی پدید آمده است. به‌طور مثال گالیله (۱٦٤۲ـ۱٥٦٤) بود که نشان داد مسیر یک پرتابه سهمی است. امروزه می‌توان در فروشگاه‌ها، بخاری‌های برقی با بازده انرژی بسیار بالا یافت که با استفاده از شکل سهمی و مصرف تنها ۱۰۰۰ وات، انرژی گرمایی معادل با بخاری‌های ۱۵۰۰ واتی تولید می‌کنند.

---

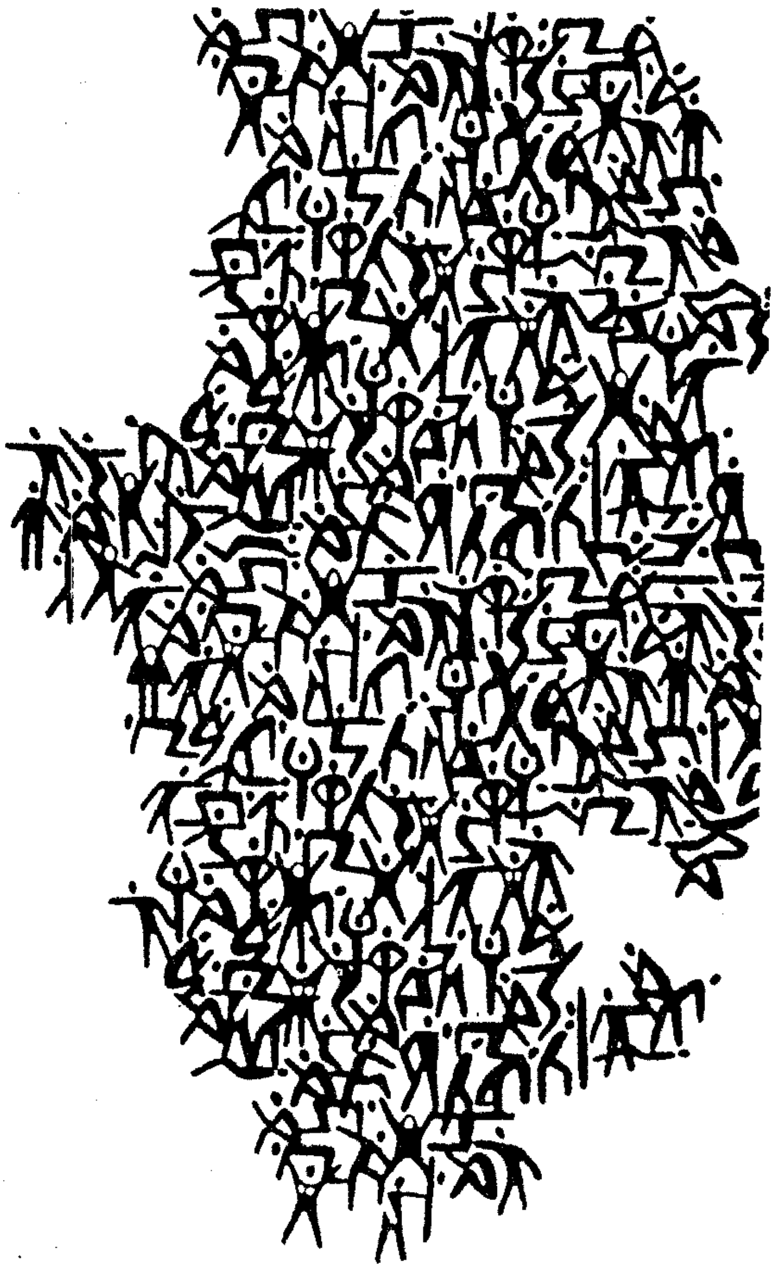
۱. سهمی مجموعهٔ نقاط یک صفحه است که فاصله‌شان از نقطه‌ای ثابت به نام کانون و خطی ثابت به نام خط هادی به یک اندازه است.

...یدگی و
...ان حال

«از ساعت هفت تا حدود نیمه شب ساعات آرام پل است... آغاز آن تقریباً سرساعت هفت بود... چنین به‌نظر می‌رسید که همهٔ آنهایی که در منهتن خودرو دارند تصمیم گرفته‌اند آن شب را به لانگ آیلند بیایند.»

همان‌طور که این بخش از کتاب *قانون* اثر رابرت کوتس توصیف می‌کند، گاه اتفاقاتی می‌افتد که دلیل آشکاری برای آن وجود ندارد. نشانهٔ هشدار دهنده‌ای هم از رخ دادن آن اتفاق وجود ندارد. همهٔ ما شاهد این گونه اتفاقات بوده‌ایم و آن را به «تصادف» نسبت داده‌ایم، چون دلیل آشکاری برای پیش‌بینی خلاف آن نداریم.

پیچیدگی دانشی در حال شکل‌گیری است که ممکن است برای چنین پرسش‌هایی، پاسخ یا دست کم توضیحی داشته باشد:



چگونه است که

☐ جهان از هیچ پدید آمده است؟
☐ سلول‌ها می‌دانند به چه اندامی تبدیل خواهندشد و کجا؟
☐ لس آنجلس در ۱۷ ژانویهٔ ۱۹۹٤ شاهد زلزله‌ای با شدت و ویرانی غیرمنتظره بود؟
☐ فرمانروایی درازمدت اتحاد شوروی بر اقمارش در مدتی چنین کوتاه پایان یافت؟
☐ یوگسلاوی ناگهان درگیر جنگ داخلی خشونت آمیزی شد؟
☐ گونه‌هایی که میلیون‌ها سال بدون تغییر بوده‌اند، ناگهان جهش پیدا می‌کنند؟
☐ بازار سهام بدون دلیلی آشکار ناگهان افزایش می‌یابد یا سقوط می‌کند؟

این فهرست بی‌پایان است. عامل اصلی مشترک در همهٔ این رویدادها این است که همگی نمونهٔ یک سامانهٔ بسیار پیچیده‌اند ـ سامانه‌ای تابع شمار بسیاری از عوامل گوناگون که تعادلی ظریف دارد و بین پایداری و آشوب در نوسان است. عوامل مؤثر بر چنین سامانه‌ای همواره در حال رشد و تغییرند. در نتیجه یک سامانهٔ پیچیده، پیوسته در حالت آشوب بالقوه یا در واقع *مرز آشوب* قرار دارد. به‌نظر می‌رسد گرایش به جنگ دایمی بین نظم و آشوب وجود دارد. *پویایی خودانگیخته خود سامان بخش* اساس یک سامانهٔ پیچیده است. این ابزاری است که سامانه به کمک آن، با تغییر و تطبیق خود با شرایط و عوامل دایماً در حال تغییر، تعادل خود را بازمی‌یابد. آنان که این دانش جدید را مطالعه می‌کنند، با تعداد زیادی از مفاهیم ریاضی و علمی، مانند نظریهٔ آشوب، برخال‌ها، احتمالات، هوش مصنوعی، منطق فازی و غیره برخورد می‌کنند. این دانشمندان و ریاضیدانان احساس می‌کنند که ریاضیات امروز، همراه با سایر ابزارها و نوآوری‌های فناوری پیشرفته، می‌تواند چهارچوبی پیچیده پدید آورد که بر جنبه‌های مهم جهان ما، به‌ویژه اقتصاد، محیط زیست و سیاست تأثیر بگذارد.

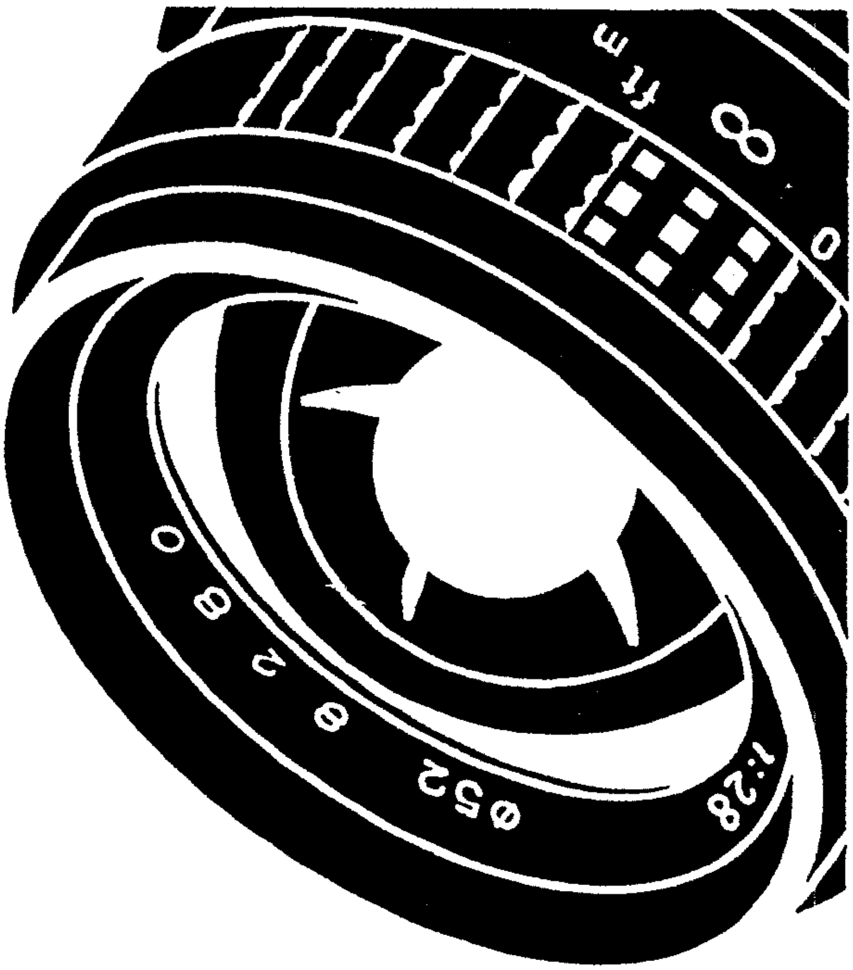
ضیات و
ربین عکاسی

تا به حال به عددهای تنظیم دیافراگم دوربین، که با حرف f مشخص می‌شود، فکر کرده‌اید؟ نام آن از کجا آمده است؟ چطور تعیین می‌شود؟ حرف f از اصطلاح ریاضی ضریب *(فاکتور)* گرفته شده است. میزان روشنایی تصویر روی فیلم عکاسی، به قطر دهانهٔ دیافراگم و فاصلهٔ کانونی لنز بستگی دارد. عکاسان با استفاده از اعداد دیافراگم، نسبت بین فاصلهٔ کانونی و گشودگی دریچهٔ دیافراگم را تنظیم می‌کنند. این نسبت با اندازه‌گیری قطر دهانهٔ دیافراگم و تقسیم فاصلهٔ کانونی لنز بر آن محاسبه می‌شود. مثلاً،

قطر دهانهٔ دیافراگم ۲۰ میلی‌متر / لنز ۸۰ میلی‌متر = f4

قطر دهانهٔ دیافراگم ۵ میلی‌متر / لنز ۸۰ میلی‌متر = f16

می‌بینیم که با تنگ شدن روزنهٔ لنز (کاهش قطر دهانهٔ دیافراگم) عدد دیافراگم (f) بزرگتر می‌شود. با استفاده از اعداد دیافراگم و سرعت شاتر، می‌توان به صورت دستی مقدار وضوح تصویر (عمق میدان) را مشخص کرد.



اعداد بازیافتی

در اینجا با استفاده از واحدها و نمادهای ریاضی، نکاتی دربارهٔ بازیافت کاغذ معلوم می‌شود!

☐ یک تن کاغذ نو ☐ یک تن کاغذ بازیافتی

☐ برای یک تن کاغذ بازیافتی ۴۱۰۲ کیلووات کمتر انرژی مصرف شده است.

☐ در تولید یک تن کاغذ بازیافتی ۷۰۰۰ گالن کمتر آب مصرف شده است.

☐ آلودگی هوای حاصل از تولید یک تن کاغذ بازیافتی، حدود ۲۷ کیلوگرم کمتر است.

☐ یک تن کاغذ بازیافتی حدود ۲ مترمکعب کمتر زبالهٔ جامد تولید می‌کند.

☐ برای یک تن کاغذ بازیافتی هزینهٔ دفن زبالهٔ کمتری از مالیات مردم صرف شده است.

☐ یک تن کاغذ بازیافتی باعث می‌شود ۱۷ درخت کمتر بریده شود.

ـــ آمارهایی دربارهٔ بازیافت و محل دفن زباله ـــ

☐ ۳۷٪ از زباله‌های دفن شده را کاغذ تشکیل می‌دهد.

☐ تنها ۲۹٪ تمام روزنامه‌های چاپ شده بازیافت می‌شود.

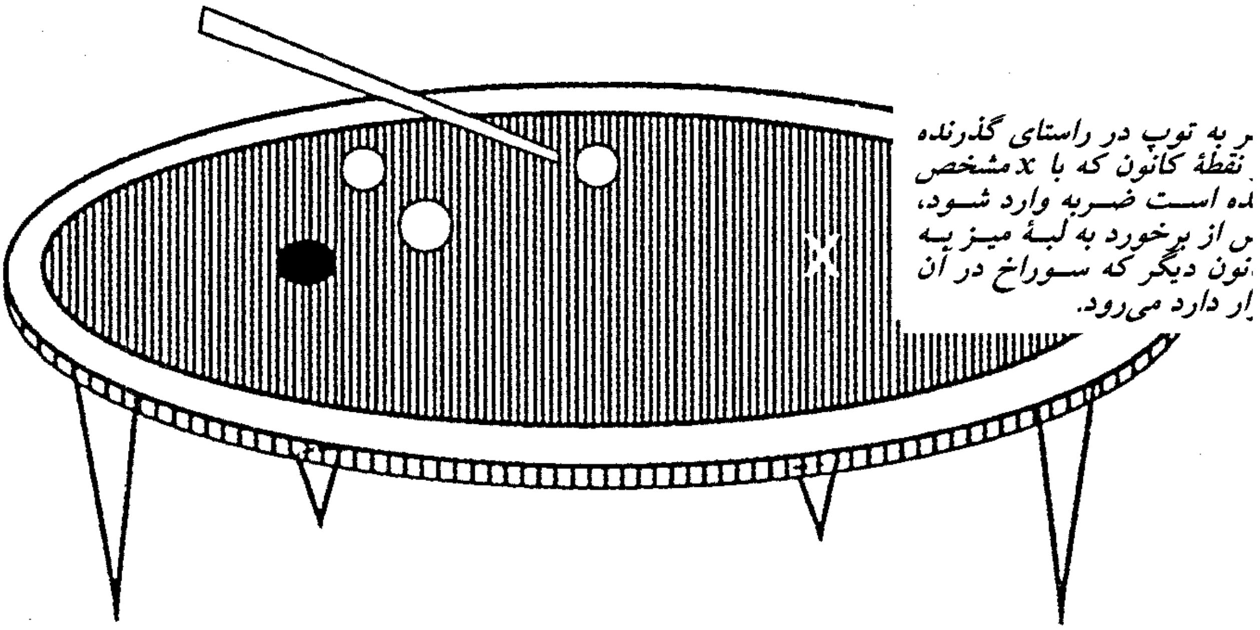
☐ سالانه ۱۵۰ میلیون مترمکعب فضا برای دفن زباله‌های کاغذی موردنیاز است.

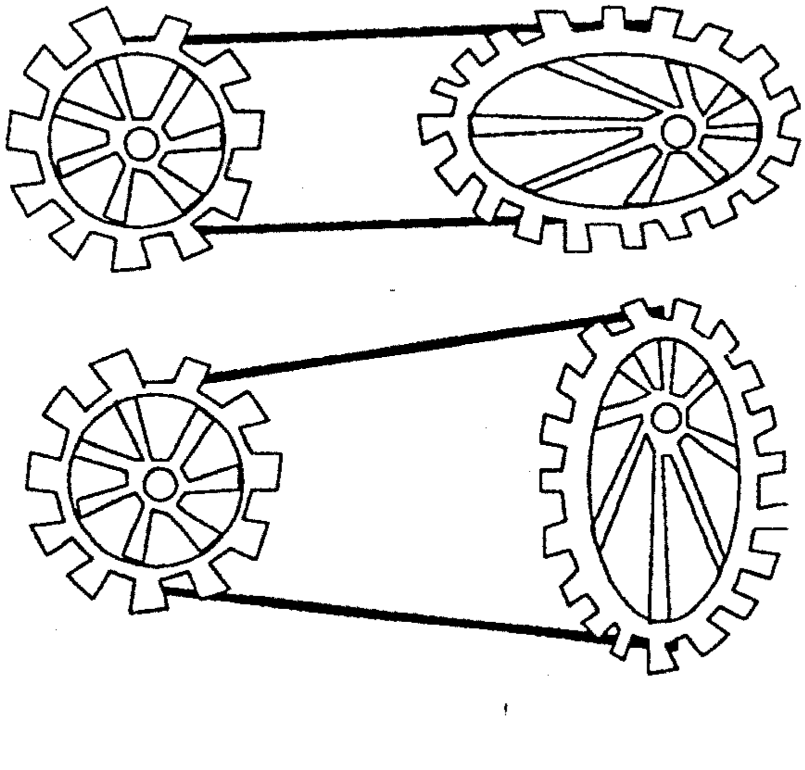
☐ ۹۷٪ درختان جنگل‌های بکر قارهٔ آمریکا در ۲۰۰ سال گذشته قطع شده‌اند[1].

۱. خبرنامهٔ *من زمانی یک درخت بوده‌ام...*، بهار ۱۹۹۰، انتشارات آلونزو، هِیوارد، کالیفرنیا.

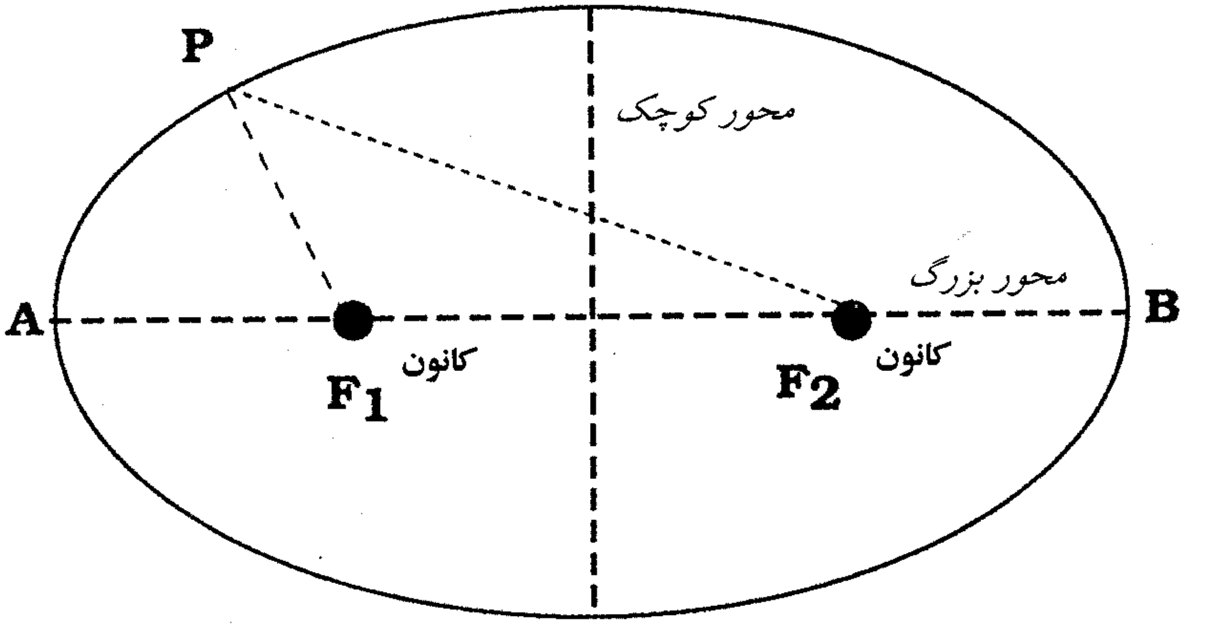
وچرخه، میز بیلیارد
بیضی

یونانیان مدت‌ها پیش، در قرن سوم میلادی، بیضی و مقاطع مخروطی دیگر را مطالعه کرده‌اند.





اغلب ما بیضی را به شکل دایره‌ای کش آمده یا با مدار حرکت سیاره‌ها به یاد می‌آوریم، اما شکل‌های بیضوی و ویژگی‌های آنها در کاربردهای غیرعلمی هم به کار می‌آیند. چه کسی می‌توانست تصور کند که بیضی در طراحی چرخ دنده‌های دوچرخه و میز بیلیارد کاربرد پیدا کند؟

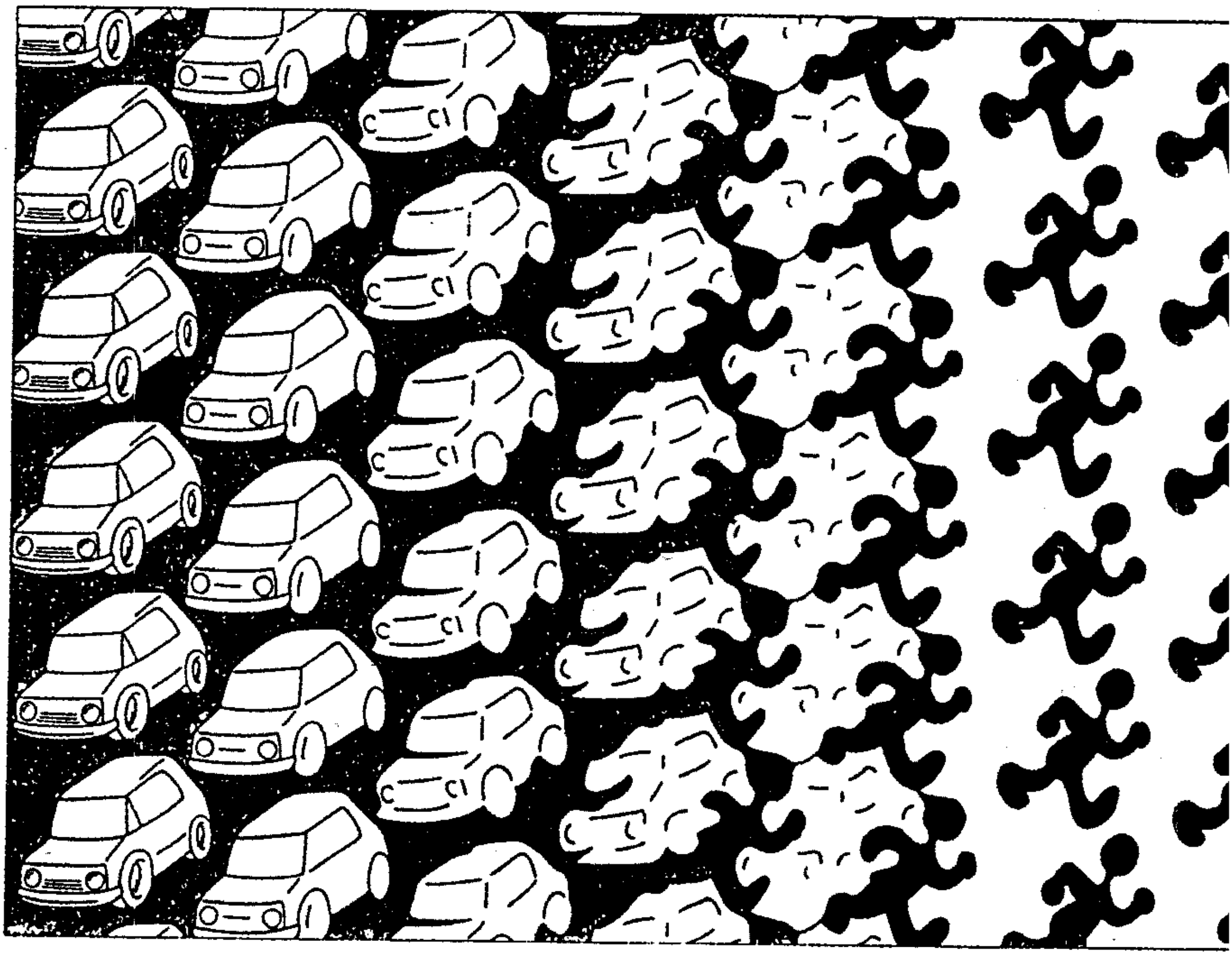


هر بیضی دو کانون دارد و مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن، همیشه مقداری ثابت و برابر با طول محور بزرگ آن است یعنی $|PF_1| + |PF_2| = |AB|$.

امروزه دوچرخه‌هایی ساخته می‌شود که چرخ دندهٔ جلوی آنها به شکل بیضی و چرخ دنده‌های عقب آنها دایره شکل است. شکل (ص ٢٤) نشان می‌دهد در این طرح چگونه از نیروی رانشی روبه پایین پاها و بازگشت سریع رو به بالا بهره‌گیری شده است. میزهای بیضی شکل بیلیارد طوری طراحی شده‌اند که در آنها از خاصیت بازتابی دو کانون بیضی استفاده شود همان‌طور که در شکل (ص ٢٤) نشان داده شده است، میز بیلیارد بیضی شکل سوراخی در یکی از کانون‌های خود دارد. وقتی به توپی در راستای گذرنده از کانون دیگر بیضی ضربه زده شود، پس از برخورد به لبهٔ میز برمی‌گردد و در مسیر بازگشت به درون سوراخ (کانون دیگر بیضی) می‌افتد.

ستجو در طرح‌های اشیکاری

استفاده از تبدیل‌های به سبک اشر[1] توسط مارک سیمونسون، کاربرد خانه‌بندی را به‌عنوان گونه‌ای ارتباط بصری به تصویر می‌کشد. این تصویر گرافیکی روی جلد یک نشریه از انتشارات حمل و نقل متروپولیتن چاپ شد و با اجازهٔ مارک سیمونسون با عنوان «کارهای گرافیکی خیالی» در مینیاپولیس ایالت مینه‌سوتا، تجدید چاپ شد.

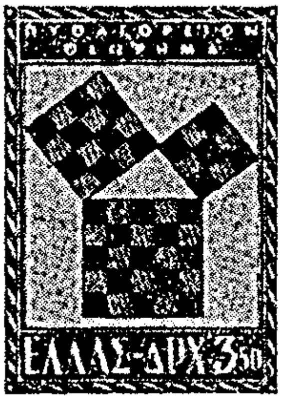


۱. موریس اشر (۱۹۷۲ـ۱۸۹۸) گرافیست هلندی، که با بهره‌گیری از نظریه‌های فیزیک، تکامل و دانش‌های نوین، به ترسیم معماهای بصری شگفت‌انگیز پرداخت. فرهنگ *فارسی اعلام*.

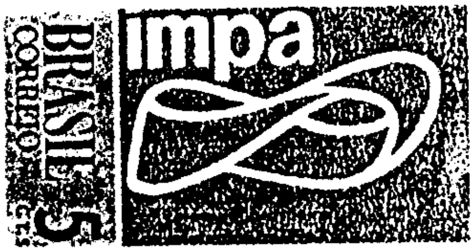
تمبرهایی با موضوع ریاضیات

معمولاً کسی انتظار ندارد که در ادارهٔ پست با اندیشه‌های ریاضی روبرو شود، اما در اینجا تعدادی تمبر دیده می‌شود که با موضوع‌های ریاضی چاپ شده است. این موضوع‌ها و بسیاری اندیشه‌های ریاضی دیگر در تلویزیون، روی پوسترها، لیوان‌ها، تی‌شرت‌ها، عکس برگردان‌ها و برچسب‌های سپر خودرو دیده می‌شود.

قضیهٔ فیثاغورس ـ نیکاراگوئه

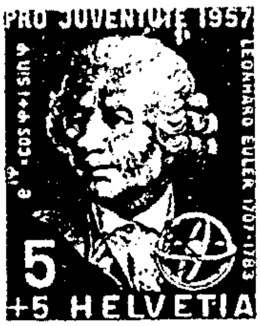


قضیه فیثاغورس ـ یونان



نوار موبیوس ـ برزیل

پاسکال ـ فرانسه



اویلر ـ سوییس

فرمول‌های ریاضی ـ اسرائیل

گاوس ـ آلمان

بابای ـ رومانی

دم موش

تویی دلدی ادامه داد: «برعکس، اگر این‌طـور بود، باید چنین می‌شد، و اگـر آن‌طـور بـود، چنان می‌شد؛ اما چـون ایـن نیسـت، آن هـم نخواهدشد، این منطقی است.»

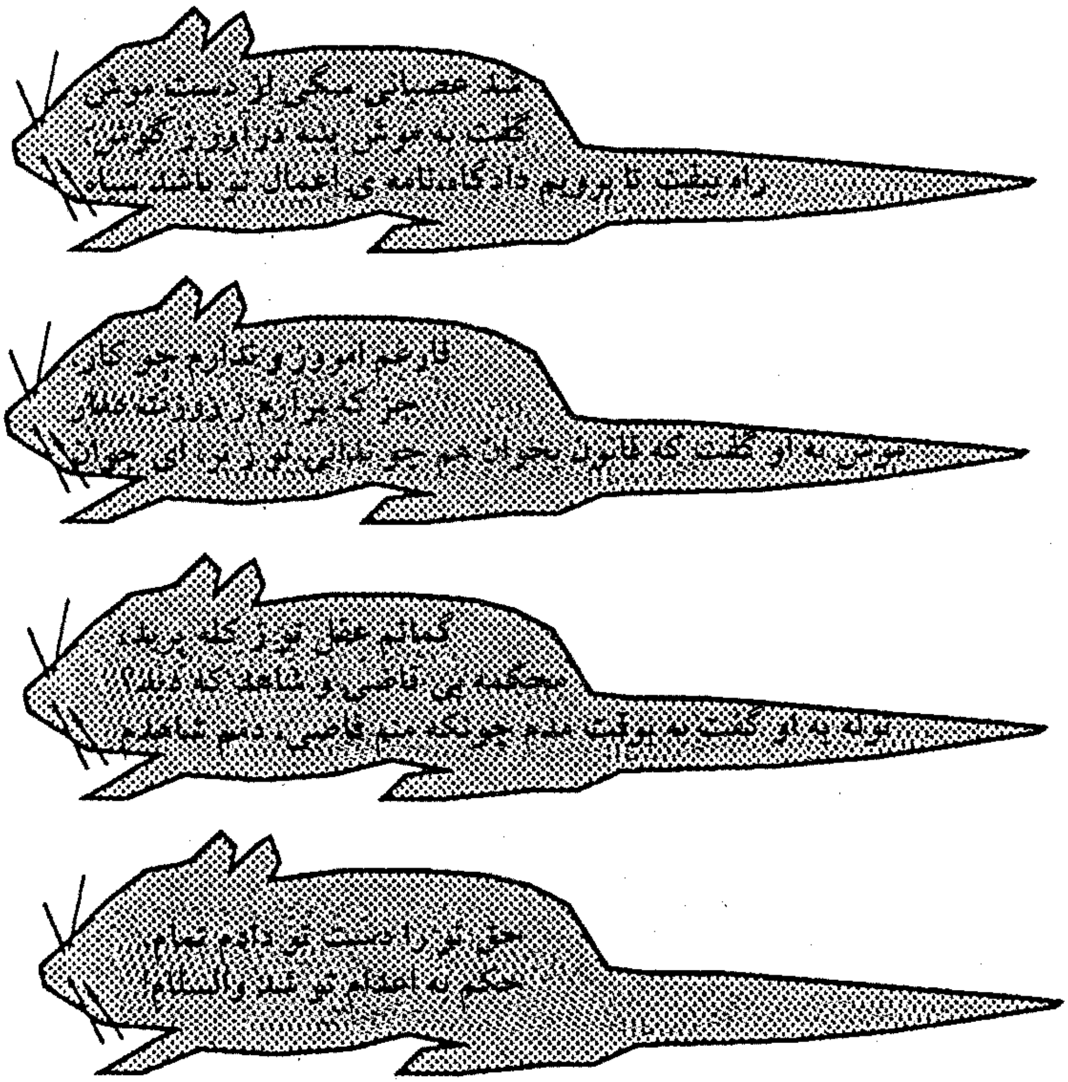
لوئیس کارول
آلیس در سرزمین عجایب.

چارلز لاتویج داجسن (۱۸۹۸ـ۱۸۳۲) ریاضیدان، مـدرس ریاضـیات، طـراح معمـا و بـازی، عکـاس و نویـسندهٔ سرشناس کتاب‌های ریاضی و داستان‌های کودکان، شاعر و نویسندهٔ مقاله‌های اجتماعی بـود[1]. نـام مـستعار او در داستان‌هایی که برای بچه‌ها مـی‌نوشـت، لـوئیس کـارول بود. به‌نظر می‌رسد که او نمی‌خواست با هویـت لـوئیس کارول ارتباطی داشته باشد. او حتی نامه‌های خطـاب بـه لوئیس کـارول را برمـی‌گردانـد و هنگـامی‌کـه کتابخانـهٔ بادلیان (آکسفورد) نام داجسن را به لویس کارول ارجـاع داده بود، به آن اعتراض کرد.

داجسن به بازی با واژه‌ها دلبستگی زیادی داشت. در سال ۱۹۹۱ دو نوجوان اهل نیوجرسی یک بازی با کلمات را (در واقع هم بصری و هم کلامی) در شعری به نام مسابقهٔ انتخاباتی و حکایت دنباله‌دار در فصل دوم کتاب *آلیس در سرزمین عجایب* کشف کردند. یک موش

شد عصبانی
سگی از دست
موش. گفت به
موش، پنبه
درآور ز گوش.
راه بیفت تا
برویم دادگاه،
نامه‌ی اعمال
تو باشد سیاه
فارغم امروز
و ندارم چوکار،
جز که برآرم
ز روزت دمار.
موش به او
گفت که
قانون بخوان
هم چو ندانی تو
زبر، ای جوان
گمانم عقل تو
ز کله پرید، محکمه
بی‌قاضی و
شاهد که دید؟
توله به او گفت
به بوقت
مدم چونکه
منم قاضی،
دُمم شاهدم
حق تو را
دست تو
دادم
تمام،
حکم
به
اعدام
تو
شد
والسلام!

۱. *اقلیدس و هماوردان مدرن او، رساله‌ای مقدماتی دربارهٔ دترمینان، آلیس در سرزمین عجایـب، شـکار اسنارک، صحنهٔ خیالی و اشعار دیگر و از میان آینه‌ها* برخی از آثار داجسن است.



این حکایت را به شکل شعری شبیه به یک دم دراز برای آلیس می‌گوید. علاوه بر این داستان و ارتباطش با دم، گری گراهام و جفری میدن پی‌بردند که اگر شعر[1] را در چند بند بنویسند طرح یک موش به‌دست می‌آید ـ هر بند دو مصراع کوتاه (بدن موش) و یک مصراع بلند (دم موش) دارد. سرانجام کشف کردند که قافیهٔ دم یک ساختار شعری دارد که با دو مصراع قافیه‌دار و به دنبال آن مصراع با طول متفاوت مشخص می‌شود. آیا شما فکر می‌کنید که لوئیس کارول همهٔ این‌ها را به عمد انجام داده است؟

---

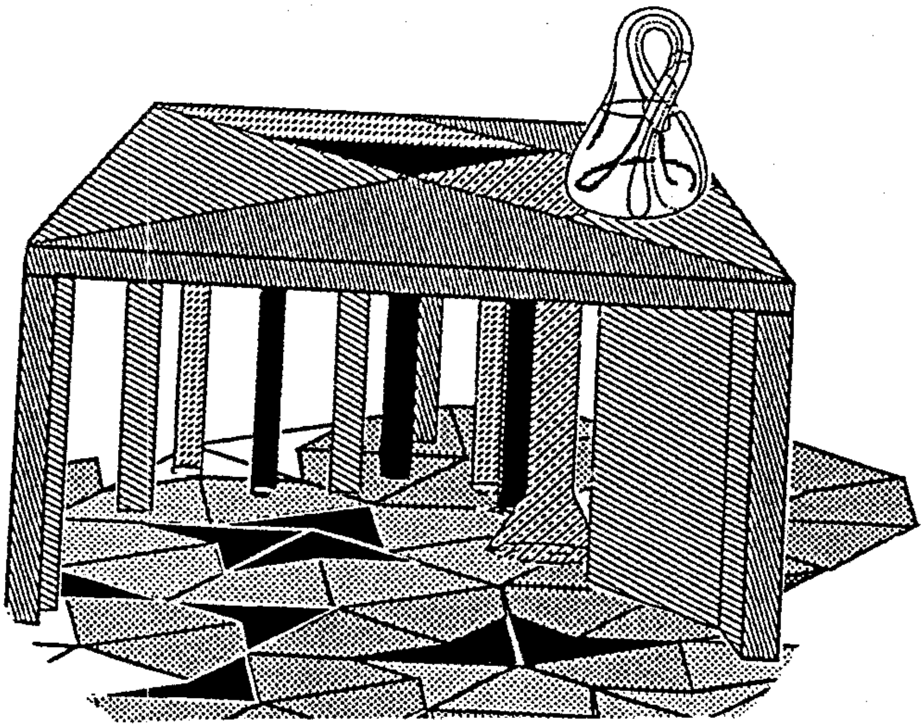
۱. ترجمه این شعر از *آلیس در سرزمین عجایب* به ترجمهٔ خانم رویا پیرزاد از انتشارات نشر مرکز برداشته شده است.

یک دیدار ریاضی

بدون اطمینان از این‌که چه چیزی در انتظار من است، زنگ در را فشار دادم. صدایی از من خواست که اعداد پنج جملهٔ اول سری فیبوناچی را فشار دهم. خوشبختانه من پس از آنکه مجله مأمورم کرده بود مقاله‌ای دربارهٔ زادگاه ریاضیدان مشهور «سلات» بنویسم، تحقیقاتی در این مورد کرده بودم.

۱، ۱، ۲، ۳، ۵ را فشار دادم و در به آرامی باز شد. در حالی‌که از درگاه رد می‌شدم، از دیدن نقش منحنی زنجیری که از درگاه سنگی آویخته بود یکه خوردم. دقیقه‌ای بعد سلات وارد شد و گفت: «پس از یک رانندگی طولانی چیزی میل دارید؟»

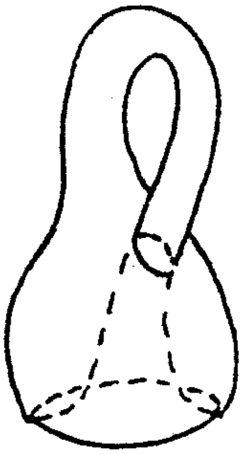
پاسخ دادم: «متشکرم. یک لیوان آب خنک خیلی می‌چسبد.»



او در حالی که مرا راهنمایی می‌کرد گفت: «لطفاً با من بیایید».

دنبال او که می‌رفتم نمی‌توانستم از توجه به اشیای غیرعادی و بی‌مانند بسیاری که در آنجا بود خودداری کنم. در آشپزخانه میزی عجیب و غریب با چندین پایه دیده می‌شد. سلات یک بطری همان قدر غیرعادی از یخچال بیرون آورد. لابد چهره‌ام حالت پرسشگر داشت، زیرا سلات گفت: «تا شما آبتان را می‌نوشید می‌توانیم دوری در آشپزخانه بزنیم. همان‌طور که متوجه شدید، این میز و بطری شبیه وسایل معمولی مورد استفادهٔ شما نیستند. من

از میز تنگرام[1] برای غذا خوردن استفاده می‌کنم، زیرا هفت قطعهٔ آن را می‌توان مانند پازل تنگرام به شکل‌های گوناگونی چید. امروز در آشپزخانه آن را به شکل مربع چیده‌ام، در حالی که میز اتاق نشیمن به شکل مثلث است. زیرا برای شام منتظر دو مهمان هستم. این ظرف آب «بطری کلاین» نام دارد که درون و بیرون آن یکپارچه است. اگر به کف نگاهی بیندازید می‌بینید که تنها از دو نوع کاشی استفاده شده است.»



پاسخ دادم: «بله. اما به‌نظر می‌رسد که طرح هیچ جا تکرار نمی‌شود.»

سلات ظاهراً از پاسخ من خوشحال شد و گفت «شما بسیار تیزهوشید، اینها کاشی‌های پن‌رُز[2] هستند. این دو شکل می‌توانند صفحه را به شکل غیرتکراری بپوشانند.»

به او اصرار کردم: «لطفاً ادامه بدهید، من بسیار مشتاق دیدن همهٔ قسمت‌های ریاضی منزل شما هستم.»

«خوب، در واقع تقریباً تمام خانهٔ من با ریاضی ارتباط دارد. همه جا کاغذ دیواری‌هایی می‌بینید که آنها را به سبک اشر با طرح‌های کاشیکاری برای دیوارها طراحی کرده‌ام. بیایید به اتاق «اُپ آرت»[3] برویم. تمام چیزهای اینجا نوعی خطای دید ایجاد می‌کنند. در واقع، در این اتاق واقعیت یک توهم و

---

۱. یک پازل هندسی چینی است شامل یک مربع، که به هفت قطعه تقسیم شده است و می‌توان با ترکیب این هفت قطعه اشکال مختلفی ساخت. (م.)

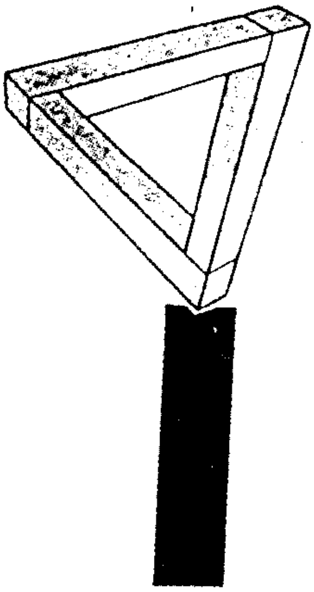
۲. «کاشی پن رُز» نوعی خانه‌بندی در یک صفحه است که «راجر پن رُز» ریاضیدان انگلیسی (متولد ۱۹۳۱) آن را در سال ۱۹۷۳ کشف کرده است. تقارن انتقالی ندارد، خود را دقیقاً تکرار نمی‌کند. اما تقارن چرخشی پنجگانه دارد که نمونهٔ اولیهٔ شبه کریستال است.

شبه کریستال ساختاری نامتناوب است که پراش ایجاد می‌کند و به دلیل نداشتن ساختار تکرار شونده با کریستال فرق دارد. به تصویر صفحهٔ ۲۵۶ کتاب مراجعه شود.

نیز نگاه کنید به مقالهٔ «بلورهای ناممکن»، مجلهٔ *دانشمند*، سال ۲۸، شمارهٔ ۵، مرداد ۱۳۶۹، ص ۵۱ـ۵۶.

۳. اپ آرت یا هنر دیدگانی، سبکی از هنر مدرن است که به کمک طرح‌ها و رنگ‌های خاص، تصور حرکت و خطای دید به‌وجود می‌آورد.

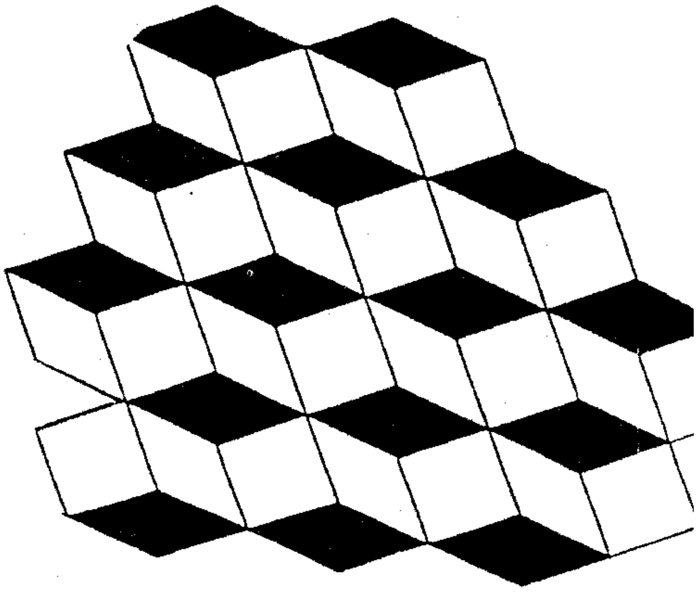
خطای ادراک است؛ مبلمان، اثاثیه، عکس‌ها، همه چیز! مثلاً، کاناپه از مکعب‌های مدولار ه (چند قسمتی) با پارچهٔ سیاه و سفید ساخته شده که روی هم قرار گرفته‌اند تا خطای دید و احساس نوسان به‌وجود آورند. مجسمه‌ای که در وسط اتاق قرار دارد، برای نشان دادن واگرایی و همگرایی طراحی شده، در حالی‌که دو پیکرهٔ ساخته شده دقیقاً هم اندازه‌اند.



این پایهٔ چراغ، وقتی از این زاویه به آن نگاه کنیم، یک اتصال ناممکن از سه میله به نظر می‌آید.»

مشتاقانه پاسخ دادم: «خیره کننده است! من می‌توانم ساعت‌ها در این اتاق به اکتشاف بپردازم.»

سلات در حالی‌که راه را نشان می‌داد گفت: «چون وقت کمی داریم، بیایید به اتاق بعدی برویم.»

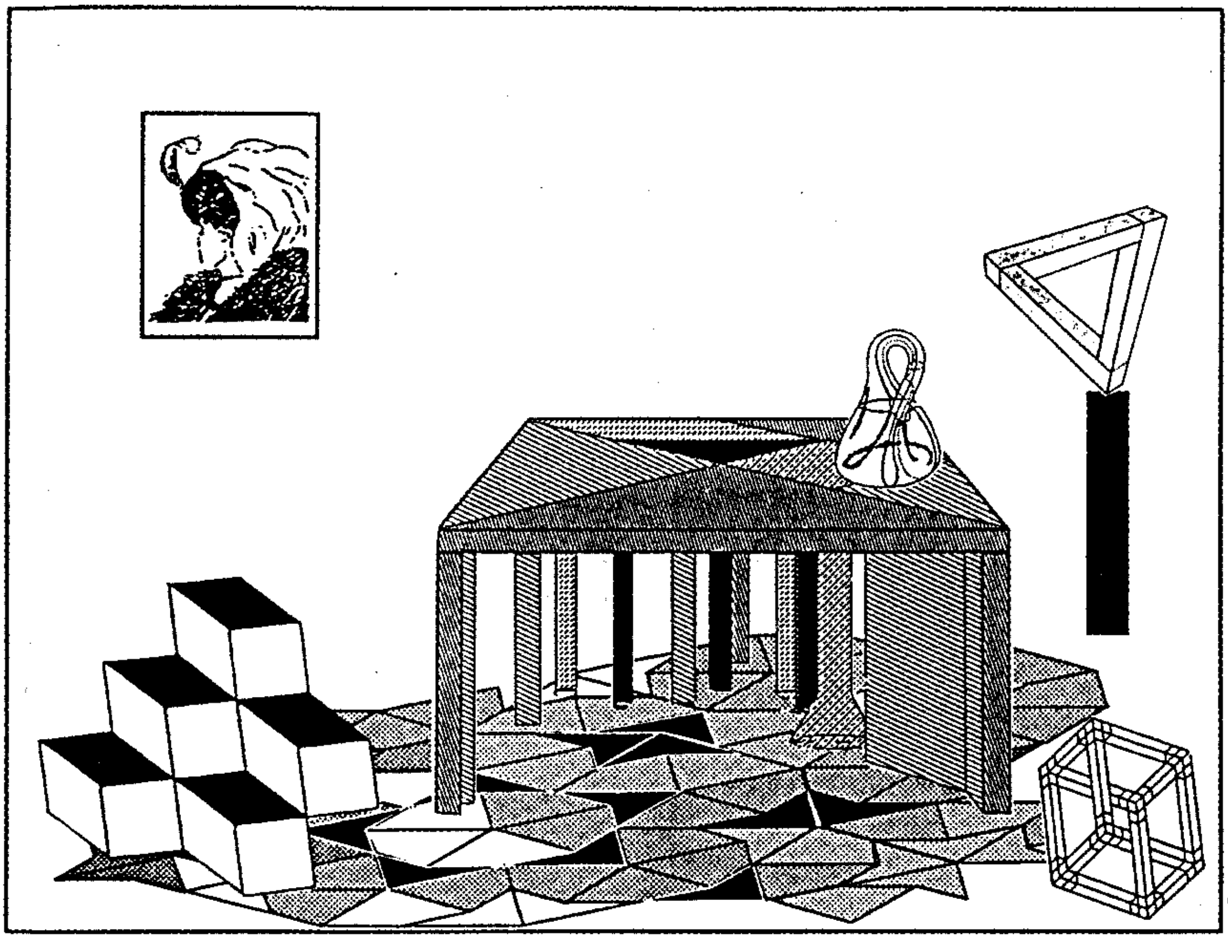


به اتاق تاریکی وارد شدیم. سلات مرا راهنمایی کرد: «مواظب زیر پایتان باشید. از این راه به طرف دیوار سهمی شکل بیایید.»

همان‌طور که به صفحه چشم دوخته بودم، صحنه‌ای متحرک پدیدار شد.

پرسیدم: «این یک دوربین ویدیویی است؟»

سلات خندید: «اوه نه، من آن را سیستم مراقبت قدیمی خود می‌نامم. عدسی بالای سوراخ، روزها نور را می‌گیرد و برای تصویر گرفتن از صحنه‌های خارج از خانهٔ من می‌چرخد، درست همان‌طور که دوربین این کار را می‌کند. به آن اتاقک تاریک می‌گویند. من برای دید در شب هم عدسی مخصوصی دارم.»



من مشغول یادداشت کردن بودم و فهمیدم که باید پیش از نوشتن مقاله‌ام تحقیق بیشتری می‌کردم.

با نگاهی به دور و برگفتم: «به‌نظر می‌رسد ساعت شب نمای شما از کار افتاده است.» ساعت من ۵:۳۰ بعدازظهر ولی ساعت او ۲۱:۳۰ را نشان می‌داد.

سلات توضیح داد: «نه. دلیل این مطلب این است که من بیست و چهار ساعت شبانه‌روز را در مبنای هشت تنظیم کرده‌ام، زیرا این هفته روی چرخه‌های هشت ساعتی کار می‌کنم. بنابراین در این سامانه ۲٤ ساعت، ۳۰ ساعت؛ و ۸ ساعت، ۱۰ ساعت خواهد بود و بقیهٔ ساعت‌ها نیز به همین ترتیب.

در حالی‌که کمی گیج شده بودم پاسخ دادم: «هر طور که برای شما بهتر است.»

«حالا به اتاق خواب اصلی برویم.»

و همان‌طور که می‌رفتیم از برابر انواع شکل‌ها و اشیایی عبور کردیم که پیش از این در هیچ خانه‌ای ندیده بودم.

«اتاق خواب اصلی یک نورگیر سقفی نیمکره و تعدادی نورگیرهای قابل جابجایی دارد. آنها برای بهینه کردن استفاده از انرژی خورشیدی طراحی شده‌اند.»

گفتم: «عالی است! اما تخت‌خواب کجاست؟»

«فقط کافی است دکمهٔ روی مکعب چوبی را فشار دهید تا تخت‌خواب تاشو با چوب بالای آن و میزهای کنار تخت را ببینید.»

گفتم: «این چه روش فوق‌العاده‌ای برای ساختن تخت است!»

«چیزهای بسیار زیاد دیگری هم برای دیدن هست، اما وقت کم است. بیایید به حمام برویم و آینه‌های بالای دستشویی را ببینید. از این راه بیایید. حالا به جلو خم شوید.»

با تعجب بسیار، تصویر خودم را دیدم که به تعداد زیادی تکرار شده است. آینه‌ها تصویر یکدیگر را تا بی‌نهایت منعکس می‌کردند.

سلات گفت: «حالا برگردید و به این آینه توجه کنید. چه تفاوتی دارد؟»

در پاسخ گفتم: «چپ و راست تصویر من در این آینه در طرف اشتباه قرار گرفته است.»

سلات گفت: «برعکس! این آینه[1] به شما امکان می‌دهد خود را همان‌طور ببینید که دیگران می‌بینند.»

درست در همین موقع زنگ در به‌صدا درآمد. مهمانان برای شام آمده بودند. سلات پرسید: «چرا برای شام نمی‌مانید؟ هنوز اتاق نشیمن را ندیده‌اید و اطمینان دارم از ملاقات با مهمانان من لذت خواهید برد.»

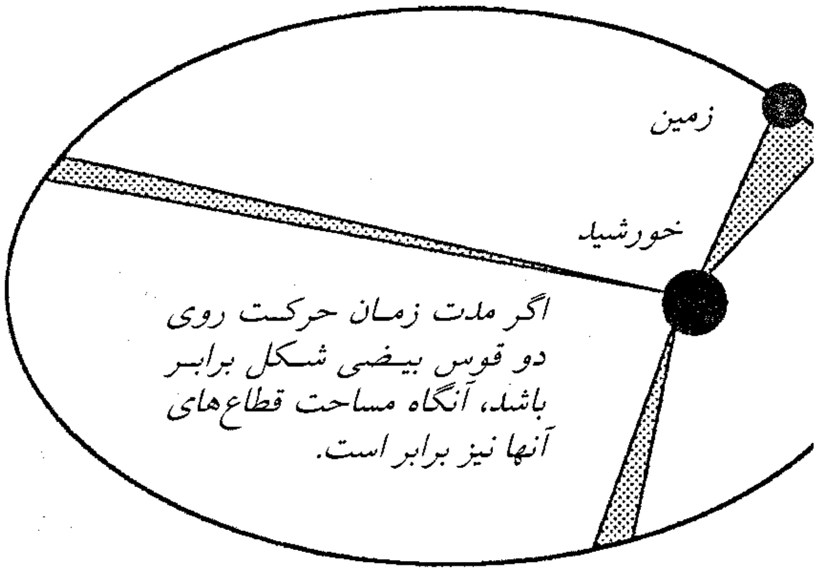
به سختی می‌توانستم اشتیاق خود را پنهان کنم. از دهانم پرید که: «اما میز شما برای سه نفر چیده شده است.»

«مهم نیست. با میز تنگرام، می‌توانم تنها چند قطعه را از نو بچینم و آن وقت یک میز مستطیل خواهیم‌داشت.»

---

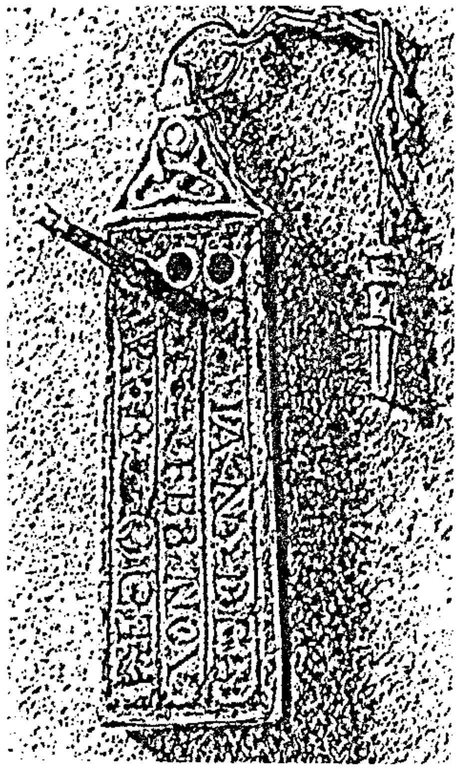
۱. ساخته شده از دو آینهٔ عمود بر هم، این آینه‌های عمود بر هم چنان قرار می‌گیرند که تصویر (چپ و راست شدهٔ) شما را برمی‌گرداننند.

تعدیل زمان



اگر مدت زمان حرکت روی دو قوس بیضی شکل برابر باشد، آنگاه مساحت قطاع‌های آنها نیز برابر است.

اگر تا به حال از ساعت آفتابی استفاده کرده باشید، لابد متوجه شده‌اید زمانی که ساعت آفتابی نشان می‌دهد کمی با ساعت شما فرق دارد. این اختلاف تغییرات به‌طول مدت روز در طی سال بستگی دارد. یوهان کپلر در قرن پانزدهم میلادی سه قانون حاکم بر حرکت سیارات را تدوین کرد.



ساعت افتابی جیبی قرن دهم میلادی. در هر طرف آن شش ماه نوشته شده است و قطعه چوبی در سوراخ ستون مربوط به ماه جاری قرار می‌گیرد.

کپلر توضیح داد چگونه زمین در مداری بیضی شکل به دور خورشید حرکت می‌کند، و نیز پاره خطی که زمین و خورشید را به هم وصل می‌کند، در فاصله‌های زمانی برابر، سطوح (قطاع‌های) مساوی را می‌روبد. خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد، بنابراین در هر فاصلهٔ زمانی ثابت، مساحت قطاع‌های طی شده برابر است، اما طول قوس قطاع‌ها نامساوی است. در نتیجه، سرعت مداری زمین در طول مسیر آن تغییر می‌کند. این مطلب دلیل اختلاف طول مدت روز در زمان‌های مختلف سال است. ساعت‌های آفتابی روزها با نور خورشید کار می‌کنند و طول مدت روز هم وابسته به فصول مختلف سال و موقعیت جغرافیایی است.

از سوی دیگر، فاصله‌های زمانی ساعت‌های ما ثابت است. اختلاف زمان بین ساعت آفتابی و ساعت معمولی *تعدیل زمان* خوانده می‌شود. در تقویم‌های نجومی می‌توان جدول *تعدیل زمان* را پیدا کرد، که مشخص می‌کند ساعت آفتابی چقدر از ساعت معمولی جلوتر یا عقب‌تر است. مثلاً این جدول ممکن است به شکل زیر باشد.

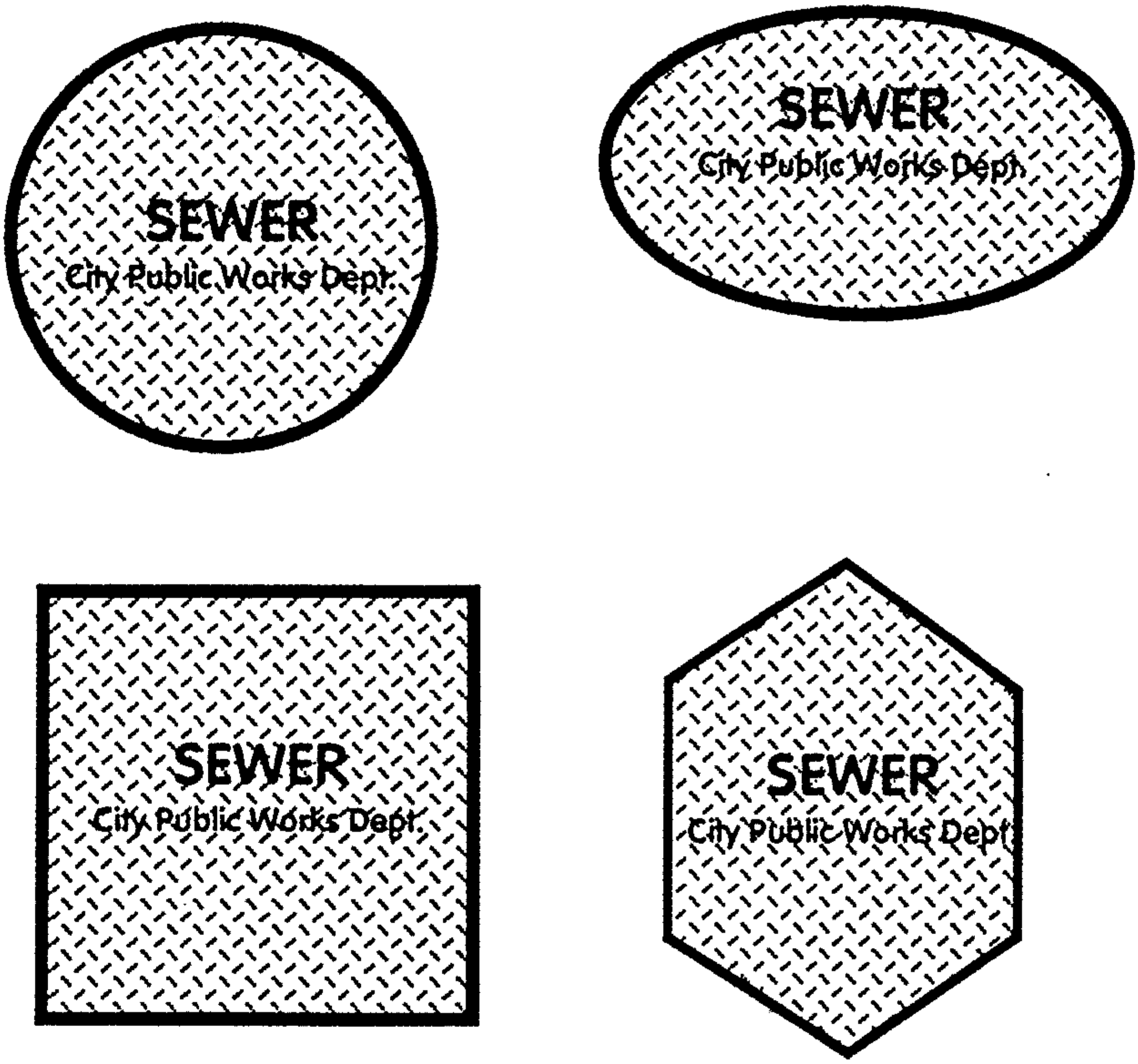
نمودار تعدیل زمان

(اعداد مثبت و منفی نشان می‌دهند که ساعت آفتابی چند دقیقه جلوتر یا عقب‌تر از ساعت معمولی است. برای دانستن ساعت معمولی باید این مقادیر را از آنچه ساعت آفتابی نشان می‌دهد کم کرد و اختلاف طول جغرافیایی محل و نصف‌النهار مبدأ را هم اعمال کرد. نصف‌النهار مبدأ در ایران ۵۲/۵ درجه است و به‌ازای هر درجه در غرب آن باید ٤ دقیقه به زمان خوانده شده در ساعت آفتابی افزود.)

ماه‌های سال	روز	اختلاف ساعت
ژانویه	۱	۳-
	۱۵	۹-
فوریه	۱	۱۳-
	۱۵	١٤-
مارس	۱	۳-
	۱۵	۹-
آوریل	۱	٤-
	۱۵	۰
مه	۱	۳+
	۱۵	٤+
	...	...

اگر ساعت خورشیدی ۱۱:۵۰ را در روز هفدهم ماه مه نشان دهد، ساعت چهار دقیقه بیشتر، یعنی ١١:٥٤ است.

چرا دریچه‌های آدم‌رو دایره شکلند؟

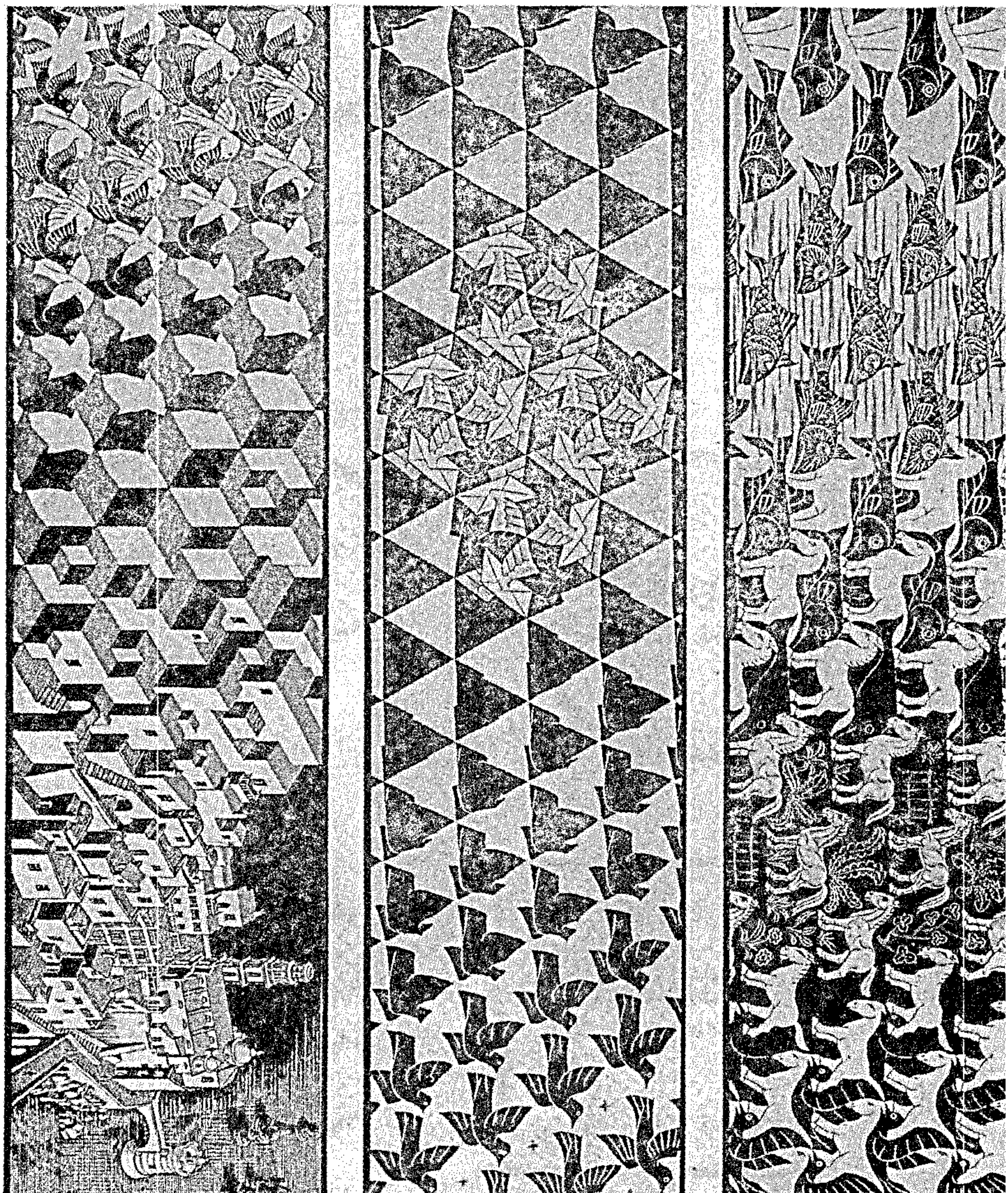


چرا دریچه‌های فاضلاب به شکل دایره است؟

چرا مربع، مستطیل، بیضی یا شش ضلعی نیست؟

آیا به این دلیل که دایره زیباتر است؟

توضیح شما چیست؟



دگرپسی ۳، اثر اشر

جهان جادویی ریاضیات

چگونه جهان‌های ریاضی پدید می‌آیند؟

جهان‌های هندسه

جهان‌های اعداد

جهان‌های ابعاد

جهان‌های بی‌نهایت

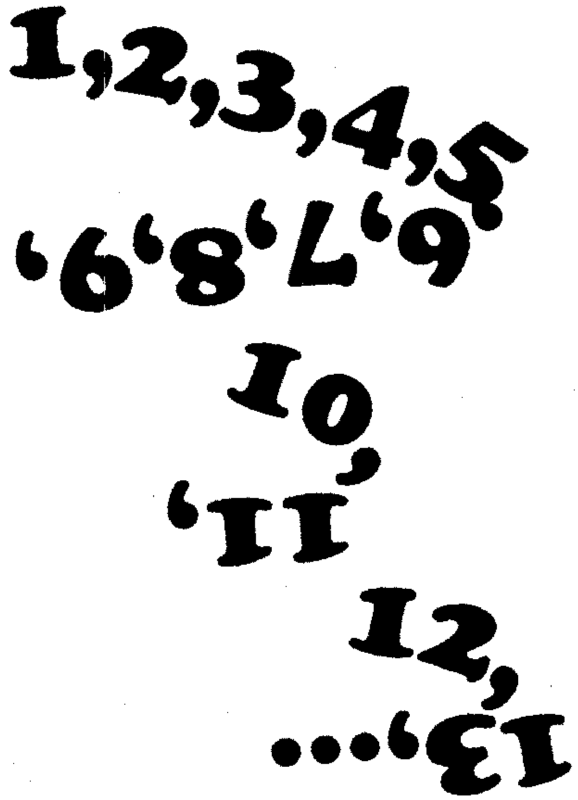
جهان‌های برخال

جهان‌های ریاضی در ادبیات

ریاضیات، که محصول تفکر مستقل از تجربهٔ انسان است، چگونه انطباقی چنین شگفت‌انگیز با امور واقعی دارد؟

ـ آلبرت اینشتین

ریاضیات با بسیاری چیزها در جهان ارتباط دارد و مورد استفادهٔ آنهاست، با این وجود هنوز جهان‌های خود را می‌کاود ـ جهان‌هایی چنین شگفت، چنین بی‌نقص و تا این حد بیگانه با موضوعات جهان ما. تمامی یک جهان ریاضی می‌تواند بر روی نوک یک سوزن یا در مجموعه‌ای بی‌پایان از اعداد وجود داشته باشد. هر کسی می‌تواند چنین جهان‌هایی را که شامل نقطه‌ها، معادله‌ها، منحنی‌ها، گره‌ها، برخال‌ها و نظایر اینهاست، پیدا کند. تا هنگامی که به چگونگی شکل‌گیری جهان‌ها و نظام‌های ریاضی پی‌نبریم، بعضی از این جهان‌ها متناقض به نظر می‌رسند. مثلاً ممکن است این پرسش مطرح شود که یک جهان نامتناهی چگونه می‌تواند روی یک پاره خط کوچک وجود داشته باشد، یا چگونه می‌توان یک جهان ریاضی را تنها با سه نقطه ساخت. در این فصل به دنبال کشف جادوی برخی از این جهان‌های ریاضی و کاوش در قلمروهای آنها هستیم.



همان‌طور که بعداً خواهیم‌گفت، اعداد شمارشی خود به تنهایی جهانی را پدید می‌آورند.

چگونه جهان‌های ریاضی پدید می‌آیند؟

من گاهی پیش از صبحانه تا شش چیز غیرممکن را باور کرده‌ام.

ـ لوئیس کارول

اقلیدس در سال ۳۰۰ پیش از میلاد، هنگامی‌که ساماندهی مفهوم‌های هندسی را در یک دستگاه ریاضی آغاز کرد، چندان آگاه نبود که ایجاد نخستین جهان ریاضی را آغاز کرده است. جهان‌های ریاضی و اجزای آن‌ها فراوانند ـــ در اینجا جهان حساب را با اعداد که ارکان آن هستند می‌بینیم و حوزه‌های جبر را با متغیرهایش، جهان هندسهٔ اقلیدسی را با مربع‌ها و مثلث‌هایش، توپولوژی را با چیزهایی چون نوار موبیوس و شبکه‌ها و برخال‌ها را با چیزهایی که دایماً تغییر می‌کنند ـــ اینها حوزه‌های مستقلی هستند که در عین‌حال با یکدیگر ارتباط متقابل دارند. همهٔ آن‌ها در کنار هم دنیای ریاضیات را می‌سازند. دنیایی که می‌تواند مستقل از عالم ما وجود داشته باشد، اما تمام چیزهای پیرامون ما را توصیف می‌کند و توضیح می‌دهد.

هر یک از جهان‌های ریاضی در یک سامانهٔ ریاضی هستی می‌یابند. این سامانه اصول اساسی وجود چیزهای این جهان را ساماندهی می‌کند؛ چگونگی شکل‌گیری هر چیز، پدید آمدن چیزهای جدید از آنها و قوانین حاکم بر آن‌ها را بیان می‌کند. یک سامانهٔ ریاضی از یک رشته عوامل پایه تشکیل شده است که *اصطلاحات تعریف ناشده* خوانده می‌شوند. این اصطلاح‌ها را می‌توان توضیح داد تا هرکس برداشتی از مفهوم آنها داشته باشد، اما در حقیقت نمی‌توان آنها را تعریف کرد. چرا؟ چون برای شکل‌گیری تعریف‌ها به این اصطلاح‌ها نیاز داریم و شما برای شروع به تعدادی از این اصطلاحات نیاز دارید. برای تعریف این واژه‌های آغازکننده، اصطلاح‌های دیگری وجود ندارند که به‌کار روند.

بهترین راه شناختن چنین سامانه‌هایی، نگاهی به یکی از آن‌هاست. در اینجا چگونگی شکل‌گیری یک جهان کوچک و محدود ریاضی مطرح می‌شود. فرض کنید اصطلاحات تعریف ناشدهٔ این جهان کوچک، نقطه و خط باشد. یک سامانهٔ ریاضی علاوه بر اصطلاحات تعریف ناشده، یک رشته اصول موضوعه، قضیه و تعریف نیز

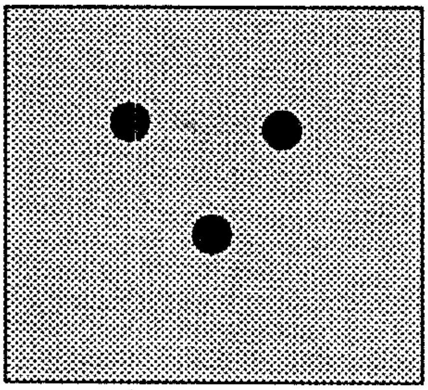
دارد. اصول موضوعه مفاهیمی هستند که درستی آنها را بدون اثبات می‌پذیریم. تعریف‌ها، اصطلاحات جدیدی هستند که با استفاده از اصطلاحات تعریف ناشده یا آنهایی که پیش از این تعریف شده‌اند، توضیح داده می‌شوند. قضیه‌ها اندیشه‌هایی هستند که باید با استفاده از اصول موضوعه، تعریف‌ها یا قضیه‌های دیگر، آنها را ثابت‌کرد.

این قلمرو کوچک چه نوع تعریف‌ها، قضیه‌ها و اصول موضوعه‌ای می‌تواند داشته باشد؟ در اینجا تعدادی از آنها را که می‌توانند به‌وجود آیند می‌بینید:

مفاهیم تعریف ناشده: *نقطه و خط*

تعریف ۱: *مجموعه‌ای از نقطه‌ها در یک راستا هستند، اگر یک خط دربردارندهٔ همهٔ این نقاط باشد.*

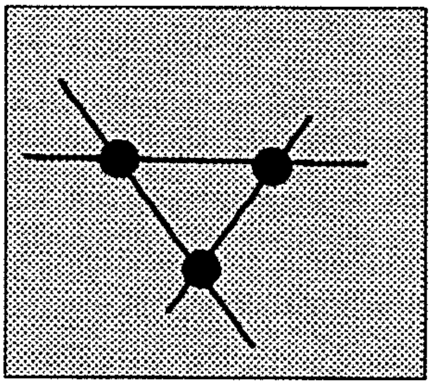
تعریف ۲: *مجموعه‌ای از نقطه‌ها غیرهم راستا هستند، اگر نتوان خطی رسم کرد که دربردارندهٔ همهٔ این نقاط باشد.*



اصل موضوعهٔ ۱: *در این جهان کوچک، تنها سه نقطهٔ متمایز وجود دارد.*

اصل موضوعهٔ ۲: *هر دو نقطه متمایز، یک خط می‌سازند.*

قضیهٔ ۱: *در این جهان تنها سه خط متمایز می‌تواند وجود داشته باشد.*



اثبات: *اصل موضوعهٔ ۱ بیان می‌کند که در این جهان سه نقطه متمایز وجود دارد. با استفاده از اصل موضوعهٔ ۲ می‌دانیم که هر دو نقطه از این نقاط خطی را مشخص می‌کنند. بنابراین در این جهان فرضی از این سه نقطه تنها سه خط می‌توان رسم کرد.*

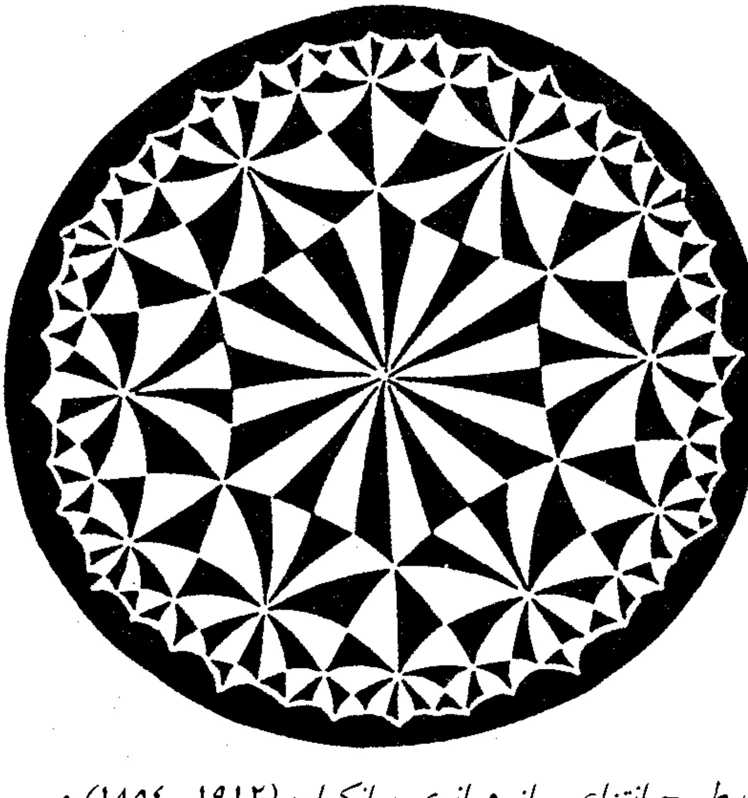
این مثال روشن می‌کند که یک جهان ریاضی چگونه پدید می‌آید. هر اندیشهٔ تازه‌ای که به ذهن کسی می‌رسد، تعداد دیگری از مفاهیم تعریف ناشده، اصول موضوعه، تعریف‌ها و قضیه‌ها را به این قلمرو اضافه می‌کند و به این ترتیب این جهان را گسترش می‌دهد. فصل‌های بعدی شما را با تعدادی از جهان‌های ریاضی و ساکنان آنها آشنا می‌کنند.

جهان‌های هندسه

...عالم همیشه در برابر دیدگان ماست، اما تا زمانی که درک زبان آن و تفسیر حروفی را که با آن نوشته شده است نیاموزیم، نمی‌توانیم آن را به‌درستی بشناسیم. عالم به زبان ریاضی نوشته شده است و الفبای آن... شکل‌های هندسی است، که بدون آنها درک یک کلمه از آن برای انسان امکان‌پذیر نیست؛ بدون آنها، در هزارتویی تاریک سرگردان می‌مانیم.

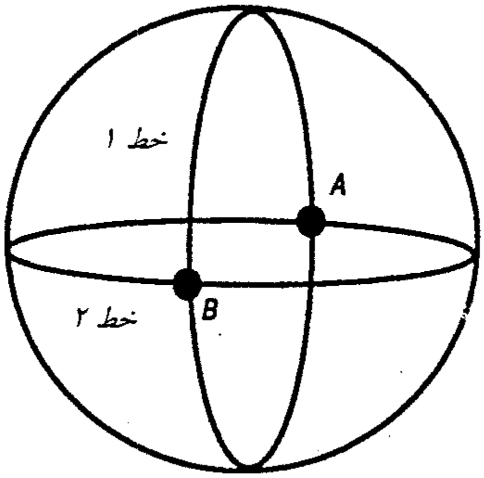
ـ گالیله

هندسه در ریاضیات انواع بسیاری دارد. هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ تحلیلی و انواع زیادی از هندسه‌های نااقلیدسی از این جمله‌اند. در اینجا با هندسهٔ هذلولوی، بیضوی، تصویری، توپولوژیکی و برخالی روبرو می‌شویم. هر یک از این انواع هندسه، یک سامانهٔ ریاضی را با اصطلاحات تعریف ناشده، اصول موضوعه، قضیه‌ها و تعریف‌های خود به‌وجود می‌آورد. گرچه ممکن است در این جهان‌ها از نام‌های مشابهی برای عناصر و متعلقات هر یک استفاده شود، اما اجزای آنها از ویژگی‌های متفاوتی برخوردارند. مثلاً در

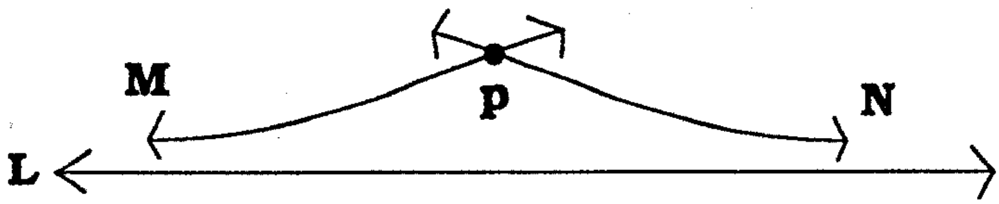


ین یک طرح انتزاعی از هانری پوانکاره (۱۹۱۲ــ۱۸۵٤) در لمرو هندسهٔ هذلولوی است. در اینجا یک دایره مرز این جهان ست. اندازهٔ اجزای درون آن با توجه به فاصلهٔ آنها از مرکز طرح غییر می‌کند. با نزدیک شدن به مرکز، بزرگتر می‌شوند و با دور ندن از مرکز، کوچکتر می‌شوند. به این ترتیب آنها هرگز به لبهٔ کل نمی‌رسند و جهان آنها از هر جهت برایشان نامحدود است.

هندسهٔ اقلیدسی، خط‌ها مستقیم هستند و دو خط متمایز یا یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، یا باهم موازی‌اند و یا متنافرند. اما در هندسهٔ بیضوی، خط‌ها مستقیم نیستند، بلکه دایره‌های عظیمهٔ یک کره‌اند و بنابراین هر دو خط متمایز همیشه یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. واژهٔ موازی را در نظر بگیرید، در هندسهٔ اقلیدسی فاصلهٔ خط‌های موازی همیشه ثابت است و هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. اما در هندسهٔ بیضوی و هذلولوی چنین نیست. چرا؟ زیرا هر یک از دایره‌های عظیمهٔ یک کره، دایره‌های دیگر را قطع می‌کند. بنابراین در هندسهٔ بیضوی خط‌های موازی وجود ندارد. در هندسهٔ هذلولوی، خط‌های موازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند، اما آنها شبیه خط‌های اقلیدسی نیستند. خط‌های موازی در این هندسه پیوسته به هم نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، اما هیچ‌گاه به هم نمی‌رسند. آنها را مجانب می‌نامند. هندسه‌های اقلیدسی، بیضوی و هذلولوی سه جهان کاملاً متمایز با خط‌ها و نقطه‌ها و اجزای دیگر پدید می‌آورند، اما ویژگیهای هر یک کلاً متفاوت است. هر یک از این حوزه‌ها به خودی خود یک سیستم ریاضی است و هر یک در دنیای ما کاربردهای خود را دارد.



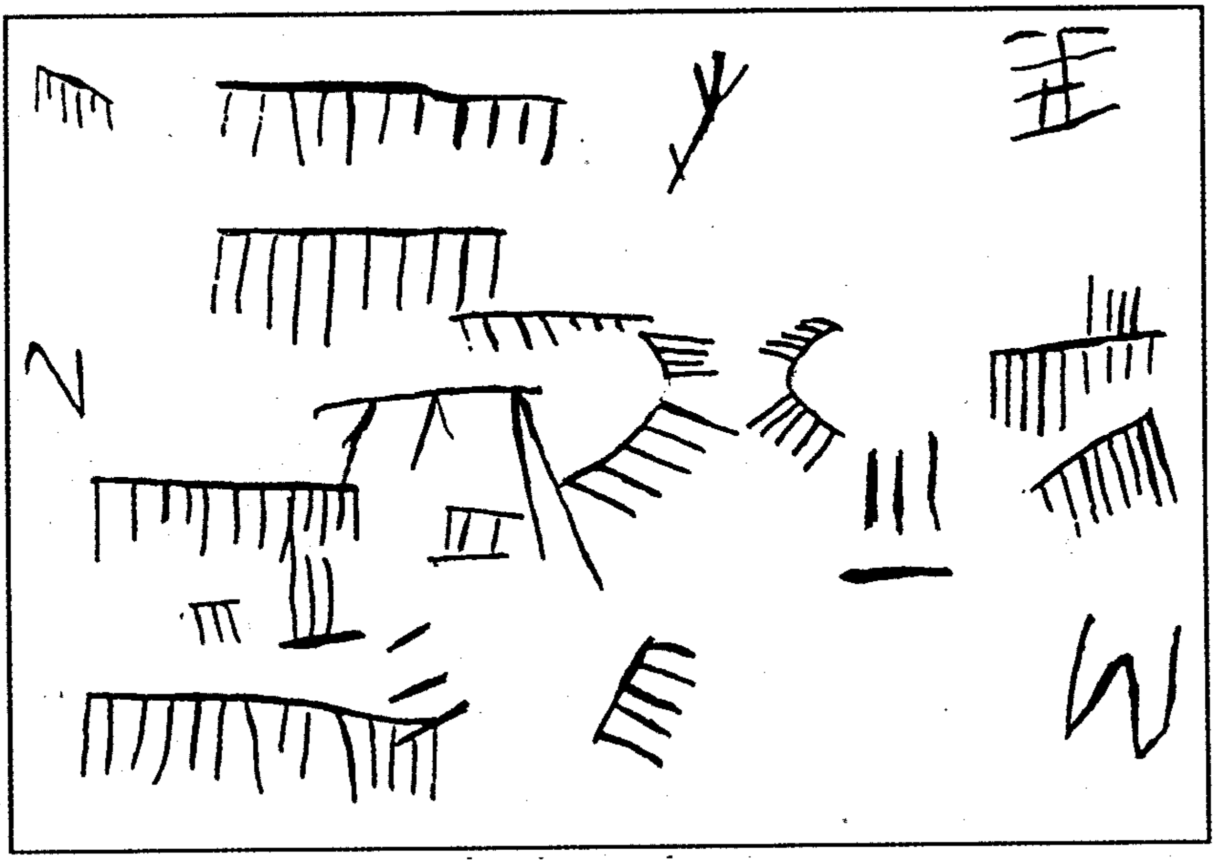
نمودار مقابل دایره‌های عظیمه را نشان می‌دهد، خط ۱ و خط ۲ یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع می‌کنند.



در هندسهٔ هذلولوی، خط‌های M و N هر دو با خط L موازی‌اند و از نقطهٔ P عبور می‌کنند. M و N نسبت به خط L مجانبند.

جهان‌های اعداد

اعداد را می‌توان نخستین عناصر ریاضیات دانست. نمادهای اولیهٔ آنها احتمالاً علایمی بوده‌اند که روی زمین رسم می‌شدند تا تعداد اشیا را نشان دهند. اما از هنگامی که ریاضیدانان پا به صحنه گذاشته‌اند، دنیای سادهٔ اعداد شمارشی دیگر آن گونه نبوده است. بسیاری از اشخاص با اعداد صحیح، کسری و اعشاری آشنایند و در محاسبات



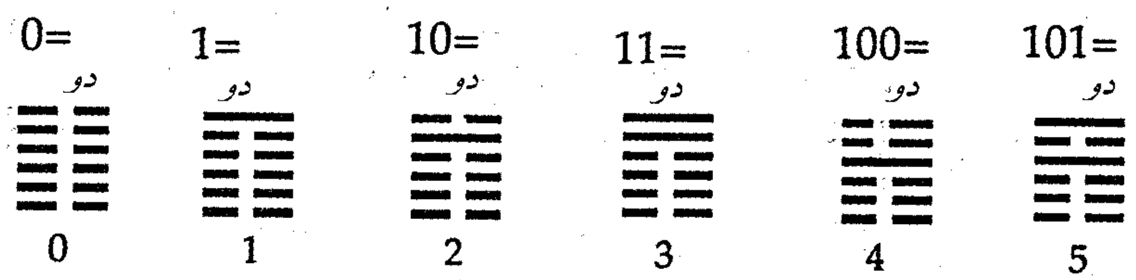
نقش اعداد عصر حجر که در لا پیلتای اسپانیا یافت شده‌اند.

روزمرهٔ خود از آنها استفاده می‌کنند. اما قلمرو اعداد دربرگیرندهٔ اعداد گویا و گنگ، اعداد مختلط، اعداد اعشاری بی‌پایان بدون تکرار، اعداد غیرجبری، اعداد ترامتناهی، و زیر مجموعه‌های بسیار زیادی از اعداد نیز هست که با خواص ویژه‌ای باهم ارتباط دارند، مانند اعداد کامل که مجموع مقسوم علیه‌های آنها برابر با خود آنهاست، یا اعداد

کثیرالاضلاعی که شکل آنها با شکل چندضلعی‌های منتظم ارتباط دارد و مثال‌هایی مانند اینها. بررسی رابطهٔ متقابل اعداد، حدس زدن دربارهٔ چگونگی تحول آنها و کشف ویژگی‌های گوناگون آنها جالب است.

سابقهٔ اعداد شمارشی به دوران ما قبل تاریخ می‌رسد. به نشانه‌های سادهٔ نقوش اعداد عصر حجر در غار لاپیلتا در جنوب اسپانیا توجه کنید، که از حدود ۲۵.۰۰۰ سال پیش تا عصر مفرغ (۱۵۰۰ پیش از میلاد) مسکون بوده است. عدد □ از سه هزار سال پیش، هنگامی‌که از آن برای محاسبهٔ مساحت و محیط دایره استفاده کردند، شناخته شده است، و بعدها نشان داده شد که یک عدد گنگ و غیرجبری است. تمدن‌های باستانی از وجود کمیت‌های کسری آگاهی داشته‌اند. مصریان از نماد هیروگلیفی دهان برای نوشتن کسرهایشان استفاده می‌کردند. مثلاً برابر $\frac{۱}{۳}$ و برابر $\frac{۱}{۱۰}$ بود.

ریاضیدانان باستان اعداد گنگ را می‌شناختند و روش‌های جالبی برای تخمین زدن مقدار آنها ابداع کرده بودند. در واقع، یونانیان روش نردبانی را برای یافتن مقدار تقریبی عدد $\sqrt{2}$ ابداع کرده بودند، اما بابلیان از روش دیگری استفاده می‌کردند.



نمودارهای شش خطی و معادل‌های آنها در مبنای دو

طی قرن‌ها، تمدن‌های مختلف نمادها و دستگاه‌های شمارش اعداد را ابداع کرده‌اند و توسعه داده‌اند و در قرن بیستم، با انقلاب کامپیوتر اعداد دودویی و مبنای دو به کار گرفته شده است. نخستین بار، گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۷۱۶_۱۶۴۶) در مقاله‌ای مطلبی دربارهٔ *دستگاه دودویی* نوشت (۱۶۷۹). او نامه‌ای به پدر یوآخیم بووه، مبلغ یسوعی در چین نوشت. از طریق بووه بود که لایب‌نیتس دریافت شش خطی‌های آی چینگ با دستگاه عددنویسی دودویی او ارتباط دارد. او متوجه شد که شش خطی‌ها، با گذاشتن صفر به جای هر خط شکسته و ۱ به جای هر خط راست، اعداد دودویی را

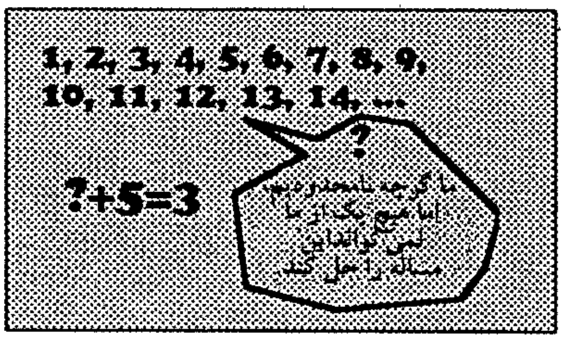
نمایش می‌دهند. قرن‌ها پیش از آن، بابلیان دستگاه شصتگانی سومریان را اصلاح و کامل کردند و دستگاه شماری در مبنای شصت به‌وجود آوردند. اما این فصل دربارهٔ جهان‌های اعداد، مربوط به دستگاه‌های اعداد نیست بلکه دربارهٔ انواع اعداد است.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10...

بیایید ابتدا نگاهی به اعداد ـــ اعداد شمارشی بیندازیم. در جهان اعداد شمارشی اصطلاحات تعریف ناشده اعداد ۱، ۲، ۳ و ... هستند ـــ با اصول موضوعه‌ای مانند: *ترتیب جمع کردن دو عدد شمارشی تأثیری بر حاصل جمع آنها ندارد ($a+b=b+a$ که خاصیت جابجایی جمع نام دارد). ترتیب ضرب کردن دو عدد شمارشی در هم تأثیری بر حاصل ضرب آنها ندارد ($a \times b=b \times a$، که خاصیت جابجایی ضرب نام دارد).* ـــ و قضیه‌هایی مانند: *مجموع یک عدد زوج با یک عدد زوج دیگر، عددی زوج است. و مجموع هر دو عدد فرد همیشه عددی زوج است.* اما جهان اعداد شمارشی برای حل تمام مسایلی که در گذر سال‌ها پدید آمده بود، کافی نبود. آیا می‌توانید بدون شناختن اعداد منفی حل مسأله‌ای را تصور کنید که پاسخ آن مقدار x در معادلهٔ $x + ۵ = ۳$ باشد، چه واکنش‌هایی ممکن بود پیش بیاید؟ ـ مسأله نادرست است، جوابی ندارد. نوشته‌های عربی اعداد منفی را به اروپا معرفی کردند. اما بیشتر ریاضیدانان قرن‌های شانزدهم و هفدهم میلادی تمایلی به پذیرش این اعداد نداشتند. نیکولا شوکه (قرن پانزدهم) و میخائل اشتیفل (قرن شانزدهم) اعداد منفی را بی‌معنی و احمقانه می‌دانستند. جروم کاردان (۱۵۷۶ـ۱۵۰۱) نیز گرچه اعداد منفی را به عنوان پاسخ معادلات به کار برد، آنها را پاسخ‌هایی غیرممکن می‌دانست. حتی بلز پاسکال گفته است: «من کسانی را می‌شناسم که نمی‌توانند بفهمند با برداشتن چهار از صفر، صفر باقی می‌ماند.»

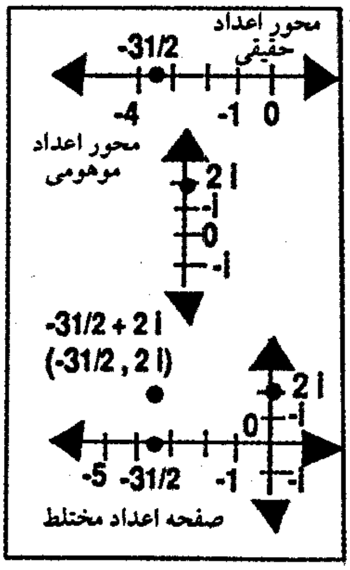
به این ترتیب تاریخ آشکار می‌کند که برای حل بعضی مسایل خاص، به ابداع اعدادی جدید نیاز بود. مثلاً، تلاش برای بیان مفهوم $\sqrt{-1}$ یا حل معادله $x^۲ = -۱$ به خلق

اعداد موهومی انجامید و اعداد موهومی ریاضیدانان را به گسترش جهان اعداد، تا آنجا که تمام اعداد حقیقی و موهومی و بیش از آن را نیز دربرگیرد، رهنمون شد!



به این ترتیب بود که اعداد مختلط (اعدادی به شکل a + bi، که a و b عـدد حقیقـی و $i=\sqrt{-1}$ است) در قرن شانزدهم مـیلادی معرفی شدند. با معرفی آنها، تمام اعـدادی کـه تـا آن زمـان اختـراع شـده بودنـد، می‌توانستند در زمرهٔ اعداد مختلط به‌شـمار آیند.[۱]

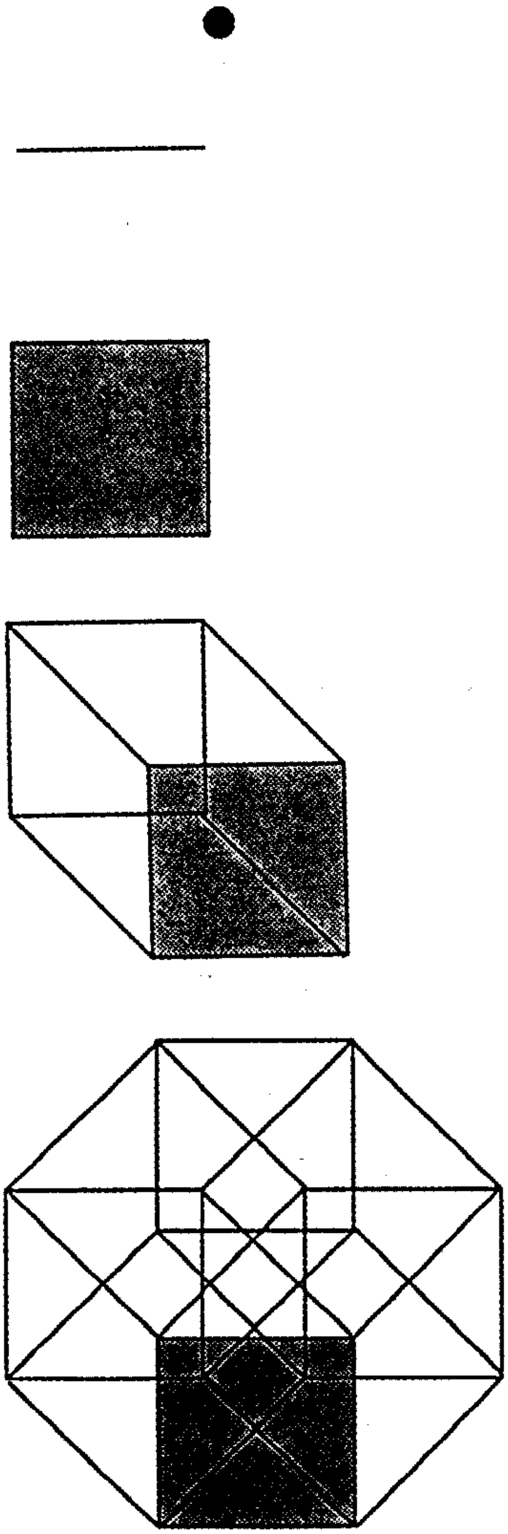
نمودارها ابزاری برای نمایش موضوعات ریاضی هستند. محور اعـداد حقیقـی ترتیـب تمام اعداد حقیقی و فاصله و اندازهٔ نسبی آنها را نسبت به صـفر نـشان مـی‌دهـد. هـر نقطه‌ای روی این خط، تنها با یک عدد حقیقی متناظر اسـت و بـرعکس ـ یعنـی روی این خط تنها یک نقطهٔ متناظر با عدد $-3\frac{1}{2}$ وجود دارد. برای اعداد موهومی از محـور اعداد موهومی استفاده می‌کنند، بنابراین جای عدد ۲i در محل نشان داده شده است. با ترکیـب محورهـای اعـداد حقیقـی و اعداد موهومی، راهی برای نشان دادن اعـداد مخـتلط بـر روی آنچه صفحهٔ اعداد مختلط نام دارد می‌یابیم. محورهـای اعـداد حقیقی و موهومی در مبدأ خود برهم عمودند. هر نقطـه روی صفحه‌ای که این دو می‌سازند، تنها با یک عدد مختلط متنـاظر است ـ هیچ عدد مختلط دیگری در آن موقعیـت قـرار نـدارد. بنابراین زوج مرتب (۳ و ٤ـ) با عدد مخـتلط ۳i + ٤ـ منطبـق است. $(4 \text{ و } 0)$ به معنی $4+0i$ است که با عدد ٤ برابر است. این دستگاه مختصات راهی خلاقانه برای ساماندهی و نمـایش اعداد مختلط بود. اینک پرسش این است ـ آیا هـیچ عـددی وجـود دارد کـه در ایـن صفحه نمایش داده نشود؟ البته! در فصل *جادوی اعداد* چند مثال خواهید دید.



۱. هر عدد حقیقی را می‌توان عدد مختلطی در نظر گرفت که بخش موهومی آن صفر است و هـر عـدد موهومی عدد مختلطی است که بخش حقیقی آن صفر است.

جهان‌های ابعاد

بیایید به جهان‌هایی که مفهوم ابعاد آنها را پدید آورده است نگاهی بیندازیم. یک جهان ریاضی می‌تواند روی تنها یک نقطه یا یک خط، روی یک صفحه، در فضا، یا در یک «ابر مکعب» (چهاربعدی) وجود داشته باشد. هر یک از ابعاد بالاتر دربردارندهٔ ابعاد کمتر از خود است، در عین‌حال هر بعد پایین‌تر خود می‌تواند جهانی باشد. زندگی و دنیای خود را روی یک صفحهٔ تخت تصور کنید. شما نمی‌توانید به بالا و پایین نگاه کنید. موجودات سه بعدی می‌توانند به سادگی بدون اطلاع شما از بالا یا پایین جهان شما را مورد هجوم قرار دهند. ریاضیدانان، نویسندگان و هنرمندان کوشیده‌اند تا با استفاده از اندیشه‌های گوناگون، در آثارشان ماهیت ابعاد مختلف را به تسخیر خود درآورند. ابعاد بالاتر از بعد سوم همیشه جذاب بوده‌اند. مکعب یکی از نخستین اشیای سه بعدی بود که با تبدیل شدن به ابرمکعب به بعد چهارم وارد شد. مراحل رسیدن به یک ابر مکعب در اینجا نشان داده شده است. حتی برنامه‌هایی کامپیوتری طراحی شده‌اند تا به کمک ترسیم پرسپکتیوهای سه بعدی از وجوه مختلف ابرمکعب، تصوری کلی از بعد چهارم به دست دهند.



چهاربعدی

...مرو جهان‌های ...ی‌نهایت

دیدن جهان
در دانه‌ای شن،
و بهشت
در گلی خودرو،
بی‌کرانگی را در کف دستت بگیر،
و جاودانگی را در ساعتی نگاه‌دار.

ـ ویلیام بلیک

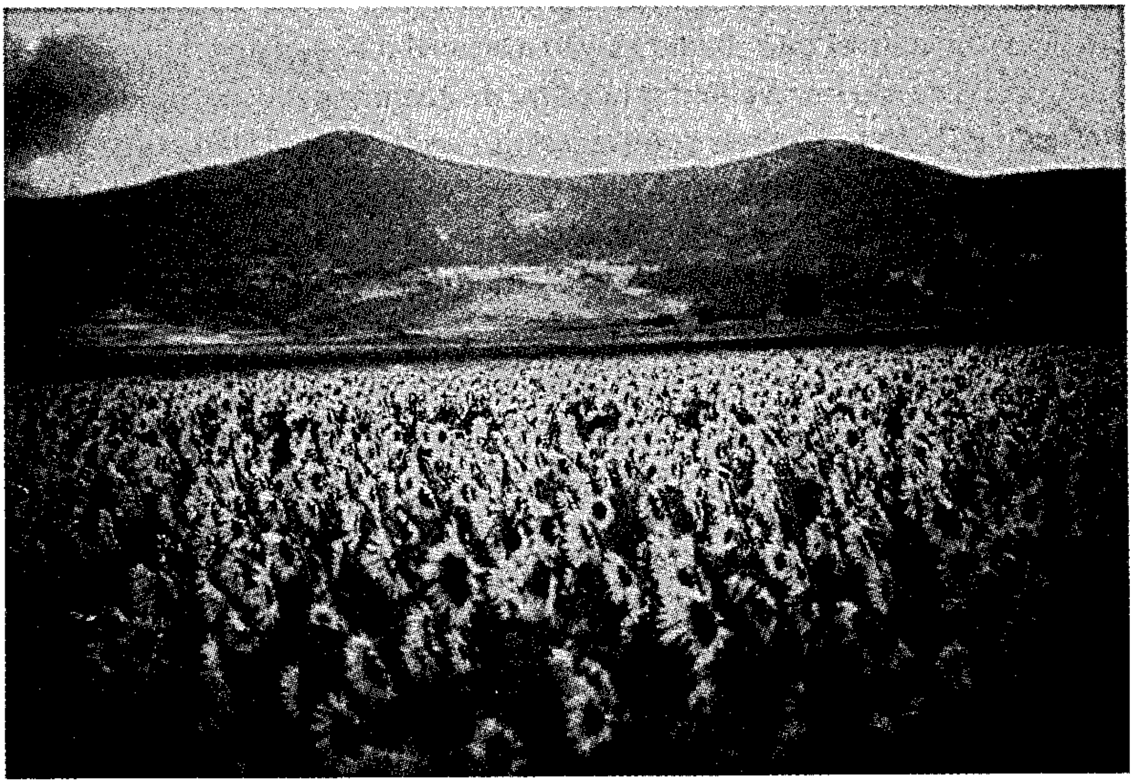
بی‌کرانگی هزاران سال است که تخیل بشر را برانگیخته است. اندیشه‌ای است که روحانیان، شاعران، هنرمندان، فیلسوفان، نویسندگان، دانشمندان و ریاضیدانان آن را مطرح کرده‌اند ــ اندیشه‌ای گیج‌کننده و حیرت‌انگیز، اندیشه‌ای که فریبنده باقی می‌ماند. بی‌کرانگی، در حوزه‌های گوناگون اندیشه هویت‌های مختلفی پیدا کرده است. در زمان‌های قدیم اندیشهٔ بی‌کرانگی، درست یا نادرست، با اعداد بزرگ ارتباط داشت. مردم دنیای باستان با نگاه کردن به ستارگان و سیاره‌ها یا دانه‌های شن در ساحل، مفهوم بی‌نهایت را احساس می‌کردند. فیلسوفان و ریاضیدانان باستان مانند زنون، آناکساگوراس، دموکریتوس، ارسطو و ارشمیدس اندیشه‌هایی را که مفهوم بی‌نهایت عرضه می‌کرد، مطرح کردند و مورد بحث و تعمق قرار دادند.

ارسطو اندیشهٔ دوگونه بی‌نهایت بالقوه و واقعی را مطرح کرد. او می‌گفت که تنها بی‌نهایت بالقوه وجود دارد.[1]

ارشمیدس در *شمارندهٔ ماسه‌ها* این اندیشهٔ نامحدود بودن تعداد دانه‌های ماسه در یک ساحل را با یافتن روشی عملی برای محاسبهٔ تعداد آنها در همهٔ ساحل‌های جهان رد کرد.

۱. اعداد شمارشی بالقوه نامتناهی‌اند، زیرا می‌توان به هر عددی یکی اضافه کرد تا عدد بعدی به‌دست آید؛ اما عملاً هیچ‌گاه نمی‌توان به کل مجموعه دست یافت.

در بسیاری از پارادوکس‌ها مفهوم بی‌نهایت عامل اصلی قلمداد شده است. پارادوکس‌های آشیل و لاک‌پشت و تقسیم دو جزئی[۱] زنون خوانندگان را برای قرن‌ها حیرت زده کرده است. به پارادوکس‌های گالیله[۲] نیز که به پاره خط‌ها، نقطه‌ها و مجموعه‌های نامتناهی می‌پردازند باید اشاره کرد.



مزرعهٔ گل‌های آفتابگردان در روستاهای اسپانیا تصوری از بی‌نهایت به‌وجود می‌آورد.

---

۱. زنون در پارادوکس تقسیم دو جزئی خود چنین استدلال می‌کند: مسافری که به سوی مقصد معینی راه می‌پیماید، هرگز به مقصد نمی‌رسد، زیرا این مسافر ابتدا باید نصف راه را طی کند، با رسیدن به نیمهٔ راه، او باید دوباره نیمی از فاصلهٔ باقیمانده را طی کند. پس نیمی از آن بخش باقی می‌ماند و چون همیشه نیمهٔ دوم راه باقی می‌ماند که باید پیموده شود و از بی‌نهایت نقطهٔ نیمه راه باید گذر کرد، این مسافر هرگز به مقصد نمی‌رسد.

۲. گالیله در اثر خود گفتگوهایی دربارهٔ دو علم جدید (۱۶۳٤) از مفهوم بی‌نهایت در رابطه با اعداد صحیح مثبت و مربع این اعداد بحث می‌کند. او حتی به تناظر یک به یک این دو مجموعهٔ نامتناهی می‌پردازد، اما به این نتیجه می‌رسد که مفاهیم برابری، بزرگتر بودن و کوچکتر بودن تنها در مورد مجموعه‌های متناهی قابل استفاده است. گالیله اعتقاد داشت که باید اصل کل همیشه از اجزایش بزرگتر است هم در مجموعه‌های متناهی و هم در مجموعه‌های نامتناهی صدق کند. سیصد سال بعد، کانتور نشان داد که این اصل در مورد مجموعه‌های نامتناهی معتبر نیست و هنگام کار روی مجموعه‌های نامتناهی از مفهوم یک به یک برای اصلاح تصور رایج دربارهٔ مفاهیم برابری، بزرگتری و کوچکتری استفاده کرد. اصلاحات کانتور به بسیاری از پارادوکس‌ها پایان داد، از جمله پارادوکس مجموعه‌های نامتناهی و کل همیشه از اجزایش بزرگتر است.

فهرست ریاضیدانان با کشفیات و استفاده‌های بجا و نابجای آنها از مفهوم بی‌نهایت در گذر قرن‌ها گسترش یافته است. اقلیدس (حدود ۳۰۰ پیش از میلاد) با نشان دادن این‌که آخرین عدد اول وجود ندارد نشان داد که اعداد اول بی‌پایانند. پیشرفت در قلمرو بی‌نهایت از سوی برنارد بولتسانو (۱۸۴۸–۱۷۸۱)، گوتفرید لایب‌نیتس (۱۷۱۶–۱۶٤٦) و ریشارد ددکیند (۱۹۱٦–۱۸۳۱) انجام گرفته است. اما کار استثنایی گئورگ کانتور (۱۹۱۸–۱۸٤۵) در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها بزرگ‌ترین پیشرفت بوده است. کانتور با آفرینش و پالایش اندیشه‌هایش راهی جدید برای سازماندهی ریاضیات با استفاده از مفهوم مجموعه یافت. او روشی برای مقایسهٔ مجموعه‌های نامتناهی با ایجاد اعداد ترامتناهی[1] پیدا کرد ــ اعدادی که اجازهٔ ورود به قلمرو اعداد متناهی را یافتند. کانتور با استفاده از مفهوم مجموعه‌های هم‌ارز و شمارش‌پذیری مشخص کرد که کدام یک از مجموعه‌های نامتناهی تعداد عضوهای یکسانی دارند و یک عدد ترامتناهی به آنها اختصاص داد. کارها و استدلال‌های او در این موضوعات هوشمندانه است.

مفهوم بی‌نهایت علاوه بر تحریک ذهن ما، یک ابزار ضروری در ریاضیات است. بی‌نهایت نقشی تعیین کننده در بسیاری از کشفیات ریاضی داشته است. ما از آن در چنین مواردی استفاده کرده‌ایم: تعیین مساحت و حجم در هندسه و حسابان، محاسبهٔ تقریب عدد □ و e و اعداد گنگ دیگر، مثلثات، حسابان، نیم‌عمرها، مجموعه‌های نامتناهی، شکلهای هندسی خودمانا، حدها، سری‌ها، تقارن پویا و بسیاری مسایل دیگر. در بخش‌های دیگر این کتاب مفاهیم گوناگون بی‌نهایت را بررسی می‌کنیم، اندیشه‌هایی مانند تولید نامتناهی برخال، نظریهٔ آشوب، جستجوی مداوم برای یافتن یک عدد اول بزرگ‌تر، اعداد ترامتناهی و دیگر *بی‌نهایت‌ها*.

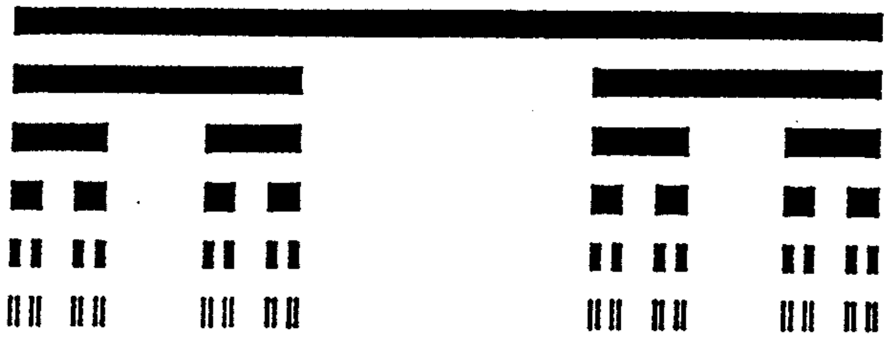
۱. اعداد ترامتناهی، اعدادی هستند که تعداد اعضای مجموعه‌های نامتناهی را با آنها بیان می‌کنند. م

جهان‌های برخالی

من واژهٔ برخال را از واژهٔ برخه ساخته‌ام. که به معنی کسر یعنی «شکستن» و به‌وجود آوردن تکه‌های نامنظم است. ... چقدر این واژه برای منظور ما مناسب است! ـ کسر علاوه بر شکستن به معنی کم نیز هست.

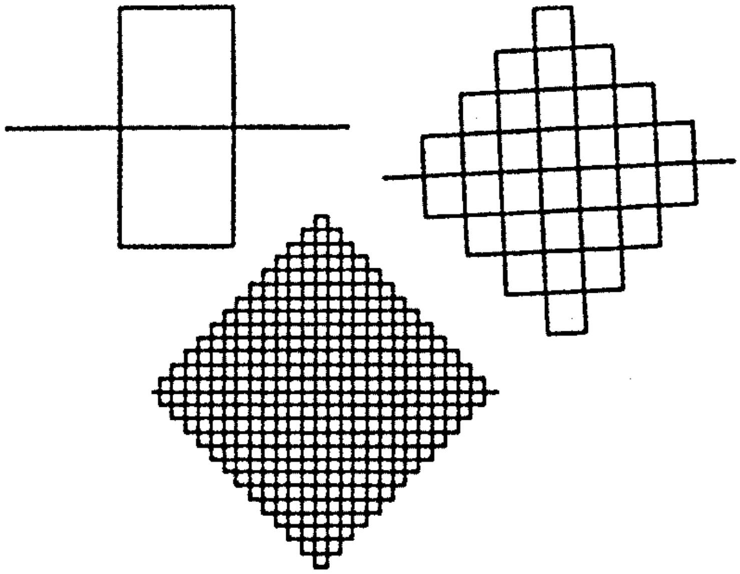
ـ بنوا ماندل‌برو

برخال‌ها چیزهای شکوهمندی هستند که به اشکال بسیار نامحدودی درمی‌آید. ارنستو چزارو (ریاضیدان ایتالیایی، ۱۹۰۶-۱۸۵۹) دربارهٔ برخال هندسی منحنی برف دانهٔ کخ نوشته است: *آنچه مرا بیش از همه دربارهٔ این منحنی به شگفتی وامی‌دارد این است که هر جزء آن شبیه به کل است. برای تصور هر چه کامل‌تر آن، باید درک کرد که هر مثلث کوچک در این ساختار، مانند کل شکل است که با مقیاس مناسبی کوچک شده است و خود نیز دربردارندهٔ مثلث‌های کوچک‌تری است که آنها نیز مانند کل شکلند و بیشتر کوچک شده‌اند و به همین ترتیب تا بی‌نهایت ... این شباهت ویژگی خود مانایی همهٔ اجزاء، هر قدر هم کوچک، است که موجب می‌شود این منحنی چنین شگفت‌انگیز به نظر آید. اگر این ساختار واقعی بود، از بین بردنش بدون نابود کردن تمام آن امکان‌پذیر نبود، زیرا در غیر این صورت مانند موجودات زایای جهان واقعی، بی‌وقفه*

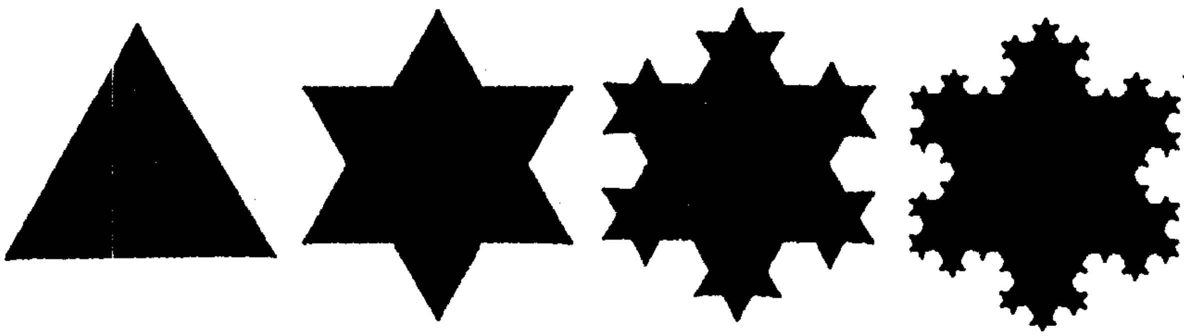


در سال ۱۸۸۳، کانتور این برخال را ساخت که مجموعهٔ کانتور نامیده شد. او کار خود را با یک پاره خط به طول واحد روی محور اعداد آغاز کرد و یک سوم میانی آن را برداشت تا به مرحلهٔ ۱ رسید. سپس در هر یک از یک‌سوم‌های باقیمانده نیز یک سوم میانی را برداشت و به این ترتیب مرحلهٔ دوم را به‌وجود آورد. با بی‌شمار تکرار این کار، مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط باقی می‌ماند که مجموعهٔ کانتور نامیده می‌شود. در اینجا نخستین مرحله‌های مجموعهٔ کانتور را می‌بینید.

از اعماق مثلث‌هایش سر برمی‌آورد. این ماهیت برخال‌هاست. اگر بخشی از آن باقی بماند، آن بخش اساس برخال را حفظ می‌کند و به نوبهٔ خود می‌تواند خود را از نو تولید کند. پس یک برخال چیست؟ شاید ریاضیدانان به عمد از ارائهٔ یک تعریف خودداری کرده‌اند تا مانع نوآوری در خلق موجودات برخالی نشوند و اندیشه‌هایی را که در این حوزهٔ کاملاً جدید ریاضی عرضه می‌شود محدود نکنند. با پیدایش این



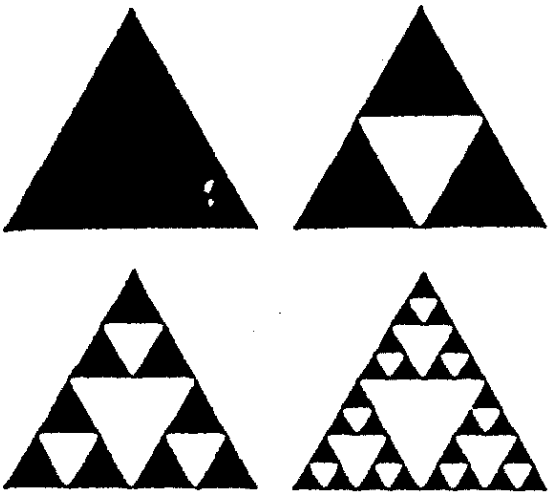
سه مرحلهٔ نخست منحنی پئانو. این منحنی در سال ۱۸۹۰ با تکرار زایش‌های پی‌درپی بر یک پاره خط ساخته شده است.



چهار مرحلهٔ نخست برف دانهٔ کخ. تولید این برف دانه از یک مثلث متساوی‌الاضلاع آغاز می‌شود. هر ضلع را به سه قسمت تقسیم و یک‌سوم میانی را حذف کنید و مثلثی خارج از قسمت حذف شده به ضلعی برابر همان طول بسازید.

حوزهٔ جدید، مفهوم‌هایی مانند ابعاد برخالی، نظریهٔ تکرار، کاربردهای آشوب و خود مانایی به‌وجود آمد. دامنهٔ کاربردهای برخال‌ها از باران‌های اسیدی تا

زئولیت‌ها[1]، از اخترشناسی تا پزشکی، از فیلم سازی تا نقشه‌برداری و اقتصاد و غیره گسترده است.



چهار مرحلهٔ نخست مثلث سرپینسکی. با یک مثلث متساوی الاضلاع شروع کنید. آن را به چهار مثلث مساوی مطابق شکل تقسیم کنید و مثلث میانی را حذف کنید. با تکرار پیاپی و نامحدود این کار، بی‌نهایت مثلث کوچک‌تر ساخته می‌شود و برخالی به دست می‌آید که محیط آن بی‌نهایت و مساحتش برابر صفر خواهدبود!

به زبان ریاضی، برخال نقشی است که با یک شکل ساده ــ مثلاً یک پاره خط، نقطه، یا مثلث ــ شروع می‌شود و دایماً با به‌کار بردن یک قاعده، تا بی‌نهایت تغییر می‌کند. این قاعده را می‌توان با یک رابطهٔ ریاضی یا با کلمات بیان کرد. تصویرهای پیشین چهارتا از اولین برخال‌هایی را که ساخته شده‌اند نشان می‌دهد.

برخال را می‌توان به صورت یک منحنی پیوسته در حال رشد در نظر گرفت. برای دیدن یک برخال باید آن را واقعاً در حال حرکت ببینید. برخال پیوسته گسترش می‌یابد. امروزه، این بخت خوش را داریم که کامپیوترها می‌تواند برخال‌ها را در برابر چشمان ما بسازند و همین قدر خوش اقبالی بود که بنوا ماندل برو، با همان روحیهٔ ریاضیدانان پیشین، اندیشه‌ها و کاربردهای برخال‌ها را از ۱۹۵۱ تا ۱۹۷۵ بررسی کرد و گسترش داد. در واقع، او بود که واژهٔ برخال را وضع کرد. تصور کنید ریاضیدانان ماجراجوی قرن نوزدهم[2]، که برای نخستین بار جرأت پیدا کردند به این مفهوم‌ها که

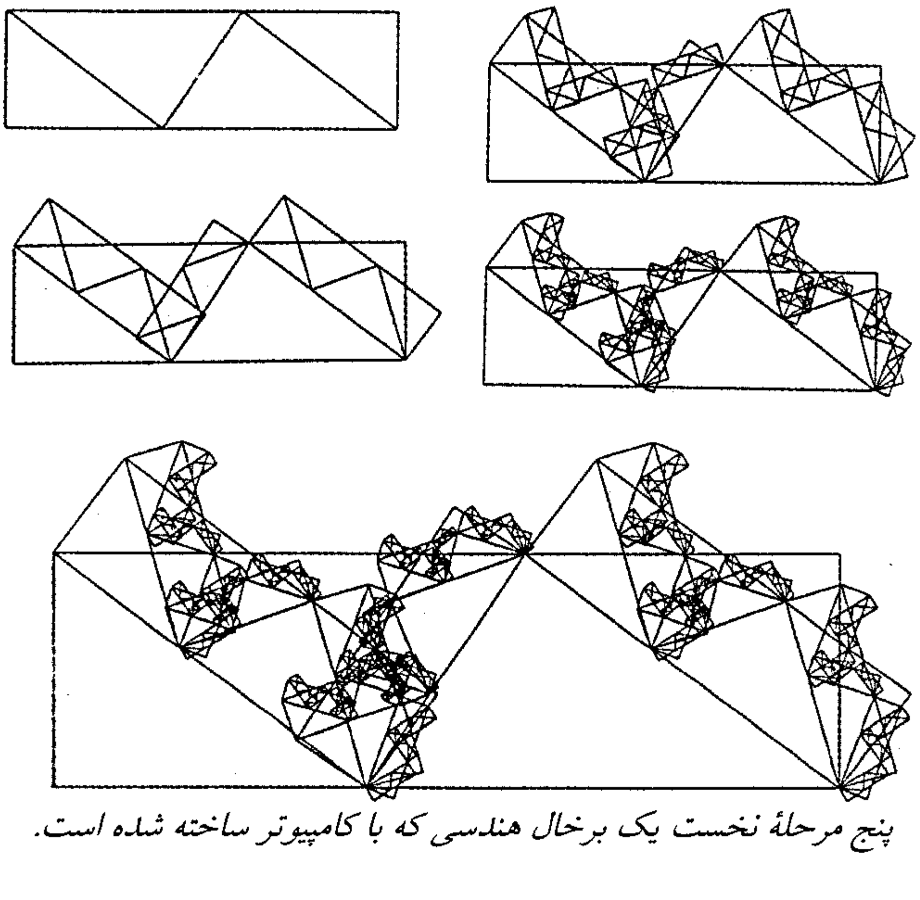
---

۱. نوعی سیلیکات آبیده با ترکیبی مشابه فلدسپات که در تبادل یونی، به‌عنوان آب نگیر و سختی‌گیر کاربرد دارد. م.

۲. گئورگ کانتور، هلگه فون کخ، کارل وایرشتراس، دوبوا، ریموند، جوزپه پئانو، و اتسلاف سربینسکی، فلیکس هاوس دورف، آ. اس. بسیکوویچ (این دو نفر در زمینهٔ ابعاد کسری فعالیت کرده‌اند). گستون جولیا، پیرفاتو (این دو روی نظریهٔ تسلسل کار کرده‌اند)، لوئیس ریچاردسن (که در زمینهٔ آشوب و خود مانایی کار کرده است) ــ کسانی بودند که از دههٔ ۱۸۶۰ تا اوایل قرن بیستم ــ با کاربر روی این «هیولا»ها به کندوکاو در چنین اندیشه‌هایی پرداختند.

هیولایی[1] و بیمارگونه شمرده می‌شدند نگاهی بیندازند، از دیدن هندسهٔ شگفت برخال‌های در حال حرکت چقدر شگفت‌زده شده‌اند.

هنگامی‌که ما به تصویر یا عکس یک برخال نگاه می‌کنیم، آن را در یک لحظه از زمان می‌بینیم ـ برخال در مرحلهٔ معینی از رشد خود ثبت شده است. اساساً همین اندیشهٔ رشد یا تغییر است که برخال‌ها را از ریشه به طبیعت پیوند زده است. چیست که در طبیعت در حال دگرگونی نباشد؟ حتی یک تخته سنگ نیز در سطح ملکول‌هایش در حال دگرگونی است. برخال‌ها را می‌توان برای شبیه‌سازی هر شکلی که تصور کنید طراحی کرد. برخال‌ها لزوماً محدود به یک قاعده نیستند، بلکه مجموعه‌ای از قواعد و شرط‌ها می‌تواند این قاعده را تشکیل دهد. سعی کنید خود یک برخال ابداع کنید. چیز ساده‌ای را در نظر بگیرید و قاعده‌ای برای آن بسازید.



پنج مرحلهٔ نخست یک برخال هندسی که با کامپیوتر ساخته شده است.

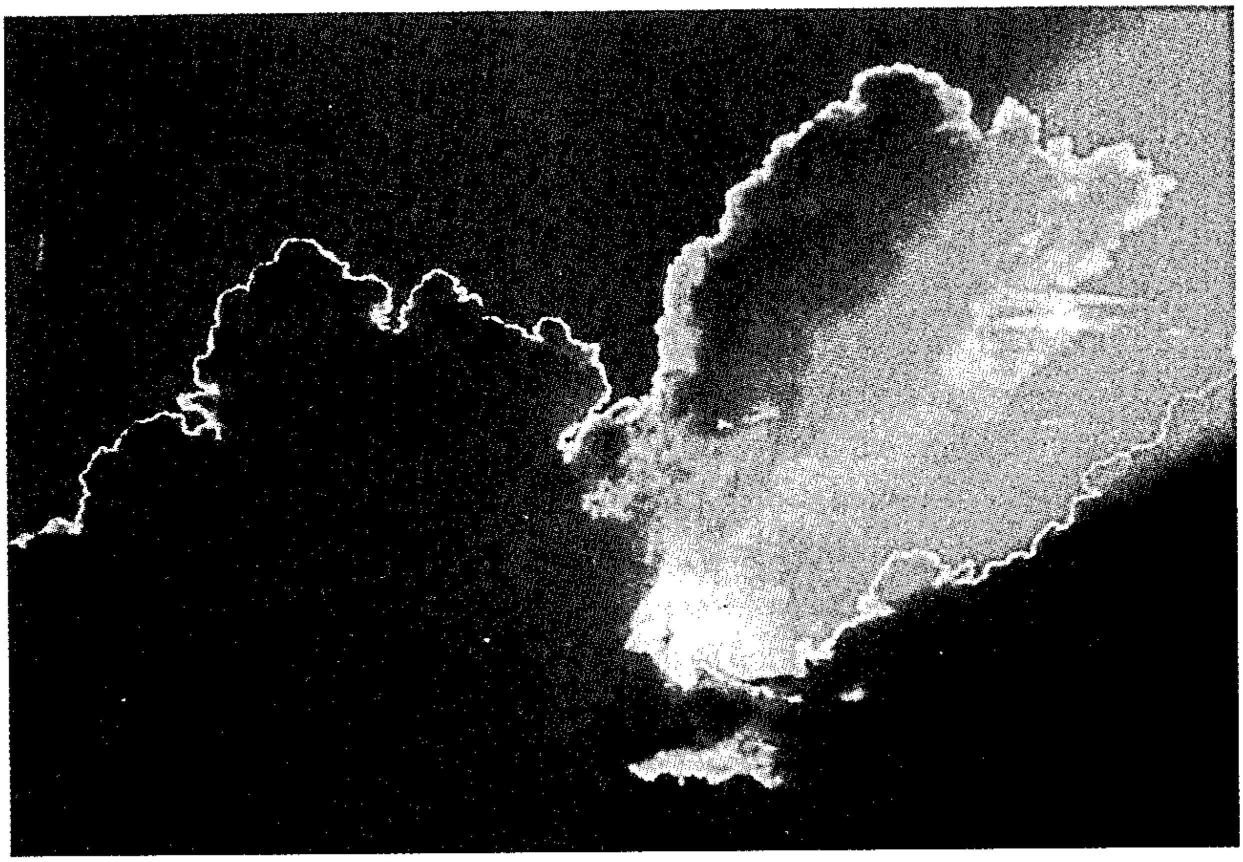
---

۱. این «هیولا»ها نه پذیرفته شدند و نه ریاضیدانان محافظه‌کار آن دوره برای آنها ارزش بررسی و جستجو قائل بودند. تصور می‌شد که برخال‌ها مغایر با ریاضیات پذیرفته شده‌اند زیرا تعدادی از آنها توابع پیوسته‌ای بودند که مشتق‌پذیر نبودند، تعدادی از آنها مساحت محدود و محیط نامحدود داشتند و تعدادی می‌توانستند فضا را کاملاً پر کنند.

حکایت برخال

صدایی به برخال خفته گفت: «برخیز برخال! باید به سرکار بروی.»

برخال التماس کرد: «باز نه، نه به این زودی، تازه ابعادم را مرتب کرده‌ام.»



صدایی به برخال خفته گفت: برخیز برخال! از آن ابری که ساخته‌ای پایین بیا».

صدا ادامه داد: «در نقشه‌برداری زمین شناسی به تو نیاز دارند. خط ساحلی دیگری باید ترسیم شود.»

برخال پرسید: «کی استراحت می‌کنم؟»

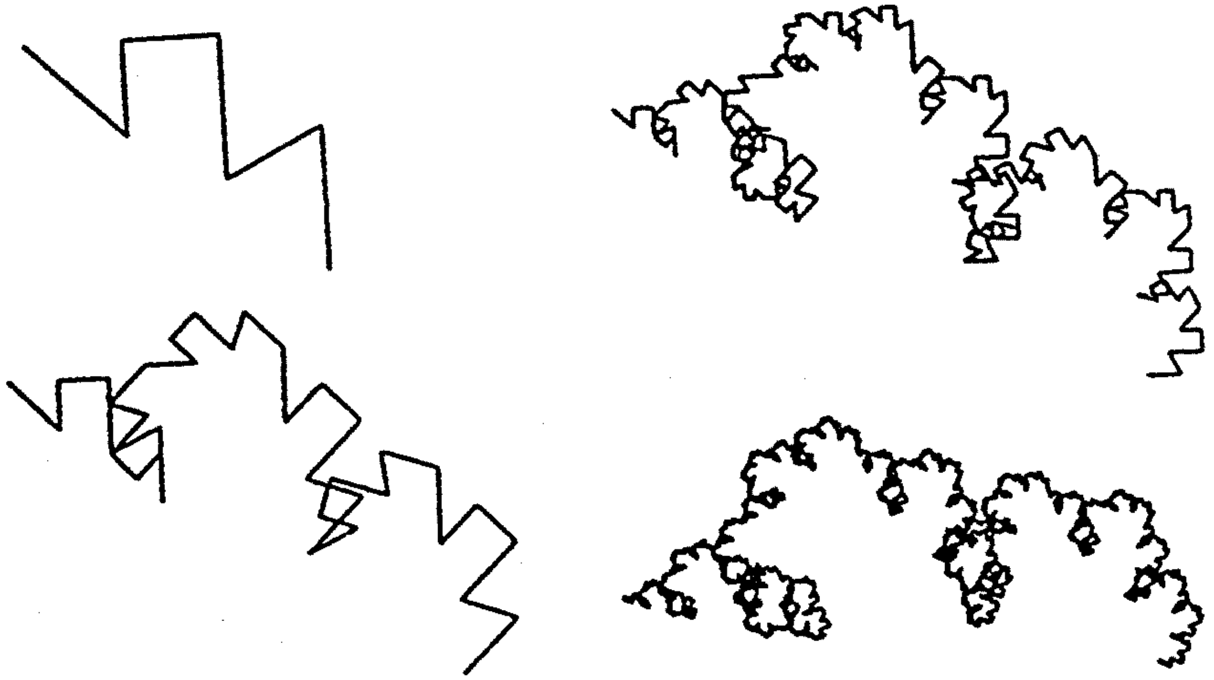
صدا پاسخ داد: «قرن‌ها استراحت کرده‌ای ــ حالا وقت کار است.»

برخال گفت: «کار، کار، کار. چرا مربع، دایره، چند ضلعی یا هر شکل اقلیدسی دیگری را فرا نمی‌خوانید؟ چرا من؟»

صدا پاسخ داد: «ابتدا از این شکایت داشتی که نادیده گرفته شده‌ای و این‌که تو را هیولا نامیده‌اند. حالا که سرانجام تو را قبول کرده‌اند، می‌خواهی کنار بکشی. باید از این‌که چنین محبوب شده‌ای سپاسگزار باشی.»

برخال در حالی‌که خسته به‌نظر می‌رسید گفت: «محبوبیت به جای خود، اما به من اجازهٔ استراحت نخواهندداد. از زمانی که ماندل برو نامی بر من گذاشت و نخستین نقش را به من واگذار کرد، دیگر هیچ‌گاه مانند گذشته نبوده است. ریاضیدانان دایماً با من درگیر می‌شوند. اطمینان دارم که ابعاد ناچیز من برای مدتی آنان را از پا انداخته است. آن بیچاره‌های قرن نوزدهمی کامپیوتر نداشتند تا کمکشان کند. بیشتر آنان مرا نپذیرفتند، زیرا از قواعد ریاضی آنان پیروی نمی‌کردم. اما بعضی از ریاضیدانان سرسخت بودند. حالا این من هستم، طراحی شده و مورد استفاده در بسیاری از زمینه‌ها ــ کامپیوتر نیز بی‌تردید موهبتی بوده است. یک لحظه صفحهٔ نمایشگر یک جزء یا بخش آغازین یک برخال را نشان می‌دهد و لحظه‌ای بعد تکثیر شده و رشد یافتهٔ آن صفحه را پر می‌کند ــ گسترشی که تا ابد ادامه دارد. اینک از من تقریباً در همه جا استفاده می‌شود ــ می‌توانم شکل ریشه‌ها، سبزی‌ها، درختان، ذرت بو داده، ابرها، چشم‌اندازها و ... را ترسیم کنم. باید بگویم که گسترش یافتن مرزهایم برای من بسیار هیجان انگیز است. تبدیل شدن به خط‌های ساحلی را دوست دارم، زیرا هنوز بسیاری از افراد از این که می‌بینند می‌توانم ناحیه‌ای را با مساحت محدود و محیط نامحدود دربر بگیرم، متحیر می‌شوند. من در خدمت مدل سازی بسیاری از پدیده‌های جهان هستم، مثلاً مدل سازی جمعیت با منحنی‌های پئانو، استفاده از منحنی‌های برخالی در ساخت صحنه‌های سینما به کار بردن برخال‌ها برای توصیف اخترشناسی، هواشناسی، اقتصاد، بوم‌شناسی، و غیره و غیره. من بسیار پرکار و گرفتار هستم و همه چیز به سمت بی‌نظمی و آشوب پیش می‌رود، به‌ویژه از زمانی که مرا در نظریهٔ آشوب درگیر کرده‌اند.»

صدا دوباره آغاز کرد: «غرنزن! نظریهٔ آشوب برایت تنوع‌هایی ایجاد کرده است. بدون آن هنوز همان قاعده‌ها را تکرار می‌کردی و همان شکل‌های قدیمی را بارها و بارها می‌ساختی، دست کم حالا که ورودی اولیه کمی تغییر کرده است، چیزی کاملاً متفاوت می‌تواند به‌وجود آید.»



مراحل نخست یک ابر برخالی.

برخال آهی کشید و گفت: «فکر می‌کنم حق با شماست.»

صدا گفت: «البته که حق با من است. فکر کن چقدر ملال‌آور است که مثل یک مربع یا دایرهٔ بیچاره همیشه به یک شکل باشی.»

برخال در پاسخ گفت: «خوب دست کم برای مربع یا دایره حوادث غافلگیر کننده‌ای وجود ندارد.»

صدا حرف او را کامل کرد: «دقیقاً نکته همین‌جاست. زندگی پر از رویدادهای شگفت‌آور است؛ به همین دلیل است که این قدر به سراغت می‌آیند. تو بیشتر به زندگی شباهت داری.»

برخال پرسید: «منظور شما این است که من انسانم؟»

«من تا آنجا پیش نمی‌روم و علاوه بر این، انسان‌ها همهٔ زندگی نیستند. بگذار بگویم تو موجود متفاوتی هستی تو نااقلیدسی هستی.» با بیان این گفته صدا خاموش شد.

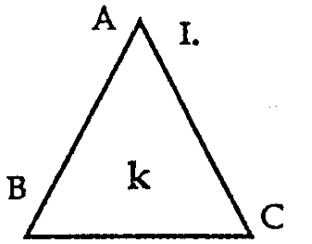
پیدا کردن مساحت یک منحنی برف دانه

این برخال هندسی زیبا را هلگه فن کخ در سال ۱۹۰٤ ساخت. برای ساخت منحنی برف دانهٔ کخ، با یک مثلث متساوی‌الاضلاع آغاز کنید. هر ضلع را به سه بخش تقسیم کنید. بخش میانی را بردارید و در خارج آن مثلثی با همان طول ضلع رسم کنید. این کار را برای هر مثلث به دست آمده تا بی‌نهایت تکرار کنید.

دو ویژگی جالب، که متناقض به‌نظر می‌رسند عبارتند از:

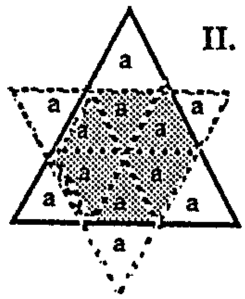
☐ مساحت برف دانه $\frac{۸}{۵}$ مساحت مثلث اولیه است؛

☐ محیط این برف دانه بی‌نهایت است.



در اینجا استدلالی ساده عرضه شده است که نشان می‌دهد منحنی برف دانه مساحتی برابر $\frac{۸}{۵}$ مثلث اصلی دارد.

I. فرض کنید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر k باشد.



II. مثلث ABC را به نُه مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی تقسیم می‌کنیم که مساحت هر یک از آنها برابر a است.

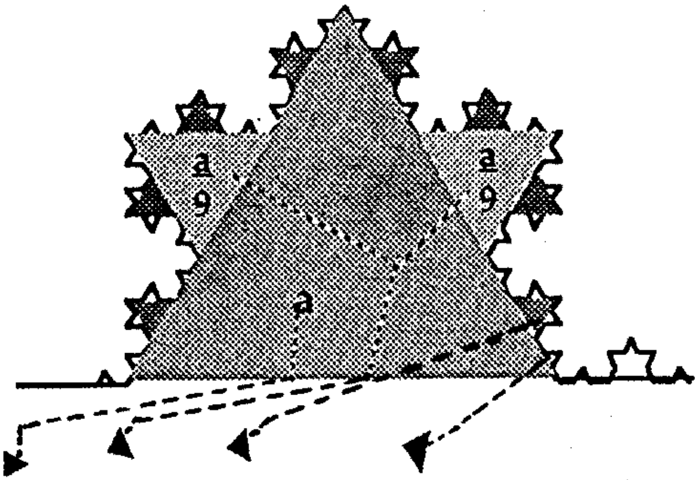
بنابراین، k = ۹a. حال به چگونگی تعیین حد مساحت یکی از شش رأس اولیهٔ منحنی برف دانه توجه کنید. می‌دانیم مساحت هر یک از رأس‌های بزرگ برابر a است، زیرا یکی از همان نه مثلث است. هر یک از رأس‌های به‌دست آمده در مرحلهٔ بعد مساحتی برابر $\frac{۱}{۹}$a دارد، درست همان‌طور که مثلث اصلی به ۹ مثلث مساوی تقسیم شده بود که چنین مساحتی داشتند. در واقع هر یک از رأس‌های بعدی به نُه مثلث هم اندازه تقسیم می‌شود که دوتای آنها از آن بیرون می‌زنند.

مرحلهٔ III: حاصل جمع مساحت قسمت‌های مختلف این رأس را نشان می‌دهد.

مرحلهٔ IV: حالا با جمع کردن مساحت‌های هر شش رأس و مساحت شش ضلعی داخل مثلث اصلی، به مرحله IV می‌رسیم.

مرحلهٔ V: از مرحله IV نتیجه می‌شود. سری به دست آمده در داخل کروشه یک تصاعد هندسی با ضریب $\frac{۴}{۹}$ و جملهٔ اولیهٔ $\frac{۲}{۹}$ است. پس می‌توانیم حد آن را حساب

کنیم: $\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}$



$$III.[a+2(\frac{a}{9})+(\frac{a}{9\times9})8+(\frac{a}{9\times9\times9})32+...]$$

توجه کنید که در این مرحله ۸ رأس وجود دارد

توجه کنید که در این مرحله ۳۲ رأس وجود دارد

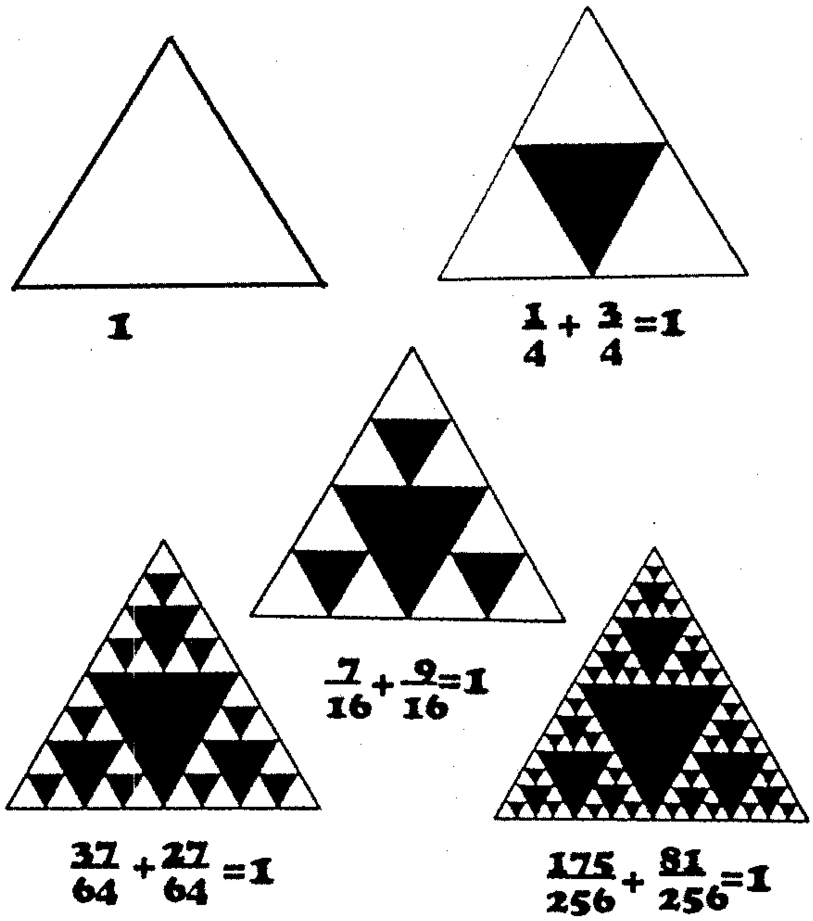
$$IV.\ [a+2(\frac{a}{9})+2(\frac{a}{9\times9})4+2(\frac{a}{9\times9\times9})4^2+2(\frac{a}{9\times9\times9\times9})4^3+...]6+6a$$

$$V.\ [1+\frac{2}{9}+\frac{2\times4}{9^2}+\frac{2\times4^2}{9^3}+\frac{2\times4^3}{9^4}+...+\frac{2}{9}(\frac{4}{9})^{n-2}]6a+6a$$

کروشه‌ها یک سری‌بندی به نسبت $\frac{4}{9}$ و $\frac{4}{9}$ به عنوان جمله‌های آغازی است. بنابراین حد آن را می‌توان چنین محاسبه کرد $\frac{(\frac{2}{9})}{[1-\frac{4}{9}]}=\frac{2}{5}$

مرحلهٔ VI. با قرار دادن $\frac{2}{5}$ به‌جای حد سری به $[۱+\frac{۲}{۵}]۶\mathbf{a}+۶\mathbf{a}=\frac{۷۲}{۵}\mathbf{a}$ می‌رسیم.
اینک مساحت منحنی برف دانه را برحسب **k**، که مساحت مثلث اصلی است، به‌دست می‌آوریم. چون $\mathbf{k}=۹\mathbf{a}$، پس $\mathbf{a}=\frac{\mathbf{k}}{۹}$. با قرار دادن این مقدار به جای a در $\frac{۷۲}{۵}\mathbf{a}$، داریم: $\frac{۷۲}{۵}\times(\frac{\mathbf{k}}{۹})=\frac{۸}{۵}\mathbf{k}$.

منحنی هیولایی



مراحل مثلث سرپینسکی. فرض کنید مساحت مثلث متساوی الاضلاع اولیه ۱ واحد مربع باشد. مجموع مساحت مثلث‌های سیاه و سفید در ۵ مرحلهٔ نخست رشد آن نشان داده شده است. اگر مثلث‌های سیاه مساحت‌های برداشته شده را نشان دهند، توجه کنید که مساحت مثلث‌های سفید دایماً کاهش می‌یابد. به این معنی که مساحت قسمت‌های سفید به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین مساحت مثلث سرپینسکی به سمت صفر میل می‌کند، در حالی‌که محیط آن به سمت بی‌نهایت می‌رود.

تا زمانی‌که در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ بنوا ماندل‌برو اصطلاح «برخال» را وضع کرد، این منحنی‌ها را هیولایی می‌نامیدند. ریاضیدانان محافظه‌کار قرن نوزدهم این منحنی‌های هیولایی را نامعقول می‌دانستند. آنها حاضر به پذیرش یا بررسی این منحنی‌ها نیز نبودند، زیرا با اندیشه‌های پذیرفته شدهٔ ریاضی در تناقض بودند. مثلاً برخی از آنها توابع پیوسته‌ای بودند که مشتق‌پذیر نبودند، تعدادی از آنها مساحت محدود و محیط نامحدود داشتند و تعدادی می‌توانستند فضا را کاملاً پر کنند. *مثلث سرپینسکی* (که به نام واتسلاف سرپینسکی ریاضیدان، ۱۹۲۰ـ۱۸۸۲ *واشر سرپینسکی* هم نامیده می‌شود) محیطی نامتناهی و مساحتی محدود دارد. در شکل بالا سعی شده است تا نشان داده شود چگونه مساحت این مثلث به صفر خواهدرسید.

مجادلهٔ مجموعهٔ ماندل‌برو

در قرن هفدهم شماری از ریاضیدانان برجسته (گالیله، پاسکال، توریچلی، دکارت، فرما، رن، والیس، هویگنس، یوهان برنولی، لایب‌نیتس، نیوتون) به دنبال کشف وِیژگی‌های چرخزاد (سیکلوئید) بودند. حتی با وجود کشف‌های بسیار در این دوره، دربارهٔ این‌که چه کسی نخستین کاشف چه چیزی بوده است مشاجرات زیادی پیش می‌آمد و اتهام سرقت علمی و کوچک شمردن کار دیگران نیز مشاهده می‌شد. در نتیجه چرخزاد به سبب اختلاف به هلن هندسه[1] مشهور شد. به نظر می‌رسد که امروز هم ریاضیدانان قرن بیستم یک هلن هندسهٔ تازه دارند ـ مجموعهٔ ماندل برو.

چه کسی نخستین باز مجموعهٔ ماندل‌برو را کشف کرد[2]؟ این بحثی داغ در بین ریاضیدانان کنونی است. مدعیان عبارتند از:

- *بنوا ماندل‌برو که اغلب به دلیل کارهای اولیه‌اش روی برخال‌ها در دههٔ ۱۹۷۰، او را پیشگام می‌شمارند. اثر او که گونه‌های مختلف این مجموعه را نشان می‌دهد در ۲۶ دسامبر ۱۹۸۰ در گزارش سالانهٔ فرهنگستان علوم نیویورک منتشر شد. کار او دربارهٔ مجموعهٔ اصلی ماندل‌برو نیز در سال ۱۹۸۲ چاپ شد.*
- *جان هابرد از دانشگاه کورنل و آدرین دوئادی از دانشگاه پاریس در دههٔ ۱۹۸۰ هنگامی که روی دلایل جنبه‌های مختلف این مجموعه کار می‌کردند، آن را مجموعهٔ ماندل‌برو نامیدند. هابرد می‌گوید که در سال ۱۹۷۹ ماندل‌برو را ملاقات کرده و به او نشان داده است چگونه کامپیوتر را برای ترسیم توابع تکرار شونده برنامه‌نویسی کند. هابرد تصدیق می‌کند که ماندل‌برو بعداً روشی کامل‌تر برای تولید تصویرهای این مجموعه ابداع کرده است.*
- *رابرت بروکس و پیتر ماتلسکی ادعا می‌کنند که پیش از ماندل‌برو مستقلاً این مجموعه را کشف کرده و توضیح داده‌اند، گرچه کارهای آن دو تا سال ۱۹۸۱ منتشر نشده است.*
- *پی‌یر فاتو ویژگی‌های غیرعادی مجموعهٔ جولیا را در حدود سال ۱۹۰۶ تشریح کرده است و کار گستون جولیا در زمینهٔ مجموعهٔ جولیا قدیمی‌تر از کار فاتو است. (مجموعهٔ جولیا نقش تخته پرش را برای مجموعهٔ ماندل‌برو داشته است.)*

افتخار از آن کیست؟ شاید همهٔ آنها.

---

۱. هلن در اسطوره‌های یونانی دختر زئوس از لداست که در زیبایی شهره بود و از میان خواستگارانش فلائوس شاه اسپارت را برگزید. ولی پاریس شاهزاده تروایی او را فریفت و به تروا برد در نتیجه موجب جنگهای میان یونان و تروا شد. فرهنگ فارسی اعلام.

۲. تصویر بالا آشناترین شکل برخالی مجموعهٔ ماندل‌برو است. این مجموعه گنجینه‌ای از فراکتال‌هاست که بی‌شمار فراکتال را دربرمی‌گیرد. مجموعهٔ ماندل‌برو به کمک معادلهٔ تکرار شونده‌ای مانند z^2+c ساخته می‌شود که z و c اعداد مختلط هستند و c مقادیری را تولید می‌کند که محدود به دامنهٔ معینی هستند.

جهان‌های ریاضی در ادبیات

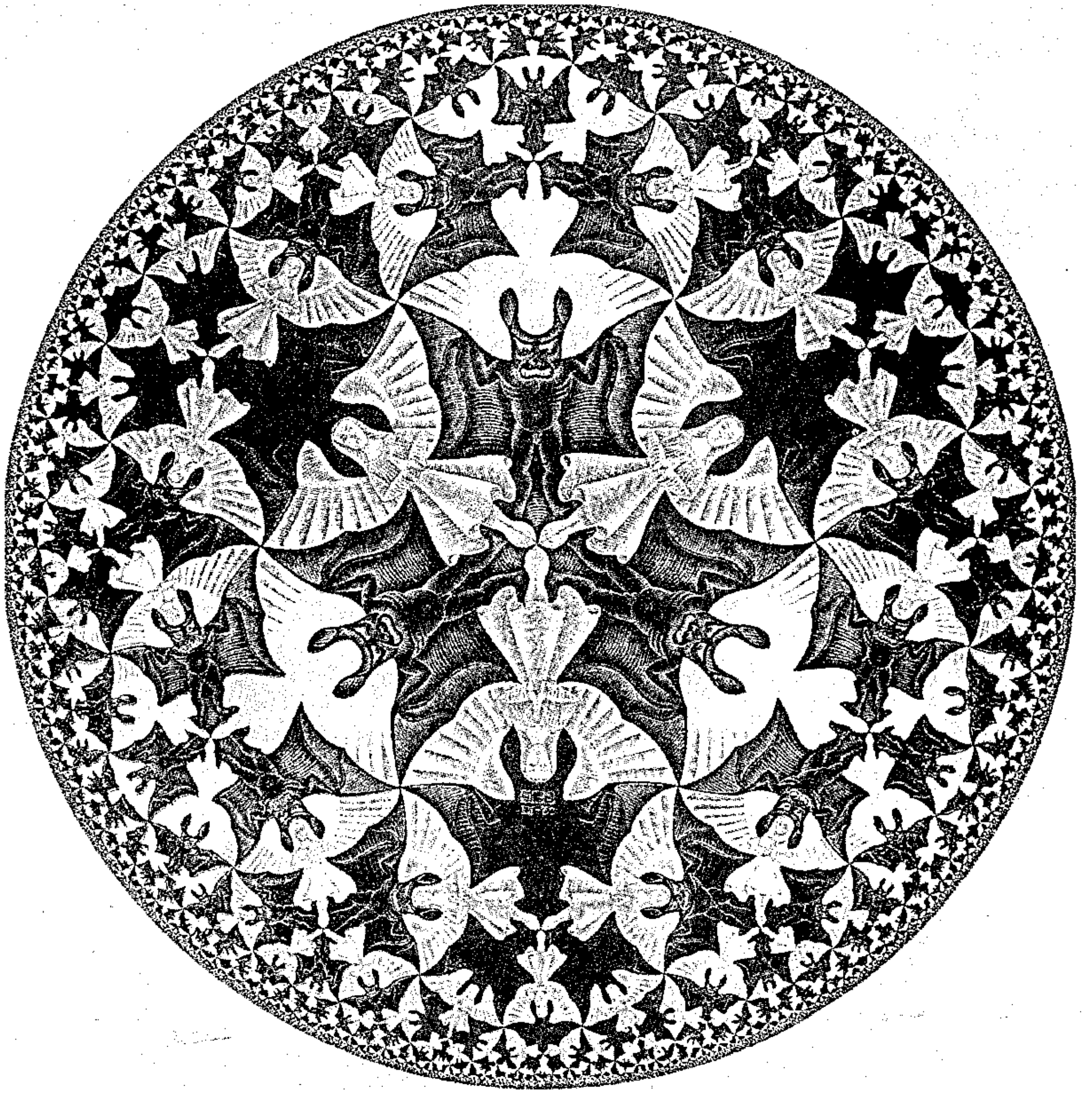
حتی در علم ریاضیات نیز تخیل شگفت‌انگیزی وجود دارد.

ـ ولتر

آیا اَبَرمکعب ساخته و پرداختهٔ تخیل ریاضی است؟ آیا تنها بعد واقعی، بعد سوم است؟ در هندسهٔ اقلیدسی می‌آموزیم که یک نقطه تنها یک مکان را نشان می‌دهد و نمی‌توان آن را دید، زیرا ابعاد آن صفر است. اما می‌توانیم یک پاره خط را که از همین نقاط نادیدنی ساخته شده است ببینیم. یک خط از نظر طول بی‌انتهاست، اما چنین چیزی در قلمرو زندگی ما وجود دارد؟ صفحه چطور؟ اندازهٔ دو بعد آن بی‌نهایت و ضخامت آن تنها به اندازهٔ یک نقطه است. صفحه در جهان ما چیست؟ شبه کره‌ای را در هندسهٔ هذلولی در نظر بگیرید؛ همچنین خط‌های مجانب توابع نمایی و بی‌نهایت‌های عددهای ترامتناهی را. اعداد موهومی را در نظر بگیرید، همچنین صفحهٔ اعداد مختلط، برخال‌ها یا حتی دایره را. براستی آیا اینها در جهان ما وجود دارند؟ این مفاهیم در جهان ما مدل‌هایی بیش نیستند. هر چند که بی‌تردید در نظام‌های ریاضی مربوط به خود وجود دارند.

بسیاری از نویسندگان، هنرمندان و ریاضیدانان از این مفاهیم برای توضیح جهان‌هایی که این اندیشه‌ها در آن به دنیا می‌آیند به طرز مبتکرانه‌ای سود برده‌اند. نویسندگانی چون دانته، ایتالو کالوینو، خورخه لوئیس بورخس، و مادلن لانگل از ریاضیات برای نوآوری بیشتر در آثار خود الهام گرفته‌اند.

در قرن نوزدهم، هانری پوانکاره ریاضیدان مدلی از قلمرو هذلولی‌ها را درون یک دایره عرضه کرد که این قلمرو دایره‌ای شکل، برای تمام چیزها و ساکنان آن نامتناهی بود. این موجودات آگاه نبودند که همه با دور شدن از مرکز دایره کوچک می‌شوند، در حالی‌که با نزدیک شدن به مرکز، بزرگ خواهندشد. یعنی هرگز نمی‌توان به لبهٔ دایره رسید و بنابراین، آنان جهان خود را نامتناهی می‌بینند. در سال ۱۹۵۸ هنرمندی به نام موریس اشر مجموعه‌ای از باسمه‌های چوبی با نام‌های *مرز دایره‌ای* I، II، III و IV ساخت که احساسی را از آنچه پوانکاره توضیح داده بود تداعی کرد. اشر آنها را *«زیبایی این جهان نامتناهی در یک صفحهٔ محصور» توصیف کرده است.*



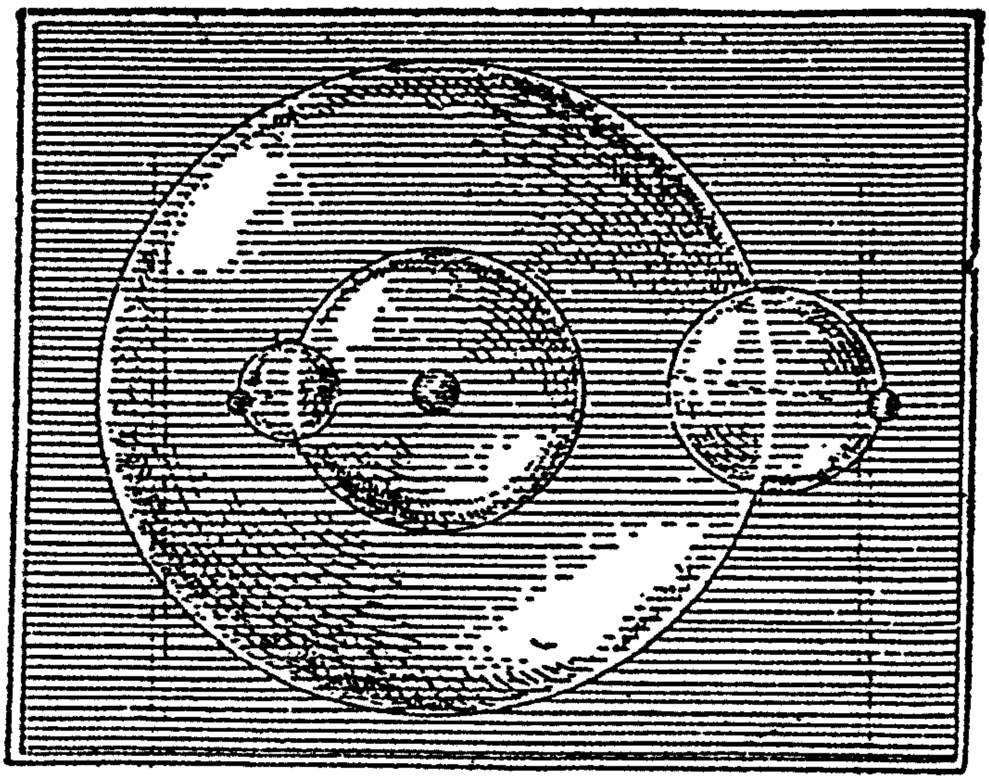
مرز دایره‌ای IV (بهشت و دوزخ) *اثر اشر، جهانی را تصویر می‌کند که یادآور جهان هذلولی هانری پوانکاره است.*

مادلن لانگل در رمان خود، *چروکی در زمان*، از اَبَرمکعب و بُعدهای چندگانه به‌عنوان ابزاری برای امکان سفر قهرمانانش به فضای خارجی استفاده می‌کند. «*... برای رسیدن به بعد پنجم، بعد چهارم را مجذور کنید و آن را به چهار بعد دیگر اضافه نمایید، به این ترتیب می‌توانید بدون این‌که مجبور باشید راه درازی را در اطراف طی کنید، در فضا سفر کنید... به عبارت دیگر، خط مستقیم کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه نیست.*»

ایتالو کالوینو در داستان کوتاهش به نام همه در یک نقطه، جهانی را توصیف می‌کند که تنها در یک نقطه وجود دارد. خلاقیت نبوغ‌آمیز او این باور را در انسان پدید

می‌آورد که این جهان بی‌بعد واقعاً وجود دارد. ــ کیویگ پیر گفت: *«طبیعی است که ما همه آنجا بودیم. چه جای دیگری می‌توانستیم باشیم؟ آن موقع هیچ‌کس نمی‌دانست که مکان هم می‌تواند وجود داشته باشد، یا زمان نیز؛ زمان چه کاربردی می‌توانست برای ما داشته باشد، که مانند ساردین در آنجا فشرده شده بودیم؟ وقتی می‌گویم «فشرده مانند ساردین»، تنها یک تشبیه ادبی به کار می‌برم: در واقع انجا حتی فضایی وجود نداشت که ما در آن فشرده شویم. هر نقطه از هر یک از ما بر هر نقطه از دیگران در یک نقطهٔ واحد منطبق شده بود، نقطه‌ای که همهٔ ما در آن بودیم.»*

با به یاد آوردن سده‌های میانه و کمدی الهی دانته، می‌بینیم که شکل‌های هندسهٔ اقلیدسی پایه‌های دوزخ دانته بوده‌اند. از شکل مخروط برای نگه‌داشتن انسان‌ها در طبقات دوزخ استفاده شده است. دانته در داخل آن نُه مقطع دایره‌ای در نظر گرفته است که به‌عنوان سکوهایی برای دسته‌بندی انسان‌ها براساس گناهانی که مرتکب شده‌اند به‌کار می‌رود.

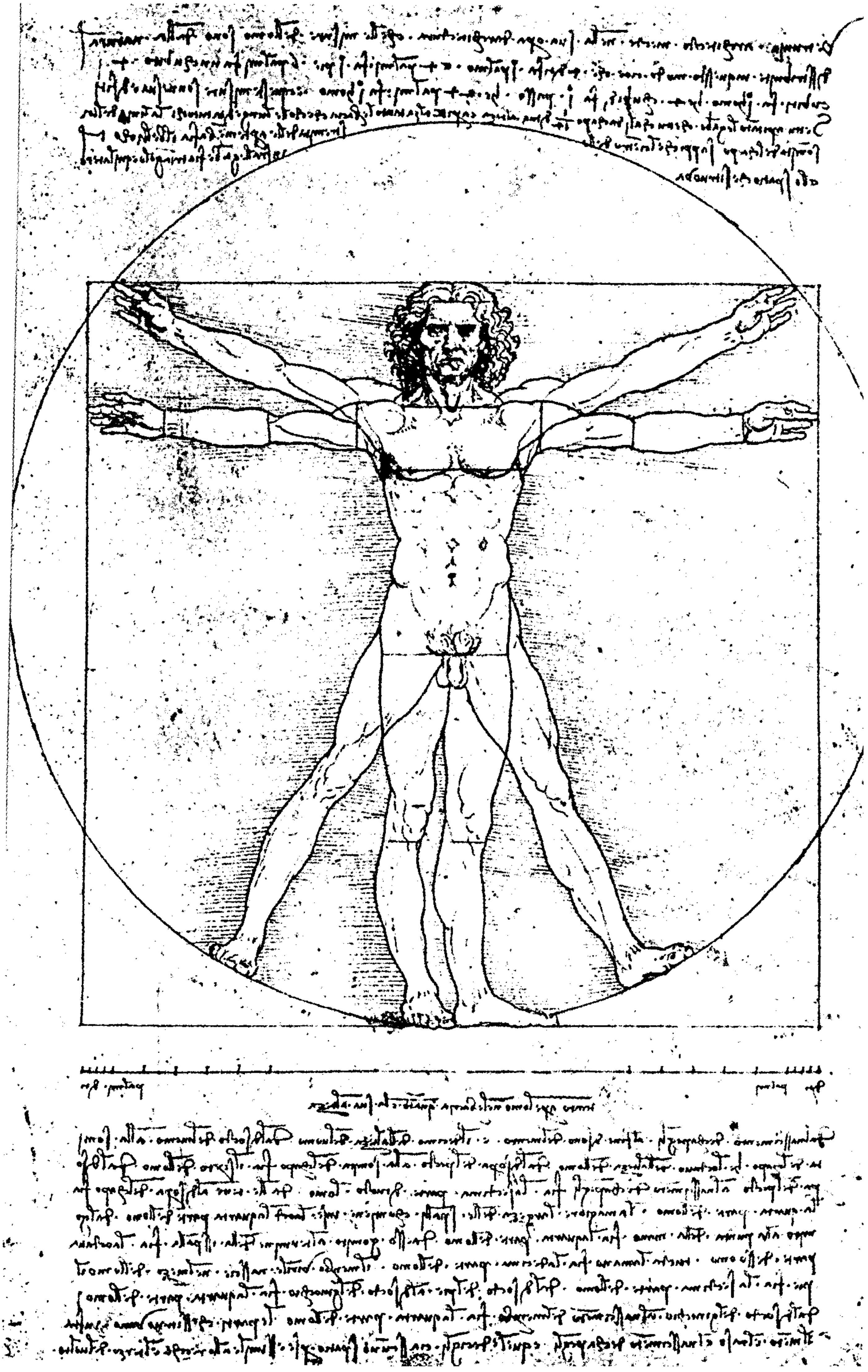


*از **کمدی الهی** دانته. نقشه فلکهای هم مرکز، که زمین را درون فلک (حامل فلک تدویر) ماه نشان می‌دهد و این فلک‌ها نیز درون فلک (حامل فلک تدویر) عطارد قرار گرفته‌اند.*

در قرن بیستم، مفهوم بی‌نهایت در *کتاب ماسه‌ها* از خورخه لوئیس بورخس به تصویر درآمده است. در این اثر شخصیت اصلی، کتابی «حیرت‌انگیز» پیدا می‌کند. «*تعداد صفحه‌های کتاب از بی‌نهایت کمتر یا بیشتر نیست. نه صفحهٔ اول هست نه صفحهٔ آخر. نمی‌دانم چرا به این روش تصادفی شماره‌گذاری شده‌اند. شاید می‌خواهند جمله‌های یک سری نامحدود باشند که هر عددی را می‌پذیرند.*» این کتاب به شکل نامطلوبی زندگی و نگرش او را نسبت به چیزها دگرگون می‌کند تا آنکه پی‌می‌برد باید راهی برای خلاص شدن از آن بیابد ـــ «*به آتش فکر کردم، اما ترسیدم که سوختن کتابی نامتناهی نیز ممکن است بی‌پایان از آب درآید و کرهٔ زمین را از دود خفه کند.*» راه حل شما چیست؟ ممکن است بخواهید کتاب را بخوانید تا بفهمید که قهرمان داستان چگونه از این تنگنا بیرون آمد.

نویسندگان داستان‌های علمی تخیلی از اندیشه‌های ریاضی برای کمک به خلق جهان‌های خود سود برده‌اند. مثلاً، در یکی از بخش‌های کتاب *پیشتازان فضا ـــ نسل بعدی*، نیرویی «نامرئی» سفینهٔ فضایی را به درون سیاهچاله‌ای می‌کشد. تنها هنگامی که صفحهٔ نمایشگر پرسپکتیو را تغییر می‌دهد خدمهٔ سفینه پی می‌برند که این نیروی ناشناخته، جهانی دوبعدی از موجودات زندهٔ بسیار کوچک است.

ریاضیات سرشار از اندیشه‌هایی است که تخیل انسان را زیر و رو می‌کند و به شگفتی وامی‌دارد ـــ *آیا آنها واقعیت دارند؟* برای ریاضیدانان واقعی هستند. ریاضیدانان با قلمروهایی آشنایند که این اندیشه‌ها در آنها حضور دارند ـــ شاید نه در سرزمین ما، با این همه در سرزمین خودشان واقعی‌اند.



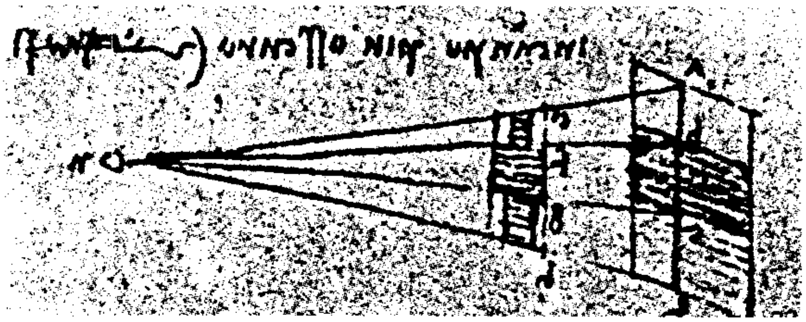
ریاضیات و هنر

هنر، بعد چهارم و کاشیکاری غیرتناوبی
ریاضیات و پیکرتراشی
ریاضیات، طراحی و هنر
ریاضیات و هنر موریس اشر
کاشیکاری یک صفحه با یک مستطیل تغییریافته
کاشیکاری‌های قدیمی
هندسهٔ ترسیمی و هنر
ترکیب ریاضیات و هنر در آثار آلبرشت دورر
هنر کامپیوتری

زیباترین چیزی که می‌توان تجربه کرد چیزی است که اسرارآمیز باشد، این سرچشمهٔ تمام هنر و علم حقیقی است.

ـ آلبرت اینشتین

ممکن است برای بسیاری از مردم پیوند هنر و ریاضیات غریب به نظر برسد. اما قلمروهای ریاضیات چون هندسه، جبر، بُعدها و کامپیوترها ابزارهایی را برای هنرمندان فراهم کرده‌اند تا بتوانند آثار خود را کشف کنند، تعالی بخشند، پیاده کنند و تکامل دهند. در طی قرن‌ها هنرمندان و آثارشان از دانش و کاربردهای ریاضیات تأثیر پذیرفته‌اند. می‌شود گفت که فیدیاس، پیکرتراش یونان باستان از نسبت‌های طلایی در بسیاری از آثارش استفاده کرده است. آلبرشت دورر ایده‌هایی از هندسهٔ ترسیمی را برای دستیابی به پرسپکتیو به کار گرفت و ساختارهای هندسی نقشی بسیار مهم در شکل‌گیری حروف رومی او داشت. از آنجا که تعالیم مذهبی استفاده از تصویر حیوانات را در هنر اسلامی منع کرده بود، هنرمندان مسلمان ناچار شدند بر ریاضیات به عنوان راهی برای بیان هنری تکیه کنند و این امر آنان را به خلق گنجینه‌ای از طرح‌های کاشیکاری رهنمون شد. لئوناردو داوینچی این احساس را داشت که «هیچ‌کدام از کندوکاوهای انسان را نمی‌توان علم نامید مگر آنکه مسیر خود را از طریق



طرحی از یادداشت‌های لئوناردو داوینچی که خط‌های متقارب به یک نقطهٔ تلاقی را نشان می‌دهد.

شرح و بیان ریاضی دنبال کند.» پیکره‌ها و نقاشی‌های لئوناردو مطالعهٔ او را دربارهٔ مستطیل طلایی، تناسبها و هندسهٔ ترسیمی نشان می‌دهد، همچنان‌که طرح‌های معماری او بررسی‌هایش را در زمینهٔ ساختارهای هندسی و شناخت او را از تقارن به نمایش می‌گذارد. موضوعات این فصل نمونه‌هایی هستند که نشان‌دهندهٔ ارتباط بین هنر و ریاضیاتند.

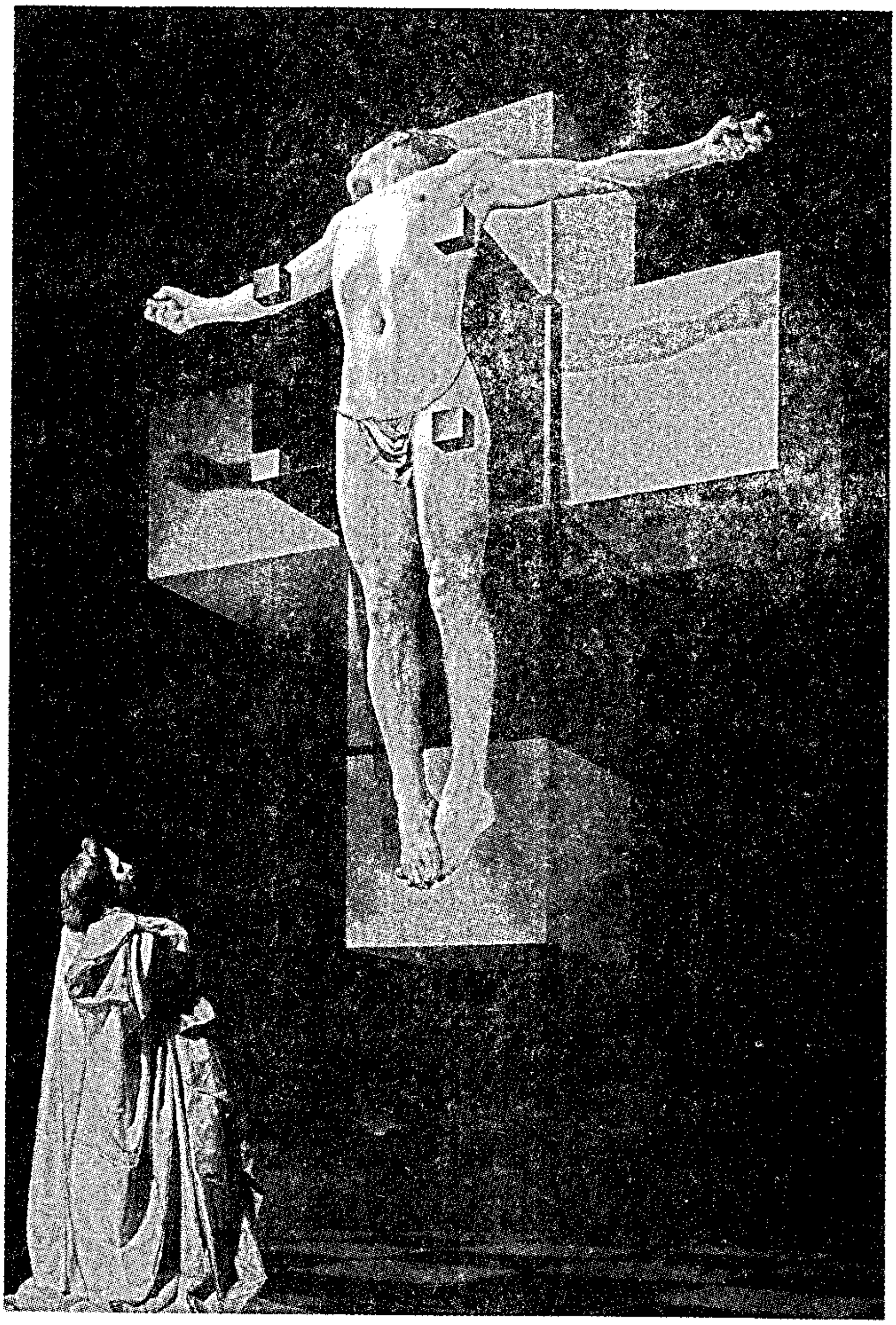
هنر، بعد چهارم و کاشیکاری غیرتناوبی

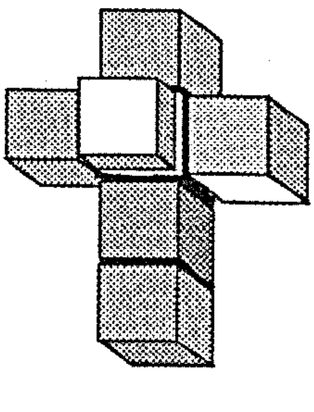
ریاضیات ما را به حوزهٔ ضرورت مطلق می‌برد، که نه تنها جهان واقعی، بلکه هر جهان ممکنی باید از آن پیروی کند.
ـــ آلبرت اینشتین

هنرمند بر روی بوم، برای انتقال احساس ابعاد دیگر، به دو بعد محدود است. هنرمندان شمایل‌پرداز دورهٔ بیزانس صحنه‌های مذهبی سه بعدی را تنها در دو بعد تصویر می‌کردند، که به موضوع ظاهری اسرارآمیز می‌بخشید. در دوران نوزایی، هنرمندان با استفاده از مفاهیم هندسهٔ ترسیمی، بوم مسطح خود را به جهانی سه بعدی که می‌خواستند تصویرش کنند تبدیل می‌کردند. امروزه، ریاضیات نقشی فعال در الهام بخشیدن و فراهم کردن ابزارهای خلاقیت و بیان اندیشه‌های هنرمند دارد. هنرمندان از ریاضیات برای گذر به ابعاد بالاتر استفاده می‌کنند، مثلاً هنرمندان از اَبَر مکعب[1] برای گام برداشتن به سوی بعد چهارم استفاده کرده‌اند. در اوایل قرن بیستم، کلود برگدن معمار، در آثارش از ابر مکعب در کنار طرح‌های چهاربعدی دیگر استفاده کرد[2]. سالوادور دالی[3] برای مدل خود از یک ابرمکعب باز شده که نقطهٔ مرکزی تابلوی تصلیب عیسی مسیح اوست، به کاوش در ریاضیات پرداخت[4] (۱۹۵٤).

امروزه تعدادی از هنرمندان هنر را در ارتباط با اندیشه‌های ریاضی دنبال می‌کنند ـــ به‌ویژه ریاضیات در کاشیکاری‌های غیرتناوبی، چند بعدی‌ها و مجسم‌سازی با کامپیوتر. در واقع نمایش‌های کامپیوتری که توماس بنکرافت ریاضیدان و چارلز اشتراوس متخصص کامپیوتر از دانشگاه براون از ابرمکعب ساختند، تجسم ابرمکعب را که به

۱. فرامکعب نیز گفته می‌شود ـ نمایش چهاربعدی یک مکعب.
۲. برگدن هم‌زمان از خطوط جادویی در تزیینات معماری و طراحی گرافیکی کتاب‌ها و پارچه‌ها استفاده کرد.
۳. دالی برای دریافت اطلاعات بیشتر با بخش ریاضی دانشگاه براون تماس گرفت.
٤. مسیح بر صلیبی میخکوب شده است که به صورت ابرمکعبی چهاربعدی و باز شده نشان داده شده است.





گستردهٔ ابرمکعب منبع الهامی
برای تابلوی تصلیب عیسی مسیح
سالوادر دالی (۱۹۵٤) بوده است.
موزهٔ هنر متروپولیتن هدیه از
مجموعهٔ چستر دایل (۵ـ۵۵)
.۱۹۵۵

فضای سه بعدی داخل و از آن خارج می‌شود ممکن ساخت. به این وسیله تصاویر گوناگونی از ابرمکعب در جهان سه بعدی بر روی صفحهٔ نمایشگر کامپیوتر ثبت شد. تونی رابین، هنرمند آشنا با این بخش از ریاضیات، نمایشی سه بعدی از ابرمکعب بر روی بوم نقاشی خلق کرد که این بوم به‌عنوان صفحه‌ای متقاطع با ابرمکعب عمل می‌کرد. مباحثی مانند کاشیکاری غیرتناوبی، کاشی‌های پن‌رُز، هندسهٔ شبه بلورها و تقارن پنج‌گانه[1] رابین را در آفرینش ساختارهای جالب توجه که بسته به نقطهٔ دید بیننده به نحو شگفت‌انگیزی تغییر می‌کنند یاری کرده است. در یک لحظه بیننده مجموعه‌ای از مثلث‌ها را می‌بیند در حالی‌که در موقعیت بعدی ستاره‌های پنج پر درهم پیچیده‌ای ظاهر می‌شوند. ترکیب کاشیکاری‌های غیرتناوبی دو و سه بعدی که در نوعی تقارن نامعمول درهم تنیده شده‌اند، تصویری تقریباً متناقض به‌وجود می‌آورد.

---

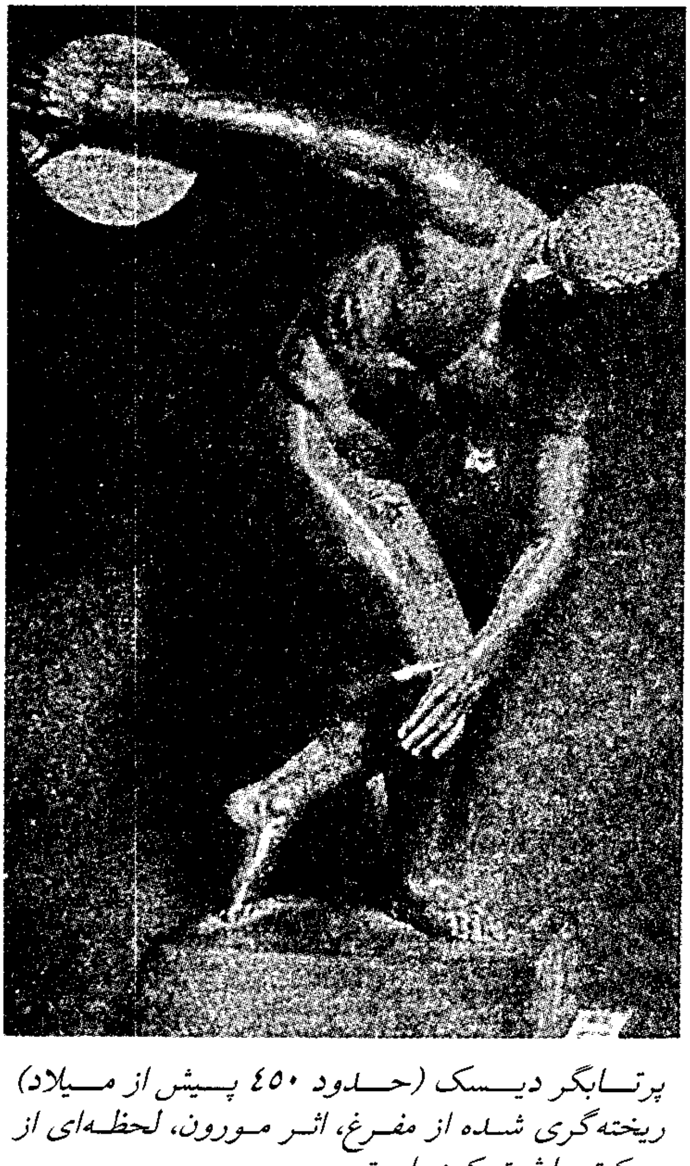
۱. در کاشیکاری نامتناوب کاشی‌ها با شکل‌هایی در کنار هم چیده می‌شوند و طرح‌هایی می‌سازند که هیچ الگویی ندارند.

تقارن nگانه: اگر طرحی با چرخش‌های $\frac{360^\circ}{n}$ تکرار شود، می‌گویند تقارن nگانه دارد. بنابراین یک طرح زمانی تقارن پنج‌گانه دارد که با چرخش‌های 72° الگوی خود را حفظ می‌کند.

شبه بلورها حالت تازه کشف شده‌ای از مادهٔ جامد است. تصور می‌شد مادهٔ جامد تنها به دو حالت بی‌شکل و بلوری وجود دارد. اتم‌ها (یا ملکول‌ها) در حالت بی‌شکل به صورت تصادفی آرایش یافته است، ولی در بلورها آرایش به صورت تکرار متناوب سلول قطعه ساختمانی واحد وجود دارد. کشف شبه بلورها حالت تازه‌ای را آشکار کرد که آرایش واحد نامتناوب و دارای تقارنی غیرعادی است، مانند پنج لایه که در مادهٔ بی‌شکل یا بلوری دیده نمی‌شود.

یاضیات و
بکرتراشی

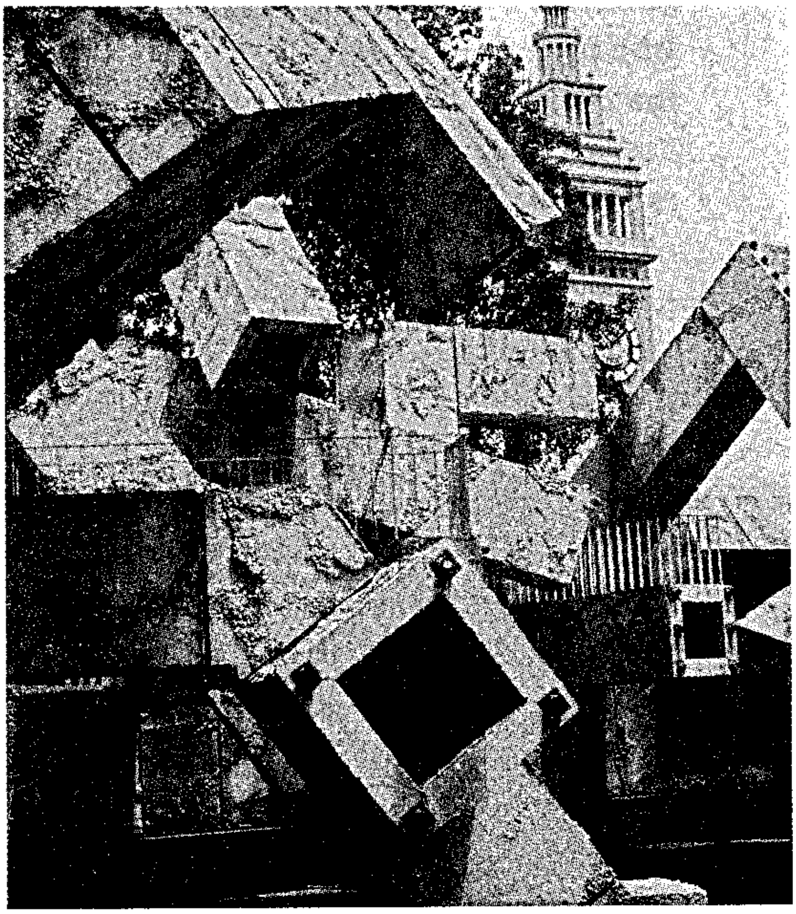
بُعدها، فضا، گرانیگاه، تقارن، شکل‌های هندسی و مجموعه‌های مکمل همه مفهوم‌هایی ریاضی‌اند که هنگامی که یک پیکرتراش دست به آفرینش می‌زند، به صحنه می‌آیند. فضا نقشی برجسته در کار پیکرتراش دارد. تعدادی از پیکره‌ها تنها جایی را در فضا اشغال می‌کنند به همان ترتیبی که ما و سایر موجودات زنده فضا را اشغال می‌کنیم. در این آثار گرانیگاه[1] نقطه‌ای در داخل پیکر است. این‌ها اشیایی هستند که متکی به زمین هستند و فضا را به همان شیوه‌ای اشغال می‌کنند که ما نسبت به آن احساس راحتی می‌کنیم و به آن عادت داریم. مثلاً داود اثر میکل آنژ، پرتاب دیسک اثر مورون هنرمند یونان باستان یا *سان فرانسیس بر روی اسب* از بنیامینو بوفانو، همگی گرانیگاهی در داخل پیکرهٔ خود دارند. بعضی از پیکره‌های هنری مدرن با فضا و بعدهای سه‌گانهٔ آن به شیوه‌های نامتعارف بازی کرده‌اند. اینان از



پرتابگر دیسک (حدود ۴۵۰ پیش از میلاد) ریخته‌گری شده از مفرغ، اثر مورون، لحظه‌ای از حرکت را ثبت کرده است.

۱. گرانیگاه نقطه‌ای است که می‌توان اشیا را بر روی آن در حالت تعادل نگه‌داشت. مثلاً گرانیگاه یک مثلث را می‌توان با رسم میانه‌های آن به‌دست آورد. محل تقاطع سه میانه گرانیگاه مثلث است.

فضا همچون بخشی از اثر استفاده کرده‌اند؛ در نتیجه گرانیگاه می‌تواند به جای داخل پیکره، نقطه‌ای در فضا باشد، همان‌طور که در آثاری مانند مکعب سرخ اثر ایسامو نوگوچی، خورشیدگرفتگی از چالرز پری و *فوارهٔ وایان کور* از لوئی وایان کور به نمایش درآمده‌اند. پیکره‌های دیگر به تعامل خود با فضا وابسته‌اند. در اینجا فضای اطراف اثر هنری (مجموعهٔ نقاط مکمل پیکره) اهمیتی به اندازهٔ خود پیکره پیدا می‌کند. *صفحهٔ رویین* اثر کارل آندره[1] را در نظر بگیرید. این پیکره در اتاقی خالی از هر اثر و شیء دیگر به نمایش درآمده است. این صفحه از ۳۶ مربع کوچک ساخته شده است که مربعی بزرگ‌تر می‌سازند و بر روی سطح زمین قرار گرفته است. این اتاق فضا و مجموعهٔ تمام نقاط را نشان می‌دهد و او اثر خود را «برشی از فضا»[2] خوانده است. بعضی آثار ظاهراً از گرانش پیروی نمی‌کنند. از آن جمله است پیکره‌هایی مانند آویزهای متحرک الکساندر کالدر با توازن و تقارن بی‌نظیرشان و مکعب سرخ ایسامو نوگوچی که به طرز اسرارآمیزی بر روی رأسش در تعادل است. حتی پیکره‌هایی وجود دارند که از خود زمین به عنوان یک بخش مکمل اثر و بیان هنری استفاده می‌کنند، مانند *حصار متحرک* اثر کریستو، قاطع از کارل آندره و قضایای هندسی شگفت‌انگیز چمن که در انگلیس ظهور کرد.



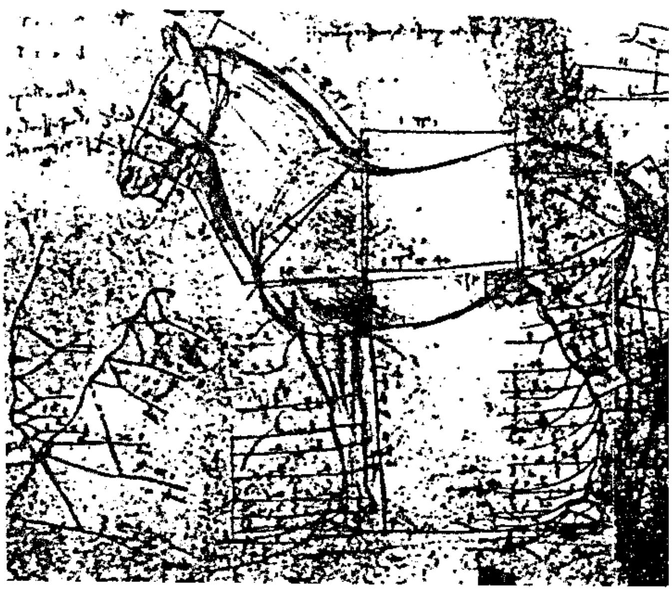
فوارهٔ بحث‌انگیز وایان کور در سان‌فرانسیسکو گرانیگاه آن نقطه‌ای در فضا است.

---

۱. کارل آندره (۱۹۳۵) هنرمند مینیمالیست آمریکایی؛ مجسمه ساز، نویسنده و شاعر و چهره‌ای برجسته در هنر انتزاعی است.

۲. *هنر و فیزیک*، لئونارد شلین، ویلیام مارو و شرکا، نیویورک ۱۹۸۱.

دادن ماهیتی فیزیکی به کارهای مفهومی یک هنرمند، اغلب نیازمند درک و شناخت ریاضی برای تحقق بخشیدن به آن اثر است. لئوناردو داوینچی بیشتر آفرینش‌هایش را پیش از پرداختن به آن از نظر ریاضی تحلیل می‌کرد. اگر موریس اشر اندیشهٔ کاشیکاری‌ها و خطاهای بصری را از نظر ریاضی تجزیه و تحلیل نکرده بود، آثارش به آن راحتی که او قادر به اجرای آنها بود، شکل نمی‌گرفت. امروزه بسیاری از پیکرتراشان برای گسترش هنر خویش به مفهوم‌های ریاضی توجه دارند. تونی رابین از بررسی هندسهٔ شبه بلورها، هندسهٔ چهاربعدی و علوم کامپیوتری برای تکامل و گسترش هنر خویش استفاده می‌کند. رونالد دیل رش در پیکرهٔ غول آسایش تخم‌مرغ عید پاک، از الهام، نبوغ، ریاضیات و کامپیوتر نیز همانند دستانش استفاده کرده است تا آفریدهٔ خود را کامل کند. هلامن فرگسن[1]



این طرح لئوناردو تحلیل او را از آناتومی بدن اسب نشان می‌دهد.

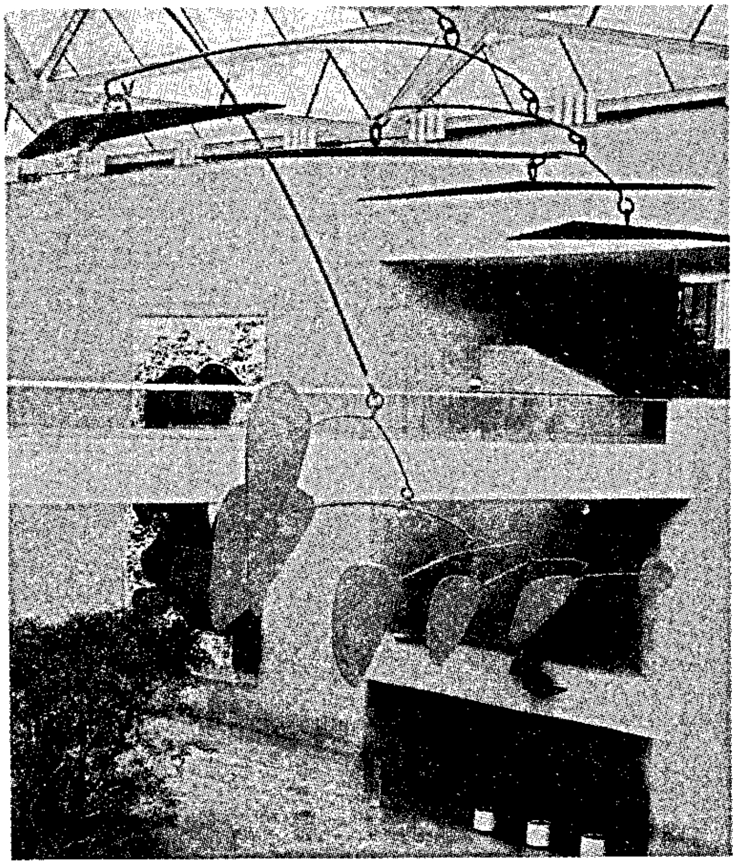
هنرمند ریاضیدان، از پیکرتراشی سنتی، کامپیوتر و معادلات ریاضی برای آفرینش آثاری مانند کرهٔ وسیع، بطری کلاین، جست و خیز و بردار استفاده می‌کند. بنابراین عجیب نیست اگر مدل‌های ریاضی را در نقش مدل‌های هنری نیز بیابیم. در این میان مکعب، چند مکعبی‌ها[2]، کره، چنبره، گرهٔ سه برگی، نوار موبیوس، چند وجهی‌ها، نیمکره، گره‌ها، مربع‌ها، دایره‌ها، مثلث‌ها، هرم‌ها، منشورها و ... را می‌توان یافت. شکل‌های ریاضی هندسهٔ اقلیدسی و توپولوژی نقشی مهم در پیکره‌های هنرمندانی چون ایسامو نوگوچی، دیوید اسمیت، هنری مور و سول لویت بازی کرده‌اند. پیکره با هر چه باشند، ریاضیات از آنها جدا نشدنی است. پیکره را می‌توان بدون یک اندیشهٔ

---

۱. مجسمه ساز و هنرمند آمریکایی که در کار خود از گرافیک کامپیوتری و الگوریتم استفاده می‌کند.
۲. یک بازی که در آن با اتصال مکعب‌های مشابه شکلی ساخته شود.

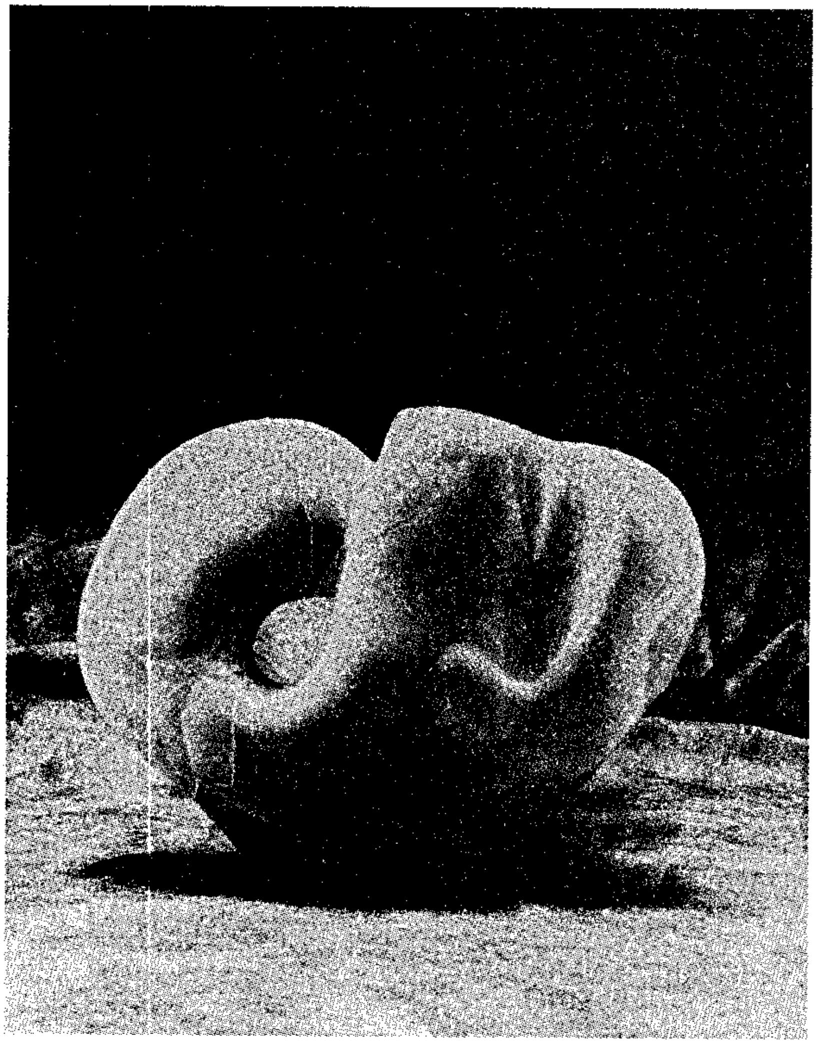
ریاضی تصور کرد و آفرید، با این وجود ریاضیات در آن اثر حضور دارد، درست همان‌طور که در موجودات طبیعی وجود دارد.

پدیدآورنده در برابر *پیوستار* اثر چارلز پری موزهٔ ملی هوا و فضا، واشینگتن دی سی.



یک آویز متحرک از الکساندر کالدر. ساختمان شرقی گالری ملی هنر، واشینگتن دی سی.

جای دادن ریاضیات در دل سنگ



یک قطعه کوچک موسیقی راک III عکس از رادبرینگ. از *هلامن فوگسن: ریاضیات در سنگ و مفرغ* اثر کلر فرگسن. گروه خلاق مریدین.

گره‌های سه برگی، چنبره‌ها، کره‌ها، بردارها، جریان، حرکت ــ اینها تعدادی از اندیشه‌های ریاضی جدا نشدنی از پیکره‌های هلامن فرگسن هستند.

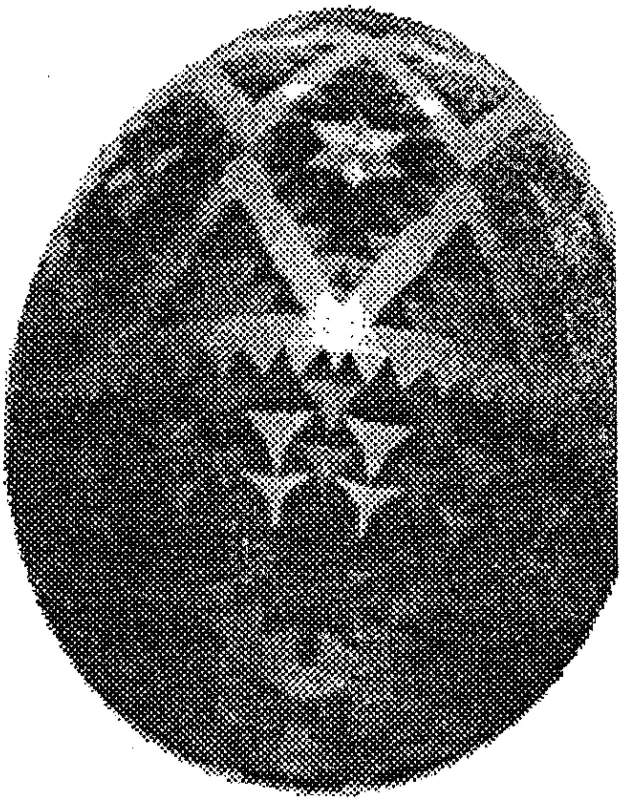
دربارهٔ هنرمندانی که از اندیشه‌های ریاضی برای ارتقای کارشان استفاده می‌کنند اغلب مطالبی شنیده‌ایم. هلامن فرگسن هنرمند ریاضیدان، زیبایی ریاضیات را به پیکره‌های استثنایی خود انتقال داده است. همان‌طور که او گفته است: «ریاضیات هم یک شکل هنری و هم یک علم است... من بر این باورم که انتقال ریاضیات از طریق بسترهای هنری به مخاطب عام امکان‌پذیر است.»[1]

هلامن برای آفرینش اشکال بی‌نظیر خود از روش‌های سنتی پیکرتراشی، کامپیوتر و معادلات ریاضی بهره برده است آثار او عنوان‌هایی از این گونه دارند: *کرهٔ وحشی*، *بطری کلاین*، *میدان برداری*، چنبرهٔ *با میدان برداری*، *رویای وال II* (کرهٔ شاخدار).

۱. ایوارس پیترسن، *معادلات در سنگ*، *اخبار علمی*، جلد ۱۳۸، ۸ سپتامبر ۱۹۹۰.

تخم‌گذاری ریاضی

هنگامی که رونالد دیل رش سفارش طراحی و ساخت یک پیکرهٔ غول آسا از تخم‌مرغ عید پاک را برای وگرویلَ در آلبرتا پذیرفت، به زودی دریافت که برای انجام این کار ناگزیر خواهدبود رِیاضیات آن را از پایه بنا کند.
او در طی سال‌ها، هنر ساخت اشیای دو بعدی را به شکل سه بعدی بهبود بخشیده است. کار او و مسایلی که حل کرده است یادآور ریاضیات است، گرچه آموزش رسمی ریاضی کمی داشته است. رش با کار با ورقه‌های مواد مختلف مانندَ کاغذ و آلومینیوم، تکنیک‌هایی برای تا کردن ابداع کرده و آنها را به آثاری هنری تبدیل کرده است. او مسایل هندسه را با استفاده از الهام، نبوغ، ریاضیات، کامپیوتر و دستانش حل می‌کند.



فکر اولیهٔ او دربارهٔ ساخت این تخم‌مرغ این بود که می‌تواند برای دو سر آن دو بیضی‌وار و برای بخش میانی استوانه‌ای برآمده بسازد. او به سرعت پی‌برد که این کار به نتیجه نمی‌رسد. با پی‌بردن به محدودیت ریاضیات موجود برای ساخت تخم‌مرغ[1]، دریافت که باید به تنهایی برای این کار راهی پیدا کند.
طرح نهایی او برای تخم مرغ شکوهمند عید پاک به ۲۲۰۸ قطعهٔ یکسان به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع و ٥٢٤ قطعه به شکل ستارهٔ سه پر منتظم نیاز داشت، که اندازهٔ آنها برحسب جایی که روی تخم‌مرغ قرار می‌گرفتند تغییر می‌کرد. او پی‌برد که با تغییر زاویهٔ جای گذاری قطعه‌ها حتی به اندازهٔ بسیار کم (از کمتر از 1° تا 7°)، این تکه‌های مسطح در ظاهر کار انحنا به‌وجود می‌آورند و سطح بیرونی تخم‌مرغ به‌دست می‌آید. سازهٔ نهایی ۷/۸۳ متر طول، ٥/٥٨ متر عرض و ٢٢٦٥ کیلوگرم وزن دارد.

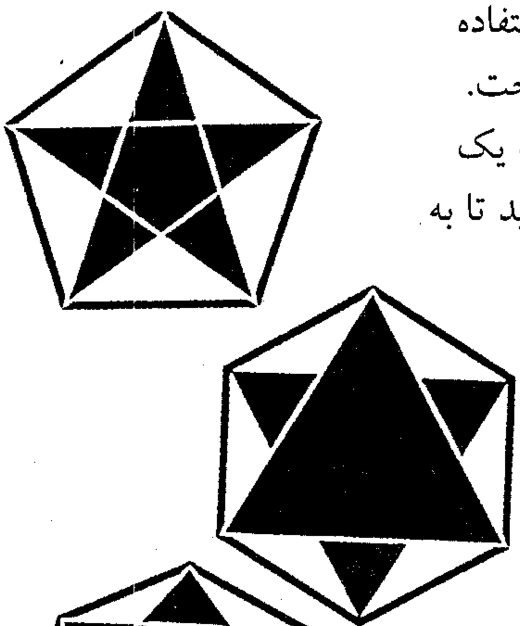
---

۱. معادلات جبری برای منحنی‌های تخم‌مرغی شکل را ریاضیدان فرانسوی رنه دکارت (۱۶٥۰-۱٥۹۶) به‌دست آورده بود. در سال ۱۸٤۲ جیمز کلارک مَکسول (۱۸۷۹-۱۸۳۱) ریاضیدان جوان اسکاتلندی روشی برای ساختن تخم‌مرغ با استفاده از مداد، ریسمانَ و پونز ابداع کرد.

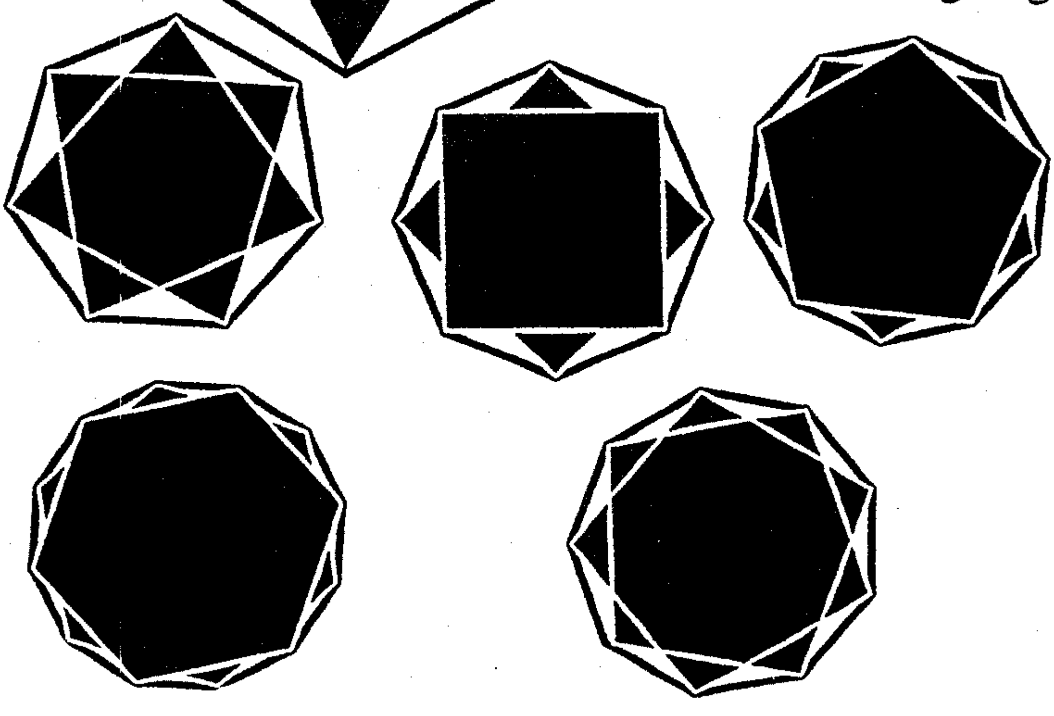
یاضیات، طراحی
هنر

شکل‌های زیر در آفرینش طرح‌های هنری و گرافیکی به‌کار رفته‌اند و هنوز هم می‌توانند به‌کار روند. بنیان آنها ریاضی است، اما این موضوع از زیبایی و ظرافت سادهٔ آنها چیزی کم نمی‌کند.

ستاره‌های ریاضی

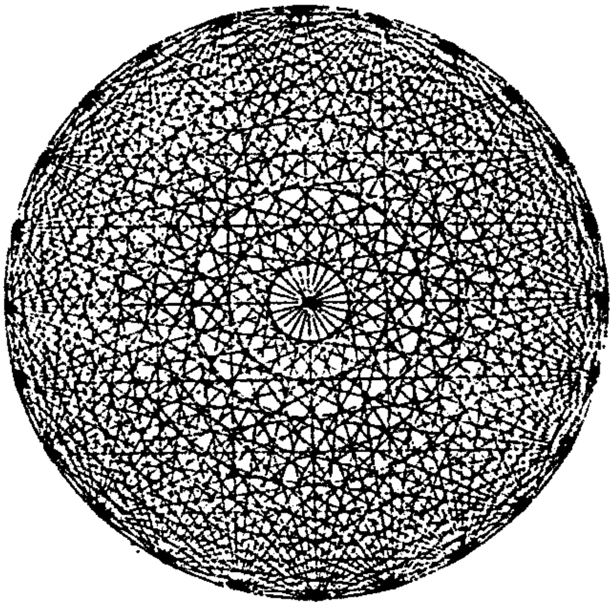


این تصویرها نشان می‌دهند چگونه می‌توان با استفاده از چندضلعی‌های منتظم ستاره‌های گوناگون ساخت. در چندضلعی‌هایی با اضلاع فرد فقط کافی است یک در میان رأس‌های چند ضلعی را به هم وصل کنید تا به نقطه اول برگردید. برای ستاره‌هایی با تعداد رأس زوج، توجه کنید که ستاره از دو چند ضلعی دوران یافته ساخته می‌شود که تعداد اضلاع آنها نصف اضلاع چندضلعی اصلی است.

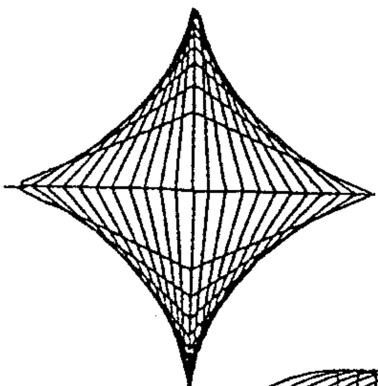


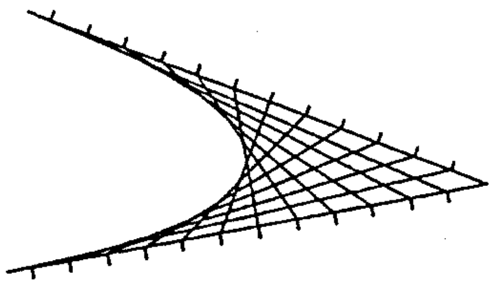
گلدوزی ریاضی

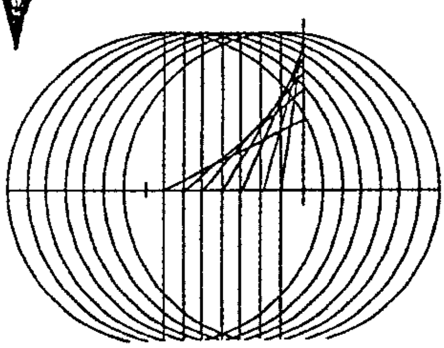
در طی قرن‌ها شیفتگان ریاضیات منحنی‌های ریاضی را «گلدوزی» کرده‌اند. کشف یک منحنی که از مجموعه‌ای پاره خط راست شکل گرفته است، همیشه جذاب است. در پایان، «کوک‌ها» (پاره خط‌ها) به خط‌های مماس بر منحنی‌ای که ساخته‌اند تبدیل می‌شوند. هرکس می‌تواند یک دایره، بیضی، سهمی، هذلولی، منحنی دلوار (قلب مانند)، منحنی حلزونی، سه گوش و غیره را به صورت ریاضی «گلدوزی» کند و در روند گلدوزی این منحنی‌ها، بعضی از مشخصات ویژهٔ آنها را کشف کند. در اینجا چگونگی ساخت منحنی ستاره‌ای نشان داده شده است.

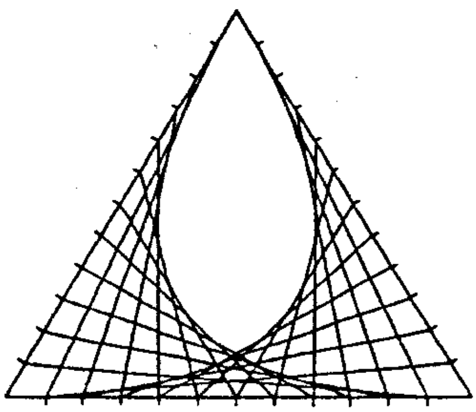


دایره‌های هم مرکز پس از دوختن قطرهای یک ۲۴ ضلعی ظاهر می‌شوند.







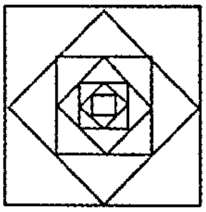


یک راه برای ساختن منحنی ستاره‌ای این است که آن را مانند یک نردبان در حال لغزیدن در نظر بگیریم. از دایره‌هایی به شعاع طول نردبان، برای مشخص کردن موقعیت جدید پایهٔ نردبان استفاده می‌کنیم.

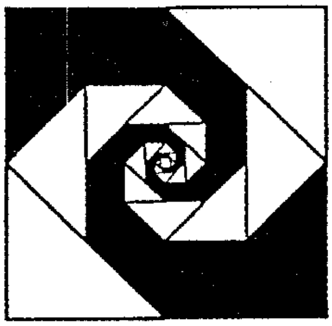
اشکال گوناگون سهمی

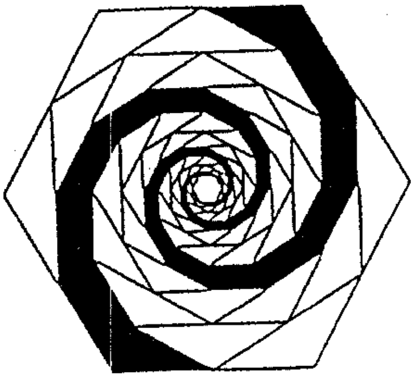
مارپیچ‌هایی با خط راست

مارپیچ‌ها شکل‌هایی هندسی هستند که حرکت را تداعی می‌کنند. آنها خانواده‌ای از منحنی‌ها را از مارپیچ‌های دوبعدی ــ مثلاً مارپیچ‌های هم زاویه (لگاریتمی) و ارشمیدسی ــ تا مارپیچ‌های سه بعدی مانند مارپیچ‌های کونکوئید (صدفی) و مارپیچ‌های فنری دربرمی‌گیرند. مارپیچ‌ها با بسیاری از حوزه‌های زندگی ما و بسیاری از موجودات زنده ارتباط دارند. چند نمونه از آنها عبارتند از: شاخ بعضی از بزها، خوشهٔ دانهٔ گل‌ها، بسیاری از صدف‌های دریایی، رشد بعضی درختان مو، ساختار DNA، معماری، هنر، طراحی گرافیک.



این شبکهٔ مربع‌ها نخستین گام در ساخت مارپیچ زیر است.

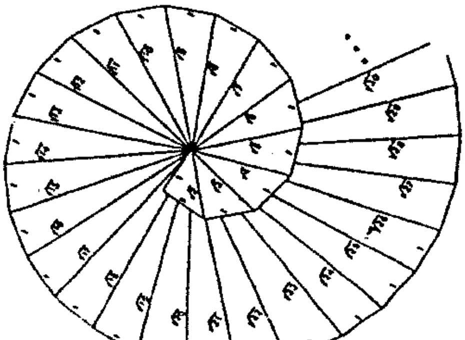




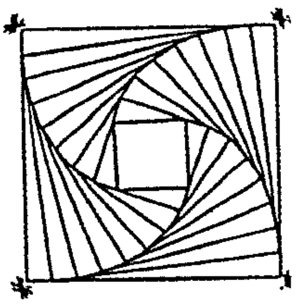
مارپیچ‌های خط راست با ایجاد شبکه‌ای از چند ضلعی‌های منتظم ساخته می‌شوند که در آنها، هر چند ضلعی کوچک‌تر از به‌هم وصل کردن وسط اضلاع چند ضلعی قبلی شکل می‌گیرد. با نگاه به شبکهٔ چندضلعی‌ها و بدون هاشور زدن مارپیچ، نمی‌توانیم به سادگی آن را ببینیم. در اینجا چند طرح جالب که این مارپیچ‌های خط راست می‌سازند نشان داده شده است.

انواع گوناگونی از این مارپیچ‌ها وجود دارد. تعدادی از آنها با مسأله‌های مربوط به تعقیب مانند مسألهٔ چهار عنکبوت ارتباط دارند.

یک مارپیچ خط راست مشهور دیگر، مارپیچ ساخته شده به روش رسم ریشهٔ دوم اعداد با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس است.



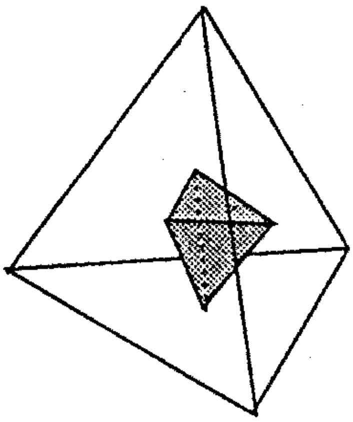
این مارپیچ از ریشهٔ دوم اعداد با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ساخته شده است.



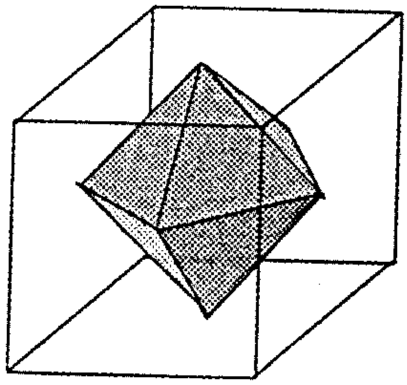
چهار عنکبوت از چهار گوشهٔ یک مربع آهسته شروع به حرکت می‌کنند هرکدام به سمت عنکبوتی که در سمت راستش قرار دارد با سرعتی ثابت به طرف مرکز حرکت می‌کند. بنابراین عنکبوت‌ها همیشه در چهار گوشهٔ یک مربع قرار دارند. منحنی‌های ساخته شده از مسیر حرکت عنکبوت‌ها مارپیچ‌هایی هم زاویه‌اند. اندازهٔ مربع آغازین و سرعت حرکت عنکبوت‌ها مشخص می‌کند که چقدر طول می‌کشد تا عنکبوت‌ها به هم برسند.

نگاه کردن به همزادهای اجسام افلاطونی

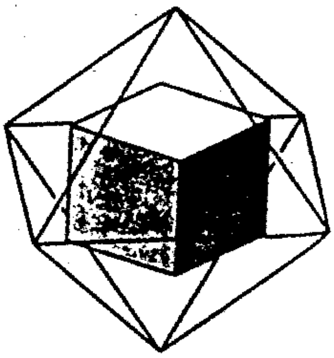
تنها پنج جسم افلاطونی ــ چند وجهی‌های محدب با وجوهی که خود چند ضلعی‌های منتظم محدبند ــ وجود دارد. پی‌بردن به رابطهٔ بین اجسام افلاطونی و همزادهای‌شان جالب است.



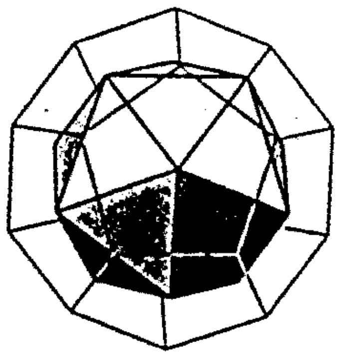
چهار وجهی و همزادش



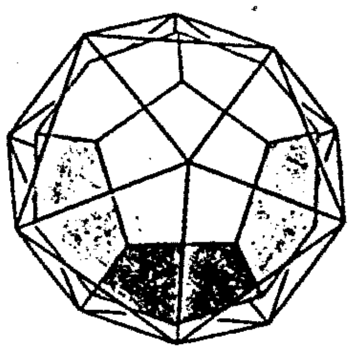
مکعب و همزادش



هشت وجهی و همزادش



دوازده وجهی و همزادش

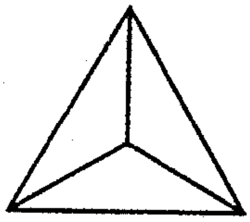


بیست وجهی و همزادش

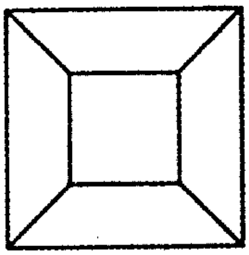
برای ساخت همزاد یک چند وجهی، مرکز هر وجه را پیدا می‌کنیم و سپس مرکز آن وجوهی را که یال مشترک دارند به هم وصل می‌کنیم. شکل‌های به دست آمده نشان می‌دهند که همزاد یک چهاروجهی، چهاروجهی است، همزاد مکعب (شش وجهی) هشت وجهی است، در حالی‌که همزاد هشت وجهی، مکعب است. همزاد دوازده وجهی، بیست وجهی است و همزاد بیست وجهی، دوازده وجهی است. همزاد هیچ یک از این اجسام جز جسمی افلاطونی نیست!

چند وجهی‌های تخت شده ــ نمودارهای شلگل

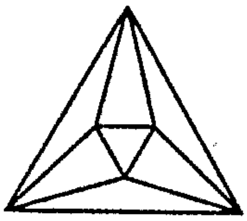
هر یک از این نمودارها یکی از پنج جسم افلاطونی را نشان می‌دهد. آنها را به نام ویکتور شلگل، ریاضیدان آلمانی که این نمودارهای استثنایی را در سال ۱۸۸۳ ابداع کرد، نمودارهای شلگل می‌نامند. آنها یادآور اجسامی سه بعدی هستند که تخت شده‌اند. اما در واقع، چند وجهی در یک کره محاط شده و از نقطه‌ای در امتداد محور قطب شمال کره تصویر شده است. تصویر آن می‌تواند بسته به موقعیت چند وجهی درون کره تغییر کند. ویژگی نمودارهای شلگل این است که یک وجه از چند وجهی، تصویر تمام رأس‌های دیگر را هم دربردارد. علاوه بر این، همهٔ رأس‌ها، یال‌ها و وجه‌های چند وجهی، با وجود تغییر اندازه و شکل آنها، در این نمودارها نشان داده می‌شوند.



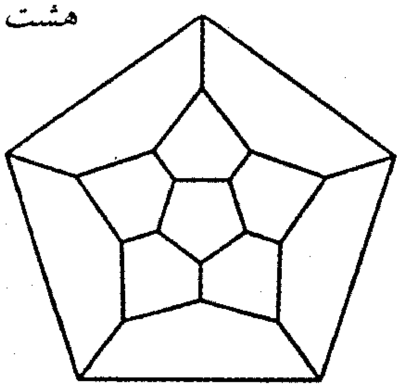
چهاروجهی



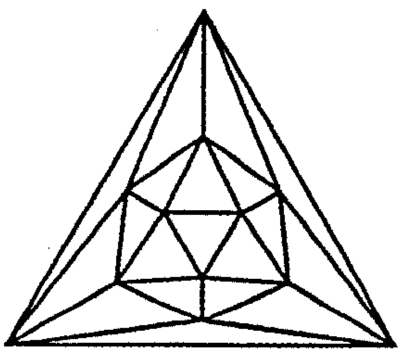
شش وجهی (مکعب)



هشت وجهی



دوازده وجهی



بیست وجهی

ریاضیات و هنر
موریس اشر

قوانین ریاضیات تنها اختراعات یا آفرینش‌های انسان نیستند. آنها واقعاً «هستند»؛ آنها کاملاً مستقل از ذهن انسان وجود دارند. بیشترین کاری که یک انسان تیزهوش می‌تواند انجام دهد پی بردن به‌وجود آنها و شناختن‌شان است.

ـ م. ک. اشر

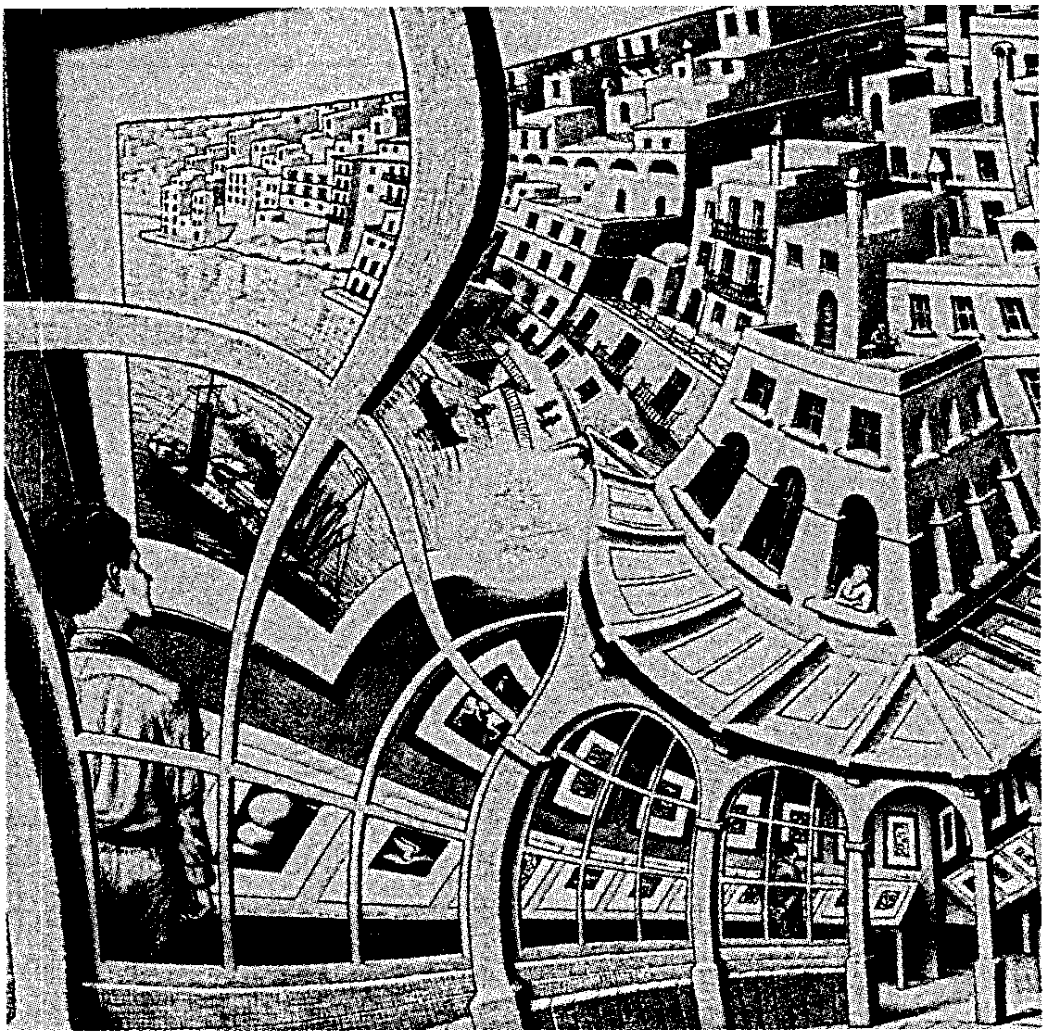
بخشی از دگریسی III اثر ا

موریس اشر قطعاً به ریاضیات توجه داشته است. دیدن بسیاری از آثار او با نگاه ریاضی هیجان‌انگیز است.

بسیاری از ما با آفرینش جادویی کاشیکاری‌های او بر روی صفحه آشناییم. آثار او از کارهای مرسوم بسیار فراتر است. او به موضوع‌هایی که آنها را خانه‌بندی می‌کند حرکت و حیات می‌بخشد، آن‌گونه که در آثار معروفش مانند دگردیسی، *آسمان و آب*، *روز و شب*، *ماهی‌ها و پولک‌ها* و *رویارویی* تصویر شده است. علاوه بر تبدیل‌هایی که در صفحه صورت می‌گیرد، خود عناصر خانه‌بندی شده نیز دستخوش دگرگونی می‌شوند. همچنین می‌توان تسلط او را بر مفاهیم انتقال، دوران و انعکاس در کاشیکاری‌های تناوبی مشاهده کرد.

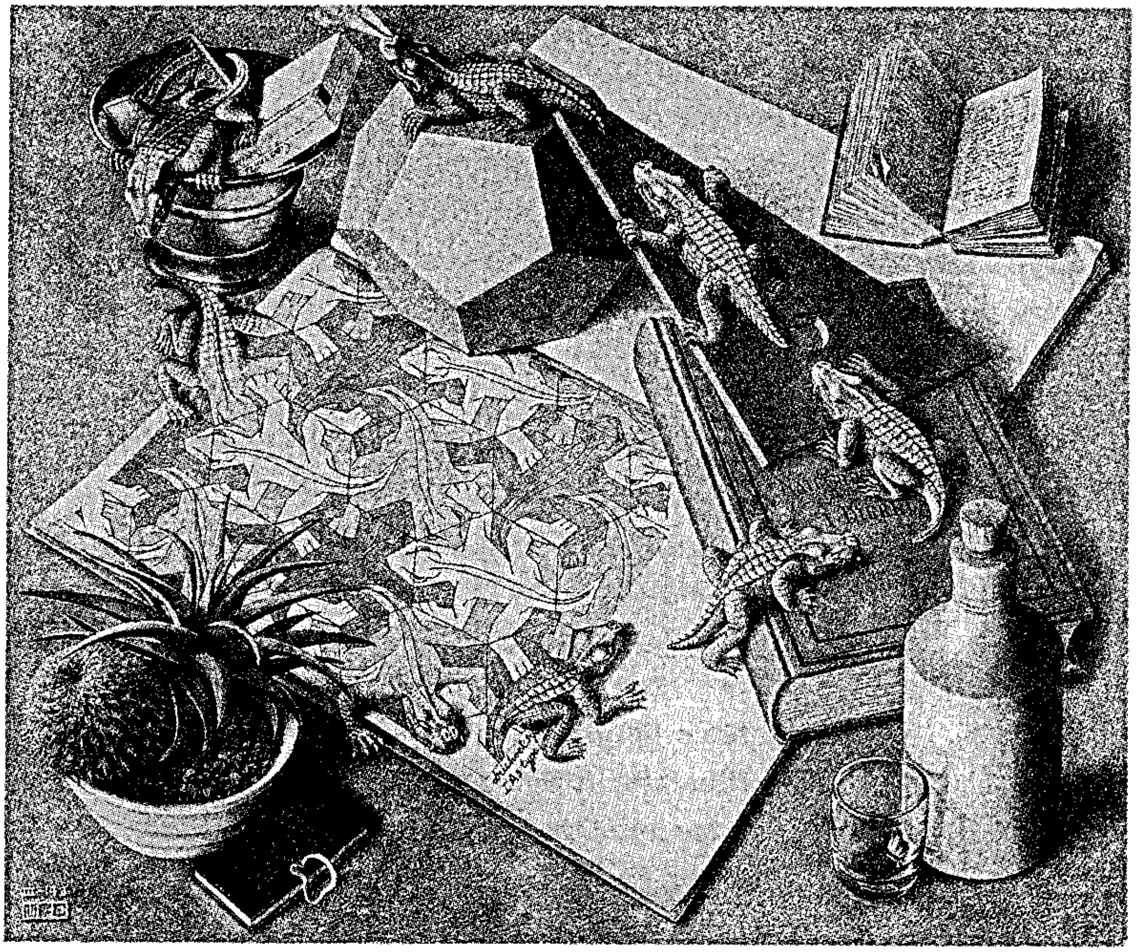
اشر از مفهوم‌ها و موضوعات حوزهٔ توپولوژی نیز استفاده می‌کند. نوار موبیوس در گراورهای چوبی او با عنوانهای *نوار موبیوس I و II* و *سوارکار* نقش مهمی بازی می‌کند. او در اثری با عنوان گره‌ها، به‌طرز شگفت‌انگیزی گره‌های سه برگی ارائه کرده است. حتی اگر احتمالاً اشر قصد این کار را نداشته است، مارهای او یک اثر کامل هنری برای مطرح کردن مبحثی در نظریهٔ گره‌هاست. نمایشگاه

عکس و بالکن نمونه‌هایی جالب توجه از تغییر شکل‌های توپولوژیکی هستند. گویی این گراورها بر روی ورقه‌هایی لاستیکی چاپ شده‌اند که به‌وسیلهٔ توپولوژی به نحوی جادویی تغییر شکل داده‌اند.



نمایشگاه عکس تغییر شکل توپولوژیکی را نشان می‌دهد.

درهم آمیختن بُعدها و دستکاری در آنها درونمایه‌های ریاضی دیگری است که در بسیاری از آثار اشر دیده می‌شود. اشر در تابلوی خزندگان مارمولک‌هایی دو بعدی را تصویر می‌کند که در اشکال سه بعدی خزنده‌ای واقعی به شکلی ترسناک جان می‌گیرند. تبدیل‌های مشابهی در طرحهای *آیینهٔ جادویی* و *چرخه* انجام گرفته است. استفادهٔ او از هندسهٔ تصویری ــ پرسپکتیو، نقطه‌های فرار متعارف، نقطه‌های فرار خمیدهٔ خود او ــ عامل احساس عمق و بُعد در تابلوهای رم سن پیتر، برج بابل و بلند و پست است.

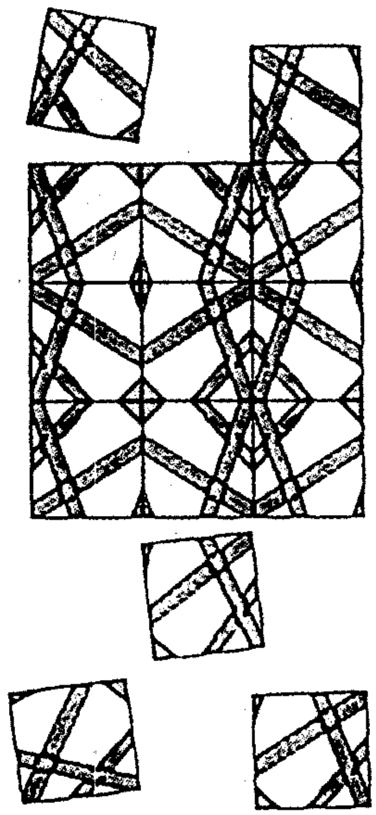


خزندگان، استفادهٔ اشر از خانه‌بندی، نیز استادی او در حرکت بین جهان‌های دوبعدی و سه بعدی را نشان می‌دهد.

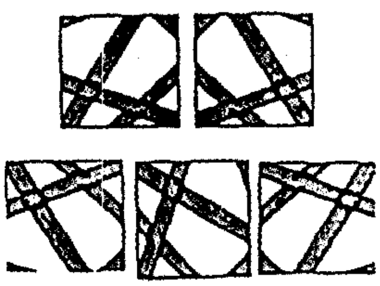
دایره‌ها، بیضی‌ها، مارپیچ‌ها، چندوجهی‌ها و سایر اجسام اشکالی هندسی‌اند که در آثار اشر یافت می‌شوند. مثلاً تابلوی سه کره تصور سه بعدی کره‌ها را پدید می‌آورد، گرچه کاملاً از دایره و بیضی تشکیل شده است. در طرح ستاره‌ها انواع اجسام، از جمله اجسام افلاطونی را می‌بینیم، در حالی که در تابلوی ستاره گون چهار وجهی، چهار وجهی مورد توجه است، و در تابلوی گرانش دوازده وجهی ستاره‌وار حضور دارد.

اشر به مفاهیم نامتناهی جان بخشیده است. نیازی به عرضهٔ تعریفی برای آن نیست، کار او معنی آن را نشان می‌دهد. در تابلوی *گرداب‌ها*، مارپیچ‌ها چشم انسان را به سفری بی‌انتها می‌برد. در تابلوی *حد مربع* احساس زنجیرهٔ نامحدودی تصویر شده است که به مرز خویش نزدیک می‌شود. تابلوی *حد دایره* هم مدلی آرمانی برای هندسهٔ نااقلیدسی محدود و در عین‌حال نامتناهی هانری پوانکاره است. ما هر دو مفهوم بی‌نهایت و خانه‌بندی فضا را در تابلوی تقسیم فضای مکعب می‌یابیم.

سرانجام در حوزهٔ خطاهای بصری، اشر هنرمندی استثنایی است. استفادهٔ او از این اشکال هندسی ناممکن مانند سه ضلعی پن رُز[1] به فریب دادن چشمان و گیج کردن ذهن کمک می‌کند. تابلوی *آبشار* او ما را وامی‌دارد که باور کنیم آب در حلقه‌ای بی‌پایان بالا می‌رود، در حالی‌که در تابلوی *صعود و فرود* دو گروه از افراد را می‌بینیم — یک گروه یکریز از پلکانی بالا می‌روند و گروه دیگر از یک پلکان همه در یک حلقه پایین می‌آیند. اشکال ناممکن نیز ابزاری برای ایجاد توهم در تابلوهای چشم‌انداز و نسبیت است. اشر در *کوژوکاو* استاد توهم نوسانی است. چشمان و ذهن ما در داخل و خارج سازه‌ای باورنکردنی و چهره‌هایی چند عقب و جلو می‌رود. مثلاً در یک لحظه گنبد قوسی کف است و سپس در چند ثانیه سقف می‌شود.



کشف آثار اشر در سطوح مختلفی ارضاءکننده است. این معرفی تنها نگاهی گذرا به گنجینهٔ اندیشه‌های ریاضی است که در آثار اشر یافت می‌شود.



اشر بر هنر خانه‌بندی تسلط داشت. او یک مُهر خانه‌بندی نیز طراحی کرده بود. شش وجه مهر مکعب شکل طرحی در شش موقعیت متفاوت دارند. بنابراین وقتی مهر بر روی یک قطعه کاغذ غلتانده شود، طرح خانه‌بندی می‌شود. طرحی که در اینجا می‌بینید با مهر ایجاد نشده است. به‌جای آن از کامپیوتر برای چرخاندن و برگرداندن این طرح استفاده شده است تا بتوان خانه‌بندی کرد.

---

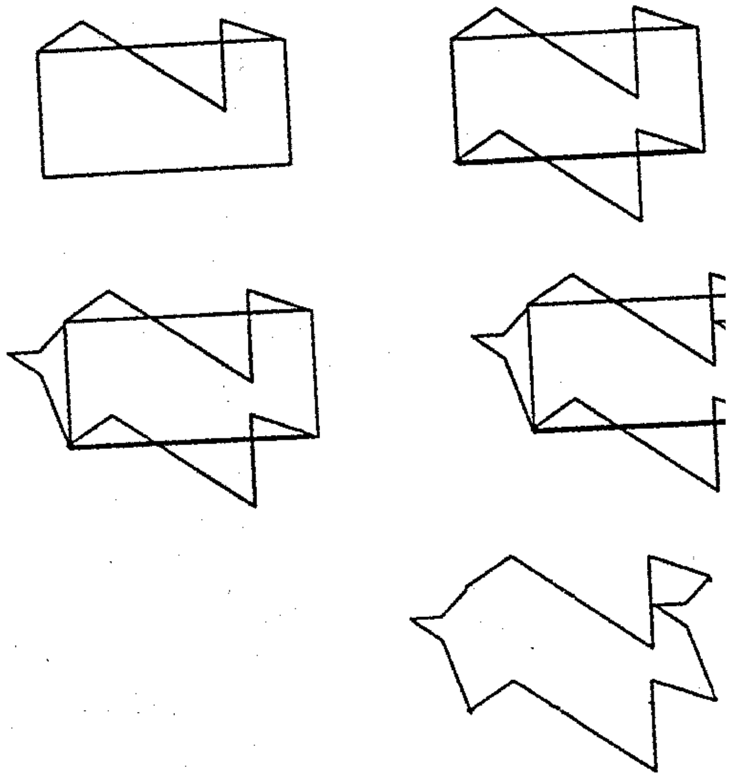
۱. به شکل بالای صفحه ۳۲ مراجعه شود.

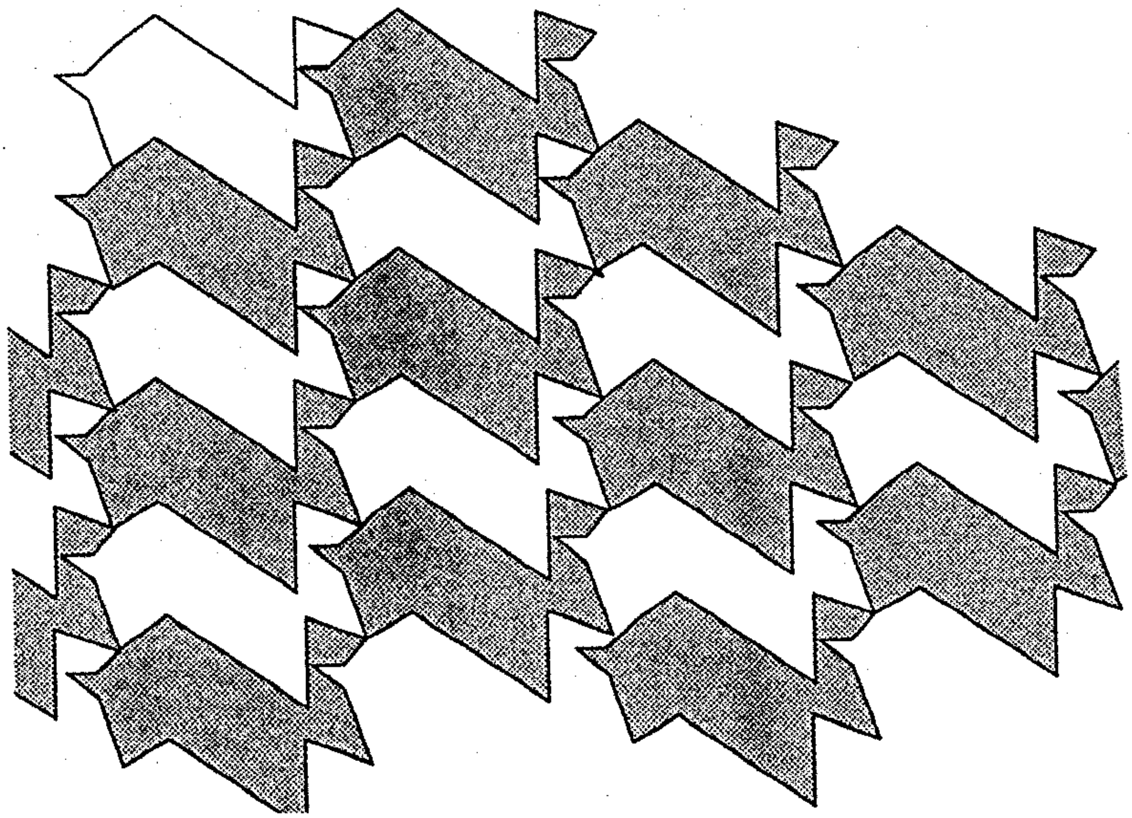
خانه‌بندی صفحه با مستطیل دستکاری شده

با تغییر در یک طول مستطیل شروع کنید. بخش تغییر یافته را به روی طول دیگر انتقال دهید.

حالا یکی از عرض‌ها را تغییر دهید و بخش تغییر یافته را به روی عرض دیگر انتقال دهید.

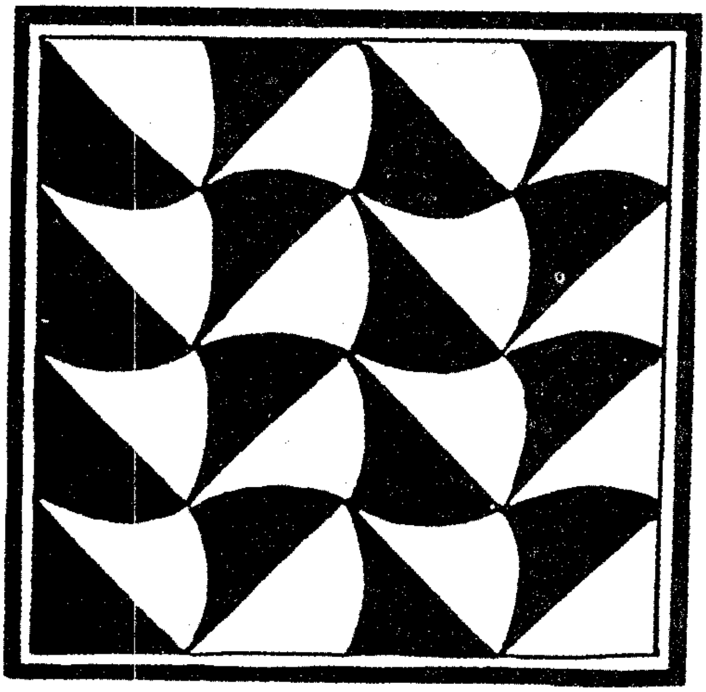
حالا با شکل به دست آمده صفحه را خانه‌بندی کنید.





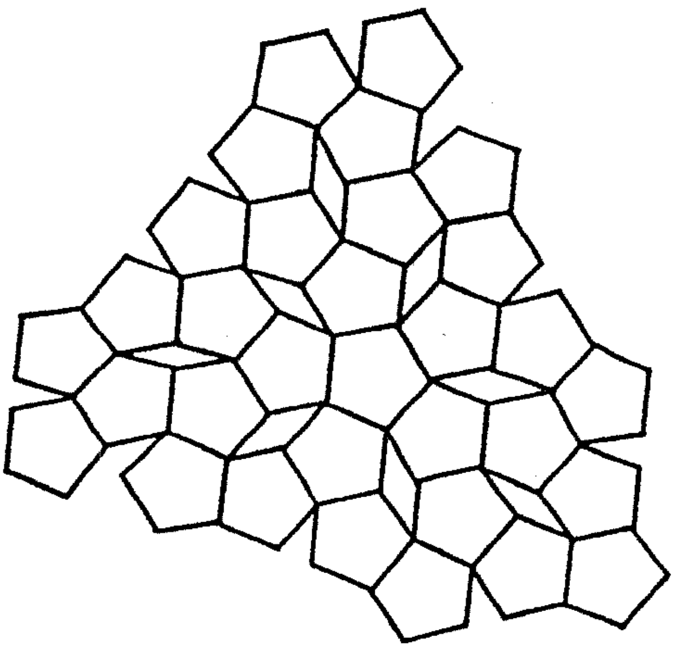
...انه‌بندی در ...ذشته

از خانه‌بندی‌های لانهٔ زنبور در طبیعت تا کاشیکاری‌های رومی و تا کاشی‌های یونان باستان، طرح‌های شکوهمند هنرمندان مسلمان در الحمراء تا خانه‌بندی‌های خارق‌العادهٔ اشر، تا سادگی کاشی‌های پن‌رُز ــ خانه‌بندی قرن‌ها و قرن‌ها وجود داشته است.



کف‌های موزاییکی رومی طرح‌های متنوعی دارند. این الگوی ساده و زیبا در حمام‌های کاراکالا در رم مشاهده می‌شود.

در اینجا یک طرح خانه‌بندی داریم که آلبرشت دورر با استفاده از پنج ضلعی و لوزی ساخته است، و به قرن پانزدهم بازمی‌گردد.

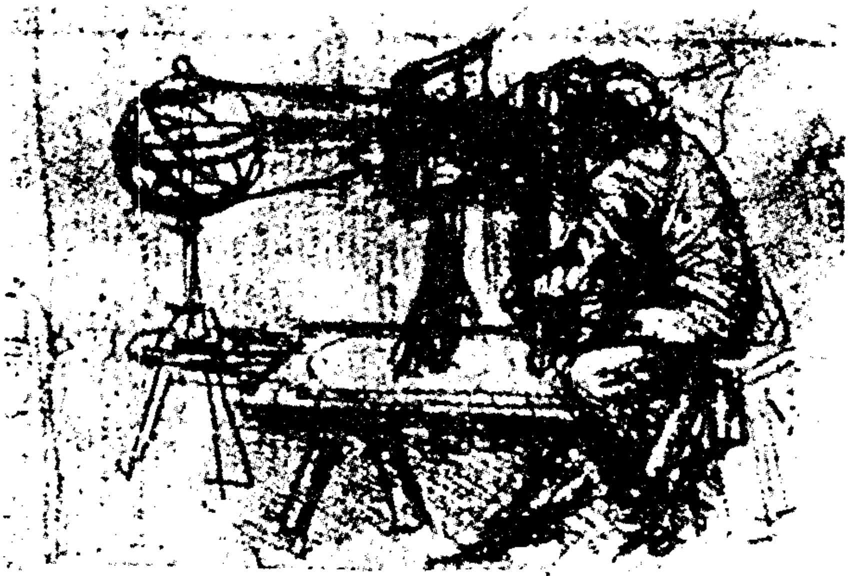


هندسه تصویری و هنر

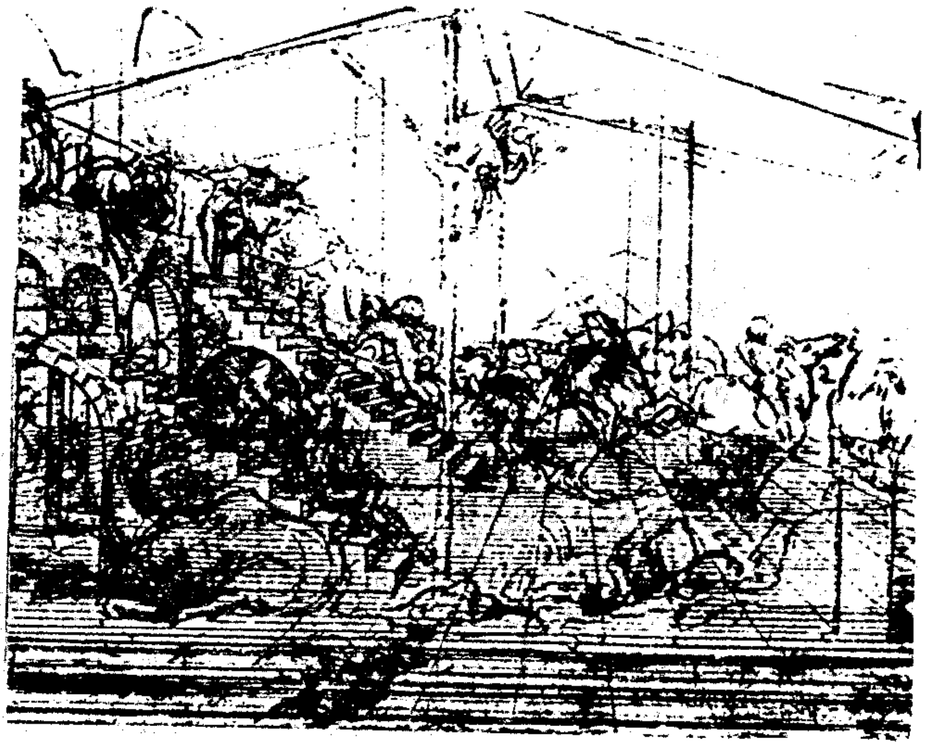
هندسهٔ تصویری حوزه‌ای از ریاضیات است که با ویژگی‌ها و روابط فضایی شکل‌ها در هنگام تصویر کردن آنها ــ و بدین ترتیب با مسائل پرسپکتیو سروکار دارد. بسیاری از هنرمندان قرن پانزدهم اغلب در تعدادی از رشته‌های مختلف کار کرده‌اند. تعدادی از این هنرمندان، مانند جوتو دی بوندونه (۱۳۳۷-۱۲٦٦)، لئون باتیستا آلبرتی (۱٤۷۲-۱٤۰٤)، پیرودلا فرانچسکا (۱٤۹۲-۱٤۱۰)، لئوناردو داوینچی و آلبرشت دورر در حالی که هنر خود را دنبال می‌کرده‌اند مهندسی، ریاضی، علوم و معماری را مورد بررسی قرار داده‌اند. در نتیجه هنرمندان دورهٔ نوزایی مفاهیم ریاضی، مانند هندسهٔ تصویری را با آفرینش آثارشان پیوند زدند. این هنرمندان روش‌هایی را برای نقاشی صحنه‌های سه بعدی واقع‌گرا بر روی بوم دو بعدی پدید آوردند. آنان چگونگی تغییر اشیا را زمانی‌که از فاصله‌ها و موقعیت‌های مختلف به آنها نگاه می‌کنیم تحلیل و اندیشهٔ پرسپکتیو را ابداع کردند. آنان استدلال کردند که هرگاه منظرهٔ بیرون را از پنجره نگاه کنند می‌توانند آنچه را از پنجره دیده‌اند، اگر چشم‌شان را در یک نقطهٔ کانونی نگهدارند، به صورت مجموعه‌ای از نقاط دید تصویر کنند. این پنجره به جای بوم نقاشی عمل می‌کند. طبیعی است این صفحه از جایگاه چشم هنرمند و موقعیت بوم تأثیر می‌پذیرد. تعدادی از هنرمندان عملاً ابزاری مکانیکی برای ترسیم پرسپکتیو، آن‌طور که در دو نمودار نشان داده شده است، اختراع کردند.

ابزار ترسیم پرسپکتیو آلبرشت دورر.

آثار هنرمندان در زمینهٔ پرسپکتیو بر شکل‌گیری هندسهٔ تصویری تأثیر گذاشت. همان‌طور که توپولوژی ویژگی‌های اشیا را که پس از اعمال تبدیلات ثابت می‌مانند مورد مطالعه قرار می‌دهد، هندسهٔ تصویری خواصی از شکل‌های مسطح را مورد بررسی قرار می‌دهد که پس از تصویر شدن تغییر نمی‌کنند. مثلاً یک دایره را اگر از کنار نگاه کنیم مانند یک بیضی دیده می‌شود. به همین نحو مربع به چهارضلعی دیگری تبدیل

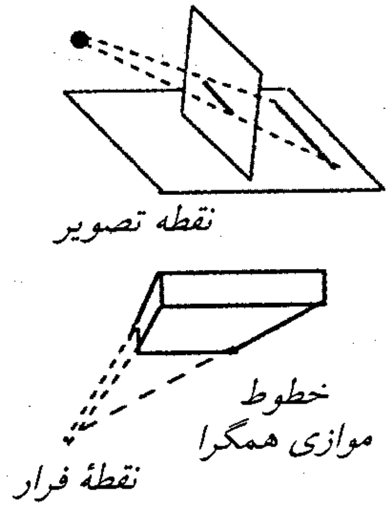


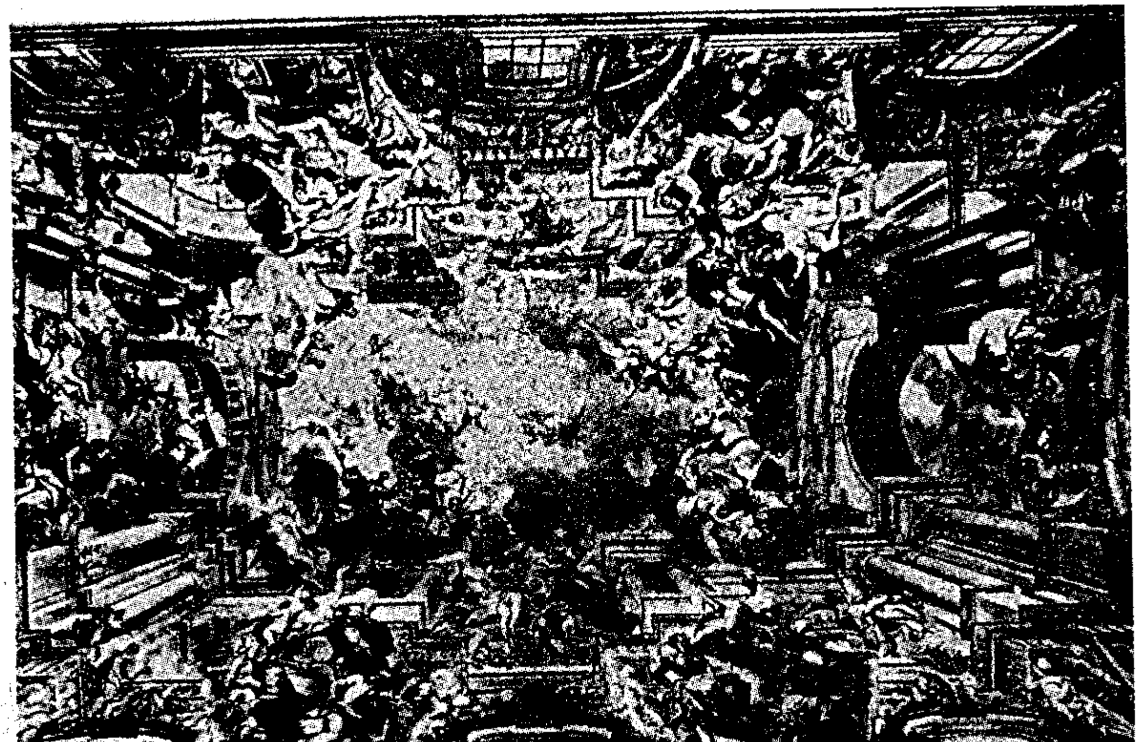
اسپکتوگراف لئوناردو داوینچی.



بررسی تابلوی پرستش جادوی لئوناردو استفادهٔ او از پرسپکتیو خطی و نقطهٔ فرار را نشان می‌دهد.

می‌شود. ژیرار دزارگ معمار، مهندس و ریاضیدان قرن هفدهم با تأثیر گرفتن از پرسپکتیو در هنر دورهٔ نوزایی و برای کمک به هنرمندان بررسی هندسهٔ تصویری را آغاز کرد. او قضیه‌هایی نوشت (قضیهٔ دزارگ) که هنوز هم در بررسی هندسهٔ تصویری نقشی اساسی دارند. کار او بر ریاضیدانان بعدی در این حوزه، به ویژه بلز پاسکال (۱۶۶۲–۱۶۲۳) و ژان ویکتور پونسله (۱۸۶۷–۱۷۸۸) تأثیر گذاشت. هنرمندان دورهٔ نوزایی برای آفرینش نقاشی سه بعدی از مفهوم‌های هندسهٔ تصویری، یعنی نقطهٔ تصویر، خطوط موازی همگرا و نقطه‌های فرار استفاده کرده‌اند.





این اثر آندره آدل پوتزو (حدود ۱۶۸۵) راهب یسوعی بر روی سقف نیم استوانهٔ کلیسای سنت ایگناتیوس در رم نقاشی شده است. نقاشی دیواری او نمونه‌ای عالی از پرسپکتیو است که مفاهیم هندسهٔ تصویری با یک نقطهٔ فرار را نشان می‌دهد. در واقع می‌توان آن را بسیار دقیق دانست. علامتی بر روی کف کلیسا، نشان می‌دهد که بیننده کجا باید بایستد تا تأثیر کامل موردنظر هنرمند را احساس کند. در این محل، بیننده عملاً حس می‌کند سقف نامتناهی و ورود سنت ایگناتیوس به بهشت واقعی است. دیدن نقاشی از نقاط دیگر تأثیر معوج و ناخوشایندی ایجاد می‌کند.

...زش هنر و ریاضیات در
...ر آلبرشت دورر

...هندسه شالودهٔ نقاشی است.
ـ آلبرشت دورر

آلبرشت دورر (۱۵۲۸-۱۴۷۱) هنرمندی با استعدادهای فراوان بود. پدر دورر امیدوار بود که از ۱۸ فرزندش آلبرشت، کار او، زرگری را دنبال کند. بنابراین دورر در نزد میخائل وُلگموت کارآموزی کرد که اتفاقاً او نیز هنرمند بود. دورر پس از سه سال کارآموزی، به مسافرت و کار در سرتاسر اروپا پرداخت، و طی آن نقاشی، حکاکی، چاپ و ساخت گراور چوبی را آموخت، که همهٔ آنها بر کار او تأثیر گذاشت. او احساس می‌کرد که مطالعهٔ ریاضیات، به ویژه هندسه، پرسپکتیو و مفهوم‌های هندسهٔ تصویری موجب بهبود هنر شده است. دورر کار زیادی نیز در زمینهٔ تناسب در بدن انسان انجام داد. علاوه بر آن کتاب‌هایی دربارهٔ ریاضیات مورد استفادهٔ خویش نوشت. تعدادی از آثار او اصیل و دقیق بودند[1]، در حالی‌که سایر کارها و ترسیم‌های هندسی او تقریبی و در خدمت نیازهای هنری او بودند. در این راه او ابزارهایی مکانیکی برای کمک به هنرمندان در ترسیم پرسپکتیو ابداع کرد.

گراوری چوبی در رساله‌ای دربارهٔ هندسه از دورر.

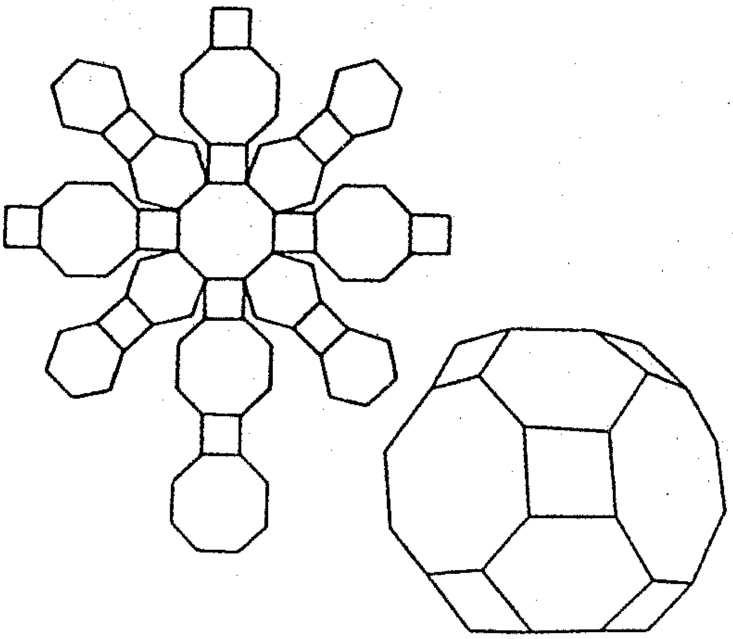
۱. دورر با دنبال کردن نقطه‌ای از یک دایره و چرخش آن در مسیر محیط دایرهٔ دیگری برون چرخزادی پدید آورد. اما چون معلومات جبری کافی نداشت این منحنی را تحلیل نکرد. به همین نحو، مارپیچ‌هایی از تصویر کردن منحنی‌های فضایی فنردار ترسیم کرد، اما آنها را از نظر ریاضی دنبال نکرد.

بخش‌های زیر روشن می‌سازد چگونه کار او یک زمینه ریاضی داست و ریاضیات به کار هنری او و سایر آفرینش‌هایش بی‌اندازه کمک کرد.

در گراور چوبی مالیخولیای دورر، مربعی جادویی در پس تصویر، اجسام هندسی و پرتوهای خورشید را، که مانند خط‌های تصویر در این تصویر پرسپکتیو عمل می‌کنند می‌بینیم.

ترکیب مکعب ـ هشت وجهی برش خورده

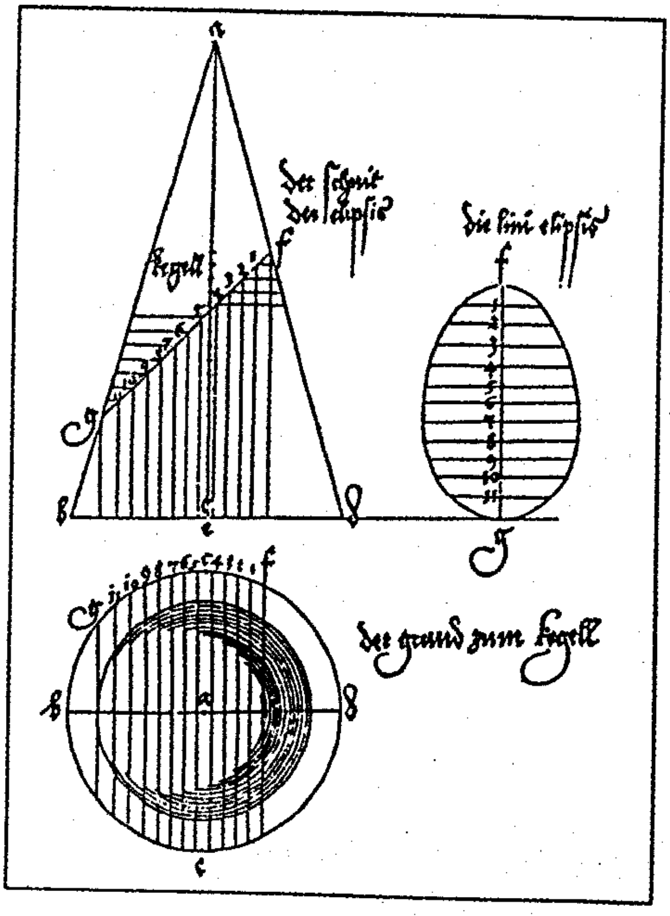
دورر علاوه بر بسیاری روش‌های نوآورانه‌ای که ابداع کرد، امتیاز پیشگامی در ترسیم اجسام بر روی صفحه به صورت سوار نشده را داشت. در اینجا ترسیم یکی از این اجسام را به وسیلهٔ دورر می‌بینیم، که وقتی بریده و سوار شدند یک مکعب هشت وجهی برش خورده را می‌سازد.



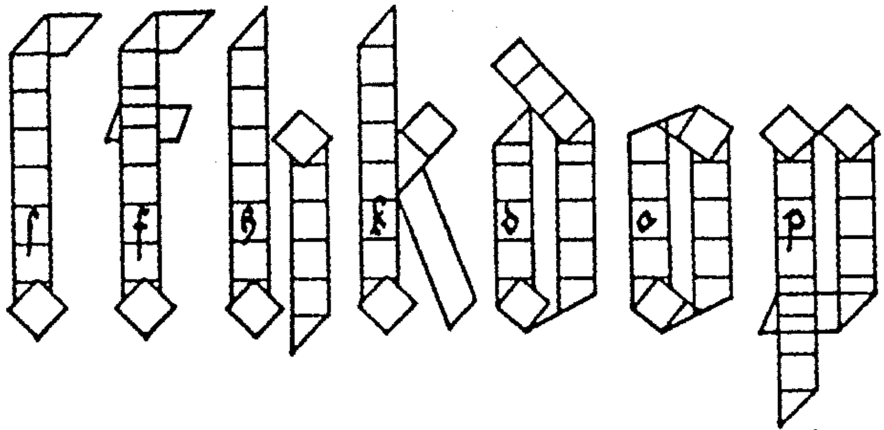
مقاطع مخروطی دورر

آلبرشت دورر در این شکل برداشت خود را از مقطع مخروطی نشان می‌دهد. بیضی او تا حدی تخم‌مرغی شکل است و حکایت از این دارد که او یا بر آن بود که مایل بودن صفحهٔ برش مخروط، بیضی را در بالا باریک‌تر می‌کند یا در محاسباتش اشتباه کرده است. بدون توجه به این مطلب، دیدن کار او دربارهٔ بیضی جالب است.

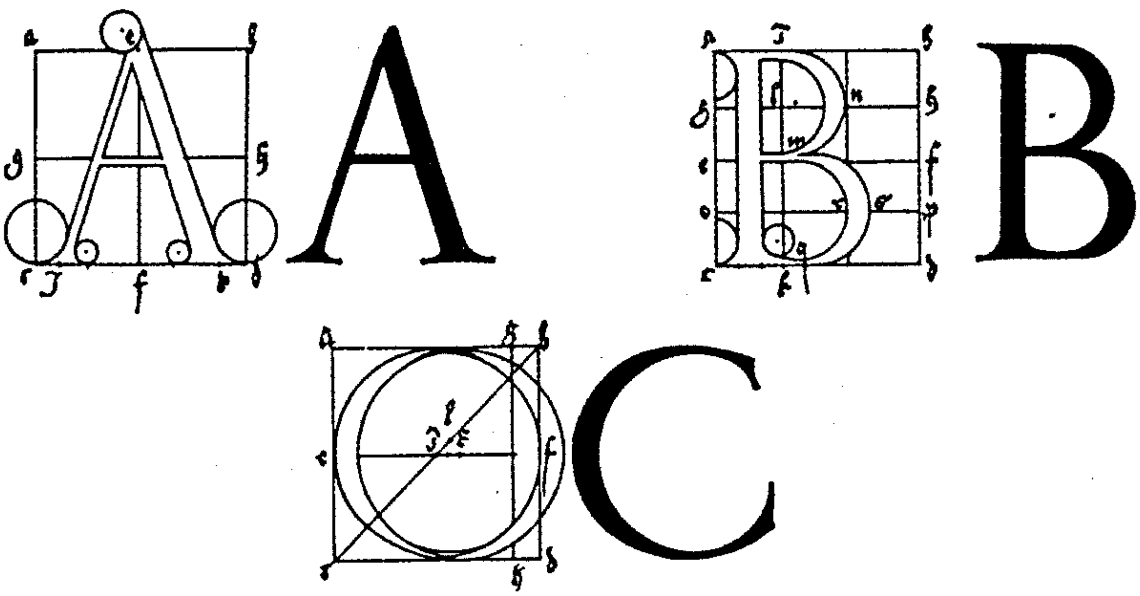
از رساله‌ای دربارهٔ ترسیم‌های هندسی از آلبرشت دورر.



دانه‌بندی نخستین



دورر را می‌توان آغازگر ارائهٔ مفهوم توپوگرافی دانست. او در یکی از کتاب‌هایش ترسیم هندسی حروف رومی را نشان می‌دهد. دورر روش ریاضی خود را برای حروف گوتیک، با ساخت هر حرف از ترکیب مربع‌ها، مثلث‌ها، ذوزنقه‌ها یا متوازی‌الاضلاع‌ها ابداع کرده بود. او ساختار حروف گوتیک را با استفاده از این اجزای سازنده ــ تا حدی مشابه با روش شکل‌گیری حروف با استفاده از پیکسل[1]‌ها در نقش اجزای سازنده در کامپیوتر ساماندهی کرده بود.

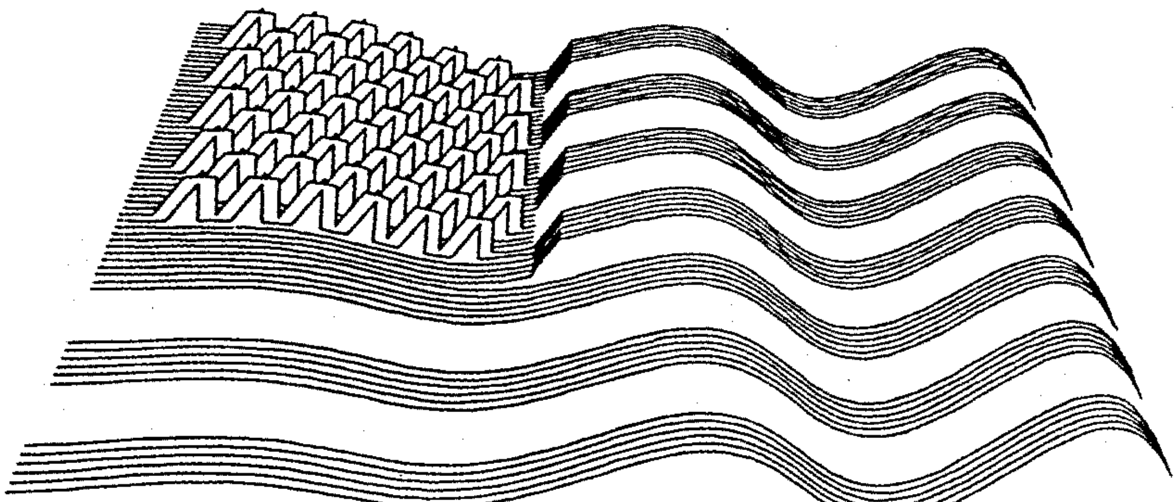


این ساخت‌های هندسی در دورهٔ نوزایی ابداع شده‌اند،
گرچه این اندیشه‌ها در آن زمان منتشر نشده بودند.

۱. pixel کوته نوشت picture element *(تصویر دانه)* که نمایش تصویری یک بیت بر روی صفحهٔ کامپیوتر است. یک بیت bit کوته نوشت binary digit (رقم دودویی) است که کوچک‌ترین واحد اطلاعاتی است که کامپیوتر می‌تواند داشته باشد. ارزش بیت مطابق با اعداد ۰ یا ۱ است، و جریان الکتریکی «خاموش» یا «روشن» را نشان می‌دهد که به مربع سفید یا سیاه بر روی پرده تبدیل می‌شود.

هنر کامپیوتری

ابزارهای هنرمند در طی قرن‌ها گستره‌ای از یک تکه چوب تا قلم موی نقاشی تا ابزارهایی مانند جعبهٔ تاریک عکاسی و پنجرهٔ پرسپکتیو داشته است. امروزه هنرمندان شکل‌ها یا رسانه‌های جدید هنری را کشف می‌کنند که با ریاضیات ـ کامپیوتر ـ پیوند دارد. هنر کامپیوتری تا این اواخر محصول کار ریاضیدانان، دانشمندان، مهندسان و تقریباً همهٔ افراد به جز هنرمندان بود. در آغاز، با سیلی از آثار هنری بسیاری روبرو بودیم که به کوک زدن منحنی‌ها، طراحی با خطوط و توهمات بصری شباهت داشتند.

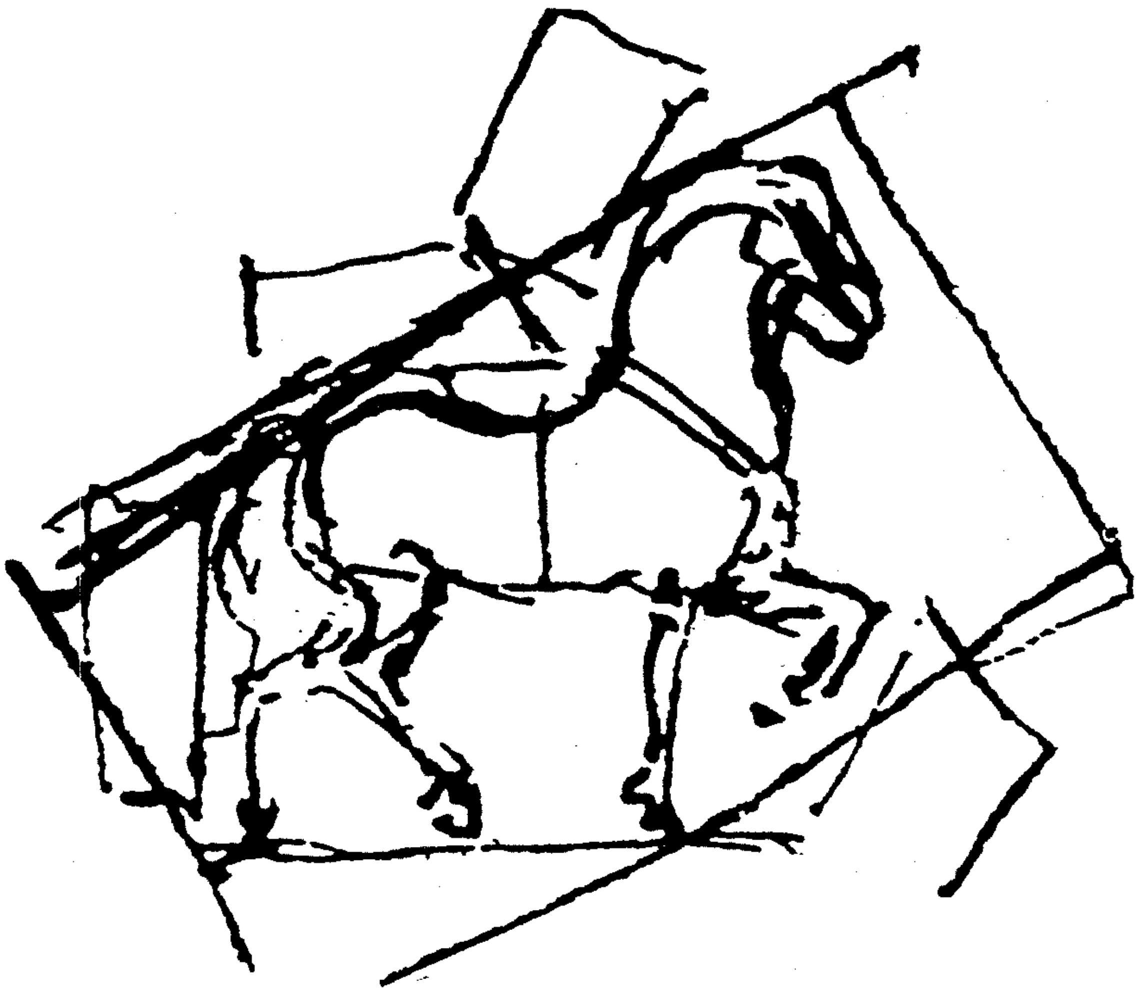


هنر کامپیوتری. از گرافیک‌های کامپیوتری اثر م. ل. پروئیت.

امروزه کامپیوتر نقش مهمی در هنر تجارتی دارد. یک هنرمند مسلط به کامپیوتر با نرم‌افزاری پیشرفته می‌تواند در چند دقیقه اندیشه‌های هنری گرافیکی برای تبلیغات را به انواع بسیاری از شیوه‌های چاپ با استفاده از رنگ‌های مختلف، بزرگ و کوچک کردن اندازهٔ اشیا، چرخاندن آنها، رونوشت برداری و تکثیر یک شکل تبدیل نماید. در گذشته این تغییرات اگر چند روز وقت هنرمند را نمی‌گرفت، چند ساعتی وقت می‌برد.

این نقاشی با جلوهٔ رنگ و روغن، با پویش (اسکن کردن) یک عکس و تبدیل آن به‌وسیلهٔ کامپیوتر به‌دست آمده است.

مهندسان، معماران و سایر طراحان در به‌کارگیری کامپیوتر در کارهایشان تردید نکرده‌اند. تنها با چند کلیک یک ماوس به آسانی ساختمانی می‌تواند تغییر کند، صفحه‌ای می‌تواند بچرخد تا تمام پرسپکتیوهای ممکن به نمایش درآید، سطح مقطع‌ها می‌توانند اضافه شوند و قطعات بدون هیچ تلاشی اضافه یا کم شوند. این کار در گذشته به کندی و با زحمت انجام می‌گرفت.



لئوناردو داوینچی با کامپیوترهای پیشرفتهٔ امروزی می‌توانست این طرح را از طریق یک برنامهٔ گرافیکی کامپیوتری پیاده کند.

هنرمندان در طی قرن‌ها از وسایل گوناگونی برای خلق آثارشان استفاده کرده‌اند — آبرنگ، رنگ و روغن، آکریلیک، گچ و غیره. هنرمندانی وجود دارند که احساس می‌کنند کامپیوتر ابزاری مصنوعی است که فاقد آزادی بیان خودجوش است. آنها تماس مستقیم دستان‌شان با وسیلهٔ مورد انتخاب‌شان را به جای کار با ابزاری الکتریکی بر روی یک صفحه کلید و پردهٔ تصویر یا با قلم و لوح الکترونیکی و پرده ترجیح می‌دهند. دیگران به کار با کامپیوتر همچون یک چالش می‌نگرند.

با نرم‌افزار و سخت‌افزاری پیشرفته، می‌توان رنگ‌ها را بر روی پرده ترکیب کرد. خطوط سخت کامپیوتری را به آسانی می‌توان با هر نوع منحنی نرم کرد. می‌توان اثر رنگ و روغنی را به آبرنگ تبدیل، و شکل قلم مو را به دلخواه عوض کرد. بخش‌های

مختلف را می‌توان کپی کرد، پاک کرد و در جای دیگری گذاشت. هنرمند کاملاً مسئول کار خلاق خویش است. نتیجه را می‌توان چاپ کرد یا به صورت فیلم درآورد. فیلم امکان بزرگ کردن آن را به هر اندازه‌ای فراهم می‌آورد. شاید در آینده چاپگری طراحی شود که بتواند بافت اثری را که هنرمند آفریده است ثبت کند، یا شاید آن را به نوبهٔ خود شکل تازه‌ای از بافت بدانیم.

هنرمندان آثار ارزشمند هنری را که با کامپیوتر خلق کرده‌اند در گالری‌های معروف بین‌المللی به نمایش گذاشته‌اند، اما هنوز برچسب هنر کامپیوتری دارند. هنوز آنها را صرفاً هنر نمی‌نامند.

لئوناردو داوینچی در مورد استفاده از کامپیوتر در هنر چه فکر می‌کرد؟ با در نظر گرفتن اشتیاق او به نوآوری[1]، می‌توان فرض کرد که او استفاده از کامپیوتر را تحریم نمی‌کرد. او گفته است «... هیچ یک از بررسی‌های انسان را نمی‌توان علم نامید مگر آنکه مسیر خود را از طریق توضیح و نمایش ریاضی دنبال کند». آثار او نشان می‌دهد که او این مسأله را به هنر نیز تعمیم می‌داد ــ مثلاً استفادهٔ غالب از مستطیل طلایی در بسیاری از کارهایش و مفهوم‌های هندسهٔ تصویری در تابلوی شاهکارش با عنوان *شام آخر*.

نباید شکلی از هنر را بهتر از شکل دیگری از هنر دانست، آنها فقط متفاوت‌اند. هنرمندان باید در انتخاب ابزار و وسایل خویش آزاد باشند.

---

۱. یادداشت‌ها و بسیاری از نوآوری‌های او مورد استفادهٔ بسیاری از هنرمندان در بهبود و تسهیل کار هنری‌شان بوده است. گرایش‌های ریاضی لئوناردو او را به اختراع انواع پرگارهای ویژه برای ترسیم سهمی، بیضی، و اشکال متناسب رهنمون شد. اختراع پرسپکتوگراف، که بسیاری از هنرمندان از آن برای ترسیم اشیا به صورت پرسپکتیو استفاده کرده‌اند، نیز به او نسبت داده شده است.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{1}$$

$$= -e^{\pi i} = 1 \div 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{I}}$$

$$= 1 \times 1 = \text{googol}^{0} = 1^{\text{9}}$$

$$= \frac{1000-1}{999} = \int_0^1 3x^2 dx$$

$$\sin(\pi/2) = -\left(\frac{X-Y}{Y-X}\right)$$

WITH X;

جادوی اعداد

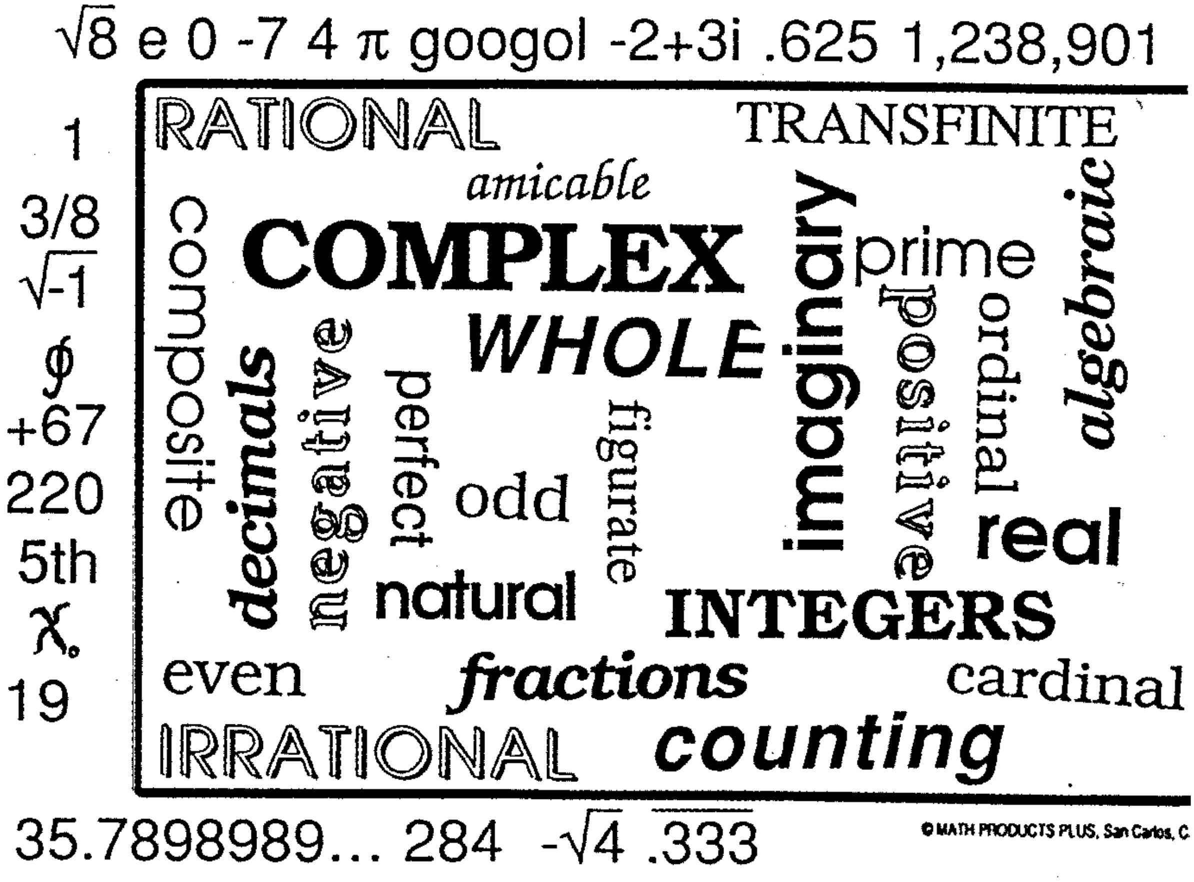
کشف جادوی اعداد
چهارگانه‌ها و بازی اعداد
کانتور و اعداد اصلی نامتناهی
فانتزی اعداد
دربارهٔ مربع‌های کامل
داستان عدد π
جاذبهٔ اعداد اول
کانتور و عددهای حقیقی ناشمارا
استدلال اقلیدس دربارهٔ بی‌پایان بودن اعداد اول
جادوی اعداد
بازی با اعداد

علم ریاضیات محض، در پیشرفت‌های جدید خود، می‌تواند ادعای آن را داشته باشد که اصیل‌ترین آفرینش روح انسان است.

ـ آلفرد وایتهد

گروهی بر آنند که شیوهٔ عمل اعداد و نتایج به دست آمده کیفیتی جادویی دارند. شاید تصور شعبده بازی به این دلیل تشدید می‌شود که انواع بسیاری از اعداد وجود دارد ــ اعدادی که به نظر می‌رسد زاییدهٔ تخیلات موهوم ریاضیدانانند.

در مدرسه ابتدا با اعداد درست آشنا شدیم. اولین کار ما یادگیری شمارش، و سپس کار با آنها بود. به محض اینکه احساس کردیم شاید بر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها مسلط شده‌ایم، آنگاه ظاهراً به‌طور ناگهانی ــ اعداد کسری، اعشاری، اعداد صحیح و ... ــ ظاهر شدند. گاهی آنها هنگامی پیدایشان می‌شد که به‌نظر می‌رسید بعضی از



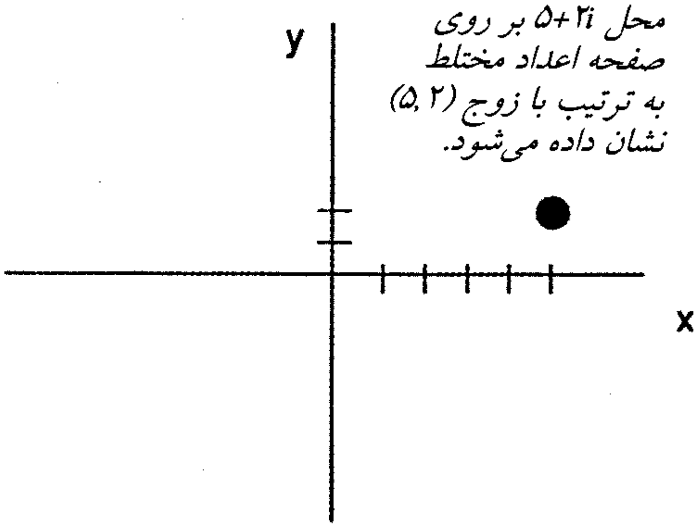
مسائل راه حلی ندارند. آنگاه ناگهان اعداد جدیدی به یاری ما می‌آمدند، مثلاً ۷ تقسیم بر ۲ نه ۳ بود نه ٤، پس یاد گرفتیم که عدد ۳ و $\frac{1}{2}$ کارساز است.

آنچه بسیار حیرت‌انگیز است این است که چند نوع عدد و انواع رده‌بندی‌های این اعداد با ویژگی‌های فردی آنها داریم. به نظر می‌رسد که اعداد خود را تولید می‌کنند. در اینجا فهرستی ناقص از انواع اعداد با توصیف آنها ارائه می‌شود ــ اعداد شمارشی (که اعداد طبیعی هم نامیده می‌شوند) «...، ۳، ۲، ۱»، اعداد درست شامل اعداد شمارشی به اضافهٔ صفر)، اعداد صحیح ({...و۳و۱و۰و۱- و۲- و۳- و...})، اعداد گویا (شامل اعداد کسری، اعداد مخلوط، کسرهای بزرگ‌تر از واحد، کسرهای کوچک‌تر از واحد، کسرهای اعشاری، کسرهای اعشاری متناوب)، اعداد گنگ (شامل اعداد اعشاری نامتناوب نامتناهی، ریشه‌های ناکامل، π، e، ϕ) عددهای حقیقی، موهومی، مختلط، غیرجبری، ترامتناهی، کامل،... .

در این فصل شما را با بعضی از این اعداد، خواص آنها، و بعضی از ویژگی‌های نامتعارف آنها آشنا می‌کنیم که ممکن است با آنها آشنا نباشید، و با آنها که مدتهاست آشنایید آشناترتان می‌کنیم.

چهارگانه‌ها و بازی اعداد

درک چگونگی توصیف اینکه اعداد ابعاد گوناگونی دارند برای غیرمتخصصان دشوار است. به‌نظر می‌رسد که عدد فقط یک عدد است ـــ چیزی که کیفیتی ویژه را بیان می‌کند. چگونه اعدادی مانند یک، دو، سه، چهار و غیره دارای بعدند؟ بسیار خوب، دادن شاخ و برگ دیگری به ویژگی‌های اعداد را به ریاضیدانان واگذار کنیم. مثلاً ریاضیدانان تمام اعداد حقیقی و موهومی را یک بعدی می‌دانند زیرا یک بخش دارند که مقدار آن را بیان می‌کند. علاوه بر آن می‌توان آنها را بر روی یک خط نشان داد ـــ شیء تک بعدی. از سوی دیگر اعداد مختلط دو بعدی نامیده می‌شوند زیرا از یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی تشکیل شده‌اند. مثلاً وقتی $5 + 2i$ را روی نمودار نشان دهیم بر روی صفحه‌ای قرار می‌گیرد (یک شیء دو بعدی) که صفحهٔ اعداد مختلط نامیده می‌شود.



محل $5+2i$ بر روی صفحه اعداد مختلط به ترتیب با زوج (۵،۲) نشان داده می‌شود.

اینک می‌توانید بپرسید از اعداد دوبعدی چگونه استفاده می‌شود؟ و چرا به آنها نیاز است؟ بسیاری از مفهوم‌های ریاضی که کشف یا اختراع شده‌اند، کاربردهای مختلف آنها سال‌ها پس از موجود بودنشان آشکار شده است. اعداد مختلط هم استثنا نیستند. مثلاً امروزه از آنها برای نشان دادن الگوهای جریان در هیدرودینامیک، جریان‌های برق و شکل بال هواپیما استفاده می‌شود. چون این اعداد مختلط سودمند بودند و در حل انواع مسائل مختلف کارایی داشتند، به نظر می‌رسید که گام طبیعی بعدی جستجوی اعداد سه بعدی باشد. گرچه این جستجو موفقیت آمیز نبود، اما به کشف اعداد چهار بعدی، چهارگانه‌ها انجامید. سر ویلیام همیلتون در سال

۱۸۴۳ آن‌ها را اختراع کرد. آنها هم مانند اعداد مختلط با شک و بدبینی روبـرو شـدند. آنها از چهار اندازه یا مشخصهٔ ترسیمی تشکیل شده‌اند ــ مقـادیر محورهـای x، y و z (اعدادی که محل یک نقطه را در فضای سه بعدی مشخص مـی‌کننـد) و یـک کمیـت عددی (کمیتی که جهت را، آن‌طور که مقادیر x، y و z نشان می‌دهد، نشان نمی‌دهـد) مجموعهٔ اعداد چهارگانه، برخلاف مجموعهٔ اعداد حقیقی، موهومی و مختلط، در موقع ضرب کردن جابجایی‌پذیر نیستند ـ ترتیب ضرب کـردن آنهـا در نتیجـه مـؤثر اسـت. امروزه از این اعداد چهاربعدی چگونه استفاده می‌شود؟ یکـی از کاربردهـای معمـولی آنها انتقال اطلاعات گرافیکی بر روی کامپیوترها با دادن چـرخش در سـه بعـد اسـت. داستان زیر به دنبال آن است که نشان دهد چهارگانـه‌هـا،ماننـد سـایر اعـداد، هویـت خاص خود را دارند.

* * *

مطابق معمول در گردهمایی اعداد، شکل‌گیری دارودسته‌ها شروع شده بود. شرم‌آور بود که اعداد نمی‌توانستند خود را خانوادهٔ خوشبختی بدانند.

در طی قرن‌ها، از زمان حضور اعداد شمارشی، اعداد زوج و فرد در این باره به مجادله می‌پرداختند که کدام‌یک مفیدترند. اما با ورود اعداد صحیح شامل اعداد منفی به صحنه، آنها باهم متحد شدند.

اینک در مورد موضوع اصلی گردهمایی شکل‌گیری گروه‌بندی‌ها آغاز شده بود ــ تازه واردین، چهارگانه‌ها، را چه کسی می‌پذیرد؟ اعداد شمارشی همیشه بسیار نخبه‌گرا بوده‌اند ــ آنها تنها پذیرای اعداد صحیح بزرگ‌تر از یک بوده‌اند. آنها به شکل طبیعی خود آمده بودند ــ همه با ترتیبی افزایشی با تنها یک واحد تفاوت بین اعداد پشت سرهم. آنان باید تازه وارد را بررسی می‌کردند تا ببینند در مجموعهٔ آنها قرار می‌گیرد یا نه. اعداد صحیح هم موافق و هم مخالف با چهارگانه‌ها بودند، در حالی‌که که صفر بی‌طرف بود و جانبداری نمی‌کرد زیرا نه منفی و نه مثبت بود.

قطعاً اعداد گویا موضوع را جدی‌تر می‌گرفتند. اما اعداد کسری، مطابق معمول، بیـشتر به نمایش صورت و مخرج خود علاقـه‌منـد بودنـد تـا صـحبت کـردن دربـارهٔ اعـداد اعشاری. از سوی دیگر اعداد اعشاری به اعداد کسری عادت کرده بودند. رفتار عجیب

و غریب کسرها دیگر ناراحت‌شان نمی‌کرد. اعشاری‌ها می‌دانستند که کار کردن با آنها، به‌ویژه با ماشین حساب، بسیار آسان‌تر است. ۰/۰۰۷ اعداد کسری را از مد افتاده می‌خواند. $\frac{1}{7}$ حرفش را قطع کرد و گفت «گرچه برای جمع و تفریق ما باید مخرج مشترک گرفت، و برای ضرب و تقسیم به مقداری کار ماهرانهٔ بیشتر نیاز داریم، و در حالی‌که ما ترجیح می‌دهیم کاملاً ساده شده باشیم ــ تعدادی از نمایش‌های اعشاری شما برای اعداد گویا غیرعادی‌اند. در واقع حافظهٔ بعضی از ماشین‌های حساب نمی‌توانند نمایش اعشاری داشته باشند. بنابراین اعداد گویا، که دربردارندهٔ اعداد شمارشی، اعداد صحیح، کسرها و اعداد اعشاری‌اند، بگومگویشان را ادامه دادند.

چهارگانه با دیدن ادامهٔ جر و بحث با اعداد «گویا»، به شکلی قابل فهم از گروه ریشه‌ها که با مجموعهٔ دربرگیرندهٔ $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$ که جلوی پیشخوان غذا ایستاده بودند، می‌ترسید. چهارگانه شنیده بود که آنها چقدر می‌توانند غیرمنطقی باشند[1]. اما در عین تعجب او، آنها به گفتگو علاقه‌مند بودند. $\sqrt{2}$ گفت «پس من شنیده‌ام شما چند بخش دارید و چیزی هستید که آن را چهار بعدی می‌نامند. خب، خودتان را ناراحت نکنید، من به صورت اعشاری پایان‌ناپذیر و غیرتکراری‌ام. تمام آن رقم‌های همراه ما مایهٔ دردسرند، پس من ترجیح می‌دهم به جای آن لباس جذر خود را بپوشم. شاید شما هم بتوانید روشی کوتاه‌تر برای بیان منظور خود پیدا کنید.»

چهارگانه کمی دلگرم شد و احساس راحتی بیشتری کرد. $\sqrt{3}$ در حالی‌که نمی‌خواست چهارگانه را امیدوار کند گفت شما باید مشکلتان را با مجموعهٔ اعداد مختلط حل کنید. او همهٔ ما ـ اعداد شمارشی، صحیح، حقیقی، موهومی، گویا و گنگ ـ را به خوبی می‌شناسد.

---

۱. irrational در زبان انگلیسی هم به معنی عدد گنگ است، هم به معنی غیرمنطقی.

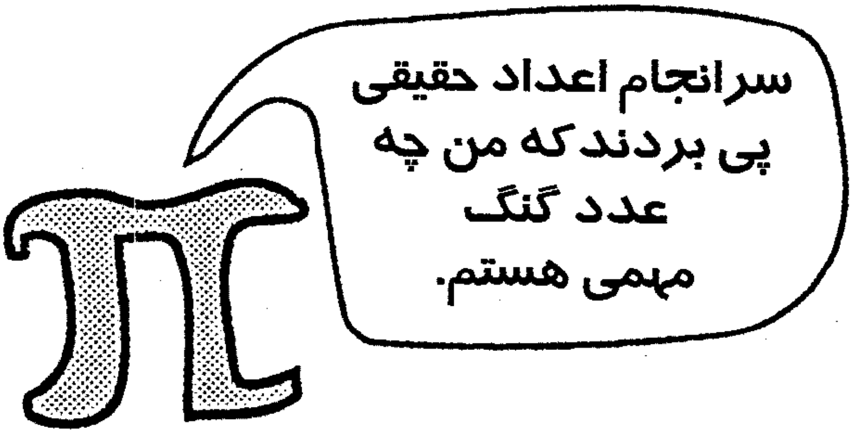
چهارگانه گفت: «من شنیده‌ام که مجموعهٔ اعداد مختلط شخصیتی دوپاره دارند، و بین اعداد حقیقی و موهومی نوسان می‌کنند.»

ناگهان عدد مختلط ۳-۴i دخالت کرد و گفت: «حق با شماست، صفحهٔ اعداد مختلط به هر یک از ما یک نقطه می‌دهد که می‌توانیم در آن مستقر شویم. وقتی اوضاع کاملاً خراب شود می‌توانیم به آنجا پناه بریم. می‌دانم که آن نقطه تنها مال خود من است، و به هیچکس دیگری تعلق ندارد. پس من می‌توانم در آنجا تنها باشم، و از نو تجدیدقوا کنم و استراحت کنم و به تفکر بپردازم. هر یک از ما برای خود نقطه‌ای دارد که می‌تواند آن را خانه‌اش بداند.»

۳-۴i به چهارگانه گفت: «مثل اینکه شما با بردارها و مقدار عددی خود شخصیتی چندگانه دارید. اطمینان دارم صفحهٔ اعداد مختلط جایی برای شما ندارد.»

چهارگانه با لحنی غم‌انگیز گفت: «امیدوارم برای خود نقطه‌ای و خانه‌ای پیدا کنم. کسی نمی‌داند، به کدام راه باید رفت یا بهتر است بگویم معلوم نیست به دنبال چه مجموعه‌ای باید باشم.»

صدای نسبتاً بمی گفت: «قطعاً دشوار است» چهارگانه برگشت و π را دید. «برای من بسیار دشوار بود که اعداد حقیقی مرا بپذیرند. گرچه مانند $\sqrt{2}$ و اعداد دیگری گویا نیستم، مرا فوراً به اعداد حقیقی راه نمی‌دادند و می‌گفتند برخلاف $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ که برای پیدا کردن جای آنها از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌شد، برای پیدا کردن جای درست من راهی وجود ندارد. پس من چه باید می‌کردم؟ باید به گفتگویی سریع می‌پرداختم و سرانجام اعداد حقیقی پی می‌بردند که من چه عدد گنگ مهمی هستم. به‌ویژه چون تمام دایره‌ها برای محاسبهٔ مساحت و محیط‌شان به من وابسته‌اند، و من غیرجبری[1] نیز هستم.» عدد e که لاف‌زن به شمار می‌آمد گفت: «بسیار خب، π طوری حرف می‌زنید که گویا شما تنها عدد غیرجبری هستید. من هم

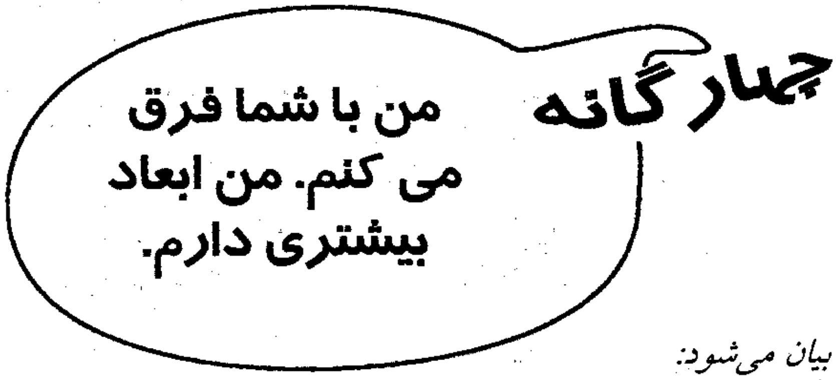


۱. غیرجبری، غیرقابل به‌دست آمدن از طریق عملیات جبری معمولی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) که تنها به شکل سری نامتناهی قابل بیان باشد.

غیرجبری‌ام. مبنایی برای لگاریتم طبیعی، که علاوه بر مورد استفاده بودن در حسابان، در طبیعت فراوان یافت می‌شود.»

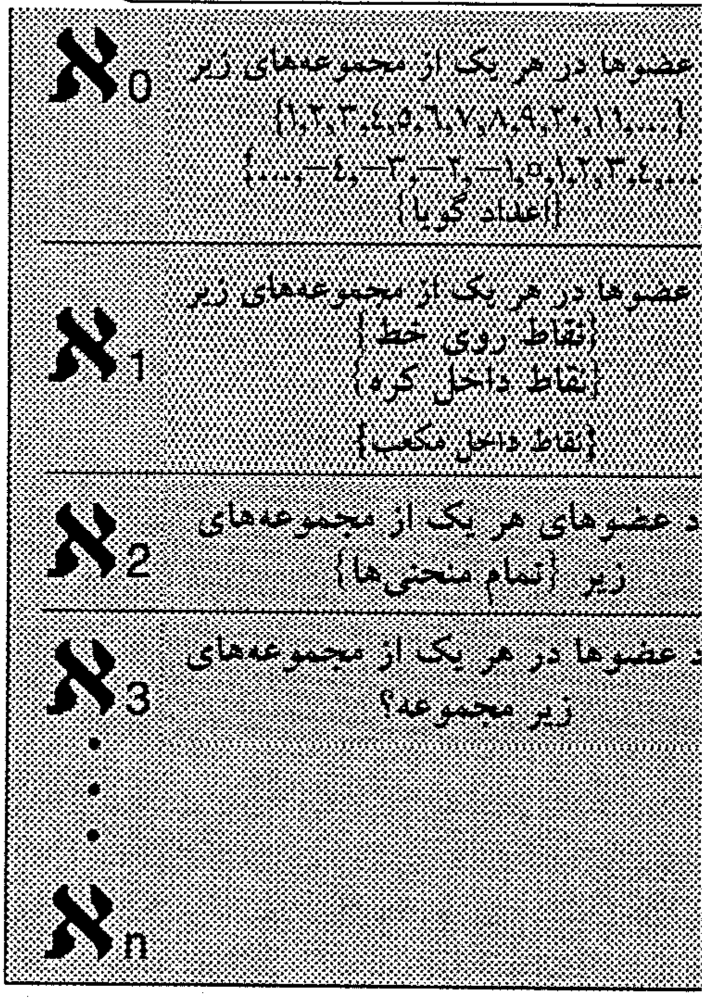
چهارگانه کم‌کم دچار سردرد و از همهٔ جدل‌ها و مسخره‌کردن‌ها خسته شده بود. چهارگانه گفت «شاید من به اینجا تعلق نداشته باشم» تمام اعداد مختلط گفتند: «شاید اما به کجا تعلق دارید؟» و او را مسخره کردند.

«من با شما فرق دارم، من عمق بیشتر، و ابعاد بیشتری دارم، شاید به مجموعهٔ خودم تعلق دارم. بله همین‌طور است من به مجموعهٔ چهارگانه‌ها تعلق دارم. مجموعهٔ اعداد چهاربعدی، چون شکل کلی من چنین است «$q=a+xi+yj+zk$». با گفتن این مطلب از تالار گردهمایی بیرون آمد و ناپدید شد، چنان‌که گویی به بعد دیگری رفته بود.



چهارگانه به شکل زیر بیان می‌شود:
$q=a+xi+yj+zk$ که در آن «a» یک عدد (ثابت) و «$xi+yj+zk$» برداری با x و y و z است که اعداد حقیقی‌اند.

کانتور و اعداد اصلی امتناهی



ما با اعدادی طبیعی، اعداد صحیح، اعداد شمارشی، کاربردها و چگونگی استفاده از آنها در شمارش آشنا هستیم. اما با اعداد ترامتناهی کانتور چطور؟ چه تعداد از آنها موجود است و چه نوع چیزهایی را توصیف می‌کنند؟ اعداد ترامتناهی تعداد اعضای یک مجموعه را توصیف می‌کنند. مثلاً (گلابی، پرتقال، سیب) = a از اعداد اصلی ۳ برای نشان دادن تعداد اشیای این مجموعه استفاده می‌کند. کانتور در سال‌های ۱۸۹۵-۱۸۷۴ نظریهٔ مجموعه‌ها را مطالعه کرد و گسترش داد. چون تعداد مجموعه‌های نامتناهی بسیار زیاد است، برای او آشکار بود که به مجموعهٔ جدیدی از اعداد اصلی نیاز است تا تعداد عناصر مجموعه‌های نامتناهی را توصیف کند. بنابراین او اعداد ترامتناهی $\aleph_0$، $\aleph_1$، $\aleph_2$ و $\aleph_3$، $\aleph_4$،... را ابداع کرد. $\aleph$ نماد حرف الف عبری است. $\aleph_0$ (الف صفر) تعداد اعداد شمارشی است. هر مجموعه‌ای را که بتوان در تناظر یک به یک با اعداد شمارش قرار داد، گفته می‌شود که به تعداد $\aleph_0$ عضو دارد. نمودار بالا تعدادی از مجموعه‌ها را با عدد اصلی الف‌ـصفر $\aleph_0$، الف‌ـیک $\aleph_1$، الف‌ـدو $\aleph_2$ نشان می‌دهد. اما تاکنون کسی با نمونه‌هایی از مجموعه‌هایی سروکار نداشته است که از $\aleph_3$ یا $\aleph_4$ بالاتر از آن استفاده کنند.

فانتزی اعداد

ویژگی‌ها و کارکردهای اعداد گاهی جادویی به نظر می‌رسد. یک عدد سه رقمی انتخاب کنید که یکان، و صدگان آن باهم فرق کند.

مثلاً ۲۸۵. ترتیب ارقام را برعکس کنید: ۵۸۲. عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کنید. ۲۹۷ = ۲۸۵−۵۸۲. دهگان عدد به‌دست آمده و جمع یکان و صدگان آن همیشه ۹ خواهدشد. حالا در عدد به‌دست آمده ارقام را معکوس کنید: ۷۹۲

این دو عدد را باهم جمع کنید

۷۹۲ + ۲۹۷ = ۱۰۸۹

نتیجه همیشه ۱۰۸۹ خواهدبود.

عددی سه رقمی با یکان، و صدگان متفاوت انتخاب کنید **285**

ترتیب ارقام را معکوس کنید **582**

(582-285)

تفاضل آنها را پیدا کنید **=297**

ترتیب ارقام را معکوس کنید **729**

جمع این دو را پیدا کنید **792+297**

همیشه ۱۰۸۹ خواهد شد **=1089**

ربارهٔ
ربع کامل

مربع کامل عددی است که بتواند خود به صورت عددی صحیح نوشته شود. مثلاً ۳۶ برابر با ٦ × ٦ است و ٤٩ برابر با ۷ × ۷ است.

آیا می‌دانستید:

- مجموع اولین n عدد فرد مربع کامل است، یعنی

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + \dots (۲n - ۱) = n^{۲}$$

مثال:

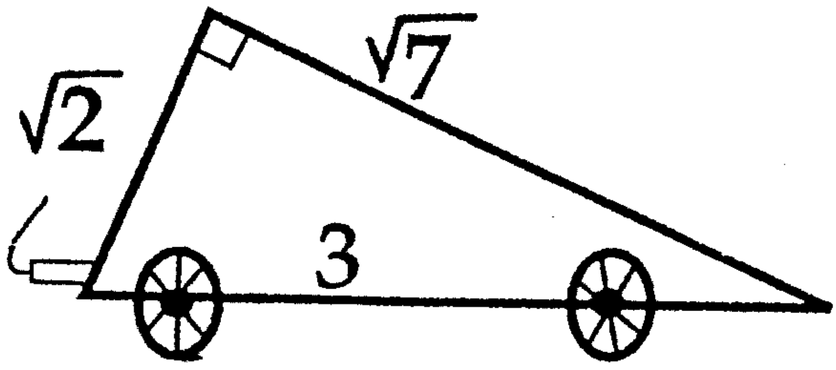
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ = ۲۵ = ۵^{۲}$$

- تمام مربع‌های کامل به ۰، ۱، ٤، ۵، ٦ یا ۹ ختم می‌شوند.
- تمام مربع‌های کامل یا به ۳ بخش پذیرند یا اگر یک را از آن‌ها کم کنیم بخش‌پذیر می‌شوند.
- تمام مربع‌های کامل یا به ٤ بخش پذیرند یا اگر یک را از آن‌ها کم کنیم بخش‌پذیر می‌شوند.
- تمام مربع‌های کامل به ۵ بخش پذیرند یا اگر یک را به آنها اضافه یا از آنها کم کنیم بخش‌پذیر می‌شوند.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 ...

داستان π

در زمان‌های بسیار قدیم مهمانی بزرگی برای اعداد آن زمان برگزار شد. عدد یک با تمام شکوهش آنجا بود. عدد دو با تمام اعداد زوج به دنبالش وارد شدند. و تمام اعداد اول آمده بودند. حتی بعضی از کسرها مانند $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ هم بودند. چند ریشه مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هم که تازگی از اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۳ به‌دست آمده بودند حضور یافتند. اما سر و کلهٔ π که پیدا شد همه پرسیدند «چه کسی شما را دعوت کرده است؟»

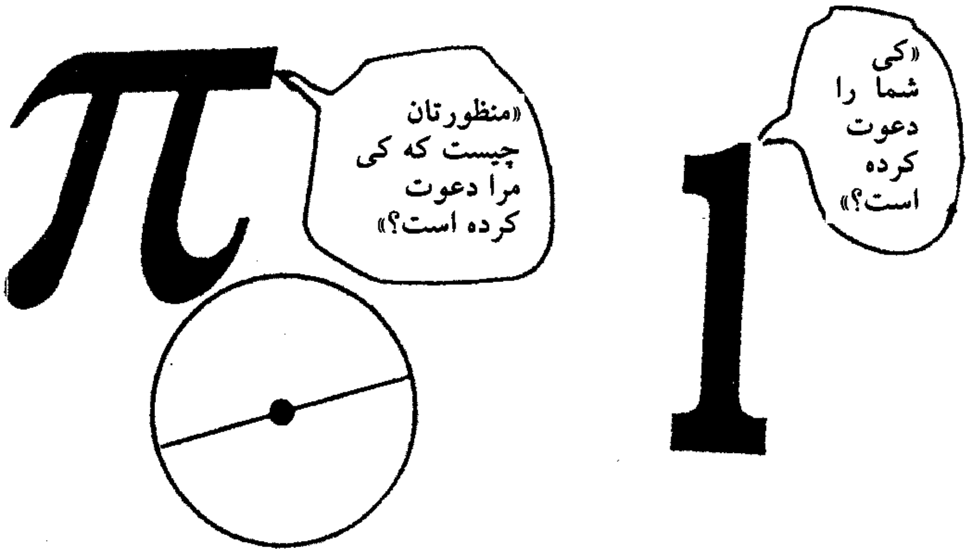


$\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ که به تازگی از مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۳ به‌دست آمده بودند از راه رسیدند.

π پرسید «منظورتان چیست که چه کسی مرا دعوت کرده، من هم یک عددم». «بله، اما شما جایتان را بر روی خط اعداد می‌دانید؟ π پرسید « $\sqrt{2}$ چی؟» $\sqrt{2}$ جواب داد: «به لطف فیثاغورس و استفاده از پرگار، من دقیقاً می‌دانم به کجا در خط اعداد تعلق دارم.»

π شرمنده شد و رنجید، اما گفت: «کمی بعد از ۳».

همگی پرسیدند «اما دقیقاً کجا؟»

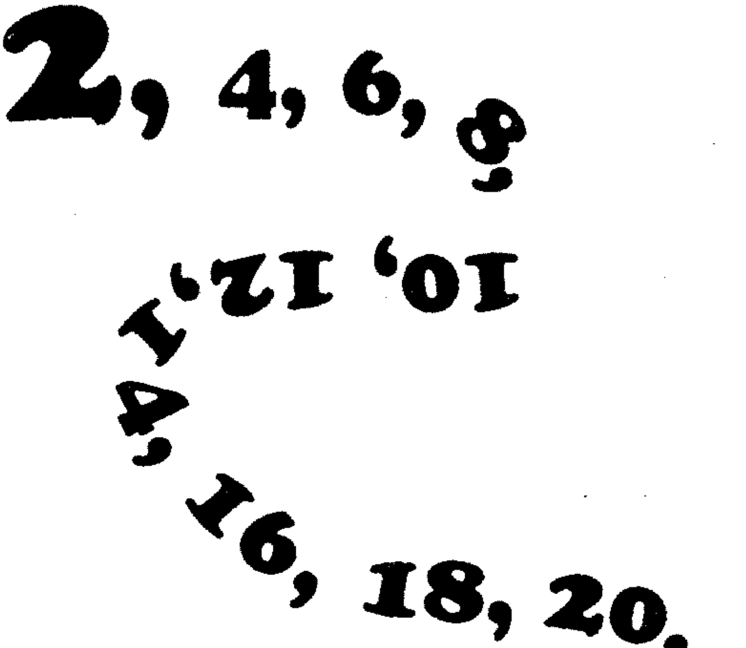


چون یک مقسوم علیه مشترک تمام اعداد است، دلش برای π سوخت و گفت «بیایید این امکان را به او بدهیم که خودش توضیح دهد.»

آنگاه π داستانش را آغاز کرد: «همانطور که می‌دانید، ابتدا بابلیان مرا کشف کردند. تعدادی از کاتبان باستانی دایره‌هایی با شعاع‌های مختلف ترسیم کرده‌اند. کاتبی با دو برابر کردن شعاع، قطر هر دایره را به‌دست آورد و صرفاً برای تفریح تصمیم گرفت قطرها را دور دایره‌ها بچرخاند و با کمال شگفتی دید صرفنظر از اندازهٔ دایره، قطرهای پیچیده دور دایره کمی بیش از ۳ است. این کشفی هیجان‌انگیز بود. این خبر به سرعت در سراسر جهان از مصر تا یونان و چین منتشر شد. مردم سراسر جهان دربارهٔ من اطلاع پیدا کردند. آنها به‌دلیل ارتباط ویژهٔ من با دایره روش‌های جدیدی برای مساحت و محیط دایره با استفاده از من در محاسباتشان پیدا کردند. آنها مشتاق یافتن اندازهٔ دقیق من بودند. قصد جسارت ندارم، اما آنها می‌دانستند که من عددی معمولی نیستم، به‌ویژه به این دلیل که به عددی کاملاً شبیه به من برنخورده بودند. آنها نمی‌توانستند مرا از معادلات جبری معمولی خود استخراج کنند، بنابراین بعدها مرا غیرجبری نامیدند. احتمالاً اطلاع یافته‌اید که از یافتن نام دقیق یک عدد برای من صرفنظر کردند. من از π راضی‌ام. کاملاً برای من مناسب است. اما نه، می‌دانید بعضی از ریاضیدانان چقدر یک دنده‌اند، آنها می‌خواستند هر چه می‌شود دقیق‌تر باشند. پس قرن‌ها پس از آن تا امروز، برای محاسبهٔ من با تقریب دقیق‌تر ابزارها و روش‌های جدیدی ابداع کرده‌اند.

ارشمیدس، ریاضیدان مشهور، مقدار مرا بین $3\frac{10}{71}$ تا $3\frac{1}{7}$ یافته بود. در تورات دوبار از من یاد شده و مقدارم ۳ به شمار آمده است. ریاضیدانان مصری از ۳/۱۶ در مورد من استفاده می‌کردند، و بطلمیوس مرا در سال ۱۵۰ میلادی ۳/۱۴۱۶ برآورد کرده بود.

ریاضیدانان می‌دانند که هرگز مقدار دقیق مرا به‌دست نمی‌آورند، اما به رساندن من به مرتبه‌های اعشاری هر چه بیشتر ادامه می‌دهند. نمی‌توانید تصورش را بکنید که همراه داشتن تمام آن مرتبه‌های اعشاری چه بار سنگینی است. اگر از حسابان و کامپیوتر استفاده شود به میلیون‌ها رقم اعشاری می‌رسم.



دو با تمام اعداد زوج به دنبال وارد شدند.

آنها می‌گویند برای محاسبهٔ چیزهای مختلفی، مانند حجم، مساحت، محیط و هر آنچه با دایره، استوانه و کره ارتباط دارد وجود من ضروری است. در احتمالات نیز نقش مهمی دارم، و با تقریب اعشاری میلیونی من، کامپیوترهای جدید امروزی برای نشان دادن توانایی و آزمایش دقت و سرعت خود به من اتکا دارند.»

۱ فریاد کرد: «دیگر چیزی نگویید. من اطمینان دارم که همهٔ ما می‌پذیریم که عددی پرآوازه چون π باید جزء ما به‌شمار آید. سرانجام می‌دانیم که هر یک از ما نقطهٔ خود را بر روی خط اعداد داریم. هیچ عددی نمی‌تواند جای عدد دیگری را بگیرد. π جای خود را دارد. دانستن جای دقیق نقطهٔ او چندان مهم نیست.»

۳ یکی از اعداد مرموز فریاد زد: «موافقم». $\sqrt{2}$ گفت: «من فکر می‌کنم π کمی رمزگونگی، تنوع و هیجان به‌این گردهمایی بخشیده است.» اعداد دیگر فریاد برآوردند «خوش آمدی». π گفت: «بیایید جشنمان را ادامه دهیم. بیایید شروع به شمردن کنیم».

جاذبهٔ
عداد اول

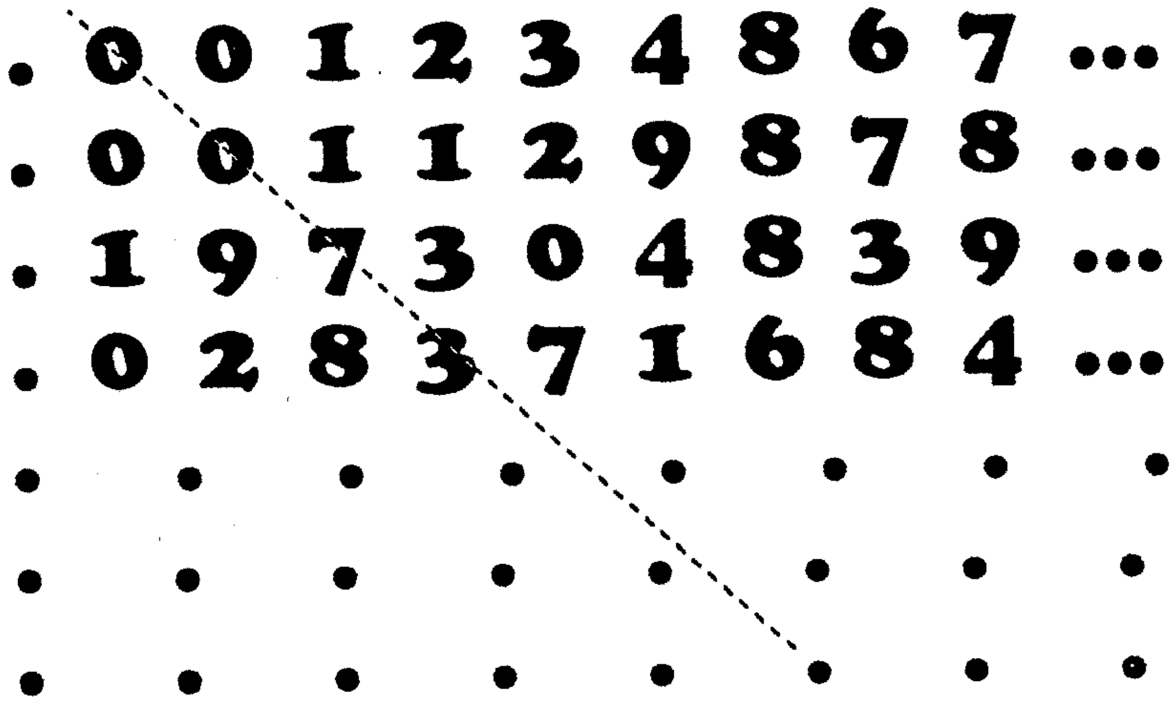
ست داریم
دهای بنیادی بدانیم.
خود را
۳
۷
اد اعداد صحیح را
می‌توانیم
منحصراً بیان کنیم
۱۳
د را کاملاً درهم بشکن
عدد را کاملاً درهم بشکن
عدد کاملی را
عوامل اول
ج دو عددی
مجموعهٔ اعداد اول یکسانی ندارند.
اد ما بی‌پایان است، اما
ا یکی از ما
ج است
۲ تنها عدد اول زوج است.
ا مقسوم علیه
است
فردیم
هر عدد اولی
و خودش.
چکس نمی‌تواند
هم باز کند
عدد مرکب نیستیم
عدد اولیم!
هیچکس نمی‌تواند
به عوامل بیشتری تجزیه کند
ما عدد اولیم!

اعداد را می‌توان به اول و مرکب تقسیم کرد. تنها مقسوم علیه هر عدد اول، یک و خود آن عدد است. عدد اول به هیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نیست. از سوی دیگر، عدد مرکب مقسوم علیه‌های دیگری جز خود و یک دارد (مثلاً ۱۲ عدد اول نیست و مقسوم علیه‌های آن ۱، ۲، ۳، ٤، ٦ و ۱۲ هستند). علاوه بر آن، هر عددی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول بیان کرد (که در مورد ۱۲ به صورت ۳ × ۲ × ۲ است) ـ که آن را تجزیه به اعداد اول می‌گویند. به جز ۱۲ هیچ عدد دیگری از ضرب دو ۲ و یک ۳ به دست نمی‌آید. در سال‌های ۱۷۰۰ کریستین گلدباخ به لئونارد اویلر نوشت که به اعتقاد او تمام اعداد زوج به جز ۲ را می‌توان به صورت جمع دو عدد اول نشان داد (مثلاً ۳ + ٥ = ۸ ؛ ۱٥ + ۱۳ = ۲۸). این گزارهٔ ساده هنوز هم یکی از مسایل حل ناشدهٔ ریاضی است. اعداد اول دوقلو[1]، اعداد اول مرسن، اعداد اول سوفی ژرمن از جملهٔ جذابیت‌های اعداد اولند که ریاضیدانان کشف کرده‌اند.

۱. اعداد اول دوقلو اعداد اولی هستند که دو تا باهم فاصله دارند، مانند ۳ و ٥. تا نوامبر ۱۹۹۳ بزرگ‌ترین زوج پیدا شده $(1{,}692{,}923{,}232 \times 10^{4020} \pm 1)$ به وسیلهٔ هاروی دوبنر است که ٤۰۳۰ رقم دارد.

کانتور و اعداد حقیقی شمارش‌ناپذیر

نظریهٔ مجموعه‌ها و اعداد ترامتناهی کانتور دستاوردهای درخشانی بودند. دلیل او برای شمارش‌پذیری اعداد گویا بسیار عالی بود. دلیل غیرمستقیم او که نشان می‌داد اعداد حقیقی شمارش‌ناپذیرند نیز به همین اندازه جالب بود. مجموعهٔ نامتناهی اگر عضوهایش را بتوان با اعداد شمارشی مطابقت داد شمارش‌پذیر است. در مورد اعداد گویا[1]، او روشی برای تطبیق دادن آنها با اعداد شمارشی ابداع کرد. همان روش را در مورد اعداد حقیقی هم آزمایش کرد، اما به این نتیجه رسید که آنها شمارش‌ناپذیرند. بنابراین او بر آن شد با فرض اینکه آنها شمارش‌پذیرند، و جستجوی تناقض در آن، ثابت کند که شمارش‌پذیر نیستند. ابتدا فرض کرد آرایشی دارد که تمام اعداد حقیقی را فهرست می‌کند. مثلاً برای اعداد بین صفر و یک می‌تواند فهرستی شبیه به این باشد:



۱. اعدادی که بتوانند به صورت کسر یا عدد اعشاری متناوب بیان شوند.

آنگاه او به اعدادی که در امتداد قطر آن قرار گرفته‌اند نگاه کرد. او با برداشتن اعداد روی قطر عددی ساخت، و هر رقم را در روی قطر با رقم دیگری عوض کرد (مثلاً با اضافه کردن یک به هر هشت رقم). سپس با اضافه کردن ممیز در جلوی آن، این عددی بین صفر و یک شد. کانتور استدلال کرد که فهرست او ظاهراً باید تمام اعداد حقیقی بین صفر و یک را دربر بگیرد. اما آن عدد تشکیل یافته با استفاده از قطر را دربرنمی‌گرفت. این همان تناقضی بود که او در جستجوی آن بود. این عدد می‌بایست در فهرست باشد، اما با هر یک از جمله‌های فهرست دست کم در رقمی که در امتداد قطر بود تفاوت داشت. بنابراین، این عدد قطری عددی بین صفر و یک بود، و در فهرست «کامل» قرار نداشت. بنابراین، این فهرست کامل نبود. این دلیل خود می‌توانست برای هر زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی مورد استفاده قرار گیرد. چون زیر مجموعه شمارش‌ناپذیر بود، اعداد حقیقی شمارش‌ناپذیر بودند!

دلیل اقلیدس برای نامحدود بودن اعداد اول

2, 3, 5, 7,
11, 13, 17,
19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, ...

به نظر می‌رسد هر چه در حوزهٔ اعداد صحیح بیشتر جلو برویم اعـداد اول کمیـاب‌تـر می‌شوند. ممکن است فکر کنیم چون به‌تدریج کمتر و کمتر دیده می‌شوند، شاید جایی تمام شوند. بسیار پیش از این، در سال ۳۰۰ پیش از مـیلاد اقلیـدس دلیلـی بـرای ایـن مطلب عرضه کرد که اعـداد اول نامحدودنـد. او بـه شـیوهٔ زیـر از برهـان غیرمـستقیم استفاده کرد.

فرض کنید n آخرین عدد اول باشد.

- *حالا عددی را با ضرب تمام اعداد اول تا n و شامل خود n بسازید.*

$$۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ... \times n$$

- *عدد ۱ را به این عدد اضافه کنید و آن را k بنامید.*

$$k = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ... \times n + ۱$$

- *k عدد اول است. اگر عدد اول نباشد پس فهرست اعداد اول مورد استفاده در این حاصل‌ضرب باید یک عدد اول را نداشته باشد. می‌دانیم k بر عددهای n ...، ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲ به‌طور صحیح بخش‌پذیر نیست زیرا با تقسیم بر هر یک از این اعداد، یک باقی می‌ماند پس k عدد اول جدیدی است. بنابراین اعداد اول نامحدودند.*

یک مطلب سادهٔ ریاضی ـــ بین ۱ و ۱۰۰۰ تعداد اعداد اول ۱۶۸، بین ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ تعداد آنها ۱۳۵، و بین ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ تعداد آنها ۱۲۷ و بین ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ تعداد آن‌ها ۱۲۰ تاست.

شعبده با اعداد

1953	سال تولد ـــ ۱۹۵۳
1980	واقعهٔ مهم ـــ در سال ۱۹۸۰، به فضا سفر کردم
41	سن در سال ۱۹۹۴ ـــ ۴۱ سال
+ 14	سال های سپری شده بین واقعه مهم و ۱۹۹۴ برابر است با ۱۴
3988	

سال تولد خودتان را در نظر بگیرید. به آن سال واقعه مهمی را در زندگی خود اضـافه کنید. سن خود در سال ۱۹۹٤ را به آن اضافه کنید. و سرانجام بـه ایـن حاصـل جمـع تعداد سال‌های از واقعه مهـم تـا ۱۹۹٤ را اضـافه کنیـد. حاصـل جمـع همیـشه ۳۹۸۸ خواهدشد!

بازی با اعداد

هر دوستدار ریاضیات زمانی ترفندها یا چیزهای غریبی را که شامل اعداد است کشف کرده یا از آن لذت برده است. دو مورد برای کشف و با امید به آن‌که از آن لذت ببرید بیان می‌شود.

جمع زدن و مربع کردن

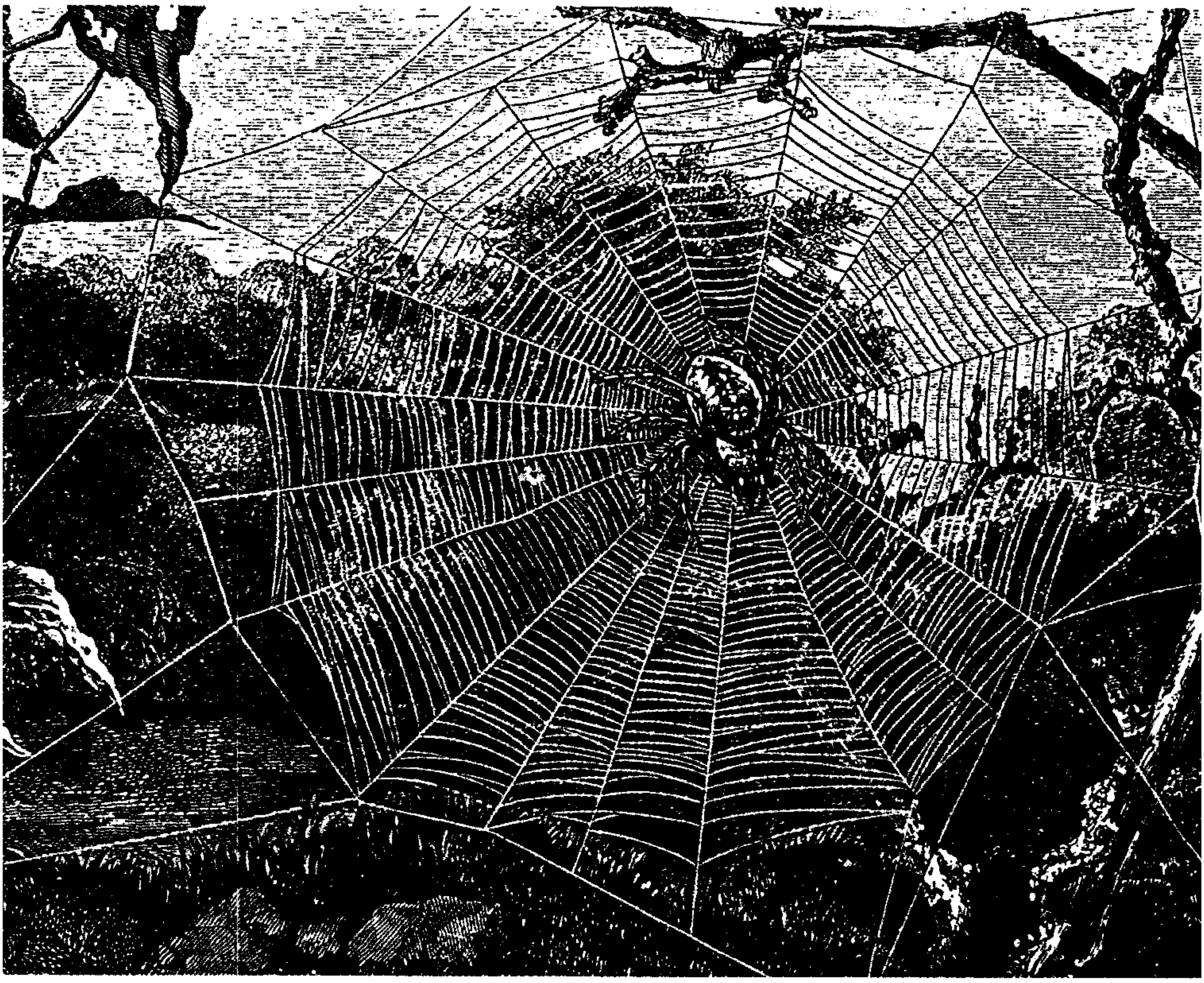
$$1+2+1=2^2$$
$$1+2+3+2+1=3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1=4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$$

• • • • • • • • • • • • •
• • • • • • • • • • • • •
• • • • • • • • • • • • •

هرم یک‌ها

$$1^2=1$$
$$11^2=121$$
$$111^2=12321$$
$$1111^2=1234321$$
$$11111^2=123454321$$
$$111111^2=12345654321$$
$$1111111^2=1234567654321$$
$$11111111^2=123456787654321$$

... در کجا به پایان می‌رسد؟



جادوی ریاضیات در طبیعت

زنبوران عسل دربارهٔ ریاضیات چه نجوا می‌کنند
شش ضلعی‌ها و طبیعت
نظریهٔ آشوب یاور پرندگان است
نگاهی نزدیک‌تر به برخال‌ها و طبیعت
باغی با حواشی ریاضی
ریاضیات بر قلهٔ امواج

شاخه‌ای از ریاضیات، هر قدر هم انتزاعی، نیست که روزی از آن در پدیده‌ای از جهان واقعی استفاده نشود.
ـ لباچفسکی

در هنگام پیدا کردن هر چیزی به‌طور مستقل، آن را در پیوند با چیز دیگری در جهان می‌یابیم.
ـ جان موئیر

هیچگاه به برگی نگاه کرده و از خود پرسیده‌اید چرا می‌تواند دقیقاً به دو نیمه تقسیم شود؟ یا به اشکال کامل ستارگان در گلبرگ‌های گل‌های مختلف، به رشد حلزونی بعضی از صدف‌ها، به میوهٔ کاج، به الگوی رویش موی سر انسان، یا شاخه‌ها و پوست درختان سکویا توجه کرده‌اید؟ طبیعت سرشار از نمونه‌های مفاهیم ریاضی است. در تلاش برای توصیف و درک چگونگی شکل‌گیری اشیا، در جستجوی الگوها و همانندی‌هایی هستیم که بتوان آنها را اندازه‌گیری و رده‌بندی کرد. به این دلیل است که از ریاضیات در تشریح پدیده‌های طبیعی استفاده می‌شود.

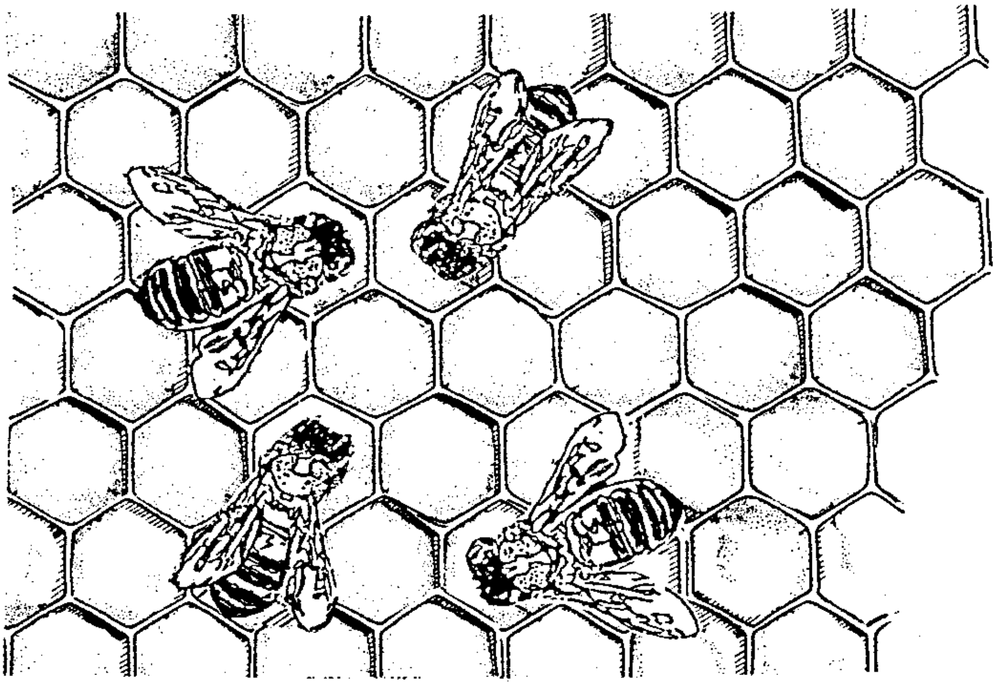
طبیعت شگفتی‌هایش را عرضه می‌کند، و بیشتر ما از نیاز به محاسبات و اعمال ریاضی برای تشریح چیزی بسیار عادی در طبیعت بی‌خبریم. مثلاً تارعنکبوت مخلوقی ساده اما طبیعی و زیباست. هنگامی‌که این سازهٔ زیبا را از نظر ریاضی تحلیل کنیم، مفاهیمی که در این تار ظاهر می‌شوند براستی شگفت‌انگیزند ـــ شعاع‌ها، قوس‌ها، پاره خط‌های موازی، مثلث‌ها، زاویه‌های متناظر برابر، مارپیچ‌های لگاریتمی، منحنی زنجیری و عدد غیرجبری e. مثال دیگر، آرایش صفحه‌های روی لاک لاک‌پشت است. برای تشریح الگوهای شکل گرفته، به ریاضیات پیوند سه‌گانه، خانه‌بندی شش ضلعی و حسابان نیاز داریم. در این فصل شگفتی‌هایی چند و مفهوم‌های ریاضی نهفته در آن، عرضه می‌شود.

دربارهٔ ریاضیات زنبوران عسل چه نجوا می کنند

زنبوران ... به‌خاطر پیش‌اندیشی هندسی ... می‌دانند که با هزینهٔ مصالح برابر، شش ضلعی از مثلث و مربع بزرگتر است و عسل بیشتری را جای می‌دهد.

ـ پاپوس اسکندرانی[1]

نه زنبوران نظریهٔ خانه‌بندی را خوانده‌اند، و نه عنکبوت‌ها مارپیچ‌های لگاریتمی را بررسی کرده‌اند. اما، همانند بسیاری از چیزها در طبیعت، معماری حشرات و حیوانات را اغلب می‌توان تحلیل ریاضی کرد. طبیعت از پربازده‌ترین اشکال استفاده می‌کند ـــ اشکالی که به کم‌ترین هزینه و انرژی و مصالح نیاز دارند. آیا این حلقهٔ ارتباط طبیعت



و ریاضیات است؟ طبیعت در هنر حل مسائل بیشینه ـ کمینه، مسائل جبر خطی و دریافتن راه حل‌های بهینه برای مسائل دارای محدودیت استادی ماهر است.

۱. ریاضیدان سدهٔ چهارم میلادی.

با تمرکز توجه بر زنبور عسل، گنجینه‌ای از مفهوم‌های ریاضی را می‌توان مشاهده کرد.

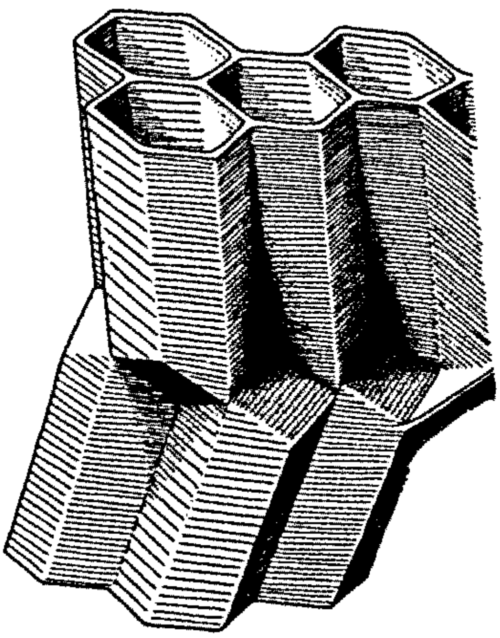
مثلث، مربع و شش ضلعی تنها چندضلعی‌های منتظمی هستند که به تنهایی خانه‌بندی را کامل می‌کنند. از این سه، به‌ازای یک مساحت معین، شش ضلعی کوچک‌ترین محیط را دارد. این بدان معنی است که زنبوران هنگام ساخت خانه‌هایی از منشور شش وجهی در کندو، برای محصور کردن فضای معین، از موم کمتری استفاده می‌کنند و کار کمتری نسبت به ساخت منشورهایی با قاعدهٔ مربع یا مثلث انجام می‌دهند. دیوارهای شانهٔ عسل از خانه‌هایی با ضخامت حدود ۰/۳ میلی‌متر ساخته شده است که می‌توانند ۳۰ برابر وزن خود را تحمل کنند. این نشان می‌دهد چرا شانهٔ عسل چنین سنگین به‌نظر می‌آید. یک شانهٔ عسل حدود ۴۰ × ۲۰ سانتیمتری می‌تواند بیش از ۲/۵ کیلوگرم عسل را در خود نگهدارد. در حالی‌که ساختن آن تنها به حدود چهل گرم موم نیاز دارد. زنبوران منشورهای شش وجهی را در سه بخش لوزی شکل می‌سازند و دیوارهای خانه در زاویه‌های دقیقاً ۱۲۰ به هم می‌رسند. زنبوران به‌طور همزمان در بخش‌های مختلف کار می‌کنند و شانه‌ای بدون درزهای قابل دیدن می‌سازند. شانه به طور عمودی از بالا به پایین ساخته می‌شود و زنبوران از بخش‌هایی از بدنشان به‌جای ابزار اندازه‌گیری استفاده می‌کنند. در واقع سر آنها کار گلولهٔ شاقول را می‌کند.

«ابزار» جالب دیگر زنبور عسل «قطب‌نما» است. میدان مغناطیسی زمین بر جهت‌یابی زنبوران تأثیر دارد. آنها می‌توانند به کوچک‌ترین نوسانات میدان مغناطیسی که تنها برای مغناطیس سنج‌های حساس قابل تشخیص است پی‌ببرند. این مطلب روشن می‌کند چرا دستهٔ زنبورانی که جایی تازه را اشغال می‌کنند به‌طور همزمان در بخش‌های مختلف ناحیهٔ جدید بدون هدایت هیچ زنبوری کندو می‌سازند. همهٔ آنها شانهٔ جدید را در همان راستای کندوی قدیمی خود می‌سازند.

خانه‌هایی که باید کاملاً باهم جفت شوند در شکل صفحهٔ بعد نشان داده شده است. زنبوران سرها را با دوازده وجهی نیمه لوزی شکل می‌بندند. علاوه بر آن، زنبوران دیوارها را با شیب 13° می‌سازند، که از بیرون ریختن عسل پیش از بسته شدن در با موم جلوگیری می‌کند.

ارتباطات نیز موضوع جالب دیگری است. زنبورهای کارگر هنگام بازگشت به کندو از گشت‌زنی، جهت منبع غذایی را که یافته‌اند با انتقال رمزهایی به شکل یک «رقص»

خبر می‌دهند. جهت رقص نسبت به خورشید، جهت غذا و زمان طول کشیدن رقص، فاصلهٔ آن را نشان می‌دهد. دانستن این مطلب همانقدر شگفت‌انگیز است که زنبوران عسل «می‌دانند» که *کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه خط راست است.* پس از آنکه زنبور عسل کارگر با حرکت تصادفی از گلی به گلی دیگر، بار عصارهٔ خود را کامل می‌کند، مستقیم‌ترین مسیر بازگشت به کندو را می‌شناسد.



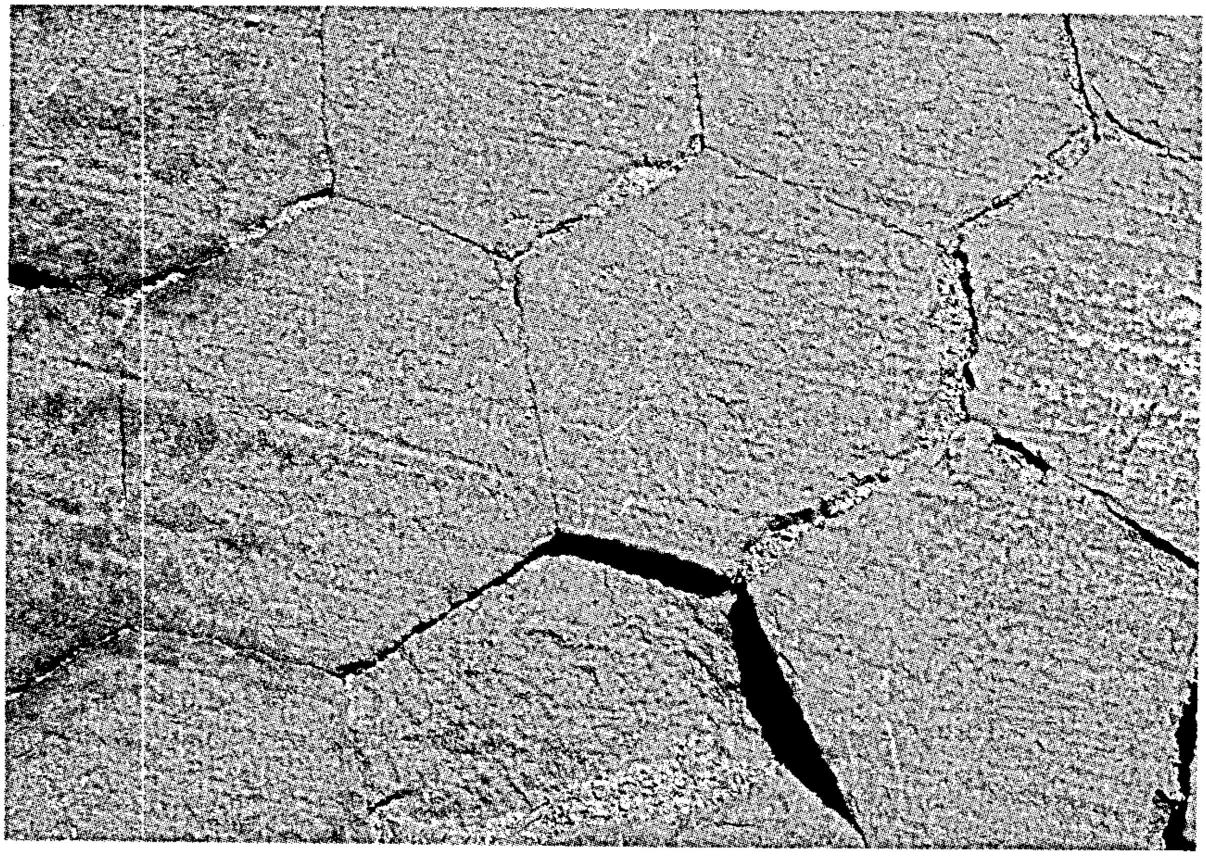
زنبور عسل آموزش ریاضی خود را از طریق رمز وراثتی به‌دست آورده است. تحلیل ویژگی‌های گوناگون طبیعت از نظر ریاضی جالب است. این نگاه گذرا به زندگی زنبور عسل استثنایی نیست. در اینجا ما بهینه سازی مصالح و کار، خانه‌بندی صفحه و فضا، شش ضلعی‌ها، منشورهای شش وجهی، دوازده وجهی لوزی شکل، قضیه‌های هندسی، میدان‌های مغناطیسی، رمزها و مهندسی حیرت‌انگیزی را مشاهده می‌کنیم.

ش ضلعی‌ها

بررسی عمیق طبیعت پربارترین منبع کشفیات ریاضی است.

ـ ژوزف فوریه

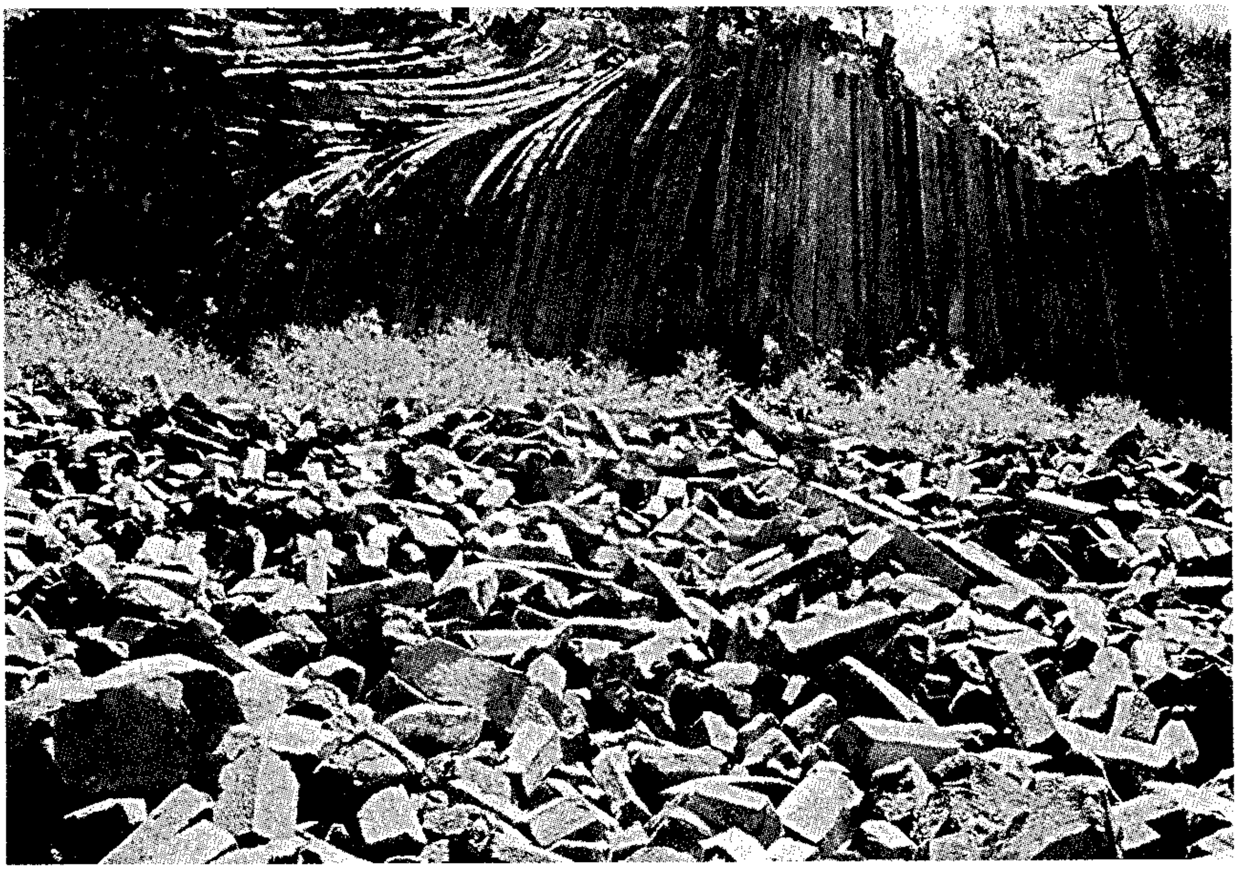
پیوندهای بسیاری بین ریاضیات و طبیعت برقرار است. اشیا و شکل‌ها از حوزه‌های گوناگون ریاضی، در بسیاری از پدیده‌های طبیعی حضور دارند.



طبیعت شش ضلعی‌هایش را در صخره‌ها نیز می‌سازد. میل شیطان، اثر ملی، دریاچه‌های ماموت، کالیفرنیا.

چه چیز در شش ضلعی‌ها چنین استثنایی است که طبیعت پیاپی از آن در شکل‌های بسیاری استفاده می‌کند؟ شکل‌گیری و رشد اشیای طبیعی، تحت تأثیر فضا و مواد

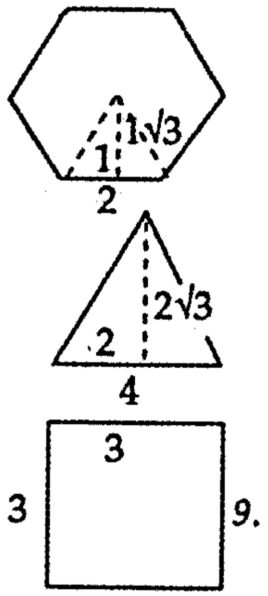
اطراف است. شش ضلعی منتظم یکی از چندضلعی‌های منتظم[1] است که صفحه را خانه‌بندی می‌کند. از این سه (شش ضلعی، مربع، و مثلث متساوی‌الاضلاع) شش ضلعی بیشترین مساحت را با کم‌ترین محیط دارد. ویژگی دیگر آن این است که شش محور تقارن دارد، و به آن این امکان را می‌دهد که چرخش‌هایی چند داشته باشد بی‌آنکه تغییر کند. کره که بیشترین حجم را با کمترین مساحت دارد نیز با شش ضلعی



میل شیطان، اثر ملی، دریاچه‌های ماموت. کالیفرنیا.

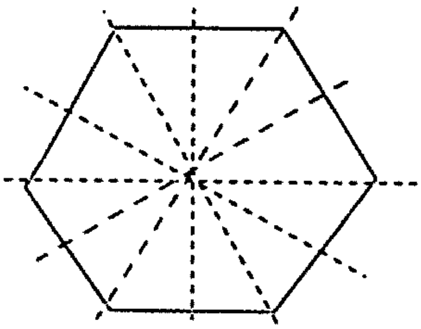
ارتباط دارد. اگر کره‌ها در کنار یکدیگر در یک جعبه قرار گیرند (شکل صفحه ۱۲۶) هر کرهٔ میانی با شش کرهٔ دیگر مماس است. با کشیدن پاره خط‌هایی بین کره‌ها در نقطهٔ تماس شکل محیط بر کره یک شش ضلعی منتظم است. اگر کره‌ها را حباب صابون در نظر بگیریم توصیفی ساده از چگونگی حلقه زدن حباب‌ها در آنچه پیوند سه گانه نامیده می‌شود به دست می‌دهد ـــ پیوند سه گانه سه زاویهٔ °۱۲۰، به همان اندازهٔ زاویه‌های داخلی یک شش ضلعی منتظم است. این پیوند سه گانه در بسیاری از

۱. چند ضلعی هنگامی منتظم است که اضلاع آن باهم و زاویه‌های آن نیز باهم برابر باشند.

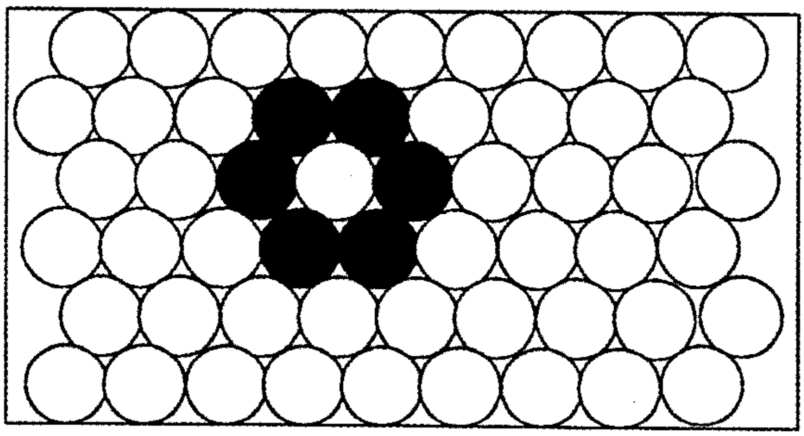


فرض کنید محیطی به اندازهٔ ۱۲ واحد برای ساخت این سه چندضلعی منتظم داشته باشیم. مساحت شش ضلعی ۱۰/٤ $6\sqrt{3} \approx 10{,}4$، مساحت مثلث $4\sqrt{3} \approx 6{,}9$ و مساحت مربع ۹ خواهدبود.

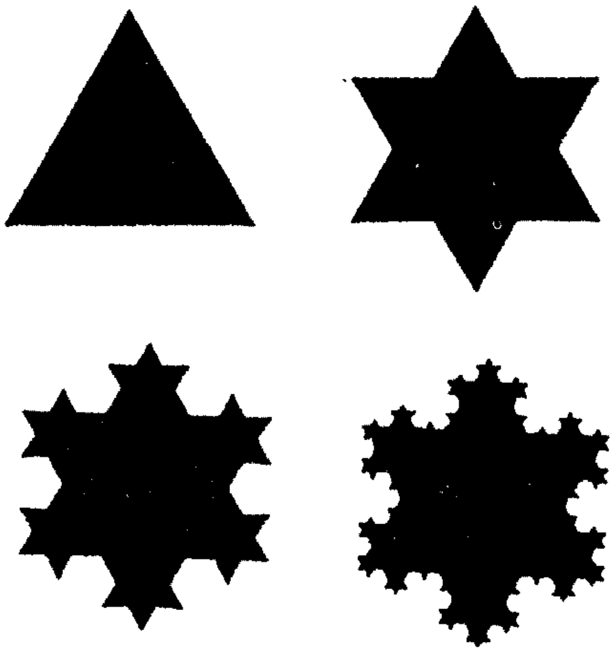
حوزه‌ها، مانند شکل‌گیری دانه بر روی چوب بلال، مغز موز، و ترک برداشتن گل خشک شده دیده می‌شود. کشف حضور جدید شش ضلعی‌ها در طبیعت کمتر از نخستین باری که در پشت لاک‌پشت، شانهٔ کندوی عسل، یا شکل یک بلور دیده شد هیجان‌انگیز نیست. امروزه دانشمندان به همان میزان مجذوب مشاهدهٔ شش ضلعی‌ها در فضا هستند. از سال ۱۹۸۷ توجه اخترشناسان بر ابرهای بزرگ ماژلان متمرکز شده است، که در آن ابرنواختر ۱۹۸۷A مشاهده می‌شود. این نخستین بار نیست که حباب‌های گاز پس از انفجارهای اختری دیده می‌شوند، اما اولین بار است که این حباب‌ها به شکل شانهٔ عسل تجمع یافته و ظاهر شده‌اند. لیفان وانگ از دانشگاه منچستر در انگلستان شانهٔ عسلی کشف کرد، که تقریباً به اندازهٔ ۹۰ × ۳۰ سال نوری است، و از ۲۰ حباب تشکیل یافته است که قطر آنها حدود ۱۰ سال نوری است. وانگ می‌گوید این گروه ازستاره‌های هم اندازه‌ای تشکیل شده است، که تقریباً با آهنگ یکسانی برای چند هزار سال، بادهایی با اندازه‌ای پدید می‌آورد که حباب‌ها را در یک پیکربندی شش ضلعی شکل می‌دهد.



شش محور تقارن یک شش ضلعی منتظم.



سرانجام، نگاهی به برف دانه‌های طبیعت تقارن شش ضلعی و هندسهٔ برخال را نشان می‌دهد. برف دانه شکل شش ضلعی دارد. علاوه بر آن، رشد برف دانه را منحنی برف دانهٔ کخ شبیه‌سازی می‌کند. این برخال همان‌طور که در شکل مقابل دیده می‌شود، از مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته می‌شود.



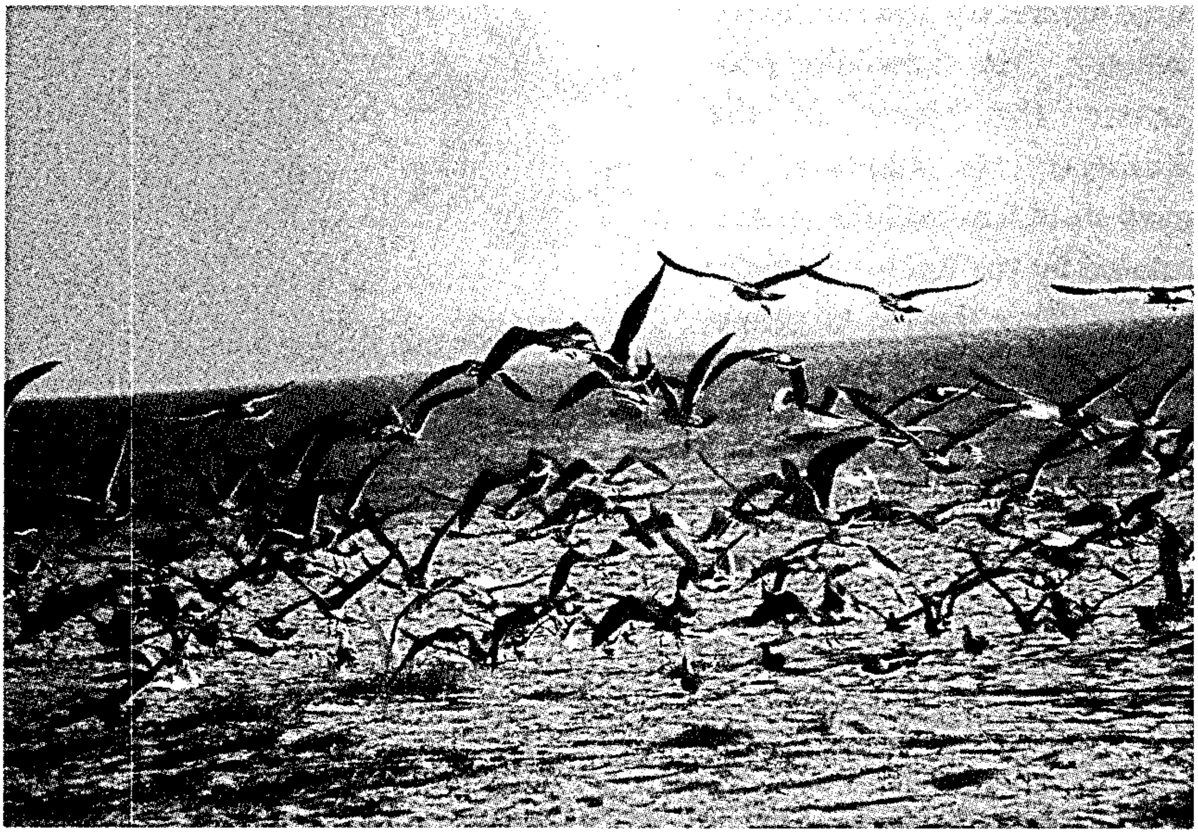
این چهار مرحلهٔ نخستین منحنی برف دانه است. با مثلث متساوی‌الاضلاع شروع کنید. هر ضلع را به سه قسمت تقسیم کنید. قسمت میانی را بردارید و به جای آن مثلثی با یک رأس تازه بسازید.

در نتیجه، ارتباط بین مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، شش ضلعی منتظم و برخال برف دانه، هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی به‌هم می‌پیوندند.

در طبیعت، اشیا مدل‌هایی برای برانگیختن کشفیات ریاضی عرضه کرده‌اند و می‌کنند. طبیعت برای دست‌یابی به تعادل و توازن ظریف در آفریده‌هایش شیوه‌ای دارد. کلید فهم طرز کار طبیعت ریاضیات و علوم است. گالیله هنگامی که گفت «*جهان به زبان ریاضی نوشته شده است*» این مطلب را به خوبی بیان کرد. ابزارهای ریاضی وسیله‌هایی فراهم می‌آورند که به کمک آنها می‌کوشیم تا به فهم، توصیف و تقلید طبیعت دست یابیم. هر کشفی به کشف بعدی منجر می‌شود. کشف شش ضلعی‌ها در فضا به چه چیزی می‌انجامد؟ تنها زمان پاسخ ما را خواهد داد.

ظریهٔ آشوب یاور
رندگان است

آیا تاکنون تماشا کردن دسته‌ای پرندهٔ در حال پرواز که در هوا در هماهنگی کامل از سویی به سوی دیگر می‌روند مسحورتان



یک دسته کاکائی اپتوس کالیفرنیا.

کرده است؟ چرا پرندگان به هم برخورد نمی‌کنند؟ فرانک اج. هپنر، جانور شناس می‌خواست به این پرسش پاسخ دهد. پس از فیلمبرداری و بررسی موشکافانهٔ تک تک فریم‌ها، به این نتیجه رسید که پرندگان را رهبری هدایت نمی‌کند. آنها در حالت تعادل پایدار با تغییر مداوم پرنده‌های دستهٔ لبهٔ جلو در فواصل کوتاه زمانی پرواز می‌کردند. او تا وقتی‌که با نظریهٔ آشوب و کامپیوتر آشنا نشده بود، قادر به توضیح حرکت گروهی پرندگان نبود. هپنر با مفاهیم نظریهٔ آشوب برنامه‌ای کامپیوتری ساخت که

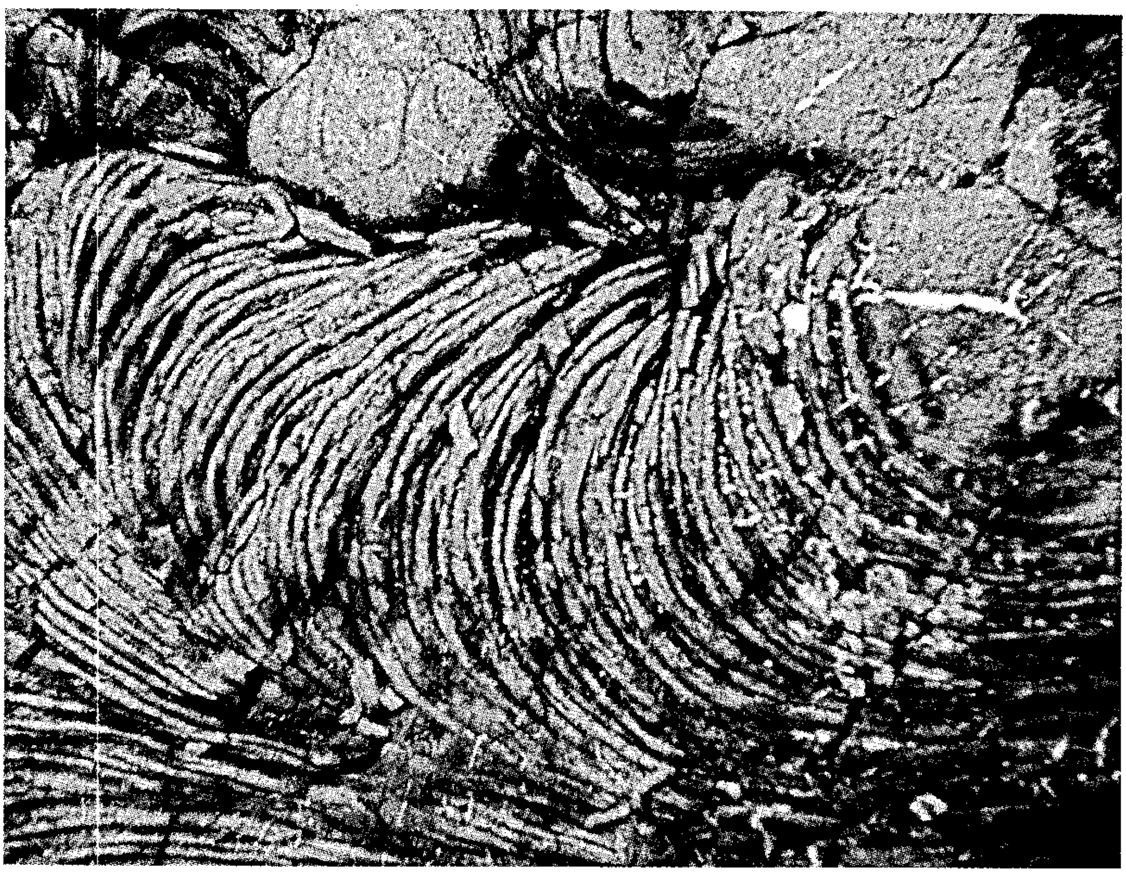
شاید دستهٔ ماهی‌ها نیز در حالت تعادل پایدار حرکت می‌کنند.

حرکت عملی دستهٔ پرندگان را شبیه‌سازی می‌کرد. او چهار قاعدهٔ ساده[1] بر پایهٔ رفتار پرندگان وضع کرد، و از مثلث برای نمایش پرندگان استفاده کرد. با تغییر شدت در هر یک از قاعده‌ها، دستهٔ مثلث‌ها در صفحهٔ نمایشگر کامپیوتر به روش‌هایی آشنا پرواز می‌کنند. هینر ادعا نمی‌کند که برنامه‌اش لزوماً شکل‌گیری دستهٔ پرندگان را توضیح می‌دهد، اما توضیحی عملی برای چگونگی و علت پرواز گروهی پرندگان به دست می‌دهد. به نظر می‌رسد که نظریهٔ آشوب اینجا هم حضور دارد!

۱. قواعدی که او وضع کرده است عبارتند از: (۱) پرندگان به طرف نقطه‌ای کانونی یا آشیانه جذب می‌شوند. (۲) پرندگان به طرف هم کشیده می‌شوند. (۳) پرندگان می‌خواهند سرعت‌شان را ثابت نگه‌دارند. (٤) مسیر پرواز با رویدادهای تصادفی مانند وزش باد تغییر می‌کند.

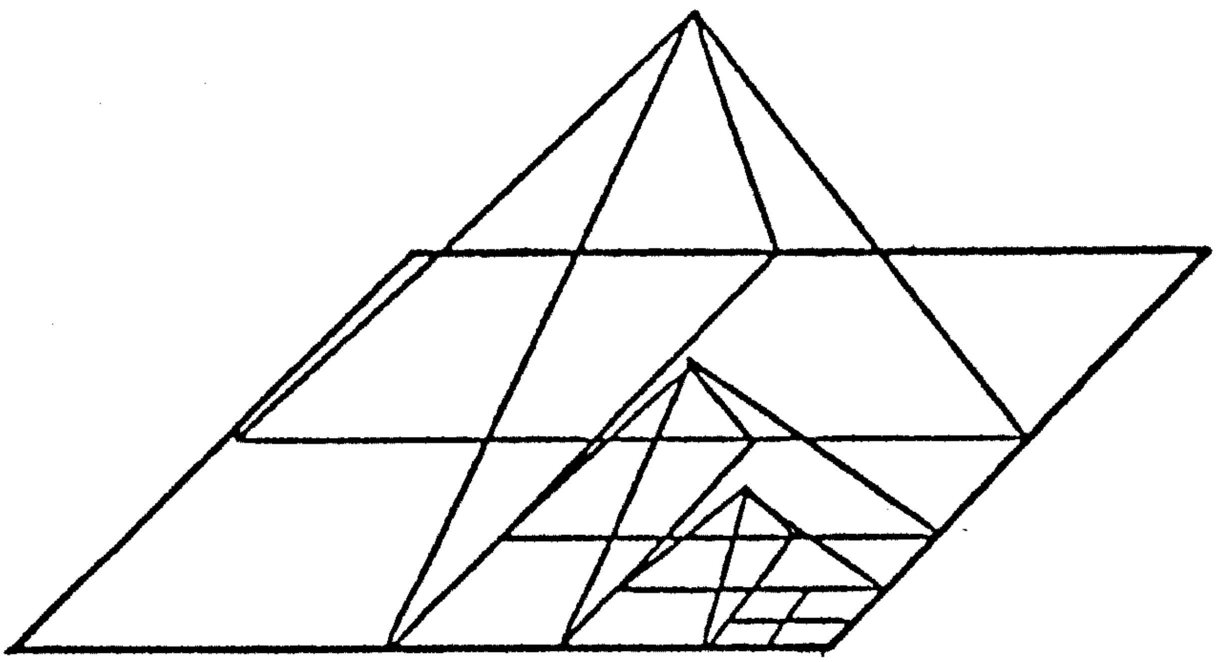
گاهی نزدیک‌تر به
ـرخال‌ها و طبیعت

برخال‌ها را می‌توان هندسهٔ طبیعت دانست. گرچه نمونه‌های فراوانی از اشکال هندسهٔ اقلیدسی در طبیعت مشاهده می‌شوند (شش ضلعی، دایره، مکعب، چهاروجهی، مربع، مثلث...). اما به‌نظر می‌رسد که روندهای تصادفی طبیعت اغلب چیزهایی را پدید می‌آورد که هندسهٔ اقلیدسی از توضیح آن ناتوان است. در این موارد برخال‌ها بهترین وسیلهٔ توصیف را به دست می‌دهند. می‌دانیم هندسهٔ اقلیدسی برای توصیف چیزهایی مانند بلورها و کندوهای عسل بی‌نظیر است، اما انسان در یافتن اشکالی در هندسهٔ اقلیدسی برای شکل ذرت بو داده، اشیای خشک شده، پوست درختان، ابرها، ریشهٔ زنجبیل و خط‌های ساحلی به سختی



جریان گدازهٔ آتشفشان کیائوا در هاوایی.

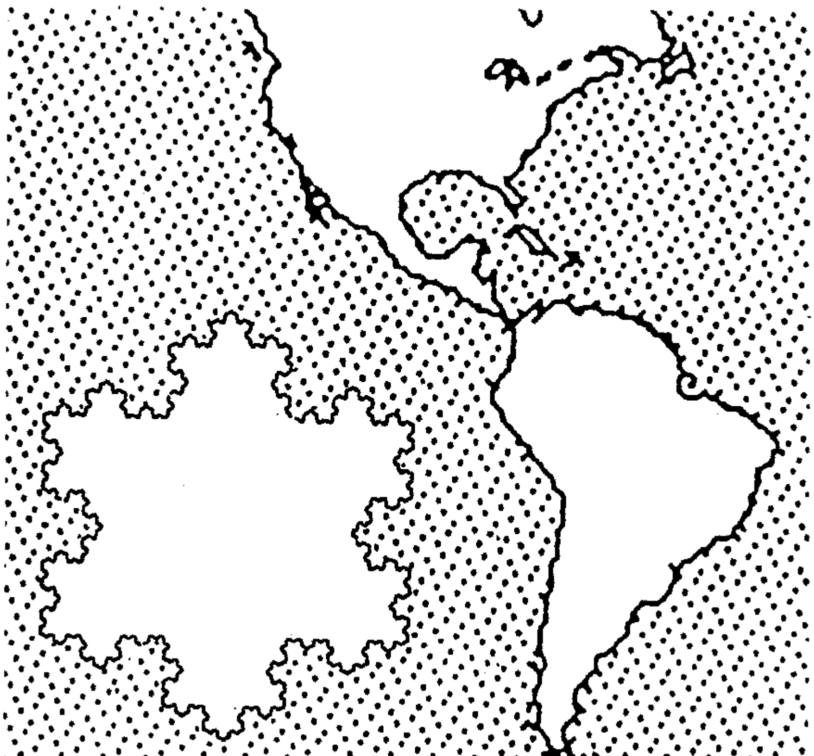
در مضیقه قرار می‌گیرد. در حالی‌که برخال‌های هندسی برای توصیف چیزهایی مانند برگ سرخس یا برف دانه مورد استفاده قرار می‌گیرند، برخال‌های تصادفی را می‌توان برای توصیف جریان گدازه و زمین کوه‌ها با کامپیوتر ساخت. هندسهٔ اقلیدسی از یونان باستان (*اصول هندسه*، اثر اقلیدس در حدود ۳۰۰ پیش از میلاد) سرچشمه گرفته است، در حالی‌که سرچشمهٔ برخال‌ها اواخر ۱۸۰۰ است. در واقع واژهٔ برخال تا سال ۱۹۷۵ از سوی بنوا ماندل‌برو وضع نشده بود. با ارائه آنها، هندسه‌ای داریم که می‌تواند جهان دایماً در حال دگرگونی را توصیف کند.



برخال‌ها را می‌توان دارای ابعاد کسری دانست. در هندسهٔ اقلیدسی نقطه صفر بعدی است. خط یک بعدی، و صفحه دوبعدی. خط‌های دندانه‌دار چطور؟ در حوزهٔ فراکتال‌ها ابعاد خط دندانه‌دار بین ۱ و ۲ در نظر گرفته می‌شود. با شروع از یک پاره خط و تقسیم آن به سه بخش مانند منحنی برف دانه، ابعاد آن بین ۱ و ۲ باقی می‌ماند. اگر با مستطیل که دو بعدی است شروع کنیم و آن را به چهار بخش تقسیم کنیم و هرمی بر روی دو مقطع میانی بسازیم، فراکتالی با ابعاد بین ۲ و ۳ شکل می‌گیرد.

برخالی کردن سطح زمین

قاره‌ای را انتخاب کنید. مثلاً آمریکای جنوبی را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مسافت خط ساحلی آن را اندازه بگیریم. می‌دانیم در ریاضیات فاصله را می‌توان با هر واحد خطی دلخواهی ـــ مثلاً سانتیمتر، متر، کیلومتر، اینچ و غیره ـــ سنجید. بدون توجه به انتخاب واحد، آنها مسافت یکسانی را نشان می‌دهند ـــ که با واحدهای مختلفی بیان می‌شود. اما اگر خط ساحلی آمریکای جنوبی را با کیلومتر و سپس با متر اندازه‌گیری کنیم، اگر خط ساحلی را دارای ماهیتی برخالی بدانیم، پاسخ ما یکسان نخواهد بود. هر چه واحد اندازه‌گیری ما کوچک‌تر و کوچک‌تر شود، قادر خواهیم شد تا شاخابه‌ها و خلیج‌های بیشتری از خط ساحلی را اندازه‌گیری کنیم. به عبارت دیگر، به‌طور نظری، با کوچک‌تر کردن اندازهٔ واحد اندازه‌گیری جزئیات بیشتری به دست می‌آید و به نوبهٔ خود طول خط ساحلی دایماً بیشتر می‌شود.



خط ساحلی، در هندسهٔ برخالی، دارای طول بی‌نهایت شمرده می‌شود، زیرا هر شاخابهٔ کوچک و دانهٔ شن اندازه‌گیری می‌شود و تعداد این واحدها پیوسته، مانند شکل‌گیری منحنی برف دانه، تغییر می‌یابد. (صفحه ۱۳۳ را ببینید.)

باغی با حواشی ریاضی

باغبان با سلام گفتن به طلوع آفتاب و گیاهانش گفت «صبح بخیر، روزا!». او از این‌که در برگ‌ها و خاک حاصلخیز چیزهایی عجیب مخفی شده‌اند اطلاع کمی داشت. در عمق ریشهٔ گیاهان ***برخال‌ها و شبکه‌ها*** *حضور داشتند و از زنبق‌ها، گل‌های همیشه بهار، و میناها و کاسموس[1]* ***اعداد فیبوناچی*** *به او نگاه می‌کردند.*

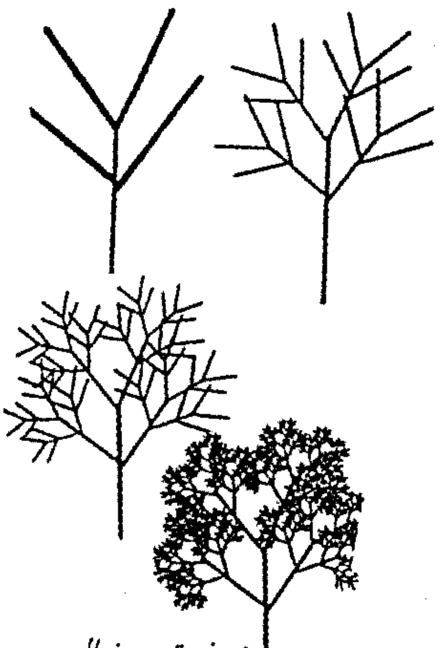
به مراسم روزانهٔ مراقبت از باغ ادامه داد. در هر جایی چیزی غیرعادی ظاهر می‌شد. اما او اعتنایی نمی‌کرد، و تنها شگفتی‌های آشکار طبیعت او را مجذوب می‌کرد.

ابتدا سرخس‌ها را مرتب کرد و برگ‌های پرمرده را کند تا برگهای نوشکفته نمایان شوند. او ***مارپیچ‌های همزاویه*** *را که به او سلام می‌کردند و برخال برگ‌ها را روی سرخس نشناخت. ناگهان با وزش نسیم، رایحهٔ خوش پیچ امین‌الدوله را احساس کرد.*

۱. کاسموس یکی از گیاهان آمریکای حاره‌ای که به خاطر گل شعاعی زیبای آن کشت می‌شود.

برخال‌ها می‌توانند مانند چیزهایی با تغییر یا رشد متقارن یا چیزهایی با تغییر نامتقارن تصادفی ظاهر شوند. برخال‌ها، در هر دو حالت، بر پایهٔ قواعد و الگوهایی تغییر می‌کنند که برای تشریح و تعیین رشد یک شکل آغازین مورد استفاده قرار می‌گیرند.

برخال هندسی را مانند الگوی ساخت بی‌پایان در نظر بگیرید ـ این الگو دایماً خود را در مقیاسی کوچک‌تر تکرار می‌کند. بنابراین هنگامی که بخشی از برخال هندسی را بزرگ کنیم شبیه به شکل اصلی دیده می‌شود. برعکس هنگامی که یک شکل اقلیدسی مانند دایره را بزرگ کنیم کمتر منحنی دیده می‌شود. سرخس نمونه‌ای مطلوب از تکثیر برخالی است. اگر به هر بخشی از سرخس برخالی توجه کنید، درست مانند برگ سرخس اصلی ظاهر می‌شود. می‌توان سرخس برخالی را بر روی کامپیوتر ساخت.

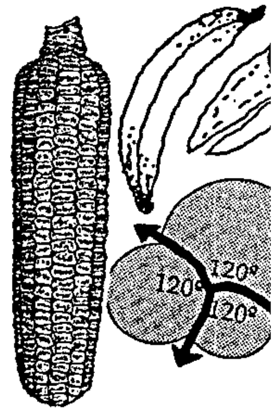


درخت برخال

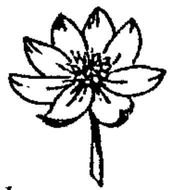
با نگاهی کوتاه، دید چگونه از پرچین رد شده و وارد نخود سبزها شده است. فکر کرد که باغ قطعاً به هرس کاملی نیاز دارد. متوجه نشد که مارپیچ‌های فنری در کارند و مارپیچ‌های چپ‌گرد پیچ‌های فنری امین‌الدوله دور مارپیچ‌های فنری راست‌گرد نخودها پیچیده‌اند. برای جلوگیری از صدمه زدن به محصول نخود، دستی محتاط لازم بود.

سپس به وجین کردن زیر نخلی که کاشته بود پرداخت تا حدی به باغش حال و هوای خوبی بخشد. شاخه‌هایش در نسیم تکان می‌خوردند و تصوری از این نداشت که منحنی‌های گسترندهٔ آن به شانه‌هایش می‌سایند.

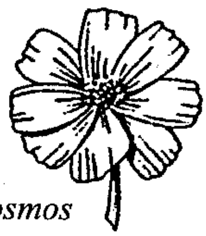
نگاهی دزدکی به ذرت هایش کرد. فکر کرد «ها!» تردید داشت که ذرت بکارد. اما رشد خوب ذرت نورس او را دلگرم کرد. پیوندهای سه گانهٔ دانه‌های درشت دور از چشم او از درون خوشه‌ها شکل می‌گرفتند.

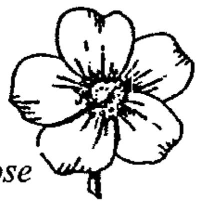


شبکه‌ها نمودارهایی ریاضی‌اند که تصویری ساده‌تر از یک مسأله یا راه حل عرضه می‌کنند. اویلر از شبکه‌ها در مسألهٔ پل کونیگزبرگ استفاده کرد (به افسون منطق، فصل سرگرمی و بازی مراجعه کنید). او مسأله را به نموداری ساده تبدیل و آن را تحلیل و حل کرد. امروزه شبکه‌ها ابزارهایی هستند که در توپولوژی مورد استفاده قرار می‌گیرند.


bloodroot


trilium

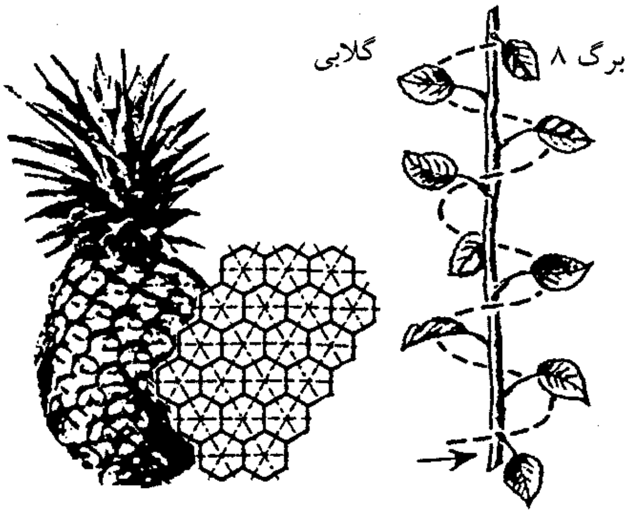

cosmos


Wild rose

اعداد فیبوناچی ...، ۲۱، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱ ۱ فیبوناچی (لئوناردوی پیزائی) یکی از ریاضیدانان پیشتاز سده‌های میانه بود. گرچه او سهمی مهم در حساب، جبر و هندسه داشت، امروزه به خاطر سری اعدادش مشهور است، که راه حلی برای مسأله مبهمی در کتاب حساب (لیبر آباگی)[1] او بود. ادوارد لوکاس ریاضیدان فرانسوی یک اثر ریاضی تفریحی تدوین کرد که در برگیرندهٔ این مسأله بود. در این زمان بود که نام فیبوناچی را بر روی این رشته گذاشتند. این رشته در طبیعت در این موارد دیده می‌شود:

1. Liber Abaci

تمام باغ چه خوب از آب درمی‌آمد. کشت‌های جدید در آن فوران می‌کردا با تحسین برگ‌های تازهٔ درخت افرا، می‌دانست که در شکل آنها چیزی فی‌نفسه خوشایند وجود دارد — خطوط **تقارن** طبیعت کار خود را به خوبی انجام داده بودند.



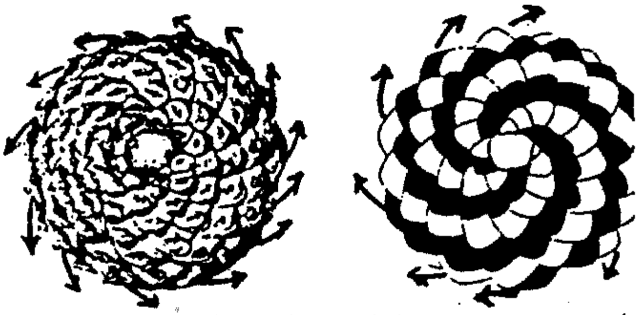
*و یکی دیگر از جلوه‌های **فیلوتاکسی**[1] طبیعت تنها برای چشمان آموزش دیده، در برگ‌هایی که بر روی شاخه‌ها و ساقه‌ها شکوفه می‌زدند، معلوم می‌شد.*

*او با نگاهی به اطراف، به جالیز هویج توجه کرد. از آن راضی بود و متوجه شد که برای اطمینان از به‌دست آمدن هویج‌هایی با اندازهٔ خوب و یکنواخت به تنک کردن نیاز دارند. نمی‌خواست در **خانه‌بندی** فضا با هویج‌ها به طبیعت متکی باشد.*

- *گل‌های دارای گلبرگ به تعداد اعداد فیبوناچی* (triliom، رز وحشی wildrose کاسموس Cosmes، columbine، شکوفهٔ سوسن، زنبق)
- *آرایش برگ‌ها، ترکه‌ها و ساقه‌ها* که برگ آذین یا آرایش برگ **(فیلوتاکسیس)** نامیده می‌شود.

برگی را بر روی ساقه انتخاب کنید و تعداد برگ‌ها را بشمرید (فرض کنید که هیچ کدام کنده نشده‌اند) تا به برگی برسید که مستقیماً با آن‌که انتخاب کرده‌اید همسو است. کل تعداد برگ‌ها (بدون محاسبهٔ برگ انتخاب شده) معمولاً در بسیاری از گیاهان مانند درختان گیلاس، گلابی و نارون عدد فیبوناچی است.

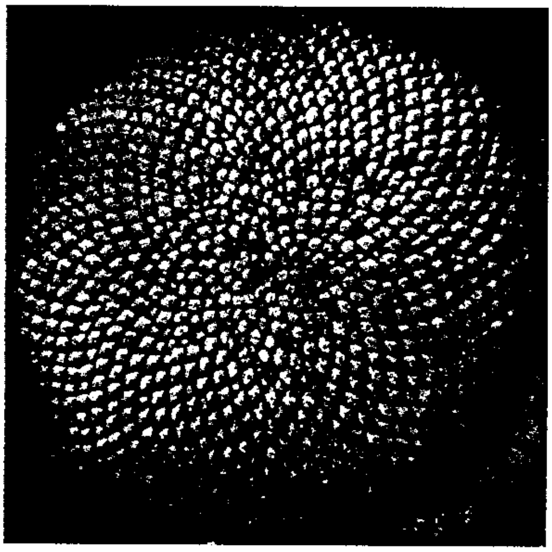
- *اعداد مخروط کاج*: اگر مارپیچ‌های چپ‌گرد و راست‌گرد میوهٔ کاج را بشماریم،



این دو عدد اغلب اعداد متوالی فیبوناچی‌اند. برای دانه‌های گل آفتابگردان و سایر گل‌ها نیز این امر صادق است. در مورد آناناس نیز چنین است. با نگاه به ته آناناس تعداد مارپیچ‌های چپ و راست ترکیب یافته از پولک‌های به شکل شش ضلعی را بشمرید. باید اعداد متوالی فیبوناچی باشند.

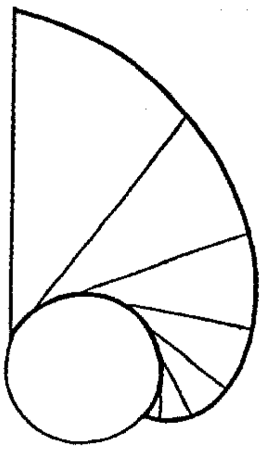
---

۱. آرایهٔ هندسی روی میوه‌ها در طبیعت.



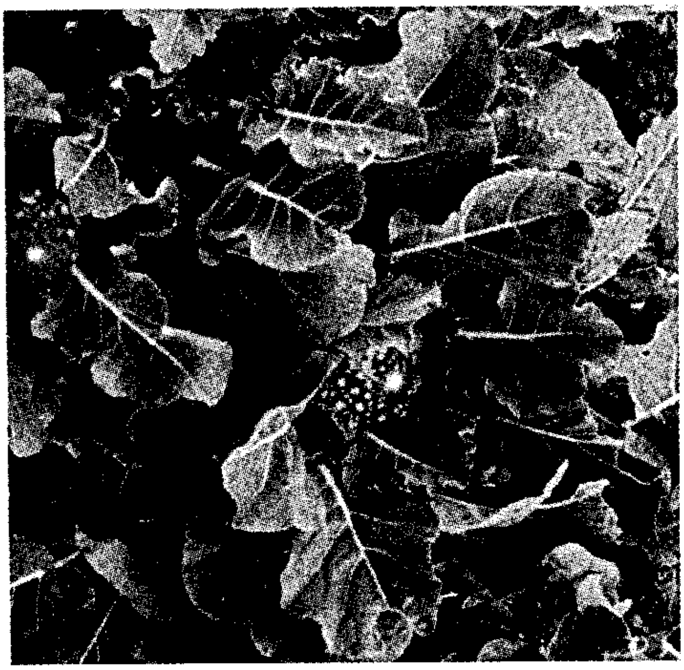
تصوری از این نداشت که باغ پر از ***مارپیچ‌های همزاویه*** *است. آنها در خوشهٔ دانه‌های مینا و گل‌های گوناگون حضور داشتند. بسیاری از چیزهایی که رشد می‌کنند شکل مارپیچ دارند، زیرا شکل خود را با بزرگ‌تر شدن حفظ می‌کنند.*

هوا داشت گرم می‌شد. بنابراین تصمیم گرفت وقتی به کشت ادامه دهد که محل خورشید تغییر کرده باشد. در این زمان آخرین ارزیابی‌اش را انجام داد که با تحسین ترکیب گل‌ها، سبزه‌ها و گیاهان دیگر بود، که او آنها را از روی فکر انتخاب کرده بود. اما بازهم از چیزی غافل بود. باغش پر از کره، مخروط، شش وجهی، و اشکال دیگر هندسی بود، که به وجودشان پی‌نبرده بود.



مارپیچ‌ها و مارپیچ‌های فنری: مارپیچ‌ها اشکالی ریاضی‌اند که در بسیاری از مظاهر طبیعت، مانند منحنی سرخس پیچی، مو، صدف‌ها، توفان‌های پیچنده، تندبادها، میوهٔ کاج، راه شیری و گرداب‌ها مشاهده می‌شوند. مارپیچ‌هایی مسطح، سه بعدی، راست‌گرد و چپ‌گرد، همزاویه، لگاریتمی و سهمی شکل وجود دارند. مارپیچ‌های ارشمیدسی، و مارپیچ‌های فنری انواعی از مارپیچ‌اند که ریاضیات آنها را توصیف می‌کند. مارپیچ‌های همزاویه در اشکال رشد در طبیعت مانند صدف دریایی حلزونی، دانه‌های آفتابگردان، تارهای نوعی عنکبوت مشاهده می‌شود. تعدادی از ویژگی‌های مارپیچ همزاویه عبارتند از ـ زاویه‌های به‌دست آمده از مماس‌ها به شعاع‌های مارپیچ برابرند (و نام همزاویه از این آمده است) ـ با تصاعد هندسی بزرگ‌تر می‌شود، و بدین ترتیب مارپیچ هر شعاعی را به پاره خطهایی تقسیم می‌کند که تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند ـ با بزرگ‌تر شدن، شکل آن حفظ می‌شود.

منحنی گسترنده: هنگامی که ریسمانی دور یک منحنی (در اینجا دایره) بسته یا از آن باز می‌شود، یک منحنی گسترنده را نشان می‌دهد. شکلی که در منقار عقاب، بالهٔ پشت کوسه ماهی، و نوک برگ نخل آویخته دیده می‌شود.



انواع تقارن در باغ دیده می‌شود. مثلاً در این عکس می‌توان تقارن نقطه‌ای را در بروکلی و تقارن محوری را در برگ‌هایش دید.

همان‌طور که طبیعت شگفتی‌هایش را در باغ او نشان می‌دهد، بسیاری از افراد از محاسبات و کار ریاضی حجیمی که در طبیعت کاری عادی است بی‌خبرند. طبیعت خوب می‌داند چگونه با محدودیت‌های مواد و فضا کار کند، و هماهنگ‌ترین اشکال را بسازد. و بدین ترتیب، در هر یک از روزهای بهار، باغبان با برقی در چشمانش به قلمرو خود وارد می‌شود. او به دنبال رویش و شکوفایی‌های جدید هر روز، از زیبایی‌های ریاضی در باغ خود بی‌خبر است.

پیوندگاه سه گانه: نقطه‌ای است که در آن سه پاره خط با زاویهٔ °۱۲۰ تلاقی می‌کنند. بسیاری از رویدادهای طبیعی از محدودیت‌های ناشی از مرزها یا موجود بودن فضا ناشی می‌شوند. پیوندگاه سه گانه نقطهٔ تعادلی است که بعضی از پدیده‌های طبیعی بدان گرایش دارند. از آن جمله، در گروه‌های حباب صابون، شکل‌گیری دانه‌های ذرت، و ترک برداشتن زمین یا سنگ یافت می‌شود.

تقارن: تقارن توازن کاملی است که در بدن پروانه، در شکل برگ، در بدن انسان، در کمان دایره دیده می‌شود. از دیدگاه ریاضی، یک شیء هنگامی متقارن شمرده می‌شود که بتوان خطی یافت که آن را به دو بخش کاملاً یکسان تقسیم کند به گونه‌ای که با تا کردن آن بر روی آن خط هر دو بخش کاملاً بر روی یکدیگر قرار گیرند. یک شیء هنگامی تقارن مرکزی دارد که بی‌نهایت از این گونه خطها برای یک نقطه وجود داشته باشد. مثلاً یک دایره نسبت به مرکز خود تقارن مرکزی دارد.

خانه‌بندی: خانه‌بندی کردن یک صفحه به معنی آن است که بتوان آن را با کاشی‌های مسطحی پوشاند که فاصله یا همپوشانی بین کاشی‌ها وجود نداشته باشد، مانند شش ضلعی منتظم مربع یا شکل‌های دیگر. فضا با اشکال سه بعدی مانند مکعب، یا هشت وجهی برش خورده، خانه‌بندی یا پر می‌شود.

ریاضیات بر قلهٔ امواج

اگر موج سوار باشید، می‌دانید که گاهی از پیش دانستن این‌که چه وقت موج بالا می‌آید دشوار است. گاهی موج به‌طور کامل در ساحل ظاهر می‌شود اما تا داخل آب می‌شوید فروکش کرده است، بنابراین گاهی ممکن است ساعت‌ها منتظر موج کامل بمانید. گاهی پشت سرهم می‌آیند و شما می‌توانید از بین آنها انتخاب کنید. نیازی به گفتن نیست که نظریهٔ امواج و عملکرد موج پیچیده است.

امواج دریا.

عوامل بسیاری عمل می‌کنند و موج پدید می‌آورند. باد، زلزله، حرکت کشتی‌ها و البته کشش گرانشی ماه و خورشید باعث ایجاد موج و به هم ریختن اقیانوس می‌شوند. امواج دریا بر سطح آب حرکت می‌کنند. این شکل‌های مواج وقتی اختلالات و عوامل

متعددی بر یکدیگر اثر می‌گذارند نوعی ویژگی تصادفی دارند. بررسی‌های بسیاری در سال‌های ۱۸۰۰ در زمینهٔ ریاضی امواج اقیانوس انجام شده است. مشاهدات و تجربه‌های آزمایشگاهی کنترل شده به دانشمندان کمک کرده است تا به نتایج جالبی برسند. این کار در سال ۱۸۰۲ در چکسلواکی هنگامی آغاز شد که فرانتس گرتنر نظریهٔ مقدماتی امواج را تدوین کرد. او مشاهداتش را نوشت که چگونه ذرات آب در موج حرکتی دایره‌ای دارند. آب در قلهٔ (بالاترین نقطهٔ) موج در جهت موج و در فرورفتگی (پایین‌ترین نقطهٔ) موج در خلاف جهت آن حرکت می‌کند. بر روی سطح، هر یک از ذرات آب پیش از بازگشت به جای اول خود، مسیری دایرّه‌ای را طی می‌کند. قطر این دایره با ارتفاع موج برابر بود. در سراسر عمق موج این دایره‌ها ایجاد می‌شوند. اما هر چه ذره در جای عمیق‌تری باشد این دایره کوچک‌تر است. در واقع به این نکته پی‌بردند که در عمق $\frac{1}{9}$ طول موج (فاصلهٔ افقی بین دو قلهٔ متوالی)، قطر مدار دایره‌ای حدود نصف مدار دایره‌ای ذرهٔ آب روی سطح است.

چون امواج با این ذرات دارای حرکت دایره‌ای مرتبط‌اند و چون منحنی‌های سینوسی و چرخزادی نیز به دایره‌های گردان بستگی دارند، شگفت‌آور نیست که این منحنی‌های ریاضی و معادلات آنها در توضیح امواج دریا مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اما به این نکته پی‌برده‌اند که امواج دریا دقیقاً سینوسی یا سایر منحنی‌های نظری ریاضی دیگر نیستند. عمق آب، شدت باد و جزر و مد تنها تعدادی از متغیرهایی هستند که باید در تشریح امواج در نظر گرفته شوند. امروزه بررسی امواج دریا به کمک ریاضیات آمار، احتمالات و نظریهٔ پیچیدگی انجام می‌شود. شمار زیادی از امواج کوچک در نظر گرفته می‌شوند و پیش‌بینی‌ها برپایهٔ داده‌های گردآوری شده تدوین می‌شود.

* * *

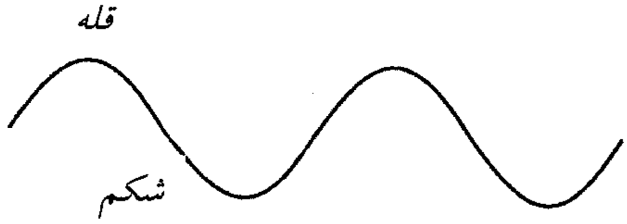
تعدادی از ویژگی‌های ریاضی امواج دریا از این قرار است:

۱) *طول موج تابع دورهٔ تناوب (پریود) است.*

۲) *ارتفاع موج به دورهٔ تناوب و طول بستگی ندارد (استثناهایی وجود دارند که تأثیر دورهٔ تناوب و طول در آن ناچیز است)*

۳) *موج هنگامی می‌شکند که زاویهٔ قله از °۱۲۰ بیشتر شود. در هنگام شکستن موج بیشتر انرژی آن تحلیل می‌رود.*

٤) *راه دیگر تعیین زمان شکستن امواج مقایسهٔ ارتفاع با طول آن است. اگر این نسبت از $\frac{1}{7}$ بیشتر شود، موج می‌شکند.*

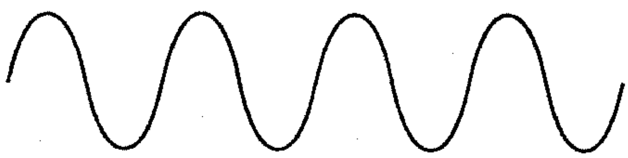


ارتفاع موج ـ فاصلهٔ عمودی بین قله و فرورفتگی

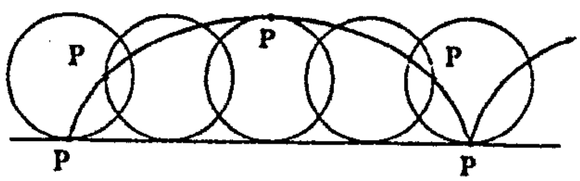
طول موج ـ فاصلهٔ افقی بین دو قلهٔ متوالی

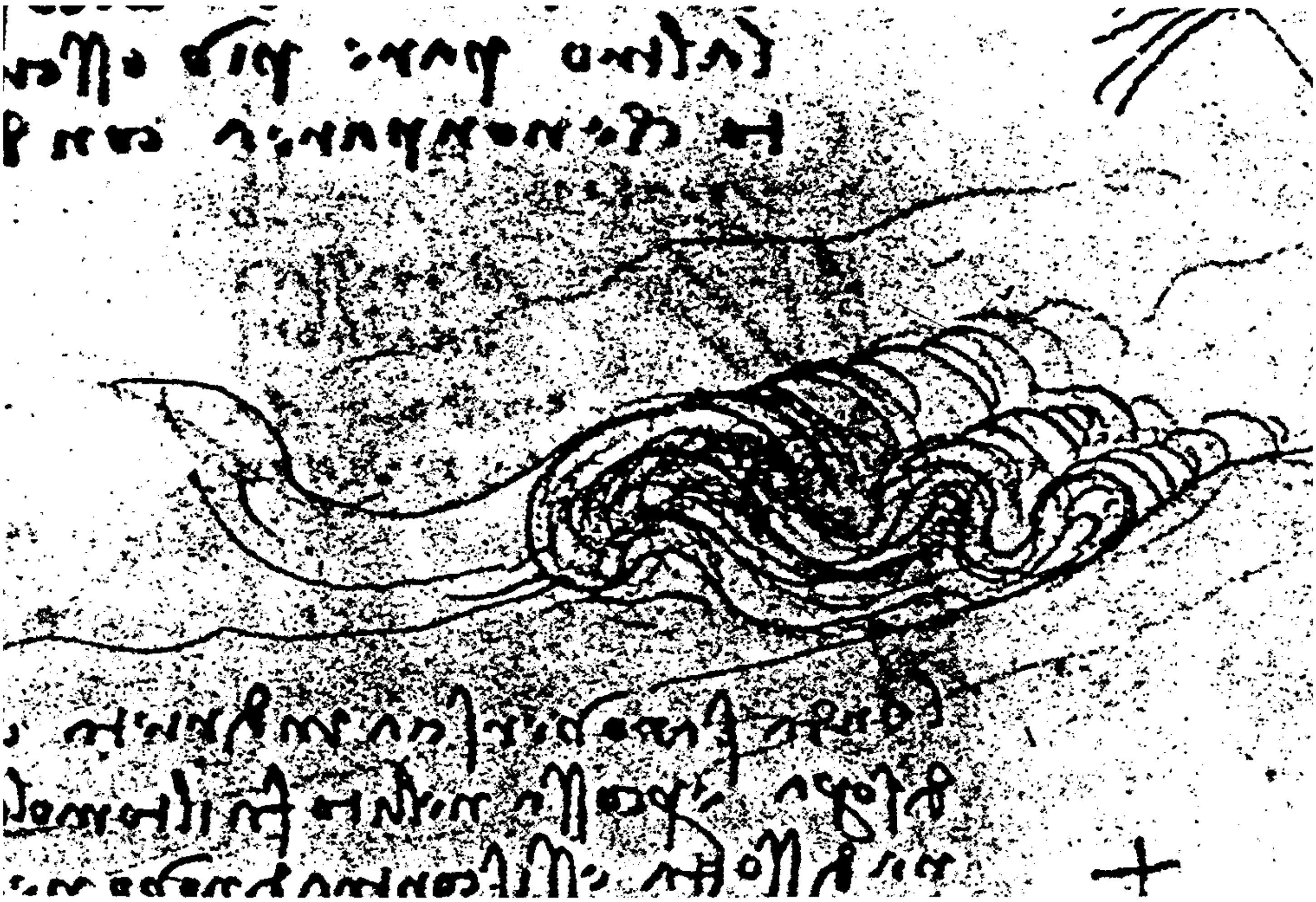
دورهٔ تناوب موج ـ زمانی که قلهٔ موج یک طول موج را می‌پیماید، به ثانیه

منحنی سینوسی یک تابع مثلثاتی متناوب است (شکل آن مرتباً تکرار می‌شود).

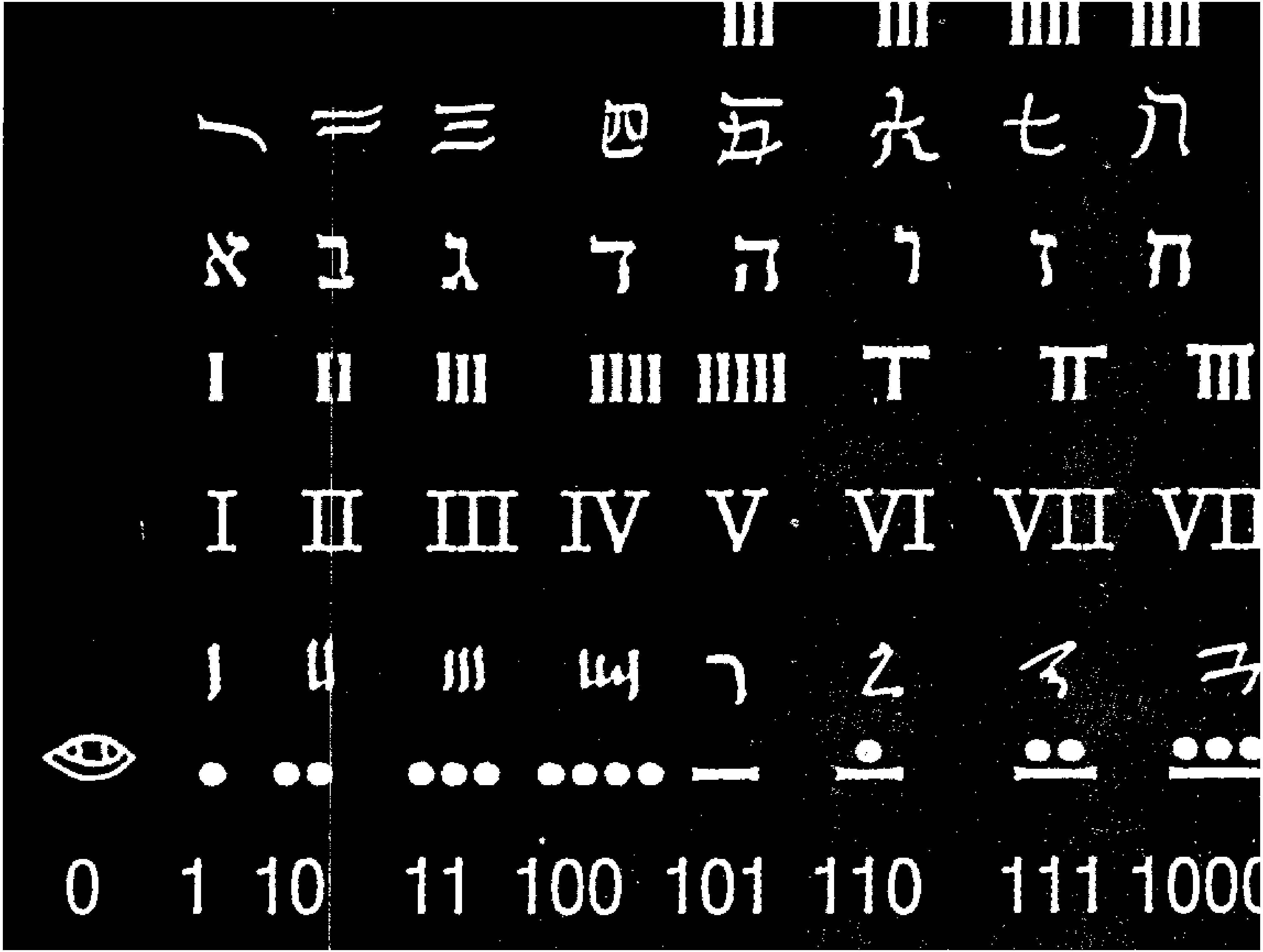


منحنی چرخزاد منحنی حاصل از مسیر نقطه‌ای ثابت بر روی دایره‌ای است که بر روی خطی راست می‌غلتد.





یادداشت‌های لئونارد داوینچی پر از طرح و نوشته‌هایی دربارهٔ دینامیک امواج است. این طرح از نسخهٔ خطی مادرید II برگ ٢٤ حرکت مارپیچی امواج در برخورد به ساحل را نشان می‌دهد. در اینجا او نوشته است: «*امواج دریا چیزی را از ساحل با خود نمی‌برند. هر چیز که در دریا رها شود دریا آن را به ساحل پرتاب می‌کند. سطح آب برای مدتی نقش امواج را نگه‌می‌دارد.*» توصیف او از چگونگی شکستن امواج بر روی ساحل و برگشتن آنها به امواجی که وارد می‌شوند برداشت دقیقی هستند که با اصول حرکت امواج که سال‌ها بعد تدوین شد سازگار است ـ یعنی این‌که هر نقطه‌ای که موج بر آن اثر می‌کند نقطهٔ بهم خوردگی جدیدی می‌شود و تمام بهم خوردگی‌ها بر شکل موج اثر می‌گذارند.


一 二 三 四 五 六 七 八
א ב ג ד ה ו ז ח
I II III IV V VI VII
0 1 10 11 100 101 110 111

تردستی‌های ریاضی در گذشته

بابلیان و جذر
روش چینی چیدن مربع‌ها
نردبانی که بر $\sqrt{2}$ ذره ذره پیش می‌رود
سازندگان اولیهٔ اعداد تصادفی
ضرب مصری
اولین آزمایشگاه علمی
افلاطون مربع را دو برابر می‌کند
رومیان و مساحت دایره
چگونه گونیا زاویه را به سه قسمت می‌کند
رازهای ناگشودهٔ ریاضی
آخرین قضیهٔ فرما
گالیله و تناسب
ریاضیات و ظرف‌ها
هندسه‌ها ـ قدیم و جدید
نام‌ها در خود چه دارند؟
فرمول جادویی اویلر $F + V - E = 2$

در بیشتر علوم هر نسلی آنچه را نسل پیشین ساخته است ویران می‌سازد و آنچه را وضع کرده است نسل بعدی رد می‌کند. تنها در ریاضیات است که هر نسل بخش جدیدی به ساختمان قدیم اضافه می‌کند.

ـ هرمان هنکل

در این روزهای ستیزهٔ بین پژوهش‌های قدیم و جدید، قطعاً باید چیزی برای گفتن باشد که با فیثاغورس شروع نمی‌شود و با اینشتین پایان نمی‌یابد. اما از همه کهن‌تر و جوان‌تر است.

ـ جی. اچ. هاردی

کشف تردستی‌های ریاضی محدود به مسایل امروزی نیست. تاریخ و اندیشه‌های گذشته گنجینه‌ای از تردستی‌های ریاضی دارد. انسان اغلب از این شگفت‌زده می‌شود که در عهد باستان از اندیشه‌هایی مانند اعداد گنگ، برهان‌ها و مقاطع مخروطی استفاده می‌کرده‌اند. اگر به‌خاطر کنجکاوی انسان و آرزوی یادگیری نبود، آیا ریاضیات به آنچه امروز بدان رسیده است می‌رسید؟ این فصل از میان مفهوم‌های بسیار ریاضی تنها چند مفهوم را که از فراز سده‌ها سر برآورده‌اند نشان می‌دهد.

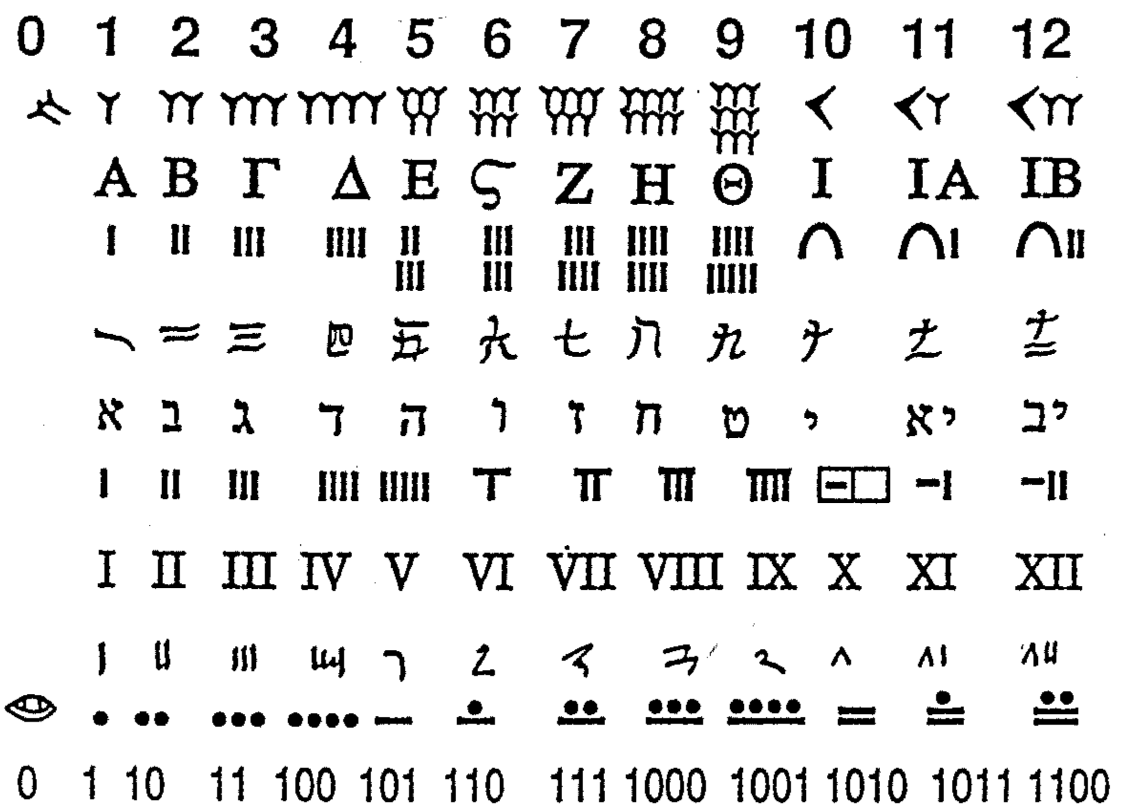
۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱

پاسکال احتمال لاپلاس و چو شین ـ چیه
زنون پارادوکس وایتهد • اینشتین نسبیت
کتاب حساب فیبوناچی دنبالهٔ ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸ ...
خوارزمی جبر بهاسکره
وتر^2 = ضلع^2 + ضلع^2 فیثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$
نظریه مجموعه کانتور عددهای ترامتناهی
کامپیوترهای بابیج برنامه‌ریزی لولیس
پازل‌های *لوید* • *دادنی* • مختصات کارتزین دکارت
لگاریتم‌های نپر • محاسب‌های پاسکال و لایب‌نیتس
مخروطات آپولونیوس هوپاتیا • نیوتون حسابان لایب‌نیتس و سکی کوا
منحنی‌های آنیزی و آنالیزهای نوتیر • معادلات دیوفانتوس
اراتوستنس اندازه‌گیری مساحت کرهٔ زمین
هندسه اقلیدس ریمانی و بابای و لباچفسکی

تکه چسبانی مفهوم‌های ریاضی و آفریننده‌های آن‌ها.

تاریخ نشان می‌دهد که خلاقیت ریاضی منحصر به هیچ فرهنگ، دورهٔ زمانی، تمدن یا جنسیت ویژه‌ای نیست. کشف گنجینهٔ اندیشه‌های شگفت‌انگیز و تلاش انجام گرفته در طی قرن‌ها واقعاً باورنکردنی و هیجان‌انگیز است. این چنین کشفی خواننده را به سفری می‌برد که زمان و کشورهای سراسر جهان را می‌پیماید. این سفر آشکار می‌سازد که بعضی مفهوم‌ها به‌طور همزمان در کشورهای مختلفی کشف شده‌اند، مانند ابداع هندسهٔ هذلولوی. می‌دانیم بعضی اشکال اعداد و دستگاه‌های شمارش برای تمام مردمان طبیعی بوده است. می‌بینیم که استفاده از ارزش مکانی و عدد صفر در بسیاری از بخش‌های جهان ابداع شده‌اند ـ نخست در بابل در پایهٔ ۶۰، سپس در مایا با دستگاه در پایهٔ ۲۰ اصلاح شده و به‌وسیلهٔ هندی‌ها هنگامی‌که نمادگذاری موضعی را برای دستگاه دهدهی پدید آوردند. می‌بینیم که بعدها مسلمانان روش آنها را اصلاح کردند

اصول عددنویسی



هندی ـ عربی، بابلی، یونانی، هیروگلیف مصری، دست‌خط چینی، عبری، اعداد میله‌ای چینی، رومی، هیراتیک‌های مصری، مایایی، اعداد دودویی

و به صورت متعارف درآوردند. چینیان نیز ارزش موضعی را ابداع کردند و از صفر در اعداد میله‌ای خود استفاده کردند، که به دستگاه شمارش پیچیده‌ای بر پایهٔ ده تبدیل

شد و از آن در انجام محاسبات ویژه استفاده می‌شد. از میان هزاران ریاضیدان و اندیشه‌های ریاضی، در این فصل تنها به چند مورد اشاره می‌شود. آنچه من در اینجا مورد بحث قرار می‌دهم به هیچ وجه نشانهٔ برتری و آوازهٔ آنها نسبت به دیگران که مطرح نمی‌شوند نیست. **به شما سخت توصیه می‌کنم که از این بخش‌ها همچون تختهٔ پرشی برای مطالعات بیشتر و بالا بردن آگاهی‌تان از جادوی گذشته استفاده کنید.** با این نیت است که تصویر جدول ریاضیدانان مشهور، تکه چسبانی اندیشه‌های ریاضی و آفرینندگان آنها، و نمودار دستگاه‌های اعداد نشان داده شده است. ما در میانهٔ بسیاری از کشف‌های ریاضی نو هستیم. نیازی نیست کسی ریاضیدان باشد تا جوهر این اندیشه‌ها را دریابد یا خلاقیت آنان را بسنجد. این دو را در گذشته و آینده جستجو کنید.

فرما	هیپاتیا	پوانکاره	فیثاغورس
اویلر	نوتر	بهاسکره	عمر خیام
افلاطون	هینگ	ریمان	لباچفسکی
پاسکال	لاگرانژ	لایب‌نیتس	ارشمیدس
گالوا	کوشی	هیلبرت	رامانوجان
اقلیدس	اودوکسوس	ددکیند	فیبوناچی
کیلی	ژاکوبی	دکارت	کووالفسکایا
پاپوس	سقراط	بول	کرونکر
تالس	همیلتون	سکی کوا	کاوالیری
کانتور	ساکری	کوما	برنولی
بابای	فوریه	بطلمیوس	آپولونیوس
آنیزی	گالیله	گاوس	وایراشتراس
گودل	هرمیت	لژاندر	دوموآور
نپر	لاپلاس	سیلوستر	اراتوستنس
زنون	نیوتون	لولیس	کپلر
آبل	ژرمن	دیوفانتوس	ارسطو
راسل	اینشتین	مرویل	خوارزمی
لوئی هوئی	بیرکوف	دو شاتله	وایتهد

جدولی از تعدادی از ریاضیدانان نامی گذشته.

بابلیان و جذر

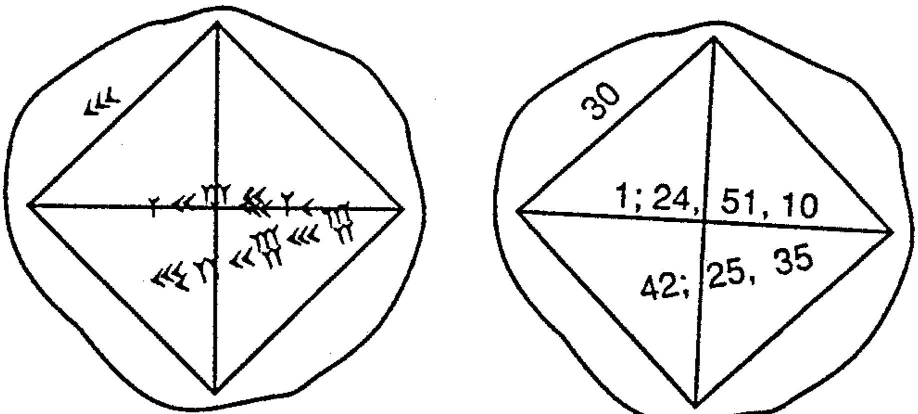
در مورد تقریب دقیق جذر چه می‌کردند؟

اغلب ما ریاضیات باستان را درست همین‌گونه می‌دانیم ــ باستانی و دور. اما با نگاهی به گذشته، پی بردن به این‌که ممکن است از اندیشه‌ها، یا مفاهیمی استفاده کنید که مردم هزاران سال پیش از آن استفاده می‌کرده‌اند شگفت‌انگیز است. آنچه ما از ریاضیات بابلیان می‌دانیم به‌طور عمده از چند لوح گلی در متن‌هایی به خط میخی از کاوش‌های باستان‌شناسی به دست آمده است. قدمت این الواح حدود ۳۰۰۰ تا ۲۰۰ پیش از میلاد است[۱]. آنها روشن می‌کنند که بابلیان با مفاهیم زیر سروکار داشته‌اند:

۱. نویگه باور در سال‌های ۱۹۳۵ـ۱۹۳۷، تورو ورانگین در سال ۱۹۳۸ این لوحه‌ها را ترجمه کردند. نویگه باور و ساکس عددهای بابلی را ترجمه کردند و نویگه باور برای سهولت خواندن ویرگول را برای ارزش موضعی عدد و نقطه ویرگول را برای شصتگانی به‌کار برد. برای مثال: YYY<YY<Y< ترجمه می‌شود به ۳ و ۱۰؛ ۱ و ۱۱ یعنی (۳/۳۶۰۰) + (۱۰/۶۰) + ۱ + ۱۱(۶۰)

- *معادلات یک مجهولی*
- *دستگاه معادلات دومجهولی، جداول تقریب‌ها*[1]
- *مساحت و حجم*
- *محاسبهٔ مساحت مثلث و ذوزنقه*
- *محاسبهٔ تقریبی π، در تعیین مساحت دایره π را ۳ گرفته‌اند ــ $3r^2$*
- *حجم منشور و استوانه با ضرب مساحت قاعده در ارتفاع*
- *قضیهٔ فیثاغورس*
- *نمونه‌هایی از نظریهٔ اعداد مثلاً*

$$1+2+4+\ldots 2^9 = 2^9 + (2^9-1)$$



لوح بابلی[2] صفحهٔ قبل ـ محاسبهٔ تقریبی شگفت‌آور و دقیق $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد. دانستن این مطلب به همان اندازه شگفت‌انگیز است که دستگاه‌شمار موضعی در پایهٔ شصت بابلیان برای این اندازه دقت کاملاً مناسب بود. بابلیان دستگاه شمار سومری را به دستگاه شمار شصتگانی تبدیل کردند[3]. این نخستین دستگاه شمار موضعی زمان خود بود. ابتدا صفر و ممیز شصتگانی نداشت، نشان دادن مقدار موردنظر اعداد به موقعیت بستگی داشت. مثلاً این عدد 𒌋𒐖𒌋𒁹𒌋 می‌توانست نشان‌دهندهٔ موارد زیر باشد.

---

۱. این الواح جدول‌هایی را برای محاسبهٔ تقریبی مقادیر مختلف ریاضی نشان می‌دهند. مثلاً جدول مقدار معکوس در هنگامی به کار می‌رفت که کسر باقیمانده داشت، و مفاد برای جذر و کعب حفاری‌ها به‌دست آمده است.

۲. از لوح YBC 7289 مجموعهٔ بابلی در ییل.

۳. بابلی‌ها از دو نماد برای عددنویسی استفاده می‌کردند 𒁹 به‌جای یک و 𒌋 به جای ده. مکان این دو نماد مقدار آنها را تعیین می‌کرد.

$$11+\frac{12}{60} \quad \text{یا} \quad 11(60)+12=672$$

بابلیان بعدها مطابق با  یا  را برای موقعیت صفر ابداع کردند. بابلیان در این محاسبه‌های تقریبی دقیق برای $\sqrt{2}$ چه می‌کردند؟ با بررسی دقیق این لوح به خط میخی می‌بینیم که این تصویر مربعی با دو قطر است. یکی از اضلاع مربع نماد  است که نشان می‌دهد آنها ۳۰ را چطور می‌نوشته‌اند. بر روی خط افقی نوشته‌اند:

که ۱۰، ۵۱، ۲٤، ۱ را نشان می‌دهد. با فرض ممیز شصتگانی بین ۱ و ۲٤، عدد تبدیل می‌شود به:

$$1+(\frac{24}{60})+(\frac{51}{60^2})+(\frac{10}{60^3})$$
$$=1+(\frac{2}{5})+(\frac{51}{3600})+(\frac{1}{216000})\approx 1/4142129^{+}$$

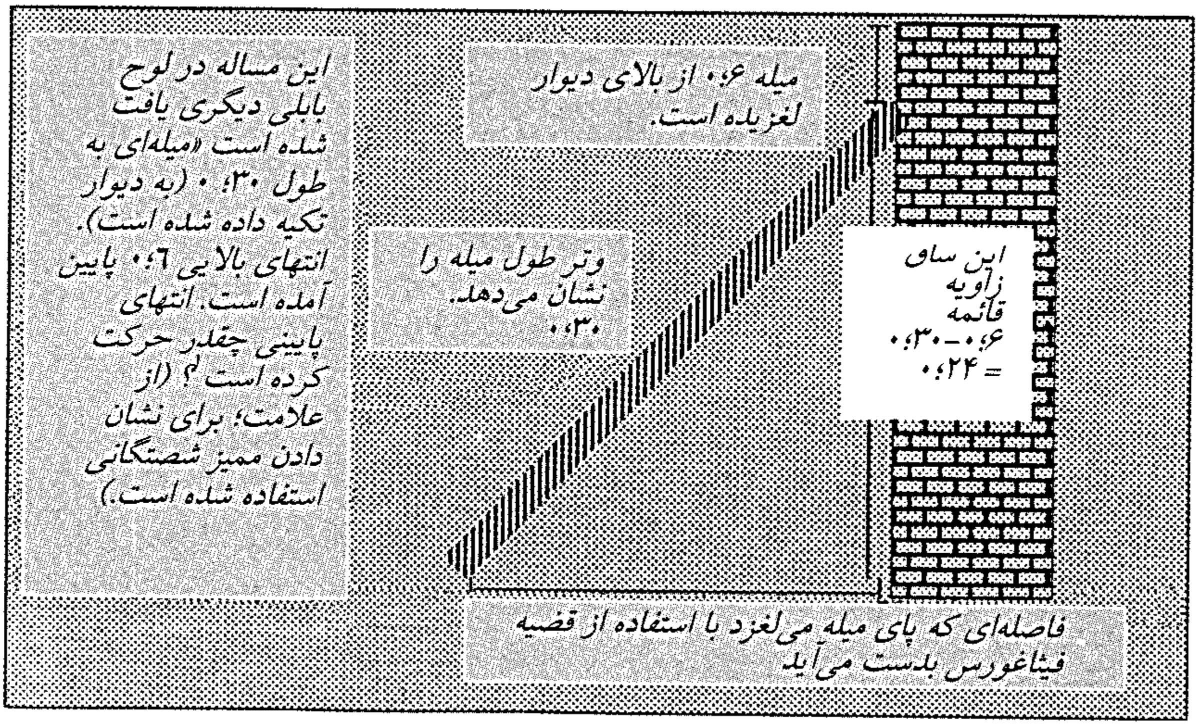
که با $\sqrt{2}=1/414213562...$ قابل مقایسه است. احتمالاً بابلیان برای رسیدن به این تخمین از تقریب متوالی مورد استفادهٔ یونانیان استفاده کرده‌اند.[۱]

می‌دانیم که بابلیان درک درستی از قضیهٔ فیثاغورس داشته‌اند. مقداری که آنها برای قطر عمودی محاسبه کرده‌اند تقریب دقیقی برای طول قطر مربع است. یعنی اعداد قطر ۳۵، ۲۵؛ ٤۲ است که معادل است با $42+(\frac{25}{60})+\frac{35}{3600})\approx 42/42638889$ در حالی‌که $30\sqrt{2}\approx 42/42640687$ است. بابلیان علاوه بر کار با مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن

---

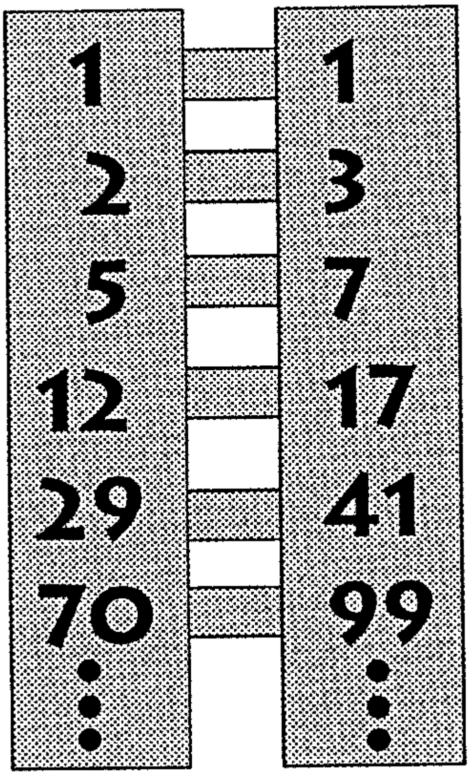
۱. یونانیان باستان از روش زیر در محاسبهٔ تقریبی جذر استفاده می‌کردند: فرض کنید نخستین فرض آنها برای $\sqrt{2}$، a بود (مثلاً فرض کنید ۱ = a) تخمین بعدی $\frac{2}{a}$ بود (که مساوی $\frac{2}{1}=2$) می‌شود. تخمین بعدی آنها میانگین این دو عدد بود $\frac{1+2}{2}$ که ۱/۵ می‌شود. ۱/۵ را بعداً با تقریب جدید $\frac{2}{1/5}$ میانگین می‌گرفتند و این روند ادامه پیدا می‌کرد.

اعداد گویا (مثلاً {۵، ٤، ۳}، {۱۳، ۱۲، ۵}) هستند، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن اعداد گویا نیستند هم استفاده کرده‌اند. این مطلب استفادهٔ آنها از محاسبهٔ تقریبی برای اعداد گنگی مانند $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد.



نردبانی که ذره ذره به $\sqrt{2}$ می‌رسد

یونانیان پی بردند چگونه طول اعداد گنگ را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس بسازند. آنها از محاط کردن و محیط کردن چند ضلعی‌های منتظم و مفاهیم بی‌نهایت‌ها و حد استفاده می‌کردند تا به مساحت دایره نزدیک شوند. آنان نوعی نردبان حسابی نیز با استفاده از نسبت‌ها ابداع کردند تا مقدار تقریبی اعداد گنگ را محاسبه کنند. روش کار برای $\sqrt{2}$ چنین است.



با آغاز از بالا با ۱ و ۱، بقیهٔ اعداد ستون اول به روش زیر ساخته می‌شوند

در اینجا دیده می‌شود که چطور اعداد ستون دوم را می‌سازند

$1+1=2$	$1+2=3$
$2+3=5$	$2+5=7$
$5+7=12$	$5+12=17$
$12+17=29$	$12+29=41$
$29+41=70$	$29+70=99$

نسبت $\sqrt{۲}$/۱ با نسبت اعداد همان پلهٔ نردبان محاصره می‌شود. این نسبت‌ها مداوماً به $\sqrt{۲}$/۱ نزدیک‌تر می‌شوند. حد این نسبت‌ها $\sqrt{۲}$/۱ است.

توجه: دو عدد هر یک از پله‌های نردبان در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

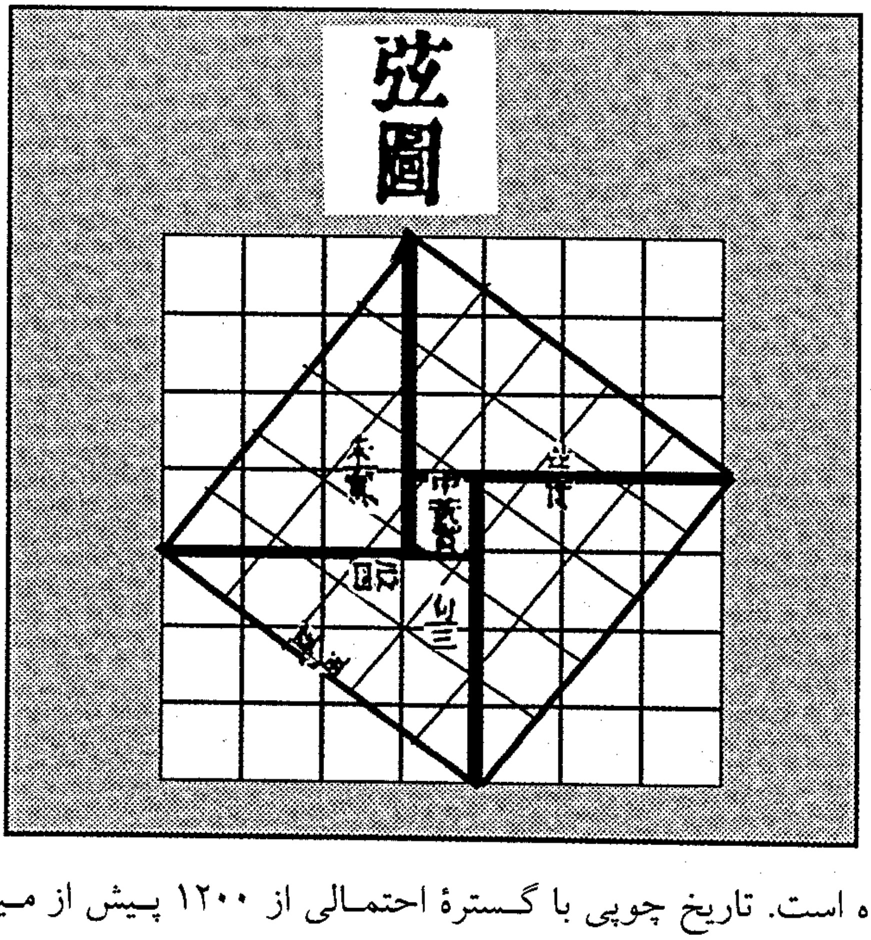
$$y^2 - 2x^2 = \pm 1$$

که مقادیر x اعداد سمت چپ نردبان است.

$1/\sqrt{2} = 0{,}707106781...$
$1/1 = 1$
$2/3 = 0{,}666...$
$5/7 = 0{,}71428571429...$
$12/17 = 0{,}70588235294...$
$29/41 = 0{,}70731707317\ ...$
$70/99 = 0{,}7070...$

روش چینی چیدن مربع‌ها

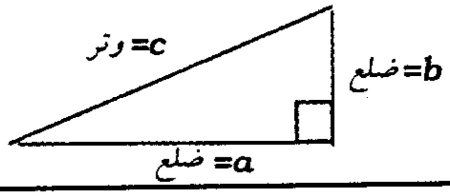
یافتن کارشناسانی که بتوانند نوشته‌های چینی باستانی را ترجمه کنند دشوار است. بخصوص کارشناسانی که بتوانند دست‌نوشته‌هایی را که به مفهوم‌های ریاضی می‌پردازند ترجمه کنند، از این هم دشوارتر است. این گفته نشان می‌دهد چرا نمونه‌های چینی موضوع‌های ریاضی کمیابند. شوان- تو، چیدن مربع‌ها، روشی بود که ریاضیدانان چینی از آن برای رسیدن به نتایج جبری از ابزارهای هندسه و حساب استفاده می‌کرده‌اند. این شکل از دست‌نوشته‌های چینی، چو پی،



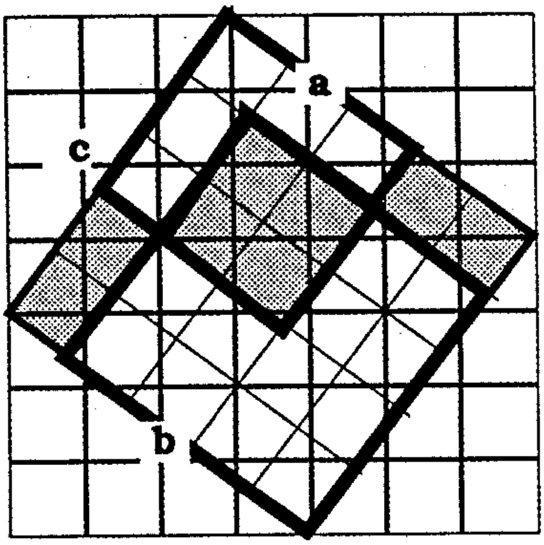
برداشته شده است. تاریخ چوپی با گسترهٔ احتمالی از ۱۲۰۰ پیش از میلاد تا ۱۰۰ میلادی، مورد اختلاف است. اگر ۱۲۰۰ پیش از میلاد صحت داشته باشد، این یکی از نخستین شکل‌های شناخته شدهٔ قضیهٔ فیثاغورس است، که تاریخ آن از فیثاغورس و فیثاغورسیان قدیمی‌تر است. قضیهٔ فیثاغورس در بسیاری از تمدن‌ها در طول تاریخ

مشاهده شده است. در معماری ابزاری برای ساخت زاویهٔ قائمه بوده است. در ریاضیات ابزاری ضروری در بسیاری از شاخه‌ها بوده است و اینک نیز هست.

برپایهٔ قضیهٔ فیثاغورس در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربع‌های دو ساق برابر با مربع وتر است $(a^2+b^2=c^2)$. (عکس آن نیز صادق است)

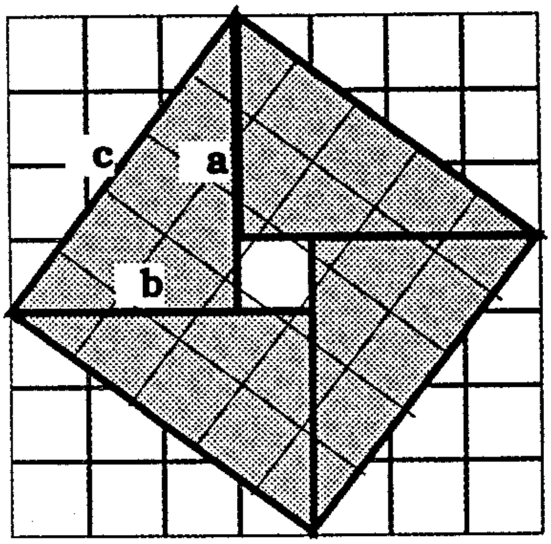


در نمودار سمت چپ پایین، مساحت مربع داخلی ۲۵ = ۵^۲= ۵ × ۵ است، و به چهار مثلث قائم‌الزاویه، هر یک به مساحت (1/2)(3×4)، و یک مربع به مساحت ۱ × ۱ تقسیم شده است. که جمع آنها ۲۵ می‌شود. در نمودار سمت راست به دو مربع کوچک‌تر تقسیم شده است که همپوشانی دارند. یکی ۳ × ۳ و دیگری ٤ × ٤ است. بخش همپوشان آنها همان مساحت بخش خالی مربع ۵ × ۵ است که آنها پر نکرده‌اند، و نشان می‌دهد مساحت مربع بزرگ‌تر (۵^۲) برابر با مجموع مساحت مربع‌های کوچک‌تر یعنی ۳^۲ و ٤^۲ است.



مجموع مساحت دو مستطیل هاشور خورده برابر با مربع هاشور خورده است. (که مربع به دست آمده از همپوشانی دو مربع است). اگر a، b و c را به جای ۳، ٤ و ۵ بگذاریم نشان می‌دهد که:

$$a^2+b^2=c^2$$

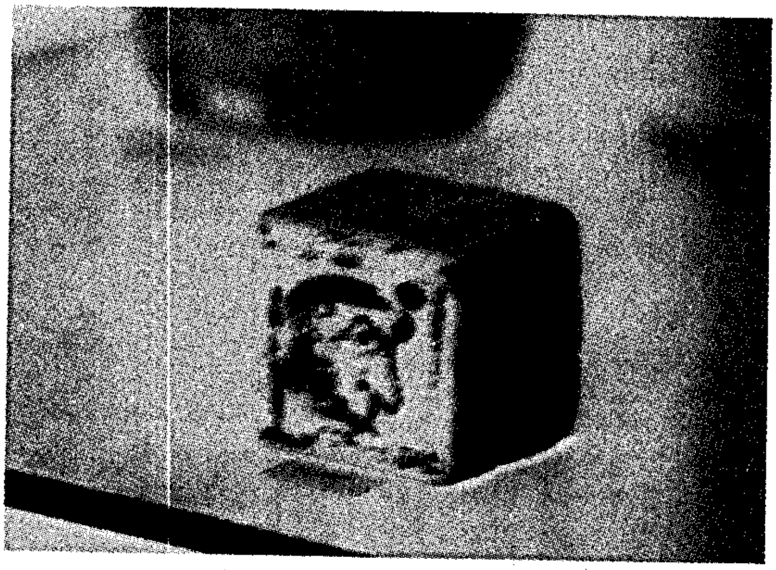


این نمودار نشان می‌دهد چگونه مساحت مربع هاشورخورده از مجموع چهار مثلث و یک مربع واحد در وسط به‌دست می‌آید. به‌طور کلی نشان می‌دهد که:

$$c^2=4(1/2)ab+(a-b)^2$$
$$=2ab+(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^2+b^2$$

یکی از اولین سازنده‌های اعداد تصادفی

اگر چه تاس در یونان باستان سازندهٔ عدد تصادفی به شمار نمی‌آمد، با این حال این تاس یکی از کهن‌ترین تاس‌های موجود شمرده می‌شود. امروزه این تاس باستانی در موزهٔ باستان شناسی ملی آتن نگهداری می‌شود. تاس در طی سده‌ها نقش‌های گوناگونی بازی کرده است. از آن برای پیشگویی آینده، در بازی‌های گوناگونی مانند تخته نرد و روپولی[۱] استفاده می‌شده است. یا در تاس بازی آمریکایی[۲] عنصر اصلی بازی است. ریاضیدانان مدت‌ها از دیدگاه احتمالات مجذوب تاس بوده‌اند. در واقع، تاس را می‌توان عامل اصلی توجه بلز پاسکال و پیر دو فرما به احتمالات به‌شمار آورد. یکی از دوستان پاسکال در هنگام قماربازی از او پرسید اگر بازی پیش از آنکه تمام شود متوقف شود پول صندوق را چگونه باید تقسیم کرد.



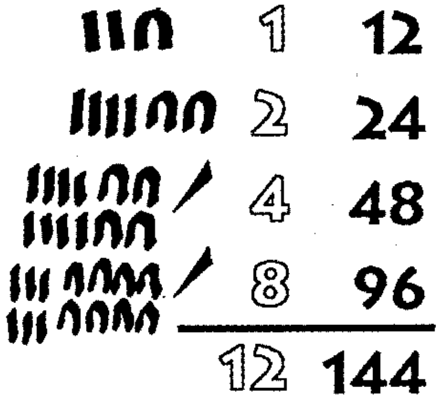
پاسکال در مورد این مسأله به فرما نامه‌ای نوشت. این دو نفر در سال ١٦٥٤ در نامه‌هایشان به یکدیگر نظریهٔ احتمال را پایه‌ریزی کردند و بدین ترتیب شاخهٔ جدیدی را در ریاضیات بنیان نهادند. امروزه از تاس و سایر تولیدکنندگان عددهای تصادفی در آموزش ویژگی‌های نظریهٔ احتمال استفاده می‌شود.

۱. روپولی (monopoly) نوعی بازی بر روی یک صفحهٔ مخصوص، دونفره یا چند نفره، که حرکت آنها با انداختن تاس انجام می‌شود، و با آن خرید مستغلات انجام می‌گیرد.

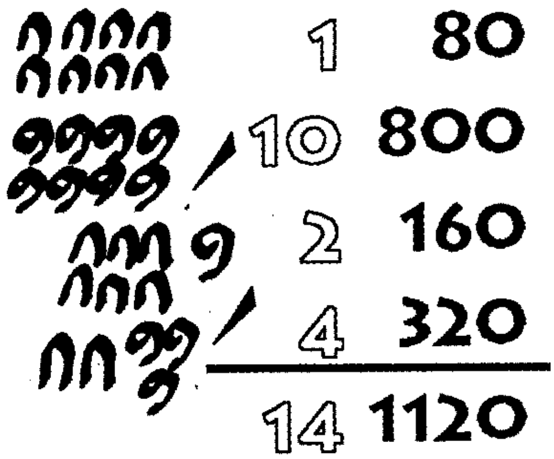
۲. نوعی تاس بازی که دو تاس را باهم می‌اندازند و بر سر اینکه جمع این دو چند می‌شود شرط‌بندی می‌کنند.

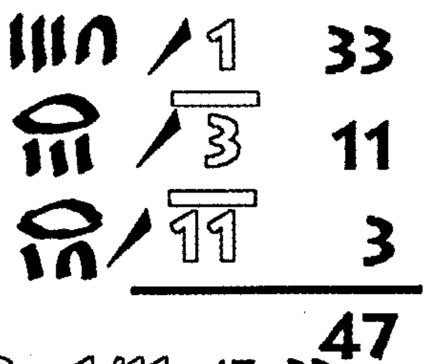
ضرب مصری

روش ضرب مصری، قرن‌ها و در تمدن‌های گوناگون باقی ماند و انتشار یافت. در مدارس یونان باستان با عنوان ریاضیات مصری آموزش داده می‌شد. در سده‌های میانه روش‌های آن تدریس می‌شد و آنها را با نام‌هایی مانند تضعیف برای دو برابر کردن و تنصیف برای نصف کردن می‌نامیدند. در اینجا نمونه‌ای از پاپیروس رینـد و چگونگی ضرب ۱۲ × ۱۲ از سوی کاتبان مصری عرضه می‌شود. کار با ۱۲ آغاز می‌شود. بعد دو برابر شده به ۲٤ می‌رسد که آن نیز دو برابر شده و ٤۸ به‌دست می‌آید که به نوبهٔ خو دو برابر می‌شود تا ۹٦ به دست آید. خط‌های موربی که در کنار ٤ و ۸ ترسیم شده‌اند، نشان می‌دهند جمع آنها ۱۲ است. سپس مقادیر متناظر با آنها باهم جمع می‌شوند و پاسخ ۱٤٤ به دست می‌آید. روش مصری ضرب نیاز به جدول‌های ضرب را منتفی کرد، زیرا اساساً بر جمع کردن بنیاد نهاده شده بود.



تقسیم هم به همین شیوه انجام می‌گرفت. برای تقسیم ۱۱۲۰ بر ۸۰ باید پیدا کنید چه عددی باید در ۸۰ ضرب شود تا ۱۱۲۰ به‌دست آید. بسته به این‌که عددی که تقسیم می‌کنید چقدر بزرگ باشد، مقسوم علیه دو برابر شده یا در ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و غیره ضرب می‌شود. نتایج را می‌توان دو برابر کرد تا جایی که حاصل جمع با ۱۱۲۰ برابر شود. اگر مسأله درست درنمی‌آمد مصریان از کسر، مثلاً در مورد ۳۳ ÷ ٤۷ استفاده می‌کردند.





1+1/3 + 1/11=47÷33

خستین
زمایشگاه علمی

ریاضیدانان و دانشمندان یونان باستان را اغلب نظریه پرداز و فیلسوف به‌شمار می‌آورند. پژوهش‌های جدید[1] اینک روشن ساخته‌اند که نخستین آزمایشگاه ثبت شده برای کارهای تجربی را فیثاغورسیان (در سدهٔ ششم پیش از میلاد) برپا کرده‌اند. شگفت‌آور نیست که از فیثاغورسیان سندی برای اثبات این ادعا در دست نیست، زیرا آنان سوگند خورده بودند که رازدار باشند. شواهد تأییدکننده را دانشمندان بعدی به دست داده‌اند. این تصویر از نوشته‌های بوئتیوس، دانشمند رومی (سدهٔ پنجم میلادی) گرفته شده است. این تصویر نشان می‌دهد که فیثاغورسیان آزمایش‌هایی دربارهٔ صوت، به‌ویژه رابطهٔ بین نسبت‌ها در یک شیء (در این مورد زنگ‌ها) و نوت‌های حاصل از آنها انجام می‌داده‌اند. تئون ازمیری (سدهٔ دوم میلادی) همراه با مؤلفان دیگر باستانی، از آزمایش‌های مشابهی از سوی یونانیان دیگر و نیز فیثاغورسیان نوشته است. اگر اختراعات ریاضیدان یونانی ارشمیدس (۲۸۷ـ۲۱۲ پیش از میلاد) ــ قوانین اهرم و قرقره‌ها، روش‌های مقایسهٔ حجم اشیا با فروبردن در آب، پیچ ارشمیدس، فلاخن ــ را در نظر بگیریم به وجود و اهمیت آزمایش پی‌می‌بریم.

---

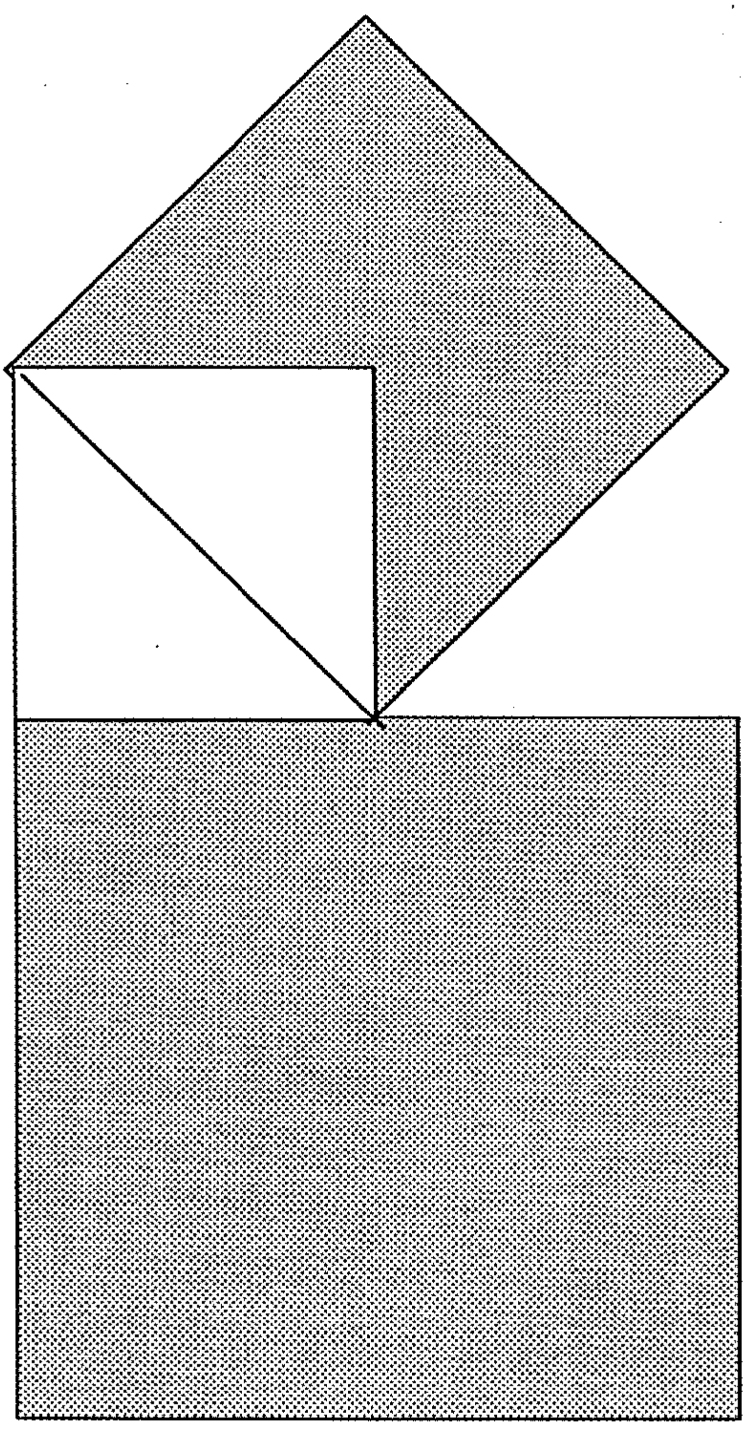
۱. این یافته‌های جدید را اندرو د. دیماروگوناس از دانشگاه واشینگتن در سنت لوئیس در *مجلهٔ صوت و ارتعاش* در ماه مه ۱۹۹۰ مطرح کرده است.

افلاطون مربع را دو برابر می‌کند

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

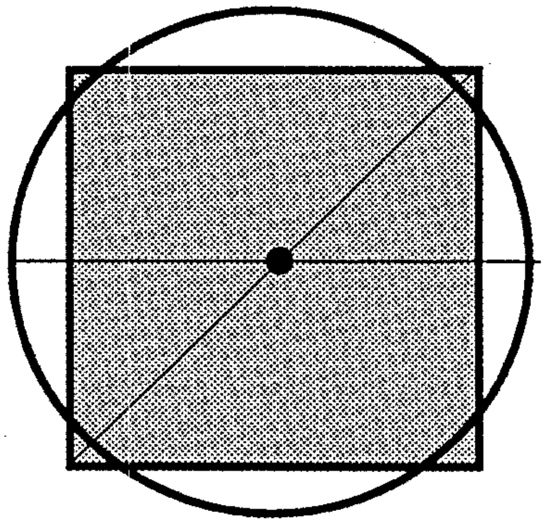
آنکه هندسه نمی‌داند وارد نشود.

این کلمات بر سر در آکادمی افلاطون در آتن نوشته شده بود. افلاطون گرچه به خاطر آثارش در ریاضیات مشهور نیست، به‌خاطر آماده سازی مرکزی شهرت دارد که در آن تفکر ریاضی را تشویق و بدان راهنمایی می‌کرد. این روش عالی برای دو برابر کردن مساحت مربع در یکی از محاورت افلاطون به نام منون آمده است. این نمودار نشان می‌دهد چگونه مربع دو برابر می‌شود و چگونه دو برابر نمی‌شود.



مساحت مربع هاشورخوردهٔ بالا دو برابر مساحت مربع سفید است. مساحت مربع هاشورخوردهٔ پایین چهاربرابر مربع سفید است. توجه کنید که گرچه طول ضلع آن دوبرابر ضلع مربع سفید است، مساحت آن چهاربرابر است.

ومیان مساحت دایره را چگونه ساب می‌کردند



برای پیدا کردن مساحت دایره، رومیان از مساحت مربعی استفاده می‌کردند که قطر آن ۰/۲۵ بیش از قطر مربع بود. روش کار و میزان دقت آن چنین است:

فرض کنید قطر دایره d باشد. پس قطر مربع $d + ۰/۲۵d = ۱/۲۵d$ است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ضلع مربع $\frac{1/25d}{\sqrt{2}}$ است؛ مساحت این مربع $\frac{1/5625\,d^2}{2}$ خواهدشد. چون شعاع دایره $۰/۵d$ است و مساحت دایره πr^2، پس مساحت دایره

با استفاده از ۳/۱۴۱۶ به عنوان تقریب π خواهیم داشت ـ

روش واقعی	روش رومی
$0/25d^2\pi \approx 0/785d^2$	$\frac{1/5625d^2}{2} \approx 0/78125d^2$

با مساوی دانستن $۰/۷۸۱۲۵d^۲$ و $0/25\pi d^2$ و حل این رابطه برای به دست آوردن π مقدار تقریبی π را از نظر رومیان به دست می‌آوریم، یعنی

$$0/78125\,d^2 = 0/25d^2\pi$$

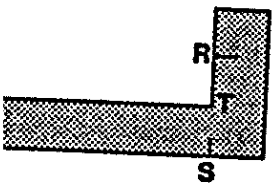
$$\frac{0/78125\,d^2}{0/25\,d^2} = \pi$$

$$3/125 = \pi$$

$$3 + \frac{1}{8} = \pi$$

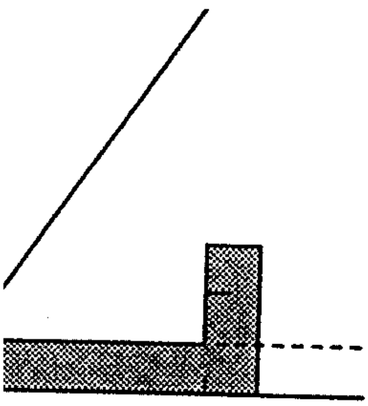
چگونه گونیا زاویه را به سه بخش تقسیم می‌کند

تثلیث زاویه یکی از سه مسألهٔ مشهور نـاممکن در زمان باسـتان اسـت کـه مباحثـات ریاضـی بـسیاری را برانگیختـه بـود. گرچـه زاویـه را نمی‌توان تنها با استفاده از پرگار و خط‌کش به سه بخش تقسیم کرد، اما این کار بـه کمک ابزاری به نام گونیا امکان‌پذیر است. یونانیان باستان از آن برای تثلیث زاویـه بـه روش زیر استفاده می‌کردند.

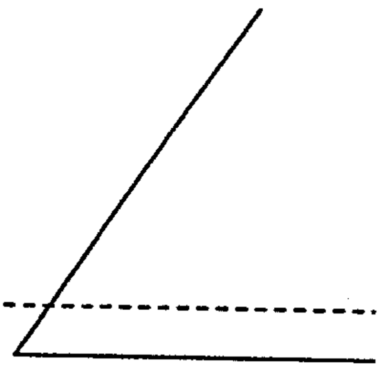


گونیا دارای دو نشانهٔ R و S است، به‌طوری‌که /TR/ = /TS/

مرحله ۱: از گونیـا بـرای کـشیدن خطی موازی برای ضلع آن‌طور کـه در **مرحلهٔ ۲** نشان داده شده اسـت استفاده می‌شود.

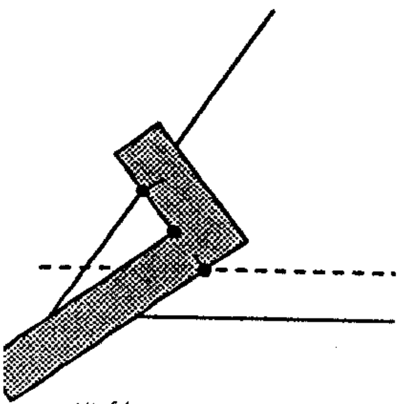


مرحلهٔ ۱



مرحلهٔ ۲

مرحله ۳: گونیـا مطـابق بـا شـكل چنان قرار گیرد که یک علامـت بـر روی ضلع زاویه، یکی بـر روی خـط موازی قرار می‌گیرد و محور از رأس زاویه بگذرد.



مرحلهٔ ۳

مرحله ۴: خط‌چین‌ها، چنان رسـم می‌شوند که مطابق شکل سه مثلث به‌دست آید.

$\Delta PCB \cong \Delta PAB$

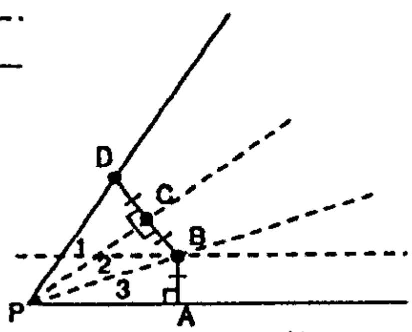
از طریق وتر و ضلع

$\Delta PCB \cong \Delta PCD \cong \Delta PAB$

که در نتیجه

$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$

و بدین ترتیب $\angle p$ به سـه بخـش تقسیم شده است.



مرحلهٔ ۴

...ازهای ریاضی
...ل ناشده

ریاضیات بی‌تردید مسائل فراوانی را مطرح می‌کند. در واقع ریاضی و مسأله از یکدیگر جدائی‌ناپذیرند. تاریخ نشان می‌دهد که اندیشه‌های ریاضی واسطه‌ای برای حل مسائل بوده‌اند، و مسائل ریاضی اندیشه‌ها و کشف‌های ریاضی بسیاری را پدید آورده‌اند. *سه مسألهٔ ترسیمی ناممکن دوران باستان*[۱]، *مسأله پل کونیگزبرگ*[۲] و *مسألهٔ اصل موضوع توازی*[۳] نمونه‌هایی تاریخی از مسائلی هستند که حل شده‌اند و در این فرایند افکار، اندیشه‌ها و کشف‌های ریاضی را پدید آورده‌اند. مطرح کردن و تعمق در مسائل و پرسش‌های ریاضی و موشکافی راه حل‌ها و دلایل، نیروی محرکهٔ ریاضیدانان‌اند.

در اینجا تعدادی از مشهورترین مسائل «حل ناشدهٔ» ریاضی مطرح می‌شود.

مسائل حل ناشدهٔ عدد اول

- فرمولی یا آزمونی وجود دارد تا بتوان مشخص کرد عددی عدد اول است یا نه؟

---

۱. سه مسألهٔ حل ناشدهٔ باستان که باید فقط با خط‌کش و پرگار حل می‌شد عبارتند از: تثلیث زاویه (تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی)، دو برابر کردن مکعب (ساخت مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب موردنظر باشد). و تربیع دایره (ساخت مربعی با مساحتی برابر با دایرهٔ مورد نظر). تعدادی از کشفیاتی که این سه مسأله به پدید آمدن آنها کمک کرده‌اند عبارتند از کونکوئیدهای (منحنی‌های صدفی) نیکومدس*، مارپیچ ارشمیدس و مربع‌ساز** هیپیاس***.

۲. چالش مسألهٔ پل کونیگزبرگ پیدا کردن مسیری بر روی هفت پل کونیگزبرگ است بدون عبور بیش از یک بار از روی هر پل. مفهوم شبکه را اویلر در هنگام حل این مسأله ابداع کرد. (مراجعه شود به شکل‌های ۳۰۴ و ۳۰۷)

۳. اصل موضوع توازی به دنبال روشن کردن آن است که اصل پنجم اقلیدس**** در واقع یک اصل متعارفی است نه قضیه. تلاش برای اثبات آن به کشف هندسه‌های نااقلیدسی انجامیده است.

* نیکومدس، ریاضیدان یونانی سدهٔ دوم پیش از میلاد.

** مربع ساز منحنی مورد استفاده در تربیع منحنی‌های دیگر.

*** هیپیاس فیلسوف یونانی سدهٔ پنجم پیش از میلاد کاشف منحنی تثلیث زاویه.

**** از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد.

• آیا تعداد اعداد اول جفت بی‌نهایت است؟ *اعداد اول جفت دو عدد متوالی فردند که اختلاف آنها دو باشد.* مثلاً ۳ و ۵، چون ۲ = ۳ ـ ۵، تعداد دیگری از آنها عبارتند از ۵ و ۷، ۱۱ و ۱۳، ۴۱ و ۴۳.

• *راز اعداد تام فرد.* عدد تام عددی است که مجموع مقسوم علیه‌های خود (به جز خودش) باشد. عدد ٦ نمونه‌ای از یک عدد تام زوج است زیرا ۳ + ۲ + ۱ = ٦. نمونه‌های دیگر آن ۲۸,٤۹٦ و ۸۱۲۸ است. اقلیدس در حدود ۳۰۰ پیش از میلاد نشان داد که اگر $2^n - 1$ عدد اول باشد $2^{n-1}(2^n - 1)$ عددی تام است. سپس، در قرن هجدهم لئونارد اویلر ثابت کرد که هر عدد زوج کاملی باید با فرمول اقلیدس مطابقت داشته باشد. مثلاً $8128 = 2^6(2^7 - 1)$.

اما اعداد تام فرد به صورت یک راز باقی ماندند، و هنوز هم کسی عدد تام فرد پیدا نکرده است، و نیز ثابت نکرده است که همهٔ اعداد تام زوجند.

حدس گلدباخ

آیا هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است؟

در سال ۱۷٤۲ کریستین گلدباخ (۱۷٦٤–۱٦۹۰) ریاضیدان آلمانی در نامه‌ای به لئونارد اویلر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳) این حدس را مطرح کرد که *هر عدد زوجی به جز ۲، مجموع دو*

عدد اول است. مثلاً ۲ + ۲ = ٤؛ ۳ + ۳ = ٦؛ ۵ + ۳ = ۸؛ ۵ + ۵ = ۱۰؛ ۵ + ۷ = ۱۲ و ... گرچه حدس گلدباخ درست به‌نظر می‌رسد، هیچ‌کس تاکنون آن را ثابت نکرده است. تاکنون اندیشه‌های زیر عرضه شده‌اند: در سال ۱۹۳۱، اشنیرلمان ریاضیدان اهل شوروی ظاهراً ثابت کرد که هر عدد زوجی را می‌توان به صورت مجموع کمتر از ۳۰۰,۰۰۰ عدد اول نوشت ــ که بسیار با دو عدد اول فرق دارد. ایوان وینوگرادف (۱۹۸۳ـ۱۸۹۱) ثابت کرد که تمام اعداد زوج نسبتاً بزرگ مجموع سه عدد اولند. در سال ۱۹۷۳، چن جینگ ـ ران نشان داد که هر عدد زوج نسبتاً بزرگی مجموع یک عدد اول و عددی است که یا اول است یا دو عامل اول دارد.

آخرین قضیهٔ فرما

در سال‌های ۱٦۰۰ پیر دو فرما (۱٦٦۵-۱٦۰۱) در حاشیهٔ یکی از کتاب‌هایش نوشت: *تقسیم مکعب به دو مکعب، توان چهارم، یا به‌طور کلی هر توان بالاتر از دوم به دو توان با همان درجه غیرممکن است. و من دلیلی قطعی برای آن یافته‌ام، اما حاشیهٔ کتاب برای آن ناکافی است.*

تکرار کرد: *اگر n عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ باشد، اعداد صحیح مثبت x و y و z که* $x^n + y^n = z^n$ *وجود ندارد.* یادداشت فرما به چالشی تبدیل شد. و اثبات یا رد آن برای قرن‌ها حتی از عهدهٔ برجسته‌ترین ریاضیدانان خارج بوده است.

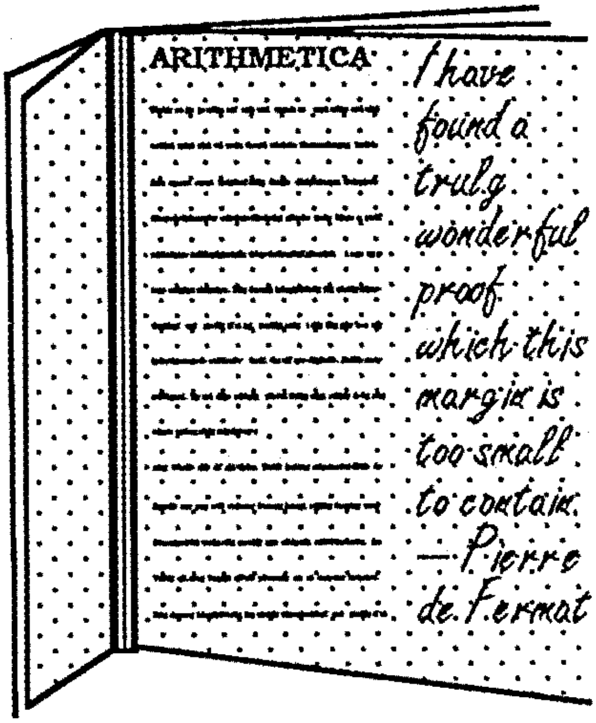
فصل بعد جزئیات بیشتری عرضه می‌کند و جدیدترین اطلاعات در مورد آخرین قضیهٔ فرما را مورد بحث قرار می‌دهد. تعدادی از کشفیاتی که نتیجهٔ تلاش برای اثبات آخرین قضیهٔ فرما بوده‌اند، احتمالاً بیش از خود این قضیه اهمیت دارند.

* * *

بررسی اندیشه‌های ریاضی حل ناشده همان‌قدر جالب است که کندوکاو در آنچه می‌دانیم. این چیزی جز نمونه‌ای کوچک از رازهای حل ناشدهٔ ریاضی نیست. گرچه توضیح تعداد کمی از آنها برای آنان که پیشینهٔ ریاضی ندارند کاملاً آسان است، حل آنها پیچیده است.

آخرین قضیهٔ فرما

عدد صحیح مثبتی وجود ندارد که در معادله $x^n + y^n = z^n$ که n عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ باشد صدق کند.



هنگامی که پیر دو فرما ریاضیدان قرن هفدهم این یادداشت را در حاشیهٔ ترجمهٔ کتاب حساب دیوفانتوس نوشت، کمتر کسی می‌دانست این نظر چه اثری بر تحولات ریاضی ۳۵۰ سال پس از آن خواهد داشت. آیا او واقعاً آن را حل کرده بود؟ آیا صرفاً شوخی می‌کرد؟ هیچ‌کس نمی‌تواند قطعاً اظهارنظر کند، اما آنچه ما قطعاً می‌دانیم این است که به یکی از مشهورترین مسائل حل ناشدهٔ تاریخ ریاضی تبدیل شد. مانند سه *مسأله مشهور دوران باستان*، *اصل پنجم اقلیدس*، و *مسأله پل کونیگزبرگ*، *آخرین قضیهٔ فرما* نیز برای قرن‌ها افکار و کشفیات ریاضی را پدید آورد. جامعهٔ ریاضیدانان بسیار به *منحنی‌های بیضوی پیمانه‌ای (مدولی)*، *آخرین قضیهٔ فرما*، و اثر ۲۰۰ صفحه‌ای اندرو جی. وایلز استاد ریاضی دانشگاه پرینستون علاقمندی نشان داد و به هیجان آمد. او با معرفی اثرش در سخنانی در دانشگاه کمبریج (در ژوئن ۱۹۹۳)، با اعلام این‌که پیش‌بینی *شمیورا ـ تانیاما* ـ ول را اثبات کرده است، که ریاضیدانان احساس می‌کردند کلید اثبات اخرین قضیهٔ فرما را در خود دارد، سخنانش را به اوج رساند. این‌که کار وایلز به *آخرین قضیهٔ فرما* خاتمه داد احساس مثبتی در محافل ریاضی پدید آورد.

در طی چند قرن هزاران «برهان» برای قضیهٔ فرما ارائه شده است، اما هیچ یک تاکنون پاسخگوی بررسی‌های موشکافانه نبوده‌اند، نه این‌که قضیهٔ فرما بسیار خارق‌العاده

است، بلکه چون فرما گفته است «برهان شگفت‌انگیزی یافته‌ام» ـ راه حل او (دلیل او) زیبایی این قضیه است ـــ این قضیه کشفیاتی را از جمله در نظریهٔ اعداد، رمزشناسی و رمزنگاری باعث شده است.

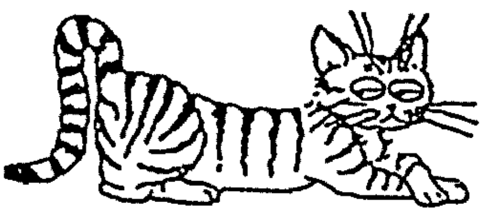
اندرو وایلز

وایلز در نوجوانی مجذوب قضیهٔ فرما شده بود. اما به کاوش در برهان او تا هنگامی که شیوه‌ای امکان‌پذیر نیافت نپرداخته بود. او برهان خود را حاصل کمک و تلاش ریاضیدانان بسیاری می‌داند که پیش از او آمده بودند. در میان قله‌های تاریخی در رسیدن به این هدف، لئونارد اویلر ریاضیدان قرن هجدهم را داریم که این قضیه را برای $n = ۳$ ثابت کرده بود. ارنست ای. کومر ریاضیدان آلمانی این قضیه را برای تمام اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ به جز سه عدد ثابت کرده بود. کامپیوترهای امروزی نشان داده‌اند که برای نخستین چهارمیلیون عدد طبیعی جوابی برای آن نیست. در سال‌های ۱۹۵۰ یوکاتا تانیاما نظریهٔ احتمالی خود را در مورد منحنی‌های بیضوی و ساختارهای آنها در یک صفحهٔ هذلولوی مطرح کرد. در سال ۱۹۸۰ گرهارد فری این مسأله را مطرح کرد که اگر پیش‌بینی تانیاما برای نوع خاصی از منحنی‌های بیضوی (به نام نیمه پایدار) درست باشد، آنگاه قضیهٔ فرما را می‌توان اثبات کرد. هنگامی که کنت ای. ریبت قضیهٔ فرما را اثبات کرد، وایلز تصمیم گرفت قضیهٔ فرما را دنبال کند. از آن زمان او به مدت هفت سال شدیداً به کار پرداخت. در ماه مه ۱۹۹۳ مقاله‌ای از بری مازور از دانشگاه هاروارد توجه او را جلب کرد. این مقاله روشی عددی را شرح داده بود که بیش از صد سال قدمت داشت و در نهایی کردن برهان او بسیار اهمیت داشت.

گالیله و تناسب

مفاهیم ریاضی بسیاری وجود دارند که در حوزهٔ ریاضیات محدودیتی ندارند، اما هنگامی که به جهان واقعی اعمال شوند حدودی دارند.

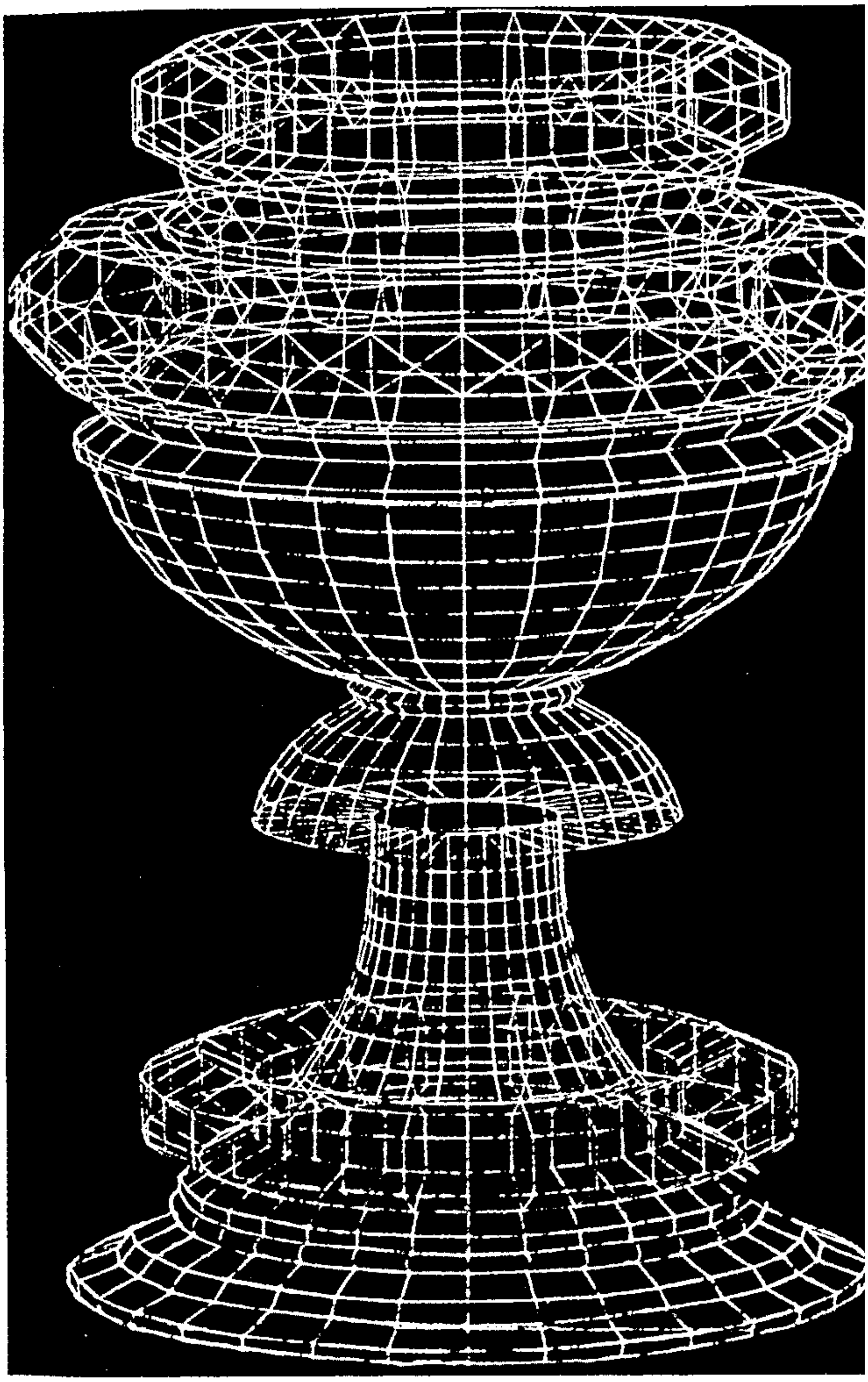
مثلاً اگر سه جعبه از مرمر ۲۱ کیلوگرم وزن داشته باشند، وزن چند جعبه ۸٤ کیلوگرم می‌شود؟ برقراری یک تناسب برای حل آن کافی است ـ ۸٤ کیلوگرم / ؟ جعبه = ۲۱ کیلوگرم / ۳ جعبه ـ اما حل تمام مسائل تناسب واقع‌بینانه نیست. آیا می‌توان هر درختی را تا هر اندازه‌ای کوچک کرد و در عین‌حال قابل استفاده و عملی باشد؟ آیا کسی با هر اندازه‌ای می‌تواند موجود باشد؟ ترکیب یک شیء، چه درخت یا استخوان‌های انسان، نقشی حیاتی در تعیین حدود بالا و پایین اندازهٔ آن دارد. وجود انسان سی متری امکان‌پذیر نیست، چون ساختار مصالحی که بدن انسان را می‌سازد برای چنین اندازهٔ ماموت گونه‌ای در نظر گرفته نشده‌اند. حتی درخت‌های سکویای غول آسا در ارتفاع محدودیتی دارند، که ریشه و ویژگی‌های چوب آن را تعیین می‌کند. یکی از نخستین مطالب در مورد بزرگ‌تر کردن یا کوچک‌تر کردن اشیا در اثر گالیله به نام ***گفتگو دربارهٔ دو علم جدید*** آمده است.



در اینجا او می‌گوید: «... اگر کسی بخواهد در یک غول بزرگ تناسب اعضا را آن‌گونه که در انسان معمولی یافت می‌شود حفظ کند، یا باید مصالح محکم‌تری برای استخوان‌ها بیابد یا باید استحکام کمتری را نسبت به انسانی با قامت متوسط بپذیرد؛ زیرا اگر قدش بیش از حد بلند شود می‌افتد و در زیر وزن خود خرد می‌شود. در حالی‌که، اگر اندازهٔ بدن او کوچک شود استحکام بدن به تناسب آن کم نمی‌شود. در واقع هر چه بدن کوچک‌تر باشد استحکام نسبی آن بیشتر است.»

ریاضیات و ظروف

پی بردن به این‌که چگونه در گذشته اشیا و اندیشه‌ها شکل ریاضی به خود می‌گرفته‌اند شگفت‌انگیز و تکان‌دهنده است. نمونه‌های بسیار زیادی از گلدان‌ها، ظرف‌ها و مخزن‌هایی مشاهده می‌شوند که به شکل‌های گوناگونی طراحی شده‌اند. این طرح و تصویر یک جام اثر پائولو اوچلو از مجموعه‌ای است که در گالری اوفیتسی در فلورانس در معرض تماشاست. این کار گرچه در ابتدای قرن پانزدهم انجام گرفته است، دقت آن یادآور تحلیلی کامپیوتری از جام است و پرسپکتیوی خطی، نسبت‌های ثابت تناسب اندازه‌ها، و استفاده از اشکال هندسی را نشان می‌دهد.



هندسه‌ها ـ قدیم و جدید

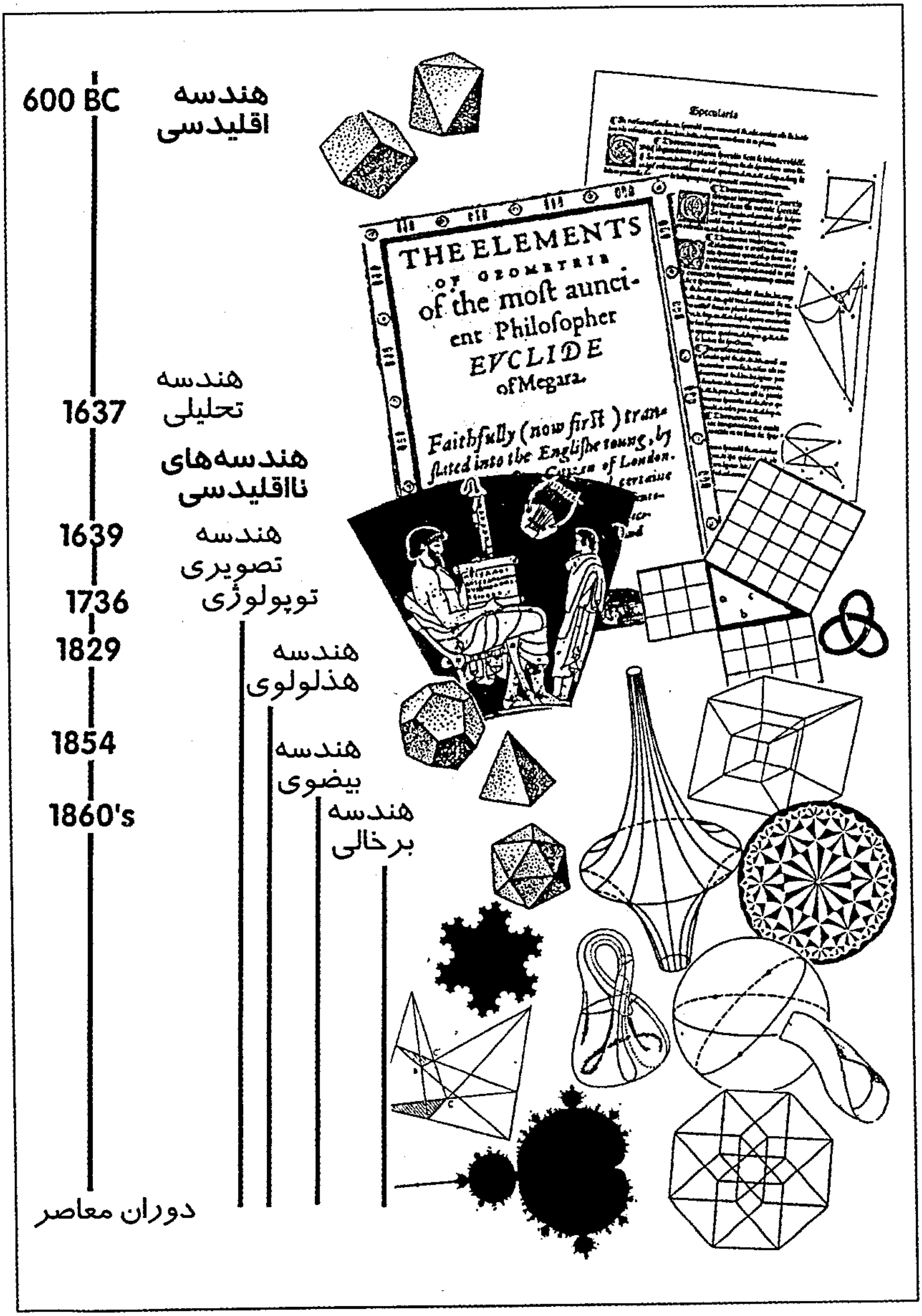
چیزهای فوق‌العاده‌ای را کشف کرده‌ام که مرا شگفت‌زده کرده است... جهان جدیدی را از هیچ آفریده‌ام.
*ـ **یانوش بایای**، از نامه‌ای به پدرش در سال ۱۸۲۳*

بیشتر ما هنگامی که به هندسه فکر می‌کنیم، دربارهٔ هندسهٔ دوران مدرسه است ـ تمام قضیه‌های «کسالت‌آوری» که باید آنها را «حفظ» می‌کردیم، هیجان اولین استدلال، نقطه‌ها، خط‌ها، مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها، دایره‌ها، اشکال فضایی، مساحت، حجم. زیبایی هندسه در آن است که می‌توان عناصر آن را مجسم کرد. کمتر تشخیص می‌دهیم که تکامل بی‌سروصدای اندیشه‌ها از دوران باستان تاکنون ادامه داشته است. از میان ما، آنهایی که مطالعهٔ ریاضیات را ادامه داده‌اند، می‌دانند که هندسه بسیار بسیار گسترده‌تر از هندسهٔ اقلیدسی است. ما آموخته‌ایم چگونه هندسه و جبر از طریق مختصات ابداعی رنه دکارت پیوند یافته‌اند. دیده‌ایم چگونه اصل پنجم (توازی) اقلیدس را ریاضیدانان در طی قرن‌ها مورد پرسش قرار داده‌اند. بسیاری از ریاضیدانان احساس می‌کردند که اصل توازی اندیشهٔ مستقلی نبوده است، بلکه می‌تواند از طریق اطلاعات هندسی موجود اثبات شود. آن‌گونه که تاریخ نشان می‌دهد این اصل در هندسهٔ اقلیدسی قطعاً مستقل بوده است ـ اما آن تلاش‌های ناموفق به کشف هندسه‌های نااقلیدسی انجامیده است. جدا کردن واقعی حوزه‌ای از ریاضیات از سایر حوزه‌ها ناممکن است، زیرا به محض آن‌که ریاضیدانان به اندیشه‌ای دست می‌یابند بر تمامی دانش ریاضی خود تکیه می‌کنند. مسیر زمانی تکامل هندسه‌ها هیجان‌انگیزتر از آن است که بتوان از آن گذشت. محدودیت جا باعث می‌شود که در این مسیر زمانی به تکامل حوزه‌های هندسه به جای اندیشه‌های مشخص در داخل یک هندسهٔ ویژه بپردازیم. امید است که این مطلب تختهٔ پرشی برای پژوهش‌های خود شما باشد.

۶۰۰ پیش از میلاد ـ تالس هندسهٔ استدلالی را مطرح کرد. ریاضیدانان و فیلسوفانی مانند فیثاغورس، فیثاغورسیان، افلاطون و ارسطو آن را در طی سال‌ها گسترش دادند.
۳۰۰ سال پیش از میلاد ـ اقلیدس اندیشه‌های هندسی را گردآوری، سازماندهی و تنظیم می‌کند، که در سیزده مقاله به نام اصول کشف و اثبات شده بودند.
۱۴۰ پیش از میلاد ـ پوزدنیوس اصل پنجم اقلیدس را از نو بیان می‌کند.
قرن پنجم میلادی ـ پروکلوس (۴۹۵ـ۴۱۰) یکی از نخستین ناقدان ثبت شدهٔ اصل پنجم اقلیدس است. تلاش‌های بی‌شماری در طی قرن‌ها برای اثبات اصل پنجم اقلیدس صورت می‌گیرد[۱].
۱۶۳۷ ـ رنه دکارت هندسهٔ تحلیلی را عرضه می‌کند.
جیرولاموساکری (۱۷۳۳ـ۱۶۶۷) نخستین کسی است که راهی غیرمستقیم را برای اثبات اصل توازی اقلیدس آزمایش می‌کند. متأسفانه نتایج کارش را نمی‌پذیرد. او پیش از مرگش کتابی منتشر می‌کند *(اقلیدس آزاد از هر خطا)* که یک قرن و نیم بعد مورد توجه اوجینو بلترامی قرار می‌گیرد. اگر ساکری یافته‌های خود را رد نمی‌کرد کشف هندسه‌های نااقلیدسی را یک قرن پیش می‌انداخت.
۱۶۳۹ ـ ژیرار دزارگ (۱۶۶۱ـ۱۵۹۱) اثری دربارهٔ مقاطع مخروطی منتشر کرد که در آن کار جدیدش دربارهٔ کشفیاتش در هندسهٔ تصویری را مورد بحث قرار می‌دهد.
۱۷۳۶ ـ لئونارد اویلر (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷) بررسی و راه حل او برای مسألهٔ پل کونیگزبرگ حوزهٔ توپولوژی را ایجاد می‌کند.
۱۷۹۵ ـ گاسپار مونژ ساختارها را با نمایش بر روی صفحه توصیف می‌کند.
۱۸۲۲ـ ژان ویکتور پونسله (۱۸۶۷ـ۱۷۸۸) با رساله‌اش هندسهٔ تصویری را احیا و اصل دوگانگی را عرضه می‌کند.
۱۸۴۳ ـ آرتورکیلی (۱۸۹۵ـ۱۸۲۱) بررسی فضاهای چند بعدی را در هندسهٔ تحلیلی آغاز می‌کند.
گئورگ کانتور (۱۹۱۸ـ۱۸۴۵). نظریهٔ مجموعه‌های او شالودهٔ توپولوژی را آماده می‌سازد، که هانری پوانکاره (۱۹۱۲ـ۱۸۴۵) در رسالهٔ تحلیل مکانی آن را عرضه می‌کند. مجموعهٔ کانتور برخال اولیه را پدید می‌آورد.
۱۸۷۱ـ کریستین فلیکس کلاین (۱۹۲۵ـ۱۸۴۹) کارهای بزرگی در هندسهٔ تصویری و توپولوژی انجام می‌دهد و سازگاری هندسه‌های اقلیدسی، بیضوی و هذلولوی را اثبات می‌کند.
قرن نوزدهم ـ نیکلای لباچفسکی (۱۸۵۶ـ۱۷۹۳)، یانوش بایای (۱۸۶۰ـ۱۸۰۲) و کارل گاوس (۱۸۵۵ـ۱۷۷۷) مستقل از یکدیگر هندسهٔ هذلولوی را کشف می‌کنند.
۱۸۵۴ ـ برنارد ریمان (۱۸۶۶ـ۱۸۲۶) هندسهٔ بیضوی را معرفی می‌کند.
۱۸۵۸ ـ اگوست موبیوس و یوهان لیستینگ مستقل از هم سطح یک سویه مانند نوار موبیوس را کشف می‌کنند.
۱۸۸۸ ـ جوزپه پئانو (۱۹۳۲ـ۱۸۵۸) منحنی فضا پرکن پئانو (برخال) را ابداع می‌کند.
۱۹۰۴ ـ هلگه فن کخ (۱۹۳۲ـ ۱۸۷۰) منحنی برف دانهٔ کخ (برخال) را می‌سازد.
۱۹۱۹ـ فلیکس هاسدورف ابعاد برخال را در هندسهٔ برخالی تعریف می‌کند. ا.اس. بسیکوویچ کار او را تعمیم می‌دهد.
۱۹۷۱ـ ولادیمیر آرنولد هندسهٔ جبری (هندسهٔ تحلیلی چندبعدی) را با توپولوژی مرتبط می‌کند.
۱۹۷۵ـ ۱۹۵۱ـ بنوا ماندل‌برو، واژهٔ برخال را وضع می‌کند و تقریباً به تنهایی در زمینهٔ پدید آوردن آن کار می‌کند.

---

۱. یکی از این موارد طرح این مسأله از سوی خیام، یک چهار ضلعی با دو ضلع برابر عمود بر قاعده است که می‌خواست ثابت کند دو زاویهٔ دیگر قائمه خواهندبود، و پرسش او تبدیل به روش معمول برای بحث در مورد این اصل شد.


600 BC
هندسه اقلیدسی
هندسه تحلیلی
1637
هندسه‌های نااقلیدسی
1639
هندسه تصویری
1736
توپولوژی
1829
هندسه هذلولوی
1854
هندسه بیضوی
1860's
هندسه برخالی
دوران معاصر
THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most aunci-
ent Philosopher
EVCLIDE
of Megara.
Faithfully (now first) trans
flated into the Englishe toung, by
Citizen of London.

محتوای نام‌ها چیست؟

هندسهٔ هذلولوی از روی هذلولی نامگذاری نشده است

تاکنون از خود پرسیده‌اید بعضی از حوزه‌های ریاضی چگونه نامگذاری شده‌اند؟ مثلاً، هندسه‌های هذلولوی و بیضوی را در نظر بگیرید. در هر دو مورد آفرینندگان آنها کاری با نامی که سرانجام یافتند نداشتند. هندسهٔ هذلولوی را نیکلای لباچفسکی (۱۸۵۶ـ ۱۷۹۳) و یانوش بایای (۱۸۶۰ـ ۱۸۰۲) مستقل از یکدیگر کشف کردند. اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی می‌گوید که یک خط و تنها یک خط موازی می‌تواند از نقطهٔ معین P که روی خط L نباشد عبور کند. تلاش‌های ناموفق ریاضیدانان برای نشان دادن اثبات پذیری این اصل، و بنابراین قضیه بودن آن، به کشف هندسه‌های نااقلیدسی انجامید.

در هندسهٔ هذلولوی کشف شده است که بیش از یک خط وجود دارد که از نقطهٔ P می‌گذرد و موازی با خط L است. نام هذلولوی هیپربولیک (hyperbolic) از هیپربول (hyperbole) یونانی به معنی «اضافی» آمده است[1]. در این مورد این نام به تعداد خطوط گذرنده از P و موازی با L اطلاق شده است. لباچفسکی ابتدا آن را هندسهٔ تخیلی و هندسهٔ چندبعدی (بیش از سه بعدی) می‌نامید. نام امروزی آن را فلیکس کلاین، آفرینندهٔ بطری کلاین، هندسه‌دان معروف به آن داد. علاوه بر آن کلاین نام هندسهٔ بیضوی را به هندسهٔ نااقلیدسی گئورگ ریمان داد که در آن خطی که از P بگذرد و موازی L باشد وجود ندارد. بیضوی (elliptic) از elliptis یونانی، به معنی نبود و فقدان آمده است.[2]

ی که در سال ۱۹۵۶ به افتخار
دی لباچفسکی منتشر شد.

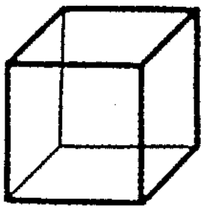
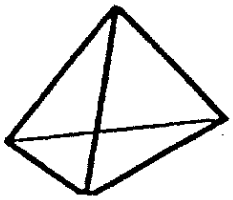
---

۱. این نوشتهٔ کتاب از لحاظ تاریخی نمی‌تواند درست باشد. برای توضیح دقیق علت این نامگذاری نگاه کنید به: *گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی*، جی. ال. برگرن، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۳، ص ۹۱.

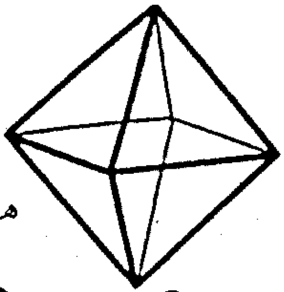
۲. در این مورد هم نگاه کنید به ص ۹۲ منبع فوق.

فرمول جادویی اویلر

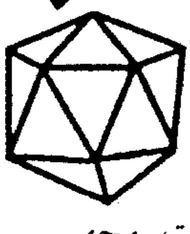
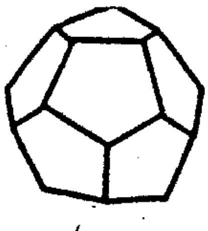
ویژگی اندیشه‌های ریاضی این است که هنگامی که درست بودن آنها تثبیت شود در تمام موارد به قوت خود باقی می‌مانند. مثلاً مجموع نخستین k عدد شمارشی k + ... + ۳ + ۲ + ۱، برابر است با $k(k+1)/2$ این فرمول با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود. آزمون این فرمول برای تمام مجموعه‌های اعداد شمارشی متوالی که با یک شروع شود عملاً امکان ندارد. اما زیبایی ریاضیات این است که استدلال‌های ریاضی به نیروی زیادی نیاز ندارند. به لئونارد اویلر ریاضیدان سوییسی کشف‌های ریاضی بسیاری، به ویژه در حوزهٔ توپولوژی نسبت داده می‌شود. می‌گویند راه حل او برای مسألهٔ پل کونیگزبرگ آغازگر بررسی شبکه‌های توپولوژیکی بوده است. توپولوژی آن خواص اشیا را بررسی می‌کند که با کج و کوله کردن آنها تغییر نمی‌کنند. مثلاً مکعب می‌تواند با کشیدن و چلاندن به چهاروجهی تغییر شکل پیدا کند و برعکس. بدیهی است که اندازه و نیز تعداد وجوه، رأس‌ها یا لبه‌ها می‌تواند تغییر کند. در نتیجه می‌توان از خود پرسید که چه نوع خواص تغییر نیافته‌ای قابل مشاهده باقی می‌ماند؟ یکی از نکات مورد توجه این است که هر نقطه‌ای درون مکعب نقطه‌ای درون چهاروجهی باقی می‌ماند. به غیر از توپولوژی، قضیهٔ جالبی که اویلر دربارهٔ نوعی ویژگی تغییرناپذیر چندوجهی‌ها ثابت کرد این است که *اگر تعداد وجوه یک چندوجهی را به تعداد رأس‌هایش اضافه کنیم، و سپس تعداد لبه‌ها را کسر کنیم، حاصل **همیشه** ۲ خواهدشد.* در مورد اشکال افلاطونی نشان داده شده آن را امتحان کنید. احساس می‌کنید پرانرژی هستید، آزمایش کنید.

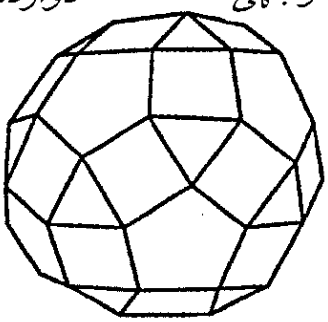
مکعب شش وجهی *چهار وجهی*



هشت وجهی

بیست وجهی *دوازده وجهی*



شصت و دو وجهی

$$\mathbf{F + V - E = ۲}$$


Per omnia
secula seculorum. Amen.
Dominus vobisc.
Et cum spiritu tuo.
Sursum corda. Ha
bemus ad dominum.
Gratias agamus
domino deo nostro.
Dignum et iustum
est.
dignum et iustum est
equum et salutare.
Nos tibi semper et

ریاضیات نغمهٔ خود را می‌نوازد

ریاضیات و موسیقی

گام‌های موسیقی و ریاضیات

ریاضیات و صوت

موسیقی لذتی است که روح انسان از شمارش می‌برد بدون این‌که متوجه این شمارش باشد.

ـ گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس

صداها چه به صورت سروصدا باشند و چه به صورت موسیقی، همه را ارتعاشات اشیا پدید می‌آورند. هنگامی‌که اشیایی مانند نوار لاستیکی، تکه‌های چوب، یک سیم، یا ستونی از هوا در یک فلوت به ارتعاش درمی‌آیند، ملکول‌های هوای اطراف را به ارتعاش درمی‌آورند. این ارتعاشات به سوی خارج از منبع در هر سه بعد حرکت می‌کنند. با رسیدن این ارتعاشات به پردهٔ گوش ما، ارتعاشات پردهٔ گوش علایمی را به مغز ما می‌فرستند که احساس شنیدن پدید می‌آورند. در هر یک از سازها روشی در تولید ارتعاشات وجود دارد که به نوبهٔ خود ارتعاشاتی را در سراسر ساختار و اجزای سازندهٔ این ساز پدید می‌آورد. مثلاً، هنگامی که به زه گیتار انگشت بزنیم ارتعاشات آن باعث می‌شود که سایر زه‌ها و کل ساز به ارتعاش درآید.

از دوران باستان، ریاضیات برای توضیح موسیقی به‌کار رفته است. امروزه الگوسازی و رقمی سازی کامپیوتری، کوانتومی کردن موسیقی و صداها همراه با بررسی کیفیت و معماری صوتی احساس‌های جدید صوتی را پدید می‌آورند.

ریاضی و موسیقی

آیا نمی‌توان موسیقی را ریاضیات احساس و ریاضی را موسیقی اندیشه به‌شمار آورد؟

ـ جیمز جوزف سیلوستر[1]

در طی قرن‌ها موسیقی و ریاضیات باهم ارتباط داشته‌اند. در سده‌های میانه، برنامهٔ آموزشی حساب، هندسه، اخترشناسی و موسیقی را در یک گروه دسته‌بندی می‌کردند. کامپیوترهای امروزی این پیوند را تداوم بخشیده‌اند.

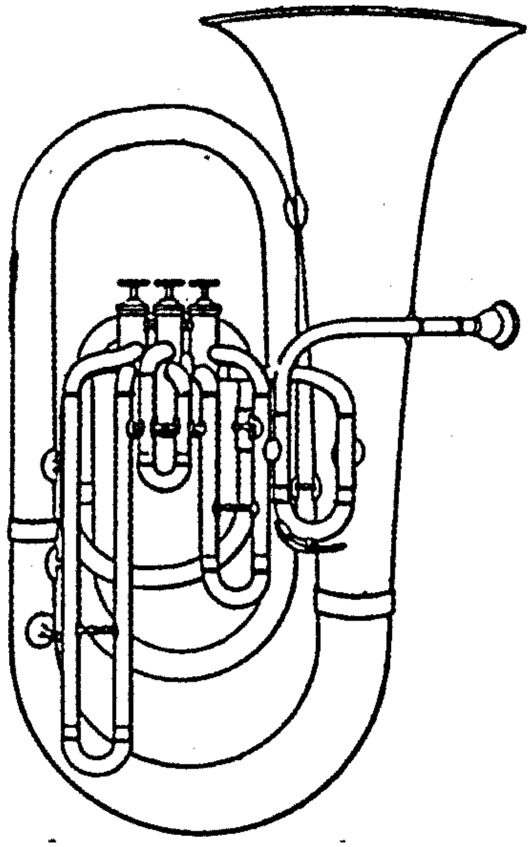
نت‌نویسی نخستین حوزهٔ آشکاری است که در آن ریاضیات تأثیر خود را بر موسیقی به‌نمایش می‌گذارد. در نوشتن موسیقی ضرب (تمپو) (٤:٤، ٣:٤ و غیره)، میزان، نت‌های گرد، نت‌های سفید، نت‌های سیاه و نت چنگ و غیره را می‌توان یافت. نوشتن

۱. ریاضیدان انگلیسی (۱۸۹۷ـ۱۸۱٤) دارای آثاری در نظریهٔ اعداد و توابع بیضوی.

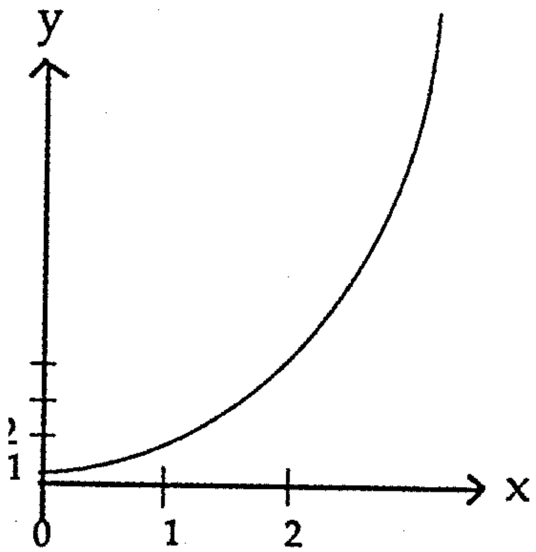
موسیقی برای قرار دادن تعداد معینی نت بر میزان شبیه به یافتن مخرج مشترک است ـ نت‌های دارای طول‌های مختلف را باید در هر ضرب معین با میزان ویژه‌ای هماهنگ کرد. آهنگساز آهنگی می‌سازد که چنین زیبا و چنین آسان در ساختار نوشته شدهٔ پارتیتور قرار داده شده است. اگر کاری که کامل شده است مورد تحلیل قرار گیرد هر میزانی تعداد معینی ضرب دارد که از طول نت‌های مختلفی استفاده می‌کنند.

علاوه بر ارتباط آشکار ریاضیات و نت‌نویسی، موسیقی با نسبت‌ها، منحنی‌های نمایی، تابعهای تناوبی و علوم کامپیوتری نیز پیوند دارد.

در مورد نسبت‌ها، فیثاغورسی‌ها (۴۰۰ ـ ۵۸۵ پیش از میلاد) نخستین کسانی بودند که موسیقی را با ریاضی ارتباط دادند. آنان رابطهٔ بین هارمونی موسیقی و اعداد صحیح را با پی بردن به این مطلب کشف کردند که صدای تولید شده بر اثر انگشت زدن به زه تابع طول زه است. آنان به این مطلب نیز پی بردند که صداهای موزون را زه‌های کشیده‌ای صادر می‌کنند که طول آنها به نسبت‌های اعداد صحیح باشد ـ در واقع هر ترکیب موزون زه‌های کشیده را می‌توان مانند نسبت اعداد صحیح بیان کرد. با افزایش طول زه به نسبت‌های اعداد صحیح یک گام کامل به‌دست می‌آید. مثلاً با آغاز با زهی که نت دو را تولید می‌کند $\frac{16}{15}$ طول آن نت سی، $\frac{6}{5}$ طول دو نت لا، $\frac{4}{3}$ آن نت سل، $\frac{3}{2}$ آن نت فا، $\frac{8}{5}$ آن نت می، $\frac{16}{9}$ آن نت ر، و $\frac{2}{1}$ طول دو نت دوی بَم را تولید می‌کند.

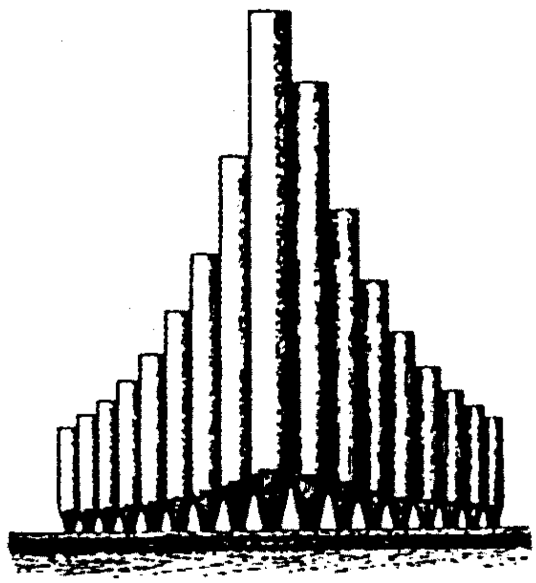


آیا هرگز از خود پرسیده‌اید چرا پیانوی رویال چنین شکلی دارد؟ در واقع سازهای بسیاری هستند که شکل و ساختار آنها با مفاهیم ریاضی مختلفی ارتباط دارند. توابع و منحنی‌های نمایی از این مفاهیم‌اند. یک تابع نمایی تابعی است که با معادلهٔ $y = k^x$ نشان داده می‌شود که در آن $k>0$ باشد. نمونه‌ای از این تابع و نمودار آن شکل نشان داده شده را دارد.



سازها که یا زهی‌اند یا از ستون‌های هوا تشکیل یافته‌اند، شکل منحنی نمایی را در ساختار خود نشان می‌دهند.

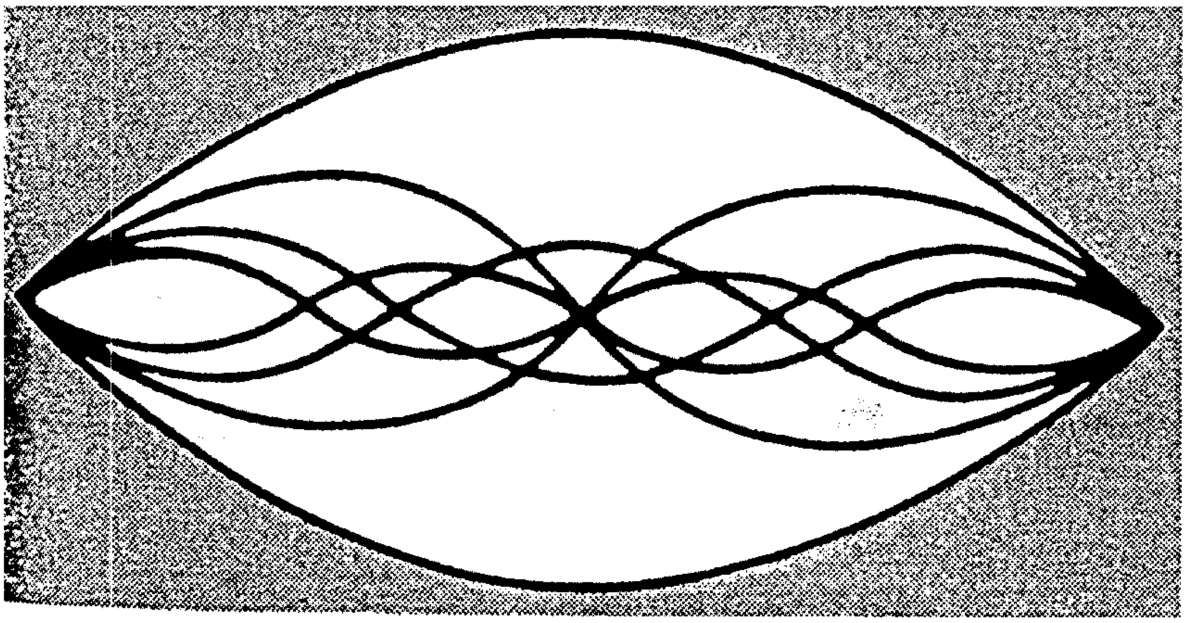
بررسی ماهیت اصوات موسیقی در آثار جان فوریه ریاضیدان قرن نوزهم به اوج خود رسیده است. او ثابت کرد تمام اصوات موسیقی ــ سازی و آوازی ــ را می‌توان به کمک عبارات ریاضی توصیف کرد، که مجموع توابع تناوبی سادهٔ سینوسی‌اند. هر صدایی سه ویژگی دارد ــ ارتفاع، بلندی و کیفیت ــ که آن را از سایر صداهای موسیقی متمایز می‌کند.



کشف فوریه این امکان را فراهم ساخت که این سه ویژگی صدا را با نمودار نشان داد و مشخص

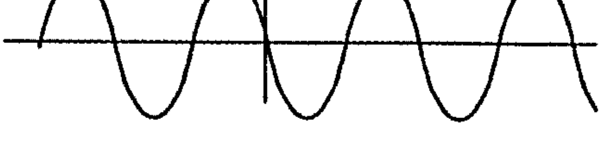
کرد. ارتفاع به بسامد (فرکانس) منحنی، بلندی به دامنه و کیفیت به شکل تابع تناوبی[۱] بستگی دارد.

بدون درک ریاضیات موسیقی، پیشرفت در استفاده از کامپیوتر در آهنگسازی و ساخت سازها امکان‌ناپذیر بوده است. کشفیات ریاضی، یعنی توابع تناوبی، در ساخت سازهای مدرن و تولید صداهای کامپیوتر ساخته نقشی اساسی داشته است. بسیاری از سازندگان سازها نمودارهای صداهای متناوب محصولات خود را با نمودارهای دلخواه این سازها مقایسه می‌کنند. همانندهی پخش سازهای الکترونیکی رابطه‌ای تنگاتنگ با نمودارهای تناوبی دارد. موسیقیدانان و ریاضیدانان به ایفای نقشی به یک اندازه مهم در تولید و بازآفرینی موسیقی ادامه خواهندداد.



این نمودار ارتعاشات زه را در مقاطع و در کل آن نشان می‌دهد. بلندترین ارتعاش ارتفاع و ارتعاشات کوچک‌تر هارمونیک‌ها را تولید می‌کنند.

۱. تابع تناوبی تابعی است که شکل آن در فواصل منظمی تکرار شود.



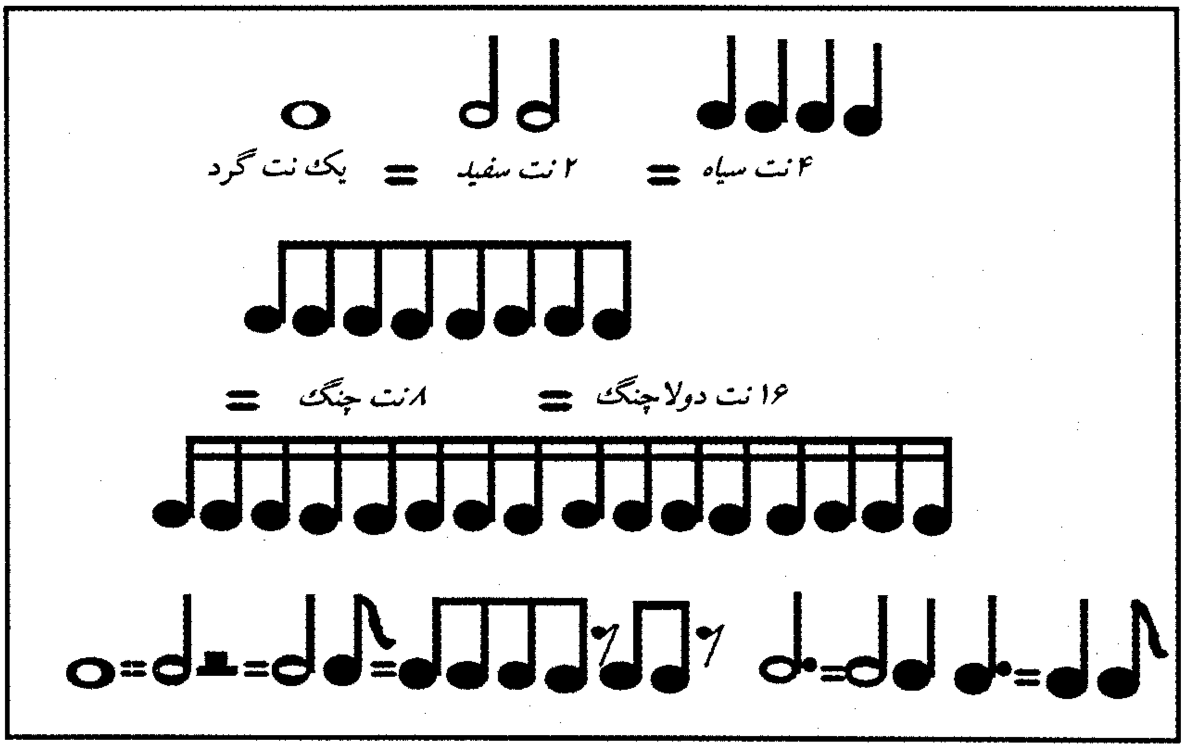
ریاضیات و گام‌های موسیقی

سرعت نور، c، π، e، ϕ و عدد آواگادرو نمونه‌های کوچکی از ثابت‌های جهان ما هستند. اینها اعدادی هستند که نقشی اساسی در معادلات و فرمول‌هایی دارند که موضوعات گوناگونی را در جهان ما تعریف می‌کنند ــ که هندسی، فیزیکی، شیمیایی و اقتصادی‌اند. در میان این ثابت‌های مشهور، اکتاو همچون ثابتی با ماهیت ویژه مشاهده می‌شود. اکتاو نقشی بی‌اندازه مهم در جهان موسیقی بازی می‌کند. اکتاو واحد یا فاصلهٔ یک گام را در موسیقی تعیین می‌کند. درست همانطور که نسبت محیط دایره نسبت به قطر آن ثابت π است، نسبت تعداد ارتعاشات زهی که با انگشت به آن بزنیم به زهی با نصف طول آن $\frac{1}{2}$ است. این نت‌ها صدای یکسانی دارند و طول یک اکتاو را می‌سازند[1]. زه کوتاه شده در هر ثانیه دو برابر زه اصلی ارتعاش می‌کند. تعداد نت‌ها با تقسیمات فرعی در یک اکتاو دلخواه است، و تعدادی از عوامل بر آن تأثیر دارد. عوامل گوناگونی را که در هنگام ساختن یک گام ویژه وارد عمل می‌شوند در نظر بگیرید. آنچه یک گام را به‌وجود می‌آورد صداها و نت‌هایند. هر یک بسامد[2] ویژه‌ای دارند. همان‌طور که گفتیم فاصلهٔ دو نت هنگامی یک اکتاو است که

۱. واژهٔ اکتاو از کلمهٔ لاتینی به معنی ۸ می‌آید. یک گام دیاتونیک هفت نت مجزا از دو تا سی و دو زیر دارد. اکتاو نت چنگ است.

۲. بسامد (فرکانس) تعداد ارتعاشات بر ثانیه است. تناظری یک به یک بین صداها و اعداد (بسامدهای آن) وجود دارد، گرچه گوش‌های ما برای تشخیص تمام صداهای متمایز ممکن ساخته نشده‌اند.

بسامد یکی دو برابر دیگری باشد[1]. گوش آموزش دیده می‌تواند حـدود ۳۰۰ صـدا یـا نت مختلف را در یک اکتاو بشنود. اما تولید یک گام با این تعداد نت بی‌معنـی اسـت، زیرا سازهای معمولی نمی‌توانند این مقدار نت تولید کنند. مثلاً، اگـر ۳۰۰ نـت در هـر اکتاو وجود داشت، پیانوی هشت اکتـاوی ۲۴۰۰ شـستی داشـت. مـی‌توانیـد نوازنـدهٔ پیانویی را مجسم کنید در طول چنین صفحه کلیـد درازی بـه عقـب و جلـو مـی‌دود؟ بنابراین تعداد نت‌های ممکن را فیزیولوژی گوش ما و امکانات سـازهای مـا محـدود می‌کند.



معادلات موسیقی. شکل بالا رابطهٔ بین نت گرد، نت سفید، نت سیاه، نت چنگ و نت دولاچنگ را نشان می‌دهد. نت نقطه‌دار راهی برای نشان دادن نت‌های کـسری اسـت، زیرا یک نت نقطه‌دار ۱/۵ برابر مقدار آن است.

۱. زهی که با انگشت به آن بزنیم نت معینی ایجاد می‌کند، مثلاً دو ۲٦٤ ارتعاش بر ثانیه دارد. اگر اندازهٔ زه به نصف کاهش یابد اکتاو آن تولید می‌شود که ۵۲۸ ارتعاش بر ثانیه دارد.

چگونه و کدام یک از ۳۰۰ صدای قابل تشخیص برای یک گام انتخاب می‌شوند؟ انتخاب نت‌های یک گام مشابه با انتخاب دستگاه شمارش است ـــ چه مبنایی باید انتخاب شود و چه نمادهایی باید ساخت تا اعداد را نشان دهند؟ ـــ در مورد گام، طول اکتاو موردنیاز برای زه انتخاب شده و تعداد تقسیمات فرعی (نت‌های تشکیل دهندهٔ گام) را باید تعیین کرد. در مورد دستگاه‌های شمارش می‌بینیم که آنها در تمدن‌های مختلف به شکل‌های مختلفی شکل گرفته‌اند. یونانیان باستان از حروف الفبا برای نشان دادن هفت نت گام خود استفاده می‌کردند. این نت‌ها در چهارگانها (ذوات الاربع) دسته‌بندی می‌شدند، که در گروهی به نام مقام قرار می‌گرفتند. این مقام‌ها صورت ابتدایی گام‌های جدید ماژور و مینور غربی‌اند. چینیان از گام پنج نتی استفاده می‌کردند. در هند، موسیقی در مرزهای مشخصی که «راگاها» تعریف کرده‌اند نواخته شده و می‌شود. این اکتاو به ٦٦ فاصله به نام «سروتی» تقسیم می‌شود، گرچه در عمل تنها ۲۲ عدد از آنهاست، که از آنها دو گام هفت نتی بنیادی تشکیل شده‌اند. گام‌های ایرانی اکتاو را به ۱۷ تا ۲۲ نت تقسیم می‌کنند. می‌بینیم که گرچه اکتاو ثابتی معین است. دستگاه‌های موسیقی متفاوتی پدیدار شده‌اند. علاوه بر آن، سازهای یک فرهنگ نمی‌توانند لزوماً برای اجرای موسیقی فرهنگ دیگری مورد استفاده قرار گیرند.

این گام از صفحه‌ای از کتاب دعای قرن چهاردهمی یک سرود گریگوری است.

* * *

سازها، ظرف‌ها، تندیس‌ها و دیوار نگاره‌های باستانی که خوانندگان و نوازندگان را به تصویر کشیده‌اند از زیر خاک بیرون کشیده شده‌اند. نمونه‌های بسیاری از موسیقی نوشته شده وجود دارد ـــ الواح گلی سومری در عراق کشف شده‌اند که یک گام با

اکتاو هشت نتی را نشان می‌دهند (حدود ۱۸۰۰ پیش از میلاد)؛ عبارت‌های حکاکی شده بر سنگ و نوشته بر قطعات پاپیروس از یونان باستان؛ کتاب‌های آموزشی یونانی (حدود ۱۰۰ میلادی)؛ یک دستنوشتهٔ یونانی که در آن نت‌ها با استفاده از الفبای آنان نوشته شده است (حدود ۳۰۰ میلادی)؛ و دستنوشته‌های سرودهای اسلامی ـ عربی قرن هشتم اسپانیا.

دیوارنگاره‌ای از نوازندگان از مقبرهٔ جسر کارا در تب (طیوه).

در قرن ششم پیش از میلاد، فیثاغورس و فیثاغورسیان نخستین کسانی بودند که موسیقی را با ریاضی پیوند دادند. آنان بر این باور بودند که اعداد، از جهاتی بر همه چیز حاکم بودند. شادی آنان را پس از کشف اکتاو نت، دوره‌ای بودن نت‌ها، و نسبت نت‌های یک ساز تجسم کنید. علاوه بر آن، آنان اعتقاد داشتند که سیاره‌ها موسیقی خود را دارند، و اجرام آسمانی صداهای آهنگین تولید می‌کنند. این اندیشه «موسیقی افلاک» نامیده می‌شود. کپلر به موسیقی افلاک اعتقاد داشت، و در واقع برای هر یک از سیاره‌های شناخته شده آهنگ ساخت. امروزه اخترشناسان علائمی رادیویی را که

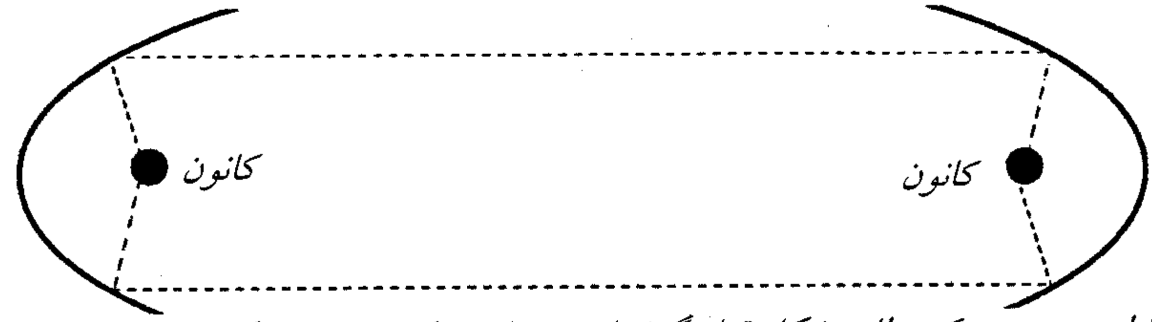
بادهای خورشیدی حامل آننند دریافت کرده‌اند. این صداها، که در بردارنده سوت، صدای بامب، زوزه و فش و فش‌اند هنگامی که با سرعت‌های زیاد باهم ترکیب شوند خوش‌آهنگ‌تر می‌شوند. دانشمندان نوسان‌هایی را از خورشید نیز مشاهده کرده‌اند که حدس می‌زنند ارتعاشاتی را با دوره‌های تناوب مختلفی تولید می‌کنند. آیا برای ساخت آهنگ به گام‌های موسیقی نیاز است؟ اگر چنین باشد، پرندگان چگونه می‌خوانند؟ گرچه اغلب بیان یک داستان با اجرای یک ترانهٔ آهنگین در هر ارتباط کلامی تغییر چندانی نمی‌کند. برای اجرای یک آهنگ گام‌ها ضروری‌اند. گام‌ها زبان نوشتاری موسیقی‌اند، حتی همانند معادلات و نمادها زبان ریاضیات‌اند.

ریاضیات و صدا

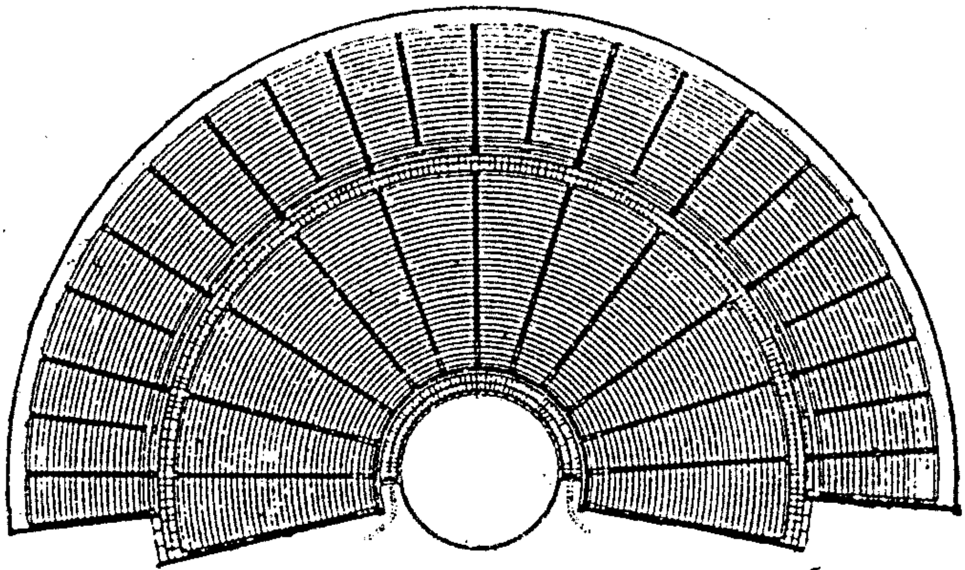
مفهوم‌های ریاضی در طی قرن‌ها موسیقی و امواج صوتی را تغییر داده و برگردانده‌اند. قدم زدن در داخل کلیسای سن پیترو در زیر گنبد آن در رم شما را قانع می‌کند که منحنی دیوارهای گنبد نجوای انسان را به شنونده‌ای در طرف دیگر آن می‌رساند. تماشای یک تراژدی یونانی در آمفی تئاتری باستانی در اپیداروس نشان می‌دهد که طراحان آن باید ریاضیات آکوستیک را پیش از طراحی و بنا کردن این تئاتر روباز استثنایی مطالعه و تجربه کرده باشند. تماشاگری که

کلیسای سن پیترو، واتیکان.

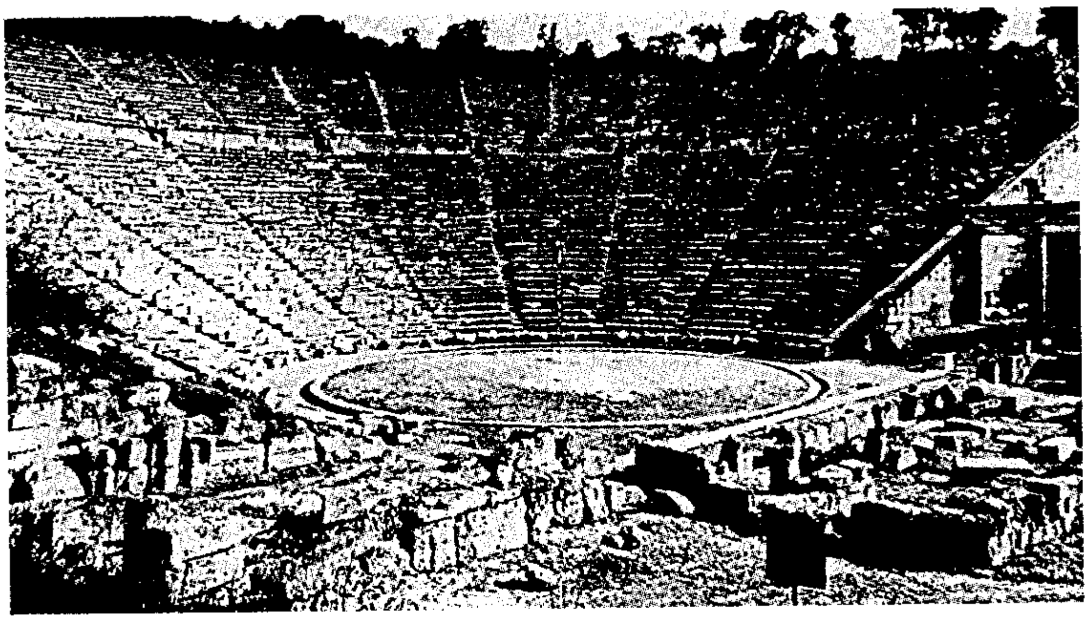
در دورترین ردیف نشسته است صدای انداختن سوزنی را در مرکز صحنه از سوی بازیگر می‌تواند به راحتی بشنود. از شکل‌های ویژهٔ ریاضی در طرح بازتابنده‌هایی که



به‌خاطر دو سهمی که مطابق شکل قرار گرفته‌اند، صدای تولید شده در یک کانون به سقف سهمی شکل برخورد می‌کند و پس از بازتاب به‌طور موازی به سقف روبرو در جایی برخورد می‌کند که به کانون دیگر انعکاس می‌یابد.



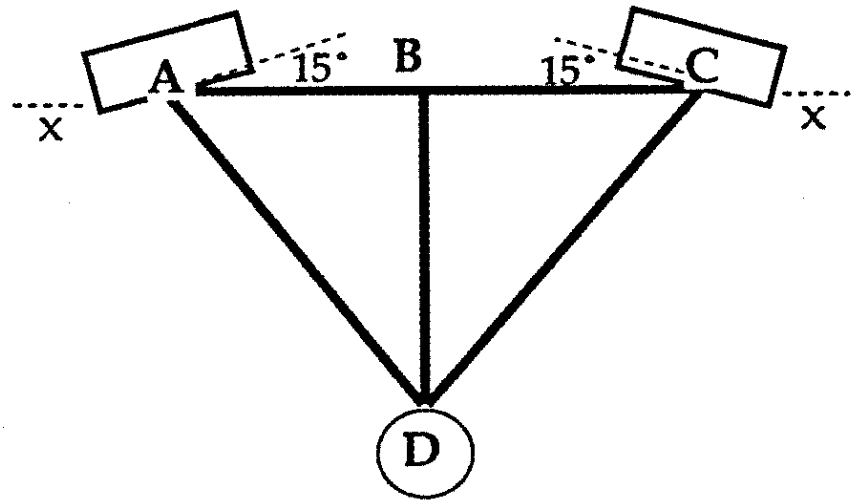
نمودار بالا طرح کلی آمفی تئاتر باستانی یونانی در اپیداروس در یونان است. عکس زیر آمفی تئاتر را در امروز نشان می‌دهد. هم طرح و هم ساخت آن، اثر آکوستیک آن را افزایش می‌دهد.



از سقف آویزانند در تالار اجتماعات، (در بخش جنوبی ساختمان کاپیتول، ساختمان کنگرهٔ ایالات متحده استفاده شده است، به‌طوری که گفتگوی افرادی را که در نقطهٔ کانونی سهمی‌ها ایستاده‌اند منعکس می‌کند. اشخاص می‌توانند از دو نقطهٔ کانونی باهم صحبت کنند، بدون اینکه سروصدای سالن مزاحم آنان باشد.

همانطور که می‌بینیم، یافتن بهترین نقطه‌ها برای ارسال و دریافت صدا اتفاقی نیست. صدا و آکوستیک مستقیماً با شکل‌ها و مفهوم‌های ریاضی ارتباط دارند. جان فوریه ریاضیدان قرن نوزدهم نشان داده است که امواج صوتی خود توابع تناوبی سادهٔ سینوسی‌اند. او ثابت کرد که زیر و بمی، بلندی و کیفیت صدا به ترتیب به بسامد، دامنه و شکل این توابع سینوسی بستگی دارند.

و در همین اواخر Q Sound را دنی لو و جان لیز ریاضیدان و مهندسان ضبط صدا اختراع کرده‌اند. Q Sound صداهای چندبعدی تولید می‌کند. برخلاف استریو که در آن صداهای مختلفی از بلندگوهای مختلف می‌آیند Q Sound از همهٔ جهات به‌شما می‌رسد. شما واقعاً صدای چندبعدی می‌شنوید. این سامانه، به جز یک استریوی پخش نوار یا سی‌دی که با Q sound ضبط شده است به تجهیزات جدید نیازی ندارد.



نقاط A و B محل بلندگوهاست. نقطهٔ D محل شنونده است. نقطهٔ B وسط پاره خط AC است. فاصلهٔ BD باید بزرگ‌تر یا مساوی AB باشد. x فاصلهٔ بلندگوها از دیوارها ـ دست کم یک متر ـ است.

انقلاب کامپیوتر

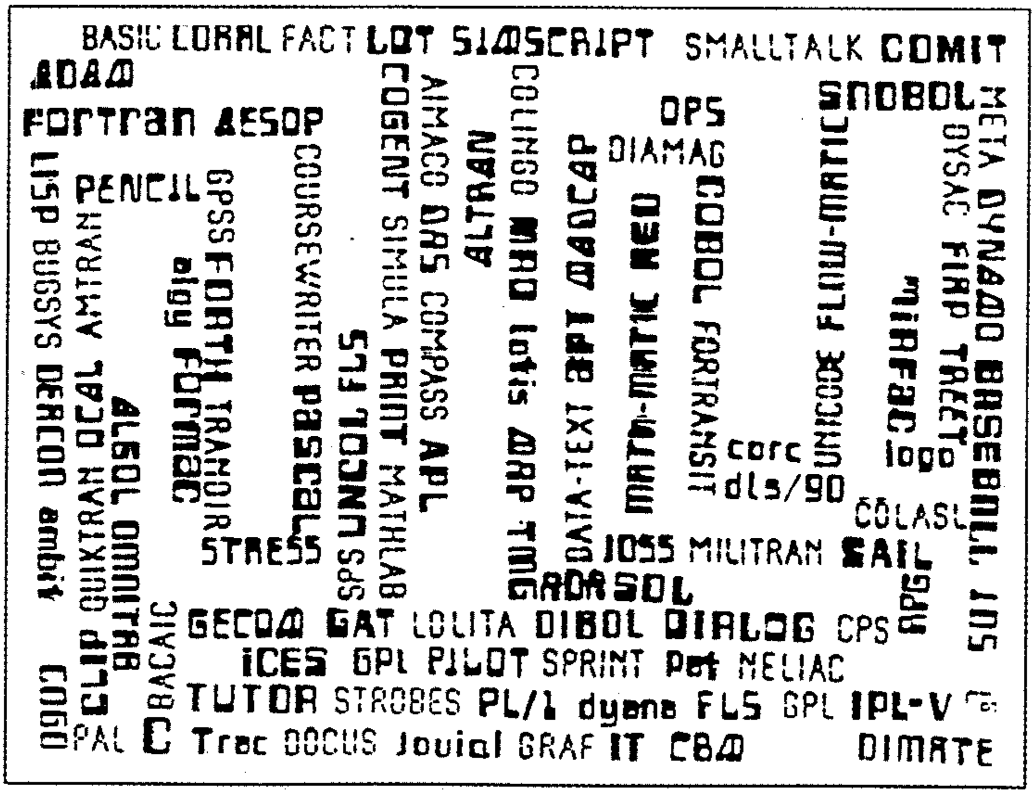
کامپیوتر، ابزار قرن بیست و یکم برای خلاقیت

BINARY 1CODE001
INARY 0NUMBERS
110101BIT100BYTE
010111BUG011001
1CHIP010FORMAT
00HARDWARE010
SOFTWARE110001
LOPPY0DISK01011
001INPUT00RAM
1ROM1010MOUSE
US010KILOBYTE11
ASCII0110SCSI0110
WYSIWYG10VIRUS
11PIXEL01101BOOT

انسان خطا می‌کند، اما برای خرابکاری تمام عیار کامپیوتر لازم است.

ـ ناشناس

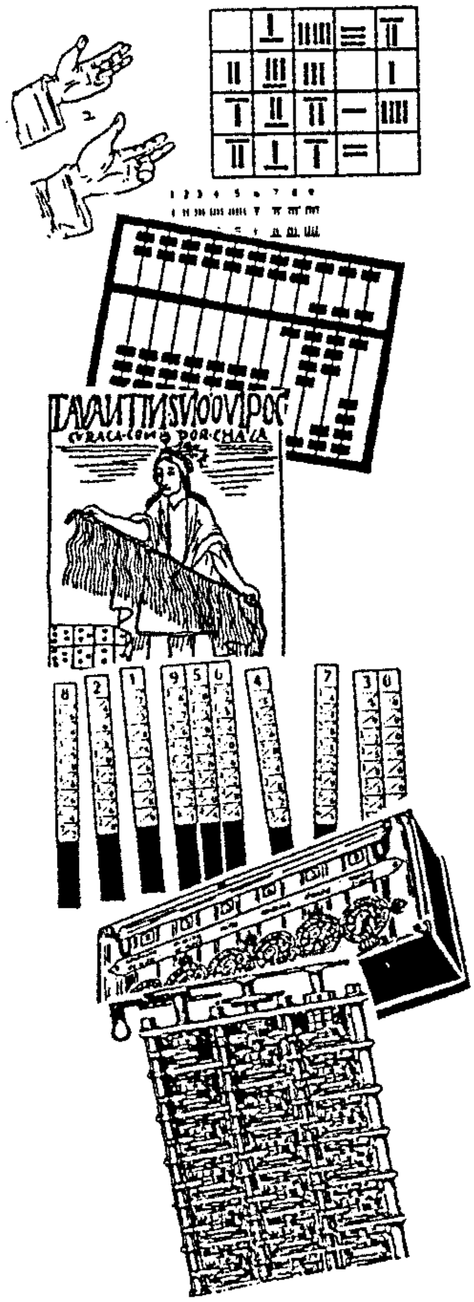
چه آماده باشیم و چه نباشیم، چه دوست داشته باشیم و چه نداشته باشیم، کامپیوتر ابزار قرن بیست‌ویکم است. کامپیوتر بر تمام جنبه‌های زندگی ما تأثیراتی هم مثبت و هم منفی دارد. کامپیوتر به سازوکارهای دگرگونی سرعت بخشیده است. برای نویسندگان امروزی، کامپیوتر می‌تواند مداد، قلم یا ماشین تحریر باشد. برای حسابداران و تحویلدار بانک می‌تواند ماشین حساب و صفحه کلید باشد. برای هنرمند قلم موی نقاشی و تخته رنگ، برای دانشمند آزمایشگاه، برای معمار میز نقشه‌کشی، برای مهندس ابزار طراحی، برای کتابدار فیش‌های کتاب و برای ریاضیدانان ماشین حساب و محاسبه‌گری با سرعت و دقتی باورنکردنی. اما اگر کار درست مطابق برنامه پیش نرود، کامپیوتر به سپر بلا تبدیل می‌شود، و به ما می‌گویند «فایل شما از دست رفته است» «دستگاه از کار افتاده است»، «ظاهراً گیری وجود دارد». با این وجود، چون تقریباً با تمام جنبه‌های زندگی ما سروکار دارد اینک به کامپیوتر وابسته‌ایم.



تعدادی زبان کامپیوتری برای ارتباط با کامپیوتر ابداع شده است.

نگاهی به گذشته

ماشین‌های حساب قدیمی



• ده انگشت دستان ما نخستین ابزار شمارش بوده است.

• چینیان جعبهٔ بخش بخش شده‌ای با اعداد میله‌ای خود ابداع کردند. از این جعبه برای نوشتن دستگاه معادلات استفاده می‌شد.

• در بسیاری از تمدن‌ها از جمله چین، یونان، روم و ژاپن از چرتکه استفاده می‌شد.

• اینکاها از کوئیپوی[1] گره‌دار برای شمارش استفاده می‌کردند.

• جان نپر میله‌های نپر را در سال‌های ۱۶۰۰ برای کمک به محاسبات اختراع کرد.

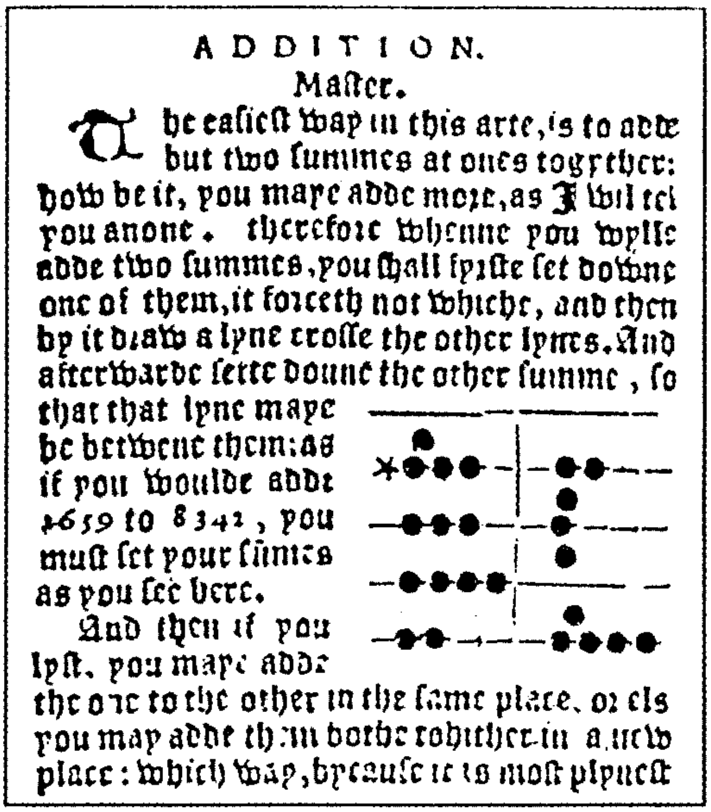
• ادموند گونتر در ۱۶۲۰ خط‌کش محاسبه را اختراع کرد.

• نخستین ماشین جمع را بلز پاسکال در سال ۱۶۴۲ اختراع کرد و در ۱۶۷۳ هم گوتفرید ویلهلم فن لایب‌نیتس ماشینی اختراع کرد که با آن می‌شد ضرب و تقسیم را انجام داد.

• در اوایل سال‌های ۱۸۰۰ طرح‌ها و کار چارلز بابیج در زمینهٔ موتور تفاضلی و تحلیلی شالوده‌های کامپیوتر امروزی را فراهم کرد.

---

۱. کوئیپو، ابزار شمارش اینکاها، طناب بلندی که از آن ۴۸ ریسمان ثانویه و ریسمان‌های سومی به تعداد مختلف آویزان است. گره‌هایی در آن واحدهای یک، ده و صد را نشان می‌دهند.



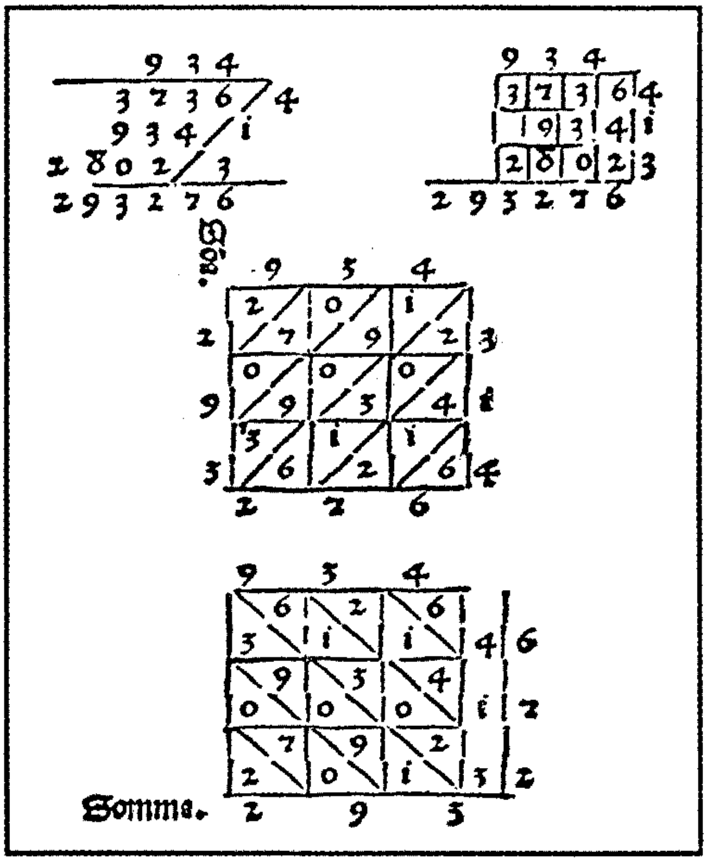
ADDITION.

Master.

The easiest way in this arte, is to adde but two summes at ones togyther: how be it, you maye adde more, as I wil tel you anone. therefore whenne you wylle adde two summes, you shall fyrste set downe one of them, it forceth not whiche, and then by it drawe a lyne crosse the other lynes. And afterwarde sette downe the other summe, so that that lyne maye be betweene them: as if you woulde adde 1659 to 8342, you must set your summes as you see here.

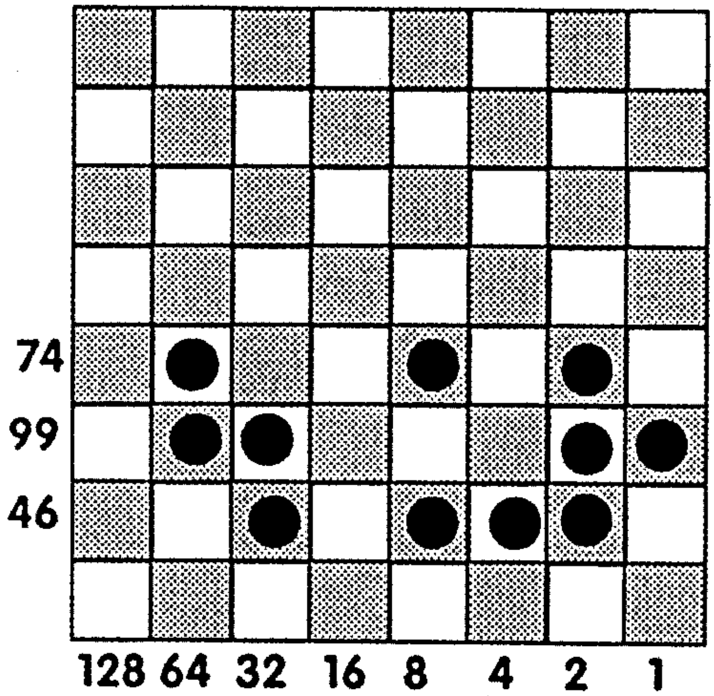
And then if you lyst, you maye adde the one to the other in the same place, or els you may adde them bothe togither in a new place: which way, bycause it is most playnest

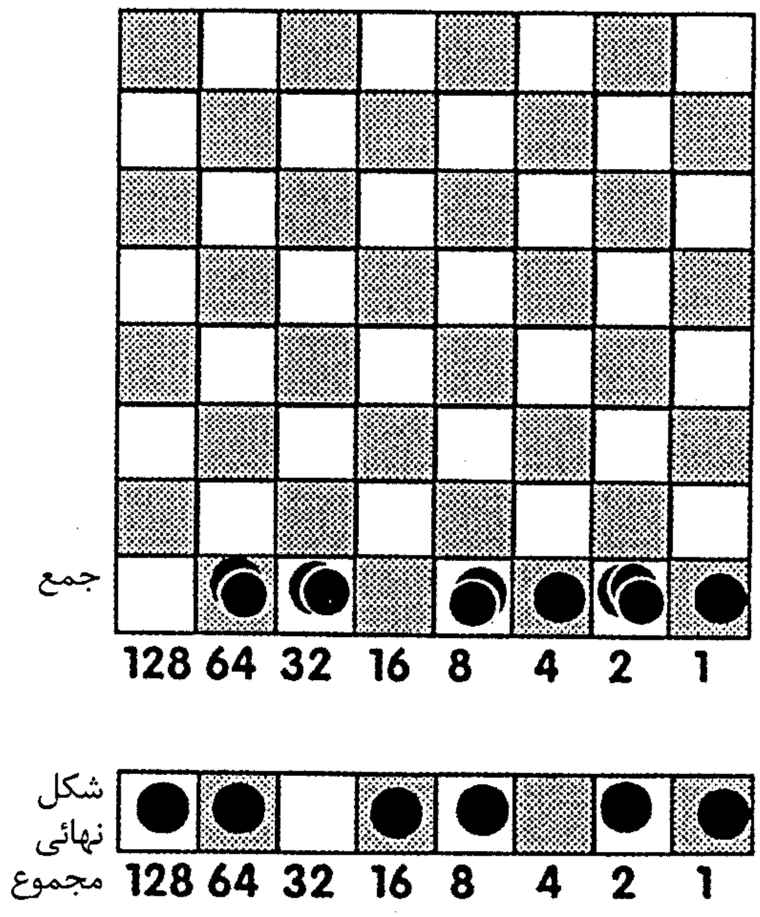
این شکل تصویری از کتاب حساب قدیمی انگلیسی Grounde of Artes اثر رابرت رکورد است. علاوه بر خط نشاندهندهٔ صفرها، دهها، صدها و غیره، فضای بین این خط‌ها برای نشان دادن پنج‌ها، پنجاه‌ها و پانصدها نیز به تبعیت از اعداد رومی به کار گرفته شده است. از «x» روی خط ابتدا برای نشان دادن خط هزارها استفاده می‌شد، اما بعدها از آن برای نشان دادن ویرگول برای نشان دادن اعدادی مانند ۳۲،۶۵۰ استفاده شد. هنگامی‌که پنج شمارنده بر روی یک خط جمع شوند یک شمارنده به فضای بالا انتقال می‌یابد. رابرت رکورد (حدود ۱۵۵۸_۱۵۱۰) علاوه بر نوشتن این کتاب، علامت «=» را برای مساوی معرفی کرد. کتاب درسی مهمی در جبر به نام The Wheston of Witte ــ انتشار یافته به سال ۱۵۴۲ ــ و کتابی در هندسه به نام کوره راهی به سوی دانش نوشت.



این جدول از کتابی است که در سال ۱۴۷۸ در ترویزو در ایتالیا منتشر شده است، و چهار روش برای ضرب ۹۳۴ و ۳۱۴ را نشان می‌دهد.

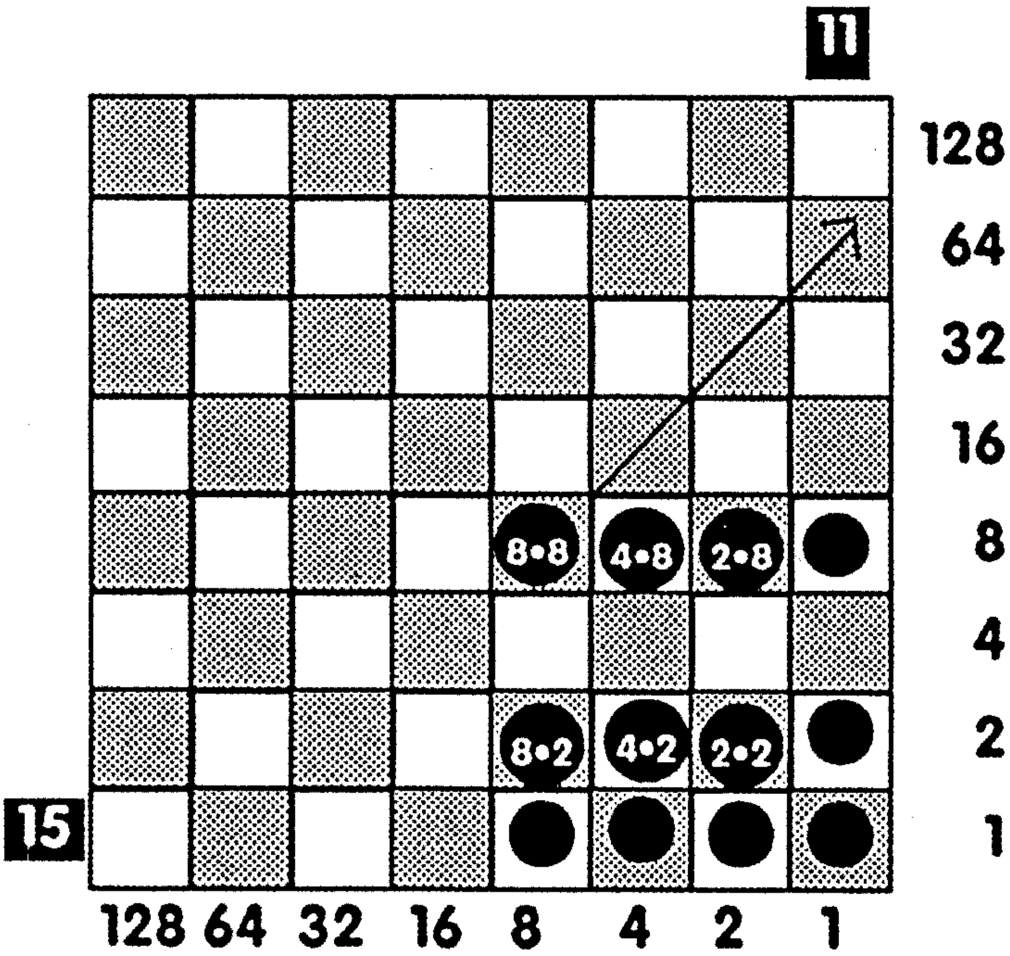
صفحه شطرنج
ماشین حساب نپر



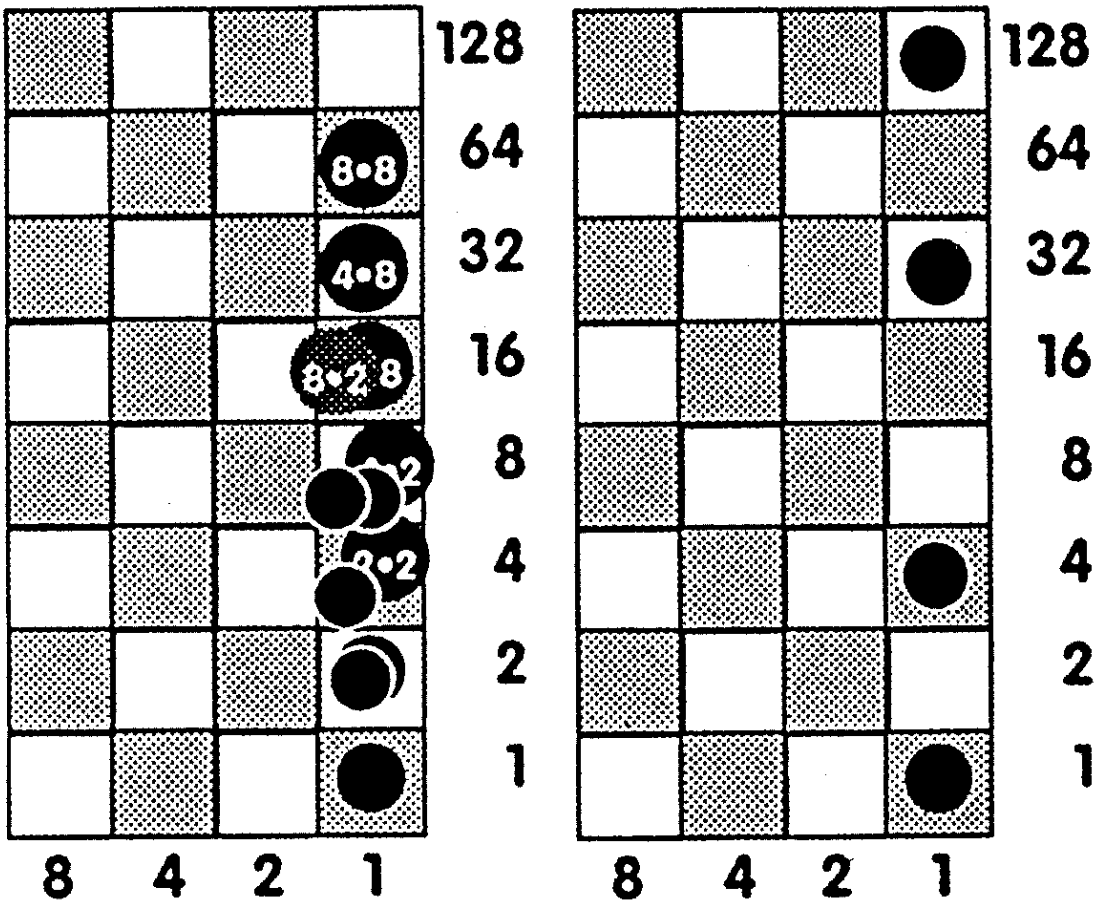


دستگاه دودویی (در پایهٔ ۲) که تنها برای نوشتن اعداد از صفر و یک استفاده می‌کند کلید ارتباط با کامپیوترهای الکترونیکی است ــ زیرا صفر و یک را می‌توان با حالت «خاموش» و «روشن» به صورت الکتریکی نشان داد. جان نپر ریاضیدان بنام اسکاتلندی از مفاهیم پایهٔ دو پیش از ظهور برق استفاده کرده است. نپر بیشتر به خاطر انقلابی که در محاسبات با اختراع لگاریتم پدید آورده است شهرت دارد. میله‌های محاسباتی او که میله‌ها (یا استخوان‌ها)ی نپر نامیده می‌شوند مورد استفادهٔ بازرگانان، برای انجام ضرب و تقسیم، قرار می‌گرفته است، و می‌تواند برای پیدا کردن جذر و ریشهٔ سوم نیز مورد استفاده قرار گیرد. روش محاسبه با صفحهٔ شطرنج کمتر شناخته شده است. او گرچه برای عدد نویسی از دستگاه دودویی استفاده نکرد، این

صفحه نشان می‌دهد چگونه او اعداد را در پایهٔ دو بیان کرده است. مثلاً برای جمع کردن ٤٦ + ۹۹ + ۷٤ هر یک از اعداد در یک سطر از صفحهٔ شطرنج با گذاشتن علائمی در مربع مناسب آن، سطر نوشته می‌شد، به‌گونه‌ای که مجموع مقدار علامت‌ها (که در طول خط پایین نشان داده شده است) حاصل جمع اعدادی است که نشان می‌دهند ۷٤ در ٦٤، ۸ و ۲ علامت دارد ۷٤ = ۲ + ۸ + ٦٤. پس از آن‌که هر عدد در صفحهٔ شطرنج نشان داده شد، عدد با جمع شدن علامت‌ها به‌طور عمودی در سطر پایین به هم اضافه می‌شوند. دو علامت با هم در یک مربع برابر با یک علامت در مربع کناری سمت چپ آن است. بنابراین دو علامت «۲» علامت «٤» را می‌سازند. با عمل از راست به چپ، هر دو علامت باهم در یک مربع حذف شده و به جای آن یک علامت در خانهٔ کناری چپ آن قرار می‌گیرد. در پایان این فرایند هیچ مربعی بیش از یک عدد ندارد. مجموع مقادیر علامت‌های باقی‌مانده حاصل جمع اعداد را نشان می‌دهد.



برای ضرب با استفاده از صفحهٔ شطرنج نپر، از نمایشگرهای اعداد در ستون‌های افقی و عمودی استفاده می‌شود.



15x11=165

128+32+4+1=165

فرض کنید بخواهیم ضرب ۱۱ × ۱۵ را انجام دهیم. یک عدد با علامت‌های سطر پایین و دیگری با علامت‌های ستون سمت راست نشان داده می‌شوند. آنگاه علامت جدیدی در مربع محل تقاطع در جایی که یک سطر دارای یک علامت با یک ستون دارای یک علامت برخورد می‌کنند گذاشته می‌شود. پس از آن، فرایند ضرب تنها با لغزاندن علامت‌ها از سطر پایین به شکل قطری به ردیف عمودی انجام می‌گیرد. مانند جمع زدن، هر جا که دو علامت در یک خانه قرار گیرند حذف می‌شوند و علامتی در مربع بالای آنها قرار می‌گیرد. ستون عمودی به دست آمده حاصل ضرب ۱۱ × ۱۵ را نشان می‌دهد.

نگاهی به اکنون

در درختان ما نیز کامپیوتر هست

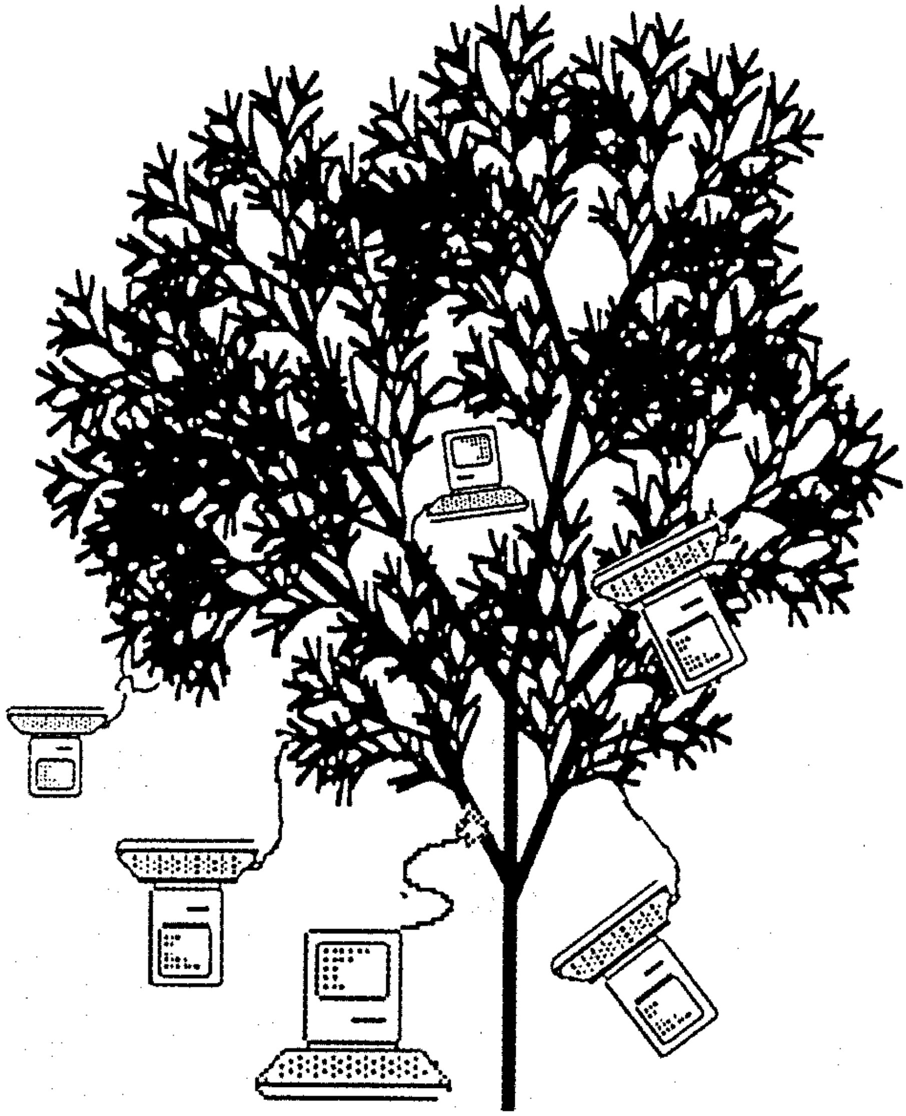
اینکه انسانی برجسته وقت خود را مانند بردگان برای محاسبه‌ای تلف کند که بتوان با اطمینان به هرکس دیگری با استفاده از ماشین واگذار کرد، دون شأن اوست.

ـ گوتفرید ویلهلم فن لایب‌نیتس

«من یک دایناسورم» «من با آنها کاری ندارم.» «من نمی‌توانم بفهمم چطور کسی می‌تواند این قدر وقتش را در برابر آنها تلف کند.» «آنها خشک و بی‌روح‌اند». «من در کامپیوتر کاملاً بی‌سوادم.» چند بار چنین جمله‌هایی را شنیده و شاید گفته‌اید؟ اما، بدون توجه به احساس عده‌ای از افراد، باید پذیرفت که کامپیوترها آمده‌اند تا برای همیشه بمانند. آنها زندگی ما را از جهاتی آسان‌تر می‌کنند، و از بعضی جهات پیچیده‌تر، و خلوت و آرامش ما را برهم می‌زنند. اینک کامپیوترها حتی در درختان نیز حضور دارند.

الگوی رشد درختان را می‌توان با استفاده از شبکه‌های ریاضی تعیین و با استفاده از برخال‌ها ترسیم کرد. از کامپیوتر می‌توان در مدل‌سازی آتش سوزی جنگل‌ها، و بدین وسیله پدید آوردن راهبردهای جلوگیری از ایجاد یا مهار آتش‌سوزی، استفاده کرد. علاوه بر آن، اینک از کامپیوتر به شکل گسترده‌ای در ثبت سوابق درختان شهرها استفاده می‌شود. در بسیاری از شهرها، در تلاش برای حفظ سلامت درختان به کامپیوتر متوسل شده‌اند. واشینگتن دی‌سی پایگاه داده‌هایی برای حدود 109,000 درخت دارد. در حالی‌که پاریس نیز مشخصات 100,000 درخت خود را بر روی یک کامپیوتر دارد. چه نوع اطلاعاتی مورد توجه است؟ هر شهری با توجه به شرایط ویژهٔ

خود داده‌های ضروری را تعیین می‌کند. پایگاه داده‌های پاریس دربرگیرندهٔ محل درختان (هر درختی در هر خیابانی شماره‌گذاری شده، فاصلهٔ آن از ساختمان‌ها، از



جدول‌ها و درختان دیگر ثبت شده است، آمارهای حیاتی (گونه، جنس، سن، اندازهٔ تنه، ارتفاع)، نوع هرس کردن، آمار زیست محیطی (از جمله نوع خاک، ابعاد گلدان‌ها، زهکشی و کود دادن)، وضعیت سلامت درختان (ثبت وضعیت و بیماری‌ها)، آلودگی‌ها و آثار محیطی است. ثبت این اطلاعات برای بار اول بسیار وقت‌گیر است. همان‌طور که روزآمد کردن آنها نیز چنین است. چون درختان در هر جامعه‌ای، هم از نظر زیبایی و هم از نظر زیست محیطی گنجینه‌های ارزشمنداند، و زمان صرف شده و نتایج درازمدت این پایگاه داده‌ها را ارزشمند ساخته است. در سانفرانسیسکوی کالیفرنیا، باغ‌های شهری فهرست موجودی شهر را با استفاده از کامپیوتر کیفی نگه

می‌دارند. پاریس از روش مورد استفاده در واشینگتن دی‌سی پیروی می‌کند، کـه در آن تهیهٔ فهرست موجودی اولیه را مهندسان جوان جنگل‌داری با اسـتفاده از کامپیوترهـای دستی انجام داده‌اند. این پایگاه‌های داده‌های پیچیده، بدون کامپیوتر، امکان‌ناپذیر بودند. فضای ذخیره‌سازی و ساختن فایل‌ها، بـا توجـه بـه لـزوم روزآمـد کـردن جـستجو و دسته‌بندی داده‌ها، بسیار زیاد بوده است.

* * *

با ظهور کامپیوتر، کارکردهای آن به آرامی در وجوه مختلف زندگی ما وارد شده است. همان‌طور که بازرگانان و دریـانوردان قـدیمی کـه تعجـب مـی‌کردنـد چگونـه بـدون مجموعه‌ای از میله‌های نپر کار می‌کرده‌اند، و کاتبان اینکا که باید فکر می‌کردند چگونه می‌توانستند بدون کوئیپو فهرست جمعیت و محصولات امپراتوری اینکا را نگه دارنـد، ما نیز امروزه در همان نقطه قرار داریم.

ISBN 0-933174-87-X

51495

9 780933 174870

بارکد (رمز میله‌ای) برای چسباندن و ردیابی چیزهایی مانند درختان، خواربار و بسته‌ها.

همان‌طور که در مورد درختان شهری دیده‌ایم، کامپیوتر نقشی بـاورنکردنی در ذخیـره سازی، پردازش و بازیابی داده‌ها بازی مـی‌کنـد. امـروزه از وسـایل ورودی داده‌هـا در رستوران‌ها برای سفارشات، از بارکد در فروشگاه‌ها و تجـارت بـرای فـروش، کنتـرل موجودی و ردیابی استفاده می‌شود. کامپیوتر در علوم برای تحلیل، مقایـسه و محاسـبهٔ اطلاعات ارزش بسیاری دارد، و بدین وسیله با خطای کمتر زمان بسیاری صرفه‌جـویی می‌شود. تأثیر این ابزار تکامل یابنده بر تمدن ما می‌تواند به اندازهٔ اثر برق باشد.

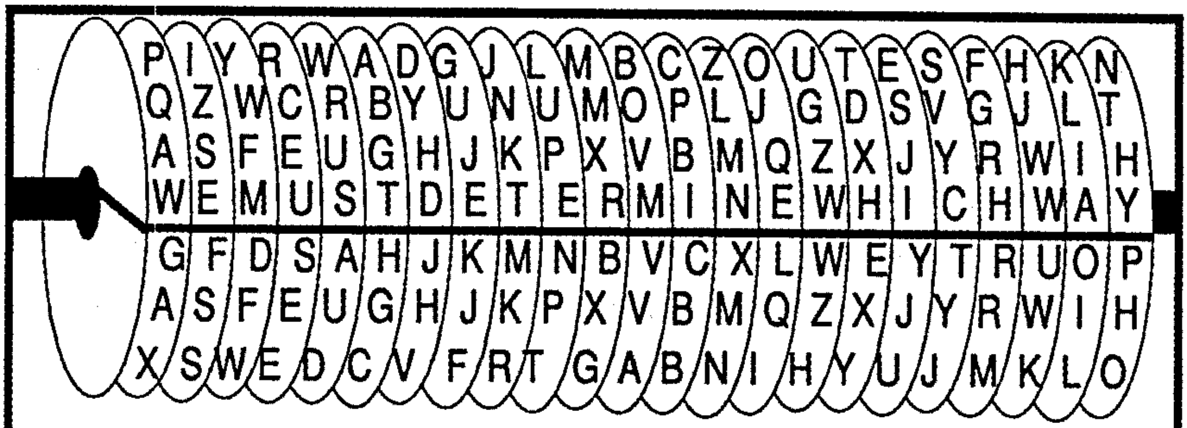
ریاضیات به چشم خصوصی تبدیل می‌شود

موجک‌های ریاضی شیوه و ابزارهای جدید مبارزه با جنایت‌اند که در ایالات متحده به کار گرفته شده‌اند. ریاضیدانان تحلیل موجک‌ها را برای ظهور تصویرها به شیوهٔ سریع‌تر و دقیق‌تری ابداع کرده‌اند. این روش تصویرها را به اجزای اساسی آنها تقسیم می‌کند. سپس اطلاعات مهم و مناسب مورد نیاز برای بازسازی تصویر را جدا می‌کند و اطلاعات غیرضروری را دور می‌ریزد. در نتیجه موجک‌ها مقدار داده‌هایی را که لازم است ذخیره شوند کاهش می‌دهند. این فشرده

سازی داده‌ها موجب صرفه‌جویی در وقت و هزینه می‌شوند. علاوه بر آن، این موجک‌ها برخلاف سایر روش‌ها در تصویر اعوجاجی پدید نمی‌آورند. این امر به پلیس فدرال امکان داده است به شیوه‌ای کاراتر تصویر اثر انگشت افراد را ظاهر کند، شناسایی کند و مطابقت دهد.

راز من چیست؟

حکومت‌ها، انقلابیون و سرمایه‌گذاران همیشه به ارسال و دریافت رمزهای بسیار سری نیاز داشته‌اند. روش‌های رمزگذاری و رمزگشایی بسیاری برای پیام‌ها در طی قرن‌ها ابداع شده‌اند. رمزنویسی اسپارتی[1]، رمز مربع پلی‌بیوس[2] جایگزین سازی حروف[3] ژولیوس سزار، چرخ رمز توماس جفرسون و رمز نظامی آلمانی *معما*، از آن جمله‌اند. نمونه‌های بسیار دیگری در ادبیات وجود دارند، که در آنها رمزنگاری در پی رنگ (plot) اهمیت دارد، مانند سوسک ادگار آلن پو، *لاژانگادای* ژول ورن، *ماجرای مردان رقصندهٔ* کنان دویل.



*بخشی از **چرخ رمز توماس جفرسون**. این چرخ از ۳۶ چرخ چوبی یک اندازه ساخته شده است. بر روی هر چرخ حروف الفبا در ترتیبی متفاوت چاپ شده است. پیام در امتداد یک میلهٔ افقی فلزی قرار می‌گیرد. آنگاه فرستنده حروف هر خط افقی دیگر را می‌نویسد و آن را ارسال می‌کند. گیرنده این حروف بی‌معنی را در طول میلهٔ افقی آنها مرتب می‌کند، و دور استوانه را نگاه می‌کند تا سطری از حروف پیدا شود که معنی داشته باشد.*

---

۱. پلوتارک توضیح می‌دهد چگونه با پیچیدن یک نوار باریک کاغذ پوستی یا چرم به شکل مارپیچ دور یک محور استوانه‌ای پیام مبادله می‌شده است. پیام نوشته می‌شد، نوار برداشته می‌شد و به گیرنده ارسال می‌شد که محوری استوانه به همان اندازه داشت تا نوار را دور آن بپیچد و پیام را رمزگشایی کند.

۲. (در حدود ۱۱۸ ـ ۲۰۰ پیش از میلاد) پلی‌بیوس یونانی یک رمز جایگزینی حروف ابداع کرد که دور یک مربع ۵ × ۵ طراحی شده بود و هر یک از حروف الفبا را با استفاده از دو عدد ۱ تا ۵ به عددی دورقمی تبدیل می‌کرد.

۳. نخستین رمزنگاری ثبت شده در تاریخ که با انتقال سه حرف در ترتیب الفبا انجام می‌گرفته است.

در بیست سال گذشته از فرمول رمزسازی DES[1] در بانک‌ها، مؤسسات دولتی و شرکت‌های خصوصی برای حفظ اطلاعات استفاده شده است. در این روش از ۵۶ بیت دادهٔ کامپیوتری استفاده می‌شود که رمزگشایی آن با یک ابرکامپیوتر ۲۰۰ سال طول می‌کشد. مؤسسات اطلاعاتی و پلیس از آن نگرانند که روش‌های کنونی کافی نباشند و نتوانند مانع دست‌یابی جنایتکاران، تروریست‌ها و دولت‌های خارجی به مخابرات شوند.

```
53‡‡†305))6*;4826)4‡.)4‡);806*;48†8¶60))85;1‡(;:‡*8†83
```

```
53 ‡ ‡ † 305)  )6* ;4826)4‡.) 4‡)
;806* ;48†8¶60) )85;]3* ;:‡*8†83
(88)5*†;46(;88*96*?;8) *‡(;485)
;5*†2:*‡(;4956*2(5*-4)8¶8*
;4069285) ;)6†8)4‡‡;1 (‡9;48081
;8:8‡1 ;48†85;4) 485†528806*81
(‡9;48;(88;49‡?34;48)4‡;161;:
188;‡?;
```

*رمز جایگزین در **سوسک طلایی** ادگار آلن پو.*
ترجمهٔ آن این است: آینهٔ خوبی در خوابگاه اسقف در بیست و یک درجه و سیزده دقیقه شمال شرقی کرسی شیطان و از راه بال هفتم شاخهٔ اصلی شمال تیراندازی از چشم چپ سرمرگ یک خط زنبور از درخت از راه شلیک پنجاه پا به بیرون.

در نتیجه سامانهٔ جدیدی با فرمول جدید با استفاده از ۸۰ بیت پیشنهاد شده است که بیش از یک میلیارد سال گشودن رمز آن طول می‌کشد. این رویکرد تازه از ریزتراشهٔ مخصوصی استفاده می‌کند که در تلفن، ماهواره، دستگاه نمابر، مردم و غیره کار می‌گذارند تا مخابرات سری را به رمز درآورد. این تراشه از فرمول‌های ریاضی محرمانه‌ای استفاده می‌کند که مؤسسهٔ امنیت ملی به‌وجود آورده است. علاوه بر آن، کلید ریاضی رمزگشایی داده‌های رمزگذاری شده را اف بی‌آی و سایر مؤسساتی نگه می‌دارند که دادستان کل آمریکا تعیین می‌کند. فرایند ساخت این تراشه اوراق کردن و رمزگشایی از آن را تقریباً ناممکن می‌سازد. افرادی مانند میچل کاپور از بنیاد الکترونیک فرانتیر (گروه سیاست‌گذاری عمومی در واشینگتن دی سی) هستند که می‌گویند «نظام پایه‌گذاری شده بر فن‌آوری محرمانهٔ طبقه‌بندی شده نمی‌تواند و نباید اعتماد مردم آمریکا را به‌دست آورد».[2]

---

۱. DES استاندارد رمزسازی داده‌ها ـ الگوریتم پیچیده‌ای برای رمزگذاری و رمزگشایی داده‌ها.
۲. راز طرح تلفن در زیر آتش، اثر دون کلارک، کرونیکل. سانفرانسیسکو. ماه مه ۱۹۹۳.

شناسایی اعداد اول

یکی از قدیمی‌ترین روش‌های یافتن اعداد اول را ریاضیدان یونانی اراتوستنس (۱۹۵–۲۷۵ پیش از میلاد) ابداع کرده است. او غربالی برای اعداد ساخت که مضارب اعداد را تا عدد موردنظر حذف کند. ریاضیدانان از آن پس روش‌های جدیدی برای جستجو و شناسایی اعداد اول ابداع کرده‌اند.

در سال ۱۶۴۰ پیر دوفرما ادعا کرد که تمام اعداد به صورت $F_n = 2^{2^n} + 1$ (برای ... ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ = n) عدد اولند. این برای پنج عدد فرمای نخستین (به‌ازای ۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ = n) اما لئونارد اویلر در قرن بعد عدد ششم فرما (F_5) را به صورت ۶۷۰۰۴۱۷ × ۶۴۱ تجزیه کرد، سپس در سال ۱۸۸۰ F_6 به ۲۷۴۱۷۷ × ۶۷۲۸۰۴۲۱۳۱۰۷۲۱ تجزیه شد. در حال حاضر عدد فرمای دیگری که اول باشد پیدا نشده است. تا سال ۱۹۹۲ نشان داده شده است که بیست و دومین عدد فرما (F_{22}) مرکب است[1]. در سال ۱۶۴۴ مارتن مرسن، راهب فرانسوی، عبارتی ـ $(2^p - 1)$ که در آن p یک عدد اول است ـــ را نوشت که اعداد اول را به دست دهد. اما تمام اعداد به دست آمده از این عبارت اول نیستند. در حال حاضر ۳۲ عدد اول مرسن شناخته شده است. در کار با فرمولها (مانند فرمول اعداد مرسن، اعداد فرما، اعداد کار میشائیل[2] و دیگران)، نظریهٔ اعداد، و روش‌های برنامه‌ریزی کامپیوتری، ریاضیدانان با استفاده از ابرکامپیوتر یا مجموعه‌ای از کامپیوترهای شخصی سریع، اعداد بزرگ و بزرگ‌تر اول را جستجو کرده‌اند ـ و به دنبال ویژگی‌ها یا الگوهای نامتعارف‌اند.

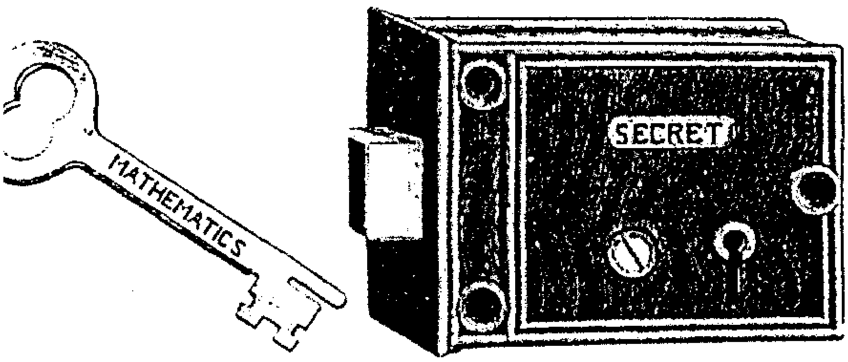
چرا این همه به اعداد اول توجه دارند؟ کنجکاوی ریاضی ـــ ثبت رکوردهای تازه ـــ آزمون کارایی سخت‌افزار کامپیوترهای جدید ـــ استفاده از اعداد اول برای ساخت اعداد چندرقمی برای رمزگذاری اطلاعات محرمانه. کامپیوترهای امروزی، همراه با برنامه‌ریزی و حل هوشمندانهٔ مسایل، یافتن اعداد اول واقعاً بزرگ را امکان‌پذیر کرده است. **بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده در حال حاضر چیست؟** $2^{859433} - 1$.[3]

۱. *طرح‌هایی در محاسبات علمی*، اثر ریچارد ای. کارنادل. اشپرینگر ـ فرلاگ، سانتاکلارا، مه ۱۹۹۴.
۲. رابرت کارمیشائل (۱۹۶۷ـ۱۸۹۷) ریاضیدان آمریکایی که در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل و نظریهٔ اعداد کار کرده است.
۳. در سال ۱۹۹۳ دیوید اسلووینسکی آن را یافته است و به تقاضای او ریچارد کراندال صحت آن را بررسی کرده است.

رمزنویسی

هرج و مرج پانک‌های کامپیوتری[۱] و ریمیلر[۲]

هرگز از خود پرسیده‌اید چگونه این قدرنامه‌ها و کاتالوگ‌های بی‌مصرفی را که درخواست نکرده‌اید با پیشنهاد برای خریدهای «عالی» را دریافت می‌کنید؟ نام و نشانی شما را از کجا به‌دست آورده‌اند؟ به دنیای الکترونیک وارد شوید تا حریم خصوصی خود را از دست بدهید. افراد بسیاری داده‌های الکترونیکی زیادی در مورد خود دارند، که از طریق مردم / کامپیوتر می‌تواند برای ایجاد فایلی برای شما برپایهٔ چیزهایی که خریده‌اید، بلیت‌های مسافرتی، سوابق پزشکی، برگ‌های جریمهٔ رانندگی، وام‌ها و غیره مورد استفاده قرار گیرد. گرچه از دست دادن حریم خصوصی را روش‌های فناوری جدید امروزی باعث شده‌اند، شاید راهی برای بازگرداندن آن با استفاده از همان روش‌ها باشد. پانک‌های کامپیوتری، نامی که آنان بر خود نهاده‌اند، به یاری ما آمده‌اند. آنها از بازگرداندن آرامش خلوت افراد، با استفاده از روش‌های رمزنویسی پیچیده برای رمزگذاری اطلاعات فرد، و جلوگیری از دسترسی آسان دفاع می‌کنند.



طبیعی است که این هرج و مرج رمزنویسی طرفداران و مخالفانی دارد. برخی احساس می‌کنند که دولت و مؤسسات اجرای قانون حق شنود را دارند، و روش‌های جدید پانک‌های کامپیوتری مانع آن است. ریمیلر نمونه‌ای از روش‌های جدید است که با استفاده از رمزنویسی‌های پیچیده‌ای ایجاد شده است که به افراد اجازه می‌دهد اطلاعات از طریق مردم بدون گذاشتن ردپایی از فرستنده ارسال شود. بسیاری احساس می‌کنند که اگر دولت بتواند از روش‌ها و ابزارهایی برای رمزگذاری اطلاعات مهم استفاده کند، افراد نیز حق استفاده از روش‌های مشابه برای حفظ حریم خصوصی خود را دارند.

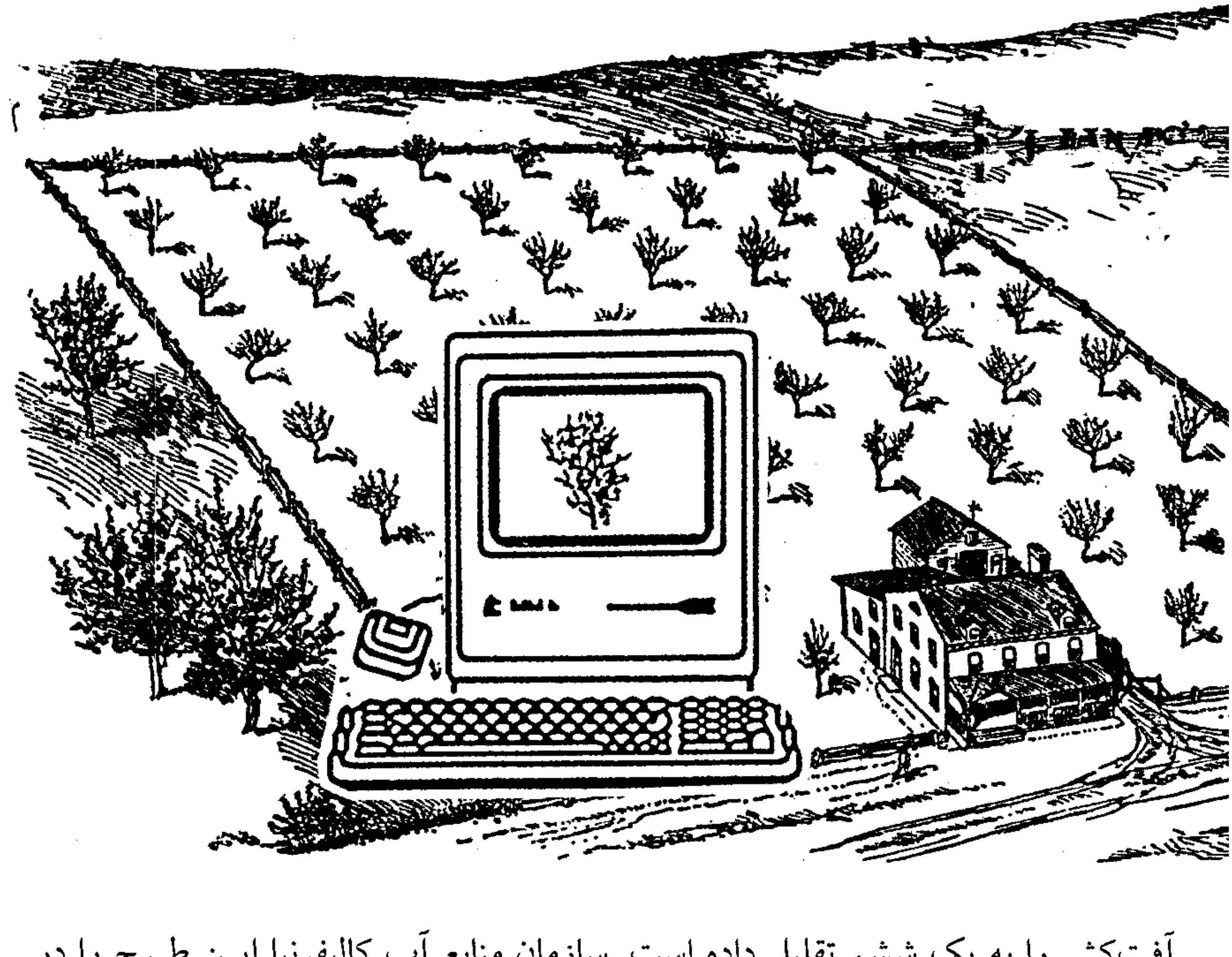
---

۱. Cyberpunk ، سایبرپانک از دو واژهٔ Cybernetic (سیبرنتیک) و پانک ساخته شده است.

۲. remailer (به معنی ارسال کنندهٔ مجدد یا میانجی)، سروری است که پیام‌هایی را با دستورالعمل‌هایی دریافت می‌کند که آن را به کدام مقصد ارسال کند، بدون آن‌که مشخص شود که فرستندهٔ اصلی کیست.

بیاری کامپیوتری و
رفه‌جویی در آب

مشاهدهٔ کشت محصول انبوه در زمین خشک و گاهی ترک خورده ترسناک است. اما اینک با استفاده از آبیاری سطحی قطره‌ای کامپیوتری، آب، کود و گاهی آفت‌کش را می‌توان مستقیماً به ریشهٔ گیاهان رساند. با آبیاری قطره‌ای زیر سطحی، لی سیمپسون، انگورکاری از فرسنو در کالیفرنیا، مصرف آب خود را به نصف کاهش داده و محصول خود را دو برابر کرده، در حالی‌که مصرف



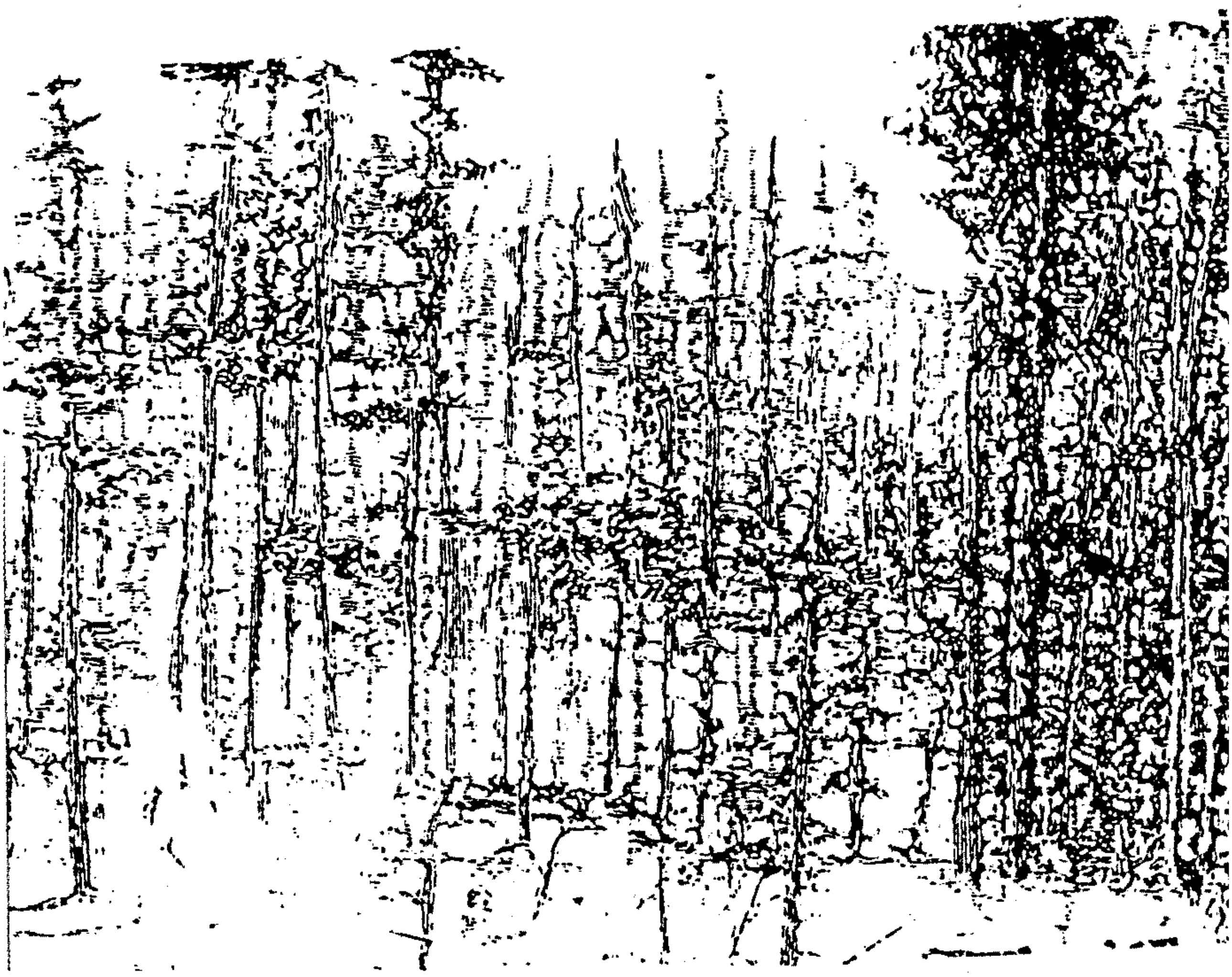
آفت‌کش را به یک ششم تقلیل داده است. سازمان منابع آب کالیفرنیا این طرح را در یک مزرعهٔ پنبهٔ ۶۵ هکتاری در مزارع هریس، در همان فرسنو، آزمایش کرد که

محصول آن ۱۸۰۰ کیلوگرم بر هکتار در برابر ۱۰۵۰ کیلوگرم بر هکتار سال‌های پیش شد، در حالی‌که مصرف آب در هر هکتار ۱۸ اینچ کمتر شد. کلود فن در این روش «جدید» کشاورزی پیشتاز بوده است (تقریباً حدود ۲۰ سال است کهَ آبیاری قطره‌ای مورد استفاده است). فن سال‌ها از صرفه‌جویی در آب و بهبود محصول با این روش دفاع کرده است. اما تا سال ۱۹۷۸ کشاورزان بدان توجهی نکردند. فن این روش را در مزرعهٔ گوجه‌فرنگی خود در کالیفرنیا آزمایش کرد. محصول ٦٥ تن بر هکتار اینک به ۲۵۰ تن رسیده است. او یادآوری می‌کند که برای آب دادن به گیاهی در یک گلدان پر کردن اتاق از آب بیهوده است. آمارهای او ادعا دارند که کشاورزی کالیفرنیا ۸۵٪ آب ایالت را مصرف می‌کند، و در صورت استفاده از آبیاری قطره‌ای زیرسطحی کامپیوتری[1] برای همان محصول ـ مثلاً پنبه ـ شش اینچ صرفه‌جویی در آب در ۶۰۰,۰۰۰ هکتار برای تأمین آب لس آنجلس کافی است. این روش مصرف علف‌کش را نیز کاهش می‌دهد. زیرا علف‌های هرز به راحتی در بین شیارها، به دلیل آب دادن به ریشهٔ گیاهان و نه غرقه کردن در آب، رشد نمی‌کنند. علاوه بر آن مقدار کود و آفت‌کش نیز کمتر از نصف می‌شود. روش‌های کامپیوتری او امکان کشف تعامل بین موادغذایی از دانه‌بندی خاک تا مشخصات ریشه‌دهی را فراهم کرده است.

۱. آب دادن به محصولات با لوله‌های زیرزمینی قرار گرفته در حدود عمق ٤٠ سانتیمتری انجام می‌شود. یک لیزیمتر (اسبابی برای اندازه‌گیری جذب آب و مواد محلول در آن) بسیار دقیق شبنم صبحگاهی را اندازه‌گیری می‌کند، و مقدار آب جذب شده و بیرون داده شده و شرایط آب و هوایی را اندازه می‌گیرد. کامپیوتر این داده‌ها را گردآوری و تحلیل می‌کند، و مقادیر دقیق آب و گاهی کود و آفت‌کش و علف‌کش را در سراسر روز تأمین می‌کند. بدون سرمایه‌گذاری در سامانهٔ کامپیوتری، مزرعه‌های کوچک می‌توانند مزارع خود را از طریق مودم از یک کامپیوتر مرکزی زیر نظر داشته باشند.

کامپیوترها با آتش‌سوزی در جنگل‌ها مبارزه می‌کنند

مدل سازی کامپیوترهای امروزی ابزاری بسیار نیرومند است، که مورد استفادهٔ دانشمندان و کارشناسان در طیف گسترده‌ای از حوزه‌ها قرار می‌گیرد. اقتصاددانان می‌توانند از آن در پیش‌بینی چرخه‌های اقتصادی، پزشکان در زیر نظر گرفتن و پیش‌بینی گسترش بیماری‌های مسری یا با نظریهٔ آشوب در توصیف اختلال در ضربان قلب استفاده کنند. جامعه‌شناسان نیز، همراه با آمار، آن را برای بررسی گرایش‌های اجتماعی به کار گرفته‌اند. این فهرست بی‌پایان به‌نظر می‌رسد.



در گذشته‌ای نه چندان دور ابزارهای آتش نشانی لباس‌های محافظ، تبر، طناب، ارهٔ زنجیری، تبرهای ضد حریق، آب و مواد شیمیایی بود. امروزه بعضی از آتش‌نشانان به کامپیوترهای کیفی یا حتی آزمایشگاه‌های صحرایی در میان جنگل با کامپیوترهای شخصی مجهزند. علاوه بر آن برای ردگیری افراد و تدارکات نیز در تحلیل آتش‌سوزی جنگل‌ها از کامپیوتر استفاده می‌شود.

پاتریشیا اندروز ریاضیدان در زمان کار آزمایشگاه ایستگاه آتش نشانی خدمات جنگل‌داری ایالات متحده برنامه بی‌هیو را در سال ۱۹۸٤ آماده کرد. محل آتش‌سوزی، پست و بلندی‌های زمین منطقه، شرایط آب و هوا (سرعت و جهت باد، خشکی و غیره) انواع درختان یا روغن‌های آتشگیر و اطلاعات بسیار دیگری به کامپیوتر داده می‌شود. آنگاه برنامه چگونگی عملکرد «احتمالی» آتش را پیش‌بینی و بدین‌ترتیب برای تصمیم‌گیری در مورد بهترین روش مبارزه با آتش به مدیران کمک می‌کند. طبیعی است این برنامه قادر به پیش‌بینی تمام پیامدهای ممکن نیست، اما می‌تواند دایماً برای جامع‌تر شدن با رخ دادن مسایل جدید، مانند «آتش‌سوزی تاج» که در هیوستون از شاخه‌های بالای یک درخت به درختی دیگر گسترش یافت، اصلاح شود. افکتس برنامهٔ تکمیلی دیگری است که برای کمک به مدیران در تصمیم‌گیری برای مهار آتش به‌کار گرفته می‌شود. این ابزارهای فن‌آوری برتر در چین نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و به اسپانیایی نیز ترجمه شده و از سوی ایتالیایی‌ها نیز درخواست اطلاعات شده است.

نگاهی به آینده

ضای شبکه‌ای سیبرنتیکی
اقعیت مجازی

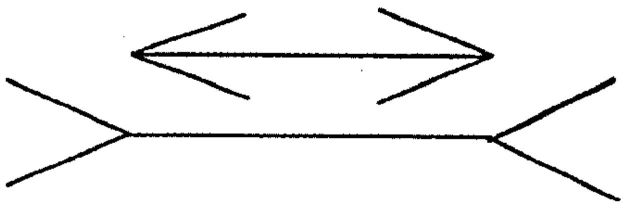
این جوانی همیشگی ریاضیات است که آن را با جاودانگی آزاردهنده از علوم دیگر جدا می‌سازد.

ـ اریک تمپل بل

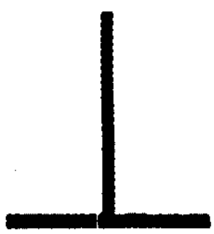
در قرن شانزدهم مردم مجذوب شگفتی‌های اتاق تاریک شدند. تصویر صحنه‌های واقعاً متحرک از اشیا که در خارج از اتاق رخ می‌داد به دیوار اتاق تاریک انداخته می‌شد. برای ایجاد این صحنه‌ها در اتاق به هیچ وسیلهٔ برقی نیاز نبود. بعدها، در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم توجه به خطاهای باصره اوج گرفت. فیزیکدانان و روان‌شناسان دربارهٔ این‌که چگونه ذهن ما با آنچه دیده بودیم، فریب می‌خورد مطالعه کردند و نوشتند. ساختمان فیزیکی چشم و تحلیل چگونگی پردازش اطلاعات دریافتی از چشم به‌وسیلهٔ ذهن ما برای توصیف تغییر شکل‌هایی که ذهن ما را برای باور کردن آنها فریب می‌دادند با جدیت مورد بررسی قرار گرفت.

تعدادی از یافته‌های آنان از این قرار است:

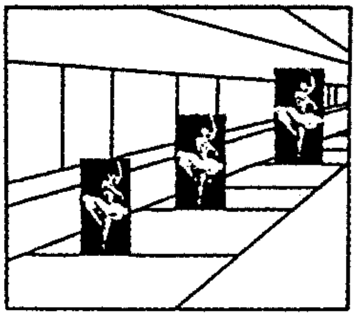
۱) چگونگی قرار گرفتن زاویه‌ها و پاره خط‌ها می‌تواند چشم ما را به داخل یا بیرون هدایت کند و موجب آن شود که بزرگ‌تر یا کوچک‌تر به نظر آیند.



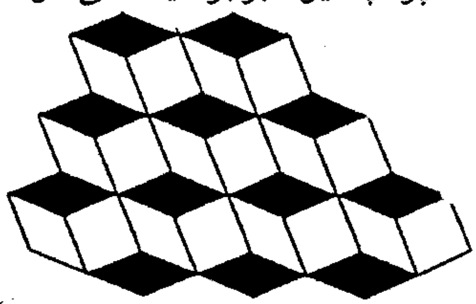
۲) شکل‌های افقی کوتاه‌تر از عمودی به نظر می‌رسند زیرا شبکیهٔ چشم انحنا دارد.



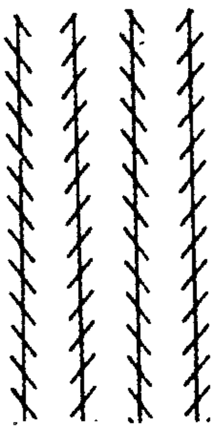
۳) تصویر ناحیهٔ روشن بر روی شبکیه به تصویر ناحیهٔ تاریک گسترش می‌یابد و بدین ترتیب ناحیهٔ تاریک را کوچک‌تر می‌کند.



٤) شکل‌های یکسان در جاهای مختلف در یک پرسپکتیو نابرابر دیده می‌شوند.

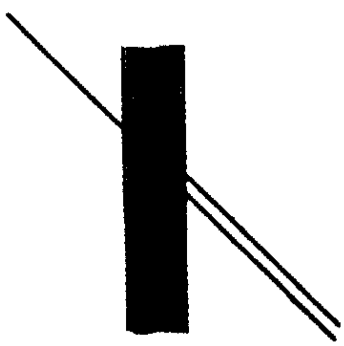


٥) اگر تصویری بتواند به بیش از یک روش تفسیر شود ذهن ما تصویر را بین این تفسیرها به جلو و عقب نوسان می‌دهد.



٦) پاره خط‌های مورب بر روی خط‌های موازی موجب می‌شوند تا ناموازی به نظر آیند.

٧) فضای خالی و همان فضا به صورت پر شده نابرابر به نظر می‌آیند.



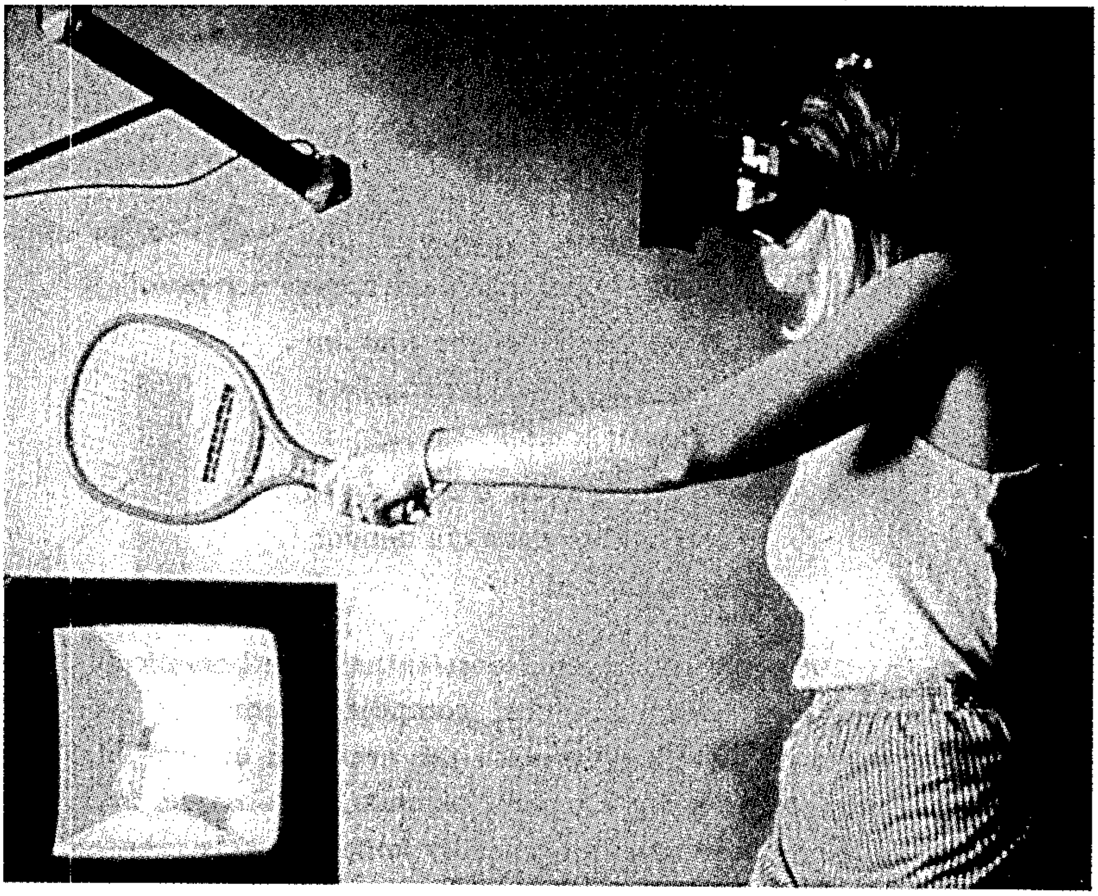
٨) خط موربی که به‌وسیلهٔ میله عمودی قطع شود مستقیم به نظر نمی‌آید.

اینک در قرن بیستم، دانشمندان کامپیوتر، ریاضیدانان و مخترعان اپتیک (فیزیک نور)، فناوری کامپیوتر و خطاهای باصره را با **آفرینش جهان‌های مصنوعی** به اوج رسانده‌اند. بینندهٔ مجهز به ساز و برگ‌های گوناگون تنها یک بیننده نیست ــ بلکه **عملاً به دنیاهایی وارد می‌شود که ساختهٔ کامپیوترند.**

در این جهان‌های ساختگی، می‌توان شریک شد. مثلاً می‌توان تصمیم گرفت که چنین کسی بود:

ــ دوندهٔ المپیکی که هیجان دویدن برای مدال طلا را احساس می‌کند.
ــ کنترل کنندهٔ ترافیک هوایی که هواپیمایی را در فضایی سه بعدی هدایت می‌کند.

ــ پیش‌بینی کنندهٔ هوایی که در اطراف جهان پرواز می‌کند و شرایط هوایی را که برنامه‌ریزی شده و در کامپیوتر پردازش شده است به صورت دست اول مشاهده می‌کند.
ــ اتمی که با سایر اتم‌ها در یک ملکول پیوند دارد.
ــ معماری که آخرین طرح خود را عملاً می‌بیند و در تصویر کامپیوتری آن عملاً از اتاقی به اتاق دیگر گام می‌نهد.



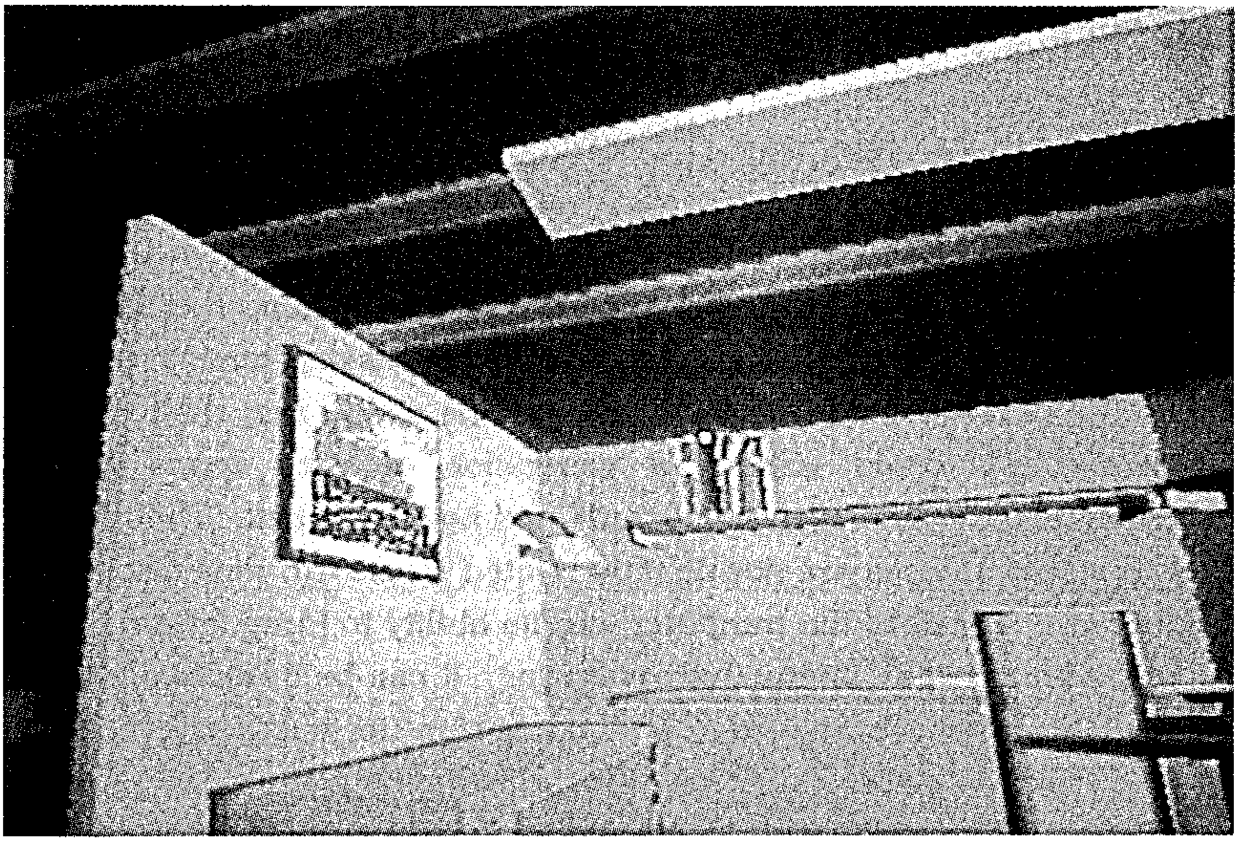
در اینجا یک فضانورد به زمین بازی راکت بال کامپیوتر وارد می‌شود و بازی را آغاز می‌کند. بازیکنان واقعاً حس می‌کنند که بر روی زمین بازی کامپیوتر بازی می‌کنند.

واقعیت مجازی، *فضای سیبرینتکی*، و *واقعیت مصنوعی*، چند عبارت وضع شده برای توصیف این شکل جدید خطاهای باصره‌اند. در محدودهٔ یک اتاق کوچک می‌توان لباس کامپیوتری[1] پوشید و ناگهان خود را در حال قدم زدن در روستایی انگلیسی

---

۱. لباس کامپیوتری به اشکال مختلفی درمی‌آید که می‌تواند دربرگیرندهٔ چشم ویژه، دستکش‌های داده‌ها، و لباس چسبان (بادی) داده‌ها باشد.

یافت، پیشرفت طرحی را در هزاران کیلومتر دورتر مورد بازدید قرار داد و با زنبور عسل شدن یاد گرفت که زنبوران عسل چگونه گرده جمع می‌کنند. کاربردهای این



اتاق نشیمن ساختهٔ کامپیوتر در انتظار دیدارکنندهٔ واقعیت مجازی است.

نوع فناوری حیرت‌آور است. فضای شبکه‌ای هنوز هم در مراحل ابتدایی خود است و هنوز باید بسیار کامل‌تر و اصلاح شود.[۱] خوشبختانه از تحول و محبوبیت آن همچون ابزاری برای کنترل ذهن استفاده نمی‌شود، بلکه در خدمت گسترش ذهن است. دانشمندان حوزهٔ کامپیوتر و ریاضیدانان زمینه‌های جدیدی را به ویژه با استفاده از هندسهٔ برخالی در آفرینش این جلوه‌های ویژه می‌گشایند. شاید واقعیت مشابه سازی شده در *سفینهٔ پیشتازان فضا ــ نسل بعدی* چندان دور از ذهن نباشد.

۱. چند دانشگاه و شرکت که به این جهان‌های مصنوعی پرداخته‌اند عبارتند از: دانشگاه کارولینای شمالی؛ شرکت اتودسک در ساسالیتو کالیفرنیا؛ HITL در دانشگاه واشینگتن؛ مرکز پژوهش VLP در شهر ردوود کالیفرنیا؛ دانشگاه کارنگی ملون. موزهٔ ایالتی تاریخ طبیعی کانکتی‌کات تاسیساتی دارد که میرون کروگر به نام ویدیوپلیس ساخته است. در UC، ASUC برکلی، افراد می‌توانند *کابوس داکتیل*، یک بازی واقعیت مجازی بازی کنند.

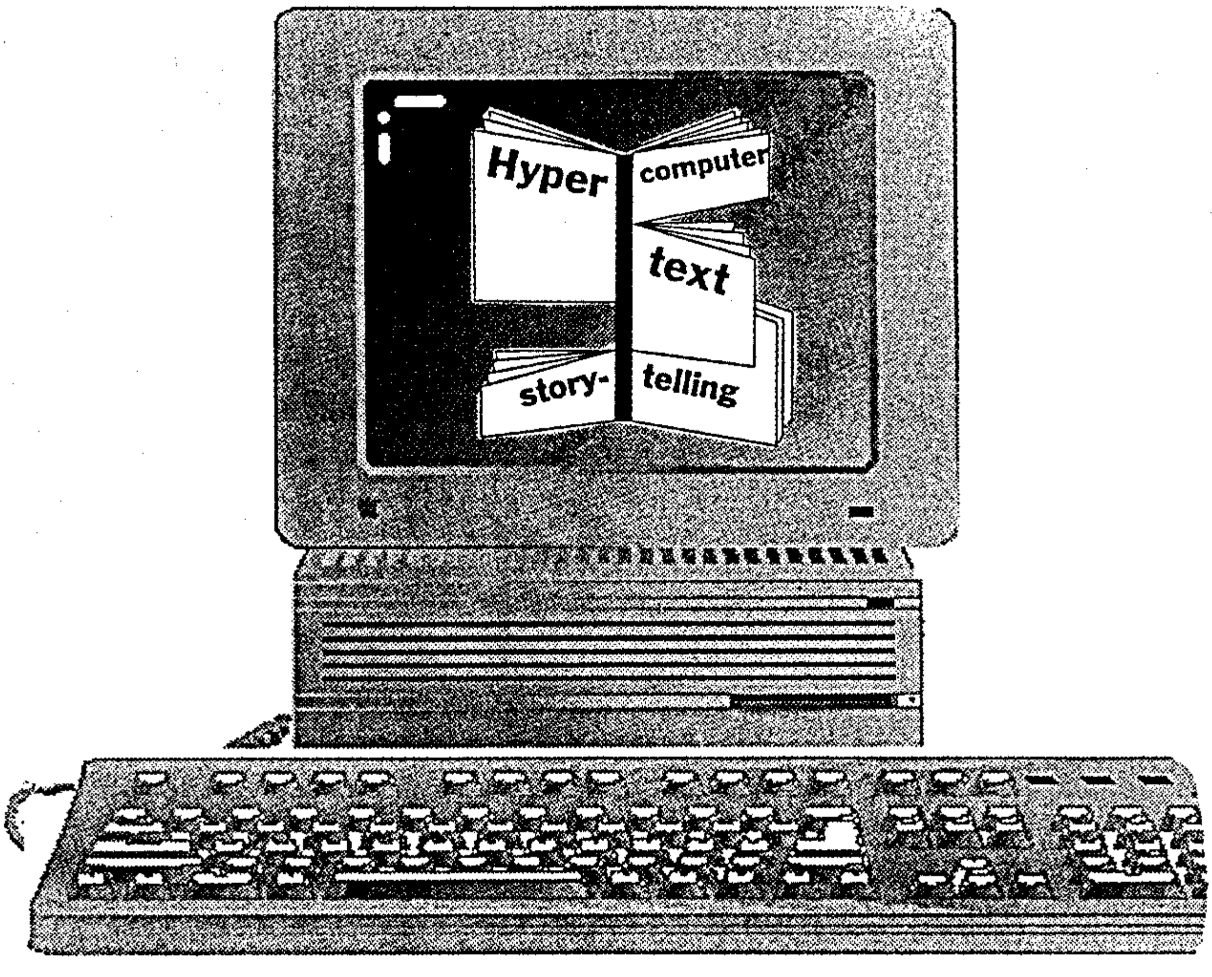
ابر متن

تفکرات مربوط به بعد چهارم هنگامی در قرن نوزدهم پدید آمدند که آگوست موبیوس توجه کرد که سایهٔ دست راست را می‌توان به راحتی با حرکت دست در بعد سوم به سایه دست چپ تبدیل کرد. چندان به این نکته توجه نمی‌شود که ابرمکعب[1] به پدید آمدن کلماتی مانند ابرفضا[2]، ابرموجود[3]، هایپرکارد[4] و اینک ابر متن بینجامد. گرچه دو واژهٔ آخر ارتباط مستقیمی با بعد چهارم ندارند، با کامپیوتر و قابلیت آن در جهش از اندیشه‌ای به اندیشه‌ای دیگر ــ محاسبات برهمکنشی (دوسویه) ــ ارتباط دارند. می‌توان آن را مشابه با حرکت از یک بعد به بعد دیگری در نظر گرفت. شرکت کنندگان تصمیم می‌گیرند به کجا بروند و کامپیوتر آنها را به آنجا می‌برد. مثلاً، با محاسبات برهم‌کنشی، پس از انتخاب آنچه می‌خواهید انجام دهید، بخوانید و ببینید، کامپیوتر فوراً اطلاعات مربوط به آن را که ممکن است دربردارندهٔ صوت، گرافیک یا فیلم باشد برایتان می‌آورد. فرض کنید بخواهید اطلاعاتی در مورد اواخر جنگ دوم جهانی به دست آورید. کامپیوتر می‌تواند اطلاعات تاریخی، نقشه‌های نشان‌دهندهٔ مداخلهٔ نیروها و چگونگی ادامهٔ آن، فیلم‌های خبری آن زمان، و حتی آوازهای محبوب آن دوره را عرضه کند. شما با کلیک کردن انتخابتان به خواستهٔ خود می‌رسید.

ابرمتن با ایجاد امکان شرکت فعال‌تر، از محاسبات برهم‌کنشی استفاده می‌کند. ابرمتن به شیوهٔ مرسوم از ابتدا تا انتها خوانده نمی‌شود. به جای آن، کامپیوتر نقش ابزاری

۱. ابرمکعب نامی است که بر مکعب بعد چهارمی نهاده شده است.
۲. فضای دارای بیش از سه بعد.
۳. موجود چندبعدی (بیش از سه بعدی).
٤. هایپرکارد (Hypercard) دو معنی دارد. می‌تواند نامی تجاری برای برنامه‌ای کامپیوتری باشد، که امکان ایجاد مقدار زیادی کارت را با اطلاعاتی در شکل‌های مختلف (از جمله تصویر، فیلم، صدا) به آسانی با کلیک کردن بر روی یک موضوع ویژه فراهم می‌آورد. ابرکارت می‌تواند کارتی (دو بعدی) نیز باشد که بریده شده و به شکل سه بعدی قرار گرفته باشد، مانند کتابی که بر روی یک صفحهٔ کامپیوتر نشان داده شود. چشم‌پوشی از ایجاد یک ابرکارت از کارت فایل ۵ × ۳ دشوار است.

برای یافتن سایر پیامدهای ممکن را دارد، و بدین‌وسیله داستان جدیدی آغاز می‌شود. خواننده با ابرمتن به کمک کلیک کردن طرح‌های برجسته شده‌ای که در داستانی به نام وب (شبکه) در ارتباط متقابل قرار دارند، و در برنامهٔ اصلی تنیده شده‌اند قصهٔ خود را می‌سازد. در هنگام خواندن داستان کامپیوتر، می‌توانید مسیری را که داستان به سوی آن حرکت می‌کند انتخاب کنید. شما خط داستانی را نمی‌سازید، بلکه گزینه‌های آن را انتخاب می‌کنید، و می‌بینید چگونه پیش می‌روند. یک کلیک بر روی کلمه یا تصویری کلیدی، شما را به جایی جدید، اندیشه‌ای نو یا حتی سناریوی جدید می‌برد. شما می‌توانید ببینید که نویسنده چگونه در مسیرهای انتخابی شما داستان را پیش می‌برد. واکنش‌ها به ادبیات تعاملی دوسویه متفاوت است. عده‌ای آن را شگفتی بدیعی می‌بینند که در نظر بسیار بیش از عمل جالب است، این ادبیات در مراحل آغازین خود قرار دارد، و یک بار که خواننده داستان را «تغییر دهد» ممکن نیست ناتمام بماند. علاوه بر



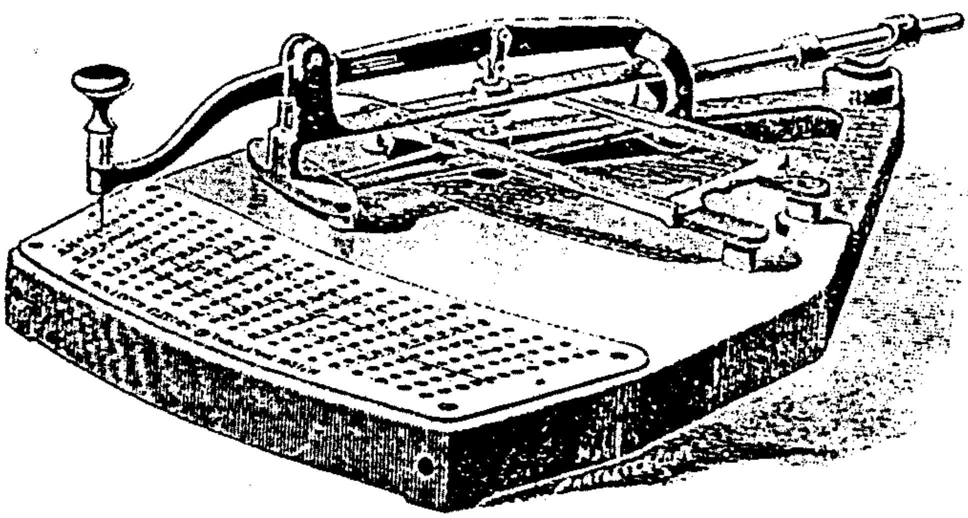
آن، برای تازه کارها ممکن است دشوار باشد که بگویند داستان کی تمام می‌شود، زیرا ممکن است کلمات یا عبارات کلیدی در سرتاسر شبکه باشند که به خواننده امکان دهند دایماً به موضوع جدیدی انتقال یابد و شاید به اشتباه دور یک دایره بچرخد. داستان‌های شبکه ممکن است برای خوانندگان بی‌تجربهٔ ابرمتن برای جهت یابی در این شکل جدید خواندن، به زمان یا تجربه نیاز داشته باشند. برنامه نویسی و روش‌های جدید اصلاح شده برای این رسانهٔ جدید نیاز به تجدیدنظر دارند تا بهینه عمل کنند و نیز در صورتی که خواننده نیاز به آزادی بدون محدودیت برای کشف توانایی‌های خود داشته باشد. همان‌طور که جورج پی. لاندو استاد دانشگاه براون انگلستان گفته است «ممکن است این امکانی برای موج بعدی داستان‌گویی باشد ... پرسش بعدی این است که آیا این آشوب و هرج و موج کامل است، یا خوانش جدیدی است که از خواننده نوعی آفرینشگر می‌سازد؟»[1] بسیاری احساس می‌کنند که ابرمتن شیوهٔ جدیدی از نوشتن را ارائه می‌کند، و آن را نوعی سبک هنری می‌شمارند. تاکنون بیشتر به خواننده‌ای توجه شده است که به شکل‌گیری جهت داستان کمک کند. ولی توجه کنید یک چنین داستانی چه چیز نصیب نویسنده‌اش می‌کند؟ نویسنده پی‌رنگ را نمی‌سازد، بلکه به جای آن خانواده‌ای از پی‌رنگ‌ها و پیامدهای مربوط به آنها ــ به نام شبکه (وب) را پدید می‌آورد. شبکه می‌تواند مانند محاسبهٔ برهم‌کنشی با تصاویر کامپیوتری، صدا و فیلم کامل‌تر شود. داوری در مورد ادبیات برهم‌کنشی (دوسویه) هنوز بسیار زود است. به ویژه به این دلیل که داستان‌های ابرمتن تازه منتشر شده، و بر روی گزارش‌های الکترونیکی قرار گرفته‌اند، اما پی‌گیری نتایج آن جالب است. آیا تب آن بالا خواهدگرفت؟ یک مسأله قطعی است، ابرمتن اگر به خاطر کامپیوترهای جدید نبود وجود نمی‌داشت.

---

۱. *راه تازه‌ای برای داستانگویی*، سانفرانسیسکو، آوریل ۱۹۹۳.

فرمای کوچک

اغلب احساس می‌شود افراد غیرمتخصص تصور می‌کنند کامپیوتر به وضعیت نهایی خود رسیده است، اما دانشمندان کامپیوتر، ریاضیدانان و دانشمندان می‌دانند که چنین نیست. مونتی دنو، جورج و دیوید چودنفسکی و سعید. ج. یونس در راستای کارهای چارلز بابیج فرمای کوچکی ساخته‌اند که کامپیوتری برای انجام مسایل بسیار بزرگ، بدون خطاهای مرتبط با کامپیوترهای معمولی باشد. این کامپیوتر می‌تواند با استفاده از نظریهٔ اعداد ــ به ویژه حساب هم‌نشستی و اعداد فرما ــ عملاً محاسبات را بدون خطا انجام دهد. فرمای



صفحه کلید سوراخکاری جدول‌بندی ۱۸۹۰ همیلتون هولویت که در روند آمارگیری در ایالات متحده انقلابی به وجود آورد.

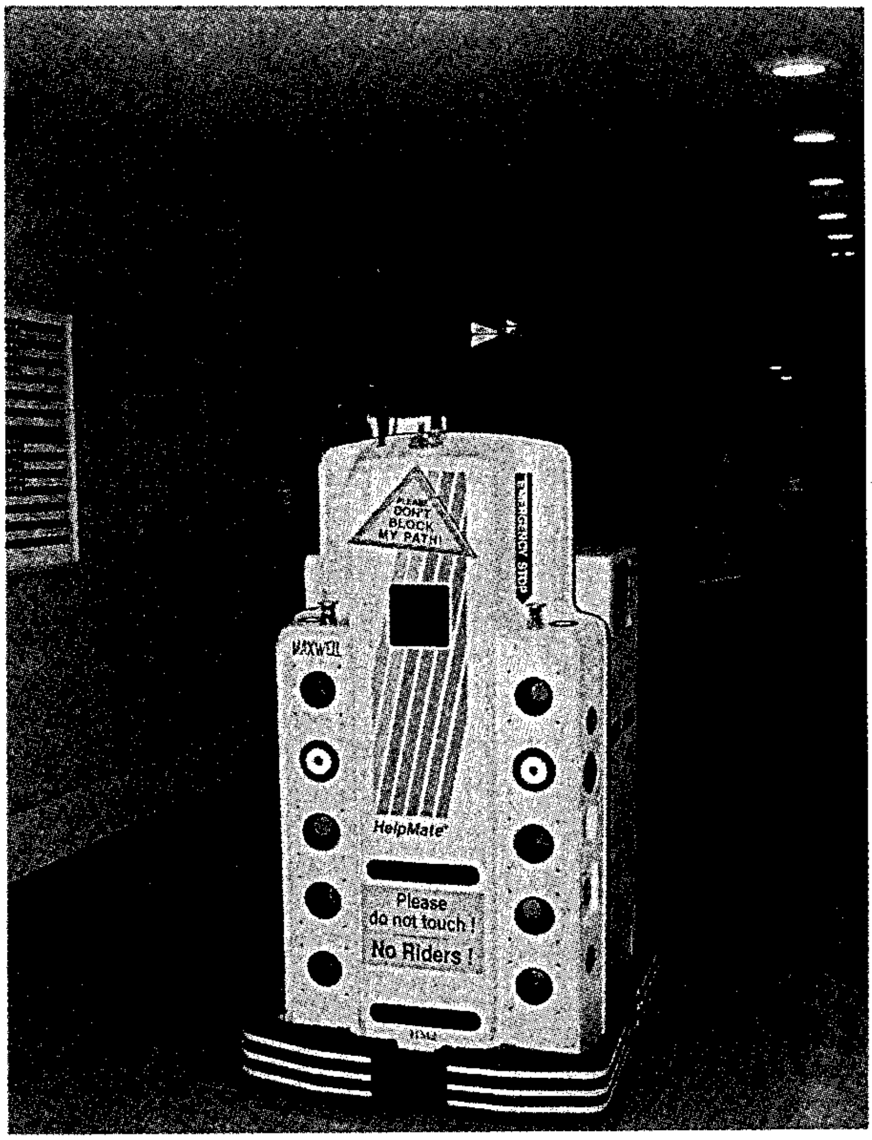
کوچک در برنامه‌ای به نام «یونس» نوشته شده است. این برنامه با استفاده از اعداد فرما در نقش مقسوم علیه می‌تواند به بعضی از محاسبات سرعت دهد و از اعداد حقیقی استفاده نکند. در حال حاضر فرمای کوچک نوعی کامپیوتر است اما پدید آورندگان آن احساس می‌کنند می‌تواند به شکلی دلخواه برای فرایندهای تصویرسازی و علایم رقمی درآید و مسایل گوناگونی را از هیدرودینامیک، شیمی و آئرودینامیک که به معادلات دیفرانسیل نیاز دارند حل کند. علاوه بر آن امیدوارند که مدلی برای بهتر کردن عملکرد ابرکامپیوترها باشد.

کامپیوتر و زندگی مصنوعی

با دگرگونی در فناوری با چنین سرعتی و با اندیشه‌ها و کاربردهای جدیدی که یک شبه سربرمی‌آورند، به نظر می‌رسد که کامپیوتر چه بدان توجه داشته باشیم، چه نداشته باشیم، بر تمامی جنبه‌های زندگی ما اثر می‌گذارد. اینک بسیاری از آزمایشگاه‌های علمی دارای کامپیوترهای جدید با استفاده از مدل سازی و قابلیت‌های مشابه سازی آنند.

زندگی مصنوعی، راهی برای مشابه سازی اشکال زنده‌نما، رفتارها، تولید مثل و تکامل آنهاست. یکی از نمونه‌های استفاده از آن خفاش‌های کامپیوتر ساختهٔ زنده‌نما در *بازگشت بتمن* است. چگونه این کار انجام شده است؟ عادت‌های یک موجود وحشی، مانند خفاش، با استفاده از منطق، ریاضی و کامپیوتر در مرحله‌های بنیادی منطقی تحلیل شده است. این مراحل به مشابه سازی کامپیوتری تبدیل شده است که حرکت و عادت‌های موجود زنده را ثبت می‌کند. این کاربردها گسترهٔ وسیعی دارند. یکی از نمونه‌های آن پژوهش در بیماری‌ها در بنگاه پژوهشی اسکریپ است. در این بنگاه هرالد جویس از شبیه‌سازی کامپیوتری استفاده و روشی آزمایشگاهی ابداع می‌کند که در آن آنزیم‌ها براساس چگونگی برش آنها در رمز ژنتیکی ویروس ایدز رشد می‌یابند. این آنزیم‌ها با آزمون و خطا درمان را کشف می‌کنند. کامپیوتر می‌تواند برنامهٔ خود را برپایهٔ چگونگی حل بعضی از مسایل پدید آورد. برنامه‌های ساخته شده با این روش شامل هدایت وسایل نقلیه، پیش‌بینی پیامدهای اقتصادی و پیش‌بینی حرکت سیارات است. جان فون نویمان پیشگام کامپیوتر، معتقد بود که این ماشین‌ها نه تنها باید بتوانند اطلاعات را پردازش کنند، بلکه خود را نیز باز تولید کنند. بعضی از پشتیابانان زندگی مصنوعی احساس می‌کنند که اساس زندگی، مجموعه‌ای از قواعد هدایت کنندهٔ تعامل

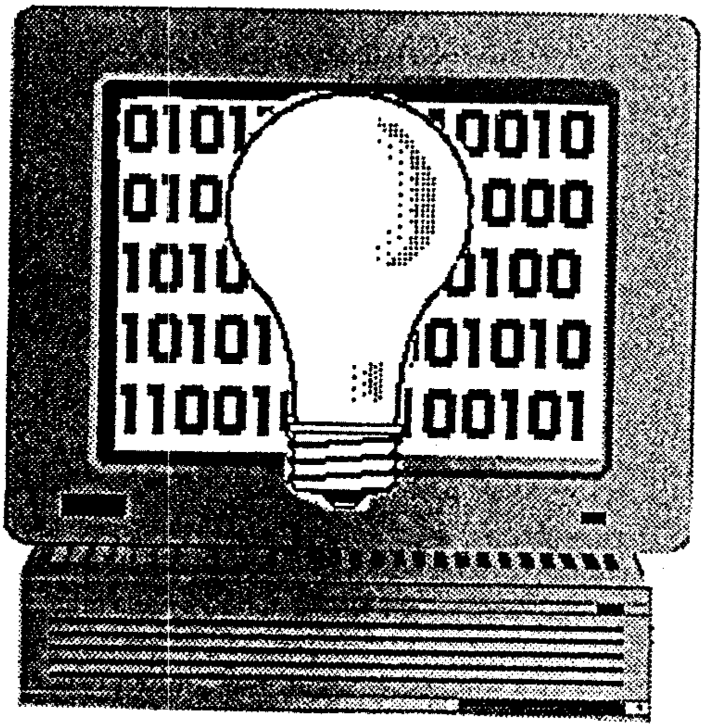
سلول‌ها، اتم‌ها و غیره است. پیوند نزدیک بین زندگی مصنوعی و ریاضیات برخالی نیز روبه گسترش است. مثلاً مشابه سازی‌های کامپیوتری برای سلول‌های گیاهان انجام شده است که براساس مجموعه‌ای از دستورالعمل‌ها رشد می‌کنند و تقسیم می‌شوند. تشکیل سلول یکی از آنها تقریباً با سرخس یکسان است. با بررسی چگونگی جهت‌یابی حشرات مختلفی مانند مورچه‌ها، روبات‌های مشابه‌سازی شده‌ای ساخته شده‌اند. این روبات‌ها یاد گرفته‌اند چگونه حرکت کنند و در صورت برخورد به مانع تغییر جهت دهند. این روبات‌ها بهتر از روبات‌های بزرگ‌تر متداول در هنگام یافتن راه خود در میان موانع عمل می‌کنند. در واقع *Atitila* ساخت آزمایشگاه روبات ام. آی. تی که ۱/۶ کیلوگرم وزن دارد در اکتشافات مریخ مورد استفاده قرار می‌گیرد.



روبات مورد استفاده در بیمارستان دانشگاه استانفورد برای عقب و جلو بردن.

کامپیوتر نوری

کامپیوترهای امروزی با برق کار می‌کنند. اما تعدادی از دانشمندان در زمینهٔ ساخت انواع جدید کامپیوتر با استفاده از فیبر نوری، لیزر و کلیدهایی کار می‌کنند که پردازش اطلاعات و انجام محاسبات را به جای برق از طریق نور[1] انجام می‌دهند. کامپیوترهای نوری برخلاف کامپیوترهای الکترونیکی که در آن‌ها داده‌ها و برنامه‌ها بر روی تراشه‌های حافظه، دیسک‌ران، یا دیسک ذخیره می‌شوند، داده‌ها را به شکل تپ‌های نور در رشته‌های نوری به جریان می‌اندازند. هری اف. جردن از مرکز سامانه‌های محاسبهٔ نوری ـ الکترونیکی دانشگاه کلرادو در بودلر می‌گوید «برای نخستین بار، کامپیوتری داریم که در آن داده‌ها و برنامه‌ها به شکل نور همیشه در حرکتند و نیاز به حافظهٔ ایستا را منتفی می‌سازند.»



بیش از پنج کیلومتر رشتهٔ نوری نقش حافظهٔ اصلی کامپیوتر را دارد، که در آن دستورالعمل‌ها و داده‌ها در تپ‌های نوری رمزگذاری می‌شوند و رشتهٔ نوری را دور می‌زنند. جردن و وینسنت پی. هورینگ کار پیاده‌سازی آن را در دانشگاه کلرادو هدایت می‌کنند. کامپیوتری که آنان ساخته‌اند «این اصل را که تمام اجزای یک ماشین همه کاره می‌تواند نوری باشد به نمایش می‌گذارد.»[2]

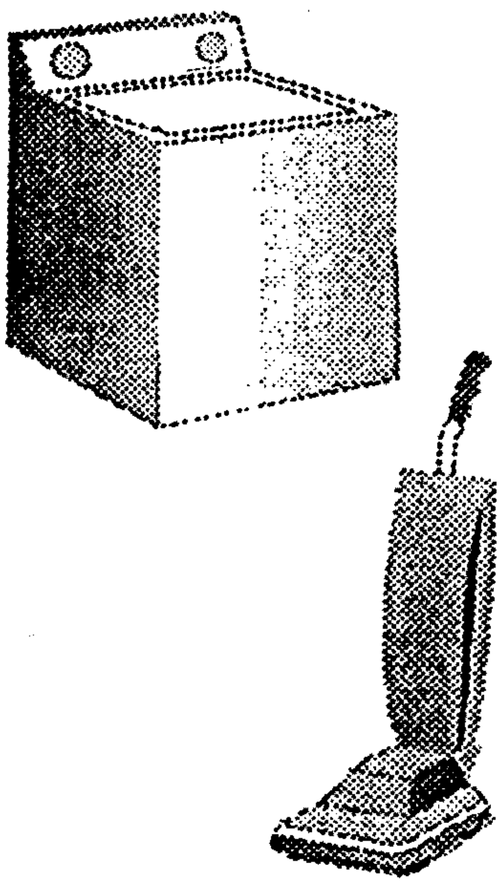
۱. تنها در جایی از نور استفاده نمی‌شود که کلیدهای نوری به‌کار می‌افتند و تپ‌های نوری برای لحظه‌ای به جریان برق تبدیل می‌شوند.

۲. هری جردن. *اخبار علمی*. ۲۳ ژانویه ۱۹۹۳.

منطق فازی و کامپیوتر

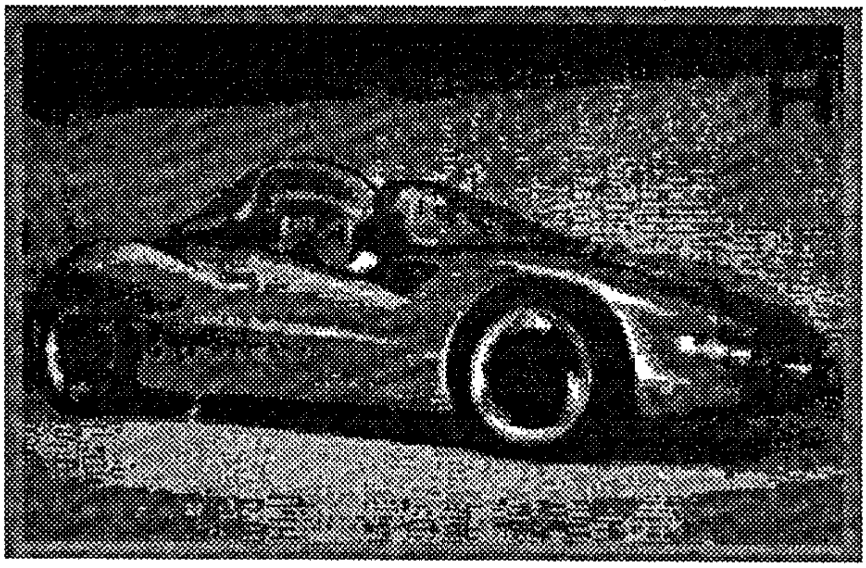
فرض کنید قطعه چوبی را بردارم و در بخاری هیزمی خود بیندازم. فوراً شروع به سوختن می‌کند. دقیقاً چه وقت دیگر یک تکه چوب به شمار نمی‌آید؟ یک نفر ممکن است بگوید درست پس از آنکه آتش می‌گیرد. دیگری ممکن است احساس کند پس از آن‌که نیمی از آن سوخت، و کس دیگری می‌تواند اعتقاد داشته باشد که تا آخرین بقایایش هنوز یک تکه چوب است. هر قدر هم یک فرد منطقی بکوشد به این پرسش پاسخ دهد، تعریف قاطعی برای آن وجود ندارد. پرسش درست یا نادرست وجود ندارد. راهی برای نشان دادن پاسخ کمیت‌پذیر وجود ندارد. پاسخ می‌تواند کمتر یا بیشتر باشد. قرار ملاقات رأس ساعت ۵ بعدازظهر برای همه یک معنی دارد. اما بعدازظهر برای یک نفر ساعت سه و سی دقیقه و برای دیگری پنج و سی دقیقه است. در واقع زمان‌های احتمالی زیادی وجود دارد که به شخص مورد سؤال بستگی پیدا می‌کند، و در بسیاری از مسایل در زندگی این مطلب صادق است، زیرا این ماهیت ذهنی زندگی و جهان است. منطق درست و نادرست؛ آری یا نه، نمی‌تواند به این گونه موقعیت‌ها یا

منطق فازی می‌تواند در ـــ
- *ماشین لباسشویی شما باشد، اگر ماشین شما بهترین چرخه از سطح آب ورودی، مقدار، جنس، کثیف بودن و میزان لکه‌ها را تعیین کند، پس از یک چرخهٔ شستشو، اگر آب به اندازهٔ کافی تمیز نباشد ماشین چرخه را تکرار می‌کند.*
- *جاروبرقی شما باشد، اگر بتواند مکش را به طور خودکار برپایهٔ اطلاعات به دست آمده از حسگرهای فروسرخ تنظیم کند.*



وضعیت دگرگون شوندهٔ چیزهای روی زمین و در جهان بپردازد. این مسایلی است که منطق فازی با آن سروکار دارد.

منطق «فازی» راه جدید نگاه کردن به مسایل و تحلیل جهان است. نام منطق فازی را لطفی‌زاده استاد برکلی در سال‌های ۱۹۶۰ وضع کرده است، اما برای تولد این منطق جدید احتمالاً پارادوکس‌ها را باید مسئول دانست. پارادوکس‌ها در طی قرن‌ها اشکالاتی را در منطق سنتی پدید آورده‌اند. از منطق درست و نادرست نمی‌توان در توصیف پارادوکس‌هایی مانند *پارادوکس تودهٔ شن* اوبلیدس[1] و *پارادوکس عضویت در گروه* برتراند راسل استفاده کرد[2]. این پارادوکس‌ها با بسیاری از موقعیت‌های زندگی



میتسوبیشی HSR-IV برای جلوگیری از تصادف با استفاده از سامانهٔ تداخل فازی اعصاب طراحی شده است.

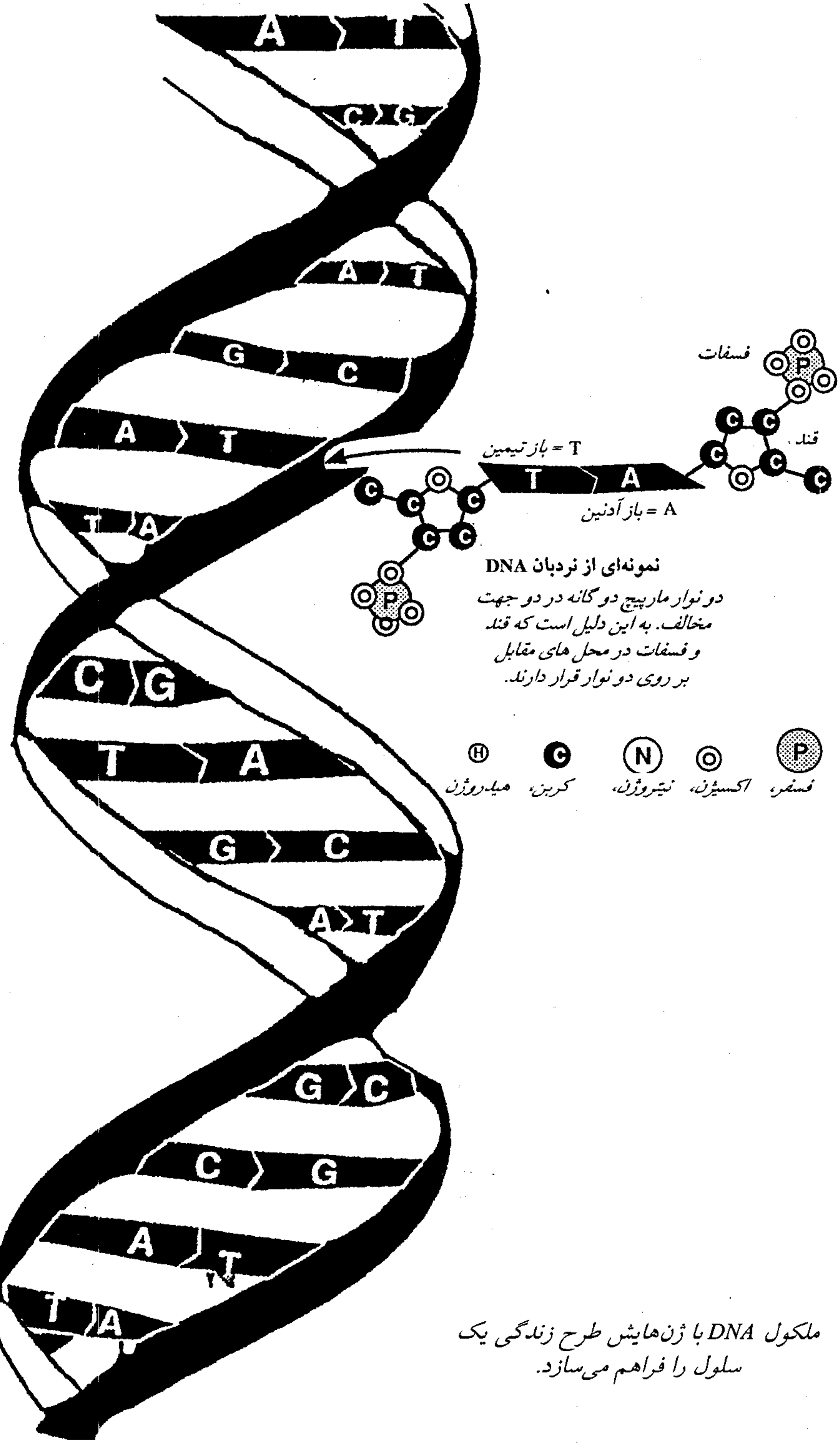
---

۱. اوبلیدس فیلسوف یونانی قرن چهارم بیش از میلاد به این مطلب پرداخته است که چند دانهٔ شن یک توده را می‌سازند.

۲. پارادوکس راسل ـ پارادوکس برتراند راسل (۱۹۷۰–۱۸۷۲) به اندیشهٔ عضویت در یک مجموعه می‌پردازد. مجموعه می‌تواند عضوی از خود باشد یا نباشد. مجموعه‌ای را که خود عضوی از آن نباشد منتظم می‌نامند. مثلاً مجموعهٔ افراد عضو خود نیست، چون شخص نیست. مجموعه‌ای که خودش عضو خودش باشد نامنتظم می‌نامند. مجموعه‌ای از مجموعه‌هایی که بیش از پنج عضو دارند نمونه‌ای از آن است. آیا مجموعه‌ای از تمام مجموعه‌های منتظم خود منتظم است یا نامنتظم؟ اگر منتظم باشد، نمی‌تواند عضو خودش باشد. اما این مجموعهٔ تمام مجموعه‌های منتظم، یعنی خود آن است. اگر شامل خودش هم باشد، نامنتظم است. اگر نامنتظم باشد، خودش عضو خودش است. اما این مجموعه فقط باید دربرگیرندهٔ مجموعه‌های منتظم باشد.

واقعی همراهند که نمی‌توان به آنها پاسخ سادهٔ آری یا نه داد. منطق سنتی برای تغییرات تدریجی موقعیت‌ها جایی ندارد. گرچه سرچشمه‌های منطق فازی در ایالات متحده بوده است فیلسوفان و دانشمندان شرقی از آن استقبال کرده‌اند. درست همان‌طور که شکل‌های ریاضی دقیقاً اشیاء جهان ما را توصیف نمی‌کنند، منطق سنتی نیز نمی‌تواند به‌طور کامل بر جهان واقعی و موقعیت‌های جهان واقعی اعمال شود. منطق سنتی و برنامه‌ریزی کامپیوتری بر گزاره‌های درست یا نادرست («روشن» یا «خاموش» برقی ــ «۱»، و «صفر» در دستگاه دودویی) استوارند. منطق فازی باید برای انسانی کردن کامپیوتر به صحنه بیاید. منطق فازی می‌کوشد تا از کار مغز انسان تقلید کند. به عبارت دیگر، می‌کوشد تا هوش مصنوعی را به هوش واقعی تبدیل کند. شرکت‌های ژاپنی و کره‌ای در راه نوآوری‌هایی که از منطق فازی استفاده می‌کنند پیشتازند. آنان از جمله در کار ساختن کامپیوترها، دستگاه‌های تهویه، دوربین‌ها، ماشین‌های ظرفشویی، قطعات خودرو، تلویزیون و ماشین‌های لباسشویی هستند که با فناوری منطق فازی وضعیت بهتری پیدا کرده‌اند. در نمایشگاه موتور توکیو در ۱۹۹۳، کامپیوتر مورد استفاده در نمونهٔ اولیه HIR-IV میتسوبیشی، از منطق فازی در تقلید پردازش اطلاعات در مغز راننده سود می‌برد. این کامپیوتر عادات معمول رانندگی را بررسی و سپس واکنش به موقعیت‌های گوناگونی را که ممکن است پیش آید انتخاب می‌کند. مثلاً اگر رادار کار گذاشته شده مانعی را تشخیص دهد، سامانهٔ منطق فازی تصمیم می‌گیرد که راننده (برپایهٔ مدل‌های رانندگی در گذشته) از آن آگاه شود یا نشود. اگر راننده آن گونه که پیش‌بینی شده است واکنش نشان ندهد، سامانه می‌تواند به‌طور خودکار برای جلوگیری از تصادف به ترمزها فرمان دهد.

تاکنون بسیاری از دانشمندان غربی در مورد استفاده از منطق فازی سکوت کرده‌اند، و احساس می‌کنند که یکپارچگی علوم را مورد تهدید قرار می‌دهد. بسیاری دیگر احساس می‌کنند که آن را ارتقا می‌دهد و امکانات برنامه‌ریزی کامپیوتری را با در نظر گرفتن دامنهٔ گسترده‌تری از متغیرها در حل مسایل ویژه یا طراحی یک محصول خاص گسترش می‌دهد. در گذشته بنیاد علمی ملی پیشنهادهایی را که با منطق فازی سروکار داشت رد می‌کرد اما شاید طرح‌های آینده را در پرتو دیگری بررسی کند، به ویژه به این دلیل که بیشتر شرکت‌های آمریکایی مانند فورد، آسانسور اوتیس، برق و گاز پاسیفیک، موتورولا و جنرال الکتریک به کاربردهای آن علاقه نشان داده‌اند.



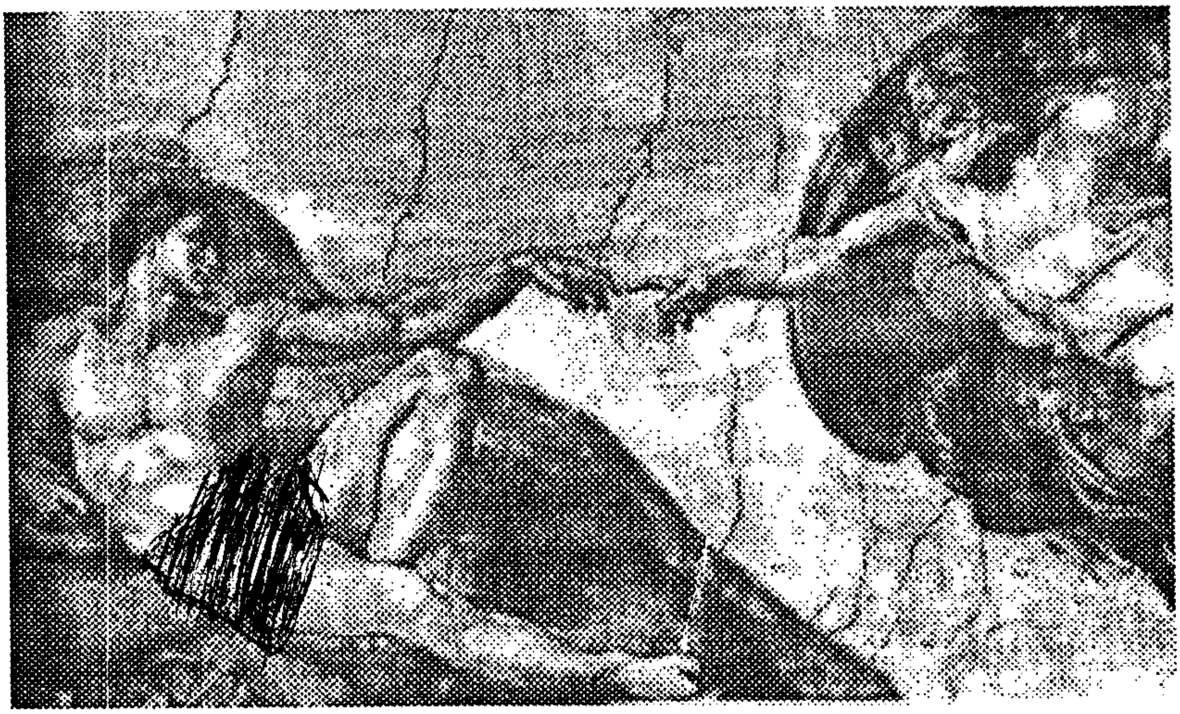
ملکول DNA با ژن‌هایش طرح زندگی یک سلول را فراهم می‌سازد.

ریاضیات و رازهای زندگی

ریاضی کردن بدن انسان
مدل‌های ریاضی و شیمی
ریاضیات و مهندسی ژنتیک
موسیقی بدن
رازهای انسان دوران نوزایی
گره‌هایی در رازهای زندگی

تنها هنگامی مـی‌تـوانیم زنـدگی و زیبـایی را موجـوداتی «کاملاً ریاضی» بـدانیم کـه خـود ریاضـیدانی بـا قـابلیتی نامحدود باشیم و بتوانیم ویژگی‌های آنها را در ریاضـیاتی چنان پیچیده بیان کنیم که تاکنون آن را اختراع نکرده‌ایم.
ـ تئودور آندرا کوک (۱۹۲۸ـ ۱۸۶۷)

جهان علم دایماً از اندیشه‌های ریاضی برای گشودن رازهای حیات استفاده می‌کنـد. در این فصل چند حوزهٔ معرفی می‌شود که در آنها از ریاضیات در جستجوی پاسـخ‌هـایی برای پرسش‌هایی استفاده می‌شود. مانند این‌که بـدن، چگونـه کـار مـی‌کنـد و حیـات چگونه آغاز شده است. دانشی که با اشیای بی‌جان و موضوع تخیـل مـا سـروکار دارد بتواند به این پرسش‌ها پاسخ دهد، خود یک راز است.



***آفرینش آدم** اثر میکل آنژ، کلیسای سیستین، واتیکان، ایتالیا.*

ریاضی کردن بدن انسان

فشار خون:	۱۲۰/۸۰
کلسترول:	۱۸۰
LDL/HDL:	۱۷۹/٤۷ (نسبت لیپوپروتئین رقیق به غلیظ)
تری گلیسریدها:	۱۸۹
گلوکز:	۸۰
دمای بدن:	37°c

در پزشکی امروز، ما در نقش بیمار با اعداد و نسبت‌هایی بمباران می‌شویم که تندرستی و چگونگی عملکرد بدن ما را تحلیل می‌کنند. پزشکان می‌کوشند دامنهٔ طبیعی بودن این اعداد را مشخص کنند. ریاضیات و اعداد حاکم و فراگیرند. در واقع، در بدن ما، شبکه‌های دستگاه قلب و عروق، تپ‌های الکتریکی که بدن ما برای آغاز حرکت از آنها استفاده می‌کند، راه‌های برقراری ارتباط سلول‌ها، طرح استخوان‌ها، ساخت ملکولی ژن‌ها ــ همه دارای عناصری ریاضی‌اند. در نتیجه در تلاش برای کمّی کردن کارکردهای بدن انسان، علم و پزشکی به اعداد و سایر مفاهیم ریاضی متوسل شده است. مثلاً، ابزارهایی برای تبدیل تپ‌های الکتریکی بدن به منحنی‌های سینوسی ساخته شده‌اند که بدین وسیله مقایسهٔ بروندادها (خروجی) امکان‌پذیر شده است. خواندن نوار قلبی، ثبت فعالیت‌های الکتریکی عضله‌ها، سونوگرافی ــ به شکل منحنی، دامنه و اختلاف فاز را نشان می‌دهند. تمام اینها اطلاعاتی را به تکنسین‌های آموزش دیده می‌دهند. اعداد، نسبت‌ها، و نمودارها ویژگی‌هایی ریاضی‌اند که با بدن ما تطبیق داده شده‌اند. اجازه دهید مفاهیم ریاضی و چگونگی پیوند آنها با بدن را بررسی کنیم.

اگر فکر می‌کنید رمزگشایی از رمزها و هیروگلیف‌های مایایی هیجان‌انگیز و چالش برانگیزند، تصورش را بکنید که توانایی در گشایش رمزهای ملکولی مورد استفادهٔ بدن برای برقراری ارتباط چگونه می‌تواند باشد. علم اینک کشف کرده است که گلبول‌های سفید خون با مغز ارتباط دارند. ذهن و بدن از طریق واژگان زیست شیمیایی ارتباط

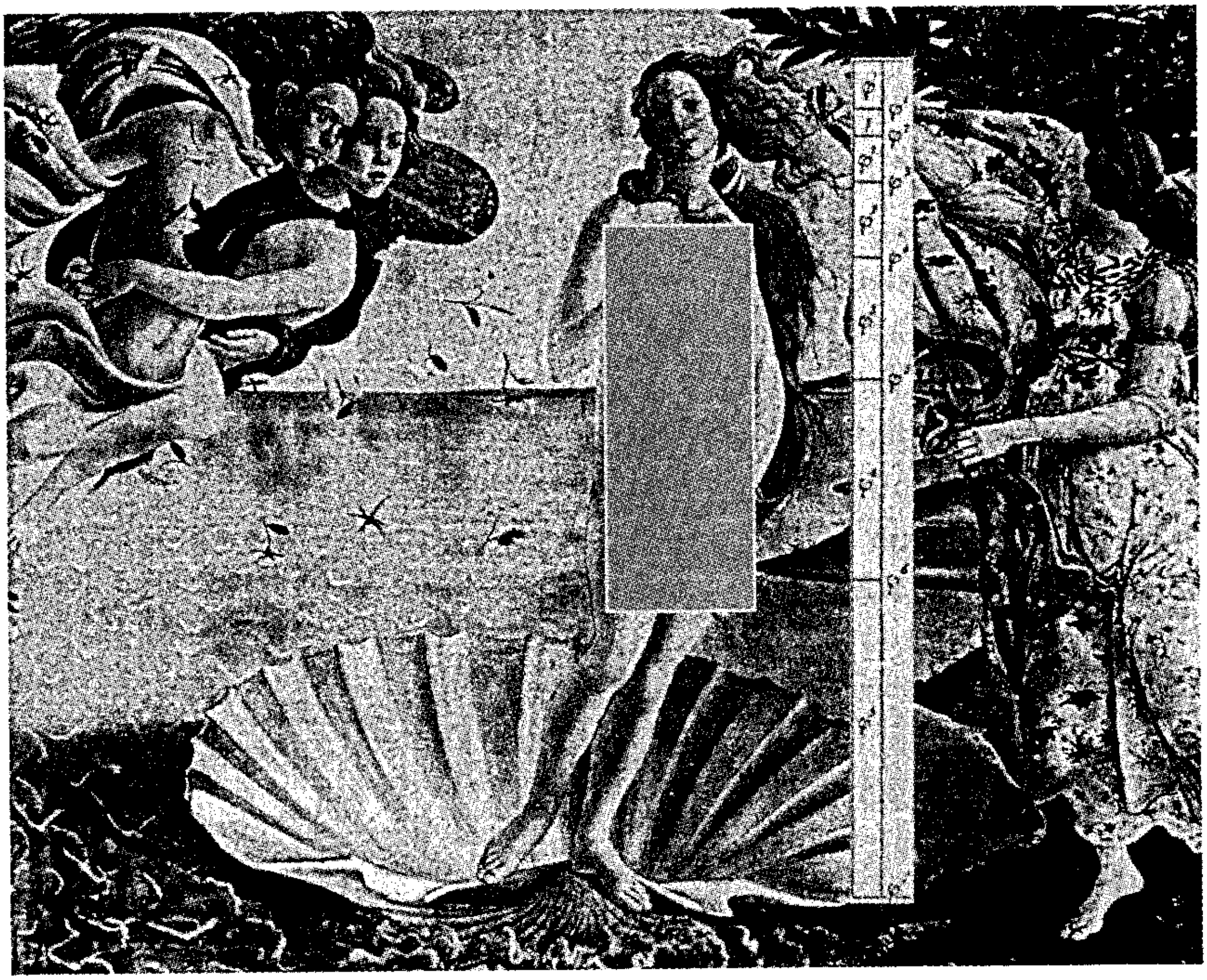
برقرار می‌کنند. رمزگشایی از این رمزهای بین سلولی اثری شگفت‌انگیز بر پزشکی دارد. درست همان طور که درک فزایندهٔ ما از رمز وراثتی بسیاری از رخدادها در حوزهٔ سلامت را آشکار می‌سازد. کشف مارپیچ دوگانه در DNA پدیدهٔ ریاضی دیگری بود. اما این مارپیچ تنها مارپیچ موجود در بدن نیست. مارپیچ همزاویه در بسیاری از حوزه‌های رشد وجود دارد ــ احتمالاً به دلیل آن‌که شکل آن با رشد کردن تغییر نمی‌کند. به مارپیچ همزاویه در الگوی رشد موهای سر، و استخوان‌های بدن خود، حلزون گوش داخلی، بندناف، و شاید حتی اثر انگشت خود نگاهی بیندازید.

فیزیک و ویژگی‌های فیزیکی بدن نیز به اندیشه‌های دیگر ریاضی می‌انجامد. بدن دارای تقارن است، که به آن توازن و مرکز گرانش می‌بخشد. همراه با قدرت توازن انحنای ستون فقرات در سلامت و قابلیت فیزیکی بدن در تحمل بار خود و برداشتن بارهای دیگر اهمیت زیادی دارند. هنرمندانی مانند لئوناردو داوینچی و آلبرشت دورر، کوشیده‌اند تا تطابق بدن با تناسب‌ها و اندازه‌های گوناگونی مانند نسبت طلایی را نشان دهند.

هر قدر هم شگفت‌انگیز به نظر رسد، نظریهٔ آشوب نیز جایگاه خود را در بدن انسان دارد. مثلاً، در حوزهٔ اختلالات در ضربان قلب نظریهٔ آشوب مشاهده می‌شود. بررسی تپش‌های قلب و آنچه موجب می‌شود قلب بعضی از افراد نامنظم بزند نشان می‌دهد که از مفاهیم آشوب پیروی می‌کند. علاوه بر آن، کارکردهای مغز و امواج مغزی و درمان اختلالات مغزی نیز با نظریهٔ آشوب ارتباط دارند.

با بررسی بدن در سطح ملکولی، به ارتباط‌هایی با ریاضیات پی‌می‌بریم. شکل‌های هندسی مانند چندوجهی‌ها و گنبدهای نیمکره‌ای[1] در انواع مختلف ویروس‌های مهاجم مشاهده می‌شوند. در ویروس ایدز (HTLV-1) تقارن بیست وجهی و ساختمان گنبد نیمکره‌ای یافت شده است. گره‌های موجود در پیکربندی‌های DNA دانشمندان را به استفاده از یافته‌های ریاضی دربارهٔ نظریهٔ گروه‌ها تا بررسی حلقه‌ها و گره‌های تشکیل یافته در رشته‌های DNA رهنمون شده است. یافته‌های نظریهٔ گره‌ها و اندیشه‌های هندسه‌های مختلف در بررسی مهندسی ژنتیک بسیار ارزشمند بوده است.

۱. به شکل ص ۲۵۶ مراجعه شود.

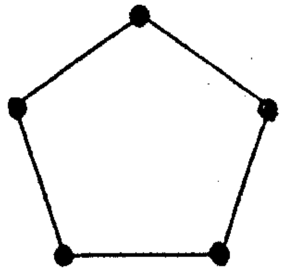


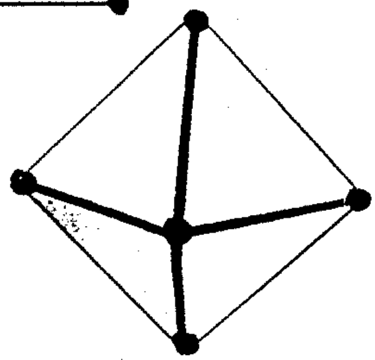
*تئودور کوک تحلیل خود از تابلوی **تولد ونوس** اثر ساندرو بوتیچلی را در کتابش با عنوان **منحنی‌های زندگی** منتشر کرده است. او می‌گوید «خط دربردارندهٔ این پیکره از فرق سر تا کف پا در ناف به نسبت‌های دقیقی تقسیم شده است که ... از نسبت طلایی (ϕ) به دست می‌آید... هفت ϕ متوالی در یک ترکیب‌بندی کامل مشاهده می‌شود.*

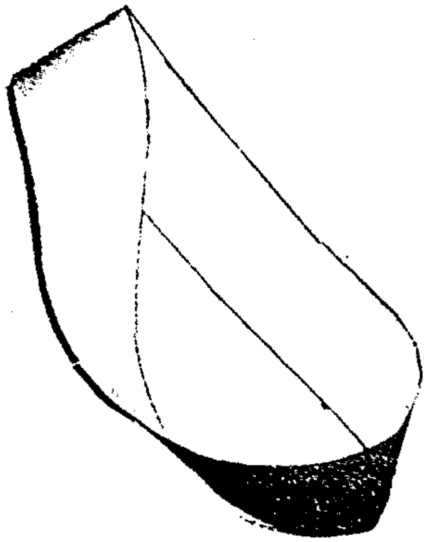
ترکیب پژوهش‌های علمی و ریاضیات برای کشف رازهای بدن انسان و تحلیل کارکردهای آن ضروری است.

مدل‌های ریاضی و شیمی

شکل‌های ریاضی در بسیاری از مواد شیمیایی که در طبیعت یافت می‌شود حضور دارند. با بررسی ساختار ملکولی اشیاء می‌توان پنج ضلعی‌ها را در دیوکسی ریبوز، چهاروجهی‌ها را در ملکول‌های سیلیکات‌ها و مارپیچ‌های دوگانه را در DNA، و چندوجهی‌ها را در بلورها و سایر ساخت‌های ملکولی یافت. تعجب‌آور نیست که شیمیدان‌ها در هنگام ساختن ماده‌ای جدید بر مدل‌های ریاضی متکی هستند. اتم‌های کربن به دلیل شیوهٔ پیوندشان، اجزای سازندهٔ مناسبی در زنجیره‌ها و حلقه‌ها یا شکل‌گیری به صورت ساختارهای ملکولی سه بعدی‌اند. مثلاً، در سال ۱۹۶۳ لئوپاکت، شیمیدانی از دانشگاه ایالتی اوهایو ملکولی ساخت شبیه به دوازده وجهی دارای ۲۰ اتم کربن، که بیست اتم هیدروژن آنها را احاطه کرده بود. این ملکول که شبیه توپ فوتبال بود *دودکاهدرون*[1] نامیده شد. اما مدل‌های اقلیدسی تنها مدل‌های مورد استفاده نیستند. در ژوئن ۱۹۸۳، شیمیدان‌های دانشگاه کلرادو ترکیبی به نام تریس (tris) ساختند که به شکل نوار موبیوس بود (سطح یک رویه و یک لبه‌ای که آگوست موبیوس در ۱۸٤۸ کشف کرد). تریس از رشته اتم‌های کربن و اکسیژن تشکیل یافته و به گروه‌های الکلی می‌انجامد، که پس از این‌که رشته نیم دور چرخانده شود به آسانی می‌توانند به هم چسبانده شوند.







۱. دودکاهدرون به معنی دوازده وجهی است و نام شیمیایی دودکاهدرون از آن گرفته شده است.

ریاضیات و مهندسی ژنتیک*

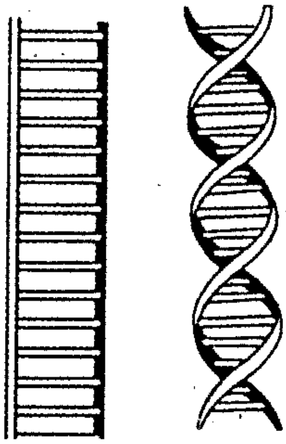
پارک ژوراسیک افراد عادی را از شگفتی‌ها و وحشت‌های احتمالی مهندسی ژنتیک کاملاً آگاه کرده است. ماجرای زندگی در یک سلول زنده روی می‌دهد مهم نیست که این سلول زنده انسان، ماهی، اسب، گیاه، حشره یا باکتری باشد، هر سلول زنده‌ای جایگاه ملکول مارپیچی DNA است. اما این مارپیچ ریاضی سه بعدی درون سلول چه می‌کند؟ کارکرد آن چیست؟ و رابطهٔ ژن‌ها ــ انتقال دهندگان ویژگی‌های موجود زنده ــ DNA چیست؟ در اینجا مفاهیم ریاضی، الگوها، رشته‌ها، رابطه‌ها، تناظر یک به یک، همه در پرده‌برداری از رمزها و رازهای زندگی سلول نقش دارند. در یک سلول گیاهی یا جانوری هسته‌هایی[۱] را

می‌یابیم که در آنها کروموزوم‌ها جای دارند. DNA به نوارهایی به نام کروموزوم تقسیم می‌شود، و ژن‌ها در DNA قرار دارند. ملکول‌های RNA و پروتئین‌ها نیز همراه با سایر مواد ریز و آب در هسته یافت می‌شوند. گونه‌های گوناگون، شمار متفاوتی از

*. برای اطلاعات بیشتر به کتاب به *ژنوم خوش آمدید* از همین مجموعه مراجعه کنید. ناشر

۱. سلول‌های protocaryotes مانند سلول‌های باکتری‌ها هسته ندارند در حالی که سلول‌های eucaryotes که در گیاهان و جانوران یافت می‌شود هر یک دارای هسته‌اند.

انواع کروموزوم دارند. مثلاً، انسان ٤٦، بعضی از گونه‌ها ٤، و نوعی خرچنگ ٢٥٤ کروموزوم دارند.[۱] توجه به این نکته شگفت‌انگیز است که هر سلول زنده‌ای از شش عنصر بنیادی ــ کربن، هیدروژن، اکسیژن، فسفر، نیتروژن و گوگرد ــ تشکیل شده است. این اتم‌ها در سلول باهم ترکیب می‌شوند تا ملکول‌های آب، فسفات، و قند ساخته شود. علاوه بر آن، آنان ماکروملکول‌هایی (ملکول‌های بزرگ ساخته شده از هزاران اتم که به صورت رشته‌هایی درآمده‌اند) مانند لیپیدها، نشاسته، سلولز و حتی اسید نوکلئیک‌ها و پروتئین‌های پیچیده را تشکیل می‌دهند. ملکول DNA با ژن‌هایش طرح زندگی سلول را به دست می‌دهد. گرچه تمام عناصر سازندهٔ اساسی سلول یکسانند، موجودات زندهٔ مختلف طرح‌های ژنتیکی بسیار متفاوتی دارند. و گرچه ژن‌ها از نمادها، (عنصرهای تشکیل‌دهندهٔ کد یا رمز سلول) استفاده می‌کنند، ساختارهای موجودات زنده را ترکیب‌های مختلف رشته‌های این نمادها شکل می‌دهند. این رمزها در هر سلولی با همان سازوکاری رمزگشایی می‌شود که در تکثیر سلول‌ها و پروتئین‌ها و سایر ساختارهای سلولی مورد استفاده قرار می‌گیرند.



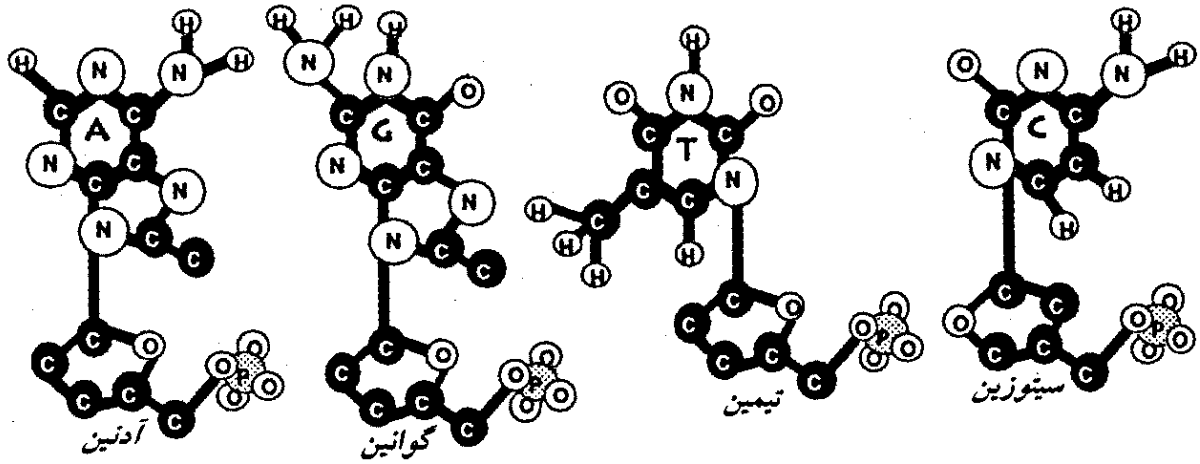
DNA از دو مارپیچ ساخته شده است که در بازها به هم می‌پیوندند تا مارپیچ دوگانه‌ای تشکیل دهند.

چگونگی شکل‌گیری رمزهای وراثتی بر درک اسیدنوکلئیک استوار است. اسیدهای نوکلئیک از نوکلئوتید ــ ساخته شده از یک قند، یک فسفات و یک باز (پنج نوع باز وجود دارد که با نمادهای A، C، G، T، U نشان داده می‌شوند[۲] ــ ساخته می‌شوند. هر یک از بازها تنها با یک باز مکمل دیگر ـ A با T و C با G ـ همراه می‌شوند. و در DNA در نوار اسید نوکلئیک در بازها به‌هم می‌پیوندند و مارپیچ دوگانهٔ مشهور را می‌سازند. شکل پنج ضلعی دیوکسی ریبوز است که شکل مارپیچ را می‌سازد و برای کامل کردن یک دور به ۱۰ پله نردبان نیاز دارد. از سوی دیگر، RNA فقط بازهای A، C، G و U دارد و معمولاً به جای دو رشته یک رشته

۱. عوامل بسیاری از جمله مراحل محیطی مختلف است که گونه‌ها در طی زندگی خود با آن روبرو هستند.

۲. A آدنین، C سیتوزین، G گوانین، T تیمین، و U اوراسیل است.

دارد و بسیار کوتاه‌تر از DNA است. نمودار DNA نشان می‌دهد چگونه رشتهٔ بازها رمز ویژه‌ای را می‌سازد. هنگامی که ژن تکرار می‌شود (یا DNA تکثیر می‌شود) مارپیچ دوگانهٔ DNA با سرعت سرسام‌آور ۸۰۰۰ دور در دقیقه باز و به دو رشتهٔ جداگانه تقسیم می‌شود. در این هنگام کلئوتیدهای آزاد متصل نشده به سلول با «نماد» باز



تعداد زیادی نوکلئوتید در سلول زنده وجود دارد. چهار نوع نوکلئوتید وجود دارد که از یک باز و بخشی از مارپیچ ساخته شده‌اند. توجه کنید که ملکول‌های فسفات قند مشابه‌اند و بنابراین می‌توانند با هر تیپی پیوند یابند و یک نوار مارپیچ DNA بسازند.

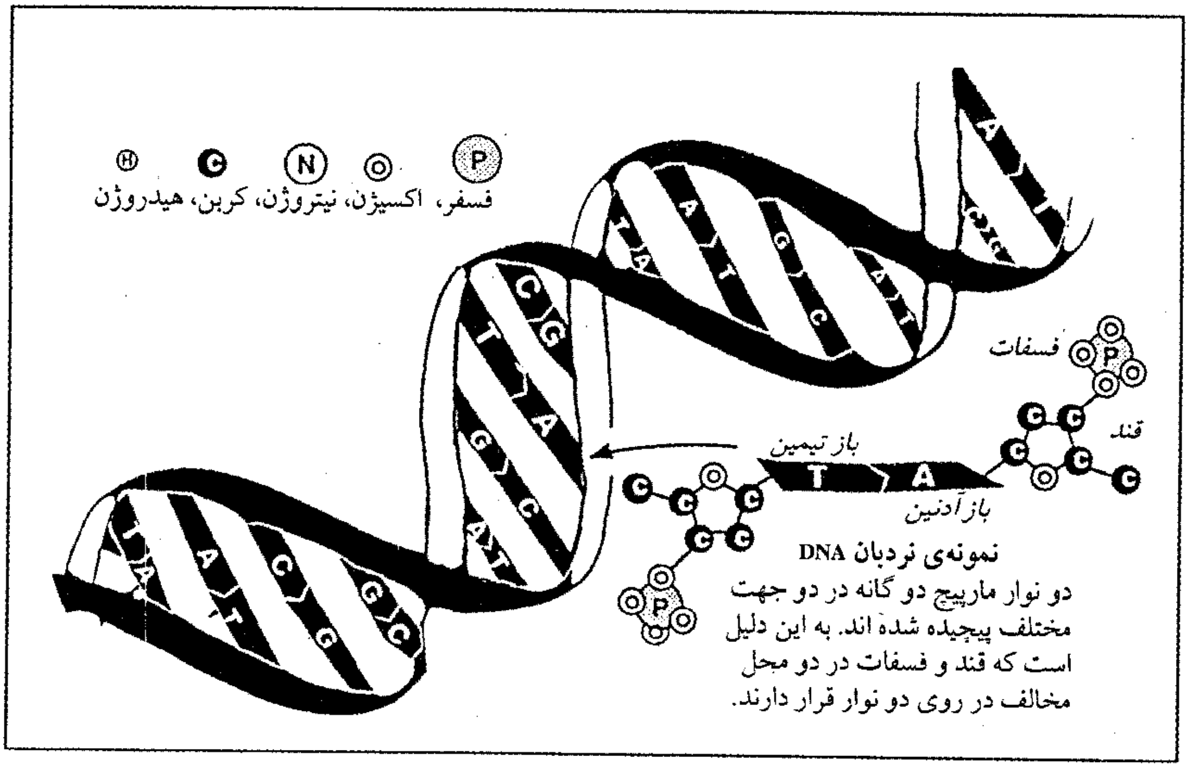
درست بازهای آنها را به بازهای DNA در امتداد هر نوار اتصال می‌دهد. بدین طریق دو مارپیچ مشابه دوتایی DNA با تقسیم شدن مارپیچ اصلی و اضافه شدن نوکلئوتیدهای آزاد به این دو نیمه تشکیل می‌شود. علاوه بر تکثیر DNA، ژن‌ها پروتئین[1] و سایر کارکردهای سلولی را عرضه می‌کنند. ژن‌ها با محرک‌های مختلفی (مثلاً قرار گرفتن در معرض هورمونی خاص) فعال می‌شوند. چگونه یک ژن فعالیت‌هایش را ساماندهی می‌کند؟ هزاران ژن در امتداد ملکول DNA مشابه کلید

---

۱. پروتئین‌ها هم مانند اسید نوکلئیک زنجیره‌ای دراز از واحدهای کوچکتری به نام اسید آمینه‌اند (تاکنون ۲۰ نوع اسید آمینه شناسایی شده است). هر یک از پروتئین‌ها با ترتیب ویژه و تعداد معینی اسید آمینه مشخص می‌شود. پروتئین‌های آنزیم عامل هدایت واکنش شیمیایی در سلول زنده‌اند. RNA چه وقت وارد صحنه می‌شود؟ وقتی که DNA در جریان تکثیر خود شکافته می‌شود. یک RNA پیک که در طول نوار DNA تشکیل شده است، بازهای مکمل را روی نوار DNA جفت و جور می‌کند. (این فرایند را رونویسی می‌نامند.) RNA پیک کدهای وراثتی را به ترجمه‌های کد، به نام ملکولهای RNA ناقل منتقل می‌کند. در اینجا زنجیره‌ای از اسیدهای آمینه به ترتیب ترجمه به وسیله RNA ریبوزوم به‌هم می‌چسبند و پروتئین تشکیل می‌شود. برای ساده کردن مطلب بخش‌ها و مرحله‌های زیادی حذف شده است. اما شگفتی این فرایند که به طور همزمان در موجود زنده رخ می‌دهد، حیرت‌آور است.

«قطع» و «وصل» در دستورالعمل‌های دودویی کامپیوتری ــــ برنامه‌ها یا الگوریتم ژنتیکی ــ قرار گرفته‌اند. ژن تحریک شده از واکنشی شیمیایی برای به‌کار انداختن کلیدهای ژن‌های دیگر ملکول DNA استفاده می‌کند. پیام آن در طول ملکول DNA حرکت و ژن‌ها را «قطع» و «وصل» می‌کند. آنها که قطع شده‌اند دیگر پیام را منتقل نمی‌کنند. در حالی که آنهایی که وصل شده‌اند انتقال دستورالعمل‌های خود را آغاز می‌کنند. تصور کنید که تمام این فرایندها همزمان روی دهند. مهندسی ژنتیک فرایند دستکاری در ساختار ملکول‌های DNA است. این مهندسان روش‌های تکثیر، تغییر، چسباندن و اضافه کردن رشته‌های رمز به ملکول DNA یا به عبارت دیگر تغییر در طرح سلول را کشف کرده‌اند. آنها می‌توانند آنچه DNA حاصل از مهندسی ژنتیک نام دارد بسازند، DNA که خود از ترکیبی از بازهایی تشکیل می‌شود که از موجودات زندهٔ کاملاً متفاوتی، مثلاً از سلول انسان و یک سلول باکتری، گرفته می‌شود.

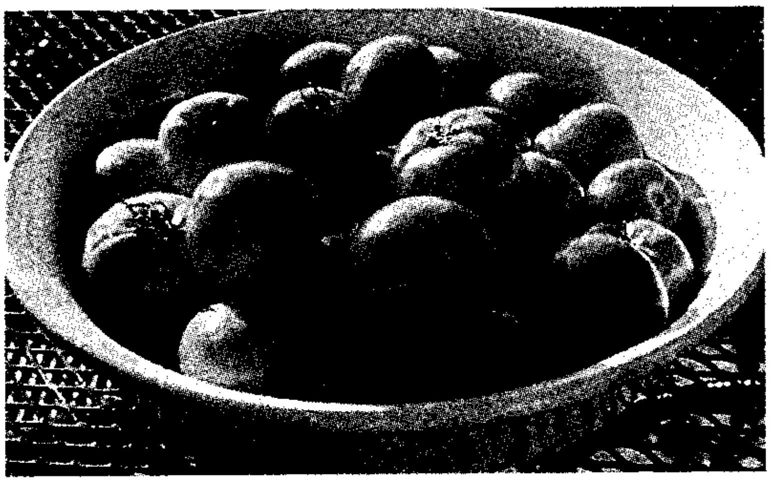
علاوه بر بررسی رشته‌ها، رمزها و مارپیچ‌ها، شکل‌ها و ساختارهای ریاضی نیز در طبقه‌بندی ترکیب‌های نامحدود اتم‌ها و ملکول‌هایی اهمیت دارند که به شکل سلول زنده درمی‌آیند. چون این ساختارهای سه بعدی، مانند پروتئین یکپارچه (توپُر) نیستند



بلکه بیشتر گره دارند ــ ریاضیات نظریهٔ گره‌ها و مدل سازی کامپیوتری نقشی فزاینده در مهندسی ژنتیک بازی می‌کنند. نظریهٔ آشوب حوزهٔ مهم دیگری در این زمینه است.

زیرا تغییرات سادهٔ خیلی کوچک در محرک‌های ژن می‌تواند تفاوت زیادی در نتیجه، مثلاً یک جهش، در پی داشته باشد. و در مورد برخال‌ها چه؟ نمی‌توان سلول زنده را مانند موجود بسیار پیچیدهٔ برخال گونه‌ای دانست که در آن اشکال موردنظر شش عنصر بنیادی حیات و قاعدهٔ آن برنامهٔ ژنتیکی ملکول DNA باشد؟

با تکامل روش‌های مهندسی ژنتیک و کشف آنها با گام‌هایی چنین تند، شرکت‌های فناوری زیست برای استفاده از علوم نسبتاً جدید برای کشف درمان‌های جدید و ساخت داروهای معجزه‌آسا به رقابت برخاسته‌اند. سازندگان موادغذایی به دنبال استفاده از روش‌های ژنتیک برای دستکاری ژن‌ها در محصولات[1] مختلف‌اند تا تاریخ مصرف، اندازه، مزه و مقاومت آنها را در برابر آفت‌ها بهبود بخشند. تغییر رمزهای ژنتیک را می‌توان اینک در بخش کوچکی از زمانی انجام داد که فرایند انتخاب طبیعی بدان نیاز داشت. پرسش‌هایی باقی می‌ماند. آیا این تغییرات مطلوب، مؤثر یا زیانبارند؟ آیا خریدار بی‌اطلاع در معرض خطر حساسیت‌زاهای اضافه شده از طریق اتصال ژن‌ها خواهدبود؟ مسئولیتی که بر دوش مهندسان ژنتیک است بسیار سنگین است. آنان حیاتی را آزمایش می‌کنند که در طی میلیون‌ها سال پدید آمده است!



گوجه‌فرنگی‌هایی که ژن‌هایشان اصلاح شده است می‌توانند روی بوته برسند و در برابر لک افتادن و سرمازدگی مقاوم‌اند.

۱. این‌ها عبارتنداز: گوجه‌فرنگی با ژن سفره ماهی برای کاهش زیان‌های یخ‌زدگی، رسیدن روی بوته و لک نشدن در زمان حمل و نقل؛ سیب‌زمینی با ژن کرم ابریشم برای افزایش مقاومت در برابر آفت‌ها؛ ذرت با ژن‌های کرم شب تاب برای کاهش زیان حشرات. گروه‌های فعال حمایت از مصرف‌کنندگان مانند مبارزه برای غذای سالم که مرکز آن در واشینگتن است، نظارت بر موادغذایی دستکاری شده با مهندسی ژنتیک را سازماندهی کرده‌اند.

موسیقی بدن

دربارهٔ زبان بدن که پیام‌های گوناگونی را با حرکت و حالات بدن ما پدید می‌آورد بسیار شنیده‌ایم. اما موسیقی بدن چیست؟ تعدادی از دانشمندان[1] الگوهایی را کشف کرده‌اند که از چشم‌انداز دیگری در DNA یافت می‌شود ــ موسیقی ژن‌ها، در نوار مارپیچی در بازهای سازگار[2] خود به هم متصل شده‌اند تا مارپیچ دوگانهٔ آرایش DNA را پدید آورند. این بازها دارای رمزهای ژنتیکی‌اند و همراه با DNA طرح‌های کلی سلول زنده را تشکیل می‌دهند. الگوی این بازها کاملاً به امید رمزگشایی از معنی‌های آنها بررسی شده‌اند. مشاهده شده است که رشته‌های تکرار شوندهٔ بازها در سراسر ژن‌ها وجود دارند. پیوندی موسیقایی در هنگامی ظاهر می‌شود که این رشته‌های تکرار شونده را ملودی‌های یک آهنگ در نظر بگیریم. در واقع بسیاری از آنها را در یک اکتاو و فاصله‌های دیگر قرار داده‌اند.

همان‌گونه که پیشتر گفته شد، موسیقی و ریاضی قرن‌ها باهم پیوند داشته‌اند. فیثاغورسیان اعداد را با گام‌های موسیقی در ارتباط می‌دانستند. حتی یوهان کپلر (۱۶۳۰-۱۵۷۱) سرعت‌های سیارات را در مدارهای بیضی شکل خود به هارمونی موسیقی ارتباط داده بود. گرچه این ارتباط امروزه ارزش علمی ندارد، این‌که دانشمندان و ریاضیدانان در جستجوی موسیقی بدن باشند عجیب نیست.

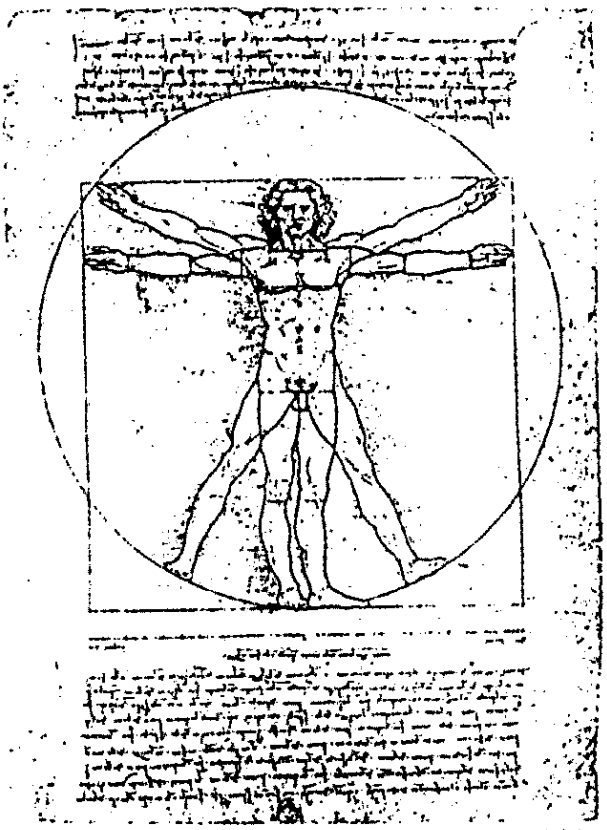
۱. دکتر سوزو سواُهنو از بخش زیست‌شناسی نظری بنگاه پژوهشی بکمن در شهر هوپ، دارتور، کالیفرنیا.

۲. تنها تعدادی از بازها باهم جفت می‌شوند. A با T و G با C. چگونگی ظاهر شدن آنها در رشته، رمز ژنتیکی DNA را می‌سازد.

رازهای انسانِ دورانِ نوزایی

این طرح مشهور لئوناردو داوینچی در کتاب تناسب‌های الهی است. که لئوناردو برای لوکا پائولی ریاضیدان در سال ۱۵۰۹ کشیده است.

لئوناردو بخش مشروحی را دربارهٔ تناسب‌های بدن انسان در یادداشت‌هایش نوشته است. او اندازه‌ها و تناسب‌هایی را برای تمام بخش‌های بدن، از جمله سر، چشمان، گوش‌ها، دست‌ها و پاها مشخص کرده است. تناسب‌های او بر بررسی‌های اعداد، مشاهدات و اندازه‌گیری‌ها استوار است. او در یادداشت خود به آثار ویتروویوس، معمار رومی (حدود ۳۰ پیش از میلاد) نیز اشاره کرده است، که به تناسب‌های بدن انسان پرداخته است. لئوناردو نوشته است چگونه از ویتروویوس تأثیر پذیرفته است:



ویتروویوس معمار در آثارش دربارهٔ معماری می‌گوید اندازه‌های بدن انسان را طبیعت این گونه تقسیم کرده است: ... اگر پاهایتان را طوری باز کنید که قدتان ۱/۱۴ کمتر شود و دستهایتان را باز کنید و بالا بیاورید تا انگشت میانی شما به تراز بالای سرتان برسد مرکز دست و پاهای باز شدهٔ شما در ناف و فضای بین پاهایتان مثلثی متساوی‌الاضلاع خواهدبود.

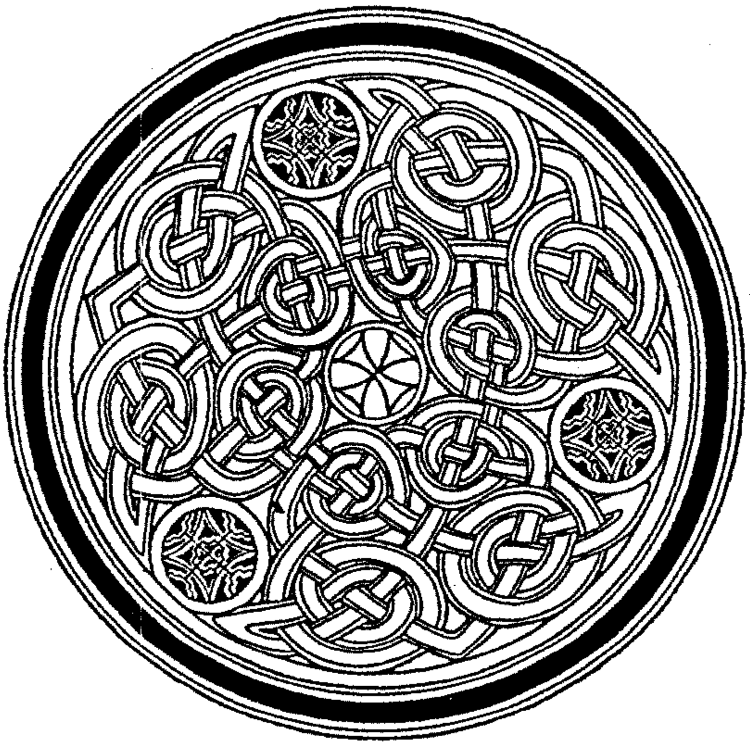
لئوناردو می‌افزاید طول داستان باز شده شما به اندازهٔ قدتان است.[1]

---

۱. *یادداشت‌های لئوناردو داوینچی*، جلد ۱. انتشارات داور. نیویورک. ۱۹۷۰.

...ره‌ها در ...ازهای زندگی

از زمانی که اسکندر مقدونی گرهٔ گوردیوم را برید[۱]، گره و شکل‌های مختلف آن بر بسیاری از جنبه‌های زندگی ما سایه افکنده است. موضوع گره‌ها توجه جادوگران، دانشمندان و فیلسوفان را جلب کرده است. گره سه برگی، گرهی که سروته ندارد، از جملهٔ آنهاست. امروزه دانشمندان به گره‌ها به گونه‌ای می‌نگرند که گویا شماری از راه‌حل‌های رازهای زندگی را در خود دارند. این نظریه‌ها از جهان‌های کیهانی تا جهان‌های ذره‌بینی را دربرمی‌گیرند.



*طرح گره سلتی از انجیل یوحنا، کتاب دوراو. از **طرح سلتی** اثر ادوارد سیبت*

در نخستین نگاه این تصور پیش می‌آید که مسألهٔ ویژه‌ای در مورد گره‌ها وجود ندارد، مگر برای نگهداشتن یا بستن چیزی، مثلاً کفش و مهار قایق‌ها. اما رشته‌ای در ریاضیات به نام نظریهٔ گره‌ها وجود دارد، و دایماً کشف‌هایی در مورد ارتباط مستقیم این نظریه با جهان واقعی می‌گیرد.

نظریهٔ گره‌ها حوزهٔ کاملاً جدیدی در توپولوژی است.

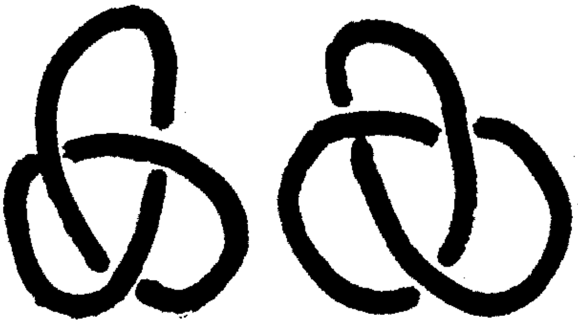
---

۱. اسکندر در سال ۳۳۳ پیش از میلاد هنگام عبور از آناتولی به گوردیوم پایتخت فریگیه رسید. گوردیوس بنیانگذار این شهر با گرهی که سر آن مخفی بود تیرکی را محکم بسته بود که تنها فاتح آسیا می‌توانست آن را باز کند. می‌گویند اسکندر آن را با شمشیر برید. عبارت «بریدن گره گوردیوم» به حل جسورانهٔ مسایل پیچیده اشاره دارد.

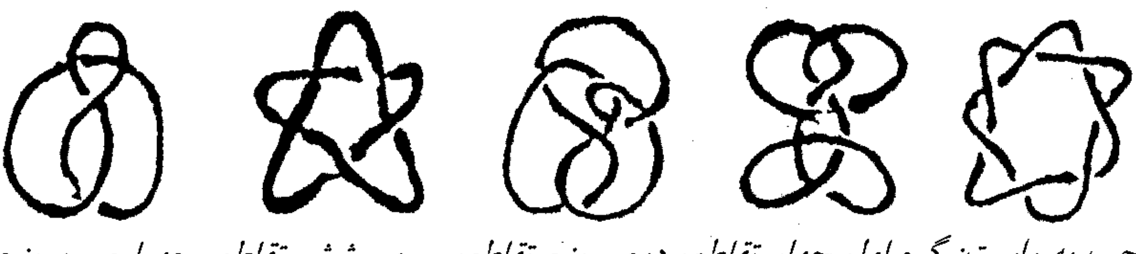
سرچشمهٔ آن را می‌توان به قرن نوزدهم و این اندیشهٔ لردکلوین ارتباط داد که اتم‌ها گرداب‌های گره زدهٔ موجود در چیزی به نام «اتر»ند، که معتقد بودند سیالی نادیدنی است که فضا را پر کرده است. او احساس می‌کرد می‌تواند این گره‌ها را رده‌بندی کند و جدولی مانند جدول تناوبی از عناصر شیمیایی ترتیب دهد. گرچه نظریهٔ او درست نبود، اما مطالعات ریاضی او دربارهٔ گره‌ها امروزه موضوعی بسیار متداول است.

آنچه گره‌های ریاضی را از گره‌های معمولی متمایز می‌سازد این است که آنها سر ندارند. این گره‌ها حلقه‌های بسته‌ای هستند که نمی‌توانند به شکل دایره درآیند. آنچه ریاضیات باید انجام دهد دسته‌بندی آنها و مشخص کردن گره‌های مختلف است. تعدادی از اندیشه‌های مهمی که تاکنون مدون شده‌اند از این قرارند:

- *گره نمی‌تواند بیش از سه بعد داشته باشد.*
- *ساده‌ترین گره امکان‌پذیر گره سه برگی است، که سه تقاطع دارد. به دو شکل مختلف راست‌گرد و چپ‌گرد درمی‌آید که تصویر آینه‌ای یکدیگرند.*
- *تنها یک گره با چهار تقاطع وجود دارد.*
- *تنها دو نوع گره با پنج تقاطع وجود دارد.*
- *بیش از ۱۲۰۰۰ گره تاکنون شناسایی شده‌اند که ۱۳ تقاطع یا کمتر دارند. در این شمارش تصاویر آینه‌ای آنها در نظر گرفته نشده‌اند.*



گره سه برگی



از چپ به راست: گره اول چهار تقاطع، دومی پنج تقاطع، سومی شش تقاطع، چهارمی و پنجمی هفت تقاطع دارند.

• *نمودار زیر را در نظر بگیرید. این گره‌ها تصویر آینه‌ای یکدیگرند. ممکن است فکر کنید چون آنها مخالف یکدیگرند در صورتی که کنار هم باشند باز می‌شوند. امتحان کنید! (فقط از هم رد می‌شوند و بدون تغییر باقی می‌مانند.)*

• *حالا به گره کاذب یا گرهٔ چفالو[1] نگاهی بیندازید. اگر دو سر آن را بکشیم چه پیش می‌آید؟ (گره از هم باز می‌شود)*

در اصل مدل‌های واقعی گره برای مطالعهٔ آنها ساخته شده‌اند. برای آزمایش مشابه بودن دو گره، یکی از مدل‌ها را با دست باید تغییر داد و کوشید تا آن را به شکل دیگری درآورد. اگر تبدیل شد، آنها معادل شمرده می‌شوند، و گرنه نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود.

بررسی گره‌ها در حوزهٔ توپولوژی می‌کوشد تا این ویژگی‌های گوناگون را توضیح دهد. کامپیوتر نیز وارد صحنه شده است. *طرح ابرکامپیوتر هندسه*[2] از فناوری پیشرفتهٔ کامپیوتر برای بررسی و نمایش سه بعدی شکل‌ها و معادله‌های ریاضی، مانند گره‌های چنبره‌ای و برخال‌ها استفاده می‌کند.

ریاضیدانان روش‌های دیگری نیز برای رده‌بندی و آزمایش گره‌ها ابداع کرده‌اند. آنان اینک به سایه‌های دوبعدی آن نگاه می‌کنند و معادلات توصیف کنندهٔ آن را می‌نویسند.[3] اخیراً تلاش‌های بسیاری انجام گرفته و ارتباط‌های جالبی کشف شده

---

۱. رالفو چفالو (۱۹۹۲_۱۹۰۵) شعبده‌باز ایتالیایی ساکن آمریکا.

۲. یک گروه بین‌المللی ریاضیدانان و دانشمندان که با یک ابرکامپیوتر از طریق شبکهٔ مخابراتی برای حل مسایل دشوار هندسی با ریاضیات محض کار می‌کردند. *اخبار علمی*، جلد ۱۳۳، صفحهٔ ۱۲، شمارهٔ دوم ژانویه ۱۹۸۸.

۳. نخستین معادلات از این نوع را جان الکساندر در سال ۱۹۲۸ نوشت. در سال‌های ۱۹۸۰ وایوگان جونز به کشفیات جدیدی دربارهٔ معادلات گره‌ها دست یافت. *اخبار علمی*، جلد ۱۳۳، صفحه ۳۲۹، شمارهٔ ۲۱ مه ۱۹۸۸.

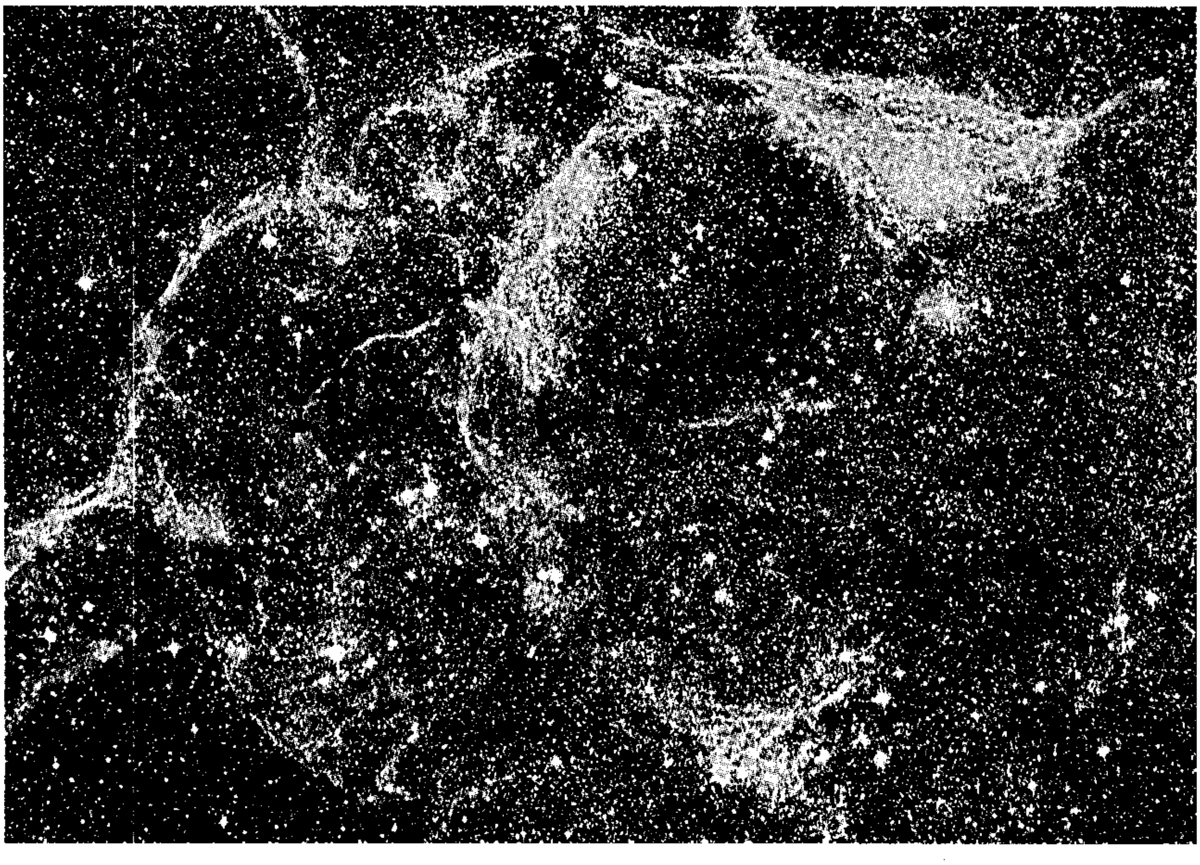
است که نظریهٔ گره‌ها را به زیست‌شناسی ملکولی و فیزیک پیوند می‌دهد. دانشمندان در این حوزه‌ها از یافته‌های ریاضیدانان استفاده کرده‌اند و روش‌های جدید نظریهٔ گره‌ها را در بررسی پیکربندی DNA به کار گرفته‌اند. پژوهشگران پی برده‌اند که نوارهای DNA می‌توانند حلقه‌هایی تشکیل دهند که گاهی گره می‌خورند. اینک دانشمندان می‌توانند از یافته‌های نظریهٔ گره‌ها در تعیین این‌که نوار DNA را که مشاهده می‌کنند پیش از این به شکل گره دیگری ظاهر شده است، استفاده کنند. آنها می‌توانند توالی مراحلی را نیز تعیین کنند که در آن نوارهای DNA می‌توانند تغییر یابند تا پیکربندی ویژه‌ای را پدید آورند و پیکربندی‌های مشاهده نشدهٔ DNA را پیش‌بینی کنند. تمام این یافته‌ها می‌تواند در مهندسی ژنتیک بسیار سودمند باشند.

به همین ترتیب، در فیزیک نظریهٔ گره‌ها در بررسی برهمکنشی ذراتی که شبیه به گره هستند بسیار سودمند بوده است. از پیکربندی گره می‌توان در توصیف برهمکنش‌هایی استفاده کرد که ممکن است رخ دهند. فیزیکدانان کاشف *نظریهٔ همه چیز (TOE)*[1] اعتقاد دارند که گره‌ها نقشی اساسی در آفرینش جهان بازی کرده‌اند. دانشمندان در جستجوی بی‌وقفهٔ نظریهٔ همه چیز می‌کوشند تا مدلی ریاضی بسازند که نیروهای طبیعت (الکترومغناطیس، گرانش، نیروهای قوی و نیروهای ضعیف) را وحدت بخشد. فیزیکدانان مطمئن هستند که این نظریه را می‌توان یافت. عده‌ای تمام عمر کاری خود را در جستجوی پاسخ‌هایی به آن صرف کرده‌اند. در متداول‌ترین «نظریهٔ همه چیز» امروز، تعدادی از دانشمندان بر این باورند که اساس جهان به اشیایی به نام *ابر ریسمان* وابسته است. یکی از اشکال نظریهٔ همه چیز بر آن است که جهان، تمام اشکال ماده و انرژی، از لحظهٔ انفجار بزرگ از کنش‌ها و برهمکنش‌های ابرریسمان‌ها ناشی شده‌اند. *نظریهٔ ابرریسمان* جهان را به صورت ۱۰ بعدی (۹ بعد مکانی و ۱ بعد زمان) توصیف می‌کند که اجزای سازندهٔ ماده و انرژی آن ریسمان‌های بی‌نهایت کوچکند. فراتر از آن، این نظریه می‌گوید که در لحظهٔ انفجار بزرگ این ۹ بعد برابر بوده‌اند. سپس تنها ۳ بعد مکانی با آن انبساط یافته‌اند. ٦ بعد دیگر درهم پیچیده و در شکل‌هایی به اندازهٔ 10^{-33} سانتیمتر محصور مانده‌اند (یعنی از یک‌سر تا سر دیگر 10^{33} آنها یک سانتیمتر است). بدین‌ترتیب عقیده بر آن است که این ریسمان‌ها ٦ بعد در داخل خود دارند. دانشمندان اینک می‌کوشند تا آنها را با استفاده از مدل‌های توپولوژی ٦ بعدی توصیف کنند.

1. Theory Of Everything

عقیده بر آن است که این ابرریسمان‌ها ممکن است باز باشند یا به صورت حلقه‌ای بسته باشند، و اشکال مختلف ماده و انرژی جهان را با تغییر ارتعاشات و چرخش‌های خود به‌وجود آورند. به عبارت دیگر، ابرریسمان با ارتعاش و چرخش خود از هم بازشناخته می‌شوند.

اهمیت نظریهٔ ابرریسمان‌ها را با نظریهٔ نسبیت عام اینشتین مقایسه می‌کنند. تجسم ٤ بعد خود به اندازهٔ کافی دشوار بود. اینشتین مطرح کرد که به طول، عرض، ارتفاع و زمان برای مشخص کردن جایگاه اشیا در جهان نیاز است. ۱۰ بعد به نظر غیرممکن می‌رسید. اما اگر ابعاد را اعداد توصیفی بدانیم که موقعیت و ویژگی‌های اشیا در جهان را دقیقاً مشخص می‌کنند، بیشتر قابل فهم می‌شوند.



بیش از بیست سال است که اندیشه‌های نظریهٔ همه چیز پدید آمده‌اند. گرانش نقش آچارفرانسه را در این زمینه داشته است، زیرا محاسبات پشتیبان شکل‌های مختلف این نظریه، بی‌نهایت‌های ریاضی را پدید آورده‌اند[1]. جهش اساسی در ۱۹۷٤ هنگامی

۱. عملیاتی مانند تقسیم عدد بر صفر و به توان صفر رساندن صفر می‌تواند این بی‌نهایت‌های ریاضی را پدید آورد.

حاصل شد که جان شارتز و ژیوئل شرکز گرانش را پارهٔ انحنا یافته‌ای از هندسه در بعد دهم، مشابه با توصیف اینشتین از گرانش در هندسهٔ بعد چهارم، قلمداد کردند.

ریاضیات پشتیبان نظریهٔ همه چیز ریسمان بسیار کارآمد است. نتایج بسیار قابل قبول بوده است. شوارتز و مایکل گرین دو تن از مهم‌ترین پیشگامان این نظریه بوده‌اند. آنان با وجود پشتیبانی و حمایت ناچیز دانشگاه‌ها، که جهان ۱۰ بعدی را به سختی می‌پذیرفتند، بیش از دو دهه در این زمینه کار کردند. مقالهٔ منتشر شده از سوی آنان سرانجام فیزیکدانان را بر آن داشت تا این اندیشه را جدی بگیرند. تعدادی از دانشمندان معتقد بودند که فیزیکدانان از پژوهش در این اندیشه به این دلیل پرهیز می‌کردند که ریاضیات آن بسیار دشوار است. ابرتقارن، مدل‌های توپولوژیکی ٦ بعدی، جهان ۱۰ بعدی و ریسمان بی‌نهایت کوچک تعدادی از مفاهیم مورد نیاز برای تشریح و اثبات این نظریه‌اند. در نتیجه، این نظریه بعضی از فیزیکدانان را به ریاضیدان و برعکس تبدیل کرده است. این تازه آغاز کشفیات و کاربردهای شاخهٔ ریاضی نوظهور نظریهٔ گره‌هاست.

ساختمان اداری اوراکل، شهر ردوود، کالیفرنیا

ریاضیات و معماری

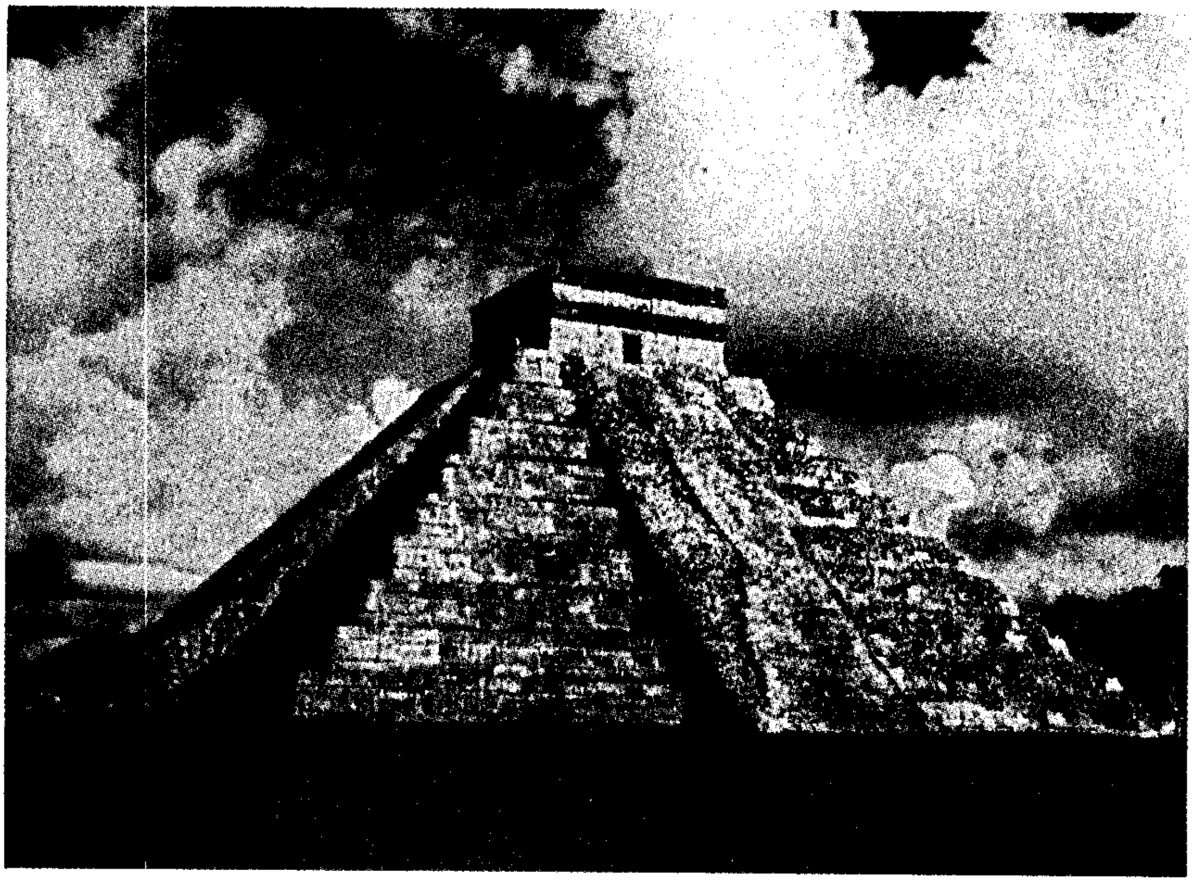
باک مینستر فولر[1]، گنبدهای نیمکره‌ای و توپ باکی[2]
معماری قرن بیست و یکم
ـ جسمهای فضا پرکن
طاق ـ ریاضیات انحنا
معماری
و سهمی‌وارهای هذلولوی
نابودی جعبه و
فرانک لوید رایت[3]

۱. مهندس، معمار، فیلسوف و شاعر آمریکایی (۱۹۸۳ـ۱۸۵۹)
۲. ساختار ملکولی باک مینستر فولر (نوعی کربن)
۳. معمار آمریکایی، از معماران بزرگ قرن بیستم (۱۹۵۹ ـ ۱۸٦٦)

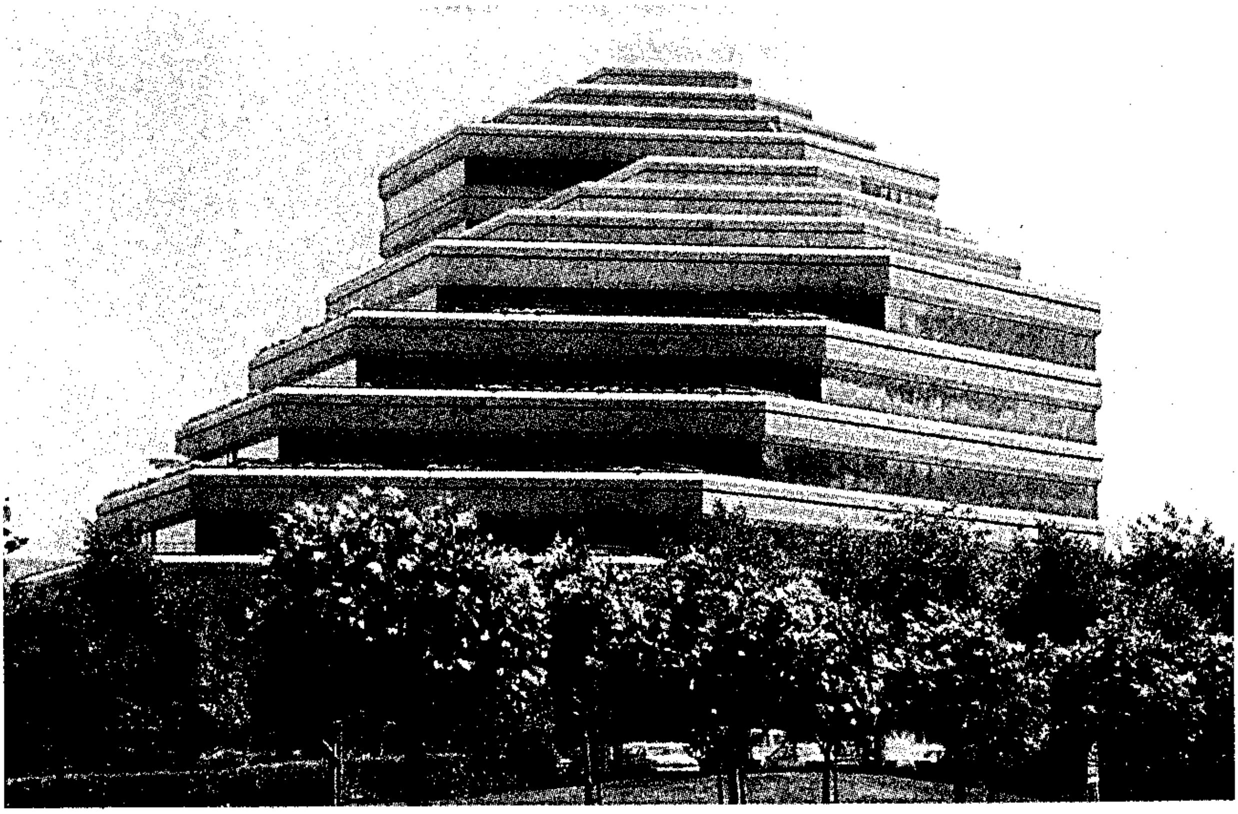
مکانیک بهشت ریاضیات است زیرا در آن به میوه‌های ریاضیات می‌رسیم.

ـ لئوناردو داوینچی

ریاضیات برای هزاران سال ابزاری ارزشمند در طراحی و ساختمان بوده است. ریاضیات سرچشمه‌ای برای طرح‌های معماری، نیز ابزاری بوده است که معماران می‌توانستند روش‌های آزمایش و خطا را در ساختمان حذف کنند. آنچه در زیر می‌آید هر قدر هم جامع به نظر آید، چیزی جز فهرستی ناقص از تعدادی مفاهیم ریاضی نیست که قرن‌ها در معماری مورد استفاده بوده است.



معبد کوکولکان، چیچن ایتسا، یوکاتان

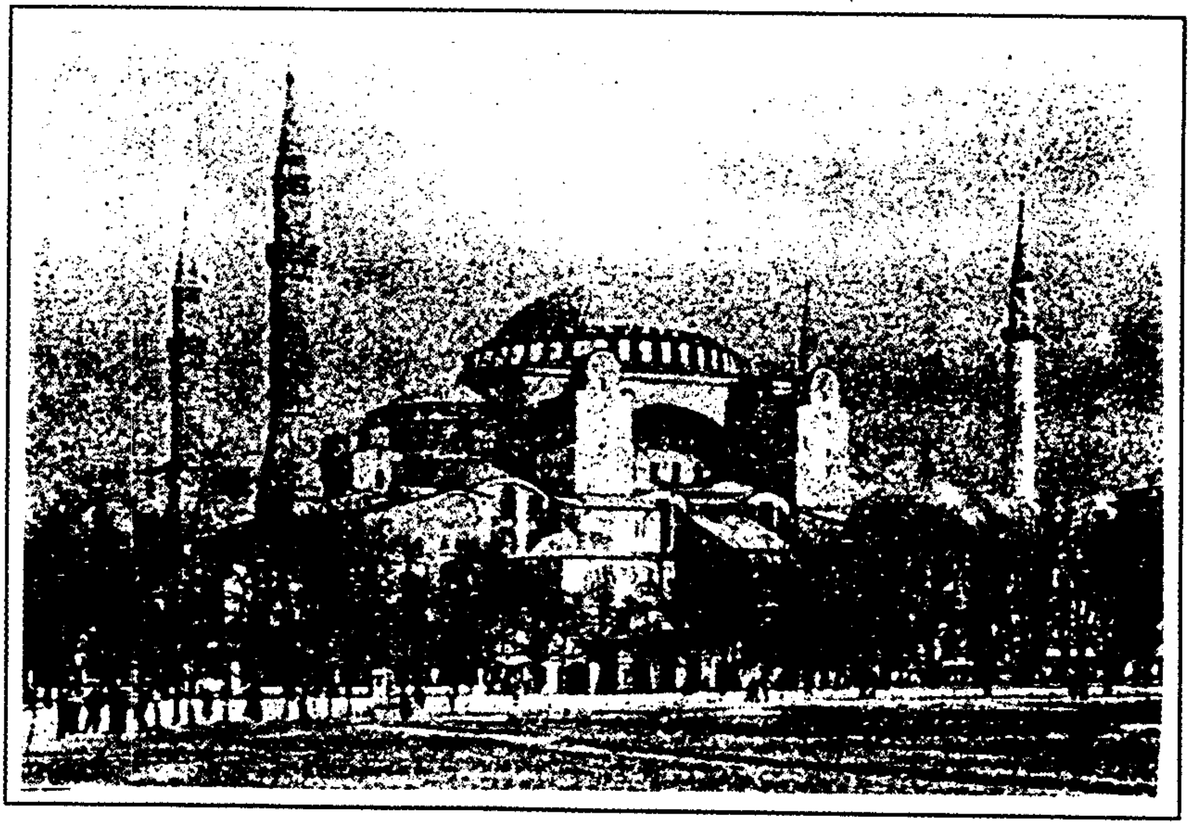


در این ساختمان اداری جدید در فاسترسیتی کالیفرنیا از طرح‌های هرمی استفاده شده است.

- هرم
- منشور
- نسبت طلایی
- خطای باصره
- مکعب
- چندوجهی
- گنبد ژئودزیک
- مثلث
- قضیهٔ فیثاغورس
- مربع، مستطیل
- متوازی الاضلاع
- دایره، نیم‌دایره
- کره، نیم‌کره
- چندضلعی
- زاویه

- تقارن
- منحنی سهمی‌وار
- منحنی زنجیری
- منحنی هذلولی‌گون
- تناسب
- گرانیگاه
- مارپیچ
- پیچ فنری
- بیضی
- خانه‌بندی
- پرسپکتیو

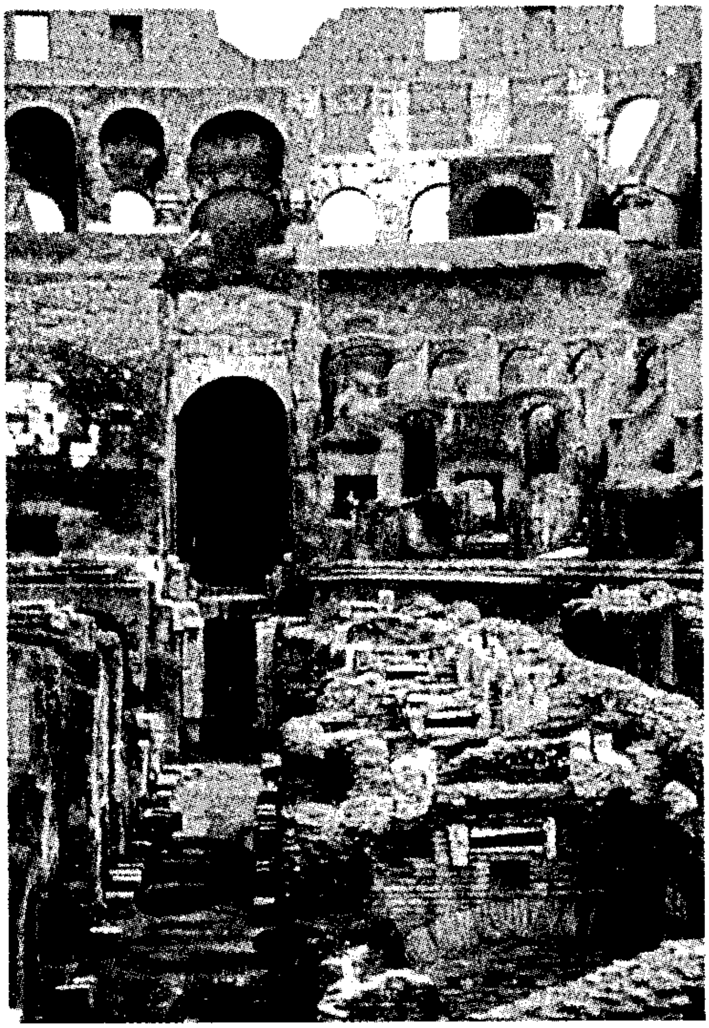
طرح یک ساختمان از محیط اطراف آن، دسترسی و نوع مصالح، و تخیل و منابعی که معمار می‌تواند از آن الهام بگیرد تأثیر می‌پذیرد.



مسجد ایاصوفیه، استانبولِ ترکیه.

چند نمونهٔ تاریخی عبارتنداز:

- محاسبهٔ اندازه، شکل، تعداد و آرایش سنگ‌ها برای ساختمان اهرام مصر، مکزیک و یوکاتان[۱].
- نظم طرح ماچو پیچو[۲] بدون طرح‌های هندسی امکان‌پذیر نبوده است.
- ساختمان پارتنون[۳] بر استفاده از نسبت طلایی، خطاهای باصره، اندازه‌های دقیق و دانستن تناسب در برش بلوکهای ستون با مشخصات دقیق (همیشه قطر $\frac{1}{3}$ ارتفاع بلوک (قطعه) است) استوار است.
- دقت هندسی در چیدمان و موقعیت در ساختمان تئاتر قدیمی اپیداروس[٤] کاملاً محاسبه شده است تا وضعیت صوتی را بهبود بخشد و دامنهٔ دید تماشاگران را به حداکثر برساند.
- استفادهٔ ابتکاری از دایره‌ها، نیم‌دایره‌ها، نیم‌کره‌ها و قوس‌ها به اندیشه‌های مهم ریاضی تبدیل شد که معماران رومی مطرح کرده و آنها را ترجیح می‌داده‌اند.
- معماران دورهٔ بیزانس مربع، دایره، مکعب و نیم‌کره را با قوس به شکلی زیبا در کلیسای سنت سوفیا

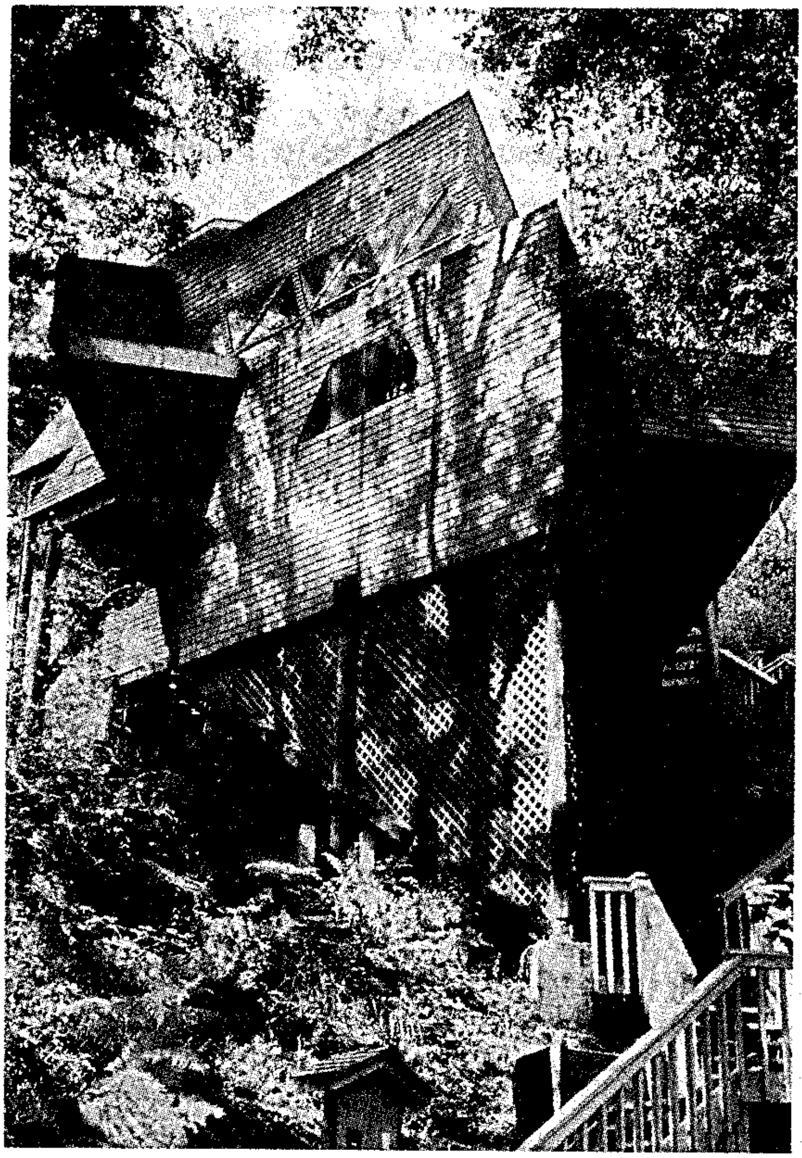


کولوزئوم رومی، رم، ایتالیا.

۱. شبه جزیره‌ای بین خلیج مکزیک و خلیج هندوراس.
۲. قلعه‌ای در پرو باقیمانده از تمدن اینکا.
۳. معبدی در یونان، ساخته شده در ٤٤٧ تا ٤٢٣ پیش از میلاد در آکروپولیس.
٤. تئاتری ساخته شده در حدود ۳۵۰ پیش از میلاد در یونان باستان، با حدود ۱٤۰۰۰ جایگاه.

در قسطنطنیه به‌کار گرفته‌اند. (که بعدها به مسجد ایاصوفیه تبدیل شد.م)

• معماران کلیساهای گوتیک از ریاضیات برای تعیین گرانیگاه در ساختن طرح هندسی قابل تنظیم در سقف‌های قوس‌دار سود برده‌اند که در نقطه‌ای تلاقی می‌کنند تا وزن زیاد ساختمان سنگی را به صورت غیرافقی به زمین هدایت کنند.



هر یک از سه طبقهٔ این خانه از دو مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است که همپوشانی دارند. طرح مثلثی به کمک تیرهای داخلی و پنجره‌ها اجرا شده‌اند.

• ساختمان‌های سنگی دوران نوزایی شکل اصلاح شدهٔ تقارن را نشان می‌دهد که بر نور و تاریکی و احجام هندسی و فضاهای خالی استوارند.

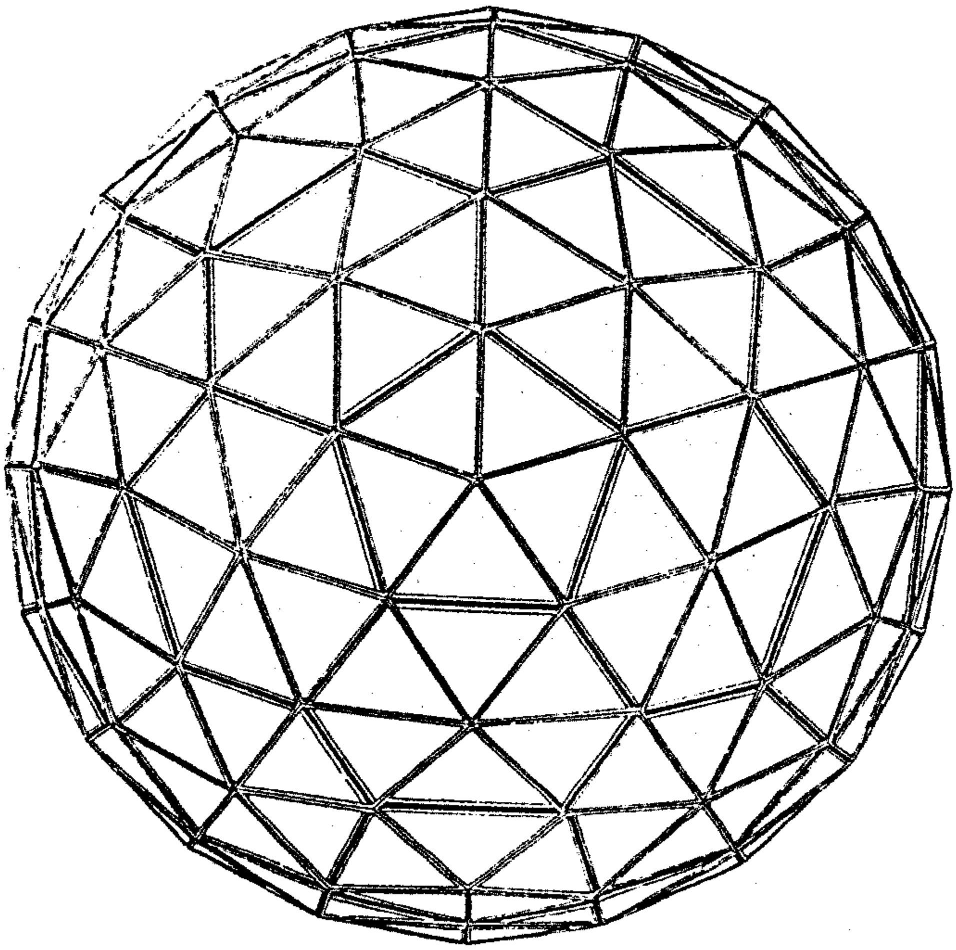
با کشف مصالح جدید ساختمانی، از اندیشه‌های جدید ریاضی برای به حداکثر رساندن امکانات این مصالح استفاده شد. با به‌کارگیری طیف گسترده‌ای از مصالح ساختمانی موجود ــ سنگ، چوب، آجر، سیمان، آهن، فولاد، شیشه، مواد مصنوعی مانند پلاستیک، بتن مسلح، بتن پیش فشرده ــ معماران توانستند عملاً هر شکلی را بسازند. در دوران جدید ساخته شدن ساختمان‌های سهمی‌گون هذلولوی (کلیسای سنت ماری در سانفرانسیسکو) و کروی باکمینستر فولر، طرح‌های پیمونی پائولو سولری، آشیانهٔ سهمی‌گون هواپیما، ساختمان‌هایی از مواد مصنوعی مشابه با چادرهای قبایل، کابل‌هایی به شکل منحنی زنجیری نگهدارندهٔ سالن ورزش المپیک توکیو، و حتی خانه‌ای هشت گوشه با سقف گنبدی بیضوی را شاهد بوده‌ایم.

در این ساختمان چادر مانند از مصالح و روش‌های جدید ساختمانی استفاده شده است. فشن آیلند، فاسترسیتی، کالیفرنیا.

معماری، رشته‌ای در حال تکامل است. معماران اندیشه‌های گذشته را بررسی می‌کنند، بهبود می‌بخشند و از آنها استفاده می‌کنند و اندیشه‌های جدیدی نیز پدید می‌آورند. معماران، در تحلیل نهایی، در تجسم هر طرحی تا آنجا آزادند که ریاضیات و مصالح برای نگهداری ساختمان موجود باشد.

باکمینستر فولر، گنبدهای نیمکره‌ای و توپ باک

ریچارد باکمینستر فولر، مخترع، طراح، مهندس و نویسنده بود. او معمار اندیشه‌ها بود. انسانی که دیدگاههایش اغلب جلوتر از زمانش بود. در میان اندیشه‌ها و اختراعاتش پدیده‌های ابداعی زیر را می‌یابیم که به‌خاطر آنهاست که او بسیار مشهور شده است.



ـ خودرو *dymaxion*[1] با طرح موتور عقب و دیفرانسیل جلو.

۱. نامی که از ابتدای کلمات dy(namics) (پویایی)، max(imum) (حداکثر) و ion پسوند نام‌ساز از سوی همکاران باکمینستر فولر به معنی «به‌دست آوردن حداکثر بازده با حداقل فناوری موجود» ساخته شده است.

- *خانهٔ dymaxion* و *خانهٔ ویچیتا*، پیشاهنگان خانه‌های پیش ساخته برای تولید انبوه، که ساخت آنها استفاده از مصالح را به کم‌ترین مقدار و فضا را به بیشترین مقدار می‌رساند. آنها چنان طراحی شده‌اند که واحدهای مسکونی کاملاً قابل حمل باشند.
- در حوزهٔ نقشه نگاری نقشهٔ انرژی جهانی ۱۹۴۰، نقشهٔ راهبردی جهان ۱۹۴۳ مجلهٔ لایف، و نقشهٔ هوایی اقیانوس ۱۹۵٤ را پدید آورد.
- گنبد نیمکره‌ای (گنبد محصور در فضای مثلثی)
- گنبد نیمکره‌ای یکپارچگی کششی[1]

گنبد ژئودزیک بزرگ‌ترین موفقیت تجاری فولر بود، و چیزی که نامش مترادف با آن شد. در درخواست ثبت اختراع آن گنبد نیمکره‌ای را چنین توصیف کرده بود: «*اختراع من به چارچوبی برای محصور کردن فضا مربوط است. شاخص خوبی برای عملکرد هر چارچوب ساختمان، وزن مورد نیاز برای حفاظت هر مترمربع از هر طبقه در برابر شرایط آب و هوایی است. در دیوار و کف معمولی این رقم ۲۵۰۰ کیلوگرم بر مترمربع است. من کشف کرده‌ام چگونه این کار با چهار کیلوگرم بر مترمربع با ساخت چارچوبی با بدنهٔ پلاستیکی انجام می‌گیرد.*»[2] مهم‌ترین دریافت فولر این بود که به رابطهٔ بین چندوجهی[3] معمولی، فضا، و معماری پی‌برد. این ارتباط در گنبد نیمکره‌ای شکل عملی به خود گرفت. اجازه دهید سناریوی احتمال پدید آمدن گنبد نیمکره‌ای او را بازسازی کنیم. او با آغاز با بیست وجهی، وجوه آن را به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقسیم کرد. آنگاه آن را در یک کره محیط کرد و تصویر رأس‌های آن را بر روی این کره انداخت. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع مساوی باقی نمی‌مانند. فرض کنید سطح این شکل جدید گرد شده باشد. اینک شکل سازهٔ نیمکره‌ای بیشتر به کره نزدیک می‌شود، و ویژگی‌های آن نیز به کره نزدیک‌تر می‌شود. کره حداقل سطح را برای یک حجم معین دارد. در نتیجه گنبد نیمکره‌ای فضای بیشتری را با هزینهٔ مصالح کمتری از اشکال ساختمانی متداول محصور می‌کند. علاوه بر آن، نوع جدیدی از پایداری به دست

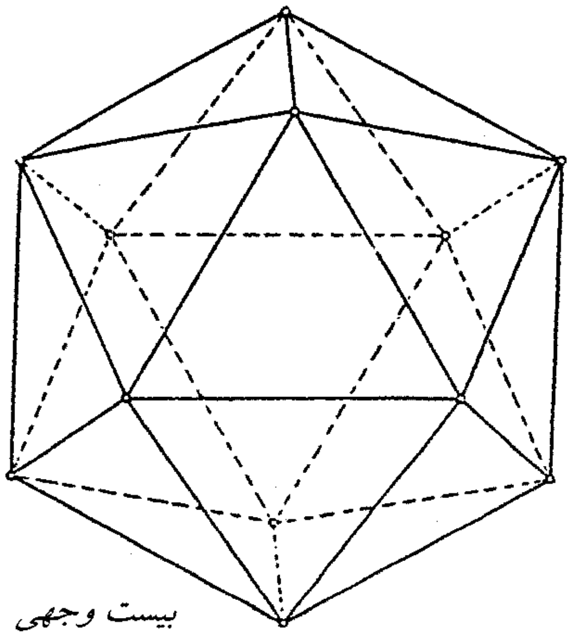
---

۱. Tens(ion) + In+(egrity) (= کشش + یکپارچگی) ویژگی سازه‌ای که از عنصرهای با کشش پیوسته و فشار ناپیوسته که هر عضو بیشترین بازده را دارد ساخته شده باشد.

۲. ثبت اختراع او در ژوئن ۱۹۵٤ پذیرفته شد و او حق امتیاز تمام گنبدهای نیمکره‌ای ساخته شده در ۱۷ سال بعد از آن را دریافت کرد.

۳. چندوجهی‌ها اشکال هندسی فضایی ساخته شده از چندضلعی‌اند.

می‌آید. همان‌طور که در حباب صابون جهت کشش سطحی در برابر فشار خارجی اطراف آن به طرف داخل است ـــ تعادلی بین کشش و فشار برقرار می‌شود. طرح معماری سنتی که به در نظر گرفتن وزن و تکیه‌گاه نیاز دارد، گرانش نقشی برجسته بازی می‌کند. در سازهٔ کروی، نقش گرانش تقریباً مطرح نیست. اما یک گیر وجود داشت. گنبدهای نیمکره‌ای واقعاً کره نبودند، بنابراین اندازهٔ آنها تا حدی محدود بود. اما هنگامی که فولر اندیشهٔ گنبد نیمکره‌ای را با «یکپارچگی کششی» درآمیخت[1]، اندازهٔ این گنبدها می‌توانستند بزرگ‌تر باشند. این سازه‌ها با ستون و تیرهای نگهدارنده، قوس‌ها یا پشتبندها، اما با نیروهای کششی (عمل کشش بار)، استوار می‌مانند. اختراع فولر و ثبت اختراع ساختمان سبک کششی یکپارچه، محدودیت اندازه را برای این سازه‌ها تقریباً منتفی کرد. برای نشان دادن گسترهٔ این ساختمان‌های بزرگ، نیم‌کرهٔ پیشنهادی فولر به قطر ۳ کیلومتر برای پوشاندن نیویورک را در نظر بگیرید. او در سال ۱۹۶۰ تأسیسات خود را این گونه توصیف کرد *«ناوگانی از شانزده هلیکوپتر بزرگ سیکورسی می‌توانند در تمام بخش‌های آن در موقعیت ارتفاع ۱۶۰۰ متر پرواز کنند. گنبدی به عرض سه کیلومتر در سه ماه با هزینهٔ ۲۰۰ میلیون دلار... مساحتی به اندازهٔ پنجاه بلوک که شامل تمام آسمانخراش‌های منهتن بالا می‌شود. گنبدی از این نوع مانع ریزش باران و برف بر محوطهٔ حفاظت شده می‌شود و آثار تابش آفتاب و کیفیت هوا را کنترل می‌کند...»*[2]

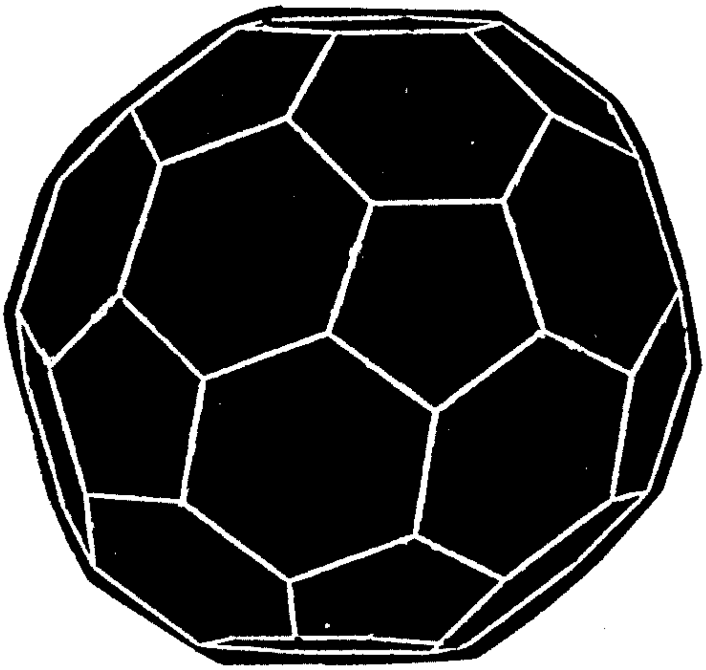


بیست وجهی

گنبد نیمکره‌ای فولر با مشکلات بسیاری هم از نظر مالی و هم از لحاظ پذیرش روبرو شد. گرچه هدیهٔ «پروانهٔ اختراع» خانهٔ Dymaxion به بنگاه آمریکایی معماری در سال ۱۹۲۸ پذیرفته نشد، دیدگاه فلسفی او از تدارک خانه‌های ارزان قیمت نیرویی محرک او بود. او در پنجاه سال

۱. فولر در سال ۱۹۶۳ پروانهٔ ثبت اختراع تمام سازه‌های یکپارچهٔ کششی را دریافت کرد.
۲. از *باکمنیستر فولر*، اثر مارتین پاولی، انتشارات تاپلینگر، نیویورک، ۱۹۶۰.

بعدی زندگی خود، درجات افتخاری معماری، جایزه‌ها، و کمک هزینه‌هایی را دریافت کرد و با تحسین و استقبال روبرو شد. به رسمیت شناخته شدن به دلیل بیش از ۳۰۰,۰۰۰ گنبد نیمکره‌ای که بر مبنای پروانهٔ ساخت او بین سال‌های ۱۹۵٤ و زمان مرگش در ۱۹۸۳ نیز همانقدر مهم است. سازه‌های نیمکره‌ای فولر منحصر به اندازهٔ ساختمان‌های بزرگ نبود. *توپ باکی*، یک چند وجهی شیمیایی است که در سال‌های ۱۹۹۰ ساخته شده است، C_{60} ملکول کربنی است که از ٦۰ کربن در رأس‌های یک بیست وجهی گرد شده تشکیل یافته است.[1] این توپ به شکل جامد برای استفاده در روغنکاری، آسانگرها، سر اسکنرهای میکروسکوپی، یا در باتری‌های جدید تولید شده است. دانشمندان تغییر سازهٔ معماری توپ باکی (چیزی شبیه به تغییری که فولر در چند وجهی داد) برای تولید ملکول‌های نظری را آغاز کرده‌اند، که پایدارتر، سبک‌تر و محکم‌تر از توپ باکی باشند.[2] حفاظت از مصالح، سبکی، پایداری و استحکام گنبد نیمکره‌ای همان ویژگی‌های مورد علاقهٔ پژوهشگران در این اشکال ملکولی جدید است.



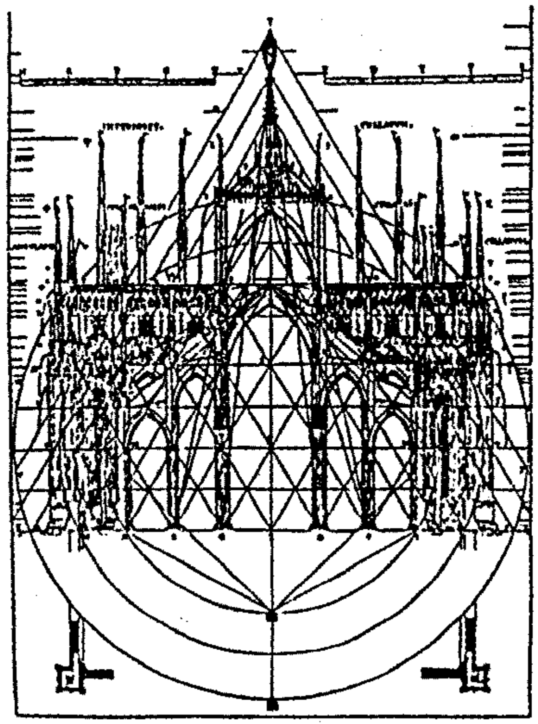
بیست وجهی ناقص

۱. به دلیل شباهت به توپ فوتبال (soccer) به آن ساکرن *soccerne* نیز می‌گویند.

۲. ملکول ۱٦۸ کربنی به نام *صمغ باکی* ـ یک سازهٔ مَشابه با صمغ جنگلی ـ را پژوهشگران در مرکز پژوهش توماس جی. واتسن آی. بی. ام. در نیویورک ساخته‌اند.

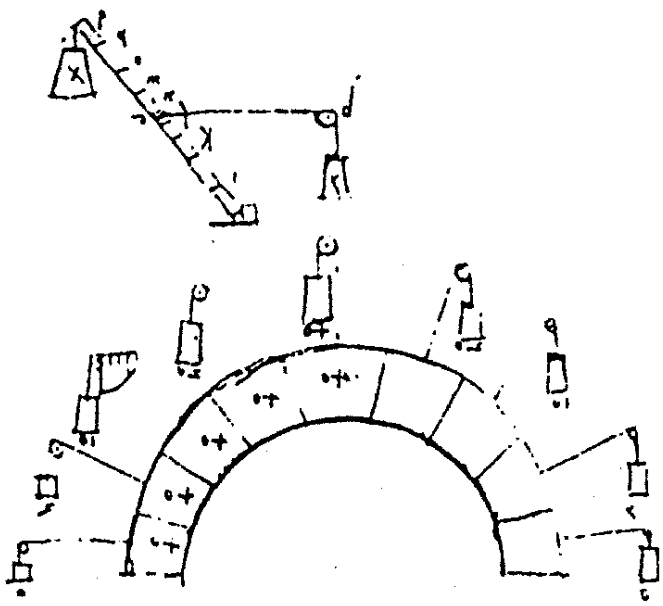
ماری قرن بیست و یکم ـ سمهای فضا پرکن

ساخت سرپناه استفاده شده است. چون مثلث و زاویهٔ قائمه، در میان آنچه شناخته شده بوده است، بیشترین پایداری را به دست می‌داده‌اند، از آنها در بناهایی مانند اهرام مصر و یوکاتان استفاده شده است. با پیشرفت در دانش، ادراک و مصالح، شکل‌ها و طرح‌های جدیدی پدید آمده‌اند. مثلاً، طی قرن‌ها کشف دینامیک قوس‌ها و طاق‌ها این امکان را فراهم آورده است که از سنگ و



طرح‌های گوتیک. اثر سزار سزاریانو، معمار کلیسای جامع میلان.

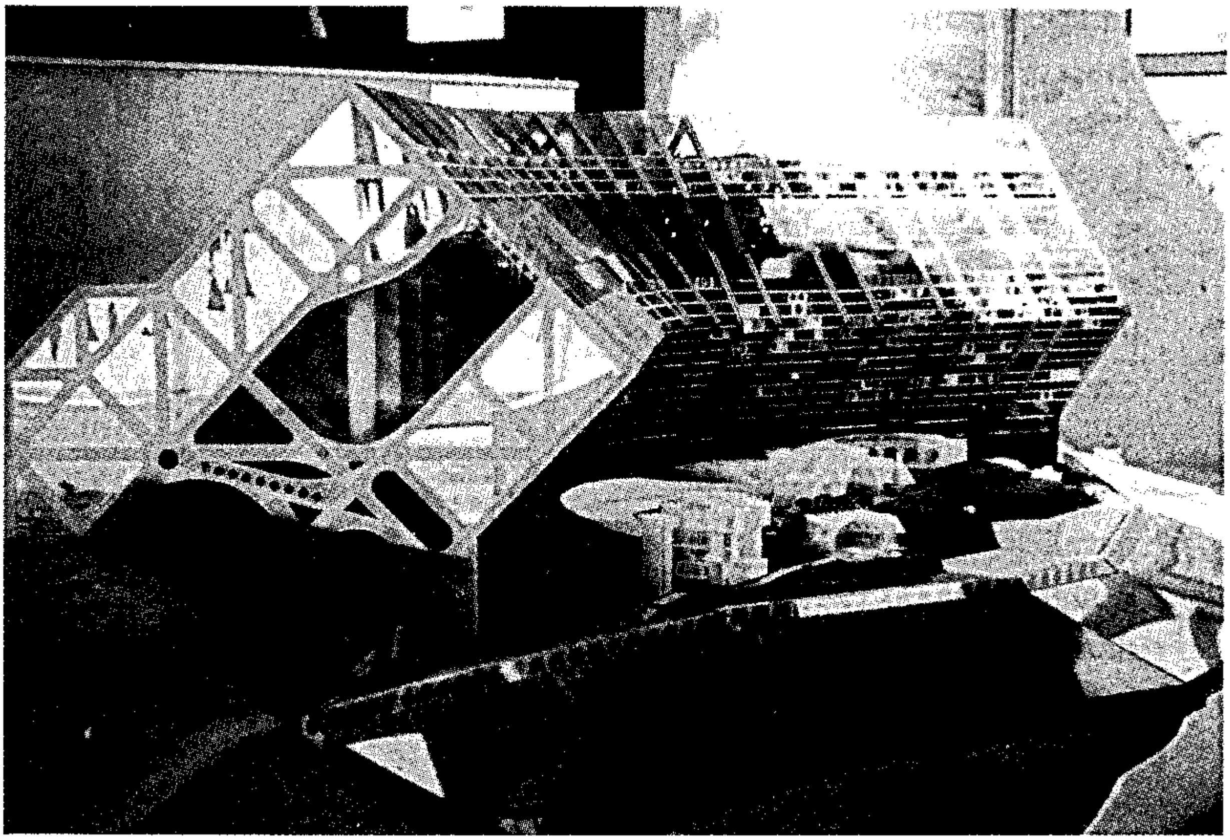
مثلث، مربع و مستطیل قرن‌ها نقش مهمی در طرح‌های معماری داشته‌اند. چوب و سنگ از نخستین مصالح طبیعی بوده‌اند که از آنها در



طرحی از یادداشت‌های لئوناردو داوینچی، که تلاش او را برای حل مسالهٔ نیروهایی که بر قوس اثر می‌کنند نشان می‌دهد.

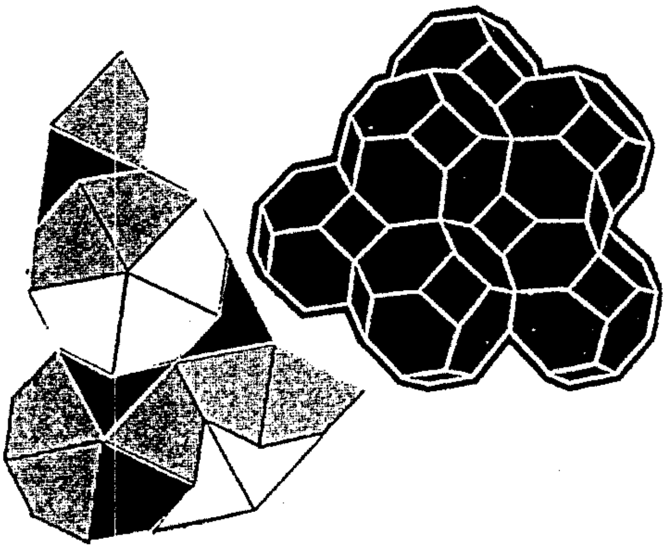
چوب در ارائهٔ این ویژگی‌ها در ساختمان آبراهه‌های رومی و کلیساهای گوتیک استفاده شود. با رواج آهن، فولاد، شیشه، سیمان، و آجر، طرح‌های جسورانهٔ جدید امکان‌پذیر شد. بعدها پلاستیک‌ها و مواد مصنوعی، همراه با سازه‌های کششی یکپارچه به معماران امکان داد تا مجموعه‌ای کاملاً جدید از شکل‌ها را مورد توجه قرار دهند. دانش ریاضی ما، همراه با مدل سازی کامپیوتری، و درک عمیق نیروهای فیزیکی که بر یک ساختمان وارد

می‌شوند بسیار افزایش یافت. اما شکل‌های معماری احجام سه بعدی ریاضی باقی ماندند. بسیاری از آنها، مانند مثلث و مربع، هرم، مخروط، کره و استوانه از هندسهٔ اقلیدسی گرفته شده‌اند. شکل‌های دیگر که نامتعارف‌ترند از شکل‌های خمیده، چادرها و نیمکره‌ای استفاده کرده‌اند. معماران از تمام این شکل‌ها در پر کردن فضا و آفریدن فضای زندگی سود جسته‌اند.



این مدل پائولو سلری از طرحی خیالی در آرکوسانتی آریزونا به کار گرفته شده است.

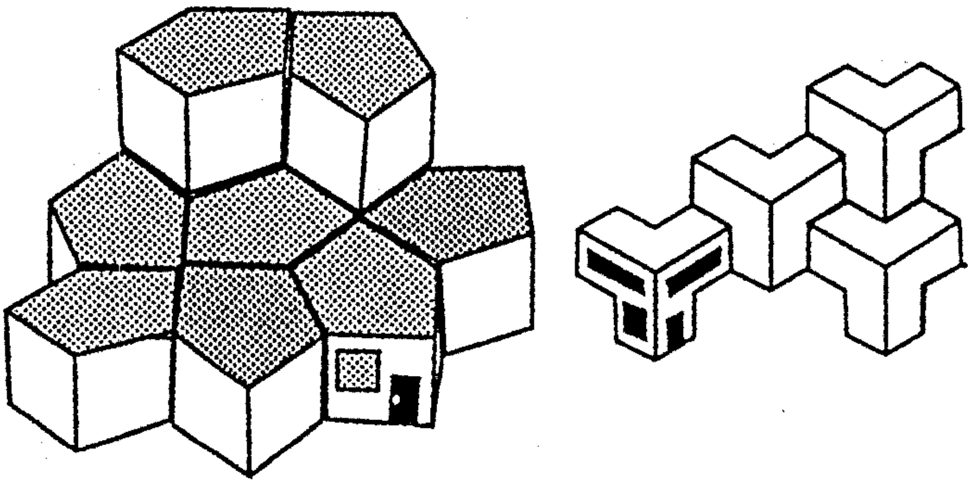
در قرن بیست و یکم چه نوع فضاهای مسکونی و ساختمان‌هایی ساخته خواهندشد؟ چه احجامی می‌توانند فضا را پر کنند؟ اگر ساخت دربرگیرندهٔ پیش ساخت، انعطاف‌پذیری و گسترش‌پذیری باشد، آنگاه اندیشه‌های خانه‌بندی فضا و سطوح نقشی برجسته بازی می‌کنند. شکل‌هایی که صفحه را خانه‌بندی می‌کنند، مانند مثلث، مربع، شش ضلعی و سایر چندضلعی‌ها می‌توانند در فضاهای واحدهای مسکونی به کار گرفته شوند. می‌توان بعدها هر زمان که لازم شد واحدهایی اضافی را به دیوارهای مشترک اضافه نمود. امکانات طراحی می‌توانند با محوطه یا تاقچه‌هایی که در برابر نور و دسترسی بیرونی گشوده‌اند بسیار جالب باشند. از سوی دیگر معمار ممکن است بخواهد احجامی را برای پر کردن فضا در نظر بگیرد، که متداول‌ترین آنها مکعب و



کاشی‌های پن‌رز پرکنندهٔ صفحه و هشت وجهی‌های ناقص پرکنندهٔ فضا.

مکعب مستطیل است. بعضی از طرح‌های مدولی در بردارندهٔ دوازده وجهی لوزی‌وار یا هشت وجهی ناقص باشد.

گزینه‌هایی که اینک در دسترس معماران است بر چالش‌های امروزی در تعیین این‌که برای پر کردن فضا به طریقی که طرح‌ها را بهینه کند، زیبایی و خلق فضاهای راحت را قابل سکونت، کدام حجم‌ها مناسب‌تر است می‌افزاید. طرح‌ها و پروژه‌های معمارانی مانند پائولو سولری، دیوید گرین، پیر لوئیجی نروی، آراتا ایسوزاکی، آی. ام پی و دیگران برای استفاده از مصالح جدید و شکل‌های هندسی نامتعارف کاملاً مناسبند. اینک، همانند گذشته، عملی و معقول بودن ساختمان را قوانین ریاضی و فیزیک تعیین می‌کنند ــ که هم در نقش ابزار و هم در نقش وسیله‌ای برای ارزیابی عمل می‌کند.



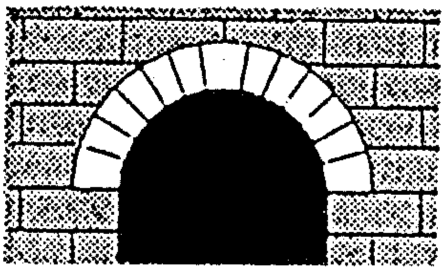
تصویر سمت چپ نشان می‌دهد چگونه این پنج ضلعی‌ها که صفحه را خانه‌بندی می‌کنند، می‌توانند به شکل منشورهای پنج وجهی درآیند که مدول واحد پرکنندهٔ فضا باشند. شکل سمت راست سازه‌ای شکل گرفته از تغییر شکل مکعب است.

طاق ـ ریاضیات
قوس‌ها

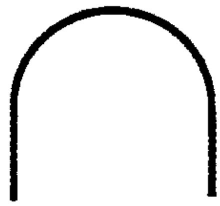
در پشت دیوار، خدایان بازی مـی‌کننـد؛
آنها با اعداد بازی می‌کنند، کـه جهـان از
آن ساخته شده است.

ـ لو کوربوزیه[1] (۱۹۶۵ـ۱۸۸۷)

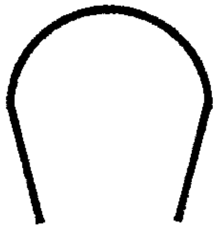
طاق پیروزی چشمگیری در معماری است. طـاق در گـذر قـرن‌هـا شـکل بـسیاری از منحنی‌های ریاضی (مانند دایره، بیضی، سهمی و زنجیری) را به خود گرفته است و بـه *قوس نیم‌دایره، قوس چهار خم، قوس سهمی شکل، قوس بیضی شکل، قوس تیزه‌دار، قوس شکسته، قوس پابلند، قوس نعل اسبی، قوس سـه برگـی، طـاق نـصرت، قـوس جهازه (طاق زرد)، قوس قوچبند، نیم قوس، قوس دیافراگمی، طاق پیشکرده یا کـاذب* درآمده است.



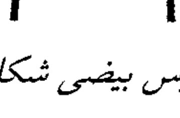
قوس نیم‌دایره



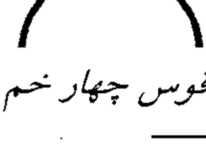
قوس پا بلند



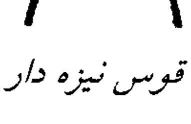
قوس نعل اسبی



قوس بیضی شکل

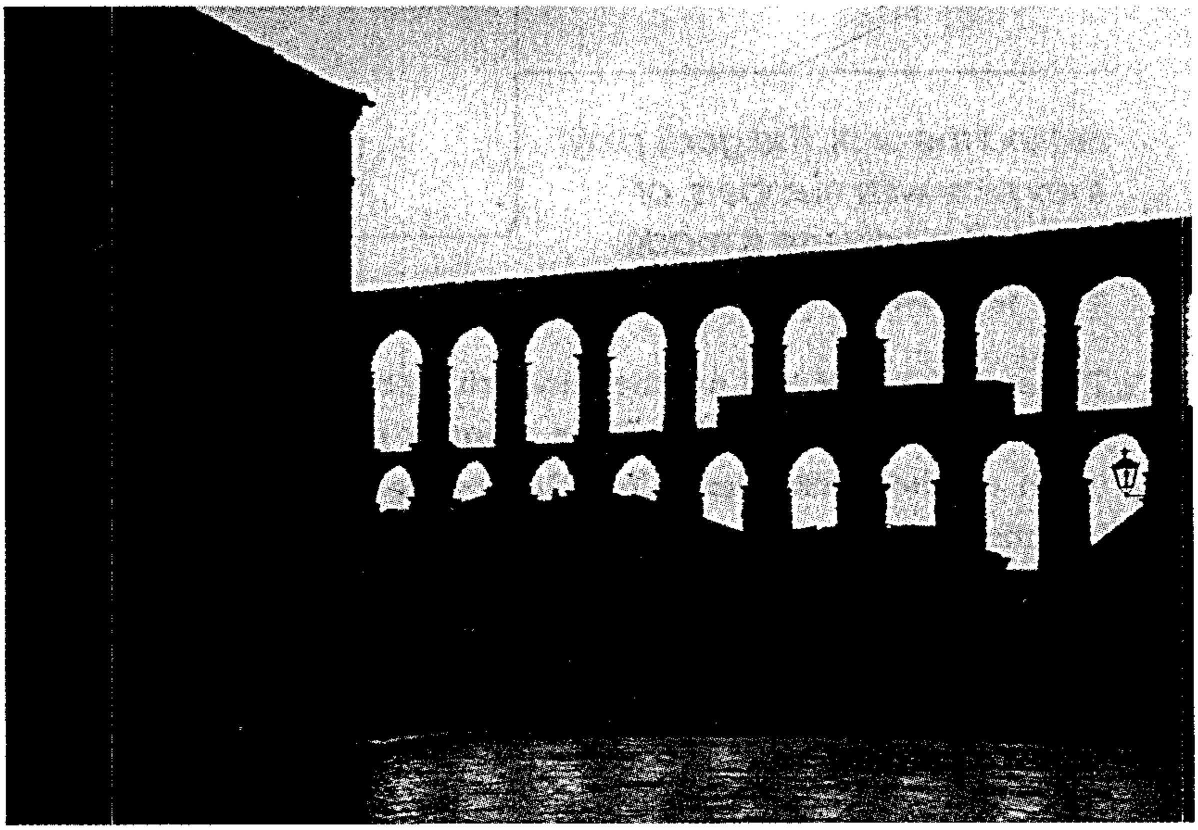


قوس چهار خم



قوس نیزه دار

۱. با نام واقعی چارلز ادوارد ژازه، معمار، نقاش و نویسندهٔ سوییسی ـ فرانـسوی، کـه نقـشی بـزرگ در معماری مدرن داشته است.



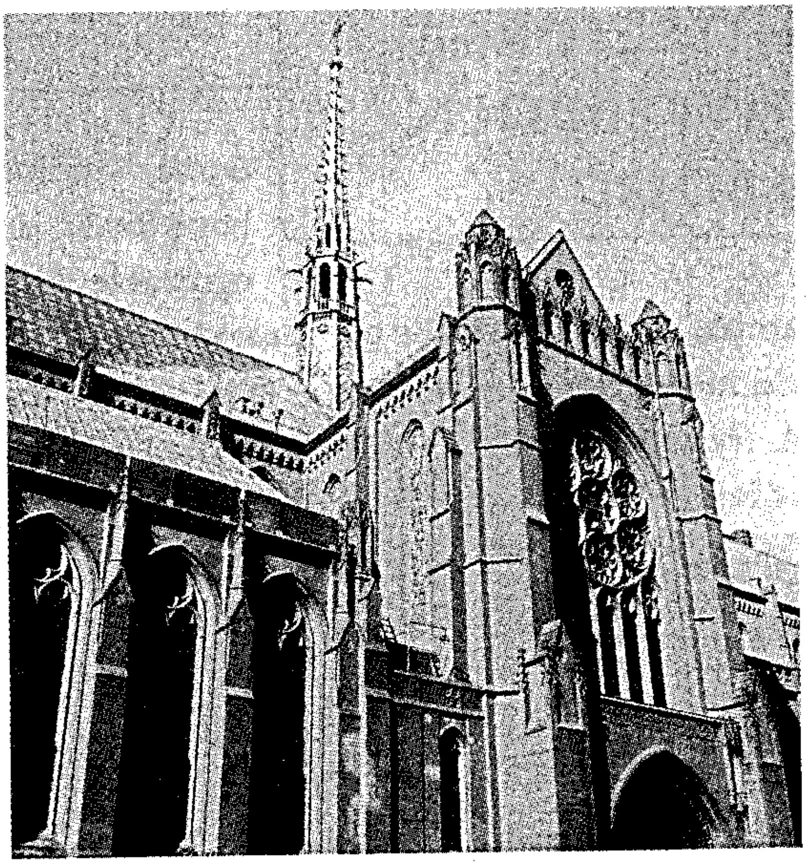
آبراههٔ رومی در سگوویا، اسپانیا، ساخته شده از ۱۴۸ قوس به ارتفاع ۲۸ متر.

در واقع، طاق روشی برای پل زدن در فضاست. ماهیت طاق به تنش‌ها امکان توزیع یکنواخت را می‌دهد، و بدین وسیله از تمرکز بر مرکز جلوگیری می‌شود. قطاع‌ها (سنگ‌های گوه مانند) که سنگ طاق هم نامیده می‌شوند، منحنی طاق را می‌سازند. قطاع کامل (یا تاج طاق) در مرکز آن است. تمام سنگ‌ها در اثر گرانش مکانیسمی قفل کننده می‌سازند. کشش گرانش باعث می‌شود که پهلوهای طاق از هم باز شوند (نیروی رانش)، نیروی ستون‌ها یا پشتبندها این نیروی رانش را خنثی می‌کنند.

تا زمان اختراع و استفاده از طاق، سازه‌های معماری بر ستون و تیر، آن طور که در معماری یونان مشاهده می‌شود؛ یا بر سنگ‌های پلکانی، آن طور که در اهرام مصر دیده می‌شود، استوار بود. معماران رومی نخستین معمارانی بودند که از طاق استفادهٔ وسیعی کردند و طاق نیم‌دایره را ساختند. با اضافه شدن کشف استفاده از سیمان و آجر از سوی آنان، انقلابی در معماری رخ داد. رومیان با استفاده از طاق، ازج[1] و گنبد

۱. فضایی تونل مانند که از تداوم طاق در راستای افقی پدید می‌آید.

توانستند تیرهای افقی و ستون‌های داخلی را حذف کنند. طاق به آنان امکان داد تا وزن ساختمان را به تکیه‌گاه‌های کمتر و حجیم‌تری منتقل کنند. در نتیجه فضای داخلی بازتر شد. پیش از ابداع طاق ساختمان اجباراً بر روی ستون‌های داخلی و خارجی زده می‌شد، و فاصلهٔ بین ستون‌ها به دقت چنان محاسبه می‌شد که تیرها بر اثر تنش‌های اضافی فرو نریزند.



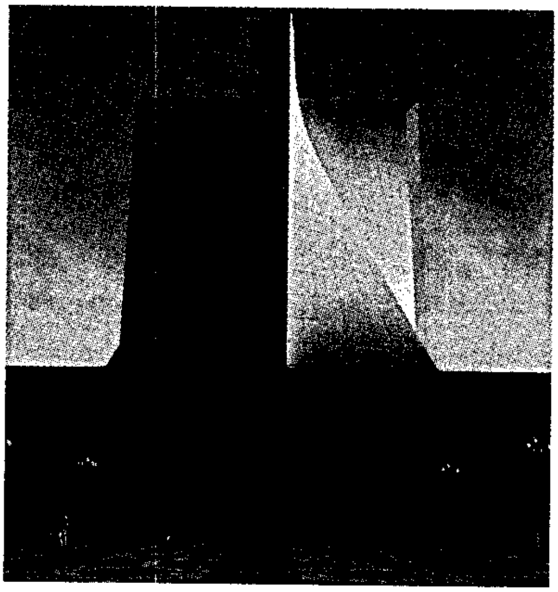
کلیسای گریس، سانفرانسیسکو، کالیفرنیا.

طاق رومی بر دایره استوار بود. معماران در طی قرن‌ها انحراف از دایره را ابتدا به قوس‌های بیضی شکل (یا تخم‌مرغی) و سپس به قوس تیزه‌دار آغاز کردند. در نتیجه ساختمان‌ها بلندتر و نورگیرتر شدند و فضای بیشتری را محصور کردند. شکل طاق تعیین می‌کرد چه قطعاتی در ساختمان وزن را تحمل کنند. در حالی‌که طاق نیم‌دایرهٔ رومی بار را به دیوارها منتقل می‌کرد، طاق گوتیک تیزه‌دار بار را به بیرون پشتبندهای ساختمان هدایت می‌کرد، و بدین‌ترتیب امکان ساختمان‌های بلندتر را فراهم می‌آورد.

طاق از مد نیفتاده است، و همانند تمام اندیشه‌های معماری، مفهوم و کاربرد آن هنوز در حال تکامل است. با اختراع و استفاده از انواع جدید مصالح ساختمانی، معماران می‌توانند از انواع منحنی‌ها و شکل‌های ریاضی استفاده و آنها را باهم در آثارشان ترکیب کنند.

معماری و سهمی‌وارهای هذلولوی

تعدادی از سازه‌های معماری به شکل‌هایی ساخته شده‌اند که کمتر قابل شناسایی‌اند. نمونهٔ برجستهٔ آن سهمی‌وار هذلولوی مورد استفاده در طرح کلیسای *سنت مری* در سانفرانسیسکوست. این کلیسا را پل ای. رایان و جان لی و مهندسان مشاور پیرلوئیجی نروی رم و پیترو بلوسکی از ام. آی. تی طراحی کرده‌اند.


کلیسای سنت مری، سانفرانسیسکو، کالیفرنیا.

نروی در مراسم پرده‌برداری از این کلیسا هنگامی که از او پرسیدند میکل آنژ در مورد این کلیسا چگونه فکر می‌کرد در پاسخ گفت: «او نمی‌توانست فکرش را هم بکند. این طرح از نظریه‌های هندسی سرچشمه می‌گیرد که در آن زمان اثبات نشده بودند.»

بالای ساختمان گنبد سهمی‌وار هذلولوی ۱۹۸ مترمربعی است با دیوارهایی با ارتفاع ۶۱ متر و بر روی چهار پایهٔ فولادی عظیمی قرار گرفته است که ۲۹ متر در زمین فرورفته‌اند. هر یک از پایه‌ها وزنی برابر با چهار میلیون کیلوگرم را تحمل می‌کنند. دیوارها از ۱۶۸۰ قاب‌بند بتنی پیش فشرده در ۱۲۸ اندازهٔ مختلف ساخته شده‌اند. ابعاد فونداسیون مربع حدود ۷۸ متر در ۷۸ متر است.

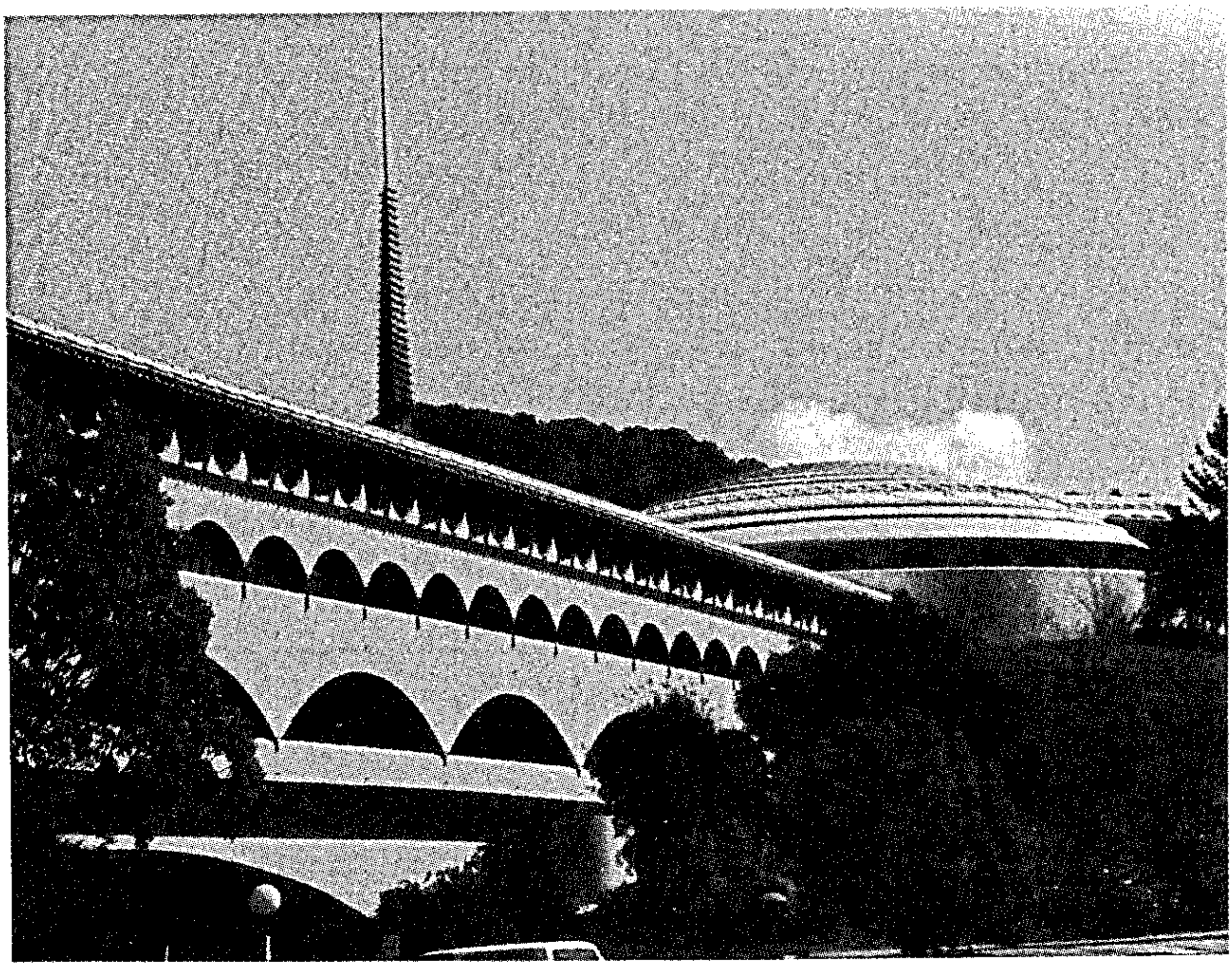
سهمی‌وار هذلولوی ترکیبی از سهمی‌وار (یک سهمی که حول محور تقارن خود دوران کرده است) و یک هذلولی سه بعدی است.

معادلهٔ آن این است:

$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=\frac{Z}{c^2} \quad a,b>0\ ,\ c\neq 0$$

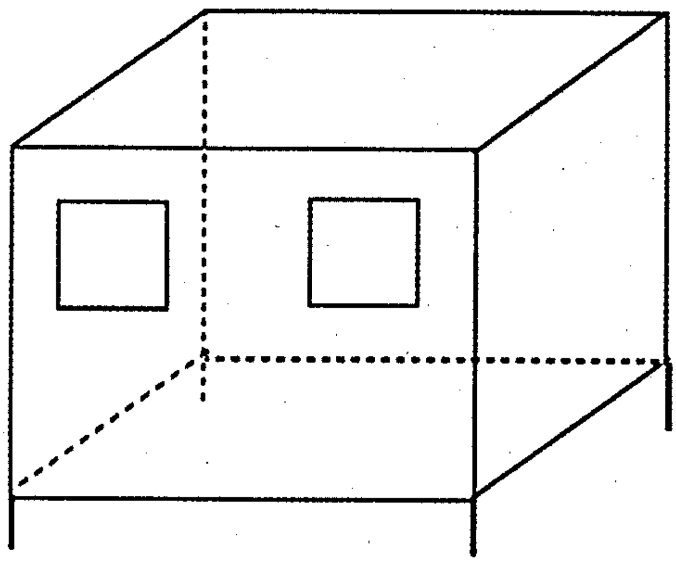
نابود سازی قوطی
معماری فرانک لوید رایت و آزادسازی فضا

کار فرانک لوید رایت سبک مشخصی دارد. اما سازه‌هایش چنان متفاوتند که این سبک در شباهت‌های ساختمان‌هایش دیده نمی‌شود، بلکه در فلسفه‌ای است که ساختار آن را به نمایش می‌گذارد. به عبارت دیگر، «معماری هنر علمی ساختن سازه‌هایی است که اندیشه‌ها را بیان می‌کند.» معماری او معماری ارگانیک نامیده شد ــ که در برگیرندهٔ چشم‌انداز، مصالح، روش‌ها، هدف و تخیلی به شیوه‌ای خاص است.



مرکز اداری شهر مارین کاونتی. کار رایت، یکی از آخرین طرح‌های اوست. مارین کاونتی، کالیفرنیا.

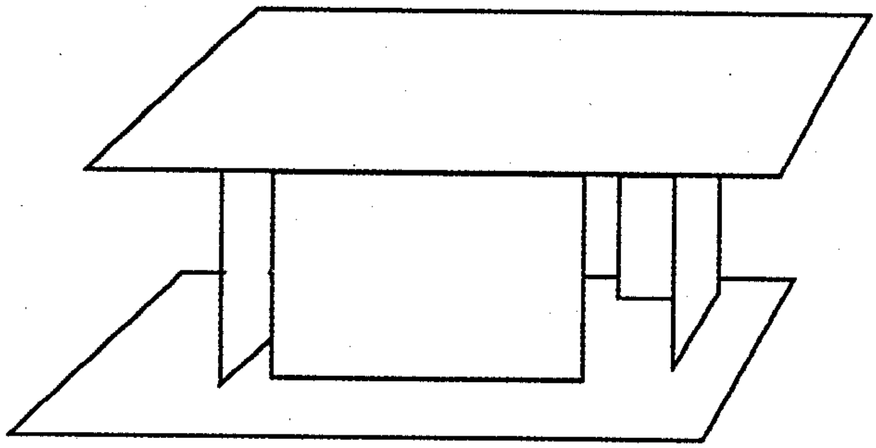
طرح‌های رایت از ساختمان‌هایی که در آنها فضای داخلی و خارجی وحدت یافته‌اند اثری عمیق بر معماری داشته است. او ساختمان‌هایی را طرح کرده است که بیرون به داخل آمده است. او این را نابودسازی جعبه نامید. فرانک لوید رایت ساختمان‌های مسکونی و تجاری را توده‌ای از جعبه‌ها و مکعب‌ها تلقی می‌کرد. در هندسهٔ اقلیدسی فضا را مجموعه‌ای از نقطه‌ها تعریف می‌کنند. گرچه در هندسهٔ اقلیدسی اغلب برای نشان دادن فضا از مکعب استفاده می‌شود.



معماری جعبه‌ای

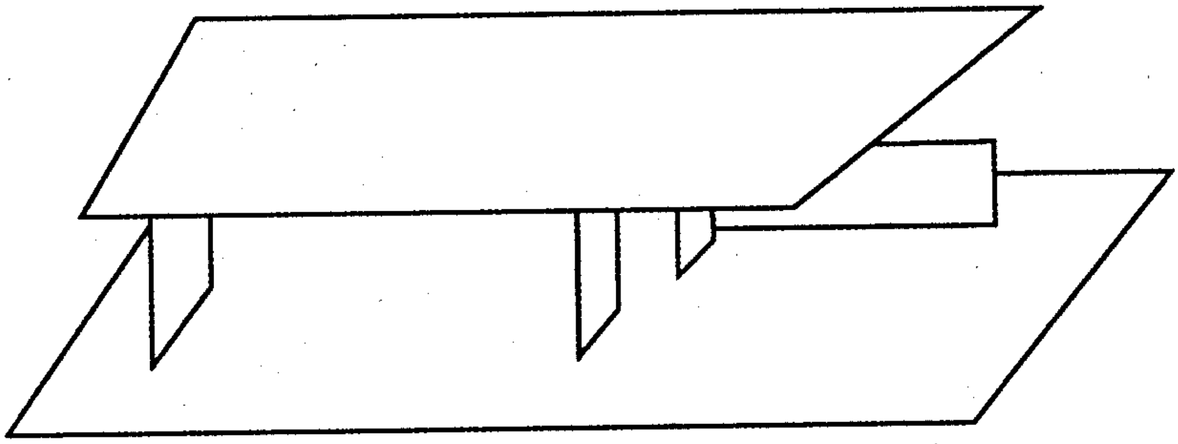
اما می‌دانیم که فضا مرز محدوده ندارد. رایت می‌خواست در آثارش احساس فضا ــ جریان نقطه‌ها از داخل به خارج ــ را عرضه کند.

او با تفکر در این مسیر، راهی برای حذف جعبهٔ سنتی از طرح‌هایش کشف کرد. او در جستجوی تغییر احساس زندانی بودن و جدایی از جهان خارج بود که مشخصهٔ معماری جعبه‌ای است. رایت پی برد که از امکانات بالقوهٔ بعضی از مصالح ساختمانی استفاده نشده است. این مصالح ــ شیشه و فولاد ــ همراه با تغییرات نوآورانه در طراحی ابزاری برای رهایی از قوطی فراهم کرد و بدین وسیله ادغام فضای داخلی و خارجی را امکان‌پذیر ساخت.



طرح‌های رایت گوشه‌های جعبه را با

حذف تکیه‌گاه‌ها از گوشه‌ها و انتقال آنها در طول دیوارها با استفاده از تیر طره از بین می‌برد. بدین ترتیب چشمان شخص ساکن در فضا به گوشه‌ها متمرکز و هدایت نمی‌شود. به فضا امکان داده می‌شود تا جریان یابد. با جایگزین کردن پایه و نعل درگاه (تیر پایه و شاه تیر) با تکیه‌گاه‌های تیر طره، دیوارها دیگر دیوارهای محصورکننده تلقی نمی‌شدند، بلکه مستقل و نامتصل بودند. هر یک از این دیوارها می‌توانستند با کوتاه شدن، امتداد یافتن یا دوباره تقسیم شدن تغییر پیدا کنند.



رایت با آزادسازی نقشهٔ کف متوقف نشد، بلکه به آزادسازی نمای قائم نیز پرداخت. او طره را کنار گذاشت و سقف را بر روی آسمان گشود. طرح‌های او روی هم انباشتن و تکرار قوطی را حذف و در عوض از ستون استفاده کرد، و آن را به بخشی از سقف تبدیل کرد. بدین وسیله تداوم فرم را پدید آورد. اینک فضا در داخل و خارج از ساختمان می‌تواند در تمام جهات حرکت داشته باشد. این آزادی فضا در پیشروی به داخل و خارج ساختمان اساس *معماری انداموار* (ارگانیک) است.[۱] «بدین ترتیب معماری انداموار آن نوع معماری است که شما احساس می‌کنید و می‌بینید که همهٔ اینها مانند بعد سوم مشاهده می‌شوند. فضایی که به کمک بعد سوم زنده است.»[۲]

---

۱. شیوهٔ نوین معماری برخاسته از آمریکا به پیشگامی فرانک لوید رایت که معماری را عضوی از طبیعت و محیط پیرامون می‌دانست و از شکل‌ها، فضابندی‌ها و موازین هندسی و سنتی آن هنر تا حدامکان و به مقتضای ملاحظات زیستی و انسانی پرهیز می‌جست (*فرهنگ هنرهای تجسمی*، پرویز مرزبان و حبیب معروف. انتشارات سروش).

۲. فرانک لوید رایت. *معماری آمریکایی*. انتشارات ادگار کاوفمن. نیویورک. ۱۹۵۵.

انسان‌ها همیشه بازی کرده‌اند و به معما پرداخته‌اند. کتاب‌هایی که به سرچشمهٔ بازی‌های مختلف پرداخته‌اند نمونه‌هایی از بازی‌های باستانی را نشان می‌دهند که امروز هم اجرا می‌شوند. این عکس از پاپیروسی مصری است که قدمت آن به ۱۲۰۰ پیش از میلاد بازمی‌گردد. این نمایش مضحک بز و شیری است که «سنت» بازی می‌کنند. این بازی متداول‌ترین بازی زمان خود بود، و تمام گروه‌های مردم آن را بازی می‌کردند. متأسفانه مدارکی باقی نمانده است که نشان دهد این بازی دقیقاً چگونه انجام می‌گرفته است. اما یکی از اشکال آن با استفاده از یافته‌ها و آثار باستان‌شناسان طرح‌ریزی شده است.

افسون منطق، سرگرمی و بازی

سه تفنگدار ریاضی

قضیه‌های معمایی ریاضی
منطق خود را به‌کار اندازید
بازی‌هایی که ریاضیدان‌ها بازی می‌کنند
تعدادی از سرگرمی‌های ریاضی
مربع‌های جادویی و سرگرمی‌های دیگر
مسألهٔ پل کونیگزبرگ روزآمد شده
جنون صفحهٔ شطرنج
چند بازی قدیمی

منطق هنر اشتباه کردن با اعتماد به نفس است.
ـ موریس کلاین

منطق و ریاضی قطعاً باهم همراهند. اما بیشتر افراد ریاضی را بازی و سرگرمی به‌شمار نمی‌آورند. حال آن که بازی‌ها و سرگرمی‌ها بخشی جدایی‌ناپذیر از ریاضیاتند. پدید آمدن بسیاری از اندیشه‌های ریاضی حاصل دنبال کردن یک مسأله یا مفهوم کنجکاوی برانگیز بوده است. به نظر می‌رسد نیرویی نادیدنی بعضی افراد را به سوی ساعت‌ها کار دربارهٔ مسایل و معماها می‌راند. آنان به گروهی تعلق دارند که از ریاضیات لذت می‌برند و مجذوب آن می‌شوند. ممکن است انسان، پیش از آن‌که آن را عملی سازد، ساعت‌ها و روزها را صرف کشف پیامدهای چیزی کند که ظاهراً قرار بوده است تنها یک وقت گذرانی ساده باشد. تاریخ گواه بر آن است که مسایل، چالش‌ها، بازی‌ها و سرگرمی‌ها گاهی به کشف‌هایی بزرگ، و حتی به آفریدن حوزه‌های جدیدی در ریاضیات انجامیده است. در واقع، ارشمیدس، ریاضیدان بزرگ یونانی به این دلیل کشته شد که مجذوب مسایل ریاضی شده بود. صفحات بعد تعدادی از بازی‌ها، معماها و تمرین‌های ذهنی را نشان می‌دهد که ریاضیدانان به پرداختن به آنها اشتیاق داشته‌اند.

*در حدود سال ۲۱۲ پیش از میلاد، سیراکوس به دست رومیان افتاد. ارشمیدس، در آن زمان، در منزل خویش بر روی مسأله‌ای ریاضی کار می‌کرد. هنگامی که سربازی رومی وارد منزل او شد و به او دستور داد کارش را متوقف کند، ارشمیدس توجهی به او نکرد و سرباز خشمگین او را با شمشیر کشت.**

* برای اطلاعات بیشتر کتاب *حکایت‌های علمی*، ص ۲۴۱ از همین مجموعه را ببینید. ناشر

قضیه‌های معمایی ریاضی

معماها قرن‌هاست که مطرح بوده‌اند. تعدادی از آثار لویس کارول در این رده قرار می‌گیرند. این معماها، امروزه با کتاب‌هایی مانند ماجراهای معمایی دکتر اکو اثر دنیس شاشا و مسافرانی از سیارهٔ سرخ اثر دکتر کریتون مورد توجه عموم قرار گرفته‌اند.

مسأله‌های منطقی نیز همان‌طور که در زیر خواهدآمد، می‌توانند با این داستان‌ها جذابیت بیشتری پیدا کنند.

* * *

آموزگار شروع به خواندن کرد ــ

از آن هفته‌هایی در سیرک بود که به نظر می‌آمد همه چیز با مشکل روبرو است. ابتدا یکی از اسب‌های رقصندگان بندباز لنگ شد. سپس دلقک اصلی از کوره دررفت زیرا بچهٔ بانوی چاق از وسایل گریم او استفاده کرده بود. مادره و زنش دربارهٔ بندباز بگومگو کرده بودند. ضربهٔ نهایی هنگامی وارد آمد که مادره را زیر فرفرهٔ بزرگ مرده یافتند. عصایی را که همیشه از آن استفاده می‌کرد در کنار جسدش یافتند. یک لیوان آب که واژگون شده بود بر روی میزش بود، و یک کپهٔ کوچک خاک اره در نزدیکی جسدش.

آموزگار خواندن را قطع کرد و پرسید: «فکر می‌کنید چه اتفاقی برای مادره افتاده بود؟ چطور مرده بود؟ می‌توانید سؤال‌هایی از من بپرسید که جوابش «آری» یا «نه» باشد. پس کلاه‌های تفکرتان را سرتان بگذارید و ببینید منطق شما را به کجا هدایت می‌کند» فوراً دست‌ها بالا رفت. این‌گونه داستان‌های منطقی حتی خجالتی‌ترین شاگردها را تحریک می‌کند. پرسش‌ها و پرده‌برداری از نمایش مرگ در سیرک آغاز شد.

دانش‌آموزی پرسید: «کار مادره در سیرک چه بود؟» آموزگار هشدار داد «به یاد داشته باشید. فقط پرسش‌هایی که پاسخ‌شان آری یا نه است.»

کارول پرسید «مادره مدیر بود؟» «نه». «نشانه‌هایی از خشونت باقی مانده بود؟» آموزگار گفت «نه».

«چیز دیگری در کنار لیوان بود؟». «بله، بود». «مهم است بدانیم چه بود؟». «بله»

از دهان بیل پرید که «ساندویچ بود؟». «نه».

تام پرسید «قرص بود؟». «بله»

تام ادامه داد «مرده بود برای آنکه قرصش را نخورده بود» آموزگار گفت «نه، نه دقیقاً».

تری پرسید «مدادتراش روی میزش نبود؟» «نه»

تری به همکلاسی‌اش گفت «باید بفهمیم چگونه مرده است». دانش‌آموزان پیش از آنکه سؤالی را مطرح کنند به بحث در بین خود پرداختند.

تام با تحلیل صحنهٔ مرگ گفت «می‌دانیم که حالش خوب نبوده است، زیرا قرص می‌خورده است. و می‌دانیم که با خشونت نیز کشته نشده است.»

«درست است. باید از بیماری مرده باشد.» و از آموزگار پرسید «بر اثر حملهٔ قلبی مرده است؟» «بله».

گری کمی با احساس رضایت از خود گفت «این یکی که حلش آسان بود». باربارا یادآوری کرد «تمام نشد. ما نفهمیده‌ایم علت حملهٔ قلبی او چه بوده است.»

گری پرسید «قطعاً فهمیده‌ایم. قرصش را نخورده بود. درست است آقای میسن؟»

آقای میسُن جواب داد «درست نیست.»

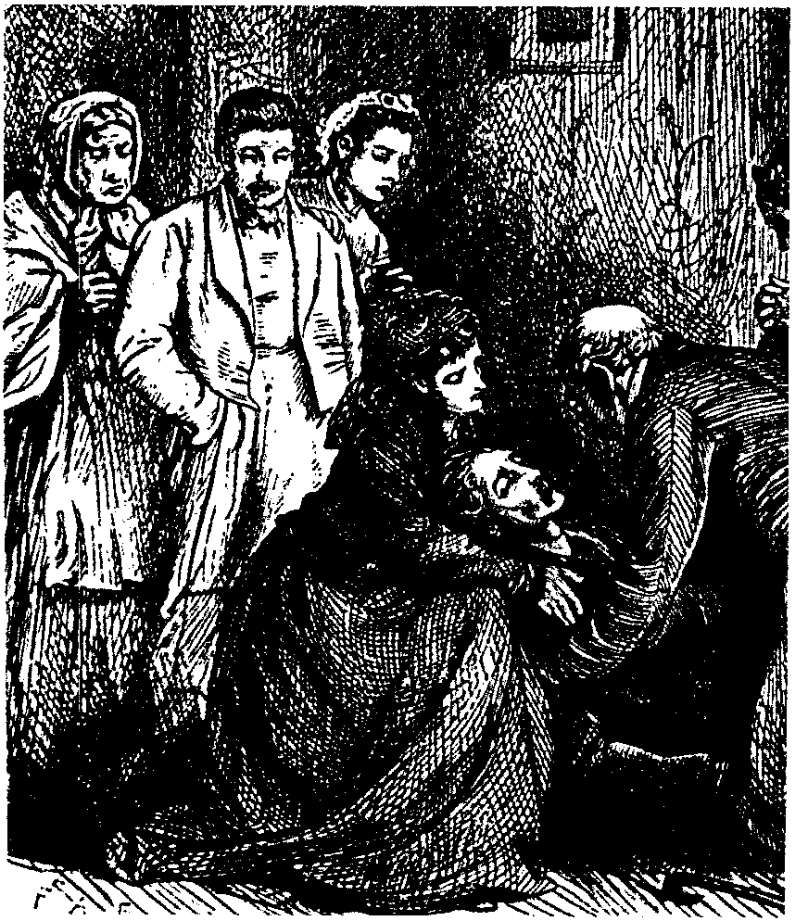
شاگردان دوباره به بحث پرداختند. تری از همکلاسی‌هایش پرسید «تمام شواهد اولیهٔ این موضوع را در نظر گرفته‌ایم؟»

باب که کمتر در کلاس حرف می‌زد گفت «نه، ما به خاک اره‌ها، کار او در سیرک، چوبدستی، همسر آقای مادره، و بندباز توجه نکرده‌ایم.»

تری با هیجان گفت «حق با توست باب.» تام افکارش را زیر لبی بیان کرد «ما باید به همهٔ این موارد بپردازیم. به عصا، خاک اره، حملهٔ قلبی و مسایل زناشویی». «پیدایش کردم. چوبدستی و خاک اره‌ها باهم ارتباط دارند، به

دلایلی چوبدستی با اره کوتاه شده است. خاک اره‌ها را ول کنیم» آموزگار گفت «بله». تام ادامه داد «شاید مادره از اینکه کسی چوبدستی را خراب کرده است ناراحت شده است.» «نه»

باب پرسید «شاید نمی‌دانسته است که عصایش کوتاه شده است؟» آقای میسن پاسخ داد «درست است». باب پرسید «پس وقتی به آن تکیه داده بود، پریشان شده بود. اما چرا؟» کارول فریاد زد «برای این‌که برای او مناسب نبود، قد او خیلی بلند بود!» هیجانی در میان دانش آموزان پدید آمد که به راه حل مسأله نزدیک شده‌اند. آموزگار گفت «تا اینجا خوب است.» و آنان را تشویق کرد که ادامه دهند. گری از سایر دانش‌آموزان پرسید «اما چرا باید بلندقدتر شدن او را چنین پریشان کرده باشد؟» تام فریاد زد «این دفعه واقعاً پیدایش کردم» و دستانش را تکان می‌داد و نمی‌توانست احساساتش را مهار کند. «مادره کوتوله بود!» هیجان به دانش‌آموزان دیگر سرایت کرده بود. آموزگار فریاد زد «بله، دیگر چه؟»



این بار دستان تری به سرعت بالا رفت. آموزگار سر تکان داد و او داستان را خلاصه کرد ـ «مادره کوتوله بود. بندباز و همسر او یک روز که او از آن استفاده نمی‌کرد عصایش را کوتاه کرده بودند، وقتی خواست از آن استفاده کند، برایش کوتاه بود. فکر کرد دارد بلندقدتر می‌شود، که مشکل قلبی خطرناک او را وخیم‌تر کرد. نتوانست به موقع پیش پزشک برود. چطور است آقای میسُن؟»

آموزگار با لبخند پاسخ داد «خودش است. در این مورد کار بزرگی انجام دادید. شاید جواب مسألهٔ هفتهٔ بعد را نتوانید بدهید.»

در اینجا چند مسألهٔ مشکل ارائه می‌شود که به کمک یک یا چند نفر از دوستانتان آنان را حل کنید.

* * *

۱) سه شنبه بود و تام و جری همکارند. وقتی زمان خانه رفتن تام رسید، جری به او اجازهٔ رفتن نداد. چرا؟

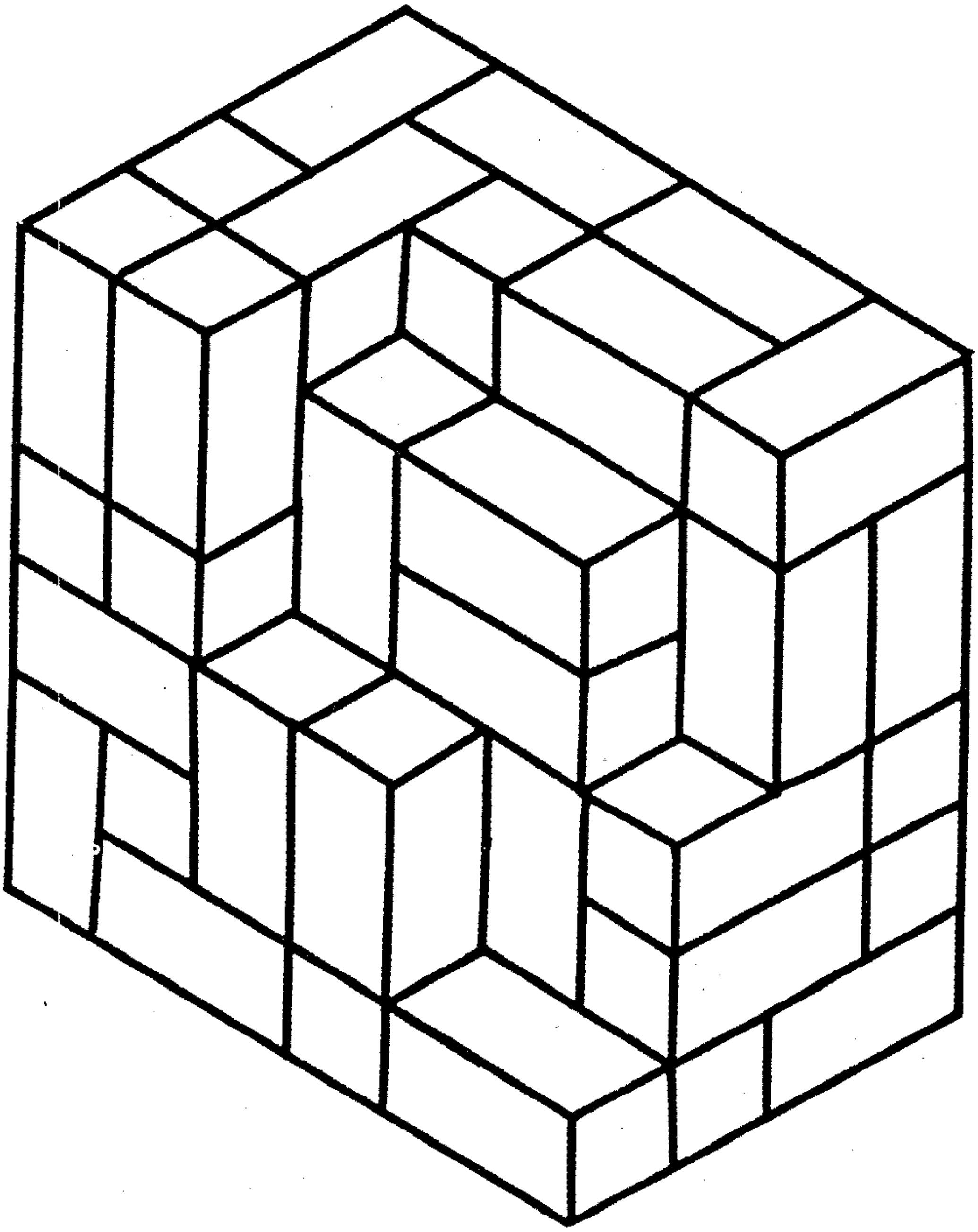
۲) اریک وارد بار شد و یک لیوان آب خواست. مرد پشت بار نگاهی به اریک انداخت، هفت‌تیرش را کشید و به طرف اریک نشانه رفت. اریک یکه خورد. تشکر کرد و بدون خوردن یک لیوان آب از بار خارج شد. ***داستان چه بود؟***

۳) وقتی مری به خانه آمد به آشپزخانه رفت. وقتی شوهر مرده‌اش را در کف آشپزخانه دید ناگهان جیغ کشید. روی میز ظرفی چپه شده و آب از ظرف روی میز جاری شده بود. پنجرهٔ بالای میز آشپزخانه باز بود. ***چه اتفاقی افتاده بود؟***

منطق خود را به کار اندازید

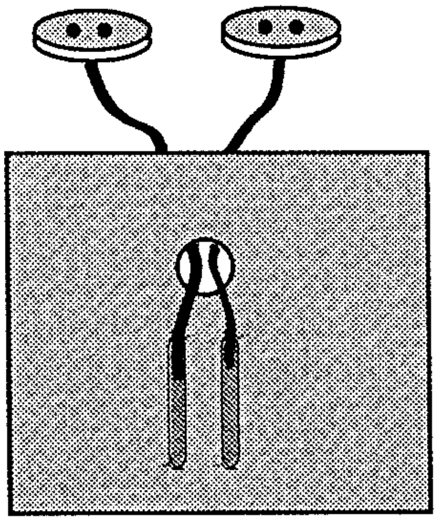
وهم حجم مکعب

چشم ما با دیدن این معما شروع به پرش می‌کند. تعداد بلوک‌های ۱ × ۱ × ۲ را که این ترکیب را ساخته است معین کنید.



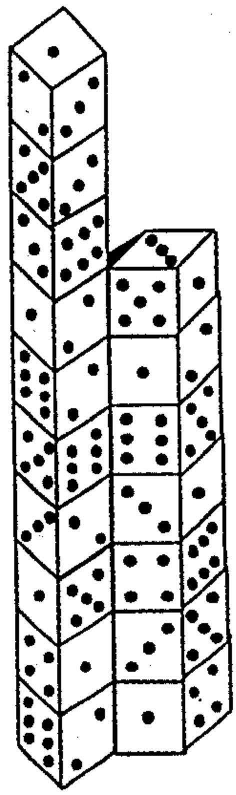
ممکنِ غیرممکن

چگونه می‌توان این نخ را بدون جدا کردن دکمه‌ها، بریدن نخ‌ها، یا پاره کردن کاغذ، از کاغذ جدا کرد؟

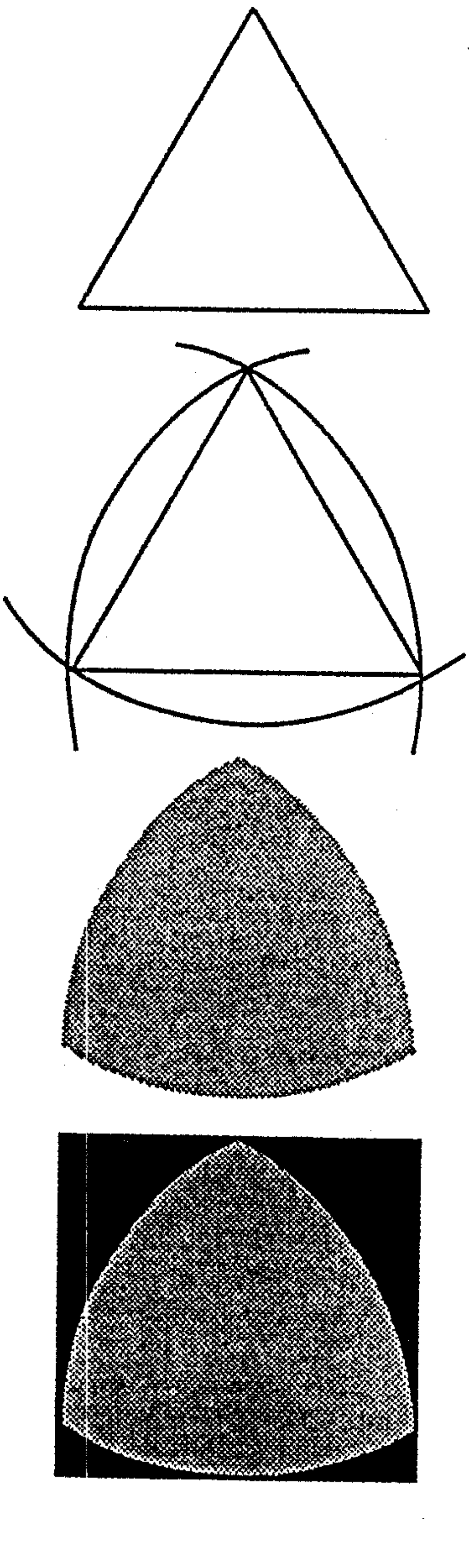


روی هم چیدن تاس‌ها

فرض کنید بتوانید تاس‌ها را دور بزنید و تمام وجوه در معرض دید آنها را ببینید. مجموع خال‌های وجوه مخفی را پیدا کنید.

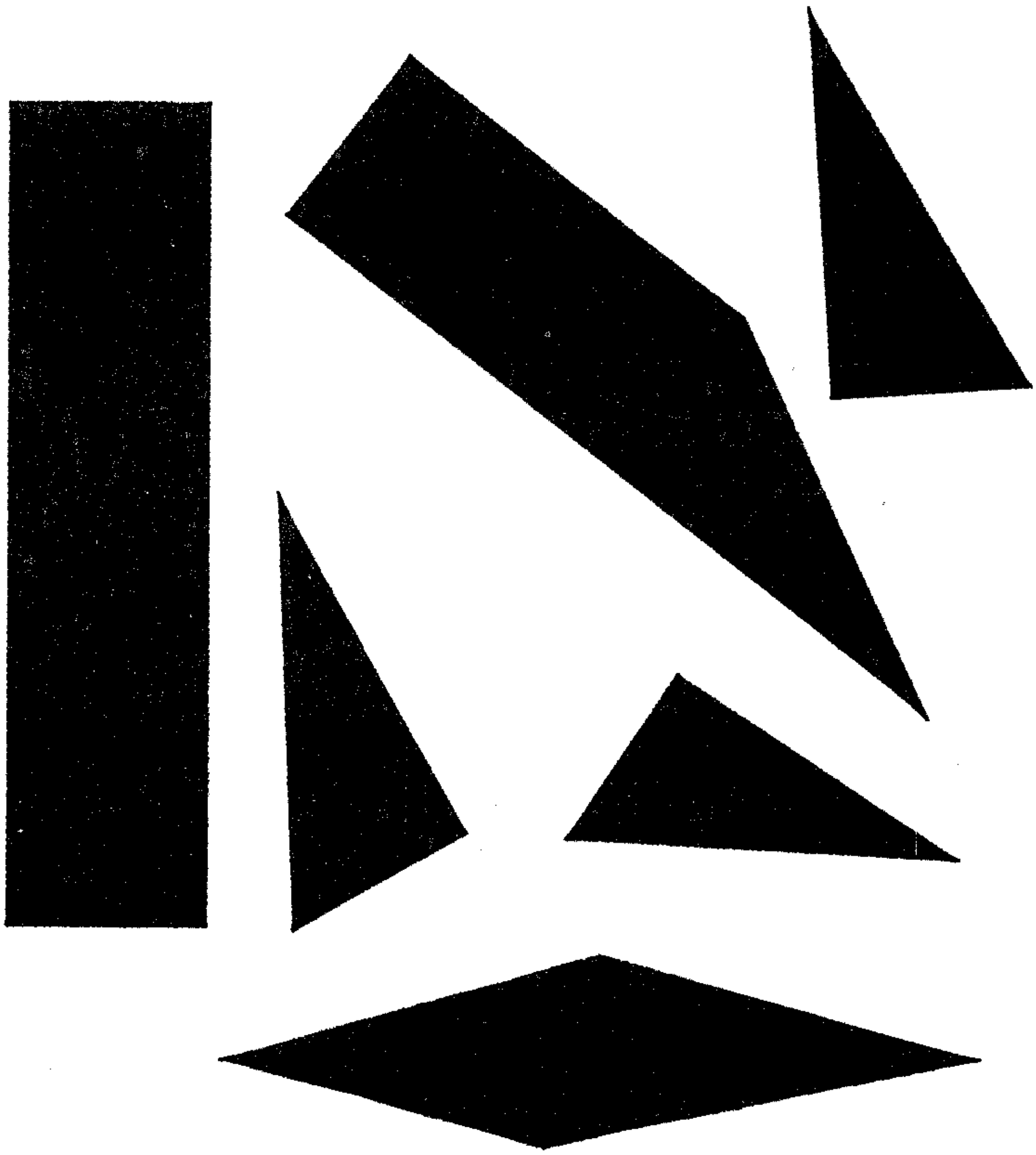


ا تمام چرخ‌ها
ی گردند؟



رولو (rowleau) شکل جالبی است. برای ساختن آن با مثلث متساوی‌الاضلاع شروع کنید. از هر رأس با پرگار دایره‌ای به شعاع ضلع مثلث بزنید. بین دو رأس دیگر قوسی بزنید. اگر آن را از مقوا بسازید می‌توانید غلطیدن آن را امتحان کنید. در واقع مانند غلطیدن دایره به نرمی انجام می‌گیرد. مرکز آن محل تقاطع سه میانهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع است. می‌توانید مدادی در این مرکز قرار دهید و از آن به‌جای فرفره استفاده کنید. می‌توانید آن را در یک مربع محاط کنید، و ببینید که می‌تواند در آن بچرخد. بدین‌ترتیب در موتور وانکل، پیستونی به این شکل وجود دارد که مانند موتور خودرو مزدا در محفظه‌ای مربع، می‌چرخد.

معمای حروف بزرگ کتابی



این قطعه‌ها را ببرید یا در ذهن خود از نو مرتب کنید. بعضی از آنها را بایـد چرخانـد، یا انتقال داد. یکی از حروف بزرگ الفبای انگلیسی به دست می‌آید. موفق باشید!

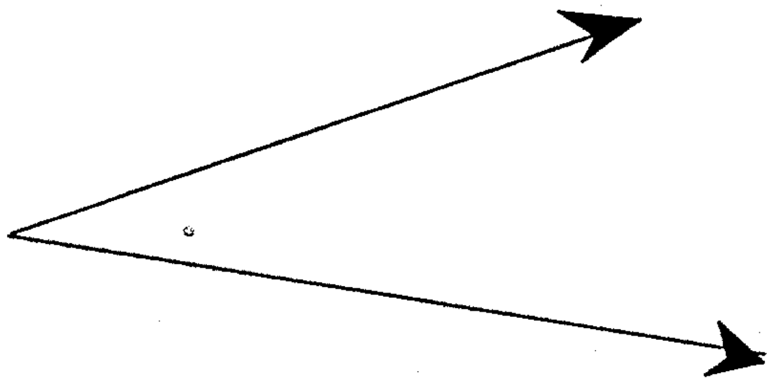
چگونه یک معما می‌تواند قطهٔ عطفی باشد؟

سیمون پواسون (۱۸۴۰ـ ۱۷۸۱) در یافتن شغل مناسب برای خود با مشکل روبرو شده بود. خانواده‌اش از او می‌خواستند به دنبال پزشکی یا حقوق برود. اما او استعداد و علاقه‌ای به آنها نداشت. یک معما ظاهراً مسیرش را تعیین کرد. داستان این بود که یک نفر در یک مسافرت به او معمایی شبیه به آنچه در پی می‌آید داد که او فوراً آن را حل کرد. او با پی‌بردن به این‌که استعداد ریاضی و علاقه به آن دارد فهمید که می‌خواهد در زمینهٔ ریاضیات فعالیت کند. او برای آثارش در مکانیک آسمانی، الکتریسیته، و مغناطیس، و برای کشفیاتش در کاربردهای انتگرال و سری فوریه شهرت یافت. علاوه بر آن او به مطالعهٔ نظریهٔ احتمالات پرداخت و توزیع پواسون را کشف کرد.

شیر فروشی دو سطل ۱۰ لیتری شیر داشت. دو مشتری هر یک دو لیتر شیر می‌خواستند. یکی از آنها ظرفی پنج لیتری و دیگری ظرفی چهار لیتری داشت. شیرفروش مسأله را چگونه باید حل می‌کرد؟ این شکل از مسأله را سام لوید مطرح کرده است.

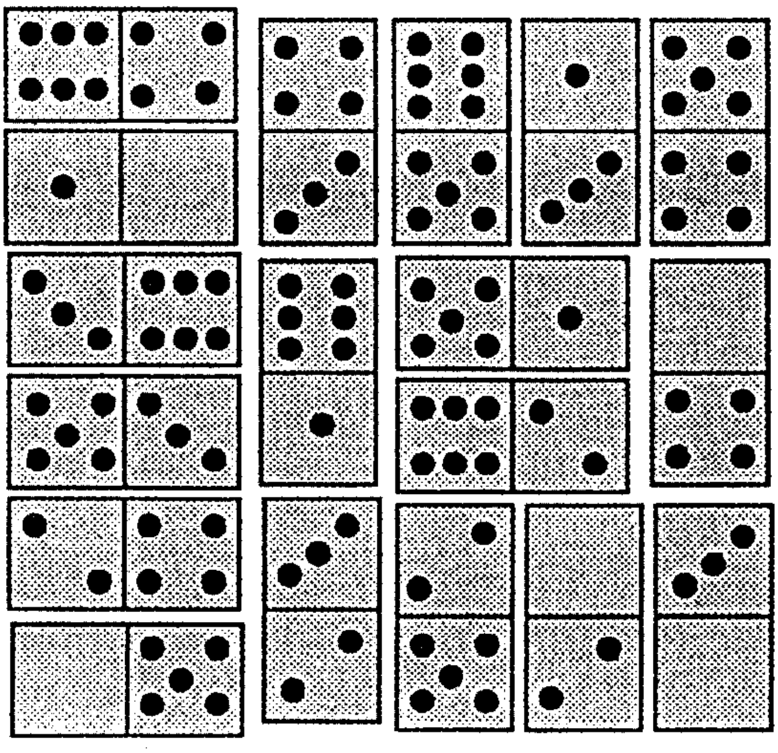
این کار شدنی است؟

تنها با استفاده از یک خط‌کش مدرج می‌توانید زاویه را نصف کنید، و ثابت کنید چرا نصف شده است؟



می‌توانید مربع لاتینی بسازید؟

اگر هیچ عددی در هیچ سطر یا ستون یک مربع دومینوی ۱۸ قطعه‌ای تکرار نشود مربع لاتینی نام دارد. مربع زیر یک مربع لاتینی نیست. چون اعداد در بعضی از سطرها یا ستون‌ها تکرار می‌شوند. مثلاً ردیف بالا دو ٦ و دو ٤ دارد و ستون سمت راست دو ٤ دارد. آن را از نو مرتب کنید یا دوباره بچینید تا مربع لاتینی به‌دست آید.



بازی‌هایی که ریاضیدانان بازی می‌کنند

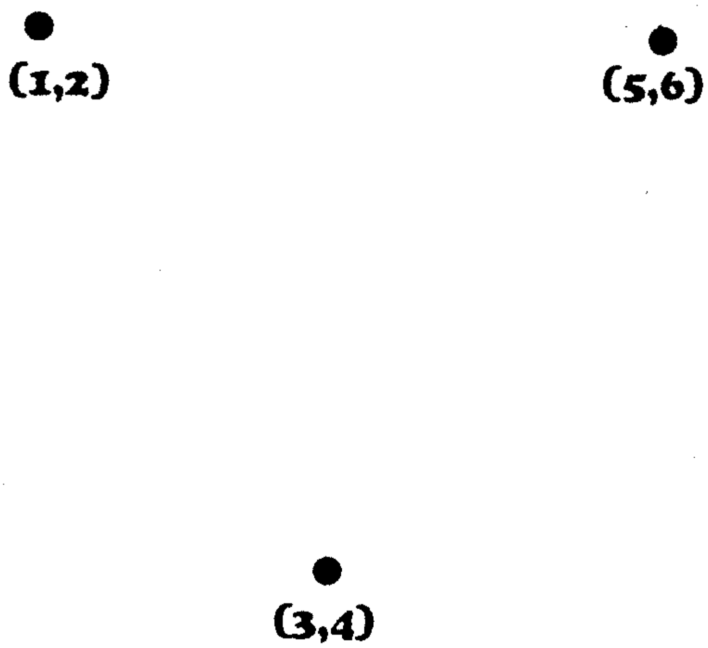
زی آشوب

۱) بر روی یک صفحهٔ کاغذ، آن‌طور که نشان داده شده است، سه نقطهٔ (۲ و ۱)؛ (٦ و ٥) و (٤ و ۳) را علامت بگذارید.

۲) نقطه‌ای را برحسب تصادف انتخاب کنید. تاس بریزید.

۳) قاعده: $\frac{1}{2}$ فاصلهٔ بین نقطهٔ شروع و یکی از سه نقطه که عدد روی تاس را دارد بگیرید.

٤) مرحلهٔ سوم را به تعداد نامحدودی تکرار کنید.



این نخستین بار نیست که تصادف از نظمی تبعیت می‌کند. کنت بوفون طبیعی‌دان قرن هجدهم فرانسه مسألهٔ سوزن[1] را ابداع کرد و π را به احتمال نتایج مطلوب ارتباط

۱. کف اتاقی از نوارهای موازی چوب پوشانده شده است که عرضشان برابر است. سوزنی را به کف اتاق می‌اندازیم. احتمال افتادن سوزن در بین نوارهای چوبی چقدر است؟

داد. به همین نحو آر. چارترز در سال ۱۹۰٤ کشف کرد که احتمال اینکه دو عدد تصادفی مقسوم علیه مشترک نداشته باشند $\frac{6}{\pi^2}$ است. میشائل بارنزلی ابتدا از تصادف همچون مبنایی برای ساختن شکل‌های طبیعی استفاده کرد. بدین ترتیب او *بازی آشوب* را اختراع کرد. راه‌های بسیاری برای انجام این بازی وجود دارد. مثلاً از سکه یا تاس می‌توان برای ایجاد رویداد تصادفی استفاده کرد. قواعد نیز انعطاف‌پذیرند. نمونهٔ بالا از سه نقطه ثابت، یک نقطهٔ تصادفی و تاس استفاده کرده است. نتیجه شگفت‌آور است. فرایندی تصادفی به نظم می‌انجامد.

نمونهٔ دیگر انتخاب محل نقطه برحسب تصادف است. قاعده‌ای برای این‌که سکهٔ انداخته شده شیر باشد بسازید (مثلاً دو واحد به راست و یکی بالا) و قاعده‌ای برای که خط باشد. سکه را بیندازید و ببینید چه اتفاقی می‌افتد.

بارنزلی علاوه بر کشف این‌که حد فرایند تصادفی (که از قواعدی پیروی کند) برخال پدید می‌آورد، روشی تصادفی برای تکثیر یک شکل معین ابداع کرد.

بازی‌های قدیمی جنگ اعداد[1]

بازی فیلسوفان می‌تواند یک بازی بسیار ریاضی باشد. اگر قرار است در سطح بالا بازی شود، درک خوبی از نظریهٔ اعداد و راهبردی قوی ضروری است. بازی فیلسوفان قدمتی به اندازهٔ قرن یازدهم دارد، و شاید از بیزانس یا اسکندریه سرچشمه گرفته باشد. در سده‌های میانه بود که روشنفکران آن را به بازی برگزیده تبدیل کردند و آن را فراتر از شطرنج دانستند.

ساختار فیزیکی بازی

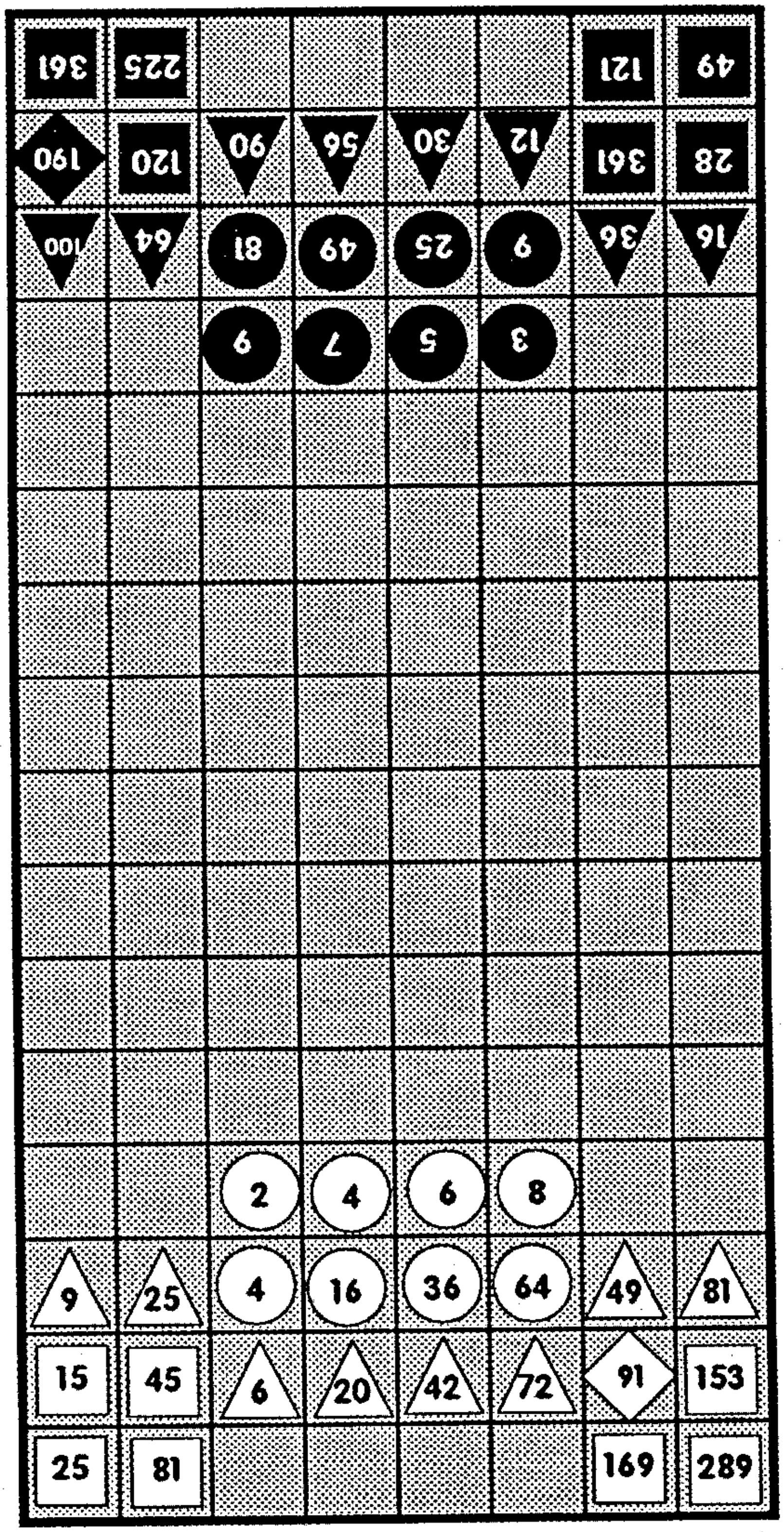
صفحهٔ این بازی مستطیلی تشکیل شده از ۱٦ × ۸ مربع است. مهره‌های آن به شکل دایره، مربع، مثلث و شبه هرم‌اند. یکی از بازیکنان مهره‌های سفید دارد که مهرهٔ زوج نامیده می‌شوند، و دیگری مهره‌های سیاه که مهرهٔ فرد نام دارند. هر بازیکن ۸ دایره، ۸ مثلث، ۷ مربع و یک هرم دارد. هرم سفید شش وجهی است که جمع اعداد آن ۹۱ است و از دو مثلث (یکی با عدد ٤ و دیگری با عدد ۱) دو دایره (با اعداد ۳٦ و ۲۵) و دو مربع (با اعداد ۱٦ و ۹) تشکیل یافته است. هرم سیاه پنج وجه دارد که جمع اعداد آن ۱۹۰ است، و از دو مثلث (با اعداد ۳٦ و ۲۵)، دو مربع (با اعداد ٦٤ و ٤۹) و یک دایره با عدد ۱٦ ساخته شده است. شکل مهره نشان دهندهٔ تعداد خانه‌ای است که مهره می‌تواند حرکت کند. مثلاً، مربع می‌تواند ٤ خانه متوالی را در یکی از جهات، مثلث ۳ و دایره ۱ خانه حرکت کنند، و هرم می‌تواند مانند دایره، مثلث یا مربع بسته به وجه مورد استفاده حرکت کند. در آغاز بازی آرایش مهره‌ها به شکل نشان داده شده در نمودار است.

هدف بازی

هدف بازی گرفتن مهره‌های حریف و ساختن عدد معینی است که *برنده* را تعیین می‌کند.

---

۱. rithmomachia ، تشکیل شده از واژهٔ یونانی عدد و جنگ. به آن بازی فیلسوفان نیز می‌گویند.



چگونه مهره‌های حریف را بگیریم

مهره‌ها را به کمک حرکات ممکن یا واقعی می‌گیریم. روش آن این گونه است:

۱) *گرفتن با محاصره.* مهرهٔ حریف را از چهار طرف محاصره می‌کنیم و آن را می‌گیریم.

۲) *گرفتن با برخورد.* اگر با حرکت مهره به اندازهٔ خانه موردنیاز روی مهرهٔ حریف قرار بگیریم، بدون حرکت مهرهٔ خود، مهرهٔ حریف را می‌گیریم. مثلاً اگر مثلث سفید با مهرهٔ ۳۶ سه خانه جلو برود و روی دایرهٔ سیاه ۳۶ قرار گیرد، دایرهٔ شمارهٔ ۳۶ سیاه بدون حرکت، مثلث ۳۶ سفید را برمی‌دارد.

۳) *گرفتن با حمله.* اگر ارزش عددی مهره در خانه‌هایی که حرکت می‌کند در کنار مهرهٔ حریف با عددی برابر با آن حاصل ضرب قرار گیرد، بازیکن مهرهٔ حریف را عملاً بدون حرکت می‌گیرد. مثلاً دایرهٔ سیاه نمرهٔ ٤، مربع ۲۸ را می‌گیرد اگر ۷ خانه بین آنها فاصله باشد.

٤) *شبیخون*. اگر دو مهرهٔ یک بازیکن بتوانند به طرف مهرهٔ حریف حرکت کنند و مجموع این دو مهره برابر با عدد مهرهٔ حریف باشد، آنگاه بازیکن مهرهٔ حریف را می‌گیرد. مثلاً اگر دایره‌های ٤ و ۸ سفید در دو طرف مهرهٔ ۱۲ سیاه قرار گیرند بدون این‌که مهره‌ها عملاً حرکت کنند مهرهٔ مثلث ۱۲ سیاه را می‌گیرند.

گرفتن هرم دشوار است. باید از شمارهٔ ۹۱ و ۹۰ استفاده کرد، مگر آن‌که آن را با محاصره یا مجذور پایه (شمارهٔ ۳۵ یا ٦٤) بگیریم. اگر یکی از وجوه هرم را یکی از روش‌های گرفتن تهدید کند می‌توان به شکل مهرهٔ حریف با ارزش برابر یا قابل قبول وجه تهدید شده وثیقه گرفت.

بازیکنان پیش از آغاز بازی قرار می‌گذارند که برد یا پایان بازی چه باشد. در اینجا تعدادی از راه‌های پایان دادن به بازی ارائه می‌شود. بعضی ساده‌اند، در حالی‌که بقیه پیچیده‌اند.

راه‌های امکان‌پذیر برای پایان دادن به بازی، بردن

۱) دکورپور: بازیکنان در مورد تعداد مهره‌هایی که برداشته می‌شوند تا برنده تعیین شود توافق می‌کنند.

۲) *دبونیس*: بازیکنان در مورد ارزش عددی هدف توافق می‌کنند. اگر مجموع ارزش عددی مهره‌هایی که بازیکنی می‌گیرد با عدد هدف برابر یا از آن بزرگ‌تر شود، آنگاه آن بازیکن برنده می‌شود.

۳) *دلیت*: در این مورد برد تابع مجموع ارزش عددی و مجموع ارقام قطعات هر دوست. مثلاً ارزش هدف ۱٦۰ می‌تواند فقط با شش رقم به‌دست آید. در این صورت بازیکن با مهره‌های ۱۲۱، ۹ و ۳۰ برنده می‌شود. در حالی‌که بازیکن با مهره‌های ٥٦، ٦٤، ۲۸ و ۱٥ برنده نیست (چون تعداد کل ارقام ۸ است).

٤) دهونور: این برد به تعداد مهره‌ها و ارزش عددی آنها بستگی دارد. مثلاً می‌توان قرار گذاشت که پنج مهره با مجموع ۱٦۰ برنده باشد. واضح است که بازیکنان باید ارزش عددی مهره‌های خود و جمع‌های مختلف آنها را بدانند.

۵) *دهونور لیتک*. این بــرد بــه سـه شرط نیاز دارد ــ ارزش عددی مشخص، تعـداد مشخص مهره‌ها، و تعداد مشخص ارقام قطعه‌ها.

بردهای زیر برای بازیکنان متخصص و دربردارندهٔ تصاعد عددی، هندسی و همساز است. مهره‌های مورد استفاده می‌تواند از هر دو بازیکن باشد، اما یکی از آنها باید مهرهٔ حریف باشد.

۶) *دیکتوریای عظیم*. سه مهرهٔ گرفته شده را در تصاعدی عددی، هندسـی یـا همـساز مرتب کنید. برای مثال تصاعد عددی ـــ ۲ و ۵ و ۸؛ مثـال هندسـی ـ ۳٦ و ٤۹ و ٦٤؛ همساز ـ ٦ و ۸ و ۱۲[۱].

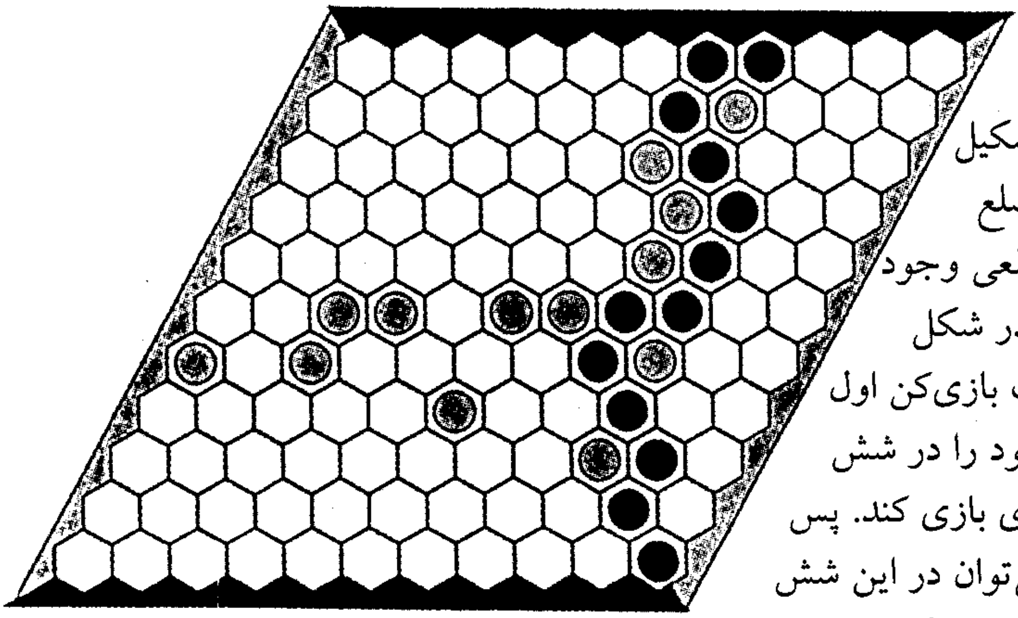
۷) *ویکتوریای کبیر*. چهـار مهـره کـه بتواننـد بـاهم ترکیـب شـوند یـا دو تـصاعد از تصاعدهای ممکن را تشکیل دهند. مثلاً ۲، ۳، ٤ و ۸ تصاعد عددی ۲، ۳ و ٤ و تصاعد هندسی ۲، ٤ و ۸ را به دست می‌دهند. توجه داشته باشید که عـلاوه بـر آن ۲ و ٤ و ۸ مهرهٔ سفیدند، در حالی که ۳ مهرهٔ سیاه است.

---

۱. در تصاعد همساز بین سه جملهٔ متوالی a و b و c این رابطه برقرار است: $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2b}$.

زی شش‌ضلعی

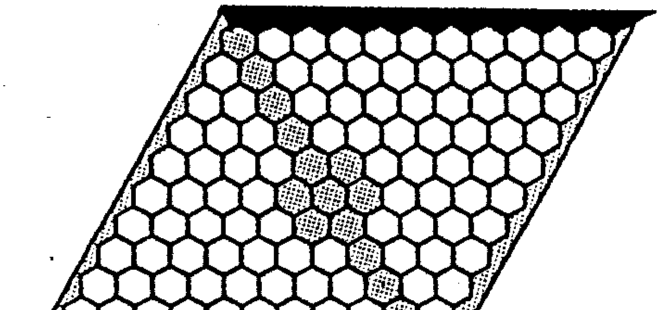
این بازی را پیت هاین در سال ۱۹۴۲ ابداع کرده است.



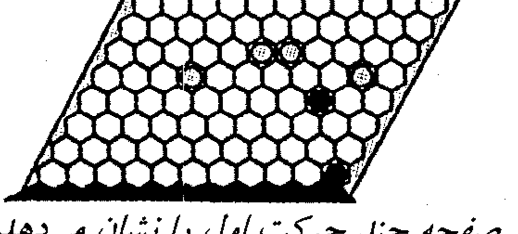
در این بازی خاص، بازیکن دارای مهرهٔ سیاه برنده است، زیرا توانسته است مسیری تا ضلع روبرو بسازد.

صفحهٔ این بازی از شش ضلعی‌هایی تشکیل شده است. در هر ضلع بازیِ یازده شش ضلعی وجود دارد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است بازی‌کن اول اجازه ندارد مهرهٔ خود را در شش ضلعی‌های خاکستری بازی کند. پس از اولین حرکت، می‌توان در این شش ضلعی‌ها حرکت کرد. بازیکن به نوبت یک مهره را در محل موردنظر خود قرار می‌دهند.

هدف: هر بازیکنی به نوبت مهره‌های خود را می‌گذارند تا مسیری به طرف مقابل ایجاد کند. نخستین بازیکنی که مسیری تا طرف مقابل برقرار کند برندهٔ این بازی است.



پس از حرکت اول، می‌توان در شش ضلعی‌های خاکستری حرکت کرد.

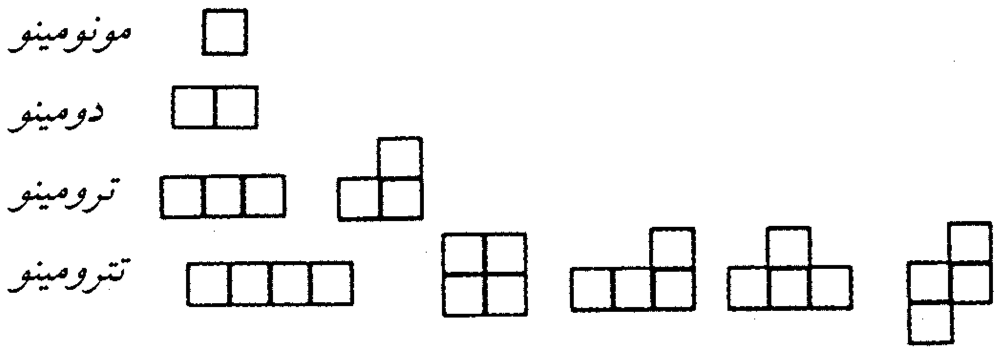


این صفحه چند حرکت اول را نشان می‌دهد.

چند سرگرمی ریاضی

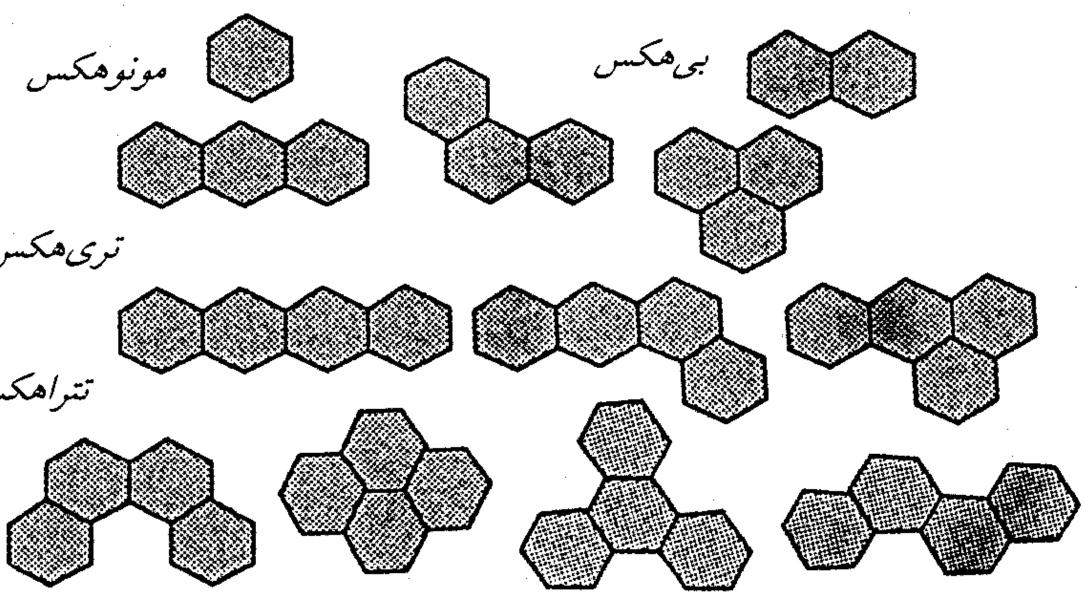
بازی با چند ضلعی‌ها

پولیومینوها با اتصال مربع‌های همانند ساخته می‌شوند.

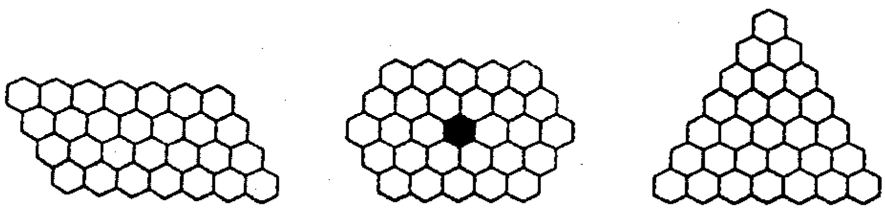


پنتومینو و به همین ترتیب...

«چند شش ضلعی»ها گروهی دیگر از شکل‌های ریاضی سرگرمی هستند که از اتصال شش ضلعی‌های همانند ساخته می‌شوند. در اینجا آرایش‌هایی برای یک تا چهار شش ضلعی (تتراهکس) ارائه می‌شود:



کدام یک از شکل‌های زیر را می‌توان با استفاده از یکی از هفت «چهار ـ شش ضلعی» بالا خانه‌بندی کرد؟ امیدواریم که لذت ببرید.



...ئیس کارول هفده را به ...زار تبدیل می‌کند

چارلز ال . داجسن ریاضیدانی که با نام لویس کارول شناخته شده‌تر است، بازی *دوبلت* *(doublet)* را ابداع کرده است. مجلهٔ انگلیسی *vanity fair* در سال ۱۸۷۹ برای نشان دادن بازی کارول مسابقه‌ای را طرح و اجرا کرده است.

هدف این مسابقه تبدیل اولین کلمه به آخرین کلمه با ساختن کلمات متوالی با همان تعداد حرف است. *شما باید هر بار تنها یک حرف را عوض کنید*، سعی کنید با حداقل تبدیل‌ها این کار را انجام دهید. چند مثال دیگر برای این بازی.

هفده

هوده

هویه

هویت

هورت

هورا

هوار

هزار

چشم خود مگشا به خشم

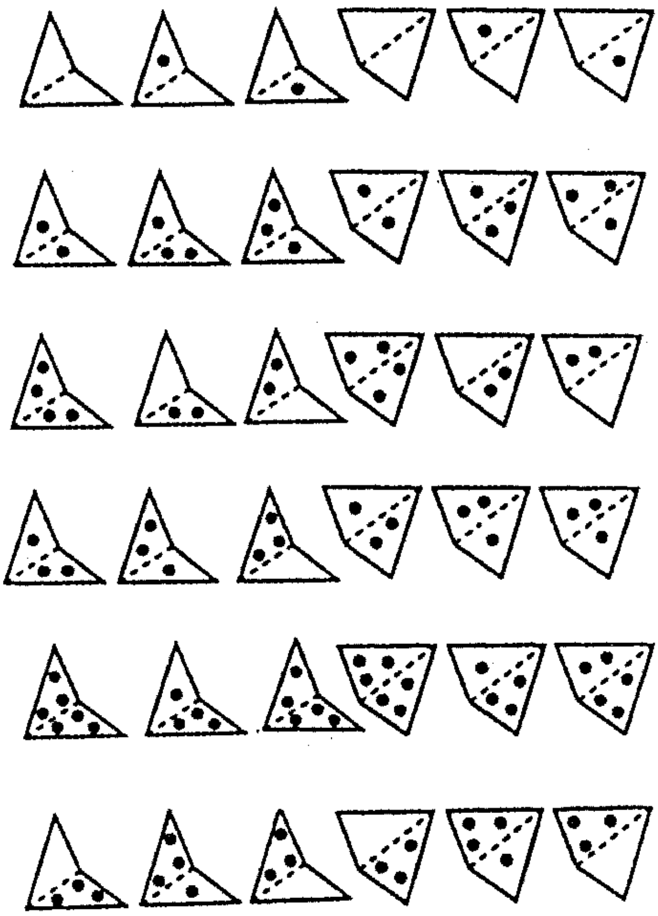
پشم کی باشد چو یشم

باغ نبود جای زاغ

یا کلاس جای کلاغ

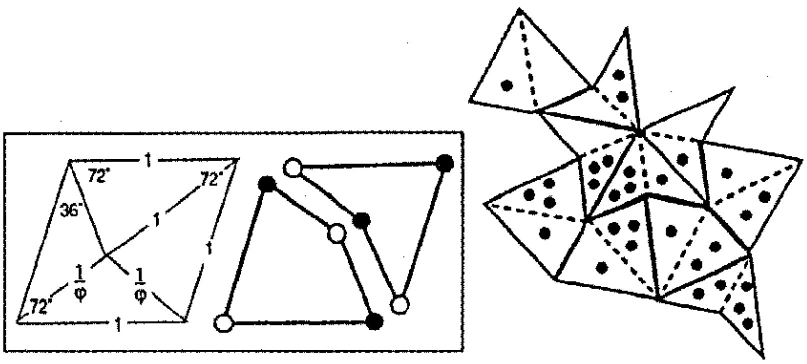
دومینو کردن کاشی‌های پن‌رُز

راجر پن‌رز ریاضیدان انگلیسی در سال ۱۹۷٤ کاشی‌های بادبادک و شاپرک را کشف کرد. این دو کاشی صفحه را به شیوه‌ای ویژه خانه‌بندی می‌کند. این دو نوع کاشی به شکل چشمگیری تعدادی نامحدود از خانه‌بندی بی‌تناوب به‌وجود می‌آورند (در این طرح الگویی بنیادی خود را بر پایه‌ای، با چشم گرداندن به بالا و پایین، تکرار نمی‌کند). انجام بازی دومینو با آنها هم چالش برانگیز است و هم طرح‌های خانه‌بندی زیبایی پدید می‌آورد.



کاشی‌ها را به روش زیر بسازید:
هر یک از کاشی‌ها با خطی به دو مثلث تقسیم شود که بتوانند یک، دو، سه خال داشته باشند یا هیچ خالی نداشته باشند.

حالا این بازی را امتحان کنید. می‌توانید تعداد خال‌ها را بیشتر کنید و ببینید این بازی به چه صورتی درمی‌آید.



شکل‌گیری ریاضی کاشی‌های پن‌رز

یادآوری: ϕ *نسبت طلایی برابر با* $...1{,}618 \approx 2/(\sqrt{5}+1)$ *است.*

اختن شش چهار
جهی تاشو

چنـد وجهـی تاشـو یـک سـرگرمی ریاضـی شگفت‌انگیز است که افراد در هـر سـنی از آن لذت می‌برند. علاوه بر آن، آنان که فقط به دنبال سرگرمی نیستند، می‌توانند ریاضـیات آن را مورد بررسی قرار دهند. در اینجا چگونگی ساختن یـک Hexatetraflexayon را نشان می‌دهیم ــ که شش وجه و چهار پهلو دارد.

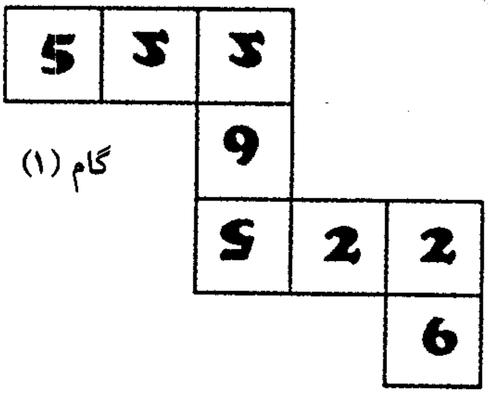
1	2	3	3
1			4
4			1
3	3	2	1

بر جلو

2	5	6	4
6			5
5			6
4	6	5	2

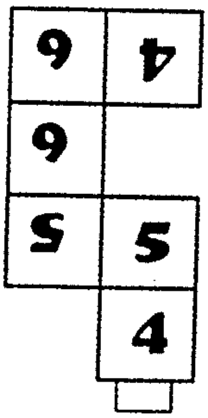
بر پشت

گام (۱) ــ با ضلع جلو شروع کنید. ۳های کنـار هم را تاکنید. همین کار را با ۱هـای کنـار هـم انجام دهید. مطابق شکل خواهدشد.

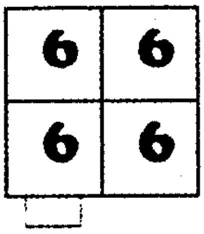


گام (۱)

گام (۲) ــ ۲های کنار هم را تاکنید. این الگوی اعداد در یک طرف به دست می‌آید.



گام (۲)

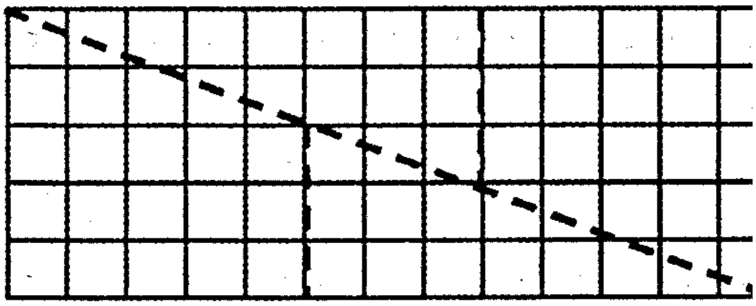


گام (۳) ــ دو ٤ را بر روی هم قرار دهیـد و به هم بچسبانید.

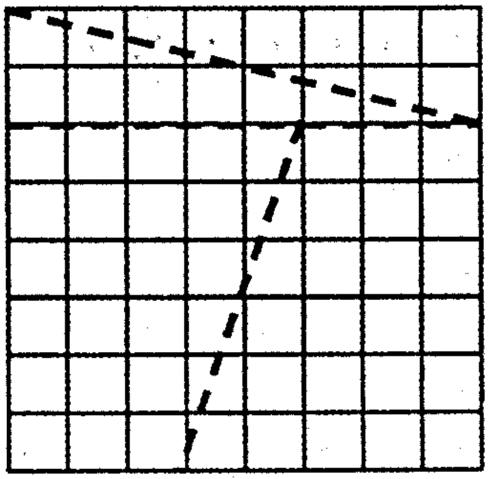
نتیجه مربعی خواهدشد که یک طرف آن همه ٦ و طرف دیگر آن همـه ٥ خواهدشـد. لبـه‌هـای خارجی ٦ و ٥ را با نوار چسب بچسبانید. آن را از مرکز پشت و روکنید و ٥ها را ببینید. آیا هـر ٦ وجه را می‌بینید؟

تقسیمات هندسی و معمای مثلث کاری

مسایل مربوط به تقسیم‌های مهندسی می‌توانند بسیار جالب باشند. مسایلی مانند معمای تقسیم مثلث مشهور که در دانشنامهٔ معماهای سام لوید آمده است، راه حلی متناقض‌نما دارند.

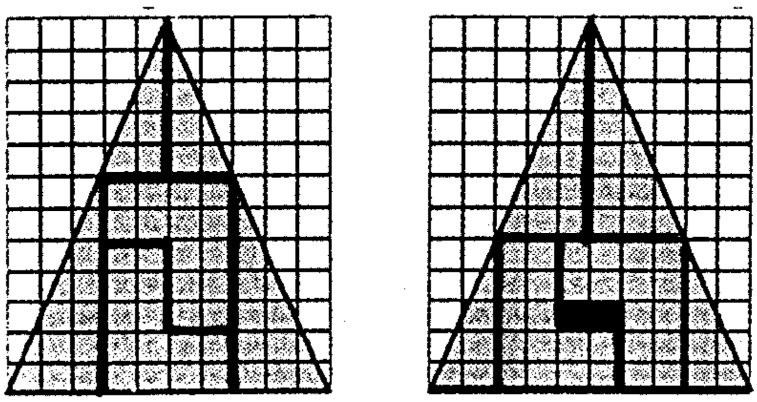


واحد مربع ۶۵ = ۵ × ۱۳ = مساحت



واحد مربع ٦٤ = ۸ × ۸ = مساحت

پل کری این معما را تغییر داد، به گونه‌ای که با بریدن و چیدن قطعات همان شکل با سوراخی در آن به دست می‌آید.

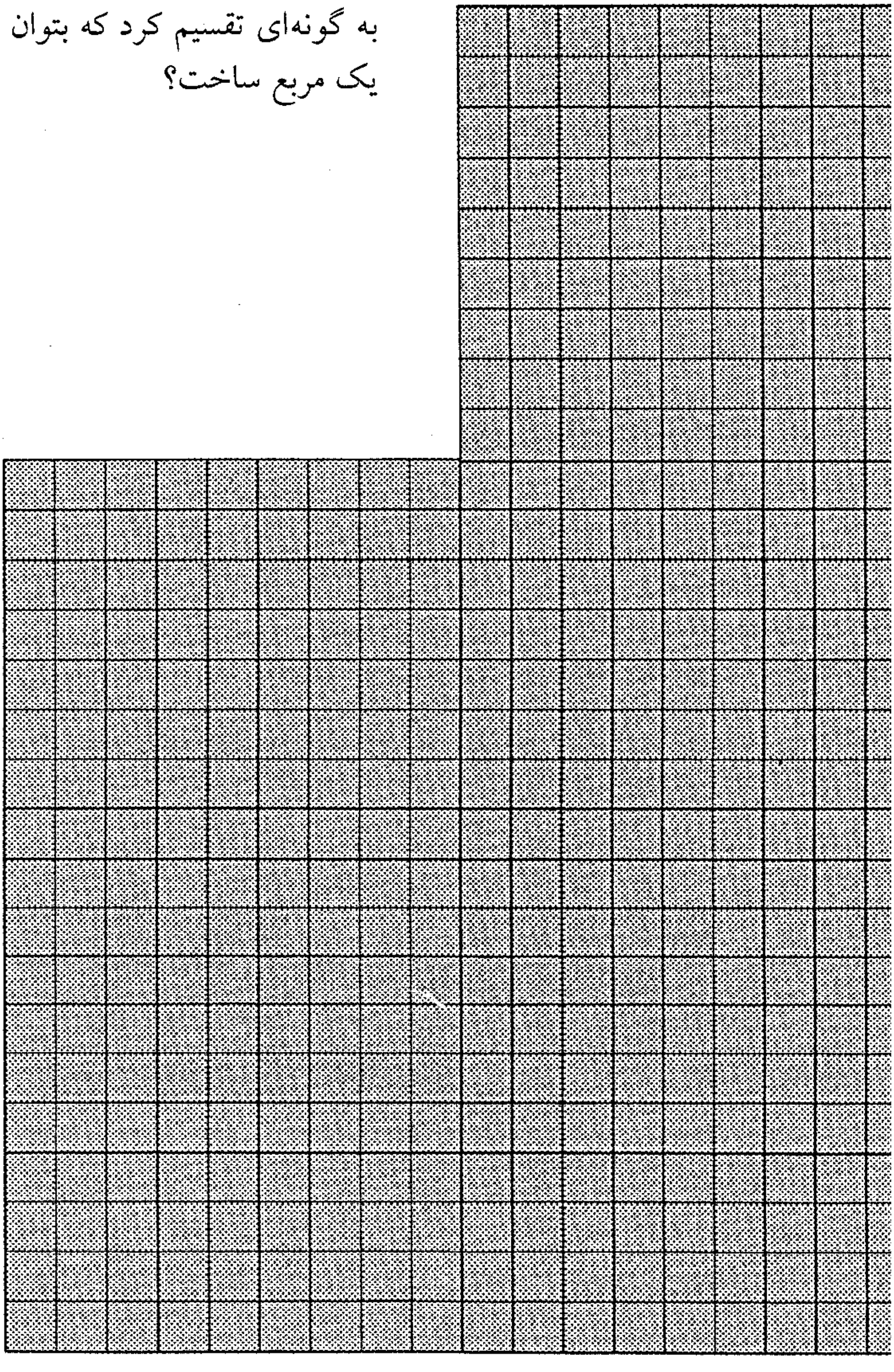


مساحت مثلث اصلی ٦۰ واحد مربع است. مساحت مثلث جایگزین ۵۸ واحد مربع است. مجموع مساحت قطعه‌ها ۵۹ واحد مربع است. بنابراین مساحت سوراخ یک واحد مربع است.

فرض کنید یک طرف شکل سایه‌دار و طرف دیگر آن سایه‌دار نباشد. آن را ببرید. قطعات سایه‌دار را به شکل نشان داده شده قرار دهید. ظاهراً همان مثلث است. اما سوراخی در آن وجود دارد. توضیح شما چیست؟

دیل مربع

چگونه می‌توان این شکل را با دو خط راست به گونه‌ای تقسیم کرد که بتوان با آن دو قطعه یک مربع ساخت؟



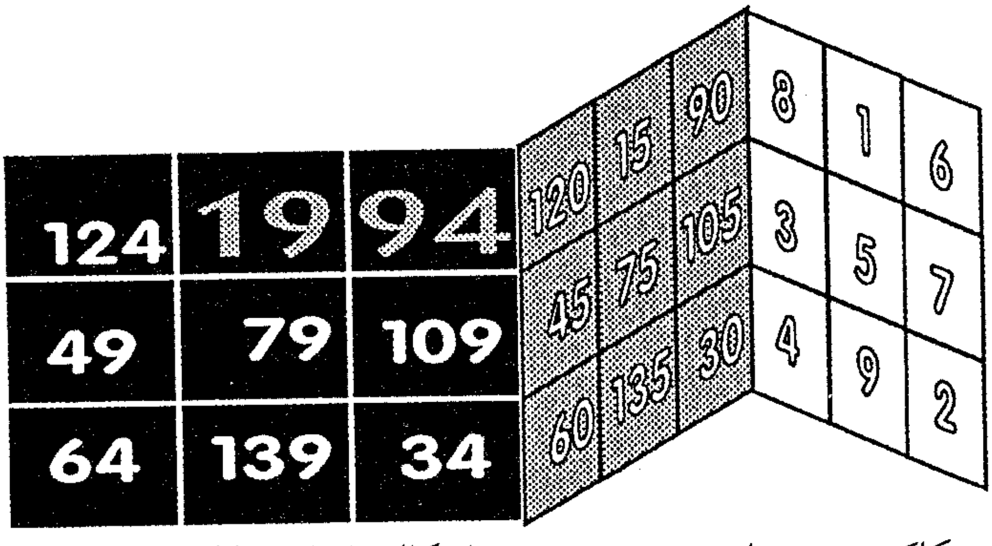
مربع‌های جادویی و سرگرمی‌های دیگر

بازی با مربع‌های جادویی

چیزی نمی‌پرسم اما تصدیق می‌کنید که مربع ۱۶ از هر مربع جادویی دیگری که جادوگران تاکنون ساخته‌اند جادویی‌تر است.

ـ بنجامین فرانکلین

آرایشی از اعداد در یک مربع با خواص ویژهٔ سنجیده‌ای را در نظر بگیرید. برای بسیاری از گذشتگان این مربع‌ها ویژگی‌ها یا قدرت‌های جادویی داشتند. قدیمی‌ترین مدارک در مورد مربع جادویی در چین در حدود ۲۲۰۰ پیش از میلاد دیده می‌شود که مربعی ۳ × ۳ به نام لوشو، را امپراتور یو در پشت یک لاک پشت آسمانی در ساحل رود زرد دیده بود. در مصر در قرن نهم میلادی، لکه‌های مرکب را بر روی یک سینی



نقره‌ای با حکاکی مربع جادویی می‌ریختند و اشکال را مانند طالع بین‌های برگ‌های چای می‌خواندند. در قرن هشتم میلادی تعدادی از کیمیاگران بر این باور بودند که این مربع‌ها دارای کلید تبدیل فلزات به طلایند. مربع‌های جادویی اسلامی هنگامی که اعداد مربع برای استفادهٔ از حروف ابجد مرتب می‌شدند معنایی ویژه داشتند. اعراب از آرایش‌های مربع ۳ × ۳ جادویی برای نشان دادن آتش، آب، باد و خاک استفاده

می‌کردند. علاوه بر آن، هر یک از سیاره‌ها برای خود مربعی جادویی داشت، و از مربع‌های جادویی در اختربینی استفاده می‌کردند. از این مربع‌ها استفاده‌های مختلفی می‌شد: گذاشتن مربع جادویی بر روی شکم زنان زائو، دوختن آنها بر روی لباس سربازان، نصب آنها بر سر در ساختمان‌ها برای حفاظت آنها، استفاده به جای طلسم برای خوش اقبالی یا بهبودی.

مربع جادویی صفحهٔ پیش به مربعی جادویی با سال ۱۹۹٤ بر روی آن تبدیل شده است. با شروع از مربع جادویی ۳×۳، هر یک از اعداد آن در ۱۵ ضرب شده است. سپس در مربع پایانی به هر یک از اعداد ٤ اضافه شده است.

روش‌ها و ویژگی‌های ساخت بسیاری در طی قرن‌ها کشف و ابداع شده است.

بعضی از ویژگی‌های آن عبارتند از:

۱) مجموع هر ستون، سطر یا قطر باهم برابرند. هر مربع جادویی، ثابتی جادویی دارد که می‌تواند از یکی از این روش‌ها به دست آید:

الف) *درجهٔ مربع جادویی با تعداد ستون‌ها یا سطرهای آن تعیین می‌شود. مقدار ثابت جادویی مربع جادویی تشکیل شده از ۱، ۲، ۳، ... n^2 برابر با $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ است، که n مربع درجهٔ آن است. به‌طور کلی، اگر i اولین جمله و β مقدار افزایش هر جمله باشد:*

$$\text{ثابت جادویی} = i\,.\,n+\beta(n/2)(n^2-1)$$

ب) *مربعی جادویی با هر اندازه‌ای را در نظر بگیرید و از گوشهٔ چپ شروع کنید. اعداد را به ترتیب در هر سطر بگذارید. مجموع اعداد در هر قطر ثابت جادویی است.*

۲) هر دو عددی (در سطر، ستون یا قطر) که از مرکز فاصلهٔ برابری دارند مکملند (یعنی مجموع آنها با مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد برابر است).

۳) راه‌های بسیاری برای تبدیل مربع جادوئی موجود به مربع جادوئی جدید وجود دارد.

الف) هر عددی می‌تواند به هر عدد مربع جادوئی اضافه یا در آن ضرب شود تا مربع جادویی دیگری به دست آید.

ب) اگر دو سطر یا دو ستون هم فاصله از مرکز جابجا شوند، نتیجه یک مربع جادویی خواهدبود.

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

در این مربع جادویی ۱۶ × ۱۶ گول زنندهٔ بزرگ بنجامین فرانکلین است. این مربع تمام خواص مربع جادویی معمولی را دارد، جز آن‌که مجموع قطری از گوشه تا گوشهٔ آن با عدد جادویی آن، ۲۰۵۶ برابر نیست. اما همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد، عدد جادویی آن از راه‌های بسیار دیگری ظاهر می‌شود. مانند ـ قطرهای شکسته به دو نیمهٔ ۸ تایی، سطرهای شکسته به دو نیمهٔ هشت تایی، هر یک از مربع‌های ٤ × ٤؛ و شاید بتوانید بیش از این موارد پیدا کنید. در سال ۱۹۵۲ در مجلهٔ مؤسسهٔ فرانکلین آلبرت چندلر اظهار داشته است که این مربع در اصل به فرانکلین تعلق ندارد.

پ) جابجا کردن ربع مربع‌ها *quadrant* در مربع‌های جادویی با درجهٔ زوج.

ت) جابجا کردن ربع مربع‌های ناقص در مربع‌های جادویی با درجهٔ فرد.

روش‌های بسیاری را می‌توان برای ساختن مربع جادویی به کار گرفت. تعدادی از آنها عبارتند از:

*۱) **برای مربع‌های با درجهٔ فرد:** الف) روش پلکانی (از دو لا لوبر)، ب) روش هرمی، پ) روش حرکت اسب شطرنج در مربع‌های با درجهٔ فرد بزرگ‌تر از ۳ × ۳. ت) روش ۱۷۰۵ فیلیپ دو لا هیر.*

*۲) **برای مربع‌های با درجهٔ زوج:** الف) جابجایی قطری برای مربع ٤ × ٤، ب) روش قطری ۸ × ۸*

8	1	6
3	5	7
4	9	2

*۳) **برای مربع‌های جادویی با هر درجه‌ای:** روش‌های موجود بسیار پیچیده‌اند. در یکی از آنها از لبه‌ها استفاده می‌شود و ب. فرنیکل آن را ابداع کرده است.*

با در نظر داشتن سابقهٔ طولانی مربع‌های جادویی، تعجبی ندارد که در مورد آن بیش از هر سرگرمی

84	77	82
79	81	83
80	85	78

?	?	?
?	?	?
?	?	?

ریاضی دیگری مطلب نوشته‌اند. بعضی افراد ساعت‌ها، برخی روزها، و حتی کسانی ماه‌ها برای ابداع روش‌هایی برای ساخت این مربع‌ها، کشف ویژگی‌های آنها، و به کارگیری اندیشه‌های جدید در آنها، و پرداختن به جادوی آنها وقت صرف کرده‌اند.

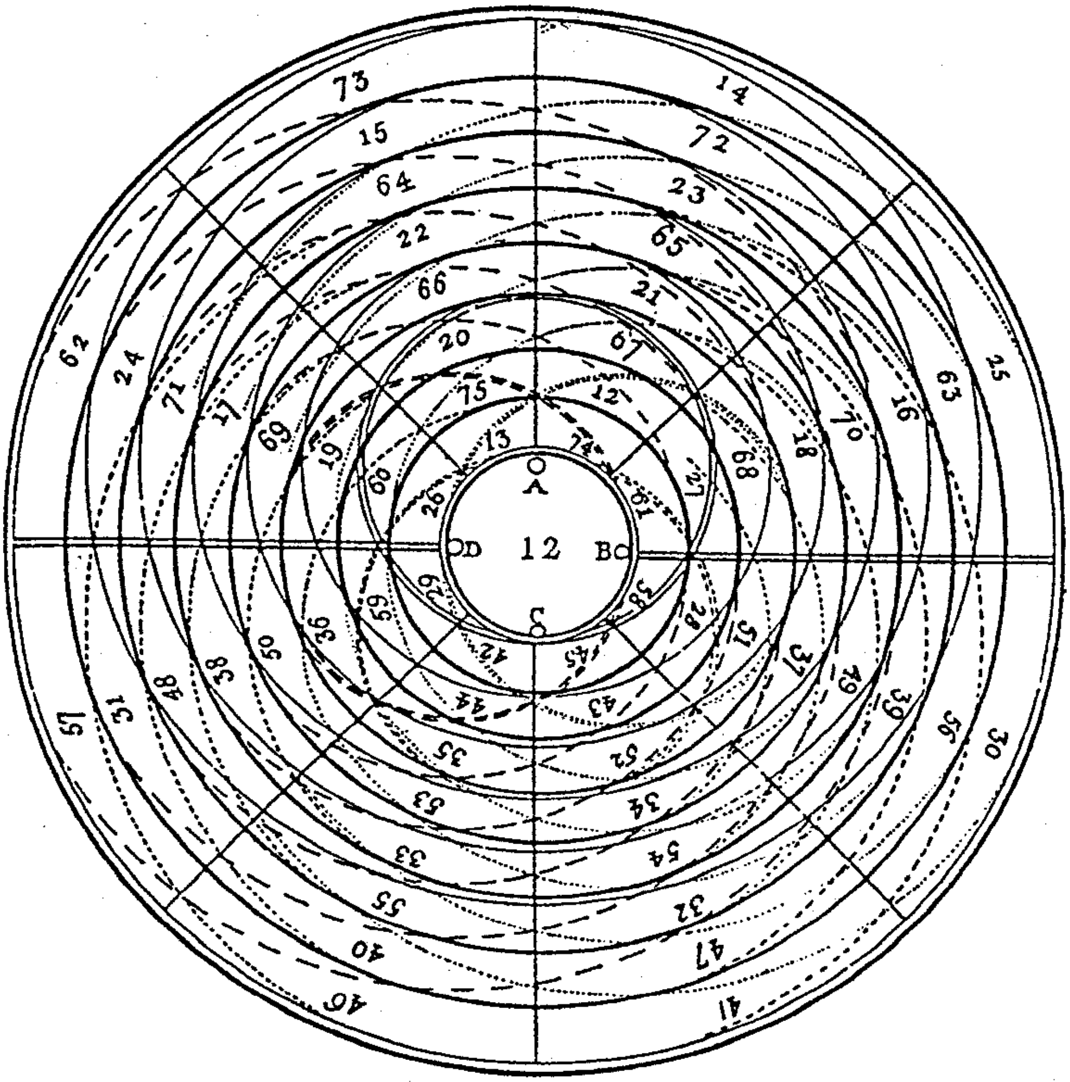
در فهرست طولانی آنها مربع ۱۶ × ۱۶ بنجامین فرانکلین، جادوگر مربع[1] را می‌بینیم که می‌تواند هر نوع مربع جادویی ۳×۳ را تقریباً فوراً بسازد که با هر عددی آغاز شود ـ طرح‌های خیره کنندهٔ خط‌های جادویی (پاره خط‌های اتصال دهندهٔ اعداد پشت سرهم مربع جادویی) که می‌توانند در رده‌بندی مربع‌ها به عنوان متقارن یا نامتقارن مورد استفاده قرار گیرند ــ دایره‌ها، مکعب‌ها، شش ضلعی‌ها، ستاره‌ها، کره‌ها، مربع‌های جادویی دومینو، مربع‌های جادویی اعداد اول، و مربع‌های جادویی pandiagonal[2] دیده می‌شوند، و این فهرست هر قدر تعداد بیشتری از افراد به آن بپردازند درازتر می‌شود.

۱. هرکسی می‌تواند جادوگر مربع جادویی باشد. کافی است مربع جادویی ۳ × ۳ را به خاطر بسپارید. اگر کسی بخواهد عددی در یکی از خانه‌های مربع ۳×۳ بگذارد، مثلاً در اینجا ۷۸ در جایی گذاشته شده است که در مربع اصلی ۲ در آن قرار دارد با پر کردن خانه‌های خالی فوراً یک مربع جادویی جدید، با یادآوری اینکه یکی از ویژگی‌های مربع جادویی آن است که با اضافه کردن عددی ثابت به هر یک از اعداد یک مربع با درجهٔ فرد می‌توان مربع جادویی جدیدی ساخت، بسازید. در این حالت ۷۶ به هر یک از اعداد مربع بنیادی جادویی ۳ × ۳ اضافه می‌شود. طی قرن‌ها نقش مربع جادویی کاملاً دگرگون شده است. امروزه آنها را یک سرگرمی ریاضی جذاب و هیجان‌انگیز به‌شمار می‌آورند.

۲. مربعی جادویی که اگر اعداد یک ستون را از یک طرف آن برداریم و به طرف دیگر اضافه کنیم مربع جادویی دیگری به دست آید.

دایرهٔ جادویی بنجامین فرانکلین

بنجامین فرانکلین به مربع جادویی بسیار علاقه‌مند بود. در واقع، هنگامی‌که او منشی شورای پنسیلوانیا بود، اغلب کسالت کار را با ساخت دایرهٔ جادویی برطرف می‌کرد. در دایرهٔ جادویی او، اعداد در امتداد شعاع بزرگترین دایره مجموع یکسانی داشتند. همانطور که اعداد قرار گرفته بین دایره‌های درهم پیچیده این ویژگی را دارند.



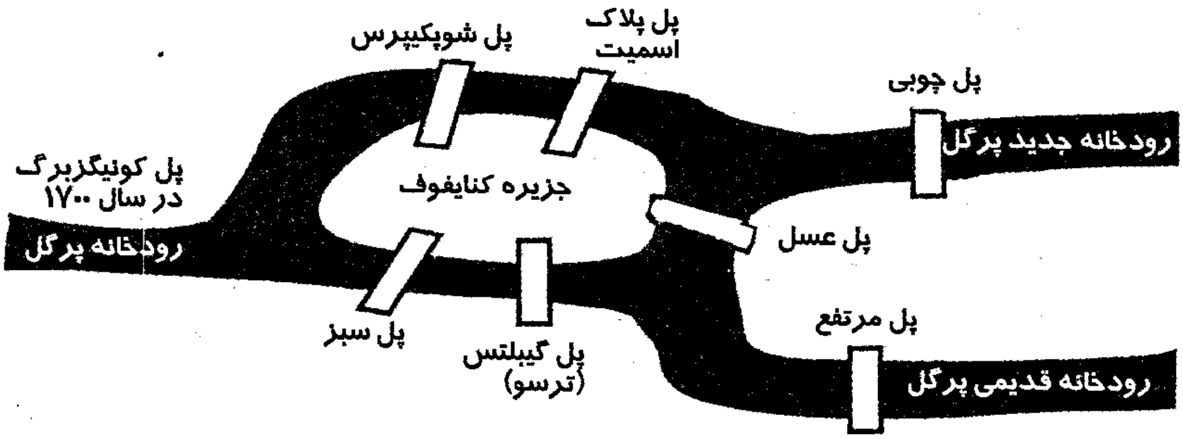
لئونارد اویلر و حرکت اسب شطرنج

این یک مربع جادویی شگفت‌انگیز است که لئونارد اویلر در قرن هجدهم آن را ابداع کرده است. مانند بیشتر مربع‌های جادویی، مجموع سطرها، ستون‌ها و قطرهایش برابر و در این مورد ۲٦۰ است. علاوه بر آن، در آن چهار مربع وجود دارد که مجموع سطرها و ستون‌های آن ۱۳۰ است. اما جالب‌تر از همه حرکت مهرهٔ اسب شطرنج است که از ۱ شروع می‌شود و می‌تواند در هر عددی از تمام این مربع به‌طور پشت سرهم از ۱ تا ٦٤ با دنبال کردن حرکت مجاز اسب بنشیند.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

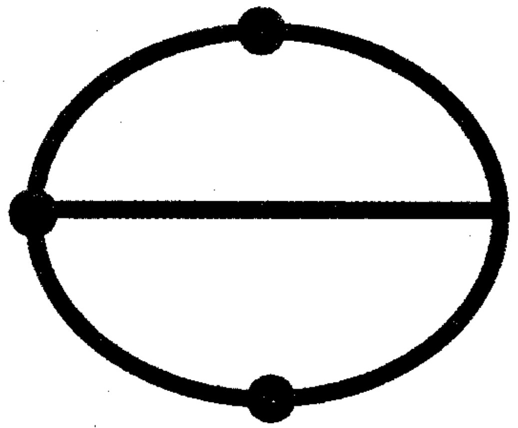
...وز آمد شدهٔ مسألهٔ پل کونیگزبرگ

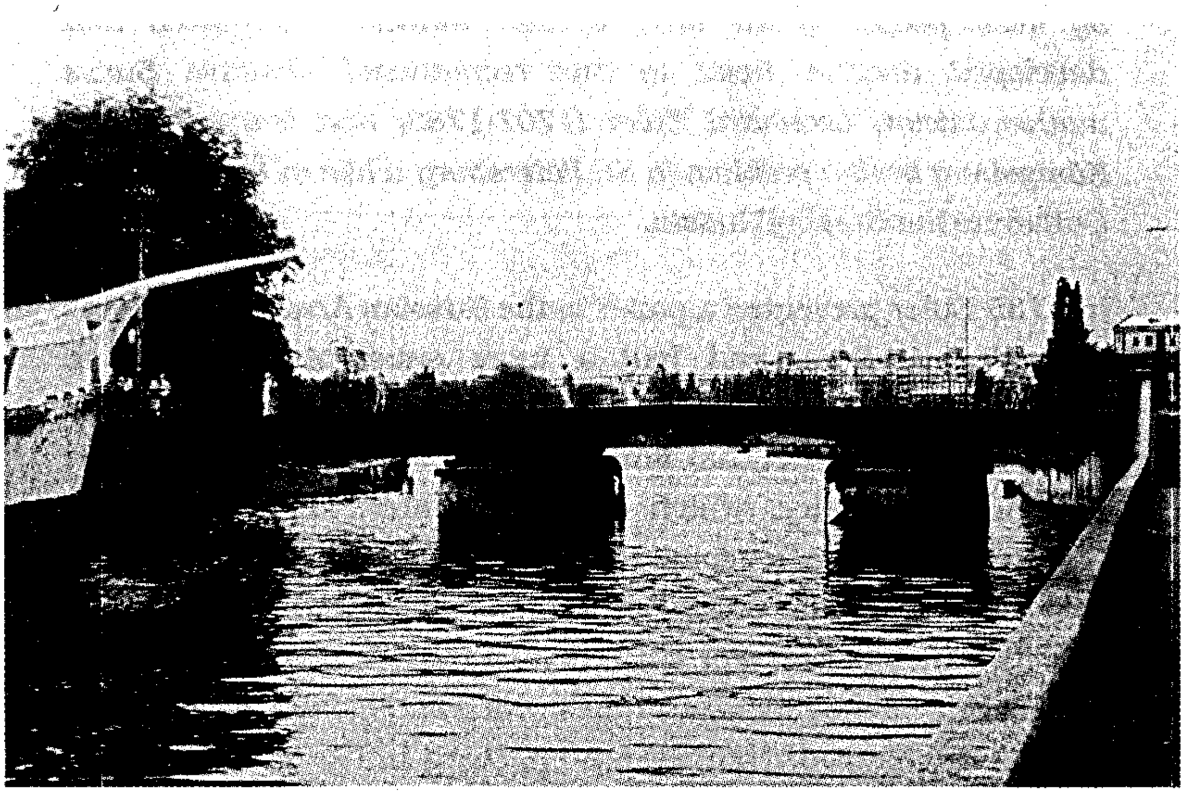
شهر کونیگزبرگ را شهسواران تونونی در ۱۳۰۸ بنیان نهادند و بیش از ۴۰۰ سال شرقی‌ترین پایگاه نظامی حکومت آلمان بود. پس از جنگ جهانی کالینینگراد نامیده و به بزرگ‌ترین پایگاه دریایی شوروی تبدیل شد. امروزه کونیگزبرگ بین لهستان و لیتوانی قرار گرفته است. هفت پل کونیگزبرگ امروزه چه وضعیتی دارند؟ آیا هنوز هم مردم به دنبال آنند که این مسیر ناممکن را پیدا کنند؟ ابتدا مسأله پل کونیگزبرگ را به‌طور خلاصه توضیح دهیم.



مسأله پل کونیگزبرگ قرن‌ها گنجینه‌ای از تفریح و سرگرمی ریاضی را فراهم آورده است. این مسأله به سال‌های ۱۷۰۰ باز می‌گردد. محل آن شهر کونیگزبرگ در کنار رودخانه پرگل است. دو جزیره بخشی از شهر بودند و با هفت پل با آن ارتباط داشته‌اند. در بین اهالی رسم خوشایندی وجود داشته است که شنبه‌ها در سواحل رود و جزیره‌ها قدم بزنند و سعی کنند مسیری را بیابند که از همهٔ پل‌ها عبور کنند بدون آن‌که از یکی از آنها دوبار رد شوند. گرچه بیشتر مردم آن را یک سرگرمی می‌دانسته‌اند، ریاضیدانی شکل جدیدی از این سرگرمی را کشف کرد. لئونارد اویلر (۱۷۰۷_۱۷۸۳) ریاضیدان سوییسی هنگامی‌که در سنت پترزبورگ در خدمت کاترین کبیر بود از آن مطلع شد.

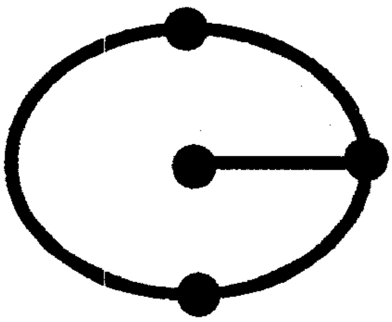
در ۱۷۳۵ اویلر مقاله‌ای به فرهنگستان روسیه عرضه کرد که فراتر از آن بود و تأثیری اساسی‌تر بر ریاضیات داشت تا این‌که صرفاً حل مسأله پل باشد. او اندیشه‌هایی را مطرح کرد که حوزهٔ توپولوژی را پدید آورد. توپولوژی، برخلاف هندسهٔ اقلیدسی که به اندازه‌ها، اشکال و اشیای صلب می‌پردازد، هندسه‌ای است که ویژگی‌های اشیا را که پس از تغییر اندازه و شکل آن‌ها ثابت می‌ماند بررسی می‌کند، مثلاً اگر مثلثی تغییر شکل یابد و به مربع یا دایره تبدیل شود، توپولوژی بررسی می‌کند که کدام یک از ویژگی‌های آن تغییر نکرده است. اویلر مسأله پل کونیگزبرگ را تبدیل به یک طرح سادهٔ ریاضی کرد (که آن را شبکه یا نمودار نامید) که مسأله را ساده کرده بود. هر بخش از شهر که پل به آن می‌رسید با یک رأس و پل را با یک قوس نشان داده بود. او نتیجه گرفت که مسألهٔ عبور از تمام این هفت پل بدون عبور دوباره مانند کشیدن مداد روی یک شبکه بدون برداشتن دست از روی کاغذ است. اویلر رأس‌ها را با نقطهٔ زوج یا فرد مشخص کرد. او توجه کرد که یک نقطه زوج با ورود و خروج از رأس یا آغاز و پایان حرکت در آن نقطه ایجاد می‌شود. نقطهٔ فرد، برعکس آن، با آغازین بودن یا پایانی بودن حرکت ایجاد می‌شود. بنابراین این نمودار قابل دنبال کردن (بدون عبور دوباره) تنها می‌تواند حداکثر دو رأس فرد داشته باشد ـ یعنی صفر اگر همه آنها زوج و ۲ اگر یکی از آنها نقطه آغازین و یکی نقطهٔ پایانی باشد. علاوه بر آن، او پی برد که اگر نمودار رأس‌های فرد به تعدادی زوج، مثلاً ۱۰، داشته باشد، باید مدادش را نصف این عدد، یعنی ۵ بار از روی کاغذ بردارد، تا کل نمودار را طی کند. اویلر در این رساله خاطرنشان می‌سازد که مسأله پل کونیگزبرگ ظاهراً که ماهیتی هندسی دارد. اما هندسهٔ اقلیدسی را نمی‌توان در مورد آن به کار گرفت زیرا مسألهٔ پل با «اندازه‌ها» کاری ندارد و نمی‌تواند با استفاده از «محاسبات کمّی» حل شود. در عوض این مسأله به «هندسهٔ موقعیت» تعلق دارد، که نخستین‌بار گوتفرید ویلهلم فون لایب‌نیتس بدان نام توپولوژی داد. بدین ترتیب، راه حل اویلر برای پل کونیگزبرگ نقش آسانگر (شتاب‌دهنده) و مقدمه‌ای بر علم توپولوژی را بازی کرد.



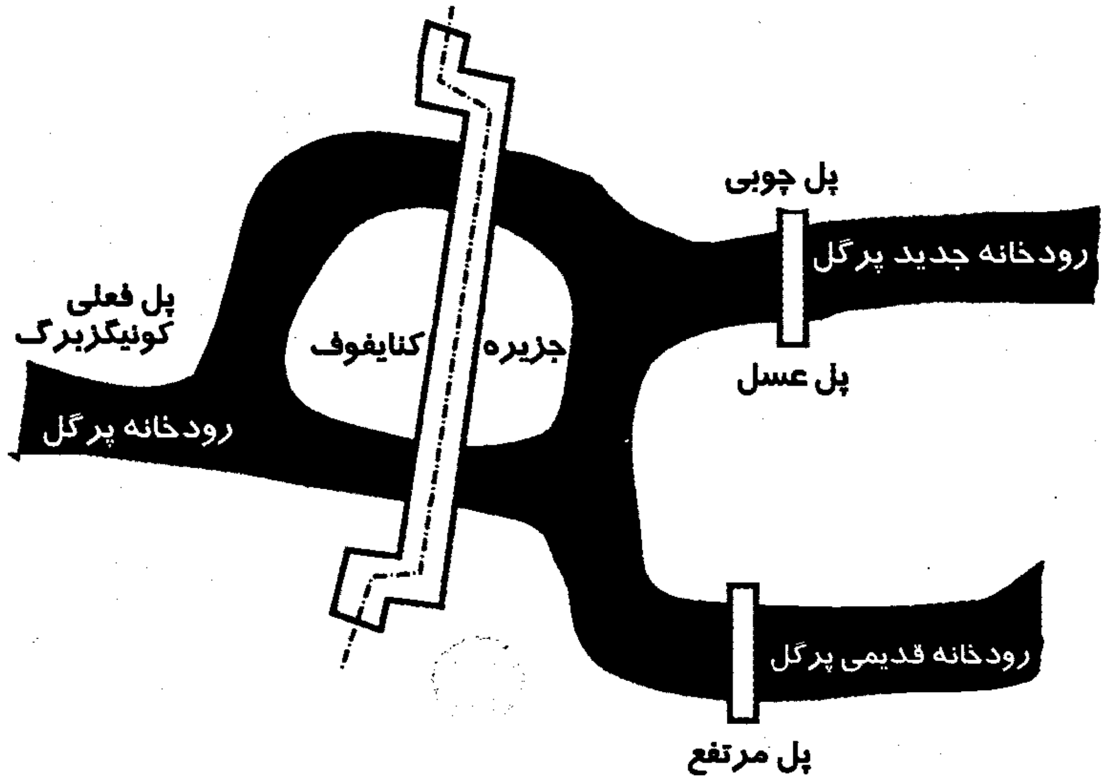


یکی از بقایای سه پل اصلی کونیگزبرگ.

همان‌طور که تصویر نشان می‌دهد هر یک از هفت پل نام ویژه‌ای داشته است که احتمالاً نشان‌دهندهٔ آن است که چه چیز در کنار آن بوده است. امروزه سه پل از این هفت پل اصلی ــ پل عسل، پل مرتفع و پل چوبی ــ باقی مانده است. پل جدیدی ساخته شده است که دو ساحل را همان‌طور که نشان داده شده است از جزیره کنایفوف عبور می‌کند.



راهنماهای گشت‌ها اغلب داستان معمای پل کونیگزبرگ را تعریف می‌کنند. بعضی از آنها حتی ادعا می‌کنند که این مسأله هنوز حل نشده است. اگر شبکهٔ پل‌های امروزی کونیگزبرگ را رسم کنیم، مسألهٔ جدید جاذبه‌اش را از دست می‌دهد. اگر پل جدید به جزیره متصل می‌شد مسأله تا حدی جالب‌تر بود. متأسفانه پل‌های کونیگزبرگ به تاریخ پیوسته‌اند. اما یادگاری که این مسأله بر جای نهاده است مثل پل‌ها از بین نرفته است. راه حل درخشان اویلر همچنان بخشی مهم از تکامل توپولوژی است.

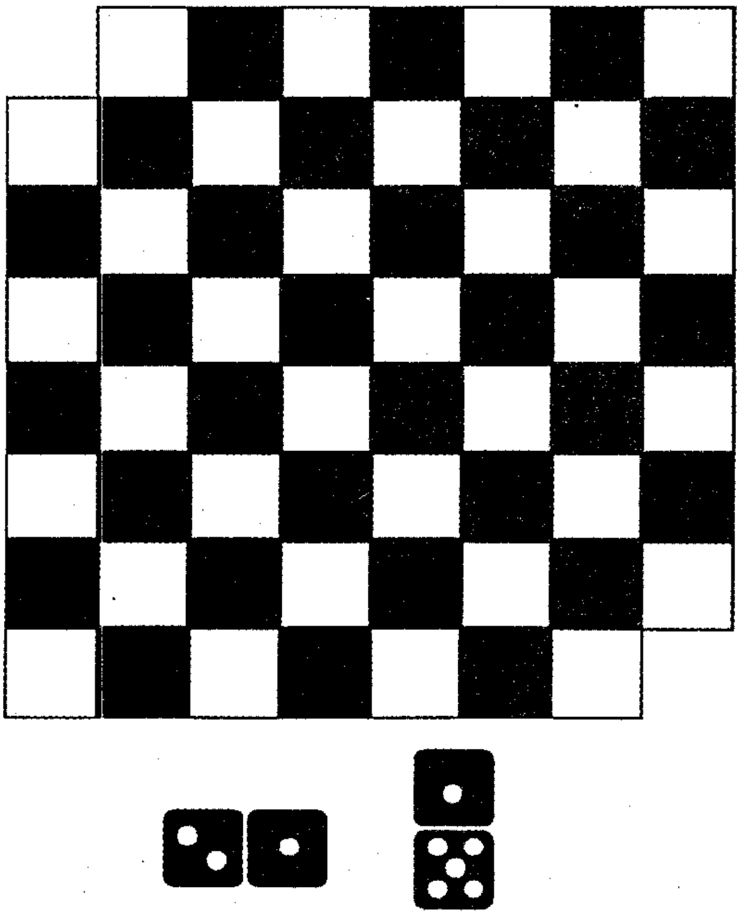

پل چوبی
رودخانه جدید پرگل
پل فعلی
کونیگزبرگ
جزیره کنایفوف
پل عسل
رودخانه پرگل
رودخانه قدیمی پرگل
پل مرتفع

...نون صفحهٔ ...طرنج

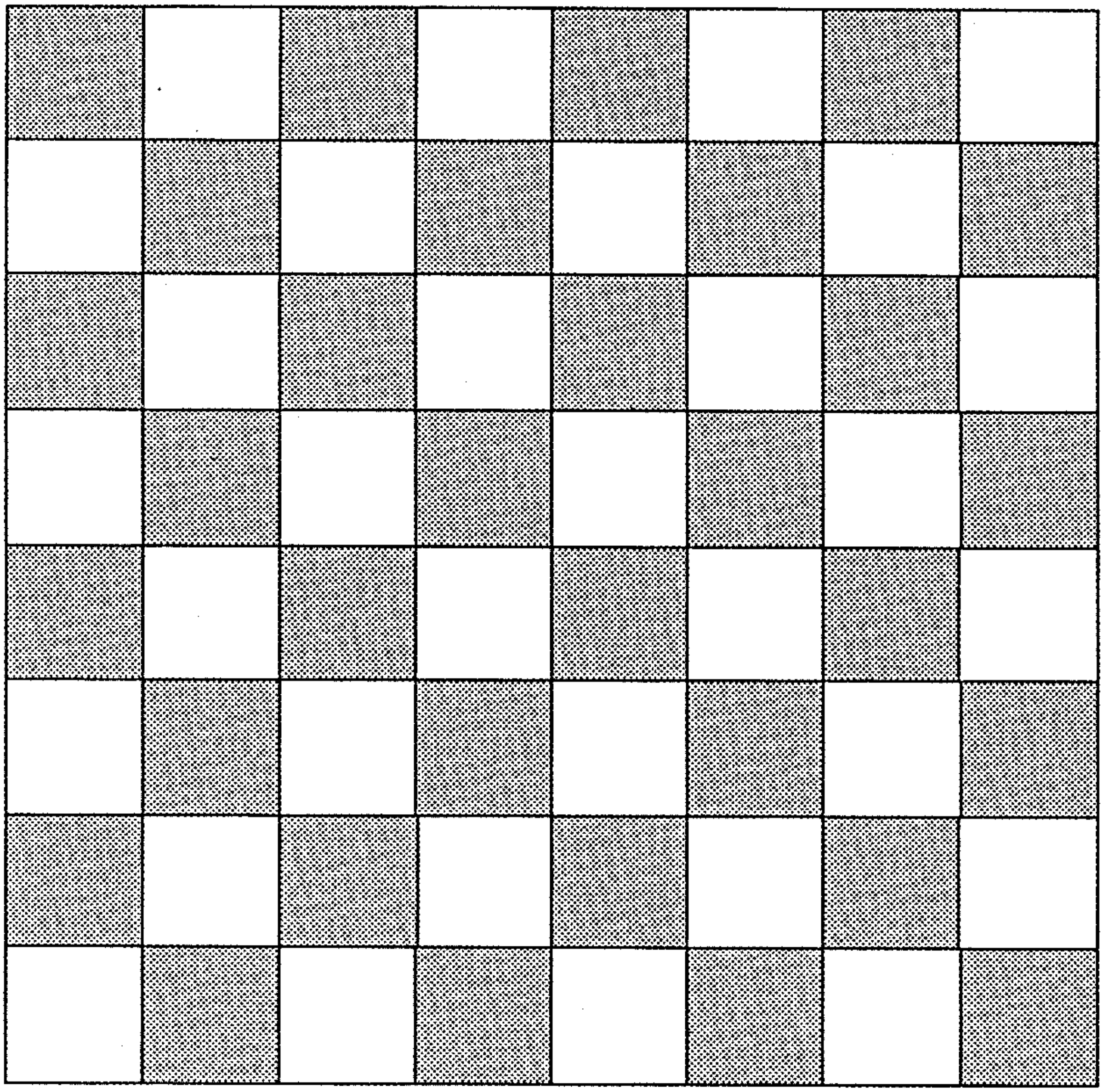
هزاران سال پیش مصریان باستان بر روی صفحهٔ شطرنج بازی می‌کرده‌اند. اما بازی چکرز جدید به آغاز قرن دوازدهم در اروپا بازمی‌گردد. در این بازی از همان صفحهٔ شطرنج استفاده می‌شود. مهره‌های این بازی از تخته نرد گرفته شده و از نظر حرکات و تعداد مهره‌ها از *آلکرک*[1] پیروی می‌کند. این صفحه خود گنجینه‌ای از مسأله دارد که در طی سال‌ها پدید آمده است.

پر کردن صفحهٔ شطرنج با دومینو

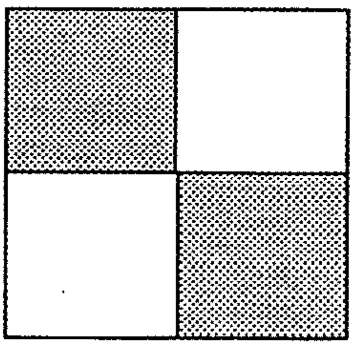
اگر دو گوشهٔ مقابل صفحهٔ شطرنج را برداریم، می‌توان صفحه را با دومینو پر کرد؟ فرض کنید هر دومینو به اندازهٔ دو مربع کنار هم صفحهٔ شطرنج است. دومینوها نمی‌توانند بر روی هم قرار گیرند و باید مسطح باشند.



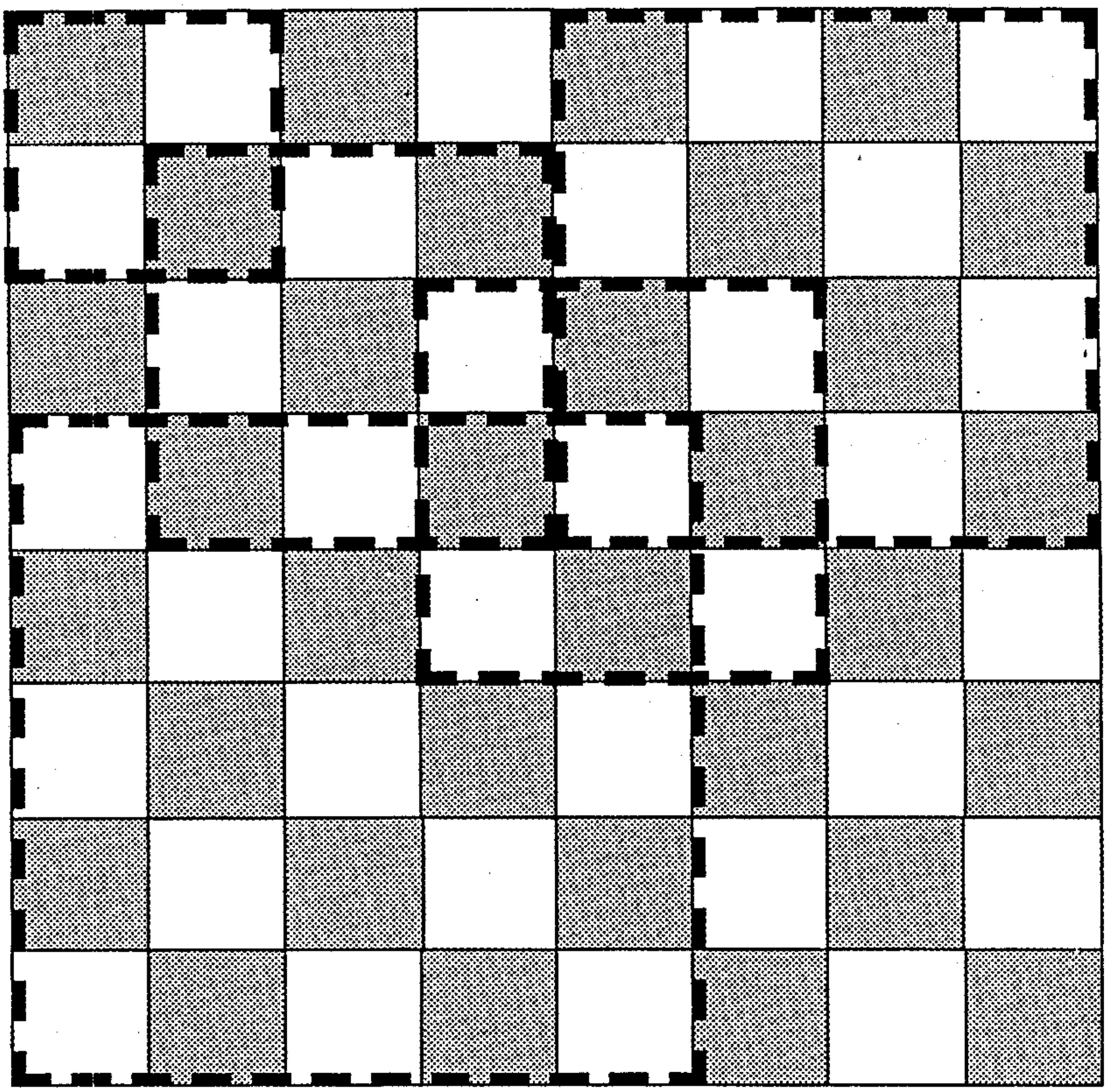
۱. بازی قدیمی مصری و شکل ابتدایی چکرز.



صفحهٔ شطرنج را در یک آن اوراق کنید



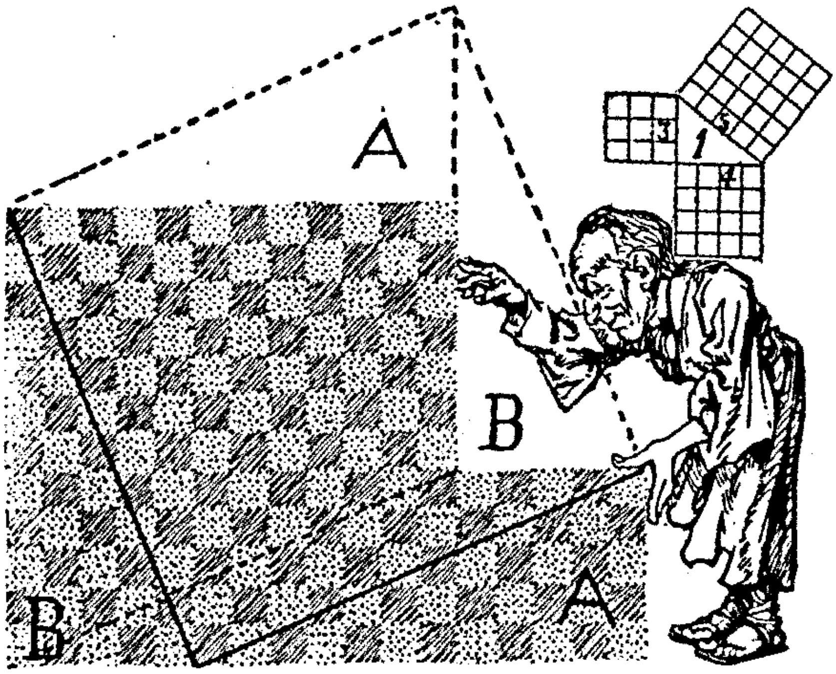
با استفاده از قدرت تجسم خود و روش‌های تاکردن، راهی برای بریدن صفحهٔ شطرنج با یک ضرب به صورت مربع‌های ۲ × ۲ مثل این مربع ۲ × ۲ پیدا کنید.



مربع‌های یک صفحهٔ شطرنج

۸ سطر و ۸ ستون مربع‌های تشکیل دهندهٔ صفحهٔ شطرنجی را می‌توان در مربع‌هایی به اندازه‌های مختلف دسته‌بندی کرد. اندازهٔ این مربع‌ها از ۸ × ۸ تا ۱ × ۱ است. چند مربع با اندازه‌های مختلف در یک صفحهٔ شطرنج وجود دارد؟

دو معمای سام لوید دربارهٔ صفحهٔ شطرنج



سام لوید معماپرداز، این معما را معمای خانم فیثاغورس نامیده است. روشی بیابید برای بریدن این صفحه به سه تکه به‌صورتی که وقتی آنها را به هم بچسبانید صفحهٔ مربعی ۱۳ × ۱۳ به دست آید که در آن الگو و جهت طرح حفظ شود.

این صفحهٔ شطرنج سام لوید *نبرد شاهانه* نام دارد. این ۸ قطعه را به گونه‌ای قرار دهید که مربع ۸ × ۸ به‌دست آید.

ند معمای قدیمی

معمای فرار زمین سام لوید

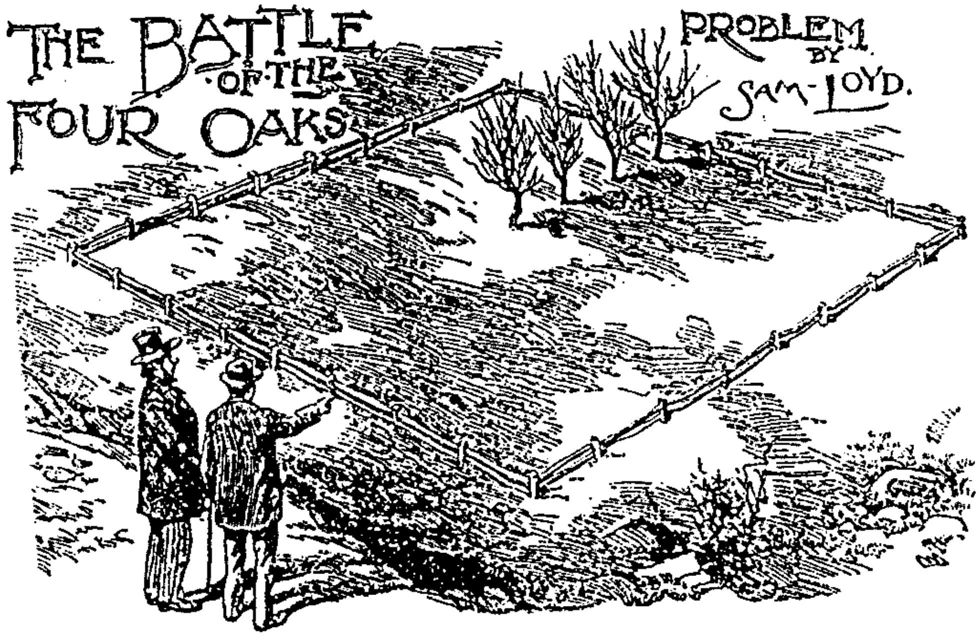
این معما یکی از محبوب‌ترین معماهایی است که تاکنون ساخته شده است.

لوید آن را در سال ۱۸۹۶ به ثبت رسانده و بیش از ۱۰ میلیون از آن به فروش رفته است.

این بازی از یک دیسک دایره‌ای ساخته شده بود که زمین را می‌چرخاند. می‌توانید بگویید اگر کره را از شمال شرقی به شمال غربی بچرخانید برای جنگجوی سیزدهم چه اتفاقی می‌افتد؟

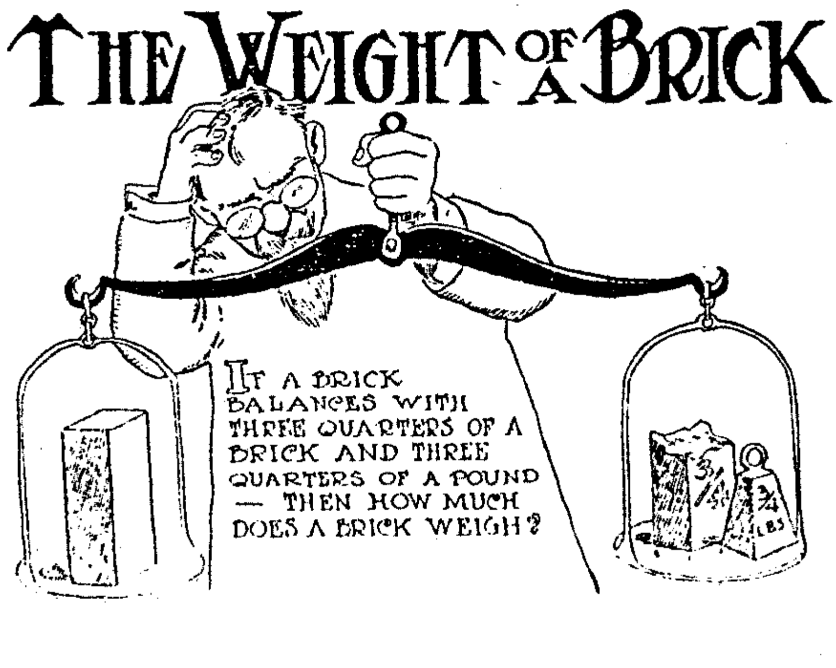
معمای جنگ چهار بلوط سام لوید

چهار درخت در یک ردیف در یک مزرعهٔ مربع شکل قرار دارند. مزرعه را به چهار بخش به گونه‌ای تقسیم کنید که این قطعات هم اندازه و هم شکل باشند و در هر یک از آنها یک درخت قرار داشته باشد.



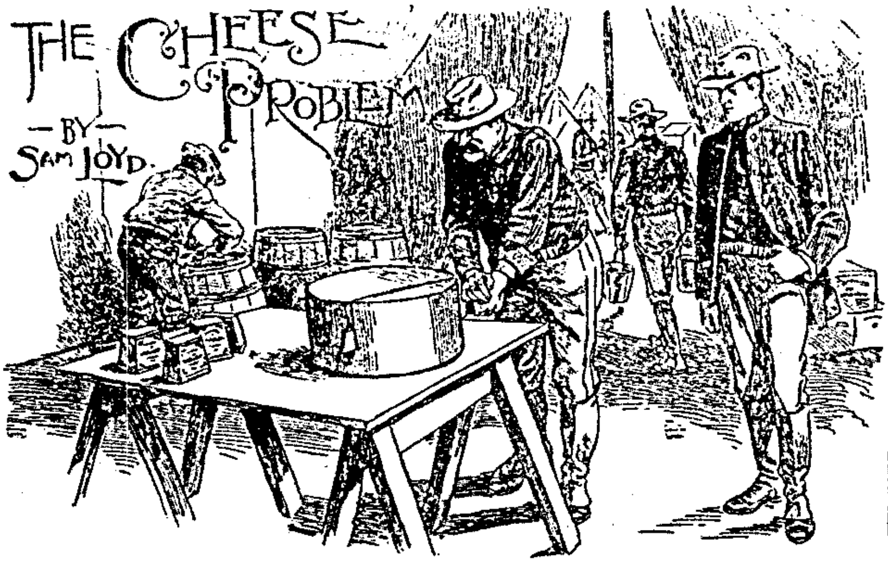
معمای وزن یک آجر سام لوید

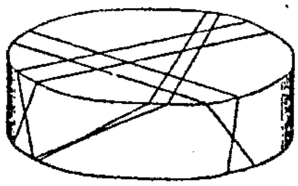
اگر وزن یک آجر برابر با وزن سه چهارم آجر و سه چهارم کیلوگرم باشد. وزن آجر چقدر است؟



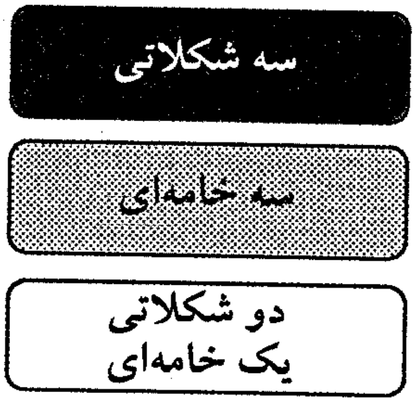
معمای پنیر سام لوید

اگر قالب پنیر گردی آن‌طور که نشان داده شده است بریده شود، چند تکه به‌دست می‌آید؟





در جعبه‌های شیرینی چه باقی مانده است؟

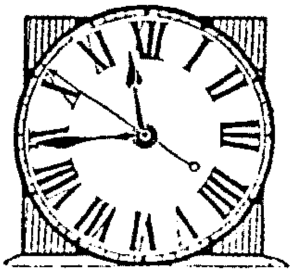


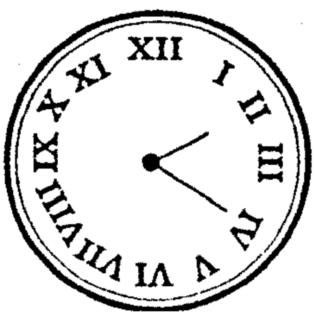
برچسب‌های این جعبه‌ها به هم ریخته است و درست نشان نمی‌دهد در آنها چیست؟

کم‌ترین مقدار آزمایش از جعبه(ها) چقدر است تا بتوان فهمید در هر جعبه چه چیزی قرار دارد؟

معمای دو ساعت لوئیس کارول

کدام یک بهتر است، ساعتی که یک بار در سال درست است یا ساعتی که دوبار در روز درست است؟





معمای تارتالیا

نیکولو تارتالیا ریاضیدان ایتالیایی به خاطر کشف راه حل برای معادلهٔ درجهٔ سه در حالت کلی شهرت دارد (۱۵۳۵). او کتابی سه جلدی نیز با نام *رساله‌ای دربارهٔ اعداد و اندازه‌ها* (۱۵۶۰ـ۱۵۵۶) نوشته است. علاوه بر این، او نخستین کسی است که *اصول* اقلیدس را به زبان جدید غربی (۱۵۴۳) ترجمه کرده است. در اینجا معمای بسیار مشهور ریاضی ابداعی او را نقل می‌کنیم:

سه زوج جوان تازه ازدواج کرده به ساحل رودخانه‌ای آمده‌اند که در آنجا قایق کوچکی برای عبور از رودخانه هست که تنها می‌تواند دو مسافر داشته باشد. همهٔ شوهران غیرتی‌اند و می‌خواهند مراقب همسرشان باشند. برای اینکه اشکالی پیش نیاید، تصمیم می‌گیرند که هیچ زنی در قایق با مردی جز همسر خودش نباشد.

عبور از رودخانه چگونه انجام می‌گیرد؟ و کم‌ترین تعداد عبور چقدر است؟

پاسخ معماها

صفحهٔ ۳۷. **چرا دریچه‌ها گردند؟**
حل: بنابه تعریف، دایره مجموعهٔ نقاطی در یک صفحه است که از نقطهٔ معینی به نام مرکز فاصله‌ای برابر دارند. بنابراین دریچه نمی‌تواند در سوراخ بیفتد، زیرا قطرها هم برابرند. اگر دریچه مربع بود با قرار دادن آن در جهت قطر این اتفاق می‌افتاد.

صفحهٔ ۱۷۷. **فرمول جادویی اویلر**
حل: برای ۶۲ وجهی
(۳۰ مربع، ۲۰ مثلث، و ۱۲ پنج‌ضلعی) F = ۶۲؛ V = ۶۰؛ E = ۱۲۰؛ بنابراین
F + V −E = ۲

صفحهٔ ۲۷۷. **داستان‌ها چه می‌تواند باشند؟**
حل: (۱) تام و جری بازیکنان حرفه‌ای بیس‌بالند، اما در دو تیم مختلف بازی می‌کنند. در این روز خاص تیم‌های آنان باهم بازی دارند. تام مدافعی است که قرار است مانع حملهٔ جری شود.
(۲) اریک در هنگام عبور از خیابان دچار سکسکهٔ وحشتناکی شده است. او به بار می‌رود و لیوانی آب می‌خواهد بلکه به او کمکی کند. متصدی بار که متوجه مشکل اریک شده است، به فکرش رسیده که سعی کند اریک را بترساند، و موفق هم شده است!
(۳) شوهر مری سال‌ها پیش مرده است. او خاکستر شوهرش را در یک خاکستردان در روی میز آشپزخانه نگه‌می‌داشته است. بر روی این میز ظرفی با یک ماهی قرمز نیز قرار داشته است. در آن روز مری پنجره آشپزخانه را نبسته بوده است. گربهٔ همسایه وارد آشپزخانه شده و سعی کرده است ماهی را بگیرد و هر دو ظرف را انداخته است. خاکستر شوهر او بر روی کف آشپزخانه ریخته است.

صفحه ۲۷۸. **تجسم حجم مکعب مستطیل‌ها**
حل: شصت و یک بلوک ۱ × ۱ × ۲ در این سازه وجود دارد.

صفحه ۲۷۹. **ناممکن امکان‌پذیر**
حل: شکاف بریده شده در کاغذ در سوراخ قرار می‌گیرد. آن وقت دکمه‌ها به آسانی از شکاف رد و از کاغذ جدا می‌شوند.

صفحه ۲۷۹. **چیدن تاس‌ها**
حل: نکتهٔ آن به یادداشتن این است که مجموع دو طرف تاس ۷ است. نخستین ستون ۱۰ تاس با ۷۰ خال دارد که بالا را که دیده می‌شود از آن کم کنیم، ۶۹ باقی می‌ماند. ستون دوم ۷ تاس و ۴۹ خال دارد که با کم کردن ۳ روی بالا ۴۶ باقی می‌ماند. بنابراین مجموع کل ۱۰۵ = ۴۶ + ۶۹ خال است.

صفحه ۲۸۱. **معمای حرف بزرگ**
حل:

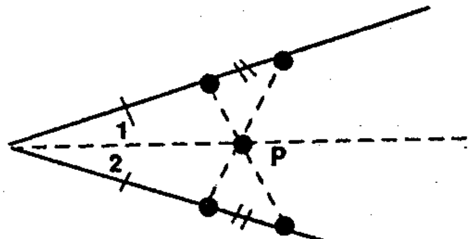
صفحه ۲۸۲. معمای شیرفروش

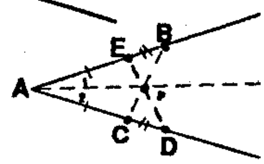
حل:

	۴لیتری	۵لیتری	۱۰لیتری	۱۰لیتری
شروع	0	0	10	10
	0	5	10	5
	4	1	10	5
	0	1	10	9
	1	0	10	9
	1	5	10	4
	4	2	10	4
	0	2	10	8
	4	2	6	8
پایان	**2**	**2**	**6**	**10**

صفحه ۲۸۳. آیا ممکن است؟

حل: ٤ نقطه بر روی اضلاع زاویه به شکلی که نشان داده شده است بگذارید و دوپاره خط را رسم کنید. نقطهٔ تقاطع این دو پاره خط و رأس زاویه خطی را می‌سازند که زاویه را نصف می‌کند.





به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آنها $\Delta ABC \cong \Delta ADE$

پس $\angle B \cong \angle D$

و به دلیل برابری یک ضلع و دو زاویه $\Delta BEP \cong \Delta DCP$

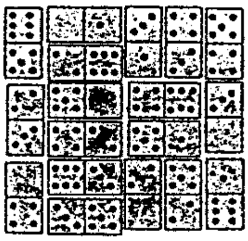
پس $BP \cong DP$

به دلیل برای سه ضلع $\Delta BPA \cong \Delta DPA$

پس $\angle 1 \cong \angle 2$

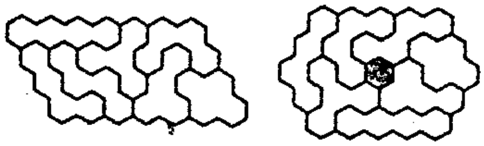
صفحه ۲۸۳. می‌توانید مربع لاتینی بسازید؟

حل:



صفحه ۲۹۱. بازی با شش ضلعی‌ها

حل: تنها مثلث را نمی‌توان با شش ضلعی‌ها ساخت.

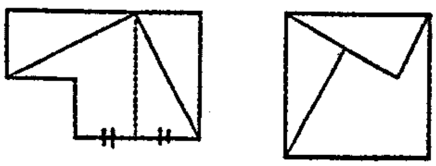


ص ۲۹۵. مثلث کاری

حل: وقتی که بخش‌های دیگری را که نداریم با استفاده از مثلث‌های متشابه حساب کنیم، بخش‌هایی در عمل خواهیم داشت که در بعضی موارد همپوشانی و در بعضی دیگر فاصلهٔ خالی دارند.

صفحه ۲۹٦. تبدیل مربع

حل:

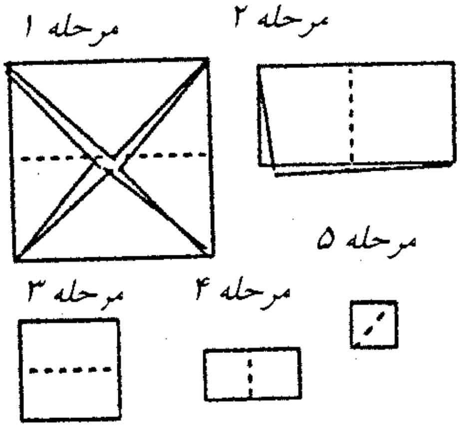


صفحه ۳۰۸. پر کردن صفحهٔ شطرنج با دومینو

حل: صفحهٔ شطرنج تغییر یافته را نمی‌توان با دومینو پر کرد. یک دومینو باید یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ قرمز را پر کند. چون هر دو گوشه برداشته شده همرنگند تعداد متناسب خانه‌های قرمز و سیاه باقی نمی‌ماند.

صفحه ۳۰۹. اوراق کردن صفحهٔ شطرنج

حل:



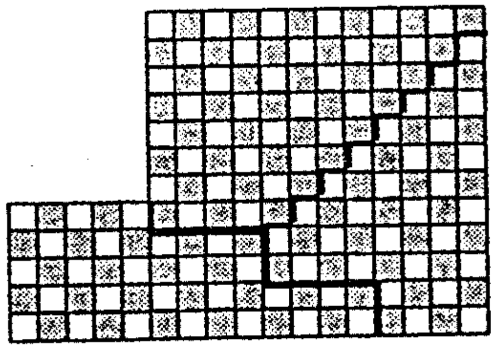
صفحه ۳۱۰. مربع‌های صفحهٔ شطرنج

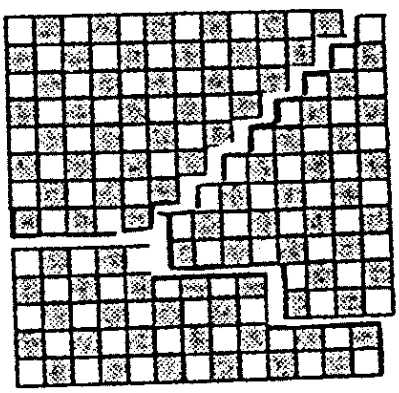
حل:

یک مربع ۸ × ۸ — ٤ مربع ۷ × ۷
۹ مربع ٦ × ٦ — ۱٦ مربع ۵ × ۵
۲۵ مربع ٤ × ٤ — ۳٦ مربع ۳ × ۳
٤۹ مربع ۲ × ۲ — ٦٤ مربع ۱ × ۱
جمعاً ۲۰٤ مربع

صفحهٔ ۳۱۱. معمای خانم فیثاغورس

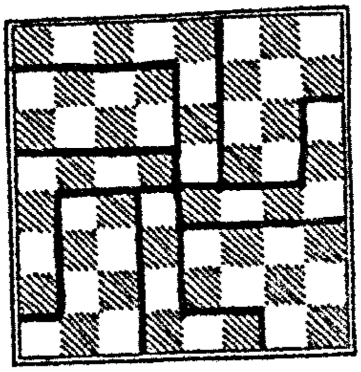
حل:





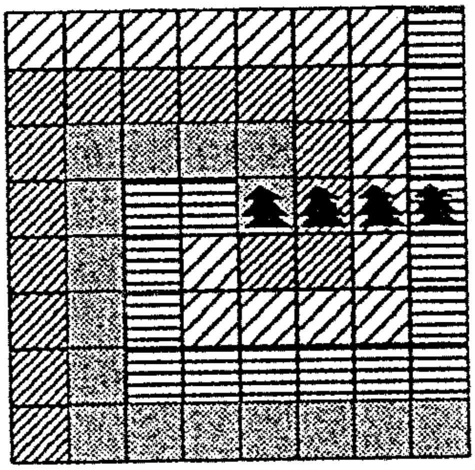
صفحه ۳۱۱. راه حل نبرد شاهانه

حل:



صفحه ۳۱۳. معمای چهار درخت بلوط

حل:



صفحه ۳۱۳. وزن آجر

حل: یکی از راه‌های حل آن اضافه کردن سه آجر دیگر به طرف چپ است. برای متعادل کردن این وزنهٔ چهار برابر شده باید سمت راست چهار برابر شود. پس چهار برابر با سه آجر و سه کیلوگرم باشد. پس ۳ + ۳B = ٤B پس ۳ = B.

راه دیگر آن نوشتن معادله از همان مرحلهٔ اول است یعنی

B = ۳/۴B + ۳/٤

و B را به دست آورد.

صفحه ۳۱٤. مسألهٔ شطرنج

حل: به گفته سام لوید، اولین برش پنیر را به دو بخش تقسیم می‌کند. دومی به چهار تکه، سومی ۸؛ چهارمی ۱۵؛ پنجمی ۲٦ و ششمی ٤۲

صفحه ۳۱٤. در جعبهٔ شیرینی چه مانده است؟

حل: کافی است از جعبه‌ای که بر آن ۲ شکلاتی و ۱ *خامه‌ای* نوشته است یک شیرینی را امتحان کنید. اگر آن را که امتحان می‌کنید شکلاتی باشد، چون می‌دانید که این جعبه نمی‌تواند دو شکلاتی و یک خامه‌ای داشته باشد، چون برچسب آن غلط است. پس فقط می‌تواند سه شکلاتی باشد. چون برچسب تمام جعبه‌ها غلط است. این بدان معنی است که جعبه‌ای که برچسب ۳ خامه‌ای دارد دو شکلاتی و یک خامه‌ای است. آن‌که برچسب سه شکلاتی دارد سه خامه‌ای دارد. اگر آن شیرینی را که امتحان کرده‌اید خامه‌ای باشد پس آن جعبهٔ سه خامه‌ای است. معنی آن این است که جعبه دارای برچسب سه خامه‌ای باید سه شکلاتی داشته باشد و جعبه‌ای که برچسب سه شکلاتی دارد دو شکلاتی و یک خامه‌ای دارد.

صفحه ۳۱٤. معمای ساعت لوئیس کارول

حل: *کدام یک بهتر است؟ ساعتی که تنها یک بار درست است یا ساعتی که دوبار در هر روز درست است؟ جواب می‌دهید «قطعاً دومی». بسیار خوب توجه کنید.*
من دو ساعت دارم: یکی اصلاً کار نمی‌کند، دیگری روزی یک دقیقه عقب می‌ماند؛ کدام را ترجیح می‌دهید؟ پاسخ می‌دهید: «قطعاً آن‌که عقب می‌ماند» حالا توجه کنید: آن‌که هر روز یک دقیقه عقب می‌ماند دوازده ساعت یا ۷۲۰ دقیقه باید عقب بماند تا درست نشان دهد. یعنی هر دو سال یک بار درست نشان می‌دهد، در حالی که دیگری هر ۱۲ ساعت یک بار یعنی دوبار در روز ساعت را درست نشان می‌دهد. ـ لوئیس کارول

صفحه ۳۱٤. معمای تارتالیا

حل: برای اینکه زنی با مردی جز شوهرش تنها نماند به یازده بار عبور نیاز دارد.

۱) شوهر شمارهٔ یک زن شمارهٔ یک را می‌برد و برمی‌گردد ـ دو عبور

۲) زن شمارهٔ ۳ زن شمارهٔ ۲ را می‌برد و برمی‌گردد ـ دو عبور

۳) شوهر شمارهٔ ۲ شوهر شمارهٔ ۱ را می‌برد و با زن شمارهٔ ۲ برمی‌گردد ـ دو عبور

٤) شوهر شمارهٔ ۳ شوهر شمارهٔ ۲ را می‌برد و بازمی‌گردد ـ دو عبور

۵) شوهر شمارهٔ ۳ زن شمارهٔ ۳ را می‌برد و شوهر شمارهٔ ۲ بازمی‌گردد تا زنش را ببرد ـ سه عبور

منابع

Andrews, W.S.. *Magic Squares and Cubes,* Dover Publications, Inc., New York, 1960.

Ball, W.W. Rouse and Coxeter, H.S.M.. *Mathematical Recreations and Essays,* Dover Publications, Inc., New York, 1987.

Ball, W.W.Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics,* Dover Publications, Inc., New York, 1960.

Banchoff, Thomas F. *Beyond The Third Dimension,* W.H. Freeman & Co., New York, 1990.

Barnsley, Micahel. *Fractals Everywhere,* Academic Press, Inc., Boston, 1988.

Barrow, John D.. *Pi In The Sky,* Oxford University Press, Oxford, 1992.

Bell, Eric Temple. *The Magic Of Numbers,* Dover Publications, Inc., New York, 1946.

Bell, R.C.. *Board and Tables Games from Many Civilizations,* Dover Publications, Inc., New York, 1979.

Bell, R.C.. *Discovering Old Board Games,* Shire Publications Ltd., United Kingdom, 1973.

Blackwell, William. *Geometry & Architecture,* Key Curriculum Press, Berkeley, CA, 1994.

Bold, Benjamin. *Famous Problems of Geometry,* Dover Publications, Inc., New York, 1969.

Boles, Martha and Newman, Rochelle. *Universal Patterns,* Pythagorean Press, Bradford, MA 1987.

Bool, F.H.; Krist, J.R.; Locher, J.L.; Wierda, F.. *M.C. Escher His Life & Complete Works,* Harry N. Abrams, New York, 1982.

Boyer, Carl. *A History of Mathematics,* Princeton University Press, New Jersey, 1985.

Briggs, John and Peat, David. *Turbulent Mirror,* Harper & Row, New York, 1989.

Brizio, A.M.; Brugnoli, M.V.; Chastel, A.. *Leonardo the Artist,* McGraw-Hill Co., New York, 1980.

Bunch, Bryan H.. *Mathematical Fallacies and Paradoxes,* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1982.

Campbell,D.M. and Higgins, J. editors. *Mathematics: People, Problems, Results,* Wadsworth International, Belmont, CA 1984.

Clark, Don. *Myers Laboratories; Hearing in Three Dimensions,* San Francisco Chronicle, San Francisco, June 11, 1987.

Cocteau. Jean. *Flight,* Hill & Wang, New York, 1963

Cook, Theodore A.. *The Curves of Life,* Dover Publications, Inc., New York, 1979

Coxeter, H.S.M.; Emmer, M.; Penrose, R.; Teuber,M.L., editors. *M.C. Escher: Art & Science,* North-Holland, Amsterdam, 1986.

Crandall, Richard E. *Projects in Scientific Computation*, Springer-Verlag Publishers, Santa Clara, CA, 1994.

Davies, W.V.. *Reading the Past — Egyptian Hieroglyphs*, University of California Press, Berkeley, CA, 1987.

Davis, Philip and Hersh, Reuben. *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin Co., Boston, 1981.

Davis, Philip J. and Hersh, Reuben. *Descartes' Dream*, Houghton Mifflin Co., Boston, 1986.

Davis, Philip J. and Hersh, Reuben. *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin Co., Boston, 1981.

Dewdney, A.K.. *The Magic Machine*, W.H.Freeman & Co., New York, 1990.

Dilke, O.A.W.. *Reading the Past—Mathematics & Measurment*, University of California Press, Berkeley, CA, 1987.

Dunham, William. *Journey Through Genius*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

Edwards, Edward B.. *Patterns and Design with Dynamic Symmetry*, Dover Publications, Inc., New York, 1967.

Ernst, Bruno. *The Magic Mirror of M.C. Escher*, Ballantine Books, New York, 1976.

Ferguson, Claire. *Helaman Ferguson: Mathematics in Stone and Bronze*, Meridian Creative Group, Erie, PA, 1994.

Ferrell, J.E.. *Claude Phené—Microcomputers & Micro-irrigation*, Computerland Magazine, July/August, 1990.

Forsyth, Andrian. *The Architecture of Animals*, Camden House, Ontario, 1989.

Freias, Bill. *The Urban Forest*, Computerland Magazine, Jan./Feb. 1989.

Frisch, Karl von. *Animal Architecture*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1974.

Gamow, George. *One, Two, Three ...Infinity*, The Viking Press, New York, 1947.

Garcia, Linda. *The Fractal Explorer*, Dynamic Press, Santa Cruz, CA 1991.

Gardner, Martin. *Codes, Ciphers and Secret Writing*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.

Gardner, Martin. *Fractal Music, Hypercards and more...*, W.H.Freeman & Co., New York, 1991.

Gardner, MArtin. *Knotted Doughnuts*, W.H. Freeman & co., New York, 1986.

Gardner, Martin. *Mathematics, Magic & Mystery*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

Gardner, Martin. *Time Travel*, W.H. Freeman & Co., New York, 1987.

Gardunkel, Solomon & Steen, Lynn A. editors. *For All Practical Purposes*, W.H.Freeman & Co., New York, 1991.

Ghyka, Matila. *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications, Inc., New York, 1977.

Gleason, Norma. *Cryptograms & Spygrams*, Dover Publications, Inc., 'New York, 19881.

Gleick, James. *Chaos*, Penquin Group, New York, 1987.

Glenn, William H. and Johnson, Donovan A.. *Invitation to Mathematics*, Doubleday & Co., Inc., Garden City, NY, 1961.

Golos, Ellery B.. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1968.

Greensberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W.H. Freeman & Co., New York, 1980.

Grübaum, Branko and Shephard, G.C.. *Tillings and Patterns*, W.H.Freeman and Co., New York, 1987.

Grunfeld, Frederic V. ed.. *Games of the World*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1975.

Hall, Rupert A.. *From Galileo To Newton*, Dover Publications, Inc., New York, 1981.

Hall, Stephen S. *A Molecular Code Links Emotions*, Smithsonian Magazine, Smithsonian Asso., Washington D.C., 1990.

Hambridge, Jay. *The Elements of Dynamic Symmetry*, Dover Publications, Inc., New York, 1967.

Hawkins, Gerald s.. *Mindsteps to the Cosmos*, Harper & Row, Publishers, NY, 1983.

Hemmings, Ray and Tanta, Dick. *Images of Infinity*, Leapfrogs, United Kingdom, 1984.

Herrick, Richard, editor. *The Lewis Carroll Book*, Tudor Publishing Co., New York, 1944.

Heydenreich, L.H.; Dibner, B.; Reti, L.. *Leonardo the Inventor*, McGraw-Hill Co., New York, 1980.

Hoffman, Paul. *Archimedes' Revenge*, W.W.Noron & Co., Inc., New York, 1988.

Hollindale, Stuart. *Makers of Mathematics*, Penquin Books, London, 1989.

Ifrah, Georges. *From One to Zero*, Penquin Books, New York, 1985.

Italo Cavino. *Cosmi-comics*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1965.

Ivins, Jr., William M.. *Art & Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1946.

Johnson, Donovan A. and Glenn, William H.. *Exploring Mathematics On Your Own*, Doubleday & Co., Inc., New York, 1961.

Jones, Richard Foster. *Ancient and Moderns*, Dover Publications, Inc., New York, 1981.

Kappraff, Jay. *Connections*, McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

Kasner, Edward and Newman, James R.. *Mathematics and the Imagination*, Microsoft Press, Redmond, WA, 1989.

Kline, Morris. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

Kline, Morris. *Mathematics, The Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York, 1980.

Kosko, Bart. *Fuzzy Thinking*, Hyperion, New York, 1993.

Kraitchik, Maurice. *Mathematical Recreation*, Dover Publications, Inc., New York, 1953.

Lebow, Irwin. *The Digital Connection*, Computer Science Press, New York, 1991.

Lloyd, Steon; Rice, David; et al. *World Architecture*, McGraw-Hill Co., London, 1978.

Loon, Broin van. *DNA—The Marvelous Molecule*, Tarquin Publications, Stradbroke, England, 1990.

Loyd, Sam. *Cyclopedia of Puzzles*, Sam Loyd, 1914.

Luckiesh, M.. *Visual Illusions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

Lysing. *Secret Writing*, Dover Publications, Inc., New York, 1974.

Mandelbrot, Benoit. *The Fractal Geometry of Nature*, W.H.Freeman & Co., New York, 1983.

Maucaulay, David. *The Way Things Work*, Houghton Mifflin, Boston, 1988.

Menninger, K.W.. *Mathematics In Your World*, The Viking Press, New York, 1954.

Moran, Jim. *The Wonders of Magic Squares*, Random House, New York, 1982.

Neugebauer, O.. *The Exact Science In Antiquity*, Dover Publications Inc., New York, 1969.

Newman, James R., et. al.. *The World of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1956.

Nicolis, Grégoire and Prigogine, Ilya. *Exploring Complexity*, W.H. Freeman and Co., New York, 1989.

Nobles, Barr. *Latest Trick in Recording — QSound*, San Francisco Chronicle, San Francisco, Feb. 6, 1991.

Ogilvy, C. Stanley and Anderson, John T.. *Excursions in Number Theory*, Dover Publications, Inc., New York, 1966.

Pagels, Heinz R.. *Perfect Symmetry*, Simon & Schuster, New York, 1985.

Palfrreman, Jon and Swade, Doron. *The Dream Machine*, BBC Books, London, 1991.

Pappas, Theoni. *Mathematics Appreciation*, Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 1987.

Pappas, Theoni. *Math Talk,* Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 1991.

Pappas, Theoni. *More Joy of Mathematics,* Wide World Publsihing/Tetra, San Carlos, CA, 1993.

Pappas, Theoni. *The Joy of Mathematics,* Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 1993.

Pappas, Theoni. *What Do You See?—An optical illusion slide show,* Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 1989.

Paulos, John Allen. *Beyond Numeracy,* Alfred A. Knopf, New York, 1991.

Pedoe, Dan. *Geometry and the Visual Arts,* Dover Publications, Inc., New York, 1976.

Penrose, Roger. *The Emperor's New Mind,* Oxford University Press, New York, 1989.

Peterson, Ivars. *Looking-Glass Worlds,* Science News, Washington D.C., Jan. 4, 1992.

Peterson, Ivars. *The Mathematical Tourist,* W.H. Freeman & Co., New York, 1988.

Peterson, Ivars. *The Mathematical Tourist,* W.H. Freeman and Co., New York, 1988.

Peterson, Roger T. & editors of Life. *The Birds,* Time, Inc., New York, 1963

Pevsner, Nicholaus; Felming, John; Honour, Hugh. *A Dictionary of Rachitecture,* The Overlook Press, Woodstock, New York 1976.

Pickover, Clifford A.. *Computers, Patterns, Chaos, & Beauty,* St. Martin's Press, New York, 1990.

Pickover, Clifford. *Computers and the Imagination,* St. Martin's Press, New York, 1991.

Pickover, Clifford. *Mazes of the Mind,* St. Martin's Press, New York, 1992.

Pierce, John R.. *The Science of Musical Sound,* W.H.Freeman & Co., New York, 1983.

Prigogine, Ilya. *Order Out Of Chaos,* Bantam Books, Toronto, 1988.

Ransom, William R.. *3 Famous Geometries,* William Ransom, 1959.

Ransom, William R.. *Can and Can't of Geometry,* J. Weston Walch, Portland, ME, 1960.

Resnikoff, H.L. and Wells, Jr., R. o.. *Mathematics in Civilization,* Dover Publications, New York, 1973.

Rheingold, Howard. *Virtual Reality,* Summit Books, New York, 1991.

Richter, Jean Paul. *The Notebooks of Leonardo da Vinci,* Dover Publications, New York, 1970.

Robbin, Tony. *Computers, Art and the 4th Dimension,* Little Brown & Co., Boston, 1992.

Robins, Gay and Shute, Charles. *The Rhind Mathematical Papyrus,* Dover Publications, Inc., New York, 1987.

Rosenberg, Nancy. *How To Enjoy Mathematics with Your Child,* Stein and Day, New York, 1970.

Rosenberg, Scott. *Virtual Reality Check,* San Francisco Examiner, San Francisco, April 19, 1990.

Rucker, Rudy. *Infinity & the Mind,* Bantam Books, New York, 1982.

Ruelle, David. *Chance and Chaos,* Princeton Uninersity Press, New Jersey, 1991.

Schattschneider, Doris. *Visions of Symmetry,* W.H. Freeman, New York, 1990.

Schimmel, Annemarie. *The Mystery of Numbers,* Oxford University Press, Oxford, 1992.

Schroeder, Manfred. *Fractals, Chaos, Power Laws,* W.H.Freeman and Co., New York, 1990.

Sharpe, Richard and Piggott, John, editors. *The Book of Games,* Galahad Books, New York, 1977.

Shlain, Leonard. *Art & Physics,* William Morrow and Co., NY, 1991.

Smith, D.E.. *History of Mathematics,* Dover Publications, Inc., New York, 1951.

Smith, Laurence Dwight. *Cryptography,* Dover Publications, Inc., New York, 1943.

Steen, Lynn Arthur, ed., *Mathematics Today,* Vintage Books, NY, 1980.

Stevens, Peter S. *Patterns In Nature,* Little Brown & Co., Boston, 1974.

Stewart, Ian and Golubitsky, Martin. *Fearful Symmetry-Is God a Geometer?* Blackwell Publishers, Oxford, 1992.

Stewart, Ian. *Another Fine Math You've Got Me Into....* W.H. Freeman & Co., New York, 1992.

Stewart, Ian. *Does God Play Dice?* Basil Blackwell, Oxford, 1989.

Struik, Dirk. *A Concise History of Mathematics,* Dover Publications Inc., New York, 1967.

Sutton, O.G.. *Mathematics in Action,* Dover Publications, NY, 1957.

Trachtenberg, Marvin and Hyman, Isabelle. *Architecture from Prehistoric to Post Modernism,* Harry N. Abrams, Inc., NY, 1986.

Tuller, Annita. *A Modern Introduction to Geometries,* D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, New Jersy, 1967.

Waerden, B.L. van der. *Science Awakening,* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

Waldrop, M. Mitchell. *Complexity,* Simon & Schuster, New York, 1992.

Wolf, Fred Alan. *Parallel Universes,* Simon & Schuster, NY, 1988.

Zammatio,c.; Marinoni,A.; Brizio,A.M.. *Leonardo the Scientist,* McGraw-Hill Co., New York, 1980.

نمایه

خانم تئونی پاپاس نویسندهٔ این کتاب اصلاً یونانی است. او در دانشگاه‌های برکلی و استانفورد آمریکا در رشتهٔ ریاضیات تحصیل کرده و اینک مدرس ریاضیات است. او می‌کوشد ترس از ریاضیات را از ذهن‌ها بزداید و در این راه آثار جذابی تألیف کرده، که کتاب حاضر یکی از آنهاست.

از سایر آثار او:

- *لذت ریاضیات*
- *اندیشه‌های ریاضی در شعر*
- *برخال‌ها، گوگل‌ها و قصه‌های ریاضی دیگر*
- *تقویم ریاضیات*
- *تی‌شرت ریاضی*

افسون ریاضیات

کمتر با کتابی با این دامنه، این زیبایی و چنین هوشمندانه روبرو می‌شویم، کتاب های پاپاس همیشه در بردارنده اطلاعاتی جذاب و ارزشمند، نه تنها برای دانش‌آموزان، دانشجویان و افراد غیرمتخصص، که برای پژوهشگران کارکشته نیز بوده‌است. پاپاس هم ریاضیدان است هم شاعر، با منطق خشک یکی روشن بینی سرشار از خلاقیت دیگری، و مسائلی را انتخاب می‌کند که تخیل و حس شگفتی خواننده را پهنه گسترده و باورنکردنی جهان ریاضیات بر می‌انگیزد.

افسون ریاضیات در جهان اندیشه به کاوش بر می خیزد، اثر جادوئی ریاضیات را بر زندگی ما کشف می‌کند، و به ما در جائی در کشف ریاضیات یاری می رساند که انتظار آن را نداریم.

قیمت: ۱۲۰۰۰ تومان

9789645676832

انتشارات مازیار