دانش پژوهان جوان
ناشر کتابهای المپیاد

می‌خواهم المپیادی شوم

الفبای
حرارت و سیالات

مهدی متقی‌پور

- حل تشریحی المپیادهای داخلی
- مسائل المپیادهای کشورهای خارجی
- مسائل ایرودف
- به همراه سی‌دی آزمایش‌های فیزیک

به نام خداوند جان و خرد

الفبای حرارت و سیالات

مولف:
مهدی متقی‌پور

سرشناسنامه	: متقی‌پور، مهدی، ۱۳۵۷ -
عنوان و نام پدیدآور	: الفبای حرارت و سیالات/مولف مهدی متقی‌پور؛ ویرایش علیرضا صادقی‌راد
مشخصات نشر	: تهران:: دانش‌پژوهان جوان، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	: ۳۳۴ ص.: مصور، جدول، نمودار.
فروست	: می‌خواهم المپیادی شوم؛ ۳۰۸. سری الفبا.
شابک:	: ۷۱۰۰۰ریال ۰- ۸۴- ۵۲۳۰- ۶۰۰- ۹۷۸ :
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
یادداشت	: چاپ قبلی: ۱۳۸۵.
یادداشت	: کتابنامه: ص. ۳۳۳ و ۳۳۴
موضوع	: گرما – راهنمای آموزشی (متوسطه)
موضوع	: سیالات – مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع	: سیالات – راهنمای آموزشی (متوسطه)
موضوع	: گرما – مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع	: المپیادها (فیزیک)
شناسه افزوده	: صادقی‌راد، علیرضا، ویراستار
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۰ ۷الف۲م/۲۵/QC۳۱۱
رده بندی دیویی	: ۷۰۷۶/۵۳۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۲۵۱۵۷۶۵

الفبای حرارت و سیالات

مولف..... مهدی متقی‌پور

ویراستار ..... دکتر علیرضا صادقی‌راد

ناشر..... دانش پژوهان جوان

قطع..... وزیری

تیراژ..... ۱۶۰۰ نسخه

چاپ اول (ویرایش دوم) ۱۳۹۰

قیمت..... ۷۱۰۰ تومان

شابک..... ۹۷۸ - ۶۰۰-۵۲۳۰ - ۸۴-۰

ناشر کتابهای المپیاد

میدان انقلاب، خ کارگر جنوبی، خ شهید وحید نظری، بین خ منیری جاوید (اردیبهشت) و خ ۱۲ فروردین، پلاک ۱۰۵، طبقه ۳، واحد ۱۱

تلفن: ۶۶۴۹۸۹۹۸ – ۶۶۴۹۶۳۶۳ دورنگار : ۶۶۹۵۳۲۵۰

www.irOlympiad.com

مقدمهٔ مؤلف

«بر در علم قفلی است که کلید آن پرسش است.»

امام صادق علیه‌السلام

در کشور پهناور ما بسیاری از نوجوانان مستعد وجود دارند که بتوانند در رقابت‌های المپیاد به خوبی بدرخشند. اما به دلیل نداشتن منابع و سؤالات کافی و همچنین نبود اساتید مجرب، نتیجهٔ مورد رضایت و دلخواه را به‌دست نمی‌آورند. بنابراین وظیفهٔ خود دانستیم که با نوشتن کتاب‌های الفبا، اختلاف شرایطی که بین دانش پژوهان در کل کشور موجود است را به حداقل برسانیم. کتاب حاضر نیز در راستای نیل به این هدف نوشته شده است. در این کتاب سعی شده مفاهیمی چون فشار، گرما و قوانین ترمودینامیک به زبان ساده و در سطح کتاب‌های درسی دورهٔ متوسطه بیان گردند و به‌طور تدریجی و پله‌ای به آن‌ها عمق داده شوند.

همچنین در متن، سؤالاتی به نام سؤالات محک مطرح شده تا علاوه بر استفاده از روابط به عمق مفهوم نیز توجه خاصی مبذول گردد. علاوه بر این، در هر مبحث تعدادی آزمایش در نظر گرفته شده که فیلم‌های آن در سی‌دی آخر کتاب موجود است. با دیدن این فیلم‌ها می‌توانید تمام شک و تردیدها را از خود دور کنید.

امید است که این مجموعه همچون گذشته مورد توجه و رضایت تمامی دانش پژوهان واقع گردد. لازم است که در اینجا از کمک‌های بی دریغ همسرم و حمایت‌های روحی و معنوی پدر و مادر گرامیم صمیمانه تشکر کنم. همچنین از زحمات مدیریت انتشارات، جناب آقای حیدریان و تلاش‌های فداکارانهٔ آقای مرتضی محمدآبادی تشکر و قدردانی کنم. از آقای مهندس خلینا و همکارانشان به خاطر دقت نظر در حروفچینی کتاب و همچنین آقای محمدرضا ذاکر به خاطر ترسیم شکل‌ها و از آقای مهندس حامد هاشمی به خاطر طراحی روی جلد کمال تشکر را دارم.

سخن آخرم با شما دانش‌پژوهان

اگر پیشنهاد یا انتقادی دارید حتماً آن را به اطلاع اینجانب برسانید. همچنین اگر مسأله یا سؤالات جالبی طرح یا در اختیار دارید می‌توانید آن را به آدرس ایمیل اینجانب بفرستید تا مسأله را به اسم خودتان در ویرایش‌های بعدی کتاب به ثبت برسانیم.

Email: mottaghi@sharif.edu

مهدی متقی‌پور

پاییز ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

I سیالات ۱۵

۱ *استاتیک سیالات* ۱۷

۱.۱ چگالی (جرم حجمی) ۱۸

۲.۱ چگالی نسبی (وزن مخصوص) ۱۹

۳.۱ فشار ۲۰

۴.۱ فشار مایعات ۲۲

۵.۱ مانومترها ۳۸

۶.۱ سیفون ۴۰

۷.۱ اصل پاسکال ۴۲

۸.۱ نیروی وارد از طرف سیال ۴۵

۹.۱ نیروی شناوری (نیروی ارشمیدس) ۵۶

۱۰.۱ کشش سطحی و خاصیت موئینگی ۶۹

۱۱.۱ مسائل تکمیلی فصل اول ۷۶

۲ *دینامیک سیالات* ۸۱

۱.۲ حرکت با شتاب ثابت ۸۱

۲.۲ نیروی ارشمیدس در حرکت شتابدار ۸۶

۳.۲ فشار در سقوط آزاد ۸۹

۴.۲ نیروی ارشمیدس در سقوط آزاد ۹۰

۵.۲ معادله پیوستگی (قانون بقای جرم) ۹۲

۶.۲ معادلهٔ برنولی ۹۵

۷.۲ لوله ونتوری ۱۰۲

۸.۲ مسائل تکمیلی فصل دوم ۱۰۸

II **حرارت** ۱۱۳

۳ *انبساط اجسام* ۱۱۵

۱.۳ دما ۱۱۵

۲.۳ تبدیل مقیاس دماها به یکدیگر ۱۱۶

۳.۳ انبساط گرمایی طولی ۱۱۸

۴.۳ نمودار انبساط گرمایی ۱۲۱

۵.۳ نیرو در اثر انبساط طول ۱۲۶
۶.۳ انبساط گرمایی سطحی ۱۳۱
۷.۳ هیچ هم منبسط می‌شود ۱۳۱
۸.۳ انبساط گرمایی حجمی ۱۳۲
۹.۳ تغییر چگالی بر اثر تغییر دما ۱۳۵
۱۰.۳ انبساط ظاهری مایع ۱۳۸
۱۱.۳ انبساط غیر عادی آب ۱۴۱
۱۲.۳ مدول حجمی B ۱۴۴
۱۳.۳ مسائل حل شده ۱۴۶
۱۴.۳ مسائل تکمیلی فصل سوم ۱۵۱
۴ *گرما و تعادل گرمایی* ۱۵۵
۱.۴ یکای انرژی گرمایی ۱۵۶
۲.۴ ظرفیت گرمایی ویژه ۱۵۶
۳.۴ رسم نمودارهای $Q-T$ و $T-t$ ۱۵۸
۴.۴ گرمای نهان ویژهٔ ذوب ۱۶۰
۵.۴ تبخیر و فشار بخار ۱۶۱
۶.۴ جوشش ۱۶۳

۷.۴ گرمای نهان ویژهٔ تبخیر ۱۶۵
۸.۴ اثر فشار روی نقطهٔ ذوب ۱۶۸
۹.۴ اثر ناخالصی‌ها بر نقطهٔ ذوب ۱۶۹
۱۰.۴ اثر فشار روی نقطهٔ جوش ۱۶۹
۱۱.۴ اثر ناخالصی‌ها بر نقطه جوش ۱۷۰
۱۲.۴ مادهٔ خالص ۱۷۱
۱۳.۴ تعادل فاز بخار با مایع ۱۷۱
۱۴.۴ نمودار $P-V$ ۱۷۳
۱۵.۴ تعادل فازهای بخار و مایع و جامد ۱۷۴
۱۶.۴ تعادل گرمایی (پایستگی انرژی) ۱۷۸
۱۷.۴ مسائل تکمیلی فصل چهارم ۱۸۳
۵ *انتقال گرما* ۱۸۵
۱.۵ رسانش (هدایت) ۱۸۵
۲.۵ رسم نمودار رسانش ۱۸۷
۳.۵ مقاومت گرمایی در رسانش (R) ۱۹۰
۴.۵ رسانش در لوله‌ها ۱۹۶

۵.۵ رسانش در مخزن کروی شکل ۱۹۸
۶.۵ همرفت (جابه‌جایی) ۱۹۹
۷.۵ تابش (تشعشع) ۲۰۸
۸.۵ پایستگی انرژی در انتقال گرما ۲۱۱
۹.۵ مسائل تکمیلی فصل پنجم ۲۱۳
۶ *قوانین گازها* ۲۱۷
۱.۶ مول و عدد آووگادرو ۲۱۷
۲.۶ گاز کامل ۲۱۸
۳.۶ آزمایش دما ثابت (ایزوترم) ۲۱۹
۴.۶ آزمایش حجم ثابت (ایزوکوریک) ۲۲۰
۵.۶ آزمایش فشار ثابت (ایزوبار) ۲۲۱
۶.۶ دمای صفر مطلق ۲۲۱
۷.۶ مسائل حل شده ۲۲۱
۸.۶ مخلوط‌ها و محلول‌ها ۲۴۸
۹.۶ غلظت و غلظت مولی ۲۴۸
۱۰.۶ مخلوط چند گاز کامل ۲۴۹
۱۱.۶ مسائل تکمیلی فصل ششم ۲۵۴

۷ *قوانین ترمودینامیک* ۲۶۱

۱.۷ بررسی ماکروسکوپیک یا میکروسکوپیک ۲۶۲

۲.۷ حالت تعادل (تعادل ترمودینامیکی) ۲۶۲

۳.۷ فرآیند ترمودینامیکی ۲۶۳

۴.۷ چرخه ترمودینامیکی ۲۶۴

۵.۷ قانون صفرم ترمودینامیک ۲۶۴

۶.۷ قانون اول ترمودینامیک ۲۶۴

۷.۷ انرژی درونی و گرمای مبادله شده ۲۷۲

۸.۷ بررسی قانون اول در فرآیندهای خاص ۲۷۳

۹.۷ مقایسه C_P با C_V ۲۷۵

۱۰.۷ مسائل حل شده ۲۷۹

۱۱.۷ قانون دوم ترمودینامیک ۲۸۸

۱۲.۷ موتور گرمایی و یخچال ۲۸۹

۱۳.۷ چرخهٔ کار نو ۲۹۳

۱۴.۷ مسائل تکمیلی فصل هفتم ۲۹۹

۸ *سؤال‌های دوره‌های اخیر* ۳۰۵

۱.۸ مرحلهٔ اول بیستمین المپیاد فیزیک ۳۰۵

۲۸ مرحلهٔ اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ۳۰۹

۳۸ مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد فیزیک ۳۱۶

۴۸ مرحلهٔ اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ۳۲۵

۵۸ مرحلهٔ اول بیست و چهارمین المپیاد فیزیک ۳۲۸

بخش I

سیالات

فصل ۱

استاتیک سیالات

مقدمه

معمولاً مواد را به سه گروه تقسیم می‌کنند. جامدات، مایعات، گازها. یک جسم جامد وقتی روی میزی قرار می‌گیرد، شکلش را حفظ می‌کند. مایع همیشه شکل ظرف را به خود می‌گیرد و گاز در هر محفظه‌ای که ریخته شود، آن را پر می‌کند. البته گاز بر خلاف مایع، در ته ظرف قرار نمی‌گیرد. دقت کنید که مرزبندی بین این گروه‌ها همیشه روشن و واضح نیست. برخی از جامدات مثل شیشه و پلاستیک آهسته آهسته تغییر شکل می‌دهند. مثلاً در اغلب پنجره‌های شیشه‌ای در ساختمان‌های باستانی مشاهده می‌شود که در قسمت‌های پایین پنجره ضخامت شیشه بیشتر از قسمت‌های فوقانی آن است. یعنی در اثر وزن به پایین پنجره کشیده می‌شوند. معمولاً جامدات را به دو دسته تقسیم می‌کنند:

۱- جامدات بلورین ۲- جامدات غیر بلورین

در جامدات بلورین اتم‌ها به ترتیبی دقیق آرایش یافته‌اند اما در جامدات غیر بلورین نظم خاصی در اتم‌ها دیده نمی‌شود.

همهٔ مواد می‌توانند به حالت جامد، مایع یا گاز باشند. اغلب به جای واژهٔ حالت، از واژهٔ فاز استفاده می‌شود و تغییر حالت مثلاً از جامد به مایع را تغییر فاز یا گذار فازی از جامد به مایع می‌گویند. فازهای مایع و گاز شباهت‌های بیشتری نسبت به هم دارند تا فاز جامد. در مایعات و گازها، مولکول‌ها به صورت تصادفی آرایش یافته‌اند و می‌توانند به سهولت داخل ماده حرکت کنند. مثلاً اگر یک قطره رنگی را در یک لیوان آب بریزیم بعد از مدتی تمام آب رنگی می‌شود (بدون اینکه آب هم زده شود). اصطلاحاً به مایع و گاز، شاره یا سیال نیز گفته می‌شود (به دلیل جریان یافتن آن).

۱.۱ چگالی (جرم حجمی)

در زبان گفتگوی روزانه مثلاً گفته می‌شود آهن از چوب سنگین‌تر است. در واقع، منظور از این جمله این است که اگر دو حجم یکسان از آهن و چوب داشته باشیم حجم مربوط به آهن سنگین‌تر است.

در علم فیزیک این‌گونه مقایسه‌ها با استفاده از اصطلاح چگالی انجام می‌شود و یکی از مهمترین خواص ماده است. طبق تعریف اگر ماده‌ای به جرم m و حجم V داشته باشیم، جرم موجود در واحد حجم جسم را چگالی آن جسم گویند و با نماد ρ نشان می‌دهند. بنابراین:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (۱-۱)$$

واحد چگالی در SI کیلوگرم بر متر مکعب $\mathrm{Kg/m^3}$ است. واحد دیگری که زیاد از آن استفاده می‌شود $\mathrm{gr/cm^3}$ می‌باشد که می‌توان به صورت زیر آنها را بر هم تبدیل کرد.

$$۱\ \mathrm{gr/cm^3} = ۱۰۰۰\mathrm{kg/m^3}$$

با استفاده از رابطه (۱-۱) می‌توان جرم و وزن یک جسم را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$m = \rho V \qquad (۲-۱)$$

$$W = mg = \rho V g \qquad (۳-۱)$$

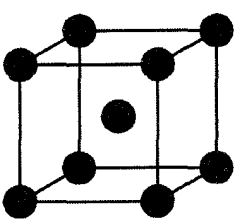
V: حجم جسم است.

اکثر مواد با افزایش دما منبسط می‌شوند، در نتیجه چون جرم ثابت است، چگالی آنها با افزایش دما کاهش می‌یابد. البته آب از این قاعده استثناء است. با افزایش دما در محدوده $۰^\circ C$ و $۴^\circ C$ چگالی آب افزایش می‌یابد.

مثال. ساختمان فلز آهن را می‌توان به این صورت در نظر گرفت که اتم‌های آهن در رأس‌های مکعب‌هایی قرار دارند که در کنار و روی هم تمام فلز را پر می‌کنند و علاوه بر آن در مرکز هر مکعب نیز یک اتم آهن قرار دارد. اگر اتم گرم آهن ۵۶ گرم، عدد آووگادرو ۶×۱۰^{۲۳} و چگالی آهن $۷/۹\ g/cm^3$ باشد، ضلع هر یک از مکعب‌ها چند سانتی‌متر است؟

(ششمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. می‌دانیم با توجه به تعریف عدد آووگادرو، اگر تعداد ۶×۱۰^{۲۳} اتم آهن داشته باشیم آنگاه جرم آنها روی هم برابر ۵۶ گرم می‌شود. از طرفی در هر مکعب ۲ عدد اتم آهن وجود دارد یعنی یکی در مرکز و ۸ تا اتم که در رأس هستند منتهی $\frac{۱}{۸}$ هر اتم رأس، داخل مکعب موردنظر هست و بقیه اتم داخل مکعب‌های مجاور می‌باشد. پس تعداد اتم در هر مکعب برابر است با:



$$\text{تعداد اتم در هر مکعب} = ۱ + ۸ \times \frac{۱}{۸} = ۲$$

که با یک نسبت ساده به شکل زیر می‌توان جرم هر مکعب را یافت.

$$\begin{array}{ll} ۶\times ۱۰^{۲۳} & ۵۶\ gr \\ ۲ & x = \frac{۲\times ۵۶}{۶\times ۱۰^{۲۳}} = ۱۸/۶۶\times ۱۰^{-۲۳}\ gr \end{array}$$

با توجه به تعریف چگالی داریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۷/۹ = \frac{۱۸/۶۶\times ۱۰^{-۲۳}}{V} \Rightarrow V = ۲/۳۶\times ۱۰^{-۲۳}\ cm^{۳}$$

$$V = a^{۳} = ۲/۳۶\times ۱۰^{-۲۳} \Rightarrow a = ۲/۸۷\times ۱۰^{-۸}\ cm \qquad \text{طول هر ضلع}$$

۲.۱ چگالی نسبی (وزن مخصوص)

بنا به تعریف نسبت چگالی یک جسم به چگالی آب در $۴^{\circ}C$ را چگالی نسبی یا وزن مخصوص آن جسم گویند که کمیتی بدون بعد است.

نکته ۱: یک جسم وقتی می‌تواند بر روی مایعی شناور بماند که چگالی آن جسم از چگالی مایع کمتر باشد مثلاً تکه‌ای شیشه را در نظر بگیرید. چگالی شیشه $۲/۵\ gr/cm^{۳}$ است، لذا اگر آنرا روی آب بیاندازیم (چگالی آب $۱\ gr/cm^{۳}$ است) در آب فرو می‌رود ولی اگر همان تکه شیشه را در جیوه بیاندازیم (چگالی جیوه $۱۳/۶\ gr/cm^{۳}$ است) روی سطح جیوه شناور می‌ماند. اگر به دریاچه ارومیه رفته باشید ملاحظه می‌کنید که شناور ماندن روی آن خیلی راحت‌تر از شناور ماندن روی آب دریای خزر است و این به‌خاطر این است که چگالی آب دریاچه ارومیه به دلیل داشتن املاح فراوان بیشتر از چگالی آب دریای خزر می‌باشد.

نکته ۲: اگر n ماده با جرم‌های $m_۱, m_۲, \ldots, m_n$ و با حجم‌های $V_۱, V_۲, \ldots, V_n$ را با هم مخلوط کنیم با صرف‌نظر از تغییر حجم کل می‌توان چگالی متوسط ترکیب این n جسم را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\rho = \frac{m_۱ + m_۲ + \ldots + m_n}{V_۱ + V_۲ + \ldots + V_n} \qquad (۴-۱)$$

مثال. در یک ظرف مقداری مایع a به وزن W و در ظرف دیگر مقداری مایع b به همان وزن وجود دارد. مقداری مایع به وزن u از ظرف اول برمی‌داریم و در ظرف دوم می‌ریزیم. مخلوط را به هم می‌زنیم تا یکنواخت شود. سپس به همان وزن u از مخلوط برمی‌داریم و در ظرف اول می‌ریزیم. با فرض اینکه دو مایع اثر شیمیایی بر یکدیگر ندارند، نسبت وزن مایع b در ظرف اول به وزن مایع a در ظرف دوم برابرند با: (یازدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحلهٔ ۱)

الف) $\frac{W}{W+u}$ ب) $\frac{W-u}{W}$ ج) ۱

د) $\frac{W+u}{W}$ ه) $\frac{W}{W-u}$ و) $\frac{W+۲u}{۲W+u}$

حل. در حالت دوم وزن ظرف‌ها W_1 و W_2 به ترتیب برابرند با:

$$W_1 = W - u$$
$$W_2 = W + u$$

در حالت سوم به وزن u از ظرف دوم برمی‌داریم لذا وزن آن برابر است با:

$$W_2' = (W + u) - u = W$$

چون این وزن به ظرف اول اضافه شده لذا وزن ظرف اول نیز برابر می‌شود با:

$$W_1' = (W - u) + u = W$$

پس نسبت وزن دو ظرف برابر ۱ خواهد بود. گزینه «ج» صحیح است.
در حل مسأله نیازی نیست که از چگالی استفاده شود چرا که مسأله را پیچیده‌تر می‌کند.

نکته ۳: همانطور که قبلاً گفتیم شرط شناور ماندن جسمی بر روی مایع این است که چگالی جسم کمتر از چگالی مایع باشد، حال اگر به طریقی چگالی مایع را کم کنیم (مثل افزایش دما) میزان غوطه‌وری جسم در مایع بیشتر می‌شود (یعنی بیشتر در مایع فرو می‌رود).
اگر این کاهش چگالی مایع ادامه بیابد تا جاییکه کمتر از چگالی جسم شود (به شرطی که اختلاف چگالی‌ها کم باشد) جسم به داخل مایع سقوط می‌کند. به طور کلی تغییر چگالی مایعات در اثر تغییر دما بیشتر از جامدات است یعنی اگر دمای مقداری جیوه و تکه‌ای آهن را به یک اندازه بالا ببریم، کاهش چگالی جیوه بیشتر از آهن خواهد بود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال. یک قطعهٔ آهنی به شکل مکعب روی سطح جیوه شناور است. اگر دمای مجموعه از $30^\circ C$ به $15^\circ C$ برسد، حجم قسمت غوطه‌ور در جیوه چه تغییری می‌کند؟
(دومین المپیاد فیزیک ایران، مرحلهٔ ۱)

الف) بیشتر می‌شود. ب) کمتر می‌شود.
ج) هیچ تغییری نمی‌کند. د) داده‌های مسأله کافی نیستند.

حل. با توجه به اینکه با کاهش دما چگالی مایع (جیوه) بیشتر از چگالی جامد (آهن) افزایش می‌یابد. لذا میزان غوطه‌وری کمتر می‌شود و گزینه «ب» صحیح است. البته می‌توان به کمک اصل ارشمیدس که بعداً به آن می‌رسیم به همین نتیجه دست یافت.

۳.۱ فشار

گاهی اوقات، لازم است بجای بررسی نیروها از نظر مقدار و جهت، وسعت منطقه‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود را نیز مورد توجه قرار داد. مثلاً کفش‌های اسکی که شما می‌پوشیدمانع فرو رفتن شما به داخل برف می‌شوند. زیرا وزن بدن شما را در سطح بزرگتری پخش می‌کنند. یا اگر به شما دو چاقوی مشابه بدهند منتهی یک تیز و دیگری کند؛ ملاحظه می‌کنید که با چاقوی تیز راحت‌تر می‌توانید گوشتی را ببرید تا چاقوی کند. علت آن است که نیروی وارد بر چاقوی تیز در سطح کمتری وارد می‌شود تا چاقوی کند و به اصطلاح فشار بیشتری وارد می‌کند.

فشار عبارت است از نیرویی که بر واحد سطح (مثلاً m^2 ۱) وارد می‌شود. بنابراین اگر نیروی F به صورت عمود بر سطح به مساحت A اثر کند، بر این سطح، فشار P وارد می‌گردد که برابر است با نیروی وارد بر واحد سطح یعنی

$$P = \frac{F}{A} \qquad (۵-۱)$$

یکای فشار در دستگاه SI پاسکال (Pa) نامیده می‌شود که برابر $\frac{N}{m^2}$ ۱ می‌باشد.

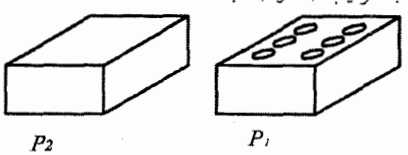
نکته: فشار کمیتی نرده‌ای (اسکالر) است و هیچ خاصیتی مربوط به جهت ندارد.

با توجه به فرمول (۱-۵) واضح است که هرچه مساحتی که نیرو به آن وارد می‌شود بزرگتر باشد، فشار حاصل کمتر خواهد بود. به همین دلیل است که چرخ‌های عقب تراکتور را پهن و بزرگ می‌سازند تا بتواند در زمین‌های گلی و نرم حرکت کند. یا مثلاً دو گردو را راحت‌تر می‌توان در دست شکست تا یک گردو را. یا چاقوی تیز با داشتن مساحت کمتر فشار بیشتری وارد می‌کند تا چاقوی کند و غیره.

آزمایش: با توجه به اینکه سطح مقطع نوک چند میخ بسیار بزرگ‌تر از سطح مقطع نوک یک میخ است، لذا اگر بادکنک را روی چند میخ فشار دهیم نمی‌ترکد، اما روی یک میخ می‌ترکد.

فایل pressur 1 از CD کتاب را ببینید.

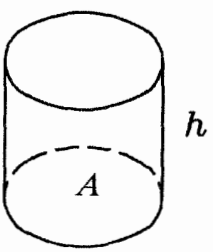
سؤال محک: دو مکعب مشابه، مطابق شکل بر روی سطحی قرار گرفته‌اند، با این تفاوت که در مکعب سمت راست چند سوراخ سرتاسری ایجاد شده است، اگر فشار وارد بر سطح توسط این دو مکعب به ترتیب P_1 و P_2 باشد آنگاه:



الف) $P_1 > P_2$ ب) $P_1 < P_2$

ج) $P_1 = P_2$ د) جواب به قطر سوراخ‌ها بستگی دارد.

حل. استوانه‌ای به مساحت قاعده A و ارتفاع h در نظر بگیرید. به کمک رابطهٔ (۱-۳) وزن آن به راحتی قابل محاسبه است:



$$W = mg = \rho Vg = \rho (Ah) g$$

فشار وارد بر سطح برابر است با:

$$P = \frac{W}{A} = \rho hg \qquad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) درمی‌یابیم که اگر h ثابت باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{W}{A}$ مقدار ثابتی است یعنی با افزایش سطح و ثابت ماندن ارتفاع، وزن استوانه نیز بیشتر می‌شود و نسبت $\frac{W}{A}$ همچنان ثابت باقی می‌ماند. همین استدلال را می‌توان برای مکعب با ارتفاع h بیان کرد لذا با سوراخ کردن مکعب سمت راستی میزان کاهش وزن و سطح به یک نسبت خواهد بود. در نتیجه نسبت $P = \frac{W}{A}$ برای هر دو مکعب یکسان است یعنی $P_۱ = P_۲$.

سؤال محک ۱. یک تشک بادی را با فشاری بیش از فشار جو پر می‌کنیم. در کدامیک از دو حالت زیر فشار هوای داخل تشک بیشتر است؟

۱- اگر به صورت ایستاده روی تشک باشیم.

۲- اگر روی تشک دراز بکشیم.

جواب: در حالت اول چون لایهٔ تشک، در حال تعادل است لذا فشار وارد بر بالای لایه با فشار وارد بر زیر لایه باید مساوی باشد. پس اگر فشار جو $P_۰$ و وزن و مساحت کف پای ما به ترتیب برابر W و $A_۱$ باشند، آنگاه فشار داخل تشک برابر است با:

$$P_۱ = P_۰ + \frac{W}{A_۱}$$

در حالت دوم نیز از تعادل لایهٔ تشک و اینکه مساحت پشت بدن ما برابر $A_۲$ است می‌توان فشار داخل تشک را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P_۲ = P_۰ + \frac{W}{A_۲}$$

چون $A_۲ > A_۱$ است، لذا $P_۲ < P_۱$ بنابراین اگر روی تشک به صورت ایستاده برویم، فشار بیشتری در هوای داخل تشک ایجاد کرده‌ایم.

سؤال محک ۲. یک چرخ دوچرخه پر بادی در دست داریم. اگر روی آن بنشینیم، آنگاه:

۱- فشار هوای داخل چرخ زیاد می‌شود.

۲- فشار هوای داخل چرخ ثابت می‌ماند.

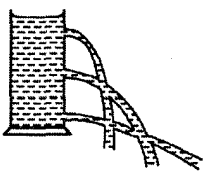
جواب: برای دادن پاسخ عجله نکنید. ابتدای فایل‌های pressuretire 1 از CD کتاب را ببینید سپس در مورد جواب این سؤال قضاوت کنید.

۴.۱ فشار مایعات

می‌توان نشان داد که در یک سیال ساکن (چه مایع و چه گاز) فشار مربوط به یک نقطه در تمام جهات یکسان است. اصطلاحاً به این فشار، فشار هیدروستاتیک می‌گویند. نکتهٔ

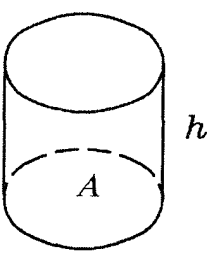
جالب توجه دیگر، این است که تمام نقاطی که در عمق یکسان از سطح آزاد سیال قرار دارند، از فشار یکسان برخوردار می‌باشند. البته هرچه عمق یک نقطه بیشتر شود، فشار آن نقطه هم بیشتر می گردد. کسانی که در آب استخر شیرجه می‌روند کاملاً این مطلب را تصدیق می‌کنند. اگر شنا بلد نیستید یا از آب می‌ترسید با انجام یک آزمایش ساده حرف ما را تصدیق خواهید کرد. یک قوطی مثل قوطی کنسرو که دارای سوراخ‌های مشابهی است در نظر بگیرید به طوریکه تمامی سوراخ‌ها در ارتفاع یکسان باشند. با پر کردن قوطی از آب ملاحظه می‌کنید که آب با سرعت مشابهی از تمامی سوراخ‌ها بیرون می‌آید و مسافت یکسانی را نیز می‌پیماید. (شکل زیر)

همچنین اگر قوطی دیگری بردارید و سوراخ‌ها را در ارتفاعات متفاوت ایجاد کنید (مطابق شکل زیر) خواهید دید که در عمق بیشتر، سرعت آب شدیدتر است یعنی آب از فشار بالاتری برخوردار می‌باشد.



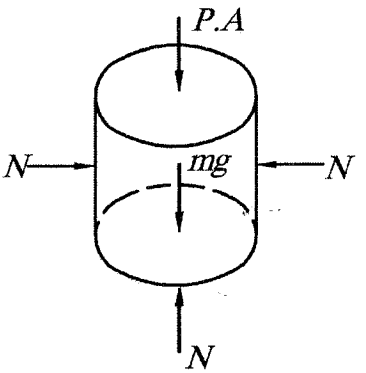
آزمایش: فایل 1pressure2a و 1pressure2b از CD کتاب را ملاحظه کنید.

برای محاسبهٔ فشار ناشی از یک سیال ظرفی مطابق شکل با مساحت قاعده A که تا ارتفاع h از مایعی پر شده است فرض کنید.



مایع را به صورت جسمی آزاد در نظر می‌گیریم و ترسیم نیرویهای وارد بر آن را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. (فشار جو برابر P_0 است.)

از تعادل مایع در راستای قائم می‌توان نوشت:



$$N' = mg + P_\circ A$$
$$N' = \rho V g + P_\circ A = \rho\,(Ah)\,g + P_\circ A$$
$$\Rightarrow \quad \frac{N'}{A} = \rho h g + P_\circ$$

از طرفی $\frac{N'}{A}$ همان فشار وارد بر کف ظرف از طرف سیال است. در نتیجه:

$$P = \rho h g + P_\circ \qquad (۶-۱)$$

رابطه (۱-۶) نشان می‌دهد که فشار متناسب با g، چگالی مایع ρ، و عمق h است.

نکته ۱: در رابطه (۱-۶) به فشار P اصطلاحاً فشار مطلق گفته می‌شود که همان فشار حقیقی نقطهٔ مورد نظر است اما در بعضی از موارد راحت‌تر هستیم که اختلاف بین فشار حقیقی (مطلق) و فشار جو یعنی $P - P_\circ$ را اندازه‌گیری کنیم به این نوع فشار، فشار پیمانه‌ای (فشار گیج یا فشار نسبی) می‌گویند.

لازم بذکر است که حداقل فشار حقیقی، صفر می‌باشد، اما فشار پیمانه‌ای می تواند منفی نیز شود. مثلاً اگر گازی در ظرف بسته‌ای موجود باشد که فشار آن کمتر از فشار جو باشد، می گوییم فشار پیمانه‌ای گاز، منفی است. $(P - P_\circ < \circ)$

آزمایش. با کشیدن هوای داخل یک قوطی حلبی، چون فشار داخل آن کمتر از فشار هوای بیرون می‌شود (فشار پیمانه‌ای قوطی حلبی منفی می‌شود) در نتیجه قوطی حلبی مچاله می‌گردد.

فیلم can 1 از CD کتاب را ببینید.

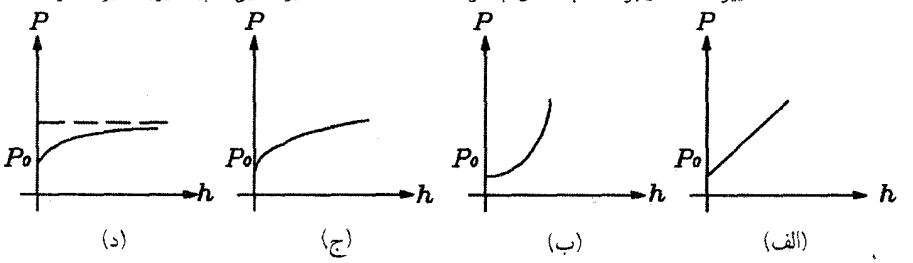
آزمایش. اگر بادکنکی را در محفظه‌ای قرار داده و هوای محفظه را تخلیه کنیم، چون فشار بیرون بادکنک کمتر از فشار هوای درون بادکنک می‌گردد لذا بادکنک شروع به منبسط شدن می‌کند.

فیلم vaccum 1 از CD کتاب را ببینید.

نکته ۲: با توجه به اینکه مایعات در برابر تراکم نسبت به گازها بسیار مقاومترند، با تقریب خوبی می‌توان مایعات را تراکم‌ناپذیر دانست. لذا چگالی مایعات مستقل از فشار و به تبع آن

مستقل از ارتفاع است در نتیجه در مایعات رابطهٔ بین فشار P و عمق h به صورت خطی تغییر می‌کند البته اگر ارتفاع مایع خیلی زیاد شود (مثل اقیانوس‌ها) رابطه خطی به هم می‌خورد زیرا در اعماق زیاد، فشار بسیار بالا است که همین فشار بالا موجب متراکم‌تر شدن مایع می‌شود و چگالی مایع نیز بیشتر می‌گردد، در نتیجه با افزایش عمق، فشار افزایش بیشتری نسبت به حالت معمول پیدا می‌کند (زیرا هم ارتفاع زیاد شده و هم چگالی) و نمودار آن به صورت تابع غیر خطی (صعود کننده) می‌شود.

مثال. رابطهٔ فشار آب با عمق آن، در عمق های کم، به شکل $P = P_0 + ah$ است. که در آن P فشار، h عمق، P_0 و a دو عدد ثابت‌اند. در اقیانوس، که عمق آب کم نیست، نمودار تغییرات فشار بر حسب عمق چگونه است؟ (سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحلهٔ ۱)

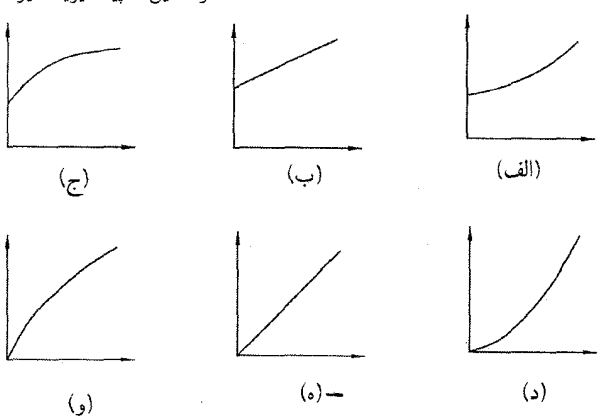


حل. با توجه به توضیحات داده شده گزینه «ب» صحیح است.

در جو زمین نیز، چگالی هوا با افزایش ارتفاع از سطح زمین به نحو چشمگیری کم می‌شود.

مثال. دمای آب درون ظرفی به عمق بستگی دارد، به نحوی که لایه‌های پایین‌تر سردتر از لایه‌های بالاتراند. نمودار فشار بر حسب عمق، به کدامیک از این شکل‌ها شبیه است؟

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحلهٔ ۱)



حل: همیشه لایه‌های مایع طوری نسبت به هم قرار می‌گیرند که لایه‌های با چگالی بیشتر در عمق بیشتری از مایع باشند. بنابراین با افزایش عمق، چگالی نیز بیشتر می‌شود. لذا مشابه مثال قبل رشد افزایش فشار در این حالت بیشتر از حالتی است که چگالی ثابت باشد (زیرا

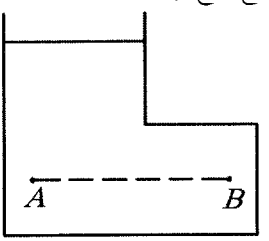
هم عمق زیاد می‌شود و هم چگالی). از طرفی چون فشار در سطح آزاد ظرف برابر فشار جو (مخالف صفر) است، در نتیجه گزینهٔ الف صحیح می‌باشد.

نکته ۳: اگر دو نقطه در عمق‌های h_1 و h_2 با فشارهای P_1 و P_2 باشند به کمک رابطه (۱-۶) می‌توان نشان داد که اختلاف فشار بین دو نقطه که اختلاف عمق آنها $\Delta h = h_2 - h_1$ است عبارت خواهد بود از:

$$\Delta P = \rho g \Delta h \qquad (۷-۱)$$

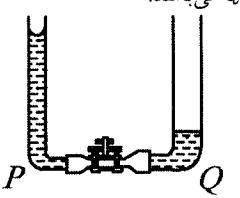
بنابراین نقاطی که در یک عمق از یک مایع قرار دارند هیچ اختلاف فشاری با هم ندارند، زیرا $\Delta h = 0$، در نتیجه ΔP برابر صفر خواهد شد.

مثلاً در ظرف شکل زیر فشار نقاط A و B یکی است، هرچند که مقدار مایعی که مستقیماً بالای نقطهٔ B است کمتر از مایع واقع بر بالای نقطه A باشد.



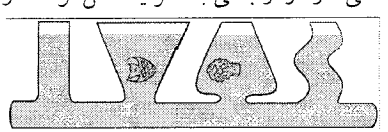
اگر فشار دو نقطه برابر نباشد در اینصورت مایع از نقطه با فشار بالا به سمت نقطه با فشار پایین آنقدر حرکت می‌کند تا فشار دو نقطه یکسان شود. بنابراین اگر فشار در نقطهٔ B کمتر از نقطهٔ A باشد در اینصورت مایع در یک لوله فرضی افقی از A به B جریان می‌یابد.

مثال دیگر: در یک لوله U شکلی که در شکل زیر نشان داده شده است، در حالت اول که شیر بسته است چون ارتفاع مایع در شاخه P بیشتر از ارتفاع مایع در شاخه Q است لذا فشار شاخه P بیشتر از شاخه Q می‌باشد.



حال وقتی شیر را باز می‌کنیم به دلیل اختلاف فشار بین دو شاخه، مایع از P به داخل Q جریان می‌یابد تا وقتی که سطح مایع در هر شاخه یکسان شود. هرچند که وزن مایع در Q بیشتر از وزن آن در P است. اما چون این وزن در سطح بزرگتری پخش شده است در نتیجه فشار در دو طرف وقتی برابر می‌شود که ارتفاع دو شاخه یکسان باشد.

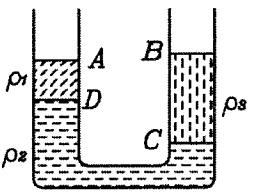
شکل زیر نشان می‌دهد که سطح مایع در همه لوله‌ها یکسان است یعنی فشار در هر ستون مایع تنها به عمق آن بستگی دارد و ارتباطی با قطر یا شکل لوله ندارد.



آزمایش. با بالا یا پایین بردن یک شاخه می‌توان مایع را در شاخهٔ دیگر بالا یا پایین برد. فیلم pressure3 1 از CD کتاب را ببینید.

نکته: برای مقایسه فشار در لولهٔ U شکل باید یک نقطه از هر شاخه را در نظر گرفت که هر دو در یک مایع ساکن قرار داشته و هم ارتفاع باشند حال با توجه به برابری فشار این دو نقطه می‌توان رابطه‌ای بین ارتفاع مایع در دو شاخه بدست آورد.

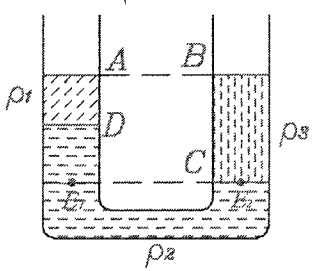
مثال. در شکل زیر ρ_1 و ρ_2 و ρ_3 چگالی سه مایع مخلوط نشدنی هستند. اگر $AD = ۱۰\ cm$ و $BC = ۱۵\ cm$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $۳\rho_۳ = ۲\rho_۲ + \rho_۱$ ب) $۳\rho_۲ + ۲\rho_۱ = \rho_۳$

ج) $۳\rho_۳ = ۲\rho_۱ + \rho_۲$ د) $\rho_۲ + ۳\rho_۱ = ۲\rho_۳$

حل. دو نقطه هم‌ارتفاع $E_۱$ و $E_۲$ که در مایع $\rho_۲$ قرار دارند در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $P_{E_۱} = P_{E_۲}$. اگر فشار جو برابر $P_۰$ باشد داریم:

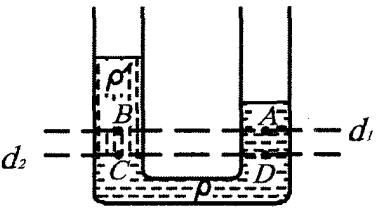


$$P_{E_۱} = (\overline{BC} - \overline{AD})\,\rho_۲ + \overline{AD}\,\rho_۱ + P_۰ = ۵\rho_۲ + ۱۰\rho_۱ + P_۰$$
$$P_{E_۲} = \overline{BC}\rho_۳ + P_۰ = ۱۵\,\rho_۳ + P_۰$$
$$P_{E_۱} = P_{E_۲} \Rightarrow ۱۵\,\rho_۳ = ۵\,\rho_۲ + ۱۰\,\rho_۱ \Rightarrow \rho_۲ + ۲\rho_۱ = ۳\rho_۳$$

گزینه «ج» صحیح است.

مثال. در لوله‌ای U شکل مایعی به چگالی ρ قرار دارد. در یکی از شاخه‌ها قدری از یک مایع به چگالی ρ' روی مایع اولی می ریزیم به طوریکه مایع دوم روی مایع اول قرار گیرد. با فرض اینکه دو مایع با یکدیگر مخلوط نشوند، فشار در کدامیک از نقاط همتراز A و B که بترتیب در درون مایع اول و دوم قرار دارند، بیشتر است؟ (سومین المپیاد فیزیک ایران، مرحلهٔ ۱)

حل. چون مایع دوم روی مایع اول قرار می‌گیرد لذا $\rho < \rho'$. در شکل زیر خط چین d_1 حالت اول لوله شکل را نشان می‌دهد که ارتفاع مایع ρ در دو شاخه یکسان است.



با توجه به شکل چون دو نقطهٔ C و D هم‌تراز و در یک مایع قرار دارند در نتیجه از تعادل دو مایع داریم $P_C = P_D = P$. (اگر $P_C \neq P_D$ باشد دو مایع شروع به حرکت می‌کنند.)

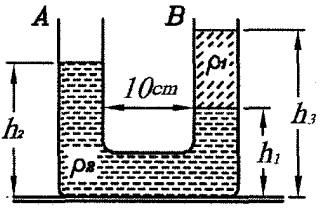
از طرفی می توان نوشت:

$$P_C = P_B + \rho' gh \implies P_B = P_C - \rho' gh = P - \rho' gh$$

$$P_D = P_A + \rho gh \implies P_A = P_D - \rho gh = P - \rho gh$$

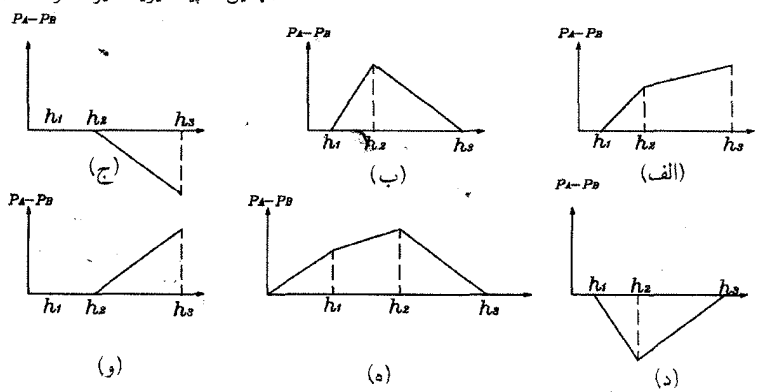
چون $\rho < \rho'$ در نتیجه $P - \rho gh < P - \rho' gh \iff P_A < P_B$.

مثال. در یک لوله U شکل دو مایع به چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 که با هم مخلوط نمی‌شوند ریخته‌ایم. چگالی‌ها به نحوی است که ارتفاع دو مایع در شاخه‌های A و B مانند شکل زیر است.



مبدأ مختصات محور قائم را بر قسمت پایین لولهٔ U شکل منطبق می‌گیریم. کدام نمودار تفاوت فشار $(P_A - P_B)$ در دو لوله را برحسب ارتفاع y نشان می‌دهد؟

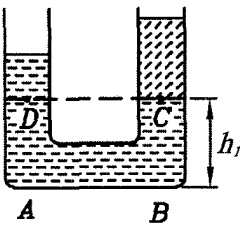
(نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



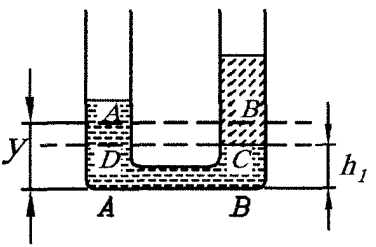
حل. هنگامی که $0 < y < h_1$ چون در هر دو شاخه در یک ارتفاع از یک مایع قرار داریم لذا:

$$P_A = P_B \quad \Rightarrow \quad P_A - P_B = 0$$

از طرفی با توجه به دو نقطه هم‌تراز C و D در شکل زیر می‌توان نوشت $P_C = P_D$ (زیرا نقاط C و D هم‌تراز و در یک مایع قرار دارند.)



در فاصله $h_1 < y < h_2$ داریم:



$$\left.\begin{aligned} P_D &= P_A + \rho_2\, g\,(y - h_1) \\ P_C &= P_B + \rho_1\, g\,(y - h_1) \end{aligned}\right\}, \quad P_C = P_D$$

$$\Rightarrow \quad P_A - P_B = \rho_1 g\,(y - h_1) - \rho_2 g\,(y - h_1) = g\,(y - h_1)\,(\rho_1 - \rho_2)$$

چون $\rho_2 > \rho_1$ (زیرا مایع ρ_1 روی مایع ρ_2 قرار دارد) لذا $(P_A - P_B) < 0$ و رابطه $P_A - P_B$ با y به صورت خطی و با شیب منفی است.

در فاصله $h_2 < y < h_3$ واضح است که $P_A = P_0$ است و

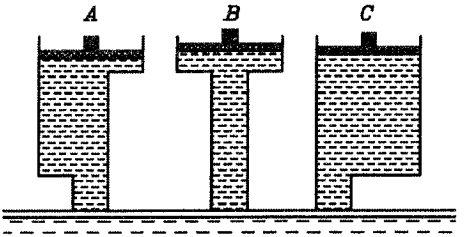
$$P_B = \rho_1 g\,(h_3 - y) + P_0$$

در نتیجه

$$P_A - P_B = -\rho_1 g\,(h_3 - y) < 0$$

که می‌توان به صورت $P_A - P_B = \rho_1 g\,(y - h_3)$ نوشت یعنی رابطه $P_A - P_B$ بر حسب y به صورت خطی و با شیب مثبت است لذا گزینه «د» صحیح است.

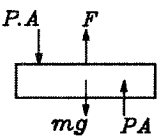
مثال. در شکل زیر با بالا بردن پیستون‌ها، آب تا ارتفاع معینی در لوله‌ها بالا آمده است. پیستون‌ها سبک، بدون اصطکاک و هم‌اندازه هستند. برای نگهداشتن پیستون‌ها در همان ارتفاع باید نیروی F به آنها وارد کنیم. کدام گزینه درست است؟ (دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $F_B < F_A < F_C$ ب) $F_A = F_B = F_C \neq 0$

ج) $F_A = F_B > F_C$ د) $F_A = F_B = F_C = 0$

حل. با توجه به اینکه هر سه شاخه از یک مایع پر شده‌اند و ارتفاع پیستون‌ها در هر سه شاخه با هم برابر است لذا می‌توان گفت فشار، درست زیر هر سه پیستون با هم برابر و مساوی P می‌شود. حال می‌توان دیاگرام نیروهای وارد بر یک پیستون را به صورت زیر نشان داد. (mg وزن پیستون است.)



از تعادل پیستون داریم:

$$F + PA - mg - P_0 A = 0 \quad \Rightarrow \quad F = P_0 A + mg - PA$$

چون برای هر سه پیستون P، P_0، mg و A یکسان است لذا $F_A = F_B = F_C$. از طرفی این نیرو برابر صفر نیست. زیرا اگر ارتفاع پیستون مایع را h بگیریم می‌توان در سطح آزاد مایع نوشت:

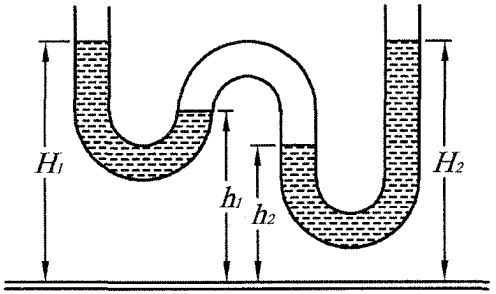
$$P_0 = \rho g h + P \quad \Rightarrow \quad P < P_0$$

یعنی $PA - P_0 A > 0$ است در نتیجه نیرو برابر صفر نیست، پس گزینهٔ «ب» صحیح است.

نکته: رابطه (۱-۷) را نیز می‌توان در مورد گازها برای دو نقطه با اختلاف ارتفاع Δh نیز به‌کار برد منتهی چون چگالی گازها در مقابل مایعات بسیار کم است، در نتیجه اگر اختلاف ارتفاع Δh زیاد بزرگ نباشد می‌توان از اختلاف فشار ΔP صرف‌نظر کرد. بنابراین در ظرفی که از یک گاز پر شده است می توان گفت که فشار تمام نقاط ظرف با تقریب خوبی با هم برابرند.

مثال. درون لوله‌ای مطابق شکل زیر که در صفحهٔ قائم قرار دارد، مقداری آب می‌ریزیم. در قسمتی از لوله مقداری هوا گیر افتاده است. ارتفاع سطح آزاد آب در قسمت‌های مختلف لوله، مطابق شکل، H_1، H_2، h_1 و h_2 است. کدام یک از گزینه‌های زیر الزاماً درست است؟

(یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



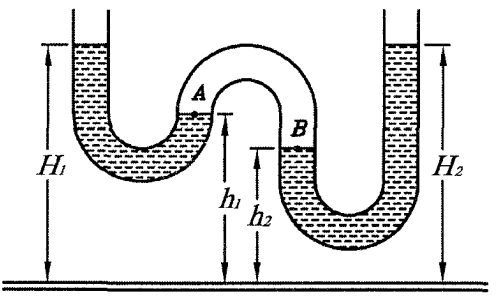
الف) $h_۲ = h_۱ < H_۲ = H_۱$

ب) $h_۲ = h_۱ = H_۲ = H_۱$

ج) $H_۲ - h_۲ = H_۱ - h_۱$

د) $H_۲ = H_۱$ و در حالت کلی دربارهٔ $h_۲ - h_۱$ چیزی نمی‌توان گفت.

حل. با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$P_A = P_۰ + \rho g\,(H_۱ - h_۱)$$

$$P_B = P_۰ + \rho g\,(H_۲ - h_۲)$$

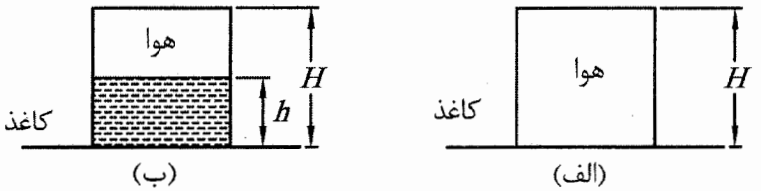
از طرفی چون دو نقطهٔ A و B در مجاورت هوا هستند با توجه به نکته بیان شده داریم $P_A = P_B$ در نتیجه:

$$P_A = P_B \;\Rightarrow\; H_۱ - h_۱ = H_۲ - h_۲$$

گزینه «ج» صحیح است.

سؤال بنیادی

با انجام یک آزمایش ساده می‌توانید ذهن فیزیکی خود را کاملاً به هم بریزید. می‌دانیم اگر روی یک لیوان کاغذی گذاشته و دستمان را روی کاغذ بگذاریم و لیوان را مطابق شکل الف معکوس کنیم با برداشتن دست، کاغذ از لیوان جدا شده و سقوط می‌کند اما اگر در همان لیوان آب بریزیم و همان آزمایش را انجام دهیم ملاحظه می‌کنیم که با برداشتن دست، کاغذ نمی‌افتد.

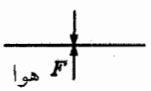


اگر این آزمایش را تحلیل کنیم کمی گیج‌کننده می‌شود. در این آزمایش برای اینکه تحلیلمان دقیق باشد فرض اینکه تمام نقاط هوای داخل لیوان هم‌فشار هستند را کنار می‌گذاریم.

در حالت اول اگر چگالی هوا ρ_a و ارتفاع لیوان H باشد فشاری که از هوای داخل لیوان به کاغذ وارد می‌شود برابر است با $\rho_a gH$، لذا اگر مساحت دهنه لیوان را A فرض کنیم. نیروی وارد بر کاغذ برابر با $F_۱ = (\rho_a gH)\ A$ می‌شود. مشابهاً اگر چگالی آب ρ_w باشد نیروی وارد بر کاغذ در آزمایش دوم برابر است با:

$$F_۲ = [\rho_w hg + \rho_a (H-h)\, g]\ A$$

همچنین می‌دانیم در طرف دیگر کاغذ فشار هوا برای هر دو حالت مساوی است، لذا نیرویی که از هوای بیرون به کاغذ وارد می‌شود برای هر دو حالت یکسان و برابر F می‌باشد.



با مقایسه دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ درمی یابیم که چون چگالی آب هزار برابر چگالی هوا است ($\rho_w > \rho_a$) در نتیجه برای مقایسه دو نیرو، نیروی $F_۱$ را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} F_۱ &= [\rho_a hg + \rho_a (H-h)\, g]\ A \\ F_۲ &= [\rho_w hg + \rho_a (H-h)\, g]\ A \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_۲ > F_۱$$

یعنی نیروی وارد از طرف هوا و آب بیشتر از هواست و باید کاغذ در حالت دوم بیافتد، اما نتیجه آزمایش معکوس درآمد، به نظر شما دلیل این امر چیست؟!!!

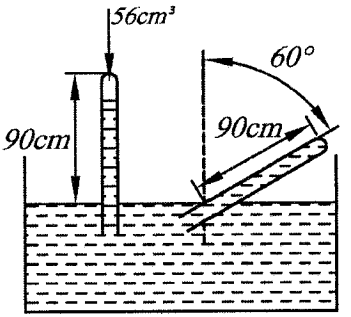
جواب مسأله در این است که مولکول‌ها یا اتم‌های گازها بر خلاف مایعات از انرژی جنبشی بسیار بالایی برخوردار هستند و از برخورد همین مولکول‌های پر انرژی با دیواره ظرف است که ما احساس فشار می‌کنیم. بنابراین فشار گاز جمع دو فشار است یکی فشار ناشی از برخورد اتم‌های گاز با دیواره و دیگری فشار ناشی از وزن ستون گاز که بالای سطح قرار دارد و همانطور که در نکته بیان کردیم اگر اختلاف ارتفاع ناچیز باشد می‌توان از فشار دوم صرف‌نظر کرد اما هیچ‌گاه نمی‌توان از فشار اول صرف‌نظر کرد مگر اینکه دمای گاز را به صفر مطلق نزدیک کنیم. (در مورد صفر مطلق به فصل ۶ رجوع شود)

بنابراین در مقایسه‌ای که ما کردیم اصلاً فشار اول که مهمتر از فشار دوم بود را بررسی نکردیم و با مراجعه به فصل ۶ خواهید دید که فشار هوا در آزمایش الف بیشتر از مجموع فشار هوا و آب در آزمایش ب است و به همین خاطر کاغذ در آزمایش الف از ظرف سقوط کرد.

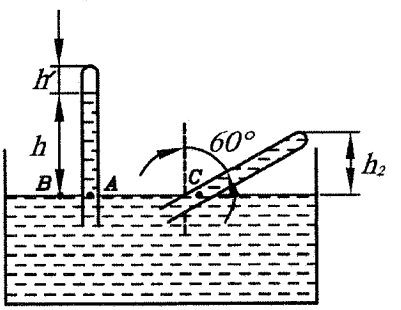
آزمایش. برای دیدن آزمایش فوق، فیلم pressure 4 1 از CD کتاب را ببینید.

مثال. مطابق شکل زیر حجم فضای خالی بالای ستون جیوه در حالت قائم که خلأ فرض می‌کنیم، $۵۶\ cm^۳$ است. سطح مقطع لوله $۴\ cm^۲$ و فاصلهٔ انتهای بستهٔ لوله تا سطح جیوه در تشتک $۹۰\ cm$ است. چنانچه لوله نسبت به امتداد قائم ۶۰° منحرف شود، نیروی وارد بر ته لوله از طرف جیوه چند نیوتن است؟ فشار هوای بیرون $۱۰^۵\ Pa$ است.

(یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



حل. ابتدا ارتفاع جیوه در لوله را در حالت اول بدست می‌آوریم:



$$h' = \frac{V}{A} = \frac{۵۶}{۴} = ۱۴\ cm \quad \Rightarrow \quad h = ۹۰ - ۱۴ = ۷۶\ cm$$

از طرفی چون دو نقطهٔ A و B در یک ارتفاع از یک مایع قرار دارند در نتیجه می‌توان گفت که فشار جو برابر ۷۶ سانتیمتر جیوه است. در حالت دوم وقتی لوله را کج می‌کنیم سطح آزاد جیوه در لوله باید طوری قرار گیرد که هم‌سطح با سطح آزاد جیوه در لوله در حالت اول باشد یعنی در همان ارتفاع ۷۶ سانتی‌متر، اما چون انتهای لوله بسته است حداکثر ارتفاعی که جیوه بالا می‌رود برابر است با:

$$h_۲ = ۹۰ \cos ۶۰ = ۴۵\ cm$$

در نتیجه در این حالت فشاری بر ته لوله وارد می‌گردد که برابر است با:

$$\Delta P = ۷۶ - ۴۵ = ۳۱\ cm\ Hg$$

ابتدا باید این فشار را به پاسکال تبدیل کرد، سپس نیرو را حساب می‌کنیم. با یک نسبت ساده داریم:

$$\begin{array}{ll} ۷۶\ cm\ Hg & ۱۰^۵\ Pa \\ ۳۱\ cm\ Hg & x = \frac{۳۱}{۷۶} \times ۱۰^۵ = ۰/۴۰۷ \times ۱۰^۵\ Pa \end{array}$$

$$F = PA = ۰/۴۰۷ \times ۱۰^۵ \times ۴ \times ۱۰^{-۴} = ۱۶/۲۸\ N$$

مثال. فشار هوا در سطح زمین $P_۰$، در ارتفاع $h_۱$ از سطح زمین $P_۱$ و در ته چاهی با عمق $h_۲$، $P_۲$ است. اگر دما زیاد شود و $P_۰$ ثابت بماند

الف) $P_۲, P_۱$ هر دو کم می‌شوند.

ب) $P_۱$ کم و $P_۲$ زیاد می‌شود.

ج) $P_۱$ زیاد می‌شود و $P_۲$ کم می‌شود.

د) $P_۲, P_۱$ هر دو زیاد می‌شوند.

(چهاردهمین المپیاد فیزیک ایران)

حل: می‌دانیم با افزایش ارتفاع از سطح زمین فشار کم می‌شود، لذا به کمک رابطهٔ (۱-۷) می‌توان نوشت:

$$P_۰ > P_۱ \rightarrow P_۰ - P_۱ = \rho_۱ g h_۱ \qquad (۱)$$
$$P_۲ > P_۰ \rightarrow P_۲ - P_۰ = \rho_۲ g h_۲ \qquad (۲)$$

دقت کنید همانطور که در متن درس توضیح دادیم چگالی هوا با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد. لذا $\rho_۲ \neq \rho_۱$. از طرفی می‌دانیم که با افزایش دما، چگالی هوا کم می‌شود. بنابراین اگر چگالی و فشار هوا برای ارتفاع $h_۱$ و عمق $h_۲$ را در حالت ثانویه به ترتیب با نمادهای $\rho'_۱, P'_۱$ و $P'_۲, \rho'_۲$ نمایش دهیم ($P_۰$ ثابت است) آنگاه:

$$\rho'_۱ < \rho_۱ \quad , \quad \rho'_۲ < \rho_۲ \qquad (۳)$$
$$(۳), (۱) \Rightarrow P_۰ - P'_۱ = \rho'_۱ g h_۱ < \rho_۱ g h_۱ = P_۰ - P_۱ \qquad (۴)$$
$$(۳), (۲) \Rightarrow P'_۲ - P_۰ = \rho'_۲ g h_۲ < \rho_۲ g h_۲ = P_۲ - P_۰ \qquad (۵)$$

$$(۴) \text{ از} \rightarrow -P'_۱ < -P_۱ \rightarrow P'_۱ > P_۱$$
$$(۵) \text{ از} \rightarrow P'_۲ < P_۲$$

گزینهٔ «ج» صحیح است.

مثال. یک ظرف شامل مقداری آب است که روی آن مقداری روغن قرار دارد. آب و روغن را به هم می‌زنیم تا یک مخلوط معلق تقریباً یکنواخت آب - روغن به‌دست آید. نقطهٔ A به فاصلهٔ مساوی از سطح بالایی روغن و کف ظرف است. پیش از به هم زدن مخلوط، فشار نقطهٔ A، برابر P بوده است. پس از تشکیل مخلوط معلق، فشار همین نقطه P' می‌شود. کدام گزینه درست است؟ (پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) حتماً $P' < P$

ب) حتماً $P' > P$

ج) $P' = P$

د) اگر پیش از هم زدن، نقطهٔ A در روغن بوده باشد، $P' > P$ و اگر پیش از هم زدن، نقطهٔ A در آب بوده باشد، $P' < P$ است.

راه‌حل اول: در ابتدا تمامی روغن که چگالی آن کمتر از آب است بالای نقطه A قرار دارد. پس از مخلوط کردن، یک مایع به چگالی یکنواخت که شامل آب و روغن است بدست می‌آید. بنابراین می‌توان گفت که بخشی از روغن بالای نقطهٔ A به زیر این نقطه آمده است. و به‌جای آن آب با چگالی بیشتر قرار گرفته است.

این کار معادل این است که از ارتفاع $h_\circ$ کم کرده و بر ارتفاع h_w اضافه کنیم، در نتیجه فشار نقطهٔ A در حالت ثانویه بالاتر می‌رود.

اگر از راه‌حل کیفی فوق خوشتان نمی‌آید می‌توانید راه‌حل دوم را بخوانید.

راه‌حل دوم: فرض کنید مساحت کف ظرف برابر S و چگالی و ارتفاع روغن و آب به ترتیب برابر $\rho_\circ$، $h_\circ$ و ρ_w، h_w باشند. حال به کمک رابطه (۱-۴) می‌توان چگالی مخلوط را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\rho_M = \frac{m_w + m_\circ}{V_w + V_\circ} = \frac{\rho_w V_w + \rho_\circ V_\circ}{V_w + V_\circ}$$

$$= \frac{\rho_w\,(h_w S) + \rho_\circ\,(h_\circ S)}{h_w S + h_\circ S} = \frac{\rho_w h_w + \rho_\circ h_\circ}{h_w + h_\circ} \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم چون چگالی روغن کمتر از آب است یعنی $\rho_\circ < \rho_w$، لذا:

$$\rho_M = \frac{\rho_W h_W + \rho_\circ h_\circ}{h_W + h_\circ} > \frac{\rho_\circ h_w + \rho_\circ h_\circ}{h_w + h_\circ} = \rho_\circ \Rightarrow \rho_M > \rho_\circ$$

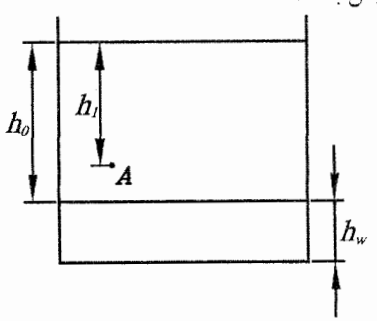
$$\rho_M = \frac{\rho_W h_W + \rho_\circ h_\circ}{h_W + h_\circ} < \frac{\rho_w h_w + \rho_w h_\circ}{h_w + h_\circ} = \rho_w \Rightarrow \rho_M < \rho_W$$

بنابراین برای هر ارتفاعی از روغن و آب داریم:

$$\rho_\circ < \rho_M < \rho_W \qquad (۲)$$

از این‌جا به بعد دو حالت برای حل مسأله در نظر می‌گیریم.

الف) نقطهٔ A درون روغن باشد.



در حالت اول فشار نقطهٔ A برابر است با:

$$P = P_\circ + \rho_\circ h_1 g \qquad (۳)$$

در حالت ثانویه داریم:

$$P' = P_\circ + \rho_M h_1 g \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳),(۲) \Rightarrow P' - P = h_1 g\,(\rho_M - \rho_\circ) > \circ \Rightarrow P' > P$$

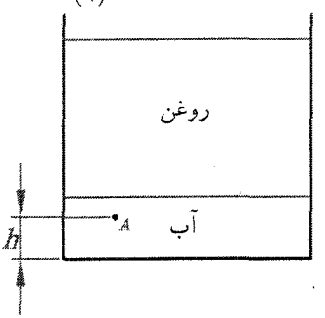
ب) نقطهٔ A درون آب باشد.

اگر m_o و m_w به ترتیب جرم روغن و آب موجود در ظرف باشد، در حالت اول فشار کف ظرف، P_1، برابر است با:

$$P_1 = \frac{(m_o + m_w)g}{S}$$

در حالت دوم چون جرم‌ها و مساحت کف ظرف تغییر نکرده در نتیجه فشار کف ظرف همان P_1 می‌شود. از طرفی می‌دانیم اگر در مایعی به چگالی ρ به اندازهٔ h در جهت خلاف شتاب گرانش حرکت کنیم به میزان ρgh از فشار ما کم می‌شود، بنابراین در حالت اول با توجه به شکل زیر داریم:

$$P_A = P = P_1 - \rho_w gh \qquad (۱)$$



در حالت ثانویه چگالی مایع برابر ρ_M است، پس:

$$P'_A = P' = P_1 - \rho_M gh \qquad (۲)$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱) \Rightarrow P_1 = P + \rho_w gh \\ (۲) \Rightarrow P_1 = P' + \rho_M gh\end{array}\right\} P + \rho_w gh = P' + \rho_M gh \left.\begin{array}{l}\\ \\ \rho_M < \rho_w\end{array}\right\} \Rightarrow P' > P$$

بنابراین گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال. ظرفی استوانه‌ای با ارتفاع h از مایعی به چگالی ρ پر شده است. محور این استوانه قائم است. درون این ظرف هیچ هوایی وجود ندارد و ظرف کاملاً دربسته است. فشار محیط $P_\circ$ و فشار گرانشی g است. فشار در کف این ظرف چقدر است؟ (فشار در همه جای مایع مثبت است.)

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

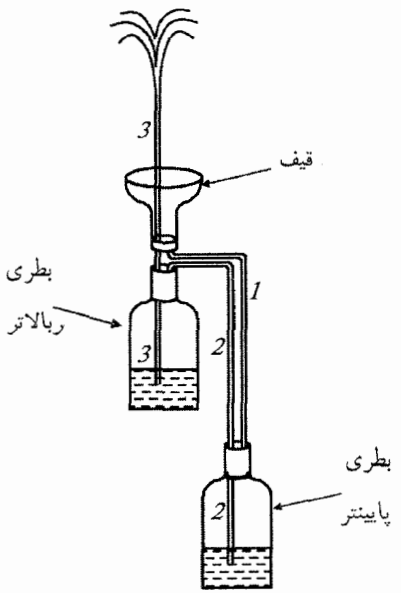
الف) حتماً ρgh است.
ب) حتماً $P_\circ$ است.
ج) حتماً $P_\circ + \rho gh$ است.
د) حتماً از ρgh بیشتر است.

حل. با توجه به اینکه مسأله گفته فشار در همه جا مثبت است در نتیجه در بالاترین سطح مایع فشار مقداری مثبت دارد، ما آنها را P_ϵ می‌نامیم بنابراین فشار در کف ظرف برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} P = \rho g h + P_\epsilon \\ P_\epsilon > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P > \rho g h$$

گزینه «د» صحیح است.

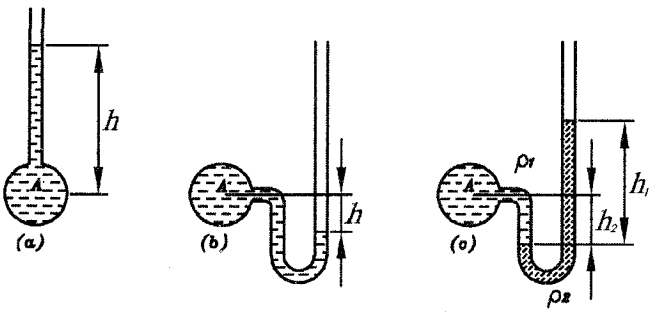
آزمایش: چشمهٔ هرو (Hero's Fountain) وسیله‌ای است که به کمک جاذبهٔ زمین و فشار، می‌تواند برای شما یک چشمه جوشان درست کند. با ریختن آب در قیف، چشمه شروع به کار می‌کند. به علت جاذبه، آب به داخل لوله ۱ کشیده می‌شود و وارد بطری پایین‌تر می‌گردد.



با افزایش مقدار آب در بطری پایین‌تر، فشار هوا در این بطری و به تبع آن در لولهٔ ۲ افزایش می‌یابد. در واقع بطری پایین‌تر نقش دمیدن هوا به بطری بالاتر را بر عهده می‌گیرد. این امر موجب افزایش فشار در بطری بالاتر شده و باعث هل دادن آب درون بطری بالاتر به داخل لوله ۳ می‌شود و در نهایت آب از لوله ۳ خارج شده و مجدداً به داخل قیف می‌ریزد و دوباره چرخه از نو شروع می‌شود. این عمل آنقدر ادامه می‌یابد تا اینکه آب داخل بطری بالاتر تمام شود. فیلم hero 1 از CD کتاب را ببینید.

۵.۱ مانومترها

مانومترها وسایلی هستند که ستون‌های مایعات را برای تعیین اختلاف فشار بکار می‌برند. ابتدایی ترین مانومترها که اغلب پیزومتر نامیده می‌شوند در شکل (الف) نشان داده شده است.



از این وسیله برای اندازه‌گیری فشار زمانی استفاده می‌شود که فشار نسبی بیشتر از صفر باشد. برای اندازه‌گیری فشار نسبی اندکی مثبت یا منفی در یک سیال، ممکن است از لوله با شکل (ب) استفاده شود. چنانچه در شکل نشان داده شده است، با این شکل، سطح مایع در لوله می‌تواند پایین‌تر از A قرار گیرد، چون فشار پیمانه‌ای در سطح مایع در لوله صفر است لذا فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A برابر با $-\rho gh$ است. برای فشارهای نسبی مثبت یا منفی بزرگتر، یک مایع ثانویه با چگالی بیشتر بکار می‌آید. (شکل ج) با توجه به شکل ج اگر چگالی سیال در مخزن A برابر ρ_1 و چگالی مایع مانومتر ρ_2 باشد، معادله فشار نسبی در A، با شروع از A یا سطح مایع در لوله و ادامه عمل در طول مانومتر می‌تواند چنین نوشته شود:

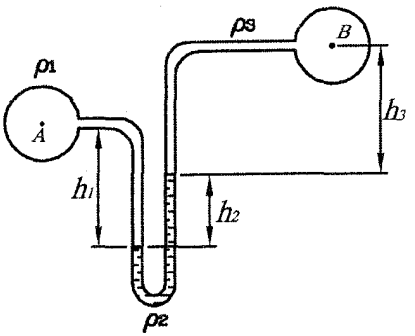
$$P_A + \rho_1 g h_2 - \rho_2 g h_1 = 0$$

روش کلی زیر برای حل تمامی مسائل مانومترها بایستی دنبال شود:

۱- از یک انتها شروع کرده اگر سطح بعدی پایین‌تر بود فشار آن ستون را جمع و اگر سطح بعدی بالاتر بود فشار مربوطه‌اش را کم می‌کنیم.

۲- عملیات را تا رسیدن به انتهای دیگر دستگاه ادامه دهید و عبارت را مساوی فشار در آن نقطه قرار دهید خواه معلوم یا خواه مجهول باشد.

مثال: یک مانومتر تفاضلی (دیفرانسیلی) مطابق شکل زیر داریم. مطلوب است محاسبه اختلاف فشار بین دو نقطهٔ A و B.



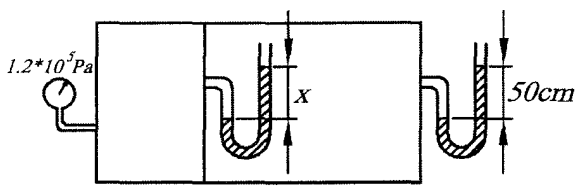
حل. از نقطهٔ A شروع کرده و طبق روش فوق عمل می‌کنیم، لذا:

$$P_A + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 - \rho_3 g h_3 = P_B$$

$$\Rightarrow \quad P_A - P_B = \rho_3 g h_3 + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

مثال. فشار هوای جو را Pa 10^5 و چگالی آب را kg/m^3 10^3 فرض کنید. مقدار x در شکل زیر چند سانتی‌متر است؟

(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) ۱۵۰ ب) ۲۵۰ ج) ۱۰۰ د) ۶۰

حل. با توجه به مانومتر سمت راستی می‌توان فشار مخزن سمت راست P_1 را به صورت زیر حساب کرد:

$$P_1 - \rho g h = P_0$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = 0/5 \times 1000 \times 10 + 10^5 = 1/05 \times 10^5$$

برای مانومتر سمت چپی نیز می توان فشار مخزن سمت چپ P_2 را به صورت زیر نوشت:

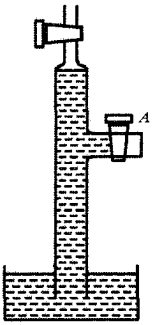
$$P_2 - \rho g x = P_1 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \rho g x + P_1$$

$$\Rightarrow \quad 1/2 \times 10^5 = 1000 \times 10 x + 1/05 \times 10^5$$

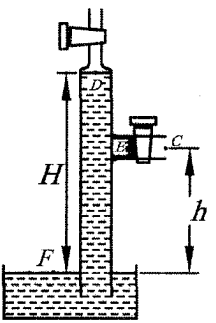
$$\Rightarrow \quad x = 1/5\ m = 150\ cm$$

گزینه «الف» صحیح است.

مثال. مقداری هوا از لوله‌ای که یک سر آن در داخل آب قرار دارد به خارج پمپ شده و آب در لوله تا بالای شیر A بالا رفته است. درصورتیکه شیر A باز شود، آیا آب از شیر A به خارج جریان می‌یابد؟



حل. مشابه روش یافتن فشار در مانومترها داریم:



$$P_F - \rho g H = P_D \qquad (۱)$$

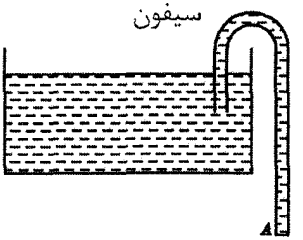
$$P_F - \rho g h = P_E \Rightarrow P_F = P_E + \rho g h \text{ یا } P_F > P_E \qquad (۲)$$

$$P_F = P_C = P_\circ \qquad (۳)$$

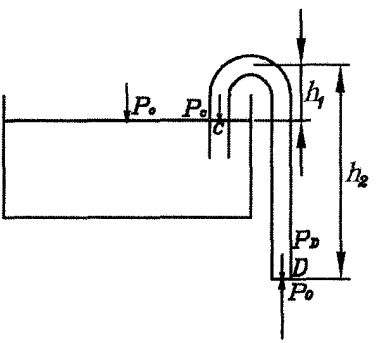
از روابط (۲) و (۳) درمی‌یابیم که $P_C > P_E$ لذا با باز شدن شیر A چون فشار بیرون شیر بیشتر از فشار درون آن است لذا آب از شیر A بیرون نمی‌ریزد.

۶.۱ سیفون

حتماً شما با شنیدن کلمه سیفون یاد دستگاه سیفون در سرویس‌های بهداشتی می‌افتید، اما به طور کلی از کلمه سیفون برای لوله‌ای خمیده استفاده می کنیم که یک طرف آن بزرگتر از طرف دیگر باشد و مورد استفاده آن غالباً برای تخلیه یک مخزن مثل آب موجود در دستگاه سیفون یا تخلیه بنزین موجود در باک و ... می‌باشد. برای راه‌اندازی سیفون مطابق شکل باید آنرا پر از مایع کنیم و انتهای A سیفون حتماً باید پایین‌تر از سطح مایع داخل مخزن باشد. حال ببینیم چرا اگر این شرط برقرار باشد مایع خودبه‌خود از مخزن کشیده شده و از طریق لوله A خارج می‌گردد؟!!



سیفون به دلیل اختلاف فشار کار می‌کند اما نه اختلاف در فشار جو. اگر اختلاف در فشار جو میان دو انتهای لوله موجب کارکرد سیفون بود، آنگاه سیفون در جهت عکس کار می‌کرد، زیرا فشار جو در انتهای پایین‌تر اندکی بیشتر از فشار جو در انتهای بالاتر است.
اگر دو نقطه C و D را مطابق شکل زیر در نظر بگیریم حال مطابق دستور یافتن فشار در مانومترها داریم:

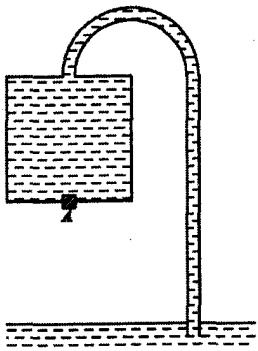


$$P_C - \rho g h_1 + \rho g h_2 = P_D \quad \Rightarrow \quad P_D = P_C + \rho g\,(h_2 - h_1)$$

چون $h_2 > h_1$ در نتیجه $P_D > P_C$ است. از طرفی فشار کل در نقطهٔ C برابر با $P_0 - P_C$ و فشار کل در نقطهٔ D برابر است با $P_0 - P_D$. چون $P_D > P_C$ لذا $P_0 - P_C > P_0 - P_D$، در نتیجه مایع از فشار بیشتر یعنی نقطهٔ C به طرف نقطهٔ D با فشار کمتر حرکت می‌کند و موجب کارکرد سیفون می‌شود. طرز کار سیفون خیلی به لغزیدن زنجیری که روی میله صافی انداخته شده است، شبیه است. اگر زنجیر درست از وسط روی میله قرار بگیرد، و هر دو انتهای آن در یک سطح باشند، زنجیر به هیچ طرفی نمی‌لغزد، اما اگر یک انتهای آن پایین‌تر از دیگری باشد، قسمت بلندتر سقوط می‌کند و قسمت کوتاه‌تر را به دنبال خود به طرف بالا می‌کشاند.
توجه داشته باشید که کار سیفون بستگی به این ندارد که ضخامت لوله یکنواخت باشد یا نباشد. اگر قسمت ورودی خیلی بزرگتر و در نتیجه وزن مایع داخل آن از وزن مایع داخل قسمت خروجی بیشتر باشد، باز هم جریان در جهت فشار بیشتر (و نه از وزن بیشتر) به سمت فشار کمتر برقرار می‌شود.

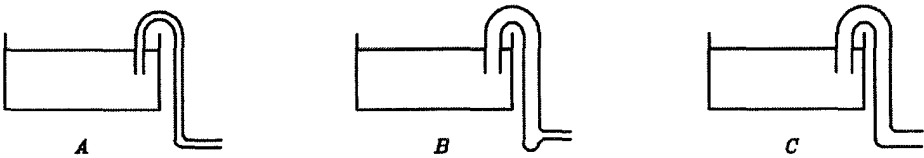
آزمایش: برای دیدن نحوه کارکرد سیفون فایل 1pressure 5 از CD کتاب را ببینید.

مثال. ظرفی مطابق شکل کاملاً پر از آب است. اگر درپوش A برداشته شود چه اتفاقی می‌افتد؟



حل. در ابتدا دستگاه مثل سیفون عمل می‌کند و آب از لوله بلندتر وارد مخزن بزرگ می‌شود، سپس بعد از مدتی حباب‌های هوا از طریق سوراخ A وارد مخزن کوچک‌تر می‌شوند و باعث می‌گردند که مایع داخل مخزن کوچکتر به دو قسمت تقسیم شوند. مایعی که در قسمت بالاتر هست از طریق لوله دراز وارد مخزن بزرگ می‌شود و مایع پایین‌تر از سوراخ به بیرون می ریزد.

مثال. آهنگ شارش (مقدار جریان عبوری در واحد زمان) در کدامیک از سیفون‌های زیر بیشتر است؟



الف) A ب) B

ج) C د) در هر سه مورد یکسان است.

حل. می‌دانیم آهنگ شارش متناسب با اختلاف فشار است یعنی هرچه اختلاف فشار بیشتر باشد مقدار جریان گذرنده از لوله در واحد زمان بیشتر است. از طرفی چون اختلاف ارتفاع دو سر لوله در هر سه مورد یکسان است لذا اختلاف فشار در هر سه مورد با هم برابر و در نتیجه آهنگ شارش در هر سه مورد یکسان می‌باشد. گزینه «د» صحیح است.

۷.۱ اصل پاسکال

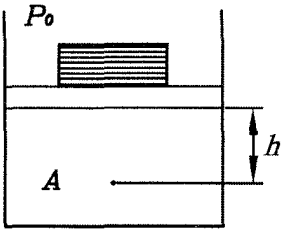
این اصل در مورد افزایش فشار چنین می‌گوید:

هرگاه در فشار وارد شده بر یک مایع تراکم‌ناپذیر تغییری اعمال شود، این تغییر به طور یکسان به تمام نقاط مایع منتقل می‌شود.

با انجام یک آزمایش ساده هنگام مسواک زدن می‌توانید درستی این اصل را بررسی کنید. هنگامی که طرف انتهای بسته یک لوله خمیردندان را فشار می‌دهید این افزایش فشار به

تمام نقاط مایع خمیر دندان منتقل شده و موجب می‌گردد که فشار دهانه لوله خمیردندان زیاد شده و باعث بیرون آمدن مایع خمیردندان از لوله آن شود.

برای اثبات این اصل فرض کنید مایعی تراکم ناپذیر را مطابق شکل در یک سیلندر قرار دهیم.



اگر فشار ناشی از وزن پیستون و وزنه‌ها و فشار جو را با P_{out} نشان دهیم آنگاه فشار در هر نقطه مثل A برابر است با:

$$P_A = P_{out} + \rho gh$$

حال اگر به تعداد وزنه‌ها بیافزاییم فشار P_{out} به میزان ΔP_{out} افزایش می‌یابد آنگاه فشار جدید در نقطهٔ A، P'_A، برابر است با:

$$P'_A = P_{out} + \Delta P_{out} + \rho gh$$

از تفاضل روابط فوق داریم:

$$\Delta P_A = P'_A - P_A = \Delta P_{out}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تغییر فشار مستقل از عمق h است یعنی تغییر فشار برای تمام نقاط مایع یکسان است.

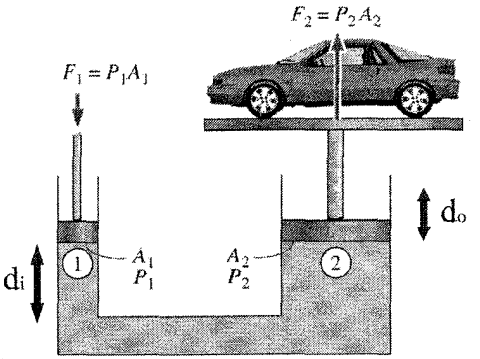
مثال. دهانهٔ ظرفی محتوی مایعی تراکم‌ناپذیر، به وسیلهٔ پیستونی به سطح مقطع Acm^2 مسدود شده است. اختلاف فشار مایع در کف ظرف و در مرکز ثقل مجموعهٔ ظرف و مایع $P\frac{N}{m^2}$ می‌باشد. اگر وزنهٔ ۱۰ کیلوگرمی بر روی پیستون قرار دهیم اختلاف فشار بین دو نقطهٔ مذبور بر حسب $\frac{N}{m^2}$ برابر است با:

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $P + \frac{10\,g}{A}$ ب) $P - \frac{10^5\,g}{A}$ ج) P د) صفر

حل. بنابر اصل پاسکال چون افزایش فشار برای هر دو نقطه به یک مقدار خواهد بود لذا اختلاف فشار این دو نقطه همچنان برابر P می‌شود. گزینه «ج» صحیح است.

مشهورترین کاربرد اصل پاسکال، بالابر (جک) هیدرولیکی (روغنی) است که شکل شماتیک آن در زیر نشان داده شده است.



اگر نیروی F_i را به پیستونی به مساحت قاعده A_i وارد کنیم، فشار در تمام نقاط مایع به میزان $\frac{F_i}{A_i}$ زیاد می‌شود. برای اینکه تعادل حفظ شود باید فشار رو به بالای مایع بر پیستون به مساحت A_o، با یک فشار رو به پایین بر آن خنثی شود چون $P_i = P_o$ نیروی رو به پایین F_o از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$P_o = P_i \quad , \quad F_o = (\frac{A_o}{A_i}) F_i \qquad (۸-۱)$$

اگر $A_o > A_i$ باشد، نیروی خروجی F_o بزرگتر از نیروی ورودی F_i می‌شود. حال اگر نیروی ورودی به اندازه d_i جابه‌جا شود چون روغن خارج شده از لوله باریک‌تر وارد لوله پهن‌تر شده است لذا با توجه به برابری حجم‌ها داریم:

$$d_i A_i = d_o A_o \qquad (۹-۱)$$

از طرفی کاری که ما انجام می‌دهیم برابر است با:

$$W_i = F_i d_i = F_i (\frac{A_o}{A_i}) d_o$$

با استفاده از رابطه (۱ – ۸) داریم:

$$W_i = (\frac{A_i}{A_o}) F_o (\frac{A_o}{A_i}) d_o = F_o d_o = W_o \qquad (۱۰-۱)$$

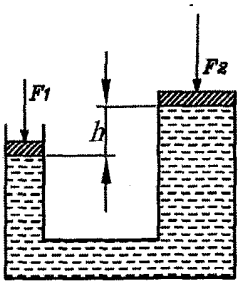
بنابراین با صرف‌نظر از اتلاف انرژی، کار ورودی با کار خروجی برابر است یعنی درست است که نیروی F_i کمتر از F_o می‌باشد ولی جابه‌جایی آن بیشتر از جابه‌جایی نیروی F_o است.

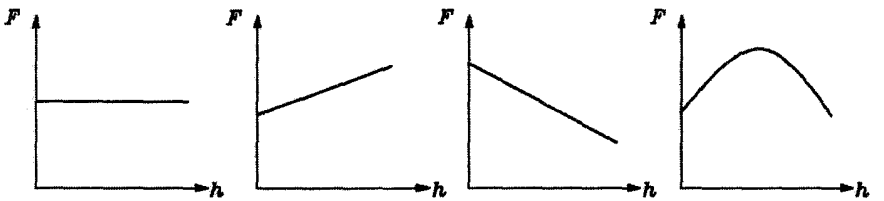
نکته۱: رابطه (۱ – ۸) برای حالتی است که دو پیستون در یک ارتفاع باشند. بنابراین اگر دو پیستون در یک ارتفاع نبودند میزان اختلاف فشار ناشی از اختلاف ارتفاع ستون مایع در دو شاخه را باید در محاسبه بیاوریم.

نکته۲: رابطه (۱ – ۱۰) برای حالتی که سطح دو پیستون در یک ارتفاع نباشد نیز باز صادق است، چرا که این رابطه را نیز می‌توان به راحتی از پایستگی انرژی بدست آورد.

مثال. شکل زیر طرح واره‌ای از یک جک روغنی است. بر پیستون طرف چپ نیروی ثابت F_1 وارد می‌شود. فاصلهٔ پایین دو پیستون h است. نمودار F_2 بر حسب h برای تعادل جک کدام است؟ وزن پیستون‌ها را در مقایسه با بقیهٔ نیروها ناچیز بگیرید.

(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)





حل. همانطور که قبلاً اشاره کردیم دو نقطه از یک مایع که در یک عمق باشند از فشار یکسانی برخوردارند، بنابراین برای دو نقطه هم‌تراز و هم‌سطح با سطح زیر پیستون کوچک‌تر داریم:

$$\frac{F_۲}{A_۲} + \rho g h = \frac{F_۱}{A_۱} \quad \Rightarrow \quad F_۲ = \frac{A_۲}{A_۱} F_۱ - A_۲ \rho h$$

در نتیجه نمودار $F_۲$ بر حسب h به صورت خطی با شیب منفی است لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

آزمایش. برای دیدن قدرت جک و اینکه جابجایی دست شما بسیار بیشتر از جابجایی پیستون جک است، فایل 1pascal از CD کتاب را ببینید.

خودتان می‌توانید به کمک دو سرنگ جک هیدرولیکی بسازید. فایل 2 pascal 1 را هم ببینید؛ ضرر نمی‌کنید.

۸.۱ نیروی وارد از طرف سیال

می‌دانیم در هر نقطه از سیال، فشاری از طرف سیال بر آن نقطه وارد می‌شود. حال اگر سطحی را درون سیال ببریم، فشار به تمام نقاط آن سطح وارد شده و بنابر رابطه $F = PA$ نیرویی بر آن سطح اعمال می‌شود.

برای محاسبه این نیرو ۳ حالت فرض می‌کنیم:

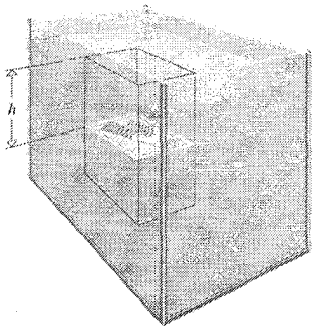
۱- سطح صاف و افقی باشد.

۲- سطح صاف و مورب (یا قائم) باشد.

۳- سطح به صورت منحنی باشد.

الف) نیروی وارد بر سطح صاف و افقی:

سطحی به مساحت A که به صورت افقی در درون مایعی قرار گرفته در نظر بگیرید.



اگر یک مساحت کوچک به اندازه ΔA در نظر بگیریم، نیروی وارد بر این جز سطح برابر با $\Delta F = P\Delta A$ است. بنابراین نیروی کل برابر جمع این جزء نیروها است. از آنجا که فشار برای همه یکسان است، در نتیجه نیروی کل برابر است با حاصلضرب فشار در کل سطح.

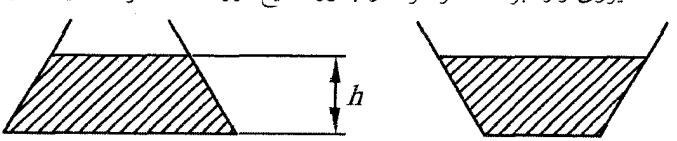
$$F = PA = \rho ghA \qquad (۱۱-۱)$$

نکته: در رابطه بالا نیروی ناشی از مایع را حساب کردیم. اگر نیروی ناشی از فشار جو را اضافه کنیم آنگاه:

$$F = (\rho gh + P_{\circ})\, A$$

دقت کنید چون در مسائل فشار $P_{\circ}$ به هر دو طرف سطح وارد می‌شود لذا نیروی برآیند از همان رابطهٔ (۱-۱۱) بدست می‌آید.

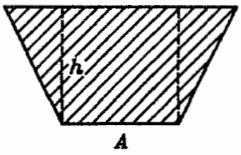
مثال. دو ظرف با مساحت قاعده A مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که تا ارتفاع یکسان h از مایع پرشده‌اند. نیروی وارد بر کف هر ظرف را با وزن مایع درون همان ظرف مقایسه کنید؟



(ب) (الف)

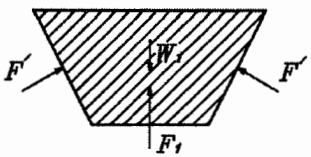
ظرف (الف):

چون کف ظرف یک سطح افقی است لذا نیروی وارد بر آن از رابطه (۱-۱۱) بدست می‌آید.



$$F_1 = (\rho\, g\, h)\, A = \rho g\, (h\, A)$$

با توجه به شکل مقدار hA برابر حجم مکعب مستطیلی است که با خطوط خط‌چین در شکل نشان داده شده است، در نتیجه کمیت $\rho g\ (hA)$ برابر است با وزن مایعی به چگالی ρ با حجم hA که مساوی با وزن مایع درون مکعب مستطیل خط‌چین می‌باشد، بنابراین چون وزن این مکعب مستطیل خط‌چین از وزن مایع کل ظرف، W_1، کمتر است لذا $F_1 < W_1$ است پس نیروی وارد بر کف ظرف از وزن مایع درون ظرف کمتر می‌شود. حال بیایید دیاگرام نیروهای وارد بر مایع را رسم کنیم.



دقت کنید بنابر قانون سوم نیوتن نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند برابر است با نیرویی که کف ظرف به مایع وارد می‌کند.

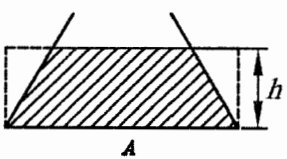
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 + F'_y + F'_y - W_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad W_1 = F_1 + 2F'_y \quad \Rightarrow \quad W_1 > F_1$$

که به همان نتیجهٔ قبلی می رسیم. از نظر مفهومی اینطور می‌توان بیان کرد که نیروی وارد بر کف ظرف کمتر از وزن مایع درون ظرف است زیرا بخشی از وزن مایع را دیواره‌های جانبی تحمل می‌کنند.

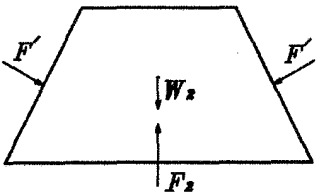
ظرف (ب):

مشابهاً می‌توان نیروی وارد بر کف این ظرف را به صورت زیر نوشت:



$$F_2 = (\rho g h)\, A = \rho g\, (hA)$$

که این نیرو با نیروی ظرف قبلی برابر است. از طرفی این نیرو برابر وزن مکعب مستطیلی است که از مایعی با چگالی ρ پر شده است. چون مکعب مستطیل خط‌چین بزرگ‌تر از حجم ظرف است در نتیجه $F_2 > W_2$. با دیاگرام نیروهای وارد بر مایع درون ظرف نیز می‌توان این مطلب را نشان داد.

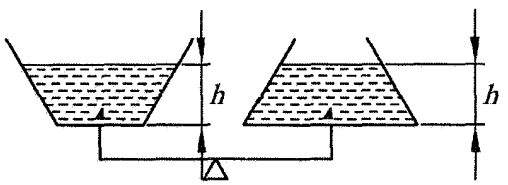


$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 - W_2 - 2F'_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = W_2 + 2F'_y \quad \Rightarrow \quad F_2 > W_2$$

از نظر مفهومی اینطور می‌توان بیان کرد که نیروی وارد بر کف ظرف، بزرگتر از وزن مایع درون ظرف است زیرا دیواره‌های ظرف نیز از طریق مایع، نیرو وارد می‌کنند.

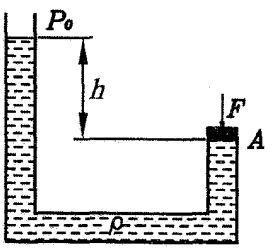
سؤال محک. اگر وزن دیواره دو ظرف زیر با هم برابر باشند، کدام کفه ترازو پایین می‌رود؟



حل. واضح است کفه‌ای پایین می‌رود که از وزن بیشتری برخوردار باشد. ظرف سمت چپ دارای مایع بیشتری نسبت به ظرف سمت راستی دارد، در نتیجه کفه سمت چپ پایین می‌رود.

دقت کنید درست است که نیروی وارد بر کف دو ظرف با هم برابرند اما نیرویی که به کفه‌های ترازو وارد می‌شود همان نیرویی است که برای تعادل ظرف‌ها مورد نیاز است و این غیر از نیروی وارد بر کف ظرف است.

مثال. برای اینکه آب از دریچه A بیرون نریزد چه نیرویی باید بر دریچه وارد کنیم؟



حل. در اینجا می‌خواهیم فشار جو P_0 را نیز وارد کنیم و نشان دهیم که اثری در جواب ندارد. نیروی وارد از طرف سیال بر زیر دریچه برابر است با:

$$F_1 = (\rho g h + P_0) S$$

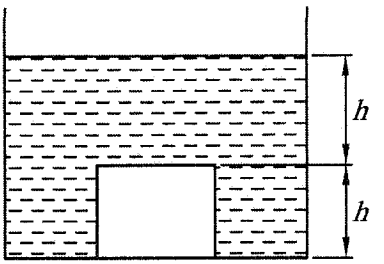
نیروی وارد بر روی دریچه برابر است با:

$$F_2 = F + P_0 S$$

چون دریچه در حال تعادل است، پس $F_۱ = F_۲$ در نتیجه:

$$F = (\rho\, g\, h)\, S$$

مثال: در شکل زیر، نخست جعبه به کف ظرف چسبیده و آب زیر آن نفوذ نکرده است. در این حالت برآیند نیروهایی که آب به جعبه وارد می‌کند $\vec{F_۱}$ است. جعبه را به آرامی تکان می‌دهیم تا آب زیر آن نفوذ کند و بماند. جعبه همچنان در کف ظرف آب می‌ماند. در این حالت برآیند نیروهایی که آب به جعبه وارد می‌کند، $\vec{F_۲}$ است. کدام گزینه درباره جهت $\vec{F_۱}, \vec{F_۲}$ و مقدار آنها $(F_۱, F_۲)$ درست است؟ (شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران)



الف) $\vec{F_۱}$ به طرف پایین و $\vec{F_۲}$ به طرف بالا است و $F_۲ < F_۱$.

ب) $\vec{F_۱}, \vec{F_۲}$ هر دو به بطرف بالااند و $F_۱ = F_۲$

ج) $\vec{F_۱}$ به طرف پایین و $\vec{F_۲}$ به طرف بالااست و $F_۲ = ۲F_۱$.

د) $\vec{F_۱}, \vec{F_۲}$ هر دو به طرف پایین‌اند و $F_۲ = F_۱$.

ه) $\vec{F_۱}$ به طرف پایین است و $F_۲ = ۰$

حل: با توجه به اینکه سطوح جانبی جعبه در عمق یکسان هستند لذا برآیند نیروهای وارد بر سطوح جانبی برابر صفر است. در حالت اول فشار آب فقط بر سطح فوقانی وارد می‌شود پس $F_۱$ به سمت پایین و مقدار آن برابر است با:

$$F_۱ = (P_۰ + \rho g h)A \qquad (۱)$$

در حالت دوم فشار آب هم بر سطح فوقانی وارد می‌شود و هم به سطح تحتانی. (برآیند فشار بر سطوح جانبی صفر است.) از طرفی چون فشار وارد بر سطح تحتانی بیشتر از سطح فوقانی است لذا جهت $F_۲$ به سمت بالا و مقدار آن برابر است با:

$$F_۲ = [P_۰ + \rho g(۲h) - (P_۰ + \rho g h)]A = \rho g h A \qquad (۲)$$

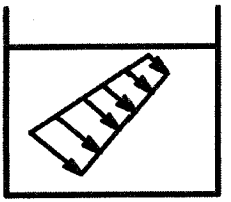
$$(۲), (۱) \text{ از} \longrightarrow F_۲ < F_۱$$

گزینهٔ «الف» صحیح است.

ب) نیروی وارد بر سطح صاف و مورب (یا قائم):

هنگامی که سطح مورب (یا قائم) باشد با توجه به اینکه فشار با عمق متناسب است در نتیجه فشار نقاطی که در عمق‌های مختلف قرار دارند با یکدیگر متفاوتند و به‌راحتی نمی‌توان از فرمول ساده $P = \frac{F}{A}$ برای محاسبه نیرو استفاده کرد.

در شکل زیر، شماتیک اندازه فشار در نقاط مختلف یک سطح که به صورت مورب در مایع قرار گرفته است را نشان می‌دهد.

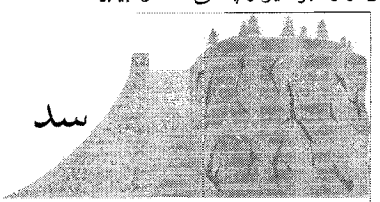


اگر سطحی با مساحت A درون مایعی به طور مورب (یا قائم) قرار گیرد می‌توان نشان داد که نیروی وارد بر این سطح از رابطه زیر بدست می‌آید:

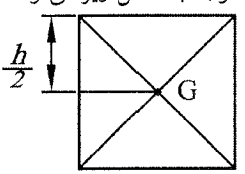
$$F = P_G A \qquad (۱-۱۱ \text{ ب})$$

در رابطه فوق P_G اندازه فشار در مرکز سطح است. به عنوان مثال مرکز یک سطح مستطیلی شکل در محل تقاطع دو قطر آن و مرکز یک سطح مثلثی شکل محل تلاقی میانه‌های آن می‌باشد. حال به مثال زیر توجه کنید:

مثال. پشت یک سد، آب تا ارتفاع h جمع شده است. اگر دیوار پشت سد مستطیل شکل با مساحت A باشد، نیروی وارد بر دیوار پشتی سد را بیابید.

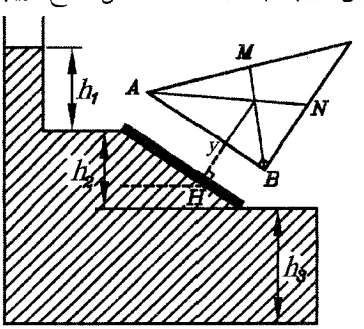


حل. به کمک رابطه (۱-۱۱ ب) و با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$F = P_G A = (\rho g \frac{h}{۲}) A$$

مثال. یک دریچه‌ای مثلثی شکل با مساحت A مطابق شکل از خارج شدن مایع مخزن جلوگیری می‌کند. نیروی وارد بر این دریچه چقدر است؟ (شکل سطح دریچه نشان داده شده است.)



حل. با توجه به اینکه مرکز سطح مثلث، محل تلاقی میانه‌های آن است بنابراین مرکز سطح دریچه در عمق $h_1 + \frac{2}{3} h_2$ نسبت به سطح آزاد مایع مخزن قرار دارد، لذا به کمک رابطه (۱ – ۱۱ ب) نیروی وارد بر دریچه برابر است با:

$$F = P_G A = \rho g (h_1 + \frac{2}{3} h_2) A$$

دقت کنید اگر شما فشار جو P_0 را نیز در نظر می‌گرفتید چون به هر دو طرف دریچه وارد می‌شود، یکدیگر را خنثی می‌کنند و نیروی برآیند همین جواب می‌شد.

مثال. ابعاد دو سد مشابه است و ارتفاع آب پشت آنها هم یکی است. حجم آب دریاچه پشت یکی از این سدها V و دیگری $2V$ است. چگالی آب هر دو دریاچه $1000\ kg/m^3$ است. کدام گزاره در مورد نیرویی که آب پشت هر سد بر آن وارد می‌کند درست است؟

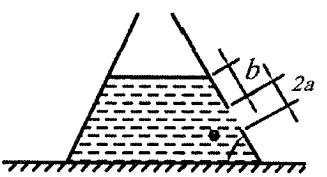
(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) بر سدی که دریاچهٔ بزرگتری دارد نیرویی دو برابر وارد می‌شود.
ب) بر سدی که دریاچهٔ کوچک‌تری دارد نیرویی بزرگتری وارد می‌شود.
ج) بر سدی که دریاچهٔ بزرگتری دارد اندکی بیشتر نیرو وارد می‌شود.
د) نیروی وارد بر هر دو سد یکسان است.

حل. همانطور که نشان دادیم نیروی وارد بر سد برابر است با $F = (\rho g \frac{h}{2}) A$. چون ابعاد دو سد با هم برابرند لذا A آنها یکسان و ارتفاع آب هم یکسان است، در نتیجه h آنها با هم برابرند، پس نیروی وارد بر هر دو سد یکسان می‌باشد. گزینه «د» صحیح است.

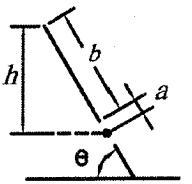
مثال. روی دیوارهٔ ظرفی مطابق شکل سوراخی دایره‌ای شکل به شعاع a ایجاد می‌کنیم. این دیواره تخت و عمود بر صفحهٔ کاغذ است. ظرف را از آب پر می‌کنیم. برای آنکه آب از سوراخ بیرون نریزد جسمی را روی آن قرار می‌دهیم. آب چه نیرویی به جسم وارد می‌کند؟ شتاب گرانش را g، چگالی آب را ρ و فشار هوا را P_0 بگیرید.

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $\pi a^2 [P_0 + \rho g (a+b) \sin \theta]$
ب) $\pi a^2 [P_0 + \rho g (a+b) \sin \theta \cos \theta]$
ج) $\pi a^2 [P_0 + \rho g b \sin \theta]$
د) $\pi a^2 [P_0 + \rho g a \sin \theta \cos \theta]$

حل. ابتدا عمق مرکز سطح سوراخ، h، را می‌یابیم.



با توجه به شکل $h = (a+b) \sin \theta$. به کمک رابطه (۱-۱۱ ب) داریم:

$$F = P_G A = [P_\circ + \rho g h] \pi a^2$$

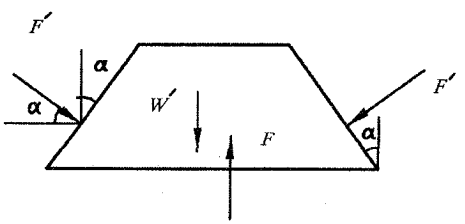
$$F = [P_\circ + \rho g (a+b) \sin \theta] \pi a^2$$

گزینه «الف» صحیح است.

چون در این مسأله نیروی وارده از طرف آب را خوسته بود و نه نیروی برآیند لذا $P_\circ$ در جواب ظاهر شد.

مثال: یک ظرف مخروطی را که ته ندارد، روی میزی قرار می‌دهیم. مایعی داخل ظرف ریخته می‌شود و به محض اینکه سطح آن به ارتفاع h رسید، فشار مایع وارد بر دیواره ظرف باعث بلند کردن ظرف می‌شود. اگر شعاع قاعده بزرگتر (ته ظرف) برابر R و زاویهٔ بین مولد مخروط با راستای قائم برابر α و وزن ظرف نیز برابر W باشد، چگالی مایع ریخته شده را بیابید.

حل: در مسائلی شبیه مسأله فوق پیش می‌آید که برای محاسبه مرکز سطح دچار مشکل می‌شویم. لذا باید از ترفندهای دیگر استفاده کنیم. از قانون سوم نیوتن می‌دانیم نیروی وارده از طرف مایع بر دیواره ظرف برابر است با نیروی وارده از طرف دیواره بر مایع بنابراین از تعادل مایع درون ظرف در جهت قائم مطابق شکل زیر داریم:

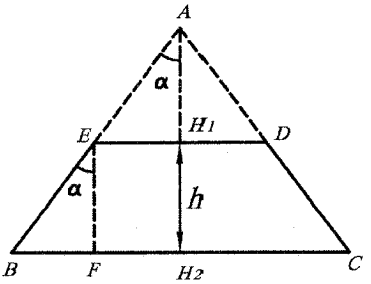


$$\sum F_y = \circ \rightarrow F = W' + F' sin\alpha \qquad (۱)$$

W' وزن مایع است. F همان نیروی وارده از طرف مایع به کف میز می‌باشد (قانون سوم نیوتن). پس:

$$F = \rho g h A = \rho g h (\pi R^2) \qquad (۲)$$

برای محاسبه W' ابتدا باید حجم مخروط ناقص را بیابیم. با توجه به شکل، حجم قسمت EBCD برابر است با:



$$V = \frac{۱}{۳}AH_۲ \times (\pi R^۲) - \frac{۱}{۳}AH_۱ \times (\pi(EH_۱)^۲)$$

$$EH_۱ = FH_۲ = R - BF = R - htan\alpha$$

$$\frac{EH_۱}{AH_۱} = tan\alpha \rightarrow AH_۱ = \frac{R}{tan\alpha} - h$$

$$\rightarrow V = \frac{۱}{۳}(AH_۱ + h)\pi R^۲ - \frac{۱}{۳}AH_۱ \times (\pi(AH_۱tan\alpha)^۲)$$

$$V = \frac{۱}{۳}(R\cot\alpha - h + h)\pi R^۲ - \frac{\pi}{۳}(R\cot\alpha - h)^۳tan^۲\alpha$$

با ساده سازی داریم:

$$V = \frac{\pi}{۶}h(۳R^۲ - ۳hRtan\alpha + h^۲tan^۲\alpha) \qquad (۳)$$

می‌دانیم هنگامی که مؤلفهٔ نیروی قائم وارده از طرف سیال بر دیواره برابر W شود آنگاه ظرف از روی میز بلند می‌شود. به کمک قانون سوم نیوتن و برابری عمل و عکس‌العمل باید در لحظهٔ بلند شدن $F'\sin\alpha = W$ باشد. با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱) داریم:

$$\rho gh(\pi R^۲) = \rho Vg + F'\sin\alpha = \rho Vg + W$$

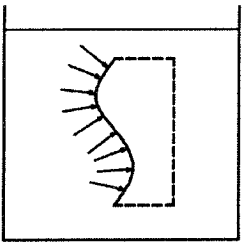
$$\rightarrow \rho = \frac{W}{g(h\pi R^۲ - V)}$$

$$\rightarrow \rho = \frac{W}{g(h\pi R^۲ - h\pi R^۲ + \pi h^۲ Rtan\alpha - \frac{\pi}{۳}h^۳tan^۲\alpha)}$$

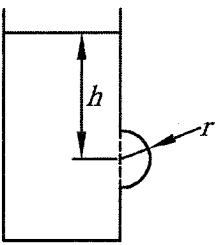
$$\rho = \frac{W}{\pi gh^۲tan\alpha(R - \frac{۱}{۳}htan\alpha)}$$

ج) نیروی وارد بر یک سطح منحنی:

هنگامی که یک سطح به صورت منحنی باشد با توجه به اینکه فشار به صورت عمود بر سطح وارد می‌گردد، در نتیجه نیروی وارد بر سطح هم در جهت افقی مؤلفه دارد و هم در جهت قائم. برای محاسبه مؤلفه افقی نیروی فشاری کافی است فشاری که بر تصویر سطح منحنی روی یک دیوار قائم وارد می‌شود را بیابیم. دقت کنید که فشار بر هر دو طرف سطح وارد می‌شود و در شکل زیر فقط یک طرف آن را نشان داده است.



مثال. دریچه مخزنی به شکل نیم‌کره به شعاع r است. مطلوب است محاسبه نیروی افقی وارد بر این دریچه.



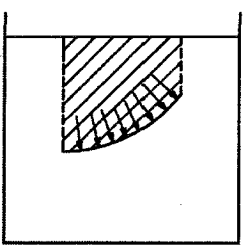
حل. می‌دانیم تصویر (سایه) نیم‌کره‌ای به شعاع r روی صفحه قائم به صورت دایره‌ای به شعاع r دیده می‌شود. بنابراین نیروی افقی وارد بر این دریچه برابر است با:

$$F = P_G A = (\rho g h)(\pi r^2)$$

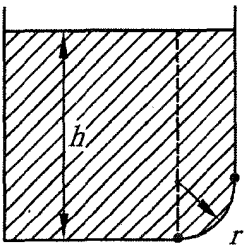
نکته: اگر سطحی بسته بود مثل جسمی که درون مایع قرار می‌گیرد، چون تصویر سطوح جانبی با علامت مخالف هم هستند، در نتیجه هیچ نیروی افقی به سطح بسته وارد نمی‌شود.

برای محاسبه مؤلفه نیروی قائم اعمال شده توسط مایع بر یک سطح منحنی، کافی است وزن مایع که به طور قائم بالای سطح منحنی تا سطح آزاد مایع قرار دارد، حساب کنیم.

دقت کنید که اگر ضخامت صفحه ناچیز باشد، نیرویی که از زیر سطح وارد می‌شود با نیروی وارده از بالای سطح برابر است.



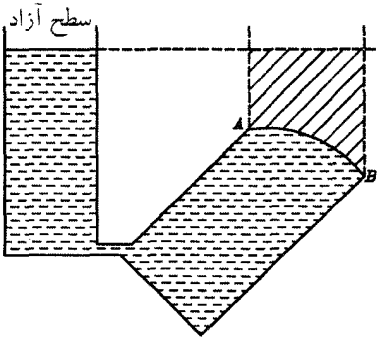
مثال. دریچهٔ مخزنی به شکل ربع استوانه با شعاع r از خروج مایع جلوگیری می‌کند. مطلوب است محاسبه نیروی قائم وارد بر دریچه اگر پهنای مخزن (عمق مخزن به داخل صفحه) b باشد.



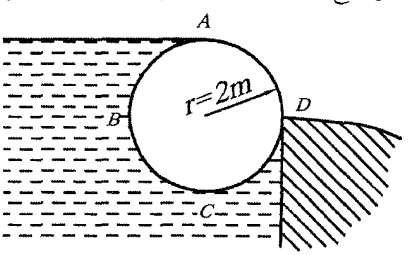
حل. برای محاسبه مؤلفه نیروی قائم کافی است وزن مایع بالای دریچه را تا سطح آزاد حساب کنیم. بنابراین:

$$F_y = ((h-r)\,r + \frac{\pi r^2}{4})\,b\,\rho\,g$$

در شکل زیر مخزنی نشان داده شده است. مشابه قبل برای محاسبه نیروی وارد بر دریچهٔ AB، ابتدا سطح آزاد مایع را با خط‌چین ادامه داده و وزن ناحیه هاشورخورده را می‌یابیم. در واقع با این کار نیروی وارد بر AB که به سمت بالا بر آن اعمال می‌شود را پیدا کرده‌ایم.



مثال. یک مانع استوانه‌ای شکل مانع سرریز شدن آب می‌شود (مطابق شکل).



سطح تماس بین دیواره و استوانه صیقلی می‌باشد. با فرض اینکه طول استوانه h و در حال تعادل باشد، وزن استوانه، W، را بیابید.

حل: برای تعادل باید وزن استوانه با مؤلفه قائم نیروی وارد شده از طرف آب برابر باشد. دقت کنید برای سطح BCD، سطح آزاد آب در ارتفاع A قرار دارد. بنابراین نیروی وارده از طرف آب بر این سطح به طرف بالا و برابر وزن آب فرضی است که بالای آن قرار دارد. یعنی:

$$F_{BCD} = (\frac{\pi r^2}{2} + 2r \times r)h\rho g \uparrow \qquad (1)$$

نیروی وارد بر سطح AB برابر وزن آب بالای آن است که جهت آن به طرف پایین می‌باشد. در نتیجه:

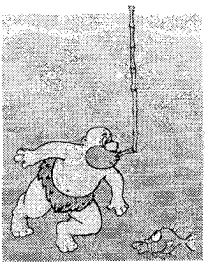
$$F_{AB} = (r^2 - \frac{\pi r^2}{4})h\rho g \downarrow \qquad (2)$$

از تعادل استوانه داریم:

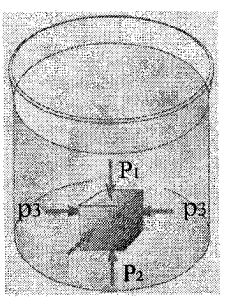
$$W = F_{BCD} - F_{AB} = (r^2 + \frac{\pi r^2}{4})h\rho g$$

۹.۱ نیروی شناوری (نیروی ارشمیدس)

در هنگام فرو رفتن در آب استخر احساس می‌کنیم که سبک‌تر شده‌ایم. یعنی نیرویی در خلاف جهت نیروی گرانش بر بدن ما وارد می‌شود و باعث سبک‌تر شدن ما می‌گردد. به این نیروی اعمال شده بر جسم توسط یک سیال ساکن (چه مایع و چه گاز) که جسم در آن غوطه‌ور و یا روی آن شناور می‌باشد، نیروی شناوری (نیروی ارشمیدس) می‌نامند.



نیروی شناوری همواره به سمت بالا است و هیچ مؤلفه افقی ندارد. برای مثال استوانه‌ای را در نظر بگیرید که درون مایعی قرار گرفته است. با توجه به تقارن استوانه، فشار وارد بر سطوح جانبی یکدیگر را خنثی می‌کنند، اما فشار وارد بر سطوح بالا و پایین یکدیگر را خنثی نمی‌کنند.



با توجه به اینکه سطح پایین‌تر در عمق بیشتری قرار دارد لذا $P_2 > P_1$. بنابراین نیروی وارد بر سطح فوقانی کمتر از نیروی وارد بر سطح تحتانی است در نتیجه یک نیرو به سمت بالا به استوانه وارد می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$F = F_۲ - F_۱ = (P_۲ - P_۱)\, A = (\rho g h_۲ - \rho g h_۱)\, A = \rho g\, (h_۲ - h_۱)\, A$$

از طرفی کمیت $(h_۲ - h_۱)\, A$ برابر حجم استوانه است در نتیجه $F = \rho\, g\, V$

یعنی نیروی شناوری برابر است با وزن استوانه‌ای با حجم V که از مایع موردنظر پر شده باشد. اصطلاحاً به V، حجم جابه‌جا شده می‌گویند. مشابه استدلال فوق را می‌توان برای یک جسم با شکل دلخواه بیان کرد. در واقع نیروی شناوری روی یک جسم غوطه‌ور برابر اختلاف مؤلفه‌های قائم نیروی فشاری روی سطوح تحتانی و فوقانی می‌باشد، که نحوه محاسبه مؤلفه نیروی قائم را در بخش قبل بیان کردیم.

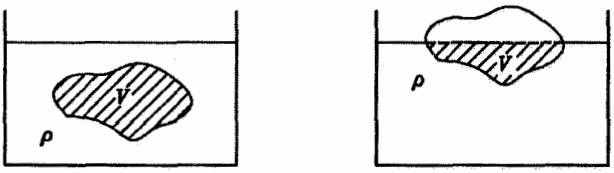
بنابراین در حالت کلی نیروی شناوری (ارشمیدس) وارد بر جسم برابر است با:

$$F_a = \rho\, V\, g \qquad (۱۲ - ۱)$$ نیروی شناوری

ρ : چگالی مایع است که نباید با چگالی جسم اشتباه شود.

V : حجم جابه‌جا شده است که برای جسم غوطه‌ور برابر حجم جسم و برای جسم شناور برابر حجمی از جسم است که درون مایع قرار دارد، در شکل زیر حجم جابجا شده برای هر دو حالت نشان داده شده است.

g : شتاب گرانش



نکته ۱: با توجه به اینکه هوای اطراف ما نیز یک سیال است در نتیجه به اجسامی که درون آن هستند نیروی شناوری وارد می‌کند منتهی چون چگالی هوا کم است $(۱\ gr/cm^۳)$، لذا نیروی وارده بسیار کوچک می‌باشد.

اما برای بالون با حجم بزرگ این نیرو محسوس است و می‌تواند باعث بلند کردن افراد شود به کمک آزمایش می‌توان اثر این نیرو را بررسی کرد.

آزمایش: در محفظه ای که حاوی هوا است یک ترازو در حال تعادل قرار دارد. وزن دو وزنه با هم برابر منتهی حجم وزنه چپی بزرگتر از حجم وزنه راستی است. اگر محفظه را از هوا تخلیه کنید خواهید دید که وزنه چپی پایین می‌آید. علت را خودتان تفسیر کنید.

برای دیدن آزمایش، فایل 1buoyan از CD کتاب را ببینید.

نکته ۲: نیروی شناوری درست در مرکز حجم جابه‌جا شده وارد می‌شود. حال اگر جسم غوطه‌ور در مایع باشد مرکز حجم جابه‌جا شده همان مرکز حجم جسم است اما اگر جسم به صورت شناور باشد باید مرکز حجم جابه‌جا شده را بیابیم.

مثال. سطح یک تخته به ضخامت $۳۰\ cm$ که بر سطح آب شناور است حداقل چند متر مربع باید باشد، تا اگر شخصی به جرم $۶۰\ kg$ روی آن بایستد غرق نشود؟ چگالی تخته و آب به ترتیب $۰/۶\ \frac{g}{cm^۳}$ و $۱\ \frac{g}{cm^۳}$ می‌باشد. (اولین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) ۰/۲ ب) ۰/۳ ج) ۰/۴ د) ۰/۵

حل. حداقل سطح تخته وقتی است که اگر شخص روی آن بایستد، تخته کاملاً در آب غوطه‌ور شود. اگر وزن شخص W_1 و وزن تخته W_2 باشد باید مجموع این دو نیرو برابر نیروی ارشمیدس باشد.

$$F_a = W_1 + W_2$$
$$W_2 = \rho' V g = ۰/۶ \times ۱۰^۳ \times (۰/۳\, A) \times ۱۰ = ۱۸۰۰\, A$$
$$F_a = \rho V g = ۱ \times ۱۰^۳ \times (۰/۳\, A) \times ۱۰ = ۳۰۰۰\, A$$
$$\Rightarrow\ ۳۰۰۰\, A = ۱۸۰۰\, A + ۶۰۰ \ \Rightarrow\ A = \frac{۶۰۰}{۱۲۰۰} = ۰/۵\, m^۲$$

گزینهٔ «د» صحیح است.

مثال. در دو کفهٔ ترازویی دو ظرف مشابه حاوی مقادیر یکسانی آب قرار داده‌ایم و ترازو در حال تعادل است. در یکی از ظرف‌ها یک قطعه سنگ و یک قطعه چوب و در ظرف دیگر درست مشابه این دو جسم را در حالی که به هم بسته‌ایم می اندازیم. به طوریکه در ظرف اول چوب روی آب می‌ماند اما در ظرف دوم توسط سنگ به زیر آب کشیده شده است. کدام بیان درست است؟

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) کفهٔ اول پایین‌تر می‌رود.
ب) کفهٔ دوم پایین‌تر می‌رود.
ج) ترازو در حال تعادل باقی می‌ماند.
د) پایین رفتن یکی از کفه‌ها به نسبت جرم‌های سنگ و چوب بستگی دارد.

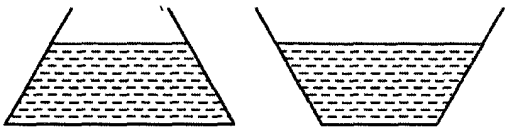
حل. در حالت کلی چه جسم روی سطح شناور بماند و یا به پایین ظرف سقوط کند، در هر صورت وزن مجموعه به اندازه وزن جسم افزایش می‌یابد. دلیل آن قانون سوم نیوتن و برابری عمل و عکس‌العمل و اینکه مجموعه در حال سکون است. بنابراین فرقی نمی‌کند که چوب روی آب باشد یا به زیر آب کشیده شود.
از آنجا که ترازو براساس وزن اجسام کار می‌کند و اثری از نیروهای داخلی نمی‌گیرد لذا ترازو در حال تعادل خواهد بود. گزینهٔ «ج» صحیح است.

سؤال محک. در مثال قبل در مورد نیروی وارد بر کف هر ظرف چه قضاوتی می‌توان کرد؟

حل. در حالت اول که چوب و سنگ از هم جدا هستند تغییر ارتفاع آب به علت داخل شدن حجم سنگ و قسمتی از حجم چوب است. (زیرا چوب روی آب شناور می‌ماند)
اما در حالت دوم چون تمام حجم چوب داخل آب می‌شود لذا افزایش ارتفاع آب بیشتر از حالت اول خواهد بود. بنابراین اگر h_1 ارتفاع آب در حالت جدا بودن سنگ و چوب و h_2 در حالت بسته بودن این دو به هم باشد می‌دانیم $h_2 > h_1$. از طرفی نیروی وارد بر کف ظرف برابر است با $F = (\rho g h)\, A$ پس در حالت دوم یعنی بسته بودن چوب و سنگ به هم، نیروی بیشتری به کف ظرف وارد می‌شود؛ زیرا آب از ارتفاع بیشتری برخوردار است.

سؤال محک. دو ظرف مطابق شکل تا ارتفاع یکسان h از آب پر شده‌اند. اگر دو چوب یکسان روی

آنها شناور کنیم، نیروی وارد بر کف کدام ظرف بیشتر می‌شود؟



(ب) (الف)

حل. در هر دو ظرف حجم جابه‌جا شده یکسان است منتهی چون مساحت دهانه ظرف (ب) کوچک‌تر است، آب تا ارتفاع بالاتری می‌آید تا افزایش ارتفاع آب در ظرف (الف). در نتیجه نیروی وارد بر کف ظرف (ب) بیشتر می‌شود. اما وزن دو ظرف به یک میزان که همان وزن چوب است افزایش می‌یابد.

آزمایش: در یک کفه ترازو یک وزنه و در کفه دیگر ترازو، ظرف آبی قرار دارد و ترازو در حالت تعادل است. اگر انگشت را داخل ظرف آب کنیم چون از طرف آب نیروی ارشمیدس به دست ما وارد می‌شود لذا طبق قانون سوم نیوتن، عکس‌العمل آن به آب ظرف و در نهایت به ترازو وارد می‌گردد. بنابراین کفه سمت چپ ترازو پایین می‌رود. حال هر چقدر که انگشت را بیشتر داخل آب کنیم نیروی بیشتری به آب ظرف وارد شده و کفه سمت چپ پایین‌تر می‌رود.
فیلم 1buoyan2 از CD کتاب را ببینید.

مثال. یک کیسهٔ پلاستیک خالی از هوا را به وسیلهٔ نیروسنجی وزن کرده و نیرو سنج P را نشان می‌دهد. آنرا از هوا با فشار محیط پر کرده و مجدداً با همان نیروسنج وزن می‌کنیم. اگر وزن هوای داخل کیسه P' باشد، نیروسنج کدام یک از مقادیر زیر را نشان می‌دهد؟
(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $P - P'$ ب) $P + P'$ ج) P د) P'

حل: برای اینکه در جواب شک نکنید، حجم و چگالی خود کیسه پلاستیک را V'' و ρ'' در نظر بگیرید. در حالت اول از تعادل کیسه می‌توان نوشت:

$$P = m_1 g - F_{1a}$$
$$\Rightarrow P = \rho'' V'' g - \rho_a V'' g \qquad (1)$$

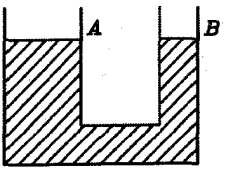
ρ_a چگالی هوا، F_{1a} نیروی ارشمیدس و m_1 جرم کیسه هستند.
در حالت ثانویه اگر V' حجم هوای داخل کیسه باشد، آنگاه از تعادل کیسهٔ باد شده داریم:

$$P' = m_1 g + m_2 g - F_{2a}$$
$$P' = \rho'' V'' g + \rho_a V' g - \rho_a (V' + V'') g = \rho'' V'' g - \rho_a V'' g \qquad (2)$$
$$(1) \text{و} (2) \longrightarrow P' = P$$

گزینهٔ (ج) صحیح است.

مثال. جرم حجمی مایع درون ظرف در شکل زیر ρ است. اگر جسمی به جرم حجمی $\rho' < \rho$ بر سطح مایع ظرف A شناور کنیم به طوریکه ارتفاع آن در داخل مایع h باشد و ارتفاع

مایع در دو ظرف پس از آن h'_A و h'_B باشد، می‌توان نوشت: (دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $\frac{h'_A}{h'_B} = \frac{\rho}{\rho'}$ ب) $\frac{h'_A}{h'_B} = \frac{\rho'}{\rho}$

ج) $h'_A = h'_B$ د) $h'_A - h'_B = h$

حل. اگر سطح جسم، کوچک‌تر از سطح مقطع لوله A باشد با وارد کردن جسم به داخل شاخه A آب از کناره‌های جسم رد شده و جسم به میزان h داخل آن فرو می‌رود. این حالت درست مثل این است که لولهٔ A را تنگ کنیم. از طرفی از بخش‌های قبل به یاد داریم که فشار به شکل و قطر لوله بستگی ندارد و سطح آب در چند لوله با شکل‌های مختلف که به هم متصلند همگی در یک ارتفاعند، بنابراین بعد از قرار دادن جسم ارتفاع سطح آب دو شاخه یکسان است یعنی $h'_A = h'_B$ (خواه جسم روی مایع شناور بماند خواه به پایین مایع سقوط کند) اما اگر سطح جسم برابر سطح مقطع لوله A باشد و نگذارد آب از کناره‌های آن فرار کند فشار اضافی ناشی از وزن جسم موجب اختلاف ارتفاع سطح آب در دو شاخه می‌گردد، اما چون خود مسأله گفته است که جسم به اندازه h در مایع فرو رفته است لذا فرض دوم برقرار نیست. بنابراین گزینه «ج» صحیح است.

مثال. یک بطری شیشه‌ای را در اختیار داریم که گنجایش درونی آن یک دسی متر مکعب و جرمش ۱۲۵ گرم است. چه حجمی از جیوه باید در درون بطری ریخت تا اگر در آنرا با چوب پنبه‌ای به حجم ۸ سانتی‌متر مکعب بسته و در آبی به جرم حجمی $1/02\ g/cm^3$ قرار دهیم، بطری و چوب پنبه کاملاً در آب فرو رفته و در حال تعادل باقی بماند، در صورتی که می‌دانیم نصف حجم چوب پنبه داخل دهانه بطری قرار می‌گیرد. جرم حجمی شیشه $2/5\ g/cm^3$ و جرم حجمی هوا $1/2\ g/lit$ و جرم حجمی جیوه $13/6\ g/cm^3$ و جرم حجمی چوب پنبه $0/25\ g/cm^3$ است. (سومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. حجم شیشه بطری برابر است با:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{125}{2/5} = 50\ cm^3$$

هنگامی که در بطری را با چوب پنبه می‌بندیم چون نصف حجم چوب پنبه بیرون بطری است (۱ دی‌سی‌متر برابر $1000\ cm^3$ است) لذا

حجم بیرون بطری بسته $V_0 = 1000 + 50 + 4 = 1554\ cm^3$

حجم داخل بطری بسته $V_i = 1000 - 4 = 996\ cm^3$

اگر حجم جیوه درون بطری V_J باشد آنگاه حجم هوای داخل بطری برابر $996 - V_J$ است. از تعادل بطری باید نیروی ارشمیدس را برابر نیروی وزن قرار دهیم. در نتیجه:

$$V_0\ \rho_w\ g = V_a\ \rho_a\ g + V_J\ \rho_J\ g + m_s\ g + V_c\ \rho_c\ g$$

$V_c\ \rho_c$: جرم چوب پنبه

$V_a\ \rho_a$: جرم هوا

$V_J\ \rho_J$: جرم جیوه

m_s : جرم شیشه

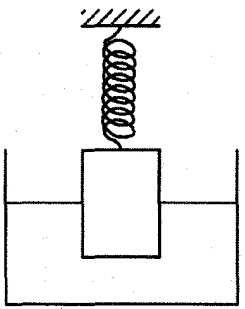
جرم حجمی هوا برابر $۱/۲ \times ۱۰^{-۳}\ \frac{gr}{cm^۳}$ است.

با جایگذاری داریم:

$$۱۰۵۴ \times ۱/۰۲ = (۹۹۶ - V_J) \times ۱/۲ \times ۱۰^{-۳} + V_J \times ۱۳/۶ + ۱۲۵ + ۸ \times ۰/۲۵$$

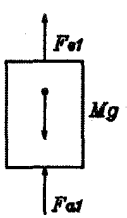
$$\Rightarrow \quad V_J = ۶۹/۶۳\ cm^۳$$

مثال. مطابق شکل استوانه‌ای فلزی به جرم M و به شعاع r و ارتفاع h توسط فنری با ثابت k که از بالا به نقطهٔ ثابتی متصل است، درون مایعی با چگالی (جرم حجمی) ρ شناور است، به‌طوریکه نصف ارتفاع آن داخل مایع است، چه وزنه‌ای باید روی استوانه قرار داد تا $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع آن داخل مایع قرار گیرد. (چهارمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



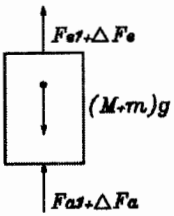
$$h = ۳۰\ cm \qquad k = ۲\ \frac{N}{m} \qquad \rho = ۱/۸\ \frac{g}{cm^۳} \qquad r = ۵cm \qquad M = ۱\ kg$$

حل. در حالت اول چون استوانه در حال تعادل است لذا با توجه به دیاگرام نیروها می توان نوشت:



$$Fe_۱ + Fa_۱ = Mg \qquad (۱)$$

در حالت ثانویه نیروی فنو به اندازه ΔF_e و نیروی شناوری به اندازهٔ ΔF_a افزایش می‌یابد، بنابراین با توجه به دیاگرام نیروها برای این حالت داریم:



$$Fe_1 + \Delta Fe + Fa_1 + \Delta Fa = (M + m)\, g$$

$$(۱) \text{ از} \rightarrow \Delta Fe + \Delta Fa = mg \qquad (۲)$$

$$\Delta Fa = (\frac{۲}{۳} h - \frac{h}{۲})\, A \rho g = \frac{h}{۶} (\pi r^۲) \rho g$$

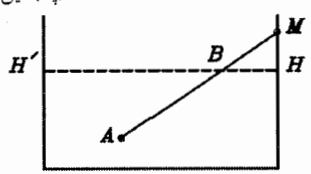
$$\Delta Fe = K \Delta x = K (\frac{۲}{۳} h - \frac{h}{۲}) = \frac{۱}{۶} Kh$$

با جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

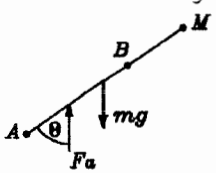
$$\frac{۱}{۶} \times ۲ \times ۰/۳ + \frac{۰/۳}{۶} (\pi \times ۰/۰۵^۲) \times ۱/۸ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ = ۱۰\ m$$

$$\Rightarrow \quad m = ۰/۷۱۷\ kg$$

مثال. میلهٔ نازکی به چگالی (جرم حجمی) ρ را مطابق شکل زیر در نقطهٔ M به جدارهٔ یک ظرف محتوی آب لولا کرده‌ایم. میله می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک حول محور افقی که عمود بر صفحهٔ کاغذ از نقطهٔ M می‌گذرد دوران می‌کند. اگر در حال تعادل ۰/۲ طول میله خارج از آب واقع شود، چگالی میله را حساب کنید. (چگالی آب $\rho' = ۱۰۰۰ \frac{kg}{m^۳}$ است.) (پنجمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



حل. می‌دانیم چون قسمت AB کاملاً غوطه‌ور در آب است لذا نیروی شناوری به وسط آن وارد می‌شود. همچنین نیروی وزن به وسط فاصله AM وارد می‌گردد. برای تعادل باید گشتاور این دو نیرو حول M برابر صفر شود.



اگر کل طول میله L باشد آنگاه:

$$\sum M_M = ۰ \quad \Rightarrow \quad F_A \sin\theta \times (۰/۴\ L + ۰/۲\ L) = mg \sin\theta \times ۰/۵\ L$$

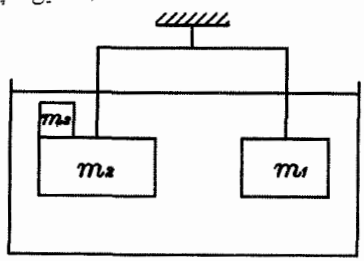
$$\Rightarrow \quad ۱/۲\ F_A = mg \qquad (۱)$$

$$F_A = \rho'\, V_{AB}\, g \qquad (۲)$$

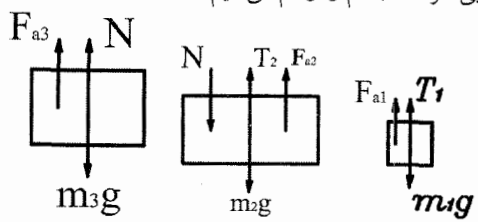
V_{AB} : حجم قسمت AB از میله است که برابر ۰/۸ حجم کل میله است. یعنی:

$$V_{AB} = ۰/۸\, V \qquad (۳)$$
$$(۳),(۲),(۱) \Rightarrow ۱/۲ \times \rho' (۰/۸\, V) = m$$
$$\rho = \frac{m}{V} = ۱/۲ \times ۰/۸ \times \rho' = ۱/۲ \times ۰/۸ \times ۱۰۰۰ = ۹۶۰ \frac{kg}{m^۳}$$

مثال. مطابق شکل زیر جرم‌های $m_۱ = m_۲ = ۱۹/۵\ kg$ را به دو سر میله می‌آویزیم. $m_۱$ از آهن به چگالی $\rho_۱ = ۷/۸ \frac{g}{m^۳}$ و $m_۲$ از جنسی به چگالی $\rho_۲$ است. ریسمانی را به وسط میله می‌بندیم و وزنه‌ها را وارد آب به چگالی $\rho' = ۱ \frac{g}{cm^۳}$ می‌کنیم. برای آنکه میله افقی قرار گیرد باید یک قطعه آهن به جرم $m_۳ = \frac{۱۱۷}{۱۳۶}\ kg$ را روی $m_۲$ قرار دهیم. $\rho_۲$ را محاسبه کنید. (ششمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



حل. ابتدا دیاگرام نیرویی هر سه جسم را رسم می‌کنیم.



برای افقی ماندن میله باید $T_۱ = T_۲ = T$ باشد؛ از طرفی از تعادل هر جسم داریم:

برای جسم (۱)
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow T + Fa_۱ - m_۱ g = ۰$$
$$\Rightarrow T = m_۱ g - Fa_۱ \qquad (۱)$$

برای جسم (۲)
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow T + Fa_۲ - N - m_۲ g = ۰$$
$$\Rightarrow T = N + m_۲ g - Fa_۲ \qquad (۲)$$

برای جسم (۳)
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N = m_۳ g - Fa_۳ \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲),(۱) \Rightarrow (m_۳ g - Fa_۳) + m_۲ g - Fa_۲ = m_۱ g - Fa_۱$$

$$\rho_۱ = \frac{m_۳}{V_۳} \Rightarrow V_۳ = ۱/۱۰۲ \times ۱۰^{-۴}\, m^۳$$

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} \Rightarrow V_1 = ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}\, m^۳$$

$$\rho_۲ = \frac{m_۲}{V_۲} \Rightarrow V_۲ = \frac{۱۹/۵}{\rho_۲}$$

$$\Rightarrow m_۲ g - \rho' V_۲ g + m_۲ g - \rho' V_۲ g = m_۱ g - \rho' V_۱ g$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱۷}{۱۳۶} - ۱۰۰۰ \times ۱/۰۲ \times ۱۰^{-۴} + ۱۹/۵ - ۱۰۰۰ \times \frac{۱۹/۵}{\rho_۲}$$

$$= ۱۹/۵ - ۱۰۰۰ \times ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\rho_۲ = ۶۰۰۰ \frac{Kg}{m^۳} = ۶ \frac{gr}{cm^۳}$$

مثال: یک تکه چوب روی سطح آب درون یک ظرف شناور است. در ظرف را می‌بندیم و فشار هوای درون ظرف را زیاد می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

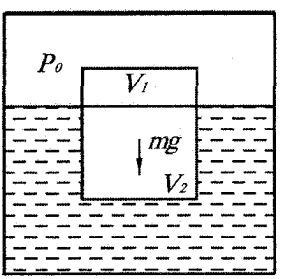
(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

الف) چوب نه بالا و نه پایین می‌رود.

ب) چوب بالاتر می‌رود.

ج) چوب پایین‌تر می‌رود.

حل: فرض کنید حجمی از چوب که در هوا و آب قرار دارد به ترتیب برابر $V_۲, V_۱$ باشند.



حالت اول) از چگالی هوا صرف نظر نشود. چگالی آب و هوا را به ترتیب برابر ρ_a, ρ_W فرض کنید. از تعادل چوب می‌توان دریافت که وزن چوب با نیروی ارشمیدس که از طرف آب و هوا وارد می‌شوند برابر است. پس:

$$mg = \rho_W V_۲ g + \rho_a V_۱ g$$

از طرفی می‌دانیم با افزایش فشار، چگالی اجسام زیاد می‌شود که میزان افزایش چگالی برای گازها بیش از مایعات و برای مایعات بیش از جامدات است. در حالت کلی می‌توان گفت افزایش چگالی گازها محسوس اما افزایش چگالی مایعات و جامدات نامحسوس و قابل صرف نظر کردن است.

پس در حالت دوم نیروی ارشمیدس ناشی از هوا بیشتر شده (عبارت $\rho_a V_۱ g$ افزایش

می‌یابد) و چوب را به میزان کمی به بالا هل می‌دهد تا تعادل جدید ایجاد شود. بنابراین گزینه «ب» صحیح است.

حالت دوم) از چگالی هوا صرف نظر شود. از تعادل چوب داریم:

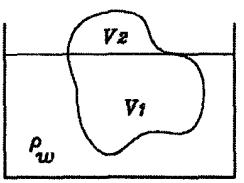
$$mg = \rho_W V_2 g$$

چون با افزایش فشار، افزایش چگالی آب ناچیز است لذا کمیت $\rho V_2 g$ ثابت می‌ماند. بنابراین چوب نه بالا و نه پایین می‌رود. گزینهٔ «الف» صحیح است.

سؤال محک. قطعه‌ای یخ در لیوان پر از آبی شناور است. سطح آب درون لیوان پس از ذوب کامل یخ چگونه تغییر می‌کند؟

الف) پایین می‌رود. ب) بالا می‌رود. ج) بدون تغییر می‌ماند.

حل. می‌دانیم چگالی یخ، ρ_i از چگالی آب ρ_w کمتر است و لذا حدود $\frac{1}{9}$ حجم یخ بیرون آب قرار می‌گیرد.



اگر حجمی از یخ که درون آب است را با V_1 و حجمی از یخ که بیرون آب است را با V_2 نمایش دهیم آنگاه از تعادل یخ به جرم m می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow mg = \rho_w V_1 g \Rightarrow m = \rho_w V_1 \qquad (1)$$

$$\text{از طرفی } \rho_i = \frac{m}{V_1 + V_2} \Rightarrow m = (V_1 + V_2)\rho_i \qquad (2)$$

$$(1)\text{و}(2) \longrightarrow \rho_w V_1 = (V_1 + V_2)\rho_i \qquad (3)$$

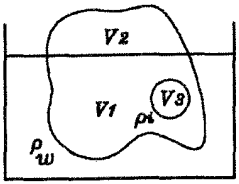
اگر کل حجم یخ که $V_1 + V_2$ است آب شود و حجم آب بدست آمده V' (حجم ثانویه) فرض شود چون جرم ثابت است لذا:

$$\rho_w V' = \rho_i (V_1 + V_2) \qquad (4)$$

$$(4),(3) \longrightarrow V' = V_1$$

یعنی حجم یخ وقتی آب می‌شود از مقدار $V_1 + V_2$ به مقدار $V = V_1$ کاهش می‌یابد، در نتیجه سطح آب لیوان تغییر نمی‌کند.

سؤال محک. مسألهٔ قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که چوب پنبه‌ای درون یخ باشد. حال بگویید سطح آب درون لیوان چگونه تغییر می‌کند؟



حل. فرض کنید حجم قسمتی از یخ که بیرون آب باشد با V_2 و حجم قسمتی از یخ که درون آب است با V_1 نمایش دهیم و حجم چوب پنبه V_3 باشد. آنگاه حجمی که درون آب است برابر $V_1 + V_3$ می‌شود. اگر چگالی چوب‌پنبه ρ_3 باشد از تعادل قطعه یخ داریم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \rho_i\,(V_1 + V_2)\,g + \rho_3\,V_3\,g = \rho_w\,(V_1 + V_3)\,g$$

$$\Rightarrow \quad \rho_i\,(V_1 + V_2) + \rho_3\,V_3 = \rho_W\,(V_1 + V_3) \qquad (1)$$

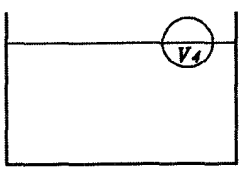
از طرفی وقتی یخ آب می‌شود فرض کنید حجم آب بدست آمده V' باشد. از برابری جرم یخ و یخ آب شده داریم:

$$\rho_i\,(V_1 + V_2) = \rho_W\,V' \qquad (2)$$

$$(2),(1) \text{ از } \Rightarrow \quad \rho_W\,V' + \rho_3\,V_3 = \rho_W\,(V_1 + V_3)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_W\,(V_1 + V_3 - V') = \rho_3\,V_3 \qquad (3)$$

دقت کنید وقتی یخ آب می‌شود، چون چوب پنبه سبک‌تر از آب است، روی آب شناور می‌ماند. اگر حجمی از چوب پنبه که درون آب است را با V_4 نمایش دهیم از تعادل چوب پنبه داریم:



$$\rho_W\,V_4\,g = \rho_3\,V_3\,g \;\Rightarrow\; \rho_3\,V_3 = \rho_W\,V_4 \qquad (4)$$

$$(4),(3) \text{ از } \Rightarrow \quad \rho_W\,(V_1 + V_3 - V') = \rho_W\,V_4$$

$$\Rightarrow \quad V_1 + V_3 = V' + V_4$$

ρ_3: چگالی چوب پنبه

از رابطه بالا ملاحظه می‌شود که حجم ثانویه‌ای که درون آب است $(V' + V_4)$ برابر حجم اولیه‌ای که قبلاً درون آب بوده است $(V_1 + V_3)$، پس سطح آب تغییر نمی‌کند.

نکته ۱: با توجه به اثبات فوق، اگر درون یخ جسمی با چگالی کمتر از آب قرار داشته باشد، بعد از ذوب یخ، سطح آب تغییر نمی‌کند.

نکته ۲: اگر داخل یخ جسمی با چگالی کمتر از آب باشد، و بعد از ذوب یخ، نگذاریم جسم روی سطح آب بیاید، سطح آب نسبت به حالت قبل بالاتر می‌رود.

نکته ۳: اگر در یخ حباب هوایی قرار داشه باشد، جواب مسأله به دو قسمت تقسیم می‌شود:

۱- حباب هوا روی آب بیاید و نترکد. در این حالت سطح آب تغییر نمی‌کند.

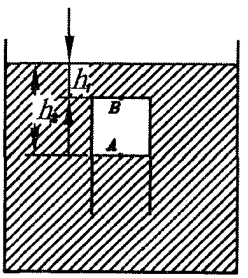
۲- حباب هوا روی آب بیاید و بترکد. در این حالت سطح آب به مقدار بسیار بسیار کمی (نا محسوس) پایین می‌آید.

نکته ۴: نشان دهید اگر درون یخ جسمی با چگالی بیشتر از آب قرار داشته باشد، بعد از ذوب یخ، سطح آب پایین‌تر می‌آید.

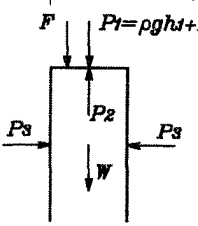
سؤال محک. یک لیوان خالی را سر پایین به داخل آب فشار می‌دهیم. هرچه آن را بیشتر به داخل آب فرو ببریم نیروی لازم برای نگه‌داشتن آن

الف) افزایش می‌یابد. ب) کاهش می‌یابد. ج) بدون تغییر می‌ماند.

حل. اگر دیاگرام نیروهای وارد بر لیوان را رسم کنیم جواب دادن به این سؤال آسان می‌شود.



از طرفی با فرض اینکه فشار در تمام نقاط هوای محبوس یکسان است ($P_A = P_B = P_2$) از تعادل نیروها در جهت قائم داریم:



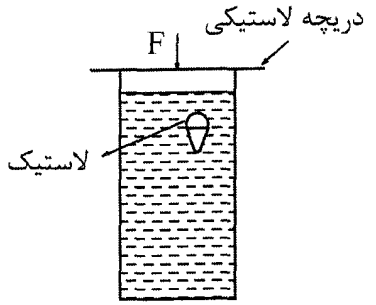
W: وزن لیوان است.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_2 A - W - F - P_1 A = 0 \Rightarrow F = (P_2 - P_1) A - W$$
$$\Rightarrow F = \rho g (h_2 - h_1) A - W$$

عبارت $A (h_2 - h_1)$ برابر حجم هوای درون لیوان است. واضح است که هرچه ما لیوان را پایین‌تر ببریم، فشار (P_2) وارد بر هوای درون لیوان بیشتر شده و بر اساس قانون گازها (در فصل ۶ توضیح داده شده است) حجم آن کمتر می‌شود. پس با پایین بردن لیوان عبارت $\rho g (h_2 - h_1) A$ کاهش یافته و نیروی لازم برای نگه‌داشتن لیوان در عمق بیشتر، کمتر می‌گردد. لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

آزمایش: مطابق شکل سر یک لوله شیشه‌ای را با لاستیک نیم‌کره‌ای شکل می‌بندیم و آنرا در یک لوله آزمایش بزرگ پر شده از آب می‌اندازیم و روی لوله بزرگ دریچه لاستیکی

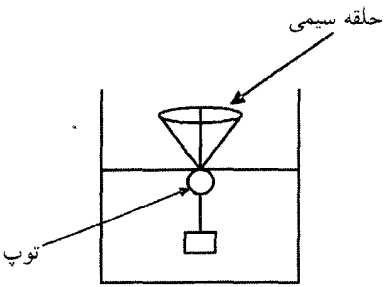
می‌گذاریم. با فشار دادن روی دریچه فشار هوا و مایع را افزایش داده و باعث کمتر شدن حجم نیم‌کره لاستیکی می‌شویم لذا نیروی ارشمیدس کم و لوله شیشه‌ای کوچک به طرف پایین سقوط می‌کند.



(درست است که چگالی مایع نیز بسیار بسیار کم زیاد می‌شود ولی کم شدن حجم نیم‌کره بیشتر از آن است.)

برای دیدن آزمایش، فایلهای 1buoyan3a , 1buoyan3b را ببینید. در فیلم 1buoyan3b، فشار مایع به طریقه دیگری افزوده می‌شود.

سؤال محک: وسیله‌ای مطابق شکل درست کرده و آن را در آب می‌اندازیم. متوجه می‌شویم که بالای توپ درست مماس بر سطح آزاد آب می‌شود (قسمت‌های بالای توپ از سیم‌های مسی هستند). اگر با دست به این وسیله فشار بیاوریم تا حلقه سیمی بر سطح آزاد آب مماس شود سپس دست را رها کنیم. آنگاه:



۱) وسیله دوباره به مکان اولیه خود باز می‌گردد.

۲) وسیله سر جای خودش می‌ماند.

۳) وسیله به ته ظرف آب سقوط می‌کند.

حل: در حالت اول وسیله ما در حال تعادل و در نتیجه وزن کل آن با نیروی شناوری برابر است. وقتی با دست آن را در آب فرو می‌کنیم (حالت ثانویه) فقط نیروی شناوری را زیادتر کرده‌ایم پس قاعدتاً وسیله دوباره باید به مکان اولیه خود (مکان بالاتر) باز گردد. اما گزینهٔ (۲) جواب مسأله است. اگر شک دارید فیلم 1buoyan4 از CD کتاب را ببینید. در فیلم ملاحظه خواهید کرد که در اثر ارتعاش، مجدداً وسیله ما به سطح آب بر می‌گردد.

بنابراین این پدیده عجیب و غریب تقصیر کشش سطحی است. با این توضیحات خودتان دلیل این آزمایش را توجیه کنید یا بخش بعدی را بخوانید.

۱۰.۱ کشش سطحی و خاصیت مویینگی

به طور کلی نیروی جاذبه بین مولکول‌های یک ماده را نیروی چسبناکی (پیوستگی) و نیروی جاذبه بین مولکول‌های دو ماده مختلف را چسبندگی می‌گویند.

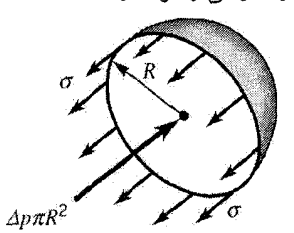
نیروی چسبندگی بین آب و شیشه بیشتر از نیروی پیوستگی بین مولکول‌های آب است و بخاطر همین است که اگر آب بر روی یک سطح شیشه‌ای تمیز ریخته شود، روی آن پخش شده و تشکیل لایه نازکی می‌دهد. برعکس آن، جیوه روی سطح شیشه‌ای تشکیل قطرات کروی شکل می‌دهد و این نشان می‌دهد که نیروی چسبناکی در جیوه بیشتر از نیروی چسبندگی بین شیشه و جیوه است. در داخل یک مایع، نیروهای چسبناکی یکدیگر را خنثی می‌کنند اما در سطح آزاد، نیروهای چسبناکی مایع که از زیر وارد می‌شوند از نیروهای چسبندگی گاز بالایی (مثل هوا) بیشتر می‌شوند که نتیجه آن کشش سطحی است.

به همین علت است که یک قطره کوچک آب در هوا شکل کروی به خود می‌گیرد و به همین دلیل است که حشرات کوچک می‌توانند بر سطح آزاد آب یک حوض راه بروند.

کشش سطحی بر حسب نیرو بر واحد طول تعریف می‌شود.

$$\sigma = \frac{F}{L} \qquad (۱۳-۱)$$

حبابی از هوا که توسط مایع آب و صابون درست شده است را در نظر بگیرید. اگر حباب را مطابق شکل نصف کنیم و نیروهای کشش سطحی آن را رسم کنیم، می‌بینیم که کشش سطحی بر دو سطح داخلی و خارجی وجود دارد.

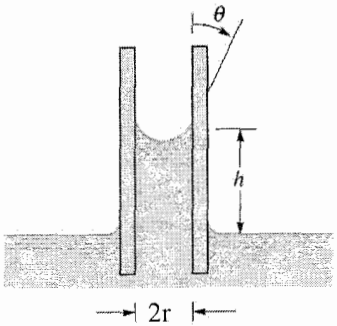


می‌دانیم ضخامت لایه حباب بسیار ناچیز است، در نتیجه می‌توان شعاع سطوح داخلی و خارجی را تقریباً برابر و مساوی R در نظر گرفت. با توجه به محاسبه نیروی وارده از طرف سیال بر سطوح منحنی، فشار نسبی هوای داخل حباب P_i، نیرویی برابر $P_i\ (\pi r^2)$ به نیمه حباب وارد می‌کند که با نیروهای کشش سطحی باید در حال تعادل باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

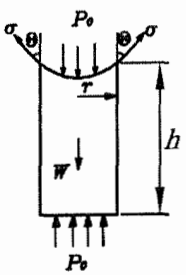
$$P_i\ (\pi\ R^2) = 2\ \sigma\ (2\ \pi\ R) \quad \Rightarrow \quad P_i = \frac{4\sigma}{R}$$

خاصیت مویینگی، یعنی بالا آمدن مایع در لوله باریک، یکی از نتایج مستقیم کشش سطحی و چسبندگی است. اگر چسبندگی بین مایع و جامد بیشتر از چسبناکی درون مایع باشد در

اینصورت مایع در لوله بالا خواهد رفت و تشکیل یک سطح هلالی می‌دهد (مطابق شکل) که به سمت بالا انحنادار است. این انحنا به طرف جسم جامد با زاویه θ اندازه‌گیری می‌شود.



می‌توان میزان بالا رفتن مایع، h، را از تعادل نیروها به شکل زیر بدست آورد. اگر وزن مایع به ارتفاع h، برابر W باشد، آنگاه باید با نیروی کشش سطحی که در سراسر محیط لوله ($L = ۲\pi r$) وارد می‌شود برابر گردد پس:



$$W = \sigma\,(۲\pi r)\,\cos\,\theta \qquad (۱)$$

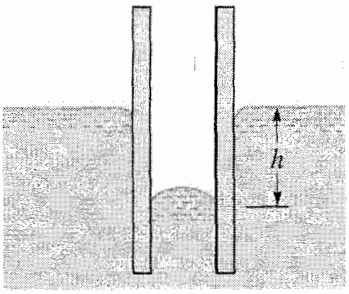
$$W = mg = (\pi\, r^{۲})\, h\, \rho\, g \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \Rightarrow (\pi\, r^{۲})\, h\, \rho\, g = \sigma\,(۲\pi\, r)\,\cos\,\theta$$

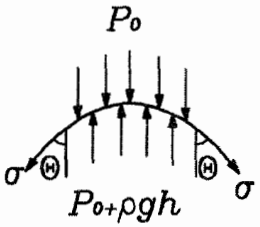
$$\Rightarrow h = \frac{۲\sigma\,\cos\,\theta}{\rho\, r\, g}$$

از رابطه فوق واضح است که با بزرگتر شدن شعاع لوله، ارتفاع مویینگی کم می‌شود.

اگر چسبندگی بین جامد و مایع کمتر از چسبناکی درون مایع باشد در اینصورت یک سطح هلالی بدست می‌آید که به سمت پایین انحنا دارد. (مطابق شکل)



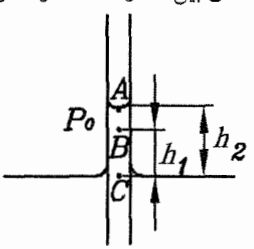
برای مثال این حالت برای جیوه اتفاق می‌افتد و ستون جیوه به میزان h پایین می‌رود، که می‌توان مشابه حالت قبل h را بدست آورد. از تعادل سطح هلالی داریم:



$$\sigma\,(۲\,\pi\,r)\,\cos\,\theta\,=\,(P_{\circ}\,+\,\rho\,g\,h\,-\,P_{\circ})\,\pi\,r^{۲}$$
$$\Rightarrow\;\; h\,=\,\frac{۲\sigma\,\cos\,\theta}{\rho\,r\,g}$$

تذکر: نحوه محاسبه نیروی فشاری وارد بر سطوح منحنی را در بخش‌های قبل نشان دادیم.

سؤال محک: در یک لوله مویین چه رابطه‌ای بین فشار نقاط A و B و C وجود دارد؟



حل. چون نقطهٔ C هم سطح با سطح آزاد مایع داخل ظرف است، لذا فشار آن همان فشار هوای جو می‌باشد، یعنی $P_C\,=\,P_{\circ}$. از طرفی می‌دانیم با بالا رفتن درون مایع به میزان x فشار به اندازه $\rho\,g\,x$ کم می‌شود، لذا فشار نقطهٔ B برابر است با:

$$P_B\,=\,P_C\,-\,\rho\,g\,h_۱\,=\,P_{\circ}\,-\,\rho\,g\,h_۱\,<\,P_C$$

و مشابهاً برای نقطه A که درست زیر سطح هلالی است داریم:

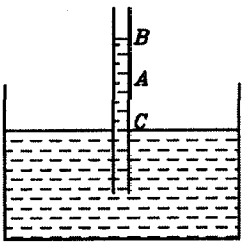
$$P_A\,=\,P_{\circ}\,-\,\rho\,g\,h_۲ < P_B < P_C = P_{\circ}$$

اما برای نقطهٔ A که بالای سطح هلالی (طرف دیگر) باشد داریم:

$P_A = P_0$

در واقع کشش سطحی سطح هلالی شکل به مانند یک دیوار مخزن عمل می‌کند و موجب جدایی فشار بالای جو از فشار پایین در زیر آن شده است.

مثال. شکل زیر بالا رفتن آب در یک لولهٔ مویین را نشان می‌دهد. اگر در نقطهٔ A سوراخ ریزی ایجاد شود: (هشتمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) سوراخ A زیر نقطهٔ B است، در نتیجه آب از سوراخ بیرون می‌ریزد.

ب) به علت خاصیت مویینگی، آب از A بیرون می‌ریزد.

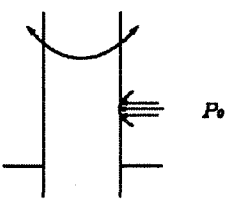
ج) هوا از سوراخ A عبور می‌کند، زیرا سوراخ بالای نقطهٔ C است.

د) آب و هوا از سوراخ عبور نمی‌کنند، زیرا کشش سطحی جلوی آنها را می‌گیرد.

ه) آب و هوا از سوراخ عبور نمی‌کنند، زیرا چسبناکی آب و لوله مانع آنها می‌شود.

و) فشار هوای بیرون مانع خروج آب از سوراخ می‌شود.

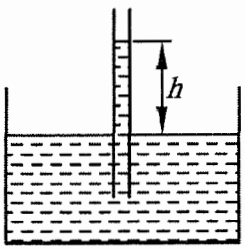
حل. همانطور که در سؤال محک توضیح دادیم چون فشار در نقطهٔ A کمتر از فشار جو P_0 است لذا مایع به بیرون نمی‌ریزد. از طرفی با سوراخ کردن در نقطهٔ A یک لایه سطحی هلالی شکل (مطابق شکل) ایجاد می‌شود که این لایه سطحی به علت داشتن کشش سطحی مانع ورود هوا به داخل لوله نیز می‌گردد.



بنابراین گزینه «د» درست است. دقت کنید اگر این کشش سطحی نبود چون فشار هوا بیشتر از فشار مایع در نقطهٔ A است، در نتیجه خود فشار هوا مانع خروج آب از لوله می‌گردد و به یک معناگزینه «و» نیز می تواند صحیح باشد.

مثال. لوله مویینی را مطابق شکل زیر در آب فرو می‌بریم. در اثر این کار، آب تا ارتفاع h در لوله بالا می‌رود. علت این پدیده آن است که به خاطر تماس آب با سطح درونی لوله نوعی انرژی پتانسیل در دستگاه به وجود می‌آید که مقدار آن از رابطهٔ $E_1 = -\beta S$ به‌دست می‌آید. در اینجا S مساحت جانبی ستون هاشور خورده و β ضریب ثابتی است که به جنس لوله و مایع (در این مورد آب) بستگی دارد. ستون آب بالا آمده، به جز انرژی E_1 یک انرژی پتانسیل گرانشی هم دارد که ناشی از بالا آمدن آب در لوله نسبت به سطح آب

در ظرف است. حالت تعادل دستگاه جایی است که مجموع این دو انرژی کمینه شود. اکنون فرض کنید لوله‌ای به قطر d را در آب فرو کنیم و آب در آن به ارتفاع h، نسبت به سطح آب ظرف، بالا رود. اگر لوله‌ای از همان جنس و با قطر $۲d$ در آب فرو کنیم، آب تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ (دوازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $\frac{h}{۴}$ ب) $\frac{h}{۲}$ ج) $\sqrt{۲}h$ د) $۲h$

حل. برای حالت اول که ارتفاع آب h و قطر لوله d است مجموع دو انرژی را حساب می‌کنیم:

$$E_۱ = -\beta S = -\beta\,(\pi\, d\, h)$$

$$E_۲ = mg\frac{h}{۲} = (\pi\,(\frac{d}{۲})^۲\, h)\,\rho\, g\,\frac{h}{۲} = \frac{\pi\, d^۲\,\rho\, g\, h^۲}{۸}$$

(دقت کنید گرانیگاه ستون مایع به ارتفاع h در ارتفاع $\frac{h}{۲}$ قرار دارد.)

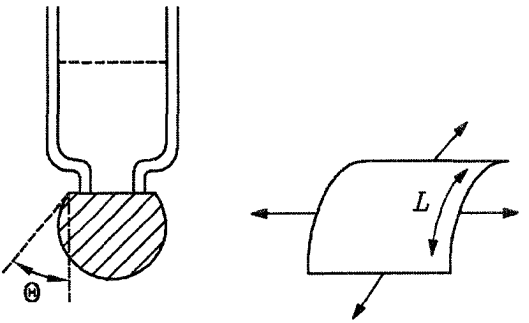
$$E = E_۱ + E_۲ = \frac{\pi\, d^۲\,\rho\, g}{۸}\, h^۲ - \beta\,\pi\, d\, h$$

در حالت اول چون دستگاه در حال تعادل است پس E باید می‌نیمم مقدار را داشته باشد. یعنی تغییرات آن نسبت به تغییر ارتفاع h صفر است.

$$\frac{dE}{dh} = ۰ \Rightarrow \frac{\pi\, d^۲\,\rho\, g}{۴}\, h - \beta\,\pi\, d = ۰ \Rightarrow h = \frac{۴\beta}{\rho\, g\, d}$$

از رابطه فوق ملاحظه می‌شود که اگر قطر را دو برابر کنیم، ارتفاع ستون آب نصف می‌شود. گزینه «ب» صحیح است.

مثال. کشش سطحی مایعات عاملی است که می‌خواهد سطح آزاد مایع را به حداقل ممکن برساند. توصیف این عامل به این ترتیب است. بخشی از سطح آزاد مایع را در نظر بگیرید. مطابق شکل (الف) نیرویی که قسمت‌های مجاور به این بخش وارد می‌کنند، در هر طرف مماس بر سطح آزاد، عمود بر مرز سطح آزاد، و به طرف خارج سطح است. مقدار هر یک از این نیروها متناسب است با طول خط مرزی: $F = \tau\,\ell$. ضریب تناسب τ را کشش سطحی می‌نامند. قطره چکانی در نظر بگیرید که قطرهٔ آبی انتهای آن آویزان است.
الف) نیروهای وارد بر این قطره (بخش هاشورخورده شکل (ب)) را نام ببرید؟



(الف) (ب)

ب) با فرض اینکه حجم قطره V باشد، فقط با در نظر گرفتن وزن قطره و کشش سطحی، رابطهٔ V با θ را در حالت تعادل بنویسید. چگالی قطره ρ و قطر انتهای قطره چکان d است.

ج) حداکثر حجم قطره برای اینکه چنین تعادلی ممکن باشد چقدر است؟ با استفاده از کشش سطحی آب ($\tau = ۰/۰۷ \frac{N}{m}$)، مقدار عددی این حجم را تخمین بزنید. قطر انتهای قطره چکان را mm ۲ بگیرید، و شتاب گرانش $g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$ و $\rho = ۱۰۰۰ \frac{Kg}{m^۳}$.

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۲)

حل

الف)

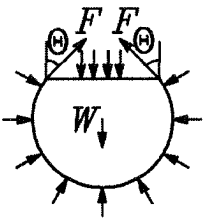
۱- نیروی کشش سطحی

۲- نیروی وزن

۳- نیروی ناشی از فشار هوا (نیروی ارشمیدس) که به سمت بالا است

۴- نیروی ناشی از فشار مایع درون قطره چکان

ب)



$$mg = F_y \Rightarrow \rho g V = \tau (\pi d) \cos\theta$$

ج)

$$V_{max} = \frac{\tau \pi d (\cos\theta)_{max}}{\rho g} = \frac{۰/۰۷ \times ۳/۱۴ \times ۲ \times ۱۰^{-۳} \times (۱)}{۱۰۰۰ \times ۱۰}$$

$$= ۴/۳۹۶ \times ۱۰^{-۸}$$

آزمایش: می‌دانیم به کمک کشش سطحی می‌توان تیغ ریش تراشی یا گیره فلزی کاغذ را روی سطح آب شناور کرد. حال اگر ما به سطح آب کمی مایع صابون اضافه کنیم با این عمل کشش سطحی آب را تضعیف کرده و موجب می‌شویم که تیغ ریش تراشی یا گیره به داخل آب فرو روند.
فایل 1tension از CD کتاب را ببینید.

آزمایش: بر روی سطح آب لایه نازکی از پودر ریخته‌ایم. حال اگر به وسط سطح قطره‌ای از مایع صابون اضافه کنیم چون کشش سطحی در وسط کم می‌شود، تمام پودرها به سمت دیواره‌های ظرف کشیده می‌شوند.
فایل 1tension 2 از CD کتاب را ببینید.

آزمایش: یک قایق کاغذی درست کرده و آن را روی سطح آب شناور کنید. اگر به پشت قایق قطره‌ای از مایع صابون ریخته شود چون کشش سطحی پشت کمتر از جلوی قایق می‌گردد، در نتیجه قایق به سمت جلو حرکت می‌کند.
فیلم 1tension 3 از CD کتاب را ببینید.

آزمایش: نخی را به صورت حلقه می‌بندیم و آن را روی سطح آب با شکل دلخواه شناور می‌کنیم. حال اگر قطره‌ای کف صابون به داخل حلقه نخ بیاندازیم نخ به صورت دایره کامل در می‌آید. تفسیر این پدیده مشابه قبل است.
فیلم 1tension4 از CD کتاب را ببینید.

۱۱.۱ مسائل تکمیلی فصل اول

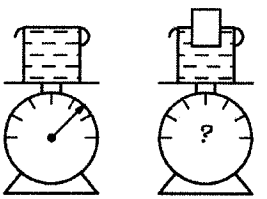
با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل این فصل به آدرس mottaghi @ sharif.edu حل کلیه مسائل تکمیلی این فصل به آدرس ایمیل شما ارسال می‌شود.

۱) قایقی که بار آهن دارد در استخر بزرگی شناور است. اگر آهن‌ها را به داخل استخر بریزیم سطح آب استخر ...

الف) بالا می‌رود. ب) پایین می‌رود. ج) بدون تغییر باقی می‌ماند.

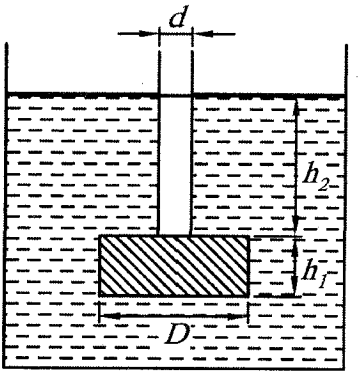
تذکر: می‌توانید با مقایسه ۲ عکس 1boat a , 1boat b از CD کتاب به جواب نزدیکتر شوید.

۲) دو لیوان مشابه پر از آب موجود است. در یکی از آنها قطعه چوبی شناور است. وزن کل این لیوان و قطعه چوب شناور در آن از وزن کل لیوان مشابه



الف) بیشتر است. ب) کمتر است. ج) مساوی است.

۳) یک لوله دوسر باز به قطر d را با دست به یک دیسک به قطر D و ارتفاع h_1 به هم محکم می‌فشاریم و آن ها را مطابق شکل داخل ظرف پر از آبی فرو می‌کنیم (آب وارد لوله نمی‌شود.) هنگامی که دیسک در عمق مناسبی باشد با رها کردن دست دیسک از لوله جدا نمی‌شود.

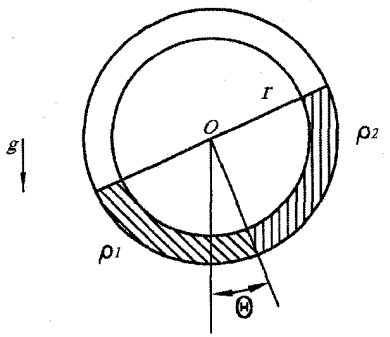


حال لوله را کم کم بالا می‌آوریم در ارتفاعی مثل h_2، دیسک از لوله جدا می‌شود. اگر چگالی آب و دیسک به ترتیب برابر ρ', ρ $(\rho' > \rho)$ باشند، h_2 را بیابید. (مسابقات روسیه)

راهنمایی: در لحظهٔ جدا شدن، وزن دیسک با برآیند نیروهای فشاری وارد بر سطوح فوقانی و تحتانی دیسک برابر می‌شود.

جواب: $h_2 = \frac{hD^2}{d^2}(\frac{\rho' - \rho}{\rho})$

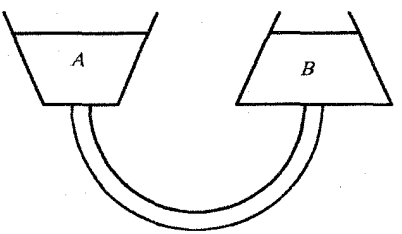
۴) لوله‌ای یکنواخت را خم کرده و به صورت دایره‌ای به شعاع r درمی‌آوریم و آن را به صورت قائم مطابق شکل قرار می‌دهیم. سپس از دو مایع با حجم‌های مساوی به چگالیهای $\rho_1, \rho_2 (\rho_2 < \rho_1)$ نیمی از لوله دایره‌ای را پر می‌کنیم. زاویه بین راستای فصل مشترک دو مایع با راستای قائم، θ، را بیابید. (کتاب سری شوم)



راهنمایی: در مرز مشترک دو مایع، فشار دو مایع با هم برابر است.

جواب: $\Theta = Arctan(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2})$

۵) دو ظرف ذوزنقه‌ای شکل حاوی آب تا ارتفاع یکسان، مطابق شکل توسط لوله‌ای به هم متصل شده‌اند.



الف) اگر به آب درون ظرف A حرارت دهیم تا منبسط شود، آب در چه جهتی در لوله جریان می‌یابد؟

ب) اگر به آب درون ظرف B حرارت دهیم تا منبسط شود، آب در چه جهتی در لوله جریان می‌یابد؟

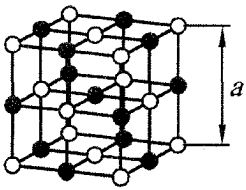
از انبساط ظرفها در هنگام حرارت صرفنظر کنید. (دانشگاه بوستون آمریکا- ۲۰۰۲)

راهنمایی: می‌دانیم فشار در کف ظرف از رابطهٔ ρgh بدست می‌آید. با حرارت دادن، h زیاد ولی ρ کم می‌شود. به طریقی باید تغییرات ρh را بررسی کرد. به فصل ۳ رجوع شود (سؤال محک ۳).

جواب: الف) آب از ظرف B به سمت ظرف A جاری می‌شود.

ب) آب از ظرف B به سمت ظرف A جاری می‌شود.

۶) سلول واحد شبکه کریستالی NaCl به صورت یک مکعب با طول ضلع $a = ۵/۶ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ است. (مطابق شکل)



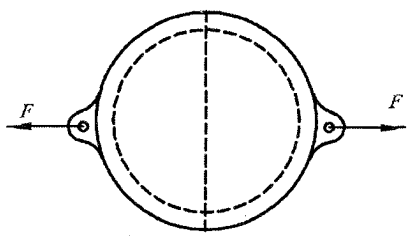
دایره‌های سیاه بیانگر اتمهای سدیم و دایره‌های سفید بیانگر اتمهای کلر هستند. تمام کریستال NaCl از تکرار این واحد سلولی درست شده است. اگر جرم اتمی نسبی سدیم (نسبت به جرم اتمی هیدروژن که واحد جرم اتم است) $m_{rNa}=$ ۲۳ و کلر $m_{rCl}=$ ۳۵/۵ و چگالی نمک NaCl برابر $\rho = ۲/۲۲ \times ۱۰^{-۳} Kg/m^۳$ باشد، جرم یک اتم هیدروژن را بیابید.

(چهارمین المپیاد بین‌المللی ۱۹۷۰)

راهنمایی: حساب کنید که در یک سلول واحد چند اتم سدیم و چند اتم کلر موجود است. (با احتساب سهم بقیه سلولهای واحد مجاور)

جواب: $m_H = \frac{\rho a^۳}{۴(m_{rNa}+m_{rCl})} = ۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷} Kg$

۷) دو پوسته نیم کره با قطر داخلی $d_i = ۱۷۰mm$ و قطر خارجی $d_O = ۲۰۰mm$ به طور کامل به یکدیگر چسبیده‌اند و هوای درون محفظه آن قدر به بیرون مکیده شده است تا فشار داخل محفظه به 14 Kpa کاهش یابد. فشار جو $۱۰۱/۳Kpa$ می‌باشد. نیروی F لازم برای جدا کردن دو پوسته از یکدیگر را بیابید.



راهنمایی: یک نیم‌کره را در نظر گرفته و دیاگرام نیروهای وارد بر آن را رسم کنید. اختلاف فشار داخل و خارج پوسته نیرویی وارد می‌کند که درست برابر با نیروی وارد به تصویر قائم نیم کره است.

جواب: $F = ۲/۸۶kN$

۸) یک مخزن استوانه‌ای شکل به شعاع R را از یک مایع همگن تا ارتفاع مشخصی پر می‌کنیم بطوریکه نیروی وارد بر دیواره ظرف برابر با نیروی وارد بر کف ظرف است. مطلوب است ارتفاع مایع h

راهنمایی: اگر دیواره استوانه را باز کنیم شکل باز شده استوانه به صورت یک مستطیل است که عرض آن h و طول قاعده آن $۲\pi R$ است.

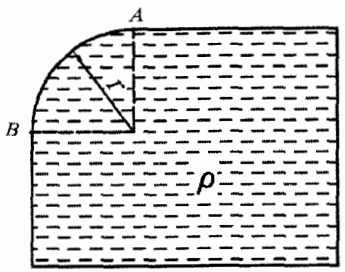
جواب: $h = R$

۹) هنگامی که جسمی در داخل مایعی تغییر ارتفاع می‌دهد، انرژی پتانسیل گرانشی جسم تغییر می‌کند. حال اگر بجای نیروی ارشمیدس که تابعی از مسیر نیست انرژی پتانسیل آن را در نظر بگیریم (مشابه نیروی وزن) تعیین کنید که اگر جسم در داخل آب به اندازه h بالا برده شود، انرژی پتانسیل جسم به چه صورت تغییر می‌کند. ب) آیا انرژی پتانسیل آب مخزن وقتی که جسم بالا برده می‌شود، تغییر می‌کند. جرم حجمی جسم ρ و جرم حجمی مایع $\rho_\circ$ و حجم جسم برابر با V است.

جواب: الف) $\Delta U = Vgh(\rho - \rho_\circ)$

ب) $\Delta U = \circ$

۱۰) در مخزن شکل زیر مؤلفه‌های نیروی وارد بر دریچه AB به شعاع r و طول L از طرف مایع را بیابید.



جواب:

$F_x = \frac{1}{2}\rho g r^2 L$

$F_y = \rho g L r^2 (1 - \frac{\pi}{4})$

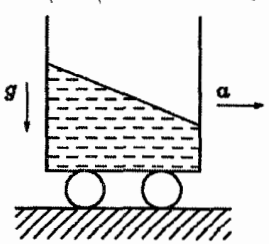
فصل ۲

دینامیک سیالات

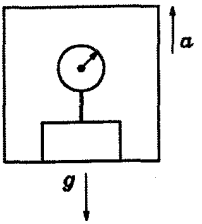
در فصل قبل تغییرات فشار در یک مایع در حال سکون را بررسی کردیم. در این فصل می‌خواهیم ببینیم هنگامی که یک مایع در حال حرکت است تغییرات فشار درون آن به چه نحوی است و از چه روابطی تبعیت می کند.

۱.۲ حرکت با شتاب ثابت

مایعی را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر درون گاری قرار دارد و گاری با شتاب ثابت a حرکت می‌کند. پس از مدت زمانی، مایع خود را با شتاب فوق تطبیق می‌دهد، بنابراین مانند یک جسم جامد حرکت می‌کند. یعنی فاصله بین هر دو جزء سیال ثابت باقی می‌ماند. برای بررسی فشار، بهتر است تحلیل را از دید ناظر درون گاری انجام دهیم (راحت‌تر است).



درست مانند تحلیلی که برای ناظر درون آسانسور می‌کردیم. اگر یادتان باشد هنگامی که آسانسور با شتاب ثابت a بالا می‌رود.ترازوی درون آسانسور وزن شخص را به جای مقدار mg، مقداری برابر $m\ (g+a)$ نشان می‌دهد. یعنی شخص داخل آسانسور احساس می‌کند که شتاب گرانش به جای g، مقداری برابر $g+a$ دارد.

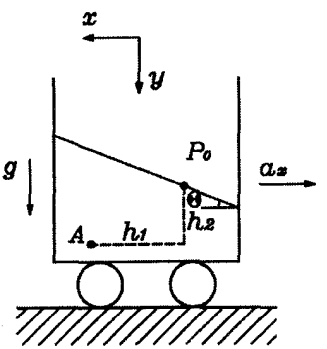


به عبارت دیگر، از دید ناظر درون آسانسور، شتاب باید به صورت شتاب گرانش منهای شتاب آسانسور حساب شود. حال با مثبت گرفتن جهت شتاب گرانش (جهت پایین)، شتاب از دید ناظر درون آسانسور برابر است با:

$$\text{شتاب از دید ناظر درون آسانسور} = g - (-a) = g + a$$

در مورد گاری نیز، ناظر درون آن احساس می‌کند که دو شتاب گرانش وجود دارد یکی شتاب گرانش به مقدار g و به سمت پایین و دیگری شتاب گرانش به مقدار a و به سمت چپ. (چون شتاب گاری به سمت راست است لذا شتاب گرانش احساس شده توسط ناظر خلاف جهت آن می‌باشد) بنابراین همان‌طور که در جهت شتاب g به میزان y حرکت کنیم افزایش فشاری برابر $\rho\, g\, y$ احساس می‌کنیم. اگر در گاری به سمت چپ به میزان x حرکت کنیم میزان افزایش فشاری به مقدار $\rho\, a\, x$ احساس خواهیم کرد.

از آنجایی‌که سطح مایع که در اثر شتاب به صورت سطح شیب‌دار در آمده است در مجاورت فشار هوای اتمسفر $P_\circ$ قرار دارد، لذا فشار نقاط سطح آزاد مایع همگی با هم برابر و مساوی $P_\circ$ است.



فشار سایر نقاط درون مایع را با توجه به جهت محورهای مختصات می‌توان به صورت زیر بدست آورد. (جهت محور x بر خلاف جهت شتاب گاری انتخاب می‌شود)

$$P = P_\circ + \rho\, g\, y + \rho\, a_x\, x \qquad (۱-۲)$$

مثلاً فشار نقطهٔ A برابر است با:

$$P_A = P_\circ + \rho\, g\, h_۲ + \rho\, a_x\, h_۱$$

هنگامی که سیال ساکن است دیدیم که نقاط هم فشار، نقاطی هستند که در یک عمق از سیال قرار داشته باشند (یعنی نقاطی با مقدار y یکسان). حال در گاری شتابدار نقاط هم فشار به چه صورت می‌باشند؟

فرض کنید نقاطی با مختصات $(x\ ,\ y)$ هستند که فشار همه آنها برابر P است. (یعنی نقاط

هم‌فشار)

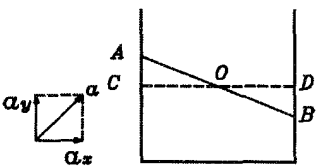
معادله (۲ – ۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = -\frac{a_x}{g}\,x + \frac{P - P_\circ}{\rho\, g} \qquad (۲ - ۲)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه فوق برای نقاط هم‌فشار (ثابت بودن P) معادله یک خط راست است با شیب $-\frac{a}{g}$. از طرفی چون سطح آزاد مایع خود یک سطح هم فشار است، در نتیجه نقاط هم فشار، بر روی سطوحی صاف قرار دارند که موازی سطح آزاد مایع می‌باشند. همچنین از معادله (۲ – ۲) می‌توان زاویه θ که سطح آزاد مایع با افق می‌سازد را به صورت زیر حساب کرد.

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g} \qquad (۲ - ۳)$$

نکته: برای حالت کلی شتاب با توجه به جهت شتابها مطابق شکل زیرروابط (۲ – ۱) و (۲ – ۳) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

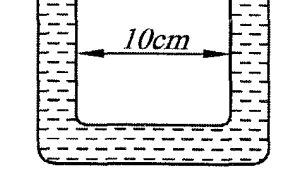


$$P = P_\circ + \rho\, a_x\, x + \rho\,(g + a_y)\, y \qquad (۲ - ۴)$$

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_y} \qquad (۲ - ۵)$$

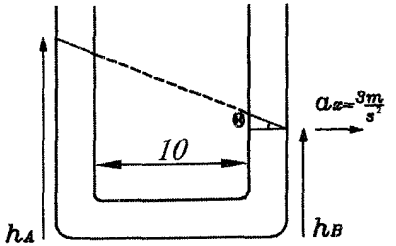
دقت کنید که با توجه به تقارن، اگر سطح مایع بدون شتاب خط CD باشد در حالت شتابدار، سطح مایع خط AB است که نقطهٔ O وسط این دو خط می‌باشد.

مثال. در یک لوله مطابق شکل زیر مقداری آب ریخته شده است. طول قسمت افقی لوله $۱۰\ cm$ و ارتفاع آب در بخش‌های عمودی لوله $۲۰\ cm$ است. لوله با شتاب $۳\ \frac{m}{s^۲}$ به سمت راست حرکت می‌کند. با توجه به نیروهایی که به بخشی از مایع که در قسمت افقی لوله قرار گرفته وارد می‌شود، اختلاف ارتفاع آب در دو بازوی عمودی لوله $(h_A - h_B)$ چند سانتی‌متر خواهد شد؟ $(g = ۱۰\ \frac{m}{s^۲})$ (نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) صفر ب) ۳ ج) ۳- د) ۱/۵ هـ) ۱/۵- و) ۰/۶

حل. اگر لوله نبود سطح مایع به صورت خط‌چین می‌شد. حال که شکل ظرف به صورت لوله است، سطح مایع در هر شاخه در امتداد همان خط خط‌چین سطح آزاد مایع قرار خواهد گرفت.



بنابراین از هندسه شکل داریم:

$$\tan\theta = \frac{h_A - h_B}{۱۰}$$

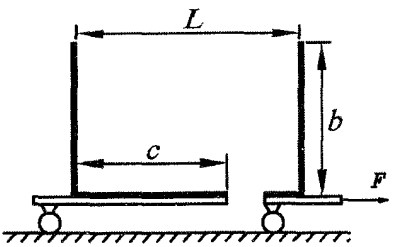
از طرفی از رابطه (۲ – ۳) داریم:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

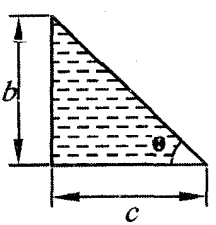
$$\Rightarrow \frac{a_x}{g} = \frac{h_A - h_B}{۱۰} \Rightarrow h_A - h_B = ۱۰\frac{a_x}{g} = ۳$$

گزینه «ب» صحیح است.

مثال. ظرفی که یک سوراخ در ته آن است روی ارابه‌ای محکم شده است. جرم ظرف و ارابه M و مساحت قاعدهٔ ظرف برابر با A است. ارابه را با چه نیروی F باید کشید تا ماکزیمم مقدار آب در ظرف باقی بماند؟ ابعاد ظرف در شکل زیر نشان داده شده است و اصطکاک وجود ندارد.



حل. با توجه به اینکه اگر آب به سوراخ برسد از آن خارج می‌شود بنابراین نیروی F باید به مقداری باشد تا آب به صورت شکل زیر قرار بگیرد و این حداکثر مقدار آبی است که می‌توان در ظرف نگه داشت.



از شکل داریم:

$$\tan\theta = \frac{b}{c}$$

از طرفی چون سطح آزاد مایع با افق زاویهٔ θ می‌سازد از رابطهٔ (۲ – ۳) داریم:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

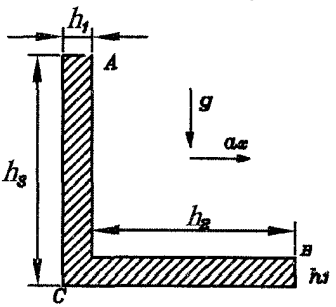
$$\Rightarrow \quad \frac{a_x}{g} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad a_x = (\frac{b}{c})\, g \qquad (۱)$$

با توجه به اینکه بُعد ظرف به داخل صفحه کاغذ برابر $\frac{A}{L}$ است لذا جرم آب ناحیه هاشور خورده برابر است با:

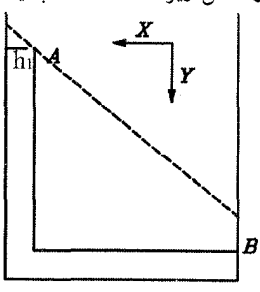
$$m = \rho\,[(\tfrac{۱}{۲}\, bc)\,\frac{A}{L}] = \rho\,\frac{b\,c\,A}{۲L}$$

$$(۱) \text{ از } \Rightarrow \quad F = (M + m)\, a_x = (M + \rho\,\frac{b\,c\,A}{۲L})\,(\frac{b}{c})\, g$$

مثال. مخزنی مطابق شکل از یک مایع به چگالی ρ پر شده است و چنانچه دیده می‌شود به سمت راست شتاب a_x دارد. همچنین شکاف کوچکی در نقطهٔ A تعبیه شده است. فشار در نقطهٔ B و C را بیابید. (فشار جو $P_\circ$ است)



حل. فرض کنید شکل ظرف مطابق شکل زیر است که شتاب یافته است.



از طرفی چون نقطهٔ A متصل به فشار $P_\circ$ است در نتیجه هنگامی که ظرف شتاب می‌یابد سطح آزاد مایع در حالت شتابدار باید از نقطهٔ A بگذرد. (خط خط‌چین) زیرا تمام نقاط سطح آزاد فشاری برابر $P_\circ$ دارند.

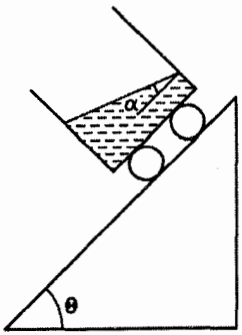
جهت مثبت x را در جهت خلاف شتاب باید بگیریم. لذا با توجه به اینکه $P_A = P_\circ$ است، به کمک رابطه (۲-۱) داریم:

$$P_B = P_\circ + \rho\, g\, h_۲ - \rho\, a_x\, h_۲$$

$$P_C = P_\circ + \rho\, g\,(h_۲ + h_۱) + \rho\, a_x\, h_۱$$

سؤال محک یک گاری را تا نیمه پر از آب کرده و روی یک سطح شیب‌دار با زاویهٔ θ قرار می‌دهیم

سپس آن را از حالت سکون رها می‌کنیم. زاویه‌ای که سطح آزاد مایع داخل گاری با سطح شیب‌دار می‌سازد، α، چقدر است؟

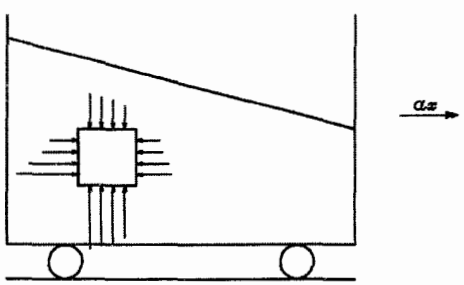


حل. شکی نیست که α برابر صفر است. دلیل آن را به کمک روابط ارائه شده بدست آورید (شتاب g را در دو راستای عمود بر هم تجزیه کنید. یکی موازی سطح و دیگری عمود بر آن).

آزمایش: اگر با روابط حرکت دورانی در بحث مکانیک آشنا هستید اثبات کنید که سطح آب در ظرفی که حول محور قائم در حال دوران می‌باشد به شکل سهمی است.
فیلم‌های 2rotation و 2rotation2 را از CD کتاب ببینید، خیرش را ببرید.

۲.۲ نیروی ارشمیدس در حرکت شتابدار

دیدیم نیروی ارشمیدس در سیال ساکن به علت اختلاف فشار سطوح فوقانی و تحتانی است و راستای آن در راستای قائم است در حرکت شتابدار نیز می‌توان مشابه حرف بالا در جهت افقی زد.



بنابراین هنگامی که ظرف در راستای افقی به سمت راست شتاب می‌گیرد (مطابق شکل) چون فشار در سمت چپ جسم بیشتر از سمت راست آن است لذا یک نیرو به سمت راست به جسم غوطه‌ور در آن وارد می‌شود یعنی نیرویی درست در جهت شتاب (علاوه

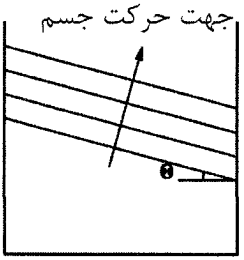
بر نیرویی که در راستای قائم بر آن وارد می‌شود.) بنابراین مؤلفه‌های نیروی ارشمیدس به صورت زیر است:

مؤلفه ارشمیدس در جهت افقی : $(F_a)_x = \rho V a_x$

مؤلفه ارشمیدس در جهت قائم : $(F_a)_y = \rho V g$

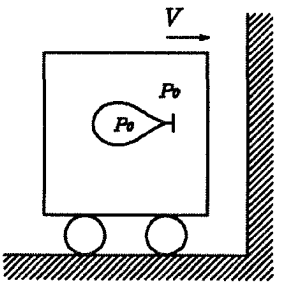
V : حجم جابه‌جا شده توسط جسم غوطه‌ور است.

بنابراین جسم غوطه‌ور هم به سمت راست و هم به سمت بالا حرکت می‌کند. می‌توان نشان داد که جسم غوطه‌ور در جهت عمود بر خطوط فشار ثابت حرکت می‌کند.



نکته: نیروی اینرسی (از دید ناظر همراه ظرف) وارد بر جسم نیز باید در نظر گرفته شود.

سؤال محک: بادکنکی را از هوا با فشار P_0 پر کرده و درون ظرف در بسته‌ای به فشار P_0 قرار می‌دهیم و ظرف را با سرعت ثابت به حرکت وا می‌داریم. اگر ظرف به مانعی برخورد کند بادکنک چگونه حرکت می‌کند؟ (از وزن و حجم بادکنک صرف‌نظر می‌شود)



الف) به سمت چپ حرکت می‌کند.

ب) به سمت راست حرکت می‌کند.

ج) حرکتی نمی‌کند.

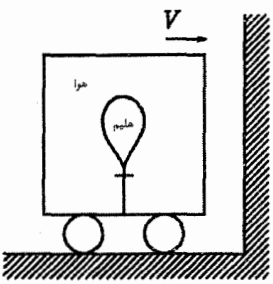
حل. با توجه به اینکه فشار هوای درون و بیرون بادکنک هر دو یکسان و برابر P_0 است، لذا چگالی هوای درون بادکنک و بیرون آن یکی است. (برای درک بیشتر به فصل ۶ رجوع کنید.) هنگامی که ظرف به مانع برخورد می‌کند، در واقع شتابی به سمت چپ به مقدار a_x به خود می‌گیرد. حال نیروهای افقی وارد بر بادکنک را از دید ناظر درون ظرف ترسیم می‌کنیم.

یکی نیروی اینرسی وارد بر بادکنک به علت جرم آن در جهت خلاف شتاب و دیگری نیروی ارشمیدس افقی که همان‌طور که قبلاً به آن اشاره شد در جهت شتاب است. از طرفی‌چون چگالی هوای درون بادکنک با بیرون آن یکی است، لذا:

$$ma_x = (\rho\, V)\, a_x = \rho\, V\, a_x$$

چون این دو نیرو (نیروی اینرسی و ارشمیدس) با هم برابرند و مخالف جهت یکدیگرند، در نتیجه بادکنک حرکتی نمی‌کند.

سؤال محک: این بار بادکنک را از گاز هلیم که چگالی آن کمتر از هوا است پر می‌کنیم و برای اینکه به بالای ظرف نرود آن را با نخی می‌بندیم. اگر ظرف به مانع برخورد کند، بادکنک چگونه حرکت می‌کند؟

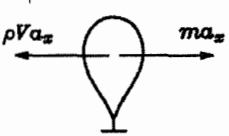


الف) به سمت چپ حرکت می‌کند.

ب) به سمت راست حرکت می‌کند.

ج) حرکتی نمی‌کند.

حل. مشابه سؤال قبل نیروهای افقی وارد بر بادکنک را هنگام برخورد به مانع رسم می‌کنیم.



$m = \rho' V \Rightarrow m\, a_x = \rho'\, V\, a_x$ (جرم بادکنک)

ρ : چگالی هوای داخل ظرف

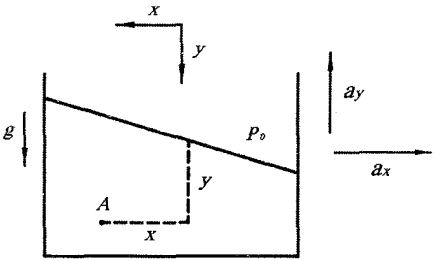
ρ' : چگالی هلیم داخل بادکنک

چون $\rho' < \rho$ در نتیجه $ma_x = \rho' V a_x < \rho V a_x$ در نتیجه در هنگام برخورد بادکنک به سمت چپ حرکت می‌کند!!!!!! (عجب)

اگر قبول ندارید فیلم 2buoyan از CD کتاب را ببینید. در این فیلم ظرف بجای برخورد با مانع در اثر اصطکاک می‌ایستد. (شتاب منفی می‌گیرد.)

۳.۲ فشار در سقوط آزاد

همانطور که قبلاً اشاره کردیم برای ظرفی که دارای مؤلفه‌های شتاب a_y, a_x در جهت‌های y, x است (مطابق شکل) فشار در هر نقطه اختیاری مثل A برابر است با:



$$P = P_\circ + \rho(g + a_y)y + \rho a_x x$$

با توجه به اینکه a_y, a_x هر مقداری می‌توانند داشته باشند، در اینجا ما حالتی را می‌خواهیم بررسی کنیم که $a_y = -g, a_x = \circ$ است. اگر این مقادیر را در رابطه فوق قرار دهیم، آنگاه فشار در نقطه اختیاری مثل A برابر است با:

$$P = P_\circ + \rho(\circ)y + \rho(\circ)x = P_\circ$$

چون نقطه A هر نقطه‌ای درون مایع می‌تواند باشد، در نتیجه فشار در تمام نقاط مایع با هم برابر و مساوی $P_\circ$ (فشار هوای اطراف) می‌شود. از طرفی می‌دانیم وقتی جسم در برابر جاذبه زمین رها شود شتاب g را به خود می‌گیرد و به اصطلاح می‌گوییم جسم سقوط آزاد می‌کند. پس حالتی که ما بررسی کردیم ($a_y = -g, a_x = \circ$) همان حالت سقوط آزاد است و حکم زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

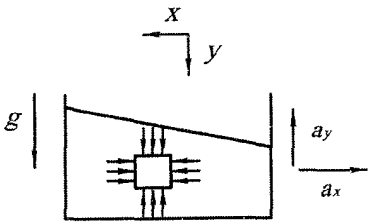
در سقوط آزاد یک مایع، فشار در تمام نقاط مایع با هم برابر و مساوی فشار هوای اطراف آن مایع است و بین هر دو نقطه دلخواه هیچ اختلاف فشاری وجود ندارد.

مثال: روی دیواره لیوانی دو سوراخ در ارتفاع یکسان از کف لیوان ایجاد کرده‌ایم. در حالی که روی سوراخ‌ها را با انگشت گرفته‌ایم، لیوان را پر از آب می‌کنیم. لیوان را رها می‌کنیم تا مجموعه با شتاب g سقوط آزاد کند. کدام گزینه در مورد شکل خارج شدن آب از سوراخ‌ها صحیح است؟ (هفدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

حل: با توجه به اینکه در هنگام سقوط آزاد فشار در بیرون و داخل ظرف هر دو با هم برابر و مساوی $P_\circ$، (فشار هوای اطراف ظرف) است در نتیجه هیچ اختلاف فشاری بین دو طرف هر سوراخ وجود ندارد و مایع به بیرون نمی‌ریزد و یا هوا به داخل ظرف وارد نمی‌شود. پس گزینه (د) صحیح است.

۴.۲ نیروی ارشمیدس در سقوط آزاد

دیدیم که مؤلفه‌های نیروی ارشمیدس برای مایعی که هر دو مؤلفه شتاب a_y, a_x را داشته باشد، به صورت زیر است:

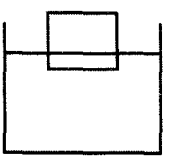


$$F_x = \rho a_x V$$

$$F_y = \rho(g + a_y)V$$

در حالت سقوط آزاد $a_y = -g, a_x = 0$ می‌شود. در نتیجه $F_x = F_y = 0$. پس در سقوط آزاد نیروی ارشمیدس برابر صفر است. این نتیجه را می‌توان از قسمت قبل هم نتیجه گرفت؛ به اینصورت که چون در سقوط آزاد فشار در تمام نقاط مایع با هم برابرند، بنابراین فشار بر روی سطوح فوقانی و تحتانی جسم یکسان شده و برآیند نیروی بالابری برابر صفر می‌شود. (همین استدلال را می‌توان در جهت افقی مطرح کرد.)

سؤال محک ۱: چوبی بر روی سطح آب درون ظرف شناور است. اگر ظرف را از ارتفاعی رها کنیم، می‌توان گفت:



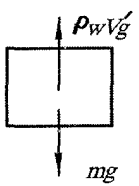
الف) چوب نسبت به سطح آب حرکت نمی‌کند.

ب) چوب کمی از آب بیرون می‌آید.

ج) چوب کمی به داخل آب فرو می‌رود.

جواب: شکی نیست که گزینه «الف» صحیح است. این جواب را می‌توان به دو روش اثبات کرد.

روش اول: هنگامی که ظرف ساکن است نیروهای وارد بر چوب عبارتند از $\rho_W V' g, mg$ که با هم برابرند.



$$mg = \rho_W V' g \qquad (۱)$$

$$mg = \rho V g \qquad (۲)$$

V': حجم چوب که داخل آب است.

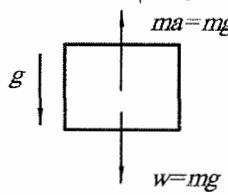
V: حجم کل چوب

$\rho w, \rho$ به ترتیب چگالی‌های چوب و آب هستند. از روابط فوق داریم:

$$\rho w V' g = \rho V g \rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\rho}{\rho w}$$

بنابراین نسبت حجم جابجا شده V' به کل حجم V مستقل از شتاب گرانش است و فقط بستگی به چگالی‌های چوب و آب دارد. بنابراین در هنگام سقوط آزاد چون این دو چگالی ثابت هستند، بنابراین نسبت $\frac{V'}{V}$ ثابت باقی مانده، یعنی چوب نسبت به سطح آب تغییر موقعیت نمی‌دهد.

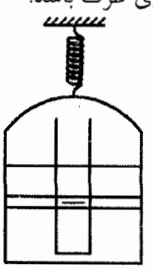
روش دوم: می‌دانیم حالتی که ظرف ساکن است برآیند نیروهای وارد بر چوب صفر است. در حالت دوم که ظرف در حال سقوط آزاد است برای تحلیل نیروها، بهتر است از دید ناظر درون ظرف نیروها را بررسی کنیم.



هنگامی که ظرف سقوط آزاد می‌کند یعنی ظرف به سمت زمین شتاب g می‌گیرد، از دید ناظر درون ظرف نیروی اینرسی $ma = mg$ در خلاف جهت شتاب گرانش g به چوب وارد می‌شود. از طرفی دیدیم که نیروی ارشمیدس در سقوط آزاد صفر است. پس در حالت دوم دو نیرو یکی اینرسی و دیگری وزن به جسم وارد می‌شوند که برآیند آنها صفر است. یعنی جسم نسبت به سطح آب تغییر موقعیت نمی‌دهد.

تمرین: اگر ظرف با شتاب $a < g$ به سمت پایین یا بالا حرکت کند نشان دهید چوب نسبت به سطح آب همچنان بی حرکت می‌ماند.

آزمایش: در تأیید تمرین فوق یک لوله آزمایش را روی سطح آب ظرفی شناور کرده و ظرف را توسط فنری به صورت قائم آویزان می‌کنیم. روی لوله آزمایش خط سیاهی رسم می‌کنیم. به طوریکه هنگام شناور بودن روی سطح آب ظرف، خط سیاه لوله درست در بین دو خط سیاه رنگ حک شده روی ظرف باشد.



با به نوسان در آوردن ظرف ملاحظه می‌شود که خط سیاه رنگ لوله در همه حال بین دو خط سیاه رنگ ظرف است. برای دیدن آزمایش فیلمهای 2buoya2 , 2buoya3 از CD

کتاب را ببینید.

سؤال محک ۲: در سؤال محک ۱ هنگامی که ظرف سقوط آزاد می‌کند با دست چوب را به داخل آب فرو برده، در آنجا چوب را نگه می‌داریم. با رها کردن دست ....

الف) چوب سر جای خودش باقی می‌ماند.

ب) چوب به سطح آب بر می‌گردد.

جواب: ببینیم هنگامی که چوب در آب غوطه‌ور است چه نیروهایی برآن وارد می‌شود. نیروی ارشمیدس که صفر است. از طرفی از دید ناظر درون ظرف دو نیروی وزن و اینرسی بر چوب وارد می‌شوند که با هم برابر و در خلاف جهت یکدیگرند. پس چوب سرجای خودش باقی می‌ماند.

سؤال محک ۳: بادکنکی را در ظرف پر از آبی فرو کرده، سپس بادکنک را رها می‌کنیم. چند لحظه بعد از رها شدن بادکنک ظرف را رها می‌کنیم تا سقوط آزاد کند. در این هنگام ...

الف) بادکنک سر جای خودش می‌ماند.

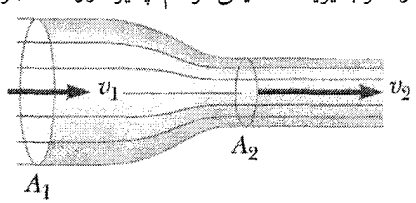
ب) بادکنک به کف ظرف بر می‌گردد.

ج) بادکنک به طرف سطح آب بالا می‌رود.

جواب: دیدیم از دید ناظر درون ظرف هنگام سقوط آزاد برآیند نیروهای وارد بر جسم (بادکنک) صفر است. پس هنگامی که ظرف سقوط می‌کند چون جسم نسبت به ظرف دارای سرعت است و برآیند نیروهای وارد بر آن صفر می‌باشد (از مقاومت آب صرفنظر کنید) پس بادکنک بعد از سقوط ظرف با سرعت ثابت نسبت به ظرف به طرف سطح آب حرکت می‌کند و بعد از رسیدن به سطح آب با همین سرعت از آب خارج می‌شود.

۵.۲ معادله پیوستگی (قانون بقای جرم)

لوله‌ای مطابق شکل در نظر بگیرید که مایعی تراکم‌ناپذیر درون آن جریان دارد.



با توجه به تراکم‌ناپذیری مایع، قانون بقای جرم بیان می‌کند که جرم درون لوله (بین دو خط خط چین و بدون توجه به اثرات نسبیت اینشتین $E = mc^2$) نسبت به زمان ثابت است یعنی:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 0 \qquad (۶-۲)$$

که در رابطهٔ فوق m جرم مایع درون لوله است. بنابراین هر مقدار جرمی که وارد محدوده فرض لوله (دو خط خط‌چین) می‌شود باید به همان میزان جرم از لوله خارج گردد. (زیرا جرم داخل لوله ثابت است). اگر مساحت لوله و سرعت مایع در ورود و خروج به ترتیب برابر $V_۲, A_۲, V_۱, A_۱$ باشند، آنگاه در مدت زمان Δt داریم:

$$\text{جرم وارد شده} = (V_۱\Delta t)A_۱\rho_۱$$

$$\text{جرم خارج شده} = (V_۲\Delta t)A_۲\rho_۲$$

$\rho_۲, \rho_۱$ به ترتیب چگالی‌های مایع در ورود و خروج می‌باشند که برای مایع تراکم‌ناپذیر $\rho_۱ = \rho_۲$ است. بنابراین:

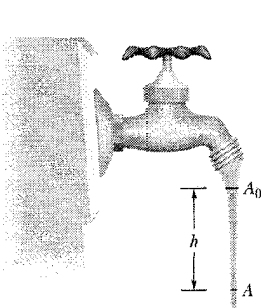
$$A_۱V_۱ = A_۲V_۲ \qquad (۷-۲)$$

به کمیت $Q = AV$ آهنگ شارش حجمی یا دبی حجمی می‌گویند و معادله فوق معروف به معادله پیوستگی است. این معادله بیان می‌کند که مقدار کمیت AV برای جریان داخل یک لوله مقداری ثابت است.

نکته: در حالت پایدار، هنگامی که مایع تراکم‌پذیر نباشد، دبی جرمی ثابت است. یعنی:

$$\rho_۱A_۱V_۱ = \rho_۲A_۲V_۲$$

مثال: شیرآبی که مساحت لوله آن $A_۰$ است را باز می‌کنیم و آب با سرعت $V_۰$ از آن خارج می‌شود. مطلوب است محاسبه مساحت سطح مقطع آب، A، هنگامی که به اندازه h سقوط کرده باشد؟



حل: از معادله پیوستگی (۲-۷) داریم:

$$A_۰V_۰ = AV \qquad (۱)$$

از طرفی چون ذرات آب تحت جاذبه زمین سقوط می‌کنند لذا شتاب g به خود می‌گیرند و داریم

$$V^۲ - V_۰^۲ = ۲gh \qquad (۲)$$

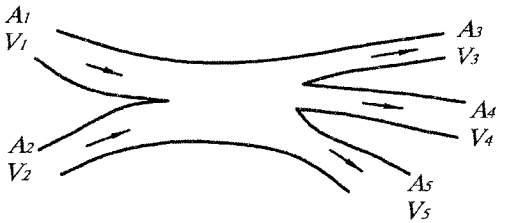
$$(۲),(۱) \rightarrow A_۰V_۰ = A(\sqrt{V_۰^۲ + ۲gh})$$

$$\rightarrow A = \frac{A_۰V_۰}{\sqrt{V_۰^۲ + ۲gh}}$$

واضح است که $\sqrt{V_۰^۲ + ۲gh} > V_۰$ بنابراین با سقوط آب از شیر، سطح مقطع آب باریکتر می‌گردد. یعنی $A < A_۰$.

نکته ۱: اگر ارتفاع h زیاد شود در نهایت آبی که پیوسته و متصل به هم بود به صورت قطرات جدا از هم در می‌آید که علاوه بر پیوستگی آب، کشش سطحی مولکولهای آب نیز در این عمل نقش دارند.

نکته ۲: معادله پیوستگی برای حالتی که ورودی و خروجی هرکدام از چند لوله تشکیل شده باشند (مطابق شکل) نیز صادق است.



بنابراین باتوجه به شکل می‌توان نوشت:

$$Q_۱ + Q_۲ = Q_۳ + Q_۴ + Q_۵$$

$$A_۱V_۱ + A_۲V_۲ = A_۳V_۳ + A_۴V_۴ + A_۵V_۵$$

مثال: در ته سطلی به مساحت مقطع A سوراخی به مساحت a هست. آب با آهنگ حجمی ثابت c وارد سطل می‌شود. سرعت خروج آب از این سوراخ از رابطه $v = \sqrt{\frac{۲\Delta P}{\rho}}$ به دست می‌آید که در آن ΔP فشار کف ظرف منهای فشار هوای بیرون ($P_۰$)، ρ چگالی آب و g شتاب گرانش است. بعد از مدتی ارتفاع آب در سطل ثابت می‌ماند. این ارتفاع ثابت چه قدر است؟

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران)

الف) $\frac{c^۲}{۲gA^۲}$ ب) $\frac{c^۲}{۲ga^۲}$ ج) $\frac{\frac{c^۲\rho}{۲} - P_۰}{g\rho A^۲}$ د) $\frac{\frac{c^۲\rho}{۲} - P_۰}{g\rho a^۲}$

حل: برای اینکه ارتفاع آب ثابت بماند باید دبی حجمی آب ورودی (c) با دبی حجمی آب خروجی av برابر باشد.

$$c = av = a\sqrt{\frac{۲\Delta P}{\rho}}$$

از طرفی فشار در کف ظرف برابر است با $P_۰ + \rho gh$. در نتیجه $\Delta P = \rho gh$

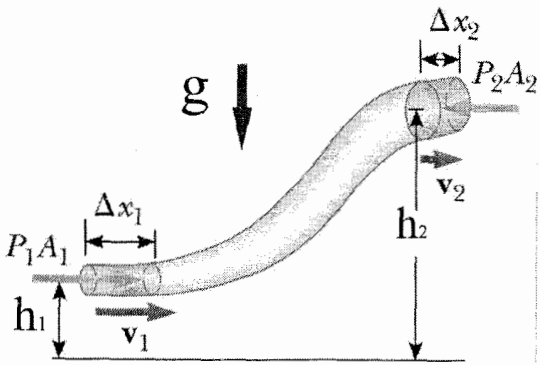
$$\rightarrow c = a\sqrt{\frac{۲\rho gh}{\rho}} = a\sqrt{۲gh}$$

$$\rightarrow h = \frac{c^۲}{۲ga^۲}$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

۶.۲ معادلهٔ برنولی

هنگامیکه در حال سفر به شمال، سوار بر خودروی خودتان هستید بارها این تجربه را دارید که با عبور یک کامیون یا اتوبوس از طرف مقابل، خودروی شما دچار تکان شدید می‌شود. (مخصوصاً برای خودروهای سبک) به نظر شما این نیروی شدید وارد بر خودروی شما از کجا آمده است؟ یا در بحث داغ فوتبال، بارها دیده‌اید بازیکن هنگام ضربه به توپ، اگر به توپ به نحوی ضربه بزند که آن را بچرخاند توپ هنگام حرکت در هوا از مسیر مستقیم منحرف می‌شود و به اصطلاح می‌گویند توپ کات کشیده است. و چه بسیاری از گلها به همین طریق صورت گرفته است. به نظر شما چه نیرویی بعد از ضربه بر توپ وارد می‌شود و آن را از مسیر مستقیم منحرف می‌کند؟ آیا تاکنون به دلیل آن فکر کرده‌اید؟ بسیاری از این نوع پدیده‌ها است که در تحلیلشان دچار مشکل می‌شویم. اما آقای برنولی با ارائه رابطه‌ای توانست این نوع پدیده‌ها را توجیه کند که معروف به معادله برنولی شده است. دقت کنید رابطهٔ برنولی یک رابطه بنیادی مثل قوانین نیوتن نیست بلکه خود این رابطه از قوانین حرکت نیوتن استخراج شده است. لوله‌ای مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید که مایعی تراکم‌ناپذیر به چگالی ρ در آن جریان دارد. به کمک پایستگی انرژی برای دو مقطع ورودی و خروجی (نقاط ۱ و ۲) می‌توان رابطه زیر (رابطه برنولی) را نوشت. (از اثبات آن به علت حجیم شدن کتاب اجتناب می‌کنیم)



$P_۲, P_۱$: فشار در مقاطع ورودی و خروجی

$h_۲, h_۱$: ارتفاع مقاطع ورودی و خروجی نسبت به یک خط مبنای اختیاری

$V_۲, V_۱$: سرعت مایع در مقاطع ورودی و خروجی

$$P_۱ + \rho g h_۱ + \frac{۱}{۲}\rho V_۱^۲ = P_۲ + \rho g h_۲ + \frac{۱}{۲}\rho V_۲^۲$$

بنابراین در حالت کلی می توان نوشت:

$$P + \rho g h + \tfrac{۱}{۲}\rho V^۲ = \text{ثابت} \qquad (۸-۲)$$

معادله فوق، معروف به معادله برنولی است. واضح است که واحد جملات اول و دوم فشار است. پس جمله سوم هم، همین واحد را دارد یعنی نشان می‌دهد که فشار در

سیال به سرعت مایع نیز بستگی دارد !!!! از رابطه فوق می‌توان دریافت که چون جمع جمله مقداری ثابت است، پس اگر سرعت مایع (V) بالا رود فشار آن P پایین می‌آید و برعکس. یعنی اگر سرعت مایع پایین بیاید، فشار آن بالا می‌رود. (با فرض ثابت بودن h)

نکته ۱: رابطه برنولی در همه جا صادق نیست و ۴ شرط باید برقرار باشد تا بتوان از آن استفاده کرد منتهی در امتحان المپیاد مسائل به نحوی داده می‌شود که خود به خود ۴ شرط برقرار است. یکی از این ۴ شرط، صرف نظر از اصطکاک و اتلافات می‌باشد.

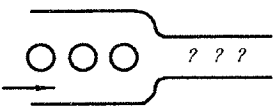
نکته ۲: ارتفاعات $h_۲, h_۱$ از یک خط مبنای اختیاری اندازه‌گیری می‌شوند و این خط مبنا در اختیار ماست. منتهی باید دقت شود هر خط مبنایی که انتخاب شد باید مبنا برای هر دو مقطع ورودی و خروجی باشد.

سؤال محک ۱: در داخل لوله‌ای مطابق شکل آبی جریان دارد و آب حاوی حبابهای کوچک هوا است. هنگامی که حبابهای هوا به قسمت باریک لوله می‌رسند اندازه حباب ها

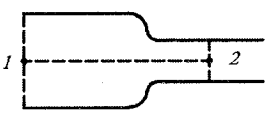
الف) بزرگتر می‌شوند.

ب) کوچکتر می‌شوند.

ج) تغییر نمی‌کنند.



جواب: خط مبنا را وسط لوله می‌گیریم. در نتیجه برای دو مقطع ورودی و خروجی فرضی چون h برابر صفر است، طبق رابطه برنولی داریم:



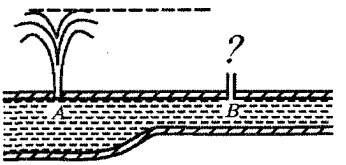
$$P_۱ + \tfrac{۱}{۲}\rho V_۱^۲ = P_۲ + \tfrac{۱}{۲}\rho V_۲^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی از معادله پیوستگی (۲-۸) داریم:

$$A_۱V_۱ = A_۲V_۲ \rightarrow V_۱ = (\frac{A_۲}{A_۱})V_۲ \ , \ \frac{A_۲}{A_۱} < ۱ \Rightarrow V_۱ < V_۲ \qquad (۲)$$

بنابراین سرعت در مقطع (۲) بیشتر از سرعت در مقطع (۱) است و طبق رابطه (۱) فشار در مقطع (۱) بیشتر از فشار در مقطع (۲) است. لذا هنگامیکه حبابها به مقطع (۲) می‌رسند فشار وارد بر آنها کم شده در نتیجه حبابها بزرگتر می‌شوند. گزینهٔ «الف» صحیح است.

سؤال محک ۲: آب مطابق شکل از داخل لوله‌ای با مقطع متغیر جریان دارد. از دو سوراخ کوچک در نقاط B, A آب به بالا فوران می‌کند. کدامیک از این سوراخها آب را تا ارتفاع بالاتری می‌فرستد؟



الف) سوراخ A

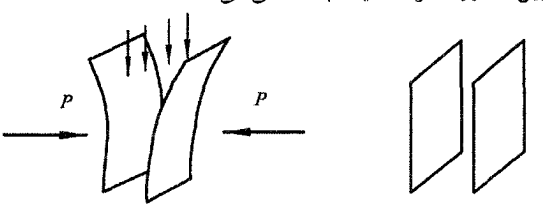
ب) سوراخ B

ج) هر دو سوراخ به یک اندازه آب را به بالا پرتاب می‌کنند.

جواب: چون مقطع لوله در B کمتر از A است، لذا سرعت در B بیشتر از A است (طبق معادلهٔ پیوستگی (۲-۷)) و در نتیجه طبق معادلهٔ برنولی فشار در B کمتر از فشار در A است. بنابراین از سوراخ A آب تا ارتفاع بالاتری پرتاب می‌شود. گزینهٔ «الف» صحیح است.

یک آزمایش ساده

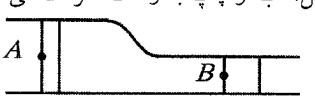
اگر هنوز به رابطه (۲-۸) به دیده شک نگاه می‌کنید می‌توانید با یک آزمایش ساده شک خود را به یقین تبدیل کنید. مطابق شکل (الف) دو ورقه کاغذ را موازی و نزدیک هم نگه دارید. حال بین دو ورقه فوت کنید. چه اتفاقی می‌افتد؟



ملاحظه خواهید کرد که دو ورقه به هم نزدیک می‌شوند. (مطابق شکل ب). اما چرا؟

با فوت کردن بین دو ورقه، سرعت هوا را افزایش می‌دهیم در نتیجه بر اساس رابطه برنولی چون سرعت هوای بین دو ورقه کاغذ بیشتر از هوای بیرون آن دو است لذا فشار هوا در بین دو ورقه کمتر از هوای بیرون آنها می‌شود و موجب می‌شوند که دو کاغذ به هم نزدیک شوند. یا اگر بر بالای یک کاغذ خمیده در دست فوت کنید، کاغذ صاف می‌شود. فیلم 2bernoulli از CD کتاب را ببینید.

مثال: در لوله‌ای افقی مطابق شکل، آب از چپ به راست حرکت می‌کند.



در جاهای دور از تنگ شدگی لوله، سرعت آب را یکنواخت و مستقل از زمان بگیرید. کدام گزینه درباره P_B, P_A (فشار آب در نقطه‌های B, A) درست است؟

(راهنمایی: خط‌های عمودی، مرز بخشی از آب در یک زمان را نشان می‌دهند. خط‌چین‌های عمودی مرزهای همان آب را در زمان بعدتر نشان می‌دهند.)

(هیجدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

الف) حتماً $P_A > P_B$

ب) حتماً $P_A < P_B$

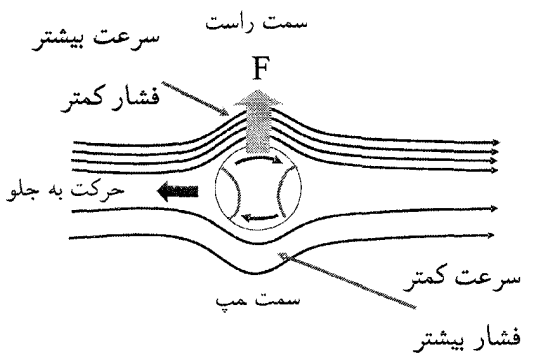
ج) اگر از اصطکاک لوله با آب چشم بپوشیم، $P_A = P_B$؛ در غیر اینصورت $P_A > P_B$

د) حتماً $P_A = P_B$

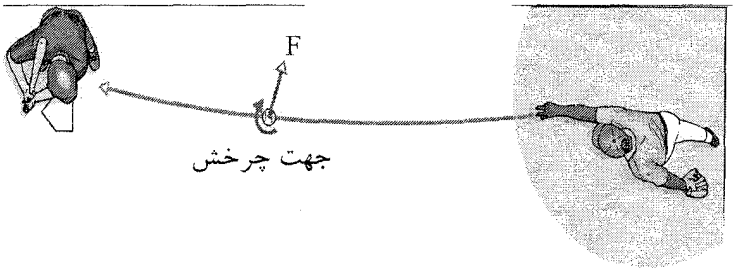
حل: با توجه به توضیحات داده شده در متن درس واضح است که گزینه (الف) صحیح می‌باشد. دقت کنید که چون لوله افقی است پس $h_B = h_A$ است. و مقایسه فشارها به راحتی انجام می‌شود.

چرا توپ کات می‌کشد؟

توپی را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر (نمای از بالا) هم به جلو حرکت می‌کند و هم در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. بنابراین توپ احساس می‌کند که بادی از جلو در حال وزش است. دقت کنید وقتی توپ به دور خود می‌چرخد باعث می‌شود که هوای اطراف خود را در همان جهت چرخش خودش بچرخاند.



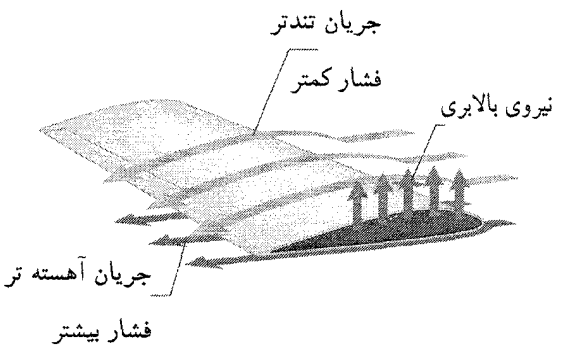
بنابراین سرعت هوا، در اطراف توپ ترکیب دو سرعت است. یکی سرعت هوا ناشی از چرخش و دیگری سرعت هوا ناشی از جلو رفتن توپ. دقت کنید در سمت راست توپ این دو سرعت هم جهتند. در نتیجه با هم جمع می‌شوند ولی در سمت چپ توپ این دو سرعت در جهت مخالفند و از هم کم می‌شوند. بنابراین سرعت هوا در سمت راست بیشتر از سمت چپ می‌شود. بنابر اصل برنولی فشار در سمت چپ توپ بیشتر از سمت راست گردیده و در اثر این اختلاف فشار توپ به سمت راست منحرف می‌شود. در حالت کلی برای اینکه توپ به جهت خاصی کات بکشد، جهت چرخش توپ مهم خواهد بود. در شکل زیر نحوهٔ کات کشیدن توپ بین دو بازیکن نشان داده شده است.



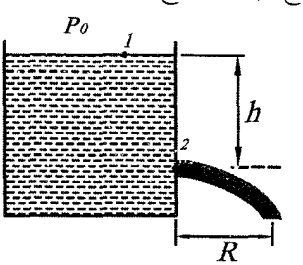
نکته: در خلأ هیچ وقت نمی‌توانید به توپ کات دهید. برای دیدن انحراف توپ از مسیر مستقیم فیلم 2bernoulli4, 2bernoulli 3, 2bernoulli 2 را ببینید.

چرا هواپیما می‌پرد؟

بال هواپیما که ایرفویل نام دارد طوری ساخته می‌شود که هوایی که از سطح بالایی آن می‌گذرد نسبت به سطح زیرین، مسافت بیشتری را طی کند و در نتیجه باید سرعت بیشتری داشته باشد. لذا بنابر اصل برنولی فشار در زیر بال بیشتر از بالای بال شده و موجب بلند کردن هواپیما می‌گردد. پس اگر هوا نباشد هواپیما قادر به پریدن نخواهد بود. فیلم 2bernoulli 5 از CD کتاب را ملاحظه کنید.



مثال: در مخزن پر از آبی، در فاصله h زیر سطح آزاد آب سوراخی ایجاد می‌کنیم. به کمک معادله برنولی سرعت خروج آب از سوراخ را بیابید.



حل: سطح سوراخ را به عنوان سطح مرجع اندازه‌گیری ارتفاع در نظر می‌گیریم. برای نقاط (۱) و (۲) می‌توان به کمک معادله برنولی نوشت:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (1)$$

با توجه به اینکه نقاط (۱) و (۲) هر دو در معرض هوا هستند پس $P_1 = P_2 = P_0$ از طرفی چون مخزن بسیار بزرگ است می‌توان از سرعت پایین آمدن سطح آب مخزن صرف نظر کرد. یعنی $V_1 = 0$ (با توجه به اینکه دبی پایین آمدن آب مخزن برابر دبی خروج آب از سوراخ است لذا $A_1 V_1 = A_2 V_2$ چون $A_1 \gg A_2$ پس $V_2 \gg V_1$)

با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

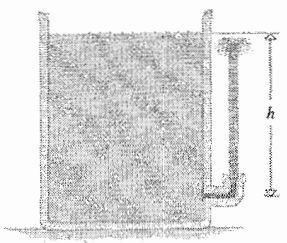
$$P_0 + \rho g h + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

یعنی سرعت آب همان سرعتی است که جسم از حالت سکون از ارتفاع h به صورت آزاد سقوط می‌کند که اصطلاحاً به قانون توریچلی مشهور شده است.

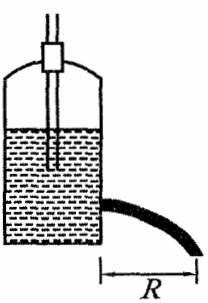
نکته ۱: با دانستن سرعت خروج آب از سوراخ، V_2، می‌توان از معادلات حرکت پرتابی، برد R که قطرات آب طی می‌کنند تا به زمین برسند را حساب کرد.

نکته ۲: اگر سوراخ را مطابق شکل به طرف بالا جهت دهیم آب های فوران شده درست تا سطح آزاد آب مخزن بالا می‌پرند.



سؤال محک: ظرفی مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که سر آن توسط چوب پنبه‌ای بسته شده و از سوراخی که در آن تعبیه شده است یک لوله را وارد ظرف می‌کنیم.

با بازکردن دریچه پایین ظرف آب از ظرف شروع به خارج شدن می‌کند. با توجه به اینکه ابعاد ظرف بزرگ نیست سطح آب ظرف مرتباً پایین می‌آید. با پایین آمدن آب ظرف، فاصله R، برد پرتاب قطرات آب ...



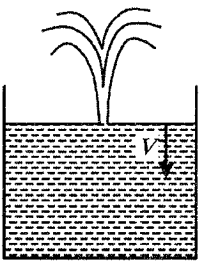
الف) کاهش می‌یابد.

ب) ثابت می‌ماند.

ج) افزایش می‌یابد.

جواب: شکی نیست که گزینه «ب» صحیح است. اگر قبول ندارد فیلم 2pressure از CD کتاب را ببینید. این پدیده را خودتان تفسیر کنید.

مثال: مطابق شکل، در داخل یک استوانه مقداری مایع تراکم ناپذیر قرار دارد و یک پیستون افقی به شعاع ۱۰cm مطابق شکل بر روی مایع قرار گرفته است. در مرکز پیستون سوراخی به شعاع ۴ میلیمتر ایجاد شده است. اگر پیستون را با سرعت ۴ میلیمتر بر ثانیه در راستای قائم پایین بیاوریم، بیشترین ارتفاعی که آب نسبت به سطح اولیه ظرف از داخل سوراخ به بالا فوران خواهد کرد بر حسب سانتیمتر چقدر است؟ ضخامت پیستون ناچیز است. $(g = ۱۰ m/s^۲)$ (دهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)



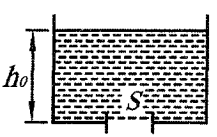
حل: از معادله پیوستگی داریم:

$$A_۱V_۱ = A_۲V_۲ \rightarrow \frac{\pi}{۴} \times ۱۰^۲ \times ۰/۴ = \frac{\pi}{۴} \times ۰/۴^۲ \times V_۲ \rightarrow V_۲ = ۲۵۰ \text{ cm/s}$$
$$V_۲ = ۲/۵ \text{ m/s}$$

حال به کمک حرکت پرتابه داریم:

$$V_۲^۲ - ۰ = ۲gh \rightarrow V_۲ = \sqrt{۲gh} \rightarrow h = \frac{V_۲^۲}{۲g} = \frac{۲/۵}{۲۰} = ۰/۳۱۲۵ \text{ m} = ۳۱/۲۵ \text{cm}$$

مثال: در ظرفی مطابق شکل، تا ارتفاع $h_۰$ آب ریخته‌ایم. در ته این ظرف دریچه‌ای قرار دارد که مساحت مقطع آن S است. هم‌زمان با باز کردن دریچه، از بالا جریان آبی وارد ظرف می‌کنیم. حجم آب ورودی در واحد زمان D است. در اثر این کار، ارتفاع آب تغییر می‌کند و به مقدار تعادلی h می‌رسد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)



الف) h همواره بزرگتر از $h_۰$ است. ب) h همواره کوچکتر از $h_۰$ است.

ج) h متناسب است با $\frac{D}{s}$ د) h متناسب است با $(\frac{D}{s})^۲$

ه) h متناسب است با $\sqrt{\frac{D}{s}}$

حل: در حالت تعادل باید دبی ورودی با دبی خروجی برابر شود. برای محاسبه دبی خروجی از معادله برنولی بین دو نقطه یکی سطح آب و دیگری آب خارج شده استفاده می‌کنیم.

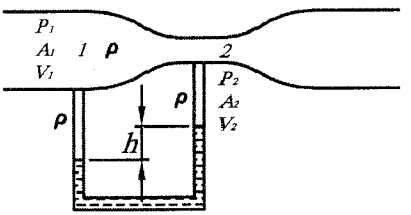
$$P_۰ + \rho gh + ۰ = P_۰ + \frac{۱}{۲}\rho V^۲ \rightarrow V^۲ = ۲gh \rightarrow V = \sqrt{۲gh}$$
$$\text{دبی خروجی } Q_۲ = VS = \sqrt{۲gh}S$$

$$\rightarrow \sqrt{2ghS} = D \rightarrow h = \frac{1}{2g}(\frac{D}{S})^2$$

گزینهٔ «د» صحیح است.

۷.۲ لوله ونتوری

لوله‌ای است که برای اندازه‌گیری سرعت جریان یک سیال بکار می‌رود. مطابق شکل زیر، این وسیله به یک لوله U شکل شیشه‌ای که حاوی مقداری جیوه است متصل است و برای اندازه‌گیری فشار در دو مقطع لوله ونتوری بکار می‌رود.



بین نقاط (۱) و (۲) می‌توان رابطه برنولی را نوشت و با توجه به اینکه سطح متوسط مایع برای هر دو مقطع یکسان است، در نتیجه:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (1)$$

از طرفی در لوله U شکل اختلاف فشار در دو شاخه به اندازه ارتفاع h است. اگر چگالی جیوه را ρ' بنامیم، آنگاه

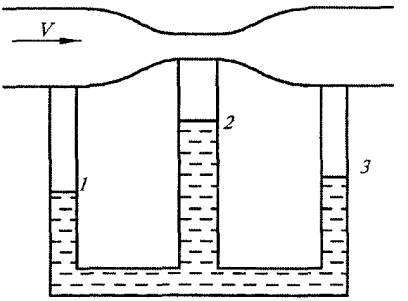
$$P_1 - P_2 = (\rho' - \rho)gh \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow (\rho' - \rho)gh = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2)$$

از معادله پیوستگی نیز داریم $A_1V_1 = A_2V_2$. پس در نهایت می‌توان V_1 را به صورت زیر حساب کرد.

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(\frac{\rho'}{\rho} - 1)gh}{(\frac{A_1}{A_2})^2 - 1}}$$

آزمایش: لوله ونتوری را مطابق شکل به سه لوله متصل به هم وصل می‌کنیم. اگر توسط سشوار هوا را به داخل لوله ونتور ی بدمیم ملاحظه می‌شود که چون در مقطع باریکتر سرعت بیشتر و در نتیجه فشار کمتر است لذا مایع لوله وسط از ارتفاع بالاتری برخوردار است.

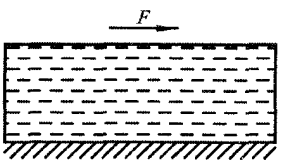


دقت کنید که ارتفاع مایع در لوله ۳ بیشتر از ارتفاع مایع در لوله ۱ است. زیرا بدلیل گرانروی، فشار طی پیشروی کاهش می‌یابد. (گرانروی را در بخش بعد توضیح خواهیم داد.)

فیلم 2venturi از CD کتاب را ببینید.

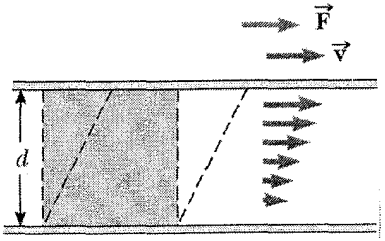
گرانروی (لزجت)

گرانروی خاصیتی از ماده است که به موجب آن یک مایع در برابر برش از خود مقاومت نشان می‌دهد. معنی این جمله این است که اگر مایعی را بین دو صفحه موازی مطابق شکل قرار دهیم، بطوریکه صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی را با نیروی F هل دهیم، ملاحظه می‌کنیم که مایعی که گرانروی بیشتری دارد برای هل دادن به نیروی بیشتری نیازمند است.



عسل و قیر مثالهایی از مایعات خیلی لزج و آب و هوا مثالهایی از سیالات کم لزج می‌باشند. لزجت مایعات معمولاً با افزایش دما کاهش و با کاهش دما افزایش می‌یابد. همه شما این تجربه را در مورد عسل دارید. گاهی اوقات پیش می‌آید که ظرف عسل را اشتباهاً در یخچال می‌گذارید و فردا صبح که برای خوردن سراغ آن می‌روید، ملاحظه می‌کنید که چسبندگی آن به ظرف بسیار زیاد شده و به قاشق می‌چسبد و برای ریختن آن روی نان دچار مشکل می‌شوید.

حال ببینیم واحد کمیت لزجت چیست. مجدداً مایعی را که بین دو صفحه موازی است در نظر بگیرید. فاصله بین دو صفحه برابر d و صفحه بالایی با سرعت V به سمت راست حرکت می‌کند. (با اعمال نیروی F)



با توجه به آزمایشات انجام شده، سرعت لایه‌ای از مایع که درست در مجاورت یک سطح قرار دارد، برابر با سرعت همان سطح است و این بخاطر گرانروی مایع (هر چند اندک) می‌باشد. بنابراین سرعت مایعی که نزدکی صفحه پایینی است برابر صفر و سرعت مایعی که نزدیک صفحه بالایی است برابر V می‌باشد. برای بعضی از مایعات (به نام مایعات نیوتنی که گرانروی آنها ثابت است) رابطه بین نیرو و سرعت به شکل خطی زیر است:

$$F = \eta \frac{AV}{d} \qquad (۹-۲)$$

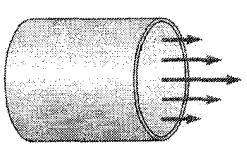
در رابطه فوق A مساحت صفحات، F نیروی وارد بر صفحه بالایی و η گرانروی مایع می‌باشد. رابطه را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\eta = \frac{F/A}{V/d} \qquad (۱۰-۲)$$

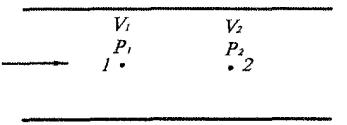
دقت کنید چون جهت F موازی با سطح A است (نه عمود بر آن) لذا نباید آن را با فشار اشتباه گرفت (هرچند که واحد آن پاسکال باشد) اصطلاحاً به کسر $\frac{F}{A}$ تنش برشی می‌گویند.

از رابطه فوق، واحد (دیمانسیون) گرانروی، پاسکال در ثانیه (Pa.S) بدست می‌آید.

مایعی را در نظر بگیرید که در داخل لوله‌ای جاری است. بواسطه لزجت سیال، سرعت لایه تک مولکولی که درست در مجاورت دیوار ساکن لوله قرار دارد، برابر صفر و سرعت جریان در مرکز لوله از همه جا بیشتر است. بردارهای سرعت در نقاط مختلف در شکل زیر نشان داده شده است.

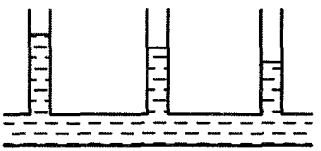


گرانروی (لزجت) در مایعات شبیه اصطکاک در اجسام جامد عمل می‌کند، با این تفاوت که اصطکاک موجب کاهش سرعت اجسام جامد می‌شود ولی گرانروی موجب کاهش فشار در مایعات می‌گردد. به عنوان مثال لوله‌ای با سطح مقطع یکسان را در نظر بگیرید که مایعی درون آن جریان دارد. به علت وجود گرانروی و زبریهای داخل لوله، با حرکت مایع از چپ به راست مرتب فشار مایع در لوله کم می‌شود. بنابراین $P_1 > P_2$ می‌گردد.



اما سؤالی که مطرح می‌شود این است که چرا لزجت یا زبریهای داخل لوله سرعت مایع را کم نمی‌کند؟ اگر یادتان باشد گفتیم برای مایع تراکم‌ناپذیر معادله پیوستگی به شکل $A_1V_1 = A_2V_2$ صادق است. پس چون سطح مقطع لوله ثابت می‌باشد می‌توان گفت که $V_1 = V_2$. بنابراین با در نظر گرفتن گرانروی لوله اصطلاحاً مایع دچار افت فشار می‌شود.

با یک آزمایش می‌توان اثر گرانروی را روی کاهش فشار دید. مطابق شکل لوله‌ای افقی را در نظر بگیرید که مایعی درون آن جاری است. چون با پیشروی مایع، فشار مرتب کاهش می‌یابد، لذا ارتفاع مایع (ارتفاع مایع در هر شاخه متناسب با فشار مایع درون لوله در آن نقطه است.) در سه شاخه به ترتیب کم می‌شود.



آقای پوازوی نشان داد که در لوله‌ای به طول L و شعاع سطح مقطع R اگر بخواهیم مایعی با گرانروی η و دبی حجمی Q به جریان آوریم، اختلاف فشاری که باید بین دو سر لوله اعمال شود از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta P = \frac{8QL\eta}{\pi R^4} \qquad (۱۱-۲)$$

مثال: آهنگ جریان آب در یک لوله، برابر است با حجم آب گذرنده از لوله بر واحد زمان. آهنگ جریان آب در یک لوله با اختلاف فشار در دو سر لوله ΔP، متناسب است و با طول لوله نسبت عکس دارد. همچنین آهنگ جریان آب، تابع قطر لوله، D و گرانروی η، است. ($\eta = 8 \times 10^{-4}\ Ns/m^2$). کدام یک از کمیت‌های زیر می‌تواند نشان دهنده آهنگ جریان آب از لوله باشد؟ (واحدهای طرفین هر تساوی باید با هم مساوی باشد).

الف) $\frac{\Delta PD^2}{\eta L}$ ب) $\frac{\Delta P\eta}{LD^2}$ ج) $\frac{\Delta P\eta D^3}{L^2}$ د) $\frac{\Delta PD^3}{\eta L}$ ه) $\frac{\Delta PD^4}{\eta L}$

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران)

حل: با توجه به اینکه دیمانسیون آهنگ جریان (دبی حجمی) برابر m^3/s است، دیمانسیون تک‌تک گزینه‌ها را بدست می‌آوریم.

$$\frac{\Delta PD^2}{\eta L} = \frac{N/m^2 \times m^2}{Ns/m^2 \times m} = \frac{m}{s}$$

$$\frac{\Delta P\eta}{LD^2} = \frac{N/m^2 \times Ns/m^2}{m \times m^2} = \frac{N^2S}{m^4}$$

$$\frac{\Delta P\eta D^3}{L^2} = \frac{N/m^2 \times NS/m^2 \times m^3}{m^2} = \frac{N^2S}{m^3}$$

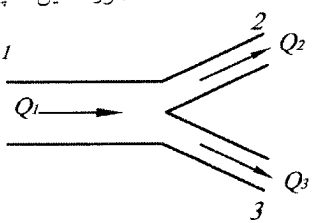
$$\frac{\Delta PD^3}{\eta L} = \frac{N/m^2 \times m^3}{NS/m^2 \times m} = \frac{m^2}{S}$$

$$\frac{\Delta P D^۴}{\eta L} = \frac{N/m^۲ \times m^۴}{NS/m^۲ \times m} = \frac{m^۳}{S}$$

بنابراین گزینه «ه» صحیح است.

مثال: جریان گذرنده از یک لوله افقی آب (حجم آب گذرنده بر واحد زمان) متناسب با اختلاف فشار دو سر لوله است. ضریب تناسب به طول و مقطع لوله بستگی دارد. یک سه‌راهی افقی را در نظر بگیرید. فشار در سرهای ۲،۱ و ۳ را به ترتیب با $P_۳, P_۲, P_۱$ نشان می‌دهیم. آب از سر ۱ وارد و از سرهای ۲ و ۳ خارج می‌شود. جریان سرهای ۲،۱ و ۳ را به ترتیب با $Q_۳, Q_۲, Q_۱$ نشان می دهیم. فرض کنید $P_۳$ کم شود و $P_۲, P_۱$ تغییر نکنند. کدام گزینه درست است؟

(نوزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)



الف) $Q_۱$ و $Q_۲$ و $Q_۳$ زیاد می‌شوند.

ب) $Q_۲, Q_۱$ زیاد می‌شوند و $Q_۳$ کم می‌شود.

ج) $Q_۳, Q_۱$ زیاد می‌شوند و $Q_۲$ کم می‌شود.

د) $Q_۳, Q_۲, Q_۱$ کم می‌شوند.

ه) $Q_۲, Q_۱$ کم می‌شوند و $Q_۳$ زیاد می‌شود.

و) $Q_۳, Q_۱$ کم می‌شوند و $Q_۲$ زیاد می‌شود.

حل: هنگامی که $P_۳$ کم شود، اختلاف فشار دو سر لوله ۳ زیاد شده، پس با توجه به رابطه (۲-۱۱) $Q_۳$ افزایش می‌یابد. از طرفی دبی $Q_۱$ را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد که یکی وارد لوله ۳ و دیگری وارد لوله ۲ می‌شود. یعنی $Q_۱ = Q_۲ + Q_۳$ با افزایش $Q_۳$ دبی $Q_۱$ نیز افزایش می‌یابد. زیرا با کم شدن $P_۳$ در واقع اختلاف فشار وارد بر بخشی از لوله ۱ زیاد شده و از اینرو $Q_۱$ افزایش می‌یابد. حال با توجه به اینکه سرعت در شاخه ۳ افزایش می‌یابد و طبق رابطه برنولی با افزایش سرعت، کاهش فشار را به همراه خواهیم داشت، بنابراین بر سر دوراهی، فشار دهانه شاخه ۳ کمتر از شاخه ۲ می‌شود. لذا خود این اختلاف فشار بین دو دهانه باعث کشیده شدن جریان از لوله ۲ به سمت لوله ۳ می‌گردد. بنابراین گزینه «ج» صحیح است.

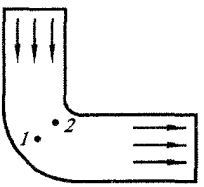
آزمایش: یک قیف را به پمپ هوا متصل می‌کنیم. به کمک اصل برنولی آزمایش 2bernoulli6 از CD کتاب را تفسیر کنید.

آزمایش: به کمک اصل برنولی اساس کار آب‌پاش‌های دستی را توضیح دهید. فیلم 2bernoulli7 از CD کتاب اساس کار آب‌پاش‌ها را نشان می‌دهد.

۸.۲ مسائل تکمیلی فصل دوم

با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل به آدرس mottaghi@sharif.edu حل کلیه مسائل به آدرس ایمیل شما فرستاده می‌شود.

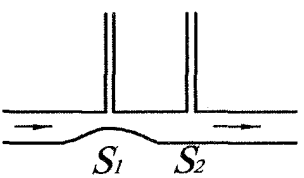
۱) سیالی ایده‌آل (بدون گرانروی) در طول یک لوله صاف مطابق شکل زیر جاری است. سطح مقطع لوله ثابت و خود لوله در یک صفحه افقی قرار دارد و دارای خم ۹۰ درجه می‌باشد. فشار و سرعت نقاط ۱ و ۲ را با هم مقایسه کنید. (کتاب ایرودف)



راهنمایی: به کمک نیروی گریز از مرکز، فشار دو نقطه را با هم مقایسه کنید. سپس از رابطه برنولی کمک گرفته و سرعت‌ها را با هم مقایسه کنید.

جواب: $P_1 > P_2 \quad , \quad V_2 > V_1$

۲) دو لوله مانومتر مطابق شکل بر روی یک لوله افقی با سطح مقطع متغیر S_2, S_1 سوار هستند. مطلوب است دبی حجمی آب عبوری از لوله به شرط اینکه اختلاف ارتفاع در دو لوله مانومتر به اندازه Δh باشد. (کتاب ایرودف)

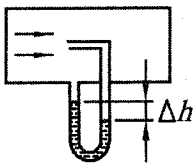


راهنمایی: نقاط ۱ و ۲ را به ترتیب در سطح مقطع‌های S_2, S_1 بگیرید. سپس به کمک معادله پیوستگی و برنولی Q را بدست آورید.

جواب: $Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$

۳) لوله پیتوت، لوله‌ای U شکل است که برای اندازه‌گیری سرعت به کار می‌رود. لوله پیتوت را روی یک خط لوله گاز با سطح مقطع S نصب می‌کنیم. (مطابق شکل) اگر چگالی‌های مایع (سیال درون لوله پیتوت) و گاز به ترتیب برابر ρ, ρ_0 و اختلاف سطح مایع داخل لوله پیتوت به اندازه Δh باشد، با صرف نظر از گرانروی، دبی حجمی گاز عبوری را بدست آورید.

(کتاب ایرودف)



راهنمایی: برای دو نقطه یکی جلوی دهنه بالایی و دیگری جلوی دهنه پایینی لوله پیتوت، معادله برنولی را بنویسید. دقت کنید که سرعت هوا درست جلوی دهنه بالایی صفر است و لوله پیتوت به صورت افقی نصب شده است.

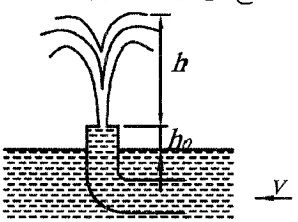
جواب: $Q = S\sqrt{\frac{۲\Delta h \rho_{\circ} g}{\rho}}$

۴) یک مخزن بزرگ که سوراخی در کف آن تعبیه شده از آب و نفت سفید پر شده است. با صرفنظر از اثرات گرانروی و با شرط اینکه ارتفاع و چگالی آب و نفت سفید در مخزن به ترتیب برابر $\rho_۲, h_۲, \rho_۱, h_۱$ باشند، سرعت خروج آب از مخزن را بیابید. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: با نوشتن معادله برنولی بین دو نقطه، یکی سطح آزاد مخزن و دیگری جلوی سوراخ و با توجه به اینکه فشار موجود در پشت سوراخ تبدیل به سرعت می‌شود، داریم ...

جواب: $V = \sqrt{۲(h_۱ + h_۲\frac{\rho_۲}{\rho_۱})g}$

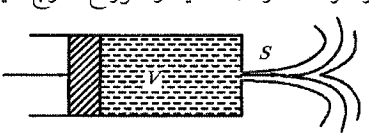
۵) یک لوله خم شده مطابق شکل در جریان آبی فرو برده می‌شود. سرعت جریان آب نسبت به لوله برابر V است. انتهای لوله خمیده بسته و در ارتفاع $h_{\circ}$ قرار دارد. آب از سوراخی که در انتهای بسته تعبیه شده خارج می‌گردد. مطلوب است: محاسبه h. (کتاب ایرودف)



راهنمایی: ابتدا معادله برنولی را بین سطح آزاد جریان و نقطه‌ای نزدیک سوراخ نوشته، سپس بار دیگر معادله برنولی را بین نقطه‌ای نزدیک سوراخ و نقطه اوج بنویسید.

جواب: $h = \frac{V^۲}{۲g} - h_{\circ}$

۶) در یک سیلندر و پیستون افقی آبی به حجم V موجود است. (مطابق شکل) سوراخی به مساحت S که نسبت به مساحت پیستون بسیار کوچکتر است در انتهای سیلندر قرار دارد. اگر از گرانروی و اصطکاک صرف‌نظر شود مطلوب است مقدار کار لازم برای اینکه تمام آب موجود در سیلندر را در مدت زمان t ثانیه از سوراخ خارج کنیم. (کتاب ایرودف)



راهنمایی: با نوشتن معادله برنولی در قبل و بعد از سوراخ داریم $P = \frac{1}{2}\rho v^2$ و کار برابر است با $W = FL$ که L فاصله بین پیستون تا انتهای سیلندر است.

جواب: $W = \frac{1}{2}\rho \frac{V^3}{(st)^2}$

۷) برای اندازه‌گیری شتاب از یک لوله شیشه‌ای بسته به صورت کمانی از دایره که پر از آب است، استفاده می‌شود. حباب کوچکی از هوا داخل این لوله قرار دارد. اگر لوله شیشه‌ای شتابی برابر a بگیرد، زاویه شعاعی که حباب با خط قائم، α، می‌سازد را بیابید. لوله را در صفحه قائم فرض کنید و از جرم حباب هوا صرفنظر کنید. (آمادگی برای المپیاد فیزیک- کانادا ۲۰۰۵)

راهنمایی: با رسم دیاگرام نیروهای وارد بر حباب درمی‌یابیم که از دید ناظر درون لوله ۴ نیرو بر حباب وارد می‌شود:

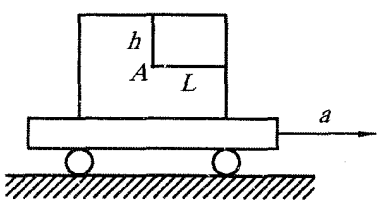
۱- مؤلفه ارشمیدس در جهت قائم ρVg ۲-مؤلفه ارشمیدس در جهت افقی ρVa

۳- نیروی وزن mg ۴- نیروی اینرسی ma

از چگالی هوا در برابر چگالی آب صرفنظر کنید.

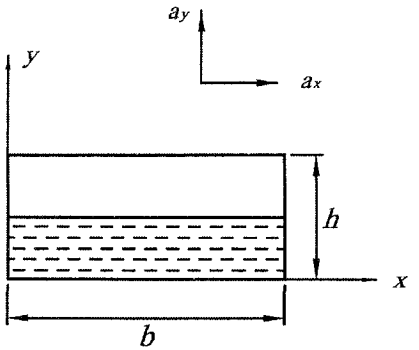
جواب: $\alpha = arctan(\frac{a}{g})$

۸) مخزن پر از آبی به شکل مکعب روی ارابه‌ای که با شتاب ثابت a حرکت می‌کند، قرار دارد. مطلوب است محاسبه فشار در نقطه A به شرطی که مخزن با درپوشی محکم بسته شده باشد و در حال سکون آب داخل مخزن هیچ نیرویی بر آن وارد نکند.



جواب: $P_A = \rho(gh + aL)$

۹) مخزنی را در نظر بگیرید که قاعده آن مربع شکل به ضلع b و ارتفاع مخزن برابر h است. مخزن را تا نیمه پر از مایعی به چگالی ρ می‌کنیم و به آن شتاب می‌دهیم. بطوریکه $a_x = g/2$ و $a_y = -g/4$. تحت این شرایط فشار در کف ظرف بر حسب x به چه صورتی تغییر می‌کند؟



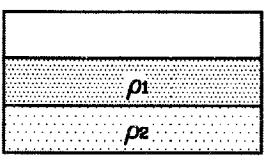
راهنمایی: به کمک رابطه (۲-۵) شیب سطح مایع را بیابید. با توجه به اینکه در سطح آزاد جدید فشار (فشار نسبی) برابر صفر است.

جواب: $P = \frac{۳}{۸}\rho g b - \frac{۱}{۲}\rho g x$

۱۰) ثابت کنید در مایعی که مانند جسم جامد حرکت می کند، فشار در هر نقطه از این مایع در تمامی جهات آن یکسان است.

راهنمایی: از برهان خلف استفاده کنید.

۱۱) ظرفی بسته حاوی دو مایع مخلوط نشدنی است. بطوریکه $\rho_۲ > \rho_۱$. ثابت کنید هنگامی که جعبه تحت شتاب یکنواخت a_x قرار می‌گیرد، سطح فشار صفر و سطح تماس دو مایع با هم موازیند.



۱۲) اگر مخلوطی از آب و قطرات بسیار کوچک روغن را در دستگاه گریز از مرکز قرار دهیم و با سرعت زیاد بچرخانیم، با توجه به اینکه از دید ناظر متصل به دستگاه احساس می‌شود که نیرویی به سمت خارج از مرکز بر او وارد می‌شود بگویید چه بلایی بر اثر قطرات روغن می‌آید.

جواب: قطرات روغن به سمت مرکز حلقه حرکت می‌کنند.

بخش II

حرارت

فصل ۳

انبساط اجسام

۱.۳ دما

همهٔ ما با مفهوم دما آشنا هستیم. در واقع دما معیاری است برای سردی یا گرمی اجسام و گرما و سرما از مفاهیمی هستید که ما آنها را از طریق تجربه یاد می‌گیریم. اما این نکته را در ذهن داشته باشید که احساس ما از دما، همیشه قابل اطمینان نیست. مثلاً اگر سه ظرف با دماهای به ترتیب گرم، ولرم و سرد داشته باشیم و دست راست را در ظرف گرم و دست چپ را در ظرف سرد فرو کنیم، گرمی و سردی ظروف را حس می‌کنیم. اما اگر هر دو دست را در ظرف وسط (ظرف ولرم) فرو کنیم دست راست احساس سردی و دست چپ احساس گرمی می‌کند. (عکس یکدیگر) بنابراین احساس ما از دما نمی‌تواند معیار خوبی برای تعیین دمای اجسام باشد. تجربهٔ دیگری که می‌تواند راهگشا باشد این است که در یک روز زمستانی به شما دو صندلی داده می‌شود یکی فلزی و دیگری چوبی با نشستن روی صندلی فلزی احساس سردی بیشتری می‌کنید تا اینکه روی صندلی چوبی بنشینید در حالی‌که هر دو صندلی در یک دما قرار دارند. این تفاوتی که از حس ما ایجاد می‌شود به خاطر این است که فلز رسانندگی خوبی دارد و انرژی گرمایی بدن ما را سریعتر از چوب به نقاط دیگر منتقل می‌کند و لذا ما احساس سردی می‌کنیم. با توجه به این دو مثال در می‌یابیم که برای کمیتی مثل دما باید آن را به طور اساسی بررسی کرد و تنها نباید به احساس اکتفا نمود. دما یکی از هفت کمیت اصلی در سیستم آحاد بین‌المللی SI است که شما با سه کمیت آن یعنی جرم، طول و زمان از قبل آشنا هستید. امروزه برای اندازه‌گیری دما از وسیله‌ای به نام دماسنج استفاده می‌کنند. چهار مقیاس برای دما وجود دارد که عبارتند از:

۱) سلسیوس (سانتیگراد) ۲) کلوین ۳) فارنهایت ۴) رانکین

در کارهای علمی فقط مقیاس‌های سلسیوس و کلوین به کار برده می‌شوند. به طور کلی هر کمیتی که با دما تغییر کند (مثل طول، رنگ و ...) می‌تواند به عنوان اساس کار یک دماسنج مورد استفاده قرار گیرد. در مقیاس سلسیوس (T_C) نقطهٔ انجماد آب را با علامت $0°C$ و نقطه‌ای که آب به جوش می‌آید را متناظر با $100°C$ در نظر می‌گیرند و این فاصله را به صد قسمت تقسیم می‌کنند. مقیاس درجه‌ها در دماسنج کلوین (T_K) عیناً برابر با مقیاس درجه‌های سلسیوس است با

این تفاوت که نقطهٔ انجماد آب را در $۲۷۳/۱۵K$ و نقطهٔ جوش آب را در ۳۷۳/۱۵ در نظر می‌گیرند. لذا بین این دو دما رابطهٔ زیر برقرار می‌شود.

$$T_k = T_c + ۲۷۳/۱۵ \qquad (۱-۳)$$

در فصل‌های آتی توضیح خواهیم داد که عدد ۲۷۳/۱۵ از کجا آمده است. هنگامی که دستگاه یکاهای انگلیسی به کار برده شود (عمدتاً در کشور امریکا) اندازه‌گیری دما با مقیاس فارنهایت صورت می‌گیرد در این مقیاس، نقطهٔ انجماد آب را $۳۲°F$ و نقطهٔ جوش آب را $۲۱۲°F$ اختیار کرده و این فاصله را به ۱۸۰ قسمت تقسیم می‌کنند. لذا رابطهٔ بین دو دمای سلسیوس و فارنهایت به شکل زیر خواهد بود.

$$T_F = \frac{۱۸۰}{۱۰۰}\ T_C + ۳۲$$

یا

$$T_C = \frac{۵}{۹}\ (T_F - ۳۲) \qquad (۲-۳)$$

همانطور که برای سلسیوس دمای مطلق کلوین را تعریف کردیم برای مقیاس فارنهایت دمای مطلق رانکین تعریف می‌شود که با هم به صورت زیر رابطه دارند.

$$T_R = T_F + ۴۵۹/۶۷ \qquad (۳-۳)$$

۲.۳ تبدیل مقیاس دماها به یکدیگر

یک راه ساده برای تبدیل واحد دماها به یکدیگر این است که فرض کنیم مقیاس دما نسبت به یکدیگر به صورت خطی تغییر می‌کند. به عنوان مثال می‌خواهیم رابطهٔ (۳-۲) را اثبات کنیم. در ابتدا فرض می‌کنیم رابطهٔ این دو دما به صورت خطی $T_F = mT_C + b$ باشد که m و b مجهولاتی هستند که به دنبال آنهاییم (درست مثل معادلهٔ خط یعنی $y = mx + b$) حال از فرض استفاده می‌کنیم. اگر $T_C = ۰$ باشد می‌دانیم $T_F = ۳۲$ است لذا با جایگذاری داریم:

$$۳۲ = m \times ۰ + b \quad (۱)$$

از طرفی اگر $T_C = ۱۰۰$ باشد $T_F = ۲۱۲$ است لذا:

$$۲۱۲ = m \times ۱۰۰ + b \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ از} \rightarrow b = ۳۲$$

$$(۲) \text{ و } (۱) \text{ از} \rightarrow ۲۱۲ = ۱۰۰m + ۳۲ \rightarrow m = \frac{۱۸۰}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow T_F = \frac{۱۸۰}{۱۰۰} Tc + ۳۲$$

نکته: باتوجه به اینکه در رابطه خطی $y = mx + b$ با دانستن m و b (دو مقدار) معادله خط معلوم می‌شود لذا اگر در مسأله‌ای با دادن دو دما، دو دماسنج را به هم ربط داد نشان می‌دهد که رابطهٔ بین دو دماسنج به‌صورت خطی است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. دماسنجی که طریقهٔ مدرج کردن آن معلوم نیست دمای $۵°C$ را ۵۰ درجه و دمای $-۲۰°C$ را ۱۰ درجه نشان می‌دهد. این دماسنج در چه دمایی با دماسنج سلسیوس یک

عدد را نشان می‌دهند؟

الف) -۴۰ ب) $+۳۰$ ج) -۷۰ د) هیچکدام

(اولین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

حل. فرض می‌کنیم مقیاس این دماسنج نامعلوم T_x باشد. از طرفی با توجه به اینکه صورت مسأله با دادن دو مقدار از هر دماسنج این دو دماسنج را به هم ربط داده است لذا رابطهٔ این دو دماسنج خطی است بنابراین می‌توان نوشت:

$$T_x = mT_c + b$$

حال مقادیر را جایگذاری می‌کنیم.

$$T_c = ۵, T_x = ۵۰ \rightarrow ۵۰ = m \times ۵ + b \qquad (۱)$$

$$T_c = -۲۰, T_x = ۱۰ \rightarrow ۱۰ = m \times (-۲۰) + b \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \rightarrow b = ۴۲, m = ۱/۶ \rightarrow T_x = ۱/۶T_c + ۴۲ \qquad (۳)$$

حال دمایی که $T_x = T_c$ باشد را از رابطهٔ (۳) می‌یابیم.

$$T_x = T_c \rightarrow \overset{\text{از } (۳)}{\longrightarrow} T_c = ۱/۶T_c + ۴۲ \rightarrow T_c = -۷۰, T_x = -۷۰$$

گزینهٔ «ج» صحیح است.

ممکن است در مقیاسهای جدید رابطهٔ بین دو مقیاس به شکل خطی نباشد مثلاً به صورت یک معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی $y = ax^۲ + bx + c$ باشد لذا برای یافتن رابطهٔ بین دو مقیاس باید سه مجهول c, b, a را بیابیم در نتیجه در صورت مسأله باید از هر مقیاس سه دما را به هم ارتباط داده باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. دماسنجی با مقیاس نامعلوم دمای $۰°C$ را ۲۰ درجه، دمای $۵۰°C$ را با ۱۴۰ درجه و دمای $-۵°C$ را با ۱۵۰ درجه نشان می‌دهد. رابطهٔ بین این دو مقیاس را بیابید.

حل. چون سه دما را به هم ارتباط داده لذا رابطه به صورت درجهٔ دوم است بنابراین اگر مقیاس دمای مجهول را با T_x نشان دهیم آنگاه:

$$T_x = aT_c^۲ + bT_c + c$$

$$T_c = ۰, T_x = ۲۰ \rightarrow ۲۰ = a \times ۰ + b \times ۰ + c \rightarrow c = ۲۰ \qquad (۱)$$

$$T_c = ۵, T_x = ۱۴۰ \rightarrow ۱۴۰ = ۲۵a + ۵b + ۲۰ \qquad (۲)$$

$$T_c = -۵, T_x = ۱۵۰ \rightarrow ۱۵۰ = ۲۵a - ۵b + ۲۰ \qquad (۳)$$

$$(۳), (۲), (۱) \rightarrow a = ۵, b = -۱, c = ۲۰$$

$$\rightarrow T_x = ۵T_c^۲ - T_c + ۲۰$$

مثال. یک دماسنج جیوه‌ای را به این شکل مدرج می‌کنیم که نقطه ذوب یخ را صفر و نقطه جوش آب را صد قرار می‌دهیم و بین آنها را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. حال دماسنج دیگری را که در آن مایع غیر مشخصی است به کمک این دماسنج جیوه‌ای مدرج

می‌کنیم. به این ترتیب که در مجاورت اجسام مختلف، هر دمایی را که دماسنج جیوه‌ای نشان می‌دهد روی دماسنج جدید می‌نویسیم. کدامیک از احکام زیر درست است؟

الف) در دماسنج جدید نیز بین نقطه ذوب یخ و جوش آب به صد قسمت مساوی تقسیم شده است.

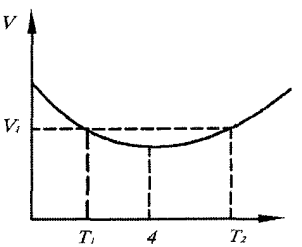
ب)ممکن است در دماسنج جدید فاصله درجات متوالی یکسان نباشد.

ج) این امکان وجود دارد که دماسنج جدید دو دمای مختلف را در یک نقطه نشان دهد.

د) ب و ج هر دو درست است.

(اولین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

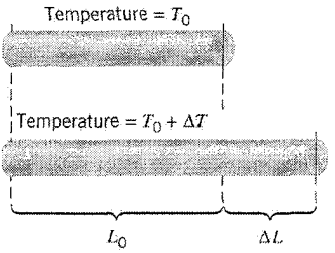
حل. در دماسنج جیوه‌ای، افزایش حجم جیوه نسبت به دما به صورت خطی تغییر می‌کند اما مایعی که در دماسنج دوم به کار رفته می‌تواند به صورت غیر خطی بر حسب دما تغییر کند. یعنی به صورت تابعی از درجه دوم و یا بالاتر. یک مثال آن آب است که نمودار تغییرات حجم آن بر حسب دما به صورت زیر می‌باشد.



همانطور که ملاحظه می‌شود، در دو دمای T_1, T_2 حجم آب یکسان است. بنابراین به دلیل غیر خطی بودن مایع فاصله درجات می‌تواند یکسان نباشد و در دو دما یک مقدار را داشته باشد. لذا گزینه «د» صحیح است.

۳.۳ انبساط گرمایی طولی

به تجربه ثابت شده است که اکثر مواد هنگام گرم شدن انبساط یافته و موقع سرد شدن منقبض می‌شوند. از موارد استثنای آن می‌توان از آب بین دماهای ۰ تا ۴ درجه و لاستیک نام برد که به صورت عکس عمل می‌کنند. این انبساط و انقباض بعضی اوقات مفید و بعضی اوقات مزاحم و اسباب دردسر هستند. مثلاً اگر شما در آینده مهندس عمران می‌خواهید بشوید باید توجه داشته باشید که در هنگام طراحی پل یک انتها را باید ثابت و محکم کنید و انتهای دیگر را روی استوانه یا غلتکی قرار دهید تا هنگام تغییرات دما اجازه حرکت به پل داده شود. یا اگر پزشک می‌شوید برای پر کردن دندان باید مواظب باشید که از موادی استفاده کنید که خواص انبساط گرمایی آن با مینای دندان‌ها یکسان باشد. حال مطابق شکل، میله‌ای را در نظر بگیرید که در دمای t_0 دارای طول L_0 باشد، اگر دما افزایش یابد و به t برسد، طول میله هم افزایش می‌یابد و به L می‌رسد. آزمایش نشان می‌دهد که هرگاه $\Delta t = t - t_0$ خیلی زیاد نباشد، آنگاه تغییر طول میله برابر است با:



$$\Delta L = L_\circ \alpha \Delta T \qquad (۴-۳)$$

$$L = L_\circ (۱ + \alpha \Delta T) \qquad (۵-۳)$$

در رابطهٔ فوق α ثابتی است که ضریب انبساط گرمایی طولی نام دارد.

نکتهٔ ۱: در رابطهٔ (۳-۴) می‌توان هم از مقیاس سلسیوس استفاده کرد و هم از مقیاس کلوین.

نکتهٔ ۲: با توجه به نکتهٔ ۱ واحد α می‌تواند $\frac{۱}{^\circ C}$ یا $\frac{۱}{K}$ (بر کلوین باشد)

نکتهٔ ۳: α به جنس ماده بستگی دارد و به کمک آزمایش تعیین می‌شود.

مثال. طول دو میلهٔ فلزی در دمای θ برابر L_A و L_B و ضریب انبساطی طولی آنها λ_A و λ_B است. اگر بخواهیم اختلاف طول آنها در دماهای مختلف ثابت بماند، باید:

الف) $\frac{L_A}{L_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ ب) $\frac{L_A}{L_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A}$ ج) $\lambda_A = \lambda_B$ د) $\lambda_A \lambda_B = ۱$

(دومین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

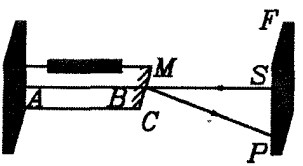
حل. اگر تغییر طول دو میله به ازای تغییر دما به میزان $\Delta\theta$ به ترتیب برابر ΔL_A و ΔL_B باشند آنگاه به کمک رابطهٔ (۳-۴) می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}\Delta L_A &= L_A \lambda_A \Delta\theta \\ \Delta L_B &= L_B \lambda_B \Delta\theta\end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta L_A = \Delta L_B \rightarrow L_A \lambda_A \Delta\theta = L_B \lambda_B \Delta\theta$$

$$\rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A}$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال. دستگاه شکل زیر یک وسیلهٔ اندازه‌گیری دماست. در این دستگاه، انبساط میلهٔ آلومینیمی AB که طول آن در دمای صفر درجهٔ سلسیوس برابر $۴۰cm$ است، باعث می‌شود آینهٔ M حول لولای C چرخیده و باریکهٔ نوری که از چشمهٔ S بر آن می‌تابد را منعکس کند، در نتیجه بر روی پردهٔ F نقطهٔ P روشن می‌شود. دستگاه چنان است که در دمای صفر درجه سلسیوس سطح آینه بر میله و باریکهٔ نور تابیده عمود است و فاصلهٔ BC برابر $۲cm$ است.



الف) فرض کنید بر روی پردهٔ F محل نقطهٔ روشن P را حداکثر با دقت $0/5cm$ بتوان تعیین کرد. فاصلهٔ پرده از آینه چقدر باشد تا خطای دستگاه در اندازه‌گیری دما حداکثر یک درجهٔ سلسیوس باشد.

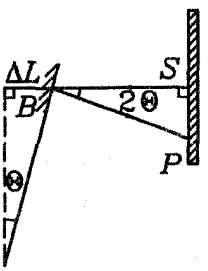
ب) حداکثر در ۳ سطر توضیح دهید که برای بالا بردن دقت دستگاه چه کارهایی می‌توان کرد؟ (ضریب انبساطی طولی آلومینیوم $2/6 \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$ است.)

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. الف) ابتدا تغییر طول میلهٔ AB در اثر افزایش درجهٔ حرارت به میزان یک درجهٔ سلسیوس را می‌یابیم.

$$\Delta L = L\alpha\Delta T = 40 \times 2/6 \times 10^{-5} \times 1 = 1/04 \times 10^{-3} cm$$

حال با توجه به شکل زیر، انحراف آینه از وضعیت قائم به صورت زیر بدست می‌آید.



$$\sin\theta = \frac{\Delta L}{BC} = \frac{1/04 \times 10^{-3}}{2} = 5/2 \times 10^{-4}$$

چون زاویهٔ θ بسیار کوچک است می‌توان از تقریب $\sin\theta \simeq \theta$ استفاده کرد در نتیجه $\theta = 5/2 \times 10^{-4}$ همچنین از مبحث نور می‌دانیم اگر آینه به اندازهٔ θ دوران کند با ثابت ماندن پرتوی تابش، پرتوی بازتابش به اندازهٔ 2θ دوران خواهد کرد لذا زاویهٔ $P\hat{B}S = 2\theta$ می‌شود.

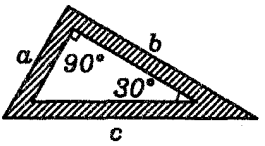
$$\rightarrow \tan 2\theta = 2\theta = \frac{SP}{BS} \rightarrow 2 \times (5/2 \times 10^{-4}) = \frac{0/5}{BS}$$
$$\rightarrow BS = 480 cm$$

ب) برای افزایش دقت باید کاری کرد که به ازای تغییرات کم دما، جابه‌جایی SP زیادی تولید شود. با توجه به روابط قسمت الف می‌توان نوشت.

$$\theta = \frac{\Delta L}{BC}, 2\theta = \frac{SP}{BS} \rightarrow SP = 2BS(\frac{\Delta L}{BC})$$

لذا باید تا حد امکان BC را کوچک و طول‌های ΔL و BS را بزرگ در نظر گرفت از طرفی چون $\Delta L = L_0\alpha\Delta T$ است باید طول اولیهٔ میلهٔ AB و ضریب انبساط طولی آن را بزرگ در نظر گرفت تا بدین وسیله دقت دستگاه بالاتر رود.

مثال. سه میلهٔ a، b و c مطابق شکل زیر به هم متصل شده‌اند. ضریب انبساط خطی میله‌ها به ترتیب α_a و α_b و α_c است به طوری که $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$. می‌خواهیم در هر دمایی زاویهٔ بین a و b، 90° بماند. نسبت $\frac{\alpha_c}{\alpha}$ کدام است؟ (نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $\sqrt{۲}$ ب) ۲ ج) ۱

د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۳})$

حل: فرض کنید در دمای ثانویهٔ t، طول‌های سه میله به ترتیب برابر $a_۲$ و $b_۲$ و $c_۲$ شود چون با فرض مسأله، مثلث هنوز قائم‌الزاویه است در نتیجه:

$$a_۲^۲ + b_۲^۲ = c_۲^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی به کمک فرمول انبساط گرمایی خطی داریم:

$$a_۲ = a(۱+\alpha_a \Delta T) \qquad b_۲ = b(۱+\alpha_b \Delta T) \qquad c_۲ = c(۱+\alpha_c \Delta T)$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱) داریم.

$$a^۲(۱+\alpha_a \Delta T)^۲ + b^۲(۱+\alpha_b \Delta T)^۲ = c^۲(۱+\alpha_c \Delta T)^۲$$

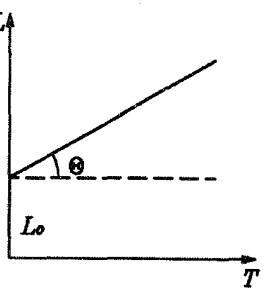
همچنین می‌دانیم $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$ و $a^۲ + b^۲ = c^۲$ در نتیجه:

$$(a^۲+b^۲)(۱+\alpha\Delta T)^۲ = c^۲(۱+\alpha_c \Delta T)^۲$$
$$\rightarrow (۱+\alpha\Delta T)^۲ = (۱+\alpha_c \Delta T)^۲ \rightarrow ۱+\alpha\Delta T = ۱+\alpha_c \Delta T$$
$$\rightarrow \frac{\alpha c}{\alpha} = ۱$$

گزینهٔ «ج» صحیح است.

۴.۳ نمودار انبساط گرمایی

در حل مسائل بعضی اوقات بهتر است به جای استفاده از رابطهٔ $L = L_۰(۱+\alpha\Delta T)$ از نمودار آن استفاده کنیم. فرض کنید محور افقی دما (T) و محور عمودی طول ثانویه L باشد، آنگاه در می‌یابیم رابطهٔ فوق در مختصات $L-T$ به شکل یک خط راست است.



$$m = \tan\theta = L_۰\alpha$$

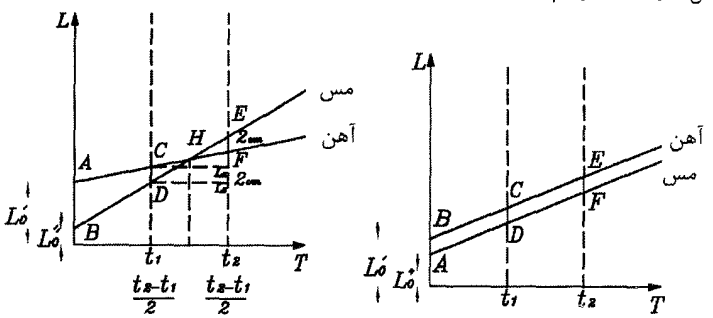
اگر معادله انبساط گرمایی را به صورت یک معادلهٔ خط بازنویسی کنیم داریم:

$$L = L_۰\alpha T + L_۰(۱-\alpha T_۰)$$

همانطور که از رابطهٔ فوق ملاحظه می‌شود شیب خط برابر $L_\circ\alpha$ است که هم بستگی به طول اولیه و هم بستگی به ضریب انبساط طولی α دارد. همچنین عرض از مبدأ خط برابر $L_\circ(1-\alpha T_\circ)$ می‌باشد که اگر فرض کنیم در دمای $T_\circ = 0$ طول اولیهٔ میله برابر $L_\circ$ باشد آنگاه عرض از مبدأ برابر $L_\circ$ می‌شود.

مثال. اگر مقدار اختلاف طول یک خط کش آهنی با یک خط کش مسی در دمای $t_1 = 50°C$ و $t_2 = 450°C$ به یک اندازه و برابر $L = 2cm$ باشد، $L'_\circ$ طول خط‌کش آهنی و $L''_\circ$ طول خط‌کش مسی را در دمای $t = 0°C$ محاسبه کنید. ضریب انبساط طولی آهن و مس به ترتیب برابر $\alpha_1 = 12\times10^{-6}\frac{1}{°C}$ $\alpha_2 = 17\times10^{-6}\frac{1}{°C}$ است.

حل. برای نمودارهای $L-T$ آهن و مس دو حالت در این مسأله قابل فرض است که در شکل‌های «الف» و «ب» نشان داده شده است.



در این مسأله چون طول اولیه $L_\circ$ را در دمای $T_\circ = 0$ در نظر گرفته لذا عرض از مبدأ هر نمودار برابر طول اولیهٔ میله‌ها می‌باشد. دقت کنید چون شیب نمودار هم به طول اولیه و هم به ضریب انبساط گرمایی بستگی دارد لذا هر دو حالت امکان‌پذیر است هر چند که $\alpha_2 > \alpha_1$ باشد.

حالت الف) با استفاده از فرض می‌دانیم $CD = EF = 2cm$ از موازی بودن خطوط در می‌یابیم:

$$AB = 2cm \rightarrow L'_\circ - L''_\circ = 2cm \qquad (1)$$

از طرفی چون دو خط موازی هستند لذا شیب دو خط با هم برابر است در نتیجه:

$$L'_\circ\alpha_1 = L''_\circ\alpha_2 \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow L'_\circ = 6/8 \quad , L''_\circ = 4/8cm \qquad (1)$$

حالت ب) با توجه به شکل داریم:

$$EG = 2 + 2 + x = 4 + x \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به شیب خطوط و استفاده از تانژانت زاویهٔ شیب داریم:

$$L'_\circ\alpha_1 = \frac{x}{t_2 - t_1} \rightarrow x = 400L'_\circ\alpha_1 \qquad (2)$$

$$L''_\circ\alpha_2 = \frac{EG}{t_2 - t_1} \rightarrow EG = 400L''_\circ\alpha_2 \qquad (3)$$

$$(3),(2),(1) \rightarrow 400L''_\circ\alpha_2 = 4 + 400L'_\circ\alpha_1 \qquad (4)$$

از طرفی از برابری مثلث‌های $\overset{\triangle}{CHD}$ و $\overset{\triangle}{EHF}$ می‌توان دریافت که مختصات طولی نقطهٔ H درست در وسط $t_۲, t_۱$ است در نتیجه از تشابه مثلث‌های $\overset{\triangle}{CHD}$ و $\overset{\triangle}{AHB}$ می‌توان نوشت.

$$\frac{CD}{AB} = \frac{h_۱}{h_۲}$$

که $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاعهای دو مثلث می‌باشند که به ترتیب بر قاعده‌های CD و AB عمودند از طرفی

$$h_۲ = t_۱ + \frac{t_۲ - t_۱}{۲} = ۲۵۰ \quad , \quad h_۱ = \frac{t_۲ - t_۱}{۲} = ۲۰۰$$

$$\rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{۲۰۰}{۲۵۰} \rightarrow AB = \frac{۲۵۰}{۲۰۰} \times ۲ = ۲/۵$$

$$\rightarrow L'_۰ - L''_۰ = ۲/۵ \qquad (۵)$$

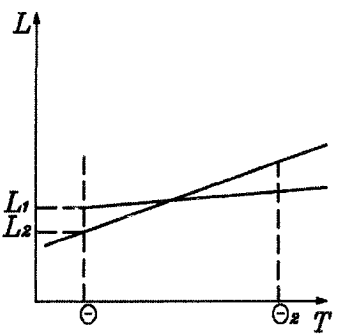
$$(۵), (۴) \rightarrow L'_۰ = ۲۰۸/۵cm, L''_۰ = ۲۰۶cm$$

مثال. طول دو میلهٔ آهنی و مسی در دماهای 0 به ترتیب $l_۱$ و $l_۲$ $(l_۲ < l_۱)$ و ضریب انبساط خطی آنها $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ است. فرض کنید $\alpha_۲$ و $\alpha_۱$ مستقل از دما هستند. کدام گزینه درست است؟

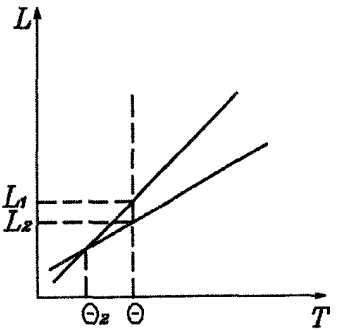
الف)اگر $\alpha_۱ l_۱ < \alpha_۲ l_۲$ باشد، بیشترین اختلاف طول آنها در دمای θ است.
ب)اگر $\alpha_۱ l_۱ > \alpha_۲ l_۲$ باشد، در هیچ دمایی اختلاف طول دو میله صفر نمی‌شود.
ج) اگر $\alpha_۱ l_۱ \neq \alpha_۲ l_۲$ باشد، دمای دیگری به جز θ وجود دارد که اختلاف طول آنها در آن دما $l_۱ - l_۲$ شود.

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

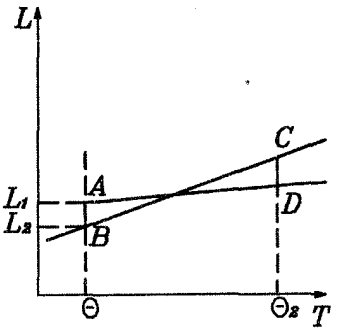
حل. به کمک نمودار می‌توانید به راحتی پاسخ دهید. شکل زیر برای حالت «الف» یک مثال نقض محسوب می‌شود. ملاحظه می‌شود که در دمای $\theta_۲$ اختلاف طول دو میله از حالت اول بیشتر است.



شکل زیر نیز مثال نقضی برابر حالت «ب» است. در دمای $\theta_۲$ اختلاف طول دو میله صفر شده است.



بنابراین گزینهٔ «ج» درست است که در شکل زیر نشان داده شده است.



اختلاف طول در حالت اولیه یعنی AB با اختلاف طول L در دمای θ_2 یعنی CD برابر شده است.

اندازه‌گیری با خط‌کشی که خود تغییر طول می‌دهد.

می‌دانیم علم فیزیک بر پایهٔ اندازه‌گیری بنا شده است و هر چه‌قدر اندازه‌گیری ما دقیق‌تر باشد نتایج به واقعیت نزدیک‌ترند. از طرفی می‌دانیم در اثر تغییر دما طول خط‌کش اندازه‌گیری نیز تغییر می‌یابد. می‌خواهیم اندازهٔ اجسام را با یک خط‌کش که خود تغییر طول می‌دهد بیابیم.

فرض کنید α_1, α_2 به ترتیب ضریب انبساط طولی خط‌کش و میله باشند و خط‌کش، طول میله را در دمای T_1 برابر L_1 اندازه‌گیری کند. معنی این جمله این است که اگر خط‌کش را در کنار میله قرار دهیم و واحدهای خط‌کش (مثلاً بر حسب سانتیمتر) را بشماریم، می‌گوییم طول میله مثلاً $20cm$ است یعنی طول میله ۲۰ برابر طول هر واحد (سانتیمتر) خط‌کش است. در حالت کلی به اینصورت بیان می‌کنیم که طول میله، L_1 برابر طول هر واحد خط‌کش است. در نتیجه اندازهٔ میله به صورت عدد $L_1 u_1$ بیان می‌شود، که u_1 طول واحد خط کش در دمای T_1 است. در دمای T_2، $(T_2 > T_1)$، طول واحد خط‌کش نیز افزایش یافته و برابر $u_2 = u_1(1 + \alpha_2 \Delta T)$ می‌گردد. حال فرض کنید در دمای T_1 طول

خط‌کش استاندارد و واقعی باشد بنابراین طول واقعی میله در T_1 است که برابر L_1u_1 می‌باشد. در دمای T_2 طول واقعی میله برابر $L_2 = L_1u_1(1+\alpha_2\Delta T)$ خواهد بود. حال خط‌کش را در کنار میله قرار می‌دهیم. اگر طول واقعی میله را بر طول واحد خط‌کش در حالت ثانویه تقسیم کنیم، مقدار بدست آمده، عدد خوانده شده از روی خط‌کش را نشان می‌دهد لذا:

$$\text{طول خوانده شده از روی خط‌کش در دمای } T_2 = \frac{\text{طول واقعی میله در حالت ثانویه}}{\text{طول واحد خط‌کش در دمای } T_2} = \frac{L_2}{u_2} = \frac{L_1u_1(1+\alpha_2\Delta T)}{u_1(1+\alpha_1\Delta T)} = \frac{L_1(1+\alpha_2\Delta T)}{(1+\alpha_1\Delta T)} \qquad (۷-۳)$$

برای تفهیم مثالی می‌زنیم. فرض کنید اندازهٔ واقعی طول واحد خط‌کش $1cm$ باشد و با اندازه‌گیری طول میله، طول آن را $20cm$ اندازه می‌گیریم. یعنی طول میله ۲۰ برابر طول واحد خط‌کش است، حال فرض کنید در دمای T_2 طول واحد خط‌کش $2cm$ و طول واقعی میله برابر $30cm$ شود آنگاه طولی که خط‌کش برای میله نشان می‌دهد برابر $\frac{30}{2} = 15cm$ است.

مثال. می‌خواهیم طول یک میلهٔ مسی را به کمک یک خط‌کش آهنی اندازه‌گیری کنیم، اگر دمای محیط در هنگام اندازه‌گیری θ_1 باشد، طول میله L بدست می‌آید. نتیجهٔ اندازه‌گیری طول میلهٔ مسی در محیطی با دمای θ_2 چه خواهد شد؟ $(\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1)$

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $L[1+(\lambda_{Fe}-\lambda_{Cu})\Delta\theta]$ ب) $L[1+(\lambda_{Cu}-\lambda_{Fe})\Delta\theta]$

ج) $L[1+(\lambda_{Cu}-\lambda_{Fe})\Delta\theta]$ د) $L[1+\lambda_{Cu}\Delta\theta]$

حل. با توجه به رابطهٔ (۳-۷) داریم:

$$\text{طول خوانده شده از روی خط‌کش در دمای } \Theta_2 = L' = \frac{L(1+\lambda_{Cu}\Delta\theta)}{(1+\lambda_{Fe}\Delta\theta)}$$

حال عبارت فوق را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم در نتیجه:

$$L' = \frac{L(1+\lambda_{cu}\Delta\theta)(1-\lambda_{Fe}\Delta\theta)}{1-\lambda_{Fe}^2\Delta\theta^2}$$

می‌دانیم λ بسیار کوچک است از طرفی گفتیم رابطهٔ انبساط گرمایی وقتی صادق است که تغییرات دمایی $\Delta\theta$ کوچک باشد لذا از عبارت $\lambda_{Fe}^2\Delta\theta^2$ در برابر ۱ صرف‌نظر می‌کنیم در نتیجه:

$$L' = L(1+\lambda_{Cu}\Delta\theta)(1-\lambda_{Fe}\Delta\theta)$$
$$L' = L[(1+(\lambda_{Cu}-\lambda_{Fe})\Delta\theta - \lambda_{Cu}\lambda_{Fe}\Delta\theta^2]$$

در عبارت فوق نیز می‌توان از جمله $\lambda_{cu}\lambda_{Fe}\Delta\Theta^2$ در برابر سایر جملات صرف‌نظر کرد. (زیرا $\Delta\Theta$ و $\lambda_{cu}\lambda_{Fe}$ بسیار کوچکند) در نتیجه

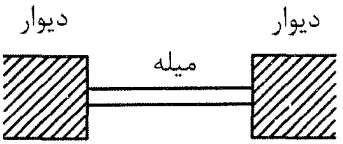
$$L' = L[1+(\lambda_{cu}-\lambda_{Fe})\Delta\Theta]$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

نکته. اگر K عددی کوچک باشد می‌توان از اعداد $K^۲$ و $K^۳$ و ... در برابر ۱ و K صرف‌نظر کرد.

۵.۳ نیرو در اثر انبساط طول

شاید شنیده باشید که گفته می‌شود لولهٔ آب در زمستان به خاطر انبساط آب ترکید. همین مطلب نیز برای اجسام در افزایش حرارت وجود دارد. یعنی اگر میله‌ای را مطابق شکل بین دو دیوار ثابت و محکم قرار دهید با افزایش دما طول میله می‌خواهد افزایش یابد اما دو دیوار نمی‌گذارند لذا این میله به دو دیوار نیرو وارد می‌کند که طبق قانون سوم نیوتن نیروی عکس‌العمل نیز به اجزای داخلی میله وارد می‌شود.



از طرفی می‌دانیم اجسام در اثر نیرو دچار انقباض و انبساط می‌شوند یعنی همانطوری که شما به دو سر یک‌کش لاستیکی نیرو وارد می‌کنید و موجب افزایش طول آن می‌شوید. اگر نیروی کششی به دو سر میلهٔ فولادی وارد کنید، طول میله نیز افزایش می‌یابد منتهی این تغییر طول برای ما محسوس نیست و با اندازه‌گیری‌های دقیق می‌توان این افزایش طول را به اثبات رساند. همین طور اگر میله را تحت فشار قرار دهیم طول آن کم می‌شود. با آزمایش نشان داده شده است که اگر میله‌ای به طول اولیه $L_۰$ با سطح مقطع A را با نیروی F از دو طرف بکشیم تغییر طول میله برابر است با:

$$\Delta L = \frac{FL_۰}{AY} \qquad (۸-۳)$$

در رابطهٔ فوق Y عدد ثابتی است که معروف به مدول یانگ یا مدول کشسانی می‌باشد.

نکتهٔ ۱: از رابطهٔ (۳-۸) داریم:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_۰} = \frac{F}{AY} \qquad (۹-۳)$$

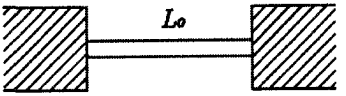
که به ε، کرنش گفته می‌شود.

نکتهٔ ۲: رابطهٔ (۳-۸) را به فرم:

$$F = (\frac{AY}{L_۰})\Delta L \qquad (۱۰-۳)$$

می‌نویسیم و آن را با نیروی وارد بر فنری با ضریب فنریت K یعنی $F = K\Delta x$ مقایسه کرده و درمی‌یابیم، که میله نیز مثل فنر عمل می‌کند منتهی ضریب فنریت آن عددی بزرگ و برابر $K = \frac{AY}{L_۰}$ می‌باشد. شاید شما سؤال کنید که این مدول یانگ چه صیغه‌ای است؟ عجله نکنید. جواب شما در حل مثال زیر است.

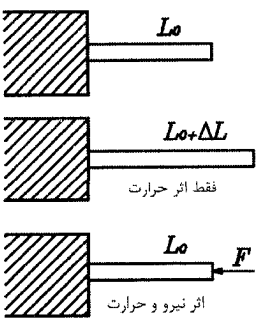
مثال. فرض کنید میله‌ای به طول $L_۰$ با سطح مقطع A و مدول‌یانگ Y بین دو دیوار محکم و ثابت قرار گرفته است. اگر دمای میله به اندازهٔ ΔT افزایش یابد نیرویی که از طرف دیوارها به میله وارد می‌شود چقدر است. (ضریب انبساط طولی میله α است.)



حل. می‌دانیم در اثر افزایش حرارت ΔT، طول میله به میزان $\Delta L = L_\circ \alpha \Delta T$ افزایش می‌یابد اما دیوارها با وارد کردن نیروی فشاری F بر میله باعث می‌شوند که اندازهٔ میله به میزان ΔL کاهش یابد که در نهایت طول میله بدون تغییر می‌ماند لذا از رابطهٔ (۳-۸) می‌توان نوشت،

$$-\Delta L = \frac{-FL_\circ}{AY} \rightarrow \Delta L = \frac{FL_\circ}{AY} = L_\circ \alpha \Delta T$$
$$\rightarrow F = AY\alpha\Delta T$$

در حل اینگونه مسائل بهتر است از اصل جمع آثار (superposition) استفاده کنیم. همانطور که از اسم این اصل پیداست راه کار کلی این است که اثر هر پدیده را حساب کنیم سپس برای جواب نهایی این اثرها را با هم جمع کنیم. برای درک بهتر شما مسألهٔ قبل را با این اصل حل می‌کنیم ابتدا فرض می‌کنیم دیوار سمت راست نباشد در نتیجه میله در اثر افزایش حرارت ΔT، به میزان $\Delta L = L_\circ \alpha \Delta T$ افزایش طول می‌یابد (اثر حرارت بدون تأثیر دیوار) بعد از اینکه میله افزایش طول داد حال اثر دیوار را در نظر می‌گیریم که به صورت نیروی فشاری است. نیروی F دیوار باید به میزانی باشد که دوباره میله را به اندازهٔ $L_\circ$ برساند.

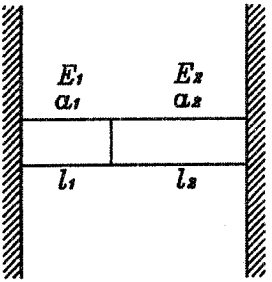


لذا از رابطه (۳-۸) باید $\Delta L = \frac{FL_\circ}{AY}$ باشد از این دو رابطه می‌توان به رابطهٔ $F = AY\alpha\Delta T$ رسید.

نکته: اصل جمع آثار را برای پدیده‌هایی می‌توان به کار برد که به صورت خطی تغییر می‌کنند. مثل تغییر طول ΔL در اثر حرارت یعنی $\Delta L = L_\circ \alpha \Delta T$ یا تغییر طول در اثر اعمال نیرو یعنی:

$$\Delta L = \frac{FL_\circ}{AY}$$

مثال. دو میله که از فلزات مختلفی درست شده‌اند، بین دو دیوار سنگین قرار گرفته‌اند (مطابق شکل) سطح مقطع میله‌ها، A و طولشان به ترتیب l_1 و l_2 است. میله‌ها به اندازهٔ t درجه گرم می‌شوند.



اگر ضریب انبساط گرمایی خطی میله‌ها، α_1 و α_2 و مدول یانگ مواد تشکیل دهندهٔ آنها E_1 و E_2 معلوم باشند، چه نیرویی بین دو میله رد و بدل می‌شود. از تغییر شکل دیوارها صرف‌نظر می‌شود و فقط اثر درجه حرارت را در نظر می‌گیریم.

حل. از اصل جمع آثار استفاده می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم دیوار سمت راست نباشد در اثر افزایش حرارت به میزان t داریم،

$$\Delta L_1 = L_1\alpha_1 t \qquad \Delta l_2 = L_2\alpha_2 t$$

بنابراین تغییر طول کل دو میله ΔL_t برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2 = (L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2)t$$

حال اثر دیوار را بررسی می‌کنیم. فرض کنید دیوار نیروی F را بر انتهای میله ۲ وارد کند چون میله شتاب ندارد لذا نیروی F در تمام مقاطع دو میله وارد می‌شود. در اثر این نیرو دو میله تغییر طول می‌دهند که به کمک رابطهٔ (۳-۸) داریم:

$$\Delta L'_1 = \frac{FL_1}{AE_1} \quad , \quad \Delta L'_2 = \frac{Fl_2}{AE_2}$$

لذا تغییر کل طول دو میله در اثر نیروی F، $\Delta l'_t$ برابر است با:

$$\Delta L'_t = \Delta L'_1 + \Delta L'_2 = \frac{F}{A}(\frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2})$$

چون در نهایت تغییر طول کل دو میله هم در اثر حرارت و هم در اثر فشار دیوارها برابر صفر است، لذا $\Delta L'_t = \Delta L_t$ در نتیجه:

$$(L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2)t = \frac{F}{A}(\frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2})$$

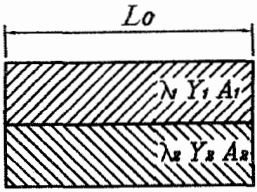
$$\rightarrow F = \frac{At(L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2)}{\frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2}}$$

مثال. الف) دو فنر یکسان با ثابت فنر K را به طور متوالی به هم می‌بندیم. ثابت فنر حاصل چقدر است؟

ب) دو فنر یکسان با ثابت فنر k را به طور موازی به هم می‌بندیم. ثابت فنر حاصل چقدر است؟

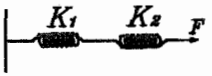
ج) هر میله را می‌توان شبیه فنری در نظر گرفت که طول آن تحت کشش و فشار عوض می‌شود. فرض کنید ثابت فنر میله‌ای از یک جنس معین، به طول واحد و مساحت مقطع واحد، Y باشد، به Y مدول‌یانگ می‌گویند. ثابت فنر میله‌ای از همین جنس به طول L و مساحت مقطع A چقدر است؟

د) دو میله از دو جنس مختلف در نظر بگیرید. در دمای T_0، طول هر میله L_0 است. مطابق شکل زیر این دو میله را به هم جوش داده‌اند.



ضریب انبساط طولی میله‌ها $\lambda_۱, \lambda_۲$ و مساحت مقطع میله‌ها $A_۱, A_۲$ و مدول‌یانگ میله‌ها $Y_۱$ و $Y_۲$ است. میله‌ها را گرم می‌کنیم. چون ضریب انبساط میله‌ها با هم فرق می‌کند، افزایش طول ناشی از گرم شدن میله‌ها یکسان نیست اما میله‌ها به هم جوش خورده‌اند و اگر مساحت مقطع‌شان به حد کافی زیاد باشد، تقریباً خم نمی‌شوند. بنابراین در یکی کشش و در دیگری فشار به وجود می‌آید، به طوری که طول دو میله در دمای T یکسان می‌شود. ثابت فنر این دو میله را همان ثابت فنرشان در دمای $T_۰$ بگیرید. این طول چقدر است؟ (سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۲)

حل. الف) می‌دانیم نیروی وارد شده بر هر فنر برابر F است لذا اگر $\Delta x_۱, \Delta x_۲$ افزایش طول هر فنر باشد آنگاه:



$$F = K_۱\Delta x_۱, F = K_۲\Delta x_۲ \quad (۱)$$

اگر جابه‌جایی کل دو فنر Δx_t باشد آنگاه:

$$F = K_{eq}\Delta x_t \quad (۲)$$

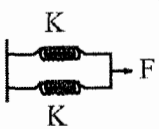
K_{eq}: ثابت فنر معادل

از طرفی

$$\Delta x_t = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ \quad (۳)$$

$$(۳), (۲), (۱) \rightarrow \frac{۱}{Keq} = \frac{۱}{K_۱} + \frac{۱}{K_۲} \xrightarrow{\text{در این مثال}} K_{eq} = \frac{K}{۲}$$

ب) از یکسان بودن فنرها می‌توان دریافت که نیروی وارد بر هر فنر برابر $\frac{F}{۲}$ است. و جابه‌جایی دو فنر با هم برابر و مساوی Δx می‌باشد. اگر به جای این دو فنر، فنر معادل Keq با جابه‌جایی Δx_t را قرار دهیم بدون اینکه شرایط دچار تغییرات شود آنگاه:



$$\Delta x_t = \Delta x$$
$$\frac{F}{۲} = K_۱\Delta x \quad (۱)$$
$$\frac{F}{۲} = K_۲\Delta x \quad (۲)$$
$$F = K_{eq}\Delta x_t = K_{eq}\Delta x \quad (۳)$$

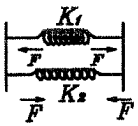
$$(۳),(۲),(۱) \rightarrow Keq = K_۱ + K_۲ \xrightarrow{\text{در این مثال}} Keq = ۲K$$

ج) با استفاده از رابطهٔ (۳-۱۰)، ثابت فنر میله‌ها برابر $K = \frac{AY}{L}$ می‌شود.

د) در مبحث فنرها می‌دانیم هرگاه نیروی دو فنر متصل به هم یکی باشد، دو فنر به صورت سری به هم متصل شده‌اند و هرگاه جابه‌جایی دو فنر متصل به هم یکی باشد، آن دو فنر به صورت موازی هستند. برای حل این قسمت از اصل جمع آثار استفاده می‌کنیم. فرض کنید این دو میله به هم متصل نباشند. در اثر افزایش درجهٔ حرارت ΔT طول آنها به ترتیب برابر است با:

$$L_۱ = L_۰(۱ + \lambda_۱ \Delta T), L_۲ = L_۰(۱ + \lambda_۲ \Delta T)$$

چون $L_۱ \neq L_۲$ در نتیجه مثل این است که دو فنر با طول‌های اولیه نابرابر را از دو سر به هم وصل کنیم (مطابق شکل) در نتیجه یکی تحت فشار و دیگری تحت کشش قرار می‌گیرید. وقتی دو فنر به حالت تعادل برسند طول ثانویهٔ آنها با هم برابر است $(L'_۱ = L'_۲)$.



همچنین نیروی وارد بر آنها طبق عمل و عکس‌العمل قانون سوم با هم برابر است. از طرفی می‌دانیم ثابت فنر میله‌ها به ترتیب برابر $K_۱ = \frac{Y_۱A_۱}{L_۰}$ و $K_۲ = \frac{Y_۲A_۲}{L_۰}$ می‌باشند. در نتیجه:

$$\Delta L_۱ = L_۱ - L'_۱ = \frac{F}{k_۱} \rightarrow L'_۱ = L_۱ - \frac{F}{k_۱} \quad (۲)$$

$$\Delta L_۲ = L'_۲ - L_۲ = \frac{F}{K_۲} \rightarrow L'_۲ = L_۲ + \frac{F}{k_۲} \quad (۳)$$

(فرض کردیم که فنر اول فشرده شده است.)

$$L'_۱ = L'_۲ \rightarrow L_۱ - \frac{F}{K_۱} = L_۲ + \frac{F}{K_۲} \rightarrow F = \frac{L_۱ - L_۲}{\frac{۱}{K_۱} + \frac{۱}{K_۲}} \quad (۴)$$

$$(۴),(۳),(۲),(۱) \rightarrow \text{طول ثانویه } L'_۱ = L'_۲ = L_۰(۱ + \lambda_۱ \Delta T) - \frac{L_۱ - L_۲}{۱ + \frac{K_۱}{K_۲}}$$

$$= L_۰(۱ + \lambda_۱ \Delta T) - \frac{L_۰ \Delta T(\lambda_۱ - \lambda_۲)}{۱ + \frac{Y_۱A_۱}{Y_۲A_۲}}$$

$$= L_۰[۱ + \frac{\lambda_۱Y_۱A_۱ + \lambda_۲Y_۲A_۲}{Y_۱A_۱ + Y_۲A_۲} \Delta T]$$

۶.۳ انبساط گرمایی سطحی

فرض کنید ورق مسطحی با ضخامت ناچیز به مساحت A_0 موجود است می‌خواهیم تغییر مساحت سطح ورق را در اثر افزایش دمای آن به میزان ΔT بیابیم. می‌دانیم در اثر افزایش حرارت هر ضلع آن افزایش طول می‌یابد بنابراین اگر a و b طول اضلاع اولیهٔ ورق و a' و b' اندازهٔ اضلاع بعد از افزایش حرارت باشند آنگاه:

$$a' = a(1 + \alpha\Delta T)$$

$$b' = b(1 + \alpha\Delta T)$$

بنابراین مساحت ورق در حالت ثانویه A برابر است با:

$$A = a'b' = ab(1 + \alpha\Delta T)^2 = A_0(1 + \alpha\Delta T)^2$$

$$A = A_0(1 + 2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2)$$

چون مقادیر α و ΔT کوچک هستند طبق نکته بیان شده در قبل می‌توان از جملهٔ $\alpha^2\Delta T^2$ در برابر جملات دیگر صرف‌نظر کرد در نتیجه:

$$A \simeq A_0(1 + 2\alpha\Delta T) \quad (11-3)$$

یا

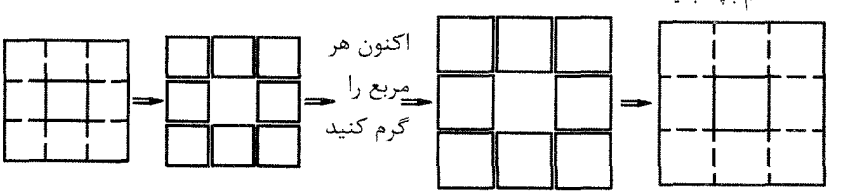
$$\Delta A \simeq A_0 2\alpha\Delta T \quad (12-3)$$

α: ضریب انبساط طولی ورق.

نکته: رابطهٔ (۳-۱۱) و (۳-۱۲) روابط تقریبی هستند زیرا از جملهٔ $\alpha^2\Delta T^2$ صرف‌نظر کردیم.

۷.۳ هیچ هم منبسط می‌شود

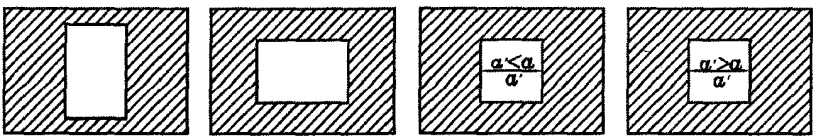
یک سوراخ مربعی را در یک قطعه فلز به شکل مربع در نظر بگیرید. به راحتی معلوم می‌شود که این سوراخ بر اثر حرارت انبساط می‌یابد. برای اثبات کافی است فلز را مطابق شکل زیر به چند مربع تقسیم و آنها را حرارت دهید. پس از انبساط، دوباره مربع‌ها را به هم بچسبانید.



معلوم می‌شود که سوراخ نیز متناسب با بقیهٔ اجزای مربع منبسط شده است.

نکته: هرگاه خواستید انبساط یا انقباض ناشی از یک حفره یا یک سوراخ را در اثر حرارت محاسبه کنید کافی است که فرض کنید حفره یا سوراخ از همان جنس قطعه پر شده است. هر تغییری که بر آن وارد شود برای حفره یا سوراخ نیز وارد می‌شود.

مثال. در میان یک صفحهٔ فلزی مستطیل شکل، حفره‌ای به شکل مربع و به ضلع a ایجاد می‌کنیم. اگر این صفحه را گرم کنیم، شکل حفره مطابق کدام گزینه می‌شود؟ (سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



حل. همانطوری که یک ورق مربع شکل به ضلع a در اثر حرارت به یک مربع با ضلع a' تبدیل می‌شود که $a' > a$ است لذا سوراخ مربع شکل هم به یک سوراخ مربع شکل با اضلاع بزرگتر تبدیل می‌شود در نتیجه گزینهٔ «الف» صحیح است.

مثال. در ورقی با ضریب انبساط طولی λ_1، سوراخی به شعاع r_1 موجود است. می‌خواهیم میله‌ای با شعاع خارجی r_2 و ضریب انبساط طولی λ_2 در آن جا بزنیم به طوریکه در دمای اتاق $r_2 > r_1$ است. چه شرطی باید برقرار باشد تا اینکه پس از افزایش دمای ورق و میله به میزان ΔT این کار عملی شود؟

حل. برای اینکه میله از سوراخ رد شود باید شعاع ثانویه میله یعنی r'_2 کوچکتر یا مساوی شعاع ثانویه سوراخ یعنی r'_1 باشد در نتیجه:

$$r'_2 \le r'_1 \to r_2(1+\lambda_2\Delta T) \le r_1(1+\lambda_1\Delta T)$$

$$\to r_2 - r_1 \le \Delta T(r_1\lambda_1 - r_2\lambda_2)$$

از طرفی می‌دانیم $r_2 - r_1 > 0$ و $\Delta T > 0$ در نتیجه $r_1\lambda_1 - r_2\lambda_2 > 0$ پس $r_1\lambda_1 > r_2\lambda_2$.

۸.۳ انبساط گرمایی حجمی

می‌دانیم هر جسمی که گرم می‌شود صرفاً در یک جهت منبسط نمی‌شود بلکه در تمام جهات انبساط می‌یابد. این انبساط در تمام جهات منجر به انبساط حجم می‌شود. برای محاسبهٔ ضریب انبساط گرمایی حجمی، یک مکعب که طول هر ضلع آن L_0 است در نظر بگیرید. اگر دمای این مکعب به میزان ΔT افزایش یابد در واقع طول هر ضلع آن برابر L می‌شود. در نتیجه داریم:

حجم اولیه : $V_0 = L_0^3$

حجم ثانویه : $V = L^3 = [L_0(1+\alpha\Delta T)]^3 = L_0^3(1+\alpha\Delta T)^3$

$= V_0(1+\alpha\Delta T)^3 = V_0(1+3\alpha\Delta T + 3(\alpha\Delta T)^2 + \alpha^3\Delta T^3)$

چون α و ΔT کوچک هستند لذا می‌توان از جملات $(\alpha\Delta T)^2$ و $(\alpha\Delta T)^3$ صرف‌نظر کرد لذا:

$$V \simeq V_0(1+3\alpha\Delta T) \quad (۱۳-۳)$$

یا

$$\Delta V \simeq V_{\circ}\beta\Delta T \quad (۱۴-۳)$$

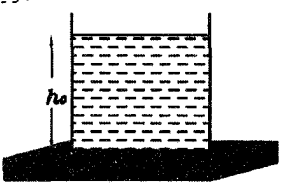
$\beta = ۳\alpha$ ضریب انبساط گرمایی حجمی جسم مورد نظر است.

آزمایش: فیلم 3expansion از CD کتاب را ببینید.

آزمایش: فیلم 3expansion2 نشان می‌دهد که هوای داخل محفظه شیشه‌ای در اثر گرما منبسط شده و فشارش بالا می‌رود.

مثال. مطابق شکل زیر مایعی به ضریب انبساط حجمی a درون ظرف شیشه‌ای به ضریب انبساط حجمی k قرار دارد. دمای ظرف و مایع داخل آن به اندازهٔ $\Delta\theta$ بالا می‌رود. اگر ارتفاع اولیهٔ مایع درون ظرف $h_{\circ}$ باشد، خواهیم داشت، $h = h_{\circ}(۱ + b\Delta\theta)$ به طوری که:

(اولین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $b \simeq a - k$ ب) $b \simeq a - \frac{۲}{۳}k$ ج) $b \simeq a$ د) $b \simeq a + \frac{k}{۳}$

حل. فرض کنید $V_{\circ}$ حجم اولیهٔ مایع، $A_{\circ}$ مساحت اولیهٔ کف ظرف، V حجم ثانویه مایع، A مساحت ثانویهٔ کف ظرف و h ارتفاع ثانویه باشد. آنگاه داریم:

$$V = V_{\circ}(۱ + a\Delta\theta) = A_{\circ}h_{\circ}(۱ + a\Delta\theta) \quad (۱)$$

چون ضریب انبساط حجمی شیشه برابر $k = ۳\alpha$ است، در نتیجه ضریب انبساط سطحی آن برابر است با $۲\alpha = ۲(\frac{k}{۳})$ (α ضریب انبساط طولی) پس:

$$A = A_{\circ}(۱ + ۲\alpha\Delta\theta) = A_{\circ}(۱ + \frac{۲k}{۳}\Delta\theta)$$

$$\text{حجم ثانویه } V = Ah = A_{\circ}(۱ + \frac{۲k}{۳}\Delta\theta)h_{\circ}(۱ + b\Delta\theta) \quad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow A_{\circ}h_{\circ}(۱ + a\Delta\theta) = A_{\circ}h_{\circ}(۱ + \frac{۲k}{۳}\Delta\theta)(۱ + b\Delta\theta)$$

$$\rightarrow ۱ + a\Delta\theta = ۱ + \frac{۲bk}{۳}\Delta\theta^{۲} + \frac{۲k}{۳}\Delta\theta + b\Delta\theta$$

از جمله توان دوم $\Delta\theta$ یعنی $\frac{۲bk}{۳}\Delta\theta^{۲}$ در برابر سایر جملات می‌توان صرف‌نظر کرد، در نتیجه:

$$۱ + a\Delta\theta \simeq ۱ + \frac{۲k}{۳}\Delta\theta + b\Delta\theta \rightarrow a \simeq \frac{۲k}{۳} + b$$

$$\rightarrow b \simeq a - \frac{۲k}{۳}$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال. یک خط‌کش فلزی به ضریب انبساط طولی $\lambda_1 = 1/2 \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$، در دمای صفر درجهٔ سلسیوس طول اجسام را درست نشان می‌دهد. درون یک استوانهٔ شیشه‌ای مقداری مایع ریخته‌ایم. وقتی دمای خط‌کش، استوانه و مایع برابر $50^\circ C$ است، خط‌کش طول ستون مایع را $43/2cm$ نشان می‌دهد. اگر ضریب انبساط حجمی مایع $a = 1/6 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ C}$ و ضریب انبساط طولی شیشه $\lambda_2 = 8 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}$ باشد، طول ستون مایع در دمای صفر درجهٔ سلسیوس چقدر است؟ (پنجمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. فرض کنید در دمای صفر درجه ارتفاع مایع برابر h_0، مساحت استوانهٔ شیشه‌ای برابر A_0 و حجم اولیهٔ مایع برابر V_0 باشد در دمای θ داریم:

$$V = V_0(1 + a\theta)$$
$$A = A_0(1 + 2\lambda_2\theta)$$

اگر h ارتفاع ثانویه (ارتفاع در دمای $50^\circ C$) باشد داریم:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{V_0(1 + a\theta)}{A_0(1 + 2\lambda_2\theta)} = \frac{A_0h_0(1 + a\theta)}{A_0(1 + 2\lambda_2\theta)} = h_0(\frac{1 + a\theta}{1 + 2\lambda_2\theta}) \quad (1)$$

از طرفی با افزایش درجهٔ حرارت طول خط‌کش نیز افزایش می‌یابد. اگر u_1 طول واحد خط‌کش در دمای صفر درجه باشد آنگاه طول واحد خط‌کش در دمای θ برابر است با:

$$u_2 = u_1(1 + \lambda_1\theta)$$

رابطهٔ (۱) ارتفاع واقعی (ظاهری) مایع است همچنین طول خوانده شده از روی خط‌کش برابر $43/2cm$، عددی واقعی (ظاهری) نیست. در واقع وقتی ما خط‌کش را در کنار مایع قرار می‌دهیم می‌گوییم ارتفاع مایع $43/2$ برابر طول واحد خط‌کش (u_2) است. بنابراین ارتفاع واقعی (ظاهری) مایع برابر $43/2u_1(1 + \lambda_1\theta)$ می‌باشد در نتیجه:

$$(1) \rightarrow 43/2u_1(1 + \lambda_1\theta) = h_0(\frac{1 + a\theta}{1 + 2\lambda_2\theta})$$

u_1 که طول واحد واقعی خط‌کش که برابر $1cm$ است.

$$\rightarrow h_0 = \frac{43/2(1 + 1/2 \times 10^{-5} \times 50)(1 + 2 \times 8 \times 10^{-6} \times 50)}{1 + 1/6 \times 10^{-3} \times 50} = 40/05cm$$

مثال. یک دماسنج جیوه‌ای با خط‌هایی که $1mm$ از هم فاصله دارند، درجه‌بندی شده است. حجم مخزن جیوه V، سطح مقطع لولهٔ موئین آن S و ضریب انبساط حجمی جیوه $\lambda = 0/18 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ C}$ است. می‌خواهیم هر یک از درجات روی دماسنج معرف $0/1^\circ C$ باشد، انتخاب V و S مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟

الف) $S = 0/02mm^2, V = 1/1cm^3$ ب) $S = 0/2mm^2, V = 0/5cm^3$

ج) $S = 0/2mm^2, V = 0/5cm^3$ د) $S = 0/2mm^2, V = 2cm^3$

(سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. باتوجه به اینکه در مسأله مقدار ضریب انبساطی حجمی شیشه دماسنج را نداده است لذا فرض می‌شود که خود مخزن دماسنج انبساط نمی‌یابد. در نتیجه سطح مقطع لولهٔ مؤیین ثابت و برابر S می‌باشد. بنابراین تغییر حجم، خود را به صورت تغییر ارتفاع نشان می‌دهد.

$$\Delta V = S\Delta h \quad (۱)$$

از طرفی از رابطهٔ (۳ - ۱۴) داریم $\Delta V = V\lambda\Delta T$

$$S\Delta h = V\lambda\Delta T \rightarrow \frac{S}{V} = \frac{\lambda\Delta T}{\Delta h}$$

حال باید به ازای هر $\Delta T = ۰/۱^\circ$ درجه تغییر دما، تغییر ارتفاع یعنی Δh به اندازهٔ $۱mm$ باشد در نتیجه:

$$\frac{S}{V} = \frac{۰/۱۸ \times ۱۰^{-۳} \times ۰/۱}{۱۰^{-۳}} = ۰/۰۱۸$$

اعداد هر گزینه را امتحان می‌کنیم که گزینهٔ «الف» درست است یعنی:

$$\text{گزینهٔ «الف»} \rightarrow \frac{S}{V} = \frac{۰/۰۲ \times ۱۰^{-۶}}{۱/۱ \times ۱۰^{-۶}} = ۰/۰۱۸۱۸$$

۹.۳ تغییر چگالی بر اثر تغییر دما

می‌دانیم چگالی هر جسمی به صورت نسبت جرم به حجم آن تعریف می‌شود یعنی:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (۱۵ - ۳)$$

حال فرض کنید دمای جسم دچار تغییرات شود، دراثر دما، حجم جسم تغییر می‌کند و با توجه به اینکه جرم جسم ثابت است. چگالی جسم نیز دچار تغییرات خواهد شد. بنابراین اگر در دمای $T_۰$ چگالی جسم برابر $\rho_۰$ باشد در دمای T چگالی تغییر کرده و برابر ρ خواهد شد. می‌خواهیم ارتباط بین $\rho_۰$ و ρ را بیابیم می‌دانیم:

$$\rho_۰ = \frac{m}{V_۰} \quad (۱)$$

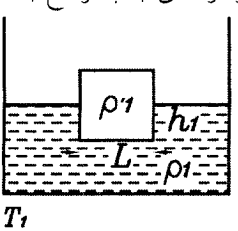
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_۰(۱ + \beta\Delta T)}$$

$$\rho = \frac{\rho_۰}{۱ + \beta\Delta T} \quad (۱۶ - ۳)$$

مثال. یک مکعب آلومینیومی به ضلع L سانتیمتر، در جیوه شناور است. اگر دما از $T_۱$ به $T_۲$ کلوین افزایش یابد، مکعب چقدر در جیوه پایین می‌رود؟ $\lambda_{AL}, \rho_{AL}, \rho_{Hg}$ (ضریب انبساط طولی آلومینیوم) و a_{Hg} (ضریب حجمی جیوه) معلوم است؟

(سومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل: فرض کنید چگالی جیوه در دمای $T_۱$ برابر ρ_{Hg} و در دمای $T_۲$ برابر $\rho_۲$ باشد. همچنین در دمای $T_۱$ مکعب به ارتفاع $h_۱$ و در دمای $T_۲$ به ارتفاع $h_۲$ در جیوه فرو رفته باشد.



در حالت «الف» از تعادل نیروها در جهت قائم داریم:

نیروی وزن = نیروی ارشمیدس

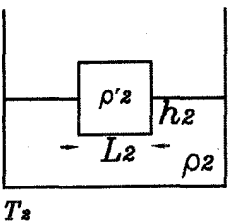
دقت کنید که حجم فرو رفته در جیوه برابر $L^۲h_۱$ است در نتیجه:

$$\rho_{Hg}(L^۲h_۱)g = mg \qquad (۱)$$

$$mg = L^۳\rho_{Al}g \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow \rho_{Hg}(L^۲h_۱) = L^۳\rho_{Al} \rightarrow h_۱\rho_{Hg} = L\rho_{Al} \qquad (۳)$$

در حالت «ب» حجم جسم و چگالی‌های $\rho_۱$ و $\rho'_۱$ تغییر می‌کند به کمک رابطهٔ (۳-۱۶) داریم:



$$\rho_۲ = \frac{\rho_{Hg}}{۱ + a_{Hg}\Delta T} \qquad (۴)$$

$$L_۲ = L(۱ + \lambda_{AL}\Delta T) \qquad (۵)$$

در حالت ثانویه، از تعادل نیروها در راستای قائم، مشابه حالت «الف» می‌توان نوشت:

$$\rho_۲(L_۲^۲\ h_۲)g = mg \qquad (۶)$$

رابطه (۶) را بر (۱) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\rho_۲L_۲^۲h_۲g}{\rho_{Hg}L^۲h_۱g} = ۱$$

$$\rightarrow \frac{\rho_{Hg}}{۱ + a_{Hg}\Delta T}L^۲(۱ + \lambda_{Al}\Delta T)^۲h_۲ = \rho_{Hg}L^۲h_۱$$

$$h_۲ = h_۱\frac{۱ + a_{Hg}\Delta T}{(۱ + \lambda_{Al}\Delta T)^۲}$$

به کمک رابطه (۳) داریم:

$$h_۲ = \frac{L\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}\frac{۱ + a_{Hg}\Delta T}{(۱ + \lambda_{Al}\Delta T)^۲}$$

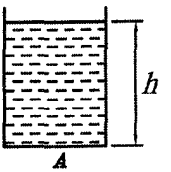
$$\Delta h = h_۲ - h_۱ = \frac{L\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}[\frac{۱ + a_{Hg}\Delta T}{(۱ + \lambda_{Al}\Delta T)^۲} - ۱]$$

با توجه به اینکه λ_{Al} کوچک است می‌توان از جمله $\lambda_{Al}^۲\Delta T^۲$ صرف نظر کرد. بنابراین:

$$(۱ + \lambda_{Al}\Delta T)^۲ \simeq ۱ + ۲\lambda_{Al}\Delta T$$

$$\Delta h \simeq \frac{L\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}\frac{(a_{Hg} - ۲\lambda_{Al})\Delta T}{۱ + ۲\lambda_{Al}\Delta T}$$

سؤال محک ۱: فرض کنید در ظرفی مایعی به چگالی ρ تا ارتفاع h باشد. اگر دما افزایش یابد و از انبساط ظرف صرف‌نظر شود فشار وارد بر کف ظرف چقدر تغییر می‌کند؟

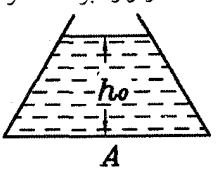


حل. می‌دانیم فشار در کف ظرف برابر است با $P = \rho gh$. از طرفی با افزایش دما هم چگالی تغییر می‌کند (کم می‌شود.) و هم ارتفاع (زیاد می‌شود) پس فشار کف ظرف زیاد می‌شود یا کم؟ کافی است برای محاسبهٔ فشار وارد بر کف ظرف از فرمول $P = \frac{mg}{A}$ استفاده کنیم. با توجه به اینکه از انبساط ظرف صرف‌نظر شده یعنی A ثابت است از طرفی جرم مایع m نیز تغییر نمی‌کند لذا با افزایش یا کاهش دما، فشار وارد بر کف ظرف تغییر نمی‌کند.

سؤال محک ۲: در سؤال قبل اگر از انبساط ظرف صرف‌نظر نشود فشار وارد بر کف ظرف چه تغییری می‌یابد.

حل. با توجه به اینکه A زیاد شده و m ثابت است لذا طبق رابطه $P = \frac{mg}{A}$ فشار وارد بر کف ظرف کم می‌شود.

سؤال محک ۳: در ظرفی مطابق شکل مایعی با چگالی ρ_0 تا ارتفاع h_0 موجود است. اگر دما افزایش یابد، با صرف نظر از انبساط ظرف، فشار وارد بر کف ظرف چگونه تغییر می‌یابد؟



می‌دانیم برای ظرفی که دهنهٔ آن نسبت به کف آن کم یا زیاد می‌شود. برای محاسبهٔ فشار دیگر نمی‌توان از فرمول $\frac{mg}{A}$ استفاده کرد. زیرا با نیرویی که دیواره‌های ظرف وارد می‌کنند فشار برای دهنهٔ باریک بیشتر و برای دهنهٔ پهن کمتر می‌شود (برای توضیح بیشتر به فصل اول کتاب مراجعه کنید.)

برای اینکه ببینیم با افزایش دما، فشار وارد بر کف ظرف زیاد می‌شود یا کم، کافی است این ظرف را با ظرف استوانه‌ای شکل که تا ارتفاع h_0 از همان مایع پر شده است مقایسه کنیم. از سؤال محک ۱ دیدیم اگر از انبساط ظرف صرف نظر شود، با افزایش دما فشار وارد بر کف ظرف استوانه‌ای شکل تغییر نمی‌کند هرچند که ارتفاع مایع درون ظرف افزایش می‌یابد. از طرفی می‌دانیم برای ظرف دهنه باریک، چون قطر دهنه کمتر است لذا با افزایش حجم (که مساوی با ظرف استوانه‌ای شکل است) ارتفاع مایع افزایش بیشتری، نسبت به ظرف استوانه‌ای شکل، پیدا می‌کند. پس فشار وارد بر کف ظرف دهنه باریک

بیشتر از فشار وارد بر کف ظرف استوانه‌ای شکل می‌شود. از طرفی چون فشار وارد بر کف ظرف استوانه‌ای شکل ثابت است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش دما، فشار وارد بر کف ظرف دهنه باریک افزایش می‌یابد.

۳.۱۰ انبساط ظاهری مایع

هنگامی که دمای ظرف و مایع درون آن را به میزان ΔT افزایش می‌دهیم، هم ظرف و هم مایع درون آن هر دو منبسط می‌شوند. اما میزان انبساط آنها با هم متفاوت است. با فرض اینکه انبساط مایع بیشتر باشد، ارتفاع مایع بالاتر می‌آید اما نه به اندازهٔ حالتی که ظرف منبسط نمی‌شود. لذا این انبساط حجمی که ما می‌بینیم انبساط حجمی واقعی مایع نیست بلکه ظاهری است. این انبساط ظاهری را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست آورد.

$$\begin{array}{cccccc} \text{انبساط ظاهری مایع} & = & \text{انبساط واقعی مایع} & - & \text{انبساط واقعی ظرف} & \\ \Delta V_a & = & \Delta V_L & - & \Delta V_c & \end{array} \qquad (۱۷-۳)$$

دقت کنید اگر انبساط مایع کمتر از انبساط ظرف باشد، ارتفاع ظاهری مایع کم می‌شود.

نکته: برای محاسبهٔ انبساط واقعی ظرف ΔV_c، حجم اولیهٔ ظرف را همان حجم اولیه مایع در نظر می‌گیریم. برای یافتن تغییر ارتفاع ظاهری مایع نیز می‌توان از رابطهٔ زیر کمک گرفت.

$$\text{تغییر ارتفاع ظاهری مایع} = \frac{\text{انبساط ظاهری مایع}}{\text{سطح مقطع واقعی ثانویه کف ظرف}}$$

$$\Delta h_a = \frac{\Delta V_a}{A_۲} \qquad (۱۸-۳)$$

ΔV_a: انبساط ظاهر مایع

$A_۲$: سطح مقطع واقعی ثانویه کف ظرف.

نکته: رابطهٔ (۳-۱۸) برای حالتی است که دیواره‌های ظرف به صورت قائم باشند.

مثال. ظرفی در دمای $۲۰^\circ C$ کاملاً پر از آب است و مقدار آب داخل آن، در این دما، ۲۰۰۰ لیتر می‌باشد. با افزایش دمای ظرف تا $۸۰^\circ C$، ۶ میلی‌لیتر آب از آن بیرون می‌ریزد. اگر ضریب انبساط حجمی آب برابر ۲۰×۱۰^{-۶} باشد. مطلوب است ضریب انبساط طولی خود ظرف.

حل. می‌دانیم ۶ میلی‌لیتر آب از ظرف خارج شده که در واقع همان انبساط ظاهری مایع می‌باشد(هر متر مکعب هزار لیتر است)، لذا:

$$\text{انبساط ظاهری مایع} = \Delta Va = ۶mL = ۶ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۳}m^۳ = ۶ \times ۱۰^{-۶}m^۳$$

$$\text{انبساط واقعی مایع} = \Delta V_L = V_۰(۱ + \beta\Delta T) =$$

$$۲۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}[۱ + ۲۰ \times ۱۰^{-۶} \times (۸۰ - ۲۰)] = ۲/۰۰۲m^۳$$

$$\text{انبساط واقعی ظرف} = \Delta V_c = V_۰(۱ + ۳\alpha\Delta T) = ۲۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}(۱ + ۳\alpha \times ۶۰)$$

به کمک رابطهٔ (۳-۱۷) داریم:

$$\Delta V_a = \Delta V_L - \Delta V_c \to ۶ \times ۱۰^{-۶} = ۲/۰۰۲ - ۲(۱ + ۱۸۰\alpha)$$
$$\to \alpha = ۵/۵۳ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{k}$$

مثال. در محلی که فشار هوا ثابت است، دما از $۲۷۳k$ به $۲۹۰k$ رسیده است. به علت تغییر دما، سطح جیوه در لولهٔ هواسنج (بارومتر) جیوه‌ای که لولهٔ شیشه‌ای آن مدرج است، از مقابل عدد ۷۶ به مقابل ۷۶/۲۲ سانتیمتر می‌رسد. اگر ضریب انبساط (طولی) شیشهٔ هواسنج $۹ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ C}$ فرض شود، ضریب انبساط حجمی مطلق جیوه را حساب کنید.

(هفتمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. در این مسأله در اثر حرارت هم درجه‌بندی دماسنج به هم می‌ریزد و هم اینکه خود دماسنج منبسط می‌شود. با توجه به رابطهٔ (۳-۱۷) داریم:

$\Delta V_a = \Delta V_L - \Delta V_c \to \Delta V_L = \Delta V_a + \Delta V_C$ (۱)

$\Delta V_L = V_۱(۱ + \beta \Delta T)$ (۲) انبساط واقعی جیوه.

$V_۱$: حجم اولیهٔ جیوه در دمای $۲۷۳k$.

β: ضریب انبساط واقعی جیوه.

$\Delta V_c = V_۱(۱ + ۳\alpha \Delta T)$ (۳) انبساط واقعی ظرف

$V_۱$: حجم اولیه ظرف در دمای $۲۷۳k$.

α: ضریب انبساط طولی ظرف.

به کمک رابطه (۳-۱۸) داریم.

$\Delta V_a = \Delta h_a A_۲$ (۴)

از طرفی $A_۲ = A_۱(۱ + ۲\alpha \Delta T)$ (۵)

$V_۱ = A_۱ h_۱$ (۶)

از روابط (۱) تا (۶) داریم:

$$A_۱ h_۱(۱ + \beta \Delta T) = \Delta h_a A_۱(۱ + ۲\alpha \Delta T) + A_۱ h_۱(۱ + ۳\alpha \Delta T) \quad (۷)$$

از طرفی در اثر افزایش درجه حرارت طول واحد درجه‌های شیشه $u_۱$ به طول $u_۲$ تبدیل می‌شود که:

$$u_۲ = u_۱(۱ + \alpha \Delta T)$$

لذا وقتی تغییر ارتفاع برابر ۰/۲۲ سانتیمتر خوانده می‌شود یعنی تغییر ارتفاع ۰/۲۲ برابر طول واحد درجه‌های شیشه که $u_۲$ است، می‌باشد. در نتیجه تغییر ارتفاع ظاهری واقعی Δh_a برابر است با:

$$\Delta h_a = ۰/۲۲ \times ۱۰^{-۲} u_۱ (۱ + \alpha \Delta T) \text{ که } u_۱ = ۱cm$$
$$\to \Delta h_a = ۰/۲۲ \times ۱۰^{-۲}(۱ + \alpha \Delta T) \quad (۸)$$
$$(۸), (۷) \to h_۱(۱ + \beta \Delta T) = ۰/۲۲ \times ۱۰^{-۲}(۱ + \alpha \Delta T)(۱ + ۲\alpha \Delta T)$$
$$+ h_۱(۱ + ۳\alpha \Delta T) \to \beta = ۱/۹۷ \times ۱۰^{-۴} \frac{۱}{k}$$

همانطور که ملاحظه کردید از شرط هم‌فشار استفاده نکردیم پس اشکال راه‌حل فوق در چیست؟!!! مشکل راه فوق در این است که وقتی لوله‌ای شیشه‌ای منبسط می‌شود شرط هم فشار بودن ایجاب می‌کند که مقداری جیوه از مخزن جیوه وارد لولهٔ شیشه‌ای شود در نتیجه این حجم جیوه‌ای که وارد لولهٔ شیشه‌ای می‌شود را حساب نکردیم.

راه‌حل درست:

فرض کنید چگالی و ارتفاع واقعی جیوه در دمای T_1 برابر ρ_1 و h_1 و در دمای T_2 برابر ρ_1 و h_2 باشد، با توجه به اینکه فشار باید ثابت باشد لذا:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (1)$$
$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\beta\Delta T} \quad (2)$$

β: ضریب انبساط حجمی جیوه

از طرفی اگر فاصلهٔ هر دو درجهٔ مجاور با هم برابر $u_1 = 1cm$ باشد در اثر تغییر درجهٔ حرارت این فاصله تبدیل به u_2 شده است. $u_2 = u_1(1+\alpha\Delta T)$. بنابراین وقتی می‌گوییم ارتفاع $76/22cm$ است در واقع ارتفاع برابر $76/22u_2$ می‌باشد لذا ارتفاع واقعی در حالت ثانویه h_2 برابر است با:

$$h_2 = 76/22u_2 = 76/22u_1(1+\alpha\Delta T) \quad (3)$$
$$(3),(2),(1) \rightarrow \rho_1 \times 76 = \frac{\rho_1}{1+\beta\Delta T} \times 76/22(1+\alpha\Delta T)$$
$$\rightarrow 1+\beta\Delta T = \frac{76/22(1+9\times 10^{-6}\times 17)}{76} \rightarrow \beta = 1/79\times 10^{-4}$$

مثال: مقداری از یک مایع در یک استوانه مدرج است. در دمای T، سطح بالایی مایع کنار علامت $100cm^3$ است. دمای مجموعه را 100K زیاد می‌کنیم. سطح بالایی مایع در کنار علامت $101cm^3$ قرار می‌گیرد. ضریب انبساط طولی ماده سازنده استوانه مدرج $10^{-5}K^{-1}$ است. ضریب انبساط حجمی مایع $\alpha \times 10^{-5}K^{-1}$ است. α چقدر است؟
(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران)

حل: اگر از تغییر درجه‌های استوانه مدرج صرف‌نظر کنیم، آنگاه به کمک رابطه (۳-۱۷) می‌توان نوشت:

$$\Delta V_a = 1cm^3$$
$$\Delta V_L = V_0(1+\beta\Delta T) = 100(1+\alpha\times 10^{-5}\times 100) = 100(1+\alpha\times 10^{-3})$$
$$\Delta V_C = V_0(1+3\lambda\Delta T) = 100(1+3\times 10^{-5}\times 100) = 100(1+3\times 10^{-3})$$
$$\rightarrow \Delta V_a = \Delta V_L - \Delta V_C \rightarrow 100(1+\alpha\times 10^{-3}) - 100(1+3\times 10^{-3}) = 1$$
$$\rightarrow \alpha = 13$$

حال بیایید از تغییرات درجه‌ها صرف نظر نکنیم و فرض کنیم در دمای T، درجه‌های استوانه مدرج دارای اندازه حقیقی باشند. مشابه مسأله مطرح شده در المپیاد پنجم، ارتفاع

h ثانویه مایع را پیدا کنید.

$$V = V_۰(۱ + \beta\Delta T)$$
$$A = A_۰(۱ + ۲\lambda\Delta T)$$
$$\rightarrow h = \frac{V}{A} = \frac{V_۰(۱ + \beta\Delta T)}{A_۰(۱ + ۲\lambda\Delta T)} = \frac{A_۰h_۰}{A_۰}\cdot\frac{۱ + \beta\Delta T}{۱ + ۲\lambda\Delta T}$$

$$\rightarrow h = h_۰(\frac{۱ + \beta\Delta T}{۱ + ۲\lambda\Delta T}) \qquad (۱)$$

اگر $u_۱$ طول واحد درجه‌های استوانه در دمای T باشد، آنگاه طول واحد درجه‌ها در دمای $T + ۱۰۰$ برابر است با:

$$u_۲ = u_۱(۱ + \lambda\Delta T)$$

بنابراین وقتی می‌نویسیم مایع در کنار عدد $۱۰۱cm$ می‌ایستد یعنی ارتفاع مایع $۱۰۱\ u_۲$ سانتیمتر می‌باشد. در نتیجه به کمک رابطه (۱) داریم:

$$۱۰۱u_۱(۱ + \lambda\Delta T) = h_۰\frac{۱ + \beta\Delta T}{۱ + ۲\lambda\Delta T}$$

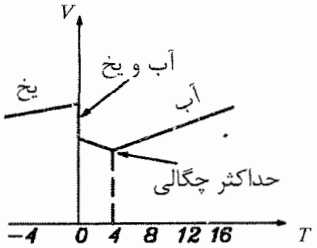
$$u_۱ = ۱cm \quad , \quad h_۰ = ۱۰۰cm$$

$$\rightarrow ۱ + \beta\Delta T = \frac{۱۰۱(۱ + \lambda\Delta T)(۱ + ۲\lambda\Delta T)}{۱۰۰}$$

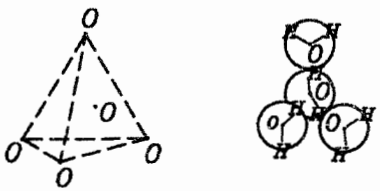
$$\rightarrow \beta = ۱/۳۰۳ \times ۱۰^{-۴} \rightarrow \alpha \times ۱۰^{-۵} = ۱/۳۰۳ \times ۱۰^{-۴}$$
$$\alpha = ۱۳/۰۳$$

۱۱.۳ انبساط غیر عادی آب

هنگامی که آب را تا $۴°C$ سرد کنیم، مثل سایر مواد منقبض می‌شود. اما نکتهٔ تعجب‌آور این است که برخلاف انتظار از $۴°C$ تا $۰°C$، آب منبسط می‌شود. بنابراین آب در $۴°C$ بیشترین جرم حجمی (چگالی) را دارا است. در $۰°C$ وقتی آب یخ می‌بندد، انبساط قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند و هر $۱۰۰cm^۳$ آب تبدیل به $۱۰۹cm^۳$ یخ می‌گردد یعنی انبساط نسبی آب در حدود ۹ درصد است. تغییرات حجم بر حسب دما در نمودار شکل زیر نشان داده شده است.

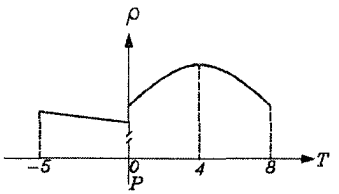


این خصوصیت متمایز آب به ساختمان اتمی آن مربوط می‌شود. مولکول‌های آب تنها به یک صورت می‌توانند بر هم اثر بگذارند. یعنی هر مولکول آب می‌تواند چهار مولکول دیگر را در مجاورت خود بپذیرد و به نحوی که مرکز آنها یک چهار وجهی را ایجاد کند. (مطابق شکل زیر)

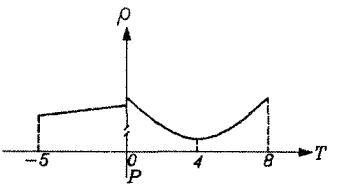


این ساختار شبکه‌ای مانند آب به عنوان ماده شبه بلور، رفتار عجیب آب را توضیح می‌دهد. از یک سو افزایش دما باعث تشدید ارتعاش مولکولها و در نتیجه افزایش فاصلهٔ متوسط میان مولکولهای آب می‌شود. از سوی دیگر افزایش دما سبب خراب شدن ساختار شبکه‌ای مانند آب می‌گردد و طبعاً مولکولها را به هم نزدیک می‌سازد. عامل نخست یعنی تشدید ارتعاش، چگالی آب را کاهش می‌دهد. این عامل در جامدات باعث انبساط می‌شود. اما عامل دوم یعنی فرو ریختن ساختار، بر عکس جرم حجمی آب را افزایش می‌دهد. در فاصلهٔ ۰ تا چهار درجهٔ سانتیگراد عامل فرو ریختن ساختار غالب است اما از چهار درجه به بعد تأثیر افزایش ارتعاشات پیشی می‌گیرد و از آن پس چگالی آب کم می‌شود. جای نهایت خوشبختی است که رفتار انبساطی آب مانند اجسام دیگر نیست. اگر آب به هنگام انجماد منبسط نمی‌شد. زمین چهره‌ای کاملاً دگرگون داشت. یخ‌ها به جای اینکه در سطح آب دریاها تشکیل شوند، در ته دریاها تشکیل می‌شدند. یخ‌هایی که در رودخانه‌ها و دریاچه‌ها تشکیل می‌شوند در تابستان‌ها ذوب نمی‌شدند، زیرا که آب سطح رودخانه‌ها، دریاچه‌ها مانند پوشش عایق گرما عمل می‌کرد.

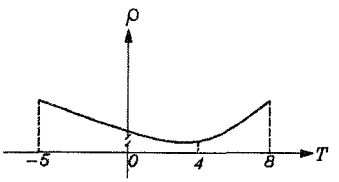
مثال. یک کیلوگرم آب $8^\circ C$ را سرد می‌کنیم تا به یخ $-5^\circ C$ تبدیل شود. کدام گزینه برای تغییرات چگالی آن بر حسب دما درست است؟ (پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)



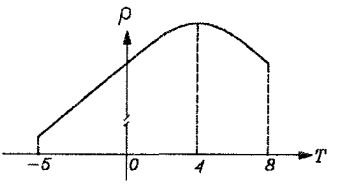
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

حل: با توجه به توضیحات داده شده و نمودار صفحه قبل گزینه «ب» صحیح است.

مثال: یک ظرف محتوی آب صفر درجه را از بالا بر اثر تابش به آرامی گرم می‌کنیم. پس از مدتی دمای سطح آب به $۱۰^\circ C$ می‌رسد. اما قسمت‌های پایینی آن سردتر از این دما باقی مانده‌اند. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)

الف) در پایین‌ترین قسمت ظرف آب صفر درجه می‌تواند وجود داشته باشد.

ب) در هیچ جای ظرف آب صفر درجه نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ج) آب صفر درجه کمی بالاتر از کف ظرف وجود دارد.

حل: با توجه به نمودار چگالی آب بر حسب دما می‌دانیم با افزایش درجه حرارت از $۰^\circ C$ تا $۴^\circ C$ چگالی افزایش می‌یابد و حداکثر چگالی در $۴^\circ C$ اتفاق می‌افتد. لذا در اثر تابش، دمای لایه بالایی آب ظرف بیشتر از ۰ درجه می‌شود و به تبع آن چگالی آن بیشتر از آب ۰ درجه شده و به کف ظرف سقوط می‌کند و بجای آن یک لایه ۰ درجه قرار می‌گیرد.

این عمل مرتب ادامه می‌یابد تا جایی که دما در سطح از $۰^\circ C$ تا $۴^\circ C$ در کف ظرف تغییر کند. با ادامه حرارت دادن، می‌دانیم از دمای $۴^\circ C$ به بعد چگالی کم می‌شود لذا لایه‌هایی که دمای آن بیش از $۴^\circ C$ باشند، به سطح آب صعود می‌کنند. بنابراین با افزایش ارتفاع از کف ظرف مرتب دما بالا می‌رود تا اینکه در نهایت دمای سطح به ۱۰ درجه برسد. در این حالت واضح است که هیچ جای ظرف از دمای ۰ درجه برخوردار نیست. لذا گزینه «ب» صحیح است.

مثال: یک دریاچه را در نظر بگیرید که سطح آن یخ زده است. فرض کنید دما در نقاط مختلف این دریاچه، مستقل از زمان و آب دریاچه ساکن است. کدام گزینه درست است؟

(نوزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

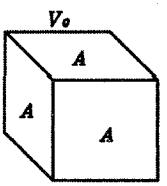
الف) حتماً همه دریاچه یخ زده است.

ب) دمای سطح بالایی یخ دریاچه حتماً صفر درجه سلسیوس است.
ج) کلفتی یخ دریاچه حتماً ناچیز است.
د) در هیچ جا ممکن نیست دمای آب دریاچه از چهار درجه سلسیوس بیشتر شود.

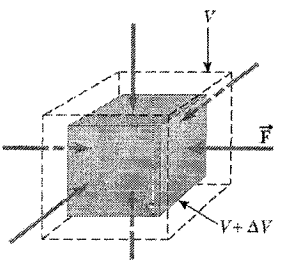
حل: واضح است که گزینه «الف» نادرست است. زیرا دمای لایه‌های دریاچه می‌تواند از ۰ تا ۴ درجه از بالا به سمت پایین تغییر کند. گزینه «ب» نیز نادرست است زیرا دمای سطح بالایی می‌تواند زیر صفر باشد. گزینه «ج» نیز نادرست است که مثال نقض آن یخ زدن دریاچه‌ها در قطب جنوب است که کلفتی آنها تا چند متر ممکن است برسد. در نتیجه گزینه «د» صحیح است.

۱۲.۳ مدول حجمی B

این ضریب هم برای جامدات و هم برای مایعات به کار می‌رود و معیاری از نیروی لازم برای متراکم کردن جسم می‌باشد. فرض کنید جسمی مکعبی مطابق شکل زیر در اختیار داریم به طوریکه مساحت هر وجه مکعب برابر A است.



حجم اولیهٔ این مکعب را با V_0 نمایش می‌دهیم. اگر به هر یک از وجوه جسم نیروی F وارد شود، حجم آن به مقدار ΔV متراکم خواهد شد. از طرفی چون مکعب فشرده می‌شود لذا مقدار ΔV منفی است. آنگاه مدول حجمی B به صورت زیر تعریف می‌شود.



$$B = -\frac{F/A}{\Delta V/V_0} = -\frac{P}{\Delta V/V_0} \quad (۱۹-۳)$$

P: فشار وارد بر هر وجه مکعب

مثال. یک فلاسک جیوه در دمای $20°C$ ساخته می‌شود و جدارهٔ آن را کاملاً از جیوه پر می‌کنند. فشار داخل فلاسک را در دمای $100°C$ بیابید. از انبساط فلاسک چشم بپوشید. (فرض کنید مدول حجمی جیوه $B = 2500MPa$ و γ ضریب انبساط حجمی جیوه برابر 182×10^{-6} باشد.)

حل. می‌دانیم در اثر افزایش درجهٔ حرارت حجم جیوه زیاد می‌شود و داریم:

$$\Delta V = V_{\circ}\beta\Delta T \rightarrow \frac{\Delta V}{V_{\circ}} = \beta\Delta T = ۱۸۲ \times ۱۰^{-۶} \times (۱۰۰ - ۲۰) = ۱/۴۵۶ \times ۱۰^{-۲}$$

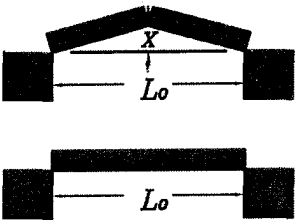
از طرفی چون فلاسک منبسط نمی‌شود برای جلوگیری از انبساط جیوه به آن فشار وارد می‌کند بنابر رابطهٔ (۳-۱۹) داریم:

$$P = -B(\frac{\Delta V}{V_{\circ}}) = -۲۵۰۰MPa \times ۱/۴۶ \times ۱۰^{-۲} = -۳۶MPa$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی اعمال شده از طرف فلاسک به صورت فشاری است.

۱۳.۳ مسائل حل شده

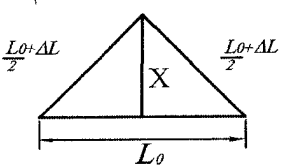
۱) دو انتهای یک ریل فولادی به طول $۳۰m$ محکم به کف خیابان با دمای ۰ درجه بسته شده است، خورشید با دمای $۵۰°C$ به ریل می‌تابد و آن را خم می‌کند. با فرض آن‌که میلهٔ خمیده از دو قطعهٔ مستقیم که در مرکز به هم می‌رسند، تشکیل شده است، تعیین کنید که مرکز ریل در اثر خمیدگی چقدر بالا می‌آید. $(\alpha = ۱۲ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{k})$



حل. می‌دانیم نیم ریل به طول $\frac{L_۰}{۲}$ به اندازهٔ ΔL افزایش طول می‌یابد که:

$$\Delta L = \frac{L_۰}{۲}\alpha\Delta T$$

حال با توجه به شکل تغییر یافته از قضیهٔ فیثاغورس داریم:



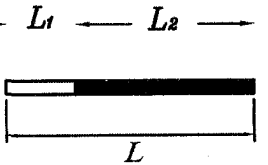
$$x = \sqrt{(\frac{L_۰}{۲} + \Delta L)^۲ - (\frac{L_۰}{۲})^۲}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{(\frac{L_۰}{۲} + \frac{L_۰}{۲}\alpha\Delta T)^۲ - (\frac{L_۰}{۲})^۲} = \frac{L_۰}{۲}\sqrt{۲\alpha\Delta T + (\alpha\Delta T)^۲}$$

$$x = \frac{۳۰}{۲}\sqrt{۲ \times ۱۲ \times ۱۰^{-۶} \times ۵۰ + (۱۲ \times ۱۰^{-۶} \times ۵۰)^۲} = ۰/۵۱۹m$$

۲) همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است. میلهٔ مرکبی به طول $L = L_۱ + L_۲$ از میله‌ای با جنس ۱ و طول $L_۱$ متصل به میلهٔ دیگری با جنس ۲ و طول $L_۲$، ساخته شده است. (الف) نشان دهید که ضریب انبساط خطی α برای این میله مرکب عبارت است از:

$$\alpha = (\alpha_۱ L_۱ + \alpha_۲ L_۲)/L$$



حل. می‌دانیم تغییر طول میله‌ها به ترتیب برابرند با:

$$\Delta L_۱ = L_۱\alpha_۱\Delta T$$

$$\Delta L_۲ = L_۲\alpha_۲\Delta T$$

حال اگر میله‌ای به طول L با ضریب انبساط طولی α جایگزین کنیم باید تغییر طول این میله ΔL برابر باشد با $\Delta L_1 + \Delta L_2$، تا معادل دو میلهٔ ۱ و ۲ به حساب آید لذا:

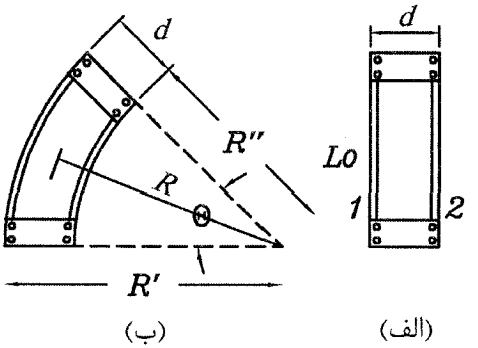
$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = (L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2)\Delta T \quad (۱)$$

$\Delta L = L\alpha\Delta T$ از طرفی

$$(۲), (۱) L\alpha\Delta T = (L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2)\Delta T \rightarrow \alpha = \frac{L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2}{L}$$

۳) دو میلهٔ موازی که از دو فلز مختلف با ضرایب انبساط طولی α' و α'' ساخته شده‌اند، (شکل الف) طوری به یکدیگر بسته می‌شوند که فاصلهٔ ثابت آنها از هم d باشد. یک تغییر دما، به میزان ΔT، باعث خمیدگی میله‌ها و تغییر شکل آنها به دو کمان دایره‌ای که تحت زاویهٔ θ یکدیگر را قطع می‌کنند. (شکل ب) می‌شود. R، میانگین شعاع انحنای میله‌ها را بیابید.

(دانشگاه تورنتو کانادا ۱۹۹۴)



(ب) (الف)

حل. طول هر یک از میله‌ها بعد از اعمال حرارت به ترتیب برابرند با:

$$L' = R'\theta = L_\circ(۱ + \alpha'\Delta T) \quad (۱)$$

$$L'' = R''\theta = L_\circ(۱ + \alpha''\Delta T) \quad (۲)$$

که در آن R' و R'' شعاع انحنای میله‌ها و θ زاویه‌ای است که میله‌های متصل، در مرکز انحنا تشکیل می‌دهند. همچنین

$$R' - R'' = d \quad (۳)$$

اگر رابطهٔ (۲) را از رابطهٔ (۱) کم کنیم خواهیم داشت:

$$(R' - R'')\theta = L_\circ(\alpha' - \alpha'')\Delta T$$

$$\rightarrow d\theta = L_\circ(\alpha' - \alpha'')\Delta T \rightarrow \theta = \frac{L_\circ(\alpha' - \alpha'')\Delta T}{d} \quad (۴)$$

اگر (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، داریم:

$$(R' + R'')\theta = ۲L_\circ + L_\circ\Delta T(\alpha' + \alpha'') \quad (۵)$$

از طرفی میانگین شعاع انحنا یعنی R برابر است با:

$$R = \frac{R' + R''}{۲} \xrightarrow{(۵)\text{ از}} = \frac{۲L_\circ + L_\circ\Delta T(\alpha + \alpha'')}{۲\theta} \quad (۶)$$

$$(۶),(۴) \rightarrow R = \frac{۲L_۰ + L_۰\Delta T(\alpha' + \alpha'')}{۲[\frac{L_۰(\alpha' - \alpha'')\Delta T}{d}]} = (\frac{۲ + (\alpha' + \alpha'')\Delta T}{۲(\alpha' - \alpha'')\Delta T})d$$

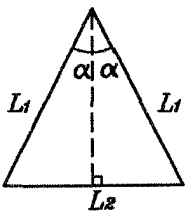
با توجه به اینکه $(\alpha' + \alpha'')\Delta T << ۱$ لذا می‌توان از این جمله در برابر ۲ صرف نظر کرد در نتیجه:

$$R \simeq \frac{۲d}{۲(\alpha' - \alpha'')\Delta T} = \frac{d}{(\alpha' - \alpha'')\Delta T}$$

آزمایش: فیلم 3bimetallic از CD کتاب را ببینید.

۴) با سه تکه مفتول فلزی یک مثلث متساوی الساقین با زاویهٔ رأس ۲α ساخته‌ایم. اگر ضریب انبساط طولی ساق‌های مثلث $\alpha_۱$ و ضریب انبساط طولی قاعدهٔ مثلث $\alpha_۲$ باشد، دمای این قطعه چقدر افزایش یابد تا این مثلث به مثلث متساوی‌الاضلاع تبدیل شود؟

حل. فرض کنید با افزایش دما به میزان ΔT، خواسته مسأله برآورده شود. آنگاه طول ثانویه سه ضلع برابر هم و مساوی L می‌شود در نتیجه می‌توان نوشت:



$$L = L_۱(۱ + \alpha_۱\Delta T) \quad (۱)$$

$$L = L_۲(۱ + \alpha_۲\Delta T) \quad (۲)$$

از طرفی از شکل مثلث متساوی الساقین می‌توان نوشت:

$$\frac{L_۲}{۲} = L_۱ \sin\alpha \quad \rightarrow \frac{L_۲}{L_۱} = ۲\sin\alpha \qquad (۳)$$

با تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲) بر هم داریم:

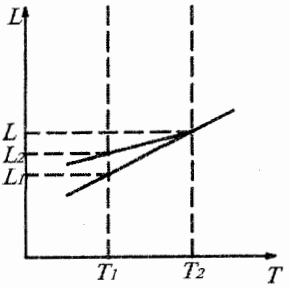
$$۱ = (\frac{L_۲}{L_۱})(\frac{۱ + \alpha_۲\Delta T}{۱ + \alpha_۱\Delta T})$$

$$(۳) \rightarrow ۱ = ۲\sin\alpha(\frac{۱ + \alpha_۲\Delta T}{۱ + \alpha_۱\Delta T})$$

$$\rightarrow \Delta T = \frac{۱ - ۲\sin\alpha}{۲\alpha_۲\sin\alpha - \alpha_۱}$$

۵) دو میله هر یک به طول $L_۱$ و ضریب انبساط طولی $\alpha_۱$ و یک میله به طول $L_۲ (L_۲ > L_۱)$ و ضریب انبساط طولی $\alpha_۲$ تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین داده‌اند. چه شرطی برقرار باشد تا با افزایش دما این مثلث به یک مثلث متساوی‌الاضلاع تبدیل گردد؟

حل. با توجه به اینکه $L_۲ > L_۱$ است لذا به کمک نمودار انبساط طولی باید شیب نمودار مربوط به میله $L_۱$ بیشتر از شیب نمودار مربوط به میلهٔ $L_۲$ باشد تا اینکه در دمای $T_۲$ این دو میله هم طول شوند. (مطابق شکل)



در نتیجه : $L_۱\alpha_۱ > L_۲\alpha_۲$

۶) اگر ضرایب انبساط طولی در سه راستای متعامد z, y, x یک جامد ناهمگن برابر با $\alpha_z, \alpha_y, \alpha_x$ باشند، ضریب انبساط حجمی آن چقدر است؟

حل. مکعبی را در نظر بگیرید که اضلاع آن با محورهای x و y و z موازی هستند و در $T_۰$ هر یک از ابعاد آن، $L_۰$ است. پس از تغییر دما به اندازهٔ $\Delta T = (T - T_۰)$، ابعاد آن به صورت زیر تغییر خواهند کرد.

$$L_x = L_۰(۱ + \alpha_x \Delta T) \qquad L_y = L_۰(۱ + \alpha_y \Delta T) \qquad L_z = L_۰(۱ + \alpha_z \Delta T)$$

و حجم متوازی السطوح برابر است با:

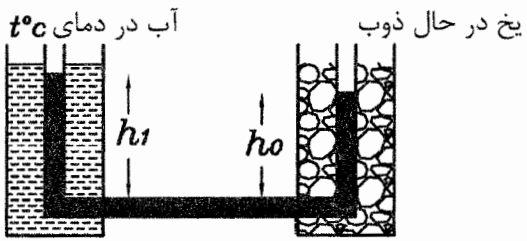
$V = L_۰^۳(۱ + \alpha_x \Delta T)(۱ + \alpha_y \Delta T)(۱ + \alpha_z \Delta T)$. با توجه به اینکه $\alpha_z, \alpha_y, \alpha_x << ۱$ لذا می‌توان از جملات $\alpha_x\alpha_y\alpha_z\Delta T^۳, \alpha_y\alpha_z\Delta T^۲, \alpha_x\alpha_z\Delta t^۲, \alpha_x\alpha_y\Delta T^۲$ صرف‌نظر کرد در نتیجه:

$$V \simeq L_۰^۳(۱ + (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)\Delta T) \quad , \quad L_۰^۳ = V_۰$$

$$\rightarrow V \simeq V_۰(۱ + (\alpha_x + \alpha_t + \alpha_z)\Delta T)$$

بنابراین از مقایسه با رابطه $V = V_۰(۱ + \beta \Delta T)$ در می‌یابیم که ضریب انبساط حجمی برابر با $\beta \simeq \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$ می‌باشد.

۷) شکل زیر دستگاهی را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان مقدار دقیق ضریب انبساط حجمی مایع مورد نظر β را یافت بدون آنکه نیاز به دانستن ضریب انبساط حجمی جنس لوله u شکل داشته باشیم. با توجه به پارامترهای داده شده در شکل ثابت کنید ضریب انبساط حجمی مایع داخل لوله برابر است با $\beta = \frac{h_t - h_۰}{h_۰ t}$



حل. با توجه به اینکه فشار دو ستون در قسمت افقی لوله u شکل با هم برابرند در نتیجه:

$$\rho_t g h_t = \rho_۰ g h_۰ \rightarrow \rho_t h_t = \rho_۰ h_۰ \qquad (۱)$$

ρ_t: چگالی مایع در دمای t $\rho_\circ$: چگالی مایع در دمای صفر $^\circ\circ$.
به کمک رابطهٔ (۳-۱۶) داریم:

$$\rho_t = \frac{\rho_\circ}{1+\beta(t-\circ)} \quad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow h_t = h_\circ(1+\beta t) \rightarrow \frac{h_t}{h_\circ} = 1+\beta t$$

$$\rightarrow \beta = \frac{h_t - h_\circ}{h_\circ t}$$

۱۴.۳ مسائل تکمیلی فصل سوم

با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل این فصل به آدرس mottaghi@sharif.edu حل کلیه مسائل این فصل به آدرس ایمیل شما فرستاده می‌شود.

۱) ترموستات مکانیکی وسیله‌ای است برای کنترل دما و شامل دو نوار چسبیده به هم یکی مسی و دیگری آهنی می‌باشد. قطر و طول دو نوار با هم برابر و مساوی L , d می‌باشند. خواص الاستیکی دو نوار نیز با هم برابرند. اما ضریب انبساط طولی این دو نوار نابرابر و به ترتیب برابر $\lambda_{Fe}, \lambda_{Cu}$ می‌باشند.

اگر دمای ترموستات را به میزان ΔT افزایش دهیم، زاویه انحراف دو نوار را بیابید.

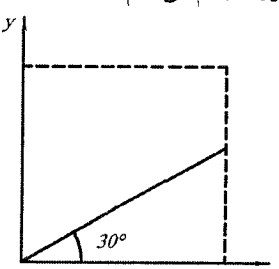
(آمادگی برای المپیاد فیزیک کانادا ۲۰۰۰)

جواب: $\alpha/۲ = \frac{L\Delta T(\lambda_{Fe} - \lambda_{Cu})}{۲d}$

۲) میله‌ای به طول $L_۰$ و ضریب انبساط گرمایی طولی λ را در نظر بگیرید که در دمای $T_۰$ قرار دارد. دمای میله را به T $(T > T_۰)$ رسانده، در نتیجه طول میله برابر $L_۱ = L_۰(۱ + \lambda\Delta T)$ می‌شود. سپس میله را تا دمای $T_۰$ سرد می‌کنیم. در این حالت طول اولیه میله $L_۱$ است. پس طول ثانویه آن برابر $L_۲ = L_۱(۱ + \lambda(-\Delta T))$ می‌شود. یعنی $L_۲ = L_۰(۱ - \lambda^۲\Delta T^۲)$. از این رابطه ملاحظه می‌شود که $L_۲ < L_۰$ یعنی با یک بار گرم و سرد کردن به میزان ΔT طول میله کوتاهتر می‌شود. هر چند که مقدار $\lambda^۲\Delta T^۲$ بسیار کوچک است اما واضح است که $L_۰(۱ - \lambda^۲\Delta T^۲) < L_۰$. چه توضیحی برای استدلال فوق دارید؟ به نظر شما پایستگی جرم با روابط فوق نقض نمی‌شود؟

۳) کریستال مخصوصی موجود است که ضریب انبساط طولی آن در راستای محورهای y,x با هم متفاوت و به ترتیب برابر λ_y, λ_x می‌باشند. به این نوع کریستالها اصطلاحاً غیر ایزوتروپ گویند.

یک صفحه مربعی شکل از این کریستال را در نظر بگیرید که روی آن با مداد، خطی با زاویه ۳۰ درجه نسبت به محور x رسم می‌کنیم.



الف) مطلوب است ضریب انبساط طولی کریستال در امتداد خط رسم شده.

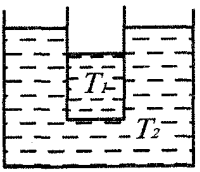
ب) اگر صفحه را حرارت دهیم آیا خط رسم شده خمیده می‌گردد؟

(آمادگی برای المپیاد فیزیک- کانادا ۱۹۹۹)

راهنمایی: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویه ۳۰ در نظر بگیرید که اضلاع قاعده آن موازی محورهای x, y باشد. اضلاع مثلث را هنگامی که دمای آن به میزان ΔT بالاتر می‌رود، بیابید.

جواب: الف) $\lambda = \sqrt{\lambda_x^2 \cos^2 30 + \lambda_y^2 \sin^2 30}$ ب) بله، خم می‌شود.

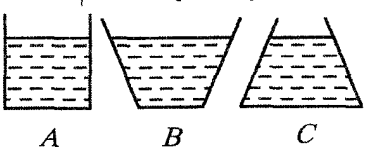
۴) در ظرف استوانه‌ای A (مطابق شکل) مایعی با دمای T_1 ریخته شده است. سپس استوانه را داخل آبی به دمای T_2 وارد می‌کنیم. ($T_2 > T_1$). سطح مایع در حالات زیر نسبت به نشانه‌ای که روی استوانه گذاشته شده است چگونه تغییر می‌کند؟ (پس از تعادل) (مسابقات روسیه)



الف) ضریب انبساط حجمی مایع با شیشه برابر باشد.
ب) ضریب انبساط حجمی مایع کمتر از شیشه باشد.
ج) ضریب انبساط حجمی مایع بیشتر از شیشه باشد.

جواب: الف) مقابل نشانه قرار می‌گیرد.
ب) پایین‌تر از نشانه می‌ایستد.
ج) بالاتر از نشانه قرار می‌گیرد.

۵) سه ظرف مطابق شکل در اختیار داریم. بطوریکه در هر کدام تا ارتفاع h از مایعی به چگالی ρ_0 و ضریب انبساط حجمی β پر شده است. اگر دمای سه ظرف را به اندازه ΔT بالا ببریم، در این شرایط فشار وارد بر کف ظرفها را با هم مقایسه کنید. (مسابقات روسیه)



راهنمایی: با تغییر دما، فشار در کف ظرف A تغییر نمی‌کند. بنابراین تغییر ارتفاع مایع در ظرف دیگر را با تغییر ارتفاع در ظرف A مقایسه کنید.

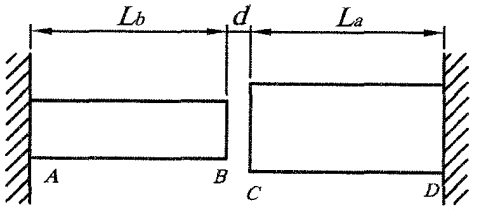
جواب: $P_B < P_A < P_C$

۶) میله‌ای فولادی به طول L، سطح مقطع A، مدول کشسانی Y و ضریب انبساط طولی λ در اختیار داریم. اگر دمای میله را به میزان ΔT بالا ببریم، چه مقدار کار بوسیله آن انجام می‌گیرد؟

راهنمایی: فرض کنید با نیروی F مانع افزایش طول میله شوید. مقدار F از ۰ تا F متغیر است؛ لذا متوسط آن $\frac{F}{2}$ را در نظر می‌گیریم و برای محاسبه F از رابطه (۳-۱۰) استفاده می‌کنیم.
بنابراین کار نیروی F در تغییر طول میله به میزان ΔL برابر است با $\Delta W = \frac{1}{2} F \Delta L$.
راهکار دیگر این است که میله مثل یک فنر با ضریب فنریت $K = \frac{YA}{L}$ عمل می‌کند. در نتیجه انرژی پتانسیل فنر یعنی $\frac{1}{2} K \Delta L^2$ را برابر ΔW قرار می‌دهیم.

جواب: $\Delta W = \frac{1}{2}F\Delta L = \frac{1}{2}K\Delta L^2 = \frac{1}{2}AYL\alpha\Delta T^2$

۷) میله AB از برنج با مدول کشسانی Y_b و ضریب انبساط طولی α_b و سطح مقطع A_b و میله CD از آلومینیوم با مدول کشسانی Y_a و ضریب انبساط طولی α_a و سطح مقطع A_a ساخته شده‌اند. اگر فاصله بین دو میله برابر d باشد و با افزایش دما به میزان ΔT دو میله بر هم فشار وارد آورند، میزان نیروی فشاری در میله‌ها را بیابید.



راهنمایی: از روش جمع آثار کمک بگیرید. لذا اگر ΔL_T تغییر طول در اثر حرارت و ΔL_F تغییر طول در اثر نیرو باشد، آنگاه: $(\Delta L_T)_a + (\Delta L_T)_b - (\Delta L_F)_a - (\Delta L_F)_b = d$

جواب: $F_a = F_b = \dfrac{(L_a\alpha_a + L_b\alpha_b)\Delta T - d}{\dfrac{L_a}{A_aY_a} + \dfrac{L_b}{A_bY_b}}$

فصل ۴

گرما و تعادل گرمایی

همهٔ ما می‌دانیم که گرما (یا حرارت) خودبه‌خود از جسم گرم به جسم سرد منتقل می‌شود ولی هیچگاه جریان گرما به خودی خود از جسم سرد به طرف جسم گرم منتقل نمی‌گردد مگر اینکه با انجام کار و صرف انرژی این عمل را انجام دهیم. مفهوم واقعی انرژی گرمایی را تنها پس از تدوین نظریهٔ جنبشی گازها می‌توان شناخت. این نظریه جنبشی است که مفهوم دما را برای ما روشن می‌سازد. بر اساس این نظریه هر چه جسم داغ‌تر باشد، متوسط انرژی جنبشی مولکول‌های آن نیز بالاتر است. اما جسم سرد دارای متوسط انرژی جنبشی پایین‌تری است. بنابراین هنگامی که جسم گرم را در کنار جسم سرد قرار می‌دهیم. تبادل انرژی بین آن دو آن‌قدر ادامه می‌یابد که متوسط انرژی مولکولی دو جسم با هم برابر گردند. یا به عبارت دیگر دو جسم هنگامی به تعادل می‌رسند که هر دو دارای دمای یکسان شوند. به این انرژی انتقال یافته، انرژی گرمایی می‌گویند. انرژی گرمایی، همان انرژی است که به دلیل اختلاف دماهای دو جسم از جسم گرم‌تر به جسم سردتر منتقل می‌شود. بر اساس نظریهٔ جنبشی گازها، انرژی کل هر جسم برابر است با:

$$E = E_k + E_p + U \qquad (۱-۴)$$

در رابطهٔ فوق، E_k انرژی جنبشی کل جسم، E_p انرژی پتانسیل کل جسم در یک میدان خارجی مشخص و U انرژی مربوط به حرکت گرمایی مولکول‌های جسم است. انرژی U را انرژی درونی جسم هم می‌خوانند.

مثال. انرژی درونی جسم A و B با هم برابر است. همچنین جسم A با جسم C در تعادل گرمایی است. کدام گزاره درست است؟

الف) جسم B با C در حال تعادل گرمایی است.

ب) انرژی درونی جسم B با جسم C برابر است.

ج) اگر A و B مشابه باشند، B با C در تعادل گرمایی است.

د) دمای جسم A با دمای جسم B برابر است.

(دومین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

حل. چون جسم A با جسم C در تعادل گرمایی قرار دارند. می‌توان گفت که حتماً دمای جسم A با دمای جسم C برابر است. از طرفی می‌دانیم انرژی درونی هر جسم بستگی به انرژی جنبشی مولکول‌های آن جسم دارد و خود انرژی جنبشی مولکلول‌ها وابسته به دما است. پس انرژی درونی هم وابسته به تعداد مولکول‌های جنبش کننده است و هم وابسته به دمای آن. پس امکان دارد که انرژی درونی یک میخ ۱۰۰ درجه با انرژی درونی یک پارچ آب با دمای ۱۰ درجه برابر باشد. اگر جرم A با جرم B برابر باشد (A و B مشابهند) آنگاه دمای A با B برابر می‌شود (زیرا در تعادل گرمایی هستند) و چون دمای A نیز با دمای C برابر است لذا دمای B با دمای C برابر شده و B و C در تعادل گرمایی قرار می‌گیرند، گزینهٔ «ج» صحیح است.

۱.۴ یکای انرژی گرمایی

انرژی گرمایی صرفاً یکی از انواع انرژی‌هاست. از این رو اندازه‌گیری آن باید بر حسب ژول باشد اما پیش از آنکه دانشمندان پی ببرند که گرما انرژی انتقال یافته است، گرما بر حسب توانایی آن برای افزایش دمای آب اندازه‌گیری می‌شد. بنابراین کالری (cal) به عنوان مقدار گرمایی که دمای $1gr$ آب را از $14/5°C$ تا $15/5°C$ بالا می‌برد تعریف شد. ($1cal = 4/184J$)

۲.۴ ظرفیت گرمایی ویژه

وقتی به دو جسم با جنس مختلف یک میزان حرارت می‌دهیم ملاحظه می‌کنیم که افزایش دمای آنها با یکدیگر متفاوت است دلیل آن این است که هنگامی که به جسمی انرژی جنبشی مولکولی داده می‌شود. تمام این انرژی به صورت انرژی جنبشی انتقالی مولکلولها (به صورت دما) در جسم ظاهر نمی‌شود. بلکه بخشی از آن صرف افزایش سرعت چرخش و ارتعاش در مولکول‌ها می‌گردد. گاهی هم برای درهم شکستن پیوند گروههای کوچک مولکولی مصرف می‌شود. به دلیل همین اختلاف است که برای تعیین میزان انرژی گرمایی لازم برای افزایش دمای یک جسم به ظرفیت گرمایی ویژه روی می‌آوریم. ظرفیت گرمایی ویژهٔ یک جسم، c، عبارت است از مقداری گرمای لازم برای افزایش دمای واحد جرم آن جسم به اندازهٔ یک درجه لذا:

$$\Delta Q = mc\Delta T \qquad (۲-۴)$$

ΔQ: گرمای داده شده به جسم ΔT: افزایش دمای جسم.

یکای c در دستگاه استاندارد SI برابر $\frac{J}{kgK}$ است هر چند که از یکای $\frac{cal}{gc^o}$ هم خیلی استفاده می‌شود.

با توجه به رابطهٔ (۴-۲) می‌توان ظرفیت گرمایی ویژه را به صورت زیر بدست آورد.

$$c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (۳-۴)$$

اگر برای محاسبهٔ c به دقت بیشتری نیاز دارید می‌توانید ΔT را به سمت صفر میل دهید در نتیجه رابطهٔ فوق به مشتق Q نسبت به T در می‌آید لذا:

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \qquad (۴-۴)$$

نکتهٔ ۱: گرمای ویژهٔ هر جسمی تا اندازه‌ای به دما بستگی دارد که این بستگی برای گازها بیشتر و برای جامدات و مایعات کمتر است. (برای توضیحات بیشتر به فصل ۷ رجوع شود.)

نکتهٔ ۲: ظرفیت گرمایی هر جسم برابر است با حاصلضرب ظرفیت گرمایی ویژهٔ آن جسم در جرم جسم لذا:

$$C = mc \qquad (۵-۴)$$ ظرفیت گرمایی

نکتهٔ ۳: گرمای ویژهٔ هر جسم به شرایط انتقال گرما به آن جسم بستگی دارد. از مهمترین شرایط یکی فشار ثابت است و دیگری حجم ثابت. گرمای ویژه حالت فشار ثابت را با c_p و در حالت حجم ثابت را با c_v نشان می‌دهند. به طور معمول برای جامدات و مایعات این دو عدد تقریباً برابرند ولی برای گازها این دو گرمای ویژه تفاوت فاحشی با یکدیگر دارند.

نکتهٔ ۴: در بسیاری موارد از یکای مول (mol) نیز استفاده می‌شود. می‌دانیم یک مول برابر با $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ اتم یا مولکول از هر ماده‌ای است. حال هرگاه کمیت‌ها بر حسب مول بیان شدند در این صورت گرمای ویژه را گرمای ویژهٔ مولی گویند که یکای آن به صورت $\frac{J}{molK}$ خواهد بود. در این صورت رابطهٔ (۴-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\Delta Q = nc_M \Delta T \qquad (۶-۴)$$

$$c_M = \frac{m}{n}c$$

c_M: ظرفیت گرمای ویژهٔ مولی

نکتهٔ ۵: گرما مثبت است. $(\Delta Q > ۰)$ هرگاه انرژی از محیط به جسم انتقال یابد (که می‌گوییم گرما جذب شده است.) و گرما منفی است. $(\Delta Q < ۰)$ هرگاه انرژی از جسم به محیط انتقال یابد (که می‌گوییم گرما آزاد شده یا هدر رفته است.)

نکتهٔ ۶. توان گرمایی متوسط را می‌توان به صورت نسبت گرمای انتقالی به مدت زمان این انتقال تعریف کرد لذا:

$$\overline{P} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (۷-۴)$$ توان گرمایی متوسط

دقت کنید اگر در رابطهٔ فوق Δt به سمت صفر میل کند آنگاه می‌توان توان گرمایی لحظه‌ای را به صورت زیر حساب کرد. (مشتق گرمای Q نسبت به زمان t)

$$P = \frac{dQ}{dt} \qquad (۸-۴)$$

نکتهٔ ۷: هر چه قدر ظرفیت گرمایی ویژه جسمی بالاتر باشد، تغییرات دمایی آن با دادن حرارت آهسته‌تر خواهد بود. به عنوان مثال ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب که نسبتاً بالا است برابر $۴۲۰۰ \frac{J}{kgk}$ می‌باشد و ظرفیت گرمایی خاک $۸۰۰ \frac{J}{kgk}$ است در نتیجه دمای آب دریا آهسته‌تر از خشکی بالا و پایین می‌رود. مثلاً گرمای لازم برای بالا بردن دمای جرم معینی از آب به میزان $۱^{\circ}C$، بیش از پنج برابر گرمای لازم برای بالا بردن همان مقدار جرم از

خاک است. از آنجاییکه جزایر در محاصرهٔ آب واقع‌اند بنابراین تغییرات دمایی آنها در تابستان و زمستان کمتر از خشکی‌های وسیعی همچون آسیای مرکزی است.

مثال. ثابت کنید اگر چگالی یک جسم جامد ρ و گرمای ویژه‌اش c و ضریب انبساط حجمی آن β باشد و به این جسم مقدار Q گرما بدهیم، ازدیاد حجم آن به حجم اولیه بستگی نداشته و برابر است با $\Delta V = \frac{QB}{c\rho}$.

حل. از رابطهٔ (۳ – ۱۴) داریم:

$$\Delta V = V_\circ \beta \Delta t \qquad (۱)$$

$$\rho = \frac{m}{V_\circ} \qquad (۲)$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ (۴-۲) می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{Q}{mc} \qquad (۳)$$

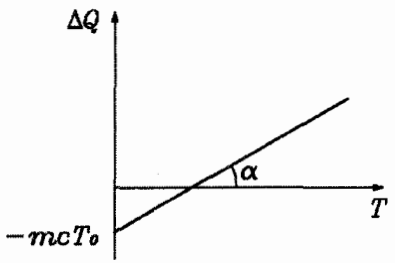
$$(۳),(۱) \rightarrow \Delta V = V_\circ \beta (\frac{Q}{mc}) = \frac{V_\circ}{m}\frac{QB}{c}$$

$$\rightarrow \Delta V = \frac{QB}{\frac{m}{V_\circ}c} = \frac{QB}{\rho c}$$

۳.۴ رسم نمودارهای $Q-T$ و $T-t$

با توجه به اینکه گرمای ویژهٔ c، جامدات و مایعات تقریباً ثابت و مستقل از دما هستند. در نتیجه به کمک رابطهٔ (۴-۲) می‌توان نمودار $Q-T$ را برای جامد یا مایعی که دمای اولیه آن $T_\circ$ است، به فرم زیر رسم کرد.

$$Q = mcT - mcT_\circ$$



$$\text{شیب} = \tan\alpha = mc = C$$

شیب خط برابر ظرفیت گرمایی $C = mc$ است و عرض از مبدأ $-mcT_\circ$ می‌باشد. اگر دمای اولیهٔ جسم صفر باشد نمودار فوق از مبدأ مختصات شروع می‌شود. برای دو نمودار که شیب نمودار اولی بزرگتر از دومی است می‌توان گفت: ظرفیت گرمایی جسم اول بزرگتر از جسم دوم است. یعنی $C_۱ > C_۲ \rightarrow m_۱c_۱ > m_۲c_۲$ اما نمی‌توان نتیجه‌ای برای

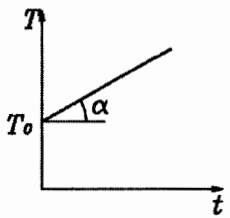
ظرفیت گرمایی ویژهٔ آنها گرفت. همچنین با استفاده از روابط (۴-۲) و (۴-۷) می‌توان رابطهٔ بین دما و زمان را بدست آورد.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta Q = mc\Delta T \\ P = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}\end{array}\right\} \rightarrow P\Delta t = mc\Delta T$$

اگر زمان اولیه $t_0 = 0$ بگیریم آنگاه:

$$mc\ (T - T_0) = Pt \rightarrow T = \frac{P}{mc}t + T_0 \qquad (۹-۴)$$

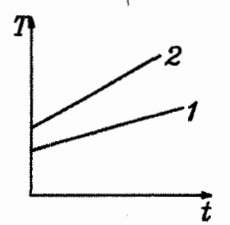
اگر توان گرمایی داده شده به جسم P، ثابت باشد، معادلهٔ فوق به صورت خط رسم می‌شود.



$$\text{شیب} = \tan\alpha = \frac{P}{mc}$$

شیب در نمودار فوق برابر $\frac{P}{mc}$ یا $\frac{P}{C}$ و عرض از مبدأ آن برابر T_0 می‌باشد اگر دمای اولیهٔ جسم $T_0 = 0$ باشد، نمودار از مبدأ خواهد گذشت.

مثال. به دو جسم ۱ و ۲ با توان ثابت و مساوی گرما می‌دهیم و نمودار $T-t$ آنها مطابق شکل زیر شده است. ظرفیت گرمایی آنها را با هم مقایسه کنید.

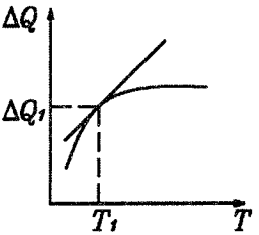


حل. چون شیب نمودار ۲ بیشتر از نمودار ۱ است لذا:

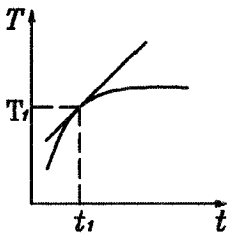
$$\frac{P}{C_2} > \frac{P}{C_1} \rightarrow C_2 < C_1$$

در مورد گازها ظرفیت گرمایی ویژه، c، آنها تابعی از دما است. (به غیر از گازهای بی‌اثر) لذا نمودارهای $Q-T$ و $T-t$ دیگر به صورت خط راست در نمی‌آیند بلکه منحنی‌وار هستند. اما می‌توان از این نمودارها به نحوی استفاده کرد که ما آنها را در چند نکته آورده‌ایم.

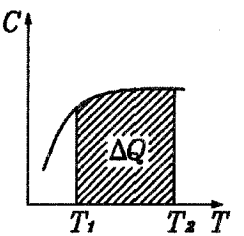
نکتهٔ ۱: در نمودار $\Delta Q-T$، شیب خط مماس بر نمودار در هر دمایی برابر با ظرفیت گرمایی در آن دمااست.



نکتهٔ ۲: در نمودار $T-t$ شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر با $\frac{P}{mc}$ است که P توان در آن لحظه می‌باشد.

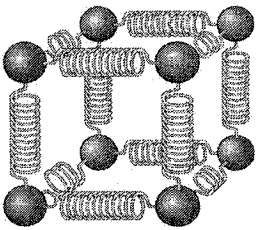


نکتهٔ ۳: چون ظرفیت گرمایی گازها، C، تابع دما است لذا نمودار آنها به صورت منحنی‌وار در می‌آید. اگر مساحت زیر نمودار را از دمای، T_1 تا T_2 حساب کنیم. (مساحت هاشورخورده) در واقع Q داده شده به گاز برای تغییر دمای آن از T_1 به T_2 را حساب کرده‌ایم.



۴.۴ گرمای نهان ویژهٔ ذوب

ذوب و انجماد را در اجسامی مشاهده می‌کنیم که به شکل بلور درمی‌آیند. در یک بلور، اتمها در نقشی منظم به نام شبکه آرایش می‌گیرند. اتمها، حتی در دماهای پایین هم، مقداری انرژی گرمایی دارند. از این رو، اتمها حول مواضع تعادلشان در شبکه ارتعاش می‌کنند. در شکل زیر نمودار طرح‌وار شبکهٔ یک جسم جامد بلورین را نشان داده‌ایم.



اتمها (یا مولکولها) در این شبکه، به کمک نیروهایی فنرمانند در مواضع‌شان نگه داشته می‌شوند. همراه با افزایش دما، دامنهٔ ارتعاش این اتمها نیز بیشتر می‌شود. شبکهٔ هر جسم بلورین، در دمای خاصی درهم می‌شکند. در این دما، ارتعاش مولکولی چنان بزرگ می‌شود که فنرهایارای تحمل آن را ندارند. بدین گونه، اتمها فنرها را می‌شکنند. جسم جامد بلورین، در این دما به مایع تبدیل می‌شود. در این حال، می‌گوییم که بلور ذوب شده است.

تصور حالت معکوس نیز به آسانی امکانپذیر است، هنگامی که جسمی سرد می‌شود، انرژی گرمایی اتمهای (یا مولکولهای) آن کاهش می‌یابد. در یک دمای پایین معین، نیروهای بین ذرات می‌توانند آنها را طبق آرایشی خاص در مواضع‌شان نگهدارند. بدین گونه است که اتمها (یا مولکولها)، در نقش هندسی مشخصی که شبکه نام دارد، با هم پیوند می‌خورند. در این حال، می‌گوییم که جسم متبلور شده است. همان گونه که می‌دانیم، برای کشیدن و گسیختن یک فنر نیازمند انرژی هستیم. پس جای شگفتی نیست که شکستن شبکه نیز مستلزم صرف انرژی باشد. در دمای ذوب، انرژی گرمایی‌ای که به بلور افزوده می‌شود، برای شکستن «فنر»هایی که نگهدارندهٔ مولکولها در شبکه‌اند، به مصرف خواهد رسید. هرچه انرژی افزوده شده بیشتر باشد، فنرهای بیشتری شکسته خواهند شد. انرژیی که در دمای ذوب به جسم جامد داده می‌شود، فنرهای شبکهٔ بلور را به قدری خواهد شکست که دیگر فنر سالمی در جسم جامد باقی نماند. در نتیجه، تا زمانی که شبکهٔ بلور به طور کامل نابود نشود، دمای متوسط مولکولها افزایش نخواهد یافت. تنها پس از ذوب کامل بلور است که گرمای تأمین شده باعث افزایش دمای جسم می‌شود. گرمای لازم برای ذوب (یا انجماد) کردن واحد جرم یک جسم را گرمای نهان ویژهٔ ذوب آن جسم می‌نامند و با نماد L_f نمایش می‌دهند. بنابراین گرمای لازم برای ذوب جسمی به جرم m برابر است با:

$$\Delta Q = mL_f \qquad (۱۰-۴)$$

۵.۴ تبخیر و فشار بخار

اجسام در هر دمایی ممکن است تبخیر شوند. انرژی گرمایی یک مولکول همواره در حال تغییر است. این مولکول در برخورد با مولکول‌های مجاور، هم انرژی کسب می‌کند و هم انرژی از دست می‌دهد. گاهی انرژی کسب شده در مولکول‌ها بسیار زیاد است، گاهی هم

انرژی‌شان نزدیک به صفر است. اکنون مفهوم عملی این خاصیت را برای مولکولی که در سطح یک جسم مایع یا جامد قرار دارد، بررسی می‌کنیم. یک مولکول در حال فرار از سطح یک جسم مایع یا جامد را در نظر بگیرید. این مولکول، برای آنکه بتواند فرار کند، باید انرژی گرمایی زیادی داشته باشد، فقط در این صورت است که این مولکول می‌تواند از چنگ نیروهای جاذبهٔ مولکول‌های مجاور بگریزد. اما همیشه تعدادی مولکول وجود دارند که انرژی‌شان خیلی بیشتر از مقدار متوسط است. بنابراین، همیشه تعدادی مولکول در حال فرار از سطح جسم خواهند بود. این تعداد برای اجسام جامد، معمولاً قابل صرف‌نظر است. در مورد مایعات، این فرار مولکولها را از سطح مایع تبخیر می‌نامند. مایعاتی مانند اتر و الکل آسانتر از جیوه یا روغن تبخیر می‌شوند. این امر صرفاً بدان معنی است که برای گسستن پیوند مولکول‌های اتر و الکل از مولکول‌های مجاورشان، به انرژی کمتری نیاز است. بیشتر این مولکول‌ها می‌توانند از سطح مایع بگریزند.

هنگامی که مولکولهایی از یک مایع تبخیر می‌شوند، مایعی که بر جای می‌ماند در اثر این تبخیر سرد می‌شود. دلیل این امر کاملاً ساده است. تنها مولکول‌هایی که انرژی‌شان خیلی زیاد است می‌توانند از سطح مایع بگریزند. این مولکول‌ها وقتی که از سطح مایع می‌گریزند، مقدار انرژیی که با خود از مایع خارج می‌کنند بیش از سهم خودشان است، پس، به تدریج که عمل تبخیر ادامه می‌یابد، متوسط انرژی گرمایی مولکول‌های باقیمانده کمتر می‌شود. بدین ترتیب، فرایند تبخیر باعث سرد شدن مایع می‌شود.

مثال. یک ظرف درباز آب در هوای آزاد است. ابتدا دمای آب و ظرف و هوا یکسان است. آب به تدریج تبخیر می‌شود. از تغییر دمای هوا چشم بپوشید. زمانی که آب دارد تبخیر می‌شود، دمای آب:

الف) از دمای هوا کم‌تر است.

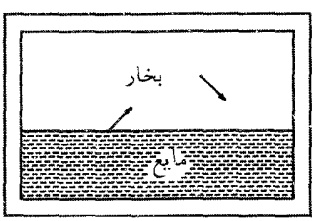
ب) با دمای هوا برابر است.

ج) از دمای هوا بیشتر است.

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. با توجه به توضیحات داده شده گزینهٔ «الف» صحیح است.

فرض می‌کنیم که مایع را، مطابق شکل زیر در ظرفی سربسته قرار داده باشیم.

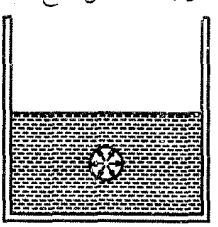


مولکولها، پس از تبخیر، در فضای بالای مایع جمع می‌شوند. هنگامی که تعداد مولکولها در بخار مایع به قدر کافی زیاد شد، وضعیت تعادل برقرار می‌شود. در هر ثانیه، تعداد مولکولهایی که از مایع تبخیر می‌شوند با تعداد مولکولهایی که از بخار به مایع برمی‌گردند، یکسان است. در این شرایط، بخار را اشباع شده می‌نامند. فشار مولکول‌های موجود در بخار، فشار بخار اشباع نامیده می‌شود.

فشار بخار اشباع به دما بستگی دارد. هنگامی که مایع داغ است، تعداد مولکول‌هایی که انرژی کافی برای فرار دارند، بیشتر از وقتی است که مایع سرد است. می‌دانیم هنگامی که عرق پوست بدن تبخیر می‌شود، گرما را با خود می‌برد و بدن خنک می‌شود. اما اگر هوا خیلی مرطوب باشد (مثل مناطق شمالی کشور) مقدار بخار آب موجود در هوا خیلی زیاد است و دیگر بخار آبی قبول نمی‌کند. بنابراین عرق بدن تبخیر نمی‌شود. مقدار آبی که یک متر مکعب هوا می‌تواند در خود نگه دارد به دمای آن وابسته است. هرچه هوا داغ‌تر باشد بخار آب بیشتری را می‌تواند در خود نگه دارد. هنگام غروب آفتاب هوا خنک‌تر شده و توانایی آن برای گرفتن بخار آب کاهش می‌یابد. بنابراین هنگام غروب آفتاب بدترین زمان برای تبخیر عرق پوست است. حال هرچه هوا سردتر شود بخار آب بیشتر چگالیده و شبنم در محیط اطراف تشکیل می‌شود. همچنین بعد از طلوع آفتاب هوا گرم می‌شود و دوباره می‌تواند مقدار بخار بیشتری را در خود نگه دارد. اما این حالت چنان دوام نمی‌آورد و دوباره هوا گرم و مرطوب می‌شود.

۶.۴ جوشش

هنگامی که در مایعی تعداد زیادی حباب قابل رؤیت ظاهر می‌شوند، می‌گوییم که این مایع در حال جوشیدن است. حباب‌ها، حاوی بخار همان مایعی هستند که از آن برمی‌خیزند. اکنون می‌خواهیم ببینیم که برای تشکیل و رشد این حبابها چه شرایطی باید فراهم شود. اگر فشار بخار موجود در حباب از فشار مایعی که آن را فرا گرفته است کمتر باشد، حباب از بین خواهد رفت. اگر فشار بخار درون حباب از فشار مایع بیشتر باشد، حباب روبه رشد خواهد گذاشت. در این صورت است که حباب به سطح مایع صعود می‌کند و در آنجا می‌ترکد. حبابهای کوچک همواره در داخل مایع در حال شکل‌گیری هستند.



هنگامی که دمای مایع پایین است، حبابهایی که در حال شکل‌گیری‌اند بزودی از هم فرو می‌پاشند. در این حال، فشار بخار موجود در حباب کمتر از آن است که با فشاری که از طرف مایع بر آن وارد می‌شود برابری کند. اما فشار بخار یک مایع همراه با افزایش دما، افزایش می‌یابد. اگر با افزودن گرما دمای مایع را بالا ببریم، فشار بخار درون حباب با فشار مایع مؤثر بر حباب مساوی خواهد شد. (حباب را باید به مثابهٔ بادکنکی تصور کرد که فشار مایع از همه طرف بر آن وارد می‌شود.) هنگامی که فشار بخار به این حد می‌رسد، حبابهای درون مایع شروع به رشد می‌کنند. در این حال می‌گویند که مایع در حال جوشیدن است. معمولاً فشار درون مایع تقریباً با فشار جو در سطح مایع، برابر است.

(البته این نکته در اعماق آب صادق نیست، اما مسلماً در مورد یک تشت آب صادق است.) پس، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که:

یک مایع هنگامی می‌جوشد که فشار بخار اشباع آن با فشار جو بالای مایع برابر شود.

پدیدهٔ تبخیر و جوشش در جدول زیر با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

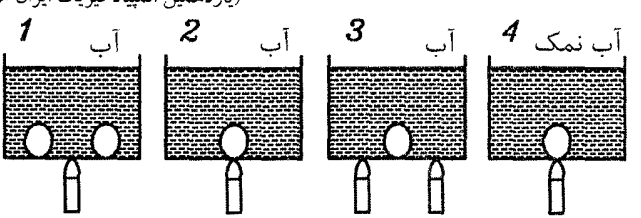
تبخیر	جوشیدن
در هر دمایی رخ می‌دهد.	فقط در دمای معینی که نقطهٔ جوش باشد رخ می‌دهد.
در سطح مایع رخ می‌دهد و حبابهای جوشان از آن خارج نمی‌شود.	درون مایع رخ می‌دهد و حبابهای جوشان درون آن ظاهر می‌شود.
نیاز به گرمای نهان تبخیر دارد.	نیاز به گرمای نهان تبخیر دارد.

آزمایش: یک قوطی پپسی حاوی آب را روی شعله نگه داشته تا آب درون آن بجوشد و تبخیر شود. اگر قوطی را از طرف درب آن وارد آب سردی کنیم، چون دمای بخار آب ناگهان کاهش می‌یابد، بخار آب تبدیل به مایع شده و فشار داخل قوطی پپسی با کاهش حجم به شدت کم می‌شود. آنگاه ..... فیلم 4pepsi از CD کتاب را ملاحظه نمایید.

نکته: همین که مایعی شروع به جوشیدن کرد، دیگر نمی‌توان دمای آن را بالا برد. هر چه مقدار گرمای مایع در حال جوش را بیشتر کنیم، فقط سرعت عمل جوشیدن آن را بیشتر می‌کنیم. تنها وقتی می‌توانیم دما را بالاتر ببریم که از عمل جوشیدن جلوگیری کنیم. (یا فشار وارد بر مایع را تغییر دهیم) تنها در این صورت است که حبابها انرژی گرمایی آب جوشان را به خارج منتقل نمی‌کنند. این حالت (ثابت ماندن دما) درست شبیه همان حالتی است که هنگام ذوب شدن بلورها به آن برمی‌خوریم. در هر دو مورد (ذوب شدن و تبخیر از طریق جوشیدن) تا زمانی که فرایند به پایان نرسد دما بالاتر نخواهد رفت. (مگر اینکه فشار را تغییر دهیم)

مثال. مطابق شکل زیر چهار ظرف یکسان داریم که در هر سه تا از آنها آب و در چهارمی محلول آب‌نمک می‌ریزیم. هر چهار ظرف را روی شعله می‌گذاریم تا محتوایشان به جوش بیاید. شعله‌های زیر ظروف شمارهٔ ۱، ۲ و ۴ یکسان و شعلهٔ ظرف شمارهٔ ۳ از آنها بزرگتر است. پس از به جوش آمدن مایعات، در ظرف شمارهٔ ۱ دو تخم‌مرغ و در سه ظرف دیگر هریک، یک تخم مرغ می‌اندازیم و از این لحظه زمان می‌گیریم. زمان پخته شدن تخم‌مرغ‌ها را به ترتیب t_1 تا t_4 می‌گیریم. فرض کنید تخم‌مرغ‌ها یکسانند و در اثر انداختن آنها در ظرف، مایع درون ظرف از جوشیدن نمی‌افتد. کدام گزینه درست است؟

(یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $t_1 = t_2 = t_3 = t_4$ ب) $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$

ج) $t_۱ > t_۲ = t_۳ > t_۴$ د) $t_۱ = t_۲ = t_۳ > t_۴$

ه) $t_۱ = t_۲ > t_۳, t_۳ < t_۴$ و) $t_۱ = t_۲ = t_۳ < t_۴$

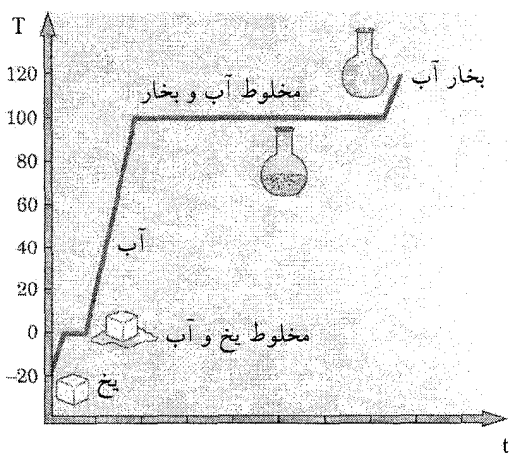
حل. آنچه که در سریعتر پختن غذا مؤثر است دمای بیشتر است. از طرفی می‌دانیم نقطهٔ جوش آب و نمک بالاتر از نقطهٔ جوش آب خالص است لذا دمای ظرف چهارم از همه بالاتر است. در نتیجه تخم‌مرغ ظرف چهارم از همهٔ ظرف‌ها زودتر پخته می‌شود. یعنی $t_۴$ از همه کمتر است از طرفی می‌دانیم در هنگام جوشیدن اگر حرارت بیشتری به ظرف بدهیم دما بالاتر نمی‌رود بلکه نرخ آبی که تبخیر می‌شود بیشتر می‌گردد لذا دمای سه ظرف دیگر با هم برابر و زمان لازم برای پختن تخم‌مرغ در آنها یکسان است یعنی $t_۱ = t_۲ = t_۳$ بنابراین گزینهٔ «د» صحیح است.

۷.۴ گرمای نهان ویژهٔ تبخیر

یک مولکول برای آنکه از سطح مایعی بگریزد، باید انرژی زیادی داشته باشد. می‌توان فرایندی را تصور کرد که در آن، تمام مولکول‌های موجود در مایع از همدیگر جدا شده باشند. در این صورت، جسم را از حالت مایع به شکل گاز در آورده‌ایم. وقوع این فرایند مستلزم انجام کار یا صرف انرژی از جانب ماست. ما معمولاً این انرژی را به صورت گرما تأمین می‌کنیم. گرمای نهان ویژهٔ تبخیر یک جسم، L_V، عبارت است از انرژی لازم برای تبدیل واحد جرم آن جسم از حالت مایع به بخار. همین مقدار گرما نیز در تغییر حالت بخار به مایع آزاد می‌شود. گرمای لازم برای تبخیر جرم m چنین می‌شود.

$$\Delta Q = mL_V \qquad (۱۱-۴)$$

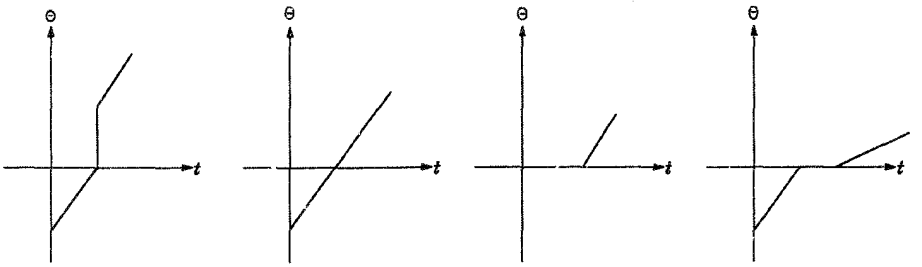
با فرض اینکه مقادیر L_V, L_f به دما بستگی نداشته باشند می‌توان نمودار دما بر حسب زمان $T-t$ یک ماده‌ای مثل آب که تغییر فاز می‌دهد را به صورت زیر ترسیم کرد.



همانطور که از نمودار پیداست در هنگام ذوب و تبخیر با گذر زمان (دادن گرما) دما ثابت باقی می‌ماند.

مثال. مقداری یخ $-10^\circ C$ را به طور یکنواخت حرارت می‌دهیم، کدام‌یک از شکل‌های زیر، نمودار تقریبی تغییرات دما بر حسب زمان را نشان می‌دهد؟

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)

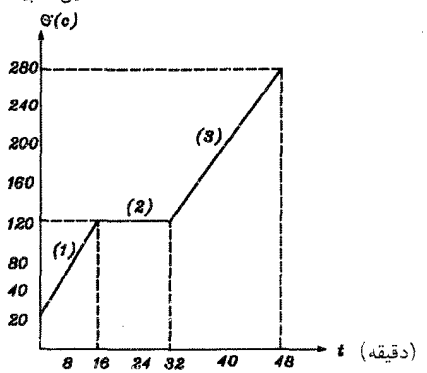


(د) (ج) (ب) (الف)

حل. با توجه به توضیحات داده شده واضح است که گزینهٔ الف صحیح است.

مثال. به جسم جامدی، با توان ثابت گرما می‌دهیم. شکل روبه‌رو تغییرات دمای جسم را نسبت به زمان نشان می‌دهد.

(هفتمین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)



الف) قسمت‌های مختلف نمودار را تحلیل کرده و توضیح دهید که در هر شاخهٔ نمودار، جسم در چه حالتی است. شیب شاخه‌های (۱) و (۲) را مقایسه کرده و نتیجه را بنویسید.
ب) گرمای ویژهٔ جسم را در حالت جامد و مایع حساب کنید. گرمای نهان ذوب جسم $80\frac{J}{g}$ است.

حل: الف) ابتدا جسم که به صورت جامد است با گرفتن انرژی دمایش بالا می‌رود تا به مقدار $120^\circ C$ می‌رسد. در این دما تغییر فاز داده (شاخهٔ ۲) یعنی از حالت جامد به مایع تبدیل می‌شود بعد از ۳۲ دقیقه کاملاً به مایع تبدیل شده و با گرفتن گرما، مجدداً دمایش بالاتر می‌رود.

ب) فرض کنید ظرفیت گرمای ویژه در حالت جامد $c_۱$ و در حالت مایع برابر $c_۲$ و گرمای نهان ذوب برابر L_f باشد. در فاصلهٔ ۱۶ دقیقه گرمایی که به جسم منتقل شده به کمک رابطهٔ (۴-۷) برابر است با:

$$P = \frac{\Delta Q_۱}{\Delta t} \rightarrow \Delta Q_۱ = P\Delta t = P \times (۱۶ \times ۶۰) \qquad (۱)$$

از طرفی این گرما باعث افزایش دمای جسم جامد از $۲۰°C$ تا $۱۲۰°C$ شده است لذا:

$$\Delta Q_۱ = mc\Delta T \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow ۱۶ \times ۶۰P = mc_۱ \times ۱۰۰ \qquad (۳)$$

در فاصلهٔ زمانی ۱۶ تا ۳۲. دقیقه مقدار گرمای داده شده به جسم برابر است با:

$$P = \frac{\Delta Q_۲}{\Delta t} \rightarrow \Delta Q_۲ = P\Delta t = P(۳۲ - ۱۶) \times ۶۰ \qquad (۴)$$

این مقدار گرما موجب تغییر فاز جسم از حالت جامد به حالت مایع می‌شود در نتیجه:

$$\Delta Q_۲ = mL_f \qquad (۵)$$

$$(۵),(۴) \rightarrow P \times ۱۶ \times ۶۰ = m \times \frac{۸۰}{۱۰^{-۳}} \qquad (۶)$$

عدد $۱۰^{-۳}$ برای تبدیل کردن به واحد اصلی است.
به طور مشابه برای شاخهٔ «۳» می‌توان نوشت:

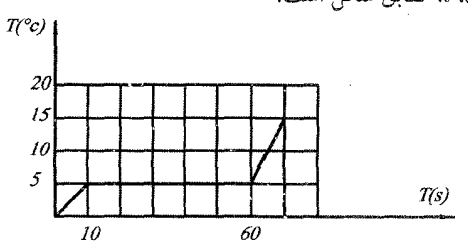
$$P \times (۴۸ - ۳۲) \times ۶۰ = mc_۲(۲۸۰ - ۱۲۰)$$

$$P \times ۱۶ \times ۶۰ = mc_۲ \times ۱۶۰$$

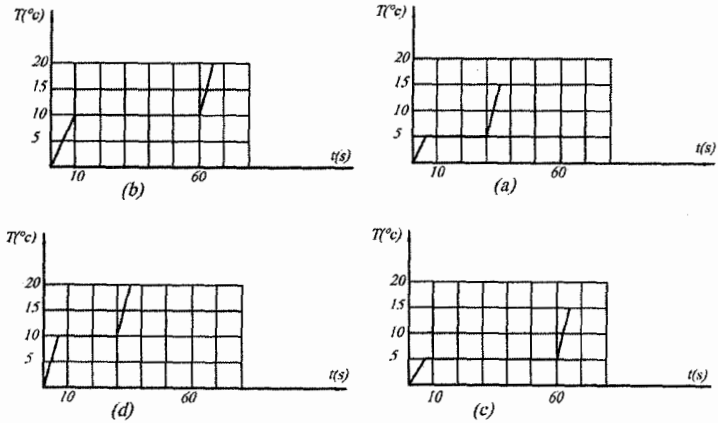
$$(۶),(۳) \rightarrow ۱۰۰c_۱ = \frac{۸۰}{۱۰^{-۳}} \rightarrow c_۱ = ۸۰۰\,\frac{J}{kg°C}$$

$$(۷),(۳) \rightarrow ۱۶۰c_۲ = \frac{۸۰}{۱۰^{-۳}} \rightarrow c_۲ = ۵۰۰\,\frac{J}{kg°C}$$

مثال: به مقداری از یک ماده به جرم m با آهنگ ثابت، گرما می‌دهیم. نمودار تغییرات دمای آن، T بر حسب زمان، t، مطابق شکل است.



به جرم $\frac{m}{۲}$ از همان دمای اولیه، با همان آهنگ قبلی گرما می‌دهیم. کدام نمودار تغییرات دمای آن را بر حسب زمان نشان می‌دهد. (هفدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)



حل: به کمک رابطه (۴-۹) می‌توان دریافت که با نصف شدن جرم، شیب خط نمودار $T-t$ دو برابر می‌شود. بنابراین شیب قسمت‌های اول و سوم نمودار دو برابر می‌شود. در ناحیه دوم که ماده در حال تغییر فاز است، می‌توان نوشت:

$$P=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{mL_f}{\Delta t}\rightarrow mL_f=P\Delta t \qquad (۱)$$

در حالت ثانویه داریم:

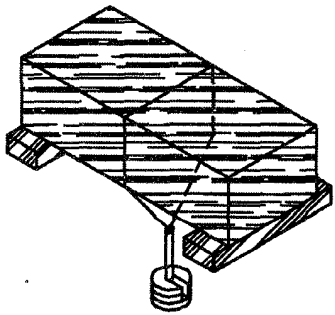
$$\frac{m}{۲}L_f=P\Delta t' \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱)\rightarrow \Delta t=۲\Delta t'\rightarrow \Delta t'=\frac{۱}{۲}\Delta t=\frac{۱}{۲}\times ۵۰=۲\Delta S$$

پس زمان ناحیه تغییر فاز نصف می‌شود. گزینه الف صحیح است.

۸.۴ اثر فشار روی نقطهٔ ذوب

افزایش فشار روی یک قطعه یخ باعث پایین آمدن نقطهٔ ذوب آن می‌شود. این اثر را می‌توان مطابق شکل زیر نشان داد که در آن یک سیم مسی متصل به چند وزنه، بدون دو تکه کردن یخ از میان آن عبور می‌کند. و از طرف دیگر خارج می‌شود.



در حین این عمل فشار زیادی به یخ زیر سیم وارد آمده، در نتیجه نقطهٔ ذوب کاهش می‌یابد و در صفر درجه، یخ بلافاصله و بدون دریافت گرما ذوب می‌گردد. چون در صفر درجه دمای آن بالاتر از نقطهٔ ذوب جدید خواهد بود. سیم داخل آب فرو می‌رود و اکنون چون دیگر فشار خارجی وجود ندارد، آب بالای سیم دوباره منجمد می‌شود زیرا نقطهٔ ذوب به صفر درجه برمی‌گردد. هنگام انجماد، آب از خود گرمای نهان ذوب را بیرون می‌دهد که توسط سیم هدایت شده و سبب ذوب یخ زیر آن می‌گردد. این پدیده انجماد مجدد نام دارد. اگر در این آزمایش از سیم آهنی استفاده کنیم، سیم بسیار آهسته‌تر از میان یخ عبور خواهد کرد و اگر از نخ استفاده کنیم اصلاً چنین اثری مشاهده نخواهد شد! (چرا؟)

۹.۴ اثر ناخالصی‌ها بر نقطهٔ ذوب

دمای مخلوط آب و یخی که خوب بهم خورده باشد در حالت طبیعی $0°C$ است اما اگر ناخالصی‌هایی مثل نمک به آن افزوده شود، ممکن است تا $-20°C$ کاهش یابد. کاهش دما به این علت است که نمک نقطهٔ ذوب یخ را پایین می‌آورد. به این ترتیب یخ ناخالص، در صفر درجه، بالای نقطهٔ ذوب جدید خود قرار دارد. بنابراین ذوب می‌شود و گرمای نهان ذوب را از مخلوط جذب می‌کند تا اینکه دمای مخلوط به نقطهٔ ذوب جدید رسیده و ثابت گردد.

۱۰.۴ اثر فشار روی نقطهٔ جوش

در صورتی‌که فشار وارد بر آب افزایش یابد، نقطهٔ جوش آن بالا خواهد رفت. در دیگ زودپز، غذا بسیار سریع‌تر می‌پزد زیرا فشارِ بخارِ آبِ جمع شده داخل دیگ زودپز می‌تواند حتی به دو برابر فشار جو برسد. در آن صورت آب حدوداً در $120°c$ شروع به جوشیدن خواهد نمود. در ارتفاع زیاد، آب در دمای کمتر (مثلاً، در ارتفاع ۳۰۰۰ متری در $90°C$) به جوش می‌آید و بدون اینکه دمای آن به $100°C$ برسد تمام آن بخار می‌شود. (زیرا فشار

با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد.) به همین دلیل است که تخم‌مرغ در آبی که در کوهستان به جوش می‌آید به سختی می‌پزد زیرا آب به اندازهٔ کافی داغ نمی‌شود. اگر فشار را به اندازهٔ کافی کم کنیم آب در دمای اتاق به جوش می‌آید. این موضوع را با گذاشتن یک کاسهٔ آب در ظرف تخلیه و تلمبه کردن هوای آن به بیرون به راحتی می‌توان نمایش داد. می‌دانیم در جریان تبخیر، مولکولهای پر انرژی، سطح آب را ترک می‌کنند و مولکول‌های برجامانده کم انرژی و سردند. اگر هوا به کندی تخلیه شود اثر خنک شدن با کسب گرما از خارج جبران می‌شود و دمای آب ثابت می‌ماند. اما اگر هوا به سرعت تخلیه گردد، گرمای دریافتی نمی‌تواند با اثر خنک شدن رقابت کند و دمای آب شروع به نزول می‌کند و امکان جوشیدن آب کم می‌شود و ممکن است مقدار آب باقیمانده به یخ تبدیل شود.

۱۱.۴ اثر ناخالصی‌ها بر نقطه جوش

ناخالصی‌هایی همچون نمک در صورت ریخته شدن در آب، نقطهٔ جوش آن را بالا می‌برند.

مثال. به مقداری یخ در دمای صفر درجهٔ سلسیوس مقداری نمک طعام با همین دما اضافه می‌کنیم. کدام یک از اتفاق‌های زیر رخ می‌دهد؟ (یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

الف) یخ شروع به ذوب شدن می‌کند و دمای مجموعه زیاد می‌شود.
ب) یخ شروع به ذوب شدن می‌کند و دمای مجموعه کم می‌شود.
ج) دمای مجموعه کم می‌شود و یخ ذوب نمی‌شود.
د) دمای مجموعه زیاد می‌شود و یخ ذوب نمی‌شود.

حل. با ریختن نمک روی یخ، در واقع یخ به دو قسمت تقسیم می‌شود یکی یخ و نمک و دیگر یخ خالی. از طرفی می‌دانیم افزودن ناخالصی مثل نمک به یخ دمای ذوب را پایین می‌آورد لذا مخلوط یخ و نمک تبدیل به آب و نمک می‌شود و برای این تبدیل همانطور که قبلاً گفتیم، گرمای نهان ذوب خود را از مخلوط جذب می‌کند. در نتیجه دمای مجموعه پایین می‌آید. گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال: در یک مخلوط آب و الکل، نسبت جرم الکل به جرم مخلوط، کسر جرمی الکل نامیده می‌شود. نقطه جوش مخلوط آب و الکل به کسر جرمی الکل بستگی دارد. اگر کسر جرمی الکل در مخلوط از مقدار معین x کم‌تر باشد، با افزایش کسر جرمی الکل نقطه جوش مخلوط کم می‌شود. ضمناً کسر جرمی الکل در بخار حاصل از مخلوط آب و الکل بیشتر از کسر جرمی الکل در مخلوط است. یک مخلوط آب و الکل در نظر بگیرید که کسر جرمی الکل آن کمتر از x باشد. این مخلوط را می‌جوشانیم. با گذشت زمان نقطه جوش مخلوط:

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

الف) کم می‌شود ب) ثابت می‌ماند. ج) زیاد می‌شود.

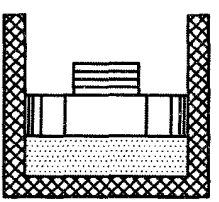
حل: با توجه به اینکه کسر جرمی الکل در بخار حاصل از مخلوط آب و الکل بیشتر از مخلوط است لذا با جوشاندن مخلوط، مقدار الکل بیشتر از آب بخار می‌شود. پس در حین جوشش کسر جرمی الکل، در مخلوط کم می‌شود و با توجه به فرض مسأله، نقطه جوش مخلوط افزایش می‌یابد. گزینه «ج» صحیح است.

۱۲.۴ مادهٔ خالص

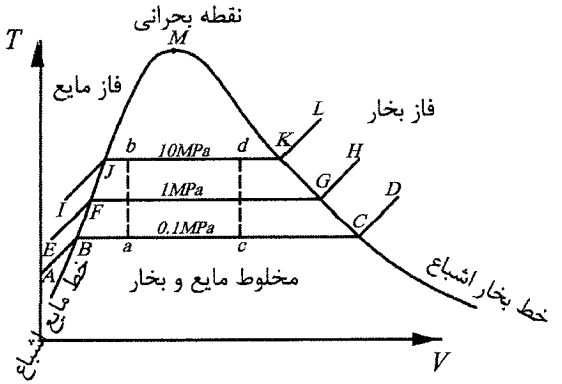
مادهٔ خالص ماده‌ای با ترکیبی همگن و از نظر شیمیایی تغییرناپذیر است. این ماده می‌تواند در بیش از یک فاز اما با ترکیب شیمیایی یکسان وجود داشته باشد. بنابراین مایع آب یا مخلوطی از مایع آب و بخار آب و همچنین مخلوط یخ و مایع آب تماماً مواد خالص هستند زیرا هر فاز آن همان ترکیب شیمیایی را دارا هستند.

۱۳.۴ تعادل فاز بخار با مایع

فرض کنید مقداری آب را درون یک استوانه حاوی درپوش قرار داده و بر روی آن چند وزنه مطابق شکل زیر بگذاریم. با دادن گرما و ثابت نگه داشتن فشار می‌توان آب را به بخار آب تبدیل کرد.



که در این صورت حجم زیر درپوش به نحو قابل ملاحظه‌ای زیاد می‌شود. حال می‌توان با اضافه یا کم کردن وزنه‌ها فشار را در مقادیر مختلف ثابت نگه داشت و در هر فشار به آب گرما داد و تغییرات حجم آن را بر حسب دما بررسی کرد. اگر اطلاعات فشار و دما و حجم را برای حالات مختلف بدست آورده و در یک نمودار رسم کنیم. شکل آن به صورت زیر در خواهد آمد.



خطوط شکستهٔ $ABCD$، $EFGH$ و $IJKL$ در واقع سه نمونه آزمایش هستند که در فشار ثابت انجام و در نمودار ترسیم شده‌اند. با این تفاوت که فشار وارد از طرف درپوش برای اولی برابر $0/1MPa$ برای دومی برابر $1MPa$ و برای سومی برابر $10MPa$ است. حال خط $ABCD$ را در نظر بگیرید؛ ابتدا در نقطهٔ A استوانه حاوی آب است با دادن گرما حجم آن کمی زیاد شده تا به نقطهٔ B برسیم. در نقطهٔ B اصطلاحاً می‌گویند مایع اشباع داریم یعنی در نقطهٔ B در آستانهٔ بخار شدن مولکول‌های آب هستیم. با دادن کمی گرما وارد فاز آب و بخار می‌شویم که در این حالت دما ثابت مانده و فقط حجم زیر درپوش استوانه زیاد می‌شود. لذا خط BC خطی افقی می‌باشد. با افزودن گرما به نقطهٔ C می‌رسیم در این نقطه در واقع آخرین قطره مایع به بخار تبدیل می‌شود. بنابراین این‌طور می‌توان گفت که در نقطهٔ B، ۱۰۰% مایع داریم و در نقطهٔ C، ۱۰۰% بخار داریم. بنابراین با حرکت از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ C مرتب از مقدار مایع کم شده و بر مقدار بخار افزوده می‌شود. حال با افزودن فشار مثلاً $1MPa$ خط $EFGH$ را داریم یعنی اگر فشار $1MPa$ باشد آنگاه اولین قطره‌ای از مایع که به بخار تبدیل می‌شود در نقطهٔ F صورت می‌گیرد یعنی در دمای بالاتر نسبت به نقطهٔ B اما مجدد همین حرف‌ها را می‌توان برای خط $EFGH$ گفت. اگر فشار و دما را آنقدر زیاد کنیم به نقطهٔ بحرانی M می‌رسیم که بالاتر از آن حالت مایع و بخار یکی است که در آن وضعیت اصطلاح بخار و مایع معنا نداشته بلکه به آن اصطلاح سیال را نسبت می‌دهند. به کمک این نمودار می‌توان به سؤالات مفهومی سخت به راحتی جواب داد.

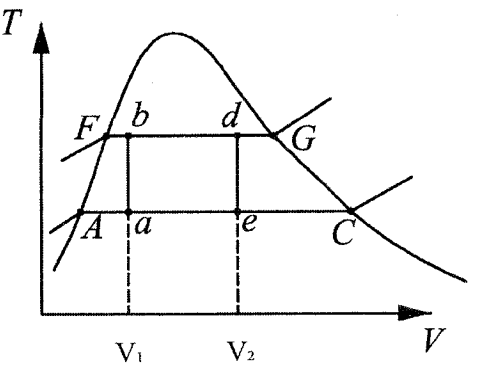
نکته. اگر چه ما این نمودار را برای آب ترسیم کردیم ولی برای تمامی مواد خالص می‌توان نموداری مشابه شکل ترسیم کرد. منتهی مقادیر فشار و دما و حجم آن با آب متفاوت است.

مثال. مخلوطی از مایع و بخار آن در حال تعادل در ظرفی دربسته موجودند. با دادن گرما دمای آن را بالا می‌بریم. در این‌صورت:
الف) بر مقدار آب افزوده می‌شود.
ب) بر مقدار بخار افزوده می‌شود.

حل. جواب مسأله این است که هر دو حالت امکان دارد.

• حالت «الف» حالتی است که مثلاً شما مطابق شکل در نقطهٔ a قرار دادید و حجم ظرف

شما به میزان V_1 است. چون حجم ظرف ثابت است با دادن گرما به نقطهٔ b می‌رسیم. از طرفی می‌دانیم نقاط A و F نقاطی روی خط مایع اشباع هستند و چون فاصله نقطهٔ b به F نزدیک‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ a به A است یعنی نقطهٔ b از مقدار مایع بیشتری برخوردار است لذا بر مقدار مایع افزوده می‌شود.



• حالت «ب»: فرض کنید حجم ظرف شما به اندازهٔ V_2 باشد با دادن گرما به نقطهٔ d می‌رسیم از طرفی می‌دانیم نقاط C و G روی خط بخار اشباع هستند و چون نقطهٔ d به G نزدیک‌تر از نقطهٔ e به C است لذا مقدار بخار حالت دوم یعنی d بیشتر از حالت اول است. پس به مقدار بخار افزوده می‌شود.

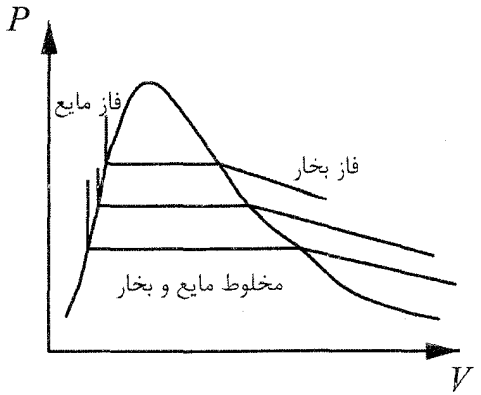
در حالت کلی می‌توان گفت که جواب مسأله بستگی به فشار درون ظرف دارد.

سؤال بنیادی

ما قبلاً یاد گرفته بودیم که هنگام تبخیر آب دما ثابت می‌ماند پس چطوری شما در مسأله مطرح شده بالا مخلوط آب و بخار دارید و دما را تغییر داده‌اید؟!!! آخه چرا؟ !!!
کاملاً سؤال خوبی است. در هنگام تبخیر آب دما ثابت است به شرطی که فشار ثابت باشد. یعنی شما در آزمایشگاه مدرسه، آب را در ظرفی می‌جوشانید و هنگام جوشش آب می‌بینید دما ثابت است، چرا؟ چون فشار اتاق آزمایش ثابت است. اگر همین آزمایش را در ظرف دربسته قرار دهید هنگام جوشش آب می‌توانید با افزایش فشار، دما را بیفزایید. (با توجه به نمودار)

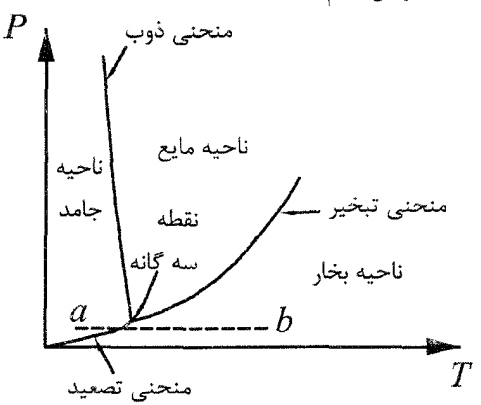
۱۴.۴ نمودار $P-V$

می‌توان مشابهاً نمودار $P-V$ را برای یک مادهٔ خالص مثل آب به صورت زیر ترسیم کرد. و از روی آن به سؤالات مفهومی به درستی پاسخ داد.



۱۵.۴ تعادل فازهای بخار و مایع و جامد

همانطور که در حالت قبل دیدید شما می‌توانید در هنگام تبخیر آب با تغییر فشار، دما را نیز تغییر دهید. به کمک آزمایش نشان داده شده است که در فشار و دمایی خاص می‌توان یخ را مستقیماً به بخار تبدیل کرد بدون آنکه به مایع تبدیل شود. بنابراین مشابه حالت قبل یخ را در استوانهٔ درپوش داری قرار می‌دهند و با تغییر فشار و دما و حجم حالات مختلف آن را بررسی می‌کنند. اگر این اطلاعات را جمع‌آوری کنیم و نمودار فشار- دما $(P-T)$ را رسم کنیم به نمودار زیر می‌رسیم.

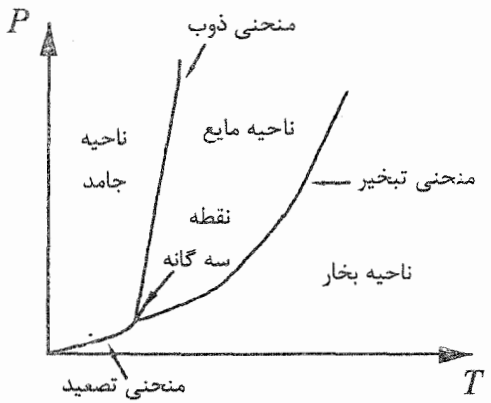


(نمودار ۱)

همانطور که از نمودار پیداست سه ناحیهٔ جامد و مایع و بخار نشان داده شده است. در طول منحنی تبخیر، فازهای مایع و بخار در حال تعادل با هم و در طول منحنی ذوب، فازهای جامد و مایع در حال تعادل باهم و در طول منحنی تصعید، فازهای جامد و بخار با یکدیگر در حال تعادل می‌باشند. همانطور که در نمودار می‌بینید اگر یخی داشته باشیم در

نقطهٔ a با ثابت نگه داشتن فشار و افزایش دما به نقطهٔ b می‌رسیم یعنی یخ مستقیماً به بخار تبدیل شده است و از ناحیه مربوط به فاز مایع عبور نکرده است. تنها در یک دما و فشار هر سه فاز را می‌توان باهم داشت که به این نقطه در نمودار، نقطهٔ سه گانه گفته می‌شود. در بقیهٔ حالات دو فاز داریم.

نکتهٔ مهم: نمودار $P-T$ ترسیم شده در شکل فوق برای موادی هستند که مثل آب بر اثر ذوب منقبض می‌شوند (یا چگالی مایع آنها بیش از چگالی جامدشان است.) در نمودار این مواد (از جمله آب) شیب خطوط مماس بر منحنی‌های تصعید و تبخیر مثبت می‌باشد ولی شیب خطوط مماس بر منحنی ذوب منفی است. اما برای سایر مواد (موادی که چگالی مایع آنها کمتر از جامدشان باشد) مطابق شکل زیر شیب خطوط مماس بر سه منحنی تصعید و ذوب و تبخیر مثبت است.



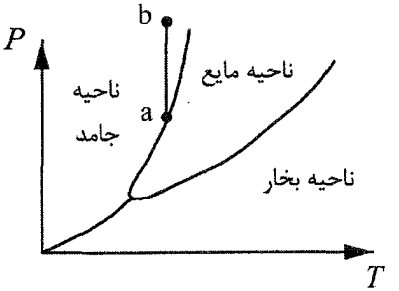
(نمودار ۲)

مثال. در یک ظرف دربسته مقداری مایع و جامد آن، در تعادل گرمایی با هم‌اند، فشار درون ظرف را زیاد می‌کنیم و دمای آن را ثابت نگه می‌داریم. در این صورت:

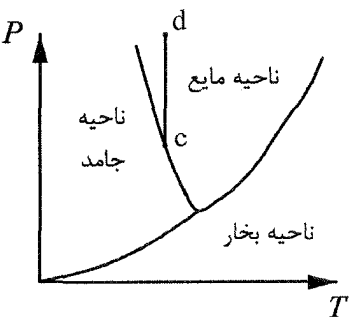
الف) حتماً مقدار مایع زیاد می‌شود.
ب) حتماً مقدار جامد زیاد می‌شود.
ج) اگر چگالی مایع بیش از چگالی جامد باشد، مقدار مایع زیاد می‌شود.
د) اگر چگالی مایع کمتر از چگالی جامد باشد، مقدار مایع زیاد می‌شود.

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. چون مایع و جامد در حال تعادل هستند لذا روی منحنی ذوب قرار داریم. از طرفی با توجه به نکتهٔ مهم بیان شده اگر چگالی مایع کمتر از چگالی جامد باشد باید از نمودار ۲ استفاده کرد که مطابق شکل زیر اگر دما ثابت باشد و فشار را بیفزاییم در واقع وارد ناحیهٔ جامد شده و مقدار جامد بیشتر می‌شود. (از نقطهٔ a به سمت نقطهٔ b حرکت می‌کنیم که بیشتر وارد ناحیه جامد می‌شویم)

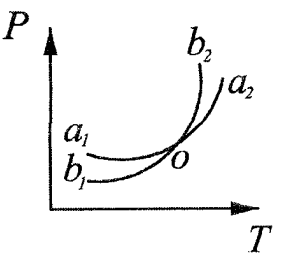


حال اگر چگالی مایع بیشتر از چگالی جامد باشد باید از نمودار ۱ استفاده کرد که مطابق شکل زیر از نقطهٔ c به نقطهٔ d حرکت می‌کنیم و مقدار مایع بیشتر می‌شود. لذا گزینهٔ «ج» صحیح است.



مثال. نخست متن زیر را به دقت بخوانید و سپس به سؤال‌های ۱ تا ۳ پاسخ دهید.

اگر جامد یا مایعی زیر سرپوشی قرار گیرد که خالی از هر مادهٔ دیگری است، مقداری از آن بخار می‌شود تا فشار بخار در آن ظرف به حد معینی برسد. اگر فشار بخار در آن ظرف بیش از حد معین باشد، مقداری از این بخار به جامد (یا مایع) تبدیل می‌شود تا فشار بخار باقیمانده به این حد برسد. این فشار را فشار بخار تعادل جامد (یا مایع) می‌نامند. فشار بخار تعادل به دما بستگی دارد. جسمی را در یکی از دو حالت جامد یا مایع در نظر بگیرید. یکی از این دو حالت را A و دیگری را B می‌نامیم. اگر فقط حالت A را در نظر بگیریم. نمودار فشار بخار تعادل مانند منحنی a_1oa_2 و اگر فقط حالت B را در نظر بگیریم، نمودار فشار بخار تعادل مانند منحنی b_1ob_2 از شکل زیر است. این نمودار برای مواد مختلف به طور کیفی به همین شکل است.



مثال. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟
الف) در هر دمای دلخواه، ممکن است که هر یک از دو حالت A و B ماده یا هر دو با بخار در حال تعادل باشند.
ب) به غیر از دمای نقطهٔ O در هر دمایی فقط یکی از حالت‌های A یا B ماده ممکن است که با بخار در حال تعادل باشد و بخش‌های a_1o و ob_2 نمودار عملاً به وقوع نمی‌پیوندند.
ج) به غیر از دمای نقطهٔ o در هر دمایی فقط یکی از حالت‌های A یا B ممکن است که با بخار در حال تعادل باشد و بخش‌های b_1o و a_2o عملاً به وقوع نمی‌پیوندد.

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. همانطور که گفتیم فقط در نقطهٔ سه‌گانه است که هر سه فاز می‌توانند با هم وجود داشته باشند (نقطهٔ o) لذا در هر دمایی امکان وجود سه فاز باهم میسر نیست در نتیجه گزینهٔ الف غلط است. از طرفی با توجه به نمودار دوم (ترسیم شده در متن درس) درمی‌یابیم که شیب منحنی ذوب بیشتر از شیب منحنی تصعید است. لذا می‌توان گفت منحنی b_1ob_2 مربوط به حالت جامد و a_1oa_2 مربوط به حالت مایع است. حال با توجه به نمودار دوم می‌توان دریافت که زیر نقطه o (نقطه سه گانه) تعادل جامد با بخار (منحنی تصعید) برقرار است. لذا خط a_1o که مربوط به منحنی تعادل مایع با بخار است نمی‌تواند زیر نقطه o وجود داشته باشد. لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟
الف) حالت A مایع و حالت B جامد است.
ب) حالت B مایع و حالت A جامد است.
ج) فقط از روی نمودار معلوم نیست که A یا B کدام جامدند، بلکه به نوع ماده بستگی دارد.

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. همانطور که در سؤال ۱ پاسخ داده شد منحنی oa_2 مربوط به مایع و منحنی b_1o مربوط به حالت جامد است. پس حالت A مایع و حالت B جامد است.

مثال. با توجه به شکل کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) هر جسم جامدی را در هر فشاری که گرم کنیم، ابتدا ذوب می‌شود و سپس می‌جوشد.
ب) بعضی از جامدات در هر فشاری در اثر گرم شدن ابتدا ذوب می‌شوند و سپس می‌جوشند، برخی در هر فشاری مستقیماً بخار (تصعید) می‌شوند.
ج) هر جامدی در اثر گرم شدن، اگر فشار محیط از حدی کمتر باشد، ابتدا ذوب می‌شود و سپس می‌جوشد، و اگر فشار محیط از آن حد بیشتر باشد مستقیماً تصعید می‌شود.
د) هر جامدی در اثر گرم شدن، اگر فشار محیط از حدی کمتر باشد مستقیماً تصعید می‌شود و اگر فشار محیط از آن حد بیشتر باشد، ابتدا ذوب می‌شود و سپس می‌جوشد.

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. با توجه به نمودارهای اول و دوم ترسیم شده در متن درس اگر فشار کمتر از فشار نقطهٔ سه‌گانه باشند جامد بدون اینکه ذوب شود تصعید می‌گردد و اگر فشار بالاتر از فشار نقطهٔ سه‌گانه باشد جامد ابتدا ذوب و سپس تبخیر می‌شود. لذا گزینهٔ «د» صحیح است.

۱۶.۴ تعادل گرمایی (پایستگی انرژی)

هنگامی که n جسم با دماهای $T_1, \ldots, T_n$ را با هم مخلوط کنیم. گرما از اجسام با دمای بالاتر به اجسام با دمای پایین‌تر منتقل می‌شود به نحوی که پس از مدت زمانی دمای تمام این اجسام همگی با هم برابر و مساوی T می‌شود. (به شرطی که انتقال گرما از محیط اطراف به اجسام وجود نداشته باشد.) حال به کمک پایستگی انرژی می‌توان گفت چون انرژی که اجسام با دمای بالاتر از دست داده‌اند گم نشده بلکه این انرژی به اجسام با دمای پایین‌تر داده شده است لذا مجموع جبری گرمای داده شده و گرفته شده، برابر صفر است. (انرژی در این سیستم با n جسم نیز تولید نشده است.) بنابراین:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \ldots + \Delta Q_N = 0 \qquad (۱۲-۴)$$

با جایگذاری، دمای نهایی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$m_1c_1(T - T_1) + m_2c_2(T - T_2) + \ldots + m_nc_n(T - T_n) = 0$$

$$T = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2 + \ldots + m_nc_nT_n}{m_1c_1 + m_2c_2 + \ldots + m_nc_n} \qquad (۱۳-۴)$$

نکته: اگر در اختلاط n جسم، تغییر فاز داشته باشیم باید جایگذاریهای mL_f و mL_V نیز صورت بگیرد.

مثال. جرم گرماسنجی از جنس مس، $20gr$ است. قطعه‌ای ماده به جرم $80gr$ را همراه با $50gr$ آب، در آن می‌گذاریم. دمای اولیهٔ سیستم $20°C$ است. سپس $100gr$ آب $70°C$ به گرماسنج می‌افزاییم. پس از رسیدن به تعادل گرمایی، دما به $52°C$ می‌رسد. گرمای ویژهٔ ماده نامعلوم را بیابید. به شرطی گرمای ویژهٔ آب و مس به ترتیب برابر $1\frac{cal}{grK}$ و $0/094\frac{cal}{gr.K}$ باشد.

حل. می‌دانیم در این مسأله انرژی از آب $70°C$ به سایر مواد منتقل می‌شود به کمک رابطهٔ (۴-۱۲) داریم.

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 = 0$$

$$20 \times 0/092(52 - 30) + 80 \times c(52 - 30) + 50 \times 1 \times (52 - 30)$$

$$+100 \times 1 \times (52 - 70) = 0 \rightarrow c = 0/37\frac{cal}{gr.k}$$

مثال. یک گرمکن الکتریکی ۱۰۰ واتی برای مدت زیادی داخل یک ظرف محتوی چهار کیلوگرم آب قرار دارد و نتوانسته است آب را به جوش آورد. اگر گرمکن را خاموش کنیم، چند ثانیه طول می‌کشد تا دمای آب یک درجهٔ سلسیوس کاهش یابد؟ ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب $4200\frac{J}{kg°C}$ است و از ظرفیت گرمایی ظرف و گرمکن صرف‌نظر می‌شود.

(هشتمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. می‌دانیم با دادن گرما پس از مدت زمانی آب جوش می‌آید حال که در مسأله گفته آب به جوش نیامده است. نشان می‌دهد که گرمای داده شده به ظرف بلافاصله به محیط منتقل می‌گردد. یعنی مقدار گرمایی که از دست می‌دهد درست برابر مقدار گرمایی که می‌گیرد.

بنابراین اگر گرمکن را خاموش کنیم ظرف به میزان $۱۰۰W$ انرژی از دست می‌دهد این از دست دادن انرژی موجب کاهش دمای آب می‌شود. به کمک روابط (۴-۲) و (۴-۷) داریم.

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{\Delta Q}{\Delta t}\rightarrow \Delta Q=P\Delta t \\ \Delta Q=mc\Delta T \end{array}\right\}\rightarrow P\Delta t=mc\Delta T$$

$$\rightarrow ۱۰۰\times\Delta t=۴\times۴۲۰۰\times۱ \qquad \rightarrow \Delta t=۱۶۸S$$

مثال. $۳۰۰gr$ یخ $-۲۰^{\circ}C$ را به داخل کالریمتری که دارای $۲۰۰gr$ آب $۸^{\circ}C$ است می‌اندازیم. پس از برقراری تعادل گرمایی دمای کالریمتر و محتویات آن چه اندازه خواهد شد؟ ظرفیت گرمایی آب و یخ به ترتیب $۴۲۰۰\frac{J}{kgK}$ و $۲۱۰۰\frac{J}{kgK}$ و گرمای نهان ذوب یخ برابر $۳۳۴\frac{kJ}{kg}$ است.

حل. برای حل مسایلی که باید دمای نهایی را بدست بیاوریم و ممکن است بعضی از مواد در حین رسیدن به تعادل، تغییر فاز دهند لازم است که دمای نهایی را حدس بزنیم. برای این کار انرژی که اجسام گرم می‌دهند تا به آن دما برسند را می‌یابیم و با انرژی که اجسام سرد گرفته‌اند و به آن دما رسیده‌اند مقایسه می‌کنیم. در این مسأله فرض می‌کنیم یخ $-۲۰^{\circ}C$ به یخ $۰^{\circ}C$ برسد بنابراین گرمای گرفته شده توسط آن برابر است با:

$$\Delta Q_۱=۳۰۰\times۱۰^{-۳}\times۲۱۰۰\times(۰-(-۲۰))=۱۲۶۰۰J$$

انرژی که آب از دست می‌دهد تا به دمای صفر برسد برابر است با:

$$\Delta Q_۲=۲۰۰\times۱۰^{-۳}\times۴۲۰۰(۰-۸)=-۶۷۲۰J$$

همانطور که ملاحظه می‌شود گرمای آب برای صفر کردن یخ کفایت نمی‌کند لذا آب یخ می‌زند حال اگر فرض کنیم همه آب یخ بزند انرژی که آزاد می‌کند برابر است با:

$$\Delta Q_۳=-mL_f=-۲۰۰\times۱۰^{-۳}\times۳۳۴\times۱۰^{۳}=-۶۶۸۰۰J$$

همانطور که ملاحظه می‌شود اندازهٔ جمع $\Delta Q_۲+\Delta Q_۳$ بزرگتر از $\Delta Q_۱$ می‌شود در نتیجه همهٔ آب یخ نمی‌زند. حال با فرض اینکه به میزان m کیلوگرم آب یخ بزند. از رابطهٔ (۴-۱۲) داریم:

$$\Delta Q_۱+\Delta Q_۲+mL_f=۰$$

$$۱۲۶۰۰-۶۷۲۰-m\times۳۳۴\times۱۰^{۳}=۰$$

L_f: گرمای نهان انجماد

$$\rightarrow m=۰/۰۱۷۶kg=۱۷/۶gr$$

در نتیجه دمای تعادل صفر درجه است که در اثر این اختلاط، آب ۸ درجه به صفر درجه تبدیل شده و به میزان $۱۷/۶gr$ از آب نیز یخ می‌زند.

مثال. هوای داخل مخزنی که محتوی مقدار کمی آب $۰^{\circ}C$ به جرم m است به سرعت به وسیلهٔ پمپ تخلیه می‌شود. در اثر سرعت تبخیر، مقداری از آب به یخ تبدیل می‌گردد. با فرض

اینکه گرمای نهان ذوب و تبخیر در $0^\circ C$ به ترتیب برابر q_1 و q_2 باشد، مقداری از آب اولیه که به یخ تبدیل می‌شود را بیابید.

(مسابقات روسیه)

حل. اگر m_1 کیلوگرم آب یخ بزند در اثر یخ زدن مقدار انرژی که آزاد می‌کند برابر است با:

$$\Delta Q_1 = -m_1 q_1$$

این انرژی آزاد شده موجب می‌شود که بخش دیگر آب تبخیر شود اگر به میزان m_2 کیلوگرم آب تبخیر شود میزان انرژی که این مقدار آب می‌گیرد برابر است با:

$$\Delta Q_2 = m_2 q_2$$

از پایستگی انرژی داریم:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 \rightarrow m_1 q_1 = m_2 q_2 \qquad (1)$$

از طرفی :

$$m = m_1 + m_2 \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow m = m_1(1 + \frac{q_1}{q_2}) \rightarrow m_1 = (\frac{q_2}{q_1 + q_2})m$$

مثال: ظرفیت گرمایی هر جسم برابر با حاصلضرب جرم در گرمای ویژه آن است. ظرفیت گرمایی مایع A برابر C_A و ظرفیت گرمایی جسم B برابر C_B است. برای حل کردن B در A بدون تغییر دما، گرمای Q لازم است (اگر فرآیند انحلال گرماگیر باشد Q مثبت است و اگر فرآیند انحلال گرمازا باشد Q منفی است) ظرفیت گرمایی محلول C است. کدام گزینه در مورد C درست است؟

الف) اگر Q مثبت باشد، حتماً $C > C_A + C_B$ است.

ب) اگر Q منفی باشد، حتماً $C > C_A + C_B$ است.

ج) اگر Q نسبت به دما صعودی باشد، حتماً $C > C_A + C_B$ است.

د) اگر Q نسبت به دما نزولی باشد، حتماً $C > C_A + C_B$ است.

(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

حل: اگر بخواهید دمای محلول را به میزان ΔT بالا ببرید. گرمای مورد نظر برای اینکار برابر $C\Delta T$ است. حال راه دیگری برای بالابردن دمای محلول به میزان ΔT این است که ابتدا دمای مایع A, B را به میزان ΔT بالا ببریم. سپس آنها را با هم مخلوط کنیم. انرژی مورد نیاز برای اینکار (با توجه به اینکه فرآیند انحلال نیز گرمای Q لازم دارد.) برابر است با $C_A\Delta T + C_B\Delta T + Q$. از برابری این دو انرژی داریم:

$$C\Delta T = C_A\Delta T + C_B\Delta T + Q$$

$$C = C_A + C_B + \frac{Q}{\Delta T}$$

بنابراین اگر $\frac{Q}{\Delta T} > 0$ (Q نسبت به تغییرات دما صعودی باشد) آنگاه، $C > C_A + C_B$ گزینه «ج» صحیح است.

مثال. یک مکعب مسی را درون مقداری آب، که از آن گرم‌تر است می‌اندازیم. جرم مکعب و آب مساوی و انرژی هدر رفته ناچیز است. کدام گزینه درست است؟

الف) قدر مطلق تغییر انرژی درونی مس و آب برابر، و قدر مطلق تغییر دمای آن‌ها هم برابر است.
ب) قدر مطلق تغییر انرژی درونی مس و آب نابرابر، و قدر مطلق تغییر دمای آن‌ها برابر است.
ج) قدر مطلق تغییر انرژی درونی مس و آب برابر، و قدر مطلق تغییر دمای آن‌ها نابرابر است.
د) قدر مطلق تغییر انرژی درونی مس و آب نابرابر، و قدر مطلق تغییر دمای آن‌ها هم نابرابر است.

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. با استفاده از پایستگی درمی‌یابیم که انرژی که آب از دست می‌دهد برابر است با انرژی که مکعب مسی می‌گیرد. بنابراین قدرمطلق تغییر انرژی مس و آب با هم برابرند حال به کمک معادلهٔ (۴-۱۲) داریم:

$$mc_1\Delta T_1 = mc_2\Delta T_2 \rightarrow \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{c_2}{c_1}$$

در نتیجه قدر مطلق تغییر دماهای آنها با هم برابر نیست زیرا $c_1 \neq c_2$ می‌باشد. لذا گزینهٔ «ج» صحیح است.

مثال. یک قالب یخ صفر درجه را به مقداری آب ۲۵ درجه اضافه می‌کنیم. دمای آب ۵ درجه کاهش می‌یابد. اگر یک قالب یخ دیگر درست مشابه قبلی، به همان ظرف آب اضافه کنیم، دما چند درجهٔ دیگر کاهش می‌یابد؟ (از تبادل گرمای یخ و آب با محیط چشم بپوشید.)

الف) ۵ درجهٔ دیگر کاهش می‌یابد.
ب) دیگر کاهش نمی‌یابد.
ج) بیش‌تر از ۵ درجه کاهش می‌یابد.
د) کمتر از ۵ درجه کاهش می‌یابد.

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. **راه حل اول:** مقدار گرمایی که هر یک از دو قالب یخ از آب درون ظرف می‌گیرند تا ذوب شوند با هم برابر است، منتهی جرم آب درون ظرف در حالت دوم بیشتر از حالت اول است. (زیرا در حالت دوم قالب یخ اول درون ظرف آب شده است) بنابراین کاهش دمای آب در حالت دوم کمتر از کاهش دما در حالت اول خواهد بود، زیرا طبق رابطهٔ $\Delta Q = mc\Delta T$ برای میزان یکسان ΔQ هرچه جرم m بزرگتر باشد، تغییر ΔT کوچکتر خواهد بود. گزینهٔ «د» صحیح است.

راه حل دوم: چون دمای تعادل ۲۰ درجه است لذا یخ ابتدا آب شده و دمایش به ۲۰ درجه می‌رسد در نتیجه اگر جرم یخ m_1 و جرم آب m_2 باشد داریم.

$$m_2c(20-25) + m_1L_f + m_1c(20-0) = 0$$

L_f: گرمای نهان ذوب

c: ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب

$$\rightarrow m_1(L_f + 20c) = 5m_2c$$

$$\rightarrow m_1L_f = (5m_2 - 20m_1)c \qquad (1)$$

در حالت دوم جرم آب $m_1 + m_2$ است که دمای آن $20^\circ C$ می‌باشد با اضافه کردن یخ به جرم m_1 و با فرض اینکه دمای تعادل T باشد داریم:

$$(m_1 + m_2)c(T - 20) + m_1L_f + m_1c(T - 0) = 0$$

$$\rightarrow (m_۱ + m_۲)c(۲۰ - T) = m_۱L_f + m_۱cT \qquad (۲)$$

$$(۲), (۱) \rightarrow (m_۱ + m_۲)c(۲۰ - T) = (۵m_۲ - ۲۰m_۱ + m_۱T)c$$

$$\rightarrow T = \frac{۲۰m_۱ + ۲۰m_۲ - ۵m_۲ + ۲۰m_۱}{(m_۱ + m_۲) + m_۱} = \frac{۴۰m_۱ + ۱۵m_۲}{۲m_۱ + m_۲}$$

$$\rightarrow T = \frac{۲۰(۲m_۱ + m_۲) - ۵m_۲}{۲m_۱ + m_۲} = ۲۰ - \frac{۵m_۲}{۲m_۱ + m_۲} \qquad (۳)$$

$$\rightarrow \text{کاهش دما} = ۲۰ - T = \frac{۵m_۲}{۲m_۱ + m_۲} \qquad (۴)$$

$$\frac{۵m_۲}{۲m_۱ + m_۲} < \frac{۱۰m_۱ + ۵m_۲}{۲m_۱ + m_۲} = ۵ \qquad (۵)$$

$$(۴) \text{ و } (۵) \rightarrow \text{کاهش دما} = ۲۰ - T < ۵$$

بنابراین گزینهٔ «د» صحیح است.

۱۷.۴ مسائل تکمیلی فصل چهارم

با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل به آدرس mottaghi@sharif.edu حل کلیه مسائل به آدرس ایمیل شما فرستاده می‌شود.

۱) قصد داریم در یک ظرف جدار نازک، یک لیتر آب را بجوشانیم. برای این منظور از یک گرمکن برقی استفاده می‌کنیم. روی گرم‌کن برچسبی با این نوشته موجود است "۵۰۰ وات، ساخت واندرلند". بعد از اینکه دما به $۶۰^\circ C$ رسید، افزایش دما متوقف می‌شود و چون صبر کردن برای ما خسته کننده شده است گرم‌کن را خاموش می‌کنیم. اندازه‌گیری ما نشان می‌دهد که در ۲۰ ثانیه اول آب به اندازه $۲^\circ C$ سرد شده است. توان واقعی گرم‌کن را بیابید. (ظرفیت گرمایی ویژه آب $c = ۴۲۰۰ J/Kg.K$ است)

(آمادگی برای المپیاد فیزیک- کانادا ۲۰۰۵)

راهنمایی: هنگامی که دما به $۶۰^\circ C$ می‌رسد مقدار گرمایی که آب می‌گیرد با مقدار گرمایی که از دست می‌دهد برابر است.

جواب: $P = \frac{mc\Delta T}{\tau} = ۴۲۰۰ W$

۲) یک شیشه حاوی $V_۱ = ۳۰۰ cm^۳$ تولوئن در دمای $۰^\circ C$ و در شیشه دیگری $V_۲ = ۱۱۰ cm^۳$ تولوئن در دمای $۱۰۰^\circ C$ موجود است. (مجموع دو حجم برابر $۴۱۰ cm^۳$ می‌شود) اگر ضریب انبساط حجمی تولوئن $\beta = ۰/۰۰۱ \frac{۱}{c}$ باشد، بعد از اینکه دو مایع را با هم مخلوط کردیم، حجم نهایی چقدر می‌شود. از اتلاف حرارت به محیط اطراف صرف‌نظر کنید. (دومین المپیاد بین‌المللی-۱۹۶۸)

راهنمایی: دمای تعادل را بدست آورده و حجم دو مایع در این دما را محاسبه می‌کنیم. با جمع دو حجم مایع، حجم نهایی بدست می‌آید.

جواب: $V_f = V_۱ + V_۲ = ۴۱۰ cm^۳$

۳) آبی به جرم $m_۲$ در یک کالریمتر مسی به جرم $m_۱$ نگهداری می‌شود. دمای تعادل آن دو $t_۲$ درجه سانتیگراد است. یخی به جرم $m_۳$ و دمای $t_۳ < ۰$ در این کالریمتر می‌اندازیم.

الف) دما و جرم‌های آب و یخ را در هنگام تعادل برای مقادیر کلی $m_۳, m_۲, m_۱$ ، $t_۳, t_۲$ بدست آورید. معادلات تعادل را برای تمام فرآیندهای ممکن که قابل درنظر گرفتن هستند، بنویسید.

ب) دمای نهایی و جرم‌های نهایی آب و یخ را برای حالت زیر بیابید.

$t_۳ = -۲۰^\circ C, t_۲ = ۱۰^\circ C, m_۳ = ۲ Kg, m_۲ = ۱ Kg, m_۱ = ۱ Kg$

از اتلاف حرارت صرف‌نظر کنید.

$c_۱ = ۰/۱ Kcal/Kg^\circ C$ ظرفیت گرمایی ویژه مس

$c_۲ = ۱ Kcal/Kg^\circ C$ ظرفیت گرمایی ویژه آب

$c_۳ = ۰/۴۹۲ Kcal/Kg^\circ C$ ظرفیت گرمایی ویژه یخ

$L_f = ۷۸/۷ Kcal/Kg$ گرمای نهان ذوب یخ

$1cal = 4/2J$

(سومین المپیاد بین‌المللی ۱۹۶۹)

راهنمایی: در حالت کلی، ۴ حالت برای مسأله فوق قابل تصور است. ابتدا علائم زیر را فرض می‌کنیم.

t: دمای نهایی در حالت تعادل

M_2: جرم نهایی آب

M_3: جرم نهایی یخ

m'_2: جرمی از آب که به یخ تبدیل شده است. $(m'_2 \leq m_2)$

m'_3: جرمی از یخ که به آب تبدیل شده است. $(m'_3 \leq m_3)$

این ۴ حالت عبارتند از:

۱) $t_0 < t < t_2$

۲) $t_3 < t < t_0$

۳) $m'_2 = 0\ ,\ t = t_0$

۴) $m'_3 = 0\ ,\ t = t_0$

جواب: الف)

حالت ۱) $(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t) = m_3c_3(t_0 - t_3) + m_3L_f + m_3c_2(t - t_0)$

حالت ۲) $m_1c_1(t_2 - t) + m_2c_2(t_2 - t_0) + m_2L_f + m_2c_2(t_0 - t) = m_3c_3(t - t_3)$

حالت ۳) $(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0) = m_3c_3(t - t_3) + m'_3L_f$

حالت ۴) $(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0) + m'_2L_f = m_3c_3(t_0 - t_3)$

ب) با استفاده از حالت ۴ داریم:

$t = 0°C, M_2 = 0/89Kg, M_3 = 2/11Kg$

فصل ۵

انتقال گرما

انتقال گرما یعنی انتقال انرژی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر که به علت اختلاف دما بین آن دو نقطه صورت می‌گیرد. این انتقال انرژی به سه طریق اصلی انجام می‌شود.

۱) رسانش ۲) همرفت ۳) تابش

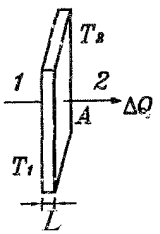
در هر سه مورد شیوهٔ انتقال انرژی را توضیح داده و روابط حاکم بر هر یک را بیان می‌کنیم.

۱.۵ رسانش (هدایت)

هنگامی که یک سرمیله‌ای فلزی را روی شعله قرار می‌دهیم، تمام میله داغ می‌شود. در این حال چه اتفاقی می‌افتد؟ شعله یک سر میله را گرم می‌کند، یعنی به اتمهای موجود در یک انتهای میله انرژی گرمایی می‌دهد. این عمل باعث می‌شود که اتمها با انرژی بیشتری به ارتعاش در آیند. اما این اتمها انرژی دریافتی را از طریق برخورد با اتمهای مجاور، میان خود و همسایگان سردترشان تقسیم می‌کنند. اتمهای اخیر نیز، به نوبهٔ خود، با اتمهای مجاورشان برخورد می‌کنند و انرژی را به آنها منتقل می‌کنند. بدین ترتیب، انرژی گرمایی از اتمی به اتم دیگر در طول میله منتقل می‌شود. اتمهای موجود در انتهای داغ میله از همین راه انرژی‌شان را به دیگر قسمت‌های میله می‌رسانند، و در نتیجه تمام میله گرم می‌شود.

در انتقال گرما از طریق رسانش، انرژی گرمایی در اثر برخورد مستقیم بین ذرات، از ذره‌ای به ذرهٔ دیگر، منتقل می‌شود. فلزات از جملهٔ بهترین رساناهای گرما هستند. تعداد الکترون‌های آزاد فلزات خیلی زیاد است. الکترونها هم مانند اتمها در برخورد شرکت دارند، و از این طریق به انتقال گرما کمک می‌کنند. فلزات، به دلیل داشتن الکترون آزاد، از لحاظ الکتریکی نیز رساناهای خوبی هستند. به دلیل همین نقش دوگانهٔ الکترونهای آزاد است که قاعدهٔ تخمینی زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد: رساناهای الکتریکی خوب معمولاً رساناهای گرمایی خوبی هستند. حال برای بدست آوردن روابط حاکم بر این پدیده

قطعه‌ای به مساحت A و ضخامت L را در نظر بگیرید. اگر وجه(۱) را در دمای T_1 و وجه (۲) را در دمای T_2 $(T_1 > T_2)$ ثابت نگه داریم، در این صورت گرما از طرف وجه (۱) به سمت وجه (۲) جریان می‌یابد. بنابراین گرمای ΔQ که در مدت زمان Δt از یک وجه به وجه دیگر منتقل می‌شود برابر است با:



$$\Delta Q = KA(\frac{T_1 - T_2}{L})\Delta t \qquad (۱-۵)$$

در رابطه فوق عدد ثابت K، رسانندگی گرمایی (رسانش گرمایی) نام دارد که برای مواد مختلف، متفاوت است. واحد K برابر $\frac{W}{m^\circ C}$ می‌باشد.

نکتهٔ ۱: می‌توان رابطهٔ (۵-۱) را به صورت زیر نوشت:

$$P = \Delta Q' = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = KA(\frac{T_1 - T_2}{L}) \qquad (۲-۵)$$

در رابطهٔ فوق به عبارت $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ شارش گرما در واحد زمان یا نرخ انتقال گرما و یا توان گرمایی گفته می‌شود. همچنین به عبارت $\frac{T_1 - T_2}{L}$ شیب گرمایی یا گرادیان گرمایی اطلاق می‌گردد.

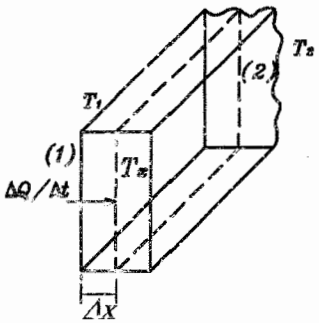
نکتهٔ ۲: موادی که رسانندگی خوبی دارند عدد K بزرگ و موادی که رسانای ضعیفی هستند از عدد K کوچکی برخوردارند.

نکتهٔ ۳: رابطهٔ (۵-۲) معروف به قانون فوریه می‌باشد.

نکتهٔ ۴: انتقال گرمایی که در واحد زمان از واحد سطح می‌گذرد را شار گرمایی گویند و با نماد $\Delta Q''$ نمایش می‌دهند.

$$\Delta Q'' = \frac{\Delta Q}{A\Delta t} \qquad (۲-۵\text{ب})$$

اگر همان قطعهٔ قبلی به ضخامت L را در نظر بگیریم با توجه اینکه $T_1 > T_2$ است لذا گرما از وجه (۱) به سمت وجه (۲) حرکت می‌کند با فرض اینکه سطح بالا و پایین قطعه عایق باشد. تمام حرارتی که از وجه (۱) خارج می‌شود تماماً از وجه فرضی خط‌چین که به فاصله Δx از وجه (۱) قرار دارد می‌گذرد.



از طرفی با زیاد شدن x دما از T_1 کم شده تا در $x = L$ به مقدار T_2 که کمتر از T_1 است برسد. حال با فرض اینکه دمای این وجه فرضی خط‌چین T_x باشد به کمک رابطهٔ (۵-۲) داریم:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = KA(\frac{T_1 - T_x}{\Delta x})$$

$$\rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -KA(\frac{T_x - T_1)}{\Delta x}) \qquad (۳-۵)$$

اگر قرار دهیم $\Delta T = T_x - T_1$ آنگاه:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad (۴-۵)$$

در رابطهٔ فوق علامت منفی نشان می‌دهد که جهت گرما برخلاف جهت افزایش دما (در جهت کاهش دما) است. رابطهٔ (۵-۴) را برای این بدست آوردیم که از آن بتوان در رسم درست نمودار استفاده کرد. مضافاً براینکه در بعضی از کتابها به جای استفاده از رابطهٔ (۵-۲) از رابطهٔ (۵-۴) استفاده می‌کنند.

۲.۵ رسم نمودار رسانش

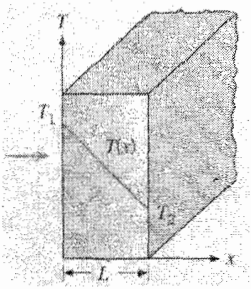
با فرض اینکه نرخ انتقال گرما $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ثابت باشد به کمک رابطهٔ (۵-۳) داریم:

$$T_x = -[\frac{1}{KA}(\frac{\Delta Q}{\Delta t})]\Delta x + T_1 \qquad (۵-۵)$$

در رابطهٔ فوق اگر وجه (۱) قطعه را در مبدأ قرار دهیم $x_1 = 0$ در نتیجه $\Delta x = x - x_1 = x$ می‌شود لذا داریم:

$$T_x = -[\frac{1}{KA}(\frac{\Delta Q}{\Delta t})]x + T_1 \qquad (۶-۵)$$

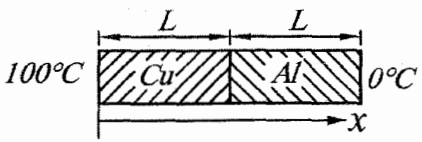
همانطور که ملاحظه می‌کنید رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که رابطهٔ دمای T با مکان x به صورت خطی تغییر می‌کند. بنابراین اگر قطعه را مطابق شکل در نمودار $T-x$ قرار دهیم نمودار انتقال گرمای آن با فرض ثابت بودن نرخ گرما به صورت خط خواهد بود. همچنین از رابطهٔ (۵-۶) درمی‌یابیم که شیب‌خط برابر است با:



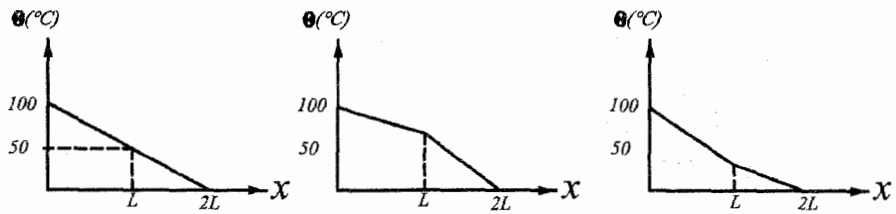
$$m = -\frac{1}{KA}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (۵-۷)$$

به منفی بودن شیب خط نمودار دقت کنید.

مثال. دو میلهٔ مسی و آلومینیومی با ابعاد یکسان را مطابق شکل زیر به یکدیگر متصل می‌کنیم. به طوری که دو میله به خوبی در تماس گرمایی با هم هستند، دمای دو انتهای میله همواره در دماهای نشان داده شده ثابت نگه داشته می‌شوند. مس بیش از آلومینیوم رسانای گرما است و اطراف میله‌ها از نظر گرمایی عایق پوشی شده است.



کدام‌یک از گزینه‌های زیر، نمودار تغییرات دما را بر حسب فاصلهٔ x در طول میله در شرایط ثابت (پایدار) درست نشان می‌دهد. (نهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)



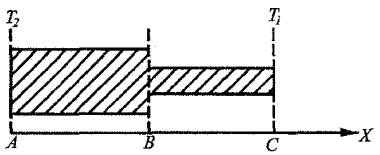
حل. از رابطهٔ (۵-۷) درمی‌یابیم که هرچه K بزرگتر باشد (رسانندگی بهتری داشته باشد) شیب خط از نظر اندازه کوچکتر است یعنی از نظر شکلی به وضعیت افقی نزدیکتر است. در حالت حد که K به سمت بی‌نهایت میل کند شیب برابر صفر می‌شود. از طرفی نرخ انتقال گرمای دو میله با هم برابر است (زیرا تمام حرارت عبوری از مس از آلومینیوم هم می‌گذرد) و مساحت دو میله نیز برابر هستند، لذا:

$$\left.\begin{array}{l} A_{Cu} = A_{Al} \\ (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{cu} = (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{Al} \\ K_{Cu} > K_{AL} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{K_{cu}A_{cu}} \ (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{cu} < \frac{1}{K_{Al}A_{Al}} \ (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{Al}$$

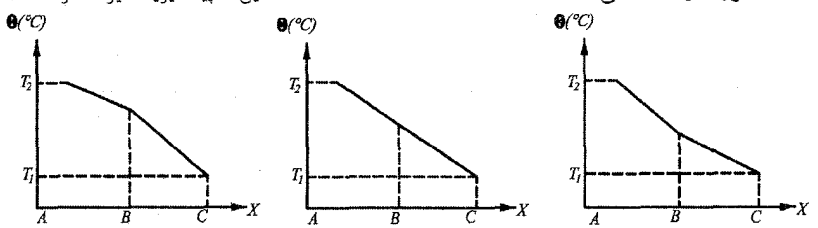
$$\rightarrow \text{از رابطه}(۵-۷) \rightarrow |m_{Cu}| < |m_{Al}|$$

بنابراین شیب خط دما بر حسب مکان برای مس به وضعیت افق نزدیک‌تر است تا شیب‌خط دما برای میلهٔ آلومینیومی، لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال. دو میلهٔ یکنواخت مسی با سطح مقطع‌های متفاوت مطابق شکل زیر به یکدیگر وصل شده‌اند و دو انتهای مجموعه با دو منبع گرمایی که دماهای آنها همواره T_1 و T_2 $(T_2 > T_1)$ است در تماس‌اند.



اطراف میله‌ها کاملاً عایق‌پوشی شده است. پس از گذشت مدت زمانی دمای هر نقطه‌ای از میله‌ها به مقدار ثابتی می‌رسد. کدام‌یک از نمودارهای زیر تغییرات دمای میله‌ها در طول محور x را نشان می‌دهد؟ (دهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)



حل. با توجه به رابطهٔ (۵-۷) داریم:

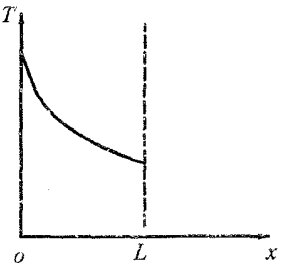
$$\left.\begin{array}{l} A_{AB} > A_{BC} \\ (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{AB} = (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{BC} \\ K_{AB} = K_{BC} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{K_{AB}A_{AB}} \ (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{AB} < \frac{1}{K_{BC}A_{BC}} \ (\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{BC}$$

$$\rightarrow |m_{AB}| < |m_{BC}|$$

یعنی شیب خط نمودار $T - x$ در قسمت AB به وضعیت افق نزدیک‌تر است تا خط نمودار در قسمت BC یا به عبارت دیگر شیب خط BC منفی‌تر از شیب‌خط AB است. لذا گزینهٔ «ج» صحیح است.

مثال. تغییرات دمایی یک دیوار برای زمان خاص t_1 طی یک فرایند گذرا (متغیر با زمان) توسط

منحنی زیر داده شده است. به نظر شما دیوار در حال گرم شدن است یا سرد شدن؟



حل. با توجه به شکل اندازهٔ قدرمطلق شیب خط مماس بر منحنی در $x = ۰$ بزرگتر از اندازهٔ قدرمطلق شیب خط مماس بر منحنی در $x = L$ است لذا به کمک رابطهٔ (۵-۷) داریم:

$$|m_۱|_{x=۰} > |m_۲|_{x=L} \rightarrow \frac{۱}{KA}\ \frac{\Delta Q}{\Delta t}|_{x=۰} > \frac{۱}{KA}\ \frac{\Delta Q}{\Delta t}|_{x=L}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta t}|_{x=۰} > \frac{\Delta Q}{\Delta t}_{x=L}$$

یعنی نرخ گرمای ورودی در $x = ۰$ بیشتر از نرخ گرمای خروجی در $x = L$ است. در نتیجه دیوار در حال گرم شدن است.

۳.۵ مقاومت گرمایی در رسانش (R)

برای جلوگیری از اتلاف در هر محلی مثل خانه، محل کار و ... لازم است که از عایق‌ها استفاده شود. عایق‌ها موادی هستند که از رسانندگی ضعیفی برخوردارند به همین خاطر گرما با نرخ بسیار کمی از آنها خارج شده و باعث جلوگیری از اتلاف انرژی می‌گردند. می‌توان گفت موادی که رسانندگی ضعیفی دارند در واقع از مقاومت گرمایی خوبی برخوردارند و در برابر عبور گرما از خودشان مقاومت نشان می‌دهند. لذا گرما به سختی در آنها جریان می‌یابد. به کمک تشابهی که بین جریان گرما و جریان بار الکتریکی وجود دارد می‌توان مقاومت گرمایی را برای اجسام در رسانش محاسبه کرد. در بحث جریان الکتریکی می‌دانیم اگر به دو سر مقاومت R، اختلاف پتانسیل V اعمال شود، جریان الکتریکی برابر خواهد بود با $I = \frac{V}{R}$. از طرفی با توجه تعریف جریان الکتریکی یعنی میزان عبور بار الکتریکی Δq در مدت زمان Δt داریم $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ بنابراین از تلفیق دو رابطه می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{۱}{R}V \qquad (۸-۵)$$

در بحث رسانش با توجه به این‌که اختلاف دما موجب جریان گرما می‌شود به کمک رابطهٔ (۵-۲) داریم:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (\frac{KA}{L})\Delta T = \frac{۱}{\frac{L}{KA}}\Delta T \qquad (۹-۵)$$

از تشابه دو روابط فوق، می‌توان مقاومت گرمایی، R، قطعه‌ای به مساحت A و ضخامت L و رسانندگی K را به صورت زیر حساب کرد.

$$R = \frac{L}{KA} \qquad (۱۰-۵)$$

بنابراین،

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{۱}{R}\Delta T \qquad (۱۱-۵)$$

دقت کنید که علامت منفی را در رابطهٔ (۵-۹) نیاوردیم زیرا جهت جریان برای مقایسهٔ مهم نیست بلکه مقدار جریان برای تشابه بین دو مبحث لازم است.

نکتهٔ ۱: همانطور که در مبحث مدار و جریان الکتریکی می‌توان مقاومت معادلی به جای مقاومت‌های سری و موازی جایگزین کرد در مبحث رسانش نیز می‌توان مقاومت گرمایی معادلی به جای مقاومت‌های گرمایی سری و موازی جایگزین نمود.

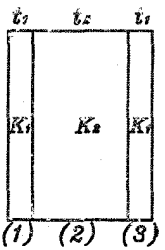
نکتهٔ ۲: دو مقاومت گرمایی وقتی سری هستند که نرخ انتقال گرمای (جریان گرما) عبوری از هر دو یکسان باشد و دو مقاومت گرمایی وقتی موازی هستند که اختلاف دمای دو سر آنها یکی باشد.

مثال. پنجره‌ای دو جداره‌ای، دارای دو جام شیشه، هر یک به ضخامت $t_۱$ و رسانندگی $K_۱$ است. ضخامت لایه هوای بین دو جداره $t_۲$ و رسانندگی هوا $K_۲$ است. نشان دهید که آهنگ اتلاف انرژی از پنجره از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A}{\frac{۲t_۱}{K_۱} + \frac{t_۲}{K_۲}}(T_i - T_۰)$$

که در آن A مساحت پنجره، و $T_۰, T_i$ به ترتیب دمای داخل و خارج‌اند.

حل. با توجه به اینکه هر مقدار گرمایی که از شیشه (۱) عبور کند از لایهٔ هوا و شیشه (۲) نیز عبور خواهد کرد لذا جریان گرما در سه قطعه یکسان است در نتیجه می‌توان گفت که این سه قطعه به صورت سری به هم متصل شده‌اند و مقاومت معادل برابر است با:



$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

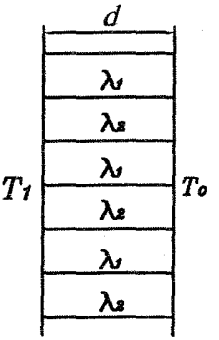
به کمک رابطهٔ (۵-۱۰) داریم:

$$R_{eq} = \frac{t_۱}{K_۱A} + \frac{t_۲}{K_۲A} + \frac{t_۱}{K_۱A} = \frac{۱}{A}(\frac{۲t_۱}{K_۱} + \frac{t_۲}{K_۲})$$

از رابطهٔ (۵-۱۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{۱}{R_{eq}}\Delta T = \frac{A}{\frac{۲t_۱}{k_۱} + \frac{t_۲}{k_۲}}(T_i - T_۰)$$

مثال. دیواری به طور متناوب از قطعه سنگ‌هایی با طول d و ضریب‌های رسانندگی گرمایی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ساخته شده است. (مطابق شکل) سطح مقطع قطعه‌ها یکسان است. ضریب رسانندگی گرمایی دیوار را تعیین کنید.



حل. با توجه به اینکه اختلاف دمای دو سر تمام این قطعات با هم برابرند. لذا این قطعات به مانند مقاومت‌های موازی می‌باشند از طرفی می‌دانیم مقاومت معادل در حالت موازی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \ldots + \frac{۱}{R_۶}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۰) داریم.

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۳}{\frac{d}{\lambda_۱ A}} + \frac{۳}{\frac{d}{\lambda_۲ A}} = \frac{۳A}{d}(\lambda_۱ + \lambda_۲)$$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{d}{۳(\lambda_۱ + \lambda_۲)A} \qquad (۱)$$

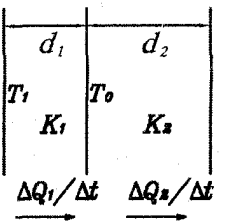
از طرفی اگر این دیوار که مساحت کل آن $۶A$ است از یک ماده با ضریب رسانندگی معادل K_{eq} درست شده بود آنگاه مقاومت معادل آن برابر خواهد بود با:

$$R_{eq} = \frac{d}{k_{eq}(۶A)} \qquad (۲)$$

$$(۲), (۱) \rightarrow ۶k_{eq} = ۳(\lambda_۱ + \lambda_۲) \rightarrow k_{eq} = \frac{\lambda_۱ + \lambda_۲}{۲}$$

مثال: دیواری شامل دو قسمت چسبیده به هم است که از مواد مختلف ساخته شده‌اند. و ضریب رسانندگی گرمایی و ضخامت این دو قسمت به ترتیب $K_۱$، $d_۱$ و $K_۲$ و $d_۲$ می‌باشد. (مطابق شکل) دمای سطوح خارجی دیوار $T_۱$ و $T_۲$ است. $(T_۱ > T_۲)$ که ثابت نگه داشته شده‌اند. دمای $T_۰$ روی صفحه میان دو قسمت را بیابید.

حل. با توجه به اینکه شار گرمایی عبوری از دیوار اول برابر با دیوار دوم است لذا (به تعریف شار گرمایی در ابتدای فصل دقت کنید.)



$$\frac{\Delta Q_1}{A\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{A\Delta t}$$
$$\rightarrow K_1\left(\frac{T_1 - T_0}{d_1}\right) = K_2\left(\frac{T_0 - T_2}{d_2}\right) \rightarrow T_0 = \frac{d_1K_2T_2 + d_2K_1T_1}{d_1K_2 + d_2K_1}$$

مثال. دستگاهی از لایه‌ای از هوا به ضخامت $2mm$ میان دو جداره بسیار نازک شیشه‌ای تشکیل شده است. اگر رسانش گرمایی شیشه و هوا به ترتیب $0/8W/m^\circ c$ و $0/025W/m^\circ c$ باشد، نسبت جریان گرما از شیشه‌ای به ضخامت $4mm$ به جریان گرما از دستگاه یاد شده چقدر است؟ مساحت شیشه و دستگاه و اختلاف دمای میان دو طرف آنها برابر است.

الف) $\frac{1}{16}$ ب) ۱۶ ج) $\frac{1}{32}$ د) ۳۲ ه) $\frac{32}{5}$

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. دو جدارهٔ شیشه‌ای به صورت مقاومت‌های سری هستند زیرا جریان گرما برای هر سه یکسان است لذا مقاومت معادل از رابطه مقاومت‌های سری و با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۰) بدست می‌آید:

$$R_{eq} = \frac{2L_1}{K_1A} + \frac{L_2}{K_2A}$$

در رابطهٔ فوق ضخامت و رسانش گرمایی جدارهٔ شیشه و هوا به ترتیب برابر L_1, K_1 و K_2, L_2 است. چون جدارهٔ شیشه بسیار نازک است لذا: $L_1 \simeq 0$ در نتیجه: $R_{eq} = \frac{L_2}{K_2A}$

بنابراین برای دستگاه مورد نظر جریان گرما به کمک رابطهٔ (۵-۱۱) برابر است با:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{R}\Delta T = \frac{K_2A}{L_2}\Delta T \qquad (1)$$

برای شیشه به ضخامت mm ۴، جریان گرما برابر است با:

$$\frac{\Delta Q'}{\Delta t} = \frac{1}{R'}\Delta T = \frac{K_1A}{4\times10^{-3}}\Delta T \qquad (2)$$

از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\Delta Q'/\Delta t}{\Delta Q/\Delta t} = \frac{K_1L_2}{K_2\times4\times10^{-3}} = \frac{0/8\times2\times10^{-3}}{0/025\times4\times10^{-3}} = 16$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

مثال: سه ظرف استوانه‌ای C,B,A پر از آب‌اند. مساحت مقطع این سه ظرف $S_A > S_B = S_C$. ارتفاع این سه ظرف $h_A = h_B < h_C$ و حجم ظرف C کم‌تر از حجم ظرف A است. این سه ظرف در هوای آزادند و آب آنها به تدریج تبخیر می‌شود. زمان‌های لازم برای تبخیر، t_C, t_B, t_A اند. کدام گزینه درست است؟

الف) $t_A > t_C > t_B$ ب) $t_C > t_B > t_A$ ج) $t_C > t_A = t_B$ د) $t_C = t_B > t_A$

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران)

حل: چون اختلاف دمای آب ظرف با هوای اطراف و رسانندگی برای هر سه ظرف یکسان است. لذا طبق رابطه (۵-۲) می‌توانیم بگوییم که شار گرمایی (توان عبور کننده از واحد سطح) برای هر سه ظرف یکسان است. پس

$$\frac{\Delta Q_A}{\Delta t_A S_A} = \frac{\Delta Q_B}{\Delta t_B S_B} = \frac{\Delta Q_C}{\Delta t_C S_C} \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم گرمای لازم برای تبخیر آبی به جرم m برابر گرمای نهان تبخیر و مساوی $\Delta Q = mL_f$ می‌باشد. پس در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{m_A L_f}{\Delta t_A S_A} = \frac{m_B L_f}{\Delta t_B S_B} = \frac{m_C L_f}{\Delta t_C S_C}$$

$$\rightarrow \frac{\rho_A \dot{h}_A S_A}{\Delta t_A S_A} = \frac{\rho_B \dot{h}_B S_B}{\Delta t_B S_B} = \frac{\rho_C \dot{h}_C S_C}{\Delta t_C S_C}$$

$$\rho_A = \rho_B = \rho_C$$

$$\rightarrow \frac{\dot{h}_A}{\Delta t_A} = \frac{\dot{h}_B}{\Delta t_B} = \frac{\dot{h}_C}{\Delta t_C}$$

$$\dot{h}_A = \dot{h}_B \rightarrow \Delta t_A = \Delta t_B \qquad (۱)$$

$$\frac{\dot{h}_A}{\Delta t_A} = \frac{\dot{h}_C}{\Delta t_C} \rightarrow \frac{\dot{h}_C}{\dot{h}_A} = \frac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$$

$$\frac{\dot{h}_C}{\dot{h}_A} > ۱ \rightarrow \frac{\Delta t_C}{\Delta t_A} > ۱ \rightarrow \Delta t_C > \Delta t_A \qquad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \Delta t_C > \Delta t_A = \Delta t_B$$

گزینه ج صحیح است.

مثال: دو ظرف کروی به شعاع‌های $۲R, R$ را از آب با دمای معین پر می‌کنیم و آنها را در یک دستگاه یخ زن (یخچال) قرار می‌دهیم. آب درون ظرف کوچکتر پس از مدت T کاملاً یخ می‌زند. پس از چه مدت آب درون ظرف بزرگتر کاملاً یخ می‌زند؟ از ظرفیت گرمایی ظرف‌ها در برابر ظرفیت گرمایی آب درون آنها چشم بپوشید.

الف) T ب) ۲T ج) ۴T د) ۸T

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران، مرحله ۱)

حل: چون اختلاف دمای یخچال با کره‌ها و رسانندگی آنها یکسان است، لذا شار گرمایی هر دو کره طبق رابطه (۵-۲) برابر هم هستند. در نتیجه:

$$\frac{\Delta Q_۱}{\Delta t_۱ A_۱} = \frac{\Delta Q_۲}{\Delta t_۲ A_۲}$$

$$\frac{m_1 L_f + m_1 c\Delta\Theta}{\Delta t_1 A_1} = \frac{m_2 L_f + m_2 c\Delta\Theta}{\Delta t_2 A_2}$$

$$\rightarrow \frac{m_1(L_f + c\Delta\theta)}{\Delta t_1 A_1} = \frac{m_2(L_f + c\Delta\theta)}{\Delta t_2 A_2}$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{\Delta t_1 A_1} = \frac{m_2}{\Delta t_2 A_2} \rightarrow \frac{\rho V_1}{T A_1} = \frac{\rho V_2}{T' A_2}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{T \mathbf{4}\pi R_1^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_2^3}{T' \mathbf{4}\pi R_2^2} \rightarrow \frac{R_1}{T} = \frac{R_2}{T'}$$

$$\rightarrow T' = (\frac{R_2}{R_1})T = \mathbf{2}T$$

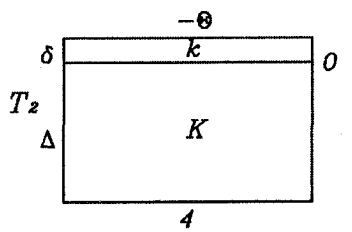
گزینه «ب» صحیح است.

مثال. سطح یک استخر کم‌عمق یخ بسته است. فرض کنید عمق آب و کلفتی یخ چنان کم است، که انتقال گرما عمدتاً از سطح بالایی یخ و کف استخر انجام می‌شود. کلفتی لایهٔ یخ δ، و کلفتی لایهٔ آب زیریخ Δ است. دمای هوای بالای استخر $-0°C$، و دمای کف استخر $4°C$ است. رسانندگی گرمایی یخ و آب را به ترتیب k و K بگیرید. $\frac{\delta}{\Delta}$ چقدر باشد تا δ و Δ ثابت بمانند؟

الف) $\frac{4K}{\theta k}$ ب) $\frac{\theta K}{4k}$ ج) $\frac{4k}{\theta K}$ د) $\frac{\theta k}{4K}$

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. با توجه به اینکه دمای بالای استخر زیر صفر و در کف استخر بالای صفر است لذا در فصل مشترک یخ و آب، دما صفر درجهٔ سانتیگراد می‌باشد. از طرفی برای اینکه ضخامت δ و Δ ثابت باشد باید شار گرمایی عبوری از یخ برابر با شار گرمایی عبوری از آب باشد در غیر این‌صورت موجب آب شدن یخ یا یخ‌زدگی بیشتر آب می‌شود. بنابراین مشابه دو مثال قبل داریم:



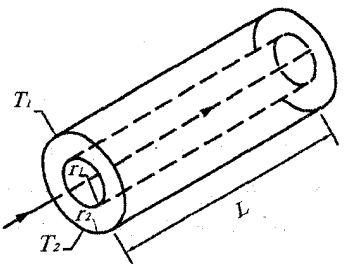
$$\frac{\Delta Q_1}{A\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{A\Delta t} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\Delta Q_1}{A\Delta t} = K\frac{\Delta T_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta Q_2}{A\Delta t} = K\frac{\Delta T_2}{\delta} \end{array}\right\} \Longrightarrow K\frac{(4-0)}{\Delta} = \frac{k(0-(-\theta))}{\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\Delta} = \frac{k\theta}{4K}$$

گزینهٔ «د» صحیح است.

۴.۵ رسانش در لوله‌ها

فرض کنید لوله‌ای با شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 به طول L و ضریب رسانندگی K موجود است. جدارهٔ داخلی را در دمای T_1 و جدارهٔ خارجی را در دمای T_2 ثابت نگه می‌داریم. ($T_1 > T_2$). با فرض اینکه طول L نسبت به شعاع سطح مقطع لوله بسیار بزرگتر باشد می‌توان فرض کرد که انتقال حرارت فقط در جهت شعاعی است. (انتقال حرارت یک بعدی است) می‌توان ثابت کرد که نرخ انتقال گرمای رسانش $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ در جهت شعاعی ثابت و برابر است با:



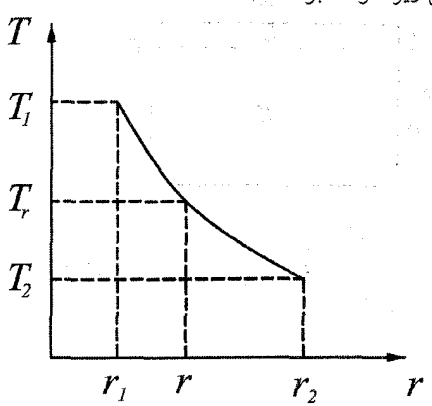
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(2\pi L)K}{ln(\frac{r_2}{r_1})}(T_1 - T_2) \qquad (۱۲-۵)$$

(اثبات رابطهٔ فوق خارج از سطح کتاب است.)

از مقایسهٔ روابط (۵-۸) و (۵-۱۲) می‌توان نتیجه گرفت که مقاومت رسانش در لولهٔ مورد نظر برابر است با:

$$R = \frac{ln(\frac{r_2}{r_1})}{(2\pi L)K} \qquad (۱۳-۵)$$

همچنین می‌توان نشان توزیع دما در جدارهٔ لولهٔ مورد نظر در جهت شعاعی به صورت لگاریتمی و به شکل زیر خواهد بود.



$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{ln(\frac{r_1}{r_2})} ln(\frac{r}{r_2}) + T_2 \qquad (۱۴-۵)$$

مثال. پوستهٔ استوانهٔ شکلی از ماده‌ای یکنواخت به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b در اختیار داریم. دمای سطح داخلی استوانهٔ T_a و دمای سطح بیرونی استوانهٔ T_b است. ($T_a > T_b$، و دماها ثابت‌اند). دمای پوسته در شعاع $r = \frac{a+b}{۲}$ را T_r می‌نامیم. در این صورت:

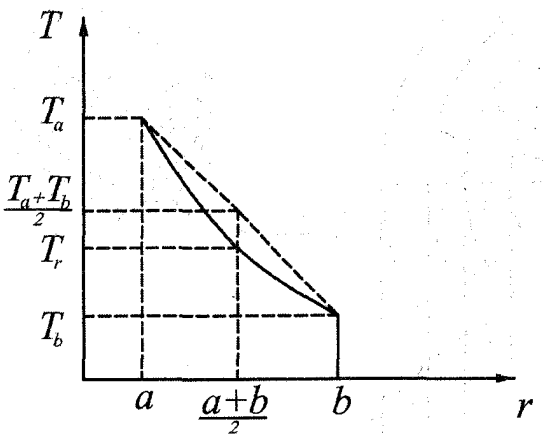
الف) $T_r > \frac{T_a + T_b}{۲}$

ب) $T_r < \frac{T_a + T_b}{۲}$

ج) $T_r = \frac{T_a + T_b}{۲}$

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل: **راه حل اول:** می‌دانیم توزیع دما در لوله به صورت لگاریتمی و مطابق شکل زیر است. بنابراین به کمک شکل می‌توان به راحتی دید که $T_r < \frac{T_a + T_b}{r}$ است لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.



راه‌حل دوم: از رابطهٔ (۵-۱۴) می‌توان نوشت:

$$r = \frac{a+b}{۲} \rightarrow T_r = \frac{T_a - T_b}{ln(\frac{a}{b})} ln(\frac{\frac{a+b}{۲}}{b}) + T_b$$

$$\rightarrow T_r = \frac{ln(\frac{a+b}{۲b})}{Ln(\frac{a}{b})}(T_a - T_b) + T_b \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$(a-b)^۲ > ۰ \rightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab > ۴ab = ۴b^۲ \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow \frac{(a+b)^۲}{۴b^۲} > \frac{a}{b} \rightarrow (\frac{a+b}{۲b})^۲ > \frac{a}{b}$$

$$ln(\frac{a+b}{۲b})^۲ > ln\frac{a}{b} \rightarrow ۲ln(\frac{a+b}{۲b}) > ln\frac{a}{b} \qquad (۲)$$

از طرفی:

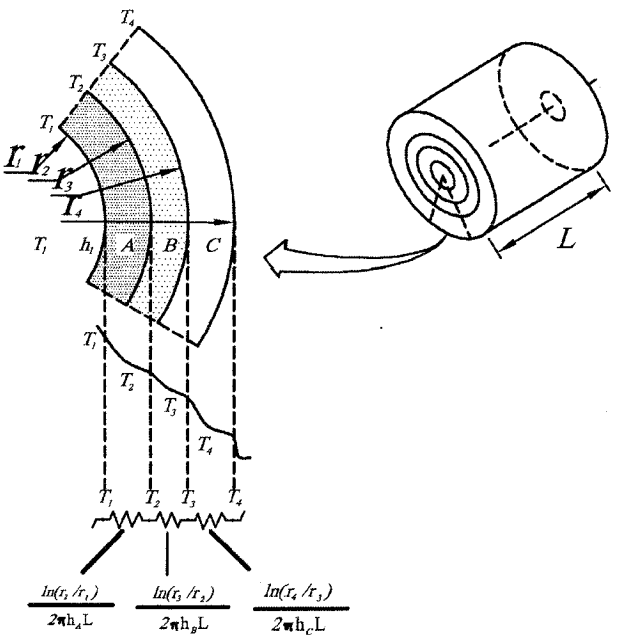
$a < b \rightarrow ln(\frac{a}{b}) < ۰$

با ضرب یا تقسیم نامساوی در یک عدد منفی علامت نامساوی عوض می‌شود در نتیجه:

$$(۲) \rightarrow \frac{ln(\frac{a+b}{۲b})}{ln(\frac{a}{b})} < \frac{۱}{۲} \qquad (۳)$$

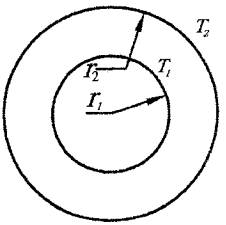
$$(۳),(۱) \rightarrow T_r < \frac{۱}{۲}(T_a - T_b) + T_b \rightarrow T_r < \frac{T_a + T_b}{۲}$$

نکته: اگر لوله‌ای چند جداره مطابق شکل موجود باشد به طوری‌که هر لایه رسانندگی خاص خودش را داشته باشد. چون نرخ گرمای عبوری در همهٔ آنها با هم برابر است لذا مقاومت معادل لوله برابر جمع مقاومت‌های تک‌تک لایه‌ها به صورت سری است.



۵.۵ رسانش در مخزن کروی شکل

یک مخزن کروی شکل با شعاع داخلی $r_۱$ و شعاع خارجی $r_۲$ با ضریب رسانندگی K موجود است. اگر سطح داخلی مخزن در دمای $T_۱$ و سطح خارجی آن در دمای $T_۲(T_۱ > T_۲)$ ثابت نگه داشته شود می‌توان نشان داد که نرخ گرمای $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ثابت و برابر است با:

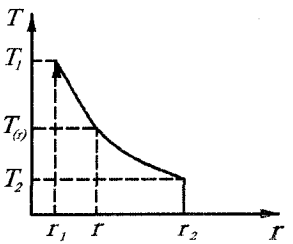


$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{۴\pi K}{\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}}(T_۱ - T_۲) \qquad (۱۵-۵)$$

از مقایسهٔ روابط (۵-۸) و (۵-۱۵) می‌توان نتیجه گرفت که مقاومت رسانش در مخزن کروی شکل مورد نظر برابر است با:

$$R = \frac{۱}{۴\pi K}(\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}) \qquad (۱۶-۵)$$

همچنین می‌توان نشان داد که توزیع دما در جدارهٔ مخزن کره‌ای شکل به صورت هموگرافیک و به شکل زیر است.



$$T(r) = -\frac{\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r}}{\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}}(T_۱ - T_۲) + T_۱ \qquad (۱۷-۵)$$

نکته: مشابه لوله، اگر مخزن کروی شکل از چند پوسته با رسانندگی‌های مختلف ساخته شده باشد. چون نرخ گرمای عبوری در پوسته‌ها با هم برابر است لذا مقاومت‌های آنها باید به صورت سری با هم جمع شوند تا مقاومت معادل بدست آید.

۶.۵ همرفت (جابه‌جایی)

انرژی گرمایی، یا انرژی جنبشی مولکولی، می‌تواند از طریق حرکت خود مولکولها هم از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر منتقل شود. به عنوان مثال، برای گرم کردن یک اتاق می‌توان مقداری هوای داغ به آن وارد کرد. برای گرم کردن یک جسم می توان از جریان آب داغ در یک لوله استفاده کرد. برخلاف رسانش، انرژی گرمایی در این موارد از طریق برخورد منتقل نمی‌شود. انتقال انرژی گرمایی در اینجا از طریق حرکت خود مولکولها، در طی مسافت‌های زیاد صورت می‌گیرد. این نوع انتقال گرما را همرفت می‌نامیم. در انتقال گرما از طریق همرفت، مولکولهای داغ از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر حرکت می‌کنند و انرژی گرمایی همراه با مولکولها جابه‌جا می‌شود. توجه کنید که در همرفت، با انتقال بلند برد مولکولها سروکار داریم. به همین دلیل است که همرفت را فقط در مورد گازها و مایعات (یعنی در

مورد شاره‌ها) مشاهده می‌کنیم و هرگز در جامدات بدان برنمی‌خوریم.
انتقال گرمابه روش همرفت را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که عبارتند از:
۱) همرفت اجباری ۲) همرفت طبیعی
هنگامی که جریان توسط عوامل خارجی مثل پنکه، فن، پمپ یا باد ایجاد شود، از واژهٔ همرفت اجباری استفاده خواهد شد. یعنی هنگامی که شما از پنکه استفاده می‌کنید به کمک آن گروهی از مولکول‌ها را به حرکت واداشته‌اید تا با مولکولهای گرم برخورد کرده و انرژی حرارتی را از مولکولهای گرم بگیرند. در همرفت طبیعی جریان سیال توسط نیروهای شناوری که به خاطر اختلاف چگالی دو سیال ناشی از تغییر دما است رخ می‌دهد. مثلاً چگالی هوای گرم کمتر از هوای سرد است. در این صورت، به حجمی از هوای گرم که در هوای سردتری محصور شده است، یک نیروی بالابر وارد خواهد شد. در این حال، حجم هوای گرم از هوای سرد و سنگین اطراف بالاتر خواهد رفت تا روی آن شناور شود. گردش بزرگ مقیاس هوا در سطح زمین و همچنین در مقیاس خانگی، از همین خاصیت ناشی می‌شود.

نکته: در عمل همرفت طبیعی علاوه بر اینکه باید ماده‌ای سیال مانند وجود داشته باشد باید میدان گرانشی و تغییر مناسب چگالی با دما نیز موجود باشد. یعنی اگر میدان جاذبهٔ زمین وجود نداشته باشد، همرفت طبیعی انجام نمی‌شود. به عنوان مثال فرض کنید در سفینه‌ای هستید و درون آن یک بخاری قرار داده‌اید. اگر سفینه در میدان گرانشی باشد مثلاً در عرض نیم ساعت، سفینه گرم می‌شود زیرا به کمک همرفت طبیعی (جابه‌جایی مولکولهای گرم و سرد) هوای گرم و سرد با هم مخلوط شده و انتقال حرارت سریع صورت می‌گیرد حال اگر همین سفینه در خارج میدان گرانشی باشد با روشن شدن بخاری چون نیروی شناوری متناسب با شتاب گرانشی است و گرانشی وجود ندارد لذا نیروی شناوری برابر صفر خواهد بود.
در نتیجه مولکولهای گرم تنها از طریق ارتعاش باید انرژی خود را به مولکولهای مجاور منتقل کنند تا تمام فضای سفینه گرم شود که چه بسا زمان لازم برای گرم کردن به ۳ الی ۴ روز بیانجامد. (مگر اینکه از فن یا پنکه برای مخلوط کردن هوای گرم و سرد استفاده شود.) می‌توان نشان داد در انتقال گرما به روش همرفت صرف نظر از نوع آن، نرخ انتقال گرما بین یک سطح با دمای ثابت T_2 و مساحت A و سیال مجاور آن (مثل هوا) با دمای ثابت T_1 $(T_2 > T_1)$ برابر است با:

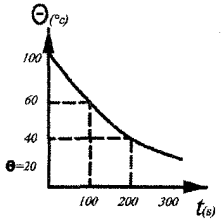
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = hA(T_2 - T_1) \qquad (۱۸-۵)$$

عدد ثابت h را ضریب همرفتی می‌نامند که یکای آن $\frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ می‌باشد. مشابه با رسانش می‌توان رابطهٔ (۵-۱۸) را با (۵-۸) مقایسه کرد و مقاومت گرمایی در همرفت را به صورت زیر بدست آورد.

$$R = \frac{1}{hA} \qquad (۱۹-۵)$$

مثال. میزان گرمایی که جسم داغ در هر ثانیه از دست می‌دهد به تفاوت دمای جسم (θ) و دمای محیط (θ_0) بستگی دارد. نمودار شکل زیر تغییرات دمای جسم را نسبت به زمان نشان می‌دهد. با توجه به نمودار، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)



الف) گرمایی که جسم در ۱۰۰ ثانیهٔ اول از دست داده است برابر گرمایی است که در ۱۰۰ ثانیهٔ دوم از دست داده است.

ب) میزان از دست دادن گرما در ۱۰۰ ثانیهٔ اول ۲ برابر گرمایی است که در ۱۰۰ ثانیهٔ دوم از دست داده است.

ج) دمای جسم بعد از ۳۰۰ ثانیه برابر با دمای محیط می‌شود.

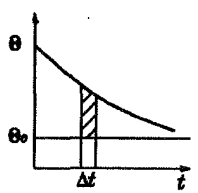
د) گرمایی که جسم در ۱۰۰ ثانیهٔ اول از دست می‌دهد، برابر با گرمایی است که از لحظهٔ ۱۰۰ ثانیه به بعد از دست خواهد داد.

حل. نکته: اگر دمای جسم در لحظهٔ t برابر Θ باشد، به کمک رابطهٔ (۵-۱۸) داریم:

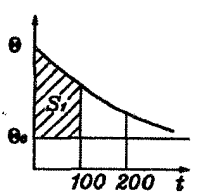
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = hA(\theta - \theta_\circ)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta Q}{hA} = (\theta - \theta_\circ)\Delta t \qquad (1)$$

با توجه به شکل زیر می‌توان دریافت که مساحت ناحیه‌ها هاشورخورده برابر $(\theta - \theta_\circ)\Delta t$ است. در نتیجه به کمک رابطهٔ (۱) مساحت ناحیه هاشورخورده برابر $\frac{\Delta Q}{hA}$ می‌باشد. یعنی اگر مساحت بین نمودار و خط $\theta = \theta_\circ$ را در فاصلهٔ زمانی دلخواه Δt حساب کنیم در واقع گرمای داده شده توسط جسم به محیط تقسیم بر hA را حساب کرده‌ایم. (هر چه‌قدر Δt را کوچکتر بگیریم دقت مساحت بیشتر است.)



با توجه به نکتهٔ فوق اگر مساحت هاشورخورده مقابل را حساب کنیم. در واقع عبارت :



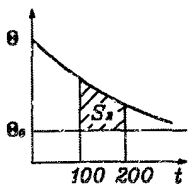
$$\frac{\Delta Q_1 = \text{گرمای داده شده در ۱۰۰ ثانیهٔ اول}}{hA}$$

را حساب کرده‌ایم.

$$\text{مساحت} = S_1 = (۶۰ - ۲۰) \times ۱۰۰ + (۱۰۰ - ۶۰) \times \frac{۱۰۰}{۲} = ۶۰۰۰$$

$$\rightarrow \frac{\Delta Q_1}{hA} = ۶۰۰۰ \rightarrow \Delta Q_1 = ۶۰۰۰hA \qquad (۲)$$

به طور مشابه گرمای داده شده در ۱۰۰ ثانیهٔ دوم برابر مساحت هاشورخورده ضرب در hA است.



$$\text{مساحت} = S_2 = (۴۰ - ۲۰) \times (۲۰۰ - ۱۰۰) + (۶۰ - ۴۰) \times \frac{(۲۰۰ - ۱۰۰)}{۲}$$

$$\rightarrow S_2 = ۳۰۰۰$$

$$\rightarrow \frac{\Delta Q_2}{hA} = ۳۰۰۰ \rightarrow \Delta Q_2 = ۳۰۰۰hA \qquad (۳)$$

$$(۳), (۲) \rightarrow \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = ۲$$

بنابراین گزینهٔ «ب» صحیح است.

راه‌حل دوم: از فصل چهارم به یاد داریم اگر دمای جسم به میزان $\Delta\theta$ کاهش یابد میزان گرمایی که از دست می‌دهد برابر است با: $\Delta Q = mc\Delta\theta$ در نتیجه:

$$\text{گرمای از دست داده در ۱۰۰ ثانیهٔ اول} = \Delta Q_1 = mc(۱۰۰ - ۶۰) = ۴۰mc$$

$$\text{گرمای از دست داده در ۱۰۰ ثانیهٔ دوم} = \Delta Q_2 = mc(۶۰ - ۴۰) = ۲۰mc$$

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = ۲$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

هر چقدر که اختلاف دمای جسم و محیط کمتر شود. نرخ انتقال حرارت نیز کاهش می‌یابد. در نتیجه هنگامی که دمای جسم به دمای محیط نزدیک می‌شود. میزان از دست دادن گرما بسیار کم و کاهش دمای جسم بسیار کند می‌شود. از نظر تئوری اگر زمان به بی‌نهایت برسد. دمای جسم، با دمای محیط یکی می‌شود بنابراین گزینهٔ «ج» نادرست

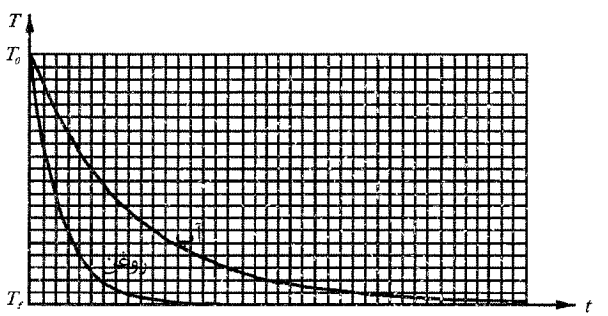
است. چون در زمان بی‌نهایت دمای جسم برابر دمای محیط و مساوی $۲۰^\circ C$ می‌شود لذا از ۱۰۰ ثانیهٔ اول تا بی‌نهایت میزان گرمایی که جسم از دست می‌دهد برابر است با:

$$\Delta Q = mc(۶۰ - ۲۰) = ۴۰mc$$

و برابر است با گرمای اتلافی در ۱۰۰ ثانیهٔ اول لذا گزینهٔ «د» نیز صحیح است.

مثال. هنگامی که جسمی با دمای T در محیطی با دمای $T_f (T_f < T)$ قرار گیرد، با از دست دادن گرما دمایش پایین می‌آید. آهنگ از دست دادن گرما در فاصلهٔ زمانی بسیار کوچک Δt یعنی $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ یا $(T - T_f)$ در آن فاصلهٔ زمانی کوچک متناسب است. فرض کنید ضریب تناسب به شکل جسمی که سرد می‌شود بستگی دارد.

الف) در دو ظرف مشابه در یکی آب و در دیگری روغن می‌ریزیم. حجم آب و روغن یکسان است. دو ظرف از دمای T_0 تا دمای T_f سرد شده‌اند. تغییرات دمای دو ظرف بر حسب زمان مطابق نمودار شکل زیر است که در آن محور زمان و دما هر کدام بر حسب یک واحد اختیاری مدرج است. ظرفیت گرمایی ویژهٔ روغن را به طور تقریبی محاسبه کنید. چگالی آب $\rho_W = ۱۰۰۰ \frac{kg}{m^۳}$، چگالی روغن $\rho_۰ = ۸۰۰ \frac{kg}{m^۳}$ و ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب $۴۲۰۰ \frac{J}{kg^\circ C}$ است. ظرفیت گرمایی ظرف در برابر ظرفیت گرمایی آب و روغن قابل چشم‌پوشی است.



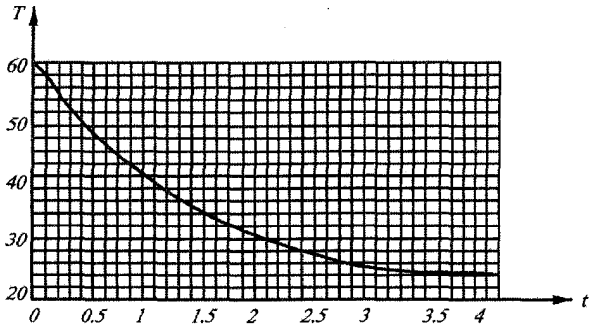
فردی برای خود و میهمانانش دو فنجان مشابه چای با دمای $T_۰ = ۶۰^\circ C$ می‌آورد. نمودار سرد شدن چای در شکل زیر نشان داده شده است.

ب) میهمان بلافاصله مقداری شیر سرد به دمای صفر درجهٔ سلسیوس در چای می‌ریزد و پس از ۱/۵ دقیقه چای خود را می‌نوشد. دمای چای میهمان را هنگام نوشیدن حساب کنید.

ظرفیت گرمایی (ظرفیت گرمایی ویژه × جرم) شیر اضافه شده ۰/۲ ظرفیت گرمایی چای است. فرض کنید ریختن شیر در چای، منحنی سرد شدن آن را چندان تغییر نمی‌دهد.

ج) میزبان پس از ۱/۵ دقیقه همان مقدار شیر سرد به دمای صفر درجه سلسیوس در چای می‌ریزد و بلافاصله آن را می‌نوشد دمای چای میزبان را هنگام نوشیدن به دست آورید.

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۲)



حل. با توجه به نکتهٔ بیان شده در مثال قبل مساحت زیر هر نمودار برابر است با: $\frac{\Delta Q}{hA}$ از طرفی چون دو ظرف از نظر شکل و مساحت یکسان هستند لذا ضریب hA برای هردو یکی است. در نتیجه:

$$\text{مساحت زیر نمودار آب} = S_W = \frac{\Delta Q_W}{hA}$$

$$\text{مساحت زیر نمودار روغن} = S_\circ = \frac{\Delta Q_\circ}{hA} \qquad (۱)$$

اگر جرم و ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب و روغن به ترتیب برابر با c_W, m_W و c_o, m_o باشند آنگاه از فصل چهارم به یاد داریم که:

$$\Delta Q_W = m_W c_W (T_\circ - T_f)$$

$$\Delta Q_\circ = m_\circ c_\circ (T_\circ - T_f) \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$S_W = \frac{m_W c_W (T_\circ - T_f)}{hA} \quad , \quad S_\circ = \frac{m_\circ c_\circ (T_\circ - T_f)}{hA}$$

$$\rightarrow \frac{S_W}{S_\circ} = \frac{m_W c_W}{m_\circ c_\circ} = \frac{\rho_W V_W c_W}{\rho_\circ V_\circ c_\circ} = \frac{\rho_W c_W}{\rho_\circ c_\circ} \qquad (V_W = V_\circ)$$

از رابطهٔ فوق با اندازه‌گیری مساحت (شمارش مربع‌های نمودار) به راحتی ظرفیت گرمایی ویژهٔ روغن c_O بدست می‌آید.

$$c_\circ = c_W (\frac{\rho_W}{\rho_O})(\frac{S_O}{S_W}) \simeq ۲۰۰۴ J/Kg^\circ C$$

ب) هنگامی که شیر و چای به تعادل می‌رسند دمای تعادل T، به کمک رابطهٔ (۴-۱۲) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$C_T(T_\circ - T) = C_M(T - \circ) \qquad (۱)$$

C_M, C_T به ترتیب ظرفیت گرمایی چای و شیر هستند.

$$C_M = ۰/۲C_T \qquad (۲)$$

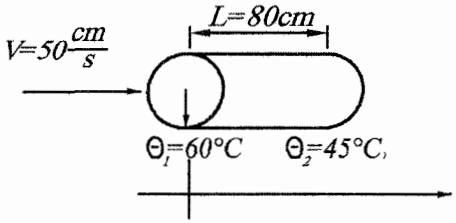
$$(۲),(۱) \rightarrow ۱/۲T = T_۰ = ۶۰ \rightarrow T = ۵۰°C$$

بنابراین می‌توان فرض کرد که چای میهمان از دمای $۵۰°C$ سرد شده است. با توجه به نمودار در دمای $۵۰°C$، زمان برابر $t = ۰/۵$ دقیقه بدست می‌آید لذا اگر زمان $t = ۰/۵$ دقیقه را مبدأ زمان بگیریم ۱/۵ دقیقه بعد روی نمودار در واقع $t = ۲$ دقیقه بدست می‌آید که از نمودار $T = ۳۲°C$ دمای لحظهٔ نوشیدن چای را می‌توان بدست آورد.

ج) از نمودار می‌توان دریافت که بعد از ۱/۵ دقیقه دمای چای میزبان $۳۶°C$ است. بنابراین هنگامی که چای ۳۶ درجه را با شیر سرد مخلوط می‌کند دمای تعادل T برابر است با:

$$C_T(۳۶ - T) = C_M(T - ۰) \rightarrow T = \frac{۳۶}{۱/۲} = ۳۰°C$$

مثال. در لوله‌ای فلزی مطابق شکل زیر آب گرم با سرعت $V = ۵۰\frac{cm}{s}$ جریان دارد. آب با دمای $\theta_۱ = ۶۰°C$ از یک سر لوله وارد و از سر دیگر با دمای $\theta_۲ = ۴۵°C$ خارج می‌شود. زیرا از سطح لولهٔ فلزی گرما به هوای مجاور داده می‌شود:



الف) در هر ثانیه چند ژول گرما به محیط داده می‌شود؟ گرمای ویژهٔ آب $c = ۴۲۰۰\frac{J}{kg.K}$ است. فرض کنید تغییرات دمای لوله از $\theta_۱$ تا $\theta_۲$ در طول آن یکنواخت و دمای آب در هر جا با دمای سطح لوله در آنجا برابر باشد. همچنین فرض کنید u گرمایی که در واحد زمان از واحد سطح لوله به هوای مجاور داده می‌شود، (بر حسب $\frac{J}{m^۲.S}$)، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$u = \alpha(\theta - \theta_۰)$$

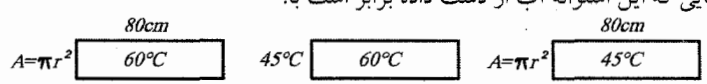
که در آن θ دمای نقطه‌ای از سطح لوله، $\theta_۰ = ۲۰°C$ دمای هوای مجاور لوله و α یک ضریب ثابت است.

ب) نمودار تغییرات θ بر حسب x را رسم کنید.

ج) با محاسبهٔ گرمایی که در ثانیه از تمام سطح لوله به هوای مجاور داده می‌شود و استفاده از نتیجهٔ قسمت الف، ضریب ثابت α را در SI محاسبه کنید.

(نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۲)

حل. فرض کنید آبی به شکل استوانه در دمای $\theta_۱ = ۶۰°C$ داریم اگر استوانهٔ آب از لولهٔ فلزی عبور کند و کل آن از لوله رد شود در طرف دیگر استوانه‌ای از آب با دمای $۴۵°$ داریم لذا گرمایی که این استوانه آب از دست داده برابر است با:



$$\Delta Q = mc\Delta\theta = \rho Vc\Delta\theta = ۱۰۰۰ \times \pi \times ۰/۰۴^۲ \times ۰/۸ \times ۴۲۰۰ \times (۴۵ - ۶۰)$$

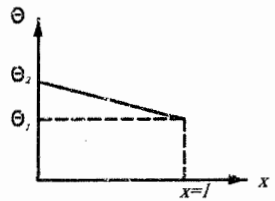
$$\rightarrow \Delta Q = -۲۵۳۳۳۸/۰۳J$$

از طرفی مدت زمانی که طول کشیده تا این استوانه آب کاملاً از درون لوله بگذرد برابر است با:

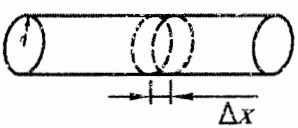
$$x = Vt \rightarrow ۰/۸ = ۰/۵ \times t \rightarrow t = ۱/۶S$$

پس آب در مدت $۱/۶s$ به میزان $۲۵۳۳۳۸/۰۳J$ انرژی از دست داده لذا در مدت $۱s$ به میزان $\frac{۲۵۳۳۳۸/۰۳}{۱/۶} = ۱۵۸۳۳۶/۲۶J$ انرژی از دست خواهد داد.

ب) با توجه به فرض که تغییرات در طول به صورت یکنواخت است لذا شکل آن به صورت زیر خواهد بود:



ج) ابتدا لایه‌ای به ضخامت Δx از این لوله در نظر می‌گیریم اگر گرمایی که توسط این لایه به محیط انتقال داده می‌شود را ΔQ بنامیم، آنگاه داریم:

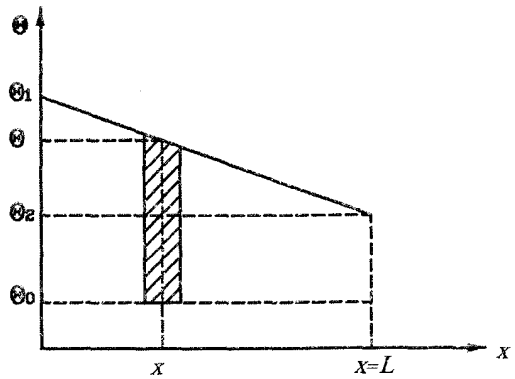


$$\frac{\Delta Q}{A\Delta l} = \alpha(\theta - \theta_\circ)$$

A مساحتی است که با محیط اطراف در تماس است یعنی $A = ۲\pi r\Delta x$ و θ دمای این لایهٔ دیسکی شکل می‌باشد. برای مدت زمان $\Delta t = ۱S$ خواهیم داشت:

$$\rightarrow \Delta Q = ۲\pi r\alpha(\theta - \theta_\circ)\Delta x$$

از نمودار قسمت قبل درمی‌یابیم که عبارت $(\theta - \theta_\circ)\Delta x$ مساحت قسمت هاشورخورده است. بنابراین اگر ΔQ همهٔ لایه‌ها را که در طول استوانه قرار دارند با هم جمع کنیم تمام حرارت، Q که از لوله به محیط داده شده است را حساب کرده‌ایم از طرفی جمع عبارتهای $(\theta - \theta_\circ)\ \Delta x$



برابر با مساحت ذوزنقه‌ای شکل است. لذا:

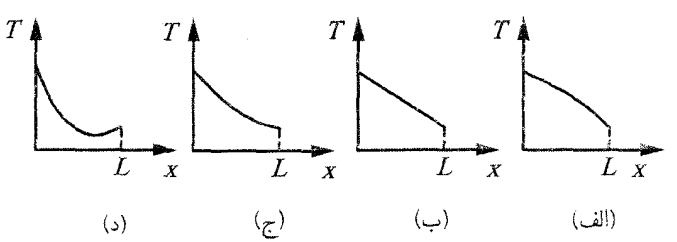
$$Q = ۲\pi r\alpha \frac{(\theta_۱ - \theta_۰) + (\theta_۲ - \theta_۰)}{۲} L$$

از قسمت «الف» $Q = ۱۵۸۳۲۶/۲۶J$ در نتیجه:

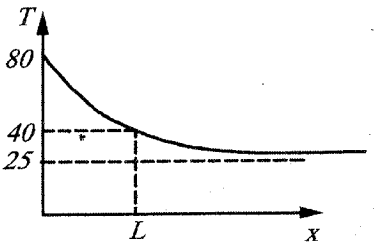
$$\alpha = \frac{۱۵۸۳۳۶/۲۶}{\pi \times ۰/۰۴ \times ۰/۸(۶۰ + ۴۵ - ۲ \times ۲۰)} = ۲۴۲۳۰/۷۶ \frac{J}{m^۲ ks}$$

مثال. در یک لولهٔ فلزی آب جریان دارد. در ابتدای لوله ($x = ۰$) دمای آب $۸۰°C$ و در انتهای آن ($x = L$) دمای آب $۴۰°C$ است. دمای هوای اطراف لوله $۲۵°C$ است. نمودار تغییرات دمای آب بر حسب x کدام است؟

(سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

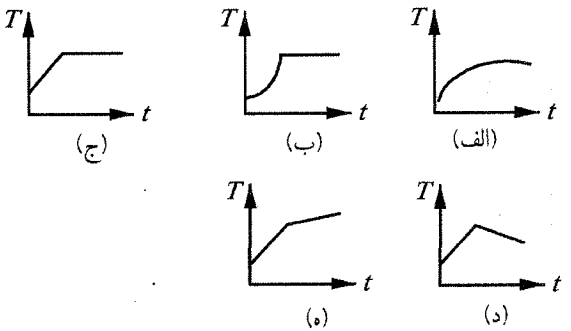


حل. با توجه به رابطهٔ (۵-۱۸) هر چقدر که اختلاف دمای لوله با محیط کمتر شود نرخ حرارت انتقالی کمتر می‌شود بنابراین در ابتدای لوله که این اختلاف بیشتر است حرارت با سرعت بیشتری منتقل می‌شود و لذا با پیشروی آب کاهش دما شدیدتر است اما با جلورفتن آب در لوله اختلاف دمای آن با محیط کم شده در نتیجه نرخ انتقال حرارت کم می‌شود و نهایتاً نرخ کاهش دما نیز کم می‌شود. همانطور که قبلاً گفتیم از نظر تئوری اگر طول لوله بی‌نهایت باشد. دمای آب در بی‌نهایت برابر دمای محیط می‌شود.



بنابراین گزینهٔ «ج» صحیح است.

مثال. یک کتری آب را روی اجاق می‌گذاریم. شعلهٔ اجاق تقریباً ثابت است. با فرض این‌که مقدار آبی که قبل از جوشیدن آب تبخیر می‌شود ناچیز باشد، کدام یک از این نمودارها به نمودار دمای آب (T) بر حسب زمان (t) نزدیک‌تر است؟



(چهاردهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل: چون شعله اجاق ثابت است لذا میزان گرمای داده شده به کتری در هر ثانیه با ثانیه‌های دیگر برابر است اما با افزایش دمای کتری، نرخ انتقال حرارت آن به محیط افزایش می‌یابد. یعنی هرچه که دمای کتری بالاتر می‌رود، گرمای بیشتری به محیط داده می‌شود. لذا نرخ افزایش دما نسبت به زمان کاهش می‌یابد. بنابراین گزینه الف صحیح است.

۷.۵ تابش (تشعشع)

در هر دو روش انتقال گرمایی که تاکنون از آنها سخن گفته‌ایم، انرژی را مولکول‌ها منتقل می‌کنند. در رسانش، انرژی از طریق برخورد مولکول با مولکول، منتقل می‌شود. در همرفت، مولکولها با طی مسافت‌های طولانی، انرژی را با خود منتقل می‌کنند. روش سوم انتقال انرژی از جسم گرم به جسم سرد، روش کاملاً متفاوتی است. در این روش، برای حمل ونقل انرژی از مولکولها استفاده نمی‌شود. در این فرایند که به تابش معروف است، انرژی از فضای خالی یا خلأ عبور می‌کند.

تابش گرمایی، با توجه به گسیل انرژی از خورشید به زمین، بر همهٔ ما روشن است. بدن ما در اثر پرتوهای خورشید گرما می‌گیرد. تابش گرمایی، درست همانند نور و امواج رادیویی است. هر سهٔ اینها (یعنی تابش گرمایی، نور و امواج رادیویی) نمونه‌هایی از تابش الکترومغناطیس هستند. در

اینجا فقط یادآوری می‌کنیم که خورشید و تمام اجسام داغ از خود انرژی گرمایی گسیل می‌کنند. انرژی، از طریق تابش منتقل می‌شود و با عبور از خلأ، از اجسام داغ به اجسام سرد می‌رسد. پس: در انتقال گرما از طریق تابش، امواج الکترومغناطیس انرژی را از اجسام داغ به اجسام سرد می‌رسانند. این نوع انتقال انرژی در خلأ هم امکان‌پذیر است.

قانون حاکم بر تابش گرما، قانون استفان - بولتزمن نام دارد. نرخ انتقال گرمایی که از سطحی به مساحت A به دمای مطلق T تابیده می‌شود، به صورت زیر است.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma \varepsilon A T^{۴} \qquad (۲۰-۵)$$

در عبارت فوق، σ که ثابت استفان - بولتزمن خوانده می‌شود، یکی از ثابت‌های طبیعت است. مقدار این ثابت چنین است $\sigma = ۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸} W(m^{۲})(K^{۴})$. کمیت ε را در معادلهٔ (۵-۲۰) گسیلندگی یا ضریب گسیل می‌گویند. مقدار این ضریب، بسته به سطح مورد نظر، از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند. این ضریب، به طور کیفی، میزان جذب تابش را در سطح مورد بررسی نشان می‌دهد. مقدار ε، برای سطوح تیرهٔ نزدیک به واحد، و برای سطح صیقلی نزدیک به صفر است. قاعدهٔ ساده‌ای وجود دارد که اغلب در برآورد مقدار ε مفید واقع می‌شود. سطحی که نور را به خوبی جذب کند، معمولاً گرما را نیز به خوبی جذب می‌کند. به علاوه، سطوحی که جذب کنندهٔ خوبی برای گرما هستند گسیلندهٔ خوب گرما نیز هستند. نتیجهٔ این امر را برای ضریب گسیل ε می‌توان چنین بیان کرد: یک جذب کنندهٔ کامل گرما، جسمی است که تمام تابش گرمایی رسیده به سطحش را در خود نگه می‌دارد. چون این جسم معمولاً تمام نور تابیده شده را جذب می‌کند، آن را جسم سیاه می‌نامند. برای یک جسم سیاه، داریم $\varepsilon = ۱$. همان‌گونه که از معادلهٔ (۵-۲۰) می‌بینیم، گسیل گرمایی از سطح جسم سیاه، به خوبی انجام می‌شود، زیرا ε بزرگترین مقدار ممکن را داراست. برای یک سطح صیقلی، مقدار ε نزدیک به صفر خواهد بود. چنین سطحی نه جذب کنندهٔ خوبی برای گرماست و نه گسیلندهٔ خوب.

سرانجام، باید خاطرنشان کرد که اجسام در هر دمایی از خود انرژی گرمایی گسیل می‌کنند. صندلیی که در اتاق قرار دارد، از خود تابش گرمایی گسیل می‌کند. این تابش به دیوار اتاق برخورد می‌کند و در آن جذب می‌شود. اما دیوار و تمام اجسام دیگر موجود در اتاق هم، تابش گرمایی از خود گسیل می‌دارند. بخشی از این تابشها در صندلی جذب می‌شود. در دمای تعادل، در صورتی که رسانش و همرفت قابل صرف‌نظر باشند، تابش گسیل شده از صندلی به همان اندازهٔ تابشی است که در آن جذب می‌شود.

اگر فرض کنیم ضرب گسیل برابر با ضریب جذب باشد نرخ انتقال گرمای تابشی بین دو سطح هم‌جنس به مساحت A و دماهای $T_{۲}, T_{۱}$ $(T_{۲} > T_{۱})$ برابر است با:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma \varepsilon A (T_{۲}^{۴} - T_{۱}^{۴}) \qquad (۲۱-۵)$$

مثال: بنا به تعریف، جسم سیاه جسمی است که تمام تابش گرمایی که بر سطح آن می‌تابد را جذب می‌کند. جسم سیاهی که در دمای ثابت T (بر حسب کلوین) نگاه داشته می‌شود خود نیز تابش گرمایی دارد. بنا بر قانون استفان- بولتزمان، انرژی که در واحد زمان از واحد سطح جسم سیاه در دمای T تابش می‌شود، برابر است با $p = \sigma T^{۴}$ که در آن σ

(سیگما) یک ثابت جهانی است.

با فرض آنکه خورشید و سیاره مریخ هر دو جسم سیاه باشند، می‌خواهیم دمای متوسط سطح مریخ را بدست آوریم. دمای سطح خورشید، T کلوین، شعاع متوسط آن R کیلومتر و فاصله متوسط مریخ تا خورشید d کیلومتر است. مریخ تحت اثر تابش خورشید طوری گرم می‌شود که در حالت تعادل، توان تابشی که از خورشید دریافت می‌کند با توان تابشی که خودش به اطراف تابش می‌کند، برابر باشد. با فرض آن که دمای مریخ در تمام سطح آن تقریباً یکسان باشد، دمای سطح مریخ، T' را حساب کنید.

اگر $R = ۷ \times ۱۰^۵ km$ و $d = ۲۲۰۵ \times ۱۰^۵ km$ و $T = ۵۸۸۰ K$، مقدار عددی T' را نیز حساب کنید. $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$ (ششمین المپیاد فیزیک ایران)

جواب: با توجه به رابطه (۵-۲۰) می‌توان انرژی که در واحد زمان از خورشید ساطع می‌شود را یافت.

$$\frac{\Delta Q_S}{\Delta T} = \sigma(۴\pi R^۲)T^۴$$

این انرژی ساطع شده به صورت کره‌های هم مرکز در فضا منتشر می‌شود. بنابراین در نقطه‌ای که مریخ قرار دارد، انرژی خورشید در کره‌ای به مساحت $۴\pi d^۲$ به طور یکسان پخش شده است. پس به واحد سطح مریخ انرژی که در واحد زمان می‌رسد برابر است با:

$$\frac{\Delta Q_S}{(۴\pi d^۲)\Delta t} = \sigma(\frac{R^۲}{d^۲})T^۴$$

مشابه آنچه که در مورد محاسبه مؤلفه نیروی افقی وارد از طرف مایع بر سطوح خمیده در فصل اول بیان کردیم، سطح مؤثر سیاره مریخ که انرژی جذب می‌کند، برابر تصویر آن روی صفحه قائم است. لذا سطح مؤثر سیاره مریخ برابر با $\pi r^۲$ (r شعاع سیاره مریخ) می‌شود. در نتیجه کل انرژی که مریخ در واحد زمان جذب می‌کند، برابر است با:

$$\text{نرخ گرمای ورودی} = (\frac{\Delta Q_M}{\Delta t})_{in} = (\frac{\Delta Q_S}{۴\pi d^۲ \Delta t})\pi r^۲ = \sigma(\frac{R^۲}{d^۲})T^۴ \times \pi r^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی فرض کنید دمای مریخ T' باشد. طبق قانون استفان انرژی که در واحد زمان ساطع می‌کند، طبق رابطه (۵-۲۰) برابر است با:

$$\text{نرخ گرمای خروجی} = (\frac{\Delta Q_M}{\Delta t})_{out} = \sigma(۴\pi r^۲)T'^۴$$

در حالت تعادل، انرژی که مریخ دریافت می‌کند با انرژی که ساطع می‌کند، برابر است. در نتیجه

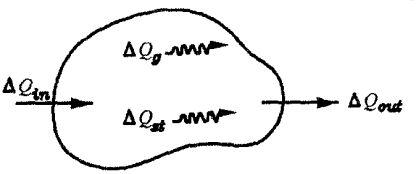
$$(\frac{\Delta Q_M}{\Delta t})_{in} = (\frac{\Delta Q_M}{\Delta t})_{out}$$

$$\rightarrow \sigma(\frac{R^۲}{d^۲})T^۴ \times \pi r^۲ = \sigma(۴\pi r^۲)T'^۴$$

$$\rightarrow T'^۴ = \frac{R^۲ T^۴}{۴d^۲} \rightarrow T' = \sqrt[۴]{\frac{R^۲}{۴d^۲}}T = ۲۳۴/۲K$$

۸.۵ پایستگی انرژی در انتقال گرما

سطح بسته‌ای را مطابق شکل به عنوان سیستم موردنظر خود در نظر می‌گیریم. از قانون بقای انرژی می‌توان گفت که در مدت زمان Δt مقدار انرژی که وارد سیستم موردنظر می‌شود ΔQ_{in} به اضافهٔ مقدار گرمای تولید شده در داخل سیستم (ΔQ_g)، منهای انرژیی که سیستم را ترک کرده است (ΔQ_{out}) باید برابر با مقدار انرژی ذخیره شده در سیستم (ΔQ_{st}) باشد، در نتیجه:

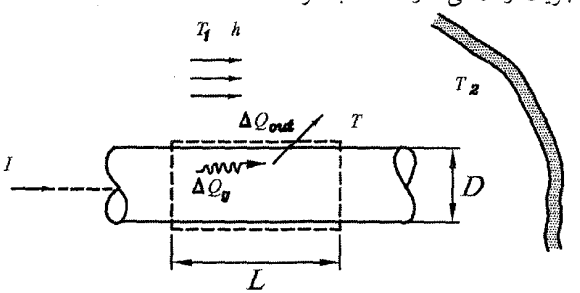


$$\Delta Q_{in} + \Delta Q_g - \Delta Q_{out} = \Delta Q_{st} \qquad (۲۲-۵)$$

با تقسیم رابطهٔ فوق بر زمان Δt داریم:

$$\frac{\Delta Q_{in}}{\Delta t} + \frac{\Delta Q_g}{\Delta t} - \frac{\Delta Q_{out}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{st}}{\Delta t} \qquad (۲۳-۵)$$

مثال. یک میلهٔ طویل هادی به قطر D و مقاومت الکتریکی بر واحد طول R'، ابتدا در تعادل گرمایی با هوا و محیط قرار دارد. با عبور جریان الکتریکی I از میله، تعادل فوق به هم می‌خورد. رابطه‌ای به دست آورید که بتوان از روی آن تغییرات دمای میله را در مدت زمانی که جریان از آن می‌گذرد، محاسبه کرد.



حل. یک حجم بسته خط‌چین استوانه‌ای شکل به طول L مطابق شکل دور میله به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. می‌دانیم اگر از مقاومت R جریان I بگذرد. توان حرارتی که مقاومت به صورت گرما می‌دهد برابر است با $P = RI^2$. بنابراین نرخ گرمای تولیدی در این سیستم برابر است با:

$$\left.\begin{aligned} P &= RI^2 = (R'L)I^2 \\ P &= \frac{\Delta Q_g}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\Delta Q_g}{\Delta t} = R'LI^2 \qquad (۱)$$

از طرفی میله هم از طریق همرفت و هم از طریق تابش انرژی خود را به محیط اطراف می‌دهد در نتیجه به کمک روابط (۵-۱۸) و (۵-۲۱) داریم:

$$\frac{\Delta Q_{out}}{\Delta t} = h(\pi DL)(T - T_۱) + \sigma\varepsilon(\pi DL)(T^۴ - T_۲^۴) \qquad (۲)$$

در رابطهٔ فوق T دمای سیستم و πDL مساحتی از لوله است که در تماس با محیط می‌باشد. حال به کمک روابط (۱) و (۲) و (۵-۲۳) داریم:

$$\Delta Q_{in} = ۰$$

$$\Delta Q_{st} = mc\Delta T$$

$$\rightarrow R'LI^۲ + h(\pi DL)(T - T_۱) + \sigma\varepsilon(\pi DL)(T^۴ - T_۲^۴) = \frac{mc\Delta T}{\Delta t}$$

c ظرفیت گرمایی ویژهٔ میله و m جرم میله که دارای طول L است. از حل معادلهٔ فوق می‌توان تغییرات دما بر حسب فاصلهٔ زمانی Δt را بدست آورد.

۹.۵ مسائل تکمیلی فصل پنجم

با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل این فصل به آدرس mottaghi@sharif.edu حل کلیه مسائله به آدرس ایمیل شما فرستاده می‌شود.

۱) دو میله به طول‌های L_1, L_2 با ضرایب رسانندگی گرمایی K_1, K_2 از انتها به هم متصل شده‌اند. سطوح جانبی این دو میله عایق بندی شده است. مطلوب است محاسبه رسانندگی گرمایی معادل برای این دو میله. (آمادگی برای المپیاد فیزیک کانادا ۲۰۰۵)

راهنمایی: این دو میله به صورت دو مقاومت سری هستند. پس مقاومت کل این دو میله باید با مقاومت میله‌ای به طول $L_1 + L_2$ با ضریب رسانندگی گرمایی K_{eq} برابر باشد.

جواب: $K_{eq} = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2}}$

۲) هنگامی که دمای هوای بیرون اتاق $T_0 = -20°C$ است، گرم‌کن داخل اتاق می‌تواند دمای اتاق را حداکثر تا $T_1 = 16°C$ بالا ببرد که این دما گرم و مناسب نیست. به همین منظور یک گرم‌کن برقی $P_2 = 1kW$ را روشن می‌کنیم. این دو گرم‌کن با هم می‌توانند دمای اتاق را تا $T_2 = 22°C$ بالا ببرند. مطلوب است توان گرمایی گرم کن اول P_1.

(آمادگی برای المپیاد فیزیک - کانادا ۲۰۰۴)

راهنمایی: از رابطه (۵-۲) استفاده کنید.

جواب: $P_1 = P_2(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_1}) = 6KW$

۳) تمام اجسام گرمای تابشی دارند. چگالی شار انرژی تابش، J، مقدار انرژی است که در واحد زمان از واحد سطح عبور کند. طبق قانون استفان- بولتزمن $J = e\sigma T^4$ که برای تابش کننده‌های کامل $e = 1$ است. σ نیز عددی ثابت می‌باشد. با فرض اینکه سیاره زهره تمام گرمای خود را از تابش خورشید بدست آورد و خورشید و زهره هر دو تابش کننده کامل باشند، دمای تعادل این سیاره ر ابر حسب دمای خورشید T_S بیابید. (شعاع خورشید R_S، شعاع زهره R_V و فاصله زهره تا خورشید برابر R_{SV} است.)

(آمادگی برای المپیاد فیزیک - کانادا ۲۰۰۲)

راهنمایی: در حالت تعادل، گرمایی که زهره از طریق تابش از خورشید می‌گیرد برابر گرمایی است که از طریق تابش از دست می‌دهد.

جواب: $T_V = \sqrt{\frac{R_S}{2R_{SV}}} T_S$

۴) به یک کره آلومینیومی تا دمای $100°C$ حرارت داده می‌شود. قطر کره در این دما برابر $25/4508mm$ است. این کره بر روی یک حلقه مسی با جرم 20 gr و دمای $0°C$ قرار داده می‌شود. در این دما قطر داخلی حلقه مسی برابر $25/4mm$ است. در نتیجه کره نمی‌تواند از حلقه عبور کند. بعد از مدت زمان طولانی، هنگامی که سیستم به تعادل می‌رسد (دمای حلقه و کره برابر می‌شود) کره آلومینیومی قادر خواهد بود از داخل حلقه

عبور کند. با فرض اینکه انتقال حرارتی به محیط اطراف وجود نداشته باشد و فقط رسانش بین کره و حلقه باشد، مطلوب است: جرم کره آلومینیومی.

$\alpha_{Cu} = ۴۳۱/۸ \times ۱۰^{-۹} \frac{m}{K}$

$\alpha_{Al} = ۵۸۴/۲ \times ۱۰^{-۹} \frac{m}{K}$

$C_{Cu} = ۳۸۶ J/Kg.K$

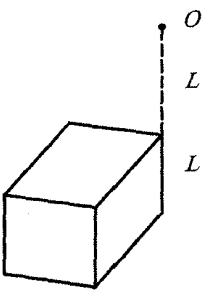
$C_{Al} = ۹۰۰ J/Kg.K$

(آمادگی برای المپیاد فیزیک- کانادا ۲۰۰۰)

راهنمایی: تغییر قطر کره و حلقه از رابطه $\Delta D = D\alpha\Delta T$ بدست می‌آید. دمای تعادل را نیز از پایستگی گرما بیابید.

جواب: $m_{Al} = ۸/۷۱ \times ۱۰^{-۳} Kg$

۵) می‌خواهیم مکعب کامل سیاهی که طول هر ضلع آن L است توسط لامپی به توان $P\frac{J}{S}$ که به فاصله L از یکی از گوشه‌های مربع و در راستای ضلع مکعب قرار دارد به اندازه $۱°C$ بالا ببریم. چه قدر زمان برای این کار نیاز داریم؟ فرض کنید تابش لامپ به صورت یکنواخت باشد و مکعب هیچ انرژی به محیط اطراف نمی‌دهد.



ب) اگر مکعب به عنوان یک جسم سیاه گرما را تابش کند، زمان مورد نظر را بیابید.

ج) دمای نهایی مکعب را بعد از مدت زمان طولانی بیابید.

(آمادگی برای المپیاد فیزیک کانادا ۱۹۹۹)

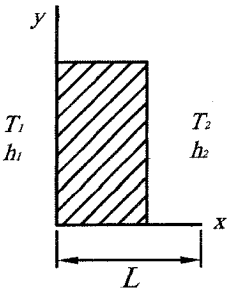
راهنمایی: $۲۴ = ۴ \times ۶$ مکعب مساوی لامپ را کاملاً احاطه می‌کنند. بنابراین توانی که به یک مکعب می‌رسد $\frac{P}{۲۴}$ است.

جواب: الف) $t = \frac{۲۴mc}{P}$

ب) $t = \frac{mc}{\frac{P}{۲۴} - ۶L^۲\sigma T^۴}$

ج) $T = (\frac{P}{۱۴۴\sigma L^۲})^{\frac{۱}{۴}}$

۶) دیوار مسطحی به ضخامت L و ضریب رسانندگی K، سیالهای گرم و سرد به دماهای $T_۲, T_۱$ را از یکدیگر جدا می‌سازد. $(T_۲ > T_۱)$



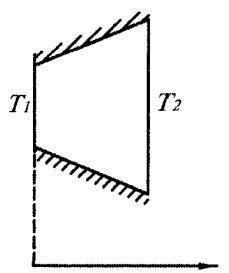
اگر ضریب همرفتی سیالها به ترتیب برابر h_1, h_2 باشد، مطلوب است شار گرمایی و توزیع دما در داخل دیوار بر حسب x

(تذکر: دمای روی سطوح دیوار T_1, T_2 نیست. در سمت چپ بیشتر از T_1 و در سمت راست کمتر از T_2 است.)

راهنمایی: دو سیال و دیوار به مانند سه مقاومت هستند که به صورت سری به هم بسته شده‌اند. شار گرمایی از رابطه $\Delta Q'' = \frac{\Delta T}{R_{eq}}$ بدست می‌آید؛ از طرفی همان شار گرمایی از دیوار می‌گذرد.

جواب: $\frac{\Delta Q}{A\Delta t} = \Delta Q'' = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{L}{K}}$ $\qquad T = \frac{\Delta Q''}{K}x + (T_1 + \frac{\Delta Q''}{h_1})$

۷) جسمی به شکل مخروط ناقص که فاصلهٔ بین دو قاعدهٔ آن برابر h است، در نظر بگیرید . بطوریکه دمای سطح قاعده‌های آن به ترتیب در دماهای T_1, T_2 ثابت نگه داشته شوند. $(T_1 < T_2)$



اگر T_x نماد دما در نقطه x باشد، نشان دهید $T_{\frac{h}{2}} > \frac{T_1 + T_2}{2}$

راهنمایی: با ازدیاد x مساحتی که گرما می‌خواهد از آن عبور کند نیز افزایش می‌یابد. از طرفی نرخ انتقال گرما برای همه مساحت‌ها یکسان است.

۸) منتظر مسایل خوب ارسالی شما هستیم. مسایل را به آدرس mottaghi@sharif.edu همراه با نام و نام مدرسه و شهر خود ایمیل کنید تا در ویرایش‌های بعدی کتاب به نام شما ثبت شوند.

فصل ۶

قوانین گازها

قبل از بررسی قوانین حاکم بر گازها لازم است که گذری به درسهای شیمی بزنیم و بعضی از مفاهیمی که آنجا یاد گرفته‌اید، در اینجا دوباره یادآوری کنیم.

۱.۶ مول و عدد آووگادرو

مول یکی از هفت یکای اصلی SI است که به صورت زیر تعریف می‌شود. یک مول تعداد اتمهای موجود در یک نمونه ۱۲ گرمی از کربن ۱۲ است. حال هرگاه دربارهٔ یک مول از یک گاز صحبت می‌کنیم ممکن است سؤالی مطرح شود به طور دقیق چند اتم یا مولکلول در این یک مول وجود دارد. که پاسخ آن به صورت تجربی تعیین شده است و آن همان عدد آووگادرو است یعنی:

$$N_A = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \frac{۱}{mol}.$$

بنابراین هرگاه خواستید تعداد مولهای یک گاز را حساب کنید، کافی است تعداد مولکولهای آن گاز، N، را بر عدد آووگادرو تقسیم کنید. تا تعداد مول، n، بدست آید لذا:

$$\text{تعداد مول گاز } n = \frac{N}{N_A} \qquad (۱-۶)$$

مفهوم سومی که می‌خواهیم در اینجا یادآوری کنیم، اصطلاح وزن مولکولی M است. وزن مولکولی، M، یک جسم عبارت است از جرم یک کیلو مول از آن جسم بر حسب کیلوگرم، یکای وزن مولکولی، کیلوگرم بر کیلومول است! برای مثال، مطابق تعریف، جرم $۱kmol$ کربن -۱۲ برابر $۱۲kg$ است. بنابراین، برای کربن -۱۲ داریم $M = ۱۲kg/kmol$. (همان‌طور که دیده می‌شود، M جرم است و از این رو اصطلاح «وزن مولکولی» درست نیست و آن را باید «جرم مولکولی» نامید، که گاهی هم چنین می‌کنند. ولی، ما در اینجا

واژهٔ درست‌تر جرم مولکولی را برای M به کار می‌بریم.)

۲.۶ گاز کامل

با آزمایش‌های زیادی که بر روی گازها انجام شده است می‌توان نشان داد که اگر چگالی گاز به قدر کافی کم باشد و دمای آزمایش خیلی پایین و فشار آن زیاد بالا نباشد، همهٔ گازها تمایل دارند که از رابطهٔ زیر پیروی کنند.

$$PV = \frac{m}{M}RT \text{ یا } PV = n\ \ R\ \ T \qquad (۶-۲)$$

در رابطهٔ فوق داریم:
P: فشار مطلق گاز.
V: حجم گاز.
m: جرم گاز.
M: جرم مولکولی گاز.
n: تعداد مولهای گاز ($n = \frac{m}{M}$).
R: ثابت گاز است که برای همه گازها یکسان است. یعنی

$$R = ۸/۳۱۴ \frac{J}{mol.K}$$

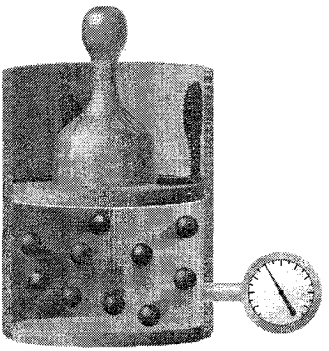
T: دمای گاز بر حسب مقیاس کلوین.
معادلهٔ (۶-۲) را قانون گاز کامل می‌نامند. مشروط بر اینکه چگالی گاز به طور معقولی کم باشد. اگر چه در طبیعت چیزی به عنوان گاز واقعاً کامل وجود ندارد ولی همهٔ گازها در چگالی‌های به اندازهٔ کافی کم، یعنی در شرایطی که در آن مولکولهای آنها به اندازهٔ کافی از یکدیگر دور هستند، به حالت گاز کامل نزدیک می‌شوند.

نکتهٔ ۱: می‌توان رابطهٔ (۶-۲) را نیز به صورت زیر بر حسب چگالی نوشت:

$$PV = \frac{m}{M}RT \rightarrow P\frac{V}{m} = \frac{R}{M}T \rightarrow$$
$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{M}T \qquad (۳-۶)$$

نکتهٔ ۲: رابطهٔ (۶-۲) برای مخلوطی از چند گاز با تعداد مولهای $n_A, n_B, \ldots$ صادق است به شرطی که مقدار n را در رابطهٔ (۶-۲) برابر $n = n_A + n_B + \ldots$ قرار دهیم.

فرض کنید مقداری گاز را در یک سیلندر و پیستون بدون اصطکاک مطابق شکل قرار داده و می‌خواهیم یک سری آزمایش روی آن انجام دهیم.

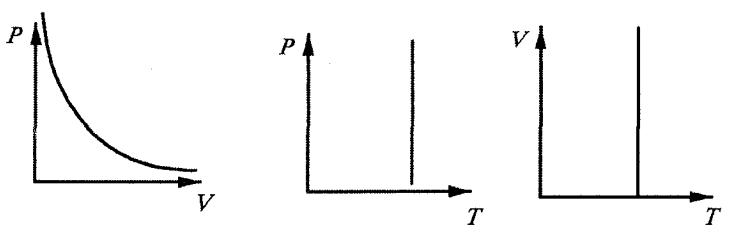


۳.۶ آزمایش دما ثابت (ایزوترم)

این آزمایش را آقای بویل در قرن هفدهم انجام داد که امروزه آن را قانون بویل می‌نامند. از رابطهٔ (۶-۲) واضح است که اگر T ثابت باشد چون جرم گاز نیز ثابت است لذا:

$$PV = \text{ثابت} \quad \text{(قانون بویل)} \qquad (۶-۴)$$

که می‌توان نمودارهای $P-V$، $P-T$ و $V-T$ را برای این آزمایش به صورت زیر رسم کرد.



نمودار $P-V$ به صورت یک تابع هموگرافیک است. یعنی:

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\text{ثابت}}{V}$$

حال هر چقدر آزمایش برای یک گاز در دمای بالاتری باشد مقدار ثابت بیشتر شده و نمودار به سمت بالا جابه‌جا می‌شود. بنابراین اگر مطابق شکل زیر برای یک گاز دو آزمایش دما ثابت در دماهای $T_۲, T_۱$ انجام دهیم به طوریکه نمودار آنها مطابق شکل زیر شود به راحتی می‌توان گفت که $T_۲ > T_۱$.

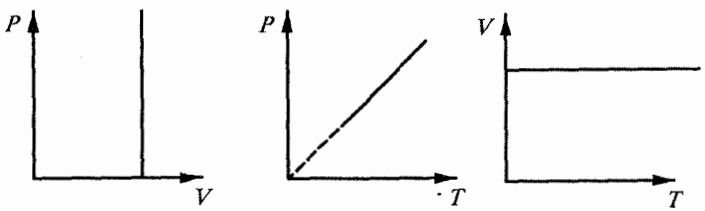
آزمایش: می‌توان نحوهٔ عملکرد اتمها را در آزمایش دما ثابت در فیلم 6boyle از CD کتاب مشاهده کرد.

۴.۶ آزمایش حجم ثابت (ایزوکوریک)

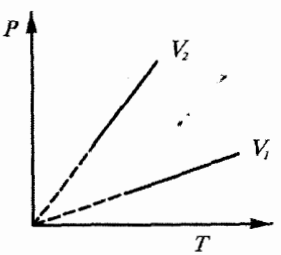
با انجام آزمایش می‌توان دید که اگر حجم یک گاز ثابت باشد فشار با دمای گاز رابطهٔ مستقیم دارد. لذا از رابطهٔ (۶-۲) با توجه به ثابت بودن V می‌توان نوشت:

$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = \text{ثابت} \qquad (۶-۵)$$

می‌توان نمودارهای $P-V$، $P-T$ و $V-T$ را برای آزمایش حجم ثابت به صورت زیر رسم کرد.



نمودار $P-T$ به صورت یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد. حال با استفاده از رابطهٔ (۶-۵) می‌توان دریافت که چون V در مخرج کسر است بنابراین هر چقدر V کوچکتر باشد کسر $\frac{nR}{V}$ بزرگتر شده در نتیجه شیب خط نیز بیشتر می‌شود. لذا اگر بر روی یک گاز دو آزمایش حجم ثابت انجام دهیم که به صورت شکل زیر درآمده باشد به راحتی می‌توان گفت که $V_2 > V_1$.

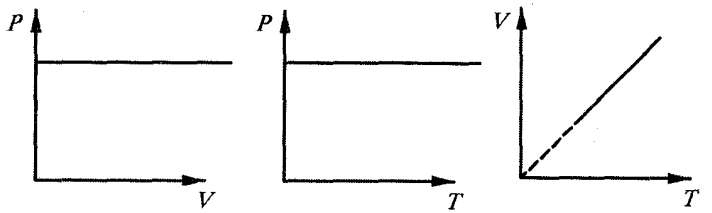


۵.۶ آزمایش فشار ثابت (ایزوبار)

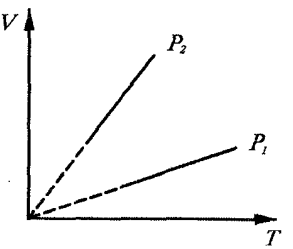
شارل و گیلوساک با آزمایش دیدند که اگر فشار یک گاز ثابت باشد حجم با دمای گاز رابطهٔ مستقیم دارد. با توجه رابطهٔ (۶-۲) و ثابت بودن فشار داریم:

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{P} = \text{ثابت} \qquad (٦-٦)$$ (قانون شارل گیلوساک)

می‌توان نمودارهای $P-V$، $P-T$ و $V-T$ را برای آزمایش فشار ثابت به صورت زیر رسم کرد.



نمودار $V-T$ یک خط راست است که امتداد آن از مبدأ می‌گذرد. با استفاده از رابطهٔ (۶-۶) ملاحظه می‌کنیم. که هرچه P بزرگتر باشد شیب نمودار کمتر است. لذا از شکل زیر برای دو آزمایش فشار ثابت می‌توان نوشت: $P_2 < P_1$.



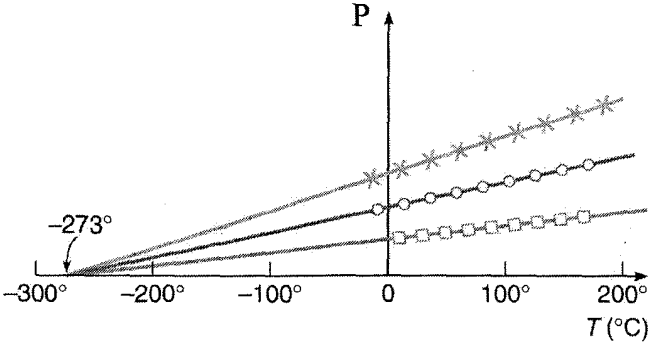
سؤال بنیادی

می‌دانیم اگر دما به صفر برسد حجم گاز به صفر نمی‌رسد پس چرا خط نمودار $V-T$ از مبدأ عبور کرد؟!!! می‌دانیم گاز ایده‌آل مدل ساده شده گاز واقعی است و در آن اندازهٔ مولکولها و نیروی کشش بین آنها ناچیز فرض می‌شود. لذا نمودارهای فوق همگی برای گاز کامل است.

۶.۶ دمای صفر مطلق

اگر شخص سنگین وزنی به وزن ۱۵۰ کیلوگرم هر هفته یک کیلوگرم وزن کم کند پس از ۱۵۰ هفته وزن او چند کیلوگرم خواهد بود؟ تقریباً یک چند وضعیتی در مورد تغییر فشار گاز همراه با تغییر دمای آن نیز صادق است، همین مقایسه است که می‌تواند ما را به ایدهٔ

دمای صفر مطلق رهنمون سازد. فشار گاز محبوس در یک ظرف، به ازای هر یک درجه افت دما، مقدار معینی کاهش می‌یابد. اگر این روند برای یک مدت زمان طولانی ادامه داشته باشد، گاز باید تمام فشارش را از دست بدهد. دمایی که در آن گاز تمامی فشار خود را از دست می‌دهد، به صفر مطلق معروف است. برای پیدا کردن دمای مربوط به فشار صفر، خطی را از نقاط روی نمودار می‌گذرانیم و آن را آنقدر ادامه می‌دهیم تا محور دما را قطع کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود محور دما را در حوالی نقطهٔ $-۲۷۳°C$ قطع می‌کند. این دما صفر مطلق است یعنی پایین‌ترین دمایی که امکان دارد.

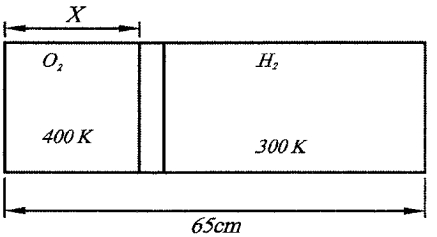


این صفر مربوط به درجه‌بندی مطلق دما یا درجه‌بندی کلوین است. از طرفی می‌دانیم اگر همان شخص ۱۵۰ کیلوگرمی بخواهد هفته‌ای یک کیلوگرم کم کند، قبل از آنکه ۱۵۰ هفته به پایان برسد، به احتمال زیاد، اتفاقی خواهد افتاد و همین طور است برای گاز قبل از اینکه دمای آن به صفر مطلق برسد. گاز در نزدیک صفر مطلق به صورت مایع فوق سیال در می‌آید که دیگر نمی‌توان آن را در یک ظرف درباز نگه داشت چون از داخل ظروف بیرون می‌ریزد یا بعضی از فلزات و ترکیبات در این دما ابر رسانا می‌شوند یعنی جریان الکتریکی بدون وجود هیچ باتری یا پیلی در آنها جاری می‌گردد. با توجه به توضیحات داده شده لازم است که دما در رابطهٔ (۶-۲) بر حسب کلوین نوشته شود.

آزمایش: Radiometer وسیله‌ای است که شما می‌توانید توسط آن انرژی نور را تبدیل به انرژی مکانیکی بکنید. این دستگاه شامل چند پره است. بطوریکه رنگ پشت هر پره تیره و رنگ طرف دیگر آن روشن می‌باشد. با روشن کردن چراغ چون طرف تیره پره، نور را بیشتر از طرف روشن جذب می‌کند در نتیجه گرم‌تر از طرف روشن می‌شود. بنابراین هوای مجاور سطح تیره گرم‌تر از طرف روشن شده و به تبع آن فشار این ناحیه بالاتر از فشار هوای نزدیک به سطح روشن است. این اختلاف فشار موجب حرکت پره‌ها می شود.
فیلم‌های Radiometer1 و Radiometer2 6 از CD کتاب را ببینند.

۷.۶ مسائل حل شده

۱) مانند شکل زیر داخل یک استوانه بوسیلهٔ پیستون عایقی که می‌تواند در طول آن جابه‌جا شود به دو بخش تقسیم شده است. در یک قسمت اکسیژن در دمای $T_1 = 400k$ و در قسمت دیگر هیدروژن در دمای $300K$ قرار دارد و پیستون در حال تعادل است. جرم دو گاز برابر و طول استوانه $65cm$ است. موضع پیستون نسبت به انتهای بخش اکسیژن‌دار استوانه، (x) عبارت است از:



الف) $5cm$ ب) $12cm$ ج) $9cm$ د) $10cm$

(اولین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. برای اینکه پیستون بخواهد در حال تعادل بماند باید فشار در طرفین آن یکسان باشد. $(P_{O_2} = P_{H_2})$ به کمک رابطهٔ (۶-۴) داریم:

فشار گاز اکسیژن $P_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} R\frac{T_{O_2}}{V_{O_2}}$ (۱)

فشار گاز هیدروژن $P_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} R\frac{T_{H_2}}{V_{H_2}}$ (۲)

از طرفی می‌دانیم وزن مولکولی گاز اکسیژن و هیدروژن به ترتیب برابرند با:

$$M_{H_2} = 2gr \quad M_{O_2} = 32gr \quad m_{O_2} = m_{H_2} \qquad (3)$$

$$(3),(2),(1) \rightarrow \frac{m_{O_2}}{32} R\frac{400}{V_{O_2}} = \frac{m_{H_2}}{2} R\frac{300}{V_{H_2}} \rightarrow \frac{V_{H_2}}{V_{O_2}} = 12 \qquad (4)$$

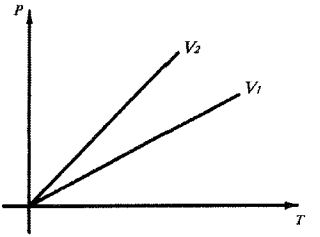
اگر مساحت سطح مقطع استوانه A باشد آنگاه:

$$V_{O_2} + V_{H_2} = 65A \qquad (5)$$

$$(5),(4) \rightarrow V_{O_2} = 5A \quad V_{O_2} = xA = 5A \rightarrow x = 5cm$$

گزینهٔ «الف» صحیح است.

۲) تغییرات فشار در مقابل دمای یک گاز در دو حجم ثابت V_2 و V_1 مطابق شکل است. در این صورت:



الف) $V_1 = V_2$
ب) $V_1 > V_2$
ج) $V_1 < V_2$
د) داده‌های مسأله برای مقایسهٔ V_2 و V_1 کافی نیست.

حل. با توجه به توضیحات داده شده در متن درس $V_1 > V_2$ لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

۳) مقداری گاز کامل زیر پیستونی به وزن W و سطح مقطع $۲۰cm^۲$ قرار دارد. وقتی وزنهٔ $۳W$ روی پیستون قرار می‌دهیم، حجم گاز نصف می‌شود. اگر فشار هوای خارج $۱۰^۵$ پاسکال باشد، با فرض ثابت بودن دما W چند نیوتن است؟

الف) ۶۰۰ ب) ۳۰۰ ج) ۲۰۰ د) ۱۰۰

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. در حالت اول فشار برابر جمع فشار هوا و فشار ناشی از وزن پیستون لذا:

$$P_1 = \frac{W}{۲۰ \times ۱۰^{-۴}} + ۱۰^۵ \quad P_a$$

به طور مشابه در حالت دوم داریم:

$$P_2 = \frac{W + ۳W}{۲۰ \times ۱۰^{-۴}} + ۱۰^۵ \quad P_a$$

از طرفی $V_2 = \frac{۱}{۲}V_1$ به کمک رابطهٔ (۶-۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \rightarrow T_1 = T_2 \rightarrow P_1V_1 = P_2V_2 \rightarrow$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}, \frac{V_2}{V_1} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow (\frac{W}{۲۰ \times ۱۰^{-۴}} + ۱۰^۵) = \frac{۱}{۲}(\frac{۴W}{۲۰ \times ۱۰^{-۴}} + ۱۰^۵) \rightarrow W = ۱۰۰N$$

گزینه «د» صحیح است.

۴) در یک لولهٔ شیشه‌ای محتوی مقداری روغن که دو سر آن مسدود است حبابی از هوا وجود دارد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) وقتی لوله را گرم کنیم، حجم روغن و حباب زیاد می‌شود.
ب) وقتی لوله را سرد کنیم، حجم روغن و حباب زیاد می‌شود.
ج) وقتی لوله را گرم کنیم، حجم روغن زیاد و حجم حباب کم می‌شود.
د) وقتی لوله را سرد کنیم، حجم روغن زیاد و حجم حباب کم می‌شود.

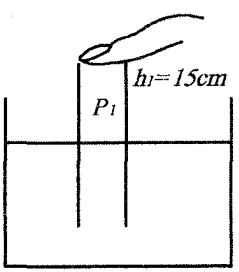
(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل: با صرف‌نظر از انبساط لولهٔ شیشه‌ای در برابر روغن، چون حجم لوله ثابت است لذا مجموع حجم‌های روغن و حباب باید ثابت باشد یعنی یکی افزایش و دیگری کاهش یابد. در نتیجه گزینه‌های «الف» و «ب» نادرست هستند. همچنین می‌دانیم گازها قابلیت تراکم‌پذیری خوبی دارند در حالیکه مایعات به سختی متراکم می‌شوند. لذا اگر لوله را گرم کنیم روغن آزادانه منبسط می‌شود ولی حباب که حاوی هوا است در برابر فشار روغن متراکم می‌شود. در نتیجه گزینهٔ «ج» صحیح است. دقت کنید هنگامی که لوله را سرد کنیم عکس حالت فوق اتفاق می‌افتد.

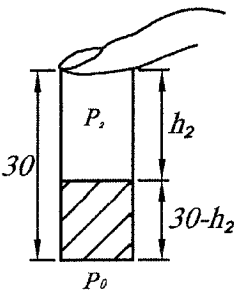
۵) لولهٔ باریکی به طول $۳۰cm$ را تا نصف طولش در جیوه فرو برده و سپس انتهای آن را با انگشت بسته، از ظرف جیوه خارج می‌کنیم. اگر فشار هوای خارج $۷۰cmHg$ باشد.
الف) ارتفاع جیوهٔ باقی‌مانده در لوله چقدر است؟
ب) اگر لوله را وارونه کنیم به قسمی که دهانهٔ باز آن به طرف بالا باشد. ارتفاع هوای زیر جیوه چقدر می‌شود؟

(دومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. در شکل «الف» لوله را در جیوه به اندازهٔ $۱۵cm$ فرو کردیم و انگشت را روی لوله می‌گذاریم در این حالت فشار هنوز برابر فشار هوای بیرون است. $(P_۱ = P_۰ = ۷۰cmHg)$



با بیرون آوردن لوله از ظرف مقداری جیوه از لوله به بیرون می‌ریزد و لذا مطابق شکل زیر ارتفاع جیوه در لوله به $۳۰ - h_۲$ می‌رسد اگر مساحت سطح مقطع لوله A باشد با فرض اینکه هوا به صورت گاز کامل رفتار کند و دما ثابت بماند به کمک رابطهٔ (۶-۲) داریم:



$$P_1V_1 = P_2V_2 \rightarrow P_1h_1A = P_2h_2A \rightarrow P_1h_1 = P_2h_2 \qquad (1)$$

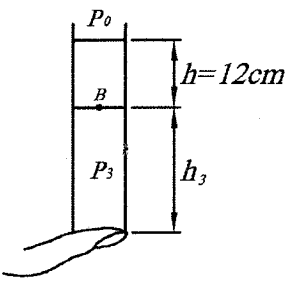
حال چون جیوه در انتهای لوله در حال تعادل است لذا فشار باید در دو طرف آن برابر باشد.

$$P_2 + (30 - h_2) = P_0 \qquad (2)$$

دقت کنید در رابطهٔ فوق فشارها بر حسب ارتفاع یعنی سانتیمتر جیوه بیان شده است. یعنی یکای تمام جملات یکسان است.

$$(2),(1) \rightarrow \frac{P_1h_1}{h_2} + (30 - h_2) = P_0 \rightarrow \frac{70 \times 15}{h_2} + (30 + h_2) = 70$$
$$\rightarrow h_2^2 + 40h_2 - 1050 = 0 \rightarrow h_2 = 18/078cm$$

بنابراین ارتفاع ستون جیوه برابر است با $h = 30 - 18 = 12cm$. حال اگر لوله را مطابق شکل زیر وارونه کنیم برای هوای محبوس مطابق قسمت «ب» می‌توان نوشت:



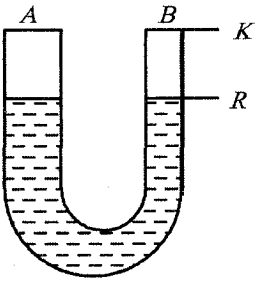
$$P_3h_3 = P_1h_1 \qquad (3)$$

چون سطح جیوه در نقطهٔ B در حال تعادل است لذا:

$$P_0 + h = P_3 \rightarrow P_3 = 70 + 12 = 82cmHg$$
$$(3) \text{ از } \rightarrow h_3 = \frac{P_1h_1}{P_3} = \frac{70 \times 15}{82} = 12/80cm$$

۶) دو لولهٔ هم طول A و B که سطح مقطع اولی ۵ سانتیمتری مربع و دومی یک سانتیمتر مربع است، مطابق شکل به هم مربوط گردیده‌اند. انتهای لولهٔ A بسته شده و لولهٔ B دارای دو شیر k و R است. در ابتدا دو شیر بسته بوده و سطح جیوه در دو لوله یکسان و در لولهٔ B درست تا زیر شیر R می‌باشد. فشار هوای داخل لولهٔ A، ۷۶ سانتیمتر جیوه و فشار

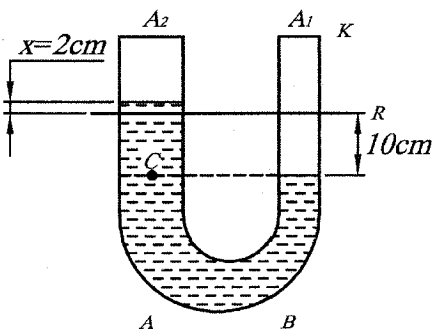
هوای داخل لولهٔ B برابر P و طول ستون هوا در هر یک از دو لوله $۴۰cm$ است.
الف) اگر شیر R را باز کنیم، سطح جیوه در لولهٔ B، ۱۰ سانتیمتر پایین می‌آید. مقدار فشار P را محاسبه کنید؟



ب) در حالی که شیر R باز است. شیر k را نیز باز کنیم. تا در نهایت سطح جیوه در دو لولهٔ یکسان شود. تغییر جرم هوای لولهٔ B را در صورتی که فشار محیط یک اتمسفر و دما ثابت مانده باشد محاسبه کنید. جرم حجمی هوا در شرایط داده شده ۰/۰۰۱۳ گرم بر سانتیمتر مکعب است.

(سومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. مقدار جیوه‌ای که در ستون B پایین آمده است وارد ستون A می‌شود و چون حجم خارج شده از لولهٔ B باید با حجم وارد شده به ستون A برابر باشد لذا اگر $A_۱$ و $A_۲$ سطح مقطع لوله‌های B و A باشد داریم:



$$۱۰A_۱ = xA_۲ \rightarrow x = ۱۰(\frac{A_۱}{A_۲}) = \frac{۱۰}{۵} = ۲cm$$

بنابراین سطح جیوه در ستون A به اندازهٔ $۲cm$ نسبت به حالت قبلش بالاتر می‌آید. برای هوای محبوس در لولهٔ A برای این دو حالت به کمک رابطهٔ (۶-۲) و با فرض ثابت بودن دما داریم:

$$P_{A۱}V_{A۱} = P_{A۲}V_{A_۲} \rightarrow ۷۶ \times (۴۰A_۲) = P_{A_۲}((۴۰ - ۲)A_۲)$$

$$\rightarrow P_{A۲} = ۸۰cmHg$$

مشابهاً برای هوا محبوس در لولهٔ B می‌توان نوشت:

$$P_{B_2}V_{B_2} = P_{B_1}V_{B_1} \rightarrow P_{B_2}((۴۰ + ۱۰)A_1) = P \times ۴۰ \qquad (۱)$$

از طرفی از تعادل فشار در نقطهٔ C داریم:

$$P_{A_2} + ۱۲ = P_{B_2} \rightarrow P_{B_2} = ۸۰ + ۱۲ = ۹۲ cmHg \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow P = ۱۱۵ \ cmHg$$

ب) با باز شدن شیر k فشار هوای محبوس در B تبدیل به فشار هوا یعنی $P_{B_3} = ۷۶ cmHg$ می‌شود. در نتیجه حجم آن زیاد شده و از لوله خارج می‌شود اگر این حجم انبساط یافته در این حالت را V_{B_3} بنامیم آنگاه داریم:

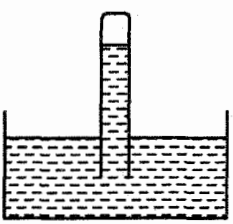
$$P_{B_2}\ V_{B_2} = P_{B_3}\ V_{B_3}$$

$$\rightarrow ۹۲ \times (۵۰ \times ۱) = ۷۶ \times V_{B_3} \rightarrow V_{B_3} = ۶۰/۵ cm^3$$

V_{B_3} حجم کل هوا است که به مقدار $۴۰ \times ۱ = ۴۰ cm^3$ از آن داخل لوله است. بنابراین جرم خارج شده برابر است با:

$$\Delta m_B = \rho \Delta V_B = ۰/۰۰۱۳ \times (۶۰/۵ - ۴۰) = ۰/۰۲۶۶ \ gr$$

۷) مطابق شکل زیر لوله‌ای به طول یک متر به طور قائم و واژگون روی ظرفی پر از جیوه قرار دارد، به طوریکه ۱۰ سانتیمتر از آن داخل جیوه است. بالای جیوه و در داخل لوله گاز نئون وجود دارد. ارتفاع ستون گاز ۱۶ سانتیمتر، فشار محیط یک اتمسفر و دمای محیط $۲۷°C$ است.



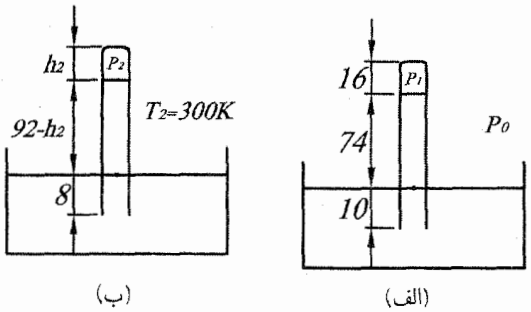
الف) اگر به آرامی لوله را ۲ سانتیمتر از جیوه خارج کنیم طول ستون جیوه، در لوله چقدر خواهد شد؟

ب) در حالی که لوله در وضعیت قسمت (الف) است، تمامی دستگاه را به ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین که فشار هوا ۰/۸ اتمسفر است می‌بریم. در این صورت ارتفاع ستون جیوه از سرباز لوله ۶۷/۹ سانتیمتر می‌شود. دمای گاز نئون چقدر است؟

راهنمایی: سطح جیوه درون ظرف را ثابت فرض نمایید.

(سومین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. باتوجه به شکل‌های «الف» و «ب» برای گاز نئون در این دو حالت می‌توان نوشت:



(ب) (الف)

$$P_۱(h_۱A) = P_۲(h_۲A)$$

$$P_۱h_۱ = P_۲h_۲ \quad (۱)$$

برای حالت اول، از تعادل سطح آزاد جیوه داریم:

$$P_۱ + ۷۴ = P_۰ = ۷۶ \rightarrow P_۱ = ۲cmHg \quad (۲)$$

از تعادل سطح آزاد جیوه در حالت دوم داریم:

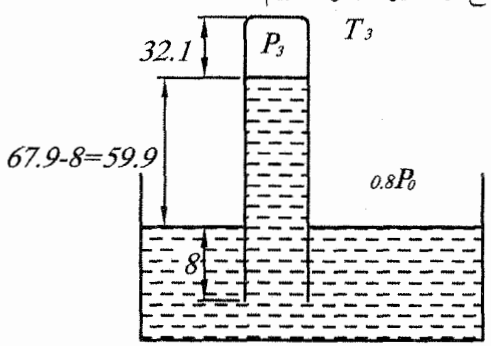
$$P_۲ + (۹۲ - h_۲) = P_۰ = ۷۶ \rightarrow h_۲ - P_۲ = ۱۶\ cm$$

$$(۳),(۲),(۱) \rightarrow ۲ \times ۱۶ = h_۲(h_۲ - ۱۶) \rightarrow h_۲^۲ - ۱۶h_۲ - ۳۲ = ۰$$

$$\rightarrow h_۲ = ۱۷/۷۹۷\ cm$$

$$(۳) \rightarrow P_۲ = ۱۷/۷۹۷ - ۱۶ = ۱/۷۹۷\ cmHg$$

ب) از تعادل سطح آزاد جیوه در لوله داریم:



$$P_۳ + (۶۷/۹ - ۸) = ۰/۸P_۰ = ۰/۸ \times ۷۶$$

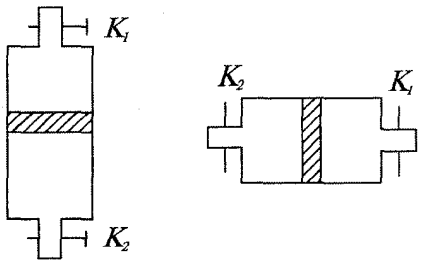
$$\rightarrow P_۳ = ۰/۹\ cmHg$$

برای حالت دوم و سوم به کمک رابطهٔ (۶-۲) داریم:

$$\frac{P_۲V_۲}{T_۲} = \frac{P_۳V_۳}{T_۳} \rightarrow \frac{۱/۷۹۷ \times (۱۷/۷۹۷A)}{۳۰۰} = \frac{۰/۹ \times (۳۲/۱A)}{T_۳}$$

$$\rightarrow T_۳ = ۲۷۱/۰۰\ k$$

۸) شکل «الف» محفظهٔ استوانه شکلی را نشان می‌دهد که افقی است. در حالی که شیرهای k_1 و k_2 باز هستند، پیستونی به وزن W استوانه را به دو قسمت مساوی (هر یک به طول L) تقسیم کرده است. پیستون می‌تواند بدون اصطکاک در طول استوانه جابه‌جا شود. شیرها را بسته و استوانه را در امتداد قائم نگه می‌داریم. (شکل ب)



الف) پیستون چقدر جابه‌جا می‌شود؟

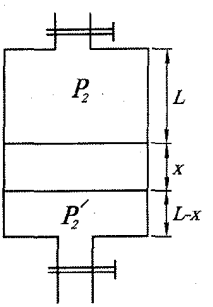
ب) در همین حال شیر پایینی k_2 را باز می‌کنیم. پیستون مجدداً نسبت به وضع اولیه‌اش چقدر جابه‌جا می‌شود؟

ج) برای آنکه پس از باز کردن شیر پایینی، پیستون به ته ظرف سقوط نکند دربارهٔ وزن آن بحث کنید.

(فشار هوا در محل آزمایش P_0 و سطح مقطع پیستون A و دما ثابت فرض می‌شود.)

(چهارمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. در ابتدا فشار دو گاز با هم برابر و مساوی P_0 و حجم آنها نیز مساوی هم هستند. $V_1' = V_1$ در حالت دوم فرض کنید پیستون به مقدار x به سمت پایین جابجا شده است. با توجه به تعادل پیستون داریم:



$$P_2 + \frac{W}{A} = P_2' \quad (1)$$

با توجه به ثابت بودن دما، برای گاز هر قسمت به کمک رابطهٔ (۶-۲) می‌توان نوشت،

$$P_0(LA) = P_2(L+x)A \quad (2)$$

$$P_0(LA) = P_2'(L-x)A \quad (3)$$

$$(3),(2) \rightarrow P_2' = P_2\left(\frac{L+x}{L-x}\right) \quad (4)$$

$$(4),(1) \rightarrow P_2 + \frac{W}{A} = P_2\left(\frac{L+x}{L-x}\right)$$

$$\rightarrow \frac{W}{A} = P_۲(\frac{L+x}{L-x} - ۱) = P_۲(\frac{۲x}{L-x})$$

$$(۲) \text{ از } \rightarrow \frac{W}{A} = (\frac{P_۰L}{L+x})(\frac{۲x}{L-x}) = \frac{۲P_۰Lx}{L^۲ - x^۲}$$

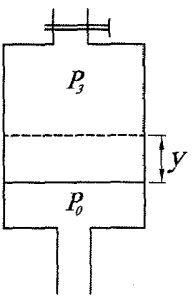
$$\rightarrow L^۲ - x^۲ = ۲\frac{A}{W}P_۰Lx \rightarrow x^۲ + \frac{۲P_۰AL}{W}x - L^۲ = ۰$$

$$\rightarrow x = -\frac{P_۰Al}{W} \pm \sqrt{(\frac{P_۰AL}{W})^۲ + L^۲}$$

در نتیجه جواب قابل قبول برابر است با:

$$x = -\frac{P_۰AL}{W} + \sqrt{(\frac{P_۰AL}{W})^۲ + L^۲}$$

ب) اگر پیستون به اندازهٔ y پایین بیاید از تعادل پیستون داریم:



$$P_۲ + \frac{W}{A} = P_۰ \quad (۱)$$

همچنین برای گاز محبوس به کمک رابطهٔ (۶-۲) داریم.

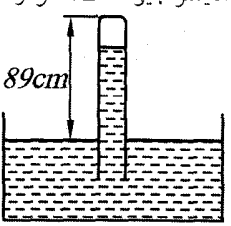
$$P_۲(L+y)A = P_۰(LA) \rightarrow P_۲ = \frac{P_۰L}{L+y} \quad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow \frac{P_۰L}{L+y} + \frac{W}{A} = P_۰ \rightarrow y = \frac{LW}{P_۰A - W}$$

ج) برای اینکه پس از باز کردن شیر پایینی پیستون به ته ظرف نچسبد باید:

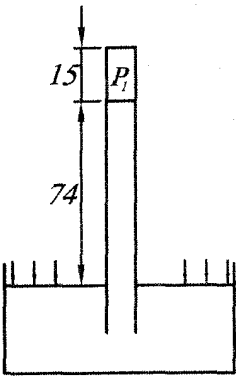
$$y < L \rightarrow \frac{LW}{P_۰A - W} < L \rightarrow W < P_۰A - W \rightarrow W < \frac{P_۰A}{۲}$$

۹) مطابق شکل زیر مقدار کمی هوا به داخل لولهٔ هواسنجی نفوذ کرده است به طوریکه ارتفاع ستون جیوه در شرایطی که دمای هوا $۲۷°C$ و فشار هوا برابر ۷۶ سانتیمتر جیوه است، برابر ۷۴ سانتیمتر می‌شود. اگر ارتفاع ستون جیوه در این هواسنج در دمای $۷°C$ برابر ۷۵ سانتیمتر شود، فشار هوا چند سانتیمتر جیوه است؟ هوا را گاز کامل بگیرید.



(هشتمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. از تعادل فشار در سطح آزاد جیوه ظرف می‌توان نوشت:



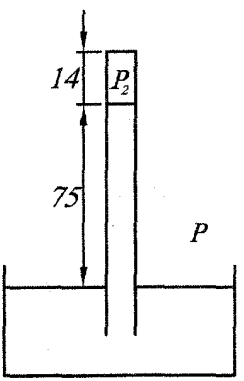
$$P_1 + ۷۴ = ۷۶ \rightarrow P_1 = ۲cmHg$$

$$V_1 = ۱۵A \quad T_1 = ۳۰۰k$$

در این حالت باتوجه به شکل می‌توان نوشت:

$$V_2 = ۱۴A \qquad T_2 = ۲۸۰k \qquad P_2 = ?$$

از قانون گاز کامل داریم:



$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \rightarrow \frac{۲ \times (۱۵A)}{۳۰۰} = \frac{P_2(۱۴A)}{۲۸۰}$$

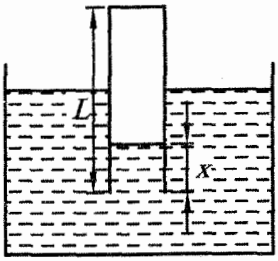
$$\rightarrow P_2 = ۲cmHg$$

از تعادل سطح آزاد جیوهٔ ظرف می‌توان نوشت:

$$P_2 + ۷۵ = P \rightarrow P = ۷۵ + ۲ = ۷۷cmHg$$

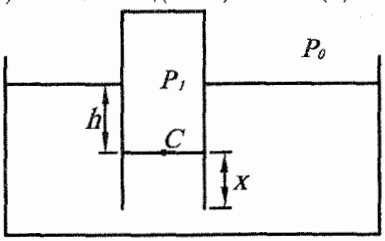
۱۰) یک لولهٔ آزمایش استوانه‌ای شکل به طول L، سطح مقطع A و جرم M را به آرامی از سر باز آن در داخل ظرفی محتوی مایعی به چگالی ρ قرار می‌دهیم. لولهٔ آزمایش مطابق شکل زیر به حالت قائم می‌ماند. در صورتی که فشار هوا در سطح آزاد آب P_0 باشد، آب در لولهٔ آزمایش چه‌مقدار بالا می‌آید؟ ($x = ?$). از ضخامت جدارهٔ لوله صرف‌نظر کنید. هوا را گاز ایده‌آل فرض کنید.

(هشتمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

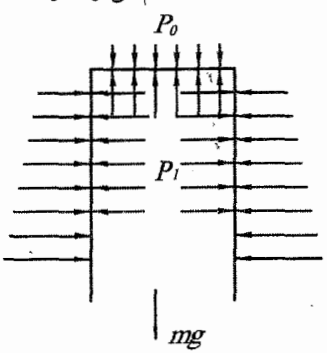


حل. قبل از اینکه لوله وارد مایع شود هوای داخل آن دارای حجم LA و فشار P_0 بود بعد از وارد شدن به مایع اگر فشار هوای محبوس برابر P_1 باشد به کمک قانون گاز کامل داریم:

$$P_0(LA) = P_1(L-x)A \rightarrow P_0 L = P_1(L-x) \qquad (1)$$



چون لوله در مایع شناور مانده بنابراین جمع نیروها در راستای قائم باید برابر صفر باشد. باتوجه به شکل و جهت فشارها در راستای قائم می‌توان نوشت:



$$P_1 A = Mg + P_0 A \quad (2)$$

(چون از ضخامت جداره صرف‌نظر شده لذا نیروی ارشمیدس جداره قابل صرف‌نظر کردن است.)

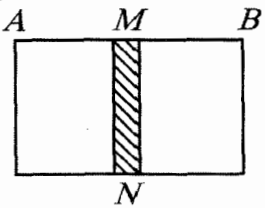
$$(2),(1) \rightarrow P_0 L = (\frac{Mg + P_0 A}{A})(L-x)$$

$$\rightarrow P_0 LA = MgL + P_0 AL - (Mg + P_0 A)x$$

$$\rightarrow x = \frac{MgL}{P_{\circ}A + Mg}$$

۱۱) در شکل زیر پیستون MN که از هدایت گرمایی خوبی برخوردار است. استوانهٔ AB را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و می‌تواند آزادانه در استوانه جابه‌جا شود. پیستون را ثابت نگهداشته و در طرف A گازی با فشار ۱۰ اتمسفر و دمای $27^{\circ}C$ و در طرف دیگر گازی با فشار ۵ اتمسفر و دمای $727^{\circ}C$ وارد می‌کنیم. سپس پیستون را رها کرده و اجازه می‌دهیم زمان کافی بگذرد تا دو گاز همدما شوند. در این حالت فاصلهٔ AM چند سانتیمتر است. طول استوانه $AB = 46cm$ است.

(هشتمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)



حل. می‌دانیم هنگامی پیستون به تعادل می‌رسد که فشار در دو طرف برابر شود. این فشار را P می‌نامیم از طرفی چون پیستون از نظر گرمایی هادی خوبی محسوب می‌شود، لذا دمای دو طرف با یکدیگر برابر و مساوی T می‌شود اگر پیستون در فاصلهٔ x از طرف چپ به تعادل فشار و گرما برسد آنگاه برای هر گاز می‌توان نوشت:

$$\text{گاز طرف } A \quad \frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P(xA)}{T} \qquad (1)$$

$$\text{گاز طرف } B \quad \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P(AB-x)A}{T} \qquad (2)$$

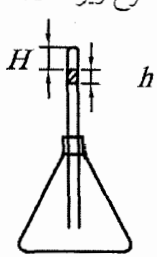
$$V_A = V_B \quad (3)$$

از تقسیم دو روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{P_A T_B}{P_B T_A} = \frac{x}{AB-x} \rightarrow \frac{x}{46-x} = \frac{10(273+727)}{5(273+27)}$$

$$\rightarrow x = 40cm \rightarrow AM = 40cm$$

۱۲) دانش‌آموزان المپیاد فیزیک در سال ۷۴-۷۳ دماسنج گازی را در آزمایشگاه المپیاد ساخته‌اند. ساختمان این دما سنج به شرح زیر است:



یک لوله شیشه‌ای خیلی نازک مطابق شکل به کمک یک چوب پنبه به یک ظرف بزرگ پر از هوا متصل شده است. دیواره‌های ظرف از هدایت گرمایی خوبی برخوردارند. انتهای لوله شیشه‌ای بسته شده است. داخل لوله شیشه‌ای ستون جیوه به ارتفاع h قرار دارد. هنگامی که دمای هوای داخل ظرف T است، ارتفاع ستون هوای محبوس در انتهای لوله نازک برابر H است. دمای هوای داخل ظرف به اندازه ΔT تغییر می‌کند. این تغییر دما را بر حسب ارتفاع ستون هوای محبوس یعنی ΔH، فشار اولیه هوای داخل ظرف، دمای اولیه و فشار ناشی از ارتفاع ستون جیوه محاسبه کنید.

تغییر حجم هوای داخل ظرف نسبت به حجم آن کوچک است و انتقال گرما از ظرف به هوای حبس شده در قسمت بالای لوله ناچیز است. (هشتمین المپیاد ملی فیزیک ایران)

حل: با توجه به فرضیات مسأله، حجم ظرف و دمای هوای محبوس در لوله شیشه‌ای ثابت می‌باشند. فرض کنید حجم، فشار و دمای اولیه ظرف به ترتیب برابر $T_\circ, P_\circ, V_\circ$ و فشار هوای محبوس در لوله شیشه‌ای P'_1 باشد. در حالت اول از تعادل فشارها در دو طرف ستون جیوه داریم:

$$P'_1 + \rho gh = P_\circ \qquad (1)$$

در حالت ثانویه که دما به مقدار ΔT افزایش می‌یابد، فرض کنید فشار و دمای ظرف برابر T_2, P_2 شوند. آنگاه از قانون گاز کامل داریم:

$$\frac{P_\circ V_\circ}{T_\circ} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \rightarrow V_\circ = V_2 \rightarrow \frac{P_\circ}{T_\circ} = \frac{P_2}{T_2}$$

$$P_2 = (\frac{P_\circ}{T_\circ})T_2 \quad , \quad T_2 = T_\circ + \Delta T$$

$$\rightarrow P_2 = (\frac{P_\circ}{T_\circ})(T_\circ + \Delta T) \qquad (2)$$

در اثر افزایش فشار ظرف، حجم هوای محبوس در لوله شیشه‌ای کم می‌شود. فرض کنید ستون جیوه به میزان x بالا رود و فشار ثانویه هوای محبوس P'_2 باشد. به کمک قانون گاز کامل داریم: (سطح مقطع لوله شیشه‌ای را A فرض می‌کنیم)

$$P'_1(HA) = P'_2(H-x)A \rightarrow P'_2 = (\frac{H}{H-x})P'_1 \qquad (3)$$

در حالت ثانویه از تعادل فشار در دو طرف ستون جیوه داریم:

$$P'_2 + \rho gh = P_2 \qquad (4)$$

رابطه (۱) را از رابطه (۴) کم می‌کنیم.

$$P'_2 - P'_1 = P_2 - P_\circ$$

$$(3),(2) \rightarrow P'_1(\frac{H}{H-x}) - P'_1 = P_\circ(\frac{T_\circ + \Delta T}{T_\circ}) - P_\circ$$

$$(1) \rightarrow (P_\circ - \rho gh)(\frac{H}{H-x} - 1) = P_\circ(\frac{T_\circ + \Delta T}{T_\circ} - 1)$$

$$\rightarrow (P_\circ - \rho gh)(\frac{x}{H-x}) = P_\circ \frac{\Delta T}{T_\circ}$$

$$\rightarrow \Delta T = \frac{T_\circ}{P_\circ}(\frac{P_\circ - \rho gh}{H - x})x$$

با توجه به اینکه ستون جیوه به اندازه x بالا رفته لذا $H_۲ < H_۱$ پس $\Delta H < \circ$ و داریم:

$$\Delta H = -x$$
$$\rightarrow \Delta T = -\frac{T_\circ}{P_\circ}(\frac{P_\circ - \rho gh}{H + \Delta H})\Delta H$$

$$\rightarrow \Delta T H + \Delta T \Delta H = -\frac{T_\circ}{P_\circ}(P_\circ - \rho gh)\Delta H$$

حال با توجه به کوچک بودن ΔH و ΔT می‌توان از جمله $\Delta H \Delta T$ نسبت به سایر جملات صرف‌نظر کرد. پس:

$$\Delta T = -\frac{(P_\circ - \rho gh)}{H P_\circ}\Delta H$$

برای حالتی که دما به میزان ΔT پایین می‌آید، باز همین جواب بدست خواهد آمد.

۱۳) یک لوله مویین به طول ۱ m را که دو سر آن باز است وارد آب می‌کنیم. مشاهده می‌شود که آب در لوله به میزان ۱۰ cm بالا می‌آید. اکنون لوله را از آب خارج کرده و آب درون آن را خارج می‌کنیم و سپس با انگشت یک انتهای لوله را مسدود می‌کنیم. انتهای دیگر لوله چند میلیمتر باید وارد آب شود تا آب داخل لوله و ظرف، هم‌سطح شوند. فشار هوا در محل آزمایش معادل فشار ناشی از ستونی از آب به ارتفاع ۱۰ متر است و در هر مورد لوله را به طور قائم در آب وارد می‌کنیم. (نهمین المپیاد فیزیک ایران)

حل: سطح مقطع لوله مویین را A در نظر بگیرید. در حالت اول متوجه می‌شویم که نیروی کشش سطحی قادر به تحمل وزن آب به ارتفاع ۱۰ cm است. لذا این نیرو برابر است با:

$$F = mg = \rho V g = ۱۰۰۰ \times \circ/۱A \times ۱\circ = ۱۰۰\circ A \ \ N$$

در حالت دوم یک انتها را با دست مسدود کرده و لوله مماس بر آب است. پس هوایی به فشار جو ($P_\circ$) در لوله محبوس می‌ماند. حال فرض کنید انتهای دیگر لوله به میزان x در آب فرو رفته و آب لوله و ظرف هم سطح شده باشند. فشاری که بر هوای محبوس اعمال می‌شود هم ناشی از فشار جو و هم ناشی از نیروی کشش سطحی است. در نتیجه فشار هوای محبوس در حالت ثانویه برابر است با:

$$P_۲ = P_\circ + \frac{F}{A} \qquad (۱)$$

از قانون گاز کامل داریم:

$$P_\circ(۱ \times A) = P_۲(۱ - x)A \qquad (۲)$$
$$(۲),(۱) \rightarrow P_\circ = (P_\circ + \frac{F}{A})(۱ - x)$$
$$\rightarrow (P_\circ + \frac{F}{A})x = \frac{F}{A} \rightarrow x = \frac{F}{P_\circ A + F}$$

$$x = \frac{۱۰۰\circ A}{(۱۰۰\circ \times ۱\circ \times ۱\circ)A + ۱۰۰\circ A} = \circ/\circ ۱ m = ۱ cm$$

۱۴) مقداری گاز داخل یک ظرف در بستهٔ مکعب شکل قرار دارد. در صورتی‌که بدون تغییر دما، ابعاد این ظرف دو برابر شود، نیروی وارد بر هر سطح ظرف چند برابر خواهد شد؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ج) ۲ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) $\frac{۱}{۸}$

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. فرض کنید ضلع هر مکعب برابر a و در نتیجه حجم آن برابر $V = a^۳$ خواهد شد. با فرض دمای ثابت اگر ابعاد دو برابر شود به کمک رابطهٔ (۴-۲) داریم:

$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \rightarrow P_۱a^۳ = P_۲(۲a)^۳ \rightarrow P_۲ = \frac{۱}{۸}P_۱$$
$$\rightarrow \frac{F_۲}{A_۲} = \frac{۱}{۸}\ \frac{F_۱}{A_۱}\ ,\ A_۲ = ۴A_۱ \rightarrow F_۲ = \frac{۱}{۲}F_۱$$

گزینهٔ «د» صحیح است.

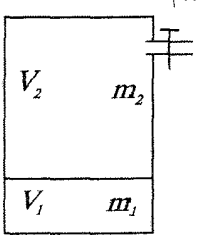
۱۵) بالنی به حجم ثابت ۱۰ لیتر محتوی گاز با فشار $۵۲۰mmHg$ و وزن مجموعه $۹/۹۱ \times ۱۰^{-۱}N$ است. مقداری از گاز درون بالن را خارج می‌کنیم. فشار گاز باقیمانده $۱۰۰mmHg$ و وزن مجموعهٔ $۹/۸۱ \times ۱۰^{-۱}N$ می‌شود. در صورتیکه دمای گاز ثابت مانده باشد، چگالی گاز باقیمانده در بالن چند گرم بر متر مکعب است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

(دهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. فرض کنید در نهایت به میزان $m_۲$ گرم گاز از بالن خارج شود از طرفی این مقدار جرم در بالن به میزان $V_۲$ مترمکعب حجم اشغال می‌کند. حال با توجه به اختلاف وزن مجموعه در دو حالت می‌توان گفت که جرم $m_۲$ برابر است با:

$$m_۲ = \frac{\Delta W}{g} = \frac{۹/۹۱ \times ۱۰^{-۱} - ۹/۸۱ \times ۱۰^{-۱}}{۱۰} = ۱۰^{-۳}kg$$
$$\rightarrow m_۲ = ۱gr \quad (۱)$$

با توجه به شکل در حالت اول داریم:

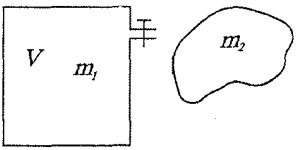


$$V_۱ + V_۲ = V = ۱۰lit \quad (۲)$$

از طرفی چون در حالت اول چگالی در سرتاسر بالن یکسان است (چون سیستم متعادل است) در نتیجه:

$$\frac{m_۱}{V_۱} = \frac{m_۲}{V_۲} \quad (۳)$$

حال اگر گاز به جرم m_1 را در نظر بگیریم این گاز در حالت دوم تمامی فضای بالن را اشغال می‌کند بنابراین به کمک قانون گاز کامل (دمای ثابت) داریم:



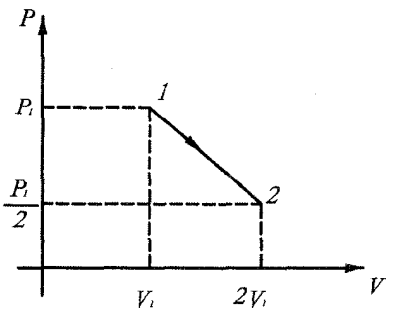
$$P_1V_1 = P_2V \rightarrow 520V_1 = 100 \times 10 \rightarrow V_1 = 1/923 lit$$

$$(2) \text{ از} \rightarrow V_2 = 8/077 lit$$

$$(3) \text{ از} \rightarrow m_1 = (\frac{V_1}{V_2})m_2 = \frac{1/923}{8/077} \times = 0/238 gr$$

$$\rightarrow \rho = \frac{m_1}{V} = \frac{0/238}{10 \times 10^{-3}} = 23/8 \frac{gr}{m^3}$$

۱۶) در یک ظرف مقدار معینی گاز کامل به حجم V_1 و فشار P_1 وجود دارد. حجم و فشار گاز را تغییر می‌دهیم تا حجم آن $V_2 = 2V_1$ و فشار آن $P_2 = \frac{P_1}{2}$ شود. نمودار تغییرات فشار گاز بر حسب حجم آن مطابق شکل زیر است. دمای گاز طی این تحول:



الف) همواره کاهش می‌یابد.
ب) همواره افزایش می‌یابد.
ج) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
د) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
ه) همواره ثابت است.

(یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. ابتدا دما را در دو حالت ابتدایی و نهایی با هم مقایسه می‌کنیم:

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad (1)$$

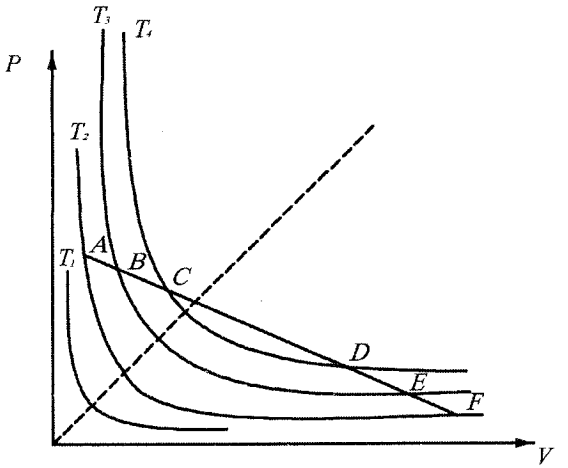
$$P_2V_2 = nRT_2 \quad (2)$$

$$P_2V_2 = (\frac{P_1}{2})(2V_1) = P_1V_1 = nRT_1 \quad (3) \text{ از طرفی}$$

$$(3),(2) \rightarrow T_1 = T_2$$

بنابراین در دو حالت ابتدا و انتها دماها یکسان است. اما از طرفی در متن درس گفتیم که نمودار $P - V$ برای آزمایش دمای ثابت به شکل یک تابع هموگرافیک است و نه خط راست. پس حتماً در این تحول دما ثابت نخواهد بود، هر چند که ابتدا و انتهای آن یکی باشد. همچنین می‌دانیم هرچه دمای آزمایشی که در آن انجام می‌شود بالاتر رود نمودار هموگرافیک به سمت بالا جابه‌جا خواهد شد. یعنی برای شکل زیر $T_4 > T_3 > T_2 > T_1$. لذا هنگامی که از نقطهٔ A به سمت نقاط B و C می‌رویم دما در حال افزایش است. در

مکانی روی پاره‌خط CD دما به ماکزیمم خود رسیده و پس از آن از نقطهٔ D به سمت نقاط E و F دما مرتب کاهش می‌یابد که



نهایتاً دمای نقطهٔ F که روی منحنی دما ثابت T_2 است، با دمای نقطهٔ A یکی می‌شود. لذا ابتدا دما افزایش و سپس کاهش می‌یابد. گزینهٔ «د» صحیح است.

۱۷) حباب هوایی از کف استخری به عمق $4m$ بالا می‌آید و به سطح آب می‌رسد. حباب در کف استخر به شکل کره‌ای به شعاع a_0 و در سطح آب به شکل نیم‌کره‌ای به شعاع a است. فشار هوای محیط $10^5 Pa$ و چگالی آب $10^3 \frac{kg}{m^3}$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$ و تغییرات دمای آب استخر ناچیز است. نسبت $\frac{a}{a_0}$ به کدام یک از اعداد زیر نزدیک‌تر است؟

الف) ۰/۷ ب) ۰/۹ ج) ۱/۱ د) ۱/۴

(یازدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. با توجه به برابری فشار هوای داخل حباب با فشار محیط اطراف، در حالت اول فشار هوای حباب برابر است با:

$$P_1 = \rho g h + P_0 = 10^3 \times 10 \times 4 + 10^5 = 1/4 \times 10^5 \quad Pa$$

در حالت دوم فشار برابر است با:

$$P_2 = P_0 = 10^5 \quad Pa$$

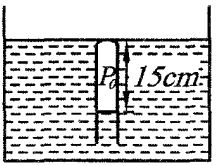
به کمک قانون گاز کامل در حالت دما ثابت داریم:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \rightarrow 1/4 \times 10^5 (\frac{4}{3}\pi a_0^3) = 10^5 \times (\frac{1}{2} \quad \frac{4}{3}\pi a^3)$$
$$\rightarrow \frac{a}{a_0} = \sqrt[3]{2/8} = 1/409$$

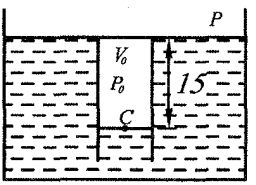
گزینه «د» صحیح است.

۱۸) یک لولهٔ آزمایش را مطابق شکل زیر در ظرف جیوه فرو می‌کنیم. در این حالت فاصلهٔ سطح جیوهٔ درون لوله تا ته آن ۱۵cm است. ته لوله را چند سانتیمتر از سطح جیوه بالاتر ببریم تا سطح جیوه در لوله و ظرف یکی شود؟ فشار هوای محیط ۷۵$cmHg$ است. دما و سطح جیوهٔ ظرف را ثابت فرض کنید.

(سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)



حل. در حالت اول از تعادل فشارها در نقطهٔ C می‌توان نوشت:

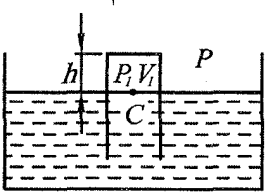


$$P_0 = P + 15 = 75 + 15 = 90 cmHg$$

$$V_0 = 15A$$

A: مساحت سطح مقطع لوله

در حالت دوم از تعادل فشارها در نقطهٔ C داریم:



$$P_1 = P = 75\ cmHg$$

$$V_1 = hA$$

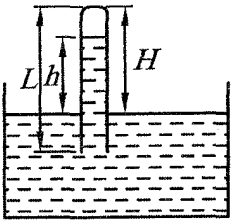
حال با فرض دما ثابت از قانون گاز کامل داریم:

$$P_0 V_0 = P_1 V_1 \rightarrow 90 \times 15A = 75 \times h_1 A = 75 \times h_1 A \rightarrow h_1 = 18cm$$

۱۹) وقتی یک لولهٔ نازک را به طور عمودی در یک ظرف آب فرو می‌بریم، آب در لوله کمی بالا می‌آید. علت بالا آمدن ترکیب نیروهای چسبندگی و کشش سطحی است. عملاً می‌توان فرض کرد از طرف لوله نیرویی به سطح آزاد آب وارد می‌شود. این نیرو مماس بر لوله، عمود بر مرز جداکنندهٔ آب و هوا در لوله و متناسب با طول مرز جداکننده است. ضریب تناسب را با γ نشان می‌دهیم.

مطابق شکل زیر یک لولهٔ ته‌بستهٔ نازک به مقطع یکنواخت به طول L را به طور عمودی

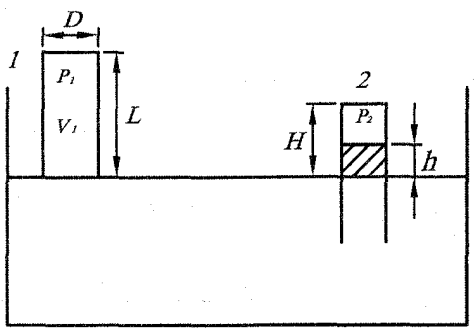
وارد آب می‌کنیم. فرض کنید مساحت سطح مقطع مخزن خیلی بیشتر از سطح مقطع لوله است. بالای سطح آب درون لوله هوا است. طول بخشی از لوله که بیرون آب است، H است. سطح آب درون لوله به اندازهٔ h بالاتر از سطح آب مخزن می‌ایستد. h را به دست آورید. اگر بیش از یک جواب برای h به دست می‌آید، با استدلال بنویسید کدام جواب قابل قبول است.



چگالی آب ρ، شتاب گرانش g، فشارهوای بیرون P_0 و قطر درونی لوله D است. از خمیدگی سطح آب درون لوله چشم بپوشید.

(سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. مطابق شکل، حالت (۱)، هنگامی است که سر لوله مماس با آب باشد. بنابراین در این حالت برای گاز محبوس داریم:

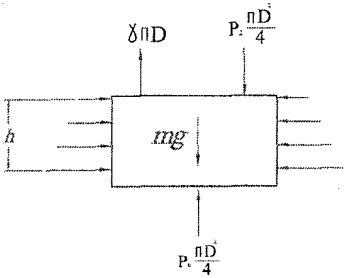


$$P_1 = P_0 \ , \ V_1 = (\frac{\pi}{4}D^2)L$$

در حالت دوم فرض کنید فشار هوای محبوس برابر P_2 باشد. از هندسهٔ شکل حجم هوای محبوس برابر است با:

$$V_2 = \frac{\pi D^2}{4}(H-h)$$

از طرفی قسمتی از آب که به ارتفاع h بالاتر از سطح آب درون لوله قرار گرفته را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن را ترسیم می‌کنیم. چون این قسمت هاشورخورده در حال تعادل است بنابراین باید برآیند نیروهای وارد بر آن در جهت قائم صفر باشد.



$$P_0(\frac{\pi D^2}{4}) + \gamma\pi D = P_2(\frac{\pi D^2}{4}) + mg \qquad (۱)$$

$$mg = \rho(hA)g = \rho h(\frac{\pi D^2}{4})g \qquad (۲)$$

$\gamma\pi D$: نیروی چسبندگی وارد بر آب از طرف لوله:

$$(۲),(۱) \rightarrow P_2 = (P_0 - \rho g h) + \frac{4\gamma}{D} \qquad (۳)$$

برای هوای محبوس در لوله به کمک قانون گاز کامل می‌توان نوشت:

$$\text{ثابت} = T \rightarrow P_1V_1 = P_2V_2 \rightarrow P_0\frac{\pi D^2}{4}L = [(P_0 - \rho g h) + \frac{4\gamma}{D}]\frac{\pi D^2}{4}(H - h)$$

با ساده‌سازی داریم:

$$h^2 - (H + \frac{4\gamma}{\rho g D} + \frac{P_0}{\rho g})h + \frac{P_0 HD - P_0 DL + 4\gamma H}{\rho g D} = 0$$

با حل این معادله درجهٔ دوم داریم:

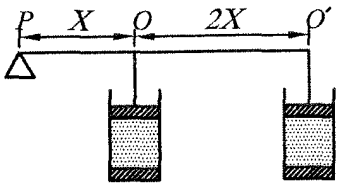
$$h = \frac{1}{2}\{(H + \frac{4\gamma}{\rho g D} + \frac{P_0}{\rho g}) \pm \sqrt{(H + \frac{4\gamma}{\rho g D} + \frac{P_0}{\rho g})^2 - 4\frac{P_0 HD - P_0 DL + 4\gamma H}{\rho g D}}\}$$

برای اینکه ببینیم کدام یک از جواب‌ها قابل قبول است کافی است حالت اول لوله را در نظر بگیریم. یعنی سر لوله مماس بر سطح آب باشد در این حالت $H = L$ می‌شود از طرفی با فرض اینکه $\gamma = 0$ باشد در نتیجهٔ هیچ آبی به درون لولهٔ آب کشیده نمی‌شود و مقدار h برابر صفر بدست می‌آید. لذا برای $\gamma = 0$ و $H = L$ از رابطهٔ فوق داریم:

$$h = \frac{1}{2}(\frac{4\gamma}{\rho g D} + \frac{P_0}{\rho g}) \pm \sqrt{(\frac{4\gamma}{\rho g D} + \frac{P_0}{\rho g})}$$

برای اینکه $h = 0$ شود جواب منفی قابل قبول است.

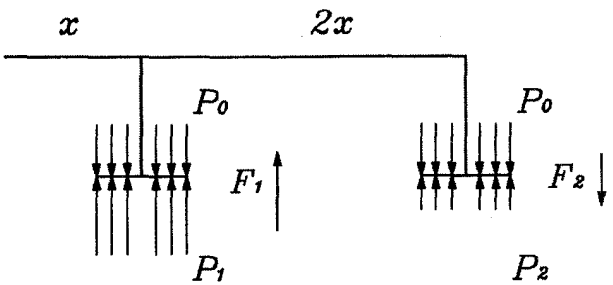
۲۰) در شکل زیر مقداری گاز کامل در دما و فشار یکسان درون مخزنهای (۱) و (۲) در زیر پیستونهای سبک محبوس است. میله‌ای در نقطه‌های O و O' به پیستون متصل است و می‌تواند حول تکیه‌گاه P بچرخد، اگر دمای مخزن (۱) را ۶۰ درجه اضافه کنیم، دمای مخزن (۲) چقدر باید تغییر کند تا میلهٔ افقی باقی بماند؟ از جرم میله چشم بپوشید.



الف) ۲۰ درجه افزایش یابد.
ب) ۲۰ درجه کاهش یابد.
ج) ۶۰ درجه کاهش یابد.
د) ۴۰ درجه کاهش یابد.

(چهاردهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ «۱»)

حل. در حالت اول باید فشار مخزن‌ها با فشار هوای بیرون یکی باشند زیرا در غیر این‌صورت موجب چرخاندن میله و خارج کردن آن از حالت افقی می‌شوند. بنابراین فشار و دمای اولیهٔ مخزن‌ها را P_0 و T_0 می‌نامیم. حال اگر دمای مخزن ۱ را بالا ببریم موجب افزایش فشار و حجم آن می‌شویم. لذا نیرویی به سمت بالا بر میله وارد می‌کند. برای اینکه میله همچنان افقی بماند باید دمای مخزن ۲ را به میزان ΔT کاهش دهیم تا حجم مخزن ۲ کم شود و نیروی پیستون مخزن ۲ مطابق شکل به سمت پایین باشد. از تعادل گشتاوری دو نیرو داریم:



$$F_1 x = F_2 3x \rightarrow F_1 = 3F_2 \qquad (1)$$

از طرفی :

$$F_1 = (P_1 - P_0)A \quad F_2 = (P_0 - P_2)A \qquad (2)$$

P_2, P_1 به ترتیب فشارهای ثانویه داخل مخزن‌های ۱ و ۲ می‌باشد. از طرفی چون میله در دو حالت، افقی مانده لذا حجم دو مخزن ثابت مانده است. به کمک قانون گاز کامل برای هر مخزن داریم:

$$V \text{ ثابت} \rightarrow \begin{cases} \text{مخزن ۱} & \frac{P_0}{T_0} = \frac{P_1}{T_1} \quad (3) \\ \text{مخزن ۲} & \frac{P_0}{T_0} = \frac{P_2}{T_2} \quad (4) \end{cases}$$

$$(۲),(۱) \rightarrow (P_۱ - P_۰) = ۳(P_۰ - P_۲) \rightarrow P_۱ + ۳P_۲ = ۴P_۰ \quad (۵)$$

$$(۵),(۴),(۳) \rightarrow T_۱(\frac{P_۰}{T_۰}) + ۳T_۲(\frac{P_۰}{T_۰}) = ۴P_۰ \rightarrow T_۱ + ۳T_۲ = ۴T_۰ \quad (۶)$$

از فرض مسأله داریم:

$$\left.\begin{array}{l} T_۱ = T_۰ + ۶۰ \\ T_۲ = T_۰ - \Delta T \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از (۶)}} (T_۰ + ۶۰) + ۳(T_۰ - \Delta T) = ۴T_۰$$

$$۶۰ - ۳\Delta T = ۰ \rightarrow \Delta T = ۲۰$$

به میزان ۲۰ درجه باید کاهش یابد.

۲۱) یک نوع ارتفاع‌سنج بر اساس سنجش فشار هوا کار می‌کند. فشار هوا در ارتفاعات $h_۲, h_۱, h_۰$ به ترتیب $P_۲, P_۱, P_۰$ است. دمای مطلق هوا در این ارتفاع به ترتیب $T_۱, T_۰$ و $T_۲$ است. می‌خواهیم اختلاف ارتفاع‌های $h_۱ - h_۰$ و $h_۲ - h_۰$ را بدست آوریم.

الف) برای به دست آوردن چگالی هوا در فاصلهٔ نقطهٔ i و نقطهٔ $i+۱$ فشار هوا در این فاصله را $\frac{P_i + P_{i+۱}}{۲}$ و دمای مطلق هوا در این فاصله را $\frac{T_i + T_{i+۱}}{۲}$ بگیرید. چگالی هوا در این فاصله را به دست آورید؟

راهنمایی: هوا مثل یک گاز کامل است و معادلهٔ حالت آن $PV = nRT$ است که در آن V حجم گاز، n تعداد مولها و R ثابت عمومی گازها است. جرم هر مول هوا M است.

ب) با استفاده از این چگالی، $h_{i+۱} - h_i$ را بدست آورید و از آنجا $h_۱ - h_۰$ و $h_۲ - h_۰$ را بنویسید.

ج) با فرض:

$$P_۱ = ۹۷ \times ۱۰^۳ Pa, P_۰ = ۱۰۳ \times ۱۰^۳ Pa$$

$$g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}, M = ۲۹ \frac{gr}{mol}, t_۱ = ۱۴^\circ C, t_۰ = ۲۰^\circ C$$

$R = ۸/۳ \frac{J}{mol.k}$ مقدار عددی $h_۱ - h_۰$ را بدست آورید.

(چهاردهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۲)

حل: الف) به کمک رابطهٔ (۶-۳) داریم:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{M}T \rightarrow \rho = \frac{PM}{RT} = \frac{(\frac{p_i + P_{i+۱}}{۲})M}{R(\frac{T_i + T_{i+۱}}{۲})}$$

$$\rightarrow \rho = \frac{M(P_i + P_{i+۱})}{R(T_i + T_{i+۱})} = \frac{M}{R}(\frac{P_i + P_{i+۱}}{T_i + T_{i+۱}}) \quad (۱)$$

ب) می‌دانیم در سیالات از جمله در گازها اختلاف فشار بین دو نقطه با اختلاف ارتفاع آنها Δh متناسب است. از طرفی هر چقدر ارتفاع بیشتر باشد، فشار کمتر است در نتیجه

تغییرات آنها با علامت مخالف، متناسب هم هستند لذا:

$$\Delta P = -\rho g \Delta h \rightarrow P_{i+1} - P_i = -\rho g (h_{i+1} - h_i)$$

$$\rightarrow h_{i+1} - h_i = \frac{1}{\rho g}(P_i - P_{i+1})$$

$$(1) \text{ از} \rightarrow h_{i+1} - h_i = \frac{1}{g} \frac{P_i - P_{i+1}}{\frac{M}{R}(\frac{P_i + P_{i+1}}{T_i + T_{i+1}})} = \frac{R(T_i + T_{i+1})(P_i - P_{i+1})}{Mg(P_i + P_{i+1})}$$

$$h_1 - h_0 = \frac{R(T_0 + T_1)(P_0 - P_1)}{Mg(P_0 + P_1)} \quad (2)$$

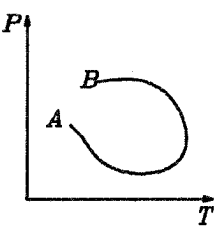
$$h_2 - h_1 = \frac{R(T_1 + T_2)(P_1 - P_2)}{Mg(P_1 + P_2)} \quad (3)$$

$$(3),(2) \Rightarrow h_2 - h_0 = \frac{R(T_1 + T_2)(P_1 - P_2)}{Mg(P_1 + P_2)} - \frac{R(T_0 + T_1)(P_0 - P_1)}{Mg(P_0 + P_1)}$$

ج) با جایگذاری در رابطهٔ (۲) داریم:

$$h_1 - h_0 = \frac{8/3\,[(273 + 20) + (273 + 14)]\,(103 - 97) \times 10^3}{29 \times 10^{-3} \times 10(103 + 97) \times 10^3} = 498\ m$$

۲۲) در یک فرآیند، نمودار فشار بر حسب دما برای یک نوع گاز کامل مانند شکل زیر است.



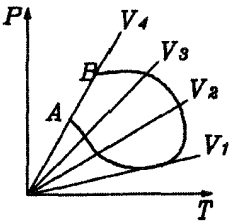
در این فرآیند حجم گاز .....

(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) کم می‌شود. ب) اول کم، بعد زیاد می‌شود.

ج) زیاد می‌شود. د) اول زیاد، بعد کم می‌شود.

حل. همانطور که در متن درس توضیح دادیم نمودار $P - T$ برای فرآیند حجم ثابت به صورت خط راست است. از طرفی هرچه شیب خط کمتر باشد حجم بیشتر است. بنابراین برای شکل زیر داریم:



$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$

لذا با حرکت از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B ابتدا حجم زیاد شده تا به ماکزیمم خود یعنی V_1 می‌رسد سپس از V_1 تا V_4 کاهش می‌یابد. در نتیجه گزینه «د» صحیح است.

۲۳) مقدار معینی گاز کامل، یک بار به صورت $PV^2 = \alpha$ و بار دیگر به صورت $P^2V = \beta$ منبسط می‌شود و α و β ثابت‌اند. این گاز ...

الف) در حالت اول سرد و در حالت دوم گرم می‌شود.

ب) در حالت اول گرم و در حالت دوم سرد می‌شود.

ج) در هر دو حالت سرد می‌شود.

د) در دو حالت گرم می‌شود.

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. در حالت اول داریم:

$$P_1 V_1^2 = P_2 V_2^2 \qquad (1)$$

$$\text{گاز منبسط می‌شود} \rightarrow V_2 > V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} > 1$$

از طرفی چون این گاز، کامل است در نتیجه:

$$P_1 V_1 = n R T_1 \qquad (3)$$

$$P_2 V_2 = n R T_2 \qquad (4)$$

$$(4),(3),(1) \Rightarrow (nRT_1) V_1 = (nRT_2) V_2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2}{V_1} > 1$$

$$\Rightarrow T_1 > T_2 \Rightarrow$$ گاز طبق این فرآیند سرد می‌شود.

در حالت دوم داریم:

$$P_1^2 V_1 = P_2^2 V_2 \qquad V_2 > V_1 \qquad (5)$$

به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$(3) \rightarrow (nRT_1) P_1 = (nRT_2) P_2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{P_2}{P_1} \qquad (6)$$

$$(5) \text{ و } (4) \text{ و } (3) \Rightarrow \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = \frac{V_1}{V_2} < 1 \Rightarrow P_2 < P_1 \qquad (7)$$

$$(7),(6) \Rightarrow T_1 < T_2 \Rightarrow$$ گاز طبق این فرآیند گرم می‌شود.

گزینه «الف» صحیح است.

۲۴) یک گاز کامل به حجم V_0 و فشار P_0 منبسط می‌شود. طوری که فشار آن (P) بر حسب حجم آن (V) به شکل $P = P_0 - \alpha (V - V_0)$ است که α یک ثابت مثبت است. برای آنکه دمای این گاز در این فرآیند همواره کم شود، لازم است:

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $\alpha > \frac{P_0}{V_0}$ ب) $\alpha > \frac{2P_0}{V_0}$ ج) $\alpha < \frac{P_0}{V_0}$ د) $\alpha < \frac{2P_0}{V_0}$

حل. فرض کنید گاز از دما، فشار و حجم T_0، P_0 و V_0 تا حالت ثانویه T_1، P_1 و V_1 منبسط شود $(V_1 > V_0)$. به کمک قانون گاز کامل داریم:

$$\left.\begin{aligned} P_0 V_0 &= nRT_0 \\ P_1 V_1 &= nRT_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_0 V_0}{P_1 V_1} = \frac{T_0}{T_1} \qquad (1)$$

چون در انبساط می‌خواهیم دما کاهش یابد لذا $T_0 > T_1$

$$(1) \Rightarrow \frac{P_0 V_0}{P_1 V_1} = \frac{T_0}{T_1} > 1 \Rightarrow P_0 V_0 > P_1 V_1$$

$$P_1 = P_0 - \alpha(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow P_0 V_0 > [P_0 - \alpha (V_1 - V_0)] V_1 = P_0 V_1 - \alpha V_1^2 + \alpha V_0 V_1$$

$$\Rightarrow \alpha V_1 (V_1 - V_0) > P_0 (V_1 - V_0) \quad \text{چون} \quad V_1 - V_0 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha > \frac{P_0}{V_1} \qquad (2)$$

بنابراین α باید بزرگتر از $\frac{P_0}{V_1}$ باشد تا دما همواره کاهش یابد.

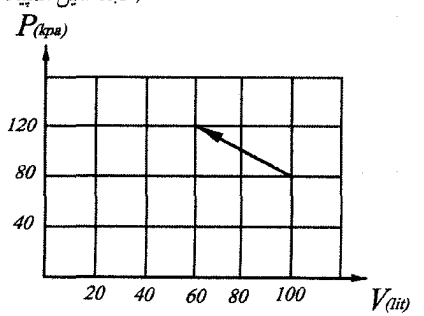
از طرفی

$$V_0 < V_1 \Rightarrow \frac{1}{V_0} > \frac{1}{V_1} \Rightarrow \frac{P_0}{V_0} > \frac{P_0}{V_1} \qquad (3)$$

اگر $\alpha > \frac{P_0}{V_0}$ باشد، طبق رابطه (۳) قطعاً $\alpha > \frac{P_0}{V_1}$ خواهد شد، (یعنی رابطهٔ ۲ برقرار می‌شود) لذا با شرط $\alpha > \frac{P_0}{V_0}$ خواسته مسأله برآورده می‌شود. بنابراین گزینه «الف» صحیح است.

۲۵) در نمودار زیر مسیر فرآیندی که برای یک گاز کامل رخ داده، رسم شده است. در چه حجمی دمای گاز بیشینه شده است؟

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) ۶۰ lit ب) ۷۰ lit ج) ۸۰ lit د) ۹۰ lit ه) ۱۰۰ lit

حل. با توجه به اینکه مسیر فرآیند یک خط راست است که از نقاط (۸۰ , ۱۰۰) و (۶۰ , ۱۲۰) گذشته است لذا می‌توان فرمول خط را یافت. در نتیجه:

$$P - ۸۰ = \frac{۱۲۰ - ۸۰}{۶۰ - ۱۰۰}(V - ۱۰۰) \Rightarrow P = -(V - ۱۰۰) + ۸۰$$

$$\Rightarrow P = -V + ۱۸۰ \qquad (۱)$$

رابطه فوق ارتباط بین حجم و فشار را در طول مسیر فرآیند نشان می‌دهد. از طرفی از قانون گاز کامل داریم:

$$PV = nRT \overset{\text{از (۱)}}{\Longrightarrow} (۱۸۰ - V)V = nRT$$

$$T = \frac{۱۸۰V - V^۲}{nR}$$

$$T = \frac{۸۱۰۰ + ۱۸۰V - V^۲ - ۸۱۰۰}{nR}$$

$$\Rightarrow T = \frac{۸۱۰۰ - (۹۰ - V)^۲}{nR}$$

واضح است وقتی T ماکزیمم می‌شود که عبارت $(۹۰ - V)^۲$ برابر صفر شود لذا در $V = ۹۰\ lit$ دما به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. گزینه «د» صحیح است.

۸.۶ مخلوط‌ها و محلول‌ها

در بخش قبل گاز کاملی که تحت فرآیندهایی مثل دما ثابت، فشار ثابت و ... بود را بررسی کردیم. حال در این بخش می‌خواهیم ببینیم هنگامی که چند گاز با هم مخلوط می‌شوند و یک سری فرآیندهایی روی آنها انجام می‌شود، برای قبل و بعد از فرآیندها چه رابطه‌ای می‌توان پیدا کرد؟

۹.۶ غلظت و غلظت مولی

مخلوطی شامل N جزء ماده خالص را در نظر بگیرید. جرم کل و تعداد مول‌های کل این مخلوط به راحتی و به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$m_{tot} = m_۱ + m_۲ + \ldots + m_N$$

$$n_{tot} = n_۱ + n_۲ + \ldots + n_N$$

غلظت هر جزء یا کسر جرمی آن جزء در مخلوط را معمولاً به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\text{غلظت جزء } i \text{ ام} = C_i = \frac{m_i}{m_{tot}} \qquad (۶ - ۷)$$

همچنین غلظت مولی یا کسر مولی جزء i ام به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\text{غلظت مولی جزء } i \text{ ام} = y_i = \frac{n_i}{n_{tot}} \qquad (۸-۶)$$

با توجه به اینکه وزن مولکولی جزء i ام برابر M_i است لذا $m_i = n_i M_i$ پس می‌توان نوشت:

$$C_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = \frac{n_i M_i}{n_۱M_۱ + n_۲M_۲ + \ldots + n_N M_N}$$

$$= \frac{n_i M_i / n_{tot}}{(n_۱M_۱ + n_۲M_۲ + \ldots + n_n M_N) / n_{tot}}$$

$$C_i = \frac{y_i M_i}{y_۱ M_۱ + y_۲ M_۲ + \ldots + y_N M_N} \qquad (۹-۶)$$

به طور مشابه به کمک رابطه (۶ – ۸) می‌توان نوشت:

$$y_i = \frac{n_i}{n_{tot}} = \frac{m_i / M_i}{\frac{m_۱}{M_۱} + \frac{m_۲}{M_۲} + \ldots + \frac{m_N}{M_N}}$$

$$= \frac{m_i / (M_i\, m_{tot})}{\frac{m_۱}{M_۱\, m_{tot}} + \frac{m_۲}{M_۲\, m_{tot}} + \ldots + \frac{m_N}{M_N\, m_{tot}}}$$

$$y_i = \frac{C_i / M_i}{\frac{C_۱}{M_۱} + \frac{C_۲}{M_۲} + \ldots + \frac{C_N}{M_N}} \qquad (۱۰-۶)$$

وزن مولکولی مخلوط را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$M = \frac{m_{tot}}{n_{tot}} = \frac{n_۱M_۱ + n_۲M_۲ + \ldots + n_N M_N}{n_{tot}}$$

$$= y_۱ M_۱ + \ldots + y_N M_N \qquad (۱۱-۶)$$

۱۰.۶ مخلوط چند گاز کامل

در مخلوط چند گاز فرض می‌کنیم هیچ جزئی تحت تأثیر اجزای دیگر نباشد و می‌توان آن را گازی کامل تلقی کرد. این فرض ممکن است در مورد مخلوط گازی فشار بالا، به علت طبیعت بر هم کنش مولکول‌های اجزای مختلف، درست نباشد.

همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم اگر N گاز کامل با فشار جزئی P_i، دمای T_i و حجم V_i را با هم مخلوط کنیم آنگاه با توجه به اینکه تعداد مول مخلوط برابر مجموع تعداد مول هر گاز n_i است لذا

$$\text{تعداد مول مخلوط} \quad n = n_۱ + n_۲ + \ldots + n_N \qquad (۱۲-۶)$$

اگر فشار، دما و حجم مخلوط برابر P، T و V باشد آنگاه می‌توان به کمک رابطه $n_i = \frac{P_i V_i}{RT_i}$ و سپس حذف R نوشت:

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} + \ldots + \frac{P_N V_N}{T_N} \qquad (۱۳-۶)$$

نکته: از رابطه فوق می‌توان برای یک گاز که به چند قسمت با شرایط متفاوت تقسیم می‌شود نیز استفاده کرد.

با توجه به رابطه فوق می‌توان دو مدل خاص یعنی مدل دالتون و آماگات را بدست آورد.

در مدل دالتون فرض می‌شود که دما و حجم برای تک‌تک گازها و مخلوط ثابت و یکسان باشد. آنگاه از رابطه (۶ – ۱۳) داریم:

مدل دالتون $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_N$ (۱۴ – ۶)

در مدل آماگات فرض می‌شود که دما و فشار برای تک‌تک گازها و مخلوط ثابت و یکسان باشد. آنگاه داریم:

مدل آماگان $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$ (۱۵ – ۶)

مثال. مخزن (۱) در شکل (الف) محتوی گاز کاملی به حجم $V_0 = ۴\ lit$ و دمای صفر درجه سلسیوس است. پیستون در انتهای چپ مخزن (۲) قرار دارد. این دو مخزن با لولهٔ بسیار باریکی که از حجم گاز داخل آن صرف‌نظر می‌شود، به هم متصل است. مخزن (۱) را در آب داغ و مخزن (۲) را در مخلوط آب و یخ با دمای صفر درجه سلسیوس قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که پیستون در مخزن (۲) به عقب رانده شده و حجم گاز داخل مخزن (۲) هنگام تعادل برابر $V = ۱\ lit$ می‌شود. (شکل ب)

با فرض آنکه دمای آب دور مخزن‌ها در تمام مدت آزمایش ثابت بماند، دمای آب داغ را محاسبه کنید.

(پنجمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. چون طرف راست پیستون به هوای آزاد و فشار ثابت جو متصل است لذا طرف چپ نیز به خاطر حرکت تعادلی پیستون، فشاری برابر فشار جو P_0 دارد.

به کمک نکته بیان شده حالت اول گاز را P_0 و V_0 و T_0 در نظر می‌گیریم که به دو قسمت تقسیم شده است، یکی در مخزن (۱) با شرایط P_1 و V_1 و T_1 و دیگری در مخزن (۲) با شرایط P_2 و V_2 و T_2 لذا با جایگذاری در رابطه (۶ – ۱۳) داریم:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

گفتیم فشار در هر دو حالت با فشار جو P_0 برابر است لذا $P_0 = P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{۴}{۲۷۳ + ۰} = \frac{۴}{۲۷۳ + T} + \frac{۱}{۲۷۳ + ۰}$$

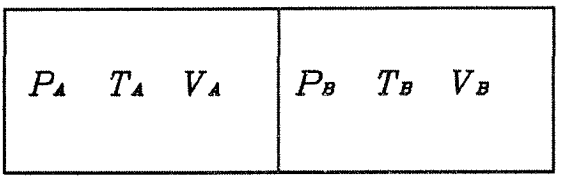
$$\Rightarrow \frac{۴}{۲۷۳ + T} = \frac{۳}{۲۷۳} \Rightarrow T = ۹۱^\circ C$$

مثال. مخزنی با دیواره‌های کاملاً عایق گرمایی و با ظرفیت گرمایی ناچیز مطابق شکل زیر به وسیلهٔ یک تیغه به دو بخش نامساوی A و B تقسیم شده است. A و B در آغاز حاوی مقدارهای نامساوی از یک گاز کامل هستند. شرایط آغازی فشار، حجم و دمای هر بخش

در شکل مشخص شده است. تیغهٔ بین دو بخش را بدون آنکه انرژی کل دستگاه تغییر کند برمی‌داریم. دما و فشار پایانی گاز را برحسب کمیت‌های آغازی محاسبه کنید.

راهنمایی: مقدار ثابت در قانون عمومی گاز کامل با تعداد مول‌های گاز بستگی مستقیم دارد.

(ششمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



حل. اگر دما و فشار و حجم مخلوط را T و P و V بنامیم. به کمک رابطه (۶ – ۱۳) داریم:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P_A\,V_A}{T_A} + \frac{P_B\,V_B}{T_B}$$

$$V = V_A + V_B \;\Rightarrow\; \frac{P\,(V_A + V_B)}{T} = \frac{P_A\,V_A}{T_A} + \frac{P_B\,V_B}{T_B} \qquad (۱)$$

از طرفی از تعادل گرمایی می‌دانیم گرمای داده شده از یک گاز جذب گاز دیگر می‌شود. بدون اینکه به کلّیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم $T_A > T_B$ لذا

$$m_A\,c_A\,(T_A - T) = m_B\,c_B\,(T - T_B) \qquad (۲)$$

چون A و B دو حالت از یک گاز هستند لذا وزن مولکولی و ظرفیت گرمای ویژه آنها یکی است. پس:

$$M_A = M_B = M \;\Rightarrow\; n_A = \frac{m_A}{M}\;,\; n_B = \frac{m_B}{M} \qquad (۳)$$

$$c_A = c_B = c \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳),(۲) \;\Rightarrow\; n_A\,(T_A - T) = n_B\,(T - T_B)$$

$$\Rightarrow\; T = \frac{n_A\,T_A + n_B\,T_B}{n_A + n_B} \qquad (۴)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$n_B = \frac{P_B\,V_B}{R\,T_B}\;,\; n_A = \frac{P_A\,V_A}{R\,T_A}$$

با جایگذاری در (۴) داریم:

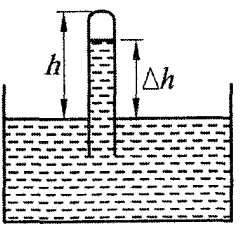
$$T = \frac{\frac{P_A\,V_A}{R} + \frac{P_B\,V_B}{R}}{\frac{P_A\,V_A}{R\,T_A} + \frac{P_B\,V_B}{R\,T_B}} = \left(\frac{P_A\,V_A + P_B\,V_B}{P_A\,V_A\,T_B + P_B\,V_B\,T_A}\right) T_A\,T_B \qquad (۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵) در (۱) داریم:

$$P\,(V_A + V_B) = \left(\frac{P_A\,V_A + P_B\,V_B}{P_A\,V_A\,T_B + P_B\,V_B\,T_A}\right) T_A\,T_B \left(\frac{P_A\,V_A\,T_B + P_B\,V_B\,T_A}{T_A\,T_B}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{P_A\,V_A + P_B\,V_B}{V_A + V_B}$$

مثال. از سوزاندن یک مادهٔ آلی، گاز کربن دی‌اکسید (CO_2)، بخار آب و هیدروکربن نسوخته تولید می‌شود. این گازها را مطابق شکل زیر وارد یک لوله که قبلاً پر از آب بوده می‌کنیم تا روی سطح آب درون لوله جمع شوند. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا سطح آب درون لوله با سطح آب تشت یکسان شود. آب درون تشت را قبلاً اسیدی کرده‌ایم تا کربن دی‌اکسید در آب حل نشود. به این ترتیب گاز جمع شده روی سطح آب شامل کربن‌دی‌اکسید و هیدروکربن نسوخته است. در این حالت، ارتفاع ستون گاز درون لوله $h = ۳\ m$ است. مقطع لوله را یکنواخت بگیرید و فرض کنید لوله قائم است. حال محلول را بازی (قلیایی) می‌کنیم تا کربن‌دی‌اکسید در محلول حل شود. در نتیجه سطح آب درون لوله به اندازهٔ $\Delta h = ۲/۷\ m$ بالا می‌رود. فرض کنید سطح آب تشت عملاً تغییر نمی‌کند و دمای محیط ثابت می‌ماند. فشار هوای خارج با فشار ستونی از آب به ارتفاع $۱۰\ m$ برابر است. چند درصد مول‌های گاز حاصل از سوخت، کربن دی‌اکسید است؟



راهنمایی: در دمای ثابت $\frac{P\,V}{n}$ برای گازهای کامل ثابت است، که در آن n تعداد کل مول‌های گاز، V حجم گاز و P فشار گاز است. گاز درون لوله را گاز کامل بگیرید و از تغییر چگالی آب بر اثر اسیدی یا بازی کردن آن چشم بپوشید.

(سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

حل. فرض کنید P_1، V_1 و P_2، V_2 به ترتیب فشار و حجم جزئی هیدروکربن نسوخته و کربن دی‌اکسید باشد. در حالت اول که این دو گاز با هم مخلوط هستند، فشار و حجم مخلوط برابر P و V فرض می‌شود. به کمک رابطه (۶ – ۱۳) با توجه به ثابت بودن دما داریم:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P_1\,V_1}{T_1} + \frac{P_2\,V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad P\,V = P_1\,V_1 + P_2\,V_2$$

$$\Rightarrow \quad P_2\,V_2 = PV - P_1\,V_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2\,V_2}{PV} = ۱ - \frac{P_1\,V_1}{PV} \qquad (۱)$$

از طرفی

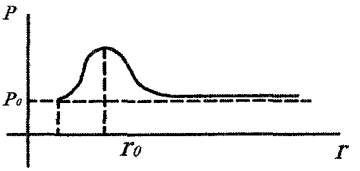
$$n_2 = \frac{P_2\,V_2}{RT} \quad , \quad n = \frac{P\,V}{RT} \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow \frac{P_۲ V_۲}{PV} = \frac{\frac{P_۲ V_۲}{RT}}{\frac{P V}{RT}} = \frac{n_۲}{n} = ۱ - \frac{P_۱ V_۱}{PV}$$

$$\Rightarrow \frac{n_۲}{n} = ۱ - \frac{(۱۰ - ۲/۷) \times (۳ - ۲/۷) A}{۱۰ \times (۳A)}$$

$$\Rightarrow \frac{n_۲}{n} = ۰/۹۲۷ \Rightarrow \frac{n_۲}{n} = ۹۲/۷\%$$

مثال: برای یک بادکنک کروی نمودار فشار هوای داخل آن بر حسب شعاع بادکنک مطابق شکل است. دو بادکنک مشابه را که تا شعاع‌های متفاوت باد کرده‌ایم با یک لوله به یکدیگر وصل می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟



الف) حتماً هوا از بادکنک بزرگتر به بادکنک کوچکتر می‌رود.

ب) حتماً هوا از بادکنک کوچکتر به بادکنک بزرگتر می‌رود.

ج) اگر شعاع هر دو از $r_۰$ بزرگتر باشد، هوا از بادکنک کوچکتر به بادکنک بزرگتر می‌رود.

د) اگر شعاع هر دو از $r_۰$ کوچکتر باشد، هوا از بادکنک کوچکتر به بادکنک بزرگتر می‌رود.

(سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران)

حل: همیشه هوا از مکان با فشار بالا به مکان با فشار پایین منتقل می‌شود. چون نمودار فشار برای $r < r_۰$ به صورت صعودی است. لذا هر کدام که شعاع بزرگتری دارد از فشار بیشتری برخوردار است. پس در حالت $r < r_۰$ هوا از بادکنک بزرگتر به بادکنک کوچکتر می‌رود. برای $r > r_۰$ نمودار فشار به صورت نزولی است لذا بادکنک کوچکتر فشار بیشتری دارد و هوا از بادکنک کوچکتر به بادکنک بزرگتر می‌رود.

گزینه «ج» صحیح است.

آزمایش: این رفتار بادکنک به دلیل کشش لاستیک بادکنک است. برای حالت $r > r_۰$ می‌توان رفتار دو بادکنک را در فیلم balloon 1 6 از CD کتاب ببینید. همچنین همین آزمایش برای دو حباب کف صابون در فیلم 6balloon2 نشان داده شده است.

۱۱.۶ مسائل تکمیلی فصل ششم

با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل به آدرس mottaghi@sharif.edu حل تشریحی تمام مسائل برای شما فرستاده می‌شود.

۱) مخزنی به حجم $V = ۳۰lit$ حاوی گاز کاملی در دمای $T_۰ = ۰°C$ سانتیگراد است. بعد از اینکه بخشی از گاز را در دمای ثابت خارج کردیم، فشار داخل مخزن به اندازه $\Delta P = ۰/۷۸atm$ کاهش می‌یابد. اگر در شرایط استاندارد $P_۰ = ۱atm$ و $T_۰$، چگالی گاز برابر $\rho = ۱/۳gr/lit$ باشد، مطلوب است مقدار جرمی از گاز که از مخزن خارج شده است.

(کتاب ایرودف)

راهنمایی: فرض کنید $m_۲, m_۱$ به ترتیب جرم گاز داخل مخزن قبل و بعد از خارج کردن گاز باشد. آنگاه

$$P_۱V = m_۱\frac{R}{M}T_۰, P_۲V = m_۲\frac{R}{M}T_۰$$

از طرفی داریم

$$P_۰ = \rho\frac{R}{M}T_۰$$

جواب: $\Delta m = m_۱ - m_۲ = \rho V\frac{\Delta P}{P_۰}$

۲) دو مخزن یکسان توسط شیری به هم متصل شده‌اند. هنگامی که اختلاف فشار دو سرشیر بزرگتر از $\Delta P \geq ۱/۱atm$ شود، شیر اجازه عبور گاز از مخزن فشار بالا را به مخزن فشار پایین می‌دهد. در ابتدا در یک مخزن خلأ و در مخزن دوم گاز ایده‌آلی به دمای $T_۱ = ۲۷°C$ و فشار $P_۱ = ۱atm$ موجود است. سپس به هر دو مخزن تا دمای $T_۲ = ۱۰۷°C$ حرارت می‌دهیم. مطلوب است محاسبه فشار مخزن اول، $P'_۱$ بعد از دادن حرارت.

(کتاب ایرودف)

راهنمایی: اگر $m_۱$ جرم گاز درون مخزن دوم باشد، بعد از عمل حرارت $m_۱ = m'_۱ + m'_۲$ که $m'_۱$ و $m'_۲$ به ترتیب جرم گاز درون مخزن اول و دوم است و اگر $P'_۲, P'_۱$ فشار گاز درون مخزن‌های اول و دوم باشد، آنگاه $\Delta P = P'_۲ - P'_۱$

جواب: $P'_۱ = \frac{۱}{۲}(\frac{P_۱T_۲}{T_۱} - \Delta P)$

۳) مخزنی به حجم $V = ۲۰lit$ حاوی مخلوطی از گازهای هیدروژن و هلیم در دمای $T = ۲۰°C$ و فشار $P = ۲atm$ است. جرم مخلوط برابر $m = ۵$ gr است. مطلوب است نسبت جرم گاز هیدروژن به جرم گاز هلیم.

راهنمایی: برای مخلوط داریم:

$$m = m_{H_۲} + m_{He} \quad , \quad n_{tot} = n_{H_۲} + n_{He}$$

آنگاه از قانون گاز کامل استفاده می‌کنیم.

جواب: $n_{tot} = \frac{PV}{RT}$, $\frac{m_{H_2}}{m_{He}} = \frac{M_{H_2}}{M_{He}}(\frac{n_{tot}M_{He} - m}{m - n_{tot}M_{H_2}})$

۴) فضای داخلی یک سیلندر قائم که از دو طرف بسته است، توسط پیستونی که می‌تواند آزادانه درون آن حرکت کند به دو قسمت تقسیم شده است. بطوریکه در هر قسمت یک مول هوا موجود می‌باشد. در دمای $T_0 = 300K$ مجموعه در حال تعادل و حجم قسمت بالایی $n = 4$ برابر حجم قسمت پایینی است. در چه دمایی این نسبت برابر $n' = 3$ می‌شود؟

راهنمایی: در حالت اول و دوم پیستون در حال تعادل است. بنابراین باید برایند نیروهای وارد بر آن (شامل وزن) برابر صفر شود. از قانون گاز کامل هم استفاده کنید.

جواب: $T' = \frac{T_0(n^2 - 1)n'}{(n'^2 - 1)n}$

۵) مخزنی حاوی مخلوطی از گازهای نیتروژن ($m_1 = 7gr$) و دی‌اکسید کربن ($m_2 = 11gr$) در دمای $T = 290K$ و فشار $P_0 = 1atm$ می‌باشد. با فرض ایده‌آل بودن گازها چگالی مخلوط را بیابید.

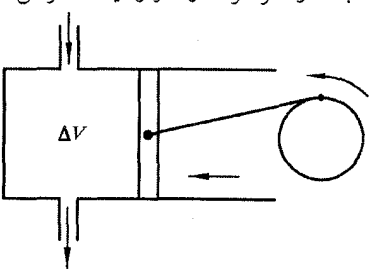
(کتاب ایرودف)

راهنمایی: می‌دانیم چگالی مخلوط برابر $\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}$ است. از قانون گاز کامل برای هر گاز استفاده کنید.

جواب: $\rho = \frac{P_0(m_1 + m_2)M_1M_2}{RT(m_1M_2 + m_2M_1)}$

۶) حجم مخزنی به گنجایش V توسط پیستون یک پمپ از هوا تخلیه می‌شود. با یک بار حرکت رفت و برگشت پیستون می‌توان حجمی به میزان ΔV تخلیه کرد. (کورس پیستون معادل یک بار حرکت رفت و برگشت آن است). چند کورس مورد نیاز است تا فشار داخل مخزن K برابر کاهش یابد؟

فرآیند را به صورت دما ثابت در نظر گرفته و گاز را ایده‌آل فرض کنید. (کتاب ایرودف)



راهنمایی: اگر ρ_1 چگالی بعد از کورس اول باشد، داریم:

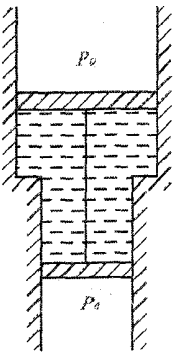
$$\rho_1 = \frac{\rho V}{(V + \Delta V)}$$

آنگاه چگالی بعد از کورس nام برابر $\rho_n = (\frac{V}{V + \Delta V})^n \rho_0$ است.

از طرفی فشار متناسب با چگالی است و می‌خواهیم $\frac{P_n}{P_0} = \frac{1}{K}$ بشود.

جواب: $n = \frac{\ln k}{\ln(1 + \frac{\Delta V}{V})}$

۷) یک لوله قائم هموار دو سر باز دارای دو مقطع متفاوت است که حاوی دو پیستون با مساحت‌های مختلف می‌باشد. هر پیستون در لوله متناسب به خود می‌لغزد. یک مول از گاز ایده‌آل در بین پیستون‌ها که توسط نخ غیر قابل کششی به هم متصل شده‌اند، به دام افتاده است.

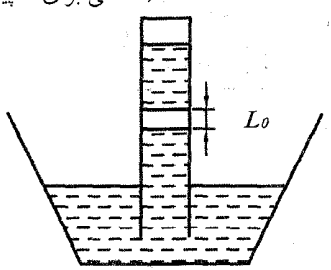


مساحت پیستون بالایی به میزان $\Delta S = ۱۰cm^۲$ بزرگتر از مساحت پیستون پایینی است. مجموع جرم دو پیستون برابر $m = ۵Kg$ و فشار هوای اتمسفر برابر $P_۰ = ۱atm$ می‌باشد. به اندازه چند کلوین باید به گاز بین دو پیستون حرارت دهیم تا پیستون‌ها به اندازه $L = ۵cm$ جابجا شوند؟ (کتاب ایرودف)

راهنمایی: از تعادل پیستونها، برایند نیروی وارد بر هر پیستون باید صفر باشد. از اینجا دو رابطه بدست می‌آید. با افزایش درجه حرارت به اندازه ΔT داریم $P\Delta V = nR\Delta T$ (فشار ثابت است)

جواب: $\Delta T = \frac{۱}{R}(P_۰\Delta S + mg)L$

۸) در وسط یک لوله نازک بارومتر، ستون کوچکی از هوا به طول $L_۰$ قرار دارد. در فشار استاندارد جو و دمای $۰°C$ و $L_۰ = ۱۰cm$ است. اگر دما به $۲۰°C$ برسد، طول ستون هوا چقدر می‌شود؟ از انبساط لوله بارومتر صرف‌نظر کنید. بالای لوله بارومتر خلأ قرار دارد.
(آمادگی برای المپیاد فیزیک - کانادا ۲۰۰۴)



راهنمایی: وزن ستون جیوه‌ای که بالای ستون هوا است در اثر افزایش درجه حرارت همچنان ثابت باقی می‌ماند.

جواب: $L = L_۰\frac{T}{T_۰} = ۱۰/۷cm$

۹) مخزن آهنی دیوار نازک با گنجایش V_0 از گاز هلیم در فشار و دمای استاندارد P_0, T_0 پر شده است. مخزن را روی یک صفحه داغ می‌گذاریم. در نتیجه می‌توان دمای گاز و مخزن را کنترل کرد. می‌دانیم با دادن حرارت علاوه بر انبساط گاز، مخزن نیز منبسط می‌شود. در چه دمایی فشار گاز به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد؟

این مقدار را بیابید. حجم مخزن در این دما را نیز محاسبه کنید. گاز را به صورت ایده‌آل فرض کنید و ضریب انبساط گرمایی طولی آهن را α در نظر بگیرید.

(آمادگی برای المپیالد فیزیک- کانادا ۲۰۰۰)

راهنمایی: از قانون گاز کامل و $V = V_0(1 + \alpha\Delta T)$ استفاده کنید. سپس از فشار نسبت به دما مشتق گرفته آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا دما بدست آید.

جواب: $T = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} - T_0)$ و $P = \frac{\frac{P_0 V_0}{T_0} T}{V_0(1 + \alpha(T - T_0))^3}$

$V = V_0(1 + \alpha(T - T_0))$

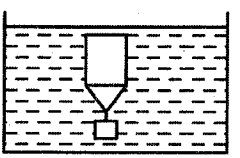
۱۰) یک قوطی فلزی را از طرف باز آن وارد آب می‌کنیم. (مطابق شکل). سپس جسمی به جرم m را به آن آویزان کرده به نحوی که قوطی در عمق h از سطح آزاد مایع در حال تعادل باشد. با فرض اینکه هوای داخلی قوطی نتواند فرار کند، بگویید در هر یک از حالات زیر چه اتفاقی برای قوطی فلزی می‌افتد.

الف) قوطی را به مقدار بسیار کمی بالاتر از عمق h بیاوریم.

ب) قوطی را به مقدار بسیار کمی پایین‌تر از عمق h ببریم.

ج) قوطی را حرارت دهیم.

(المپیاد هنگ کنگ ۲۰۰۴)



جواب: الف) قوطی به سطح آب می‌آید.

ب) قوطی به کف ظرف می‌رود.

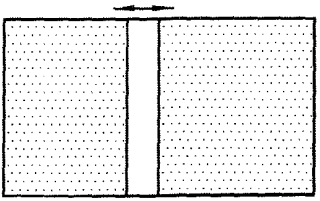
ج) قوطی به سطح آب می‌آید.

۱۱) مطابق شکل، محفظه‌ای توسط یک پیستون به جرم m و سطح مقطع A به دو قسمت تقسیم شده است. پیستون می‌تواند به صورت افقی و بدون اصطکاک در داخل سیلندر حرکت کند. حجم و دمای گاز در سمت چپ برابر V_1, T_1 و در سمت راست برابر V_2 و T_2 است. در حالت تعادل فشار دو طرف پیستون با هم برابرند. به پیستون یک جابجایی کوچک Δx به سمت راست می‌دهیم. حداکثر جابجایی که پیستون به سمت چپ می‌کند چقدر است؟

زمان این حرکت را محاسبه کنید. دما را ثابت فرض کنید.

($\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x$ برای $x \ll 1$)

(المپیاد هنگ کنگ ۲۰۰۵)



راهنمایی: هنگامی که پیستون به اندازه Δx به سمت راست کشیده می‌شود در این حالت فشار در دو طرف پیستون را حساب کرده سپس نیروی برایند وارد بر پیستون را بدست آورید که به صورت $F = -k\Delta x$ می‌شود یعنی حرکت پیستون به صورت حرکت نوسانی هارمونیک ساده است و از آنجا زمان را از رابطه $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه می‌شود.

جواب: حداکثر جابجایی به سمت چپ Δx است.

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{mV_1V_2}{PA^2(V_1+V_2)}}$$

۱۲) یک لوله شیشه‌ای قائم با سطح مقطع $S = 1cm^2$ حاوی مقدار نامعلومی از گاز هیدروژن است. انتهای بالای لوله مسدود می‌باشد. انتهای دیگر لوله باز است که از این طرف وارد ظرف پر از جیوه‌ای می‌کنیم. لوله و ظرف را در محفظه‌ای حاوی هوا که در دما و فشار $T_0 = 273K$ و $P_0 = 1/334 \times 10^5 pa$ است، قرار می‌دهیم. تحت این شرایط ارتفاع جیوه در لوله نسبت به سطح آزاد جیوه در ظرف برابر $h_0 = 0/7m$ می‌گردد. یکی از دیواره‌های محفظه به صورت پیستون است که هوای داخل محفظه را تحت فرآیند هم‌دما تا فشار $P_1 = 8 \times 10^4 Pa$ منبسط می‌کند. در اثر این انبساط ارتفاع ستون جیوه در لوله تا ارتفاع $h_1 = 0/4m$ کاهش می‌یابد. سپس محفظه تحت فرایند حجم ثابت حرارت داده می‌شود تا دمای مجموعه به T_2 رسیده و ارتفاع ستون جیوه در لوله برابر $h_2 = 0/5m$ شود. نهایتاً هوای داخل محفظه تحت شرایط فشار ثابت منبسط شده و ارتفاع ستون جیوه به $h_3 = 0/45m$ می‌رسد. با فرض اینکه در تمام فرآیندها ، سیستم در حال تعادل ترمودینامیکی است مطلوب است:

الف) جرم هیدروژن m

ب) دمای T_2

ج) فشار P در حالت نهایی

چگالی جیوه در دمای T_0 برابر $P_0 = 1/36 \times 10^4 Kg/m^3$، ضریب انبساط حجمی جیوه برابر $\beta = 1/84 \times 10^{-4} 1/K$، ثابت گازها $R = 8/314 J/molK$ است. از انبساط حرارتی شیشه لوله و تغییرات سطح جیوه در ظرف صرف‌نظر کنید.

اگر ΔT تغییرات دمای سیستم باشد، چون $\beta\Delta T \ll 1$ است می‌توانید از تقریب $\frac{1}{1+\beta\Delta T} \simeq 1 - \beta\Delta T$ استفاده کنید. (پنجمین المپیاد بین‌المللی- ۱۹۷۱)

راهنمایی: در هر فرآیند از قانون گاز کامل استفاده کنید و از تعادل فشارها، فشار گاز هیدروژن را در هر فرآیند بیابید.

جواب: الف) $m = 2/11 \times 10^{-6} Kg$

ب) $T_2 = 364K$

ج) $P_۲ = ۱/۰۶۷ \times ۱۰^۵ Pa$

۱۳) منتظر مسائل خوب ارسالی شما هستیم. مسائل را به آدرس mottaghi @ sharif . edu همراه با نام و نام خانوادگی و نام مدرسه و شهر خود ایمیل کنید تا در ویرایش‌های بعدی کتاب به نام خودتان ثبت شوند.

فصل ۷

قوانین ترمودینامیک

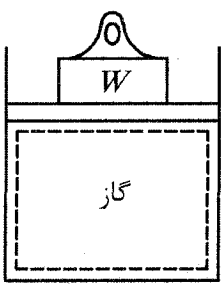
قبل از بیان قوانین ترمودینامیک لازم است بعضی از مفاهیم اولیه را تعریف کنیم.

سیستم بسته یا ایزوله:

به سیستمی گفته می‌شود که به هیچ وجه از طرف محیط اطرافش تأثیر نمی‌پذیرد. این بدین معناست که هیچ جرم، گرما یا کاری از مرز سیستم (خطوط خط‌چین) عبور نمی‌کند.

سیستم ترمودینامیکی (دستگاه):

محدوده‌ای مشخص در فضا است که هیچ جرمی به آن وارد و یا از آن خارج نمی‌شود. هرچند که می‌تواند گرما و کار را به محیط اطراف انتقال دهد و یا از محیط اطراف بگیرد. مثلاً گازی را در نظر بگیرید که مطابق شکل در زیر یک پیستون و در داخل یک سیلندر به دام افتاده باشد.



همانطور که ملاحظه می‌شود ناحیه‌ای از فضا که آن را با خطوط خط‌چین رسم کرده‌ایم می‌توان به عنوان یک سیستم در نظر گرفت، چرا که هیچ جرمی به داخل وارد و یا از آن خارج نمی‌شود. خطوط خط‌چین را اصطلاحاً مرز سیستم گویند. از طرفی اگر به این سیلندر گرما دهیم، گرما از طریق ارتعاش مولکول‌ها به گاز منتقل شده و آن را گرم می‌کند و با انبساط گاز پیستون بالا می‌رود. یعنی گرما وارد سیستم شده و سیستم کاری برای ما انجام می‌دهد مثل بالا بردن وزنه‌ها. همچنین با سرد کردن سیستم گرما از سیستم خارج می‌شود.

بنابراین می‌توان گرما یا کار را به سیستم منتقل کرد و یا از آن به محیط اطراف انتقال داد.

۱.۷ بررسی ماکروسکوپیک یا میکروسکوپیک

در ترمودینامیک، بررسی رفتار سیستم ممکن است از دید ماکروسکوپیک یا میکروسکوپیک انجام شود. ابتدا اجازه دید سیستم را از نظر میکروسکوپیک بررسی کنیم. فرض کنید مکعبی با اضلاع مساوی به طول mm ۲۵ حاوی گازی تک اتمی به فشار و دمای جو موجود باشد، این حجم تقریباً دارای $۱۰^{۲۰}$ اتم است. برای مشخص کردن موقعیت هر اتم به سه مختصه x ، y ، z و برای بیان سرعت هر اتم به سه مؤلفه سرعت V_x ، V_y ، V_z (مؤلفه‌های سرعت در راستای سه محور) نیاز داریم. بنابراین برای بیان کامل رفتار این سیستم کوچک از نظر میکروسکوپی حداقل باید ۶×۱۰^{۲۰} معادله را بررسی کنیم. این عمل حتی با کامپیوتر دیجیتالی بزرگ نیز کار محاسباتی کاملاً بی‌نتیجه‌ای است.

برای حل این مسأله دو راه‌حل در پیش پا داریم تا بتوان تعداد معادلات و متغیرها را به چند عدد کاهش دهیم و معادلات را نسبتاً ساده کرد. یکی از آنها راهکار آماری است که قوانین احتمالات و آمار بر آن حاکم است و با تعریف مقادیر متوسط معادلات کاهش می‌یابد. به این مباحث اصطلاحاً ترمودینامیک آماری می‌گویند. راهکار دوم که می‌توان به کمک آن متغیرها را کاهش داد بررسی ماکروسکوپیک است. همانطور که از لغت ماکروسکوپیک می‌توان فهمید ما با آثار بزرگ یا متوسط گروه بسیار زیادی از مولکول‌ها یا اتم‌ها سروکار داریم که می توان این آثار را حس و یا اندازه‌گیری کرد. برای مثال، می‌دانیم گاز به دام افتاده درون سیلندر به دیواره‌های سیلندر فشار وارد می‌کند. از نظر میکروسکوپ این فشار حاصل برخورد تک‌تک اتم‌های گاز با دیواره سیلندر است. اما از نظر ماکروسکوپیک هیچ علاقه‌ای به بررسی تک‌تک اتم‌ها نداریم بلکه به نیروی متوسطی که از طرف گاز بر دیواره‌هاوارد می‌شود و می‌توان آنرا با فشارسنج اندازه‌گیری کرد علاقه داریم.

به این مباحث که به صورت ماکروسکوپیکی بررسی می‌شوند اصطلاحاً تومودینامیک کلاسیک می‌گویند. در این کتاب مانند کتاب درسیتان، بحث ترمودینامیک کلاسیک را آغاز می‌کنیم.

۲.۷ حالت تعادل (تعادل ترمودینامیکی)

مجدداً گاز به دام افتاده در سیلندر را در نظر بگیرید. اگر این سیلندر را در یک محیط با شرایط ثابت قرار دهیم بعد از مدت زمانی طولانی ملاحظه می‌کنیم که حجم، فشار و دمای گاز به یک مقدار مشخص می‌رسد، یعنی تمام نقاط گاز دارای یک چگالی، فشار و دما می‌شوند. به این وضعیت، حالت تعادل می‌گویند. چرا که تمام نقاط گاز دارای یک وضعیت هستند. حال اگر شرایط محیط را تغییر دهیم، حالت تعادل به هم می‌خورد تا اینکه بعد از مدت زمانی طولانی گاز به حالت تعادل برسد منتهی متفاوت با حالت تعادل قبل. اگر سیستمی از نظر گرمایی، مکانیکی و

شیمیایی در حال تعادل باشد، اصطلاحاً می‌گویند سیستم در حالت تعادل ترمودینامیکی است. اغلب روابطی که در ترمودینامیک مورد بحث واقع می‌شوند، در واقع برای حالت تعادل حاکم هستند.

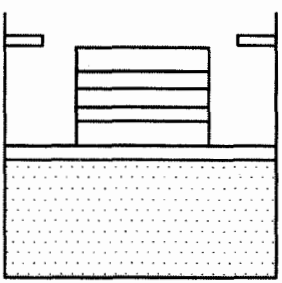
۳.۷ فرآیند ترمودینامیکی

هنگامی که در یک سیستم تغییری از نظر ترمودینامیکی دهیم (مثلاً گرما دهیم یا پیستون را بالا و پایین ببریم) موجب تغییر حالت سیستم می‌شویم. به این تغییر حالتی که سیستم از حالت اولیه به حالت ثانویه انجام می‌دهد. اصطلاحاً فرآیند ترمودینامیکی گویند.

سوال بنیادی

می‌دانیم در فرآیند، حالت سیستم مرتب تغییر می‌کند تا نهایت به حالت تعادل ثانویه برسد. در این حین یعنی تغییر حالت از حالت اولیه به حالت ثانویه، چگونه می‌توان حالت سیستم را تعریف کرد در حالیکه ما حالت ترمودینامیکی را فقط وقتی که سیستم به تعادل رسیده بود می‌توانستیم تعریف کنیم.

حل. پاسخ این سؤال به تعریف فرآیند ایده‌آل مربوط می‌شود که آنرا فرآیند شبه تعادلی می‌نامیم، یعنی فرآیندی که در آن انحراف از تعادل ترمودینامیکی آن بی‌نهایت کوچک است و تمام حالت‌هایی که سیستم طی فرآیند شبه تعادلی از آنها عبور می‌کند را می‌توان حالت‌های تعادل در نظر گرفت. بسیاری از فرآیندهای واقعی خیلی به فرآیند شبه تعادلی نزدیکند. برای درک بیشتر، سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر وزنه‌های روی پیستون کوچک بوده و یکی‌یکی برداشته شوند، فرآیند را می‌توان شبه تعادلی در نظر گرفت. اما اگر تمام وزنه‌ها به یکباره برداشته شوند، پیستون ناگهان بالا می‌رود تا به متوقف کننده‌ها اصابت کند.



این فرآیند غیر تعادلی است و سیستم در هر لحظه این تغییر حالت، در حالت تعادل نخواهد بود. در مورد فرآیندهای غیر تعادلی سیستم را فقط می‌توان قبل از انجام فرآیند و پس از آنکه فرآیند کامل شده و تعادل دوباره برقرار شود، تعریف کرد.

با بعضی از فرآیندهای خاص در فصل گذشته آشنا شدید، مثل فرآیند هم‌حجم، فرآیند هم‌فشار و فرآیند هم‌دما. فرآیند خاص دیگری نیز وجود دارد به نام فرآیند بی‌دررو (یا آدیاباتیک). در این فرآیند هیچ گرمایی بین سیستم و محیط مبادله نمی‌شود (یعنی

$\Delta Q = 0$) برای رسم نمودار آن عجله نکنید، اجازه دهید ابتدا به قانون اول برسیم بعد نمودار آن را رسم می کنیم.

نکته: فرآیندهایی که به سرعت انجام می‌شوند، چون در حین انجام فرآیند، فرصت انتقال گرما به علت تغییر سرعت زیاد وجود ندارد لذا اینگونه فرآیندها را می‌توان به صورت بی‌دررو در نظر گرفت.

۴.۷ چرخه ترمودینامیکی

سیستمی که حالت اولیه آن معلوم است و از چند تغییر حالت مختلف عبور کند و در نهایت به حالت اولیه خود برگردد، چرخه‌ای را طی کرده است. بنابراین در پایان چرخه، کلیه کمیت‌ها از قبیل فشار، دما و ... به مقدار اولیه خود می‌رسند.

۵.۷ قانون صفرم ترمودینامیک

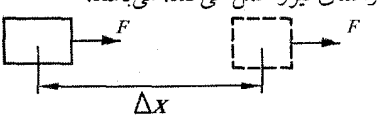
این قانون بیان می‌دارد که اگر جسم A با جسم C هم دما باشد همچنین جسم B با جسم C نیز هم‌دما باشد آنگاه می‌توان گفت که جسم A با جسم B هم دما خواهد بود. بنابراین وقتی دو جسم با جسم سومی هم‌دما باشند آنگاه آن دو جسم با یکدیگر هم‌دما خواهند بود. ممکن است این مطلب به نظر خیلی واضح برسد. اما چون به اهمیت این قانون بسیار دیرتر از کشف قوانین اول و دوم ترمودینامیک پی برده شد و لازم بود از نظر منطقی قبل از قوانین اول و دوم قرار گیرد لذا به نام قانون صفرم شناخته گردید.

۶.۷ قانون اول ترمودینامیک

قبل از رسیدن به رابطه حاکم در قانون اول ترمودینامیک لازم است که مفهوم کار، انرژی درونی و گرمای مبادله شده، تعریف و بررسی شوند.

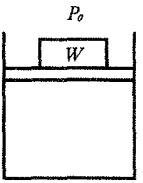
کار:

با مفهوم کار در کتاب فیزیک ۲ آشنا هستیم. کار ΔW برابر با حاصلضرب نیروی F در جابه‌جایی Δx که در راستای نیرو عمل می‌کند، می‌باشد.



در کاربرد قانون اول ترمودینامیک برای سیستم‌های عملی، جملهٔ ΔW غالباً شکلی بسیار ساده پیدا می‌کند. در بسیاری از موارد، ΔW همان کار انجام یافته توسط سیستم در اثر

تغییر حجم آن است. برای مثال گازی را در نظر بگیرید که در سیلندر و پیستون شکل زیر به دام افتاده باشد. می‌دانیم چون پیستون در حالت تعادل است لذا فشار گاز برابر است با $P = P_0 + \frac{W}{A}$ (A مساحت سطح پیستون)



حال اگر کمی حرارت به گاز بدهیم باعث انبسط آن شده و پیستون به میزان Δx بالاتر می‌رود. در این حالت نیز فشار گاز برابر همان مقدار قبلی یعنی $P = P_0 + \frac{W}{A}$ می‌باشد.

این گاز روی این پیستون کار انجام می‌دهد، زیرا بر پیستون نیرویی اعمال می‌کند و باعث جابه‌جایی آن در جهت این نیرو می‌شود. اکنون می خواهیم کار انجام یافته را محاسبه کنیم.

$$\Delta W = F\Delta x = (PA)\,\Delta x = P\,(A\Delta x) = P\,\Delta V$$

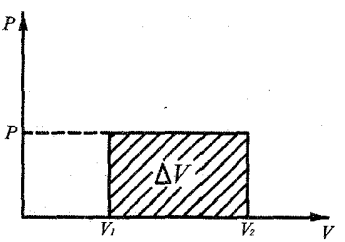
بنابراین هرگاه گازی با فشار P به اندازه حجم کوچک ΔV منبسط شود، مقدار کار انجام یافته توسط گاز چنین به‌دست می‌آید.

$$\Delta W = P\Delta V \quad \text{(در فشار ثابت)} \qquad (۱-۷)$$

نکته: (هنگامی که گاز متراکم شود، ΔV و ΔW منفی خواهند بود.)

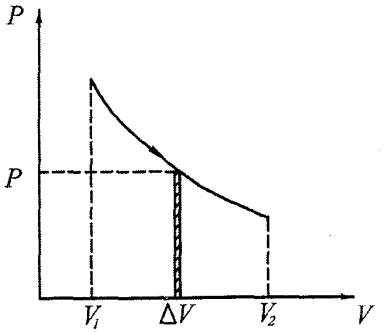
آزمایش: محفظهٔ شیشه‌ای را پر از گاز کرده و توسط یک لوله آن را به یک پیستون وصل می‌کنیم. در فیلم 7work از CD کتاب ملاحظه می‌شود که با گرم کردن محفظه می‌توان توسط پیستون کار انجام داد. (مثل بلند کردن وزنه)

دوباره متذکر می‌شویم که فرآیند باید به صورت شبه تعادلی و آرام صورت گیرد تا بتوان از رابطهٔ (۷-۱) استفاده کرد. اگر این فرآیند را روی نمودار $P-V$ ترسیم کنیم ملاحظه می‌کنیم که مساحت زیر نمودار (ناحیه هاشورخورده) برابر کار انجام شده ΔW است.



حال فرض کنید گاز در یک فرآیند که فشار آن ثابت نیست مطابق شکل زیر منبسط شود کار حاصل به چه صورت محاسبه می‌گردد. در آغاز، انبساط بسیار کوچکی را که در شکل الف با ناحیهٔ هاشورخورده (تقریباً مستطیل شکل) نشان داده شده است در نظر می‌گیریم.

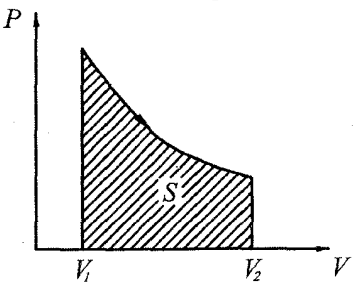
در خلال این انبساط بسیار کوچک، ΔV، عملاً فشار P ثابت می‌ماند و کار انجام شده، طبق معادلهٔ (۷-۱) عبارت است از $P\ \Delta V$. اکنون به نکته‌ای مهم اشاره می‌کنیم. مساحت مستطیل هاشورخورده چنین می‌شود.



(الف)

$$(P\Delta V) = (\text{پهنا}) \times (\text{ارتفاع}) = \text{مساحت مستطیل هاشورخورده}$$

از طرفی کل انبساط گاز را می‌توان به صورت حاصل‌جمع تعداد زیادی از انبساط‌های کوچک در نظر گرفت. چون کار انجام یافته در خلال هر انبساط کوچک با مساحت یکی از مستطیل‌های قائم معادل است، کل کار انجام یافته از حاصل‌جمع مساحت‌های تمام این مستطیل‌ها به‌دست می‌آید. این حاصل‌جمع مساحت‌ها با مساحت سطح زیر منحنی حاصل از انبساط، برابر است. به طور خلاصه می‌توان گفت:

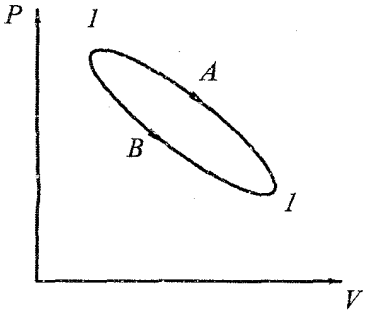


(ب)

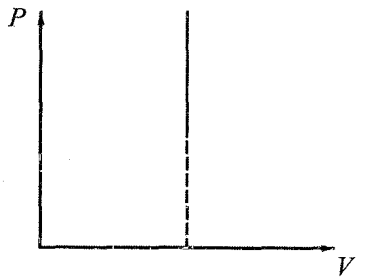
کار انجام یافته در انبساط گاز از V_1 تا V_2 برابر است با مساحت سطح زیر منحنی حاصل از نمودار $P-V$ در طی فرآیند انبساط. (ناحیه هاشورخورده شکل ب)

نکته ۱: با توجه به اینکه کار انجام شده توسط سیستم برابر سطح زیر نمودار $P-V$ است لذا می‌توان گفت کار انجام شده توسط یک سیستم به مسیر فرآیندی که سیستم از حالت ۱ به حالت ۲ رسیده است بستگی دارد.

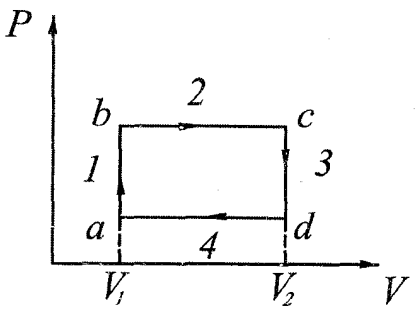
فرض کنید مطابق شکل زیر سیستم به دو روش از حالت ۱ به حالت ۲ تغییر حالت دهد. یکی فرآیند A و دیگری فرآیند B. چون سطح زیر نمودار $P-V$ در فرآیند A بیشتر از فرآیند B است لذا کار انجام شده در فرآیند A بیشتر از فرآیند B می‌باشد.



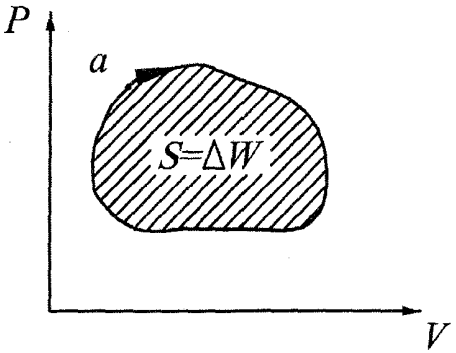
نکته ۲: در فرآیند حجم ثابت، کار انجام شده توسط سیستم صفر است. همانطور هم که ملاحظه می‌شود مساحت زیر نمودار در شکل زیر صفر شده است.



نکته ۳: فرض کنید سیستمی مطابق شکل چرخه‌ای شامل ۴ فرآیند را بپیماید.



می‌توان گفت در فرآیند ۱ و ۳ کار انجام شده توسط سیستم برابر صفر و در فرآیند ۲ کار انجام شده برابر مستطیل $V_1\ b\ c\ V_2$ و کار انجام شده در فرآیند ۴ برابر مستطیل $V_1\ a\ d\ V_2$ با علامت منفی (سیستم متراکم می‌شود) است، در نتیجه کل کاری که سیستم در این چرخه انجام می‌دهد برابر مساحت مستطیل $a\ b\ c\ d$ می‌باشد. می‌توان نشان داد برای هر چرخه‌ای با شکل مسیر دلخواه (مطابق شکل زیر) مساحت داخل چرخه برابر کار انجام شده در آن چرخه است. اگر مسیر فرآیندها در جهت عقربه‌های ساعت باشد $\Delta W > 0$ و اگر در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد $\Delta W < 0$ است.



نکته ۴: اگر نماد W کار انجام شده توسط سیستم باشد آنگاه هنگامی که $\Delta W > 0$ باشد یعنی توسط سیستم کار انجام شده است. (روی محیط اطراف) و اگر $\Delta W < 0$ باشد یعنی روی سیستم کار انجام شده است. (از طرف محیط اطراف)

تذکر: تعریف فوق کمی با تعریف کتاب درسی فیزیک ۳ متفاوت است. اما به یاد داشته باشید در اغلب کتب علمی تعریف فوق به‌کار رفته است.

نکته ۵: در نوع خاصی از فرآیندها، رابطه بین فشار و حجم به شکل $PV^a = $ ثابت است که a هر عدد ثابتی بین $-\infty$ تا $+\infty$ می تواند باشد که بستگی به نوع فرآیند دارد.این نوع فرآیندها به فرآیندهای پلی‌تروپیک معروفند، که شما با دو نوع از آنها آشنا هستید. بله درست است! یکی از آنها فرآیند دما ثابت می‌باشد. از فصل قبل به یاد دارید که در فرآیند دما ثابت، ثابت $= PV$ می‌شد (یعنی $a = 1$). فرایند دومی که می‌شناسید، فرآیند فشار ثابت یعنی حالتی که $a = 0$ باشد، در نتیجه ثابت $= P \times 1$ می‌شود.
می‌توان نشان داد که در فرآیندهای پلی‌تروپیک ($PV^a = $ ثابت) کار انجام شده توسط سیستم از حالت V_1 و P_1 تا حالت V_2 و P_2 به صورت‌های زیر حساب می‌شود. (اثبات آن خارج از سطح کتاب است)

$$a \neq 1 \ , \ PV^a = \text{ثابت}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - a} \qquad (۲-۷)$$

$$a = 1 \ , \ PV = \text{ثابت}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta W = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (۳-۷)$$

نکته ۶: عدد γ را به صورت $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ تعریف می‌کنیم. (C_P ظرفیت گرمایی در فشار ثابت و C_V ظرفیت گرمایی در حجم ثابت است) آنگاه می توان نشان داد که در فرآیند بی‌دررو رابطه زیر حاکم است.

$$PV^\gamma = \text{ثابت} \qquad (۴-۷)$$ فرآیند بی‌دررو

همچنین به کمک قانون گاز کامل می توان نشان داد که در فرآیند بی‌دررو روابط زیر نیز حاکم‌اند.

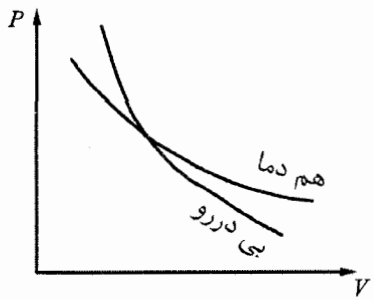
$$\left.\begin{array}{l} PV^{\gamma} = \text{ثابت} \\ PV = nRT \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{nRT}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad nRTV^{k-1} = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \quad TV^{\gamma-1} = \text{ثابت} \qquad (۷-۴ب)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که:

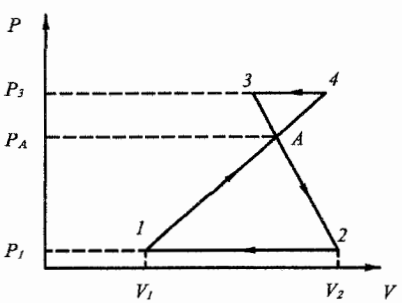
$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{ثابت} \qquad (۷-۵ب)$$

نکته ۷: با توجه به اینکه در فرآیند بی‌دررو ثابت $= PV^{\gamma}$ (همیشه $C_P > C_V$ در نتیجه $\gamma > 1$ است) و در فرآیند دما ثابت، ثابت $= PV$ می‌باشد، لذا اگر این دو فرآیند را مطابق شکل در یک نمودار رسم کنیم ملاحظه خواهد شد که اندازه شیب نمودار مربوط به فرآیند بی‌دررو تندتر از اندازه شیب نمودار مربوط به فرآیند هم‌دما است. یعنی هرچه مقدار γ برای گازی بیشتر باشد قدر مطلق شیب نمودار $P-V$ در فرآیند بی‌دررو بیشتر خواهد شد.



مثال. گازی مطابق شکل، چرخه ای ۴ فرآیندی ۱-۲-۳-۴-۱ را می‌پیماید. در این چرخه گاز چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ (برحسب پارامترهای داده شده در شکل)

(مسابقات روسیه)



حل. چرخه فوق معادل با مجموع دو چرخه $1-2-A-1$ و $A-3-4-A$ می‌باشد. در چرخه اول چون مسیر فرآیند در جهت عقربه‌های ساعت است لذا کار انجام شده توسط سیستم (گاز) روی محیط در این چرخه مثبت اما در چرخه دوم یعنی $A-3-4-A$ کار

انجام شده توسط گاز منفی است. با توجه به نکتهٔ ۳ می‌توان کار انجام شده در هر چرخه را به صورت زیر حساب کرد.

کار انجام شده در چرخه ۱-۲-A-۱ $\Delta W_1 = \frac{(V_2 - V_1)(P_A - P_1)}{2}$ (۱)

کار انجام شده در چرخه A-۳-۴-A $\Delta W_2 = -\frac{(V_4 - V_3)(P_3 - P_A)}{2}$ (۲)

از طرفی چون دو ضلع ۳-۴ و ۲-۱ موازی هم هستند لذا دو مثلث مشابه می‌باشند. در نتیجه نسبت ضلع به ارتفاع در دو مثلث با هم برابرند. یعنی:

$$\frac{V_4 - V_3}{V_2 - V_1} = \frac{P_3 - P_A}{P_A - P_1}$$

$$\Rightarrow \quad (V_4 - V_3) = (V_2 - V_1)\left(\frac{P_3 - P_A}{P_A - P_1}\right) \qquad (۳)$$

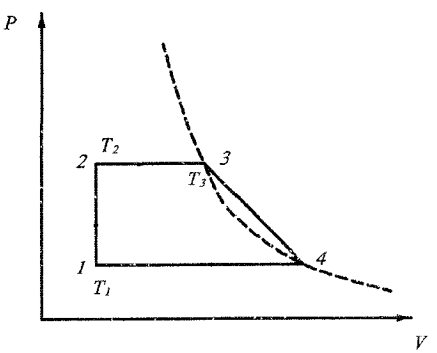
$$(۳), (۲) \quad \Rightarrow \quad \Delta W_2 = -\frac{(V_2 - V_1)(P_3 - P_A)^2}{2(P_A - P_1)} \qquad (۴)$$

پس کل کار انجام شده توسط گاز برابر است با:

$$\text{از (۱) و (۴)} \rightarrow \quad \Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2$$
$$= (V_2 - V_1)\frac{(P_A - P_1)^2 - (P_3 - P_A)^2}{2(P_A - P_1)}$$

مثال. چرخه‌ای مطابق شکل از ۴ فرآیند شامل دو فرایند فشار ثابت ۳-۲ و ۱-۴ و یک فرآیند حجم ثابت ۲-۱ و فرآیند مشخص ۴-۳ که به صورت خط مستقیم است، تشکیل شده است. در این چرخه n مول گاز وجود دارد. اگر نقاط ۳ و ۴ روی منحنی دما ثابت باشند مطلوب است کار انجام شده توسط این گاز در این چرخه بر حسب دماهای T_1 و T_2 و T_3 و مول n.

(مسابقات روسیه)



حل. با توجه به نکتهٔ ۳، مساحت داخل چرخه (ذوزنقه) برابر است با کار انجام شده توسط گاز لذا:

$$\Delta W = (P_2 - P_1)\left[\frac{(V_3 - V_2) + (V_4 - V_1)}{2}\right] \qquad (۱)$$

با توجه به برابری‌های $P_3 = P_2$ و $P_4 = P_1$، از قانون گاز کامل داریم:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_4}{T_4} \quad , \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

$$\Rightarrow V_4 = (\frac{T_4}{T_1})\, V_1 \quad , \quad V_3 = (\frac{T_3}{T_2})V_2 = (\frac{T_3}{T_2})V_1 \qquad (۲)$$

از برابری $V_2 = V_1$ و قانون گاز کامل داریم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad P_2 = (\frac{T_2}{T_1})\, P_1 \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲),(۱) \Rightarrow \Delta W = (\frac{T_2}{T_1} P_1 - P_1)\, [\frac{(\frac{T_3}{T_2})\, V_1 - V_1 + (\frac{T_4}{T_1})\, V_1 - V_1}{2}]$$

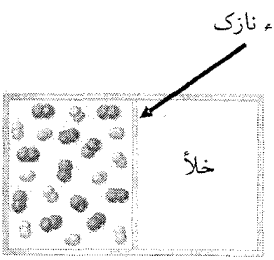
$$\Delta W = P_1 V_1 (\frac{T_2}{T_1} - 1)(\frac{\frac{T_3}{T_2} + \frac{T_4}{T_1} - 2}{2})$$

لذا: $T_3 = T_4$

$$\Delta W = \frac{P_1 V_1}{2} (\frac{T_2 - T_1}{T_1})(\frac{T_3}{T_2} + \frac{T_3}{T_1} - 2)$$

$$P_1 V_1 = nRT_1 \rightarrow \Delta W = nR(\frac{T_2 - T_1}{2})(\frac{T_3}{T_2} + \frac{T_3}{T_1} - 2)$$

سؤال محک: شکل روبه‌رو مخزنی را نشان می‌دهد که توسط غشاء نازکی به دو قسمت تقسیم شد. به طوریکه طرف چپ از گازی با فشاری P پر شده است و در طرف راست خلأ است. اگر غشاء پاره شود، کار انجام شده توسط گاز چقدر است؟



حل. هیچ شکی در خود بروز ندهید، کار انجام شده توسط گاز صفر است!!!!!!!

اولاً توجه داشته باشید که این یک فرآیند غیر تعادلی است لذا از فرمول (۷-۱) یا نمودار نمی‌توانید استفاده کنید. اما دلیل صفر شدن کار گاز این است که به هنگام پاره شدن غشاء، نیرویی در مقابل حرکت گاز وجود ندارد چرا که طرف راست خلأ است، لذا نیروی وارده از طرف گاز صفر است در نتیجه کار برابر صفر می‌شود. برای درک بیشتر، فرض کنید نیروی جاذبه از کره زمین برداشته شود. برای بلند کردن یک سنگ از روی زمین چه مقدار

کار انجام می‌دهید؟ واضح است که کار انجام شده برابر صفر است زیرا برای بلند کردن سنگ نیروی مقاومی وجود ندارد تا در برابر آن انرژی صرف کنید.

۷.۷ انرژی درونی و گرمای مبادله شده

همانطور که قبلاً اشاره کردیم انرژی مولکول‌های یک گاز می‌تواند به اشکال گوناگون باشد، مثل انرژی جنبشی یا پتانسیل، انرژی مربوط به حرکت و موقعیت مولکول‌ها، انرژی مربوط به ساختار اتم، انرژی شیمیایی و غیره. بهتر است در ترمودینامیک، انرژی جنبشی E_K و پتانسیل E_P را جدا در نظر گرفته، سپس تمام انرژی‌های دیگر را به نام انرژی داخلی با نماد U در نظر بگیریم، بنابراین انرژی یک گاز به صورت زیر خواهد شد:

$$E = \text{انرژی پتانسیل} + \text{انرژی جنبشی} + \text{انرژی داخلی} \qquad (۷-۶)$$

$$E = U + E_K + E_P \qquad (۷-۶\ \text{ب})$$

نکته: نماد U انرژی داخلی جرمی معلوم از ماده را مشخص می‌کند. با پیروی از قواعد بکار رفته در مورد ظرفیت گرمایی C و ظرفیت گرمایی ویژه c، نماد u انرژی داخلی به ازای واحد جرم را نشان می‌دهد لذا آنرا انرژی داخلی ویژه می نامیم و داریم:

$$U = m\,u \qquad (۷-۷)$$

همانطور که از رابطه فوق ملاحظه می‌شود انرژی داخلی به جرم نیز بستگی دارد.

در دو فصل قبل نیز با مفهوم گرما آشنا شدیم. در ترمودینامیک گرمای مثبت ($\Delta Q > ۰$) نشان دهنده انتقال انرژی به سیستم و گرمای منفی ($\Delta Q < ۰$) نمایش دهندهٔ انتقال انرژی از سیستم است.

نکته: گرما نیز مانند کار تابعی از مسیر است یعنی وقتی سیستمی تحت تغییر از حالت ۱ به ۲ است، مقدار گرمای انتقالی به مسیری که سیستم ضمن تغییر حالت طی می‌کند بستگی دارد.

نکته: انرژی داخلی U تابعی از مسیر نیست بلکه به حالت سیستم فقط بستگی دارد بنابراین در یک چرخه که سیستم از حالت اول شروع به تغییر می‌کند و پس از طی چند فرآیند در نهایت به همان حالت اولیه می‌رسد می‌توان گفت که تغییر انرژی درونی ΔU برابر صفر است.

با استفاده از قانون پایستگی انرژی، می‌توان گفت:

انرژی گرمایی افزوده شده به سیستم باید با حاصل‌جمع تغییرات انرژی‌های داخلی سیستم و کار انجام یافته توسط سیستم برابر شود.

قانون پایستگی انرژی را که در مطالعهٔ گرما مورد استفاده واقع می‌شود، قانون اول ترمودینامیک می نامند. این قانون را با معادلهٔ زیر هم می‌توان نشان داد:

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W \qquad (۷-۸)$$

یا

$$\Delta Q = (\Delta U + \Delta E_K + \Delta E_P) + \Delta W$$

با فرض اینکه هیچ تغییری در انرژی جنبشی یا انرژی پتانسیل سیستم در کل وجود نداشته باشد، ($\Delta E_K = \Delta E_P = 0$) می‌توان رابطه فوق را به صورت معروف بازنویسی کرد:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (۹-۷)$$

نکته: اگر رابطه فوق را به صورت $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$ بنویسیم می توانیم بگوییم انرژی داخلی سیستم وقتی تمایل به افزایش دارد که انرژی از طریق گرما یا انجام دادن کار روی سیستم به سیستم منتقل شود و وقتی تمایل به کاهش دارد که انرژی با انجام دادن کار توسط سیستم یا دادن گرما از دست داده شود.

۸.۷ بررسی قانون اول در فرآیندهای خاص

۱- فرآیند حجم ثابت:

اگر حجم سیستمی ثابت بماند، با توجه به رابطه (۷ - ۱) این سیستم هیچ کاری انجام نمی‌دهد. ($\Delta W = 0$) لذا از رابطه (۷ - ۹) داریم:

$$\Delta U = \Delta Q$$

بنابراین اگر گرما به سیستم دهیم ($\Delta Q > 0$) آنگاه انرژی درونی سیستم افزایش می‌یابد.

۲- فرآیند بی‌دررو:

چون در فرآیند بی‌دررو، مبادله گرما بین محیط و سیستم وجود ندارد لذا $\Delta Q = 0$ است و از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U + \Delta W = 0$$

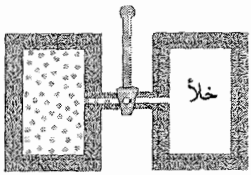
نکته ۱: با توجه به اینکه در فرآیند بی‌دررو داریم $\Delta W = -\Delta U$ و چون انرژی داخلی تابعی از مسیر نیست و فقط به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد، لذا فرآیند بی‌دررو یک حالت استثناء است برای اینکه کار به مسیر بستگی نداشته باشد و برای تمام مسیرها مقدار کار یکسان خواهد بود.

۳- فرآیند دما ثابت:

می توان نشان داد که انرژی داخلی ویژه گاز کامل فقط تابعی از دما است. یعنی برای گاز کامل می‌توانیم بنویسیم:

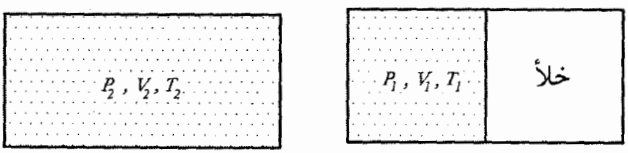
$$u = f(T) \qquad (۱۰-۷)$$

این بدان معناست که گاز کامل در دمای معلوم، بدون توجه به فشار، دارای انرژی داخلی ویژه معین u است. آقای ژول در سال ۱۸۴۳ این حقیقت را هنگام اجرای آزمایش نشان داد. مطابق شکل دو مخزن A و B که به وسیله لوله و شیری به هم متصل شده‌اند، را در آب غوطه‌ور می‌کنیم و مخزن A حاوی هوا و ومخزن B کاملاً از هوا تخلیه شده است. با برقراری تعادل گرمایی، شیر را باز می‌کنیم تا فشارهای A و B برابر شوند.



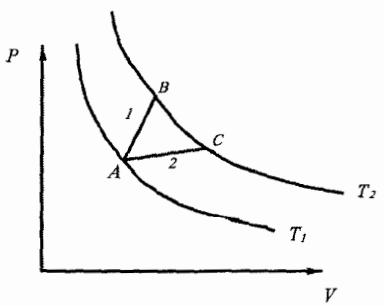
در طول فرآیند یا پس از آن تغییری در دمای آب ملاحظه نمی‌گردد. ژول نتیجه گرفت که چون گرمایی به هوا انتقال نیافته و کار هوا نیز صفر است (زیرا نیروی مقاومی در برابر حرکت وجود ندارد) بنابر قانون اول انرژی داخلی گاز نیز نباید تغییر کرده باشد یعنی $\Delta U = 0$. بنابراین اگر در شکل (الف) غشاء نازک پاره گردد، چون تغییر انرژی داخلی برای گاز کامل صفر است و انرژی داخلی ویژه گاز کامل فقط تابعی از دما است در نتیجه می توان گفت:

$T_1 = T_2$

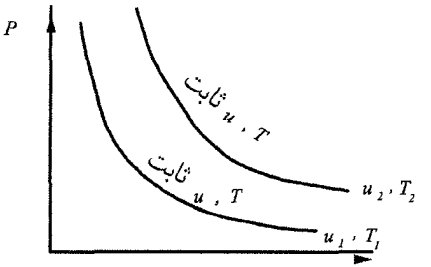


به این نوع فرآیندها اصطلاحاً فرآیند انبساط آزاد گفته می‌شود.

نکته ۱: در شکل زیر دو خط دما ثابت را نشان می‌دهد. اگر گازی یک بار تحت فرآیند ۱ از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود و بار دیگر تحت فرآیند ۲ از نقطهٔ A به نقطهٔ C برسد چون دماهای ابتدایی و انتهایی برای دو فرآیند یکسان هستند لذا می‌توان گفت که تغییر انرژی داخلی در هر دو فرآیند با هم برابر است یعنی $(\Delta U)_1 = (\Delta U)_2$.



نکته ۲: با توجه به اینکه انرژی داخلی ویژه u برای گاز کامل فقط به دما بستگی دارد در نتیجه خطوط u ثابت بر خطوط دما ثابت منطبق‌اند.



نکته ۳: انرژی داخلی یک گاز واقعی تابعی از فشار و دما است. برای اینکه در ذهنتان بتوانید یک گاز کامل را تجسم کنید، ویژگی‌های یک گاز کامل تقریباً همان ویژگی‌های یک گاز حقیقی در فشارهای پایین است. بنابراین اگر در یک فرآیند فشار پایین نباشد و تغییر دما برابر صفر بود نمی‌توانیم بگوییم که تغییر انرژی داخلی صفر است زیرا برای گاز حقیقی انرژی داخلی علاوه بر دما به فشار نیز بستگی دارد. یکی دیگر از مواردی که ممکن است در تعیین انرژی داخلی شما را به اشتباه بیاندازد، تغییر فاز می‌باشد. می‌دانیم هنگامی‌که یک جامد در نقطهٔ ذوبش در فشار ثابت شروع به مایع شدن می‌کند دما ثابت می‌ماند. اما برای تغییر فاز باید گرمای قابل توجه‌ای به سیستم داده شود. زیرا انرژی داخلی مایع در دمای یکسان، خیلی بیشتر از انرژی داخلی جامد است. بنابراین در تغییر فاز $\Delta U \neq 0$ است.

نکته ۴: در فرآیند بی‌دررو اگر گاز انبساط یابد آنگاه $\Delta W > 0$ است در نتیجه $\Delta U = -\Delta W < 0$ است یعنی دمای گاز کم شده است بنابراین در انبساط بی‌دررو، دمای گاز کاهش می‌یابد.

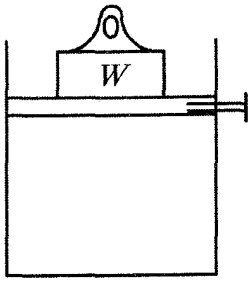
به طور مشابه می‌توان گفت:

در تراکم بی‌دررو، دمای گاز افزایش می‌یابد.

۹.۷ مقایسه C_P با C_V

فرض کنید به گازی گرمای ΔQ را بدهیم. این انرژی داده شده به گاز می‌تواند دو اثر یا ترکیب آنها را داشته باشد. یکی اینکه می‌تواند گاز را به انجام کار مکانیکی وا دارد یا اینکه انرژی داخلی گاز، U را افزایش دهد که به شکل افزایش دما در گاز ظاهر می‌گردد.

در سیستم شکل زیر، پیستون را در نقطه‌ای ثابت نگه می داریم، چون حجم گاز ثابت است در نتیجه $\Delta W = 0$ بنابراین از قانون اول داریم $\Delta Q = \Delta U$. از طرفی این آزمایش یک آزمایش حجم ثابت است و می‌توان با استفاده از تعریف ظرفیت گرمایی در حجم ثابت نوشت:



$$\Delta Q = C_V \Delta T \quad \Rightarrow \quad C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad (۱۱-۷)$$

رابطه فوق را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\Delta U = C_V \Delta T \qquad (۱۲-۷)$$

نکته: اگر ΔT به سمت صفر میل کند رابطه فوق تبدیل به مشتق می‌شود یعنی:

$$C_V = \frac{dU}{dT}$$

رابطه (۷-۱۲) را می توان بر حسب ظرفیت گرمایی ویژه و انرژی داخلی ویژه (با تقسیم بر جرم m) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Delta u = \frac{C_V}{m} \Delta T = c_V \Delta T \qquad (۱۳-۷)$$

حال اگر مانع حرکت پیستون نشویم و با گرما دادن اجازه دهیم که گاز هم منبسط شود، در اثر انبساط گاز به میزان ΔV، کار انجام شده برابر $\Delta W = P \Delta V$ خواهد بود (P فشار وارد بر گاز که ثابت می‌باشد $P = P_0 + \frac{W}{A}$) بنابراین از قانون اول داریم:

$$\Delta Q = \Delta U + P \Delta V$$

در این حالت، آزمایش به صورت فشار ثابت انجام شد در نتیجه با توجه به تعریف ظرفیت گرمایی در فشار ثابت داریم:

$$\Delta Q = C_P \Delta T \quad \Rightarrow \quad C_P = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + P \Delta V}{\Delta T} \qquad (۱۴-۷)$$

رابطه فوق را به صورت زیر می نویسیم:

$$\Delta U + P \Delta V = C_P \Delta T \qquad (۱۵-۷)$$

رابطه فوق را مجدداً بازنویسی می کنیم:

$$(U_2 + P V_2) - (U_1 - P V_1) = C_P \Delta T$$

اصطلاحاً به عبارت $U + PV$ آنتالپی سیستم گفته می‌شود و آن را با H نمایش می‌دهند. بنابراین:

$$H = U + PV \qquad (۱۶-۷)$$

آنتالپی بر واحد جرم یا آنتالپی ویژه، h، را می‌توان از تقسیم رابطه فوق بر جرم m سیستم بدست آورد.

$$h = u + P \frac{V}{m} \qquad (۱۷-۷)$$

نکته ۱: آنتالپی نیز مانند انرژی داخلی به مسیر بستگی نداشته و فقط تابعی از دما است.

نکته ۲: رابطه (۷ – ۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C_P = \frac{\Delta H}{\Delta T} \qquad (۱۸ - ۷)$$

نکته ۳: برای یافتن رابطه بین C_P و C_V از روابط (۷ – ۱۱) و (۷ – ۱۴) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$C_P = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{P \Delta V}{\Delta T} = C_V + \frac{P \Delta V}{\Delta T}$$

برای گاز کامل در فشار ثابت داریم:

$$P \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$$

$$\Rightarrow C_P = C_V + \frac{m}{M} R = C_V + n R$$

$$\Rightarrow C_P - C_V = n R \qquad (۱۹ - ۷)$$

از طرفی می دانیم رابطه بین ظرفیت گرمایی با ظرفیت گرمای ویژه به صورت‌های $C_V = m c_V$ و $C_P = m c_P$ است لذا:

$$mc_P - mc_V = \frac{m}{M} R \Rightarrow Mc_P - Mc_V = R$$

اگر قرار دهیم $Mc_p = c_{MP}$ و $Mc_V = c_{MV}$ داریم:

$$c_{MP} - c_{MV} = R \qquad (۲۰ - ۷)$$

c_{MP} و c_{MV} به ترتیب ظرفیت‌های گرمایی ویژه مولی در فشار ثابت و حجم ثابت می‌باشند. همچنین ظرفیت‌های گرمایی مولی در فشار ثابت و حجم ثابت برابرند با:

$$C_{MP} = n c_{MP} \quad , \quad C_{MV} = n c_{MV}$$

نکته ۴: رابطه (۷ – ۱۲) را می‌توان بر حسب ظرفیت گرمایی ویژه مولی c_{MV} نیز نوشت:

$$\Delta U = C_V \Delta T = m c_V \Delta T = \frac{m}{M} (M c_V) \Delta T = n c_{MV} \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta U = n c_{MV} \Delta T \qquad (۲۱ - ۷)$$

مشابهاً می‌توان به کمک رابطه (۷ – ۱۴) نوشت:

$$\Rightarrow \Delta Q = n c_{MP} \Delta T \qquad (۲۲ - ۷)$$

نکته ۵: در مورد جامدات و مایعات می‌توان c_P و c_V را تقریباً با هم برابر و مقداری ثابت در نظر گرفت (به شرطی که در آنها تغییر فازی رخ ندهد) اما در مورد گازهای کامل مسأله کمی فرق می‌کند.

براساس آزمایشات انجام گرفته بر روی گازها در فشار پایین (که تقریب خوبی از مدل گاز کامل هستند) می‌توان نتایج زیر را بدست آورد.

۱- برای تمام گازها:

الف) c_V (یا c_{MV}) فقط تابعی از دما است.

ب) c_P (یا c_{MP}) فقط تابعی از دما است.

۲- برای گازهای تک اتمی مثل He، Ne و Ar و بیشتر بخارهای فلزات مانند بخارهای Na، Cd و Hg:

الف) c_{MV} در محدوده وسیعی از دما ثابت و برابر $\frac{۳}{۲} R$ می‌باشد.

ب) c_{MP} در محدوده وسیعی از دما ثابت و برابر $\frac{۵}{۲} R$ می‌باشد.

۳- برای گازهای دو اتمی مانند $H_۲$، $D_۲$، $O_۲$، $N_۲$، NO و CO:

الف) c_{MV} در دماهای معمولی ثابت و برابر $\frac{۵}{۲} R$ می‌باشد ولی با ازدیاد دما افزایش می‌یابد.

ب) c_{MP} در دماهای معمولی ثابت و برابر $\frac{۷}{۲} R$ می‌باشد ولی با ازدیاد دما افزایش می‌یابد.

۴- گازهای چند اتمی و گازهایی که از نظر شیمیایی فعال هستند مانند $CO_۲$، $NH_۳$، $CH_۴$ و ...:

c_P (یا c_{MP}) و c_V (یا c_{MV}) با دما تغییر می‌کنند و این تغییر برای هر گاز متفاوت است.

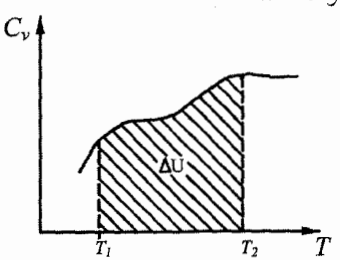
نکته ۶: از نکته قبل می‌توان نتیجه گرفت که برای محاسبه تغییر انرژی داخلی برای گازهای تک اتمی و دو اتمی می‌توان از روابط (۷ – ۱۲) یا (۷ – ۲۱) استفاده کرد (زیرا c_V یا c_{MV} ثابت هستند) ولی برای گازهای کامل چند اتمی یا گازهای واقعی دیگر نمی‌توان از این دو رابطه استفاده کرد (زیرا c_V و c_{MV} خود تابعی از دما هستند) بلکه این روابط را تنها به صورت انتگرالی زیر می‌توان محاسبه نمود.

$$\Delta U = \int C_V \, dT$$

یا (۲۳ – ۷)

$$\Delta U = \int n \, c_{MV} \, dT$$

و یا می‌توان از نمودار $C_V - T$ استفاده نمود به این صورت که مساحت زیر نمودار $C_V - T$ برابر ΔU خواهد شد.



نکته مهم: در امتحان المپیاد مرحله ۱ و ۲ برای گازهای کامل چه یک اتمی و چه چند اتمی از رابطه (۷–۱۲) یا (۷–۲۱) می‌توانید استفاده کنید.

نکته ۷: رابطه (۷–۲۱) را نیز می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\Delta U = n c_{MV} \Delta T = n \frac{R c_{MV}}{R} \Delta T = n \frac{R c_{MV}}{c_{MP} - c_{MV}} \Delta T = n \frac{R}{\frac{c_{MP}}{c_{MV}} - ۱} \Delta T$$

$$\Delta U = n \frac{R}{\gamma - ۱} \Delta T \qquad (۲۴ - ۷)$$

۱۰.۷ مسائل حل شده

۱) گازی با فشار P_1 را به طور ناگهانی متراکم می‌کنیم. بطوریکه حجم آن نصف شود. بلافاصله پس از انجام این کار، فشار گاز به P_2 می‌رسد. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) $P_2 = 2P_1$ ب) $P_1 < P_2 < 2P_1$ ج) $P_2 > 2P_1$

(هشتیمن المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)

حل: همانطور که در متن درس گفتیم فرآیندهایی که با سرعت بالا انجام می‌شوند را می‌توان به صورت یک فرایند بی‌دررو در نظر گرفت. پس $\Delta Q = 0$. از طرفی چون گاز متراکم شده یعنی $V_2 < V_1$ در نتیجه $\Delta W < 0$. به کمک قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \rightarrow \Delta U = -\Delta W > 0$$

همچنین می‌دانیم انرژی داخلی تابعی از دما است (طبق رابطه (۷-۱۲)) پس

$$\Delta U > 0 \rightarrow \Delta T > 0 \rightarrow T_2 > T_1 \rightarrow \frac{T_2}{T_1} > 1$$

به کمک قانون گاز کامل برای این دو حالت داریم:

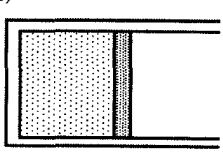
$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \rightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2(V_1/2)}{T_2} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_2}{P_1} = 2(\frac{T_2}{T_1}) \\ \frac{T_2}{T_1} > 1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{P_2}{P_1} > 2 \rightarrow P_2 > 2P_1$$

گزینه «ج» صحیح است.

۲) استوانه‌ای مطابق شکل زیر به طور افقی روی سطحی قرار داده شده است. پیستونی می‌تواند بدون اصطکاک در داخل سیلندر حرکت کند و فاصلهٔ پیستون از ته سیلندر $10\ cm$ است. فشار هوای بیرون $10^5\ \frac{N}{m^2}$ و سطح مقطع پیستون $224\ cm^2$ است. در اثر گرم کردن گاز درون سیلندر، پیستون به آرامی حرکت کرده و به فاصلهٔ $11\ cm$ از ته سیلندر رسیده و همانجا متوقف می‌شود. گاز در این فرآیند انبساط چند ژول کار انجام می‌دهد؟

(نهمین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)



حل. همانطور که قبلاً اشاره کردیم برای استفاده از روابط ترمودینامیکی فرضِ شبه تعادلی بودن فرآیند لازم است. حال با فرض اینکه پیستون به آرامی حرکت کرده باشد و در هر لحظه

در حال تعادل باشد می‌توان گفت چون در طرف راست پیستون هوا با فشار ثابت است لذا این فرآیند یک فرآیند فشار ثابت می‌باشد. از رابطه (۷ – ۱) داریم:

$$\Delta W = P\,\Delta V = P\,(A\,\Delta x)$$
$$= ۱۰^۵ \times ۲۲۴ \times ۱۰^{-۴} \times (۱۱ - ۱۰) \times ۱۰^{-۲} = ۲۲/۴\ J$$

۳) در مسأله قبل اگر دمای گاز پیش از گرم کردن صفر درجه سلسیوس باشد و برای افزایش دمای یک مول از گاز به اندازه یک کلوین ۱۰ ژول انرژی لازم باشد، در این فرآیند چند ژول انرژی از منبع گرما گرفته شده است؟

حل. چون فشار ثابت است با توجه به قانون گاز کامل برای هر دو حالت داریم:

$$\frac{V_۱}{T_۱} = \frac{V_۲}{T_۲} \Rightarrow T_۲ = (\frac{V_۲}{V_۱})\,T_۱ = \frac{۱۱A}{۱۰A}\,(۲۷۳ + ۰)$$

$$\Rightarrow T_۲ = ۳۰۰/۳\ K \Rightarrow \Delta T = ۳۰۰/۳ - ۲۷۳ = ۲۷/۳\ K$$

از طرفی مقدار مول گاز n برابر است با:

$$n = \frac{P_۱ V_۱}{R T_۱} = \frac{۱۰^۵ \times (۲۲۴ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰ \times ۱۰^{-۲})}{۸/۳۱۴ \times ۲۷۳} = ۰/۰۹۹$$

بنابراین گرمای داده شده برابر است با:

$$\Delta Q = ۰/۰۹۹ \times ۲۷/۳ \times ۱۰ = ۲۷/۰۲\ J$$

۴) یک تکه یخ در فشار جو و در دمای صفر درجهٔ سلسیوس ذوب می‌شود. در اثر این فرآیند حجم یخ کم می‌شود؛ به‌طوری که حجم آن تقریباً ۰/۹ حجم یخ اولیه می‌شود. گرمای نهان ذوب یخ در فشار جو و دمای صفر درجهٔ سلسیوس ۳۳۰ kJ/kg است. گرمایی که از طرف جو به یخ داده می‌شود را با Qو کاری که از طرف جو روی یخ انجام می‌شود را با W نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $\frac{W}{Q} = ۳ \times ۱۰^{-۵}$ ب) $W = Q$

ج) $W + Q = ۰$ د) $Q = ۰$

حل. همانطور که در متن درس اشاره کردیم در تغییر فاز دما ثابت است اما انرژی درونی آب خیلی بیشتر از انرژی درونی یخ است لذا تغییرات انرژی درونی در فرآیند ذوب شدن برابر صفر نیست. ($\Delta U \neq ۰$)

بنابر قانون اول می‌توان نوشت:

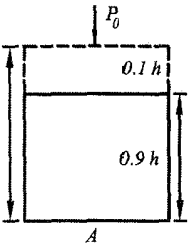
$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

در رابطه فوق ΔW کار انجام شده توسط سیستم (یخ) روی محیط است که چون حجم یخ کم می‌شود $\Delta W < ۰$ است. همچنین کار انجام شده توسط یخ منفی کار انجام شده توسط جو است پس $\Delta W = -W$ و می‌توان نوشت:

$$Q = \Delta U - W \text{ یا } Q + W = \Delta U$$

بنابراین گزینه‌های «ب» و «ج» و «د» نادرست هستند. حال درستی گزینهٔ الف را بررسی می‌کنیم:

فرض کنید یخ شما درون ظرفی قرار دارد بنابراین در اثر آب شدن مساحت قاعده ظرف (A) همچنان ثابت است و ارتفاع کم می‌شود و در نتیجه ارتفاع آب به $۰/۹\ h$ می‌رسد. از ثابت بودن جرم در دو حالت می‌توان چگالی یخ ρ_i را برحسب چگالی ρ_w پیدا کرد.



$$m = \rho_i (Ah) = \rho_w (A\ ۰/۹\ h)$$

$$\Rightarrow \rho_i = ۰/۹\ \rho_w = ۰/۹ \times ۱۰۰۰ = ۹۰۰\ \frac{kg}{m^۳}$$

از طرفی گرمای داده شده برای ذوب کامل یخ برابر گرمای نهان ذوب است پس:

$$Q = m L_f = (\rho_i A h) L_f = ۹۰۰ \times Ah \times ۳۳۰ \times ۱۰^۳ = ۲۹۷ \times ۱۰^۶\ Ah$$

در اثر فشار وارد از طرف جو بر یخ و جابه‌جایی آن به میزان $۰/۱\ h$، کار نیروی فشاری جو برابر است با:

$$W = Fd = (P_۰ A)\ ۰/۱\ h = ۱۰^۵ \times A \times ۰/۱\ h = ۱۰^۴\ Ah$$

$$\Rightarrow \frac{W}{Q} = \frac{۱۰^۴\ Ah}{۲۹۷ \times ۱۰^۶} = ۳/۳۶ \times ۱۰^۵$$

۵) استوانه‌ای شامل یک مول گاز کامل است. این استوانه با یک پیستون بسته شده، و پیستون به یک فنر متصل است، چنان‌که جابه‌جایی پیستون برابر است با تغییر طول فنر. گرمای ویژهٔ این گاز کامل در حجم ثابت c_V است. در وضعیت اول، حجم گاز V، فشار آن P (برابر با فشار بیرون پیستون)، و دمای آن T است، و فنر در حالت کشیده نشده و فشرده نشده است. گاز را گرم می‌کنیم تا دمای آن به $T + \Delta T$ برسد. تغییر انرژی درونی گاز طی این فرآیند چه قدر است؟

(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $\frac{۱}{۲} (\frac{\Delta T}{T})^۲ (\frac{P^۲ A^۲}{k})$

ب) $\frac{k}{۲} (\frac{\Delta T}{T})^۲ (\frac{V}{A})^۲$

ج) $\frac{۱}{۲} (\frac{\Delta T}{T})^۲ \frac{P^۲ A^۲}{K} + \frac{k}{۲} (\frac{\Delta T}{T})^۲ (\frac{V}{A})^۲ + C_V\ \Delta T$

د) $C_V\ \Delta T$

حل. همانطور که در متن درس توضیح دادیم در حالت کلی C_V گاز کامل مقدار ثابتی نیست. اما اگر محدوده دمایی ΔT، کوچک باشد، می‌توان C_V را ثابت در نظر گرفت بنابراین به کمک رابطه (۷ – ۲۱) داریم:

$$\Delta U = n c_{MV} \Delta T$$

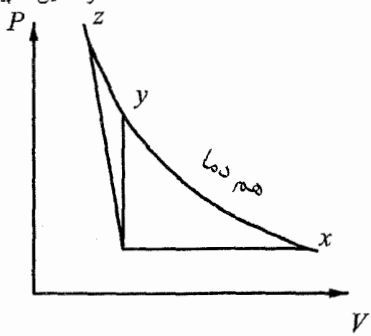
در این مسأله $n = ۱$ است و c_{MV} را با نماد c_V نشان داده است. (البته باید در مسأله قید شود که c_V ظرفیت گرمایی ویژه مولی است و نه ظرفیت گرمایی ویژه) بنابراین:

$$\Delta U = c_V \Delta T$$

گزینه «د» صحیح است.

۶) سه ظرف محتوی گازهای یکسانند که فشار، حجم و دمای یکسانی دارند. هر یک از گازهای درون این سه ظرف مطابق فرآیندهای شکل از حالت اولیه O به یکی از حالت‌های نهایی X، Y و Z برده می‌شوند. گرمای داده شده به گازها به ترتیب Q_X، Q_Y و Q_Z می‌باشند. اگر دمای نهایی گازها مساوی باشد، چه رابطه‌ای بین این گرماها وجود دارد؟

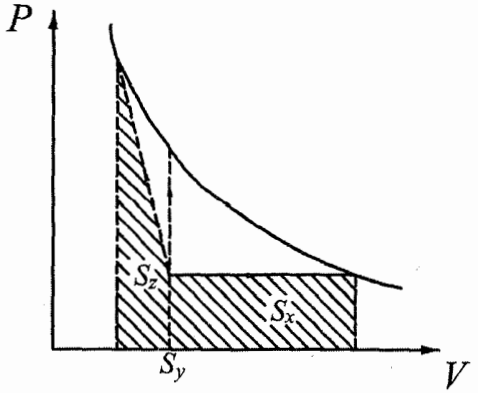
(شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $Q_X > Q_Y > Q_Z$ ب) $Q_X > Q_Z > Q_Y$ ج) $Q_Z > Q_X > Q_Y$

د) $Q_X = Q_Y > Q_Z$ ه) $Q_X = Q_Y = Q_Z$

حل. چون دماهای اولیه و نهایی برای هر سه فرآیند یکسان است لذا تغییر انرژی درونی برای هر سه فرآیند (با فرض کامل بودن گازها) با هم برابر است لذا $\Delta U_Z = \Delta U_Y = \Delta U_X = \Delta U$ از طرفی کار هر فرآیند برابر سطح زیر نمودار $P - V$ همان فرآیند است، که با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$S_X > S_Z \ , \ S_Y = ۰$

دقت کنید که فرآیند Z تراکمی است و مقدار کار آن منفی می‌شود. در نتیجه:

$$\Delta W_x > ۰ \qquad \Delta W_y = ۰ \qquad \Delta W_z < ۰ \qquad (۱)$$

حال قانون اول ترمودینامیک را برای هر یک می‌نویسیم:

$$\Delta Q_X = \Delta U + \Delta W_X$$
$$\Delta Q_Y = \Delta U + \Delta W_Y \qquad (۲)$$
$$\Delta Q_Z = \Delta U + \Delta W_Z$$

$$(۲) \ , \ (۱) \quad \Rightarrow \quad \Delta Q_X > \Delta Q_Y > \Delta Q_Z$$

گزینه «الف» صحیح است.

۷) مقدار گرمای لازم برای تبخیر یک مول گاز در ظرف درباز (در فشار ثابت) L است. تغییر انرژی درونی یک مول آب در این فرآیند ΔU است. در این صورت:

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

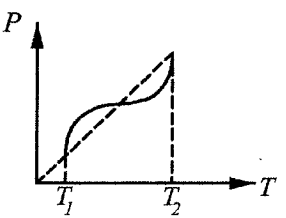
الف) $\Delta U < L$ ب) $\Delta U = L$ ج) $\Delta U > L$

حل. می‌دانیم اگر آبی را در سیلندر و پیستون قرار داده و حرارت دهیم، در اثر تبدیل آب به بخار آب، حجم شدیداً افزایش می‌یابد. چون این آزمایش در فشار ثابت مثل $P_۰$ انجام می‌شود در نتیجه سیستم (آب مورد نظر) روی محیط کاری مثبت برابر $\Delta W = P_۰ \Delta V$ انجام می‌دهد. بنابر قانون اول می‌توان نوشت:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \Delta Q - \Delta W = L - \Delta W$$

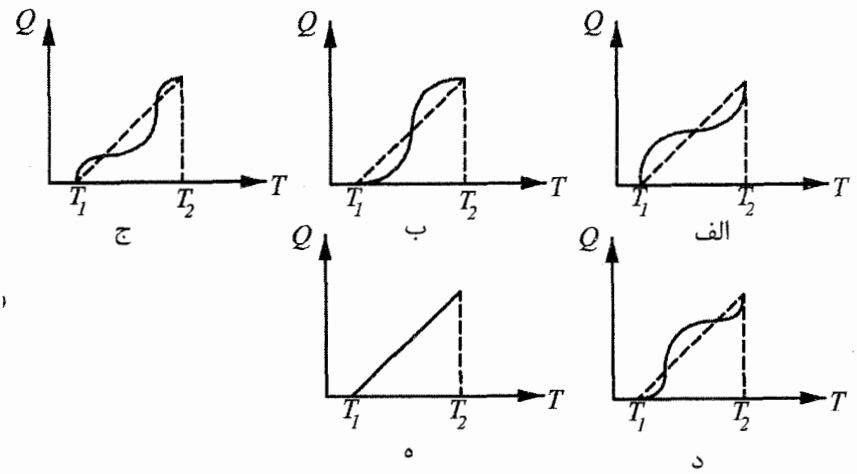
چون $\Delta W > ۰$ است لذا $\Delta U < L$ و گزینه «الف» صحیح است.

۸) دمای گاز کاملی طی فرآیندی از $T_۱$ تا $T_۲$ افزایش می‌یابد. نمودار فشار، P بر حسب دما، T در این فرآیند مطابق شکل زیر است.

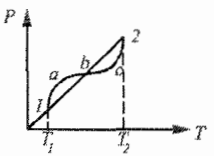


نمودار گرمای داده شده به گاز Q، بر حسب T شبیه کدام یک از نمودارهای زیر است؟

(هفدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



حل. **راه حل اول:** از فصل ۶ به یاد داریم که در نمودار فرآیندهای حجم ثابت در مختصات $P-T$ به صورت خط راستی هستند که از مبدأ عبور می‌کنند و هر چه حجم کمتر باشد، شیب خط بیشتر می‌شود. بنابراین فرآیندی که گاز در این مسأله انجام می‌دهد را می‌توان به ۴ قسمت مطابق شکل زیر تقسیم کرد. چون ΔW نماد کار انجام شده توسط سیستم روی محیط است؛ لذا:



فرآیند $a-1$ منقبض شونده $\Delta W_{1a} < 0$

فرآیند $a-b$ منبسط شونده $\Delta W_{ab} > 0$

فرآیند $b-c$ منبسط شونده $\Delta W_{bc} > 0$

فرآیند $c-2$ منبسط شونده $\Delta W_{c2} > 0$

به کمک قانون اول و رابطهٔ (۷-۱۲) داریم:

$$\Delta Q = C_V \Delta T + \Delta W \qquad (1)$$

از رابطهٔ (۱) می‌توان دریافت که اگر جملهٔ ΔW نبود، رابطه بین ΔQ و ΔT به صورت خط می‌شد مثل جواب (هـ) اما چون جملهٔ ΔW وجود دارد و در مرحلهٔ $a-1$ ($\Delta W < 0$) است پس مقدار Q که در هر دمایی در مرحله $a-1$ باید زیر خط $\Delta Q = C_V \Delta T$ قرار گیرد لذا گزینه‌های (الف) و (ج) و (هـ) نادرست هستند، از طرفی در نقطهٔ a چون تمام کارهای منفی را از خط $C_V \Delta T$ کم کردیم لذا در نقطهٔ a در دورترین فاصله نسبت به خط $\Delta Q = C_V \Delta T$ و زیر آن قرار داریم. بنابراین گزینهٔ (د) نیز نادرست است زیرا در حالت a، این حالت را روی خط $\Delta Q = C_V \Delta T$ قرار داده است. پس گزینهٔ (ب) صحیح است.

راه حل دوم: اگر مشتق بلد هستید بسم‌ا...

قانون اول ترمودینامیک را به صورت دیفرانسیلی می‌نویسیم:

$$dQ = dU + dW = C_V dT + pdV \qquad (1)$$

از قانون گاز کامل $PV = nRT$ دیفرانسیل می‌گیریم:

$$pdV + VdP = nRdT \qquad (۲)$$

$$(۲) \text{ و } (۱) \Rightarrow dQ = C_V dT + (nRdT - VdP)$$

$$\Rightarrow dQ = (C_V + nR)dT - VdP = C_P dT - VdP$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dT} = C_P - V\frac{dP}{dT} \qquad (۳)$$

می‌دانیم کمیت $\frac{dQ}{dT}$ برابر شیب خط مماس بر نمودار $Q-T$ و کمیت $\frac{dP}{dT}$ شیب خط مماس بر نمودار $P-T$ است. پس هر جا شیب نمودار $P-T$ به بالاترین مقدار خود در طول فرآیند می‌رسد، با توجه به رابطهٔ (۳) باید در آن دما شیب نمودار $Q-T$ به کمترین مقدار خود برسد و برعکس یعنی هر جا شیب نمودار $P-T$ می‌نیمم شود (در طول فرآیند از T_1 تا T_2) در آن دما شیب نمودار $Q-T$ ماکزیمم مقدار را خواهد داشت. نمودار $P-T$ در دماهای T_1 و T_2 بیشترین مقدار شیب را دارد پس شیب نمودار $Q-T$ در این دماها باید کمترین مقدار را داشته باشد.

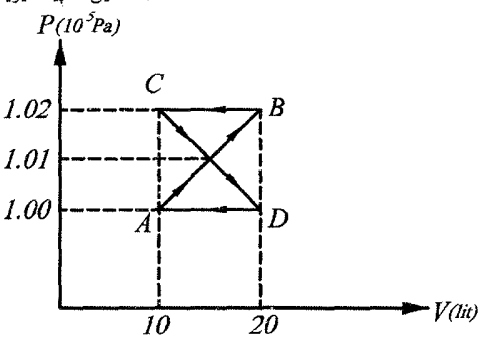
گزینهٔ (ه) نادرست است چون شیب نمودار ثابت است.

گزینه‌های (الف) و (ج) نادرست هستند چون در دمای T_1 بالاترین شیب را دارند.

گزینهٔ (د) نیز نادرست است چون در دمای T_2 بیشترین شیب را دارد.

۹) گاز کاملی فرآیندی به شکل زیر و در مسیر $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow A$ طی می کند. کل گرمایی که در این فرآیند به این گاز داده می‌شود چه‌قدر است؟

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $-۲۰\ J$ ب) $-۱۰\ J$ ج) صفر د) $۱۰\ J$ ه) $۲۰\ J$

حل. اگر نقطهٔ تقاطع دو مربع را O بنامیم می‌توان این فرآیند چرخه‌ای را به صورت مجموع دو فرآیند $A \longrightarrow O \longrightarrow D \longrightarrow A$ و $O \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow O$ در نظر گرفت. از طرفی در هر فرآیند کار انجام شده برابر مساحت داخل مثلث مربوط به هر یک می‌باشد با این تفاوت که چون در مثلث AOD فرآیند در جهت عقربه‌های ساعت است، کار مثبت و در مثلث BOC کار منفی است چون مساحت دو مثلث نیز با هم برابرند لذا کل کار برابر صفر می‌شود.

از طرفی می‌دانیم در یک چرخه $\Delta U = 0$ است بنابر قانون اول داریم:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0$$

گزینه «ج» صحیح است.

۱۰) به مقداری گاز کامل در فشار ثابت P گرمای Q می‌دهیم. گرمای ویژهٔ مولی این گاز در فشار ثابت c_{MP}، گرمای ویژهٔ مولی این گاز در حجم ثابت c_{MV} و ثابت عمومی گازها R است. تغییر حجم این گاز طی این فرآیند چه‌قدر است؟

(هجدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $\frac{RQ}{P\,c_{MP}}$ ب) $\frac{RQ}{P\,c_{MV}}$ ج) $\frac{Q}{P}$ د) $\frac{RQ}{P\,(R + c_{MP})}$

حل. با استفاده از رابطه (۷ – ۲۲) داریم:

$$Q = n\,c_{MP}\,\Delta T \qquad (1)$$

بر اساس مدل گاز کامل در فشار ثابت داریم:

$$P\,\Delta V = n\,R\,\Delta T \;\Rightarrow\; n\,\Delta T = \frac{P\,\Delta V}{R} \qquad (2)$$

$$(2)\,,\,(1) \;\Rightarrow\; Q = c_{MP}\,(\frac{P\,\Delta V}{R}) \;\Rightarrow\; \Delta V = \frac{RQ}{P\,c_{MP}}$$

گزینهٔ «الف» صحیح است.

۱۱) مقداری گاز کامل در یک ظرف است. جرم گاز ثابت است. در فشار ثابت، دمای این گاز کم می‌شود. گرمای داده شده به این گاز را با Q، و تغییر انرژی درونی این گاز را با ΔU نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

(نوزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)

الف) $Q < \Delta U < 0$ ب) $Q < 0 < \Delta U$ ج) $0 < Q < \Delta U$

د) $0 < \Delta U < Q$ هـ) $\Delta U < 0 < Q$ و) $\Delta U < Q < 0$

حل. با توجه به مدل گاز کامل $PV = \frac{m}{M}\,R\,T$ و با ثابت بودن m و P و کم شدن T می‌توان گفت که حجم گاز نیز کم می‌شود لذا $\Delta V < 0$ در نتیجه مقدار کار برابر است با:

$$W = P\,\Delta V < 0$$

از طرفی می‌دانیم انرژی درونی گاز U تابعی از دما است و با توجه به رابطه (۷ – ۲۱) با کاهش دما U نیز کاهش می‌یابد در نتیجه $\Delta U < 0$. حال از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad \Delta W < 0\;,\;\Delta U < 0$$

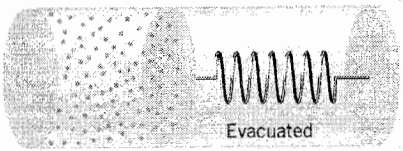
$$\Rightarrow\; \Delta Q < \Delta U < 0$$

گزینه «الف» صحیح است.

۱۲) یک ظرف مطابق شکل با یک پیستون نفوذناپذیر به دو قسمت تقسیم شده است.در طرف چپ مقداری گاز کامل است. بین دیوارهٔ راست ظرف و پیستون هم یک فنر هست. دیواره‌های بیرونی ظرف صلب و نارسانای گرمایند. دو فرآیند در نظر می‌گیریم.در فرآیند اول پیستون و فنر را از وضعیت اولیه رها می‌کنیم تا مجموعه به حالت تعادل برسد. طی این فرآیند، تغییر دمای گاز (دمای نهایی منهای دمای اولیه) ΔT_1 است. در فرآیند دوم،

پیستون و فنر را از همان وضعیت اولیه رها می‌کنیم، اما طی فرآیند فنر در می‌رود (آزاد می‌شود.) تغییر دمای گاز طی این فرآیند $\Delta T_۲$ است. کدام گزینه درست است؟

(نوزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحلهٔ ۱)



الف) $\Delta T_۲ > \Delta T_۱$ ب) $\Delta T_۲ = \Delta T_۱$ ج) $\Delta T_۲ < \Delta T_۱$

حل. برای این مسأله دو وضعیت قابل فرض است:

الف) در ابتدا فنر به صورت فشرده باشد.

ب) در ابتدا فنر بدون تغییر طول باشد.

وضعیت الف: در فرآیند اول با رها کردن پیستون، حجم گاز کم می‌شود بنابراین با توجه به اینکه نماد ΔW کار انجام شده توسط سیستم روی محیط است در نتیجه $\Delta W < ۰$ می‌شود. چون دیوارها نارسانای گرما هستند پس $\Delta Q_۱ = ۰$ است. به کمک قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta Q_۱ = \Delta U_۱ + \Delta W_۱ \Rightarrow \Delta U_۱ = -\Delta W_۱ > ۰$$

به کمک رابطهٔ (۷-۱۲) می‌توان نوشت:

$$\Delta U_۱ > ۰ \rightarrow \Delta U_۱ = C_v \Delta T_۱ > ۰ \Rightarrow \Delta T_۱ > ۰ \qquad (۱)$$

در فرآیند دوم چون فنر در می‌رود در اثر فشار گاز، حجم گاز زیاد شده لذا $\Delta W_۲ > ۰$ می‌شود. مشابهاً $\Delta Q_۲ = ۰$ بنابراین:

$$\Delta Q_۲ = \Delta U_۲ + \Delta W_۲ \Rightarrow \Delta U_۲ = -\Delta W_۲ < ۰$$

$$\Delta U_۲ < ۰ \rightarrow \Delta U_۲ = C_V \Delta T_۲ < ۰ \Rightarrow \Delta T_۲ < ۰ \qquad (۲)$$

$$(۱) \Rightarrow \Delta T_۱ > \Delta T_۲ \text{ و } (۲)$$

گزینهٔ (ج) صحیح است.

• دقت: با توجه به اینکه هر دو فرآیند به صورت غیر تعادلی هستند لذا نمی‌توان برای محاسبهٔ کار از نمودار $P - V$ یا فرمولهای ارائه شده در این فصل استفاده کرد.

وضعیت ب: این وضعیت را نیز مطرح کردیم تا نشان دهیم گزینهٔ (الف) نیز می‌تواند جواب باشد. هنگامی که پیستون رها می‌شود در هر دو فرآیند حجم زیاد شده در نتیجه $\Delta W_۱, \Delta W_۲ > ۰$. اما به نظر شما کار در کدام فرآیند بیشتر است؟ باز متذکر می‌شویم چون هر دو فرآیند به صورت سریع و غیر تعادلی صورت می‌گیرند لذا کمک گرفتن از نمودار $P - V$ یا فرمول نادرست است. اما می‌توان حالت خاصی را در نظر گرفت، حالتی که جرم پیستون کم باشد تا بتوان از آن صرف‌نظر کرد. در این صورت در فرآیند دوم (فنر آزاد می‌شود) چون نیروی مقاومی در برابر حرکت وجود ندارد لذا فرآیند به صورت انبساط آزاد است، پس $\Delta W_۲ = ۰$ و $\Delta U_۲ = ۰$. در نتیجه:

$$\Delta U_۲ = C_V \Delta T_۲ = ۰ \Rightarrow \Delta T_۲ = ۰ \qquad (۱)$$

اما در فرآیند اول گاز کار انجام می‌دهد و آن جمع کردن فنر است، پس $\Delta W_۱ > ۰$. به کمک قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta Q = \Delta U_۱ + \Delta W_۱ \quad , \quad \Delta Q_۱ = ۰ \Rightarrow \Delta U_۱ = -\Delta W_۱ < ۰$$

$$\Delta U_۱ = C_V \Delta T_۱ < ۰ \Rightarrow \Delta T_۱ < ۰ \qquad (۲)$$

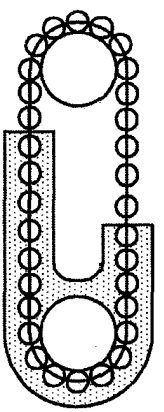
$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \Delta T_۲ > \Delta T_۱$$

لذا گزینهٔ (الف) صحیح است.

۱۱.۷ قانون دوم ترمودینامیک

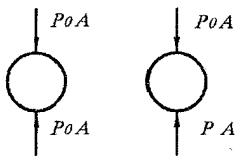
قانون اول ترمودینامیک رؤیای ساختن ماشینی که بدون انرژی بتواند به طور دائم کار کند را نقش بر آب کرد. مثال‌های زیادی از این نوع ماشین‌ها وجود دارد که در گذشته دور بر روی آنها مطالعه شده است. در وهله اول فکر می‌کنیم ماشین بدون نیاز به انرژی تا ابد کار می‌کند اما به دلیل قانون اول ترمودینامیک (قانون پایستگی انرژی) نباید این چنین باشد.

لذا باید به دنبال دلیلی برای کار نکردن آن باشیم. به عنوان مثال ماشین شکل زیر را در نظر بگیرید.



در محفظه‌ای u شکل که یک شاخه آن بزرگتر از شاخه دیگر است مایعی می‌ریزیم. این مخزن دارای دو دریچه است که زنجیره‌ای از توپ‌های متصل به هم می‌توانند از دریچه سمت راست وارد و از دریچه سمت چپ خارج شوند. (دریچه سمت راست طوری طراحی شده که به طور اتوماتیک از خروج آب جلوگیری می‌کند) حال با توجه به اینکه توپ‌های شاخه سمت چپ داخل مایع بیشتر از توپ‌های شاخه سمت راست داخل مایع هستند در نتیجه نیروی شناوری که به سمت چپ زنجیره وارد می‌شود بیشتر از سمت راست آن است و موجب می‌گردد که زنجیره در جهت عقربه‌های ساعت شروع به گردش نماید. یعنی ماشینی که می‌تواند بدون نیاز به انرژی

برای ما کار انجام دهد. به نظر شما چه دلیلی وجود دارد تا باعث کار نکردن این ماشین بشود؟ به نظر شما این ماشین مثال نقضی برای قانون اول به حساب نمی آید؟ شکی به دل راه ندهید. ماشین هیچ وقت به کار نمی‌افتد و قانون اول همیشه پیروز است. دلیل آن این است که به دلیل اختلاف ارتفاع دریچه‌ها، فشار زیر دریچه سمت راست بیشتر از فشار زیر دریچه سمت چپ است. حال دو توپ در نظر بگیرید که یکی از دریچه سمت راست در حال ورود و دیگری از دریچه سمت چپ در حال خروج است. نیروهایی که به این دو توپ وارد می‌شوند در شکل زیر نمایان است.



همانطور که ملاحظه می‌شود چون سطح آب دریچه سمت چپ در مجاورت هوا است فشار وارد بر دو طرف توپ یکسان است اما برای دریچه سمت راست فشار زیر توپ برابر است با $P = P_0 + \rho g h$ (h اختلاف ارتفاع دو دریچه می‌باشد) که بزرگتر از P_0 است. لذا نیروی وارد بر توپ سمت راست بزرگتر از نیروی وارد بر توپ سمت چپ است. که این اختلاف نیرو دقیقاً با اختلاف نیروهای شناوری در دو طرف زنجیره برابر است. لذا دستگاه به حرکت نمی‌افتد.

در طول سالیان متمادی دانشمندان به این تجربه رسیدند که بعضی از ماشین‌ها هستند که قانون اول را نقض نمی‌کنند اما عملاً به کار نمی‌افتند، لذا بر اساس این تجربیات قانون دوم بنیان نهاده شد. می‌توان گفت وقتی یک ماشین می‌تواند عملاً کار کند که همزمان قانون اول و دوم را برآورده سازد. قبل از بیان قانون دوم ابتدا لازم است که موتور گرمایی و یخچال بررسی شوند.

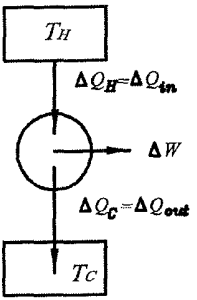
۱۲.۷ موتور گرمایی و یخچال

هر وسیله‌ای که با استفاده از انرژی گرمایی کاری انجام دهد، موتور گرمایی (یا موتور حرارتی) نامیده می‌شود. از جمله این موتورها می‌توانیم ماشین‌های بخار، موتورهای بنزینی و دیزلی را نام ببریم. در اینجا چند ویژگی مشترک در تمام انواع این موتورها را بررسی می‌کنیم.

ماشین‌های گرمایی برای آنکه به کار بیفتند، به یک منبع گرما نیاز دارند. موتورهای بنزینی از سوخت بنزین استفاده می‌کنند. گرمای حاصل از سوختن بنزین، گازی پر فشار در سیلندر موتور ایجاد می‌کند. این گاز پیستون را به حرکت در می‌آورد. در نتیجه موتور می‌تواند کار انجام دهد. سرانجام گاز انبساط یافته که ضمناً سردتر شده است، از سیلندر به خارج فرستاده می‌شود. این گاز خروجی هنوز هم کمی گرم است و بنابراین مقداری از گرما بدین طریق از موتور خارج می‌شود. (همین گرمای خروجی است که موجب می‌شود تا قسمت‌های مختلف اگزوز اتومبیل به شدت داغ شوند.) اگر موتورهای حرارتی گوناگون را بررسی کنیم، همه آنها در این ویژگی‌ها مشترکند.

به علت همین شباهت در انواع موتورهای گرمایی، اصول کار همه آنها را می‌توان در یک نمودار خلاصه کرد. شکل زیر چنین نموداری را نشان میدهد. این نمودار، نکات زیر را درباره

انواع موتورها تداعی می‌کند.



۱. یک منبع گرما با دمای بالا که منبع گرم نامیده می‌شود، در دمای T_H مقدار گرمای ورودی ΔQ_H را تأمین می‌کند.

۲. موتور با انجام کار مکانیکی ΔW بخشی از انرژی ورودی را به مصرف می‌رساند.

۳. باقیمانده انرژی گرمایی، ΔQ_C، به یک منبع با دمای پایین T_C به نام منبع سرد، وارد می‌شود.

دز این صورت، با استفاده از قانون پایستگی انرژی می‌توان نتیجه گیری کرد که:

$$\Delta W = \Delta Q_H - \Delta Q_C = \Delta Q_{in} - \Delta Q_{out}$$

یکی از مهم‌ترن ویژگی‌های هر موتوری بازده آن است. بازده نشان می‌دهد که چه مقدار از انرژی ورودی کار مفید انجام داده است. بازده یک موتور را، مانند همه ماشین‌ها، چنین تعریف می‌کنیم:

$$\text{بازده} = \frac{\text{کار خروجی}}{\text{انرژی ورودی}}$$

همان‌گونه که در شکل مشخص شده است، انرژی ورودی، ΔQ_H، و کار خروجی ΔW است. بنابراین داریم:

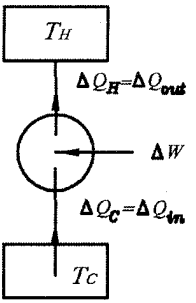
$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_H} = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{in}}$$

با توجه به $\Delta W = \Delta Q_H - \Delta Q_C$ خواهیم داشت:

$$\eta = \frac{\Delta Q_H - \Delta Q_C}{\Delta Q_H} = 1 - \frac{\Delta Q_C}{\Delta Q_H} = 1 - \frac{\Delta Q_{out}}{\Delta Q_{in}} \qquad (۲۴-۷)$$

این معادله گویای نکته‌ای مهم است. هرچه کسر انرژی دفع شده (نسبت به انرژی ورودی) کوچکتر باشد، بازده موتور نیز بیشتر است. خواهیم دید که مقدار ΔQ_C، حتی برای یک موتور کامل نیز، هرگز نمی‌تواند برابر صفر شود. از این رو هرگز نمی‌توان موتوری با بازده ۱، یا بازده ۱۰۰ درصد ساخت.

یخچال، یک ماشین گرمایی است که در جهت عکس کار می‌کند. به این صورت که گرما را از جسم سرد به جسم گرم منتقل می‌کند. همانطور که شکل شماتیک یخچال نشان داده شده است، محیط با انجام کار ΔW بر روی دستگاه، موجب می‌شود که گرمای ΔQ_C از منبع سرد (محتویات درون یخچال) گرفته شود و گرمای ΔQ_H را به منبع گرم (هوای بیرون یخچال که در قسمت پشت یخچال قرار دارد) انتقال دهد، از قانون پایستگی انرژی داریم:



$$\Delta Q_{out} = \Delta Q_H = \Delta W + \Delta Q_C$$

حال از نظر اقتصادی بهترین یخچال، یخچالی است که با انجام کار کم‌تر گرمای بیشتری را از درون یخچال به بیرون منتقل کند. ضریب عملکرد یخچال به صورت نسبت گرمای گرفته شده از منبع سرد به کاری که موتور یخچال انجام می‌دهد، تعریف می‌شود. در نتیجه

$$K = \frac{\Delta Q_C}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_{in}}{\Delta W} \qquad (۲۵ - ۷)$$

نکته ۱: هرچه ضریب عملکرد یخچال بیشتر باشد، استفاده از آن مقرون به صرفه‌تر است.

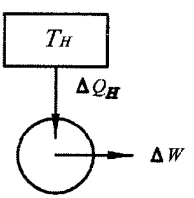
نکته ۲: در یخچال، هدف سرد کردن محیط است اما اگر هدف گرم کردن محیط باشد، آنگاه ماشین مورد نظر را پمپ گرمایی می‌نامیم. مثل دستگاه‌های تهویه مطبوعی (کولر گازی) که در خانه استفاده می‌شود. این دستگاه‌ها در زمستان از محیط سرد بیرون حرارت گرفته و با انجام کار روی آن حرارت بیشتری را به محیط داخل خانه منتقل می‌کنند. بنابراین با توجه به شکل شماتیکی که برای یخچال کشیدیم می‌توان ضریب عملکرد پمپ گرمایی را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$K' = \frac{\Delta Q_H}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_{out}}{\Delta W} \qquad (۲۶ - ۷)$$

قانون دوم ترمودینامیک هم، مانند قانون اول، بیانگر یک واقعیت تجربی است. این قانون را به چند طریق هم‌ارز می‌شود بیان کرد. ما در اینجا دو بیان از این قانون را مطرح می‌کنیم.

۱- قانون دوم ترمودینامیک به بیان موتور گرمایی

نمی‌توان دستگاهی ساخت که در چرخه‌ای عمل کند و تمام گرمای (انرژی) جذب شده را تماماً به کار تبدیل کند.



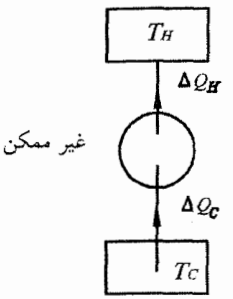
غیر ممکن

این بیان به بحث موتور گرمایی ارتباط دارد و نشان می‌دهد که نمی‌توان موتور گرمایی ساخت که بازده گرمایی آن ۱۰۰٪ باشد. بنابراین دستگاه شکل فوق غیر ممکن است که اجرا شود.

۲- قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی

غیر ممکن است وسیله‌ای بسازیم که در چرخه‌ای عمل کند و اثری غیر از انتقال گرما از جسم سرد به جسم گرم نداشته باشد. (گرما به خودی خود از جسم سرد به جسم گرم منتقل نمی‌شود)

این بیان به یخچال یا پمپ گرمایی مربوط می‌شود و بدان معنی است که ساخت یخچالی که بدون کار ورودی گرما را منتقل کند، غیر ممکن است. بنابراین ساخت یخچال به صورت شکل زیر محال است.



نکته: این دو بیان هم ارز هم هستند یعنی درستی یا نادرستی هر گزاره دلیل بر درستی یا نادرستی گزاره دیگر است.

سؤال محک ۱: یک بخاری برقی ۱۰۰ واتی و یک یخچال (پمپ گرمایی) ۱۰۰ واتی در اختیار داریم. کدامیک از این دو، خانه را بیشتر گرم می‌کنند؟ بخار برقی یا یخچال؟

جواب: می‌دانیم بخاری برقی با گرفتن انرژی (از طریق برق) به میزان $100J$ در هر ثانیه آن را به حرارت تبدیل کرده و این گرما را وارد خانه می‌کند. بنابراین حداکثر حرارتی که بخاری وارد می‌کند $100J$ بر ثانیه است اما یخچال ۱۰۰ واتی (با توجه به شکل شماتیک آن) ۱۰۰ ژول بر ثانیه انرژی می‌گیرد و بعلاوه، مقداری گرما (ΔQ_C) نیز از محیط بیرون گرفته و مجموع آن را $\Delta Q_H = 100 + \Delta Q_C$ وارد خانه می‌کند. هرچند که در زمستان ΔQ_C بسیار کوچک است اما به هر حال عددی بزرگتر از صفر است. پس یخچال خانه را بیشتر گرم می‌کند.

سؤال محک ۲: اگر درب یخچالی را که در اتاق در حال کار کردن است باز کنیم، آنگاه دمای اتاق

۱) کم می‌شود ۲) ثابت می‌ماند. ۳) زیاد می‌شود.

جواب: در ابتدا هوای سرد یخچال با هوای اتاق مخلوط شده و دما کمی پایین می‌آید. اما با گذشت زمان (با توجه به شکل شماتیک یخچال) یخچال گرمای $\Delta Q_H = \Delta W + \Delta Q_C$ را وارد اتاق می‌کند که ΔW کار انجام شده توسط پمپ یخچال و ΔQ_C گرمای گرفته شده در مکان‌های نزدیک به محفظه یخچال است. بنابراین یخچال از یک طرف از هوای اتاق گرمای ΔQ_c را می‌گیرد و از پشت یخچال (در قسمت لوله‌های سیاهرنگ پشت یخچال) گرمای $\Delta W + \Delta Q_C$ را پس می‌دهد. بنابراین دمای اتاق افزایش می‌یابد.

سؤال محک ۳: می‌دانیم بین هر دو منبع با دماهای مختلف می‌توان یک موتور گرمایی قرار داد و با گرفتن ΔQ_H از منبع گرم بخشی از آن را به کار ΔW تبدیل کرد. بنابراین با توجه به اختلاف دما بین هوا و لایه‌های آب در اعماق اقیانوس می‌توان یک موتور گرمایی در کشتی‌ها طراحی کرد بطوریکه انرژی مورد نیاز برای حرکت کشتی را تأمین کند. پس چرا امروزه از این طرح در حرکت کشتی‌ها استفاده نمی‌شود؟

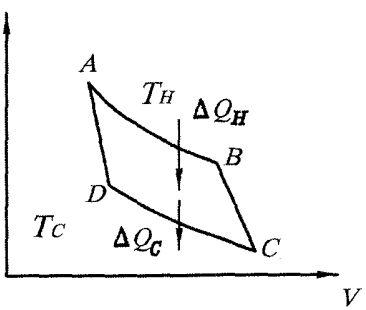
جواب: از نظر تئوری (قانون اول و دوم ترمودینامیک) هیچ مشکلی در این طرح دیده نمی‌شود اما از فصل ۳ و ۴ بیاد داریم که میزان انتقال گرما ΔQ_H بستگی به اختلاف دمای دو منبع دارد. هرچقدر این اختلاف دما کمتر باشد ΔQ_H نیز کمتر است. بنابراین چون اختلاف دمای بین هوا و آب اقیانوس تنها به چند درجه محدود می‌شود، لذا انرژی لازم برای حرکت کشتی در مدت زمان سفر کشتی تأمین نخواهد شد.

نکته: می‌دانیم گرما از جسم با دمای بالا به جسم با دمای پایین منتقل می‌شود. بنابراین بعد از مدت زمان طولانی دمای تمام اجسام موجود در عالم یکسان می‌شود که اصطلاحاً می‌گویند عالم دچار گرمامرگی شده است. لذا در این وضعیت بین منبع گرم و سرد تفاوتی نیست. در نتیجه، هیچ ماشین یا موتور گرمایی توانایی انجام کار را ندارد.

۱۳.۷ چرخهٔ کارنو

موتورهایی که با استفاده از گرما کار می‌کنند، بازده‌شان خیلی با هم متفاوت است. معمولاً بازده موتورهای دیزل از موتورهای بنزینی بیشتر است. موتورهای بنزینی، بازده شان، به نوبه خود، از ماشین‌های بخار بیشتر است. توجه به این نکته مفید خواهد بود که بازده یک موتور کامل تا چه اندازه می‌تواند باشد. در آغاز ممکن است چنین به نظر برسد که بازده یک موتور کامل باید واحد باشد. اما این تصور حقیقت ندارد. حتی اگر هیچگونه اصطکاک و اتلاف گرمایی ناخواسته ای نیز در میان نباشد، باز هم بازده ماشین حرارتی نمی‌تواند ۱۰۰ در صد باشد. سادی کارنو (Sadi carnout) نخستین کسی بود که این نکته را به روشنی متذکر شد.

کارنو موتور گرمایی کاملی را در نظر گرفت که آن را به نام ماشین کارنو می‌شناسیم. او با بررسی نظری خود ثابت کرد که بازده هیچ موتوری نمی‌تواند از بازده این ماشین کامل بیشتر شود. نمودار مشخصه این چرخه نیز که به چرخه کارنو موسوم است، در شکل زیر نشان داده شده است. اکنون عملکرد این ماشین ایده‌آل را بررسی می‌کنیم.



در قسمت AB از چرخه، گاز به آهستگی انبساط می‌یابد. این گاز با یک منبع گرم تماس گرمایی دارد. این انبساط چنان انجام می‌شود که دمای گاز ثابت می‌ماند. پس قسمت AB از چرخه هم‌دماست. در خلال این انبساط، مقداری گرما وارد سیستم می‌شود که آن را با ΔQ_i نشان می‌دهیم.

در قسمت BC از چرخه، گاز به طور بی دررو انبساط می‌یابد. گاز از لحاظ گرمایی، عایق بندی شده است و بنابراین هیچ تبادل گرمایی صورت نمی‌گیرد. گاز، در طی انبساط در قسمت‌های AB و BC، کار انجام می‌دهد. در خلال همین قسمت‌های چرخه است که موتور کار مفید انجام می‌دهد.

در قسمت CD از چرخه، گاز به طور هم‌دما متراکم می‌شود. برای ثابت ماندن دما در طی این قسمت، سیستم باید با یک منبع سرد در تماس گرمایی باشد. در خلال این قسمت از چرخه، سیستم مقداری گرما به منبع سرد می‌دهد که آن را با ΔQ_C نشان می‌دهیم.

در قسمت DA از چرخه، گاز به طور بی دررو متراکم می‌شود. در این قسمت، گرمایی مبادله نمی‌شود. در هر دو قسمت CD و DA، یک نیروی خارجی باید باعث تراکم شده، پس در طی این قسمتها بر روی سیستم کار انجام می‌شود.

چنانکه در بخش قبل دیدیم، مساحت سطح محصور در نمودار $P-V$ مفهوم فیزیکی دارد. این مساحت با کار مفیدی که موتور در طی چرخه انجام می‌دهد، برابر است. بعلاوه، بازده موتور را هم می‌توان از معادله (۷-۲۴) بدست آورد:

$$\eta = 1 - \frac{\Delta Q_C}{\Delta Q_H}$$

کارنو توانست نکته مهمی را در مورد نسبت $\Delta Q_C/\Delta Q_H$ به اثبات برساند. او نشان داد که این نسبت با نسبت T_C/T_H برابر است. T_C دمای مطلق منبع سرد و T_H دمای مطلق منبع گرم است. بنابراین بالاترین بازده ممکن برای ماشین‌های حرارتی چنین بدست می‌آید.

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_c}{T_H}$$

با توجه به مضمون این رابطه معلوم می‌شود تا زمانی که $T_C > 0$ باشد، بازده موتور لزوماً کمتر از ۱۰۰ درصد خواهد بود. این شرط، محدودیت موتورها را در عمل نشان می‌دهد.

ماشین کارنو، بیشترین بازده و حداکثر کارایی ممکن را در میان موتورهای گرمایی داراست. دمای منبع گرم هرچه داغتر (T_H زیاد) و منبع سرد هرچه سردتر (T_C کم) باشد، بازده ماشین بهتر می‌شود. در مورد موتورهای حرارتی دیگر، این بدان معنی است که گاز (یا شاره‌های) محرک باید خیلی داغ، و گاز (یا شاره)های خروجی باید خیلی سرد باشند.

در عمل، متأسفانه بیشتر موتورها در دمای خروجی نزدیک به دمای جو کار می‌کنند. دمای گاز محرک را نیز نحوه طراحی موتور تعیین خواهد کرد. در مورد ماشین بخار، دمای محرک T_H همان دمای بخار آب ورودی است. در مورد موتورهای بنزینی، دمای T_H همان دمای احتراق بنزین است. چنانکه می‌بینیم، T_H و T_c را به آسانی نمی‌توان به مقدار زیاد تغییر داد.

ادعای کاذب

اگر شخصی ادعا کند که ماشینی ساخته که می‌تواند بین دو دمای مشخص کار کند و بازده ماشین او بالاتر از ماشین کارنو است، ادعای کذب کرده است.

مثال: یک ماشین فرضی از ترکیب ماشین گرمایی A، و یخچال B بوجود آمده است که هر دو بین دو چشمه ۱ و ۲ (با دماهای T_1, T_2) کار می‌کنند. T_1 بیشتر از T_2 است. ماشین A طی هر چرخه $20J$ گرما از چشمه ۱ می‌گیرد. ۱۵ J ازآن را به کار تبدیل می‌کند و بقیه را به شکل گرما به چشمه ۲ می‌دهد. یخچال B طی هر چرخه از چشمه ۲، ۱۰ J گرما می‌گیرد. ۱۵ J کار هم می‌گیرد و مجموع را به شکل گرما به چشمه ۱ می‌دهد. کدام گزینه درباره این ماشین فرضی مرکب درست است؟

الف) ساخت چنین ماشینی ممکن است.

ب)ساخت چنین ماشینی ممکن نیست؛ چون قانون اول ترمودینامیک نقض می‌شود.

ج) ساخت چنین ماشینی ممکن نیست؛ چون قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.

(پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران مرحله ۱)

حل: ماشین A، ۲۰ J گرما از منبع گرم می‌گیرد و ماشین B بر اساس پایستگی انرژی ۱۵ + ۱۰ = ۲۵ ژول گرما به همان منبع می‌دهد. پس در کل ماشین مرکب ۵ J گرما به منبع گرم می‌دهد. از طرفی ماشین A بر اساس پایستگی انرژی ۱۵ − ۲۰ = ۵ ژول گرما به منبع سرد می‌دهد و ماشین B، ۱۰ ژول گرما از همان منبع می‌گیرد. لذا ماشین مرکب ۵ ژول گرما از منبع سرد گرفته است. ماشین A، ۱۵ ژول کار انجام می‌دهد و ماشین B، ۱۵ ژول کار می‌گیرد. در نتیجه کل کار ماشین مرکب برابر صفر است یعنی این ماشین بدون کار ۵ J گرما از منبع سرد گرفته و آن را به منبع گرم داده است. یعنی قانون دوم به بیان یخچالی را نقض کرده است. گزینه «ج» صحیح است.

مثال: در کدامیک از حالات زیر بازده چرخه کارنو بیشتر است؟

۱) دمای منبع گرم را به میزان ΔT افزایش دهیم.

۲) دمای منبع سرد به همان میزان کاهش دهیم. (کتاب ایرودف)

حل: با توجه به رابطه (۷-۲۷) داریم:

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

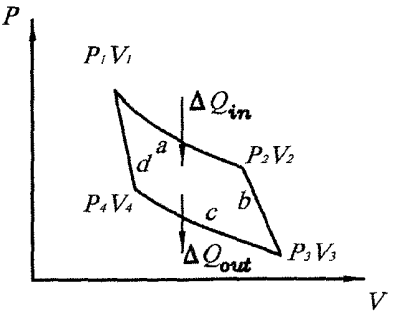
$$\eta_1 = 1 - \frac{T_C}{T_H + \Delta T} = \frac{T_H + \Delta T - T_C}{T_H + \Delta T} \qquad (1)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_C - \Delta T}{T_H} = \frac{T_H - T_C + \Delta T}{T_H} \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow \eta_1 < \eta_2$$

مثال: هیدروژن را به عنوان یک سیال کاری در چرخه کارنو استفاده می‌کنیم.
بازده چرخ را بیابید به شرطی که در فرآیند انبساط بی‌دررو
الف) حجم گاز n=2 برابر شود.
ب) فشار گاز $\frac{1}{n}$، $(n = 2)$ برابر شود.

(کتاب ایرودف)



حل: با توجه به فرآیندهای چرخه کارنو داریم:

$$T_1 = T_2 \rightarrow P_1V_1 = P_2V_2 \qquad (1)$$

$$T_3 = T_4 \rightarrow P_3V_3 = P_4V_4 \qquad (2)$$

با توجه به بی دررو بودن فرآیندهای d, b به کمک رابطه (۷-۴) داریم:

$$P_2V_2^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} \qquad (3)$$

$$P_1V_1^{\gamma} = P_4V_4^{\gamma} \qquad (4)$$

الف) در این حالت داریم $V_3 = nV_2$ و به کمک رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$P_3 = P_2n^{-\gamma} \qquad (5)$$

$$V_3 = nV_2 \text{ و } (5) \text{ و } (2) \text{ از } \rightarrow P_4V_4 = P_3V_3 = P_2V_2n^{1-\gamma} = P_1V_1n^{1-\gamma}$$

$$\rightarrow P_4V_4 = P_3V_3 = P_1V_1n^{1-\gamma} \qquad (6)$$

$$(6) \text{ از تقسیم } (4) \text{ بر } \rightarrow \frac{P_4V_4^{\gamma}}{P_4V_4} = \frac{P_1V_1^{\gamma}}{P_1V_1n^{1-\gamma}} \rightarrow V_4^{\gamma-1} = n^{\gamma-1}V_1^{\gamma-1}$$

$$\rightarrow V_4 = nV_1 \qquad (7)$$

با توجه به اینکه فرآیندهای a, c دما ثابت هستند، لذا در این فرآیندها $\Delta U = 0$ است.
حال به کمک قانون اول ترمودینامیک داریم $\Delta Q = \Delta W$. از طرفی به کمک رابطه (۷-۳) داریم:

$$\Delta Q_{in} = \Delta W_a = P_2V_2ln(\frac{V_2}{V_1}), \Delta Q_{out} = \Delta W_c = -P_3V_3ln(\frac{V_3}{V_4})$$

از رابطه $V_3 = nV_2$ و (۷) داریم:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (8)$$

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{out}|}{\Delta Q_{in}} = 1 - \frac{P_3V_3\ln(\frac{V_3}{V_4})}{P_2V_2\ln(\frac{V_2}{V_1})}$$

$$\text{از (۱) و (۶) و (۸)} \rightarrow \eta = ۱ - \frac{P_۲V_۲n^{۱-\gamma}}{P_۲V_۲} = ۱ - n^{۱-\gamma}$$

ب) در این حالت:

$$P_۳ = \frac{P_۲}{n}$$

$$P_۲V_۲^{\gamma} = P_۳V_۳^{\gamma} = \frac{P_۲}{n}V_۳^{\gamma} \rightarrow V_۳ = n^{۱/\gamma}V_۲$$

بنابراین مشابه حالت قبل است. با این تفاوت که حجم $V_۳$ به جای اینکه n برابر $V_۲$ باشد، $n^{۱/\gamma}$ برابر $V_۲$ است. پس:

$$\eta = ۱ - (n^{۱/\gamma})^{۱-\gamma} = ۱ - n^{۱/\gamma - ۱}$$

مثال: یک ماشین گرمایی با داشتن چرخه کارنو دارای بازده $\eta = ۱۰\%$ است که به عنوان یک ماشین سرد کننده (یخچال) مورد استفاده قرار می‌گیرد. بطوریکه منابع حرارتی برای هر دو حالت یکسان‌اند. مطلوب است ضریب عملکرد یخچال. (کتاب ایرودف)

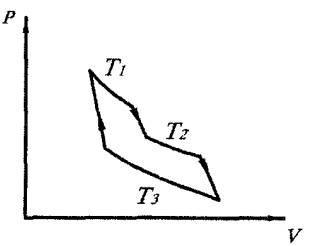
حل: به کمک رابطه (۷-۲۵) داریم:

$$K = \frac{\Delta Q_C}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_C}{\Delta Q_H - \Delta Q_C} = \frac{\Delta Q_C/\Delta Q_H}{۱ - \frac{\Delta Q_C}{\Delta Q_H}}$$

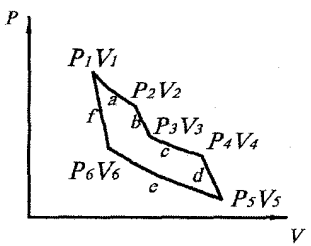
از طرفی بازده ماشین گرمایی برابر است با $\eta = ۱ - \frac{\Delta Q_C}{\Delta Q_H}$:

$$\rightarrow \frac{\Delta Q_C}{\Delta Q_H} = ۱ - \eta \rightarrow K = \frac{۱-\eta}{\eta} = \frac{۱ - \frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۱۰}} = ۹$$

مثال: گاز کاملی چرخه‌ای مطابق شکل زیر می‌پیماید. چرخه به طور یکی در میان شامل منحنی‌های دما ثابت و بی‌دررو است. فرایندهای دما ثابت به ترتیب در دماهای $T_۳, T_۲, T_۱$ انجام می‌شوند. مطلوب است بازده چرخه به شرطی که در انبساط‌های هم دمای $T_۲, T_۱$ نسبت افزایش حجم به یک میزان باشد. (کتاب ایرودف)



حل: با توجه به فرض



$$V_۲ = \alpha V_۱ \rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \alpha$$

$$V_۴ = \alpha V_۳ \rightarrow \frac{V_۴}{V_۳} = \alpha \qquad (۱)$$

در فرآیندهای دما ثابت T_1، T_2، کل گرمای ΔQ_{in} به گاز داده می‌شود. چون دما ثابت است، لذا در هر یک از این دو فرآیند $\Delta U = 0$ می‌شود، حال به کمک قانون اول ترمودینامیک برای هر فرآیند داریم: $(\Delta Q_{in})_a = \Delta W_a$ $\quad (\Delta Q_{in})_b = \Delta W_b$

به کمک رابطه (۷-۳) داریم:

$$\Delta W_a = P_1 V_1 \ln(\frac{V_2}{V_1}) = P_1 V_1 \ln\alpha = nRT_1 \ln\alpha \qquad (۲)$$

$$\rightarrow (\Delta Q_{in})_a = nRT_1 \ln\alpha \qquad (۳)$$

به طور مشابه داریم:

$$(\Delta Q_{in})_b = \Delta W_b = nRT_2 \ln\alpha \qquad (۴)$$

در نتیجه کل حرارت داده شده به گاز برابر است با:

$$\Delta Q_{in} = (\Delta Q_{in})_a + (\Delta Q_{in})_b = nR(T_1 + T_2)ln\alpha \qquad (۵)$$

فرآیندهای e, d, b بی‌دررو هستند. لذا به کمک رابطه (۷-۴ ب) داریم:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \rightarrow V_3 = (\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}} V_2 \qquad (۶)$$

دقت کنید که دمای حالت ۲ با حالت ۱ برابر و مساوی T_1 است و همچنین دمای حالت ۳ با حالت ۴ برابر و مساوی T_2 است. به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$V_5 = (\frac{T_2}{T_3})^{\frac{1}{\gamma-1}} V_4 \quad , \quad V_1 = (\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 \qquad (۷)$$

در فرآیند e، حرارت ΔQ_{out} از گاز به محیط اطراف داده می‌شود. مشابه رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$|\Delta Q_{out}| = nRT_2 ln(\frac{V_5}{V_6}) \qquad (۸)$$

$$(۷) \text{ از } \rightarrow \frac{V_5}{V_6} = \frac{(\frac{T_2}{T_3})^{\frac{1}{\gamma-1}} V_4}{(\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{V_4}{V_1}$$

$$(۱) \text{ از } \rightarrow \frac{V_5}{V_6} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\alpha V_2}{V_2/\alpha} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\alpha^2 V_2}{V_2}$$

$$(۶) \text{ از } \rightarrow \frac{V_5}{V_6} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{1}{\gamma-1}} (\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}} \alpha^2 = \alpha^2$$

$$\rightarrow |\Delta Q_{out}| = nRT_2 \ln\alpha^2 = 2nRT_2 \ln\alpha \qquad (۹)$$

$$(۹),(۵) \text{ از } \rightarrow \eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{out}|}{\Delta Q_{in}} = 1 - \frac{2nRT_2 \ln\alpha}{nR(T_1 + T_2)\ln\alpha} = 1 - \frac{2T_2}{T_1 + T_2}$$

۱۴.۷ مسائل تکمیلی فصل هفتم

با ارسال حل تشریحی نیمی از مسائل به آدرس mottaghi@sharif.edu حل کلیه مسائل به آدرس شما فرستاده می‌شود.

۱) مخزن‌های ۱ و ۲ عایق گرما هستند و از هوا پر شده‌اند. این دو مخزن را توسط یک لوله کوتاه همراه با یک شیر به هم متصل می‌کنیم. حجم، دما و فشار مخزن‌ها معلوم می‌باشند. $(T_۲, P_۲, V_۲ \quad , \quad T_۱, P_۱, V_۱)$. مطلوب است دما و فشار دو مخزن بعد از باز کردن شیر. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: اگر مجموع دو گاز را به عنوان سیستم در نظر بگیریم. $\Delta Q = \Delta W = ۰$ (دقت کنید چون گاز ایده‌آل است لذا بر هم کنش مولکولهای یک گاز بر روی گاز دیگر صفر است. پس $\Delta W = ۰$) از قانون اول $\Delta U = ۰$ است. به کمک قانون گاز کامل و رابطه (۷-۲۱) می‌توان به جواب رسید.

جواب: $$T = T_۱T_۲\frac{P_۱V_۱ + P_۲V_۲}{P_۱V_۱T_۲ + P_۲V_۲T_۱} \quad , \quad P = \frac{P_۱V_۱ + P_۲V_۲}{V_۱ + V_۲}$$

۲) در ابتدا گاز هیدروژن تحت شرایط استاندارد در یک مخزنی به حجم $V = ۵lit$ نگهداری می‌شود. سپس دمای مخزن را به میزان $\Delta T = ۵۵K$ سرد می‌کنیم. مطلوب است تغییر انرژی داخلی و مقدار حرارتی که گاز از دست داده است. (نسبت ظرفیت‌های گرمایی γ مفروض است.) (کتاب ایرودف)

راهنمایی: از قانون اول ترمودینامیک و رابطه (۷-۲۴) استفاده کنید.

جواب: $$\Delta U = \Delta Q = \frac{P_۰V\Delta T}{T_۰(\gamma - ۱)}$$

۳) دو مول از یک گاز ایده‌آل مشخص در دمای $T_۰ = ۳۰۰K$ به صورت هم حجم سرد شده تا اینکه فشار گاز $(K = ۲)\frac{۱}{K}$ فشار اولیه گردد. سپس گاز طی یک فرآیند هم‌فشار منبسط می‌شود تا اینکه دمای آن به دمای اولیه برسد. مطلوب است مقدار حرارتی که گاز در این فرآیند جذب کرده است. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: از قانون گاز کامل، قانون اول ترمودینامیک و رابطه (۷-۲۴) استفاده کنید. در هر فرآیند گرمای جذب شده را حساب کرده و با هم جمع کنید.

جواب: $$\Delta Q = \Delta Q_۱ + \Delta Q_۲ = nRT_۰(۱ - \frac{۱}{K})$$

۴) $n_۱ = ۲$ مول از گاز اکسیژن را با $n_۲ = ۳$ مول از گاز دی‌اکسید کربن مخلوط می‌کنیم. با فرض اینکه گازها به صورت ایده‌آل باشند، مطلوب است محاسبه مقدار $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ برای مخلوط دو گاز $(\gamma_۲, \gamma_۱$ برای هر دو گاز معلوم هستند.) (کتاب ایرودف)

راهنمایی: $\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{C_P}{C_V}$ و $C_{MV} = \frac{R}{\gamma - ۱}$ و رابطه (۷-۲۴) و $U = U_۱ + U_۲$، $n = n_۱ + n_۲$

جواب: $\gamma = \frac{n_۱\gamma_۱(\gamma_۲ - ۱) + n_۲\gamma_۲(\gamma_۱ - ۱)}{n_۱(\gamma_۲ - ۱) + n_۲(\gamma_۱ - ۱)}$

۵) $n = ۳$ مول از گاز ایده‌آلی با دمای اولیه $T_۰ = ۲۷۳K$ به صورت هم‌دما منبسط شده تا حجم آن $K = ۵$ برابر حجم اولیه‌اش گردد. سپس به صورت هم‌حجم به آن حرارت می‌دهیم تا فشار حالت نهایی آن برابر با فشار حالت اولیه گاز شود.
مقدار کل حرارتی که طی این فرآیند به گاز داده می‌شود برابر $Q = ۸۰kJ$ است. مطلوب است محاسبه نسبت $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ برای این گاز. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: از قانون اول و قانون گاز کامل و رابطه‌های (۷-۳) و (۷-۲۱) استفاده کنید.

جواب: $\gamma = ۱ + \frac{k - ۱}{\frac{Q}{nRT_۰} - \ln k}$

۶) جرم معینی از گاز نیتروژن تا $\frac{۱}{k}(k = ۵)$ حجم اولیه‌اش متراکم می‌شود. ابتدا به صورت بی‌دررو و سپس به صورت هم‌دما، در هر مورد، حالت اولیه گاز یکسان است. مطلوب است نسبت کار در فرآیند بی‌دررو به کار در فرآیند هم‌دما (γ نیتروژن معلوم فرض می‌شود.)

(کتاب ایرودف)

راهنمایی: از قانون اول ترمودینامیک و رابطه (۷-۳) و قانون گاز کامل و همچنین از رابطه (۷-۴) استفاده کنید.

جواب: $\frac{\Delta W_{\text{بی‌دررو}}}{\Delta W_{\text{هم‌دما}}} = \frac{K^{\gamma - ۱} - ۱}{(\gamma - ۱)\ln k}$

۷) مطلوب است ظرفیت گرمای ویژه مولی یک گاز ایده‌آل در فرآیند (ثابت $= PV^a$) اگر نسبت ظرفیت‌های گرمایی ویژه مولی در فشار ثابت به حجم ثابت برابر γ باشد. به ازای چه مقادیری از a، ظرفیت گرمایی گاز منفی می‌شود؟ (کتاب ایرودف)

راهنمایی: از قانون اول ترمودینامیک و روابط (۷-۲) و (۷-۲۲) استفاده کنید.
قرار دهید: $n = ۱$ و $\Delta T = ۱$

جواب: $C_{MP} = \frac{R(a - \gamma)}{(a - ۱)(\gamma - ۱)}$ و به ازای $۱ < n < \gamma$ منفی می‌شود.

۸) گاز ایده‌آلی طبق رابطه $P = \beta V$ منبسط می‌شود (β عدد ثابتی است.)
اگر حجم اولیه آن $V_۰$ باشد در اثر انبساط حجم آن k برابر می‌شود. مطلوب است.
الف) افزایش انرژی داخلی گاز
ب) کار انجام شده توسط گاز
ج) ظرفیت گرمایی ویژه مولی گاز در این فرآیند اگر γ معلوم باشد.

(کتاب ایرودف)

راهنمایی: از روابط (۷-۲) و (۷-۲۲) و مسأله قبل استفاده کنید.

جواب: الف) $\Delta U = \frac{\beta(kV_\circ)^2 - \beta V_\circ^2}{\gamma - 1}$ ب) $\Delta W = \frac{1}{2}\beta V_\circ^2(k^2 - 1)$

ج) $C_{MP} = \frac{R}{2}(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1})$

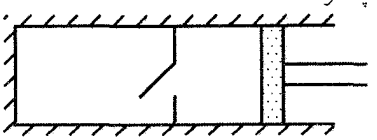
۹) ظرفی از گاز نامعینی پر شده است. برای بالا بردن دمای ۱ kg از این گاز به اندازه $1^\circ C$ تحت فشار ثابت نیاز به $907/8J$ گرما است. همچنین برای افزایش دما به میزان $1^\circ C$ برای همان $1kg$ تحت شرایط حجم ثابت باید به میزان $648/4J$ گرما دهیم. مطلوب است جرم مولکولی این گاز.

(آمادگی برای المپیاد فیزیک کانادا ۲۰۰۴)

راهنمایی: از روابط (۷-۲۱) و (۷-۲۲)، قانون اول ترمودینامیک و قانون گاز کامل استفاده کنید.
و داریم $c_P - c_V = \frac{R}{M}$ و $R = 8/314$

جواب: $M = \frac{R}{c_P - c_V} = 32/0 \times 10^{-3} Kg/mol$

۱۰) مخزنی عایق گرما از گاز هلیم پر شده است. مطابق شکل پیستونی در سمت راست مخزن و دریچه‌ای داخل مخزن قرار دارد. دریچه هنگامی باز می‌شود که فشار سمت راست بیشتر از فشار سمت چپ گردد.



سطح مقطع پیستون مربع شکل و برابر $A = 100cm^2$ است. مکان اولیه پیستون به نحوی است که طول قسمت چپ و راست با هم برابر و مساوی $L_i = 112cm$ می‌باشد. در شروع آزمایش $m_1 = 12gr$ هلیم در سمت چپ و $m_2 = 2gr$ هلیم در سمت راست دریچه قرار دارد و دمای اولیه برابر $T_i = 0^\circ C$ و فشار خارجی برابر $P_\circ = 10^5 Pa$ می‌باشد. ظرفیت‌های گرمایی ویژه فشار ثابت و دما ثابت به ترتیب برابر $c_P = 5/25 \times 10^3 J/kg.K$, $c_V = 3/15 \times 10^3 J/kg.K$ می‌باشند. فرض کنید آزمایش به صورت زیر انجام شود.

پیستون به آرامی به داخل مخزن هل داده شده با یک توقف کوتاه (هنگامی که دریچه باز می‌شود) تا اینکه پیستون به دریچه برسد.

مطلوب است کار نیروی خارجی وارد بر پیستون با صرف نظر از اصطکاک

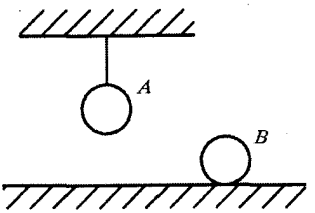
(دومین المپیاد بین‌المللی ۱۹۶۸)

(آمادگی برای المپیاد فیزیک- کانادا ۲۰۰۳)

راهنمایی: از قانون اول ترمودینامیک، قانون گاز کامل و روابط (۷-۴)، (۷-۴ ب) و (۷-۱۲) استفاده کنید.

جواب: $\Delta W = C_V(m_1+m_2)T_i\left\{\ \frac{m_1}{m_1+m_2}[1+(\frac{m_2}{m_1})^{\frac{1}{\gamma}}]^{\gamma}-1\ \right\}-P_oAl_i$

۱۱) به دو توپ یکسان A ,B با ترکیب یکنواخت که در دمای اولیه یکسان T هستند، گرمای مساوی داده می‌شود. با این تفاوت که توپ A از سقف آویزان شده و توپ B روی سطح قرار دارد. با صرف نظر از اتلاف گرما از توپ‌ها به محیط اطراف و با فرض اینکه دمای نهایی دو توپ بعد از عمل حرارت به ترتیب برابر T_B, T_A باشند، کدام گزینه صحیح است؟



الف) $T_A < T_B$ ب) $T_A > T_B$ ج) $T_A = T_B$ د) $T_A \leq T_B$

(المپیاد بین‌المللی ۱۹۶۷)

(آمادگی برای المپیاد فیزیک کانادا ۱۹۹۸)

(مسابقات CAP کانادا ۲۰۰۴)

راهنمایی: با افزایش درجه حرارت، حجم دو کره زیاد شده در نتیجه مرکز ثقل کره‌ها جابجا می‌شود. با این تفاوت که مرکز ثقل کره A در جهت جاذبه جابجا می‌شود ولی دیگری در خلاف جهت جاذبه. بنابراین بخشی از گرمای داده شده به کره B صرف انجام کار (بالا بردن مرکز ثقل) می‌شود. در نتیجه .....

جواب: گزینه «ب» صحیح است.

۱۲) چرخه‌ای شامل دو فرآیند هم‌حجم و دو فرایند بی‌دررو است. اگر حجم گاز کاملی در این چرخه n برابر تغییر کند، مطلوب است بازده چرخه (کتاب ایرودف)

راهنمایی: در فرآیندهای هم‌حجم به گاز گرما داده و گرفته می‌شود که $\Delta Q = \Delta U = C_V\Delta T$. از رابطه (۷-۴) نیز استفاده کنید.

جواب: $\eta = 1 - n^{1-\gamma}$

۱۳) چرخه‌ای شامل دو فرآیند هم‌فشار و دو فرآیند بی‌دررو است. اگر فشار در چرخه به میزان n برابر تغییر کند، و گازی که چرخه را می‌پیماید به صورت کامل در نظر گرفته شود، بازده چرخه را بیابید. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: رابطه (۷-۱۴) یعنی $\Delta Q = C_P\Delta T$ و رابطه (۷-۴) را به کار ببرید.

جواب: $\eta = 1 - n^{\frac{1}{\gamma}-1}$

۱۴) گاز کاملی در چرخه‌ای شامل دو فرآیند هم‌حجم و دو فرآیند هم فشار حرکت می‌کند. مطلوب است بازده چرخه به شرطی که دمای گاز در فرآیند هم‌حجمی که گرما داده می‌شود و در فرایند انبساط هم‌فشار به میزان n برابر افزایش یابد. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: گرمای داده شده و گرفته شده از گاز را از روابط (۷-۱۲) و (۷-۱۴) بدست آورید.

جواب: $\eta = ۱ - \frac{n+\gamma}{۱+n\gamma}$

۱۵) گاز کاملی در یک چرخه حرکت می‌کند که شامل ۳ فرآیند

الف) هم‌حجم، بی‌دررو و هم‌دما

ب) هم‌فشار، بی‌دررو و هم‌دما

است. بطوریکه فرآیند هم‌دما، کمترین دما را در کل چرخه داراست. مطلوب است بازده چرخه به شرطی که دمای گاز به میزان n برابر در سیکل تغییر کند. (کتاب ایرودف)

راهنمایی: از روابط (۷-۳) و (۷-۴) و (۷-۴ ب) و قانون اول ترمودینامیک استفاده کنید. ($C_V = \frac{nR}{\gamma - ۱}$)

جواب: الف) $\eta = ۱ - \frac{\ln n}{n-۱}$ ب) $\eta = ۱ - \frac{\ln n}{n-۱}$

فصل ۸

سؤال‌های دوره‌های اخیر

۱.۸ مرحلهٔ اول بیستمین المپیاد فیزیک

۱) یک ماده را در فشار ثابت گرم می‌کنیم. گرمایی که این ماده می‌گیرد را با Q و تغییر انرژی درونی آن را با ΔU نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

الف) حتماً $Q < \Delta U$

ب) حتماً $Q = \Delta U$

ج) حتماً $Q > \Delta U$

د) اگر ضریب انبساط حجمی این ماده مثبت باشد $Q < \Delta U$

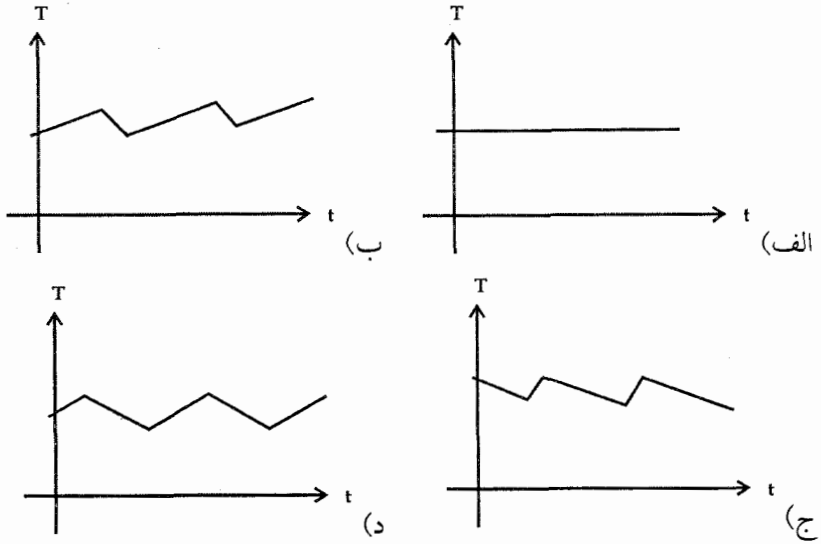
ه) اگر ضریب انبساط حجمی این ماده مثبت باشد $Q > \Delta U$

حل. می‌دانیم

$$\Delta Q = \Delta U + W$$
$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

اگر ضریب انبساط حجمی ماده مثبت است، آنگاه با دادن گرما حجم زیاد می‌شود ولذا $\Delta V > 0$ درنتیجه $P\Delta V > 0$. از طرفی چون به این ماده گرما داده شده است، لذا $\Delta Q > 0$. بنابراین ΔQ برابر جمع دو عدد مثبت است و بالطبع از هر کدام از آن‌ها بزرگتر خواهد بود، لذا $\Delta Q > P\Delta V$ و $\Delta Q > \Delta U$؛ درنتیجه گزینه «ه» صحیح است.

۲) در یک ظرف تمیز با دیواره‌های صاف، آب به‌طور یکنواخت نمی‌جوشد. پدیده‌ای که دیده می‌شود این است که اگر ظرف را به‌طور یکنواخت گرم کنیم، به مدت کوتاهی حباب‌های بزرگی از بخار تولید می‌شوند، بعد ظرف مدتی از جوشش می‌افتد. سپس دوباره حباب‌های بزرگی تولید می‌شوند و این روند ادامه می‌یابد. نمودار T (دمای آب چنین ظرفی) برحسب t (زمان) کدام است؟



حل. واضح است با تشکیل حباب و بزرگ شدن آن‌ها بخشی از گرمای آب به حباب داده می‌شود. بنابراین دمای آب به‌طور لحظه‌ای و به اندازهٔ مختصری پایین می‌آید. بعد از از بین رفتن حباب، مجدداً گرمای داده شده صرف بالا رفتن دمای آب می‌شود. لذا در مدت زمان طولانی‌تری دمای آب بالا می‌رود تا مجدداً حباب تشکیل شود. بنابراین نمودار «ب» صحیح است.

۳) زمین در گذشتهٔ دور داغ‌تر از حالا بوده است. یک جسم به دمای T با توان $\sigma T^4 S$ انرژی از دست می‌دهد، که S مساحت سطح بیرونی جسم و σ یک ثابت است. در یک تقریب، می‌شود σ را $۶ \times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{W/m^2K^4}$ گرفت. فرض کنید زمین از بیرون انرژی نمی‌گرفته، دمای آن یکنواخت بوده، و فقط از طریق سطح بیرونیش انرژی از دست می‌داده. آهنگ از دست دادن انرژی متغیر است، اما می‌شود نشان داد اگر دمای اولیه (T_i) بسیار بزرگ‌تر از دمای نهایی (T_f) باشد، میانگین توان $۳\sigma T_i T_f^3 S$ است. شعاع زمین $۶۴۰۰\ \mathrm{km}$، و چگالی میانگین زمین $۵۵۰۰\ \mathrm{kg/m^3}$ است. گرمای ویژهٔ زمین را $۱۰۰۰\ \mathrm{J/kgK}$ بگیرید. با این فرض‌ها، چه مدتی لازم است تا زمین بسیار داغ شود و به دمای $۴۰۰\ \mathrm{K}$ برسد؟

الف) $۱۰^۹$ s ب) $۱۰^{۱۲}$ s ج) $۱۰^{۱۵}$ s د) $۱۰^{۱۸}$ s

حل. می‌دانیم آهنگ از دست دادن انرژی (توان متوسط) برابر است با

$$\begin{aligned}\bar{P} &= ۳\sigma T_i T_f^۴ S \\ &= ۳ \times (۶ \times ۱۰^{-۸})(T_i)(۴۰۰)^۴ (۴\pi(۶۴۰۰ \times ۱۰^۳)^۲) \\ &= ۵/۹۲ \times ۱۰^{۱۵} T_i\end{aligned}$$

از طرفی کل گرمای از دست رفته برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta Q = \bar{P}\Delta t \quad &\Rightarrow \quad mC\Delta T = \bar{P}\Delta t \\ &\Rightarrow \quad \bar{P}\Delta t = \rho\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right) C\Delta T \\ &\qquad = ۵۵۰۰\left(\frac{۴}{۳}\pi \times (۶۴۰۰ \times ۱۰^۳)^۳\right) \\ &\qquad \times ۱۰۰۰(T_i - ۴۰۰)\end{aligned}$$

چون دمای اولیه بسیار بالا است، لذا $T_i - ۴۰۰ \simeq T_i$؛ بنابراین

$$۵/۹۲ \times ۱۰^{۱۵} T_i t = ۶/۰۳ \times ۱۰^{۲۷} T_i \Rightarrow t \simeq ۱۰^{۱۲}\ \mathrm{s}$$

۴) می‌دانیم برای همهٔ مواد گرمای ویژه در فشار ثابت از گرمای ویژه در حجم ثابت بزرگ‌تر است. یک ماده را در نظر بگیرید که ضریب انبساط حجمی آن در فشار ثابت منفی است. دمای این ماده را در فشار ثابت از $T_۱$ به $T_۲$ افزایش می‌دهیم. بعد دمای همین ماده را در حجم ثابت از $T_۲$ به $T_۱$ برمی‌گردانیم. تغییر کل انرژی درونی این ماده را با ΔU نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

الف) $\Delta U < ۰$

ب) $\Delta U = ۰$

ج) $\Delta U > ۰$

د) مواردی هست که $\Delta U < ۰$، و مواردی هست که $\Delta U > ۰$

حل. در این مسأله دو فرآیند رخ داده است که به کمک قانون اول داریم $\Delta Q_۱ = \Delta U_۱ + W_۱$ و $\Delta Q_۲ = \Delta U_۲ + W_۲$ حال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\text{در حالت اول (فشار ثابت)} \quad T_۲ > T_۱ \quad \Rightarrow \quad \Delta V < ۰, W_۱ < ۰, \\ &\qquad\qquad \Delta Q_۱ = mC_P(T_۲ - T_۱) \\ &\text{در حالت دوم (حجم ثابت)} \quad T_۲ < T_۱ \quad \Rightarrow \quad \Delta V = ۰, W_۲ = ۰, \\ &\qquad\qquad \Delta Q_۲ = mC_V(T_۱ - T_۲)\end{aligned}$$

$$\text{کل}\quad \Delta U = \Delta U_۱ + \Delta U_۲$$
$$= (\Delta Q_۱ - W_۱) + (\Delta Q_۲ - W_۲)$$
$$= m(T_۲ - T_۱)(C_P - C_V) - (W_۱)$$

چون $W_۱ < ۰$ و $C_P > C_V$، لذا $\Delta U > ۰$ خواهد بود.

۵) یک وزنه درون یک شاره سقوط می‌کند. چگالی شاره بسیار کمتر از چگالی وزنه است، چنان که نیروی وارد بر وزنه فقط ناشی از وزن آن و اصطکاک با شاره باشد، در اثر اصطکاک شاره، سرعت این وزنه به یک مقدار ثابت (سرعت حد) می‌رسد. فرض کنید به خاطر این اصطکاک فقط وزنه گرم می‌شود. گرمای ویژهٔ وزنه را ۲۰۰ J/kgK، جرم آن را ۲ kg، شتاب گرانش را ۱۰ m/s^۲، و سرعت حد را ۰٫۷ m/s بگیرید. مشتق دمای این وزنه نسبت به زمان چند میلی کلوین بر ثانیه است؟

حل. هنگامی که وزنه به سرعت حد می‌رسد برآیند نیروهای وارد بر آن برابر صفر است، لذا $mg = f$. اگر کار نیروی اصطکاک صرف گرم کردن جسم شود، آنگاه:

$$\Delta Q = W = f\Delta h \quad \Rightarrow \quad mC\Delta T = f\Delta h$$
$$\Rightarrow \quad mC\frac{\Delta T}{\Delta t} = f\frac{\Delta h}{\Delta t}$$
$$\overset{\text{در حالت حدی}}{\Longrightarrow} \quad mC\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = fV$$
$$\Rightarrow \quad mC\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = mgV$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{gV}{C} = \frac{۱۰ \times ۰٫۷}{۲۰۰} = ۳۵\ \text{mK/s}$$

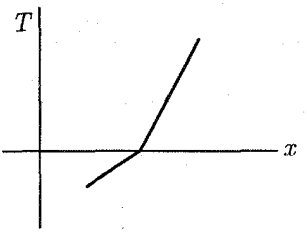
۶) یک بطری پلاستیکی را گرم می‌کنیم تا دمای هوای درون آن ۹۰°C شود. در این حالت در بطری را می‌بندیم، بیشینهٔ اختلاف فشار دو سوی دیوارهٔ این بطری برای اینکه به آن صدمه نخورد ۰٫۲ فشار محیط است. بطری را سرد می‌کنیم. کمینهٔ دمای بطری برای این که به آن صدمه نخورد چند درجهٔ سلسیوس است؟

حل. در حالت اول که درب بطری باز است، فشار بیرون با فشار درون بطری برابر است. این فشار را $P_۰$ می‌نامیم. بعد از بسته شدن درب بطری و سرد کردن آن، فرض کنید فشار درون بطری P شود، می‌دانیم برای اینکه به بطری صدمه نخورد باید $P_۰ - P = ۰٫۲P_۰$ شود، لذا $P = ۰٫۸P_۰$. اگر سیستم را هوای داخل بطری در نظر بگیریم، به کمک قانون گاز کامل داریم:

$$\frac{P_۰V_۰}{T_۰} = \frac{PV_۰}{T} \Rightarrow \frac{P_۰}{۲۷۳ + ۹۰} = \frac{۰٫۸P_۰}{T} \Rightarrow T = ۲۹۰٫۴\ \text{K} \simeq ۱۷°\text{C}$$

۲.۸ مرحلهٔ اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک

۱) سطح یک دریاچه یخ زده است. عمق دریاچه را یکنواخت می‌گیریم و فرض می‌کنیم انتقال گرما بین دریاچه و محیط فقط از سطح و کف دریاچه انجام می‌شود. رسانندگی گرمایی یخ و آب را هم ثابت می‌گیریم. در یک وضعیت نمودار دما (T) برحسب فاصله از سطح دریاچه (x) طبق شکل است. رسانندگی گرمایی یخ را با K_i و رسانندگی گرمایی آب را با K_w نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟



الف) $K_i < K_w$ ب) $K_i = K_w$ ج) $K_i > K_w$

حل. می‌دانیم در مرز لایهٔ یخ و آب، دما صفر است. از طرفی به کمک پایستگی انرژی می‌دانیم گرمای داده شده به یخ از طرف آب در مرز لایهٔ یخ و آب، برابر گرمای گرفته شده توسط یخ در آن مرز است. پس $\Delta Q_w = \Delta Q_i$ و درنتیجه $\frac{\mathrm{d}\,Q_w}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,Q_i}{\mathrm{d}\,t}$. به کمک رابطهٔ انتقال حرارت هدایت می‌دانیم: $K_i A \frac{\mathrm{d}\,T_i}{\mathrm{d}\,x} = K_w A \frac{\mathrm{d}\,T_w}{\mathrm{d}\,x}$. با توجه به شکل، چون شیب نمودار دما برحسب x در آب (روی محوری x) بیشتر از شیب نمودار دما در لایهٔ یخ است، پس $\frac{\mathrm{d}\,T_w}{\mathrm{d}\,x} > \frac{\mathrm{d}\,T_i}{\mathrm{d}\,x}$؛ درنتیجه از تساوی و نامساوی فوق داریم $K_w < K_i$.

۲) چگالی یک مایع تابع فشار آن است، به این شکل که $\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = \frac{P-P_0}{B}$. در اینجا ρ چگالی در فشار P، ρ_0 چگالی در فشار P_0، و B پارامتری به اسم مدول کپه‌ای است. برای آب مدول کپه‌ای ۲×۱۰^۹ Pa است. چگالی آب در سطح اقیانوس را با ρ_0، و چگالی آب در عمق ۱۰ km را با ρ نشان می‌دهیم. $\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$ چقدر است؟

الف) ۰٫۰۰۰۵ ب) ۰٫۰۰۲

ج) ۰٫۰۱ د) ۰٫۰۵

ه) ۰٫۲ و) ۱

حل. برای درک بهتر فرمول مدل کپه‌ای بهتر است یک برآوردی از اعداد داشته باشیم. به‌طور معمول در سطح اقیانوس فشار همان فشار اتمسفر و برابر $P_0 = ۱۰^۵$ Pa و

چگالی آب نیز در آنجا برابر $\rho_۰ = ۱۰۰۰ \text{ kg/m}^۳$ است؛ لذا به کمک مدل کپه‌ای آب داریم:

$$\frac{\rho - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰} = \frac{P - ۱۰^۵}{۲ \times ۱۰^۹} \Rightarrow \rho = \frac{P}{۲ \times ۱۰^۶} + ۱۰۰۰ - ۲ \times ۱۰^{-۴}$$
$$\Rightarrow \Delta\rho = \frac{\Delta P}{۲ \times ۱۰^۶}$$

همان‌طور که از رابطهٔ فوق ملاحظه می‌شود، چون ۲×۱۰^۶ عدد بزرگی است، لذا تغییرات ρ نسبت به تغییرات فشار بسیار کوچک است، بنابراین می‌توان با فرض ثابت بودن ρ، تغییرات فشار را در عمق ۱۰۰۰ km به‌دست بیاوریم؛ درنتیجه

$$P - P_۰ = \rho g h = ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰^۳ = ۱۰^۸ \text{ Pa}$$
$$\Rightarrow \frac{\rho - \rho_۰}{\rho_۰} = \frac{P - P_۰}{B} = \frac{۱۰^۸}{۲ \times ۱۰^۹} = ۰/۰۵$$

۳) دو ماده را در ظرفی در بسته با دیواره‌های نارسانای گرما می‌ریزیم. این دو ماده با هم مخلوط می‌شوند. مشاهده می‌شود در اثر مخلوط شدن دمای مجموعه زیاد می‌شود و از T (پیش از مخلوط شدن) به T' (پس از مخلوط شدن) می‌رسد. کدام گزینه درست است؟

الف) طی این فرآیند انرژی درونی سیستم زیاد شده است.

ب) طی این فرآیند انرژی درونی سیستم کم شده است.

ج) انرژی درونی مخلوط در دمای T، از انرژی درونی مواد اولیه در دمای T کمتر است.

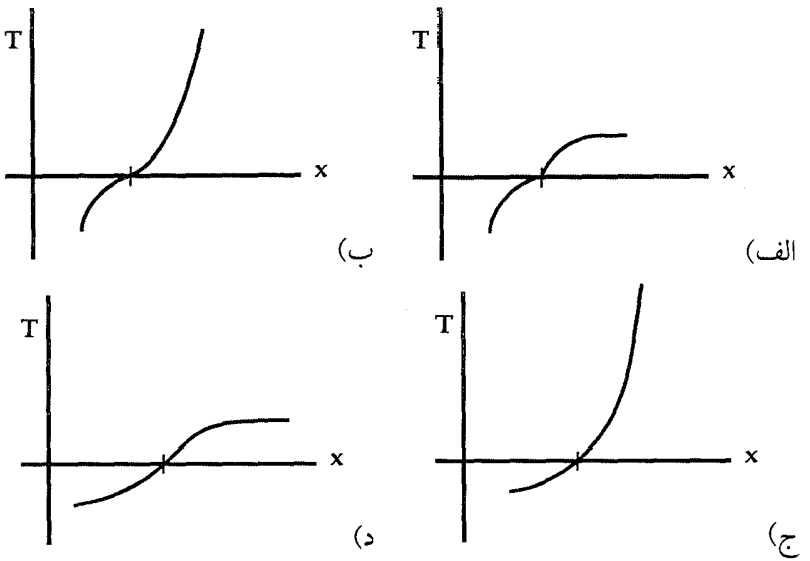
د) انرژی درونی مخلوط در دمای T، از انرژی درونی مواد اولیه در دمای T بیشتر است.

حل. اگر $U_۱$ انرژی درونی مادهٔ ۱، $U_۲$ انرژی درونی مادهٔ ۲ و $U_۳$ انرژی درونی مخلوط باشد، چون در اثر مخلوط کردن به علت دیواره‌های نارسانا گرما به بیرون منتقل نمی‌شود و کاری نیز توسط دو ماده هنگام مخلوط کردن صورت نمی‌گیرد، پس طبق پایستگی انرژی، باید داشته باشیم:

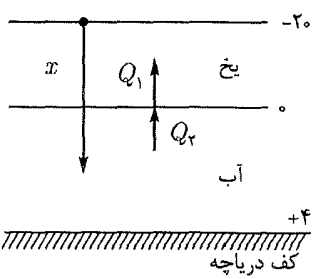
$$U_۱ + U_۲ = U_۳ + Q$$

Q حرارت آزاد شده در اثر مخلوط کردن است. واضح است که $U_۳ < U_۱ + U_۲$. پس انرژی درونی مخلوط کمتر از جمع انرژی درونی مواد اولیه خواهد بود.

۴) سطح یک دریاچه یخ زده است. عمق دریاچه را یکنواخت می‌گیریم و فرض می‌کنیم انتقال گرما بین دریاچه و محیط فقط از سطح و کف دریاچه انجام می‌شود. رسانندگی گرمایی یخ و آب را هم ثابت می‌گیریم. در وضعیتی که کلفتی یخ دریاچه دارد زیاد می‌شود، کدام‌یک از این گزینه‌ها ممکن است نمودار دما (T) برحسب فاصله از سطح دریاچه (x) باشد؟



حل. می‌دانیم آب در دمای ۴ درجهٔ سانتی‌گراد دارای بیشترین چگالی است. پس دمای آب در کف دریاچه برابر ۴ درجه است. دما از کف دریاچه تا سطح لایهٔ یخ (در جهت کاهش x) کاهش می‌یابد؛ بنابراین با افزایش x، باید دما به ۴ درجه میل کند، لذا گزینه‌های «ب» و «ج» نادرست هستند.



از طرفی با توجه به پایستگی انرژی می‌دانیم گرمایی که آب به یخ در مرز آب و یخ می‌دهد، برابر گرمایی است که یخ در آن مرز از آب می‌گیرد. بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}\,Q_1}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,Q_2}{\mathrm{d}\,t}$$

Q_1: قدرمطلق گرمای داده شده توسط آب

Q_2: قدرمطلق گرمای گرفته شده توسط یخ

طبق رابطهٔ انتقال حرارت هدایت $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{kA} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} \cdot k_1 A = \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} \cdot k_2 A$$

چون سطح مقطع تماس برای یخ و آب برابر است و ضریب رسانندگی آب و یخ با هم برابر نیستند ($k_1 \neq k_2$)، لذا $\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} \neq \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x}$. بنابراین در مرز آب و یخ (دمای صفر درجه) شیب نمودار دما برحسب x برای لایهٔ یخ با آب باید متفاوت باشد که این نکته در شکل «الف» لحاظ شده است.

۵) دو مایع A و B را با هم مخلوط می‌کنیم. دیده می‌شود دو محلول ۱ و ۲ ساخته می‌شود که در محلول ۱ نسبت جرم مایع A به جرم کل محلول ۱ برابر x_1 است و در محلول ۲ نسبت جرم مایع A به جرم کل محلول ۲ برابر x_2 است. در یک آزمایش جرم مایع A برابر m_A و جرم مایع B برابر m_B است و داریم

$$\frac{m_B}{m_A} = ۱/۲۵, \quad x_1 = ۰/۴۰, \quad x_2 = ۰/۸۰$$

جرم بخشی از مایع A که محلول ۱ است، چند درصد m_A است؟

حل. اگر جرم کل محلول ۱ را با m_1، جرم کل محلول ۲ را با m_2، جرم مایع A در محلول ۱ را با m_{A_1} و جرم مایع A در محلول ۲ را با m_{A_2} نمایش دهیم، آنگاه

$$\frac{m_{A_1}}{m_1} = x_1, \qquad \frac{m_{A_2}}{m_2} = x_2,$$

$$m_1 + m_2 = m_A + m_B$$

$$\frac{m_B}{m_A} = ۱/۲۵ \Rightarrow m_1 + m_2 = ۲/۲۵ m_A$$

$$\Rightarrow \frac{m_{A_1}}{x_1} + \frac{m_{A_2}}{x_2} = ۲/۲۵ m_A$$

$$\Rightarrow m_{A_1} + m_{A_2} = m_A$$

$$\Rightarrow \frac{m_{A_1}}{x_1} + \frac{m_A - m_{A_1}}{x_2} = ۲/۲۵ m_A$$

$$\Rightarrow m_{A_1}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = \left(۲/۲۵ - \frac{1}{x_2}\right) m_A$$

$$\Rightarrow \frac{m_{A_1}}{m_A} = \frac{۲/۲۵ - \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}} = \frac{1}{۱/۲۵} = ۸۰\%$$

۶) یک جسم در هوا سقوط می‌کند. به خاطر مقاومت هوا، پس از مدتی سرعت این جسم ثابت می‌شود، به این سرعت ثابت، سرعت حد می‌گویند. انرژی تلف شده در

اثر مقاومت هوا فقط صرف گرم شدن جسم می‌شود. درنتیجه جسم گرم‌تر از هوای اطراف می‌شود. جسمی که از هوای اطراف گرم‌تر باشد، انرژی از دست می‌دهد. توانی که این جسم از دست می‌دهد $k(T-T_\circ)$ است که T دمای جسم، $T_\circ$ دمای هوا و k یک ثابت است. در یک آزمایش جرم جسم ۰٫۱۰۰ kg، سرعت حد آن ۱۲٫۰ m/s، و مقدار k برابر ۰٫۲۱۰ W/K است. شتاب گرانش هم ۹٫۸۰ m/s^2 است. در حالتی که T و $T_\circ$ ثابت‌اند و جسم به سرعت حد رسیده $(T-T_\circ)$ چند کلوین است؟

حل. می‌دانیم وقتی جسم به سرعت حد می‌رسد برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است. لذا نیروی وزن با نیروی اصطکاک برابر می‌شود.

$$mg = f$$

توان گرمایی که از طریق اصطکاک ایجاد می‌شود برابر است با

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{f\Delta h}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = mgV = k(T-T_\circ)$$
$$\Rightarrow \quad T - T_\circ = \frac{mgV}{k} = \frac{۰٫۱ \times ۹٫۸ \times ۱۲}{۰٫۲۱} = ۵۶$$

۷) در یک ظرف خالی (که در آن هوا نیست) مقداری آب به جرم m می‌ریزیم و در ظرف را می‌بندیم. حجم ظرف ثابت است، دیواره‌های ظرف نارسانای گرمایند، و دمای اولیهٔ آب $T_\circ$ است. گرمای ویژهٔ آب c، گرمای نهای ویژهٔ تبخیر آب L_V، و جرم مولی آب M است. حجم ظرف V است. از حجم آب در برابر حجم ظرف چشم می‌پوشیم، و بخار آب را گاز کامل می‌گیریم. ثابت جهانی گازها R است. به‌ازای

$$m = ۱٫۰۰ \times ۱۰^{-۳}\ \text{kg}, \qquad P = ۳٫۳۰ \times ۱۰^{۳}\ \text{Pa},$$
$$T = ۳٫۰۰ \times ۱۰^{۲}\ \text{K}, \qquad c = ۴٫۲ \times ۱۰^{۳}\ \text{J/kgK},$$
$$L_V = ۲٫۴ \times ۱۰^{۶}\ \text{J/kg}, \qquad M = ۱٫۸ \times ۱۰^{-۲}\ \text{kg/mol},$$
$$V = ۱٫۰۰ \times ۱۰^{-۳}\ \text{m}^۳,$$
$$R = ۸٫۳۱\ \text{J/mol K}$$

مقدار $(T_\circ - T)$ چند کلوین است؟

حل. چون در ظرف هوایی وجود ندارد، لذا فشار روی سطح آب کمتر از فشار بخار اشباع است و درنتیجه مقداری از آب بخار می‌شود تا فشار روی سطح آب برابر فشار

بخار اشباع گردد. با فرض این که بخار آب، گاز کامل است می‌توان نوشت:

$$PV = nRT = \frac{m_1}{M}RT$$

m_1 جرم بخار آب است.

از طرفی چون دیواره‌ها نارسانا هستند، لذا گرمای داده شده برای تبدیل آب به بخار آب، از آب گرفته شده است، لذا $m_1 L_V = mc(T_0 - T)$. بنابراین

$$T_0 - T = \frac{m_1 L_V}{mc} = \frac{MPVL_V}{mRTc} = ۱۳/۶\ \text{K} \simeq ۱۴\ \text{K}$$

۸) یک میله را در نظر بگیرید که طول آن (ℓ) به دما (T) و فشار وارد بر دو سر آن (P) بستگی دارد:

$$\ell = \ell_0 \left[1 + \lambda(T - T_0) - \frac{P - P_0}{Y}\right]$$

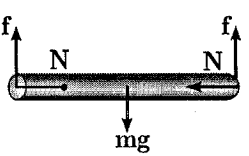
این میله بین دو دیوار عمودی است که فاصله‌هایشان از هم ℓ_0 است. میله بر دیوارها عمود است و ضریب اصطکاک ایستایی بین هر یک از دو سر آن با دیوار μ است. دیده می‌شود در دمای T_1 میله در آستانهٔ لغزش قرار می‌گیرد. شتاب گرانش g، و چگالی میله در دمای T_0 و فشار P_0 برابر $۱/۱۱ \times ۱۰^۴\ \text{kg/m}^3$ است. به‌ازای

$$T_1 - T_0 = ۱۰\ \text{K}, \quad P_0 = ۱/۰۱ \times ۱۰^۵\ \text{Pa}, \quad \ell_0 = ۲/۷۰ \times ۱۰^{-۱}\ \text{m}$$
$$\lambda = ۱۰^{-۶}\ \text{K}^{-۱}, \qquad Y = ۱۰^۹\ \text{Pa}, \qquad g = ۹/۸۰\ \text{m/s}^۲$$

مقدار (۱۰۰μ) چقدر است؟

حل.

$$L = L_0 \quad \Rightarrow \quad L_0 = \ell_0 \left(1 + \lambda(T - T_0) - \frac{P - P_0}{Y}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{P - P_0}{Y} = \lambda(T - T_0) \qquad (۱)$$



با توجه به شکل، $mg = ۲f$ و در آستانهٔ لغزش داریم:

$$mg = ۲\mu N$$

درنتیجه

$$N = \frac{mg}{۲\mu}, P = \frac{N}{A} \Rightarrow P = \frac{mg}{۲\mu A} = \frac{\rho l_{\circ} Ag}{۲\mu A} = \frac{\rho l_{\circ} g}{۲\mu} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

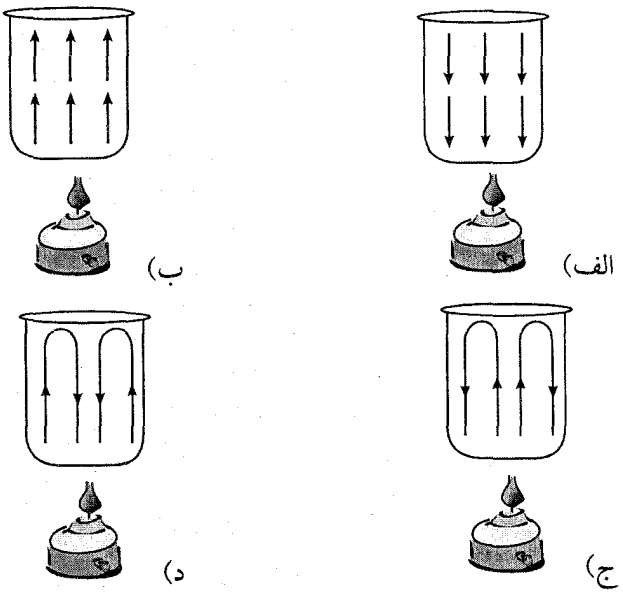
$$P = P_{\circ} + \lambda Y \lambda (T - T_{\circ}) = \frac{\rho L_{\circ} g}{۲\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{\rho \ell_{\circ} g}{۲(P_{\circ} + \lambda Y (T - T_{\circ}))} = \frac{۱/۱۱ \times ۱۰^{۴} \times ۲/۷ \times ۱۰^{-۱} \times ۹/۸}{۲(۱/۰۱ \times ۱۰^{۵} + ۱۰^{-۶} \times ۱۰^{۹} \times ۱۰)}$$

$$\Rightarrow \quad ۱۰۰\mu \simeq ۱۳/۲ \simeq ۱۳$$

۳.۸ مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد فیزیک

۱) مایع داخل یک بشر استوانه‌ای را مطابق شکل با چراغ الکلی به آرامی گرم می‌کنیم. کدام شکل می‌تواند نشان‌دهندهٔ طرح جریان همرفتی در داخل مایع باشد؟



حل. مایعی که درست بالای چراغ است گرم و درنتیجه چگالی آن کم می‌شود، به همین خاطر این مایع به ناچار به سمت بالا حرکت می‌کند. در بالا، مایع، خنک و چگالی آن زیاد می‌شود؛ به همین خاطر از اطراف بشر استوانه‌ای به پایین حرکت می‌کند و جای لایه‌های پایینی را پر می‌کند. گزینهٔ «ج» درست است.

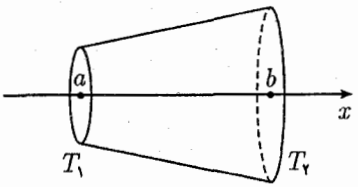
۲) وجوه داخلی یک اتاقک مکعب را با رنگ‌های سفید، خاکستری و سیاه رنگ کرده‌ایم. وجوه یاد شده طی مدت زمانی طولانی با یکدیگر انرژی گرمایی مبادله می‌کنند. پس از این زمان دمای وجوه سفید را T_1، دمای وجوه خاکستری را T_2 و دمای وجوه سیاه را T_3 می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟

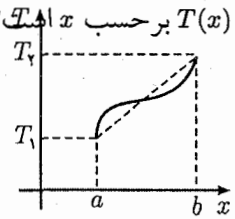
الف) $T_1 = T_2 = T_3$ ب) $T_3 < T_2 < T_1$

ج) $T_1 < T_2 < T_3$ د) $T_1 < T_3 < T_2$

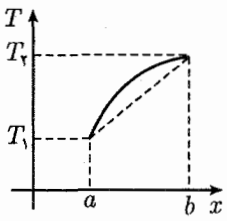
حل. می‌دانیم در مدت زمان طولانی سطوح به تعادل دمایی می‌رسند؛ لذا $T_1 = T_2 = T_3$

۳) یک مخروط ناقص، که زاویهٔ رأس آن کوچک است. رسانای گرما است. مطابق شکل قاعدهٔ این جسم را در دماهای ثابت T_1 و T_2 که $T_2 > T_1$ است قرار می‌دهیم تا گرما در طول آن شارش یابد، طوری که $T(b) = T_2$ و $T(a) = T_1$ است. سطح جانبی مخروط عایق‌پوش شده، طوری که از آن گرما هدر نمی‌رود. در حالت پایا نقطهٔ x روی محور جسم را $T(x)$ می‌نامیم. کدام منحنی نشان‌دهندهٔ رفتار $T(x)$ برحسب x است؟

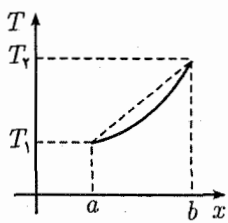




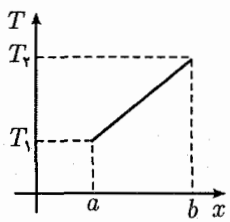
الف)



ب)

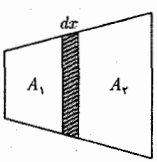


ج)



د)

حل. یک جزء حجم از این مخروط مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم.



چون سطح جانبی مخروط عایق‌بندی شده است، لذا نرخ گرمای عبوری از سطح A_1 برابر نرخ گرمای عبوری از سطح A_2 خواهد بود؛ لذا $\frac{\mathrm{d}\,Q_1}{\mathrm{d}\,t} = \frac{Q_2}{\mathrm{d}\,t}$. به کمک فرمول انتقال حرارت هدایت داریم:

$$kA_1\frac{\mathrm{d}\,T_1}{\mathrm{d}\,x} = kA_2\frac{\mathrm{d}\,T_2}{\mathrm{d}\,x} \;\Rightarrow\; A_1 < A_2 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\,T_1}{\mathrm{d}\,x} > \frac{\mathrm{d}\,T_2}{\mathrm{d}\,x}$$

یعنی با حرکت در جهت x شیب نمودار دما برحسب x باید کاهش یابد؛ لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

۴) هوای داخل لولهٔ باریکی که یک طرف آن بسته است به وسیلهٔ ستونی از جیوه از هوای بیرون جدا شده است. وقتی لوله افقی است، طول هوای محبوس ℓ_1 است و هنگامی که لوله را قائم نگه می‌داریم، طول هوای محبوس در زیر ستون جیوه ℓ_2 است. اگر لوله را از وضعیت قائم به اندازهٔ ۶۰° کج کنیم، طول هوای در زیر جیوه چقدر خواهد شد؟ از چسبندگی جیوه با لوله صرف‌نظر کنید.

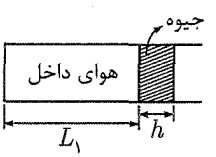
الف) $\frac{\ell_1\ell_2}{\ell_1+\ell_2}$ ب) $\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)$ ج) $\frac{2\ell_1\ell_2}{\ell_1+\ell_2}$ د) $\frac{2\ell_1\ell_2}{\ell_1-\ell_2}$

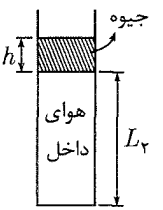
حل. اگر مساحت سطح مقطع لوله A باشد، در حالت افقی وزن جیوه اثری روی فشار هوای محبوس ندارد؛ لذا

$$P_1 = P_0, \qquad V_1 = A\ell_1$$

در حالت قائم فشار هوای محبوس برابر فشار هوای بیرون و فشار جیوه است؛ لذا

$$P_2 = \rho gh + P_0, \qquad V_2 = A\ell_2$$

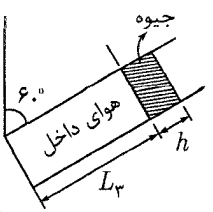




که h ارتفاع جیوه است.

در حالت ۶۰° داریم:

$$P_3 = \rho gh\cos 60^\circ + P_0, \qquad V_3 = n\ell_3$$



با فرض ثابت بودن دما داریم:

$$P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 \quad \Rightarrow \quad P_1V_1 = P_2V_2$$

$$\Rightarrow \quad P_0(\ell_1 A) = (\rho g h + P_0)(\ell_2 A)$$

$$\Rightarrow \quad \rho g h = P_0\left(\frac{\ell_1}{\ell_2} - 1\right) \qquad (1)$$

$$P_1V_1 = P_3V_3 \quad \Rightarrow \quad P_0(\ell_1 A) = (\rho g h \cos 60^\circ + P_0)(\ell_3 A)$$

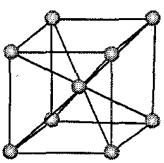
$$\Rightarrow \quad \rho g h \cos 60^\circ = P_0\left(\frac{\ell_1}{\ell_3} - 1\right)$$

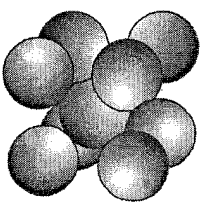
$$\Rightarrow \quad \frac{\rho g h}{2} = P_0\left(\frac{\ell_1}{\ell_3} - 1\right) \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$P_0\left(\frac{\ell_1}{\ell_2} - 1\right) = 2P_0\left(\frac{\ell_1}{\ell_3} - 1\right) \Rightarrow \ell_3 = \frac{2\ell_1\ell_2}{\ell_1 + \ell_2}$$

۵) بسیاری از جامدها ساختار منظم دارند. یکی از این ساختارها شبکهٔ «مکعبی مرکز پُر» است. در این ساختار در هر رأس مکعب و در مرکز مکعب یک اتم است. اتم‌ها را با کره‌های توپر هم‌اندازه جایگزین می‌کنیم. بیشترین کسر حجم داخل مکعب را که می‌توان با کره‌ها یا بخش‌هایی از کره پُر کرد، چقدر است؟

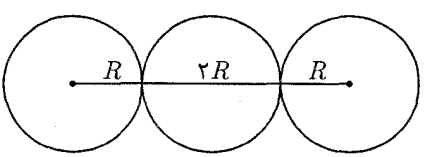




الف) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ ج) $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$ د) $\frac{\pi}{4}$

حل. بیشترین حجم کره در داخل مکعب زمانی است که سه کرهٔ قرار گرفته و در راستای قطر با هم مماس باشند. طول قطر مکعب برابر است با $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$. درنتیجه

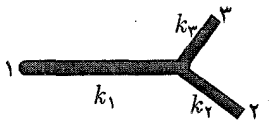
$$d = 4R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$



از طرفی در مکعب به اندازهٔ دو کرهٔ کامل قرار می‌گیرند (یکی در مرکز و ۸ تا $\frac{1}{8}$ در گوشه‌های مکعب). بنابراین

$$\frac{V'}{V} = \frac{۲ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳}{a^۳} = \frac{۸}{۳^۳}\pi \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۴^۳} = \frac{\sqrt{۳}\pi}{۸}$$

۶) سه میله به طول‌های $\ell_۱$، $\ell_۲$ و $\ell_۳$ و همگی با سطح مقطع یکسان، مطابق شکل به هم وصل شده‌اند.



طول و ضریب رسانندگی گرمایی میله‌ها به ترتیب زیر است:

$$\ell_۱ = ۲۳\text{cm}, \quad \ell_۲ = ۶/۵\text{cm}, \quad \ell_۳ = ۶\text{cm}$$
$$K_۱ = ۹۲\text{W/mK}, \quad K_۲ = ۲۶\text{W/mK}, \quad K_۳ = ۱۲\text{W/mK}$$

اگر انتهای میلهٔ ۱ در دمای $۱۰۰^\circ C$ و انتهای میلهٔ ۲ و ۳ در دمای ۰° ثابت نگه داشته شود، در حالت پایا، یعنی هنگامی که دمای هر نقطه ثابت شده، دمای نقطهٔ اتصال سه میله چقدر است؟ میله‌ها پوشش عایق دارند و گرما فقط در طول میله‌ها منتقل می‌شود.

الف) ۳۳° ب) ۴۰° ج) ۵۰° د) ۶۵°

حل. طبق پایستگی انرژی، گرمای منتقل شده از میله برابر گرمای داده شده به میله‌های ۲ و ۳ است؛ لذا

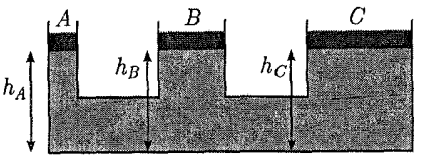
$$Q_۱ = Q_۲ + Q_۳ \Rightarrow \frac{Q_۱}{t} = \frac{Q_۲}{t} + \frac{Q_۳}{t}$$

به کمک فرمول انتقال حرارت هدایت و با فرض این‌که دمای نقطهٔ اتصال T باشد، داریم:

$$\frac{K_۱A(T - T_۱)}{\ell_۱} = \frac{K_۱A(T_۲ - T)}{\ell_۲} + \frac{K_۳A(T_۳ - T)}{\ell_۳}$$
$$\Rightarrow \quad T = \frac{\frac{K_۱T_۱}{\ell_۱} + \frac{K_۲T_۱۲}{\ell_۲} + \frac{K_۳T_۳}{\ell_۳}}{\frac{K_۱}{\ell_۱} + \frac{K_۲}{\ell_۲} + \frac{K_۳}{\ell_۳}} = ۴۰^\circ$$

۷) در ظرف، مانند شکل، مایع تراکم‌ناپذیری قرار دارد. پیستون‌های A، B و C می‌توانند بدون اصطکاک در لوله‌های مربوط حرکت کنند. در ابتدا ارتفاع مایع از کف ظرف،

در هر سه لوله برابر است؛ $h_A = h_B = h_C$. حال وزنه‌های یکسان m را روی هر یک از پیستون‌ها می‌گذاریم. بعد از برقراری تعادل، کدام گزینه درست است؟



الف) $h_A = h_B = h_C = h_\circ$ ب) $h_A = h_B = h_C < h_\circ$

ج) $h_A < h_B < h_C$ د) $h_A > h_B > h_C$

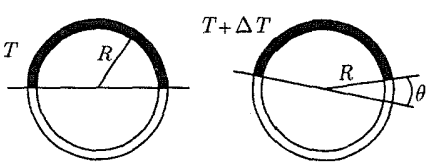
حل. چون جرم m اعمال شده برای سه لوله یکسان است، لذا لوله‌ای که از مساحت سطح مقطع کمتری برخوردار است، طبق رابطهٔ $\frac{mg}{A}$ فشار بیشتری رابه مجموعه اعمال می‌کند. بنابراین مایع به سمت لوله‌های دیگر حرکت خواهد کرد. اگر h_A، h_B و h_C ارتفاع نهایی مایع در سه لوله باشد، داریم:

$$\frac{mg}{A_A} + \rho g h_A = \frac{mg}{A_B} + \rho g h_B = \frac{mg}{A_C} + \rho g h_C \;\Rightarrow\; h_C > h_B > h_A$$

۸) وقتی میله‌ای به طول L و سطح مقطع A تحت فشار $\frac{F}{A}$ قرار می‌گیرد، طولش به اندازهٔ ΔL تغییر می‌کند، به‌طوری که $\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$. در اینجا E ضریب ثابتی است که به جنس میله بستگی دارد و مدول یانگ نامیده می‌شود. دو میله از دو جنس مختلف ولی با طول یکسان و سطح مقطع یکسان مطابق شکل به‌صورت دو نیم‌دایره به شعاع R به هم متصل شده‌اند و داخل یک تکیه‌گاه سخت در محیطی با دمای T قرار دارند. در این دما فشار بر میله‌ها صفر است. دمای محیط را به اندازهٔ ΔT بالا می‌بریم. فرض کنید تکیه‌گاه همچنان میله‌ها را به‌صورت دایره‌ای به شعاع R نگه می‌دارد. اگر مدول یانگ و ضریب انبساط طولی میله‌ها $(E, ۳\alpha)$ و $(۲E, \alpha)$ باشد، زاویهٔ θ چقدر است؟ ΔT را کوچک بگیرید.

راهنمایی: اگر $|x|$ و $|y|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد و α و β دو عدد دلخواه باشند:

$$(۱ + x)^\alpha (۱ + y)^\beta \simeq ۱ + \alpha x + \beta y$$



الف) $\frac{\pi}{۳}\alpha\Delta T$ ب) $\pi\alpha\Delta T$ ج) $\frac{۵\pi}{۳}\alpha\Delta T$ د) $۲\pi\alpha\Delta T$

حل. می‌دانیم در اثر ازدیاد طول هر یک از میله‌ها، میله‌ها به هم نیروی فشاری F وارد می‌کنند که طبق عمل و عکس‌العمل با هم برابرند؛ لذا تغییر طول هر میله برابر است با

$$\Delta L_1 = L_0 \cdot 3\alpha\Delta T - \frac{FL_0}{AE} \qquad (1)$$

$$\Delta L_2 = L_0 \alpha\Delta T - \frac{FL_0}{2AE} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad L_0 \cdot 3\alpha\Delta T - \frac{FL_0}{AE} + L_0\alpha\Delta T - \frac{FL_0}{2AE} = 0$$

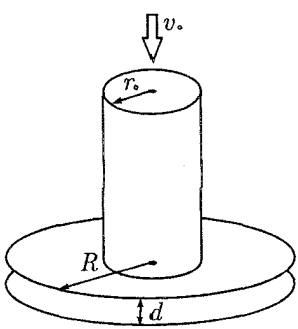
$$\Rightarrow \quad \frac{FL_0}{AE} = \frac{8}{3}\alpha L_0 \Delta T \qquad (3)$$

$$(1),(3) \quad \Rightarrow \quad \Delta L_1 = \frac{1}{3}\alpha L_0 \Delta T, \quad \Delta L_1 = R\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\alpha(\pi R)\Delta T = R\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{3}\alpha\pi\Delta T$$

۹) دو قرص دایره شکل هم‌محور به شعاع $R = 30$ cm به فاصلهٔ $d = 2$ cm در نظر بگیرید که افقی هستند. از وسط قرص بالایی یک دایره به شعاع $r_0 = 2$ cm و هم‌مرکز با قرص بریده‌ایم. یک لوله به شعاع r_0 به‌طور قائم به قرص بالایی و روی دایرهٔ خالی شده جوش داده‌ایم. آب با سرعت $v_0 = 5$ m/s از بالای لوله وارد آن شده و میان دو قرص می‌رود. فرض کنید سرعت آب ورودی چنان است که فضای میان دو قرص را پر کرده و آب از اطراف آن بیرون می‌ریزد. سرعت آب میان دو قرص و در شعاع $r = 10$ cm چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



حل. با توجه به تراکم‌ناپذیری آب و پایستگی جرم، رابطهٔ $A_1V_1 = A_2V_2$ برای دو مجرا به مساحت‌های A_1 و A_2 برقرار است؛ بنابراین

$$A_1 = \pi r_0^2 = 4\pi$$

A_2 برابر مساحت سطح جانبی یک استوانه به شعاع r و ارتفاع d است؛ لذا

$$A_2 = 2\pi rD = 2\pi \times 10 \times 2 = 40\pi$$

$$A_1V_1 = A_2V_2 \Rightarrow 4\pi \times 5 = 40\pi \times V_2$$

$$\Rightarrow V_2 = 0/5 \text{ m/s} = 50 \text{ cm/s}$$

۱۰) اجسام گرم با توان $P = \sigma AT^4$ تابش می‌کنند که در اینجا A مساحت سطح جسم، σ یک ثابت و T دمای جسم است. در لامپ‌های التهابی، سیمی از جنس تنگستن بر اثر عبور جریان الکتریکی گرم می‌شود و از سطح جانبی آن تابش می‌کند. این سیم را می‌توان استوانه‌ای به طول L و قطر قاعدهٔ d در نظر گرفت. L و d باید چنان باشند که وقتی به دو سر سیم تنگستن اختلاف پتانسیل E اعمال شود، با توان P تابش کند. به‌علاوه، سعی بر آن است که دمای این سیم تنگستن برای همهٔ لامپ‌ها، در هنگام کار، مقدار مشخص T_0 باشد. در این دمای T_0 مقاومت ویژهٔ تنگستن ρ_0 است.

دو لامپ با توان‌های $P_1 = 10$ W و $P_2 = 80$ W که هر دو برای کار در اختلاف پتانسیل $E = 12$ V طراحی شده‌اند در نظر بگیرید. جرم سیم لامپ ۱ را با m_1 و جرم سیم ۲ را با m_2 نشان می‌دهیم. نسبت $\frac{m_2}{m_1}$ چند است؟

حل. برای یک سیم استوانه‌ای به دمای T_0، توان تابشی برابر است با

$$P_T = \sigma(\pi dL)T_0^4$$

توان الکتریکی داده شده به سیم نیز برابر است با

$$P = \frac{E^2}{R}, \quad R = \rho\frac{L}{A} = \rho_0\frac{L}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{4\rho_0 L}{\pi d^2}$$

$$\Rightarrow P_E = \frac{\pi d^2 E^2}{4\rho_0 L} \qquad (1)$$

در حالت پایدار، توان داده شده با توان تابشی برابر است، لذا

$$P_T = P \Rightarrow \sigma\pi dLT_0^4 = \frac{\pi d^2 E^2}{4\rho_0 L}$$

$$\Rightarrow 4\rho_0\sigma L^2 T_0^4 = dE^2$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{d} = \frac{E^2}{4\rho_0\sigma T_0^4} = \text{ثابت}$$

بنابراین برای این دو لامپ باید مقدار $\frac{L^۲}{d}$ برابر هم باشند.

$$\frac{L_۱^۲}{d_۱} = \frac{L_۲^۲}{d_۲} \Rightarrow \frac{d_۱}{d_۲} = \left(\frac{L_۱}{L_۲}\right)^۲ \qquad (۲)$$

از طرفی

$$P_{E_۲} = ۸۰\ \mathrm{W} = ۸P_{E_۱} \overset{\text{از}(۱)}{\Rightarrow} \frac{\pi d_۲^۲ E^۲}{۴\rho_۰ L_۲} = ۸\frac{\pi d_۱^۲ E}{۴\rho_۰ L_۱}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d_۱}{d_۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۸}\frac{L_۱}{L_۲} \qquad (۳)$$

$$(۲),(۳) \Rightarrow \frac{L_۱}{L_۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$(۲) \Rightarrow \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{\rho\pi\frac{d_۲^۲}{۴} \times L_۲}{\rho\pi\frac{d_۱^۲}{۴} \times L_۱} = ۴^۲ \times ۲ = ۳۲$$

۴۸ مرحلهٔ اول بیست و سومین المپیاد فیزیک

۱) دو ظرف استوانه‌ای رسانای گرما در نظر بگیرید که دهانهٔ هر کدام با یک پیستون بدون اصطکاک بسته شده، و در هر کدام مقدار یکسانی گاز کامل در شرایط مشابه قرار دارد. روی پیستون ظرف اول یک کیسهٔ شن می‌گذاریم، به‌طوری که پیستون پایین می‌رود و حجم گاز به کمترین مقدار V می‌رسد. پس از مدت کوتاهی، پیش از آن که حجم تغییر کند، فشار گاز P_a و دمای آن T_a می‌شود. روی پیستون ظرف دوم آن‌قدر شن را دانه‌دانه و به آرامی می‌گذاریم تا حجم گاز در این ظرف همان V شود. در این حالت فشار گاز P_b و دمای آن T_b است. فرض کنید طی این دو فرآیند، سیستم همواره نزدیک به تعادل ترمودینامیکی بوده است. کدام گزینه درست است؟

الف) $P_a > P_b$ و $T_a = T_b$

ب) $P_a > P_b$ و $T_a > T_b$

ج) $P_a = P_b$ و $T_a > T_b$

د) $P_a < P_b$ و $T_a < T_b$

ه) $P_a = P_b$ و $T_a = T_b$

حل. در حالت اول چون فرآیند با سرعت بالایی انجام می‌شود، لذا فرصت انتقال گرما وجود ندارد. بنابراین می‌توان فرآیند را بی در رو در نظر گرفت.

به کمک قانون اول داریم:

$$\Delta Q = \Delta U + W = ۰$$

چون حجم گاز کم شده، لذا کار انجام شده توسط سیستم منفی است؛ لذا $W < ۰$. بنابراین

$$\Delta U = -W > ۰ \;\Rightarrow\; mC_V\Delta T > ۰$$

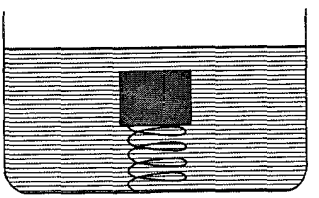
لذا دمای گاز بالا می‌رود. در حالت دوم چون فرصت انتقال گرما وجود دارد، لذا دمای گاز با دمای محیط همواره برابر است. پس $T_a > T_b$.

به کمک قانون گاز کامل داریم:

$$\frac{P_aV}{T_a} = \frac{P_bV}{T_b} = \frac{P_۰V_۰}{T_۰} \;\Rightarrow\; \frac{P_a}{P_b} = \frac{T_a}{T_b} > ۱ \;\Rightarrow\; P_a > P_b$$

گزینهٔ «ب» صحیح است.

۲) درون ظرفی مقداری آب ریخته‌ایم. چگالی آب ρ_0 است. جسمی به جرم M و چگالی ρ_1 ($\rho_1 < \rho_0$) به وسیله فنری که به کف ظرف متصل شده، نگه داشته شده است. فنر کشیده می شود ولی جسم از آب بیرون نمی‌آید. نیرویی که آب به کف ظرف وارد می‌کند W_1 است. اگر به جای جسم قبلی جسم دیگری با همان جرم ولی چگالی بیشتر ρ_2 ($\rho_2 > \rho_0$) را به فنر ببندیم، فنر فشرده می‌شود ولی نه آن‌قدر که به کف ظرف بچسبد. در این حالت نیرویی که آب به کف ظرف وارد می‌کند W_2 است. کدام گزینه درست است؟ در دو حالت مقدار آب یکسان است.



الف) $W_2 > W_1$ ب) $W_2 = W_1$ ج) $W_2 < W_1$

حل. چون چگالی در حالت اول کمتر از حالت دوم است و اندازهٔ جرم در دو حالت یکسان است، بنابراین حجم جسم در حالت اول بیشتر از حالت دوم است. از طرفی چون مقدار آب در هر دو حالت یکسان است، پس ارتفاع آب در ظرف در حالت اول بیشتر از حالت دوم است. بنابراین فشار وارد بر کف ظرف از طرف آب، در حالت اول بیشتر از حالت دوم خواهد بود. بنابراین

$$P_1 > P_2 \Rightarrow \frac{W_1}{A} > \frac{W_2}{A} \Rightarrow W_1 > W_2$$

گزینهٔ «ج» درست است.

۳) مقداری گاز کامل به حجم اولیهٔ V و فشار اولیهٔ P فرآیندی را می‌پیماید. این فرآیند در صفحهٔ PV یک خط راست با شیب m ($m < 0$) است. در طول این فرآیند انرژی درونی:

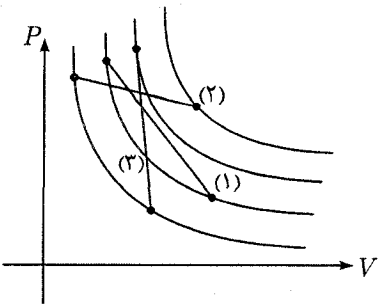
الف) به‌ازای هر مقدار m دائماً کم می‌شود.

ب) به‌ازای هر مقدار m ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود.

ج) به‌ازای هر مقدار m دائماً زیاد می‌شود.

د) به‌ازای بعضی مقادیر m دائماً کم می‌شود؛ به‌ازای بعضی مقادیر m دائماً زیاد می‌شود؛ و به‌ازای بعضی مقادیر m ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود.

حل. می‌دانیم در صفحهٔ PV نمودار فرآیندهای دما ثابت به‌صورت هموگرافیک و مطابق شکل زیر است.



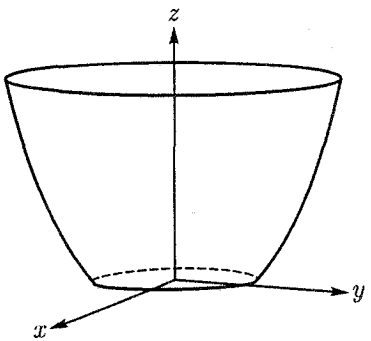
در شکل سه فرآیند نشان داده شده است که به‌صورت خط راست و با شیب منفی هستند.

- در فرآیند (۱)، دما ابتدا زیاد و دوباره به مقدار اولیهٔ خود برمی‌گردد.
- در فرآیند (۲)، دما زیاد می‌شود.
- در فرآیند (۳)، دما کاهش می‌یابد.

بنابراین هر سه حالت امکان‌پذیر و گزینهٔ «د» صحیح است.

۵.۸ مرحلهٔ اول بیست و چهارمین المپیاد فیزیک

۱) فنجانی مطابق شکل در نظر بگیرید. فرض کنید این فنجان از چرخاندن سهمی $z = \alpha x^2 - h$ در صفحهٔ xz حول محور z ایجاد شده است، به‌طوری که بخش $z < 0$ سهمی بریده شده و صفحهٔ تختی کف آن چسبانده شده است. α و h مقادیر ثابت و مثبت هستند. ارتفاع فنجان H است. فنجان را با مایعی به چگالی ρ پر می‌کنیم. جرم مایع M و فشار هوای بیرون P_0 است. اندازهٔ نیرویی که مایع به دیوارهٔ جانبی فنجان وارد می‌کند چقدر است؟ (۱، ۳+)



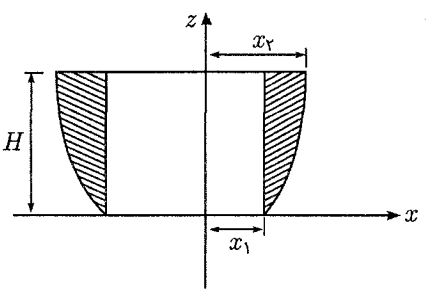
الف) $Mg - \dfrac{\pi h H \rho g - P_0 \pi (H+h)}{\alpha}$

ب) $Mg - \dfrac{\pi h (H+h) \rho g - P_0 \pi (H+h)}{\alpha}$

ج) $Mg - \dfrac{\pi h H \rho g - P_0 \pi H}{\alpha}$

د) $Mg - \dfrac{\pi h (H+h) \rho g - P_0 \pi h}{\alpha}$

حل. نیرویی که مایع به دیوارهٔ جانبی فنجان وارد می‌کند دارای دو مؤلفهٔ افقی و قائم x و z است.



به دلیل تقارن مؤلفهٔ افقی نیرو برابر صفر می‌شود. از طرفی نیروی قائم وارد بر دیواره از طرف مایع برابر وزن بالای دیواره است که با خطوط هاشور نشان داده شده است. به کمک شکل داریم:

$$z = 0 \;\Rightarrow\; \alpha x_1^2 - h = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{\frac{h}{\alpha}}$$

$$z = H \Rightarrow H = \alpha x_2^2 - h \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{H+h}{\alpha}}$$

بنابراین وزن قسمت هاشور خورده برابر است با وزن مایع منهای وزن استوانه‌ای به شعاع x_1 لذا

$$W = Mg - (\pi x_1^2) H\rho g = Mg - \pi \left(\frac{h}{\alpha}\right) H\rho g = Mg - \frac{\pi h H \rho g}{\alpha} \qquad (۱)$$

از طرفی فشار هوا نیز بر مایع وارد می‌شود و مایع آن را به دیواره وارد می‌کند. نیروی ناشی از فشار هوا بر دیواره (به صورت قائم) برابر با تصویر دیواره روی سطح افقی ضرب‌در فشار هوا است؛ لذا

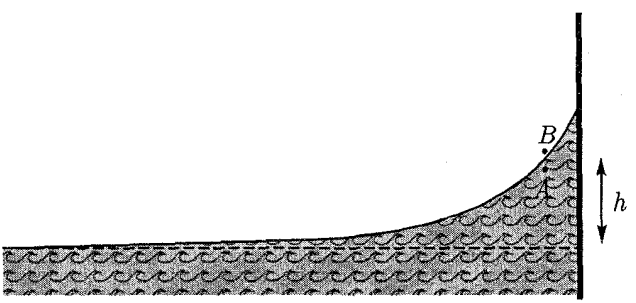
$$F = P_0(\pi x_2^2) - P_0(\pi x_1^2) = P_0 \pi \left[\frac{H+h}{\alpha} - \frac{h}{\alpha}\right] = \frac{P_0 \pi H}{\alpha} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود کل نیروی وارد بر دیواره از طریق مایع برابر است با

$$F_t = W + F = Mg - \frac{\pi h H \rho g}{\alpha} + \frac{P_0 \pi H}{\alpha}$$

بنابراین گزینه «ج» درست است.

۲) مایعی به چگالی ρ کنار یک دیوار، به علت چسبندگی، کمی از آن بالا می‌رود. مطابق شکل نقطهٔ A نقطه‌ای درون مایع درست زیر سطح مایع است، طوری که ارتفاع آن از سطح مایع در فاصلهٔ دور از دیوار، h است. نقطهٔ B در نزدیکی A و درست بالای سطح مایع است. شتاب گرانش g است. اختلاف فشار این دو نقطه، $P_A - P_B$ تقریباً برابر است با: $(+۲, -۱)$



الف) ۰ ب) ρgh ج) $-\rho gh$

حل. با توجه به توضیحات داده شده در صفحه ۷۱، گزینه «ج» درست است.

۳) آب از آبشاری به ارتفاع ۱۰۰ m به زمین فرو می‌ریزد. فرض کنید ضمن فرو ریختن آب ۱٪ آن تبخیر می‌شود، که همهٔ گرمای لازم برای تبخیر آب از آب گرفته می‌شود. گرمای نهان تبخیر آب را ۲×۱۰^۶ J/kg، گرمای ویژهٔ آب را ۴×۱۰^۳ J/(kg°C)، و شتاب گرانش را ۱×۱۰^۱ m/s^۲ بگیرید. تغییر دمای آب به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟ (+۳، −۱)

الف) ۵°C ب) −۵°C ج) ۱۰°C د) −۱۰°C

حل. چون گرمای لازم برای تبخیر ۰٫۰۱ جرم از مابقی جرم گرفته می‌شود، لذا

$$۰٫۹۹mc\Delta\theta + ۰٫۰۱mL_V = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۹۹ \times ۴ \times ۱۰^۳ \times \Delta\theta + ۲ \times ۱۰^۶ = ۰$$
$$\Rightarrow \quad \Delta\theta = -۵٫۰۵°C$$

گزینه «ج» درست است.

۴) دو محفظهٔ عایق استوانه‌ای یکسان A و B به حجم V و ظرفیت گرمایی ناچیز، مطابق شکل، توسط شیر C به هم متصل‌اند. ابتدا استوانهٔ A حاوی n مول گاز کامل تک‌اتمی در دمای T و ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت $\frac{۳}{۲}R$ است. انتهای بالایی محفظهٔ A توسط پیستون S، که می‌تواند آزادانه درون استوانه حرکت کند، کاملاً بسته شده است. استوانهٔ B دربسته و درون آن کاملاً خلاء است. شیر C به گونه‌ای باز می‌شود که بر اثر ورود گاز به استوانهٔ B پیستون به طریقی به پایین بلغزد که فشار در A ثابت بماند. پس از آنکه گاز تمامی حجم ظرف B و بخشی از حجم ظرف A را پر کرد، پیستون ساکن می‌شود. اگر T' دمای مطلق گاز در پایان این فرایند باشد، نسبت $\frac{T'}{T}$ چقدر است؟ (+۳، −۱)

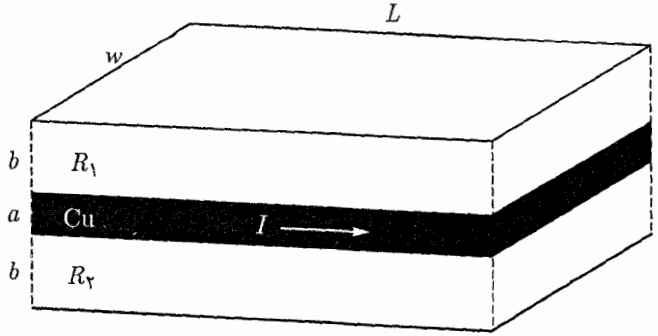
الف) $\frac{۸}{۶}$ ب) $\frac{۶}{۵}$ ج) $\frac{۷}{۵}$ د) $\frac{۹}{۷}$

حل. گزینه «ج» درست است.

۵) نوار مسی نازکی به ضخامت a، عرض w و طول بسیار بلند L (حدود متر) بین دو نوار لاستیکی با همین عرض و طول، و ضخامت b قرار گرفته است. این دو نوار در شکل زیر با نام‌های $R_۱$ و $R_۲$ مشخص شده‌اند. a و b بسیار کوچک‌تر از w اند. از نوار مسی جریان I در امتداد طول آن می‌گذرد و گرما فقط از نوار مسی به دو نوار لاستیکی و فقط از سطوح بالایی و پایینی دو نوار لاستیکی به محیط منتقل می‌شود. فرض کنید دمای سطوح بالایی و پایینی این دو نوار لاستیکی همواره همان دمای محیط است. ضریب هدایت گرمایی لاستیک K و مقاومت ویژهٔ مس ρ است. در حالت پایدار دمای نوار مسی چند درجهٔ *سلسیوس* است؟ همهٔ مقادیر عددی لازم

در زیر داده شده است.

$$a = ۰/۱ \text{ mm}, \quad b = ۲/۰ \text{ mm}, \quad w = ۱/۰ \text{ cm}, \quad I = ۲۰ \text{ A},$$
$$\rho = ۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \ \Omega\text{m}, \quad K = ۰/۱۶ \text{ W/°Cm}, \quad \theta_۰ = ۲۳°\text{C}.$$



حل.

$$\text{مقاومت نوار مسی} \quad R = \rho\frac{L}{A} = ۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \times \frac{L}{aw} = ۱/۷ \times ۱۰^{-۲}L$$
$$\text{توان تولیدی نوار مسی} \quad P = RI^۲ = ۱/۷ \times ۱۰^{-۲} \times L \times ۲۰^۲ = ۶/۸L$$

توان تولید شده توسط مس از طریق دو نوار لاستیکی به محیط داده می‌شود، لذا

$$P = \frac{Q_۱}{t} + \frac{Q_۲}{t} = \frac{K_۱A\Delta\theta}{\Delta x} + \frac{K_۲A\Delta\theta}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow \quad ۶/۸L = \frac{۲KwL(\theta - \theta_۰}{b}$$
$$\Rightarrow \quad ۶/۸ = \frac{۲ \times ۰/۱۶ \times ۱ \times ۱۰^{-۲}}{۲ \times ۱۰^{-۳}}(\theta - ۲۳)$$
$$\Rightarrow \quad \theta = ۲۳ + ۴/۲۵ = ۲۷/۲۵°\text{C}$$

۶) نوار مسی نازکی به عرض w، ضخامت a، و طول L (در حدود متر) در اتاقی به دمای $T = ۳۰۰$ K قرار گرفته. از این نوار یک جریان الکتریکی به شدت I در جهت طول نوار می‌گذرد. نوار فقط می‌تواند با تابش با محیط اطرافش تبادل گرما بکند. وقتی جسمی به مساحت A و دمای مطلق $T_۲$ در اتاقی به دمای مطلق $T_۱$ قرار می‌گیرد، با توان $A\sigma T_۲^۴$ انرژی از دست می‌دهد، و با توان $A\sigma T_۱^۴$ از محیط انرژی می‌گیرد، که در اینجا σ ثابت است.

دمای این نوار مسی در حالت پایدار چند درجهٔ سیلسیوس است؟ همهٔ عددهای لازم در زیر آمده است. برای محاسبه می‌توانید از تقریب

$$(۱ + x)^{\frac{۱}{۴}} \simeq ۱ + \frac{x}{۴} - \frac{۳x^۲}{۳۲}$$

که برای x های بسیار کوچک‌تر از ۱ معتبر است، استفاده کنید.

$$w = ۱/۰ \text{ cm}, \quad a = ۰/۱ \text{ mm}, \quad \sigma = ۵/۷ \times ۱۰^{-۸} \text{ Wm}^{-۲}\text{K}^{-۴},$$
$$\rho = ۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \Omega\text{m}, \quad I = ۲۰ \text{ A}.$$

حل. می‌دانیم در حالت پایدار توان تولید شده به دلیل عبور جریان با توان گرمایی انتقالی به محیط برابر است. بنابراین

$$\begin{aligned}
RI^۲ &= A\sigma(T_۲^۴ - T_۱^۴) \\
\Rightarrow \quad \rho\frac{L}{wa}I^۲ &= ۲(Lw + La) \times \sigma(T_۲^۴ - T_۱^۴) \\
\Rightarrow \quad ۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \times \frac{۴۰۰}{۱ \times ۱۰^{-۲} \times ۰/۱ \times ۱۰^{-۳}} &= ۲(۱ \times ۱۰^{-۲} + ۰/۱ \times ۱۰^{-۳}) \times ۵/۷ \times ۱۰^{-۸}(T_۲^۴ - ۳۰۰^۴) \\
\Rightarrow \quad T_۲^۴ &= ۳۰۰^۴ + ۵۹/۰۵ \times ۱۰^۸ \\
\Rightarrow \quad T_۲ &= ۳۴۴/۰۰۹ \text{ K} \\
\Rightarrow \quad T_۲ &= ۳۴۴/۰۰۹ - ۲۷۳ = ۷۱/۰۰۹^\circ\text{C}
\end{aligned}$$

منابع فارسی

۱. المپیادهای فیزیک ایران: مرحله اول، جلد اول (دوره‌های ۱ تا ۱۴)، دکتر علیرضا صادقی‌راد، یوسف عباسی اصل، انتشارات دانش‌پژوهان جوان

۲. المپیادهای فیزیک ایران: مرحله اول، جلد دوم (دوره‌های ۱۵ تا ۲۲)، دکتر علیرضا صادقی‌راد، جابر رضایی میانرودی، جابر رضایی میانرودی، انتشارات دانش‌پژوهان جوان

۳. برگزیده مسائل فیزیک روسیه (Aptitude Test)، ترجمهٔ دکتر علیرضا صادقی‌راد، یوسف عباسی اصل، انتشارات دانش‌پژوهان جوان

۴. فیزیک، فردریک بیوکی، ترجمهٔ محمدابراهیم ابوکاظمی، مرکز نشر دانشگاهی

۵. فیزیک پایه، فرانک.ج.بلت، ترجمهٔ محمدعلی خرمی، انتشارات فاطمی

۶. حرارت و ترمودینامیک، مارک والدو زیمانسکی، ترجمهٔ حسن توتونچی، مرکز نشر دانشگاهی

۷. چگونه مفاهیم فیزیک را درک کنیم؟، لویز اینشتین، ترجمهٔ جهانشاه میرزابیگی، انتشارات دانشیار

۸. فیزیک، دیر اولز و هرولدس، ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی راد، انتشارات خوارزمی

۹. ۳۰۰۰ مسألهٔ حل شده در فیزیک، پروفسور آلوین هال برن، ترجمهٔ سوسن جاویدی، انتشارات اشاره

۱۰. مسائل مسابقات فیزیک، س.او.گونچارنکو، ترجمهٔ غضنفر بازرگان، انتشارات خوارزمی

۱۱. مبانی فیزیک جلد اول و دوم، هالیدی - ترجمهٔ جلیلیان، انتشارات صفّار

۱۲. نگاهی به فیزیک، ل.تاراسو، ترجمهٔ معصومی، انتشارات گستره

۱۳. فیزیک رهگشای امروز و فردا، تام دانکن، ترجمهٔ ژیلا اصغری، انتشارات مبتکران

۱۴. مسائل فیزیک عمومی، و.زوبوف، ترجمهٔ محمود بنی‌اسدی، انتشارات فاطمی

۱۵. مبانی ترمودینامیک کلاسیک، گوردن ون‌وایلن، ترجمهٔ حسن حقیقی، انتشارات سالکان

۱۶. دورهٔ درسی فیزیک (تمرین‌ها و مسائل)، بوخوتسف، ترجمهٔ پرویز تاریخی، انتشارات فاطمی

۱۷. مقدمه‌ای بر انتقال حرارت، انکروپرا، ترجمهٔ دکتر علی‌اصغر رستمی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

منابع انگلیسی

1. Fluid mechanic, Frank White

2. Fundamentals of fluid mechanics, Bruce Munson