المپیادهای ریاضی لنینگراد

از سال ۱۹۶۱ به بعد

دمیتری ولادیمیروویچ فومین
ترجمه: پرویز شهریاری

المپیادهای ریاضی لنینگراد

از سال ۱۹۶۱ به‌بعد

دمیتری ولادیمیرویچ فومین

ترجمه: پرویز شهریاری

انتشارات انیشتن
۱۳۷۴

انتشارات انیشتین
المپیادهای ریاضی لنینگراد
از سال ۱۹۶۱ به‌بعد
تألیف: دمیتری ولادیمیروویچ فومین
ترجمه: پرویز شهریاری
چاپ اول: ۱۳۷۴
تیراژ: ۲۵۰۰ جلد
حروفچینی: گنجینه
لیتوگرافی و چاپ: هاشمیون

پخش: انتشارات گوتنبرگ
تهران ـ خ انقلاب روبروی دانشگاه تهران
تلفن: ۶۴۱۳۹۹۸

هدیه به‌جوانان و نوجوانانی
که، با تکیه به‌عشق و تلاش
خود، و گاه بدون کمترین
امکان‌ها، نام سرزمین خود
را در المپیادهای علمی
جهانی، به‌گوش فرزانگان
سراسر گیتی می‌رسانند.

مترجم

۱۹۶۱

سال ششم

۱. سه نفر می‌توانند کاری را انجام دهند. زمانی که طول می‌کشد تا دومی و سومی با هم، کار را تمام کنند، برابر نصف زمانی است که اولی، به تنهایی کار را به انجام می‌رساند. ولی اگر اولی و سومی با هم کار کنند، به اندازهٔ یک سوم زمانی وقت لازم دارند که دومی بخواهد به تنهایی کار را انجام دهد. اولی و دومی، با هم، چقدر سریع‌تر از سومی، کار را به پایان می‌رسانند؟

۲. ثابت کنید، بزرگترین بخشیاب مشترک بین مجموع دو عدد با کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها، برابر است با بزرگترین بخشیاب مشترک این دو عدد.

۳. ۲۰ دانش‌آموز، برای حل، ۲۰ مساله، گرد هم آمدند. هر دانش‌آموز دو مساله را حل کرد، درضمن هر مساله به وسیلهٔ دو دانش‌آموز حل شد. ثابت کنید، می‌توان ترتیبی داد که هر دانش‌آموز راه حل یکی از مساله‌ها را بیان کند، به نحوی که همهٔ مساله‌ها توضیح داده شده باشند.

۴. دو نفر به نام‌های A و B، می‌خواهند از نقطهٔ M، واقع در ۱۵ کیلومتری N، خود را به نقطهٔ N برسانند. سرعت پیاده‌روی آن‌ها، ۶ کیلومتر در ساعت است. درضمن، دوچرخه‌ای دارند که می‌توانند، با آن، با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت حرکت کنند. A و B، از نقطهٔ M، با هم به راه افتادند: A پیاده و B با دوچرخه. وقتی B، به C رسید، که از N به طرف M، پیاده می‌رفت، دوچرخه را به او داد، B مسیر خود را پیاده ادامه داد و C با دوچرخه، خود را به A رسانید. A دوچرخه را گرفت و سوار بر آن، مسیر خود را به طرف N ادامه داد. C، چه موقع از N حرکت کرده‌است، به شرطی که می‌دانیم، A و B با هم به N رسیده‌اند؟ سرعت پیاده و سواره C، همان سرعت‌های A و B است.

۵. ثابت کنید، از بین هر شش نفر، می‌توان سه نفر طوری جدا کرد، که یا دو به دو با هم آشنا، و یا دو به دو با هم نا آشنا باشند.

سال هفتم

۶. همان مسالهٔ ۱.

۷. دایرهٔ O، مربع K و خط راست L، داده شده‌اند. پاره‌خط راستی به طول معلوم، طوری رسم کنید که با خط راست L موازی باشد و، درضمن، دو انتهای آن، به‌ترتیب، روی محیط دایرهٔ O و محیط مربع K قرار گیرد.

۸. عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است، ثابت کنید، مجموع دو عدد $\overline{bca}$ و $\overline{cab}$ هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

۹. نقطهٔ C، نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB است. روی نیم‌خط راست به مبداء C و غیر واقع بر خط راست AB، سه نقطهٔ پیاپی P، M و Q را طوری انتخاب کرده‌ایم که $|PM| = |MQ|$. ثابت کنید:

$$|AP| + |BQ| > ۲|CM|$$

۱۰. $۲n + ۱$ چیز در اختیار داریم. ثابت کنید، تعداد دسته‌های انتخابی از این چیزها، به نحوی که، در هریک از آن‌ها، تعداد چیزها، فرد باشد، برابر است با تعداد دسته‌های انتخابی، به شرطی که در هر یک، تعداد چیزها زوج باشد.

سال هشتم

۱۱. اگر از یک چهارضلعی، طول ضلع‌ها و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ وسط قطرها معلوم باشد، آن را رسم کنید.

۱۲. می‌دانیم A، B و $\sqrt{A} + \sqrt{B}$، عددهای گویا هستند. ثابت کنید $\sqrt{A}$ و $\sqrt{B}$ هم، عددهایی گویا هستند.

۱۳. معادلهٔ ۳ $a^{۳} - [x] = ۳$ را حل کنید.

۱۴. ثابت کنید، اگر نیمساز یک زاویهٔ مثلث، زاویهٔ بین میانه و ارتفاع را که از همان راس می‌گذرند، نصف کند، یا مثلث متساوی‌الساقین است و یا قائم‌الزاویه

۱۵. n عدد $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n داده شده‌اند. هریک از این عددها، یا برابر است با ۱ و یا ۱−، درضمن

$$x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + \ldots + x_{n-۱}x_n + x_nx_۱ = ۰$$

ثابت کنید، عدد n بر ۴ بخش‌پذیر است.

۱۶. n نقطه روی محیط دایره‌ای قرار دارند و می‌دانیم، برای هر دو نقطهٔ دلخواه، یکی از دو کمانی که آن‌ها را به هم پیوسته، از ۱۲۰ درجه کمتر است. ثابت کنید، همهٔ این n نقطه، روی کمانی برابر ۱۲۰ درجه واقع‌اند.

سال نهم

۱۷. از مثلثی، یک راس و خط‌های راستی که نیمسازهای مثلث روی آن‌ها قرار دارند، معلوم است. مثلث را رسم کنید.

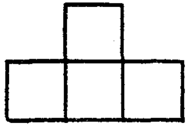
۱۸. همان مسالهٔ ۱۳.

۱۹. $۲n$ نقطه، روی یک صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید، می‌توان آن‌ها را به یاری خط شکستهٔ بسته‌ای چنان به هم وصل کرد که هیچ دو پاره‌خط راستی (از ضلع‌های این خط شکستهٔ بسته) یکدیگر را قطع نکرده باشند.

۲۰. α زاویه‌ای معلوم است و می‌دانیم، در مثلث ABC

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \alpha$$

مسیر حرکت راس C از این مثلث را پیدا کنید، به شرطی که راس‌های A و B روی ضلع‌های زاویه‌ای می‌لغزند.



شکل ۱

۲۱. ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را، نمی‌توان با شکل‌های شبیه شکل ۱ پوشانید.

۲۲. سه عدد درست و غیر صفر k، m و n مفروض‌اند و می‌دانیم k و m نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید، عدد درست x وجود دارد، به نحوی که $mx + n$ بر k بخش‌پذیر باشد.

۲۳. ثابت کنید، همهٔ عددهای به صورت

$$۱۱۵۶, ۱۱۱۵۵۶, ۱۱۱۱۵۵۵۶, \ldots$$

مجذور کامل‌اند.

سال‌های دهم و یازدهم

۲۴. قاعدهٔ یک هرم با حجم برابر V را، ذوزنقه‌ای تشکیل می‌دهد که طول قاعده‌های آن، برابر m و n است. به کمک صفحه‌ای، هرمی به حجم U را از آن جدا کرده‌ایم، به نحوی که مقطع صفحه با هرم اصلی، ذوزنقه‌ای با قاعده‌های به طول‌های $m_۱$ و $n_۱$ شده است. ثابت کنید:

$$\frac{U}{V} = \frac{(m_۱ + n_۱)m_۱n_۱}{(m+n)mn}$$

۲۵. مطلوب است کمترین مقدار عبارت $\frac{a^۲ + x^۲}{x}$، به‌شرطی که $a > ۰$ مقداری ثابت و $x > ۰$ کمیتی متغیر است.

۲۶. این چندجمله‌ای با ضریب‌های درست داده شده‌است:

$$f(x) = x^n + a_۱ x^{n-۱} + a_۲ x^{n-۲} + \ldots + a_n$$

می‌دانیم p، ریشهٔ گویای این چندجمله‌ای است. ثابت کنید: p عددی است درست و $f(m)$، برای هر عدد درست m، بر عدد $p-m$ بخش‌پذیر است.

۲۷. ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}۲۰^\circ - \operatorname{tg}۴۰^\circ + \operatorname{tg}۸۰^\circ = ۳\sqrt{۳}$$

۲۸. هر وجه مکعب را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرده، یکی از آن‌ها را به رنگ سفید و دیگری را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. ثابت کنید، درواقع، تنها دو نوع رنگ‌آمیزی وجود دارد که، در آن‌ها، در هر راس مکعب، مجموع زاویه‌های سفید با مجموع زاویه‌های سیاه برابر است. دو حالتی را که در اثر دوران مکعب، بر هم منطبق می‌شوند، یک حالت به حساب می‌آوریم.

۲۹. حلزونی با سرعت ثابت روی سطح میز می‌خزد. بعد از هر ۱۵ دقیقه، ۹۰ درجه، به طرفی می‌چرخد و در فاصلهٔ بین هر دو چرخش، روی خط راست حرکت می‌کند. ثابت کنید، تنها بعد از تعداد درستی ساعت، می‌تواند به‌جای نخست خود برگردد.

۱۹۶۲

سال ششم

۱. سه‌نفر می‌خواهند ازشهر A به‌شهر B بروند. آن‌ها، یک‌موتور سیکلت دارند که تنها دو نفر می‌توانند روی آن بنشینند. چگونه باید عمل کنند تا آخرین

نفری از آن‌ها که به شهر B می‌رسد، کمترین زمان را صرف کرده‌باشد؟ این زمان را پیدا کنید. سرعت پیاده ۵ کیلومتر در ساعت، سرعت موتورسیکلت ۴۵ کیلومتر در ساعت و فاصلهٔ بین دو شهر A و B، برابر ۶۰ کیلومتر است.

۲. دو عدد a و b، نسبت به هم اول‌اند. دو عدد $a+b$ و $a-b$، چه بخشیاب مشترکی می‌توانند داشته باشند؟

۳. سن کسی، در سال ۱۹۶۲، از مجموع رقم‌های سال تولد او، یک واحد بیشتر است. او چند سال دارد؟

۴. ۱۵ روزنامه، روی میزی را به طور کامل پوشانده‌اند. ثابت کنید، می‌توان هشت روزنامه را برداشت، به‌نحوی که، بقیهٔ روزنامه‌ها، دست‌کم $\frac{۷}{۱۵}$ سطح میز را پوشانده باشند.

۵. ثابت کنید، اسب بازی شطرنج را، روی صفحهٔ شطرنجی ۲۰۱ × ۲۰۱ می‌توان طوری حرکت داد که در همهٔ خانه‌ها و، درضمن، در هرکدام تنها یک بار قرار گیرد.

۶. آیا عددی که دو رقم سمت راست آن، عددهایی فردند، می‌تواند مجذور یک عدد درست باشد؟

سال هفتم

۷. ثابت کنید، با ضلع‌های یک چهارضلعی دلخواه، می‌توان یک ذوزنقه ساخت.

۸. همان مسالهٔ ۲.

۹. همان مسالهٔ ۴.

۱۰. در یک عدد شش‌رقمی، که بر ۷ بخش‌پذیر است، آخرین رقم سمت راست را به سمت چپ عدد برده‌ایم. ثابت کنید، عدد جدید هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

*۱۱. سطح دایره‌ای را، به ۴۹ بخش چنان تقسیم کرده‌ایم که هیچ سه بخشی، نقطهٔ مشترک نداشته باشند. «نقشهٔ» حاصل را با سه رنگ مختلف طوری رنگ کرده‌ایم که، هر دو بخش مجاور، رنگ‌های متفاوت داشته باشند. مرز دو بخش را، با هر دو رنگ درنظر می‌گیریم. ثابت کنید، روی محیط دایره، می‌توان دو نقطه پیدا کرد که دو سطر یک قطر و، درضمن به یک رنگ باشند.

۱۲. روی ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC، مربع‌های $ABDE$ و $BCKL$ را ساخته‌ایم. مرکز این مربع‌ها را $O_۱$ و $O_۲$ و وسط پاره‌خط‌های راست DL و AC را، $M_۱$ و $M_۲$ می‌نامیم. ثابت کنید، چهارضلعی $O_۱M_۱O_۲M_۲$، مربع است.

سال هشتم

۱۳. چهار دایره، روی یک صفحه چنان قرار دارند که هر دایره بر دو دایرهٔ دیگر، از بیرون مماس است. ثابت کنید، نقطه‌های تماس، روی محیط یک دایره‌اند.

۱۴. عددهای درست a و b را می‌توان به‌صورت $x^۲ - ۵y^۲$ نشان داد (x و y عددهای درستی هستند). ثابت کنید، عدد ab را هم، می‌توان به همین صورت نشان داد.

۱۵. این معادله را حل کنید

$$x(x+d)(x+۲d)(x+۳d)=a$$

۱۶. می‌دانیم $c+b+c=۱$ و $m+n+p=۱$. ثابت کنید:

$$-۱ \leq am+bn+cp \leq ۱$$

۱۷. مثلثی با حداکثر مساحت، در نیم‌دایرهٔ مفروض، محاط کنید.

۱۸. سه دایره، با شعاع‌های برابر، در یک نقطه، برخورد دارند. ثابت کنید، سه نقطهٔ دیگر برخورد، روی محیط دایره‌ای به همان شعاع واقع است.

۱۹. دایره‌ای با کمترین شعاع پیدا کنید که، مثلث مفروض را در درون خود داشته باشد.

۲۰. می‌دانیم چندجمله‌ای

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_{n-1} x^2 + a_n$$

بر دوجمله‌ای $x - 1$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، این چندجمله‌ای، بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر است

۲۱. p عددی است اول، غیر از عددهای ۲ و ۵. ثابت کنید، عدد طبیعی k وجود دارد، به‌نحوی که بتوان عدد pk را (در عددنویسی دهدهی)، تنها با رقم‌های برابر واحد نوشت.

سال نهم

۲۲. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۳. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۴. شبکه‌ای از مربع‌های به ضلع واحد تشکیل شده‌است. یکی از مربع‌های شبکه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، فاصلهٔ هر نقطهٔ گرهی دلخواه از این شبکه تا یکی از رأس‌های این مربع، عددی است گنگ.

۲۵. مجموع ده عدد، برابر است با صفر. مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به دوی آن‌ها هم، برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های این عددها، برابر صفر است.

۲۶. مثلثی با زاویه‌های حاده مفروض است. نقطه‌ای در داخل زاویه‌ای از آن انتخاب کرده‌ایم، که فاصلهٔ از آن تا هر یک از رأس‌های مثلث، از

کوچکترین ضلع مثلث، کوچکتر است. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از این نقطه تا سه رأس مثلث، از $\frac{۳}{۴}$ محیط تجاوز نمی‌کند.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۸. روی صفحه‌ای، n نقطه که بر یک خط راست واقع نیستند، داده شده است. ثابت کنید، می‌توان خط شکستهٔ بسته‌ای رسم کرد که از همهٔ این نقطه‌ها بگذرد، بدون این که خودش را قطع کند.

*۲۹. باری به وزن ۱۳/۵ تن را در صندوق‌هایی جا داده‌ایم، به نحوی که وزن هر صندوق با بار از ۳۵۰ کیلوگرم تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، همهٔ بار را می‌توان در ۱۱ کامیون یک تن‌ونیمی بار زد.

سال دهم

۳۰. در یک مربع به ضلع واحد، یک چهارضلعی محاط کرده‌ایم که چهار رأس آن روی چهار ضلع مربع باشد. ثابت کنید، یکی از ضلع‌های آن طولی دارد که از $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ کمتر نیست.

۳۱. مجموع ده عدد برابر صفر و مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها هم، برابر صفر است. مجموع توان‌های چهارم این عددها را پیدا کنید.

۳۲. مخرج این کسر را گویا کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}}$$

۳۳. این معادله را حل کنید

$$(۳x+۲)^۴+(۲x-۴)^۴=(۲x+۳)^۴+(۴x-۲)^۴$$

۳۴. یک زاویه و دو پاره‌خط راست، روی ضلع‌های آن داده شده‌است. نقطهٔ O واقع در درون زاویه را به نقطه‌های انتهایی این پاره‌خط‌های راست

وصل کرده‌ایم. مجموع مساحت‌های دو مثلثی که به این ترتیب به دست می‌آید، برابر است با S. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M به شرطی که مجموع چنین مساحت‌هایی برای آن، برابر S باشد.

۳۵. مجموع $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k}{n}kx$ را پیدا کنید.

۳۶. جواب‌های طبیعی این معادله را پیدا کنید:

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{}{\dots+\cfrac{1}{n}}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{}{\dots+\cfrac{1}{x_n}}}}}$$

۳۷. یک چندوجهی داده شده‌است. تعداد ضلع‌های همهٔ وجه‌ها، به‌جز یکی، بر عدد طبیعی مفروض n بخش‌پذیر است $(n>1)$. ثابت کنید، وجه‌های این چندوجهی را نمی‌توان با دو رنگ، چنان رنگ کرد، که هر دو وجه مجاور، به رنگ‌های متفاوت باشند.

۳۸. در یک n ضلعی کوژ (محدب)، همهٔ ضلع‌ها و قطرها را امتداد داده‌ایم تا به صورت خط‌های راست درآیند. درضمن، از این خط‌های راست، هیچ دو خط راستی موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی‌گذرند. این خط‌های راست، در درون n ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ بیرون n ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

سال یازدهم

۳۹. همان مسالهٔ ۳۰.

۴۰. این چندجمله‌ای داده شده‌است:

$$x^{kn} + a_1 x^{k(n-1)} + a_2 x^{k(n-2)} + \ldots + a_{n-1} x^k + a_n$$

ثابت کنید، اگر این چندجمله‌ای بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت بر $x^k - 1$ هم بخش‌پذیر است

۴۱. همان مسالهٔ ۳۳.

۴۲. مجموع $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2$ را پیدا کنید.

۴۳. همان مسالهٔ ۳۲.

۴۴. همان مسالهٔ ۳۴.

۴۵. همان مسالهٔ ۳۷.

۴۶. همان مسالهٔ ۳۶.

۴۷. در درون مربع 1×1، چندضلعی کوژی به مساحت بیشتر از $\frac{1}{2}$ قرار داده‌ایم. ثابت کنید، در چندضلعی، وتر با طول بیشتر از $\frac{1}{2}$ پیدا می‌شود که با ضلعی از مربع، که از قبل تعیین شده است، موازی باشد.

دور نهایی

۴۸. ثابت کنید، با ۷ دایرهٔ به شعاع واحد، می‌توان دایره‌ای به شعاع ۲ را به‌طور کامل پوشاند، ولی با این ۷ دایره، نمی‌توان دایره‌ای به شعاع بزرگتر از ۲ را پوشاند.

۴۹. در مربع با مساحت ۵، ۹ چندضلعی قرار داده‌ایم، که مساحت هریک برابر واحد است. ثابت کنید، دو تا از این چندضلعی‌ها، سطح مشترکی دارند که از $\frac{1}{9}$ کمتر نیست.

۵۰. سطح کره‌ای را به سه بخش تقسیم کرده‌ایم، به نحوی که هر بخش، رنگ خودش را دارد و هر مرزِ دو بخش دارای دو رنگ است. ثابت کنید،

می‌توان قطری از کره را پیدا کرد که دو سر آن از نظر رنگ، یکسان باشند.

۵۱. رقم‌های یک عدد، تنها از ۰ و ۱ تشکیل شده‌اند. درضمن، تعداد رقم‌های ۱، از دو تا کمتر نیست. ثابت کنید. چنین عددی نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد.

۵۲. ثابت کنید، از بین k عدد درست، می‌توان چند عدد انتخاب کرد، به‌نحوی که مجموع آن‌ها، بر k بخش‌پذیر باشد.

۵۳. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}n(n-1)} - x^{\left[\frac{1}{2}n\right]}}{x-1} = 0$$

*۵۴. با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n، دنباله‌های بی‌پایانی ساخته‌ایم. دو جمله از دو دنباله را، یکسان می‌نامیم، وقتی که با هم برابر باشند و، درضمن، شمارهٔ ردیف آن‌ها، در دو دنباله، یکی باشد. چند دنباله می‌توان ساخت، به نحوی که هر دو دنبالهٔ دلخواه از بین آن‌ها، درست k جملهٔ یکسان داشته باشند.

۱۹۶۳

سال ششم

۱. دو نفر، در یک لحظه، از A به‌طرف B حرکت کردند: اولی از طریق جادهٔ آسفالت و با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت و دومی از «راه میان‌بُر» و با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت. اولی، یک ساعت دیرتر از دومی به B رسید و ۶ کیلومتر هم بیشتر راه رفت. فاصلهٔ A تا B، از طریق جادهٔ آسفالت چقدر است؟

۲. در جادهٔ آسفالت، پیاده با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت می‌رود. در همین جاده و از دو طرف، اتوبوس‌هایی با سرعت‌های یکسان در رفت‌و

شکل ۲

آمدند که هر ۵ دقیقه یک بار، از روبه‌رو به هم می‌رسند. در ساعت ۱۲ پیاده متوجه شد، اتوبوس‌ها در کنار او با هم روبه‌رو شدند و هرکدام به راه خود ادامه دادند. در ساعت ۱۴، دوباره اتوبوس‌ها، در کنار او به هم رسیدند. معلوم شد، در همین فاصلهٔ زمانی، تعداد اتوبوس‌هایی که از سمت مقابل به او رسیده‌اند، ۴ تا بیشتر از تعداد اتوبوس‌هایی است که از او جلو افتاده‌اند. سرعت اتوبوس را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید، عدد $۱۷^{۱۷} - ۴۳^{۴۳}$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۴. از صفحهٔ شطرنج، دو خانه را در مرز صفحه، جدا کرده‌ایم. در چه حالت‌هایی می‌توان و در چه حالت‌هایی نمی‌توان، بقیهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج را، با شکل‌هایی شبیه شکل ۲ پوشاند، بدون این‌که روی هم قرار گیرند؟

۵. فاصلهٔ هوایی از شهر A تا شهر B برابر ۳۰ کیلومتر، از B تا C برابر ۸۰ کیلومتر، از C تا D برابر ۲۳۶ کیلومتر، از D تا E برابر ۸۶ کیلومتر و از E تا A برابر ۴۰ کیلومتر است. فاصلهٔ هوایی از E تا C را پیدا کنید.

۶. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۹۶۳ را طوری به‌صورت یک دنباله نوشت، به‌نحوی که هر دو جملهٔ مجاور و، هر دوجمله‌ای که تنها یک جمله بین خود دارند، نسبت به هم اول باشند؟

سال هفتم

۷. مساحت یک چهارضلعی برابر ۳ سانتی‌متر مربع و طول قطرهای آن،

برابر ۶ سانتی‌متر و ۲ سانتی‌متر است. زاویهٔ بین دو قطر را پیدا کنید.

۸. ثابت کنید، عدد $۲^{۳۴۵۶۷۸۹} + ۱$، عددی مرکب (یعنی غیر اول) است.

۹. ۲۰ نفر در بازی شطرنج شرکت داشتند. کسی که در ردیف نوزدهم قرار گرفت، ۹/۵ امتیاز آورده‌بود. امتیازهای بقیهٔ شرکت‌کنندگان را چگونه می‌توان درنظر گرفت؟

۱۰. مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راستی که وسط ضلع‌های روبه‌رو را در یک چهارضلعی به هم وصل می‌کنند، برابر است با نصف محیط چهارضلعی. ثابت کنید، این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۱۱. در اتوبوس شهری، به‌جز بلیت‌فروش، ۴۰ مسافر نشسته‌اند که در جیب خود، تنها سکه‌های ۱۰، ۱۵ و ۲۰ کوپکی و، روی‌هم، ۴۹ سکه دارند. ثابت کنید، مسافرها نمی‌توانند، طوری ترتیب کار را بدهند که پول بلیت‌های خود را بپردازند (در سال ۱۹۶۳، ارزش بلیت اتوبوس شهری، برای هر نفر، ۵ کوپک بوده‌است: هر ۱۰۰ کوپک برابر یک روبل است).

۱۲. عدد طبیعی A را بر همهٔ عددهای کوچکتر از خودش تقسیم و سپس، همهٔ باقی‌مانده‌های مختلف حاصل از تقسیم‌ها را با هم جمع کرده‌ایم، حاصل‌جمع برابر عدد A شده‌است. A را پیدا کنید (منظور از باقی‌مانده‌های مختلف، این است که اگر مثلاً دو یا چند بار، باقی‌ماندهٔ r به‌دست آید، تنها یک بار از آن استفاده کنیم).

۱۳. از یک صفحهٔ شطرنجی، دو خانهٔ دلخواه را جدا کرده‌ایم. در چه حالتی می‌توان و در چه حالتی نمی‌توان باقی‌ماندهٔ صفحهٔ شطرنج را با مهره‌های دوخانه‌ای (شکل ۲) به‌طور کامل پوشاند، بدون این‌که روی هم قرار گیرند؟

سال هشتم

۱۴. نقطهٔ A را روی میانه‌ای که از راس به قاعدهٔ مثلث رسم شده است، انتخاب کرده‌ایم. مجموع فاصله‌های از نقطهٔ A تا ضلع‌های جانبی مثلث، برابر است با S. فاصلهٔ از نقطهٔ A تا هریک از ضلع‌های جانبی را پیدا کنید، به‌شرطی که طول این ضلع‌ها، برابر x و y باشد.

۱۵. کسر دهدهی $0/\overline{abc\ldots}$ به این ترتیب ساخته شده‌است: a و b دو رقم دلخواهند؛ از آن به بعد، هر رقم برابر است با باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم مجموع دو رقم قبل از آن، بر ۱۰. ثابت کنید این کسر، کسری متناوب ساده است.

۱۶. روی یک صفحه، یک m ضلعی و یک n ضلعی کوژ داده شده است $(m > n)$ این دو چندضلعی، صفحه را، حداکثر به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۱۷. مجموع سه عدد درست مجذور کامل، بر ۹ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، در بین آن‌ها، دو عدد وجود دارد که تفاضلشان، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۱۸. $k + ۲$ عدد درست داده شده‌است. ثابت کنید، در بین آن‌ها دو عدد وجود دارد، که یا مجموع آن‌ها و یا تفاضل آن‌ها بر $۲k$ بخش‌پذیر است.

۱۹. زاویهٔ قائمه‌ای دور راس خود دوران می‌کند. مطلوب است، مکان هندسی وسط پاره‌خط‌های راستی که نقطه‌های برخورد ضلع‌های زاویه با دایرهٔ مفروضی را به هم وصل می‌کنند.

سال نهم

۲۰. عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$، بر ۴۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، هر عددی که از تبدیل دوری رقم‌های این عدد به‌دست آید، بر ۴۱ بخش‌پذیر است.

۲۱. دو گروه عدد داریم:

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \ldots \geq a_n \geq ۰$$
$$b_۱ \geq b_۲ \geq \ldots \geq b_n \geq ۰$$

ثابت کنید:

$$a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n \geq a_۱b_n + a_۲b_{n-۱} + \ldots + a_nb_۱$$

۲۲. از ذوزنقه‌ای، طول هریک از قطرها و ساق‌ها معلوم است. ذوزنقه را رسم کنید.

۲۳. دو دایره با شعاع $R = \frac{۱}{۲\pi}$ مفروض‌اند. روی یکی از دایره‌ها ۲۰ نقطه را نشان گذاشته‌ایم و روی دیگری چند کمان انتخاب کرده‌ایم که مجموع طول‌های آن‌ها از $\frac{۱}{۲۰}$ کمتر است. ثابت کنید، می‌توان یکی از دایره‌ها را طوری روی دیگری قرار داد که هیچ‌کدام از نقطه‌هایی که نشان گذاشته‌ایم، در درون کمان‌های انتخابی، قرار نگیرد.

۲۴. همان مسالهٔ ۱۸.

۲۵. این معادله را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید:

$$(z + ۱)^x - z^y = -۱$$

سال‌های دهم و یازدهم

۲۶. ثابت کنید، اگر دو معادلهٔ با ضریب‌های درست

$$x^۲ + p_۱x + q_۱ = ۰ \text{ و } x^۲ + p_۲x + q_۲ = ۰$$

دارای یک ریشهٔ مشترک باشند و، این ریشهٔ مشترک، عدد درست نباشد، آن‌وقت $p_۱ = p_۲$ و $q_۱ = q_۲$.

۲۷. یک کُنج سه‌وجهی و نقطهٔ A روی یکی از یال‌های آن داده شده است. نقطه‌های B و C روی دو یال دیگر کُنج حرکت می‌کنند. مکان هندسی گرانیگاه (مرکز ثقل) مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۸. این معادله داده شده است:

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \ldots + a_nx_n = b$$

که در آن، هریک از x_i ها برابر است با ۰ یا ۱؛ درضمن، همهٔ عددهای $a_۱$، $a_۲$، …، a_n، با هم برابر صفر نیستند (ولی برخی از آن‌ها می‌توانند برابر صفر باشند). ثابت کنید، بیش از نصف انتخاب‌هایی که برای

$$(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

وجود دارد، نمی‌توانند در معادله صدق کنند.

۲۹. در چندوجهی، زاویهٔ مسطحهٔ α را، پیوسته به یال می‌نامیم، وقتی که، این یال، ضلعی از زاویهٔ α باشد. ثابت کنید، در هر چهاروجهی (هرمِ با قاعدهٔ مثلثی)، یالی وجود دارد که زاویه‌های پیوسته به آن، حاده هستند.

۳۰. ثابت کنید، برای k دنبالهٔ بی‌پایان زیر، که از عددهای طبیعی تشکیل شده‌اند،

$$\begin{array}{l} x_۱^۱, x_۲^۱, x_۳^۱, \ldots \\ x_۱^۲, x_۲^۲, x_۳^۲, \ldots \\ x_۱^۳, x_۲^۳, x_۳^۳, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_۱^k, x_۲^k, x_۳^k, \ldots \end{array}$$

می‌توان شماره‌های p و q را پیدا کرد، به نحوی که، برای هر $۱ \leq i \leq k$ داشته باشیم: $x_p^i \geq x_q^i$.

۳۱. ثابت کنید، نمی‌توان ۱۰ مربعِ برابر را طوری روی صفحه رسم کرد که حتا یکی از آن‌ها، به درون دیگری رخنه نکرده باشد، ولی یکی از آن‌ها، با همهٔ دیگران، تماس داشته باشند.

دور نهایی

۳۲. ۱۹۶۳ رقم بعد از ممیز را در بیان دهدهی این عدد پیدا کنید:

$$(\sqrt{۲۶}+۵)^{۱۹۶۳}$$

۳۳. قوطی کبریت را، چگونه در فضا نگه داریم که تصویر قائم آن بر صفحه، حداکثر مساحت را داشته باشد؟

۳۴. پنج دایره، روی یک صفحه، دو به دو متقاطع‌اند. ثابت کنید، سه‌تا از آن‌ها، در یک نقطه مشترک‌اند.

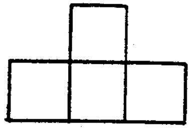
۳۵. عدد طبیعی a، بر عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، اگر عدد $۲a$ را به‌صورت مجموعی از عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹ بنویسیم، آن‌وقت در بین آن‌ها می‌توان چند عدد پیدا کرد که مجموعشان بر a، بخش‌پذیر باشد.

۳۶. چهار عدد مثبت داده شده است، درضمن، مجموع هر سه تا از آن‌ها، از چهارمی بزرگتر است. ثابت کنید، یک چهاروجهی (هرمی با قاعدهٔ مثلثی) وجود دارد، به‌نحوی که این عددها، مساحت‌های وجه‌های آن باشند.

۳۷. این معادله را در مجموعهٔ عددهای درست حل کنید:

$$x^{۴}-۲y^{۴}-۴z^{۴}-۸t^{۴}=۰$$

۳۸. ثابت کنید، خط شکستهٔ بستهٔ با پیرامون برابر واحد را، می‌توان با دایره‌ای به شعاع برابر $\frac{۱}{۴}$ پوشاند (خط شکسته، روی یک صفحه قرار دارد).



شکل ۳

۳۹. آیا مثلثی وجود دارد که، طول ضلع‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازهای آن، عددهای درستی باشند؟

۴۰. به‌ازای چه مقدار n، عدد $۲^n + ۱$، برابر توانی از یک عدد طبیعی است؟

۴۱. از دو نقطهٔ گرهی یک صفحهٔ شطرنجی، دو خط راست موازی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، در هر حال، روی نواری که به دست می‌آید، بی‌نهایت نقطهٔ گرهی وجود دارد.

۱۹۶۴

سال ششم

۱. سه نفر ـ «آنیلوف»، «بوریسوف»، «وورو بیف» ـ هرکدام شش بار، به یک هدف تیراندازی کردند. درنتیجهٔ کار، معلوم شد، هر سه نفر، امتیازهای برابر آورده‌اند. «آنیلوف» در سه شلیک اول، ۴۳ امتیاز و «بوریسوف» در شلیک اول سه امتیاز آورد. می‌دانیم، امتیاز ۵۰ یک بار، امتیاز ۲۵ دو بار، امتیاز ۲۰ سه بار، امتیاز ۱۰ سه بار، امتیاز ۵ دو بار، امتیاز ۳ دو بار، امتیاز ۲ دو بار و امتیاز ۱ یک بار به‌دست آمده است. هریک از این سه نفر، در هر شلیک، چند امتیاز به دست آورده‌اند؟

۲. ثابت کنید، صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ تکهٔ به‌صورت شکل ۳، پوشاند.

۳. در هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج، عددهایی طبیعی نوشته شده‌است، به نحوی که، هر عدد برابر است با واسطهٔ حسابی دو عدد مجاورش. مجموع عددهای واقع در خانه‌های چهار گوشهٔ صفحه، برابر است با ۱۶. عدد واقع در خانهٔ e۲ را پیدا کنید.

۴. جدولی ۱۰۰ $\times$ ۱۰۰ در اختیار داریم. حداقل، چند حرف می‌توان در خانه‌های این جدول قرار داد، به نحوی که هیچ دو خانه‌ای که در کنار هم قرار دارند، شامل حرف‌های یکسان نباشند؟

۵. گروه سربازان را به شکل مستطیلی به صف کرده‌ایم. از هر ردیف، بلندترین مرد را، و از بین این بلندترین‌ها، کوتاه‌ترین مرد را انتخاب کردیم. سپس، از هر ستون کوتاه‌ترین مرد را، و از بین این کوتاه‌ترین‌ها بلندترین مرد را انتخاب کردیم. کدام یک از این دو نفر بلندترند؟

۶. حاصل‌ضرب سه عددی را پیدا کنید که مجموع، مجموع مجذورها و مجموع مکعب‌های آن‌ها، برابر واحد باشد.

سال هفتم

۷. همهٔ زاویه‌های یک n ضلعی کوژ، منفرجه‌اند. ثابت کنید، در این n ضلعی، مجموع طول‌های قطرها، از مجموع طول‌های ضلع‌ها بیشتر است.

۸. همهٔ عددهای درست x و y را پیدا کنید که، به‌ازای هریک از آن‌ها، $x^۴ + ۴y^۴$، عددی اول باشد.

۹. مثلث ABC داده شده‌است. روی ضلع‌های این مثلث، متوازی‌الاضلاع‌های $ABKL$، $BCMN$ و $ACFG$ را ساخته‌ایم. ثابت کنید، با پاره‌خط‌های راست KN، MF و GL، می‌توان یک مثلث ساخت.

۱۰. همان مسالهٔ ۲.

۱۱. حداکثر، چند عدد مختلف می‌توان پیدا کرد که، هریک از آن‌ها از ۵۰ کوچکتر و هر دوتا از آن‌ها، نسبت به هم اول باشند؟

۱۲. نقطه‌های D و E به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC هستند. نقطهٔ M روی AC و $|EC| > |ME|$. ثابت کنید: $|MD| < |AD|$.

سال هشتم

۱۳. عددهای اول p، q و r را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$pqr = ۵(p+q+r)$$

۱۴. ثابت کنید، به‌شرطی که $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$، داریم.

$$\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}} = \frac{a}{c}$$

هر عدد صورت و مخرج کسر سمت چپ برابری، دارای n رقم است.

۱۵. مثلث را با معلوم بودن محیط، ارتفاع و زاویهٔ مجاور قاعده، رسم کنید.

۱۶. ثابت کنید، مجذور مجموع n عدد مختلفی که مخالف صفر و هر کدام مجذور کامل‌اند، درضمن برابر است با مجموع n مجذور کامل درست و مخالف صفر.

۱۷. در چهارضلعی $ABCD$، قطرهای AC و BD را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دایره‌های محاطی مثلث‌های ABC و ADC، بر هم مماس باشند، آن‌وقت دایره‌های محاط در مثلث‌های BAD و BCD هم مماس بر یکدیگرند.

۱۸. اگر عددهای a و n نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید، می‌توان عددهای درست x و y را پیدا کرد، به‌نحوی که $|x| < \sqrt{n}$، $|y| < \sqrt{n}$ و $۵x - y$ بخش‌پذیر بر n باشد.

سال نهم

۱۹. همان مسالهٔ ۱۵.

۲۰. در درون یک مربع به ضلع واحد، ۵۱ نقطه قرار دارد. ثابت کنید، در بین آن‌ها، سه نقطه پیدا می‌شود که در درون دایرهٔ به شعاع $\frac{۱}{۷}$ جا بگیرند.

۲۱. ثابت کنید، اگر برای عدد طبیعی n داشته باشیم:

$$\left[\frac{n}{۱}\right]+\left[\frac{n}{۲}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=$$
$$=۲+\left[\frac{n-۱}{۱}\right]+\left[\frac{n-۱}{۲}\right]+\ldots+\left[\frac{n-۱}{n-۱}\right]$$

آن وقت n، عددی اول است.

۲۲. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۳. در مثلث ABC، از راس A به نقطهٔ D واقع بر ضلع BC وصل کرده‌ایم.

۱) ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث‌های ABD، ADC، ABC و نقطهٔ A، روی محیط یک دایره‌اند.

۲) نقطهٔ D را طوری پیدا کنید که شعاع این دایره، کمترین مقدار ممکن باشد.

۲۴. همان مسالهٔ ۱۸.

سال‌های دهم و یازدهم

۲۵. در درون مربع به ضلع واحد، n ضلعیِ P قرار دارد. ثابت کنید، می‌توان سه راس A، B و C از n ضلعی P را پیدا کرد، به‌نحوی که داشته‌باشیم: $S_{ABC}\leq\frac{۱۰۰}{n^۲}$.

۲۶. دو دستگاه مختصات قائم، N نقطه با مختصات درست (x,y) با شرط $x^{۲}+y^{۲}<n$ وجود دارد (n، عددی درست است). ثابت کنید:

$$N \geq ۳(n-۱)^{۲}$$

۲۷. دایره‌ای به شعاع واحد، و چهار نقطه روی محیط آن داده شده‌است. از هر دو نقطهٔ مجاور، دایره‌ای به شعاع واحد گذرانده‌ایم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ برخورد دیگر دایره‌های اخیر، روی محیط یک دایره قرار دارند.

۲۸. فرض کنید، در تجزیهٔ عدد n، عامل اول ۲، با نمای α_n ظاهر شود

$$S_n = \alpha_{۱} + \alpha_{۲} + \ldots + \alpha_n$$

ثابت کنید، در دنبالهٔ

$$S_{۱}, S_{۲}, S_{۳}, \ldots, S_{۲^n-۱}$$

تعداد عددهای زوج، با تعداد عددهای فرد، یک واحد اختلاف دارد.

۲۹. دو نقطهٔ A و B و خط راست L روی یک صفحه‌اند. نقطهٔ E را روی خط راست L طوری پیدا کنید که $|AE|+|BE|$ برابر عدد مفروض d باشد.

۳۰. S را دسته‌ای از عددهای طبیعی کوچکتر از عدد اول مفروض p می‌گیریم. در این دسته، اگر عددهای a و b وجود داشته باشد، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عددهای ab، a و b بر p هم وجود دارد. ثابت کنید، اگر در S، دست‌کم دو عدد وجود داشته باشد، آن‌وقت مجموع عددهای دستهٔ S، بر p بخش‌پذیر است.

دور نهایی

۳۱. راس‌های یک مثلث با زاویه‌های حاده، روی دو ضلع روبه‌رو از یک مربع به ضلع واحد و راس‌های مثلث دوم با زاویه‌های حاده روی دو ضلع روبه‌روی دیگر این مربع قرار دارند. ثابت کنید، بخش مشترک مساحت‌های این دو مثلث، از چهار برابر عدد حاصل‌ضرب مساحت‌های دو مثلث تجاوز نمی‌کند.

۳۲. عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n مفروض‌اند که، در بین آن‌ها، ممکن است عددهای برابر هم وجود داشته باشد. f_k را تعداد عددهایی، از این دسته عددها می‌نامیم که از k کوچکتر نیستند. ثابت کنید:

$$f_۱ + f_۲ + f_۳ + \ldots = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$$

۳۳. مربع به ضلع واحد، n شکل را طوری پوشانده است که، هر نقطهٔ آن، دست کم متعلق به q شکل است. ثابت کنید، لااقل یک شکل وجود دارد که، مساحت آن، از $\frac{q}{n}$ کمتر نیست.

۳۴. همهٔ عددهای حقیقی را، به دو گروه بخش کرده‌ایم. ثابت کنید، برای هر $k > ۰$، سه عددِ $a < b < c$ از یک گروه پیدا می‌شود، به‌نحوی که داشته باشیم

$$\frac{c-b}{b-a} = k$$

۳۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، مثلثی با زاویه‌های معلوم محاط کنید که حداکثر مساحت را داشته باشد.

*۳۶. n نفر به ضرب سکه مشغول‌اند. برخی از آن‌ها، تنها سکه‌های تقلبی درست می‌کنند و بقیه، فقط سکه‌های واقعی. وزن سکهٔ تقلبی، با وزن سکه واقعی فرق دارد. یک ترازو با گونه‌های مختلف وزنه و یک سکهٔ واقعی در اختیار داریم. از هر کدام از ضرب‌کنندگان سکه، هرقدر سکه که مایل باشیم، می‌توانیم بگیریم. چگونه می‌توان، با سه بار وزن کردن، همهٔ کسانی را که به ساختن سکهٔ تقلبی مشغول‌اند، شناخت؟

۱۹۶۵

سال ششم

۱. در کارگاه صحافی، ۹۲ برگ کاغذ سفید و ۱۳۵ برگ کاغذ رنگی وجود دارد. برای صحافی هر کتاب، یک برگ کاغذ سفید یک برگ کاغذ رنگی لازم است. بعد از این که چند کتاب صحافی شد، تعداد برگ‌های باقی‌مانده سفید، نصف تعداد برگ‌های رنگی بود. چند کتاب صحافی شده است؟

۲. عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۶۵ را در هم ضرب کرده‌ایم. ثابت کنید، آخرین رقم غیر صفر سمت راست حاصل‌ضرب، عددی زوج است.

۳. لاستیک‌های جلو اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های عقب بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شود. چه موقع باید جای لاستیک‌های جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

۴. مستطیل 65×19 (سانتی‌متری) را به‌وسیلهٔ خط‌های راست موازی ضلع‌ها، به مربع‌هایی به ضلع یک سانتی‌متر بخش کرده‌ایم. اگر قطر این مستطیل را رسم کنیم، روی هم به چند بخش تقسیم می‌شود؟

۵. بخشی، بخشیاب و خارج‌قسمت را در این تقسیم پیدا کنید:

```
* * * * * * | * * *
            |-------
            | * * *
* * * *
-------
    * * *
    * * *
    -----
    * * * *
    * * * *
    -------
          0
```

۶. عددهای فرد از ۱ تا ۴۹ را، به‌این ترتیب نوشته‌ایم:

۱	۳	۵	۷	۹
۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹
۳۱	۳۳	۳۵	۳۷	۳۹
۴۱	۴۳	۴۵	۴۷	۴۹

از این عددها، پنج عدد طوری انتخاب کنید که هیچ دو تا از آن‌ها، متعلق به یک سطر یا متعلق به یک ستون نباشند. مجموع این پنج عدد، چند است؟

سال هفتم

۷. ثابت کنید، عددی که تعداد بخشیاب‌های آن، عددی فرد باشد، مجذور کامل است.

۸. در مثلث ABC، که مساحتی برابر S دارد، میانه‌های AK و BE را رسم کرده‌ایم. اگر این دو میانه، در نقطهٔ O با هم برخورد کرده باشند، مساحت چهارضلعی $CKOE$ را پیدا کنید.

۹. لاستیک‌های جلو اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های عقب، بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع، جای لاستیک‌های جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا اتومبیل بتواند بیشترین فاصله را، با همین لاستیک‌ها بپیماید؟

۱۰. مستطیل ۶۰ × ۲۴ را با رسم خط‌های راست موازی ضلع‌ها، به مربع‌های به ضلع واحد بخش کرده‌ایم. اگر قطر مستطیل را هم رسم کنیم، چند بخش در مستطیل به‌وجود می‌آید؟

۱۱. اگر $[A]$ به معنای بزرگترین عدد درستی باشد که از A تجاوز

نمی‌کند، این معادله را حل کنید:

$$\left[\frac{۵+۶x}{۸}\right]=\frac{۱۵x-۷}{۵}$$

۱۲. روی صفحهٔ سفیدی رنگ پاشیده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دو نقطهٔ هم‌رنگ پیدا کرد، به‌نحوی که فاصلهٔ بین آن‌ها، برابر ۱۹۶۵ متر باشد.

سال هشتم

۱۳. مستطیل ۶۰×۲۴ را، با رسم خط‌های راست موازی با ضلع‌ها، به مربع‌های به ضلع واحد بخش کرده‌ایم. خط راست دیگری رسم کنید که، پس از آن، تعداد بخش‌های مستطیل، حداکثر مقدار ممکن شود.

۱۴. مهندسان همیشه راست و بازرگانان همیشه دروغ می‌گویند. F و G مهندس‌اند. A توضیح می‌دهد، که B تاکید دارد، که C باور دارد، که D می‌گوید، که E اصرار می‌کند که F مهندس بودن G را نفی می‌کند. C هم توضیح می‌دهد که D بازرگان است. اگر A بازرگان باشد، روی هم در این‌جا، چند بازرگان وجود دارد؟

۱۵. جادهٔ مستقیمی از دشت می‌گذرد. جهان‌گرد، روی جاده در نقطهٔ O ایستاده است. او می‌تواند از طریق جاده، با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت و از طریق دشت، با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت حرکت کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که، جهان‌گرد می‌تواند بعد از یک ساعت در آن‌جاها باشد.

۱۶. همان مسالهٔ ۱۱.

۱۷. در کشوری، هر دو شهر، به‌وسیلهٔ جاده به هم مربوط‌اند؛ ولی هر جاده، یک‌طرفه است، یعنی تنها در یک جهتِ آن می‌توان حرکت کرد. ثابت کنید، شهری وجود دارد که، با خارج شدن از آن می‌توان، از همهٔ شهرهای کشور، و از هر کدام تنها یک بار، عبور کرد.

۱۸. هشت عدد اول پیدا کنید، به نحوی که مجموع مجذورهای آن‌ها با ۹۹۲، از چهار برابر حاصل‌ضرب آن‌ها تجاوز نکند.

سال نهم

۱۹. با دو پاره‌خط راست به طول واحد، از یک زاویهٔ مفروض، یک چهارضلعی جدا کنید که حداکثر مساحت ممکن را داشته باشد.

۲۰. همان مسالهٔ ۱۴.

۲۱. متوازی‌الاضلاع را به کمک خط‌های راست موازی ضلع‌های آن، به چند بخش تقسیم کرده‌ایم؛ درضمن، یکی از ضلع‌ها به m بخش و دیگری به n بخش تقسیم شده‌است. با رسم یک خط راست دیگر، متوازی‌الاضلاع را، حداکثر به چند بخش می‌توان تقسیم کرد؟

۲۲. برای طول‌های ضلع‌های مثلث ABC داریم:

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |AC| \leq ۶۰$$

روی ضلع‌های AB، BC و AC، به‌ترتیب، نقطه‌های C' و A' و B' را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$|AC'| \cdot |C'B| \cdot |BA'| \cdot |A'C| \cdot |CB'| \cdot |B'A| <$$
$$< |AB| \cdot |BC| \cdot |AC|$$

۲۳. $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n و $B_۱$، $B_۲$، ...، B_n، دو تبدیل مختلف از عددهای ۱، ۲، ...، n هستند. ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، دست‌کم دو جمله از دنبالهٔ

$$A_۱ + B_۱, A_۲ + B_۲, \ldots, A_n + B_n$$

در تقسیم بر n، به یک باقی‌مانده می‌رسند.

*۲۴. n دایره در روی صفحه، مساحتی برابر ۱ واحد مربع را اشغال کرده‌اند. ثابت کنید، می‌توان از بین آن‌ها، چند دایرهٔ غیرمتقاطع انتخاب کرد که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، بیشتر از $\frac{۱}{۹}$ واحد مربع باشد.

سال‌های دهم و یازدهم

۲۵. این معادله را، در مجموعهٔ عددهای درست حل کنید:

$$۶xy - ۴x + ۹y - ۳۶۶ = ۰$$

۲۶. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\frac{۱}{\cos\alpha\cos ۲\alpha} + \frac{۱}{\cos ۲\alpha\cos ۳\alpha} + \ldots + \frac{۱}{\cos(n-۱)\alpha\cos n\alpha}$$

۲۷. همان مسالهٔ ۲۳.

۲۸. *برای کلاس دهم.* روی ضلع AB از مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه $M_۱$ را انتخاب کرده‌ایم. به مرکز نقطهٔ A و به شعاع برابر $|AM_۱|$، کمان $M_۱M_۲$ را در درون مثلث ABC رسم کرده‌ایم $(M_۲ \in AC)$. سپس، به مرکز نقطهٔ C و به شعاع برابر $|CM_۲|$، کمان $M_۲M_۳$ را در درون مثلث ABC رسم کرده‌ایم $(M_۳ \in BC)$. سرانجام، به مرکز نقطهٔ B و به شعاع برابر $|BM_۳|$، کمان $M_۳M_۴$ را تا برخورد با AB رسم کرده‌ایم و غیره. عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که کمان بسته شود. طول این منحنی بسته را پیدا کنید، به‌شرطی که، طول ضلع‌های مثلث و اندازهٔ زاویه‌های آن معلوم باشد.

برای کلاس یازدهم. A و B، عددهایی غیرمنفی‌اند. ثابت کنید:

$$(A+B)^n \leq ۲^{n-۱}(A^n + B^n)$$

۲۹. مکعب ۱۲ × ۱۲ × ۱۲ را به یاری صفحه‌های موازی با وجه‌ها به مکعب‌های واحد تقسیم کرده‌ایم. اگر با صفحهٔ دیگری، مقطعی به صورت شش‌ضلعی منتظم در مکعب به‌وجود آوریم، مکعب روی‌هم، به چند بخش تقسیم می‌شود؟

۳۰. سه دایره مفروض‌اند. نقطه‌ای بر صفحه پیدا کنید که مماس‌های مرسوم از آن بر دایره‌ها، یکی با دیگری، زاویه‌های برابر بسازند.

دور نهایی

*۳۱. در خانه‌های یک جدول $n \times n$، عددهای درست غیرمنفی را قرار داده‌ایم. درضمن، اگر در خانه‌ای عدد صفر قرار گرفته‌باشد، آن‌وقت مجموع همهٔ عددهایی که با این خانه در یک سطر یا یک ستون واقع‌اند، کمتر از n نیست. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای جدول، کمتر از $\frac{1}{2}n^2$ نیست.

۳۲. دربارهٔ عددهای مثبت a، b، c، x، y، z می‌دانیم:

$$a < b < c, a < x < y < z < c,$$

$$abc = xyz, a + b + c = x + y + z$$

ثابت کنید: $a = x$، $b = y$، $c = z$.

۳۳. بین همهٔ چندجمله‌ای‌های به‌صورت $x^2 + ax + b$، آن را پیدا کنید که ماکزیمم قدرمطلق آن، در بازهٔ $[-1, 1]$، حداقل باشد.

۳۴. ثابت کنید، مساحت مربعی که در درون یک مثلث واقع است، از نصف مساحت مثلث تجاوز نمی‌کند.

۳۵. روی صفحهٔ شطرنجی، شکلی به مساحت واحد داده شده‌است. ثابت کنید، می‌توان این شکل را روی صفحه طوری جابه‌جا کرد که هیچ‌کدام از گره‌های شبکه در درون آن نباشد.

*۳۶. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی که بر یک مثلث مفروض، محیط شده‌اند.

۱۹۶۶

سال ششم

۱. کدام‌یک از این دو عدد بزرگترند:

$\frac{100\ldots001}{100\ldots001}$ (در صورت کسر ۱۹۶۵ صفر و در مخرج ۱۹۶۶ صفر)؛

یا $\frac{100\ldots001}{100\ldots001}$ (در صورت ۱۹۶۶ صفر و در مخرج ۱۹۶۷ صفر).

۲. در مسابقهٔ فوتبال، ۳۰ تیم شرکت کرده‌اند. ثابت کنید، در هر لحظه، می‌توان دو تیم پیدا کرد که، تعداد بازی‌هایی که انجام داده‌اند، برابر باشد.

۳. روی تختهٔ سیاه، همهٔ عددهای درست از ۱ تا ۱۹۶۶ را نوشته‌ایم. هر بار، دو عدد دلخواه را پاک می‌کنیم و، به‌جای آن‌ها، تفاضلشان را می‌نویسیم. ثابت کنید، هر چند بار و به هر نحوی این عمل را تکرار کنیم، نمی‌توانیم به حالتی برسیم که، روی تختهٔ سیاه، تنها عدد ۰ مانده باشد.

۴. مرکب سیاه را روی کاغذ سفید پاشیده‌ایم. ثابت کنید، روی صفحهٔ کاغذ، می‌توان سه نقطهٔ هم‌رنگ پیدا کرد که روی یک خط راست باشند و، درضمن، یکی از این نقطه‌ها، درست وسط دو نقطهٔ دیگر قرار گیرد.

۵. در یک مسابقهٔ بازی شطرنج، بیش از سه شطرنج‌باز شرکت دارند و هر کس با هر کس دیگر، به یک تعداد مسابقه می‌دهد. در مسابقه، ۲۶ دور بازی بود، بعد از ۱۳ دور، یکی از شرکت‌کنندگانِ در مسابقه، متوجه شد، تعداد امتیازهای او عددی فرد، ولی تعداد امتیازهای هریک از دیگر شرکت‌کنندگان، عددی زوج است. در این مسابقه، چند شطرنج‌باز شرکت داشته‌اند؟

سال هفتم

۶. همان مسالهٔ ۳.

۷. ثابت کنید، طول شعاع دایره، برابر است با تفاضل طول‌های دو پاره‌خط راست که یکی وتر کمان $\frac{۱}{۱۰}$ و دیگری وتر کمان $\frac{۳}{۱۰}$ دایره است.

۸. ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی n، عدد

$$n(۲n+۱)(۳n+۱)\ldots(۱۹۶۶n+۱)$$

بر هر عدد اول کوچکتر از ۱۹۶۶ بخش‌پذیر است.

۹. چه عددی می‌توان به‌جای * قرار داد تا مسالهٔ زیر تنها یک پاسخ داشته باشد: «روی صفحه، n خط راست وجود دارد که در * نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند. مقدار n را پیدا کنید».

۱۰. همان مسالهٔ ۴.

۱۱. n نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، هر مثلث به راس‌های این نقطه‌ها، مساحتی کمتر از ۱ دارد. ثابت کنید، همهٔ این نقطه‌ها را، می‌توان در مثلثی به مساحت ۴ جا داد.

سال هشتم

۱۲. همان مسالهٔ ۹.

۱۳. همان مسالهٔ ۸.

۱۴. همان مسالهٔ ۱۱.

۱۵. ثابت کنید، مجموع همهٔ بخشیاب‌های $n^۲$، عددی فرد است.

۱۶. سه زاویه از یک چهارضلعی، منفرجه‌اند. ثابت کنید، از دو قطر چهارضلعی، قطر با طول بزرگتر، از راس زاویهٔ حاده می‌گذرد.

۱۷. عددهای x_1، x_2، x_3، ...، به این ترتیب ساخته شده‌اند:

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{x_1^4 + 1}{5x_1}; x_3 = \frac{x_2^4 + 1}{5x_2}, \ldots$$

ثابت کنید، ساختمان این عددها را تا هر جا ادامه دهیم، همهٔ عددهای حاصل، کمتر از $\frac{1}{5}$ و بیشتر از ۲ نیستند.

سال نهم

۱۸. از مستطیل مفروض، یک لوزی با حداکثر مساحت ممکن جدا کنید.

۱۹. این معادله، در مجموعهٔ عددهای درست، چند جواب دارد:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$$

۲۰. ثابت کنید، می‌توان صفحه را با نه رنگ مختلف چنان رنگ کرد که، فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ هم‌رنگ، با ۱۹۶۶ متر فرق داشته باشد.

۲۱. p و q، عددهایی اول‌اند. $q^3 - 1$ بر p؛ $p - 1$ بر q بخش‌پذیر است. ثابت کنید: $p = 1 + q + q^2$.

۲۲. ضلع‌های مثلث ABC، وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی هستند که در بیرون مثلث ABC ساخته شده‌اند. این مثلث‌ها را ABD، BCE و ACF می‌نامیم. ثابت کنید، پاره‌خط‌های راست DE و BF بر هم عمودند و طول‌هایی برابر دارند.

*۲۳. k رنگ در اختیار داریم. با چند روش می‌توان ضلع‌های یک n ضلعی منتظم را رنگ کرد، به نحوی که ضلع‌های مجاور، رنگ‌های مختلف داشته باشند (چندضلعی را نمی‌توان چرخاند)؟

سال‌های دهم و یازدهم

۲۴. همان مسالهٔ ۱۸.

۲۵. همان مسالهٔ ۱۹.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۰ برای ۱۱ رنگ.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۳.

۲۸. به‌ازای چه ε، می‌توان پاره‌خط راست به طول $۲a$ را به n پاره‌خط راست تقسیم کرد که طول هریک از آن‌ها از a بیشتر نباشد، به نحوی که از آن‌ها نتوان پاره‌خط راستی ساخت که طول آن برابر a نباشد و از ε کوچکتر باشد؟

۲۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱ \\ x_۱^۲ + x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ = ۱ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_۱^n + x_۲^n + \ldots + x_n^n = ۱ \end{cases}$$

دور نهایی

۳۰. m و n عددهایی طبیعی‌اند؛ درضمن، m عددی فرد است. ثابت کنید، $۲^m - ۱$ و $۲^n + ۱$ نسبت به هم اول‌اند.

*۳۱. T_n را بیشترین مساحتی می‌گیریم که یک n ضلعی محاط در یک k ضلعی کوژ می‌تواند داشته باشد ($۳ < n < k$). ثابت کنید، برای هر $n < k$ داریم:

$$T_{n-۱} + T_{n+۱} \leq ۲T_n$$

۳۲. از دنبالهٔ عددهای

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots, ۲^n$$

به تعداد $\left[\frac{۲^n - ۳}{۳}\right]$ عدد انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، در بین عددهای باقی‌مانده، دو عدد پیدا می‌شود که یکی دو برابر دیگری است.

۳۳. «تجزیه مربع» را، به تقسیم آن، به مستطیل‌هایی می‌گوییم که ضلع‌های آن‌ها موازی با ضلع‌های مربع و تعداد آن‌ها محدود باشد. تجزیه را ساده می‌گوییم، وقتی از تقسیم بخش‌های بزرگتر به‌دست نیامده باشد (یعنی دو یا چند مستطیل آن، نتوانند مستطیل بزرگتری تشکیل دهند). به‌ازای چه مقدارهایی از n، تجزیهٔ سادهٔ مربع به n مستطیل ممکن است؟

*۳۴. n نقطه روی صفحه داده شده است. بعضی از آن‌ها را به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راستی به هم وصل کرده‌ایم، به نحوی که، از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، بتوان تنها به یک طریق رسید. ثابت کنید، برای این منظور، تعداد $n^{n-۲}$ روش برای وصل نقطه‌ها به یکدیگر وجود دارد.

*۳۵. یک nضلعی با ضلع‌های به طول‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n در دایره‌ای محاط شده‌است؛ درضمن، مرکز دایره در درون چندضلعی واقع است. ثابت کنید، این دایره را می‌توان به‌وسیلهٔ n دایرهٔ با شعاع‌های $\frac{na_۱}{۶}$، $\frac{na_۲}{۶}$، ...، $\frac{na_n}{۶}$ پوشاند.

۱۹۶۷

سال ششم

۱. گنجایش ظرف‌های مکعبی شکل به نسبت (۲۷ : ۸ : ۱) و حجم مایع درون آن‌ها، به نسبت (۳ : ۲ : ۱) است. مقداری از مایع ظرف اول در ظرف دوم ریخته‌ایم و، سپس، از ظرف دوم به ظرف سوم، تا جایی که سطح مایع در هر سه ظرف یکسان شود. سپس، از ظرف اول، $۱۲۸\frac{۴}{۷}$ لیتر مایع به ظرف دوم، ریخته‌ایم و، بعد، از ظرف دوم به ظرف اول آن‌قدر مایع برگرداندیم تا ارتفاع ستون مایع در ظرف اول دو برابر ارتفاع ستون مایع در

ظرف دوم شود. معلوم شد، در ظرف اول ۱۰۰ لیتر کمتر از آن‌چه در آغاز در آن بوده، وجود دارد. در آغاز، در هر ظرف چقدر مایع بوده‌است؟

۲. عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمارِ یک ساعت، در شبانه‌روز چند بار بر هم منطبق می‌شوند؟

۳. ثابت کنید، در شهر لنین‌گراد، دو نفر پیدا می‌شود که، تعداد آشنایان لنین‌گرادی آن‌ها، یکی است.

۴. هریک از هشت عدد طبیعی مختلف، از ۱۶ کوچکتر است. ثابت کنید، در بین تفاضل‌های دو به دوی آن‌ها، دست‌کم سه عدد برابر وجود دارد.

۵. فاصلهٔ از A تا B، برابر ۱۰۰ کیلومتر است. در یک لحظه، دو دوچرخه‌سوار، اولی با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت از A به طرف B؛ و دومی با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت از B به طرف A حرکت کردند. همراه با اولی، مگسی هم، با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت به پرواز درآمد. مگس تا برخورد با دوچرخه‌سوار دوم به طرف B رفت و، سپس، به طرف A برگشت تا به دوچرخه‌سوار اول رسید؛ دوباره، بعد از رسیدن به اولی برگشت و به طرف دوچرخه‌سوار دوم آمد و غیره. وقتی دو دوچرخه‌سوار به هم برسند، این مگس، چند کیلومتر از A به سمت B پرواز کرده‌است؟

سال هفتم

۶. ذوزنقه را با معلوم بودن چهار ضلع آن رسم کنید.

۷. ثابت کنید:

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots x^{100})(1 + x^{102}) - 102x^{101} \geq 0$$

۸. M وسط ضلع AB و N وسط ضلع CD، از چهارضلعی $ABCD$ است. خط‌های راست AD و BC، خط راست MN را

به‌ترتیب، در P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$\text{اگر } \widehat{BQM} = \widehat{APM} \text{ ، آن‌وقت } |BC| = |AD|$$

۹. همان مسالهٔ ۴.

۱۰. از راس‌های A و C در مستطیل $ABCD$، کمانی از دایره‌ای را گذرانده‌ایم که، مرکز آن، در درون مستطیل واقع است. خط راستی موازی AB رسم کنید که BC را در نقطهٔ P، AD را در نقطهٔ Q و کمان AC را در نقطهٔ R طوری قطع کند که مجموع مساحت‌های شکل‌های AQR و CPR، کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۱. همان مسالهٔ ۵.

سال هشتم

۱۲. x و y، ریشه‌های معادلهٔ $t^{۲} - ct - c = ۰$ هستند. ثابت کنید: $x^{۳} + y^{۳} + (xy)^{۳} \geq ۰$.

۱۳. دو دایره، در نقطهٔ A، مماس داخل‌اند. از نقطهٔ B واقع بر محیط دایرهٔ درونی $(B \neq A)$، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم تا دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید، AB نیمساز زاویهٔ CAD است.

۱۴. ثابت کنید $۲^{۳۰۰} + ۱$ بر $۳^{۱۰۱}$ بخش‌پذیر است.

۱۵. همان مسالهٔ ۱۰.

۱۶. در گروهی از آدم‌ها، هرکس یک دشمن و یک دوست دارد. ثابت کنید، این آدم‌ها را می‌توان به دو دسته چنان تقسیم کرد که در هر دسته، نه دشمن‌ها وجود داشته باشند و نه دوست‌ها.

۱۷. دربارهٔ عددهای $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، $a_{۱۰۰}$ می‌دانیم:

$$a_{۱} - ۲a_{۲} + a_{۳} \leq ۰,$$

$$a_2 - 2a_3 + a_4 \le 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{98} - 2a_{99} + a_{100} \le 0$$

در ضمن $a_1 = a_{100} \ge 0$. ثابت کنید، همهٔ این عددها غیر منفی‌اند.

سال نهم

۱۸. عددهای فرد متوالی p و q مفروض‌اند. ثابت کنید، $p^p + q^q$ بر $p + q$ بخش‌پذیر است.

۱۹. مثلث ABC مفروض است. به مرکز B، دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر ضلع AC مماس باشد. از راس‌های A و C، مماس‌های AM و CP را بر این دایره رسم می‌کنیم. خط راست MP، خط راست AB را در نقطهٔ E و خط راست BC را در نقطهٔ H قطع می‌کند. ثابت کنید، AH و CE، ارتفاع‌های مثلث ABC هستند.

۲۰. دنباله‌ای شامل k عدد در اختیار داریم. تصمیم می‌گیریم، به جای هر عدد، مجموع همهٔ عددهای واقع در سمت راست آن را قرار دهیم. ثابت کنید، اگر این عمل را به تعداد کافی تکرار کنیم، آن‌وقت، دنبالهٔ دو بار پشت سرهم تکرار می‌شود.

۲۱. از ۱۰۶ نقطه که هیچ سه نقطه‌ای از آن‌ها بر یک خط راست نیستند، چهار نقطه راس‌های یک مربع به ضلع واحد را تشکیل داده‌اند، و بقیهٔ نقطه‌ها در داخل این مربع‌اند. ثابت کنید، دست‌کم ۱۰۷ مثلث وجود دارد که، راس‌های آن‌ها، روی این نقطه‌هاست و مساحتی دارند که از ۰/۰۱ تجاوز نمی‌کند.

۲۲. $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge 0$ و B، بزرگترین عدد از عددهای

$|b_1|$، $|b_1 + b_2|$، ...، $|b_1 + b_2 + \ldots + b_n|$ است. ثابت کنید:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| \leq B a_1$$

۲۳. در جنگلی به وسعت یک کیلومتر مربع و به شکل چندضلعی کوژ، مردی راه را گم کرده‌است. ثابت کنید، این مرد، با پیمودن ۲۵۰۷ متر، می‌تواند از جنگل خارج شود.

سال دهم

۲۴. p و q دو عدد فرد پشت سرهم‌اند. ثابت کنید $p^q + q^p$ بر $p+q$ بخش‌پذیر است.

۲۵. نقطهٔ M در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع است. تصویرهای قائم نقطهٔ M بر ضلع‌های BC، AC و AB را، به‌ترتیب، A_1، B_1 و C_1 می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\begin{aligned}|AB_1| \cdot |BC_1| + |BC_1| \cdot |CA_1| + |CA_1| \cdot |AB_1| = \\ = |AC_1| \cdot |BA_1| + |BA_1| \cdot |CB_1| + |CB_1| \cdot |AC_1|\end{aligned}$$

۲۶. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۲.

۲۸. همان مسالهٔ ۲۳.

۲۹. ثابت کنید، روی یک صفحه، چنان دستگاه محدودی از نقطه‌ها وجود دارد، که برای هر نقطه از این دستگاه، دست‌کم صد نقطهٔ دستگاه پیدا شود که از این نقطه، به یک فاصله باشند.

دور نهایی

۳۰. دو دایره به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$، یکدیگر را در نقطه‌های A و D قطع کرده‌اند. از نقطهٔ A، مماس‌هایی بر دو دایره رسم کرده‌ایم تا دایره‌های دیگر را در نقطه‌های B و C قطع کنند. ثابت کنید:

$$|AB|^۲ : |AC|^۲ = |BD| : |CD|$$

۳۱. دو چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، چنان‌اند که با هم برابر عددی درست می‌شوند (یعنی، اگر اولی به‌ازای عددی، برابر یک عدد درست باشد، دومی هم به‌ازای همان عدد، برابر با عددی درست خواهد شد و برعکس). ثابت کنید، یا مجموع و یا تفاضل آن‌ها، مقداری است ثابت.

*۳۲. روی هر ضلع مثلث، نقطه‌ای انتخاب و آن‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. به این ترتیب، چهار مثلث کوچک به دست می‌آید. می‌دانیم، این چهار مثلث، محیط‌هایی برابر دارند. ثابت کنید، نقطه‌های انتخابی، در وسط ضلع‌ها واقع‌اند.

۳۳. ۱۸ نفر در جایی گرد هم آمده‌اند. ثابت کنید، در بین آن‌ها، می‌توان چهار نفر جدا کرد که یا دو به دو یکدیگر را بشناسند و یا دو به دو با هم ناآشنا باشند.

*۳۴. در یک جدول $n \times n$، عددهای غیرمنفی را چنان نوشته‌ایم که، مجموع عددهای هر سطر و، همچنین، مجموع عددهای هر ستون، برابر واحد شده است. ثابت کنید، می‌توان n عدد مثبت پیدا کرد که، هیچ دوتایی از آن‌ها، در یک سطر یا یک ستون، قرار نگرفته باشند.

۳۵. این دنباله داده شده است:

$$۰ < a_۰ < a_۱ < a_۲ < \ldots < a_{۲۵} < a_{۲۶}$$

درضمن $a_n = ۲\sqrt{a_{n-۱}^۲ - a_{n-۱}^۴}$ و $۰ < n \leq ۲۶$، ثابت کنید:

$$a_۰ < ۷ \times ۱۰^{-۸}$$

۱۹۶۸

سال ششم

۱. دانش‌آموزی، یک کیف، یک خودنویس و یک کتاب خرید.

اگر قیمت کیف $\frac{۱}{۵}$، قیمت خودکار $\frac{۱}{۲}$ و قیمت کتاب $\frac{۲}{۵}$ قیمت فعلی آن بود، آن‌وقت، دانش‌آموز برای همهٔ آن‌ها ۲ روبل می‌پرداخت. اگر کیف $\frac{۱}{۲}$، خودکار $\frac{۱}{۴}$ و کتاب $\frac{۱}{۳}$ قیمت کنونی خود را داشتند، آن‌وقت، برای خرید آن‌ها، ۳ روبل لازم بود مبلغ خرید دانش‌آموز، درواقع، چقدر بوده‌است؟

۲. از این دو عدد، کدام و چقدر بزرگتر است؟

$$\underbrace{۸۸۸\ldots۸۸}_{۱۹\text{رقم}}\times\underbrace{۳۳۳\ldots۳۳}_{۶۸\text{رقم}}$$

یا

$$\underbrace{۴۴۴\ldots۴۴}_{۱۹\text{رقم}}\times\underbrace{۶۶۶\ldots۶۷}_{۶۸\text{رقم}}$$

۳. فاصلهٔ بین دو شهر A و B برابر ۱۹۴ کیلومتر، فاصلهٔ بین دو شهر B و C، برابر ۱۱۶ کیلومتر، فاصلهٔ بین دو شهر C و D، برابر ۴۵۱ کیلومتر و فاصلهٔ بین دو شهر D و A، برابر ۱۴۱ کیلومتر است. فاصلهٔ بین دو شهر B و D چقدر است؟

۴. چهار چیز، با وزن‌های مختلف و یک ترازو (بدون هیچ وزنه‌ای) در اختیار داریم. چگونه می‌توان، با پنج بار استفاده از ترازو، این چیزها را نسبت به وزن آن‌ها، ردیف کرد؟

۵. چند تیم، در مسابقهٔ والیبال شرکت کردند. تیم A، به‌شرطی نیرومندتر از تیم B به شمار می‌آید که یا از تیم B ببرد و یا تیمی مثل C وجود داشته

باشد که تیم A از C و تیم C از B ببرد. ثابت کنید، اگر تیم T، تیم پیروز مسابقه باشد، آن‌وقت این تیم از همهٔ تیم‌های دیگر، نیرومندتر است.

۶. در مسالهٔ ۱ ، معلوم کنید، کدام گران‌تر است: کیف یا خودکار؟

سال هفتم

۷. در مربعی، یک مستطیل (که طول و عرض نابرابر دارد) محاط کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع طول‌های طول و عرض آن (یعنی نصف محیط مستطیل)، برابر است با طول قطر مربع.

۸. پنج عدد پیدا کنید که مجموع دوبه‌دوی آن‌ها برابر عددهای ۰، ۲، ۴، ۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۷ باشد.

۹. در یک عدد ۱۰۰۰رقمی، همهٔ رقم‌ها، به‌جز یکی، برابر ۵ هستند. ثابت کنید، این عدد نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

۱۰. همان مسالهٔ ۵.

۱۱. در پنج‌ضلعی $ABCDE$، وسط ضلع AB را K، وسط ضلع BC را L، وسط ضلع CD را M، وسط ضلع DE را N، وسط پاره‌خط راست KM را P و وسط پاره‌خط راست LN را Q می‌نامیم. ثابت کنید، پاره‌خط راست PQ با پاره‌خط راست AE موازی است و طولی برابر یک‌چهارم طول آن دارد.

۱۲. در دایرهٔ به شعاع برابر ۳، چند دایره، به دلخواه، جا داده‌ایم. مجموع طول‌های شعاع‌های این دایره‌ها، برابر است با ۲۵. ثابت کنید، خط راستی پیدا می‌شود که، دست‌کم، ۹ دایرهٔ داخلی را قطع می‌کند.

سال هشتم

۱۳. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، طول قطر AC از طول قطر BD بزرگتر است. نقطهٔ M، روی قطر AC چنان است که از راس‌های

چهارضلعی $BCDM$، می‌توان یک دایره گذراند. ثابت کنید، خط راست BD، مماس مشترک دایره‌های محیطی دو مثلث ABM و ADM است.

۱۴. a عددی فرد است و x و y، ریشه‌های معادلهٔ

$$t^{۲} + at - ۱ = ۰$$

هستند. ثابت کنید $x^{۴} + y^{۴}$ و $x^{۵} + y^{۵}$، دو عدد درستِ نسبت به هم اول، هستند.

۱۵. قرینهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی را نسبت به یکی از ضلع‌های آن پیدا کرده‌ایم. قرینهٔ مثلث جدید را هم، نسبت به یکی از ضلع‌های خودش، به‌دست آورده‌ایم. این عمل را، چند بار تکرار کرده‌ایم. در پایان، معلوم شد، آخرین مثلث، بر مثلث اصلی منطبق شده‌است. ثابت کنید، تعداد عمل‌های مربوط به پیدا کردن قرینه، عدد زوج است.

۱۶. همان مسالهٔ ۱۲.

۱۷. همهٔ عددهای دورقمی را، که به صفر ختم نشده‌اند، طوری پشت سر هم نوشته‌ایم که هر عدد بعدی، با رقمی آغاز شود که عدد قبلی به آن ختم شده‌است. ثابت کنید، چنین روشی، برای نوشتن عددها، ممکن است. از بین همهٔ عددهای چندرقمی که به این ترتیب می‌توان به‌دست آورد، مجموع بزرگترین و کوچکترین عدد را پیدا کنید.

*۱۸. همهٔ عددهای ۱۰رقمی را که می‌توان با رقم‌های ۱ و ۲ و ۳ نوشت، یکی زیر دیگری می‌نویسیم. به دنبال هر عدد، باز هم رقمی از رقم‌های ۱، ۲ یا ۳ را می‌آوریم؛ درضمن، به‌دنبال عدد ۱ . . . ۱۱۱، رقم ۱، به دنبال ۲ . . . ۲۲۲ رقم ۲ و به‌دنبال ۳ . . . ۳۳۳ رقم ۳ آمده است.

می‌دانیم، به هر دو عددی که در همهٔ مرتبه‌های ده‌گانه اختلاف دارند، رقم‌های مختلفی اضافه شده‌است. ثابت کنید ستون رقم‌هایی که به این ترتیب نوشته شده‌است، بر یکی از ستون‌های ده‌گانه قبلی منطبق است.

سال نهم

۱۹. این معادله را حل کنید:

$$x = ۱ - ۱۹۶۸(۱ - ۱۹۶۸x^{۲})^{۲}$$

۲۰. چهارضلعی را با معلوم بودن نقطه‌های وسط سه ضلع آن، رسم کنید، به‌شرطی که بدانیم، این سه ضلع چهارضلعی (که نقطه‌های وسط آن‌ها داده شده‌است)، طولی برابر دارند. درضمن، از بین سه نقطهٔ مفروض، می‌دانیم کدام نقطه، مربوط به ضلعی است که بین دو ضلع دیگر قرار دارد.

۲۱. صفحهٔ کاغذ شطرنجی بی‌پایانی را، با ۹ رنگ مختلف رنگ کرده‌ایم. هر خانه یک رنگ دارد و، درضمن، از همهٔ رنگ‌ها استفاده شده‌است. دو رنگ را وقتی مجاور می‌نامیم که دو خانه با یک ضلع مشترک پیدا شود که با این دو رنگ، مشخص شده‌باشند. حداقل تعداد زوج رنگ‌های مجاور، چقدر می‌تواند باشد؟

۲۲. در مثلثی با زاویه‌های حاده، دو دایرهٔ مماس بر هم رسم کرده‌ایم، به نحوی که یکی از آن‌ها بر دو ضلع AC و BC و دیگری بر دو ضلع AB و BC مماس است. ثابت کنید، مجموع طول‌های شعاع‌های این دو دایره، از طول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث بیشتر است.

۲۳. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۱!(n - ۱)! + ۲!(n - ۲)! + \ldots + (n - ۱)!۱! \leq \frac{۲}{۳}n!$$

***۲۴.** ثابت کنید، نمی‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع را به چند مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم کرد، به‌نحوی که، این مثلث‌ها، دو به دو با هم نابرابر باشند.

سال دهم

۲۵. مثلث‌های ABC، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با مساحت‌های S، S_1 و S_2، چنان‌اند که داریم:

$$|AB| = |A_1B_1| + |A_2B_2|, |BC| = |B_1C_1| + |B_2C_2|,$$
$$|AC| = |A_1C_1| + |A_2C_2|$$

ثابت کنید: $S \geq 4\sqrt{S_1S_2}$.

۲۶. این دستگاه معادله‌ها، چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2, \\ \cos x_2 = x_3, \\ \dots\dots\dots \\ \cos x_n = x_1 \end{cases}$$

۲۷. ABC و $A_1B_1C_1$، مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع و هم‌جهت‌اند. می‌دانیم: $|AA_1| = a$ و $|BB_1| = b$. زاویه بین خط‌های راست AA_1 و BB_1، برابر است با α. مطلوب است محاسبهٔ طول پاره‌خط راست CC_1.

۲۸. همان مسالهٔ ۲۱، برای ۱۰ رنگ.

*۲۹. ثابت کنید، چهاروجهی منتظم را، نمی‌توان به چند چهاروجهی منتظم دوبه‌دو نابرابر تقسیم کرد.

*۳۰. a_1، a_2، ...، a_n عددهای مثبت و k عدد طبیعی است. ثابت کنید:

$$(\sqrt[k]{2}-1)(a_1+a_2+\dots+a_n) \leq \sqrt[k]{a_1^k \cdot 2 + a_2^k \cdot 2^2 + \dots + c_n^k \cdot 2^n}$$

دور نهایی

۳۱. در دایره‌ای، دو وتر AB و AC داده شده‌اند. از نقطهٔ M وسط کمان BAC، عمودی بر.وتر با طول بزرگتر فرود آورده‌ایم. ثابت کنید، پای عمود، خط شکستهٔ BAC را نصف می‌کند.

۳۲. n نقطه روی محیط دایره داده شده‌است. دو نفر، به این ترتیب، باهم بازی می‌کنند: مداد را از یک نقطه به نقطهٔ دیگر (روی پاره‌خط راستی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند) می‌برند. حرکت، به‌نوبت انجام می‌گیرد؛ درضمن، نمی‌توان روی یک پاره‌خط راست، دو بار حرکت کرد. کسی این بازی را باخته است که نتواند حرکت کند. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کند ـ به‌شرط بازی درست ـ برنده می‌شود.

۳۳. روی یک صفحه، m نقطه داده شده‌است؛ درضمن، همهٔ آن‌ها، روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید، دست‌کم، به تعداد

$$\frac{۱}{۲}(m-۱)(m-۲)$$

مثلث می‌توان رسم کرد که راس‌های آن‌ها روی این نقطه‌ها باشند.

۳۴. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، عددهایی حقیقی‌اند؛ M، بزرگترین و m کوچکترینِ این عددهاست. ثابت کنید:

$$(p-۱)(M-m) \leq \sum_{i,j}(a_i-a_j) \leq p^۲\frac{M-m}{۴}$$

۳۵. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های یک نقطهٔ درونی چهاروجهی تا راس‌های آن، از محیط چهاروجهی کمتر است.

*۳۶. عدد درست n را طوری پیدا کنید که، بین رقم‌های عدد ۵^n (در عدد نویسی به مبنای ۱۰)، دست کم ۱۹۶۸ رقم برابر صفرِ پشت سرهم وجود داشته باشد.

*۳۷. چندوجهی کوژی داده شده است که، در هر راس آن، سه وجه به هم رسیده‌اند. هر وجه را با یکی از چهار رنگی که در اختیار داریم، رنگ

کرده‌ایم؛ درضمن، دووجهی که یال مشترک دارند، با دو رنگ مختلف‌اند. ثابت کنید، تعداد وجه‌های با تعداد فرد ضلع‌ها که رنگ اول را دارند، و تعداد وجه‌های با تعداد فرد ضلع‌ها که رنگ دوم را دارند، یا هردو زوج‌اند و یا هردو فرد.

۳۸. هر دنبالهٔ با پایان از حرف‌های A و B را، یک واژه می‌نامیم. دو عمل روی واژه‌ها می‌توان انجام داد:

اول ـ در هرجای واژه، A را بگذاریم و در پایان واژه، B را بنویسیم،

دوم ـ در هرجای واژه، AB را بگذاریم.

ثابت کنید، واژه‌هایی که می‌توان از واژهٔ AB، با عمل اول به‌دست آورد، همان واژه‌هایی است که می‌توان از واژه AB، با استفاده از عمل دوم پیدا کرد.

۱۹۶۹

سال ششم

۱. هشت رُخ را در خانه‌های صفحهٔ شطرنج طوری قرار داده‌ایم که هیچ دوتایی از آن‌ها، یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید، تعداد رُخ‌های خانه‌های سیاه، عددی زوج است.

۲. در جدول ۳ × ۳، عددهایی طبیعی را گذاشته‌ایم (شکل ۴). کولیا و پِتیا، هرکدام چهار عدد را خط زده‌اند. معلوم شد، مجموع عددهایی که پتیا خط زده است، دو برابر مجموع عددهایی است که کولیا خط زده بود. کدام عدد، خط نخورده باقی مانده‌است؟

۳. میشا و ساشا، نیمروز و با دوچرخه، از شهر A به طرف شهر B حرکت کردند. در همان لحظهٔ حرکت آن‌ها، وانیا از B به طرف A حرکت کرد. سه نفر، سرعت‌های متفاوتی داشتند، ولی سرعت هرکدام، در طول راه

۴	۱۲	۸
۱۳	۲۴	۱۴
۷	۵	۲۳

شکل ۴

ثابت بود. ساعت یک بعد از نیمروز، ساشا درست در نقطهٔ وسط بین میشا و وانیا بود. ولی در ساعت یک‌ونیم پس از نیمروز، وانیا در نقطهٔ وسط بین میشا و ساشا قرار داشت. میشا در چه ساعتی، در نقطهٔ وسط بین ساشا و وانیا خواهد بود؟

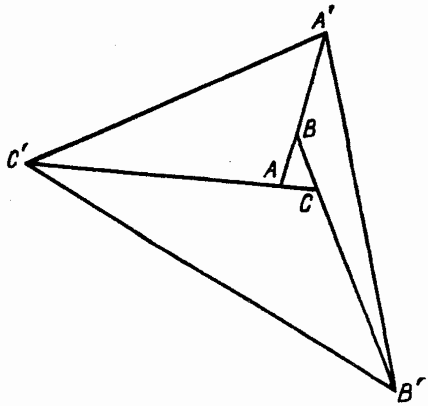
۴. ۳۵ تودهٔ گردو روی زمین چیده شده‌است. تصمیم گرفته می‌شود، در یک زمان، به ۲۳ توده، و به هر کدام یک گردو اضافه شود. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان تعداد گردوها را، در هر ۳۵ توده، برابر کرد.

۵. در هر سطر از ۶۴ سطر، یک عدد شش‌رقمی نوشته‌ایم که، همهٔ آن‌ها، تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ هستند. می‌دانیم، همهٔ این عددها با هم فرق دارند و، درضمن، هردو عدد مجاور، تنها در یکی از مرتبه‌ها، با هم اختلاف دارند. چگونه می‌توان این عددها را نوشت؟

۶. به دو ریاضی‌دان، دو عدد طبیعی دادند و به آن‌ها اطلاع دادند که این دو عدد، یک واحد با هم اختلاف دارند. آن‌ها به‌نوبت، از یکدیگر تنها یک چیز می‌پرسند: «آیا از عدد من اطلاع داری؟». ثابت کنید، دیر یا زود، یکی از دو ریاضی‌دان، پاسخ مثبت می‌دهد.

سال هفتم

۷. همان مسالهٔ ۱.



شکل ۵

۸. ضلع‌های مثلث ABC را، شبیه شکل ۵ ادامه داده‌ایم و می‌دانیم:

$$|AA'| = ۳|AB|, |BB'| = ۵|BC|, |CC'| = ۸|CA|$$

نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث $A'B'C'$ چقدر است؟

۹. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{۲}{x^۲ - ۱} + \frac{۴}{x^۲ - ۴} + \frac{۶}{x^۲ - ۹} + \ldots + \frac{۲۰}{x^۲ - ۱۰۰} =$$
$$= ۱۱ \left[\frac{۱}{(x - ۱)(x + ۱۰)} + \frac{۱}{(x - ۲)(x + ۹)} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{۱}{(x - ۱۰)(x + ۱)} \right]$$

*۱۰. در مرکز یک زمین مربعی، گرگ؛ و در هر راس مربع، یک سگ ایستاده‌اند. گرگ می‌تواند به هر سمتی برود، ولی سگ‌ها، تنها روی ضلع‌های

مربع می‌توانند حرکت کنند. می‌دانیم، گرگ از عهدهٔ یک سگ برمی‌آید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می‌شود. حداکثر سرعت سگ، یک‌ونیم برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگ‌ها می‌توانند مانع فرار گرگ از درون مربع به بیرون آن شوند.

۱۱. چهار روستا که در چهار راس مربعی به ضلع برابر ۱۰ کیلومتر واقع‌اند، یک شرکت تعاونی روستایی تشکیل داده‌اند. شرکت تعاونی، این امکان را دارد که ۲۸ کیلومتر راه بسازد. آیا شرکت تعاونی می‌تواند، جاده‌ها را طوری ایجاد کند که، از طریق آن‌ها بتوان از هر روستایی به هر روستای دیگر رفت؟

۱۲. همان مسالهٔ ۶.

سال هشتم

۱۳. خواسته‌ایم روی قاعدهٔ AD از ذوزنقهٔ $ABCD$، نقطهٔ E را طوری پیدا کنیم که مثلث‌های ABE، BCE و CDE، محیط‌هایی برابر داشته‌باشند. ثابت کنید $|BC| = \frac{۱}{۲}|AD|$.

۱۴. در یک پنج‌ضلعی کوژ، طول همهٔ ضلع‌ها، یکی است. روی قطر بزرگتر این پنج‌ضلعی، نقطه‌ای پیدا کنید که، از آن‌جا، هر ضلع، به زاویه‌ای دیده می‌شود که از ۹۰ درجه بیشتر نباشد.

۱۵. خط‌های هوایی کشور، طوری طرح‌ریزی شده است که از هر شهر، با بیش از سه طریق به شهرهای دیگر نمی‌توان رفت، درضمن، می‌توان با حداکثر یک توقف بین راه، از هر شهر به شهر دیگر پرواز کرد. این کشور، حداکثر چند شهر می‌تواند داشته باشد؟

۱۶. همان مسالهٔ ۱۰.

۱۷. سه عدد سه‌رقمی مختلف در اختیار داریم که رقم سمت چپ آن‌ها، یکی است. درضمن می‌دانیم، مجموع این سه عدد بر هریک از عددها،

بخش‌پذیر است. این عددها را پیدا کنید.

۱۸. دنبالهٔ با پایانی از صفرها و واحدها، با دو ویژگی داده شده‌است:

۱) اگر در دو جای مختلف، ولی دلخواه دنباله، در هرکدام، پنج رقم متوالی انتخاب کنیم، این «عددهای» پنج‌رقمی با هم اختلاف داشته‌باشند (این دو «عدد» پنج‌رقمی را، می‌توان طوری انتخاب کرد که، بخشی از آن‌ها، روی هم قرار گرفته باشند).

۲) اگر رقم دلخواهی به سمت راست دنباله اضافه کنیم، آن‌وقت ویژگی اول برقرار نباشد.

ثابت کنید، چهار رقم نخست این دنباله، بر چهار رقم پایانی آن، منطبق است.

سال نهم

۱۹. A و B، دو نقطه از محیط دایره؛ C، نقطهٔ وسط کمان AB و P، نقطه‌ای از درون دایره است و، در ضمن $|BP| > |AP|$، ثابت کنید: $\widehat{APC} > \widehat{BPC}$.

۲۰. در لنین‌گراد، بلیت تراموا را «خوش یوم» می‌دانند، وقتی که مجموع سه رقم اول آن، با مجموع سه رقم آخر، برابر باشد. ولی در مسکو، بلیتی را «خوش یوم» می‌دانند که، در آن، مجموع رقم‌های ردیف زوج، با مجموع رقم‌های ردیف فرد برابر باشد. چند بلیت وجود دارد که هم برای لنین‌گرادی‌ها و هم برای مسکوی‌ها، «خوش یوم» باشد (بلیتِ با شمارهٔ ۰۰۰۰۰۰ را هم درنظر بگیرید)؟.

۲۱. m و n عددهایی طبیعی‌اند؛ درضمن $\frac{m}{n} < \sqrt{۲}$. ثابت کنید:

$$\frac{m}{n} < \sqrt{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۴m^{۲}}\right)$$

۲۲. مکان هندسی مرکزهای مستطیل‌هایی را پیدا کنید که بر یک چهارضلعی کوژ مفروض محیط‌اند.

۲۳. $k > ۱$، عددی طبیعی است. دنبالهٔ (x_n) را، به این ترتیب، ساخته‌ایم:

$$x_۱ = ۱, x_۲ = k, x_n = kx_{n-۱} - x_{n-۲} (n > ۲)$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی m وجود دارد، به‌نحوی که x_m بر x_n بخش‌پذیر باشد $(m > n)$.

*۲۴. ۶۰ نفر برای ۱۵ روز، وارد خانهٔ استراحت شدند. در آن‌جا، هر روز چهار مرتبه سر میز غذا حاضر می‌شوند. میز غذاخوری، ۶۱ جا دارد. مدیر استراحت‌گاه، همیشه در جای ثابت خود می‌نشیند. مدیر می‌خواهد با همهٔ مهمانان آشنا شود و، درضمن، همهٔ آن‌ها را با هم آشنا کند. برای این منظور، تصمیم می‌گیرد، هر بار مهمانان را به ردیف تازه‌ای پشت میز قرار دهد، به‌نحوی که هیچ کس، دو بار در یک جا ننشیند و هر بار در سمت راست مدیر و در سمت راست هر مهمان، آدم جدیدی نشسته باشد. چگونه این تصمیم را اجرا کند؟

سال دهم

۲۵. در چهاروجهی $ABCD$، یال AB بر یال CD عمود است و O، نقطهٔ دلخواهی از فضاست. ثابت کنید، مجموع مجذورهای فاصله‌های از نقطهٔ O تا وسط یال‌های AC و BD، برابر است با مجموع مجذورهای فاصله‌های از نقطهٔ O تا وسط یال‌های AD و BC.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۴.

۲۸. $k > ۱$، عددی طبیعی است. دنباله (x_n) را به این ترتیب

ساخته‌ایم:

$$x_{1} = 1, x_{2} = k, x_n = kx_{n-1} - x_{n-2} (n > 2)$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی $m > n$ وجود دارد، به‌نحوی که $x_m - 1$ و x_n، نسبت به هم اول باشند.

۲۹. دنباله‌ای از عددهای طبیعی بسازید که، از تفاضل بین جمله‌های آن، همهٔ عددهای طبیعی و، درضمن، هرکدام تنها یکبار به‌دست آید

*۳۰.** AA'، BB' و CC'، ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. ABC مثلثی است با زاویه‌های حاده و ضلع‌های با طول‌های a، b و c. A_1 و A_2، به‌ترتیب، تصویرهای نقطهٔ A' روی ضلع‌های AB و AC؛ B_1 و B_2 تصویرهای نقطهٔ B' بر ضلع‌های BC و BA؛ C_1 و C_2، به‌ترتیب، تصویرهای نقطه C' روی ضلع‌های CA و CB هستند. ثابت کنید:

$$a^{2} \cdot S_{A'A_1A_2} + b^{2} \cdot S_{B'B_1B_2} + c^{2} \cdot S_{C'C_1C_2} = \frac{S^{3}}{R^{2}}$$

که در آن، S مساحت مثلث ABC و R طول شعاع دایرهٔ محیطی آن است.

دور نهایی

۳۱. دست‌کم، چند دایرهٔ به شعاع واحد لازم است تا بتوان، با آن‌ها، دایرهٔ به شعاع ۱/۵ را به‌طور کامل پوشاند؟

*۳۲.** ۵ گانگستر، جایی دور هم جمع شده‌اند. آن‌ها با هم و در یک لحظه، به روی هم تیراندازی می‌کنند؛ درضمن، هرکس به طرف نزدیکترین فرد یا یکی از نزدیکترین افراد به او. دست‌کم، چند نفر کُشته می‌شوند؟

۳۳. مجموع عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n، برابر است با ۱. ثابت

کنید:

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n-۱}{۴}$$

۳۴. صفحه را با سه رنگ مختلف رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، روی این صفحه می‌توان مثلثی با مساحت واحد پیدا کرد که، همهٔ راس‌های آن، از یک رنگ باشند.

*۳۵. از مربع به ضلع ۱۰۰۰۰۰۰، مربعی به ضلع ۰/۰۰۱ را از گوشهٔ آن جدا و بخش باقی‌ماندهٔ مربع را، به ۱۰ مستطیل تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم در یکی از این مستطیل‌ها، نسبت طول‌های دو ضلع، از ۹ بزرگتر است.

۳۶. مرکزهای چهار دایرهٔ برابر، راس‌های یک مربع‌اند. یک چهارضلعی با محیط حداکثر ممکن، طوری بسازید که راس‌های آن روی محیط این دایره‌ها باشد.

۳۷. $F_۱$، $F_۲$، ...، F_n، چندجمله‌ای‌هایی با ضریب‌های درست‌اند. ثابت کنید، می‌توان عدد درست a را طوری پیدا کرد که $F_۱(a)$، $F_۲(a)$، ...، $F_n(a)$، همگی عددهایی مرکب باشند.

*۳۸. $x_۰ < x_۱ < \ldots < x_n$، عددهایی طبیعی‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{x_۱ - x_۰}}{x_۱} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-۱}}}{x_n} < ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n^۲}$$

۱۹۷۰

سال ششم

۱. عددی نه‌رقمی داریم که، در آن، از همهٔ رقم‌ها، به‌جز صفر، استفاده شده‌است. بعد از جابه‌جایی برخی رقم‌ها، عدد حاصل، برابر $\frac{۱}{۸}$ عدد اصلی شد. همهٔ این‌گونه عددها را پیدا کنید.

۲. طول ضلع‌های مثلثی، سه عدد درست پشت سر هم‌اند. طول ضلع‌های این مثلث را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم، یکی از میانه‌های آن، بر یکی از نیمسازهای آن عمود است.

۳. در روستایی، ۱۹۷۰ نفر زندگی می‌کنند. آن‌ها، گاه به گاه، پول خود را با هم عوض می‌کنند، به این ترتیب که یکی از آن‌ها، یک سکهٔ ۲۰ ریالی به دیگری می‌دهد و دو سکهٔ ۱۰ ریالی می‌گیرد یا برعکس. آیا ممکن است حالتی پیش آید که، ضمن چند هفته، هریک از ساکنان روستا، برای این تعویض، درست ۱۰ سکه داده باشد؟

۴. از یک عدد سه‌رقمی، مجموع رقم‌های آن را کم کرده‌ایم. بعد دوباره از عدد حاصل، مجموع رقم‌های آن را کم کرده‌ایم. این عمل را ۱۰۰ بار انجام داده‌ایم. ثابت کنید، سرانجام، عدد صفر به دست می‌آید.

۵. در یک کشور، هر دو شهر، یا از راه هوایی و یا از راه آبی به هم مربوط‌اند. ثابت کنید از هر شهر به شهر دیگر می‌توان یا تنها از راه آب و یا تنها از راه هوا، سفر کرد.

۶. در یک مسابقه، ۱۲ تیم والیبال شرکت دارند. هیچ تیمی صاحب هفت امتیاز نشده‌است. ثابت کنید، سه تیم A، B و C وجود دارد، به‌نحوی که A از B، B از C و C از A برده است.

سال هفتم

۷. زاویهٔ B از مثلث ABC را پیدا کنید، به‌شرطی که در آن، طول ارتفاع CH برابر نصف طول ضلع AB و زاویهٔ A برابر ۷۵ درجه باشد.

۸. همان مسالهٔ ۴.

۹. مثلث متساوی‌الساقین، با زاویهٔ راس ۲۰ درجه داده شده‌است. ثابت کنید:

الف) طول ساق از دو برابر طول قاعده بیشتر است؛

ب) طول ساق از سه برابر طول قاعده کوچکتر است.

۱۰. همان مسالهٔ ۵.

*۱۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲} = ۲y - ۱ \\ x^{۴} + y^{۴} = ۲ \end{cases}$$

۱۲. ۳۶ تیم در یک مسابقه فوتبال شرکت کرده‌اند؛ درضمن، هر دو تیم باید یکبار با هم بازی کنند. می‌دانیم، هیچ تیمی، کمتر از ۳۴ بازی نکرده است. ثابت کنید، می‌توان تیم‌ها را به سه گروه ۱۲ تیمی تقسیم کرد، به‌نحوی که در هر گروه، همهٔ بازی‌ها انجام شده باشد.

سال هشتم.

۱۳. در زاویهٔ ABC دو دایره محاط کرده‌ایم، به نحوی که یکی از آن‌ها در نقطهٔ A بر ضلع BA و دیگری در نقطه C بر ضلع BC مماس است. ثابت کنید، این دایره‌ها، روی خط راست AC، پاره‌خط‌هایی با طول برابر، جدا می‌کنند.

۱۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲} + xy + y^{۲} = ۷ \\ x^{۲} + xz + z^{۲} = ۲۱ \\ y^{۲} + yz + z^{۲} = ۲۸ \end{cases}$$

۱۵. بر دایره‌ای، یک پنج‌ضلعی محیط کرده‌ایم که طول همهٔ ضلع‌های آن، عددهای درست‌اند؛ درضمن، طول دو ضلع اول و سوم، برابر واحد

است. ضلع دوم، در نقطهٔ تماس خود با دایره، به چه پاره‌خط‌های راستی تقسیم می‌شود؟

۱۶. در مربع ۵ × ۵، ۱۶ خانه را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان در آن، یک مربع ۲ × ۲ پیدا کرد که، دست کم سه خانهٔ آن، رنگ شده‌باشد.

۱۷. در مثلثی، یک دایره و یک مربع محاط کرده‌ایم؛ راس‌های مربع، روی ضلع‌های مثلث‌اند. ثابت کنید، نسبت طول ضلع مربع به طول شعاع دایره، بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و ۲ قرار دارد.

۱۸. ۳۵ نقطه روی یک صفحه چنان‌اند که، هیچ سه نقطه‌ای، روی یک خط راست نیستند. برخی از نقطه‌ها را، با پاره‌خط‌های راست به هم وصل کرده‌ایم: روی هم ۱۰۰ پاره‌خط راست. ثابت کنید، هر دو پاره‌خط راستی، یکدیگر را قطع می‌کنند.

سال نهم

۱۹. دایره‌های $O_۱$ و $O_۲$، بر دایرهٔ O، از درون و در نقطه‌های A و B مماس‌اند. M، نقطهٔ دلخواهی از محیط دایرهٔ O و C و D، نقطه‌های برخورد خط‌های راست AM و BM، به‌ترتیب، با دایره‌های $O_۱$ و $O_۲$ است. ثابت کنید، خط‌های راست AB و CD، با هم موازی‌اند.

۲۰. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۱. یک نه‌ضلعی، که طول همهٔ ضلع‌های آن، عددهای درست‌اند، بر دایره‌ای محیط کرده‌ایم. اگر طول‌های دو ضلع اول و سوم، برابر واحد باشد، پاره‌خط راست ضلع دوم در نقطهٔ تماس خود با دایره، به چه پاره‌خط‌های راستی تقسیم می‌شود؟

۲۲. عددهای مثبت a، b، c و d چنان‌اند که

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲ \text{ و } a^۳ + b^۳ = c^۳ + d^۳$$

ثابت کنید: $ab = cd$.

۲۳. همهٔ عددهای طبیعی x، y، z و t راپیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته‌باشیم:

$$۳۱(xyzt + xy + xt + zt + ۱) = ۴۰(yzt + y + t)$$

۲۴. مربع ۱۰۰×۱۰۰ را، به‌وسیلهٔ سه نوار قائم تقسیم کرده‌ایم. پهنای نوار اول (سمت چپ)، ۱۹ خانه و پهنای نوار دوم، ۷۰ خانه است. در سطر اول، عددهای طبیعی را، به ردیف، از ۱ تا ۱۰۰ نوشته‌ایم. در سطر دوم، اول (یعنی از سمت چپ)، عددهای نوار سوم را، با همان ردیف خود، سپس عددهای نوار دوم و سرانجام عددهای نوار اول (در سطر اول) را با همان ردیف خود نوشته‌ایم. با همین روش، به کمک سطر دوم، عددهای سطر سوم را نوشته‌ایم و غیره، تا آن‌جا که همهٔ خانه‌های مربع، پر شود. ثابت کنید، در هر ستون، به همهٔ عددهای از ۱ تا ۱۰۰ برخورد می‌کنیم.

سال دهم

۲۵. در چهاروجهی، یک کره و یک مکعب محاط کرده‌ایم. همهٔ راس‌های مکعب، روی وجه‌های چهاروجهی است. ثابت کنید، نسبت طول ضلع مکعب به طول شعاع کره، بین عددهای ۱ و $\sqrt{۲} + ۱$ قرار دارد.

۲۶. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sin ۲ + \cos ۲ + ۲(\sin ۱ - \cos ۱) \geq ۱$$

۲۷. در یک پنج‌ضلعی، که ضلع‌هایی با طول‌های برابر دارد، همهٔ زاویه‌ها، از ۱۲۰ درجه کوچکترند. ثابت کنید، همهٔ این زاویه‌ها، منفرجه‌اند.

۲۸. همان مسالهٔ ۲۲.

۲۹. تابع $f(x)$ را طوری پیدا کنید که، برای هر مقدار حقیقی x، به‌جز ۰ و ۱، داشته‌باشیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1-x) = x$$

*۳۰. مربع $n \times n$ را، به سه نوار قائم تقسیم کرده‌ایم. نوار اول از سمت چپ، k خانه و نوار سوم m خانه دارد؛ درضمن $n-k$ و $n-m$ نسبت به هم اول‌اند. در سطر اول، از چپ به راست، عددهای طبیعی از ۱ تا n را نوشته‌ایم. در سطر دوم از چپ به راست، ابتدا عددهای نوار سوم را، بدون تغییر ردیف آن‌ها، سپس عددهای نوار دوم و، سرانجام، عددهای نوار اول را، باز هم بدون تغییر ردیف آن‌ها، نوشته‌ایم. به همین ترتیب، از سطر دوم، سطر سوم را به‌دست آورده‌ایم و غیره، تا آن‌جا که همهٔ خانه‌های مربع پر شود. ثابت کنید، در هر ستون، با همهٔ عددهای از ۱ تا n برخورد می‌کنیم.

دور نهایی

۳۱. عددهای t_1، t_2، ...، t_n، مثبت و حاصل‌ضربی برابر واحد دارند. ثابت کنید، شمارهٔ $k < n$ وجود دارد، به‌نحوی که داشته‌باشیم:

$$t_k(t_{k+1} + 1) \geq 2$$

(t_{n+1} را، برابر t_1 می‌گیریم).

۳۲. به‌کمک خم کردن سیم، یک چندضلعی مسطح کوژ ساخته‌ایم. ثابت کنید، با این سیم، نمی‌توان چندضلعی دیگری (که هم‌نهشت با اولی نباشد) درست کرد، به‌نحوی فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ سیم، بزرگتر نشده‌باشد.

۳۳. عددهای طبیعی a_1، a_2، ...، چنان‌اند که، برای هر n، داریم $a_n < 2n$ و، درضمن $0 < a_1 < a_2 < \ldots$. ثابت کنید، هر عدد طبیعی

دلخواه، یا برابر یکی از جمله‌های این دنباله و یا برابر تفاضل دو جمله از آن است.

*۳۴. C و Dو دو نقطهٔ دلخواه از محیط دایره‌ای هستند که بر نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB مماس است. AD و BC، به‌ترتیب، محیط دایره را در نقطه‌های X و Y قطع کرده‌اند. CX و DY هم، AB را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M و N قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $|AM| = |BN|$.

*۳۵. عدد ۲۳۴۵، با عددهای ۲، ۲۳، ۲۳۴، ۲۳۴۵ آغاز و با عددهای ۵، ۴۵، ۳۴۵، ۲۳۴۵ به پایان رسیده است. همین تعریف را، برای هر عدد طبیعی دیگری می‌پذیریم. عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k، به‌ترتیب، دارای $n_۱$، $n_۲$، ...، n_k رقم هستند. می‌دانیم آغازهای هیچ کدام از این عددها، با پایان‌های هیچ کدام دیگر، یکی نیست؛ هیچ آغازی به‌جز خود عدد، با هیچ پایانی از آن، یکی نیست و هیچ‌کدام از عددهای a_i، بخشی از عدد دیگر نیست. ثابت کنید:

$$\frac{n_۱}{۱۰^{n_۱}} + \frac{n_۲}{۱۰^{n_۲}} + \ldots + \frac{n_k}{۱۰^{n_k}} < ۱$$

به‌شرطی که بدانیم $n_i < ۲n_j$ (برای هر i و j).

*۳۶. در خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی بی‌پایان، عددهای حقیقی را طوری نوشته‌ایم که، مجموع عددهای واقع در هر مربعی (که ضلع‌های آن، روی خط‌های شبکه قرار دارد)، از لحاظ قدرمطلق، از واحد تجاوز نکند. ثابت کنید، مجموع عددهای واقع در خانه‌های هر مستطیل (که ضلع‌های آن، روی خط‌های شبکه قرار دارد)، از ۱۰۰۰۰ تجاوز نمی‌کند.

*۳۷. در مسالهٔ ۳۶، همچنین می‌دانیم، مجموع عددهای واقع در خانه‌های یک مستطیل، از لحاظ قدرمطلق، بیشترین مقدار است. ثابت کنید، مجموع عددها، در هر مستطیل، از لحاظ قدرمطلق، از ۴ تجاوز نمی‌کند.

۱۹۷۱

سال ششم

۱. پتروو‌ا و ایوانووا با هم و باموتور، از شهر A، به‌طرف شهر B، و در همان لحظهٔ حرکت آن‌ها، ایوانووسکی و پتروسکی، باهم و با موتور، از شهر B به‌طرف شهر A حرکت کردند. سرعت ایوانووا دو برابر سرعت پتروو‌ا و سرعت ایوانوسکی سه برابر سرعت پتروسکی است. ایوانووا، در همان لحظه‌ای به پتروسکی رسید که پتروو‌ا به ایوانوسکی رسیده بود. کدام‌یک، به شهر A نزدیک‌تر است: نقطهٔ برخورد ایوانووا با ایوانووسکی یا نقطهٔ برخورد پتروو‌ا با پتروسکی؟

۲. بین مثلث‌هایی که، در آن‌ها، مجموع طول‌های میانه‌ها، یکی است، در کدام یک، مجموع طول‌های ارتفاع‌ها بیشتر است؟

۳. کولیا، ژنیا و نادیا چند امتحان می‌دهند و؛ بسته به رتبه‌ای که در هر امتحان به‌دست می‌آورند (اول، دوم یا سوم)، امتیازی می‌گیرند. امتیازها، عددهای درستی هستند و رتبهٔ بالاتر، امتیاز بیشتری می‌گیرد. بعد از انجام همهٔ امتحان‌ها، کولیا ۲۲ امتیاز گرفت، ولی ژنیا و نادیا، هر کدام ۹ امتیاز، ژنیا، در امتحان جبر، رتبهٔ اول را به‌دست آورده‌بود. چه کسی در درس فیزیک، رتبهٔ دوم را به‌دست آورده است؟

۴. عدد درستی را پیدا کنید که توان ششم آن در عددنویسی به مبنای ۱۰، از رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، تشکیل شده‌باشد.

۵. روی وجه‌های یک مکعب کوچک، عددهای ۱ یا ۲ نوشته شده‌است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، به نوبت، مکعب را می‌اندازند. در آغاز بازی، عدد ۲۰۰ را روی تخته‌سیاه نوشته‌اند. هرکس که مکعب را می‌اندازد، می‌تواند، عددی را که آمده‌است با عدد روی تخته‌سیاه جمع یا از آن کم کند و یا بازی را واگذار کند. کسی بازی را می‌برد که، برای نخستین بار، یک عدد چهاررقمی

روی تخته سیاه بنویسد. بازی مساوی تمام می‌شود، وقتی که روی تخته سیاه، یک عدد دورقمی ظاهر شود و یا، سه بار پشت سرهم، بازی واگذار شود. ثابت کنید، به شرط بازی درست و سنجیده، کسی که بازی را آغاز کرده‌است، می‌تواند باخت نداشته‌باشد (یعنی، یا ببرد و یا مساوی کند).

۶. آیا می‌توان تمامی صفحه را، با مربع‌هایی پوشاند که، در بین آن‌ها، تنها دو مربع مساوی وجود داشته باشد؟

سال هفتم

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲y^۲ + xy^۲ + x^۲y + xy + x + y + ۳ = ۰ \\ x^۲y + xy + ۱ = ۰ \end{cases}$$

۸. بین مثلث‌هایی که، در آن‌ها، مجموع طول‌های نیمسازها یکی است، مثلثی را پیدا کنید که مجموع طول‌های ارتفاع‌های آن، بیشترین مقدار باشد.

۹. نقطهٔ K را در درون مربع $ABCD$ انتخاب کنید. از راس‌های A، B، C و D، به‌ترتیب، بر خط‌های راست BK، CK، DK و AK عمودهایی رسم کنید. ثابت کنید، این خط‌های راست عمود، از یک نقطه می‌گذرند.

۱۰. همان مسالهٔ ۵.

۱۱. ثابت کنید، یک چندضلعی کوژ (به‌جز متوازی‌الاضلاع) را، می‌توان در مثلثی که از ادامهٔ سه ضلع دلخواه چندضلعی به‌دست می‌آید، جا داد.

۱۲. مستطیلی را به قطعه‌هایی با اندازه‌های ۲ × ۲ و ۴ × ۱ تقسیم کرده‌ایم. برای بازسازی مستطیل، یکی از قطعه‌های ۲ × ۲ را کنار گذاشتیم و، به‌جای آن، یک قطعهٔ ۴ × ۱ را انتخاب کردیم. ثابت کنید، با این جابه‌جایی، نمی‌توان مستطیل را بازسازی کرد.

سال هشتم

۱۳. دو نقطهٔ A و B با سرعت‌های برابر، و بدون تغییر سرعت، روی دو خط راست متقاطع حرکت می‌کنند. ثابت کنید، نقطه‌ای روی صفحه وجود دارد که، در هر لحظه، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است.

۱۴. عددهای 5^{1971} و 2^{1971} مفروض‌اند. اگر آن‌ها را پشت سرهم بنویسیم، عدد حاصل، چند رقم دارد؟

۱۵. روی محیط دایره‌ای، ۱۰۰ عدد درست نوشته‌ایم که، مجموع آن‌ها، برابر واحد است. به هر عددی که از مجموع چند عدد پشت سر هم به‌دست آید، یک حلقه می‌گوییم. چند حلقهٔ مثبت وجود دارد؟

۱۶. در دو تودهٔ چوب کبریت، روی هم ۱۰۰ عدد چوب کبریت وجود دارد. دو نفر، به این ترتیب با هم بازی می‌کنند. اولی، یکی از توده‌ها را کنار می‌زند و تودهٔ دوم را، به دو بخش، که لازم نیست برابر باشند، تقسیم می‌کند. بعد نفر دوم، همین عمل را انجام می‌دهد و غیره. کسی بازی را می‌بازد که نتواند، در نوبت خود، تودهٔ باقی‌ماندهٔ چوب کبریت‌ها را به دو بخش تقسیم کند. آیا کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند طوری برنامه‌ریزی کند که، سرانجام، برنده شود؟

۱۷. عدد طبیعی n، چنان است که $n+1$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، مجموع همهٔ بخشیاب‌های n(از جملهٔ واحد و خود عدد) بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۱۸. BD، نیمساز داخلی مثلث ABC است. طول ضلع AB برابر ۱۵ و طول ضلع BC برابر ۱۰ است. ثابت کنید، طول نیمساز BD، از ۱۲ تجاوز نمی‌کند.

سال نهم

۱۹. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x_0 = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{100}^2 \\ x_1 = 2(x_0x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_{99}x_{100}) \\ x_2 = 2(x_0x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{98}x_{100}) \\ x_3 = 2(x_0x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{97}x_{100}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{100} = 2x_1x_{100} \end{cases}$$

۲۰. همان مسالهٔ ۱۳.

۲۱. $\overline{abc}$ عددی اول است. ثابت کنید $b^2 - 4ac$ نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

۲۲. همان مسالهٔ۱۶، با این پرسش اضافی که، تعداد چوب‌کبریت‌ها، در آغاز، چقدر باشد تا کسی که بازی را آغاز می‌کند، نتواند برنده شود؟

۲۳. CD نیمساز زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. DE و DK، نیمسازهای داخلی مثلث‌های ADC و BDC هستند. ثابت کنید: $AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2$.

۲۴. آیا با مثلث‌های دو به دو مختلفی که طول ضلع‌های آن‌ها، عددهایی گویا هستند، می‌توان صفحه را پوشانید؟

سال دهم

۲۵. همان مسالهٔ ۱۷.

۲۶. در یک چهاروجهی، یکی از ارتفاع‌ها، دو ارتفاع دیگر را قطع می‌کند. ثابت کنید، همهٔ ارتفاع‌ها، از یک نقطه می‌گذرند.

۲۷. روی دو خط متقاطع، دو مگس با سرعت‌های برابر و ثابت می‌خزند. ثابت کنید، نقطه‌ای در فضا وجود دارد که، همیشه، از دو مگس به یک فاصله است.

۲۸. ثابت کنید:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲۰۰}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۹۹}\cdot\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۹۸}\cdot\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲۰۰}+\frac{۱}{۲۰۱}<\frac{۱}{۹۰}$$

۲۹. ثابت کنید، اگر عددهای $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۴}$، $۲^{۸}$، ... را، پشت سرهم، بعد از ممیز بنویسیم، یک عدد گنگ به دست می‌آید.

*۳۰. نقطهٔ P و n خط راستِ دوبه‌دو ناموازی، روی صفحه داده شده‌اند. نقطهٔ P را روی همهٔ خطهای راست مفروض، تصویر می‌کنیم، بعد، تصویرهای حاصل را دوباره روی همهٔ خطهای راست تصویر می‌کنیم و غیره. ثابت کنید، همهٔ نقطه‌هایی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند، سطح یک دایره را می‌پوشانند.

دور نهایی

۳۱. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، عددهای حقیقی و مثبت‌اند، ثابت کنید، معادلهٔ

$$x^n+a_۱x^{n-۱}-a_۲x^{n-۲}-\ldots-a_n=۰$$

بیش از یک ریشهٔ مثبت ندارد.

۳۲. عددهای حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n مفروض‌اند. برای $k\leq n$، بزرگترین عدد از بین عددهای

$$a_k,\frac{a_{k-۱}+a_k}{۲},\ldots,\frac{a_۱+a_۲+\ldots+a_k}{k}$$

را A_k می‌نامیم. ثابت کنید، کوچکترین عدد در بین عددهای

$$A_۱,A_۲,\ldots,A_n$$

از میانگین حسابی عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، بزرگتر نیست.

۳۳. از راس A در مثلث ABC، خط راست دلخواهی رسم کرده‌ایم؛ $B_۱$ و $C_۱$، تصویرهای نقطه‌های B و C روی این خط راست؛ $B_۲$ تصویر $B_۱$ روی AC و $C_۲$ تصویر $C_۱$ روی AB است. ثابت کنید، نقطهٔ برخورد خط‌های راست $B_۱B_۲$ و $C_۱C_۲$، روی یکی از ارتفاع‌های مثلث ABC یا روی امتداد آن واقع است.

*۳۴. مجموع عددهای درست $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n برابر است با واحد. برای $k \leq n$، تعداد عددهای مثبت را در دنبالهٔ

$$b_k, b_k + b_{k+۱}, b_k + b_{k+۱} + b_{k+۲}, \ldots$$
$$\ldots, b_k + b_{k+۱} + \ldots + b_n + b_۱ + \ldots + b_{k-۱}$$

با N_k نشان می‌دهیم. ثابت کنید، همهٔ عددهای N_k مختلف‌اند.

۳۵. مربع به ضلع $n - ۱$ و مستطیل با ضلع‌های $a - ۱$ و $b - ۱$ را به مربع‌های به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم؛ درضمن $ab = n^۲$. به هریک از $n^۲$ گره مربع، یکی از گره‌های مستطیل را متناظر کرده‌ایم؛ درضمن، گره‌های متفاوت مربع، متناظر با گره‌های متفاوت مستطیل‌اند. می‌دانیم، هریک از چهار راس و مرکز هر مربع ۲×۲، متناظر با چهار راس و مرکز متوازی‌الاضلاعی است که راس‌ها و مرکز آن، در گره‌های شبکه مستطیل‌اند ثابت کنید: $a = b$.

*۳۶. یال‌های یک گراف کامل را، که $۲n + ۱$ راس دارد، با سه رنگ مختلف، رنگی کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان یکی از رنگ‌ها و $n + ۱$ راس را طوری انتخاب کرد که، از هریک از این راس‌ها به هر راس دیگر از آن‌ها، بتوان از طریق یال‌هایی حرکت کرد که دارای رنگ انتخابی ما باشند.

۳۷. ثابت کنید، معادلهٔ $x^۳ + y^۳ + z^۳ = ۲$، در مجموعهٔ عددهای درست، بی‌نهایت جواب دارد.

۱۹۷۲

سال ششم

۱. دو هواپیما، هم‌زمان، از شهر A پرواز کردند. مسیر اولی چنین بود:

$$A-B-D-C-A-D-B-C-A$$

و مسیر دومی

$$A-B-C-D-A-B-C-D-A-B-C-D-A$$

کدام هواپیما، زودتر پرواز خود را تمام می‌کند، به‌شرطی که سرعت‌های آن‌ها یکسان باشد؟

۲. دو گروه جهان‌گرد، در دو راه‌پیمایی شرکت کردند (برخی از آن‌ها، در هر دو راه‌پیمایی بودند). در راه‌پیمایی نخستین، ۶۰٪ و در راه‌پیمایی دوم ۷۵٪ راه‌پیمایان مرد بودند. ثابت کنید، در مجموع (یعنی با گردهم‌آیی دو گروه). تعداد مردان کمتر از تعداد زنان نیست.

۳. شش نقطه را روی صفحه طوری درنظر بگیرید که، هر سه نقطه از آن‌ها، راس‌های یک مثلث متساوی‌الساقین باشند.

۴. در عددی که از حاصل‌ضرب عددهای از ۱ تا ۱۰۰ به‌دست می‌آید، همهٔ صفرها را حذف کرده‌ایم. در عددی که می‌ماند، آخرین رقم سمت راست، عددی زوج است یا فرد؟

۵. دانش‌آموزان، هفت امتحان دادند و همه برای نمره‌های چهار و پنج؛ درضمن، کسی بیش از دو نمرهٔ چهار نگرفت. می‌دانیم، دو دانش‌آموز وجود ندارد که، یکی از آن‌ها، در هر درس، نمره‌ای بیشتر یا مساوی دومی آورده‌است. ثابت کنید، تعداد دانش‌آموزان بیشتر از ۲۱ نفر نیست.

۶. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۲ را روی یال‌های یک مکعب طوری قرار داد که، اگر مجموع عددهای هر سه یالی را که در یک راس به هم

می‌رسند، عدد متعلق به آن راس درنظر بگیریم، آن‌وقت، عددهای واقع در همهٔ راس‌ها، یکی باشد؟

سال هفتم

۷. آیا می‌توان با دو خط راست که از دو راس مثلث می‌گذرند، مثلث را به چهار بخش چنان تقسیم کرد که، سه بخش از آن‌ها مثلث‌هایی هم‌ارز (یعنی با مساحت‌های برابر) باشند؟

۸. همان مسالهٔ ۲.

۹. $ABCD$ یک ذوزنقه است ($BC \| AD$). لحظهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ A و B را M، و نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ C و D را N می‌نامیم. با معلوم بودن طول ضلع‌های ذوزنقه، طول پاره‌خط راست MN را پیدا کنید.

۱۰. در راس‌های یک ۱۲ضلعی منتظم، برگه‌های کوچکی به رنگ سیاه یا سفید گذاشته‌ایم. ثابت کنید، سه برگهٔ هم‌رنگ پیدا می‌شود که، راس‌های یک مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل دهند.

۱۱. همان مسالهٔ ۵.

۱۲. ثابت کنید، اگر یک عدد زوج را بتوان به‌صورت مجموع دو مجذور کامل نوشت، آن‌وقت، نصف این عدد را هم، می‌توان به‌صورت مجموع دو مجذور کامل نوشت.

سال هشتم

۱۳. K و M، نقطه‌های برخورد دو دایره‌اند. از نقطهٔ K، دو نیم‌خط راست رسم کرده‌ایم؛ یکی از نیم‌خط‌ها، دایرهٔ اول را در A و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ B و نیم‌خط دیگر، دایرهٔ اول را در نقطهٔ C و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ D قطع کرده‌است. ثابت کنید، دو زاویه MAB، و MCD برابرند.

۱۴. آیا عددی طبیعی وجود دارد که مجموع رقم‌های مجذور آن، برابر ۱۹۷۲ باشد؟

۱۵. ثابت کنید، اگر قطرهای یک چهارضلعی، آن را به چهار مثلث با محیط‌های برابر تقسیم کنند، این چهارضلعی، یک لوزی است.

۱۶. روی صفحه‌ای، چند دایره کوچک رسم و، برخی از آن‌ها را، به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راستی به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، در این دایره‌ها می‌توان عددهای درست را طوری قرار داد که، دو دایره وقتی، و تنها وقتی، به هم وصل شده‌باشند که، در آن‌ها، دو عدد نسبت به هم اول، وجود داشته باشد.

*۱۷. مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع به طول برابر ۳۲ داده شده است. از گوشهٔ آن، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع برابر واحد جدا کرده‌ایم. شکل باقی‌مانده را به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، تعداد آن‌ها، از ۱۵ کمتر نیست.

۱۸. عددهای طبیعی m، n، a، b، k، l چنان‌اند که

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{k}{l}, |ml - kn| = ۱$$

ثابت کنید: $b \geq n + l$.

سال نهم

۱۹. همان مسالهٔ ۱۴.

۲۰. چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای محاط است. ثابت کنید، اگر نقطه‌های برخورد دو مماسی که از A و C بر دایره رسم می‌شوند، روی خط راست BD باشد، آن‌وقت

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$$

۲۱. همان مسالهٔ ۱۸.

۲۲. AC بزرگترین ضلع مثلث ABC است. روی آن

$$|AC_۱| = |AB| \text{ و } |CA_۱| = |CB|$$

را جدا کرده‌ایم. همچنین، روی ضلع‌های AB و CB، پاره‌خط‌های راست

$$|AA_۲| = |AA_۱| \text{ و } |CC_۲| = |CC_۱|$$

را جدا کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، $C_۱$ و $C_۲$، روی محیط یک دایره‌اند.

۲۳. عددهای طبیعی m و n مفروض‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt[m]{n+۱}} + \frac{۱}{\sqrt[n]{m+۱}} \geq ۱$$

۲۴. دنبالهٔ باپایانی از عددهای درست داده شده‌است. زیر هریک از جمله‌های این دنباله، عددی را که معرف تعداد تکرارهای آن جمله در دنباله است، می‌نویسیم. به همین ترتیب، زیر دنبالهٔ دوم، دنبالهٔ سوم را می‌نویسیم و غیره. ثابت کنید، در مرحله‌ای از کار، به دو دنبالهٔ یکسان پشت‌سرهم می‌رسیم.

سال دهم

۲۵. عددهای a، b و c، بین ۰ و ۱ قرار دارند. ثابت کنید:

$$a+b+c-۲\sqrt{abc} \geq ab+bc+ac-۲abc$$

۲۶. خط شکستهٔ بستهٔ فضایی را منتظم می‌نامیم، وقتی که هم طول ضلع‌های آن و هم اندازهٔ زاویه‌هایی که هر دو ضلع مجاور تشکیل می‌دهند،

با هم برابر باشند. ثابت کنید، برای هر $n > ۵$، خط شکسته nضلعی منتظمی وجود دارد که بر یک صفحه واقع نیست.

۲۷. عدد اول p، با عدد ۳ برابر نیست. ثابت کنید، عدد $۴p^۲ + ۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع مجذورهای سه عدد طبیعی نوشت.

۲۸. همان مسالهٔ ۲۲.

*۲۹. مثلث متساوی‌الاضلاعِ به مساحت واحد، در درون هفت‌ضلعی کوژ با مساحت برابر ۱٫۰۰۰۰۰۰۱ قرار دارد. ثابت کنید، دست‌کم یکی از زاویه‌های هفت‌ضلعی از ۱۳۹ درجه بیشتر است.

۳۰. چند تیم والیبال در یک مسابقه شرکت کردند که، بعد از آن، معلوم شد، هر تیم ۱۰ برد و ۱۰ باخت داشته‌است. ثابت کنید، می‌توان چند مسابقه را طوری انتخاب کرد که، در آن‌ها، هر تیم درست یکبار برد و یکبار باخت داشته باشد.

دور نهایی

۳۱. برای عدد طبیعی k، حداکثر نسبت $\frac{k^۲}{۱٫۰۱^k}$ را پیدا کنید. این حداکثر، به‌ازای چه مقدارهایی از k به‌دست می‌آید؟

۳۲. ثابت کنید، خط راستی که مثلث را به دو بخش هم‌ارز (یعنی با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند، محیط آن را به نسبتی تقسیم می‌کند که از نسبت ۱ : ۳ بزرگتر نیست.

۳۳. ۹۹ رقم برابر ۹ را پشت‌سرهم نوشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان ۱۰۰ رقم در سمت راست آن طوری نوشت که، عدد حاصل، مجذور یک عدد درست باشد.

۳۴. نقطهٔ M را روی ضلع BC از چهارضلعی کوژ $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، بین دایره‌های محاطی مثلث‌های ABD، ACD و

AMD، دو دایره با شعاع‌های نابرابر پیدا می‌شود.

۳۵. دنباله‌ای از عددهای طبیعی داریم که هر جملهٔ آن، از جملهٔ قبل بزرگتر و، از جملهٔ سوم به بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله از جمله‌های قبلی. ثابت کنید، در این دنباله، بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد.

۳۶. هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را، به ۳۰ بخش برابر تقسیم کرده‌ایم. با رسم خط‌های راستی موازی با ضلع‌های مثلث و از نقطه‌های تقسیم ضلع‌ها، مثلث اصلی را به ۹۰۰ مثلث کوچک تقسیم کرده‌ایم. حداکثر چند راس تقسیم وجود دارد که هیچ دوتایی از آن‌ها، روی ضلع یا روی خط راست رسم شده نباشند؟

*۳۷. در شهری، ۱۹۷۲ ایستگاه مترو وجود دارد. هر خط مترو، تنها دو ایستگاه را به هم مربوط می‌کند. می‌دانیم اگر ۹ ایستگاه دلخواه بسته شود، سیستم مترو، ارتباط شهری را تامین می‌کند. همچنین می‌دانیم، برای رفتن از ایستگاه A به ایستگاه B، باید دست‌کم ۹۹ بار جا عوض کرد. ثابت کنید، همهٔ ایستگاه‌های مترو را می‌توان به ۱۰۰۰ گروه طوری تقسیم کرد که، در هر گروه، هیچ دو ایستگاهی به وسیلهٔ خط مترو به هم مربوط نباشند.

*۳۸. شهری به شکل یک مربع شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ است که هر خانهٔ شطرنجی آن، ضلعی به طول ۵۰۰ متر دارد. در در ازای هر ضلع یک مربع کوچک، تنها در یک جهت می‌توان حرکت کرد. می‌دانیم، با رعایت قانون حرکت، نمی‌توان بیش از یک کیلومتر در شهر جلو رفت. ثابت کنید، دست‌کم ۱۳۰۰ چهارراه در شهر پیدا می‌شود که، با رعایت قانون حرکت، نمی‌توان از آن‌ها خارج شد (هریک از چهار راس مربع بزرگ را هم، یک چهار راه به حساب آورید).

۱۹۷۳

سال ششم

۱. در سه مغازه، روی هم ۱۹۷۳ کتاب درسی وجود دارد؛ در سه روز نخست، مغازهٔ اول، به‌ترتیب، $\frac{۱}{۴۷}$، $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۱}{۲}$ کتاب‌های خود؛ مغازهٔ دوم، به‌ترتیب، $\frac{۱}{۴۱}$، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ کتاب‌های خود؛ و مغازهٔ سوم، به‌ترتیب، $\frac{۱}{۲۵}$، $\frac{۱}{۲۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ کتاب‌های خود را فروخت. در هر مغازه، چند کتاب درسی بوده‌است؟

۲. ورقهٔ شوکولات، دو شیار در طول و سه شیار در عرض دارد که، به‌یاری آن‌ها، می‌توان شوکولات را تقسیم کرد. دست‌کم چند بار باید شوکولات را شکست تا در هیچ‌کدام از تکه‌های آن شیاری وجود نداشته باشد؛ درضمن، می‌توان چند تکه را، با روی هم قرار دادن شیارهای آن‌ها، با هم شکست.

۳. ثابت کنید، عددی که با ششصد رقم برابر ۶ و تعدادی صفر نوشته شده‌باشد، نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد.

۴. ثابت کنید، هر مربع را می‌توان به‌صورت ۱۹۷۳ مربع برید.

۵. روی تختهٔ سیاه، سه ستون عدد نوشته شده است؛ درضمن، هیچ عددی، در یک ستون دو بار نیامده‌است. در ستون چهارم، همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یکبار در دو ستون اول آمده‌اند؛ در ستون پنجم، عددهایی را می‌نویسیم که در ستون‌های سوم و چهارم، درست یکبار آمده‌اند؛ در ستون ششم، عددهایی که در ستون‌های دوم و سوم، درست یکبار آمده‌اند؛ در ستون هفتم، عددهایی که در ستون‌های اول و ششم، یکبار با آن‌ها برخورد می‌کنیم. ثابت کنید، تعداد عددها، در ستون‌های پنجم و هفتم، یکی است.

۶. مثلث متساوی‌الساقینی داده شده که یکی از زاویه‌های آن برابر ۱۰۸ درجه است. ثابت کنید، می‌توان آن را به مثلث‌هایی با زاویه‌های حاده تقسیم کرد.

سال هفتم

۷. همان مسالهٔ ۲.

۸. همان مسالهٔ ۳.

۹. E و K، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AD و BC از مستطیل $ABCD$، H نقطهٔ دلخواهی از پاره‌خط راست EK، M نقطهٔ برخورد خط‌های راست AH و BC و P نقطهٔ برخورد خط‌های راست BH و CD است. از نقطهٔ M، خط راستی موازی CD و از نقطهٔ P، خط راستی موازی AD رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطهٔ برخورد خط‌های راستی که رسم کرده‌ایم، روی خط راست DH قرار دارد.

۱۰. ثابت کنید $۵^{۱۲} + ۲^{۱۰}$، عددی مرکب است.

۱۱. روی هر ضلع متوازی‌الاضلاع، یک نقطه طوری انتخاب کرده‌ایم که، با وصل آن‌ها به یکدیگر، یک چهارضلعی به‌دست آمده‌است که مساحتی برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع دارد. ثابت کنید، یکی از قطرهای چهارضلعی، با یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع، موازی است.

۱۲. a، b و c، طول‌های ضلع‌های یک مثلث‌اند و می‌دانیم:

$$۲(a^۸ + b^۸ + c^۸) = (a^۴ + b^۴ + c^۴)^۲$$

ثابت کنید، این مثلث، قائم‌الزاویه است.

سال هشتم

۱۳. AD و BE نیمسازهای مثلث ABC هستند. ثابت کنید، اگر $|BC| > |AC|$، آن‌وقت $|AE| > |DE| > |BD|$.

۱۴. مجموع رقم‌های یک عدد ده‌رقمی برابر چهار است. مجموع رقم‌های مجذور این عدد، چه عددی می‌تواند باشد؟

۱۵. برای هر دو نقطهٔ A و B از صفحه، $A * B$ را به‌معنای قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B می‌گیریم. سه راس یک مربع داده شده‌است. آیا می‌توان، تنها با استفاده از عمل $*$، راس چهارم مربع را به‌دست آورد؟

۱۶. مثلث را به تعدادی چندضلعی کوژ بریده‌ایم. ثابت کنید، در بین این چندضلعی‌ها، یا مثلث وجود دارد و یا دو چندضلعی پیدا می‌شود که، تعداد ضلع‌های آن‌ها، یکی است.

۱۷. چند عدد طبیعی، روی محیط دایره نوشته‌ایم. سپس، بین هر دو عدد مجاور، بزرگترین بخشیاب مشترک آن‌ها را قرار داده‌ایم و، در پایان کار، عددهای نخستین را پاک کرده‌ایم. بعد، روی عددهای باقی‌مانده، همان عمل قبلی را انجام داده‌ایم و غیره. ثابت کنید، بعد از چند گام، همهٔ عددهای روی محیط دایره، با هم برابر می‌شوند.

۱۸. چند نقطه داده شده است که بعضی از آن‌ها، به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راستی به هم وصل شده‌اند؛ درضمن، این پاره‌خط‌های راست به گونه‌ای رسم شده‌اند که از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، می‌توان از طریق آن‌ها رفت. آیا همیشه می‌توان، یکی از نقطه‌ها را، همراه با پاره‌خط‌های راستی که از آن خارج شده‌اند برداشت، به نحوی که باز هم نقطه‌های باقی‌مانده، از طریق پاره‌خط‌های راست به هم مربوط باشند؟

سال نهم

۱۹. می‌دانیم، برای چهارضلعی محاطی $ABCD$، داریم:

$$|AB| : |BC| = |AD| : |DC|$$

خط راستی که از راس B و نقطهٔ وسط قطر AC می‌گذرد، دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ $M \neq B$ قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$|AM| = |CD|$$

۲۰. مجموع رقم‌های یک عدد ۹رقمی، برابر ۳ شده‌است. مجموع رقم‌های مکعب این عدد، چه عددی می‌تواند باشد؟

۲۱. روی ضلع‌های AB و CD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نقطه‌های K و M را طوری پیدا کنید که مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلث‌های AMB و CKD به‌دست می‌آید، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۲. همان مسالهٔ ۱۷.

۲۳. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۴. ۱۰ تکهٔ کوچک کاغذ سفید و ۲۰ تکهٔ کوچک کاغذ سیاه را، روی محیط دایره قرار داده‌ایم. جای هر دو تکهٔ کاغذ را، به‌شرطی که بین آن‌ها سه تکه کاغذ دیگر وجود داشته‌باشد، می‌توانیم با هم عوض کنیم. دو تبدیل کاغذها را (در این ۳۰ نقطه) هم‌ارز می‌نامیم، وقتی که یکی از آن‌ها را بتوان، با چند تبدیل از این‌گونه، منجر به دیگری کرد. چند تبدیل نا هم‌ارز وجود دارد؟

سال دهم

۲۵. همان مسالهٔ ۱۳.

۲۶. از یک تصاعد حسابی بی پایان، با جملهٔ اول $a \neq ۰$ و قدر نسبت d، توانسته‌ایم، یک تصاعد هندسی بی‌پایان جدا کنیم. ثابت کنید، $\frac{a}{d}$، عددی گویاست.

۲۷. ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{۴}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۴}\right)+۲\cos\frac{\pi}{۸}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۸}\right)+\dots$$
$$\dots+۲۵۶\cos\frac{\pi}{۱۰۲۴}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۱۰۲۴}\right)<\frac{۱}{۲}$$

۲۸. ثابت کنید، در هر چندوجهی کوژ، دو وجه وجود دارد که، تعداد

ضلع‌های آن‌ها، یکی است.

۲۹. یک ۱۹۷۳ ضلعی کوژ، نقطه O در درون این چندضلعی و زاویهٔ α داده شده‌است. می‌دانیم، به هر صورتی که زاویهٔ α را به راس O بسازیم، مساحت بخش مشترک چندضلعی و زاویه، ثابت می‌ماند. ثابت کنید، این چندضلعی منتظم است

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

دور نهایی

۳۱. می‌دانیم، مجموع قدرمطلق‌های تفاضل‌های دو به دوی پنج عدد غیر منفی، برابر واحد است. کمترین مقدار مجموع این عددها، چقدر می‌تواند باشد؟

۳۲. $۲k+۳$ نقطه روی صفحه‌ای داده شده‌اند، به‌نحوی هیچ چهار نقطه‌ای روی محیط یک دایره نیستند. ثابت کنید، می‌توان سه نقطه پیدا کرد که، اگر دایره‌ای از آن‌ها بگذرانیم، درست k نقطه در درون آن قرار می‌گیرد.

۳۳. این چندجمله‌ای، با ضریب‌های درست، داده شده‌است:

$$P(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\ldots+a_{n-۱}x+a_n$$

در ضمن می‌دانیم معادله‌های

$$P(x)=۱, P(x)=۲, P(x)=۳$$

دارای ریشه‌های درست هستند. ثابت کنید، معادلهٔ $P(x)=۵$، نمی‌تواند دو یا بیشتر ریشهٔ درست داشته‌باشد.

۳۴. چند تیم والیبال در مسابقه‌ای شرکت کردند. می‌دانیم، اگر تیم A از تیم B برده باشد، تیمی مثل C پیدا می‌شود که از A می‌بازد، ولی از B می‌برد. حداقل، چند تیم در این مسابقه شرکت کرده‌اند؟

۳۵. مربعی به ضلع واحد داده شده‌است. یک چهارضلعی در آن محاط کرده‌ایم. در این چهارضلعی، مربعی محاط کرده‌ایم که، ضلع‌های آن، با ضلع‌های مربع بزرگ موازی است. ثابت کنید، اگر طول ضلع مربع اخیر برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، راس‌های آن در نقطه‌های وسط ضلع‌های چهارضلعی محاطی واقع است.

۳۶. چندضلعی کوژی با مساحت برابر ۹ مفروض است. ۱۰ خط راست موازی، که دوبه‌دو به فاصلهٔ واحد از یکدیگرند، این چندضلعی را بریده‌اند. ثابت کنید، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست روی این خط‌های راست موازی، که به‌وسیلهٔ چندضلعی پدید آمده‌اند، از ۱۰ تجاوز نمی‌کند.

*۳۷. دو نفر با هم بازی می‌کنند. اولی پیش خود، یک عدد ده‌رقمی درنظر می‌گیرد. دومی از او می‌پرسد: در مرتبه‌های مشخصی از عدد، چه رقم‌هایی وجود دارد؟ اولی به او پاسخ می‌دهد؛ ولی تنها رقم‌ها را نام می‌برد، بدون این‌که مرتبهٔ آن‌ها را معین کند. حداقل، با چند پرسش از این‌گونه، می‌توان عدد را پیدا کرد؟

*۳۸. مکعبی با ضلع به‌طول a را، روی یک صفحهٔ شطرنجی انداخته‌ایم. ثابت کنید، این مکعب نمی‌تواند بیش از $(a+۱)^۲$ راس از خانه‌های شطرنجی را بپوشاند.

*۳۹. روی محیط یک چندضلعی کوژ، دو حشره و دو مگس، در یک جهت و با یک سرعت حرکت می‌کنند. موقعیت نخستینِ حشره‌ها چگونه باشد تا، به‌فرض موقعیت دلخواه اولیه برای مگس‌ها، حداقل فاصلهٔ بین مگس‌ها، بیشتر از حداقل فاصلهٔ بین حشره‌ها نباشد (با مسالهٔ ۴۰.۸۰ مقایسه کنید).

۴۰. در مربعی به ضلع واحد، ۱۹۷۳ شکل رسم کرده‌ایم که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، از ۱۹۷۲ بیشتر است. ثابت کنید، همهٔ این شکل‌ها، نقطهٔ مشترکی دارند.

سال ششم

۱. همهٔ عددهای $\overline{abc}$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم

$$\overline{abc} = ۲(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac})$$

۲. آیا چندضلعی کوژی وجود دارد که درست ۱۹۷۴ قطر داشته باشد؟

۳. با مقوا، چند مثلث متساوی‌الاضلاع درست کرده‌اند. در سه راس هر مثلث، عددهای ۱، ۲ و ۳ را نوشته‌اند. سپس، آن‌ها را به شکل یک ستون روی هم چیده‌اند. آیا ممکن است، وضعی پیش آید که مجموع عددها در طول هر یال ستون، برابر ۵۵ شود؟

۴. در مسالهٔ ۳، آیا ممکن است مجموع عددها در هر یال برابر ۵۰ شود؟

۵. A، B و C، پشت خط حرکت آماده مسابقه دو هستند. در لحظهٔ حرکت، C اندکی تاخیر داشت، ولی بعد، در طول حرکت، یا جلو می‌افتاد و یا درست شش بار از او جلو افتادند. B، در آغاز حرکت، نسبت به A تاخیر داشت. در جریان حرکت، یا A جلو می‌افتاد و یا درست پنج بار از او جلو افتادند. B پیش از A به پایان خط رسید. در مسابقه، این سه نفر، چه ردیف‌هایی را به‌دست آوردند؟

۶. کشور دارای ۱۹۷۴ شهر است. از پای‌تخت، به شهرهای دیگر، ۱۰۱ خط هوایی وجود دارد، ولی از شهر A (که دورترین شهر نسبت به پای تخت است)، تنها یک خط هوایی خارج می‌شود. برای شهرهای دیگر، هر شهر با ۲۰ خط هوایی به شهرهای دیگر مربوط است. ثابت کنید، از پای‌تخت می‌توان، با عوض کردن هواپیما، به شهر A پرواز کرد.

سال هفتم

۷. می‌دانیم

$$a+b+c=7 \text{ و } \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$$

مطلوب است محاسبهٔ مقدار

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

۸. O را مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گیریم. مجموعهٔ نقطه‌های X را طوری پیدا کنید که، هر خط راستی که از X می‌گذرد، یا پاره‌خط راست AB و یا پاره خط راست OC را قطع کند.

۹. همهٔ عددهای $\overline{abcd}$ را پیدا کنید که، برای هریک از آن‌ها، داشته باشیم:

$$\overline{abcd}=\overline{ad}\cdot\overline{ada}$$

۱۰. نقطه‌های A، B و C روی محیط دایره واقع‌اند. D وسط خط شکستهٔ ABC، روی پاره‌خط راست BC و E وسط کمان ABC است. ثابت کنید خط راست ED بر خط راست BC عمود است.

۱۱. همان مسالهٔ ۶.

۱۲. در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای زاویهٔ منفرجه و زاویهٔ حاده را رسم کرده‌ایم. طول نیمساز زاویهٔ راس، نصف طول نیمساز زاویهٔ مجاور قاعده شده‌است. مقدار زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

سال هشتم

۱۳. روی صفحه، دو دایره، در بیرون یکدیگر داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در بیرون این دو دایره وجود دارد، به‌نحوی که هر خط راستی که از این نقطه می‌گذرد، دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند؟

۱۴. این معادله را در مجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید:

$$x^{x^{x^x}} = (۱۹ - y^x)y^{x^y} - ۷۴$$

۱۵. از یک مقوای شطرنجی ۸ × ۸، خانهٔ گوشه‌ای را بریده‌ایم. آیا بقیهٔ مقوا را می‌توانیم به ۱۷ مثلث هم‌ارز (یعنی با مساحت‌های برابر) تقسیم کنیم؟

۱۶. در خانهٔ a۱ از صفحه شطرنجی ۸ × ۸، پیاده سفید و در خانهٔ h۸، پیاده سیاه قرار دارند. پیادهٔ سفید می‌تواند تنها به طرف بالا یا به سمت راست و پیادهٔ سیاه، تنها به پایین یا به چپ حرکت کند. پیاده نمی‌تواند به خانه‌ای وارد شود که دیگری اشغال کرده‌است، ولی می‌تواند هرچند مرتبه، حرکت کند. می‌دانیم، بعد از مدتی، جای دو پیاده عوض شده‌است. ثابت کنید، در جریان حرکت‌های دو پیاده، لحظه‌ای وجود دارد که، خط راست گذرنده از مرکزهای خانه‌هایی که به‌وسیلهٔ دو پیاده اشغال شده‌است، بر خط راست گذرنده از مرکزهای خانه‌های a۱ و h۸ عمود است.

۱۷. ثابت کنید، نمی‌توان مجموعهٔ باپایانی از n نقطه $(n > ۴)$ پیدا کرد، به‌نحوی که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند و، درضمن، برای هر سه نقطهٔ این مجموعه، بتوان نقطهٔ چهارمی از همین مجموعه پیدا کرد که با سه نقطهٔ انتخابی، راس‌های یک متوازی‌الاضلاع باشند.

۱۸. باکتری وجود دارد که، در طول زمان معینی، نصف می‌شود. یکی از نیمه‌ها، دوباره نصف می‌شود و غیره. ۱۰۰۰ باکتری ایجاد می‌شود. ثابت کنید، باکتری وجود دارد که، نتیجهٔ تکثیر آن، از ۳۳۴ کمتر و از ۶۶۷ بیشتر نیست.

سال نهم

۱۹. همان مسالهٔ ۱۵.

۲۰. همان مسالهٔ ۱۴.

۲۱. همان مسالهٔ ۱۶، برای صفحهٔ شطرنجی ۹ × ۹.

۲۲. مثلث ABC و دایرهٔ S، روی صفحه داده شده‌اند. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر R و شعاع دایرهٔ مفروض برابر $\frac{1}{2}R$ است. ثابت کنید، نقطهٔ T وجود دارد به نحوی که پاره‌خط‌های راست TA، TB و TC، محیط دایره S را نصف می‌کنند.

۲۳. نقطهٔ X درونِ دایرهٔ به مرکز O قرار دارد. نقطهٔ Y را روی قطری که از X می‌گذرد، طوری انتخاب می‌کنیم که نقطهٔ O وسط دو نقطهٔ X و Y باشد. می‌خواهیم از نقطهٔ Y، وتر AB را چنان بگذرانیم که زاویهٔ AXB، حداقل مقدار ممکن باشد.

*۲۴. در یک زبان، سه کلمهٔ A، B و C چنان‌اند که کلمهٔ $AABB$ بر کلمهٔ CC منطبق است. ثابت کنید، کلمه‌ای مثل D وجود دارد که، هرکدام از کلمه‌های A، B و C، با چند بار نوشتن کلمهٔ D به‌دست می‌آیند.

سال دهم

۲۵. آیا عددی ۲۰رقمی که از سمت چپ با ۱۱ رقم برابر واحد آغاز می‌شود، وجود دارد که مجذور یک عدد درست باشد؟

۲۶. نیم‌خط‌های راست OS_1، OS_2، OS_3، که از نقطهٔ O آغاز شده‌اند، سه صفحهٔ موازی را، به‌ترتیب، در نقطه‌های A_1، B_1، C_1؛ A_2، B_2، C_2؛ A_3، B_3، C_3 قطع کرده‌اند. هرم $OA_1B_2C_3$ حجمی برابر V دارد. حجم هرم‌های $OA_1B_1C_1$، $OA_2B_2C_2$، $OA_3B_3C_3$ را به‌ترتیب، V_1، V_2، V_3 می‌نامیم. ثابت کنید:

$$V \leq \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3)$$

۲۷. به شرط این‌که بدانیم:

$$|x_۱| \leq ۱, |x_۲| \leq ۱, |x_۳| \leq ۱, |x_۴| \leq ۱$$

مقدار ماگزیمم این عبارت را پیدا کنید:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ - x_۱x_۲ - x_۱x_۳ - x_۱x_۴ - x_۲x_۳ -$$
$$-x_۲x_۴ - x_۳x_۴ + x_۱x_۲x_۳ + x_۱x_۲x_۴ + x_۱x_۳x_۴ +$$
$$+x_۲x_۳x_۴ - x_۱x_۲x_۳x_۴$$

۲۸. ثابت کنید، نمی‌توان در فضا، مجموعهٔ محدودی از n نقطه پیدا کرد $(n > ۴)$، به نحوی که برای هر سه نقطهٔ آن، نقطهٔ چهارمی از مجموعه وجود داشته باشد که، با هم، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل دهند.

۲۹. از نقطهٔ O، ۱۲ نیم‌خط راست، در یک صفحه رسم شده‌است و می‌دانیم، هر دو نیم‌خط مجاور، زاویه‌ای کوچکتر از $\frac{\pi}{۴}$ تشکیل می‌دهند. روی نیم‌خط راست $S_۱$، نقطهٔ $A_۱$ را به فاصلهٔ ۷۲۹ از O انتخاب کرده‌ایم. از نقطهٔ $A_۱$، خط راستی موازی با نیم‌خط راست $S_{۱۲}$ کشیده‌ایم تا $S_۲$ را در نقطهٔ $A_۲$ قطع کند. از نقطهٔ $A_۲$، خط راستی موازی با $S_۱$ رسم کرده‌ایم تا $S_۳$ را در $A_۳$ قطع کند و غیره. سرانجام، نقطه $A_{۱۳}$ روی $S_۱$ به‌دست می‌آید. ثابت کنید: $|OA_{۱۳}| \leq ۱$.

۳۰. عدد ۲^n را روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. زیر آن دو عدد طبیعی را، در یک ردیف، قرار داده‌ایم، به نحوی که مجموع آن‌ها برابر ۲^n باشد. زیر هرکدام از عددهای جدید، دوباره، دو عدد طبیعی به مجموع عدد بالای خود نوشته‌ایم. این عمل را تا آنجا ادامه داده‌ایم که به عدد واحد برسیم. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهایی که روی تخته سیاه نوشته‌ایم، از $n \times ۲^n$ کمتر نیست.

دور نهایی

۳۱. فراز سیاره‌ای که به شکل کره است، ۳۷ ماهواره (که هرکدام را یک نقطه به حساب می‌آوریم)، پرواز می‌کنند. ثابت کنید، در هر لحظه، می‌توان نقطه‌ای روی سیاره پیدا کرد که، از آن‌جا، بیش از ۱۷ ماهواره دیده نمی‌شود.

۳۲. گروهی از مردم در جایی گرد هم آمده‌اند. هر دو نفر از این گروه، به یک اندازه آشنا در آن‌جا دارند، ولی آشنای مشترکی ندارند. ثابت کنید، در این گروه، یا هیچ کس با دیگری آشنا نیست و یا کسی، درست یک آشنا دارد.

۳۳. ثابت کنید، در چندضلعی کوژ، که تعداد ضلع‌های آن عددی زوج است، قطری وجود دارد که با هیچ یک از ضلع‌های آن موازی نیست.

۳۴. در خانه‌های یک جدول مستطیلی، عددهای طبیعی نوشته شده‌است. می‌توانیم، در هر مرحله، عددهای یک ستون را دو برابر و یا از عددهای یک سطر، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، به کمک این عمل‌ها، می‌توان جدولی به‌دست آورد که تنها شامل صفرها باشد.

۳۵. ضلع‌های یک مربع را، پشت‌سرهم، با عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ شماره‌گذاری کرده‌ایم. برای هر نقطهٔ دلخواه A و ضلع با شمارهٔ k، قرینهٔ A نسبت به خط راست k را A_k می‌نامیم. همهٔ نقطه‌های A را طوری پیدا کنید که هریک از نقطه‌های $A_۱$، $A_{۱۲}$، $A_{۱۲۳}$، $A_{۱۲۳۴}$، $A_{۱۲۳۴۱}$، . . . در درون مربع قرار گیرند.

۳۶. مجموع صد عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰، برابر است با ۲۰۰. ثابت کنید، از بین آن‌ها، می‌توان چند عدد انتخاب کرد که مجموعی برابر ۱۰۰ داشته باشند.

۳۷. همهٔ عددهای طبیعی k را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: یک k ضلعی وجود نداشته‌باشد که خط راستی که از ادامهٔ هر ضلع آن به‌دست

می‌آید، روی ضلع دیگر این k ضلعی قرار گیرد. تنها چندضلعی‌هایی را درنظر بگیرید که ضلع‌های مجاورِ موازی نداشته باشند.

*۳۸. عدد اول p داده شده‌است. ثابت کنید، از بین $p+1$ عدد طبیعی، که دو به دو با هم فرق دارند، می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که نسبت عدد بزرگتر بر بزرگترین بخشیاب مشترک آن‌ها، از $p+1$ کوچکتر نباشد.

۱۹۷۵

سال ششم

۱. کولیا یک عدد دو رقمی اندیشید و واسیا تلاش کرد آن را پیدا کند. برای این منظور، واسیا عددهای دو رقمی را روی تخته می‌نویسد؛ اگر این عدد، همان عدد موردنظر باشد، کولیا در کنار آن علامت + و اگر تنها در یک رقم با عدد موردنظر تطبیق کند، علامت − را می‌گذارد. ثابت کنید، کافی است واسیا ۱۰ عدد روی تخته بنویسد تا عدد موردنظر را کشف کند.

۲. ۲۶ سنگ دومینو به ردیف چیده شده‌است. سپس، هریک از دو سنگ باقی‌مانده را نصف کرده‌اند. ثابت کنید، در بین چهار نیمه‌ای که به‌دست می‌آید، دو سنگ یکسان وجود دارد.

۳. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}+\dots+\frac{۹۷}{۹۸}-\frac{۹۹}{۱۰۰}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲۶}+\frac{۱}{۲۷}+\dots+\frac{۱}{۵۰}\right)$$

۴. در صفحه، دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر، خط‌های راست a، b، c، d، e که دایره را قطع کرده‌اند و، همچنین، نقطهٔ X به فاصلهٔ ۱۱ سانتی‌متر

از مرکز دایره، داده شده‌است. قرینهٔ نقطهٔ X را، پشت‌سرهم نسبت به پنج خط راست پیدا کرده‌ایم؛ نقطهٔ E به‌دست آمده‌است. ثابت کنید، نقطهٔ E نمی‌تواند در درون دایره قرار گیرد.

۵. کولیا و واسیا، تنها به کمک رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، یک عدد ۲۰ رقمی می‌نویسند. رقم اول (از سمت چپ) را کولیا، رقم دوم را واسیا می‌نویسد و غیره. واسیا می‌خواهد ترتیبی بدهد که عدد ۲۰رقمی بر ۹ بخش‌پذیر باشد. آیا کولیا می‌تواند مانع او بشود؟

۶. با رقم‌های ۱، ۲ و ۳، همهٔ عددهای چهاررقمی را که ممکن است، نوشته‌ایم. هریک از عددها با یکی از شماره‌های ۱، ۲ یا ۳ مشخص شده‌است. شماره‌ها را طوری به عددها داده‌ایم که، اگر دو عدد در همهٔ مرتبه‌ها با هم اختلاف دارند، دو شمارهٔ متفاوت داشته باشند. معلوم شد، عددهای ۱۱۱۱، ۲۲۲۲، ۳۳۳۳ و ۱۲۲۲، با شماره‌هایی مشخص شده‌اند که همان رقم اول سمت چپ آن‌هاست. ثابت کنید، شمارهٔ بقیهٔ عددها هم، همان رقم اول سمت چپ آن‌هاست.

سال هفتم

۷. کولیا و واسیا، به‌نوبت و با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، یک عدد ۳۰ رقمی می‌نویسند. کولیا آغاز می‌کند و واسیا می‌خواهد، عدد حاصل، بر ۹ بخش‌پذیر باشد. آیا کولیا می‌تواند مانع او بشود؟

۸. p و $p^{p+1}+2$ عددهای اول‌اند. p را پیدا کنید.

۹. بین رقم‌های یک عدد سه‌رقمی، صفر وجود ندارد. این عدد را در مجموع عکس رقم‌های آن ضرب کرده‌ایم. حداکثر مقدار این حاصل‌ضرب چقدر می‌تواند باشد؟

۱۰. شش‌ضلعی کوژ ABCDEF داده شده‌است. M_1 وسط AB، M_2 وسط CD، M_3 وسط M_1M_2، M_4 وسط EF، M_5 وسط AF،

M_6 وسط DE، M_7 وسط M_5M_6 و M_8 وسط BC است. ثابت کنید، پاره‌خط‌های راست M_3M_4 و M_7M_8، به ناچار یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۱. همهٔ عددهای هفت رقمی را درنظر می‌گیریم که با رقم‌های ۱ و ۲ و ۳ ساخته شده‌اند. به هرکدام از این عددها، یکی از همین رقم‌ها را اضافه می‌کنیم، به نحوی که، اگر دو عدد در همهٔ مرتبه‌ها با هم اختلاف دارند، در رقم اضافه شده هم، با یکدیگر فرق داشته‌باشند. همچنین می‌دانیم به عدد ۱۱۱۱۱۱۱، رقم ۱؛ به عدد ۲۲۲۲۲۲۲، رقم ۲؛ به عدد ۳۳۳۳۳۳۳، رقم ۳ و به عدد ۱۲۲۲۲۲۲، رقم ۱ اضافه شده‌است. ثابت کنید، برای همهٔ عددها، رقمی که اضافه کرده‌ایم، همان رقم اول عدد هفت رقمی است.

۱۲. دایره‌ای به شعاع ۱ مفروض است. وتری از دایره را طوری رسم کنید که، اگر آن را ضلع یک مربع بگیریم، فاصلهٔ مرکز دایره تا یکی از راس‌های این مربع، حداکثر مقدار ممکن باشد.

سال هشتم

۱۳. نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الساقین، روی محیط دایرهٔ محاطی مثلث است. نسبت ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

۱۴. پنج تصاعد هندسی بی‌پایان داریم که، همهٔ جمله‌های آن‌ها، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، عددی طبیعی وجود دارد که در هیچ‌کدام از تصاعدها، پیدا نمی‌شود.

۱۵. F نقطهٔ برخورد نیمسازهای AD و CE از مثلث ABC است. می‌دانیم نقطه‌های B، D، E و F روی محیط یک دایره‌اند. ثابت کنید، شعاع این دایره، از شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، کوچکتر نیست.

۱۶. ثابت کنید، نقطه‌های برخورد سهمی‌های

$$y = x^۲ + x - ۴۱ \text{ و } x = y^۲ + y - ۴۰$$

روی محیط یک دایره‌اند.

۱۷. چند عدد طبیعی $N < 10^6$ وجود دارد، به‌نحوی که N بر $[\sqrt{N}]$ بخش‌پذیر باشد.

۱۸. در هفت راس متوالی یک ۱۰۰ ضلعی منتظم، تکه کاغذهایی از هفت رقم گذاشته‌ایم. در هر حرکت، می‌توانیم یکی از کاغذها را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، بعد از ۱۰ راس، روی راس یازدهم، به شرطی که آزاد باشد، بگذاریم. می‌خواهیم کاغذها را در هفت راسی که بعد از هفت راس نخستین واقع‌اند، قرار دهیم. چند وضع مختلف، برای این تکه کاغذها، ممکن است در این هفت راس پیش آید؟

سال نهم

۱۹. قطرهای AB و CD را، عمود بر هم، در دایره‌ای رسم کرده‌ایم. روی کمان BD، نقطهٔ X را انتخاب کرده‌ایم؛ درضمن، AX و CX، با CD و AB، به‌ترتیب، در نقطه‌های E و F برخورده‌اند. ثابت کنید، اگر نسبت $\frac{|CE|}{|ED|}$ عددی گویا باشد، آن‌وقت نسبت $\frac{|AF|}{|FB|}$ هم عددی گویا است.

۲۰. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۱. بین مثلث‌هایی که در یک مثلث مفروض قرار دارند، نسبت مساحت به محیط کدام‌یک، بیشترین مقدار است؟

۲۲. همان مسالهٔ ۱۸.

۲۳. پنج نیم‌خط راست، که از یک نقطه آغاز شده‌اند، روی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم. حداکثر چند زاویهٔ منفرجه تشکیل می‌دهند؟

۲۴. در یک جدول مربعی 100×100، بعضی از خانه‌ها را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. هر خانهٔ رنگی، یا تنها خانهٔ رنگی در ستون خود و یا تنها خانهٔ رنگی در سطر خود است. حداکثر، چند خانه می‌تواند رنگی باشد؟

سال دهم

۲۵. ۱۹۷۵ تصاعد هندسی داریم که، همهٔ جمله‌های آن‌ها، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید که آن‌ها نمی‌توانند شامل همهٔ عددهای طبیعی باشند.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۷. معادلهٔ $x^۲ + ۲ = ۴\sqrt{x^۳ + ۱}$ را حل کنید.

۲۸. چهار کره با شعاع‌های برابر در فضا داده شده‌است. ثابت کنید، هیچ سه‌تایی از آن‌ها، چهارمی را نمی‌پوشاند.

۲۹. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۰. یک nضلعی کوژ، در مربع ۱ × ۱ قرار دارد. ثابت کنید، سه راس متوالی از این nضلعی وجود دارد که مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند، از $\frac{۸}{n^۲}$ بیشتر نیست.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۱. دربارهٔ عددهای a، b، c و d می‌دانیم:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲ = ۱ \text{ و } ac + bd = ۰$$

مطلوب است محاسبهٔ $ab + cd$.

۳۲. کدام بزرگترند:

$$\underset{(\text{۱۰۰ بار ۲})}{۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}}} \quad \text{یا} \quad \underset{(\text{۹۹ بار ۳})}{۳^{۳^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۳}}}}}}$$

۳۳. عددهای طبیعی a و b و c را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم، عددهای $c^a + b, b^c + a, a^b + c$، عددهایی اول‌اند.

۳۴. مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع بر صفحه را در اختیار داریم. می‌توانیم، قرینهٔ هر نقطه را، نسبت به خط راستی پیدا کنیم که عمود منصف پاره‌خط راستی باشد که دو انتهای آن، دو نقطه از این مجموعه است. اگر از سه نقطه‌ای آغاز کنیم که فاصله دوبه‌دوی آن‌ها، کمتر از واحد است، آیا می‌توان به مجموعه‌ای رسید که در آن، دو نقطه با فاصله‌ای بزرگتر از واحد وجود داشته‌باشد؟

۳۵. در یک گردهم‌آیی ۳۰ نفر جمع شده‌اند. هر نفر درست با کارهای علمی k نفر از این گروه آشناست. k، دست‌کم چقدر باید باشد تا بتوانیم بگوییم، حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که با کارهای علمی یکدیگر آشنا هستند؟

۳۶. هشت راس از راس‌های یک ۳۵ ضلعی متنظم را انتخاب کرده‌ایم ثابت کنید، چهار راس از این هشت راس، یا یک ذوزنقه و یا یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

*۳۷. در کشوری، برخی شهرها، به‌وسیلهٔ جاده به هم مربوط‌اند. طول هر جاده، از ۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست. می‌دانیم، از هر شهر به هر شهر دیگر، می‌توان با پیمودن مسیری که از ۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست، رسید. یکی از جاده‌ها را، به دلیلی، بسته‌اند؛ ولی هنوز می‌توان، مثل سابق، از هر شهری به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، بعد از بسته شدن یکی از جاده‌ها، برای سفر از هر شهر به هر شهر دیگر، نیازی به پیمودن بیش از ۱۵۰۰ کیلومتر نیست.

*۳۸. مرکزهای ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج را علامت گذاشته‌ایم. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنج را با سیزده خط راست، چنان به بخش‌هایی تقسیم کرد که، در هر بخش، بیش از یک نقطهٔ نشان‌دار (مرکز خانه) وجود نداشته باشد؟

دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۳۹. همان مسالهٔ ۳۱.

۴۰. آیا می‌توان در فضا، چهار کرهٔ دوبه‌دو غیرمتقاطع و نقطهٔ A در بیرون آن‌ها را، طوری درنظر گرفت که، هر نیم‌خط راستی که از نقطهٔ A آغاز می‌شود، دست‌کم یکی از کره‌ها را قطع کند؟

۴۱. همان مسالهٔ ۳۷.

۴۲. آیا تابع $f : R \to R$ وجود دارد، به نحوی که برای هر x داشته‌باشیم:

$$f(x) + f^{-1}(x) = -x$$

۴۳. همان مسالهٔ ۳۸.

*۴۴. برای دنبالهٔ عددهای درست x_0، x_1، x_2، ... می‌دانیم:

$$x_0 = 0, \ |x_n| = |x_{n-1} + 1| (n \in \mathrm{N})$$

حداقل مقداری که عبارت $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{1975}|$ می‌تواند داشته باشد، چقدر است؟

۴۵. نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 را روی ضلع‌های BC، AC و AB از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که پاره‌خط‌های راست AA_1، BB_1 و CC_1 در نقطهٔ D به هم رسیده‌اند. پاره‌خط‌های راست A_1C_1 و BB_1، در نقطهٔ E یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، اگر $|BD| = 2|B_1D|$، آن‌وقت $|BE| = |B_1E|$.

*۴۶. هریک از عددهای x_0، x_1، ...، x_n یا برابر ۰ است و یا برابر ۱. ثابت کنید:

$$x_0 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{(\sqrt{2})^2} + \ldots + \frac{x_n}{(\sqrt{2})^n} \leq$$
$$\leq (1 + \sqrt{2}) \sqrt{x_0 + \frac{x_1}{2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n}}$$

۱۹۷۶

سال ششم

۱. ۳۰۰ نقطه روی محیط دایره‌ای نشان گذاشته شده‌است. حشره‌ای در یکی از این نقطه‌ها نشسته است. او در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، مرتب از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر می‌جهد، به این ترتیب: اول روی نقطهٔ مجاور، بعد از روی یک نقطه می‌جهد و در نقطهٔ بعد از آن می‌نشیند، سپس از روی دو نقطه می‌جهد، بعد از روی سه نقطه و غیره. ثابت کنید، می‌توان نقطه‌ای پیدا کرد که حشره، هرگز روی آن قرار نمی‌گیرد.

۲. عددهای از ۱ تا ۹ را به سه گروه تقسیم کرده‌ایم: در هر گروه ۳ عدد. سپس، عددهای هر گروه را در هم ضرب کرده‌ایم؛ بزرگترین عدد از بین این سه حاصل‌ضرب را a می‌نامیم. کمترین مقدار ممکن برای a چقدر است؟

۳. روستاهای A، B و C، در راس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. در روستای A، ۱۰۰ دانش‌آموز؛ در روستای B، ۲۰۰ دانش‌آموز و در روستای C، ۳۰۰ دانش‌آموز زندگی می‌کنند. مدرسه را در کجا بسازیم که مجموع مسافت‌هایی که همهٔ دانش‌آموزان می‌پیمایند، کمترین مقدار ممکن باشد؟

۴. نواری به ۳۰ خانه، در یک ردیف، تقسیم شده‌است. در دو خانهٔ مرزی، دو مهره گذاشته شده‌است. دو نفر بازی می‌کنند و، هرکدام، در نوبت خود می‌تواند مهرهٔ خود را یک یا دو خانه، به هر سمتی جابه‌جا کند. از روی مهرهٔ رقیب، نمی‌توان پرید. کسی که، در نوبت خود نتواند حرکت کند، بازی را باخته است. کسی که بازی را آغاز کرده‌است، چگونه بازی کند که برنده شود؟

۵. روی کاغذ شطرنجی، مربعی شامل ۱۱ × ۱۱ خانه رسم کرده‌ایم. می‌خواهیم مرکزهای برخی از خانه‌ها را طوری نشان‌گذاری کنیم که، مرکزهای هر دو خانهٔ دلخواه، روی پاره‌خط راستی باشد که دو نقطهٔ نشان‌دار را، به‌صورت قائم یا به صورت افقی به هم وصل کرده‌است. حداقل، چند خانه را باید نشان گذاشت؟

۶. قطعه زمین مربع شکل را که حصاری به دور خود دارد، با حصارهای دیگری، به چند مربع کوچکتر تقسیم کرده‌ایم. طول ضلع هریک از مربع‌های کوچکتر با عدد درستی بیان می‌شود (برحسب متر). ثابت کنید، مجموع طول‌های همهٔ حصارها، برحسب متر، بر ۴ بخش‌پذیر است.

سال هفتم

۷. همان مسالهٔ ۱، برای ۱۰۱ نقطه.

۸. همان مسالهٔ ۲.

۹. جیرجیرک روی صفحه با جست به این طرف و آن طرف می‌رود: در جست اول ۱ سانتی‌متر، در جست دوم ۲ سانتی‌متر، در جست سوم ۳ سانتی‌متر و غیره، او بعد از هر جست، به‌اندازهٔ ۹۰ درجه تغییر جهت می‌دهد. بعد از مدتی، تصمیم می‌گیرد، به‌جای نخست خود برگردد. آیا موفق می‌شود؟

۱۰. F یک پنج‌ضلعی کوژ است. محیط پنج‌ضلعی F، محیط پنج ضلعی ستاره‌ای که راس‌هایش روی راس‌های پنج‌ضلعی F هستند و محیط پنج‌ضلعی درونی، عددهایی اول‌اند. ثابت کنید، مجموع این سه محیط، از ۲۰ کمتر نیست.

۱۱. همان مسالهٔ ۵.

۱۲. همان مسالهٔ ۶.

۱۳. x_1، x_2، ...، x_{25} عددهای درست و y_1، y_2، ...، y_{25}، همان عددها، ولی به ردیف دیگری هستند. ثابت کنید

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\dots(x_{25} - y_{25})$$

عددی زوج است.

۱۴. A و B، عددهای سه‌رقمی‌اند. اگر B را یکبار در سمت راست A و بار دیگر در سمت چپ آن بنویسیم، دو عدد شش‌رقمی به‌دست می‌آید. ثابت کنید، اگر A و B با هم برابر نباشند، تفاضل این دو عدد شش‌رقمی، بر ۱۹۷۶ بخش‌پذیر نیست.

۱۵. در جادهٔ کمربندی دایره‌ای شکل، یک دونده، دو دوچرخه‌سوار و یک موتورسیکلت سوار، هرکدام با سرعتی ثابت، حرکت می‌کنند: دونده و یکی از دوچرخه‌سوارها در یک جهت و موتورسیکلت سوار و دوچرخه‌سوار دوم، در جهت دیگر. دونده، هر ۱۲ دقیقه یکبار، با دوچرخه‌سوار دوم برخورد می‌کند؛ دوچرخه‌سوار اول، هر ۲۰ دقیقه یکبار به دونده می‌رسد و موتورسوار هر ۵ دقیقه یکبار به دوچرخه‌سوار دوم می‌رسد. موتور سوار و دوچرخه سوار اول، هر چند دقیقه یکبار، یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

۱۶. نقطهٔ A در درون و نقطهٔ B در بیرون ۱۹۷۶ ضلعی منتظم قرار دارند. $\vec{X}_A$ را مجموع بردارهایی می‌گیریم که از نقطهٔ A به راس‌های ۱۹۷۶ ضلعی رسم شده‌اند و $\vec{X}_B$ را مجموع بردارهای از نقطهٔ B تا راس‌های ۱۹۷۶ ضلعی. آیا ممکن است طول بردار $\vec{X}_A$ از طول بردار $\vec{X}_B$ بیشتر باشد؟

۱۷. زاویهٔ C، در چهارضلعی $ABCD$، بزرگترین زاویه است. K، نقطهٔ برخورد خط راست AD و خط راستی است که از C موازی AB رسم شود؛ M، نقطهٔ برخورد خط راست AB و خط راستی که از C موازی

AD رسم شود؛ P نقطهٔ برخورد خط‌های راست BK و MD است. ثابت کنید، مساحت‌های چهارضلعی‌های $AMPK$ و $BCDP$ با هم برابرند.

۱۸. از مجموعهٔ عددهای طبیعی، سه زیرمجموعهٔ دوبه‌دو جدا از هم، انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دو عدد x و y را از دوتا از این زیرمجموعه‌ها طوری انتخاب کرد که مجموع آن‌ها $x+y$، در زیرمجموعهٔ سوم نباشد.

سال نهم

۱۹. در مثلث ABC می‌دانیم:

$$|AC| = \frac{۱}{۲}(|AB| + |BC|)$$

ثابت کنید، طول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، یک‌سوم طول یکی از ارتفاع‌های آن است.

۲۰. ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی m و n، کوچکترین عدد از بین دو عدد $\sqrt[m]{n}$ و $\sqrt[n]{m}$، از $\sqrt[۳]{۳}$ کوچکتر است.

۲۱. همان مسالهٔ ۱۴.

۲۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۵$، یک nضلعی کوژ وجود دارد، به‌نحوی که طول ضلع‌های آن متفاوت باشد و، در ضمن، مجموع فاصلهٔ هر نقطهٔ درونی nضلعی تا ضلع‌های آن (و یا امتداد ضلع‌ها)، به جای این نقطه بستگی نداشته باشد.

۲۳. حاکم، ۱۲ مشاور دارد و از آن‌ها گروه‌هایی به این ترتیب تشکیل داده است که، هر دو گروه، یک عضو مشترک داشته باشند، ولی ترکیب آن‌ها با هم فرق کند. حاکم توانست ۱۰۰۰ گروه تشکیل دهد. ثابت کنید، هنوز می‌تواند یک گروه دیگر، باتوجه به شرط مساله، درست کند.

*۲۴. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن مفروض‌اند. K، نقطهٔ برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ B و نیمساز خارجی زاویهٔ C، L، نقطهٔ برخودر نیمساز داخلی زاویهٔ C و نیمساز خارجی زاویهٔ B و نقطهٔ M، وسط پاره‌خط راست KL است. ثابت کنید، M، نقطهٔ وسط کمان CAB از دایره محیطی مثلث است.

سال دهم

۲۵. خط شکستهٔ بسته‌ای که شامل چهار ضلع است و همهٔ ضلع‌های آن، طول‌هایی برابر دارند، داده شده‌است. ثابت کنید، فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه فضا تا هر راس خط شکسته، از مجموع فاصله‌های این نقطه تا سه راس دیگر آن، کوچکتر است.

۲۶. تابع f را، که در مجموعهٔ عددهای حقیقی معین است، طوری پیدا کنید که برای هر x و y داشته‌باشیم:

$$f^{۲}(x+y)=f^{۲}(x)+f^{۲}(y)$$

۲۷. اگر بدانیم این معادله دارای جواب است، همهٔ جواب‌های حقیقی آن را پیدا کنید:

$$\sqrt{a+bx}+\sqrt{b+cx}+\sqrt{c+ax}=$$
$$=\sqrt{b-ax}+\sqrt{c-bx}+\sqrt{a-cx}$$

۲۸. طول ضلع‌های مثلثی، برابر a، b و c است. ثابت کنید:

$$۲<\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}}{abc}<۳$$

۲۹. جدول ۵ × ۵ به‌وسیلهٔ صفرها و واحدها، پر شده‌است. می‌دانیم در گوشهٔ چپ بالا و در گوشهٔ راستِ پایین، واحد، و در دو گوشهٔ دیگر،

عدد صفر گذاشته شده‌است. ثابت کنید، می‌توان دو مربع مختلف ۲ × ۲ در جدول پیدا کرد (ممکن است متقاطع باشند) که تعداد صفرها و تعداد واحدها، در آن‌ها یکی است.

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

دور نهایی

۳۱. در پنج‌ضلعی کوژ $ABCDE$، همهٔ ضلع‌ها طولی برابر دارند. اگر بدانیم زاویهٔ ACE برابر نصف زاویهٔ BCD است، مقدار زاویهٔ ACE را پیدا کنید

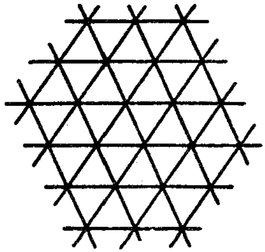
۳۲. فضا را به پنج زیرمجموعهٔ غیرتهی تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که، دست‌کم، سه تا از آن‌ها را قطع می‌کند.

۳۳. دستگاه را در مجموعهٔ عددهای حقیقی حل کند.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

۳۴. در یک بازی، به تعداد محدودی موقعیت وجود دارد؛ درضمن، برای هر موقعیت، تعداد موقعیت‌هایی که می‌توان از آن‌ها به سمت آن رفت، برابر است با تعداد موقعیت‌هایی که می‌توان از آن به سمت آن‌ها رفت. کسی می‌بازد که نتواند از موقعیت خود بیرون رود. ثابت کنید، تعداد موقعیت‌هایی که آغازکنندهٔ بازی را، به شرط بازی درست نفر دوم، دچار باخت می‌کند، بیشتر از نصف تعداد همهٔ موقعیت‌ها نیست.

۳۵. جدولی ۱۰۰ × ۱۰۰ داریم که همهٔ خانه‌های آن با سه رنگ مختلف، رنگ شده‌اند. می‌توانیم هر مربع ۲ × ۲ را به رنگی درآوریم که، در



شکل ۶

آن، نسبت به دو رنگ دیگر برتری دارد؛ و اگر رنگ برتر در این مربع ۲ × ۲ وجود نداشته باشد، به رنگی درآوریم که در آن وجود ندارد. ثابت کنید، به این ترتیب، می‌توان تمامی مربع بزرگ را به یک رنگ درآورد.

۳۶. صفحه را به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقسیم کرده‌ایم. (شکل ۶).همهٔ مثلث را با چهار رنگ چنان رنگ کرده‌ایم که یک شکل به هم پیوسته را تشکیل دهند. ثابت کنید، از این شکل می‌توان دست‌کم ۳۳ لوزی غیرمتقاطع برید، به نحوی که هر لوزی شامل دو مثلث باشد.

۳۷. ثابت کنید، از بین عددهای ۱۹۷۶ رقمی که هرکدام از آن‌ها، شامل ۱۹۷۵ واحد و یک رقم برابر ۷ باشد، دست‌کم می‌توان ۶۵۸ عدد مرکب پیدا کرد.

۱۹۷۷

سال ششم

۱. آیا می‌توان یک مربع را به ۱۹۷۷ مثلث طوری تقسیم کرد که روی ضلع‌های مربع، به تعداد برابر از راس‌های مثلث‌ها قرار گیرد و، درضمن، راس هیچ مثلثی در درون ضلع مثلث دیگر نباشد.

۲. ۲۰ رخ را طوری روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج گذاشته‌ایم که هر رخ مورد تهدید دست‌کم یک رخ قرار دارد. ثابت کنید، می‌توان ۱۲ رخ را طوری برداشت که هشت رخ باقی‌مانده، همان ویژگی را داشته باشند.

۳. یک هشت‌ضلعی منتظم را به کمک دو خط راست، به چهار بخش با مساحت‌های برابر تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، این دو خط راست بر هم عمودند.

۴. عدد ۱...۱۱۱ (شامل ۱۰۰ رقم) را به این صورت نوشته‌ایم:

$$a_0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \ldots + a_{99} \times 10^{99}$$

که در آن a_0، a_1، ...، a_{99} عددهای غیرمنفی و درست‌اند و مجموع آن‌ها از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، همهٔ این عددها برابر واحدند.

۵. دنباله‌ای از عددهای درست را طوری نوشته‌ایم که جملهٔ اول آن برابر ۲ و از آن به بعد، هر جمله برابر است با $\frac{3}{2}$ جملهٔ قبل، به‌شرطی که عدد درستی به دست آید؛ در حالتی که $\frac{3}{2}$ جملهٔ قبل همراه با کسری از عدد درست باشد، از این مقدار کسری صرف‌نظر می‌کنیم:

$$2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, \ldots$$

ثابت کنید، در این دنباله عدد شش‌رقمی وجود دارد.

۶. دو نفر به نوبت روی یکی از خانه‌های نوار افقی ۱۲ خانه‌ای یک رقم می‌نویسند تا ۱۲ خانه پر شود. از رقم‌های ۰ و ۹ نباید استفاده کنند. ثابت کنید، نفر دوم می‌تواند ترتیبی بدهد که عدد ۱۲ رقمی حاصل بر ۷۷ بخش‌پذیر باشد.

سال هفتم

۷. همان مسالهٔ ۱.

۸. عدد ۱۹۷۷۱۹۷۷۱۹۷۷ را به این صورت نوشته‌ایم:

$$a_۰ + a_۱ \times ۱۰ + a_۲ \times ۱۰^۲ + \ldots + a_{۱۱} \times ۱۰^{۱۱}$$

که در آن، عددهای $a_۰$، $a_۱$، ...، $a_{۱۱}$ غیرمنفی و درست‌اند و، درضمن، مجموع آن‌ها، از ۷۲ تجاوز نمی‌کند، این عددها را پیدا کنید.

۹. نقطه‌های K، L، M و N را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC، CD و DA از مربع $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$|KL| + |LM| + |MN| + |NK| \geq ۲|AC|$$

۱۰. همان مسالهٔ ۶.

۱۱. همان مسالهٔ ۵.

۱۲. نقطهٔ O در درون چندضلعی کوژ P واقع است و می‌دانیم، هر خط راستی که از O بگذرد، چندضلعی P را به دو بخش هم‌ارز (با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند. ثابت کنید، نقطهٔ O، مرکز تقارن چندضلعی P است.

سال هشتم

۱۳. نقطهٔ D روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد. E، نقطهٔ دلخواهی از ضلع AC و K، نقطه‌ای از ضلع AB است. خط‌های راست AD و BE در نقطه M، خط‌های راست BE و CK در نقطهٔ P و خط‌های راست CK و AD در نقطهٔ T برخورد دارند. ثابت کنید، اگر

$$|BM| = |PE| \text{ و } |AT| = |MD|$$

آن‌گاه $|TK| > |CP|$.

۱۴. a_1، a_2، ...، a_n، زیرمجموعه‌ای از عددهای طبیعی است. ثابت کنید، عددهای طبیعی x و y وجود دارد، به‌نحوی که یا هر دو عدد x و y عضو زیرمجموعه‌اند و یا هیچ‌یک از آن‌ها عضو زیرمجموعه نیستند.

۱۵. یک چندضلعی کوژ، چند ضلع می‌تواند داشته باشد تا مختصات هر راس آن، عددهایی درست باشند، ولی هر نقطه‌ای که در درون چندضلعی یا روی ضلع آن (به‌جز راس‌ها) قرار دارد، دست‌کم یک مختص داشته باشد، که عددی درست نباشد؟

۱۶. در صفحهٔ کاغذ شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰، همهٔ خط‌های شکسته‌ای که ضلع‌های خانه‌های صفحهٔ شطرنجی، ضلع‌های آن را تشکیل می‌دهند و، درضمن، دو راس متقابل مربع را با کوتاه‌ترین مسیر به هم وصل می‌کنند، درنظر می‌گیریم. حداقل، چند مسیر از این‌گونه را باید درنظر گرفت تا، اجتماع آن‌ها، همهٔ راس‌های خانه‌ها را دربر گیرد؟

۱۷. پاره‌خط‌های راست a_1، a_2، ...، a_{1977}، b_1، b_2، ...، b_{1977} روی یک خط راست واقع‌اند. می‌دانیم، هر پاره‌خط راست a_k، با هریک از پاره‌خط‌های راست b_{k-1} و b_{k+1}، نقطهٔ مشترکی دارد. به‌جز این، a_{1977} و b_1 و، همچنین، a_1 و b_{1977} هم دارای نقطهٔ مشترک‌اند. ثابت کنید، به‌ازای هر k، پاره‌خط‌های راست a_k و b_k دارای نقطهٔ مشترک‌اند.

۱۸. $\vec{a}_1$، $\vec{a}_2$، ...، $\vec{a}_n$، بردارهایی از صفحه‌اند و هیچ دوتایی از آن‌ها، هم‌راستا نیستند. می‌دانیم، برای هر i و j $(i \neq j)$، بین بردارهای مفروض، بردار به‌صورت $x\vec{a}_i + y\vec{a}_j$ وجود دارد که، در آن، x و y عددهایی منفی‌اند. ثابت کنید، n، عددی فرد است.

سال نهم

۱۹. همان مسالهٔ ۱۳.

۲۰. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۱. همان مسالهٔ ۱۷.

۲۲. همان مسالهٔ ۱۸.

۲۳. تابع f در بازهٔ $[۰, ۱[$ با رابطهٔ زیر تعریف شده‌است:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}, x \in \left[۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right[\\ x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}, x \in \left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۱\right[\end{cases}$$

ثابت کنید، برای هر بازهٔ $]a, b[\subset [۰, ۱[$، نقطهٔ x از این بازه، و عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که، نقطهٔ

$$f(f(f(\dots f(x)\dots) \quad (n \text{ بار})$$

روی بازهٔ $]a, b[$ واقع است.

*۲۴. چند نقطه داده شده‌است؛ بعضی از این نقطه‌ها به‌وسیلهٔ کمان‌هایی به هم وصل شده‌اند، به نحوی که می‌توان از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، به‌وسیلهٔ این کمان‌ها رسید. روی هر کمان، دو پیکان، یکی به رنگ آبی و دیگری به رنگ قرمز، در دو جهت مختلف رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، می‌توان از مسیری حرکت کرد که رنگ پیکان بیش از یکبار عوض نشود، درضمن، حرکت را تنها در جهتی می‌توان انجام داد که پیکان مشخص می‌کند.

سال دهم

۲۵. ثابت کنید، به‌شرط $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\sin x \cdot \mathrm{tg} x > x^{۲}$$

*۲۶. چندضلعی کوژ چند راس می‌تواند داشته باشد تا مختصات همهٔ راس‌های آن، عددهایی درست باشند، ولی دست‌کم یکی از دو مختص سایر نقطه‌های محیط و نقطه‌های درونی چندضلعی، عددی درست نباشد؟

۲۷. p، n و k عددهایی طبیعی‌اند و $p > 1$. ثابت کنید، دست‌کم یکی از عددهای

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

بر p بخش‌ناپذیر است.

۲۸. ثابت کنید، مجموع همهٔ زاویه‌های دو وجهی یک چهاروجهی، از ۳۶۰ درجه بیشتر است.

۲۹. عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_{1977} چنان‌اند که

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{1977}$$

ثابت کنید:

$$a_1^2 - a_2^2 + \ldots + (-1)^{1976} a_{1977}^2 \geq$$
$$\geq (a - a_2 + \ldots + (-1)^{1976} a_{1977})^2$$

۳۰. همان مسالهٔ ۲۳.

۱۹۷۸

سال ششم

۱. عددهای ۱، ۲ و ۳ را در راس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع گذاشته‌ایم. آیا می‌توان از این‌گونه مثلث‌ها، طوری روی هم و به‌صورت ستونی چید که مجموع عددها در هر یال ستون برابر ۵۵ باشد؟

۲. یک چندضلعی را به‌یاری قطرهای آن به مثلث‌هایی تقسیم و، سپس، مثلث‌ها را به رنگ‌های سیاه و سفید طوری درآورده‌ایم که هر دو مثلثی که ضلع مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف باشند. ثابت کنید، تعداد مثلث‌های سیاه، از سه برابر تعداد مثلث‌های سفید تجاوز نمی‌کند.

۳. آیا ۵۷۵۹۹، عددی اول است؟

۴. حداقل چند مهرهٔ شاه شطرنج باید انتخاب کرد تا پس از این‌که به دلخواه روی صفحهٔ ۸ × ۸ قرار دهیم، به‌ناچار دو شاه پیدا شود که یک خانه را بزنند؟

۵. آیا می‌توان عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۷۸ را طوری در کنار هم، روی یک سطر قرار داد که، هر دو عدد مجاور و، همچنین، هر دو عددی که یک عدد بین خود دارند، نسبت به هم اول باشند.

۶. زاویهٔ B، راس مثلث متساوی‌الساقین، برابر ۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$۲|AC| < |AB| \quad \text{و} \quad ۳|AC| > |AB|$$

سال هفتم

۷. پنج عدد درست، در مجموعِ دوبه‌دو، ۱۰ عدد می‌دهند. آیا ممکن است، این‌ها، ۱۰ عدد پشت‌سرهم باشند؟

۸. a، عددی طبیعی است. آن را بر همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از خودش تقسیم و، سپس، همهٔ باقی‌مانده‌ها را با هم جمع کرده‌ایم. نتیجهٔ جمع، خود عدد a شده‌است. عدد a را پیدا کنید.

۹. همان مسالهٔ ۴.

۱۰. نقطهٔ دلخواهی در درون مربع انتخاب و آن را به همهٔ راس‌های مربع وصل کرده‌ایم. سپس، از هر راس مربع، عمودی بر پاره‌خط راستی رسم

کرده‌ایم که از راس مجاور آن، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، گذشته است. ثابت کنید، این چهار خط راست عمود، از یک نقطه می‌گذرند.

۱۱. روی محیط دایره و در راس‌های یک صدضلعی منتظم، ۱۰۰ عدد سه‌رقمی گذاشته‌ایم. ثابت کنید، قطری از دایره وجود دارد که اگر مجموع عددهای واقع در هر طرف آن را به‌دست آوریم، تفاضل آن‌ها از لحاظ قدرمطلق، از ۹۰۰ تجاوز نمی‌کند.

۱۲. nضلعی کوژی داده شده‌است $(n \geq ۵)$. ثابت کنید، می‌توان سه‌ضلع nضلعی را طوری انتخاب کرد که، با ادامهٔ آن‌ها، مثلثی به‌دست آید که تمامی nضلعی را دربر بگیرد.

سال هشتم

۱۳. قطرهای چهارضلعی، آن را به چهار مثلث با محیط‌های برابر تقسیم کرده‌است. ثابت کنید، این چهارضلعی، یک لوزی است.

۱۴. عددی پنج‌رقمی بر ۴۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، هر عدد پنج‌رقمی دیگری هم که از تبدیل دوری رقم‌های این عدد به‌دست آید، بر ۴۱ بخش‌پذیر است.

۱۵. میدان بزرگ مسابقه‌های دو، به شکل یک شش‌ضلعی است که هریک از زاویه‌های آن برابر ۱۲۰ درجه است و طول هر ضلع آن، برحسب کیلومتر، با عددی درست بیان می‌شود. هر مرحله از مسابقه، در طول یکی از ضلع‌ها انجام می‌شود؛ درضمن، مرحله‌های اول، سوم و پنجم به خانم‌ها و مرحله‌های دوم، چهارم و ششم به آقایان مربوط است. بعد از پایان مسابقه‌ها، خانم‌ها ادعا کردند که، مجموع طول‌های قطعه‌های مربوط به آن‌ها، ۳ کیلومتر از مجموع طول‌های قطعه‌های مربوط به مردان بیشتر بوده‌است؛ ولی مردان ادعا داشتند که مجموع طول قطعه راه‌های مربوط به آن‌ها، از مجموع طول قطعه راه‌های مربوط به زنان، ۵ کیلومتر بیشتر بوده‌است. کدام یک از دو

طرف، به روشنی دروغ می‌گویند؟

۱۶. آیا می‌توان عددهای درست را در خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی بی‌پایان طوری قرار داد که مجموع عددها، در هر مستطیل ۱۹۷۸×۱۹۱۸، برابر ۶۰ باشد؟

۱۷. شش دایره روی صفحه رسم شده‌است؛ درضمن، دایرهٔ اول بر دایرهٔ ششم و دوم مماس است، دایره دوم بر دایرهٔ اول و سوم، دایرهٔ سوم بر دایرهٔ دوم و چهارم مماس است و غیره. ثابت کنید، دایرهٔ تازه‌ای وجود دارد که هر شش دایرهٔ مفروض را قطع می‌کند.

سال نهم

۱۸. همان مسالهٔ ۱۴.

۱۹. چندجمله‌ای با ضریب بزرگترین درجهٔ مثبت، تنها به‌ازای مقدارهای طبیعی و اول متغیر، برابر عددهای اول می‌شود. ثابت کنید، این چندجمله‌ای به‌ازای همهٔ عددهای اول، برابر عددهایی اول است.

۲۰. برای عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ می‌دانیم:

$$\sum_{i \leq j} a_i a_j \leq ۱, \sum_{i \leq j} b_i b_j \leq ۱$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i \leq j} (a_i - b_i)(a_j - b_j) \leq ۱$$

۲۱. همان مسالهٔ ۱۶.

۲۲. مسالهٔ ۱۷ را ببینید. آیا همین حکم، برای هشت دایره درست است؟

سال دهم

۲۳. همان مسالهٔ ۱۹.

۲۴. از برخورد شش خط راست، حداکثر چند مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن است به‌وجود آید؟

۲۵. همان مسالهٔ ۱۴.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۷. یک شش‌ضلعی کوژ داده شده‌است و می‌دانیم، هر قطر بزرگ آن، شش‌ضلعی را به دو بخش با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. ثابت کنید، این قطرها، در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

دور نهایی

۲۸. خانه‌های یک جدول ۱۰۰ × ۱۰۰ را با چند رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم؛ درضمن، دو خانهٔ هم‌رنگ، راس مشترکی ندارند. ثابت کنید، خانه‌های چهار گوشهٔ جدول، رنگ‌های مختلفی دارند.

۲۹. A و B دو مجموعهٔ با پایان (محدود) در صفحه‌اند. فرض می‌کنیم:

$$d_H(A, B) = \max(d_1, d_2)$$

که در آن، d_1 برابر است با بزرگترین فاصلهٔ از نقطه‌های مجموعهٔ A تا مجموعهٔ B، و d_2، بزرگترین فاصلهٔ از نقطه‌های مجموعهٔ B تا مجموعهٔ A است. برای d_H، نابرابری مثلثی را ثابت کنید، یعنی ثابت کنید، برای هر سه مجموعهٔ باپایان X، Y و Z در روی صفحه، این نابرابری برقرار است:

$$d_H(X, Y) + d_H(Y, Z) \geq d_H(Y, Z)$$

۳۰. در راس‌های یک ۱۰۰ضلعی منتظم، عددهای درستی گذاشته‌ایم. جهت را، حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم. هر دقیقه، هریک از عددها،

تغییر می‌کند و به تفاضل این عدد با عدد بعد از خودش تبدیل می‌شود. ثابت کنید، بعد از پنج دقیقه، مجموع عددهای راس‌های ۱۰۰ضلعی، بر ۵ بخش‌پذیر است.

۳۱. روی خط راستی، ۱۹۷۸ پاره‌خط راست داده شده‌است که، هیچ دو پاره‌خط راستی، در یکی از دو انتهای خود مشترک نیستند. ثابت کنید، این پاره‌خط‌های راست را نمی‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که، برای هر k از ۱ تا ۱۹۷۸، kامین پاره‌خط راست، درست شامل k انتها از دیگر پاره‌خط‌های راست باشد.

*۳۲. دنبالهٔ (a_n)، که همهٔ جمله‌های آن برابر ۰ یا ۱ می‌باشد، چنان است که، اگر $k < ۲^n$، آن‌وقت a_k برابر $a_{k+۲^n}$. ثابت کنید، این دنباله، متناوب نیست.

۳۳. M، چندضلعی کوژ و H، تجانس با ضریب $-\frac{۱}{۲}$ است. ثابت کنید، انتقال موازی T وجود دارد که چندضلعی $T(H(M))$ در درون چندضلعی M قرار می‌گیرد.

*۳۴. راس‌های یک گراف محدود، با دو رنگ مختلف، رنگ شده‌اند. در هر ثانیه، هر نقطه تغییر رنگ می‌دهد و به رنگی درمی‌آید که در همسایگی آن بیشتر است. ثابت کنید، برای هر نقطه لحظه‌ای فرا می‌رسد که، بعد از آن، یا تغییر رنگ نمی‌دهد و یا در هر ثانیه، تغییر رنگ می‌دهد.

*۳۵. چندضلعی کوژ M، که طول همهٔ ضلع‌ها و قطرهای آن با عددهای درست بیان شده‌است، مفروض است. مربع K هم داده شده‌است. ثابت کنید، می‌توان تعداد محدودی چندضلعیِ هم‌نهشت M انتخاب کرد، به نحوی که اجتماع آن‌ها، K را دربر بگیرد و، درضمن، هر نقطه از مربع، که روی ضلع یکی از چندضلعی‌ها نیست، به‌وسیلهٔ تعدادی از چندضلعی‌ها (که برای همهٔ این‌گونه نقطه‌ها تعداد ثابتی است) پوشانده شده‌باشد.

سال پنجم

۱. روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی، مستطیل ۷ × ۱۳ را رسم کرده‌ایم. از آن، ۱۵ مستطیل ۲ × ۳ جدا کنید.

۲. امسال (یعنی سال ۱۹۷۹)، سن شخصی برابر است با مجموع رقم‌های سال تولد او. این شخص کی به دنیا آمده است؟

۳. در مستطیل ۷ × ۶، ۲۵ خانه را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان، در آن، یک مربع ۲ × ۲ پیدا کرد که، دست‌کم سه خانهٔ آن رنگی باشد.

۴. در کیسه‌ای ۱۰ کارت که روی آن‌ها عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۹ (و روی هر کارت یک عدد) نوشته شده‌است، در اختیار داریم:

الف) سه کارت، به تصادف، بیرون می‌آوریم. ثابت کنید، با این سه کارت، می‌توان عددی (یک‌رقمی، دورقمی یا سه‌رقمی) درست کرد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) چند کارت باید از کیسه بیرون آورد، تا، به‌کمک آن‌ها، بتوان عددی بخش‌پذیر بر ۹ درست کرد؟

۵. در کلاسی، هر پسر با سه دختر و هر دختر با دو پسر دوست است. در کلاس ۱۹ نیمکت و ۳۱ پیش‌آهنگ وجود دارد. این کلاس، چند دانش‌آموز دارد؟

سال ششم

۶. a، b و c عددهایی اول‌اند؛ درضمن $a+b$ و ab بر c بخش‌پذیرند. ثابت کنید $a^۳ - b^۳$ بر c بخش‌پذیر است.

۷. یکی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۳۰ درجه است. از نقطهٔ وسط وتر، عمودی بر وتر اخراج کرده‌ایم. ثابت کنید، طول پاره‌خط راستی از

این عمود که در درون مثلث قرار دارد، یک‌سوم طول ضلع بزرگتر مجاور به زاویهٔ قائمه است.

۸. چگونه می‌توان با دو ساعت شنی که، به‌ترتیب، می‌توانند ۵ دقیقه و ۷ دقیقه را اندازه بگیرند، ۹ دقیقه را اندازه گرفت؟

۹. در خانه‌های یک جدول مستطیلی، عددهای طبیعی را نوشته‌ایم. اجازه داریم همهٔ عددهای یک سطر را دو برابر یا از همهٔ عددهای یک ستون، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، می‌توان به آن‌جا رسید که همهٔ عددهای جدول، برابر صفر باشند.

۱۰. حداکثر چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰ می‌توان انتخاب کرد که، هر دوتا از آن‌ها، نسبت به هم اول باشند؟

۱۱. عددی شامل سه رقم برابر واحد و چند رقم برابر صفر است. مجموع رقم‌های مکعب این عدد را پیدا کنید.

سال هفتم

۱۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ۱+a+b=ab \\ ۲+a+c=ac \\ ۵+b+c=bc \end{cases}$$

۱۳. $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ ارتفاع‌ها و $AA_۰$، $BB_۰$ و $CC_۰$ میانه‌های مثلث ABC هستند. ثابت کنید، طول محیط مثلث ABC، برابر است با طول خط شکستهٔ $A_۰B_۱C_۰A_۱B_۰C_۱A_۰$.

۱۴. مستطیل ۱۹۷۹×۱۰۰۰، به خانه‌هایی تقسیم شده‌است. اگر قطر آن را رسم کنیم، تمام مستطیل، به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

۱۵. می‌دانیم $a^۶$ عددی است هشت‌رقمی که از رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴ تشکیل شده‌است. a را پیدا کنید.

۱۶. مثلث ABC در دایره‌ای محاط است. A_1 وسط کمان BC، B_1 وسط کمان AC و C_1 وسط کمان AB است. ضلع‌های مثلث ABC، روی پاره‌خط‌های راست A_1B_1، B_1C_1 و A_1C_1، پاره‌خط‌های راست کوچکتری را جدا می‌کنند که وسط آن‌ها را، به‌ترتیب، M_1، M_2 و M_3 می‌نامیم. ثابت کنید، نقطه‌های B_1 و C_1 و نقطه‌های M_1 و M_3 روی محیط یک دایره‌اند.

۱۷. ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت مجموع یک مجذور کامل و یک عدد اول نوشت.

سال هشتم

۱۸. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $k > 1$، عددی با $k + 1$ رقم واحد و k رقم برابر صفر به‌صورت $10101\ldots0101$، یک عدد مرکب است.

۱۹. a، b و c، طول ضلع‌های یک مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right| < 1$$

۲۰. زاویهٔ B از مثلث ABC برابر ۶۰ درجه و AK و CE نیمسازهای مثلث‌اند. پاره‌خط‌های راست AK و CE یکدیگر را در O قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $|OK| = |OE|$.

۲۱. $2n$ برداری را درنظر می‌گیریم که مبداء آن‌ها، مرکز یک $2n$ضلعی منتظم و انتهای آن‌ها، راس‌های این $2n$ضلعی است. چند بردار، از این $2n$ بردار، باید انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، دارای حداکثر طول ممکن باشد؟

۲۲. n عدد طبیعی دو به دو نسبت به‌هم اولِ a_1، a_2، ...، a_n داده شده‌است؛ درضمن $1 < a_i < (2n-1)^2$. ثابت کنید، بین آن‌ها، دست‌کم یک عدد اول وجود دارد.

۲۳. در هریک از خانه‌های جدول $m \times n$، عدد ۱ گذاشته شده‌است. می‌توانیم هر مربع ۲ × ۲ را درنظر بگیریم و علامت همهٔ عددهای آن را عوض کنیم. آیا می‌توانیم به کمک این عمل‌ها، به جدولی برسیم که علامت‌های عددهای آن، به‌صورت جدول صفحهٔ شطرنج باشند (علامت‌های مثبت، در خانه‌های سیاه و علامت‌های منفی در خانه‌های سفید یا برعکس)؟ پاسخ باید بستگی به مقدارهای m و n داشته باشد.

سال نهم

۲۴. ثابت کنید، اگر عدد k رقمی ($k \geq ۲$) اول باشد، آن‌وقت، یا همهٔ عددهایی که از تبدیل دوری عدد به دست می‌آیند، مختلف‌اند و یا عدد kرقمی تنها با رقم‌های واحد نوشته شده‌است.

۲۵. مثلث‌هایی را درنظر می‌گیریم که دو به دو نابرابر و راس‌های آن‌ها در نقطه‌هایی از محیط دایره باشند که آن را به n کمان برابر تقسیم کرده‌اند ($n > ۲$). به‌ازای چه مقداری از n، درست نیمی از این مثلث‌ها، متساوی‌الساقین‌اند؟

۲۶. عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n ($n \geq ۱۲$)، همگی از ۱ بزرگتر و از $۹n^۲$ کوچکتر و، درضمن، دو به دو نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید، در بین آن‌ها، عدد اول وجود دارد.

۲۷. در مرکز کف جعبه‌ای که به شکل مربع ۵ × ۵ است، یک سوراخ مربعی ۱ × ۱ وجود دارد. کدام شکل کوژ را می‌توان انتخاب کرد که کمترین مساحت را داشته‌باشد و به هر طریقی که آن را در کف جعبه قرار دهیم، سوراخ را بپوشاند؟

۲۸. نقطهٔ B بین دو نقطهٔ A و C است. در نیم‌صفحه‌های به مرز (AC)، نقطه‌های K و H را طوری درنظر گرفته‌ایم که

$$|AK| = |KB|, |BH| = |HC|, \widehat{AKB} = \alpha, \widehat{BHC} = \pi - \alpha$$

زاویه‌های مثلث KHM را پیدا کنید، به‌شرطی که M وسط پاره‌خط راست AC باشد.

۲۹. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x + \dfrac{x + ۲y}{x^۲ + y^۲} = ۲ \\ y + \dfrac{۲x - y}{x^۲ + y^۲} = ۰ \end{cases}$$

سال دهم

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۱. همان مسالهٔ ۲۷.

۳۲. به‌ازای کدام عدد طبیعی y، عدد $۳^y + y^۲$، مجذور کامل است؟

۳۳. در دایره‌ای، n قطاع را طوری رنگ کرده‌ایم که، زاویهٔ هر قطاع از $\dfrac{n}{n^۲ - n + ۱}$ کمتر باشد. ثابت کنید، دایره را می‌توان به نحوی چرخاند که، همهٔ قطاع‌های رنگی، به بخش رنگ نشدهٔ دایره منتقل شوند.

۳۴. یک چندوجهی کوژ داده شده‌است که، همهٔ وجه‌های آن، به‌جز یکی، چندضلعی‌هایی را تشکیل می‌دهند که تقارن مرکزی دارند. ثابت کنید، این وجه اخیر هم، دارای تقارن مرکزی است.

*۳۵. دو قطر AB و CD در دایره‌ای رسم شده‌اند. ثابت کنید، برای هر دو نقطهٔ دلخواه E و F واقع بر محیط دایره، نقطهٔ برخورد خط‌های راست AE و DF، مرکز دایره و نقطهٔ برخورد خط‌های راست CE و BF، در یک امتدادند.

۳۶. در مثلث ABC، طول ضلع‌های مثلث، سه عدد درست متوالی‌اند؛ درضمن یکی از نیمسازهای مثلث، بر یکی از میانه‌های آن عمود است. طول ضلع‌های مثلث را پیدا کنید. (مسالهٔ ۲.۷۰ را هم ببینید).

۱۹۸۰

سال پنجم

۱. آیا می‌توان عددهای طبیعی از ۱ تا ۳۰ را در یک جدول 6×5 طوری نوشت که، مجموع عددهای واقع در ستون‌ها، با هم برابر باشند.

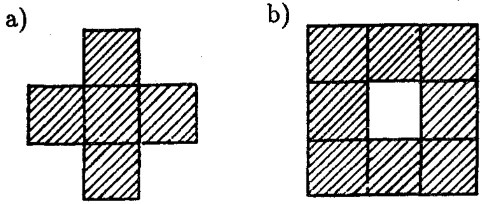
۲. در اردوی پیشاهنگی نوجوانانی به سن ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ سال جمع شده‌اند. آن‌ها ۲۳ نفرند و روی‌هم ۲۵۳ سال دارند. در این اردو، چند نوجوان ۱۲ ساله وجود دارد، به‌شرطی که بدانیم تعداد آن‌ها یک برابرونیم تعداد ۱۳ ساله‌هاست؟

۳. ۲۰۰ نقطه روی پاره‌خط راست AB، به‌صورتی متقارن نسبت به نقطهٔ وسط پاره‌خط قرار دارند. ۱۰۰۰ تا از این نقطه‌ها را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از نقطه‌های قرمز تا نقطهٔ A، برابر است با مجموع فاصله‌های از نقطه‌های آبی تا نقطهٔ B.

۴. بین ۹ سکه، دو سکهٔ تقلبی وجود دارد. با چهار بار استفاده از ترازوی دوکفه‌ای، و بدون استفاده از وزنه، سکه‌های تقلبی را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم، دو سکه تقلبی هم‌وزن‌اند و وزن هرکدام، اندکی بیشتر از وزن یک سکهٔ واقعی است.

۵. مربع را به پنج‌ضلعی‌های کوژ تقسیم کنید.

۶. در راس‌ها و محل برخورد قطرهای یک چندضلعی، ایستگاه‌های تراموا قرار دارد. درضمن می‌دانیم، هیچ سه قطری از چندضلعی، در یک نقطه به هم نمی‌رسند. روی برخی از قطرهای چندضلعی، خط حرکت تراموا وجود دارد، به نحوی که از کنار هر ایستگاه، دست‌کم یک خط می‌گذرد. ثابت کنید، از هر ایستگاه به هر ایستگاه دیگر می‌توان با حداکثر دو بار عوض کردن تراموا رسید.



شکل ۷

سال ششم

۷. همان مسالهٔ ۱.

۸. همان مسالهٔ ۳.

۹. آیا می‌توان عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۸۰ را طوری در یک ردیف نوشت که، مجموع هر دو عددی که یک عدد دیگر در بین آن‌هاست، بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۱۰. همان مسالهٔ ۴.

۱۱. تعداد $2n$ شوکولات، به صورتی در n قوطی گذاشته شده‌است. دختربچه و پسربچه‌ای به نوبت، و هر بار یک شوکولات، برمی‌دارند. نخستین شوکولات را دختربچه انتخاب می‌کند. ثابت کنید، پسربچه می‌تواند طوری شوکولات انتخاب کند که دو شوکولات آخر، متعلق به یک قوطی باشند.

۱۲. صفحهٔ کاغذ شطرنجی را طوری با پنج رنگ، رنگی کنید که هر شکل نوع اول (شکل ۷ـa) هر پنج رنگ را داشته‌باشد، ولی در هر شکل نوع دوم (شکل ۷ـb)، هر پنج رنگ وجود نداشته باشد.

سال هفتم

۱۳. همهٔ گروه عددهای درست a، b و c را پیدا کنید که، برای آن‌ها،

داشته‌باشیم:

$$a^{۲} - b^{۲} - c^{۲} = ۱, b + c - a = ۳$$

۱۴. همان مسالهٔ ۹.

۱۵. یک nضلعی بر دایره‌ای محیط شده‌است. از نقطهٔ دلخواهی واقع در درون دایره، به همهٔ راس‌ها و نقطه‌های تماس وصل کرده‌ایم. مثلث‌های حاصل را، پشت‌سرهم، از ۱ تا $۲n$ شماره‌گذاری کرده‌ایم. ثابت کنید، حاصل‌ضرب مساحت‌های مثلث‌های ردیف زوج، برابر است با حاصل‌ضرب مساحت‌های مثلث‌های ردیف فرد.

۱۶. مربع $ABCD$ با بعدهای ۹ × ۹ را به مربع‌های ۱ × ۱ تقسیم کرده‌ایم. راس‌های این مربع‌ها را به چهار رنگ درآورده‌ایم: هر ۲۵ راس را به یک رنگ. همهٔ بردارهای به‌صورت $\overrightarrow{MA}$ را، که M نقطه‌ای با رنگ اول است؛ همهٔ بردارهای به‌صورت $\overrightarrow{MB}$ را که M نقطه‌ای از رنگ دوم است؛ همهٔ بردارهای به‌صورت $\overrightarrow{MC}$ را که M نقطه‌ای از رنگ سوم است و، سرانجام، همهٔ بردارهای به‌صورت $\overrightarrow{MD}$ را که M نقطه‌ای از رنگ چهارم است، درنظر می‌گیریم. ثابت کنید، مجموع همهٔ این بردارها، برابر بردار صفر است.

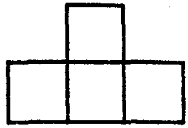
۱۷. ثابت کنید، عدد زیر، عددی مرکب است:

$$۵۳ \times ۸۳ \times ۱۰۹ + ۴۰ \times ۶۶ \times ۹۶$$

۱۸. همان مسالهٔ ۱۱.

۱۹. همان مسالهٔ ۱۲.

سال هشتم



شکل ۸

۲۰. مجموع چهار عدد مثبت a، b، c و d برابر واحد است. ثابت کنید:

$$\sqrt{۴a+۱}+\sqrt{۴b+۱}+\sqrt{۴c+۱}+\sqrt{۴d+۱}<۶$$

۲۱. نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است. نقطه‌های M و K را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AC و BC، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته‌باشیم:

$$|BK|\cdot|AB|=|BC|^{۲}, |AM|\cdot|AB|=|AO|^{۲}$$

ثابت کنید، نقطه‌های M، O و K، روی یک خط راست‌اند.

۲۲. سه نفر به بازی تنیس روی میز مشغول‌اند. در هر دور بازی، کسی که بازی را ببازد، کنار می‌رود و کسی که در بازی شرکت نداشته است،جای او را می‌گیرد. در پایان بازی‌ها، معلوم شد، نفر اول ۱۰ دور و نفر دوم ۲۱ دور بازی کرده‌است. نفر سوم چند دور بازی کرده‌است؟

۲۳. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۶۴ را در خانه‌های صفحهٔ شطرنج طوری قرار داد که، مجموع عددها در هر چهار خانه‌ای که به صورت شکل ۸ است. بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۲۴. چهارضلعی کوژ، به‌وسیلهٔ قطرهای خود، به چهار مثلث تقسیم شده‌است. مجموع مجذورهای مساحت‌های دو مثلث روبه‌رو، برابر است با مجموع مجذورهای مساحت‌های دو مثلث روبه‌روی دیگر. ثابت کنید، دست‌کم یکی از قطرها، در نقطهٔ برخورد خود با قطر دیگر، نصف می‌شود.

۲۵. کمترین مقدار عدد طبیعی n چقدر است، به‌شرطی که در نماد دهدهی کسر $\frac{m}{n}$، بعد از ممیز، با گروه رقم‌های ...۵۰۱... برخورد کنیم؟

۲۶. دو سکه از ۹ سکه، تقلبی است. سکهٔ واقعی ۱۰ گرم و سکهٔ تقلبی ۱۱ گرم وزن دارد. چگونه می‌توان به‌کمک ترازوی یک کفه‌ای با پنج بار وزن کردن، سکه‌های تقلبی را کشف کرد؟

سال نهم

۲۷. در مثلث ABC، زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ B است. ثابت کنید:

$$|BC|^{۲} = (|AC| + |AB|) \cdot |AC|$$

۲۸. سه نفر به بازی تنیس روی میز مشغول‌اند. بعد از هر دور بازی، آن‌که باخته، جای خود را به کسی واگذار می‌کند که در بازی شرکت نداشته‌است. در پایان بازی معلوم شد، اولی ۱۰ دور، دومی ۱۵ و سومی ۱۷ دور بازی کرده‌است. در دور دوم بازی، چه کسی باخته است؟

۲۹. دو عدد طبیعی مختلف پیدا کنید که، میانگین عددی و میانگین هندسی آن‌ها، عددهایی دو رقمی‌اند و یکی از دیگری با جابه‌جا شدن رقم‌ها به‌دست می‌آید.

۳۰. ثابت کنید، اگر، برای هر مقدار x واقع در بازهٔ $[۰, ۱]$ داشته‌باشیم:

$$|ax^{۲} + bx + c| \leq ۱$$

آن‌وقت $|a| + |b| + |c| \leq ۱۷$.

۳۱. پاره‌خط راستی را که وسط دو ضلع روبه‌رو در چهارضلعی کوژ را به هم وصل کند، خط میانهٔ چهارضلعی می‌نامیم. ثابت کنید، اگر مجموع طول‌های دو خط میانهٔ چهارضلعی، برابر با نصف محیط چهارضلعی باشد، آن‌وقت این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.

۳۲. همان مسالهٔ ۲۵.

۳۳. در خانه‌های صفحهٔ شطرنج، عددهای حقیقی را نوشته‌ایم. می‌توانیم به‌جای هر دو عدد دلخواه، در هر دو خانه، میانگین حسابی آن‌ها را بنویسیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان به‌جایی رسید که همهٔ عددهای واقع بر صفحهٔ شطرنج، با هم برابر باشند.

سال دهم

۳۴. در بازی تنیس روی میز، سه نفر شرکت دارند. بعد از هر دور، آن‌که ببازد، جای خود را به کسی می‌دهد که در بازی شرکت نداشته‌است. در پایان بازی‌ها، معلوم شد، اولی ۱۰ دور بازی را برده است، دومی ۱۲ دور و سومی ۱۴ دور، هرکدام از این سه نفر، چند دور بازی کرده‌است؟

۳۵. در دنبالهٔ زیر، با چند عدد مختلف برخورد می‌کنیم:

$$\left[\frac{۱^۲}{۱۹۸۰}\right], \left[\frac{۲^۲}{۱۹۸۰}\right], \ldots, \left[\frac{۱۹۸۰^۲}{۱۹۸۰}\right]$$

۳۶. $f(x) = ax + b$ مفروض است. آیا عددهای a و b وجود دارند، به‌نحوی که به‌ازای هر x از بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ داشته‌باشیم:

$$f^۲(x) + f(x)\cos x < \frac{۱}{۴}\sin x$$

۳۷. همان مسالهٔ ۳۱.

۳۸. در جدول مربعی $n \times n$، عددهای حقیقی را نوشته‌ایم. می‌توانیم به جای هر دو عدد دلخواه، میانگین حسابی آن‌ها را در هر دو خانه بنویسیم. همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید که، برای هرگونه عددهای حقیقی نخستین، بتوان با تکرار عمل بالا، به جدولی رسید که همهٔ عددهای واقع در خانه‌های آن، با هم برابر باشند.

*۳۹. ثابت کنید، دو نقطهٔ دلخواه از سطح یک چهاروجهی منتظم با یال به طول واحد را می‌توان با خط شکسته‌ای که از طریق سطح چهاروجهی می‌گذرد، طوری به هم وصل کرد که طول آن از $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ تجاوز نکند.

*۴۰. دو سوسک، روی محیط چندضلعی کوژ واقع‌اند. آن‌ها در یک لحظه، در روی محیط چندضلعی، با سرعت‌های یکسان آغاز به حرکت می‌کنند. موقعیت نخستین سوسک‌ها چگونه باشد که، کمترین فاصلهٔ ممکن بین آن‌ها، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

دور نهایی (برای سال‌های هشتم و نهم)

۴۱. در المپیاد سراسری اتحاد شوروی، دانش‌آموزان سال‌های هشتم و نهم و دهم شرکت کردند. در گروه دانش‌آموزان لنین‌گرادی، k نفر از کسانی که در المپیاد شهری موفق شده بودند و هم آن‌ها که در المپیاد سراسری سال پیش پیروزی به‌دست آورده‌بودند، شرکت داشتند. در این گروه، حداکثر چند نفر شرکت دارند؟

۴۲. ثابت کنید، برای هر x، y و z از بازهٔ $[۰, ۱]$، همیشه داریم:

$$۳(x^۲y^۲ + x^۲z^۲ + y^۲z^۲) - ۲xyz(x + y + z) \leq ۳$$

۴۳. از نقطه‌ای واقع در درون مثلث، عمودهایی بر ضلع‌های مثلث فرود آورده‌ایم. نقطهٔ درونی را در کجا انتخاب کنیم، تا حاصل‌ضرب طول‌های این سه عمود، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۴۴. کارت‌هایی را بین عده‌ای از مردم تقسیم کرده‌اند تا در آن‌ها، نویسنده، نقاش و آهنگ‌ساز مورد علاقهٔ خود را نام ببرند. معلوم شد، هریک از هنرمندان فعال در این رشته‌ها، درست مورد علاقهٔ k نفر است. ثابت کنید، کارت‌های جمع‌آوری شده را می‌توان به $۳k - ۲$ گروه، طوری تقسیم کرد که، در هر گروه، هر دو کارت، معرف ذوق‌های مختلف باشند.

۴۵. ثابت کنید، طول نیمسازی از مثلث که بر ضلع بزرگتر فرود می‌آید، از طول ارتفاعی که بر ضلع کوچکتر مثلث فرود آمده‌است، تجاوز نمی‌کند.

۴۶. راس‌های یک چندضلعی کوژ را، که تعداد ضلع‌های آن عددی فرد است، به سه رنگ مختلف طوری درآورده‌ایم که، هر دو راس مجاور، رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند. ثابت کنید، چندضلعی را می‌توان به‌وسیلهٔ قطرهای غیرمتقاطع خود، طوری به‌صورت مثلث‌ها برید که، در هر مثلث، راس‌ها به سه رنگ مختلف باشند.

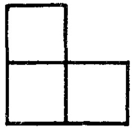
۴۷. حداکثر چند مکعب مستطیل $۴ \times ۱ \times ۱$ را می‌توان در مکعب $۶ \times ۶ \times ۶$ جا داد، به نحوی که وجه‌های آن‌ها با وجه‌های متناظر مکعب، موازی باشد؟

*۴۸. O، مرکز تقارن چندضلعی کوژ F است. $A_۱$ و $A_۲$ و همچنین $B_۱$ و $B_۲$ را نقطه‌هایی از چندضلعی می‌گیریم که، نسبت به O، قرینهٔ هم باشند. می‌دانیم اجتماع چندضلعی‌هایی که از F با انتقال موازی به‌اندازهٔ بردارهای $\overrightarrow{OA_۱}$ و $\overrightarrow{OA_۲}$ به‌دست می‌آیند، نقطه‌های $B_۱$ و $B_۲$ را نمی‌پوشانند. ثابت کنید، اجتماع چندضلعی‌هایی که از انتقال موازی F به‌اندازهٔ بردارهای $\overrightarrow{OA_۱}$، $\overrightarrow{OA_۲}$، $\overrightarrow{OB_۱}$ و $\overrightarrow{OB_۲}$ به‌دست می‌آیند، تمامی چندضلعی F را می‌پوشانند.

۱۹۸۱

سال پنجم

۱. کولیا و واسیا، دانش‌آموزان سال پنجم، نمره‌های خود را با هم مقایسه کردند؛ معلوم شد، تعداد نمره‌های ۵ کولیا، برابر است با تعداد نمره‌های ۴ واسیا؛ تعداد نمره‌های ۴ کولیا با تعداد نمره‌های ۳ واسیا؛ تعداد نمره‌های ۳ کولیا با تعداد نمره‌های ۲ واسیا؛ و سرانجام، تعداد نمره‌های ۲ کولیا با تعداد



شکل ۹

نمره‌های ۵ واسیا یکی است. به‌جز این، معلوم شد، مجموع نمره‌های هریک برابر ۵۴ و معدل دو نفر با هم برابر است. ثابت کنید، آن‌ها در محاسبه اشتباه کرده‌اند.

۲. آیا می‌توان با رقم‌های ۱، ۲، ...، ۹، یک عدد نه‌رقمی طوری ساخت که تعداد رقم‌های بین ۱ و ۲، تعداد رقم‌های بین ۲ و ۳، ...، تعداد رقم‌های بین ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

۳. A، B و C، سه نقطه‌اند که روی یک خط راست نیستند. در درون مثلث ABC، ۹ نقطه دیگر انتخاب کرده‌ایم. برخی از این ۱۲ نقطه را به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست طوری به هم وصل کنید که، این پاره‌خط‌های راست یکدیگر را قطع نکنند، مثلث ABC به مثلث‌های کوچکتری تقسیم شود و هریک از ۱۲ نقطه، درست به پنج نقطهٔ دیگر وصل شده باشد.

۴. روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی، مربع ۱۲ × ۱۲ را رسم کرده‌ایم. دست‌کم چند خانهٔ آن را باید رنگ کرد تا نتوان در بخش رنگ نشده، سه خانه را شبیه شکل ۹، جدا کرد؟

۵. آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که عدد $n^۲$، از سمت چپ با رقم‌های ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ آغاز شود؟

۶. از سکه‌های ۱ کوپکی، ۲ کوپکی، ۵ کوپکی و ۱۰ کوپکی، ۴ روبل داریم. ثابت کنید، با این سکه‌ها می‌توان ۳ روبل جدا کرد. [هر روبل، ۱۰۰ کوپک است.]

سال ششم

۷. ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی n، عدد $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$، عددی درست است.

۸. نقطهٔ C در درون زاویهٔ قائمه XOY واقع است. نقطهٔ A را روی نیم‌خط راست OX و نقطهٔ B را روی نیم‌خط راست OY انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، محیط مثلث ABC از دو برابر طول پاره‌خط راست OC بزرگتر است.

۹. همان مسالهٔ ۴.

۱۰. همان مسالهٔ ۶.

۱۱. عدد طبیعی n چنان است که $n^2 + 1$، عددی ده‌رقمی شده‌است. ثابت کنید، در عدد $n^2 + 1$، به دو رقم برابر، برخورد می‌کنیم.

۱۲. عددهای درست را در راس‌های مکعب نوشته‌ایم. می‌توانیم، هر بار، یک واحد به هر دو عددی که در دو سر یک یال قرار دارند، اضافه کنیم. آیا می‌توان با تکرار این عمل، به جایی رسید که همهٔ عددهای واقع در راس‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشند، به‌شرطی که در آغاز، در یکی از راس‌ها، عدد ۱ و در بقیهٔ راس‌ها، عدد ۰ را گذاشته‌باشیم؟

سال هفتم

۱۳. آیا عددی طبیعی وجود دارد که، با حذف رقم اول سمت چپ آن، خارج‌قسمت حاصل از تقسیم عدد بر ۱۹۸۱ به‌دست آید؟

۱۴. همان مسالهٔ ۸.

۱۵. همان مسالهٔ ۴.

۱۶. m، عدد طبیعی دلخواهی است، بزرگتر از ۳. S، مجموع همهٔ عددهای طبیعی x است، به‌شرطی که x از m تجاوز نکند و $x^2 - x + 1$ بر m بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید، S، بر $m + 1$ بخش‌پذیر است (در

حالتی که، چنین عددهای x وجود نداشته‌باشند، آن‌ها را بر صفر می‌گیریم).

۱۷. از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC، پاره‌خط‌های راست $P_۱P_۲$، $Q_۱Q_۲$ و $R_۱R_۲$ را، به‌ترتیب موازی با ضلع‌های BC، AC و AB رسم کرده‌ایم، به‌نحوی که دو انتهای هر پاره‌خط راست روی دو ضلع مثلث باشد. ثابت کنید:

$$\frac{|P_۱P_۲|}{|BC|}+\frac{|Q_۱Q_۲|}{|AC|}+\frac{|R_۱R_۲|}{|AB|}=۲$$

۱۸. همان مسالهٔ ۱۲.

سال هشتم

۱۹. آیا ۱۹۸۱ عدد درست متوالی وجود دارد که مجموع آن‌ها، مکعب یک عدد طبیعی باشد؟

۲۰. مربع واحد را به مستطیل‌هایی با ضلع‌های موازی ضلع‌های مربع تقسیم کرده‌ایم. در هر مستطیل، نسبت طول ضلع کوچکتر به طول ضلع بزرگتر را به‌دست آورده‌ایم. ثابت کنید، مجموع این نسبت‌ها، کمتر از واحد نیست.

۲۱. ثابت کنید، اگر $x^۲+xy+xz<۰$، آن‌گاه $y^۲>۴xz$.

۲۲. روی ضلع AB از مثلث ABC، نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$، روی ضلع BC، نقطه‌های $A_۱$ و $A_۲$؛ روی ضلع CA، نقطه‌های $B_۱$ و $B_۲$ را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته‌باشیم:

$$|AC_۱|=|C_۱C_۲|=|C_۲B|=\frac{۱}{۳}|AB|,$$

$$|BA_۱|=|A_۱A_۲|=|A_۲C|=\frac{۱}{۳}|BC|,$$

$$|CB_۱|=|B_۱B_۲|=|B_۲A|=\frac{۱}{۳}|CA|$$

ثابت کنید، از برخورد مثلث‌های $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، شش مثلث برابر به‌دست می‌آید.

۲۳. راس‌های مثلث ABC، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی نامتناهی، با خانه‌های به ضلع واحد، قرار دارد. ثابت کنید، اگر $|AB| > |AC|$، آن‌وقت $|AB| - |AC| > \frac{1}{p}$ که، در آن، p، محیط مثلث ABC است.

*۲۴. مهره‌ای در روی صفحهٔ شطرنج، می‌تواند از طریق خانه‌های سیاه حرکت کند؛ درضمن، با یک حرکت، می‌تواند به هریک از خانه‌های قطری مجاور برود. دست‌کم چند حرکت لازم است تا همهٔ خانه‌های سیاه را بپیماید؟

سال نهم

۲۵. مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درونی چهارضلعی کوژ تا خط‌های راست شامل ضلع‌ها، مقداری ثابت است. ثابت کنید، این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۴ برای جدول 9×9 (خانه چپ و پایین جدول، سیاه است).

۲۸. دنبالهٔ $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$، از عددهای طبیعی، چنان است که، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a_{n+a_n} = 2a_n$$

ثابت کنید، عدد طبیعی c وجود دارد، به نحوی که، برای هر عدد طبیعی n، داشته باشیم: $a_n = n + c$.

۲۹. عددهای درست a، b، c، d و A چنان‌اند که

$$a^2 + A = b^2, c^2 + A = d^2$$

ثابت کنید، عدد زیر، مجذور یک عدد طبیعی است.

$$۲(a+b)(c+d)(ac+bd-A)$$

۳۰. همان مسالهٔ ۲۳.

سال دهم

۳۱. در هریک از دو شانزده‌ضلعی منتظم مساوی، هفت راس را نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، این دو چندضلعی را می‌توان طوری روی هم قرار داد که، دست‌کم چهار راس نشان‌دار اولی بر چهار راس نشان‌دار دومی منطبق شود.

۳۲. همان مسالهٔ ۲۳.

۳۳. همان مسالهٔ ۲۹.

۳۴. روی یال‌های جانبی $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$، از منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA_۱B_۱C_۱$، نقطه‌های $A_۰$، $B_۰$ و $C_۰$ را طوری نشان گذاشته‌ایم که

$$|AA_۰| = a, |BB_۰| = b, |CC_۰| = c$$

M را نقطهٔ برخورد صفحه‌های $A_۰BC$، $B_۰AC$ و $C_۰AB$ می‌گیریم و، از آن، پاره‌خط راست MP را موازی یال‌های جانبی منشور رسم می‌کنیم (P، روی صفحهٔ قاعدهٔ ABC است). ثابت کنید، اگر $|MP| = d$، آن‌وقت

$$\frac{۱}{d} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$$

۳۵. همان مسالهٔ ۲۴، برای صفحهٔ شطرنجی ۱۰×۱۰.

*۳۶. آیا توانی طبیعی از عدد ۵ وجود دارد که، درصد رقم سمت راست آن، دست‌کم ۳۰ رقم پشت‌سرهم، برابر صفر باشد؟

۳۷. عدد طبیعی p را طوری پیدا کنید که

$$۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}} + ۹$$

عددی اول باشد (در عدد بالا، p بار از عدد ۲ استفاده شده‌است).

۳۸. نقطه‌های $C_۱$، $B_۱$ و $A_۱$ را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AB، AC و BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، که ضلعی به طول ۲ دارد، انتخاب کرده‌ایم. بیشترین مقدار مجموع شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث‌های $AB_۱C_۱$، $A_۱BC_۱$ و $A_۱B_۱C$ چقدر می‌تواند باشد؟

۳۹. توده‌ای شامل m مهره وجود دارد. دو نفر با هم بازی می‌کنند و، به‌نوبت، از این توده مهره برمی‌دارند. درضمن، در kامین حرکت، می‌توان، به دلخواه، از ۱ تا k مهره برداشت. کسی بازی را می‌برد که آخرین مهره را دارد. m چقدر باشد تا کسی که بازی را آغاز می‌کند بتواند برنامه‌ای برای بُرد حتمی خودش بریزد؟

۴۰. ثابت کنید، نمی‌توان مقدارهای گویایی برای عددهای a، b، c و d پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$(a + b\sqrt{۳})^۴ + (c + d\sqrt{۳})^۴ = ۱ + \sqrt{۳}$$

۴۱. ۱۶ خانه از مربع سفید ۸ × ۸ را به رنگ سیاه درآورده‌ایم؛ درضمن، در هر سطر و در هر ستون، درست ۲ خانه سیاه شده‌است. ثابت کنید، با دوباره رنگ کردن سطرها و ستون‌ها، نمی‌توان تعداد خانه‌های سیاه را کمتر کرد.

*۴۲. آیا ۶ عدد شش‌رقمی با رقم‌های از ۱ تا ۶، بدون تکرار رقم‌ها، وجود دارد، به‌نحوی که بتوان، هر عدد سه‌رقمی دلخواه را که با رقم‌های از

۱ تا ۶، بدون تکرار رقم‌ها، از یکی از این ۶ عدد، با خط زدن ۳ رقم آن به‌دست آورد؟

۴۳. p عدد را در یک ردیف نوشته‌ایم؛ هریک از این عددها برابر است با ۱+ یا ۱−. در هر حرکت، می‌توان علامت‌های چند عدد ردیف هم را عوض کرد. دست‌کم چند بار باید این حرکت را انجام داد تا، برای هر ردیفی که در آغاز انتخاب کرده‌ایم، به دنباله‌ای برسیم که تنها شامل واحدها باشد؟

*۴۴. آیا می‌توان پنج نقطه با فاصله‌های دوبه‌دو مختلف، طوری در فضا پیدا کرد که محیط همهٔ پنج‌ضلعی‌های فضایی با راس‌هایی در این پنج نقطه، با هم برابر باشند؟

۴۵. عددهای a، b و c در بازهٔ $[0, 1]$ واقع‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}$$

*۴۶. a_1، a_2، ...، a_7؛ b_1، b_2، ...، b_7؛ c_1، c_2، ...، c_7 را، سه انتخاب از عددهای درست فرض می‌کنیم. ثابت کنید، می‌توان چند گروه سه‌تایی (a_i, b_i, c_i)، با اندیس‌های برابر، از این سه انتخاب، حذف کرد (و البته، نه همهٔ آن‌ها را)، به نحوی که، مجموع عددهای باقی‌مانده در هریک از سه انتخاب اصلی، بخش‌پذیر بر ۳ باشد.

۱۹۸۲

سال پنجم

۱. شمارهٔ شش‌رقمی تلفن شخصی داده شده‌است. چند شمارهٔ هفت‌رقمی تلفن وجود دارد که، با حذف یکی از رقم‌های آن، شمارهٔ شش‌رقمی تلفن این شخص به‌دست می‌آید؟

۲. حشره‌ای، ۱ سانتی‌متر می‌جهد؛ سپس ۳ سانتی‌متر در همان جهت و یا در جهت عکس؛ بعد، در همان جهت یا جهت عکس، ۵ سانتی‌متر می‌جهد و غیره. آیا ممکن است، بعد از ۲۵ پرش، به‌جای اول خود برگردد؟

۳. برخی از خانه‌های یک جدول ۵ × ۵ را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان چهار خانه از جدول را با یک رنگ پیدا کرد که در محل برخورد دو سطر و دو ستون باشند.

۴. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۷۷۰ باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۷۷۰ بخش‌پذیر نیست.

۵. عددهای از ۱ تا ۱۲ را روی یال‌های مکعب طوری قرار دهید که، مجموع عددهای واقع بر هر وجه، برابر با مجموع عددهای واقع بر هر وجه دیگر باشد.

۶. دو نفر با هم بازی می‌کنند. چند مجموعهٔ مهره وجود دارد. هر نفر باید، در نوبت خود، مجموعه‌ای دلخواه را که بیش از دو مهره دارد، به دو بخش کوچکتر تقسیم کند. بازی تا آن‌جا ادامه پیدا می‌کند که، هیچ مجموعه‌ای، بیش از یک مهره نداشته‌باشد. کسی برنده است که آخرین حرکت را انجام داده باشد. ثابت کنید، اگر در آغاز، یک مجموعهٔ شامل ۱۰۰ مهره وجود داشته‌باشد، کسی که بازی را آغاز کند، می‌تواند برنده شود.

سال ششم

۷. a و b، دو عدد دورقمی هستند که، رقم سمت راست آن‌ها، با هم برابر است. دو عدد را بر ۹ تقسیم کرده‌ایم: خارج‌قسمت حاصل از تقسیم a بر ۹ برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم b بر ۹؛ و خارج‌قسمت حاصل از تقسیم b بر ۹ برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم a بر ۹ شده‌است. همهٔ این‌گونه عددهای a و b را پیدا کنید.

۸. همان مسالهٔ ۳.

۹. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۳۰۰۳۰ باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۳۰۰۳۰ بخش‌پذیر نیست.

۱۰. دایره‌ای به شعاع واحد و ۱۹۸۲ نقطه، روی صفحه داده شده‌است. ثابت کنید، روی محیط این دایره، نقطه‌ای پیدا می‌شود که مجموع فاصله‌های از آن تا ۱۹۸۲ نقطه، از ۱۹۸۲ بیشتر باشد.

۱۱. حشرهٔ به اندازهٔ ۱ سانتی‌متر می‌جهد، به‌اندازهٔ ۹۰ درجه می‌چرخد و بعد به اندازهٔ ۲ سانتی‌متر می‌جهد، باز هم به‌اندازهٔ ۹۰ درجه می‌چرخد و به‌اندازهٔ ۳ سانتی‌متر می‌جهد و غیره. آیا ممکن است، بعد از ۱۹۸۲ پرش، در جای اول خود باشد؟

۱۲. در یک مدرسه، هیچ دانش‌آموز پسری با همهٔ دانش‌آموزان دختر، درس ریاضی را تمرین نکرده‌است، ولی هر دانش‌آموز دختر، دست‌کم با یک پسر، درس ریاضی را تمرین کرده‌است. ثابت کنید دو زوج M_1، D_1 و M_2، D_2 (M پسر و D دختر) پیدا می‌شود که M_1 با D_1 و M_2 با D_2 درس خوانده‌است، ولی M_1 با D_2 و M_2 با D_1 نبوده‌است.

سال هفتم

۱۳. دربارهٔ دو عدد a و b می‌دانیم:

$$\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$$

ثابت کنید، از دو عدد a و b، یکی بزرگتر از واحد و دیگری کوچکتر از واحد است.

۱۴. ثابت کنید، برای هر چهار زاویه از یک چندضلعی کوژ، مجموع دو زاویه، از تفاضل دو زاویهٔ دیگر، بزرگتر است.

۱۵. ثابت کنید، عدد ۲ . . . ۲۲۲ (عددی ۱۹۸۲ رقمی با رقم‌های برابر ۲)، قابل تبدیل به‌صورت $xy(x+y)$ نیست (x و y، عددهایی درست‌اند).

۱۶. دانش‌آموزان کلاس‌های ششم و هفتم، در یک مسابقهٔ تنیس روی میز شرکت کردند؛ درضمن، تعداد دانش‌آموزان کلاس ششم، دو برابر تعداد دانش‌آموزان کلاس هفتم بود. مسابقه در یک دور انجام گرفت. تعداد بازی‌های برندگان کلاس هفتم، ۴۰٪ بیشتر از تعداد بازی‌های برندگان کلاس ششم بود. چند دانش‌آموز در این مسابقه شرکت داشتند؟

۱۷. نه عدد طبیعی را، که از ۴۰ بزرگتر نباشند، در خانه‌های یک جدول ۳×۳ طوری قرار دهید که حاصل‌ضرب عددها در هر سطر، در هر ستون و در هریک از دو قطر، یکسان باشد.

۱۸. همان مسالهٔ ۱۲.

سال هشتم

۱۹. $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$، سه‌جمله‌ای‌هایی درجهٔ دوم، با ضریب مثبت برای بزرگترین درجه، هستند. ثابت کنید، اگر هر دوتا از آن‌ها، ریشهٔ مشترک داشته‌باشند، آن‌وقت، سه‌جمله‌ای $p_۱ + p_۲ + p_۳$، ریشه دارد.

۲۰. در مثلث ABC، زاویهٔ C دوبرابر زاویهٔ A است و، درضمن $|AC| = ۲|BC|$. ثابت کنید، این مثلث قائم‌الزاویه است.

۲۱. چهار جملهٔ نخست یک دنباله عبارت است از

$$۱, ۹, ۸, ۲$$

از جملهٔ چهارم به بعد، هر جمله برابر است با رقم سمت راستِ مجموعِ چهار جملهٔ قبل از آن. آیا در این دنباله، به ردیف چهار جملهٔ

$$۳, ۰, ۴, ۴$$

برخورد می‌کنیم؟

۲۲. هر زاویهٔ بین دو قطر دلخواه یک ۱۸ ضلعی، بر حسب درجه، با عددی درست بیان می‌شود. ثابت کنید، با یک ۱۸ ضلعی منتظم سروکار داریم.

۲۳. خانه‌های یک مستطیل ۴۱×۵ را، با دو رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان سه سطر و سه ستون طوری انتخاب کرد که، هر ۹ خانه‌ای که در تقاطع این سطر و ستون‌ها قرار دارند، از یک رنگ باشند.

۲۴. صفحه را به‌وسیلهٔ $۲n$ خط راست $(n > ۱)$ به بخش‌هایی تقسیم کرده‌ایم؛ درضمن، هیچ دو خط راستی با هم موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، این بخش‌ها، با بیش از $۲n - ۱$ زاویه به وجود نیامده‌اند.

سال نهم

۲۵. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۲.

۲۸. می‌دانیم:

$$\frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} + \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} + \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} = ۱$$

ثابت کنید، از این سه کسر، دو کسر برابر ۱ و یک کسر برابر ۱− است.

۲۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی k، عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\sqrt{n + ۱۹۸۱^k} + \sqrt{n} = (\sqrt{۱۹۸۲} + ۱)^k$$

*۳۰. چند مهره روی صفحه ریخته شده است؛ درضمن، همهٔ آن‌ها روی یک خط راست نیستند. می‌توانیم، هر مهرهٔ دلخواه را به جایی منتقل

کنیم که قرینهٔ آن نسبت به یک مهرهٔ دیگر باشد. ثابت کنید، با این عمل، می‌توان مهره‌ها را به‌صورت راس‌های یک چندضلعی کوژ درآورد.

سال دهم

۳۱. همان مسالهٔ ۲۱.

۳۲. همان مسالهٔ ۲۳.

۳۳. همان مسالهٔ ۲۸.

۳۴. در چهار وجهی $ABCD$، مجموع زاویه‌های BAC و BAD برابر است با ۱۸۰ درجه. AK، نیمساز زاویهٔ CAD است. مقدار زاویهٔ BAK را پیدا کنید.

۳۵. ثابت کنید می‌توان روی راس‌های یک nضلعی منتظم، عددهایی مخالف صفر، طوری قرار داد که مجموع عددهای واقع در راس‌های هر kضلعی منتظم، که راس‌های آن بر راس‌های nضلعی منطبق است $(k \leq n)$، برابر صفر شود.

*۳۶. $۴n$ نقطه روی محیط دایره‌ای انتخاب و آن‌ها را، یک در میان، به رنگ‌های قرمز و آبی درآورده‌ایم. نقطه‌های هر رنگ را، به زوج‌هایی تقسیم و نقطه‌های هر زوج را با پاره‌خط‌های راستی از همان رنگ، به هم وصل کرده‌ایم (در ضمن، هیچ سه پاره‌خط راستی، در یک نقطه به هم نرسیده‌اند). ثابت کنید، دست‌کم، n نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های راست قرمز با پاره‌خط‌های راست آبی پیدا می‌شود.

دور نهایی

۳۷. آیا عدد طبیعی k وجود دارد، به نحوی که از هر ۱۸۰ راس دلخواه یک ۳۶۰ ضلعی منتظم به مرکز O، بتوان دو راس A و B را طوری انتخاب کرد که، مقدار زاویهٔ $\widehat{AOB}$، برابر k درجه باشد؟

۳۸. مربع را به $۹۸۰۱ = ۹۹^۲$ مربع برابر تقسیم و مرکزهای همهٔ این مربع‌ها را، به‌جز یک مربع گوشه‌ای، نشان گذاشته‌ایم. نقطه‌هایی را که نشان گذاشته‌ایم، به زوج‌هایی تقسیم و نقطه‌های هر زوج را، با بُرداری به هم پیوسته‌ایم. ثابت کنید، مجموع این بردارها، برابر بُردار صفر نمی‌شود.

۳۹. ۱۰ نقطه روی محیط دایره انتخاب کرده‌ایم. حداکثر، چند پاره‌خط راست، که دو انتهای هر یک از آن‌ها در این نقطه‌ها باشند، می‌توان رسم کرد، به نحوی که هیچ سه پاره‌خط راستی، تشکیل یک مثلث، به راس‌هایی در این نقطه‌ها، ندهند؟

۴۰. پتیا، ۸ پیراشکی از دو نوع سیب‌زمینی و گوشتی خرید و، برای آن‌ها، یک روبل پرداخت. واسیا، ۹ پیراشکی خرید و یک روبل و یک کوپک پرداخت. هر پیراشکی گوشتی چند می‌ارزد، به شرطی که بدانیم، پیراشکی گوشتی گران‌تر است و، درضمن، هر پیراشکی قیمتی بیش از یک کوپک دارد؟ هر روبل، برابر ۱۰۰ کوپک است.

۴۱. دایره‌ای در مثلث ABC محاط نقطه‌های D و E، نقطه‌های تماس این دایره، با ضلع‌های BC و AC است. بر نیمساز زاویهٔ BAC، عمود BK را رسم کرده‌ایم. اگر K، پای این عمود باشد، ثابت کنید، سه نقطهٔ D، E و K، روی یک خط راست‌اند.

۴۲. (A_n)، دنباله‌ای بی‌پایان از عددهای طبیعی است و می‌دانیم $A_{n+k} - A_k$، به‌ازای عددهای طبیعی و دلخواه n و k، بر A_n بخش‌پذیر است. حاصل‌ضرب $A_۱A_۲\ldots A_n$ را B_n می‌نامیم. ثابت کنید، B_{n+k} به‌ازای هر n و k، بر B_nB_k بخش‌پذیر است.

*۴۳. n نقطه روی یک صفحه‌اند، به‌نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست و هیچ چهارنقطه‌ای روی محیط یک دایره نیستند. ثابت کنید، حداکثر $n - ۲$ دایره پیدا می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، از سه نقطه (از نقطه‌های مفروض) می‌گذرد و همهٔ نقطه‌های دیگر، در درون آن قرار

می‌گیرند.

*۴۴. ثابت کنید، مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی را نمی‌توان به دو مجموعه چنان تقسیم کرد که، اگر عددهای a و b متعلق به یکی از این دو مجموعه باشد، عدد $ab - ۱$ هم متعلق به همان مجموعه باشد.

۱۹۸۳

سال پنجم

۱. ۳۰ نفر در مسابقهٔ شطرنج شرکت کردند. ردیف امتیازهای کسانی را به حساب آوردند که، دست‌کم ۶۰٪ امتیازهای ممکن را به‌دست آورده باشند. حداکثر، چند نفر ممکن است وارد ردیف‌بندی شده باشند؟

۲. ۱۰ مقوای مستطیل شکل ۲۰ × ۱۰ سانتی‌متری را به ۲۰ تکهٔ مثلثی شکل بریده‌ایم. با این تکه‌ها، چگونه می‌توان یک مربع ساخت؟

۳. هر یک از چهار نفر به‌نیا، وه‌نیا، سه‌نیا و ژه‌نیا، یا همیشه راست می‌گوید و یا همیشه دروغ. این سخنان را شنیده‌ایم:

به‌نیا (به وه‌نیا): تو دروغ‌گویی.

ژه‌نیا (به به‌نیا): تو هم دروغ‌گویی.

سه‌نیا (به ژه‌نیا): بله، هر دوی آن‌ها دروغ‌گو هستند. (و بعد از اندکی فکر) درضمن، تو هم دروغ‌گویی.

از این چهار نفر، کدام راستگو و کدام دروغ‌گو هستند؟

۴. از کیسه‌ای که شامل برگ‌های کوچک کاغذی سیاه و سفید است، هشت برگ بیرون آورده‌ایم و آن‌ها را روی محیط دایره‌ای چیده‌ایم. هر بار، سه برگ ردیف هم را برداشته و به‌جای آن‌ها، برگ‌هایی با رنگ مخالف هر یک از آن‌ها گذاشته‌ایم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان به حالتی رسید که همهٔ برگ‌ها سفید باشند.

۵. ماشین زمان امکان می‌دهد از اول مارس به اول نوامبر هر سال دیگر یا از اول آوریل به اول دسامبر، از اول مه به اول ژانویه و غیره منتقل شویم. دو بار پیاپی نمی‌توان از ماشین زمان استفاده کرد. بارون مون هاوزن، در اول آوریل با ماشین زمان به مسافرت رفت و بعد از لحظه‌ای برگشت. او ادعا کرد ۲۶ ماه در مسافرت بوده است. به بارون ثابت کنید که درست نمی‌گوید.

۶. با چهار رقم مختلف، دو عدد چهار رقمی ساخته‌ایم که، یکی از آن‌ها، بزرگترین عدد از بین عددهای چهار رقمی است که با رقم‌های مفروض می‌توان ساخت و، دیگری، کوچکترین عدد چهار رقمی در بین آن‌ها است؛ درضمن، در این دو عدد چهار رقمی، رقم تکراری وجود ندارد. مجموع این دو عدد، برابر است با ۱۰۴۷۷. این چهار رقم را پیدا کنید.

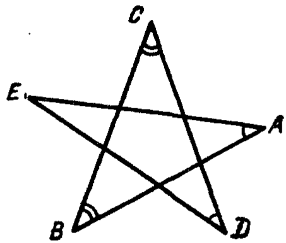
سال ششم

۷. عدد زوج a دارای این ویژگی است که، اگر a بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $a-1$ بر $p-1$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید a، توانی از عدد ۲ است.

۸. میله‌ای به طول ۲ متر را به پنج بخش (که لازم نیست با هم برابر باشند) تقسیم کرده‌ایم. طول هر بخش از ۱۷ سانتی‌متر کمتر نیست. ثابت کنید، از بین این پنج تکه، می‌توان سه میله انتخاب کرد که، با آن‌ها، بتوان یک مثلث ساخت.

۹. در پنج‌ضلعی ستاره‌ای که در شکل ۱۰ نشان داده شده‌است، دو زاویهٔ A و D با هم و دو زاویهٔ B و C با هم برابرند؛ همچنین، دو پاره‌خط راست AB و CD، طول‌هایی برابر دارند. ثابت کنید، پاره‌خط‌های راست AE و DE هم، طولی برابر دارند.

۱۰. هشت عدد، که هریک برابر ۱+ یا ۱− است، روی محیط دایره‌ای نوشته‌ایم. با هر حرکت می‌توان علامت سه عددی را که در ردیف هم قرار



شکل ۱۰

دارند عوض کرد. ثابت کنید، با تکرار این حرکت، می‌توان از ردیفی از دو عدد ۱+ و ۱−، به هر ردیف دیگری رسید.

۱۱. همان مسالهٔ ۵.

۱۲. راس‌های مثلثی، به رنگ آبی‌اند. آیا می‌توان ۱۰ نقطهٔ آبی و ۲۰ نقطهٔ قرمز در درون مثلث طوری قرار داد که، هیچ سه نقطهٔ آبی، روی یک خط راست نباشند و، درضمن، در درون هر مثلث با راس‌های آبی، دست‌کم یک نقطهٔ قرمز قرار گرفته باشد؟

سال هفتم

۱۳. همان مسالهٔ ۹.

۱۴. هر خانه از مربع شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ را، به رنگ سیاه یا سفید درآورده‌ایم؛ درضمن، تعداد خانه‌های سیاه، با تعداد خانه‌های سفید برابر است. ثابت کنید، این مربع را می‌توان، با برش روی خط‌های راست شبکه، به دو چندضلعی طوری تقسیم کرد که، در هر کدام از آن‌ها، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های سفید برابر باشد.

۱۵. میله‌ای به طول ۲ متر را به پنج بخش تقسیم کرده‌ایم که؛ درضمن، هیچ بخشی از ۱۹ سانتی‌متر کمتر نیست. ثابت کنید، با هر چهار بخش

دلخواه از این پنج بخش، می‌توان یک چهارضلعی ساخت.

۱۶. همان مسالهٔ ۱۲.

۱۷. ثابت کنید، عدد $۱ + ۲^{۵۸}$ را می‌توان به‌صورت ضرب سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد، تبدیل کرد.

۱۸. در هر خانه از جدول ۲۴ × ۲۴، یکی از دو عدد ۱+ یا ۱− را نوشته‌ایم. در هر حرکت، می‌توان علامت یکی از عددها را، همراه با علامت‌های ستونی که این خانه در آن است یا سطر مربوط به این خانه، عوض کرد. ثابت کنید، با تکرار محدود این حرکت، می‌توان از هر وضع نخستین عددهای جدول، به هر وضع دیگری رسید.

سال هشتم

۱۹. عدد a از جابه‌جایی رقم‌های عدد b به‌دست آمده است. ثابت کنید، مجموع رقم‌های عدد $۵a$ با مجموع رقم‌های عدد $۵b$ برابر است.

۲۰. دو شطرنج‌باز، ۲۴ دُور متوالی با هم بازی کردند. می‌دانیم در هیچ‌کدام از ردیف‌های فرد بازی، بازی به‌صورت مساوی تمام نشده‌است؛ درضمن هیچ کدام از دو بازی‌کن، در سه دور متوالی نبرده است. حداکثر امتیاز برندهٔ مسابقه، چقدر می‌تواند باشد؟

۲۱. نقطه‌ای را که در درون یک شش‌ضلعی منتظم قرار دارد، به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست، به راس‌ها وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، با این پاره‌خط‌های راست، می‌توان یک شش‌ضلعی ساخت که، مساحت آن، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت شش‌ضلعی نخستین، کمتر نباشد.

۲۲. خط راست p، با میانهٔ CM از مثلث ABC موازی است. خط‌های راست AB، BC و AC، خط راست p را، به‌ترتیب، در $C_۱$، $A_۱$ و $B_۱$ قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مساحت مثلث $AA_۱C_۱$ با مساحت مثلث $BB_۱C_۱$ برابر است.

۲۳. ۴۰۰ ضلعی منتظم را به‌صورت متوازی‌الاضلاع‌هایی بریده‌ایم. ثابت کنید، در بین این متوازی‌الاضلاع‌ها، دست‌کم ۱۰۰ مستطیل وجود دارد.

*۲۴. چند نقطه، روی محیط دایره‌اند. آن‌ها با سرعت‌های ثابت و، از نظر مقدار برابر، آغاز به حرکت کردند (برخی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و برخی دیگر در خلاف این جهت). وقتی دو نقطه به هم برمی‌خورند، بلافاصله و هر دو، جهت حرکت خود را عوض می‌کنند؛ درضمن روی محیط دایره باقی می‌مانند و سرعت خود را، از لحاظ مقدار، حفظ می‌کنند. ثابت کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسد که، هر نقطه، در جای نخستینِ خود قرار می‌گیرد.

سال نهم

۲۵. ارتفاع‌های AH و CP را در مثلث ABC رسم کرده‌ایم. مقدار زاویهٔ B را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم: $|AC| = ۲|PH|$.

۲۶. اگر هر دو مختص نقطه‌ای در دستگاه محورهای مختصات، عددهای درستی باشند، آن‌وقت، نقطه را «درست» می‌نامیم. نقطهٔ درست را «اول» می‌نامیم، وقتی هر دو مختص آن، عددهایی اول باشند. مربعی را، که راس‌های آن نقطه‌هایی درست باشند، «اول» می‌نامیم، وقتی که هر نقطهٔ درست واقع بر محیط آن، اول باشد. همهٔ «مربع‌های اول» را پیدا کنید.

۲۷. چند کودک، به‌صورت دایره‌ای ایستاده‌اند و، هر کدام از آن‌ها، چند شوکولات در دست خود دارد. با سوت داور، هر نفر، نصف شوکولات‌های خود را به نفر دست راستی خود می‌دهد (اگر تعداد شوکولات‌های کسی فرد باشد، داور، پیش از آغاز بازی، یک شوکولات به او می‌دهد). بازی چند بار تکرار می‌شود. ثابت کنید، زمانی فرا می‌رسد که، تعداد شوکولات‌ها، به طور مساوی بین کودکان تقسیم شده‌است.

۲۸. به‌ازای کدام عددهای طبیعی $n \geq 2$، نابرابری

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})$$

برای همهٔ مقدارهای متغیرهای x_i برقرار است؟

۲۹. دایره‌های K_1 و K_2، دارای نقطه‌های مشترک درونی نیستند. خط‌های راست l_1 و l_2 بر این دو دایره، از بیرون مماس‌اند و چهار نقطهٔ تماس، راس‌های یک چهارضلعی محیطی‌اند. ثابت کنید، دایره‌های K_1 و K_2، بر هم از بیرون مماس‌اند.

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

سال دهم

۳۱. دنباله‌های (x_n) و (y_n) طوری ساخته شده‌اند که

$$x_1 = x_2 = 10, y_1 = y_2 = -10,$$
$$x_{n+2} = (x_n + 1)x_{n+1} + 1, y_{n+2} = (y_{n+1} + 1)y_n + 1$$

ثابت کنید، هر عدد طبیعی، حداکثر در یکی از این دنباله‌ها وجود دارد.

۳۲. همان مسالهٔ ۲۷.

۳۳. همان مسالهٔ ۲۸.

۳۴. یک کُنج سه‌وجهی مفروض است. می‌دانیم، نیمسازهای دو زاویهٔ مسطحهٔ آن، بر هم عمودند. ثابت کنید، صفحه‌ای که از این دو نیمساز می‌گذرد، بر وجه سوم کُنج عمود است.

۳۵. در یک هرم منتظم با قاعدهٔ ۲۰ ضلعی، مرکزهای دو کرهٔ محاطی و محیطی هرم، بر هم منطبق‌اند. مقدار زاویه‌های دو وجهیِ وجه‌های جانبی هرم را (برحسب درجه) پیدا کنید.

۳۶. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۷. ۹ راس یک ۲۰ ضلعی منتظم را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مثلث متساوی‌الساقینی می‌توان پیدا کرد که، راس‌های آن، در نقطه‌های نشان‌دار باشد.

۳۸. مثلث ABC و نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث داده شده‌است. قرینهٔ مثلث را نسبت به این نقطه به‌دست آورده‌ایم. از برخورد مثلثِ قرینه با مثلث ABC، یک چندضلعی به‌دست آمده است. ثابت کنید، مساحت این چندضلعی، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث ABC تجاوز نمی‌کند.

۳۹. دو نفر روی یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی بی‌پایان، به نوبت، با نقطه‌گذاری در خانه‌های جدول، یک صلیب رسم می‌کنند. اولی می‌کوشد، به کمک چهار صلیبی که رسم شده‌است مربعی بسازد که ضلع‌های آن، با ضلع‌های خانه‌های جدول موازی باشد و دومی می‌کوشد مانع او شود. آیا اولی می‌تواند، با برنامه‌ریزی درست، برنده شود؟

۴۰. زاویهٔ راس، در مثلث متساوی‌الساقین ABC، برابر ۱۰۰ درجه است. روی نیم‌خط راست AB، پاره‌خط راست AM را برابر قاعدهٔ BC جدا کرده‌ایم. اندازهٔ زاویهٔ BCM را پیدا کنید.

۴۱. به‌ازای کدام عدد طبیعی n، می‌توان n عدد $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را روی محیط دایره طوری قرار داد (همهٔ عددها، با هم، برابر صفر نیستند)، به نحوی که، برای هر $k \leq n$، مجموع k عدد ردیف، با آغاز از a_k، برابر صفر شود؟

۴۲. صفحهٔ شطرنجی بی‌پایان را، به‌وسیلهٔ لایه‌ای از تکه مقواهایی با اندازهٔ ۲ × ۱ پوشانده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های هر تکه مقوا، در امتداد خط‌های شبکه باشد. ثابت کنید، صفحه را می‌توان با سه لایهٔ دیگر از همان گونه مقواها پوشاند، طوری که هیچ‌کدام از تکه مقواها، درست روی تکه

مقوای مشابه خود قرار نگیرد.

*۴۳. دنبالهٔ صعودی (a_n) از عددهای طبیعی چنان است که، اگر یک عدد طبیعی عضو این دنباله نباشد، می‌توان آن را به‌صورت $a_k + ۲k$ نشان داد (k، یک عددطبیعی است). ثابت کنید، برای هر k، نابرابری $a_k < \sqrt{۲}k$ برقرار است.

۴۴. کشوری دارای $n^۲$ شهر است که به‌صورت مربع قرار گرفته‌اند و، درضمن، فاصله بین هر دو شهر مجاور، برابر ۱۰ کیلومتر است. شهرها به‌وسیلهٔ جاده‌ها به هم مربوط‌اند؛ جاده‌ها خط‌های راستی را تشکیل می‌دهند که با ضلع مربع موازی‌اند. کمترین مقدار طول این دستگاه جاده‌ها چقدر است، به‌شرطی از هر شهر این کشور، بتوانیم به هر شهر دیگری، از طریق جاده‌ها برویم؟

۱۹۸۴

سال پنجم

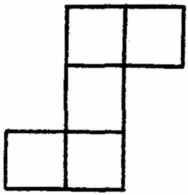
۱. ثابت کنید، در عدد صدرقمی

۸۴۱۹۸۴۱۹...۸۴۱۹

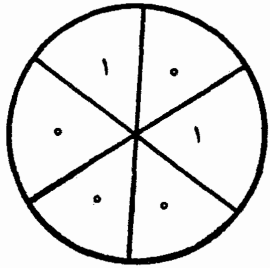
می‌توان، چند رقم از آغاز عدد و چند رقم از پایان عدد حذف کرد، به نحوی که مجموع رقم‌های باقی‌مانده، برابر ۱۹۸۴ باشد.

۲. در خانه‌های یک جدول ۴ × ۴، عددهایی قرار دهید که، مجموع عددهای واقع در چهار گوشهٔ هر مربع ۲ × ۲، ۳ × ۳ و ۴ × ۴، برابر صفر شود. هیچ‌کدام از عددهای درون خانه‌ها، برابر صفر نیست.

۳. روی خط راست، ۴۵ نقطه را، در بیرون پاره‌خط راست AB نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها تا نقطهٔ A، برابر با مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها تا نقطهٔ B نیست.



شکل ۱۱



شکل ۱۲

۴. خانه‌های صفحهٔ شطرنجی دفترچه را، با هشت رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان شکلی شبیه شکل ۱۱، در آن پیدا کرد که، در درون آن، دو خانهٔ هم‌رنگ وجود داشته باشد.

۵. دایره را به شش قطاع تقسیم کرده و، طبق شکل ۱۲ ، در هر قطاع عددی برابر ۰ یا ۱ گذاشته‌ایم. می‌توانیم، در هر حرکت، به دو عدد مجاور، یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید، با تکرار این حرکت، نمی‌توان به حالتی رسید که، هر شش عدد، با هم برابر باشند.

۶. عددهای از ۱ تا ۱۰۰، به ردیف (و با اندکی فاصله بین هر دو عدد) و در یک سطر نوشته شده‌اند. دو نفر، به نوبت، هر کدام یکی از علامت‌های $+$، $-$ یا $\times$ را بین دو عدد قرار می‌دهد. ثابت کنید، آن که بازی را آغاز کرده‌است، می‌تواند روشی در پیش گیرد که، سرانجام، عددی زوج به‌دست آید. (هر بازی‌کن، در نوبت خود باید یکی از جاهای باقی‌مانده بین دو عدد متوالی را، با یکی از علامت‌ها، پر کند.)

سال ششم

۷. همان مسالهٔ ۳.

۸. قطرهای AC و BD در چهارضلعی $ABCD$، یکدیگر را در

O قطع کرده‌اند. محیط‌های دو مثلث ABC و ABD برابرند. همچنین دو مثلث ACD و، BCD هم، محیط‌هایی برابر دارند. ثابت کنید: $|AO| = |BO|$.

۹. الف) همان مسالهٔ ۲.

ب) ثابت کنید، برای هر جدولی از این‌گونه، مجموع عددهای هر ستون، برابر صفر است.

۱۰. ۱۷۵ مداد گران‌تر از ۱۲۵ خودکار و ارزان‌تر از ۱۲۶ خودکار است. ثابت کنید، برای خرید سه مداد و یک خودکار، ۱۰۰ تومان کافی نیست.

۱۱. همان مسالهٔ ۶.

۱۲. از یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی ۲۹ × ۲۹، به تعداد ۹۹ مربع جدا کرده‌ایم که هر کدام از آن‌ها، شامل چهار خانه است. ثابت کنید، هنوز می‌توان یک مربع دیگر ۲ × ۲ از آن جدا کرد.

سال هفتم

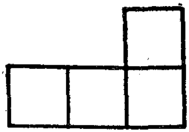
۱۳. آیا پاره‌خط‌های راست به طول‌های ۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳ و ۱۵، می‌توانند ضلع‌ها و قطرهای یک پنج‌ضلعی کوژ باشند؟

۱۴. مطلوب است مقدار عددی عبارت

$$\frac{۱}{x^۲+۱}+\frac{۱}{y^۲+۱}+\frac{۲}{xy+۱}$$

به‌شرطی که بدانیم، مجموع دو کسر اول این عبارت برابر است با ۳؛ درضمن، x و y، با هم برابر نیستند.

۱۵. روی ضلع‌های AB و AC در مثلث ABC، مثلث‌های متساوی‌الساقین ADB $(|AD| = |AB|)$ و ACE $(|AC| = |AE|)$



شکل ۱۳

را رسم کرده‌ایم. درضمن، زاویهٔ DAE برابر است با مجموع دو زاویهٔ ABC و ACB. ثابت کنید، پاره‌خط راست DE، طولی دو برابر طول میانهٔ AM از مثلث ABC دارد.

۱۶. روی خط راستی، ۴۵ نقطه را در بیرون پاره‌خط راست AB انتخاب کرده‌ایم. برخی از این نقطه‌ها را به رنگ قرمز، و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌ایم. دو مجموع را محاسبه کرده‌ایم: ۱) مجموع فاصله‌های از نقطه‌های قرمز تا نقطهٔ A را با مجموع فاصله‌های نقطه‌های آبی تا نقطهٔ B، با هم جمع کرده‌ایم؛ ۲) مجموع فاصله‌های از نقطه‌های قرمز تا نقطهٔ B را با مجموع فاصله‌های از نقطه‌های آبی تا نقطهٔ A، با هم جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، این دو مجموع، با هم برابر نیستند.

۱۷. مسالهٔ ۱۲ را، برای صفحهٔ کاغذ شطرنجی ۳۱ × ۳۱ حل کنید.

۱۸. دست‌کم چند رنگ لازم است تا صفحهٔ شطرنجی بی‌پایان را بتوان طوری رنگ کرد که، در آن، هر چهار خانهٔ دلخواهی که شبیه شکل۱۳ انتخاب شود، با چهار رنگ مختلف باشد؟

سال هشتم

۱۹. مربع ۱۰۰ × ۱۰۰ را با قطعه‌های مستطیلی ۲ × ۱ ساخته‌ایم. ثابت کنید، زوج‌هایی از این قطعه‌ها، مربع ۲ × ۲ می‌سازند.

۲۰. تفاوت دو عدد شش‌رقمی

$$\overline{abcdef} \text{ و } \overline{fdebca}$$

بر ۲۷۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $d = b$ و $e = c$.

۲۱. عددهای حقیقی x_1، x_2، ...، x_{101} چنان‌اند که

$$x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3 = \ldots = x_{100}^3 + x_{101} = x_{101}^3 + x_1$$

ثابت کنید، همهٔ این عددها، با هم برابرند.

۲۲. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از یک نقطهٔ واقع بر صفحهٔ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین تا سه راس این ذوزنقه، بزرگتر است از فاصلهٔ همین نقطه تا راس چهارم ذوزنقه.

۲۳. BM میانهٔ مثلث ABC و K، نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط راست BM است. می‌دانیم زاویه‌های BAK و BCK با هم برابرند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۴. مجموعهٔ A از عددهای طبیعی تشکیل شده‌است؛ درضمن، بین هر صد عدد طبیعی متوالی، عضوی از مجموعهٔ A وجود دارد. ثابت کنید، می‌توان چهار عضو مجموعهٔ A، مثل a، b، c و d را پیدا کرد، به‌نحوی که $a + b = c + d$.

سال نهم

۲۵. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۶. همان مسالهٔ ۲۲.

۲۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که به سه طریق بتوان آن را به‌صورت $13x + 73y$ نشان داد (x و y، عددهایی طبیعی‌اند)

۲۸. پاره‌خط‌های راست AA_1، BB_1 و CC_1، ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. اگر مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC متشابه باشد، زاویه‌های مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۹. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۰. مجموع سه عدد x، y و z برابر صفر است. ثابت کنید، عدد $۲(x^۴ + y^۴ + z^۴)$، مجذور یک عدد درست است.

سال دهم

۳۱. همان مسالهٔ ۲۲، برای هر نقطهٔ دلخواه فضا.

۳۲. همان مساله ۲۴.

۳۳. ثابت کنید، تفاضل مجذورهای طول‌های ضلع‌های مجاور متوازی الاضلاع، از حاصل‌ضرب طول‌های دو قطر آن کمتر است.

۳۴. بعد از چند بار عمل مشتق‌گیری و عمل ضرب در $x + ۱$، که روی چندجمله‌ای $x^۸ + x^۷$ انجام شده‌است، به دوجمله‌ای $ax + b$ رسیده‌ایم. ثابت کنید، تفاضل دو عدد درست a و b، بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

۳۵. حداکثر مقدار مجموع

$$|x_۱ - ۱| + |x_۲ - ۲| + \ldots + |x_{۶۳} - ۶۳|$$

چقدر است، به‌شرطی که $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۶۳}$، ترتیبی از عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۶۳ باشند؟

۳۶. عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را در راس‌های منشوری با قاعده‌های ۵۰ ضلعی گذاشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان یالی از منشور را پیدا کرد، به نحوی که اختلاف عددهای دو انتهای آن، از ۴۸ تجاوز نکند.

دور نهایی (سال‌های هشتم و نهم)

۳۷. نقطه‌های E و H را روی ضلع‌های AB و CD از چهارضلعی کوژ $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم. می‌دانیم دو مثلث ABH و CDE مساحت‌هایی برابر دارند و درضمن

$$|AE| : |BE| = |DH| : |CH|$$

ثابت کنید دو خط راست BC و AD موازی‌اند.

۳۸. دو نفر با هم بازی می‌کنند. نفر اول یک رقم می‌نویسد، نفر دوم، در سمت چپ یا سمت راست این رقم، رقمی می‌نویسد؛ بعد نفر اول دوباره در سمت چپ یا سمت راست عددی که پدید آمده‌است، یک رقم می‌نویسد و غیره. ثابت کنید، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که همیشه، بعد از حرکت نفر دوم، عدد حاصل مجذور کامل یک عدد درست نباشد.

۳۹. روی صفحهٔ محورهای مختصات، چهار نقطه با مختصات درست داده شده‌است. اجازه داریم، به‌جای هر نقطه (از این چهار نقطه)، قرینهٔ آن را نسبت به یکی دیگر از چهار نقطه انتخاب کنیم. آیا می‌توان، بعد از چند عمل از این‌گونه، از نقطه‌های

$$(۰, ۰), (۰, ۱), (۱, ۰), (۱, ۱)$$

به نقطه‌های زیر رسید:

$$(۰, ۰), (۱, ۱), (۳, ۰), (۲, -۱)?$$

۴۰. ده عدد، یکی برابر ۱ و بقیه برابر ۰ داده شده‌است. در هر حرکت، دو عدد را برمی‌داریم و، به‌جای هردوی آن‌ها، میانگین حسابی آن‌ها را قرار می‌دهیم. بعد از یک رشته حرکت از این‌گونه، کوچکترین عددی که می‌تواند به‌جای عدد ۱ نشسته باشد، چه عددی است؟

۴۱. عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k و $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n چنان‌اند که داریم:

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_k = b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n$$

ثابت کنید، در خانه‌های جدول $k \times n$، می‌توان عددهای غیر منفی را طوری قرار داد که، در بین آن‌ها، دست‌کم به تعداد $(k-۱)(n-۱)$ عدد صفر

وجود داشته‌باشد و، درضمن، مجموع عددها در سطرها برابر a_1، a_2، ...، a_k و مجموع عددها در ستون‌ها برابر b_1، b_2، ...، b_n باشد.

۴۲. مهره را در یکی از ۱۶۹ نقطهٔ با مختصات (x, y) گذاشته‌ایم که، در آن $12 \geq x \geq 0$ و $12 \geq y \geq 0$. مهره می‌تواند از نقطهٔ (x_1, y_1) به نقطهٔ (x_2, y_2) برود، به‌شرطی که هر یک از عددهای $|x_1 - x_2|$، $|x_1 - y_2|$، $|y_1 - x_2|$ و $|y_1 - y_2|$ از ۲ کمتر و از ۹ بیشتر نباشد. ثابت کنید، نمی‌توان مهره را از هر ۱۶۹ نقطه گذراند، به نحوی که در هر نقطه، تنها یکبار باشد.

۴۳. دایره‌ای بر ضلع‌های زاویه‌ای به راس O مماس است. قطری از دایره را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ تماس دایره با یکی از ضلع‌ها نگذشته باشد و دو انتهای آن را A و B می‌نامیم. مماس بر دایره در نقطهٔ B، ضلع‌های زاویه را در نقطه‌های C و D و خط راست OA را در نقطهٔ E قطع کرده‌است. ثابت کنید: $|BC| = |DE|$.

*۴۴. ثابت کنید، مجموعهٔ A از عددهای طبیعی وجود دارد، به نحوی که، هر عدد طبیعی که متعلق به A نیست، برابر با میانگین حسابی دو عضو مختلف A باشد و هیچ عضو A، دارای این ویژگی نباشد.

دور نهایی (سال دهم)

۴۵. همان مسالهٔ ۴۰.

۴۶. ثابت کنید، اگر مجموع زاویه‌های مسطحهٔ راس یک هرم، از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد، آن‌وقت طول هر یال جانبی هرم، از نصف محیط قاعده کمتر است.

۴۷. دربارهٔ عدد a می‌دانیم، عدد $3a$ را می‌توان به‌صورت $x^2 + 2y^2$ نوشت (x و y، عددهایی درست‌اند). ثابت کنید، خود عدد a را هم می‌توان به همین صورت نوشت.

۴۸. همان مسالهٔ ۳۹.

۴۹. همان مسالهٔ ۴۳.

۵۰. همان مسالهٔ ۴۴.

*۵۱. عددهای درست a، b، c، d و e چنان‌اند که

$$a+b+c+d+e \text{ و } a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}+e^{۲}$$

بر عدد فرد n بخش‌پذیرند. ثابت کنید، عدد

$$a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}+d^{۵}+e^{۵}-۵abcde$$

هم، بر عدد n بخش‌پذیر است.

۵۲. شش عدد نخستینِ دنباله‌ای چنین است:

$$۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰$$

با آغاز از جملهٔ هفتم، هر جمله برابر است با آخرین رقم مجموع شش جملهٔ پیش از آن. ثابت کنید، در این دنباله، به ردیف شش عدد

$$۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱$$

برخورد نمی‌کنیم.

۱۹۸۵

سال پنجم

۱. ۶۸ سکه به وزن‌های مختلف داریم. با ۱۰۰ بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای و بدون استفاده از وزنه، سنگین‌ترین و سبک‌ترین سکه را پیدا کنید.

۲. عدد ۴۵ رقمی شامل یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳، ...، نه رقم ۹ می‌باشد. ثابت کنید، این عدد مجذور کامل نیست.

۳. مسافری از شهر زادگاه خود A، به طرف دورترین شهر کشور نسبت به A، یعنی B، حرکت کرد؛ سپس از B به دورترین شهر نسبت به B رفت (شهر C) و غیره. ثابت کنید، اگر C و A دو شهر مختلف باشند، مسافر هرگز به شهر خود نمی‌رسد.

۴. ۱۰۰۰ عدد طبیعی پیدا کنید که، مجموع آن‌ها، برابر با حاصل‌ضرب آن‌ها باشد.

۵. در انباری ۳۰۰ لنگه چکمه وجود دارد: برای شمارهٔ ۴۰ پا ۱۰۰ لنگه، برای شمارهٔ ۴۱ پا ۱۰۰ لنگه و برای شمارهٔ ۴۲ پا ۱۰۰ لنگه. درضمن، ۱۵۰ لنگه چکمه برای پای راست و ۱۵۰ تا برای پای چپ است. ثابت کنید، دست‌کم ۵۰ جفت چکمه می‌توان از آن‌ها جدا کرد، به نحوی که هر جفت، شامل یک شمارهٔ چپ و راست باشد.

۶. همان مسالهٔ ۱۸، برای $n = ۱۰$.

سال ششم.

۷. عدد ۱ را روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. هر ثانیه، به عددی که روی تخته وجود دارد، مجموع رقم‌هایش را اضافه می‌کنیم. آیا ممکن است، بعد از مدتی، عدد ۱۲۳۴۵۶، روی تخته ظاهر شود؟

۸. ارتفاع AK، نیمساز BL و میانهٔ CM در مثلث ABC، در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند؛ درضمن $|BO| = |AO|$. ثابت کنید، مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است.

۹. برای عددهای اول p و q و عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{pq}=\frac{۱}{n}$$

این عددها را پیدا کنید.

۱۰. همان مسالهٔ ۵.

۱۱. سه حشره روی یک خط راست‌اند. آن‌ها مرتب از روی یکدیگر می‌پرند (هر حشره از روی یک حشره و نه از روی دو حشره). آیا ممکن است، بعد از ۱۹۸۵ پرش، در جای اول خود باشند؟

۱۲. همان مسالهٔ ۱۸ به‌ازای ۱۰ $= n$.

سال هفتم

۱۳. نقطه‌های P و Q را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های BC و CD از مربع $ABCD$، طوری در نظر گرفته‌ایم که مثلث APQ، متساوی‌الاضلاع باشد. خط راستی که از نقطهٔ P، عمود بر ضلع AQ رسم شده‌است، AD را در نقطهٔ E قطع کرده‌است. نقطهٔ F را در بیرون مثلث APQ طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث‌های PQF و AQE برابر باشند. ثابت کنید، پاره‌خط راست FE دو برابر پاره‌خط راست FC طول دارد.

۱۴. عددی طبیعی را مجذور و، سپس، ۶۰۰ واحد از آن کم کرده‌ایم. با عددی که به دست می‌آید، دوباره همین دو عمل را انجام داده‌ایم و غیره. عدد نخستین، چه می‌تواند باشد، به شرطی که، بعد از چند بار انجام این عمل‌ها، دوباره به همان عدد اصلی رسیده باشیم؟

۱۵. دو نقطه روی ضلع‌های روبه‌رو و در مستطیلی انتخاب و آن‌ها را به راس‌های مستطیل وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت‌های هفت بخشی که به این ترتیب در مستطیل پدید می‌آیند، نمی‌توانند همگی با هم برابر باشند.

۱۶. حداکثر چند عدد از بین عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۹۸۵، می‌توان انتخاب کرد، به نحوی که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر عددی اول نباشد؟

۱۷. ۱۹۸۵ نقطه به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز، روی صفحه‌ای قرار

دارند، به نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای، روی یک خط راست نیست. برخی از نقطه‌های نا هم‌رنگ را، به وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست، به هم وصل کرده‌ایم، در ضمن، معلوم شد، تعداد پاره‌خط‌های راستی که از هر نقطه می‌گذرد، برابر است با تعداد پاره‌خط‌های راستی که از هر نقطهٔ دیگر می‌گذرد. ثابت کنید، نقطهٔ قرمز رنگی پیدا می‌شود که هم به نقطه‌های سبز و هم به نقطه‌های آبی وصل شده‌است.

۱۸. روی دو سکو، n صندوق، با شماره‌های از ۱ تا n، به طور نامنظم و به صورتی دلخواه روی هم چیده شده‌اند. با جرثقیل می‌توان، هر بار، چند صندوق را از یک سکو به سکوی دیگر برد. ثابت کنید، با انجام $۲n - ۱$ بار عمل جرثقیل، می‌توان همهٔ صندوق‌ها را، در یک سکو، به ردیف شماره‌های آن‌ها گذاشت.

سال هشتم

۱۹. یک تصاعد حسابی که جمله‌های آن را عددهای طبیعی تشکیل داده‌اند، شامل برخی مجذورهای کامل است. ثابت کنید، در بین جمله‌های این تصاعد، بی‌نهایت مجذور کامل وجود دارد.

۲۰. دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} (x+y)^۳ = z \\ (y+z)^۳ = x \\ (z+x)^۳ = y \end{cases}$$

۲۱. در چهارضلعی کوژ $ABCD$ داریم:

$$\widehat{ABD} = ۶۵^\circ, \widehat{CBD} = ۳۵^\circ, \widehat{ADC} = ۱۳۰^\circ, |AB| = |BC|$$

زاویه‌های داخلی چهارضلعی $ABCD$ را پیدا کنید.

۲۲. دربارهٔ عددهای مثبت $a_۱$، $b_۱$، $c_۱$، $a_۲$، $b_۲$ و $c_۲$ می‌دانیم:

$$b_۱^۲ \le a_۱c_۱, b_۲^۲ \le a_۲c_۲$$

ثابت کنید.

$$(a_۱ + a_۲ + ۵)(c_۱ + c_۲ + ۲) > (b_۱ + b_۲ + ۳)^۲$$

۲۳. دایرهٔ به مرکز O، بر ضلع‌های زاویه‌ای، در نقطه‌های A و B مماس است. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر پاره‌خط راست AB (به‌جز خود نقطه‌های A و B)، خط راستی عمود بر خط راست OM رسم کرده‌ایم. این عمود ضلع‌های زاویه را در نقطه‌های C و D قطع کرده‌است. ثابت کنید: $|MC| = |MD|$.

۲۴. یک بازی دونفره، با مستطیل ۲۵ × ۱ که شامل ۲۵ خانهٔ مربعی است و ۲۵ مهره سروکار دارد. خانه‌های مستطیل با عددهای از ۱ تا ۲۵، به ردیف شماره‌گذاری شده‌اند. هر بازی‌کن، در نوبت خود، می‌تواند یا مهره‌ای را در یک خانهٔ آزاد بگذارد و یا مهره‌ای را که، پیش از آن، در جدول گذاشته شده‌است، به خانهٔ مجاور خود، که شمارهٔ بالاتری دارد، منتقل کند. در آغاز بازی، همهٔ خانه‌ها آزادند. بازی وقتی تمام می‌شود که، همهٔ خانه‌های جدول، به وسیلهٔ مهره‌ها اشغال شده‌باشند. کسی بازی را می‌برد که آخرین حرکت را انجام داده باشد. اگر بازی به درستی و اندیشیده انجام شود، کدام یک برنده خواهد شد: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

سال نهم

۲۵. در چهارضلعی کوژ $ABCD$، قطرها در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند و، درضمن، می‌دانیم:

$$\widehat{BAC} = \widehat{CBD}, \widehat{BCA} = \widehat{CDB}$$

ثابت کنید، مماس‌هایی که از نقطه‌های B و C بر دایرهٔ (AOD) رسم شوند، طولی برابر دارند.

۲۶. عددهای حقیقی a، b، c، x، y و z چنان‌اند که

$$x = by + cz, \ y = cz + ax, \ z = ax + by$$

درضمن، دست‌کم یکی از عددهای x، y و z مخالف صفر است. ثابت کنید:

$$۲abc + ab + ac + bc = ۱$$

۲۷. طول هر ضلع چهارضلعی کوژ، از ۷ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، چهار دایرهٔ با شعاع برابر ۵ و مرکزهای واقع در راس‌های چهارضلعی، به طور کامل، چهارضلعی را می‌پوشانند.

۲۸. دربارهٔ عددهای حقیقی a، b و c می‌دانیم:

$$a + b + c > ۰, ab + ac + bc > ۰, abc > ۰$$

ثابت کنید، هر سه عدد a، b و c مثبت‌اند.

*۲۹. دنبالهٔ عددهای $x_۱$، $x_۲$، ...، با این شرط‌ها داده شده‌است:

$$x_۱ = ۰/۰۰۱, x_{n+۱} = x_n - x_n^۲$$

ثابت کنید: $x_{۱۰۰۱} < ۰/۰۰۰۵$.

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

سال دهم

۳۱. دربارهٔ عددهای حقیقی a، b، c، x، y و z می‌دانیم:

$$a^x = bc, \ b^y = ac, \ c^z = ab$$

درضمن، عددهای a، b و c مثبت‌اند و، دست‌کم یکی از آن‌ها، برابر واحد نیست. ثابت کنید $x+y+z-xyz$، عددی درست است.

۳۲. مسالهٔ ۲۳ را ببینید.

۳۳. خط‌های راستی که از مرکز دایرهٔ محاطی هر وجه چهار وجهی، عمود بر آن وجه رسم کرده‌ایم، در یک نقطه به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، مجموع طول‌های هر دو یال متقابل چهار وجهی، مقدار ثابتی است.

۳۴. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$۹ < \int_{۰}^{۳} \sqrt[۴]{x^{۴}+۱}\,dx + \int_{۱}^{۳} \sqrt[۴]{x^{۴}-۱}\,dx < ۹/۰۰۰۱$$

۳۵. همان مسالهٔ ۲۹.

۳۶. همان مسالهٔ ۲۴.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۷. عدد ۱۵۸۴ دارای این ویژگی‌هاست.

الف) مجذور یک عدد درست نیست؛

ب) با مقلوب خود، یعنی ۴۸۵۱ فرق دارد،

ج) حاصل ضرب دو عدد ۱۵۸۴ و ۴۸۵۱، مجذور کامل است.

عددی ۲۰ رقمی پیدا کنید که همین ویژگی‌ها را داشته باشد.

۳۸. محیط مثلثی برابر ۱۰۰ سانتی‌متر و مساحت آن برابر ۱۰۰ سانتی‌متر مربع است. خط‌های راستی موازی با ضلع‌ها و به فاصلهٔ یک سانتی‌متر از آن‌ها رسم کرده‌ایم؛ این خط‌های راست، مثلث را به ۷ بخش تقسیم می‌کنند که سه تا از آن‌ها، متوازی‌الاضلاع‌اند. ثابت کنید، مجموع مساحت‌های این سه متوازی‌الاضلاع، از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر است.

۳۹. ۱۵ تیم والیبال، در یک مسابقه، با هم بازی می‌کنند؛ هر تیم یک دور بازی با هر تیم دیگر. معلوم شد، هر تیم در هفت بازی برنده شده‌است.

چند گروه شامل سه تیم می‌توان پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، هر تیم یکبار برنده شده‌باشد؟

۴۰. خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ را با چهار رنگ، طوری رنگ کرده‌ایم که، در هر مربع ۲ × ۲، هر چهار رنگ وجود داشته‌باشد. ثابت کنید، خانه‌های چهار گوشهٔ صفحه، از چهار رنگ‌اند.

۴۱. ذوزنقهٔ با قاعده‌های به طول‌های a و b بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده‌است. ثابت کنید: $ab \geq ۴R^۲$.

۴۲. دنبالهٔ عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ... چنان است که $a_۱ = ۱$ و تفاضل $a_{k+۱} - a_k$، به‌ازای هر k، برابر ۰ یا ۱ است. ثابت کنید، اگر به‌ازای مقداری از m داشته‌باشیم $a_m = \frac{m}{۱۰۰۰}$، آن‌وقت می‌توان n را پیدا کرد، به نحوی که $a_n = \frac{n}{۵۰۰}$.

۴۳. در دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ...، دو جملهٔ اول برابر ۱، و هریک از بقیهٔ جمله‌ها برابر مجموع دو جملهٔ قبل از خود است. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a_۱a_۳} + \frac{۱}{a_۲a_۴} + \frac{۱}{a_۳a_۵} + \ldots + \frac{۱}{a_{۹۸}a_{۱۰۰}} < ۱$$

۴۴. هر عدد طبیعی $k \leq ۱۰۰$ را با عدد طبیعی $f(k)$، که باز هم از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند، متناظر کرده‌ایم و، سپس، این دنباله را ساخته‌ایم:

$$a_۱ = ۱,\ a_۲ = f(a_۱),\ a_۳ = f(a_۲),\ \ldots$$

ثابت کنید، عدد $n \leq ۱۰۰$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که، برای آن، داشته باشیم: $a_n = a_{۲n}$.

دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۴۵. همان مسالهٔ ۳۸.

۴۶. همان مسالهٔ ۴۰.

۴۷. ۲۰ تیم والیبال با هم مسابقه دادند؛ هر دو تیم، یکبار با هم بازی کردند. فرض کنید، در بین تیم‌ها، بتوان T گروه سه تیمی پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، هر تیم، یکبار بُرده باشد. ثابت کنید:

الف) اگر هر تیم کمتر از ۹ بُرد و بیشتر از ۱۰ بُرد نداشته باشد، آن‌وقت $T = ۳۳۰$.

ب) $T \leq ۳۳۰$.

۴۸. همان مسالهٔ ۴۱.

۴۹. همان مسالهٔ ۴۲.

۵۰. همان مسالهٔ ۴۳.

۵۱. برای دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ...، از عددهای طبیعی می‌دانیم:

$$a_{n+۲} = a_{n+۱}a_n + ۱$$

(به‌ازای هر n). ثابت کنید، برای هر $n > ۱۰$، عدد $(a_n - ۲۲)$، عددی مرکب است.

۵۲. تعداد پسران یک کلاس، با تعداد دختران آن برابر است. هر پسر با تعداد زوجی از دختران دوستی دارد. ثابت کنید، می‌توان گروهی از چند پسر را طوری انتخاب کرد که، هر دختر، با تعداد زوجی از پسران این گروه، دوستی داشته باشد.

۱۹۸۶

سال پنجم

۱. ۹ «کارت» که روی هریک، عددی نوشته شده‌است، این طور در ردیف هم قرار دارند.

$$۷, ۸, ۹, ۴, ۵, ۶, ۱, ۲, ۳$$

در هر حرکت می‌توانیم چند کارت ردیف را برداریم و آن‌ها را به ردیف عکس بچینیم. چگونه می‌توان با سه حرکت، به ردیف زیر رسید:

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$$

۲. ۴۴ وزیر روی صفحهٔ شطرنج است. ثابت کنید، هرکدام از آن‌ها می‌تواند یکی دیگر را بزنند.

۳. برای عددهای طبیعی a و b می‌دانیم:

$$۳۴a = ۴۳b$$

ثابت کنید، $a + b$، عددی مرکب است.

۴. چند سکهٔ مساوی را، چگونه روی صفحهٔ میز بگذاریم که، هریک از آن‌ها، بر ۳ سکهٔ دیگر مماس باشد؟

۵. ۵۵ عدد روی محیط دایره‌اند و، هر عدد، برابر است با مجموع دو عدد مجاور خود. ثابت کنید، همهٔ عددها برابر صفرند.

۶. الف) عدد هفت رقمی پیدا کنید که رقم‌های تکراری نداشته باشد و خود عدد بر هریک از رقم‌هایش بخش‌پذیر باشد.

ب) آیا عدد هشت‌رقمی با این ویژگی وجود دارد؟

سال ششم

۷. همان مسالهٔ ۱.

۸. همان مسالهٔ ۲.

۹. در شش‌ضلعی $ABCDEF$، مثلث‌های ABC، ABF، FEA، FED، CDB، CDE، با هم برابرند. ثابت کنید، قطرهای AD، BE و CF، طولی برابر دارند.

۱۰. همان مسالهٔ ۵.

۱۱. حلزون، با سرعتی ثابت، از مبداء مختصات آغاز به حرکت کرد. او بعد از هر نیم ساعت به اندازهٔ ۶۰ درجه می‌چرخد. ثابت کنید، برای این‌که دوباره به مبداء مختصات برسد، به تعداد درستی ساعت نیاز دارد.

۱۲. همان مسالهٔ ۶.

۱۳. ۱۱ دانش‌آموز در پنج انجمن علمی شرکت می‌کنند. ثابت کنید، می‌توان دو دانش‌آموز A و B پیدا کرد، به نحوی که هر انجمن مورد علاقهٔ A، مورد علاقهٔ B هم باشد.

سال هفتم

۱۴. همان مسالهٔ ۵.

۱۵. برای عددهای طبیعی a، b و c، داریم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<۱$$

ثابت کنید: $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<\frac{۴۱}{۴۲}$.

۱۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، زاویهٔ راس B برابر ۱۰۸ درجه است. نیمساز زاویهٔ ACB، ضلع AB را در D قطع کرده‌است. عمود بر این نیمساز در نقطهٔ D، قاعدهٔ AC را در نقطه E قطع کرده‌است. ثابت کنید: $|AE|=|BD|$.

۱۷. همان مسالهٔ ۶.

۱۸. نقطه‌های K و H را روی ضلع‌های BC و CD از مربع

$ABCD$ طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$|KC| = ۲|KB| \text{ و } |HC| = |HD|$$

برابری دو زاویهٔ AKB و AKH را ثابت کنید.

۱۹. توده‌ای شامل ۲۵ چوب کبریت داریم. آن را، به‌صورتی دلخواه به دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ سپس، هر بخش را، دوباره، به دو بخش دیگر تقسیم می‌کنیم تا جایی که در هر بخش تنها یک چوب کبریت باشد. هر وقت عمل بخش را انجام می‌دهیم، تعداد چوب کبریت‌های دو بخش را در هم ضرب می‌کنیم و، در جایی، می‌نویسیم. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهایی که نوشته‌ایم، برابر است با ۳۰۰.

سال هشتم

۲۰. همهٔ عددهای سه رقمی را پیدا کنید که، هر یک از آن‌ها، ۱۱ برابر مجموع رقم‌هایش باشد.

۲۱. نقطهٔ E را روی ضلع BC، نقطه‌های K و M را روی ضلع CD و نقطهٔ H را روی ضلع AD از مربع $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم. درضمن می‌دانیم:

$$|CE| = |CK| \text{ و } |DM| = |DH|$$

ثابت کنید، بر چهار ضلعی که از برخورد زاویه‌های HBM و EAK به‌دست می‌آید، می‌توان دایره‌ای محیط کرد.

۲۲. عددهای درست a و b را پیدا کنید، به شرطی که

$$\frac{a}{۹۹۹} + \frac{b}{۱۰۰۱} = \frac{۱}{۹۹۹۹۹۹}$$

۲۳. نقطه‌های H، I، K، M و O را، به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB، BC، CD، DE و EA از پنج‌ضلعی $ABCDE$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، طول خط شکستهٔ $HKOIMH$ از طول خط شکستهٔ $ACEBDA$ کمتر است.

۲۴. سه‌جمله‌ای‌ها درجه دوم

$$x^2 + b_1x + c_1 \text{ و } x^2 + b_2x + c_2$$

ضریب‌هایی درست و ریشهٔ مشترکی نادرست دارند. ثابت کنید، این دو سه‌جمله‌ای، بر هم منطبق‌اند، یعنی $b_1 = b_2$ و $c_1 = c_2$.

*۲۵. ۲۰۰ تیم فوتبال مسابقه می‌دهند. روز اول، هر تیم، یک بازی، روز دوم هم، هر تیم، یک بازی داشت و غیره. ثابت کنید، بعد از روز ششم، می‌توان ۳۴ تیم پیدا کرد که، هیچ دوتایی از آن‌ها، با هم بازی نکرده‌اند.

سال نهم

۲۶. همان مسالهٔ ۲۰.

۲۷. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۸. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} a = bcd \\ a + b = cd \\ a + b + c = d \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

۲۹. روی ضلع‌های مثلث ABC، متوازی‌الاضلاع‌های $AA'B''B$، $BB'C''C$، $CC'A''A$ را ساخته‌ایم؛ درضمن، طول ضلع‌های جانبی متوازی‌الاضلاع‌ها با هم برابرند:

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = a$$

مقدار a را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$|A'A''| = ۳,\ |B'B''| = ۴,\ |C'C''| = ۵$$

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۱. عددهای درست a، b و c را طوری پیدا کنید که داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{۹۹۹} + \frac{b}{۱۰۰۰} + \frac{c}{۱۰۰۱} = \frac{۱}{۹۹۹ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰۰۱}$$

سال دهم

۳۲. همان مسالهٔ ۲۰.

۳۳. همان مسالهٔ ۲۱.

۳۴. برای دو عدد مثبت a و b می‌دانیم: $ab = a + b$. کمترین مقدار حاصل‌ضرب ab چقدر است؟

۳۵. همهٔ ریشه‌های مثبت این معادله را پیدا کنید:

$$x^{۱۹۸۶} + ۱۹۸۶^{۱۹۸۵} = x^{۱۹۸۵} + ۱۹۸۶^{۱۹۸۶}$$

۳۶. همان مسالهٔ ۳۱.

۳۷. مطلوب است زاویهٔ بین یال AB و وجه ACD در کُنج سه‌وجهی $ABCD$ به راس A، به شرطی که

$$\widehat{BAC} = ۴۵^\circ,\ \widehat{CAD} = ۹۰^\circ,\ \widehat{BAD} = ۶۰^\circ$$

دور نهایی (سال هشتم)

۳۸. $a_1 = 2$ و برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n + 1$$

ثابت کنید: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$.

۳۹. ثابت کنید، در هر چندضلعی، ضلع BC و راس A (غیر از دو راس B و C) پیدا می‌شود که، اگر از نقطهٔ A بر خط راست BC عمود کنیم، پای عمود روی ضلع BC قرار گیرد.

۴۰. مریخی، در نیمه شب متولد می‌شود و درست ۱۰۰ شبانه روز زندگی می‌کند. می‌دانیم، در طول تاریخ تمدن مریخ، روی هم به تعداد فرد مریخی به دنیا آمده است. ثابت کنید، دست‌کم، ۱۰۰ روز وجود دارد که، تعداد ساکنان مریخ در هریک از آن‌ها، عددی فرد بوده‌است.

۴۱. مربع $ABCD$ مفروض است. روی ضلع AB، نقطهٔ K، روی ضلع CD، نقطهٔ H و روی پاره‌خط راست KH، نقطهٔ M را انتخاب کرده‌ایم. دایره‌های محیطی مثلث‌های AKM و MHC را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطهٔ دوم برخورد این دایره‌ها (غیر از نقطهٔ M)، روی قطر AC از مربع قرار دارد.

*۴۲. در کشوری، یکی از خط‌های هوایی یکسره را تعطیل کردند. معلوم شد، با وجود این، می‌توان از هر مرکز هوایی کشور، به هر مرکز دیگر، ولو با تعویض هواپیما، پرواز کرد. قبل از بسته شدن این خط، می‌شد هر پرواز هوایی را، از هر مرکز به هر مرکز دیگر، حداکثر با n بار فرود هواپیما انجام داد. ثابت کنید، اکنون می‌توان سفر هوایی را از هر مرکز به هر مرکز دیگر، حداکثر با $2n$ مرتبه فرود هواپیما انجام داد (برای محاسبه، فرود در مقصد را هم به حساب بیاورید).

۴۳. دنباله‌ای شامل ۳۶ جمله، از صفرها و واحدها، با پنج صفر آغاز شده‌است. جمله‌های بعدی دنباله چنان‌اند که، هریک از ۳۲ ترکیب ممکن

را، می‌توان بین پنج جملهٔ پشت سر هم دنباله پیدا کرد. پنج جملهٔ آخر دنباله را پیدا کنید.

*۴۴. ثابت کنید، می‌توان روی صفحه چند خط راست رسم کرد و چند نقطه را چنان نشان گذاشت که، روی هر خط راست، درست چهار نقطهٔ نشان‌دار وجود داشته باشد و از هر نقطهٔ نشان‌دار، درست چهار خط راست گذشته باشد.

*۴۵. صفحهٔ کاغذ شطرنجی، شامل ۴۵ × ۳۰ خانه در دسترس است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: در هر حرکت (که به نوبت انجام می‌گیرد)، روی خط راستی که دو گره مجاور شبکه را به هم وصل می‌کنند، می‌بُرند. نفر اول، بریدن را از کنار صفحه آغاز می‌کند؛ سپس، هر بازی‌کن در نوبت خود، باید برش بعدی را، به دنبال برش قبلی و از جایی ادامه دهد که برش نفر قبل تمام شده‌است. کسی بازی را می‌برد که، بعد از حرکت او، صفحهٔ شطرنجی کاغذ، به دو بخش تقسیم شده‌باشد. به شرط بازی درست، کدام برنده می‌شود، آن که بازی را آغاز کرده‌است، یا رقیب او؟

دور نهایی (سال نهم)

۴۶. همان مسالهٔ ۳۸.

۴۷. همان مسالهٔ ۳۹.

۴۸. همان مسالهٔ ۴۰.

۴۹. همان مسالهٔ ۴۱.

۵۰. عضوهای مجموعهٔ A، عددهایی مثبت‌اند. می‌دانیم، مجموع هر دو عضو دلخواه از A، خود عضوی از A است و، درضمن، هر بازهٔ $[a, b]$ $(0 < a < b)$، شامل بازه‌ای است که به طور کامل از عضوهای مجموعهٔ A تشکیل شده‌است. ثابت کنید، مجموعهٔ A، از همهٔ عددهای مثبت حقیقی تشکیل شده‌است.

۵۱. به این الگوریتم توجه کنید:

گام ۰. $n = m$ می‌گیریم.

گام ۱. اگر n عددی زوج باشد، آن را نصف و، اگر فرد باشد، یک واحد به آن اضافه می‌کنیم.

گام ۲. اگر $n > ۱$، همان گام اول را برمی‌داریم و اگر $n = ۱$، الگوریتم تمام می‌شود.

چند عدد طبیعی m وجود دارد که، به ازای هر یک از آن‌ها، برای انجام این الگوریتم، درست ۱۵ بار از گام اول لازم باشد؟

۵۲. همان مسالهٔ ۴۴.

*۵۳. مهرهٔ شاه، صفحهٔ شطرنجی ۹×۹ را می‌پیماید، به نحوی که، در هر خانه، درست یکبار باشد. مسیر حرکت شاه، مسیری بسته نیست و می‌تواند خودش را قطع کرده‌باشد. حداکثر طول مسیر حرکت شاه چقدر است، به شرطی که حرکت در طول قطر برابر $\sqrt{۲}$ و حرکت قائم یا افقی برابر ۱ باشد.

دور نهایی (سال دهم)

۵۴. قطر یک مجموعه، به بزرگترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ آن گفته می‌شود (اگر چنین فاصله‌ای وجود داشته‌باشد). می‌دانیم، مجموع قطرهای چندضلعی‌های $M_۱$، $M_۲$، ...، M_n، از قطر اجتماع آن‌ها کمتر است. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که هیچ‌کدام از چندضلعی‌ها را قطع نمی‌کند و، در هر سمت آن، دست‌کم یکی از چندضلعی‌ها قرار دارد.

۵۵. $f : R \to R$ تابعی پیوسته است. می‌دانیم، برای هر عدد حقیقی

x، عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots)}_{n \text{ بار}} = ۱$$

ثابت کنید: $f(۱) = ۱$.

۵۶. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۷}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{۹۹۹۷}+\sqrt{۹۹۹۹}} > ۲۴$$

۵۷. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (که لوزی نیست)، نیمساز زاویهٔ BAD را رسم کرده‌ایم که، خط‌های راست BC و CD را، به‌ترتیب، در نقطه‌های X و Y قطع کرده‌است. ثابت کنید، مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های C، X و Y می‌گذرد، روی محیط دایره‌ای قرار دارد که از نقطه‌های B و C و D گذشته است.

۵۸. این انتگرال را محاسبه کنید:

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{۱+x^۳+\sqrt{۱+x^۶}}$$

*۵۹. ثابت کنید، می‌توان چند دایره را روی صفحه چنان رسم کرد که نقطهٔ برخورد درونی نداشته باشند و، هریک از آن‌ها، درست بر پنج دایرهٔ دیگر مماس باشد.

۶۰. برای عددهای حقیقی a، b، c، x، y و z می‌دانیم:

$$\begin{aligned} u_۱ &= ax+by+cz, & v_۱ &= ax+bz+cy,\\ u_۲ &= ay+bz+cx, & v_۱ &= az+by+cx,\\ u_۳ &= az+bx+cy, & v_۳ &= ay+bx+cz \end{aligned}$$

$$u_۱u_۲u_۳ = v_۱v_۲v_۳$$

a)

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

b)

۱	۵	۹	۱۳
۲	۶	۱۰	۱۴
۳	۷	۱۱	۱۵
۴	۸	۱۲	۱۶

شکل ۱۴

ثابت کنید، مجموعهٔ $\{u_{۱}, u_{۲}, u_{۳}\}$ با مجموعهٔ $\{v_{۱}, v_{۲}, v_{۳}\}$ برابر است.

*۶۱. همان مسالهٔ ۴۵، برای صفحهٔ شطرنجی ۳۰ × ۳۰.

۱۹۸۷

سال پنجم

۱. در خانه‌های یک جدول ۴ × ۴، عددهای از ۱ تا ۱۶ را، آن‌طور که در شکل۱۴-a دیده می‌شود، نوشته‌ایم. می‌توانیم بنابر قاعدهٔ زیر، عددهای این جدول را عوض کنیم: به همهٔ عددهای یک سطر، یک واحد اضافه، یا از همهٔ عددهای یک ستون، یک واحد کم کنیم. چگونه می‌توان، با این عمل‌ها، به جدول شکل ۱۴_b رسید؟

۲. در کشوری، چهار نوع اسکناس وجود دارد: ۱ دلاری، ۱۰ دلاری، ۱۰۰ دلاری و ۱۰۰۰ دلاری. آیا می‌توان نیم میلیون عدد اسکناس به ارزش یک میلیون دلار جدا کرد؟

۳. می‌خواهیم شش قلعه را، به وسیلهٔ جاده، طوری به هم مربوط کنیم که، هر دو قلعهٔ دلخواه، به هم مربوط باشند. طرحی از قلعه‌ها و جاده‌ها رسم کنید که تنها سه چهار راه وجود داشته باشد و، درضمن، هر جاده به‌وسیلهٔ دو جاده دیگر قطع شده‌باشد.

۴. پسرها هر کدام یک پیراشکی و دخترها هرکدام یک شوکولات خریدند و مبلغی پرداختند. ولی اگر پسرها شوکولات و دخترها پیراشکی می‌خریدند، روی هم یک کوپک بیشتر می‌پرداختند. می‌دانیم، تعداد پسرها از تعداد دخترها بیشتر است. چندتا؟

۵. چند بلیت اتوبوس باید تهیه کرد تا در بین آن‌ها، بلیتی با شمارهٔ شانس وجود داشته‌باشد؟ بلیتی را شانس به حساب می‌آورند که مجموع سه رقم اول با مجموع سه رقم آخر آن، با هم برابر باشند. تعداد بلیت‌ها، محدود نیست.

۶. دو نفر «خط و نقطه» بازی می‌کنند، در یک جدول شامل ۹ × ۹ خانه. اولی در یکی از خانه‌ها خط و، سپس، دومی در یک خانهٔ آزاد، نقطه می‌گذارد. بعد از پر شدن جدول، برای هر سطر یا هر ستونی که تعداد خط‌های بیشتری دارد، یک امتیاز به اولی، و برای هر سطر یا ستونی که تعداد نقطه‌های بیشتری دارد، یک امتیاز به دومی داده می‌شود. اولی چگونه می‌تواند برنده شود (امتیاز بیشتری بیاورد)؟

سال ششم

۷. همان مسالهٔ ۱.

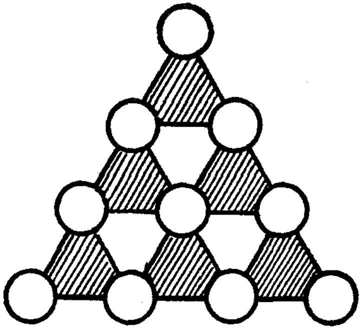
۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع CH و میانهٔ BK را رسم کرده‌ایم. می‌دانیم:

$$|CH| = |BK| \text{ و } \widehat{KBC} = \widehat{HCB}$$

ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۹. همان مسالهٔ ۴.

۱۰. واحد پول در کشورهای «دالری» و «دیلری»، به ترتیب «دالر» و «دیلر» است؛ در ضمن در «دالری»، هر «دالر» با ۱۰ «دیلر» معاوضه می‌شود،



شکل ۱۵

ولی در «دیلری»، هر «دیلر» با ۱۰ «دالر». کسی یک «دیلر» دارد و می‌تواند آزادانه به هر یک از دو کشور مسافرت کند و پول خودش را معاوضه کند. ثابت کنید، هرگز مقدار «دالرها» با مقدار «دیلرها» برابر نمی‌شود.

۱۱. همان مسالهٔ ۵.

۱۲. آیا می‌توان عددهای از ۰ تا ۹ را (هر کدام یکبار) در دایره‌های شکل ۱۵ ، طوری قرار داد که، مجموع عددهای سه راس هر مثلث هاشور خورده با مجموع عددهای سه راس هر مثلث هاشور خورده دیگر، برابر باشد؟

سال هفتم

۱۳. پاره‌خط‌های راستی که وسط ضلع‌های روبه‌رو را در چهارضلعی کوژ $ABCD$ به هم وصل کرده‌اند، چهارضلعی اصلی را به چهار چهارضلعی دیگر تقسیم کرده‌اند که محیطی برابر دارند. ثابت کنید، $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۱۴. همان مسالهٔ ۴.

۱۵. همان مسالهٔ ۱۰.

۱۶. راس‌های خط شکستهٔ بسته‌ای که خودش را قطع نکرده است و دارای هشت ضلع است، راس‌های یک مکعب‌اند. ثابت کنید، یکی از ضلع‌های این خط شکسته، بر یکی از یال‌های مکعب منطبق است.

۱۷. شرکت ساختمانی ـ تعمیراتی «ماسه»، ساختن جاده‌ای به طول ۱۰۰ کیلومتر از «آرباتوف» تا «چِرنومور» را به عهده گرفت. برنامه‌ای که شرکت برای ساختن جاده در نظر گرفته است، چنین است: در ماه اول یک کیلومتر آن را آماده می‌کند و، سپس اگر در آغاز ماه a کیلومتر جاده ساخته شده‌است، ضمن آن ماه $\frac{1}{a^{10}}$ کیلومتر از جاده آماده می‌شود. آیا هرگز تمام جاده، آماده بهره‌برداری می‌شود؟

۱۸. ابزاری برای رسم شکل‌ها بر صفحه در اختیار داریم که، به کمک آن، می‌توان

الف) از دو نقطهٔ مفروض، خط راستی عبور داد؛

ب) از یک نقطهٔ مفروضِ واقع بر یک خط راست، عمودی بر خط راست اخراج کرد.

اکنون، اگر نقطه‌ای در بیرون خط راست باشد، چگونه می‌توان با این وسیله، عمودی از این نقطه بر خط راست فرود آورد؟

سال هشتم

۱۹. روی خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰، ۵۰ مهره گذاشته شده‌است: ۲۵ مهره در یک چهارم گوشهٔ چپ و پایین صفحه و ۲۵ مهره در یک‌چهارم گوشهٔ راست و بالای آن. با هر حرکت، یک مهره می‌تواند از روی مهرهٔ مجاور خود بپرد و در خانهٔ آزادی که در ردیف افقی، عمودی و یا قطری آن‌هاست، قرار گیرد. آیا با تکرار این حرکت، می‌توان همهٔ مهره‌ها را در خانه‌های نیمهٔ چپ صفحه قرار داد؟

۲۰. به تعداد کافی، سکه‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ کوپکی و همچنین سکه‌های ۱ روبلی در اختیار داریم (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپک است). می‌دانیم a کوپک را می‌توان با b سکه انتخاب کرد. ثابت کنید، در این صورت، b روبل را می‌توان با a سکه، به دست آورد.

۲۱. a، b، c و d، چهار عدد حقیقی دلخواهند. ثابت کنید:

$$(۱ + ab)^۲ + (۱ + cd)^۲ + (ac)^۲ + (bd)^۲ \geq ۱$$

۲۲. مثلث ABC مفروض است. نقطه‌های $A_۱$ و $A_۲$، ضلع AC را و نقطه‌های $B_۱$ و $B_۲$، ضلع BC را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. ثابت کنید، اگر دو زاویهٔ $A_۱BA_۲$ و $B_۱AB_۲$ برابر باشند، آن‌وقت مثلث ABC، متساوی‌الساقین است.

۲۳. روی شاخه‌های یک چنار بزرگ، چند کلاغ نشسته‌اند. با علامت، آن‌ها جای خود را با هم عوض می‌کنند. هر دقیقه، یکی از کلاغ‌ها، همسایهٔ خود را که روی همان شاخه نشسته است، بیرون می‌کند و این کلاغ به شاخهٔ بالاتر می‌رود؛ اگر شاخهٔ بالاتری وجود نداشته باشد، کلاغ به پرواز درمی‌آید. همهٔ شاخه‌ها در ارتفاع‌های مختلفی قرار دارند. ثابت کنید، مدت زمانی که برای به پایان رسیدن این جریان لازم است (یعنی وقتی که روی هر شاخه، تنها یک کلاغ نشسته باشد)، به ردیف پروازها بستگی ندارد، بلکه تنها به وضع استقرار کلاغ‌ها در آغاز، بستگی دارد.

۲۴. ۶۴ مکعب کوچک را به‌صورت مربع ۸ × ۸ چیده‌ایم. آیا می‌توان همین مکعب‌های کوچک را به‌صورت یک مکعب ۴ × ۴ × ۴ طوری چید که مکعب‌های مجاور، در وضع جدید هم، مجاور یکدیگر باشند؟

سال نهم

۲۵. خانه‌های جدول ۸ × ۸، شبیه صفحهٔ شطرنج به رنگ‌های سیاه

و سفیدند. می‌توانیم جای هر دو ردیف افقی یا هر دو ردیف قائم را با هم عوض کنیم. آیا می‌توان با تکرار این عمل، به جدولی رسید که تمامی نیمهٔ سمت چپ آن شامل خانه‌های سیاه و تمامی نیمهٔ سمت راست آن، شامل خانه‌های سفید باشد؟

۲۶. حاصل این کسر را محاسبه کنید:

$$\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲}\cdots}}}$$

(روی هم، در این کسر، ۱۰۰ بار از عدد ۲ استفاده شده‌است).

۲۷. دو دایره، در نقطه‌های A و B، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مماس‌های بر دایره‌ها در نقطه‌های A و B، بر هم عمودند. M را نقطه‌ای واقع بر محیط یکی از دایره‌ها می‌گیریم، به نحوی که در درون دایرهٔ دیگر قرار گرفته باشد. AM و BM را از طرف M امتداد می‌دهیم تا محیط دایره‌ای را که M در درون آن است، در نقطه‌های X و Y قطع کنند. ثابت کنید XY، قطری از این دایره است.

۲۸. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۹. بزرگترین عدد طبیعی را پیدا کنید که هر رقم آن، به جز دو رقم اول و آخر، از واسطهٔ حسابی دو رقم مجاور خود کوچکتر باشد.

۳۰. اخترشناس ۵۰ ستاره در آسمان مشاهده کرد و، ضمن محاسبه، متوجه شد، مجموع فاصله‌های دوبه‌دوی این ستارگان، برابر S است. ابر روی ۲۵ ستاره را پوشاند. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های دوبه‌دوی ۲۵ ستاره‌ای که دیده می‌شوند، از $\frac{۱}{۲}S$ کمتر است.

سال دهم

۳۱. همان مسالهٔ ۲۰.

۳۲. همان مسالهٔ ۲۶.

۳۳. همان مسالهٔ ۲۷.

۳۴. همان مسالهٔ ۲۱.

۳۵. آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که $n^n + (n+۱)^n$ بر ۱۹۸۷ بخش‌پذیر باشد؟

۳۶. همان مسالهٔ ۳۰.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۷. در مثلث ABC، هر سه زاویه حاده‌اند. زاویهٔ B برابر ۶۰ درجه است و ارتفاع‌های CE و AD یکدیگر را، در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، روی نیمساز مشترک دو زاویه AOE و COD قرار دارد.

۳۸. عددهای مثبت a، b، c و d مفروض‌اند. ثابت کنید، به شرط $ad = ۱$، در فاصلهٔ از ab تا $(a+c)(b+d)$، دست‌کم مجذور یک عدد درست وجود دارد.

۳۹. روی تختهٔ سیاه، این شکل، برای بازی با رقم‌ها، رسم شده‌است:

$$(\_ * (\_ * (\_ * (\_ * (\_ * (\_ * (\_ * (\_ * (\_ * \_)))))))))$$

دو نفر بازی می‌کنند. حرکت‌ها به نوبت انجام می‌گیرد. نفر اول، بازی را آغاز می‌کند و، در نخستین حرکت خود، رقمی را در نخستین جای خالی (در سمت چپ) می‌نویسد. در هر حرکت بعدی، باید رقمی در جای خالی بعد نوشته و، به‌جای علامت ستارهٔ سمت چپ آن، یکی از دو علامت جمع یا ضرب

گذاشته شود. درضمن، یک رقم را نمی‌توان دو بار نوشت. در پایان بازی، مقدار عبارتی که به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. اکر حاصل این عبارت، عددی زوج باشد، نفر اول برده‌است، و اگر عددی فرد باشد، پیروزی با نفرِ دوم است. اگر هر دو نفر، درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود؟

۴۰. در شهری، تنها می‌توانند آپارتمان‌ها را با هم مبادله کنند (ولی حق تقسیم آن‌ها را ندارند). دو خانواده‌ای که آپارتمان‌های خود را عوض کرده‌اند، حق ندارند در همان روز، به مبادلهٔ دیگری بپردازند. ثابت کنید، هر مبادلهٔ آپارتمان‌ها را، هر قدر بغرنج باشد، می‌توان در دو روز به انجام رساند.

۴۱. برای شش‌ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$، نقطهٔ O وجود دارد، به نحوی که همهٔ ضلع‌های شش‌ضلعی، از آن‌جا با زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شوند. ثابت کنید اگر داشته‌باشیم:

$$|OA_۱| > |OA_۳| > |OA_۵|,$$
$$|OA_۲| > |OA_۴| > |OA_۶|$$

آن‌وقت، خواهیم داشت:

$$|A_۱A_۲| + |A_۳A_۴| + |A_۵A_۶| < |A_۲A_۳| + |A_۴A_۵| + |A_۶A_۱|$$

۴۲. این عدد را به ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید:

$$۹۸۹ \times ۱۰۰۱ \times ۱۰۰۷ + ۳۲۰$$

*۴۳. صفحه را به چند دایره تقسیم کرده‌ایم که، در بین آن‌ها، دایره‌های متقاطع هم وجود دارد، ولی یکی در درون دیگری نیست. ثابت کنید، قطعه‌هایی را که، به این ترتیب، از کاغذ جدا شده‌اند، نمی‌توان به صورت چند دایرهٔ غیرمتقاطع درآورد.

*۴۴. نگهبانان، می‌خواهند دزدی را که به قصر سلطان بغداد وارد شده بود، دستگیر کنند. برای گرفتن دزد، نگهبان باید با او در یک اتاق باشد. قصر دارای ۱۰۰۰ اتاق است که به‌وسیلهٔ درها به هم مربوط‌اند. طرح ساختمان قصر به‌گونه‌ای است که از یک اتاق به اتاق مجاور، جز از طریق دری که آن‌ها را به‌هم وصل کرده‌است (و تنها یک در) نمی‌توان وارد شد.

الف) ثابت کنید، هر طرحی که قصر داشته باشد، ۱۰ نگهبان می‌توانند با برنامه‌ریزی، دستگیری دزد را تضمین کنند.

ب) ثابت کنید، پنج نگهبان، برای این منظور، کافی نیست.

ج) ثابت کنید، شش نگهبان برای این منظور کافی است.

دور نهایی (سال نهم)

۴۵. همان مسالهٔ ۳۷.

۴۶. همان مسالهٔ ۳۸.

۴۷. هشت عدد حقیقی غیر منفی را، که مجموعی برابر واحد دارند، در راس‌های یک مکعب گذاشته‌ایم. عددهای دو انتهای یک یال را در هم ضرب کرده و، عدد حاصل را، روی یالی که این دو راس را به هم وصل کرده‌است، نوشته‌ایم. ثابت کنید، مجموع حاصل‌ضرب‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند، از $\frac{۱}{۴}$ تجاوز نمی‌کنند.

۴۸. دنبالهٔ عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ... داده شده‌است و می‌دانیم:

$$a_۱ < ۱۹۸۷ \text{ و } a_k + a_{k+۱} = a_{k+۲} (k \in \mathrm{N})$$

ثابت کنید، اگر برای مقداری از n، عددهای $a_۱ - a_n$ و $a_۲ + a_{n+۱}$ بر ۱۹۸۷ بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت، n عددی فرد است.

۴۹. همان مسالهٔ ۴۱.

۵۰. همان مسالهٔ ۴۲.

۵۱. ۱ + $۲n$ «کارت» را به طور ستونی روی هم چیده‌ایم. با این ستون کارت‌ها، می‌توانیم یکی از دو عمل زیر را انجام دهیم:

الف) بخشی از کارت‌ها را از بالا برداریم و، با همان ردیف، زیر بقیهٔ کارت‌ها بگذاریم؛

ب) n کارت از بالا برداریم و، با همان ردیف، در n فاصلهٔ بین ۱ + n کارت دیگر قرار دهیم.

ثابت کنید، به کمک این عمل‌ها، نمی‌توان از وضع نخستینِ کارت‌ها، به بیش از $۲n(۲n+۱)$ وضع جدید رسید.

۵۲. همان مسالهٔ ۴۴.

دور نهایی (سال دهم)

۵۳. همان مسالهٔ ۳۷.

۵۴. تابع‌های پیوستهٔ

$$f, g : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$$

چنان‌اند که، برای هر x از بازهٔ $[۰, ۱]$ داریم:

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

ثابت کنید، اگر f تابعی صعودی باشد، می‌توان عددی مثل a از بازهٔ $[۰, ۱]$ را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$f(a) = g(a) = a$$

۵۵. همان مسالهٔ ۴۷.

۵۶. دنبالهٔ عددهای حقیقی $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... و عدد طبیعی t داده شده‌اند. ثابت کنید، اگر بین همهٔ مجموعه‌های مرتب ممکنِ t عضوی

به‌صورت

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+t}\}$$

t عضو متمایز، و نه بیشتر، وجود داشته باشد، آن‌وقت، دنبالهٔ x_1، x_2، x_3، ... متناوب است.

۵۷. قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$، در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{|AB|}{|CD|} + \frac{|CD|}{|AB|} + \frac{|BC|}{|AD|} + \frac{|AD|}{|BC|} \leq$$
$$\leq \frac{|OA|}{|OC|} + \frac{|OC|}{|OA|} + \frac{|OB|}{|OD|} + \frac{|OD|}{|OB|}$$

۵۸. همان مسالهٔ ۴۲.

۵۹. همان مسالهٔ ۵۱.

*۶۰. از مجموعهٔ m عضوی، s زیرمجموعه جدا کرده‌ایم که، به‌ترتیب، دارای a_1، a_2، ...، a_s عضو هستند. می‌دانیم، در بین این زیرمجموعه‌ها، هیچ کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیست. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\binom{m}{a_1}} + \frac{1}{\binom{m}{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{m}{a_s}} \leq 1$$

که در آن $\binom{m}{a_k} = \frac{m!}{a_k!(m-a_k)!}$

۱۹۸۸

سال پنجم

۴	۹	۵
۱۰	۱۸	۱۲
۶	۱۳	۷

شکل ۱۶

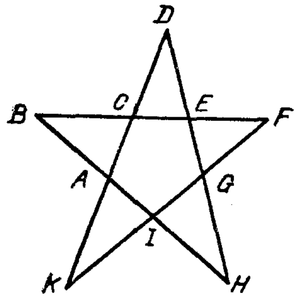
۱. در خانه‌های یک جدول ۳ × ۳، صفر گذاشته شده‌است. می‌توان یک مربع ۲ × ۲ در نظر گرفت و به همهٔ عددهای خانه‌های آن، یک واحد اضافه کرد. ثابت کنید، با تکرار این عمل، نمی‌توان به جدولی رسید که در شکل ۱۶ نشان داده شده‌است.

۲. داور و هر یک از ۳۰ بازی‌کن، برای خود، عددهای از ۱ تا ۳۰ را به‌ترتیب دلخواهی نوشته‌اند. بعد، هر یک از بازی‌کنان، نوشتهٔ خود را با نوشتهٔ داور مقایسه می‌کند؛ اگر در ردیفی، عدد او با عدد داور برابر باشد، یک امتیاز می‌گیرد. معلوم شد، این ۳۰ نفر، امتیازهای مختلفی گرفته‌اند (هیچ دو نفری امتیاز مساوی نداشتند). ثابت کنید، نوشتهٔ یکی از بازی‌کنان، با نوشتهٔ داور تطبیق می‌کند.

۳. آیا می‌توان عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را، به ترتیبی در یک ردیف نوشت که اختلاف هر دو عدد مجاور (به شرطی که عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کنیم)، از ۵۰ کمتر نباشد؟

۴. آیا می‌توان عددهای درست a و b را طوری پیدا کرد که یکی از آن‌ها بر مجموع a و b و دیگری بر تفاضل آن‌ها، بخش‌پذیر باشد؟

۵. ۱۰۰۱ مهره روی میز کُپه شده‌است. در هر حرکت، می‌توان از کپه‌ای که بیش از یک مهره دارد، یک مهره را کنار گذاشت، سپس، یکی از کپه‌ها را به دو بخش تقسیم کرد. آیا می‌توان بعد از چند حرکت، به وضعی رسید که روی میز تنها کپه‌هایی، هر یک شامل سه مهره، وجود داشته باشد؟



شکل ۱۷

۶. قلعه‌ای شامل ۶۴ اتاق مربع شکل است؛ اتاق‌ها در هر دیوار خود دری دارند و به شکل مربع ۸ × ۸ قرار گرفته‌اند. کف اتاق‌ها، رنگ سفید دارند. هر صبح، رنگ کار، در قلعه گردش می‌کند؛ درضمن، از هر اتاقی که رد می‌شود، رنگ کف آن را عوض می‌کند (اگر سفید است، به رنگ سیاه و اگر سیاه است به رنگ سفید درمی‌آورد). آیا ممکن است، بعد از مدتی، کف اتاق‌ها، شبیه صفحهٔ شطرنج، به رنگ‌های سفید و سیاه در آمده باشند؟

سال ششم

۷. همان مسالهٔ ۳.

۸. همان مسالهٔ ۱.

۹. هر یک از عددهای طبیعی a، b، c و d، بر عدد طبیعی $ab - cd$ بخش‌پذیرند. ثابت کنید

$$ab - cd = ۱$$

۱۰. ثابت کنید، ستارهٔ شکل ۱۷ را نمی‌توان طوری رسم کرد که داشته باشیم:

$$|AB| < |BC|, \ |CD| < |DE|, \ |EF| < |FG|,$$

$$|GH| < |HI|, |IK| < |KA|$$

۱۱. دور میزگردی، ۲۵ نفر نشسته‌اند. هر کدام از آن‌ها، دو کارت در دست دارند. روی هریک از ۵۰ کارت، یکی از عددهای از ۱ تا ۲۵ نوشته شده‌است و، درضمن، هر عدد روی دو کارت. در هر دقیقه، با علامت داور، هر کس یکی از کارت‌های خود را به نفر دست راستی خود می‌دهد و، درضمن، آن کارتی را که عدد آن کوچکتر است. اگر زمانی، در دست یک نفر، دو کارت با عددهای برابر پیدا شود، جریان بازی تمام می‌شود. ثابت کنید، این وضع، دیر یا زود پیش می‌آید.

۱۲. ۵۰۰ چوب کبریت روی میز است. دو نفر با هم بازی می‌کنند. هرکس، در نوبت خود، می‌تواند ۱، ۲، ۴، ۸، ... (توانی از عدد ۲) چوب کبریت را بردارد. کسی بازی را می‌بازد که نتواند، چیزی از روی میز بردارد. اگر هر دو نفر سنجیده و درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

سال هفتم

۱۳. برای عددهای حقیقی x و y می‌دانیم:

$$0 \le x \le 1 \text{ و } 0 \le y \le 1$$

ثابت کنید: $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \le 1$.

۱۴. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد. در این مثلث، ارتفاع AH میانهٔ BM را در نقطهٔ L و نیمساز CK را در نقطهٔ N قطع کرده‌است. میانهٔ BM با نیمساز CK، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند (نقطه‌های L، N و P، متمایزند). ثابت کنید، مثلث LNP نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۵. همان مسالهٔ ۹.

۱۶. همان مسالهٔ ۱۱.

۱۷. همان مسالهٔ ۱۰.

۱۸. راس‌های خانه‌ها را در یک صفحهٔ شطرنجی ۲۱ × ۲۱ به رنگ‌های قرمز و آبی درآورده‌ایم. درضمن، همهٔ راس‌های کنار بالا و همهٔ راس‌های کناری سمت راست را، به‌جز پایین‌ترین راس، با قرمز، رنگ کرده‌ایم. بقیهٔ راس‌های کناری، آبی‌اند. ثابت کنید، در این صفحهٔ شطرنجی، خانه‌ای با دو راس قرمز و دو راس آبی وجود دارد؛ درضمن، راس‌های قرمز در دو انتهای یکی از ضلع‌های این خانه قرار دارند.

سال هشتم

۱۹. می‌دانیم:

$$abc = ۱ \text{ و } a + b + c = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$$

ثابت کنید، دست‌کم یکی از عددهای a، b یا c برابر واحد است.

۲۰. ABC، مثلثی است با زاویه‌های حاده؛ زاویهٔ A، در این مثلث، برابر ۳۰ درجه، $BB_۱$ و $CC_۱$ ارتفاع‌های آن و $B_۲$ و $C_۲$، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AC و AB هستند. ثابت کنید، پاره‌خط‌های راست $B_۱C_۲$ و $B_۲C_۱$ بر هم عمودند.

۲۱. عددی ۱۰۰ رقمی پیدا کنید که، در بین رقم‌های آن، صفر وجود نداشته باشد و، درضمن، خود عدد بر مجموع رقم‌هایش بخش‌پذیر باشد.

۲۲. ستونی از n آجر به رنگ‌های مختلف، در جلو ماست. در هر حرکت، چند آجر از زیر بیرون می‌کشیم و با همان ردیف روی ستون قرار می‌دهیم و، بلافاصله، ستون را برمی‌گردانیم (سروته می‌کنیم). ثابت کنید،

تعداد ستون‌های متفاوتی که می‌توان، به این ترتیب، به دست آورد، از $2n$ تجاوز نمی‌کند.

۲۳. در ۱۲۰ خانهٔ آپارتمانی، ۱۱۹ نفر زندگی می‌کنند. آپارتمانی را پرجمعیت می‌نامیم که، دست کم، ۱۵ نفر در آن زندگی کنند. هر روز ساکنان یکی از آپارتمان‌ها با هم نزاع می‌کنند و در آپارتمان‌های مختلف پراکنده می‌شوند. آیا درست است که، زمانی، این جابه‌جایی‌ها قطع می‌شود؟

۲۴. الف) x و y و z، عددهایی غیرمنفی‌اند و مجموعی برابر $\frac{1}{2}$ دارند. ثابت کنید:

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\geq\frac{1}{3}$$

ب) x_1، x_2، ...، x_n عددهایی غیرمنفی‌اند و مجموعی برابر $\frac{1}{2}$ دارند. ثابت کنید:

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\times\ldots\times\frac{1-x_n}{1+x_n}\geq\frac{1}{3}$$

سال نهم

۲۵. عددهای درست a، b، c و d را پیدا کنید، به شرطی که

$$\begin{cases} ab+cd=-1\\ ac+bd=-1\\ ad+bc=-1\end{cases}$$

۲۶. روی ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC، مربع‌های $ABDE$ و $BCFG$ را در بیرون مثلث ساخته‌ایم. معلوم شد، خط راست DG با خط راست AC موازی است. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۷. به شرط $a < b < c$، ثابت کنید معادلهٔ

$$\frac{۱}{x-a}+\frac{۱}{x-b}+\frac{۱}{x-c}=۰$$

دارای دو ریشهٔ $x_۱$ و $x_۲$ است؛ درضمن $a < x_۱ < b < x_۲ < c$.

۲۸. الف) همان مسالهٔ ۲۴ ب) برای $n = ۲$.

ب) همان مسالهٔ ۲۴ ب) برای $n = ۴$.

۲۹. دربارهٔ عددهای طبیعی a و b و c می‌دانیم، $a^۳$ بر b، $b^۳$ بر c و $c^۳$ بر a بخش‌پذیرند. ثابت کنید $(a+b+c)^{۱۳}$ بر abc بخش‌پذیر است.

۳۰. همهٔ قطرهای یک متوازی‌السطوح با هم برابرند. ثابت کنید، این متوازی‌السطوح، یک مکعب مستطیل است.

سال دهم

۳۱. همان مسالهٔ ۲۸.

۳۲. همان مسالهٔ ۲۰.

۳۳. همان مسالهٔ ۲۹.

۳۴. تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، روی تمامی محور حقیقی معین‌اند و مقدارهایی حقیقی می‌دهند. می‌دانیم، برای هر مقدار حقیقی x و y

$$f(x+g(y)) = ۲x + y + ۵$$

مطلوب است تابع $g(x+f(y))$ (به صورتی صریح، برحسب x و y).

۳۵. ۱۰۰ عدد طبیعی پشت سر هم داده شده‌است. آیا می‌توان آن‌ها را طوری روی محیط یک دایره قرار داد که، حاصل‌ضرب هر دو عدد مجاور، مجذور کامل باشد؟

۳۶. در هرم منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی، مرکز کرهٔ محیطی بر سطح کره

محاطی واقع است. نسبت طول شعاع کرهٔ محیطی بر شعاع کرهٔ محاطی را پیدا کنید.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۷. زاویه‌های مثلث ABC، حاده‌اند. در این مثلث، قرینهٔ خط راست AC را نسبت به خط‌های راست AB و BC پیدا کرده‌ایم. دو خط راست حاصل، در نقطهٔ K به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، خط راست BK، از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۳۸. عددهای حقیقی $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$، $x_۵$ و $x_۶$، در بازهٔ $[۰, ۱]$ قرار دارند. ثابت کنید:

$$(x_۱ - x_۲)(x_۲ - x_۳)(x_۳ - x_۴)(x_۴ - x_۵) \times$$
$$\times(x_۵ - x_۶)(x_۶ - x_۱) \leq \frac{۱}{۱۶}$$

۳۹. دو عدد چهار رقمی a و b را پیدا کنید که، نسبت به هم اول باشند و برای هر دو عدد طبیعی m و n، عددهای a^m و b^n، دست‌کم ۴۰۰۰ واحد با هم اختلاف داشته‌باشند.

۴۰. n شهر با $۲n - ۱$ جادهٔ یک طرفه به هم مربوط‌اند. درضمن، بدون نقض قانون حرکت در مسیرهای یک طرفه، می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، جاده‌ای وجود دارد که، با بستن آن، باز هم این ویژگی حفظ می‌شود.

۴۱. در ذوزنقه $ABCD$ (با قاعده‌های BC و AD)، روی ضلع‌های AB و CD، به‌ترتیب، نقطه‌های K و L را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دو زاویهٔ BAL و CDK برابر باشند، آن‌وقت دو زاویهٔ BLA و CKD هم برابرند.

۴۲. دو کُپهٔ چوب کبریت، روی میز است: در یکی ۱۰۰ و در دیگری ۲۵۲ چوب کبریت. دو نفر، به نوبت، با هم بازی می‌کنند. در هر حرکت، می‌توان از یک کُپه، چند چوب کبریت برداشت، به نحوی که تعداد آن‌ها، بخشیابی از تعداد چوب کبریت‌های کُپهٔ دیگر باشد. کسی که آخرین چوب کبریت را بردارد، برنده است. با بازی درست، کدام برنده می‌شود: آن که بازی را آغاز کرده است، یا رقیب او؟

۴۳. به هر دنبالهٔ با پایانی از صفرها و واحدها، یک واژه می‌گوییم. «سه برابر» واژهٔ A را به سه بار تکرار A، یعنی AAA گوییم. مثلاً، اگر $A = ۱۰۱$، آن‌وقت «سه برابر» آن ۱۰۱۱۰۱۱۰۱ می‌شود. یکی از دو عمل زیر را، دربارهٔ هر واژه می‌توان انجام داد.

۱) در جای دلخواهی از آن (ازجمله، در ابتدا یا انتهای آن)، «سه برابر» هر واژهٔ دلخواه را قرار داد؛

۲) «سه برابر» هر واژه‌ای را از آن حذف کرد.

به این ترتیب، مثلاً از واژهٔ ۰۰۰۱، می‌توان واژهٔ ۰۱۱۱۰۰۱ یا واژهٔ ۱ را به‌دست آورد. آیا با این دو عمل، می‌توان از واژهٔ ۱۰ به واژهٔ ۰۱ رسید؟

*۴۴. بارون مون هاوزن، باغ خود را با درخت‌های کاج و توس پوشاند؛ درضمن، در فاصلهٔ یک کیلومتر از هر درخت کاج، درست ۱۰ درخت توس نشاند. بارون معتقد است که، در باغ او، تعداد درختان کاج، از تعداد درختان توس بیشتر است. آیا چنین چیزی ممکن است؟

دور نهایی (سال نهم)

۴۵. همان مسالهٔ ۳۷.

۴۶. روی صفحهٔ شطرنج، چند مهره گذاشته‌ایم. با هر حرکت، یکی از مهره‌ها را به خانهٔ آزاد مجاور خود (به‌صورت افقی یا قائم) می‌بریم. بعد از چند حرکت، معلوم شد، هر مهره در همهٔ خانه‌ها، و هر خانه یکبار، بوده

و اکنون به خانهٔ نخستینِ خود برگشته است. ثابت کنید، لحظه‌ای بوده است که، هیچ مهره‌ای، در خانهٔ اولیهٔ خود نبوده است.

۴۷. برای عددهای حقیقی و مثبت a، b، c و d، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۴}{c}+\frac{۱۶}{d}\geq\frac{۶۴}{a+b+c+d}$$

۴۸. هر خیابان شهر A، دو چهار راه دارد. حرکت در روی خیابان‌های شهر، یک طرفه است. شهرداری، طرح ساختمان شبکهٔ پمپ بنزین‌ها را به مسابقه گذاشت؛ این طرح باید چنان باشد که از هر چهار راه، بتوان بدون نقض قانون حرکت کرد و به یکی از پمپ بنزین‌ها رفت، ولی از هر پمپ بنزین نتوان به پمپ بنزین دیگری رفت. ثابت کنید، در همهٔ طرح‌هایی که به شهرداری پیشنهاد می‌شود، تعداد پمپ بنزین‌ها، یکی است.

۴۹. نقطه‌های M و N را روی ضلع‌های AB و CD از مربع $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم. پاره‌خط‌های راست CM و BN یکدیگر را در نقطهٔ P و پاره‌خط‌های راست AN و MD یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $|PQ|\geq\frac{۱}{۲}|AB|$.

۵۰. دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ...، از عددهای طبیعی کوچکتر از ۱۹۸۸ تشکیل شده‌است. درضمن، برای هر m و n، عدد a_m+a_n بر a_{m+n} بخش‌پذیر است. ثابت کنید، این دنباله، متناوب است.

۵۱. همان مسالهٔ ۴۳.

۵۲. همان مسالهٔ ۴۴.

دور نهایی (سال دهم)

۵۳. حلزون روی صفحه می‌خزد و، بعد از هر یک متر، ۹۰ درجه می‌چرخد. حلزون ۳۰۰ متر خزید، ۹۹ بار به چپ و ۲۰۰ بار به راست

پیچید. در این موقع، حداکثر فاصلهٔ او تا نقطهٔ آغاز حرکت، چقدر می‌تواند باشد؟

۵۴. تابع $f : R \rightarrow R$، پیوسته است و برای هر عدد حقیقی x داریم

$$f(x) \cdot f(f(x)) = ۱$$

می‌دانیم $f(۱۰۰۰) = ۹۹۹$. مطلوب است $f(۵۰۰)$.

۵۵. همان مسالهٔ ۳۹.

۵۶. همان مسالهٔ ۴۰.

۵۷. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد. نقطه‌های M و N را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AB و AC انتخاب کرده‌ایم. دو دایره، یکی به قطر BN و دیگری به قطر CN رسم کرده‌ایم؛ این دو دایره، یکدیگر را در نقطه‌های P و Q قطع کرده‌اند. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC باشد، ثابت کنید سه نقطهٔ P، Q و H روی یک خط راست‌اند.

*۵۸. چندجمله‌ای $P(x)$، با ضریب‌های حقیقی، مفروض است. ثابت کنید، اگر برای هر x حقیقی داشته‌باشیم:

$$P(x) - P'(x) - P''(x) + P'''(x) \geq ۰$$

آن‌وقت $P(x)$، به‌ازای هر عدد حقیقی x، غیر منفی است.

۵۹. همان مسالهٔ ۴۳.

*۶۰. n ضلعی کوژ، روی صفحه داده شده‌است. a_k را طول ضلع kام و d_k را طول تصویر چند ضلعی بر خط راستی می‌گیریم که از ضلع kام گذشته است (برای k از ۱ تا n). ثابت کنید:

$$۲ < \frac{a_۱}{d_۱} + \frac{a_۲}{d_۲} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} \leq ۴$$

سال پنجم

۱. برگزار کنندگان المپیاد برای سال‌های از پنجم تا دهم، تصمیم گرفتند، برای هر سال، هفت مساله داده شود که، درست چهار تا از آن‌ها، مورد استفاده برای سال‌های دیگر قرار نگیرد. حداکثر چند مساله می‌توان برای این المپیاد طرح کرد؟

۲. بلیت‌های تراموا، از ۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹ شماره‌گذاری شده‌اند. بلیتی را با شمارهٔ شانس به حساب می‌آورند که، مجموع سه رقم اول آن، با مجموع سه رقم آخر، برابر باشد. ثابت کنید، تعداد بلیت‌های شانس، با تعداد بلیت‌هایی که، مجموع رقم‌های شماره‌های آن‌ها، برابر ۲۷ باشد، برابر است.

۳. مجموعهٔ جاده‌های راه‌آهن اسباب‌بازی، شامل قطعه‌هایی از دو نوع ۱ و ۲ است که، روی هرکدام از آن‌ها، جهت حرکت، با پیکان نشان داده شده‌است (شکل ۱۸را ببینید). خط، تنها وقتی آمادهٔ حرکت قطار است که، جهت همهٔ قطعه‌ها، با جهت حرکت لوکوموتیو، یکی باشد. با استفاده از همهٔ قطعه‌ها، می‌توان یک مسیر بسته، برای حرکت قطار، ساخت. ثابت کنید، اگر یکی از قطعه‌های نوع ۱ را با یکی از قطعه‌های نوع ۲ عوض کنیم، آن‌وقت نمی‌توان با همهٔ قطعه‌ها، مسیر بسته‌ای، که برای حرکت قطار آماده باشد، درست کرد.

۴. ۳۲ مهره در اختیار داریم که، وزن دو به دوی آن‌ها، با هم اختلاف دارد. ثابت کنید، با ۳۵ بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، و بدون استفاده از وزنه، می‌توان سنگین‌ترین مهره و مهره‌ای را، که از نظر وزن، در ردیف دوم است، پیدا کرد.

۵. دست‌کم دو عدد شش‌رقمی پیدا کنید که، اگر اولی را بعد از دومی

شکل ۱۸

بنویسیم، عدد ۱۲ رقمی حاصل، بر حاصل‌ضرب دو عدد اصلی، بخش‌پذیر باشد.

۶. دو نفر روی یک جدول ۱۰ × ۱۰، خط و نقطه بازی می‌کنند. هر کس در نوبت خود، یک خط یا یک نقطه در یکی از خانه‌های خالی جدول می‌گذارد. کسی بازی را برده‌است که، برای نخستین بار، سه خط (یا سه نقطه) به ردیف افقی یا قائم یا قطری به‌دست آورده باشد؛ درضمن، ردیف باید بدون جای خالی باشد. آیا یکی از دو بازی‌کن، می‌تواند بُرد خود را، با طرح برنامه‌ای، تضمین کند؟ اگر جواب مثبت است، کدام یک: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

سال ششم

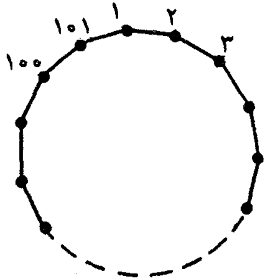
۷. همان مسالهٔ ۱، ولی تنها برای کلاس‌های ششم تا دهم.

۸. در پنج‌ضلعی کوژ $ABCDE$، قطرهای BE و BD، به‌ترتیب، قطر AC را در نقطه‌های K و M قطع کرده‌اند. ثابت کنید، اگر داشته‌باشیم:

$$|AE| = |EK| = |KB| \text{ و } |AK| = |MC|$$

آن‌وقت $|EM| = |BC|$.

۹. همان مسالهٔ ۴، برای ۶۴ مهره و ۶۸ بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای



شکل ۱۹

و بدون وزنه.

۱۰. همهٔ مقدارهای درست A، B و C را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$\begin{cases} A^{۲} + ۲B^{۲} - ۲BC = ۱۰۰ \\ ۲AB - C^{۲} = ۱۰۰ \end{cases}$$

۱۱. به تعداد ۹۹ صدویک ضلعی منتظم داریم که، راس‌های هر یک از آن‌ها را، از ۱ تا ۱۰۱ شماره‌گذاری کرده‌ایم (شکل ۱۹). آیا می‌توان این ۹۹ چندضلعی را طوری روی هم گذاشت که، مجموع عددها در هر یال ستونی که به‌دست می‌آید، برابر با مجموع عددها در هر یال دیگر باشد؟

۱۲. کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از واحد را پیدا کنید که از ۶۰۰ برابر هر یک از بخشیاب‌های اول خود، کوچکتر نباشد.

۱۳. چند عدد غیر صفر (دست کم دوتا) داده شده‌است. می‌توان هر دو عدد دلخواه A و B را حذف کرد و، به‌جای آن‌ها، عددهای $A+\frac{۱}{۲}B$ و $B-\frac{۱}{۲}A$ را نوشت. ثابت کنید، بعد از انجام چند بار از این گونه عمل‌ها، نمی‌توان دوباره به همان عددهای اولیه رسید.

سال هفتم

۱۴. دور یک میزگرد، $۲n$ نفر نشسته‌اند: n نفر فیزیک‌دان و n نفر شیمی‌دان؛ درضمن، برخی از آن‌ها همیشه راست می‌گویند و بقیه همیشه

دروغ. می‌دانیم، تعداد دروغ‌گوها در بین شیمی‌دان‌ها، با تعداد دروغ‌گوهای فیزیک‌دان، برابر است. در برابر این پرسش که: «در سمت راست شما چه کسی نشسته است؟»، همگی پاسخ دادند: «یک شیمی‌دان». ثابت کنید، n عددی زوج است.

۱۵. در چهارضلعی $ABCD$، قطرهای AC و BD، در نقطهٔ O به هم برخورده‌اند. می‌دانیم:

$$|AB| = |OD|,\ |AD| = |CO|,\ \widehat{BAC} = \widehat{BDA}$$

ثابت کنید، $ABCD$، یک ذوزنقه است.

۱۶. ثابت کنید، اگر $x + y + z \geq xyz$، آن‌وقت

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xyz$$

۱۷. همان مسالهٔ ۵.

۱۸. کتاب‌دار، هر دقیقه، جلو قفسه‌ای می‌رود که، یک فرهنگ ۸ جلدی، به ردیف در آن چیده شده‌است و، هر بار، جای دو جلد از آن را با هم عوض می‌کند. آیا ممکن است، این کار را طوری انجام دهد که، بعد از مدتی، همهٔ انواع تبدیل‌های ممکن جلدهای فرهنگ، انجام گرفته باشد و، درضمن، هر تبدیل تنها یکبار؟

۱۹. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: مهره‌ای، روی گره مرکزی یک جدول ۱۰ × ۱۰ گذاشته شده‌است. در هر حرکت، کسی که نوبت اوست، می‌تواند مهره را به هر گروه دیگر منتقل کند، به شرطی که طول حرکت او (یعنی فاصله‌ای که مهره را، به اندازهٔ آن جابه‌جا می‌کند)، بیشتر از طول حرکت قبلی رقیب او باشد. کسی می‌بازد که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد. اگر هر دو نفر، درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود؟

۲۰. آیا می‌توان ۱۰۰ عدد طبیعی مختلف پیدا کرد، به نحوی که، حاصل ضرب هر پنج عدد دلخواه از آن‌ها، بر مجموع همین پنج عدد، بخش‌پذیر باشد؟

سال هشتم

۲۱. ثابت کنید، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x+y+z=\circ \\ \frac{\text{۱}}{x}+\frac{\text{۱}}{y}+\frac{\text{۱}}{z}=\circ \end{cases}$$

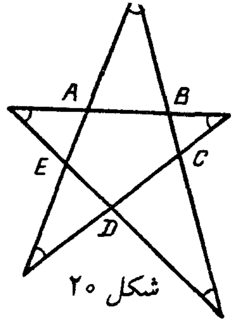
در مجموعهٔ عددهای حقیقی، جواب ندارد.

۲۲. a، عددی طبیعی و بزرگتر از واحد، و b، بخشیاب طبیعی عدد $a^{\text{۲}}+\text{۱}$ است. ثابت کنید، اگر $b>a$، آن‌وقت $b-a>\sqrt{a}$.

۲۳. در چهار ضلعی کوژ $ABCD$، قطرهای AC و BD، در O برخورد کرده‌اند. نقطه‌های K، L، M و N، به ترتیب روی ضلع‌های AB، BC، CD و DA چنان‌اند که، نقطهٔ O، روی پاره‌خط‌های راست KM و LN قرار دارد و آن‌ها را نصف می‌کند. ثابت کنید $ABCD$، یک متوازی‌الاضلاع است.

۲۴. در خانه‌های یک جدول شطرنجی بی‌پایان، m مهره گذاشته شده‌است. برای هر مهره، عددی را به‌دست آورده‌ایم که برابر است با حاصل‌ضرب تعداد مهره‌هایی که با آن در یک ستون قرار دارند، در تعداد مهره‌هایی که با آن در یک سطرند. ثابت کنید، تعداد مهره‌هایی که، برای آن‌ها، این عدد از $\text{۱۰}m$ کمتر نیست، از $\frac{m}{\text{۱۰}}$ تجاوز نمی‌کند.

۲۵. در پایان یک دور مسابقهٔ شطرنج، که در آن k مسابقه انجام شد، تعداد امتیازهایی که شرکت‌کنندگان به دست آورده بودند، یک تصاعد هندسی با قدر نسبتی که برابر یک عدد طبیعی بود، تشکیل دادند. اگر قدر نسبت



شکل ۲۰

تصاعد بزرگتر از واحد باشد، تعداد شرکت کنندگان، چند نفر می‌تواند باشد:

الف) به‌ازای $k = ۱۹۸۹$؛

ب) به‌ازای $k = ۱۹۸۸$؟

۲۶. n خط راست روی یک صفحه چنان‌اند که، هیچ دوتایی با هم موازی نیستند و، هیچ سه‌تایی، از یک نقطه نمی‌گذرد. به‌ازای چه مقداری از n، می‌توان، در هر نقطهٔ برخورد خط‌های راست، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $n - ۱$ را طوری قرار داد که، روی هر خط راست، به همهٔ این عددها برخورد کنیم و از هر کدام تنها یکبار؟

سال نهم

۲۷. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۸. نقطهٔ X را روی ضلع AC از مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دایره‌های محاطی دو مثلث ABX و BCX بر هم مماس باشند، آن‌وقت نقطهٔ X، روی محیط دایرهٔ محاط در مثلث ABC است.

۲۹. همان مسالهٔ ۲۲.

۳۰. خط شکستهٔ بسته‌ای، که پنج ضلع دارد، یک پنج‌ضلعی ستاره‌ای با پنج زاویهٔ برابر ساخته است (شکل ۲۰). اگر طول خط شکسته، برابر واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی درونی $ABCDE$ چقدر است؟

۳۱. آیا عددهای ۱+، ۱− و ۰ را در خانه‌های یک جدول ۱۰ × ۱۰، می‌توان طوری قرار داد که، همهٔ ۲۰ مجموع سطرها و ستون‌ها، با هم فرق داشته باشند؟

۳۲. همان مسالهٔ ۲۵.

سال نهم

۳۳. همان مسالهٔ ۲۱.

۳۴. وترهای XK و XM، قطر AB از دایره را، به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید:

$$۵|KM| = ۳|AB|$$

۳۵. همان مسالهٔ ۲۵.

۳۶. همان مسالهٔ ۳۰.

۳۷. آیا عمل $*$ وجود دارد؛ به نحوی که وقتی با دو عدد طبیعی X و Y سروکار داریم، برای عدد طبیعی $X * Y$، سه ویژگی زیر، با هم وجود داشته باشد:

الف) $A * B = |A - B| * (A + B)$ (برای $A \neq B$)؛

ب) $(AC) * (BC) = (A * B)(C * C)$

ج) $(۲k - ۱) * (۲k + ۱) = ۲k + ۱$

سال دهم

۳۸. ثابت کنید، برای سه عدد حقیقی دلخواه a، b و c، سه عدد

$$(b - c)(bc - a^۲),\ (c - a)(ca - b^۲),$$
$$(a - b)(ab - c^۲)$$

نمی‌توانند با هم مثبت باشند.

۳۹. همان مسالهٔ ۲۸.

۴۰. مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات (x,y) را روی صفحه نمایش دهید، به شرطی که بدانیم، دو عدد غیر منفی A و B پیدا می‌شوند، به نحوی که، بزرگترین عدد بین دو عدد $A^۲$ و B برابر x، و کوچکترین عدد بین دو عدد $B^۲$ و A برابر y است.

۴۱. یک چندضلعی با ضلع‌های برابر، قاعدهٔ یک هرم را تشکیل می‌دهد. ثابت کنید، اگر همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ راس هرم، با یکدیگر برابر باشند، آن‌وقت، در بین وجه‌های جانبی هرم، دو مثلث برابر پیدا می‌شود.

۴۲. همان مسالهٔ ۲۵.

سال دهم (دبیرستان‌های فیزیک-ریاضی)

۴۳. همان مسالهٔ ۲۱.

۴۴. عملی با نماد $*$ داده شده‌است که هر دو عدد درست X و Y را، به عدد درست $X*Y$ تبدیل می‌کند. می‌دانیم، هر عدد درست، به‌ازای بعضی مقدارهای درست X و Y، برابر $X*Y$ است. ثابت کنید، این عمل، نمی‌تواند به طور هم‌زمان، دارای دو ویژگی زیر باشد:

الف) $A*B=-(B*A)$؛

ب) $(A*B)*C=A*(B*C)$.

۴۵. همان مسالهٔ ۴۱.

۴۶. همان مسالهٔ ۲۵.

۴۷. ثابت کنید، اگر معادلهٔ

$$ax^۲+(c-b)x+(e-d)=۰$$

ریشه‌ای حقیقتی و بزرگتر از ۱ داشته باشد، آن وقت معادلهٔ

$$ax^{۴} + bx^{۳} + cx^{۲} + dx + e = ۰$$

دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد.

دور نهایی (سال هشتم)

۴۸. نقطهٔ M را در درون مثلث ABC، طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\widehat{BMC} = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\widehat{BAC}$$

و خط راست AM از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BMC می‌گذرد. ثابت کنید، M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

۴۹. چند عدد طبیعی انتخاب کرده‌ایم که بخشیاب‌های اول آن‌ها، از n تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، مجموع عکس‌های این عددها، از n بیشتر نیست.

۵۰. k، عددی است طبیعی و بزرگتر از واحد. ثابت کنید، در خانه‌های جدول $k \times k$، نمی‌توان عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $k^{۲}$ را طوری قرار داد که، مجموع عددهای هر سطر و، همچنین مجموع عددهای هر ستون، برابر توانی از عدد ۲ باشد.

۵۱. روی خانه‌های یک جدول ۱۰ × ۱۰، ۹۱ مهرهٔ سفید قرار دارند. نقاش یکی از مهره‌ها را برمی‌دارد، آن را به رنگ سیاه درمی‌آورد و در یکی از خانه‌های آزاد جدول می‌گذارد. بعد، مهرهٔ دیگری را، که سفید است، برمی‌دارد، به رنگ سیاه درمی‌آورد و ... تا آن‌جا که دیگر مهرهٔ سفیدی باقی نمانده باشد. ثابت کنید، ضمن کار نقاش، زمانی فرا می‌رسد که در دو خانهٔ مجاور، دو مهره با رنگ‌های مختلف وجود دارد.

۵۲. حداکثر مساحت یک چهارضلعی، با ضلع‌های به طول ۱، ۴، ۷ و ۸، چقدر می‌تواند باشد؟

۵۳. دو نفر با هم بازی می‌کنند. روی تخته سیاه، عدد ۲ نوشته شده‌است. هر کس، در نوبت خود، عدد n را که روی تخته نوشته شده‌است، عوض می‌کند و، به جای آن، عدد $n + d$ را می‌نویسد که، در آن، d یکی از بخشیاب‌های n، به‌جز خود n است. کسی بازی را می‌برد که عددی بزرگتر از ۱۹۸۹۱۹۸۹ روی تخته بنویسد. اگر هر دو نفر درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

*۵۴. در زبان قبیلهٔ «ترولیالیا»، هر دنباله‌ای از ۱۰ رقم ۰ و ۱، یک واژه است. دو واژه وقتی، و تنها وقتی مترادف شمرده می‌شوند که بتوان، با عمل‌های به صورت زیر، از یکی، دیگری را به‌دست آورد: از واژه، چند رقم ردیف هم را، به شرطی که مجموع آن‌ها عددی زوج باشد، حذف و، به جای آن‌ها، همان رقم‌ها، ولی در جهت عکس، گذاشته شود. در زبان این قبیله، چند واژه با معناهای متفاوت وجود دارد؟

*۵۵. پروفسور سمیت، در سالنی مربع شکل، که دیوارهای آینه‌ای دارد، ایستاده است. پروفسور جونس، می‌خواهد چند صندلی در سالن، طوری قرار دهد که آقای سمیت نتواند تصویر خودش را ببیند. آیا آقای جونس موفق می‌شود؟ (پروفسور و دانشجویان را، نقطه به حساب آورید. دانشجویان می‌توانند نزدیک دیوار، در گوشه‌ها ایستاده باشند.)

دور نهایی (سال نهم)

۵۶. همان مسالهٔ ۴۸.

۵۷. همهٔ عددهای ۷رقمی (از ۰۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹) را، به ردیفی دلخواه، پشت سر هم نوشته‌ایم. ثابت کنید، عدد ۷۰ میلیون رقمی حاصل، بر ۲۳۹ بخش‌پذیر است.

۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

۲ ۱ ۳ ۵ ۲

۱ ۲ ۱۴ ۹

۱ ۹ ۲۵

۴ ۱۶

۷

شکل ۲۱

۵۸. x، y و z، عددهایی حقیقی از بازهٔ $[0, 1]$ هستند. ثابت کنید:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$$

۵۹. همان مسالهٔ ۵۱.

۶۰. مثلث عددی، که سطر اول آن شامل n واحد و سطر دوم آن شامل $n - 1$ عدد درست دلخواه است، این ویژگی را دارد (مثالی برای $n = 6$ را در شکل ۲۱ ببینید). برای هر چهار عددی که یک چهار ضلعی به‌صورت $c \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} a$ تشکیل دهند (a و c، دو عدد مجاور در یک سطرند)، برابری $ac = bd + 1$ برقرار است. همهٔ عددهای مثلث مخالف صفرند. ثابت کنید، همهٔ عددهایی که مثلث را تشکیل داده‌اند، عددهای درست‌اند.

۶۱. دنبالهٔ عددهای حقیقی a_1، a_2، a_3، ... چنان است که، برای هر عدد طبیعی k، داریم:

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k}$$

ثابت کنید، در این دنباله، بی‌نهایت عدد مثبت و بی‌نهایت عدد منفی وجود دارد.

*۶۲. در مثلث ABC، نقطهٔ M روی ضلع AB، نقطهٔ N روی ضلع BC و نقطهٔ O، محل برخورد پاره‌خط‌های راست CM و AN

است. می‌دانیم:

$$|AM| + |AN| = |CM| + |CN|$$

ثابت کنید: $|AO| + |AB| = |CO| + |CB|$.

*۶۳. به‌ازای چه مقدارهایی از k، می‌توان ۱۰۰ کمان روی محیط دایره قرار داد، به نحوی که، هر کمان، درست به وسیلهٔ k کمان دیگر قطع شده باشد؟

*۶۴. ثابت کنید، اگر مثلث مسالهٔ ۶۰، شامل عددهای طبیعی باشد، آن‌وقت تعداد عددهای مختلفی که در آن وجود دارد، کمتر از $\frac{n}{۴}$ نیست.

دور نهایی (سال دهم)

۶۵. همان مسالهٔ ۴۸.

۶۶. همان مسالهٔ ۴۹.

۶۷. همان مسالهٔ ۶۰.

۶۸. همان مسالهٔ ۵۲.

۶۹. این معادله، چند جواب حقیقی دارد:

$$\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))) = \frac{۱}{۳}x$$

۷۰. دنبالهٔ عددهای حقیقی $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، چنان است که برای هر m و n داریم:

$$|a_m + a_n - a_{m+n}| \leq \frac{۱}{m+n}$$

ثابت کنید، این دنباله، یک تصاعد حسابی است.

*۷۱. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. روی تختهٔ سیاه، عدد ۱۰۰۰ نوشته شده‌است و کُپه‌ای شامل ۱۰۰۰ عدد چوب کبریت روی

میز است. بازی به نوبت است و هر کس، در نوبت خود، می‌تواند به تعداد کمتر از ۶ چوب کبریت از کُپه بردارد و یا کمتر از ۶ چوب کبریت به آن بیفزاید (در آغاز بازی، هیچ کدام، چوب کبریت اضافی در اختیار ندارد) و، سپس، تعداد چوب کبریت‌های کُپه، بعد از این حرکت، روی تخته سیاه نوشته می‌شود. کسی بازی را می‌بازد که، بعد از حرکت او، عددی روی تختهٔ سیاه نوشته شود، که قبل آن، روی تخته آمده باشد. اگر هر دو نفر سنجیده بازی کنند، چه کسی بازی را می‌برد، آغاز کنندهٔ بازی یا رقیب او؟

۷۲. همان مسالهٔ ۶۴.

۱۹۹۰

سال ششم

۱. پتیا دفترچه‌ای ۹۶ برگی خرید و صفحه‌های آن را، از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری کرد. واسیا ۲۵ برگ از این دفترچه را، از جاهای مختلف آن جدا کرد و هر ۵۰ شماره‌ای را که روی آن‌ها بود، با هم جمع کرد. ثابت کنید، این مجموع نمی‌تواند برابر ۱۹۹۰ شود.

۲. می‌دانیم، بین ۱۰۱ سکه، یک سکهٔ تقلبی وجود دارد. سکه‌های واقعی وزنی برابر دارند و وزن سکهٔ تقلبی با آن‌ها یکی نیست. چگونه می‌توان با دو بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای و بدون استفاده از وزنه، معلوم کرد که، سکهٔ تقلبی سبک‌تر است یا سنگین‌تر؟

۳. آیا می‌توان مستطیل با اندازه‌های ۳۹ × ۵۵ را به مستطیل‌هایی با اندازه‌های ۱۱ × ۵ تقسیم کرد؟

۴. عدد ۱۲۳۴ روی تختهٔ سیاه نوشته شده‌است. دو نفر با هم بازی می‌کنند. هر کس باید، در نوبت خود، یکی از رقم‌های غیر صفر عدد را از آن کم کند و نتیجه را، به‌جای عدد قبلی بنویسد. کسی برنده می‌شود که، برای

نخستین بار، عدد صفر را روی تختهٔ سیاه بنویسد. چه کسی می‌تواند برنده شود: آن که بازی را آغاز کرده است یا رقیب او؟

۵. پتیا، کولیا و واسیا ۱۰۰ مساله حل کردند؛ در ضمن، هر کدام از آن‌ها، درست ۶۰ مساله را حل کرده بود. مساله را ذشوار می‌نامیم، به شرطی که تنها یک نفر آن را حل کرده باشد و مساله را ساده می‌نامیم، وقتی که هر سه نفر آن را حل کرده باشند. ثابت کنید، تعداد مساله‌های دشوار، درست ۲۰ عدد از تعداد مساله‌های ساده بیشتر بوده است.

۶. در روستای «م»، هر پسر با عده‌ای از دختران آشناست که همهٔ دختران یکدیگر را می‌شناسند. برای هر دختر، تعداد آشناهای پسر، بیشتر از آشناهای دختر اوست. ثابت کنید، در روستای «م»، تعداد پسران کمتر از تعداد دختران نیست.

سال هفتم

۷. «جون» و «مری» در آسمان خراشی زندگی می‌کنند که، در هر طبقهٔ آن، ۱۰ آپارتمان وجود دارد. شمارهٔ طبقهٔ «جون» برابر است با شمارهٔ آپارتمان «مری»، و مجموع شماره‌های آپارتمان‌های آن‌ها برابر است با ۲۳۹. «جون» در چه آپارتمانی زندگی می‌کند؟

۸. ۳۰ صندلی به ردیف گذاشته شده‌است. گاه به گاه کسی وارد می‌شود و روی یکی از صندلی‌های خالی می‌نشیند؛ درضمن، یکی از کسانی که روی صندلی مجاور نشسته است (اگر چنین کسی وجود داشته باشد)، بلند می‌شود از محل بیرون می‌رود. اگر در آغاز، همهٔ صندلی‌ها آزاد باشند، حداکثر چند صندلی ممکن است اشغال شود؟

۹. روی صفحهٔ کامپیوتر، عدد ۱۲۳ نقش بسته است. کامپیوتر، هر دقیقه، ۱۰۲ واحد به عددی که روی صفحه ظاهر شده‌است، اضافه می‌کند. برنامه‌ریز می‌تواند، هر وقت که مایل باشد، رقم‌های عددی را که روی صفحهٔ

کامپیوتر است، جابه‌جا کند. آیا برنامه‌ریز، می‌تواند طوری عمل کند که، روی صفحهٔ کامپیوتر، همیشه یک عدد سه‌رقمی باشد؟

۱۰. در چهارضلعی $ABCD$، می‌دانیم: M وسط پاره‌خط راست AD، N وسط پاره‌خط راست BC و $|AD| = |BC|$. عمود منصف‌های پاره‌خط‌های راست AB و CD، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند. ثابت کنید، نقطهٔ P، روی عمود منصف پاره‌خط راست MN هم واقع است.

۱۱. مربع ۲ × ۲ را به مستطیل‌هایی تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان چند تا از این مستطیل‌ها را انتخاب کرد و روی آن‌ها هاشور زد، به نحوی که تصویر بخش هاشور خورده روی یکی از ضلع‌های مربع، طولی کمتر از ۱ و روی ضلع دیگر مربع، طولی بیشتر از ۱ نداشته باشد.

۱۲. همان مسالهٔ ۶.

۱۳. در بعضی از خانه‌های جدول مربعی ۵۰ × ۵۰، عددهای ۱+ و ۱− را گذاشته‌ایم، به نحوی که قدر مطلق مجموع آن‌ها، از ۱۰۰ تجاوز نکند. ثابت کنید، می‌توان در این جدول، یک مربع ۲۵ × ۲۵ پیدا کرد، به نحوی که قدر مطلق‌های مجموع عددهایی که در خانه‌های آن قرار دارند، از ۲۵ تجاوز نکند.

سال هشتم

۱۴. از یک دفترچه ۹۶ برگی که همهٔ صفحه‌های آن، به ردیف، از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری شده‌است، ۲۴ برگ را جدا کرده و همهٔ ۴۸ شمارهٔ آن را با هم جمع کرده‌ایم. آیا ممکن است عدد ۱۹۹۰ به دست آید؟

۱۵. همان مسالهٔ ۱۰.

۱۶. عددهای طبیعی a، b و c را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$a^۲ + b - c = ۱۰۰,\ a + b^۲ - c = ۱۲۴$$

۱۷. کشوری دارای ۱۰۱ شهر است. شهرها به وسیلهٔ جاده‌هایی به هم مربوط‌اند و، حرکت در همهٔ جاده‌ها، یک طرفه است. هر دو شهر، با بیش از یک جاده به هم مربوط نیستند. در ضمن می‌دانیم، از هر شهر ۴۰ جاده خارج و به هر شهر ۴۰ جاده وارد می‌شود. ثابت کنید، می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت، بدون این‌که بیش از سه جاده مورد استفاده قرار گرفته باشد.

۱۸. بین ۱۰۲ سکه، دو سکهٔ تقلبی وجود دارد که، از لحاظ وزن، با سکه‌های حقیقی فرق دارند. می‌دانیم، وزن دو سکهٔ تقلبی با هم برابر و، همچنین، وزن سکه‌های حقیقی هم با یکدیگر برابر است. چگونه می‌توان با سه بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای و بدون استفاده از وزنه، روشن کرد که، سکهٔ تقلبی، سنگین‌تر است یا سبک‌تر؟

۱۹. در جزیرهٔ «افسانه»، هر شخص یا دروغگوست که همیشه ناراست می‌گوید و یا شوالیه است که همیشه راست می‌گوید. اگر هر جزیره‌نشین، دو جملهٔ زیر را به زبان آورد:

- همهٔ آشنایان من، با هم آشنا هستند؛

- بین آشنایان من، تعداد دروغگوها، کمتر از تعداد شوالیه‌ها نیست.

ثابت کنید، در جزیره، شوالیه‌ها کمتر از دروغگوها نیستند.

۲۰. چند جفت عدد طبیعی (m, n) وجود دارد، به نحوی m و n از ۱۰۰۰ بزرگتر باشند و داشته باشیم:

$$\frac{m}{n+۱} < \sqrt{۲} < \frac{m+۱}{n}$$

سال نهم

۲۱. x و y، دو عدد طبیعی دلخواهند. آیا ممکن است عدد $x! + y!$ به عدد ۱۹۹۰ ختم شده‌باشد (یعنی چهار رقم سمت راست آن ۱۹۹۰ باشد)؟

۲۲. آیا مثلثی وجود دارد که، طول هریک از ضلع‌های آن، عددی درست و طول یکی از میانه‌های آن برابر واحد باشد؟

۲۳. ثابت کنید، در هر تصاعد حسابی، که جمله‌های آن عددهایی طبیعی‌اند، دو جمله پیدا می‌شود که مجموع رقم‌های آن‌ها، یکی است.

۲۴. در چهارضلعی کوژ $ABCD$، زاویهٔ B برابر ۹۰ درجه، قطر AC نیمساز زاویهٔ A و طول قطر AC برابر طول ضلع AD است. در مثلث ADC، ارتفاع DH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، خط راست BH، پاره‌خط راست CD را نصف می‌کند.

۲۵. عددهای حقیقی a، b و c، در بازهٔ $[۰, ۱]$ قرار دارند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{۱+bc}+\frac{b}{۱+ac}+\frac{c}{۱+ab}\leq ۲$$

۲۶. همان مسالهٔ ۳۷ (الف) و ب)).

سال‌های دهم و یازدهم

۲۷. همهٔ جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۶z, \\ y^۲+z^۲=۶x, \\ z^۲+x^۲=۶y \end{cases}$$

۲۸. دایره‌ای که در مثلث ABC محاط است، ضلع AB را به دو پاره‌خط راست AD و DB، به ترتیب، به طول‌های ۵ و ۳ تقسیم کرده‌است. اندازهٔ زاویهٔ A، برابر ۶۰ درجه است. طول ضلع BC را پیدا کنید.

۲۹. همان مسالهٔ ۲۳.

۳۰. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۱. چهار عدد طبیعی مختلف داده شده است. ثابت کنید، دو برابر حاصل ضرب این عددها، از مجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها، بیشتر است.

۳۲. آیا با مربع‌های با طول ضلع ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... می‌توان صفحه را پوشاند، به نحوی که مربع‌ها روی هم قرار نگیرند و، درضمن، از هر نوع مربع حداکثر الف) ۱۰ بار؛ ب) یک بار؛ استفاده شود؟

سال دهم (دبیرستان فیزیک-ریاضی)

۳۳. آیا می‌توان با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (و از هر کدام یک بار)، عددی شش‌رقمی و بخش‌پذیر بر ۱۱ درست کرد؟

۳۴. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۵. چندجمله‌ای f، با ضریب‌های درست داده شده است. می‌دانیم $f(۲)$ بر ۵ و $f(۵)$ بر ۲ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $f(۷)$ بر عدد ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳۶. همان مسالهٔ ۲۵.

۳۷. صفحهٔ شطرنجی ۱۰×۱۰ را با n مربع ۲×۲ پوشانده‌ایم، به نحوی که، هر ضلع هر مربع، در امتداد یکی از خط‌های راست شبکه است. ثابت کنید، یکی از مربع‌ها را می‌توان طوری انتخاب کرد، که بقیهٔ مربع‌ها، از قبل، تمامی شبکه را پوشانده باشند، به شرطی که:

الف) $n = ۵۵$؛

ب) $n = ۴۵$؛

*ج) کوشش کنید، کمترین مقدار ممکن n را پیدا کنید که، به‌ازای آن، حکم مساله درست باشد.

سال یازدهم (دبیرستان فیزیک ریاضی)

۳۸. همان مسالهٔ ۳۳.

۳۹. همان مسالهٔ ۲۴.

۴۰. همان مسالهٔ ۳۵.

۴۱. برای عدد حقیقی و مثبت x می‌دانیم:

$$x^n = x^{n-۱} + x^{n-۲} + \ldots + x + ۱$$

ثابت کنید: $۲ - \frac{۱}{n} < x < ۲$.

۴۲. ثابت کنید، می‌توان فضا را به هشت وجهی‌ها و چهار وجهی‌های منتظم طوری تقسیم کرد که، طول هر یال از هر چندوجهی، عددی درست باشد و، در بین چند وجهی‌ها، نتوان ده چندوجهی پیدا کرد که طول یال‌های آن‌ها با هم برابر باشد.

دور نهایی (سال نهم)

۴۳. برای عددهای طبیعی a و b، می‌دانیم $a^۲+ab+۱$ بر $b^۲+ab+۱$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $a = b$.

۴۴. روی یک پاره‌خط راست، چند پاره‌خط راست کوچکتر وجود دارد، به نحوی پاره‌خط راست اصلی را پوشانده‌اند. ثابت کنید، نیمهٔ چپ این پاره‌خط‌های راست کوچکتر، دست‌کم نیمی از پاره‌خط راست اصلی را می‌پوشانند.

۴۵. نقطهٔ دلخواه P را روی ضلع BC از مربع $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم؛ دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و P می‌گذرد، قطر BD را در نقطهٔ دیگر Q قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطهٔ C، P و Q می‌گذرد، BD را در نقطهٔ دیگر R قطع می‌کند. ثابت کنید، نقطه‌های A، R و P بر یک امتدادند.

۴۶. از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$، همهٔ زیرمجموعه‌هایی را انتخاب

کرده‌ایم که، هیچ کدام، شامل دو عدد مجاور از مجموعهٔ اصلی، نباشند. عددهای هر زیرمجموعه را در هم ضرب کرده‌ایم؛ ثابت کنید، مجموع مجذورهای این حاصل ضرب‌ها برابر است با $(n+۱)! - ۱$.

۴۷. راس‌های یک چهارضلعی محاطی، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ شطرنجی، با خانه‌هایی با ضلع به طول واحد، قرار دارند. می‌دانیم $ABCD$، ذوزنقه نیست. ثابت کنید:

$$||AC|\cdot|AD|-|BC|\cdot|BD||\geq ۱$$

۴۸. در کشور «آب» که شامل دو جمهوری «آ» و «ب» است، هر جاده شامل دو شهر از جمهوری‌های مختلف است. می‌دانیم از هر شهر، بیش از ۱۰ جاده خارج نمی‌شود. ثابت کنید، روی نقشهٔ کشور «آب»، هر جاده را می‌توان، با یکی از ۱۰ رنگ مفروض، طوری رنگ کرد که، هر دو جاده‌ای که از یک شهر خارج می‌شوند، دو رنگ مختلف داشته باشند.

*۴۹. صاحب خانه، برای مهمانان خود، یک نان شیرینی بزرگ پخت. مهمانان او، یا p نفر خواهند بود و یا q نفر. او می‌خواهد، از قبل، نان شیرینی را طوری تقسیم کند (لازم نیست بخش‌های تقسیم، با هم برابر باشند) که، در هر حالت، بتواند آن‌ها را، به طور برابر، بین مهمانان خود قسمت کند. حداقل تعداد بخش‌ها، چقدر است؟

*۵۰. روی محیط دایره‌ای، ۲۰ عدد نوشته شده‌است. می‌توان در هر حرکت، سه عدد x، y و z را که در ردیف هم قرار دارند، برداشت و سه عدد $x+y$، $-y$ و $z+y$ را، با همان ردیف، به جای آن‌ها گذاشت. آیا می‌توان با این عمل‌ها، از گروه عددهای

$$\{۱,۲,۳,\ldots,۹,۱۰,-۱,-۲,\ldots,-۹,-۱۰\}$$

$$\{۱۰, ۹, \ldots, ۲, ۱, -۱۰, -۹, \ldots, -۲, -۱\}$$

رسید؟ ردیف عددها را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به حساب آورید.

دور نهایی (سال دهم)

۵۱. همان مسالهٔ ۴۳.

۵۲. همان مسالهٔ ۴۴.

۵۳. همان مسالهٔ ۴۵.

۵۴. آلیوشا و سه‌ریوژا با هم بازی می‌کنند (حرکت اول را آلیوشا انجام می‌دهد و، حرکت‌ها، به نوبت انجام می‌گیرد). هرکس، در نوبت خود، یکی از خانه‌های جدول ۲۵×۲۵ را رنگ می‌کند؛ درضمن، آلیوشا از رنگ سفید و سه‌ریوژا از رنگ سیاه استفاده می‌کند. آیا آلیوشا می‌تواند طوری بازی کند که، در پایان کار (یعنی وقتی که همهٔ خانه‌ها، رنگی شده‌اند)، بدون بستگی به عمل سه‌ریوژا، مهرهٔ شاه بتواند در همهٔ خانه‌های سفید حرکت کند (در یک خانه، چند بار هم می‌تواند باشد)؟

۵۵. راس‌های چهارضلعی $ABCD$، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ شطرنجی (با خانه‌های به ضلع با طول واحد) قرار دارند. در چهارضلعی، زاویه‌های A و C برابرند، ولی زاویه‌های B و D برابر نیستند. ثابت کنید:

$$||AB| \cdot |BC| - |CD| \cdot |DA|| \geq ۱$$

*۵۶. در قفسه، مجموعهٔ ۱۰۰ جلدی نوشته‌های ل. ن. تولستوی، به صورتی نامنظم چیده شده است. می‌توان دو جلد دلخواه از آن‌ها را، یکی با شمارهٔ زوج و دیگری با شمارهٔ فرد، برداشت و جای آن‌ها را با هم عوض

کرد. دست کم چند بار باید این عمل را تکرار کرد تا، با هر وضع نخستین، جلدهای کتاب، به ردیف شماره‌های خود، در قفسه قرار گیرند؟

*۵۷. چند جمله‌ای $f(x)$، با ضریب‌های درست، داده شده‌است و می‌دانیم، $f(n)$، به ازای هر عدد درست n، بر یکی از عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_m بخش‌پذیر است. ثابت کنید، از بین این عددها، می‌توان یک عدد طوری انتخاب کرد که، به‌ازای هر عدد درست n، چندجمله‌ای $f(n)$ بر آن بخش‌پذیر باشد.

*۵۸. ۲۲ نقطه را روی بازهٔ [۰, ۱] علامت گذاشته‌ایم. می‌توانیم، هر دو نقطه را، با نقطهٔ وسط پاره‌خط راستی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند، عوض کنیم. ثابت کنید، اگر ۲۰ بار این عمل را انجام دهیم، به جایی می‌رسیم که، فاصلهٔ دو نقطهٔ باقی‌مانده، از ۰/۰۰۱ تجاوز نمی‌کند.

دور نهایی (سال یازدهم)

۵۹. A و n، دو عدد طبیعی بزرگتر از واحدند. ثابت کنید، تعداد عددهای طبیعیِ کوچکتر از عدد $A^n - ۱$، به شرطی که دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند، بر n بخش‌پذیر است.

۶۰. روی پاره‌خط راستی، پاره‌خط‌های راست کوچکتری وجود دارند، که پاره‌خط راست اصلی را پوشانده‌اند. از هر کدام از این پاره‌خط‌های راست کوچکتر، نیمی از آن را، نیمهٔ چپ یا نیمهٔ راست، کنار گذاشته‌ایم. ثابت کنید، نیمه‌های باقی‌مانده، دست کم، یک سوم پاره‌خط راست اصلی را می‌پوشانند.

۶۱. آیا روی صفحه، می‌توان یک شش‌ضلعی (که ممکن است کوژ هم نباشد) پیدا کرد، به نحوی که، همهٔ قطرهای آن به‌جز یکی، با هم برابر باشند؟

۶۲. زاویهٔ A از مثلث ABC برابر ۱۲۰ درجه است. نیمسازهای

AF، BG و CH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، زاویهٔ GFH برابر ۹۰ درجه است.

*۶۳. کشوری ۱۰۰ شهر دارد؛ هر دو شهر آن، درست به وسیلهٔ یک جادهٔ یک‌طرفه به هم مربوط‌اند. معلوم شد، با رعایت قانون حرکت، نمی‌توان از هر شهری به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، می‌توان یک شهر را انتخاب و جهت حرکت را در همهٔ جاده‌هایی که به این شهر وارد یا از آن خارج می‌شوند، عوض کرد تا بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر، با رعایت قانون حرکت، رفت.

۶۴. تابع پیوستهٔ $f : R \to R$ چنان است که، برای هر عدد حقیقی x، برابری $f(x + f(x)) = f(x)$ برقرار است. ثابت کنید، f تابع ثابتی است.

*۶۵. روی محیط دایره، چند عدد، که مجموعی مثبت دارند، گذاشته‌ایم. می‌توانیم هر سه عدد ردیف هم x، y و z را برداریم و، به جای آن‌ها، عددهای $x + y$، $-y$ و $z + y$ را (به همان ردیف) بگذاریم. ثابت کنید، به کمک این عمل، از یک گروه عدد انتخابی، تنها به یک گروه عدد می‌توان رسید که همهٔ عددهای آن منفی باشند.

۱۹۹۱

سال ششم

۱. ۴۰ دانش‌آموز، برای «طرح کاد» وارد کارخانه شدند. آن‌ها پیچ، دوراهی و میخ با خود داشتند. نزد ۱۵ نفر از دانش‌آموزان، تعداد میخ‌ها با تعداد دوراهی‌ها برابر نیست. نزد ۱۰ نفر، تعداد میخ‌ها با تعداد پیچ‌ها برابر است. ثابت کنید، دست‌کم ۱۵ دانش‌آموز وجود دارد، که نزد آن‌ها، تعداد پیچ‌ها با تعداد دوراهی‌ها برابر نیست.

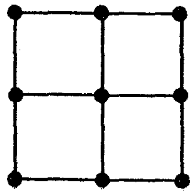
۲. در بازار سیاه می‌توان دو کوپن را با سه کوپن دیگر عوض کرد و برعکس. آیا می‌توان، بعد از جابه‌جایی‌ها، ۱۰۰ کوپن گوشت را با ۱۰۰ کوپن کالباس عوض کرد، به نحوی که در تمام جریان مبادله، ۱۹۹۱ کوپن رد و بدل شده باشد؟

۳. در جادهٔ کمربندی، که به شکل دایره است، در یک لحظه و از یک نقطه، چهار اتومبیل A، B، C و D به راه افتادند؛ A و B در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و C و D در خلاف جهت آن‌ها. سرعت هر اتومبیل، مقدار ثابتی است (ولی ممکن است با هم فرق داشته باشند). می‌دانیم، در همان لحظه‌ای که A و C، برای نخستین بار به هم رسیده‌اند، B و D هم، یکدیگر را ملاقات کرده‌اند. ثابت کنید، در لحظه‌ای که A و B، برای نخستین بار به هم می‌رسند، C و D هم یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

۴. سال‌هاست که بارون «مون‌هاوزن»، هر روز برای شکار اردک، به کنار دریاچه می‌رود. با آغاز اول اوت ۱۹۹۱، هر روز به آشپز خود گفت: «امروز، بیش از دو روز گذشته، ولی کمتر از هفته گذشته، اردک خواهم آورد». بارون، حداکثر چند روز می‌تواند این جمله را بگوید؟ (به یاد داشته باشید که بارون، هرگز دروغ نمی‌گوید!).

۵. سه میلهٔ چوبی، هر کدام به طول یک متر، به رنگ‌های قرمز، سبز و آبی وجود دارد. کولیا دو میله را، هر کدام، به سه بخش تقسیم کرد؛ سپس واسیا میلهٔ سوم را به سه بخش تقسیم کرد. آیا کولیا می‌تواند، میله‌های اول و دوم را طوری تقسیم کند که، بدون بستگی به نوع تقسیم میله سوم به وسیلهٔ واسیا، بتوان از ۹ تکه موجود، سه مثلث ساخت، به نحوی که ضلع‌های هر مثلث با سه رنگ مختلف باشد؟

۶. نه تیم والیبال با هم مسابقه دادند: هر دو تیم در یک مسابقه با هم روبه‌رو شدند. آیا این وضع به ناچار پیش می‌آید که: دو تیم A و B پیدا



شکل ۲۲

می‌شود، به نحوی که، هر تیم دیگری، یا به تیم A باخته است و یا به تیم B؟

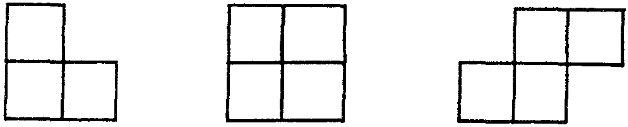
سال هفتم

۷. عددهای از ۱ تا ۱۲ را روی دوازده پاره‌خط راستی که در شکل ۲۲ می‌بینید، طوری قرار دهید که، مجموع عددها روی ضلع‌های هر مربع کوچک، با مجموع عددها روی ضلع‌های هر مربع کوچک دیگر، برابر باشد.

۸. غواصان، تعدادی مروارید به دست آوردند که از ۱۰۰۰ بیشتر نبود. آن‌ها به این ترتیب مرواریدها را بین خود تقسیم کردند. مرواریدها را روی هم ریختند و هر کس، در نوبت خود، یا درست $\frac{۱}{۲}$ و یا درست $\frac{۱}{۳}$ از مرواریدهایی را که مانده بود، برداشت. بعد از آن که غواصان سهم خود را برداشتند، باقی ماندهٔ مرواریدها را به خدای دریا هدیه کردند. دست‌کم چند غواص، در کار به‌دست آوردن مروارید شرکت داشته‌اند؟

۹. ۱۹۹۱ نماینده از چهار قبیلهٔ A، B، C و D، برای مذاکره، دور یک میزگرد نشستند. می‌دانیم، افراد قبیلهٔ A، هرگز کنار افراد قبیلهٔ D نمی‌نشینند؛ همچنین، افراد قبیلهٔ C هرگز کنار افراد قبیلهٔ B نمی‌نشینند. ثابت کنید، دو نماینده از یک قبیله، پهلوی هم نشسته‌اند.

۱۰. در چهارضلعی کوژ $ABCD$، دو زاویهٔ A و B، با هم برابرند.



(۱) (۲) (۳)

شکل ۲۳

همچنین می‌دانیم: $|BC| = ۱$ و $|AD| = ۳$. ثابت کنید، طول ضلع CD از ۲ بیشتر است.

۱۱. مساله‌ای به این صورت داده شده‌است: «n عدد داریم که، مجموع هر ده عدد از آن‌ها، بزرگتر از مجموع بقیهٔ عددهاست. ثابت کنید، همهٔ این عددها مثبت‌اند». می‌دانیم، در صورت مساله، به جای n، عددی طبیعی غیر از ۲۰ بوده‌است، ولی موقع نوشتن مساله، به اشتباه، n آمده است. این عدد چه بوده است؟ آیا باید همهٔ حالت‌ها را پیدا کرد؟

۱۲. در کشوری، هر دو شهر، درست با یک راه، به هم مربوط‌اند: این راه، یا جادهٔ اتومبیل‌رو است و یا خط راه آهن. ثابت کنید، در این کشور، می‌توانیم از هر شهر به هر شهر دیگر، تنها با یکی از دو وسیله، اتومبیل یا راه آهن، برویم، به نحوی که، ضمن راه، حداکثر از دو شهر دیگر عبور کنیم.

۱۳. مربع ۷×۷ را به صورت شکل‌هایی از سه نوع بریده‌ایم (شکل ۲۳). ثابت کنید، در شکل‌های بریده شده، درست یک شکلِ شامل چهار خانه (یعنی شکل نوع (۲) یا نوع (۳)) وجود دارد.

سال هشتم

۱۴. همان مسالهٔ ۹.

۱۵. عدد طبیعی x، که در رقم‌های آن صفر وجود ندارد، در برابری

$$x \cdot \overline{x} = ۱۰۰۰ + p(x)$$

صدق می‌کند. در این‌جا، $\overline{x}$ مقلوب x است (یعنی عددی با همان رقم‌های عدد x، تنها در جهت عکس)، و $p(x)$ عبارت است از حاصل‌ضرب رقم‌های عدد x. همهٔ این‌گونه عددها را پیدا کنید.

۱۶. همان مسالهٔ ۵.

۱۷. از راس A در مثلث ABC، عمودهای AX و AY را بر نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست XY، برابر است با نصف اندازهٔ محیط مثلث ABC.

۱۸. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$\frac{(۲^۳-۱)(۳^۳-۱)\dots(۱۰۰^۳-۱)}{(۲^۳+۱)(۳^۳+۱)\dots(۱۰۰^۳+۱)}=\frac{۳۳۶۷}{۵۰۵۰}$$

۱۹. مربع $(۲n-۱)\times(۲n-۱)$ را به‌صورت همان شکل‌های مسالهٔ ۱۳ بریده‌ایم. ثابت کنید، بین شکل‌های بریده شده، دست کم $۴n-۱$ عدد از شکل نوع (۱) وجود دارد.

۲۰. ۱۰ عدد حقیقی مختلف را انتخاب کرده و آن را A نامیده‌ایم. در A، همهٔ مجموع‌های ممکنِ ۵ عددی را به دست آورده‌ایم و مجموعهٔ آن‌ها را $A(۵)$ نامیده‌ایم. آیا دو انتخاب مختلف A و B وجود دارد، به نحوی که $A(۵)$ و $B(۵)$، دو مجموعهٔ برابر باشند؟

سال نهم

۲۱. a، b و c، عددهایی حقیقی و غیر منفی‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\max(a^۲-b,\ b^۲-c,\ c^۲-a)\geq\max(a^۲-a,\ b^۲-b,\ c^۲-c)$$

در این‌جا، منظور از $\max(x,y,\dots)$، بزرگترین عدد از بین عددهای x، y، ... است.

۲۲. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد و، در ضمن $|AB| > |BC|$. نقطه‌های X و Y را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AB و BC، طوری انتخاب کرده‌ایم که $|AX| = |BY|$. ثابت کنید: $|XY| \geq \frac{1}{2}|AC|$.

۲۳. x و y و z، طول‌های ضلع‌های مثلث، عددهایی درست‌اند؛ درضمن، طول یکی از ارتفاع‌ها، برابر است با مجموع طول‌های دو ارتفاع دیگر. ثابت کنید $x^2 + y^2 + z^2$، مجذور یک عدد درست است.

۲۴. دنبالهٔ عددهای طبیعی (a_n)، به این ترتیب ساخته شده است: هر جمله‌ای که در ردیف زوج باشد، یعنی a_{2n} از روی a_{2n-1}، با کم کردن یکی از رقم‌هایش از آن؛ و هر جمله‌ای که در ردیف فرد باشد، یعنی a_{2n+1}، از جملهٔ a_{2n}، با اضافه کردن یکی از رقم‌هایش به آن، به دست می‌آید. ثابت کنید، جمله‌های این دنباله، از $10a_1$ تجاوز نمی‌کنند.

۲۵. نقطهٔ P در بیرون دایرهٔ به مرکز O واقع است. خط‌های راست L_1 و L_2 را، از نقطهٔ P طوری گذارنده‌ایم که L_1، در نقطهٔ A بر دایره مماس است و L_2، در نقطه‌های B و C دایره را قطع می‌کند. مماس‌های بر دایره، در نقطه‌های B و C، یکدیگر را در X قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط‌های راست AX و PO بر هم عمودند.

۲۶. در یک گرد هم‌آیی، هر نفر دست‌کم با یکی دیگر از شرکت‌کنندگان آشناست؛ درضمن، برای هر دو نفر، نفر سومی وجود دارد که، با این دو نفر، آشنا نیست. ثابت کنید، همهٔ شرکت کنندگان در گرد هم‌آیی را می‌توان به سه گروه طوری تقسیم کرد که، هر شرکت کنندهٔ در گرد هم‌آیی، دست‌کم یک آشنا در گروه خود داشته باشد.

۲۷. عددهای درست را، روی محیط دایره نوشته‌ایم. به این ترتیب، می‌توان عمل کرد: هر عدد زوجی را حذف کرد و، بعد از آن، دو عدد مجاور آن را، با مجموع آن‌ها عوض کرد(شکل۲۴رابببینید). این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که، روی محیط دایره، یا عدد زوجی باقی نماند و یا، تعداد

شکل ۲۴

عددها، برابر ۱ یا ۲ شود. ثابت کنید، تعداد عددهایی که روی محیط دایره باقی می‌ماند، به روش عمل بستگی ندارد، ولی تنها به تبدیل نخستینِ عددها بستگی دارد.

سال دهم

۲۸. عددهای حقیقی و غیر منفی a، b، c و d، داده شده‌است. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\max(a^۲ - b, b^۲ - c, c^۲ - d, d^۲ - a) \geq$$
$$\geq \max(a^۲ - a, b^۲ - b, c^۲ - c, d^۲ - d)$$

۲۹. دو دایره به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$، در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. دایرهٔ $(O_۱BO_۲)$، دایرهٔ دوم را، در نقطهٔ دیگر P قطع می‌کند. ثابت کنید، نقطه‌های $O_۱$، A و P، روی یک خط راست‌اند.

۳۰. در یک گرد هم‌آیی، هر شرکت‌کننده، دست کم با یک نفر آشناست، ولی با همهٔ شرکت‌کنندگان آشنا نیست. ثابت کنید، همهٔ شرکت‌کنندگان در گرد هم‌آیی را، می‌توان به دو گروه چنان تقسیم کرد که، هر شرکت‌کننده، دست کم یک آشنا در گروه خود داشته باشد.

۳۱. تابع پیوسته و اکیداً صعودی f چنان است که: $f(۰) = ۰$ و

$f(۱) = ۱$. ثابت کنید:

$$f\left(\frac{۱}{۱۰}\right)+f\left(\frac{۲}{۱۰}\right)+\ldots+f\left(\frac{۹}{۱۰}\right)+$$
$$+f^{-۱}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)+f^{-۱}\left(\frac{۲}{۱۰}\right)+\ldots+f^{-۱}\left(\frac{۹}{۱۰}\right)\leq\frac{۹۹}{۱۰}$$

۳۲. کامپیوتر می‌تواند، دو عمل زیر را، روی عددهای طبیعی انجام دهد:

الف) آن‌ها را مجذور کند؛

ب) عدد nرقمی $X(n>۳)$ را به عدد $A+B$ تبدیل کند که، در آن، A عبارت است از عدد سه رقمی سمت راست عدد X؛ و B عدد $(n-۳)$ رقمی سمت چپ عدد X است.

آیا می‌توان، با این کامپیوتر، عدد ۷۰۳ را از عدد ۶۰۴، به دست آورد؟

۳۳. خط راست L، نقطهٔ P و nضلعی M، روی یک صفحه‌اند. خط راست L، همهٔ ضلع‌های nضلعی M را در نقطه‌های درونی ضلع‌ها قطع کرده‌است؛ درضمن، این نقطه‌های برخورد، پای عمودهایی هستند که از نقطهٔ P بر ضلع‌های M فرود آمده‌اند. ثابت کنید: $n=۴$.

***۳۴.** خانه‌های یک جدول $N\times N$ را، به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز درآورده‌ایم؛ درضمن، به نحوی که کنار هر خانهٔ قرمز، یک خانهٔ آبی، کنار هر خانهٔ آبی یک خانه سبز و کنار هر خانهٔ سبز، یک خانهٔ قرمز باشد (هر دو خانهٔ متناظر، یک ضلع مشترک دارند). ثابت کنید، اگر تعداد خانه‌های قرمز، برابر k باشد:

الف) $k\leq\frac{۲}{۳}N^{۲}$.

ب) $k\geq\frac{۱}{۱۱}N^{۲}$.

سال یازدهم

۳۵. همان مسالهٔ ۲۸.

۳۶. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را، به سه گروه چنان تقسیم کرد که، مجموع عددهای گروه اول بر ۱۰۲، مجموع عددهای گروه دوم بر ۲۰۳ و مجموع عددهای گروه سوم بر ۳۰۴ بخش‌پذیر باشد؟

۳۷. همان مسالهٔ ۲۵.

۳۸. دنبالهٔ عددهای طبیعی (a_n)، بنابر قاعدهٔ زیر ساخته شده‌است: هر جملهٔ $a_{۲n}$ (جملهٔ ردیف زوج)، با اضافه کردن یکی از رقم‌های $a_{۲n-۱}$ به آن؛ و هر جملهٔ $a_{۲n+۱}$ (جملهٔ با شمارهٔ فرد) از روی $a_{۲n}$، با کم کردن یکی از رقم‌هایش از آن. درضمن، چه برای اضافه کردن و چه برای کم کردن، باید رقمی را انتخاب کرد که برابر صفر نباشد. ثابت کنید، جمله‌های این دنباله، از $۴a_۱ + ۴۴$ تجاوز نمی‌کنند.

۳۹. آیا چهار عدد مختلف می‌توان پیدا کرد، به نحوی که هر دو تا از آن‌ها (x و y)، با این برابری به هم مربوط باشند:

$$x^{۱۰} + x^{۹}y + x^{۸}y^{۲} + \ldots + xy^{۹} + y^{۱۰} = ۱$$

۴۰. نقطه‌های X و Y را، به ترتیب روی ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\widehat{AXY} = ۲\widehat{ACB} \text{ و } \widehat{CYX} = ۲\widehat{BAC}$$

درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\frac{S_{AXYC}}{S_{ABC}} \leq \frac{|AX|^{۲} + |XY|^{۲} + |YC|^{۲}}{|AC|^{۲}}$$

*۴۱. روی سیارهٔ «ترانای»، ۱۹۹۱ شهر وجود دارد که، هر دو تا از آن‌ها، با جاده‌ای به هم مربوط‌اند. هر روز، وزارت راه سه جاده را، برای

مرمت می‌بندد و ادارهٔ راهنمایی، یک جادهٔ باز را، با حرکت یک طرفه اعلام می‌کند. وزارت راه، از بستن جاده‌هایی که یک طرفه اعلام شده‌اند، خودداری می‌کند. ثابت کنید، ادارهٔ راهنمایی، می‌تواند ترتیب کار را طوری بدهد که، رفتن از هر شهر به هر شهر دیگر ممکن باشد، بدون این‌که قانون حرکت در جاده‌های یک‌طرفه به هم بخورد.

دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۴۲. ۷۰ عدد طبیعی مختلف، که هیچ‌کدام از ۲۰۰ تجاوز نمی‌کند، داده شده‌است. ثابت کنید، در بین آن‌ها، دو عدد وجود دارد که به اندازهٔ چهار یا پنج یا نه با هم اختلاف دارند.

۴۳. دو دایره، با شعاع‌های برابر، در نقطه‌های A و B، یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط راست دلخواهی که از نقطهٔ B می‌گذرد، دایره‌ها را در نقطه‌های دیگر X و Y قطع کرده‌است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ وسط پاره‌خط راست XY.

۴۴. عددهای طبیعی $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n چنان‌اند که، به‌ازای هر عدد طبیعی $k < n$، مجموعهٔ هر k عدد، از $k(k-۱)$ تجاوز نمی‌کند؛ درضمن، مجموع همهٔ عددهای A_i، برابر است با $n(n-۱)$. ثابت کنید، در مسابقهٔ فوتبال بین n تیم که، در آن، هر دو تیم یکبار با هم بازی کنند، ممکن است تعداد امتیازهای تیم‌ها، برابر عددهای A_i شود.

۴۵. ۸ عدد طبیعی a_i را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt{\sqrt{a_۱}-\sqrt{a_۱-۱}}+\ldots+\sqrt{\sqrt{a_۸}-\sqrt{a_۸-۱}}=۲$$

۴۶. آیا تابع $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ وجود دارد، به نحوی که برای هر عدد طبیعی x داشته باشیم:

$$f(f(f(\ldots f(x)\ldots)=x+۱$$

که، در آن، f به تعداد $f(x)$ مرتبه تکرار شده است.

*۴۷. ۲۶ رقم غیر صفر را در یک ردیف نوشته‌ایم. ثابت کنید، عددی را که به این ترتیب به دست می‌آید، می‌توان طوری به چند بخش تقسیم کرد که، مجموع عددهایی که در هر بخش به دست آمده است، بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد.

۴۸. قطرهای چهار ضلعی کوژ $ABCD$، در نقطهٔ M، یکدیگر را قطع کرده‌اند. P و Q را مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های ABM و CDM می‌گیریم. ثابت کنید:

$$|AB| + |CD| = ۴|PQ|$$

*۴۹. وقتی از بُر زدن n ورق بازی صحبت می‌کنیم، به این معنا می‌گیریم که، دسته ورق را به تعداد دلخواهی بخش تقسیم کنیم و، بدون این که ردیف ورق‌ها را در درون هر بخش تغییر دهیم، بخش‌ها را به ردیف عکس، روی هم بگذاریم. ثابت کنید، دستهٔ شامل ۱۰۰۰ ورق را، با حداکثر ۵۶ بار بُر زدن، از هر وضعی به هر وضع دیگر تبدیل کرد.

دور نهایی (سال یازدهم)

۵۰. در گوشهٔ بالا و راستِ جدول ۸ × ۸، یک مهره سیاه وجود دارد. در هر حرکت می‌توان، در هر خانه‌ای از جدول، مهرهٔ سفید گذاشت و، درضمن، همهٔ مهره‌هایی را که در همسایگی آن قرار دارند (یعنی با آن، راس مشترکی دارند)، با رنگ متضاد خود عوض کرد (یعنی سیاه را به سفید تبدیل کرد و برعکس). آیا با این روش می‌توان ترتیبی داد که همهٔ خانه‌های جدول را با مهره‌های سفید پر کرده باشند؟

۵۱. وتر AB، دایره را به دو قطعه دایره تقسیم کرده‌است. M و N وسطهای دو کمان AB از دایره‌اند. ضمن دوران دور نقطهٔ A، و به

اندازهٔ زاویه‌ای، نقطهٔ B به B' و نقطهٔ M به M' رفته است. ثابت کنید، پاره‌خط‌های راستی که وسط پاره‌خط راست BB' را به نقطه‌های M' و N وصل می‌کنند، بر هم عمودند.

۵۲. عددهای حقیقی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n در بازهٔ $[-۱, ۱]$ واقع‌اند و مجموع مکعب‌های آن‌ها برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع خود عددها، از $\frac{۱}{۳}n$ تجاوز نمی‌کند.

۵۳. با عدد طبیعی، می‌توان این عمل‌ها را انجام داد:

الف) آن را در یک عدد طبیعی دلخواه ضرب کرد؛

ب) رقم‌های صفر را، در عدد نویسی به مبنای ۱۰ از آن حذف کرد.

ثابت کنید، به کمک این عمل‌ها، می‌توان از هر عدد طبیعی، به یک عدد یک رقمی رسید.

۵۴. دو تابع پیوستهٔ

$$f, g : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$$

مفروض‌اند؛ درضمن تابع f، یکنوا و صعودی است. درستی این نابرابری را ثابت کنید

$$\int_۰^۱ f(g(x))dx \leq \int_۰^۱ f(x)dx + \int_۰^۱ g(x)dx$$

*۵۵. دنبالهٔ باپایان $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را، نسبت به عدد p، «هم وزن» گوییم وقتی که همهٔ مجموع‌های به صورت

$$a_k + a_{k+p} + a_{k+۲p} + \ldots, (k = ۱, ۲, \ldots, p)$$

در این دنباله، با هم برابر باشند. ثابت کنید، اگر دنباله‌ای که شامل ۵۰ جمله است، برای

$$p = ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷$$

«هم وزن» باشد، آن وقت، همهٔ جمله‌های دنباله، باید برابر صفر باشند.

*۵۶. ثابت کنید، $۵۱۲^۳ + ۶۷۵^۳ + ۷۲۰^۳$، عددی مرکب است.

*۵۷. هر انتخابی از n راس $۲n$ ضلعی منتظم را، «نمونه» می‌نامیم. آیا این حکم درست است که: ۱۰۰ دوران $۲n$ ضلعی وجود دارد، به نحوی که تصویرهای «نمونه» در این دوران‌ها (یعنی نقطه‌هایی که از n راس انتخابی، بعد از ۱۰۰ دوران به دست می‌آید)، همه راس‌های $۲n$ ضلعی را می‌پوشانند؟

۱۹۹۲

سال ششم

۱. در دُور مسابقهٔ «خط و نقطه»، برای هر پیروزی یک امتیاز می‌دهند، برای تساوی امتیازی نمی‌دهند و برای باخت، یک امتیاز کم می‌کنند (یعنی امتیاز منفی می‌دهند). چند دانش‌آموز در مسابقهٔ «خط و نقطه» شرکت کردند و هر نفر با هر نفر دیگر، درست یکبار بازی کرد. یکی از دانش‌آموزان ۷ امتیاز و دیگری ۲۰ امتیاز آورد. ثابت کنید، در مسابقه، دست کم یک تساوی بوده است.

۲. قلعه‌ای به شکل هفت ضلعی است و، در هر راس آن، یک برج نگهبانی وجود دارد. هر نگهبانی که در برج انتهای یکی از هفت دیوار قلعه است، از دیوار مراقبت می‌کند. در برج‌ها، دست کم چند نگهبان باید باشد تا هر دیوار حداقل زیر مراقبت هفت نگهبان قرار گیرد؟

۳. عدد طبیعی N داده شده است. ثابت کنید، مجموع رقم‌ها، در دو عدد $N(N-۱)$ و $(N+۱)^۲$ برابر نیست.

۴. در مجموعهٔ سکه‌های «فه‌دیا»، قطر هر سکه از ۱۰ سانتی‌متر تجاوز نمی‌کند. او همهٔ سکه‌های خود را در جعبه‌ای با اندازه‌های ۳۰×۷۰ سانتی‌متری (که در یک ردیف، در کف آن چیده شده است) نگه‌داری می‌کند.

ثابت کنید، «فه‌دیا» می‌تواند، همین سکه‌ها را در یک ردیف، در جعبهٔ با اندازه‌های ۶۰ × ۴۰ قرار دهد.

۵. ۲۷ نقطه، روی محیط دایره‌اند و آن را، به کمان‌های برابر تقسیم کرده‌اند. این نقطه‌ها را، به رنگ‌های سیاه و سفید درآورده‌ایم، به نحوی که، هر دو نقطهٔ سیاه، در مجاورت هم و یا با فاصلهٔ تنها یک نقطهٔ سفید، قرار نگرفته باشند. ثابت کنید، سه نقطهٔ سفید پیدا می‌شود که راس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند (یعنی، محیط دایره را، به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند).

۶. سه متقلب، اسکناس‌های بسیار مختلفی را چاپ کردند؛ هر کدام از سه نفر به ارزش کل ۱۰۰ روبل. می‌دانیم، هر یک از آن‌ها می‌تواند به هر کدام از دو نفر دیگر، از ۱ تا ۲۵ روبل بپردازد (در این پرداخت، ممکن است طرف مقابل ناچار باشد، مبلغی را پس بدهد). ثابت کنید، آن‌ها می‌توانند با هم، هر مبلغی از ۱۰۰ تا ۲۰۰ روبل را بپردازند.

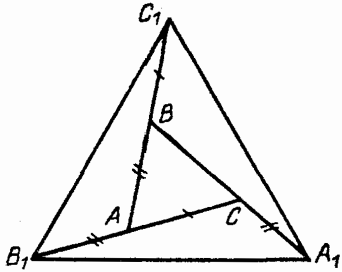
یادداشت: اسکناس‌ها تقلبی‌اند و می‌توانند هر ارزش دلخواهی را داشته باشند. در مساله، همه جا، صحبت بر سر مبلغ‌هایی است که، با تعداد درستی روبل، قابل بیان‌اند.

سال هفتم

۷. ۹ گونه کالا، در اول ژانویه، هر کدام ۱ روبل قیمت داشتند. از این روز به بعد، هر روز، قیمت هر کالا، نسبت به روز قبل، دو یا سه برابر شد. می‌دانیم، در اول فوریه، قیمت همهٔ این کالاها، با هم فرق داشته‌اند. ثابت کنید، در اول فوریه، دو کالا وجود دارد که، قیمت یکی، دست‌کم ۲۵ برابر دیگری است.

۸. برای کدام عددهای طبیعی به صورت ۱۱...۱۱۱، عدد به‌صورت ۱۰۰۰...۰۰۱ وجود دارد که بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد؟

۹. ضلع‌های مثلث ABC را طوری ادامه داده‌ایم که داشته باشیم



شکل ۲۵

(شکل ۲۵):

$$|BC_۱| = |AC|, |AB_۱| = |AB|, |CA_۱| = |AB|$$

اگر مثلث $A_۱B_۱C_۱$ متساوی‌الاضلاع باشد، ثابت کنید، مثلث نخستینِ ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۰. در یک صفحهٔ شطرنجی، ۱۰۰ نقطهٔ گرهی شبکه را نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان در بین نقطه‌های نشان‌دار، دو نقطهٔ A و B را طوری پیدا کرد که مستطیل $AXBY$ با ضلع‌های موازی خط‌های راست شبکه، شامل دست‌کم ۲۰ نقطهٔ نشان‌دار باشد. (گره‌های واقع بر ضلع های مستطیل را هم به حساب آورید).

۱۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} a^۲ + ۳a + ۱ = \frac{۱}{۲}(b + c) \\ b^۲ + ۳b + ۱ = \frac{۱}{۲}(a + c) \\ c^۲ + ۳c + ۱ = \frac{۱}{۲}(a + b) \end{cases}$$

۱۲. همهٔ سکه‌های مجموعهٔ آقای «فه‌دیا» قطری بیشتر از ۱۰ سانتی‌متر

ندارند. او همهٔ سکه‌های خود را در سطح کف جعبه‌ای با اندازه‌های ۳۰×۷۰ سانتی‌متری جا داده است. به او، سکه‌ای به قطر ۲۵ سانتی‌متر هدیه کردند. ثابت کنید، اکنون می‌تواند همهٔ سکه‌های خود را در کف یک جعبه با اندازه‌های ۵۵×۵۵ بچیند.

۱۳. سطح دایره‌ای به n قطاع تقسیم شده و $n + ۱$ قورباغه، به نحوی در آن‌ها نشسته‌اند. هر ثانیه، دو قورباغه‌ای که در یک قطاع باشند، به قطاع‌های مجاور (و مختلف) می‌جهند. ثابت کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسد که قورباغه‌ها، دست کم نیمی از قطاع‌ها را اشغال کرده باشند.

سال هشتم

۱۴. همان مسالهٔ ۷.

۱۵. همان مسالهٔ ۵.

۱۶. در ذوزنقه‌ای، طول یکی از قطرها، با مجموع طول‌های دو قاعده برابر است. اگر زاویهٔ بین دو قطر، برابر ۶۰ درجه باشد، ثابت کنید، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۱۷. همان مسالهٔ ۱۱.

۱۸. دو عدد طبیعی k و n داده شده که، اختلاف آن‌ها، بیشتر از واحد است. می‌دانیم $۴kn + ۱$ بر $k + n$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، دو عدد $۲n - ۱$ و $۲k + ۱$، بخشیاب مشترکی بزرگ‌تر از واحد دارند.

۱۹. خانه‌های مربع ۷×۷ را به دو رنگ درآورده‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم ۲۱ مستطیل وجود دارد که، راس‌های هریک از آن‌ها، در مرکزهای خانه‌های هم‌رنگ واقع است و ضلع‌های موازی با ضلع‌های مربع دارد.

۲۰. همان مسالهٔ ۱۳.

سال نهم

۲۱. دو سه‌جمله‌ای درجه دوم $f(x)$ و $g(x)$، با ضریب بزرگترین درجهٔ واحد، مفروض‌اند. می‌دانیم

$$f(۱۹) + f(۹۲) = g(۱۹) + g(۹۲)$$

به‌ازای چه مقدارهایی از x، برابری $f(x) = g(x)$ برقرار است؟

۲۲. دربارهٔ عدد طبیعی A، می‌توانیم این عمل را انجام دهیم: عدد A را به دو بخش بزرگتر از واحد تقسیم کنیم و، سپس، حاصل ضرب این دو بخش را، به جای عدد A قرار دهیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان از هر عدد بزرگتر از ۴، به توانی از ۱۰ رسید.

۲۳. ۲۰ مکعب برابر، با یال‌های به طول واحد داده شده است. همهٔ ۱۲۰ وجه این مکعب‌ها را به رنگ‌های سیاه و سفید درآورده‌ایم و، درضمن، از هر رنگ، برای ۶۰ وجه استفاده شده‌است. ثابت کنید، این مکعب‌ها را می‌توان روی میز طوری قرار داد که، وجه‌های زیرین آن‌ها، وجه زیرین ۶×۶ یک مکعب بزرگ را تشکیل دهند و، در بین وجه‌های مکعب بزرگ که دیده می‌شوند، تعداد وجه‌های سیاه با تعداد وجه‌های سفید مکعب‌های کوچک، با هم برابر باشند.

۲۴. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند (زاویه‌های به راس‌های B و B' قائمه‌اند؛ راس‌های متناظر دو مثلث، با یک حرف بیان شده‌اند؛ حرکت روی محیط هر مثلث را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته‌ایم). این دو مثلث طوری قرار گرفته‌اند که $A = C'$، و نقطهٔ A' بر نیم‌خط راست $[BC)$، بعد از نقطهٔ C واقع است. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'AC$ روی خط راست $A'B'$ است.

۲۵. در خانه‌های یک جدول شطرنجی $n \times n$، عددهایی گذاشته‌ایم، به نحوی که عدد واقع در خانهٔ محل برخورد iامین ستون و jامین سطر، برابر $\frac{۱}{i + j - ۱}$ باشد. سپس، n رُخ طوری در خانه‌های جدول گذاشته‌ایم

که، هیچ دو رُخی یکدیگر را نزنند. ثابت کنید، مجموع عددهای زیر رُخ‌ها، از واحد کمتر نیست.

۲۶. نقطهٔ D را در درون ضلع AB از مثلث ABC طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$$|AD| : |DC| = |AB| : |BC|$$

ثابت کنید، زاویهٔ ACB منفرجه است.

۲۷. دو عدد ده رقمی A و B چنان‌اند که، برای نوشتن آن‌ها، تنها از رقم‌های ۱ و ۲ استفاده شده‌است. ثابت کنید، تعداد عددهای ۲۰ رقمی که با حذف رقم‌های آن‌ها می‌توان عدد A را به دست آورد، برابر است با تعداد عددهای ۲۰ رقمی که با حذف رقم‌های آن‌ها، عدد B به دست می‌آید.

سال دهم

۲۸. همان مسالهٔ ۲۱.

۲۹. چهار راس و یک نقطهٔ درونی مربع به ضلع واحد را نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، سه نقطهٔ نشان‌دار وجود دارد که، مساحت مثلث با راس‌هایی در این سه نقطه، مساحتی بیشتر از $\frac{۱}{۸}$ ندارد.

۳۰. روی هر یک از $n \geq ۳$ کارت، یک رقم نوشته‌ایم؛ سپس این کارت‌ها را، به همهٔ گونه‌هایی که ممکن است، کنار هم گذاشته‌ایم. به این ترتیب، تعداد $n!$ عدد به دست می‌آید. آیا ممکن است، حاصل‌ضرب این عددها، در عدد نویسی به مبنای ۱۰، تنها با رقم‌های برابر ۱ نوشته شده باشد؟

۳۱. دایره در یک زاویهٔ به راس O محاط شده و در نقطه‌های A و B، بر ضلع‌های زاویه مماس است. نیم خط راست Ox، این دایره را در

نقطه‌های C و D طوری قطع کرده است که

$$|OC| = |CD| = ۱$$

اگر M، نقطهٔ برخورد نیم خط راست Ox با پاره‌خط راست AB باشد، طول پاره‌خط راست OM چقدر است؟

۳۲. ۱۹۹۲ تکه سنگ کوچک، به صورت یک توده روی هم ریخته شده‌است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: هر کس در نوبت حرکت خود، باید تعدادی تکه سنگ را به دلخواه بردارد، تنها تعداد این تکه سنگ‌ها باید بخشیابی از تعداد تکه سنگ‌هایی باشد که رقیب او، در حرکت قبلی برداشته است. کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند، به هر تعداد تکه سنگ بردارد، ولی نه همهٔ آن‌ها را یکباره. کسی بازی را می‌برد که آخرین سنگ را برداشته باشد. اگر بازی سنجیده انجام شود، چه کسی برنده می‌شود؟

۳۳. یک nضلعی منتظم به مرکز O، روی صفحه داده شده است. بردارهای به مبداء O و انتهای یکی از راس‌ها را، به ترتیب و با آغاز از یک راس $\vec{v_۱}$، $\vec{v_۲}$، ...، $\vec{v_n}$ می‌نامیم. ثابت کنید، اگر

$$a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n$$

عددهای حقیقی دلخواهی باشند، آن‌وقت بُردار

$$a_۱ \vec{v_۱} + a_۲ \vec{v_۲} + \ldots + a_n \vec{v_n}$$

برداری غیر صفر است.

*۳۴. در دستهٔ گارد ملی، گروهبان‌ها و سربازان خدمت می‌کنند؛ درضمن، هر سرباز از یک یا دو گروهبان، فرمان می‌برد. ثابت کنید، می‌توان، تا نیمی از دسته را بازنشسته کرد، به نحوی که، هر سرباز باقی‌مانده، درست از یک گروهبان، فرمان ببرد.

سال یازدهم

۳۵. همان مسالهٔ ۳۹.

۳۶. در سه جمله‌ای‌های مختلف و درجه دوم $f(x)$ و $g(x)$، ضریب‌های بزرگترین درجه، برابر واحد است. می‌دانیم

$$f(۱) + f(۱۰) + f(۱۰۰) = g(۱) + g(۱۰) + g(۱۰۰)$$

برابری $f(x) = g(x)$، به ازای چه مقداری از x، برقرار است؟

۳۷. روی محیط دایره، چند مهرهٔ سیاه و، به همان تعداد، مهرهٔ سفید گذاشته‌ایم. تعداد ردیف‌های سه مهره‌ای را که، در آن‌ها، مهرهٔ سفید بیشتر است، A؛ و تعداد ردیف‌های سه‌تایی را که، در هر یک از آن‌ها، تعداد مهره‌های سیاه برتری دارد، B می‌گیریم. ثابت کنید $A \leq ۳B$.

۳۸. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد و، درضمن، متساوی‌الساقین نیست. AD، BE و CF، ارتفاع‌های این مثلث‌اند. نقطه‌های X، Y و Z چنان‌اند که، نقطه‌های D، E و F، به ترتیب، وسط پاره‌خط‌های راست BX، CY و AZ هستند. ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث‌های ACX، ABY و BCZ، راس‌های مثلثی‌اند که با مثلث ABC برابر است.

۳۹. دنبالهٔ (F_n)، به این ترتیب، تعریف شده‌است:

$$F_۰ = ۰,\ F_۱ = ۱,\ F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲} (n > ۱)$$

ثابت کنید، در بین جمله‌های این دنباله، عددهای به صورت ۷^k وجود ندارد.

۴۰. برای عددهای مثبت a، b و c، ثابت کنید:

$$-۱ \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{۱۱} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{۱۱} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^{۱۱} \leq ۱$$

۴۱. همهٔ خانه‌های یک جدول ۱۰×۱۰ را به‌صورت سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم؛ درضمن هم خانه‌های سیاه و هم خانه‌های سفید وجود دارد. ثابت کنید، می‌توانِ در خانه‌های این جدول، عددهای حقیقی را طوری قرار داد که، عدد هر خانهٔ سفید، بزرگتر از میانگین حسابی عددهای خانه‌های مجاور خود، و عدد هر خانهٔ سیاه کوچکتر از میانگین حسابی عددهای خانه‌های مجاور خود باشد (خانه‌هایی را مجاور می‌نامیم که یک ضلع مشترک داشته باشند).

دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۴۲. نقطهٔ D را روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نظر گرفته‌ایم. خط راست موازی AD که از نقطهٔ C گذشته است، خط راست AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$|CE| : |CD| \geq ۲\sqrt{۳}$$

۴۳. به عددی طبیعی، در هر ثانیه، ۵۴ یا ۷۷ واحد اضافه می‌شود. ثابت کنید، بعد از مدتی، به عددی می‌رسیم که، دو رقم سمت راست آن، با هم برابرند.

۴۴. تعداد nk مهره در اختیار داریم که، آن‌ها را، به نحوی، به n بخش کرده‌ایم. می‌توانیم، تعداد مهره‌های هر بخش را، با استفادهٔ دلخواه از مهره‌های بخش‌های دیگر، دو برابر کنیم. به ازای چه مقدارهایی از k، همیشه (یعنی به‌ازای هر n) می‌توان با این عمل، ترتیبی داد که، در همهٔ بخش‌های باقی‌مانده، تعداد مهره‌ها با هم برابر باشند؟

۴۵. ثابت کنید، اگر عدد طبیعی A، مجذور کامل نباشد، می‌توان عدد

طبیعی n را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$A = \left[n + \sqrt{n} + \frac{۱}{۲}\right]$$

۴۶. nضلعی منتظم M را دور مرکز خود و به اندازهٔ زاویه $\frac{\pi}{n}$ دوران داده‌ایم تا چندضلعی M' به دست آید. حداقل چه تعداد چندضلعی کوژ می‌توان از شکل $M \cup M'$ بُرید؟

۴۷. دنبالهٔ (F_n) این‌طور تعریف شده‌است:

$$F_۱ = ۱ \; F_۲ = ۲, \; F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\sqrt[n]{F_{n+۱}} > ۱ + \frac{۱}{\sqrt[n]{F_n}}$$

*۴۸. صفحه را، با ۱۹۹۲ رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم؛ روی این صفحه، مثلث T رسم شده‌است. ثابت کنید، روی صفحه، مثلثی برابر مثلث T پیدا می‌شود که، روی هر دو ضلع آن، نقطه‌هایی از یک رنگ وجود داشته باشد.

*۴۹. ۱۲۸ رقم برابر واحد، روی تخته نوشته شده‌است. در هر حرکت می‌توان، به جای دو عدد a و b، عدد $ab + ۱$ را نوشت. A را بزرگترین عددی بگیرید که، بعد از ۱۲۷ حرکت، روی تخته به‌دست آمده باشد. رقم سمت راست این عدد، چند است؟

دور نهایی (سال یازدهم)

۵۰. n پاره‌خط راست داده شده‌است و می‌دانیم، از هر $n-۱$ پاره‌خط راست دلخواه، می‌توان یک $(n-۱)$ ضلعی درست کرد. ثابت کنید، با سه‌تا از این پاره‌خط‌های راست می‌توان یک مثلث رسم کرد.

۵۱. سه عدد طبیعی چنان‌اند که، اگر به حاصل‌ضرب دو عدد دلخواه از آن‌ها یک واحد اضافه کنیم، عددی به دست می‌آید که بر سومی بخش‌پذیر است. همهٔ این‌گونه سه‌تایی‌ها را پیدا کنید.

۵۲. همان مسالهٔ ۴۵.

۵۳. عددهای طبیعی n و k، با شرط $n > k$ داده شده است. ثابت کنید، هر عدد طبیعی کوچکتر از $\binom{n}{k}$ را می‌توان، درست با یک روش، به صورت مجموع

$$\binom{a_۱}{۱} + \binom{a_۲}{۲} + \ldots + \binom{a_k}{k}$$

نشان داد که، در آن $۰ \leq a_۱ < a_۲ < \ldots < a_k < n$.

۵۴. می‌دانیم، برای هر چهار خط راستی که روی صفحه، در موقعیت کلی هستند (یعنی، هیچ دوتایی با هم موازی نیستند و هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرند)، دایره‌های محیطی چهار مثلثی که، راس‌های آن‌ها، نقطه‌های برخورد این چهار خط راست است، از یک نقطه می‌گذرند. آیا می‌توان دسته‌ای از ۴۵ خط راست در موقعیت کلی پیدا کرد، به نحوی همهٔ دایره‌های محیطی مثلث‌هایی که راس‌های آن‌ها، در نقطه‌های برخورد این خط‌های راست است، از یک نقطه بگذرند؟

۵۵. ۱۰۰ شهر یک کشور، با جاده‌هایی چنان به هم مربوط‌اند که، اگر همهٔ جاده‌هایی را که از یک شهر مثل A خارج شده‌است، ببندیم، باز هم می‌توان از هر شهری به هر شهر دیگر رفت (البته، بدون در نظر گرفتن شهر A). ثابت کنید، این کشور را می‌توان به دو بخش چنان تقسیم کرد که، در

هر بخش، ۵۰ شهر وجود داشته باشد و، درضمن، در هر بخش بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت.

*۵۶. $L(a_1, a_2, \dots, a_k)$ را تعداد روش‌هایی می‌گیریم که، به‌وسیلهٔ آن‌ها، بتوانیم در خانه‌های یک جدول $m \times n$؛ به تعداد a_1 از عدد ۱، به تعداد a_2 از عدد ۲، ...، و به تعداد a_k از عدد k طوری قرار دهیم که، در هر سطر عددها از چپ به راست به طور صعودی غیر اکید و عددهای هر ستون از بالا به پایین به طور صعودی اکید قرار گیرند. ثابت کنید، مقدار تابع L، بستگی به ردیف متغیرهای آن ندارد.

*۵۷. چند دایرهٔ به شعاع واحد، روی صفحه‌ای واقع‌اند. آیا درست است اگر بگوییم، همیشه می‌توان چند نقطه را طوری نشان کرد که، در درون هر دایره، درست یک نقطهٔ نشان‌دار واقع باشد؟

۱۹۹۳

سال ششم

۱. هفت نفر دور یک میز گرد نشسته‌اند؛ هریک از این افراد، یا شووالیه است و فقط راست می‌گوید و یا فقط دروغ می‌گوید. هریک از هفت نفر، مدعی شد: «دو نفری که در کنار من نشسته‌اند، دروغ‌گو و شووالیه هستند». ثابت کنید، همهٔ آن‌ها، دروغ‌گو هستند.

۲. عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را به ردیف صعودی نوشته‌ایم (از چپ به راست). می‌توانیم، هر چند عدد را پاک کنیم و، به‌جای آن‌ها، تعدادشان را بنویسیم (مثلاً، اگر سه عدد ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را پاک کردیم، به‌جای آن‌ها، عدد ۳ را بنویسیم). آیا می‌تواند بعد از چند عمل از این‌گونه، تنها دو عدد ۵۰ و ۵۱ روی تخته باشد؟

۳. چند پسر و پنج دختر پشت میز نشسته‌اند و بشقابی حاوی ۳۰ شیرینی روی میز است. هر یک از دختران، به هر پسری که با او آشنا بود، یک شیرینی داد؛ سپس، هر پسر به هر دختری که با او آشنا نبود، یک شیرینی داد. معلوم شد که بشقاب خالی شده‌است. چند پسر در آن‌جا بوده‌است؟

۴. آیا پنج عدد طبیعی مختلف وجود دارد، به نحوی که حاصل‌ضرب دو عدد بزرگتر، با مجموع هر پنج عدد برابر باشد؟

۵. ترازویی دارای سه کفه است؛ ضمن وزن کردن، آن کفه‌ای پایین می‌آید که در آن، چیزی قرار گرفته باشد که، از لحاظ وزن، برابر میانگین سه چیزی باشد که در کفه‌ها قرار دارند. هفت چیز داده شده‌است که، همهٔ آن‌ها، از نظر وزن با هم اختلاف دارند. چگونه می‌توان، با هشت بار استفاده از این ترازو، چیزی را مشخص کرد که، بین هفت چیز، وزن میانگین دارد؟ هر بار که از ترازو استفاده می‌کنیم، باید در هر کفه، یک چیز را قرار دهیم.

۶. روی یک صفحه، ۱۹۹۳ مثلث داده شده است؛ درضمن می‌دانیم، هر مثلث، دست‌کم شامل چهار راس از مثلث‌های دیگر است. ثابت کنید، سه مثلث وجود دارد که نقطهٔ مشترکی دارند.

سال هفتم

۷. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۶ را در خانه‌های یک جدول مربعی ۴ × ۴ طوری قرار داد که، اگر مجموع عددهای هر ستون و هر سطر را به‌دست آوریم، ۸ عدد طبیعی پشت سر هم داشته باشیم؟

۸. سه مسابقهٔ دُوری شطرنج، بین یک گروه شرکت کننده انجام گرفت. می‌دانیم، هر دو شرکت کننده، هر سه بازی خود را در این مسابقه، به طور مختلف انجام دادند، یعنی با بُرد و تساوی. A در هریک از دو مسابقهٔ اول، کمتر از همه امتیاز آورد. او در مسابقهٔ آخر، چه مقامی را به دست آورده است؟

۹. عددی چهار رقمی را، از وسط، به دو عدد دو رقمی تقسیم کرده‌ایم؛ معلوم شد، عدد چهار رقمی بر مجموع دو عدد دو رقمی، بخش‌پذیر است. آیا ممکن است، این مجموع، برابر ۹۴ باشد؟

۱۰. نقطهٔ O را در درون پنج ضلعی کوژ $ABCDE$ انتخاب کرده‌ایم. معلوم شد، هر پنج مثلثی که، به این ترتیب، به دست می‌آید، با هم برابرند. ثابت کنید، یا همهٔ این مثلث متساوی‌الساقین و یا همهٔ آن‌ها قائم‌الزاویه‌اند.

۱۱. حداکثر مقدار عبارت

$$aek - afh + bfg - bdk + adh - ceg$$

را پیدا کنید، به شرطی که، هر یک از عددهای a، ...، k، برابر ۱ یا ۱− هستند.

۱۲. آدمی را «گوشه‌گیر» می‌نامیم که کمتر از ۱۰ آشنا داشته باشد. آدمی را «عجیب» می‌نامیم که، همهٔ آشنایان او، افراد گوشه‌گیر باشند. ثابت کنید، تعداد آدم‌های عجیب، بیشتر از تعداد آدم‌های گوشه‌گیر نیست.

۱۳. در بعضی از خانه‌های یک جدول مستطیلی، ستاره گذاشته‌ایم. می‌دانیم، برای هر خانهٔ ستاره‌دار، تعداد ستاره‌های واقع در ستون متعلق به آن خانه، با تعداد ستاره‌های متعلق به سطر آن خانه، برابر است. ثابت کنید، تعداد ستون‌هایی از جدول که، در هر کدام از آن‌ها، دست کم یک ستاره وجود دارد، برابر است با تعداد سطرهایی از جدول که، هر یک از آن‌ها، دست‌کم شامل یک ستاره است.

سال هشتم

۱۴. در مسابقهٔ تنیس روی میز، بین دانش‌آموزانی از کلاس ششم و کلاس هفتم، تساوی وجود نداشت؛ درضمن کلاس هفتمی‌ها، دو برابر کلاس ششمی‌ها بودند. می‌دانیم، تعداد پیروزی‌های ششمی‌ها، با تعداد

پیروزی‌های هفتمی‌ها برابر شد. ثابت کنید، دانش‌آموزان کلاس ششم، در مسابقه پیروز شده‌اند.

۱۵. همان مسالهٔ ۳.

۱۶. نقطهٔ M را روی ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کرده‌ایم؛ سپس، ضلع BC را از طرف راس C امتداد داده‌ایم و نقطهٔ N را روی این امتداد طوری نشان گذاشته‌ایم که طول‌های دو پاره‌خط راست BM و MN، برابر باشد. ثابت کنید، دو پاره‌خط راست AM و CN هم، طول‌هایی برابر دارند.

۱۷. عددهای طبیعی x و y چنان‌اند که، مجموع دو کسر

$$\frac{x^{۲}-۱}{y+۱}+\frac{y^{۲}-۱}{x+۱}$$

برابر عددی درست شده است. ثابت کنید، هر یک از این دو کسر، برابر عددی درست است.

۱۸. همان مسالهٔ ۶.

۱۹. نقطهٔ M وسط ضلع BC در چهار ضلعی کوژ $ABCD$ است. می‌دانیم، مقدار زاویهٔ AMD برابر ۱۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$|AB|+\frac{۱}{۲}|BC|+|CD|\geq|DA|$$

۲۰. در یکی از خانه‌های جدول ۷ × ۷، مهره‌ای گذاشته شده‌است. اجازه داریم، پشت سر هم، در خانه‌های خالی جدول مهره‌هایی قرار دهیم، به شرطی که مهره را، در حرکت نوبتی، در خانه‌ای قرار دهیم که تنها یک ضلع مشترک با یک خانهٔ اشغال شده داشته باشد. حداکثر چند مهره می‌توان روی خانه‌های جدول گذاشت؟

۲۱. همهٔ عددهای طبیعی را، که توانی از عدد ۲ هستند، پیدا کنید، به شرطی که بتوان با قرار دادن یک رقم در سمت چپ عدد، باز هم به توانی از عدد ۲ برسیم.

۲۲. چهارضلعی $ABCD$ در یک دایره محاط است. خط‌های راست AB و CD، در نقطهٔ M و خط‌های راست BC و AD، در نقطهٔ N، یکدیگر را قطع کرده‌اند. می‌دانیم $|BM| = |DN|$. ثابت کنید: $|CM| = |CN|$

۲۳. به چند نفر مبلغی ارث رسید که بین خود تقسیم کردند. در این مساله، کسی را «بی‌چیز» می‌نامیم که کمتر از ۹۹ روبل دریافت کرده باشد و، اگر کسی بیش از ۱۰ هزار روبل ارث برده باشد، او را «چیزدار» می‌نامیم. می‌دانیم، هر جور ارث را تقسیم کنند، مقدار پول وارثان «چیزدار»، کمتر از مقدار پول «بی‌چیزان» نیست. ثابت کنید، به هر صورتی که ارث تقسیم شده باشد، مقدار ارثیهٔ «چیزدارها»، دست کم ۱۰۰ برابر، «بی‌چیزان» است.

۲۴. دربارهٔ عددهای طبیعی a، b و c می‌دانیم:

$$ab : (a - b) = c$$

درضمن، می‌دانیم، سه عدد a، b و c، بخشیاب مشترکی جز واحد ندارند. ثابت کنید، $a - b$ مجذور کامل است.

۲۵. چند نقطه روی صفحه داده شده است. می‌توانیم، هر دو نقطهٔ A و B را حذف و، به جای آن‌ها، دو نقطهٔ C و D را بگذاریم، به شرطی که خط راست CD بر خط راست AB عمود، C و D در دو طرف خط راست AB و طول‌های $|AC|$ و $|BD|$، برابر باشد. ثابت کنید، بعد از انجام یک رشته عمل از این‌گونه، نمی‌توانیم دوباره به همان نقطه‌های نخستین برگردیم.

۲۶. درستی نابرابری زیر را، برای عددهای حقیقی و دلخواه x، y و z ثابت کنید:

$$\sqrt[۲]{x+\sqrt[۳]{y+\sqrt[۴]{z}}} \geq \sqrt[۳۲]{xyz}$$

*۲۷. دو ۱۰ ضلعی منتظم داده شده است که در هر راس از هر ده‌ضلعی، یک عدد طبیعی قرار دارد. می‌دانیم، مجموع عددها در هر ۱۰ ضلعی، برابر است با ۹۹. ثابت کنید، در دو چندضلعی، می‌توان چند رأس پشت سر هم را (و نه همهٔ راس‌ها را) طوری انتخاب کرد که، مجموع‌هایی برابر داشته باشند.

سال دهم

۲۸. چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ چنان‌اند که، برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$P(x^۲-x+۱)=Q(x^۲+x+۱)$$

ثابت کنید، هر چندجمله‌ای، مقداری ثابت است.

۲۹. دایره‌ای در درون مثلث ABC طوری رسم شده که بر ضلع‌های AB و BC مماس است و، در ضمن، از نقطهٔ P مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گذرد. دایرهٔ دیگری، از نقطه‌های A، P و C گذرانده‌ایم. ثابت کنید، این دو دایره بر هم مماس‌اند.

۳۰. همان مسالهٔ ۲۳.

۳۱. همان مسالهٔ ۲۴.

۳۲. نقطهٔ M روی قطر AB از دایرهٔ S (و غیر از مرکز دایره) قرار دارد. دو نقطهٔ مختلف P و Q را در یک طرف قطر AB، روی محیط دایره، طوری انتخاب کرده‌ایم که دو زاویه‌ای که PM و QM با قطر AB

می‌سازند، با هم برابر باشند. ثابت کنید، همهٔ خط‌های راست PQ، از یک نقطه می‌گذرند.

۳۳. در جدول مربعی ۱۷ × ۱۷ ، ۸۰ خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم؛ بقیهٔ خانه‌های جدول، سفیدند. اگر بیشتر خانه‌های یک ستون یا یک سطر، به رنگ سیاه باشند، می‌توانیم تمامی آن سطر یا آن ستون را سیاه کنیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، نمی‌توان، همهٔ خانه‌های جدول را سیاه کرد.

*۳۴. در مجموعهٔ M، عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۹۳، عمل با نماد * تعریف شده است که، هر دو عدد a و b از مجموعهٔ M را به عدد $a * b$ متعلق به همان مجموعه منجر می‌کند. می‌دانیم، برای هر دو عدد a و b از مجموعهٔ M داریم:

$$(a * b) * a = b$$

ثابت کنید، عدد a از مجموعهٔ M وجود دارد که، برای آن داشته باشیم:

$$a * a = a$$

سال یازدهم

۳۵. نقطه‌های D و E را، به ترتیب، روی ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|BD| + |DE| = |BC|, |BE| + |ED| = |AB|$$

همچنین می‌دانیم، چهارضلعی $ADEC$، یک چهارضلعی محاطی است. ثابت کنید، مثلث ABC، متساوی‌الساقین است.

۳۶. ثابت کنید، عددی به صورت

$$۳۰۰\ldots۰۱$$

نمی‌توان پیدا کرد که مجذور کامل باشد.

۳۷. تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$، در همهٔ محور حقیقی داده شده است. ثابت کنید، تابع

$$f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

مقداری را، دست کم ۱۹۹۳ بار قبول می‌کند.

۳۸. همان مسالهٔ ۳۲.

۳۹. کشوری دارای n شهر است. برخی از شهرها با جاده‌هایی به هم مربوط‌اند؛ در ضمن، هر دو شهری، حداکثر با یک جاده به هم مربوط‌اند. تعداد جاده‌هایی را که از یک شهر خارج می‌شوند، درجهٔ آن شهر می‌نامیم. $n \geq k \geq ۲$ را عدد طبیعی می‌گیریم. ثابت کنید، می‌توان k شهر پیدا کرد که، درجهٔ آن‌ها نسبت به هم، کمتر از $k - ۱$ با هم اختلاف دارد.

*۴۰. تابع‌های مشتق‌پذیر f و g، در بازهٔ $[۰, ۱]$ داده شده‌اند. درضمن می‌دانیم $f_{(۰)} = f_{(۱)} = ۱$ و $۱۹f'g + ۹۳fg'$، غیر منفی است. ثابت کنید: $g(۱) \geq g(۰)$.

*۴۱. n عددی طبیعی است و، روی تختهٔ سیاه، همهٔ عددهای طبیعی از n تا $۳n - ۱$ را نوشته‌ایم. اجازه داریم، هر دو عدد دلخواه a و b $(a \leq b)$ را از روی تخته پاک کنیم و، به جای آن‌ها، عدد $\frac{۱}{۲}a$ را بنویسیم. ثابت کنید، بعد از یک رشته عمل از این گونه، روی تخته، تنها یک عدد کوچکتر از واحد باقی می‌ماند.

دور نهایی (سال نهم)

۴۲. دنبالهٔ عددهای مثبت (a_k) چنان است که، برای هر k داریم:

$$(a_{k+۱} + k)a_k = ۱$$

ثابت کنید، همهٔ جمله‌های این دنباله، عددهایی گنگ هستند.

۴۳. نقطه‌های D، E و F را روی ضلع‌های AC، AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(|AB| = |BC|)$، طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$$|DE| = |DF| \text{ و } |AE| + |FC| = |AC|$$

ثابت کنید، دو زاویهٔ BAC و FDE برابرند.

۴۴. در خانه‌های ستون چهارم جدول مستطیلی ۶×۷، عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۷ را نوشته‌ایم. آیا می‌توان دیگر خانه‌های جدول را، طوری با عددهای یک رقمی پر کرد که، عددهای ۷ رقمی سطرها به تصاعد حسابی باشند؛ همچنین، عددهای شش رقمی ستون‌ها هم، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند؟

۴۵. ثابت کنید، نمی‌توان مربع را به مثلث‌های متساوالساقینی تقسیم کرد که، زاویهٔ راس هر کدام از آن‌ها، برابر ۱۰ درجه باشد.

۴۶. در خانهٔ $h۸$ از صفحهٔ شطرنج، ستونی از n مهرهٔ مختلف وجود دارد. می‌توانیم مهره‌ها را از ستون برداریم و روی یکی از خانه‌های پایین یا چپ قرار دهیم. درضمن، نمی‌توان مهره را در یک خانهٔ دیگر، مگر خانهٔ $a۱$ گذاشت. بیشترین مقدار n چقدر می‌تواند باشد تا بتوان آن‌ها را از خانهٔ $h۸$ به خانهٔ $a۱$ برد که مهره‌ها به ردیف نخستین باشند؟

۴۷. در یک مسابقهٔ دوری والیبال، ۹۳ تیم شرکت دارند. می‌دانیم، هر ۱۹ تیم دلخواهی را که انتخاب کنیم، در بین آن‌ها، تیمی وجود دارد که از ۱۸ تیم دیگر برده، و تیمی وجود دارد که به همهٔ ۱۸ تیم دیگر باخته است. ثابت کنید، امتیازهای همهٔ تیم‌ها، با یکدیگر فرق دارد.

۴۸. عددی طبیعی را روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. در هر ثانیه، مجموع رقم‌های مرتبه‌های زوج عدد (دهگان، هزارگان و غیره)، به عدد اضافه می‌شود. ثابت کنید، دیر یا زود، تغییر عدد، متوقف می‌شود.

۴۹. چهار نقطه را در درون یک چهار ضلعی کوژ نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌ای روی محیط چندضلعی پیدا می‌شود که مجموع فاصله‌های آن تا راس‌های چهارضلعی، از مجموع فاصله‌های آن تا راس‌های نشان دار، بیشتر باشد.

دور نهایی (سال دهم)

۵۰. نقطه‌های D، E و F را روی ضلع‌های AC، AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(|AB| = |BC|)$ طوری در نظر گرفته‌ایم که پاره‌خط‌های راست DE و DF طولی برابر داشته باشند و، درضمن، دو زاویهٔ BAC و FDE نیز برابر باشند. ثابت کنید:

$$|AE| + |FC| = |AC|$$

۵۱. آیا می‌توان رقم‌های ۱ تا ۹ را در خانه‌های جدول ۱۰ × ۱۰ طوری قرار داد که، همهٔ عددهای ده رقمی سطرها، از عدد ده‌رقمی قطر اصلی بزرگتر باشند و عدد اخیر هم، به نوبهٔ خود، بزرگتر از همهٔ عددهای ده رقمی ستون‌ها باشد.

۵۲. نقطهٔ O، در صفحهٔ مربع $ABCD$ داده شده است. کمترین مقدار این کسر را پیدا کنید:

$$\frac{|OA| + |OC|}{|OB| + |OD|}$$

۵۳. ثابت کنید، تابع $f(x)$ که در $[۰, +\infty]$ تعریف شده، وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$f(f(\ldots(x)\ldots) = \frac{x}{x + ۱}$$

(از نماد f، ۲۳۹ بار استفاده شده است).

۵۴. ۱۹۹۳ نقطه روی صفحهٔ کاغذ نشان گذاشته شده است. بعضی از آن‌ها، به وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست غیر متقاطع به هم وصل شده‌اند؛ در ضمن، این پاره‌خط‌های راست چنان‌اند که، از بین آن‌ها نمی‌توان یک خط شکستهٔ بسته پیدا کرد. دو نفر، به نوبت، هر بار یک مهره روی یکی از نقطه‌ها می‌گذارند؛ درضمن هر کس، باید مهرهٔ خود را در نقطهٔ مجاور نقطه‌ای بگذارد که نفر قبلی مهرهٔ خود را در آن‌جا گذاشته است (نقطه‌ها را، وقتی مجاور می‌دانیم که، به وسیلهٔ یک پاره‌خط راست، به هم وصل شده باشند). کسی که، در نوبت خود، نتواند جایی برای مهرهٔ خود پیدا کند، بازی را باخته است. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کرده است، می‌تواند برنده شود.

۵۵. عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n در بازهٔ بستهٔ $[-۱, ۱]$ واقع‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱ + a_i a_{i+۱}} \geq \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱ + a_i^۲} (a_{n+۱} = a_۱)$$

۵۶. در راس‌های یک nضلعی منتظم، $(n - ۱)$ صفر و یک واحد گذاشته‌ایم. به راس‌های هر k ضلعی منتظم محاط در چندضلعی اصلی، می‌توان یک واحد اضافه کرد. آیا با این عمل، می‌توان همهٔ عددهای واقع در راس‌های n ضلعی را، برابر کرد؟

*۵۷. در دو ظرف، $۲p + ۱$ گلوله وجود دارد. در هر ثانیه، نیمی از گلوله‌های ظرفی را که حاوی تعداد زوجی گلوله است، برمی‌داریم و به ظرف دوم می‌ریزیم. $k < ۲p + ۱$ می‌گیریم و، فرض می‌کنیم، p و $۲p + ۱$، عددهایی اول باشند. ثابت کنید، دیر یا زود، در یکی از ظرف‌ها، درست k گلوله وجود خواهد داشت.

دور نهایی (سال یازدهم)

۵۸. همان مسالهٔ ۴۲.

۵۹. ثابت کنید، تابع $f(x)$، معین در بازهٔ $[0, +\infty]$ وجود دارد که، برای آن داشته باشیم:

$$f(f(\ldots(x)\ldots)) = 1 + x + 2\sqrt{x}$$

(از نماد f، ۴۵ بار استفاده شده است).

۶۰. روی ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC، به ترتیب، نقطه‌های D و F را انتخاب کرده‌ایم. اگر E وسط پاره‌خط راست DF باشد، ثابت کنید:

$$|AD| + |FC| \leq |AE| + |EC|$$

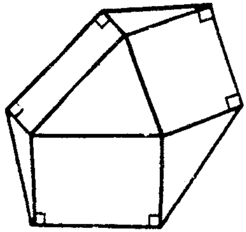
۶۱. در کشور، سه نوع راه وجود دارد که شهرها را به هم مربوط می‌کنند: جادهٔ شوسه، جادهٔ مال‌رو و راه‌آهن. از هر شهر، از هر یک از این سه نوع، درست یک راه خارج می‌شود. می‌دانیم، از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان رسید. ثابت کنید، می‌توان از همهٔ شهرها عبور کرد، بدون این که راهی، در دو جهت مختلف پیموده شود.

۶۲. k می‌تواند عددهای طبیعی از ۱ تا n را اختیار کند. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a_k و b_k، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{AB}{A+B}$$

که در آن $A = \sum a_k$ و $B = \sum b_k$.

***۶۳.** یک شش ضلعی کوژ چنان است که، روی سه ضلع «زوج» آن می‌توان مستطیل‌هایی در درون شش ضلعی طوری ساخت که، راس‌های آن‌ها، به صورتی که در شکل ۲۶ نشان داده شده است، باشند. ثابت کنید، روی سه ضلع دیگر شش ضلعی هم می‌توان چنین مستطیل‌هایی ساخت.



شکل ۲۶

*۶۴. روی محیط هر وجه یک چندوجهی کوژ یک مگس حرکت می‌کند (بنابراین تعداد مگس‌ها، با تعداد وجه‌های چندوجهی، یکی است)؛ همهٔ آن‌ها، مسیر خود را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیمایند. می‌دانیم، سرعت آن‌ها در هر لحظهٔ زمانی، از ۱ میلی‌متر در ساعت کمتر نیست. ثابت کنید، دیر یا زود، هر دو مگس، یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

*۶۵. در کنارهٔ جدول ۱۹۹۳ × ۱۹۹۳، خانه‌های A و B را نشان گذاشته‌ایم که با تعداد فردی خانه از هم جدا شده‌اند. ثابت کنید، تعداد روش‌ها برای پوشاندن جدول، بدون خانهٔ A، با تکه‌های ۲ × ۱، برابر است با تعداد روش‌هایی که برای پوشاندن جدول بدون خانهٔ B، با تکه‌های ۲ × ۱ وجود دارد.

۱.۶۱. *پاسخ.* اولی و دومی، برای به پایان رساندن کار، به اندازهٔ $\frac{۲}{۱۵}$ زمانی وقت لازم دارند، که سومی بخواهد به تنهایی کار را انجام دهد.

۴.۶۱. *پاسخ.* C باید $\frac{۳}{۱۱}$ ساعت قبل از A و B، حرکت کرده باشد.

۵.۶۱. یکی از این شش نفر را درنظر می‌گیریم. روشن است که، این فرد، در بین پنج نفر دیگر، یا سه نفر آشنا و یا سه نفر ناآشنا دارد. بدون این‌که به کلی بودن راه حل لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که او با سه نفر آشنا باشد. A، B و C. اگر از این سه نفر، دو نفر یکدیگر را بشناسند، آن‌وقت با سه نفر روبه‌رو هستیم که دو به دو با هم آشنا هستند. ولی اگر، این سه نفر، با هم ناآشنا باشند، آن‌وقت، با سه نفر (A، B و C) روبه‌رو هستیم که دو به دو با هم ناآشنا هستند.

۷.۶۱. دایرهٔ O را موازی با خط راست L، به اندازهٔ فاصلهٔ مفروض، انتقال می‌دهیم. این عمل، همیشه، به کمک خط‌کش و پرگار ممکن است. دایرهٔ جدید O'، مربع K را قطع می‌کند. هر یک از نقطه‌های برخورد M، یکی از دو انتهای پاره‌خط راست مورد نظر است.

۸.۶۱. *راهنمائی.*

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=۱۱۱(a+b+c)=$$
$$=۳\times ۳۷(a+b+c)$$

۱۰.۶۱. هر انتخاب دلخواه X از $۲n+۱$ چیز، متناظر است با انتخاب Y، که شامل هیچ کدام از چیزهای X نباشد؛ به زبان دیگر، در مجموعهٔ $۲n+۱$ عضوی، می‌توان هر زیرمجموعه را، با زیرمجموعه‌ای که شامل عضوهای زیرمجموعهٔ اول نیست، متناظر کرد. اگر تعداد عضوهای زیرمجموعهٔ X زوج باشد، به‌ناچار، تعداد عضوهای زیرمجموعهٔ Y فرد

است. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد زوج عضوها، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی که تعداد عضوهای هریک، عددی فرد است.

۱۲.۶۱. اگر فرض کنیم: $\sqrt{A}+\sqrt{B}=r_1$، به دست می‌آید.

$$\sqrt{AB}=\frac{1}{2}(r_1^2-A-B)=r_2$$

بنابراین، عددهای $\sqrt{A}$ و $\sqrt{B}$، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

$$t^2-r_1t+r_2=0$$

هستند، یعنی $\frac{1}{2}(r_1\pm\sqrt{r_1^2-4r_2})$. چون

$$4A=(2\sqrt{A})^2=2r_1^2-4r_2+2r_1\sqrt{r_1^2-4r_2}$$

پس معلوم می‌شود که $\sqrt{r_1^2-4r_2}$ عددی گویاست و، بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم هم، عددهایی گویا هستند.

۱۳.۶۱. پاسخ. $\sqrt[3]{4}$.

۱۵.۶۱. از آن‌جا که مجموع n عدد، که هریک از آن‌ها یا برابر ۱ و یا برابر ۱− است، برابر صفر می‌شود، بنابراین، باید تعداد جمله‌های برابر ۱ با تعداد جمله‌های برابر ۱−، مساوی باشد، یعنی $n=2k$. چون، حاصل‌ضرب همهٔ جمله‌ها به‌صورت $(x_1x_2\ldots x_n)^2$ درمی‌آید و، بنابراین، باید مثبت باشد، پس، تعداد جمله‌های منفی باید زوج باشد، یعنی k عددی زوج است و؛ درنتیجه، n بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود.

۱۶.۶۱. *راهنمائی.* با روش استقرای ریاضی روی n. فرض کنید، همهٔ نقطه‌ها، به‌جز یکی (نقطهٔ X)، روی کمان AB باشند که از ۱۲۰ درجه کمتر است (A و B، دو نقطه از نقطه‌های مفروض‌اند). اگر X روی کمان AB باشد، حکم مساله درست است. اگر X روی کمان AB نباشد،

آن‌وقت، یکی از دو کمان XA یا XB شامل کمان AB می‌شودو اندازهٔ بزرگتر از ۱۲۰ درجه پیدا می‌کند.

۱۹.۶۱. همهٔ حالت‌های ممکن وصل نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ n پاره‌خط راست در نظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، آن را انتخاب می‌کنیم که، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست در آن، کمترین مقدار باشد. اگردرمیان آن‌ها، دو پاره‌خط راست AB و OC متقاطع باشند، به‌جای آن‌ها دو پاره‌خط راست AC و BD را درنظر می‌گیریم که، در این صورت، به انتخابی از پاره‌خط‌های راست می‌رسیم که، مجموع طول‌های آن‌ها، کمتر از مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست قبلی است. تناقضی که به‌دست می‌آید، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۲۰.۶۱. *پاسخ*. پاره‌خط راست XY که، در آن، X و Y، جای راس C در حالت‌هایی است که، یکی از نقطه‌های A یا B، روی راس زاویه باشد.

۲۱.۶۱. از برهان خُلف استفاده و فرض می‌کنیم، چنین پوششی ممکن باشد. صفحهٔ شطرنجی مورد نظر را، با خانه‌های سیاه و سفید (مثل صفحهٔ بازی شطرنج) فرض می‌کنیم. هر مهره به صورت شکل ۱ را در این صفحه قرار می‌دهیم. سه خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید، یا سه خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه را می‌پوشاند. از این دو نوع (یعنی مهره‌هایی که سه خانه سیاه و یک خانهٔ سفید را می‌پوشانند و مهره‌هایی که روی سه خانهٔ سفید یک خانه سیاه قرار می‌گیرند)، باید به تعداد برابر داشته باشیم، زیرا در صفحهٔ شطرنجی، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های سفید برابر است. ولی این ممکن نیست، زیرا بیش از ۲۵ مهره از این نوع نداریم.

۲۲.۶۱. چون k و m نسبت به هم اول‌اند، عددهای درست a و b را می‌توان طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$ka + mb = -۱$$

دو طرف این برابری را در n ضرب می‌کنیم:

$$kna + mnb = -n$$

بنابراین $m(nb) + n$ بر k بخش‌پذیر است.

۲۳.۶۱. همهٔ این عددها، مجذور عددهایی به این صورت‌اند:

$$۳۳۳\ldots۳۳۴$$

۲۵.۶۱. *پاسخ.* $۳a$. *راهنمائی.*

$$\frac{a^۲ + x^۲}{x} = a\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \geq ۲a$$

۲۶.۶۱. فرض کنید $p = \frac{r}{s}$ که، در آن r و s، عددهایی درست و نسبت به هم اول‌اند. اگر مقدار p را در چندجمله‌ای قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$r^n + a_۱ r^{n-۱} s + \ldots + a_n s^n = ۰$$

چون با آغاز از جملهٔ دوّم، همهٔ جمله‌ها بر s بخش‌پذیرند، بنابراین جملهٔ اول، یعنی r^n هم باید بر s بخش‌پذیر باشد. ولی، r و s نسبت به هم اول‌اند، بنابراین به‌ناچار باید داشته باشیم: $s = ۱$، یعنی p، عددی درست است.

از نتیجه‌گیری بالا روشن می‌شود که $f(x)$ بر $x - p$ بخش‌پذیر است:

$$f(x) = (x - p) \cdot g(x)$$

و اگر $x = m$ بگیریم

$$f(m) = (m - p) \cdot g(m)$$

یعنی $f(m)$ بر $m-p$ یا $p-m$ بخش‌پذیر است.

۲۸.۶۱. روشن است که، اگر بخواهیم مجموع زاویه‌های سفید یا مجموع زاویه‌های سیاهی که، در یک راس مکعب، راس مشترک دارند، با هم برابر شوند، باید از راس مکعب، یا تنها یک قطر وجه بگذرانیم و یا هر سه قطر. آزمایش نشان می‌دهد که، در بین ۸ راس مکعب، درست دو راس وجود دارد که از آن‌ها، سه قطر وجه‌ها می‌گذرد. اکنون دیگر به سادگی روشن می‌شود که، تنها دو نوع رنگ‌آمیزی وجود دارد که، ضمن دوران مکعب، بر هم منطبق نمی‌شوند.

۲۹.۶۱. *راهنمائی.* ثابت کنید، زمانی که حلزون ضمن حرکت «به جلو ـ به عقب» لازم دارد، برابر است با زمانی که برای حرکت «به راست ـ به چپ» نیاز دارد و، هریک از این مقدارها، با تعداد درستی «نیم ساعت» بیان می‌شود.

۲.۶۲. *پاسخ.* تنها بخشیاب‌های مشترک آن‌ها، برابر است با ۱ و ۲.

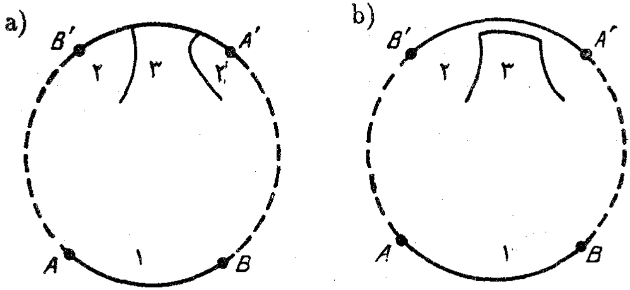
۳.۶۲. *پاسخ.* ۲۳ سال.

۵.۶۲. *راهنمائی.* اول ثابت کنید، اسب بازی شطرنج، می‌تواند از همهٔ خانه‌های حاشیهٔ به پهنای چهارخانه‌ای صفحهٔ شطرنجی بگذرد، سپس، با روش استقرای ریاضی، ثابت کنید که، این حرکت، برای هر صفحهٔ شطرنجی $(۴n+۱)\times(۴n+۱)$ وجود دارد.

۶.۶۲. نه، نمی‌تواند. دست کم، یکی از دو رقم سمت راست هر عدد مجذور کامل، باید زوج باشد.

۱۰.۶۲. *راهنمائی.* از این مطلب استفاده کنید که، عدد $۱۰^۶-۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۱۱.۶۲. انتهای منحنی‌هایی که مرز بخش‌ها را مشخص می‌کنند، محیط دایره را به چند کمان تقسیم می‌کنند. یکی از آن‌ها، مثلاً کمان AB را درنظر می‌گیریم که به رنگ اول درآمده باشد. کمان رو به روی آن $A'B'$ (A و



شکل ۲۷

A' و، همچنین B و B'، دو سر یک قطراند)، ممکن است شامل ۰، ۱ یا چند نقطهٔ تقسیم باشد. اگر نقطه‌های تقسیم، بیش از دو تا باشند، نقشهٔ b، چیزی شبیه شکل ۲۷ـa درمی‌آید. در این صورت، می‌توانیم بخش‌های دایره را آن‌طور که در شکل b دیده می‌شود تغییر دهیم که درنتیجه، تعداد نقطه‌های تقسیم کاهش می‌یابد. اگر روی کمان $A'B'$، نقطهٔ تقسیمی وجود نداشته باشد، آن‌وقت این کمان، به طور کامل، در درون کمان CD قرار دارد که، در آن C و D، دو نقطهٔ تقسیم‌اند. در این صورت، A و B در درون کمان $C'D'$ قرار می‌گیرند و می‌توان همان عمل بالا را دربارهٔ آن‌ها انجام داد. با کم کردن تعداد نقطه‌های تقسیم روی محیط دایره، می‌توان سرانجام به تقسیمی از بخش‌ها رسید که، برای هر کمان AB (هریک از دو نقطهٔ A و B، انتهای یکی از مرزهای بخش‌هاست)، روی کمان $A'B'$، درست انتهای یک منحنی مرزی وجود داشته باشد. از این‌جا، به سادگی نتیجه می‌شود که، تعداد کل انتهای منحنی‌ها، عددی فرد است که ممکن نیست.

۱۲.۶۲. چون $O_۱$، $M_۱$، $O_۲$ و $M_۲$، نقطه‌های وسط ضلع‌های چهارضلعی $ADLC$ هستند، پس $O_۱M_۱O_۲M_۲$ متوازی‌الاضلاع است. تنها، این می‌ماند که ثابت کنیم، پاره‌خط‌های راست AL و CD، طولی برابر دارند و بر هم عمودند. در واقع، آن‌ها از یکدیگر، ضمن دوران دور

نقطهٔ B به اندازهٔ ۹۰ درجه به‌دست می‌آیند.

۱۳.۶۲. مرکزهای دایره‌ها را A، B، C و D می‌نامیم. K، L، M و N، نقطه‌های تماس دایره‌ها؛ به‌ترتیب روی پاره‌خط‌های راست AB، BC، CD و DA واقع‌اند و داریم:

$$\widehat{NKL} = ۱۸۰^\circ - \left(۹۰^\circ - \frac{\widehat{NAK}}{۲}\right) - \left(۹۰^\circ - \frac{\widehat{KBL}}{۲}\right) =$$
$$= \frac{۱}{۲}(\widehat{DAB} + \widehat{ABC})$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\widehat{MNL} = \frac{۱}{۲}(\widehat{ADC} + \widehat{DCB})$$

بنابراین، مجموع دو زاویهٔ $\widehat{NKL} + \widehat{NML}$، برابر با نصف مجموع زاویه‌های چهارضلعی $ABCD$، یعنی برابر ۱۸۰ درجه می‌شود؛ و این، به معنای آن است که چهارضلعی $KLMN$، قابل محاط در دایره است.

۱۴.۶۲. اثبات، از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$(x^۲ - ۵y^۲)(a^۲ - ۵b^۲) = (ax + ۵by)^۲ - ۵(ay + bx)^۲$$

۱۵.۶۲. پاسخ.

$$x = -\frac{۳}{۲}d + \sqrt{\frac{۵}{۴}d^۲ \pm \sqrt{d^۴ + a}}$$

۱۶.۶۲. این دو بردار را درنظر می‌گیریم.

$$\mathbf{V}_۱ = (a, b, c); \quad \mathbf{V}_۲ = (m, n, p)$$

بنابر شرط مساله، طول هریک از این دو بردار برابر واحد و، بنابراین، قدرمطلق مقدار حاصل ضرب عددی (اسکالر) آن‌ها، یعنی $am + bn + cp$، از حاصل‌ضرب طول‌های آن‌ها، یعنی ۱، تجاوز نمی‌کند.

۲۰.۶۲. *راهنمائی.* مقدار چندجمله‌ای را به‌ازای $x = -۱$ به‌دست آورید.

۲۱.۶۲. این عددها را درنظر می‌گیریم:

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱}_{\text{رقم } p+۱}$$

چون تعداد آن‌ها، از p بیشتر است، پس، از تقسیم دوتا از آن‌ها بر p، به یک باقی‌مانده می‌رسیم. تفاضل این دو عدد، به‌صورت

$$۱۱۱\ldots۱۱۰۰۰\ldots۰۰$$

است. ولی چون p و ۱۰ نسبت به هم اول‌اند، عدد

$$۱۱۱\ldots۱۱$$

هم بر p بخش‌پذیر است.

۲۴.۶۲. مختصات نقطهٔ مفروض را (m, n) می‌گیریم. از چهار راس مربع، نقطه‌ای را، با مختصات (x, y)، طوری انتخاب می‌کنیم که عددهای $m - x$ و $n - y$، فرد باشند. در این صورت، عدد

$$(m - x)^۲ + (n - y)^۲$$

نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد، زیرا به‌صورت $۴k + ۲$ است.

۲۵.۶۲. اگر دو برابر مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی عددها را، از مجذور مجموع این عددها کم کنیم، مجموع مجذورهای عددها، برابر با صفر می‌شود و، بنابراین، هریک از ده عدد، باید برابر صفر باشند.

۲۸.۶۲. حل این مساله، کاملاً شبیه حل مسالهٔ ۱۹.۶۱ است.

۲۹.۶۲. صندوق را کوچک می‌نامیم، به‌شرطی که وزن آن از ۳۰۰ کیلوگرم تجاوز نکند. روشن است که بقیهٔ صندوق‌ها، بیش از ۴۴ عدد نیست و ما می‌توانیم، آن‌ها را در ۱۱ کامیون یک تن‌ونیمی (در هر کامیون ۴ صندوق) بار کنیم. باید ثابت کنیم، صندوق کوچک را، همیشه می‌توان در یکی از کامیون‌ها جا داد. درواقع، اگر چنین نباشد، به معنای آن است که در هریک از ۱۱ کامیون، بیش از $(۱۵۰۰ - a)$ کیلوگرم بار وجود دارد که، در آن، a، وزن صندوق کوچک است. ولی در این صورت، مجموع بار ۱۱ کامیون، از

$$(۱۶۵۰۰ - ۱۱a) \text{ کیلوگرم}$$

تجاوز می‌کند، درحالی که نباید از $(۱۳۵۰۰ - a)$ کیلوگرم تجاوز کند. ولی این، متناقض با آن است که فرض کرده بودیم. $a \leq ۳۰۰$.

۳۱.۶۲. حل مسالهٔ ۲۵.۶۲ را ببینید.

۳۳.۶۲. *پاسخ.* ± ۱ و $\frac{۱}{۲۵}(۳۶ \pm \sqrt{۶۷۱})$.

۳۴.۶۲. *پاسخ.* این مکان هندسی، عبارت است از پاره‌خط راستی که دو انتهای آن، روی دو ضلع زاویه است. نقطه‌های انتهایی این پاره‌خط راست، به‌صورتی روشن، باتوجه به شرط مساله به‌دست می‌آیند.

۳۵.۶۲. *پاسخ.* مجموع برای $n > ۱$ برابر صفر و برای $n = ۱$، برابر $-x$ است.

۳۶.۶۲. *پاسخ.* $x_۱ = x_۲ = ۱$ و، برای $k > ۲$، $x_k = k$.

۳۷.۶۲. اثبات با برهان خُلف. فرض می‌کنیم، چنین رنگ‌آمیزی ممکن باشد؛ درضمن، وجه خاصی که در صورت مساله، استثنا شده‌است، رنگ سفید داشته باشد. اگر مجموع ضلع‌های وجه‌های سیاه رنگ را درنظر بگیریم، عددی به‌دست می‌آید که، از یک طرف، معرف تعداد همهٔ یال‌های چندوجهی

و، از طرف دیگر، بخش‌پذیر بر عدد طبیعی n است. به همین ترتیب، اگر مجموع ضلع‌های همهٔ وجه‌های سفید را درنظر بگیریم، باید همان تعداد یال‌های چندوجهی به‌دست آید، ولی بر عدد طبیعی n، بخش‌ناپذیر باشد. تناقض حاصل، به معنای آن است که، چنین رنگ کردنی، ممکن نیست.

۴۰.۶۲. *راهنمائی.* ثابت کنید، چندجمله‌ای بر $x - a$ بخش‌پذیر است که، در آن، a عبارت است از ریشهٔ دلخواه مختلطی از معادلهٔ $x^k = ۱$.

۴۲.۶۲. *پاسخ.* این مجموع، برای $n > ۲$ برابر صفر، برای $n = ۱$ برابر -۱ و برای $n = ۲$ برابر ۲ می‌شود.

۴۷.۶۲. فرض می‌کنیم، چنین وتری وجود نداشته باشد. از هر راس چندضلعی، خط راستی موازی با ضلع مورد نظر مربع، رسم می‌کنیم. این خط‌های راست، چندضلعی را به مثلث‌ها و ذوزنقه‌هایی تقسیم می‌کنند که طول قاعدهٔ هیچ‌کدام از آن‌ها، از $\frac{۱}{۲}$ تجاوز نمی‌کند. از آن‌جاکه، مجموع طول‌های ارتفاع‌ها، در این مثلث‌ها و ذوزنقه‌ها، از ۱ تجاوز نمی‌کند، بنابراین، از مجموع نابرابری‌های مربوط به مساحت‌ها، معلوم می‌شود که مساحت تمام چندضلعی، نمی‌تواند از $\frac{۱}{۲}$ بیشتر باشد که، با فرض مساله، متناقض است.

۴۸.۶۲. برای این که سطح دایرهٔ به شعاع ۲ را بپوشانیم، محیط آن را به شش کمان برابر تقسیم می‌کنیم و، نقطه‌های تقسیم را A، B، C، D، E و F می‌نامیم. سپس، شش دایره، به شعاع واحد و، به‌ترتیب، به قطرهای AB، BC، CD، DE، EF و FA رسم می‌کنیم. اکنون، اگر دایرهٔ هفتم را، به مرکز نقطهٔ مرکز دایره بزرگتر رسم کنیم، تمامی سطح دایرهٔ به شعاع ۲، با هفت دایرهٔ به شعاع واحد پوشیده می‌شود.

دایره‌ای با شعاع بزرگتر از ۲ را نمی‌توان پوشاند، زیرا یکی از دایره‌ها، باید مرکز دایرهٔ بزرگتر را دربر گرفته باشد و، بنابراین، نمی‌تواند محیط دایرهٔ بزرگتر را قطع کند. دایرهٔ به شعاع بزرگتر از ۲، به‌وسیلهٔ شش دایره پوشانده

شده است که هرکدام از آن‌ها، کمانی کوچکتر از $\frac{۱}{۶}$ محیط دایرهٔ بزرگتر را جدا می‌کنند و این، به معنای آن است که بخشی از محیط دایرهٔ بزرگتر (هرقدر هم که کوچک باشد)، زیر پوشش قرار نمی‌گیرد.

۴۹.۶۲. *راهنمائی.* این نتیجه را می‌توان از نابرابری زیر نتیجه گرفت.

$$۵ \geq S_۱ + \ldots + S_۹ - S_{۱۲} - S_{۲۳} - \ldots - S_{۸۹}$$

که در آن، S_i مساحت i امین چندضلعی و S_{ij}، مساحت بخش مشترک چندضلعی iام با چندضلعی Jام است.

۵۲.۶۲. این دنباله را که شامل k جمله است، درنظر می‌گیریم:

$$x_۱, x_۱ + x_۲, \ldots, x_۱ + x_۲ + \ldots + x_k$$

($x_۱$، $x_۲$، ...، x_k، همان k عدد درست انتخابی هستند). اگر هیچ‌کدام از جمله‌های این دنباله، بر k بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت دو جملهٔ آن، در تقسیم بر k، به باقی‌مانده‌های برابر می‌رسند و، درنتیجه، تفاضل آن‌ها، بر k بخش‌پذیر است. و این تفاضل، خود مجموعی از چند جملهٔ دنباله است.

۱.۶۳. *پاسخ.* ۱۰ کیلومتر.

۲.۶۳. *پاسخ.* ۳۰ کیلومتر در ساعت.

۳.۶۳. *راهنمائی.* رقم سمت راست هریک از عددها را پیدا کنید.

۴.۶۳. راه حل مسالهٔ ۱۳ را ببینید.

۵.۶۳. این نابرابری روشن است:

$$|CD| \leq |CB| + |BA| + |AE| + |ED|$$

ولی، هر دو طرف نابرابری، بنابه فرض، برابر ۲۳۶ است. بنابراین، باید نقطه‌های C، B، A، E و D روی یک خط راست باشند و، درنتیجه، فاصلهٔ E تا C برابر ۱۵۰ کیلومتر شود.

۶.۶۳. نه، نمی‌شود. *راهنمائی*. به تعداد عددهای زوج توجه کنید.

۷.۶۳. *پاسخ*. ۳۰ درجه.

۸.۶۳. این عدد، بر ۳ بخش‌پذیر است.

۹.۶۳. دو حالت برای تقسیم امتیازها وجود دارد: نفر بیستم، یا ۰ و یا ۰/۵ امتیاز و نفر اول (یا یکی از نفرهای اول) ۱۰/۵ یا ۱۰ امتیاز و بقیه هرکدام ۱۰ امتیاز.

۱۰.۶۳. $ABCD$ را چهارضلعی مفروض و M، N، P و Q را، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AB، BC، CD و DA می‌گیریم. این برابری‌های بُرداری روشن‌اند:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = ۲\,\overrightarrow{QN};\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = ۲\,\overrightarrow{MP}$$

بنابراین، برابری

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DA| = ۲(|QN| + |NP|)$$

تنها وقتی برقرار می‌شود که بردارهای $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{DC}$، و $\overrightarrow{BC}$ با $\overrightarrow{AD}$ موازی باشند که، دراین صورت، $ABCD$، متوازی‌الاضلاع است.

۱۱.۶۳. روشن است، بعد از پرداخت پول بلیت، باید هر مسافر، دست کم یک سکه داشته باشد. از طرف دیگر، باید ۲ روبل به صندوق اتوبوس داده شود، یعنی دست‌کم ۱۰ سکه. بنابراین، روی هم ۵۰ سکه لازم است.

۱۲.۶۳. *پاسخ*. $A = ۱۰$.

۱۳.۶۳. اگر دو خانهٔ جدا شده، هردو سفید یا هردو سیاه باشند، پاسخ منفی است. در واقع، هر مهرهٔ دو خانه‌ای، یک خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه را می‌پوشاند و، بنابراین، باید تعداد خانه‌های سفید با تعداد خانه‌های سیاه

برابر باشد. درحالی که، اگر دو خانهٔ همرنگ را جدا کرده باشیم، برابری تعداد خانه‌های سفید با تعداد خانه‌های سیاه، به هم می‌خورد.

اگر یک خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه از صفحه جدا کرده‌باشیم، مساله پاسخ مثبت دارد. با آزمایش و انتخاب حالت‌های مختلف، موضوع روشن می‌شود.

۱۵.۶۳. همهٔ زوج‌های (x, y) را درنظر می‌گیریم که، در آن، x و y، دو رقم پشت سر هم از کسر دهدهی مفروض است. چون تعداد آن‌ها، بی‌نهایت است، بنابراین بین آن‌ها، دو زوج یکسان پیدا می‌شود. اگر به رقم‌های پشت سرهم قبل از آن‌ها مراجعه کنیم، می‌توان یکی از این زوج عددها را برابر (a, b) دانست. از آن‌جا که، این زوج، در جای دیگری تکرار شده‌است، بنابراین، با آغاز از آن، همهٔ رقم‌های بعدی تکرار می‌شوند، یعنی کسر دهدهی، دوره‌ای ساده است.

۱۶.۶۳. *پاسخ.* $۲n + ۲$. *راهنمائی.* تعداد نقطه‌های برخورد دو چندضلعی را ارزیابی کنید.

۱۷.۶۳. در تقسیم یک عدد درست مجذور کامل بر ۹، یکی از عددهای ۰، ۱، ۴ یا ۷ به‌عنوان باقی‌مانده به‌دست می‌آید. بنابراین، سه عدد مجذور کامل، که در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده‌های مختلف داشته باشند، نمی‌توانند مجموعی بخش‌پذیر بر ۹ پیدا کنند.

۱۸.۶۳. *راهنمائی.* باقی‌مانده‌هایی را که از تقسیم یک عدد بر $۲k$ می‌تواند به‌دست آید، به‌این ترتیب، دوبه‌دو، در نظر بگیرید:

$$(۱, ۲k - ۱); (۲, ۲k - ۲); \ldots ; (k - ۱, k + ۱)$$

که اگر ۰ و k را هم به حساب آورید، روی هم $k + ۱$ انتخاب از باقی‌مانده‌ها خواهید داشت. ولی از تقسیم $k + ۲$ عدد بر $۲k$، $k + ۲$ باقی‌مانده به‌دست می‌آید. بنابراین، دوتا از آن‌ها، با یکی از انتخاب‌های ما تطبیق می‌کنند.

۱۹.۶۳. پاسخ. اگر O مرکز دایرهٔ مفروض، R مقدار شعاع آن و C، راس زاویهٔ قائمه باشد، آن‌وقت، مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای است که، مرکز آن، در وسط پاره‌خط راست OC قرار دارد و شعاع آن، برابر است با $\sqrt{2R^2 - |OC|^2}$.

۲۰.۶۳. داریم:

$$\overline{bcdea} = 10\overline{abcde} + a - 100000a =$$
$$= 10\overline{abcde} - 99999a$$

ولی ۹۹۹۹۹ بر ۴۱ بخش‌پذیر است، پس $\overline{bcdea}$ هم بر ۴۱ بخش‌پذیر خواهد بود. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود، عددی که از تبدیل دوری عدد اخیر به‌دست می‌آید، یعنی $\overline{cdeab}$، بر ۴۱ بخش‌پذیر است و غیره.

۲۱.۶۳. جمله‌های نابرابری را، به زوج‌هایی، به این صورت تقسیم می‌کنیم:

$$a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$$

این نابرابری درست است، زیرا برای هر i و j داریم:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

از مجموع همهٔ این‌گونه نابرابری‌ها، به نابرابری موردنظر می‌رسیم.

۲۳.۶۳. دو دایره را، یکی فرض می‌کنیم و به‌جای قرار دادن بر یکدیگر، از دوران دایره استفاده می‌کنیم. همهٔ زاویه‌های ممکن دوران را، به عنوان عددهایی از بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ درنظر می‌گیریم، یعنی مقدار دوران، با طول کمانی اندازه گرفته می‌شود که، نقطه‌ای از محیط دایره را، ضمن آن جابه‌جا می‌کند.

برای هر نقطهٔ نشان‌دار، مجموعهٔ زاویه‌هایی از این بازه را جدا می‌کنیم که، دوران به اندازهٔ آن، نقطهٔ ما را در درون یکی از کمان‌ها قرار دهد. هریک

از این مجموعه‌ها، از چند بازه تشکیل شده است که مجموع آن‌ها، طول کمتر از $\frac{۱}{۲۰}$ دارد. چون تعداد این‌گونه مجموعه‌ها، برابر است با ۲۰، پس روی‌هم نمی‌توانند بازهٔ $[۰, ۱]$ را بپوشانند و، بنابراین، دورانی وجود دارد که، به‌ازای آن، هیچ کدام از نقطه‌های ما، در درون کمان نشان شده قرار نمی‌گیرند.

۲۵.۶۳. *پاسخ.* $x = ۱$، $y = ۲$، $z = ۲$.

۲۶.۶۳. *راهنمائی.* دو عدد گنگ $a_۱ + \sqrt{b_۱}$ و $a_۲ + \sqrt{b_۲}$، تنها وقتی با هم برابرند که داشته باشیم: $a_۱ = a_۲$ و $b_۱ = b_۲$ ($a_۱$، $b_۱$، $a_۲$ و $b_۲$ عددهایی گویا هستند).

۲۷.۶۳. *پاسخ.* بخشی از صفحهٔ موازی با وجه BDC و به فاصلهٔ یک‌سوم فاصلهٔ A از BOC و واقع در درون کنج.

۲۸.۶۳. بدون این‌که به کلی بودن مساله، لطمه‌ای بخورد، می‌توان فرض کرد $a_۱ \neq ۰$، در این صورت، روشن است که، برای هر انتخاب $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$، که جوابی از معادله باشد، انتخاب

$$(۱ - x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

نمی‌تواند در معادله صدق کند. بنابراین، تعداد جواب‌ها، از نصف تعداد انتخاب‌ها تجاوز نمی‌کند.

۲۹.۶۳. یالی از هرم را انتخاب می‌کنیم که بزرگترین طول را داشته باشد. چون در هر وجهی که، این یال ضلعی از آن باشد، زاویهٔ روبه‌روی به یال، بزرگترین زاویه است، بنابراین زاویه‌های پیوسته به آن، تنها می‌توانند حاده باشند.

۳۲.۶۳. چون مجموع

$$(\sqrt{۲۶} + ۵)^{۱۹۶۳} + (۵ - \sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳}$$

عددی درست است (درستی این مطلب، به کمک رابطهٔ بسط دوجمله‌ای ثابت

می‌شود)، و چون داریم:

$$-۰/۱ < ۵ - \sqrt{۲۶} < ۰ \Rightarrow -۱۰^{-۱۹۶۳} < (۵ - \sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳} < ۰$$

بنابراین، ۱۹۶۳ رقم اول بعد از ممیز، در عدد $(۵ + \sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳}$، برابر صفر است.

۳۳.۶۳. قوطی کبریت را باید طوری در فضا نگه داشت تا صفحه‌ای که از انتهای دوم یال‌هایی که از یک راس آن می‌گذرد، صفحه‌ای افقی (یعنی موازی با صفحهٔ تصویر) باشد.

۳۵.۶۳. از برهان خُلف استفاده می‌کنیم و فرض را بر این می‌گیریم که در بین این عددها، نتوان چند عدد پیدا کرد که مجموع آن‌ها بر a بخش‌پذیر باشد. در این صورت، به سادگی قابل تحقیق است که، در مجموع ما، نمی‌تواند بیش از هفت عدد واحد وجود داشته باشد، زیرا در غیر این‌صورت از مجموع بقیهٔ عددها، می‌توان عددهای از $a - ۸$ تا a را به‌دست آورد. سپس، بین عددهای این مجموع، بیش از هفت عدد برابر ۲ نمی‌تواند وجود داشته باشد (با استدلالی مشابه قبل). به‌همین ترتیب ثابت می‌شود، در این مجموع، بیش از ده عدد ۳، ۴، ...، ۹ نباید باشد. در این صورت، مجموعی را که تنظیم کرده‌ایم، از ۴۵×۱۰ تجاوز نمی‌کند که از

$$۲ \times ۲۵۲۰ = ۵۰۴۰$$

کوچکتر است (۲۵۲۰، کوچکترین عددی است که بر عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹، بخش‌پذیر است).

۳۷.۶۳. *پاسخ.* $x = y = z = t = ۰$. *راهنمائی.* جواب درستی را، که از لحاظ قدرمطلق، کمترین مقدار x می‌تواند باشد، در نظر بگیرید و سعی کنید، جواب دیگر $x_۱ = \frac{۱}{۲}x$ را آزمایش کنید.

۳۸.۶۳. چون محیط خط شکستهٔ بسته برابر واحد است، فاصلهٔ دورترین نقطه‌های آن از یکدیگر، نمی‌تواند از $\frac{۱}{۲}$ تجاوز کند. اگر دو نقطهٔ A و B را روی خط شکسته، با بیشترین فاصلهٔ ممکن درنظر بگیریم، دایره‌ای که مرکز آن وسط پاره‌خط راست AB و شعاع آن برابر $\frac{۱}{۴}$ باشد، خط شکسته را به‌طور کامل می‌پوشاند.

۴۰.۶۳. تنها به‌ازای $n = ۳$. در واقع، اگر $۲^n + ۱ = a^p$، آن‌وقت

$$۲^n = (a - ۱)(a^{p-۱} + a^{p-۲} + \ldots + a + ۱)$$

در این صورت، $a^{p-۱} + a^{p-۲} + \ldots + a + ۱$ باید برابر توانی از ۲، غیر از ۱، باشد. a عددی فرد است، پس تعداد این جمله‌ها، باید عددی زوج باشد، بنابراین $p = ۲q$؛ از آن‌جا

$$۲^n = a^{۲q} - ۱ = (a^q - ۱)(a^q + ۱)$$

یعنی $a^q - ۱$ و $a^q + ۱$، باید توانی از ۲ (و درضمن غیر از ۲) باشند. بنابراین، این دو عدد هم زوج‌اند، یعنی $۲^n = ۸$.

۴۱.۶۳. *راهنمائی.* اگر k، ضریب زاویهٔ خط‌های راست موازی، عددی گویا باشد، آن‌وقت روی مرز نوار، بی‌نهایت نقطهٔ گرهی پیدا می‌شود. k را عددی گنگ فرض کنید. در این صورت، مساله منجر به اثبات این مطلب می‌شود که بی‌نهایت زوج (x, y) وجود دارد (x, y، عددهایی درست‌اند) که

$$p = m_۲ - kn_۲ < x - ky < m_۱ - kn_۱ = q$$

که در آن $(m_۱, n_۱)$ و $(m_۲, n_۲)$، مختصات نقطه‌های مفروض‌اند، یعنی $p < q$، عددهای ثابتی‌اند.

۱.۶۴. *پاسخ.*

$$\begin{array}{ll} \text{آنیلوف :} & ۲۵ + ۲۰ + ۲۰ + ۳ + ۲ + ۱; \\ \text{بوریسوف :} & ۵۰ + ۱۰ + ۵ + ۳ + ۲ + ۱; \\ \text{وورو‌بیف :} & ۲۵ + ۲۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ \end{array}$$

۲.۶۴. حل مسالهٔ ۲۱.۶۱ را ببینید.

۳.۶۴. بزرگترین عددی را درنظر می‌گیریم، که در یکی از خانه‌ها نوشته شده است. روشن است که همهٔ عددهای خانه‌های مجاور آن، باید با این عدد برابر باشند. عددهای مجاور عددهای جدید هم باید با آن‌ها برابر باشند و غیره. بنابراین، همهٔ عددهای روی صفحهٔ شطرنج با هم برابرند؛ یعنی عدد واقع در خانهٔ $e_۲$ سیاه هم برابر ۴ است.

۴.۶۴. *پاسخ.* چهار حرف.

۵.۶۴. کوتاه‌ترین مردان بین بلندترها را A و بلندترین مردان از بین کوتاه‌ترین‌ها را B می‌نامیم. ردیفی را که در آن A قرار دارد و ستونی را که شامل B است، درنظر می‌گیریم. در نقطهٔ برخورد این ردیف و این ستون، سربازی ایستاده است که از A کوتاه‌تر و از B بلندتر است. یعنی A از B بلندتر است.

۶.۶۴. این حاصل‌ضرب برابر صفر است.

۷.۶۴. چون همهٔ زاویه‌ها منفرجه‌اند، پس $n \geq ۵$، اکنون، همهٔ قطرهایی را درنظر می‌گیریم که همهٔ راس‌های nضلعی را، یک در میان به هم وصل کرده‌اند. این‌ها، یک nضلعی ستاره‌ای را تشکیل می‌دهند که، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست مرزی آن، به روشنی از محیط nضلعی بیشتر است. بنابراین، به‌طور مسلم، حکم مساله هم درست است.

۸.۶۴. چون داریم

$$x^۴ + ۴y^۴ = (x^۲ + ۲xy + ۲y^۲)(x^۲ - ۲xy + ۲y^۲)$$

بنابراین، $x^۴ + ۴y^۴$ تنها وقتی اول است که داشته باشیم:

$$x = y = ۱ \text{ یا } x = y = -۱$$

۹.۶۴. *راهنمائی.* ثابت کنید، با انتقال‌های مناسب موازی، پاره‌خط‌های راست KN، MF و GL، به ضلع‌های یک مثلث تبدیل می‌شوند.

۱۱.۶۴. *پاسخ.* ۱۱ عدد.

۱۲.۶۴. چون میانهٔ ME در مثلث MBC، از نصف ضلع BC بزرگتر است، پس زاویهٔ BMC حاده و، درنتیجه، زاویهٔ BMA منفرجه است. در مثلث ABM، منفرجه بودن زاویهٔ BMA، به معنای آن است که طول میانه MD از نصف طول ضلع AB کوچکتر است.

۱۳.۶۴. *پاسخ.* ۷ و ۵ و ۲.

۱۶.۶۴. درستی این اتحاد روشن است:

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \ldots + a_n^۲)^۲ =$$
$$= (a_۱^۲ - a_۲^۲ - \ldots - a_n^۲)^۲ + (۲a_۱a_۲)^۲ + \ldots + (۲a_۱a_n)^۲$$

روشن است که تنها پرانتز اول (در سمت راست) می‌تواند صفر باشد، ولی اگر $a_۱$ را کوچکترین عدد بگیریم، این پرانتز هم برابر صفر نمی‌شود.

۱۷.۶۴. فرض کنید، دایره محاط در مثلث ABC بر قطر AC در نقطهٔ X و دایرهٔ محاط در مثلث ADC بر قطر AC و نقطهٔ Y مماس باشد (در مسالهٔ ما $X = Y$). در این صورت داریم:

$$|AX| = |AB| + |AC| - |BC|,$$
$$|AY| = |AC| + |AD| - |CD|$$

با برابر قرار دادن $|AX|$ و $|AY|$، به دست می‌آید:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

یعنی، با یک چهارضلعی محیطی سروکار داریم. از طرف دیگر، با استدلالی مشابه، برای دایره‌های مماس بر قطر BD، معلوم می‌شود که این دو دایره هم، بر قطر BD، در یک نقطه مماس‌اند.

۱۸.۶۴. راهنمائی. همهٔ زوج عددهای درست و غیرمنفی (x, y) را با شرط‌های $|x| < \sqrt{n}$ و $|y| < \sqrt{n}$ و عبارت‌های $ax - y$ را درنظر بگیرید و، سپس، از اصل دیریکله استفاده کنید.

۲۰.۶۴. مربع واحد را به ۲۵ مربع کوچکتر، هریک به ضلع برابر $\frac{۱}{۵}$، تقسیم می‌کنیم. بنابه اصل دیریکله، در یکی از این مربع‌ها، دست‌کم ۳ نقطه قرار می‌گیرد. چون هریک از مربع‌های کوچک را می‌توان با دایره‌ای به شعاع برابر $\frac{۱}{۷}$ پوشاند، حکم مساله ثابت است.

۲۱.۶۴. اگر توجه کنیم که

$$\left[\frac{n}{۱}\right] = n, \left[\frac{m}{n}\right] = ۱, \left[\frac{n-۱}{۱}\right] = n - ۱$$

و دو طرف برابری را ساده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که باید، برابری

$$\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{n-۱}{k}\right]$$

برای هر عدد درست $۲ \leq k \leq n - ۱$ برقرار باشد. ولی اگر n، عددی مرکب و بر عددی مثل $p \geq ۲$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت باید داشته باشیم:

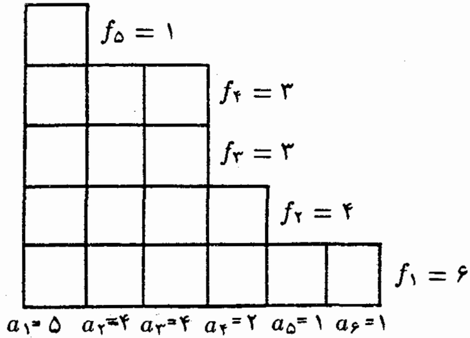
$$\left[\frac{n}{p}\right] > \left[\frac{n-۱}{p}\right]$$

که فرض ما را نقض می‌کند. بنابراین، n عددی اول است.

۲۵.۶۴. حل مسالهٔ ۳۰.۷۵ را ببینید.

۲۸.۶۴. فرض می‌کنیم $\alpha_۰ = ۰$، $S_۰ = ۰$. در این صورت، دنبالهٔ

$$S_۰, S_۱, S_۲, \ldots, S_{۲n-۱}$$



شکل ۲۸

با اضافه کردن $S_{۲^n}$ به هر جملهٔ آن (اگر تنها، باقی‌مانده‌های تقسیم بر ۲ را درنظر بگیریم)، این دنباله را می‌دهد:

$$S_{۲^n}, \ldots, S_{۲^{n+۱}-۱}$$

زیرا، برای هر $۰ < k < ۲^n$، داریم: $\alpha_k = \alpha_{k+۲^n}$. با استفاده از روش استقرای ریاضی، روشن می‌شود که، در دنبالهٔ

$$S_۰, S_۱, S_۲, \ldots, S_{۲^n-۱}$$

تعداد عددهای زوج با تعداد عددهای فرد برابر است.

۳۰.۶۴. مجموع همهٔ عددهای دستهٔ S را N می‌گیریم. در این صورت، اگر a، عددی از دستهٔ S باشد، آن‌وقت N و aN در تقسیم بر p، به یک باقی‌مانده می‌رسند، زیرا ضرب در a، تنها جای باقی‌مانده‌ها را در عددهای دستهٔ S عوض می‌کند. عدد a را، غیر از واحد می‌گیریم و نتیجه می‌گیریم که، چون $(a-۱)N$ بر p بخش‌پذیر است، N هم بر p بخش‌پذیر خواهد بود.

۳۱.۶۴. طول قاعده‌های مثلث‌ها را برابر a و b فرض می‌کنیم. برای هریک از این مثلث‌ها، متوازی‌الاضلاعی را در نظر می‌گیریم که، سه راس

آن، بر سه راس مثلث و، یک ضلع آن، بر قاعدهٔ مثلث منطبق باشد. در این صورت، بخش مشترک مثلث‌ها در درون بخش مشترک متوازی‌الاضلاع‌ها قرار می‌گیرد که مساحت آن از مقدار ab تجاوز نمی‌کند.

۳۲.۶۴. عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را، به دریف و به‌صورت یک دیاگرام ستونی تنظیم می‌کنیم (شکل۲۸را ببینید). مجموع $a_۱+a_۲+...+a_n$ برابر است با تعداد کل خانه‌ها در دیاگرام، و $f_۱$، $f_۲$، ...، چیزی جز تعداد خانه‌های سطرها نیستند و، البته، مجموع آن‌ها هم، برابر تعداد کل خانه‌هاست.

۳۳.۶۴. مربع را به بخش‌ها، طوری تقسیم می‌کنیم که شامل برخوردهای شکل‌های مفروض باشند، در این صورت، اگر مساحت مربع را S بگیریم:

$$S = s_۱ + s_۲ + ... + s_n$$

که در آن، s_i به معنای مساحت iامین بخش است. چون هر بخش، دست‌کم q شکل را پوشانده است، بنابراین مجموع مساحت‌های همهٔ شکل‌ها از

$$qs_۱ + qs_۲ + ... + qs_n = qS$$

کمتر نیست. بنابراین، یکی از شکل‌ها، مساحتی دارد که از

$$\frac{۱}{n}qS = \frac{q}{n}$$

کمتر نیست (بنابر فرض $S = ۱$).

۳۴.۶۴. در آغاز، حکم را برای $k = ۱$ ثابت می‌کنیم و این، به‌سادگی و با آزمایش ثابت می‌شود. سپس، عدد دلخواه k را درنظر می‌گیریم. چون سه نقطهٔ A، B و C متعلق به یک گروه (مثلاً گروه ۱)، پیدا می‌شود که، برای آن‌ها، B وسط پاره‌خط راست AC باشد، می‌توان این نقطه‌ها را متناظر

با عددهای ۰، ۱ و ۲ گرفت. در این صورت، عددهای $k+۱$، $k+۲$ و $۲k+۲$ یا متعلق به گروه ۲ است، یا اگر یکی از آن‌ها متعلق به گروه ۱ باشد، آن‌وقت با دو عدد از عددهای ۰، ۱ و ۲، همان سه عدد موردنظر را تشکیل می‌دهند. در حالتی هم که هر سه عضو گروه ۲ هستند، خودشان سه عدد مورد نظرند.

۱.۶۵. *پاسخ.* ۴۹ کتاب.

۳.۶۵. *پاسخ.* بعد از ۹۳۷۵ کیلومتر راه.

۴.۶۵. قطر، $۱۹+۶۵-۱$ خانه را قطع می‌کند و، بنابراین، به تعداد بخش‌های قبلی ۸۳ بخش اضافه می‌شود. تعداد کل بخش‌ها، برابر است با

$$۱۹ \times ۶۵ + ۸۳ = ۱۳۱۸$$

۵.۶۵. *پاسخ.* $۹۸۹ = ۱۱۰۷۶۸ : ۱۱۲$

۶.۶۵. باید عددهای روی یکی از قطرها را انتخاب کرد که، در هر حال، مجموع آن‌ها برابر ۱۲۵ می‌شود.

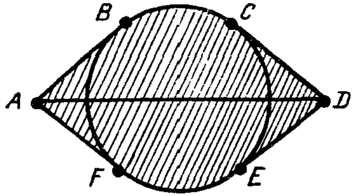
۷.۶۵. اگر d یکی از بخشیاب‌های عدد N باشد، $\frac{N}{d}$ هم یکی دیگر از بخشیاب‌های آن است. $\left(d, \frac{N}{d}\right)$ را یک زوج می‌گیریم (که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با N). وقتی تعداد بخشیاب‌ها، عددی فرد باشد، به این معناست که بخشیابی وجود دارد که با خودش یک زوج تشکیل می‌دهد؛ و حاصل‌ضرب هر عدد در خودش، مجذور کامل است.

۸.۶۵. *پاسخ.* $\frac{۱}{۳}S$.

۱۰.۶۵. *پاسخ.* $۱۵۱۲ = ۷۲ + ۶۰ \times ۲۴$ (حل مسالهٔ ۴.۶۵ را ببینید).

۱۱.۶۵. *پاسخ.* $x = \frac{۷}{۱۵}$ یا $x = \frac{۴}{۵}$.

۱۲.۶۵. مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول ضلع برابر ۱۹۶۵ متر را درنظر می‌گیریم. به‌ناچار، دو راس این مثلث، هم رنگ‌اند.



شکل ۲۹

۱۳.۶۵. *راهنمائی*. حل مسالهٔ ۴.۶۵ را ببینید.

۱۴.۶۵. *پاسخ*. سه بازرگان. اگر بازرگان را با «ب» و مهندس را با «م» نشان دهیم، توزیع حرفه در گروه $ABCDEFG$، یکی از این چهار حالت است:

ممبببمب; مممبمبب

ممبمبمب; مممبببب

۱۵.۶۵. پاسخ در شکل ۲۹ داده شده است. خط‌های راست AB، AF، DC، DE بر دایره مماس‌اند. زاویه‌های BAF و CDE، هرکدام برابر ۶۰ درجه‌اند و طول پاره‌خط راست AD برابر ۱۲ کیلومتر است.

۱۷.۶۵. با استقرا روی تعداد شهرها، ثابت می‌کنیم. برای دو یا سه شهر روشن است. فرض می‌کنیم برای $n-۱$ شهر، بتوان در مسیر زیر حرکت کرد:

$$B_۱ \to B_۲ \to \ldots \to B_{n-۱}$$

به‌جز این‌ها، شهر A را هم درنظر می‌گیریم (یعنی روی‌هم، nشهر). اگر یکی از دو مسیر $A \to B_۱$ یا $B_{n-۱} \to A$ وجود داشته‌باشد، استقرا ثابت است. ولی اگر، جهت این دو مسیر برعکس باشد، بی‌شک باید اندیس k وجود داشته‌باشد، به نحوی که $B_k \to A$ و $A \to B_{k+۱}$ به‌این ترتیب،

می‌توان از همهٔ شهرها به‌صورت زیر گذشت:

$$B_1 \to B_2 \to \ldots \to B_k \to A \to B_{k+1} \to \ldots \to B_{n-1}$$

۱۸.۶۵. پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد. هر هشت عدد اول، باید برابر ۲ باشند.

۲۱.۶۵. پاسخ. $mn + m + n - 1$.

۲۳.۶۵. اگر همهٔ باقی‌مانده‌ها، مختلف باشند، آن‌وقت، مجموع این باقی‌مانده‌ها، یعنی

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

بر n بخش‌پذیر نیست. از طرف دیگر، مجموع خود جمله‌های دنباله

$$2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)$$

بر n بخش‌پذیر است. تناقض حاصل، به این معناست که فرض نخستین، مبنی بر این‌که، همهٔ باقی‌مانده‌ها مختلف‌اند، نادرست است.

۲۴.۶۵. مرکز دایره‌ها را حفظ، ولی شعاع همهٔ آن‌ها را، سه برابر می‌کنیم. درضمن، اگر دوتا از دایره‌های اولیه، متقاطع باشند، دایرهٔ کوچکتر را کنار می‌گذاریم (حذف می‌کنیم). درنتیجه، این ویژگی حفظ می‌شود: دایره‌هائی که سه برابر شده‌اند، مثل قبل، مجموعه‌ای را که به‌وسیلهٔ دایره کوچکتر پوشیده می‌شد، می‌پوشانند. به این ترتیب چند دایره حذف می‌شوند و چند دایره غیرمتقاطع می‌مانند که، سه برابر شدهٔ آن‌ها، مجموعه‌ای به مساحت واحد را پوشانده‌اند. بنابراین، مجموع مساحت‌های آن‌ها کمتر از $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ نخواهد بود.

۲۵.۶۵. پاسخ. $x = 3$، $y = 14$ یا $x = -24$، $y = -2$.

۲۶.۶۵. پاسخ. $\frac{۲ \sin(n-۱)\alpha}{\sin ۲\alpha \cos n\alpha}$.

۲۸.۶۵. مسالهٔ کلاس یازدهم. اثبات را با استقرا می‌دهیم. برای $n = ۱$ روشن است. برای عبور از n به $n + ۱$ داریم:

$$(A+B)^{n+۱} \leq (A+B) \cdot ۲^{n-۱}(A^n + B^n) =$$
$$= ۲^{n-۱}(A^{n+۱} + B^{n+۱} + AB^n + BA^n)$$

چون $(A^n - B^n)(A-B) \geq ۰$، پس

$$AB^n + BA^n \leq A^{n-۱} + B^{n-۱}$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$۲^{n-۱}(A^{n+۱} + B^{n+۱} + AB^n + BA^n) \leq ۲^n(A^{n+۱} + B^{n+۱})$$

۲۹.۶۵. راهنمائی. یکی از راس‌های مکعب را، مبداء مختصات، در دستگاه محورهای مختصات فضایی بگیرید. در این صورت، صفحهٔ مورد علاقهٔ ما، $x + y + z = ۱۸$، تنها وقتی مکعب را در نقطهٔ با مختصات (a, b, c) قطع می‌کند که داشته باشیم:

$$۱۵ < a + b + c < ۱۸$$

یعنی $a + b + c$، برابر است با ۱۶ یا ۱۷ (گوشه‌ای از مکعب را در نظر بگیرید که کمتر از دیگران از مبداء دور باشد). تنها این می‌ماند که تعداد جواب‌های معادله‌های

$$a + b + c = ۱۶, ۱۷$$

را در مجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، که از ۱۱ تجاوز نکنند، پیدا کنیم. و این تعداد، برابر است با ۲۱۶.

۳۱.۶۵. سطری را که مجموع عددهای واقع در آن، کمترین مقدار است، درنظر می‌گیریم و، این مجموع را، S می‌نامیم (بنابراین، مجموع عددهای واقع در جدول، یعنی در n سطر، بیشتر از nS خواهد بود). در این سطر، می‌تواند، دست‌کم، $n - S$ صفر وجود داشته باشد که، در هریک از ستون‌های متناظر با آن‌ها (تعداد اولیهٔ ستون‌ها برابر $n - k$ و $k \leq S$)، مجموع عددها، از $n - S$ کمتر نیست. در بقیهٔ k ستون هم، مجموع از S کمتر نیست. به این ترتیب، مجموع همهٔ عددها در جدول، از $(n-k)(n-S) + kS$ کمتر نیست و

$$(n-k)(n-S) + kS = n^۲ + k(۲S - n) - Sn \geq$$
$$\geq n^۲ + S(۲S - n) - Sn$$

زیرا $۲S - n \leq ۰$، به زبان دیگر، مجموع همهٔ عددها از $Sn \geq \frac{۱}{۲}n^۲$ کمتر نیست، پس

$$(n-k)(n-S) + kS \geq n^۲ + ۲S(S-n) \geq \frac{۱}{۲}n^۲$$

زیرا $(n-S)S \leq \frac{۱}{۴}n^۲$ که از نابرابری $(n - ۲S)^۲ \geq ۰$ نتیجه می‌شود.

۳۳.۶۵. پاسخ. $x^۲ - \frac{۱}{۲}$.

۳۵.۶۵. فرض کنیم، این طور نباشد و همهٔ گره‌های صفحهٔ شطرنجی را، که فاصله‌ای بیش از ۲، نسبت به شکل F نداشته باشد، شماره‌گذاری می‌کنیم. مربع واحد K را درنظر می‌گیریم که، راس چپ و پایین آن، مبداء مختصات باشد و آن را O می‌نامیم. برای هر نقطهٔ M از این مربع، بردار $\vec{OM}$ را درنظر می‌گیریم و شکل مفروض را، به اندازهٔ بردار $\vec{OM}$ به موازات خود انتقال می‌دهیم. سپس، به نقطهٔ M، شمارهٔ گرهی از شبکه را می‌دهیم

که در درون شکل حاصل قرار دارد. اگر در درون این شکل، چند نقطهٔ گرهی باشد، نقطه را با همهٔ این شماره‌ها نشان می‌گذاریم. به سادگی قابل تحقیق است که، مجموعهٔ نقطه‌های درون مربع K، که با شمارهٔ n مشخص شده‌اند، نسبت به مجموعه‌ای که از برخورد شکل F با مربع واحدِ به راس بالا و سمت راست در گره با شمارهٔ n، متقارن مرکزی است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مجموع مساحت‌های مجموعه‌های نشان‌دارِ درون مربع K، برابر است با مساحت شکل F و، بنابراین، این مجموعه نمی‌تواند تمامی مربع واحد k را بپوشاند.

۳۶.۶۵. *پاسخ*. روی ضلع‌های مثلث و در درون مثلث، کمان‌هایی برابر ۱۲۰ درجه می‌سازیم. دایره‌ای که از نقطه‌های وسط این کمان‌ها بگذرد، مکان هندسی مطلوب است. *راهنمائی*. محاسبه‌ها را با استفاده از عددهای مختلط انجام دهید. برای این منظور، باید با معادلهٔ مختلط خط راست و دایره آشنا بود.

۱.۶۶. *پاسخ*. نخستین عدد بزرگتر است.

۲.۶۶. روی‌هم ۳۰ حالت ممکن (از ۰ تا ۲۹)، برای تعداد بازی‌های هر تیم وجود دارد. ولی روشن است که، نمی‌توان در لحظه‌ای، دو تیم پیدا کرد که تعداد بازی‌های یکی برابر ۰ و تعداد بازی‌های دیگری برابر ۲۹ باشد. بنابراین ۳۰ تیم داریم و ۲۹ حالت، برای تعداد بازی‌ها؛ یعنی، در هر لحظه، دو تیم وجود دارد که تعداد بازی‌هایی که انجام داده‌اند، یکی است.

۳.۶۶. مجموع همهٔ عددهایی که روی تختهٔ سیاه نوشته شده است، برابر ۹۸۳×۱۹۶۷، یعنی عددی فرد است. درضمن توجه کنیم، وقتی به‌جای دو عدد a و b، تفاضل آن‌ها، یعنی $a - b$ را قرار دهیم، باز هم مجموع عددهای موجود در تختهٔ سیاه، عددی فرد خواهد بود، بنابراین، مجموع عددهای موجود روی تخته، در هر حال عددی فرد است و نمی‌تواند برابر صفر (که عددی زوج است) بشود.

۴.۶۶. دو نقطهٔ هم‌رنگ، و مثلاً سفید، در نظر می‌گیریم. این دو نقطه روی خط راستی قرار دارند که آن را، محور عددی فرض می‌کنیم و مبداء محور را روی یکی از آن‌ها می‌گیریم؛ بنابراین، این نقطه را می‌توان ۰ و نقطهٔ دوم را با عدد ۱ مشخص کرد (فاصلهٔ بین دو نقطه را، واحد گرفته‌ایم). اگر یکی از نقطه‌های ۱−، $\frac{۱}{۲}$ یا ۰، به رنگ سفید باشد، آن‌وقت، حکم مساله ثابت شده‌است. درحالتی که هر سه نقطهٔ اخیر، به رنگ سیاه باشند، باز هم حکم مساله ثابت شده‌است.

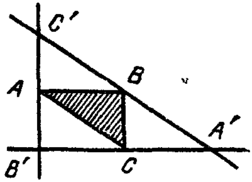
۵.۶۶. *پاسخ*. در مسابقه، ۱۴ شطرنج‌باز شرکت داشته‌اند.

۷.۶۶. محیط دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم می‌کنیم و شش نقطهٔ تقسیم پشت‌سرهم را $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$، $A_۵$ و $A_۶$ می‌نامیم. در این صورت، خط راست $A_۲A_۵$ موازی با قطر $A_۱A_۶$ و خط راست $A_۳A_۴$ و، همچنین، خط راست $A_۳A_۶$ موازی با خط راست $A_۴A_۵$ است. محل برخورد خط راست $A_۲A_۵$ را با خط راست $A_۳A_۶$، با حرف P نشان می‌دهیم. چهارضلعی $PA_۳A_۴A_۵$، متوازی‌الاضلاع است. بنابراین، باید ثابت کنیم، طول پاره‌خط راست $A_۲P$، برابر است با طول شعاع دایره. ولی، چون چهارضلعی $A_۲OA_۶P$ هم متوازی‌الاضلاع است (O، مرکز دایره است)، پس $|A_۲P| = |OA_۶|$ و حکم ثابت است.

۸.۶۶. *راهنمائی*. از قضیهٔ ویلسون استفاده کنید: برای هر عدد اول p، عدد $(p-۱)!+۱$ بر p بخش‌پذیر است.

۹.۶۶. *پاسخ*. ۲.

۱۱.۶۶. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که، راس‌های آن در نقطه‌های مفروض باشد و حداکثر مساحت را داشته باشد. در این صورت، روشن است که هریک از n نقطهٔ مفروض، در مثلث $A'B'C'$ قرار می‌گیرد (شکل ۳۰)، که در آن $A'B'$، $B'C'$، $A'C'$، به‌ترتیب، موازی AB، BC و AC هستند. از آن‌جا که، مساحت مثلث $A'B'C'$ چهار برابر مساحت



شکل ۳۰

مثلث ABC است، بنابراین، مساحت آن از ۴ تجاوز نمی‌کند و همان مثلث مطلوب است.

۱۵.۶۶. *راهنمائی.* کافی است، برای حالتی که n عددی فرد است، ثابت کنیم و سپس، بخشیاب‌ها را به‌صورت زوج‌های $\left(d, \frac{n^۲}{d}\right)$ تقسیم کنیم.

۱۷.۶۶. چون برای هر عدد حقیقی x داریم: $x < ۱ + x^۴$، پس $\frac{x^۴+۱}{۵x} > \frac{۱}{۵}$ (برای عددهای مثبت x).

چون تابع $x^۴ - ۱۰x + ۱$ کوژ است، پس حداکثر مقدار خود را در بازهٔ $\left[\frac{۱}{۵}, ۲\right]$، در دو انتهای این بازه اختیار می‌کند و، مقدار آن، در نقطه‌های $\frac{۱}{۵}$ و ۲، منفی است. بنابراین، اگر $۲ \leq x \leq \frac{۱}{۵}$، آن‌وقت $۲ \leq \frac{x^۴+۱}{۵x}$.

۱۹.۶۶. *پاسخ.* ۱۵ جواب.

۲۰.۶۶. *راهنمائی.* صفحه را با شش‌ضلعی‌های منتظم، که طول ضلع هر کدام ۹۸۲ متر باشد، فرش کنید. سپس، هر شش‌ضلعی را با یکی از رنگ‌ها، طوری رنگ کنید که، هر دو شش‌ضلعی یک رنگ، دست‌کم به وسیلهٔ دو شش‌ضلعی، از هم جدا شده‌باشند.

۲۱.۶۶. $q^۳ - ۱ = (q-۱)(q^۲+q+۱)$، بر p بخش‌پذیر است. چون $p > q$، پس $q^۲+q+۱$ بر $p = kq+۱$ بخش‌پذیر است. فرض

می‌کنیم:

$$(kq+۱)m = q^۲+q+۱ \Rightarrow m = q^۲+q-kmq+۱$$

در این صورت یا $m=۱$ و یا $m \geq q^۲+۱$. ولی در حالت دوم،

$$q^۲+q+۱ \geq (q+۱)^۲$$

که بی‌معنی است. بنابراین $m=۱$.

۲۲.۶۶. وسط پاره‌خط راست AB را M می‌نامیم. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که پاره‌خط‌های راست MF و ME، طولی برابر دارند و بر هم عمودند. این اثبات از این‌جا به‌دست می‌آید که مثلث‌های CYA و CBU، با دوران به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دور نقطهٔ C، به هم تبدیل می‌شوند (در این‌جا، Y و U، راس‌های مربع‌های $CBXY$ و $ACUV$ هستند که نقطه‌های E و F، مرکزهای آن‌ها را تشکیل می‌دهند). از این‌جا نتیجه می‌شود که، ضمن دوران به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دور نقطهٔ M، راس B به نقطهٔ D، و نقطهٔ F به نقطهٔ E می‌رود. یعنی پاره‌خط‌های راست BF و DE بر هم عمودند و طولی برابر دارند.

۲۳.۶۶. تعداد این روش‌ها را با x_n نشان می‌دهیم. در این صورت، به سادگی معلوم می‌شود که

$$x_۱ = ۰ \text{ و } x_۲ = k(k-۱)$$

و برای هر n، این رابطه برقرار است:

$$x_n = (k-۲)x_{n-۱} + (k-۱)x_{n-۲}$$

در واقع، ضلع‌ها را از اولین تا $(n-۲)$امین ضلع رنگ می‌کنیم. تعداد روش‌های این رنگ‌آمیزی، که به‌ازای آن، رنگ ضلع $(n-۲)$ام، همان رنگ

ضلع اول نباشد، برابر $x_{n-۱}$ است و، در این صورت، $(n-۱)$امین ضلع را می‌توان به یکی از $k-۲$ رنگ، درآورد. تعداد روش‌ها، برای آن‌که رنگ ضلع $(n-۲)$ام با رنگ ضلع اول، یکی باشد، برابر است با $x_{n-۲}$ و، در این صورت، $(n-۱)$امین ضلع می‌تواند به $k-۱$ روش رنگ شود. از رابطه‌ای که ثابت کردیم، به کمک استقرا، نتیجه می‌شود:

$$x_n = (k-۱)^n + (k-۱)(-۱)^n$$

۲۹.۶۶. *پاسخ.* یکی از مجهول‌ها برابر ۱ و بقیه برابر صفر.

۳۰.۶۶. فرض می‌کنیم، عددهای $۲^n+۱$ و $۲^m-۱$، هردو، بر عدد اولی مثل p بخش‌پذیر باشند، یعنی از تقسیم ۲^n و ۲^m بر p، به‌ترتیب، باقی‌مانده‌های ۱ـ و ۱ به‌دست می‌آید. بزرگترین بخشیاب مشترک n و m را برابر d می‌گیریم. چون دو عدد طبیعی a و b وجود دارند، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$an - bm = d$$

بنابراین، ۲^d، در تقسیم بر p، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ـ یا ۱ دارد.
ولی اگر

$$۲^d \equiv ۱ (\mathrm{mod} p)$$

آن‌وقت

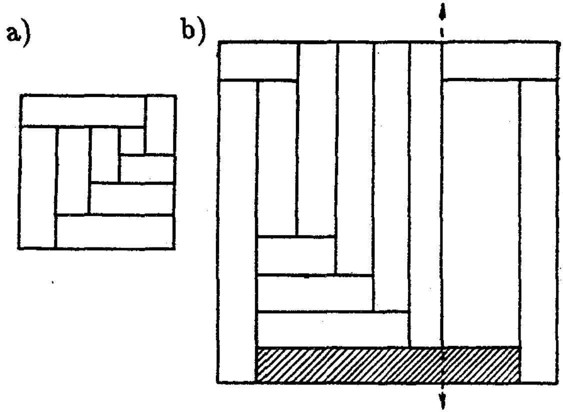
$$۲^n \equiv ۱ (\mathrm{mod} p)$$

که با فرض مخالف است. پس

$$۲^d = -۱ (\mathrm{mod} p)$$

ولی، چون m عددی فرد است، پس $k = \frac{m}{d}$ هم عدد فرد می‌شود و

$$۲^m - (۲^d)^k = (-۱)^k \equiv -۱ (\mathrm{mod} p)$$



شکل ۳۱

باز هم مواجه با تناقض شدیم.

۳۳.۶۶. *پاسخ*. به‌ازای $n = ۵$ و به‌ازای $n \geq ۷$.روی شکل ۳۱_a تقسیم به تعدادی فرد و دلخواه (بیشتر از ۴) مستطیل، مثلاً برای $n = ۹$، داده شده‌است. روی‌شکل ۳۱_b نیمهٔ چپ مربع، متناظر باشکل ۳۱_a تقسیم شده است، ولی تقسیم نیمهٔ راست آن، به چهار مستطیل تثبیت شده است.

۱.۶۷. *پاسخ*. ۳۵۰، ۷۰۰ و ۱۰۵۰ لیتر.

۲.۶۷. *پاسخ*. دو بار.

۴.۶۷. همهٔ تفاضل‌های ممکن را، باید بین عددهای از ۱ تا ۱۴ (۱ − ۱۵) جست‌وجو کرد. از طرف دیگر، برای ۸ عدد، ۲۸ تفاضل (برای دوبه‌دوی آن‌ها) به‌دست می‌آید. روشن است، در بین عددهای طبیعی کوچکتر از ۱۶، تنها یکبار، تفاضل ۱۴ می‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، ۱۳ تفاضل ممکن، در بین ۲۷ تفاضل دوبه‌دوی عددها وجود دارند. اگر هیچ کدام از این تفاضل‌ها، بیش از دو بار تکرار نشوند، آن‌وقت، تعداد همهٔ

تفاضل‌ها از ۲۶ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، دست‌کم یکی از تفاضل‌ها، باید سه بار تکرار شود.

۵.۶۷. *پاسخ.* ۷۰ کیلومتر.

۷.۶۷. اگر پرانتزها را باز کنیم، همهٔ توان‌های زوج x، از ۱ تا $x^{۲۰۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، کافی است، درستی نابرابری‌های زیر را ثابت کنیم:

$$۱ + x^{۲۰۲} \geq ۲x^{۱۰۱}, x^{۲} + x^{۲۰۰} > ۲x^{۱۰۱}, \ldots$$

ولی، این نابرابری‌ها، با نابرابری‌های زیر هم‌ارزند:

$$(۱ - x^{۱۰۰})^{۲} \geq ۰, (x - x^{۱۰۰})^{۲} \geq ۰, \ldots$$

۸.۶۷. قرینهٔ نقطه‌های B و C را نسبت به خط راست MN پیدا می‌کنیم، نقطه‌های B' و C' به‌دست می‌آیند. خط‌های راست AD و $B'C'$ موازی‌اند؛ دو خط راست AB' و DC' هم، با خط راست MN موازی‌اند، بنابراین چهارضلعی $AB'C'D$، متوازی‌الاضلاع است، یعنی

$$|AD| = |B'C'| = |BC|$$

۱۰.۶۷. *راهنمائی.* خط راست را باید طوری رسم کرد که داشته‌باشیم: $|PQ| = |RQ_۱|$.

۱۲.۶۷. چون $x + y = c$ و $xy = -c$، محاسبهٔ ساده‌ای روشن می‌کند که

$$x^{۳} + y^{۳} + (xy)^{۳} = ۲x^{۲} \geq ۰$$

۱۳.۶۷. مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ A رسم می‌کنیم تا خط راست CD را در نقطهٔ E قطع کند. روشن است که

$$\widehat{EDA} = \widehat{CAE} \text{ و } \widehat{ECA} = \widehat{DAE}$$

و مثلث‌های CEA و DEA متشابه‌اند. مثلث BEA متساوی‌الساقین است، یعنی

$$۲\widehat{BAE} = ۱۸۰^\circ - \widehat{BEA} =$$
$$= \widehat{DAE} + \widehat{EDA} = \widehat{DAE} + \widehat{CAE}$$

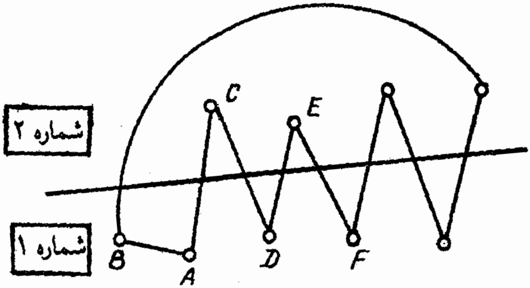
۱۴.۶۷. کافی است ثابت کنیم $۲^{۳^k} + ۱$ بر $۳^{k+۱}$ بخش‌پذیر است. اثبات با استقرا داده می‌شود. درستی حکم، به‌ازای $k = ۱$ روشن است. گذر استقرایی را، می‌توان به یاری اتحاد

$$۲^{۳x} + ۱ = (۲^x + ۱)(۲^{۲x} - ۲^x + ۱)$$

انجام داد. وقتی x، عددی فرد باشد، پرانتز دوم در سمت راست برابری، بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۶.۶۷. در آغاز، همهٔ افراد را به دو دستهٔ دلخواه تقسیم و مقدار S را به این ترتیب پیدا می‌کنیم: برای هر فرد، تعداد دوستان و دشمنان او را، در دسته‌ای که خود این فرد در بین آن است، تعیین می‌کنیم و، سپس، این عددها را با هم جمع می‌کنیم. اکنون، یک نفر مثل A را در نظر می‌گیریم که، عدد مربوط به او، از صفر بیشتر باشد. دسته‌ای را که A در آن است «شمارهٔ ۱» می‌نامیم. اگر هم دوست و هم دشمن A، بین افراد دستهٔ شمارهٔ ۱ باشد، آن‌وقت، با انتقال A به دستهٔ شمارهٔ ۲، می‌توانیم مقدار عدد S را کوچکتر کنیم. حالا فرض می‌کنیم، دوست او B، در همان دستهٔ شمارهٔ ۱ و دشمن او C، در دستهٔ شمارهٔ ۲ باشد. اگر D که دوست C است، در شمارهٔ ۲ باشد، آن‌وقت می‌توانیم C را به شمارهٔ ۱ منتقل کنیم (مقدار S، تغییر نمی‌کند) و بعد A را به شمارهٔ ۲ می‌بریم (مقدار S، دو واحد کم می‌شود).

فرض می‌کنیم، D در شمارهٔ ۱ باشد. دشمن او E، در شمارهٔ ۲ است، درغیر این‌صورت، می‌توانیم، با عملی مشابه، مقدار S را کاهش دهیم. سپس



شکل ۳۲

دوست E، که او را F می‌نامیم، در دستهٔ شمارهٔ ۱ است و غیره. روشن است که، دیر یا زود، زنجیر بسته می‌شود، یعنی ما به B می‌رسیم. ولی این، ممکن نیست، زیرا از یک طرف، باید در زنجیر، تعداد زوجی از افراد باشند (دوست‌ها و دشمن‌ها با هم عوض می‌شوند) و، از طرف دیگر، تغییر شمارهٔ دسته، تنها یکبار انجام می‌گیرد (شکل۳۲ را ببینید). بنابراین، تعداد افراد در زنجیر، باید عددی فرد باشد.

به‌این ترتیب، در هر وضع، به شرط $S > ۰$، با جابه‌جا کردن افراد، می‌توان مقدار S را کم کرد تا آن‌جا که $S = ۰$ به‌دست آید.

۱۷.۶۷. اگر در بین این عددها، عدد منفی وجود داشته باشد، آن‌وقت، کوچکترین آن‌ها را $a_۱$ می‌نامیم. داریم:

$$a_i > \frac{۱}{۲}(a_{i-۱} + a_{i+۱})$$

یعنی باید هر دو عدد $a_{i-۱}$ و $a_{i+۱}$، با a_i برابر و، درنتیجه، منفی باشند. به‌این ترتیب، همهٔ عددهای ما، باید منفی باشند.

۱۸.۶۷. داریم:

$$p^p + q^q \equiv (-q)^p + q^q = q^{۲k-۱}(q^۲ - ۱)(\mathrm{mod} p + q)$$

که، $q = ۲k + ۱$ و $p = ۲k - ۱$؛ و این مقدار برابر است با

$$q^{۲k-۱}(q-۱)(q+۱) = q^{۲k-۱} \cdot ۲k(۲k+۲)$$

که بر $p+q$، یعنی $۴k$ بخش‌پذیر است.

۲۰.۶۷. در نخستین بار عمل، آخرین عدد دنباله، در سمت راست، تغییر نمی‌کند و عدد دوم، از سمت راست، برابر عدد آخر می‌شود. بعد از دو بار انجام عمل، دو عدد سمت راست بی‌تغییر می‌مانند و عدد سوم، از سمت راست، برابر مجموع آن‌ها می‌شود. در مرحلهٔ سوم، سه عدد سمت راست دنباله بی‌تغییر می‌مانند و عدد چهارم، از سمت راست، برابر مجموع، آن‌ها می‌شود. اگر به همین ترتیب، عمل را k مرتبه تکرار کنیم، همهٔ عددهای دنباله، بی‌تغییر باقی می‌مانند.

۲۱.۶۷. این عبارت را درنظر می‌گیریم:

$$S = \sum_{k=۱}^{n-۱}(a_k - a_{k+۱})(b_۱ + \ldots + b_k)$$

با باز کردن پرانتزها، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$S = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \ldots + a_nb_n$$

از طرف دیگر، چون $a_k - a_{k+۱}$ غیر منفی است و هر عبارت به‌صورت $b_۱ + \ldots + b_k$، از لحاظ قدر مطلق، از B تجاوز نمی‌کند، بنابراین

$$|S| \le B[(a_۱ - a_۲) + (a_۲ - a_۳) + \ldots + (a_{n-۱} - a_n)] = Ba_۱$$

۲۳.۶۷. *راهنمائی.* این مرد باید روی محیط نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{۲۵۰۷}{\pi}$ متر حرکت کند.

۲۴.۶۷. اثبات با حل مسالهٔ ۱۸.۶۷، شبیه است.

۳۰.۶۷. به‌سادگی می‌توان تشابه دو مثلث O_1BD و O_2AD (و همچنین تشابه دو مثلث O_2CD و O_1AD) را ثابت کرد. از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$\frac{R}{|AD|} = \frac{r}{|BD|} \text{ و } \frac{R}{|CD|} = \frac{r}{|AD|}$$

که در آن‌ها، R و r، طول شعاع‌های دو دایره‌اند. اگر این دو برابری را در هم ضرب کنیم و به حساب آوریم که

$$r^2 : R^2 = |AB|^2 : |AC|^2$$

به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۳۱.۶۷. این چندجمله‌ای‌ها را، f و g می‌نامیم؛ درضمن، می‌توان فرض کرد که f، به‌ازای $x > x_0$، صعودی باشد. ε را، برابر ۱ یا ۱− می‌گیریم، به‌نحوی که εg هم، به‌ازای $x > x_0$ صعودی شود. $f - \varepsilon g$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، مقدار ثابتی نباشد. فرض کنید:

$$f(x_1) = a \text{ و } g(x_i) = b, (x_1 > x_0)$$

که در آن، a و b، دو عدد درست‌اند. اگر

$$h(x) = f(x) - \varepsilon g(x) - (a - \varepsilon b)$$

و $x_1 < x_2$، چنان باشد که $f(x_2) = a + 1$، آن‌وقت روشن است که

$$\varepsilon g(x_2) = \varepsilon b + 1 \Rightarrow h(x_2) = 0$$

به‌همین ترتیب، اگر $x_2 < x_3$ چنان باشد که $f(x_3) = a + 2$، آن‌وقت $\varepsilon g(x_3) = \varepsilon b + 2$ و $h(x_3) = 0$ و غیره.

به‌این ترتیب $h(x)$، بی‌نهایت ریشه پیدا می‌کند، یعنی $h(x) \equiv 0$

۳۳.۶۷. هر فرد، در بین ۱۷ نفر دیگر، یا دست‌کم ۹ نفر آشنا و یا دست‌کم ۹ نفر ناآشنا دارد. بدون این‌که به کلی بودن راه حل لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد، فرد مشخص A، در این گرد هم‌آیی، دست کم ۹ نفر آشنا دارد. یکی از این ۹ نفر، و مثلاً B را، درنظر می‌گیریم. اگر بین ۸ نفر دیگر، ۶ نفر پیدا شود که هیچ‌کدام با B آشنا نباشند، آن‌وقت، مساله منجر به مسالهٔ ۵.۶۱ می‌شود.

فرض می‌کنیم B، در بین ۸ نفر دیگر، سه آشنا و پنج ناآشنا داشته باشد (زیرا اگر B با چهار نفر آشنا باشد، این چهار نفر یا دوبه‌دو با هم ناآشنا هستند که، در این صورت، یک گروه چهارنفری مورد نظر را تشکیل می‌دهند و یا دست‌کم دو نفر آن‌ها یکدیگر را می‌شناسند که، در این صورت، A و B و این دو نفر، گروه چهارنفریِ دوبه‌دو آشنا را تشکیل می‌دهند).

اکنون تعداد آشناها را در این ۹ نفر محاسبه می‌کنیم: روی‌هم ۹ نفرند، هر نفر درست با سه نفر آشناست؛ چون هر آشنا دو بار به‌حساب می‌آید، بنابراین، تعداد زوج آشناها برابر

$$\frac{۳ \times ۹}{۲} = ۱۴/۵$$

می‌شود که معنا ندارد. این تناقض، حل مساله را تمام می‌کند.

۳۴.۶۷. *راهنمائی.* هر ستون جدول را یک «پسر جوان» و هر سطر جدول را یک «دختر جوان» می‌نامیم و پسر و دختری را دوست به حساب می‌آوریم که در خانهٔ محل برخورد آن‌ها، عددی مثبت قرار گرفته باشد. در این صورت، مساله منجر به این پیش‌قضیه، که آن را «پیش‌قضیهٔ دختران» می‌نامیم، می‌شود: در گروهی، n پسر جوان و n دختر جوان جمع شده‌اند؛ در ضمن می‌دانیم، هریک از k پسر (k، هر عددی از ۱ تا n است)، دست‌کم با k دختر آشناست. در این صورت، پسران و دخترانی می‌توانند با هم طوری ازدواج کنند که، در هر زوج، تنها پسر و دختر آشنا وجود داشته

باشد.

شرط «پیش‌قضیهٔ دختران» از این‌جا نتیجه می‌شود که، اگر k ستون در اختیار داشته باشیم، مجموع عددهای واقع در آن‌ها، برابر k می‌شود. بنابراین، همهٔ عددهای مثبت این ستون‌ها، نمی‌توانند در کمتر از k سطر واقع باشند.

اثبات «پیش‌قضیهٔ دختران» را، با استقرای روی n بدهید.

۱.۶۸. *پاسخ.* ۷ روبل.

۲.۶۸. *پاسخ.* عدد دوم بزرگتر است و به اندازهٔ

$$۴۴۴\ldots۴ (\text{۱۹ رقم})$$

۳.۶۸. *پاسخ.* ۳۳۵ کیلومتر. *راهنمائی.* از نابرابری مثلث استفاده کنید.

۵.۶۸. فرض می‌کنیم، تیم T، از n تیم برده باشد. اگر تیمی مثل X، در بین این n تیم نباشد، درضمن، به هیچ‌کدام از آن‌ها نباخته باشد، آن‌وقت دست‌کم $n + ۱$ امتیاز خواهد داشت که با فرض پیروزی تیم T در تمام مسابقه، متناقض است. بنابراین، تیم X، یا به خود T و یا به یکی از این n تیم باخته است.

۷.۶۸. *راهنمائی.* ثابت کنید، دو وتر موازی از یک مربع، تنها وقتی با هم برابرند که، یا نسبت به مرکز مربع قرینهٔ یکدیگر باشند و یا وترهایی باشند که دو ضلع روبه‌رو را در مربع به هم وصل کرده‌اند.

۸.۶۸. *پاسخ.* ۱−، ۱، ۳، ۶، ۱۱.

۱۲.۶۸. همهٔ دایره‌ها را روی قطری از دایرهٔ بزرگتر تصویر می‌کنیم. روشن است که مجموع پاره‌خط‌های تصویر، برابر است با مجموع قطرهای دایره‌ها، یعنی ۵۰. چون قطر دایرهٔ بزرگ برابر است با ۶، پس، اگر هر نقطهٔ آن به‌وسیلهٔ حداکثر هشت تصویر پوشیده شده باشد، مجموع طول‌های آن‌ها، از ۸×۶، یعنی ۴۸ تجاوز نمی‌کند ($۵۰ > ۴۸$). بنابراین، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست‌کم، به‌وسیلهٔ ۹ تصویر پوشیده است. خط راستی که از این

نقطه، عمود بر قطر رسم شود، خط راست موردنظر است.

۱۳.۶۸. ثابت می‌کنیم، خط راست BD، بر دایرهٔ محیطی مثلث ABM در نقطهٔ B مماس است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم اندازهٔ زاویهٔ ABD برابر است با اندازهٔ نصف کمان AMB از این دایره. دو زاویهٔ BMC و BDC برابرند (چهارضلعی $BCDM$، محاطی است)؛ درضمن، چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$$

بنابراین $\widehat{ABM} = \widehat{BMC}$ و

$$\widehat{ABD} + \widehat{AMB} = ۱۸۰^\circ$$

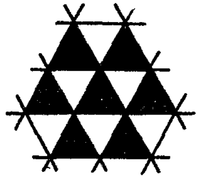
و چون $\widehat{AMB}$ برابر است با نصف کمان AB از دایرهٔ ABM، پس $\widehat{ABD}$ برابر نصف کمان AMB از همین دایره می‌شود. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که BD در نقطهٔ D بر دایرهٔ محیطی مثلث ADM مماس است.

۱۴.۶۸. با استفاده از قضیهٔ ویت (دربارهٔ رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌ها) به‌دست می‌آید:

$$S = x^۴ + y^۴ = a^۴ + ۴a^۲ + ۲;$$
$$T = x^۵ + y^۵ = -a^a - ۴a^۳ - ۳a^۲$$

چون $aS + T = -a$، بنابراین، بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد S و T، همان بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد S و a و یا دو عدد ۲ و a، یعنی واحد است (a، عددی فرد است).

۱۵.۶۸. راس‌های مثلث مفروض را A، B و C می‌نامیم و صفحه را، آن‌طور که در شکل ۳۳ می‌بینید، به رنگ‌های سیاه و سفید درمی‌آوریم. توجه



شکل ۳۳

کنیم؛ مثلث ABC هرجا باشد، قرینهٔ آن نسبت به یکی از ضلع‌ها، از سیاه به سفید یا از سفید به سیاه تغییر رنگ می‌دهد. چون در پایان عمل، به رنگی مشابه رنگ نخستینِ مثلث می‌رسیم. بنابراین روشن است که، تعداد تبدیل‌ها، عددی زوج است.

۱۸.۶۸. *راهنمائی.* این عددها را درنظر بگیرید:

۱۲۲۲۲۲۲۲۲۲

۲۱۲۲۲۲۲۲۲۲

....

۲۲۲۲۲۲۲۲۲۱

و ثابت کنید، به دنبال یکی از آن‌ها، رقم ۱ اضافه می‌شود.

فرض کنید، این عدد ۱۲۲۲۲۲۲۲۲۲ باشد. در این صورت، روشن است که باید به دنبال عدد

۲۳۳۳۳۳۳۳۳۳

رقم ۲ و به‌دنبال عدد

۳۱۱۱۱۱۱۱۱۱

رقم ۳ را نوشت. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، به دنبال هر عدد، رقم اول آن اضافه می‌شود.

پیش‌قضیه. این حکم، برای عددهایی هم، که برای نوشتن آن‌ها دو رقم شرکت دارند، درست است.

درواقع، اگر برای نوشتن عدد، تنها از دو رقم ۱ و ۲ استفاده کرده‌باشیم و نخستین رقم آن (یعنی رقم سمت چپ) برابر ۱ باشد، روشن است که نمی‌توان به دنبال آن رقم ۳ را نوشت و چون به دنبال عدد ۲۳۳۳۳۳۳۳۳۳ باید رقم ۲ بیاید، پس رقم ۲ را هم نباید به‌دنبال آن آورد.

اکنون عدد دلخواهی را انتخاب می‌کنیم که مثلاً با ۲ آغاز شده باشد. این دو عدد را درنظر می‌گیریم:

$$\overline{۱ab\ldots c} \text{ و } \overline{۳xy\ldots z} \qquad (*)$$

که هردوی آن‌ها با رقم‌های ۱ و ۳ نوشته شده‌اند، به‌نحوی که در همهٔ مرتبه‌ها با عدد مفروض اختلاف داشته باشند. چون بنابر پیش‌قضیه، به‌دنبال عددهای (*)، ۱ و ۳ می‌آید، پس به‌دنبال عدد مفروض، رقم ۲ خواهد آمد، چیزی که باید ثابت می‌کردیم.

۱۹.۶۸. دو ریشه این معادله، ریشه‌های معادلهٔ

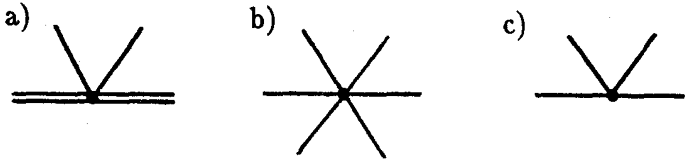
$$x = ۱ - ۱۹۶۸x^{۲}$$

هستند و دو ریشهٔ دیگر، ریشه‌های معادلهٔ

$$۱۹۶۸x^{۲} - ۱۹۶۸x - ۱۹۶۷ = ۰$$

۲۱.۶۸. *پاسخ*. هشت.

۲۲.۶۸. از راس A، پاره‌خط‌های راست AD و AE را مماس بر دایرهٔ اول و دایرهٔ دوم رسم می‌کنیم (D و E روی ضلع BC قرار دارند). روشن است که مثلث‌های ACD و AEB، مثلث ABC را می‌پوشانند،



شکل ۳۴

یعنی مجموع شعاع‌های این دایره‌ها برابر است با

$$\frac{۲S_{ACD}}{p_{ACD}}+\frac{۲S_{ABE}}{p_{ABE}}\geq\frac{۲(S_{ACD}+S_{ABE})}{p_{ABC}}\geq\frac{۲S_{ABC}}{p_{ABC}}$$

و عبارت اخیر، مقدار شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را بیان می‌کند.

۲۴.۶۸. از برهان خُلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، چنین تقسیمی ممکن باشد. انتهاهای ضلع درونی مثلث‌های تقسیم را به سه گروه رده‌بندی می‌کنیم: نقطه‌های واقع بر ضلع مثلث بزرگ (در آن‌ها چهار ضلع درونی به هم می‌رسند ـشکل ۳۴ـa را ببینید)؛ نقطه‌های درونی مثلث که، در آن‌ها، شش مثلث تقسیم، یعنی ۱۲ ضلع به‌هم می‌رسند(شکل ۳۴ـb)؛ نقطه‌های واقع در داخل یک ضلع درونی مثلث تقسیم که، در آن‌ها، شش ضلع درونی مثلث‌های تقسیم به هم می‌رسند(شکل۳۴ـc).اگر تعداد نقطه‌های این گروه‌ها را، به‌ترتیب، $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ بنامیم، آن‌وقت تعداد ضلع‌های درونی، برابر

$$\frac{۱}{۲}(۴A_۱+۱۲A_۲+۶A_۳)=۲A_۱+۶A_۲+۳A_۳$$

خواهد شد. درضمن، هر نقطهٔ گروه سوم، متناظر است با سه ضلع درونی: آن که، این نقطه، روی آن‌ها قرار دارد و آن دو ضلعی که چسبیده به اولی هستند. به‌سادگی دیده می‌شود که، هر ضلع درونیِ تقسیم، متناظر است با نقطه‌ای از گروه سوم، در غیر این‌صورت، می‌توان دو مثلثِ برابر پیدا کرد. به‌این ترتیب، تعداد ضلع‌های درونی، از $۳A_۳$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین

$A_۱ = A_۲ = ۰$، یعنی مثلث‌های تقسیم، روی ضلع‌های مثلث بزرگ، راسی ندارند و این، به‌معنای آن است که همهٔ تقسیم ما، چیزی نیست جز همان مثلث اصلی.

۲۶.۶۸. پاسخ. یک جواب.

۲۸.۶۸. پاسخ. ۹.

۳۰.۶۸. $\sqrt[k]{۲}$ را با p، $\frac{۱}{p}$ را با t و $a_i p^i$ را با b_i نشان می‌دهیم. در این صورت، نابرابری مفروض را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$(p-۱)\left(\frac{b_۱}{p}+\frac{b_۲}{p^۲}+\ldots+\frac{b_n}{p^n}\right) \le \sqrt[k]{b_۱^k+\ldots+b_n^k}$$

و اگر به‌جای $\frac{۱}{p}$، مقدارش t را قرار دهیم:

$$b_۱+b_۲t+\ldots+b_nt^{n-۱} \le \frac{۱}{۱-t}\sqrt[k]{b_۱^k+\ldots+b_n^k}$$

چون

$$\sqrt[k]{b_۱^k+b_۲^k+\ldots+b_n^k} \ge B = \max b_i$$

بنابراین، به این زنجیرهٔ نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$b_۱+b_۲t+\ldots+b_nt^{n-۱} \le B(۱+t+\ldots+t^{n-۱}) =$$
$$= \frac{B(۱-t^n)}{۱-t} \le \frac{B}{۱-t} \le \frac{۱}{۱-t}\sqrt[k]{b_۱^k+\ldots+b_n^k}$$

۳۱.۶۸. فرض می‌کنیم $|AB| > |AC|$ و پای عمود را H می‌نامیم. روی امتداد پاره‌خط راست BA، نقطهٔ C' را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $|AC| = |AC'|$. به‌سادگی و با درنظر گرفتن زاویه‌ها، روشن

می‌شود که خط راست MA، نیمساز زاویهٔ CAC' است. چون مثلث ACC' متساوی‌الساقین است، خط راست MA بر خط راست CC' عمود می‌شود و $|MC'| = |MC|$ و یا $|MC'| = |MB|$، یعنی MH میانهٔ مثلث MBC' و نقطهٔ H وسط پاره‌خط راست BC' است.

۳۳.۶۸. می‌توان مساله را، با استقرای روی m به نتیجه رساند، ولی ساده‌ترین روش حل، چنین است:

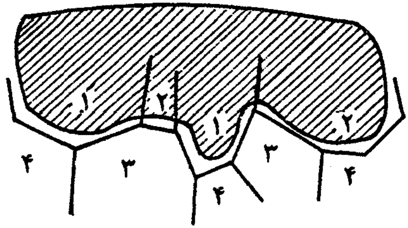
کمترین تعداد مثلث‌ها، وقتی به‌دست می‌آید که از m نقطه، $m - ۱$ نقطه روی یک خط راست باشند، زیرا در چنین حالتی، کافی است تنها نقطهٔ mام را به‌عنوان راس و هر دو نقطهٔ دیگر (از $m - ۱$ نقطهٔ واقع بر یک خط راست) را، قاعدهٔ مثلث بگیریم (هر مثلث دیگری، بر یکی از این مثلث‌ها منطبق است) و از $m - ۱$ نقطه (که هر دوتای آن‌ها باید قاعدهٔ یکی از مثلث‌ها را بسازد)، می‌توان به تعداد

$$C_{m-۱}^{۲} = \frac{(m-۱)!}{(m-۲)!۲!} = \frac{۱}{۲}(m-۱)(m-۲)$$

قاعدهٔ مختلف، برای مثلث‌ها، جدا کرد.

۳۴.۶۸. *راهنمائی*. هریک از نابرابری‌ها را می‌توان به این ترتیب ثابت کرد: عددهای a_i را طوری تغییر می‌دهیم که مجموع فاصله‌های هر دو تا از آن‌ها، نسبت به مجموع مفروض کمتر نشود (یا زیادتر نشود)؛ برای این منظور، می‌توان تقریباً همهٔ a_iها را به یکی از دو انتهای پاره‌خط راست برد. در این صورت، اثبات درستی نابرابری‌ها، بسیار ساده می‌شود.

۳۵.۶۸. چهاروجهی را روی خط راست دلخواهی تصویر می‌کنیم. در این صورت، پاره‌خط راست AB و، در درون آن، نقطه‌های C، D و O به‌دست می‌آید (نقطه‌های A، B، C و D، تصویرهای راس‌های چهاروجهی و O تصویر نقطهٔ مفروض است). با درنظر گرفتن حالت‌های مختلف، به‌سادگی روشن می‌شود که، مجموع فاصله‌های از نقطهٔ O تا



شکل ۳۵

نقطه‌های A، B، C و D، از مجموع فاصله‌های دوبه‌دوی این چهار نقطه، تجاوز نمی‌کند. تنها این می‌ماند که از گزارهٔ زیر استفاده کنیم: مجموع تصویرهای پاره‌خط راست فضایی به طول d در همهٔ جهت‌ها، برابر است با kd که، در آن، k ثابتی است که بستگی به موضع پاره‌خط راست و یا طول آن ندارد.

۳۶.۶۸. حل مسالهٔ ۳۶.۸۱ را ببینید.

۳۷.۶۸. فرض می‌کنیم، همهٔ وجه‌هایی را که به رنگ‌های اول و دوم درآمده‌اند، به‌وسیلهٔ رنگ دیگری (رنگ پنجم) رنگ کرده‌باشیم.

حوزهٔ رنگ پنجم را در سطح چندوجهی درنظر می‌گیریم. با حرکت روی مرز این حوزه، می‌بینیم که در طرف دیگر این مرز، رنگ‌های سوم و چهارم، به تناوب آمده‌اند و، بنابراین، مرز هر حوزه‌ای از این‌گونه، شامل تعدادی زوج از راس‌هاست که با راس‌های واقع در مرز مشترک رنگ‌های اول و دوم، فرق دارند (شکل ۳۵ را ببینید). از این‌جا نتیجه می‌گیریم که، برای هر مرز رنگ پنجم، تعداد زوجی از راس‌های مرز رنگ اول، بر تعداد زوجی از راس‌های واقع بر مرز رنگ دوم، منطبق است. اگر تمامی حوزهٔ رنگ پنجم را درنظر بگیریم، معلوم می‌شود که تعداد زوجی از راس‌های روی وجه‌های رنگ اول (یعنی تعداد زوجی وجه مربوط به رنگ اول با تعداد فردی ضلع)، بر تعداد

زوجی راس روی وجه‌های رنگ دوم (یعنی تعداد زوجی وجه رنگ دوم با تعداد فردی ضلع) منطبق است.

۳۸.۶۸. *راهنمائی.* ثابت کنید، در هر دو حالت، به واژه‌هایی می‌رسیم که، در آن‌ها، تعداد حرف‌های A و تعداد حرف‌های B، یکی است و، درضمن، دارای این ویژگی هستند: بین هر چند حرف اول واژه، تعداد حرف A، از تعداد حرف B کمتر نیست.

۱.۶۹. خانهٔ صفحهٔ شطرنج، وقتی و تنها وقتی سفید است که مجموع شماره‌های ستون و سطر آن، عددی فرد باشد. چون مجموع همهٔ شماره‌های سطرها و ستون‌ها، برای هشت رخ مفروض، برابر است با

$$۲(۱ + ۲ + \ldots + ۸) = ۷۲$$

که عددی است زوج، بنابراین باید تعداد خانه‌های با «شماره‌های فردی» که در این مجموع وجود دارد، زوج باشد. یعنی تعداد خانه‌های سیاهی که شامل رُخ هستند، عددی است زوج.

۲.۶۹. *پاسخ.* ۱۴. *راهنمائی.* باقی‌ماندهٔ تقسیم عددها بر چهار را در نظر بگیرید.

۳.۶۹. *پاسخ.* ساعت سه بعد از نیمروز.

۶.۶۹. فرض کنیم، n پرسش از این گونه شده باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، هر ریاضی‌دان می‌تواند مطمئن باشد که عدد ریاضی‌دان دیگر، از n کمتر نیست. اثبات را با استقرا روی n می‌دهیم. درستی حکم به‌ازای $n = ۱$ روشن است. فرض می‌کنیم، بعد از $n - ۱$ پرسش از این‌گونه، هر ریاضی‌دان مطمئن شده‌باشد که عدد موردنظر ریاضی‌دان دیگر، از $n - ۱$ کمتر نیست. اکنون فرض می‌کنیم، عدد مربوط به ریاضی‌دان پرسش کننده برابر $n - ۱$ باشد؛ این ریاضی‌دان می‌داند که عدد ریاضی‌دان دیگر، برابر $n - ۲$ نیست، بنابراین بلافاصله خواهد گفت: «بله، می‌دانم، شما عدد n را

در دست دارید». به‌این ترتیب، بعد از n پرسش، هر ریاضی‌دان قانع می‌شود که عدد رقیب او، از n کمتر نیست.

اکنون روشن است که اگر عدد یکی از ریاضی‌دان‌ها برابر k باشد، بعد از k پرسش، این ریاضی‌دان یا رقیب او، به پرسش مربوط، پاسخ مثبت می‌دهد.

۸.۶۹. پاسخ. ۶۴ برابر.

۹.۶۹. سمت چپ برابری، به‌این صورت قابل تبدیل است:

$$\left[\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}\right]+\left[\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{x+۲}\right]+\ldots+\left[\frac{۱}{x-۱۰}-\frac{۱}{x+۱۰}\right]=$$
$$\left[\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱۰}\right]+\left[\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{x+۹}\right]+\ldots+\left[\frac{۱}{x-۱۰}-\frac{۱}{x+۱}\right]=$$
$$=۱۱\left[\frac{۱}{(x-۱)(x+۱۰)}+\frac{۱}{(x-۲)(x+۹)}+\ldots+\frac{۱}{(x-۱۰)(x+۱)}\right]$$

۱۰.۶۹. از نقطه‌ای که گرگ ایستاده است، دو خط راست، موازی با قطرهای مربع رسم می‌کنیم. برای این‌که، گرگ نتواند فرار کند، سگ‌ها باید در نقطه‌های برخورد این خط‌های راست با ضلع‌ها، مستقر شوند. به‌سادگی دیده می‌شود که، در این حالت، کافی است سرعت سگ‌ها از $\sqrt{۲}$ برابر سرعت گرگ کمتر نباشد.

۱۱.۶۹. بله، می‌تواند. نقطه‌های P و Q را در درون مربع $ABCD$ طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث‌های ABP و CDQ، متساوی‌الساقین باشند و، در آن‌ها، هرکدام از زاویه‌های P و Q برابر ۱۲۰ درجه شود. در این صورت، دستگاه جاده‌های، AP و BP، PQ، CQ و DQ، به تقریب، طولی برابر ۲۷ کیلومتر و ۳۲۱ متر خواهد داشت.

۱۳.۶۹. نقطهٔ X را روی پاره‌خط راست AD، طوری انتخاب می‌کنیم که خط راست BX موازی خط راست CD باشد. اکنون، اگر $p(T)$ را

به‌معنای محیط مثلث T بگیریم، روشن است که

$$p(ABX) = p(BCX)$$

از طرف دیگر، بنابه فرض داریم:

$$p(ABE) = p(BCE)$$

بنابراین

$$p(ABX) - p(BCX) = |XE| \pm ||CE| - |CX||$$

و با توجه به نابرابری مثلثی معلوم می‌شود که این تفاضل محیط‌ها، از $|XE| - |XE| = ۰$ بیشتر است. تناقض حاصل، به این معناست که $E = X$. به همین ترتیب CX موازی AB می‌شود. بنابراین، نقطهٔ E وسط ضلع AD است و $|AE| = |BC|$

۱۵.۶۹. *پاسخ*. ۱۰ شهر.

۱۸.۶۹. باید جایی در دنباله، به $abcd۰$ و $abcd۱$ برخورد کنیم که، در آن‌ها، $abcd$، چهار رقم متوالی دنباله‌اند. یعنی سه بار با چهار رقم متوالی $abcd$ برخورد می‌کنیم. چون قبل از آن تنها رقم‌های ۰ یا ۱ می‌تواند باشد، باید دنبالهٔ ما با $abcd$ آغاز شود تا ۵ رقم متوالی تکراری نداشته باشیم.

۲۰.۶۹. *پاسخ*. ۶۷۰۰ بلیت. *راهنمائی*. باید رقم دوم عدد، با رقم پنجم آن برابر باشد.

۲۱.۶۹. در واقع

$$\sqrt{۲} - \frac{m}{n} = \frac{۲ - \frac{m^۲}{n^۲}}{\sqrt{۲} + \frac{m}{n}} > \frac{۲n^۲ - m^۲}{۲\sqrt{۲}n} \geq \frac{۱}{۲\sqrt{۲}n}$$

۲۳.۶۹. داریم:

$$(x_{n-۱} \equiv -a(\text{mod} x_n)) \Rightarrow (x_{n+l} \equiv a x_l(\text{mod} x_n))$$

بنابراین $x_{۲n}$ بر x_n بخش‌پذیر است.

۲۴.۶۹. مهمانان را از ۰ تا ۵۹ شماره‌گذاری می‌کنیم و آن‌ها را، در روز اول، به این ردیف می‌نشانیم (با آغاز از مدیر و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت):

$$۰, \quad ۰-۱, \quad ۰-۱+۲, \quad ۰-۱+۲-۳, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad ۰-۱+۲-۳+\ldots+۵۸-۵۹(\text{mod}۶۰)$$

که در آن، $(\text{mod}۶۰)$، به‌معنای باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم بر ۶۰ است. در روز $(k+۱)$ام، می‌توان آن‌ها را به این ردیف نشاند:

$$k, k-۱, k-۱+۲, \ldots, k-۱+۲-۳+\ldots+۵۸-۵۹(\text{mod}۶۰)$$

۲۵.۶۹. بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را، به ترتیب، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ می‌نامیم. شرط عمود بودن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$، با برابری $\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{d}$ (ضرب اسکالر) داده می‌شود. اگر شعاع برداری نقطهٔ O را با $\vec{r}$ نشان دهیم، آن‌وقت برابری موردنظر، به این صورت درمی‌آید:

$$\left(\vec{r}-\frac{۱}{۲}\vec{d}\right)^۲+\left(\vec{r}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{۲}\right)^۲=$$
$$=\left(\vec{r}-\frac{۱}{۲}\vec{c}\right)^۲+\left(\vec{r}-\frac{\vec{b}+\vec{d}}{۲}\right)^۲$$

که بعد از ساده شدن، به برابری روشن $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ می‌رسد.

۲۸.۶۹. راه حل مسالهٔ ۲۳.۶۹ را ببینید.

۲۹.۶۹. پشت سرهم و، به‌کمک $۲n$ عدد، دنباله‌ای می‌سازیم، به‌نحوی که بعد از n گام، بین تفاضل‌های جمله‌های آن، عددهای ۱، ۲، ...، n و از هرکدام تنها یک بار و، همچنین، بعضی عددهای طبیعی دیگر، بدون تکرار، وجود داشته باشد. در گام اول ۱ و ۲ را انتخاب می‌کنیم، در $(n+۱)$امین گام، توجه می‌کنیم، کوچکترین عدد طبیعی X، که در بین تفاضل‌های جمله‌ها وجود ندارد، کدام است! آن‌وقت، عددهای n و $n+X$ را انتخاب می‌کنیم. به‌نحوی که $n > ۲m$ (m، بزرگترین عددی است که، پیش از آن انتخاب کرده‌ایم). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، به دنباله‌ای می‌رسیم که با شرط‌های مساله، سازگار است.

۳۰.۶۹. اگر مساحت‌های مثلث‌ها را برحسب a، b و c و زاویه‌های α، β و γ (به‌ترتیب $\widehat{BAC}$، $\widehat{ABC}$، و $\widehat{ACB}$) بیان کنیم، بخش سمت چپ برابری، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱}{۲}abc\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta)$$

و سمت راست برابری، به‌صورت

$$\frac{(abc)^{۲}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{۴S}$$

زیرا $R=\frac{abc}{۴S}$. بعد از ساده کردن، به این نتیجه می‌رسیم که باید این برابری را ثابت کرد:

$$a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta = ۲R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

چون

$$a=۲R\sin\alpha,\quad b=۲R\sin\beta,\quad c=۲R\sin\gamma$$

نابرابری اخیر، با نابرابری زیر هم‌ارز می‌شود:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\text{۰}$$

که درستی آن روشن است.

۳۲.۶۹. پاسخ. دست‌کم ۱۰ نفر.

۳۳.۶۹. $x_i=\frac{\text{۱}}{a_i}$ می‌گیریم. در این صورت، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\sum_{i<j}\frac{\text{۱}}{x_i+x_j}\leq\frac{n-\text{۱}}{\text{۴}}$$

و اگر از نابرابری $\frac{\text{۱}}{y}+\frac{\text{۱}}{x}\leq\frac{\text{۴}}{x+y}$، که برای هر دو عدد مثبت x و y درست است، استفاده کنیم:

$$\sum_{i<j}\frac{\text{۱}}{x_i+x_j}\leq\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\sum_{i<j}\left(\frac{\text{۱}}{x_\circ}+\frac{\text{۱}}{x_j}\right)=\frac{n-\text{۱}}{\text{۴}}\sum_{i}\frac{\text{۱}}{x_i}=\frac{n-\text{۱}}{\text{۴}}$$

۳۴.۶۹. فرض می‌کنیم، چنین مثلثی وجود نداشته‌باشد. دو نقطهٔ A و B را از یک رنگ (و مثلاً، رنگ اول) و به فاصلهٔ d از یکدیگر، درنظر می‌گیریم. دو خط راست $l_\text{۱}$ و $l_\text{۲}$ را موازی با خط راست AB و به فاصلهٔ $\frac{\text{۲}}{d}$ از آن، رسم می‌کنیم. بنابه فرضی که کردیم، روی این دو خط راست، نمی‌توان نقطه‌ای با رنگ اول پیدا کرد. ثابت می‌کنیم، می‌توان روی صفحه، خط راستی از یک رنگ پیدا کرد. اگر $l_\text{۱}$ و $l_\text{۲}$، از این‌گونه نباشند، آن‌وقت، نقطه‌هایی از آن‌ها، که به‌فاصلهٔ $\frac{d}{\text{۲}}$ از یکدیگر باشند، باید رنگ‌های مختلف داشته‌باشند و، بنابراین، نقطه‌های به‌فاصله d از یکدیگر، هم‌رنگ باشند. ولی در این صورت، روی خط راست AB نباید نقطه‌هایی به رنگ دوم یا سوم پیدا شود، یعنی این خط راست، یک رنگ است. به این ترتیب، خط راست

یک رنگی (و مثلاً، رنگ اول) وجود دارد (خط راست l). روشن است که روی صفحه، نمی‌تواند نقطه‌های دیگری با رنگ اول پیدا شود. دو نقطهٔ X و Y، با یکی از دو رنگ طوری انتخاب می‌کنیم که XY موازی l باشد. شبیه استدلال قبل، می‌توانیم خط راست m را موازی XY و l که دارای یک رنگ (و مثلاً رنگ دوم) است، به‌دست آوریم. در این صورت، تمامی بقیهٔ صفحه، دارای رنگ سوم خواهدبود و پیدا کردن مثلثی با مساحت واحد که راس‌هایش رنگ سوم را داشته باشند، دشوار نیست.

۶۹.۳۷. $x_\circ$ را عددی درست می‌گیریم، به نحوی که

$$y_۱ = |F_۱(x_\circ| > ۱, \ldots, y_n = |F_n(x_\circ)| > ۱$$

اکنون، عدد $a = x_\circ + ky_۱y_۲\ldots y_n$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم به‌ازای هر دو عدد درست p و q و به‌شرط درست بودن ضریب‌ها در چندجمله‌ای $F(x)$، همیشه $F(p) - F(q)$ بر $p - q$ بخش‌پذیر است. بنابراین $F_۱(a) - F_۱(x_\circ)$ بر $ky_۱y_۲\ldots y_n$ بخش‌پذیر خواهد بود، یعنی $F_۱(a)$ بر $y_۱$ بخش‌پذیر است. به‌همین ترتیب، $F_۲(a)$ بر $y_۲$، $F_۳(a)$ بر $y_۳$ و غیره بخش‌پذیر است. k را به‌قدر کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که $F_i(a)$ بیشتر از بزرگترین عدد، از بین عددهای $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n باشد، آن‌وقت مقدار لازم a به‌دست می‌آید.

۶۹.۳۸. اگر $x_k > n^۲$، آن‌وقت

$$\frac{\sqrt{x_k - x_{k-۱}}}{x_k} < \frac{\sqrt{x_k}}{x_k} = \frac{۱}{\sqrt{x_k}} < \frac{۱}{n}$$

یعنی مجموع جمله‌های متناظر، از واحد تجاوز نمی‌کند. در حالتی هم که داشته‌باشیم $x_k \leq n^۲$، داریم:

$$\frac{\sqrt{x_k - x_{k-۱}}}{x_k} \leq \frac{x_k - x_{k-۱}}{x_k} \leq \frac{۱}{x_{k-۱} + ۱} + \ldots + \frac{۱}{x_k}$$

اگر همهٔ این‌گونه نابرابری‌ها را با هم جمع کنیم، معلوم می‌شود که مجموع از $\frac{۱}{n^۲}+\dots+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}$ بزرگتر نیست، اگر به دو طرف، یک واحد اضافه کنیم، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

۱.۷۰. چون

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۸ = ۹۸۷۶۵۴۳۱۲$$

پس تنها زوج عددی که با شرط مساله سازگار است، همین دو عدد است. عدد کوچکتر را به هر صورتی بزرگتر کنیم، ۸ برابر آن، از عدد

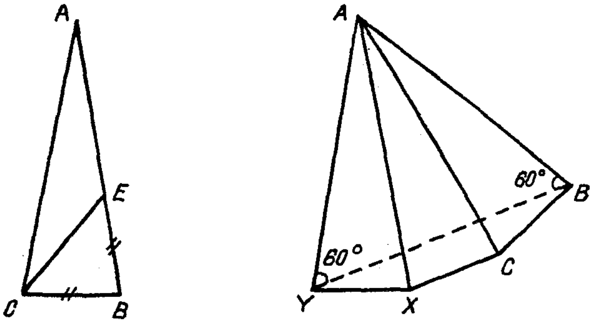
$$۹۸۷۶۵۴۳۲۱$$

بزرگتر می‌شود.

۲.۷۰. طول ضلع‌ها، برابرند با ۲، ۳ و ۴.

۳.۷۰. نه، ممکن نیست. در واقع، در هر تعویض، سه سکه، رد و بدل می‌شود. بنابراین، تعداد سکه‌هایی که در تعویض شرکت دارند، باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اگر هر نفر ۱۰ سکه داده باشد، به‌معنای آن است که، روی‌هم، ۱۹۷۰۰ سکه رد و بدل شده‌است. ولی این عدد بخش‌پذیر بر ۳ نیست.

۵.۷۰. تعداد شهرهای این کشور را n می‌گیریم و استدلال را براساس استقرا، روی n، انجام می‌دهیم. درستی حکم، برای $n = ۲$ روشن است. فرض می‌کنیم، حکم مساله برای n شهر برقرار باشد. اکنون تعداد شهرها را $n+۱$ می‌گیریم. وضع ارتباطی را بین n شهر، با کنار گذاشتن شهری مثل A، درنظر می‌گیریم. اگر شهر A، دست‌کم با یکی از شهرهای دیگر، با همان وسیلهٔ ارتباطی آن‌ها، مربوط باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. ولی اگر شهر A، با همهٔ شهرهای دیگر، با وسیلهٔ ارتباطی دوم مربوط باشد،



شکل ۳۶

آن‌وقت روشن است که با همین وسیلهٔ ارتباطی، همهٔ $n+1$ شهر به هم مربوط‌اند.

۶.۷۰. فرض می‌کنیم این‌طور نباشد و، برای هر سه تیم A، B و C بدانیم، اگر A از B و B از C برده باشد، آن‌وقت A هم در بازی بین A و C، برنده باشد. ولی در این صورت، روشن است، تیم X، که برندهٔ مسابقه است، باید از همهٔ تیم‌ها برده باشد. سپس، تیم Y، که مقام دوم را در مسابقه به‌دست آورده است، باید از همهٔ تیم‌ها، به‌جز X، برده باشد و غیره. به‌این ترتیب، تیم برندهٔ مسابقه، ۱۱ امتیاز، تیم دوم ۱۰ امتیاز، ...، تیم پنجم درست ۷ امتیاز باید داشته‌باشد که با فرض مساله، متناقض است.

۷.۷۰. *پاسخ.* مقدار زاویهٔ B، برابر ۳۰ درجه است.

۹.۷۰. روی ساق AB، پاره‌خط راست BE را با طولی برابر طول قاعدهٔ BC جدا می‌کنیم (شکل ۳۶). بنابراین

$$\widehat{CEB} = \widehat{ECB} = ۵۰^\circ; \widehat{ACE} = ۳۰^\circ$$

چون در هر مثلث، ضلع روبه‌روی زاویهٔ بزرگتر، طول بیشتری دارد، پس

$|CE| > |AE|$ و سپس $|CE| > |CB|$. از آن‌جا

$$|AB| = |AE| + |BE| > ۲|CB|$$

برای اثبات بخش دوم مساله، سه نمونهٔ مثلث را شبیه شکل (شکل سمت راست) پهلوی هم می‌گذاریم. از آن‌جا که طول خط شکستهٔ $BCXY$، بزرگتر است از طول پاره‌خط راست BY، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۱.۷۰. اگر $x^۲ = ۲y - ۱$ را در معادلهٔ دوم دستگاه قرار دهیم، به این معادله می‌رسیم:

$$y^۴ + ۴y^۲ - ۴y - ۱ = ۰$$

سمت چپ این معادله قابل تجزیه است:

$$(y - ۱)(y^۳ + y^۲ + ۵y + ۱) = ۰ \qquad (*)$$

ولی چون $۲y - ۱ = x^۲ \geq ۰$، پس $y \geq \frac{۱}{۲}$ و، بنابراین، پرانتز دوم در برابری $(*)$ نمی‌تواند برابر صفر شود.

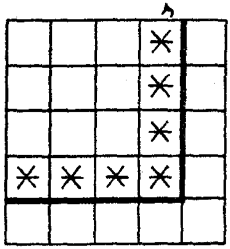
پاسخ. $x = \pm ۱$، $y = ۱$.

۱۳.۷۰. نقطه‌های دیگر تماس را، واقع بر ضلع‌های AB و BC، به‌ترتیب D و E می‌نامیم. نقطهٔ دوم برخورد دایره‌های اول و دوم را با پاره‌خط راست، به‌ترتیب، X و Y می‌گیریم. در این صورت، بنابر ویژگی خط راستی که دایره را قطع می‌کند، داریم:

$$|CX| \cdot |CA| = |CE|^۲;$$
$$|AY| \cdot |AC| = |AD|^۲$$

ولی چون $|AD| = |CE|$، بنابراین به‌دست می‌آید:

$$|CX| = |AY| \Rightarrow |AX| = |CY|$$



شکل ۳۷

۱۴.۷۰. پاسخ. $x = ۱$، $y = ۲$، $z = ۴$.

۱۵.۷۰. پاسخ. طول هریک از دو بخش پاره‌خط راست، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۶.۷۰. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد. ستون سمت راست و سطر پایین را درنظر می‌گیریم. بدیهی است که باید، دست‌کم هشت خانهٔ آن‌ها رنگ شده‌باشد (و البته، نه هر ۹ خانه) و، درنتیجه، باید خانه‌هایی از جدول، که در شکل ۳۷ با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم، بدون رنگ بمانند. درنتیجه، در مربع ۳×۳ گوشه چپ و بالای جدول، باید ۸ خانهٔ رنگی داشته‌باشیم، و این، به‌معنای آن است که در آن‌جا مربع ۲×۲ با سه خانه یا چهار خانهٔ رنگی وجود دارد.

۱۸.۷۰. راهنمائی. ثابت کنید، برای هر طرحی از این‌گونه، نابرابری $x \leq ۳y - ۶$ برقرار است که، در آن، x تعداد پاره‌خط‌های راست، و y تعداد نقطه‌هاست.

۲۱.۷۰. پاسخ. طول هر دو پاره‌خط راست، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۳.۷۰. پاسخ. $x = ۱$، $y = ۳$، $z = ۲$، $t = ۴$

۲۴.۷۰. حل مسالهٔ ۳۰.۷۰ را ببینید.

۲۶.۷۰. $x = \sin ۱$ و $y = \cos ۱$ می‌گیریم. دراین‌صورت، باید این

نابرابری را ثابت کرد:

$$2xy + 1 - 2x^2 + 2(x - y) \geq 1$$

که به‌این صورت قابل تبدیل است:

$$(x - 1)(y - x) \geq 0$$

و این نابرابری برقرار است، زیرا $x < 1$ و $y < x$.

۲۹.۷۰. با حل دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \\ f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = \frac{x}{x - 1} \\ f\left(\frac{1}{1 - x}\right) + f(x) = 1 - x \end{cases}$$

به‌دست می‌آید: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x(1 - x)}$.

۳۰.۷۰. کافی است ثابت کنیم، از سطر دوم به بعد، هیچ‌کدام از عددها در جای قبلی خودشان نیستند، یعنی ردیف عددها در هر سطر، با ردیف عددها در سطرهای قبل از آن، فرق دارد. روشن است که، ضمن انتقال یک عدد از سطری به سطر بعد، شمارهٔ آن، به اندازهٔ یکی از عددهای $m - n$، $n - k$، $m - k$ اضافه می‌شود. فرض می‌کنیم، بعد از چند گام، عدد مفروض، a مرتبه در گروه سمت چپ، b مرتبه در گروه میانی و c مرتبه در گروه سمت راست قرار گیرد. در این صورت، این عدد، به‌اندازهٔ

$$x = a(n - k) + b(m - k) + c(m - n)$$

خانه، به سمت راست حرکت کرده است. اگر قرار باشد، به خانه‌ای در همان ردیف قبلی قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$x = 0; 0 \leq a \leq k, 0 \leq b \leq n - m - k, 0 \leq c \leq m$$

اکنون، به سادگی قابل تحقیق است که، هر بردار (a,b,c) که جوابی از معادلهٔ $x = ۰$ باشد، ترکیبی خطی و صحیح از بردارهای

$$\vec{v}_۱ = (۰, n-m, m-k) \text{ و } \vec{v}_۲ = (۱, -۱, ۱)$$

خواهد بود، تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، بردار

$$y_۱ \vec{v}_۱ + y_۲ \vec{v}_۲$$

($y_۱$ و $y_۲$، عددهای درست‌اند)، نمی‌تواند مختصات درستی که در نامعادله‌های قبلی صدق کند، داشته باشد.

۳۱.۷۰. فرض می‌کنیم، به‌ازای هر k داشته باشیم:

$$t_k(t_{k+۱} + ۱) < ۲$$

اگر همهٔ این‌گونه نابرابری‌ها را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

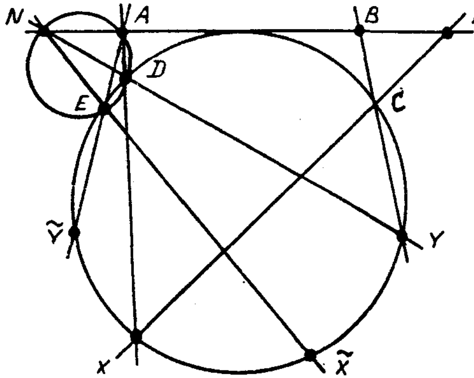
$$(t_۱ + ۱)(t_۲ + ۱)\dots(t_n + ۱) < ۲^n$$

ولی چون نابرابری $۱ + t \geq ۲\sqrt{t}$ برای هر عدد مثبت t برقرار است، بنابراین

$$(t_۱ + ۱)(t_۲ + ۱)\dots(t_n + ۱) \geq ۲^n\sqrt{t_۱ t_۲ \dots t_n} = ۲^n$$

می‌بینیم که به تناقض رسیدیم.

۳۳.۷۰. بین عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_m، یا عددی وجود دارد که بر m بخش‌پذیر است و یا، اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، دو عدد پیدا می‌شود که در تقسیم بر m، به یک باقی‌مانده می‌رسند. از آن‌جا که $a_m < ۲m$، بنابراین، a_k (یا $a_k - a_l$)، وقتی بر m بخش‌پذیر باشد، به‌ناچار باید برابر m باشد.



شکل ۳۸

۳۴.۷۰. دایره‌ای را درنظر می‌گیریم که از نقطه‌های A، D و N می‌گذرد. این دایره، دایرهٔ مفروض را در نقطهٔ دوم E قطع می‌کند. خط راست NE، دایرهٔ اصلی را در نقطه $\tilde{X}$ و خط راست AX همان دایره را در نقطهٔ O قطع می‌کند (شکل۳۸). باتوجه به زاویه‌های محاطی، مثلث‌های ODE و ONA؛ همچنین مثلث‌های ODEو $O\tilde{X}X$ مشابه‌اند.

درنتیجه، دو مثلث ONA و $O\tilde{X}X$ مشابه می‌شوند، یعنی خط‌های راست NA و $\tilde{X}X$ موازی‌اند.

خط راست AE را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ اصلی را در $\tilde{Y}$ قطع کند. شبیه استدلال بالا، به این نتیجه می‌رسیم که NA با $\tilde{Y}Y$ موازی است. بنابراین، خط‌های راست $A\tilde{Y}$ و BY، نسبت به قطر دایره قرینهٔ یکدیگر و بر خط راست AB عمودند. به‌این ترتیب، نقطه‌های C و E قرینهٔ یکدیگرند؛ سپس، خط‌های راست $E\tilde{X}$ و CX قرینهٔ هم و، درنتیجه، نقطه‌های N و M قرینهٔ یکدیگرند.

۳۶.۷۰. با استفاده از عمل‌های مربوط به حل مسالهٔ ۳۷.۷۰ (مسالهٔ بعد)، روی مستطیل با اندازه‌های $a \times b$$(a > b)$، ما را به مستطیل با

اندازه‌های $b \times |a - ۲b|$ می‌رساند. ثابت کنید، دیر یا زود، یا یک مربع و یا یک مستطیل «تهی» به‌دست می‌آید.

۳۷.۷۰. *راهنمائی.* فرض می‌کنیم، مجموع عددها در مستطیلی برابر $a + ۴$ باشد. چهار مربع را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که سه ضلع هر مربع، روی سه ضلع مستطیل واقع باشد. ضلع‌های چهارم آن‌ها، یک مستطیل جدید را محصور می‌کند. ارزیابی ساده‌ای نشان می‌دهد که، مجموع عددها در آن‌ها، از لحاظ قدرمطلق، از $۳a + ۴$ کمتر نیست. بنابراین، اگر مستطیل اولیه را با حداکثر مجموع عددها درنظر بگیریم، به‌ناچار به نتیجهٔ $a < ۰$ می‌رسیم؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱.۷۱. نقطهٔ برخورد ایوانووا با ایوانوسکی، به شهر A نزدیک‌تر است.

۲.۷۱. *پاسخ.* در مثلث متساوی‌الاضلاع.

۳.۷۱. *راهنمائی.* روی هم ۴۰ امتیاز گرفته‌اند. بنابراین $Sn = ۴۰$، که در آن، S مجموع امتیازهای یک امتحان و n تعداد امتحان‌هاست. درضمن $S \geq ۶$، یعنی S برابر ۸، ۱۰ یا ۲۰ است. چون ژنیا در جبر رتبهٔ اول را به‌دست آورده است، پس تعداد امتحان‌ها، بیش از ۲ بوده، درغیر این‌صورت، باید ۲۲ از ۲×۹، یعنی ۱۸ کمتر باشد. سپس به‌سادگی و با آزمایش معلوم می‌شود که

$$n = ۵, S = ۸ = ۵ + ۲ + ۱$$

و نفر دوم در فیزیک، کولیا بوده‌است.

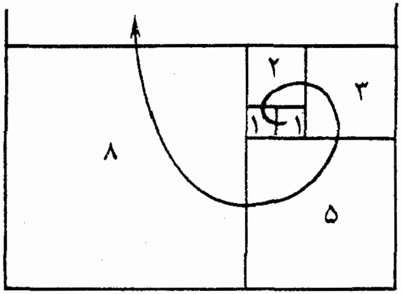
۴.۷۱. *پاسخ.* ۱۸.

۶.۷۱. بله، می‌توا. شکل ۳۹ را ببینید.

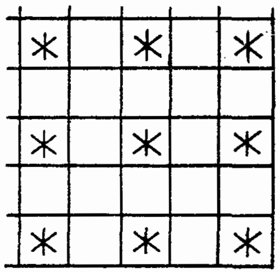
۷.۷۱. *پاسخ.* $x = -۲$، $y = -۱۲$.

۸.۷۱. *پاسخ.* مثلث متساوی‌الاضلاع.

۹.۷۱. دورانی به زاویهٔ ۹۰ درجه را درنظر می‌گیریم که مربع را به خودش تبدیل کند. دراین صورت، خط‌های راست AK، BK، CK و



شکل ۳۹



شکل ۴۰

DK درست روی عمودهایی قرار می‌گیرند که رسم کرده‌بودیم. در نتیجه، نقطهٔ K به نقطهٔ مشترک این عمودها می‌رود.

۱۲.۷۱. فرض می‌کنیم، مستطیل را، به مربع‌های واحد تقسیم کرده‌باشیم و به برخی از آن‌ها، آن‌طور که در شکل ۴۰ نشان داده شده است، توجه می‌کنیم. در این صورت، هر قطعهٔ ۲ × ۲، درست یکی از مربع‌هایی را که نشان گذاشته‌ایم می‌پوشاند، ولی هر قطعهٔ ۴ × ۱ یا دو مربع نشان‌دار را می‌پوشاند و یا مربع نشان‌داری را نمی‌پوشاند، یعنی برای این‌که قطعه‌های ۲ × ۲ تعویض شود، باید برای هر قطعهٔ ۲ × ۲، دو قطعه ۴ × ۱ متناظر باشد، درحالی که با تبدیل یک قطعهٔ ۲ × ۲ با یک قطعهٔ ۴ × ۱، یک خانهٔ نشان‌دار با ۰ یا ۲ خانهٔ نشان‌دار عوض می‌شود که ممکن نیست.

۱۴.۷۱. پاسخ. ۱۹۷۲ رقم، زیرا حاصل‌ضرب این دو عدد برابر است با $۱۰^{۱۹۷۱}$.

۱۵.۷۱. پاسخ. ۴۹۵۱. از این مطلب استفاده کنید که: از هر دو حلقه‌ای که یکی دیگری را تکمیل می‌کند (یعنی روی‌هم شامل ۱۰۰ عدد باشند)، یکی از آن‌ها، مجموعی مثبت دارد.

۱۶.۷۱. بله، کسی که بازی را آغاز کند، می‌تواند برنده شود. برای این منظور باید هر بار، توده‌ای از چوب کبریت‌ها را که تعدادشان زوج است، به دو بخش طوری تقسیم کند که، در هر بخش، تعداد چوب کبریت‌ها فرد باشد.

۱۸.۷۱. نقطهٔ E را روی ضلع BC طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم: $|ED| = |BE|$. دراین صورت، خط‌های راست AB و DE موازی و مثلث‌های ABC و DEC متشابه می‌شوند، یعنی

$$|BE| = |ED| = ۶$$

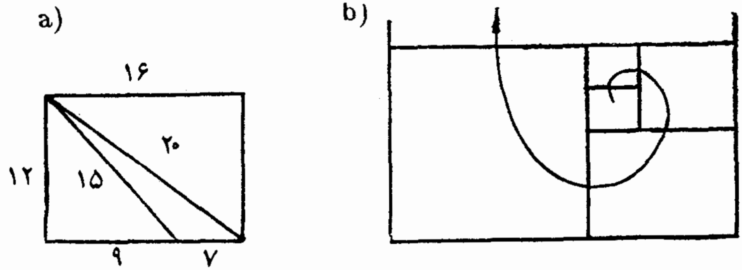
بنابراین، طبق نابرابری مثلثی

$$|BD| < |BE| + |ED| = ۱۲$$

۱۹.۷۱. پاسخ. روی‌هم ۲۰۲ جواب وجود دارد: رشتهٔ اصلی جواب: $x_۰ = ۰$، $x_k = \pm\frac{۱}{۲}$، $x_j = ۰$ به‌ازای $j \neq k$ (روی هم ۲۰۰ جواب). یک جواب دیگر: همهٔ x_iها برابر ۰؛ جواب آخر: $x_۰ = ۱$، $x_i = ۰$ (برای $i > ۰$).

۲۱.۷۱. فرض می‌کنیم $b^۲ - ۴ac = n^۲$. در این صورت داریم:

$$۴a(ax^۲ + bx + c) = (۲ax + b + n)(۲ax + b - n)$$



شکل ۴۱

از این‌جا با فرض $x = ۱۰$، معلوم می‌شود که عدد

$$۲۰a + b + n \text{ یا } ۲۰a + b - n$$

بر عدد اول $\overline{abc}$ بخش‌پذیر است. ولی در این صورت

$$۲۰a + b + n > ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

که ممکن نیست، زیرا $n < b$.

۲۲.۷۱. *پاسخ.* برای این‌که آغاز کنندهٔ بازی نتواند برنده شود، باید در هر دو توده، تعداد فردی چوب کبریت وجود داشته‌باشد.

۲۴.۷۱. *پاسخ.* بله، می‌توان. *راهنمائی.* مستطیل ۱۶×۱۲ را در شکل ۴۱_a در نظر بگیرید که به مثلث‌هایی تقسیم شده‌است. با این گونه مستطیل‌ها، می‌توان صفحه را پوشاند (شکل ۴۱_b). همهٔ این مستطیل‌ها به همان ترتیب قابل‌تقسیم‌اند. تحقیق کنید، مثلث‌هایی که به این طریق به‌دست می‌آیند، دو به دو با هم اختلاف دارند.

۲۷.۷۱. *راهنمائی.* از بیان برداری حرکت یکنواخت استفاده کنید.

۲۸.۷۱. اگر مقدار سمت چپ نابرابری فرض را x بگیریم، داریم:

$$۲x \leq x + \sum_{k=۱}^{۲۰۰} \frac{۱}{۲^{۲۰۰-k}} \left(\frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+۱} \right) + \frac{۲}{۲۰۱}$$

بنابراین

$$x \leq \frac{۲}{۲۰۱} + \sum_{k=۱}^{۲۰۰} \frac{۱}{۲^{۲۰۰-k}} \cdot \frac{۱}{k(k+۱)} =$$

$$= \frac{۲}{۲۰۱} + \sum_{k=۱}^{۱۸۰} + \sum_{k=۱۸۱}^{۲۰۰} \leq \frac{۲}{۲۰۱} + \left(\frac{۱}{۲^{۱۹۹}} + \ldots + \frac{۱}{۲^{۲۰}}\right) +$$

$$+ \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{۲^{۲۰}}\right) \cdot \frac{۱}{۱۸۰} \times ۱۸۱ \leq$$

$$\leq \frac{۲}{۲۰} + \frac{۱}{۲^{۱۹}} + \frac{۱}{۹۰ \times ۱۸} < \frac{۱}{۹۰}$$

۳۰.۷۱. همهٔ نقطه‌های برخورد خط‌های راست را، همراه با نقطهٔ P، در درون دایره‌ای قرار می‌دهیم. فرض کنید، شعاع این دایره، برابر R باشد. اکنون، عدد $t < ۱$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، کسینوس همه زاویه‌های بین خط‌های راست، کوچکتر از t باشند. در این صورت، همهٔ نقطه‌هایی که در صورت مساله از آن‌ها یاد شده‌است، نمی‌توانند در بیرون دایره‌ای به همان مرکز O و به شعاع برابر $\frac{۲R}{۱-t}$ قرار گیرند. درواقع، اگر نقطهٔ A روی خط راست l باشد و آن را روی خط راست m تصویر کنیم، نقطه‌ای مثل B روی m به‌دست می‌آید. درضمن، خط‌های راست l و m، در نقطه‌ای مثل K به‌هم می‌رسند که در درون دایرهٔ نخستینِ به شعاع R است؛ یعنی

$$|BK| < t \cdot |AK|$$

در این صورت

$$|BO| < R + |BK| < R + t \cdot |AK| < R +$$
$$+t(|AO| + R) < ۲R + t|AO| < \frac{۲R}{۱-t}$$

نابرابری اخیر، نتیجه‌ای است از نابرابری $|AO| < \frac{۲R}{۱-t}$.

۳۱.۷۱. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x^n + a_۱x^{n-۱} = a_۲x^{n-۲} + \ldots + a_n$$

دو طرف را بر $x^{n-۱}$ تقسیم می‌کنیم:

$$x + a_۱ = \frac{a_۲}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^{n-۱}}$$

در سمت چپ این برابری، با تابعی یکنوا و صعودی و در سمت راست آن، روی نیم‌محور مثبت، با تابعی یکنوا و نزولی سروکار داریم، بنابراین، معادله، بیش از یک ریشهٔ مثبت نمی‌تواند داشته باشد.

۳۴.۷۱. *راهنمائی.* گوییم، اندیس p، برتر از اندیس q است، وقتی که مجموع

$$b_p + b_{p+۱} + \ldots + b_{q-۱}$$

عددی مثبت باشد. روشن است که، برای هر دو اندیس p و q، یا p برتر از q و یا q برتر از p است؛ درضمن ممکن نیست هم p برتر از q و هم q برتر از p باشد، همچنین به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، برای هر سه اندیس p و q و r، ویژگی زیر وجود دارد: اگر p برتر از q و q برتر از r باشد، آن‌وقت p برتر از r است. تنها این می‌ماند، توجه کنیم، عدد N که در صورت مساله از آن یاد شده‌است، چیزی جز مقدار اندیس‌هایی نیست که اندیس k برتر از آن‌هاست. بنابراین، برای هر دو اندیس p و q، اگر p برتر از q باشد، آن‌وقت $N_p > N_q$.

۳۶.۷۱. استقرای روی n. مجموعهٔ X شامل n راس را انتخاب می‌کنیم که با یال‌های (مثلاً با رنگ اول) به هم مربوط‌اند. اکنون یکی از آن‌ها

را کنار می‌گذاریم و از بین بقیهٔ راس‌ها، باز هم n راس انتخاب می‌کنیم که با یک رنگ به هم مربوط شده باشند (مجموعهٔ Y).

حالت اول. این رنگ، همان رنگ اول است. در این صورت، دو انتخاب از n راس، نباید متقاطع باشند و راس باقی‌ماندهٔ A، به این $۲n$ راس تنها با یال‌های به رنگ‌های دوم و سوم، به هم مربوط‌اند. ولی در این صورت، تعداد یال‌های یکی از این دو رنگ، دست کم برابر با n؛ و n راس متناظر، همراه با A، $n + ۱$ راس موردنظر را تشکیل می‌دهند.

حالت دوم. رنگ اخیر، رنگ دوم (یا سوم) است. در این حالت، همهٔ $۲n + ۱$ راس را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: دستهٔ اول شامل سه راس که در یکی از دو مجموعهٔ X یا Y باشند؛ دستهٔ دوم، شامل بقیهٔ راس‌ها. به‌سادگی دیده می‌شود، به‌جز حالت بی‌معنی که ممکن است پیش آید، هریک از این دسته‌ها به دو بخش چنان تقسیم می‌شود که، راس‌های بخش‌های مختلف دسته، تنها با یال‌های به رنگ سوم (و یا دوم) می‌توانند به هم مربوط شده باشند؛ در غیر این‌صورت، مجموعهٔ شامل $n + ۱$ راس (که موردنظر ماست)، بلافاصله ظاهر می‌شود. در یکی از این دسته‌ها، دست‌کم $n + ۱$ راس وجود دارد که تنها با یال‌های به رنگ سوم به هم مربوط‌اند: همان چیزی که لازم داریم.

۳۷.۷۱. برای هر عدد درست t، این جواب را برای معادله داریم:

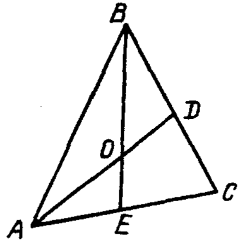
$$x = ۱ + ۶t^۳, y = ۱ - ۶t^۳, g = -۶t^۲$$

۱.۷۲. *پاسخ*. هواپیمای اول، زودتر پرواز خود را به پایان می‌رساند. از نابرابری مثلثی استفاده کنید.

۳.۷۲. پنج راس و مرکز یک پنج‌ضلعی منتظم.

۴.۷۲. *پاسخ*. عددی زوج.

۵.۷۲. حل مسالهٔ ۱۳.۸۶ را به‌دقت بخوانید.



شکل ۴۲

۶.۷۲. نه، نمی‌شود. اگر عددهای واقع در راس‌ها برابر باشند، مجموع آن‌ها، باید مضربی از ۸ باشد. از طرف دیگر، مجموع این عددها (با توجه به این‌که، عدد هر یال دو بار به‌حساب می‌آید)، برابر است با ۱۱ × ۱۲.

۷.۲۲. نه، نمی‌توان. برای این‌که داشته باشیم:

$$S_{AOB} = S_{BOD} = S_{AOE}$$

باید داشته باشیم (شکل ۴۲):

$$|AO| = |OD| \text{ و } |BO| = |DE|$$

ولی این به‌معنای آن است که، نقطهٔ O، باید نقطهٔ وسط دو پاره‌خط راست AD و BE باشد، که ممکن نیست.

۹.۷۲. پاسخ. اگر $|AB| = a$، $|BC| = b$، $|CD| = c$ و $|DA| = d$، آن‌وقت

$$|MN| = \frac{۱}{۲}(b + c - a - d)$$

۱۲.۷۲. چون $۲n = x^۲ + y^۲$ (x و y، عددهایی درست‌اند)، پس x و y، یا هر دو زوج و یا هر دو فردند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$n = \left(\frac{x + y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{x - y}{۲}\right)^۲$$

۱۳.۷۲. چون چهارضلعی $AKCM$، محاطی است، پس

$$\widehat{KAM} = ۱۸۰^\circ - \widehat{MCD}$$

ولی چون $\widehat{MAB} = ۱۸۰^\circ - \widehat{KAM}$، بنابراین

$$\widehat{MAB} = \widehat{MCD}$$

۱۶.۷۲. در ذهن خود منحنی‌هایی را درنظر می‌گیریم که تنها، آن دایره‌هایی را به هم وصل کرده باشند که به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست به هم وصل نشده‌اند. روی این منحنی‌ها، عددهای مختلف اول را می‌نویسیم و روی هرکدام، یک عدد. در هر دایره، حاصل‌ضرب همهٔ عددهای اول منحنی‌هایی را قرار می‌دهیم که این دایره را به دایره‌های دیگر وصل کرده‌است. این‌ها، همان عددهایی هستند که لازم داشتیم.

۱۷.۷۲. تابع $f(x)$ را، بنابراین دستور، تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۲\log_\varphi(۱-x)+۲, & ۰ \le x \le ۲-\varphi \\ ۰, & x > ۲-\varphi \end{cases}$$

که در آن $\varphi = \frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۵})$، «عدد طلائی» است. در این صورت، یک نابرابری برقرار است: ضمن تقسیم مثلثِ به ضلع n و جدا کردن مثلثِ بالایی، تعداد مثلث‌ها، از $۲\log_\varphi n + f(x)$ کمتر نیست که، در آن، $x = \frac{a}{n}$ و a، برابر است با طول ضلع کوچکترین مثلث از مثلث‌هایی که شامل دو راس پایینی مثلث بزرگ هستند. نابرابری، با بریدن a نوار پایینی مثلث بزرگ و با استقرا، به‌سادگی ثابت می‌شود.

چون $۲\log_\varphi ۳۲ > ۱۴$، زیرا $\varphi^۷ > ۳۲$، پس نابرابری موردنظر مساله ثابت می‌شود.

۱۸.۷۲. داریم:

$$b = b(kn - ml) = bkn - bml =$$
$$= bkn - anl + anl - bml = n(bk - al) +$$
$$+l(an - bm) \geq n \times ۱ + l \times ۱ = n + l$$

۲۰.۷۲. چون

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}} = \frac{|AD| \cdot \sin(\widehat{ADB})}{|CD| \cdot \sin(\widehat{CDB})}$$

و همچنین، از طرف دیگر

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}} = \frac{|AB| \cdot \sin(\widehat{ABD})}{|CB| \cdot \sin(\widehat{CBD})}$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم:

$$\sin(\widehat{ADB}) : \sin(\widehat{ABD}) = \sin(\widehat{CDB}) : \sin(\widehat{CBD})$$

اگر از رابطهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های ABX و CBX استفاده کنیم (X، نقطهٔ برخورد مماس‌های بر دایره، در نقطه‌های A و B)، معلوم می‌شود که، این نسبت‌های سینوس‌ها، برابر است با

$$|BX| : |AX| \text{ و } |BX| : |CX|$$

(فرض کرده‌ایم، روی خط راست BD، نقطهٔ B بین نقطه‌های X و D باشد). چون $|AX| = |CX|$، قضیه ثابت است.

۲۳.۷۲. $\sqrt[n]{m+۱} \leq ۱ + \frac{m}{n}$، زیرا با استفاده از بسط دوجمله‌ای، داریم: $m + ۱ \leq \left(۱ + \frac{m}{n}\right)^n$

به‌همین ترتیب $\sqrt[m]{n+1} \leq 1 + \frac{n}{m}$. بنابراین

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} \geq \frac{1}{1+\frac{m}{n}} + \frac{1}{1+\frac{n}{m}} = 1$$

۲۴.۷۲. روشن است که، از دنبالهٔ سوم به بعد، مقدار هر جمله، از عددی که این جمله زیر آن نوشته شده‌است، تجاوز نمی‌کند. چون دنبالهٔ غیرصعودی عددهای طبیعی، به‌ناچار در جایی، ثابت می‌ماند، درستی حکم مساله ثابت می‌شود: از لحظه‌ای مثل t_1 به بعد، جملهٔ اول دنباله تغییر نمی‌کند و تکرار می‌شود؛ از لحظهٔ t_2 به بعد، جملهٔ دوم دنباله ثابت می‌ماند و غیره. بعد از لحظهٔ t_n (که در آن، n برابر طول دنباله است)، به‌ناچار، خود دنباله، بدون تغییر، تکرار می‌شود.

۲۶.۷۲. خط شکسته‌ای می‌سازیم که همهٔ زاویه‌های بین ضلع‌های مجاور آن، برابر ۹۰ درجه باشد. اگر خط شکسته‌ای شامل n ضلع، با سه ضلع متوالی AB، BC و CD (که بر یک صفحه واقع‌اند) ساخته شده‌باشد، خط شکسته با $n+2$ ضلع را به این ترتیب می‌سازیم: ضلع BC را حذف می‌کنیم و به‌جای آن، ضلع‌های BX، XY و YC را اضافه می‌کنیم؛ درضمن، ضلع‌های BX و YC را عمود بر صفحهٔ ABC درنظر می‌گیریم. توجه کنیم: در خط شکستهٔ جدید، ضلع‌های BX، XY و YC، روی یک صفحه‌اند، یعنی این ساختمان را می‌توان تکرار کرد. این باقی می‌ماند که خط‌های شکستهٔ مشابهی برای $n = 6$ و $n = 7$ بسازیم که آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۲۷.۷۲. اگر $p = 3k + 1$، آن‌وقت

$$4p^2 + 1 = (4k+2)^2 + (4k+1)^2 + (2k)^2$$

و اگر $p = ۳k + ۲$، آن‌وقت

$$۴p^۲ + ۱ = (۴k + ۳)^۲ + (۴k + ۲)^۲ + (۲k + ۲)^۲$$

۳۰.۷۲. مسابقه‌های انجام شده را روی یک طرح، به این ترتیب نشان می‌دهیم: هر تیم را به‌وسیلهٔ یک نقطه و هر بازی را به‌وسیلهٔ پاره‌خط راست جهت‌داری که دو تیم بازی‌کننده را به هم وصل می‌کند، نشان می‌دهیم (جهت پاره‌خط راست، از طرف تیم برنده به طرف تیم بازنده است). نقطهٔ دلخواهی مثل A را درنظر می‌گیریم و پاره‌خط راست جهت‌داری، از آن به سمت نقطه‌ای مثل B رسم می‌کنیم $(A \to B)$. سپس از B به سمت نقطه‌ای مثل C و غیره. رسم را همیشه می‌توان، به این ترتیب انجام داد، زیرا بنابر فرض مساله، تعداد پیکان‌هایی که به یک نقطه وارد شده، با تعداد پیکان‌های خارج شده از آن، برابر است. دیر یا زود، به نقطه‌ای می‌رسیم که قبلاً در آن‌جا بوده‌ایم که، درنتیجه، با دور بسته‌ای از پیکان‌ها مواجه می‌شویم که خودش را قطع نکرده‌است. جواب مساله، همان بازی‌های متناظر با این دور بسته است.

۳۱.۷۲. *پاسخ*. $k = ۲۰۱$.

۳۳.۷۲. عدد ۹۹...۹۹۹ (۹۹ رقم) را با x نشان می‌دهیم. باید ثابت کنیم، عدد طبیعی n وجود دارد، به‌نحوی که

$$x \times ۱۰۰^{۱۰۰} \leq n^۲ < x \times ۱۰۰^{۱۰۰} + ۱۰۰^{۱۰۰}$$

فرض می‌کنیم، چنین عدد طبیعی (یعنی n) وجود نداشته باشد. در این صورت، عدد طبیعی k پیدا می‌شود، به‌نحوی که

$$k^۲ < x \times ۱۰۰^{۱۰۰} \text{ و } (k + ۱)^۲ \geq x \times ۱۰۰^{۱۰۰} + ۱۰۰^{۱۰۰}$$

ولی در این صورت، باید داشته باشیم:

$$(k+۱)^۲ - k^۲ > ۱۰۰^{۱۰۰} \Rightarrow ۲k+۱ > ۱۰۰^{۱۰۰} \Rightarrow k > \frac{۱۰۰^{۱۰۰}}{۲}$$

که با فرض $k^{۲} < ۱۰۰^{۱۰۰}$ ناسازگار است.

۳۵.۷۲. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد (برهان خُلف). در این صورت، تعداد جمله‌های زوج در این دنباله، محدود است و روشن است که، هر عدد فرد دنباله از راه اضافه شدنِ یکی از این عددهای زوج به جملهٔ دیگری از دنباله به‌دست می‌آید. بزرگترین عدد زوج دنباله را، m می‌نامیم. در این صورت، اگر n را به‌اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، آن‌وقت جملهٔ nام دنباله، نمی‌تواند بیشتر از m، از جملهٔ $(n-۱)$ام بزرگتر باشد. چون در مجموعهٔ عددهای طبیعی، هرقدر جلو برویم، می‌توان m عدد مرکب پشت‌سرهم پیدا کرد، بنابراین، در این بخش از دنبالهٔ عددهای طبیعی، به‌ناچار، دست‌کم یکی از جمله‌های دنباله وجود دارد.

۳۶.۷۲. *پاسخ*. ۲۱. در واقع، برای هر راس می‌توان سه مختص، در رابطه با شماره‌هایی که به خط‌های راست موازی یکی از ضلع‌ها می‌دهیم، درنظر گرفت (شکل ۴۳ را ببینید). روشن است که، مجموع سه مختص هر راس برابر است با ۳۰. چون برای هر دو راس موردنظر با مختص اول (همچنین دوم یا سوم)، باید مقدار مختص متفاوت باشد، بنابراین مجموع آن‌ها از

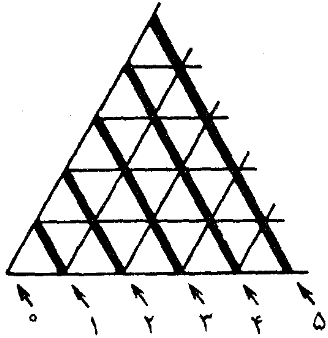
$$۰ + ۱ + ۲ + \ldots + (n - ۱) = \frac{۱}{۲}n(n - ۱)$$

کمتر نیست؛ درنتیجه، مجموع همهٔ مختصات این نقطه‌ها، از

$$\frac{۳}{۲}n(n - ۱)$$

کمتر نیست (n، تعداد همهٔ راس‌های موردنظر در تقسیم است). از طرف دیگر، این مجموع برابر است با $۳۰n$. بنابراین

$$۳۰n \geq \frac{۳}{۲}n(n - ۱) \Rightarrow n - ۱ \leq ۲۰$$



شکل ۴۳

مثال مربوط به پاسخ ۲۱ راس را، به عنوان تمرین، به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

۳۷.۷۲. برای اثبات، به پیش‌قضیه‌ای کم‌و بیش دشوار نیاز داریم که، به‌کمک استقرا، ثابت می‌شود.

پیش‌قضیه. هر دو ایستگاه مترو در این شهر، دست‌کم به‌وسیلهٔ ۱۰ مسیر غیرمتقاطع به هم مربوط‌اند.

اکنون ایستگاه‌های A و B را درنظر می‌گیریم که، برای رفتن از A به B، باید دست‌کم ۹۹ بار جا عوض کرد. فرض کنید:

$$A - X_۱ - X_۲ - \ldots - X_{۹۹} - B,$$

$$A - Y_۱ - Y_۲ - \ldots - Y_{۹۹} - B,$$

$$A - Z_۱ - Z_۲ - \ldots - Z_{۹۹} - B$$

۹ مسیر از این‌گونه پیدا می‌شود که، وجود آن‌ها، نتیجه‌ای از پیش‌قضیه است (این‌که، طول مسیر در این‌جا، درست برابر ۱۰۰ باشد، نقش اساسی ندارد). بقیهٔ ۹۸۰ ایستگاه را، که داخل هیچ کدام از این مسیرها نیستند، درنظر می‌گیریم. از بین آن‌ها، یکی از ایستگاه‌ها را C می‌نامیم. این ایستگاه،

نمی‌تواند، در عین حال، هم به $X_۱$ و هم به $X_{۹۹}$ مربوط باشد. بنابراین، C با یکی از این ایستگاه‌ها، تشکیل گروهی را می‌دهد که، در آن، ایستگاه‌ها به هم مربوط نیستند. به‌این ترتیب، می‌توانیم به تعداد

$$۹۷ \times ۱۰ + ۲ = ۹۷۲$$

از این‌گونه زوج‌ها تشکیل دهیم. اگر هم، مثلاً، از X_i، سه ایستگاه X_k، $X_{k+۱}$ و $X_{k+۲}$ باقی بمانند، آن‌وقت X_k و $X_{k+۲}$، زوج لازم را تشکیل می‌دهند. ایستگاه‌های باقی‌مانده را، که تعداد آن‌ها برابر

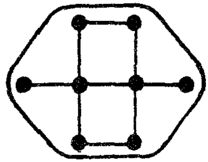
$$۱۹۷۲ - ۲ \times ۹۷۲ = ۲۸$$

است، می‌توان همچون ۲۸ گروه جداگانه درنظر گرفت. به این ترتیب، ۱۰۰۰ گروه به‌دست می‌آید: ۹۷۲ زوج و ۲۸ ایستگاه جدا از هم، که با شرط مساله سازگارند.

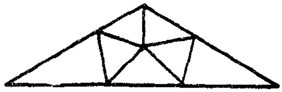
۳۸.۷۲. چهارراه‌ها را به این ترتیب نام‌گذاری می‌کنیم: «چشمه»، وقتی که تنها بتوان از آن خارج شد؛ «انبار» وقتی که نتوان از آن خارج شد؛ «روان»، وقتی که بتوان به آن وارد و از آن خارج شد. در این صورت، دو چهارراه یکسان نمی‌توانند در کنار هم قرار گیرند؛ این مطلب، برای «انبار» و «چشمه» روشن است؛ برای چهارراه‌های «روان» هم، اگر دوتا در ردیف هم باشند، آن‌وقت مسیری به‌طول ۱۵۰۰ متر پیدا می‌شود که در طول آن، می‌توان بدون نقض قانون حرکت، جلو رفت، که البته مخالف فرض است.

اکنون به شکل ۴۴، که‌تنها هشت چهارراه دارد،توجه کنیم. آزمایش‌روشن می‌کند که، به‌ناچار، یکی از این هشت چهارراه «انبار» است. از خواننده می‌خواهیم، طرحی تهیه کند که، به‌کمک آن، بتوان نقشه شهر را با ۱۳۰۰ شکل مشابه شکل ۴۴، پوشاند، بدون این‌که روی‌هم قرار گیرند.

۱.۷۳. *پاسخ*. مغازهٔ اول ۶۵۸، مغازهٔ دوم ۶۱۵ و مغازهٔ سوم ۷۰۰ کتاب درسی داشته است.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

۲.۷۳. *پاسخ.* چهار بار.

۳.۷۳. *راهنمائی.* ببینید یک مجذور کامل، در تقسیم بر ۴، چه باقی مانده‌هایی می‌دهد؟

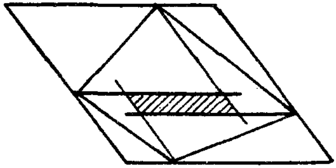
۴.۷۳. *راهنمائی.* هر مربع را می‌توان به چهار و به شش مربع کوچکتر، تقسیم کرد.

۶.۷۳. نمونهٔ تقسیم را، در شکل ۴۵ می‌بینید.

۱۰.۷۳. داریم:

$$۲^{۱۰} + ۵^{۱۲} = (۲^۵ + ۵^۶)^۲ - ۲^۶ + ۵^۶ =$$
$$= (۲^۵ + ۵^۶ - ۲^۳ \times ۵^۳)(۲^۵ + ۵^۶ + ۲^۳ + ۵^۳) =$$
$$= ۱۴۶۵۷ \times ۱۶۶۵۷$$

۱۱.۷۳. از آن‌جا که مثلث‌های واقع در بیرون چهارضلعی، باید مساحت‌هایی به مجموعی برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع داشته‌باشند، بنابراین، چهار متوازی‌الاضلاعی که روی این مثلث‌ها ساخته می‌شود (شکل ۴۶ باید در مجموع مساحتی برابر مساحت متوازی‌الاضلاع داشته باشند. ولی در این صورت، مساحت چهارضلعی که با ضلع‌های این چهار



شکل ۴۶

متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود (روی شکل ۴۶، این چهار ضلعی را هاشور زده‌ایم)، باید برابر صفر باشد. ولی این ممکن نیست، مگر این‌که یکی از قطرهای چهارضلعی شامل یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع‌ها باشد، یعنی با ضلع متوازی‌الاضلاع اصلی موازی باشد.

۱۲.۷۳. از آن‌جاکه داریم:

$$
\begin{aligned}
&۲(a^۸ + b^۸ + c^۸) - (a^۴ + b^۴ + c^۴)^۲ = \\
&= (a^۲ + b^۲ + c^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)(a^۲ - b^۲ + c^۲)(b^۲ + c^۲ - a^۲)
\end{aligned}
$$

و برای صفر بودن آن، باید یکی از عامل‌ها برابر صفر شوند، بنابراین، مثلث مفروض، در یکی از راس‌های خود، قائمه است.

۱۳.۷۳. چون

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BC|} > \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

پس، نقطهٔ E، نسبت به نقطهٔ D، از خط راست AB دورتر است. درنتیجه، نقطه $P = (AB) \cap (DE)$، روی خط راست AB طوری قرار دارد که B، بین A و P واقع است. یعنی

$$\widehat{ABE} < \widehat{BEP} \Rightarrow \widehat{DBE} < \widehat{BED}$$

و بنابراین $|DE| > |BD|$. به همین ترتیب

$$\widehat{EDA} > \widehat{PAD} \Rightarrow \widehat{DAE} < \widehat{EDA}$$

یعنی $|DE| < |AE|$.

۱۴.۷۳. پاسخ. این مجموع برابر است با ۷ یا ۱۶.

۱۵.۷۳. نه، نمی‌توان. اگر دستگاه محورهای مختصات قائم را طوری انتخاب کنیم که مختصات سه راس مفروض مربع $(0, 0)$، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ باشد، آن‌وقت نقطه‌هایی را که مختصات آن‌ها عددهایی درست باشد و، درضمن، نتوان آن‌ها را به یاری عمل * به‌دست آورد، نقطه‌هایی هستند که هر دو مختص آن‌ها عددهایی فرد باشند.

۱۶.۷۳. فرض می‌کنیم مثلثی وجود نداشته‌باشد و با چندضلعی‌ها سروکار داشته‌باشیم. تعداد چندضلعی‌ها را n فرض می‌کنیم. در این صورت، به‌ناچار، در بین آن‌ها چندضلعی وجود دارد که تعداد ضلع‌های آن، از $n + 3$ کمتر نیست (البته، به شرطی که بخواهیم تعداد ضلع‌های دوتا از چندضلعی‌ها، برابر نباشد). از این $n + 3$ ضلع، سه ضلع می‌تواند، در کناره باشد؛ بقیهٔ ضلع‌ها باید به $n - 1$ چندضلعی دیگر چسبیده باشند. ولی در دو چندضلعی کوژی که از راه برش به‌دست آمده‌اند، نمی‌تواند بیش از یک ضلع مشترک وجود داشته‌باشد.

۱۷.۷۳. اگر بین عددهای روی محیط دایره، عددهای مختلفی وجود داشته‌باشد، بعد از هر گام، مجموع عددهای روی دایره، کاهش می‌یابد. زیرا بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد، از هریک از آن دو عدد تجاوز نمی‌کند و تنها وقتی که دو عدد برابر باشند، با آن‌ها برابر است. چون، این مجموع، نمی‌تواند برای عددهای طبیعی، بی‌نهایت مرتبه کاهش یابد، دیر یا زود، همهٔ عددهای روی محیط دایره با هم برابر می‌شوند.

۱۸.۷۳. بله، می‌توان. ابتدا، بیشترین تعداد پاره‌خط‌های راستی را که می‌توان کنار گذاشت، به‌نحوی که رابطهٔ مفروض بین نقطه‌ها، همچنان برقرار باشد، حذف می‌کنیم. سپس، نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم که درست یک پاره‌خط راست از آن خارج شده‌باشد. وجود چنین نقطه‌ای را، می‌توان به‌سادگی ثابت

کرد: کافی است، دو نقطهٔ انتهایی خط شکسته‌ای را درنظر بگیریم که به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست ساخته شده است. هریک از این دو انتها، چنین نقطه‌ای است.

۲۰.۷۳. پاسخ. ۹، ۱۸ یا ۲۷.

۲۱.۷۳. پاسخ. نقطه‌های K و M را می‌توان به دلخواه، چنان انتخاب کرد که داشته باشیم: $|AK| = |DM|$.

۲۴.۷۳. پاسخ. ۱۱. همه‌چیز به این ترتیب روشن می‌شود که ببینیم، چند تکه کاغذ سفید، در ردیف‌های فرد قرار گرفته‌است. این تعداد در محدودهٔ از ۰ تا ۱۰ می‌تواند باشد.

۲۶.۷۳. فرض کنید

$$a + kd, a + md, a + nd$$

سه جملهٔ پشت‌سرهم از این تصاعد هندسی، با قدرنسبت برابر q، باشند: در این صورت، باید داشته‌باشیم:

$$(a + md) : (a + kd) = q$$

یعنی، اگر $t = \frac{a}{d}$ بگیریم، آن‌وقت

$$q = \frac{t + m}{t + k}; \quad t = \frac{qk - m}{۱ - q}$$

ولی چون $\frac{qk - m}{۱ - q} = \frac{qm - n}{۱ - q}$ (کسر سمت راست این برابری هم، برابر t است)، به‌دست می‌آید

$$qk - m = qm - n \Rightarrow q = \frac{n - m}{m - k}$$

این مقدار q عددی است گویا که، از آن‌جا، گویا بودن عدد t نتیجه می‌شود.

۲۸.۷۳. اگر چندوجهی دارای n وجه باشد، آن‌وقت، هر وجه می‌تواند از ۳ تا $n - ۱$ ضلع داشته باشد، یعنی حداکثر $n - ۳$ نوع وجه در آن پیدا می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود که، دست‌کم دو وجه، در تعداد ضلع‌ها، یکی هستند.

۳۱.۷۳. *پاسخ*. $\frac{۱}{۴}$.

۳۳.۷۳. *راهنمائی*. از این حقیقت استفاده کنید که: اگر ضریب‌های $P(x)$ عددهای درست باشند $P(a) - P(b)$، برای عددهای درست و دلخواه a و b، بر $a - b$ بخش‌پذیر است.

۳۶.۷۳. طول این پاره‌خط‌های راست را، به‌ترتیب، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می‌نامیم. در این صورت، باتوجه به مقایسهٔ مساحت ذوزنقه‌ها با مساحت چندضلعی، این دو نابرابری را خواهیم داشت:

$$\frac{a_۱ + a_۲}{۲} + \frac{a_۲ + a_۳}{۲} + \ldots + \frac{a_۹ + a_{۱۰}}{۲} \leq ۹; ۹\left(\frac{a_۱ + a_{۱۰}}{۲}\right) \leq ۹$$

از مجموع این دو نابرابری به‌دست می‌آید:

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_{۱۰} \leq ۱۰$$

۳۷.۷۳. *پاسخ*. ۱۰. ثابت می‌کنیم، اگر عدد تنها با رقم‌های ۰ و ۱ هم نوشته شده‌باشد، نمی‌توان با ۹ پرسش، آن را پیدا کرد. درواقع، انتخابی از مرتبه‌های عدد (مثلاً، مرتبه‌های اول، چهارم، هفتم و نهم) و پاسخ به پرسش، هم‌ارز است با این‌که، برای بُرداری مثل

$$۱۰۰۱۰۰۱۰۱۰$$

که ۱۰ مختص دارد، حاصل‌ضرب عددی (اسکالر) بردار مفروض را در بردار انتخابی بدهیم. روشن است که برای تعیین دقیق بردار، اطلاع از حاصل‌ضرب عددی ۹ بردار دلخواه، در حالت کلی، کافی نیست.

۳۸.۷۳. همهٔ راس‌هایی را که به‌وسیلهٔ مربع پوشیده شده‌اند و کوچکترین چندضلعی کوژ F را، که این راس‌ها را دربر دارد، درنظر می‌گیریم. مساحت این چندضلعی را S و محیط آن را P می‌نامیم. در این صورت

$$S < A^{۲}, P \geq ۴a$$

فرض کنید، x راس روی محیط و y راس در درون این چندضلعی باشد. در این صورت

$$x + y = \left(\frac{x}{۲} + y - ۱\right) + \frac{x}{۲} + ۱$$

و بنابر دستور معروف «پیک»:

$$S = \frac{x}{۲} + y - ۱$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$x + y = S + \frac{x}{۲} + ۱ \leq S + ۲a + ۱ \leq (a + ۱)^{۲}$$

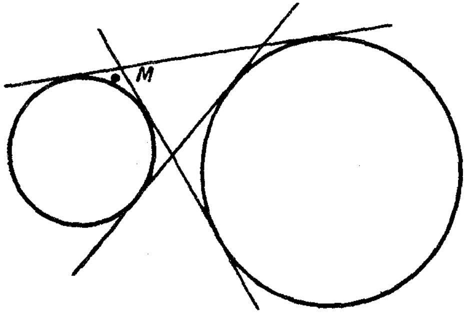
۳۹.۷۳. حل مسالهٔ ۴۰.۸۰ را ببینید.

۱.۷۴. پاسخ. ۱۳۴، ۱۴۴، ۱۵۰، ۲۸۸، ۲۹۴.

۲.۷۴. پاسخ. نه، وجود ندارد. اگر چندضلعی کوژ، دارای n راس باشد، دارای $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ قطر خواهد بود و عدد ۱۹۷۴ را نمی‌توان به‌صورت $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ نوشت.

۳.۷۴. نه، ممکن نیست. مجموع عددهای هر سه یال، باید روی هم، برابر $۶k$ باشد که، در آن، k، تعداد مثلث‌هاست. ولی

$$۵۵ \times ۳ = ۱۶۵$$



شکل ۴۷

عددی فرد است.

۴.۷۴. پاسخ. بله، ممکن است.

۵.۷۴. پاسخ. B اول، A دوم و C سوم شد.

۶.۷۴. همهٔ شهرهایی را درنظر می‌گیریم که بتوان از پای تخت، با پرواز هوایی به آن‌ها رسید (مستقیم یا با تعویض هواپیما). اگر شهر A در بین چنین شهرهایی نباشد، آن‌وقت، باید مجموع همهٔ خط‌های هوایی که از شهرها (و از جمله پای‌تخت) خارج می‌شوند، عددی فرد باشد. از طرف دیگر، هر خط هوایی را باید دوبار به حساب آورد و، درنتیجه، این تعداد باید زوج باشد. تناقض حاصل، نشان می‌دهد که، شهر A هم باید در بین این شهرها باشد.

۷.۷۴. پاسخ. $\frac{۱۹}{۱۰}$.

۹.۷۴. پاسخ. ۱۰۱۰، ۱۲۲۱، ۱۴۵۲، ۱۷۰۳، ۱۹۷۴.

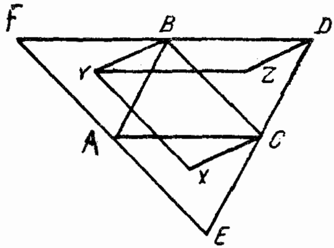
۱۰.۷۴. راه‌حل مسالهٔ ۳۱.۶۸ را ببینید.

۱۲.۷۴. پاسخ. ۳۶ درجه، ۳۶ درجه، ۱۰۸ درجه.

۱۳.۷۴. بله، چنین نقطه‌ای وجود دارد؛ مثلاً نقطهٔ M روی شکل ۴۷.

۱۴.۷۴. پاسخ. $x = ۲$، $y = ۳$.

۱۵.۷۴. نه، نمی‌توانیم. ضلع مثلثی را درنظر می‌گیریم که به ضلع



شکل ۴۸

درونی خانهٔ بریده شده متصل باشد. روشن است که طول این ضلع نمی‌تواند از واحد تجاوز کند. چون ارتفاع وارد بر همین ضلع، حداکثر برابر هفت است، بنابراین مساحت آن، از $\frac{۷}{۲}$ تجاوز نمی‌کند؛ و این مقدار، از $\frac{۶۳}{۱۷}$ کمتر است.

۱۷.۷۴. بزرگترین مثلثی را درنظر می‌گیریم که راس‌های آن، سه نقطه از این مجموعه باشند. D را نقطه‌ای از مجموعه می‌گیریم، به‌نحوی که $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد (شکل ۴۸). همهٔ نقطه‌های این مجموعه، در درون مثلث DEF واقع‌اند. اکنون نقطهٔ دیگری از مجموعه را، مثل X درنظر می‌گیریم که در درون مثلث AEC باشد (حالت‌های دیگر هم، شبیه همین حالت مورد بررسی قرار می‌گیرند). در این صورت XBC را می‌توان، تا یک متوازی‌الاضلاع تکمیل کرد (راس چهارم آن را Y می‌نامیم)؛ مثلث YBD را هم به یک متوازی‌الاضلاع، با راس چهارم Z، تبدیل می‌کنیم. تنها این می‌ماند که توجه کنیم، برای تکمیل مثلث XYZ به یک متوازی‌الاضلاع، به نقطه‌ای واقع در بیرون مثلث DEF نیاز داریم.

۱۸.۷۴. فرض کنید $X_۱$ تعداد اخلاف نخستین باکتری باشد، یعنی $X_۱ = ۱۰۰$. تعداد اخلاف یکی از «فرزندان» بلافصل او، از $\frac{۱}{۲}X_۱$ کمتر نیست. این تعداد را $X_۲$ می‌نامیم. به همین ترتیب عدد $X_۳$ را تعریف می‌کنیم

که از عدد $\frac{1}{2}X_2$ کمتر نیست و غیره. نخستین k را درنظر می‌گیریم، به نحوی که $X_k \leq ۶۶۷$. روشن است که $X_k \geq ۳۳۴$، زیرا به‌ازای $X_k \leq ۳۳۳$، به‌دست می‌آید $X_k \leq ۶۶۶$ که با شرط انتخاب k سازگار نیست.

۲۲.۷۴. چون دایرهٔ S را می‌توان نتیجهٔ تجانس دایرهٔ محیطی مثلث، با ضریب تجانس $\frac{1}{2}$ دانست، به‌سادگی می‌توانیم مرکز تجانس را پیدا کنیم. همین مرکز تجانس، نقطهٔ مورد نظر مساله است.

۲۳.۷۴. *پاسخ.* وتر AB را باید عمود بر خط راست OX رسم کرد.

۲۴.۷۴. *راهنمائی.* فرض کنید واژهٔ A شامل m حرف و واژهٔ B شامل n حرف باشد. ثابت کنید، هر دو حرف در واژهٔ CC، که شماره‌های مکان آن‌ها، به اندازهٔ m یا n با هم اختلاف دارند، بر هم منطبق‌اند. در این صورت، همین حکم برای حرف‌هایی هم که به اندازهٔ $m - n$ در شمارهٔ ردیف خود با هم اختلاف دارند (با شرط $m > n$) درست است و غیره.

بنابراین، اگر بزرگترین بخشیاب مشترک m و n را d فرض کنیم، آن‌وقت حرف‌هایی که شمارهٔ محل آن‌ها به اندازهٔ d با هم اختلاف دارند، بر هم منطبق می‌شوند و، بنابراین، به‌جای واژهٔ D می‌توان واژه‌ای را انتخاب کرد که از d حرف اول واژهٔ A تشکیل شده‌باشد.

۲۵.۷۴. *پاسخ.* نه، وجود ندارد.

۲۶.۷۴. *راهنمائی.* از این حقیقت استفاده کنید که، اگر روی نیم خط‌های راست و ثابت OS_1، OS_2 و OS_3، به‌ترتیب نقطه‌های X، Y و Z را انتخاب کنیم، حجم هرم $OXYZ$ برابر با

$$k \cdot |OX| \cdot |OY| \cdot |OZ|$$

می‌شود که در آن، k ضریبی است که به‌جای نقطه‌های X، Y و Z بستگی ندارد.

۲۷.۷۴. عبارت مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۱-(۱-x_۱)(۱-x_۲)(۱-x_۳)(۱-x_۴)$$

حاصل ضرب این چهار پرانتز عددی غیرمنفی است که برابر صفر هم می‌تواند باشد. بنابراین، ماکزیمم عبارت، برابر واحد است.

۳۰.۷۴. ثابت می‌کنیم (با روش استقرای ریاضی) که، این مجموع، از $x\log_۲ x$ کمتر نیست که، در آن، x همان نخستین عددی است که روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. فرض کنید، در گام اول، نوشته باشیم:

$$x=a+b$$

در این صورت، بنابر فرض استقرا، مجموع عددهای زیر a از مقدار $a\log_۲ a$. و مجموع عددهای زیر b از $b\log_۲ b$ کمتر نیست. درنتیجه، کافی است این نابرابری را ثابت کنیم:

$$a+b+a\log_۲ a+b\log_۲ b \geq (a+b)\log_۲(a+b)$$

و یا هم‌ارز آن

$$\frac{۱}{۲}(p\log_۲ p+q\log_۲ q) \geq \frac{p+q}{۲}\log_۲\frac{p+q}{۲}$$

(p و q، به معنای عددهای $۲a$ و $۲b$ هستند)، که نتیجه‌ای است از کوژ بودن تابع $f(x)=x\log_۲ x$.

۳۱.۷۴. از مرکز سیاره و دو ماهواره، صفحهٔ P را می‌گذارنیم، قطر عمود بر صفحهٔ P را رسم و دو انتهای قطر را پیدا می‌کنیم. در این صورت هیچ ماهواره‌ای را، نمی‌توان به‌طور هم‌زمان از هر دو نقطهٔ انتهائی قطرها دید

و دو ماهوارهٔ انتخابی هم از این دو نقطه دیده نمی‌شوند. بنابراین از یکی از این دو نقطه، نمی‌توان بیش از $\left[\frac{۳۵}{۲}\right]$، یعنی ۱۷ ماهواره را دید.

۳۳.۷۴. تعداد همهٔ قطرهای یک $۲k$ ضلعی، برابر است با

$$k(۲k-۳)$$

بنابراین، اگر هر قطر با یکی از ضلع‌ها موازی باشد، آن‌وقت ضلعی وجود دارد که با $\frac{۱}{۲}(۲k-۳)$ قطر، یعنی دست‌کم با $(k-۱)$ قطر موازی است. ولی این به‌معنای آن است که هریک از $۲k$ راس چندضلعی، انتهایی از این ضلع است، و این قطرها، و بنابراین یکی از آن‌ها، بر یک ضلع منطبق است.

۳۴.۷۴. کوچکترین عدد سطر اول را درنظر می‌گیریم و عددهای همهٔ ستون‌هایی را که عددی برابر این کوچکترین عددِ سطر اول دارند، دو برابر می‌کنیم. سپس، از عددهای سطر اول، واحد را (و اگر لازم باشد، چند بار) کم می‌کنیم. به این ترتیب، عددهای بعضی از خانه‌های سطر اول برابر صفر می‌شود. روشن است که، درضمن، مجموع عددها در سطر اول، کاهش پیدا می‌کند. اگر این عمل را ادامه دهیم، سرانجام به‌جایی می‌رسیم که در همهٔ خانه‌های سطر اول، عدد صفر قرار دارد. سپس، همین کار را با سطر دوم جدول انجام می‌دهیم و غیره. درضمن، توجه داریم که عمل دو برابر کردن، در سطر اول (که همهٔ عددهای آن، برابر صفر است) اثری ندارد. در پایان کار، به جدولی می‌رسیم که همهٔ عددهای آن، برابر صفر است.

۳۵.۷۴. دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که، مبداء آن، بر راس بین ضلع‌های ۱ و ۲ قرار گیرد. در این صورت، تنها یک نقطهٔ A پیدا می‌شود که ویژگی مورد نظر را دارد. نقطهٔ با مختصات $\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)$.

یادداشت. به این نکته توجه کنید که عمل‌های $A \to A_۲$، $A \to A_۴$ بر یک مختص و عمل‌های $A \to A_۱$، $A \to A_۳$ بر مختص دیگر اثری

ندارد.

۳۶.۷۴. فرض می‌کنیم، این طور نباشد (برهان خُلف). یکی از عددها را کنار می‌گذاریم و بقیه را شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت، مجموع‌هایی به‌صورت

$$x_{۱}, x_{۱}+x_{۲}, \ldots, x_{۱}+x_{۲}+\ldots+x_{۹۹}$$

در تقسیم بر ۱۰۰، به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند، زیرا در غیر این صورت، اگر دو عددی را که در تقسیم بر ۱۰۰ به یک باقی‌مانده رسیده‌اند، از هم کم کنیم، به مجموعی از چند عدد می‌رسیم که بر ۱۰۰ بخش‌پذیر، یعنی برابر ۱۰۰ است.

مجموع همهٔ این عددها، نسبت به مُدول ۱۰۰، هم‌نهشت با ۵۰ می‌شود (زیرا، مجموع باقی‌مانده‌ها، یعنی ۴۹۵۰، در تقسیم بر ۱۰۰، باقی‌مانده‌ای برابر ۵۰ دارد). از طرف دیگر، این مجموع، با مجموع

$$۹۹x_{۱}+۹۸x_{۲}+\ldots+x_{۹۹}$$

هم‌نهشت است. اگر این ۹۹ عدد را تبدیل دوری کنیم، به همان ترتیب به‌دست می‌آید.

$$۹۹x_{۲}+۹۸x_{۳}+\ldots+x_{۱} \equiv ۵۰ \pmod{۱۰۰}$$

با کم کردن این هم‌نهشتی از هم‌نهشتی قبلی به‌دست می‌آید:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+\ldots+x_{۹۹}-۹۹x_{۱} \equiv ۰ \pmod{۱۰۰}$$

یعنی

$$x_{۱} \equiv -S \pmod{۱۰۰}$$

که در آن، S برابر است با مجموع همهٔ ۹۹ عدد. به‌همین ترتیب، برای هر x_k به‌دست می‌آید:

$$x_k \equiv -S(\mathrm{mod}\,۱۰۰)$$

یعنی این ۹۹ عدد با هم برابرند، زیرا همهٔ آن‌ها از ۱۰۰ کوچکترند. از این‌جا نتیجه می‌شود که یا همهٔ آن‌ها برابر ۱ و عدد کنار گذاشته‌شده برابر ۱۰۱ است که ممکن نیست و یا همهٔ عددها برابر ۲ هستند که، در این صورت، مجموع پنجاه‌تا از آن‌ها، برابر ۱۰۰ می‌شود.

۳۷.۷۴. *پاسخ*. همهٔ عددهای زوج بزرگتر از ۹ و همهٔ عددهای فرد بزرگتر از ۱۴.

خط راستی را درنظر می‌گیریم که دست‌کم دو ضلع AB و CD از k ضلعی مفروض، روی آن باشد. در این صورت، حداقل چهار خط راست وجود دارد که ضلع‌های k ضلعی روی آن‌ها واقع‌اند ـ به‌طور مشخص، آن ضلع‌هایی که یکی از دو انتهای آن‌ها نقطه‌های A، B، C و D باشند (و البته، غیر از ضلع‌های AB یا CD). بنابراین، از این‌گونه خط‌های راست، حداقل پنج‌تا و تعداد ضلع‌ها، دست‌کم ده‌تا می‌شود.

اگر هم k، عددی فرد باشد، آن‌وقت روی یکی از این خط‌های راست، باید دست‌کم سه ضلع k ضلعی قرار گیرد؛ و این به‌معنای آن است که تعداد خط‌های راست از هفت کمتر نیست و $k \geq ۱۵$.

جست‌وجوی k ضلعی‌های مشخص از این‌گونه را، به‌عنوان تمرین، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۲.۷۵. اگر این چهار نیمه مختلف باشند (و مثلاً ۰، ۱، ۲، ۳)، آن‌وقت در ردیفی که با ۲۶ سنگ دومینو درست کرده‌ایم، باید هفت صفر، هفت خال یک، هفت دو خال و هفت سه خال وجود داشته‌باشد. چون در درون زنجیری که ساخته‌ایم، تعداد خال‌های یکسان زوج و، درضمن، ۷

عددی فرد است، بنابراین دست‌کم یک خال صفر، دست‌کم یک خال ۱، دست‌کم یک خال ۲ و دست‌کم یک خال ۳ باید در دو کرانهٔ زنجیر باشد؛ درحالی که بیش از دو خال در هر طرف زنجیر وجود ندارد.

۴.۷۵. *راهنمائی.* ثابت کنید، اگر Q قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط راستی باشد که دایره را قطع کرده‌است، آن‌وقت

$$|OQ| \geq |OP| - ۲$$

که در آن، O مرکز دایره است.

۵.۷۵. *پاسخ.* بله، می‌تواند. کولیا در گام اول رقم ۱ را می‌نویسد و، از آن به بعد، به دنبال رقمی که واسیا می‌نویسد، کولیا رقمی می‌گذارد که با رقم واسیا، روی هم برابر ۶ شود. در این صورت مجموع ۱۹ رقم اول، برابر ۵۵ می‌شود؛ برای این‌که عدد ۲۰ رقمی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید رقم آخر برابر ۸ باشد که چنین رقمی در اختیار واسیا نیست.

۶.۷۵. حل مسالهٔ ۱۸.۶۸ را ببینید.

۷.۷۵. *پاسخ.* نه، نمی‌تواند. از همان اندیشه‌ای استفاده کنید که در حل مسالهٔ ۵.۷۵ مورد استفاده قرار دادیم.

۸.۷۵. *پاسخ.* $p = ۳$.

۹.۷۵. *پاسخ.* حداکثر این مقدار، برای عدد ۹۱۱ به‌دست می‌آید. مقدار حاصل‌ضرب در این حالت، برابر است با

$$۹۱۱\left(\frac{۱}{۹} + ۱ + ۱\right) = ۹۱۱ \times \frac{۱۹}{۹}$$

۱۰.۷۵. *راهنمائی.* گرانیگاه مجموعهٔ راس‌های شش‌ضلعی، روی هر دو پاره‌خط راست است.

۱۱.۷۵. حل مسالهٔ ۱۸.۶۸ را ببینید.

۱۳.۷۵. پاسخ. ۴ : ۳ : ۳.

۱۴.۷۵. $\{Aq^n\}$ را یکی از این تصاعدها و N را عددی طبیعی می‌گیریم. در این صورت، در بازهٔ بستهٔ $[\circ, N]$، تعداد جمله‌های این تصاعد هندسی، از $\log_q N + ۱$ تجاوز نمی‌کند.

بنابراین، پنج تصاعد هندسی، بیش از $۵\log_a N + ۵$ عدد را، که از N بزرگتر نباشد، نمی‌پوشانند (a را کوچکترین قدرنسبت‌ها گرفته‌ایم و می‌توان فرض کرد $a \geq ۲$). روشن است، اگر N را به‌اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، می‌توانیم به نابرابری

$$N > ۵\log_۲ N + ۵$$

برسیم و، درنتیجه، جمله‌های تصاعدها، همهٔ عددهای طبیعی بازهٔ را نپوشاند.

۱۵.۷۵. از فرض نتیجه می‌شود: $\widehat{B} = ۶\circ^\circ$. بنابراین، شعاع دایرهٔ $(BDEF)$ از

$$\frac{۱}{۲}|BE| = |BE| \cdot \sin(FBE)$$

کمتر نیست (زیرا $\widehat{FBE} = ۳\circ^\circ$) و عدد اخیر هم برابر طول عمودی است که از نقطهٔ F (مرکز دایرهٔ محاطی) بر ضلع AB فرود آمده است (یعنی، شعاع دایرهٔ محاطی).

۱۶.۷۵. از مجموع دو معادله به‌دست می‌آید:

$$x^۲ + y^۲ = ۸۱$$

مختصات نقطه‌های برخورد دو سهمی، باید در این معادله صدق کنند، یعنی همهٔ آن‌ها، روی محیط دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات و به شعاع برابر ۹ قرار دارند.

۱۷.۷۵. پاسخ. ۲۹۹۸.

۱۸.۷۵. روی‌هم، تنها هفت حالت مختلف می‌تواند پیش آید.

۱۹.۷۵. چون XE نیمساز زاویهٔ CDX است، پس

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|CX|}{|DX|} = \cot\alpha$$

که در آن $\widehat{DCX} = \alpha$. به همین ترتیب

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AX|}{|XB|} = \cot\beta = \cot(۴۵^\circ - \alpha)$$

که در آن $\widehat{XAB} = \beta$. اگر نسبت اول را با t نشان دهیم، آن‌وقت، نسبت دوم برابر $\frac{۱+t}{۱-t}$ می‌شود که حکم مساله را ثابت می‌کند.

۲۱.۷۵. *پاسخ*. این مثلث، همان مثلث مفروض است.

۲۳.۷۵. *پاسخ*. ۷۵.

۲۴.۷۵. . *پاسخ*. ۱۹۸. برای هر خانهٔ رنگی، خطی را درنظر می‌گیریم که، در امتداد آن، این خانه، تنها خانهٔ رنگی است. همهٔ ستون‌ها، در بین این خط‌ها نیستند، زیرا در غیر این‌صورت، تعداد خانه‌های رنگی از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. به‌همین ترتیب، همهٔ سطرها هم، جزو سطرهای خط‌دار نیستند. بنابراین، تعداد خط‌هایی که رسم کرده‌ایم، از ۱۹۸ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، اگر همهٔ خانه‌های یک سطر دلخواه و یک ستون دلخواه را، به‌جز خانه‌ای که در برخورد این سطر و این ستون است، رنگ کنیم، ۱۹۸ خانهٔ رنگی به‌دست می‌آید.

۲۵.۷۵. حل مسالهٔ ۱۴.۷۵ را ببینید.

۲۷.۷۵. *پاسخ*. $x = ۴ + ۲\sqrt{۳} \pm \sqrt{۳۴ + ۲۰\sqrt{۳}}$.

۳۰.۷۵. x_i را زاویهٔ بین i امین و $(i+۱)$ امین ضلع و a_i را طول ضلع i ام چندضلعی می‌گیریم. سه راس متوالی چندضلعی، مثلثی تشکیل

می‌دهند که مساحتی برابر

$$\frac{۱}{۲}a_i a_{i+۱}\sin\alpha_i$$

دارد. حاصل‌ضرب این مساحت‌ها، برابر است با

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^n (a_۱ a_۲ \ldots a_n)^۲ \sin\alpha_۱ \sin\alpha_۲ \ldots \sin\alpha_n \leq$$
$$\leq \left(\frac{۱}{۲}\right)^n (a_۱ a_۲ \ldots a_n)^۲$$

و باتوجه به نابرابری واسطه‌ها

$$a_۱ a_۲ \ldots a_n < \left[\frac{۱}{n}(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n)\right]^n \leq \left(\frac{۴}{n}\right)^n$$

زیرا $a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$، محیط nضلعی است که نمی‌تواند از محیط مربع، که برابر ۴ است، تجاوز کند. به‌این ترتیب، حاصل‌ضرب مساحت‌های مورد نظر، از $\left(\frac{۱}{۲}\right)^n \left(\frac{۴}{n}\right)^{۲n}$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، یکی از مساحت‌ها، نمی‌تواند از $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{n}\right)^۲$، یعنی $\frac{۸}{n^۲}$ تجاوز کند.

۳۱.۷۵. پاسخ. $ab + cd \doteq ۰$.

۳۲.۷۵. پاسخ. عددی که با ۹۹ رقم ۳ ساخته شده، بزرگتر است.

۳۴.۷۵. پاسخ. بله، ممکن است.

۳۵.۷۵. به‌ازای $k = ۱۵$. گرافی را درنظر می‌گیریم که ۳۰ راس دارد و هر دو راس از آن، با یالی به هم مربوط‌اند، و اگر A از کارهای B اطلاع داشته‌باشد، روی یالی که از A به B می‌رود، پیکانی می‌گذاریم که جهت آن، از A به B است. به این ترتیب، باید

$$۳۰ \times ۱۵ = ۴۵۰$$

پیکان داشته باشیم، درحالی که تعداد همهٔ یال‌ها برابر است با

$$\frac{۱}{۲} \times ۳۰ \times ۲۹ = ۴۳۵$$

بنابراین، باید روی یالی، دو پیکان (و البته، در دو جهت مختلف) وجود داشته باشد.

۳۸.۷۵. خانه‌های مرزی صفحهٔ شطرنج را درنظر می‌گیریم. تعداد این خانه‌ها، ۲۸ است و یک جدول ۷×۷ را احاطه کرده‌اند. خط‌های راستی که بخواهند این ۲۸ خانه را از هم جدا کنند، باید محیط این مربع ۷×۷ را قطع کنند؛ ولی هر خط راست تنها می‌تواند دو ضلع از این مربع را، و ۱۳ خط راست، حداکثر ۲۶ بار محیط مربع را قطع کند، یعنی نمی‌تواند آن را به ۲۸ بخش تقسیم کند.

۴۰.۷۵. بله، وجود دارد. یک چهار وجهی درنظر می‌گیریم که مرکز آن در نقطهٔ A باشد. برای هر وجه این چهار وجهی، کره‌ای در نظر می‌گیریم که شامل این وجه باشد، ولی نقطهٔ A را در بر نگیرد. سپس، به یاری چهار تجانس، این چهار کره را آن‌قدر از نقطهٔ A دور می‌کنیم (با فاصله‌های مختلف) که، کره‌های حاصل، یکدیگر را قطع نکرده باشند.

۴۲.۷۵. $f^{-۱}(x) = y$ می‌گیریم. در این صورت، فرض مساله را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$f(f(y)) + f(y) + y = ۰$$

$f(۰) = ۰$ فرض می‌کنیم. اکنون خط راست را، به بازه‌هایی از شش نوع تقسیم می‌کنیم:

$$A_k - [p^{۳k}, \varphi^{۳k+۱}[;\ B_k - [\varphi^{۳k+۱}, \varphi^{۳k+۲}[;$$
$$C_k - [\varphi^{۳k+۲}, \varphi^{۳k+۳}[;\ \tilde{A}_k - [-\varphi^{۳k+۱}, -\varphi^{۳k}[;$$
$$\tilde{B}_k - [-\varphi^{۳k+۲}, -\varphi^{۳k+۱}[;\ \tilde{C}_k - [-\varphi^{۳k+۳}, -\varphi^{۳k+۲}[$$

که در آن، k عدد درست دلخواه و $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ که در معادلهٔ $\varphi^2 = \varphi + 1$ صدق می‌کند. اکنون می‌توانیم تابع را به این صورت بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi x (x \in A_k \text{ یا } x \in \tilde{A}_k); \\ -\varphi x (x \in B_k \text{ یا } x \in \tilde{B}_k); \\ -\frac{x}{\varphi^2} (x \in C_k \text{ یا } x \in \tilde{C}_k) \end{cases}$$

۴۴.۷۵. پاسخ. ۲۰. چون

$$x_1^2 = 1, x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1, \ldots, x_{1976}^2 = x_{1975}^2 + 2x_{1975} + 1$$

پس، از مجموع همهٔ این برابری‌ها به‌دست می‌اید:

$$\sum_{i=1}^{1975} x_i = \frac{1}{2}(x_{1976}^2 - 1976)$$

از آن‌جا که نزدیکترین عدد زوج مجذور کامل به ۱۹۷۶ (x_{1976}، زوج است)، برابر است با $44^2 = 1936$، پس

$$|\sum_{i=1}^{1975} x_i| \geq 20$$

در بارهٔ دقت این عدد، خواننده می‌تواند قانع شود، زیرا ساختن دنبالهٔ $\{x_i\}$ که، برای آن داشته‌باشیم: $x_{1976} = 44$، کار دشواری نیست.

۴۶.۷۵. دنبالهٔ $\{e_i\}$ را، با این قاعده می‌سازیم:

$$e_0 = \sqrt{2}, e_{n-1} - e_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} - (1+\sqrt{2})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$$

که در آن $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

اکنون با استقرای روی n، به‌سادگی ثابت می‌شود که این نابرابری برقرار است:

$$x_0+\frac{x_n}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{2^n}}+e_n \leq (1+\sqrt{2})\sqrt{x_0+\frac{x_1}{2}+\ldots+\frac{x_n}{2^n}}$$

که در آن x_0، x_1، ...، x_n، انتخاب دلخواهی از صفرها و واحدهاست که، بین آن‌ها، دست‌کم یک واحد وجود دارد. عبور استقرایی باتوجه به این نابرابری انجام می‌شود:

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}} \leq \sqrt{a+\frac{1}{2}-\sqrt{a}},\ (x \geq a)$$

یادداشت. به این نکته توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 0$$

۱.۷۶. به‌عنوان نمونه، حشره هرگز روی نقطه‌ای که مجاور نقطهٔ آغاز حرکت او، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، قرار نمی‌گیرد.

۲.۷۶. *پاسخ.* ۷۲.

۳.۷۶. *پاسخ.* در روستای C. اگر مدرسه را در هر نقطهٔ دیگری مثل X بسازیم، آن‌وقت اگر آن را به نقطهٔ C منتقل کنیم، مجموع راهی که باید دانش‌آموزان بپیمایند، به‌اندازهٔ

$$300|CX| - 100(|AX| - |AC|) - 200(|BX| - |BA|)$$

تغییر می‌کند، یعنی کوتاه‌تر می‌شود، زیرا

$$|AX| - |AC| \leq |CX|;$$
$$|BX| - |BC| \leq |CX|$$

۴.۷۶. کسی که بازی را آغاز می‌کند، باید در حرکت اول، یک خانه جلو برود: بین مهره‌ها، ۲۷ خانهٔ آزاد باقی می‌ماند. سپس، در برابر حرکت رقیب، باید این‌طور پاسخ بدهد: اگر رقیب او یک خانه جلو آمد، او دو خانه به جلو برود و اگر رقیب او دو خانه جلو آمد، او یک خانه جلو برود.

۵.۷۶. *پاسخ*. ۲۲ خانه.

۶.۷۶. a_1، a_2، ...، a_n را اندازهٔ ضلع‌های مربع‌های کوچک؛ n را طول ضلع مربع بزرگ و S را مجموع طول‌های حصارهای درونی فرض می‌کنیم. در این صورت

$$4\sum a_i = 2S + 4n; \sum a_i^2 = n^2$$

از برابری دوم نتیجه می‌شود که $\sum a_i$ و n یا هر دو زوج و یا هر دو فردند؛ یعنی $2\sum a_i$ و $2n$ در تقسیم بر ۴ به یک باقی‌مانده می‌رسند و این، به معنای آن است که

$$S = 2\sum a_i - 2n$$

بر ۴ بخش‌پذیر و، بنابراین، مجموع طول‌های همهٔ حصارها، یعنی $S + 4n$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

۷.۷۶. *راهنمائی*. ثابت کنید حشره، در بیش از ۵۱ نقطه نمی‌تواند باشد.

۹.۷۶. *پاسخ*. بله، می‌تواند.

۱۰.۷۶. محیط پنج‌ضلعی درونی را x، محیط پنج‌ضلعی ستاره‌ای را $x+y$ و محیط خود F را z می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به نابرابری مثلثی داریم:

$$x < z < y, x + y < 2z$$

چون x، $x+y$ و z، عددهایی اول‌اند، نتیجهٔ لازم را می‌توان از این نابرابری‌ها، بعد از اندکی دقت، به‌دست آورد.

۱۳.۷۶. اگر این حاصل‌ضرب فرد باشد، باید $x_k - y_k$، به‌ازای هر مقدار k، عددی فرد باشد. ولی در این صورت

$$(x_۱ - y_۱) + (x_۲ - y_۲) + \ldots + (x_{۲۵} - y_{۲۵}) = ۰$$

هم باید عددی فرد باشد.

۱۴.۷۶. این تفاضل برابر است با $(A-B)$۹۹۹. چون ۹۹۹ و ۱۹۷۶ نسبت به هم اول‌اند، این تفاضل تنها وقتی می‌تواند بر ۱۹۷۶ بخش‌پذیر باشد که $A - B$ بر ۱۹۷۶ بخش‌پذیر باشد که تنها به‌ازای $A = B$ ممکن است.

۱۵.۷۶. *پاسخ*. هر سه دقیقه یکبار.

۱۶.۷۶. *پاسخ*. بله، ممکن است.

۱۷.۷۶. اگر برابری‌های

$$S_{BCK} = S_{MKA} \text{ و } S_{CDK} = S_{MDK}$$

را با هم جمع کنیم و، سپس، بخش مشترک را از دو طرف برابری حذف کنیم، به برابری مورد نظر می‌رسیم.

۱۸.۷۶. این مجموعه‌ها را $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ می‌نامیم. a و b را دو عدد متوالی می‌گیریم که به دو مجموعهٔ متفاوت تعلق داشته باشند؛ بدون این‌که به کلی بودن بحث لطمه‌ای وارد شود، می‌توان $a \in M_۱$ و $b \in M_۲$ گرفت و، همچنین، a را عددی فرد و b را عددی زوج فرض کرد. اکنون از برهان خُلف استفاده و فرض می‌کنیم، هر دو عددی که از دو مجموعهٔ مختلف انتخاب کنیم، مجموع آن‌ها عضوی از مجموعه سوم می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$(a + b) \in M_۳, (a + ۲b) \in M_۱, \ldots, (a + ۲kb) \in M_۱,$$
$$(a + (۲k + ۱)b) \in M_۳, \ldots, (۲a + b) \in M_۲,$$

$$(۳a+b)\in M_۲,\ldots,(۲ka+b)\in M_۲,$$
$$((۲k+۱)a+b)\in M_۳,\ldots$$

عدد $ab+a+b=(۲m+۱)a+b$ را در نظر می‌گیریم که، در آن $۲m=b$. این عدد بر عدد $۲mb+a$ منطبق است. بنابراین، عدد $ab+a+b$ باید هم عضو $M_۳$ و هم عضو $M_۱$ باشد، که ممکن نیست.

۱۹.۷۶. $|BC|=a$، $|AC|=b$ و $|AB|=c$ فرض می‌کنیم. از آن‌جا که $b=\frac{۱}{۲}(a+c)$، پس $\frac{۱}{۲}(a+b+c)=\frac{۳}{۲}b$ و

$$r=\frac{۲S}{a+b+c}=\frac{۲S}{۳b}=\frac{b\cdot h}{۳b}=\frac{۱}{۳}h$$

(h را طول ارتفاع وارد بر ضلع b گرفته‌ایم).

۲۲.۷۶. *راهنمائی.* یک nضلعی کوژ دلخواه که زاویه‌هایی برابر زاویه‌های nضلعی منتظم داشته باشد، درنظر بگیرید.

۲۳.۷۶. مجموعه‌ای که ۱۲ عضو داشته‌باشد، روی هم دارای

$$۲^{۱۲}=۴۰۹۶$$

زیرمجموعه است، که می‌توان آن‌ها را به $۲^{۱۱}$ زوج از نوع $(A,\overline{A})$ تقسیم کرد که، در آن، $\overline{A}$ متمم A است. چون

$$۲^{۱۱}=۲۰۴۸>۱۰۰۰+۲$$

بنابراین زوج $(A,\overline{A})$ پیدا می‌شود که، در آن، A و $\overline{A}$ مجموعه‌هایی غیرتهی باشند و، درضمن، قبلاً به‌عنوان گروه درنظر نگرفته باشند. اگر A به‌عنوان گروه مناسب نباشد، آن‌وقت با یکی از گروه‌های انتخابی قبلی، مثل B، اشتراکی ندارد، ولی دراین صورت، $\overline{A}$ شامل B می‌شود و با هریک از

گروه‌های قبلی، دارای اشتراک خواهد بود. بنابراین، هنوز می‌توان یک گروه تشکیل داد: A یا $\overline{A}$.

۲۴.۷۶. چون AK، مثل AL، نیمساز خارجی زاویهٔ A است، پس A روی پاره‌خط راست KL واقع است. روشن است که، این نیمساز از وسط کمان CAB می‌گذرد، زیرا نیمساز داخلی زاویهٔ A، از وسط کمان CD عبور می‌کند. از این‌جا ثابت می‌شود که $|KH| = |LH|$. آن‌ها را بر خط راست CB تصویر و ثابت می‌کنیم، تصویر پاره‌خط راست CK با تصویرِ پاره‌خط راست BL برابر است. در واقع، آن‌ها برابرند با

$$\frac{۲S\mathrm{tg}\frac{\gamma}{۲}}{a+c-b} \text{ و } \frac{۲S\mathrm{tg}\frac{\beta}{۲}}{a+b-c}$$

($|BC| = a$، $|AC| = b$، $|AB| = c$، $\widehat{ABC} = \beta$ و $\widehat{ACB} = \gamma$ گرفته‌ایم). که چون

$$(a+c-b)\mathrm{tg}\frac{\beta}{۲} = r = (a+b-c)\mathrm{tg}\frac{\gamma}{۲}$$

(r، شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است)، بنابراین، تصویرهای مذکور برابرند که اثبات حکم مساله را تمام می‌کند.

۲۵.۷۶. حل مسالهٔ ۲۲.۸۴ را ببینید.

۲۶.۷۶. $f^۲(x)$ را با $g(x)$ نشان می‌دهیم. x و y را دو عدد دلخواه و $a = y - x$ می‌گیریم. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$g(y) = g(x) + g(a);$$

$$g(x) = g(y-a) = g(y) + g(-a)$$

چون $g(a) \geq ۰$ و $g(-a) \geq ۰$، بنابراین به‌دست می‌آید:

$$g(y) \geq g(x) \geq g(y)$$

به‌این ترتیب، g مقداری ثابت و، درنتیجه، برابر صفر است. بنابراین $g(x) = ۰$، یعنی $f(x) = ۰$.

۲۷.۷۶. *پاسخ.* اگر a، b و c عددهایی غیرمنفی و دست‌کم یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، آن‌وقت $x = ۰$. اگر هر سه عدد a، b و c برابر صفر باشند، آن‌وقت x می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد. اگر بدانیم معادله جواب دارد، حالت دیگری پیدا نمی‌شود.

۲۹.۷۶. فرض می‌کنیم، هر ۱۶ حالت با هم فرق داشته‌باشند. تعداد واحدها را در مربع مرکزی ۳ × ۳ برابر x و در مرزها (به‌جز گوشه‌ها) برابر a می‌گیریم. در این صورت، مجموع واحدها، در مربع‌های ۴ × ۴ چپِ بالا و راستِ پایین برابر می‌شود با

$$۲x + a + ۲ = ۱۶$$

زیرا در هریک از این مربع‌ها باید هشت واحد وجود داشته باشد (درواقع، مثلاً، عددهای واقع در مربع چپِ بالا، همان عددهای گوشه‌های چپِ بالا در همه مربع‌های ۲ × ۲ است و، بنابراین، در آن‌جا باید هشت واحد وجود داشته‌باشد). به‌همین ترتیب، برای مربع‌های ۴ × ۴ چپِ پایین و راستِ بالا، به‌دست می‌آید:

$$۲x + a = ۱۶$$

که با برابری قبل ناسازگار است.

۳۱.۷۶. *پاسخ.* ۳۰ درجه. *راهنمائی.* مثلث CDA' را برابر مثلث CBA و وصل به پنج‌ضلعی بسازید.

۳۲.۷۶. *راهنمائی.* در آغاز فرض می‌کنیم بتوان پنج نقطه و در هریک از زیرمجموعه‌ها یک نقطه انتخاب کرد که هیچ چهارتایی از آن‌ها، بر یک صفحه واقع نباشند. این پنج نقطه را دوبه‌دو، به‌وسیلهٔ ده خط راست به هم وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم، هرکدام از آن‌ها را، تنها به دو رنگ درآورده

باشیم. صفحه‌ای را درنظر می‌گیریم که با هیچ کدام از این پنج خط راست موازی نباشد. در این صورت، بین نقطه‌های برخورد این صفحه با خط‌های راست، دست‌کم چهار نقطه از زیرمجموعه‌های مختلف وجود خواهد داشت. از این چهار نقطه، شش خط راست می‌گذرد. تنها این می‌ماند که، خط راستی انتخاب کنیم که همهٔ آن‌ها را قطع کند.

۳۳.۷۶. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که همهٔ مجهول‌ها، غیرمنفی باشند. اگر x و y را بزرگترین و کوچکترین عدد از بین مجهول‌ها بگیریم، روشن است که باید داشته‌باشیم: $x^۲ \leq ۲x$ و $y^۲ \geq ۲y$، یعنی برای x و y غیر صفر به‌دست می‌آید:

$$۲ \leq y \leq x \leq ۲$$

به‌این ترتیب، دستگاه دو جواب غیرمنفی دارد:

$$x_۱ = x_۲ = \ldots = x_۵ = ۰ \text{ و } x_۱ = x_۲ = \ldots = x_۵ = ۲$$

اکنون ثابت می‌کنیم، بین x_iها، عدد منفی وجود ندارد. $x_۳$ را کوچکترین عدد بین x_iها و $x_۳ < ۰$ فرض می‌کنیم. اگر معادلهٔ دوم را از معادله اول کم کنیم، به‌دست می‌آید.

$$x_۱ - x_۳ = x_۳^۲ - x_۴^۲$$

چون $x_۱ - x_۳ \geq ۰$، پس $|x_۴| < |x_۳|$، بنابراین

$$x_۳ + x_۴ = x_۵^۲ \leq ۰$$

یعنی $x_۵ = ۰$ (و بنابراین $x_۱ = x_۳$)؛ درنتیجه، معادلهٔ پنجم با ناسازگاری مواجه می‌شود.

۳۴.۷۶. فرض می‌کنیم، تعداد موقعیت‌های باخت X، بیشتر از تعداد موقعیت‌های بُرد Y باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، دو موقعیت باخت A و B وجود دارد، به‌نحوی که با یک حرکت می‌توان از A به B رفت. درواقع، اگر این‌طور نباشد، آن‌وقت موقعیت‌های مجاور به باخت‌ها، nX می‌شود و، درضمن، هریک از آن‌ها بیش از n مرتبه به‌حساب نمی‌آیند (در این‌جا n مجموع ثابتی است که در صورت مساله دربارهٔ آن صحبت شده است) بنابراین

$$Y \geq \frac{nX}{n} = X$$

که با فرض ما ناسازگار است.

این زوج A و B، یکسان نمی‌توانند باشند، زیرا اگر از موقعیت A بتوان به موقعیت باخت رفت، آن‌وقت موقعیت A، موقعیت بُرد است.

۳۶.۷۶. *راهنمائی*. حقیقت زیر را به‌کمک استقرای ریاضی ثابت کنید: در هر درخت (یعنی گرافِ بدون دُورهای ساده)، که مرتبهٔ هر راس آن بیشتر از ۳ نباشد، می‌توان دست‌کم $\frac{n+۱}{۳}$ یال غیرمتقاطع انتخاب کرد.

۳۷.۷۶. *راهنمائی*. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم این عددها را بر ۷ و ۱۳ پیدا کنید.

۲.۷۷. اگر فرض کنیم روی هر ردیف از خانه‌های قائم، یک رُخ وجود داشته‌باشد، آن‌وقت، همهٔ رُخ‌ها را، به‌جز این هشت رُخ، می‌توان برداشت. ولی اگر در هر ردیف قائم یک رُخ نباشد، آن‌وقت به ناچار، در هر ردیف افقی صفحهٔ شطرنج، یک رُخ پیدا می‌شود که، در این صورت، بقیهٔ رُخ‌ها را می‌توان برداشت.

۳.۷۷. اگر خط‌های راست از مرکز ۸ ضلعی نگذرند، آن‌ها را به موازات خود انتقال می‌دهیم تا، در وضع تازهٔ خود، از مرکز هشت‌ضلعی بگذرند و، در این صورت، مساحت‌های هر دو بخش روبه‌رو، با هم برابر خواهند بود. ولی

روشن است که، ضمن این انتقال خط‌های راست، مساحت یکی از بخش‌ها بزرگتر و مساحت دیگری کوچکتر می‌شود. پیدایش این تناقض، به‌معنای آن است که، این خط‌های راست، در مرکز هشت‌ضعلی به یکدیگر برخورده‌اند. اگر این دو خط راست بر هم عمود نباشند، یکی از خط‌های راست را دور مرکز می‌چرخانیم تا بر دیگری عمود شود که، در این صورت، چهار بخش با مساحت‌های برابر به‌دست می‌آید و، مثل قبل، با تناقض روبه‌رو می‌شویم.

۴.۷۷. با حل مساله ۸.۷۷ مقایسه کنید.

۵.۷۷. روشن است که دنباله نمی‌تواند از روی فاصلهٔ عددی

$$(۱۰۰۰۰۰, ۹۹۹۹۹۹)$$

پرش کند.

۶.۷۷. نفر دوم، باید با این روش عمل کند: عدد دوازده‌رقمی را، در ذهن خود، به دو عدد شش‌رقمی تقسیم کند؛ در هر حرکت نفر اول، اگر رقم x به‌وسیلهٔ نفر اول در جایی نوشته می‌شود، او عدد $۹ - x$ را در عدد شش‌رقمی دیگر، ولی در همان مرتبه بنویسد. عددی که به‌دست می‌آید، به‌صورت

$$A \times ۱۰^۶ + B$$

است که، در آن $A + B = ۹۹۹۹۹۹$. چون $۱۰^۶ - ۱$ بر ۷۷ بخش‌پذیر است، پس عدد

$$A \times ۱۰^۶ + B = A(۱۰^۶ - ۱) + A + B = (۱۰^۶ - ۱)(A + ۱)$$

بر ۷۷ بخش‌پذیر می‌شود.

۸.۷۷. عدد ۱۹۷۷۱۹۷۷۱۹۷۷ را طوری می‌نویسیم که، برای آن، مقدار a_i ها حداقل ممکن باشد. اگر یکی از عددهای a_i، بزرگتر از ۱۰

باشد، می‌توان آن را به‌صورت $a_i - ۱۰$ تغییر داد و درضمن، یک واحد به $a_{i+۱}$ اضافه کرد (به‌ازای $i < ۱۱$). این می‌ماند نتیجه بگیریم که این حالت، همان باز شدهٔ عدد مفروض در مبنای ۱۰ است که، مجموع رقم‌های آن، برابر ۷۲ می‌شود. بنابراین، پاسخ این است:

$$a_۰ = ۱, a_۱ = ۹, a_۲ = ۷, a_۳ = ۷, \ldots, a_{۱۱} = ۷$$

۹.۷۷. *راهنمائی.* مرکز مربع مفروض را O می‌نامیم. پاره‌خط‌های راست KL، LM، MN و NK را روی قطرهای AC و BD تصویر می‌کنیم. در این صورت تصویرها بر اجتماع تصویرهای پاره‌خط‌های راست OK، OL، OM و ON بر همین قطرها منطبق می‌شوند. این باقی می‌ماند که از این قضیه استفاده کنیم: برای هر نقطهٔ X واقع بر محیط مربع، مجموع طول‌های تصویرهای OX بر دو قطر، برابر $\frac{۱}{۲}|AC|$ است. از آن‌جا، مجموع تصویرهای چهار پاره‌خط راست ما، از $۲|AC|$ کمتر نمی‌شود و این، به معنای آن است که این حکم، برای خود پاره‌خط‌های راست هم درست است.

۱۲.۷۷. *راهنمائی.* اگر M راسی از چندضلعی باشد، در آغاز ثابت کنید، راس N وجود دارد، به‌نحوی که $O \in MN$؛ سپس، ثابت کنید؛ برای این دو راس داریم: $|OM| = |ON|$.

۱۴.۷۷. اگر A زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{N}$ باشد، متمم آن را در $\mathbf{N}$، با $\overline{A}$ نشان می‌دهیم. یکی از دو مجموعهٔ $A_۱$ و $\overline{A}_۱$ بی‌پایان است. آن را $C_۱$ می‌نامیم. یکی از مجموعه‌های $A_۲ \cap C_۱$ و $\overline{\overline{A}}_۲ \cap C$ بی‌پایان است. آن را $C_۲$ می‌نامیم و غیره. درنتیجه، به مجموعهٔ بی‌پایان C_n می‌رسیم. از آن دو عدد برمی‌گزینیم. این‌ها، همان دو عدد x و yاند.

۱۵.۷۷. *پاسخ.* سه یا چهار ضلع.

۱۶.۷۷. *پاسخ.* ۱۰۱ خط شکسته. این که تعداد خط‌های شکسته

کمتر از ۱۰۱ نیست از این‌جا نتیجه می‌شود که، اگر همهٔ راس‌های روی قطری را درنظر بگیریم که دو راس متقابل دیگر مربع را به هم وصل کرده‌است (تعداد این راس‌ها برابر ۱۰۱ است)، آن‌وقت هیچ کدام از خط‌های شکستهٔ ما نمی‌تواند دو تا از این راس‌هار را در بر بگیرد. نمونهٔ پاسخ برای ۱۰۱ خط شکسته روشن است.

۱۷.۷۷. از برهان خُلف استفاده و فرض می‌کنیم، برخی از مقدارهای k، a_k و b_k نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. فرض می‌کنیم $a_۱$، در سمت چپ $b_۱$ باشد. چون $b_۲$ با $a_۱$ و $b_۱$ با $a_۲$ متقاطع است، به‌سادگی روشن می‌شود که $b_۲$ باید به‌ناچار در سمت چپ $a_۲$ باشد. اگر استدلال را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، معلوم می‌شود که $a_{۱۹۷۷}$ در سمت چپ $b_{۱۹۷۷}$ و $b_۱$ در سمت چپ $a_۱$ واقع است. تناقض حاصل، حل مساله را تمام می‌کند.

۱۸.۷۷. دایرهٔ واحد را، به مرکز مبداء مختصات O، و نقطه‌های برخورد آن را با خط‌های راست موازی بردارهای مفروض، در نظر می‌گیریم؛ درضمن، اگر نقطهٔ A چنان باشد که $\overrightarrow{OA}$ با بردار متناظر خود هم‌جهت باشد، نقطهٔ A را به رنگ قرمز، و اگر $\overrightarrow{OA}$ با بردار متناظر خود در دو جهت مختلف باشند، نقطه را به رنگ آبی درمی‌آوریم. با توجه به شرط مساله معلوم می‌شود که نقطه‌های قرمز و آبی روی محیط دایره، به تناوب می‌آیند و دو سر هر قطر دایره، با دو رنگ مختلف مشخص می‌شود. نقطه‌ها را به ردیف شماره‌گذاری می‌کنیم: $A_۱$، $A_۲$، ...؛ و فرض می‌کنیم $A_۱$ به رنگ قرمز باشد. در این صورت $A_{n+۱}$ آبی است، یعنی تعداد نقطه‌ها در انتخاب $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{n-۱}$ زوج و، بنابراین، n فرد است.

۲۳.۷۷. عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$]x-\frac{۱}{n}, x+\frac{۱}{n}[\subset]a,b[$$

$\frac{۱}{\sqrt{۲}} - ۱$ را با t نشان می‌دهیم. در این صورت

$$f(x) = \{x + t\}$$

$\{a\}$ به‌معنای بخش کسری عدد a است. به این ترتیب

$$f(f(\ldots(x)\ldots) = \{x + nt\}$$

که در آن، نماد f، به تعداد n بار به کار رفته است. چون t عددی گنگ است، بنابراین بخش‌های کسری عددهای x، $x+t$، $x+۲t$، ...، $x+nt$ با هم فرق دارند؛ بنابراین، می‌توان دو تا از آن‌ها را پیدا کرد:

$$\{x + at\} \text{ و } \{x + bt\}$$

که اختلاف آن‌ها کمتر از $\frac{۱}{n}$ باشد. به‌این ترتیب

$$k = |a - b| \Rightarrow |\{x\} - \{x + kt\}| < \frac{۱}{n}$$

یعنی $f(f\ldots(x)\ldots)$ (از f به تعداد k مرتبه استفاده شده‌است)، در بازهٔ $]a, b[$ واقع است.

یادداشت. توجه کنید: در این‌جا، حکم مساله را برای هر نقطهٔ x از بازهٔ $]a, b[$ ثابت کردیم.

۲۵.۷۷. فرض می‌کنیم:

$$f(x) = \sin x \operatorname{tg} x,\ \ g(x) = x^۲$$

چون $f(۰) = g(۰)$، کافی است این نابرابری را ثابت کنیم:

$$f'(x) \geq g'(x)$$

چون $f'(\circ) = g'(\circ)$، پس کافی است ثابت کنیم:

$$f''(x) \geq g''(x)$$

و درواقع داریم:

$$f''(x) = \frac{۲\sin^۲ x}{\cos^۳ x} + \left(\cos x + \frac{۱}{\cos x}\right) > ۲ = g''(x)$$

زیرا برای هر مقدار مثبت $t \neq ۱$، داریم: $t + \frac{۱}{t} > ۲$.

۲۶.۷۷. *پاسخ*. حداکثر هشت راس. *راهنمائی*. در غیر این صورت، مختصات وسط پاره‌خط‌های راستی که هر دو راس را به هم وصل می‌کنند، عددهای درستی می‌شود. پیدا کردن مثال‌ها، دشوار نیست.

۲۷.۷۷. فرض می‌کنیم، همهٔ این عددها، بر p بخش‌پذیر باشند. در این صورت عددهای

$$\begin{aligned}
&\binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-۱}{k},\\
&\binom{n+k-۲}{k-۱} = \binom{n+k-۱}{k} - \binom{n+k-۲}{k},\\
&\cdots\\
&\binom{n}{k-۱} = \binom{n+۱}{k} - \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

هم، باید بر p بخش‌پذیر باشند. به همین ترتیب، همهٔ عددهای $\binom{n+i}{J}$، که در آن $J \leq i$ عددهای غیرمنفی و درست دلخواهند، بر p بخش‌پذیر می‌شوند. ولی در بین این عددها، عدد $\binom{n}{\circ}$ وجود دارد، به‌ازای $i = \circ = J$، که برابر است با ۱. تناقض.

۲۸.۷۷. مقطع یک چهاروجهی را با یک صفحه در نظر می‌گیریم. در مقطع، یک مثلث به‌دست می‌آید که زاویه‌های آن، بزرگتر از زاویه‌های دو وجهی متناظرشان نیستند. بنابراین، مجموع سه زاویهٔ دو وجهی از چهار وجهی، از ۱۸۰ درجه بیشتر است. اگر چهار نابرابری از این‌گونه را با هم جمع کنیم، به نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۲۹.۷۷. *راهنمائی.* با روش استقرای ریاضی ثابت کنید، برای عددهای دلخواه

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \ldots \geq a_{۲n+۱}$$

نابرابری زیر برقرار است:

$$a_۱^۲ - a_۲^۲ + \ldots - a_{۲n}^۲ + a_{۲n+۱}^۲ \geq (a_۱ - a_۲ + \ldots - a_{۲n} + a_{۲n+۱})^۲$$

۱.۷۸. حل مسالهٔ ۳.۷۴ را ببینید.

۲.۷۸. چون هر مثلث سیاه، دست‌کم با یک مثلث سفید تماس دارد، پس تعداد آن‌ها از تعداد کل ضلع‌های مثلث‌های سفید تجاوز نمی‌کند؛ تعداد این ضلع‌ها هم، برابر است با سه برابر تعداد مثلث‌های سفید.

۳.۷۸. نه، این عدد، اول نیست:

$$۵۷۵۹۹ = ۲۴۰^۲ - ۱ = ۲۳۹ \times ۲۴۱$$

۴.۷۸. *پاسخ.* ۱۰ شاه.

۵.۷۸. *پاسخ.* نه، نمی‌توان.

۶.۷۸. حل مسالهٔ ۹.۷۰ را ببینید.

۷.۷۸. *پاسخ.* نه، ممکن نیست. باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۲ را درنظر بگیرید.

۸.۷۸. *پاسخ.* $a = ۸$.

۱۰.۷۸. حل مسالهٔ ۹.۷۱ را ببینید.

۱۱.۷۸. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد و قطری را درنظر می‌گیریم که، در هر طرف آن، ۵۰ عدد وجود داشته باشد. تفاضل دو مجموعی را که از عددهای دو طرف قطر به‌دست می‌آید، مثبت می‌گیریم (یکی از دو طرف قطر را ثابت می‌گیریم و از مجموع عددهای این طرف، مجموع عددهای واقع در طرف دیگر را کم می‌کنیم). اکنون قطر را می‌چرخانیم، به نحوی که دو انتهای آن از روی یک عدد رد شوند. اگر این دو عدد را، که در واقع جای خود را از یک طرف قطر به طرف دیگر تغییر داده‌اند، a و b بنامیم، اختلاف مجموع‌های دو طرف قطر، به اندازهٔ $۲(a-b)$ تغییر می‌کند. روشن است که این عدد از

$$۲(۹۹۹ - ۱۰۰) = ۱۷۹۸ < ۱۸۰۰$$

تجاوز نمی‌کند. اکنون بازهٔ $[-۹۰۰, ۹۰۰]$ را درنظر می‌گیریم. روشن است که علامت اختلاف مجموع‌هایی که به‌وسیلهٔ قطر از هم جدا شده‌اند، بعد از ۵۰ دوران قطر، تغییر می‌کند. چون این تفاضل، در آغاز مثبت و بزرگتر از ۹۰۰ بود، اکنون منفی و کوچکتر از ۹۰۰− می‌شود. ولی چون بعد از هر یک از ۵۰ دوران، حداکثر به اندازهٔ ۱۸۰۰ تغییر می‌کند (۱۸۰۰ طول بازهٔ $[-۹۰۰, ۹۰۰]$ است)، به‌ناچار در لحظه‌ای، این تفاضل در همان بازه‌ای قرار می‌گیرد که مورد خواست مساله است.

۱۴.۷۸. حل مسالهٔ ۲۰.۶۳ را ببینید.

۱۵.۷۸. *پاسخ*. به‌طور حتم، حق با مردها نیست. ثابت کنید، اضافهٔ یکی از مجموع‌ها نسبت به مجموع دیگر، باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۱۶.۷۸. بله، می‌توان. برای نوشتن چنین جدولی، محورهای مختصات را روی صفحه در نظر می‌گیریم؛ سپس، در هر خانه‌ای که مجموع دو مختص آن بر ۱۹۱۸ بخش‌پذیر است، عدد ۱ و در هر خانه‌ای که مجموع دو مختص

آن بر ۱۹۷۸ بخش‌پذیر است، عدد ۱− را قرار می‌دهیم. اگر در خانه‌ای باید هر دو عدد را بگذاریم، مجموع آن‌ها، یعنی صفر را می‌گذاریم. در همهٔ خانه‌های دیگر، باید عدد صفر را قرار داد.

۱۷.۷۸. دایره‌ای را از نقطه‌های تماس این جفت دایره‌ها بگذرانید: اول و دوم، سوم و چهارم، پنجم و ششم.

۱۹.۷۸. روشن است که درجهٔ این چندجمله‌ای، باید فرد باشد. چندجمله‌ای را f می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f(p) = ۲$؛ در این صورت $p \geq ۲$. فرض می‌کنیم، y بزرگترین عدد اولی باشد که برای هر

$$n < x = f^{-۱}(y)$$

داشته باشیم: $f(n) < f(x)$، و در بازهٔ $]x, \infty[$، تابع f یکنوا باشد. در این صورت، برای هر عدد اول از ۲ تا y، متناظر آن در بازهٔ از p تا x واقع می‌شود و عددی اول است. چون $p \geq ۲$ و $x < y$ (البته $f(x)$ نمی‌تواند به‌صورت $x - c$ باشد)، و اختلاف عددهای اول از بازهٔ $[۲, y]$ باید متناظر با اختلاف عددهای اول از بازهٔ $[p, x]$ باشد، پس $p = ۲$ و $x = y$ و، بنابراین، $f(x) = x$؛ و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۰.۷۸. اگر برابری‌های روشن

$$(a_i - b_i)(a_j - b_j) = a_i a_j + b_i b_j - (a_i b_j + a_j b_i)$$

را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S = \sum_{i \leq j}(a_i - b_i)(a_j - b_j) = \sum_{i \leq j} a_i a_j + \sum_{i \leq j} b_i b_j - \\ - \sum_{i \leq j}(a_i b_j + b_i a_j)$$

اکنون توجه می‌کنیم:

$$\sum_{i \leq j}(a_i b_j + b_i a_j) \geq (a_۱ + a_۲ + a_۳)(b_۱ + b_۲ + b_۳)$$

بدون این‌که به کلی بودن مطلب صدمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2 + b_3$$

که در نتیجه، به این نابرابری می‌رسیم:

$$S \leq \sum_{i \leq j} a_i a_j + \sum_{i \leq j} b_i b_j - (b_1 + b_2 + b_3)^2 \leq$$
$$\leq \sum_{i \leq j} a_i a_j \leq 1$$

زیرا روشن است که $(b_1 + b_2 + b_3)^2 \geq \sum_{i \leq j} b_i b_j$

۲۲.۷۸. دایره‌های به شعاع $\frac{1}{2} - \varepsilon$ و به مرکزهای $(0, 0)$، $(0, 1)$، $(1, 0)$ و $(1, 1)$؛ دایره‌های به شعاع ε و به مرکزهای $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$، $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ و، همچنین، دایرهٔ با شعاع $\frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}}$ و به مرکز $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ را درنظر بگیرید.

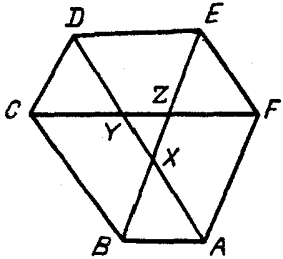
۲۴.۷۸. پاسخ. هشت مثلث.

۲۷.۷۸. فرض می‌کنیم، در شش‌ضلعی $ABCDEF$، قطرهای AD، BE و CF، در یک نقطه یکدیگر را قطع نکرده باشند (شکل ۴۹ را ببینید). در این صورت، چون باید داشته باشیم:

$$S_{ABX} = S_{XDE}, S_{BCZ} = S_{ZEF}, S_{CDY} = S_{YAF}$$

به این نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$|AX| \cdot |BX| > |DY| \cdot |EZ|, |FZ| \cdot |EZ| > |BX| \cdot |CY|,$$
$$|CY| \cdot |DY| > |AX| \cdot |FZ|$$



شکل ۴۹

که از ضرب آن‌ها در یکدیگر، به یک نابرابری نادرست می‌رسیم؛ یعنی قطرها، و در یک نقطه به هم می‌رسند.

۲۸.۷۸. راهنمائی. با استقرا، روی مجموع بعدهای جدول، ثابت کنید، اگر خانه‌های جدول $۲n \times ۲n$ را، با شرط صورت مساله رنگ کنیم، خانه‌های گوشه‌ای، رنگ‌های مختلفی پیدا می‌کنند.

۳۰.۷۸. اگر شش عدد متوالی واقع بر راس‌ها را

$$a_k, a_{k+۱}, \ldots, a_{k+۵}$$

بنامیم، بعد از پنج دقیقه، به‌جای عدد a_k، عدد

$$a_k - ۵a_{k+۱} + ۱۰a_{k+۲} + ۱۰a_{k+۳} + ۵a_{k+۴} - a_{k+۵}$$

خواهد بود. اگر همهٔ عبارت‌های مشابه را جمع و جمله‌های بخش‌پذیر بر ۵ را در آن‌ها، حذف کنیم، به‌دست می‌آید.

$$\sum_k (a_k - a_{k+۵}) = ۰$$

(در این‌جا $a_۱ = a_{۱۰۱}$، $a_۲ = a_{۱۰۲}$ و غیره). بنابراین، این مجموع بر ۵ بخش‌پذیر است.

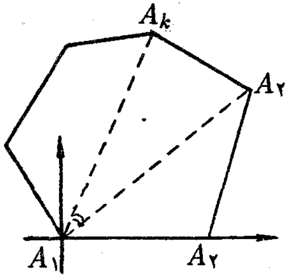
۳۱.۷۸. اگر پاره‌خط راست AB شامل x نقطهٔ انتهائی پاره‌خط راست CD، و پاره‌خط راست CD شامل y نقطهٔ انتهایی پاره‌خط راست AB باشد (x یا y می‌توانند برابر ۰، ۱ یا ۲ باشند)، آن‌وقت روشن است که x و y یا هر دو زوج و یا هر دو فردند. از این‌جا نتیجه می‌شود که، اگر همهٔ عددهای a_k را با هم جمع کنیم (a_k را تعداد نقطه‌های انتهایی پاره‌خط‌های راست دیگری گرفته‌ایم که روی پاره‌خط راست kام قرار دارند)، آن‌وقت باید عددی زوج به‌دست آید. از طرف دیگر، مجموع

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۱۹۷۸$$

عددی فرد است. بنابراین، شماره‌گذاری پاره‌خط‌های راست، به‌صورتی که مساله خواسته است، ممکن نیست.

۳۲.۷۸. فرض می‌کنیم این‌طور نباشد؛ درضمن برای سادگی کار، $a_۱ = ۱$ می‌گیریم. از تعریف دنباله نتیجه می‌شود که، اگر عدد n، وقتی در مبنای ۲ نوشته می‌شود، شامل تعداد زوجی واحد باشد $a_n = ۰$ و، در غیر این صورت $a_n = ۱$. دورهٔ گردش را به طول p می‌گیریم، آن‌وقت به‌ازای مقدارهای به اندازهٔ کافی بزرگ k داریم: $a_{k+np} = a_k$ (برای هر n). فرض می‌کنیم $n = ۲^k q$؛ درضمن q را طوری انتخاب می‌کنیم که عدد pq، در مبنای ۲، دارای تعداد فردی واحد باشد. در این صورت به دست می‌آید $a_{k+pq} \neq a_k$. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۳۳.۷۸. مثلث K را طوری در نظر می‌گیریم که راس‌های آن بر راس‌های چندضلعی M واقع و، درضمن، حداکثر ممکن مساحت را داشته باشد. در این صورت، چندضلعی M در درون مثلث K' واقع می‌شود که از تجانس K با ضریب -۲ به‌دست می‌آید. برای این منظور، باید از هر راس مثلث، خط راستی موازی ضلع روبه‌روی آن رسم کرد. اکنون روشن است که M در تجانس به ضریب $-\frac{۱}{۲}$، به شکلی تبدیل می‌شود که می‌توان آن را



شکل ۵۰

طوری انتقال داد که در درون مثلث K قرار گیرد.

۳۵.۷۸. چندضلعی را طوری درنظر می‌گیریم که راس A_1 بر مبداء مختصات و ضلع A_1A_2 بر محور طول‌ها قرار گیرد (شکل ۵۰). چون طول ضلع‌ها و قطرها، عددهایی گویا هستند، پس کسینوس زاویهٔ $A_kA_1A_l$ عددی گویاست؛ بنابراین، باتوجه به برابری

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

سینوس‌های زاویه‌های $A_kA_1A_2$، مضرب‌های گویایی از عدد ثابتی مثل t خواهند بود. درنتیجه، می‌توان فرض کرد که همهٔ نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n در نقطه‌های گرهی یک شبکهٔ مستطیلی با گام افقی و گام قائم h واقع‌اند، زیرا از مختصات گویا می‌توان، به کمک تجانس، به مختصات درست رسید. اکنون همهٔ چندضلعی‌هایی را درنظر می‌گیریم که از M، با انتقال موازی $\overrightarrow{A_1P}$ به دست می‌آیند (P، نقطهٔ گرهی دلخواهی از شبکه است)، همچنین، همهٔ چندضلعی‌هایی را که، با همین انتقال، از چندضلعی M' به‌دست می‌آیند (M'، قرینهٔ M نسبت به مبداء مختصات است). این گروه چندضلعی‌ها که با مربع K برخورد می‌کنند، به همان صورتی که مورد خواست مساله است، آن را می‌پوشاند، زیرا همراه با هر چندضلعی N به ضلع XY، که K را قطع می‌کند، چندضلعی دیگری هم وجود دارد که قرینهٔ

N نسبت به وسط XY است بنابراین، ضمن عبور از ضلع XY، تعداد پوشش‌ها تغییر نمی‌کند.

۲.۷۹. پاسخ. در سال ۱۹۵۷.

۵.۷۹. پاسخ. در کلاس ۳۵ دانش‌آموز وجود دارد.

۶.۷۹. داریم:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= (a-b)[(a+b)^2 - ab]$$

چون $a+b$ و ab بر c بخش‌پذیرند، پس $(a+b)^2$ و ab و درنتیجه مجموع آن‌ها بر c بخش‌پذیر است.

۹.۷۹. حل مسالهٔ ۳۴.۷۴ را ببینید.

۱۰.۷۹. پاسخ. ۱۶ عدد. *راهنمائی.* هر عدد را با هر بخشیاب اول خودش عوض کنید.

۱۱.۷۹. پاسخ. ۲۷.

۱۲.۷۹. پاسخ. $a = 2$، $b = 3$، $c = 4$ یا $a = 0$، $b = -1$، $c = -2$.

۱۳.۷۹. هریک از ضلع‌های این خط شکسته، میانه‌ای از یک مثلث قائم‌الزاویه است (مثلاً A_0B_1، میانهٔ مثلث BB_1C است) و بنابراین، طول آن برابر است با نصف طول وتر همان مثلث ($|A_0B_1| = \frac{1}{2}|BC|$). اگر همهٔ این برابری‌ها را با هم جمع کنیم، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۱۴.۷۹. حل مسالهٔ ۴.۶۵ را ببینید.

۱۵.۷۹. پاسخ. ۱۸.

۱۶.۷۹. نقطهٔ برخورد A_1C_1 و AB را P و نقطهٔ برخورد A_1C_1 و BC را Q می‌نامیم. مثلث BPQ متساوی‌الساقین است و بنابراین، میانهٔ BM_3 در آن بر نیمساز منطبق است (BB_1). سپس، BM_3 بر A_1C_1

عمود و زاویهٔ $C_۱M_۲B_۱$ برابر ۹۰ درجه؛ همچنین زاویهٔ $C_۱M_۱B_۱$ هم برابر ۹۰ درجه است، یعنی $M_۱$ و $M_۲$ روی محیط دایرهٔ به قطر $B_۱C_۱$ قرار دارند.

۱۷.۷۹. مثلاً عددهای به‌صورت $(۳k+۲)^۲$ از این قبیل‌اند. درواقع

$$n^۲ + p = (۳k+۲)^۲ \Rightarrow p = (۳k+۲-n)(۳k+۲+n)$$

اگر بخواهیم، p عددی اول باشد، باید داشته باشیم:

$$۳k + ۲ - n = ۱ \Rightarrow n = ۳k + ۱$$

که در این صورت، مقدار p چنین می‌شود:

$$p = ۳k + ۲ + n = ۳k + ۲ + ۳k + ۱ = ۶k + ۳$$

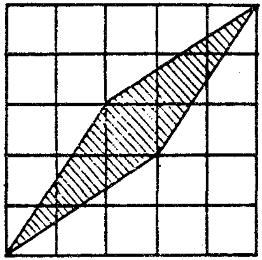
که بر ۳ بخش‌پذیر است و عددی اول نیست (به‌ازای $k > ۰$).

۱۸.۷۹. اگر $k > ۱$، عددی فرد باشد، روشن است که عدد مفروض بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است. در حالت زوج بودن k، اگر عدد را در ۱۱ ضرب کنیم، عددی به‌دست می‌اید که بر $A = ۱۱۱\ldots۱$ (شامل k رقم برابر واحد) بخش‌پذیر است. چون A و ۱۱ نسبت به هم اول‌اند، پس عدد ما هم بر A بخش‌پذیر است.

۲۰.۷۹. محاسبهٔ مستقیم زاویه‌ها نشان می‌دهد که $\widehat{EOK} = ۱۲۰^\circ$. بنابراین چهارضلعی $BEOK$ قابل محاط در دایره است. چون BO نیمساز زاویهٔ B است، پس $\widehat{OBE} = \widehat{OBK}$، یعنی وترهای OE و OK، طول‌های برابر دارند.

۲۱.۷۹. *پاسخ*. باید n بردار پشت سر هم را انتخاب کرد.

۲۲.۷۹. اگر همهٔ این عددها مرکب باشند، باید هر کدام از آن‌ها بخشیاب اولی کوچکتر از $۲n - ۱$ داشته باشد. ولی تعداد این عددها از



شکل ۵۱

$n - ۱$ بیشتر نیست، یعنی دو تا از این بخشیاب‌ها بر هم منطبق‌اند، که با فرض مساله مبنی بر این‌که عددها دو به دو نسبت به هم اول‌اند، متناقض است.

۲۳.۷۹. پاسخ. تنها وقتی ممکن است که، هر دو عدد m و n، بر ۴ بخش‌پذیر باشند.

۲۵.۷۹. پاسخ. به‌ازای $n = ۱۰$ یا $n = ۱۱$.

۲۷.۷۹. پاسخ. حداقل مساحت، برابر ۵ است. مثال را روی شکل ۵۱ ببینید.

۲۸.۷۹. پاسخ. اندازهٔ زاویه‌ها: ۹۰ درجه، $\frac{۱}{۲}\alpha$، $۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\alpha$.

۲۹.۷۹. راهنمائی. مجموع مجذورهای سمت چپ برابری‌ها را درنظر بگیرید. پاسخ. $x = ۰$، $y = ۱$ یا $x = ۲$، $y = -۱$.

۳۲.۷۹. فرض می‌کنیم $y^۲ + ۳^y = x^۲$، یعنی

$$x^۲ - y^۲ = ۳^y$$

بنابراین، باید $x - y$ و $x + y$، توان‌هایی از عدد ۳ باشند، یعنی ۳^k و ۳^{y-k}. درنتیجه $y = \frac{۱}{۲}(۳^k - ۳^{y-k})$. چون

$$\frac{۱}{۲}(۳^k - ۳^{y-k}) \geq ۳^{y-k-۱} \geq ۳^{\frac{۱}{۲}(y-۳)}$$

و به‌ازای $y \geq ۷$، این عدد از y بزرگتر است (که به سادگی و با استقرا ثابت می‌شود)، پس تنها این می‌ماند که عددهای کوچکتر از هفت را آزمایش کنیم.

پاسخ. $y = ۱$ یا $y = ۳$.

۳۳.۷۹. همهٔ گونه‌های ممکن زاویه‌های دوران دایره را، از ۰ تا ۲π در نظر می‌گیریم. اگر یکی از قطاع‌ها، زاویه‌ای برابر α و دیگری زاویه‌ای برابر β داشته باشد، آن‌وقت زاویه‌های دوران، که به‌ازای آن‌ها، نتیجهٔ دوران قطاع اول، دومی را قطع می‌کند، بازهٔ به طول $\alpha + \beta \leq \frac{۲\pi}{n^۲ - n + ۱}$ را پر می‌کند. اگر همهٔ این‌گونه زوج‌ها را درنظر بگیریم (که تعداد آن‌ها برابر است با $n(n-۱)$، می‌بینیم که بازه‌های متناظر، مجموعی به طول حداکثر برابر

$$\frac{۲\pi n}{(n-۱)(n^۲ - n + ۱)} < ۲\pi$$

خواهند داشت. بنابراین زاویهٔ دوران مورد نظر، وجود دارد.

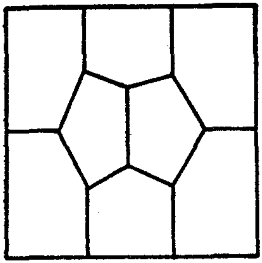
۳۴.۷۹. *راهنمائی.* ثابت کنید، برای هر ضلع این وجه، ضلع دیگری وجود دارد که با آن موازی است و طولی برابر آن دارد.

۳۵.۷۹. کوتاه‌ترین روش اثبات، که البته روش مقدماتی نیست، با استفاده از تبدیل‌های تصویری به‌دست می‌آید. با دور کردن نقطهٔ برخورد خط‌های راست EA و BF به بی‌نهایت، شکلی به‌دست می‌آید که نسبت به مرکز دایره متقارن است؛ و از همین جا، درستی حکم مساله نتیجه می‌شود.

۳۶.۷۹. حل مسالهٔ ۲.۷۰ را ببینید.

۱.۸۰. *پاسخ.* نه، نمی‌توان. اگر عددهای از ۱ تا ۳۰ را در ۶ ستون قرار دهیم، در حالتی که مجموع هر ستون با مجموع هر ستون دیگر برابر باشد، باید مجموع همهٔ عددها بر ۶ بخش‌پذیر باشد، در حالی که مجموع همهٔ عددها، عددی فرد است.

۲.۸۰. *پاسخ.* در اردو، سه نوجوان دوازده‌ساله شرکت دارند.



شکل ۵۲

۳.۸۰. همهٔ نقطه‌ها را، به ۱۰۰ زوج دو به دو متقارن تقسیم می‌کنیم. همهٔ این زوج‌ها را به سه گروه می‌توان تقسیم کرد: دو نقطهٔ یک زوج، به رنگ قرمزند؛ هر دو نقطه به رنگ آبی‌اند؛ از دو نقطه، یکی قرمز و دیگری آبی است. روشن است که زوج نقطه‌های گونهٔ اول با زوج نقطه‌های گونهٔ دوم، به تعدادی برابرند. تنها این می‌ماند توجه کنیم که فاصلهٔ از نقطه‌های گونه اول (دوم) تا نقطهٔ A (تا نقطهٔ B) برابر است با طول پاره‌خط راست AB، و در گونهٔ سوم، در هر زوج، فاصلهٔ نقطهٔ قرمز تا نقطهٔ A، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ آبی تا نقطهٔ B.

۵.۸۰. نمونهٔ این تقسیم، در شکل۵۲ داده شده‌است.

۶.۸۰. دو ایستگاه A و B را در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم، خط XY از ایستگاه A و خط MN از ایستگاه B عبور کند. اگر این دو قطر یکدیگر را قطع کنند، آن‌وقت می‌توان با یک جابه‌جایی از A به B رسید. در حالتی که این دو قطر یکدیگر را قطع نکنند، آن‌وقت در چهارضلعی $XYMN$، دو قطر، و مثلاً XN و YM، در نقطه‌ای مثل O به هم می‌رسند. در این صورت، در مسیر یکی از این قطرها (مثلاً YM) تراموا عبور می‌کند و می‌توان از A به B، با دو جابه‌جایی و به‌ترتیب زیر رسید:

$$A \to Y \to M \to B$$

۹.۸۰. *پاسخ.* نه، نمی‌توان.

۱۱.۸۰. پسربچه باید به این ترتیب عمل کند: اگر دختربچه، شوکولات را از قوطی حاوی یک عدد شوکولات برمی‌دارد، او باید از قوطی که بیش از یک شوکولات دارد، بردارد؛ اگر دختربچه از جایی که درست دو شوکولات است، برمی‌دارد، او باید شوکولات باقی‌مانده را از همان قوطی بردارد؛ و سرانجام، اگر دختربچه به سراغ قوطی حاوی بیش از دو شوکولات رفته است، او باید سراغ قوطی حاوی یک شوکولات برود.

۱۲.۸۰. دستگاه محورهای مختصات را روی صفحهٔ شطرنجی در نظر می‌گیریم و، سپس، خانه‌های صفحه را، باتوجه به قاعدهٔ زیر، به رنگ‌های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ درمی‌آوریم: اگر مختصات خانه‌ای، برابر (x, y) باشد، آن‌وقت آن را با شماره‌ای از رنگ‌ها، رنگ می‌کنیم که برابر با باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $x + ۲y$ بر ۵ باشد.

۱۳.۸۰. *پاسخ.*

$$\begin{cases} a = -۳ \\ b = -۲ \\ c = ۲ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = -۳ \\ b = ۲ \\ c = -۲ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۹ \\ b = ۴ \\ c = ۸ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۹ \\ b = ۸ \\ c = ۴ \end{cases}$$

۱۵.۸۰. *راهنمائی.* این مثلث‌ها را می‌توان به n گروه تقسیم کرد، به نحوی که در هر گروه دو مثلث با مساحت‌های برابر وجود داشته باشد.

۱۷.۸۰. توجه کنید که

$$۵۳ + ۹۶ = ۸۳ + ۶۶ = ۱۰۹ + ۴۰ = ۱۴۹$$

این نام‌گذاری‌ها را می‌پذیریم:

$$a = ۵۳,\ b = ۸۳,\ c = ۱۰۹,\ x = ۱۴۹$$

در این صورت، عدد ما به این صورت درمی‌آید:

$$abc + (x-a)(x-b)(x-c) =$$
$$= x[x^{۲} - (a+b+c)x + (ab+ac+bc)]$$

یعنی بر $x = ۱۴۹$ بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت هم برابر واحد نیست.

۲۰.۸۰. *راهنمائی.* از این نابرابری، که برای هر عدد مثبت x درست است، استفاده کنید:

$$\sqrt{۱۹۴x} < ۱ + ۲x$$

۲۲.۸۰. روشن است که هر نفر، دست‌کم، در یکی از دو دور بازی متوالی شرکت دارد. چون اولی در ۱۰ بازی شرکت کرده، روی‌هم بیش از ۲۱ بازی نمی‌تواند وجود داشته باشد و، بنابراین، تعداد دورهای بازی، درست ۲۱ بار بوده‌است. از این‌جا نتیجه می‌شود که سومی در ۱۱ دور بازی شرکت داشته‌است (دومی در تمام مدت، پشت میز بازی بوده‌است).

۲۵.۸۰. می‌توان $\frac{m}{n} = ۰/۵۰۱\ldots$ در نظر گرفت. اکنون تفاضل $\frac{۱}{۲} - \frac{m}{n}$ را در نظر می‌گیریم. از یک طرف

$$\frac{m}{n} - \frac{۱}{۲} < ۰/۵۰۲ - ۰/۵ = ۰/۰۰۲ = \frac{۱}{۵۰۰}$$

از طرف دیگر

$$\frac{m}{n} - \frac{۱}{۲} = \frac{۲m-n}{۲n} \geq \frac{۱}{۲n}$$

زیرا $۲m - n$ عددی طبیعی است. به‌این ترتیب باید داشته‌باشیم $n > ۲۵۰$ و به‌ازای $n = ۲۵۱$، کسر مورد نظر وجود دارد.

$$\frac{۱۲۶}{۲۵۱} = ۰/۵۰۱۹۹۲\ldots$$

۲۶.۸۰. با یکبار وزن کردن، می‌توان تعداد سکه‌های تقلبی را در هر تعداد از سکه‌ها مشخص کرد. ۹ سکه را در خانه‌های یک جدول ۳ × ۳ قرار می‌دهیم. با چهار بار وزن کردن، می‌توان تعداد سکه‌های تقلبی را در هریک از دو سطر اول و در هر یک از دو ستون اول جدول پیدا کرد. اگر ضمن یکی از این عمل‌ها، معلوم شود، در یکی از سطرها یا در یکی از ستون‌ها، دو سکهٔ تقلبی وجود دارد، آن‌وقت باتوجه به وزن کردن‌های دیگر، جای سکه‌های تقلبی روشن می‌شود و نیاز به عمل وزن کردن برای بار پنجم نیست. در حالتی هم که سکه‌های تقلبی در یک سطر یا یک ستون نباشند، در محل برخورد سطر و ستون مربوط قرار دارند و، بنابراین، در بین چهار سکه‌اند، که با وزن کردن یکی از آن‌ها، جای سکه‌های تقلبی روشن می‌شود.

۲۷.۸۰. اگر AK را نیمساز زاویهٔ A فرض کنیم، باتوجه به شرط مساله، داریم:

$$\widehat{CAK} = \widehat{KAB} = \widehat{ABK}$$

یعنی $|AK| = |BK|$ و مثلث‌های ACK و ABC متشابه‌اند. از این‌جا نتیجه می‌شود.

$$|AC| : |BC| = |BK| : |AB|$$

که اگر ویژگی نیمساز را در نظر بگیریم:

$$|AC| : (|BC| - |BK|) = |AB| : |BK|$$

و از این دو برابری، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۲۹.۸۰. *پاسخ.* ۹۸ و ۳۲.

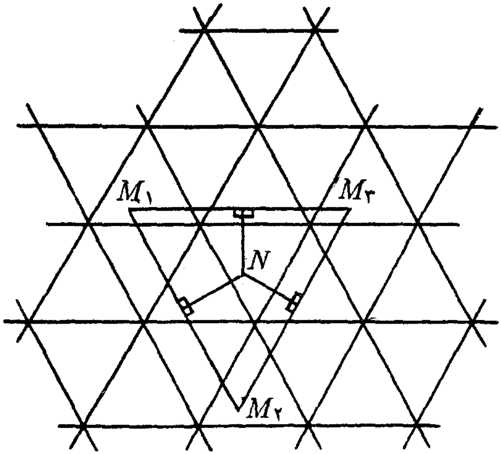
۳۰.۸۰. *راهنمائی.* در نابرابری شرط مساله، عددهای ۰، $\frac{۱}{۲}$ و ۱ را قرار دهید.

۳۱.۸۰. حل مسالهٔ ۱۰.۶۳ را ببینید.

۳۵.۸۰. پاسخ. با ۱۴۸۶ عدد مختلف.

۳۹.۸۰. گستردهٔ نامتناهی چهاروجهی منتظم با یال به طول واحد را بر صفحه در نظر می‌گیریم (شکل ۵۳) و اثر هر راس آن را، همه‌جا با یک حرف مشخص می‌کنیم. M و N را، دو نقطه از سطح چهاروجهی می‌گیریم و به همهٔ نقطه‌های متناظر آن‌ها، روی گستردهٔ چهاروجهی توجه می‌کنیم. نقطه‌های $M_۱$، $M_۲$، ...، متناظر با نقطهٔ M، روی گره‌های شبکهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲، قرار دارند. اثری از راس‌های N را درنظر می‌گیریم که در درون یکی از این مثلث‌های $M_۱M_۲M_۳$ واقع است: نقطهٔ $N_۱$. این می‌ماند که ثابت کنیم، یکی از فاصله‌های از $N_۱$ تا راس‌های مثلث $M_۱M_۲M_۳$، از $۲\sqrt{۳}$ بیشتر نیست. و این، از آن‌جا ناشی می‌شود که مثلث، به سه چهارضلعی $OP_۱P_۲M_۳$، $OP_۱P_۳M_۲$ و $OP_۲P_۳M_۱$ تقسیم می‌شود که، در آن‌ها، O مرکز مثلث $M_۱M_۲M_۳$ و $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، پای عمودهایی است که از O بر ضلع‌ها فرود آمده‌اند، زیرا نقطهٔ $N_۱$ بر یکی از آن‌ها قرار دارد.

۴۰.۸۰. موقعیت مورد نظر سوسک‌ها، در حالتی است که آن‌ها محیط چندضلعی را نصف کرده باشند. فرض می‌کنیم، در این حالت، کمترین فاصلهٔ بین سوسک‌ها، در جریان حرکت، در نقطه‌های A و B پیش آید که، در آن، البته، A و B محیط چندضلعی را نصف می‌کنند. همچنین فرض می‌کنیم، با موقعیت نخستینِ دیگری از سوسک‌ها، کمترین فاصلهٔ بین آن‌ها در جریان حرکت، برابر $d > |AB|$ باشد. در این صورت روشن است که، درضمن، دو لحظهٔ زمانی وجود دارد که سوسک‌ها، در راس‌های پاره‌خط‌های راست موازی AB واقع می‌شوند (که آن‌ها را $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ می‌نامیم)، این‌ها در دو طرف مختلف AB هستند و طول آن‌ها بیشتر از طول پاره‌خط راست AB است (زیرا طول آن‌ها، از d کمتر نیست) شکل ۵۴ را ببینید. ولی طول



شکل ۵۳

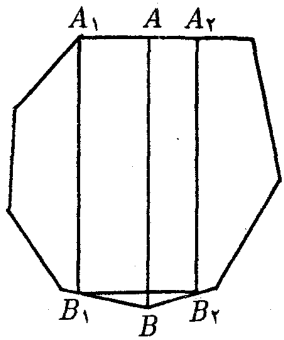
خط میانهٔ ذوزنقه $A_1B_1B_2A_2$ از طول AB بزرگتر نیست و، درضمن، از هر قاعدهٔ ذوزنقه کمتر نیست. تناقض حاصل، درستی فرض نخستین ما را تایید می‌کند.

۸۰.۴۱. *پاسخ.* $3k$.

۸۰.۴۲. *راهنمائی.* عبارت سمت چپ نابرابری را، به عنوان تابعی از یکی از متغیرهای x، y و z در نظر بگیرید. به این نکته توجه کنید که، وقتی سه‌جمله‌ای، با ضریب درجه دوم مثبت باشد، به حداکثر مقدار خود در یکی از دو انتهای بازهٔ [۰, ۱] می‌رسد.

۸۰.۴۳. *پاسخ.* نقطه را باید در گرانیگاه مثلث (نقطهٔ برخورد سه میانه) گرفت.

۸۰.۴۴. $3k - 2$ اتاق درنظر می‌گیریم و همهٔ مردم را، با رعایت شرط مساله به آن‌ها هدایت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم، در هر لحظه، فردی را که



شکل ۵۴

نوبت اوست، می‌توان به یکی از گروه‌ها اضافه کرد، به‌نحوی که شرط مساله، همچنان برقرار باشد. در واقع چون تعداد کسانی که به یک موسیقی‌دان یا به یک نقاش و یا به یک نویسنده علاقه‌مندند، از $۳k - ۳ = ۳(k - ۱)$ بیشتر نیست، بنابراین بین $۳k - ۲$ اتاق مفروض، می‌توان اتاقی پیدا کرد که در آن هیچ کدام از این افردا نباشند؛ و شخصی را که نوبت اوست، به همین اتاق روانه می‌کنیم.

۴۶.۸۰. تعداد راس‌های چندضلعی را n می‌گیریم و، به کمک استقرای ریاضی، حکمی را که اندکی قوی‌تر است، ثابت می‌کنیم: این بُرش را می‌توان انجام داد، به‌شرطی که بدانیم از هر سه رنگ استفاده شده‌است و n، عددی طبیعی است. برای $n = ۳$، وضع روشن است. راس A را در نظر می‌گیریم که راس‌های مجاور آن B و C، رنگ‌های متفاوتی دارند (چنین راسی، مسلماً وجود دارد). با جدا کردن مثلث ABC، یک $(n - ۱)$ ضلعی می‌ماند که یا در راس‌های آن، از سه رنگ استفاده شده (که در این‌صورت، باید از فرض استقرا استفاده کرد) و یا از دو رنگ. در این حالت، باید به این ترتیب عمل کرد: مثلث ABC را به‌جای خود برمی‌گردانیم و nضلعی را به مثلث‌هایی می‌بریم که یکی از راس‌های هر کدام از آن‌ها، همان نقطهٔ A و دو راس دیگر

آن، دو راس دیگر (و مجاور) nضلعی باشد.

۴۷.۸۰. مکعب را به ۲۷ مکعب کوچکتر ۲ × ۲ × ۲ تقسیم و آن‌ها را، به ردیف شطرنجی، به رنگ‌های سیاه و سفید درمی‌آوریم، به‌نحوی که مکعب‌های گوشه‌ای سیاه باشند. در این صورت، در هر مکعب مستطیل، درست دو مکعب ۱ × ۱ × ۱ سیاه و دو مکعب دیگر سفید خواهد بود. چون مکعب‌های سیاه ۱ × ۱ × ۱ هشت عدد بیشتر از مکعب‌های سفیدند، پس به هر نحوی که مکعب مستطیل‌ها را قرار دهیم، دست‌کم هشت مکعب کوچک را نمی‌پوشانند. به‌این ترتیب، حداکثر تعداد مکعب مستطیل‌ها، برابر است با ۵۲.

۲.۸۱. نه، نمی‌توان؛ زیرا نمی‌توان همهٔ عددها را در ردیف‌های زوج یا ردیف‌های فرد قرار داد.

۴.۸۱. *پاسخ*. ۷۲ خانه.

۵.۸۱. بله، وجود دارد؛ مثل عدد $n = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱$.

۸.۸۱. قرینه‌های نقطهٔ C را نسبت به ضلع‌های زاویه، C' و C'' می‌نامیم. محیط مثلث ABC برابر است با طول خط شکستهٔ $C'ABC''$ که، به روشنی، از طول پاره‌خط راست $C'C''$ کمتر نیست؛ پاره‌خط راست $C'C''$ هم، طولی دو برابر طول پاره‌خط راست OC دارد.

۱۱.۸۱. اگر همهٔ رقم‌های این عدد با هم فرق داشته‌باشند، آن‌وقت مجموع این رقم‌ها برابر ۴۵ می‌شود، یعنی عدد $n^۲ + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است. ولی به‌ازای هیچ عدد طبیعی n، عدد $n^۲ + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۲.۸۱. راس‌های مکعب را، به این ترتیب به رنگ‌های سیاه و سفید درمی‌آوریم که، دو انتهای هر یال، رنگ‌های مختلفی داشته‌باشند. اختلاف مجموع عددهای راس‌های سیاه با مجموع عددهای راس‌های سفید را در نظر می‌گیریم. روشن است که، با انجام عمل مورد نظر مساله، این اختلاف تغییر نمی‌کند. چون اختلاف نخستین، برابر ۱ یا ۱− است، بنابراین نمی‌توان به

حالتی رسید که همهٔ عددها بر ۳ بخش‌پذیر باشند (زیرا، در غیر این صورت، باید ۱ یا ۱− هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد).

۱۳.۸۱. پاسخ. نه، چنین عددی وجود ندارد.

۱۶.۸۱. به‌سادگی روشن می‌شود که عدد $m + ۱ - x$ هم، در گروه عددهای x است. اگر $x = \frac{۱}{۲}(m+۱)$، آن‌وقت نتیجه می‌شود که $m = ۳$. بنابراین، همهٔ عددهایی را که انتخاب می‌کنیم، به زوج‌هایی می‌توان تقسیم کرد که، مجموع دو عدد هر زوج، برابر است با $m + ۱$.

۱۹.۸۱. مجموع ۱۹۸۱ عدد درست متوالی به‌شرطی که از n آغاز شده‌باشد، برابر است با

$$۱۹۸۱n + ۹۹۰ \times ۱۹۸۱ = ۱۹۸۱(n + ۹۹۰)$$

تنها این می‌ماند که $n = ۱۹۸۱^{۲} - ۹۹۰$ بگیریم.

۲۰.۸۱. چون ضلع‌های این مستطیل‌ها، طولی بیشتر از واحد ندارند، عددی که از نسبت ضلع کوچکتر به ضلع بزرگتر به‌دست می‌آید، از عدد مساحت آن مستطیل کمتر نیست؛ درضمن، مجموع مساحت‌های مستطیل‌ها برابر واحد است.

۲۳.۸۱. به‌ترتیب داریم:

$$|AB| - |AC| = \frac{|AB|^{۲} - |AC|^{۲}}{|AB| + |AC|} \geq \frac{۱}{|AB| + |AC|} >$$
$$> \frac{۱}{|AB| + |AC| + |BC|} = \frac{۱}{p}$$

۲۴.۸۱. قطری از صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ را در نظر می‌گیریم که از گوشهٔ چپ بالا و گوشهٔ راست پایین گذشته است و همهٔ خانه‌های سیاه زیر این قطر را، به‌ترتیب زیر، به رنگ‌های قرمز و آبی در می‌آوریم: اگر

مجموع شماره‌های سطر و ستون خانه (شماره‌ها را از پایین و از چپ در نظر بگیرید)، بر ۴ بخش‌پذیر باشد، خانه را قرمز رنگ، و اگر این مجموع بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، خانه را آبی رنگ می‌کنیم. بعد، به‌صورت قرینه نسبت به قطری که در نظر گرفته بودیم، همهٔ خانه‌های سیاه بالای قطر را هم، به رنگ قرمز و آبی درمی‌آوریم. مهره، در هر حرکت خود، به‌جز حرکت‌هایی که قطر را قطع می‌کند، از خانهٔ قرمز به خانهٔ آبی و برعکس می‌رود. از آن‌جا که تعداد خانه‌های آبی، هشت واحد از تعداد خانه‌های قرمز بیشتر است و عبور از خانه آبی به خانهٔ آبی، تنها چهار تا است، پس مهره را باید، دست‌کم سه بار، به خانه‌ای حرکت داد که پیش از آن بوده‌است.

پاسخ. کمترین تعداد حرکت، برابر است با ۳ + ۳۱، یعنی ۳۴.

۲۷.۸۱. *راهنمائی*. از همان رنگ‌آمیزی که در بند اول حل مسالهٔ ۲۴ استفاده کردیم، برای تمامی جدول استفاده کنید. *پاسخ*. برای جدول ۹ × ۹ باید ۴۸ حرکت انجام شود.

۲۸.۸۱. دنبالهٔ $b_n = a_n - n$ غیر نزولی است، زیرا

$$a_{n+۱} \geq a_n + ۱$$

شرط مساله را می‌توان به‌صورت برابری $b_n = b_{۲n+b_n}$ نوشت. ولی از این‌جا نتیجه می‌شود که، مثلاً با عدد $b_۱$، باید بی‌نهایت مرتبه در دنبالهٔ $\{b_n\}$ برخورد داشته‌باشیم، یعنی این دنباله، ثابت است. بنابراین، عدد c وجود دارد، به‌نحوی که، برای هر n، داشته‌باشیم: $a_n - n = c$.

۲۹.۸۱. به‌ترتیب داریم:

$$۲(a+b)(c+d)(ac+bd-A) =$$
$$= (a+b)(c+d)(۲ac+۲bd-۲A) =$$
$$= (a+b)(c+d)[۲ac+۲bd-(b^۲-a^۲)-(d^۲-c^۲)] =$$

$$= (a+b)(c+d)[(a+c)^۲ - (b-d)^۲] =$$
$$= (a+b)(c+d)(a+b+c-d)(a-b+c+d) =$$
$$= (a+b)(c+d)\left(a+b-\frac{A}{c+d}\right)\left(c+d-\frac{A}{a+b}\right) =$$
$$= [(a+b)(c+d)-A]^۲$$

۸۱.۳۱. یکی از ۱۶ ضلعی‌ها را روی دیگری می‌گذاریم و ۱۶ دوران چندضلعی بالا را به زاویه‌های برابر مضرب‌های $\frac{۳۶۰}{۱۶}$ در نظر می‌گیریم. اگر در هر کدام از این وضع‌ها، بیش از سه نقطهٔ نشان دارِ دو چندضلعی، روی هم واقع نشود، به این معناست که همهٔ نقطه‌های نشان‌دار منطبق بر هم، در جریان این ۱۶ حالت، از ۴۸ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر روشن است که، در هر لحظه، می‌توان هر راس نشان‌دار چندضلعی بالا را روی هر راس نشان‌دار چندضلعی پایین (که از قبل معین شده‌است) قرار داد، یعنی همهٔ انطباق‌ها، روی‌هم، باید برابر ۴۹ باشد.

۸۱.۳۵. راه‌حل، کاملاً شبیه راه‌حل مسالهٔ ۲۴ است.

پاسخ. ۵۳ حرکت.

۸۱.۳۶. در آغاز، عدد طبیعی k را طوری پیدا می‌کنیم که $۵^k - ۱$ بر $۲^{۱۰۰}$ بخش‌پذیر باشد. درضمن فرض می‌کنیم، تعداد رقم‌های ۵^k، در عددنویسی به مبنای ۱۰، بیشتر از ۱۰۰ باشد. اگر این‌طور نباشد، می‌توان نمای ۵ را $۲k$، $۳k$ و غیره گرفت.

اکنون، عدد $A = ۵^{k+۱۰۰}$ را در نظر می‌گیریم. تفاضل

$$A - ۵^{۱۰۰} = ۵^{۱۰۰}(۵^k - ۱)$$

بر $۲^{۱۰۰} \times ۵^{۱۰۰}$، یعنی بر $۱۰^{۱۰۰}$ بخش‌پذیر است؛ و این به معنای آن است که ۱۰۰ رقم سمت راست، در دو عدد A و $۵^{۱۰۰}$، بر هم منطبق‌اند.

اکنون توجه می‌کنیم که $5^{100} < 10^{70}$، زیرا

$$2^{100} = 1024^{10} > 10^{30} = 2^{30} \times 5^{30}$$

یعنی $2^{70} > 5^{30}$.

از این‌جا روشن می‌شود که تعداد رقم‌های غیر صفر، در صد رقم سمت راست عدد A، از ۷۰ تجاوز نمی‌کنند.

۳۷.۸۱. *پاسخ.* $p = 1$ یا $p = 2$. *راهنمائی.* باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد بر ۵ را در نظر بگیرید.

۴۰.۸۱. فرض می‌کنیم، عددهای گویای a، b، c و d وجود داشته باشند. در این صورت، باید برابری زیر برقرار باشد:

$$(a - b\sqrt{3})^4 + (c - d\sqrt{3})^4 = 1 - \sqrt{3} \qquad (*)$$

در واقع، اگر پرانتزهای سمت چپ را در برابری فرض، باز کنیم، نتیجهٔ آن به‌صورت $x + y\sqrt{3}$ درمی‌آید که، در آن، x و y عددهایی گویا هستند؛ درضمن، مقدار سمت چپ برابری $(*)$ هم، به‌صورت $x - y\sqrt{3}$ درخواهد آمد. روشن است، اگر در حالت اول $x = 1$ و $y = 1$ باشد، در حالت دوم، $x = 1$ و $y = -1$ می‌شود. ولی برابری $(*)$ ممکن نیست، زیرا $\sqrt{3} - 1$، عددی منفی است.

۴۲.۸۱. *پاسخ.* نه چنین شش عددی وجود ندارد.

۴۳.۸۱. *راهنمائی.* هر ردیف عددهایی را که پشت سرهم و با یک علامت‌اند، یک رشته می‌نامیم. تعداد این رشته‌ها را در ردیف عددهای انتخابی خود، در نظر می‌گیریم. روشن است که با هر حرکت، از این تعداد، حداکثر ۲ واحد کم می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود که، تعداد حرکت‌ها، از $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ کمتر نیست. همین تعداد هم، پاسخ مساله است.

۴۴.۸۱. بله، می‌توان. چهار کره با شعاع‌های مختلف، در فضا در نظر می‌گیریم، به نحوی که، دوبه‌دو بر هم مماس باشند؛ سپس، کرهٔ پنجم را، در فضای بین این چهار کره و مماس بر همهٔ آن‌ها، رسم می‌کنیم. مرکزهای این پنج کره، همان پنج نقطهٔ مورد نظر مساله است.

۴۵.۸۱. $a = \cos^۲ x$، $b = \cos^۲ y$ و $c = \cos^۲ z$ می‌گیریم؛ در این صورت، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\cos x \sin y \sin z + \cos y \sin x \sin z + \cos z \sin x \sin y -$$
$$- \cos x \cos y \cos z \leq ۱$$

که درستی آن روشن است، زیرا به‌سادگی به این صورت درمی‌آید:

$$\cos(x+y+z) \leq ۱$$

۴۶.۸۱. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_۷) = .$$
$$= [۱ - (\sum_۱^۷ a_i x_i^۲)^۲][۱ - \sum_۱^۷ b_i x_i^۲)^۲][۱ - \sum_۱^۷ c_i x_i^۲)^۲]$$

چندجمله‌ای، نسبت به هفت متغیر x_i از درجهٔ ۱۲ است و x_iها می‌توانند مقدارهای ۰، ۱ و ۲ (یعنی باقی‌مانده‌های حاصل تقسیم بر ۳) را اختیار کنند. مقدار چندجمله‌ای را هم، نسبت به مُدول ۳ قبول می‌کنیم (یعنی باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم مقدار به‌دست آمده تابع، بر ۳). در این صورت، اگر مقدارهای f را در همهٔ $۳^۷$ انتخاب متغیرها، با هم جمع کنیم، عدد ۰ به‌دست می‌آید؛ این نتیجه از این‌جا به‌دست می‌آید که، در همهٔ جمله‌های f، متغیری وجود دارد که توان آن بیشتر از واحد نیست. از طرف دیگر

$$f(۰, ۰, \ldots, ۰) = ۱$$

یعنی انتخاب دیگری از $\{x_i\}$ وجود دارد که برای آن

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_۷) \neq ۰$$

یعنی

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_۷) = ۱$$

زیرا چندجمله‌ای f، نسبت به مُدول ۳، تنها مقدارهای ۰ و ۱ را قبول می‌کند. و این، به معنای آن است که

$$\sum_{۱}^{۷} a_i x^۲ = \sum_{۱}^{۷} b_i x^۲ = \sum_{۱}^{۷} c_i x^۲ = ۰$$

تنها این می‌ماند که سه‌تایی (a_i, b_i, c_i) را حذف کنیم که، برای آن، $x_i = ۰$؛ در این‌جا باید به حساب آورد که به‌ازای $x \not\equiv ۰ (\mathrm{mod} ۳)$

$$x^۲ \equiv ۱ (\mathrm{mod} ۳)$$

۸۲.۱. پاسخ. ۶۴.

۸۲.۲. نه، ممکن نیست. در طول ۲۵ پرش، حشره راهی را می‌پیماید که بر حسب سانتی‌متر، عددی فرد است.

۸۲.۴. چون $۷۷۰ = ۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$، برای این‌که عدد $x(۷۷۰ - x)$ بر ۷۷۰ بخش‌پذیر باشد، باید x بر برخی از این عامل‌ها و $۷۷۰ - x$ بر برخی دیگر بخش‌پذیر باشد. ولی روشن است که، اگر x بر یکی از بخشیاب‌های ۷۷۰ بخش‌پذیر باشد، $۷۷۰ - x$ هم بر آن بخش‌پذیر خواهد بود. بنابراین x باید بر همهٔ بخشیاب‌های ۷۷۰ بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست.

۸۲.۶. آغاز کنندهٔ بازی، در حرکت اول خود، مجموعهٔ ۱۰۰ مهره‌ای را، به دو مجموعه شامل ۶۳ و ۳۷ مهره تقسیم می‌کند. از آن به بعد هم، هر وقت نوبت به او می‌رسد، باید تعداد بزرگتر را به‌صورت $۲^n - ۱$ درآورد.

۷.۸۲. *پاسخ.* مساله سه جواب دارد: (۳۵, ۷۵)، (۶۵, ۲۵)، (۵۵, ۱۵).

۱۰.۸۲. *راهنمائی.* دو نقطهٔ دو سر قطر دایره را در نظر بگیرید و از این قضیه استفاده کنید که، میانهٔ هر مثلث از نصف مجموع دو ضلع دو طرف میانه، کوچکتر است.

۱۱.۸۲. *پاسخ.* نه، ممکن نیست.

۱۲.۸۲. پسرها را شماره‌گذاری می‌کنیم و مجموعهٔ دخترانی را که با پسر M_n درس خوانده‌اند با A_n نشان می‌دهیم. اگر حکم مسالهٔ نادرست باشد، آن‌وقت باید برای هر m و n یا $A_m \subset A_n$ یا $A_n \subset A_m$. بنابراین، به این زنجیره می‌رسیم:

$$A_{i_۱} \subset A_{i_۲} \subset A_{i_۳} \subset \ldots \subset A_{i_k}$$

که در آن، A_{i_k}، بزرگترینِ A_iهاست. ولی چون A_{i_k} بر مجموعهٔ همهٔ دختران D منطبق نیست، بنابراین دختری پیدا می‌شود که با هیچ پسری تمرین ریاضی نکرده است (هریک از دختران مجموعهٔ $D|A_{i_k}$).

۱۳.۸۲. اگر پرانتز را به توان برسانیم، به نابرابری

$$۱ + a^۲b^۲ < a^۲ + b^۲$$

و یا هم‌ارز آن $(۱ - a^۲)(۱ - b^۲) < ۰$ می‌رسیم.

۱۴.۸۲. کافی است ثابت کنیم، مجموع سه زاویهٔ راس‌های A، B و C، از زاویهٔ راس D بزرگتر است. در واقع، مجموع سه زاویهٔ A، B و C، از مجموع زاویه‌های مثلث ABC، یعنی از ۱۸۰ درجه کمتر نیست، در حالی که زاویهٔ D از ۱۸۰ درجه کمتر است.

۱۶.۸۲. تعداد دانش‌آموزان کلاس هفتم را x می‌گیریم. در این صورت،

تعداد امتیازهای کلاس هفتم ($N_۷$) از

$$x \cdot ۲x + \frac{x(x-۱)}{۲}$$

تجاوز نمی‌کند. به‌همین ترتیب، اگر $N_۶$ تعداد امتیازهای کلاس ششم باشد.

$$N_۶ \geq \frac{۲x(۲x-۱)}{۲} = x(۲x-۱)$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۲x^۲ + \frac{x^۲ - x}{۲} \geq \frac{۷}{۵}x(۲x-۱) \Rightarrow x \leq ۳$$

با آزمایش (یا به طریقی دیگر) به‌دست می‌آید: $x = ۳$، $N_۷ = ۲۱$ و $N_۶ = ۱۵$ و تعداد همهٔ دانش‌آموزان برابر ۹ می‌شود.

۱۷.۸۲. نمونه‌ای از این جدول:

$$\begin{vmatrix} ۱۲ & ۹ & ۲ \\ ۱ & ۶ & ۳۶ \\ ۱۸ & ۴ & ۳ \end{vmatrix}$$

۱۹.۸۲. دو حالت ممکن است: یا سه‌جمله‌ای‌های $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، هر سه، ریشهٔ مشترکی دارند (که در این صورت، اثبات روشن است)، یا عددهای $a < b < c$ وجود دارند، به‌نحوی که هریک از آن‌ها، ریشه‌ای از دو سه‌جمله‌ای است. فرض کنیم b، ریشهٔ $p_۱$ و $p_۲$ باشد. در این صورت مقدار $p_۳$، در نقطهٔ b منفی و، بنابراین، مجموع هر سه عبارت در نقطهٔ b، منفی می‌شود. از همین جا، وجود ریشه نتیجه می‌شود.

۲۰.۸۲. *راهنمائی.* نیمساز CK از زاویهٔ K را رسم کنید. مثلث‌های CKB و ABC متشابه‌اند و مثلث ACK متساوی‌الساقین است. از این‌جا، می‌توان نسبت $|BC| : |AB|$ را پیدا کرد.

۲۱.۸۲. بله، برخورد می‌کنیم. در واقع، دیر یا زود، باید چهار عدد ردیف هم تکرار شود. اگر در دنباله به عقب برویم، می‌بینیم نخستین چهار عدد ردیفی که تکرار می‌شود، عددهای (۱, ۹, ۸, ۲) است. اکنون اگر چهار جملهٔ قبل از این‌ها را پیدا کنیم، همان چهار جملهٔ مورد نظرند.

۲۳.۸۲. در هر ستون، از پنج خانه، دست‌کم سه خانه از یک رنگ است. به این سه خانه و سه سطر متناظر آن‌ها توجه می‌کنیم. چون ۴۱ ستون داریم، و امکان سه‌تایی‌های سطرها (با به حساب آوردن رنگ‌ها) برابر است با ۲۰، پس یکی از سه‌تایی‌ها، سه بار تکرار شده‌است؛ همان چیزی که می‌خواستیم.

۲۴.۸۲. دایره‌ای را رسم می‌کنیم که، همهٔ نقطه‌های برخورد خط‌های راست را، در درون خود داشته باشد. این خط‌های راست، $۴n$ کمان روی محیط دایره جدا می‌کنند؛ در ضمن، از دو کمان مجاور، هر دو کمان با هم متعلق به دو زاویه نیستند (دلیل آن را بگویید). بنابراین، تعداد زاویه‌ها نمی‌تواند از $۲n$ بیشتر باشد و تنها وقتی برابر $۲n$ است که، از هر دو کمان مجاور، یکی متعلق به زاویه باشد. ولی در این حالت، چون تعداد خط‌های راست، عددی زوج است، دو کمان روبه‌رو، هر دو متعلق به زاویه‌ای می‌شوند، که ممکن نیست.

۲۹.۸۲. $\sqrt{۱۹۸۲}+۱$ را به توان k می‌رسانیم، نتیجه، به‌صورت $a+b\sqrt{۱۹۸۲}$ درمی‌آید که، در آن، a و b عددهایی درست‌اند؛ درضمن، اگر $\sqrt{۱۹۸۲}-۱$ را بتوان k برسانیم، نتیجه به‌صورت $a-b\sqrt{۱۹۸۲}$ درمی‌آید. از ضرب این دو توان در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$(-۱۹۸۱)^k = a^۲ - ۱۹۸۲b^۲$$

یعنی $a^۲$ و $۱۹۸۱b^۲$، به‌اندازهٔ ۱۹۸۱^k با هم اختلاف دارند و کافی است، عدد کوچکتر را به‌جای n انتخاب کنیم.

۳۰.۸۲. A، B و X را سه مهره می‌گیریم. اگر قرینهٔ X را نسبت به A و، سپس، نسبت به B پیدا کنیم، مثل این است که X را به‌اندازهٔ بُردار $\overrightarrow{AB}$ منتقل کرده‌ایم. اکنون سه مهرهٔ A، B و C را، که بر یک امتداد نیستند، انتخاب می‌کنیم. روشن است، با استفاده از انتقال به اندازهٔ بُردارهای $\overrightarrow{AB}$ ۲، $\overrightarrow{AC}$ ۲، $\overrightarrow{BC}$ ۲، می‌توان هر مهره‌ای را به درون دایرهٔ بزرگ ثابتی به شعاع R، بُرد. $(n-۲)$ ضلعی کوژی را درنظر می‌گیریم که، یکی از راس‌های آن، در نقطهٔ A و زاویهٔ راس A، در درون زاویهٔ BAC باشد. اکنون دایره‌های کوچکی را در نظر می‌گیریم که، مرکزهای آن‌ها، روی راس‌های این چندضلعی و به نحوی باشد که، با جابه‌جا کردن هر راس $(n-۲)$ ضلعی به نقطه‌ای در درون دایرهٔ متناظر خود، کوژ بودن چندضلعی به هم نخورد. تجانس به مرکز A را طوری در نظر می‌گیریم که، مُبدل همهٔ دایره‌های کوچک، شعاعی بزرگتر از R داشته باشند، و $(n-۲)$ ضلعی تبدیل شده، یک nضلعی کوژ، با اضافه شدن راس‌های B و C تولید کند. اکنون می‌توان همهٔ مهره‌ها را، به‌جز دو مهرهٔ B و C، طوری منتقل کرد که، هر مهره، درون یکی از دایره‌ها قرار گیرد؛ در این صورت، مهره‌ها در راس‌های یک nضلعی کوژ خواهند بود.

۳۴.۸۲. *پاسخ.* زاویهٔ BAK، برابر ۹۰ درجه است.

۳۵.۸۲. *پاسخ.* راس‌ها را از ۰ تا $n-۱$ شماره‌گذاری می‌کنیم و در راس kام، عدد $\cos\left(\frac{۱}{n}k\pi+\alpha\right)$ را قرار می‌دهیم که در آن، k برابر یکی از عددهای از صفر تا $n-۱$ و α زاویه‌ای است که، به‌ازای آن، هیچ‌کدام از این عددها برابر صفر نشود.

راهنمائی. این عددها، عبارتند از تصویرهای بُردارهایی که از مرکز nضلعی به راس‌های آن می‌روند، بر محوری که از مرکز چندضلعی می‌گذرد.

۳۶.۸۲. فرض می‌کنیم، هر دو پاره‌خط راست AB و CD از یک

رنگ، متقاطع باشند. آن‌ها را با پاره‌خط‌های راست AC و BD از همان رنگ عوض می‌کنیم. در ضمن، تعداد نقطه‌های برخورد پاره‌خط‌های راست آبی با پاره‌خط‌های راست قرمز، تغییر نمی‌کند. این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که هیچ دو پاره‌خط راست هم‌رنگ، یکدیگر را قطع نکنند. اکنون کافی است توجه کنیم که، روی هر پاره‌خط راست قرمز، دست‌کم، یک نقطهٔ برخورد با پاره‌خط راست آبی وجود دارد.

۳۷.۸۲. *پاسخ.* بله، وجود دارد. مثلاً برای $k = ۱۲۰$.

۳۸.۸۲. هر برداری از این‌گونه، مثل بردار $\overrightarrow{A_iA_j}$ را می‌توان به‌صورت تفاضل $\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i}$ نشان داد که، در آن، O مرکز مربع است. از این جا نتیجه می‌شود که، طول مجموع بردارهایی که رسم کرده‌ایم و طول مجموع بردارهایی که از نقطهٔ O به نقطه‌های نشان‌دار رسم شده‌اند، با هم زوج و یا با هم فردند. اکنون، تنها این می‌ماند که قانع شویم، طول این مجموع، با عددی فرد بیان می‌شود.

۳۹.۸۲. *پاسخ.* ۲۵ پاره‌خط راست.

۴۰.۸۲. *پاسخ.* پیراشکی گوشتی ۱۳ کوپک و پیراشکی سیب‌زمینی ۹ یا ۱۱ کوپک.

۴۲.۸۲. راه‌حل را با استقرا روی $n + k$ می‌دهیم. به این ترتیب، باید ثابت کنیم $A_{n+۱}A_{n+۲}\ldots A_{n+k}$ بر $A_۱A_۲\ldots A_k$ بخش‌پذیر است. چون

$$A_{n+۱}A_{n+۲}\ldots A_{n+k} = A_{n+۱}A_{n+۲}\ldots A_{n+k-۱} \times$$
$$\times(A_{n+k} - A_n) + A_nA_{n+۱}\ldots A_{n+k-۱}$$

درضمن جملهٔ دوم، بنا بر فرض استقرا، بر $A_۱A_۲\ldots A_k$ بخش‌پذیر است، بنابراین کافی است، همین بخش‌پذیری را برای جملهٔ اول، ثابت کنیم. ولی

$A_{n+1}A_{n+2}\ldots A_{n+k-1}$ بر $A_1A_2\ldots A_{k-1}$، و تفاضل $A_{n+k}-A_n$ بر A_k بخش‌پذیرند و استدلال استقرایی به پایان می‌رسد.

۴۴.۸۲. فرض می‌کنیم تقسیم مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی، به چنین دو مجموعه‌ای، که آن‌ها را A و B می‌نامیم، ممکن باشد؛ در ضمن، عدد ۲ را عضو مجموعهٔ A به حساب می‌آوریم. n را کوچکترین عضو مجموعهٔ B و p را، کوچکترین عدد اولی می‌گیریم که عدد n را نمی‌شمارد. روشن است که $p < n$.

پیش‌قضیه. اگر $x < p$، آن‌وقت، برای هر عدد b از B، عدد xb هم به مجموعهٔ B تعلق دارد. در واقع، کافی است، حکم پیش‌قضیه را، برای عددهای اول x ثابت کنیم. اگر xb متعلق به A باشد، آن‌وقت عدد $\frac{n}{x}$ هم عضوی از A خواهد بود، ولی $xb \cdot \frac{n}{x} = nb$، که به‌روشنی شرط را نقض می‌کند. سپس، چون n بر p بخش‌پذیر نیست، عدد $k < p$ را طوری پیدا می‌کنیم که $kn + ۱$ بر p بخش‌پذیر باشد. ولی در این صورت، $\frac{kn+۱}{p}$ به مجموعهٔ A و $kn = ۱ - \frac{kn+۱}{p}$ هم به مجموعهٔ A تعلق می‌گیرد که پیش‌قضیه را نقض می‌کند.

۱.۸۳. *پاسخ.* بیش از ۲۳ نفر از شرکت کنندگان در مسابقه وارد در ردیف‌بندی نشده‌اند.

۳.۸۳. وه‌نیا و ژه‌نیا راستگو، به‌نیا و سه‌نیا دروغ‌گو هستند.

۵.۸۳. استفاده از ماشین زمان، شمارهٔ ماه را ۴ واحد جلو می‌برد (اگر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم بر ۱۲ را در نظر بگیریم). چون ۲۶ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، بنابراین، چنین سفری ممکن نیست.

۶.۸۳. *پاسخ.* رقم‌های ۷، ۴، ۳، ۰.

۷.۸۳. اگر a بر عدد اول فرد $p = ۲k + ۱$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت باید $a - ۱$ بر $p - ۱$ یعنی $۲k$ بخش‌پذیر شود؛ و این، به معنای آن است

که باید، برخلاف فرض، a عددی فرد باشد.

۸.۸۳. فرض کنید $a < b < c < d < e$، طول این بخش‌ها باشند. فرض می‌کنیم، با هیچ سه‌بخشی نتوان یک مثلث ساخت. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$c \geq a + b; d \geq b + c \geq a + ۲b; e \geq c + d \geq ۳a + ۳b$$

آن‌وقت طول میلهٔ اصلی باید بزرگتر یا برابر $۵a + ۷b$ باشد. ولی بنابه فرض

$$۵a + ۷b \geq ۱۲ \times ۱۷ = ۲۰۴$$

تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۱۲.۸۳. *پاسخ.* نه، نمی‌توان. *راهنمائی.* نقطه‌های آبی، به هر گونه‌ای باشند، می‌توان مثلث اصلی را به مثلث‌های کوچکتری، با راس‌های آبی، تقسیم کرد. تعداد این مثلث‌ها، بستگی به روش تقسیم ندارد و برابر است با $۲k + ۱$ که، در آن، k عبارت است از تعداد نقطه‌های آبی درون مثلث.

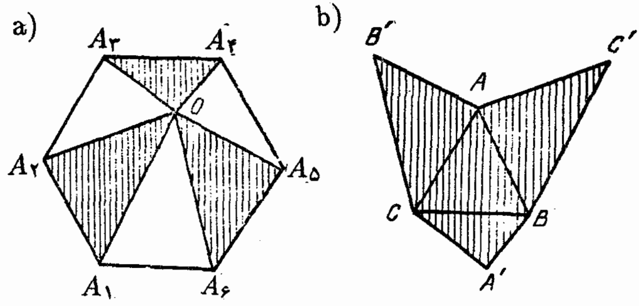
۱۷.۸۳. به‌ترتیب داریم:

$$۲^{۵۸} + ۱ = ۲^{۵۸} + ۱ + ۲^{۳۰} - ۲^{۳۰} = (۲^{۲۹} + ۱)^{۲} - ۲^{۳۰} =$$
$$= (۲^{۲۹} - ۲^{۱۵} + ۱)(۲^{۲۹} + ۲^{۱۵} + ۱) =$$
$$= ۵ \times \frac{۲^{۲۹} - ۲^{۱۵} + ۱}{۵}(۲^{۲۹} + ۲^{۱۵} + ۱)$$

۱۸.۸۳. این حرکت‌ها را، برای هر خانه از یک صلیب دلخواه شامل ستون و سطر انجام می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان قانع شد که، نتیجه، عبارت است از تغییر علامت خانه‌ای که در نقطهٔ برخورد این خط‌ها قرار دارد. به این ترتیب، می‌توانیم علامت‌های عدد هر خانه‌ای را که بخواهیم، عوض کنیم.

۱۹.۸۳. *راهنمائی.* فرض کنید:

$$a = \overline{a_۱ a_۲ \ldots a_n}$$



شکل ۵۵

اگر s_k، مجموع رقم‌های عدد $۵a_k$ باشد، کافی است ثابت کنیم، مجموع رقم‌های عدد $۵a$ برابر است با

$$s_۱ + s_۲ + \ldots + s_n$$

۲۰.۸۳. پاسخ. $۱۸\frac{۱}{۲}$ امتیاز.

۲۱.۸۳. مساحت شش‌ضلعی منتظم $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ را برابر S می‌گیریم (شکل ۵۵ـa)، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$S_{A_۱OA_۲} + S_{A_۳OA_۴} + S_{A_۵OA_۶} \geq \frac{۱}{۲}S$$

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را، با ضلعی برابر ضلع شش‌ضلعی منتظم در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، مثلث‌های $AC'B$، $BA'C$ و $AB'C$، به‌ترتیب، برابر باشند با مثلث‌های $A_۱OA_۲$، $A_۳OA_۴$ و $A_۵OA_۶$. در این صورت، مساحت شش‌ضلعی $AB'CA'BC'$ (شکل ۵۵ـb را ببینید) از

$$\frac{۱}{۲}S + S_{ABC} = \frac{۲}{۳}S$$

کمتر نیست.

۲۳.۸۳. دو ضلع روبه‌رو را در ۴۰۰ ضلعی در نظر می‌گیریم. روشن است که آن‌ها را می‌توان با زنجیره‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها به هم وصل کرد. اکنون، دو ضلع روبه‌روی دیگر را در نظر می‌گیریم که بر دو ضلع انتخابی قبلی عمود باشند و آن‌ها را هم، با زنجیره‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها به هم وصل می‌کنیم. این دو زنجیرهٔ متوازی‌الاضلاع‌ها، یکدیگر را قطع می‌کنند و، بنابراین، به ناچار در برخورد خود با یکدیگر مستطیلی به وجود می‌آورند که ضلع‌های آن، با همان چهار ضلع انتخاب شده در ۴۰۰ ضلعی موازی‌اند. از این گونه گروه‌های شامل چهار ضلع، ۱۰۰ بار می‌توان در چندضلعی انتخاب کرد، در ضمن، مستطیل‌های متناظر با آن‌ها، بر هم منطبق نیستند.

۲۴.۸۳. به‌جای این‌که، نقطه‌ها در برخورد با یکدیگر، جهت حرکت خود را عوض کنند، فرض را بر این می‌گیریم که، هر دو نقطه، ضمن برخورد، از درون یکدیگر عبور کنند و با همان سرعت و در همان جهت به حرکت خود ادامه دهند، تنها شمارهٔ آن‌ها عوض شود. در این صورت، بعد از زمان T، که هر نقطه برای یک دوران کامل نیاز دارد، هر نقطه به همان جای نخست خود می‌رسد و، تنها، شمارهٔ خود را عوض کرده است. بعد از فاصلهٔ زمانی T برای بار دوم، دوباره نقطه‌ها در جای نخستِ خود قرار می‌گیرند و، باز هم، شمارهٔ آن‌ها عوض شده‌است. روشن است که، بعد از زمان $n!T$ (n، تعداد نقطه‌هاست)، همهٔ نقطه‌ها، همان شماره‌های اولیهٔ خود را، پیدا خواهند کرد.

۲۵.۸۳. *پاسخ*. ۶۰ درجه.

۲۶.۸۳. *پاسخ*. تنها یک مربع «اول» وجود دارد که، مختصات راس‌های آن، چنین‌اند: (۲, ۲)، (۲, ۳)، (۳, ۲)، (۳, ۳).

۲۷.۸۳. *راهنمائی*. اگر کمترین تعداد شوکولات را در لحظهٔ زمانی n،

در بین کودکان، با m_n نشان دهیم، آن‌وقت

$$m_۱ \leq m_۲ \leq \ldots \leq M + ۱$$

که در آن، M برابر است با بیشترین تعداد شوکولاتی که، در آغاز بازی، نزد یکی از کودکان است.

۲۸.۸۳. *پاسخ*. نابرابری، تنها برای $n = ۲$، $n = ۳$، $n = ۴$ و $n = ۵$ برقرار است. *راهنمائی*. نابرابری را به این صورت بنویسید:

$$\left(x_۱ - \frac{۱}{۲}x_n\right)^۲ + \left(x_۲ - \frac{۱}{۲}x_n\right)^۲ + \ldots + \left(x_{n-۱} - \frac{۱}{۲}x_n\right)^۲ +$$
$$+(۵ - n)\frac{x_n^۲}{۴} \geq ۰$$

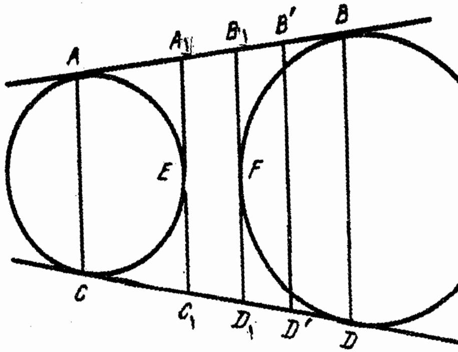
۲۹.۸۳. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ $K_۱$، از شعاع دایرهٔ $K_۲$ بزرگتر نباشد. نقطه‌های تماس دایره‌های $K_۱$ و $K_۲$ را با خط‌های راست $l_۱$ و $l_۲$، با A، B، C و D نشان می‌دهیم (شکل ۵۶). روشن است که دو خط راست AC و BD موازی‌اند. خط‌های راست $A_۱C_۱$ و $B_۱D_۱$ را موازی با خط راست AC و مماس بر دایره‌های $K_۱$ و $K_۲$، به‌ترتیب در نقطه‌های E و F رسم می‌کنیم. در این صورت

$$|AA_۱| = |A_۱E|, |CC_۱| = |C_۱E|,$$
$$|BB_۱| = |B_۱F|, |FD_۱| = |DD_۱|$$

روشن است که به‌شرط منطبق نبودن نقطه‌های E و F، باید داشته‌باشیم:

$$|AA_۱| = |CC_۱| < |BB_۱| = |DD_۱|$$

نقطه‌های B' و D' را طوری در نظر می‌گیریم که $A_۱$، وسط پاره‌خط راست AB' و $B_۱$، وسط پاره‌خط راست CD' باشد. روشن است که خط



شکل ۵۶

راست $B'D'$ با خط راست BD موازی است، ولی بر آن منطبق نیست. ذوزنقهٔ $AB'D'C$، یک چهار ضلعی محیطی است و، بنابراین، در ذوزنقه $ABCD$، نمی‌توان دایره‌ای محاط کرد. تناقض.

۳۱.۸۳. راهنمائی. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم بر ۱۰۱ را در نظر بگیرید.

۳۴.۸۳. بردارهای واحد $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را روی یال‌های کُنج سه وجهی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، نیمسازهای عمود بر هم، در طول بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ باشند. در این صورت

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$$

یعنی

$$\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}=-1 \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}+\vec{c})=\vec{0} \\ (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{c})=\vec{0} \end{cases}$$

از این‌جا معلوم می‌شود، سه نیمساز زاویه‌های مسطحهٔ کُنج، دوبه‌دو بر هم عمودند که به‌معنای درستی حکم مساله است.

۳۵.۸۳. *پاسخ.* ۹ درجه، ۸۵ درجه و ۳۰ دقیقه.

۳۷.۸۳. مجموعهٔ راس‌های ۲۰ ضلعی منتظم را، می‌توان به‌صورت اجتماع مجموعه‌های راس‌های چهار پنج‌ضلعی منتظم در نظر گرفت. روشن است، در یکی از آن‌ها، دست‌کم سه راس نشان‌دار وجود دارد. تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، هر سه راس دلخواه از یک پنج‌ضلعی منتظم، تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین می‌دهند.

۳۸.۸۳. *راهنمائی.* اگر گرانیگاه مثلث، یعنی نقطهٔ برخورد میانه‌های آن را، مرکز تقارن قرار دهیم، شش‌ضلعی حاصل از برخورد مثلث با قرینهٔ خود، مساحتی برابر $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث پیدا می‌کند.

۳۹.۸۳. *پاسخ.* بله، کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند با بازی درست، برنده شود.

۴۰.۸۳. *پاسخ.* ۱۰ درجه. روی نیم‌خط راست AM، پاره‌خط راست BN را با طولی برابر طول قاعدهٔ BC جدا کنید. CM نیمساز زاویهٔ C در مثلث متساوی‌الساقین BNC است، زیرا برابری

$$|BM| : |BN| = |CB| : |CN|$$

برقرار است. از آن‌جا که زاویهٔ BCN برابر ۲۰ درجه است، بنابراین زاویهٔ BCM برابر ۱۰ درجه می‌شود.

۴۱.۸۳. این وضع وقتی، و تنها وقتی پیش می‌آید که n، برابر توانی از عدد ۲ نباشد. *راهنمائی.* فرض می‌کنیم:

$$s_k = a_۱ + a_۲ + \dots a_{k-۱}$$

در این صورت، برابری موردنظر مساله را می‌توان این‌طور نوشت: برای هر k، داریم $s_k = s_{۲k}$ (در ضمن $s_۱ = ۰$). چون n متغیر مستقل s_k، و n معادله به‌صورت بالا، وجود دارد، پس برابر صفر بودن همهٔ a_kها، هم‌ارز

است با برابری همهٔ متغیرهای s_k، یعنی این‌که، برای هر دو اندیس k و m، توان‌های ۲^a و ۲^b پیدا می‌شود، به‌نحوی که

$$۲^a \cdot k \equiv ۲^b \cdot m (\bmod n)$$

یا این‌که، برای هر k، توانی از عدد ۲، مثل ۲^c وجود دارد، به‌نحوی که $۲^c k$ بر n بخش‌پذیر است.

۴۲.۸۳. لایهٔ دوم را به این ترتیب قرار می‌دهیم: تمامی صفحه را به مربع‌های ۲×۲ تقسیم می‌کنیم؛ این مربع‌ها، یا دو تکه مقوای افقی و یا دو تکه مقوای قائم را می‌پوشانند. سپس لایهٔ سوم را به این ترتیب در نظر می‌گیریم: خانه‌های مجاوری را، که هنوز با یک مقوای ۲×۱ پوشیده نشده‌اند، با پاره‌خط‌های راست به هم وصل می‌کنیم. روشن است که، از هر خانه، دو پاره‌خط راست می‌گذرد. خط‌های شکسته‌ای را، که این پاره‌خط‌های راست تشکیل می‌دهند، به دو گروه تقسیم می‌کنیم: خط‌های بسته و خط‌های بی‌پایانی که بسته نیستند. خط‌های این دو گروه را می‌توان به پاره‌خط‌هایی غیرمتقاطع تقسیم کرد که طولی واحد داشته‌باشند و لایهٔ سوم را تشکیل دهند. لایهٔ چهارم به‌صورت یک ارزشی به‌دست می‌آید: هر خانه، با پاره‌خط راست، درست به یک خانهٔ مجاور وصل شده‌است.

۴۳.۸۳. فرض کنید، a_k نخستین جمله‌ای از دنباله باشد که در نامعادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. در این صورت روشن است که $a_k - ۱$ عضوی از دنباله نیست و، بنابراین، می‌توان s را طوری پیدا کرد که داشته‌باشیم:

$$a_s + ۲s + ۱ = a_k$$

فرض می‌کنیم:

$$n = \left[\frac{a_s + ۱}{۲ + \sqrt{۲}}\right] = a_s - \left[\frac{a_s + ۱}{\sqrt{۲}}\right]$$

زیرا $\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۲+\sqrt{۲}} = ۱$. در این صورت

$$a_n + ۲n \le (۲+\sqrt{۲})n < a_s + ۱$$

اکنون، هر عدد طبیعی x را، از $a_s + ۱$ تا a_k، با جمله‌ای مثل a_i از دنبالهٔ متناظر می‌کنیم که عدد x از آن به‌دست آید، یعنی یا $a_i = x$ و یا $x = a_i + ۲i$. از نابرابری که در بالا ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که، به هر x، حداکثر یک عدد از بازهٔ از $n + ۱$ تا k متناظر است، یعنی

$$a_k - a_s \le k - n \Rightarrow a_k - (a_s - n) \le k \qquad (*)$$

$w = \frac{a_s + ۱}{\sqrt{۲}}$ می‌گیریم. در این صورت

$$a_s > \sqrt{۲}w - ۱$$

یعنی $s \ge w$. از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_s + ۲s + ۱}{۲+\sqrt{۲}} \ge \frac{\sqrt{۲}w - ۱ + ۲w + ۱}{۲+\sqrt{۲}} = w$$

به این ترتیب، ثابت کردیم $\frac{a_k}{۲+\sqrt{۲}} \ge w$ یا

$$a_s - n \le \frac{a_k}{۲+\sqrt{۲}}$$

که اگر آن را با نابرابری $(*)$ جمع کنیم، به‌دست می‌آید: $a_k \le \sqrt{۲}k$.

۴۴.۸۳. *پاسخ.* $۱۰(n^۲ - ۱)$. *راهنمائی.* پاره‌خط راستی از این دستگاه جاده‌ها را در نظر بگیرید که از شهری آغاز یا به شهری ختم نشده باشد. فرض می‌کنیم، به یک سمت آن، a پاره‌خط راست و به سمت دیگر

آن، b پاره‌خط راست، متصل باشد؛ درضمن $a \geq b$. اگر آن را به سمت اول حرکت دهیم، به طول دستگاه جاده‌ها، افزوده نمی‌شود. اگر حرکت به جایی ختم شود که روی پاره‌خط راست دیگری قرار گیرد، آن‌وقت طول جاده‌ها کمتر می‌شود؛ و اگر به پاره‌خط راستی با طول بزرگتر تبدیل شود، می‌توان باز هم، به سمتی، حرکت کرد (البته، به شرطی که، از هیچ طرفی به شهر ختم نشده باشد). اگر به همین ترتیب عمل کنیم، به جایی می‌رسیم که، تبدیل یافتهٔ جاده‌ها، از حالت نخستینِ خود، طول بیشتری ندارد، ولی در ضمن، همهٔ جاده‌های آن، از شهری آغاز و به شهری ختم می‌شوند.

۲.۸۴. عددهای ۱ و ۱− را، به این ترتیب قرار دهید:

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}$$

۳.۸۴. اختلاف فاصلهٔ یکی از این نقطه‌ها تا A' با فاصلهٔ همین نقطه تا B، برابر است با طول پاره‌خط راست AB؛ و روشن است، مجموع ۴۵ عدد به‌صورت $\pm|AB|$ نمی‌تواند برابر صفر شود.

۵.۸۴. *راهنمائی.* قطاع‌ها را، یک در میان، با رنگ‌های سیاه و سفید، در نظر می‌گیریم. اکنون، اگر تفاضل مجموع عددهای خانه‌های سیاه را با مجموع عددهای خانه‌های سفید به‌دست آوریم، این تفاضل، با عملی که طبق صورت مساله باید انجام گیرد، تغییر نمی‌کند.

۶.۸۴. بازی‌کن اول، علامت ضرب را بین ۱ و ۲ می‌گذارد و، بعد، فاصله‌های بین عددها را با آغاز از فاصلهٔ ۳ و ۴، به زوج فاصله‌های پشت سر هم تقسیم می‌کند. وقتی دومی یکی از فاصله‌ها را با علامتی پر می‌کند، او فاصلهٔ زوج آن را با علامت ضرب پر می‌کند. اگر دومی بین ۲ و ۳، علامتی گذاشت، اولی علامت ضرب را در یکی از فاصله‌های باقی‌مانده قرار

می‌دهد. به این ترتیب، سرانجام، مجموع چند عدد زوج به‌دست می‌آید.

۸.۸۴. از برابری‌های فرض نتیجه می‌شود:

$$|AC| = |BD|, |AD| = |BC|$$

بنابراین، دو مثلث ABC و BAD برابرند. برابری زاویه‌های OCB، ACB BDA و ODA، برابری مثلث‌های OAD و ABC را نتیجه می‌دهد که، از آن‌جا، برابری طول‌های پاره‌خط‌های راست OB و OA به‌دست می‌آید.

۱۰.۸۴. مداد را با m و خودکار را با k نشان می‌دهیم. نابرابری‌های فرض را می‌توان این‌طور نوشت

$$۷m > ۵k, ۲۵m < ۱۸k$$

از این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$۷m \geq ۵k + ۱, ۲۵m \leq ۱۸k - ۱$$

دو طرف نابرابری اول را در ۲۵ و دو طرف نابرابری دوم را در ۷ ضرب می‌کنیم:

$$۱۷۵m \geq ۱۲۵k + ۲۵, ۱۷۵m \leq ۱۲۶k - ۷$$

اگر این دو نابرابری را از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$k \geq ۳۲$$

و از نابرابری اول نتیجه می‌شود:

$$m \geq ۲۳$$

و بنابراین $۳m + k \geq ۱۰۱$.

۱۲.۸۴ . روی صفحهٔ شطرنجی، همهٔ خانه‌های ستون‌ها و همهٔ خانه‌های سطرهایی را که، شمارهٔ آن‌ها در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسند، نشان می‌گذاریم (شمارهٔ سطرها را از پایین به بالا و شمارهٔ ستون‌ها را از چپ به راست در نظر بگیرید). اکنون، برای هر خانهٔ نشان‌دار، مربعی ۲ × ۲ را نشان می‌گذاریم که، گوشهٔ چپ و پایین آن، همین خانهٔ نشان‌دار باشد. روشن است که هر مربع دلخواه ۲ × ۲ نمی‌تواند با دو مربع نشان‌دار برخورد داشته باشد. چون تعداد مربع‌هایِ نشان‌دار برابر است با ۱۰۰، بنابراین، یکی از آن‌ها، با هیچ کدام از مربع‌های جدا شدهٔ ۲ × ۲ برخورد ندارد. همین مربع نشان‌دار را، می‌توان از باقی‌ماندهٔ جدول جدا کرد.

۱۳.۸۴ . *پاسخ*. نه، نمی‌توانند. از نابرابری مثلثی استفاده کنید.

۱۴.۸۴ . *پاسخ*. مجموع برابر است با ۲. *یادداشت*. باید در صورت مساله و یا عمل آن اشتباهی رخ داده باشد. با معلوم بودن مجموع دو کسر اول، نمی‌توان مجموع کل، یعنی مقدار کسر سوم را پیدا کرد. با توجه به پاسخی که داده شده‌است، باید مقدارهای x و y چنین باشد:

$$x = \sqrt{-۵} + \sqrt{-۲}, y = \sqrt{-۵} - \sqrt{-۲}$$

۱۶.۸۴ . *راهنمائی*. ثابت کنید، تفاضل این دو مجموع، برابر مضرب فردی از طول پاره‌خط راست AB است.

۱۸.۸۴ . *پاسخ*. هشت رنگ.

۱۹.۸۴ . *راهنمائی*. به گوشهٔ مربع توجه کنید.

۲۱.۸۴ . فرض می‌کنیم $x_۱ > x_۲$؛ در این صورت، از برابری اول نتیجه می‌شود: $x_۲ < x_۳$، از برابری دوم به‌دست می‌آید: $x_۳ > x_۴$، ... و سرانجام $x_۲ < ۱$ که با فرض متناقض است. پس $x_۱ = x_۲$ و از آن‌جا، برابری بقیهٔ عددهای x_i به‌دست می‌آید.

۲۲.۸۴. راهنمائی. A، B، C و D را راس‌های ذوزنقهٔ مفروض و $|AD| = |BC|$ می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، برای هر نقطهٔ O، داریم:

$$|OA| + |OB| + |OC| > |OD|$$

در واقع $|OA| + |OB| \geq |AB|$ و $|AB| = |CD|$؛ از طرف دیگر $|OC| + |CD| \geq |CD|$؛ درضمن، یکی از نابرابری‌ها، اکید است. بقیهٔ حالت‌ها هم، با روشی مشابه ثابت می‌شوند.

۲۴.۸۴. عددهای طبیعی را به گروه‌های صدتایی پشت سر هم تقسیم و از هر گروه عضوی برای مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. اختلاف هر دو عضو پشت سر هم از ۲۰۰ تجاوز نمی‌کند، بنابراین، دیر یا زود، این اختلاف تکرار می‌شود. درنتیجه، بین عضوهای A، عددهای a، b، c و d پیدا می‌شود، به نحوی که داشته باشیم:

$$a - c = d - b \Rightarrow a + b = c + d$$

۲۷.۸۴. پاسخ. عدد ۱۹۸۴.

۳۰.۸۴. داریم:

$$x^4 + y^4 + z^4 = x^2(y+z)^2 + y^2(x+z)^2 + z^2(x+y)^2 =$$
$$= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) + 2xyz(x+y+z) =$$
$$= (x^2+y^2+z^2)^2 - x^4 - y^4 - z^4$$

بنابراین

$$2(x^4+y^4+z^4) = (x^2+y^2+z^2)^2$$

۳۳.۸۴. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$|AC| \cdot |BD| > |\vec{AC} \cdot \vec{BD}| = |(\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC})| >$$
$$> |AB|^2 - |BC|^2$$

۳۴.۸۴. $x = y - ۱$ می‌گیریم. چندجمله‌ای $x^۸ + x^۷$ به‌صورت

$$y^۸ - ۷y^۷ + \dots$$

و دوجمله‌ای $ax + b$ به‌صورت

$$ay - (a - b)$$

درمی‌آید؛ درضمن، عمل ضرب در $x + ۱$ به ضرب در y، و عمل مشتق‌گیری نسبت به x، به مشتق‌گیری نسبت به y تبدیل می‌شود. روشن است که مقدار ثابت $(a - b)$، نتیجه‌ای از عمل‌ها روی $۷y^۷$ است. $۷y^۷$، ضمن عمل، از درجهٔ هفتم به درجهٔ ششم و پایین‌تر می‌رسد، ولی ضریب آن همیشه مضربی از ۴۹ خواهد ماند. یعنی $a - b$، مضربی از ۴۹ است.

۳۵.۸۴. *پاسخ*. ۱۹۸۴.

۳۶.۸۴. فرض می‌کنیم، چنین یالی وجود نداشته‌باشد. در سه راس مجاور ۵۰، تنها عددهای ۱، ۹۹ و ۱۰۰ می‌توانند باشند؛ ولی بین دو عدد ۱ و ۹۹، عدد دیگری جز ۵۰ نمی‌تواند باشد. پس در انتهای دیگر یال جانبی، که در یک انتهای آن، عدد ۵۰ را گذاشته‌ایم، باید عدد ۱۰۰ و در دو راس مجاور ۵۰ (روی قاعدهٔ منشور) عددهای ۱ و ۹۹ گذاشته شود. فرض می‌کنیم، عدد ۱ را در سمت راست و عدد ۹۹ را در سمت چپ ۵۰ گذاشته‌باشیم. در سمت راست عددهای ۱ و ۱۰۰، تنها عددهای ۵۱ و ۲ را می‌توان گذاشت. به همین ترتیب، اگر از سمت راست جلو برویم، می‌توانیم عددهای بقیهٔ راس‌ها را پیدا کنیم. اگر به این ترتیب، یک دور کامل منشور را طی کنیم، به سادگی معلوم می‌شود که باید جای عدد ۹۹ را عوض کنیم.

۳۹.۸۴. *پاسخ*. نه، نمی‌توان. در واقع، برای چهار نقطه‌ای که می‌خواهیم نتیجه‌ای از چهار نقطهٔ اول باشند، برای هر نقطه، تفاضل دو مختص، بر ۳ بخش‌پذیر است. این ویژگی باید، ضمن عمل مورد نظر

مساله، حفظ شود، در حالی که برای مختصات نخستینِ چهار نقطه، این ویژگی وجود ندارد.

۴۰.۸۴. کوچکترین عدد غیر صفر را در نظر می‌گیریم. وقتی عمل میانگین حسابی را انجام می‌دهیم، این عدد یا تغییر نمی‌کند و یا (اگر با عدد صفر در نظر گرفته شود)، به نصف خود تبدیل می‌شود. بنابراین، عدد ۱، نمی‌تواند بیش از $۲^۹$، یعنی ۵۱۲ بار کوچک شود. *پاسخ*. $\frac{۱}{۵۱۲}$.

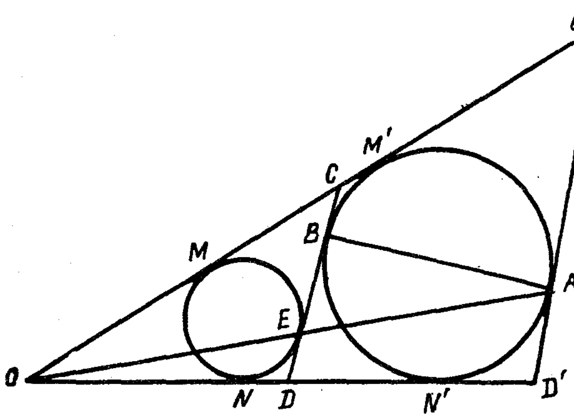
۴۱.۸۴. پاره‌خط راستی به طول

$$S = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_k = b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n$$

در نظر می‌گیریم. سپس، این پاره‌خط راست را، با نقطه‌های به رنگ قرمز، به پاره‌خط‌های راستی به طول‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k و، بعد، به‌وسیلهٔ نقطه‌های به رنگ آبی، به پاره‌خط‌های راستی به طول‌های $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n تقسیم می‌کنیم. اکنون، در خانهٔ محل برخورد سطر iام و ستون jام جدول، عددی را قرار می‌دهیم که برابر با طول تقاطع iامین پاره‌خط راست با دو انتهای قرمز (و به طول a_i) با پاره‌خط راست jام با دو انتهای آبی (و به طول b_j) باشد. به این ترتیب، جدول مورد نظر به‌دست می‌آید.

۴۳.۸۴. حالتی را در نظر می‌گیریم که دایره در بیرون مثلث OCD قرار دارد (شکل ۵۷ را ببینید). نقطه‌های برخورد ضلع‌های زاویه را، با مماس بر دایره در نقطهٔ A، با C' و D' نشان می‌دهیم، به نحوی که دایره، در مثلث $OC'D'$ محاط شده‌باشد. روشن است که، در تجانس به مرکز O، مثلث $OC'D'$، مجانس مثلث OCD است. بنابراین، نقطهٔ E عبارت است از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاط در مثلث OCD با ضلع CD. نقطه‌های تماس این دو دایره را با خط‌های راست OC و OD، با نقطه‌های M، M'، N، N' نشان می‌دهیم. باتوجه به قضیهٔ مربوط به برابری مماس‌ها، داریم:

$$۲|BC| + |BE| = |BC| + |CE| = |M'C| + |CM| =$$



شکل ۵۷

$$= |M'M| = |OM'| - |OM| = |ON'| - |ON| =$$
$$= |NN'| = |N'D| + |DN| = |DB| + |DE| =$$
$$= ۲|DE| + |BE|$$

یعنی $|BC| = |DE|$.

۴۴.۸۴. راهنمائی. مجموعهٔ A را می‌توان مجموعهٔ همهٔ آن عددهای طبیعی در نظر گرفت که، در عدد نویسی به مبنای ۳، شامل رقم ۲ نباشند.

۴۶.۸۴. $SA_۱A_۲\ldots A_n$ را، هرم مفروض می‌گیریم. $SA_۱$ را، یال جانبی با بیشترین طول (در بین یال‌های جانبی) فرض می‌کنیم. اکنون سطح جانبی هرم را روی یال $SA_۱$ می‌بُریم و آن را روی صفحه، می‌گسترانیم. با توجه به شرط مساله، روشن است که، نقطهٔ S، در درون چندضلعی $A_۱A_۲\ldots A_nA'_۱$ واقع می‌شود. B را نقطهٔ دوم برخورد خط راست $SA'_۱$ با خط شکستهٔ $A_۱A_۲\ldots A_nA'_۱$ فرض می‌کنیم. این نقطه، خط شکسته را به دو خط شکستهٔ $A_۱\ldots B$ به طول a و $B\ldots A'_۱$ به طول b تقسیم

می‌کند. نابرابری‌های

$$|SA_1| < a + |SB|, |A'_1S| + |SB| = |A'_1B| < b$$

به ما می‌دهند:

$$2|SA_1| = |SA_1| + |SA'_1| < a + |SB| + |A'_1S| < a + b$$

و این عدد آخر، همان محیط قاعدهٔ هرم است.

۴۷.۸۴. به این اتحاد توجه کنید:

$$a = \frac{3a}{3} = \frac{x^2 + 2y^2}{3} = \left(\frac{x \pm 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x \mp 2y}{3}\right)^2$$

روشن است که x و y، یا هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند و یا هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نیستند (در حالت اول، اثبات روشن است). اگر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم دو عدد بر ۳، یکسان باشد، علامت‌های بالا و اگر این باقی‌مانده‌ها مختلف باشند، علامت پایین را انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت، کسرها، عددهایی درست می‌شوند.

۵۱.۸۴. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$$

و فرض می‌کنیم:

$$P(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$$

بنابر رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌ها (قضیهٔ ویت) داریم:

$$p = -(a+b+c+d+e);$$
$$q = \frac{1}{2}[(a+b+c+d+e)^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)];$$

هر دو عدد p و q، بر n بخش‌پذیرند. اگر برابری‌های

$$P(a) = 0, P(b) = 0, \dots, P(e) = 0$$

را با هم جمع کنیم، روشن می‌شود که

$$\begin{aligned} &a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + 5t + \\ &+r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + s(a + b + c + d + e) \end{aligned}$$

بر n بخش‌پذیر است. اکنون، کافی است توجه کنیم که

$$t = -abcde$$

۵۲.۸۴. x_1، x_2، ...، x_7 را هفت جملهٔ متوالی دنباله می‌گیریم؛ این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$S(a, b, c, d, e, f) = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + 12f$$

رقم‌های آخر عددهای

$$S(x_1, \dots, x_6), S(x_2, \dots, x_7)$$

بر هم منطبق‌اند (آزمایش کنید!): از این‌جا معلوم می‌شود که، برای هر k، رقم آخر عدد $S(x_{k+1}, \dots, x_{k+6})$، تغییر نمی‌کند. برای شش عدد اول دنباله داریم:

$$S(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18$$

و این مقدار، برای شش رقم $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ برابر است با ۲۴. این دو عدد، در رقم آخر اختلاف دارند؛ بنابراین درستی فرض حکم مساله ثابت می‌شود.

۱.۸۵. ۶۸ سکه را به ۳۴ زوج تقسیم و، در هر زوج، سکه‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. سپس ۳۴ سکهٔ سنگین‌تر را با ۳۳ بار استفاده از ترازو مقایسه و، در بین آن‌ها، سنگین‌ترین را پیدا می‌کنیم. بین ۳۴ سکهٔ سبک‌تر هم، با ۳۳ بار استفاده از ترازو، سبک‌ترین را جدا می‌کنیم.

۳.۸۵. روشن است که، فاصلهٔ بین دو شهر B و C، باید از فاصلهٔ بین دو شهر B و A بیشتر باشد، زیرا در غیر این‌صورت، مسافر باید از B به A برگردد. به‌همین ترتیب، فاصلهٔ شهر بعدی تا شهر C، باید کمتر از فاصلهٔ شهر C تا شهر B نباشد و غیره. به این ترتیب مسیر مسافرت، در هر مرحله، طولانی‌تر می‌شود. اگر زمانی به A برسد، باید بعد از آن دوباره به B برود و فاصلهٔ A تا B از مرحلهٔ قبلی بیشتر باشد که ممکن نیست.

۴.۸۵. به عنوان نمونه می‌توان ۹۹۸ عدد را برابر ۱ ، یک عدد را برابر ۲ و یک عدد را برابر ۱۰۰۰ گرفت.

۶.۸۵. حل مسالهٔ ۱۸.۸۵ را ببینید.

۷.۸۵. پاسخ. نه، ممکن نیست. باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۳ را در نظر بگیرید.

۹.۸۵. پاسخ. $p = ۲$، $q = ۳$، $n = ۱$ یا $p = ۳$، $q = ۲$، $n = ۱$.

۱۱.۸۵. حشره‌ها را A، B و C می‌نامیم. شش حالت، برای وضع قرار گرفتن آن‌ها روی خط راست (از چپ به راست) وجود دارد:

$$ABC, BCA, CAB, ACB, BAC, CBA$$

سه حالت اول را «نوع اول» استقرار و سه حالت دوم را «نوع دوم» استقرار حشره‌ها می‌نامیم. به‌سادگی و با تحقیق روشن می‌شود که، با هر پرش یک حشره، نوع اول به نوع دوم (و برعکس) تبدیل می‌شود. بنابراین، بعد از ۱۹۸۵ پرش، وضع استقرار حشره‌ها، با وضع نخستینِ آن‌ها فرق خواهد

داشت.

۱۴.۸۵ . پاسخ. عدد اصلی، ۲۵ بوده است.

۱۶.۸۵ . پاسخ. ۴۹۷ عدد.

۱۷.۸۵ . فرض می‌کنیم این‌طور نباشد و همهٔ نقطه‌های قرمز را (اگر وجود دارند) در نظر می‌گیریم. هریک از آن‌ها، یا تنها به نقطه‌های آبی و یا تنها به نقطه‌های سبز وصل شده‌است. در حالت اول آن را به رنگ سبز و در حالت دوم به رنگ آبی درمی‌آوریم. به این ترتیب، شکلی بدون نقطه‌های قرمز به‌دست می‌آید. تعداد پاره‌خط‌های راستی را که از هر نقطه می‌گذرد با k و تعداد نقطه‌های آبی و سبز را، به‌ترتیب، با A و B مشخص می‌کنیم. تعداد همهٔ پاره‌خط‌های راست، از طرفی برابر kA و، از طرف دیگر، برابر kB می‌شود، یعنی $A = B$، که ممکن نیست، زیرا $A + B = ۱۹۸۵$.

۱۸.۸۵ . فرض می‌کنیم توانسته باشیم، در یکی از سکوها، k صندوق را به شماره‌های ردیف (در زیر صندوق شمارهٔ ۱، روی آن صندوق شمارهٔ ۲، . . . و، سرانجام در بالا، صندوق شمارهٔ k) قرار داده باشیم. اکنون، اگر در روی صندوق شمارهٔ k، صندوق‌های دیگری وجود دارد، همهٔ آن‌ها را به سکوی دیگر منتقل می‌کنیم و، سپس، همهٔ صندوق‌ها را از این سکو (به‌جز آن‌ها که زیر صندوق $(k + ۱)$ام است) به سکوی قبلی و روی صندوق شمارهٔ k می‌بریم. به این ترتیب، صندوق با شمارهٔ $(k + ۱)$ روی صندوق با شمارهٔ k قرار می‌گیرد. روشن است که، برای آخرین صندوق، یعنی صندوق با شمارهٔ n، بیش از یک جابه‌جایی لازم نیست و، بنابراین، روی‌هم، با $(۲n - ۱)$ جابه‌جایی، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۱۹.۸۵ . فرض کنید، در تصاعد حسابی $\{a + nd\}$، جملهٔ $x = y^۲$ وجود داشته باشد. در این صورت، همهٔ عددهای به‌صورت $(y + kd)^۲$، جمله‌هایی از این تصاعد خواهند بود.

۲۰.۸۵. پاسخ. $x = y = z = 0$، $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{8}}$، $x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{8}}$.

۲۱.۸۵. پاسخ. $\widehat{DAB} = 57°, 30'$، $\widehat{ABC} = 100°$، $\widehat{BCD} = 72°, 30'$. از این موضوع استفاده کنید که، نقطه‌های A، C و D روی محیط دایره‌ای به مرکز B قرار دارند.

۲۲.۸۵. *راهنمائی.* سه جمله‌ای‌های درجه دوم

$$a_1x^2 + 2b_1x + c_1, a_2x^2 + 2b_2x + c_2$$

را مورد توجه قرار دهید.

۲۳.۸۵. *راهنمائی.* ثابت کنید، چهارضلعی $ACOM$ قابل محاط در دایرهٔ به قطر OC است.

۲۴.۸۵. *راهنمائی.* کسی که بازی را آغاز می‌کند، پیروز می‌شود. او می‌تواند، به این ترتیب، برای بازی خود برنامه‌ریزی کند: در نخستین حرکت، مهره را در خانهٔ ۲۵ می‌گذارد؛ سپس این فکر را دنبال می‌کند که، بعد از هر حرکت او، بین هر دو گروه مهره و، همچنین، بین گروه مهره‌های مرزی و خانه‌های مرزی، به تعداد زوج، خانه‌های آزاد وجود داشته باشد.

۲۷.۸۵. O را نقطهٔ دلخواهی از درون چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم. روشن است که، یکی از زاویه‌های AOB، BOC، COD و DOA، از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند؛ برای مشخص بودن وضع، این زاویه را AOB فرض می‌کنیم. در این صورت

$$|AO|^2 + |BO|^2 \le |AB|^2 = 7^2 = 49$$

بنابراین یا $|AO|^2 < 25$ و یا $|BO|^2 < 25$، یعنی نقطهٔ O، در درون دایره‌ای به شعاع ۵ است که به مرکز نقطهٔ A یا نقطهٔ B رسم شده‌باشد.

۲۹.۸۵. برای هر $i \geq ۱$، این نابرابری برقرار است:

$$\frac{۱}{x_{i+۱}}=\frac{۱}{x_i-x_i^۲}=\frac{۱}{x_i(۱-x_i)}>\frac{۱+x_i}{x_i}=۱+\frac{۱}{x_i}$$

از این نابرابری نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{x_{۱۰۰۱}}>۱۰۰۰+\frac{۱}{x_۱}=۲۰۰۰$$

از آن‌جا $x_{۱۰۰۱}<۰/۰۰۰۵$.

۳۳.۸۵. O را نقطهٔ برخورد خط‌های راستی می‌گیریم که در صورت مساله از آن‌ها یاد شده‌است. فرض می‌کنیم، نقطه‌های K، L، M، N، پای عمودهای وارد از O، به‌ترتیب بر یال‌های AB، AC، CD، BD و نقطهٔ F مرکز دایرهٔ محاط در مثلث ABC باشد. روشن است که

$$(FK)\perp(AB),(FL)\perp(AC),|FK|=|FL|$$

یعنی مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AKF و AFL برابرند و $|AK|=|AL|$. به همین ترتیب ثابت می‌شود:

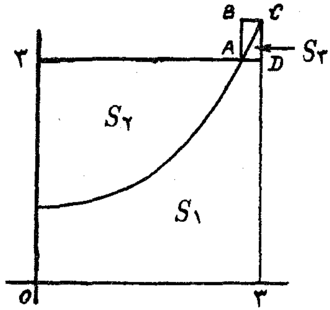
$$|CM|=|CL|,|DM|=|DN|,|BK|=|BN|$$

از مجموع این برابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$|AB|+|CD|=|AC|+|BD|$$

برابری دوم هم به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۳۴.۸۵. نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۴]{x^۴+۱}$، مربع ۳×۳ را به دو بخش با مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ تقسیم می‌کند (شکل ۵۸).



شکل ۵۸

از یک طرف داریم:

$$\int_1^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx = S_1 + S_3$$

از طرف دیگر، با توجه به رابطهٔ $g(x) = \sqrt[4]{x^4-1}$ با تابع $f(x)$، به‌دست می‌آید (g معکوس f است):

$$\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}dx = S_2$$

بنابراین، مجموع انتگرال‌ها برابر $S_1 + S_2 + S_3$ می‌شود، و چون S_3 از مساحت مستطیل $ABCD$ کمتر است (مساحت این مستطیل، از ۰/۰۰۰۱ تجاوز نمی‌کند)، پس درستی نابرابری‌های مساله ثابت می‌شود.

۳۷.۸۵. پاسخ. به عنوان نمونه، این عدد:

۱۵۸۴۱۵۸۴۱۵۸۴۱۵۸۴۱۵۸۴

۳۹.۸۵. همهٔ گروه‌های سه تیمی را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد: آن‌هایی که، در بازی با هم، هر کدام یک بُرد داشته‌اند، و آن‌هایی که ضمن بازی با هم، به امتیازهای ۲، ۱ و ۰ رسیده‌اند. اگر تعداد گروه‌های سه تیمی

نوع اول را a و تعداد گروه‌های سه تیمی نوع دوم را b فرض کنیم، آن وقت $a+b=۴۵۵$. از طرف دیگر، تعداد گروه‌هائی که در آن‌ها، تیم مفروض درست ۱ امتیاز گرفته‌است، برابر ۴۹ است؛ در هر گروه نوع اول، سه تا از این تیم‌هاست، یعنی هریک از این‌گونه گروه‌ها سه بار به حساب آمده‌است و هر گروه نوع دوم، درست یکبار در محاسبه وارد شده‌است. به این ترتیب

$$۳a+b=۴۹\times ۱۵=۷۳۵$$

از این‌جا به‌دست می‌آید: $a=۱۴۰$.

۴۰.۸۵. حل مسالهٔ ۲۸.۷۸ را ببینید.

۴۲.۸۵. تفاضل $۵۰۰a_i-i$ را در نظر می‌گیریم. این تفاضل، به‌ازای $i=۱$ برابر ۴۹۹ و به‌ازای $i=m$ برابر $(-۵۰۰a_m)$ است. روشن است، برای عبور از i به $i+۱$، این تفاضل، یا به ۴۹۹ صعود و یا به ۱ نزول می‌کند. فرض کنید، n نخستین شماره‌ای باشد که، برای آن، این تفاضل مثبت نباشد. در این صورت روشن است که باید برابر صفر باشد، یعنی $a_n=\frac{n}{۵۰۰}$.

۴۳.۸۵. *راهنمائی.* به کمک استقراء ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}+\frac{۱}{a_۲a_۴}+\ldots+\frac{۱}{a_na_{n+۲}}=۱-\frac{۱}{a_{n+۱}a_{n+۲}}$$

۵۱.۸۵. *راهنمائی.* ثابت کنید $a_n-۲۲$ بر $a_{n-۶}$ بخش‌پذیر است.

۵۲.۸۵. هر گروه پسرها را با گروهی از دخترها متناظر می‌کنیم که شامل همهٔ دخترانی باشد که هر کدام از آن‌ها، با تعداد فردی از پسرهای این گروه دوستی دارد. با توجه به شرط مساله، در هر گروهی از این‌گونه، تعداد زوجی دختر وجود دارد. اگر تعداد پسران و تعداد دختران برابر n باشد، آن‌وقت به تعداد $۲^n-۱$ گروه غیر تهی از پسران و به تعداد $۲^n-۱$ گروه غیر تهی از دختران وجود دارد. ولی گروه‌هایی که از تعدادی زوج دختر تشکیل شده

است، کمترند (آن‌ها برابرند با $۱ - {}^{n-۱}۲$)، بنابراین دو گروه جداگانهٔ پسران پیدا می‌شود که متناظر با یک گروه از دختران هستند. این، به معنای آن است که، برای هر دختر این کلاس، تعداد دوستانی که در بین پسران این گروه‌ها دارد، یا برای همهٔ دختران زوج است و یا برای همهٔ آن‌ها فرد. اکنون کافی است، پسرانی را در نظر بگیریم که درست در یکی از دو گروه مورد بررسی قرار دارند؛ این، همان گروه مورد نظر است.

۳.۸۶. داریم:

$$۷۷a = ۳۴a + ۴۳a = ۴۳b + ۴۳a = ۴۳(a + b)$$

بنابراین $۴۳(a+b)$ بر ۷۷ بخش‌پذیر است، یعنی $a + b$ بر ۷۷ بخش‌پذیر است و عددی است مرکب.

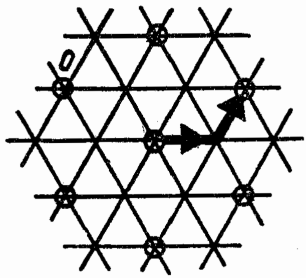
۵.۸۶. *راهنمائی.* اگر چهار عدد پشت سر هم روی محیط دایره را a، b، c و d فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$b = a + c,\ c = b + d$$

و از آن‌جا به دست می‌آید $a + d = ۰$.

۶.۸۶. الف) ۷۶۳۹۱۲۸.   ب) روشن است که، رقم صفر، نباید وجود داشته باشد. این عدد باید زوج باشد، یعنی رقم ۵ نمی‌تواند داشته باشد. مجموع ۸ رقمی که می‌ماند بر ۳ بخش‌پذیر نیست. بنابراین، چنین عددی وجود ندارد.

۱۱.۸۶. حلزون روی یال‌های یک شبکهٔ مثلثی می‌خزد. (شکل ۵۹ را ببینید)؛ درضمن، اگر از نقطهٔ O آغاز به حرکت کرده‌باشد، بعد ازهر ساعت، در نقطه‌هایی خواهد بود که با دایره نشان داده‌ایم. اگر حرکت او، $n + x$ ساعت طول بکشد که، در آن، $n \in \mathrm{N}$ و $۰ < x < ۱$، آن‌وقت، ضمن x ساعت، نمی‌تواند خود را، از یکی از این دایره‌ها، به مبداء برساند.



شکل ۵۹

۱۳.۸۶. انجمن‌ها را با عددهای از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ انجمن‌ها، دارای ۳۲ زیرمجموعه است. این زیرمجموعه‌ها را به ۱۰ گروه تقسیم می‌کنیم:

$$\phi, \{۱\}, \{۱,۲\}, \{۱,۲,۳\}, \{۱,۲,۳,۴\}, \{۱,۲,۳,۴,۵\};$$

$$\{۲\}, \{۲,۵\}, \{۱,۲,۵\}, \{۱,۲,۳,۵\};$$

$$\{۳\}, \{۱,۳\}, \{۱,۳,۴\}, \{۱,۳,۴,۵\};$$

$$\{۴\}, \{۱,۴\}, \{۱,۲,۴\}, \{۱,۲,۴,۵\};$$

$$\{۵\}, \{۳,۵\}, \{۳,۴,۵\}, \{۲,۳,۴,۵\};$$

$$\{۱,۵\}, \{۱,۳,۵\};$$

$$\{۲,۳\}, \{۲,۳,۵\};$$

$$\{۲,۴\}, \{۲,۴,۵\};$$

$$\{۳,۴\}, \{۲,۳,۴\};$$

$$\{۴,۵\}, \{۱,۴,۵\}$$

توجه کنید: در هر گروه، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه، یکی زیرمجموعهٔ دیگری است.

اکنون، برای هر دانش‌آموز، مجموعهٔ انجمن‌هایی را می‌نویسیم که، این دانش‌آموز، در آن‌ها شرکت دارد. چون ۱۱ دانش‌آموز وجود دارد؛ بنابراین دو تا از این مجموعه‌ها در یکی از گروه‌های ده‌گانهٔ بالا خواهند بود، یعنی یکی از آن‌ها، زیرمجموعهٔ دیگری است.

۱۶.۸۶. قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نیمساز CD پیدا می‌کنیم؛ نقطهٔ M، روی پاره‌خط راست CE به‌دست می‌آید. با محاسبهٔ زاویه‌ها، روشن می‌شود که هر یک از مثلث‌های DEM و AED متساوی‌الساقین‌اند و، بنابراین

$$|BD| = |DM| = |DE| = |AE|$$

۱۹.۸۶. نصف مجموع مجذورهای تعداد چوب کبریت‌ها در بخش‌های جداگانه را S می‌نامیم. در آغاز $S = ۳۱۲/۵$ و در پایان کار $S = ۱۲/۵$. اگر توده‌ای را که، در آن، $x+y$ چوب کبریت وجود دارد به دو بخش جداگانه، یکی شامل x چوب کبریت و دیگری شامل y چوب کبریت، تقسیم کنیم، آن وقت، مقدار S، به اندازهٔ xy کاهش می‌یابد. بنابراین، مقدار کاهش S، برابر با همان عددهایی است که جایی نوشته‌ایم؛ و مجموع همهٔ این عددها، برابر تفاضل دو مقدار S، در آغاز و پایان کار است، یعنی

$$۳۱۲/۵ - ۱۲/۵ = ۳۰۰$$

۲۰.۸۶. *پاسخ.* ۱۹۸.

۲۲.۸۶. برابری را، به این صورت بنویسید:

$$۱۰۰۱a + ۹۹۹b = ۱$$

پاسخ. $a = ۵۰۰$، $b = -۵۰۱$.

۲۳.۸۶. راهنمائی. هر ضلع خط شکستهٔ $HKOIMH$، از مجموع طول‌های دو پاره‌خط راستی که وسط ضلع‌های مجاور پنج‌ضلعی را به هم

وصل می‌کنند، تجاوز نمی‌کند، یعنی از نصف مجموع طول‌های دو قطر مشخص پنج‌ضلعی بیشتر نیست.

۲۴.۸۶. حل مسالهٔ ۲۶.۶۳ را ببینید.

۲۵.۸۶. ثابت می‌کنیم، برای هر

$$n = ۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۳$$

می‌توان دو گروه جدا از هم (دو مجموعهٔ بدون اشتراک) ازتیم‌ها در نظر گرفت که، در گروه اول n تیم و در گروه دوم $۵n + ۱$ تیم وجود داشته باشد، به نحوی که همهٔ تیم‌هایی که با تیم‌های گروه اول بازی کرده‌اند، از بین تیم‌های گروه دوم باشند (و این، به معنای آن است که، تیم‌های گروه اول، با هم بازی نکرده‌اند). برای $n = ۱$، تیم دلخواهی را در گروه اول قرار می‌دهیم و، در گروه دوم، آن شش تیمی را که با تیم گروه اول بازی نکرده‌اند.

اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n < ۳۳$، توانسته باشیم، این دو گروه را تشکیل دهیم. چون در دو گروه، روی هم، تعداد تیم‌ها، عددی فرد است، تیمی مثل A وجود دارد که متعلق به هیچ‌کدام از این دو گروه نیست و، در روز اول، با یکی از تیم‌های گروه دوم، بازی کرده‌است. در ضمن، حداکثر پنج تیم وجود دارد که در دو گروه ما نیستند و تیم A، با آن‌ها بازی کرده‌است. تیم A را به گروه اول اضافه می‌کنیم، و این پنج تیم (یا کمتر از آن) را، به گروه دوم. اکنون، اگر لازم باشد، چند تیم (از آن‌هایی که در دو تیم ما شرکت ندارند) به گروه دوم می‌افزاییم، به نحوی که تعداد آن‌ها برابر شود با

$$۵n + ۶ = ۵(n + ۱) + ۱$$

چون $n < ۳۳$، این عمل ممکن است و، بنابراین، توانسته‌ایم، دو گروه را برای $n + ۱$ تشکیل بدهیم.

اکنون دو گروه را برای $n = ۳۳$ در نظر می‌گیریم. چون

$$۶n + ۱ = ۱۹۹ < ۲۰۰$$

یعنی هنوز یک تیم وجود دارد که در دو گروه شرکت ندارد. این تیم را، به ۳۳ تیم گروه اول اضافه می‌کنیم، ۳۴ تیم به دست می‌آید که، در بین آن‌ها، هیچ تیمی با تیم دیگر بازی نکرده‌است.

۲۸.۸۶. پاسخ. $a = \frac{۱}{۴۲}$، $b = \frac{۱}{۷}$، $c = \frac{۱}{۳}$، $d = \frac{۱}{۲}$.

۳۱.۸۶. پاسخ. $a = ۵۰۰$، $b = -۱$، $c = -۵۰۰$.

۳۴.۸۶. پاسخ. ۴.

۳۵.۸۶. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^{۱۹۸۵}(x - ۱) = ۱۹۸۶^{۱۹۸۵}(۱۹۸۶ - ۱)$$

چون $x = ۱۹۸۶$ ریشه‌ای از معادله است و، سمت چپ معادله، برای $x > ۱$ صعودی است، پس ریشهٔ دیگری ندارد.

۳۷.۸۶. پاسخ. ۳۰ درجه.

۳۸.۸۶. راهنمائی. از این برابری استفاده کنید:

$$\frac{۱}{a_n} = \frac{۱}{a_۱ a_۲ \ldots a_{n-۱}} - \frac{۱}{a_۱ a_۲ \ldots a_n}$$

۴۰.۸۶. سال مریخ را ۱۰۰ روز می‌گیریم. در زندگی هر مریخی، درست یک روزِ اول سال وجود دارد. چون تعداد همهٔ مریخی‌ها، عددی فرد بوده‌است، بنابراین، روز اول یکی از سال‌ها، تعداد ساکنان مریخ فرد بوده‌است. به همین ترتیب، روز دوم یکی از سال‌ها، تعداد ساکنان مریخ فرد بوده‌است و غیره. بنابراین، تعداد چنین روزهایی، از ۱۰۰ کمتر نیست.

۴۱.۸۶. راهنمائی. ثابت کنید: $\widehat{NCH} = \widehat{KAN}$.

۴۲.۸۶. فرض می‌کنیم، خط هوایی AB را بسته باشند و، اکنون، کوتاه‌ترین مسیر، برای رفتن از شهر X به شهر Y، به مسیری شامل $۲n+۱$ فرود نیاز داشته‌باشیم. شهرهای مربوط به مسیر این پرواز را شماره‌گذاری می‌کنیم: $X_۰ = X$، $X_{۲n+۱} = Y$. قبلاً، کوتاه‌ترین مسیر از X تا $X_{n+۱}$، بیش از n فرود و پرواز از X_n تا Y هم، بیش از n فرود لازم نداشت. روشن است که، هر دو مسیر، از طریق خط AB بود؛ درضمن، می‌توان فرض کرد، پرواز از A به طرف B باشد. فرض کنید، برای رفتن از X به $X_{n+۱}$، تعداد فرودها از X تا A برابر $s_۱$ و از B تا $X_{n+۱}$ برابر $t_۱$ باشد؛ برای رفتن از X_n به $X_{۲n+۱}$، از B تا $X_{۲n+۱}$، به تعداد $s_۲$ فرود و از X_n تا A، به تعداد $t_۲$ فرود لازم باشد.

در این صورت، با توجه به شرط مساله

$$s_۱ + ۱ + t_۱ \leq n, \quad s_۲ + ۱ + t_۲ \leq n$$

از مجموع این دو نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$(s_۱ + t_۲) + (s_۲ + t_۱) \leq ۲n - ۲$$

بنابراین، یکی از جمله‌های سمت چپ نابرابری از $n - ۱$ تجاوز نمی‌کند. ولی این، به معنای آن است که در پرواز از X به X_n یا از $X_{n+۱}$ به $X_{۲n+۱}$، طول پرواز از n کمتر و، درضمن، شامل خط AB است. تناقض.

۴۳.۸۶. حل مسالهٔ ۱۸.۶۹ را ببینید.

۴۵.۸۶. پاسخ. آغاز کنندهٔ بازی برنده می‌شود.

۵۰.۸۶. عدد دلخواه $c > ۰$ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که $c \in A$. روشن است که می‌توان عددهای a و b را پیدا کرد، به نحوی که $a < b < c$ و، در ضمن $[a, b] \subset A$. درست به همین ترتیب، بازهٔ

$[c-a, c-b]$ شامل بازه‌ای است مثل $[x, y] \subset A$؛ به‌ویژه $x \in A$.
چون $c - x$ عضو A، پس $x + (c-x)$، یعنی c هم عضو A است.

۵۱.۸۶. *پاسخ.* از این گونه عددها، به تعداد ۶۱۰ وجود دارد.

۵۳.۸۶. *پاسخ.* $۱۶ + ۶۴\sqrt{۲}$.

۵۵.۸۶. فرض می‌کنیم $f(۱) > ۱$ (حالت $f(۱) < ۱$ هم، کاملاً شبیه این حالت است). در این صورت، با توجه به پیوستگی تابع $f(x)$، باید برای هر مقدار x داشته‌باشیم: $f(x) > ۰$. ولی در این صورت، برای هر تعداد نماد f باید داشته باشیم:

$$f(f(\ldots f(۱)\ldots)) > ۱$$

و این نتیجه، فرض را نقض می‌کند.

۵۶.۸۶. *راهنمائی.* این عبارت را در نظر بگیرید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۹}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{۹۹۹۹}+\sqrt{۱۰۰۰۱}}$$

۵۸.۸۶. اندیشهٔ اصلی راه‌حل، با توجه به زوج نبودن تابع

$$\frac{۱}{۱+x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}}$$

به دست می‌آید. داریم:

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}} = \int_{-۱}^{۰} \frac{dx}{۱+x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}} +$$

$$+ \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}} =$$

$$= \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱-x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}} + \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}} =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - x^3 + \sqrt{1 + x^6}} + \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(2 + 2\sqrt{1 + x^6})dx}{(1 + \sqrt{1 + x^6})^2 - x^6} = \int_0^1 1dx = 1$$

۸۶.۵۹. کرهٔ محاط در قالب یک دوازده‌وجهی منتظم و، درضمن، دایره‌هایی که با وجه‌های چندوجهی روی آن حک شده‌است، درنظر می‌گیریم. با تصویر رسم‌الجسمی (ستریوگرافیک) این دایره‌ها بر صفحه، دایره‌هایی به‌دست می‌آید که همان ویژگی مورد نظر مساله را دارند. این ویژگی از آن‌جا ناشی می‌شود که هر وجه دوازده‌وجهی به‌وسیلهٔ پنج دایره احاطه شده‌است.

۸۶.۶۰. به‌سادگی قابل تحقیق است که

$$u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3,$$

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_1u_3 = v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3$$

چون $u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3$، بنابراین، چندجمله‌ای‌های

$$(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3) \text{ و } (x - v_1)(x - v_2)(x - v_3)$$

بر هم منطبق‌اند؛ بنابراین، ریشه‌های آن‌ها هم بر هم منطبق‌اند.

۸۷.۲. نه، نمی‌توان. *راهنمائی.* باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۳ یا بر ۵ را در نظر بگیرید.

۸۷.۴. تعداد پسرها را x، تعداد دخترها را y، قیمت یک پیراشکی را a و قیمت یک شوکولات را b می‌گیریم. در این صورت

$$ax + by = bx + ay - 1$$

این برابری را می‌توان این طور نوشت:

$$(x - y)(b - a) = 1$$

از آن‌جا: $x = y + ۱$.

۵.۸۷. *پاسخ*. ۱۰۰۱ بلیت.

۶.۸۷. *راهنمائی*. اولی باید از تقارن مرکزی استفاده کند. حداکثر امتیازهایی که اولی می‌تواند به دست آورد، برابر است با ۱۰، یعنی با ۲ امتیاز اضافی، برنده شود.

۱۰.۸۷. به سادگی معلوم می‌شود که اختلاف بین مقدار «دالرها» با مقدار «دیلرها»، همیشه در تقسیم بر ۱۱، باقی‌مانده‌ای برابر واحد می‌دهد.

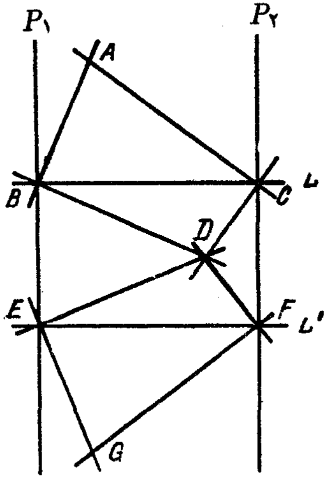
۱۲.۸۷. *پاسخ*. بله، می‌توان. نمونهٔ جواب_(از بالا به پایین و از چپ به راست):

$$۸, ۲, ۴; \quad ۹, ۳, ۷; \quad ۰, ۵, ۶, ۱$$

۱۶.۸۷. فرض می‌کنیم این طور نباشد. راس‌های مکعب را طوری به رنگ‌های سیاه و سفید در می‌آوریم که، هر دو راس مجاور، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. در این صورت، هر ضلع خط شکسته، یا دو راسی از مکعب را به هم وصل می‌کند که هم‌رنگ‌اند، و یا یکی از قطرهای بزرگ مکعب است. روشن است که، در خط شکستهٔ ما، دست‌کم باید دو ضلع وجود داشته باشد که راس‌های با رنگ‌های مختلف را به هم وصل کرده‌باشد؛ ولی در این صورت، این ضلع‌ها در مرکز مربع یکدیگر را قطع می‌کنند که فرض مساله را نقض می‌کند.

۱۷.۸۷. بعد از یک ماه همیشه بخشی از جاده که آماده نشده‌است، از ۱۰۰ کیلومتر کمتر است. بنابراین، هر ماه دست‌کم $\frac{۱}{۱۰۰^{۱۰}}$ کیلومتر از جاده ساخته می‌شود و، به این ترتیب، بعد از $۱۰۰^{۱۱}$ ماه، جاده، آمادهٔ بهره‌برداری می‌شود.

۱۸.۸۷. نقطهٔ A و خط راست L را در نظر می‌گیریم (شکل ۶۰ را ببینید). از نقطهٔ A، خط راست دلخواهی رسم می‌کنیم که خط راست L را



شکل ۶۰

قطع کند، بعد از A عمودی بر این خط راست اخراج می‌کنیم. این دو خط راست عمود بر هم، خط راست L را، به‌ترتیب، در نقطه‌های B و C قطع می‌کنند. از نقطه‌های B و C، عمودهایی، به‌ترتیب، بر AB و AC اخراج می‌کنیم، عمودهای اخیر، یکدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کنند؛ درضمن به سادگی روشن می‌شود که، تصویرهای A و D بر L، نسبت به وسط پاره‌خط راست BC، قرینهٔ یکدیگرند. اکنون باید همین عمل را دربارهٔ نقطهٔ A و خط راست L'، که با L موازی است، انجام داد و به نقطهٔ G رسید. روشن است که خط راست AG بر خط راست L عمود خواهد بود.

۱۹.۸۷. *پاسخ.* نه، نمی‌توان. *راهنمائی.* خانه‌های جدول را، شبیه خانه‌های صفحهٔ شطرنج سیاه و سفید در نظر بگیرید و به رنگ‌هایی توجه کنید که مهره‌ها در آن‌ها قرار دارند.

۲۰.۸۷. فرض می‌کنیم:

$$a = x + ۲y + ۵z + ۱۰t + ۲۰u + ۵۰v + ۱۰۰w,$$

$$x+y+z+t+u+v+w=b$$

دو طرف برابری دوم را ۱۰۰ برابر می‌کنیم:

$$\begin{aligned}100b &= 100x+50(2y)+20(5z)+10(10t)+\\ &+5(20u)+2(50v)+1(100w)\end{aligned}$$

با توجه به این برابری و برابری اول (برای a)، به رابطهٔ مطلوب می‌رسیم.

۲۳.۸۷ . *راهنمائی.* با استقرا روی تعداد شاخه‌ها، ثابت کنید، بعد از مدت زمانی، روند کار به پایان می‌رسد و، درضمن، تعداد کلاغ‌هایی که به پرواز می‌آیند، بستگی به ردیف پروازها ندارد.

۲۶.۸۷ . *پاسخ.* $\frac{100}{101}$.

۲۷.۸۷ . این برابری روشن است:

$$\widehat{MAB}+\widehat{MBA}=\frac{1}{2}\widehat{AO'B}$$

چون OA بر $O'A$ و OB بر $O'B$ عمود است، پس

$$\widehat{AO'B}=180^\circ-\widehat{AOB}$$

(در این‌جا، O و O' مرکزهای دو دایره‌اند)، یعنی

$$\widehat{XAB}+\widehat{YBA}+\frac{1}{2}\widehat{AOB}=90^\circ$$

بنابراین، کمان $XBAY$ برابر ۱۸۰ درجه و پاره‌خط راست XY، قطر دایره است.

۲۹.۸۷ . *پاسخ.* ۹۶۴۳۳۴۶۹.

۸۷.۳۰. $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{۲۵}$ را ستاره‌های زیر ابر، و $B_۱$، $B_۲$، ...، $B_{۲۵}$ را بقیهٔ ستاره‌ها می‌گیریم. همهٔ نابرابری‌های مثلثیِ به‌صورت

$$|B_iB_j| \le |B_iA_k| + |B_jA_k|$$

را با هم جمع می‌کنیم ($۱ \le i \ne j, k \le ۲۵$). سمت چپ نابرابری برابر $۲۵T$ می‌شود که، در آن، T، مجموع فاصله‌های دوبه‌دو، بین ستارگان قابل مشاهده است. در سمت راست نابرابری، هر پاره‌خط راست B_iA_k، ۲۴ بار می‌آید. بنابراین، مقدار سمت راست، از $۲۴(S-T)$ کمتر نیست. به این ترتیب:

$$۲۵T \le ۲۴(S-T) \Rightarrow ۴۹T \le ۲۴S$$

و درنتیجه $T \le \frac{۲۴}{۴۹}S < \frac{۱}{۲}S$.

۸۷.۳۵. *پاسخ.* بله، وجود دارد، مثلاً به‌ازای $n = ۹۹۳$.

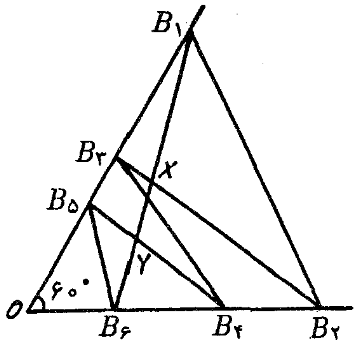
۸۷.۳۸. *راهنمائی.* ثابت کنید:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge ۱ + \sqrt{ab}$$

۸۷.۳۹. *پاسخ.* آغاز کنندهٔ بازی برنده می‌شود.

۸۷.۴۰. مبادلهٔ پیچیده‌ای از جابه‌جایی آپارتمان‌ها را در نظر می‌گیریم که منجر به چند دُور مبادله می‌شود. هر دور مبادله را می‌توان به عنوان دوران یک چندضلعی، در نظر گرفت که، در هر راس آن، یک «آپارتمان» گذاشته شده‌است. ولی هر دوران چندضلعی را می‌توان ترکیبی از دو تقارن محوری دانست که، هر یک از آن‌ها، معرف انتخابی از مبادله‌های دوطرفه است.

۸۷.۴۱. زاویه‌ای برابر ۶۰ درجه را در نظر می‌گیریم و نقطه‌های B_i را روی ضلع‌های این زاویه و به فاصلهٔ برابر $|OA_i|$ از راس نشان می‌گذاریم، به نحوی که نقطه‌های با اندیسِ زوج روی یک ضلع و نقطه‌های با اندیس فرد روی ضلع دیگر زاویه باشند (شکل ۶۱).



شکل ۶۱

به این ترتیب، باید ثابت کنیم:

$$|B_1B_2| + |B_3B_4| + |B_5B_6| < |B_2B_3| + |B_4B_5| + |B_6B_1|$$

ولی این نابرابری، از مجموع سه نابرابری روشن زیر به‌دست می‌آید:

$$|B_1B_2| < |B_1X| + |XB_2|;$$
$$|B_3B_4| < |B_3X| + |XY| + |YB_4|;$$
$$|B_5B_6| < |B_5Y| + |YB_6|$$

۴۲.۸۷. اگر ۹۹۱ را x بنامیم، عبارت عددی مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$(x-2)(x+10)(x+16)+320 =$$
$$= x^3 + 24x^2 - 108x =$$
$$= x(x+6)(x+18) = 991 \times 997 \times 1009$$

سه عدد اخیر، عددهایی اول‌اند و، بنابراین، تجزیه تمام شده‌است.

۴۴.۸۷. *راهنمائی.* الف) در قصر همیشه اتاقی پیدا می‌شود که، اگر آن را ببندیم، قصر به چند بخش تقسیم می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، حداکثر شامل نیمی از اتاق‌های قصر است. نگهبانی در این اتاق می‌گذاریم. بقیهٔ نگهبانان برای بازرسی هر یک از بخش‌ها باقی می‌مانند. اگر به همین ترتیب عمل کنیم، به کمک استقرا به سادگی ثابت می‌شود که n نگهبان، برای دستگیر کردن دزد در قصری که بیش از ۲^n اتاق ندارد، کافی است.

ج) زنجیره‌ای از اتاق‌ها را پیدا کنید که بخش‌های تقسیم شدهٔ قصر به‌وسیلهٔ آن، شامل کمتر از یک‌سوم تعداد همهٔ اتاق‌ها باشد.

۴۷.۸۷. راس‌های مکعب را با دو رنگ سیاه و سفید طوری رنگ می‌کنیم که هیچ یالی، دو راس هم‌رنگ را به هم وصل نکرده باشد. در این صورت، مجموع مورد نظر ما از xy تجاوز نمی‌کند که، در آن، x، مجموع عددهای واقع در راس‌های سیاه و $y = ۱ - x$، مجموع عددهای واقع در راس‌های سفید است. چون $x(۱-x) \leq \frac{۱}{۴}$، پس نابرابری حکم مساله هم برقرار است.

۵۱.۸۷. کارت‌ها را، در حالت اولیه، با عددهای از ۰ تا $۲n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. روشن است که، برای هر سه کارت با شماره‌های پشت سر هم، و مثلاً شماره‌های a، b و c، عدد $a - ۲b + c$ بر $۲n + ۱$ بخش‌پذیر است؛ و این ویژگی، ضمن عمل‌های مورد نظر مساله، به قوت خود باقی می‌ماند. از این‌جا نتیجه می‌شود که شمارهٔ کارت‌های اول و دوم، در رابطه با دیگر کارت‌ها معین می‌شود. از آن‌جا که، از این زوج کارت‌ها، به تعداد $۲n(۲n + ۱)$ وجود دارد، وضع استقرار کارت‌ها هم، بیش از این تعداد حالت نخواهد داشت.

۵۴.۸۷. $x_۰$ را طوری در نظر می‌گیریم که داشته‌باشیم: $g(x_۰) = x_۰$.

فرض می‌کنیم:

$$x_۱ = f(x_۰), x_۲ = f(x_۱), \dots$$

در این صورت، از یک طرف $g(x_n) = x_n$ (برای هر n)، و از طرف دیگر، به دلیل صعودی بودن تابع $f(x)$، $\{x_n\}$ دنباله‌ای یکنوا است. دنبالهٔ یکنوا و کران‌دار $\{x_n\}$، حدی دارد که آن را a می‌نامیم که می‌توان آن را به عنوان «نقطهٔ بی‌حرکت» برای f و g در نظر گرفت.

۵۶.۸۷. *راهنمائی.* با استقرای روی t ثابت کنید. همچنین از این مطلب استفاده کنید که، اگر t جملهٔ پشت سر هم دنبالهٔ مفروض، جملهٔ بعد از خود در دنباله را معین کنند، این دنباله متناوب است.

۶۰.۸۷. زیرمجموعه‌ها را با حرف‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_s نشان می‌دهیم. برای هر k، از ۱ تا m، مجموعهٔ C_k از زنجیرهٔ زیرمجموعه‌های به‌صورت

$$B_۱ \subset B_۲ \subset \dots \subset B_m = \{۱, ۲, \dots, m\}$$

را در نظر می‌گیریم که، در آن، هر B_i درست شامل i عضو است، و مجموعهٔ B_{a_k} بر A_k منطبق است. روشن است که تعداد چنین زنجیره‌هایی، برابر است با حاصل‌ضرب تعداد زنجیره‌های به‌صورت

$$B_۱ \subset B_۲ \subset \dots \subset B_{a_k} = A_k$$

در تعداد زنجیره‌های به صورت

$$A_k = B_{a_k} \subset B_{a_k+۱} \subset \dots \subset B_m$$

که، به ترتیب، برابرند با $a_k!$ و $(m - a_k)!$. چون بنابه فرض، مجموعه‌های نخستینِ A_k، هیچ کدام شامل دیگری نیست، پس مجموعه‌های C_k، دو

به دو، اشتراکی ندارند و، بنابراین، تعداد عضوها در اجتماع آن‌ها، که برابر $\sum a_k!(m-a_k)!$ است، از تعداد همهٔ زنجیره‌ها، که برابر $m!$ است، تجاوز نمی‌کند. از آن‌جا

$$\sum_{k=1}^{s} a_k!(m-a_k)! \leq m! \Rightarrow \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{\binom{m}{a_k}} \leq 1$$

۱.۸۸. در پایان کار، باید عدد واقع در خانهٔ مرکزی، برابر با مجموع عددهای چهار خانهٔ گوشه‌ای باشد.

۳.۸۸. *پاسخ*. بله، می‌توان؛ به این ترتیب:

$$51, 1, 52, 2, 53, \ldots, 49, 100, 50$$

۴.۸۸. *پاسخ*. نه، نمی‌توان. برای هر دو عدد غیر صفر، یا مجموع و یا تفاضل آن‌ها، از لحاظ قدرمطلق، بزرگتر از هر دو عدد مفروض می‌شود.

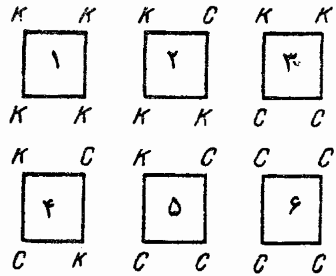
۵.۸۸. *پاسخ*. نه، ممکن نیست. *راهنمائی*. S، مجموع تعداد بخش‌ها با تعداد مهره‌های باقی‌مانده را در نظر بگیرید.

۹.۸۸. اگر $ab-cd=p$، چون a، b، c و d بر p بخش‌پذیرند، پس ab و cd و، درنتیجه $ab-cd$ بر p^2 بخش‌پذیر است، یعنی $p=1$.

۱۰.۸۸. *راهنمائی*. از این حقیقت استفاده کنید که، در مثلث، زاویهٔ بزرگتر روبه‌روی ضلع بزرگتر است.

۱۲.۸۸. *پاسخ*. آغاز کنندهٔ بازی می‌برد. برای این‌که آغاز کنندهٔ بازی برنده شود، باید هر بار در نوبت خود، یا ۱ چوب کبریت و یا ۲ چوب کبریت بردارد، به نحوی که چوب کبریت‌های باقی‌مانده، به تعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد.

۱۸.۸۸. همهٔ گونه‌های ممکن رنگ را برای چهار راس یک خانه در نظر می‌گیریم (شکل ۶۲؛ در این شکل، K نماینده قرمز و C نمایندهٔ



شکل ۶۲

آبی است). اکنون، تعداد پاره‌خطهای راستی را که دو انتهای قرمز دارند، برای همهٔ خانه‌ها محاسبه می‌کنیم. هر پاره‌خط راست، در درون جدول، دو بار به حساب می‌آید و در کنار جدول، از این پاره‌خطهای راست، ۴۱ عدد داریم، یعنی کل مجموع، عددی فرد است. از طرف دیگر، هر خانه‌ای که از گونهٔ ۱، ۲، ۴، ۵ یا ۶ باشد، عدد زوجی به مجموع ما وارد می‌کند و تنها نمونهٔ ۳، به مجموع به تعدادی فرد اضافه می‌کند. بنابراین، از گونهٔ ۳، باید به تعداد فرد داشته باشیم، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۹.۸۸. *راهنمائی.* تحقیق کنید که

$$(a-۱)(b-۱)(c-۱)=۰$$

۲۱.۸۸. *پاسخ.* مثلاً عدد ۱۱۱...۱۱۹۹۵۱۲۵ (عدد، با ۹۴ رقم برابر واحد آغاز شده‌است).

۲۳.۸۸. *پاسخ.* بله، درست است. اگر هر صبح، هر دو نفری که در یک آپارتمان زندگی می‌کنند، ازهم جدا شوند، آن‌وقت، بعد از جابه‌جایی، تعداد کل جدا شدن‌ها، کاهش می‌یابد. اگر در یکی از روزها، به تعداد $n \geq ۱۵$ نفر از هم جدا شوند و به آپارتمان‌هایی بروند که، به ترتیب، $a_۱$،

a_2، ...، a_n ساکن دارند، آن‌وقت تعداد کل جدا شدن‌ها، به اندازهٔ

$$\frac{1}{2}n(n-1)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)\geq 105-104=1>0$$

کاهش می‌یابد، زیرا

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leq 119-n\leq 104$$

۲۴.۸۸. *راهنمائی.* از این نابرابری استفاده کنید:

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\geq\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$$

۲۷.۸۸. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$$

با توجه به رابطهٔ بین a، b و c داریم:

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0,\quad f(b)=(b-a)(b-c)<0,$$
$$f(c)=(c-a)(c-b)>0$$

بنابراین، در هریک از بازه‌های $[a,b]$ و $[b,c]$، دست کم یک ریشهٔ معادله وجود دارد. ولی معادلهٔ درجه دوم، بیش از دو ریشه ندارد و، بنابراین، به ناچار، یکی از ریشه‌ها بین a و b و دیگری بین b و c قرار دارد.

۲۹.۸۸. *راهنمائی.* ثابت کنید، هر حاصل‌ضرب به صورت $a^ib^jc^k$ که در آن، i و j و k، عددهای درست غیر منفی و مجموع آن‌ها برابر ۱۳ باشد، بر abc بخش‌پذیر است.

۳۴.۸۸. *پاسخ.* $g(x+f(y))=\frac{x}{2}+y+\frac{5}{2}$.

۳۵.۸۸. پاسخ. نه، نمی‌توان. در واقع، اگر حاصل‌ضرب هر دو عدد مجاور، مجذور کامل باشد، باید در تجزیهٔ این عددها به عامل‌های اول، توان عدد ۲، عددی زوج باشد، درحالی که بین ۱۰۰ عدد طبیعی پشت سر هم، عددهای به صورت $۲k + ۱$ و $۴k + ۲$ وجود دارد.

۳۶.۸۸. پاسخ. $\sqrt{\frac{۷}{۳}} + ۱$.

۳۹.۸۸. مثلاً، عددهای ۴۰۰۱ و ۸۰۰۱ از این گونه‌اند. تفاضل هر دو توانی از آن‌ها بر ۴۰۰۰ بخش‌پذیر و، درضمن، مخالف صفر است.

۴۰.۸۸. اثبات را با استقرای روی n، تعداد شهرها، می‌دهیم. درستی حکم، برای $n = ۲$ روشن است. به‌ازای $n > ۲$، با آغاز از یک شهر، حرکت می‌کنیم. روشن است که، دیر یا زود، به شهری می‌رسیم که قبلاً در آن بوده‌ایم، یعنی دوری از $k > ۲$ شهر به دست می‌آید. این k شهر را، همراه با جاده‌های مربوط به آن‌ها، «شهر بزرگ» می‌نامیم و دستگاهی از $n + ۱ - k$ شهر به دست می‌آوریم که به یاری $۲n - k - ۱$ جاده به هم مربوط شده‌اند (اگر در داخل «شهر بزرگ»، دست‌کم یک جاده وجود داشته باشد که داخل دور نشده‌است، آن‌وقت همین جاده را می‌توان بست). چون

$$۲n - k - ۱ \geq ۲(n + ۱ - k) - ۱$$

تنها این می‌ماند که از فرض استقرا استفاده کنیم.

۴۱.۸۸. از شرط می‌توان نتیجه گرفت که چهارضلعی $AKLD$ محاطی است. بنابراین

$$\widehat{ABL} + \widehat{AKL} = ۱۸۰^\circ$$

در این صورت روشن است که

$$\widehat{BKL} + \widehat{BCL} = ۱۸۰^\circ$$

یعنی چهارضلعی $BCLK$ هم محاطی است. از آن‌جا

$$\widehat{ABL} = \widehat{LCK} \Rightarrow \widehat{BLA} = \widehat{CKD}$$

۴۲.۸۸. *پاسخ.* بازی کن دوم برنده می‌شود.

۴۳.۸۸. به هر واژهٔ $A = a_۱a_۲\ldots a_n$، عدد

$$T(A) = a_۱ + ۲a_۲ + \ldots + na_n$$

را متناظر می‌کنیم. خودتان آزمایش کنید که، با انجام عمل‌های یاد شده، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $T(A)$ بر ۳ تغییر نمی‌کند. ولی چون

$$T(۱۰) = ۱ \text{ و } T(۰۱) = ۲$$

بنابراین، نمی‌توان یکی را از دیگری به‌دست آورد.

۴۴.۸۸. *پاسخ.* با آن که به نظر عجیب می‌آید، چنین مجموعه‌ای از درختان وجود دارد.

۴۶.۸۸. A را نخستین مهره‌ای می‌گیریم که به خانهٔ اولیهٔ خود برگشته باشد. در این صورت در لحظهٔ قبل از آن، هیچ کدام از مهره‌ها در خانهٔ اولیهٔ خود نبوده‌اند. در واقع، همهٔ آن‌ها، باید از خانهٔ خود بیرون رفته باشند تا A بتواند از همهٔ خانه‌ها بگذرد. از طرف دیگر، هیچ یک از آن‌ها، قبل از A، به خانهٔ خود برنگشته‌اند.

۴۷.۸۸. *راهنمائی.* از این نابرابری استفاده کنید:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} \geq \frac{۴}{x+y}$$

۵۰.۸۸. *راهنمائی.* k را بزرگترین عددی می‌گیریم که بی‌نهایت بار در دنباله تکرار شده‌باشد؛ در ضمن N را چنان عدد طبیعی فرض می‌کنیم که،

به شرط $N \le i$ داشته باشیم $a_i \le k$. هر $m > N$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $a_i = k$. در این صورت، m دورهٔ تناوب دنبالهٔ $\{a_i\}$ می‌شود، یعنی $a_{i+m} = a_i$ به‌ازای هر $i > N$.

۵۳.۸۸. *پاسخ.* $۱۰۰\sqrt{۲}$ متر. چون حلزون ۹۹ چرخش دارد، می‌توانیم مسیر او را به ۱۰۰ بخش تقسیم کنیم، به نحوی که هر بخش شامل تعداد درستی متر باشد (برخی از بخش‌ها، ممکن است طولی برابر صفر داشته باشند)؛ حلزون، ضمن حرکت در طول آن‌ها، تنها به راست می‌چرخد و یا هیچ چرخشی ندارد. به سادگی دیده می‌شود که، فاصلهٔ بین آغاز و انتهای چنین بخشی از $\sqrt{۲}$ تجاوز نمی‌کند؛ بعضی فاصلهٔ بین آغاز و انتهای تمامی مسیر از $۱۰۰\sqrt{۲}$ تجاوز نمی‌کند. جست‌وجوی نمونه‌ای برای این فاصله را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۵۴.۸۸. *پاسخ.* $f(۵۰۰) = \frac{۱}{۵۰۰}$. در واقع

$$f(۹۹۹) = f(f(۱۰۰۰)) = \frac{۱}{f(۱۰۰۰)} = \frac{۱}{۹۹۹}$$

بنابراین تابع، مقدارهای ۹۹۹ و $\frac{۱}{۹۹۹}$ را قبول می‌کند، یعنی عدد a را می‌توان پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم: $f(a) = ۵۰۰$. ولی در این صورت

$$f(۵۰۰) = f(f(a)) = \frac{۱}{f(a)} = \frac{۱}{۵۰۰}$$

۵۸.۸۸. *راهنمائی.* از این پیش قضیه استفاده کنید: اگر عبارت $P(x) + kP'(x)$ همیشه غیر منفی باشد، آن‌وقت $P(x)$، برای هر x، غیر منفی است.

۶۰.۸۸. $A_۱A_۲\ldots A_n$ را چند ضلعی مفروض M می‌گیریم؛ ضلع iام این چندضلعی، عبارت است از $A_iA_{i+۱}$ $(A_{n+۱} \equiv A_۱)$. بردارهای

$\vec{v}_i = A_i\overrightarrow{A_{i+1}}$ را در نظر می‌گیریم و گروه بردارهای $\vec{v} = \overrightarrow{A_{i+1}A_i}$ — را هم به آن‌ها اضافه می‌کنیم. اکنون، این بردارها را، با آغاز از مبداء مختصات در نظر می‌گیریم و، با آغاز از $\vec{v}_1$، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_{2n}$$

به انتهای این بردارها توجه می‌کنیم:

$$\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2; \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_{2n} = 0$$

به سادگی دیده می‌شود که این‌ها، $2n$ ضلعی کوژ N را، که نسبت به مرکز خود متقارن است، تشکیل می‌دهند؛ در ضمن، هر ضلع چندضلعی M متناظر است با دو ضلع برابر و متوازی در چندضلعی N؛ از این گذشته، طول تصویر N بر هر خط راست، دو برابر طول تصویر M بر همان خط راست است. از این‌جا نتیجه می‌شود که، عبارت $\sum \frac{a_i}{d_i}$ برای N، همان مقدار این عبارت را برای M به ما می‌دهد. بنابراین، کافی است نابرابری مورد نظر را، برای چند ضلعی کوژ N، که تقارن مرکزی دارد، ثابت کنیم. فرض کنید:

$$N = B_1 B_2 \ldots B_{2n}$$

تصویر N را بر امتداد عمود بر ضلع iام N، با h_i نشان می‌دهیم. در این صورت $d_i h_i \geq S(N)$ (S نشانهٔ مساحت است) و به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{d_i} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i h_i}{S(N)} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{4S(OB_iB_{i+1})}{S(N)} = 4$$

(O، مرکز تقارن N است).

سمت چپ نابرابری، به این ترتیب ثابت می‌شود:

$$\sum \frac{a_i}{d_i} \geq \frac{\sum a_i}{D}$$

که در آن D، قطر چندضلعی، یعنی بزرگترین فاصلهٔ بین راس‌هاست. چون $\sum a_i$ محیط است، روشن است که $\sum a_i > ۲D$.

۱.۸۹. *پاسخ.* ۳۳ مساله.

۲.۸۹. در واقع، اگر به‌جای هر یک از سه رقم سمت چپ شمارهٔ بلیت شانس، اختلاف آن را از ۹ بنویسیم، آن‌وقت، مجموع رقم‌های عدد شش‌رقمی برابر ۲۷ می‌شود و برعکس.

۳.۸۹. *راهنمائی.* ثابت کنید، اختلاف بین تعداد قطعه‌های نوع اول و تعداد قطعه‌های نوع دوم، باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد (در واقع، این اختلاف، باید برابر ۴ باشد).

۵.۸۹. *پاسخ.* ۱۶۶۶۶۷ و ۳۳۳۳۳۴.

۶.۸۹. *پاسخ.* بازی‌کن دوم می‌برد. برای این منظور، باید حرکت بازی‌کن اول را، در خانه‌ای که نسبت به خانهٔ بازی‌کن اول، قرینهٔ مرکزی است، تکرار کند؛ درضمن، اگر بازی‌کن اول از خط استفاده کرده است، او از نقطه استفاده کند و برعکس، تا آن‌جا که برنده شود. درستی این برنامه‌ریزی را می‌توانید روی جدولی با بُعد کوچکتر آزمایش کنید.

۱۱.۸۹. *پاسخ.* نه نمی‌توان. وجهی از ستون را در نظر می‌گیریم که، ضلع (۱۰۱ – ۱) هیچ کدام از ۱۰۱ ضلعی‌ها روی آن نباشد: دو وجه از ۱۰۱ وجه، چنین‌اند. مجموع عددها، روی دو یال قائم چنین وجهی، در یکی فرد و در دیگری زوج است و نمی‌توانند برابر باشند.

۱۲.۸۹. *پاسخ.* $۱۹۴۴ = ۲^۳ \times ۳^۵$.

۱۳.۸۹. چون مجموع مجذورهای عددها، بعد از انجام این عمل، افزایش پیدا می‌کند، بنابراین، گروه عددهای اولیه، تکرار نمی‌شود.

۱۴.۸۹. روشن است که، تعداد دروغ‌گوها، برابر است با تعداد فیزیک‌دان‌ها، یعنی n. از طرف دیگر، تعداد دروغ‌گوها، عددی زوج است.

۱۶.۸۹. اگر عددهای x، y و z، از لحاظ قدرمطلق، از واحد کوچکتر نباشند، آن‌وقت $x^۲ + y^۲ + z^۲$ از $x + y + z$ بزرگتر و درستی نابرابری واضح است. ولی اگر یکی از عددها، و مثلاً x، قدر مطلقی کوچکتر از واحد داشته باشد، آن‌وقت

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq y^۲ + z^۲ \geq (yz| \geq |xyz|$$

۱۸.۸۹. *پاسخ.* بله، کتاب‌دار می‌تواند این کار را انجام دهد. از روش استقرا استفاده کنید.

۱۹.۸۹. نفر دوم برنده می‌شود. او باید مهره را به گرهی منتقل کند که قرینهٔ آن نسبت به گره مرکزی باشد.

۲۰.۸۹. *پاسخ.* بله، چنین ۱۰۰ عددی وجود دارد. برای این منظور، کافی است ۱۰۰ عدد طبیعی دلخواه انتخاب و، سپس، همهٔ آن‌ها را، در عددی ضرب کنیم که برابر است با حاصل‌ضرب همهٔ مجموع‌های پنج به پنجِ این ۱۰۰ عدد.

۲۲.۸۹. فرض می‌کنیم $b = a + k$. در این صورت

$$a^۲ + ۱ = (a + k)(a - k) + k^۲ + ۱$$

بنابراین، $k^۲ + ۱$، باید بر $a + k = b$ بخش‌پذیر باشد.

اکنون اگر $\sqrt{a} \geq k$ فرض کنیم، آن‌وقت

$$k^۲ \leq a \text{ و } k^۲ + ۱ \leq a + ۱ < b$$

($b \neq a + ۱$، زیرا $a^۲ + ۱$ بر $a + ۱$ بخش‌پذیر نیست). می‌بینید، با این فرض، به تناقض رسیدیم.

۲۴.۸۹. فرض می‌کنیم، همهٔ مهره‌ها در k ستون و، به‌ترتیب، برابر a_1، a_2، ...، a_k مهره باشند. حاصل ضرب را، برای هر مهره‌ای که در ستون اول قرار دارد، محاسبه می‌کنیم: مجموع این حاصل ضرب‌ها، از $a_1 m$ تجاوز نمی‌کند؛ به همین ترتیب، برای بقیهٔ ستون‌ها. بنابراین، مجموع همهٔ حاصل ضرب‌ها از

$$a_1 m + a_2 m + \ldots + a_k m = m^2$$

تجاوز نمی‌کند و، روشن است که، اگر تعداد مهره‌هایی که برای آن‌ها، حاصل‌ضرب کمتر از $10m$ نیست، بیشتر از $\frac{m}{10}$ باشد، این رابطه به هم می‌خورد.

۲۵.۸۹. اگر $k = 1989$، تعداد شرکت کنندگان دو نفر، و اگر $k = 1988$، تعداد شرکت کنندگان، یا ۲ نفر و یا ۳ نفر بوده است.

تعداد شرکت کنندگان در مسابقه را n می‌گیریم و فرض می‌کنیم، اولی A امتیاز، دومی Ap امتیاز، ...، و برندهٔ مسابقه Ap^n امتیاز آورده باشد. قهرمان مسابقه، نمی‌تواند بیشتر از $2k(n-1)$ امتیاز و، همهٔ دیگران، کمتر از $k(n-1)(n-2)$ امتیاز آورده باشند. با مقایسهٔ این دو عدد معلوم می‌شود که، به ازای $n \geq 4$

$$2k(n-1) \leq k(n-1)(n-2)$$

از طرف دیگر $Ap^{n-1} > A + Ap + \ldots + Ap^{n-2}$. بنابراین $n < 4$. از این گذشته، به ازای $p \geq 3$، تعداد امتیازهای قهرمان از دو برابر مجموع امتیازهای همهٔ بقیه تجاوز می‌کند که، به‌ازای $n = 3$ ممکن نیست. از این‌جا روشن می‌شود که $n = 3$، تنها به‌ازای $p = 2$ امکان دارد، یعنی بازی‌کنان به تعداد A، $2A$ و $4A$ امتیاز گرفته باشند؛ در این صورت، مجموع کل امتیازها، برابر $6k$، باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه، باید k بر ۷

بخش‌پذیر باشد. عدد ۱۹۸۹ بر ۷ بخش‌پذیر نیست و، بنابراین $n = ۲$، تنها جواب ممکن برای این حالت است. پیدا کردن مثالی برای $k = ۱۹۸۸$ و $n = ۳$، به هیچ وجه دشوار نیست.

۲۶.۸۹. *پاسخ.* تنها وقتی ممکن است که n، عددی زوج باشد. همهٔ نقطه‌هایی را در نظر می‌گیریم که با عدد ۱ مشخص شده‌اند، از هریک از این نقطه‌ها، دو خط راست عبور می‌کند و، بنابراین، n باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد.

اکنون، فرض کنید، n عددی زوج است. خط‌های راست را، با عددهای از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و برای هر i و j، که از n کوچکترند، در نقطهٔ برخورد iامین با jامین خط راست، باقی‌ماندهٔ مثبت حاصل از تقسیم $i + j$ بر n را می‌نویسیم (یعنی، اگر باقی‌مانده‌ای نداشته باشد، به جای ۰، عدد n را می‌نویسیم). پهلوی نقطهٔ برخورد nامین خط راست با iامین خط راست، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد $۲i$ بر n را می‌نویسیم.

۳۰.۸۹. *پاسخ.* این محیط برابر است با $\frac{۱}{۱ + \sin ۱۸^\circ} - ۱$.

۳۱.۸۹. *پاسخ.* بله، می‌توان.

۳۷.۸۹. عملی را در نظر بگیرید که، هر دو عدد طبیعی را، به بزرگترین بخشیاب مشترک فرد آن‌ها تبدیل کنید.

۳۸.۸۹. مجموع این عددها، برابر صفر است.

۴۱.۸۹. *راهنمائی.* ثابت کنید، دو وجهی که به کوتاه‌ترین یال جانبی متصل‌اند، با هم برابرند.

۴۴.۸۹. اگر از ویژگی‌های الف) و ب) پشت سر هم استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(A * B) * C = -(C * (A * B)) = -((C * A) * B) =$$
$$= B * (C * A) = -(A * (B * C)) = -((A * B) * C)$$

از آن‌جا $(A * B) * C = 0$. ولی بنابر شرط، $A * B$ می‌تواند هر مقدار درست X و، از جمله $X * C$ را بپذیرد که مواجه با تناقض می‌شویم.

۸۹.۴۷. $t > 1$ را ریشهٔ دوم عددی می‌گیریم که جوابی از معادلهٔ درجه دوم مفروض است. در این صورت

$$at^4 + (c-b)t^2 + (e-d) = 0 \Rightarrow at^4 + ct^2 + e = bt^2 + d$$

سمت چپ این برابری را F و سمت راست آن را G می‌نامیم $(F = G)$ و فرض می‌کنیم:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

در این صورت به دست می‌آید:

$$f(\pm t) = F \pm tG$$

چون $t > 1$، بنابراین، این دو مقدار، علامت‌های متفاوتی دارند، یعنی چندجمله‌ای $f(x)$، در بازهٔ $[-t, t]$ دارای ریشه است.

۸۹.۴۸. *راهنمائی.* مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O بنامید و ثابت کنید، چهارضلعی $ABOC$، محاطی است.

۸۹.۵۰. فرض می‌کنیم بتوان چنین جدولی تشکیل داد. کمترین مجموع عددها در سطرها را 2^a می‌گیریم. در این صورت

$$2^a \geq 1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

از طرف دیگر، مجموع همهٔ عددهای جدول، یعنی $\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$، باید بر 2^a بخش‌پذیر باشد. اگر k عددی فرد باشد، آن‌وقت عدد $\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$

هم فرد است؛ ولی اگر k زوج باشد، $\frac{۱}{۲}k^۲(k^۲ + ۱)$ هم زوج است و، بنابراین ۲^a باید $\frac{۱}{۲}k^۲$ را بشمارد، ولی

$$\frac{۱}{۲}k^۲ < \frac{۱}{۲}k(k + ۱) \leq ۲^a$$

۸۹.۵۱. فرض می‌کنیم این طور نباشد. در این صورت باید، در هر لحظهٔ زمانی، سطر و ستونی وجود داشته باشد که به وسیلهٔ مهره‌ها پر شده باشند و، درضمن، تمامی مهره‌های این صلیب از یک رنگ باشند. ولی مهره‌ای از این صلیب را (که فرض می‌کنیم، همهٔ آن‌ها به رنگ سفید باشند) نمی‌توان تغییر داد و، این صلیب، باید همچنان سفید باقی بماند. تناقض.

۸۹.۵۲. *پاسخ.* ۱۸.

۸۹.۵۳. آغازکنندهٔ بازی، برنده می‌شود. او باید، در هر حرکت خود؛ یک واحد به عددی که روی تخته نوشته شده‌است، اضافه کند.

۸۹.۵۴. *پاسخ.* ۵۶ واژه. *راهنمائی.* همهٔ واژه‌های این قبیله را، به صورت

$$۱۱ \cdots ۱۰۰ \cdots ۰۱۰۰ \cdots ۰$$

در نظر بگیرید و ثابت کنید، هر واژه را می‌توان به این صورت تبدیل کرد. برای اثبات این‌که، این واژه‌ها با هم فرق دارند، ازمقدار زیر، که برای هر واژهٔ قبیله معین است، استفاده کنید: تعداد صفرهایی که در سمت راست آن‌ها، به تعدادفردی واحد قرار دارد. ثابت کنید، با انجام عملی که در صورت مساله گفته شده‌است، این تعداد تغییر نمی‌کند.

۸۹.۵۷. *راهنمائی.* از این مطلب استفاده کنید که عدد $۱۰^۷ - ۱$، بر ۲۳۹ بخش‌پذیر است.

۸۹.۵۸. *راهنمائی.* از این نابرابری استفاده کنید:

$$(۱ - x^۲)(۱ - y) + (۱ - y^۲)(۱ - z) + (۱ - z^۲)(۱ - x) \geq ۰$$

۸۹.۶۰. *راهنمائی*. با آزمایش، قانع شوید که، عددهای واقع در چهار سطر اول، عددهایی درست‌اند. سپس، حکم مساله را به یاری استقرا روی شمارهٔ سطر، ثابت کنید.

۸۹.۶۱. دنبالهٔ (b_k) را، به این ترتیب در نظر می‌گیریم که

$$b_۱ = \operatorname{arctg} a_۱, \quad b_{k+۱} = b_k + \operatorname{arctg}\frac{۱}{k}$$

در این صورت، به کمک دستور مربوط به تانژانت مجموع دو کمان، به دست می‌آید:

$$a_k = \operatorname{tg} b_k \text{ و } b_{k+۱} = b_k + \operatorname{arctg}\frac{۱}{k}$$

تنها این می‌ماند ثابت کنیم، دنبالهٔ (b_k)، به طور نامحدود، صعودی است و اختلاف بین دو جملهٔ پشت سر هم آن، به سمت صفر میل می‌کند.

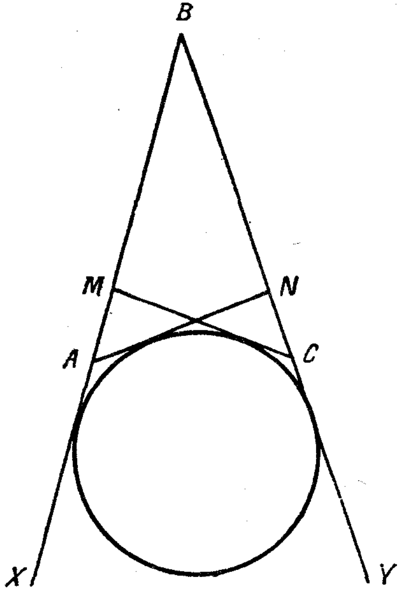
۸۹.۶۲. *راهنمائی*. برابری‌های

$$|AM| + |AN| = |CM| + |CN|,$$
$$|AO| + |AB| = |CO| + |CB|$$

به معنای آن است که در «چهارضلعی» $XAOCY$ (شکل۶۳ را ببینید) می‌توان دایره‌ای محاط کرد، یعنی دایرهٔ «محاطی بیرونی» برای چهار ضلعی $OMBN$ (یا $ABCO$) وجود دارد.

۸۹.۶۳. *پاسخ*. برای هر k که از ۱۰۰ کوچکتر باشد و، درضمن، عدد $k + ۱$ بر ۸ بخش‌پذیر نباشد.

۸۹.۶۴. *راهنمائی*. ابتدا مربع $\frac{n}{۲} \times \frac{n}{۲}$ را، با تمایل ۴۵ درجه در نظر می‌گیریم که در مثلث ما محاط باشد. ثابت می‌کنیم، کمتر از $\frac{n}{۴}$ عدد مختلف، در آن نیست. برای این منظور، ثابت می‌کنیم، برای هر چهار عدد



شکل ۶۳

a، b، c و d از این مربع، که در برخورد دو سطر و دو ستون مربع قرار دارند (a روی b و c، d زیر b و c)، نابرابری $ad < bc$ برقرار است. سپس توجه می‌کنیم، اگر در مربع، کمتر از $\frac{n}{۴}$ عدد مختلف باشد، به ناچار دو سطر مختلف و دو ستون مختلف مربع پیدا می‌شود که، برای چهار عددی که در نقطه‌های برخورد آن‌ها قرار دارند، باید، آن دو عددی که در یک سطر واقع‌اند، برابر باشند. ولی این نتیجه، ویژگی را که در بالا از آن یاد کردیم، نقض می‌کنند.

۶۹.۸۹. پاسخ. سه جواب. *راهنمائی.* از محدب بودن تابع سمت چپ برابری، در بازهٔ [۰, ۳] استفاده کنید.

۷۰.۸۹. عدد طبیعی و ثابت k، و عدد طبیعی دلخواه n را در نظر

می‌گیریم. در این صورت

$$|a_{n+1} + a_k - a_{n+k+1}| < \frac{1}{n+k+1};$$

$$|a_n + a_{k+1} - a_{n+k+1}| < \frac{1}{n+k+1}$$

بنابراین

$$|a_{n+1} + a_k - a_n - a_{k+1}| \leq \frac{2}{n}$$

یعنی، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$|(a_{n+1} - a_n) - (a_{k+1} - a_k)| \leq \frac{2}{n}$$

اگر n را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، معلوم می‌شود که، در آن صورت، حد دنبالهٔ $\{a_{n+1} - a_n\}$ برابر $a_{k+1} - a_k$ می‌شود. به همین ترتیب، برای هر عدد طبیعی m، حد دنباله، برابر $a_{m+1} - a_m$ می‌شود. از آن‌جا که، حد دنباله تغییر نمی‌کند، بنابراین، باید برای هر m و k داشته باشیم:

$$a_{m+1} - a_m = a_{k+1} - a_k$$

یعنی، دنبالهٔ (a_n)، یک تصاعد حسابی است.

۸۹.۷۱. *پاسخ.* نفر دوم، بازی را می‌برد. او از قبل، عددهای از ۰ تا ۹۹۹ را، به ۱۲۵ بخش و هر بخش شامل ۸ عدد پشت سر هم تقسیم می‌کند؛ سپس، به این ترتیب عمل می‌کند: بعد از آن که بازی‌کن اول نخستین عدد خود را روی تختهٔ سیاه نوشت، او توجه می‌کند که، این عدد، مربوط به کدام گروه از گروه‌های ۸تایی است، آن‌وقت، بازی‌کن دوم، کوچکترین عدد از همان گروه ۸تایی را روی تخته می‌نویسد (البته، کوچکترین عددی را که می‌تواند؛ برای این منظور، باید ۳ یا ۴ یا ۵ چوب کبریت بردارد). از

این گروه ۸ عدد، دو عدد روی تخته نوشته شده‌است. دومی باید ۶ عدد باقی‌مانده را به سه دستهٔ دو عددی (به ردیف) تقسیم کند (در ذهن خود) و اگر اولی، عددی ازاین ۶ عدد را روی تخته نوشت، دومی، جفت این عدد را (در دسته‌های دو عددی) بنویسد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد، چوب کبریت‌هایی که دومی، در حرکت اول خود برداشته است، برای حرکت بعدی او (وقتی در داخل همان گروه ۸ عددی قبلی باشد) کافی است (روشن است که دومی، چوب کبریت‌هایی را که به دست آورده است، باید جداگانه بگذارد و تنها وقتی از آن‌ها استفاده کند که، حرکت اولی، در درون گروه ۸ عددی قبلی باشد). اگر اولی، ضمن حرکت خود، به گروه ۸ عددی دیگر برود، دومی باید شبیه قبل عمل کند. به این ترتیب، در برابر حرکت اولی، بازی‌کن دوم همیشه دارای پاسخ است و، درنتیجه، برنده می‌شود.

۱.۹۰. مجموع شماره‌های پشت و روی هر برگ، عددی فرد است.

۳.۹۰. نه، نمی‌توان، زیرا عدد ۳۹ را نمی‌توان به مجموع چند عدد برابر ۵ یا ۱۱ تبدیل کرد.

۴.۹۰. آن که بازی را آغاز کند، می‌تواند برنده شود. برای این منظور، کافی است در نوبت حرکت خود، رقم سمت راست عدد را، از خود عدد کم کند.

۶.۹۰. حل مسالهٔ ۱۹.۹۰ را ببینید (پسران را شووالیه و دختران را دروغ‌گو در نظر بگیرید).

۷.۹۰. «جون» در آپارتمان شمارهٔ ۲۱۷ زندگی می‌کند.

۸.۹۰. *پاسخ.* تا ۲۹ صندلی هم می‌تواند اشغال شود.

۹.۹۰. بله، می‌تواند. در واقع، اگر عمل کامپیوتر را با $\rightarrow$ و عمل برنامه‌ریز را با $\Rightarrow$ نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$۱۲۳ \rightarrow ۲۲۵ \rightarrow ۳۲۷ \rightarrow ۴۲۹ \rightarrow ۵۳۱ \Rightarrow ۱۳۵ \rightarrow$$

$\rightarrow ۲۳۷ \Rightarrow ۳۲۷ \rightarrow \ldots$

و به دنبال آن، همان عمل‌ها تکرار می‌شود.

۱۰.۹۰. *راهنمائی.* برابری دو مثلث ADP و BCP را ثابت کنید.

۱۳.۹۰. جدول را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم. اگر مجموع عددها، در این چهار بخش، علامتی یکسان داشته باشند، روشن است که، قدرمطلق مجموع در یکی از آن‌ها، از ۲۵ تجاوز نمی‌کند. اگر دو بخش وجود داشته باشد که، مجموع عددها در آن‌ها (مثلاً a و b) علامت‌های مختلفی داشته باشند، این دو بخش را با زنجیره‌ای از مربع‌های ۲۵ × ۲۵ چنان متصل می‌کنیم که، هر دو مربع مجاور در زنجیره، به وسیلهٔ مستطیل ۲۵ × ۲۴ پوشیده شوند. در این صورت، مجموع عددها در هر دو مربع مجاور زنجیره، بیش از ۵۰ با هم اختلاف پیدا نمی‌کنند. از طرف دیگر، چون a و b، علامت‌های متفاوتی دارند، باید در زنجیره، دو مربع مجاور وجود داشته باشد که، مجموع عددها در آن‌ها، با دو علامت مختلف به‌دست آید. روشن است که در یکی از این مربع‌ها، قدر مطلق مجموع عددها از ۲۵ تجاوز نمی‌کند.

۱۴.۹۰. *راهنمائی.* مجموع شمارهٔ صفحه‌های یک برگ دفترچه، در تقسیم بر ۴، همیشه باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد.

۱۶.۹۰. *پاسخ.* $a = ۱۲$، $b = ۱۳$، $c = ۵۷$.

۱۷.۹۰. دو شهر دلخواه A و B را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، جادهٔ $B \rightarrow A$ وجود نداشته باشد؛ همچنین، شهری مثل C پیدا نشود، به نحوی که بتوان از A به C و، سپس، از C به B رفت (جاده‌های $C \rightarrow A$ و $B \rightarrow C$ وجود نداشته باشد): ۴۰ شهر $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{۴۰}$ را پیدا می‌کنیم که جاده‌هایی از A به طرف آن‌ها کشیده شده‌است؛ همچنین، ۴۰ شهر $B_۱$، $B_۲$، ...، $B_{۴۰}$ که، از آن‌ها، جاده‌هایی به B می‌رود. از

شهرهای A_i، روی هم، ۱۶۰۰ جاده خارج می‌شود. درضمن، تعداد کل جاده‌های بین خود شهرهای A_i، از تعداد ۳۹ × ۲۰، یعنی ۷۸۰ تجاوز نمی‌کند؛ و تعداد جاده‌هایی که، از آن‌ها، به بقیهٔ ۱۹ شهر می‌رود، بیشتر از ۳۸ × ۲۰، یعنی ۷۶۰ نیست. چون

$$۱۶۰۰ > ۱۵۴۰ = ۷۸۰ + ۷۶۰$$

بنابراین، باید جاده‌ای به صورت $A_i \to B_j$ وجود داشته باشد. و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۸.۹۰. سه کُپه و در هر کدام ۳۴ سکه جدا می‌کنیم و وزن اولی با دومی و، سپس، وزن دومی با سومی را مقایسه می‌کنیم. روشن است که، وزن هر سه کُپه، نمی‌تواند با هم برابر باشد. فرض می‌کنیم، در مقایسهٔ اول، وزن‌ها متفاوت و در مقایسهٔ دوم، وزن‌ها برابر درآید و، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، کُپه اول سنگین‌تر باشد. در این صورت، یا در کُپه‌های دوم و سوم، همهٔ سکه‌ها واقعی‌اند، یعنی سکهٔ تقلبی سنگین‌تر از سکهٔ واقعی است؛ و یا در هر یک از کُپه‌های دوم و سوم، یک سکهٔ تقلبی وجود دارد و سکه‌ای سبک‌تر است. تنها این می‌ماند، ببینیم در گروه سوم سکه‌ها، سکهٔ تقلبی وجود دارد یا نه! اگر این ۳۴ سکه را به دو گروه ۱۷ سکه‌ای تقسیم و آن‌ها را با هم مقایسه کنیم، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم. حالت دیگری وجود ندارد.

۱۹.۹۰. چند دروغ‌گو انتخاب می‌کنیم (آنهار را «رهبر» می‌نامیم)، به نحوی که هیچ دو دروغ‌گویِ رهبر با هم آشنا نباشند و، درضمن، هر دروغ‌گویی، دست‌کم یک آشنا بین دروغ‌گویان رهبر داشته باشد. این انتخاب را، به این ترتیب، می‌توان انجام داد: یک دروغ‌گو را در نظر می‌گیریم و او را «رهبر» اعلام می‌کنیم؛ سپس، اگر دست‌کم یک دروغ‌گو پیدا شود که با او آشنا نباشد، او را دومین دروغ‌گوی رهبر اعلام می‌کنیم و غیره. در هر گام،

اگر دست‌کم یک نفر در بین دروغ‌گوها پیدا شود که با هیچ کدام از رهبران انتخابی آشنا نباشد؛ او را هم به گروه دروغ‌گویان رهبر داخل می‌کنیم. روشن است که، تعداد همهٔ دروغ‌گوها، از مجموع

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$$

تجاوز نمی‌کند که، در آن، n تعداد دروغ‌گوهای رهبر، و a_i تعداد دروغ‌گوهای آشنا با iامین دروغ‌گوی رهبر به‌اضافهٔ خود این رهبر است. تعداد شوالیه‌های آشنا با iامین دروغ‌گوی رهبر را b_i می‌نامیم. در این صورت، بنابر شرط مساله $b_i \geq a_i$. همچنین، به سادگی روشن می‌شود که، هیچ شوالیه‌ای، نمی‌تواند با دروغ‌گوی رهبر آشنا باشد، در غیر این صورت، این دو رهبر باید خودشان با هم آشنا باشند. از این‌جا، تعداد همهٔ دروغ‌گوها، از

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n \leq b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n$$

تجاوز نمی‌کند و، این مقدار هم، از تعداد همهٔ شوالیه‌ها تجاوز نمی‌کند.

۲۰.۹۰. پاسخ. ۱۷۰۶. *راهنمائی*. زوج عددهای (m, n) وقتی و تنها وقتی در نابرابری‌ای صورت مساله صدق می‌کنند که، خط راست $y = x\sqrt{۲}$، در صفحهٔ شطرنجی مختصات، خانه‌ای را قطع کند که، نقطهٔ راس چپ و پایین آن، به مختصات (m, n) باشد.

۲۳.۹۰. a را جمله‌ای از یک تصاعد حسابی و d را قدر نسبت آن فرض کنید. در این صورت همهٔ جمله‌هایی از تصاعد که به‌صورت

$$a + ۱۰^k d \text{ و } ۱۰^k > a$$

باشند، مجموع رقم‌های برابر دارند.

۲۴.۹۰. از برابری دو مثلث AHD و ABC، نتیجه می‌شود: $|AH| = |AB|$. از آن‌جا، دو مثلث متساوی‌الساقین ABH و ACD

متشابه می‌شوند و بنابراین

$$\widehat{HCD} = \widehat{BHA} = \widehat{CHK} \Rightarrow |CK| = |HK|$$

چون

$$\widehat{KDH} = ۹۰^\circ - \widehat{HCD} = ۹۰^\circ - \widehat{CHK} = \widehat{KHD}$$

پس $|HK| = |KD|$، یعنی $|CK| = |HK| = |KD|$.

۲۷.۹۰. پاسخ. $a = b = c = ۰$ یا $a = b = c = ۳$.

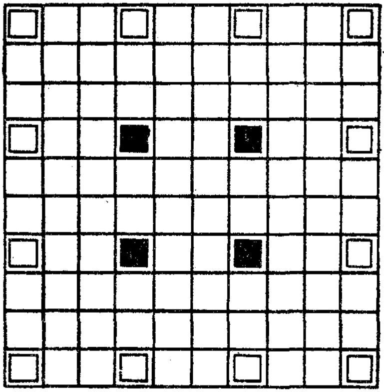
۲۸.۹۰. پاسخ. $|BC| = ۱۳$.

۳۲.۹۰. پاسخ. الف) بله؛ ب) نه. *راهنمائی.* در حالت ب)، ثابت کنید هر راس از هر مربع، روی ضلع مربع بزرگ قرار می‌گیرد. بعد، به مربعی که کوچکترین ضلع را دارد، توجه کنید؛ این مربع، در بین سه مربع «گیر» می‌کند و راهی برای مربع چهارم، که آن را احاطه کرده‌باشد، باقی نمی‌ماند.

۳۵.۹۰. *راهنمائی.* از این مطلب استفاده کنید که $f(n) - f(m)$ بر $n - m$ بخش‌پذیر است و ثابت کنید $f(v)$، هم بر ۲ بخش‌پذیر است و هم بر ۵.

۳۷.۹۰. الف) در جدول، روی هم، ۹ مستطیل ۱۰×۲ را می‌توان به‌صورت افقی قرار داد. بنابراین، در یکی از آن‌ها، دست‌کم، ۷ مربع ۲×۲ واقع است. روشن است، یکی از آن‌ها، به وسیلهٔ دو تای دیگر پوشیده می‌شود.

ب) در مربع، ۱۲ خانهٔ سفید و ۴ خانهٔ سیاه را، آن‌طور که درشکل ۶۴ می‌بینید، نشان می‌گذاریم. در این صورت می‌توانیم ۱۲ مربع انتخاب کنیم که خانه‌های سفید را پوشانده باشند؛ درضمن، در مرز صفحه، درست ۸ خانهٔ پوشیده نشده باقی بماند. اگر ۸ مربع دیگر را در نظر بگیریم که این خانه‌ها را هم بپوشانند، ۲۰ مربع به دست می‌آید که، درست، حاشیه را به پهنای ۲



شکل ۶۴

پوشانده‌اند. اکنون، چهار مربعی را در نظر می‌گیریم که چهار خانهٔ سیاه را پوشانده‌اند. در مربع مرکزی ۶×۶، این‌ها ۱۶ خانه را پوشانده‌اند و، برای ۲۰ خانهٔ دیگر، می‌توانیم مربعی را پیدا کنیم که آن‌ها را هم پوشانده باشد. به این ترتیب، ۲۴تا از مربع‌ها، مربع مرکزی ۶×۶ را پوشانده‌اند. در نتیجه، ۴۴ مربع ۲×۲ داریم که همهٔ صفحه را پوشانده‌اند و یکی از ۴۵ مربع برای ما باقی می‌ماند.

ج) *پاسخ*. این حداقل، برابر است با ۳۹.

۴۲.۹۰. *راهنمائی*. تقسیم چهار وجهی با یال به طول واحد را به ۴ چهار وجهی با یال به طول $\frac{۱}{۲}$ و هشت وجهی با یال به طول $\frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید.

۴۳.۹۰. از اتحاد

$$b(a^۲ + ab + ۱) - a(b^۲ + ab + ۱) = b - a$$

نتیجه می‌شود که $a - b$ باید بر $b^۲ + ab + ۱$ بخش‌پذیر باشد که، تنها برای $a - b = ۰$ ممکن است.

۴۵.۹۰. *راهنمائی.* نقطهٔ $R' = (AP) \cap (BD)$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید، چهارضلعی $CPR'Q$، محاطی است.

۴۷.۹۰. از این قضیه، که به سادگی ثابت می‌شود، استفاده می‌کنیم: مساحت هر مثلثی که، راس‌های آن، در نقطه‌های گرهی شبکهٔ شطرنجی قرار دارد، به صورت $\frac{n}{2}$ بیان می‌شود که، در آن، n عددی طبیعی است. در این صورت

$$|AC| \cdot |AD| \cdot \sin(\widehat{DAC}) \text{ و } |BC| \cdot |BD| \cdot \sin(\widehat{DBC})$$

عددهایی درست‌اند. بنابراین

$$||AC| \cdot |AD| - |BC| \cdot |BD|| = \frac{m}{\sin \alpha}$$

که در آن $\alpha = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$، و m، عدد درستی مخالف صفر است. از همین‌جا، نابرابری مطلوب، ثابت می‌شود.

۴۸.۹۰. *راهنمائی.* حکم را به یاری استقرا روی تعداد جاده‌ها، ثابت کنید.

۴۹.۹۰. *پاسخ.* $p + q - ۱$. پیدا کردن مثال را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم و، در این‌جا، ثابت می‌کنیم، نان شیرینی را به تعداد کمتری بخش، نمی‌توان تقسیم کرد. فرض می‌کنیم، همهٔ $p + q$ مهمان در اتاق جمع شوند (فرض می‌کنیم، بین گروه مهمانان p نفری، کسانی از گروه q نفری نباشند). بخش دلخواهی از نان شیرینی را روی میز می‌گذاریم و دو مهمانی را پشت میز دعوت می‌کنیم که، این بخش را باید، یا ضمن تقسیم به p بخش و یا ضمن تقسیم به q بخش، دریافت کنند. بعد، همه بخش‌هایی را که باید این دو مهمان دریافت کنند، روی میز می‌گذاریم و مهمانانی را که، دست کم یکی از این بخش‌ها را، در یکی از حالت‌های تقسیم، باید به آن‌ها داد، پشت

میز دعوت می‌کنیم و غیره. به سادگی دیده می‌شود که، اگر k نفر پشت میز نشسته باشند، روی میز، بیش از $k+1$ بخش از نان شیرینی وجود ندارد. از این‌جا معلوم می‌شود که، در پایان کار، همهٔ مهمانان پشت میز نیستند؛ و این به معنای آن است که، در پایان این روند، بخشی از شیرینی روی میز است (و نه تمامی شیرینی!) که شامل چند بخش p قسمتی و هم چند بخش q قسمتی است که، با توجه به اول بودن p و q نسبت به هم، ممکن نیست.

۹۰.۵۵. *پاسخ*. بله، می‌توان. *راهنمائی*. ۲۰ عدد درستِ x_1، x_2، ...، x_{20} را طوری انتخاب کنید که تفاضل‌های $x_2 - x_1$، $x_3 - x_2$، ...، $x_1 - x_{20}$، درست همان گروه عددهایی را بدهند که، روی محیط دایره واقع‌اند. ببینید، تبدیلی که در صورت مساله، از آن سخن رفته است، چه تاثیری بر گروه عددهای $\{x_k\}$ می‌گذارد؟

۹۰.۵۶. *پاسخ*. ۱۲۴ بار. *راهنمائی*. همهٔ تبدیل جلدها را، به «دورها» تقسیم کنید. عمل جابه‌جا کردن جلدها را از دو «دور» مختلف، «وصل» و عمل جابه‌جا کردن جلدها را از یک دور، «فصل» می‌نامیم. ثابت کنید، حداکثر با ۲۵ عمل «وصل» و حداکثر ۹۹ عمل «فصل»، می‌توان جلدها را به ردیف خود گذاشت. مثال برای حالتی که نتوان با کمتر از ۱۲۴ جابه‌جایی، عمل مرتب کردن جلدها را انجام داد، چنین است: یک دور به طول ۵۰، شامل جلدهای با شماره‌های زوج، و ۲۵ دور از شماره‌های فرد و هر دور به طول ۲.

۹۰.۵۷. با بُرهان خُلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید، عددهای x_1، x_2، ...، x_m وجود دارند، به نحوی که $f(x_k)$، به‌ازای هر k از ۱ تا m، بر a_k بخش‌پذیر نیست. این وضع، به معنای آن است که عددهای $d_k = p_k^{\alpha^k}$ پیدا می‌شود (p_kها، عددهایی اول‌اند)، به نحوی که a_k بر d_k بخش‌پذیر، ولی $f(x_k)$ بر d_k بخش‌ناپذیر است. اگر بین این عددها، توان‌هایی از یک عدد اول باشند، آن وقت، همه را، به جز کوچکترین آن‌ها، کنار می‌گذاریم؛

زیرا اگر $f(x)$ بر آن بخش‌پذیر نباشد، بر بقیه هم بخش‌پذیر نیست. به این ترتیب، عددهای d_1، d_2، ...، d_s را خواهیم داشت که، دو به دو، نسبت به هم اول‌اند. بنابر قضیهٔ معروف چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها، عدد درست n پیدا می‌شود که، برای هر k از ۱ تا s، نسبت به مُدول d_k، به همان باقی‌مانده‌هایی می‌رسد که x_k پیدا می‌کند. اکنون به این قضیه توجه می‌کنیم: $f(m) - f(n)$ بر $m - n$ بخش‌پذیر است (توجه کنیم: این قضیه، زمانی درست است که چندجمله‌ای، ضریب‌های درست داشته باشد. در حالتی که ضریب‌های چندجمله‌ای گویا باشند، ولی چندجمله‌ای به ازای عددهای درست، مقدارهای درست را قبول کند، در حالت کلی و همیشه، درست نیست). با استفاده از این قضیه، معلوم می‌شود که $f(n)$، حتی به یکی از عددهای d_k و، بنابراین، بر حتی یکی از عددهای a_k بخش‌پذیر نیست. تناقض.

۹۰.۶۰. *راهنمائی.* پاره‌خط‌های راستی را که، به طور کامل، در درون پاره‌خط‌های راست دیگرند، حذف می‌کنیم. سپس، همهٔ پاره‌خط‌های راست باقی‌مانده را که با دیگران در بخش یا بخش‌هایی مشترک‌اند در نظر می‌گیریم و مجانس آن‌ها را، به نوبت، نسبت به نقطهٔ وسط خود و با ضریبی کوچکتر از واحد پیدا می‌کنیم، به نحوی که پاره‌خط‌های راست جدید، باز هم پاره خط راست اصلی را پوشانده باشند. در این صورت، هر پاره‌خط راست، دارای نقطه‌های درونی مشترکی با بیش از یک پاره‌خط راست دیگر نخواهد بود و، بنابراین، کافی است حکم را برای پاره‌خط راستی ثابت کنیم که به وسیلهٔ دو پاره‌خط راست کوچکتر پوشیده شده است.

۹۰.۶۱. *پاسخ.* نه، چنین شش‌ضلعی وجود ندارد.

۹۰.۶۲. *راهنمائی.* ثابت کنید H، مرکز دایرهٔ محاطی بیرونی مثلث ACF (و مماس بر ضلع AF) است.

۹۰.۶۳. *راهنمائی.* با استقرا روی n (تعداد شهرها) و با آغاز از

$n = ۷$ ثابت کنید. برای عبور استقرایی، از این پیش قضیه،استفاده کنید: شهری وجود دارد که، از آن، دست‌کم دو جاده خارج می‌شود و به آن، دست کم دو جاده وارد می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که اثبات حکم برای $n = ۷$، به احتمالی دشوارترین مرحلهٔ حل مساله است.

۶۴.۹۰. *راهنمائی.* فرض می‌کنیم، دو عدد حقیقی x و y وجود داشته باشد، به نحوی که $f(x) < f(y)$ و، درضمن

$$x < y < x + f(x)$$

در این صورت، خط راست L با معادلهٔ $x + ny = c$ وجود دارد (n، عددی طبیعی است) که نقطهٔ $(y, f(y))$ را از نقطهٔ $(x, f(x))$ و نقطهٔ $(x + f(x), f(x + f(x)))$ منحنی از هم جدا می‌کند. چنین خط راستی باید، منحنی تابع $f(x)$ را، دست کم در دو نقطهٔ مختلف، قطع کند.

۶۵.۹۰. *راهنمائی.* دنبالهٔ

$$\ldots, x_{-۱}, x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \ldots$$

را طوری در نظر بگیرید که داشته باشیم:

$$x_{k+۱} - x_k \equiv a_k (\mathrm{mod} n)$$

(در این‌جا $a_{۰}$، $a_{۱}$، ...، $a_{n-۱}$، همان عددهای روی محیط دایره، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌اند). ببینید، تبدیل‌های $\{a_k\}$، دنباله را چگونه تغییر می‌دهد.

۱.۹۱. دانش‌آموزانی که، نزد آن‌ها، تعداد میخ‌ها با تعداد دوراهی‌ها، برابر است و، درضمن، تعداد پیچ‌ها با تعداد میخ‌ها برابر نیست، از

$$۴۰ - ۱۵ - ۱۰ = ۱۵$$

دانش‌آموز کمتر نیست. از طرف دیگر، بین این دانش‌آموزان، تعداد پیچ‌ها با تعداد دوراهی‌ها، برابر نیست.

۲.۹۱. *پاسخ*. نه، ممکن نیست. *راهنمائی*. تعداد تعویض‌های از نوع سه به دو، باید با تعداد تعویض‌های از نوع دو به سه، برابر باشد.

۴.۹۱. *پاسخ*. شش روز.

۵.۹۱. *پاسخ*. بله، می‌تواند. او باید هر دو میلهٔ اول را به بخش‌های ۵۰ سانتی‌متری، ۲۵ سانتی‌متری و ۲۵ سانتی‌متری تقسیم کند.

۶.۹۱. نه، چنین وضعی، ناچاری نیست. به این وضع توجه کنید: تیم‌های A_1، A_2 و A_3 در بازی بین خود، هر کدام یک امتیاز آورده‌اند؛ درست همین نتیجه را، تیم‌های B_1، B_2 و B_3 در بازی بین خود و تیم‌های C_1، C_2، C_3 در بازی بین خود به دست آورده‌اند. درضمن، همهٔ تیم‌های A_i از تیم‌های B_i، همهٔ تیم‌های B_i از تیم‌های C_i و همهٔ تیم‌های C_i از تیم‌های A_i برده‌اند.

۸.۹۱. *پاسخ*. ۱۲ غواص.

۹.۹۱. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد (بُرهان خُلف). اگر همهٔ نمایندگان دو قبیلهٔ B و C از جای خود برخیزند و کنار روند، آن‌وقت، روشن است، بین هر دو نماینده‌ای که باقی مانده‌اند، درست یک صندلی خالی وجود دارد، یعنی تعداد کل صندلی‌های دور میز، عددی زوج است.

۱۱.۹۱. *پاسخ*. $n = ۱۹$.

۱۲.۹۱. فرض می‌کنیم نتوانیم از شهر A به شهر B از طریق راه‌آهن طوری برسیم که، ضمن راه، بیش از دو بار قطار را عوض نکنیم؛ همچنین فرض می‌کنیم نتوان از شهر C به شهر D، طوری با اتومبیل رفت که، ضمن راه، از بیش از دو شهر عبور نکنیم (ممکن است، دو شهر از این چهار شهر، یکی باشند). تنها آن جاده‌هایی را در نظر می‌گیریم که، شهرهای A، B، C و D را به هم مربوط می‌کنند. روشن است، اگر یکی از امکان‌های

مسافرت (راه‌آهن یا اتومبیل) را در نظر بگیریم، این امکان، چهار شهر مذکور را به هم وصل می‌کند و می‌توان از یکی به دیگری رفت، بدون این‌که، به جز دو شهر باقی‌مانده، لزومی به عبور از شهری دیگر باشد. تناقض.

۱۳.۹۱. حل مسالهٔ ۱۹.۹۱ را ببینید.

۱۵.۹۱. *پاسخ.* ۲۴ یا ۴۲.

۱۷.۹۱. *راهنمائی.* AX و AY را ادامه دهید تا خط راست BC را در نقطه‌های K و L قطع کنند. ثابت کنید، پاره‌خط راست KL، وسط دو ضلع مثلث AKL را به هم وصل کرده است.

۱۸.۹۱. *راهنمائی.* اگر

$$f(x) = x^۲ + x + ۱ \text{ و } g(x) = x^۲ - x + ۱$$

آن‌وقت $g(x) = f(x - ۱)$.

۱۹.۹۱. به ستاره‌هایی از خانه‌ها توجه می‌کنیم که شمارهٔ سطرها و ستون‌های آن‌ها، عددهایی فرد باشد. فرض کنید، ضمن بُریدن جدول، از شکل (۱)، x عدد و از شکل‌های (۲) و (۳)، y عدد به دست آمده باشد. در این صورت $۴x + ۴y = (۲n - ۱)^۲$. چون هر شکل، در بیش از یک ستاره نیست، پس $x + y \geq n^۲$. از این‌جا

$$۴x + ۴y \geq ۴n^۲ \Rightarrow x \geq ۴n^۲ - (۲n - ۱)^۲ = ۴n - ۱$$

۲۰.۹۱. *پاسخ.* بله، چنین انتخابی وجود دارد. به عنوان مثال

$$A = \{۱, ۲, \ldots, ۹, -۴۵\}; \quad B = \{-۱, -۲, \ldots, -۹, ۴۵\}$$

برای هر عدد x، از مجموعهٔ $A(۵)$، در مجموعهٔ B پنج عدد وجود دارد که، مجموع آن‌ها برابر $-x$ است و، بنابراین، مجموع پنج عدد دیگر از مجموعهٔ B، برابر x می‌شود.

۲۲.۹۱. از نقطهٔ A، نیم خط راستی موازی CB (و در جهت از C به B) رسم و، روی آن، نقطهٔ Z را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $|BX| = |AZ|$. به سادگی روشن می‌شود که $|YZ| \geq |AC|$ و، با توجه به نابرابری مثلثی

$$|XZ| + |XY| \geq |AC|$$

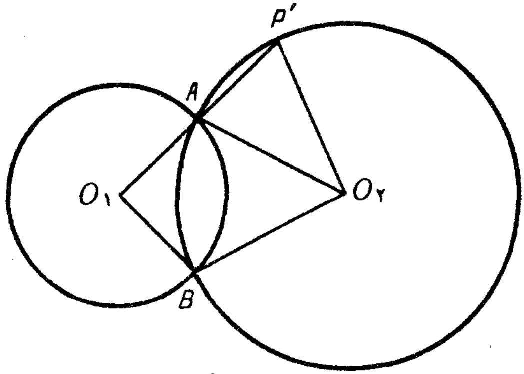
چون دو مثلث AXZ و BXY برابرند، پس $|XY| = |XZ|$ و $2|XY| \geq |AC|$.

۲۳.۹۱. *راهنمائی.* z را کوچکترین ضلع مثلث بگیرید و ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y - z)^2$$

۲۴.۹۱. *راهنمائی.* تحقیق کنید، به‌ازای $a_1 \leq 10^p$، هیچ عضوی از دنباله، نمی‌تواند از 10^p بیشتر باشد.

۲۶.۹۱. گراف آشنایان را در نظر می‌گیریم و همهٔ یال‌های اضافی را، در آن، حذف می‌کنیم، یعنی یال‌هایی را باقی می‌گذاریم که بستگی دو جزء را نشان دهد. راسی مثل X_0 پیدا می‌شود که به راسی مثل Y پیوسته باشد؛ همهٔ راس‌های X_0، X_1، X_2، ...، X_k را در نظر می‌گیریم که تنها به راس Y مربوط باشند. این راس‌ها، همراه با راس Y، گروه شمارهٔ ۱ را تشکیل می‌دهند. روشن است که، در بین راس‌های باقی‌مانده، هیچ راسی به همهٔ راس‌های دیگر وصل نشده است، در غیر این صورت، برای این راس و راس Y، راس سومی پیدا نمی‌شود که به آن‌ها مربوط نباشد. در عین حال، هر یک از راس‌های باقی‌مانده، دست کم به یک راسی که جزو گروه ۱ نیست، مربوط است. تنها این می‌ماند، ثابت کنیم، این راس‌ها را می‌توان به دو گروه، طوری تقسیم کرد که، هر راس، در گروه خودش، دست کم با



شکل ۶۵

یک راس دیگر مربوط باشد. و این، شبیه ساختمانی که در آغاز حل آوردیم، ثابت می‌شود.

۲۹.۹۱. چند حالت، برای استقرار دایره‌ها و نقطه‌های روی آن‌ها، نسبت به هم وجود دارد. حالتی را در نظر می‌گیریم که درشکل ۶۵نشان داده شده‌است. فرض می‌کنیم، خط راست O_1A، دایرهٔ دوم را در نقطهٔ P' قطع کرده باشد. در این صورت

$$A\widehat{P'O_2} = P'\widehat{AO_2} = 180^\circ - O_1\widehat{AO_2} = 180^\circ - O_1\widehat{BO_2}$$

یعنی چهارضلعی O_1BO_2P'، محاطی است و این، به معنای آن است که نقطه‌های P و P' بر هم منطبق‌اند.

۳۰.۹۱. راه حل مسالهٔ ۲۶.۹۰ (یعنی ۳۷.۹۰) را ببینید.

۳۱.۹۱. *راهنمائی.* دو نیمهٔ مجموع مذکور از مساحت‌های زیر منحنی و بالای منحنی تابع $f(x)$ را، در درون مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ مورد ارزیابی قرار دهید.

۳۲.۹۱. *پاسخ.* نه، نمی‌توان. *راهنمائی.* باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۳۷ را دنبال کنید.

۳۴.۹۱. *راهنمائی.* اگر تعداد خانه‌های با رنگ‌های قرمز، آبی و سبز را، به ترتیب، A، B و C بگیریم، آن‌وقت، درستی این نابرابری‌ها روشن است:

$$A \leq ۳B, \quad B \leq ۳C, \quad C \leq ۳A$$

اکنون، درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید.

$$A \leq B + ۴C, \quad B \leq C + ۴A, \quad C \leq A + ۴B$$

از این ساختمان استفاده کنید: برای هر خانهٔ قرمز $X_۱$، زنجیره‌ای از سه خانه را در نظر می‌گیریم ـ خود خانهٔ $X_۱$، خانهٔ آبی مجاور آن $X_۲$ و خانهٔ مجاور $X_۲$، یعنی خانهٔ سبز $X_۳$ــ درضمن، تا حد امکان، این زنجیره را طوری انتخاب می‌کنیم که مرکزهای خانه‌های آن، روی یک خط راست نباشد. سپس، اگر زنجیره مستقیم باشد، خانهٔ آبی، و اگر مستقیم نباشد، خانهٔ سبز را نشان می‌گذاریم. در این صورت، هر خانهٔ آبی، بیش از یکبار و هر خانهٔ سبز، بیش از چهار بار نشان‌گذاری نمی‌شود. و این، به معنای درستی نابرابری $A \leq B + ۴C$ است.

۳۸.۹۱. *راهنمائی.* امتحان کنید: اگر برای هر n داشته باشیم $a_۱ \leq ۱۰^p - ۱۰$، آن وقت $a_n < ۱۰^p$؛ و به ازای $a_۱ \leq ۴ \times ۱۰^p$ (برای هر n)، داریم: $a_n \leq ۴ \times ۱۰^p + ۸$.

۳۹.۹۱. *پاسخ.* نه، چنین عددهایی وجود ندارد. اگر دو طرف برابری را در $x - y$ ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x^{۱۱} - y^{۱۱} = x - y \Rightarrow x^{۱۱} - x = y^{۱۱} - y$$

یعنی چند جمله‌ای $f(t) = t^{۱۱} - t + C$، باید چهار ریشهٔ مختلف داشته باشد که ممکن نیست، زیرا $f''(t)$ تنها یک ریشه دارد.

۴۰.۹۱. *راهنمائی.* نیمسازهای زاویه‌های AXY و XYC را رسم کنید. این دو نیمساز، یکدیگر را در نقطهٔ P و ضلع AC را در نقطه‌های R و Q قطع می‌کنند. از این مطلب استفاده کنید که مثلث‌های AXR، QYC و XYP، با مثلث ABC متشابه‌اند و آن را می‌پوشانند.

۴۱.۹۱. *راهنمائی.* وزارت راه، در ۵۰۰ روز اول، دور بسته‌ای، که طول آن از ۴۰۰ کمتر نیست، مرمت می‌کند. در این صورت، شهرهایی که، از آن‌ها، به شهرهای دُور؛ حداکثر ۳۰۰ جادهٔ بسته نشده می‌رود، از ۱۵ تجاوز نمی‌کند. اکنون باید، ضمن ۳۰ روز، این شهرها را با دو جاده، برای رفت و برگشت، با هر شهر دیگر مربوط کرد. سپس، وزارت راه، طبق این قاعده عمل می‌کند: باید هر یک از شهرهای باقی‌مانده را، با دو جاده (برای رفت و برگشت) با دُور مربوط کند؛ درضمن، این کار را به این ترتیب انجام دهد که، هر روز، آن شهری را در نظر بگیرد که از آن در این روز، کمترین تعداد جاده‌های باز (به طرف دُور) وجود داشته باشد.

۴۳.۹۱. *پاسخ.* دایرهٔ به قطر AB.

۴۴.۹۱. *راهنمائی.* با استقرا روی تعداد تیم‌ها ثابت کنید.

۴۵.۹۱. *راهنمائی.* عددهای $a_k = (۲k + ۱)^۲$ را، برای مقدارهای k، از ۱ تا ۸، در نظر بگیرید.

۴۶.۹۱. *پاسخ.* چنین تابعی وجود ندارد. *راهنمائی.* دنبالهٔ

$$a_۱ = ۱, a_۲ = f(a_۱), \ldots, a_n = f(a_{n-۱}), \ldots$$

را در نظر بگیرید و ثابت کنید، هر عدد طبیعی، درست یکبار در بین جمله‌های آن ظاهر می‌شود و، درضمن، دنبالهٔ یکنوا است.

۴۷.۹۱. از پیش قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم (اثبات پیش قضیه را، خودتان با استفاده از استقرا بدهید):

پیش قضیه. S را مجموعه‌ای از $k \leq ۱۳$ عدد درست می‌گیریم که، هیچ

یک از عضوهای آن، بر ۱۳ بخش‌پذیر نباشند؛ مجموعهٔ همهٔ باقی‌مانده‌هایی که از تقسیم همهٔ گونه‌های ممکنِ مجموع چند عضو S به دست می‌آید، با $A(S)$ نشان می‌دهیم. در این صورت، مجموعهٔ $A(S)$، کمتر از k عضو ندارد.

اکنون، عدد ۲۶ رقمی خود را به ۱۳ عدد دو رقمی

$$\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2}, \ldots, \overline{a_{13} b_{13}}$$

تقسیم می‌کنیم و مجموعهٔ S، شامل عددهای $9a_1$، $9a_2$، ...، $9a_{13}$ را در نظر می‌گیریم. بنابر پیش قضیه، مجموعهٔ $A(S)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ ۱۳ باقی‌ماندهٔ ممکن،، در تقسیم بر ۱۳. به‌ویژه، این برابری را داریم:

$$[M] = [9a_{i_1} + 9a_{i_2} + \ldots + 9a_{i_p}]$$

که در آن، M عبارت است از مجموع همهٔ ۱۳ عدد دو رقمی و $[x]$ به معنای باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد x بر ۱۳ می‌باشد. اکنون، هر یک از عددهای دو رقمی $\overline{a_{i_1} b_{i_1}}$، $\overline{a_{i_2} b_{i_2}}$، ...، $\overline{a_{i_p} b_{i_p}}$ را به رقم‌ها تقسیم می‌کنیم. مجموع عددهای یک رقمی که، به این ترتیب به دست می‌آید با بقیهٔ عددهای دو رقمی، برابر است با

$$M - 9a_{i_1} - 9a_{i_2} - \ldots - 9a_{i_p}$$

یعنی بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴۹.۹۱. *راهنمائی.* بُر زدن به مفهوم صورت مساله را می‌توان این طور فهمید که، دستهٔ ورق را به چند بخش تقسیم و، هر کدام از بخش‌ها را وارونه کنیم و، سپس، هر بخش را در جای خودش قرار دهیم و دسته را وارونه کنیم. عمل وارونه کردن دسته ورق را کنار می‌گذاریم و، به جای بُر زدن، تنها عمل وارونه کردن بخش‌ها را انجام می‌دهیم و آن را «جا زدن» می‌نامیم. فرض

کنید $F(n)$، به معنای تعداد «جا زدن‌ها»یی باشد که، برای تبدیل دسته‌ای از n ورق به هر ردیف دلخواه، کافی باشد. به شرط $x < y$، نابرابری $F(x) \leq F(y)$ روشن است. ثابت کنید:

$$F(۲^k) \leq F(۲^{k-۱}) + k$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$F(۱۰۰۰) \leq F(۱۰۲۴) \leq ۵۵$$

به این عدد، باید یک بُر زدن را اضافه کرد که تشکیل شده‌است از تقسیم دسته ورق، به بخش‌های یک ورقی (که منجر به وارونه کردن سادهٔ دسته ورق می‌شود)، تا ردیف لازم ورق در دسته به دست آید.

۵۱.۹۱. وسط پاره‌خط راست BB' را D می‌نامیم. چون دو زاویهٔ AMM' و ABB' با هم برابرند، پس خط‌های راست MM' و BB'، در نقطهٔ N' واقع بر محیط دایره یکدیگر را قطع می‌کنند. محاسبه‌ای کوتاه نشان می‌دهد که

$$|NM| : |MM'| = |NB| : |BD|$$

و برابری زاویه‌های NMM' و NBD، از تشابه مثلث‌های NMM' و NBD نتیجه می‌شوذ. بنابراین، دو زاویهٔ $MM'N$ و BDN، همچنین، دو زاویهٔ $NM'N'$ و NDN' با هم برابرند؛ یعنی $M'DN'N$ یک چهار ضلعی محاطی است و درنتیجه

$$\widehat{M'DN} = \widehat{M'N'N} = \widehat{MN'N} = ۹۰^\circ$$

۵۲.۹۱. *راهنمائی*. از این حقیقت استفاده کنید که، برای هر $x \geq -۱$ داریم:

$$۴x^۳ - ۳x + ۱ = (x + ۱)(۲x - ۱)^۲ \geq ۰$$

۵۴.۹۱. راهنمائی. برای هر $t \in [0, 1]$ داریم:

$$(1-t)f(t) \leq \int_0^1 f(x)dx$$

$g(x)$ را به‌جای t بگذارید و این حقیقت را به حساب آورید که $f(t) \leq 1$. آن وقت، تنها این می‌ماند که، یکبار دیگر، از دو طرف نابرابری انتگرال بگیریم.

۵۵.۹۱. z را ریشهٔ pام موهومی عدد ۱ می‌گیریم، یعنی $z^p = 1$. چون

$$0 = z^p - 1 = (z-1)(z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1)$$

و درضمن $z \neq 1$، بنابراین

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1 - 0, (z \neq 1)$$

اکنون، این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$f(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \ldots + a_n t^{n-1}$$

اگر دنبالهٔ (a_k)، نسبت به p، «هم‌وزن» باشد، آن‌وقت، هر عدد مختلطی که ریشهٔ pام واحد باشد، برابر واحد نیست و ریشه‌ای از این چندجمله‌ای است. در واقع

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1} = \\ &= (a_1 + a_{p+1} z^p + a_{2p+1} z^{2p} + \ldots) + \\ &+ z(a_2 + a_{p+2} z^p + a_{2p+2} z^{2p} + \ldots) + \ldots = \\ &= S(1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1}) \end{aligned}$$

که در آن

$$S = a_1 + a_{p+1} + a_{2p+1} + \ldots = a_2 + a_{p+2} + a_{2p+2} + \ldots = \ldots$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود: $f(z) = 0$.

چون برای هر p، به تعداد $p - 1$ ریشهٔ مختلط از عدد ۱ وجود دارد، پس چندجمله‌ای $f(t)$، باید به تعداد

$$2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 - 50 > 49$$

ریشهٔ مختلف داشته باشد. ولی چندجمله‌ای نمی‌تواند، بیش از درجهٔ خود، ریشه داشته باشد، مگر این که متحد با صفر باشد، یعنی $f(t) \equiv 0$ و همهٔ ضریب‌های آن برابر صفر است.

۵۶.۹۱. $x = 512$، $y = 675$ و $z = 720$ می‌گیریم؛ در این صورت $2z^3 = 3xyz$ و داریم:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz = \\ &= (x + y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz) \end{aligned}$$

یعنی، عدد مفروض بر $x + y - z = 467$ بخش‌پذیر است. در واقع، این عدد برابر است با

$$229 \times 467 \times 7621$$

۵۷.۹۱. *پاسخ*. نه، این حکم درست نیست. *راهنمائی*. $2n = 102^p$، که در آن، p عددی طبیعی و به اندازهٔ کافی بزرگ است. همهٔ رأس‌های $2n$ ضلعی را، به ردیف، شماره‌گذاری کنید و، در «نمونهٔ» خود، همهٔ رأس‌هایی را قرار دهید که شمارهٔ آن‌ها، در عدد نویسی، به مبنای ۱۰۲، دست کم دارای یک رقم برابر صفر باشد.

۱.۹۲. فرض می‌کنیم تساوی پیش نیامده باشد. در این صورت، کسی که ۲۰ امتیاز گرفته است، باید به تعداد زوج بازی کرده باشد، زیرا تعداد بُردهای او، ۲۰ واحد از تعداد باخت‌های او بیشتر است. از طرف دیگر، کسی که ۷ امتیاز آورده است، باید به تعداد فرد بازی کرده باشد. و این، تناقض ایجاد می‌کند، زیرا تعداد بازی‌های هر نفر، در این مسابقه، با تعداد بازی‌های هر نفر دیگر باید برابر باشد.

۲.۹۲. پاسخ. ۲۵ نگهبان.

۳.۹۲. تفاوت دو عدد، برابر است با $۳N + ۱$. ولی یکی از این عددها باید بر ۳ بخش‌پذیر و، درنتیجه، مجموع رقم‌های آن، بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین، عدد دیگر بر ۳ بخش‌پذیر نیست و، درنتیجه، مجموع رقم‌های آن نمی‌تواند، برابر مجموع رقم‌های اولی باشد.

۴.۹۲. از همان اندیشه‌ای استفاده کنید که، ضمن حل مسالهٔ ۱۲.۹۲، مورد استفاده قرار گرفته است.

۶.۹۲. چون نفر اول می‌تواند به نفر دوم، درست ۲۵ روبل بپردازد (که البته، ممکن است همراه با بازپرداخت باشد)، بنابراین، نزدیکی از آن‌ها، به ناچار، چند اسکناس پیدا می‌شود که، مجموع مبلغ آن‌ها، از ۲۵ روبل کمتر و از ۵۰ روبل بیشتر نیست. در واقع، اگر اولی x روبل به دومی داده باشد و y روبل پس گرفته باشد، آن وقت $x - y = ۲۵$؛ درضمن $x \leq ۱۰۰$ و $y \leq ۱۰۰$. روشن است، اگر $x \geq ۷۵$، آن وقت $y \geq ۲۵$، ولی درضمن $x \leq ۷۵$؛ یعنی یکی از دو عدد x یا y (مثلاً x)، در فاصلهٔ از ۲۵ تا ۷۵ روبل واقع است. سرانجام، اگر $x > ۵۰$، آن وقت می‌توانیم همهٔ بقیه اسکناس‌های نفر اول را بگیریم.

فرض کنید، مجموع مجهول S در اسکناس‌ها، نزد نفر اول پیدا شود. چون نفر دوم می‌تواند به سومی، هر مبلغی از ۰ تا ۲۵ روبل بپردازد، بنابراین نفر دوم و نفر سوم، با هم، می‌توانند هر مبلغی از ۷۵ تا ۱۲۵ روبل بپردازند

(مثلاً، اگر لازم باشد ۱۱۹ روبل بپردازند، دومی ۱۹ روبل به سومی می‌دهد، آن وقت سومی می‌تواند ۱۱۹ روبلی را که در اختیار دارد، بپردازد). اگر به این پول، S روبل نفر اول را بیفزاییم، آن وقت می‌توانیم همهٔ گونه‌های پرداخت از ۱۰۰ تا ۱۵۰ روبل را به دست آوریم. اگر این عددها را از ۳۰۰ کم کنیم، آن وقت به همهٔ عددهای از ۱۰۰ تا ۲۰۰ می‌رسیم.

۷.۹۲. قیمت‌های تازه را به ردیف صعودی در نظر می‌گیریم. در این صورت، روشن است که، در هر دو عدد پشت سر هم، عدد دوم، دست کم یک برابر و نیم عدد اول است. بنابراین گران‌ترین کالا، $\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۸}$ برابر ارزان‌ترین آن‌ها قیمت دارد. اکنون کافی است توجه کنیم:

$$\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۸} = (۲/۲۵)^{۴} > ۵^{۲} = ۲۵$$

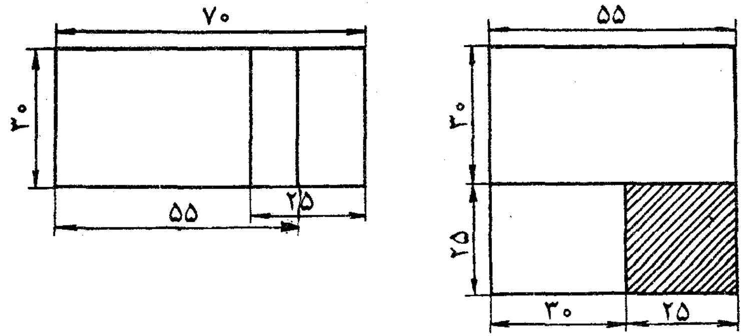
۸.۹۲. پاسخ. تنها برای عدد ۱۱.

۱۰.۹۲. همهٔ نقطه‌های نشان‌دار گرهی را، با کوچکترین مستطیل ممکن π، که ضلع‌های آن روی خطهای شبکه باشد، محصور می‌کنیم. در این صورت، روی هر ضلع این مستطیل، یکی از نقطه‌های گرهی وجود خواهد داشت که آن‌ها را، با حرکت روی محیط مستطیل، به ردیف، A، B، C و D می‌نامیم. اکنون، پنج مستطیل را، که به وسیلهٔ زوج نقطه‌های (A, B)، (B, C)، (C, D)، (D, A) و (A, C) معین می‌شوند، در نظر می‌گیریم. این مستطیل‌ها، تمامی مستطیل π را می‌پوشانند و، بنابراین، در یکی از آن‌ها، دست کم ۲۰ نقطهٔ نشان‌دار وجود خواهد داشت.

۱۱.۹۲. اگر هر سه معادله را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$(a+۱)^{۲} + (b+۱)^{۲} + (c+۱)^{۲} = ۰$$

از آن‌جا $a = b = c = -۱$؛ و این، تنها جواب دستگاه است.



شکل ۶۶

۱۲.۹۲. مستطیل ۷۰×۳۰ را، به‌وسیلهٔ دو مستطیل ۵۵×۳۰ و ۲۵×۳۰ سانتی‌متری می‌پوشانیم؛ البته، این دو مستطیل، در بخشی روی هم قرار می‌گیرند (شکل۶۶ را ببینید). روشن است که هر سکه، می‌تواند به طور کامل، در یکی از این مستطیل‌ها قرار گیرد. اکنون، اگر این دو مستطیل را در یک مربع ۵۵×۵۵ قرار دهیم، می‌بینیم که، در داخل مربع ۲۵×۲۵ می‌توان سکهٔ جدید را به طور کامل قرار داد.

۱۳.۹۲. *راهنمائی*. قبل از هر چیز، ثابت کنید، قورباغه‌ها، دیر یا زود، در همهٔ قطاع‌ها خواهند بود. اکنون تنها کافی است به یک نکته توجه کنید: اگر در یکی از دو قطاع مجاور، قورباغه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت، یکی از این دو قطاع، در آینده هم، مهمان قورباغه خواهد بود.

۱۶.۹۲. *راهنمائی*. روی خط راست AD، پاره‌خط راست DE را، برابر قاعدهٔ BC جدا کنید.

۱۸.۹۲. چون $۴k(k+n)$ و $۴n(k+n)$ بر $k+n$ بخش‌پذیرند، پس عددهای $۴n^۲-۱$ و $۴k^۲-۱$ هم $k+n$ بخش‌پذیرند؛ درضمن

$$۴n^۲-۱=(۲n-۱)(۲n+۱), ۴k^۲-۱=(۲k-۱)(۲k+۱)$$

فرض می‌کنیم، عددهای $۲n-۱$ و $۲k+۱$ نسبت به هم اول باشند. روشن است که دو عدد $۲k-۱$ و $۲n-۱$، همچنین دو عدد $۲k+۱$ و $۲n+۱$ هم نمی‌توانند بخشیاب مشترکی غیر از واحد داشته باشند که، در عین حال، بخشیاب مشترک عدد $k+n$ هم باشد. در واقع، اگر مثلاً عددهای $۲k-۱$ و $۲n-۱$ بر عدد اول فرد p بخش‌پذیر باشند، آن وقت روشن است که حاصل ضرب $۲k \times ۲n$، در تقسیم بر p، باقی‌مانده‌ای برابر واحد می‌دهد و، آن‌وقت، $۴kn+۱$ نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد. از این‌جا معلوم می‌شود که $۲n+۱$ و $۲k-۱$ بر $k+n$ بخش‌پذیرند. ولی به‌ازای $|k-n|>۱$، یکی از این دو عدد از $k+n$ کوچکتر است و این، تناقض لازم را به ما می‌دهد.

۲۱.۹۲. *پاسخ*. تنها به ازای $x=۵۵\frac{۱}{۲}$.

۲۳.۹۲. *راهنمائی*. در آغاز، مکعب‌های کوچک را، به صورتی دلخواه، قرار دهید. فرض کنید، روی وجه‌های قابل دید، a وجه سیاه و b وجه سفید وجود داشته باشد. ثابت کنید، می‌توان مکعب‌های کوچک را، طوری، تغییر وضع داد (یعنی چرخاند یا برگرداند) که تفاضل $a-b$، در هر بار، یا تغییر نکند و یا به اندازهٔ دو واحد تغییر کند. اکنون، با همین عمل، تغییر وضع را طوری انجام دهید که وجه‌هایی که پیش از این دیده نمی‌شدند، دیده شوند و برعکس، روشن است که، در این صورت عدد $a-b$ تغییر علامت می‌دهد و، با توجه به پیوستگی عمل بالا، لحظه‌ای فرا می‌رسد که تفاضل $a-b$ برابر صفر شود.

۲۴.۹۲. قرینهٔ نقطهٔ C' را نسبت به خط راست $A'B'$، با D نشان می‌دهیم. روشن است، چهارضلعی $CA'DC'$، یک چهار ضلعی محاطی است. بنابراین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'AC$ بر مرکز دایرهٔ محیط بر این چهار ضلعی واقع است و، بنابراین، روی عمود منصف پاره خط راست $C'D$، یعنی روی خط راست $A'B'$ قرار دارد.

۲۷.۹۲. حکم مساله را با استقرا روی n و به این ترتیب ثابت می‌کنیم: تعداد عددهای nرقمی که بتوان با حذف، عدد kرقمی مفروضی را که تنها با رقم‌های ۱ و ۲ نوشته شده‌است (عدد x)، به دست آورد، تنها به k و n بستگی دارد و به عدد مشخص x بستگی ندارد و، بنابراین، می‌توانیم، این تعداد را، با $F(k,n)$ نشان دهیم. برای $n=۲$، درستی حکم روشن است. اکنون فرض می‌کنیم، عدد kرقمی x، به رقم ۱ ختم شده باشد. چند عدد nرقمی وجود دارد که به ۱ ختم شده باشد و از آن‌ها بتوان عدد x را به دست آورد؟

روشن است که، این تعداد برابر است با $F(k-۱,n-۱)$. به همین ترتیب، تعداد عددهایی که به ۱ ختم نشده‌اند و از آن‌ها می‌توان عدد x را به دست آورد، برابر است با $۹F(k,n-۱)$. هر دو عدد

$$F(k-۱,n-۱) \text{ و } F(k,n-۱)$$

به عدد x بستگی ندارد (بنابر فرض استقرا) و، بنابراین، عدد $F(k,n)$ هم به وضع مشخص عدد x بستگی ندارد.

۳۰.۹۲. *راهنمائی.* باید همهٔ رقم‌ها را عددهایی فرد گرفت که، در این صورت، همهٔ $n!$ عددی که به دست می‌آیند، به صورت $۴k+۱$ یا $۴k-۱$ خواهند بود. ثابت کنید، تعداد عددهای به صورت $۴k-۱$، زوج است. در ضمن، توجه کنید: عدد به صورت ۱۱...۱۱۱، از گونه $۴k-۱$ است.

۳۱.۹۲. *پاسخ.* $\frac{۴}{۳}$. *راهنمائی.* ثابت کنید:

$$|OD|\cdot|CM| = |OC|\cdot|MD|$$

۳۲.۹۲. آغاز کنندهٔ بازی می‌برد. او، در نخستین حرکت خود، هشت سنگ برمی‌دارد؛ درنتیجه، به تعداد

$$۱۹۹۲-۸=۱۹۸۴=۶۴\times ۳۱$$

سنگ باقی می‌ماند. از این به بعد، اولی حرکت‌های دومی را تکرار می‌کند؛ چون حرکت‌ها به این معناست که، هر بار ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۸ سنگ برداشته شود و با توجه به این که، عدد ۱۹۸۴ بر ۱۶ بخش‌پذیر است، باید به تعداد زوج حرکت انجام شود (بدون در نظر گرفتن نخستین حرکت) و، بنابراین، آخرین حرکت را اولی انجام می‌دهد.

۳۳.۹۲. به سادگی ثابت می‌شود که

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} + \ldots + \vec{v_n} = 0$$

عبارت صورت مساله را، این طور می‌نویسیم:

$$(a_2 - a_1)(\vec{v_2} + \ldots + \vec{v_n}) + (a_3 - a_2)(\vec{v_3} + \ldots + \vec{v_n}) + \\ + \ldots + (a_n - a_{n-1})\,\vec{v_n}$$

به این ترتیب، یک ترکیب خطی از n بردار با ضریب‌های مثبت به دست می‌آید؛ درضمن، همهٔ این بردارها، نسبت به خط راست OA_1، جهتی به سمت یک نیم‌صفحه دارند (A_1 را انتهای بردار $\vec{v_1}$ گرفته‌ایم)؛ خودتان این حکم را ثابت کنید: ترکیب خطی بردارهایی با ضریب‌های مثبت و در جهت یک نیم صفحه، نمی‌تواند برابر بُردار صفر باشد.

۳۴.۹۲. حالتی را بررسی می‌کنیم که، تعداد گروهبانان دسته، عددی زوج باشد (حالت دوم را هم، می‌توان شبیه این حالت، مورد بررسی قرار داد). تعداد سربازانی را که از یک گروهبان فرمان می‌برند، با x، و تعداد سربازانی را که از دو گروهبان فرمان می‌برند، با y نشان می‌دهیم. فرض کنید $2n$ گروهبان وجود داشته باشد و حالتی را در نظر بگیرید که n نفر از آن‌ها بازنشسته شده‌باشند. در این صورت، باید این افراد را هم بازنشسته کرد.

الف) همهٔ سربازانی را که تنها از این گروهبانان فرمان می‌برند؛

ب) همهٔ سربازانی را که از دو گروهبان، بین بقیهٔ گروهبانان فرمان می‌برند.

فرض می‌کنیم، تعداد این‌گونه سربازان، از نصف همهٔ سربازان، بیشتر باشد. همهٔ گونه‌های مختلف n گروهبان را در نظر می‌گیریم و همهٔ نابرابری‌هایی که، شبیه بالا، به دست می‌آیند، با هم جمع می‌کنیم. هر یک از x سربازی که درست از یک گروهبان پیروی می‌کند، در $\binom{2n-1}{n-1}$ حالت، وقتی که فرمانده او بازنشسته شده است، بازنشسته می‌شود. هر یک از y سربازی که از دو گروهبان فرمان می‌برد، در $\binom{2n-2}{n} +$ $\binom{2n-2}{n-2}$ حالت بازنشسته می‌شود، وقتی که هر دو فرماندهٔ او در بین n گروهبان بازنشسته باشند و یا وقتی که هیچ کدام از آن‌ها، در بین بازنشستگان نباشند. بنابراین، به این نابرابری می‌رسیم:

$$x\cdot\binom{2n-1}{n-1}+y\left[\binom{2n-2}{n}+\binom{2n-2}{n-2}\right]>$$
$$>\frac{1}{2}(x+y)\binom{2n}{n}$$

اکنون این می‌ماند که توجه کنیم:

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1} \quad \text{و} \quad \binom{2n-2}{n}=\binom{2n-2}{n-2}<$$
$$<\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$$

و به این ترتیب، به تناقض می‌رسیم.

۳۶.۹۲. *پاسخ*. $x=37$.

۳۷.۹۲. n را تعداد مهره‌های سیاه می‌گیریم. روشن است که، تعداد مهره‌های سیاه، از $\frac{1}{3}(3B+4)$ تجاوز نمی‌کند، زیرا در هر سه‌تایی سیاه،

بیش از سه مهره و، در هر سه‌تایی سفید، بیش از یک مهرهٔ سیاه وجود ندارد؛ درضمن، هر مهره در سه تا از این گروه‌های سه مهره‌ای شرکت دارد. از این‌جا

$$A + B = ۲n \leq \frac{۱}{۳}(۶B + ۲A) = ۲B + \frac{۲}{۳}A$$

یعنی $A \leq ۳B$.

۳۸.۹۲. *راهنمائی.* روشن کنید که، مرکزهای این سه دایره، عبارتند از قرینه‌های مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نسبت به ضلع‌های آن.

۳۹.۹۲. به سادگی می‌توان روشن کرد که، در دنبالهٔ F_k (دنبالهٔ عددهای فیبوناچی)، جمله‌ای بر ۷ بخش‌پذیر است که شمارهٔ ردیف آن جمله بر ۸ بخش‌پذیر باشد؛ همچنین، جمله‌ای بر ۳ بخش‌پذیر است که، شمارهٔ ردیف آن جمله، بر ۴ بخش‌پذیر باشد. به این ترتیب، اگر عدد فیبوناچی بر ۷ بخش‌پذیر باشد، بر ۳ هم بخش‌پذیر است.

۴۳.۹۲. همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن را، در تقسیم بر ۱۰۰، به ردیف زیر، روی محیط دایره در نظر می‌گیریم:

$$۰, ۷۷, ۷۷ + ۷۷ \equiv ۵۴, ۷۷ + ۷۷ + ۷۷, \ldots, ۷۷ \times ۹۹ \equiv ۲۳$$

در این صورت، اضافه کردن ۷۷ یا ۵۴ به عدد، به این معناست که، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به عدد مجاور و یا عدد بعدی آن برویم. روشن است که، ضمن این حرکت، نمی‌توانیم از روی دو عدد ۰ و ۷۷، بپریم؛ و در عددهایی که، نسبت به مُدول ۱۰۰، این باقی‌مانده‌ها را دارند، دو رقم سمت راست، با هم برابرند.

۴۴.۹۲. *پاسخ.* تنها وقتی که k، برابر توانی از ۲ باشد.

$۲k$ مهره را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در یکی ۱ مهره و در دیگری $(۲k - ۱)$ مهره وجود داشته باشد. فرض می‌کنیم توانسته باشیم، دو بخش برابر، در هر بخش k مهره به دست آوریم. عملی که در صورت

مساله، از آن سخن رفته است، به چه معناست؟ زوج عددهای (x, y)، به زوج عددهای $(۲x, y - x)$ تبدیل می‌شود. عمل عکس هم به این معناست که، زوج عددهای (a, b)، به زوج عددهای $\left(\frac{a}{۲}, b + \frac{a}{۲}\right)$ تبدیل می‌شود. روشن است، اگر در جهت عکس حرکت کنیم، تنها می‌توانیم، به زوج عددهایی به صورت

$$(ra + sb, (۱ - r)a + (۱ - s)b)$$

برسیم که، در آن، r و s، کسرهایی تحقیقی هستند که، مخرج آن‌ها، توانی از ۲ می‌باشد. از طرف دیگر، اگر از زوج (k, k)، بتوان زوج $(۱, ۲k - ۱)$ را به دست آورد، آن وقت $k(r - s) = ۱$ و، از آن‌جا، k توانی از ۲ خواهد بود.

دنبالهٔ اثبات را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۴۵.۹۲. *راهنمائی.* عدد $n = A - [\sqrt{A}]$ را در نظر بگیرید.

۴۶.۹۲. *پاسخ.* $n + ۱$. مثال روشن است.

ثابت می‌کنیم، تعداد کمتری چند ضلعی نمی‌توان جدا کرد. برای این منظور، همهٔ راس‌های بیرونی شکل‌های $M \cup M'$ را در نظر می‌گیریم و، آن چند ضلعی‌هایی را که، آن را، روی آن‌ها، بریده‌ایم، شماره‌گذاری می‌کنیم و، فرض می‌کنیم، این راس‌ها، با رنگ‌های متناظر، مشخص شده باشند. از خواننده می‌خواهیم، به عنوان تمرین، ابتدا پیش قضیه زیر را ثابت کند و، سپس، حکم مساله را نتیجه بگیرد.

پیش‌قضیه. n نقطه را روی دایره نشان گذاشته و آن‌ها را، طوری به چند رنگ درآورده‌ایم که، هر دو نقطهٔ مجاور، به دو رنگ مختلف باشند؛ و اگر دو نقطهٔ A و B از یک رنگ‌اند و نقطه‌های C و D از یک رنگ دیگر، پاره‌خط‌های راست AB و CD، نقطهٔ برخورد نداشته باشند. در این صورت، تعداد رنگ‌های لازم، از $\left[\frac{۱}{۲}(n + ۳)\right]$ تجاوز نمی‌کند.

۴۷.۹۲. این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{F_1}{F_2}, \frac{F_2}{F_3}, \ldots, \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

و برای آن‌ها، نابرابری مربوط به میانگین‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+\ldots+\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{F_{n+1}}}$$

از آن‌جا که، برای هر k، داریم:

$$\frac{F_k}{F_{k+1}} = 1 - \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$$

بنابراین، سمت چپ نابرابری فوق را می‌توان این طور نوشت:

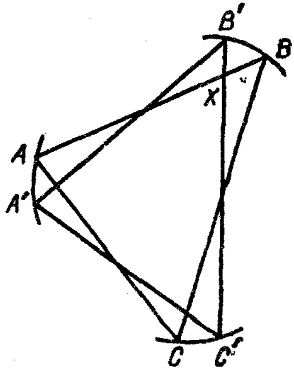
$$1 - \frac{1}{n}\left(\frac{F_0}{F_2}+\frac{F_1}{F_3}+\ldots+\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}\right)$$

که در آن، F_0 را به معنای $1 = F_2 - F_1$ گرفته‌ایم. اگر دوباره از نابرابری میانگین‌ها استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{F_n F_{n+1}}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{F_{n+1}}}$$

که اگر دو طرف را در مخرج طرف دوم ضرب کنیم، به همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۴۸.۹۲. مثلث مفروض T را در نظر می‌گیریم، دایرهٔ به مرکز O را بر آن محیط می‌کنیم و به همهٔ مثلث‌هایی توجه می‌کنیم که از T، با دوران دور O و به اندازهٔ زاویه‌های کوچک، به دست می‌آیند. برای هر یک از این مثلث‌ها، می‌توان جدولی با اندازه‌های ۱۹۹۲ × ۳ رسم کرد و، در محل



شکل ۶۷

برخورد kامین ستون و jامین سطر، علامت ستاره گذاشت، به شرطی که روی jامین ضلع این مثلث، نقطه‌ای به رنگ kام وجود داشته باشد؛ در حالتی که این شرط وجود نداشته باشد، خانهٔ مربوط را در جدول، خالی می‌گذاریم. روشن است که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۶۷ را ببینید) پیدا می‌شوند که جدولی یکسان دارند (S). نقطهٔ X، محل برخورد ضلع‌های AB و $B'C'$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، این نقطه، به رنگ p باشد. در این صورت، در pامین ستون، در نخستین خانهٔ جدول S، باید ستاره گذاشته شده باشد. ولی، این به معنای آن است که روی نخستین ضلع مثلث $A'B'C'$ (یعنی $A'B'$)، نقطه‌ای با رنگ pام وجود دارد. به این ترتیب، برای دو ضلع $A'B'$ و $B'C'$ از مثلث $A'B'C'$، نقطه‌هایی با یک رنگ وجود دارد. همین استدلال را، برای دو ضلع دیگر هم می‌توان کرد.

۴۹.۹۲. *راهنمائی.* ثابت کنید، برای به دست آوردن بزرگترین عدد، می‌توان به این ترتیب، عمل کرد: هر بار، عمل مورد نظر مساله را، روی کوچکترین عددها، انجام دهید.

اکنون، اگر عمل را به این ترتیب دنبال کنیم، معلوم می‌شود که، رقم

سمت راست بزرگترینِ عدد حاصل، برابر است با ۲.

۹۲.۵۱. مساله تنها یک جواب دارد: $(۱, ۱, ۱)$. *راهنمائی.* اگر سه عدد را a، b و c بنامیم، باید دو به دو نسبت به هم اول، و هر سه، عددهایی فرد باشند. در ضمن؛ باید عدد

$$ab + bc + ac + ۱$$

بر هر سه عدد a، b و c و، درنتیجه، بر حاصل ضرب آن‌ها، بخش‌پذیر باشد.

۹۲.۵۴. بله، می‌توان پیدا کرد. دو خط راست $L_۱$ و $L_۲$ را که در نقطهٔ O برخورد دارند، و نقطهٔ دلخواه P را که روی این خطهای راست قرار ندارد، در نظر می‌گیریم. اکنون ۴۳ دایرهٔ مختلف، طوری از نقطه‌های O و P می‌گذرانیم که هر یک از دو خط راست مفروض را در دو نقطه، قطع کنند که، البته، یکی از آن‌ها، همان نقطهٔ O است. فرض کنید، دایرهٔ iام (i می‌تواند برابر یکی از عددهای از ۳ تا ۴۵ باشد)، خط راست $L_۱$ را در نقطهٔ دوم A_i و خط راست $L_۲$ را در نقطهٔ دوم B_i قطع کند. در این صورت، خط‌های راست $L_i = (A_iB_i)$، همراه با دو خط راست $L_۱$ و $L_۲$، دسته خط راست لازم را به ما می‌دهند.

۹۲.۵۵. *راهنمائی.* فرض کنید، بخواهیم کشور را به دو بخش چنان تقسیم کنیم که، در یک بخش، k شهر و، در بخش دیگر $۱۰۰ - k$ شهر وجود داشته باشد؛ آن وقت، مساله را با استدلال استقرایی روی k، حل کنید.

۹۲.۵۶. تحقیق می‌کنیم که

$$L(a_۱, \dots, a_p, a_{p+۱}, \dots, a_k) =$$
$$= L(a_۱, \dots, a_{p+۱}, a_p, \dots, a_k)$$

انتخابی از خانه‌ها را در جدول $m \times n$ «نمونه» می‌نامیم، وقتی که برخورد آن با هر ستون و هر سطر، شامل چند خانهٔ ردیف باشد؛ همچنین، اگر دو خانهٔ «نمونه» در گوشهٔ چپ بالا و گوشهٔ راست پایین مستطیلی مثل Π واقع باشند، بقیهٔ خانه‌ها هم در مستطیل Π، متعلق به «نمونه» باشند. روشن است، اگر عددهای خانه‌ها را به درستی جا دهیم، خانه‌هایی که به وسیلهٔ عددهای p و $p+۱$ اشغال شده‌اند، تشکیل «نمونه» می‌دهند. ثابت می‌کنیم، تعداد روش‌های جا دادن عددهای ۱، ۲، ...، k، به نحوی که عددهای p و $p+۱$، درست همان خانه‌های «نمونهٔ» مفروض را اشغال کنند، با عوض کردن جای a_p و $a_{p+۱}$ با یکدیگر، تغییر نمی‌کند. در واقع، اگر در ستونی، «نمونه» ارتفاعی بیشتر از ۲ داشته باشد، آن وقت $L = ۰$، به ردیف خانه‌ها بستگی نخواهد داشت. اگر در ستونی، ارتفاع «نمونه» برابر ۲ باشد، آن وقت، این دو خانه، به وسیلهٔ عددهای p و $p+۱$، به طور یکسان، پر می‌شوند. با ادامهٔ این زوج‌ها (تعداد آن‌ها را q می‌گیریم)، انتخابی از روش‌های مختلف به صورت $d \times ۱$ به دست می‌آوریم که، در آن‌ها، باید $a_p - q$ عدد p و $a_{p+۱} - q$ عدد و $p+۱$ (و یا برعکس)، بدون ارتباط با هم جا داد. تعداد روش‌های جا دادن $a_p + a_{p+۱} - ۲q$ عددی که در اختیار داریم، در بین این نوارها، بستگی به این ندارد که از چه عددهایی $a_p - q$ و از چه عددهایی $a_{p+۱} - q$ بار استفاده شده است؛ تنها این مهم است که با $a_p - q$ چیز از یک نوع و $a_{p+۱} - q$ چیز از نوع دیگر سروکار داریم. جا دادن d عدد مشخص در نوار $d \times ۱$ هم، درست با یک روش ممکن است.

به این ترتیب، در هر «نمونه»، ردیف عددهای a_p و $a_{p+۱}$، در تعداد روش‌های تبدیل، تاثیری ندارد. از مجموع همهٔ «نمونه‌ها»، به برابری مورد نظر مساله می‌رسیم.

۵۷.۹۲. پاسخ. نه، درست نیست. *راهنمائی.* دسته‌ای از دایره‌ها را

در نظر بگیرید که، مرکزهای آن‌ها، همهٔ گره‌های شبکه‌های با گام $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ در درون مربع ۱۰ × ۱۰ باشند.

۲.۹۳. نه، ممکن نیست. اگر ۵۰ عدد اول را حذف و، به جای آن‌ها، عدد ۵۰ را بنویسیم، آن وقت باید همهٔ عددهای روی تخته را (از جمله خود ۵۰) را حذف کنیم تا عدد ۵۱ را بنویسیم و، اگر در آغاز، به جای ۵۱ عدد اول، عدد ۵۱ را بنویسیم، آن وقت باید همهٔ عددها را کنار بگذاریم تا بتوانیم عدد ۵۰ را بنویسیم. در هر حال، تنها یک عدد روی تخته باقی می‌ماند: ۵۱ یا ۵۰.

۳.۹۳. تعداد پسرها را n می‌گیریم. در این صورت، $5n$ نوعِ مختلفِ «پسر_دختر» خواهیم داشت. هر یک از این زوج‌ها، متناظر است با دادن یک شیرینی: اگر این پسرها و دخترها آشنا باشند، دختر شیرینی را می‌دهد و، اگر آشنا نباشند، پسر شیرینی هدیه می‌کند. از آن‌جا، به دست می‌آید: $5n = ۳۰$، یعنی $n = ۶$.

۴.۹۳. *پاسخ*. چنین عددهایی وجود ندارند.

۶.۹۳. فرض می‌کنیم، هیچ سه مثلثی، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. در این صورت، در درون هر یک از این مثلث‌ها، تنها یک نقطه وجود دارد که راس مثلثی دیگر است؛ همچنین، یک راس از یک مثلث، متعلق به بیش از یک مثلث نیست. روی هم، چند راس وجود دارد؟ از یک طرف، حداکثر ۳ × ۱۹۹۳ راس، زیرا هر مثلث سه راس دارد؛ از طرف دیگر، حداقل ۴ × ۱۹۹۳ راس، زیرا در درون هر مثلث، دست کم چهار راس وجود دارد و، بنابراین روش محاسبه، هیچ راسی دو بار به حساب نیامده است. تناقض.

۷.۹۳. *پاسخ*. نه، نمی‌توان.

۹.۹۳. *پاسخ*. نه، ممکن نیست.

۱۱.۹۳. هر یک از شش جملهٔ این عبارت، برابر است با ۱ یا ۱ — و، بنابراین، حاصل عبارت، عددی زوج است. این حاصل، نمی‌تواند برابر ۶

باشد، زیرا برای این منظور، هر یک از جمله‌های aek، bfg و cdh برابر ۱ و حاصل ضرب آن‌ها هم برابر ۱ باشد؛ در عوض، هر یک از جمله‌های afh، bdk و ceg برابر ۱− باشد و، درنتیجه، حاصل ضربی برابر ۱− داشته باشند. ولی این دو حاصل ضرب، یکی است و نمی‌تواند هم برابر ۱ و هم برابر ۱− شود. ولی عبارت برابر ۴ می‌تواند باشد، مثلاً به ازای

$$a = b = c = e = h = k = ۱ \text{ و } d = f = g = -۱$$

۱۲.۹۳. آدم‌های عجیبِ گوشه‌گیر را، آدم‌های عادی به حساب می‌آوریم. تعداد آشنایان بین بقیهٔ گوشه گیرها را m و بقیهٔ آدم‌های عجیب را k می‌نامیم. از یک طرف، این تعداد کمتر از $۱۰k$ نیست، زیرا هر عجیب گوشه گیر، دست‌کم با ۱۰ نفر آشناست؛ درضمن نه با آدم‌های عجیب (آدم‌های عجیب، وقتی می‌توانند با هم آشنا باشند که، هر دو، گوشه‌گیر هم باشند). از طرف دیگر، این تعداد، از $۱۰m$ بیشتر نیست، زیرا تعداد آشنایان هر گوشه‌گیر، از ۱۰ نفر بیشتر نیست. بنابراین، m از k کمتر نیست، یعنی آدم‌های گوشه‌گیر، از آدم‌های عجیب کمتر نیستند.

۱۳.۹۳. در هر خانه‌ای که دارای ستاره است، تعداد ستاره‌ها را در ستون شامل این خانه در نظر می‌گیریم و، عکس آن را در این خانه می‌نویسیم. بنابراین، مجموع عددها، در هر ستونی که دارای ستاره است، برابر ۱ می‌شود. اگر برای سطرها هم، به همین ترتیب عمل کنیم، مجموع عددها در هر سطر ستاره‌دار هم، برابر ۱ می‌شود. بنابراین، تعداد چنین سطرهایی (و هم ستون‌ها) برابر است با مجموع عددهایی که در جدول نوشته شده‌است.

۱۴.۹۳. *راهنمائی.* ثابت کنید، از کلاس ششم تنها یک نفر شرکت داشته که، او هم، برده است.

۱۶.۹۳. نقطهٔ K را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که خط راست KM با ضلع BC موازی باشد. به سادگی دیده می‌شود که،

مثلث‌های MCN و MKB با هم برابرند (در یک ضلع و سه زاویه). بنابراین خواهیم داشت:

$$|CN| = |KM| = |AM|$$

۱۷.۹۳. کسر اول را u و کسر دوم را v می‌نامیم. مجموع و حاصل ضرب این دو کسر، عددهایی درست‌اند، بنأبراین u و v، ریشه‌های معادلهٔ درجه دومی هستند که ضریب‌های درست دارد، مثلاً معادلهٔ

$$x^۲ + mx + n = ۰$$

چون u و v، عددهایی گویا هستند، پس ریشهٔ دوم مبین این معادله، یعنی $\sqrt{m^۲ - ۴n}$ عدد درستی است؛ درضمن، همراه با m، عددی فرد یا زوج است، ولی در این صورت u و v هم، عددهای درستی می‌شوند، زیرا

$$u, v = \frac{-m \pm ۱\sqrt{m^۲ - ۴n}}{۲}$$

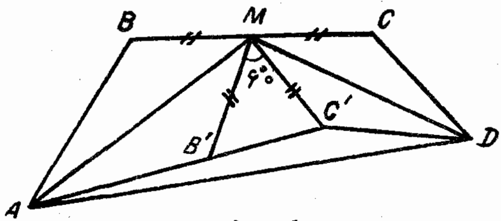
و صورت کسر هم، عددی زوج است.

۱۹.۹۳. B' را قرینهٔ B نسبت به خط راست AM و C' را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط راست MD می‌گیریم. زاویهٔ $B'MC'$ برابر ۶۰ درجه و مثلث $B'MC'$ متساوی‌الاضلاع است (شکل ۶۸). طول خط شکستهٔ $AB'C'D$، برابر است با

$$|AB| + \frac{۱}{۲}|BC| + |CD|$$

ولی طول این خط شکسته، از طول پاره‌خط راست AD، که دو انتهای آن را به هم وصل کرده، بزرگتر است.

۲۰.۹۳. پاسخ. ۳۶ مهره.



شکل ۶۸

۲۱.۹۳. پاسخ. ۲ و ۴.

۲۲.۹۳. بنابر قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{|BM|}{\sin(BCM)}=\frac{|CM|}{\sin(CBM)} \text{ و } \frac{|DN|}{\sin(DCN)}=\frac{|CN|}{\sin(CDN)}$$

ولی بنابر شرط، همهٔ این عبارت‌ها، به روشنی برابرند و، اگر توجه کنیم که:

$$\sin(CBM)=\sin(ABC)=\sin(ADC)=\sin(CDN)$$

برابری $|MC|=|NC|$ به دست می‌آید.

۲۴.۹۳. فرض می‌کنیم در تجزیهٔ $a-b$ به عامل‌های اول، به عدد اولی مثل p برخورد کنیم که با توان فرد $2k-1$ باشد. چون ab بر $a-b$ بخش‌پذیر است، بنابراین، یکی از دو عدد a یا b (مثلاً a) باید بر p^k بخش‌پذیر باشد؛ در این صورت، به ناچار، عدد

$$b=a-(a-b)$$

هم بر p^k بخش‌پذیر می‌شود. از آن‌جا $\frac{ab}{a-b}$، یعنی c، بر p بخش‌پذیر است. به این جا رسیدیم که a، b و c، بخشیاب مشترکی برابر p دارند.

۲۵.۹۳. *راهنمائی.* مقدار $S=\sum|OM_i|^2$ را در نظر بگیرید که، در آن، O مبداء مختصات و M_iها، نقطه‌های مفروض‌اند. سپس، ببینید مقدار S، بعد از عملی که باید انجام داد، چه تغییری می‌کند؟

۲۶.۹۳. فرض می‌کنیم نابرابری برقرار نباشد. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{x} < \sqrt[32]{xyz}, \sqrt[6]{y} < \sqrt[32]{xyz}, \sqrt[24]{z} < \sqrt[32]{xyz}$$

این نابرابری‌ها را می‌توان این‌طور نوشت:

$$x^{16} < xyz, y^{16} < (xyz)^{3}, z^{16} < (xyz)^{12}$$

از ضرب این سه نابرابری در یکدیگر به دست می‌آید:

$$x^{16}y^{16}z^{16} < (xyz)^{16}$$

که ممکن نیست.

۲۷.۹۳. دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که، محیط آن، به ۹۹ کمان برابر تقسیم شده باشد. در بین نقطه‌های پایانی این کمان‌ها، ۱۰ نقطه را نشان می‌گذاریم که دایره را به ۱۰ کمان تقسیم کرده و، درضمن، طول‌های این کمان‌ها، برابر همان ۱۰ عددی باشد که در راس‌های ده ضلعی اول قرار داده‌ایم (و البته، با همان ردیف). به همین ترتیب، دایرهٔ دوم را، برای ده‌ضلعی دوم می‌سازیم. اکنون، دایرهٔ دوم را، روی دایرهٔ اول طوری قرار می‌دهیم که نقطه‌های تقسیم آن‌ها، بر یکدیگر قرار گیرند و، سپس، ۹۹ دوران آن را به اندازهٔ مضرب‌های $\frac{2\pi}{99}$ در نظر می‌گیریم. اگر بعد از هر دوران، بیش از یک نقطهٔ نشان دار دایرهٔ اول بر نقطهٔ نشان‌داری از دایرهٔ دوم قرار نگیرد، آن وقت، در مجموع، بیش از ۹۹ انطباق پیدا نمی‌کنیم که ممکن نیست، زیرا روشن است که تعداد همهٔ این انطباق‌ها، باید درست برابر ۱۰۰ باشد. یعنی، دست‌کم در یکی از این دوران‌ها، باید لااقل دو نقطهٔ نشان‌دار دایرهٔ اول بر دو نقطهٔ نشان‌دار دایرهٔ دوم منطبق باشد؛ طول کمان‌های بین این دو نقطه، در دو دایره یکی است و این، همان مجموع چند عدد پشت سر هم است.

۲۸.۹۳. اگر در برابری $P(x^۲ - x + ۱) = Q(x^۲ + x + ۱)$، متغیر x را به $-x$ تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$P(x^۲ + x + ۱) = Q(x^۲ - x + ۱)$$

از این‌جا به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & P(x^۲ - x + ۱) = Q(x^۲ + x + ۱) = \\ & = Q((x + ۱)^۲ - (x + ۱) + ۱) = P((x + ۱)^۲ + (x + ۱) + ۱) = \\ & = P(x^۲ + ۳x + ۳) \end{aligned}$$

و این، به معنای آن است که

$$P(۱) = P(۷) = P(۲) = \ldots$$

یعنی چندجمله‌ای $P(x)$، مقداری را بی‌نهایت مرتبه قبول می‌کند که، به معنای ثابت بودن این چند جمله‌ای است.

۳۲.۹۳. *راهنمائی.* اگر O را مرکز دایره بگیریم، ثابت کنید، چهار ضلعی $PQOM$، قابل محاط در یک دایره است.

۳۳.۹۳. فرض می‌کنیم بتوانیم همهٔ خانه‌های جدول را، با عملی که در صورت مساله آمده است، سیاه کنیم. لحظه‌ای را در نظر می‌گیریم که، عمل سیاه کردن خانه‌ها را، برای نهمین بار، در یکی از ردیف‌ها (و مثلاً در سطر) انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم این، $(k + ۹)$امین عمل باشد (روشن است که k، از ۸ بزرگتر نیست). در این صورت، حداکثر $۱۷ - k$ عمل باقی می‌ماند که باید به رنگ کردن ستون‌ها مربوط باشد. بنابراین، روی هم ۲۶ بار عمل رنگ کردن، انجام می‌گیرد. ولی در هر رنگ کردن، حداکثر ۸ خانه سیاه می‌شود، یعنی بعد از ۲۶ عمل، حداکثر ۲۰۸ خانه به رنگ سیاه درمی‌آید؛ در حالی که در آغاز کار ۲۰۹ خانهٔ سفید داریم.

۳۴.۹۳. *راهنمائی.* همهٔ زوج‌های مرتب (a,b) را، از عضوهای مجموعهٔ M در نظر بگیرید و، با توجه به عکس حکم مساله، روش عادی تقسیم این مجموعهٔ زوج‌ها را، به سه‌تایی‌های متقاطع نشان دهید.

۳۶.۹۳. فرض می‌کنیم: $k^۲ = ۳۰۰ \ldots ۰۰۱$؛ در این صورت

$$k^۲ - ۱ = ۳ \times ۱۰^n \Rightarrow (k-۱)(k+۱) = ۳ \times ۲^n \times ۵^n$$

روشن است که تنها یکی از عددهای $k-۱$ یا $k+۱$ می‌تواند بر ۵ بخش‌پذیر باشد و، بنابراین، یکی از این عددها مضربی از ۵^n است. از این‌جا به دست می‌آید:

$$۵^n \leq ۳ \times ۲^n + ۲$$

که به روشنی، برای $n \geq ۲$ نادرست است. حالت $n = ۱$ هم، به طور مستقیم، قابل تحقیق است.

۳۷.۹۳. *راهنمائی.* ثابت کنید، تعداد نقطه‌هایی که از نقطهٔ O در نگاشت

$$f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

به دست می‌آید، برابر است با $۳^۷$.

۳۹.۹۳. فرض می‌کنیم این طور نباشد و درجهٔ شهرها را، به ترتیب صعودی منظم می‌کنیم: $d_۱ \leq d_۲ \leq \ldots \leq d_n$. در این صورت، باید این نابرابری‌ها را داشته باشیم:

$$d_k - d_۱ \geq k-۱, d_{k+۱} - d_۲ \geq k-۱, \ldots, d_n - d_{n-k+۱} \geq k-۱$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم: حالت $n < ۲k-۱$ و حالت $n \geq ۲k-۱$، در این‌جا، تنها به حالت اول می‌پردازیم (بحث در حالت

دوم هم، شبیه حالت اول است). اگر همهٔ نابرابری‌های بالا را جمع کنیم، به دست می‌آید.

$$(d_n + d_{n-۱} + \ldots + d_k) - (d_۱ + d_۲ + \ldots + d_{n-k+۱}) \geq$$
$$\geq (n-k+۱)(k-۱)$$

یعنی مجموع درجه‌های یک مجموعهٔ A، شامل $n-k+۱$ شهر، دست‌کم به اندازهٔ $(n-k+۱)(k-۱)$، از مجموع درجه‌های مجموعهٔ B، شامل $n-k+۱$ شهر دیگر بیشتر است. ولی مجموع درجه‌های شهرهای مجموعهٔ A، از

(جاده‌های درونی A)	$(n-k+۱)(n-k)$
(جاده‌هایی که A را به شهرهای بیرون A و بیرون B متصل می‌کند)	$+(n-k+۱)(۲k-n-۲)$
(جاده‌ای از A به B)	$+x$

تجاوز نمی‌کند. به همین ترتیب، مجموع درجه‌های شهرهای B، کمتر از x نیست. از آن‌جا، باید داشته باشیم:

$$(n-k+۱)(n-k) + (n-k+۱)(۲k-n-۲) \geq$$
$$(n-k+۱)(k-۱)$$

یعنی

$$(n-k+۱)(k-۲) \geq (n-k+۱)(k-۱)$$

که یک تناقض است.

۴۰.۹۳. دو طرف نابرابری فرض را در $f^{۱۸}g^{۹۲}$ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$(f^{۱۹}g^{۹۳})' = ۱۹f^{۱۸}f'g^{۹۳} + ۹۳g^{۹۲}g'f^{۱۹} \geq ۰$$

چون تابع $f^{۱۹}g^{۹۳}$ در بازهٔ $[۰, ۱]$ نزولی نیست، بنابراین

$$f^{۱۹}(۱)g^{۳۹}(۱) \geq f^{۱۹}(۰)g^{۳۹}(۰)$$

می‌دانیم $f(۱) = f(۰) = ۱$، پس $g(۱) \geq g(۰)$.

۴۲.۹۳. فرض می‌کنیم، یکی از جمله‌های دنباله، یعنی a_k، برابر $\frac{p}{q}$ باشد که، در آن، p و q عددهایی طبیعی‌اند. در این صورت، جملهٔ بعدِ دنباله، برابر $\frac{q-kp}{p}$ می‌شود و می‌بینیم که، مجموع صورت و مخرج کسر، کوچک شده است. بعد اِز چند گام، صورت یا مخرج کسر و، بنابراین خود کسر، منفی می‌شود.

۴۳.۹۳. روی قاعدهٔ AC، نقطهٔ D' را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$|AD'| = |FC|, |D'C| = |AE|$$

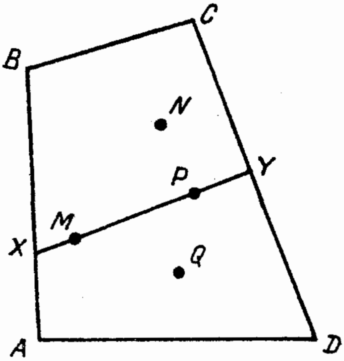
در این صورت، مثلث‌های AED' و FCD' برابرند و، بنابراین، $|ED'| = |D'F|$. از این جا نتیجه می‌شود $D = D'$. سپس، معلوم می‌شود، اگر مجموع دو زاویهٔ $\widehat{CFD} = \widehat{ADE}$ و $\widehat{CDF}$ را از ۱۸۰ درجه کم کنیم، زاویهٔ FDE به دست می‌آید و، بنابراین، برابر است با زاویهٔ FCD.

۴۴.۹۳. *راهنمائی.* به باقی‌ماندهٔ عددها، در تقسیم بر ۳ توجه کنید.

۴۵.۹۳. *راهنمائی.* ثابت کنید، اگر چنین تقسیمی ممکن باشد، آن وقت باید تعداد زاویه‌های ۱۰ درجه، از یک سوم تعداد کل زاویه‌ها بیشتر باشد.

۴۶.۹۳. *پاسخ.* ۵۰ مهره.

۴۹.۹۳. این چهار نقطهٔ درونی، ممکن است یک چهارضلعی کوژ تشکیل دهند و یا یک مثلث و نقطه‌ای در درون آن. در این‌جا، تنها به حالت



شکل ۶۹

اول می‌پردازیم (شکل ۶۹).

برای نقطهٔ Z واقع بر محیط چهارضلعی اصلی، $S(Z)$ را به معنای مجموع فاصله‌های از Z تا راس‌های چهارضلعی، و $T(Z)$ را به معنای مجموع فاصله‌های از Z تا چهار نقطهٔ درونی می‌گیریم. نقطه‌های درونی را هم M، N، P و Q می‌نامیم که در درون چهار ضلعی کوژ $ABCD$ قرار دارند و چهار ضلعی کوژ $MNPQ$ را تشکیل می‌دهند.

خط راست MP را رسم می‌کنیم تا ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ را در نقطه‌های X و Y قطع کند. یکی از دو نقطهٔ X یا Y، پاسخ مساله است. در واقع

$$\begin{aligned}S(X)+S(Y) &= |XA|+|XB|+|XC|+|XD|+\\ &\quad +|YA|+|YB|+|YC|+|YD|;\\ T(X)+T(Y) &= |XM|+|XN|+|XP|+|XQ|+\\ &\quad +|YM|+|YN|+|YP|+|YQ| =\\ &= |XN|+|YN|+۲|XY|+|XQ|+|YQ|\end{aligned}$$

ولی داریم: $|XC|+|YB|>|BC|+|XY|$، بنابراین

$$|XB|+|XC|+|YB|+|YC|>(|XB|+|BC|+|CY|)+$$
$$+|XY|>(|XN|+|NY|)+|XY|$$

به همین ترتیب

$$|XA|+|XD|+|YA|+|YD|>(|XA|+|AD|+|YD|)+$$
$$+|XY|>(|XQ|+|QY|)+|XY|$$

از مجموع این دو نابرابری، به دست می‌آید.

$$S(X)+S(Y)>T(X)+T(Y)$$

یعنی، برای یکی از دو نقطهٔ X و Y، نابرابری لازم درست است.

۹۳.۵۱. پاسخ. نه، نمی‌توان. برای اثبات، کافی است، تنها به این موضوع بپردازیم که، هر عدد در سطرها، از هر عدد در ستون‌ها، بزرگتر باشد.

۹۳.۵۲. ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}(|OA|+|OC|\geq|OB|+|OD|$$

اگر دو طرف را مجذور کنیم، به دست می‌آید:

$$۲(|OA|^۲+|OC|^۲+۲|OA|\cdot|OC|)\geq|OB|^۲+|OD|^۲+۲|OB|\cdot|OD|$$

که با توجه به برابری معلوم

$$|OA|^۲+|OC|^۲=|OB|^۲+|OD|^۲$$

به این صورت قابل تبدیل است:

$$|OB|^۲ + |OD|^۲ + ۴|OA| \cdot |DC| \geq ۲|OB| \cdot |OD|$$

که درستی آن روشن است، زیرا مجموع مجذورهای دو عدد، کمتر از دو برابر حاصل‌ضرب آن‌ها نیست. اگر O را روی A بگیریم، کمترین مقدار مورد نظر، یعنی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ به دست می‌آید.

۵۳.۹۳. پاسخ. $f(x) = \dfrac{x}{۱ + \dfrac{x}{۲۳۹}}$.

۵۴.۹۳. فرض می‌کنیم، با هر حرکت آغاز کنندهٔ بازی، مثلاً گذاشتن مهره در نقطهٔ A، دومی پاسخ مناسبی، مثل گذاشتن مهره در نقطهٔ B داشته باشد. حالتی را در نظر می‌گیریم که، حرکت اول بازی کن اول، در نقطهٔ B باشد. اگر پاسخ دومی، توجه به نقطهٔ C، که با A فرق می‌کند، باشد، آن وقت بازی

$$(۱)A - (۲)B - ۳(C)$$

منجر به بُرد اولی می‌شود؛ یعنی دومی باید به حرکت $B(۱)$، پاسخ $A(۲)$ را بدهد تا اولی برنده نشود. ولی این، به معنای آن است که، همهٔ نقطه‌ها، به زوج‌های (A, B) تقسیم می‌شوند که، با فرد بودن عدد ۱۹۹۳، سازگار نیست.

۵۵.۹۳. درستی نابرابری

$$\frac{۲}{۱ + xy} \geq \frac{۱}{۱ + x^۲} + \frac{۱}{۱ + y^۲}$$

برای عددهای مثبت x و y، روشن است (کافی است، کسرها را به یک

مخرج تبدیل کنیم). بنابراین، کافی است نابرابری‌های از نوع

$$\frac{۲}{۱+a_ia_{i+۱}} \geq \frac{۱}{۱+a_i^۲}+\frac{۱}{۱+a_{i+۱}^۲}$$

را با هم جمع کنیم.

۵۶.۹۳. O را مرکز nضلعی و a_i را عددی می‌گیریم که در راس iام nضلعی وجود دارد. فرض می‌کنیم:

$$\vec{S}=\sum_{i=۱}^{n} a_i\, \vec{OA_i}$$

به سادگی دیده می‌شود که، به ازای هر عملی که در صورت مساله از آن یاد شده است، بردار $\vec{S}$ تغییر نمی‌کند. در ابتدا $\vec{S}=\vec{OA_i}$؛ و اگر همهٔ عددهای راس‌ها با هم برابر باشند، آن وقت $\vec{S}=\vec{۰}$. چون $\vec{OA}\neq\vec{۰}$، پس پاسخ به پرسش مساله، منفی است.

۵۷.۹۳. از حساب هم‌نهشتی‌ها، نسبت به مدول $۲p+۱$ استفاده می‌کنیم. تعداد گلوله‌های ظرف اول را x و تعداد گلوله‌های ظرف دوم را y فرض می‌کنیم. در این صورت، در هر ثانیه، زوج (x, y) به زوج $\left(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۲}\right)$ تبدیل می‌شود (فراموش نکنید که، تنها به باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر $۲p+۱$ توجه داریم؛ روشن است که $y\equiv -x$). m را کوچکترین عدد طبیعی می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$۲^m \equiv ۱ (\bmod ۲p+۱)$$

در این صورت، باقی‌مانده‌های ۱، ۲، ...، $۲p$، در گروه m باقی‌مانده به صورت

$$\left\{x, \frac{x}{۲}, \frac{x}{۴}, \ldots, \frac{x}{۲^{m-۱}}\right\}, \frac{x}{۲^m}\equiv x$$

پراکنده‌اند، یعنی $۲p$ بر m بخش‌پذیر است:

$$m \in \{۱, ۲, \dots, ۲p\}$$

حالت‌های $m = ۱$ و $m = ۲$ روشن است. اگر $m = ۲p$، آن وقت عددهای x و k در یک گروه قرار می‌گیرند، یعنی بعد از چند ثانیه، ظرف اول شامل درست k گلوله می‌شود.

اگر $m = p$، آن وقت عدد $۲p \equiv (-۱)$ در گروهی قرار می‌گیرد که با گروه شامل عدد ۱ فرق دارد. در واقع، اگر برای هر عدد طبیعی r داشته باشیم:

$$۲^r \equiv -۱ (\mathrm{mod}\, ۲p+۱)$$

آن وقت $۲^{۲r} \equiv ۱(\mathrm{mod}\, ۲p+۱)$ و $۲r$ بر $m = p$ بخش‌پذیر می‌شود، یعنی r بر p بخش‌پذیر است. ولی در این صورت

$$۲^r \equiv ۲^p \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۲p+۱)$$

که یک تناقض است! از این‌جا نتیجه می‌شود که، باقی‌مانده‌های k و $(-k)$، در گروه‌های مختلف‌اند (تنها دو گروه داریم) و، بنابراین، x با یکی از آن‌ها، در یک گروه قرار می‌گیرد، چیزی که لازم داشتیم.

۵۹.۹۳. به عنوان نمونه $f(x) = \left(\frac{۱}{۴۵} + \sqrt{x}\right)^۲$.

۶۰.۹۳. *راهنمائی*. انتقال موازی را در نظر بگیرید که نقطهٔ F را به نقطهٔ E می‌برد که، در این صورت، نقطهٔ C به نقطهٔ C' منتقل می‌شود.

۶۲.۹۳. اثبات را می‌توان با استقرای روی n داد. برای $n = ۲$، نابرابری

$$\frac{a_۱ b_۱}{a_۱ + b_۱} + \frac{a_۲ b_۲}{a_۲ + b_۲} \le \frac{(a_۱ + a_۲)(b_۱ + b_۲)}{a_۱ + a_۲ + b_۱ + b_۲}$$

هم‌ارز است با نابرابری

$$[a_۱b_۱(a_۲+b_۲)+a_۲b_۲(a_۱+b_۱)](a_۱+a_۲+b_۱+b_۲) \leq$$
$$\leq (a_۱+a_۲)(b_۱+b_۲)(a_۱+b_۱)(a_۲+b_۲)$$

که بعد از ساده کردن، به نابرابری روشن

$$(a_۱b_۲-a_۲b_۱)^۲ \geq ۰$$

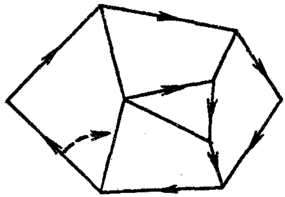
منجر می‌شود. گذر استقرایی، بسیار ساده است.

۹۳.۶۳. *راهنمائی.* به جای شرط وجود مستطیل‌های سه گانه، می‌توان دو شرط زیر را، که برقراری هردوی آن‌ها با هم، با شرط مساله هم ارز است، در نظر گرفت: اول، باید مجموع بردارهای $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FA}$ برابر بردار صفر باشد؛ دوم، اگر زاویه‌های شش ضلعی را در راس‌های A، B، ...، F، به ترتیب α_A، α_B، ...، α_F بگیریم، آن وقت

$$\cos\alpha_A \cdot \cos\alpha_C \cdot \cos\alpha_E = \cos\alpha_B \cdot \cos\alpha_D \cdot \cos\alpha_F$$

اکنون، تنها باید به این نکته توجه کنیم که، این شرط‌ها «متقارن‌اند»، یعنی با عبور از یکی از ضلع‌های سه‌گانه، به ضلع‌های سه‌گانهٔ دیگر شش ضلعی، تغییر نمی‌کنند.

۹۳.۶۴. مرکز وجه iام را A_i می‌نامیم (i می‌تواند عددهای از ۱ تا n را اختیار کند) و، مرکزهای وجه‌های مجاور را، با پاره‌خط‌های راست، به هم وصل می‌کنیم. گرافی را که به دست می‌آید، G می‌نامیم. لحظهٔ زمانی دلخواه t را تثبیت می‌کنیم و بعضی از یال‌های گراف G را، با پیکان‌هایی، به این ترتیب، علامت می‌گذاریم: اگر در لحظهٔ مفروض، مگس iام روی یال مشترک وجه‌های iام و jام قرار دارد، آن وقت روی پاره‌خط راست A_iA_j،



شکل ۷۰

پیکانی در جهت از A_i به A_j می‌گذاریم. اکنون، از هر راس گراف G، درست یک پیکان خارج می‌شود. بنابراین، برخی از این بردارها، یک دُور تشکیل می‌دهند که رویهٔ چند وجهی را به دو بخش تقسیم می‌کند (از این نوع دُورها، ممکن است در گراف G، چند تا باشد). سطح چنین بخشی را؛ با تعداد راس‌هایی از گراف G، که در درون یا روی مرکز دُور قرار دارند، اندازه می‌گیریم. چون این مقدار، بی‌تردید، تنها می‌تواند مقدار محدودی باشد، بنابراین، لحظهٔ زمانی t_0 وجود دارد که، سطح چنین بخشی در درون دُوری مثل Z، به حداقل مقدار می‌رسید. دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. یال‌ها در دُور Z، تکراری نیستند. در این صورت، باز هم به دو حالت توجه می‌کنیم: الف) ضمن حرکت روی دُور، بخش حداقل را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیمائیم؛ ب) حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. در حالت «الف»، نخستین لحظهٔ زمانی بعد از t_0 را پیدا می‌کنیم که، در آن، یکی از پیکان‌های دُور (مثلاً با مبداء در راس A)، به یال مجاور «می‌پرد» (شکل ۷۰ را ببینید). به وسیلهٔ پیکان، از نقطهٔ A می‌رویم. به سادگی دیده می‌شود که، دیر یا زود، به راسی که در آن‌جا بودیم، برمی‌گردیم و دُوری که تشکیل می‌شود، بخشی را که دارای کمترین سطح است، محدود می‌کند که ممکن نیست. در حالت «ب»، باید از نظر زمانی به عقب برگشت و آخرین لحظهٔ قبل از t_0 را پیدا کرد که، در آن، «پرش» پیکان انجام گرفته است؛ دنبالهٔ بحث، شبیه قبل است.

حالت ۲. در دُور، تکرار یال‌ها وجود دارد. ولی در این صورت، روشن است که یالی مثل A_iA_j، دو بار در جهت‌های مختلف پیش می‌رود، یعنی با دو پیکان علامت گذاری شده است؛ و این، به معنای آن است که iامین و jامین مگس، یا روی همین یال به هم می‌رسند و یا روی این یال به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند که، به ناچار، بعد از مدتی به هم می‌رسند.

۶۵.۹۳. خانه‌های جدول را، شبیه صفحهٔ شطرنج، به رنگ سیاه و سفید درمی‌آوریم و، فرض می‌کنیم، گوشه‌های جدول، به رنگ سیاه باشند. در این صورت، می‌توان رنگ خانه‌های A و B را هم سیاه به حساب آورد، زیرا اگر آن‌ها سفید باشند، آن وقت تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی، در هر حالت، برابر صفر می‌شود.

یکی از روش‌های پوشاندن جدول خودمان T را در نظر می‌گیریم (بدون این که خانهٔ A پوشانده شده باشد) و آن قطعهٔ ۲ $\times$ ۱ را در نظر می‌گیریم که روی خانهٔ $B = B_1$ (و خانهٔ دیگر B_2) قرار گرفته است. این قطعه را به خانه‌ای در جهت از B_1 به طرف B_2 حرکت می‌دهیم. خانهٔ سوم B_2؛ که در همین جهت است، به وسیلهٔ قطعهٔ دیگری، که خانه‌های B_3 و B_4 را پوشانده است، اشغال شده‌است؛ آن را در جهت از طرف B_3 به طرف B_4 حرکت می‌دهیم و غیره. زنجیره‌ای از قطعه‌ها به دست می‌آید که یا به صورت یک دُور به پایان می‌رسد و یا به خانهٔ B_1 تکیه می‌دهد. (تحقیق کنید، همیشه می‌توان قطعه ۲ $\times$ ۱ را در این جهت حرکت داد؛ این، از آن‌جا نتیجه می‌شود که خانه B_{2k+1} همیشه یک خانهٔ سیاه است و، درضمن، شمارهٔ ستون آن و شمارهٔ سطر آن، به ترتیب، از شمارهٔ ستون و شمارهٔ سطر B_1، به تعدادی زوج اختلاف دارد). از طرف دیگر، تشکیل دُور ممکن نیست، زیرا در این حالت، در درون دُور، تعداد خانه‌ها باید فرد باشد (خواننده، خود این حکم را ثابت کند). به این ترتیب، این زنجیره، به خانهٔ A تکیه می‌دهد. در این صورت، می‌توان، از پوشش T بدون A، به پوشش T بدون B و، این

زنجیره را به قطعه‌هایی با روش دیگر تبدیل کرد که A را پوشانده باشد، ولی B در بیرون پوشش باشد. به این ترتیب، هر روش پوششِ بدون A، با هر روش پوشش بدون B، متناظر است.