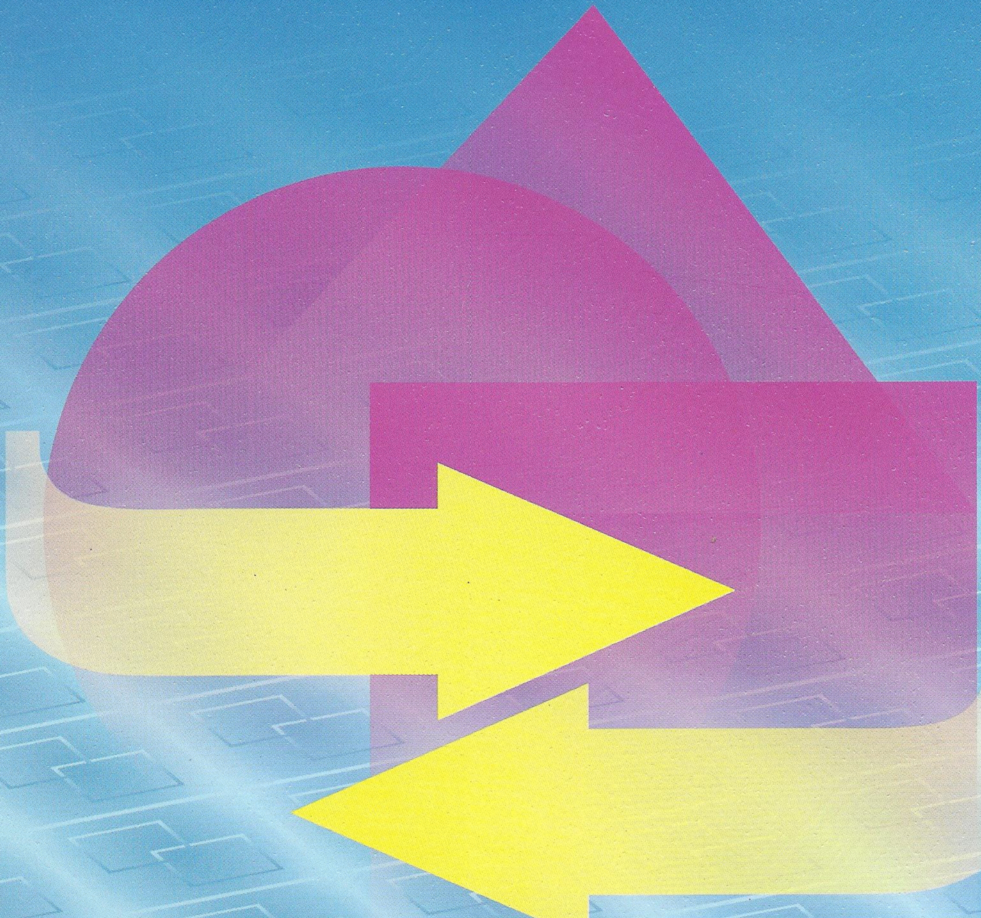
مبتکران

المپیادهای ریاضی

تبدیلات هندسی

جلد دوم



بهمن اصلاح پذیر

المپيادهای رياضی

تبدیلات هندسی

جلد دوم

مؤلف

بهمن اصلاح‌پذیر

سرشناسه	: اصلاح‌پذیر، بهمن
عنوان و پدیدآور	: المپیادهای ریاضی: تبدیلات هندسی مؤلف/ بهمن اصلاح‌پذیر
مشخصات نشر	: تهران؛ مبتکران، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری	: ۱۹۶ص؛ مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۰ - ۴۰۳ - ۴۸۶ - ۹۶۴ - ۹۷۸
یادداشت	: فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
موضوع	: تبدیلهای ریاضی
موضوع	: تبدیلهای ریاضی - - مسائل، تمرینها وغیره.
موضوع	: المپیادها (ریاضیات).
رده‌بندی کنگره	: الف ۱۶الف ۶۰۱ QA
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۶/۱
شماره کتابخانه ملی	: ۵۱۶۵ – ۸۸ م

ناشر: انتشارات مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

تهران: میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۵۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

تلفن: ۹۳-۶۶۹۵۴۳۹۰ دورنگار ۶۶۹۵۴۳۹۲ www.mobtakeran.com

نام کتاب: المپیادهای ریاضی، تبدیلات هندسی (جلد۲)

مؤلف: بهمن اصلاح‌پذیر

نوبت‌چاپ: دوم ۱۳۸۸

شمارگان: ۱۲۰۰ جلد

حروف‌نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: صبا

چاپ: علامه‌طباطبائی

صحافی: علامه‌طباطبائی

بها: ۳۰۰۰ تومان

پیشگفتار جلد دوم

کتاب حاضر در ادامهٔ مطالب جلد اول کتاب تبدیلات هندسی تقدیم خوانندگان می‌گردد.

در جلد اول تبدیلات خط‌ساز و گروه تبدیلات خط‌ساز معرفی شده است و این جلد به طور عمده در برگیرنده تبدیلات غیرخط‌ساز نظیر قطب، قطبی، قوت نقطه و مطالب جانبی آن‌ها مانند نسبت ناهمساز، چهارضلعی کامل و ... می‌باشد. علاوه بر مطالب فوق چون مهارت حل مسئله هم برای داوطلبان مسابقات المپیاد ریاضی مورد نیاز است دو بخش حل مسئله از طریق بردارها و اعداد مختلط ارائه گردیده است.

تنها مطلبی که از تبدیلات هندسی در این دو جلد مورد بررسی واقع نشده است تبدیلات تصویر مرکزی می‌باشد که می‌باید در کتابی جداگانه مورد بررسی قرار گیرد.

فهرست مطالب

بخش ۱۵. قوت نقطه نسبت به دایره

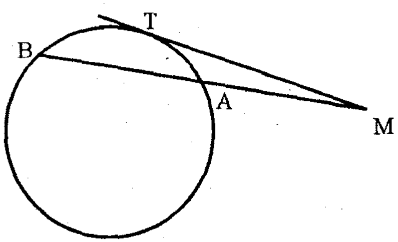
۱۵ـ۱. تعریف

نقطه M را در صفحه دایره $C(O,R)$و به فاصله d از مرکز دایره درنظر می‌گیریم. قوت نقطه M نسبت به دایره را به صورت $P_C^M = d^2 - R^2$ تعریف می‌نمائیم.

یعنی: قوت هر نقطه نسبت به دایره مفروض برابر است با تفاضل مربع فاصله آن نقطه تا مرکز دایره منهای مربع شعاع دایره.

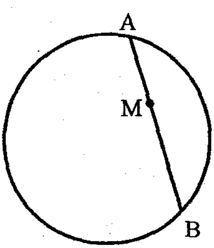
۱۵ـ۱ـ۱. گزاره

اگر نقطه M در خارج از دایره باشد $P_C^M = MA.MB = MT^2$ در واقع مماس MT حد قاطع MAB بر دایره می‌باشد.



(۱-۱۵)

اگر نقطه M در داخل دایره هم باشد قوت نقطه M نسبت به دایره برابر با حل ضرب $P_C^M = MA.MB$ است و با توجه به جهت قوت نقطه منفی خواهد بود.

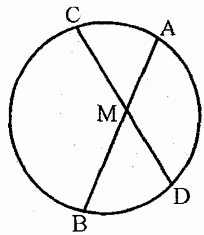


(۲-۱۵)

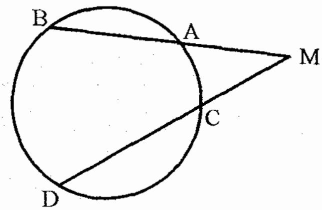
۱۵ـ۱ـ۲. گزاره

در شکل‌های (۲ـ۱۵) و (۳ـ۱۵) داریم $MA.MB = MC.MD$

نتیجه: اگر نقطه M روی امتداد دو خط AB و CD و یا روی هر دوی آنها باشد و داشته باشیم $MA.MB = MC.MD$ آنگاه چهار نقطه A و B و C و D روی یک دایره واقع هستند.

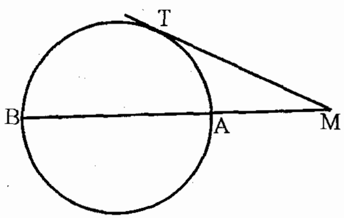


(۴−۱۵)



(۳−۱۵)

و اگر $MT^{۲} = MA.MB$ و نقطه T روی امتداد MAB نباشد. دایره‌ای که از سه نقطه A و B و T می‌گذرد بر خط MAB مماس است. شکل (۱۵ـ۵)



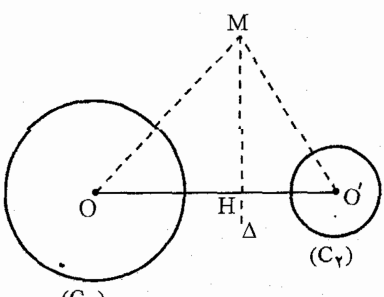
(۵−۱۵)

۱۵ـ۲. گزاره

مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت به دو دایره مفروض هم قوت باشد خطی عمود بر خط المرکزین دو دایره است.

اثبات:

$$P^M_{C_۱} = P^M_{C_۲}$$
$$MO_۱^۲ - R_۱^۲ = MO_۲^۲ - R_۲^۲$$
$$MO_۱^۲ - MO_۲^۲ = R_۱^۲ - R_۲^۲$$



(۶−۱۵)

چون تفاضل مربعات دو شعاع دایره مفروض مقداری ثابت می‌باشد پس مکان هندسی نقطه M که

تفاضل مربعات فواصل آن از دو نقطه ثابت O_1 و O_2 مقداری ثابت است روی خطی واقع است که بر (O_1, O_2) عمود می‌باشد.

۱۵ـ۲ـ۱. تعریف: خط Δ را محور اصلی دو دایره می‌نامیم.

نتیجه الف: محور اصلی دو دایره مکان هندسی نقاطی است که از آن می‌توان دو مماس برابر با هم بر دو دایره رسم کرد.

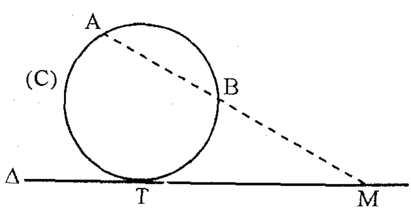
نتیجه ب: اگر سه دایره داشته باشیم محورهای اصلی آنها در یک نقطه همرس خواهند بود.

نتیجه ج: در حالتی که مرکز سه دایره بر یک خط راست واقع باشد نقطه‌ای یافت نمی‌شود که نسبت به این سه دایره هم قوت باشد و از این نکته می‌توان برای مسائلی استفاده کرد که می‌خواهیم ثابت کنیم آن سه نقطه بر یک خط راست واقع می‌باشد.

۱۵ـ۳. مسئله

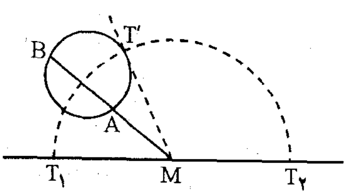
بر دو نقطه A و B دایره‌ای بگذرانید که بر خط Δ مماس باشد.

حل: اگر دایره (C) دایره خواسته شده باشد آنگاه $MT^2 = MA.MB$. چون امتداد AB در نقطه ثابت M با خط Δ برخورد دارد پس اندازه‌های MA و MB معلوم بوده و اندازه $MT = \pm\sqrt{MA.MB}$ نیز بدست می‌آید و دایره‌ای که از نقاط A و B و T بگذرد بر خط Δ مماس خواهد بود.



(۱۵ـ۳ـ۱)

برای ترسیم به کمک خط‌کش و پرگار کافیست از A و B دایره دلخواهی بگذرانیم و از نقطه M بر آن دایره مماس MT' را رسم کنیم $MT'^2 = MA.MB$. بنابراین $MT' = MT$ حال کافیست روی خط Δ در دو طرف نقطه M دو نقطه T_1 و T_2 را چنان انتخاب کنیم که $MT_1 = MT_2 = MT'$ دو دایره‌ای که از (T_1, AB) و (T_2, AB) بگذرد جواب‌های مسئله می‌باشند در حالتی که خط AB موازی Δ باشد بحث و حل به عهده خواننده است.



(۱۵ـ۳ـ۲)

۴ـ۱۵. مسائل برای حل

۱. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض گذشته و بر یک دایره مفروض مماس باشد.

۲. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطه مفروض گذشته و بر دو خط مفروض مماس باشد.

۳. دو دایره C و C' که در دو نقطه A و B متقاطع می‌باشند. از نقطه متغیر M روی دایره C یک مماس بر دایره C' رسم می‌کنیم که در نقطه T بر آن مماس می‌شود ثابت کنید که نسبت $\frac{MT^2}{MA.MB}$ مقداریست ثابت.

۴. دو نقطه متغیر B و C بر خط Δ چنان تغییر می‌کند که همواره نسبت به دو نقطه ثابت M و M' همساز می‌باشند. اگر نقطه A نقطه ثابتی غیرواقع بر خط Δ باشد ثابت کنید دایره محیطی مثلث ABC از نقطه ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۵. دایره‌ای به مرکز O از راس‌های A و C در مثلث ABC می‌گذرد و پاره‌خط‌های AB و BC را در نقطه‌های دیگر K و N به ترتیب قطع می‌کند. اگر دایره‌های محیطی مثلث‌های ABC و KBN یکدیگر را در دو نقطه متمایز B و M قطع کند ثابت کنید مثلث OMB قائم‌الزاویه است. (المپیاد جهانی سال ۱۹۸۵)

۶. مثلث ABC مفروض است. از راس A خطی رسم کنید که اگر H و K تصایور B و C روی آن باشند BH واسطه هندسی بین BK و CH باشد.

۷. فرض کنید KL و KN بر دایره C مماس باشد. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه دیگر تقاطع دایره‌ای C با دایره محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم ثابت کنید $M\hat{P}Q = 2K\hat{M}L$ (پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور مرحله دوم سال ۷۶)

۸. در مسئله قبل ثابت کنید که اگر نقطه E محل برخورد ML با دایره C باشد خط PE پاره‌خط MN را نصف می‌نماید.

۹. دو نقطه A و B و دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه A قاطع متغیری بر دایره رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع نماید از نقطه B به M و N وصل کرده و دو عمود بر BM و BN از نقاط M و N بر BM و BN اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه E قطع نماید مکان هندسی نقطه

E را تعیین کنید.

۱۰. دو خط ثابت و عمود بر هم D وΔ و نقطه B واقع بر Δ و نقطه A غیرواقع بر دو خط مفروض است و زاویه قائمه متغیر بر راس A خط D را در نقاط M و M' قطع می‌کند ثابت کنید دایره محیطی مثلث BMM' از نقطه ثابتی در صفحه می‌گذرند.

۱۱. زاویه xoy و نقطه A در داخل آن مفروض است از A خطی رسم کنید تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع نماید به طوری که $AB \times AC$ حداقل مقدار ممکن شود. (انتخابی المپیاد ریاضی آمریکا)

۱۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AC > BD$ است از راس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم ثابت کنید $AB.AE + AD.AF = AC^۲$ (المپیاد ریاضی کشور سال ۱۳۶۷)

۱۳. دایره‌ای به قطر مفروض AB در نقطه B بر خط ثابت D مماس است. بر روی خط D دو نقطه متغیر M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $BM.BN = K$ گردد. (k مقدار ثابتی است). از A به M و N وصل می‌کنیم تا دایره را در نقاط P و Q قطع نمایند. ثابت کنید خط PQ از نقطه ثاتبی در صفحه می‌گذرد.

۱۴. دایره ثابت C و خط ثابت Δ مفروض است نقطه ثابت P را بر دایره C و نقطه Q را بر خط Δ انتخاب می‌کنیم. دایره دلخواه $C_۱$ را چنان رسم می‌کنیم که از P و Q بگذرد و دایره C را در نقطه R و خط Δ را در S قطع نماید. ثابت کنید خط RS از یک نقطه ثابت در صفحه می‌گذرد.

۱۵. در مثلث ABC فرض کنید Dمحل برخورد نیمساز زاویه A با BC باشد. دایره مماس بر BC در نقطه D که از A هم می‌گذرد را رسم می‌کنیم و نقطه دوم تقاطع دایره با AC را M می‌گیریم و فرض کنید BM دایره را در P قطع کنید ثابت کنید P روی میانه راس A در مثلث ABC قرار دارد.

۱۶. اگر P یک نقطه داخل دایره‌ای باشد و سه وترگذرنده از نقطه P هم‌اندازه باشند ثابت کنید P مرکز دایره است.

۱۷. مثلث ABC مفروض است. روی اضلاع BC و CA و AB سه نقطه A' و B' و C' را درنظر می‌گیریم. دایره‌های محیطی مثلث ABA' و $A'B'C'$ در نقطه M متفاوت از A' متقاطع می‌باشند. نقطه N محل تقاطع دو دایره ABB' و $A'B'C'$ و به همین ترتیب نقاط P و Q را هم بدست می‌آوریم. ثابت کنید یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد.

الف ـ خطوط سه گانه $(AB, A'M, B'N)$ و $(BC, B'P, C'Q)$ و $(CA, C'R, A'S)$ در نقطه‌های مانند C'' و A'' و B'' همرس می‌باشند.

ب ـ $A'M$ و $B'N$ با AB موازی بوده، یا $B'P$ و $C'Q$ با BC موازی بوده یا $C'R, A'S$ با AC موازی است.

ج ـ در حالتی که الف اتفاق می‌افتد ثابت کنید A'' و B'' و C'' هم خط می‌باشند.

۱۸. چهار نقطه A و B و C و D که هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط واقع نیست مفروض‌اند و خط AB و CD با یکدیگر در نقطه E متقاطع می‌باشند و BC و DA در نقطه F متقاطع هستند. ثابت کنید سه دایره به قطرهای AC و BD و EF یا از یک نقطه می‌گذرند یا هیچ یک از دو تای آنها هیچ نقطه مشترکی ندارند.

۱۹. ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. دو نقطه M و N روی AB و AC اختیار شده‌اند دایره‌های به قطر BN و CM در نقاط P و Q متقاطع می‌باشند. ثابت کنید P و Q و H و مرکز ارتفاعیه مثلث روی یک خط راست واقع هستند.

۲۰. روی نیم دایره‌ای به قطر AB دو نقطه C و D را اختیار می‌کنیم. AC و BD در نقطه E و AD و BC در نقطه F متقاطع می‌باشند. خط EF با نیم دایره در نقطه Gو با AB در نقطه H متقاطع است. ثابت کنید نقطه E وسط پاره‌خط GH است اگر که G وسط پاره‌خط FH باشد.

۲۱. مثلث ABC و دو نقطه D و E روی اضلاع AB و AC چنان قرار دارند که DE موازی BC می‌باشد. فرض کنیم نقطه P در داخل مثلث ADE بوده و نقاط F و G محل برخورد DE با خطوط BP و CP باشد. اگر نقطه Q نقطه دوم برخورد دایره‌های محیطی PDG و PFE باشد ثابت کنید نقاط A و P و Q بر یک خط راست واقع هستند.

۲۲. A و B و C و D چهار نقطه واقع بر یک خط راست می‌باشند. دو دایره به قطرهای AC و BD در نقاط X و Y متقاطع می‌باشند. خط XY با BC در نقطه Z برخورد می‌کند. نقطه P روی XY واقع است. خط CP با دایره‌ای به قطر AC در نقاط C و M متقاطع هستند و خط BP با دایره‌ای به قطر BD در نقاط B و N متقاطع است. ثابت کنید خطوط AM و DN و XY همرسند.

۲۳. نیم دایره‌ای به قطر AB به مرکز O مفروض است. یک خط با AB در M و با نیم دایره در C و D به گونه‌ای برخورد می‌کند که $MB < MA$ و $MD < MC$. دایره‌های محیطی مثلث‌های AOC و DOB در نقطه K برخورد می‌کنند. ثابت کنید MK و KO بر یکدیگر عمود می‌باشند.

۲۴. نقطه M روی نیم دایره‌ای به قطر AB و H تصویر M روی AB است دایره‌ای به قطر MH خطوط MA و MB را در P و Q و نیم دایره را در C قطع می‌کند نشان دهد خطوط MC و PQ و AB در یک نقطه همرسند.

۲۵. دو نقطه A و B و خط Δ مفروضند. روی خط Δ نقطه‌ای مانند M چنان تعیین کنید که پاره‌خط AB از آن به زاویه حداکثر دیده شود.

بخش ۱۶. قطب و قطبی

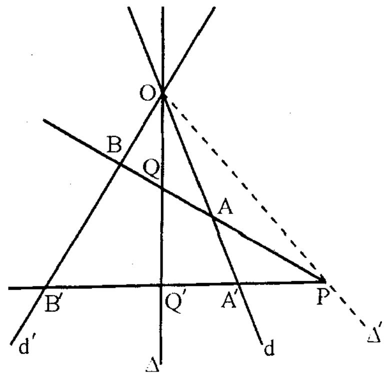
۱۶ـ۱ـ۱. تعریف

تمام خط‌هایی که از یک نقطه می‌گذرند و تمام خط‌های موازی با هم را یک دسته خط می‌نامند. نقطه‌ای که تمام خط‌ها از آن نقطه می‌گذرند مرکز دسته خط نامیده می‌شود.

۱۶ـ۱ـ۲. گزاره

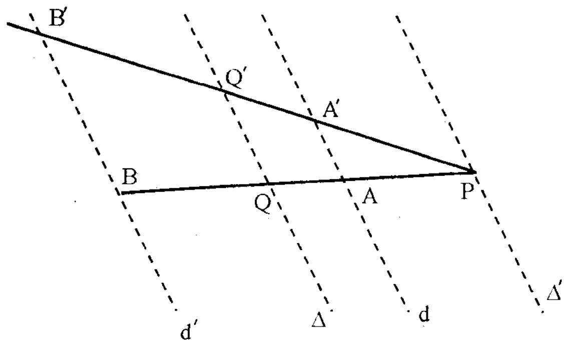
نقطه P و دو خط d و d' در یک صفحه واقع می‌باشند. مکان هندسی مزدوج توافقی نقطه P نسبت به نقطه تقاطع هر خط از دسته خط به مرکز P که d و d' را قطع می‌کند خط راستی است که با دو خط d و d' عضو یک دسته خط است.

از نقطه P قاطعی رسم می‌کنیم که d و d' را در نقاط A و B قطع کند. نقطه Q مزدوج توافقی (همساز) P را نسبت به A و B تعیین می‌کنیم و Q را به نقطه O وصل می‌کنیم این خط Δ مکان هندسی نقاط همساز P نسبت به دو خط d و d' می‌باشد. زیرا دستگاه $(O, AB.PQ) = -۱$ همساز بوده و هر خط دیگری مانند $PA'B'$ را که در نقطه Q' قطع نماید آنگاه Q' نقطه همساز P نسبت به A' و B' است.



(۱-۱۶)

تعریف: خط Δ را قطبی نقطه P نسبت به دو خط d و d' می‌نامند. خط Δ و d و d' جزء یک دسته خط همساز می‌باشند.



(۲-۱۶)

از آن چه گفته شد نتایج زیر بدست می‌آید:

۱ـ اگر P روی یکی از دو خط باشد قطبی آن همان خط است و اگر P نقطه مشترک آن دو خط باشد قطبی آن همان نقطه است.

۲ـ اگر دو خط با هم موازی و نقطه P به فاصله مساوی از آن دو خط باشد قطبی ندارد (یا نقطه دزارگ است).

۱۶ـ۱ـ۳. تعریف

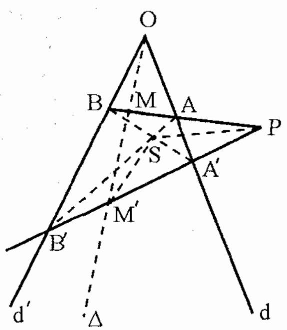
اگر خط Δ قطبی نقطه P نسبت به دو خط d و d' باشد. نقطه p را قطب خط Δ نسبت به آن دو خط می‌نامند.

۴_۱_۱۶

هر نقطه نسبت به دو خط تنها یک قطبی دارد و قطبی با آن دو خط عضو یک دسته خط می‌باشند. بنابراین اگر خط Δ و d و d' عضو یک دسته خط باشند قطب‌های خط Δ نسبت به آن دو خط بی‌شمار بوده که همگی آنها روی خطی واقع می‌باشند که با آن سه خط یک دستگاه همساز می‌سازند.

۲_۱۶. گزاره

قاطع‌هایی که از نقطه معلوم P رسم می‌شوند دو خط d و d' را به ترتیب در A و B و A' و B' قطع نماید در این حالت نقطه S محل برخورد دو خط AB' و BA' بر روی قطبی نقطه P نسبت به آن دو خط قرار دارد.



(۱۶-۳)

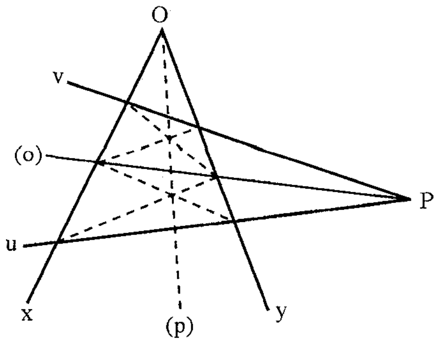
برهان: M و M' مزدوج‌های توافقی نقطه P را نسبت به نقاط A و B و A' و B' بدست می‌آوریم بنابراین MM' قطبی نقطه P است که از نقطه O می‌گذرد. اگر S بر Δ واقع نباشد آنگاه دستگاه‌های

$$S(ABPM) = -۱$$
$$S(A'B'PM') = -۱$$

چون سه شعاع دستگاه بر هم منطبق است پس شعاع چهارم دستگاه یعنی $SM = SM'$ پس S روی خط MM' یا قطبی نقطه P واقع است.

در حالتی که نقطه P بین دو خط d و d' بوده و یا دو خط d و d' با هم موازی باشند اثبات به همین شیوه است.

۱۶ـ۳. نتیجه: گزاره دزارگ



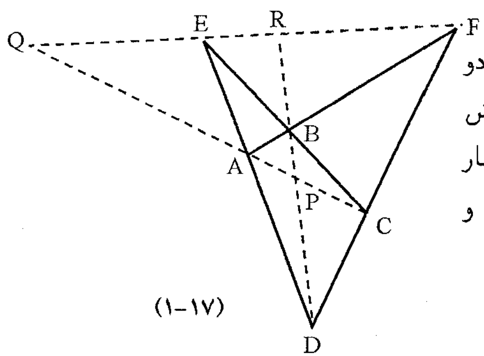
(۴-۱۶)

اگر از نقطه P خطوطی رسم کنیم که اضلاع زاویه xoy را قطع نماید مکان هندسی نقطه برخورد قطرهای چهار ضلعی‌های حاصل روی قطبی نقطه P نسبت به اضلاع زاویه واقع است.

بنابراین قطبی نقطه P نسبت به زاویه xoy خط (p) از نقطه O می‌گذرد. و قطبی نقطه O نسبت به اضلاع زاویه VPU خط (O) از نقطه P می‌گذرد.

بخش ۱۷. چهارضلعی

۱ـ۱۷



(۱-۱۷)

چهارضلعی کامل از تقاطع چهار خط دو به دو متقاطع تشکیل می‌شود که دارای سه قطر و شش راس است AC و BD و EF قطرهای چهار ضلعی کامل و نقاط A و B و C و D و E و F شش راس چهار ضلعی کامل است.

۱۷ـ۲. گزاره

هر قطر چهار ضلعی کامل به وسیله دو قطر دیگر به نسبت همساز تقسیم می‌گردد.

نقطه Q قطب و خط RD قطبی Q نسبت به دو خط DF و DE می‌باشد و حکم ثابت است.

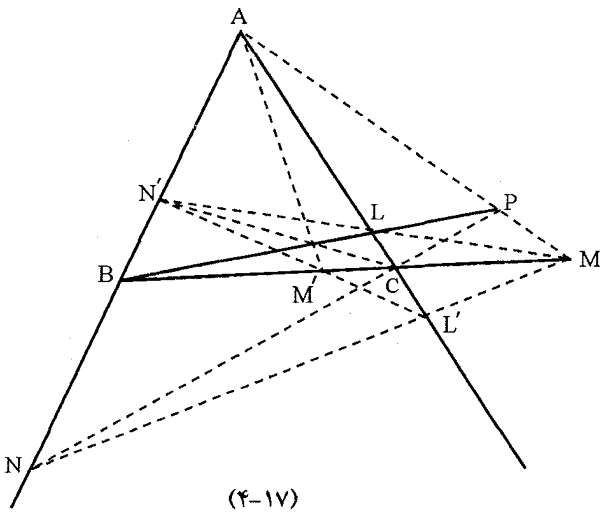
۳ـ۱۷

در هر چهار ضلعی کامل وسط‌های سه قطر بر یک خط راست واقع هستند. اگر در مثلث EDF ارتفاع‌های آن را رسم کنیم و پای سه ارتفاع را F' و C' و D' بنامیم و نقطه همرسی ارتفاعات H باشد. بنابر قضیه قوت نقطه داریم $HE.HE' = HC.HC' = HD.HD'$ اما $HD.HD'$ قوت نقطه H

نسبت به دایره‌ای به قطر BD و $HC.HC'$ قوت نقطه H نسبت به دایره به قطر AC و $HE.HE'$ قوت نقطه H نسبت به دایره‌ای به قطر EF است. یعنی H نسبت به سه دایره قوت‌های برابر دارد. چون درباره سه مثلث دیگر هم این موضوع صادق است. مرکزهای ارتفاعیه چهار مثلث که با اضلاع چهار ضلعی تشکیل می‌شوند نسبت به سه دایره قوت‌های مشترک دارند بنابراین هر سه دایره دارای یک محور اصلی می‌باشند پس مرکز آنها روی یک خط راست واقع است.

۴_۱۷

در صفحه مثلث ABC نقطه دلخواه P را درنظر می‌گیریم. خط PC با AB در نقطه N و خط PA با BC در نقطه M و خط PB با AC در نقطه L برخورد می‌کند. اگر $(AB, NN') = -۱$ و $(ACLL') = -۱$ و $(BC, MM') = -۱$ باشد آنگاه نقاط (M, L', N) و (M, L, N') و (N', M', L') و (N, M', L) هر سه نقطه بر یک خط راست واقع می‌باشد.



(۴-۱۷)

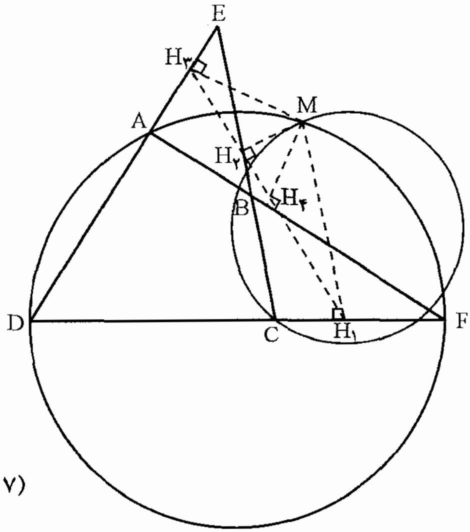
در چهار ضلعی کامل $N'LCB$ خط AM' قطبی نقطه M نسبت به دو ضلع AB و AC است. در چهارضلعی کامل $APCB$ خط MLN' قطبی نقطه N نسبت به دو ضلع AM و BM بوده پس $(NN'BA) = -۱$ است. اگر $(ACLL') = -۱$ آنگاه $M(AC.LL') = -۱$ و $M(NN'BA) = ۱$پس شعاع ML' بر شعاع MN منطبق است. یعنی سه نقطه $NL'M$ بر یک خط واقع می‌باشد. و به همین ترتیب برای هر سه نقطه دیگر نیز حکم ثابت است.

۱۶ـ۴ـ۱. تعریف

خط $L'M'N'$ را قطبی نقطه P نسبت به مثلث ABC می‌نامند.

۱۷ـ۵

دایره‌های محیطی چهار مثلث که از تقاطع چهار خط دو به دو متقاطع پدید بیایند از یک نقطه می‌گذرند.



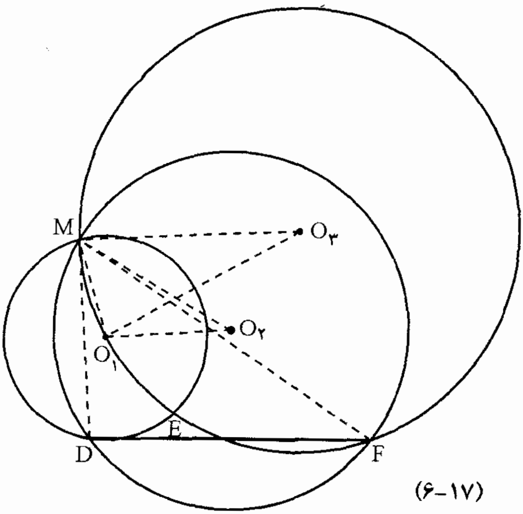
(۵-۱۷)

اگر نقطه M محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های BCF و ADF باشد. تصاویر نقطه M روی سه ضلع مثلث ADF نقاط $H_۱$ و $H_۲$ و $H_۳$ می‌باشند که بنابر قضیه خط سیمسن بر یک خط راست واقع می‌باشند یعنی هر چهار نقطه $H_۱$ و $H_۲$ و $H_۳$ و $H_۴$ روی یک خط راست واقع می‌باشند. اما $H_۴$ و $H_۳$ و $H_۱$ خط سیمسن مثلث EDC را می‌سازند پس نقطه M روی دایره محیطی مثلث EDC نیز می‌باشد بدین ترتیب نقطه M روی هر چهار دایره محیطی می‌باشد.

۱۷ـ۶

مرکز دایره‌های محیطی چهار مثلث که از تقاطع چهار خط دو به دو متقاطع پدید می‌آیند و نقطه مشترک این چهار دایره همگی بر یک دایره واقع هستند.

برای اثبات این گزاره: از این لم استفاده می‌کنیم اگر سه دایره دو به دو متقاطع که از یک نقطه می‌گذرند نقاط تقاطع آنها بر یک خط راست واقع باشد آنگاه مراکز این سه دایره و نقطه مشترک آنها همگی بر یک دایره واقع می‌باشند.



(۶-۱۷)

اگر O_1 مرکز دایره محیطی مثلث MDE و O_2 مرکز دایره محیطی مثلث MDF و O_3 مرکز دایره محیطی مثلث MFE بوده و DEF خطی راست باشد آنگاه داریم دو مثلث MO_1O_3 و MDF متشابه می‌باشند پس $M\hat{O}_3O_1 = M\hat{F}D = \frac{\widehat{ME}}{2}$ و زاویه $M\hat{O}_2O_1 = \frac{\widehat{ME}}{2}$ بنابراین چهار ضلعی $MO_1O_2O_3$ محاطی می‌باشد. و حکم اصلی مسئله ثابت است.

۱۷ـ۷. مسائل

۱. در چهار ضلعی $ABCD$ ، P محل برخورد BC و AD و نقطه Q محل برخورد CA و BD و نقطه R محل برخورد AB و CD می‌باشد. ثابت کنید نقاط برخورد خطوط BC با QR و AC با RP و AB با PQ بر یک خط راست واقع می‌باشند.

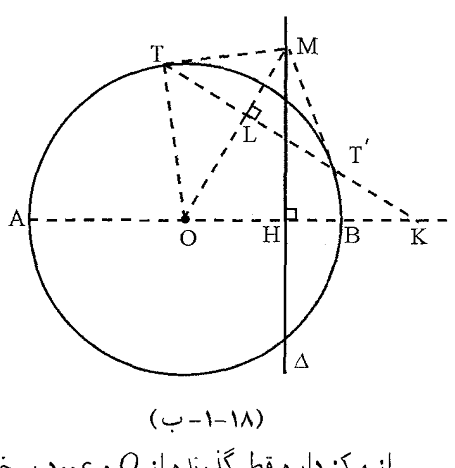
۲. چهار ضلعی $ABCD$ در یک دایره محاط است. O_1، O_2 و O_3 و O_4 مراکز دایره‌های محاطی مثلث‌های ABC و BCD و CDA و DAB و H_1 و H_2 و H_3 و H_4 مراکز ارتفاعیه این چهار مثلث می‌باشند. ثابت کنید چهار ضلعی $O_1O_2O_3O_4$ مستطیل بوده و چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ با چهارضلعی $ABCD$ برابر است.

۳. در مثال (۱۷ـ۵) ثابت کنید چهار مراکز ارتفاعیه مثلث‌های پدید آمده بر یک خط راست واقع می‌باشند.

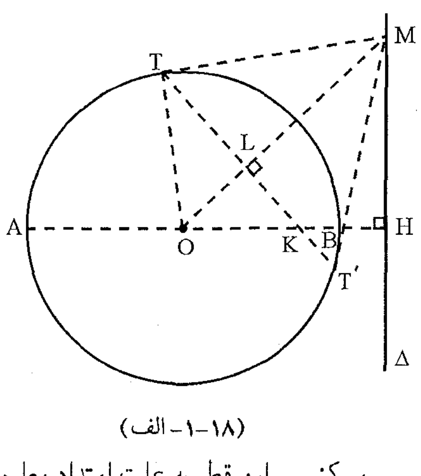
بخش ۱۸. قطب و قطبی نسبت به دایره

۱۸ـ۱. مسئله

خط Δ و دایره $C(O,R)$ در صفحه مفروضند نقطه متحرک M خط Δ را می‌پیماید. از نقطه متغیر M دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم می‌کنیم ثابت کنید تمام وترهای TT' از یک نقطه ثابت در صفحه می‌گردد.



(۱۸ـ۱ـ ب)



(۱۸ـ۱ـ الف)

از مرکز دایره قطر گذرنده از O و عمود بر خط Δ را رسم می‌کنیم. این قطر به علت امتداد معلوم Δ قطری ثابت و معین در صفحه است و فاصله OH مرکز دایره تا خط Δ مقداری معلوم است. وترهای متغیر TT' با قطر معلوم AB در نقطه K برخورد می‌کنند. چهارضلعی $LKHM$ و $LHKM$ هر دو محاطی می‌باشند.

بنابراین $OK.OH = OL.OM$ که قوت نقطه O نسبت به دایره‌های محیطی این چهارضلعی می‌باشد. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OTM بنابراین $OT^{۲} = OL.OM = R^{۲}$ $OK.OH = R^{۲}$ به عبارت دیگر $OK = \frac{R^{۲}}{OH}$. یعنی جای نقطه K روی امتداد قطر معلوم AB منحصر بفرد است. از رابطه فوق و از روی دو شکل (۱۸ـ۱ـ الف) و (۱۸ـ۱ـ ب) معلوم می‌شود اگر Δ دایره را قطع نماید نقطه K داخل دایره و اگر Δ دایره را قطع کند نقطه K در خارج از دایره است.

۱۸ـ۱ـ۱ نتیجه

اگر خط Δ از مرکز دایره بگذرد نقطه K به نقطه بی‌نهایت (دزارگ) قطر AB منتقل می‌شود. چون وتر TT' به موازات قطر AB خواهد شد.

۱۸ـ۱ـ۲. گزاره

چون $OK.OH = R^{۲}$ می‌باشد پس $OK.OH = OA^{۲} = OB^{۲}$ بنابر قانون نیوتون برای چهار نقطه A و B و H و K خواهیم داشت

$$(AB, KH) = -۱$$

یعنی چهار نقطه A و B و K و H چهار نقطه همساز می‌باشند.
به عبارت دیگر قطر AB توسط دو نقطه H و K به نسبت همساز تقسیم شده است.

۱۸ـ۲. گزاره

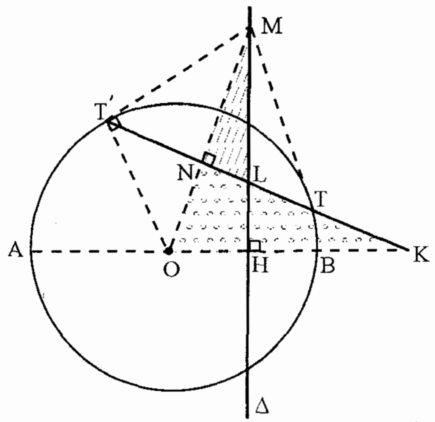
اگر از نقطه K قاطع متغیری بر دایره مثل KTT' رسم کنیم و از نقاط برخورد T و T' دو مماس بر دایره رسم کنیم مکان هندسی محل برخورد این مماس‌ها خطی عمود بر قطرگذرنده از نقطه K می‌باشد (خط Δ). برای اثبات مراحل گزاره (۱۸ـ۱) را معکوس نمایید. که این خط در نقطه H قطرگذرنده از نقطه K را به نسبت همساز تقسیم می‌نماید.

۱۸ـ۳.

اگر از نقطه مفروض K قاطع متغیری بر دایره رسم نماییم تا دایره را در نقاط T و T' قطع نماید مکان هندسی نقطه چهارم همساز K نسبت به T و T' خطی عمود بر قطرگذرنده از نقطه K می‌باشد (خط

Δ).

برهان: قطرگذرنده از نقطه K را تعیین می‌کنیم پس نقطه H را برای دستگاه $(AB; HK) = -1$ تعیین می‌کنیم و از نقطه H خط Δ را عمود بر AB فرود می‌آوریم و ادعا می‌کنیم خط Δ جواب است. از نقاط T و T' مماس‌های بر دایره رسم می‌کنیم این مماس‌ها در نقطه M روی Δ متقاطع می‌باشند (۱۸ـ۲).



(۱۸-۳)

دو مثلث ONK و MNL متشابه‌اند و داریم

$$\frac{OL}{ON} = \frac{MN}{NK} \Rightarrow ON.MN = OL.NK$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه OTM خط $T'N$ ارتفاع است پس

$$NT'^{2} = NT^{2} = NL.NK$$

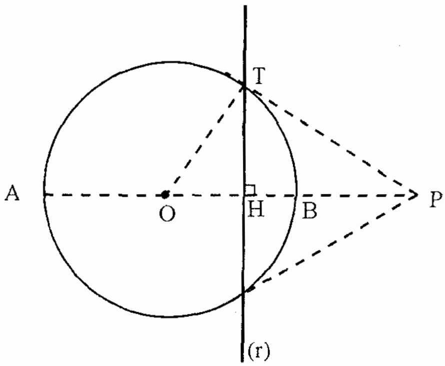
پس بنابر قانون نیوتون چهار نقطه $(T'TLK) = -1$ و نقطه L نقطه چهارم همساز K نسبت به T و T' است که روی Δ واقع شده است.

در حالتی که K در داخل دایره واقع بوده استدلال مشابه حالت فوق است و خط Δ در خارج از دایره واقع می‌شود.

۱۸ـ۴. تعریف

نقطه K را قطب و خط Δ را قطبی نقطه K نسبت به دایره می‌نامیم

۱۸_۵



(۱۸−۵)

اگر P قطب و خط (p) قطبی آن نسبت به دایره باشد خط PT بر دایره مماس است چون $OH.OP = OT^{2} = R^{2}$.

۱۸_۶

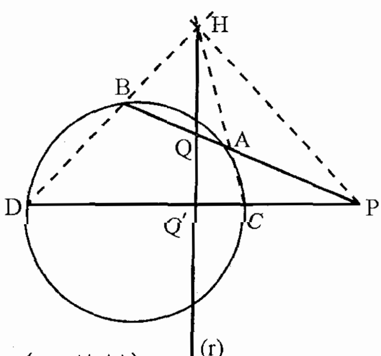
اگر قطب داخل دایره باشد قطبی آن دایره را قطع نمی‌کند و اگر قطب خارج دایره باشد قطبی آن با دایره متقاطع است.

۱۸_۶_۱. نتیجه

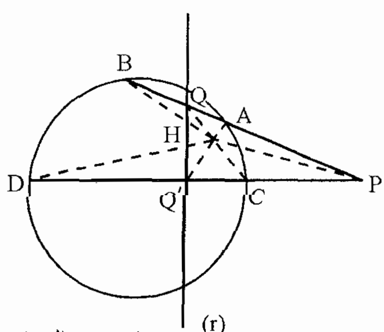
دایره‌ای به قطر PT در شکل (۱۸_۵) بر دایره $C(O.R)$ عمود است.

۱۸_۷. گزاره

اگر از نقطه P دو قاطع PAB و PCD را بر دایره رسم کنیم مکان هندسی محل برخورد خطوط (BC, AD) و (BD, AC) قطبی نقطه P نسبت به دایره است.



(۱۸−۷− ب)

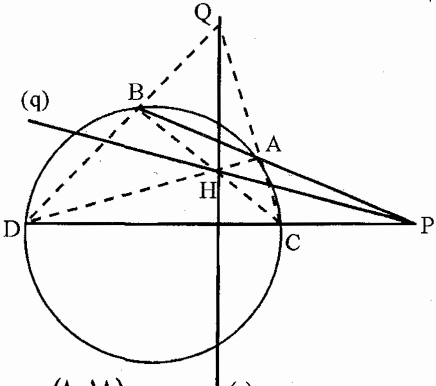


(۱۸−۷− الف)

برهان: چون $(BA.QP) = -1$ و $(DCQ'P) = -1$ پس دو دستگاه $H(BA, QP) = -1$ و $H(DC, Q'P) = -1$ و به دلیل آنکه شعاع‌های (HC, HQ) و (HA, HD) و $(HP.HP)$ بر

هم منطبق باشند.

شکل ۱۸ـ۷. ب) فرض کنیم خط AC با قطبی در نقطه H برخورد نماید چون $H(BA.QP) = -1$ و $H(DC.QP) = -1$ و سه شعاع HP و (HA, KC) و (HQ, HQ') بر هم منطبق می‌باشند پس شعاع چهارم (HD, HB) نیز از دو دستگاه بر هم منطبق است.



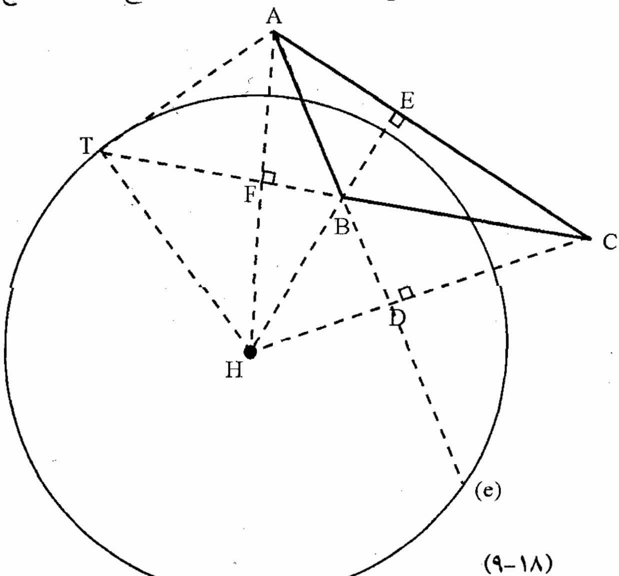
(۸-۱۸)

۱۸ـ۸. نتیجه

اگر نقطه Q بر قطبی نقطه P واقع باشد. (p). (q) قطبی نقطه Q از قطب P می‌گذرد و بالعکس و نقطه H قطب خط PQ نسبت به دایره است.

۱۸ـ۹. مسئله:

برای مثلث ABC یک دایره چنان بیابید که قطبی هر راس نسبت به آن دایره یک ضلع مثلث باشد. اگر H مرکز ارتقاعیه مثلث ABC باشد و A دایره‌ای رسم کنیم به مرکز H که AB قطبی نقطه C باشد. چهارضلعی $(CD.FA)$ محاطی بوده $HT^2 = HF.HA = HD.HC = R^2$ بنابراین ضلع BC قطب نقطه A بوده بنابراین خط AC قطبی نقطه B است که در خارج از دایره واقع می‌باشد.

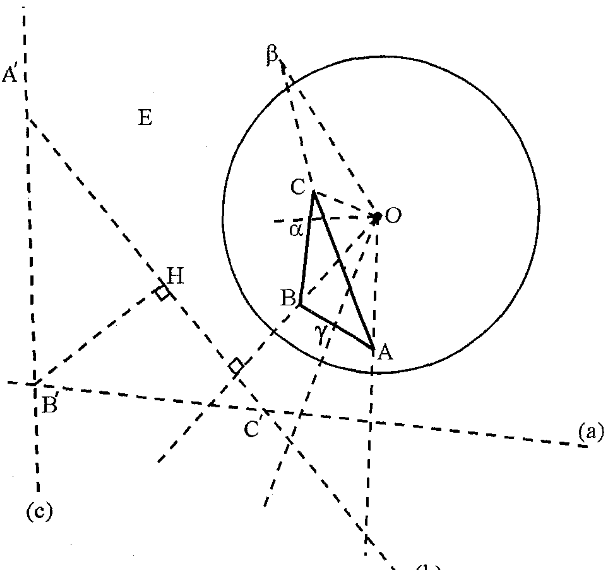


(۹-۱۸)

۱۸ـ۱. مثال:

با استفاده از تبدیل قطبی چون می‌توان خط را به نقطه و نقطه را به خط تبدیل کرد بعضی از مسائل هندسی که در آنها زوایای قائم نقش مهمی را دارند را می‌توان به کمک آن آسان‌تر حل نمود. مثال زیر نمونه‌ای از این نوع مسائل است.

۱. هرگاه از یک نقطه واقع در صفحه مثلثی به سه راس مثلث وصل کنیم و از آن نقطه بر خط واصل به هر راس عمودی اخراج کنیم و امتداد دهیم تا ضلع مقابل به آن راس را در نقطه‌ای قطع کند سه نقطه که بدین ترتیب بدست می‌آیند به یک خط راست واقع می‌باشد.



(۱۰-۱۸)

مثلث ABC و نقطه O مفروضند از O به A وصل کرده و خطی از O بر OA عمود می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را در α قطع کند و به طریق مشابه β و γ را هم بدست می‌آوریم. از نقطه O دایره دلخواهی رسم کرد و رئوس A و B و C را قطب فرض کرده و a و b و c قطبی‌های آن‌ها را نسبت به دایره بدست می‌آوریم این قطبی‌ها مثلث $A'B'C'$ را تشکیل می‌دهند. حال اگر ثابت کنیم α و β و γ قطب‌های سه ارتفاع مثلث $A'B'C'$ می‌باشند ، چون قطبی‌ها در یک نقطه همرسند پس قطب‌های آنها بر یک خط راست واقع می‌باشند.

از طرف دیگر اگر ارتفاع $B'H$ را درنظر بگیریم. قطب این ارتفاع که موازی با OB می‌باشد بر قطبی B' یعنی بر AC واقع می‌باشد و از طرف دیگر قطب هر خط بر روی عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم شود یعنی قطب ارتفاع $B'H$ واقع است بر روی خطی که از O بر $B'H$ یا بر OB عمود

بشود. پس β قطب ارتفاع راس B' یعنی $B'H$ است و همین‌طور ثابت می‌شود α و γ قطب‌های ارتفاعات راس‌های A'، C' آن مثلث می‌باشند و قضیه ثابت است.

۱۸ـ۱۱. مسائل برای حل

۱. در صفحه دایره (O) نقطه P روی قطر AOB و Δ قطبی آن نسبت به دایره که AB را در Q قطع می‌کند مفروض است. از نقطه P قاطع PCD را رسم می‌کنیم اگر E و F تصاویر C و D روی AB باشند. ثابت کنید خطوط CE و DF قطبی‌های نقاط E و F نسبت به دایره به قطر PQ می‌باشند.

۲. از نقطه همرسی قطرهای AB' و BA' یک ذوزنقه محاط در دایره خط CC' را به موازات دو قاعده AA' و BB' رسم می‌کنیم. ثابت کنید مماس‌های نقاط C و C' از محل همرسی دو ضلع AB و $A'B'$ می‌گذرد.

۳. در دایره (O) وسط‌های دو وتر AB و CD را M و N می‌نامیم. اگر AB یکی از نیمسازهای زاویه $C\hat{M}D$ باشد ثابت کنید CD یکی از نیمسازهای زاویه ANB است.

۴. چهار ضلعی $ABA'B'$ در دایره (O) محاط است. AB ثابت و $A'B'$ تغییر می‌کند. AA' و BB' یکدیگر را در E و AB' و BA' یکدیگر را در F قطع می‌کنند ثابت کنید EF از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۵. دایره (O) و نقطه D در صفحه مفروضند. دایره متغیر (C) از دو نقطه O و D می‌گذرد. دایره (O) دایره (C) را در نقاط A و B قطع می‌کند. از A و B دو مماس بر دایره (O) رسم می‌کنیم که یکدیگر را در M قطع می‌کند مکان نقطه M را تعیین کنید و نشان دهد AB از نقطه ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۶. نقطه ثابت A و قطر متغیر MN از دایره (O) مفروض‌اند. AM و AN دایره را در M' و N' قطع می‌کند. خطوط MN' و NM' یکدیگر را در E و MN و $M'N'$ یکدیگر را در F قطع می‌کند الف) مکان E را تعیین کند ب) ثابت کنید دایره AMN از نقطه ثابتی می‌گذرد. ج) ثابت کنید خط $M'N'$ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۷. از نقطه M دو قاطع MAA' و MBB' را نسبت به دایره (O) رسم می‌کنیم و اگر AB از نقطه

ثابت P بگذرد ثابت کنید $A'B'$ نیز از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۸. گزاره بریانشن: در هر شش ضلعی محیطی قطرهایی که راس اول را به راس چهارم و راس دوم را به راس پنجم و راس سوم را به راس ششم مربوط می‌سازند در یک نقطه همرسند.

۹. در مثلث ABC دو ارتفاع BE و CF را رسم می‌کنیم خط EF با BC در نقطه K متقاطع است. اگر D پای ارتفاع AD باشد و نقطه M وسط ضلع BC ثابت کنید $MB^2 = MD.MK$

۱۰. در مثلث ABC ارتفاع‌های AD و BE و CF در نقطه H مشترکند. امتداد EF ضلع BC را در Q قطع می‌کند اگر A' وسط BC باشد. ثابت کنید H محل برخورد ارتفاعات مثلث $AA'Q$ هم می‌باشد.

۱۱. نیم‌دایره‌ای به مرکز (O) و قطر AB مفروض است. از نقطه M روی امتداد AB که $MB < MA$ قاطعی رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در C و D قطع کند به طوری که $MD < MC$ دایره‌های محیطی مثلث‌های AOC و DOB یکدیگر را علاوه بر نقطه O در نقطه K نیز قطع می‌کند ثابت کنید MK بر KO عمود است (المپیاد بالکان ـ انتخابی المپیاد داخلی شهریور ۷۵ ـ نوبت سوم).

۱۲. مثلث حاده‌الزاویه ABC مفروض است. ارتفاعات وارد از راس‌های A و B و C به ترتیب اضلاع مقابل را در D و E و F قطع می‌کند. از D خطی به موازات EF رسم می‌کنیم تا اضلاع AC و AB را به ترتیب در Q و R قطع کند خط EF نیز ضلع BC را در P قطع می‌کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث PQR از وسط ضلع BC می‌گذرد. (پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور ـ شهریور ۷۶ـ نوبت سوم)

۱۳. مثلث ABC مفروض است. D و E را به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان انتخاب می‌کنیم که $DE \parallel BC$. P را نقطه دلخواهی در داخل مثلث ADE انتخاب کرده PB و PC را وصل می‌کنیم تا ضلع DE را در نقاط F و G قطع کنند. اگر O_1 و O_2 مراکز دایره‌های محیطی مثلث‌های PDG و PFE باشند ثابت کنید O_1O_2 بر AP عمود است. (سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور ـ اسفند ۷۴ ـ نوبت دوم).

۱۴. چهار ضلعی محاطی $ABCD$ را که در دایره‌ای به مرکز O محاط است درنظر می‌گیریم. E نقطه تقاطع قطرهای AC و BD و P را نقطه‌ای درون چهار ضلعی می‌گیریم به طوری که $P\hat{A}B + P\hat{C}B = P\hat{B}C + P\hat{D}C = 90$ ثابت کنید P و O و E بر یک خط راست واقع می‌باشند. (سیزدهمین المپیاد کشور ـ اردیبهشت ۷۵ـ نوبت سوم)

۱۵. مثلث ABC مفروض است. D را نقطه‌ای روی امتداد BC (نزدیک C) می‌گیریم به طوری که $AC = CD$ باشد. فرض کنید P نقطه تقاطع دوم دایره محیطی ACD با دایره‌ای به قطر BC باشد. E را نقطه تقاطع BP با AC و F را نقطه تقاطع CP با AB می‌گیریم. ثابت کنید D و E و F هم خط می‌باشند. (پانزدهمین المپیاد کشوری ـ دی ۱۳۷۷ ـ امتحان پنجم)

۱۶. دایره C و دو نقطه دلخواه M و N را روی آن درنظر بگیرید فرض کنید L_1 مماس در نقطه M و L_2 مماس در نقطه N بر دایره C باشند. خطوط دلخواه x و y را به ترتیب از M و N می‌گذرانیم تا x خط l_2 را در نقطه P_1 و y خط L_1 را در نقطه P_2 قطع کنند.

اگر P_1P_2 خط MN را در α قطع کنند و مماس در نقاط تقاطع دوم x با دایره خط L_1 را در β و مماس در تقاطع دوم y با دایره L_2 را در γ قطع کند ثابت کنید α و β و γ هم خط می‌باشند. (پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور ـ دی ۷۷ ـ امتحان پنجم)

۱۷. دو دایره α_1 و α_2 درون دایره α قرار داشته و بر α در نقاط متمایز M و N به ترتیب مماس می‌باشند. دایره α_1 از مرکز دایره α_2 می‌گذرد. خطی که از دو نقطه تقاطع دو دایره α_1 و α_2 می‌گذرد α را در A و B قطع می‌نماید. خطوط MA و MB دایره α_1 را در E و F قطع می‌نماید ثابت کنید EF بر α_2 مماس است (المپیاد جهانی رومانی . ۱۹۹۹).

۱۸. نیم دایره Γ در یک طرف خط راست l رسم شده است و مرکز آن روی این خط واقع است. C و D نقاطی روی Γ هستند. مماس‌های Γ در نقاط C و D خط l را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. E را محل تقاطع AC و BD و F را پای عمود وارد از نقطه E بر خط می‌نامیم. ثابت کنید EF نیمساز زاویه CFD است. (المپیاد ریاضی جهانی ـ هنگ کنگ)

۱۹. سه نقطه A و B و C به همین ترتیب بر یک خط راست واقع می‌باشند دایره متغیری از دو نقطه B و C می‌گذرد. از A قاطع متغیر AEF را بر دایره رسم می‌کنیم از نقطه E وتر EG را موازی AB رسم می‌کنیم از نقطه E به A وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه K قطع نماید ثابت کنید وترهای FK همگی از نقطه ثابتی در صفحه می‌گذرند.

۲۰. (گزاره پروانه) = در دایره $C(O, R)$ وتر EF مفروض است. اگر G وسط EF باشد دو وتر دلخواه AB و CD را از نقطه G می‌گذرانیم. AD و CB با EF در نقاط M و N برخورد می‌نمایند. ثابت کنید $GM = GN$.

۲۱. مثلث ABC در دایره (O) محاط است. از سه راس مثلث سه خط بر دایره مماس می‌کنیم تا

مثلث $A'B'C'$ بدست آید. نقطه دلخواه M را روی دایره اختیار کرده و از آن مماس Δ را بر دایره رسم می‌کنیم. از مرکز دایره سه حط به موازات سه ضلع ABC می‌کشیم تا خط Δ را در نقاط A'' و B'' و C'' قطع نمایند ثابت کنید سه خط $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ در یک نقطه همرسند.

۲۲. نقطه A و دایره $C(O,R)$ مفروض است. از A قاطع متغیری رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع نماید. از نقاط M و N دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه E قطع کنند. از نقطه A خطی موازی با مماس NE می‌کشیم تا مماس ME را در نقاط K قطع نماید مکان هندسی نقطه K چیست؟

۲۳. سه نقطه A و B و C به همین ترتیب بر یک خط راست واقع می‌باشند دایره متغیری از دو نقطه B و C می‌گذرانیم و از A مماس‌های متغیر AT و AT' را بر دایره رسم می‌کنیم مکان هندسی وسط وترهای TT' را تعیین کنید.

۲۴. دایره‌ای به قطر BC مفروض است. نقطه A واقع بر دایره است. E قرنیه A را نسبت BC به دست می‌آوریم در مثلث ABE ارتفاع AX را رسم می‌کنیم. اگر Y وسط AX باشد از B به X وصل کرده تا دایره را در Z قطع کند. از نقطه A مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در D قطع نماید. ثابت کنید دایره محیطی مثلث AZD بر خط BC مماس است. (پیشنهادی المپیاد جهانی ۱۹۹۸).

۲۵. پاره‌خط AB مفروض است در نقطه B خط Δ را عمود بر AB رسم می‌کنیم. دایره‌ای که مرکز آن روی Δ بوده و از نقطه A می‌گذرد را رسم می‌کنیم. این دایره خط Δ را در نقاط C و D قطع می‌نماید. در نقاط C و A دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه N قطع نمایند. ثابت کنید خط DN پاره‌خط AB را نصف می‌کند.

۲۶. مثلث ABC در دایره (O) محاط می‌باشد. از دوراس B و C دو خط بر دایره مماس می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع نماید. از نقطه M خطی به موازات مماس در راس A می‌کشیم تا امتداد دو ضلع AB و AC را در نقاط A' و B' قطع نماید ثابت کنید $A'M = MB'$.

۲۷. در مثلث ABC دایره‌ای به قطر ارتفاع BD رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و BC را در نقاط K و L قطع نماید. از نقاط K و L دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع نماید. ثابت کنید خط BM ضلع AC رانصف می‌کند.

۲۸. از نقطه مفروض A دو مماس AM و AN را بر دایره $C(O,R)$ رسم می‌کنیم. از نقطه A قاطع AKL را بر دایره رسم می‌کنیم و سپس خط دلخواه Δ را موازی AM می‌کشیم تا دو خط MK و ML را در نقاط P و Q قطع نماید ثابت کنید خط MN از وسط PQ می‌گذرد.

۲۹. دایره محاطی مثلث ABC دو نقطه M برضلع BC مماس است. MK قطری از دایره است. خط AK با دایره دو نقطه P تقاطع دارد. ثابت کنید مماس در نقطه P بر دایره ضلع BC را نصف می‌کند.

۳۰. دو نقطه A و B بر دایره $C(O,R)$ قرار دارند. از دونقطه A و B دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه C قطع نمایند. دایره‌ای از نقطه C چنان می‌گذرانیم که بر AB در نقطه B مماس باشد. این دایره دایره اول را در نقطه M قطع می‌کند ثابت کنید خط AM پاره‌خط BC را نصف می‌کند.

بخش ۱۹. دستگاه‌های ناهمساز ـ روش‌های تصویری در حل مسائل هندسه

مقدمه

استفاده از دستگاه‌های ناهمساز یکی از روش‌های غیرمتعارف و در عین حال بسیار موثر وکارآمد درحل مسائل هندسه مربوط به نقاط برخورد خطوط و دوایر و نقاط واقع بر یک خط و خطوط همرس می‌باشد.

ابتدا به مسائلی از این‌گونه می‌پردازیم.

۱. در مثلث ABC، H نقطه‌ای واقع بر ارتفاع AD می‌باشد خطوط BH و CH اضلاع مثلث را در نقاط E و F قطع می‌نمایند. ثابت کنید خط AD نیمساز زاویه FDE است.

۲. در مربع $ABCD$ پاره‌خط EF با BC موازی است. ($F \in DC$ و $E \in AB$) نقطه دلخوه G را روی EF انتخاب می‌کنیم. خط AG با BF در نقطه H برخورد می‌کند. خط DH با BC در نقطه I برخورد می‌کند. ثابت کنید خط GI با AB موازیست.

۳. نقاط A و B و C روی خط l و نقاط D و E و F روی خط m قرار دارند $AE \cap BD = G$ و $AF \cap DC = H$ و $BF \cap CE = I$. ثابت کنید سه نقطه G و H و I هم‌خط می‌باشند.

۴. از نقطه P در خارج از دایره (O) مماس PA را بر دایره رسم می‌کنیم. از نقطه P قاطع PCD را نیز بر دایره می‌کشیم. AB قطر دایره است. از نقطه C خط CQ را موازی PO می‌کشیم $CQ \cap AB = E$

و $DQ \cap BD = F$. ثابت کنید $CE = CF$.

۵. پاره‌خط MN و دایره (O) مفروضند. از نقطه O عمود OP را بر MN فرود می‌آوریم. از نقطه P دو قاطع PQB و PCD را بر دایره رسم می‌کنیم $AD \cap MN = E$ و $BC \cap MN = F$. ثابت کنید نقطه P وسط EF است.

مسائل فوق را می‌توان با روش‌های هندسه مقدماتی دبیرستانی هم حل کرد ولی راه‌حل‌ها پیچیده و طولانی می‌شود در صورتی که با هندسه تصویری راه‌حل‌ها کوتاه‌تر و آسان‌تر می‌گردد.

۱۹ـ۱. چند مفهوم از هندسه تصویری و بخش ناهمساز

۱۹ـ۲. تعریف

هرگاه برای چهار نقطه A و B و C و D واقع بر یک خط نسبت $\frac{AC}{AD}/\frac{BC}{BD}$ یا $k = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ را داشته باشیم یک بخش ناهمساز داریم و آن را با نماد $(AB,CD) = k$ نشان می‌دهم.

۱۹ـ۳

از تعریف فوق نتایج زیر را نیز می‌توان بدست آورد.

الف) $(AB,CD) = (CD,AB) = K$

ب) $(BA,CD) = (AB,DC) = \frac{۱}{K}$

ج) $(AC,BD) = ۱ - K$

د) $(AB.CD) + (AC.BD) = ۱$

اثبات رابطه (د)

$$\frac{AC.BD}{AD.BC} + \frac{AB.CD}{AD.CB} = ۱$$

$$\frac{AC.CD}{AD.BC} - \frac{AB.CD}{AD.BC} = ۱ \Rightarrow \frac{AC.BD - AB.CD}{AD.BC} = \frac{AC(BC+CD) - AB \times CD}{AD.BC}$$

$$= \frac{(AC-AB)CD + AC.BC}{AD.BC} = \frac{BC.CD + AC.BC}{AD.BC} = ۱$$

هـ) $BCAD = ۱ - \frac{۱}{K}$

و) $CBAD = \frac{K}{K-۱}$

۱۹ـ۴.

اگر دو نقطه (D,C) یا (B,A) از این چهار نقطه بر هم منطبق باشند $K = ۱$ خواهد بود.

۱۹ـ۵.

اگر $K = -۱$ آنگاه $(AB.CD) = -۱$ یک بخش همساز را تشکیل می‌دهند که روابط زیر بین اجزاء آن برقرار است.

$$\frac{۲}{AB} = \frac{۱}{AC} + \frac{۱}{AD}$$

و اگر O وسط AB باشد

$$OA^۲ = OB^۲ = OC.OD$$

۱۹ـ۶.

در صورتی که در تقسیم ناهمساز $(ABCD) = K$ و $\frac{CA}{CB} = K$ باشد آنگاه $\frac{DB}{DA} = ۱$ بوده و نقطه D به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و به نقطه موهومی دزارگ تبدیل می‌شود.

بنابراین اگر $(ABCD) = (ABCX)$ باشد آنگاه نقطه X همان نقطه D است.

۱۹ـ۷.

اگر یک دسته خط از چهار نقطه ناهمساز $(ABCD) = K$ بگذرند یک دستگاه ناهمساز بوجود می‌آورند.

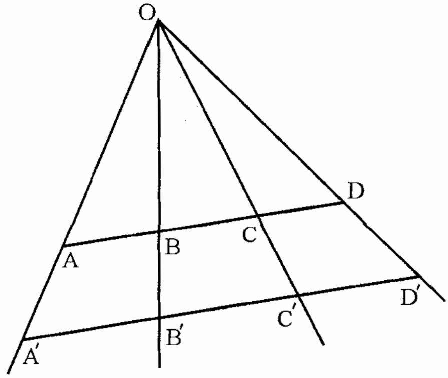
O را مرکز دستگاه و $(ABCD) = K$ را پایه دستگاه و خطوط OA و OB و OC و OD را شعاع‌های دستگاه ناهمساز می‌نامند.

۱۰ـ۷ـ۱. گزاره

اگر

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = K \rightarrow \frac{\sin A\hat{O}C}{\sin AOD} : \frac{\sin BOC}{\sin BOD} = K$$

اثبات:



(۱۹-۷)

$$\frac{AC}{AD}=\frac{SAOC}{SAOD}=\frac{\frac{1}{2}OA.OC.\sin AOC}{\frac{1}{2}OA.OD.\sin AOD}=\frac{OC.\sin AOC}{OD.\sin AOD}$$

$$\frac{BC}{BD}=\frac{SBOC}{SBOD}=\frac{OC.\sin BOC}{OD.\sin BOD}$$

$$(ABCD)=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{\sin(AOC)}{\sin(AOD)}:\frac{\sin BOC}{\sin BOD}=K$$

.۱۹_۷_۲

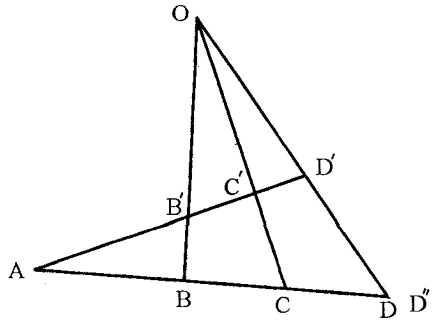
پس هرگاه خط دیگری دستگاه ناهمساز $O(ABCD)$ را قطع نماید آن چهار نقطه یک دستگاه ناهمساز معادل دستگاه ناهمساز اول بوجود می‌آورند چون

$$\frac{A'C'}{A'D'}:\frac{B'C'}{B'D'}=\frac{\sin A'OC'}{\sin A'OD'}:\frac{\sin B'OC'}{\sin B'O'D'}$$

.۱۹_۷_۳

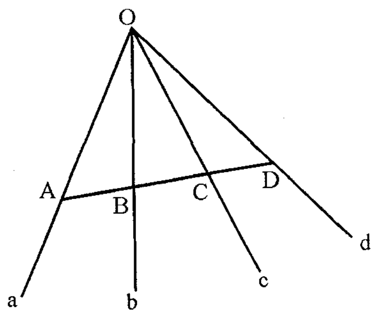
اگر دو بخش ناهمساز $(ABCD)=K$ و $(AB'C'D')=K$ آنگاه خطوط BB' و CC' و DD' در یک نقطه همرسند.

اثبات: اگر $BB'\cap CC'=O$ باشد و O را به D' و A وصل کنیم دستگاه ناهمساز $O(AB'C'D')$ را داریم که خط AB آن را در نقاط A و B و C و D'' قطع کرده است. بنابراین $(ABCD'')=K$ و چون $(ABCD')=K$ بنابراین نقطه D' بر D'' منطبق است.



(۱۹-۷-۳)

.۱۹ـ۷ـ۴

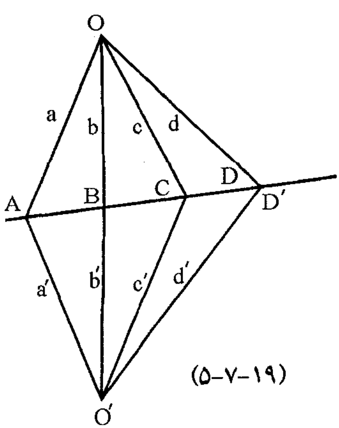


(۱۹-۷-۴)

تعریف شعاع‌های دستگاه ناهمساز $O(ABCD)$ را به صورت (ab, cd) نمایش می‌دهیم که چهار خط یک دسته خط را تشکیل می‌دهند.

.۱۹ـ۷ـ۵

در دو دستگاه ناهمساز معادل هرگاه یک جفت شعاع نظیر مشترک باشند. سه نقطه تقاطع سه جفت شعاع دیگر بر یک خط راست واقع می‌باشند.

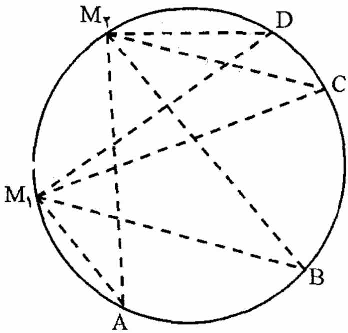


(۱۹-۷-۵)

اثبات: دو شعاع OB و OB' از دو دستگاه ناهمساز معادل بر هم منطبق می‌باشند. اگر $a \cap a' = A$ و $b \cap b' = B$ و $C \cap C' = C$ باشد خط ABC با شعاع‌های d و d' در نقاط D و D' تقاطع می‌نماید پس چون $O(ABCD)$ و $O'(ABCD')$ معادل هم می‌باشند بنابراین $(ABCD) = (ABCD')$ یعنی D بر نقطه D' منطبق است.

۱۹ـ۸. دستگاه ناهمساز در دایره

هرگاه چهار نقطه ثابت بر یک دایره قرار داشته باشند از هر نقطه از دایره که به این چهار نقطه وصل نماییم یک دستگاه ناهمساز ثابت پدید می‌آید.



(۸-۱۹)

فرض کنیم A, B, C, D بر دایره $C(O, R)$ واقع باشند اگر از دو نقطه متغیر M_1 و M_2 از دایره به این چهار نقطه ثابت وصل کنیم داریم

$$\frac{\sin A\hat{M}_1C}{\sin A\hat{M}_1D} : \frac{\sin B\hat{M}_1C}{\sin B\hat{M}_2C} = K$$

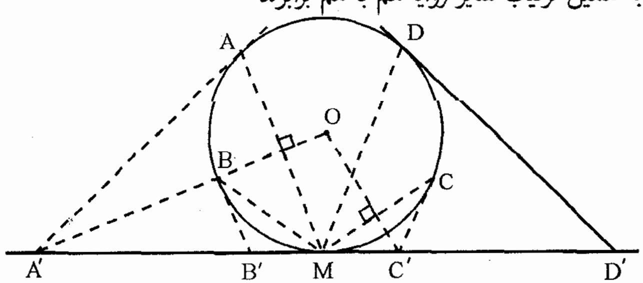
$$\frac{\sin A\hat{M}_2C}{\sin AM_2D} : \frac{\sin BM_2C}{\sin BM_2D} = K$$

اگر شعاع MA بر دایره مماس هم گردد باز حکم صادق است.

۱۹ـ۸ـ۱.

مماس‌های مرسوم از چهار نقطه ثابت واقع بر دایره بر هر خط مماس بر دایره یک تقسیم ناهمساز پدید می‌آورند

زاویه MAC با زاویه $A'OC'$ برابر است چون اضلاع زاویه بر هم عمودند بنابراین $\sin M\hat{A}C = \sin A'OC'$ و به همین ترتیب سایر زوایا هم با هم برابرند

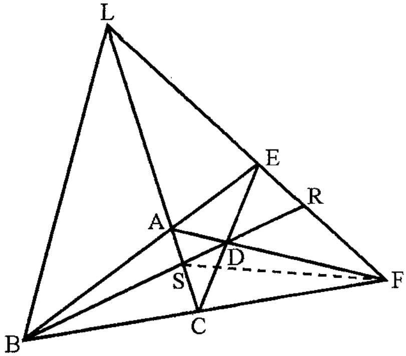


(۱-۸-۱۹)

پس نسبت ناهمساز $ABCD$ با نسبت ناهمساز $A'B'C'D'$ برابر است.

۱۹ـ۹. حل چند مسئله نمونه

۱. هر قطر چهار ضلعی کامل از تقاطع با دو قطر دیگر به نسبت همساز تقسیم می‌شود.
فرض کنیم چهار ضلعی کامل $ABCDEF$ با قطرهای AC و BD و EF باشد.



(۹-۱۹)

دستگاه ناهمساز $B(EFRL)$ خط LC را در نقاط A و S قطع کرده است پس

$$B(EFRL) = B(ACSL)$$

بنابراین

$$(EFRL) = (ACSL) \qquad (۱)$$

در نتیجه

$$D(EFRL) = D(CASL)$$

بنابراین

$$(EFRL) = (CASL) \qquad (۲)$$

بنابراین

$$\frac{AS}{AL} : \frac{CS}{CL} = \frac{CS}{CL} : \frac{AS}{AL}$$

$$\left(\frac{AS}{AL} : \frac{CS}{CL}\right)^{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{AS}{AL} : \frac{CS}{CL} = \pm ۱$$

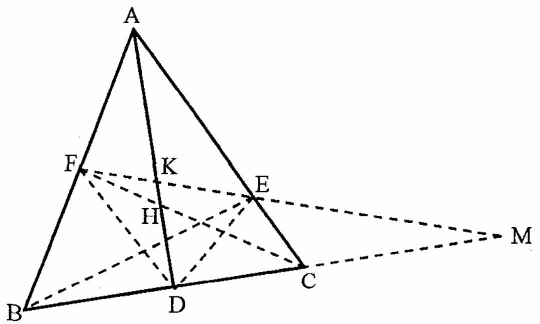
اما ۱+ در حالتی است که A بر C منطبق شود. بنابراین

$$\boxed{\frac{AS}{AL} = -\frac{CL}{CS}} \Rightarrow (ACSL) = -۱$$

پس $(ACSL) = (EFRL) = -1$ اگر قطر DB دستگاه $F(ACSL)$ را قطع نماید خواهیم داشت $(DBSR) = -1$.

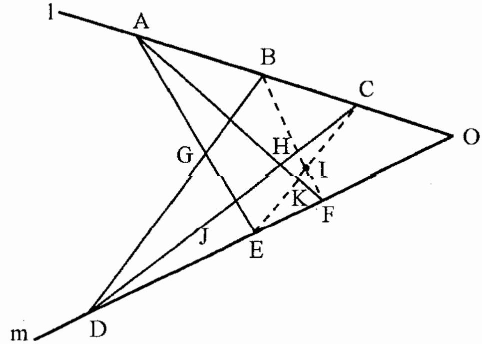
حل مسئله ۱ در مقدمه

در چهار ضلعی کامل $FECBAM$ بنابر مسئله قبل $(BCDM) = -1$ پس در دستگاه $A(BCDM) = -1$ خط FE به نسبت همساز تقسیم شده پس $(FEKM) = -1$ با دستگاه $D(FEKM) = -1$ و چون دو شعاع DK و DM بر هم عمودند پس نیمسازهای زاویه FDE می‌باشند و حکم ثابت است.



حل مسئله ۳ از مقدمه

اگر
$$AE \cap CD = J$$
$$AC \cap DF = O$$
$$AF \cap CE = K$$



دستگاه ناهمساز $D(AGJE)$ را با خط l تقاطع می‌دهیم دستگاه معادل $D(ABCO)$ بوجود

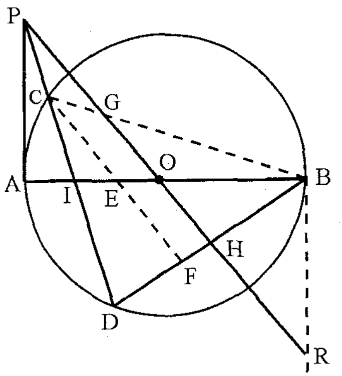
می‌آید پس

$$D(ABCO) = D(AGJE) = F(ABCO) = F(KICO) = F(KICE)$$

بنابراین $D(AGJE) = F(KICE)$

یعنی دو بخش ناهمساز $(AGJE) = (KICE)$ معادل بوده و چون نقطه E در هر دو مشترکند پس نقطه $AK \cap JC = H$ روی خط GI واقع است. این گزاره به گزاره پاپوس مشهور بوده و در هندسه تصویری اهمیت بسیار زیادی دارد.

حل مسئله ۴ از مقدمه



اگر $PO \cap BC = G$ و $PO \cap BR = R$ و BR مماس در نقطه B باشد. دو بخش ناهمساز $(PGOH) = (PCID)$ و دو دستگاه $A(PCID)$ و $B(GOHR)$ با هم معادل می‌باشند. چون $AP \parallel BR$ و مختلف جهت می‌باشند. بنابراین $(PGOH) = (GOHR)$ یعنی $\frac{PO}{PH} : \frac{GO}{GH} = \frac{GH}{GR} : \frac{OH}{OR}$ و چون $PO = OR$ پس $PH.GO = GR.OH$

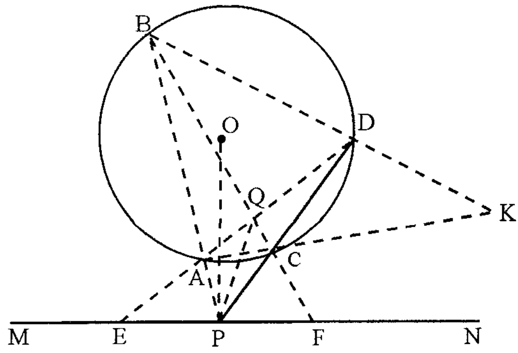
$$\frac{PH}{OH} = \frac{GR}{GO} \Rightarrow \frac{PH}{PH - OH} = \frac{GR}{GR - GO} \Rightarrow \frac{PH}{PO} = \frac{GR}{RO} \Rightarrow PH = GR$$

$$PH - PO = GR - GO \Rightarrow GO = OH$$

و چون CF با GH موازی است پس $CE = EF$.

حل مسئله ۵ از مقدمه

اگر محل برخورد $AD \cap BC = Q$ باشد نقطه Q قطب خط MN است و اگر $BD \cap AC = K$ پس KQ قطبی نقطه P است بنابراین بر OP عمود است و موازی MN می‌شود خط QP قطبی نقطه K است پس دستگاه $Q(APCK) = -1$ بوده در نتیجه از نقطه P خط EF موازی OK رسم شده و توسط دو شعاع دیگر یعنی OF و OE در نقطه P نصف می‌شود.



توجه: دستگاه‌ها و بخش‌های ناهمساز معادل را با علامت $\equiv$ نشان می‌دهیم.

۱۹ـ۱۰. مسائل برای حل

۱. مثلث KBC مفروض است. از نقطه J واقع بر امتداد BC دو خط رسم می‌کنیم تا اضلاع KC و KB را به ترتیب در نقاط D و A و F و E قطع نمایند. خط دلخواه KI را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در I قطع نماید. اشتراک $KI \cap JF = G$ و $DI \cap BF = H$ می‌باشد ثابت کنید سه نقطه A و G و H هم خط می‌باشند.

۲. ذوزنقه $ABCD$ که $AD \parallel BC$ مفروض است. $AB \cap CD = K$ و I یک نقطه اختیاری روی BC است و نقطه متغیر G روی KI می‌باشد. اگر $AG \cap DI = H$ و $BH \cap CD = F$ ثابت کنید GF با BC موازی است.

۳. مثلث ABC و نقطه O در صفحه مفروض است روی OA و OB و OC سه نقطه دلخواه A' و B' و C' را درنظر می‌گیریم ثابت کنید محل برخورد سه خط $(A'B', AB)$ و $(A'C', AC)$ و $(B'C', BC)$ بر یک خط راست واقع می‌باشند (گزاره دزارگ).

۴. اگر نقاط برخورد اضلاع مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ به ترتیب $BC \cap B'C' = P$ و $CA \cap C'A' = Q$ و $AB \cap A'B' = R$ روی یک خط راست واقع باشند آنگاه AA' و BB' و CC' در یک نقطه همرس می‌باشند.

۵. در مثلث ABC خطوط AD و BE و CF نیمسازهای داخلی می‌باشند. اگر $EF \cap BC = D_1$

و $FD \cap CA = E_1$ و $DE \cap AB = F_1$ ثابت کنید D_1 و E_1 و F_1 هم خط می‌باشند.

۶. از نقطه A دو مماس AP و AQ را بر دایره $C(O,R)$ رسم می‌کنیم اگر $PQ \cap OA = E$ و وتر CD از نقطه E بگذرد ثابت کنید $C\hat{A}E = E\hat{A}D$.

۷. ثابت کنید در یک چهارضلعی محیطی خطوطی که نقاط تماس دایره با اضلاع مقابل را به هم وصل می‌نمایند با دو قطر چهار ضلعی بر یک نقطه همرسند.

۸. ثابت کنید اگر از سه راس مثلث ABC سه خط بر دایره محیطی مثلث رسم کنیم تا اضلاع مقابل را در سه نقطه M و N و L قطع نمایند این سه نقطه هم خط می‌باشند.

۹. گزاره پاسکال: در شش ضلعی محاطی سه نقطه تقاطع اضلاع مقابل (دو در میان) بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۱۰. گزاره بریانشن: در شش ضلعی محیطی $ABCDEF$ قطرهای AD و BE و CF در یک نقطه همرسند.

بخش ۲۰. هندسه و اعداد مختلط

۲۰ـ۱. تعاریف

عدد موهومی یا مختلط Z را به صورت $Z = a + bi$ نشان می‌دهیم که در آن a و b دو عدد حقیقی و i عدد موهومی واحد است و برای i رابطه $i^2 = -1$ را داریم عدد a را بخش یا مولفه حقیقی و b را مولفه یا بخش موهومی یا مختلط Z مینامیم. و از نماد $Re(Z) = a$ و $Im(Z) = b$ استفاده می‌کنیم.

اگر دو عدد $Z_1 = a + bi$ و $Z_2 = c + di$ با هم برابر باشند آنگاه $a = c$ و $b = d$ خواهد بود.

بنابراین اعداد حقیقی را می‌توان زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط درنظر گرفت که برای آنها $b = 0$ است.

اگر عدد $Z = a + bi$ آنگاه مزدوج آن به صورت $\overline{Z} = a - bi$ تعریف می‌شود.

۲۰ـ۲. اعمال اصلی روی اعداد مختلط

عمل جمع
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad : \text{الف}$$

عمل تفریق
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad : \text{ب}$$

عمل ضرب
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad : \text{ج}$$

عمل تقسیم
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad : \text{د}$$

۲۰ـ۳.

اندازه یا قدر مطلق عدد موهومی $a + bc$ به صورت $|a+bi| = \sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$ تعریف می‌شود.

۲۰ـ۴.

اگر $Z_{۱}.Z_{۲}.\dots Z_m$ اعداد مختلط باشند ویژگی‌های زیر را خواهد داشت.

۱.$|Z_{۱}.Z_{۲}| = |Z_{۱}|.|Z_{۲}|$ یا $|Z_{۱}.Z_{۲}\dots Z_m| = |Z_{۱}|.|Z_{۲}|\dots|Z_m|$

۲.$\left|\frac{Z_{۱}}{Z_{۲}}\right| = \frac{|Z_{۱}|}{|Z_{۲}|}$ اگر $Z_{۲} \neq ۰$

۳.$|Z_{۱}+Z_{۲}| \leq |Z_{۱}|+|Z_{۲}|$ یا $|Z_{۱}+Z_{۲}+\cdots+Z_n| \leq |Z_{۱}|+|Z_{۲}|+\dots|Z_n|$

۴.$|Z_{۱}+Z_{۲}| \geq |Z_{۱}|-|Z_{۲}|$ یا $|Z_{۱}-Z_{۲}| \geq |Z_{۱}|-|Z_{۲}|$

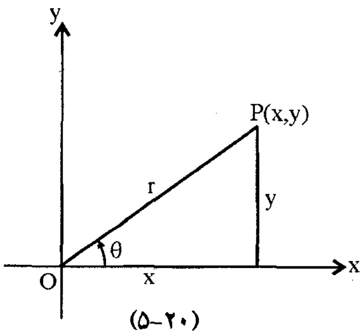
۲۰ـ۵. نمایش اعداد حقیقی در صفحه موهومی

این نمایش بدین صورت است که بر محور yy' بخش موهومی و بر محور xها بخش حقیقی اعداد مختلط نظیر می‌شود. در این حالت هر نقطه فقط و فقط معرف یک زوج مرتب خواهد بود.

به همین جهت در صفحه مختلط عدد $Z = a+bi$ را به صورت (a,b) نمایش می‌دهیم.

نمایش قطبی اعداد مختلط

اگر P نقطه‌ای در صفحه مختلط نظیر زوج مرتب (x,y) یا $x+iy$ باشد به صورت زیر در صفحه نمایش داده می‌شود.



(۵-۲۰)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

و اندازه $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ که r را نرم یا مدول عدد مختلط $Z = x + iy$ می‌گویند که $r = |z|$. زاویه θ را آرگومان عدد z می‌نامند. باید توجه داشت که θ زاویه است که OP با بخش مثبت محور xها می‌سازد. آرگومان θ را به صورت $\arg\theta$ نماش می‌دهیم.

بنابراین نمایش قطبی عدد مختلط z به صورت زیر درمی‌آید

$$Z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و اختصاراً $\cos\theta + i\sin\theta$ را $cis\theta$ می‌خوانند.

توجه برای هر عدد موهومی غیرصفر Z زاویه $O \leq \theta < 2\pi$ تعریف می‌کند البته در هر فاصله به اندازه 2π نیز می‌تواند تعریف شود مانند $-\pi < \theta \leq \pi$

توجه: هرگاه $\arg\theta = n\pi$ آنگاه Z یک عدد حقیقی است و هرگاه $\arg\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ عدد Z موهومی محض یعنی بدون مولفه حقیقی است.

۲۰ـ۵ـ۱. گزاره دوموار

اگر

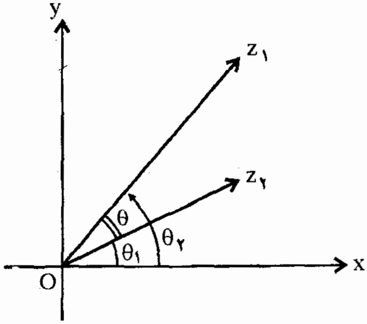
$$Z_1 = x_1 + iy_1 = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$Z_2 = x_2 + iy_2 = r(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

باشد آنگاه

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

بنابراین



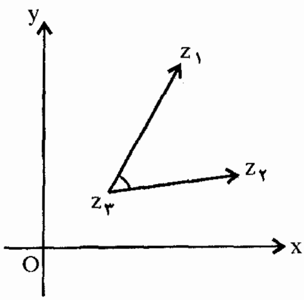
$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2$$
$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

.۲ـ۵ـ۲۰

زاویه بین دو بردار Z_1 و Z_2 را می‌توان به صورت

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2$$

حال اگر مبداء مختصات را به نقطه Z_3 منتقل کنیم.



$$\arg\left(\frac{Z_1 - Z_3}{Z_2 - Z_3}\right) = \arg(Z_1 - Z_3) - \arg(Z - Z_3)$$

بدین ترتیب می‌توان را به بین دو بردار Z_3Z_1 و Z_3Z_2 را بدست آورد.
و اگر Z_3Z_1 با Z_3Z_2 در یک امتداد باشند.

$$\frac{Z_1 - Z_3}{Z_2 - Z_3} = \frac{\overline{Z_1} - \overline{Z_3}}{\overline{Z_2} - \overline{Z_3}}$$

چون $\overrightarrow{Z_1Z_3} = K\overrightarrow{Z_2Z_3}$ و $K \in R$.

بنابراین هرگاه $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_n$ باشد

$$Z^n = \left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

و در حالی که $r = ۱$ درنظر بگیریم خواهیم داشت

$$\boxed{\text{قانون دوموار}\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

۲۰ـ۵ـ۲. ریشه‌های اعداد مختلط

هرگاه $Z = w^n$ باشد w را ریشه nام عدد موهومی Z می‌نامند. $w = z^{\frac{۱}{n}}$. با استفاده از قانون دوموار داریم

$$w = z^{\frac{۱}{n}} = \Big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\Big)^{\frac{۱}{n}} = r^{\frac{۱}{n}}\Big(\cos\left(\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right)\Big)$$

که $k = ۰, ۱, ۲, \dots, n-۱$ بنابراین ملاحظه می‌شود که معادله $z = w^n$ دارای n ریشه مختلف است. به شرطی که $z \neq ۰$ باشد.

۲۰ـ۵ـ۳. فرمول اویلر برای اعداد مختلط

با توجه به اینکه $e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$ در صورتی که $x = ۲\theta$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$e^{i\theta} = \left\{۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} + \dots (-۱)^n\frac{\theta^{۲n}}{۲n!} + \dots\right\}$$
$$+ i\left\{\theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۵}{۵!} + \dots + (-۱)^n\frac{\theta^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \dots\right\}$$

و می‌دانیم

$$\cos\theta = ۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{Q^۴}{۴!}\dots$$
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \dots$$

پس

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

و نتایج زیر را داریم:

الف : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

ب $: e^{i\theta} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

ج $: e^{i\theta} + 1 = 0$

د $: e^{x+y} = e^x.e^y$

هـ: $e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

د $: \Rightarrow f(x) = e^x \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$

و چون $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

.۴_۵_۲۰

ریشه nام معادله $Z^n = 1$ به صورت زیر است

$$Z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

اگر $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ درنظر بگیریم ریشه‌های این معادله به صورت $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ می‌باشد که تعبیر هندسی آن این است که این ریشه‌ها رئوس یک n ضلعی منتظم در دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبداء مختصات می‌باشد. معادله این دایره به صورت $|Z| = 1$ بوده و به دایره واحد معروف است.

مثال: ریشه‌های سوم معادله $Z^3 = 1$ را تعیین کنید.

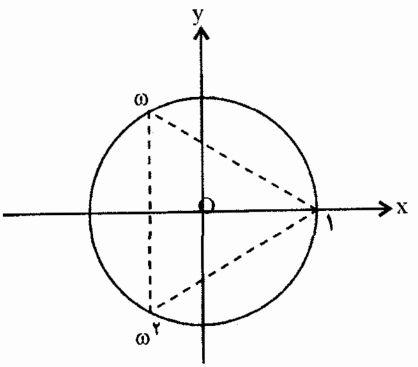
حل: $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بنابراین

$$\begin{cases} r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1 \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos 3\theta + i\sin 3\theta = 1$$

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 1 \\ \sin 3\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}(k, 0, 1, 2, \dots)$$

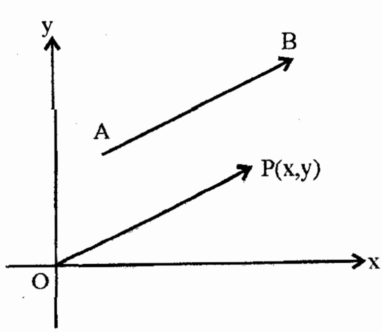
$$\left.\begin{array}{l} k=\circ \rightarrow \theta=\circ \\ k=۱ \rightarrow \theta=\frac{۲\pi}{۳} \\ k=۲ \rightarrow \theta=\frac{۴\pi}{۳} \end{array}\right\} \begin{array}{l} Z=۱ \\ Z_۱=\frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲} \\ Z_۲=\frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲} \end{array}$$

این سه نقطه راس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌باشند که در دایره‌ای به شعاع $r=۱$ محاط است.

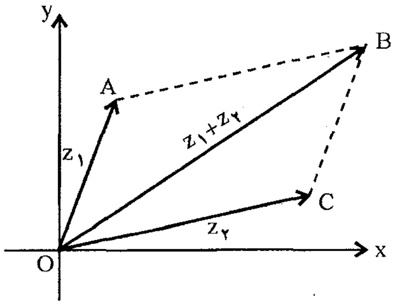


باید توجه داشت اگر w یکی از ریشه‌ها باشد ریشهٔ دوم آن $w^۲$ است. و هر دو ریشه در معادله $w^۲ \pm w+۱=\circ$ صدق می‌کنند.

۲۰ـ۵ـ۵. تعبیر برداری اعداد مختلط



هر عدد موهومی $Z=x+iy$ را می‌توان به صورت بردار OP درنظر گرفت که مبداء آن مرکز مختصات وانتهای آن نقطه P به مختصات (x,y) است. پس می‌توان گفت $OP=x+iy$ بردارهای هم سنگ بردار OP با OP برابرند و $AB=OP=x+iy$



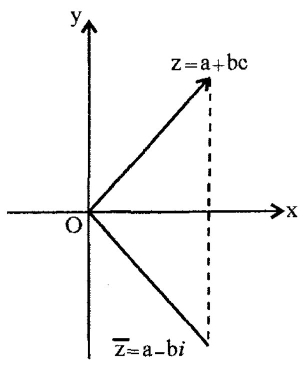
جمع دو عدد مختلط مانند جمع برداری دو بردار است که برآیند دو بردار برابر حاصل جمع دو بردار است.

۲۰-۵-۶. مزدوج عدد مختلط Z

مزدوج عدد مختلط Z را با $\overline{Z}$ نمایش داده و آن را به صورت

$$Z = a + bi$$
$$\overline{Z} = a - bi$$

نمایش می‌دهیم. که نمایش قطبی آن به صورت زیر است.
به عبارت دیگر $\overline{Z}$ قرینه Z نسبت به محور و OX است.



$$\boxed{|Z|^۲ = Z.\overline{Z} = a^۲ + b^۲}$$

و باید توجه داشت که $Re(Z) = Re(\overline{Z})$ و $Im(\overline{Z}) = -Im(Z)$،
$\arg(\overline{Z}) = -\arg(Z)$ یا $۲\pi - \arg(Z)$ و $|Z| = |\overline{Z}|$ و همچنین Z حقیقی است اگر و فقط اگر $Im(Z) = ۰$ یا $\overline{Z} = Z$ و Z موهومی است اگر و فقط اگر $Re(Z) = ۰$ و یا $\overline{Z} = -Z$

ضرب داخلی و خارجی اعداد مختلط

برای دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ حاصل‌ضرب داخلی به صورت

$$Z_1.Z_2 = |Z_1|.|Z_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = Re\{\overline{Z}_1.Z_2\} = \frac{1}{2}(\overline{Z}_1Z_2 + Z_1\overline{Z}_2)$$

تعریف می‌شود که θ زاویه بین Z_1 و Z_2 و در فاصله صفر و π قرار دارد.
حاصل‌ضرب برداری (خارجی) $Z_1 \times Z_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z_1 \times Z_2 = |Z_1|.|Z_2|.\sin\theta = x_1y_2 - y_2x_2 = Im(\overline{Z}_1.Z_2) = \frac{1}{2i}(\overline{Z}_1Z_2 - Z_2\overline{Z}_1)$$

بنابراین

$$\overline{Z}_1Z_2 = (Z_1.Z_2) + i(Z_1 \times Z_2) = |Z_1||Z_2|e^{i\theta}$$

نکات زیر در حاصل‌ضرب برداری قابل توجه است.

الف: شرط لازم و کافی برای آنکه دو بردار Z_1 و Z_2 بر هم عمود باشد آن است که $Z_1.Z_2 = 0$

ب: شرط لازم و خاص برای آنکه دو بردار Z_1 و Z_2 با هم موازی باشند آن است که $Z_1 \times Z_2 = 0$

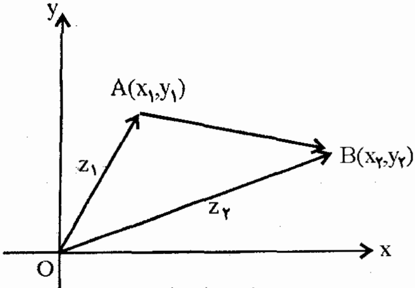
ج: اندازه تصویر Z_1 بر روی Z_2 عبارت است از $\dfrac{|Z_1.Z_2|}{|Z_2|}$

د: مساحت متوازی‌الاضلاع که $Z_1.Z_2$ دو ضلع آن باشد $|Z_1 \times Z_2|$ است.

استفاده از محورهای مختصات مزدوج

یکی دیگر از راه‌های نمایش عدد مختلط $z = x + iy$ استفاده از محورهای $(Z,\overline{Z})$ است. که در آن
$x = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ و $y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$

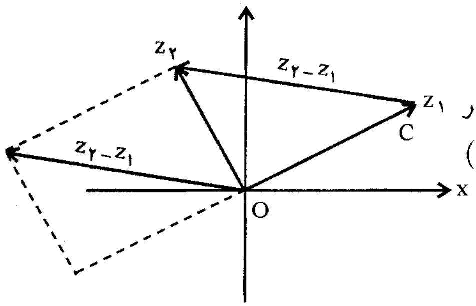
۷ـ۵ـ۲۰. فاصله بین دو نقطه



(۷-۵-۲۰)

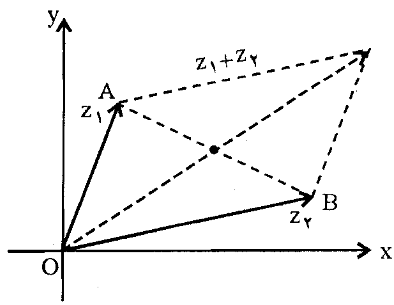
اگر دو عدد موهومی Z_1 و Z_2 متناظر با دو نقطه $A(x_1.y_1)$ و $B(x_2.y_2)$ باشد

$$Z_1 Z_2 = \overrightarrow{AB} = OB - OA = Z_2 - Z_1 = (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)$$
$$= (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i$$
$$|Z_1 Z_2| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



در واقع برای یافتن $Z_2 - Z_1$ امتداد بردار Z_1 را یافته و پس برآیند دو بردار $(-Z_1)$ و Z_2 را رسم می‌کنیم.

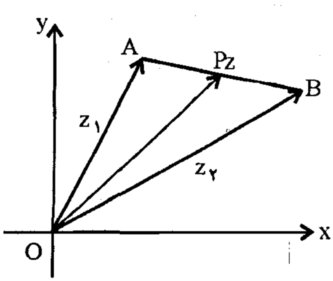
مختصات وسط پاره‌خطی که دو سر آن دو نقطه Z_1 و Z_2 باشد.



$$\overrightarrow{OM} = OA + AM \Rightarrow M = Z_1 + \frac{1}{2}(Z_2 - Z_1) = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)$$

.۸ـ۵ـ۲۰

اگر مختصات نقطه‌ای که پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده باشد.



$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$
$$m(PB) = n(AP)$$
$$m(z_2 - z) = n(z - z_1) \Rightarrow Z = \frac{nz_1 + nz_2}{m + n}$$

شرط لازم و کافی برای آنکه سه نقطه $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ سوی یک خط راست باشند آن است که یک عدد حقیقی باشد.

$$\frac{z_۲ - z_۳}{z_۳ - z_۱} = \frac{m}{n}$$

در صورتی که $z_۳$ وسط $z_۱$ و $z_۲$ باشد $\frac{m}{n} = ۱$ و $z_۳ = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲)$.

اگر $t = \frac{m}{m+n}$ باشد معادله خطی که از دو نقطه $z_۱$ و $z_۲$ می‌گردد. $Z = (۱-t)z_۱ + tz_۲$

۲۰_۵_۹.

اگر دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ هم خط و یا موازی نباشند آنگاه $az_۱ + bz_۲ = ۰$ اگر و فقط اگر $a = b = ۰$ باشد.

اگر $z_۱ = (x_۱ + iy_۱)$ و $z_۲ = (x_۲ + iy_۲)$

$$az_۱ + bz_۲ = ۰$$

$$a(x_۱ + (y_۱) + b(x_۲ + iy_۲) = ۰ \Rightarrow (ax_۱ + bx_۲, i(ay_۱ + by_۲)) = (۰, ۰)$$

$$\begin{cases} ax_۱ + bx_۲ = ۰ \\ ay_۱ + by_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = b = ۰$$

و هرگاه $z_۱$ و $z_۲$ دو بردار هم خط یا موازی باشند

$\frac{z_۱}{z_۲} = k$ یک عدد حقیقی می‌شود k

پس $az_۱ + bz_۲$ می‌تواند صفر شود بدون اینکه هر دو عدد a و b با هم صفر شوند.

حل چند مثال

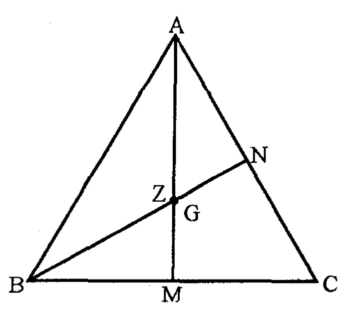
۱. مثال: ثابت کنید سه میانه مثلث در یک نقطه همرسند.

اگر مختصات سه راس مثلث ABC را به ترتیب $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ فرض کنیم مختصات

$$M = \frac{۱}{۲}(B + C)$$

$$M = \frac{۱}{۲}(z_۲ + z_۳)$$

$$N = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۳)$$



اگر مختصات محل برخورد دو میانه BN و AM را Z بنامیم و فرض کنیم $\frac{|AG|}{|GM|} = \frac{\alpha}{\beta}$ مختصات

$$Z = \frac{\beta A + \alpha M}{\beta + \alpha} \quad \text{و یا} \quad Z = \frac{\beta Z_1 + \alpha \frac{Z_2 + Z_3}{2}}{\alpha + \beta} \qquad (1)$$

و اگر $\frac{m}{n} = \frac{BG}{GN}$ باشد آنگاه

$$Z = \frac{n z_2 + m \frac{z_1 + z_3}{2}}{m + n} \qquad (2)$$

با برابر نهادن رابطه (۱) و (۲) خواهد داشت

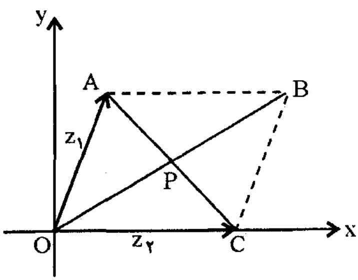
$$(\alpha m - \alpha n - 2n\beta)Z_2 + (\alpha n - m\beta)Z_3 + (\beta m - m\alpha + 2\beta n)Z_1 = 0$$

چون z_1 و z_2 و z_3 بر یک خط قرار ندارند پس

$$\begin{cases} \alpha m - n\alpha - 2n\beta = 0 \\ \alpha n - m\beta = 0 \\ \beta m + 2\beta n - m\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 2 = 0$$

یعنی نقطه G میانه AM و BN را به یک نسبت ۲ $= \frac{\alpha}{\beta}$ تقسیم کرده مختصات $Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ که در هر دو معادله خط AM و BN صدق می‌نماید.

۲. ثابت کنید قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کند.



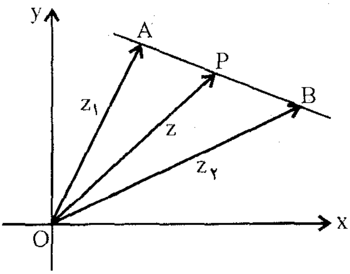
$$Z_1 + AC = Z_2 \Rightarrow AC = Z_2 - Z_1$$
$$AP = mAC = m(Z_2 - Z_1) \quad 0 \le m \le 1$$
$$OB = Z_1 + Z_2 \Rightarrow OP = n(z_1 + z_2) \quad 0 \le n \le 1$$

$$OA + AP = OP \Rightarrow z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2) \Rightarrow (1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$$

$$\begin{cases} 1 - m - n = 0 \\ m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = n = \frac{1}{2}$$

بنابراین نقطه P وسط AC و OB است.

۳. معادله خطی را پیدا کنید که از دو نقطه z_1 و z_2 می‌گذرد

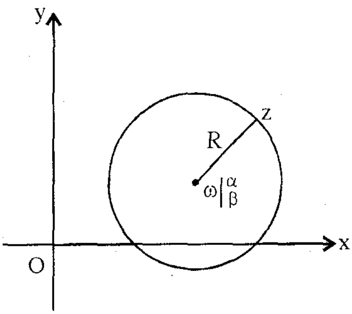


$$OA + AP = OP \Rightarrow Z_۱ + AP = Z \Rightarrow AP = Z - Z_۱$$

$$OA + AB = OB \Rightarrow AB = Z_۲ - Z_۱$$

و $AP = tAB$ بنابراین $Z = z_۱ + t(z_۲ - z_۱)$

$$\boxed{Z = (۱ - t)z_۱ + tz_۲}$$



۴. معادله دایره‌ای را بیابید که شعاع آن R مرکز آن نقطه $w(\alpha, i\beta)$ باشد.

$$|z - w| = R$$

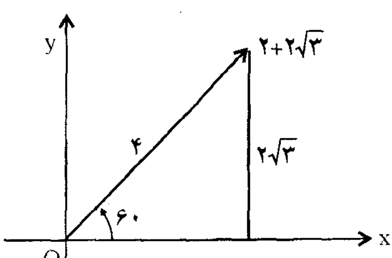
$$|z - (\alpha + i\beta)| = R$$

حال اگر $z = x + y$ باشد $|x + ۲y - \alpha - \beta_۲| = R$

$$|(x - \alpha) + (y - \beta)i| = R \Rightarrow (x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲$$

۵. هر یک از اعداد زیر را به صورت قطبی نشان دهد.

الف) $Z = ۲ + ۲\sqrt{۳}i$



$$r = |۲ + ۲\sqrt{۳}i| = \sqrt{۴ + ۱۲} = ۴$$

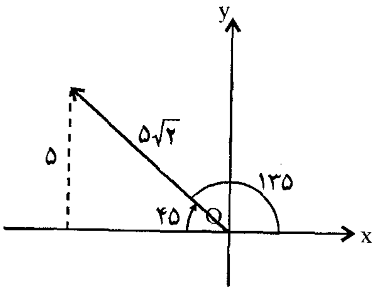
$$\arg\theta = \arcsin\frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = ۶۰^\circ$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow$$

$$Z = ۴(\cos ۶۰ + i\sin ۶۰)$$

$$Z = ۴\text{cis}\,۶۰^\circ = ۴e^{\frac{\pi}{۳}}$$

ب) $Z = -۵ + ۵i$



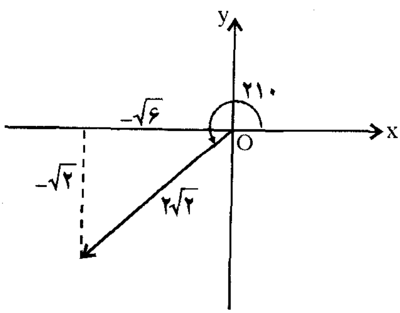
$$r = |-۵ + ۵i| = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{۵}{۵\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos\theta = \frac{-۵}{۵\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\arg\theta = \arctan -۱ = ۱۳۵^\circ$$

$$Z = ۵\sqrt{۲}\text{cis}\,۱۳۵^\circ = ۵\sqrt{۲}e^{\frac{۳\pi}{۴}i}$$

ج) $Z = -\sqrt{۶} - \sqrt{۲}i$



$$r = |-\sqrt{۶} - \sqrt{۲}i| = ۲\sqrt{۲}$$

$$\sin\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

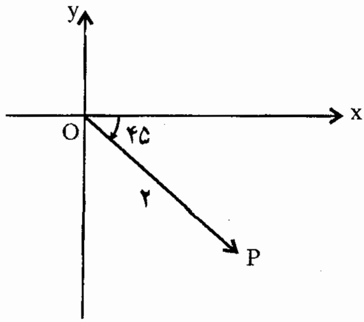
$$\arg\theta = ۱۸۰^\circ + \arctan\frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۲۱۰^\circ$$

$$Z = ۲\sqrt{۲}\text{cis}\,۲۱۰^\circ$$

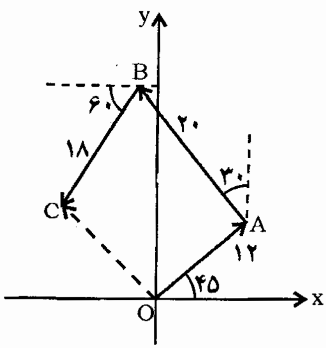
$$Z = ۲\sqrt{۲}e^{\frac{۷\pi}{۶}i}$$

د) $Z = ۲e^{-\frac{\pi}{۴}i}$

$$Z = ۲e^{-\frac{\pi}{۴}i} = ۲(\cos(-\tfrac{\pi}{۴}) + i\sin -\tfrac{\pi}{۴}) = ۲(\cos(-۴۵) + i\sin(-۴۵))$$



۶. مثال: شخصی ۱۲ کیلومتر شمال شرق ، ۲۰ کیلومتر با زاویه °۳۰ به سمت شمال و ۱۸ کیلومتر با زاویه °۶۰ به سمت جنوب غربی حرکت کرده است. فاصله و جهت او را نسبت به مبدا حرکت تعیین کنید.



$$OC = OA + AB + BC$$
$$OA = ۱۲e^{\frac{\pi}{۴}i}$$
$$AB = ۲۰.e^{\frac{۲\pi}{۳}i} = ۲.e^{(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})i}$$
$$BC = ۱۸e^{(۱۸۰+۶۰)} = ۱۸e^{\frac{۴\pi}{۳}i}$$
$$OC = ۱۲e^{\frac{\pi}{۴}i} + ۲.e^{\frac{۲\pi}{۳}i} + ۱۸e^{\frac{۴\pi}{۳}i}$$

$$OC = (۶\sqrt{۲} - ۱۹) + (۶\sqrt{۲} + \sqrt{۳})i \Rightarrow |OC| = ۱۴٫۷$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{۶\sqrt{۲} - ۱۹}{۱۴٫۷}\right) = ۴۵^\circ٫۴۹'$$

۷. ثابت کنید اگر $z_۱ = r_۱(\cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱)$ و $z_۲ = r_۲(\cos\theta_۱ + i\sin\theta c)$ آنگاه

الف) $z_۱z_۲ = r_۱r_۲(\cos(\theta_۱ + \theta_۲) + i\sin(\theta_۱ + \theta_۲))$

ب) $\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}(\cos(\theta_۱ - \theta_۲) + i\sin(\theta_۱ - \theta_۲))$

الف: با استفاده از فرمول اویلر $z_۱ = r_۱e^{i\theta_۱}$ و $z_۲ = r_۲e^{i\theta_۲}$

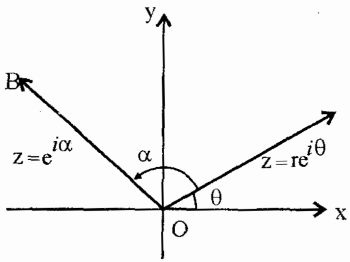
بنابراین $z_۱.z_۲ = r_۱.r_۲.e^{i(\theta_۱+\theta_۲)}$

ب) با استفاده از فرمول اویلر $\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}\frac{e^{i\theta ۱}}{e^{i\theta ۲}} = \frac{r_۱}{r_۲}e^{i(\theta_۱-\theta_۲)}$

۸. ثابت کنید الف) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲}$ و ب) $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲۱}$

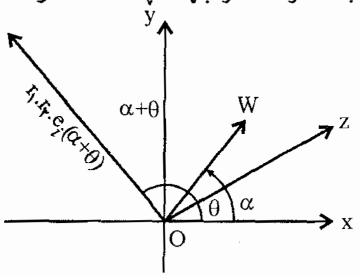
اثبات الف) با استفاده از فرمول اویلر: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ و $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ با جمع این دو رابطه داریم $۲\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$

و با کم کردن دو رابطه داریم $۲\sin ۲\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$



۹. نمایش $ze^{i\alpha}$ که z عدد مختلط و α عددی حقیقی است. فرض کنیم $z = ri\theta$ باشد که با بردار OA نمایش داده شده است. پس $ze^{i\alpha} = re^{i\theta}.e^{i\alpha} = re^{i(\alpha+\theta)}$ که با بردار OB نمایش داده می‌شود.

بنابراین حاصل‌ضرب بردار z در $e^{i\alpha}$ یعنی یک دوران به اندازه α در جهت پادساعت گردد.



توجه: $z.W$ اگر $W = r_۱e^{i\alpha}$ و $z = r_۲e^{i\theta}$ باشد عبارت است $z.W = r_۱.r_۲e^{i(\alpha+\theta)}$ که یک دوران و یک تجانس است.

۱۰. عبارت زیر را برآورد کنید

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i}\right)^{۱۰} = \left(\frac{۲\text{cis}\,(۶۰^\circ)}{۲\text{cis}\,(-۶۰^\circ)}\right)^{۱۰} = (\text{cis}\,(۱۲۰))^{۱۰} = \text{cis}\,(۱۲۰۰^\circ)$$

$$= \text{cis}\ ۱۲۰^\circ = -\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

راه دوم

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i}\right)^{۱۰} = \left(\frac{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}{۲e^{-\frac{\pi}{۳}i}}\right)^{۱۰} = \left(e^{\frac{۲\pi}{۳}i}\right)^{۱۰} = e^{۲۰\frac{\pi}{۳}i} =$$

$$e^{۶\pi i}.e^{\frac{۲\pi}{۳}c} = ۱\left[\cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳}\right] = -\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

۱۱. ثابت کنید

الف) $$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

ب) $$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

اثبات:

الف: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ بنابراین

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)} \Rightarrow \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

۱۲. ریشه‌های معادله $z^5 = -32$ را تعیین کنید.

$$-32 = 32(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)) \qquad k = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 32(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$$

$$r^5 = 3^2 \Rightarrow r = 2$$

$$5\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$$

$$Z = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right\}$$

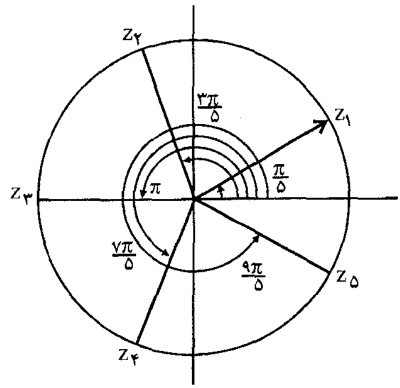
$$K = 0 \Rightarrow Z = Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$K = 1 \Rightarrow Z = Z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$K = 2 \Rightarrow Z = Z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}\right) = -2$$

$$K = 3 \Rightarrow Z = Z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$$

$$K = 4 \Rightarrow Z = Z_5 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$$



برای بقیه اعداد $k = \pm ۶ \ldots$ دوباره همین ریشه‌ها تکرار می‌شود.

۱۳. اگر عدد گویای $\frac{p}{q}$ (که بزرگترین مقسوم علیه p و q عدد ± ۱ است) یکی از ریشه‌های معادله $a_۰ z^n + a_۱ z^{n-۱} \cdots + a_n = ۰$ که در آن $a_n, \ldots, a_۱, a_۰$ اعداد صحیح می‌باشند. ثابت کنید p و q باید مقسوم‌علیه‌هایی از a_n و $a_۰$ باشند.

$z = \frac{p}{q}$ را در معادله قرار می‌دهیم خواهیم داشت

$$a_۰ p^n + a_۱ p^{n-۱} q + \cdots + a_{n-۱} p q^{n-۱} + a n q^n = ۰ \qquad (۱)$$

این معادله را بر p تقسیم می‌کنیم داریم

$$a_۰ p^{n-۱} + a_۱ p^{n-۲} q + \cdots + a_{n-۱} q^{n-۱} = -\frac{a_n q^n}{p}$$

سمت چپ معادله فوق یک عدد صحیح است. پس باید سمت راست هم عددی صحیح باشد. اما چون p و q مقسوم‌علیه‌های مشترکی جزء ± ۱ ندارند بنابراین p باید a_n را بشمارد.

اگر معادله (۱) را بر q هم تقسیم کنیم به همین ترتیب ثابت می‌شود که q باید $a_۰$ را به شمارد.

۱۴. معادله زیر را حل کنید

$$۶Z^۴ - ۲۵Z^۳ + ۳۲Z^۲ + ۳Z - ۱۰ = ۰$$

مقسوم‌علیه ۶ و ۱۰− به ترتیب عبارتند از $(\pm ۶, \pm ۳, \pm ۲, \pm ۱)$ و $(\pm ۱۰, \pm ۵, \pm ۲, \pm ۱)$ بنابراین بعضی از جواب‌های ممکن عبارتند از

$$\pm ۱. \pm \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۳} \pm \frac{۱}{۶} \pm ۲ \pm \frac{۲}{۳}, \pm ۵, \pm \frac{۵}{۲}, \pm \frac{۵}{۳}, \pm \frac{۵}{۶} \pm ۱۰ \pm \frac{۱۰}{۳}$$

با امتحان کردن این اعداد ملاحظه می‌شود که $Z = -\frac{۱}{۲}$ و $Z = \frac{۲}{۳}$ در معادله صدق می‌کند پس $\left(Z + \frac{۱}{۲}\right)\left(Z - \frac{۱}{۳}\right) = ۶Z^۲ - Z - ۲$ فاکتورهای معادله بوده و

$$۶Z^۴ - ۲۵Z^۳ + ۳۲Z^۲ + ۳Z - ۱۰ = (۶Z^۲ - Z - ۲)(Z^۲ - ۴Z + ۲) = ۰$$

$$Z = ۲ \pm i$$

بنابراین ریشه‌های معادله $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ و $۲ + i$ و $۲ - i$ می‌باشد.

۱۵. ثابت کنید حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $a_۰ z^n + a_۱ z^{n-۱} \cdots + a_n = ۰$ عبارت از $\frac{-a_۱}{a_۰} (a_۰ \neq ۰)$ و $(-۱)^n \frac{a_n}{a_۰}$.

اگر $z_۱, z_۲, \ldots, z_n$ ریشه‌های معادله باشند

$$a_۰(z - z_۱)(z - z_۲)\ldots(z - z_n) = ۰$$

$$a_۰\{z^n - (z_۱ + z_۲ \cdots + z_n)z^{n-۱} + \cdots + (-۱)^n z_۱ z_۲ \ldots z_n\} = ۰$$

$$a_۰(z_۱ + z_۲ \cdots + z_n) = a_۱ \quad , \quad a_۰(-۱)^n(z_۱ z_۲ \ldots z_n) = a_n$$

و حکم ثابت است

۱۶. اگر $p + qi$ یکی از ریشه‌های معادله $a_۰ z^n + a_۱ z^{n-۱} \cdots + a_n = ۰$ باشد که ضرایب معادله p و q اعداد حقیقی هستند ثابت کنید $p - qi$ هم ریشه دیگر معادله است (عبارت دیگر اگر عدد حقیقی Z یکی از ریشه‌های معادله باشد مزدوج آن $\overline{Z}$ هم ریشه دیگر معادله است).

اگر $p + qi = re^{i\theta}$ در معادله صدق کنند خواهیم داشت

$$a_۰ r^n e^{in\theta} + a_۱ r^{n-۱}.e^{i(n-۱)\theta} + \cdots + a_{n-۱} re^{i\theta} + a_n = ۰$$

اگر طرفین این معادله را در ۱ − ضرب کنیم

$$a_۰ r^n e^{-in\theta} + a_۱ r^{n-۱}.e^{-i(n-۱)} \cdots + a_n - ۱re^{-i\theta} + a_n = ۰$$

بنابراین $re^{-۱\theta} = p - qi$ هم یکی دیگر از ریشه‌های معادله است

اما باید توجه داشت اگر $a_۰ \ldots a_n$ همگی اعداد حقیقی نباشند این گزاره درست نیست.

۱۷. اگر $n = ۲, ۳, ۴$ ثابت کنید

الف : $\cos\frac{۲\pi}{n}+\cos\frac{۴\pi}{n}+\cos\frac{۶\pi}{n}-\cdots+\cos\frac{۲(n-۱)\pi}{n}=-۱$

ب : $\sin\frac{۲\pi}{n}+\sin\frac{۴\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{۲(n-۱)n}{n}=۰$

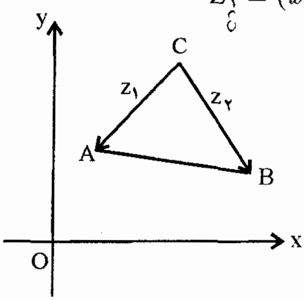
اگر $z^n-۱=۰$ ریشه‌های آن عبارتند از ۱ و $e^{۲\frac{\pi i}{n}}$ و $e^{۴\frac{\pi i}{n}}$ و $e^{\frac{۲(n-۱)i\pi}{n}}$ بنابراین حاصل جمع ریشه $۱+e^{\frac{۲\pi i}{n}}+e^{\frac{۴\pi i}{n}}\cdots+e^{\frac{۲(n-۱)\pi i}{n}}=۰$

$$\left\{۱+\cos\frac{۲\pi}{n}+\cos\frac{۴\pi}{n}\cdots+\cos\frac{۲(n-۱)\pi}{n}\right\}$$
$$+i\left\{\sin\frac{۲\pi}{n}+\sin\frac{۴\pi}{n}\cdots+\sin\frac{۲(n-۱)\pi}{n}\right\}=۰$$

و حکم ثابت است.

۱۸. مساحت مثلثی را تعیین کنید که رئوس آن $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ می‌باشد.

حل: $Z_۱=(x_۱-x_۳)+(y_۱-y_۳)$



$$Z_۲=(x_۲-x_۳)+i(y_۲-y_۳)$$

مساحت مثلث برابر است: $S=\frac{۱}{۲}|z_۱\times z_۲|$

$$S=\frac{۱}{۲}|I_m\{[(x_۱-x_۳)-i(y_۱-y_۳)][(x_۲-x_۳)+i(y_۲-y_۳)]\}$$
$$=\frac{۱}{۲}|(x_۱-x_۳)(y_۲-y_۳)-(y_۱-y_۳)(x_۲-x_۳)|$$
$$=\frac{۱}{۲}|x_۱y_۲-y_۱x۲+x_۲y_۳-y_۲x_۳+x_۳y_۱-y_۳x_۱|=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}x_۱ & y_۱ & ۱\\ x_۲ & y_۲ & ۱\\ x_۳ & y_۳ & ۱\end{vmatrix}$$

۱۹. نمایش عبارت $\left|\frac{z-۳}{z+۳}\right| = ۲$ چیست؟

حل

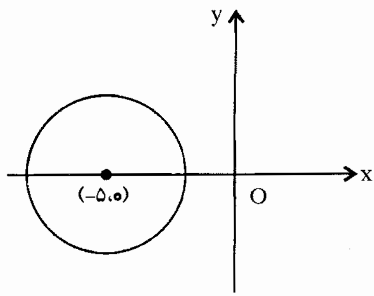
$$\left|\frac{z-۳}{z+۳}\right| = \frac{|z-۳|}{|z+۳|} = ۲$$

$$|z-۳| = ۲|z+۳|$$

اگر $z = x+iy$ باشد

$$|x-۳+iy| = ۲|x+iy+۳| \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+y^۲} = ۲\sqrt{(x+۲)^۲+y^۲}$$

$$x^۲+y^۲+۱۰x+۹ = ۰ \Rightarrow (x+y)^۲+y^۲ = ۱۶ \Rightarrow |z+۵| = ۴$$



راه‌حل دوم

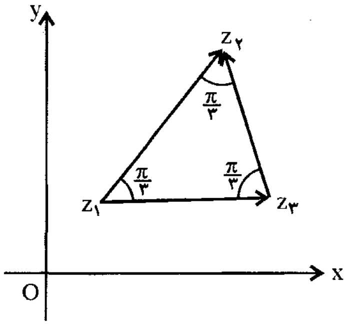
$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{z-۳}{z+۳}\right| = ۲ \\ \left(\frac{z-۳}{z+۳}\right)^۲ = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{z-۳}{z+۳}\right)\left(\frac{\overline{z}-۳}{\overline{z}+۳}\right) = ۴$$

$$z\overline{z}+۵\overline{z}+۵z+۹ = ۰ \Rightarrow (z+۵)(\overline{z}+۵) = ۱۶$$

$$(z+۵)^۲ = ۱۶ \Rightarrow |z+۵| = ۴$$

۲۰. اگر $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. ثابت کنید

$$z_۱^۲+z_۲^۲+z_۳^۲ = z_۱z_۲+z_۲z_۳+z_۳z_۱$$



همچنان که از شکل ملاحظه می‌شود

$$\begin{cases} z_۲ - z_۱ = e^{\frac{\pi}{۳}i}(z_۳ - z_۱) \\ z_۱ - z_۳ = e^{\frac{\pi}{۳}i}(z_۲ - z_۳) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{z_۲ - z_۱}{z_۱ - z_۳} = \frac{z_۳ - z_۱}{z_۲ - z_۳}$$

$$z_۱^۲ + z_۲^۲ + z_۳^۲ = z_۱ z_۲ + z_۲ z_۳ + z_۳ z_۱$$

۲۰ـ۱۰. گزاره

توصیف معادلات در دستگاه مزدوج

اگر $z = x + iy$ آنگاه $\overline{z} = x - iy$ بنابراین

$$y = \frac{z - \overline{z}}{۲i} \quad , \quad x = \frac{z + \overline{z}}{۲}$$

بدین ترتیب معادلات خطوط و دوایر در دستگاه مزدوج به صورت زیر خواهد بود.

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = ۰$$

که در آن α و γ اعداد حقیقی و β یک عدد مختلط است

اثبات معادلات دایره در دستگاه دکارتی به صورت زیر است

$$A(x^۲ + y^۲) + Bx + Cy + D = ۰$$

$$Az\overline{z} + B\left(\frac{z + \overline{z}}{۲}\right) + C\left(\frac{z - \overline{z}}{۲i}\right) + D = ۰$$

$$Az\overline{z} + \left(\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲i}\right)z + \left(\frac{B}{۲} - \frac{C}{۲i}\right)\overline{z} + D = ۰$$

با فرض $A = \alpha$ و $\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲i} = \beta$ و $D = \gamma$ خواهد داشت.

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = ۰$$

در حالی که $A = \alpha = 0$ باشد آنگاه معادله دایره تبدیل به معادله خط

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

می‌شود.

۲۰ـ۱۱. گزاره

فرض کنیم $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ باشد

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_1 + x_2 y_2)i$$

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)i$$

$$\overline{z_1 z_2)} = (x_1 - 1y_1)(x_2 - 1y_2) = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

۲۰ـ۱۲. گزاره

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

اثبات:

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} . \frac{z_1}{z_2}$$

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

۲۰ـ۱۳. گزاره

$$R_e z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

اگر $Z = x + iy$ و $\overline{Z} = x - iy$ بنابراین

$$R_e z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

۲۰ـ۱۴. گزاره

$$I_m z = \frac{z-\overline{z}}{۲i}$$

اگر $z = x + iy$ و $\overline{z} = x - iy$ آنگاه

$$I_m Z = \frac{z-\overline{z}}{۲i}$$

۲۰ـ۱۵. گزاره

$$|R_e Z \leq |Z|$$

از رابطه $z = x + iy$ حکم ثابت است.

۲۰ـ۱۶. گزاره

$$|I_m Z| \leq |z|$$

از رابطه $z = x + iy$ حکم ثاںت است.

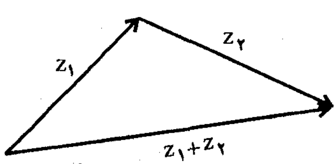
۲۰ـ۱۷. گزاره

$R_e Z = |z|$ آنگاه Z باید عددی حقیقی نامنفی باشد.

۲۰ـ۱۸. گزاره

$$|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$$

اگر $z_۱$ و $z_۲$ را هم دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ بگیریم خواهیم داشت

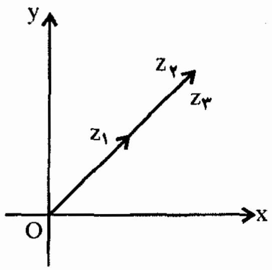


$$|z_۱| + |z_۲| \geq |z_۱ + z_i|$$

حالت تساوی وقتی برقرار است که دو بردار z_1 و z_2 در راستا و جهت هم باشند در این صورت $\frac{z_1}{z_2} > 0$ یک عدد حقیقی مثبت است

چون $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

پس $\arg z_1 = \arg z_2$



۲۰ـ۱۸. مسائل برای حل

۱. حاصل عبارت زیر را بدست آورید

الف : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

ب : $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-1^5+i^{10}-i^{15}}$

۲. اگر $z_1 = 1-i$ و $z_2 = -2+4i$ و $z_3 = \sqrt{3}-2i$

الف : $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+2}\right|$

ب: $R_e(2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2)$

ج : $I_m\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)$

۳. اگر به سه راس مثلث ABC سه بردار $z_1 = 1+2i$ و $z_2 = 4-2i$ و $z_3 = 1-6i$ نسبت داده شده باشد ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است و اندازه اضلاع مثلث را تعیین کنید.

۴. اگر z_1 و z_2 و z_3 و z_4 مختصات نظیر چهار راس یک چهار ضلعی $ABCD$ باشد. ثابت کنید اگر $z_1-z_2-z_3+z_4 = 0$ چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۵. ثابت کنید اگر اقطار یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۶. اگر E و F و G و H اوساط اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ باشند ثابت کنید چهارضلعی $HGFE$ متوازی‌الاضلاع است.

۷. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقطه E وسط AD است. ثابت کنید خط BE قطر AC را به سه قسمت تقسیم می‌کنند.

۸. مختصات نقطه‌های A و B به ترتیب $۲ + i$ و $۳ - ۲i$ است.

الف) معادله خط AB

ب) معادله عمود منصف AB را تعیین کنید.

۹. مکان هندسی نقاط زیر را تعیین کنید.

الف $: |z - i| = ۲$

ب $: |z + ۲i| + |z - ۲i|$

ج $: |z - ۳| - |z + ۳| = ۴$

د $: Im(z^۲) = ۴$

۱۰. مکان‌های زیر را در دستگاه مختصات نشان دهید.

$R_e\{z^۲\} > ۱ \qquad ۱ < |z + i| \leq ۲$

۱۱. برای $n = ۲, ۳, \dots$ ثابت کنید

$$\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{۲\pi}{m}\sin\frac{۳\pi}{m}\cdots - \sin\frac{(m-۱)\pi}{m} = \frac{m}{۲^m - ۱}$$

۱۲. ثابت کنید $۲ + i = \sqrt{۵}^{i \arctan\frac{۱}{۲}}$

۱۳. عبارت زیر را به صورت قطبی نشان دهید.

الف $: -۳ - ۴i$

ب $: ۱ - ۲i$

۱۴. نمایش هندسی $Z = Re^{i\theta}$ چیست.

۱۵. ثابت کنید

$$r_1 e^{|\theta_1|} + r_2 e^{|\theta_2|} = r_3 e^{|\theta_3|}$$

که در آن

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2}\right)$$

۱۶. عبارات زیر را برآورد کنید

الف $: (5\mathrm{cis}\, 20^\circ)(3\mathrm{cis}\, 40^\circ)$

ب $: \left(\frac{(3e^{\frac{\pi_i}{6}})(2e^{-\frac{5\pi}{4}i})(6e^{\frac{5\pi}{3}i})}{(4e^{\frac{2\pi}{3}i})^2}\right)$

۱۷. معادلات زیر را حل کنید.

الف $: 5z^2 + 2z + 10 = 0$

ب $: z^2 + (1-2)z + (3-2) = 0$

۱۸. $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است ثابت کنید.

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = (AC)^2 + (BD)^2$$

۱۹. معادله دایره‌ای را تعیین کنید که از نقاط $1 - i$ و $2i$ و $1 + i$ می‌گذرد.

۲۰. در معادله دایره $|z-1| = 1$ ثابت کنید

$$\arg(z-1) = 2\arg z = \frac{2}{3}\arg(z^2 - z)$$

۲۱. اگر اوساط سه ضلع از یک شش ضلعی سه راس دو مثلث باشند (راس هر مثلث وسط اضلاع یک در میان است) ثابت کنید نقطه همرسی میانه‌های این دو مثلث بر هم منطبق‌اند.

۲۲. در مثلث ABC نقاط A' و B' و C' بر اضلاع BC و CA و AB چنان قرار دارند که $\frac{AC'}{AB} = \frac{CB'}{CA} = \frac{BA'}{BC}$ (با حفظ جهت) ثابت کنید مراکز میانه‌ای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ بر هم منطبق می‌باشند. (انتخابی المپیاد سال ۷۹).

۲۳. ثابت کنید در هر چهار ضلعی خطوطی که هر راس را به مرکز میانه‌ای مثلثی که از سه راس دیگر بوجود آمده وصل کنیم در یک نقطه همرسند.

۲۴. اوساط اضلاع یک مثلث در دست است مثلث را رسم کنید.

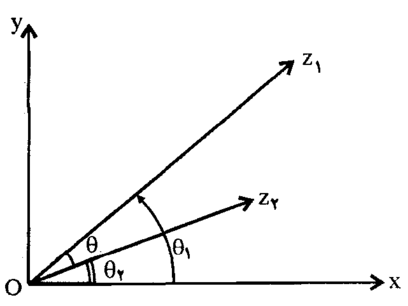
۲۵. عبارت $z_1 z_2$ را به صورت هندسی نمایش دهید.

۲۶. عبارت $\frac{z_1}{z_2}$ را به صورت هندسی نمایش دهید.

۲۷. حاصل عبارت iz را به صورت هندسی نمایش دهید.

۲۸. ثابت کنید اگر $|z_1 \overline{z_2}| = R_e(z_1 \overline{z}_2)$ آنگاه $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ و $z_1 \overline{z}_2 > 0$ و $\frac{z_1}{z_2} > 0$ یا $z_1 z_2 = 0$ یا $\arg z_1 = 2\pi + \arg z_2$ یا $\arg z_1 = \arg z_2$ و یا اینکه بردارهای z_1 و z_2 دارای یک جهت هستند.

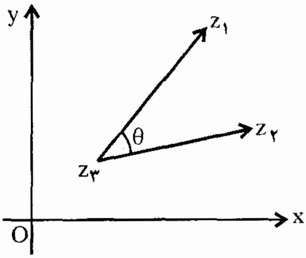
۲۰_۱۸_۱. محاسبه زاویه بین دو بردار



از نتایج گزاره (۲۰_۵_۲) یکی این بود که

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

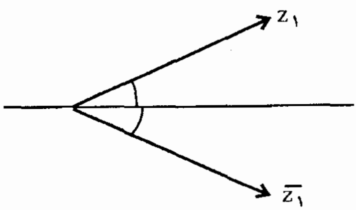
اکنون اگر سه نقطه متناظر z_1 و z_2 و z_3 را در صفحه درنظر بگیریم و مبداء مختصات را به نقطه z_3 منتقل کنیم



$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3)$$

حال اگر سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 روی یک خط یا هم امتداد باشند $\overrightarrow{z_1 z_3} = k\overrightarrow{z_2 z_3}$ در نتیجه:

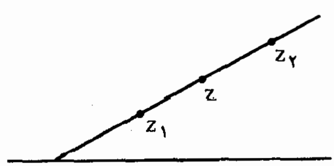
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = K \quad , \quad K \in R$$



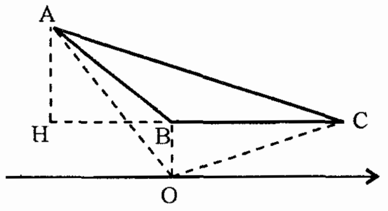
و چون برای Z_1 و $\overline{Z}_1$ داریم

بنابراین $\frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_3}{\overline{z}_2 3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ که شرط لازم و کافی بر آن است که سه نقطه z_1، z_2 ، z_3 روی یک خط واقع باشند.

معادله خط



اگر $z_3 = z$ باشد معادله خط $\frac{\overline{z} - \overline{z}_1}{\overline{z} - \overline{z}_2} = \frac{z - z_1}{z - z_3}$ است.



مثال زوایا و مساحت و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث ABC را که مختصات آن در صفحه مختلط به صورت $A = -\sqrt{۳} + ۵i$ و $B = ۲i$ و $C = ۳ + ۲i$ بدست آورید.

$$\arg B = \frac{B-C}{B-A} = \frac{۲i - (-\sqrt{۳} + ۵i)}{۲i - (۳ + ۲i)} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} + i$$

$$|B| = \sqrt{\frac{۱}{۳} + ۱} \Rightarrow |B| = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{۲}{\sqrt{۳}}} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۱۲۰^\circ$$

$$\arg A = \frac{A-C}{A-B} = \frac{-\sqrt{۳} + ۵i - (۳ + ۲i)}{-\sqrt{۳} + ۵i - (۲i)} = \frac{-\sqrt{۳} - ۳ + ۳i}{-\sqrt{۳} + ۳i}$$

$$\arg A = \frac{۴ + \sqrt{۳}}{۴} + \frac{۳}{۴}i \Rightarrow A = ۲۸^\circ$$

و به همین ترتیب $C = ۳۲^\circ$.

برای محاسبه ارتفاع AH کافی است مساحت مثلث ABC را بنابر مسئله ۱۸ مساحت مثلث ABC از دترمینان $S = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} -\sqrt{۳} & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = \frac{۹}{۲}$ بدست آورید.

و $|BC| = ۳$ بنابراین ارتفاع $AH = \frac{۲s}{BC} = ۳$

راه‌حل دیگر برای مثال فوق استفاده از ضرب داخلی اعداد مختلط است. اگر $z_۱ = x_۱ + y_۱$ و $z_۲ = x_۱ + iy_۲$

$$z_۱.z_۲ = |z_۱|.|z_۲|\cos\theta = x_۱x_۲ + y_۱y_۲ = Re\{\overline{z}_۱z_۲\} = \frac{۱}{۲}(\overline{z}_۱z_۲ + z_۱\overline{z})$$

$$\cos\theta = \frac{x_۱x_۲ + y_۱y_۲}{|z_۱|.|z_۲|}$$

که $z_۱ = AB = (-\sqrt{۳} + ۵i) - (۲i)$ یا $z_۱ = -\sqrt{۳} + ۳i$ و $z_۲ = Bc = ۲i - (۳ + ۲i)$ یا $\overline{CB} = -z_۲ = +۳$

$$\cos\theta = \frac{-۳\sqrt{۳}}{|۳|.\sqrt{۳+۹}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۱۲۰^\circ$$

۲۰ـ۱۹. دو بردار عمود بر هم

الف) اگر دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ بر هم عمود باشند $\cos\theta = ۰$ یا حاصل ضرب داخلی آنها $z_۱.z_۲ = ۰$ یا $\overline{z}_۱ z_۲ + \overline{z}_۲ z_۱ = ۰$ است.

زاویه بین دو بردار $z_۱ = ۱ + i$ و $z_۲ = -۱ + i$ برابر ۹۰° است.

چون

$$\overline{z}_۱ z_۲ + \overline{z}_۲.z_۱ = ۰ \Rightarrow (۱+i)(-۱-i) + (۱-i)(-۱+i) = ۰$$

ب) اگر دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ بر هم عمود باشند آنگاه $z_۱ = iz_۲$ یا $\frac{z_۱}{z_۲} = i$ چون $z_۱ = \cos\theta + i\sin\theta$ و $z_۲ = \cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{۲})$ یا $z_۲ = -\cos\theta + \sin\theta$ یا $z_۱ = iz_۱$

در مثال فوق

$$z_۱ = ۱ + i \qquad , z_۲ = -۱ + i$$

$$z_۱ = iz_۲$$

بنابراین اگر زاویه $z_۲ z_۱ z_۳$ برابر ۹۰° باشد

$$\frac{z_۱ - z_۳}{z_۱ - z_۲} = i$$

یا به عبارت دیگر یک عدد موهومی فاقد مولفه صحیح است.

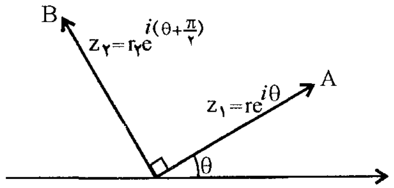
ج) اگر دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ بر هم عمود باشد

$$z_۱ = r_۱ e^{i\theta}$$

$$z_۲ = r_۲ e^{i(\theta + \frac{\pi}{۲})}$$

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲} e^{i\frac{\pi}{۲}} = \frac{r_۱}{r_۲}\left(\cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{r_۱}{r_۲}(e)$$

$$\frac{z_۱}{z_۲} = ki \qquad k \in R, k = \frac{r_۱}{r_۲}$$



د) دوران بردار $z_۱$ به اندازه ۹۰° و ضرب اندازه آن در عدد $k=\frac{r_۲}{r_۲}$

هـ) از رابطه (الف) داریم $\overline{z}_۱z+\overline{z}_۱z_۲=۰$. اگر برای سه نقطه A و $C.B$ زاویه $ABC=۹۰^\circ$ باشد یعنی $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$ آنگاه

$$z_۱=A-B$$

$$z_۲=C-B$$

بنابراین $(A-B)(\overline{C}-\overline{B})+(C-B)(\overline{A}-\overline{B})=۰$

یا

$$\boxed{\frac{A-B}{C-B}+\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\overline{C}-\overline{B}}=۰}$$

۱-۱۹-۲۰. توازی دو بردار

الف) اگر $AB\parallel CD$ باشد آنگاه $AB=KCD$ که K یک عدد حقیقی است پس $\frac{AB}{CD}=K$ یا $\frac{A-B}{C-D}=K$ اگر $K>۰$ دو بردار هم جهت و اگر $K<۰$ دو بردار مختلف‌الجهت هستند.

ب) اگر دو بردار $z_۲\parallel z_۱$ باشد آنگاه ضرب خارجی این دو بردار برابر صفر است.

$$z_۱\times z_۲=|z_۱|.|z_۲|.\sin\theta=x_۱y_۲-x_۲y_۱=\frac{۱}{۲i}(\overline{z}_۱z_۲-z_۱\overline{z}_۲)=۰$$

پس $\overline{z}_۱z_۲-z_۱\overline{z}_۲=۰$

و اگر $\overrightarrow{z}_۱=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{Z}_۲=\overrightarrow{CD}$ باشد پس

$$\frac{A-B}{C-D}-\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\overline{C}-\overline{D}}=۰ \quad \text{یا} \quad \frac{A-B}{C-D}=\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\overline{C}-\overline{B}}$$

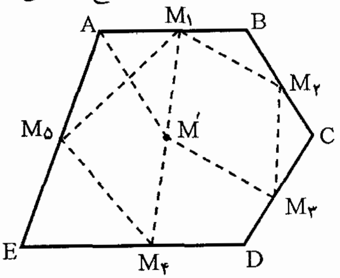
ج) اگر $|z_2| + |z_1| = |z_1 + z_2|$ دو بردار هم خط می‌باشند یعنی $K = \frac{z_1}{z_2}$ که K یک عدد حقیقی است. (در صورتی که $z_2 \neq 0$).

د) اگر $AB \parallel CD$ باشد

$$\arg\left\{\frac{A-B}{A-C}\right\} - \arg\left\{\frac{D-B}{D-C}\right\} = 0$$

که در حالت خاص این چهار نقطه بر یک دایره واقع می‌شوند.

مثال: ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک پنج ضلعی در دست باشد آن پنج ضلعی قابل رسم است.



اگر M' راس چهارم متوازی‌الاضلاعی باشد که روی نقاط M_1 و M_2 و M_3 اوساط اضلاع AB و BC و CD ساخته شده باشد.

$$M' + M_2 = M_1 + M_3$$

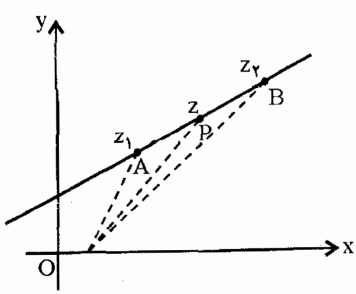
حال کافی است ثابت کنیم که چهارضلعی $AM'M_4M_5$ یک متوازی‌الاضلاع است.

$M_1 = \frac{A+B}{2}$ و $M_2 = \frac{B+C}{2}$ و $M_3 = \frac{C+D}{2}$ بنابراین $M' = \frac{A+D}{2}$

$AM' \parallel M_4M_5$ چون $\frac{A-M'}{M_5-M_4} = 1$ و $AM_5 \parallel M'M_4$ چون $\frac{A-M_5}{M'-M_4} = 1$.

بنابراین نقطه A راس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که روی سه نقطه M' و M_4 و M_5 ساخته می‌شود.

۲۰ـ۱۹ـ۲. معادله خط



اگر سه نقطه z و z_1 و z_2 هم خط باشند داریم $\frac{AP}{PB} = \frac{n}{m}$ که $\frac{n}{m} \in R$.

$MAP = m(BP)$ یا $m(z - z_1) = n(z - z_2)$ بنابراین $z = \frac{m}{m+n} z_1 + \frac{n}{m+n} z_2$ و

اگر $\alpha = \frac{m}{m+n}$ و $\beta = \frac{n}{m+n}$ آنگاه معادله خطی که از دو نقطه معلوم z_1 و z_2 می‌گذرد به صورت

$$\boxed{Z = \alpha z_1 + \beta z_2}$$

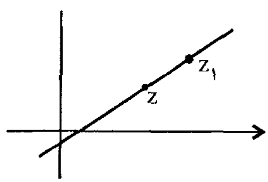
و اگر $K = \frac{n}{m}$ و $m < n$ آنگاه

$$z - z_1 = k(z - z_2)$$

$$(1 - K)z - z_1 + K z_2 = 0$$

که با تبدیل $z \to z_1$ داریم

$$\boxed{Z = (1 - K)z_1 + K z_2}$$



معادله خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد به صورت $\boxed{Z = KZ_1}$ که z_1 یک نقطه از خط است.

اگر معادله فوق را به صورت مزدوج آن بنویسیم

$$\overline{z} = \overline{KZ_1}$$

$$\overline{Z} = K\overline{Z_1}$$

داریم

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}_1} \Rightarrow \boxed{\frac{z}{z_1} - \frac{\overline{z}}{\overline{z}_1} = 0}$$

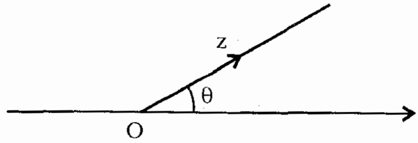
معادله خط گذرنده از مبداء نقطه Z_1

$$\boxed{Z.\overline{Z}_1 - Z_1\overline{Z} = 0}$$

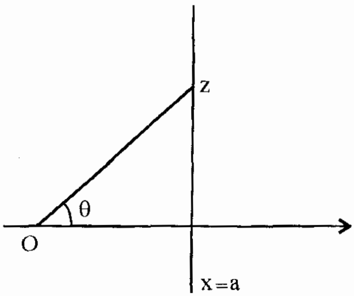
$$\boxed{Z = \frac{z_1}{\overline{z}_1}.\overline{z}}$$

$Z = K\overline{Z}$ که K یک عدد مختلط است.

چون معادله سمت راست اول و سوم $z = i\overline{z}$ است معادله خط گذرنده از مبداء مختصات به صورت قطبی هم به صورت زیر است.



$z = re^{i\theta}$



معادله خط عمود بر محور $x = a$

$\boxed{z + \overline{z} = ۲a}$ یا $|z| = \dfrac{|a|}{\cos\theta}$

معادله محور $x'x$ به صورت $z = \overline{z}$ است.

معادله خط $y = a$ به صورت $\boxed{z - \overline{z} = ۲ia}$

۲۰ـ۱۹ـ۳. معادلات خطوط عمود بر هم

اگر معادله خطی به صورت $y = ax + b$ آنگاه معادله خط عمود بر آن به صورت $y = -\dfrac{۱}{a}x + b$ است. با تبدیل‌های مزدوج $x = \dfrac{z + \overline{z}}{۲}$ و $y = \dfrac{z - \overline{z}}{۲i}$ خواهیم داشت.

$$y = ax + b \Rightarrow (۱ - ai)z - (۱ + ai)\overline{z} = bi \qquad (۱)$$

اگر عدد $\alpha = ۱ - ai$ نمایش دهیم $\overline{\alpha} = ۱ + ai$ خواهد بود و معادله به صورت

$\boxed{\alpha z - \overline{\alpha z} = bi}$ در بیاید. (۲)

معادله خط $y = -\frac{۱}{a}x + b'$ با همین تبدیل به صورت

$$(a+i)z - (a-i)\overline{z} = ۲b'ai \qquad (۳)$$

در بیاید اما

$$\begin{cases} a+i = i\alpha \\ a-i = i\overline{\alpha} \end{cases}$$

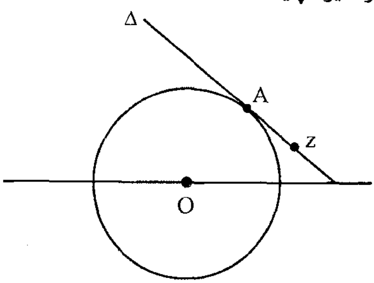
بنابراین معادله (۳) به صورت $\alpha z - \overline{\alpha z} = ۲ab'$ در بیاید.

اگر $ab' = m$ برابر یک عدد حقیقی باشد معادله (۴) به صورت

$$\boxed{\alpha z - \overline{\alpha z} = m}$$

و معادله خط عمود بر آن به صورت $\boxed{\alpha z - \overline{\alpha z} = bi}$ که b یک عدد حقیقی است در می‌آید.

مثال: معادله خط مماس بر دایره در نقطه a واقع بر دایره چیست؟



می‌توان دایره را به شعاع واحد در مرکز مختصات درنظر گرفت و خط Δ در نقطه A به مختصات عدد مختلط a مماس باشد.

پس $\overrightarrow{OA} \perp \overline{AZ}$

مطابق گزاره (هـ) از دو بردار عمود بر هم داریم

$$\frac{A - ۰}{A - Z} + \frac{\overline{A} - \overline{O}}{\overline{A} - \overline{Z}} = ۰$$

$$\frac{a}{a - z} + \frac{\overline{a}}{\overline{a} - \overline{z}} = ۰$$

$$a(\overline{a} - \overline{z}) + \overline{a}(a - z) = ۰ \rightarrow a\overline{a} - a\overline{z} + \overline{a}a - \overline{a}z = ۰$$

اما چون نقطه A بر دایره واحد قرار دارد $a\overline{a} = ۱$ است.

$$\overline{a}z + a\overline{z} = ۲$$

$$\frac{z}{a} + a\overline{z} = ۲$$

راه‌حل دوم

معادله خطوطی که از مبداء می‌گذرند به صورت (۱) $z - R\overline{z} = \circ$ که R یک عدد موهومی باشد.
و خط عمود بر آن به صورت (۲) $z + R\overline{z} = \text{۲}bi$ که b یک عدد حقیقی است.
چون مختصات نقطه a در معادله (۱) صدق می‌کند پس $R = \frac{a}{\overline{a}}$ و از معادله (۲) $a = bi$ خواهد بود که باز هم معادله $\overline{a}z + a\overline{z} = \text{۲}$ بدست می‌آید.

معادله کلی خط و دایره در دستگاه مختلط

معادله کلی دایره $A(x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}) + Bx + \text{۲}y + D = \circ$ است. اگر $x = \frac{z+\overline{z}}{\text{۲}}$ و $y = \frac{z-\overline{z}}{\text{۲}i}$ را تبدیل نماییم داریم

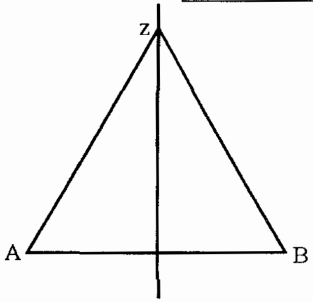
$$Az\overline{z} + B\left(\frac{z+\overline{z}}{\text{۲}}\right) + C\left(\frac{z-\overline{z}}{\text{۲}i}\right) + D = \circ$$

$$Az\overline{z} + \left(\frac{B}{\text{۲}} + \frac{C}{\text{۲}C}\right)z + \left(\frac{B}{\text{۲}} - \frac{C}{\text{۲}i}\right)\overline{z} + D = \circ$$

با فرض $A = \alpha$ و $\frac{B}{\text{۲}} + \frac{C}{\text{۲}C} = \beta$ و $D = \gamma$ داریم

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = \circ$$

و در صورتی که $A = \alpha = \circ$ باشد معادله خط $\boxed{\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = \circ}$ است.



مثال: معادله عمود منصف پاره‌خط AB را بنویسید.

$$|Z - A| = |Z - B|$$

$$\frac{|Z-A|}{|Z-B|} = \text{۱}$$

$$\frac{(Z-A)}{(Z-B)} \times \frac{(\overline{Z}-\overline{A})}{(\overline{Z}-\overline{B})} = \text{۱} \rightarrow (Z-A)(\overline{Z}-\overline{A}) = (Z-B)(Z-\overline{B})$$

$$(\overline{B}-\overline{A})Z + (B-A)\overline{Z} = |B|^{\text{۲}} - |A|^{\text{۲}}$$

مثال: مختصات مرکز دایره محیطی مثلث ABC را بدست آورید.

$$(\overline{B}-\overline{A})Z+(B-A)\overline{Z}=|B|^۲-|A|^۲ \quad \text{عمود منصف } AB$$

$$(\overline{C}-\overline{A})Z+(C-A)\overline{Z}=|C|^۲-|A|^۲ \quad \text{عمود منصف } AC$$

$$(\overline{B}-\overline{C})Z+(B-C)\overline{Z}=|B|^۲-|C|^۲$$

از حل سه دستگاه معادله فوق مختصات نقطه O به صورت

$$O=\frac{|A|^۲(B-C)+|B|^۲(C-A)+|C|^۲(A-B)}{\overline{A}(B-C)+\overline{B}(C-A)+\overline{C}(A-B)}$$

۲۰ـ۱۹ـ۴. گزاره

اگر سه نقطه $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ هم خط باشند ثابت کنید سه عدد حقیقی مانند α و β و γ (که همگی صفر نیستند) وجود دارند به طوری که

$$\alpha z_۱+\beta z_۲+\gamma z_۳=۰$$

به شرطی که $\alpha+\beta+\gamma=۰$ باشد
دیدیم معادله خط که از دو نقطه $z_۱$ و $z_۲$ می‌گذرد به صورت

$$Z=\frac{mz_۱+nz_۲}{m+n}$$

می‌باشد که نقطه z پاره‌خط $z_۱z_۲$ را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده است

$$(m+n)Z-mZ_۱+nZ_۲=۰ \Rightarrow (m+n)-m-n=۰$$

۲۰ـ۱۹ـ۵. گزاره

معادله خط و مزدوج آن با هم برابر است.
معادله خط گذرنده از دو نقطه A و B به صورت

$$(\overline{A}-\overline{B})Z-(A-B)\overline{Z}=\overline{A}B-A\overline{B}$$

بوده است. اگر مزدوج این معادله را تعیین کنیم

$$\overline{(\overline{A}-\overline{B})Z}-\overline{(A-B)\overline{Z}}=\overline{\overline{A}B}-\overline{A\overline{B}}$$

$$\overline{(\overline{A}-\overline{B})}.\overline{Z}-\overline{(A-B)}.Z=\overline{\overline{A}B}-\overline{A\overline{B}}$$

$$(A-B).\overline{Z}-(\overline{A}-\overline{B}).Z=A\overline{B}-\overline{A}B$$

$$(\overline{A}-\overline{B}Z-(\overline{A}-\overline{B}).Z=A\overline{B}-\overline{A}B$$

$$(\overline{A}-\overline{B})Z-(A-B)\overline{Z}=\overline{A}B-A\overline{B}$$

علاوه بر این ملاحظه می‌شود

$$|A-B|=|\overline{A}-\overline{B}|$$

مثال: معادله $Z-\overline{Z}=۲i$ معادله یک خط است چون $\overline{Z}-Z=۲\overline{i}$ یا $\overline{Z}-Z=-۲i$ یا $Z-\overline{Z}=۲i$ و قدر مطلق مضرب‌های Z و $\overline{Z}$ با هم برابر است چون هر دو برابر یک می‌باشند.
اما معادله $Z-\overline{Z}=۲$ معادله خط نسبت چون $\overline{Z}-Z=۲$ یا $Z-\overline{Z}=-۲$
در واقع اگر نقطه $M(\alpha+\beta)$ را در معادله خط بگذاریم.

$$\alpha+\beta-(\alpha-i\beta)=۲$$
$$۲i\beta=۲\Rightarrow B=\frac{۱}{i}=-i$$

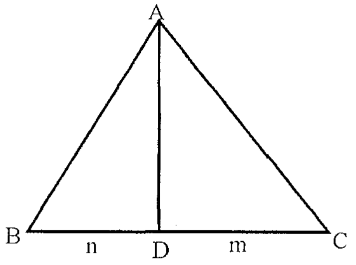
که یک عدد حقیقی نیست. بنابراین معادله مربوطه معادله خط نمی‌باشد.
در حالی که در معادله اول یعنی $z-\overline{z}=۲i$ اگر $m=(\alpha+\beta i)$ را بگذریم

$$(\alpha+\beta i)=(\alpha-\beta i)=۲i$$
$$\beta=۱$$

که برابر یک عدد حقیقی می‌شود

۲۰ـ۱۹ـ۶. محاسبه مختصات پای نیمساز داخلی

می‌دانیم:



$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{n}{m}$$

و اگر A مبداء مختصات فرض شود

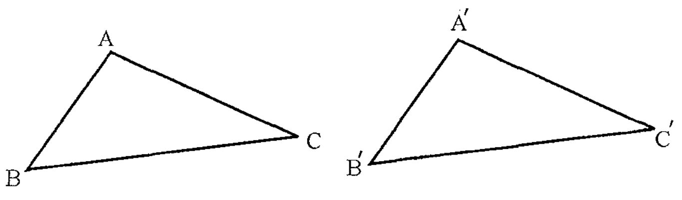
$$D = \frac{mB + nC}{m + n}$$

$$D = \frac{m}{m+n}B + \frac{n}{m+n}C \Rightarrow D = \frac{|C|}{|B|+|C|}B + \frac{|B|}{|B|+|C|}C$$

و اگر مبداء مختصات را به A منتقل کنیم

$$D = \frac{|C-A|}{|B-A|+|C-A|}(B-A) + \frac{|B-A|}{|B-A|+(C-A)} \times (C-A)$$

۲۰ـ۱۹ـ۷. تشابه دو مثلث



اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ و $\hat{A} = A'$ و $\hat{B} = \hat{B'}$ و $\hat{C} = \hat{C'}$ است. پس

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

اگر اعداد مختلط را به سه راس دو مثلث نسبت دهیم.

$$\begin{cases} AB = r_1 e^{i\theta_1} \\ AC = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\begin{cases} A'B' = r'_1 e^{i\theta_1} \\ A'C' = r'_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \qquad \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{r'_1}{r'_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

اما $\left|\frac{A'B'}{A'C'}\right| = \left|\frac{AB}{AC}\right|$ یا $\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{r_1}{r_2}$ در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \Rightarrow \boxed{\frac{A-B}{A-C} = \frac{A'-B'}{A'-C'}}$$

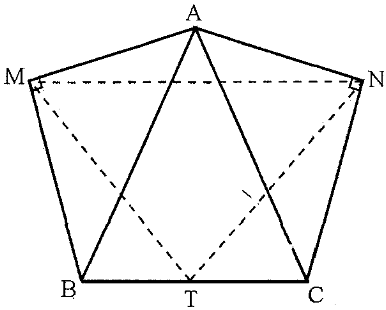
این رابطه هم ارز است با:

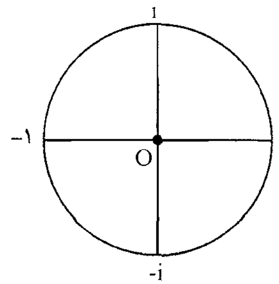
$$\begin{vmatrix} A & A' & 1 \\ B & B' & 1 \\ C & C' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

تساوی نسبت رابطه فوق به معنی آن است که $\arg\frac{A'-B'}{A'-C'} = \arg\frac{A-B}{A-C}$ می‌باشد یعنی باید در نوشتن تشابه جهت زاویه را باید حفظ کرد.

بنابراین اگر سه نقطه A و B و C بر یک خط راست واقع شوند	$\begin{vmatrix} A & \overline{A} & 1 \\ B & \overline{B} & 1 \\ C & \overline{C} & 1 \end{vmatrix} = 0$

مثال: بر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC دو مثلث قائم‌الزاویه AMB و ANC را می‌سازیم اگر نقطه T وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید مثلث MKV قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. (اردیبهشت ۷۵ـ مرحله دوم المپیاد داخلی).





با حفظ جهت مثلث BMA با مثلث $۱۰i$ متشابه است پس

$$\begin{vmatrix} -B & ۱ & ۱ \\ M & ۰ & ۱ \\ A & i & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow B(-i) - (M - \Delta) + Mi = ۰ \Rightarrow M = \frac{A(۱+i) + B(۱-i)}{-۲} \quad (۱)$$

مثلث NCA با حفظ جهت با مثلث $OC۱$ متشابه است. بنابراین

$$\begin{vmatrix} N & ۰ & ۱ \\ N & i & ۱ \\ A & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \rightarrow Ni - N + C - Ai = ۰ \qquad N = \frac{A + C + iA - iC}{-۲} \qquad (۲)$$

اگر مثلث MTN قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد باید مثلث NTM با حفظ جهت با مثلث $۱۰i$ متشابه باشد یعنی

$$\begin{vmatrix} N & i & ۱ \\ T & ۰ & ۱ \\ M & i & ۱ \end{vmatrix} = -iN - (T - M) + Ti = ۰ \qquad (۳)$$

و چون $T = \dfrac{B+C}{۲}$ و با استفاده از دو رابطه (۲) و (۱) رابطه به اثبات می‌رسد.

راه‌حل دوم

دیدیم اگر دو بردار MA و MB بر هم عمود باشند

$$\frac{MB}{MA} = \frac{B - M}{A - M} = i \qquad \text{فرض} \qquad (۱)$$

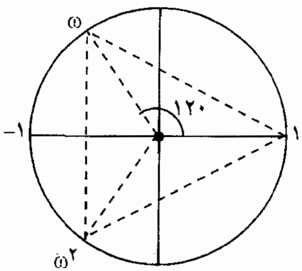
$$\frac{NC}{NA} = \frac{C-N}{A-N} = -i \qquad (۲)$$

$$\frac{TN}{TM} = \frac{N-T}{M-T} = i \quad \text{حکم} \qquad (۳)$$

$$T = \frac{B+C}{۲} \quad \text{فرض} \qquad (۴)$$

و اگر از روابط (۱) و (۲) و (۳) مقادیر M و N و T را حساب و در رابطه (۴) که حکم است قرار دهیم باز حکم ثابت است.

۲۰_۱۹_۸. تشابه با مثلث متساوی‌الاضلاع



ملاحظه شد که جواب‌های معادله $z^۳ = ۱$ عبارت بودند از $z = ۱$ و $z = \frac{-۱ + i\sqrt{۲}}{۲}$ و $z = \frac{-۱ - i\sqrt{۳}}{۲}$)

که بر روی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه اعداد مختلط به صورت ۱ و w و $w^۲$ بودند که در رابطه $w^۲ = w + ۱ = ۰$ صدق می‌نماید.

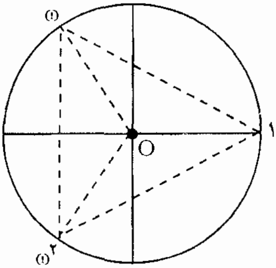
که $w^۳ = ۱$ و $w^۲ = \overline{w}$ و $w\overline{w} = ۱$ می‌باشند مثلث $۱ww^۲$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

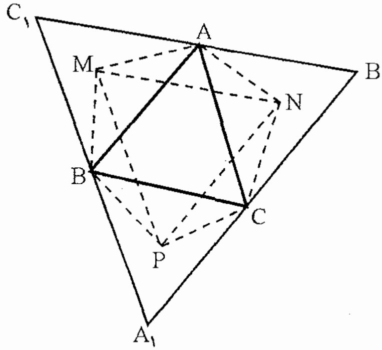
بنابراین اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد با حفظ جهت $\begin{vmatrix} A & ۱ & ۱ \\ B & w & ۱ \\ C & w^۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$.

یا $A + Bw + Cw^۲ = ۰$.

مثال: بر روی اضلاع مثلث و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم ثابت کنید سه مرکز میانه‌ای این مثلث‌ها رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

حل: مراکز میانه‌ای سه مثلث را M و V و P می‌نامیم بنابراین اگر مثلث MNP بخواهد متساوی‌الاضلاع باشد باید در رابطه $N + M\omega + P\omega^۲ = ۰$ صدق نماید.





مثلث‌های $CPB \sim 10w$ و $BMA \sim 10w$ و $ANC \sim 10w$ هستند پس

$$\begin{vmatrix} C & 1 & 1 \\ P & 0 & 1 \\ B & w & 1 \end{vmatrix} = 0 \to -\omega C(P-B) + P\omega = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} B & 1 & 1 \\ M & 0 & 1 \\ A & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0 \to -B\omega - (M-A) + M\omega = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} A & 1 & 1 \\ N & 0 & 1 \\ C & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0 \to -A\omega - (N-C) + N\omega^2 = 0 \qquad (3)$$

در عین حال که $w^2 + w + 1 = 0$ اگر از روابط (۱) و (۲) و (۳) مقادیر P و M و N را حساب کرده و در رابطه (۴) قرار دهیم. حکم ثابت است.

چون $P = \dfrac{B-\omega C}{1-\omega}$ و $M = \dfrac{A-B\omega}{1-\omega}$ و $N = \dfrac{C-A\omega}{1-\omega}$

$$\frac{C-A\omega}{1-\omega} + \frac{A-B\omega}{1-\omega} + \omega^2 \frac{B-\omega C}{1-\omega} = 0 \qquad (4)$$

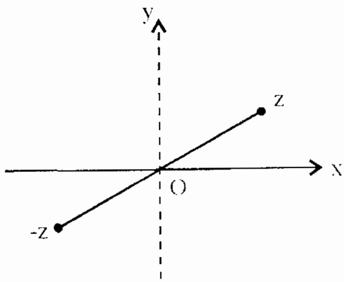
و چون $\omega^3 = 1$ پس رابطه برقرار است. $C - A\omega + \omega A - B\omega^2 + \omega^2 B - \omega^3 C = 0$

۲۰ـ۱۹ـ۱۰. تبدیلات هندسی

تبدیلات هندسی در صفحه اعداد مختلط به صورت زیر ظاهر می‌شوند.

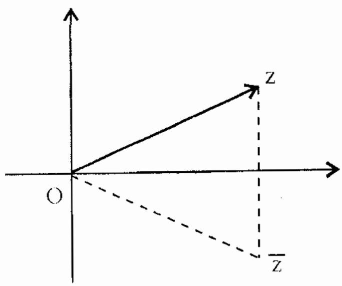
۱. $Z' = -Z$

۲. $Z' = \overline{Z}$

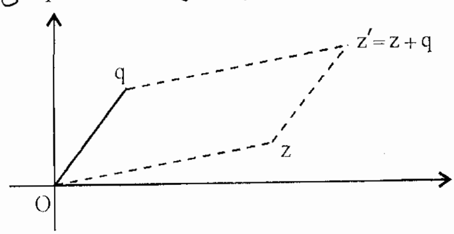


معادله (۱) معرف یک تقارن مرکزی حول نقطه O یا یک نیم دور یا یک دوران ۱۸۰ حول نقطه (O) می‌باشد.

معادله (۲) معرف یک تقارن محوری یا بازتاب است.



معادله (۳) $\overline{Z} = z + q$ معرف یک انتقال در صفحه به اندازه $q = a + ib$ می‌باشد.



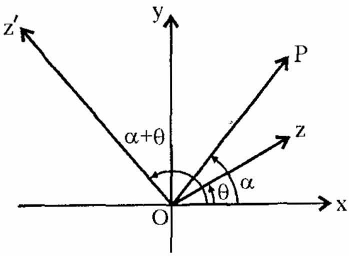
چون $Z = x + iy$ پس $Z' = (x - iy) + (a + ib)$

$$Z' = (x + a) + i(y + b) \Rightarrow x' = x + a, y' = y + b$$

معادله (۴) $Z' = PZ$ که در آن $P = t(\cos\alpha + i\sin\theta)$ یا $P = te^{i\alpha}$ معرف یک تجانس

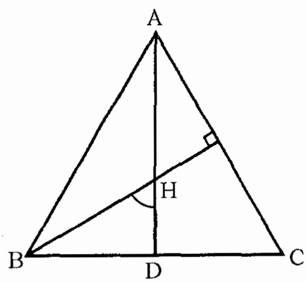
مارپیچی است. چون $z = re^{i\theta}$ بنابراین

$$Z' = PZ \Rightarrow Z' = r.te^{i(\alpha+\theta)}$$



البته با توجه به اینکه جهت‌های α و θ را باید درنظرگرفت.

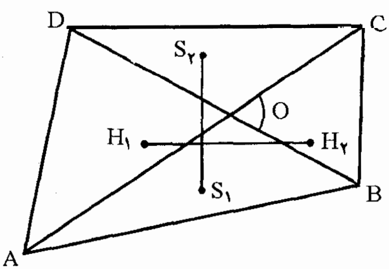
مثال: در چهار ضلعی محدب $ABCD$ نقطه O محل برخورد قطرهای AC و BD می‌باشد. اگر S_1 و S_2 مرکز میانه‌ای دو مثلث AOB و DOC و H_1 و H_2 مرکز ارتفاعیه دو مثلث COB و DOA باشد ثابت کنید S_1S_2 بر H_1H_2 عمود است.



می‌دانیم در هر مثلث $AH = BC.\cot A$

چون $BD = AB.\cos B$ و زاویه $H = C$ پس $BH = \dfrac{BD}{\sin C}$ در نتیجه $BH = AB.\dfrac{\cos B}{\sin C}$، در هر مثلث $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$ بنابراین

$$\boxed{BH = AC.\cot B}$$



حال در چهارضلعی $ABCD$ اگر O را مبداء مختصات قرار دهیم

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{3}(A+B) \\ S_2 = \frac{1}{3}(C+D) \end{cases} \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{1}{3}(A+B-C-D)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= (A-D)i.\cot O \\ H_2 &= (C-B).i.\cot O \end{aligned} \Rightarrow H_1 - H_2 = (A+B-C-D) - i.\cot O$$

یعنی S_1S_2 ضریبی از i نسبت به H_1H_2 است.

۲۰ـ۱۹ـ۱۱. نقاط واقع بر یک خط یا یک دایره

ملاحظه شد که شرط لازم و کافی برای آنکه سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 واقع بر یک خط راست باشند آن بود که

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_3} \quad \text{یا} \quad \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = R \qquad R \in R$$

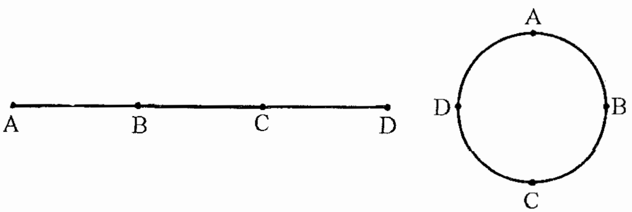
و به عبارت دیگر معادله خط گذرنده از دو نقطه معلوم z_1 و z_2 به صورت

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2) = 0$$

که C یک عدد موهومی خالص بود $BZ - \overline{BZ} + C = 0$

در بخش ناهمساز دیدیم که چهار نقطه A و B و C و D بر یک خط راست یا بر یک دایره واقع‌اند اگر $(ABCD) = K$ باشد که $K \in R$



پس

$$= \frac{A-C}{B-C} : \frac{A-D}{B-D} = R, R \in R$$

یا

$$\frac{A-C}{B-C} : \frac{A-D}{B-D} = \frac{\overline{A} - \overline{C}}{\overline{B} - \overline{C}} : \frac{\overline{A} - \overline{D}}{\overline{B} - \overline{D}}$$

پس معادله خط یا دایره‌ای که از سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 بگذرد به صورت

$$\frac{z-z_2}{z_1-z_2}:\frac{z-z_3}{z_1-z_3}=\frac{\overline{z}-\overline{z}_2}{\overline{z}_1-\overline{z}_2}:\frac{\overline{z}-\overline{z}_3}{\overline{z}_1-\overline{z}_3}$$

۲۰ـ۱۹ـ۱۲. گزاره کلیفورد

چهار دایره S_1 و S_2 و S_3 و S_4 در صفحه مفروضند. اگر Z_1 و ω_1 محل برخوردهای دو دایره S_1 و S_2 و Z_2 و ω_2 محل برخورد دو دایره S_2 و S_3 و Z_3 و ω_3 محل برخورد S_3 و S_4 و Z_4 و ω_4 محل برخورد S_4 و S_1 و چهار نقطه Z_1 و Z_2 و Z_3 و Z_4 واقع بر دایره یا خط (α) باشند آنگاه چهار نقطه ω_1 و ω_2 و ω_3 و ω_4 واقع بر یک دایره (یا خط) و (α') خواهند بود.

چون چهار نقطه Z_1 و Z_2 و ω_2 و ω_1 روی دایره S_2 واقع‌اند پس

$$(z_1,\omega_2,z_2,\omega_1)=K_1\Rightarrow\frac{z_1-z_2}{\omega_2-z_2}:\frac{z_1-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}=K_1$$

و چون چهار نقطه z_2 و z_3 و ω_2 و ω_3 واقع بر دایره S_3 می‌باشند پس

$$(z_2,\omega_3,z_3,\omega_2)=K_2\Rightarrow\frac{z_2-z_3}{\omega_3-z_3}:\frac{z_2-\omega_2}{\omega_3-\omega_2}=K_2\qquad K_2\in R$$

و چون نقاط z_3 و z_4 و ω_3 و ω_4 بر دایره s_4 واقع می‌باشند. پس

$$(z_4,\omega_1,z_1,\omega_4)=K_4\Rightarrow\frac{z_4-z_1}{\omega_1-z_1}:\frac{z_4-\omega_4}{\omega_1-\omega_4}=K_{4,4}\in R$$

بنابراین

$$\frac{K_1.K_3}{K_2.K_4}=K,K\in R$$

بنابراین

$$\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}:\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_3-\omega_2}:\frac{\omega_1-\omega_4}{\omega_3-\omega_4}\right)=K$$

یا

$$K_1.K'=K$$

و چون K_1 و K حقیقی‌اند پس K' باید حقیقی باشد

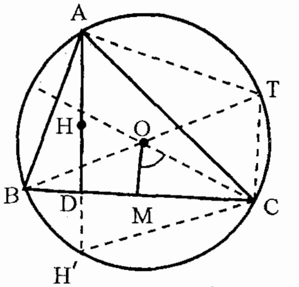
$$\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_3-\omega_2}:\frac{\omega_1-\omega_4}{\omega_3-\omega_4}=K'$$

که K' یک عدد حقیقی است.

پس چهار نقطه $\omega_1.\omega_2$ پس ω_3 و ω_4 بر یک دایره یا خط واقع‌اند..

۲۰ـ۱۹ـ۱۳. گزاره

فاصله هر راس مثلث تا مرکز ارتفاعیه مثلث دو برابر فاصله مرکز دایره محیطی تا وسط ضلع مقابل است اگر M مرکز زاویه مثلث ABC باشد.



(۲۰ـ۱۹ـ۳)

درمثال صفحه ۸۸ ملاحظه شدکه $AH = BC.\cot A$

اگر M وسط ضلع BC باشد چون زاویه $A = o$ می‌باشد پس

$$OM = BM.\cot O$$
$$OM = \frac{۱}{۲}BC.\cot A$$

پس $AH = ۲OM$.

گزاره: مختصات مرکز ارتفاعیه مثلث $H = A + B + C$.

مثال: اگر اعداد مختلط A و H و B و C و M را در نظر می‌گیریم

$$M = \frac{۱}{۲}(H - A) \rightarrow \frac{B+C}{۲} = \frac{۱}{۲}(H - A) \rightarrow \boxed{H = A + B + C}$$

گزاره

مرکز میانه‌ای و مرکز ارتفاعیه و مرکز دایره محیطی مثلث بر روی یک خط قرار دارند
$G = \frac{A+B+C}{۳}$ و $H = A + B + C$ و O مرکز دایر محیطی مبداء مختصات منطبق باشد

$$\frac{H - O}{G - O} = \frac{H}{G} = ۳$$

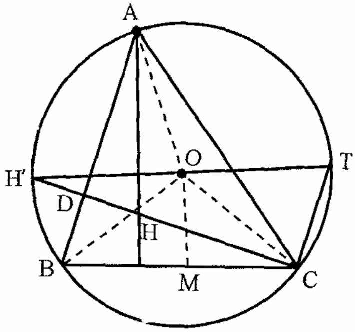
چون ۳ یک عدد حقیقی است پس H و G و O روی یک خط راست واقع می‌باشند.

۲۰ـ۱۹ـ۱۴. اثبات یک گزاره هندسی

اگر O مرکز دایره محیطی و H مرکز ارتفاعیه و M وسط ضلع BC و AD و CE ارتفاع باشند آنگاه $AH \overset{۱۱}{=} ۲OM$. شکل (۲۰ـ۱۹ـ۳)

اثبات: زاویه $B\hat{C}T = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی $AHCT$ متوازی‌الاضلاع است اما $OM = \frac{۱}{۲}CT$ پس $OM \overset{\parallel}{=} \frac{۱}{۲}AH$. حکم گزاره قبلی $H - A + B + C$ اثبات می‌شود.
در عین حال چون مثلث CHH' متساوی‌الساقین است پس D وسط HH' است.

۲۰-۱۹-۱۵. محاسبه مختصات پای ارتفاعات



(۱۹-۲۰)

اگر H مرکز ارتفاعیه و خط CT موازی AB باشد و H' قرینه H نسبت به ضلع BC روی دایره محیطی باشد پس $H'T$ یک قطر دایره است.

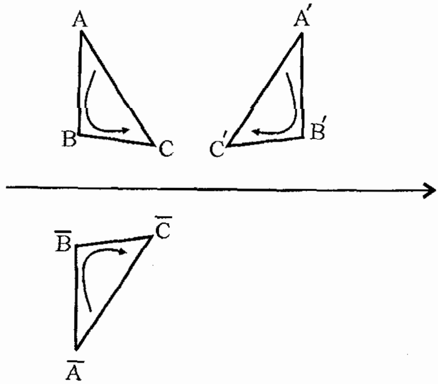
حال اگر O را مرکز دستگاه مختصات مختلط قرار دهیم $A\hat{O}T = BOC$ و چون $|OA| = |OT| = |OC| = |OB| = R$ است پس $\arg AOT = \arg C\hat{O}B$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{T} \Rightarrow T = \frac{bc}{a}$$

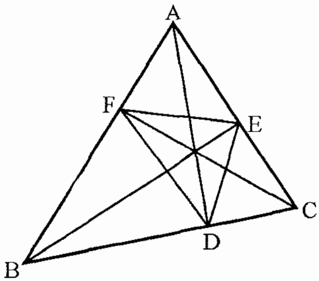
اما چون H' قرینه T نسبت به مرکز دایره است پس $H' = -\frac{bc}{a}$ و چون $D = \frac{H+H'}{۲}$ پس

$$D = \frac{۱}{۲}\left(A + B + C - \frac{BC}{A}\right)$$

راه‌حل دوم:
اگر دو مثلث به طور وارون متشابه باشند یعنی جهت زاویه‌های مساوی معکوس هم باشند. مانند دو مثلث ABC و $A'B'C'$ اگر مزدوج‌های یکی از دو مثلث را تعیین کنیم جهت زوایای مثلث جدید با هم یکی خواهند شد. پس



$$\begin{vmatrix} \overline{A} & A' & ۱ \\ \overline{B} & B' & ۱ \\ \overline{C} & C' & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$



می‌دانیم اگر AD و BE و CF ارتفاعات مثلث ABC باشند مثلث AFE با مثلث ABC به طور وارون متشابه می‌باشد پس

$$\begin{vmatrix} A & \overline{A} & ۱ \\ F & \overline{C} & ۱ \\ E & \overline{B} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

یا

$$A\overline{C} - \overline{B}A - \overline{A} - \overline{A}(F - E) + F\overline{B} - E\overline{C} = ۰ \qquad (۱)$$

و به همین ترتیب مثلث $BCA \sim BFD$ و مثلث $CAB \sim CDE$

پس

$$\begin{vmatrix} C & \overline{C} & ۱ \\ D & \overline{A} & ۱ \\ E & \overline{B} & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad , \quad \begin{vmatrix} B & \overline{B} & ۱ \\ F & \overline{C} & ۱ \\ D & \overline{A} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$B(\overline{C} - \overline{A}) - \overline{B}(F - D) + F\overline{A} - \overline{C}D = ۰ \qquad (۲)$$

$$C(\overline{A} - \overline{B}) - \overline{C}(D - E) + D\overline{B} - \overline{A}E = ۰ \qquad (۳)$$

و اگر مبداء مختصات را مرکز دایره محیطی مثلث به شعاع واحد درنظر می‌گیریم سه نقطه A و B و D روی دایره ۱ $= Z\overline{Z}$ قرار می‌گیرد. پس $\overline{A} = \frac{۱}{A}$ و $\overline{B} = \frac{۱}{B}$ و $\overline{C} = \frac{۱}{C}$ با حل سه معادله فوق مختصات نقطه D و E و F را به ترتیب زیر می‌توان بدست آورد.

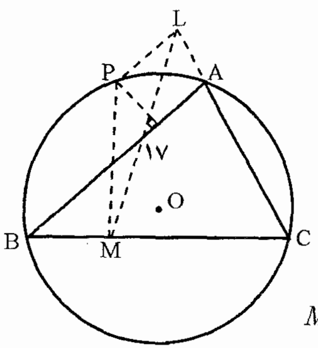
$$D = \frac{1}{2}\left(A+B+C-\frac{BC}{A}\right)$$

$$F = \frac{1}{2}\left(A+B+C-\frac{BA}{C}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}\left(A+B+C-\frac{A+C}{B}\right)$$

۲۰ـ۱۹ـ۱۶. گزاره: خط سیمسن

اگر از یک نقطه واقع بر دایره محیطی مثلث سه عمود بر سه ضلع مثلث ABC فرود آوریم پای این سه عمود بر یک خط راست واقع می‌باشند.



اگر دایره محیطی مثلث را به شعاع واحد درنظر بگیریم. مختصات پای عمودی که از P واقع بر دایره بر ضلع BC رسم می‌شود مطابق مثال قبل از معادله

$$M = \frac{1}{2}\left(P+B+C-\frac{BC}{P}\right)$$

$$N = \frac{1}{2}\left(P+A+B-\frac{AB}{P}\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(P+A+C-\frac{AC}{P}\right)$$

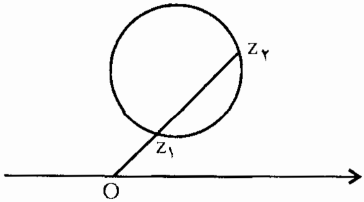
پس باید $\frac{M-N}{M-L} = K \in R$ باشد تا سه نقطه M و N و L روی یک خط واقع باشند اما

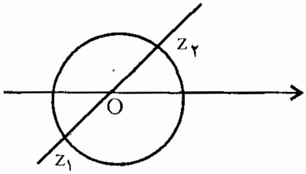
$$\frac{M-N}{M-L} \Rightarrow \frac{P-B}{P-C} : \frac{B-A}{C-A} = K$$

و چون چهار نقطه P, A, B, C روی یک دایره واقع‌اند پس این نسبت یک نسبت ناهمساز بوده و برابر $K \in R$ خواهد بود.

۲۰-۱۹-۱۷. قوت نقطه نسبت به دایره

در معرفی دستگاه معادله دایره به صورت که A و C دو مختلط هستند $AZ\overline{Z}+BZ-\overline{BZ}+C=0$





اگر $\{0,Z_1\}$ و $\{O,Z_2\}$ اندازه پاره‌خط‌های جهت‌دار باشند. یعنی $\{O,Z_1\},\{O,Z_2\}$ مثبت می‌باشند اگر OZ_1 و OZ_2 هم جهت و منفی می‌باشد اگر OZ_1 و OZ_2 در دو جهت باشند. قوت نقطه O نسبت به دایره را حاصل‌ضرب این دو پاره‌خط تعریف می‌کنیم.

حال چون Z_1 و Z_2 روی دایره هستند هر دو در معادله دایره صدق می‌کند پس

$$AZ_1\overline{Z}_1+B\overline{Z}_1-\overline{BZ}_1+C=0 \qquad (1)$$

$$AZ_1\overline{Z}_2+B\overline{Z}_2-\overline{BZ}_2+C=0 \qquad (2)$$

از طرف دیگر چون Z_1 و Z_2 روی یک خط واقع می‌باشند.

$$\arg Z_1=\arg Z_2, \arg\overline{z}_2=-\arg\overline{Z}_1$$

یا

$$\arg Z_2=\arg Z_1+\pi$$

و بهرحال $Z_1\overline{Z}_2=K$ که $K\in R$. $\overline{Z}_1.Z_2=K$

به کمک دو رابطه فوق و استفاده از معادلات (۱) و (۲) داریم

$$AK(Z_1-Z_2)-C(Z_1-Z_2)=0$$

و چون $Z_2\neq Z_1$ بنابراین

$$K=\frac{C}{A}$$

اما $K=Z_1\overline{Z}_2$ به معنی حاصل ضرب اندازه پاره‌خط‌های (OZ_1) و $(OZ)_2$ می‌باشد

$$|K|=|Z_1|.|\overline{Z}_2|=|Z_1|.|Z_2|$$

و K مثبت است اگر Z_1 و Z_2 در یک طرف نقطه O بوده و $\arg\overline{Z}_2=-\arg Z_1$ و K منفی است اگر اگر Z_1 و Z_2 در دو طرف نقطه O باشند و

$$\arg\overline{Z}_2=-\arg Z_1-\pi$$

۲۰ـ۲۰ مسائل برای حل

۲۹. اگر مثلث ABC در نقاط a و b و c بر دایره واحد مماس باشند مختصات رئوس مثلث را بدست آورید.

۳۰. دایره‌ای به قطر AM میانه مثلث ABC رسم شده تا اضلاع AB و AC را در نقاط D و E قطع نماید. در نقاط D و E دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط P قطع نمایند ثابت کنید $PC = PB$.

۳۱. فرض کنیم دایره (O) دایره محیطی مثلث ABC باشد. P نقطه‌ای روی کمان ACB می‌گیریم اگر دو نقطه X و Y روی AP و BP چنان واقع باشند که $AX = AC$ و $BY = BC$ ثابت کنید با تغییر نقطه P خط XY از نقطه ثابتی می‌گذرد.

(المپیاد داخلی تهران ۱۳۷۴)

۳۲. n ضلعی منتظم $A_1, A_2, \dots A_n$ مفروض است. نقطه P روی دایره محیطی این چند ضلعی در نظر می‌گیریم. ثابت کنید $\sum\limits_{i=1}^{n} PA_i^2$ مقداری ثابت است.

۳۳. در چهار ضلعی کامل ثابت کنید اوساط سه قطر بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۳۴. بر روی اضلاع یک چهار ضلعی در خارج آن چهار مربع می‌سازیم. ثابت کنید خطوطی که مرکزهای مربع‌های مقابل را به هم وصل می‌کند برهم عمود بوده و برابر می‌باشند.

۳۵. اگر بر روی اضلاع یک متوازی‌الاضلاع چهار مربع بسازیم ثابت کنید مرکزهای این چهار مربع خود رئوس یک مربع می‌باشند.

۳۶. دایره نه نقطه مثلث را به کمک اعداد مختلط ثابت کنید.

۳۷. ثابت کنید دایره نه نقطه مثلث بر دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث مماس می‌باشد.

۳۸. اگر در مثلث ABC و $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع و هم جهت باشند ثابت کنید اوساط پاره‌خط‌های AA' و BB' و CC' رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

اگر به جای شرط متساوی‌الاضلاع تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را قرار دهیم مسئله چگونه است.

۳۹. فرض کنیم سه مثلث ABC و DEF و GHZ متساوی‌الاضلاع و هم جهت باشند اگر P و Q و R مراکز میانه‌ای این سه مثلث باشند ثابت کنید ΔPQR متساوی‌الاضلاع است. اگر به جای متساوی‌الاضلاع بودن شرط متشابه بودن را بگذاریم چه می‌شود؟

۴۰. مثلث ABC مفروض است بر اضلاع AB و AC به ترتیب مربع‌های $ABDE$ و $ACFG$ را در خارج آن می‌سازیم.

الف) M را وسط ضلع BC می‌گیریم ثابت کنید $EG \perp AM$ و $\overrightarrow{EG} = ۲\overrightarrow{AM}$

ب) H را پای عمود وارد از رأس A به ضلع BC می‌گیریم، نشان دهید امتداد AH از وسط EG می‌گذرد.

۴۱. روی اضلاع یک چهار ضلعی یک درمیان مثلث متساوی‌الاضلاع به طرف خارج و داخل می‌سازیم. نشان دهید چهار رأس این چهار مثلث رئوس یک متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

۴۲. بر اضلاع یک مثلث دلخواه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع طوری بسازید که دو تای آنها خارجی باشند و دیگری داخلی باشند. نشان دهید که مرکز میانه‌ای مثلث داخلی با دو رأس مثلث‌های خارجی یک مثلث متساوی‌الساقین که رأس آن ۱۲۰° است می‌سازند.

۴۳. بر اضلاع AB و BC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و در خارج آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع AEB و BFC ساخته شده‌اند نشان دهید مثلث DEF متساوی‌الاضلاع است.

۴۴. بر اضلاع یک مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع LBC و MCA و NAB را می‌سازیم ثابت کنید که LA و MB و NC یک طول دارند و در یک نقطه همرس بوده و زاویه بین آنها در نقطه تلاقی ۱۲۰ است.

۴۵. اگر $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r و O مرکز دایره و P نقطه‌ای امتداد $OA_۱$ باشد ثابت

$$\prod_{k=۱}^{n} PA_k = OP^n - r^n$$

۴۶. نقطه P بر دایره واحد واقع است اگر $A_۱, \ldots, A_n$ رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره باشند ثابت کنید $\sum_{k=۱}^{n} PA_k^۲$ مقداری ثابت است.

۴۷. مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی روی اضلاع یک شش ضلعی منتظم متقارن ساخته شده‌اند ثابت کنید اوساط پاره‌خط‌هایی که رئوس این مثلث‌ها را به هم وصل می‌نمایند تشکیل یک شش ضلعی منتظم می‌دهند.

۴۸. ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد. خطی موازی AC با AB و BC در نقاط M و P برخورد می‌نماید و نقطه DS مرکز میانه‌ای مثلث PMB است و E وسط AP است زوایای مثلث DEC را حساب کنید.

۴۹. OAB و OA_1B_1 دو مثلث متساوی‌الاضلاع هم جهت می‌باشند که رأس هر دو نقطه O است ثابت کنید اوساط OB و OA_1 و AB_1 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۵۰. مثلث‌های OAB و $OA'B'$ متساوی‌الاضلاع و هم جهت می‌باشند. اگر S مرکز میانه‌ای مثلث OAB و M و N اوساط $A'B$ و AB' باشند ثابت کنید مثلث‌های SMB' و SNA' مشابه‌اند (المپیاد جهانی ۱۹۷۷)

۵۱. ذوزنقه $ABCD$ در دایره‌ای به شعاع $r = |DA| = |BC|$ و به مرکز O محاط می‌باشد. ثابت کنید اوساط OA و OB و پاره خط CD رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۵۲. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع DAS و ABP و BCQ و CDR از بیرون چهار ضلعی $ABCD$ ساخته شده‌اند. اگر M_1 و M_2 مرکزهای میانه‌ای مثلث‌های DAS و CDR باشند اگر جهت مثلث متساوی‌الاضلاع M_1M_2T مخالف جهت چهار ضلعی $ABCD$ باشد زاویه PQT را تعیین کنید.

۵۳. مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی با رئوس E و F و G و H روش چهار ضلعی $ABCD$ ساخته شده‌اند. اگر M و N و P و Q اوساط EG و HF و AC و BD باشند شکل چهار ضلعی $PMQN$ چیست؟

۵۴. مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی به رئوس D و E در بیرون روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC ساخته شده‌اند. ثابت کنید اوساط BD و BE و AC رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۵۵. نقطه D در داخل مثلث حاده‌الزاویه ABC چنان انتخاب شده است که $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90$ و $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. حاصل $\frac{|AB|\cdot|CD|}{AC|\cdot|BD|}$ را حساب کنید. (المپیاد جهانی ۱۹۹۳)

۵۶. سه مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین EAB و EAC درخارج و PBC از درون را روی اضلاع

مثلث ABC ساخته‌ایم ثابت کنید مثلث FPE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.
$(BPC = ۹۰, \widehat{FAC} = ۹۰, EAB = ۹۰)$ (المپیاد داخلی سال ۷۸)

۵۷. روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث $B'AC$ و $C'AB$ و $A'BC$ را چنان می‌سازیم که

$$\widehat{B'AC} = \widehat{C'BA} = \widehat{A'BC} = ۳۰$$

$$B'CA = C'AB = A'CB = ۶۰^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

(نوزدهمین المپیاد کشوری سال ۱۳۸۰)

۵۸. مثلث متساوی‌الساقین ABC مفروض است $(AB = AC)$. AH ارتفاع وارد بر ضلع BC می‌باشد. از H عمود HK رابر AC وارد می‌کنیم. اگر M وسط HK باشد ثابت کنید AM بر BK عمود است.

۵۹. یک نقطه مانند Z وقتی و فقط وقتی درون یا بر مرز $\Delta Z_۱Z_۲Z_۳$ قرار دارد که اعداد حقیقی و نامنفی مانند α و β و γ وجود داشته باشند به طوری که $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $Z = \alpha Z_۱ + \beta Z_۲ + \gamma Z_۳$

۶۰. برای هر چهار نقطه A و B و C و D در یک صفحه نامساوی بطلمیوس را ثابت کنید:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|$$

علامت تساوی وقتی برقرار است که این چهار نقطه روی یک خط یا یک دایره باشند.

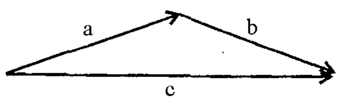
۶۱. روی ضلع‌های مثلث غیرمشخص ABC و در خارج آن مثلث‌های BPC و $CQ۴$ و ARB را ساخته‌ایم به نحوی که $\widehat{ABR} = \widehat{BAR} \doteq ۱۵^\circ$ و $\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = ۴۵^\circ$
ثابت کنید $|QR| = |RP|$ و $\widehat{QRP} = ۹۰^\circ$

بخش ۲۱. بردار و هندسه

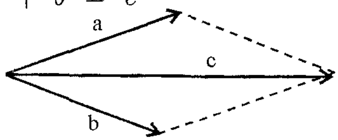
گزاره‌های زیر برای حل مسائل هندسه به کمک بردارها مورد نیاز است.

۱_۲۱

جمع بردارها و قانون متوازی‌الاضلاع



$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$$



۲_۲۱

بردار صفر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overrightarrow{a} + 0 = \overrightarrow{a}$$

۳_۲۱

بردار قرینه یا وارون

$$\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{-a}) = 0$$

قرنیه بردار $\vec{a}$ بردار $\vec{-a}$ می‌باشد که با آ ن همان اندازه و جهت است.

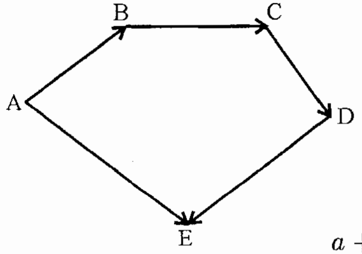
۱ـ۳ـ۲۱

خاصیت جابجایی $a + b = b + a$

خاصیت شرکت‌پذیری $(a+b)+c = a+(b+c)$

خاصیت دور بسته جمع برداری

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$



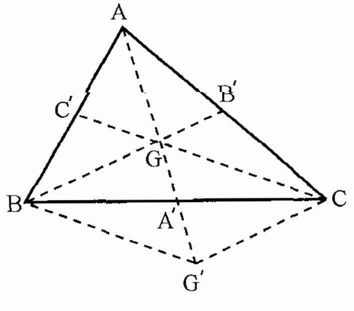
خاصیت تفریق $a + b = c \Rightarrow a = b - c$

خاصیت نامساوی مثلثی

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

مثال: ثابت کنید اگر G مرکز میانه‌ای مثلث باشد $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = ۰$



اگر GA' را به اندازه خودش ادامه دهیم چهارضلعی $BGCG'$ یک متوازی‌الاضلاع است.

$$\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CG}=۰$$
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}=۰$$

۲۱ـ۳ـ۲. ضرب عدد در بردار

اگر بردار a در عدد $K \neq ۰$ ضرب شود. برداری به اندازه K برابر بردار a بدست می‌آید که جهت آن توسط R تعیین می‌شود و امتداد آن با امتداد a یکی است

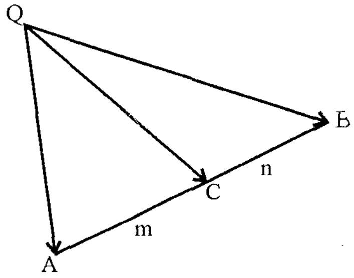
ویژگی‌های ضرب عدد در بردار

$$o.a=۰$$
$$K.o=۰$$
$$۱.a=a$$
$$K(ma)=(Km)a \qquad K,m\in K$$
$$(K+l)a=Ka+la$$
$$K(a+b)=Ka+Kb$$

۲۱ـ۳ـ۳

اگر نقطه C پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده باشد برای هر نقطه Q از صفحه داریم

$$\overrightarrow{QC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$$

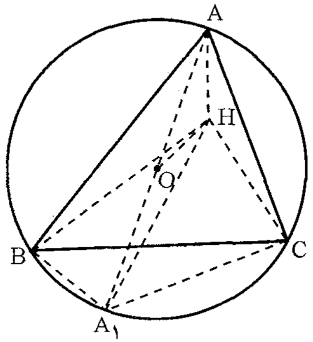


بنابراین همواره می‌توان برای دو بردار ناهم راستا دو عدد حقیقی α و β را چنان پیدا کرد که بردار $\overrightarrow{C}$ به صورت

$$\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$$

تجزیه شود و باید توجه داشت که α و β منحصر بفرد می‌باشند

مثال: مثلث ABC در دایره به مرکز O محاط است محل برخورد ارتفاعات مثلث را H می‌نامیم.
ثابت کنید $\overrightarrow{HO} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$ و $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$



اگر AO را امتداد دهیم تا دایره محیطی را در نقطه $A_۱$ قطع کند $A_۱C$ بر AC عمود بوده و موازی BH می‌شود و $BA_۱$ موازی CH است پس چهارضلعی $BHCA_۱$ متوازی‌الاضلاع است

$$HA_۱ = HB + HC \qquad (۱)$$

اما HO میانه مثلث $AHA_۱$ است پس

$$۲\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA_۱} \qquad (۱)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱) داریم

$$۲HO = HA + HB + HC$$

و چون

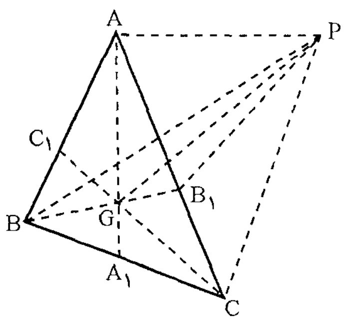
$$\begin{cases}\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}\\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH}\\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}\end{cases} \Rightarrow ۳\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$$

پس

$$۳\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-۲HO=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

مثال: اگر G محل برخورد میانه‌های مثلث باشد برای هر نقطه P از صفحه داریم

$$\overrightarrow{PG}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$



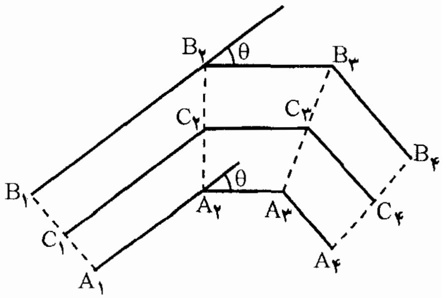
برای بردارهای PB و $PB_۱$ و PG داریم

$$\overrightarrow{PG}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{PB_۱}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{PB}$$

چون G پاره‌خط $BB_۱$ را به نسبت $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کرده است.
$۲\overrightarrow{PB_۱}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$ و حکم ثابت است.

۲۱ـ۳ـ۴. گزاره

هرگاه دو چند ضلعی متشابه داشته باشیم و رئوس نظیر آنها را به یکدیگر وصل نماییم و این خطوط که رئوس نظیر را به هم وصل کرده به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نماییم نقاط حاصل رئوس یک چند ضلعی جدید هستند که چند ضلعی‌های قبلی متشابه می‌باشد.



اگر n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ با n ضلعی $B_1B_2\ldots B_n$ متشابه باشند

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_2B_3|} = K$$

اگر بردار B_1B_2 را به اندازه زاویه Θ دوران داده و اندازه آن را در K ضرب کنیم بردار B_2B_3 بدست می‌آید.

اگر بردار A_1A_2 را به اندازه زاویه Θ دوران داده و اندازه آن را در K ضرب کنیم بردار A_2A_3 بدست می‌آید.

اما بردار $\overrightarrow{C_1C_2}$ که از تقسیم پاره‌خط A_1B_1 به نسبت $\frac{m}{m}$ و A_2B_2 به نسبت $\frac{m}{n}$ بدست آمده است را درنظر بگیریم

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{B_1B_2}$$

(پس)
$$\overrightarrow{C_1}C_2 = \frac{n}{m+n}.A_2A_3.K + \frac{m}{m+n}.K.\overrightarrow{B_2B_3}$$

$$\overrightarrow{C_2C_3} = \frac{n}{m+n}A_2A_3 + \frac{m}{m+n}B_2\overrightarrow{B_3}$$

بنابراین بردار C_2C_3 را می‌توان از بردار C_1C_2 با دوران به اندازه Θ و ضریب K بدست آورد پس $|C_1C_2| = K|C_2C_3|$ و دوران C_1C_2 به اندازه θ است پس n ضلعی $C_1C_2\ldots C_n$ با n ضلعی‌های قبلی متشابه است.

۲۱ـ۳ـ۵. حاصل‌ضرب عددی یا اسکالر بردارها

اگر بردار $A = \{a_1.a_2\ldots a_n\}$ و بردار $B = \{b_1, b_2\ldots b_n\}$ تعریف نماییم آنگاه حاصل ضرب عددی یا اسکالر دو بردار به صورت زیر تعریف می‌شود و نتیجه یک عدد حقیقی است.

$$A.B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ویژگی‌های ضرب اسکالر به صورت زیر است

الف : $A.B = B.A$

ب : $A.(B+C) = A.B + A.C$

ج : $(tA).B = A.(tB) = t(A.B) \qquad t \in \mathbf{R}$

د : $A = ० \Rightarrow A.A = ०$

هـ : $A \neq ० \qquad A.A > ०$

و : $|A| = \sqrt{A.A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2}$

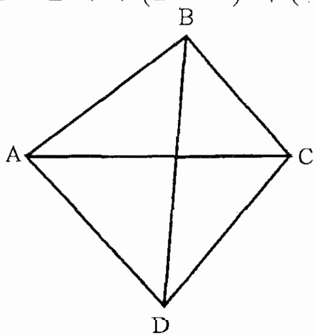
ز : $|A - B| = \sqrt{(A-B)(A-B)}$

ح $A.B = |A|.|B|.\cos(A, B)$ برای حالتی که A و B دو یا سه بعدی باشند

ط : $A \perp B \Longleftrightarrow A.B = ०$

مثال: قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمودند اگر و تنها اگر مجموع مربعات اضلاع روبرو با هم برابر باشند

$$C - A \perp B - D \Longleftrightarrow (B-A)^2 + (C-D)^2 = (B-C)^2 + (A-D)^2$$



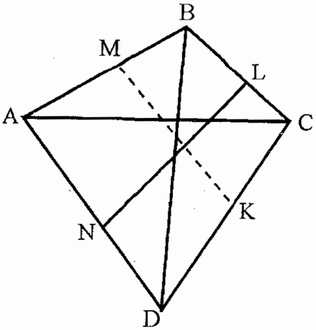
از ساده کردن طرف راست رابطه داریم.

$$AB + CD = BC + AD$$

$$(C-A)(B-D) = ० \Rightarrow CB - CD - AB + AD = ०$$

و حکم ثابت است.

مثال: قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمودند اگر و تنها اگر اندازه دو پاره‌خطی که اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌نمایند با هم برابرند باشند.



$$AC \perp BD \Rightarrow |MK|^۲ = |NL|^۲$$
$$\left(\frac{C+D}{۲} - \frac{A+B}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{A+B}{۲} - \frac{B+C}{۲}\right)^۲ =$$
$$(C-A)(D-B) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = ۰$$

گزاره: برای هر چهار نقطه D, C, B, A از فضا داریم

$$|AB|^۲ + |CD|^۲ - |BC|^۲ - |AD|^۲ = ۲\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

اثبات

$$(B-A)^۲ + (D-C)^۲ - (C-B)^۲ - (D-A)^۲ = ۲(B.C + A.D - A.B - C.D)$$
$$= ۲(C-A)(B-D)$$
$$= ۲\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

۲۱ـ۴. مسائل برای حل

۱. مثلث ABC مفروض است. مثلث‌های متشابه ABC'' و ACB' را در خارج مثلث و مثلث BCA' را در درون مثلث می‌سازیم. ثابت کنید $AB'A'C''$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۲. مثلث متساوی‌الساقین $ABC.(AB = AC)$ مفروض است D وسط ضلع BC می‌باشد از نقطه D عمود DE را بر AC فرود می‌آوریم اگر F وسط DE باشد ثابت کنید BE بر AF عمود است.

۳. $A_۱, \dots A_n$ یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R می‌باشد نقطه x به

فاصله d از o مفروض است. ثابت کنید

$$\sum |A_iX|^2 = n(R^2 + d^2)$$

۴. مکان هندسی نقطه X را چنان تعیین کنید که $\overrightarrow{AX}.\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AX}$

۵. P نقطه‌ای درون دایره‌ای مفروض است. دو نقطه A و B روی دایره چنان قرار دارند که $PA \perp PB$ و Q راس چهارم مستطیلی است که روی PAB ساخته می‌شود. مکان هندسی Q را وقتی PA و PB تغییر می‌کند تعیین کنید.

۶. مکان نقطه X را چنان تعیین کنید که مربع فواصل آن از سه نقطه مفروض A و B و C کمترین مقدار ممکن گردد.

۷. مثلث ABC و نقطه دلخواه M مفروض است. M_1 و M_2 و M_3 را به ترتیب قرینه‌های نقطه M نسبت به اوساط اضلاع AB و BC و AC می‌گیریم ثابت کنید خط‌های راست CM_1 و AM_2 و BM_3 از یک نقطه می‌گذرند.

۸. H محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC و M محل برخورد میانه‌های مثلث AHB است مطلوبست محاسبه فاصله راس C تا نقطه M.

۹. در مثلث ABC نقاط M و N محل تماس دایره محاطی داخلی با اضلاع AB و AC می‌باشد. اگر نیمساز داخلی زاویه B با خطی که اوساط اضلاع AC و AB را به هم وصل کرده در نقطه P برخورد نماید. ثابت کنید M و N و P بر یک خط راست واقع می‌باشند.

۱۰ دو وتر AB و CD را در دایره‌ای رسم کرده‌ایم که در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند. از نقطه S وسط وتر BD خط راست SM را کشیده‌ایم تا وتر AC را در نقطه K قطع کند ثابت کنید

$$\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AM|^2}{|CM|^2}$$

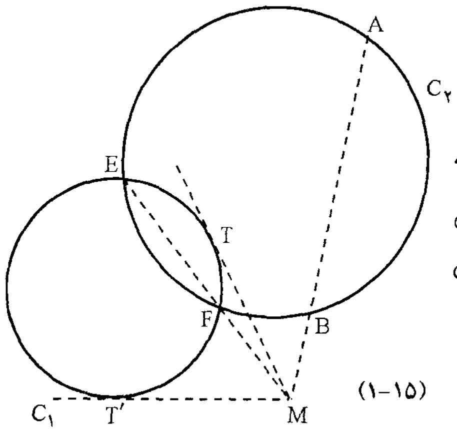
۱۱. در مستطیل $ABCD$ عمود BK را بر قطر AC رسم کرده‌ایم M و N اوساط AK و CD می‌باشند ثابت کنید که زاویه BMN قائمه است.

۱۲. پاره‌خط‌های AB و CD روی خط راستی داده شده‌اند مکان هندسی نقطه M را چنان پیدا کنید که $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ باشد.

۱۳. بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مربع می‌سازیم. ثابت کنید خطی که یک راس را به مرکز مربع متقابل وصل می‌نماید بر خطی که مراکز دو مربع دیگر را به هم وصل می‌نماید عمود و با آن برابر است.

۱۴. روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC در مثلث متساوی‌الاضلاع ABE و ACF را می‌سازیم اگر P وسط AE و Q وسط AF و M وسط BC باشد ثابت کنید که مثلث MPQ متساوی‌الاضلاع است.

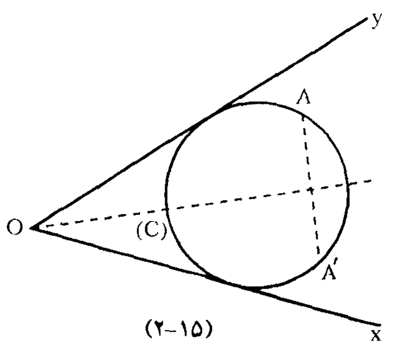
حل مسائل بخش ۱۵



(۱-۱۵)

۱. دایره C_1 و دو نقطه A و B در صفحه مفروضند. از دو نقطه A و B دایره دلخواهی مانند C_2 می‌گزرانیم تا دایره C_1 را در نقطه‌های E و F قطع نماید.

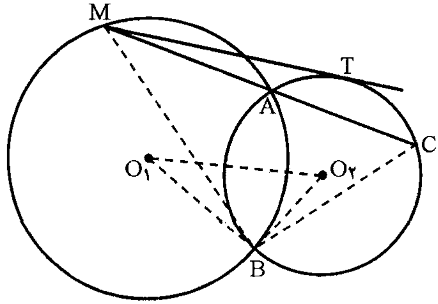
خط EF محور اصلی دو دایره است. امتداد AB با خط EF در نقطه M تقاطع می‌نماید چون $MF \cdot ME = MB \cdot MA$ اگر از نقطه M مماس MT را بر دایره C_1 رسم کنیم $MT^2 = MB \cdot MA$ بنابراین دایره‌ای که از سه نقطه A و B و T بگذرد بر دایره C_1 مماس است. چون $MT' = MT$ پس مسئله دو جواب دارد.



(۲-۱۵)

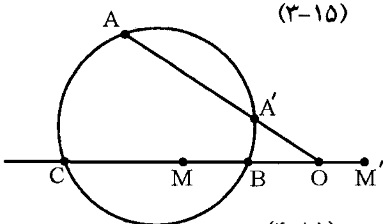
۲. دو خط OX و OY و نقطه A مفروضند. اگر دایره (C) دایره جواب باشد A' قرینه نقطه A نسبت به نیمساز زاویه که قطر دایره هم می‌باشد روی دایره واقع است.

پس کافیست دایره‌ای رسم کنیم که از دو نقطه A و B گذشته و بر خط OX یا OY مماس باشد که این مسئله به عنوان مسئله نمونه (۱۵ـ۳) حل شده است.



(۳-۱۵)

۳. چون $MT^2 = MA \cdot MC$ پس $\frac{MT^2}{MA \cdot MB}$ به صورت $\frac{MC}{MB}$ درمی‌آید که باید ثابت کنیم مقداری ثابت است. دو مثلث BO_1O_2 با مثلث BMC مشابه است یعنی $\frac{R_1}{O_1O_2} = \frac{MC}{MB}$ که مقداریست ثابت.

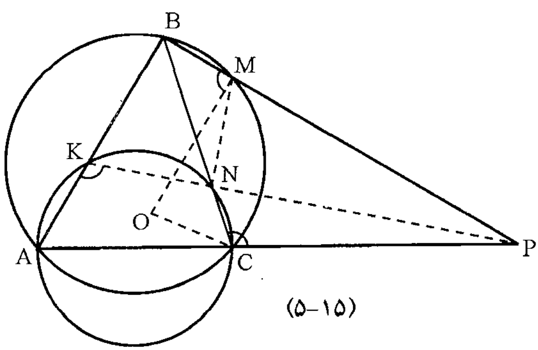


(۴-۱۵)

۴. اگر $(CB \cdot MM') = -1$ باشد بنابر رابطه نیوتون $OM^2 = OB \cdot OC$ و چون O وسط MM' است بنابراین OM^2 مقداریست ثابت.

چون $OA' \cdot OA = OB \cdot OC$ پس $OA' = \frac{OM^2}{OA}$ و چون جای A نیز در صفحه ثابت است بنابراین نقطه A' روی خط ثابت OA به فاصله معلومی از O قرار دارد.

۵.



(۵-۱۵)

خطوط KN و AC یکدیگر را در نقطه P قطع می‌نمایند از نقطه P به نقطه B وصل می‌نماییم تا دایره را در نقطه M قطع کند. چون $PA \cdot PC = PN \cdot Pk = PM \cdot PB$ بنابراین چهار نقطه M و B و K و N بر یک دایره واقع باشند. پس باید ثابت کنیم زاویه $\widehat{OMB}$ قائمه است.

زاویه‌های $NCP = AKN = BMN$ بنابراین $\widehat{NMP} + \widehat{NCp} = ۱۸۰^\circ$ یعنی چهار ضلعی $NMPC$ محاطی می‌باشد و قوت نقطه B نسبت به دایره محیطی چهار ضلعی $NMPC$ برابر است با $BN \cdot BC = BM \cdot BP$ اما نقطه B واقع بر محور اصلی دو دایره (o) و دایره محیطی چهار ضلعی $CNMP$ است پس قوت آن نسبت به دو دایره برابر است با

$$P_O^B = BO^۲ - r^۲ = k_۱^۲ \quad (۱)$$

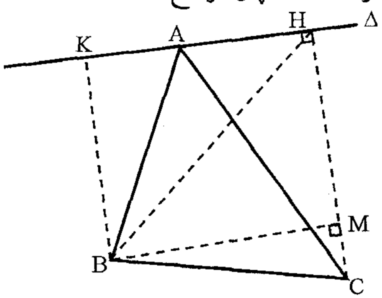
$$P_O^P = PO^۲ - r^۲ = k_۲^۲ \quad (۲)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که $PO^۲ - BO^۲ = k_۲ - k_۱ = k$ پس چون تفاضل مربعات فواصل o از دو نقطه P و B مقداری ثابت است مکان O روی خطی عمود بر PB می‌باشد

اما

$$PO^۲ - BO^۲ = BP(PM - BM) = PM^۲ - BM^۲$$

بنابراین نقطه O روی ارتفاع مثلث OBP می‌باشد و نقطه M پای ارتفاع است.



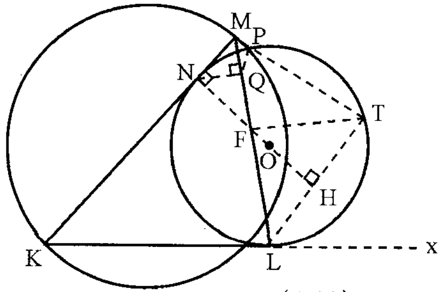
(۱۵-۶)

۶. اگر خط Δ جواب باشد. از نقطه B خط BM را به موازات Δ رسم می‌کنیم چهار ضلعی $BMHK$ مستطیل است. $BK = HM$ و چون باید داشته باشیم $BH^۲ = BK \cdot Ch$ می‌توان نوشت

$BH^۲ = HM \cdot HC$ حال اگر دایره‌ای به قطر BC رسم کنیم مکان M روی این دایره است و چون $BH^۲ = HM \cdot HC$ بنابراین خط BH باید بر این دایره مماس گردد. پس یک مکان H روی خطی است که بر دایره‌ای به قطر BC در نقطه B مماس می‌باشد و چون زاویه H قائمه است روی دایره‌ای به قطر AC قرار دارد. پس با معلوم بودن دو مکان برای H نقطه H بدست آمده و از نقطه A خط AH را رسم می‌کنیم که جواب است.

۷.

چون چهار ضلعی $KMPL$ محاطی است بنابراین $MKL = \widehat{LPT}$ اما زاویه $\widehat{LPT} = \widehat{TLX} = \frac{\widehat{LT}}{۲}$ بنابراین $\widehat{MKL} = TLX$ یعنی $KM || LT$



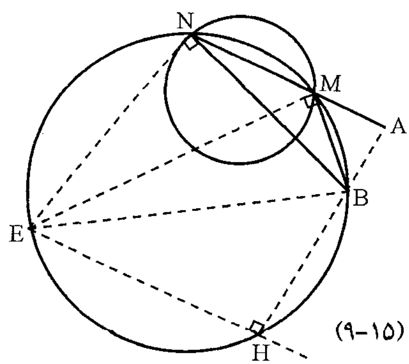
(۷-۱۵)

اگر از نقطه N عمودی بر KM اخراج کنیم این عمود بر خط LT هم عمود است بنابراین از مرکز دایره می‌گذرد. پس $FT = FL$. پس $\widehat{KML} = \widehat{MLT} = \widehat{LTF}$.

اما $MN^۲ = MQ \cdot MF = MP \cdot MT$ در نتیجه چهار ضلعی $QPTF$ محاطی است پس $\widehat{MPQ} = \widehat{MFT}$ و $\widehat{MFT} = ۲\widehat{FLT}$ یا $\widehat{MPQ} = ۲\widehat{NMQ}$

۸. چهار ضلعی $EPTL$ محاطی است شکل (۱۵ـ۷). پس $\widehat{MPE} = \widehat{MLT} = \widehat{NMF}$ بنابراین خط PE نیمساز زاویه $\widehat{MPQ}$ است. اگر PE خط MN را در نقطه N قطع نماید دو مثلث $MGE \sim MGP$ و در نتیجه $MG^۲ = PG \cdot GE$. اما قوت نقطه G نسبت به دایره برابر است با $GN^۲ = GE \cdot Gp$ در نتیجه $GN = MG$.

۹. قوت نقطه A را نسبت به دایره در نظر می‌گیریم $P_C^A = AM \cdot AN = AO^۲ - R^۲$. چون پاره خط EB از دو نقطه M و N به زاویه قائمه دیده می‌شود چهار ضلعی $ENMB$ محاطی است و دایره C' از آن می‌گذرد. خط MN محور اصلی این دو دایره است. AB دایره C' را در نقطه H قطع می‌کند و زاویه $H = ۹۰^\circ$.



(۹-۱۵)

$$P_C^A = P_{C'}^A = AM \cdot AN = AB \cdot AH$$

$$= AO^۲ - R^۲$$

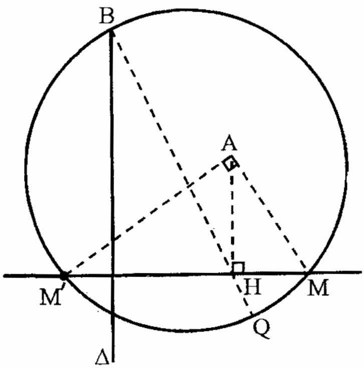
$$AH = \frac{AO^۲ - R^۲}{AB}$$

بنابراین اندازه AH مقداریست معلوم که بر روی امتداد معلوم AB است در نتیجه مکان نقطه E خطی عمود بر AH است.

بحث: اگر نقطه B روی دایره C باشد مکان نقطه E فقط یک نقطه است که بر روی انتهای قطر گذرنده از نقطه B می‌باشد.

اگر نقطه B بر مرکز دایره واقع باشد باز هم مکان خط راستی است که بر AO عمود است.

۱۰. اگر H تصویر نقطه A روی D باشد



(۱۰-۱۵)

$$AH^۲ = HM \cdot HM'$$

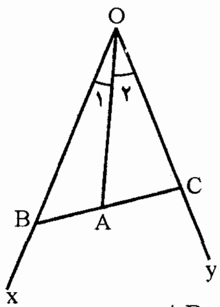
اما قوت نقطه H نسبت به دایره

$$HM' \cdot HM = HB \cdot HQ$$

$$HQ = \frac{AH^۲}{HB}$$

بنابراین جای Q روی امتداد HB ثابت است.

۱۱. راه حل اول:



$$\frac{\sin O_۱}{BA} = \frac{\sin B}{OA}$$

$$\frac{\sin O_۲}{AO} = \frac{\sin C}{OA}$$

بنابراین

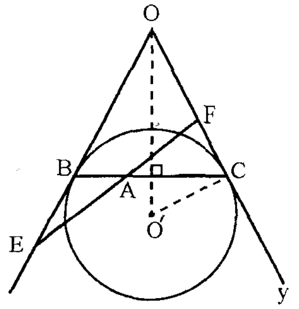
$$AB \cdot AC = \frac{\sin O_۱ \cdot \sin O_۲}{\sin B \cdot \sin C} \cdot OA$$

چون اندازه‌های OA و $\sin O_۱$ و $\sin O_۲$ مقادیر ثابتی می‌باشند برای اینکه حاصلضرب $AB \cdot AC$ کمترین مقدار ممکن گردد باید مخرج کسر بیشترین مقدار ممکن باشد. اما

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{۱}{۲}(\cos(B-C) - \cos(B+C)) = \frac{۱}{۲}(\cos(B-C) - \cos(۱۸۰ - O))$$
$$= \frac{۱}{۲}(\cos(B-C) + \cos O)$$

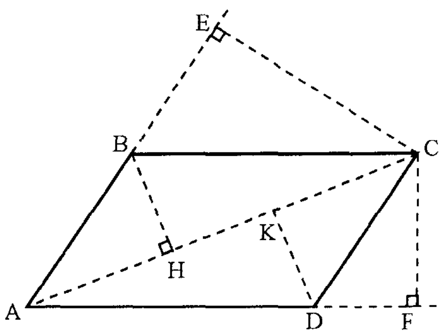
چون $\cos O$ مقدار ثابتی است باید $\cos(B-C)$ حداکثر باشد یعنی $\cos(B-C) = ۱$ یا

$B - C = \circ$ پس $B = C$. برای حل مسئله کافیست از نقطه A خطی بر نیمساز O رسم کنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع نماید.



راه حل دوم: اگر دایره‌ای رسم کنیم که بر دو ضلع زاویه مماس بوده و خطی که نقاط تماس را به یکدیگر وصل می‌نماید از نقطه A نسبت به این دایره به صورت $BA \times AC$ است

حال اگر هر خط دیگری از A مثل EF رسم شود $AE \cdot AF > AB \cdot AC$ است. پس کافیست محل تماس چنین دایره‌ای را با اضلاع زاویه بدست آوریم. اگر از نقطه A خطی به نیمساز زاویه عمود کنیم تا اضلاع زاویه را در B و C قطع نماید. محل تماس این دایره با اضلاع بدست می‌آید و چون مرکز آن روی نیمساز زاویه xoy است. دایره قابل ترسیم می‌باشد.



۱۲. از رئوس B و D دو عمود BH و DK را بر AC فرود می‌آوریم دو مثلث ABH و CKD با هم برابرند. چهار ضلعی $HBEC$ محاطی می‌باشد و قوت نقطه A نسبت به دایره محیطی آن

$$AB \cdot AE = AH \cdot AC \qquad (۱)$$

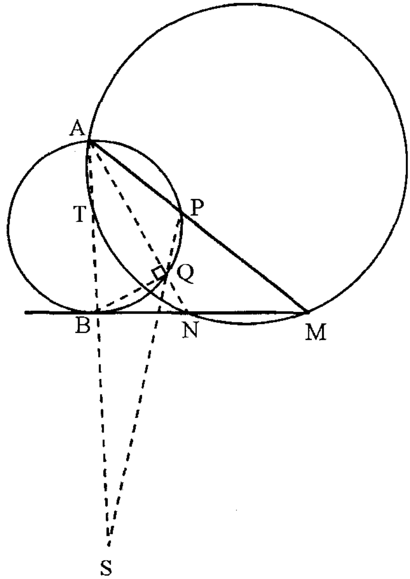
چهار ضلعی $DKCF$ هم محاطی است و به همان ترتیب داریم

$$AK \cdot AC = AD \cdot AF \qquad (۲)$$

از جمع رابطه (۱) و (۲) داریم

$$AC(AH + AK) = AB \cdot AE + AD \cdot AF$$

$$AC^{۲} = AB \cdot AE + AD \cdot AF$$



۱۳. چون AB قطر است پس BQ ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه ABN است.

$$AB^2 = AQ \cdot AN \qquad (1)$$

به همین ترتیب در مثلث قائم‌الزاویه ABM

$$AB^2 = AP \cdot AM \qquad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$AQ \cdot AN = AP \cdot AM$$

یعنی چهار ضلعی $MNQP$ محاطی است. دایره محیطی مثلث AMN در نقطه T با AB برخورد می‌نماید. قوت نقطه B نسبت به این دایره برابر است با:

$$BA \cdot BT = BM \cdot BN = k$$

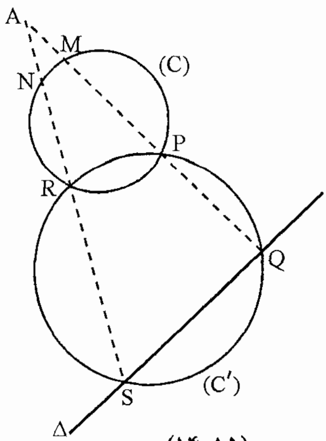
در نتیجه $BT = \frac{k}{AB}$ که مقدار ثابتی می‌باشد. بنابراین تمام دوایر محیطی مثلث‌های AMN از نقطه معلوم T می‌گذرد. چون چهار ضلعی $PQNM$ محاطی است پس $\widehat{SQN} = \hat{M}$ و چون چهار ضلعی $ATNM$ هم محاطی است بنابراین $\widehat{STN} = \hat{M}$ پس چهار ضلعی $TQNS$ محاطی می‌باشد و قوت A نسبت به این دایره

$$AT \cdot AS = AQ \cdot AN = AB^2 \quad \Rightarrow \quad AS = \frac{AB^2}{AT}$$

بنابراین جای نقطه S بر روی امتداد AB جای ثابتی است.

در همین مسئله می‌توان ثابت کرد که خط AN بر SN عمود است.

.۱۴



(۱۴-۱۵)

$$AM \cdot AP = AN \cdot AR$$

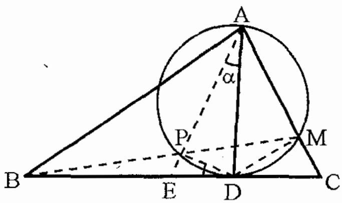
$$AP \cdot AQ = AR \cdot AS$$

بنابراین

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AS}$$

پس MN با QS موازیست و در نتیجه نقطه N روی دایره (C) ثابت است.

۱۵. فرض کنیم



$\widehat{PMD} =< PDE = \widehat{EAD} = \alpha$ و زاویه

$$\widehat{MDC} = \frac{A}{۲}$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAD} - \alpha = \frac{A}{۲} - \hat{\alpha}$$

$$\widehat{MBD} = \frac{\hat{A}}{۲} - \alpha$$

بنابراین $\widehat{PBE} = \widehat{PAB}$ در نتیجه مثلث PDE با مثلث EAD متشابه می‌باشند $ED^۲ = EP \cdot EA$ و دو مثلث PBE و با AEB هم با یکدیگر متشابه‌اند و داریم $BE۲ = PE \cdot AE$ پس $DE = BE$.

۱۶. اگر AB و CD و EF سه وترگزرنده از نقطه P باشند و $AP = a$ و $BP = b$ و $CP = c$ و $DP = d$ و $EP = e$ و $FP = f$ با توجه به قوت نقطه P نسبت به دایره داریم:

$$\begin{cases} ab = cd = ef \\ a + b = c + d = e + f \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت $a = c = e$ اگر دایره‌ای به مرکز P و به شعاع a رسم کنیم این دایره با دایره اول در سه نقطه A و C و E تقاطع می‌نماید یعنی آنکه این دو دایره بر هم منطبق می‌شوند و P مرکز

دایره است.

۱۷. خطوط AB و $A'M$ و $B'N$ محورهای اصلی دوایره ABA' و ABB' و $A'B'C'$ هستند. یا این سه محور با هم موازیند و یا در یک نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند و به همین ترتیب هم BC و $B'P$ و $C'Q$ محورهای اصلی سه دایره BCB' و BCC' و $A'B'C'$ است و CA و $C'R$ و $A'S$ محورهای اصلی دایره‌های ACC' و ACA' و $A'B'C'$ می‌باشند. بنابراین با حالت (ب) اتفاق می‌افتد یا این خطوط در سه نقطه A'' و B'' و C'' متقاطع می‌باشند که حالت اول را ثابت می‌کند.

نقطه A'' قوت‌های برابر با سه دایره ABB' و ABA' و $A'B'C'$ دارد یعنی $A''N \cdot A''B = A''A \cdot A''B = A''M \cdot A''A'$ بنابراین نقطه A'' قوتی برابر با دایره‌های ABC و $A'B'C'$ است پس روی محور اصلی این دو دایره واقع می‌باشد و به همین ترتیب B'' وز C'' روی محورهای اصلی دایره‌های ABC و $A'B'C'$ قرار دارد یعنی آنکه سه نقطه A'' و B'' و C'' هم خط می‌باشند. (از مسائل انتخابی المپیاد ریاضی رومانی سال ۱۹۸۵)

۱۸. باید ثابت کرد که این دایره‌ها هم محور هستند. اگر دو تا از این دایره‌ها با یکدیگر متقاطع باشند محور اصلی آنها همان وتر مشترک دو دایره است و سومین دایره هم باید از نقاط تقاطع بگزرند.

و فرض کنیم نقطه H نقطه همرسی ارتفاعات مثلث ADE باشد. چون قرینه H نسبت به اضلاع مثلث روی دایره محیطی مثلث واضح است و اگر A' و D' و E' پای ارتفاعات مرسوم از A و D و E باشند آنگاه $AH, A'H$ نصف قوت نقطه H نسبت به دایره محیطی مثلث است و همینطور برای سایر ارتفاعات و همچنین

$$AH \cdot A'H = DH \cdot D'H = EH \cdot E'H$$

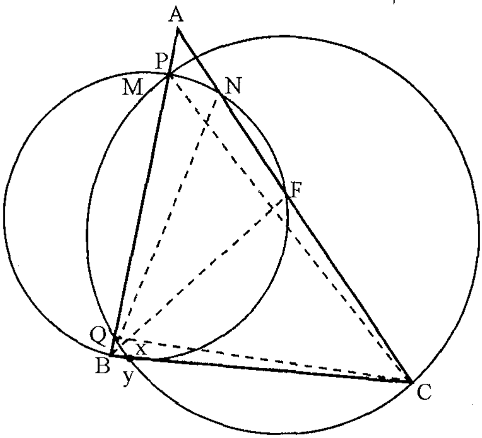
قوت نقطه H نسبت به دایره‌ای به قطر AC چون A' روی دایره باشد قوت آن همان $AH \cdot A'H$ است پس قوت H نسبت به دایره‌های به قطر AC و BD و EF هم همین گونه است.

از طرف دیگر این مطلب باید برای مراکز ارتفاعیه که با خطوط AB و BC و CD و DA بوجود می‌آیند نیز صادق باشد. چون این دوایر بر هم منطبق نیستند پس باید هم محور باشند.

(المپیادهای مجارستان سال ۱۹۹۵)

۱۹. فرض کنیم G و F پای ارتفاعات مرسوم از C و B باشند نقاط F و G روی دو دایره واقع می‌باشند.

چون زوایای $\widehat{BFN}$ و MGC قائم می‌باشند. فرض کنیم X و Y محل برخورد PH با این دایره‌ها باشد.



حال باید ثابت کرد X و Y یکی هستند.

قوت نقطه P را نسبت به دایره‌های به قطر BN و CM و BC می‌نویسیم پس داریم
$PH \cdot XH = CH \cdot HG = BH \cdot HN = PH \cdot HY$ پس $HY = HX$ یعنی $X = Y$.

(المپیادهای سال ۱۹۸۸)

۲۰. چون AC و BD ارتفاعات می‌باشند. نقطه E نقطه همرسی سه ارتفاع است. پس EF بر AB عمود است. و دو مثلث HEB و HAF متشابه می‌باشند یعنی $\frac{HE}{HA} = \frac{HB}{HF}$ پس $HE \cdot HF = HA \cdot HB$ و در عین حال $HG^{2} = HA \cdot HB$ (قوت H نسبت به دایره است.)

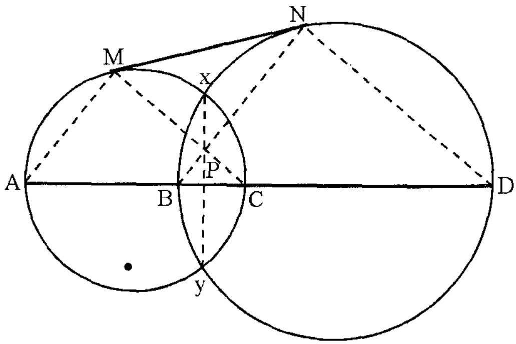
(پیشنهادی برای المپیاد جهانی از طریق آمریکا ۱۹۹۷)

۲۱. کافیست ثابت کنیم نقطه A روی محور اصلی دایره‌های محیطی مثلث‌های DPG و FPE می‌باشد. پس کافی است قوت نقطه A را نسبت به این دو دایره حساب کنیم. اگر M محل برخورد دوم دایره DPG با AB و نقطه N نقطه دوم برخورد دایره FPE با AC باشد. قوت نقطه A نسبت به این دو دایره برابر است با $AD \cdot AM$ و $AE \cdot AN$ برای اینکه ثابت کنیم این دو مقدار برابرند کافیست ثابت کنیم نقاط E و N و D و M روی یک دایره واقع می‌باشند.

اگر نقطه D بین A و M باشد چون چهارضلعی $MDPG$ محاطی است پس $\widehat{DMP} = \widehat{DGP}$ و چون DG و BC با هم موازیند پس زاویه BCD هم با آنها برابر است. بنابراین چهار ضلعی $PCBM$ محاطی است. اگر M بین A و D باشد پس دو زاویه DMP و BCP مکمل یکدیگر

هستند. بنابراین چهار نقطه $MBCP$ بر روی یک دایره واقع بوده و به همین ترتیب $NBCP$ هم بر یک دایره واقع می‌باشند. چون چهار نقطه $CBNM$ هم دایره بوده و DE با BC موازی می‌باشند چهار نقطه E, D, N, M هم هم دایره بوده و حکم اثبات است.

(المپیاد جهانی هند از مسائل پیشنهادی ۱۹۹۵)



۲۲. قوت نقطه P را نسبت به دایره‌ها می‌نویسیم

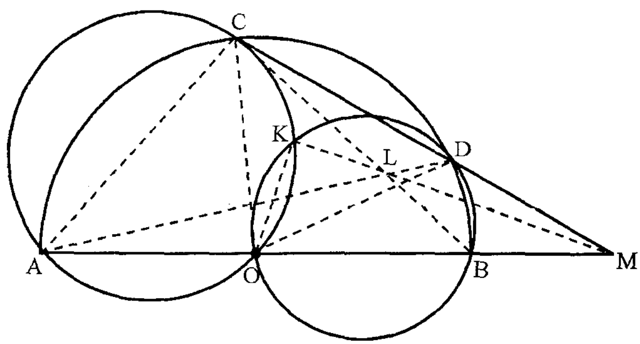
$$BP \cdot PN = XP \cdot PY = CP \cdot PM$$

بنابراین چهار نقطه M و B و C و N بر یک دایره واقع می‌باشند

زاویه $\widehat{MNB} = NDB$ و هر دو مثلث AMC و BND قائم‌الزاویه می‌باشند. پس $A = ۹۰ - \widehat{MCA} = ۱۸۰ - \widehat{MND}$ یعنی آنکه چهار ضلعی $AMND$ محاطی است و خطوط XY و AM و DN محورهای اصلی دایره‌های به قطر AC و BD و دایره محیطی چهار ضلعی $AMND$ هستند پس هر سه خط در یک نقطه همرسند.

(۳۶ المپیاد جهانی ـ پیشنهادی بلغارستان ۱۹۹۵)

۲۳.



اگر L محل برخورد AD و CB باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم K و L و M هم خط می‌باشند. در چهار ضلعی $AOKC$ داریم $\widehat{AKO} = \widehat{ACO}$ و در چهار ضلعی $BOKD$ $\widehat{BKO} = \widehat{BDO}$ در

دایره‌های به قطر AB زاویه $\widehat{ACO} = ۹۰ - \frac{\widehat{COA}}{۲}$ و $\widehat{BDO} = ۹۰ - \frac{\widehat{BOD}}{۲}$ پس می‌توان نوشت.

$$\widehat{AKB} = \widehat{AKO} + \widehat{OKB} = ۱۸۰ - \left(\frac{\widehat{COA}}{۲} + \frac{\widehat{BOD}}{۲}\right) =$$
$$= ۱۸۰ \left(\frac{\widehat{CA}}{۲} + \frac{\widehat{BD}}{۲}\right) = ۱۸۰ - \widehat{CLA} = \widehat{ALB}$$

بنابراین چهار ضلعی $AKLB$ محاطی است بنابراین

$$\widehat{CKL} = ۳۶۰ - \widehat{AKL} - \widehat{CKA} = (۱۸۰ - \widehat{AKL}) + (۱۸۰ - \widehat{CKA})$$
$$= \widehat{LBA} - (۱۸۰ - COA)$$

اما $\widehat{CAD} = \frac{\widehat{CD}}{۲}$ و $\widehat{LBA} = \frac{\widehat{AC}}{۲}$ و $۱۸۰ - \widehat{COA} = ۱۸۰ - \frac{\widehat{AC}}{۲}$ پس می‌توان نتیجه گرفت که $\widehat{CKL} + \widehat{CDL} = ۱۸۰^\circ$ بنابراین چهار ضلعی $CKLD$ محاطی است.

بنابراین محورهای اصلی سه دایره $AKLB$ و $CKLD$ و $ABCD$ در یک نقطه همرسند. این سه محور اصلی CD و AB و KL است. پس نقطه M روی هر سه محور است. پس باقی می‌ماند که ثابت کنیم LK بر KO عمود است.

چون $AKL + ABL = ۱۸۰$ پس باید ثابت کنیم $\widehat{AKO} + \widehat{ABL} = ۹۰^\circ$.

با توجه به محاطی بودن چهار ضلعی $ACKO$ می‌توان نوشت.

$$\widehat{AKO} + \widehat{ABL} = \widehat{ACO} + \widehat{CBA} = \frac{۱۸۰ - COA}{۲} + \frac{AC}{۲} = ۹۰ - \frac{AC}{۲} + \frac{AC}{۲} = ۹۰$$

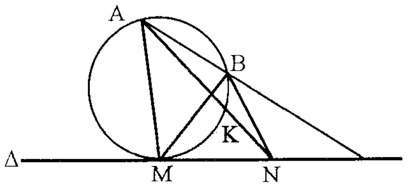
(المپیاد جهانی بالکان ۱۹۹۶)

۲۴. چون زاویه‌های $\widehat{HQM} = \widehat{HPM} = ۹۰$ پس

$$MA \cdot MP = MB \cdot MQ = MH^۲$$

یعنی چهار نقطه A و B و P و Q روی یک دایره واقع‌اند. پس خطوط MC و PQ و AB محور اصلی سه دایره (O) و (MH) و $(ABOP)$ می‌باشند پس در یک نقطه همرسند.

۲۵. اگر دایره‌ای رسم کنیم که از A و B گذشته و بر خط Δدر نقطه M مماس باشد



$$\widehat{AMB} = \frac{AB}{۲}$$

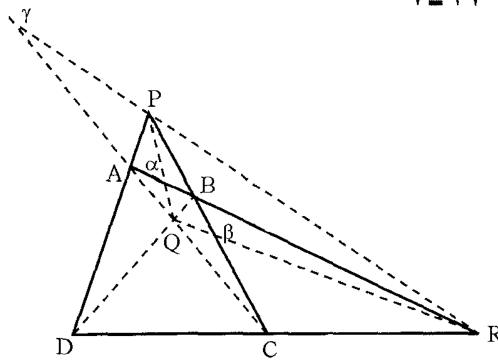
اگر نقطه دیگری مانند M روی Δ درنظر بگیریم

$$ANB = \frac{AB}{۲} = \frac{BK}{۲}$$

بنابراین

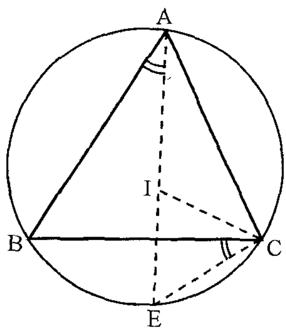
$$\widehat{AMB} > ANB$$

حل مسائل ۱۷ـ۷



۱. فرض کنیم برخورد AB با PQ نقطه α و محل برخورد RQ با BC نقطه β و محل برخورد AC با PR نقطه γ باشد.

خط PQ قطبی نقطه R نسبت به دو ضلع PC و PD می‌باشد. بنابراین چهار نقطه $(AB\alpha R) = -۱$ بنابراین دستگاه $P(\gamma A\alpha B) = -۱$ بنابراین شعاع QA باید از نقطه γ بگذرد چون $Q(\gamma A\alpha B) = -۱$



۲. برای اثبات این مسئله به لم زیر نیازمندیم: اگر نیمساز داخلی مثلث با دایره محیطی مثلث در نقطه‌ای برخورد نماید فاصله این نقطه از مرکز دایره محیطی و دو راس دیگر مثلث به یک فاصله می‌باشد.

اثبات: اگر AI و CI دو نیمساز داخلی مثلث باشند

$$\widehat{EIC} = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}$$

$$\widehat{EDI} = \frac{c}{۲} + \frac{\widehat{ECB}}{۲} = \frac{c}{۲} + \frac{A}{۲}$$

بنابراین

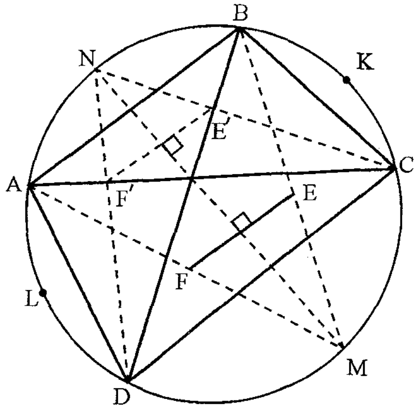
$$\widehat{EIC} = \widehat{ECI}$$

$$EC = EI = EB$$

بدین ترتیب اگر BM و AN نیمسازهای زوایای $\widehat{DBC}$ و $\widehat{DAC}$ و نقاط E و F مراکز دایره محاطی داخلی مثلث‌های DBC و DAC باشند بنابر لم فوق

$$ME = MF = MC = MD$$

و اگر N وسط کمان AB باشد خط MN نیمساز مثلث متساوی‌الساقین MEF است و بر خط EF عمود است و همینطور

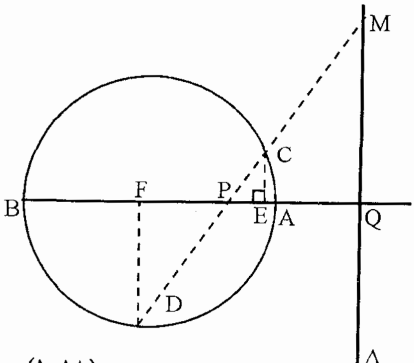


اگر E' و F' مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی ABC و ABD باشند عمود است. و به همین ترتیب خط LK بر خطوط EE' و FF' عمود است پس چهار ضلعی $EFF'E'$ مستطیل است. و در یک دایره محاط می‌شود.

برای اثبات قسمت دوم مسئله از این گزاره استفاده می‌شود که فاصله هر رأس مثلث تا مرکز ارتفاعیه دو برابر فاصله مرکز دایره محیطی از ضلع مقابل است که در نتیجه آن اگر H_1 مرکز ارتفاع مثلث DBC و H_2 مرکز ارتفع ADC باشد $AH_2 = BH_1$ در نتیجه چهار ضلعی ABH_1H_2 یک متوازی‌الاضلاع پس AH_1 و BH_2 یکدیگر را در نقطه M که محل برخرود قطرهای این متوازی‌الاضلاع می‌باشد نصف می‌کنند پس چهار ضلعی، $ABCD$ و $H_1H_2H_3H_4$ نسبت به نقطه M قرینه یکدیگرند.

۳ـ می‌دانیم که خطی که قطب خط سیمسون را به مرکز ارتفاعیه مثلث وصل می‌نماید بوسیله خط سیمسن مثلث نصف می‌شود. پس اگر مرکز مماس M و نسبت مماس ۲ باشد مجانس خط $H_3H_2H_1$ (مثال ۱۷ـ۵) از مراکز ارتفاعیه چهار مثلث می‌گذرد پس آن چهار مرکز ارتفاعیه بر یک خط راست واقع می‌باشد.

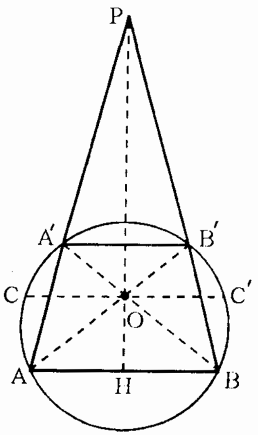
حل مسائل فصل ۱۸



(۱-۱۸)

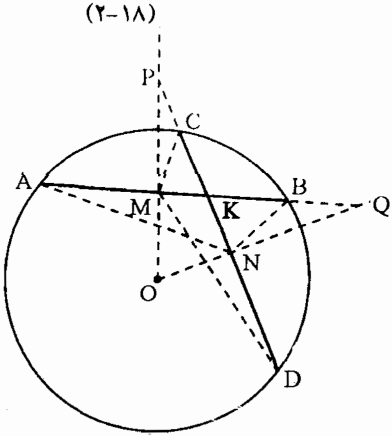
۱. چون قطبی نقطه P خط Δ می‌باشد پس چهار نقطه $(MPCD) = -۱$ و می‌دانیم اگر چهار نقطه نسبت به هم همساز باشند آنگاه تصاویر آنها بر یک محور هم چهار نقطه همساز می‌شود پس $(FEPQ) = -۱$

بنابراین اگر دایره‌ای به قطر PQ رسم شود خط CE قطبی نقطه F و بالعکس خط DF قطبی نقطه E نسبت به این دایره است.



(۲-۱۸)

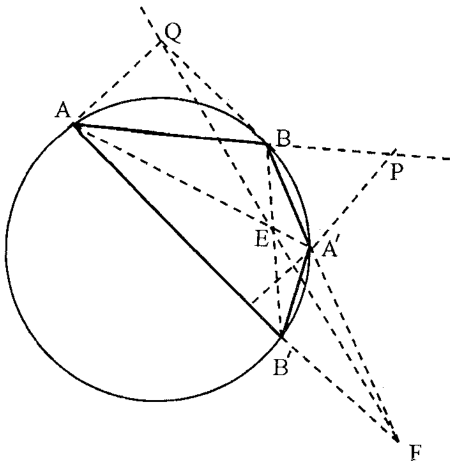
۲. می‌دانیم خط PO' بر ضلع AB از ذوزنقه عمود بوده و آن را نصف می‌کند (چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است) پس خط PH قطبی نقطه دزارگ نست به دو ضلع PB و DA می‌باشد پس CC' از نقطه دزارگ می‌گذرد پس نقطه P قطب خط CC' نسبت به دایره است و مماس‌های مرسوم از نقطه P بر دایره از دو نقطه C و C' می‌گزرند.



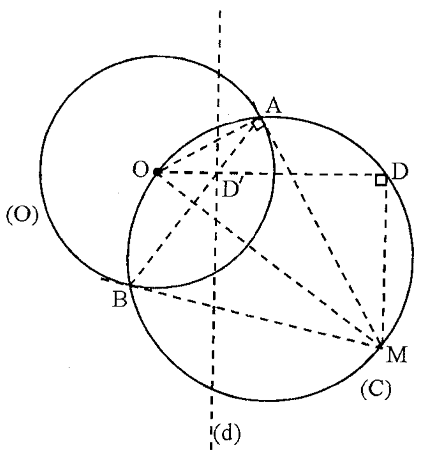
۳. چون MB نیمساز زاویه CMD است و OM بر AB عمود می‌باشد بنابراین چهارنقطه $(PKCD) = -۱$ در نتیجه خط AB قطبی نقطه P نسبت بر دایره است.

اگر نقطه Q قطب خط CD باشد پس K قطب خط PQ است بنابراین $(ABKQ) = -۱$ و چون دو شعاع

دستگاه $N(ABKQ) = -1$ یعنی NK و NQ بر همو عمود است بنابراین دو شعاع نیمسازهای زاویه ANB هستند.



۴. اگر $A'B'$ و AB یکدیگر را در نقطه P قطع نماید خط FE قطبی نقطه P نسبت به دایره است بنابراین نقطه Q از محل مماس‌های که از دو نقطه A و B بر دایره رسم شود می‌گذرد. و نقطه Q نقطه ثابتی است.

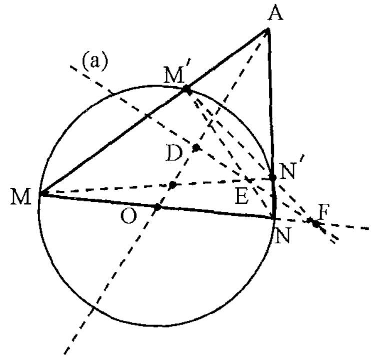


۵. دو زاویه $O\widehat{A}M$ و $O\widehat{D}M$ برابر 90° می‌باشند بنابراین مکان M خطی است که از نقطه D بر خط OD عمود شده باشد.
نقطه M قطب خط AB می‌باشد بنابراین قطب خط MD بر قطبی نقطه M یعنی AB واقع است از طرفی دیگر قطب خط MD روی خط OD می‌باشد پس D' روی قطب نقطه D نسبت به دایره واقع است یعنی روی خط (d) قطبی نقطه D واقع است.

اما نقطه D' پای عمودی ست که از نقطه D بر (d) رسم شده است پس نقطه D' نقطه ثابتی است و تمام وترهای AB از نقطه D' می‌گذرد.

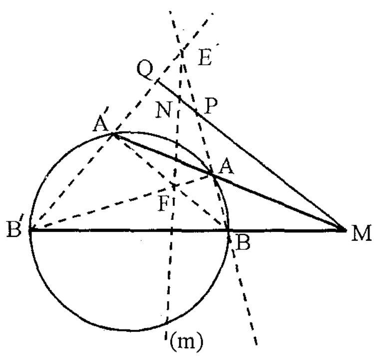
۶. الف) مکان E و F خط (a) قطبی نقطه A نسبت به دایره است. پس خط (a) خطی ثابت است این خط خط ثابت AO را در نقطه ثابت D قطع می‌نماید.

ب) دایره AMN خط OA را در نقطه B قطع می‌کند و $OA \cdot OB = OM \cdot ON$ پس محل

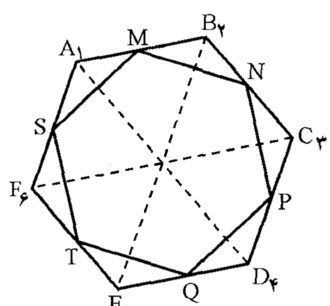


نقطه B روی OA جای ثابتی است.

ج) اگر محل برخورد $M'N'$ با OA نقطه C باشد چون خط (a) قطبی نقطه A نسبت به دو ضلع FM' و FM است پس
$(ADCO) = -1$ و چون A و D و O ثابت می‌باشند پس نقطه C نیز ثابت است.



۷. اگر (m) قطبی نقطه M نسبت به دایره باشد خط (m) ثابت است. اگر AB از نقطه ثابت P گذشته باشد امتداد MP با (m) در نقطه N و با $A'B'$ در نقطه Q برخورد می‌نماید.
و چون خط (m) قطبی نقطه M نسبت به دو ضلع زاویه EB و EB' می‌باشد پس $(MNPQ) = -1$ و چون سه نقطه M و P و N معلوم می‌باشند پس نقطه چهارم یعنی Q نیز نقطه ثابتی است.

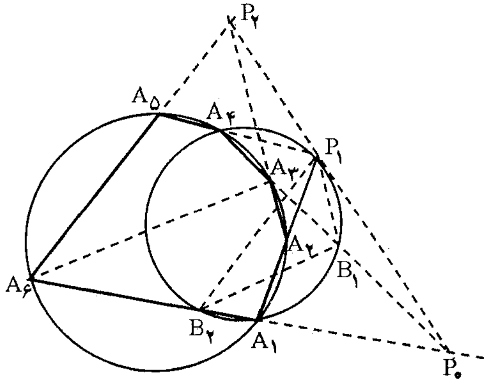


۸. رئوس شش ضلعی محیطی $ABCDEF$ را به ترتیب از یک تا شش شماره‌گزاری می‌کنیم و نقاط تماس اضلاع با دایره را به هم وصل می‌کنیم تا شش ضلعی محاطی $MNPQTS$ بدست آید. هرگاه قطب‌های قطرهای A_1D_4 و B_2E_5 و C_3F_6 بر یک خط راست واقع باشند آن‌گاه قطرها نیز در یک نقطه همرس خواهند بود.

قطر A_1D_4 را در نظر می‌گیریم این خط چون از A_1 می‌گذرد پس قطر آن بر قطبی A_1 یعنی بر

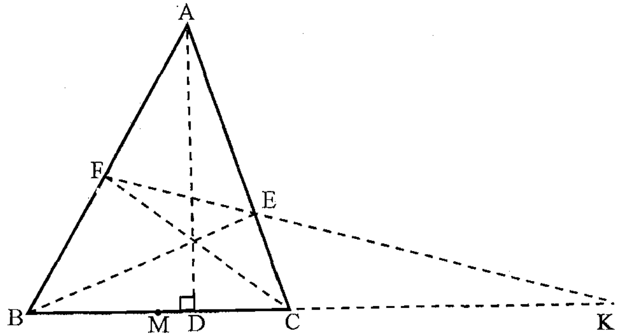
امتداد MS واقع است و چون بر D_4 نیز می‌گذرد قطب آن بر قطبی نقطه D_4 یعنی PQ واقع است پس قطب قطر A_1DE نقطه برخورد ضلع اول و چهارم شش ضلعی محاطی $MNPQRS$ واقع است. این نقطه را α می‌نامیم. به همین ترتیب قطب قطر B_2E_5 محل برخورد اضلاع دوم و پنجم شش ضلعی محاطی که آن را β می‌نامیم و قطب قطر C_3F_6 محل برخورد دو ضلع سوم و ششم همان شش ضلعی محاطی است که آن را γ می‌نامیم. اما در قضیه پاسکال ثابت شده است که α و β و γ بر یک خط راست واقع می‌باشند پس سه قطر A_1D_4 و B_2E_5 و C_3F_6 نیز در یک نقطه همرسند.

گزاره پاسکال: اگر A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 و A_6 شش نقطه واقع بر یک دایره باشند آنگاه نقاط تقاطع (A_1A_2 با A_5A_4) و (A_3A_4 با A_1A_6) و (A_2A_3 با A_6A_5) بر روی یک خط راست واقع می‌باشند.



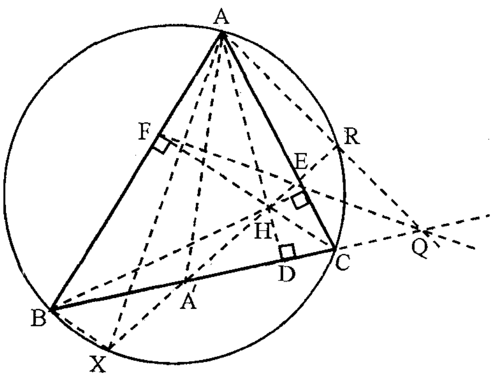
دایره محیطی مثلث $P_1A_4A_1$ را رسم می‌کنیم. این دایره با خط A_4P_0 در نقطه B_1 و با خط A_1A_6 در نقطه B_2 تقاطع می‌نماید. چهار ضلعی $P_1B_1A_1A_4$ محاطی است بنابراین $\widehat{B_1P_1A_1} = \widehat{A_1A_4B_1}$ چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ هم محاطی است بنابراین $\widehat{A_1A_4A_3} = A_3A_1P_1$ یعنی زاویه $A_1A_4A_3$ و $A_1A_4B_1$ هم برابرند پس $\widehat{B_1P_1A_1}\widehat{A_3A_2P_1}$ بنابراین خط P_1B_1 با A_2P_2 موازی می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که P_1B_2 با A_6P_2 و B_1B_2 با A_6A_3 موازیند. پس مثلث $P_1B_1B_2$ و $A_3A_6P_2$ اضلاعی موازی دارند. پس مجانس یکدیگرند. این به معنی این است که خطوط A_1A_6, A_3A_4 و P_1P_2 در یک نقطه همرسند بنابراین P_0 و P_1 و P_2 بر یک خط راست واقع می‌باشند.

.۹



خط AD قطبی نقطه K نسبت به دو خط AB و AC می‌باشد بنابراین $(BCDK) = -1$ و چون M وسط ضلع BC است بنابرگزاره نیوتون $MB^2 = MC^2 = MD.MK$.

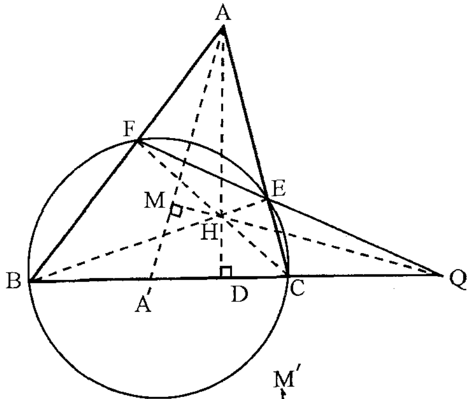
توجه: در این مساله ضرورتی ندارد که سه خط AD و RE و CF ارتفاعات مثلث باشند فقط کافیست که این سه خط سه خط سوایی باشند.

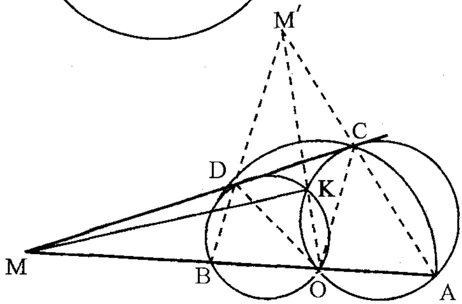


۱۰. راه‌حل اول اگر AX قطر دایره محیطی مثلث باشد زاویه $\widehat{ACX} = \widehat{ABX} = 90$ بنابراین $BX||CF$ و $CX = BE$ یعنی چهارضلعی $BHCX$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد و اگر از X به H وصل کنیم

از نقطه A' می‌گذرد. چهارضلعی $AEFH$ و $BFEC$ محاطی هستند و اگر دوایر محیطی آنهارا رسم کنیم با دایره محیطی مثلث ABC سه دایره دوبه دو متقاطع می‌شوند و وتر مشترک آنها یعنی BC و AR در یک نقطه همرسند (R محل برخورد HX با دایره محیطی مثلث است) یعنی R نقطه برخورد دایره محیطی چهارضلعی $AFHE$ با دایره محیطی مثلث است و اگر نقطه U وسط AH باشد نقطه U روی عمورد منصف AR قرار دارد بنابراین O و U و A' بر یک خط راست واقع هستند و چون $ARX = 90^\circ$ پس $A'R$ یک ارتفاع مثلث $AA'Q$ و H نقطه برخورد در ارتفاعات مثلث $AA'Q$ است.

راه حل دوم:
اگر دایره‌ای به قطر BC رسم کنیم این دایره از پای ارتفاعات BE و CF می‌گذرد و خط AD قطبی نقطه Q نسبت به دایره است. و خط QH قطبی نقطه A نسبت به دایره است بنابراین: بر خط گزرنده از نقطه A یعنی خط AA' عمود است. چون QM و AD دو ارتفاع از مثلث $AA'Q$ می‌باشد نقطه H همان نقطه همرس ارتفاعات مثلث $AA'Q$ است.





۱۱. دایره محیطی مثلث AOC را C_1 و دایره محیطی مثلث BOD را C_2 می‌نامیم اگر AC و BD یکدیگری را در نقطه M' قطع نمایند نقطه M' روی محور اصلی دو دایره C_1 و C_2 بوده و در نتیجه خط OK از نقطه M می‌گذرد

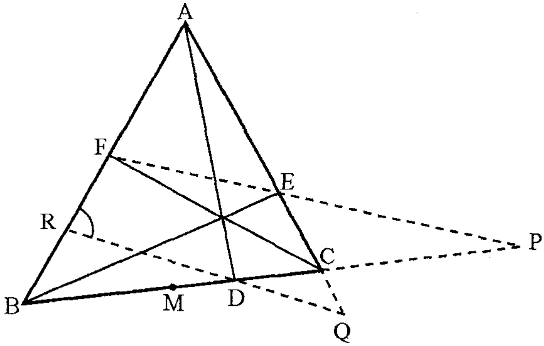
در انعکاس به مرکز O و ضریب R^2 دایره C_1 به خط AM' و دایره C_2 به خط $M'B$ تبدیل می‌شوند در نتیجه نقطه K منعکس نقطه M' است پس $OK \cdot OM' = R^2$ یعنی K نقطه وارون M' نسبت به دایریه است پس قطبی نقطه M' نسبت به دایره از نقاط M و K می‌گذرد بنابراین خط MN بر قطر گزرنده از K یعنی $M'O$ عمود است.

.۱۲

دو مثلث $AFE \sim ABC$ در نتیجه $\widehat{ARQ} = \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ پس $\widehat{BRQ} = \widehat{BCQ}$ یعنی چهار ضلعی $BRCQ$ محاطی است پس $DB \cdot DC = DR \cdot DQ$ از طرف دیگر خط AD قطبی نقطه P نسبت به دو ضلع AB و AC است و اگر M وسط BC باشد آنگاه $MB^2 = MC^2 = MD \cdot MP$

$$MB^2 = MP \cdot MD(MD + PD) = MD^2 + MD \cdot PD$$

$$MD \cdot PD = MB^2 - MD^2 = BD \cdot CD$$

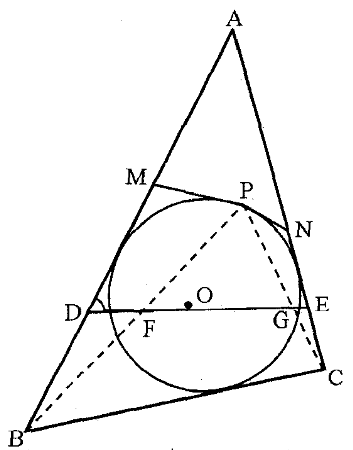


بنابراین چون $DB \cdot DC = DM \cdot DP$ پس چهار نقطه B و C و M و P بر یک دایره واقع هستند.

۱۳. فرض کنیم دایره محیطی مثلث PDG در نقطه M با ضلع AB و دایره محیطی مثلث PFE در نقطه N با ضلع AC برخورد نماید. دو چهار ضلعی $PMDG$ و $PFEN$ محاطی می‌باشند. بنابراین

$$\widehat{EDM} + \widehat{MPG} = \widehat{MBC} + \widehat{MPC} = ۱۸۰$$

$$\widehat{FPN} + \widehat{FEN} = FPN + BCN = ۱۸۰$$

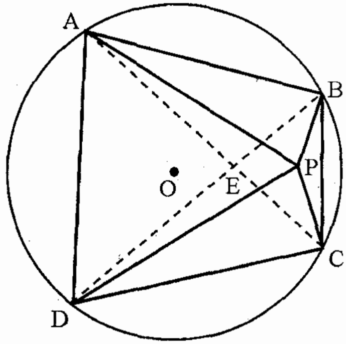


یعنی چهار ضلعی‌های $MPCB$ و $PNCB$ محاطی می‌باشند اما چون هر دو دایره از سه نقطه PBC می‌گزرند پس یک دایره بیشتر نبوده و پنج نقطصه $MBCNP$ بر روی یک دایره واقع می‌باشند

در نتیجه قوت نقطه A نسبت به این دایریه عبارت است از:

$$AM \cdot AB = AN \cdot AC \quad \Rightarrow \quad AM \cdot AD = AN \cdot AE$$

یعنی قوت نقطه A نسبت به دایره‌های محاطی مثلث‌های PDG و PEF با هم برابرا ست پس A بر یوی محور اصلی دو دایره واقع است و بر خط‌المرکزین آنها یعنی خط $O_۱O_۲$ عمود است.



۱۴. در چهار ضلعی $PABC$ چون

$PAB + PCB = ۹۰^\circ$ بنابراین

$\widehat{APE} + ABC = ۲۷۰^\circ$ و زاویه $\widehat{APC}$

روبروی قطر AC برابر است با

$$\widehat{APC} = ۳۶۰ - (\widehat{APC})$$

$$\widehat{APC} = ۳۶۰ - (۲۷۰ - ABC)$$

$$\widehat{APC} = ABC - ۹۰$$

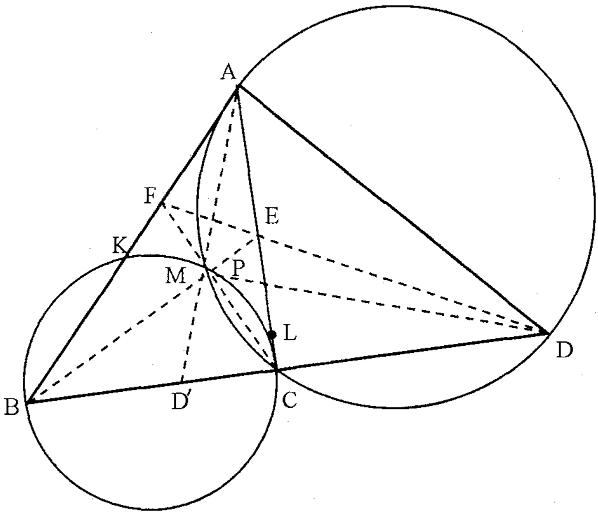
با توجه به جهت APC

چون P روی دایره‌ای است که از سه نقطه $A.P.C$ می‌گذرد کمان روبروی APC و کمان روبروی ADC مجموعاً برابر ۱۸۰ است زیرا برای $\widehat{AC}$ از دایره O و $\widehat{AC}$ از دایره PAC

$$\widehat{AC} + \widehat{AC} = ۲(ABC - ۹۰) + ۲D = ۱۸۰$$

یعنی در دایره APC و دایره (O) بر هم عمودند به همین ترتیب دایره‌ای که از PBD بگزرد هم بر دایره (O) عمود است اما محورهای اصلی سه دایره (O) و PBO و PAC در یک نقطه همرسند. اگر فرض کنیم دایره‌های PBO و PAC در نقطه‌ای مانند Q متقاطع می‌باشند بنابراین سه محور اصلی این سه دایره یعنی AC و BD و PQ در یک نقطه باید همرس باشند یعنی در نقطه E همرس می‌باشند اما مکان هندسی مرکز دایره‌های که بر دو دایره متقاطع عمود باشند محور اصلی آن دو دایره است پس خط PQ علاوه بر اینکه از نقطه E می‌گذرد از نقطه O مرکز دایره $(C_۱)$ هم می‌گذرد.

.۱۵



اگر ثابت کنیم خط AD' قطبی نقطه D نسبت به دایره‌ای به قطر BC می‌باشد حکم ثابت است. یعنی کافیست ثابت کنیم $(BCD'D) = -۱$

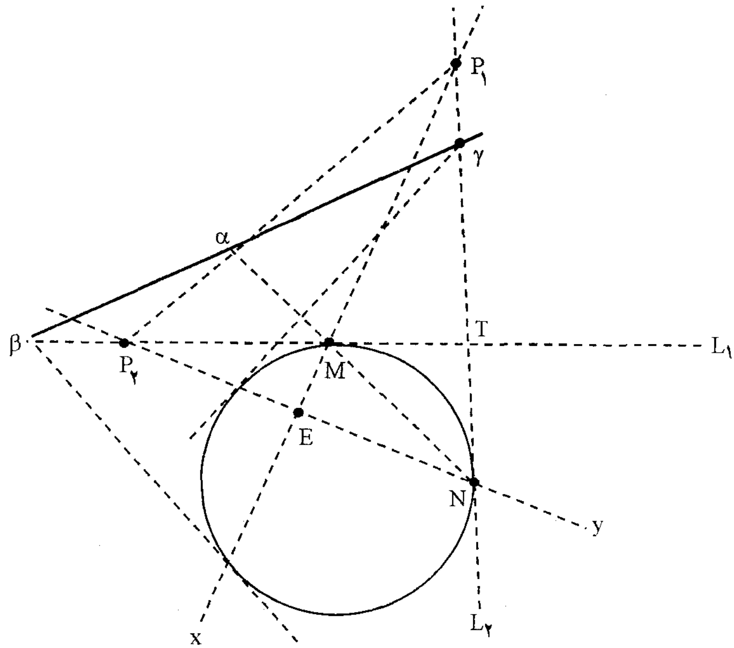
چون چهار ضلعی $APCD$ محاطی است پس $D'PC = \hat{D} = \widehat{CAD} = \widehat{CPD} = \frac{\widehat{CD}}{۲}$

چون دو خط BP و CP بر هم عمودند پس BP نیمساز خارجی مثلث $D'PC$ است. یعنی B و C پای نیمسازهای داخلی و خارجی در مثلث $D'PD$ بوده و $(BCD'D) = -۱$ پس چهار ضلعی $BFEC$ یک چهارضلعی کامل بوده و خط EF از پای قطر AD یعنی نقطه D می‌گردد.

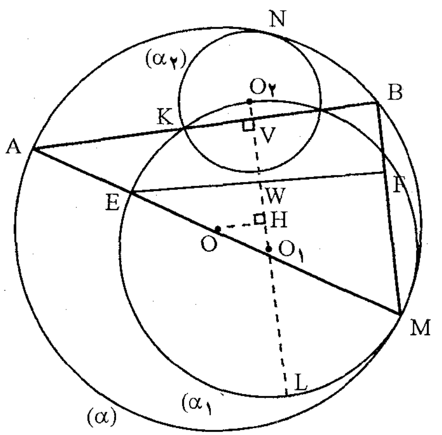
توجه: علاوه بر این ثابت شد که AD' بر BC عمود است. و خط DP بر دایره‌ای به قطر BC مماس می‌باشد.

راه حل دوم: چون CL و BK در نقطه A یعنی روی قطبی نقطه D همرسند و همچنین نقطه P نیز روی قطبی نقطه D نسبت به دو ضلع AC و AB قرار دارد پس خط AP قطبی نقطه D نسبت به دایره است و حکم ثابت است.

.۱۶ خط x قطبی نقطه β نسبت به دایره و خط y قطبی نقطه γ نسبت به دایره در نقطه E همرسند در چهار ضلعی $P_۱\,MTNE$ و $P_۲$ دو سر قطر چهار ضلعی کامل است پس با TE و MN دستگاه همساز می‌سازند و چون قطبی α باید از نقطه T هم بگذرد پس TE قطبی نقطه α نیز می‌باشد چون سه نقطه در نقطه E همرسند پس α و β و γ قطب‌های آنها به یک خط راست واقع می‌باشند.



۱۷. فرض کنیم O و O_1 و O_2 و R و R_1 و R_2 مراکز و شعاع‌های سه دایره α و α_1 و α_2 باشند.



اگر محل برخورد O_1 و O_2 رابا EF نقطه W بنامیم کافیست ثابت کنیم $O_2W = R_2$ و بر EF عمود است.

O_1O_2 بر وتر مشترک دو دایره یعنی بر خط AB عمود است.

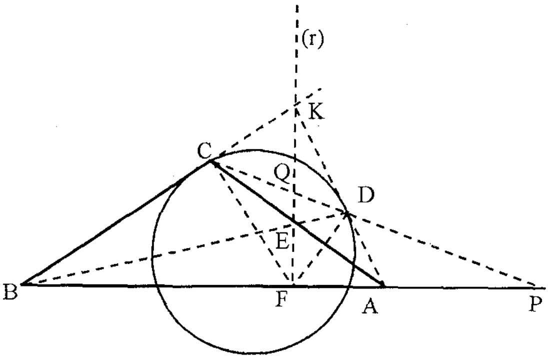
در تجانسی به مرکز M و با ضریب تجانس $\frac{R_1}{R}$ خط EF به خط AB تبدیل می‌شود. بنابراین EF موازی AB است و O_2W بر EF عمود است. محل برخود O_1O_2 را با AB نقطه V می‌نامیم.

مثلث LKO_2 قائم‌الزاویه است پس $O_2K^2 = O_2V \cdot O_2L$، $R_2^2 = O_2V \cdot 2R_1$ بنابراین $O_2V = \frac{R_2^2}{2R_1}$. H تصویر نقطه O روی O_1O_2 است.

بنابراین به دلیل تجانس $\frac{O_1W}{HV} = \frac{R_1}{R}$ (۱) و $O_1V = O_1O_2 - VO_2$ پس

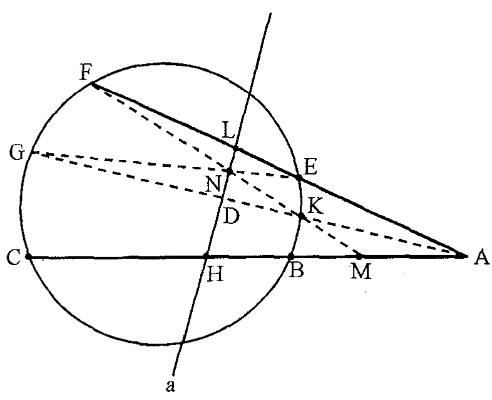
$O_1V = R_1 - \frac{R_2^2}{2R_1}$ (۲) پس $O_1V = \frac{2R_1^2 - R_2^2}{2R_1}$. پس $OO_2^2 = O_2H^2 + OH^2$
$(R-R_2)^2 = OH^2 + OH^2$ و $OO_1^2 = OH^2 + O_1H^2$ و $(R-R_1)^2 = OH^2 + O_1H^2$ با
حذف OH از بین این دو معادله و معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت: $O_2W = R_2$ و حکم ثابت است.

.۱۸



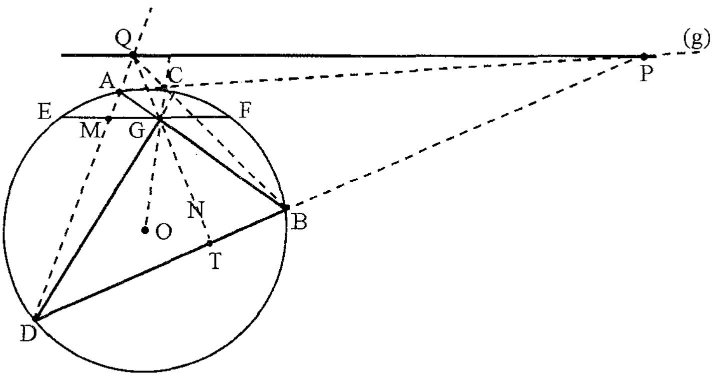
اگر CB با امتداد قطر AB در نقطه P برخورد نماید بنابر قضیه دزارگ نقطه E محل برخورد قطرهای BD و AC از چهار ضلعی کامل روی قطبی نقطه P نسبت به دو خط AD و BC است. اما چون از D و C دو مماس بر دایره رسم شود پس محل برخود این دو مماس باید روی قطبی نقطه P نسبت به دایره واقع باشد پس EF قطبی نقطه P نسبت به دایره است. و نقطه K محل برخورد AD و BC روی (r) قرار دارد. اگر Q محل برخورد قطبی P با CD باشد $(PQCD) = -1$ است و دستگاه $F(PQCD) = -1$ اما چون دو شعاع FP و EQ بر هم عمودند پس نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه CFD می‌باشند.

.۱۹



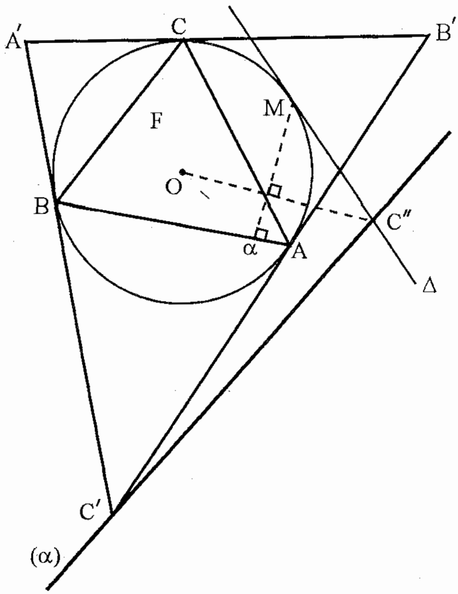
خط (a) قطبی A نسبت به همه این دوایر از نقطه ثابت H می‌گذرد $(CBHA) = -1$ خط (a) در عین حال از محل برخورد وترهای GE و FK نیز می‌گذرد اگر L محل برخورد قطبی نقطه A با AEF باشد $(FELA) = -1$ و $N(FELA) = -1$ و چون خط AC موازی با شعاع NE از دستگاه $N(FELA) = -1$ رسم شده به وسیله سه شعاع دیگر یعنی NH و NM ون NA نصف شده است پس نقطه M وسط AH است. و نقطه H نقطه چهارم نسبت همساز $(CBHA)$ ثابت می‌باشد.

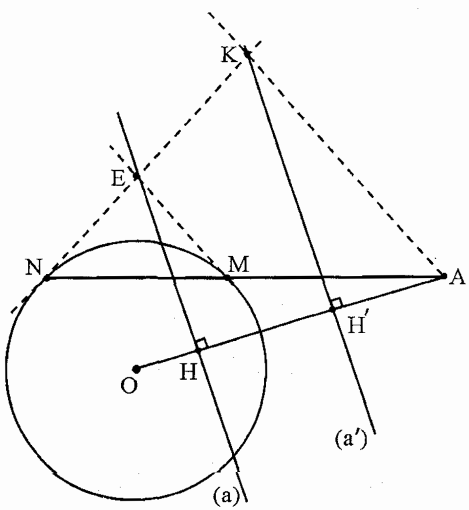
۲۰. اگر AD و BC در نقطه Q و AC و DB در نقطه P برخورد نمایند خط PQ قطبی نقطه G نسبت به دایره است. پس خط OG عمود است. اما OG بر EF هم عمود است یعنی $EF||PQ$ اما $(DBTP) = -1$



پس $Q(DBTP) = -1$ پس $Q(DBTP) = -1$ و چون از نقطه G خطی به موازات شعاع QP رسم شده توسط در شعاع QD و QB و QT نصف شده است.

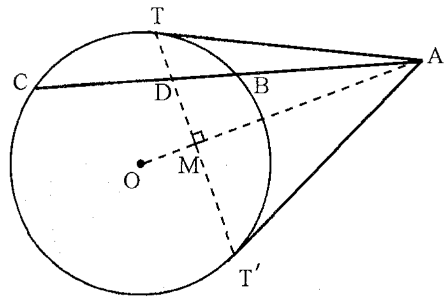
۲۱. اگر تصویر نقطه M روی ضلع AB را α بنامیم قطبی نقطه α از نقطه C' خواهد گذشت. اما چون OC'' موازی AB است پس خط $M\alpha$ بر OC'' عمود می‌باشد پس قطبی نقطه C'' خط $M\alpha$ است بنابراین قطبی نقطه α از نقطه c'' هم خواهد گذشت. در نتیجه $c'c''$ قطبی نقطه α است اما تصاویر نقطه M روی سه ضلع مثلث اگر α و β و γ بانشد این سه نقطه روی خط سیمسن نقطه M نسبت به مثلث واقع هستند پس چون قطب‌ها بر یک خط واقع می‌باشند پس قطبی‌های آنها یعنی سه خط $c'c''$ و $B'B''$ و $A'A''$ در یک نقطه همرسند.





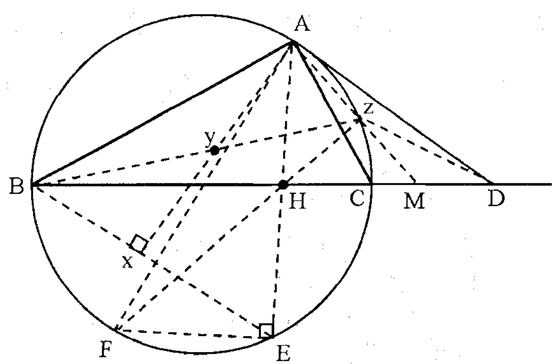
۲۲. مکان هندسی نقطه E قطبی نقطه A نسبت به دایره خط (a) است. اگر از نقطه K عمودی (a') برابر OA فرود آوریم نقطه u' وسط MA است. پس مکان K خط (a') است.

۲۳. چون TT' قطبی نقطه A نسبت به تمام دوایرگزرنده از BC می‌باشند بنابراین محل برخورد TT' با ABC نقطه D نقطه چهارم $(ADBC) = -۱$

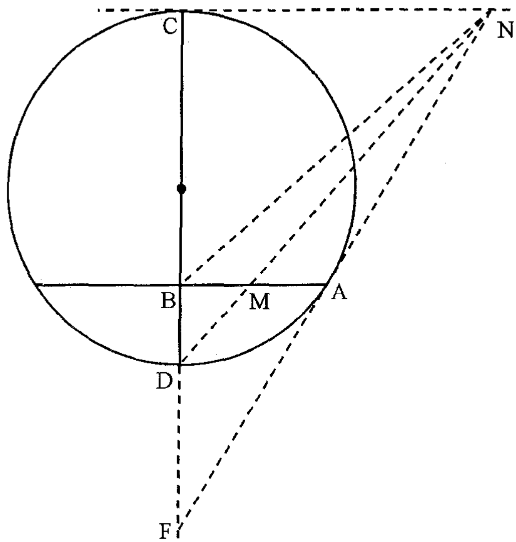


می‌باشد که در صفحه ثابت است. اگر AO را وصل کنیم تا با TT' در نقطه M برخورد نماید نقطه M وسط TT' است بنابراین مکان نقطه M دایره‌ای به قطر AD است.

۲۴. اگر قطر AF از دایره را رسم کنیم دو مثلث ABX و AEF مشابه می‌باشند HF و BY هر دو میانه این مثلث‌ها هستند پس زاویه $ABZ = AFH$ یعنی FH از نقطه Z می‌گذرد پس $AZF = ۹۰$ و دایره‌ای به قطر AH از Z می‌گذرد اگر AZ خط CD را در M قطع نماید $MH^۲ = MZ \cdot MA$ و $MH^۲ = MC \cdot MB$ می‌شود اما چون H پای قطبی نقطه D است پس $MD^۲ = MZ \cdot MA$ و حکم ثابت است.

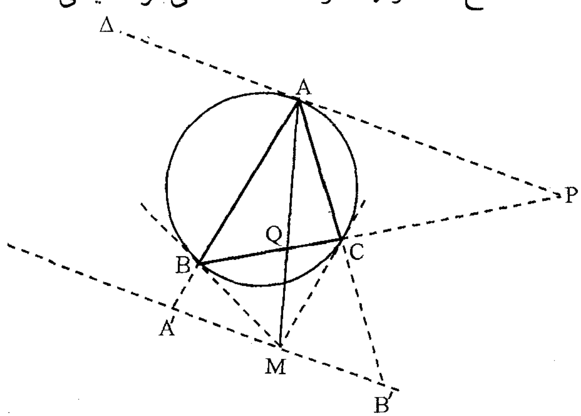


۲۵. امتداد مماس AN با قطر BD در نقطه F برخورد می‌نماید پس خط AB قطبی نقطه F است یعنی $(FBDC) = -۱$ پس دستگاه $N(FBDC) = -۱$ بوده و چون از نقطه M خط AB را موازی شعاع NC

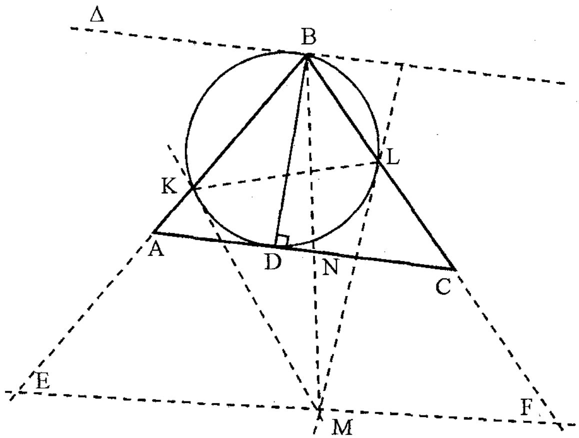


رسم کرده‌ایم بوسیله سه شعاع NF و ND و NB بد دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود یعنی $BM = MA$.

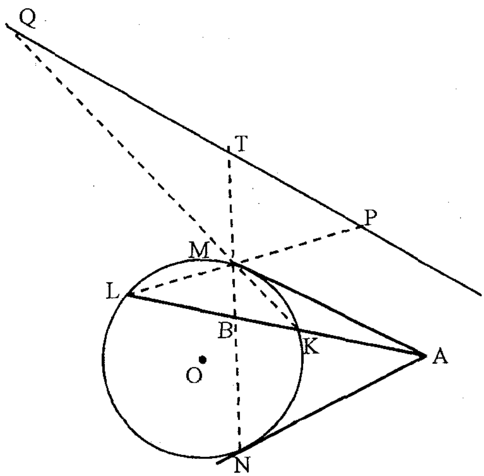
۲۶. خط $A'B'$ به موازات خط Δ است که خط Δ بر دایره در نقطه A مماس است امتداد BC خط مماس به نقطه A را در نقطه P قطع می‌نماید خط AM قطبی نقطه P نسبت به دایره است پس $(BCQP) = -۱$ پس دستگاه $A(BCQP) = -۱$ بنابراین در نقطه M یک خط به موازایت شعاع AP رسم شده که توسط سه شعاع AB و AQ و AC نصف می‌شود. یعنی MB' و MA'.



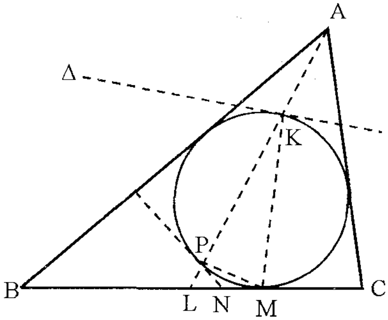
۲۷. اگر در نقطه B خط Δ را بر دایره مماس کنیم این خط با ضلع AC موازی است. اگر از نقطه M خط EF را به موازات Δ رسم کرده باشیم تا اضلاع AB و BC را در نقاط E و F قطع نماید بنابر مسئله قبل $ME = MF$ و چون AC موازی EF است AM در نقطه N ضلع AC را نصف می‌کند.



۲۸. خط MN قطبی نقطه A نسبت به دایره است پس $(LKBA) = -1$ در نتیجه $M(LKBA) = -1$ یعنی $M(APTA) = -1$

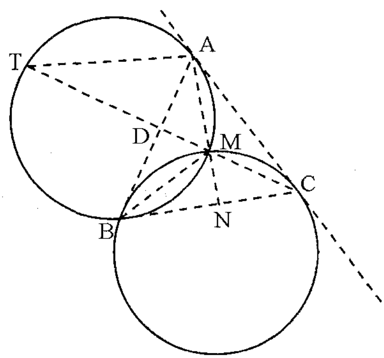


بنابراین PQ به موازات شعاع MA' رسم شده و توسط سه شعاع MP و MT و MQ درنقطه T نصف شده است.



۲۹. امتداد AK ضلع BC را در نقطه L قطع می‌نماید نقطه L نقطه تماس دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است و اندازه آن برابر $P-C$ می‌باشد از طرف دیگر اگر M محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC باشد $CM = P-a$ در نتیجه کافی است ثابت کنیم نقطه N وسط LM است.

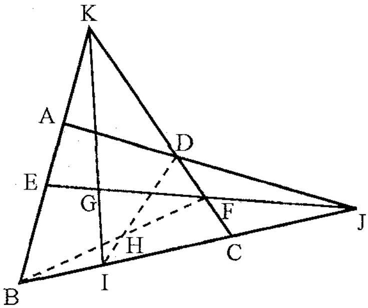
در مثلث KPM اگر مماسی بر دایره درنقطه K رسم کنیم این مماس با ضلع BC موازی خواهد شد. بنابراین از نقطه N که محل برخورد دو مماس NM و NP بر دایره محیطی مثلث KPM می‌باشد خط LM موازی مماس Δ رسم شده است. بنابراین مسائله ۲۸ $LN = NM$



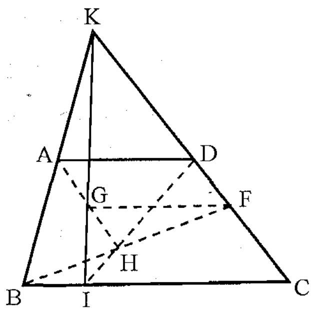
۳۰. خط AB قطبی نقطه C نسبت به دایره (O) می‌باشد بنابراین $(TMDC) = -۱$ و $A(TMDC) = -۱$ اما زاویه $\widehat{DCB} = \widehat{DBM} = \frac{\widehat{BM}}{۲}$ و همچنین $\widehat{DBM} = \widehat{MAC} = \frac{\widehat{AM}}{۲}$ و $\widehat{ATM} = \widehat{MAC} = \frac{\widehat{AM}}{۲}$ بنابراین $\widehat{ATC} = \widehat{DCB}$ یعنی $BC||AT$

پس در نقطه N خط BC به موازوابت شعاع AT از دستگاه $A(TMDC) = -۱$ رسم شده در نتیجه به وسیله دو شعاع دیگر نصف می‌شود.

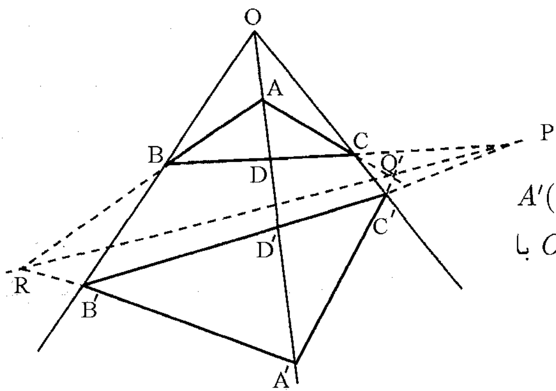
حل مسائل ۱۹ـ۱۰



۱. سه نقطه j, I, B روی یک خط و سه نقطه H, D, F هم بر روی یک خط قرار دارند.
بنابر قضیه پاپوس سه نقطه A و G و H بر یک خط راست واقع می‌شوند.



۲. این مسئله همان مسئله شماره (۱) قبلی است که اشتراک $AD \cap BC = j$ در بی‌نهایت واقع شده.



۳. دو دستگاه $A(PQA'R)$ و $A'(PCDB)$ معادل می‌باشند و دستگاه $O(PCDB)$ با دستگاه $A'(PC'D'B')$ معادل هستند

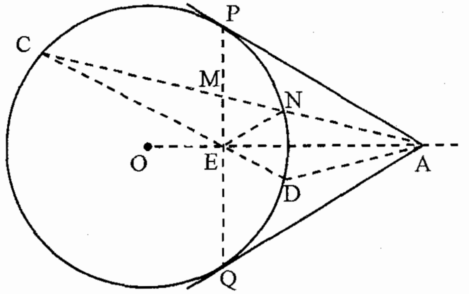
و دستگاه $A'(PC'D'B')$ با دستگاه $A'(PQD'R)$ معادل است پس در نتیجه $A(PQA'R) = A'(PQD'R)$ و چون AA' و AD' بر هم منطبق هستند بنابراین P و Q و R روی یک خط هستند.

$$A(BDCP) \equiv O(BDCP) \equiv O(B'D'C'P) \equiv A'(B'D'C'P)$$

بنابراین چون دو شعاع AD و $A'D'$ از دو دستگاه معادل $A(BDCP) \equiv A'(B'D'C'P)$ بر هم منطبق می‌باشند نقاط $AB \cap A'B' = R$ و $AC \cap A'C' = Q$ و $AP \cap A'P' = P$ بر یک خط راست واقع می‌باشند.

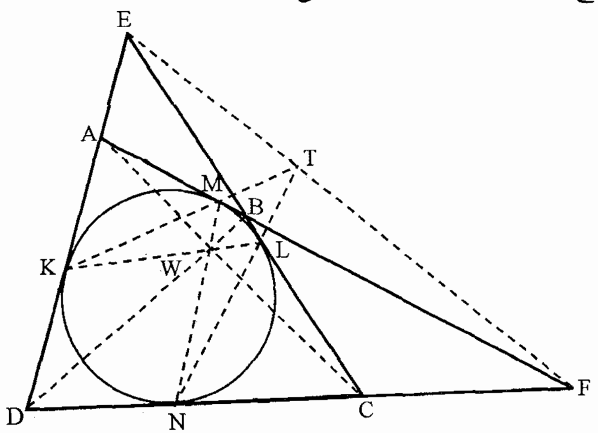
۴. عکس گزاره دزارگ می‌باشند.
چون $(BDCP) \equiv (B'D'C'D)$ پس خطوط BB' و CC' و DD' در یک نقطه همرسند.

۵. اگر $EF \cap BC = D_1$ باشد خط AD قطبی نقطه D_1 نسبت به دو خط AB و AC می‌باشد و به همین ترتیب CF قطبی نقطه E_1 و BE قطبی نقطه F_1 می‌باشند و چون سه نیمساز در نقطه I همرس می‌باشند قطبی I نسبت به هر سه ضلع مثلث خطی است که از سه نقطه E_1 و F_1 و D_1 می‌گذرد.
راه حل دوم: اگر در گزاره دزارگ نقطه I را بر نقطه O منطبق کنیم اضلاع مثلث‌های DEG و ABC در سه نقطه واقع بر یک خط راست متقاطع می‌باشند.



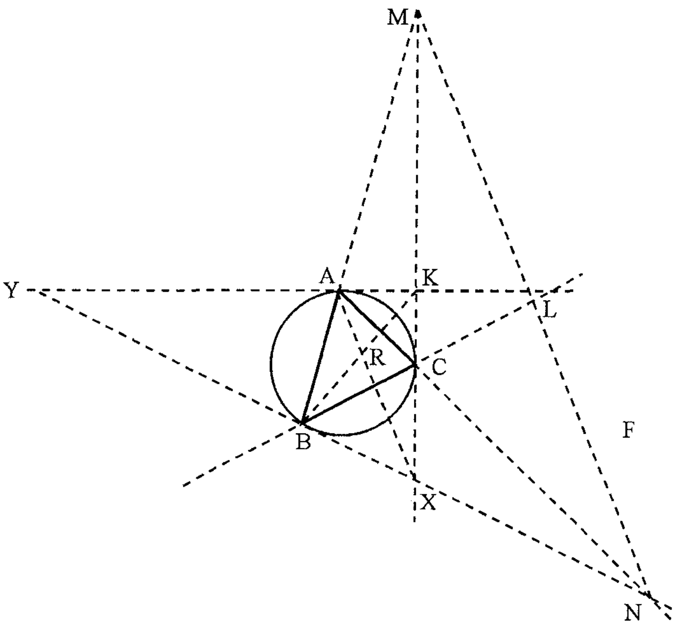
۶. خط PQ قطبی نقطه A نسبت به دایره است. $(CNMA) = -1$ و چون در شعاع ME و AE بر هم عمودند پس آنها نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث CEN هستند. بنابراین دو خط ED و EN نسبت به محور تقارن OA قرینه بوده پس $\widehat{CAO} = \widehat{DAO}$.

۷. خط MN قطبی نقطه F و خط KL قطبی نقطه E می‌باشد در نتیجه نقطه W محل برخورد دو قطبی نسبت به اضلاع زوایای AFD و DEC می‌باشد.



دو نتیجه در چهار ضلعی کامل $ABCDEF$ محل برخورد قطرهای AC و BD نقطه W خواهد بود. چون قطبی نقطه W خط EF است. (مانند نقطه T محل برخورد KM و NL که روی EF قرار دارد.)

۸.



در مثلث YKX خط KB قطبی نقطه N و AX قطبی نقطه L و YC قطبی نقطه M می‌باشند. اما در مثلث خطوطی که رئوس را به نقطه تماس دایره محاطی داخلی با اضلاع مقابل وصل می‌نمایند در یک نقطه مانند R همرس خواهند بود و چون سه قطبی در نقطه R همرسند پس قطب‌های آنها یعنی M و N و L بر روی یک خط راست واقع خواهند بود.

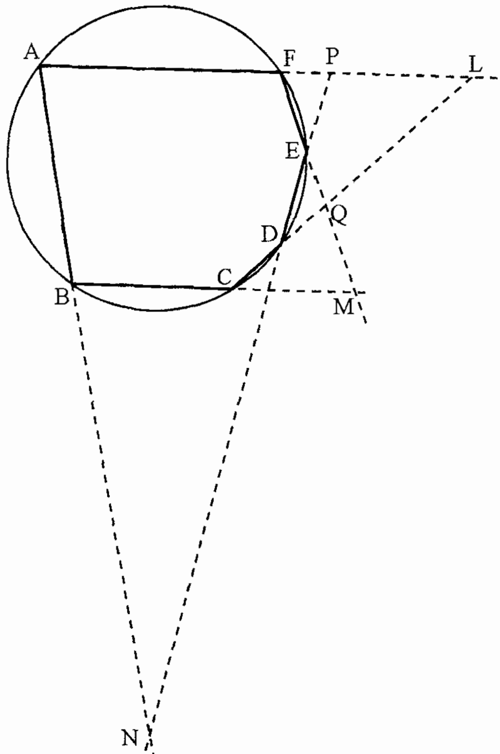
۹.

دستگاه‌های ناهمساز $A(BDEF) = C(BDEF)$ و

$$A(BDEF) = A(NDEP)$$

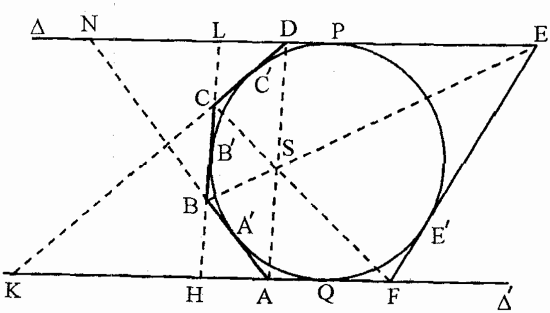
$$C(BDEF) = C(MQEF)$$

بنابراین دو بخش ناهمساز $(NDEP) = (MQEF)$ و چون در نقطه E مشترکند بنابراین سه خط MN و DQ و PF همرسند یعنی سه نقطه L و M و N بر یک خط راست واقع می‌باشند.



۱۰. چهار نقطه A' و B' و C' و E' بر روی دایره و نقاط مماس می‌باشند خطوط مماس از این نقاط با دو خط Δ و Δ' که بر دایره در نقاط P و Q مماس می‌باشد دو بخش ناهمساز معادل $(NLDE) \equiv (AHKG)$ را پدید می‌آورند. دو دستگاه

$$B(NLDE) \equiv C(AHKF)$$



چون در این دو دستگاه ناهمساز معادل دو خط CH و Bl یکی می‌باشند بنابراین محل برخورد شعاع‌های $S = (CF \cap BE)$ و $BN \cap CA = A$ و $BD \cap CK = D$ از این دو دستگاه بر یک خط راست واقع می‌باشند.

حل مسائل (۲۰ـ۱۸ـ۱)

۱. الف: $-۳-۲i$

ب: $۲+i$

۲. الف: $۱۰۲۴i$

ب: -۳۵

ج: $\frac{۶\sqrt{۳}+۴}{۷}$

۳. اندازه اضلاع ۸,۵,۵.

۴. $۱\in\mathbb{R}$, $\frac{z_۱-z_۲}{z_۳-z_۴}=۱$

بنابراین $z_۱z_۲$ با $z_۳z_۴$ موازی است و $۱=\frac{|z_۱-z_۳|}{|z_۳-z_۴|}$
بنابراین

$$|z_۱-z_۲|=|z_۳-z_۴|$$
$$|z_۱z_۲|=|z_۳z_۴|$$

یعنی دو بردار $z_۱z_۲$ و $z_۳z_۴$ هم با یکدیگر موازی و هم برابر می‌باشند. پس شکل متوازی‌الاضلاع است.

۵. اگر O وسط قطر AC و BD از متوازی‌الاضلاع باشد:

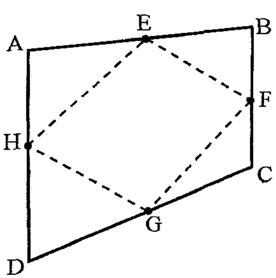
$$O=\frac{z_۱+z_۳}{۲}=\frac{z_۲+z_۴}{۲}\quad\Rightarrow\quad z_۱-z_۲+z_۳-z_۴=۰$$

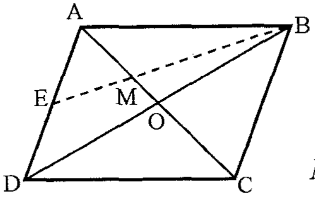
و بنابر مسئله ۴ شکل متوازی‌الاضلاع است.

۶. باید ثابت کنیم $E+G=F+H$

$$\frac{A+B}{۲}+\frac{C+D}{۲}=\frac{B+C}{۲}+\frac{A+D}{۲}$$

و حکم ثابت است.





۷. در مثلث ABD نقطه M محل برخورد میانه‌های آن می‌باشد پس

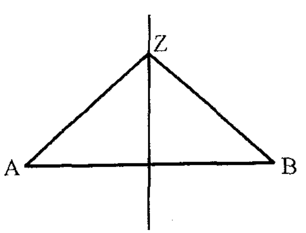
$$M = \frac{A+B+D}{۳}$$

و اگر O مبدا مختصات باشد $M = \frac{A}{۳}$ و حکم ثابت است.

۸. الف: معادلهٔ خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد. $= \begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ A & \bar{A} & ۱ \\ B & \bar{B} & ۱ \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ ۲+i & ۲-i & ۱ \\ ۳-۲i & ۳+۲i & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \Rightarrow \quad (۱+i)Z + (-۱+۳i)\bar{Z} - ۱۴i = ۰$$

ب:



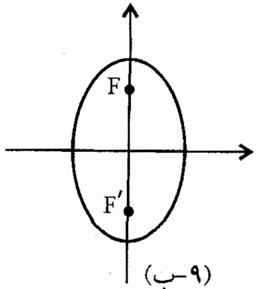
$$|Z-A| = |Z-B| \quad \Rightarrow \quad |Z-A|^۲ = |Z-B|^۲ \quad \Rightarrow$$

$$(Z-A)(\bar{Z}-\bar{A}) = (Z-B)(\bar{Z}-\bar{B})$$

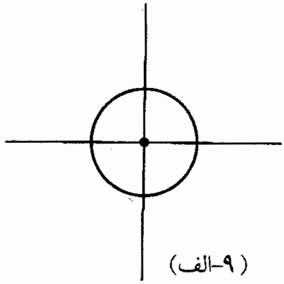
$$(Z-۲-i)(\bar{Z}-۲+i) = (Z-۳+۲i)(\bar{Z}-۳-۲i)$$

$$(-۱+۳i)Z - (۵-i)\bar{Z} + ۸ = ۰$$

۹. معادله $|Z-i| = ۲$ معادله یک دایره است که مرکز آن $\omega(۰+i)$ و شعاع آن ۲ می‌باشد.



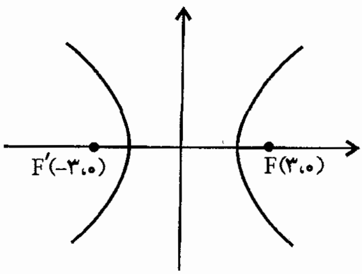
(۹-ب)



(۹-الف)

معادله $|Z+۲i|+|Z-۲i|=۶$ معادله یک بیضی است که مختصات کانون‌های $F(۰+۲i)$ و $F'(۰-۲i)$ و طول قطر بزرگ بیضی ۶ است.

ج) معادله $|z+۳|-|z-۳|=۴$ مکان هندسی یک هذلولی است که کانون‌های آن $F(۳،۰)$ و $F'(-۳،۰)$ و اندازه قطر هذلولی ۲ می‌باشد.



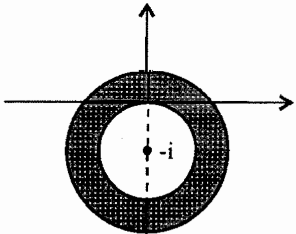
(۹- ج)

د) اگر $z=x+iy$ باشد آنگاه

$$z^۲=x^۲-y^۲+۲ixy$$

$$I_m(z^۲)=۲xy$$

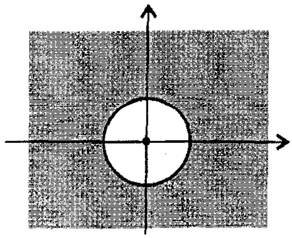
$I_m(z^۲)=۴$ آنگاه $xy=۲$ یا $y=\frac{۲}{x}$ که معادله مکان یک تابع هموگرافیک است.



(۱۰-الف)

۱۰. الف مکان حد فاصل دو دایره است که مرکز هر دو آنها نقطه $z=-i$ و شعاع اول ۱ و شعاع دوم ۲ واحد است.

ب: $R_e\{Z^{۲}\} > ۱$ یعنی $x^{۲} + y^{۲} > ۱$ پس مکان خارج از دایره‌ایست که شعاع آن واحد است.



(۱۰-ب)

۱۱. ریشه‌های معادله $z^m = ۱$ عبارتند از $z = ۱$ و $e^{\frac{۲\pi i}{m}}$ و $e^{\frac{۴\pi i}{e}}$ و ... $e^{\frac{۲(m-۱)\pi i}{m}}$ پس:

$$z^m - ۱ = (z-۱)\left(z - e^{\frac{۲\pi i}{m}}\right)\left(z - e^{\frac{۴\pi i}{m}}\right)\dots\left(z - e^{\frac{۲(m-۱)\pi i}{m}}\right)$$

و چون $\dfrac{z^m - ۱}{z - ۱} = ۱ + z + z^{۲} + \cdots + z^{m-۱}$
بنابراین

$$m = \left(۱ - e^{\frac{۲\pi i}{m}}\right)\left(۱ - e^{\frac{۴\pi i}{m}}\right)\dots\left(۱ - e^{\frac{۲(m-۱)\pi i}{m}}\right) \qquad (۱)$$

و اگر مزدوج طرفین رابطه فوق را بدست آوریم:

$$m = \left(۱ - e^{\frac{-۲\pi i}{m}}\right)\left(۱ - e^{\frac{۴\pi i}{m}}\right)\dots\left(۱ - e^{\frac{-۲(m-۱)\pi i}{m}}\right) \qquad (۲)$$

و چون $\left(۱ - e^{\frac{۲k\pi i}{m}}\right)\left(۱ - e^{-\frac{۲k\pi i}{m}}\right) = ۲ - ۲\cos\left(\dfrac{۲k\pi}{m}\right)$
اگر رابطه (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$m^{۲} = ۲^{m-۱}\left(۱ - \cos\frac{۲\pi}{m}\right)\left(۱ - \cos\frac{۴\pi}{m}\right)\dots\left(۱ - \cos\frac{۲(m-۱)\pi}{m}\right)$$

و چون $۲\sin^{۲}\dfrac{k\pi}{m} = ۱ - \cos\dfrac{۲k\pi}{m}$ پس

$$m^{۲} = ۲^{۲m-۲}\cdot\sin\frac{۲\pi}{m}\cdot\sin^{۲}\frac{۴\pi}{m}\dots\sin^{۲}\frac{(m-۱)\pi}{m}\Big)$$

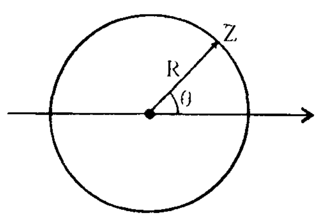
و حکم ثابت است.

.۱۲

$$Z = ۲ + i \quad \Rightarrow \quad |Z| = \sqrt{۵}$$
$$Z = \sqrt{۵}\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۵}} i\right)$$
$$\cos\theta = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\frac{۱}{۲}$$
$$Z = \sqrt{۵} \cdot e^{\arctan\frac{۱}{۲}}$$

.۱۳ الف: $|Z| = ۵$ و $Z = ۵\left(-\frac{۳}{۵}x - \frac{۴}{۵} - \frac{۴}{۵}iy\right)$
$Z = r(\cos\alpha x + i\sin\alpha y)$ بنابراین $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و چون $\sin\alpha$ و هم $\cos\alpha$ منفی می‌باشند
پس $\alpha = \pi + \arctan\frac{۴}{۳}$ در نتیجه نمایش خطی Z $Z = ۵e^{(\pi\arctan\frac{۴}{۳})}$
ب: چون $z = ۱ - ۲i$ بنابراین $|Z| = \sqrt{۵}$ و $Z = \sqrt{۵}\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}} - \frac{۲}{\sqrt{۵}} i\right)$ بنابراین $\tan\alpha = -\frac{۱}{۲}$
و $\alpha = \arctan -\frac{۱}{۲}$ پس $z = \sqrt{۵}e^{i\arctan -\frac{۱}{۲}}$

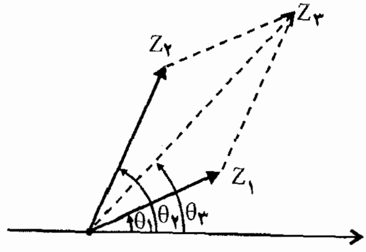
.۱۴ نمایش هندسی $Z = Re$ دایره‌ای می‌باشد که شعاع آن R، است.



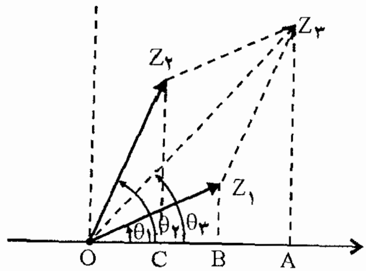
.۱۵ الف:

اگر $Z_۱ = r_۱e^{i\theta}$ و $Z_۲ = r_۲e^{i\theta}$ و $Z_۳ = r_۳e^{i\theta}$ باشد

$$Z_۳ = Z_۱ + Z_۲$$
$$Z_۳^۲ = Z_۱^۲ + Z_۲^۲ + ۲Z_۱Z_۱$$
$$Z_۳^۲ = r_۱^۲r_۲^۲ + ۲r_۱r_۲\cos(\theta_۲ - \theta_۱)$$
$$Z_۳ = \sqrt{r_۱^۲ + r_۲^۲ + ۲r_۱r_۲\cos(\theta_۲ - \theta_۱)}$$



ب:



اگر OB تصویر $Z_۱$ و OC تصویر $Z_۲$ روی محور باشد تصویر $Z_۳$ یعنی OA در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$|OA| = |OB| + |OC| = r_۱ \cos\theta_۱ + r_۲ \cos\theta_۲$$

و اگر این تصاویر را روی محور OY بدست آوریم.

$$|OA'| = |OB'| + |OC'|$$

$$r_۳ \cdot \sin\theta_۳ = r_۱ \sin\theta_۲ + r_۲ \sin\theta_۱$$

$$\tan\theta = \frac{r_۱ \sin\theta + r_۲ \sin\theta_۱}{r_۱ \cos\theta_۱ + r_۲ \cos\theta_۲}$$

۱۶. الف: $\frac{۱۵}{۲} + \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲} i$

ب: $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} i$

۱۷. الف: $\frac{-۱ \pm ۷i}{۵}$

ب: $1 + i$, $1 - 2i$

۱۸. با استفاده از رابطه مسئله ۱۵ حکم ثابت می‌شود:

۱۹. صورت کلی معادله دایره به صورت $Z\bar{Z} + kZ + \bar{k}\bar{Z} + t = 0$ می‌باشد k ممکن است عددی مختلط و t عددی حقیقی است.

اگر مختصات این سه نقطه را در این معادله بگذاریم خواهیم داشت:

$$1)\quad (1+i)(1-i) + (1+i)k + (1-i)\bar{k} + t = 0$$

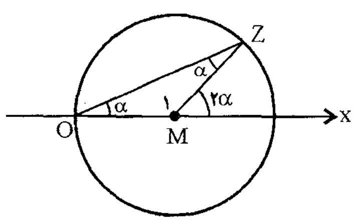
$$2)\quad 2i(-2i) + 2ik - 2i\bar{k} + t = 0$$

$$3)\quad (1+i)(1-i) + (1-i)k + (1+i)\bar{k} + t = 0$$

از حل معادله ۱ و ۳ داریم $k = \bar{k}$ پس $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$

و $t = -4$ بنابراین معادله دایره به صورت

$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 4$$

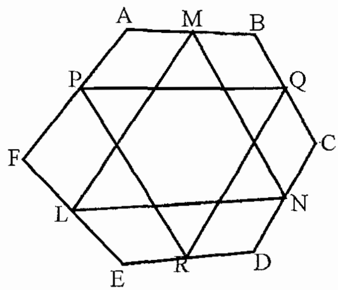


۲۰. $\arg(z-1)$ زاویه است که بردار $Z - 1$ با محور می‌سازد و چون مرکز دایره نقطه $M(0, 1)$ است و چون مثلث OZM متساوی‌الساقین است.

پس زاویه $ZMX = 2\alpha$ خواهد بود یعنی $\arg(Z-1) = 2\arg(Z)$ و

$$z + \arg(z-1)$$
$$\arg(z^2 - z) = \arg(z)(z-1) = \arg z + \arg(z-1) = 3\alpha$$

و حکم ثابت است.



۲۱. اگر G مرکز میانه‌ای مثلث MNL باشد:

پس

$$G = \frac{M+N+L}{۳}$$

$$G = \frac{\frac{A+B}{۲} + \frac{C+D}{۲} + \frac{E+F}{۲}}{۳}$$

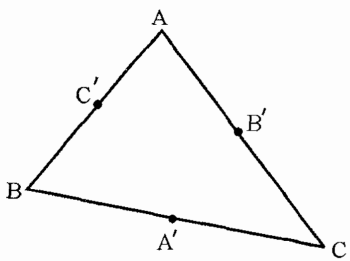
$$G = \frac{A+B+C+D+E+F}{۶}$$

و اگر G' مرکز میانه‌ای مثلث QPR باشد پس

$$G' = \frac{A+B+C+D+E+F}{۶}$$

در نتیجه نقطه G بر G' منطبق است.

۲۲.



$$\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{C'B} = k$$

$$\mathbb{K} \in R$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{BC'} = \frac{\alpha}{\beta}$$

اگر G مرکز میانه‌ای مثلث ABC باشد $G = \frac{A+B+C}{۳}$

و مختصات $A' = \frac{\alpha C + \beta B}{\alpha+\beta}$ و $B' = \frac{\alpha A + \beta C}{\alpha + \beta}$

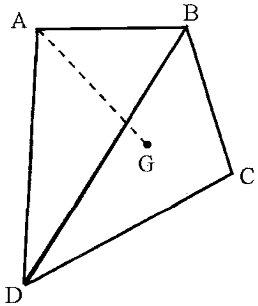
و $\frac{\alpha B + \beta A}{\alpha+\beta} = O'$ خواهد بود.

و مختصات G' مرکز میانه‌ای مثلث $A'B'C'$ عبارت است از

$$G' = \frac{A'+B'+C'}{۳} =$$

$$G = \frac{(\alpha+\beta)A + (\alpha+\beta)B + (\alpha+\beta)C}{۳(\alpha+\beta)} = \frac{A+B+C}{۳}$$

پس G بر G' منطبق است.



۲۳. اگر $G_{۱}$ مرکز میانه‌ای مثلث BCD باشد پس مختصات آن

$$G_{۱} = \frac{B + C + D}{۳}$$

و خط گذرنده از دو نقطه A و $G_{۱}$ از معادله

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ A & \bar{A} & ۱ \\ G_{۱} & \bar{G}_{۱} & ۱ \end{vmatrix}$$

به صورت

$$(۱) \quad (\bar{A}-\bar{B}-\bar{C}-\bar{D})Z-(A-B-C-D)\bar{Z}+A(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})-\bar{A}(B+C+D) = ۰$$

می‌باشد.

معادله خط $BG_{۲}$

$$(۲) \quad (\bar{B}-\bar{A}-\bar{C}-\bar{D})Z-(B-A-C-D)\bar{Z}+B(\bar{A}+\bar{C}+\bar{D})-\bar{B}(A+C+D) = ۰$$

و معادله خط $GG_{۳}$ به صورت

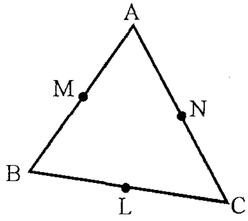
$$(۳) \quad (\bar{C}-\bar{A}-\bar{B}-\bar{D})Z-(C-A-B-D)\bar{Z}+C(\bar{A}+\bar{B}+\bar{D})-\bar{C}(A+B+D) = ۰$$

و معادله $DG_{۴}$ به صورت

$$(۴) \quad (D-\bar{A}-\bar{B}-\bar{C})Z-(D-A-B-C)\bar{Z}+D(\bar{A}+\bar{A}-\bar{B}+\bar{C})-\bar{D}(A+B+C) = ۰$$

چون هر چهار معادله یک دستگاه متقارن تشکیل می‌دهند پس چهار نقطه در یک نقطه همرسند.

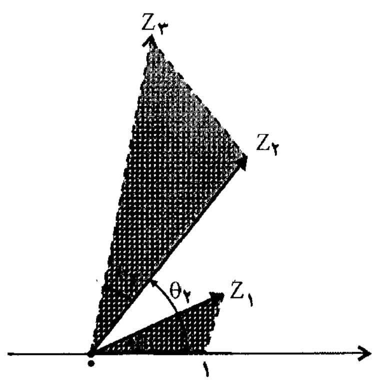
۲۴. اگر M و N و L اواسط اضلاع باشند.



$$\begin{cases} 2M = A + B \\ 2N = A + C \\ 2L = B + C \end{cases} \Rightarrow \quad A + B + C = M + N + L$$

و چون مختصات سه راس مثلث $\begin{cases} A = M + N - L \\ B = M + L - N \\ C = N + L - M \end{cases}$ در دست است پس مثلث قابل رسم می‌باشد.

.۲۵



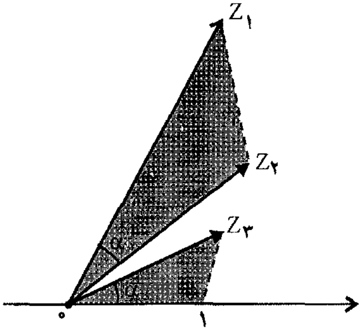
اگر $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ باشد

$$Z_3 = Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

دو مثلث $OZ1$ و OZ_2Z_3 متشابه می‌باشند.

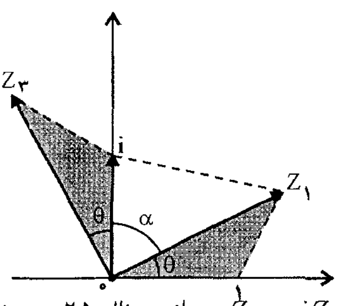
.۲۶

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$



دو مثلث $OZ_3 1$ و OZ_2Z_1 با یکدیگر مشابه می‌باشند.

.۲۷



چون Z_1 و $Z_2 = i$ پس $Z_3 = iZ_1$ و مانند مثال ۲۵ دو مثلث $OZ_3 i$ با مثلث $OZ_1 1$ متشابه می‌باشد و چون اندازه $|i| = 1$ است پس دو مثلث متساوی هم می‌باشند.

$$Z_1 Z_2 = \mathbb{K} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Z\bar{\bar{Z}}_2 = \bar{Z}_1 Z_2 = k \ \Rightarrow \ Z_1 \bar{Z}_2 = \bar{Z}_1 Z_2$$

.۲۸

$$\begin{aligned}|Z_1 + Z_2|^2 &= (Z_1 + Z_2)(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)\\ &= Z_1\bar{Z}_1 + Z_1\bar{Z}_2 + Z_2\bar{Z}_1 + Z_2\bar{Z}^2\\ &= |Z_1|^2 + 2R_e Z_1\bar{Z}_2 + |Z_2|^2\end{aligned}$$

اما چون $|Z| \geq R_e Z$: $z \in C$

$$\leq |Z_۱|^۲ + ۲|Z_۱\bar{Z}_۲| + |Z_۲|$$

اگر $|\bar{Z}_۲| = |Z_۲|$

$$= |Z_۱|^۲ + ۲|Z_۱| \cdot |Z_۲| + |Z_۲|^۲$$

$$= (|Z_۱| + Z_۲|)^۲$$

$$= |Z_۱| + Z_۲|$$

اما چون $R_e Z = |Z|$ برای هنگامی است که Z عددی حقیقی و نامنفی باشد پس $Z_۱\bar{Z}_۲ \geq ۰$ و ... و همچنین

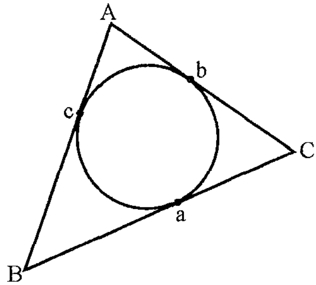
$$\frac{Z_۱\bar{Z}_۲}{|Z_۲|^۲} > ۰$$

$$\frac{Z_۱\bar{Z}_۲}{Z_۲\bar{Z}_۲} > ۰$$

و در حالی که $Z_۱ = ۰$ یا $Z_۲$ نیز حکم صادق است.

$\frac{Z_۱}{Z_۲} = k$ که k یک عدد منفی باشد به معنی آن است که بردار $Z_۱$ و $Z_۲$ هم جهت و موازیند پس $\arg Z_۱ = \arg Z_۲$ و یا $\arg Z_۱ = ۲\pi + \arg Z_۲$.

حل مسائل (۲۰_۲۰)

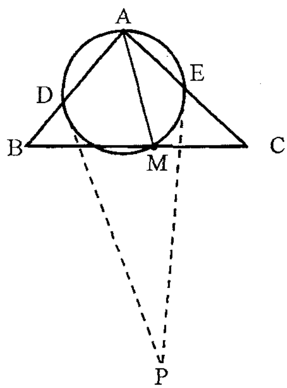


۲۹. در مثال‌های گذشته ملاحظه شد که اگر مختصات نقاط تماس اعداد مختلط a و b و c باشد معادله خط

$$BC : \frac{z}{a} + a\bar{z} = ۲$$
$$AC : \frac{z}{b} + b\bar{z} = ۲$$
$$AB : \frac{z}{c} + b\bar{z} = ۲$$

از حل این سه معادله مختصات نقاط $A = \frac{۲bc}{b+c}$ و $B = \frac{۲ac}{a+c}$ و $C = \frac{۲ab}{a+b}$ خواهد بود.
و اگر مختصات رئوس مثلث سه عدد مختلط A و B و c باشد مختصات محل تماس

$$c = \frac{BC(A+B)}{۲(AB - AC + BC)}$$
$$a = \frac{AB(C+B)}{۲(AC - AB + BC)}$$
$$b = \frac{BC(A+C)}{۲(AC - BC + AB)}$$



۳۰. اگر دایره به قطر AM را دایره‌ای به شعاع واحد فرض کنیم معادله این دایره $Z\bar{Z} = ۱$ خواهد بود.

اگر مختصات رأس A را a فرض کنیم مختصات نقطه M $-a$ خواهد شد و اگر مختصات B را x

فرض کنیم:

$$-۲a = x + c$$

$$c = -۲a - x$$

بدون اینکه به کلیت مسئله آسیب برسد می‌توان مختصات رأس $a = ۱$ فرض کرد و دراین صورت $B = -۱ - x$ و $C = -۱ + x$ معادله خط AC

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱-x & -۱-x & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

حل این معادله با معادله دایره

$$Z = \frac{x-۲}{۲-\bar{x}}$$

پس مختصات $D = \dfrac{x-۲}{۲-\bar{x}}$ و $E = \dfrac{-x-۲}{۲+\bar{x}}$

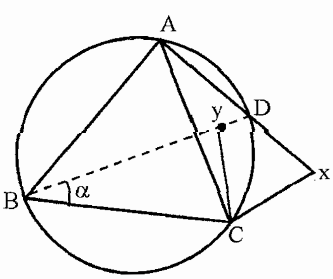
با توجه به مثال قبل معادله دو مماس بر دایره در نقاط D و E را می‌توان نوشت و مختصات محل برخورد آنها $p = \dfrac{x^۲-۴}{۴-x\bar{x}}$ بدست آورد.

معادله عمود منصف BC عبارت از

$$\bar{x}z + x\bar{z} + x + \bar{x} = ۰$$

که مختصات p در این معادله صدق می‌نماید.

.۳۱



نقطه Y را از دوران نقطه C حول نقطه B به اندازه زاویه α بدست می‌آید پس

$$B - Y = (B - C)e^{l\alpha}$$

و همینطور نقطه X از دوران نقطه c حول نقطه A با زاویه α بدست می‌آید پس:

$$A - x = (A - C)e^{i\alpha}$$

اگر $C = ۰$ قرار دهیم:

$$Y = B - Be^{i\alpha}$$

$$\begin{cases} Y = (۱ - e^{i\alpha})B \\ X = (۱ - e^{i\alpha})A \end{cases}$$

معادله خط XY از

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ X & \bar{X} & ۱ \\ Y & \bar{Y} & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(\bar{A} - \bar{B})Z + (A\bar{B} - B\bar{A}) - ((B - A)\bar{Z} + (A\bar{B} - B\bar{A}))e^{i\theta} = ۰$$

که در ازاء $Z_۰ = \dfrac{A\bar{B} - B\bar{A}}{\bar{B} - \bar{A}}$ صفر می‌شود پس به ازاء جمیع مقادیر α خط XY از این نقطه ثابت می‌گذرد.

راه حل دوم:

دو مثلث BCY و ACX متشابه‌اند. اگر مختصات $A = ۱$ و مختصات $C = ۰$ در نظر بگیریم:

$$\begin{vmatrix} B & A & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ Y & X & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \longrightarrow -BX + AY = ۰ \longrightarrow Y = \frac{B}{A} \times Y = BX$$

معادله خطی که از دو نقطه X و Y می‌گذرد.

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ X & \bar{X} & ۱ \\ Y & \bar{Y} & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & ۱ \\ X & \bar{X} & ۱ \\ BX & \bar{B}\bar{X} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$(۱) \quad (۱ - \bar{B})\bar{X}Z - (۱ - B)X\bar{Z} + (\bar{B} - B)X\bar{X} = ۰$$

اما نقاط C و X روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع واحد هستند که معادله آن

$$|Z-۱|=۱ \quad\Rightarrow\quad (Z-۱)(\bar{Z}-۱)=۱$$
$$Z\bar{Z}-Z-\bar{Z}+۱=۱$$

و چون نقطه X در این معادله صدق می‌کند

$$(۲)\qquad x\bar{x}=\bar{x}+x$$

با استفاده از رابطه (۲) اگر نقطه $Z=\dfrac{\bar{B}-B}{\bar{B}-۱}$ را در معادله (۱) قرار دهیم.

$$((۱-\bar{B})Z+(\bar{B}-B))\bar{X}+(۱-B)\bar{Z}+(\bar{B}-B)X=۰$$

صدق می‌نماید.

۳۲. اگر $A_۱, A_۲ \ldots A_n$ ریشه‌های معادله $Z^n=۱$ آنگاه $Z_{k=e}\dfrac{۲\pi ki}{n}$ که $k=۱,۲,\ldots,n$ اگر مختصات نقطه P را روی این دایره z فرض کنیم:

$$\sum_{k=۱}^{n} PAi^۲=\sum_{k=۱}^{n}|Z-Z_n|^۲=\sum_{k=۱}^{n}(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)$$
$$\sum_{k}^{n}(z\bar{z}-z\bar{z}_k-\bar{z}z_k+\bar{z}_k)$$

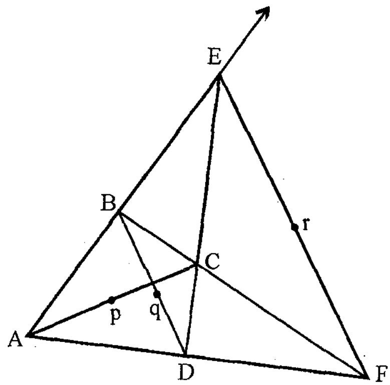
$$=\sum_{k}^{h}z\bar{z}-\left(\sum_{k,۱}^{n}Z_k\right)\bar{Z}-\bar{Z}\left(\sum_{k=۱}^{n}\bar{z}_k\right)+\sum_{k=۱}^{n}z_k\bar{z}_k$$

اما $\sum\limits_{k=۱}^{n}z_k=۰$ بنابراین

$$\sum_{h=۱}^{n}PAk^۲=\sum_{h=۰}^{n}z\bar{z}+\sum_{k=۱}^{n}z_n\cdot\bar{z}_k$$
$$=\sum|z|^۲+\sum|z_k|^۲$$

$=n+n$ چون $|z|=۱$

$=۲n$ چون $|zk|=۱$



.۳۳

اگر P وسط AC و q وسط BD و r وسط EF باشد باید ثابت کنیم:

$$\frac{p-q}{p-r} = k \in \mathbb{R}$$

معادله خطوط

$$AB : (\bar{A} - \bar{B})Z - (A - B)\bar{Z} + A\bar{B} - \bar{A}B = ۰$$
$$CD : (\bar{C} - \bar{D})Z - (C - D)\bar{Z} + C\bar{D} - \bar{C}D = ۰$$

از حل این دو معادله مختصات نقطه E

معادله خطوط

$$AD : (\bar{A} - \bar{D})Z - (A - D)\bar{Z} + A\bar{D} = ۰$$
$$BC : (\bar{B} - \bar{C})Z(B - C)\bar{Z} + B\bar{C} - \bar{B}C = ۰$$

از حل این دو معادله مختصات F بدست می‌آید.

برای ساده شده معادلات نقطه A را مبداء مختصات $B = ۱$ قرار می‌دهیم: معادلات به صورت

زیر در پایه

$$AB : Z - \bar{Z} = \circ$$

$$AD : -\bar{D}Z + D\bar{Z} = \circ$$

$$BC : (\text{۱} - \bar{C})Z - (\text{۱} - C)\bar{Z} + \bar{C} - C = \circ$$

$$CD : (\bar{C} - \bar{D})Z - (C - D)\bar{Z} + C\bar{D} + \bar{C}D = \circ$$

نقطه E محل برخورد $AB \cap CD$ از حل دو معادله:

$$\begin{cases} Z - \bar{Z} = \circ \\ (\bar{C} - \bar{D})Z - (C - D)\bar{Z} + C\bar{D} - \bar{C}D = \circ \end{cases} \Rightarrow \quad E = \frac{C\bar{D} - \bar{C}D}{C - D - \bar{C} - \bar{D}}$$

نقطه $F = AD \cap BC$

$$\begin{cases} -\bar{D}Z + D\bar{Z} = \circ \\ (\text{۱} - \bar{C})Z - (\text{۱} - C)\bar{Z} + \bar{C} - \bar{C} = \circ \end{cases} \Rightarrow \quad F = \frac{D\bar{C} - D\bar{C}}{D\bar{C} - C\bar{D}}$$

$$r = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(F + E)$$

$$q = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(B + D) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۱} + D)$$

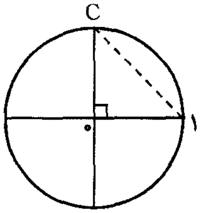
$$P = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(A + C) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}C$$

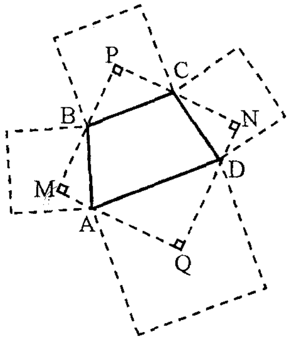
معادله خط pq

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & \text{۱} \\ \frac{\text{۱} + D}{\text{۲}} & \frac{\text{۱} + \bar{D}}{\text{۲}} & \text{۱} \\ \frac{C}{\text{۲}} & \frac{C}{\text{۲}} & \text{۱} \end{vmatrix} = \circ \quad \Rightarrow$$

$$\text{۲}(\text{۱} + \bar{D} - \bar{C})Z - \text{۲}(\text{۱} + D - C)\bar{Z} + (\text{۱} + D)\bar{C} - (\text{۱} + \bar{D}) = C$$

که مختصات $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\frac{C\bar{D} - \bar{C}D}{C - D - \bar{C} + D} + \frac{D\bar{C} - DC}{D\bar{C} - C\bar{D}}\right) = r$ در این معادله صدق می‌نماید.





۳۴. این مثلث‌ها با هم متشابه‌اند

$$AMB \sim BPC \sim CND \sim DQA$$

$$\begin{vmatrix} A & ۱ & ۱ \\ M & ۰ & ۱ \\ B & i & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \rightarrow \quad M = \frac{Ai - B}{۱ - i}$$

و به همین ترتیب

$$P = \frac{Bi - C}{۱ - i}$$
$$N = \frac{Ci - D}{۱ - i}$$
$$Q = \frac{Di - A}{۱ - i}$$

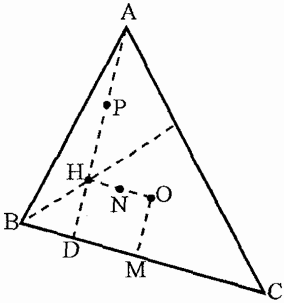
$$\frac{P - Q}{M_N} = \frac{Bi - C - Di + A}{Ai - B - Ci + D} = -i$$

پس PQ بر MN عمود است و با آن برابر می‌باشد.

۳۵. در مثال فوق اگر چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع باشد:

$$A + C = B + D$$
$$\frac{P - N}{N - Q} = \frac{BI - C - Ci + D}{Ci - D - Di + A} = \frac{Bi - C - Ci + D}{Ci - C - Di + B} = i$$

بنابراین PN بر NQ عمود بوده و با آن برابر است.



۳۶. در مثال (۲ـ۱۹) دیدیم که مختصات مرکز ارتفاعیه مثلث AB مثلث $H = A + B + C$ و مختصات پای ارتفاع D $D = \frac{1}{2}\left(A + B + C - \frac{BC}{A}\right)$ و M وسط ضلع BC $M = \frac{1}{2}(B + C)$ و اگر N وسط OH که O مرکز دایره محیطی مثلث و مبداء مختصات باشد $N = \frac{A + B + C}{2}$ و اگر P وسط AH باشد مختصات $P = \frac{2A + B + C}{2}$ می‌باشد.

فاصله N تا M برابر است با

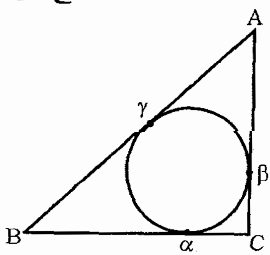
$$|N - M| = \frac{1}{2}|A + B - C - B - C| = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}$$

که $R = 1$ چون مبداء مختصات نقطه O می‌باشد.

$$|N - P| = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}$$

$$|N - D| = \frac{1}{2}\left|A + B + C - A - B - C + \frac{BC}{A}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{BC}{A}\right| = \frac{1}{2}\frac{|B| \cdot |C|}{|A|}$$

چون $|A| = |B| = |C| = 1$ پس $|N - D| = \frac{1}{2}$ یعنی دایره‌ای که به مرکز N و به شعاع $\frac{1}{2}$ رسم شود از وسط هر ضلع و پای هر ارتفاع و نقطه وسط هر رأس تا مرکز ارتفاع می‌گردد:



۳۷. در حل مسئله ۲۹ ملاحظه شد که اگر مختصات محل تماس α و β و γ باشد آنگاه مختاصت رئوس مثلث $A = \frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma}$ و $B = \frac{2\alpha\gamma}{\gamma + \alpha}$ و $C = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ می‌باشند.

اگر نقطه L وسط ضلع BC باشد مختصات آن $L = \alpha\left(\frac{\gamma}{\gamma + \alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$ و در صورتی که $\delta_1 = \alpha + \beta + \gamma$ و $\delta_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\delta$ و $\delta_3 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ باشد.

$L = \dfrac{\delta_۲^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳} - \dfrac{\delta_۳^۲}{\alpha^۲(\gamma_۱\gamma_۲ - \gamma_۳)}$ و برای نقاط M و N وسط اضلاع AC و AB هم داریم:

$$M = \frac{\delta_۲^۲}{\delta_۱\delta_۲} - \frac{\delta_۳^۲}{\beta^۲(\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳)} \quad , \quad N = \frac{\delta_۲^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳} - \frac{\delta_۳^۲}{\gamma(\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳)}$$

اگر k نقطه باشد که مختصات آن $K = \dfrac{\delta_۲^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳}$ باشد آنگاه $= KL = KM = KN$ $\dfrac{۱}{|\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳|}$ بنابراین k باید مرکز دایره نه نقطه و شعاع آن $\dfrac{۱}{|\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳|}$ پس معادله دایره نقطه

$$\left(Z - \frac{\delta_۲^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳}\right)\left(\bar{Z} - \frac{\delta_۱^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳}\right) = \left(\frac{\delta_۱^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳}\right)^۲$$

یا

$$\left|z - \frac{\delta_۲^۲}{\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳}\right| = \frac{۱}{|\delta_۱\delta_۲ - \delta_۳|}$$

که می‌دانیم $\delta_۳\bar{\delta}_۳ = ۱$ و $\bar{\delta}_۱ = \dfrac{\delta_۲}{\delta_۳}$ و از حل دستگاه معداله دایره نقطه و دایره محاطی داخلی $Z\bar{Z} = ۱$ خواهیم داشت

$$\delta_۱^۲Z^۲ - ۲\delta_۱\delta_۲Z + \delta_۲^۲ \quad \Rightarrow \quad (\delta_۱z - \delta_۲)^۲ = ۰$$

یعنی معادله فوق دارای ریشه مضاعف است پس دو دایره با هم مماس می‌باشند. اگر $\delta_۱ = ۰$ دایره محاطی داخلی بر دایره نه نقطه منطبق می‌شود.

اگر دو نقطه α و β بر امتداد اضلاع باشند باز هم محاسبه معتبر است.

۳۸. اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع باشند با توجه به معادله $۱ + \omega + \omega^۲ = ۰$ داریم

$$A' + B'\omega + C'\omega^۲ = ۰ \qquad (۲)A + B\omega + C\omega^۲ = ۰ \qquad (۱)$$

اگر M وسط AA' و N وسط BB' و L وسط CC' باشد پس

$$L = \frac{C + C'}{۲} \quad , \quad N = \frac{B + B'}{۲} \quad , \quad M = \frac{A + A'}{۲} \qquad (۳)$$

و چنانچه مثلث MNL بخواهد متساوی‌اضلاع باشد پس باید

$$M + NM + L\omega^۲ = ۰$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم

$$(A+A')+(B+B')\omega+(C+C')\omega^{۲}=۰$$
$$AB\omega+C\omega^{۲}+A'B'\omega+C'\omega^{۲}=۰$$

و حکم ثابت است.

قسمت دوم: اگر در مثلث ABC و $A'B'C'$ مشابه باشند.

$$\begin{vmatrix} A & A' & ۱ \\ B & B' & ۱ \\ C & C' & ۱ \end{vmatrix}=۰ \longrightarrow A(B'-C')-B(A'-C')+(C(A'-B')=۰ \quad (۳)$$

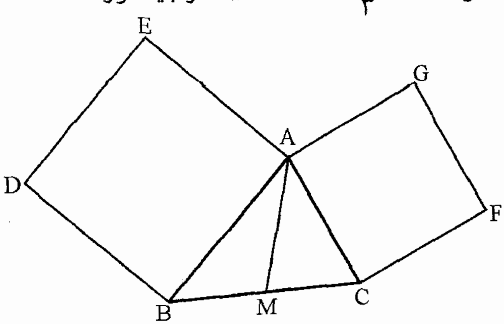
و اگر مثلث MNL با ABC مشابه باشد.

$$\begin{vmatrix} A & M & ۱ \\ B & N & ۱ \\ C & L & ۱ \end{vmatrix}=۰ \longrightarrow A(N-L)-B(M-L)+C(M-N)=۰$$

$$A(B+B'-C-C')-B(A+A'-C-C')+C(A+A'-B-B')=۰$$
$$A(B'-C')+A(B-C)-B(A'-C')-B(A-C)+C(A'-B')+C(A-B)=۰$$
$$A(B'-C')-B(A'-C')+C(A-B)=۰ \qquad \text{مطابق رابطه (۳)}$$
$$A(B-C)-B(A-C)+C(A-B)=۰$$

بنابراین مثلث MNL با مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه می‌باشند.

۳۹. حل این مسئله درست به شیوه حل مسئله ۳۸ است که به جای نقاط M و N و I نقاط $G_۱=\dfrac{A+B+C}{۳}$ و $G_۲=\dfrac{A'+B'+C'}{۲}$ و $G_۳=\dfrac{A''+B''+C''}{۳}$ را باید قرار داد.



۴۰. اگر EG بر AM عمود باشد باید

$$\frac{E-G}{A-M}=ki \qquad k\in\mathbb{R}$$

اگر A را مبداء مختصات قرار دهیم:

$$G = Ci$$
$$E = -Bi$$
$$M = \frac{B+C}{۲}$$

بنابراین

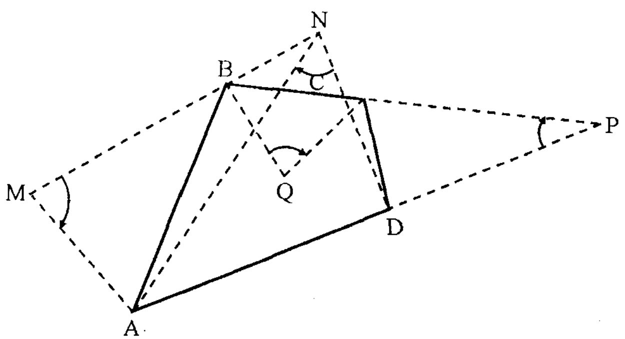
$$\frac{E-G}{A-M} = \frac{۲(B+C)i}{(B+C)} = ۲i$$
$$\frac{|E-G|}{|A-M|} = |۲i| = ۲$$

ب.
اگر N وسط EG باشد $N = \frac{(C-B)i}{۲}$ و برای اینکه AN بر BC عمود باشد باید

$$\frac{A-N}{C-B} = K_i \qquad k \in \mathbb{R}$$
$$\frac{(C-B)i}{۲(C-B)} = \frac{i}{۲} = \frac{۱}{۲}i$$

و حکم ثابت است.

.۴۱



اگر چهار ضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع باشد باید

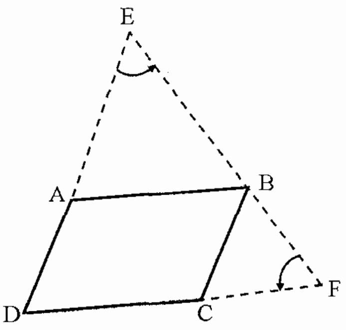
$$\frac{M-N}{Q-P} = k \qquad k \in \mathbb{R}$$
$$\frac{|M-N|}{|Q-P|} = ۱$$

چون مثلث‌های MAB و BQC و AND و CPD مشابه باشند.
و متساوی‌الاضلاع می‌باشند در بسط زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} M + B\omega + A\omega^{2} = 0 \\ N + D\omega + A\omega^{2} = 0 \\ P + D\omega + C\omega^{2} = 0 \\ Q + B\omega + C\omega^{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{M-N}{Q_P} = \frac{B\omega + A\omega^{2} - D\omega - A\omega^{2}}{B\omega + C\omega^{2} - D\omega - C\omega^{2}} = 1$$

$$\frac{|M-NM|}{|Q-P|} = 1$$

و حکم ثابت است.



۴۲. چون مثلث‌های EAB و FBC متساوی‌اضلاع هستند پس

$$E + A\omega + B\omega^{2} = 0$$

$$F + B\omega + C\omega^{2} = 0$$

چون چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است پس $D + B = A + C$
و اگر مثلث DFE متساوی‌الاضلاع باشد باید.
$D + F\omega + E\omega^{2} = 0$ و می‌دانیم که $1 + \omega + \omega^{2} = 0$ است

$$D + (-A\omega - B\omega^{2})^{2}\omega^{2} + (-B\omega - C\omega^{2})\omega = 0$$

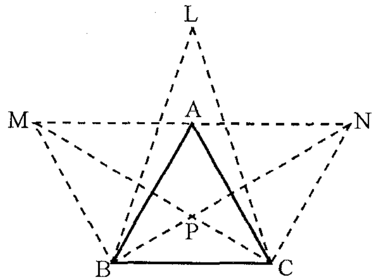
$$D - A\omega^{3} - B\omega^{4} - B\omega^{2} - C\omega^{3} = 0$$

اما $1 = \omega^{3}$ پس

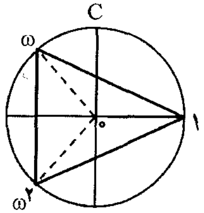
$$D - A - B(\omega - \omega^{2}) - C = 0$$

$$D - A - B(-1) - C = 0$$

و حکم ثابت است.



۴۳. مثلث‌های ABM و ANC و LBC متساوی‌الاضلاع می‌باشند
اگر P مرکز میانه‌ای مثلث LBC باشد تشابه‌های زیر برقرار است.



$$MBA \sim NAC \sim ۱\omega\omega^۲ \qquad (۱)$$

$$PBC \sim ۰۱\omega \qquad (۲)$$

و حکم مسئله $PNM \sim ۰۱\omega$ می‌باشد. اگر A را مبداء مختصات فرض کنیم از رابطه (۱) داریم:

$$\begin{cases} M + B\omega + A\omega^۲ = ۰ \\ N + A\omega + C\omega^۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = -B\omega \\ N = -C\omega^۲ \end{cases}$$

$$PBC \sim ۱۰\omega \rightarrow \begin{vmatrix} p & ۱ & ۱ \\ B & ۰ & ۱ \\ C & \omega & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \rightarrow \quad p(۱-\omega) = C - B\omega$$

و حکم مسئله

$$PNM \sim ۰۱\omega \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} p & ۰ & ۱ \\ N & ۱ & ۱ \\ M & \omega & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \rightarrow (۱-\omega)P = M - N\omega$$

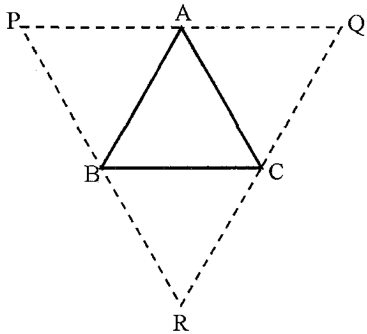
$$(۱-\omega)P = M - N\omega \quad \rightarrow \quad C - B\omega = -B\omega + \omega(C\omega^۲) = -B\omega + C$$

چون $\omega^۳ = ۱$

۴۴. سه مثلث

$PBA \sim RCB \sim QAC \sim 1\omega\omega^2$

بنابراین



$$\begin{cases} P + B\omega + A\omega^2 = 0 \\ R + C\omega + B\omega^2 = 0 \\ Q + A\omega + C\omega^2 = 0 \end{cases}$$

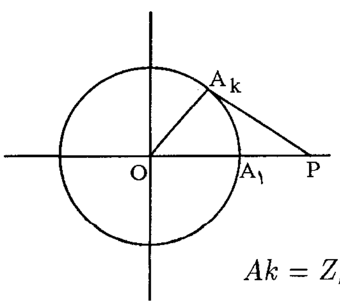
اگر حکم $|RA| = |OB| = |PC|$.

$$|RA| = |QB| \;\Rightarrow\; |R - A| = |Q - B|$$
$$|A + C\omega + B\omega^2| = |B + A\omega + C\omega^2|$$

$$|\omega| = 1 \;,\; \omega^3 = 1$$

$$|\omega||A + C\omega + B\omega^2| = 1 \times |B + A\omega + C\omega^2|$$
$$|A\omega + C\omega^2 + B| = |B + A\omega + C\omega^2|$$

$\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و چون جهت RA با QB مخالف است پس RA به اندازهٔ 120° دوران کرده تا بر QC منطبق شده است.



۴۵. رئوس n ضلعی منتظم ریشه‌های معادله و $z^n = r^n$ شعاع دایره است r

بنابراین ریشه k این معادله به صورت $Ak = Z_k = re^{\frac{(k-1)2\pi i}{n}}$

اگر مختصات نقطه P که یک عدد حقیقی است را به Z نمایش دهیم:

$$\prod_{k=1}^{n} PAK = \prod |Z - Z_k| = |\prod_{k=1}^{n}(z - zk)| = |z^n - r^n| = z^n - r^n$$

چون z و r هر دو عدد حقیقی هستند بنابراین،

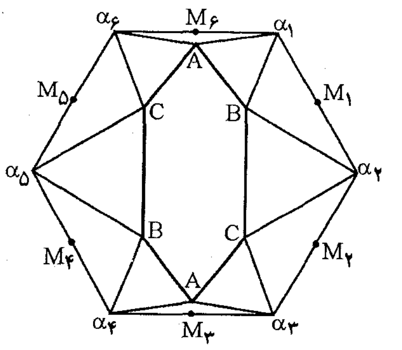
$$\prod_{k=۱}^{n} PA_k = OP^n - r^n$$

۴۶. $A_۱, \dots, A_n$ بر ریشه‌های معادله $z^n = r^n$ منطبق می‌باشند و اگر مختصات $p = z$ بنابراین:

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n} PAk^۲ &= \sum |z - z_k|^۲ \\ &= \sum (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) \\ &= \sum (z\bar{z} - z_k\bar{z} + z_k\bar{z}_k) \\ &= \sum z\bar{z} - \bar{z}\sum z_k - z\sum \bar{z}k + \sum z_k\bar{z}_k\end{aligned}$$

اما $z\bar{z} = ۱$ و $\sum z_k = ۰$ چون z_k ریشه‌های معادله $z^n - ۱ = ۰$ پس

$$\begin{aligned}\sum PAk^۲ &= \sum z\bar{z} + \sum z_n\bar{z}_k \\ &= \sum |z|^۲ + \sum |z_k|^۲ \\ &= n + n = ۲n\end{aligned}$$



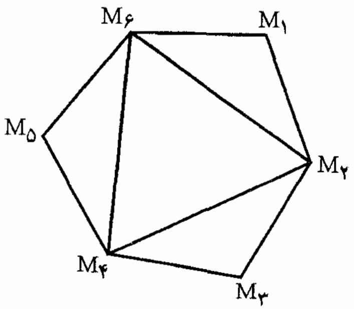
۴۷. اگر شش ضلعی متقارن باشد پس

$$C' = -C$$

$$B' = -B$$

$$A' = -A$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + A\omega + B\omega^2 = 0 \\ \alpha_2 + B\omega - C\omega^2 = 0 \\ \alpha_3 - C\omega - A\omega^2 = 0 \\ \alpha_4 - A\omega - B\omega^2 = 0 \\ \alpha_5 - B\omega + C\omega^2 = 0 \\ \alpha_6 + C\omega + A\omega^2 = 0 \end{cases}$$



اگر M_1 وسط α_2 و α_1 و ... باشد باید مثلث $M_6M_4M_2$ متساوی‌الاضلاع باشد.

$$M_6 = \frac{-A\omega - B\omega^2 - C\omega^2 - A\omega^2}{2}$$

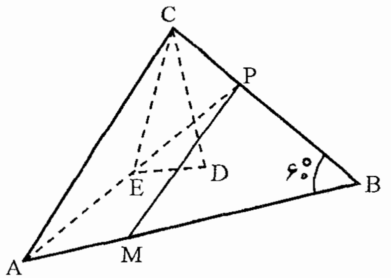
$$M_2 = \frac{-B\omega + C\omega^2 + C\omega + A\omega^2}{2}$$

$$M_4 = \frac{A\omega + B\omega^2 + B\omega - C\omega^2}{2}$$

پس باید $M_6 + M_4\omega + M_2\omega^2 = 0$ با توجه به اینکه $\omega^3 = 1$ و $\omega^4 = \omega$

$$-A\omega - B\omega^2 - C\omega - A\omega^2 + A\omega^2 + B + B\omega^2 - C - B + C\omega + C + A\omega = 0$$

و حکم ثابت است.



۴۸. اگر B را مبدا و به رأس A عدد مختلط a را نسبت دهیم آنگاه $M = ta$ که t یک عدد حقیقی است.

و اگر نقطه M را حول B به اندازه ۶۰° دوران دهیم نقطه P بدست می‌آید. پس $P = \omega M$ یا $P = at\omega$ و چون D مرکز میانه‌ای مثلث PMB باشد پس

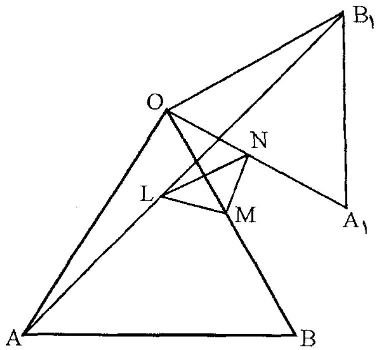
$D = \frac{M + D + B}{۳}$ یا $D = \frac{a}{۳}t(۱ + \omega)$

و چون نقطه E وسط AP است پس $E = \frac{a + p}{۲}$ یا $E = \frac{۱}{۲}(۱ + t\omega)$ پس

$D - E = \frac{a}{۶}(۳ - ۲t + t\omega)$ و $D - C = \frac{a}{۳}(۳\omega - t - t\omega)$ و چون $۱ - \omega + \omega^۲ = ۰$

$$(D - E) \times ۲ \times \omega = D - C$$

پس DC دو برابر DE بوده و به اندازه ۶۰° دوران یافته است یعنی مثلث CED قائم‌الزاویه و با زاویه ۶۰° می‌باشد.



۴۹. دو مثلث OAB و $OA_۱B_۱$ متساوی‌الاضلاع می‌باشد اگر O مبدا مختصات باشد:

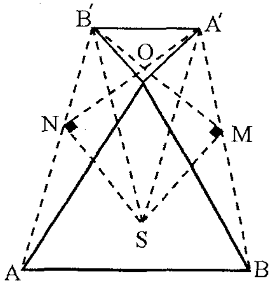
$$B = +A\omega$$

$$B_۱ = +A_۱\omega$$

اگر M وسط OB باشد $M = \frac{TA\omega}{۲}$ و اگر N وسط $OA_۱$ باشد $N = \frac{+A_۱}{۲}$ و اگر L وسط $AB_۱$ باشد $L = \frac{A + A_۱\omega}{۲}$

حال باید ثابت کنیم $(L - M)\omega = L - N$

و با توجه $۱ - \omega + \omega^۲ = ۰$ حکم ثابت می‌شود.



۵۰. باید ثابت کنیم دو مثلث SMB' و SNA' متشابه می‌باشند.

اگر O مبداء مختصات و به رئوس A و رئوس A' دو عدد مختلط a و a' را نسبت دهیم آنگاه

$$B = a\omega \ , \ B = a'\omega \ , \ N = \frac{a + a'\omega}{۲} \ , \ M = \frac{a\omega + a'}{۲} \ , S = \frac{a + a\omega}{۳}$$

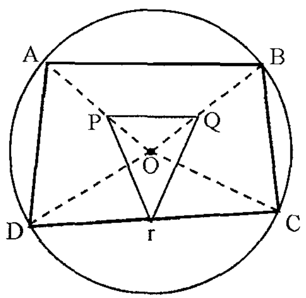
اگر دو مثلث بخواهند مشابه باشند بالینی $\frac{SN}{SA'} = \frac{SM}{SB'} = k\cdot\omega$ که K یک عدد حقیقی و ω زاویه دوران است.

$$N - S = k\cdot\omega(S - N')$$

$$\frac{a + a'\omega}{۲} - \frac{a + a\omega}{۳} = k\omega\left(\frac{a + a\omega}{۳} - a'\right) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۱}{۲}$$

$$۲a + ۳a'\omega - ۲a\omega = \omega(a + a\omega - ۳a')$$

و چون $۱ - \omega + \omega^۲ = ۰$ پس زاویه دوارن ۶۰° است. یعنی مثلث $A'SN$ قائم‌الزاویه با زاویه ۶۰° است. و حکم ثابت است.



۵۱. چون دو مثلث OBC و OAD متساوی‌اضلاع می‌باشند اعداد مختلط b و $b\omega$ و d و $d\omega$ را با رئوس B و C و D و A نسبت می‌دهیم.

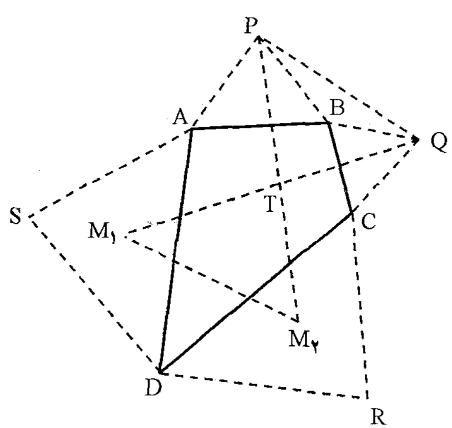
بنابراین $P = \frac{d\omega}{۲}$ و $Q = \frac{b}{۲}$ و $r = \frac{d + d\omega}{۲}$
و حکم مسئله $Q - P = (r - p)\omega$ می‌باشد.

$$\omega\left(\frac{b}{۲} - \frac{d\omega}{۲}\right) = \left(\frac{d + d\omega}{۲} - \frac{b}{۲}\right)$$

و با توجه به معادله $۱ - \omega + \omega^۲ = ۰$ و حفظ جهت ω.

و حکم ثابت است.

$$\omega(b - d\omega) = b\omega - d(\omega^۲) = b\omega - (\omega - ۱)d = \omega + d - d\omega$$



۵۲. اگر اعداد مختلط a و b و c و d را برای رئوس چهار ضلعی در نظر بگیریم آنگاه

$$S = a + (d - a)\omega$$

$$P = b + (a - b)\omega$$

$$Q = C + (b - c)\omega$$

$$R = d + (c - d)\omega$$

$$M_۱ = \frac{۲a + d + (d-a)\omega}{۳}$$
$$M_۲ = \frac{c + ۲d + (a-c)\omega}{۳}$$
$$T = M_۲ + (M_۱ - M_۲)\omega$$
$$T = \frac{a + ۲c + (a-c)\omega}{۳}$$

$$(۱) P - T = -(Q - T)\omega \qquad \omega^۲ - \omega + ۱ = ۰ \qquad (۲)$$

با توجه به معادله (۱) علامت منفی نشان می‌دهد که زاویه دوران ۱۲۰° است.

۵۳. مطابق مسئله ۵۲ داریم:

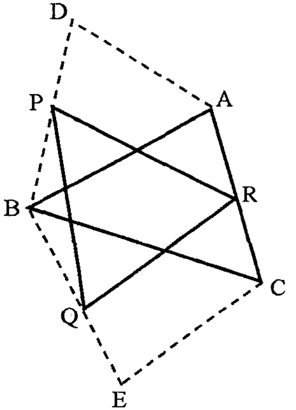
$$\left.\begin{array}{l} e = b + (a-b)\omega \\ f = c + (b-c)\omega \\ g = d - (c-d)\omega \\ h = a + (d-a)\omega \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P = \dfrac{a+c}{۲} \\ q = \dfrac{b+d}{۲} \end{array}$$

$$m = \frac{e+g}{۲} = \frac{b+d}{۲} + \frac{a-b+c-d}{۲}\omega$$

$$n = \frac{f+h}{۲} = \frac{a+c}{۲} + \frac{b-c+d-a}{۲}\omega$$

$m + n = p + q \Rightarrow MQNP$ متوازی‌الاضلاع است.

۵۴.



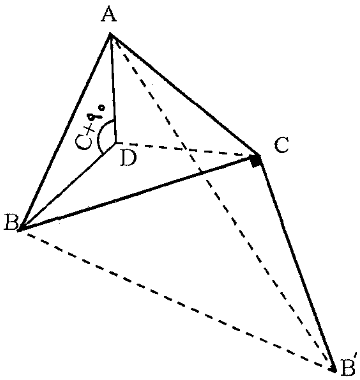
فرض $\left.\begin{array}{l} D + B\omega + A\omega^۲ = ۰ \\ E + C\omega + B\omega^۲ = ۰ \end{array}\right\}$

حکم $p + Q\omega + R\omega^۲ = ۰$

$$P = \frac{B - B\omega - A\omega^{۲}}{۲}$$

$$Q = \frac{B - C\omega - B\omega^{۲}}{۲}$$

با توجه به اینکه $\omega^{۳} = ۱$ حکم ثابت است.



۵۵. عمود $B'C$ رابر BC اخراج می‌کنیم به طوری که $BC = CB'$ آنگاه

$$\Delta ACB' \sim \Delta ADB \qquad (۱)$$

$$\Delta CDA \sim \Delta B'BA \qquad (۲)$$

$$(۱) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B-A}{B-D} = \frac{B'-A}{B'-C}$$

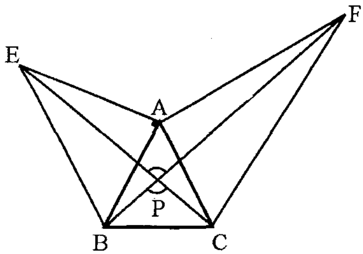
$$(۲) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C-D}{C-A} = \frac{B'-B}{B'-A}$$

$$(۱ \times ۲) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B'-B}{B'-A} \times \frac{B'-A}{B'-C} = \frac{B'-B}{B'-C}$$

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|} = \frac{|B-A||C_D|}{|A-C| \cdot |B-D|} = \frac{|B'-B|}{B'-C|} = \frac{|BB'|}{B'C|} = \sqrt{۲}$$

۵۶. اگر مبداء را نقطه A در نظر بگیریم: فرض مسئله

$$\left.\begin{array}{ll} E = BC' & (۱) \\ F = iC & (۲) \\ P - B = i(p - c) & (۳) \end{array}\right\}$$



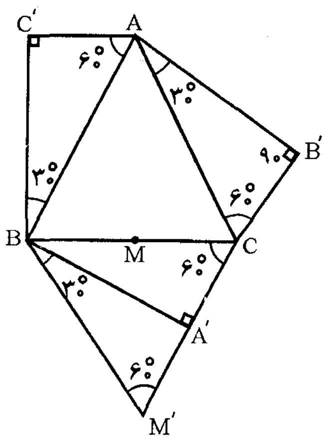
حکم $P - F = i(P - E)$ $\qquad$ (۴)

$$\begin{array}{lll} (۴) & \rightarrow & P(۱ - i) = F - iE \\ (۳) & \rightarrow & P(۱ - i) = B - iC \end{array} \quad \Rightarrow \quad F - iE = B - iC$$

و حکم ثابت است.

۵۷. راه حل اول از طریق تجانس مارپیچی

$$\begin{cases} X^{۲}_{۶۰^\circ} c(B') = A \\ X^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{۳۰^\circ} B(A) = C' \end{cases}$$



$$X^{\sqrt{۳}}_{۹۰^\circ} x(B') = C'$$

$$X^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{۳۰^\circ} B(M') = A'$$

$$X^{\sqrt{۳}}_{۹۰^\circ} y(x) = A'$$

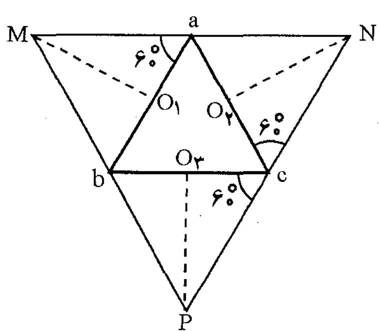
و چون $y \equiv x$ پس

$$X^{\sqrt{۳}}_{۹۰^\circ} x(MB') = A'C'$$

و حکم ثابت است.

راه حل دوم از اعداد مختلط

$$\begin{cases} Mo_{۱}a \sim ۱\omega\omega^{۲} \\ NO_{۲}c \sim ۱\omega\omega^{۲} \\ Pco_{۳} \sim ۱\omega\omega^{۲} \end{cases}$$



$$o_{۱} = \frac{a + b}{۲}, o_{۲} = \frac{a + c}{۲}, o_{۳} = \frac{b + c}{۲}$$

$$M + o_1\omega + a\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M = a + \frac{a-b}{2}\omega$$
$$N + o_2 + c\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = c + \frac{c-a}{2}\omega$$
$$P + c\omega + o_3\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2}\omega$$

اگر c را مبداء مختصات قرار دهیم:

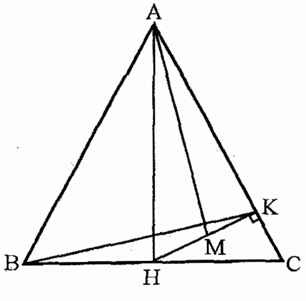
$$\begin{cases} M = a + \dfrac{a-b}{2}\omega \\ N = -\dfrac{a}{2}\omega \\ P = \dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{2}\omega \\ o_3 = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$P - M = MP = (b - 2a) + (2b - a)\omega$$
$$No_3 = o_3 - N = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\omega$$

و چون $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{cases} Mp = -3a(2b-a)\sqrt{3}i \\ oN = (2b-a) + i\sqrt{3}a \end{cases}$$
$$Mp = ON \times i \times \sqrt{3}$$

بنابراین برهم عمودند.
و طول Mp $\sqrt{3}$ برابر ON است.



۵۸. اگر H را مبداء مختصات و $C = 1$ فرض کنیم

$$AHC \sim HKC$$

به طور معکوس

$$\begin{vmatrix} \bar{A} & ۰ & ۱ \\ ۰ & k & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \to \quad \bar{A} = \frac{k}{k-۱}$$

$$\bar{A} = -A$$

$$A = \frac{k}{۱-k} \qquad (۱)$$

$$m = \frac{k}{۲} \qquad (۲)$$

$$B = -C = -۱$$

$$B = -۱ \qquad (۳)$$

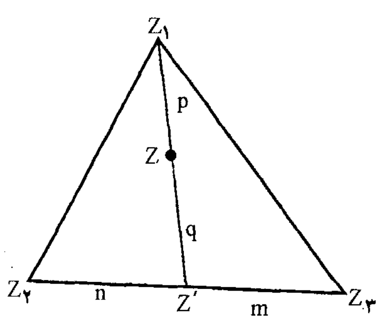
و حکم مسئله $(B-k) = i(A-M)$ $\qquad$ (۴)

با جایگذاری روابط (۱) و (۲) و (۳) در رابطه حکم (۴) خواهیم داشت:

$$\frac{۱-k}{k} = -\frac{۱}{۲}i$$

$\overrightarrow{KC} = C - k = ۱ - k$ و $\overrightarrow{HK} = k$ پس چون دو بردار HK بر بردار CK عمود است پس حکم ثابت است.

۵۹.



$$
\begin{aligned}
\bar{Z} &= \frac{m}{m+n}Z_۲ + \frac{n}{m+n}Z_۳ \qquad m+n \subset \mathbb{R}^+ \\
Z &= \frac{q}{p+q}Z_۱ + \frac{P}{P+q}Z' \qquad\quad p+q \in \mathbb{R}^+ \\
Z &= \frac{q}{p+q}Z_۱ + \left(\frac{p}{P+q}\right)\left(\frac{m}{m+n}\right)Z_۲ + \frac{p}{p+q}\cdot\frac{n}{m+n}Z_۳ \\
\alpha &= \frac{q}{p+q} \qquad \beta = \frac{Pm}{(m+n)(p+q)} \qquad \gamma = \frac{Pn}{(m+n)(p+q)}
\end{aligned}
$$

آنگاه $\alpha+\beta+\gamma = ۱$.

۶۰. برای هر چهار نقطه $Z_۱, Z_۲, Z_۳, Z_۴$ در صفحه مختصات موهومی داریم:

$$(Z_۲ - Z_۱)(Z_۴ - Z_۳) + (Z_۳ - Z_۲)(Z_۴ - Z_۱) = (Z_۳ - Z_۱)(Z_۴ - Z_۲)$$

اما از مساوی مثلثی:

$$|Z_۱| + |Z_۲| \geq |Z_۱ + Z_۲|$$

باید داشته باشیم که

$$
\begin{aligned}
&|Z_۲ - Z_۱|\cdot|Z_۴ - Z_۳| + |Z_۳ - Z_۲|\cdot|Z_۴ - Z_۱| \geq |Z_۳ - Z_۱|\cdot|Z_۴ - Z_۲| \\
&|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| \geq |AC|\cdot|BD|
\end{aligned}
$$

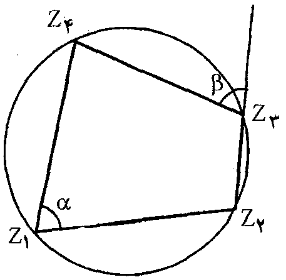
علامت تساوی وقتی برقرار است که $(Z_۲ - Z_۱)(Z_۴ - Z_۲)$ و $(Z_۳ - Z_۲)(Z_۴ - Z_۱)$ دارای یک جهت باشند و یا اگر

$$
\begin{aligned}
\arg\frac{Z_۲ - Z_۱}{Z_۴ - Z_۱} &= \alpha \\
\arg\frac{Z_۴ - Z_۳}{Z_۳ - Z_۲} &= \beta
\end{aligned}
$$

باید α و β هر دو مثبت و حقیقی باشند و

$$\frac{Z_۲ - Z_۱}{Z_۴ - Z_۱}\cdot\frac{Z_۴ - Z_۳}{Z_۳ - Z_۲} = k, k \qquad \text{عددی حقیقی و مثبت}$$

یعنی آنکه $\alpha + \beta = ۰$

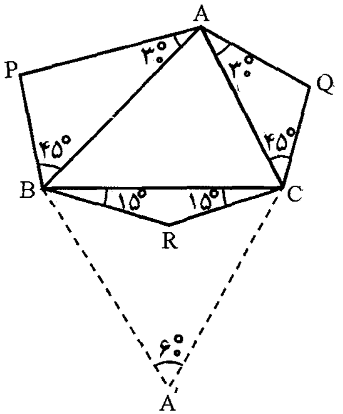


و اگر چهار نقطه روی دایره باشند

$$|\alpha| = |\beta|$$

که جهت α و β معکوس هم می‌باشند.

.۶۱



$$APB \sim AQC \to \frac{B,P}{B,A} = \frac{CQ}{CA} = K$$

$$P \xrightarrow[B]{R^{45}} P' \xrightarrow[B]{H^k} A \xrightarrow[C]{H^{\frac{1}{k}}} Q' \xrightarrow[C]{R^{45}} Q$$

$$P \xrightarrow[X]{R^{90}} Q$$

$$R' \xrightarrow[B]{R^{45}} R' \xrightarrow[B]{H^k} A' \xrightarrow[C]{H^{\frac{1}{k}}} A'' \xrightarrow[C]{R^{45}} R$$

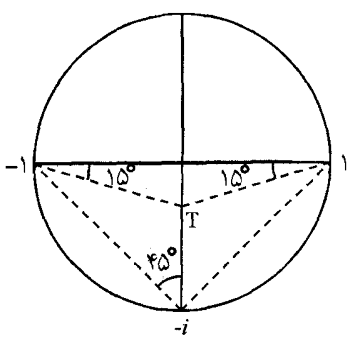
پس $X \equiv R$ و زاویه دوران 90° می‌باشد.

راه‌حل دوم: اعداد مختلط

$$\Delta BRC \sim -1T1 \Rightarrow -BT = R$$

$$\Delta AQC \sim -1T - i \Rightarrow A(T+i) - C(T+1) = (1-i)Q$$

$$\Delta APB \sim 1T - i \Rightarrow A(T+i) + B(1-T) = (1+i)P$$



و اگر مبداء مختصات را وسط BC فرض کنیم $C = -B$ حال باید ثابت کنیم $RP = iRQ$ یا

$$R - P = i(R - Q)$$

$$-Bt - P = i(-BT - Q)$$

$$BT = (i - ۱) = P - iQ$$

$$BT(i - ۱)(i + ۱) = (i + ۱)P - i(i + ۱)Q$$

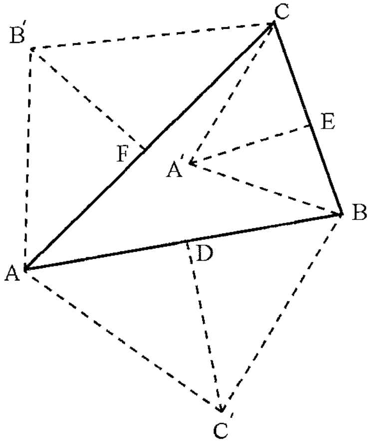
و حکم ثابت است چون

$$\frac{۱ + i}{۱ - i} = i$$

حل مسائل فصل ۲۱

۱. حکم مسئله این است که ثابت کنیم. $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'}$

اگر D و E و F اوساط اضلاع AB و BC و AC باشند



$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AF'} + \overrightarrow{FB'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB'}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC'}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA'}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + EA' =$$

$$\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \frac{۱}{۲}EA'$$

راه حل دوم: بردار FB' را می‌توان از یک دوران °۹۰ از $\overrightarrow{FC}$ بدست آورد. و $|FC|$ یک مضربی از $|AC|$ است که در این مسئله $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. و به همین ترتیب بردارهای DC' و EA' بنابراین چون سه مثلث متشابه می‌باشند پس:

$$\frac{FB'}{AC} = \frac{DC'}{AB} = \frac{EA'}{BC} = k$$

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + k \cdot R\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{DC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} - kR\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA} =$$

$$\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + kRBC$$

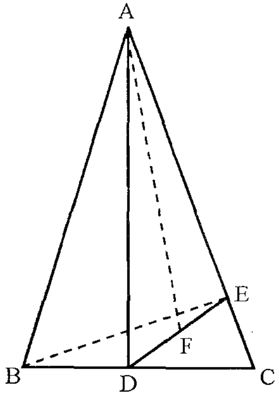
$$= \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + kR(\overrightarrow{A}C - \overrightarrow{A}B)$$

$$= \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + k(R\overrightarrow{AC} - RAB)$$

$$= \frac{۱}{۲}AB + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + KR\overrightarrow{AC} - kRAB$$

و حکم ثابت است.

۲. باید ثابت کنیم $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\text{۰}$



$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=(AE+EF)(BD+DE)$$
$$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}+$$
$$BD+\overrightarrow{EF}\cdot DEEF\cdot$$

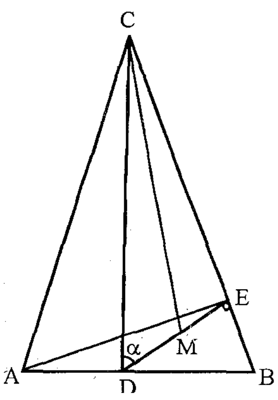
اما چون AE بر DE عمود است پس $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=\text{۰}$.

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$$
$$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$$

و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\text{۰}$ پس:

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{DE\cdot DC}{\text{۲}}-\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}}{\text{۲}}$$
$$=\frac{DE\cdot DC}{\text{۲}}-\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}}{\text{۲}}=DE\left(\frac{\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DE}}{\text{۲}}\right)$$
$$=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EC}}{\text{۲}}=\text{۰}$$

راه حل دوم



$$\overrightarrow{CM}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE})$$
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})$$
$$=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}+$$
$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DE})$$

اما $CD \cdot AD = ۰$ و $CE \cdot DE = ۰$ پس،

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AE} &= \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE}) \\ &= \frac{۱}{۲}(|CE| \cdot |DB| \cos\alpha - |DC| \cdot |DE| \cos\alpha) \\ &= \frac{۱}{۲} \cos\alpha(|CE| \cdot |DB| - |DC| \cdot |DE|) = ۰\end{aligned}$$

چون دو مثلث $\Delta CDE \sim \Delta DBE$.

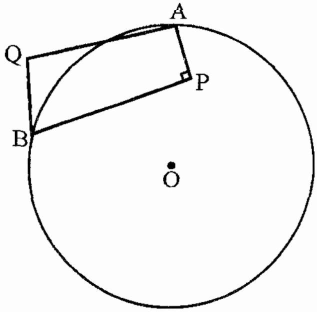
۳. چون رئوس هر n ضلعی منتظم محاط در دایره نسبت به مرکز دایره تقارن دارد و O مرکز ثقل n ضلعی است بنابراین:

$$\begin{aligned}&\sum Ai = ۰ \\ &\sum' |Aix|^۲ = \sum (x - Ai)^۲ = \sum Ai^۲ - ۲\sum x \cdot Ai + \sum x^۲ \\ &= \sum Ai^۲ - ۲x \sum Ai + \sum d^۲ \\ &= nR^۲ - ۲x۰ - nd^۲ \\ &= n(r^۲ + d^۲)\end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned}&(X - A)(X - C) = (B - C)(X - A) \\ &X^۲ - (A + B)X + AB = ۰ \\ &\left(X - \frac{A + B}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{A - B}{۲}\right)^۲\end{aligned}$$

بنابراین مکان دایره است به قطر AB.



۵. با رسم دقیق شکل می‌توان حدس زد که مکان Q یک دایره‌ای هم مرکز با دایره O است. فرض کنیم فاصله نقطه P تا مرکز دایره $|OP| = \alpha$ باشد.

$$P + Q = A + B$$
$$Q = P + (A - P) + (B - P)$$
$$Q^۲ = ۲R^۲ - P^۲ \quad \Rightarrow \quad |Q| = \sqrt{۲R^۲ - \alpha^۲}$$

بنابراین Q به دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $r\sqrt{۲R^۲ - \alpha^۲}$ قرار دارد.
حال باید ثابت کنیم هر نقطه از این دایره در شرایط مسئله صدق می‌نماید. دایره‌ای به قطر PQ از نقاط A و B می‌گذرد و $PA \perp AQ$ و $PB \perp BQ$ و چون $PA \perp PB$ پس $PAQB$ یک مستطیل است.

$$|Op|^۲ + |Oq|^۲ = \alpha^۲ + ۲r^۲ - \alpha^۲ = ۲r^۲$$
$$|OA|^۲ + |OB|^۲ = r^۲ + r^۲ = ۲r^۲ \quad \Rightarrow \quad |Op|^۲ + |OQ|^۲ = |OA|^۲ + |OB|^۲$$

و این خاصیت مستطیل $PAQB$ است.

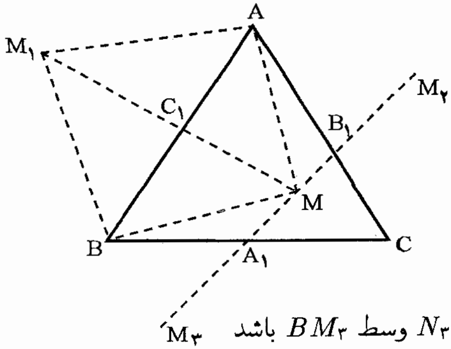
۶. فرض کنیم $۳S = A - B + C$ که A و B و C بردارهای مربوط به سه رأس مثلث است بنابراین:

$$(X - A)^۲ + (X - B)^۲ + (X - C)^۲ = ۳ \times ۲ - ۲(A + B + C)X + A^۲ + B^۲ + C^۲$$
$$= ۳(X^۲ - ۲s + s^۲) - ۳s^۲ + A^۲ + B^۲ + C^۲ =$$
$$= ۳(X - S)^۲ + A^۲ + B^۲ + C^۲ - ۳s^۲$$

در حالتی که $X = S$ گردد مقدار فوق کمترین مقدار ممکن می‌شود.

$$A^۲ + B^۲ + C^۲ - \frac{(A + B + C)^۲}{۳} = \frac{(A - B)^۲ + (B - C)^۲ + (C - A)^۲}{۳}$$
$$\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۳}$$

که a و b و c طول اضلاع مثلث می‌باشند.



۷. چهارضلعی $MAMB$ یک متوازی‌الاضلاع است بنابراین

$$\overrightarrow{MM_۱} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MM_۲} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
$$\overrightarrow{MM_۳} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$$

اگر $N_۱$ وسط $CM_۱$ و $N_۲$ وسط $AM_۲$ و $N_۳$ وسط $BM_۳$ باشد

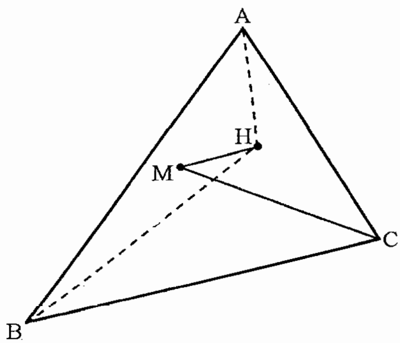
$$\overrightarrow{MN_۱} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MM_۱}) = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

و به همین ترتیب

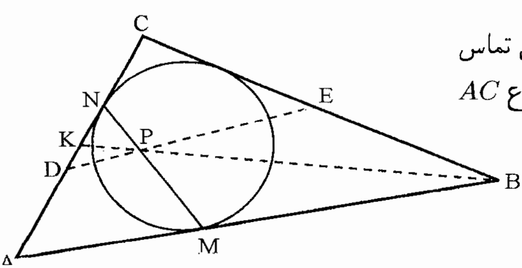
$$MN_۲ = MN_۳ = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

پس وسط پاره‌خط $CM_۱$ و $BM_۲$ و $BM_۳$ بر هم منطبق می‌باشند.

۸. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث باشند



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH})$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{CM} = \frac{۲}{۳}(OA + OB - OC)$$
$$|\overrightarrow{CM}|^۲ = \frac{۴}{a}(OA + OB - OC)^۲ = \frac{۴}{a}$$
$$(۳R^۲ + ۲R^۲ - c^۲ - ۲R^۲ + a^۲ - ۲R^۲ + b^۲)$$
$$= \frac{۴}{a}(R^۲ + a^۲ + b^۲ + c^۲)$$



۹. BK نیمساز زاویه B و M و N محل تماس دایره محاطی با اضلاع DE اوساط اضلاع AC و BC را به هم وصل کرده است.

اگر ثابت کنیم بردار MN و NP هم راستا می‌باشند چون در نقطه M مشترک می‌باشند پس سه نقطه M و N و P بر یک خط واقع می‌باشند بنابراین باید ثابت کنیم $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{MP}$ که K یک عدد حقیقی است.

اگر بر دایره‌ای که $\overrightarrow{\alpha}$ و $\overrightarrow{\beta}$ و $\overrightarrow{\gamma}$ را روی اضلاع BC و CA و AB در نظر بگیریم داریم:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = ۰$$

$$a\overrightarrow{\alpha} + b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma} = ۰$$

که P نصف محیط مثلث است.

$$\begin{cases} |AN| = P - a \\ |AM| = p - a \end{cases}$$

$$\overrightarrow{NA} = (p-a)\overrightarrow{\beta} \quad , \quad \overrightarrow{AM} = (p-a)\overrightarrow{\gamma}$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = (p-a)(\beta + \gamma)$$

و چون ED وسط دو ضلع را به هم وصل کرده است.

$$\overrightarrow{ED} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB} = -\frac{۱}{۲}c\gamma$$

$$u\overrightarrow{Ep} = -\frac{۱}{۲}a\gamma$$

$EP = EB$ می‌باشد زیرا BP نیمساز است و خط Ep موازی AB می‌باشد.

$$PD = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{Ep} = \frac{۱}{۲}(a-c)\overrightarrow{\gamma}$$

$$\overrightarrow{DA} = \frac{۱}{۲}b\overrightarrow{\beta} \quad , \quad \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{PD} = -\frac{۱}{۲}b\overrightarrow{\beta} - \frac{۱}{۲}(a-c)\overrightarrow{\gamma}$$

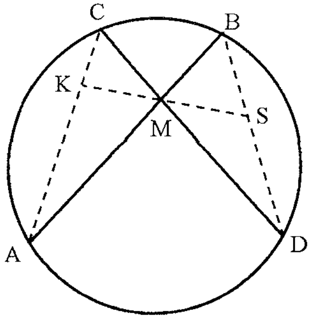
$$\overrightarrow{Np} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} - \frac{۱}{۲}b\overrightarrow{\beta} - \frac{۱}{۲}(a-c)\overrightarrow{\gamma}$$

$$= \frac{c-a}{۲}(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma})$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{b+c-a}{۲}(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}) \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{c-a}{۲}(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma})$$

پس $\overrightarrow{NP} = \dfrac{c-a}{b+c-a}\overrightarrow{N}M$

و چون $\frac{c-a}{b+c-a}$ یک عدد حقیقی است. پس حکم ثابت است.



۱۰. اگر $\frac{|AK|}{KC|} = $
آنگاه

$$\overrightarrow{MK} = \frac{۱}{۱+x}\overrightarrow{MA} + \frac{x}{۱+x}\overrightarrow{MC}$$

چون M و k و s هم خط می‌باشند $\overrightarrow{Mk} = l \cdot \overrightarrow{MS}$ و l یک عدد حقیقی است.

چون MS میانه مثلث MBD است $\overrightarrow{MK} = \frac{l}{۲}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$.

و اگر قوت نقطه M را نسبت به دایره حساب کنیم.

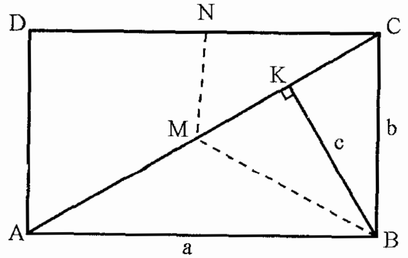
$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| = k$$
$$\frac{|MB|}{(MA)} = \frac{k}{(MA)^۲} \;, \quad \frac{|MD|}{|MC|} = \frac{k}{|MC|^۲}$$
$$\overrightarrow{MB} = \frac{k}{|MA^۲}|MA| \;, \quad \overrightarrow{MO} = -\frac{k}{|MC|^۲} \cdot \overrightarrow{MC}$$

پس

$$\overrightarrow{MK} = -\frac{l}{|MA|^۲}|\overrightarrow{MA} - \frac{Kl}{|MC|^۲} \cdot \overrightarrow{MC}$$

و چون تجزیه بردار $\overrightarrow{MK}$ منحصربه فرد است:

$$\frac{۱}{۱+x} = \frac{kl}{|MA|^۲} \;, \quad \frac{x}{۱+x} = -\frac{kl}{|Mc|^۲}$$
$$x = \frac{|MA|^۲}{|MC|^۲}$$



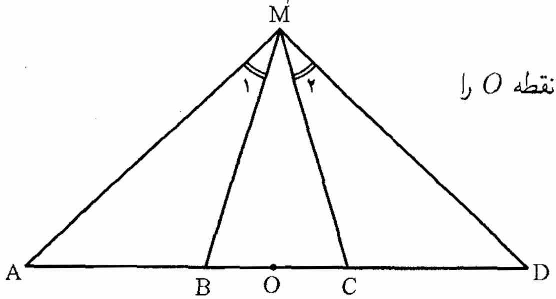
۱۱. اگر $\overrightarrow{AB} = a$ و $\overrightarrow{BC} = b$ و $\overrightarrow{BK} = c$
آنگاه

$$\overrightarrow{BM} = \frac{۱}{۲}(a+c)$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$
$$\overrightarrow{MN} = -\frac{۱}{۲}(a+c) + b + \frac{۱}{۲}a = b - \frac{۱}{۲}c$$

حال باید ثابت کنیم $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = ۰$.

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{۱}{۲}\left(b - \frac{۱}{۲}\right) \cdot (a+c)$$

و چون $a \cdot b = ۰$ و $(b-c)c = ۰$ و $(b-a)c = ۰$ حکم ثابت است.



۱۲. $|AB| = P$ و $|CD| = q$ و نقطه O را روی AD چنان انتخاب می‌کنیم که
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = ۰$

با توجه به ضرب داخلی بردارها

$$\cos M_۱ = \cos M_۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|MA| \cdot |MB|} = \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}}{|MC| \cdot |MD|}$$
$$\frac{(A-M)(B-M)}{|\overrightarrow{MA}| \cdot ||\overrightarrow{MB}|} = \frac{(c-M) \cdot (D-M)}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{DM}|}$$

اما

$$\frac{|MA| \cdot |MB| \cdot \sin AMB|}{|CM \cdot |DM \cdot \sin CMD} = \frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{p}{q}$$

بنابراین

$$q(A-M)(B-M) = P(C-M)(D-M)$$

و اگر O مبداء باشد $A + B = -(C-D)$ پس:

$$(p-q)M^۲ + (p+q)(A+B) \cdot M + PcD - qA \cdot B = ۰$$

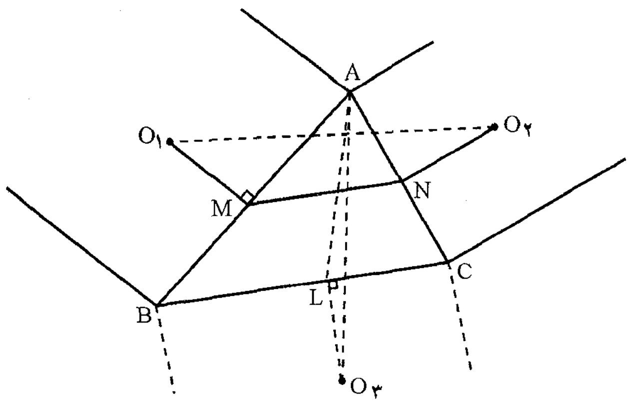
اگر $p = q$ پس $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{D}$ پس معادله زیر به دست می‌آید $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{M} = ۰$ که معادله خطی راست می‌باشند عمود بر AB و در حالت کلی

$$\left[M + \frac{p+q}{۲(p-q)}(A+B)\right]^{۲} = \frac{(p+q)^{۲}(A+B)}{۴(p-q)^{۲}} - PCD + qA \cdot B$$

اگر طرف راست مثبت باشد مکان M یک دایره است و اگر منفی باشد جواب تهی است و اگر برابر صفر شود مکان یک نقطه است که آن هم قابل قبول است.

۱۳. باید ثابت کنیم $AO_۳ \perp o_۱o_۲$ برای این کار ثابت می‌کنیم دوران ۹۰° $o_۱o_۲$ باید $AO_۳$ باشد یعنی $R^{۹۰^\circ} o_۱o_۲ = Ao_۳$

اما $\overrightarrow{o_۱o_۲} = \overrightarrow{o_۱M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO_۲}$ اگر M وسط AB و N وسط AC و نقطه L وسط BC است.



$$R^{۹۰^\circ}_{o_۱o_۲} = R^{۹۰^\circ}(\overrightarrow{o_۱M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{No_۲}) = R^{۹۰^\circ}O_۱M + R^{۹۰^\circ}\overrightarrow{MN} + R^{۹۰^\circ}\overrightarrow{NO_۲}$$

$$R^{۹۰^\circ}_{o_۱o_۲} = \overrightarrow{MA} + \frac{۱}{۲}R^{۹۰^\circ}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NA} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + R^{۹۰^\circ}(\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LC}))$$

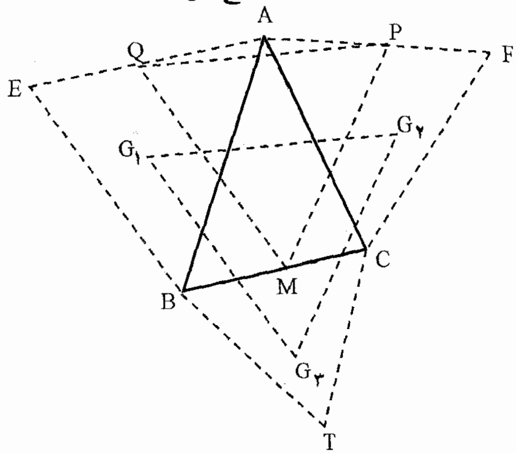
$$= \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{o_۳}l + \overrightarrow{o_۳}L) = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + ۲\overrightarrow{o_۳}L)$$

$$= \frac{۱}{۲}(BA + CA) + o_۳L$$

$$= \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{O_۳L} = \overrightarrow{o_۳A}$$

و حکم ثابت است.

۱۴. با توجه به گزاره مثلث‌های ناپلئونی که هرگاه سه مثلث متساوی‌الاضلاع روی سه ضلع مثلثی بسازیم مراکز میانه‌ای این سه مثلث رئوس یک مثلث متساوی‌اضلاع می‌باشند.



یعنی مثلث $G_1G_2G_3$ متساوی‌اضلاع است.

حال با توجه به اینکه $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{G_2P}$ و $\overrightarrow{BG_1} = 2\overrightarrow{G_1Q}$ و $\overrightarrow{TG_3} = 2\overrightarrow{G_3M}$ و چون مثلث TBC متساوی‌الاضلاع است با توجه گزاره (۲۱ـ۳ـ۴) مثلث MPQ متساوی‌الاضلاغ است.