مبتکران
شرکت خدمات
آموزشی و فرهنگی
تأسیس
۱۳۶۵

المپیادهای ریاضی

تبدیلات هندسی

جلد اول

مؤلف : بهمن اصلاح پذیر

المپیادهای ریاضی

تبدیلات هندسی

جلد اوّل

مؤلف:

بهمن اصلاح‌پذیر

اصلاح‌پذیر، بهمن، ۱۳۴۲ ــ
المپیادهای ریاضی: تبدیلات هندسی / مؤلف: بهمن اصلاح‌پذیر.
تهران: مبتکران: پیشروان، ۱۳۸۵. ۲ ج.: مصور.
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
۱. تبدیل‌های ریاضی.
۲. تبدیل‌های ریاضی ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره.
۳. المپیادها (ریاضیات).
الف. عنوان.
۷ الف ۵ الف / ۶۰۱ QA ۵۱۶/۱
کتابخانه ملی ایران ۵۱۶۵ ـ ۸۰م

ISBN : 964 - 7082 - 05 - 3

ISBN : 964 - 7082 - 06 - 1(دوره دو جلدی)

انتشارات پیشروان (پروانه نشر: ۲۶۲۳) **ناشر: انتشارات مبتکران** (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

تهران، میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۱۱۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱
تلفن ۹۱ ـ ۶۶۹۵۴۳۹۰ دورنگار ۶۶۹۵۴۳۹۲ E-Mail: post@mobtakeran.org

---

نام کتاب: المپیادهای ریاضی تبدیلات هندسی (جلد اول)

مؤلف: بهمن اصلاح‌پذیر

چاپ دوم: ۱۳۸۵ (چاپ اول: تابستان ۱۳۸۰)

شمارگان: ۲۰۰۰ جلد

حروف‌نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: صبا

چاپ: کلمه پرداز

بها: ۱۲۰۰ تومان

فهرست مطالب

مقدمه ناشر

انتشارات مبتکران در سال ۱۳۶۷ با نشر اولین کتاب، فعالیت علمی خود را آغاز کرد و خدای را سپاس که تاکنون توانسته است نزدیک به ۳۰۰ عنوان کتاب به بازار عرضه نماید. در تدوین همه این کتابها از همکاری اساتید و دبیران برجسته کشور استفاده شده و کیفیت علمی مطالب به عنوان اصل اساسی مورد توجه قرار گرفته است. استقبال دانش‌پژوهان برجسته و ممتاز و همه علاقمندانی که به کیفیت علمی کتاب اهمیت می‌دهند موجب گردیده است تا تعدادی از این کتابها در طول یکسال چندین بار تجدید چاپ شوند و حتی برخی از کتابهای منتشر شده در دانشگاهها و دبیرستانها و مراکز علمی معتبر کشور به عنوان کتاب درسی مورد استفاده قرار گیرند.

در ادامه این روند، **انتشارات مبتکران** در نظر دارد، فعالیت خود را در راستای عرضه کتابهای معتبر گسترده‌تر کند و کتابهای ویژه‌ای را در زمینه‌های مختلف علمی پیشرفته دبیرستانی، المپیادها و سایر زمینه‌ها خاص منتشر نماید. کتاب حاصر نمونه‌ای از این سری کتابها می‌باشد.

به‌منظور تقسیم کار در نشر کتابهای علمی با محتوای غنی‌تر، این عناوین با آرم **انتشارت پیشروان** منتشر خواهند شد که اخیراً فعالیت خود را تحت پوشش مؤسسه مبتکران آغاز نموده و در حقیقت شاخه‌ای از انتشارات مبتکران محسوب می‌شود.

در آغاز کار، **انتشارات پیشروان** از درگاه خداوند متعال برای ارائه خدمات بیشتر و بهتر به جامعه علمی کشورمان استعانت و یاری می‌طلبد و لازم می‌داند که از کلیه اساتید بزرگوار، دبیران محترم و دانش‌پژوهان گرامی که همواره با راهنمائیها و مساعدتهای خود ما را یاری نموده، و همچنین از دانشجویان و دانش‌آموزان عزیز و اولیاء محترم آنان که همیشه ما را مرهون عنایات خود قرار داده و برای ادامه راه مشوق ما هستند تشکر و قدردانی نماید. امید است **انتشارات مبتکران** با ارائه کارهای معتبر علمی پاسخ قابل قبولی به توجهات بی‌شائبه همه عزیزان داده و موجبات رضایت آنها را فراهم آورد.

انتشارت پیشروان

به نام خدا

مقدمه

یاگولم در کتاب تبدیل‌های هندسی می‌نویسد.

«بیشتر قضیه‌های هندسی مقدماتی که از حدود دروس دبیرستانی فراتر می‌روند. صرفاً موشکافی‌هایی هستند که هیچ کاربرد خاصی ندارند و از جریان اصلی گسترش ریاضیات برکنارند با این حال علاوه بر قضایای مقدماتی مشخص در هندسه مقدماتی دو اندیشه کلی مهم وجود دارد که اساس همه گسترش‌های آتی هندسه را تشکیل می‌دهند و اهمیت آنها از این حدود گسترده، فراتر می‌رود. یکی از این اهداف پی‌ریزی اصول موضوعی هندسه از یکسو و تبدیل‌های هندسی و نقش بنیادی نظریه گروه‌ها در هندسه از سوی دیگر است. این اندیشه‌ها بسیار پر بار بوده و گسترش هر یک از آنها به پیدایش هندسه نااقلیدسی می‌انجامد.

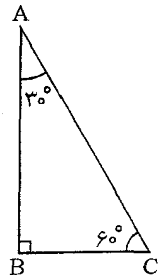
جرج ـ*ا. مارتین* در کتاب تبدیلات هندسی می‌نویسد.

«تبدیلات هندسی یکی از ابداعات جدید و موفقیت‌آمیز از در هم‌آمیزی هندسه و جبر است». علاوه بر این مطالعه در تبدیلات هندسی مستلزم مطالعه و تحقیق در نظریه گروه‌ها می‌باشد.

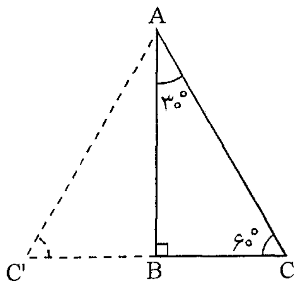
یکی از مشکلات همیشگی آموزش هندسه این است که دانش‌آموز ملاحظه کرده معلم با کشیدن یک خط جدید در شکل هندسی مسئله را حل می‌کند و همواره برای حل هر مسئله هندسی معلم به جعبه جادویی خودش مراجعه کرده و با دادن یک راه حل ابتکاری که بفکر دانش‌آموزان معمولی نمی‌رسد مسئله را حل و این مطلب را بعنوان ابتکار در ریاضیات معرفی می‌نماید. دانش‌آموز شیفته راه حل مسئله شده متوجه آن جعبه جادویی می‌گردد که در اختیار

معلم است و خودش ندارد و همیشه در آرزوی این است که به این جعبه جادویی دست‌رسی یابد.

مثال زیر گویای آن جعبه جادویی است و معلم این مسئله را طرح می‌نماید که «در مثلث قائم‌الزاویه ضلع زاویه روبرو زاویه ۳۰° نصف وتر است». هیچ دانش‌آموزی در کلاس راهی برای اثبات پیدا نمی‌کند و بعد از مدتی معلم سری تکان می‌دهد و می‌گوید: «خیلی آسان است توجه کنید».



زاویه $A = ۳۰$ پس زاویهٔ $C = ۶۰^\circ$ می‌باشد حال ضلع BC را به اندازه خودش تا نقطه C' امتداد می‌دهیم



C' را به A وصل می‌کنیم می‌دانیم دو مثلث ABC و ABC' هم‌نهشت هستند پس زاویه C' نیز برابر ۶۰° خواهد شد. پس با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است. زاویه $C'AC = ۶۰^\circ$ بوده و مثلث $AC'C$ متساوی‌الاضلاع است پس $AC = CC'$ و $AC = ۲BC$ و بنابراین $BC = \frac{۱}{۲} AC$ و حکم ثابت شد.

راه حل زیبا نبود؟

ولی برای دانش‌آموز هنوز سؤال باقی است که معلم از کجا فهمید که ضلع BC را به اندازه

خودش تا نقطه C' ادامه دهد. و دانش‌آموز به جعبه جادویی معلم دسترسی ندارد و پس از مدتی از خواندن هندسه که به یک به جعبه جادویی که در آن راه حل‌ها وجود دارد و فقط متعلق به معلم است چشم می‌پوشد.

حال اگر بتوان در این جعبه جادویی را باز کرد و آنرا در معرض دید دانش‌آموزان قرار داد دانش‌آموزان ابزار جادویی را یافته و به کمک آنها به حل مسائل خواهند پرداخت. این ابزار جادویی چیست؟ پاسخ ما به این سؤالات موضوع مقاله ما می‌باشد.

این مقاله شامل دو مبحث زیر می‌باشد:

۱ـ تبدیلات خطی و غیر خطی

۲ـ هندسه برداری و اعداد مختلط

این دو مبحث کلیه مطالب مورد نیاز المپیادهای ریاضی را در بخش هندسه پاسخگو می‌باشد و به صورت دو کتاب جداگانه منتشر می‌شود با عنایت به اینکه $\frac{۱}{۳}$ مسائل مطرح شده در المپیادهای ریاضی به این مباحث هندسه اختصاص دارد ارزش و اهمیت این دو مبحث بیشتر روشن می‌گردد این کتاب برای دبیران محترم، دانش‌آموزان ممتاز و علاقمندان به المپیادها قابل استفاده می‌باشد.

بخش ۱ـ تبدیلات

تبدیلات و انواع تبدیلات همان ابزارهایی هستند که ما در جستجوی آن‌ها می‌باشیم.

۱ـ۱ـ تعریف

یک تبدیل در صفحه عبارتست از یک انطباق یک به یک از یک مجموعه نقاط در صفحه بر خودش.

بدین ترتیب در تبدیل f برای هر نقطه‌ای مانند P یک نقطه واحد مانند Q یافت می‌شود بطوریکه $f(P) = Q$ و بالعکس.

مهمترین مطلب در تبدیلات درک این مطلب است که بعضی از ویژه‌گی‌های یک مجموعه در اثر تبدیلات بدون تغییر باقی می‌ماند. بطور مثال یکی از تبدیلات «همسایگی» را حفظ می‌نماید. این بدان معنی است اگر نقطه P همسایه نقطه Q باشد آنگاه $f(P)$ نیز همسایه $f(Q)$ می‌باشد. مطالعه در این باب منجر به پیدایش تپولوژی می‌گردد.

البته در تپولوژی نیازی نیست که خط در اثر تبدیلات حتماً به خط تبدیل شود.

بیشتر تبدیلات شامل آن دسته از تبدیلات است که خط را به خط تبدیل می‌نماید. هر چند تبدیلات خاص دیگری نیز وجود دارد که خط را الزاماً به خط تبدیل نمی‌نماید.

۲ـ۱ تعریف

تبدیلی که خط را به خط تبدیل می‌نماید را تبدیل «خط‌ساز» می‌نامیم.

در عین حال توجه داریم که یک خط مجموعه‌ای از نقاط است و $f(l)$ مجموعه‌ای نقاطی مانند $f(P)$ می‌باشد که P متعلق به خط l می‌باشد.

بنابراین در یک «خط ساز» f $(l)f$یک خط بوده و نقطه $f(P)$بر $f(l)$قرار دارد. اگر و تنها اگر P روی خط l باشد.

انتقال و دوران دو مثال از دو دستگاه «خط ساز» می‌باشند. بیشترین مطالعه ما را همین هندسه خط‌ساز تشکیل می‌دهد.

اگر برای هر نقطه‌ای مانند P یک نقطه مانند Q یافت شود بطوریکه $f(P) = Q$ ، fرا یک نگاشت می‌خوانیم.

نگاشت fرا پوشا می‌خوانیم اگر برای هر نقطه مانند Pیک نقطه مانند Qیافت شود بطوریکه $f(Q) = P$باشد و نگاشت fرا یک به یک می‌خوانیم اگر $f(R) = f(S)$باشد آنگاه $R = S$.

۱ـ۲ـ۱

یک تبدیل نگاشتی است که هم یک به یک و هم پوشا می‌باشد.

«توجه باید داشت که تبدیل را می‌توان توسط جبر خطی نیز تعریف کرد.» در دستگاه دکارتی می‌توان مثال‌های از تبدیلات هندسی بدست داد. برای مثال نگاشتی که بصورت زیر تعریف شود.

$$(x , y) \longrightarrow (x^{۲} , y)$$

یک تبدیل نمی‌باشد چون

$$(x , y) \longrightarrow (-۱ , ۲)$$

وجود ندارد یعنی نگاشت، یک به یک و پوشا نیست پس یک تبدیل نمی‌باشد.

در حالیکه نگاشت

$$(x , y) \longrightarrow (x , y^{۳})$$

یک تبدیل می‌باشد چون هر نقطه‌ای بصورت $(a , b^{\frac{۱}{۳}})$ را به یک نقطه و تنها به یک نقطه (a , b) می‌برد.

هر چند این نگاشت یک نگاشت «خط ساز» نیست. چون این نگاشت خط $y = x$را به یک خط تبدیل نمی‌کند بلکه آن را به منحنی نمایش $y = x^{۳}$تبدیل می‌کند.

هر چند نگاشت

$$(x , y) \longrightarrow (-x + \frac{y}{۲} , x + ۲)$$

یک تبدیل «خط‌ساز» می‌باشد چون خط $ax + by + c = ۰$را به خط

$2bx + (a + 2b)y + (c - 4b - 2a) = 0$ تبدیل می‌کند.

۱ـ۳ـ تمرین کدام یک از نگاشت‌های زیر تبدیل می‌باشند.

۱) $\alpha(x , y) = (x^{3} , y^{3})$ ۲) $\beta(x , y) = (\cos x , \sin y)$

۳) $\gamma(x , y) = (2x , 3y)$ ۴) $\varepsilon(x , y) = (-x , x + 3)$

۵) $P(x , y) = (\sqrt[3]{x} , e^{x})$

۱ـ۴ـ در تمرین‌های فوق معلوم کنید کدام یک از آنها «خط ساز» می‌باشند.

۱ـ۵ـ فرض کنیم $M = (a , b)$ در دستگاه مختصات باشد. x' و y' را چنان بیابید که در تبدیل $\alpha(x , y) = (x' , y')$، α چنان باشد که برای هر نقطه مانند P وسط P و $\alpha(P)$ همواره نقطه مفروض M باشد.

بخش ۲ ـ ویژگی‌های تبدیلات

۱ـ۲ـ گروه‌های تبدیلات

۱ـ۱ـ۲ـ تبدیل همانی که $T(P) = P$ که برای هر نقطه از صفحه برقرار است را تبدیل همانی می‌نامیم.

۱ـ۲ـ۱ـ۲ـ اگر برای هر نقطه مانند P تنها یک نقطه مانند Q یافت می‌شود که $\gamma(P) = Q$ و بالعکس $\gamma(Q) = P$ آنگاه تبدیل γ^{-1} وجود دارد. که بصورت زیر تعریف می‌شود $\gamma^{-1}(A) = B$ آنگاه $A = \gamma(B)$، γ^{-1} را وارون تبدیل γ می‌نامیم.

۲ـ۱ـ۲ـ ترکیب تبدیلات «اگر برای هر نقطه‌ای مانند C نقطه‌ای مانند B یافت شود که $\beta(B) = C$ و برای هر نقطه مانند B یک نقطه A چنان یافت شود $\alpha(A) = B$ آنگاه برای هر نقطه‌ای مانند C نقطه‌ای مانند A وجود دارد که داریم.

$$\beta o\alpha(A) = \beta(\alpha(A)) = \beta(B) = C$$

بنابراین ترکیب دو نگاشت خود یک نگاشت پوشا است.

۳ـ۱ـ۲ـ فرض کنیم $\beta o\alpha$ یک به یک باشد $\beta o\alpha(P) = \beta o\alpha(Q)$ بنابراین

$$\beta(\alpha(P)) = \beta(\alpha(Q)) \quad \Rightarrow \quad \alpha(P) = \alpha(Q)$$

و چون β یک به یک است بنابراین $P = Q$ چون α نیز یک به یک است.

۴ـ۱ـ۲ـ بنابراین ترکیب دو تبدیل $\beta o\alpha$ که هر دو خود تبدیل می‌باشند یک تبدیل است.

۵ـ۱ـ۲ـ خاصیت شرکت‌پذیری نیز در ترکیبات وجود دارد.

$$[\gamma o(\beta o\alpha)](P) = \gamma(\beta o\alpha)(P) = \gamma(\beta(\alpha(P))$$

$$= (\gamma o\beta)(\alpha(P) = [(\gamma o\beta)o\alpha]\ (P)$$

۶ـ۱ـ۲ـ اگر تبدیلاتی دارای هر چهار ویژگی فوق باشند. بسته بودن، وارون‌پذیری، تبدیل همانی

و شرکت پذیری را یک گروه می‌نامیم.

مجموعه تمام تبدیلات یک گروه می‌سازند و مجموعه تمام «خط‌سازها» نیز یک گروه می‌سازند.

توجه: همواره در تبدیلات $\alpha o \beta = \beta o \alpha$ وجود ندارد و اگر چنین خاصیتی وجود داشته باشد آن را یک گروه «آبلی» می‌نامند.

۲ـ۲ـ اگر α و β و γ تبدیلاتی در یک گروه باشند روابط زیر را داریم

۲ـ۲ـ۱: $\beta\alpha = \gamma\alpha \Rightarrow \beta = \gamma$

۲ـ۲ـ۲: $\beta\alpha = \beta\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$

۲ـ۲ـ۳: $\beta\alpha = \alpha \Rightarrow \beta = ۱$

۲ـ۲ـ۴: $\beta\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = ۱$

۲ـ۲ـ۵: $\beta\alpha = ۱ \Rightarrow \beta = \alpha^{-۱}$ یا $\alpha = \beta^{-۱}$

۲ـ۲ـ۶: $(w , \dots , \gamma\beta\alpha)(\alpha^{-۱}\beta^{-۱}\gamma^{-۱} \dots w^{-۱}) = ۱$

۲ـ۲ـ۷: $(\alpha^{-۱}\beta^{-۱}\gamma^{-۱} \dots w^{-۱})(w \dots \gamma\beta\alpha) = ۱$

۲ـ۲ـ۸: $(w \dots \gamma\beta\alpha)^{-۱} = \alpha^{-۱}\beta^{-۱}\gamma^{-۱} \dots w^{-۱}$

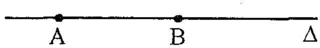
قانون ۸ـ۲ـ۲ را بصورت زیر هم می‌گویند.

در یک گروه وارون حاصل‌ضرب برابر است با حاصل‌ضرب وارون‌ها بصورت معکوس.

بخش ۳ ـ انتقال

۱ـ۳ـ تعریف

بردار پاره‌خطی است جهت‌دار و اندازه‌دار که دارای یک مبداء و یک انتها می‌باشد: بطور مثال بردار $\overrightarrow{AB}$ هم دارای اندازه $|AB|$ و هم راستای خطی است که دو نقطه آن A و B می‌باشد و جهت آن مشخص است که از A به B می‌باشد.



مثال: $\overrightarrow{AB}$ دارای راستای خط Δ و اندازه $|AB|$ و جهت از A به B می‌باشد.

در هندسه تحلیلی اگر تبدیل

$$(x\,,\,y) \longrightarrow (x+a\,,\,y+b)$$

را در نظر بگیریم به معنی آن است

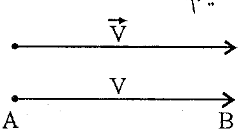
$$(x'\,,\,y') \longrightarrow (x\,,\,y)$$

که a و b دو عدد حقیقی می‌باشند.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

۲ـ۳ـ تعریف انتقال اگر برداری مانند $\vec{V}$ را داشته باشیم انتقال یافته نقطه‌ای مانند A را B می‌نامیم که بصورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$T\vec{V}(A) = B$$



و می‌خوانیم انتقال یافته نقطه A تحت بردار $\vec{V}$ نقطه B می‌باشد. نقطه B نقطه‌ای منحصر بفرد است.

۳-۳- این خواص را درباره انتقال می‌توان تحقیق کرد.

الف) هر انتقالی مانند T دارای یک وارون است مانند T^{-1} که اگر T و T^{-1} بر نقطه‌ای مانند A در صفحه اثر نمایند آن را در جای خودش نگاه خواهند داشت $ToT^{-1}(A) = A$

ب) یعنی عمل انتقال یک عمل بسته است. $(T\vec{V}_1 oT\vec{V}_2) = T(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = T\vec{V}$

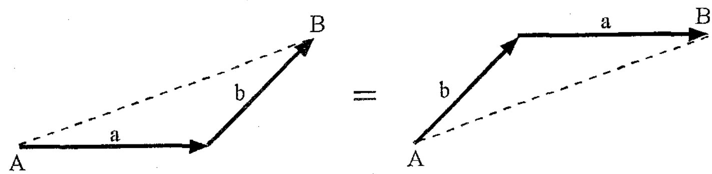
ج) تبدیل صفر یک تبدیل همانی در انتقال است.

$$T\vec{o}(A) = A$$

یعنی بردار صفر عضو خنثی عمل انتقال است.

د) انتقال نسبت به عمل جمع بسته است و خاصیت جابجایی دارد.

$$(T\vec{a} \circ T\vec{b})(A) = (T\vec{b} \circ T\vec{a})(A) = B$$



پس انتقال یک تبدیل یک به یک و پوشا و یک گره آبلی است.

۴-۳- قضیه: انتقال یافته هر شکل شکلی است هم نهشت با آن.

۱-۳-۴- انتقال یافته یک خط راست خطی است راست موازی با آن.

۲-۳-۴- انتقال یافته یک دایره دایره‌ای است برابر با آن. که مراکز آنها از انتقال هم بدست می‌آیند.

۳-۳-۴- فاصله دو نقطه در اثر عمل انتقال بدون تغییر باقی می‌ماند. یعنی پاره خط AB به پاره خطی برابر و موازی با آن تبدیل می‌شود. «خاصیت ایزومتری»

۴-۳-۴- اگر $T^{\vec{V}}_{AB} = A'B'$ باشد و $\frac{MA}{MB} = \lambda$ باشد انتقال یافته نقطه M نقطه‌ایست مانند M' که $\frac{M'A'}{M'B'} = \lambda$ این نتیجه مهم به ما نشان می‌دهد که نقاط نظیر از شکل F به نقاط نظیر از شکل F'

که انتقال یافته شکل F است بدل می‌شود.

۵-۳-۳- اگر $T_{C}^{\vec{V}} = D$ و $T_{A}^{\vec{V}} = B$ باشد پس $T_{AC}^{\vec{V}} = BD$ یعنی مانند این عمل جمع است که

$$\begin{array}{l} T_{A}^{\vec{V}} = B \\ + T_{C}^{\vec{V}} = D \\ \hline T_{A}^{\vec{V}} + T_{C}^{\vec{V}} = BD \\ T_{AC}^{\vec{V}} = BD \end{array}$$

۶-۳-۳- انتقال یک «خط‌ساز» است.

۷-۳-۳- هر دو خط موازی در صفحه را می‌توان انتقال یافته هم دانست.

۸-۳-۳- در انتقال زاویه بین دو خط و انتقال یافته‌های آن دو خط با هم برابر است.

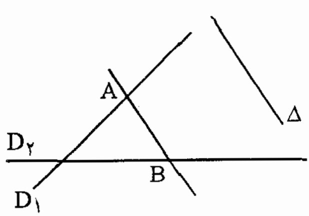
استفاده از تعاریف و قضایای فوق در حل مسائل

۹-۳-۳- اگر یک دسته خط همگی از یک نقطه ثابت در صفحه بگذرند انتقال یافته همه آنها نیز از یک نقطه ثابت در صفحه خواهد گذشت.

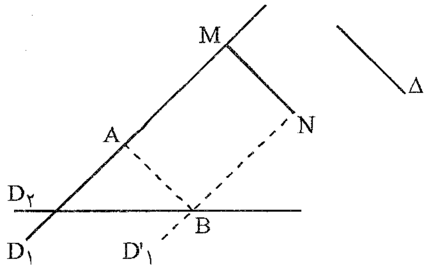
۱۰-۳-۳- اگر یک دسته دایره همگی در یک نقطه متقاطع باشند انتقال یافته آنها نیز در یک نقطه ثابت در صفحه متقاطع خواهند بود.

۵-۳- مثال: دو خط D_1 و D_2 و امتداد معلوم Δ در صفحه مفروض می‌باشند پاره خطی مانند $AB = l$ به موازات Δ بر دو خط D_1 و D_2 متکی نمائید.

حل: فرض کنیم مسئله حل شده است



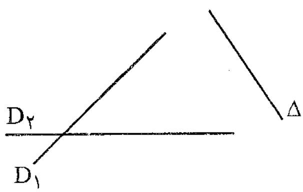
حل مسئله ۴ـ۳: در کلاس توسط معلم بصورت زیر انجام می‌گیرد.



از یک نقطه دلخواه مانند M واقع به D_1 خطی به موازات Δ و به اندازه l رسم می‌کنیم تا به نقطه N برسیم. از نقطه N خط D'_1 را به موازات D_1 رسم می‌کنیم تا D_2 را در نقطه B قطع نماید. از B به موازات Δ می‌کشیم تا D_1 را در A قطع نماید حال اثبات

چون چهارضلعی $ABMN$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد پس AB جواب مسئله است.

حال این سؤال پیش می‌آید معلم از کجا بفکرش رسید که MN را به موازات Δ و به اندازه l رسم نماید و از N خطی به موازات D_1 بکشید تا نقطه B بدست می‌آید. جواب این سؤالات این نیست که بعلت تجربه و ابتکار می‌توان چنین راه حلی را یافت، بلکه راه حل فوق دلائل منطقی دارد که به ترتیب ذکر می‌شود.



پس دو خط D_1 و D_2 و امتداد Δ در دست است اندازه پاره خط $l = |AB|$ و راستای AB در راستای Δ می‌باشد حال اگر A را مبداء و B را انتها در نظر بگیریم بردار $\overrightarrow{AB}$ به اندازه l را داریم که A می‌باید بر D_1 و B بر D_2 قرار گیرد.

حال می‌دانیم که نقطه A بر روی D_1 متحرک است و ما باید آن را در جایی ثابت کنیم که وقتی از A به موازات Δ رسم کردیم پاره خط D_2 را در نقطه B قطع نماید و $l = |AB|$ گردد.

حال می‌توانیم روابط زیر را به ترتیب بنویسیم.

$A = A$ (۱)

$(T^{-1}AB \circ TAB)\ (A) = A$ (۲)

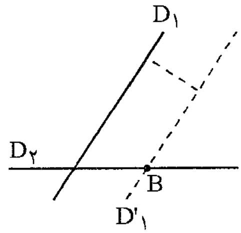
$$(T\overrightarrow{BA} \circ T\overrightarrow{AB})\ (A) = A \qquad (۳)$$

$$T\overrightarrow{BA} \circ (T\overrightarrow{AB}\ (A)) = A \qquad (۴)$$

حال رابطه ۴ را تفسیر می‌کنیم: A متعلق است به خط $D_۱$ و انتقال یافته‌اش روی خطی موازی $D_۱$ مانند $D'_۱$ است که از رابطه

$$T^{\overrightarrow{AB}}_{(D_۱)} = D'_۱$$

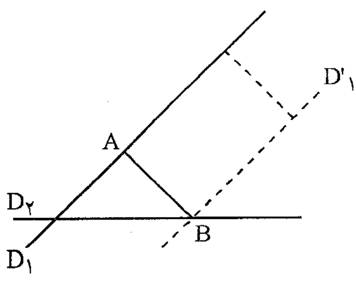
اما $T^{\overrightarrow{AB}}_{(A)} = B$ پس نقطه B روی انتقال یافته خط $D_۱$ یعنی $D'_۱$ قرار دارد. از طرف دیگر نقطه B متعلق به خط $D_۲$ می‌باشد $B = D'_۱ \cap D_۲$ پس برای یافتن نقطه B ابتدا خط $D_۱$ را به اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ منتقل می‌سازیم.



حال باز به رابطه ۴ بازگردیم

$$T^{\overrightarrow{BA}}_{(B)} = A$$

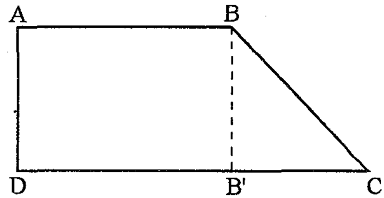
یعنی برای یافتن نقطه A باید نقطه B را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ منتقل سازیم



مثال: از یک ذوزنقه چهارضلع در دست است آن را رسم کنید.

حل مسئله توسط معلم در کلاس بدین ترتیب است:

فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد و چهارضلعی $ABCD$ جواب خواسته شده باشد.

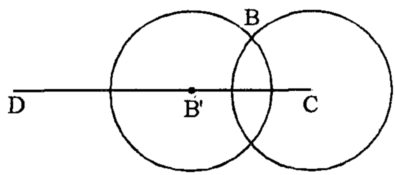


از نقطه B خط BB' را موازی AD می‌کشیم تا نقطه B' بدست آید چهارضلعی $ABB'D$ یک متوازی‌الاضلاع است. «باز این سؤال برای دانش‌اموز مطرح می‌شود که معلم این خط BB' را از کجا بفکرش رسیده است که رسم کند).

حال در مثلث $BB'C$ اندازه ضلع $B'C = CD - AB$ معلوم و ضلع $BB' = AD$ معلوم و ضلع BC نیز بنا بفرض معلوم است.

پس مثلث $BB'C$ قابل رسم می‌باشد و شیوه زیر را برای حل مسئله ارائه می‌دهد.

۱ـ خط DC را به اندازه مفروض رسم می‌کنیم.

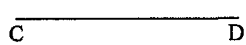


۲ـ روی DC نقطه B' را چنان جدا می‌کنیم که $B'C = DC - AB$ باشد و سپس دو کمان یکی به مرکز B' به شعاع DA و یکی به مرکز C به شعاع CB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه B قطع نمایند. از نقطه B خط BA را به موازات DC می‌کشیم تا نقطه A بدست آید.

حال باید دید چگونه این راه حل از طریق منطق بدست آمده است و از جعبه جادویی معلم برای بیرون کشیدن خط BB' از آن کمک نگرفت و یا علت آن را توجیه کرد.

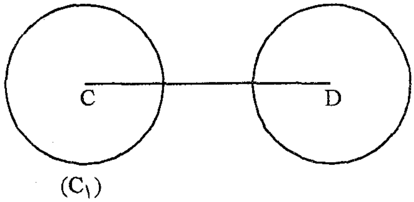
حال راه حل‌های منطقی مسئله

۱ـ می‌توان خطی به اندازه CD رسم کرد.



۲ـ مکان هندسی نقطه A روی دایره‌ایست به مرکز C و به شعاع CA و مکان هندسی نقطه B روی

دایره‌ایست به مرکز D و به شعاع DB این دو دایره را می‌توان رسم کرد.



حال باید این مسئله را حل کرد چگونه خطی به اندازه معلوم AB بر این دو دایره متکی کرد که موازی CD باشد.

چون $AB \parallel CD$ و $|AB| = a$ معلوم است پس $\overrightarrow{AB}$ در دست است.

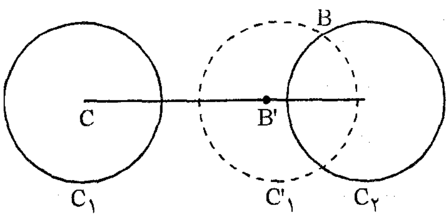
نقطه A روی دایره C_1 حرکت می‌نماید پس مطابق مسئله قبل می‌توان برابری‌های زیر را نوشت

$$A = A$$

$$(T\overrightarrow{BA} \circ T\overrightarrow{AB})(A) = A$$

$$T\overrightarrow{BA}\,(T\overrightarrow{AB}_{(A)}) = A$$

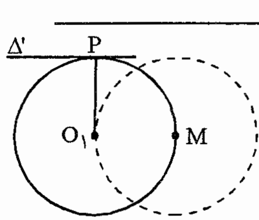
چون A روی دایره C_1 است پس $T\overrightarrow{AB}_{(A)}$ روی دایره دیگریست مانند C'_1 که از انتقال دایره C_1 تحت دایره AB حاصل می‌شود.



پس محل برخورد دایره C'_1 با دایره C_2 نقطه B است $B = C'_1 \cap C_2$ حال $T\overrightarrow{BA}_{(B)} = A$ یعنی نقطه B را با بردار $\overrightarrow{BA}$ منتقل سازیم تا نقطه A بدست آید.

پس خط جادویی BB' یعنی همان نقطه جادویی B' می‌باشد که بطور منطقی از انتقال نقطه C تحت بردار AB بدست آمده است. و دو دایره C'_1 و C_2 همان دو کمان بودند که معلم برای رسم مثلث $BB'C$ از آن استفاده می‌کرد.

۶ـ۳ـ مسئله: یک دایره حول یک نقطه از محیط خود در صفحه دوران می‌کند همواره به امتداد ثابت Δ بر این دوایر مماس‌های رسم می‌کنیم اگر P نقطه محل تماس می‌باشد مکان نقطه P را تعیین کنید.



حل: Δ امتداد ثابت و دایره $C_1(O\ ,\ R)$ که از نقطه ثابت M می‌گذرند را در نظر می‌گیریم مرکز همه دایره‌های $C_1(O\ ,\ R)$ بر روی دایره‌ایست به مرکز M و به شعاع R یکی از این مماس‌ها بر یکی از این دوایر متغیر خط Δ'_1 می‌باشد که در نقطه P بر دایره $C_1(O\ ,\ R)$ مماس است.

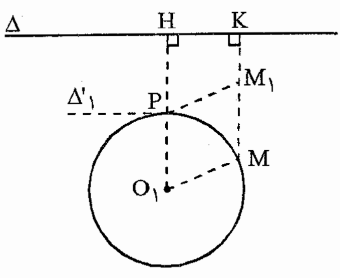
چون O_1P بر خط Δ' عمود است پس O_1P بر خط Δ نیز عمود است. چون راستای Δ معلوم است پس راستای O_1P معلوم و چون اندازه O_1P معلوم است پس $\overrightarrow{O_1P}$ را بوجود می‌آورد و می‌توانیم بنویسیم.

$$T^{\overrightarrow{O_1P}}_{(O_1)} = P$$

چون O_1 بر روی دایره $(M\ ,\ R)$ حرکت می‌نماید پس نقطه P روی دایره‌ایست که از انتقال دایره $(M\ ,\ R)$ بدست می‌آید چون O_1P دو جهت مختلف دارد پس جواب نیز دو دایره است.

راه حل دوم:

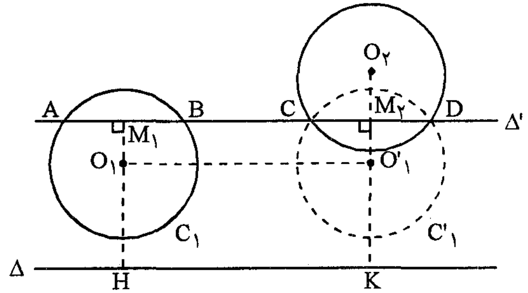
$\Delta \perp O_1H$ و $O_1H \perp \Delta'_1$ و $MK \perp \Delta$ و $MM_1 = O_1P$ و موازی O_1P جدا می‌کنیم چهارضلعی O_1PM_1M متوازی‌الاضلاع است پس مکان P دایره‌ایست به مرکز M_1 و به شعاع $M_1P = R$.



توجه اینکه این بار امتداد و جهت بردار $\overrightarrow{OP}$ را غیرمستقیم از طریق زاویه‌ای که با امتداد معین Δ می‌ساخت بدست آورده‌ایم. و همچنین از خاصیت دسته دوایری که از یک نقطه می‌گذرند استفاده شده است. (۱۰-۳-۲)

۷-۳- مسئله: خطی به موازات امتداد معین Δ چنان رسم کنید که در دو دایره دو وتر مساوی بوجود آورد.

فرض کنیم مسئله حل شده است.



و خط Δ' موازی Δ بوده و دو وتر $AB = CD$.

چون دو پاره خط AB و CD با یکدیگر برابر و هم راستا می‌باشند پس باید برداری مانند $\vec{x}$ یافت شود که این دو پاره خط را برهم منطبق سازد یعنی

$$T\vec{x}_{(AB)} = CD$$

اگر AB بر CD منطبق شود دایره $C_۱$ به دایره $C'_۱$ تبدیل می‌شود

$$T\vec{x}_{(C_۱)} = C'_۱ \Rightarrow T^{\vec{x}}_{(O_۱)} = O'_۱$$

پس $\vec{x} = \overrightarrow{O_۱O'_۱}$ حال $O'_۱O_۲$ بر وتر شرکت CD و در نتیجه بر خط Δ عمود است و K تصویر نقطه $O_۲$ بر خط Δ ثابت است و اگر H نیز تصویر $O_۱$ بر Δ باشد. محل H و K بر روی Δ ثابت بوده و اندازه $|HK|$ مقدار ثابتی می‌باشد که برابر $|O_۱O'_۱|$ می‌باشد.

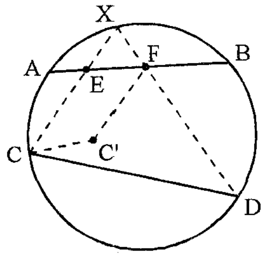
پس راه حل مسئله این خواهد بود که بردار $\vec{x} = \overrightarrow{HK}$ را بدست آوریم و دایره $C_۱$ را به اندازه این بردار در صفحه منتقل سازیم تا دو نقطه C و D بدست آید.

توجه اینکه: در حل این مسئله نیز از این نکته استفاده شد که در انتقال نقاط نظیر بر نقاط نظیر

منطبق شوند یعنی نقطه M_1 وسط پاره خط AB بر M_2 وسط پاره CD منطبق می‌شود.

۳ـ۸ـ مسئله: دو وتر AB و CD در دایره $C(O\ ,\ R)$ مفروضند بر روی دایره نقطه X را چنان تعیین کنید که دو خط XC و XD روی AB پاره خط EF را بطول l جدا سازند.

حل: در این مسئله از خاصیت (۹ـ۳ـ۳) استفاده می‌شود.



چون $l = |EF|$ و همچنین EF روی AB قرار دارد پس $\overrightarrow{EF}$ می‌باشد و داریم

$$T\vec{E}F_{(E)} = F \qquad (۱)$$

می‌دانیم نقطه X روی دایره حرکت می‌کند و دسته خطوط xC همگی از نقطه ثابت C می‌گذرند پس انتقال یافته آنها نیز از نقطه ثابت C' خواهد گذشت

$$T\vec{E}F_{(C)} = C' \qquad (۲)$$

و C' نقطه ثابتی در صفحه است پس با توجه به رابطه (۱) و (۲) خط $xC \parallel FC'$ است و زاویه

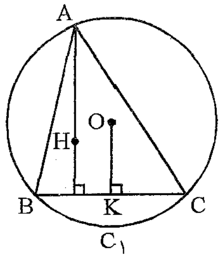
$$C'\hat{F}D = C\hat{x}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

که مقداریست معلوم می‌باشد پس برای تعیین محل F کافیست روی پاره خط CD' کمان در خور زاویه $C'FD$ را بسازیم.

۳ـ۹ـ مسئله: از مثلث ABC ضلع BC و زاویه A معلوم است مکان هندسی محل برخورد ارتفاعات مثلث را بدست آورید.

حل: این مسئله به یک اطلاع هندسی نیاز دارد. فاصله هر رأس مثلث تا مرکز ارتفاعیه دو برابر فاصله مرکز دایره محیطی مثلث از ضلع مقابل به آن زاویه است.

چون ضلع BC و زاویه A از مثلث مفروض است پس رأس A روی کمان در خور زاویه A نسبت به ضلع BC واقع است و در واقع این دایره دایره محیطی مثلث ABC است که رأس A روی آن حرکت می‌نماید.



AH بر ضلع BC عمود است پس راستایی معلوم دارد و $AH = ۲OK$ می‌باشد پس $\overrightarrow{AH} = ۲\overrightarrow{OK}$ حال رأس A روی دایره $(C_۱)$ حرکت می‌نماید و چون

$$T\vec{A}H_{(A)} = H$$

پس نقطه H نیز روی دایره دیگریست که از انتقال دایره $C_۱$ به اندازه بردار $\overrightarrow{AH}$ بدست می‌آید.

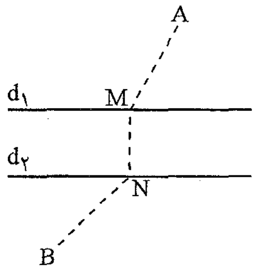
$$T\vec{A}H_{(C_۱)} = C'_۱$$

پس مکان H دایره‌ایست برابر با دایره محیطی مثلث ABC که از انتقال به اندازه بردار $\overrightarrow{AH}$ حاصل می‌شود. چون دایره $C_۱$ همواره از دو نقطه ثابت B و C می‌گذشته است پس دایره $C'_۱$ نیز از این دو نقطه ثابت می‌گذرد.

راه حل دوم: می‌دانیم قرینه مرکز ارتفاعیه مثلث نسبت به یک ضلع مثلث بر روی دایره محیطی مثلث قرار دارد چون قرینه H روی دایره $C_۱$ حرکت می‌نماید پس H نیز روی دایره $C'_۱$ که قرینه دایره $C_۱$ نسبت به ضلع BC می‌باشد حرکت می‌نماید.

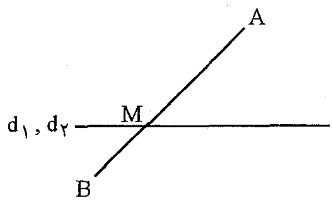
۳-۱-۳- نکته: حذف بخشی از شکل بعنوان یک زیر مجموعه توسط انتقال:

مسئله: دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ و دو نقطه A و B در دو طرف این دو خط مفروضند خط MN عمود بر هر دو خط را چنان تعیین کنید که مجموع فواصل $MA + MN + NB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



(۱)

کافیست کاغذ را طوری تا بزنیم تا خط d_2 بر d_1 منطبق شود آنگاه A را به B وصل کنیم تا نقطه M بدست آید.

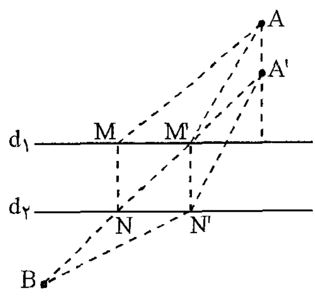


(۲)

حال اگر کاغذ را باز کنیم شکل (۲) بصورت شکل (۱) در بیاید و اثبات اینکه فاصله بین دو نقطه A و B کمترین مقدار است آسان می‌باشد، امّا این تازدن کاغذ به مفهوم این است که فاصله دو خط موازی را $l = |MN|$ بدانیم و $\overrightarrow{MN}$ باشد. در این حالت کار بنابراین مفهوم است که کلیه نقاط صفحه را به اندازه $\overrightarrow{MN}$ منتقل کرده باشیم پس راه حل زیر بدست می‌آید.

$$T_{A}^{\overrightarrow{MN}} = A'$$

$$T\vec{M}N_{(d_1)} = d_2$$



حال اگر دو نقطه دیگر N' و M' را در نظر بگیریم

$$A'N' + BN' > A'B$$

$$A'N' + MN + BN' > A'N + MN + BN$$

$$AM' + M'N' + BN' > AM + MN + BN$$

و حکم ثابت است.

توجه اینکه زیر مجموعه‌ای از نقاط صفحه که بین دو خط موازی d_1 و d_2 قرار داشته است در اثر عمل انتقال حذف گردیده. از این خاصیت در حل مسائل دیگر نیز استفاده خواهد شد.

مسائل برای حل

۱-۱-۳- ثابت کنید اگر طول MN در چهارضلعی $ABCD$ مساوی نصف مجموع طول‌های اضلاع AB و CD باشد چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است. نقاط M و N وسط‌های اضلاع AD و BC می‌باشند. (راهنمایی مسئله ابتدا از راه برداری حل نمائید).

۲-۱-۳- بر روی دو ضلع AC و AB از مثلث ABC دو مربع $AFEC$ و $AKLB$ را می‌سازیم ثابت کنید خطوط LC و BE و ارتفاع AD در یک نقطه همرس می‌باشند.

بخش ۴ ـ تقارن مرکزی یا یک نیم دور

۱ـ۴ـ تعریف

هرگاه سه نقطه A و O و A' هم خط بوده و داشته باشیم

$$AO = OA'$$

آنگاه می‌نویسیم $\delta o(A) = A'$ و می‌خوانیم قرینه A نسبت به نقطه O نقطه A' می‌باشد یا یک دوران 180° حول نقطه O نقطه A را به نقطه A' بدل می‌نماید.

بنابراین تقارن مرکزی یک دوران در حالت خاص می‌باشد.

۱ـ۱ـ۴ـ در تقارن مرکزی تنها نقطه ثابت مرکز دوران (O) است و تنها خطوط ثابت خطوط گذرنده از نقطه (O) می‌باشند.

۲ـ۱ـ۴ـ از نظر تحلیلی اگر مختصات نقطه $O: (a , b)$ و $A: (x , y)$ و $A': (x' , y')$ باشد خواهیم داشت

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

یعنی با نگاشتی سروکار داریم که

$$(x , y) \longrightarrow (-x + 2a , -y + 2b)$$

۳ـ۱ـ۴ـ قرینه یک خط راست، یک خط راست موازی با آن است.

فرض کنیم خط $D: mx + ny + c = 0$ با توجه به رابطه (۲ـ۱ـ۴) داریم

$$D': mx + ny + c - 2(ma + nb + c) = 0$$

بنابراین تبدیل یافته خط D خط D' است که موازی آن می‌باشد. یعنی $\delta\ o\ (D) \parallel D$ پس تقارن مرکزی یک خط‌ساز است.

۴ـ۱ـ۴ـ حال ترکیب دو تقارن مرکزی را با دو مرکز تقارن در نظر می‌گیریم. ترکیب دو تقارن مرکزی یک انتقال است و بالعکس. اگر $o(a , b)$ و $o'(c , d)$ باشد.

$$\begin{aligned}\delta o' . \delta o &= \delta o'((-x + ۲a , -y + ۲b)) \\ &= (-[-x + ۲a] + ۲c , -[y + ۲b] + ۲d) \\ &= (x + ۲(c - a) , y + ۲(d - b))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + ۲(c - a) \\ y' = y + ۲(d - b) \end{cases}$$

بنابراین $\delta o' . \delta o = T\vec{V}$ یک انتقال است.

حال اگر نقطه Q در وسط RP باشد داریم

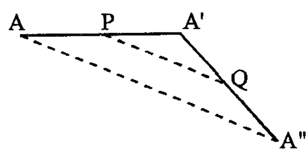
$$\delta_Q \delta_P(P) = \delta_Q(P) = R$$

$$\delta_R \delta_Q(P) = \delta_R(R) = R$$

بنابراین فقط یک تبدیل است که P را به R می‌برد پس

$$\delta_Q . \delta_P(P) = \delta_R . \delta_Q = T\overrightarrow{PR}$$

اثبات دیگر برای اینکه ترکیب دو تقارن مرکزی یک انتقال است.



$$\delta Q \circ \delta P(A) = A''$$

$$AA'' = ۲PQ$$

$$T^{۲\overrightarrow{PQ}}{}_{(A)} = A''$$

$$\delta P \circ \delta Q(A) = T\,۲\vec{P}Q_{(A)}$$

۵ـ۱ـ۴ـ ترکیب سه تقارن مرکز یک تقارن مرکزی است.

فرض کنیم $P: (a , b)$ و $Q: (c , d)$ و $R: (e , f)$ و این سه نقطه بر روی یک خط راست واقع نباشند، اگر این سه نقطه را سه رأس یک متوازی‌الاضلاع در نظر بگیریم رأس چهارم آن $S: (a - x + e , b - d + f)$ خواهد بود. حال فرض کنیم نقطه $A(x , y)$ تحت تأثیر $\delta_R . \delta_Q . \delta_P$ واقع شود پس داریم

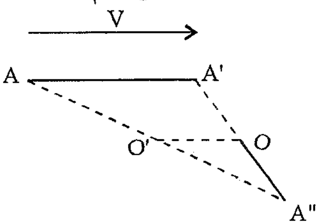
$$\delta_R . \delta_Q . \delta_P(x , y) = (-x + ۲[a - c + e] , -y + ۲(b - d + f)] = \delta s((x , y))$$

بنابراین نتیجه سه تقارن مرکزی حول سه نقطه P و Q و R عبارتست از یک تقارن مرکزی حول نقطه S که رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی می‌باشد که روی R و Q و P ساخته شود.

اثبات دیگر برای (۵-۱-۴):

۱-۵-۱-۴- ترکیب یک انتقال و یک تقارن مرکزی یک تقارن مرکزی است. در قضیه (۴-۱-۴) ثابت شد که ترکیب دو تقارن مرکزی یک انتقال است پس حال باید ثابت شود که ترکیب سه تقارن مرکزی یک تقارن مرکزی است.

انتقال T با بردار $\vec{V}$ را همراه با تقارن مرکزی حول نقطه O در نظر می‌گیریم پس اثر ترکیب این تبدیل را روی نقطه دلخواه A از صفحه مطالعه می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} T\vec{V}_{(A)} = A' \\ \delta_o(A') = A'' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (\delta_o \,.\, T\vec{V})\ (A) = A''$$

$$T^{\frac{1}{2}\overleftarrow{V}}_{(O)} = O'$$

بنابراین نقطه O' یک نقطه ثابت صفحه است که از انتقال نقطه O به اندازه نصف بردار $\vec{V}$ و در جهت مخالف آن بدست می‌آید بنابراین

$$(\delta_o \circ T\vec{V})\ (A) = \delta_{o'}(A) = A''$$

و حکم ثابت است.

۶-۱-۴- چون

$$\delta_Q \,.\, \delta_P = T\overrightarrow{PR} \ \Rightarrow\ T^{-1}\overrightarrow{PR} = \delta_P \,.\, \delta_Q$$

بنابراین اگر

$$\delta_Q \,.\, \delta_P = \delta_P \,.\, \delta_Q \ \Rightarrow\ P \equiv Q$$

برای سه تقارن مرکزی داریم

$$\delta_R \cdot \delta_Q \cdot \delta_P = \delta_S = \delta^{-1}{}_S = (\delta_R \cdot \delta_Q \cdot \delta_P)^{-1} = \delta^{-1}{}_P \cdot \delta^{-1}{}_Q \cdot \delta^{-1}{}_R = \delta_P \cdot \delta_Q \cdot \delta_R$$

۲ـ۴ـ یادآوری‌ها

۱ـ۲ـ۴ـ تمام دسته خطوطی که از یک نقطه ثابت در صفحه بگذرند در اثر یک تبدیل تقارن مرکزی همگی از یک نقطه ثابت در صفحه می‌گذرند.

۲ـ۲ـ۴ـ تمام دوایر متقاطع در یک نقطه در اثر یک تبدیل تقارن مرکزی همگی در یک نقطه ثابت در صفحه متقاطع می‌باشند.

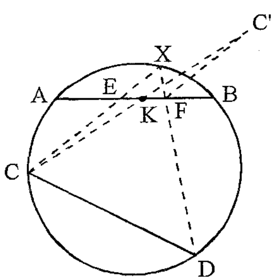
۳ـ۲ـ۴ـ تبدیل یافته یک خط در تقارن مرکزی خطی موازی با آن خط می‌باشد.

۴ـ۲ـ۴ـ تبدیل یافته یک دایره در تقارن مرکزی یک دایره است.

توجه: در مسائلی که یک نقطه در وسط دو نقطه دیگر واقع شده‌باشد می‌توان از تقارن مرکزی استفاده کرد.

۵ـ۲ـ۴ـ مسئله: دو وتر AB و CD و نقطه K روی AB در دایره (O) مفروضند. بر روی دایره نقطه x را چنان تعین کنید که خطوط xC و xD با AB در نقاط E و F متقاطع بوده و K وسط EF باشد.

حل: می‌دانیم $\delta_K(E) = F$ باشد. و تمام خطوط xC باید از نقطه ثابت C وقتی x روی دایره حرکت کند بگذرند بنابراین تبدیل یافته دسته خطوط xC از تبدیل یافته $\delta_K(C) = C$ خواهند گذشت بنابراین



$$\left.\begin{array}{l}\delta_K(E) = F \\ \delta_K(C) = C'\end{array}\right\} \Rightarrow \delta_K(CE) = C'F$$

می‌باشد پس $C'F \parallel CE$ پس زاویه $DFC' = \hat{x}$ می‌باشد و زاویه x نصف کمان CD بوده و مقداری ثابت است پس راه حل زیر بدست می‌آید روی $C'D$ کمان در خور زاویه $\hat{x}$ را رسم می‌کنیم تا نقطه F بدست آید.

۶-۲-۴-مسئله: اگر O_1 , O_2 ... O_n (nزوج) مرکزهای تقارن در صفحه باشد و قرینه‌های پاره خط AB را به ترتیب حول این نقاط تعیین کنیم تا پاره خط A_nB_n بدست آید ثابت کنید $AA_n = BB_n$.

$$(\delta_{on} \circ \delta_{on-1} \dots \delta_{o_1})\ (A) = A_n$$

$$(T_{\overrightarrow{2onon-1}} \circ T_{\overrightarrow{2on-1\,.on-3}} \dots T_{\overrightarrow{2o2o1}}\ )(A) = An$$

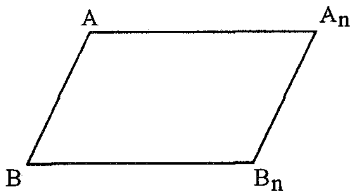
$$2(T_{\overrightarrow{2onon-1}} \circ T_{on-2\,.on-3} \dots T_{o2o1})(A) = An$$

اما مجموع چند انتقال در صفحه یک انتقال دیگر است که بردار انتقال برابر مجموع بردارهای انتقال‌ها می‌باشد پس

$$2T\vec{V}_{(A)} = An$$

و همین مطلب بردار نقطه B نیز صادق است

$$2T\vec{V}_{(B)} = Bn$$



پس چهار نقطه $AAnBnB$ یک متوازی‌الاضلاع است ولی اگر n فرد باشد نتیجه کار $(T\vec{V} \circ \delta on) = \delta o'$ مطابق قضیه (۶-۱-۴) تقارن مرکزی جدید است و در حالت کلی $AAn \neq BBn$ است.

مسئله (۷-۲-۴): اگر o_1 ... o_n مرکز تقارن‌های مرکزی به تعداد فرد داشته باشیم. تبدیل یافته نقطه A حول این نقاط به ترتیب را به دست آوریم تا به نقطه An برسیم و سپس تبدیل یافته An را حول همین نقاط به همین ترتیب بدست آوریم، ثابت کنید نقطه حاصل بر A منطبق است.

$$(\delta_{on} \cdot \delta_{on-1} \cdot \dots \cdot \delta_{o_1})(A) = An \qquad (1)$$

چون تعداد مرکزهای تقارن فرد است پس مجموع ترکیب آنها یک تقارن مرکزی به مرکز O می‌باشد (قضیه ۶-۱-۴). پس رابطه (۱) بصورت زیر در می‌آید

$$\delta o(A) = An \quad \Rightarrow \quad \delta o\,.\,(An) = A \qquad (2)$$

و رابطه (۲) را می‌توان بصورت رابطه یک بسط داد.

مسئله (۸ـ۲ـ۴): ثابت کنید

$$(\delta_{o_۴} \circ \delta_{o_۳} \circ \delta_{o_۲} \circ \delta_{o_۱}) = (\delta_{o_۲} \circ \delta_{o_۱} \circ \delta_{o_۴} \circ \delta_{o_۳})$$

با استفاده از قضیه (۶ـ۱ـ۴)

$$= (\delta_{o_۲} \circ \delta_{o_۳} \circ \delta_{o_۴} \circ \delta_{o_۱})$$

$$= (\delta_{o_۴} \circ \delta_{o_۳} \circ \delta_{o_۲} \circ \delta_{o_۱})$$

مسئله (۹ـ۲ـ۴): ثابت کنید

$$(\delta_{o_۵} \circ \delta_{o_۴} \circ \delta_{o_۳} \circ \delta_{o_۲} \circ \delta_{o_۱}) = (\delta_{o_۱} \circ \delta_{o_۲} \circ \delta_{o_۳} \circ \delta_{o_۴} \circ \delta_{o_۴})$$

مثال: از یک nضلعی به تعداد فرد اوساط اضلاع آن در دست است nضلعی را رسم کنید.
فرض کنیم A یک رأس از nضلعی باشد

$$(\delta_{on} \cdot \delta_{on_{-۱}} \dots \delta_{o_۱})(A) = A$$

چون نقطه Aبدون تغییر $\delta o(A) = A \quad \Rightarrow \quad O \equiv A$ در صفحه به جای خود مانده است.

اگر نقطه دلخواه Mرا نیز در صفحه تحت تأثیر این تبدیل قرار دهیم داریم

$$(\delta_{on} \cdot \delta_{on_{-۱}} \dots \delta_{o_۱})(M) = M'$$

$$\delta_A(M) = M'$$

پس نقطه Aدر وسط MM'است و با بدست آمدن رأس A، nضلعی مقابل رسم است.

مسائل برای حل

۱ـ۳ـ۴ـ ثابت کنید اگر $Q = T\overrightarrow{AB}_{(P)}$ آنگاه

$$T\overrightarrow{AB} \circ \delta_P \circ T^{-۱}\overrightarrow{AB} = \delta_Q$$

۲ـ۳ـ۴ـ این رابطه را اثبات یا رد کنید: اگر داشته باشیم
$\delta_P \cdot T\overrightarrow{AB} \cdot \delta_P = T\overrightarrow{CD}$ آنگاه $\delta_{P(B)} = D \quad , \quad \delta_{P(A)} = C$

۳ـ۳ـ۴ـ از مثلث ABCمیانه‌های وارد بر دو ضلع ABو ACو اندازه زاویه Aدر دست است مثلث

را رسم کنید.

۴-۳-۴- دو دایره متقاطع مفروضند از محل تقاطع خطی رسم کنید تا دو دایره را در دو نقطه قطع نماید و تفاضل وترهای بدست آمده مقدار معلومی باشد.

۴-۳-۵- ثابت کنید اگر شکلی بیش از یک مرکز تقارن داشته باشد آنگاه دارای بی‌شمار مرکز تقارن است.

۴-۳-۶- اگر H مرکز ارتفاعیه و O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد ثابت کنید N مرکز دایره نه نقطه مثلث در وسط HO واقع است.

بخش ۵ـ تقارن محوری یا بازتاب

۱ـ۵ـ تعریف

بازتاب نسبت به خط مفروض m را δ_m می‌نامیم و برای هر نقطه P از صفحه داریم

$$\delta_m(P) = \begin{cases} P & \text{اگر } P \in m \\ Q & \text{اگر } P \notin m \text{ نبوده و خط } m \text{ عمود منصف پاره خط } PQ \text{ باشد.} \end{cases}$$

خط m را محور تقارن یا بازتاب می‌نامیم.

۱ـ۱ـ۵ـ دو تبدیل متوالی نسبت به یک محور یک تبدیل همانی است یعنی

$$\delta^2 m = 1$$

چون $\delta_m(\delta_m(P)) = P$ می‌باشد.

۲ـ۱ـ۵ـ بازتاب یک تبدیل یک به یک است چون

$$\delta_m(A) = \delta_m(B) \Rightarrow \delta_m(\delta_m(A)) = \delta_m(\delta_m(B)) \Rightarrow A = B$$

۱ـ۲ـ۱ـ۵ـ در بازتاب محور بازتاب بدون تغییر در صفحه باقی می‌ماند و هر نقطه واقع بر محور بازتاب برخودش منطبق است.

۳ـ۱ـ۵ـ بازتاب هر خط عمود بر محور بازتاب بر خودش منطبق است.

۴ـ۱ـ۵ـ شکل تحلیلی معادله بازتاب نسبت به خط

اگر معادله خط (m) بصورت $ax + by + c = 0$ و مختصات نقطه $P(x, y)$ و مختصات نقطه Q بازتاب نقطه P نسبت به خط m را $Q(x', y')$ بنامیم.

$$Q = \begin{cases} x' = x - \dfrac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \\ \\ y' = y - \dfrac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

۵ـ۱ـ۵ـ تعریف: طول پایی یا ایزومتری:

هرگاه فاصله دو نقطه P و Q در اثر یک تبدیل با فاصله بین تبدیل یافته‌اشان برابر باشد آن تبدیل یک تبدیل طول پا یا ایزومتری است.

۶ـ۱ـ۵ـ بازتاب یک تبدیل ایزومتری است: اثبات بعهده خواننده

۷ـ۱ـ۵ـ در تمام تبدیلات ایزومتری ویژگی‌های زیر برقرار است.

الف) اگر $A' = \alpha(A)$ و $B' = \alpha(B)$ و $C' = \alpha(C)$ باشد. پس اگر $AB + BC = AC$ باشد آنگاه $A'B' + B'C' = A'C'$

ب) اگر B بین دو نقطه A و C واقع شود یعنی $A - B - C$ پس B' نیز بین A' و C' واقع است یعنی $A' - B' - C'$ و بویژه اگر B وسط AC باشد B' نیز وسط $A'C'$ است.

ج) بازتاب خط را به خط تبدیل می‌کند.

د) بازتاب دو خط l_1 و l_2 دو خط l'_1 و l'_2 است بطوریکه زاویه بین l_1 و l_2 با زاویه بین l'_1 و l'_2 برابر است یعنی اصطلاحاً می‌گوییم بازتاب زاویه را محفوظ نگاه می‌دارد.

هـ) بازتاب یک «خط‌ساز» است.

۸ـ۱ـ۵ـ الف) محور تقارن: محور تقارن یک شکل بصورت زیر تعریف می‌شود.

خط m محور تقارن مجموعه S است. بطوریکه $\delta_m(S) = S$ یعنی تقارن نسبت به خط m شکل را محفوظ نگاه می‌دارد.

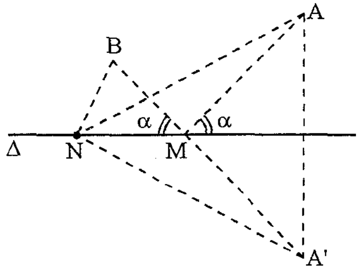
ب) مرکز تقارن یک شکل بصورت زیر تعریف می‌شود. نقطه P یک مرکز تقارن مجموعه S است اگر $\delta_P(S) = S$

۲ـ۵ـ مجموعه تقارن‌های یک مجموعه نقاط یک گروه می‌سازند.

۱ـ۲ـ۵ـ با توجه به اینکه بازتاب نور در آینه زاویه تابش با زاویه بازتابش را حفظ می‌نماید و نور فاصله بین دو نقطه را درکمترین زمان می‌پیماید و یاکوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه مسیریست که نور می‌پیماید از تقارن محوری در تعیین کمترین و بیشترین فاصله می‌توان استفاده کرد.

۲ـ۲ـ۵ـ قضیه هرون: اگر دو نقطه A و B در دو طرف خط Δ واقع باشد بر روی خط Δ فقط و فقط یک نقطه می‌توان یافت که مجموع فواصل آن از دو نقطه A و B کمترین مقدار ممکن باشد.

$$\begin{array}{l} \delta_\Delta(A) = A' \\ \delta_\Delta(M) = M \\ \hline \delta_\Delta(AM) = A'M \end{array}$$

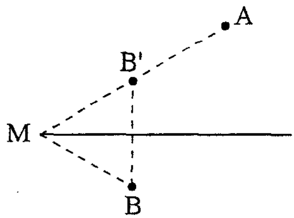


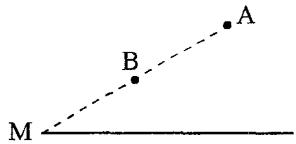
شکل (۲-۲-۵)

حال هر نقطه دیگری روی Δ مثل N در نظر بگریم مجموع $AN + BN > AM + MB$
توجه اگر خط Δ را آینه‌ای فرض کنیم نقطه B روی امتداد بازتابش اشعه تابش یافته از نقطه A قرار دارد.

۳-۲-۵- دو نقطه A و B و خط Δ مفروض است روی خط Δ فقط و فقط یک نقطه مانند M وجود دارد که تفاضل $|AM - MB|$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

اثبات در هر دو حالت بعهده خواننده است.





۴-۲-۵- در شکل قضیه (۲-۲-۵) خط Δ نیمساز خارجی مثلث AMB به رأس M می‌باشد. پس آن گزاره را بدین گونه می‌توان بیان کرد «مجموع فواصل هر نقطه از روی نیمساز خارجی مثلث از دو رأس دیگر مثلث از مجموع دو ضلع آن رأس بزرگتر می‌باشد».

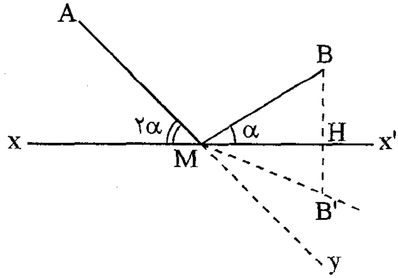
۵-۲-۵- مسئله: از تمام مثلث‌های که دارای مساحت ثابت و یک ضلع ثابت می‌باشند محیط مثلث متساوی الساقین از همه کوچکتر است.

حل: با توجه به گزاره (۴-۲-۵) مسئله به آسانی اثبات می‌شود.

۶-۲-۵- مسئله: ثابت کنید اگر یک آینه بیضی شکل داشته باشیم اگر یک شمع در یک کانون آینه روشن سازیم در کانون دیگر نیز روشن بنظر خواهد رسید.

۷-۲-۵- گزاره: نیمساز بین دو خط محور تقارن دو خط می‌باشد. و محور تقارن دو خط مرکز دایره‌هایست که بر هر دو خط مماس می‌باشد.

۸-۲-۵- مسئله: فرض کنیم خط $x'x$ و دو نقطه A و B در یک طرف آن مفروض می‌باشند نقطه M را روی $x'x$ چنان تعیین کنید که زاویه $A\hat{M}x = ۲B\hat{M}x'$ باشد.



اگر AM را ادامه دهیم زاویه $x'\hat{M}y = ۲\alpha$ پس نیمساز زاویه yMx' دو زاویه α می‌سازد و محور تقارن زاویه $x'My$ می‌باشد پس مرکز دوایریست که بر خطوط yM و Mx' مماس می‌باشد در نتیجه قرینه B نسبت به $x'x$ مرکز یکی از این دوایر است.

پس کافیست به مرکز B' و شعاع $B'H$ دایره‌ای رسم کنیم و از A براین دایره مماسی بکشیم تا خط $x'x$ را در M قطع نماید. و بحث در مورد مسئله و حالات مختلف بعهده خواننده است.

۹-۲-۵- یک دایره (C) و سه خط گذرنده از مرکز این دایره در دست است. مثلث ABC را چنان رسم کنید که این دایره برای آن دایره محاطی باشد.

حل: این سه خط نیمسازهای سه رأس مثلث می‌باشند، بنابراین A' قرینه نقطه A نسبت به نیمساز رأس C روی امتداد ضلع BC می‌باشد (گزاره ۷-۲-۵) و همچنین A'' قرینه نقطه A نسبت به نیمساز رأس B نیز روی امتداد ضلع BC واقع است پس $A''A'$ روی امتداد ضلع BC می‌باشد و محل برخورد $A''A'$ با نیمسازهای رئوس B و C نقاط B و C را مشخص می‌سازد.

مسائل برای حل

۱۰-۲-۵- سه خط همرس و نقطه $A_۱$ واقع بر یکی از آنها مفروض است یک مثلث ABC رسم کنید که این سه خط عمود منصف‌های آن بوده و نقطه $A_۱$ وسط ضلع BC باشد.

۱۱-۲-۵- دو خط موازی p و q و دو نقطه A و B در بین آنها مفروض است، (این دو خط موازی را دو آینه فرض کنید). از نقطه A اشعه‌ای چنان به‌تابانید که دو بار توسط p و یک بار توسط q بازتاب یافته و سپس از نقطه B بگذرد.

۱۲-۲-۵- خط m و سه نقطه P و Q و $\delta_m(P)$ مفروض است فقط به کمک خط‌کش $\delta_m(Q)$ را

بدست آورید.

۵-۲-۱۳- یک خط و دو دایره داده شده‌اند، مربعی رسم کنید که دو رأس مقابل آن روی خط و دو رأس دیگر آن روی دو دایره باشد.

۵-۲-۱۴- ثابت کنید قرینه‌های مرکز ارتفاعیه مثلث نسبت به اضلاع مثلث بر روی دایره محیطی مثلث قرار دارند.

۵-۲-۱۵- ثابت کنید ترکیب دو تقارن محوری نسبت به دو خط موازی یک انتقال است.

۵-۲-۱۶- چهار نقطه A_1 و A_2 و A_3 و A_4 در صفحه چنان قرار دارند که A_4 مرکز ارتفاعیه مثلث $A_1A_2A_3$ می‌باشد.

الف) ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلث $A_1A_2A_3$ و $A_1A_3A_4$ و $A_1A_2A_4$ و $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ همگی با هم برابر می‌باشند.

ب) ثابت کنید: چهارخطی که رأس A_1 را به مرکز دایره محیطی $A_2A_3A_4$ و همین ترتیب وصل می‌نمایند در یک نقطه همرس بوده و یکدیگر را نصف می‌نمایند.

۵-۲-۱۷- مثلث ABC و خط Δ در صفحه مثلث مفروض است قرینه این خط را نسبت به اضلاع مثلث بدست می‌آوریم تا مثلث PQR را با یکدیگر بسازند ثابت کنید مرکز دایره محاطی داخلی مثلث PQR روی دایره محیطی مثلث ABC واقع می‌باشد.

بخش ۶ـ بازتاب‌ها و ایزومتری

طول پایی (ایزومتری) نتیجه بازتاب‌ها می‌باشد.

۱ـ۱ـ۶ـ گزاره: فرض کنیم نقطه P بین دو نقطه A و B بر روی یک خط قرار دارد. اگر اندازه‌های AP و BP معلوم باشند جای نقطه P بین A و B بطور یگانه مشخص می‌شود و هر تبدیل ایزومتری که A و B را ثابت نگاه دارد پس P را نیز ثابت نگاه خواهدداشت، و بهمین ترتیب برای هر نقطه دیگری بین A و B نیز این موضوع صادق است.

اگر سه نقطه A و B و C روی یک خط واقع نباشند اگر توسط یک ایزومتری ثابت نگاه داشته شوند پس هر نقطه دیگر در صفحه مثلث ABC نیز ثابت باقی خواهند ماند. چون هر نقطه‌ای مانند Q در صفحه روی خطی قرار دارد که مثلث را در دو نقطه معین قطع می‌نماید بطور مثال خط QM که M وسط AB می‌باشد مثلث را در نقطه‌ای ممیز از M قطع می‌نماید پس Q روی خطی قرار می‌گیرد که دو نقطه معلوم دارد و پس نقطه ثابتی خواهد شد.

۲ـ۱ـ۶ گزاره: اگر یک ایزومتری دو نقطه از یک خط را ثابت نگاه دارد همه نقاط آن خط راثابت نگاه می‌دارد. اگر یک ایزومتری سه نقطه غیرواقع بر یک خط را ثابت نگاه دارد پس آنگاه ایزومتری یک تبدیل همانی است.

فرض کنیم α و β دو ایزومتری می‌باشند که برای سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست P و Q و R داشته باشیم. $\alpha(P) = \beta(P)$ و $\alpha(Q) = \beta(Q)$ و $\alpha(R) = \beta(R)$ اگر در طرفین این سه معادله β^{-1} را ضرب کنی داریم

$$\beta^{-1} . \alpha(P) = P \quad , \qquad \beta^{-1} . \alpha(Q) = Q \quad , \quad \beta^{-1} . \alpha(R) = R$$

پس $\beta^{-1} . \alpha = 1$ و پس اگر طرفین را در β ضرب کنیم داریم

$$\alpha = \beta$$

و بطور بالعکس اگر $\alpha(Q) = \beta(Q)$ و $\alpha(P) = \beta(P)$ و $\alpha(R) = \beta(R)$ برای سه نقطه P و Q و R غیر واقع بر خط راست باشند آنگاه

$\alpha = \beta$

۳ـ۱ـ۶ـ گزاره: اگر یک ایزومتری دو نقطه را ثابت نگاه دارد یک بازتاب یا یک تبدیل همانی است.

اگر ایزومتری α فقط، فقط یک نقطه C را ثابت نگاه داشته باشد و P نقطه‌ای متفاوت از C باشد پس

$\alpha(P) = P'$

و فرض کنیم خط m عمود منصف PP' باشد چون $CP = CP'$ زیرا α یک ایزومتری است پس باید C روی خط m باشد بنابراین $\delta_m(C) = C$ و $\delta_m(P') = P$ و داریم $\alpha(C) = C$ پس

$\delta_m . \alpha(C) = \delta_m(C) = C$

$\delta_m . \alpha(P) = \delta_m(P') = P$

پس $\delta_m . \alpha = ۱$ یا $\delta_m . \alpha = \delta l$ که l همان خط CP است. چون $\delta_m \alpha \neq ۱$ در غیر این صورت α باید همان δ_m باشد پس نقاطی بیش از C را ثابت نگاه می‌دارد.

$\alpha = \delta_m . \delta_l$

نتیجه اینکه ایزومتری که فقط یک نقطه را ثابت نگاه دارد باید حاصل‌ضرب دو بازتاب باشد.

۴ـ۱ـ۶ گزاره: حاصل ترکیبات بازتاب‌ها یک ایزومتری است، هر ایزومتری حداکثر حاصل ترکیب سه بازتاب می‌باشد.

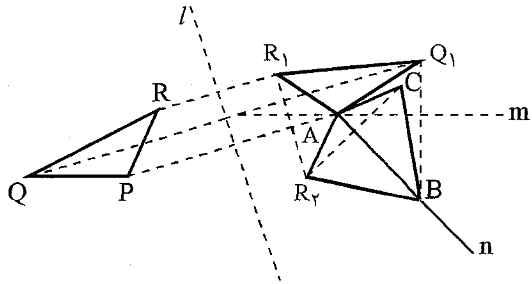
نتیجه گزاره فوق این است حاصل مثلاً ترکیب هشت یا ده بازتاب را حداکثر می‌توان با ترکیب سه بازتاب بدست آورد. فرض کنیم مثلث PQR با مثلث ABC هم نهشت باشد. می‌دانیم که فقط یک ایزومتری مانند α وجود دارد که

$\alpha(P) = A \ , \ \alpha(Q) = B \ , \ \alpha(R) = C$

حال باید ایزومتری α را یافت. در شکل زیر مثلث $AR_۱Q_۱$ بازتاب مثلث PQR نسبت به l می‌باشد بازتاب $AQ_۱R_۱$ نسبت به m، $ABR_۲$ بوده و بازتاب $ABR_۲$ نسبت به n مثلث ABC است.

فرض کنیم $\Delta PQR \approx \Delta ABC$ و اگر $P \neq A$ باشد. فرض کنیم $\alpha_۱ = \delta_۱$ و خط l عمود منصف PA است. و اگر $P = A$ باشد آنگاه $\alpha_۱ = ۱$ پس در غیر این صورت

$\alpha(P) = A$



و اگر $\alpha_۱(Q) = Q_۱$ و $\alpha_۱(R) = R_۱$ و اگر $Q_۱ \neq B$ پس $\alpha_۱ = \alpha_m$ که در آن m عمود منصف $Q_۱B$ است در این حالت نقطه A روی m واقع است پس $AB = PQ = AQ_۱$ و اگر $B = Q_۱$ پس $\alpha_۲ = ۱$ در غیر این صورت

$\alpha_۲(A) = A$

$\alpha_۲(Q_۱) = B$

$\alpha_۲(R_۱) = R_۲$

اگر $R_۲ \neq C$ باشد پس $\alpha_۳ = \alpha_n$ که خط n عمود منصف $R_۲C$ است. در حالت مورد نظر خط n بر AB منطبق شده است. بنابراین

$AC = PR = AR_۱ = AR_۲$

$BC = QR = QR_۱ = BR_۲$

و بهر حال داریم

$\alpha_۳(A) = A$

$\alpha_۳(B) = B$

$\alpha_۳(R_۲) = C$

حال فرض کنیم $\alpha = \alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳$ پس

$\alpha(P) = \alpha_۳\alpha_۲\alpha_۱(P) = \alpha_۳ . \alpha_۲(A) = \alpha_۳(A) = A$

$\alpha(Q) = \alpha_۳\alpha_۲\alpha_۱(Q) = \alpha_۳ . \alpha_۲(Q_۱) = \alpha_۳(B) = B$

$\alpha(R) = \alpha_۳\alpha_۲\alpha_۱(R) = \alpha_۳ . \alpha_۲(R_۱) = \alpha_۳(R_۲) = C$

و حکم ثابت است.

۵-۱-۶- نتیجه: در یک ایزومتری دو پاره خط، دو زاویه و دو مثلث با هم برابر می‌باشند.

مسائل برای حل

۱ـ۲ـ۶ـ مثلث ABC برابر با مثلث DEC مفروض است که در آن $A:(0\ ,\ 0)$ و $B:(5\ ,\ 0)$ و $C:(0\ ,\ 10)$ و $D:(4\ ,\ 2)$ و $E:(1\ ,\ -2)$ و $F:(12\ ,\ -4)$ معادله خطوطی را تعیین کنید که حاصل ضرب بازتاب آنها مثلث ABC را به مثلث DEF تبدیل نماید.

۲ـ۲ـ۶ـ فرض کنیم معادلات خط l و m و n به معادلات $x = 2$ و $y = 3$ و $y = 5$ معادلات δ_m . δ_l و δ_m . δ_n را تعیین کنید.

۳ـ۲ـ۶ـ ثابت کنید اگر δ_m . δ_n نقطه P را ثابت نگاه دارد و $m \neq n$ باشد آنگاه P بر روی هر دو خط m و n واقع است.

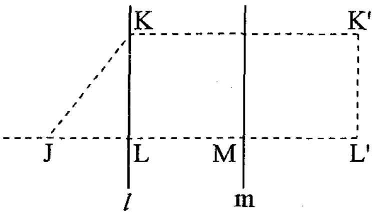
۴ـ۲ـ۶ـ زاویه xoy و دو نقطه A و B در آن مفروض است نقطه K را روی ox چنان تعیین کنید که خط AK و BK با oy مثلث متساوی الساقین بسازد.

۵ـ۲ـ۶ـ دو خط d_1 و d_2 در نقطه O متقاطع می‌باشند و نقطه A غیر واقع بر این دو خط مفروض می‌باشد. دو نقطه B و C را بر دو خط d_1 و d_2 چنان تعیین کنید که محیط مثلث ABC کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۷ـ۲ـ۶ـ ثابت کنید محیط مثلث ارتفاعیه در بین مثلث‌های محیط در مثلث ABC کمترین محیط را دارد.

بخش ۷ـ انتقال و بازتاب

ترکیب دو انتقال: اگر محورهای بازتاب دو خط موازی l و m باشند و LM فاصله بین آن دو خط باشد و جهت پاره خط LM را نیز در نظر بگیریم.



در نتیجه داریم:

$$\delta_m(L) = L'$$

$$T_{\overrightarrow{LL'}}(K) = K' \Rightarrow T_{\overrightarrow{LL'}} = T_{\overrightarrow{KK'}}$$

خط m عمودمنصف LL' و KK' می‌باشد بنابراین

$$\delta_m(K) = K'$$

حال اگر $\delta_l(M) = j$ پس L وسط JM است پس $T_{\overrightarrow{JM}} = T_{\overrightarrow{LL'}}$ و LL' دو برابر فاصله بین دو خط l و m است بنابراین داریم

$$\delta_m\delta_l(j) = \delta_m(M) = M = T_{\overrightarrow{LL'}}(j)$$

$$\delta_m\delta_l(K) = \delta_m(K) = K' = T_{\overrightarrow{LL'}}(K)$$

$$\delta_m\delta_l(L) = \delta_m(L) = L' = T_{\overrightarrow{LL'}}(L)$$

بنابراین $\delta_m . \delta_l = T_{\overrightarrow{LL'}} = T_{۲(\overrightarrow{LM})}$

گزاره (۱-۷): اگر دو خط l و m موازی باشند پس بازتاب نسبت به آن دو خط برابر است با یک انتقال که بردار انتقال دو برابر فاصله بین آن دو خط است.

عکس گزاره (۱-۷): و هر انتقالی نتیجه ترکیب دو بازتاب با دو محور موازی است که فاصله دو محور نصف اندازه بردار انتقال است.

نتیجه I: اگر $\delta n . \delta p = \delta n . \delta t$ آنگاه $\delta p = \delta t$ پس $p = t$

نتیجه II: تنها و تنها دو خط p و q یافت می‌شوند که در رابطه‌های

$$\delta m . \delta l = \delta n . \delta p = \delta q . \delta n$$

صدق می‌کند.

۷-۲- مسئله: سه خط همرس $l_۱$ و $l_۲$ و $l_۳$ و نقطه A واقع بر $l_۱$ مفروض است. مثلث ABC را چنان بسازید که این سه خط برای آن نیمساز باشند.

حل: قرینه نقطه A نسبت به خط $l_۲$ نقطه A' است که واقع بر خط BC می‌باشد.

قرینه نقطه A نسبت به خط $l_۳$ نقطه A'' است که متعلق به خط BC می‌باشد بنابراین اگر A' را به A'' وصل کنیم امتداد خط BC بدست می‌آید.

۷-۳- مسئله: سه خط همرس $l_۱$ و $l_۲$ و $l_۳$ و نقطه $A_۱$ واقع بر $l_۱$ مفروض است مثلث ABC را چنان بسازید که $A_۱$ وسط ضلع BC بوده و خطوط $l_۱$ و $l_۲$ و $l_۳$ عمود منصف‌های اضلاع آن باشند.

حل: چون $\delta l_۳(C) = A$ بنابراین A بر قرینه خط BC نسبت به $l_۳$ قرار دارد و چون $\delta l_۲(B) = A$ پس A به قرینه خط BC نسبت به $l_۲$ قرار دارد بنابراین اگر از نقطه $A_۱$ خط m را عمود بر $l_۱$ اخراج کنیم و $A = \delta l_۲(m) \cap \delta l_۳(m)$ و نقطه A بدست می‌آید.

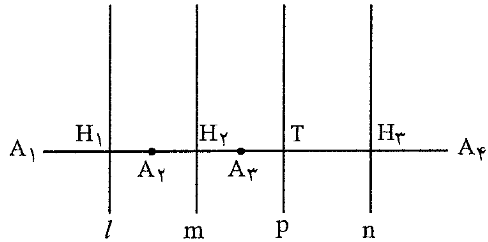
۷-۴- گزاره: اگر سه خط l و m و n موازی باشند حاصل ترکیب $\delta n . \delta m . \delta l = \delta p$ که p خطی موازی با آن سه خط است.

چون $\delta m . \delta l = \delta n . \delta p$ می‌باشد که فاصله l از m برابر فاصله n از p می‌باشد پس

$$\delta n . \delta m . \delta l = \delta p$$

پس ترکیب سه تقارن محوری با سه محور تقارن موازی یک تقارن محوری است.

۱-۴-۷-اثبات دیگر گزاره ۴-۷ از روش برداری



$$\delta n \circ \delta m \circ \delta l\ (A_{۱}) = A_{۴}$$

بر وسط $A_{۱}A_{۴}$ خط P را عمود می‌سازیم پس

$$۲A_{۱}T = A_{۱}A_{۴}$$

اما $\delta n \circ \delta m = ۲T\overrightarrow{H_{۲}H_{۳}}$ پس

$$۲A_{۱}T = A_{۱}A_{۲} + ۲H_{۲}H_{۳}$$

$$۲(A_{۱}H_{۱} + H_{۱}T) = A_{۱}A_{۲} + ۲H_{۲}H_{۳}$$

$$۲A_{۱}H_{۱} + ۲H_{۱}T = A_{۱}A_{۲} + ۲H_{۲}H_{۳}$$

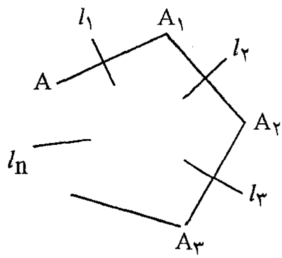
$$H_{۱}T = H_{۲}H_{۳}$$

پس خط P از انتقال خط l به اندازه بردار $H_{۲}H_{۳}$ که فاصله بین دو خط موازی m و n است بدست می‌آید پس

$$\delta n\ .\ \delta m\ .\ \delta l(A) = \delta_{p}(A)$$

۵-۷- مسئله: از یک n ضلعی عمودمنصف‌های اضلاع آن در دست است n ضلعی را رسم کنید. n زوج است.

حاصل $\delta p\ ...\ .\ \delta n\ .\ \delta m$ در حالتی که n زوج است برابر $n = ۳K + ۱$ که تمام ترکیب سه تایی یک تقارن است.



$$(\delta l_n \circ \delta l_{n-۱} \ldots \delta l_۱)(A) = A$$

یعنی A در اثر این ترکیبات در جای خود باقی می‌ماند اما اگر نقطه دلخواه B را تبدیل نمایم. داریم

$$(\delta l_n \circ \delta l_{n-۱} \ldots \delta l_۱)(B) = Bn$$

پس

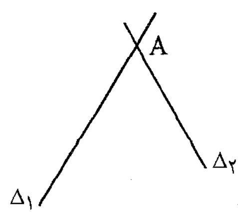
$$(\delta l_n \circ \delta l_{n-۱} \ldots \delta l_۱)(AB) = ABn$$

در نتیجه فاصله A از دو نقطه B و Bn به یک فاصله است. پس A روی عمود منصف BBn است حال نقطه C را در ترکیبات می‌گزاریم در نتیجه $CA = C_nA$ یعنی A روی عمود منصف CC_n است از تلاقی این دو عمود منصف جای نقطه A در صفحه معلوم می‌شود.

در حالتی که n فرد باشد مجموع ترکیبات به یک تقارن محوری منحصر می‌شود و مسئله قابل حل نیست در حالتی که n زوج باشد همواره ترکیبات منجر به دو تقارن محوری می‌شود که دارای یک نقطه ثابت است.

۶ـ۷ـ گزاره: هر دو تقارن محوری که با هم موازی نباشند دارای یک نقطه ثابت است.

$$(\delta_{\Delta_۱} \circ \delta_{\Delta_۱})\, A = \delta_{A_۱}(\delta_{\Delta_۲} A) = \delta_{\Delta_۱}(A) = A$$



مسائل برای حل

۱-۷-۷- خط D و دو نقطه A و B در یک طرف آن مفروض می‌باشند. نقطه M را روی خط D چنان تعیین کنید که $AM + MB$ مقدار مفروض l باشد.

۲-۷-۷- ثابت کنید اگر یک n ضلعی بیش از دو محور تقارن داشته باشد این محورها همگی در یک نقطه همرس می‌باشند.

۳-۷-۷- از مرکز یک دایره سه خط $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ می‌گذرند مثلثی رسم کنید که رئوس آن بر این سه خط واقع باشد و این دایره برای آن دایره محاطی باشد.

۴-۷-۷- یک چهارضلعی رسم کنید که طول چهارضلع آن در دست بوده و یک خط آن نیمساز یکی از رئوس باشد.

۵-۷-۷- ثابت کنید قرینه‌های سه میانه مثلث نسبت به سه نیمساز مجاور خود در یک نقطه همرس می‌باشند.

۶-۷-۷- خطی به موازات امتداد معلوم Δ رسم کنید که در دو دایره مفروض $C_۱$ و $C_۲$ دو وتر به مجموع طول a جدا کنند.

۷-۷-۷- دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ در نقطه A متقاطع می‌باشند از نقطه A خط متغیر Δ را رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقاط B و C قطع نماید روی AC نقطه M را چنان انتخاب می‌کنیم که $AM = \frac{AB + AC}{۲}$ باشد مکان نقطه M را تعیین کنید.

بخش ۸ ــ دوران

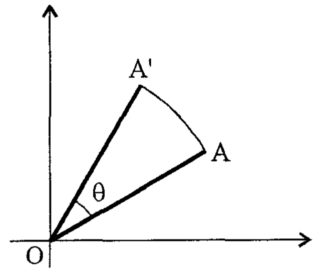
۱ــ۸ تعریف

اگر نقطه ثابت O در صفحه و زاویه جهت‌دار معلوم α را داشته باشیم و برای هر نقطه صفحه مانند A نقطه A' را چنان بیابیم که $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ باشد آنگاه گوییم دوران یافته نقطه A حول نقطه O به اندازه زاویه جهت‌دار α نقطه A' است و می‌نویسیم

$$R_{O}^{\alpha}(A) = A'$$

۲ــ۸ــ ماتریس دوران

اگر $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ و $A' \left| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right.$ باشد آنگاه



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

یا

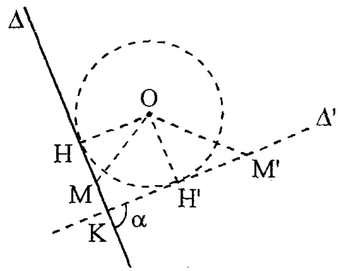
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

معادله دوران حول نقطه $M(h\ ,\ k)$ در صفحه بصورت زیر است

$$\begin{cases} x' - h = (x - h)\cos\alpha - (y - k)\sin\alpha \\ y' - k = (x - h)\sin\alpha + (y - k)\cos\alpha \end{cases}$$

در واقع مبداء مختصات به نقطه $M(h\ ,\ k)$ منتقل شده‌است.

۳ـ۸ـ دوران یافته یک خط خطی است راست که زاویه آن با خط همان زاویه دوران است.



$$R_{o}^{\alpha}\ (H) = H'$$

در نقطه H' خط Δ' را بر دایره مماس می‌کنیم این خط دوران یافته خط Δ می‌باشد. اگر از نقطه اختیاری M و به مرکز O دایره OM را رسم کنیم تا خط Δ' را در نقطه M' قطع نماید دو مثلث OHM و $OH'M'$ هم نهشت می‌باشند در نتیجه زاویه $MOM' = \alpha$ می‌باشد بنابراین

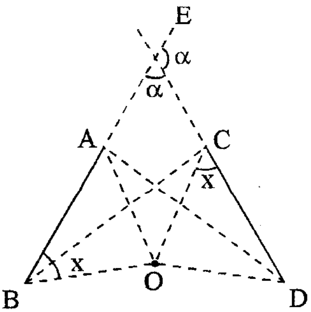
$$R_{o}^{\alpha}\ (M) = M'$$

در عین حال چهارضلعی $OHKH'$ یک چهارضلعی محاطی است پس زاویه بین خط Δ و Δ' زاویه α می‌باشد. البته با حفظ جهت.

۴ـ۸ـ دوران یک ایزومتری است:
با توجه به قضیه فوق طول $HM = H'M'$ می‌باشد.

۵ـ۸ـ هر دو پاره خط مساوی را در صفحه می‌توان با یک دوران برهم منطبق ساخت.
فرض کنیم $AB = CD$ و D دوران یافته A و C دوران یافته B باشد. عمود منصف‌های AD و BC یکدیگر را در نقطه O قطع می‌نمایند. حال ثابت می‌کنیم که O مرکز دورانی است که این دو پاره خط را برهم منطبق می‌سازد.

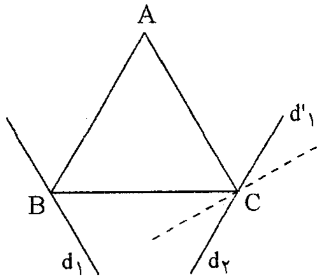
دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند (به حالت سه ضلع) چهارضلعی $OCEB$ محاطی می‌باشد. بنابراین زاویه x یا زاویه α زاویه بین دو امتداد AB و CD برابر می‌باشد.



مسئله: نقطه Aو دو خط $d_۱$ و $d_۲$در صفحه مفروض است مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازید که یک رأس آن Aو دو رأس دیگر آن روی دو خط $d_۱$ و $d_۲$باشد.

حل: چون $AB = AC$و $\widehat{A} = ۶۰^\circ$معلوم است پس

$$R_A^{۶۰\uparrow}(B) = C$$



و چون Bبه خط $d_۱$ تعلق دارد پس $R(B)$به خط $d'_۱$که از دوران $d_۱$ حول نقطه Aبه اندازه ۶۰° بدست می‌آید قرار دارد پس

$$R(B) = C \in d'_۱$$

$$C = d'_۱ \cap d_۲$$

بعد از بدست آمدن (C) با

$$R_A^{۶۰\downarrow}(C) = B$$

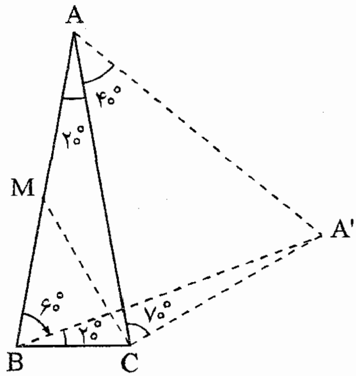
نقطه B نیز بدست می‌آید. اگر جهت دوران را بالعکس در نظر بگیریم یک جواب دیگر هم بدست می‌آید.

مسئله: در مثلث متساوی الساقین ABCزاویه $A = ۲۰$ روی ضلع ABنقطه Mرا چنان قرار می‌دهیم که $AM = BC$باشد مطلوبست زاویه BMC.

اگر

$$R^{۶۰\downarrow}_{B}(A) = A'$$

$$A\overset{\Delta}{M}C = A'\overset{\Delta}{B}C$$



مثلث BAA' متساوی‌الاضلاع است در نتیجه $A\hat{C}A' = ۷۰$ و زاویه $BCA' = CMA = ۱۵۰$ و زاویه $BMC = ۳۰$

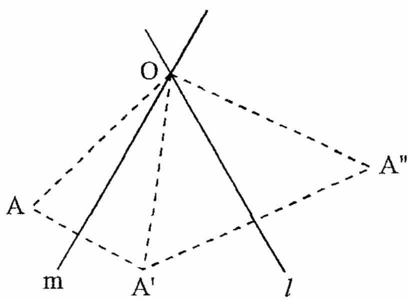
۶ـ۸ـ گزاره: ترکیب دو تقارن محوری غیرموازی یک دوران است. اشتراک دو خط m و l نقطه O می‌باشد. اگر زاویه $(m , l) = \theta$ باشد و

$$\delta_m(A) = A'$$

$$\delta_l(A') = A''$$

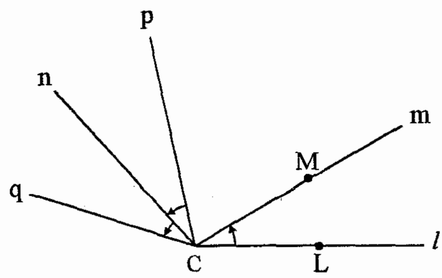
$$(\delta l \circ \delta m)(A) = A''$$

$$\begin{cases} OA = OA'' \\ A\hat{O}A'' = ۲\theta \end{cases} \Rightarrow R^{۲\theta}_{o}(A) = A''$$



۷ـ۸ـ گزاره عکس: هر دوران را می‌توان به دو تقارن محوری تبدیل کرد. اثبات بعهده خواننده است.

۸ـ۸ـ گزاره: اگر سه خط همرس l و m و n در نقطه C همرس باشند بطوریکه زاویه بین l و m زاویه جهت‌دار α باشد آنگاه دو خط منحصر بفرد p و q یافت می‌شوند که در رابطه زیر صدق کند.



$\delta m \, . \, \delta l = \delta n \, . \, \delta p = \delta q \, . \, \delta n$

زاویه بین p و n و زاویه بین n و q نیز همان زاویه جهت‌دار α می‌باشد.

۹ـ۸ـ گزاره: ترکیب سه تقارن محوری گذرنده از یک نقطه باز یک تقارن محوری گذرنده از همان نقطه می‌باشد.

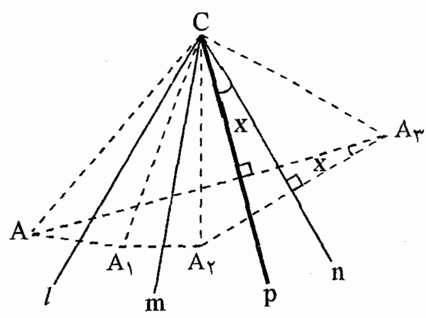
اثبات:

$\delta m \, . \, \delta l = \delta n \, . \, \delta p$

$\delta n \, . \, \delta m \, . \, \delta l = \delta n \, . \, \delta n \, . \, \delta p$

$\delta n \, . \, \delta m \, . \, \delta l = \delta p$

اثبات به شیوه هندسی



چهار نقطه A و $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ روی یک دایره به مرکز C واقع می‌باشند اگر P عمودمنصف $AA_۳$ باشد زاویه

$P\hat{C}n = AA_۳A_۲ = x$

$\hat{x} = \frac{\widehat{AA_۲}}{۲} = \frac{۲l\hat{c}m}{۲} = l\hat{c}m$

پس زاویه‌ای که p با n می‌سازد همان زاویه‌ای است که l با m می‌سازد.

۱۰ـ۸ـ گزاره: اگر سه خط m و n و l در یک نقطه همرس باشند.

$$\delta m \circ \delta n \circ \delta l = \delta l \circ \delta n \circ \delta m$$

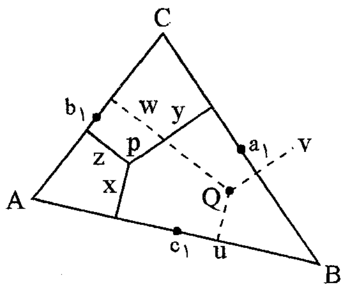
می‌دانیم که $\delta m \circ \delta n \circ \delta l = \delta p$ و $\delta p = \delta p^{-1}$ پس

$$(\delta m \circ \delta n \circ \delta l)^{-1} = \delta p^{-1} = \delta p$$

$$\delta^{-1} l \circ \delta^{-1} n \circ \delta^{-1} m = \delta p$$

$$\delta l \circ \delta n \circ \delta m = \delta p$$

مسئله: در مثلث ABC از نقطه مفروض P سه خط x و y و z را عمود براضلاع c و a و b فرود می‌آوریم و سپس قرینه این سه خط را نسبت به اوساط اضلاع c و a و b بدست می‌آوریم ثابت کنید این سه خط نیز در یک نقطه مانند Q همرس می‌باشند.



$$\delta_{c_1}^{x} = u \quad \Rightarrow \quad (x \cap y)\ \delta c_1 \circ \delta a_1 = u \cap v$$

$$\delta_{a_1}^{y} = v \quad \Rightarrow \quad (z \cap x)\ \delta b_1 \circ \delta c_1 = u \cap w$$

$$\delta_{b_1}^{z} = w \quad \Rightarrow \quad (y \cap z)\ \delta a_1 \circ \delta b_1 = v \cap w$$

$$(x \cap y) \cap (y \cap z) \cap (x \cap z)\ \delta c_1 . \delta a . \delta a_1 . \delta b_1 . \delta b_1 . \delta c_1 = u \cap v \cap w$$

و حکم ثابت است چون

$$\delta c_1 \circ \delta a_1 \circ \delta a_1 \circ \delta b_1 \circ \delta b_1 \circ \delta c_1 = 1$$

پس چون P بی‌تغییر مانده است پس تنها نقطه بی‌تغییر برای تبدیل یافته آن باید Q باشد.

مسئله: در مثلث ABC نقطه مفروض P را به سه رأس مثلث وصل کرده تا سه خط x و y و z

بدست آید و سپس قرینه‌های این خطوط را نسبت به نیمسازهای مرسوم از سه رأس بدست می‌آوریم ثابت کنید این سه خط نیز در یک نقطه همرسند.

حل: نیمساز رأس A را l و B را n و C را m می‌نامیم.

$\delta l \,.\, y = u \qquad \delta l \circ \delta n(P) = u \cap v = Q_۱$

$\delta n \,.\, z = v \qquad \delta m \circ \delta l(P) = u \cap w = Q_۲$

$\delta m \,.\, x = w \qquad \delta n \circ \delta m(P) = v \cap w = Q_۳$

$\delta l \,.\, \delta n \,.\, \delta n \,.\, \delta m \,.\, \delta m \,.\, \delta l = ۱$

پس P در اثر ترکیب بیش از یک تبدیل یافته نداشته یعنی $Q_۱ = Q_۲ = Q_۳$

توجه اینکه $\delta b \,.\, \delta y = \delta v \,.\, \delta c$ چون هر دو یک دوران حول نقطه A با یک زاویه برابر می‌باشند بنابراین $\delta b \,.\, \delta y \,.\, \delta c = \delta v$ که همان ترکیب سه تقارن محوری است.

مسائل برای حل

۱-۱۱-۸- از نقطه A واقع در داخل زاویه xoy خطی چنان رسم کنید تا ox و oy را در نقاط B و C قطع نماید و مساحت مثلث OBC می‌نیمم گردد.

۲-۱۱-۸- موقعیت خطوط a و b و c و d را چنان تعیین کنید تا

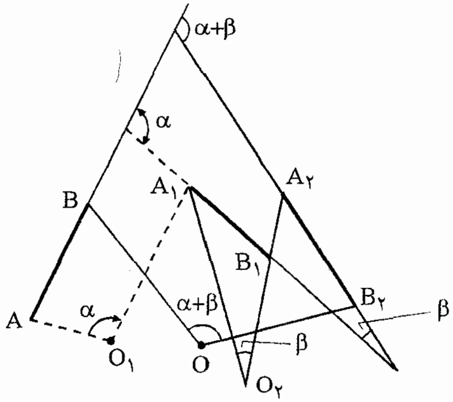
$\delta a \,.\, \delta b \,.\, \delta c \,.\, \delta d = \delta b \,.\, \delta a \,.\, \delta d \,.\, \delta c$

۳-۱۱-۸- مثلث ABC را چنان بسازید که از آن دو ضلع b و c در دست بوده و میانه AD زاویه‌ای که با AC می‌سازد دو برابر زاویه‌ایست که با AB می‌سازد.

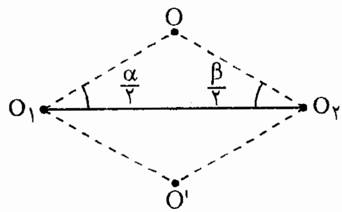
۴-۱۱-۸- سه نقطه P و Q و R در صفحه مفروضند چهارضلعی $ABCD$ را چنان بسازید که این سه نقطه اوساط اضلاع AB و BC و CD بوده بشرط آنکه $AB = BC = CD$.

۱۲-۸- گزاره: ترکیب دو دوران با دو مرکز دوران مختلف یک دوران است که زاویه جدید دوران برابر با مجموع دو زاویه دوران است.

تبدیل یافته AB در دوران به مرکز $O_۱$ و با زاویه α، $A_۱B_۱$ بوده و زاویه بین آنها α می‌باشد دوران یافته $A_۱B_۱$ به مرکز $O_۲$ و زاویه β، $A_۲B_۲$ می‌باشد که زاویه بین $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ زاویه β می‌باشد. بنابراین زاویه بین AB و $A_۲B_۲$، $\alpha + \beta$ است که مرکز آن نقطه O است.



۱ـ۱۲ـ۸ـ تعیین مرکز دوران جدید



اگر مرکز دوران جدید در صفحه نقطه O باشد این تنها نقطه ثابت است

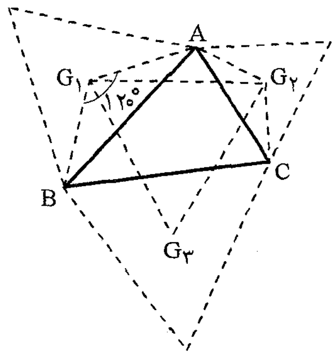
$$\left(R^{\alpha}_{O_1} \circ R^{\beta}_{O_2}\right) . (O) = O$$

اما $R^{\alpha}_{O_1}\ (O) = O'$ است پس باید دورانی به مرکز O_2 با زاویه β، O' را به جای اول خودش برگرداند پس

$$R^{\beta}_{O_2}\ (O') = O$$

پس نقطه O از محل برخورد دو خط که از O_1 و O_2 با نصف زاویه α و β رسم شوند بدست می‌آید.

مثال: روی اضلاع مثلث ABC در بیرون آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. ثابت کنید سه مرکز میانه‌ای این سه مثلث سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد.



حل:

$$\left(R_{G_1}^{120\uparrow} \circ R_{G_2}^{120\uparrow}\right) . (B) = C \cdot$$

$$R_{x}^{240\uparrow}\ (B) = C$$

نقطه x مرکز دوران جدید است که باید از G_1 و G_2 دو زاویه 60° ساخته شود تا بدست آید. از طرف دیگر

$$R_{G_3}^{120\downarrow}\ (B) = C$$

و $R_{x}^{240\uparrow} = R_{G_3}^{120\downarrow}$ پس $x = G_3$ است و مثلث $G_1G_2G_3$ متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

راه حل دوم:

$$R_{G_1}^{120} \circ R_{G_2}^{120\uparrow} \circ R_{G_3}^{120\uparrow} = 1$$

بنابراین با یک انتقال که دارای نقطه ثابت B می‌باشد سروکار داریم این انتقال بطول صفر است. و چون

$$R_{G_1}^{120\uparrow} \circ R_{G_2}^{120\uparrow} = R_{G_3}^{120\downarrow}$$

پس مثلث متساوی‌الاضلاع $G_1G_2G'_3$ را می‌سازیم

$$R_{G_1}^{120\uparrow} \circ R_{G_2}^{120\uparrow} = R_{G_3}^{120\downarrow}$$

$$R_{G_3}^{120\downarrow} = R_{G_3}^{120\downarrow} \Rightarrow G_3 \approx G'_3$$

نتایج گزاره‌های فصل:

۱ـ دوران حول نقطه C با زاویه جهت دار α را می‌توان با دو تقارن محوری بصورت $\delta b \cdot \delta a$ نشان داد که دو خط a و b یکی دلخواه بوده و دیگری با آن زاویه جهت‌دار α را می‌سازد (هر دو خط a و b باید از نقطه C بگذرند).

۲ـ اگر سه خط l و m و n در یک نقطه مانند C همرس باشند آنگاه ترکیب $\delta n \cdot \delta m \cdot \delta l$ یک تقارن محوری است که از نقطه C می‌گذرد.

۳ـ یک نیم دور حول نقطه P نتیجه ترکیب دو تقارن محوری است که در نقطه P بر یکدیگر عمود می‌باشند.

۴ـ نتیجه ترکیب دو تقارن محوری با یک محور یک انتقال، با بردار صفر و یک دوران با زاویه صفر درجه است.

۵ـ حاصل ترکیب دو تقارن محوری یک انتقال با یک دوران است تنها تبدیل همانی هم یک دوران و هم یک انتقال است.

۶ـ یک ایزومتری با یک نقطه ثابت حداکثر نتیجه دو تقارن محوری است.

۷ـ یک تبدیل همانی دارای بیشمار نقطه ثابت است.

۸ـ یک تقارن محوری دارای بی‌شمار نقطه ثابت می‌باشد (نقاط واقع بر محور).

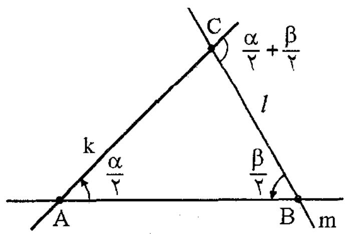
۹ـ یک ایزومتری با بی‌شمار نقطه ثابت یا یک انتقال یا دوران است.

۱۰ـ یک دوران غیرهمانی دارای فقط یک نقطه ثابت است.

۱۱ـ یک انتقال فاقد یک نقطه ثابت است.

۱۲ـ یک ایزومتری که فقط یک نقطه ثابت دارد یک دوران است.

۱۳ـ۸ـ گزاره: در ترکیب دو دوران با دو زاویه و دو مرکز مختلف یک نقطه ثابت وجود دارد.



دورانی به مرکز A و زاویه α و دورانی به مرکز B و زاویه β وجود دارد.

دوران به مرکز A و زاویه α را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$R_A^{\alpha\uparrow} = \delta k \circ \delta m$$

که خط k با خط m زاویه $\frac{\alpha}{۲}$ را می‌سازد.

دوران به مرکز B و زاویه β را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$R_B^{\beta\uparrow} = \delta m \circ \delta l$$

حال ترکیب

$$R_A^{\alpha\uparrow} \circ R_B^{\beta\uparrow} = \delta k \circ \delta m \circ \delta m \circ \delta l$$

اما $\delta m \circ \delta m = ۱$ پس

$$R_A^{\alpha\uparrow} \circ R_B^{\beta\uparrow} = \delta k \circ \delta l$$

چون در خط k و l در صفحه نسبت به خط m مفروض می‌باشند پس نقطه C محل برخورد آنها ثابت است و داریم

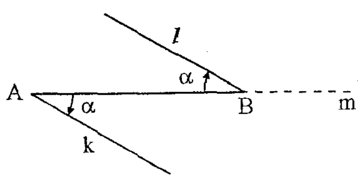
$$\delta k \circ \delta l = R_C^{\alpha + \beta}$$

پس

$$R_A^{\alpha} \circ R_B^{\beta} = R_C^{\alpha + \beta}$$

و گزاره ۱ـ۱۱ـ۸ (الف) هم به اثبات رسید.

۱ـ۱۳ـ۸ـ حالت خاص: گزاره: ترکیب دو دوران با دو مرکز مختلف و با دو زاویه برابر مختلف الجهت یک انتقال است.



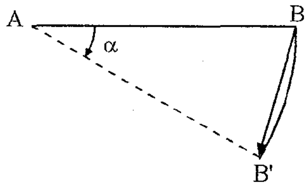
$$R_A^{\alpha\downarrow} \circ R_B^{\alpha\uparrow} = \delta k \circ \delta m \circ \delta m \circ \delta l = \delta k \circ \delta l = T\vec{V}$$

اما دو خط k و l موازی بوده و نتیجه ترکیب آنها یک انتقال است. اندازه و جهت بردار $\vec{V}$ را می‌توان بصورت زیر بدست آورد.

$$\left(R_A^{\alpha\downarrow} \circ R_B^{\alpha\uparrow}\right)(B) = \left(R_A^{\alpha\downarrow} \circ R_B^{\alpha\uparrow}(B)\right) = R_A^{\alpha\downarrow}(B) = B'$$

$$T\vec{V}_{(B)} = B'$$

$\vec{V} = \overrightarrow{BB'}$



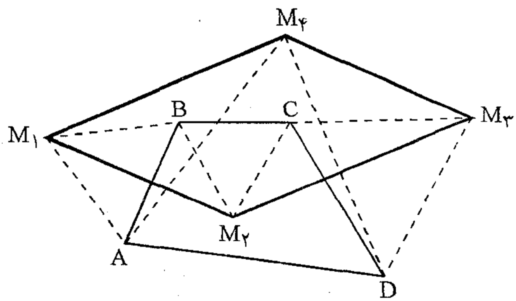
نکته قابل توجه آنکه اگر زاویه α برابر ۶۰° باشد اندازه بردار $|\vec{V}|$ برابر $|AB|$ خواهد بود.

مثال: روی اضلاع یک چهارضلعی محدب $ABCD$ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع $ABM_۱$ و $BCM_۲$ و $CDM_۳$ و $DAM_۴$ رسم شده‌اند بطوریکه اولی و سومی در بیرون چهارضلعی و دومی و چهارمی بالعکس، ثابت کنید چهارضلعی $M_۱M_۲M_۳M_۴$ یک متوازی‌الاضلاع است.

$$\left(R^{۶۰\uparrow}_{M_۲} \circ R^{۶۰\uparrow}_{M_۱}\right)(A) = C$$

$$T\vec{V}_{(A)} = C$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{AC}$$



اما چون زاویه دوران ۶۰° است پس اندازه بردار انتقال V برابر فاصله دو مرکز دوران است یعنی

$$|V| = |M_۱M_۲| = |AC|$$

و به همین ترتیب

$$\left(R^{۶۰\uparrow}_{M_۳} \circ R^{۶۰\uparrow}_{M_۴}\right)(A) = C$$

$$|M_۳M_۴| = |AC|$$

بنابراین و بدین ترتیب

$$|M_۱M_۴| = |M_۲M_۳| = |BD|$$

مسئله: در مثال فوق اثبت کنید اگر دو قطر چهارضلعی با هم برابر باشد آنگاه خط $M_۱M_۳$ بر خط

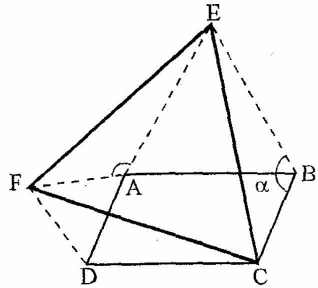
M_2M_4 عمود است.

مثال: بر روی اضلاع AB و AD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ دو مثلث متساوی‌الاضلاع به رئوس E و F می‌سازیم ثابت کنید مثلث ECF متساوی‌الاضلاع است.

$E\hat{B}C = F\hat{A}E$

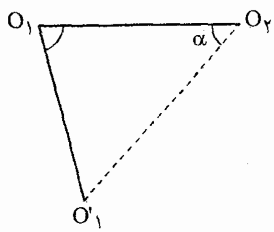
$F\hat{E}C = AEB = 60°$

$R_E^{60}(F) = C$



و حکم ثابت است.

۱۴ـ۸ـ گزاره معکوس: یک انتقال نتیجه ترکیب دو دوران با دو زاویه مساوی مختلف‌الجهت است.



اگر $O_1O'_1$ بردار انتقال باشد. نقطه O_2 روی محل برخورد عمودمنصف $O_1O'_1$ و روی کمان در خور زاویه α روی $O_1O'_1$ می‌باشد.

$$T_{\overrightarrow{O_1O'_1}} = R_{O_1}^{\alpha\uparrow} \circ R_{O_2}^{\alpha\downarrow}$$

۱۵ـ۸ـ گزاره: یک دوران غیرهمانی که یک خط را ثابت نگاه دارد یک نیم دور است.

فرض کنیم دوران حول نقطه C با زاویه θ خط l را ثابت نگاه دارد یعنی

$$R_C^{\theta}(l) = l$$

فرض کنیم m خطی باشد که در نقطه C بر خط l عمود باشد. اما خطی مانند n گذرنده از C و متفاوت از m وجود دارد که

$$R_C^{\theta} = \delta n \, . \, \delta m$$

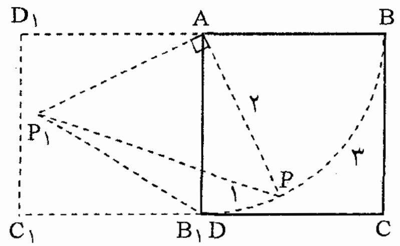
چون l و m برهم عمودند.

$$l = R_C^{\theta}(l) = \delta n \, . \, \delta m(l) = \delta n(l)$$

پس $\delta_{(n)}$ خط l را ثابت نگاه می‌دارد پس یا l بر n یا $l \perp n$. دو خط m و n نمی‌توانند دو خط متقاطع باشند که هر دو بر l عمود باشند بنابراین $l = n$ پس m و n هر دو در نقطه C برهم عمود بوده و R_C^{θ} یک نیم دور حول نقطه C می‌باشد.

مثال: $ABCD$ یک مربع است و P یک نقطه داخل مربع بطوریکه $PD = ۱$ و $PA = ۲$ و $PB = ۳$ زاویه APD را حساب کنید.

مربع $ABCD$ را حول نقطه A به اندازه $۹۰°$ دوران می‌دهیم. در نتیجه



$$R_A^{۹۰\downarrow} \; B = D$$

$$R_A^{۹۰\downarrow} \; C = C_۱$$

$$R_A^{۹۰\downarrow} \; D = D_۱$$

$$R_A^{۹۰\downarrow} \; P = P_۱$$

چون $AP_۱$ دوران یافته AP است پس $AP \perp AP_۱$ و $AP = AP_۱$ بنابراین زاویه $APP_۱ = ۴۵°$ و $PP_۱ = ۲\sqrt{۲}$ اما در مثلث $P_۱PD$ داریم

$$P_۱D^۲ = PP_۱^{\,۲} + PD^۲$$
$$۳^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + (۱)^۲$$

پس زاویه $P_۱PD = ۹۰°$ و زاویه $APD = ۱۳۵°$

مسائل برای حل

۱ـ۱۴ـ۸ـ نقطه P در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC چنان واقع شده که فاصله آن از سه رأس مثلث به ترتیب ۳ و ۴ و ۵ می‌باشد مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

جواب: $\sqrt{۲۵ + ۱۲\sqrt{۳}}$

۸-۱۴-۲- روی اضلاع BC و AC از مثلث ABC دو مربع $CAMN$ و $CBPQ$ ساخته شده‌اند اگر $O_۱$ و $O_۲$ مراکز این دو مربع باشند و نقطه D وسط MP و F وسط NQ باشد ثابت کنید مثلث‌های ABD و $O_۱O_۲F$ قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۸-۱۴-۳- مکان هندسی نقطه P واقع در داخل مثلث ABC را چنان تعیین کنید که $PA^۲ = PB^۲ + PC^۲$ باشد.

۸-۱۴-۴- ثابت کنید اگر نقطه C روی خط l واقع باشد، آنگاه

$$\delta l\, R_C^{\theta}\, \delta l = R_C^{-\theta}$$

۸-۱۴-۵- اگر خطوط l و m و n عمودمنصف اضلاع AB و AC و BC از مثلث ABC باشند حاصل ترکیب $\delta l \circ \delta m \circ \delta n$ بازتابی نسبت به چه خطی می‌باشد.

۸-۱۴-۶- ثابت کنید اگر ترکیب $\delta l \circ \delta m \circ \delta n$ یک بازتاب باشد آنگاه سه خط l و m و n یا در یک نقطه همرسند یا با یکدیگر موازیند.

۸-۱۴-۷- ثابت کنید بازتاب نسبت به سه نیمساز یک مثلث بازتابی نسبت به یک خط است که بر یکی از اضلاع مثلث عمود می‌باشد.

۸-۱۴-۸- اگر تبدیل نقطه $A \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ تحت

$$\delta n \circ \delta m((x , y)) = (x + ۶ , y - ۳)$$

معادلات خطوط l و m را تعیین کنید.

۸-۱۴-۹- اگر m و n دو خط متقاطع باشند مکان هندسی نقاطی مانند P را چنان تعیین کنید (θ معلوم است).

$$R_P^{\theta}(n) = m$$

۸-۱۴-۱۰- روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین EAB و FAC را ساخته‌ایم اگر نقطه M وسط ضلع BC باشد ثابت کنید مثلث EMF قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۸-۱۴-۱۱- سه مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین EAB و EAC و PBC را روی اضلاع مثلث ABC ساخته‌ایم ثابت کنید مثلث FPE قائم‌الزاویه متساوی الساقین است.

($E\hat{A}B = ۹۰^\circ$ و $F\hat{A}C = ۹۰^\circ$ و $B\hat{P}C = ۹۰^\circ$)

۸-۱۶ گزاره: نتیجه ترکیب چهار بازتاب دو بازتاب می‌باشد.

حالت اول: اگر هر چهار خط a و b و c و d در یک نقطه همرس باشند.

$$\delta a \circ \delta b \circ \delta c = \delta e$$

$$\delta a \circ \delta b \circ \delta c \circ \delta d = \delta e \circ \delta d$$

حالت دوم: اگر سه خط a و b و c در یک نقطه همرس باشند ولی d نباشد.

$$\delta a \circ \delta b \circ \delta c = \delta e$$

$$\delta a \circ \delta b \circ \delta c \circ \delta d = \delta e \circ \delta d$$

حالت سوم: دو خط a و b در یک نقطه و دو خط c و d در یک نقطه مناطقع باشند.

$$\delta a \circ \delta b = R_M^{\theta} \qquad M = a \cap b$$

$$\delta c \circ \delta d = R_N^{\theta'} \qquad N = c \cap d$$

$$\delta a \circ \delta b \circ \delta c \circ \delta d = R_M^{\theta} \circ R_N^{\theta'}$$

ترکیب دو دوران نیز یک دوران است مانند

$$R_M^{\theta} \circ R_N^{\theta'} = R_P^{\theta+\theta'}$$

و دوران حول نقطه P را نیز می‌توان به دو بازتاب تجزیه کرد.

$$R_P^{\theta+\theta'} = \delta e \circ \delta f$$

که زاویه بین دو خط e و f نصف زاویه $\theta + \theta'$ می‌باشد[1].

حالت چهارم: اگر دو خط a و b با هم موازی و c و d با هم مقاطع باشند.

$$\delta a \circ \delta b = T\vec{V}$$

---

۱. بطور کلی می‌توان برای هر ایزومتری مانند α ثابت کرد

m یک خط است. $\qquad \alpha \delta m \alpha^{-1} = \delta \alpha(m)$

p یک نقطه است. $\qquad \alpha \delta p \alpha^{-1} = \delta \alpha(p)$

$$\alpha R_c^{\theta} \alpha^{-1} = R_{\alpha}^{\theta}(C)$$

$$\alpha T\vec{V}\alpha^{-1} = T\vec{V}(\alpha)$$

V یک بردار است.

و هر انتقال را می‌توان به دو دوران با دو زاویه برابر و مختلف الجهت تجزیه نمود و این کار را در حالت مختلف می‌توان انجام داد .

نتیجه: یک ایزومتری با تعدادی زوج بازتاب تبدیل به دو بازتاب می‌شود. تعداد فردی بازتاب، یا یک بازتاب است یا ترکیب سه بازتاب. هیچ ایزومتری هم تعدادی بازتاب زوج و فرد نیست .

نتیجه: اگر دو خط $n = m$ یا m بر n عمود باشد آنگاه داریم

$$\delta m\delta n = \delta n\delta m \quad , \quad \delta n\delta m\delta n = \delta m$$

$$\delta\delta n(m) = \delta m \quad , \quad \delta n(m) = m$$

نتیجه: ترکیب یک بازتاب و یک دوران و بازتاب وارون آن چیست.

$$\delta l \, R_C^\theta \, \delta l^{-1} = \delta l\delta n\delta m\delta l^{-1} \quad (1)$$

چون دوران حول نقطه C را می‌توان با ترکیب دو تقارن محوری گذرنده از نقطه C توضیح داد.

$$\delta l\delta n\delta m\delta l^{-1} = \delta l\delta n\delta l^{-1}\delta l\delta m\delta l^{-1} \quad (2)$$

چون $\delta l^{-1} \circ \delta l = 1$

پس چون $\delta l\delta n\delta l^{-1} = \delta\delta(n)$ و $\delta l\delta m\delta l^{-1} = \delta\delta(m)$ رابطه (۲) بصورت

$$\delta\delta l(n) \circ \delta\delta l(m) = R_C^\theta \, \delta(l)$$

البته باید به جهت زاویه θ توجه داشت.

مسئله برای حل

۱-۱۵-۸- برای تبدیلات زیر یک تعبیر هندسی بیابید

$$\delta A \circ \delta B = \delta B \circ \delta A \qquad \delta B \circ \delta A = \delta C \circ \delta B \qquad \delta B \circ \delta a = \delta b \circ \delta B$$

$$\delta b \circ \delta A = \delta B \circ \delta A \qquad \delta b \circ \delta A = \delta A \circ \delta b \qquad \delta b \circ \delta a = \delta C \circ \delta B$$

(A و B و C نقطه a و b و c خط می‌باشند)

۲-۱۵-۸- دو نقطه A و B غیرواقع بر خط P مفروضند خط z را چنان تعیین کنید که نتیجه $\delta B \circ \delta P \circ \delta A$ بر جای خود ثابت بماند.

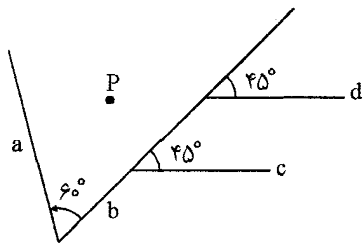
۸-۱۵-۳- یک مربع بسازید که چهار ضلع آن از چهار نقطه مفروض بگذرند.

۸-۱۵-۴- ثابت کنید نتیجه $\delta p\delta l\delta p\delta l\delta p\delta l\delta p$ یک بازتاب بر روی خطی موازی با l می‌باشد.

۸-۱۵-۵- دو نقطه A و B مفروضند نقطه P را چنان تعیین کنید که

$$T\vec{P}B \circ R_B^{۶۰} (P) = P$$

۸-۱۵-۶-



در شکل فوق نقطه Q و زاویه θ را چنان تعیین کند که

$$\delta d \circ \delta c \circ \delta b \circ \delta a = R_Q^{\theta}$$

۸-۱۵-۷- در شکل فوق نقطه z را چنان تعیین کنید

$$\delta b \circ \delta p \circ \delta a (z) = z$$

۸-۱۵-۸- با توجه به اینکه $R^{۳۶۰} (A) = A$ می‌باشد حاصل $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}^{۳۷}$ را حساب کنید.

۸-۱۵-۹- با توجه به اینکه $R^{\alpha\uparrow} \circ R^{\alpha\downarrow} = ۱$ وارون ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

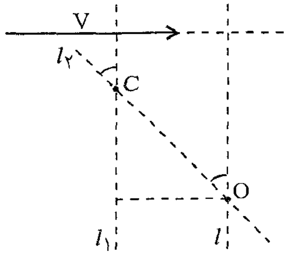
۸-۱۵-۱۰- ثابت کنید اگر C واقع بر خط l باشد $\delta l \circ R_C^{\theta} \circ \delta l = R_C^{-\theta}$

۸-۱۷- گزاره ترکیب یک دوران و یک انتقال یک دوران است.

چون یک انتقال را می‌توان نتیجه ترکیب دو دوران با دو مرکز مختلف و با زاویه‌های برابر ولی

مختلف‌الجهت در نظر گرفت پس باید نتیجه ترکیب سه دوران را بررسی کنیم هر دو دوران یک دوران جدید است پس نتیجه یک دوران خواهد بود. حال برای پیدا کردن مرکز دوران جدید چنین می‌توانیم عمل کنیم.

فرض کنیم بردار $\vec{V}$ بردار انتقال و نقطه O مرکز دوران و زاویه θ زاویه دوران باشد.



می‌دانیم انتقال، بردار $\vec{V}$ برابر است با دو تقارن محوری نسبت به دو خط موازی l و $l_۱$ که فاصله بین آنها نصف اندازه بردار $\vec{V}$ می‌باشد، خط l را چنان اختیار می‌کنیم که از نقطه O بگذرد و بر امتداد بردار $\vec{V}$ عمود باشد.

در عین حال دوران حول نطقه O به اندازه زاویه خود حاصل دو تقارن محوری است که زاویه بین آنها $\frac{\theta}{۲}$ بوده و از نقطه O می‌گذرند یکی از این در خطوط را خط l اختیار کرده و خط دوم را $l_۲$ چنان از O می‌کشیم که زاویه بین $l_۲$ و l برابر $\frac{\theta}{۲}$ باشد پس نتیجه ترکیب یک انتقال و یک دوران برابر با ترکیب چهار تقارن محوری می‌شود.

$$TV = \delta l_۱ \circ \delta l$$

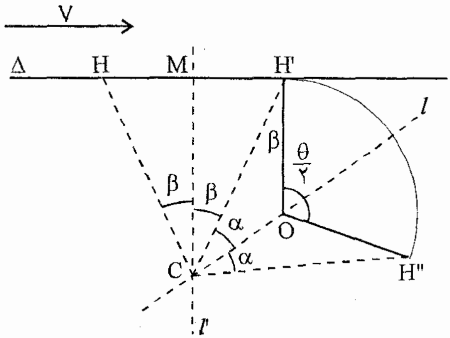
$$R_o^\theta = \delta l \circ \delta l_۲$$

$$TV \circ R_o^\theta = \delta l_۱ \circ \delta l \circ \delta l \circ \delta l_۲ = \delta l_۱ \circ \delta l_۲$$

اما قرینه نسبت به دو خط l و $l_۲$ دورانی است به مرکز محل برخورد $l_۱$ و $l_۲$ یعنی نقطه C در عین‌حال زاویه C با زاویه O که کمان $\frac{\theta}{۲}$ است برابر می‌باشد پس زاویه دوران جدید همان زاویه θ است.

نتیجه: ترکیب یک انتقال و یک دوران را می‌توان به دو تقارن محوری تقلیل داد.

برهان دیگری برای گزاره ترکیب انتقال و دوران

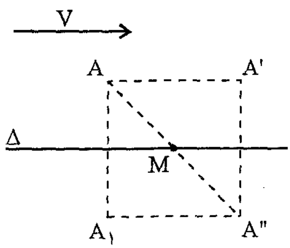


خط Δ با امتداد بردار $\vec{V}$ هم راستا می‌باشد اگر از نقطه O مرکز دوران بر خط Δ عمودی فرود آوریم خط OH' در صفحه دارای امتداد ثابتی است حال اگر $H'' = (H')$ R_o^θ باشد زاویه خط l با OH' برابر $\frac{\theta}{2}$ است، اگر خط l' را بفاصله نصف بردار $|\vec{V}|$ از OH' عمود بر Δ رسم کنیم این خط نیز در صفحه امتداد ثابتی دارد و منحصر بفرد است خط l نیز منحصر بفرد است پس از برخورد این دو خط نقطه منحصر بفرد C بدست می‌آدی اگر HH' را به اندازه $\vec{V}$ در نظر بگیریم

$$T_{HH'} \circ R_o^\theta = R_C^\theta$$

بخش ۹ ـ لغزه

ترکیب یک انتقال در امتداد یک خط و تقارن محوری نسبت به آن خط را یک لغزه می‌نامند.



انتقال یافته نقطه A به اندازه بردار $\vec{V}$ و سپس قرینه آن را نسبت به خط Δ که نقطه A'' می‌شود را می‌توان به دو صورت نشان داد.

$$\delta_{\Delta} \circ T\vec{V}_{(A)} = A''$$

$$T\vec{V} \circ \delta_{\Delta(A)} = A''$$

$$\delta_{\Delta} \circ T\vec{V} = T\vec{V} \circ \delta_{\Delta}$$

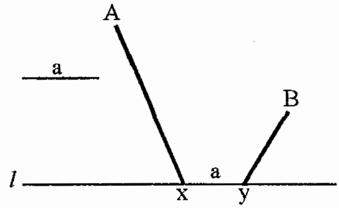
همانطور که ملاحظه می‌شود لغزه هیچ نقطه‌ای را در صفحه ثابت نگاه نمی‌دارد. اما اوساط تمام نقاط A و A'' بر روی خط Δ واقع است بعبارت دیگر هر لغزه را می‌توان بصورت یک تقارن مرکزی نشان داد که مرکز آن ثابت نبوده و بر روی خط Δ متغیر است.

$$T\vec{V} \circ \delta_{\Delta(A)} = \delta_{\Delta} \circ T\vec{V}_{(A)} = A''$$

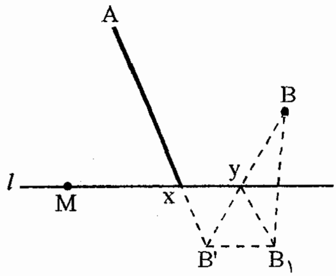
$$\delta_M(A) = A'' \ , \quad M \in \Delta$$

مثال: خط l و دو نقطه A و B در یک طرف آن و پاره خطی بطول a داده شده‌اند، پاره خط xy به

طول a را بر خط l چنان پیدا کنید که طول راه $AxyB$ کوتاه‌ترین راه ممکن باشد.



چون طول xy برای همه نقاط یکسان است پس با یک انتقال x را می‌توان بر y منتقل کرد و اگر B در امتداد Ax واقع شود طول راه کوتاه‌ترین است. پس



$$\delta l(B) = B_{۱}$$

$$T\vec{a}_{(B_{۱})} = B'$$

AB' کوتاه‌ترین راه بین دو نقطه A و B است. چون $By = B'x = B_{۱}y$ پس

$$Ax + xy + By$$

کوتاه‌ترین راه ممکن است.

چون اگر نقطه M را روی l در نظر بگیریم.

$$AM + MB' > AB'$$

مسئله برای حل

یک چهار ضلعی $ABCD$ رسم کنید که در آن $\hat{C} = \hat{D}$ و طول‌های اضلاع AB و CD و مجموع طول‌های اضلاع BC و AD و فاصله رأس A از ضلع CD معلوم است.

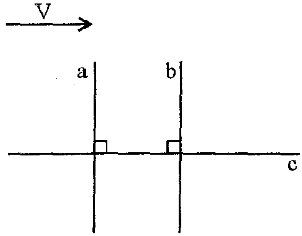
۱ـ۹ـ گزاره: یک تقارن لغزه‌ای هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد. تقارن لغزه‌ای فقط یک خط که محور تقارن لغزه‌ای نام دارد ثابت نگاه می‌دارد. وسط هر نقطه و تبدیل یافته آن نقطه تحت تأثیر تقارن لغزه‌ای بر روی محور تقارن لغزه‌ای قرار دارد.

هر انتقال را می‌توان ترکیب دو تقارن محوری موازی در نظر گرفت که فاصله بین آن دو خط

نصف اندازه بردار انتقال است و سپس می‌توان این دو خط را چنان در نظر گرفت که بر خط سوم عمود باشند. خط سوم در راستای بردار انتقال است.

پس تعریف تقارن لغزه‌ای بصورت

$$T V \circ \delta C = \delta C \circ T\vec{V}$$
$$= \delta c\delta b \circ \delta a = \delta b \circ \delta a \circ \delta c$$



که $\delta b \circ \delta a = T\vec{V}$

بنابراین اگر γ یک تقارن لغزه‌ای باشد سه خط متمایز a و b و c یافت می‌شوند بطوریکه

$$\gamma = \delta c \circ \delta b \circ \delta a$$

که در آن دو خط a و b بر خط c عمود می‌باشند.

اما چون دو خط a و c بر یکدیگر عمودند پس ترکیب آنها یک تقارن مرکزی است حول نقطه‌ای مانند A

$$\delta A = \delta a \circ \delta c = \delta c \circ \delta a$$

و همینطور برای دو خط b و c نیز

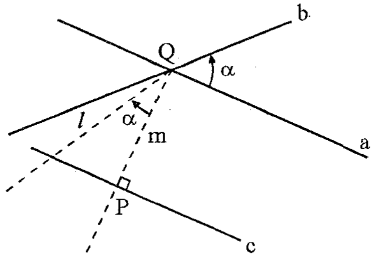
$$\delta B = \delta b \circ \delta c = \delta c \circ \delta b$$

$$\gamma = \delta c \circ (\delta b \circ \delta a) = (\delta c \circ \delta b) \circ \delta a = \delta b \ (\delta c \circ \delta a) = (\delta b \circ \delta a) \circ \delta c$$
$$= \delta B \circ \delta a = \delta b \circ \delta A$$

نتیجه ۱: یک تقارن لغزه‌ای ترکیبی از یک تقارن محوری نسبت به یک خط با یک تقارن مرکزی است که مرکز تقارن روی آن خط واقع نیست. یک تقارن لغزه‌ای ترکیبی از یک تقارن مرکزی و یک تقارن محوری که غیرگذرنده از مرکز تقارن می‌باشد است. اگر نقطه مانند P و خطی مانند l غیرگذرنده از P داشته باشیم آنگاه $\delta l \circ \delta p = \delta p \circ \delta l$ یک تقارن لغزه‌ای است که محور ان خطی است که از P گذشته و بر l عمود می‌باشد.

۲-۹- اگر a و b و c سه خط غیر همرس یا موازی باشند آنگاه $\delta a \circ \delta b \circ \delta c$ یک تقارن لغزه‌ای است.

اگر دو خط a و b در نقطه‌ای مانند Q همرس باشند که غیر واقع بر C است $\delta c \circ \delta b \circ \delta a$ را می‌توان چنین نمایش داد.



$\delta b \circ \delta a = \delta m \circ \delta l$

$\delta c \circ \delta b \circ \delta a = \delta c \circ \delta m \circ \delta l = \delta p \circ \delta l$

توجه: بردار انتقال این تقارن لغزه دو برابر فاصله نقطه P از خط l است و محور آن خطی است که از نقطه P بر l عمود گردد.

۳ـ۹ـ برهان دیگری برای گزاره فوق

اگر خط l_1 و l_2 در نقطه O همرس بوده و خط l_3 با هر دوی آنها متقاطع و غیر گذرنده از روی O باشد آنگاه

زاویه θ زاویه بین دو خط l_1 و l_2 است.

$\delta l_1 \circ \delta l_2 = R_O^{2\theta}$

حال به جای دو خط l_1 و l_2 دو خط l'_1 و l'_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که از نقطه O گذشته و زاویه بین آنها θ بوده و در عین حال خط l'_2 در نقطه O_1 بر خط l_3 عمود باشد.

$\delta l_1 \circ \delta l_2 = \delta l'_1 \circ \delta l'_2$

حال به جای لغزه $\delta l_1 \circ \delta l_2 \circ \delta l_3$ می‌توان نوشت

$\delta l'_1 \circ \delta l'_2 \circ \delta l_3$

اما از طرفی $\delta l'_2 \circ \delta l_3$ یک تقارن مرکزی به مرکز O_1 است پس چون دو خط l'_2 و l_3 برهم عمودند

$\delta l'_2 \circ \delta l_3 = \delta o_1$

بنابراین لغزه فوق بصورت زیر در بیاید

$\delta l_1 \circ \delta l_2 \circ \delta l_3 = \delta l'_1 \circ \delta o_1$

اما به جای $\delta o_{۱}$ می‌توان دو خط عمود بر هم m و n را چنان در نظر گرفت که از نقطه $o_{۱}$ گذشته و m بر $l'_{۱}$ عمود باشد در نتیجه داریم

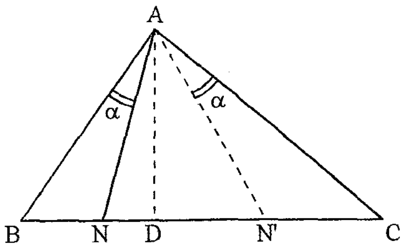
$\delta l_{۱} \circ \delta l_{۲} \circ \delta l_{۳} = \delta l'_{۱} \circ \delta m \circ \delta n = \delta n \circ \delta l' \circ \delta m$

اما دو خط n و l' هر دو بر خط m عمود می‌باشند بنابراین با هم موازی بوده و یک انتقال با بردار $\vec{V}$ که دو برابر فاصله بین دو خط n و l' می‌باشد بوجود می‌آورد $\delta n \circ \delta l' = T\vec{V}$ پس در نهایت

$\delta l_{۱} \circ \delta l_{۲} \circ \delta l_{۳} = T\vec{V} \circ \delta m$

در نتیجه تقارن نسبت به سه خط غیرموازی و غیرهمرس یک لغزه است. این استدلال در حالتی که دو خط از خطوط فوق با هم موازی و سومی هر دوی آنها را قطع نمایدند صادق است.

مثال: سه خط همرس AN , CM و BP درون مثلث ABC مفروضند اگر AN' و CM' و BP' قرینه‌های این سه خط نسبت به سه نیمساز داخلی مثلث باشند ثابت کنید این سه خط نیز در یک نقطه همرسند.



(۱) می‌دانیم $\delta AB \circ \delta AN \circ \delta AC = \delta AN'$ چون هر سه خط در نقطه A همرسند و زاویه‌ای که AB و AN با هم می‌سازند با زاویه‌ای که AN' و AC با هم می‌سازند برابر است

(چون $\delta AB \circ \delta AN = \delta AN' \circ \delta AC$ هر دو یک دوران حول نقطه A با زاویه α می‌باشد.

$\delta AB \circ \delta AN \circ \delta AC = \delta AN' \circ \delta AC \circ \delta AC$ می‌باشند).

$$\delta AB \circ \delta AN \circ \delta AC = \delta AN'$$

بنابراین روابط زیر نیز صادق است

$\delta AC \circ \delta CM \circ \delta BC = \delta CM' \quad$ (۲)

$\delta BC \circ \delta BP \circ \delta BA = \delta BP' \quad$ (۳)

حال اگر سه خط AN' و CM' و BP' بخواهند همرس باشند باید

$$\delta AN' \circ \delta CM' \circ \delta BP' = \delta x$$

چون اگر ترکیب سه تقارن محوری یک تقارن محوری باشد یا آن سه خط در یک نقطه همرسند یا هر سه با هم موازیند درغیر این صورت یک لغزه خواهد بود.

پس $\delta AN' \circ \delta CM' \circ \delta MP' \circ \delta AN' \circ \delta CM' \circ \delta BP' = 1$ یک ترکیب همانی چون این ترکیب برابر $\delta x \circ \delta x = 1$ است

حال به جای مقادیر فوق روابط (۱) و (۲) و (۳) را می‌گذاریم

$$\delta AB \circ \delta AN \circ \delta AC \circ \delta AC \circ \delta CM \circ \delta BC \circ \delta BC \circ \delta BP \circ \delta AB \circ$$

$$\delta AB \circ \delta AN \circ \delta AC \circ \delta AC \circ \delta CM \circ \delta BC \circ \delta BC \circ \delta BP \circ \delta AB =$$

$$\delta AB \circ \delta AN \circ \delta CM \circ \delta BP \circ \delta AN \circ \delta CM \circ \delta BP \circ \delta AB$$

ترکیب

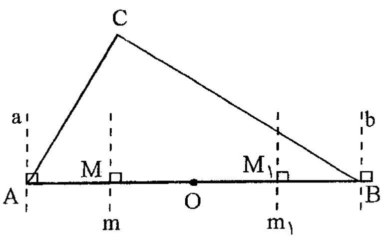
$$\delta AN \circ \delta AM \circ \delta BP \circ \delta AN \circ \delta CM \circ \delta BP = \delta x \circ \delta x = 1$$

پس

$$\delta AB \circ \delta AB = 1$$

و حکم ثابت است.

مثال: سه نقطه M و N و P بر اضلاع AB و BC و CA از مثلث ABC واقع می‌باشند، اگر M_1 و N_1 و P_1 قرینهای سه نقطه M و N و P نسبت به اوساط اضلاع مثلث باشند و سه خطی که از این سه نقطه بر اضلاع مثلث عمود رسم شده‌اند در یک نقطه همرس باشند ثابت کنید سه خطی که از نقاط M_1 و N_1 و P_1 نیز بر اضلاع مثلث عمود اخراج شوند در یک نقطه همرسند.



اگر از دو نقطه A و B دو عمود a و b را بر AB فرود آوریم

$$\delta b \circ \delta m \circ \delta a = \delta m_1 \Rightarrow \delta B \circ \delta m \circ \delta A = \delta m_1$$

در عین حال تقارن نسبت به نقطه A حاصل ترکیب دو $\delta a \circ \delta AB$ است چون دو خط a و AB

برهم عمودند.

پس

$$\delta B \circ \delta m \circ \delta A = \delta AB \circ \delta b \circ \delta m \circ \delta a \circ \delta AB = \delta M_{۱}$$

$$\delta C \circ \delta P \circ \delta A = \delta P_{۱}$$

حال اگر ثابت کنیم (۱) $\delta m_{۱} \circ \delta n_{۱} \circ \delta p_{۱} \circ \delta m_{۱} \circ \delta n_{۱} \circ \delta p_{۱} = ۱$

یک ترکیب همانی است پس سه خط $m_{۱}$ و $n_{۱}$ و $p_{۱}$ نیز در یک نقطه همرس می‌باشند در رابطه (۱) مقادیر بدست آمده را قرار می‌دهیم.

$$\delta A \circ \delta m \circ \delta B \circ \delta B \circ \delta n \circ \delta C \circ \delta C \circ \delta P \circ \delta A \circ$$

$$\delta A - \delta m \circ \delta B \circ \delta B \circ \delta n \circ \delta C \circ \delta C \circ \delta P \circ \delta =$$

$$\delta A \circ \delta m \circ \delta n \circ \delta p \circ \delta m \circ \delta n \circ \delta p \circ \delta A = ۱$$

چون سه خط m و n و p در یک نقطه همرس بوده‌اند پس در حکم تقارن نسبت به یک خط بوده و ترکیب آن با خودش برابر ۱ است و قرینه A نسبت به قرینه A نیز ۱ می‌باشد و حکم ثابت است.

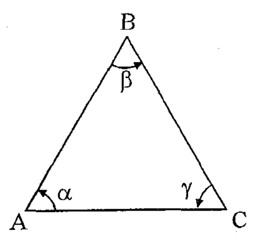
$$\delta_A \circ \delta_A = ۱$$

یک نتیجه مهم: مجموع تعداد زوجی تقارن محوری یک دوران یا یک انتقال است مجموع تعداد فردی از این تقارن‌ها یک تقارن محوری یا یک لغزه است.

مسائل برای حل

۱-۴-۹- اگر سه نقطه A و B و C مطابق شکل سه مرکز دوران با سه زاویه دوران مختلف α و β و γ باشد ثابت کنید

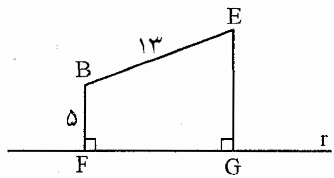
$$R_A^{۲\alpha} \circ R_B^{۲\beta} \circ R_C^{۲\gamma} = ۱$$



۹-۴-۲- اگر λ یک تبدیل ایزومتری و l یک خط دلخواه باشد، خطی مانند m چنان یافت می‌شود که برای هر نقطه‌ای مانند p واقع بر l وسط نقطه p و $\lambda(p)$ بر m واقع باشد.

۹-۴-۳- ثابت کنید اگر λ یک لغزه باشد و $\lambda^m = \lambda^n$ آنگاه $m = n$

۹-۴-۴- در شکل زیر نقطه P را چنان تعیین کنید که داشته باشیم



$$\delta G \circ \delta P \circ \delta E\,(B) = F$$

۹-۴-۵- اگر نقطه $A = (۱\,,۲)$ و $B = (-۳\,,۶)$ نقطه C را چنان تعیین کنید که

$$\delta B \circ \delta A\,(C) = (۴\,,-۲)$$

و اگر $E = (۲\,,۳)$ نقطه D را چنان تعیین کنید.

$$\delta E \circ \delta D\,(۱\,,-۲) = (۳\,,۵)$$

۹-۴-۶- اگر $A = (۳\,,۰)$ معادلات خطوط m و n را چنان تعیین کنید که نقطه $(۲\,,-۴)$ روی خط m و $\delta A = \delta n \circ \delta m$ باشد.

۹-۴-۷- نقطه M و خط l و دایره C مفروضند نقاطی مانند A و B چنان تعیین کنید که A روی خط l و B روی دایره C و نقطه M وسط A و B باشد.

۹-۴-۸- خط l و دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ مفروضند مربع $PQRS$ را چنان رسم کنید که P و R روی خط l و Q و S روی دو دایره باشند.

۹-۴-۹- در مثلث حاده‌الزاویه ABC نقطه P واقع بر ضلع BC واقع است دو نقطه Q و R را بر دو ضلع AC و AB چنان تعیین کنید که مثلث PQR دارای محیط می‌نیمم باشد.

۹-۴-۱۰- در داخل مثلث ABC یک توپ و یک سوراخ قرار دارد می‌خواهیم با یک ضربه توپ را به حرکت درآورده تا با هر سه ضلع مثلث برخورد کرده و سپس وارد سوراخ شود، چگونه این عمل انجام شود که توپ مسیر راه می‌نیمم را بپیماید.

بخش ۱۰ـ معادلات تبدیلات

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ را حول مبداء مختصات یا زاویه θ دوران دهیم مختصات نقطه تبدیل یافته $A'\left|\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right.$ از معادلات زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$$

اگر مرکز دوران نقطه $H\begin{pmatrix}h\\R\end{pmatrix}$ باشد معادلات به صورت

$$\begin{cases} x' = \cos\theta\,(x-h) - \sin\theta\,(y-R) + h \\ y' = \sin\theta\,(x-h) + \cos\theta\,(y-R) + R \end{cases}$$

در حالت کلی شکل تبدیلات در صفحه دکارتی به صورت

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d \end{cases} \qquad a^۲ + b^۲ = ۱$$

مسائل برای حل

۱ـ۱۰ـ ثابت کنید اگر

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$$

و $a^۲ + b^۲ = ۱$ باشد این معادلات ناشی از تعدادی فرد بازتاب است.

۲ـ۱۰ـ اگر $\begin{cases} x' = \frac{۳}{۵}x + \frac{۴}{۵}y \\ y' = \frac{۴}{۵}x - \frac{۳}{۵}y \end{cases}$ معادلاتی برای δm باشد معادله m را بیابید

۳ـ۱۰ـ اگر $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + a \end{cases}$ معادلاتی برای یک لغزه باشد ثابت کنید محور این لغزه دارای معادله زیر است.

$$۲bx - ۲(x + ۱)y + (ad - bc + d) = ۰$$

۴ـ۱۰ـ اگر $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + r \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + s \end{cases}$ یک دوران R_p^θ نقطه p را معلوم کنید.

۵ـ۱۰ـ اگر $x' = ax + by + c$ و $y' = bx - ay + d$ و $a^۲ + b^۲ = ۱$ معادلات ایزومتری α باشند. ثابت کنید α یک بازتاب است اگر $ac + bd + c = ۰$ و $ad - bc - d = ۰$.

۶ـ۱۰ـ اگر $x' = a_۱x + b_۱y + c_۱$ و $y' = d_۱x + e_۱y + f_۱$ معادلات تبدیل α_i و $\alpha_۳ = \alpha_۲ . \alpha_۱$ ثابت کنید.

$$\begin{bmatrix} a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ d_۲ & e_۲ & f_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ d_۱ & e_۱ & f_۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_۳ & b_۳ & c_۳ \\ d_۳ & e_۳ & f_۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بخش ۱۱ـ تجانس یا تشابه مرکزدار

۱ـ۱۱ـ تعریف

هرگاه نقطه ثابت S در صفحه و عدد حقیقی $k \neq 0$ و برای دو نقطه A و A' که با نقطه S روی یک خط راست واقع باشند و داشته باشیم

$$SA' = k \,.\, SA$$

آنگاه می‌گوییم مجانس نقطه A نسبت به مرکز تجانس S و ضریب تجانس k نقطه A' می‌باشد و می‌نویسیم

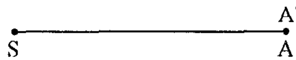
$$H_k^{k}(A) = A'$$

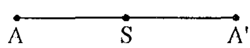
و می‌خوانیم مجانس نقطه A با مرکز تجانس S و ضریب تجانس k نقطه A' می‌باشد.

اگر نقطه A و مجانس آن در یک طرف مرکز مجانس باشد تجانس مستقیم بوده و $k > 0$.

و اگر نقطه A و مجانس آن در دو طرف مرکز تجانس باشد مجانس معکوس و $k < 0$.

نتیجه ۱: هرگاه ضریب تجانس برابر ۱ باشد تجانس یک تبدیل همانی است.



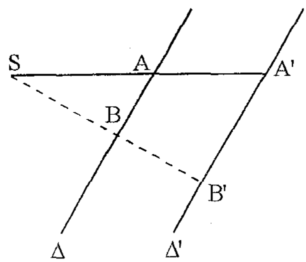


۲ـ هرگاه ضریب تجانس برابر ۱ – باشد.
S در وسط A و A' واقع شده و تجانس به صورت تقارن مرکزی یا یک نیم دور یا یک دوران 180° حول نقطه S در می‌آید.
۳ـ تنها نقطه ثابت در صفحه با هر ضریب تجانسی نقطه مرکز تجانس است.
۴ـ در تجانس بی‌شمار خطوط ثابت وجود دارد و آن هم در مورد خطوطی است که همگی از مرکز تجانس می‌گذرند.

۲ـ۱۱ گزاره: مجانس یک خط راست خطی موازی با آن می‌باشد.
مرکز تجانس S و ضریب تجانس k و خط Δ را درنظر می‌گیریم مجانس نقطه A نقطه A' است و برای آن داریم

$$H_S^k(A) = A' \Leftrightarrow SA' = k \cdot SA$$

$$\frac{SA'}{SA} = k$$



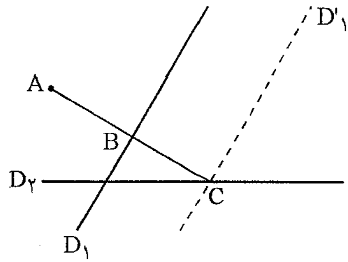
از نقطه A' خط Δ' را موازی Δ رسم می‌کنیم مجانس هر نقطه‌ای مانند B واقع بر Δ بر خط Δ' واقع می‌شود و حکم ثابت است.
به عبارت دیگر: اگر متحرکی مانند A خط Δ را به پیماید مجانس آن متحرک خط Δ' را که موازی با Δ می‌باشد می‌پیماید.
مثال: دو خط D_1 و D_2 و نقطه A در صفحه مفروضند از نقطه A خطی رسم کنید که این دو خط را در دو نقطه B و C قطع نماید و $AC = k \cdot AB$ باشد. (k یک عدد حقیقی است)
حل: اگر مسئله حل شده باشد

$$AC = k \cdot AB$$

چون نقطه A در صفحهٔ ثابت است. بنابراین

$$H_A^k(B) = C$$

اگر B خط D_1 را پیماید نقطه مجانس آن خط D'_1 را که مجانس D_1 است می‌پیماید و نقطه C بر خط D_2 نیز واقع است پس

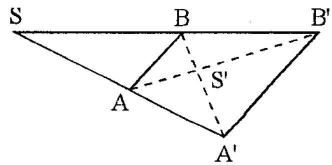


$C = D'_{1} \cap D_{2}$

$C = H_{A}^{k}(D_{1}) \cap D_{2}$

در حالتی که D_{2} موازی D_{1} است یا بی‌شمار و یا جواب ندارد.

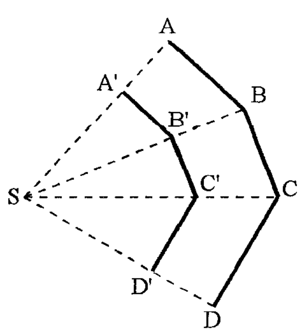
۳ـ۱۱ گزاره: دو پاره‌خط موازی را در صفحه را می‌توان مجانس هم دانست (هم تجانس مستقیم و هم تجانس معکوس).



S مرکز مجانس مستقیم و S' مرکز تجانس معکوس است و نسبت تجانس برابر با $\frac{AB}{A'B'}$ می‌باشد.

حالت خاص: اگر دو پاره‌خط برابر باشند نسبت تجانس ۱ − و مرکز تجانس معکوس همان مرکز تقارن مرکزی یا نیم دور بوده و مرکز تجانس مستقیم در بی‌نهایت است.

۴ـ۱۱ گزاره: اگر چند پاره‌خط موازی و متناسب در صفحه وجود داشته باشند برای آنها یک مرکز تجانس می‌توان تعیین کرد.



بنابر فرض داریم

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k$$

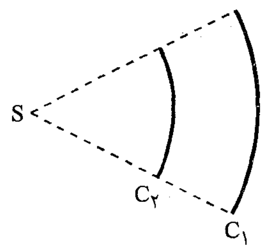
$$AB \parallel A'B' \ , \ BC \parallel B'C' \ , \ CD \parallel C'D'$$

خطوط AA' و BB' یکدیگر را در نقطه S قطع می‌نمایند پس

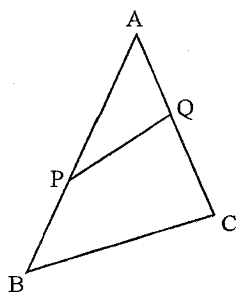
$$H_S^k(B) = B' \ , \ C \in CD \parallel C'D' \Rightarrow$$

$$H_S^k(S) = C'$$

بنابراین خطوط CC' و DD' و.... نیز از همان نقطه S می‌گذرند اگر اندازه پاره‌خط‌های موردنظر به سمت صفر میل نمایند آنگاه دو منحنی $C_۱$, $C_۲$ بدست می‌آید که مجانس یکدیگراند.

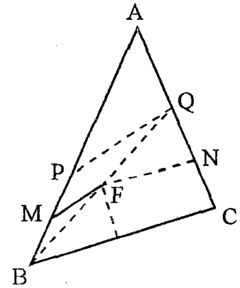


مثال: در مثلث ABC بر روی دو ضلع AB و AC دو نقطه P و Q را چنان تعیین کنید که $BP = PQ = QC$ باشد.



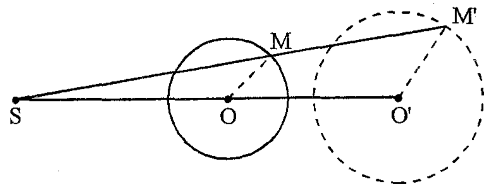
حل: روی AB نقطه M را چنان اختیار می‌کنیم که $BM = l$ و نقطه N روی AC چنان انتخاب می‌کنیم که $CN = l$ باشد از N خطی موازی BC از نقطه M دایره‌ای به مرکز M و به شعاع l رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه F قطع نماید از B به F وصل کنیم تا AC را در Q قطع کند از Q خطی موازی MC می‌کشیم تا AB را در نقطه P قطع نماید.

ادامه بحث به عهده خواننده است.



۵ـ۱۱ گزاره: مجانس یک دایره یک دایره است.

دایره $C(O.R)$ و مرکز تجانس S و نسبت تجانس k مفروضند



جای نقطه O مرکز دایره C در صفحه مفروض است بنابراین نقطه O' که مجانس نقطه O می‌باشد نیز در صفحه جای ثابتی $H_S^k(O) = O'$ دارد. نقطه متغیر M را روی دایره (C) درنظر می‌گیریم و مجانس آن M' را تعیین می‌کنیم

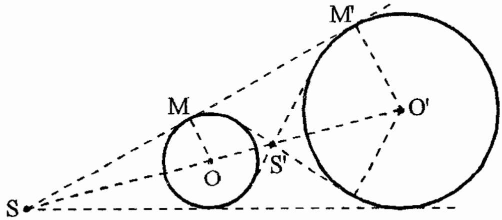
$$H_S^k(M) = M'$$

بنابراین $O'M' = k . OM$ بوده و یا $O'M' = k . R$ می‌باشد که مقدار ثابتی است و چون جای O' در صفحه ثابت است پس مکان M' دایره است به مرکز O' و شعاع آن k برابر شعاع دایره C است.

توجه: اگر M' مجانس نقطه M باشد شعاع $O'M'$ با شعاع OM موازی است.

نتیجه ۱: دو دایره در صفحه مجانس یکدیگرند نسبت تجانس این دو دایره $\frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R}$ و مرکز تجانس مستقیم آنها در خارج از خط المرکزین دو دایره و مرکز تجانس معکوس آن بین دو نقطه OO' است.

نتیجه ۲. محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی با خط المرکزین مرکز تجانس مستقیم و محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی دو دایره با خط المرکزین مرکز تجانس معکوس دو دایره است.



نتیجه ۳. برای تعیین مرکز تجانس مستقیم دو شعاع موازی و هم جهت از دو دایره را درنظر گرفته و انتهای آنها را به هم وصل می‌کنیم تا خط المرکزین دو دایره را در S قطع کند و دو شعاع مختلف الجهت درنظر می‌گیریم تا مرکز تجانس معکوس بدست آید.

نتیجه ۴. مرکز دو دایره متحدالمرکز تنها مرکز تجانس است.

مثال: نقطه A بر روی دایره $C\ (O\ ,\ R)$ مفروض است از این نقطه وترهای متغیر AB را در دایره رسم می‌کنیم و نقطه M را چنان بر AB تعیین می‌کنیم که $AM = k\ .\ MB$ باشد مکان M را تعیین کنید.

حل:
$$\frac{AM}{MB} = k \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{k}{k+۱}$$

$$AM = \frac{k}{k+۱} . AB$$

پس نقطه M مجانس نقطه B با مرکز تجانس A و ضریب تجانس $\frac{k}{k+۱}$ است.

$$H_A^{\frac{k}{k+۱}}(B) = M$$

چون B دایره $C\ (O\ ,\ R)$ را می‌پیماید پس M دایره مجانس $C\ (O\ ,\ R)$ را به مرکز A و با ضریب $\frac{k}{k+۱}$ را می‌پیماید.

مثال: ثابت کنید که G و O و H روی یک خط راست بوده و $GH = ۲GO$ می‌باشد (G مرکز میانه‌ای و O مرکز دایره محیطی و H مرکز ارتفاع مثلث است).

حل: چون $GQ = -۲GA'$ با حفظ جهت پس

$$H_G^{-\frac{۱}{۲}}(A) = A'\ ,\ H_G^{-\frac{۱}{۲}}(B) = B'\ ,\ H_G^{-\frac{۱}{۲}}(C) = C'$$

بنابراین مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC با مرکز تجانس G و ضریب تجانس $-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.
پس مرکز ارتفاعیه مثلث $A'B'C'$ و مرکز ارتفاعیه مثلث ABC و G بر یک خط راست می‌باشند.

اما مرکز ارتفاعیه مثلث $A'B'C'$ همان مرکز دایره محیطی مثلث ABC است پس

$$GO = -\frac{۱}{۲} GH$$

پس

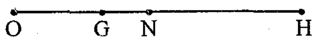
$$|GH| = ۲|GO|$$

نتیجه دیگر: مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ را اگر N بنامیم.

N و G و O بر یک خط راست بوده و داریم

$$۲\ |GN| = GO$$

پس



نقطه N و سط HO می‌باشد

توجه اینکه: N مرکز دایره به نقطه مثلث ABC است.

نکته اول: تجانس با ضریب تجانس ۱ یک تبدیل همانی است.

نکته دوم: تجانس با ضریب تجانس ۱ − یک نیم دور است.

نکته سوم: در هر تجانس تنها نقطه ثابت مرکز تجانس است.

نکته چهارم: تمام خطوط گذرنده از مرکز تجانس خطوط ثابت می‌باشند.

مسائل برای حل

۱-۱-۱۱- چهارضلعی $ABCD$ یک ذوزنقه است. نقطه M محل برخورد امتدادهای ساق‌های AD و BC و نقطه N محل برخورد قطرهای AC و BD می‌باشد. ثابت کنید.

الف: دایره‌های محیطی مثلث‌های ABM و DCM برهم مماسند.

ب: دایره‌های محیطی مثلث‌های ABN و CDN برهم مماسند.

۲-۱-۱۱- ثابت کنید در هر ذوزنقه خط واصل بین نقاط وسط دو قاعده از نقطه برخورد امتداد دو ساق و همچنین از محل برخورد قطرها می‌گذرند.

۳-۱-۱۱- در مثلث ABC مثلثی محاط کنید که هر ضلع آن با یک ارتفاع مثلث موازی باشد.

۴-۱-۱۱- دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطه مفروض گذشته و بر دو خط مفروض مماس باشد.

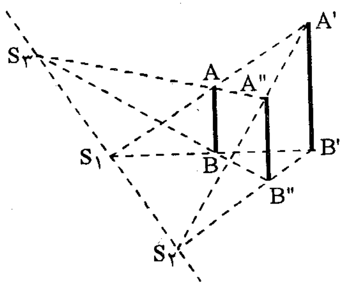
۵-۱-۱۱- دایره‌ای رسم کنید که بر یک دایره و دو خط مفروض مماس باشد.

۶-۱-۱۱- در مثلث متساوی الساقین ABC . $(AB = AC)$. AH ارتفاع می‌باشد. از H عمود HM را بر ضلع AC فرود می‌آوریم. نقطه T وسط HM است. ثابت کنید AT بر BM عمود است.

۷-۱-۱۱- در مثلث ABC دوایر (O_1) دایره محاطی داخلی مثلث و (O_2) دایره محاطی خارجی مثلث. اگر (O_1) و در نقطه H بر BC مماس باشد و HT قطر این باشد. ثابت کنید خط AT از محل تماس دایره (O_2) با ضلع BC می‌گذرد.

۶-۱۱- ترکیب دو تجانس: حاصل ترکیب دو تجانس تجانس جدیدی است که ضریب تجانس آن برابر حاصل‌ضرب دو ضریب تجانس اولیه است:

حل:



مجانس پاره‌خط AB با مرکز تجانس S_1 و ضریب تجانس k_1 پاره‌خط $A'B'$ است که با AB موازی است و

$$H_{S_1}^{k_1}(AB) = A'B' \qquad , \qquad \frac{A'B'}{AB} = k_1$$

مجانس $A'B'$ با مرکز تجانس S_2 و ضریب تجانس k_2 پاره‌خط $A''B''$ است با $A'B'$ موازی بوده و یعنی $\frac{A''B''}{A'B'} = k_2$

$$H_{S_2}^{k_2}(A'B') = A'B'$$

پس $\frac{A''B''}{AB} = k_1 . k_2$ و $AB \parallel A''B''$ پس AB با $A''B''$ با مرکز تجانس مانند S_3 مجانس بوده و ضریب این تجانس برابر $k_1 . k_2$ می‌باشد پس

$$H_{S_3}^{k_1 . k_2}(AB) = A''B''$$

بنابراین

$$H_{S_2}^{k_2} \, o \, H_{S_1}^{k_1} = H_{S_3}^{k_2 . k_1}$$

۷ـ۱۱ـگزاره: سه مرکز تجانس S_1 و S_2 و S_3 بر یک خط راست واقع می‌باشند در مثلث $AA'A''$ قضیه منلائوس را برای خط $S_1S_2S_3$ نسبت به آن می‌نویسیم

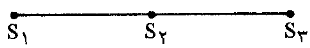
$$\frac{S_1A'}{S_1A} \times \frac{S_2A''}{S_2A'} \times \frac{S_3A}{S_3A''} = 1$$

$$k_1 \times \frac{1}{k_1 \times k_2} \times k_2 = 1$$

۸ـ۱۱گزاره: نسبت فاصله S_3 از S_2 و S_1 عبارتست از:

$$S_3S_1 = \frac{k_2 - 1}{k_1 \, . \, k_2 - 1} S_2S_1$$

حل:



$$\begin{cases} H^{R_1}_{S_1}(S_1) = S_1 \\ \\ H^{k_2}_{S_2}(S_1) = S'_1 \end{cases} \Rightarrow \quad S_2S'_1 = k_2 \, . \, S_2S_1$$

$$H^{k_2}_{S_2} \circ H^{k_1}_{S_1}(S_1) = H^{k_2 \, . \, k_1}_{S_3}(S_1) = S'_1$$

$$S_2S'_1 = k_1 \, . \, k_2 \, . \, S_3S_1 \qquad (2)$$

$$S_2S'_1 - S_2S_3 = k_1 \, . \, k_2 \, . \, S_3 S_1$$

$$k_2S_2S_1 - S_2S_3 = k_1 \, . \, k_2 \, . \, S_3 S_1 \qquad (3)$$

$$S_2S_3 = S_1S_3 - S_1S_2 \qquad (4)$$

با توجه به روابط فوق

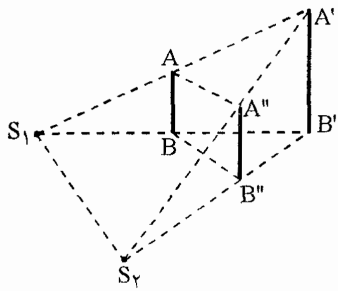
$$S_3S_1 = \frac{k_2 - 1}{k_1 \, . \, k_2 - 1} \, . \, S_2S_1$$

۱ـ۸ـ۱۱ـ گزاره اگر حاصل ضرب $k_1 . k_2 = 1$ باشد آنگاه ترکیب دو تجانس یک انتقال است.
حل: چون مخرج کسر برابر صفر می‌شود پس مرکز تجانس در بی‌نهایت واقع شده و تجانس تبدیل به یک انتقال می‌شود

$$H_{S_1}^{k_1}(A) = A' \quad \Rightarrow \frac{S_1A'}{S_1A} = k_1$$

$$H_{S_2}^{k_2}(A') = A'' \quad \Rightarrow \frac{S_2A''}{S_2A'} = k_2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1A'}{S_1A} = \frac{S_2A'}{S_2A''} \Rightarrow AA'' \parallel S_1S_2 \Rightarrow \overrightarrow{AA''} = r . \overrightarrow{S_1S_2}$$



پس

$$H_{S_1}^{R_1} \circ H_{S_2}^{R_2} = Tr . \overrightarrow{S_1S_2}$$

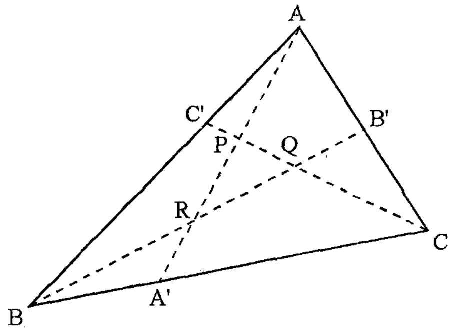
یعنی بردار انتقال ضریبی از بردار معلوم S_1S_2 می‌باشد برای محاسبه r می‌نویسیم

$$\begin{cases} \dfrac{S_1A'}{AA'} = \dfrac{S_1S_2}{AA''} \\ \\ S_1A' = k_1 . S_1A \end{cases} \Rightarrow$$

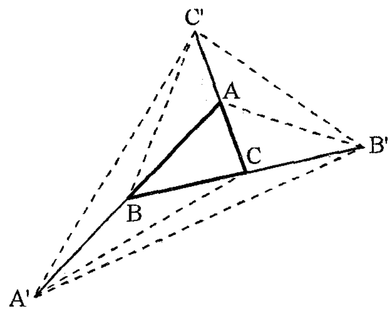
بنابراین اندازه بردار انتقال AA''

$$\overrightarrow{AA''} = \frac{k_1 - 1}{k_1} . \overrightarrow{S_1S_2}$$

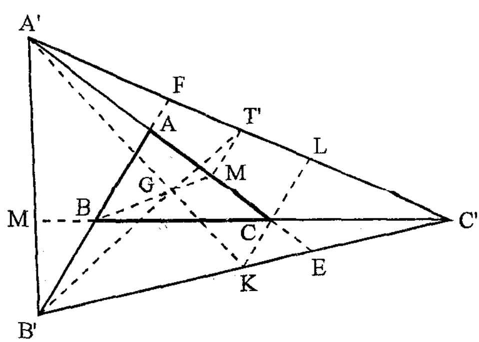
۲ـ۸ـ۱۱ـ مثال: روی اضلاع مثلث ABC سه نقطه A' و B' و C' را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{BA'}{BC} = \frac{C'A}{BA} = \frac{CB'}{CA} = ۳$ باشد از برخورد سه خط AA' و BB' و CC' با یکدیگر مثلث PQR بوجود می‌آید. ثابت کنید مساحت مثلث PQR $\frac{1}{7}$ مساحت مثلث ABC بوده و مرکز میانه‌ای مثلث PQR و ABC یکی می‌باشد.



۲ـ۸ـ۱۱ـ حل: ابتدا باید توجه داشت اگر اضلاع یک مثلث را در یک جهت به اندازه خود ادامه دهیم مثلث جدیدی بوجود می‌آید که مساحت آن ۷ برابر مساحت مثلث اولیه است.



در مثلث $CC'B'$ خط $B'A$ میانه است پس مساحت مثلث بوسیله آن نصف می‌شود و در مثلث ABB' خط AC میانه است پس مساحت مثلث نصف می‌شود بنابراین مساحت مثلث $A'B'C'$ ۷ برابر مساحت مثلث ABC است.



حل قسمت الف: $BC = CC'$ و $AB = BB'$ و $AC = AA'$ می‌باشد. بنابراین

$$H^{۲}_{A'} \circ H^{۲}_{B'} (B) = C$$

$$H^{۴}_{M} (B) = C$$

ترکیب دو تجانس به مراکز A' و B' یک تجانس جدید با ضریب تجانس $k_۱ \cdot k_۲ = ۴$ و مرکز تجانس مانند M است که باید روی امتداد BC و روی خط $A'B'$ باشد بنابراین

$$MB = \frac{۱}{۳} BC$$

اما مرکز تجانس جدید M نسبت به دو مرکز تجانس A' و B' از فرمول

$$B'M = \frac{۲ - ۱}{۲ \times ۲ - ۱} B'A'$$

$$B'M = \frac{۱}{۳} B'A'$$

بنابراین مثلث ABC را می‌توان با سه قسمت کردن اضلاع مثلث $A'B'C'$ بدست آورد پس مثلث ABC در مثلث $A'B'C'$ مانند همان حالت قبلی را در مسئله (۲-۸-۱۱) دارد و داریم $S_{ABC} = \frac{۱}{۷} S_{A'B'C'}$

حل قسمت دوم: میانه BM از مثلث ABC و میانه $B'T$ از مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطه G قطع نمایند ثابت می‌کنیم G مرکز میانه‌ای هر دو مثلث است.

خط KC موازی $B'B$ می‌باشد بنابراین خط $CL = \frac{۱}{۲} BF$

اگر خط $AF = x$ باشد $B'B = BA = ۳x$ خواهد بود پس $CL = ۲x$ اگر T' وسط $A'C'$ باشد پس $MT' = \frac{AF + CL}{۲} = \frac{۳x}{۲}$ بنابراین $MT' \overset{۱۱}{=} \frac{۱}{۲} BB'$ پس خط BM و $B'T$ در نقطه‌ای با هم برخورد می‌کنند که نسبت ۱ به ۲ یکدیگر را قطع می‌نمایند پس این نقطه روی BM به همین نسبت و روی $B'T$ نیز به همین نسبت واقع شده که باید مرکز میانه‌ای هر دو مثلث است.

توجه اینکه: به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد مرکز میانه‌ای مثلث EFM نیز همین نقطه G است.

مسائل برای حل

۴-۸-۱۱- مثلث ABC مفروض است. نقاط K و L بر روی AC و AB قرار داشته و KL با BC موازی است. نقاط M و N روی AB و BC قرار داشته و MN با AC موازی است. نقاط P و Q روی BC و AC قرار داشته و PQ با AB موازی است. اگر نقاط برخورد KN یا AB را $T_۱$ و BC با MQ را

T_2 و PL با AC را T_3 می‌نامیم ثابت کنید سه نقطه T_1 و T_2 و T_3 بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۵-۸-۱۱- نقاط D و E و F وسطهای اضلاع AB و BC و CA از مثلث ABC می‌باشند. قرینه نقطه دلخواه P را نسبت به سه نقطه D و E و F به ترتیب K و L و M می‌نامیم ثابت کنید پاره خطهای CK و AL و BM در یک نقطه مانند Q همرسند و در حالتی که نقطه P بر یک دایره حرکت نماید مکان Q را پیدا کنید.

۶-۸-۱۱- در چهارضلعی $ABCD$. A_1 قرینه A نسبت به نقطه C و B_1 قرینه B نسبت به D و قرینه D نسبت به A را D_1 و قرینه C را نسبت به A، C_1 می‌نامیم. اگر نقاط A_1 و B_1 و C_1 و D_1 در دست باشند چهارضلعی $ABCD$ را رسم کنید و مساحت دو چهار ضلعی را نسبت به هم پیدا کنید.

۷-۸-۱۱- وتر MN در دایره $C(O\ ,\ R)$ مفروض است. دو دایره در یک طرف MN چنان رسم کرده‌ایم که اولی بر دایره در نقطه A و بر MN در نقطه B و دومی بر دایره در نقطه C و بر MN در نقطه D مماس باشند. ثابت کنید نقطه برخورد AB و CD در صفحه جای ثابتی می‌باشد.

۸-۸-۱۱- بر روی اضلاع مثلث ABC نقاط P و Q و R انتخاب شده‌اند بطوریکه $AP = 2PB$ و $BQ = 2QC$ و $CR = 2RA$. اگر نقاط P و Q و R در دست باشند مثلث ABC را رسم کنید.

۹-۸-۱۱- ثابت کنید در هر مثلث قرینه‌های هر نقطه از دایره محیطی مثلث نسبت به اضلاع و نقطه تلاقی ارتفاعات بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۱۰-۸-۱۱- مکان هندسی مرکز ثقل مثلث متساوی الساقینی که یک ساق ثابت دارد را معین کنید.

۱۱-۸-۱۱- دو نقطه A و B و زاویه xoy در صفحه مفروضند خط متغیری از A می‌گذرد و ox را در M و oy را در N قطع می‌کند از N خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا MB را در P قطع کند مکان P را تعیین کنید.

۱۲-۸-۱۱- دایره متغیری از دو نقطه A و B می‌گذرد اگر M نقطه تماس این دایره با مماسی که بر AB عمود است باشد مطلوبست مکان مرکز دایره نه نقطه مثلث AMB

۱۳-۸-۱۱- سه نقطه C و A و B به همین ترتیب روی یک خط راست واقع می‌باشند. دوایر بقطر BA و AC را رسم می‌کنیم. قاطعی از A می‌گذرد و دو دایره را و B' و C' قطع می‌کند مکان نقطه P فصل مشترک $B'C$ و $C'B$ را تعیین کنید.

۱۴ـ۸ـ۱۱ـ دو دایره در نقطه A مماس خارج می‌باشند. از نقطه مفروض B قاطع BMN را رسم می‌کنیم تا دایره اول را در M و N قطع کند خطوط AM و AN دایره دوم را در M' و N' قطع می‌کند ثابت کنید خط $M'N'$ از نقطه ثابتی می‌گذرند.

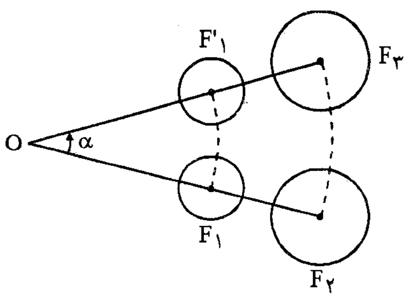
۱۵ـ۸ـ۱۱ـ نقطه مفروض A را به نقطه متغیر M از دایره $C(O\ ,\ R)$ وصل می‌کنیم. مکان نقطه تقاطع خط AM را با نیمسازهای زاویه AOM پیدا کنید.

بخش ۱۲ـ تبدیلات غیر خطی

۱ـ۱۲ـ تجانس مارپیچی

۲ـ۱۲ـ تعریف: ترکیب یک تجانس با یک دوران (بالعکس) را یک تجانس مارپیچی می‌نامیم.
اگر تجانس با مرکز O و ضریب تجانس k و دورانی به مرکز O و زاویه دورانی به اندازه α را در نظر بگیریم.

$$H_O^R \circ R_O^\alpha = R_O^\alpha \circ H_O^k = X_\alpha^k\ (O)$$



$X_\alpha^k\ (\circ)$ را تجانس مارپیچی می‌نامیم. در این ترکیب شکل $F_۱$ با تجانس به مرکز O و ضریب K به شکل $F_۲$ و سپس با دورانی به اندازه زاویه α حول نقطه O به شکل $F_۳$ تبدیل می‌شود.

$$\left(H_O^k \circ R_O^\alpha\right)\ (F_۱) = F_۳ \qquad (۱)$$

$$\left(R_O^\alpha \circ H_O^k\right)\ (F_۱) = F_۳ \qquad (۲)$$

در حالت اول از تجانس شکل $F_۱$ شکل $F_۲$ و سپس با دوران به شکل $F_۳$ تبدیل می‌شود.
در حالت دوم شکل $F_۱$ با یک دوران به شکل $F'_۱$ و سپس با یک تجانس به شکل $F_۳$ تبدیل

شده است پس

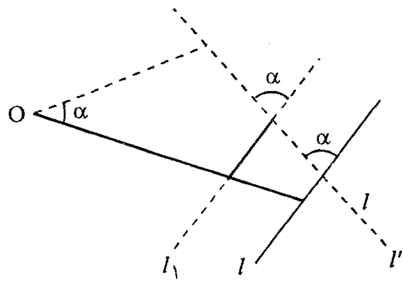
$$X_{\alpha}^{k}(\circ)(F_{۱}) = F_{۳}$$

قابل توجه اینکه: خاصیت جابجایی در این ترکیب وجود دارد.

نکته دوم:

$$X_{\alpha\downarrow}^{k} \circ X_{\alpha\uparrow}^{\frac{۱}{k}}(F) = F$$

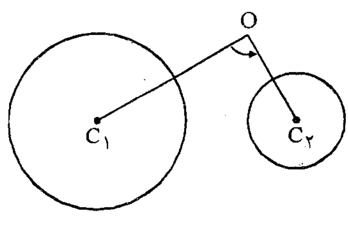
۳ـ۱۲ـ قضیه: تجانس مارپیچی هر خط l را به خط جدید l' تبدیل می‌کند که l' با l زاویه α می‌سازد.



$$H_{\circ}^{k}(l) = l_{۱}$$

$$R_{\circ}^{\alpha}(l_{۱}) = l'_{۱} \Rightarrow X_{\alpha}^{k}(O)(l) = l'$$

۴ـ۱۲ـ قضیه: تجانس مارپیچی هر دایره را به یک دایره جدید تبدیل می‌کند.



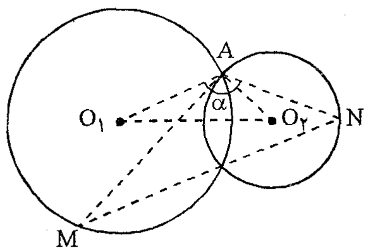
$$X_{\alpha}^{k}(C_{۱}) = C_{۲}$$

مرکز دایره $C_{۲}$ با یک تجانس مارپیچی از $C_{۱}$ بدست می‌آید و شعاع دایره $C_{۲}$ برابر k برابر شعاع دایره $C_{۱}$ است.

قضیه ۳. طول پاره خط AB در تجانس مارپیچی با ضریب تجانس k، AB . k است.

توجه: تنها نقطه ثابت در یک تجانس مارپیچی مرکز تجانس است و در تجانس مارپیچی هیچ خط ثابتی وجود ندارد.

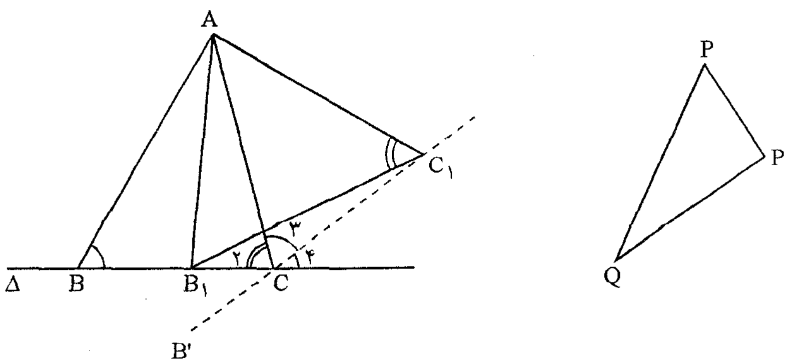
۵ـ۱۲ـ در دو دایره متقاطع هر نقطه تقاطع یک مرکز تجانس مارپیچی است که با ضریب تجانس $\frac{R_1}{R_2}$ و زاویه دوران α دو دایره را به هم تبدیل می‌کند.



$$X_{\alpha}^{\frac{R_1}{R_2}}(A)\,O_1 = O_2$$

$$X_{\alpha}^{\frac{R_1}{R_2}}A\,(M) = N \qquad \Rightarrow \quad \Delta AO_1O_2 \sim \Delta AMN$$

مثال: مثلثی مشابه با مثلث مفروض PQR چنان رسم می‌کنیم که رأس آن نقطه ثابت A و رأس دیگر آن خط Δ را به پیماید مکان هندسی رأس سوم را تعیین کنید.



راه حل اول. مثلث PQR مفروض است پس سه زاویه مثلث ABC مفروض است $\hat{A} = \hat{P}$ و

$\hat{B} = Q$ می‌باشد. حال اگر نقطه B به B_1 تبدیل شود نقطه C به نقطه C_1 تبدیل شود و مثلث $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \approx \Delta PQR$

بنابراین $C = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ می‌باشد یعنی چهارضعلی AB_1CC_1 محاطی است و زاویه $C_3 = B_1 = B$ است بنابراین زاویه $C_4 = A$ می‌باشد.

راه حل دوم. چون جای نقطه C روی Δ ثابت است مکان C_1 روی خط Δ' است که با Δ زاویه A را می‌سازد و چون $\frac{AB}{AC} = k$ می‌باشد پس $\frac{AB_1}{AC_1} = k$ است پس C_1 را می‌توان

$\chi_A^k (A)(C) = C_1$

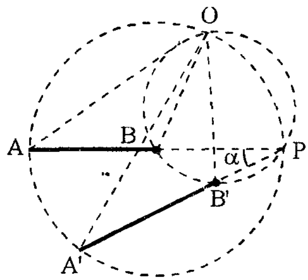
$\chi_A^k (A)(\Delta) = \Delta'$

۶ـ۱۲ـ تعیین مرکز تجانس مارپیچی

فرض کنیم دو پاره خط AB و $A'B'$ را می‌خواهیم به کمک یک تجانس مارپیچی به هم تبدیل کنیم.

اگر AB و $A'B'$ با یکدیگر موازی نباشند در نتیجه زاویه بین دو پاره خط AB و $A'B'$ مقدار معلومی می‌باشد این زاویه را α می‌نامیم.

نسبت $\frac{AB}{A'B'} = k$ می‌گیریم چون دو پاره خط معلوم می‌باشند پس اندازه k معلوم است.



اگر P محل برخورد دو پاره خط AB و $A'B'$ باشد $A\hat{P}A' = \alpha$ دو دایره که از نقاط PBB' و PAA' می‌گذرد را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}A' = A\hat{P}A' = \alpha \\ B\hat{O}B' = BPB' = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}B = A'OB'$$

و دو زاویه $A = A'$ بنابراین

$\Delta AOB \sim \Delta A'OB'$

$$\Rightarrow \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

$OA = k \,.\, OA'$

$\Rightarrow$

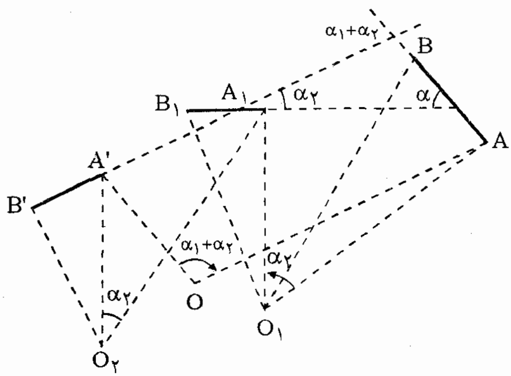
$OB = k \,.\, OB'$

بنابراین اگر نقطه A به اندازه α حول نقطه O دوران کرده و سپس با یک تجانس به اندازه k به نقطه A' برود نقطه B نیز به همین ترتیب به نقطه B' می‌رود.

$X^{k}_{\alpha}\ (O)(AB) = A'B'$

توجه: اگر دو دایره مرسوم در نقطه P مماس شوند P همان مرکز تجانس است و در این حالت $BB' \parallel AA'$ است.

۷ـ۱۲ـ قضیه: ترکیب دو تجانس مارپیچی یک تجانس مارپیچی جدید است.



$X^{k_2}_{\alpha_2}\ (O_2) \circ X^{k_1}_{\alpha_1}\ (O_1)\ (AB) = A'B'$

$X^{k_1}_{\alpha_1}\ (O_1)\ (AB) = A_1B_1$

که زاویه بین AB و A_1B_1 زاویه α_1 و $\frac{A_1B_1}{AB} = k_1$ می‌باشند.

$X^{k_2}_{\alpha_2}\ (O_2)\ (A_1B_1) = A'B'$

که زاویه دوران بین A_1B_1 و $A'B'$ زاویه α و نسبت $\frac{A'B'}{A_1B_1} = k_2$ می‌باشد. پس زاویه بین $A'B'$ و

AB برابر $\alpha_1 + \alpha_2$ می‌باشد.

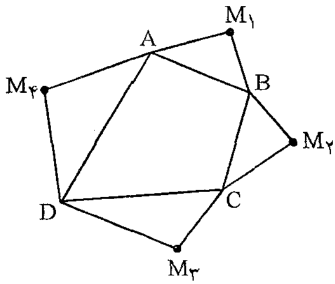
$$X_{\alpha_2}^{k_2}(O_2) \circ X_{\alpha_1}^{k_1}(O_1) = X_{\alpha_1+\alpha_2}^{k_1 . k_2}(O)$$

مرکز O را می‌توان از قضیه ترکیب دو دوران و ترکیب دو تجانس با هم که مرکز دورانی جدید و مرکز تجانس جدیدی است تعیین نمود و سپس با کمک قضیه قبل مرکز تجانس مارپیچی جدید را بدست آورد.

توجه اگر: $k_1 . k_2 = 1$ و $\alpha_1 + \alpha_2 = 360°$ حاصل‌ضرب دو تجانس یک انتقال است.

مثال: روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ چهار مثلث M_1AB و M_2BC و M_3CD و M_4DA را می‌سازیم هر یک از این چهار مثلث متشابه با چهار مثلث مفروض می‌باشند، اگر M_1 و M_2 و M_3 و M_4 در دست باشند چهارضلعی را بسازید.

حل: بنا بفرض



$\hat{M}_1 = \alpha_1$
$\hat{M}_2 = \alpha_2$
$\hat{M}_3 = \alpha_3$
$\hat{M}_4 = \alpha_4$

معلوم هستند و نسبت‌های $k_1 = \frac{M_1A}{M_1B}$ و $k_2 = \frac{M_2B}{M_2C}$ و $k_3 = \frac{M_3A}{M_3B}$ و $k_4 = \frac{M_4B}{M_4C}$ معلوم می‌باشند پس

$$\left(X_{\alpha_1}^{k_1} \circ X_{\alpha_2}^{k_2} \circ X_{\alpha_3}^{k_3} \circ X_{\alpha_4}^{k_4}\right)_{(A)} = A$$

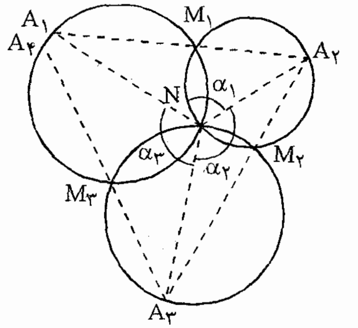
اما ترکیب هر دو تجانس مارپیچی خود یک تجانس مارپیچی جدید است پس

$$\left(X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}^{k_1.k_2.k_3k_4}(O)\right)(A) = A$$

بنابراین نقطه A همان نقطه O می‌باشد پس کافی است که مرکز تجانس O را از چهار تجانس مارپیچی بدست آوریم تا رأس A که همان نقطه O است بدست آید.

مثال: سه دایره در یک نقطه برخورد مشترک دارند. نقطه N. دومین نقاط برخورد این سه دایره

را به ترتیب M_1 و M_2 و M_3 می‌نامیم. A_1 نقطه دلخواهی بر روی دایره اول است A_1M_1 با دایره دوم در نقطه A_2 و A_2M_2 با دایره سوم را A_3 و A_3M_3 با دایره اول را A_4 می‌نامیم ثابت کنید A_4 بر A_1 منطبق است در حالتی که هر سه دایره نیز در یک نقطه مشترک نیستند را نیز حل کنید.



بنابر قضیه ۴ با یک تجانس مارپیچی به مرکز N و نسبت تجانس $\frac{r_1}{r_2}$ و زاویه دوران α_1 نقطه A_1 به نقطه A_2 بدیل می‌شود و این ترتیب

$$\left(X_{\alpha_1}^{\frac{r_1}{r_2}} \circ X_{\alpha_2}^{\frac{r_2}{r_3}} \circ X_{\alpha_3}^{\frac{r_3}{r_1}}\right)(A_1) = A_4$$

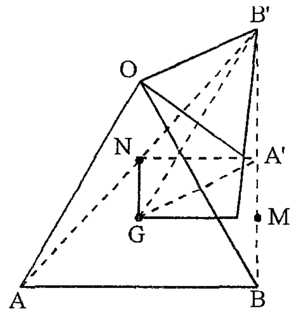
$$X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}} \quad (A_1) = A_4$$

$$X_{360}^{1} \ (A_1) = A_4$$

پس مجموع این تبدیلات یک تبدیل همانی است و A_1 باید همان A_4 باشد.

همین استدلال در حالت دوم هم بکار خواهد رفت.

مثال: OAB و $OA'B'$ مثلث‌های متساوی الاضلاعی که دارای یک جهت می‌باشند مفروض است. G مرکز میانه‌ای مثلث OAB و نقاط M و N اوساط اضلاع $A'B$ و AB' می‌باشند ثابت کنید مثلث GMB' و GNA' متشابه می‌باشند. (المپیاد جهانی ۱۹۷۷)



حل: یک تجانس با ضریب ۲ و مرکز B و یک دوران حول نقطه O با زاویه ۶۰° نقطه M را به B' بدل می‌کند.

$$R_O^{۶۰^\circ} \circ H_B^{۲}\ (M) = B'$$

$$X_{۶۰^\circ\uparrow}^{۲}\ (x)(M) = B'$$

بنابراین نقطه x مرکز تجانس مارپیچی بوده و نقطه ثابتی می‌باشد اما اگر G را در همین تبدیل قرار دهیم.

$$R_O^{۶۰^\circ} \circ H_B^{۲}\ (G) = G$$

پس G همان نقطه x مرکز تجانس مارپیچی است.
بنابراین $\frac{GB'}{GM} = ۲$ و $B'GM = ۶۰^\circ$ و همین رابطه برای نقاط N و A' بر قرار است پس دو مثلث با یکدیگر متشابه می‌باشند.

مسائل برای حل

۱-۸-۱۲- چهار خط که هیچ سه تای آن در یک نقطه همرس و هیچ دو تای آن موازی نیستید در صفحه داده شده‌اند.
الف: ثابت کنید که دایره‌های محیطی چهار مثلث حاصل از این خط‌ها در یک نقطه همرسند.
ب: ثابت کنید مراکز ارتفاعیه این چهار مثلث بر یک خط راست واقع می‌باشند.
۲-۸-۱۲- فرض کنیم $C_۱$ و $C_۲$ دو دایره باشند که در نقطه A یکدیگر را قطع کرده‌اند. زاویه α به راس A را در نظر می‌گیریم نقاط برخورد اضلاع این زاویه با دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را $M_۱$ و $M_۲$

می‌نامیم اگر نقاط برخورد خطوط O_1M_1 و O_2M_2 را j بنامیم.
ثابت کنید وقتی این زاویه حول نقطه A دوران کند دایره محیطی مثلث M_1M_2j همواره از یک نقطه ثابت می‌گذرد.

۱۲-۸-۳- روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC و در خارج آن دو مثلث متساوی الاضلاع به رئوس D و E ساخته شده‌اند. ثابت کنید اوساط اضلاع AC و BD و BE رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌باشد.

۱۲-۸-۴- ذوزنقه $ABCD$ که $AB \parallel CD$ مفروض است نقطه اختیاری P روی BC به نقطه D و نقطه M وسط AB وصل شده‌است. اگر $X = PD \cap B$ و $Q = PM \cap AC$ و $Y = DQ \cap AB$.
ثابت کنید نقطه M وسط xy است.

۱۲-۸-۵- نقطه P و دو دایره C_1 و C_2 در صفحه مفروضند. دایره‌ای مماس بر دو دایره C_1 و C_2 چنان رسم کنید که خط واصل بین نقاط تماس آنها از نقطه P بگذرد.

۱۲-۸-۶- دو دایره در نقطه A مماس داخل می‌باشند. خطی این دو دایره را در نقاط M و N و P و Q قطع می‌کند و ثابت کنید $\angle MAP = \angle NAQ$

۱۲-۸-۷- دو مثلث متساوی ABC و $A_1B_1C_1$ در دایره $C(O , R)$ محاط می‌باشند نقاط برخورد اضلاع متناظر را A' و B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه بوده و مرکز ارتفاعیه مثلث $A'B'C'$ نقطه O می‌باشد.

۱۲-۸-۸- چهار ضلعی $ABCD$ با دو قطر مساوی $AC = BD$ مفروض است. بر روی چهارضلع و در خارج از چهار ضلعی چهار مثلث متساوی الاضلاع می‌سازیم. ثابت کنید دو پاره خطی که مرکزهای میانه‌ای مثلث‌های ساخته شده بر روی اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کند برهم عمودند.

بخش ۱۳ ـ انعکاس

۱ـ۱۲ـ تعریف:اگر سه نقطه O و P و P' بر یک خط واقع بوده و مقدار k را داشته باشیم، بطوریکه

$$OP \, . \, OP' = k$$

نقطه P' را منعکس نقطه P و نقطه O را قطب انعکاس و k را ضریب انعکاس می‌نامیم.

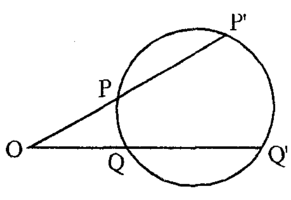
اگر k مثبت باشد P و P' در یک طرف نقطه O و اگر k منفی باشد P و P' در دو طرف نقطه O واقع می‌باشند.

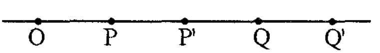
انعکاس را با نماد I نمایش داده و چنین می‌نویسیم.

$$I_O^k \, (P) = P' \;\Rightarrow\; OP \, . \, OP' = k$$

۲ـ۱۳ـ دایره انعکاس: اگر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R}$ رسم کنیم منعکس هر نقطه از دایره بر روی خودش منطبق است.

قضیه: اگر $I_O^k \, (P) = P'$ و $I_O^k \, (Q) = Q'$ باشد آنگاه یا چهار نقطه $P \, . \, P' \, . \, Q \, . \, Q'$ بر یک خط راست واقع می‌باشد یا بر یک دایره چون $OP \, . \, OP' = OQ \, . \, OQ' = k$





مسئله: در گزاره فوق اندازه $P'Q'$ را برحسب OP و OQ بدست آورید.

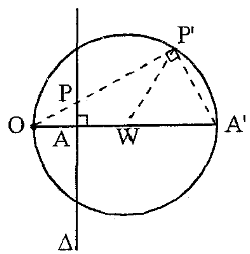
$$OP \,.\, OP' = OQ \,.\, OQ' = k$$

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OP'}{OQ} = \frac{OP \,.\, OP'}{OP \,.\, OQ} = \frac{k}{OP \,.\, OQ} \Rightarrow P'Q' = PQ \,.\, \frac{k}{OP \,.\, OQ}$$

۳ـ۱۳ـ قضیه: اگر نقطه‌ای خطی را که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد بپیماید منعکس آن دایره‌ای را می‌پیماید که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

اگر نقطه A پای عمودی باشد که از مرکز انعکاس (O) برخط مفروض (Δ) فرود آمده باشد و P نقطه دلخواهی از Δ باشد و $I_O^k\ (A) = A'$ و $I_O^k\ (P) = P'$ پس داریم

$$OA \,.\, OA' = OP \,.\, OP' = k$$



یعنی چهارضلعی $PAA'P'$ محاطی بوده و زاویه $P' = ۹۰^\circ$ پس مکان P' منعکس نقطه P یک دایره است که از نقطه O مرکز انعکاس می‌گذرد.

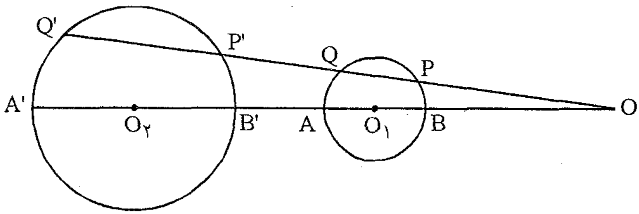
نتیجه ۱: شعاع دایره (W) برابر است با:

$$\frac{k}{۲OA}$$

۴ـ۱۳ـ قضیه عکس: اگر نقطه‌ای دایره‌ای را که از مرکز انعکاس می‌گذرد به پیماید منعکس آن خطی راست را می‌پیماید که این خط بر خطی که مرکز انعکاس را به مرکز دایره وصل می‌نماید عمود است.

نتیجه ۲. یک خط راست و یک دایره را همواره می‌توان به دو طریق منعکس هم دانست.

۵ـ۱۳ـ قضیه: اگر نقطه‌ای دایره‌ای را بپیماید که از مرکز انعکاس نگردد، نقطه منعکس آن دایره‌ای را می‌پیماید که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد.



اگر $I_O^k(P) = P'$ و اگر فوت نقطه o نسبت به دایره $O_۱$ را q بنامیم

$$OP \,.\, OP' = k \;,\; OP \,.\, OQ = q$$

$$OP' = \frac{k}{q} \,.\, OQ$$

بنابراین وقتی نقطه Q روی دایره $(O_۱)$ حرکت کند نقطه P' روی دایره $(O_۲)$ حرکت می‌کند. بعبارت دیگر نقطه P' و Q مجانس یکدیگرند و نسبت تجانس $\frac{k}{q}$ می‌باشد.

نتیجه ۱: بنابراین منعکس دایره که از قطب انعکاس نگذرد و یک دایره است.

نتیجه ۲. پس مرکز تجانس مستقیم دو دایره همان مرکز انعکاس است.

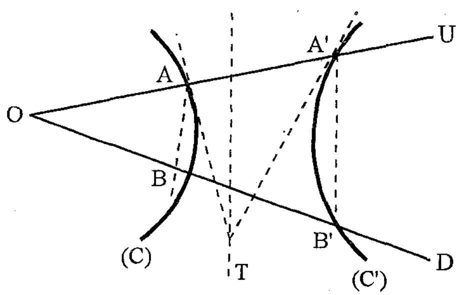
نتیجه ۳. شعاع دایره منعکس

$$R' = R \,.\, \frac{k}{q}$$

نتیجه ۴. که در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد این است اگر ضریب تجانس k برابر با مربع طول مماس باشد که از آن نقطه بر دایره مفروض رسم می‌شود منعکس این دایره بر خودش منطبق است.

نتیجه ۵: دو دایره را می‌توان منعکس هم دانست.

۶ـ۱۳ـ قضیه: فرض کنیم منعکس منحنی (C) منحنی (C') باشد که مرکز انعکاس نقطه مفروض O است. اگر A و A' منعکس یکدیگر باشند دو مماس که در دو نقطه A و A' بر این دو منحنی رسم می‌شود با خط OAA' زوایای برابر می‌سازند.



چون $OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB'$ پس چهارضلعی $AA'B'B$ محاطی می‌باشد در نتیجه $\angle A'AB = \angle A'B'D$ در حالت حدی اگر A به B نزدیک شود دو وتر AB و $A'B'$ به دو مماس به منحنی در نقاط A و A' تبدیل می‌شوند و دو زاویه $TAA' = TA'A$

بنابراین اگر زاویه بین دو منحنی $C_۲$ و $C_۱$ را α بنامیم زاویه بین دو منعکس $(C_۱)$ و $(C_۲)$ یعنی $(C'_۱)$ و $(C'_۲)$ همان زاویه α می‌باشد.

نتیجه ۱: انعکاس زاویه را حفظ می‌کند.

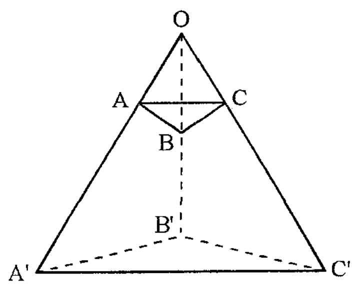
نتیجه ۲: انعکاس زاویه ۹۰° را حفظ می‌کند.

نتیجه ۳: انعکاس برخورد را حفظ می‌کند.

نتیجه ۴: بطور کلی می‌توان گفت روابط موجود در شکل (F) در منعکس شکل (F) هم بهمان صورت پدیدار می‌شود.

مثال: اثبات قضیه بطلمیوس از راه انعکاس. در یک چهارضلعی مجموع حاصل‌ضرب دو ضلع متقابل برابر یا بزرگتر از حاصل‌ضرب قطرهای چهارضلعی است (تساوی به چهارضلعی محاطی تعلق دارد).

اگر $OABC$ چهارضلعی مورد نظر و O را مرکز انعکاس و ضریب انعکاس را k بدانیم



$$A'B' = \frac{k \,.\, AB}{OA \,.\, OB}$$

$$B'C' = \frac{k \,.\, BC}{OB \,.\, OC}$$

$$A'C' = \frac{k \,.\, AC}{OA \,.\, OC}$$

اگر $OABC$ محاطی نباشد پس نقاط A' و B' و C' بر روی یک خط واقع نمی‌شوند در نتیجه

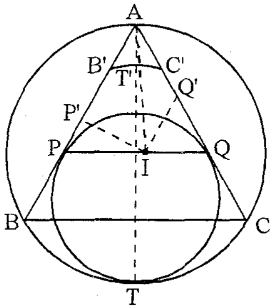
$$\begin{cases} A'B' + B'C' > A'C' \\ AB \,.\, OC + BC \,.\, OA > AC \,.\, OB \end{cases}$$

و اگر $OABC$ محاطی باشد سه نقطه A' و B' و C' هم خط بوده و داریم

$$\begin{cases} A'B' + B'C' = A'C' \\ OB \,.\, AC = OA \,.\, BC + OC \,.\, AB \end{cases}$$

مثال: اگر یک دایره بر دایره محیطی مثلث و دو ضلع از مثلث مماس باشد خطی که نقاط تماس

با اضلاع را به یکدیگر وصل می‌نماید از مرکز دایره محاطی داخلی یا خارجی مثلث می‌گذرد.
فرض کنیم دایره PQT با دایره محیطی مثلث (O) در نقطه T و با اضلاع و مثلث در نقاط P و Q مماس باشد و نقطه I وسط PQ باشد.



اگر $AI^{۲}$ را قوت انعکاس و A را مرکز انعکاس در نظر بگیریم نقاط B' و C' منعکس‌های B و C را تعیین کنیم. خط $B'C'$ منعکس دایره O در همین انعکاس می‌باشد. (چون دایره O از قطب انعکاس A می‌گذرد منعکس آن یک خط است). بنابراین منعکس نقطه T در این انعکاس نقطه T' است که روی AT واقع است. بنابراین داریم

$$I_{A}^{AI^{۲}}(B) = B'$$

$$I_{A}^{AI^{۲}}(C) = C'$$

$$I_{A}^{AI^{۲}}(T) = T'$$

و اگر $I_{A}^{AI^{۲}}(P) = P'$ و $I_{A}^{AI^{۲}}(Q) = Q'$ باشند.

آنگاه $AP' \cdot AP = AI^{۲}$ یعنی مثلث AIP قائم الزاویه است $(I = ۹۰)$ و نقطه P' پای عمودی است که از I بر AP فرود آمده است. و همین روابط برای نقطه Q و Q' وجود دارند:
و همین منعکس دایره PQT دایره‌ای خواهد شد که از سه نقطه T' و Q' و P' می‌گذرد. بنابراین $B'C'$ در نقطه T' بر دایره $P'Q'T'$ مماس خواهد بود.

بنابراین نقطه I مرکز دایره $P'T'Q'$ است یعنی مرکز دایره محاطی خارجی مثلث $AB'C'$ می‌باشد. اما می‌دانیم دایره‌ای که از سه نقطه P' و Q' و I بگذرد در نقطه M که مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $AB'C'$ می‌باشد با نیمساز زاویه A یعنی AI برخورد می‌کند.

بنابراین $\angle B'IM = \angle B'C'M = \frac{1}{2} \angle ABC$

اما چهارضلعی $B'C'BC$ یک چهارضلعی محاطی است اما چون B' منعکس B و منعکس I هم برخودش منطبق است پس

$$\angle ABI = B'IA = B'IM = \frac{1}{2} ABC$$

بنابراین I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC است.

مثال: اگر O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد منعکس مثلث ABC نسبت به مرکز انعکاس O مثلث $A'B'C$ خواهد بود که با مثلث ABC مشابه است.

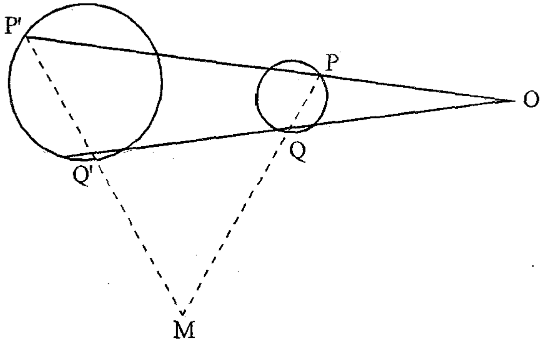
مثال: اگر O مرکز ارتفاعیه مثلث ABC باشد منعکس مثلث ABC در مرکز انعکاس (O) مثلث $A'B'C'$ است که با مثلث ارتفاعیه مثلث ABC مشابه می‌باشد.

مثال: اگر O مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشد مثلث $A'B'C'$ با مثلث $I_aI_bI_c$ مشابه است. (I_a مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC می‌باشد).

نکته: اگر دو دایره C_1 و C_2 منعکس یکدیگر به مرکز تجانس O و ضریب تجانس k باشد. یعنی:

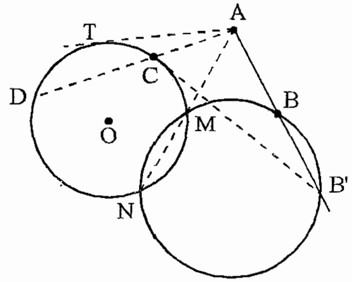
$$I_O^k\ (P) = P'$$

$$I_O^k\ (Q) = Q'$$



محل برخورد دو خط PQ و $P'Q'$ نقطه M باشد قوت M نسبت به دو دایره با هم برابر است. یعنی نقطه M روی محور اصلی دو دایره است پس بالعکس اگر از نقطه M واقع بر محور اصلی دو دایره دو مماس MT و MT' را بر دو دایره رسم کنیم خط TT' از مرکز تجانس دو دایره می‌گذرد.

مثال: دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه A و B بگذرد و بر دایره مفروض (O) مماس گردد.



اگر انعکاسی به مرکز A و قوت انعکاس AT^2 را در نظر بگیریم منعکس دایره (O) بر خودش منطبق است. اگر دایره (α) دایره جواب باشد که بر دایره (O) مماس است پس منعکس دایره (α) خط راستی خواهد بود که بر دایره (O) مماس می‌شود (چون دایره (α) از قطب انعکاس یعنی نثطه A می‌گذرد). این خط باید از نقطه B' منعکس نقطه B بگذرد. بنابراین

$AB \times AB' = AM . AN = AT^2$

بنابراین خط $B'C$ منعکس دایره جواب است.

برای بدست آوردن منعکس نقطه B دایره‌ای از سه نقطه B و M و N رسم می‌کنیم تا خط AB را در B' قطع کند از B' خطی بر دایره (O) مماس می‌کنیم تا نقطه C بدست آید اما منعکس نقطه C نقطه D می‌باشد بنابراین دایره مورد نظر باید از A و B و D بگذرد.

چون از B دو مماس می‌توان رسم کرد پس مسئله دو جواب دارد.

مسئله: دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطه A و B بگذرد و بر خط مفروض Δ مماس باشد. (A و B در یک طرف خط واقع هستند).

حل: هرگاه مسئله حل شده باشد. (C) دایره مطلوب در نقطه T بر خط (Δ) مماس باشد. اگر شکل را بوسیله انعکاس تبدیل کنیم منعکس دایره (C) بر منعکس خط Δ در نقطه T' که منعکس نقطه T می‌باشد مماس خواهد بود.

اگر A را قطب انعکاس و AH^2 را قوت انعکاس فرض کنیم (AH عمودی است که بر خط Δ فرود آمده)، منعکس خط Δ دایره‌ای (Δ') نظیر AH است.

اگر B' منعکس نقطه B باشد و از B' بر دایره (Δ') مماس رسم کنیم خط $B'T'$ در نقطه T' با Δ' مماس می‌باشد. منعکس نقطه T' نقطه T بر Δ واقع است پس دایره مورد نظر از T و A و B می‌گذرد.

مثال: دایره‌ای رسم کنید که بر نقطه مفروض M گذشته و بر دو دایره (C). (D) مماس شود.
از نقطه M مماس MT را بر دایره (C) رسم می‌کنیم M را قطب انعکاس و $MT^{۲}$ را قوت انعکاس اختیار می‌کنیم. منعکس‌های دوایر (C) و (D) را بدست می‌آوریم منعکس (C) بر خودش منطبق است و منعکس (D) دایره D' است مماس مشترک دو دایره D' و C خط $A'B'$ می‌شود. بنابراین A' منعکس نقطه A واقع بر دایره D و نقطه B' منعکس نقطه B واقع بر دایره C است در نتیجه دایره مورد نظر باید از B و A و نقطه M بگذرد.

مثال: دوایر $(C_{۱})$ و $(C_{۲})$ در نقطه A بر هم مماس می‌باشند. یک خط از نقطه A رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقاط $C_{۱}$ و $C_{۲}$ قطع کند. دایره دلخواهی از $C_{۱}$ و $C_{۲}$ می‌گذرانیم تا دوایر $(C_{۱})$ و $(C_{۲})$ را به ترتیب در $B_{۱}$ و $B_{۲}$ قطع نماید. دایره (X) دایره محیطی مثلث $AB_{۱}B_{۲}$ است. دایره (K) دایره‌ای مماس بر دایره (X) در نقطه A می‌باشد که دو دایره $(C_{۱})$ و $(C_{۲})$ را در $D_{۱}$ و $D_{۲}$ قطع می‌کند ثابت کنید.

الف) نقاط $C_{۱}$ و $C_{۲}$ و $D_{۱}$ و D یا بر یک خط راست واقع می‌باشند یا بر یک دایره واقع هستند.

ب) نقاط $B_{۱}$ و $B_{۲}$ و $D_{۱}$ و $D_{۲}$ روی یک دایره هستند اگر و فقط اگر $AC_{۱}$ و $AC_{۲}$ قطرهای $(C_{۱})$ و $(C_{۲})$ باشند.

حل: اگر I را انعکاسی به مرکز A بگیریم

$$IX = X'$$

$$IC_{۱} = C'_{۱}$$

$$IC_{۲} = C'_{۲}$$

چون $C_{۱}$ و $C_{۲}$ در نقطه A بر یکدیگر مماس می‌باشند بنابراین $C'_{۱}$ و $C'_{۲}$ دو خط موازی می‌شوند و اگر

$$IK = K'$$

K' و X' هم دو خط موازی با هم می‌باشند بنابراین $B'_{۱}B'_{۲}D'_{۱}D'_{۲}$ که منعکس‌های نقاط $B_{۱}$ و $B_{۲}$ و $D_{۱}$ و $D_{۲}$ می‌باشند یک متوازی الاضلاع است.

$$\angle B'_{۲}B'_{۱}D'_{۱} + \angle B'_{۱}D'_{۱}D'_{۲} = ۱۸۰$$

پس نقاط $C'_{۱}$ و $C'_{۲}$ محل برخورد خط $C_{۱}C_{۲}$ با خطوط $B'_{۱}C'_{۱}$ و $B'_{۲}C'_{۲}$ می‌باشند.

بنابراین نقاط B'_2 و B'_1 و C'_2 و C'_1 روی دایره C' قرار دارند بنابراین:

$$\angle C'_1C'_2D'_2 = \angle C'_1B'_1B'_2$$

$$\angle C'_1C'_2D'_2 + C'_1D'_1D'_2 = 180$$

پس یعنی نقاط C'_1 و C'_2 و D'_2 و D'_1 روی دایره X' واقع می‌باشند پس C_1 و C_2 و D_1 و D_2 خود روی یک دایره واقع بوده‌اند یا یک خط راست. اگر نقاط D'_2 و D'_1 و B'_2 و B'_1 روی یک دایره باشند باید چهارضلعی $B'_2D'_1D'_2B'_1B'$ یک مستطیل باشد و چون

$$\angle D'_1B'_1B'_2 = \angle C'_1C'_1D'_2$$

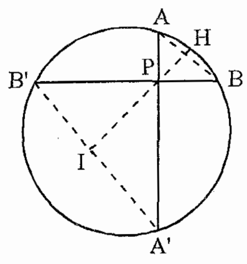
پس باید AC_1 و AC_2 قطرهای دایره باشند.

مثال: از نقطه P واقع در داخل دایره (O) دو وتر عمود بر هم AA' و BB' را رسم می‌کنیم و از این نقطه عمود PC را بر AB فرود می‌آوریم ثابت کنید.

الف: PC از نقطه I وسط $A'B'$ می‌گذرد.

ب: $PI \times PH$ مقدار ثابتی است.

حل: نقطه P را قطب انعکاس ضریب انعکاس را $PB \,.\, PB' = PA \,.\, PB'$ فرض می‌کنیم.



منعکس خط AB دایره‌ایست که از سه نقطه P و A' و B' می‌گذرد و AB بر قطر گذرنده از نقطه P عمود است و چون AB بنا بفرض بر PH عمود است پس PH از مرکز دایره مزبور می‌گذرد و مرکز این دایره نقاط I وسط $A'B'$ است.

ثانیاً PH دایره بقطر $A'B'$ را در نقطه H' می‌کند.

$$PH \,.\, PH' = PA \,.\, PA'$$

$$PH' = 2PI$$

$$2PH \,.\, PI = PA \,.\, PA'$$

$PH \,.\, PI = \frac{1}{2} PA \,.\, PA' =$ مقداری است ثابت

مسائل برای حل

۱-۴-۱۳- دایره (O) بقطر AB و خط Δ عمود بر این قطر مفروض است. دایره‌ای به مرکز A دایره (O) را در C و خط Δ را در D' قطع می‌کند خط AC خط Δ را در C' قطع می‌کند خط AD' دایره (O) را در نقطه دیگر D قطع می‌کند ثابت کنید $CC' = DD'$.

۲-۴-۱۳- اگر منعکس‌های دو نقطه A و B نسبت به قطب C نقاط A' و B' باشد ثابت کنید منعکس نقطه I مرکز دایره محاطی مثلث ABC نقطه I' مزکز دایره محاطی خارجی مثلث $A'B'C$ است.

۳-۴-۱۳- در دایره (O) وتر متغیر AB از نقطه ثابت C واقع در داخل دایره به زاویه قائمه رویت می‌شود مطلوبست مکان نقطه M وسط AB و مکان نقطه P قطب AB.

۴-۴-۱۳- مثلث متساوی الساقین و قائم الزاویه ABC $(A = 90)$ مفروض است. ثابت کنید دایره وجود دارد که بر دایره‌های بقطر AB و AC و در عین حال بر امتداد ضلع‌های AB و AC مماس است و شعاع این دایره و فاصله مرکز آن را از A حساب کنید.

۵-۴-۱۳- مثلث متساوی الساقین OAB و $B = 90°$ مفروض است و ضلع OB روی خط XX' واقع است. دایره متغیر W بر $X'X$ مماس است و قطبی نقطه O نسبت به این دایره از A می‌گذرد.

الف: ثابت کنید دایره W بر دایره ثابتی مماس است و مکان مرکز آن را تعیین کنید.

ب: در انعکاس به قطب O و قوت OB^2 دسته دایره‌های W به چه صورتی در می‌آیند.

۶-۴-۱۳- دو نقطه O و A بر خط Δ چنان واقع‌اند که $OA = 2a$ دایره متغیر C به شعاع a را در نظر می‌گیریم که مرکز آن C روی Δ واقع بوده و از A مماس‌های AM و AN را بر این دایره رسم می‌کنیم و عمود CX را بر Δ اخراج می‌کنیم که MN را در H قطع کند مکان H را تعیین کنید.

۷-۴-۱۳- دایره O و نقطه C روی آن و دو نقطه A و B غیر واقع بر آن مفروض است. نقطه S را روی دایره (O) چنان بیابید که SC نیمساز زاویه ASB باشد.

۸-۴-۱۳- بر روی محور yها $OI = R$ و $OI' = -2R$ را تعیین کرده و دو دایره C_1 و C_2 را به مرکزهای I و I' رسم می‌کنیم که هر دو از مبداء مختصات بگذرند. از نقطه متغیر M واقع بر محور xها دو مماس MT و MT' را به ترتیب بر دو دایره رسم می‌کنیم ثابت کنید خط $T'T$ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۹ـ۴ـ۱۳ـ دایره (O) بقطر AB مفروض است. روی مماس در نقطه B بر دایره دو نقطه M و N را چنان تغییر می‌کنند که $BM\ .\ BN = k$ (k مقدار ثابتی است) باشد. خطوط AM و AN دایره را در نقاط P و Q قطع می‌کند.

الف: ثابت کنید که خط PQ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

ب: از M مماس MP' و از N مماس NQ' را بر دایره رسم می‌کنیم ثابت کنید خط $P'Q'$ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

حل مسائل

۲ـ۱ـ۳ـ بر روی ضلع BC هم مربع $BCMN$ را می‌سازیم خط $AM \perp BE$ و $CL \perp AN$ دو مثلث AMN در ارتفاع MH_1 و NH_2 یکدیگر را در نقطه H قطع می‌نمایند.
اگر محل برخورد AD و BE نقطه T باشد. HT موازی و مساوی MC می‌باشد یعنی نقطه T از انتقال نقطه H به اندازه بردار MC بدست می‌آید.

۱ـ۳ـ۴ـ هر انتقال را می‌توان ترکیب دو تقارن مرکزی دانست پس حاصل پنج تقارن مرکزی یک تقارن مرکزی است.

ـ۴ـ۳ـ۲

$$2T_{\overrightarrow{AB}} = \delta A \,.\, \delta B \Rightarrow \delta p \circ \delta A \circ \delta B \circ \delta p = \delta p \circ \delta p \circ \delta A \circ \delta B$$
$$\delta p \circ \delta p = 1 \Rightarrow \delta A \circ \delta B = T_{\overrightarrow{CD}}$$

۳ـ۳ـ۴ـ BM میانه وارد بر ضلع AC و CN میانه وارد بر ضلع AB و نقطه G محل برخورد آنها می‌باشد. روی BM کمان دو خود زاویه A را می‌سازیم تا دایره (O) بدست آید. به مرکز G و به شعاع $\frac{2}{3}CN$ یک دایره می‌زنیم و این دایره یک مکان برای C است. چون $\delta_M(A) = C$ پس مکان دیگر C قرینه دایره (O) نسبت به نقطه M است. محل برخورد این دو دایره نقطه C است.

۴ـ۳ـ۴ـ دوایر C_1 و C_2 را در نقطه A متقاطع در نظر می‌گیریم و از A خط BC را رسم کنیم و تفاضل دو وتر AC و AB برابر مقدار معلوم a باشد. آنگاه $\delta_A(B) = B'$ و $\delta_A(O_1) = O'_1$ باشد. عمودهای $O_1'H$ و O_2K را بر وتر AC فرود می‌آوریم اندازه $HK = \frac{a}{2}$ پس اگر به مرکز O'_1 دایره‌ای به شعاع $\frac{a}{2}$ رسم کنیم و از O_2 بر این دایره مماسی بکشیم خط AC بر این مماس عمود است.

۵ـ۳ـ۴ـ اگر O_1 و O_2 دو مرکز تقارن شکل (F) باشد. نقطه A_2 را هم متعلق به شکل در نظر می‌گیریم در نتیجه $\delta_{O_1}(A_1) = A_2 \in F$ و $\delta_{O_2}(A_2) = A_3 \in F$ و $\delta_{O_1}(A_3) = A_4 \in F$ پس

$$\delta_{O_1} \circ \delta_{O_2} \circ \delta_{O_1}(A_1) = A_4$$

اما ترکیب سه تقارن مرکزی یک تقارن مرکزی است.

$\delta_{O_۱} \circ \delta_{O_۲} \circ \delta_{O_۱} = \delta w$ که w از انتقال $O_۱$ به اندازه بردار $\overrightarrow{O_۲O_۱}$ بدست می‌آید. بدین ترتیب w سومین مرکز تقارن است و این تبدیل ادامه می‌یابد.

۶-۳-۴- اگر H مرکز ارتفاعیه و نقطه M وسط ضلع BC باشد $AH = ۲OM$ و $OM \parallel AH$ اگر P وسط AH باشد. PM قطر دایره نه نقطه است. و وسط PM بر وسط OH منطبق است چون چهارضلعی $POMH$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۱۰-۲-۵- اگر مثلث ABC جواب باشد. A بر روی قرینه ضلع BC نسبت $l_۲$ و همچنین A بر روی قرینه BC نسبت به $l_۳$ هم واقع است. پس خط m را در $A_۱$ عمود بر $l_۱$ می‌کشیم سپس m' و m'' را از قرینه‌های خط m نسبت به $l_۲$ و $l_۳$ بدست می‌آوریم نقطه تقاطع m' و m'' رأس A از مثلث است.

۱۱-۲-۵- مسیر باید از $\delta q \circ \delta p(A)$ و $\delta p(E)$ بگذرد.

۱۲-۲-۵- خط PQ با m در نقطه T برخورد می‌کند روی $T\delta p$ نقطه δQ را چنان انتخاب می‌کنم که $T\delta Q = QT$ باشد.

۱۳-۲-۵- به کمک نقطه برخورد دودایره $C_۱$ و $\delta_l(C_۲)$ مسئله حل می‌شود.

۱۴-۲-۵- اگر AD و BE و CF سه ارتفاع مثلث و نقطه H نقطه همرسی آنها و ادامه AD دایره محیطی را در T قطع کند آنگاه

$$F\hat{C}B = B\hat{A}D = B\hat{C}T = \frac{\widehat{BT}}{۲} \Rightarrow HD = DT$$

۱۵-۲-۵- بعنوان گزاره (۱-۷) حل شده است.

۱۶-۲-۵- الف: می‌دانیم که $A_۱A_۲ \perp A_۳A_۴$ و $A_۱A_۳ \perp A_۲A_۴$ و $A_۱A_۴ \perp A_۲A_۳$ پس $A_۱$ محل برخورد سه ارتفاع مثلث $A_۲A_۳A_۴$ می‌باشد.

اگر $A'_۴$ قرینه $A_۴$ نسبت به خط $A_۲A_۳$ باشد. این نقطه بر دایره محیطی مثبت $A_۱A_۲A_۳$ واقع است. پس دایره محیطی مثلث $A_۲A'_۴A_۳$ بر دایره محیطی مثلث $A_۱A_۲A_۳$ منطبق است.

اگر $O_۱$ و $O_۴$ مراکز دایره‌های محیطی مثلث‌های $A_۱A_۲A_۳$ و $A_۲A_۳A_۴$ می‌باشند پس چهارضلعی $A_۱A_۴O_۱O_۴$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۱۷-۲-۵- $\delta_{AC}(\Delta) = \Delta_۱$ و $\delta_{BC}(\Delta) = \Delta_۲$ و $\delta_{AB}(\Delta) = \Delta_۳$ و $\Delta_۳ \cap \Delta_۱ = C_۱$ و $\Delta_۳ \cap \Delta_۱ = A_۱$ و $\Delta_۳ \cap \Delta_۲ = B_۱$. محل برخورد Δ با AB را T و Δ با $\Delta_۱$ را K می‌نامیم. نقطه A نقطه همرسی

نیمسازهای داخلی مثلث KTC_1 و اگر محل برخورد Δ با BC را L بنامیم خط B_1B نیمساز زاویه B_1 است. محل برخورد AC_1 و BB_1 را I می‌نامیم. I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A_1B_1C_1$ می‌باشد.

$B_1IC_1 = A + B$

و $BIA = A + B$ پس $B\hat{I}A + C = 180$ پس I روی دایره محیطی مثلث ABC است.

۱ـ۲ـ۶ـ عمود منصف‌های AD و DE به معادلات $Y = -2x + 5$ و $4x - 3y - 10 = 0$ جواب‌های مسئله هستند.

۲ـ۲ـ۶ـ دو خط m و l بر یکدیگر عمودند پس $\delta m \circ \delta l = \delta k$ که $K(2, 3)$ و دو خط n و m با یکدیگر موازیند $\delta n \circ \delta m = T_{\vec{V}}$ که بردار $|\vec{V}| = 4$ و جهت آن عمود بر محور xهاست.

۳ـ۲ـ۶ـ اگر $Q = \delta m(p) = \delta n(p) \neq p$ پس m و n هر دو عمود منصف PQ هستند.

۴ـ۲ـ۶ـ $\delta_{ox}(B) = B'$ آنگاه $B'\hat{K}A = B'\hat{K}B + B\hat{K}A$ اگر BK با OY در نقطه T و AK با OY در نقطه M تقاطع نماید $B'KA = 180 - 2X\hat{O}Y$ پس نقطه K روی کمان در خور $180 - 2X\hat{O}Y$ روی AB' است.

۵ـ۲ـ۶ـ $\delta_{d_1}(A) = A_1$ و $\delta_{d_2}(A) = A_2$ خطوط AA_1 و AA_2 با دو خط d_1 و d_2 در نقاط B و C تقاطع می‌نمایند که جواب‌های مسئله می‌باشند. دو نقطه دیگر مثل B' و C' روی d_1 و d_2 انتخاب کرده و نشان دهید که محیط مثلث ABC از محیط مثلث $AB'C'$ کوچکتر است.

۶ـ۲ـ۶ـ چون اضلاع مثلث ABC برای اضلاع مثلث ارتفاعیه $C_1B_1A_1$ نیمسازهای خارجی می‌باشند با استفاده از گزاره (۲ـ۲ـ۵) حکم اثبات می‌شود:

۱ـ۷ـ۷ـ اگر $\delta_D(B) = B'$ و $AM + MB = l$ (l مقدار معلوم باشد) $AM + MB' = l$ پس اگر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع l رسم کنیم M مرکز دایره‌ایست که از دو نقطه B و B' گذشته و بر این دایره مماس است. یعنی باید دایره‌ای ساخت که از دو نقطه مفروض گذشته و بر یک دایره مفروض مماس باشد. (مسئله آپولونیوس).

۲ـ۷ـ۷ـ هر محور تقارن شکل باید از گرانیگاه شکل بگذرد پس همگی باید در یک نقطه همرس باشد.

۳ـ۷ـ۷ـ نقطه دلخواه A' را روی یکی از خطوط انتخاب کرده و مثلث $A'B'C'$ را که سه خط d_1 و d_2 و d_3 نیمسازهای آن باشند را رسم می‌کنیم. (۱۰ـ۲ـ۵) و سپس بر دایره سه خط مماس

می‌کنیم که با اضلاع مثلث $A'B'C'$ موازی باشد.

۴-۷-۷- $ABCD$ چهارضلعی مفروض و AC نیمساز است پس $\delta_{AC}(B) = B'$ که روی AD قرار دارد. اضلاع مثلث $B'DC$ معلوم است آن را رسم کرده و چهارضلعی رسم می‌شود.

۵-۷-۷- اگر AT قرینه میانه AM نسبت به نیمساز AD از رأس A باشد. فاصله هر نقطه روی AT از دو ضلع AB و AC به نسبت همین دو ضلع است به کمک این گزاره حکم ثابت می‌شود.

۶-۷-۷- اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و خط D به موازات Δ در دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ دو وتر AB و CD را چنان جدا کرده باشد $AB + CD = a$. آنگاه اگر دایره $C_۱$ را چنان انتقال دهیم که B بر C واقع شود و $AD = a$ گردد و اگر وسط $AC = M$ و وسط $CD = N$ باشد اندازه MN برابر نصف اندازه فاصله پای دو عمودی است که از مرکز دو دایره بر خط Δ فرود آید یعنی مرکز دایره $C'_۱$ که از انتقال $C_۱$ بدست می‌آید روی خطی است بفاصله $\frac{a}{۲}$ که از مرکز دایره $C_۲$ بر Δ فرود آید.

۷-۷-۷- اگر از $O_۱$ عمود $OH_۱$ و از $O_۲$ عمود $OH_۲$ را BC فرود آوریم $AM = H_۱H_۲ = \frac{a}{۲}$ و اگر از $O_۱$ عمود $O_۱K$ را بر $O_۲H$ فرود آوریم مکان K روی دایره‌ای بقطر $O_۱O_۲$ است $MK = O_۱A = R_۱$ است. $MK \parallel O_۱A$ می‌باشد پس اگر دایره بقطر $O_۱O_۲$ را به اندازه بردار $O_۱A$ منتقل کنیم مکان M بدست می‌آید. مسئله دو جواب دارد.

۱-۱۱-۸- از نقطه A دو خط به موازات ox و oy رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه xoy را در E و F قطع نماید از نقطه A خطی به موازات EF می‌کشیم تا اضلاع زاویه را در B و C قطع نماید. مثلث OBC مثلث جواب است.

۲-۱۱-۸- $a \perp b$ و $c \perp d$

۳-۱۱-۸- $\delta_{AD}(C) = E$. اگر ED میانه مثلث EBC. $AD \parallel BE$، $A\hat{B}E = D\hat{A}B = \alpha$ پس $AE = BE = b$ و مثلث ABE قابل ساختن است.

۴-۱۱-۸- B و C هر دو بر عمود منصف‌های $PQ = m_۱$ و $QR = m_۲$ قرار دارند دو عمود منصف دو نقطه O متقاطع می‌باشند. اکنون زاویه $m_۱\hat{o}m_۲$ در دست است. اگر قرینه $m_۲$ را نسبت به نقطه Q بدست آوریم با $m_۱$ در نقطه B تلاقی می‌کند.

۱-۱۴-۸- نقطه P را حول سه رأس مثلث به اندازه ۶۰° دوران دهیم تا نقاط $A_۱$ و $B_۱$ و $C_۱$ بدست آید. مساحت شش ضلعی $B_۱A_۱CB_۱AC_۱$ دو برابر مساحت مثلث ABC است. مساحت شش ضلعی از مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الاضلاع قابل محاسبه است.

-۸-۱۴-۲

$$R^{90\downarrow}_{A} \circ R^{90\downarrow}_{B} (P) = M$$

$$R^{180}_{x} (p) = M \Rightarrow x = D$$

پس برای پیدا کردن D باید دو زاویه °۴۵ از A و B اخراج شود همین استدلال برای O_1O_2F هم صادق است.

۸-۱۴-۳- اگر نقطه p را حول نقطه B به اندازه °۶۰ دوران دهیم تا نقطه P_1 بدست آید $PP_1 = BP$ کافیست طول P_2C برابر PA باشد یعنی زاویه $B\hat{P}C = 150°$.

۸-۱۴-۴- می‌دانیم یک دوران ترکیب دو تقارن محوری است که از نقطه C می‌گذرد و زاویه بین آنها $\frac{\theta}{2}$ است پس $R^{\theta} = \delta l \circ \delta l'$

$$\delta l \circ R^{\theta}_{C} \circ \delta l = \delta l \circ \delta l \circ \delta l' \circ \delta l = \delta l \circ \delta l' = R^{-\theta}_{C}$$

۸-۱۴-۵- چون سه خط l و m و n در یک نقطه همرسند پس حاصل ترکیب آنها یک بازتاب نسبت به خط p است که با n زاویه‌ای می‌سازد که l با m می‌سازد.

۸-۱۴-۶- عکس گزاره (۸-۱۰) می‌باشد.

۸-۱۴-۷- می‌دانیم اندازه زاویه بین دو نیمساز زاویه B و C برابر $\frac{A}{2} + 90$ است و چون سه نیمساز در یک نقطه همرس می‌باشند حکم ثابت است.

۸-۱۴-۸- چون حاصل ترکیب $\delta n \circ \delta m$ یک انتقال با بردار $\vec{V}(6\ ,\ -3)$ است پس دو خط m و n بر امتداد بردار V عمود می‌باشند چون $n \parallel m$ است.

۸-۱۴-۹- مکان هندسی p روی خط نیمساز بین دو خط m و n قرار دارد.

۸-۴-۱۰- چون

$$R^{90\uparrow}_{F} \circ R^{90\uparrow}_{E} (B) = C$$

$$R^{180}_{x} (B) = C \Rightarrow$$

پس x وسط BC است و برای پیدا کردن $M = x^{-}$ باید E را به F وصل کرد و دو زاویه °۴۵ جدا کرد. تا یکدیگر را در M قطع نماید.

۱۱ـ۱۴ـ۸ـ چون

$$R^{۹۰\uparrow}_{p} \circ \underbrace{R^{۹۰\uparrow}_{A} \circ R^{۹۰\uparrow}_{p} \circ R^{۹۰\uparrow}_{A}}_{R^{۹۰\uparrow}_{p}\ (F)\ =\ E} = R^{۳۶۰}\ (E) = \text{ث}$$

۱ـ۱۵ـ۸ـ $A = B$، Bوسط ACاست. Bبر روی خطی موازی aو bقرار دارد. bبر عمود منصف عمود است. Aروی bاست. bروی نیمساز است.

۲ـ۱۵ـ۸ـ خطی است عمود بر Pو گذرنده از B.

۳ـ۱۵ـ۸ـ نقطه Pرا چنان بیابید که $R^{۹۰}_{P}\ (B) = C$ و اگر $R^{۹۰}_{P}\ (D) = E$ آنگاه AEاندازه ضلع مربع است.

۴ـ۱۵ـ۸ـ چون تعداد بازتاب‌ها نسبت به l فرد است و تعداد بازتاب‌ها نسبت به P زوج است. حکم اثبات می‌شود.

۵ـ۱۵ـ۸ـ با توجه به شکل گزاره (۱۶ـ۸) مسئله را حل کنید.

۶ـ۱۵ـ۸ـ با توجه به گزاره (۲ـ۹) مسئله را حل کنید.

۷ـ۱۵ـ۸ـ نقطه zرا روی خط a چنان اختیار کنید که $\delta_a(z)$به خط bتعلق داشته باشد.

۸ـ۱۵ـ۸ـ ماتریس فوق ماتریس دوران °۶۰ است پس حاصل کار $۶۰ + ۶۰ \times ۳۶ = \frac{۳۷ \times ۶۰}{۳۶۰}$باز یک ماتریس °۶۰ است.

۹ـ۱۵ـ۸ـ ماتریس فوق ماتریس دوران °۶۰ است. ماتریس وارون آن (°۶۰−) است.

۱۰ـ۱۵ـ۸ـ در مسئله ۴ـ۱۴ـ۸ اثبات شده است.

۱ـ۴ـ۹ـ

$$R^{۲\alpha}_{A} \circ R^{۲\beta}_{B} \circ R^{۲\gamma}_{C} = \delta AB \circ \delta AC \circ \delta AC \circ \delta BC \circ \delta BC \circ \delta AB = ۱$$

۲ـ۴ـ۹ـ ابتدا فرض کنید λیک تبدیل زوج و سپس $l\delta l$را برای حالت فرد اثبات کنید.

۳ـ۴ـ۹ـ چون λیک لغزه است که از سه تقارن محوری تشکیل شده حکم اثبات می‌شود.

۴ـ۴ـ۹ـ ساده

۵ـ۴ـ۹ـ ساده

۶ـ۴ـ۹ـ ساده

۷ـ۴ـ۹ـ کافیست خط lرا نسبت به نقطه M قرینه نمائیم تا خط l'بدست آید محل برخورد l'و

دایره جواب است.

۸ـ۴ـ۹ـ چون PR قطر مربع است قرینه دایره O نسبت به این خط نقطه S می‌باشد پس کافیست قرینه یکی از دوایر را نسبت به آن خط بدست آوریم تا دایره دیگر را در نقطه S قطع کند.

۹ـ۴ـ۹ـ قرینه P را نسبت به دو ضلع AC و AB پیدا کرده و بهم وصل می‌کنیم تا AC و AB را در نقاط Q و R قطع نماید.

۱۰ـ۴ـ۹ـ اگر سوراخ H و توپ در نقطه M واقع شده باشد $\delta_{BC} \circ \delta_{AB}(M) = M'$ و $\delta_{AC}(H) = H'$ مسیر باید از $M'H'$ بدست آید.

۱ـ۱۰ـ $\alpha = (\alpha\delta l)\,\delta l$

۲ـ۱۰ـ برای حل مسئله یک نقطه ثابت پیدا کنید.

۳ـ۱۰ـ می‌دانیم که فقط محور لغزه همواره ثابت است و اوساط نقاط و تصاویر آنها بر محور لغزه قرار دارد. حال نقاط $(\circ\ ,\ \circ)$ و $(\circ\ ,\ ۱)$ و تصاویر آنها را در نظر بگیرید.

۴ـ۱۰ـ

$$۲k = S + \frac{r}{tg\frac{\theta}{۲}} \quad , \quad ۲h = r - \frac{S}{tg\frac{\theta}{۲}} \quad , \quad P = (h\ ,\ k)$$

۵ـ۱۰ـ با توجه به اینکه وسط دو نقطه $(\circ\ ,\ \circ)$ و $(c\ ,\ d)$ ثابت است حکم را ثابت کنید.

۶ـ۱۰ـ حاصل ضرب دو تبدیل برابر است با حاصل‌ضرب دو ماتریس تبدیل

۱ـ۱ـ۱۱ـ الف. نسبت تجانس $k = \frac{DC}{AB}$ و M مرکز تجانس است و چون مثلث MCD به مثلث MAB تبدیل شده است پس هر دو دایره محیطی در نقطه M بر هم مماس می‌باشند.

ب. ضریب تجانس $k_۱ = \frac{CD}{AB}$ و N مرکز تجانس است و مثلث NCD به مثلث NAB تبدیل شده پس دو دایره محیطی در نقطه N بر هم مماس خارج می‌باشند.

۲ـ۱ـ۱۱ـ در ذوزنقه $ABCD$، اگر محل برخورد ساق‌ها نقطه M و محل برخورد قطرها N باشد یک‌بار M مرکز تجانس مستقیم بوده و AB را به CD تبدیل می‌کند و یک‌بار N مرکز تجانس معکوس بوده و AB را به CD تبدیل می‌کند پس اوساط $AB = CD$ که تبدیل یافته هم هستند با این دو نقطه بر روی یک خط راست واقع می‌باشند.

۳ـ۱ـ۱۱ـ نقطه دلخواه P روی AC در نظر گرفته و عمود PQ را بر BC فرود می‌آوریم از P

عمودی بر AC و از Q عمودی بر AB فرود می‌آوریم تا یکدیگر را در نقطه S قطع کنند حال B را مرکز تجانس در نظر گرفته و نقطه S را به روی AB منتقل کنید تا جواب مسئله بدست آید.

۴-۱-۱۱- دو خط مفروض d_1 و d_2 در نقطه S همرسند دایره دلخواهی به d_1 و d_2 مماس کنید و S را مرکز تجانس گرفته و به نقطه مفروض P وصل کنید تا دایره را در P' قطع کند خط OP باید با $O'P'$ موازی باشد.

۵-۱-۱۱- دوخط به موازات دو خط مفروض بر دایره مفروض مماس کنید محل تلاقی این دو مماس و دو خط و مرکز تجانس که بر دایره قرار دارد بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۶-۱-۱۱- ارتفاع BK را رسم می‌کنیم مثلث KBC را حول نقطه K به اندازه $90°$ دوران می‌دهیم تا مثلث $B'C'K$ بدست آید. $(B' \in AC$ و $C' \in BK)$ پس $K\hat{B}C = H\hat{A}C = C'B'M$ و $MAH \sim B'KC'$ مجانس یکدیگرند. یعنی مثلث BKC و AHM را با یک تجانس و یک دوران $90°$ می‌توان بدست آورد. پس میانه BM از مثلث BKC را می‌توان با یک دوران $90°$ و یک تجانس از میانه AT بدست آورد. پس AT با BM زاویه $90°$ می‌سازد چون دوران یافته BM در مثلث $B'C'K$ موازی AT خواهد شد.

۷-۱-۱۱- اگر محل تماس دایره محاطی خارجی مثلث ABC با ضلع BC را W بگیریم می‌دانیم وسط ضلع BC وسط دو نقطه W و H نیز می‌باشد. و اگر از نقطه T خطی بر دایره محاطی داخلی مثلث مماس کنیم تا AC و AB را در نقاط C' و B' قطع کند $B'C'$ موازی BC است و دایره O_1 برای مثلث $AB'C'$ دایره محاطی خارجی است پس AT از W می‌گذرد چون A مرکز تجانس دو دایره (O_1) و (O_2) می‌باشد.

۴-۸-۱۱- سه مثلث ALK و MBN و QPC چون اضلاع آنها با هم موازیند پس با یک تجانس به هم تبدیل می‌شوند. مرکز تجانس مثلث‌های ALK و MBN نقطه برخورد AB و KN است و مرکز تجانس MBK و QPC نقطه برخورد BC و MQ و مرکز تجانس QPC و ALK نقطه برخورد AC و PL است پس سه مرکز تجانس بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۵-۸-۱۱- دو مثلث EFD و ABC مجانس یکدیگرند و مرکز تجانس نقطه همرسی سه میانه و ضریب تجانس $k_1 = -\frac{1}{2}$. مثلث LMK با مرکز تجانس P و نسبت $k_2 = 2$ از DEF بدست می‌آید پس مثلث LMK از مثلث ABC با $k_3 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$ بدست می‌آید که یک نیم دور حول نقطه‌ای مانند Q است و $NQ = -\frac{1}{2} NP$ پس اگر P دایره C_1 را بپیماید نقطه Q دایره مجانس C_1 را

می‌پیماید.

-۶-۸-۱۱

$$H_{A_۱}^{\frac{۱}{۲}} \circ H_{A_۲}^{\frac{۱}{۲}} \circ H_{A_۳}^{\frac{۱}{۲}} \circ H_{A_۴}^{\frac{۱}{۲}} = H_{A}^{\frac{۱}{۱۶}}$$

برای یافتن نقطه A کافیست نقطه دلخواهی مثل X از صفحه را تحت تأثیر این تجانس‌ها قرار دهیم تا Y بدست آید. پس

$$H_{A}^{\frac{۱}{۱۶}}(X) = Y$$

پس نقطه A بدست می‌آید.

۷-۸-۱۱- دایره اول را $C_۱$ و دایره دوم را $C_۲$ می‌نامیم

این دو تجانس MN را به نقطه E مماس بر دایره C و موازی MN می‌برند. پس AB و CD در E متقاطع‌اند.

$$H_A(C_۱) = C$$

$$H_A(C_۲) = C$$

-۸-۸-۱۱

$$H_{P}^{-\frac{۱}{۲}} \circ H_{Q}^{-\frac{۱}{۲}} \circ H_{R}^{-\frac{۱}{۲}} = H_{A}^{-\frac{۱}{۸}}$$

در نتیجه $AP' = -\frac{۱}{۸}AP$ پس با انتخاب نقطه دلخواه P در صفحه و یافتن P' نقطه A مرکز تجانس را می‌توان تعیین کرد.

۹-۸-۱۱- تصویرهای هر نقطه از دایره محیطی روی اضلاع مثلث بر روی خط سیمسن مثلث واقع است. پس قرینه‌های این نقطه نسبت به اضلاع مثلث روی خط راستی واقع می‌باشند موازی با خط سیمسن که نسبت به آن نقطه در تجانس با ضریب ۲ واقع است.

۱۰-۸-۱۱- اگر $AB = BC$ آنگاه مکان رأس C روی دایره ایست به مرکز B و به شعاع BA (BA ثابت است). اگر M وسط BA باشد و G نقطه همرسی میانه‌های مثلث. $MG = \frac{۱}{۳}MC$ است پس مکان G روی دایره‌ای است مجانس با دایره به مرکز B و به شعاع BA و شعاع آن $\frac{۱}{۳}$ شعاع این

دایره است.

۱۱-۸-۱۱- $ON \parallel AE$ رسم می‌کنیم پس $\frac{ME}{MO} = \frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MP}$ پس $OP \parallel EB$ چهارضلعی $OPNM$ مجانس چهارضلعی $EBAM$ پس مکان P خطی است که به موازات EB از نقطه O رسم شود.

۱۱-۸-۱۲- اگر A' و B' و M' اوساط اضلاع مثلث ABC باشند مثلث MAB و $M'A'B'$ با مرکز تجانس G و ضریب تجانس $(-\frac{1}{2})$ مجانس یکدیگر می‌باشند و اگر W مرکز دایره محیطی مثلث $M'A'B'$ باشد داریم

$$\frac{GW}{GO} = -\frac{1}{2} = \frac{GM'}{GM}$$

پس WM' با OM موازی است و W خط AB را از نقطه E که با رابطه $M'E = \frac{2}{3} M'A$ می‌پیماید.

۱۱-۸-۱۳-

$$H_B^{\frac{R}{R-R'}}(C') = P \qquad BP = \frac{R}{R-R'} \cdot BC'$$

چون C' دایره بقطر AC را می‌پیماید پس P روی مجانس این دایره قرار دارد.

۱۱-۸-۱۴- نقطه A مرکز تجانس این دو دایره است. خط $M'N'$ مجانس خط MN است که از نقطه B می‌گذرد پس $M'N'$ از مجانس B نسبت به مرکز A و ضریب تجانس $\frac{R}{R'}$ می‌گذرد.

۱۱-۸-۱۵- اگر $OA = d$ و $OM = R$ و اگر پای نیمساز داخلی $A\hat{O}M$ را P بنامیم $\frac{AP}{AM} = \frac{d}{d+R}$ پس

$$H_A^{\frac{d}{d+R}}(M) = P$$

پس مکان P یک دایره است. اگر Q پای نیمساز خارجی زاویه AOM باشد. $\frac{AQ}{AM} = \frac{d}{d-R}$ پس

$$H_A^{\frac{d}{d-R}}(M) = Q$$

پس مکان Q هم یک دایره است.

۱۲-۸-۱- نقاط برخورد خط‌های مورد نظر را A و B و C و D و E و F و نقطه O مرکز تجانس

مارپیچی که AB را به EF تبدیل می‌کند از برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های ABD و EFD بدست می‌آید و همچنین از برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های ABD و EFD.

۲-۸-۱۲- نقطه $M_۲$ را می‌توان از $M_۱$ بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز A و زاویه دوران $O_۱\hat{A}O_۲$ بدست آورد. قطر $AO_۱$ از دایره $(O_۲)$ با دایره $(C_۱)$ در نقطه M' برخورد می‌کند. M' را نیز می‌توان از $M_۲$ با یک تجانس مارپیچی به مرکز $O_۲$ و زاویه دوران $۲(\beta - \alpha)$ بدست آورد. پس مجموع ترکیب این دو تجانس یک تجانس مارپیچی حول نقطه O است که با نسبت تجانس k و زاویه دوران $(۲\alpha - \beta)$ بدست می‌آید. پس دایره محیط $M_۱M_۲j$ از نقطه مفروض O می‌گذرد.

۳-۸-۱۲- باید ثابت کنیم $R_M^{۶۰}(N) = P$

$$H_B^{\frac{۱}{۲}} \circ R_B^{۶۰\downarrow} \circ R_M^{۱۸۰} \circ R_B^{۶۰\downarrow} \circ H_{(B)}^{۲}(N) = P$$

$$X_{۶۰\downarrow\ (B)}^{\frac{۱}{۲}} \circ R_M^{۱۸۰} \circ X_{۶۰\downarrow\ (B)}^{۲}(N) = P$$

$$X_{۶۰\downarrow\ (B)}^{\frac{۱}{۲}} \circ X_{۱۸۰\uparrow\ (M)}^{۱} \circ X_{۶۰\downarrow\ (B)}^{۲}(N) = P$$

حاصل این سه تجانس مارپیچی یک دوران به اندازه ۶۰ (۶۰ + ۶۰) − ۱۸۰ و تجانس

$$\frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱$$

$$X_{۶۰\uparrow+۶۰\downarrow+۱۸۰\uparrow}^{\frac{۱}{۲}\times۱\times۲=۱} = R_K^{۶۰\uparrow}(B) = (N)$$

$$X_{۶۰\downarrow} \circ X_{۱۸۰\uparrow}^{۱} \circ X_{۶۰\downarrow\ (B)}^{۲}(M) = M \Rightarrow K \equiv M$$

۴-۸-۱۲- می‌دانیم $H_Q(A) = C$ و $H_P(C) = B$

$$H_P \circ H_Q(A) = B$$

$$\left.\begin{aligned} H_P \circ H_Q(M) = M \Rightarrow R_M^{۱۸۰}(M) = M \\ H_P \circ H_Q(y) = x \Rightarrow R_M^{۱۸۰}(y) = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow Mx = My$$

۵-۸-۱۲- اگر مرکز تجانس دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ و نقطه S باشد از S به P وصل می‌کنیم تا دو دایره را در نقاط A و B قطع نماید دایره‌ای که بر دو نقطه A و B گذشته و بر دو دایره مماس باشد جواب مسئله است.

۶-۸-۱۲- دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ در نقطه A مماس داخل می‌باشند دایره $C_۱$ با مرکز تجانس A به دایره $C_۲$ تبدیل می‌شود اگر خط MQ با دایره $C_۱$ در نقاط P و N برخورد کرده باشد $H_A(N) = N'$ و $H_A(P) = P'$ که $NP \parallel N'P'$ پس $\widehat{MN'} = \widehat{P'Q}$.

۷-۸-۱۲- $(A\overset{\Delta}{B}C) = A_۱\overset{\Delta}{B}_۱C_۱$ $R^{\alpha}_{(O)}$ پس $AB'A_۱ = AC'A_۱ = AOA_۱ = \alpha$ یعنی نقاط A و $A_۱$ و B' و C' و O بر یک دایره واقع می‌باشند. مثلث $A''B''C''$ که اوساط اضلاع مثلث ABC را به هم وصل کرده در نظر می‌گیریم پس دوایر محیطی مثلث‌های $A''B''C''$ و $BA''C''$ و $CA''B''$ از نقطه O می‌گذرند.

و چون نقطه O یک نقطه ثابت است که محل برخورد ارتفاعات مثلث $A''B''C''$ می‌باشد و همچنین محل برخورد ارتفاعات مثلث $A'B'C'$.

۸-۸-۱۲- $O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ و $O_۴$ را نقاط همرسی میانه‌های مثلث‌های ساخته شده روی AB و BC و CD و AD می‌نامیم. مثلث‌های متساوی الاضلاع GDE و HDF را می‌سازیم.

$$X^{\sqrt{۳}}_{۳۰}(A)\ (O_۱ADO_۳) = BAGM$$

AED و CFD دو مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

که $DF \parallel GM = \sqrt{۳}\,DO_۳$ و $GDFM$ یک متوازی الاضلاع است.

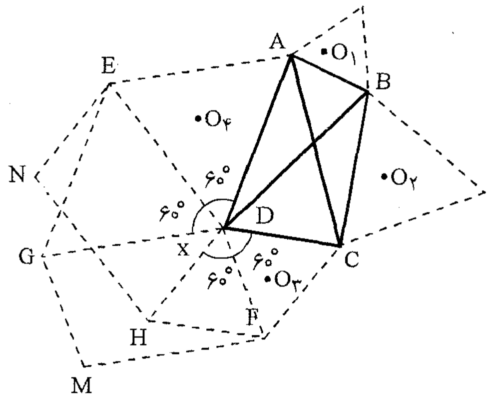
$$X^{\sqrt{۳}}_{۳۰}(C)\ (O_۲CDO_۴) = HDEN$$

پس $HDEN$ یک متوازی الاضلاع است.

$$R^{۶۰}_{D}\ (GDFM) = EDHN$$

پس $DM = DN$ و $M\hat{D}N = ۶۰°$ و $GM = DC$ و $GD = AD$ و $D\hat{G}M = A\hat{D}C$ و $DM = DN = DB$.

پس نقاط M و N و B روی یک دایره به مرکز D و شعاع DM هستند و $N\hat{D}M = ۶۰°$ و $N\hat{B}M = ۳۰°$ اما ملاحظه می‌شود که



$R^{۳۰\downarrow}\ (BM) = O_۱O_۳$

$R^{۳۰\uparrow}\ (BN) = O_۲O_۴$

پس $O_۱O_۳ \perp O_۲O_۴$

۱ـ۴ـ۱۳ـ اگر A را قطب انعکاسی و $AH \times AB$ را قوت انعکاس اختیار کنیم. منعکس دایره (O) خط Δ خواهد بود. نقاط D' و C' نقاط غیر متناظر D و C از دایره می‌باشد پس

$AC \times AC' = AD \times AD'$

و چون $AC = AD'$ پس $CC' = DD'$.

۲ـ۴ـ۱۳ـ برای اینکه ثابت کنیم I و I' منعکس یکدیگرند کافی است ثابت کنیم چهارضلعی $BB'II'$ محاطی است.

$A'\widehat{B}'I' = \frac{۱}{۲} A'AB = \frac{۱}{۲}(B + C)$

$B\widehat{I}I' = \frac{۱}{۲}(B + C)$

$A'\widehat{B}'I' + A'\widehat{B}'B + B\widehat{I}I' = A + B + C = ۱۸۰$

$CI \times CI' = CB \times CB'$

۳ـ۴ـ۱۳ـ اگر I وسط CO باشد

$MO^۲ + MA^۲ = ۲(MI^۲ + OI^۲)$

$AO^۲ = ۲(MI^۲ + OI^۲) \Rightarrow MI^۲ = \frac{OA^۲ - ۲OI^۲}{۲}$

پس مکان M دایره ایست به مرکز I و چون $OP \times OM = oA^۲$ پس P منعکس M در انعکاس

بقطب O و با قوت $OA^۲$ است. پس مکان P دایره دیگری است که منعکس دایره مکان M می‌باشد.

۴-۴-۱۳- اگر A' و B' و C' اوساط اضلاع BC و AC و AB باشد دایره‌های بقطر AB و AC از A' می‌گذرد. در انعکاس قوت $AA'^۲ = a^۲$ خطهای AB و AC ثابت می‌مانند. اما دایره‌های به قطرهای AB و AC به ترتیب به خطوط $A'C'$ و $A'B'$ تبدیل می‌شوند. تنها یک دایره وجود دارد که بر چهار خط AB و AC و $A'B'$ و $A'C'$ مماس است که همان دایره محاطی مربع $AB'A'C'$ می‌باشد و نقاط تماس آن با ضلع‌های مربع K' و L' و J' و I' اوساط اضلاع مربع می‌باشد. در انعکاس $(A\ ,\ a^۲)$ دایره محاطی مربع به دایره‌ای تبدیل می‌شود که در نقاط I و J و K و L مبدل‌های نقاط I' و J' و K' و L' که به ترتیب بر اضلاع AB و AC بر دایره‌ای بقطر AB و AC مماس است. W مرکز این دایره بر امتداد AA' و بر عمودی واقع است که در I بر AI اخراج شود.

۵-۴-۱۳- اگر I وسط OA باشد چون نقاط A و O وارون هم نسبت به دایره W می‌باشند پس W بر دایره I بقطر OA عمود می‌باشد. در انعکاس به قطب I و به قوت $OI^۲$ دایره W تغییر نمی‌کند و چون بر $X'X$ مماس است پس بر مبدل $X'X$ یعنی بر دایره F بقطر OB مماس است.

اگر C قرینه B نسبت به نقطه I باشد در انعکاس $(O\ ,\ OB^۲)$ خط $X'X$ تغییر نمی‌کند و دایره به قطر OA به خط BC تبدیل می‌شود و دایره W به دایره $W_۱$ تبدیل می‌شود که بر $X'X$ مماس و بر BC عمود است. مرکز دایره $W_۱$ بر خط BC واقع است بنابراین W بر منعکس AB یعنی دایره F مماس است.

۶-۴-۱۳- اگر I نقطه برخورد AC با MN و A' تصویر قائم A روی CX باشد در چهارضلعی محاطی $AIHA'$ داریم

$$CH\ .\ CA' = CI\ .\ CA$$

$$CI\ .\ CA = CM^۲ = a^۲ \ \Rightarrow\ CH = \frac{a}{۲}$$

پس مکان H خط D است که از نقطه S واقع بر OA و به فاصله $OS = \frac{a}{۲}$ موازی Δ رسم شود.

۷-۴-۱۳- در انعکاس بقطب C منعکس دایره (O) خطی می‌شود مانند Δ و منعکس‌های A و B و S به ترتیب A' و B' و S' می‌باشند که S' بر Δ واقع است. چون چهارضلعی $SAA'S'$ محاطی است پس در زاویه $CSA = CA'S'$ و دو زاویه $CSB = CB'S'$. پس باید بر Δ نقطه S' را چنان تعیین کنیم که زاویه‌های $S'A'C$ و $S'B'C$ با هم برابر باشند.

۸-۴-۱۳- محور $x'x$ محور اصلی دو دایره است و دو نقطه T و T' دو نقطه غیر نظیر می‌باشند. اگر S مرکز تجانس مستقیم دو دایره باشد و در انعکاس به قطب S و به قوت $SO^۲$ دایره‌های C و C' به یکدیگر تبدیل می‌شوند در نتیجه TT' از نقطه S می‌گذرد.

۹-۴-۱۳- الف. در انعکاس به قطب A و به قوت $AB^۲$ منعکس دایره (O) به مماس در نقطه B تبدیل می‌شود و مبدل خط OQ دایره محیطی مثلث AMN است که خط AB را در $S_۱$ قطع می‌کند.

$$BS_۱ . BA = BM . BN = k$$

بنابراین نقطه $S_۱$ ثابت است. پس خط PQ بر نقطه ثابت S می‌گذرد که S منعکس $S_۱$ می‌باشد. $(AS . AS_۱ = k)$ اگر $k = AB^۲$ باشد نقطه $S_۱$ بر A واقع شده و نقطه S به بی‌نهایت می‌رود و خط PQ با AB موازی باشد.

ب. اگر M' و N' نقطه تلاقی AP' و AQ' با مماس در نقطه B باشد مثلث‌های $BP'M'$ و $BQ'N'$ به ترتیب در زاویه‌های P' و Q' قائمه می‌باشند و از تساوی‌های $MB = MP'$ و $NB = NQ'$ نتیجه می‌شود که M وسط BM' و N وسط BN' و داریم

$$BM' . BN' = ۴BM . BN = ۴k$$

پس $P'Q'$ بر نقطه ثابت S' می‌گذرد.

نمادهای که در این کتاب بکار رفته است

۱-	$\parallel$	موازی بودن
۲-	T	تبدیل
۳-	$T_{\vec{V}}$	انتقال به اندازه بردار $\vec{V}$
۴-	δ_O	تقارن مرکزی نسبت به نقطه O
۵-	δ_Δ	تقارن محوری نسبت به خط Δ یا بازتاب
۶-	$R_{(o)}^{\alpha}$	دوران به مرکز O و به زاویه α
۷-	H_s^k	تجانس به مرکز S و ضریب تجانس k
۸-	I_o^k	انعکاس به مرکز O و قوت k
۹-	$X_\alpha^k\ (O)$	تجانس مارپیچی به مرکز O و ضریب k و زاویه α
۱۰-	m_a	میانه وارد بر ضلع a
۱۱-	h_a	ارتفاع وارد بر ضلع a
۱۲-	d_a	نیمساز وارد بر ضلع a
۱۳-	G	نقطه همرسی میانه‌ها
۱۴-	H	نقطه همرسی ارتفاعات
۱۵-	I	نقطه همرسی نیمسازها
۱۶-	R	شعاع دایره محیطی
۱۷-	r	شعاع دایره محاطی داخلی
۱۸-	S	مساحت

مأخذ

۱ـ تبدیل‌های هندسی نوشته ای. ام. یاگولم جلد ۱، ۲ و ۳
۲ـ تبدیلات هندسی و گروه‌ها نوشته جرج. مارتین
۳ـ هندسه پیش‌دانشگاهی نوشته کورت
۴ـ استراتژی حل مسئله نوشته ا. انگل
۵ـ المپیادهای ریاضی در ایران
۶ـ المپیادهای ریاضی در جهان