مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

المپیادهای ریاضی چین

(۱۹۸۶-۲۰۰۰)

گردآوری و ترجمهٔ **ارشک حمیدی**

انتشارات فاطمی

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر :

یحیی تابش

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

المپیادهای ریاضی چین

(۱۹۸۶-۲۰۰۰)

گردآوری و ترجمهٔ **ارشک حمیدی**

انتشارات فاطمی

المپیادهای ریاضی چین (۲۰۰۰ـ۱۹۸۶)

گردآوری و ترجمه: ارشک حمیدی
ویرایش: بردیا حسام
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ دوم، ۱۳۸۸
شابک ۴ـ۳۷۳ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-373-4
قیمت: ۲۵۰۰ تومان
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): مریم مهری
- رسامی: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ خاشع

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱ ـ میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، کوچهٔ میرهادی، شمارهٔ ۱۴ تلفن و نمابر: ۸۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۸۹۶۴۷۷۰
info@fatemi.ir

حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲ ـ ، گردآورنده و مترجم.
المپیادهای ریاضی چین (۲۰۰۰ـ ۱۹۸۶) / گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی؛ زیر نظر یحیی تابش، امیدعلی کرمزاده؛ ویرایش بردیا حسام.ــ تهران: فاطمی، ۱۳۸۳.
ده، ۱۴۹ ص.: مصور.ــ (مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)
ISBN 964-318-373-4
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
چاپ دوم: ۱۳۸۸
کتابنامه: ص. ۱۴۹.
۱. المپیادها (ریاضیات). الف. تابش، یحیی، ۱۳۲۹ ـ .ب. شهنی کرمزاده، امیدعلی، ۱۳۲۳ ـ . ج. عنوان.
۷الف۸ح/۲۴/LB۳۰۶۰ ۳۷۲/۲۳۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۳۷۲۹۲ـ۸۲م

فهرست مطالب

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان.** هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر **المپیاد ریاضی** اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ **اتووش** به نام **بارون لوراند اتووش**[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی **المپیاد بین‌المللی ریاضی** شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

1. Baron Loránd Eötvös

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ سوم است. در این کتاب مسأله‌های المپیادهای ریاضی چین از سال ۱۹۸۶ تا سال ۲۰۰۰ را آورده‌ایم. نود مسأله‌ای که در این کتاب آمده‌اند، خواننده را با نوع مسأله‌هایی که در کشور چین برای گزینش اعضای تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی مناسب دانسته می‌شود، آشنا می‌کنند. موفقیتهای خیره‌کنندهٔ کشور چین در المپیاد بین‌المللی ریاضی دلیل علاقهٔ افراد به دانستن نحوهٔ انتخاب دانش‌آموزان چینی برای شرکت در این مسابقهٔ معتبر است. مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.

پیشگفتار

کم نیستند کسانی که ضمن برخورد با مسأله‌های جالب و پیکارجو به ریاضیات علاقه‌مند شده‌اند. رضایت خاطری که پس از حل مسأله‌ای پیکارجو دست می‌دهد، آنقدر پابرجاست که حتی سالیان متمادی نقش آن زدوده نمی‌شود. البته باید دانست که راه‌حل مسأله‌ای جالب و باارزش به‌ندرت به‌سادگی و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است.

مسابقه‌های ریاضی، که امروزه بخش مهمی از فرهنگ ریاضی به‌شمار می‌آیند، منابعی غنی از چنین مسأله‌هایی هستند. علاوه بر این، برگزاری چنین مسابقه‌هایی به سرزندگی محیطهای دانش‌آموزی و تقویت روحیهٔ کارگروهی کمک فراوانی می‌کند. بسیار پیش می‌آید که دانش‌آموزان، پس از مسابقه، راه‌حلهای یکدیگر را بررسی می‌کنند و یا به‌طور گروهی راه‌حل مسأله‌هایی را که حل نکرده‌اند پیدا می‌کنند.

در حال حاضر، اکثر کشورهای جهان مسابقه‌های ریاضی در سطح ملی برگزار می‌کنند. علاوه بر این، هر سال المپیاد بین‌المللی ریاضی در یکی از کشورهای جهان برگزار می‌شود که معتبرترین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی است.

موفقیتهای خیره‌کنندهٔ کشور چین در المپیاد بین‌المللی ریاضی دلیل علاقهٔ افراد به آگاهی از نحوهٔ انتخاب و آموزش دانش‌آموزان چینی برای شرکت در این مسابقهٔ دشوار است. درکشور چین مسابقه‌های ریاضی متعددی در سطوح مختلف برای دانش‌آموزان برگزار می‌شود. یکی از اینها مسابقهٔ ریاضی سراسری چین است. در ژانویهٔ هر سال از برگزیدگان این مسابقه دعوت می‌شود که ضمن شرکت در اردوی زمستانی ریاضی، در المپیاد ریاضی چین هم شرکت کنند. برگزیدگان این المپیاد در آزمونهای

گزینش تیم شرکت می‌کنند تا اعضای تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی مشخص شوند.

در این کتاب مسأله‌های المپیادهای ریاضی چین از سال ۱۹۸۶ تا سال ۲۰۰۰ را آورده‌ایم. این کتاب از دو بخش تشکیل شده است، در بخش اول صورت مسأله‌ها و در بخش دوم راه‌حل مسأله‌ها را آورده‌ایم. با اینکه مسأله‌های این کتاب اغلب دشوارند، برای حل کردن اکثر آنها نیاز به استفاده از تکنیکهای پیچیده نیست و تسلط بر روشهای اصلی مسأله حل کردن و شکیبایی و پیگیری ایده‌هایی که به ذهن می‌رسد کافی است.

ارشک حمیدی، فروردین ۱۳۸۳

مسأله‌ها

اولین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۶

مسألهٔ ۱. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید دو حکم زیر هم‌ارزند:

الف) به‌ازای هر i و j که $i \neq j$، $a_i + a_j \geq 0$؛

ب) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$، که در آن x_1، x_2، ... و x_n عددهای حقیقی غیرمنفی دلخواهی هستند که

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

مسألهٔ ۲. D، E و F نقطه‌هایی روی ضلع BC از مثلث ABCاند و AD، AE و AF به‌ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانهٔ این مثلث‌اند. اگر $AD = 12$، $AE = 13$ و $AF = m$، تعیین کنید که به‌ازای چه مقدارهایی از m، زاویهٔ BAC

الف) حاده است؛

ب) قائمه است؛

ج) منفرجه است.

مسألهٔ ۳. فرض کنید z_1، z_2، ... و z_n عددهایی مختلط باشند و

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 1$$

ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ وجود دارد که مجموع عضوهایش، که آن را S می‌نامیم، در نابرابری $|S| \geq \frac{1}{6}$ صدق می‌کند.

مسألهٔ ۴. $PQRS$ چهارضلعی محدبی درون مثلث ABC است. ثابت کنید مساحت یکی از مثلثهای PQR، PQS، PRS و QRS از یک‌چهارم مساحت مثلث ABC بیشتر نیست.

مسألهٔ ۵. آیا جایگشتی از عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, \ldots, ۱۹۸۶, ۱۹۸۶$$

وجود دارد که به‌ازای هر k، دقیقاً k عدد دیگر میان دو k وجود داشته باشد؟

مسألهٔ ۶. هر نقطه در صفحه را به دلخواه به رنگ سیاه یا سفید می‌کنیم. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱ یا $\sqrt{۳}$ وجود دارد که رنگ هر سه رأسش یکسان است.

دومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۷

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادلهٔ

$$z^{n+۱} - z^n - ۱ = ۰$$

ریشه‌ای دارد که در $|z| = ۱$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر $n + ۲$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع n با ترسیم خطهایی موازی با ضلعهایش به $n^۲$ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم شده است. هر نقطه‌ای که رأس دست‌کم یکی از این مثلثهای یکه است با عددی حقیقی برچسب خورده است. رأسهای A، B و C به‌ترتیب با a، b و c برچسب خورده‌اند. در هر لوزی که از ترکیب دو مثلث یکه که در ضلعی مشترک‌اند تشکیل شده است، مجموع برچسبهای روی مجموعه‌های رأسهای روبه‌رو با هم برابر است.

الف) کوتاهترین فاصله را میان نقطه‌ای که برچسبش بزرگترین عدد است با نقطه‌ای که برچسبش کوچکترین عدد است تعیین کنید.

ب) مجموع برچسبها را تعیین کنید.

مسألهٔ ۳. در یک دوره مسابقه هر دو بازیکن دقیقاً یک‌بار با هم بازی می‌کنند. هیچ‌یک از بازیها به تساوی نمی‌انجامد. بازیکنی مانند A به‌شرطی جایزه می‌گیرد که به‌ازای هر بازیکن دیگری مانند B، یا A از B برده باشد یا A از بازیکنی مانند C برده باشد که او از B برده است. ثابت کنید که اگر فقط یک بازیکن جایزه برده باشد، این بازیکن از بقیهٔ بازیکنها برده است.

مسألهٔ ۴. ۵ نقطه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع به مساحت ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید سه مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارند که با مثلث مفروض متشابه‌اند، هر یک از این ۵ نقطه درون دست‌کم یکی از این سه مثلث قرار دارد و مجموع مساحتهای آنها حداکثر ۰٫۶۴ است.

مسألهٔ ۵. کره‌ای به مرکز O بر هر یک از شش یال چهاروجهیی مماس است. علاوه بر این، چهار کره به مرکزهای رأسهای چهاروجهی وجود دارند که هر یک از آنها بر یکی دیگر مماس است و همگی بر کره‌ای دیگر به مرکز O مماس‌اند. ثابت کنید این چهاروجهی منتظم است.

مسألهٔ ۶. مجموع m عدد طبیعی زوج و n عدد طبیعی فرد ۱۹۸۷ است. بیشترین مقدار $3m + 4n$ چقدر است؟

سومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸

مسألهٔ ۱. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی باشند و دست‌کم یکی از آنها غیرصفر باشد. عددهای حقیقی r_1، r_2، ... و r_n چنان‌اند که به‌ازای هر دنباله از عددهای حقیقی مانند x_1، x_2، ... و x_n،

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \cdots + r_n(x_n - a_n)$$

از

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. r_1، r_2، ... و r_n را پیدا کنید.

مسألهٔ ۲. دو دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند و شعاع یکی از آنها دو برابر شعاع دیگری است. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایرهٔ کوچکتر محاط شده است. امتدادهای AB، BC، CD و DA دایرهٔ بزرگتر را به‌ترتیب در نقطه‌های C_1، D_1، A_1 و B_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید محیط $A_1B_1C_1D_1$ از دو برابر محیط $ABCD$ کمتر نیست و تعیین کنید که چه‌وقت این محیطها برابرند.

مسألهٔ ۳. دنباله‌ای از n عدد حقیقی مفروض است. هر قطعه از جمله‌های متوالی را که میانگینشان از ۱۹۸۸ بیشتر است اژدها، و اولین جمله در این قطعه را سر اژدها می‌نامیم. هر تک‌جمله‌ای که از ۱۹۸۸ بیشتر است نیز اژدها و سر اژدهاست. فرض کنید دست‌کم یک اژدها وجود داشته باشد. ثابت کنید میانگین همهٔ جمله‌هایی که سر اژدها هستند از ۱۹۸۸ بیشتر است.

مسألهٔ ۴. **الف)** فرض کنید $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی حقیقی و مثبت باشند که در نابرابری

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲)^۲ > ۲(a_۱^۴ + a_۲^۴ + a_۳^۴)$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

ب) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ باشد. فرض کنید به‌ازای عددهایی حقیقی و مثبت مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n نابرابری

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲)^۲ > (n - ۱)(a_۱^۴ + a_۲^۴ + \cdots + a_n^۴)$$

درست باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر i، هر j و هر k، a_i، a_j و a_k طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

مسألهٔ ۵. سه چهاروجهی $A_iB_iC_iD_i$، $۱ \leq i \leq ۳$، مفروض‌اند. از نقطه‌های B_i، C_i و D_i سه صفحهٔ β_i، γ_i و δ_i به‌ترتیب بر A_iB_i، A_iC_i و A_iD_i عمود شده‌اند. اگر این نه صفحه در یک نقطه متقاطع باشند و $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ روی یک خط قرار داشته باشند، اشتراک کره‌های محیطی این سه چهاروجهی را تعیین کنید.

مسألهٔ ۶. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۳$، فرض کنید $f(n)$ کوچکترین عدد طبیعی باشد که مقسوم‌علیه n نیست. فرض کنید $f^{(۱)}(n) = f(n)$. اگر $f^{(k)}(n) \geq ۳$، $f\left(f^{(k)}(n)\right)$ بامعنی است و آن را $f^{(k+۱)}(n)$ تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۳$، k را طوری تعیین کنید که $f^{(k)}(n) = ۲$.

چهارمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۹

مسألهٔ ۱. هر یک از A و B اجتماع کمانهایی دوبه‌دو مجزا روی دایرهٔ واحد است. علاوه بر این، طول هر کمان در B برابر با $\frac{\pi}{m}$ است، که در اینجا m عددی طبیعی و ثابت است. مجموعه‌ای را که از دوران A در جهت پادساعتگرد حول مرکز دایره به‌اندازهٔ $j\frac{\pi}{m}$ رادیان به‌دست می‌آید با A^j نشان می‌دهیم. ثابت کنید عددی طبیعی مانند k وجود دارد که

$$l(A^k \cap B) \geq \frac{l(A)l(B)}{۲\pi}$$

که در آن $l(X)$ برابر با مجموع طول کمانهای مجزای مجموعهٔ X است.

مسألهٔ ۲. فرض کنید

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱$$

که در آن $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{x_۱}{\sqrt{۱ - x_۱}} + \frac{x_۲}{\sqrt{۱ - x_۲}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{۱ - x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n - ۱}}$$

مسألهٔ ۳. فرض کنید S دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط باشد. فرض کنید $f : S \to S$ با $f(x) = x^m$ تعریف شده باشد، که در آن m عددی طبیعی است. فرض کنید

$$f^{(\circ)}(z) = z, \qquad f^{(k+۱)}(z) = f\left(f^{(k)}(z)\right), \qquad k \geq \circ$$

کوچکترین عدد طبیعی مانند n را که $f^{(n)}(z) = z$، دورهٔ تناوب z می‌نامیم. تعداد همهٔ نقطه‌های S را که دورهٔ تناوب آنها ۱۹۸۹ است حساب کنید.

مسألهٔ ۴. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC برابر با r است. نقطه‌های D، E و F به‌ترتیب روی ضلعهای BC، CA و AB قرار دارند. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای AEF، BFD و CDE برابر باشد، ثابت کنید این شعاع برابر با $r - r'$ است، که در اینجا r' شعاع دایرهٔ محاطی مثلث DEF است.

مسألهٔ ۵. ۱۹۸۹ نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند. چگونه باید این نقطه‌ها را به ۳۰ گروه به اندازه‌های مختلف افراز کرد تا تعداد کل مثلثهایی که رأسهایشان در گروههای مختلف‌اند بیشترین مقدار ممکن باشد؟

مسألهٔ ۶. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ باشد. همهٔ تابعها مانند $f : S \to S$ را پیدا کنید، به‌طوری که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی مانند x، y، m و n، که $x, y > 1$ و $m, n > 0$،

$$f(x^m y^n) \leq f(x)^{\frac{1}{4m}} f(y)^{\frac{1}{4n}}$$

پنجمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۰

مسألهٔ ۱. $ABCD$ چهارضلعیی محدب است و AB با CD موازی نیست. دایره‌ای از A و B می‌گذرد و بر CD در نقطهٔ P مماس است و دایره‌ای هم از C و D می‌گذرد و بر AB در نقطهٔ Q مماس است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی وتر مشترک این دو دایره AD را نصف می‌کند که AD با BC موازی باشد.

مسألهٔ ۲. به‌ازای عدد طبیعی معلوم x، Dـزنجیری از x به طول d دنباله‌ای مانند

$$x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_d$$

است که

$$۱ = x_{۰} < x_{۱} < x_{۲} < \cdots < x_d = x$$

و x_i، $x_{i+۱}$ را می‌شمارد ($۱ \leq i \leq d-۱$). برای عدد $۱۹۹۰^n \times ۳۱^m \times ۵^k$ که در آن k، m و n عددهایی طبیعی‌اند، بلندترین طول Dـزنجیرها و تعداد Dـزنجیرهای به این طول را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳. دربارهٔ تابع حقیقی‌ـمقدار f که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی نامنفی تعریف شده است، می‌دانیم که به‌ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی مانند x و y،

$$f(x)f(y) \leq y^{۲} f\left(\frac{x}{۲}\right) + x^{۲} f\left(\frac{y}{۲}\right)$$

و عددی ثابت مانند M وجود دارد که به‌ازای هر x، $۱ \leq x \leq ۰$، $|f(x)| \leq M$. ثابت کنید $f(x) \leq x^{۲}$، $x \geq ۰$.

مسألهٔ ۴. فرض کنید a عددی طبیعی باشد و A و B عددهایی حقیقی باشند. دستگاه معادله‌های

$$x^۲(Ax^۲+By^۲)+y^۲(Ay^۲+Bz^۲)+z^۲(Az^۲+Bx^۲)=(۲A+B)\,\frac{(۱۳a)^۴}{۴}$$
$$x^۲+y^۲+z^۲=(۱۳a)^۲$$

را در نظر بگیرید. شرطی لازم و کافی دربارهٔ A و B پیدا کنید که این دستگاه معادله‌ها در مجموعهٔ عددهای طبیعی (برحسب x، y و z) جواب داشته باشد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی باشد و $E(X)$ گردایهٔ زیرمجموعه‌هایی از X باشد که تعداد عضوهایشان عددی زوج است. تابع حقیقی-مقدار f روی $E(X)$ طوری تعریف شده است که دست‌کم به‌ازای یک عضو از $E(X)$ مانند D، $f(D) > ۱۹۹۰$ و به‌ازای هر دو عضو جدا از هم $E(X)$ مانند A و B،

$$f(A\cap B)=f(A)+f(B)-۱۹۹۰$$

ثابت کنید می‌توان X را به دو زیرمجموعهٔ جدا از هم مانند P و Q افراز کرد، به‌طوری که به‌ازای هر عضو ناتهی از $E(P)$ مانند S، $f(S) > ۱۹۹۰$ و به‌ازای هر عضو از $E(Q)$ مانند T، $f(T) \leq ۱۹۹۰$.

مسألهٔ ۶. هر nضلعی محدب را می‌توان با ترسیم $(n-۳)$تا از قطرهایش که هیچ دوتایی از آنها جز در رأسها متقاطع نیستند به $n-۲$ مثلث افراز کرد. ثابت کنید همهٔ ضلعها و قطرهای چنین افرازی را می‌توان روی مسیر چندضلعی بسته و پیوسته‌ای بی‌آنکه از قسمتی از مسیر بیش از یک‌بار عبور کنیم طی کرد، اگر و فقط اگر n مضربی از ۳ باشد.

ششمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۱

مسألهٔ ۱. اگر نقطه‌ای مانند P در صفحهٔ چهارضلعی محدب $ABCD$ وجود داشته باشد که مساحت مثلثهای ABP، BCP، CDP و DAP برابر باشند، ویژگی مشخص چهارضلعی $ABCD$ چیست؟ حداکثر چند نقطه مانند P ممکن است وجود داشته باشد؟

مسألهٔ ۲. همهٔ تابعها مانند $f : [\circ, \text{۱}] \times [\circ, \text{۱}] \to [\circ, \text{۱}]$ را پیدا کنید، به‌طوری که به‌ازای هر x، y و z در $[\circ, \text{۱}]$،

$$f(x, \text{۱}) = x$$

$$f(\text{۱}, y) = y$$

$$f\left(f(x, y), z\right) = f\left(x, f(y, z)\right)$$

و به‌ازای عددی ثابت و مثبت و مستقل از x، y و z مانند k،

$$f(zx, zy) = z^k f(x, y)$$

مسألهٔ ۳. ده پرندهٔ کوچک از زمینی هموار دانه برمی‌چینند. از هر پنج پرنده، دست‌کم چهارتا روی یک دایره قرار دارند. کمترین مقدار بیشترین تعداد از این ده پرنده که ممکن است روی یک دایره باشند چقدر است؟

مسألهٔ ۴. همهٔ چهارتاییها از عددهای طبیعی مانند (n, x, y, z) را طوری پیدا کنید که

$$n \geq \text{۲}, \qquad z \leq \text{۵} \times \text{۲}^{\text{۲}n}, \qquad x^{\text{۲}n+\text{۱}} - y^{\text{۲}n+\text{۱}} = xyz + \text{۲}^{\text{۲}n+\text{۱}}$$

مسألهٔ ۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که ۱۹۹۱ کمترین مقدار

$$k^{۲} + \left[\frac{n}{k^{۲}}\right]$$

باشد، که در اینجا k در میان مجموعهٔ عددهای طبیعی تغییر می‌کند.

مسألهٔ ۶. هر رأس چندوجهیی محدب روی دقیقاً سه یال قرار دارد و می‌توان یالها را با سه رنگ طوری رنگ کرد که هر رأس، روی یک یال از هر رنگ قرار داشته باشد. ثابت کنید می‌توان به هر رأس عددی مختلط و مخالف ۱ نسبت دارد، به‌طوری که حاصل‌ضرب عددهای روی رأسهای هر وجه برابر با ۱ باشد.

هفتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۲

مسألهٔ ۱. فرض کنید a_0، a_1، ... و a_{n-1} عددهایی حقیقی باشند و

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1$$

فرض کنید λ ریشه‌ای مختلط از معادلهٔ

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

باشد و $1 \geq |\lambda|$. ثابت کنید $\lambda^{n+1} = 1$.

مسألهٔ ۲. فرض کنید x_1، x_2، ... و x_n عددهایی حقیقی و غیرمنفی باشند و a کوچکترین این عددها باشد. ثابت کنید

$$\frac{1+x_1}{1+x_2} + \frac{1+x_2}{1+x_3} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}}{1+x_n} + \frac{1+x_n}{1+x_1}$$

از

$$n + \frac{(x_1-a)^2 + (x_2-a)^2 + \cdots + (x_n-a)^2}{(1+a)^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. همچنین، ثابت کنید برابری وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

مسألهٔ ۳. به هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 9×9 در ابتدا به دلخواه ۱ یا ۱− را نسبت می‌دهیم.

به‌ازای هر خانه مانند C، حاصل‌ضرب عددهای خانه‌هایی را حساب کنید که دقیقاً یک ضلع مشترک با C دارند و بعد همهٔ این عددها را با مقدار این حاصل‌ضرب جایگزین کنید. آیا می‌توان این کار را چند بار (متناهی) انجام داد و همهٔ ۸۱ عدد را به ۱ تبدیل کرد؟

مسألهٔ ۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. قطرهای AC و BD این چهارضلعی یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند. دایره‌های محیطی مثلثهای ABP و CDP برای بار دوم یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع کرده‌اند. اگر O، P و Q سه نقطهٔ متمایز باشند، ثابت کنید OQ بر PQ عمود است.

مسألهٔ ۵. گرافی ۸ رأسی داریم که طوق، یال چندگانه یا دوری به‌طول ۴ ندارد. این گراف حداکثر چند یال ممکن است داشته باشد؟

مسألهٔ ۶. فرض کنید $a_۰$ و $a_۱$ عددهایی صحیح باشند. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_۲ = ۲a_۱ - a_۰ + ۲$ و اگر $n \geq ۲$،

$$a_{n+۱} = ۳a_n - ۳a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

اگر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m، این دنباله شامل m جملهٔ متوالی باشد که همهٔ آنها مربع کامل‌اند، ثابت کنید هر عضو این دنباله مربع کامل است.

هشتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۳

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید $۲n$ عدد صحیح مانند $a_۱$، $a_۲$، …، a_n، $b_۱$، $b_۲$، … و b_n وجود دارند که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $k < n$، هیچ دو تایی از $۳n$ عدد صحیح

$$a_i + a_{i+۱}, \qquad a_i + b_i, \qquad a_i + b_{i+k}, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

که در آنها اندیسها را به‌پیمانهٔ n حساب می‌کنیم، به‌پیمانهٔ $۳n$ همنهشت نیستند.

مسألهٔ ۲. فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی و مثبت باشد. بیشترین مقدار

$$a^{k(۱)} + a^{k(۲)} + \cdots + a^{k(s)}$$

را تعیین کنید. که در اینجا s عددی طبیعی است، $s \leq n$ و $k(۱)$، $k(۲)$، … و $k(s)$ عددهایی طبیعی‌اند که مجموعشان برابر با n است.

مسألهٔ ۳. شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز برابر با R و $R_۱$ است و $R_۱ > R$. چهارضلعی $ABCD$ در دایرهٔ کوچکتر و چهارضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ در دایرهٔ بزرگتر محاط شده است و $A_۱$ بر امتداد CD، $B_۱$ بر امتداد DA، $C_۱$ بر امتداد AB و $D_۱$ بر امتداد BC قرار دارد. ثابت کنید

$$\frac{S_{A_۱B_۱C_۱D_۱}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_۱^۲}{R^۲}$$

مسألهٔ ۴. فرض کنید S مجموعه‌ای از ۱۹۹۳ بردار غیرصفر در صفحه باشد. ثابت کنید گردایه‌ای از

زیرمجموعه‌های ناتهی S وجود دارد که ویژگیهای زیر را دارند:

۱. هر بردار S متعلق به دقیقاً یکی از این زیرمجموعه‌هاست.

۲. زاویهٔ میان هر بردار در هر زیرمجموعه و بردار برایند این زیرمجموعه حداکثر برابر با ۹۰° است.

۳. زاویهٔ میان برایندهای هر دو زیرمجموعه از ۹۰° بیشتر است.

مسألهٔ ۵. ده نفر رفته‌اند کتاب بخرند. می‌دانیم

۱. هر یک از آنها سه کتاب مختلف خریده است.

۲. هر دوتا از آنها دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند.

کتابی را در نظر بگیرید که تعداد بیشتری از این ده نفر آن را خریده‌اند. کمترین مقدار این بیشترین تعداد چقدر است؟

مسألهٔ ۶. فرض کنید f تابعی از مجموعهٔ عددهای حقیقی و مثبت به‌همین مجموعه باشد، به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت مانند x و y،

$$f(xy) \leq f(x)f(y)$$

ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x و هر عدد طبیعی مانند n،

$$f(x^n) \leq f(x)f(x^۲)^{\frac{۱}{۲}} \cdots f(x^n)^{\frac{۱}{n}}$$

نهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۴

مسألهٔ ۱. **الف)** فرض کنید $ABCD$ ذوزنقه‌ای باشد که در آن AB و CD موازی‌اند. فرض کنید E و F نقطه‌هایی به‌ترتیب روی AB و CD باشند. اگر CE، BF را در نقطهٔ H و ED، AF را در نقطهٔ G قطع کند، ثابت کنید مساحت $EGFH$ حداکثر $\frac{۱}{۴}$ مساحت $ABCD$ است.

ب) اگر $ABCD$ چهارضلعی محدب دلخواهی باشد، آیا حکم قسمت (الف) باز هم درست است؟

مسألهٔ ۲. دست‌کم چهار شکلات در n ظرف گذاشته‌ایم ($n \geq ۴$). در هر حرکت دو ظرف غیرخالی را انتخاب می‌کنیم، از هرکدام شکلاتی برمی‌داریم و این دو شکلات را در ظرفی دیگر می‌گذاریم. آیا می‌توانیم چندبار (متناهی) این حرکت را انجام دهیم و همهٔ شکلاتها را در یک ظرف قرار دهیم؟

مسألهٔ ۳. همهٔ تابعها مانند $f : [۱, +\infty) \to [۱, +\infty)$ را پیدا کنید که به‌ازای هر x در بازهٔ $[۱, +\infty)$،

$$f(x) \leq ۲(x + ۱)$$

و

$$f(x + ۱) = \frac{۱}{x}\left((f(x))^۲ - ۱\right)$$

مسألهٔ ۴. ثابت کنید به‌ازای هر چندجمله‌ای با ضریبهای مختلط مانند

$$f(z) = c_۰ z^n + c_۱ z^{n-۱} + \cdots + c_{n-۱} z + c_n$$

عددی مختلط مانند $z_\circ$ وجود دارد که $|z_\circ| \leq ۱$ و

$$|f(z_\circ)| \geq |c_\circ| + |c_n|$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\sum_{k=\circ}^{n} \binom{n}{k} ۲^k \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{۲} \right\rfloor} = \binom{۲n+۱}{n}$$

مسألهٔ ۶. فرض کنید M نقطه‌ای به مختصات $(۱۹۹۴p, ۷ \times ۱۹۹۴p)$ باشد، که در آن p عددی اول است. تعداد مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که رأس زاویهٔ قائمهٔ آنها در نقطهٔ M است، مختصات رأسهای دیگرشان عددهایی صحیح‌اند و مرکز دایرهٔ محاطی آنها مبدأ مختصات است.

دهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۵

مسألهٔ ۱. فرض کنید $2n$ عدد حقیقی a_1، ...، a_n، b_1، ... و b_n $(n \geq 3)$ در شرطهای زیر صدق می‌کنند:

الف) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$؛

ب) $0 < a_1 = a_2$ و $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$، $i = 1, 2, \ldots, n-2$؛

ج) $0 < b_1 \leq b_2$ و $b_i + b_{i+1} \leq b_{i+2}$، $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

ثابت کنید

$$a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$$

مسألهٔ ۲. دربارهٔ تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ می‌دانیم $f(1) = 1$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

الف) $3f(n)f(2n+1) = f(2n)\left(1 + 3f(n)\right)$؛

ب) $f(2n) < 6f(n)$.

همهٔ جوابهای معادلهٔ $f(k) + f(l) = 293$، $k < l$، را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳. کمترین مقدار عبارت

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10} |k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

را پیدا کنید، که در آن x و y عددهایی حقیقی‌اند.

مسألهٔ ۴. شعاعهای چهار گلوله به‌ترتیب ۲، ۲، ۳ و ۳ است. هر گلوله بر سه‌تای دیگر مماس است. گلولهٔ کوچک دیگری بر هر یک از این چهار گلوله مماس است. شعاع این گلوله چقدر است؟

مسألهٔ ۵. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۱۰}$ عددهایی طبیعی و متمایز باشند که مجموعشان ۱۹۹۵ است. کمترین مقدار عبارت

$$a_۱a_۲ + a_۲a_۳ + \cdots + a_۹a_{۱۰} + a_{۱۰} + a_۱$$

چقدر است؟

مسألهٔ ۶. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد و

$$X_۰ = \left(x_۱^{(۰)}, x_۲^{(۰)}, \ldots, x_n^{(۰)}\right) = (۱, ۰, \ldots, ۰, ۱)$$

فرض کنید، به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$،

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} ۰ & x_i^{(k-۱)} = x_{i+۱}^{(k-۱)} \\ ۱ & x_i^{(k-۱)} \neq x_{i+۱}^{(k-۱)} \end{cases}$$

که در آن

$$x_{n+۱}^{(k-۱)} = x_۱^{(k-۱)}$$

فرض کنید

$$X_n = \left(x_۱^{(k)}, x_۲^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

ثابت کنید اگر m عددی طبیعی باشد و $X_m = X_n$، آن‌وقت m مضرب n است.

یازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶

مسألهٔ ۱. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABC باشد. مماسهایی که از نقطهٔ A بر دایرهٔ به قطر BC رسم شده‌اند، در نقطه‌های P و Q بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید نقطه‌های P، Q و H روی یک خط راست قرار دارند.

مسألهٔ ۲. کوچکترین عدد طبیعی مانند k را پیدا کنید که هر زیرمجموعهٔ k عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۵۰\}$، شامل دو عضو متمایز مانند a و b باشد که ab بر $a + b$ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f(x^۳ + y^۳) = (x + y)\left(f(x)^۲ - f(x)f(y) + f(y)^۲\right)$$

ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(۱۹۹۶x) = ۱۹۹۶f(x)$.

مسألهٔ ۴. هشت خواننده در یک جشنوارهٔ هنری که m آواز در آن خوانده می‌شود شرکت کرده‌اند. هر آواز را چهار خواننده خوانده‌اند و تعداد آوازهایی که هر دو خواننده هر دو خوانده‌اند یکسان است. کوچکترین مقدار m را طوری پیدا کنید که چنین کاری ممکن باشد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $x_۰ = ۰$، $x_۱$، $x_۲$، … و x_n عددهایی مثبت باشند و $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱$. ثابت کنید

$$۱ \leq \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱ + x_۰ + \cdots + x_{i-۱}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{۲}$$

مسألهٔ ۶. در مثلث ABC، $\angle C = ۹۰^\circ$، $\angle A = ۳۰^\circ$ و $BC = ۱$. کمترین مقدار ممکن طول بلندترین ضلع مثلثی را پیدا کنید که در مثلث ABC محاط شده است (یعنی هر رأسش روی یک ضلع مثلث ABC قرار دارد).

دوازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۷

مسألهٔ ۱. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۱۹۹۷}$ عددهایی حقیقی باشند و

الف) $-\frac{۱}{\sqrt{۳}} \leq x_i \leq \sqrt{۳}$، $۱ \leq i \leq ۱۹۹۷$؛

ب) $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۱۹۹۷} = -۳۱۸\sqrt{۳}$.

بیشترین مقدار ممکن $x_۱^{۱۲} + x_۲^{۱۲} + \cdots + x_{۱۹۹۷}^{۱۲}$ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۲. فرض کنید $A_۱B_۱C_۱D_۱$ چهارضلعیی محدب و P نقطه‌ای درون آن باشد. فرض کنید زاویه‌های $PA_۱B_۱$ و $PA_۱D_۱$ حاده باشند و همین‌طور در مورد سه رأس دیگر. A_k، B_k، C_k و D_k را به‌ترتیب قرینه‌های P نسبت به $A_{k-۱}B_{k-۱}$، $B_{k-۱}C_{k-۱}$، $C_{k-۱}D_{k-۱}$ و $D_{k-۱}A_{k-۱}$ بگیرید.

الف) از چهارضلعیهای $A_kB_kC_kD_k$، $۱ \leq i \leq ۱۲$، کدام‌یک لزوماً با چهارضلعی ۱۹۹۷ام متشابه است؟

ب) فرض کنید چهارضلعی ۱۹۹۷ام محاطی باشد. کدام‌یک از ۱۲ چهارضلعی نخست هم محاطی است؟

مسألهٔ ۳. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و $۳n$ را به‌ترتیبی با

$$a_۱, \ldots, a_n, b_۱, \ldots, b_n, c_۱, \ldots, c_n$$

طوری برچسب زد که

الف) $a_۱ + b_۱ + c_۱$، ... و $a_n + b_n + c_n$ با هم برابر باشند و هر یک از آنها بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

ب) $a_n + \cdots + a_۱$، $b_n + \cdots + b_۱$ و $c_n + \cdots + c_۱$ هم با هم برابر باشند و هر یک از آنها بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۴. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. خطهای AB و CD در نقطهٔ P و خطهای AD و BC در نقطهٔ Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. فرض کنید E و F نقطه‌های تماس مماسهای مرسوم از نقطهٔ Q بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید نقطه‌های P، E و F روی یک خط راست قرار دارند.

مسألهٔ ۵. فرض کنید $A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۷\}$ و به‌ازای هر تابع مانند $f : A \to A$ فرض کنید $f^{[۱]}(x) = f(x)$ و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$f^{[k+۱]}(x) = f\left(f^{[k]}(x)\right)$$

بزرگترین عدد طبیعی مانند M را طوری پیدا کنید که تابعی یک‌به‌یک و پوشا مانند $f : A \to A$ وجود داشته باشد که

الف) اگر $m < M$ و $۱ \leq i \leq ۱۷$، آنگاه

$$f^{[m]}(i+۱) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۷)$$

ب) به‌ازای $۱ \leq i \leq ۱۷$،

$$f^{[M]}(i+۱) - f^{[M]}(i) \equiv \pm ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۷)$$

(در اینجا $f^{[k]}(۱۸) = f^{[k]}(۱)$.)

مسألهٔ ۶. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... عددهایی نامنفی باشند و

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \qquad m, n \geq ۱$$

ثابت کنید اگر $n \geq m$،

$$a_n \leq m a_۱ + \left(\frac{n}{m} - ۱\right) a_m$$

سیزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۸

مسألهٔ ۱. فرض کنید ABC مثلثی غیرمنفرجه باشد، $AB > AC$ و $\angle B = ۴۵^\circ$. فرض کنید O و I به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. فرض کنید $\sqrt{۲}OI = AB - AC$. همهٔ مقدارهای ممکن $\sin A$ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۲$. آیا $۲n$ عدد طبیعی متمایز مانند $a_۱$، ...، a_n، $b_۱$، ... و b_n وجود دارند که

الف) $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n$؛

ب) $n - ۱ > \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - ۱ - \frac{۱}{۱۹۹۸}$.

مسألهٔ ۳. فرض کنید $S = \{۱, ۲, \dots, ۹۸\}$. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ nعضوی از S مانند T بتوان زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی از T پیدا کرد که هر طور که آن را به دو زیرمجموعهٔ پنج‌عضوی افراز کنیم، در یکی از آنها عضوی وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول باشد و در دیگری عضو وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول نباشد.

مسألهٔ ۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $n \geq ۳$ و $۲^{۲۰۰۰}$ بر

$$۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳}$$

بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید D نقطه‌ای درون مثلث حادهٔ ABC باشد و

$$DA \times DB \times AB + DB \times DC \times BC + DC \times DA \times CA = AB \times BC \times CA$$

جای نقطهٔ D را مشخص کنید.

مسألهٔ ۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۲$. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی باشند و

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ + \sum_{i=۱}^{n-۱} x_i x_{i+۱} = ۱$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $k \leq n$، بیشترین مقدار $|x_k|$ را پیدا کنید.

چهاردهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۹

مسألهٔ ۱. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد و $\angle C > \angle B$. فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد، زاویهٔ ADB منفرجه باشد و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABD باشد. فرض کنید F نقطه‌ای درون مثلث ABC و روی دایرهٔ محیطی مثلث ABD باشد. ثابت کنید F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است، اگر و فقط اگر HD و CF موازی باشند و H روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد.

مسألهٔ ۲. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. فرض کنید $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها باشد به‌طوری که $f_۰(x) = ۱$ و

$$f_{n+۱}(x) = xf_n(x) + f_n(ax), \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

الف) ثابت کنید

$$f_n(x) = x^n f_n\left(\frac{۱}{x}\right), \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

ب) عبارتی صریح برای $f_n(x)$ پیدا کنید.

مسألهٔ ۳. ۹۹ ایستگاه فضایی وجود دارد. هر دوتا از این ایستگاههای فضایی با تونلی به هم وصل‌اند. ۹۹ تونل دوطرفهٔ اصلی وجود دارد و بقیهٔ تونلها یک‌طرفه‌اند. گروهی از ۴ ایستگاه فضایی را همبند می‌نامیم، هرگاه بتوان از هر یک از ایستگاههای این گروه به هر یک از بقیهٔ ایستگاههای دیگر این گروه

رفت، به‌طوری که فقط از ۶ تونلی که آنها را به هم وصل می‌کنند استفاده شود. بیشترین تعداد گروههای همبند را مشخص کنید.

مسألهٔ ۴. فرض کنید m عددی طبیعی باشد. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a، b و k وجود دارند که a و b هر دو فردند، k منفی نیست و

$$۲m = a^{۱۹} + b^{۹۹} + k \times ۲^{۱۹۹۹}$$

مسألهٔ ۵. بیشترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که اگر ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سوم

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$$

همگی نامنفی باشند، آنگاه به‌ازای هر عدد حقیقی و نامنفی مانند x،

$$f(x) \geq \lambda(x-a)^۳$$

در چه صورتی تساوی پیش می‌آید؟

مسألهٔ ۶. مکعبی ۴ × ۴ × ۴ از ۶۴ مکعب واحد تشکیل شده است. وجه‌های ۱۶تا از این مکعبها را قرمز می‌کنیم. رنگ‌آمیزیی را جالب می‌نامیم، هرگاه در هر جعبهٔ مستطیلی ۴ × ۱ × ۱ که از ۴ مکعب واحد تشکیل شده است فقط یک مکعب قرمز وجود داشته باشد. تعداد رنگ‌آمیزیهای جالب را پیدا کنید (اگر حتی بتوان رنگ‌آمیزیی را با یک‌سری دوران از رنگ‌آمیزی دیگری به‌دست آورد، این‌دو متمایزند).

پانزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۲۰۰۰

مسألهٔ ۱. در مثلث ABC، $BC \leq CA \leq AB$. فرض کنید R و r به‌ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. برحسب مقدار $\angle C$ مشخص کنید که $BC+CA-۲R-۲r$ چه‌وقت مثبت، منفی یا صفر است.

مسألهٔ ۲. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_۱ = ۰$، $a_۲ = ۱$ و اگر $n \geq ۳$،

$$a_n = \frac{۱}{۲}na_{n-۱} + \frac{۱}{۲}n(n-۱)a_{n-۲} + (-۱)^n\left(۱ - \frac{n}{۲}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + ۲\binom{n}{۱}a_{n-۱} + ۳\binom{n}{۲}a_{n-۲} + \cdots + n\binom{n}{n-۱}a_۱$$

پیدا کنید.

مسألهٔ ۳. یک باشگاه تنیس روی میز می‌خواهد یک دوره مسابقات دو نفره برگزار کند، یعنی یک سری مسابقه که در هر یک دو نفر بازیکن با دو نفر دیگر مسابقه می‌دهند. تعداد بازیهای هر بازیکن در این دوره، تعداد بازیهایی است که در آنها شرکت کرده است. مجموعهٔ $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ از عددهای طبیعی متمایز که هرکدام بر ۶ بخش‌پذیر است مفروض است. کمترین تعداد بازیکنانی را پیدا کنید که می‌توان در میان آنها یک دوره مسابقات دو نفره ترتیب داد به‌طوری که

الف) هر دو تیم دونفرهٔ مختلف حداکثر یک‌بار با هم بازی کنند.

ب) اگر دو بازیکن عضو یک تیم دونفره باشند، هیچ‌گاه در مقابل هم بازی نکنند.

د) مجموعهٔ تعداد بازیهای بازیکنان مجموعهٔ A باشد.

مسألهٔ ۴. عدد طبیعی n مفروض است و $n \geq ۲$. به‌ازای هر nتایی مرتب از عددهای حقیقی مانند $A = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$، فرض کنید نمرهٔ تسلط A تعداد عددهایی مانند k در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد که به‌ازای هر j که $۱ \leq j \leq k$، $a_k > a_j$. همهٔ جایگشتهای $(۱, ۲, \ldots, n)$ مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ را در نظر بگیرید که نمرهٔ تسلط آنها ۲ است. میانگین حسابی عضوهای اول این جایگشتها (یعنی میانگین حسابی $a_۱$ها) را پیدا کنید.

مسألهٔ ۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که عددهایی طبیعی مانند $n_۱$، $n_۲$، ... و n_k همگی بزرگتر از ۳ وجود داشته باشند که

$$n = n_۱ n_۲ \cdots n_k = ۲^{\frac{۱}{۲^k}(n_۱ - ۱)(n_۲ - ۱)\cdots(n_k - ۱)} - ۱$$

مسألهٔ ۶. یک برگهٔ امتحانی شامل ۵ سؤال چندگزینه‌ای است که هر کدام چهار گزینهٔ مختلف دارد. ۲۰۰۰ دانش‌آموز در امتحان شرکت کرده‌اند و هر دانش‌آموز فقط یکی از گزینه‌های هر سؤال را انتخاب می‌کند. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان برگه‌های امتحانی هر n دانش‌آموز، ۴ برگه وجود داشته باشد که در هر دوتا از آنها حداکثر سه پاسخ یکسان باشند.

راه حلها

اولین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۶

مسألهٔ ۱. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید دو حکم زیر هم‌ارزند:

الف) به‌ازای هر i و j که $i \neq j$، $a_i + a_j \geq 0$؛

ب) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$، که در آن x_1، x_2، ... و x_n عددهای حقیقی غیرمنفی دلخواهی هستند که

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

راه‌حل اول

می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^{n} a_kx_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_kx_k^2 + \sum_{i\neq j}(a_i + a_j)x_ix_j$$

اگر فرض کنیم (الف) درست باشد، $\sum_{i\neq j}(a_i + a_j)x_ix_j \geq 0$. درنتیجه

$$\sum_{k=1}^{n} a_kx_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_kx_k^2$$

اکنون فرض می‌کنیم (ب) درست باشد. به‌ازای دو عدد طبیعی متمایز مانند i و j، $1 \leq i, j \leq n$،

فرض کنید $x_i = x_j = \frac{1}{2}$ و به‌ازای هر عدد طبیعی دیگر مانند k، فرض کنید $x_k = 0$. از (ب) نتیجه می‌شود

$$\frac{a_i + a_j}{2} \geq \frac{a_i + a_j}{4}$$

که یعنی $a_i + a_j \geq 0$.

راه‌حل دوم

برای اثبات اینکه (الف) از (ب) نتیجه می‌شود، مانند راه‌حل اول استدلال می‌کنیم. اکنون فرض می‌کنیم (الف) درست باشد و درستی (ب) را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 2$،

$$x_1 = 1 - x_2, \qquad x_2 = 1 - x_1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 - (a_1x_1^2 + a_2x_2^2) &= a_1x_1(1 - x_1) + a_2x_2(1 - x_2) \\ &= (a_1 + a_2)x_1x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید نتیجه به‌ازای nای، $n \geq 2$، درست باشد. فرض کنید x_1، x_2، ... و x_{n+1} عددهایی حقیقی و غیرمنفی باشند که $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1$. اگر $x_{n+1} = 1$، آن‌وقت

$$x_k = 0, \qquad 1 \leq k \leq n$$

و نتیجهٔ موردنظر از اینکه $a_{n+1} \geq a_{n+1}$ به‌دست می‌آید. اگر $x_{n+1} < 1$، آن‌وقت

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1 - x_{n+1}} = 1$$

بنابر فرض استقرا،

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_kx_k}{1 - x_{n+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{x_k}{1 - x_{n+1}}\right)^2$$

این نابرابری با نابرابری

$$(1 - x_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} a_kx_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_kx_k^2$$

هم‌ارز است. درنتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_kx_k &= (1 - x_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} a_kx_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_kx_k \\ &\quad + a_{n+1}x_{n+1}(1 - x_{n+1}) + a_{n+1}x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k^2 + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + a_{n+1} x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k^2$$

زیرا $(a_k + a_{n+1}) x_k x_{n+1} \geq 0$. این نتیجه استدلال استقرایی را کامل می‌کند.

مسألهٔ ۲. D، E و F نقطه‌هایی روی ضلع BC از مثلث ABCاند و AD، AE و AF به‌ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانهٔ این مثلث‌اند. اگر $AD = 12$، $AE = 13$ و $AF = m$، تعیین کنید که به‌ازای چه مقدارهایی از m، زاویهٔ BAC

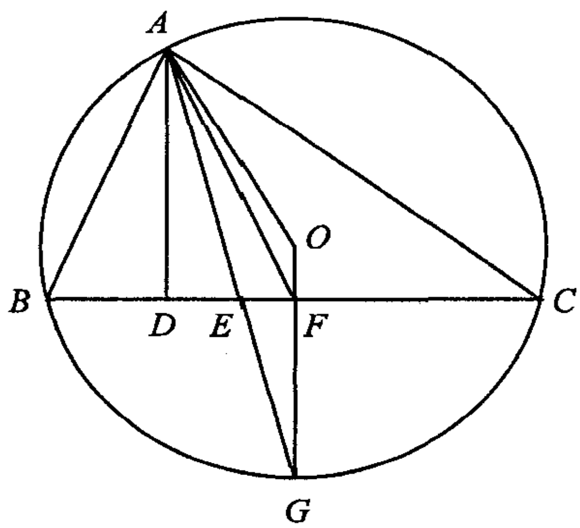
الف) حاده است؛

ب) قائمه است؛

ج) منفرجه است.

راه‌حل

چون $AD \neq AE$، پس $AB \neq AC$. می‌توانیم فرض کنیم $AB < AC$، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که D میان B و F قرار دارد. در دایرهٔ محیطی مثلث ABC، قطری عمود بر BC رسم می‌کنیم تا این دایره را در نقطه‌ای مانند G روی کمانی از دایره که دو سرش B و C هستند و شامل A نیست قطع کند. در این صورت، اگر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O بنامیم، O، F و G هم‌خط‌اند، همین‌طور A، E و G. بنابراین E میان D و F قرار دارد و درنتیجه $m > 13$.



شکل ۱

به این ترتیب

$$DE = ۵, \qquad EF = DF - DE = \sqrt{m^۲ - ۱۴۴} - ۵$$

چون مثلثهای ADE و GFE متشابه‌اند،

$$FG = \frac{AD \times EF}{DE} = \frac{۱۲}{۵}\left(\sqrt{m^۲ - ۱۴۴} - ۵\right)$$

الف) اگر $\angle BAC < ۹۰^\circ$، آن‌وقت F میان O و G قرار دارد. بنابراین

$$AF > AO = GO > FG$$

و یا

$$m > \frac{۱۲}{۵}\left(\sqrt{m^۲ - ۱۴۴} - ۵\right)$$

نابرابری اخیر هم‌ارز $(۱۱۹m - ۲۰۲۸)(m + ۱۲) < ۰$ است و درنتیجه $m < \frac{۲۰۲۸}{۱۱۹}$. به این ترتیب

$$۱۳ < m < \frac{۲۰۲۸}{۱۱۹}$$

ب) اگر $\angle BAC = ۹۰^\circ$، آن‌وقت O و F بر هم منطبق‌اند و $AF = FG$. به این ترتیب $m = \frac{۲۰۲۸}{۱۱۹}$.

ج) اگر $\angle BAC > ۹۰^\circ$، آن‌وقت O میان F و G قرار دارد. از $AF < FG$ نتیجه می‌گیریم $m = \frac{۲۰۲۸}{۱۱۹}$.

مسألهٔ ۳. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$، ... و z_n عددهایی مختلط باشند و

$$|z_۱| + |z_۲| + \cdots + |z_n| = ۱$$

ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $\{z_۱, z_۲, \ldots, z_n\}$ وجود دارد که مجموع عضوهایش، که آن را S می‌نامیم، در نابرابری $|S| \geq \frac{۱}{۶}$ صدق می‌کند.

راه‌حل اول

می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای هر k، $۱ \leq k \leq n$، $z_k \neq ۰$. در این صورت

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \qquad r_k > ۰, \qquad -۱۸۰^\circ < \theta_k \leq ۱۸۰^\circ$$

این n عدد مختلط را به سه زیرمجموعه تقسیم می‌کنیم که به‌ترتیبی از عددهایی تشکیل شده‌اند که در $۶۰^\circ < \theta_k \leq ۱۸۰^\circ$، $-۶۰^\circ < \theta_k \leq ۶۰^\circ$ و $-۱۸۰^\circ < \theta \leq -۶۰^\circ$ صدق می‌کنند. از اصل لانه کبوتری نتیجه می‌شود که مجموع قدرمطلقهای عضوهای دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌ها

دست‌کم $\frac{۱}{۳}$ است. می‌توانیم فرض کنیم این مجموعه، که آن را M می‌نامیم، از عددهایی تشکیل شده است که در $-۶۰^\circ < \theta_k \leq ۶۰^\circ$ صدق می‌کنند (برای این کار در صورت لزوم می‌توانیم از دورانی حول مبدأ استفاده کنیم). فرض کنید عددهای مختلط در M، $z_۱$، $z_۲$، ... و z_m باشند و مجموع آنها S باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}|S| = |z_۱ + z_۲ + \cdots + z_m| &\geq r_۱ \cos\theta_۱ + r_۲ \cos\theta_۲ + \cdots + r_m \cos\theta_m \\ &\geq \frac{۱}{۲}(r_۱ + r_۱ + \cdots + r_m) \\ &\geq \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}\end{aligned}$$

راه‌حل دوم

فرض کنید به‌ازای هر k، $۱ \leq k \leq n$، $z_k = x_k + iy_k$. در این صورت

$$\begin{aligned}۱ = \sum_{k=۱}^{n} |z_k| &\leq \sum_{k=۱}^{n} (|x_k| + |y_k|) \\ &= \sum_{x_k \geq ۰} |x_k| + \sum_{x_k < ۰} |x_k| + \sum_{y_k \geq ۰} |y_k| + \sum_{y_k < ۰} |y_k|\end{aligned}$$

بنابر اصل لانه کبوتری دست‌کم یکی از جمعوندهای عبارت آخر از $\frac{۱}{۴}$ کمتر نیست. می‌توانیم فرض کنیم

$$\sum_{x_k < ۰} |x_k| \geq \frac{۱}{۴}$$

چون علامت همهٔ جمله‌ها یکسان است، پس

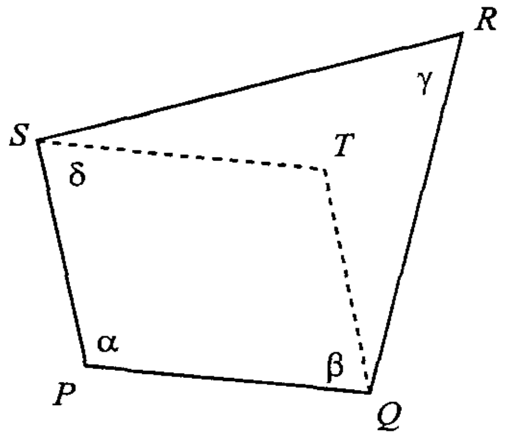
$$\left|\sum_{x_k < ۰} z_k\right| \geq \left|\sum_{x_k < ۰} x_k\right| = \sum_{x_k < ۰} |x_k| \geq \frac{۱}{۴} > \frac{۱}{۶}$$

مسألهٔ ۴. $PQRS$ چهارضلعی محدبی درون مثلث ABC است. ثابت کنید مساحت یکی از مثلثهای PQR، PQS، PRS و QRS از یک‌چهارم مساحت مثلث ABC بیشتر نیست.

راه‌حل اول

ابتدا یادآوری می‌کنیم که مساحت هر متوازی‌الاضلاع درون مثلث، حداکثر نصف مساحت مثلث است (این مطلب را ثابت نمی‌کنیم). فرض کنید اندازهٔ زاویه‌های P، Q، R و S به‌ترتیب α، β، γ و δ باشد. چون $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = ۳۶۰^\circ$، می‌توانیم فرض کنیم $\alpha + \beta \geq ۱۸۰^\circ$. اگر متوازی‌الاضلاع $PQTS$ را رسم کنیم، T باید درون $PQRS$، و بنابراین درون ABC، قرار گیرد. مساحت مثلث

PQS دقیقاً نصف مساحت $PQTS$ است، که این هم نصف مساحت مثلث ABC است. پس نتیجهٔ مطلوب به‌دست آمده است.



شکل ۲

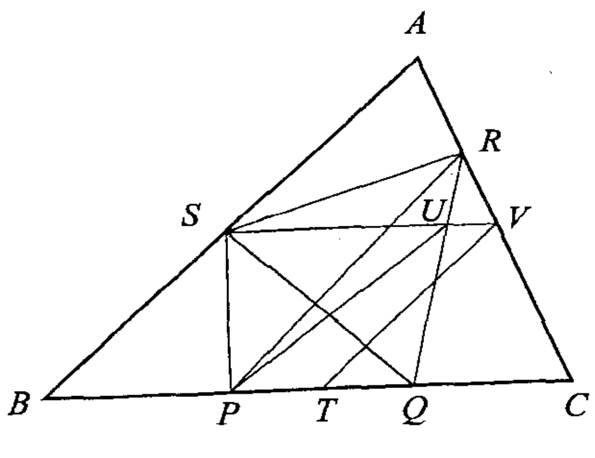
راه‌حل دوم

می‌توانیم فرض کنیم P و Q روی BC قرار دارند، R روی CA و S روی AB قرار دارد. علاوه بر این، فاصلهٔ R تا BC دست‌کم به‌اندازهٔ فاصلهٔ S تا BC است. از S خطی موازی با BC رسم کنید تا QR را در U و AC را در V قطع کند. متوازی‌الاضلاع $BSVT$ را رسم کنید. اکنون PSQ، PSV و PSR سه مثلث‌اند که در قاعدهٔ PS مشترک‌اند. چون U میان R و Q قرار دارد، فاصلهٔ U تا PS از هر دو فاصله‌های Q و R تا PS کمتر نیست. بنابراین

$$\min\{S_{PSQ}, S_{PSR}\} \leq S_{PSU}$$

چون $SU \leq SV$، بنابر حکمی که در ابتدای راه‌حل اول ذکر کردیم،

$$S_{PSU} \leq \frac{۱}{۲} S_{BSVT} \leq \frac{۱}{۴} S_{ABC}$$



شکل ۳

بنابراین

$$\min\{S_{PSQ}, S_{PSR}\} \leq \frac{۱}{۴} S_{ABC}$$

مسألهٔ ۵. آیا جایگشتی از عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, \ldots, ۱۹۸۶, ۱۹۸۶$$

وجود دارد که به‌ازای هر k، دقیقاً k عدد دیگر میان دو k وجود داشته باشد؟

راه‌حل اول

فرض کنید چنین جایگشتی وجود داشته باشد. ۳۹۷۲ مکان را یکی در میان با سیاه و سفید رنگ کنید. میان دوتا k دقیقاً k مکان قرار دارد. اگر k عددی زوج باشد، رنگ مکانهایی که این دوتا k اشغال کرده‌اند فرق می‌کند. چون ۹۹۳ جفت زوج وجود دارد، عددهای زوج تعداد فردی از مکانهای سیاه را اشغال می‌کنند. اگر k عددی فرد باشد، رنگ مکانهایی که دوتا k اشغال کرده‌اند یکسان است. بنابراین ۹۹۳ جفت فرد تعداد زوجی از مکانهای سیاه را اشغال می‌کنند. درنتیجه، تعداد کل مکانهای سیاه‌رنگ باید عددی فرد باشد. با وجود این، این تعداد ۱۹۸۶ است، و بنابراین به تناقض رسیده‌ایم.

راه‌حل دوم

فرض کنید چنین جایگشتی وجود داشته باشد. اگر یکی از عددهای x میان دوتا عدد y قرار گیرد می‌گوییم x با y احاطه شده است. ممکن است هر دو x با yها احاطه شده باشند، هر دو y با xها احاطه شده باشند، یا یک x با yها و یک y با xها احاطه شده باشد. بنابراین از هر دو جفت عدد، دو عدد احاطه شده پدید می‌آید. درنتیجه، تعداد کل عددهای احاطه شده عددی زوج است. از طرف دیگر ۱ها ۱ عدد را احاطه می‌کنند، ۲ها ۲ عدد را احاطه می‌کنند، و همین‌طور تا آخر. بنابراین تعداد کل عددهای احاطه شده برابر با

$$۱ + ۲ + \cdots + ۱۹۸۶$$

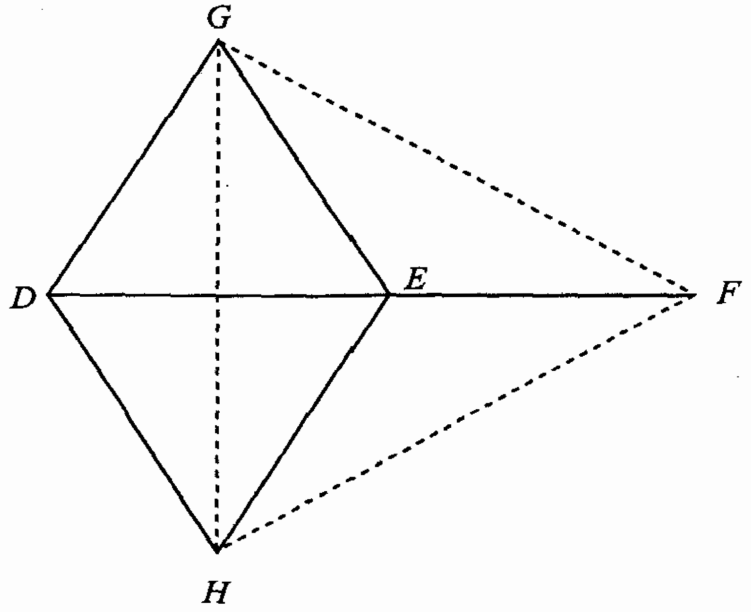
است، که عددی فرد است. به تناقض رسیده‌ایم.

مسألهٔ ۶. هر نقطه در صفحه را به دلخواه به رنگ سیاه یا سفید می‌کنیم. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱ یا $\sqrt{۳}$ وجود دارد که رنگ هر سه رأسش یکسان است.

راه‌حل

اگر هر دو نقطه به فاصلهٔ ۱ به یک رنگ باشند، مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ داریم که ویژگی مطلوب را دارد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم دو نقطه مانند A و B به رنگهای مختلف وجود دارند که $AB = ۱$. فرض کنید C نقطه‌ای باشد که $AC = ۲ = BC$. در این صورت رنگ C با

رنگ یکی از A و B فرق دارد. به این ترتیب می‌توانیم فرض کنیم نقطه‌ای سیاه مانند D و نقطه‌ای سفید مانند F وجود دارد که $DF = ۲$. فرض کنید E وسط DF باشد. بنابر تقارن می‌توانیم فرض کنیم E سیاه است. مثلثهای متساوی‌الاضلاع DEG و DEH را رسم کنید. اگر یکی از G و H سیاه باشد، مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ داریم که سه رأسش سیاه است. اگر چنین نباشد، FGH مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ است که سه رأسش سفید است.



شکل ۴

دومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۷

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادلهٔ

$$z^{n+۱} - z^n - ۱ = ۰$$

ریشه‌ای دارد که در $|z| = ۱$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر $n + ۲$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل

فرض کنید $|\omega| = ۱$ و $\omega^{n+۱} - \omega^n - ۱ = ۰$. در این صورت $\omega^n(\omega - ۱) = ۱$ و درنتیجه $|\omega - ۱| = ۱$. بنابراین ω یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های $|z| = ۱$ و $|z - ۱| = ۱$ است؛ پس $\omega = \cos\frac{\pi}{۳} \pm i\sin\frac{\pi}{۳}$. علاوه بر این،

$$\omega - ۱ = \cos\frac{۲\pi}{۳} \pm i\sin\frac{۲\pi}{۳} = \omega^۲$$

درنتیجه

$$۱ = \omega^n(\omega - ۱) = \omega^{n+۲} = \cos\frac{(n+۲)\pi}{۳} \pm \sin\frac{(n+۲)\pi}{۳}$$

بنابراین $\frac{(n+۲)\pi}{۳} = ۲k\pi$ و درنتیجه به‌ازای عددی صحیح مانند k، $n + ۲ = ۶k$.

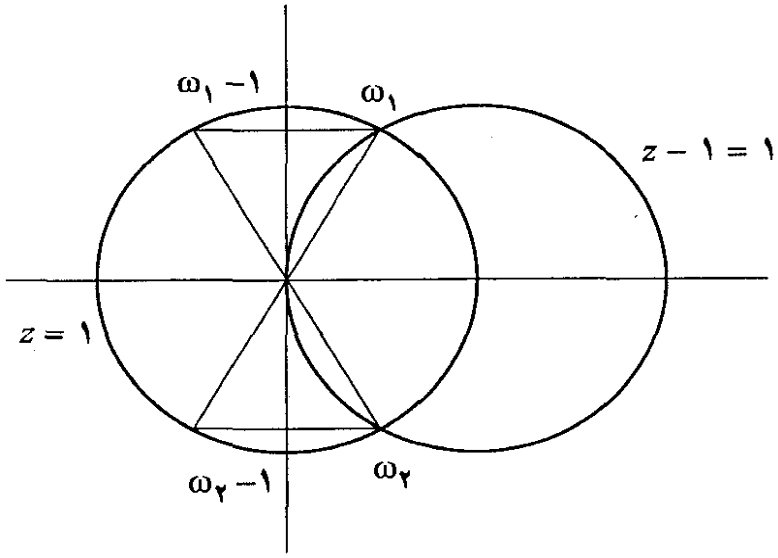
برعکس، فرض کنید به‌ازای عددی صحیح مانند k، $n + ۲ = ۶k$. فرض کنید

$$\omega = \cos\frac{\pi}{۳} \pm i\sin\frac{\pi}{۳}$$

در این صورت $|\omega| = 1$، $\omega - 1 = \omega^2$ و $\omega^{n+2} = 1$. بنابراین

$$\omega^{n+1} - \omega^n - 1 = \omega^n(\omega - 1) - 1 = \omega^{n+2} - 1 = 0$$

همان چیزی که می‌خواهیم.



شکل ۵

مسألهٔ ۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع n با ترسیم خطهایی موازی با ضلعهایش به n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم شده است. هر نقطه‌ای که رأس دست‌کم یکی از این مثلثهای یکه است با عددی حقیقی برچسب خورده است. رأسهای A، B و C به‌ترتیب با a، b و c برچسب خورده‌اند. در هر لوزی که از ترکیب دو مثلث یکه که در ضلعی مشترک‌اند تشکیل شده است، مجموع برچسبهای روی مجموعه‌های رأسهای روبه‌رو با هم برابر است.

الف) کوتاهترین فاصله را میان نقطه‌ای که برچسبش بزرگترین عدد است با نقطه‌ای که برچسبش کوچکترین عدد است تعیین کنید.

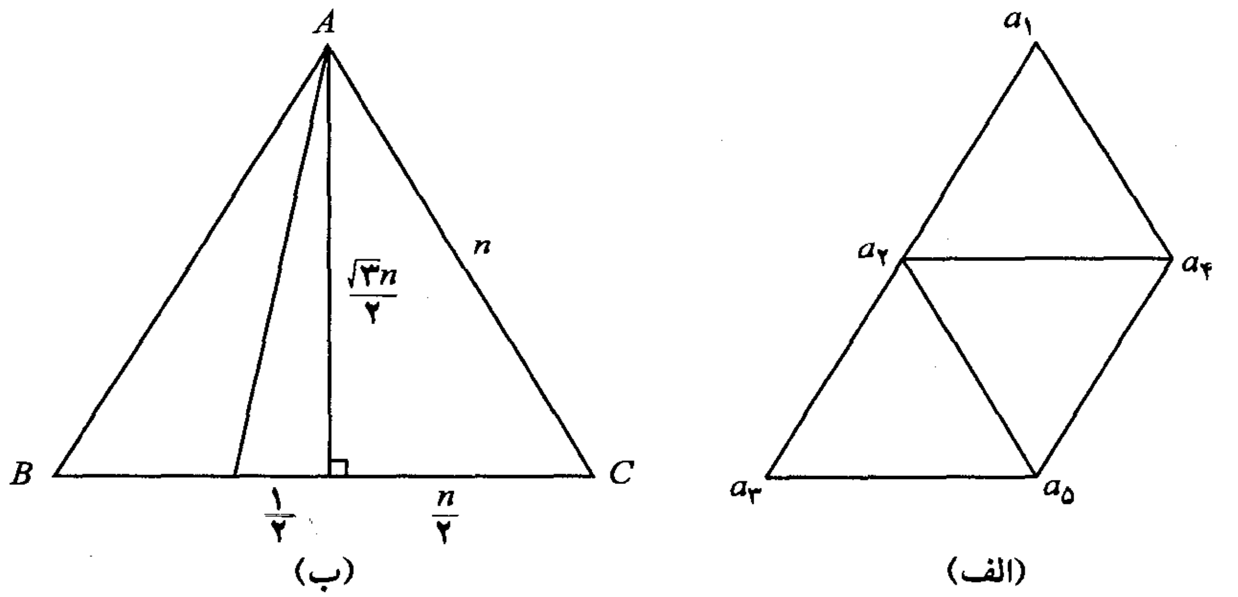
ب) مجموع برچسبها را تعیین کنید.

راه‌حل

سه مثلث کوچک دلخواه در یک سطر در نظر بگیرید و فرض کنید پنج نقطه (رأسها) با a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 مطابق شکل ۶ (الف) برچسب خورده‌اند. چون

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4, \qquad a_2 + a_5 = a_3 + a_4$$

پس $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. درنتیجه برچسبهای روی هر خط موازی با ضلعی از مثلث ABC به تصاعد حسابی‌اند و بنابراین برچسبهای اکسترمم روی محیط مثلث ABC قرار دارند.



شکل ۶

الف) فاصلهٔ موردنظر را با r نشان دهید. اگر $a = b = c$، آن‌وقت همهٔ برچسبها یکی‌اند و $r = ۰$. اگر a، b و c متمایز باشند، برچسبهای اکسترمم روی رأسهای مثلث ABC قرار دارند و $r = n$. فرض کنید $b = c \neq a$. در این صورت برچسبهای اکسترمم روی A و BC قرار دارند. از شکل ۶ (ب) معلوم می‌شود که اگر n عددی زوج باشد، $r = \frac{\sqrt{۳}n}{۲}$ و اگر n عددی فرد باشد،

$$r = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۳}n}{۲}\right)^۲} = \frac{\sqrt{۳n^۲ + ۱}}{۲}$$

ب) با دوران مثلث ABC به‌اندازهٔ ۱۲۰° و ۲۴۰° دو مثلث برچسب خوردهٔ دیگر به‌دست می‌آید. مثلثها را روی هم قرار دهید و هر نقطه را با مجموع برچسبهایش در سه مثلث برچسب بزنید. چون قاعدهٔ مربوط به لوزیها در هر مثلث درست است، در مثلث مرکب هم درست است. بنابراین همهٔ برچسبها $a + b + c$ هستند. چون

$$۱ + ۲ + \cdots + (n + ۱)$$

یا $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ نقطه وجود دارد، مجموع تمام برچسبها در ABC برابر است با

$$\frac{(n+۱)(n+۲)(a+b+c)}{۶}$$

مسألهٔ ۳. در یک دوره مسابقه هر دو بازیکن دقیقاً یک‌بار با هم بازی می‌کنند. هیچ‌یک از بازیها به تساوی نمی‌انجامد. بازیکنی مانند A به‌شرطی جایزه می‌گیرد که به‌ازای هر بازیکن دیگری مانند B، یا

A از B برده باشد یا A از بازیکنی مانند C برده باشد که او از B برده است. ثابت کنید که اگر فقط یک بازیکن جایزه برده باشد، این بازیکن از بقیهٔ بازیکنها برده است.

راه‌حل اول

ادعا می‌کنیم بازیکنی مانند A که بیشترین برد را داشته جایزه‌ای برده است. درحقیقت، اگر بازیکنی مانند B از A برده باشد، دست‌کم یکی از بازیکنهایی که A از آنها برده است باید از B برده باشد، زیرا در غیر این صورت تعداد بردهای B از بردهای A بیشتر می‌شود. پس ادعایمان درست است. فرض کنید A تنها بازیکنی باشد که جایزه‌ای برده است. مجموعه‌های بازیکنهایی را که از A برده‌اند و بازیکنهایی که به A باخته‌اند به‌ترتیب با S و T نشان می‌دهیم. فرض کنید S ناتهی باشد. در مسابقهٔ دوره‌ای کوچکی که میان بازیکنان S برگزار می‌شود، بازیکنی مانند B وجود دارد که بیشترین تعداد برد را داشته و بنابراین جایزه‌ای برده است. چون B از A و A از هر بازیکنی در T برده است، B هم در مسابقهٔ اصلی جایزه برده است و این با فرض یکتایی ما تناقض دارد. بنابراین S تهی است و A از بقیهٔ بازیکنها برده است.

راه‌حل دوم

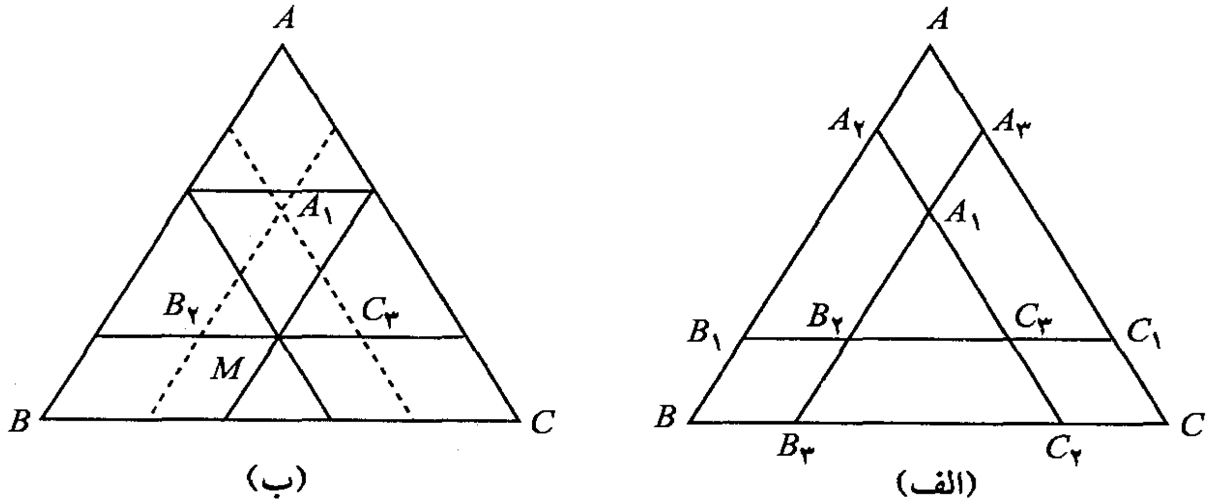
فرض کنید A تنها بازیکنی است که جایزه گرفته است. فرض کنید S_0 مجموعهٔ بازیکنهایی باشد که از A برده‌اند. فرض کنید S_0 ناتهی باشد. اگر B_0 بازیکنی در S_0 باشد، ممکن نیست از همه در S_0 برده باشد، زیرا در غیر این صورت B_0 هم باید برندهٔ جایزه می‌شد. فرض کنید S_1 مجموعهٔ بازیکنهایی در S_0 باشد که از B_0 برده‌اند. در این صورت S_1 ناتهی است. اگر B_1 بازیکنی در S_1 باشد، هم از A برده است و هم از B_0. بنابراین S_2، مجموعهٔ بازیکنهایی در S_1 که از B_1 برده‌اند، ناتهی است. ممکن نیست این روند خاتمه یابد و تعداد بازیکنها نیز متناهی است. درنتیجه S_0 تهی است و A از بقیهٔ بازیکنها برده است.

مسألهٔ ۴. ۵ نقطه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع به مساحت ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید سه مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارند که با مثلث مفروض متشابه‌اند، هر یک از این ۵ نقطه درون دست‌کم یکی از این سه مثلث قرار دارد و مجموع مساحتهای آنها حداکثر ۰٫۶۴ است.

راه‌حل

مثلث ABC را مطابق شکل ۷ (الف) به هفت ناحیه تقسیم کنید. سه خطی که رسم کرده‌ایم با ضلعهای مثلث ABC موازی‌اند و به فاصله‌ای اندکی بیشتر از $\frac{1}{5}$ طول ارتفاع مثلث ABC از ضلعها قرار دارند. فرض کنید یکی از مثلثهای AB_1C_1، A_2BC_2 و A_3B_3C شامل دست‌کم سه‌تا از پنج نقطه باشد. باید حداکثر دو مثلث با مساحتی ناچیز اضافه کنیم تا باقی‌ماندهٔ نقطه‌ها هم پوشانده شوند.

مساحت کل کمتر از ۰٫۶۴ است. از حالا به بعد فرض می‌کنیم آنچه گفتیم درست نباشد. فرض کنید $AA_2A_1A_3$ شامل هیچ‌یک از این ۵ نقطه نباشد. بنابر اصل لانه کبوتری یا A_2BC_2 و یا A_3B_3C دست‌کم شامل سه‌تا از نقطه‌هاست.



شکل ۷

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم هر یک از ناحیه‌های گوشه‌ای دست‌کم شامل یکی از نقطه‌هاست. از استدلالی مشابه آنچه گفتیم معلوم می‌شود که ناحیهٔ مرکزی باید تهی باشد، و سه ناحیهٔ کناری شامل حداکثر یکی از نقطه‌ها باشند. اگر هر ۵ نقطه در ناحیه‌های گوشه‌ای باشند، می‌توانیم از A_1، B_1 و C_1 خطهایی به‌ترتیب موازی با BC، CA و AB رسم کنیم. این خطها سه مثلث گوشه‌ای جدا می‌کنند که شامل ۵ نقطه هستند و مساحت کلشان اندکی بیش از ۰٫۴۸ است. فرض کنید ناحیهٔ کناری پایینی شامل ۱ نقطه باشد. در این صورت ناحیهٔ گوشه‌ای بالا باید شامل ۲ نقطه باشد. فرض کنید M وسط B_2C_3 باشد. مطابق شکل ۷ (ب) از A_1، M و M به‌ترتیب خطهایی موازی با BC، CA و AB رسم کنید. مثلث بالایی ۲ نقطهٔ ناحیهٔ گوشه‌ای بالایی را می‌پوشاند. یکی از دو مثلث پایینی نقطه‌های واقع در ناحیهٔ کناری پایینی و نیز ناحیهٔ گوشه‌ای پایینی را می‌پوشاند. مثلث سومی با مساحتی ناچیز بقیهٔ نقطه‌ها را می‌پوشاند. مساحت کل این سه مثلث اندکی بیش از ۰٫۵۲ است.

مسألهٔ ۵. کره‌ای به مرکز O بر هر یک از شش یال چهاروجهی مماس است. علاوه بر این، چهار کره به مرکزهای رأسهای چهاروجهی وجود دارند که هر یک از آنها بر یکی دیگر مماس است و همگی بر کره‌ای دیگر به مرکز O مماس‌اند. ثابت کنید این چهاروجهی منتظم است.

راه‌حل

چهاروجهی را $A_1A_2A_3A_4$، کره‌ای را که بر هر شش یال این چهاروجهی مماس است T، کرهٔ دیگر را

S وکره‌هایی به مرکزهای A_1، A_2، A_3 و A_4 را به‌ترتیب S_1، S_2، S_3 و S_4 بنامید. فرض کنید B_1، B_2 و B_3 به‌ترتیب نقطهٔ تماس S_2 و S_3، S_3 و S_1 و S_1 و S_2 باشند. فرض کنید C_1، C_2 و C_3 به‌ترتیب نقطه‌های تماس T با A_2A_3، A_3A_1 و A_1A_2 باشند. در این صورت

$$A_1B_2 = A_1B_3, \quad A_2B_3 = A_2B_1, \quad A_3B_1 = A_3B_2$$

$$A_1C_2 = A_1C_3, \quad A_2C_3 = A_2C_1, \quad A_3C_1 = A_3C_2$$

درنتیجه B_1 بر C_1 منطبق است، B_2 بر C_2 منطبق است و B_3 بر C_3 منطبق است. فرض کنید S_1 درون S و S_2 بیرون S باشد. در این صورت S_1 و S_2 باید بر هم مماس باشند و درضمن در نقطهٔ تماسشان بر S و درنتیجه، در همین نقطه بر S_3 و S_4 مماس باشند. چنین چیزی هم ممکن نیست، زیرا A_1، A_2، A_3 و A_4 روی یک خط قرار ندارند. فرض کنید R، r، r_1، r_2، r_3 و r_4 به‌ترتیب شعاعهای T، S، S_1، S_2، S_3 و S_4 باشند. اگر S بیرون S_1 باشد، بیرون S_2، S_3 و S_4 نیز هست. به این ترتیب

$$OB_3^2 + A_1B_3^2 = OA_1^2$$

یا

$$R^2 + r_1^2 = (r + r_1)^2$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$R^2 + r_2^2 = (r + r_2)^2$$

بنابراین

$$A_1A_2 = r_1 + r_2 = \frac{R^2 - r^2}{2r} + \frac{R^2 - r^2}{2r} = \frac{R^2 - r^2}{r}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$A_iA_j = \frac{R^2 - r^2}{r}, \quad 1 \le i < j \le 4$$

پس $A_1A_2A_3A_4$ چهاروجهیی منتظم است. اگر S، S_1 را دربر داشته باشد، S_2، S_3 و S_4 را نیز دربر دارد. در این صورت

$$R^2 + r_i^2 = (r - r_i)^2, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

پس $A_1A_2A_3A_4$ چهاروجهیی منتظم به طول ضلع $\frac{r^2 - R^2}{r}$ است.

مسألهٔ ۶. مجموع m عدد طبیعی زوج و n عدد طبیعی فرد ۱۹۸۷ است. بیشترین مقدار $3m + 4n$ چقدر است؟

راه‌حل

معلوم است که

$$\begin{aligned}1987 &\geq (2+4+\cdots+2m)+(1+3+\cdots+(2n-1))\\ &= \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

و درنتیجه

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2 \leq 1987+\frac{1}{4}$$

به این ترتیب، بنابر نابرابری کُشی ـ شوارتز،

$$\begin{aligned}3m+4n &= 3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n-\frac{3}{2}\\ &\leq \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}-\frac{3}{2}\\ &\leq 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2} < 222\end{aligned}$$

بنابراین $3m+4n \leq 221$. معادلهٔ دیوفانتی $3m+4n=221$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی جوابهایی دارد، اما در هیچ‌یک از آنها اختلاف m و n چندان زیاد نیست. ۲۲۱ را بر ۴ + ۳ تقسیم کنید، خارج‌قسمت ۳۱ و باقیمانده ۴ است. پس اگر $m=31$ و $n=32$، (m,n) جوابی برای معادلهٔ دیوفانتی $3m+4n=221$ است. اما

$$1+2+\cdots+63=2016$$

و ۲۰۱۶، ۲۹ تا از ۱۹۸۷ بیشتر است. برای اینکه این مجموع را کمتر کنیم، چهار عدد زوج را با سه عدد فرد عوض می‌کنیم. توجه کنید که

$$(54+56+58+62)-(65+67+69)=29$$

پس اگر ۲۹ عدد زوج ۲، ۴، ...، ۵۰، ۵۲ و ۶۰ و ۳۵ عدد فرد ۱، ۳، ... و ۶۹ را در نظر بگیریم، مجموعشان دقیقاً ۱۹۸۷ است. بنابراین، بیشترین مقدار $3m+4n$ برابر با ۲۲۱ است.

سومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸

مسألهٔ ۱. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی باشند و دست‌کم یکی از آنها غیرصفر باشد. عددهای حقیقی r_1، r_2، ... و r_n چنان‌اند که به‌ازای هر دنباله از عددهای حقیقی مانند x_1، x_2، ... و x_n،

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \cdots + r_n(x_n - a_n)$$

از

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. r_1، r_2، ... و r_n را پیدا کنید.

راه‌حل اول

فرض کنید $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. در این صورت

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$$

فرض کنید $x_i = 2a_i$، $1 \leq i \leq n$. در این صورت

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$$

درنتیجه

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \tag{1}$$

بنابر نابرابری کُشی ـ شوارتز،

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right) \tag{2}$$

و درنتیجه، چون $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$،

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \geq 1$$

فرض کنید $x_i = r_i$، $1 \leq i \leq n$. در این صورت

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

بنابراین، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \leq 1$$

پس

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} = 1$$

یعنی در نابرابری (۲) تساوی برقرار است و درنتیجه، عددی ثابت مانند λ وجود دارد که $r_i = \lambda a_i$، $1 \leq i \leq n$. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

بنابراین

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

راه‌حل دوم

x_1 را بزرگتر از a_1 انتخاب کنید و فرض کنید $x_i = a_i$، $n \leq i \leq 2$. در این صورت

$$r_1(x_1 - a_1) \leq \sqrt{x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$
$$= \frac{x_1^2 - a_1^2}{\sqrt{x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

اگر از دو طرف نابرابری بالا $x_1 - a_1$ را حذف و فرض کنیم x_1 به a_1 میل کند، نتیجه می‌گیریم

$$r_1 \leq \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

اگر x_1 را کوچکتر از a_1 انتخاب کنیم و روند قبلی را تکرار کنیم، نتیجه می‌گیریم

$$r_1 \geq \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

بنابراین

$$r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, \qquad 2 \leq i \leq n$$

مسألهٔ ۲. دو دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند و شعاع یکی از آنها دو برابر شعاع دیگری است. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایرهٔ کوچکتر محاط شده است. امتدادهای AB، BC، CD و DA دایرهٔ بزرگتر را به‌ترتیب در نقطه‌های C_1، D_1، A_1 و B_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید محیط $A_1B_1C_1D_1$ از دو برابر محیط $ABCD$ کمتر نیست و تعیین کنید که چه‌وقت این محیطها برابرند.

راه‌حل

می‌توانیم فرض کنیم شعاع دایرهٔ کوچکتر برابر با ۱ است. فرض کنید O مرکز دایره‌ها باشد. با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعیهای OAB_1C_1، OBC_1D_1، OCD_1A_1، ODA_1B_1، به‌دست

می‌آوریم

$$۲AC_۱ \leq B_۱C_۱ + ۲AB_۱$$

$$۲BD_۱ \leq C_۱D_۱ + ۲BC_۱$$

$$۲CA_۱ \leq D_۱A_۱ + ۲CD_۱$$

$$۲DB_۱ \leq A_۱B_۱ + ۲DA_۱$$

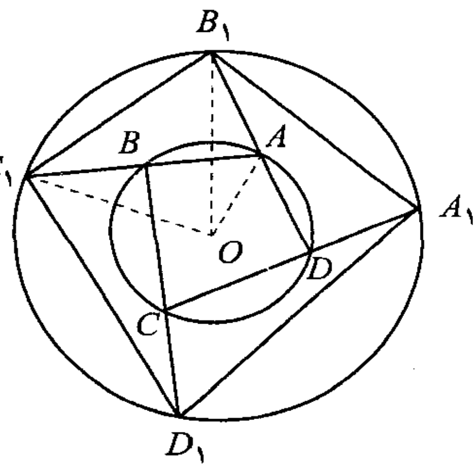
اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$۲(AB + BC + CD + DA) \leq A_۱B_۱ + B_۱C_۱ + C_۱D_۱ + D_۱A_۱$$

برای اینکه در این نابرابری تساوی برقرار باشد، هر یک از چهارضلعیهای $OAB_۱C_۱$، $OBC_۱D_۱$، $OCD_۱A_۱$ و $ODA_۱B_۱$ باید محاطی باشد. در این صورت

$$\angle OAC_۱ = \angle OB_۱C_۱ = \angle OC_۱B_۱ = \angle OAD$$

و درنتیجه OA نیمساز زاویهٔ BAD است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که OB، OC و OD به‌ترتیب نیمساز زاویه‌های ABC، BCD و CDA هستند، یعنی چهارضلعی $ABCD$ محیطی و O مرکز دایرهٔ محاطی آن است. چنین چیزی فقط وقتی ممکن است که $ABCD$ مربع باشد. برعکس، اگر $ABCD$ مربع باشد، $A_۱B_۱C_۱D_۱$ هم مربع است و معلوم است که محیط $A_۱B_۱C_۱D_۱$ دو برابر محیط $ABCD$ است.



شکل ۸

مسألهٔ ۳. دنباله‌ای از n عدد حقیقی مفروض است. هر قطعه از جمله‌های متوالی را که میانگینشان از ۱۹۸۸ بیشتر است اژدها، و اولین جمله در این قطعه را سر اژدها می‌نامیم. هر تک‌جمله‌ای که از ۱۹۸۸ بیشتر است نیز اژدها و سر اژدهاست. فرض کنید دست‌کم یک اژدها وجود داشته باشد. ثابت کنید میانگین

همهٔ جمله‌هایی که سر اژدها هستند از ۱۹۸۸ بیشتر است.

راه‌حل اول

فرض کنید دنبالهٔ مفروض

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

باشد. فرض کنید a_k سر دست‌کم یک اژدها باشد و از میان اژدهاهای ممکن، اژدهایی را انتخاب کنید که طولش کمترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید این اژدها

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}$$

باشد. ثابت می‌کنیم هر جمله از این اژدها سر اژدهایی دیگر است. فرض کنید a_{k+j}، $1 \leq j \leq l$، سر هیچ اژدهایی نباشد. در این صورت میانگین a_{k+j}، a_{k+j+1}، … و a_{k+l} حداکثر برابر با ۱۹۸۸ است. بنابراین،

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+j-1}$$

اژدهایی است که طولش از طول اژدهای

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}$$

کمتر است. پس به تناقض رسیده‌ایم و آنچه گفتیم درست است. از دنبالهٔ مفروض، اولین جمله‌ای را که سر اژدهاست انتخاب کنید و کوتاهترین اژدهایی را که این جمله سر آن است حذف کنید. این کار را آنقدر ادامه دهید تا به انتهای دنباله برسید. معلوم است که هیچ‌یک از جمله‌های باقی‌مانده سر هیچ اژدهایی نیست. بنابر آنچه ثابت کردیم، هر جملهٔ حذف‌شده سر دست‌کم یک اژدهاست. چون در هر مرحله یک اژدها را حذف کرده‌ایم و میانگین جمله‌های هر اژدها از ۱۹۸۸ بیشتر است، میانگین همهٔ جمله‌های حذف‌شده هم از ۱۹۸۸ بیشتر است.

راه‌حل دوم

از دنبالهٔ مفروض، نخستین جمله‌ای را که سر اژدهاست انتخاب کنید. هر اژدهایی را که این جمله سر آن است حذف کنید. این کار را ادامه دهید تا به انتهای دنباله برسید. معلوم است که هیچ‌یک از جمله‌های باقی‌مانده سر هیچ اژدهایی نیست. چون در هر مرحله یک اژدها را حذف کرده‌ایم، میانگین جمله‌های حذف شده از ۱۹۸۸ بیشتر است. در میان این جمله‌ها، هرکدام که سر هیچ اژدهایی نیست از ۱۹۸۸ کمتر یا با آن برابر است، زیرا در غیر این صورت اژدهایی به طول ۱ است. وقتی همهٔ این جمله‌ها حذف شوند، میانگین جمله‌های باقی‌مانده باز هم از ۱۹۸۸ بیشتر است.

راه‌حل سوم

حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$، معلوم است که حکم درست است. فرض کنید

حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد و دنباله‌ای با $n+۱$ جمله در نظر بگیرید. اگر هر جملهٔ این دنباله سر اژدهایی باشد، می‌توانیم دنباله را به تعدادی اژدهای مجزا تقسیم کنیم و درنتیجه میانگین همهٔ جمله‌ها از ۱۹۸۸ بیشتر است. در غیر این صورت، فرض کنید x اولین جمله‌ای باشد که سر هیچ اژدهایی نیست. در این صورت $x \leq ۱۹۸۸$ و اگر x را حذف کنیم، باز هم هر جملهٔ قبل از x اژدهاست. اکنون دنباله‌ای n جمله‌ای داریم که حکم مسأله برای آن، و درنتیجه برای دنبالهٔ $n+۱$ جمله‌ای، درست است.

مسألهٔ ۴. الف) فرض کنید $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی حقیقی و مثبت باشند که در نابرابری

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲)^۲ > ۲(a_۱^۴ + a_۲^۴ + a_۳^۴)$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

ب) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ باشد. فرض کنید به‌ازای عددهایی حقیقی و مثبت مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n نابرابری

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲)^۲ > (n-۱)(a_۱^۴ + a_۲^۴ + \cdots + a_n^۴)$$

درست باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر i، هر j و هر k، a_i، a_j و a_k طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

راه‌حل اول

الف) نابرابری موردنظر با

$$\begin{aligned} ۰ &< ۲(a_۱^۲a_۲^۲ + a_۲^۲a_۳^۲ + a_۳^۲a_۱^۲) - (a_۱^۴ + a_۲^۴ + a_۳^۴) \\ &= (a_۱ + a_۲ + a_۳)(a_۲ + a_۳ - a_۱)(a_۳ + a_۱ - a_۲)(a_۱ + a_۲ - a_۳) \end{aligned}$$

هم‌ارز است. می‌توانیم فرض کنیم $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳$. به این ترتیب سه پرانتز اول سمت راست نابرابری بالا مثبت‌اند و درنتیجه، پرانتز آخر هم مثبت است. بنابراین $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

ب) حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۳$، حکم را در قسمت (الف) ثابت کرده‌ایم. فرض کنید $n \geq ۳$ و حکم را به‌ازای n ثابت کرده باشیم. به‌ازای $n+۱$ عدد حقیقی مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{n+۱}$، نابرابری مفروض با نابرابریهای زیر هم‌ارز است

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)^۲ + ۲a_{n+۱}^۲ \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + a_{n+۱}^۴ > n \sum_{i=۱}^{n} a_i^۴ + n a_{n+۱}^۴$$

$$(n-۱)a_{n+۱}^۴ - ۲a_{n+۱}^۲ \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + n \sum_{i=۱}^{n} a_i^۴ - \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)^۲ < ۰$$

عبارت سمت چپ نابرابری آخر را به‌عنوان چندجمله‌ایی درجهٔ دوم برحسب a_{n+1}^2 در نظر بگیرید. چون ضریب پیشرو این چندجمله‌ای مثبت است و چندجمله‌ای مقدارهای منفی هم دارد، ریشه‌های این چندجمله‌ای حقیقی‌اند. پس مبین آن باید مثبت باشد. درنتیجه

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 - 4(n-1)\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2\right) > 0$$

یا

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 > (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^4$$

درنتیجه، چون حکم به‌ازای n درست است، به‌ازای هر i، هر j و هر k که $1 \le i < j < k \le n$، a_i و a_j و a_k طول سه ضلع یک مثلث‌اند. بنابر تقارن، اگر $1 \le i < j < k \le n+1$ باز هم این نتیجه درست است. یعنی حکم به‌ازای $n+1$ هم درست است.

راه‌حل دوم

الف) از همان روش راه‌حل اول استفاده کنید.

ب) چون $n > 3$، از نابرابری کُشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^4 &< \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \\
&= \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2} + \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2} + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right)^2 \\
&\le (n-1)\left(\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{(a_1^2+a_2^2+a_3)^2}{4} + a_4^4 + \cdots + a_n^4\right)
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2 > 2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$$

پس بنابر قسمت (الف)، a_1، a_2 و a_3 طول سه ضلع یک مثلث‌اند. بنابر تقارن، اگر $1 \le i < j < k \le n$، a_i، a_j و a_k هم طول سه ضلع مثلث‌اند.

مسألهٔ ۵. سه چهاروجهی $A_iB_iC_iD_i$، $1 \leq i \leq 3$، مفروض‌اند. از نقطه‌های B_i، C_i و D_i سه صفحهٔ β_i، γ_i و δ_i به‌ترتیب بر A_iB_i، A_iC_i و A_iD_i عمود شده‌اند. اگر این نه صفحه در یک نقطه متقاطع باشند و A_1، A_2 و A_3 روی یک خط قرار داشته باشند، اشتراک کره‌های محیطی این سه چهاروجهی را تعیین کنید.

راه‌حل

فرض کنید نه صفحهٔ موردنظر یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کنند. در این صورت

$$\angle EB_iA_i = \angle EC_iA_i = \angle ED_iA_i = 90^\circ$$

چون A_i، B_i، C_i و D_i روی یک صفحه قرار ندارند، B_i، C_i و O_i همگی روی کره‌ای به قطر EA_i قرار دارند. این کره، کرهٔ محیطی چهاروجهی $A_iB_iC_iD_i$ است و مرکز آن، که آن را O_i می‌نامیم، وسط EA_i است. اگر A_1، A_2 و A_3 بر هم منطبق باشند، سه کرهٔ محیطی چهاروجهیها هم بر هم منطبق‌اند و اشتراکشان هر یک از آنهاست. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 بر هم منطبق نباشند. در این صورت، چون این سه نقطه روی یک خط قرار دارند، نقطه‌های O_1، O_2 و O_3 هم روی یک خط قرار دارند. معلوم است که سه کرهٔ محیطی چهاروجهیها نسبت به O_1O_3 متقارن‌اند و از E می‌گذرند. اگر E روی O_1O_3 قرار داشته باشد، اشتراک موردنظر نقطهٔ E است، که همان نقطهٔ تماس مشترک آنهاست، و در غیر این صورت، این اشتراک دایره‌ای است که از دوران E حول O_1O_3 به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۶. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 3$، فرض کنید $f(n)$ کوچکترین عدد طبیعی باشد که مقسوم‌علیه n نیست. فرض کنید $f^{(1)}(n) = f(n)$. اگر $f^{(k)}(n) \geq 3$، $f\left(f^{(k)}(n)\right)$ بامعنی است و آن را $f^{(k+1)}(n)$ تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 3$، k را طوری تعیین کنید که $f^{(k)}(n) = 2$.

راه‌حل

معلوم است که اگر n فرد باشد، $f(n) = 2$ و درنتیجه $k = 1$. فرض کنید n عددی زوج باشد و $n \geq 4$. اگر $f(n) = ab$، که در آن a و b عددهایی طبیعی و بزرگتر از ۱ و نسبت به هم اول‌اند،

$$a < f(n), \qquad b < f(n)$$

بنابراین a و b هر دو مقسوم‌علیه n هستند. درنتیجه، چون a و b نسبت به هم اول‌اند، ab هم مقسوم‌علیه n است و این هم با تعریف $f(n)$ تناقض دارد. پس به‌ازای عددی اول مانند p و عددی طبیعی مانند l، $f(n) = p^l$. اگر $p = 2$، آن‌وقت $f(2^l) = 3$ و $f(3) = 2$ و درنتیجه $k = 3$. اگر $p \neq 2$، آن‌وقت $f(p^l) = 2$ و درنتیجه $k = 2$.

چهارمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۹

مسألهٔ ۱. هر یک از A و B اجتماع کمانهایی دوبه‌دو مجزا روی دایرهٔ واحد است. علاوه بر این، طول هر کمان در B برابر با $\frac{\pi}{m}$ است، که در اینجا m عددی طبیعی و ثابت است. مجموعه‌ای را که از دوران A در جهت پادساعتگرد حول مرکز دایره به‌اندازهٔ $j\frac{\pi}{m}$ رادیان به‌دست می‌آید با A^j نشان می‌دهیم. ثابت کنید عددی طبیعی مانند k وجود دارد که

$$l(A^k \cap B) \geq \frac{l(A)l(B)}{2\pi}$$

که در آن $l(X)$ برابر با مجموع طول کمانهای مجزای مجموعهٔ X است.

راه‌حل

فرض کنید کمانهای B، b_1، b_2، ... و b_n باشند. کمانی را که از دوران b_i حول مرکز به‌اندازهٔ $j\frac{\pi}{m}$ رادیان در جهت ساعتگرد به‌دست می‌آید با b_i^{-j} نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\sum_{j=1}^{2m} l(A^j \cap B) = \sum_{j=1}^{2m} l\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} b_i^{-j}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2m} \sum_{i=1}^{n} l\left(A \cap b_i^{-j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2m} l\left(A \cap b_i^{-j}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} l\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{2m} b_i^{-j}\right)\right)$$
$$= nl(A)$$

در تساوی آخر از این مطلب استفاده کرده‌ایم که b_i کمانی به طول $\frac{\pi}{m}$ است، و درنتیجه $\cup_{j=1}^{2m} b_i^{-j}$ دایرهٔ واحد است. درنتیجه بنابر اصل لانه کبوتری، به‌ازای عددی مانند k، $1 \leq k \leq 2j$،

$$l(A^k \cap B) \geq \frac{nl(A)}{2m} = \frac{1}{2\pi} \frac{n\pi}{m} l(A) = \frac{l(A)l(B)}{2\pi}$$

مسألهٔ ۲. فرض کنید

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

که در آن x_1، x_2، . . . و x_n عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

راه‌حل اول

می‌توانیم فرض کنیم $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$، و درنتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leq \cdots \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

به این ترتیب، از نابرابری چبیشف و نابرابری میانگینهای توان‌دار به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

بنابر نابرابری کُشی ـ شوارتز،

$$\sum_{i=۱}^{n} \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} ۱}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} x_i} = \sqrt{n}$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-۱}} \geq \frac{۱}{\sqrt{n-۱}} \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{x_i}$$

راه‌حل دوم

بنابز نابرابری کُشی ـ شوارتز،

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{۱-x_i}} \geq \frac{n^۲}{\sum_{i=۱}^{n} \sqrt{۱-x_i}}$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n} \sqrt{۱-x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} ۱}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} (۱-x_i)} = \sqrt{n(n-۱)}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱-x_i}} &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱-x_i}} - \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{۱-x_i} \\ &\geq \frac{n^۲}{\sqrt{n(n-۱)}} - \sqrt{n(n-۱)} = \sqrt{\frac{n}{n-۱}}\end{aligned}$$

بنابر نابرابری کُشی ـ شوارتز،

$$\sum_{i=۱}^{n} \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} ۱}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} x_i} = \sqrt{n}$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-۱}} \geq \frac{۱}{\sqrt{n-۱}} \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{x_i}$$

مسألهٔ ۳. فرض کنید S دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط باشد. فرض کنید $f : S \to S$ با $f(x) = x^m$

تعریف شده باشد، که در آن m عددی طبیعی است. فرض کنید

$$f^{(\circ)}(z) = z, \qquad f^{(k+\text{۱})}(z) = f\left(f^{(k)}(z)\right), \qquad k \geq \circ$$

کوچکترین عدد طبیعی مانند n را که $f^{(n)}(z) = z$، دورهٔ تناوب z می‌نامیم. تعداد همهٔ نقطه‌های S را که دورهٔ تناوب آنها ۱۹۸۹ است حساب کنید.

راه‌حل

زیرمجموعه‌ای از S شامل عددهایی مختلط مانند z را که $f^{(n)}(z) = z$، E_n می‌نامیم. در این صورت $z^{m^n-\text{۱}} = \text{۱}$، و درنتیجه $|E_n| = m^n - \text{۱}$. فرض کنید s و t عددهایی طبیعی باشند. اگر t مقسوم‌علیه s باشد، آن‌وقت $(s,t) = t$. همچنین، $E_t \subseteq E_s$ و درنتیجه

$$E_{(s,t)} = E_t = E_s \cap E_t$$

در غیر این صورت، می‌توان نوشت $s = qt + r$، که در آن $\circ < r < t$. فرض کنید $z \in E_s \cap E_t$. در این صورت

$$z = f^{(s)}(z) = f^{(r)}\left(f^{(qt)}(z)\right) = f^{(r)}(z)$$

و درنتیجه $z \in E_t \cap E_s$. بنابراین

$$E_s \cap E_t \subseteq E_t \cap E_r$$

از الگوریتم اقلیدسی نتیجه می‌شود که $E_s \cap E_t \subseteq E_{(s,t)}$. از طرف دیگر، چون (s,t) هم مقسوم‌علیه s است و هم مقسوم‌علیه t، $E_{(s,t)} \subseteq E_s \cap E_t$. بنابراین

$$E_{(s,t)} = E_s \cap E_t$$

فرض کنید $z \in E_n$ و دورهٔ تناوب z برابر با k باشد. ثابت می‌کنیم k مقسوم‌علیه n است. اگر چنین نباشد، می‌توان نوشت $n = qk + r$، که در آن $\circ < r < k$. چون

$$z = f^{(n)}(z) = f^{(r)}\left(f^{(qk)}(z)\right) = f^{(r)}(z)$$

پس دورهٔ تناوب z حداکثر برابر با r است و این هم تناقض است. یعنی k مقسوم‌علیه n است. اکنون توجه کنید که $\text{۱۹۸۹} = \text{۳}^\text{۲} \times \text{۱۳} \times \text{۱۷}$. نقطه‌هایی که دورهٔ تناوبشان برابر با ۱۹۸۹ است، نقطه‌هایی هستند که در $E_{\text{۱۹۸۹}}$ هستند، اما در هیچ‌یک از مجموعه‌های $E_{\frac{\text{۱۹۸۹}}{\text{۳}}}$، $E_{\frac{\text{۱۹۸۹}}{\text{۱۳}}}$ و $E_{\frac{\text{۱۹۸۹}}{\text{۱۷}}}$ نیستند. بنابر اصل شمول و عدم شمول، تعداد این عضوها برابر است با

$$m^{\text{۱۹۸۹}} - m^{\text{۶۶۳}} - m^{\text{۱۵۳}} - m^{\text{۱۱۷}} + m^{\text{۵۱}} + m^{\text{۳۹}} + m^{\text{۹}} - m^{\text{۳}}$$

مسألهٔ ۴. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC برابر با r است. نقطه‌های D، E و F به‌ترتیب روی ضلعهای BC، CA و AB قرار دارند. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای AEF، BFD و CDE برابر باشد، ثابت کنید این شعاع برابر با $r - r'$ است، که در اینجا r' شعاع دایرهٔ محاطی مثلث DEF است.

راه‌حل

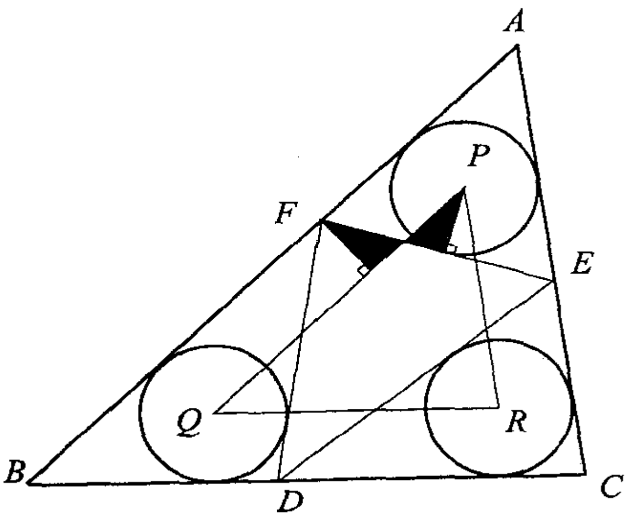
فرض کنید P، Q و R به‌ترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای AEF، BFD و CDE باشند و x شعاع این دایره‌ها باشد. در این صورت، PQ، QR و RP به‌ترتیب با AB، BC و CA موازی‌اند. بنابراین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ سایه‌دار در شکل ۹ همنهشت‌اند. پس محیط مثلث DEF با محیط مثلث PQR برابر است. محیط این دو مثلث را l' و محیط مثلث ABC را l بنامید. چون مثلثهای ABC و PQR مجانس یکدیگرند (مرکز دایرهٔ محاطی آنها یکی است و همین نقطه مرکز تجانس آنهاست)، پس $(r - x)l = rl'$. مجموع محیطهای مثلثهای AEF، BFD و CDE برابر با $l + l'$ است. چون مساحت مثلث ABC برابر با مجموع مساحتهای مثلثهای DEF، AEF، BFD و CDE است، پس

$$rl = r'l' + x(l + l')$$

و درنتیجه

$$(x + r')l' = (r - x)l = rl'$$

بنابراین $x = r - r'$.



شکل ۹

مسألهٔ ۵. ۱۹۸۹ نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند. چگونه باید این نقطه‌ها را به ۳۰ گروه به اندازه‌های مختلف افراز کرد تا تعداد کل مثلثهایی که رأسهایشان در گروههای مختلف‌اند بیشترین مقدار ممکن باشد؟

راه‌حل

فرض کنید گروههای G_1، G_2، ... و G_{30} ویژگی موردنظر را داشته باشند و تعداد عضوهایشان به‌ترتیب برابر با n_1، n_2، ... و n_{30} باشد و

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_{30}$$

ثابت می‌کنیم هر یک از تفاضلهای

$$n_{i+1} - n_i, \qquad 1 \leq i \leq 29$$

حداکثر برابر با ۲ است. فرض کنید به‌ازای عددی مانند k،

$$n_{k+1} - n_k \geq 3$$

نقطه‌ای مانند x را از G_{k+1} به G_k منتقل کنید و مجموعه‌های جدید را به‌ترتیب $G_{k'+1}$ و $G_{k'}$ بنامید. در این صورت، باز هم

$$n_{k-1} < n_k + 1 < n_{k+1} - 1 < n_{k+2}$$

مثلثهایی که حذف می‌شوند، مثلثهایی هستند که یک رأسشان x است، یک رأسشان در G_k است و رأس دیگرشان در هیچ‌یک از G_k و G_{k+1} نیست. مثلثهایی که به‌وجود می‌آیند، مثلثهایی هستند که یک رأسشان x است، یک رأسشان در G_{k+1} است و رأس دیگرشان در هیچ‌یک از G_k و G_{k+1} نیست. چون $n_k < n_{k+1} - 1$، پس به تناقض رسیده‌ایم. اکنون ثابت می‌کنیم حداکثر یکی از تفاضلهای

$$n_{i+1} - n_i, \qquad 1 \leq i \leq 29$$

ممکن است برابر با ۲ باشد. فرض کنید به‌ازای عددهایی مانند j و k،

$$n_{j+1} - n_j = n_{k+1} - n_k = 2$$

می‌توانیم فرض کنیم $j + 1 \leq k$. یکی از نقطه‌های G_{k+1} را به G_k منتقل کنید. در این صورت باز هم

$$n_{j-1} < n_j + 1 < n_{j+1} \leq n_k < n_{k+1} - 1 < n_{k+2}$$

چون $n_j < n_{k+1} - 1$، می‌توانیم مانند قبل ثابت کنیم که تعداد مثلثها زیادتر شده است. توجه کنید که

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{30} = 1989$$

اگر عددهای

$$n_1, n_2, \ldots, n_{30}$$

تصاعدی حسابی با قدر نسبت ۱ تشکیل دهند، آن‌وقت

$$1989 = 30 n_1 + 435$$

اما $۱۵۵۴ = ۱۹۸۹ - ۴۳۵$ و اگر ۱۵۵۴ را بر ۳۰ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت برابر با ۵۱ و باقیمانده برابر با ۲۴ می‌شود. درنتیجه، به‌ازای $k = ۳۰ - ۲۴ = ۶$، $n_{k+۱} - n_k = ۲$. پس نقطه‌ها را باید به گروههایی با اندازه‌های ۵۱، ۵۲، ...، ۵۶، ۵۸، ۵۹، ... و ۸۱ تقسیم کنیم تا ویژگی موردنظر را داشته باشند.

مسألهٔ ۶. فرض‌کنید S مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ باشد. همهٔ تابعها مانند $f : S \to S$ را پیدا کنید، به‌طوری که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی مانند x، y، m و n، که $x, y > ۱$ و $m, n > ۰$،

$$f(x^m y^n) \leq f(x)^{\frac{۱}{۴m}} f(y)^{\frac{۱}{۴n}}$$

راه‌حل

فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. فرض کنید

$$m = \frac{۱}{۲}, \qquad n = \frac{\ln x}{۲\ln y}$$

در این صورت

$$f\left(x^{\frac{۱}{۲}} y^{\frac{\ln y}{۲\ln y}}\right) \leq f(x)^{\frac{۱}{۲}} f(y)^{\frac{\ln y}{۲\ln x}}$$

و درنتیجه

$$f(x)^{\ln x} \leq f(y)^{\ln y}$$

به‌همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت

$$f(x)^{\ln x} \geq f(y)^{\ln y}$$

بنابراین عددی ثابت مانند c وجود دارد که $c > ۱$ و $f(x)^{\ln x} = c$ و درنتیجه $f(x) = c^{\frac{۱}{\ln x}}$.

اگر $f(x) = c^{\frac{۱}{\ln x}}$، $c > ۱$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x^m y^n) &= c^{\frac{۱}{\ln x^m y^n}} = c^{\frac{۱}{m\ln x + n\ln y}} \\ &\leq c^{\frac{۱}{۴m\ln x} + \frac{۱}{۴n\ln y}} = f(x)^{\frac{۱}{۴m}} f(y)^{\frac{۱}{۴n}} \end{aligned}$$

زیرا بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین توافقی،

$$\frac{\frac{۱}{m\ln x} + \frac{۱}{n\ln y}}{۲} \geq \frac{۲}{m\ln x + n\ln y}$$

پنجمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۰

مسألهٔ ۱. $ABCD$ چهارضلعیی محدب است و AB با CD موازی نیست. دایره‌ای از A و B می‌گذرد و بر CD در نقطهٔ P مماس است و دایره‌ای هم از C و D می‌گذرد و بر AB در نقطهٔ Q مماس است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی وتر مشترک این دو دایره AD را نصف می‌کند که AD با BC موازی باشد.

راه‌حل

فرض کنید PQ وتر مشترک دایره‌ها را در نقطهٔ K، دایرهٔ محیطی مثلث QCD را برای بار دوم در نقطهٔ R و دایرهٔ محیطی مثلث PAB را برای بار دوم در نقطهٔ S قطع کند. فرض کنید امتداد BA و CD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند و

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \quad OD = d, \quad OP = p, \quad OQ = q$$

در این صورت

$$KP \times KS = KE \times EF = KQ \times KR$$

بنابراین

$$\frac{PR}{KP} = \frac{KR}{KP} - ۱ = \frac{KS}{KQ} - ۱ = \frac{QS}{KQ}$$

درنتیجه، تساوی $KP = KQ$ با $PR = QS$ و یا

$$CP \times DP = PR \times PQ = QS \times PQ = AQ \times BQ$$

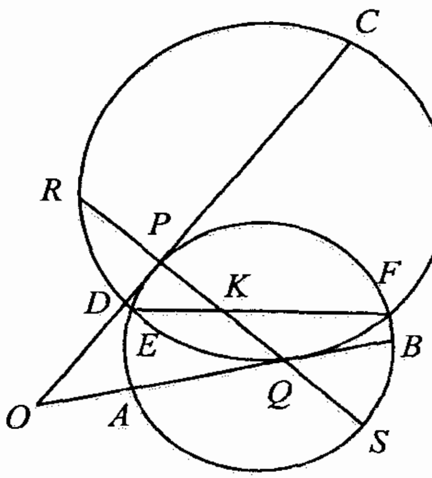
هم‌ارز است. چون $p^2 = ab$ و $q^2 = cd$، تساوی

$$(c-p)(p-d) = (q-a)(b-q)$$

را می‌توان به‌صورت

$$(ac-bd)(bc-ad) = 0$$

نوشت. چون $b > a$ و $c > d$، باید $ac - bd = 0$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$. این تساوی هم وقتی و فقط وقتی درست است که BC با AD موازی باشد.



شکل ۱۰

مسألهٔ ۲. به‌ازای عدد طبیعی معلوم x، Dـ زنجیری از x به طول d دنباله‌ای مانند

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d$$

است که

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_d = x$$

و x_i، x_{i+1} را می‌شمارد ($1 \le i \le d-1$). برای عدد $5^k \times 31^m \times 1990^n$ که در آن k، m و n عددهایی طبیعی‌اند، بلندترین طول Dـ زنجیرها و تعداد Dـ زنجیرهای به این طول را پیدا کنید.

راه‌حل

عدد طبیعی معلوم x تعدادی متناهی Dـ زنجیر دارد، بنابراین یکی از آنها بیشترین طول را، مثلاً به‌اندازهٔ d، دارد. در چنین Dـ زنجیری، $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ ($1 \le i \le d-1$) عددی اول است، زیرا در غیر این صورت می‌توان جمله‌ای بین x_i و x_{i+1} اضافه کرد. فرض کنید تجزیهٔ x به عددهای اول به شکل $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ باشد. می‌توانیم هر بار یکی از $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ عدد اول را اضافه کنیم. درنتیجه

$$d = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$$

تعداد Dـ زنجیرهای به طول d برابر است با تعداد جایگشتهای α_iتا از p_iها، $1 \le i \le r$، که برابر است با

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_r!}$$

توجه کنید که در این مسأله، چون

$$5^k \times 31^m \times 1990^n = 2^n \times 5^{k+n} \times 31^m \times 199^n$$

پس بلندترین طول Dـ زنجیرها برابر است با $k+m+3n$ و تعداد آنها برابر است با

$$\frac{(k+m+3n)!}{(k+n)!m!(n!)^2}$$

مسألهٔ ۳. دربارهٔ تابع حقیقی‌ـ مقدار f که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی نامنفی تعریف شده است، می‌دانیم که به‌ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی مانند x و y،

$$f(x)f(y) \le y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$$

و عددی ثابت مانند M وجود دارد که به‌ازای هر x، $0 \le x \le 1$، $|f(x)| \le M$. ثابت کنید $f(x) \le x^2$، $x \ge 0$.

راه‌حل

اگر فرض کنیم $x = y = 0$، از نابرابری

$$f(x)f(y) \le y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{2}\right) \qquad (*)$$

نتیجه می‌شود $f(0)^2 \le 0$ و درنتیجه

$$f(0) = 0 \le 0^2$$

فرض کنید $x > 0$. اگر فرض کنیم $y = x$، از نابرابری $(*)$ نتیجه می‌شود

$$f(x)^2 \le 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$$

یا

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \ge \frac{1}{2x^2} f(x)^2$$

فرض کنید عددی مثبت مانند x_0 وجود داشته باشد که $f(x_0) > x_0^2$. به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر

n عددی صحیح و غیرمنفی باشد،

$$f\left(\frac{x_\circ}{۲^n}\right) > ۲^{۲^n-۲n-۱}x_\circ^۲$$

اگر $n = \circ$، چون $f(x_\circ) > x_\circ^۲$، این نابرابری درست است. فرض کنید این نابرابری به‌ازای n درست باشد. در این صورت

$$f\left(\frac{x_\circ}{۲^{n+۱}}\right) \geq \frac{۱}{۲\left(\frac{x_\circ}{۲^n}\right)^۲} f\left(\frac{x_\circ}{۲^n}\right)^۲ > \frac{۲^{۲n-۱}}{x_\circ^۲}\left(۲^{۲^n-۲n-۱}x_\circ^۲\right)^۲$$
$$= ۲^{۲^{n+۱}-۲(n+۱)-۱}x_\circ^۲$$

اکنون توجه کنید که عددی طبیعی مانند N وجود دارد که

$$\circ < \frac{x_\circ}{۲^n} \leq ۱, \qquad n \geq N$$

چون $x_\circ^۲ > \circ$ و $۲^{۲^n-۲n-۱}$ بدون کران بزرگ می‌شود، پس امکان ندارد که عددی ثابت مانند M وجود داشته باشد که

$$f\left(\frac{x_\circ}{۲^n}\right) < M, \qquad n \geq N$$

پس به تناقض رسیده‌ایم و اگر $x \geq \circ$، $f(x) \leq x^۲$.

یادداشت

می‌توانیم ثابت کنیم

$$f(x) \leq \frac{x^۲}{۲}, \qquad x \geq \circ$$

اگر $x = \circ$، چون $f(\circ) = \circ$، این نابرابری درست است. فرض کنید $x > \circ$ و

$$g(x) = f(x) - \frac{x^۲}{۲}$$

از فرض مسأله نتیجه می‌شود که

$$g(x) \leq ۲g\left(\frac{x}{۲}\right)$$

و به استقرا می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$g(x) \leq ۲^n g\left(\frac{x}{۲^n}\right)$$

بنابراین

$$g(x) \le ۲^n f\left(\frac{x}{۲^n}\right) \le \frac{x^۲}{۲^n}$$

چون می‌توانیم n را به دلخواه بزرگ انتخاب کنیم، $g(x) \le ۰$ و درنتیجه $f(x) \le \frac{x^۲}{۲}$.

مسألهٔ ۴. فرض کنید a عددی طبیعی باشد و A و B عددهایی حقیقی باشند. دستگاه معادله‌های

$$x^۲(Ax^۲ + By^۲) + y^۲(Ay^۲ + Bz^۲) + z^۲(Az^۲ + Bx^۲) = (۲A + B)\,\frac{(۱۳a)^۴}{۴}$$

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = (۱۳a)^۲$$

را در نظر بگیرید. شرطی لازم و کافی دربارهٔ A و B پیدا کنید که این دستگاه معادله‌ها در مجموعهٔ عددهای طبیعی (برحسب x، y و z) جواب داشته باشد.

راه‌حل

فرض کنید دستگاه موردنظر (برحسب x، y و z) در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب داشته باشد. با مربع کردن معادلهٔ دوم و جایگزین کردن آن در معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم

$$(۲A - B)(x^۴ + y^۴ + z^۴) = \frac{۱}{۲}(۱۳a)^۴(۲A - B)$$

فرض کنید $B \ne ۲A$. اگر معادلهٔ

$$۲(x^۴ + y^۴ + z^۴) = (۱۳a)^۴$$

(برحسب x، y، z و a) در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب داشته باشد، جوابی مانند

$$(x_۰, y_۰, z_۰, a_۰)$$

وجود دارد که $x_۰ + y_۰ + z_۰ + a_۰$ در میان همهٔ جوابها کمترین مقدار ممکن را دارد. معلوم است که $a_۰$ باید عددی زوج باشد. بنابراین به‌ازای عددی طبیعی مانند $a_۱$، $a_۰ = ۲a_۱$. بنابراین

$$x_۰^۴ + y_۰^۴ + z_۰^۴ = ۸(۱۳a_۱)^۴ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۸)$$

چون هر یک از $x_۰^۴$، $y_۰^۴$ و $z_۰^۴$ به‌پیمانهٔ ۸ با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۴ همنهشت است، پس هیچ‌یک از آنها عددی فرد نیست. درنتیجه عددهایی طبیعی مانند $x_۱$، $y_۱$ و $z_۱$ وجود دارند که

$$x_۰ = ۲x_۱, \qquad y_۰ = ۲y_۱, \qquad z_۰ = ۲z_۱$$

بنابراین

$$x_۱^۴ + y_۱^۴ + z_۱^۴ = (۱۳a_۱)^۴$$

و

$$x_1 + y_1 + z_1 + a_1 < x_0 + y_0 + z_0 + a_0$$

پس به تناقض رسیده‌ایم و باید $B = 2A$.

برعکس، اگر $B = 2A$، معادله‌های دستگاه موردنظر هم‌ارزند و اگر a عددی طبیعی باشد و $x = 3a$، $y = 4a$ و $z = 12a$، آنگاه (x, y, z) جواب معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2$ است.

مسألهٔ ۵. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی باشد و $E(X)$ گردایهٔ زیرمجموعه‌هایی از X باشد که تعداد عضوهایشان عددی زوج است. تابع حقیقی-مقدار f روی $E(X)$ طوری تعریف شده است که دست‌کم به‌ازای یک عضو از $E(X)$ مانند D، $f(D) > 1990$ و به‌ازای هر دو عضو جدا از هم $E(X)$ مانند A و B،

$$f(A \cap B) = f(A) + f(B) - 1990$$

ثابت کنید می‌توان X را به دو زیرمجموعهٔ جدا از هم مانند P و Q افرازکرد، به‌طوری که به‌ازای هر عضو ناتهی از $E(P)$ مانند S، $f(S) > 1990$ و به‌ازای هر عضو از $E(Q)$ مانند T، $f(T) \leq 1990$.

راه‌حل اول

در میان عضوهای $E(X)$، P را طوری انتخاب کنید که $f(P)$ بیشترین مقدار ممکن باشد. اگر بیش از یک انتخاب برای P وجود داشت، زیرمجموعه‌ای را انتخاب کنید که تعداد عضوهایش کمترین مقدار ممکن است. اگر چندین زیرمجموعه با این ویژگیها وجود داشتند، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب کنید. فرض کنید $Q = X - P$. چون به‌ازای Dای در $E(X)$، $f(D) > 1990$، پس $f(P) > 1990$. فرض کنید S عضوی ناتهی از $E(P)$ باشد و $S \neq P$. در این صورت، $P - S$ هم عضو $E(P)$ است و تعداد عضوهایش از تعداد عضوهای P کمتر است. بنابراین $f(P - S) < f(P)$. درنتیجه، چون

$$f(P) = f(S \cup (P - S)) = f(S) + f(P - S) - 1990$$

پس $f(S) > 1990$. اکنون فرض‌کنید T عضوی از $E(Q)$ باشد. دراین صورت $f(P \cup T) \leq f(P)$. چون

$$f(P \cup T) = f(P) + f(T) - 1990$$

پس $f(T) \leq 1990$.

راه‌حل دوم

به‌ازای هر عضو $E(X)$ مانند M فرض کنید

$$g(M) = f(M) - 1990$$

در این صورت، اگر A و B دو عضو جدا از هم $E(X)$ باشند،

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B)$$

فرض کنید $X = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$. اگر $۱ \leq i \leq j \leq n$، $g\left(\{a_i, a_j\}\right)$ را با $g_{i,j}$ نشان دهید. در این صورت اگر i، k و m عددهایی طبیعی و متمایز و کوچکتر از یا مساوی با n باشند،

$$g_{i,j} + g_{k,m} = g\left(\{a_i, a_j, a_k, a_m\}\right) = g_{i,k} + g_{j,m}$$

عددهای حقیقی $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n را این‌طور تعریف کنید:

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}\left(g_{۱,۲} + g_{۱,۳} - g_{۲,۳}\right)$$
$$x_۲ = \frac{۱}{۲}\left(g_{۱,۲} + g_{۲,۳} - g_{۱,۳}\right)$$

و

$$x_k = \frac{۱}{۲}\left(g_{۱,k} + g_{۲,k} - g_{۱,۲}\right), \qquad ۳ \leq k \leq n$$

اگر k و m عددهایی طبیعی و متمایز و بزرگتر از ۲ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} x_k + x_m &= \frac{۱}{۲}\left(g_{۱,k} + g_{۲,m} + g_{۱,m} + g_{۲,k} - ۲g_{۱,۲}\right) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(g_{۱,۲} + g_{k,m} + g_{k,m} - ۲g_{۱,۲}\right) \\ &= g_{k,m} \end{aligned}$$

اگر k یا m برابر با ۱ یا ۲ باشد، باز هم تساوی بالا درست است. پس به‌ازای هر i و هر j، $۱ \leq i \leq j \leq n$،

$$x_i + x_j = g_{i,j}$$

و درنتیجه، می‌توان g را با تعریف

$$g\left(\{a_i\}\right) = x_i, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

به کمک رابطهٔ

$$g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$$

روی همهٔ زیرمجموعه‌های X تعریف کرد.

فرض کنید

$$P = \{a \in X : \; g(a) > ۰\}$$

و $Q = X - P$. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی مانند $S = \{a_۱, a_۲, \dots, a_{۲k}\}$ در $E(P)$،

$$g(S) = g_{۱,۲} + g_{۳,۴} + \cdots + g_{۲k-۱,۲k} > ۰$$

که با نابرابری $f(S) > ۱۹۹۰$ هم‌ارز است. به‌همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که اگر T عضوی از $E(Q)$ باشد، $f(T) \leq ۱۹۹۰$.

مسألهٔ ۶. هر nضلعی محدب را می‌توان با ترسیم $(n - ۳)$ تا از قطرهایش که هیچ دو تایی از آنها جز در رأسها متقاطع نیستند به $n - ۲$ مثلث افراز کرد. ثابت کنید همهٔ ضلعها و قطرهای چنین افرازی را می‌توان روی مسیر چندضلعی بسته و پیوسته‌ای بی‌آنکه از قسمتی از مسیر بیش از یک‌بار عبور کنیم طی کرد، اگر و فقط اگر n مضربی از ۳ باشد.

راه‌حل

مثلث‌بندی را به‌عنوان گرافی مسطح در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید مسیر اویلری بسته‌ای وجود داشته باشد. در این صورت درجهٔ همهٔ رأسها زوج است و ناحیه‌ها را می‌توان با رنگهای سیاه و سفید طوری رنگ کرد که ناحیه‌های مجاور همرنگ نباشند. بنابراین تعداد کل یالهای ناحیه‌های سیاه با تعداد کل یالهای ناحیه‌های سفید برابر است. چون غیر از ناحیهٔ بی‌کران، بقیهٔ ناحیه‌ها سه یال دارند، تعداد یالهای ناحیهٔ بی‌کران، یعنی n، باید مضرب ۳ باشد.

برعکس، فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند m، $n = ۳m$. از استقرا روی m استفاده می‌کنیم. اگر $m = ۱$، nضلعی محدب موردنظر مثلث است، که مسیر اویلری بسته دارد. فرض کنید حکم به‌ازای عدد طبیعی m درست باشد. $۳(m + ۱)$ضلعی $A_۱A_۲ \dots A_{۳m+۳}$ را در نظر بگیرید. ابتدا این چندضلعی را به پنج‌ضلعی محدب $A_۱A_۲ \dots A_۵$ و $۳m$ضلعی محدب $A_۱A_۵A_۶ \dots A_{۳m+۳}$ افراز کنید. بنابر فرض استقرا، $A_۱A_۵A_۶ \dots A_{۳m+۳}$ مثلث‌بندیی دارد که گراف نظیرش مسیر اویلری بسته دارد. پنج‌ضلعی $A_۱A_۲ \dots A_۵$ را با ترسیم قطرهای $A_۱A_۳$ و $A_۳A_۵$ مثلث‌بندی کنید. اکنون مسیر بستهٔ اویلری نظیر $A_۱A_۵A_۶ \dots A_{۳m+۳}$ با ابتدا و انتهای $A_۱$ را با طی کردن $A_۱A_۳$، $A_۳A_۵$، $A_۵A_۴$، $A_۴A_۳$، $A_۳A_۲$ و $A_۲A_۱$ تکمیل کنید.

ششمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۱

مسألهٔ ۱. اگر نقطه‌ای مانند P در صفحهٔ چهارضلعی محدب $ABCD$ وجود داشته باشد که مساحت مثلثهای ABP، BCP، CDP و DAP برابر باشند، ویژگی مشخص چهارضلعی $ABCD$ چیست؟ حداکثر چند نقطه مانند P ممکن است وجود داشته باشد؟

راه‌حل

فرض کنید E نقطهٔ برخورد AC و BD باشد. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطهٔ P درون $ABCD$ است. اگر P و E بر هم منطبق باشند، آن‌وقت $PA = PC$ و $PB = PD$ و هر یک از قطرهای $ABCD$ مساحتش را نصف می‌کند. اگر P و E بر هم منطبق نباشند، می‌توانیم فرض کنیم P روی BD قرار ندارد. چون مساحت PAB با مساحت PAD برابر است، نقطهٔ F، وسط BD، باید روی PA قرار داشته باشد. چون مساحت PCB و مساحت PCD برابر است، F باید روی PC هم قرار داشته باشد. بنابراین E و F بر هم منطبق‌اند و P روی AC قرار دارد. چون مساحت PAB با مساحت PCB برابر است، P وسط AC است و AC مساحت $ABCD$ را نصف می‌کند. برای اینکه نقطه‌ای مانند P وجود داشته باشد، یکی از قطرهای چهارضلعی باید مساحتش را نصف کند و P وسط این قطر باشد.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که P بیرون $ABCD$ است. اگر P' نقطه‌ای درون ناحیه‌ای باشد که محدود به امتداد دو ضلع مجاور چهارضلعی، مانند BA و DA، است، آن‌وقت

$$S_{P'CB} + S_{P'CD} = S_{P'AB} + S_{P'AD} + S_{ABCD} > S_{P'AB} + S_{P'CD}$$

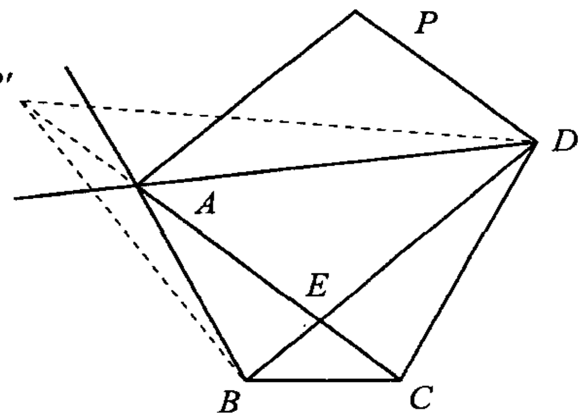
بنابراین P باید درون ناحیه‌ای قرار داشته باشد که محدود به یک ضلع چهارضلعی و امتدادهای دو ضلع روبه‌روی هم از چهارضلعی است. فرض کنید P درون ناحیهٔ محدود به ضلع AD و امتداد ضلعهای BA و CD قرار داشته باشد. چون مساحت PAB و مساحت PAD برابر است، پس PA با BD موازی است. چون مساحت PAD و مساحت PCD برابر است، پس PD با AC موازی است. به این ترتیب

$$S_{ADE} = S_{PAD} = S_{PAB} + S_{PCD} + S_{PCB} - S_{ABCD}$$

و درنتیجه

$$S_{ADE} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

برای اینکه نقطه‌ای مانند P وجود داشته باشد، باید مساحت یکی از چهار مثلثی که از برخورد قطرها به‌وجود می‌آیند برابر با نصف مساحت چهارضلعی باشد و P هم رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی باشد که ضلعهایش با قطرهای چهارضلعی موازی‌اند و این مثلث را در بر دارد. چون این شرایط با شرایط وجود چنین نقطه‌ای درون چهارضلعی همخوانی ندارد، پس حداکثر یک نقطه مانند P ممکن است وجود داشته باشد.



شکل ۱۱

مسألهٔ ۲. همهٔ تابعها مانند $f : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را پیدا کنید، به‌طوری که به‌ازای هر x، y و z در $[۰, ۱]$،

$$f(x, ۱) = x$$

$$f(۱, y) = y$$

$$f\left(f(x, y), z\right) = f\left(x, f(y, z)\right)$$

و به‌ازای عددی ثابت و مثبت و مستقل از x، y و z مانند k،

$$f(zx, zy) = z^k f(x, y)$$

راه‌حل

فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. ابتدا توجه کنید که به‌ازای هر z،

$$f(۰,۰) = f(z \times ۰, z \times ۰) = z^k f(۰,۰)$$

پس $۰ = f(۰,۰)$. اگر $y > ۰$ و $۰ \leq x \leq y$، آن‌وقت

$$f(x,y) = y^k f\left(\frac{x}{y}, ۱\right) = xy^{k-۱}$$

به‌همین ترتیب، اگر $x > ۰$ و $۰ \leq y \leq x$، آن‌وقت

$$f(x,y) = x^{k-۱}y$$

فرض کنید $۱ > z > y > x > ۰$ و x آنقدر کوچک باشد که

$$y^{k-۱}x < z, \qquad x < z^{k-۱}y$$

در این صورت

$$\begin{aligned} xy^{k-۱}z^{k-۱} &= f(xy^{k-۱}, z) = f\left(f(x,y), z\right) \\ &= f\big(x, f(y,z)\big) = f(x, yz^{k-۱}) \\ &= x(yz^{k-۱})^{k-۱} \end{aligned}$$

بنابراین $۰ = (k-۲)(k-۱)$. اگر $k = ۱$، آن‌وقت

$$f(x,y) = \min\{x,y\}$$

و اگر $k = ۲$، آن‌وقت

$$f(x,y) = xy$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد این تابعها ویژگیهای موردنظر را دارند.

مسألهٔ ۳. ده پرندهٔ کوچک از زمینی هموار دانه برمی‌چینند. از هر پنج پرنده، دست‌کم چهارتا روی یک دایره قرار دارند. کمترین مقدار بیشترین تعداد از این ده پرنده که ممکن است روی یک دایره باشند چقدر است؟

راه‌حل

هر پرنده را با نقطه‌ای نشان می‌دهیم. اگر هر چهار نقطه از ده نقطه روی یک دایره باشند، هر ده نقطه روی یک دایره قرار دارند. پس فرض می‌کنیم که چهار نقطه مانند A، B، C و D وجود دارند که روی یک دایره نیستند. ثابت می‌کنیم پنج نقطه وجود دارند که حتماً باید روی یک دایره باشند. توجه کنید که

دایره‌های محیطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB متمایزند. بنابر فرض مسأله، هر یک از چهار نقطهٔ دیگر باید روی یکی از این دایره‌ها باشد. درنتیجه، بنابر اصل لانه کبوتری، دوتا این نقطه‌ها و سه‌تا از نقطه‌های A، B، C و D باید روی یک دایره باشند. فرض کنید $\omega_۱$ دایره‌ای باشد که پنج‌تا از ده نقطه، مثلاً نقطه‌های $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$ و $P_۵$، روی آن قرار دارند. فرض کنید دوتا از نقطه‌ها مانند R و Q روی $\omega_۱$ نباشند. در این صورت چهارتا از نقطه‌های $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، Q و R روی دایره‌ای متمایز از $\omega_۱$ مانند $\omega_۲$ قرار دارند. می‌توانیم فرض کنیم $P_۵$ روی $\omega_۵$ قرار ندارد. به‌همین ترتیب، چهارتا از نقطه‌های $P_۳$، $P_۴$، $P_۵$، Q و R روی دایره‌ای متمایز از $\omega_۱$ مانند $\omega_۳$ قرار دارند. اگر $\omega_۲$ و $\omega_۳$ بر هم منطبق باشند، دست‌کم چهارتا از نقطه‌های $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$ و $P_۵$ روی آنها قرار دارند و این هم ممکن نیست، زیرا این دایره‌ها متمایز از $\omega_۱$ هستند. بنابراین $\omega_۲$ و $\omega_۳$ بر هم منطبق نیستند و می‌توانیم فرض کنیم $P_۵$ روی $\omega_۳$ قرار ندارد. چهارتا از نقطه‌های $P_۱$، $P_۳$، $P_۵$، Q و R هم روی دایره‌ای متمایز از $\omega_۱$ مانند $\omega_۴$ قرار دارند. اگر $P_۱$ روی $\omega_۴$ باشد، $\omega_۴$ و $\omega_۲$ بر هم منطبق‌اند. در غیر این صورت، $P_۳$ روی $\omega_۴$ قرار دارد و $\omega_۴$ و $\omega_۳$ بر هم منطبق‌اند. هیچ‌یک از این حالتها هم ممکن نیست. بنابراین $\omega_۲$ از دست‌کم نه‌تا از ده نقطه می‌گذرد. بنابراین کمترین مقدار موردنظر برابر با ۹ است.

مسألهٔ ۴. همهٔ چهارتاییها از عددهای طبیعی مانند (n,x,y,z) را طوری پیدا کنید که

$$n \geq ۲, \qquad z \leq ۵ \times ۲^{۲n}, \qquad x^{۲n+۱} - y^{۲n+۱} = xyz + ۲^{۲n+۱}$$

راه‌حل

فرض کنید چهارتایی (n,x,y,z) ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. توجه کنید که $x > y$. اگر یکی از x و y زوج باشد، دیگری هم زوج است. بنابراین $x - y \geq ۲$. اگر $y = ۱$ و $x = ۳$، آن‌وقت

$$z = ۳^{۲n} - \frac{۲^{۲n+۱}}{۳} \geq ۳^{۲n} - ۲^{۲n}$$

و چون

$$۳^{۲n} - ۲^{۲n} \leq z \leq ۵ \times ۲^{۲n}$$

پس $n \leq ۲$. چون $n \geq ۲$، پس $n = ۲$ و درنتیجه $z = ۷۰$. فرض کنید $y = ۱$ و $x \geq ۴$. در این صورت

$$\begin{aligned} x^{۲n+۱} - xyz &= x(x^{۲n} - z) \geq ۴(۴^{۲n} - ۵ \times ۲^{۲n}) \\ &= ۲^{۲n+۲}(۲^{۲n} - ۵) > ۲^{۲n+۱} + ۱ \\ &= ۲^{۲n+۱} + y^{۲n+۱} \end{aligned}$$

پس در این حالت جوابی وجود ندارد.

فرض کنید $y \geq ۲$. در این صورت

$$\begin{aligned} x^{۲n+۱} - xyz &\geq x\left((y+۲)^{۲n} - yz\right) \\ &= x\left(y^{۲n} + ۴ny^{۲n-۱} + ۴n(۲n-۱)y^{۲n-۲} + \cdots + ۲^{۲n} - yz\right) \\ &> xy^{۲n} + ۲^{۲n}x + y\left(۴ny^{۲n-۲} + ۴n(۲n-۱)y^{۲n-۳} - ۵ \times ۲^{۲n}\right) \\ &> y^{۲n+۱} + ۲^{۲n+۱} + ۲^{۲n-۳}y\left(۸n + ۴n(۲n-۱) - ۴۰\right) \\ &\geq y^{۲n+۱} + ۲^{۲n+۱} \end{aligned}$$

پس در این حالت هم جوابی وجود ندارد. پس فقط یک جواب وجود دارد، یعنی

$$(n, x, y, z) = (۲, ۳, ۱, ۷۰)$$

مسألهٔ ۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که ۱۹۹۱ کمترین مقدار

$$k^۲ + \left[\frac{n}{k^۲}\right]$$

باشد، که در اینجا k در میان مجموعهٔ عددهای طبیعی تغییر می‌کند.

راه‌حل

اگر عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد، آن‌وقت به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k،

$$k^۲ + \frac{n}{k^۲} \geq ۱۹۹۱$$

یا

$$\left(k^۲ - \frac{۱۹۹۱}{۲}\right)^۲ + n - \frac{۱۹۹۱^۲}{۴} \geq ۰$$

نزدیکترین مربع کامل به $\frac{۱۹۹۱}{۲}$، $۳۲^۲$ است. بنابراین

$$n \geq \frac{۱۹۹۱^۲}{۴} - \left(۳۲^۲ - \frac{۱۹۹۱}{۲}\right)^۲ = ۹۹۰۲۰۸$$

از طرف دیگر، باید عددی طبیعی مانند m وجود داشته باشد که

$$m^۲ + \frac{n}{m^۲} < ۱۹۹۲$$

یا

$$(m^۲ - ۹۹۶)^۲ + n - ۹۹۶^۲ < ۰$$

بنابراین

$$n < ۹۹۶^۲ - (۳۲^۲ - ۹۹۶)^۲ = ۹۹۱۲۳۲$$

پس عددهای موردنظر همهٔ عددهای طبیعی مانند n هستند که

$$۹۹۰۲۰۸ \leq n \leq ۹۹۱۲۳۱$$

مسألهٔ ۶. هر رأس چندوجهیی محدب روی دقیقاً سه یال قرار دارد و می‌توان یالها را با سه رنگ طوری رنگ کرد که هر رأس، روی یک یال از هر رنگ قرار داشته باشد. ثابت کنید می‌توان به هر رأس عددی مختلط و مخالف ۱ نسبت دارد، به‌طوری که حاصل‌ضرب عددهای روی رأسهای هر وجه برابر با ۱ باشد.

راه‌حل اول

به یالهای قرمز، زرد و آبی به‌ترتیب عددهای مختلط r، y و b را نسبت می‌دهیم، به‌طوری که

$$\frac{r}{y} = \frac{y}{b} = \frac{b}{r} = \lambda$$

که در آن λ عددی مختلط و مخالف ۱ است. اگر فرض کنیم $r = ۱$، آن‌وقت

$$b = y^۲; \qquad ۱ = r = \frac{b^۲}{y} = y^۳$$

می‌توانیم فرض کنیم $y = e^{\frac{۴\pi i}{۳}}$. در این صورت

$$b = \lambda = e^{\frac{۲\pi i}{۳}} \neq ۱$$

اگر سه یالی که در یک رأس به هم می‌رسند در جهت ساعتگرد قرمز، زرد و آبی باشند، به این رأس λ و در غیر این صورت به آن $\frac{۱}{\lambda}$ را نسبت می‌دهیم $\left(\frac{۱}{\lambda} = e^{\frac{۴\pi i}{۳}}\right)$. فرض کنید به رأسهای وجهی nرأسی در جهت ساعتگرد عددهای مختلط $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و α_n را نسبت داده‌ایم. فرض کنید β_k عدد نسبت داده شده به یال میان α_k و $\alpha_{k+۱}$ باشد، $۱ \leq k \leq n-۱$، و β_n عدد مختلط نسبت داده شده به یال میان α_n و $\alpha_۱$ باشد. در این صورت

$$\alpha_۱ = \frac{\beta_۱}{\beta_n}, \qquad \alpha_k = \frac{\beta_k}{\beta_{k-۱}}, \qquad ۲ \leq k \leq n$$

به این ترتیب

$$\alpha_۱\alpha_۲\cdots\alpha_n = \frac{\beta_۱\beta_۲\cdots\beta_n}{\beta_n\beta_۱\cdots\beta_{n-۱}} = ۱$$

راه‌حل دوم

به رأسها همان عددهای راه‌حل اول را نسبت می‌دهیم، اما در اینجا به یالهای قرمز، زرد و آبی به‌ترتیب ۰، ۱ و ۲ را نسبت می‌دهیم. فرض کنید به یالهای وجهی n رأسی در جهت ساعتگرد عددهای مختلط β_1، β_2، . . . و β_n را نسبت داده‌ایم. فرض کنید به k تا از رأسهای این وجه $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ و به m رأس باقی‌مانده $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ را نسبت داده‌ایم $(m = n - k)$. اگر به رأس میان یالهایی که به آنها β_j و β_{j+1} را نسبت داده‌ایم عدد مختلط $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ را نسبت داده باشیم، آن‌وقت

$$\beta_{j+1} - \beta_j \equiv 1 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 3)$$

و اگر به این رأس $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ را نسبت داده باشیم، آن‌وقت

$$\beta_{j+1} - \beta_j \equiv 2 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 3)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= (\beta_1 - \beta_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{j+1} - \beta_j) \\ &\equiv k + 2m \ (\text{به‌پیمانهٔ } 3) \end{aligned}$$

بنابراین حاصل‌ضرب عددهایی که به رأسها نسبت داده‌ایم برابر است با

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k \left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^m = e^{2\pi i \frac{k+2m}{3}} = 1$$

هفتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۲

مسألهٔ ۱. فرض کنید a_0، a_1، ... و a_{n-1} عددهایی حقیقی باشند و

$$0 < a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_{n-1} \le 1$$

فرض کنید λ ریشه‌ای مختلط از معادلهٔ

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

باشد و $|\lambda| \ge 1$. ثابت کنید $\lambda^{n+1} = 1$.

راه‌حل اول

توجه کنید که

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

اگر دو طرف این تساوی را در $\lambda - 1$ ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$\lambda^{n+1} = (1 - a_{n-1})\lambda^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)\lambda + a_0$$

چون همهٔ ضریبها در سمت راست تساوی بالا غیرمنفی‌اند، پس

$$|\lambda|^{n+1} \le (1 - a_{n-1})|\lambda|^n + (a_{n-1} - a_{n-2})|\lambda|^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)|\lambda| + a_0$$

چون $|\lambda| \ge 1$، پس سمت راست نابرابری بالا از

$$|\lambda|^n\left((1 - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) + a_0\right)$$

یا $|\lambda|^n$ بیشتر نیست، بنابراین $|\lambda|^n \leq |\lambda|^{n+1}$ و درنتیجه $1 \leq |\lambda|$. پس $|\lambda| = 1$. به این ترتیب،

$$|\lambda|^{n+1} = |(1 - a_{n-1})\lambda^n| + \left|(a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}\right| + \cdots + |(a_1 - a_0)\lambda| + |a_0|$$

چون a_0 عددی حقیقی و مثبت است، پس هر یک از عددهای

$$\lambda^{n+1}, (1 - a_{n-1})\lambda^n, (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}, \ldots, (a_1 - a_0)\lambda$$

حقیقی و نامنفی است. به‌ویژه،

$$\lambda^{n+1} = |\lambda^{n+1}| = |\lambda|^{n+1} = 1$$

راه‌حل دوم

فرض کنید $\lambda = \alpha|\lambda|$، $\beta = \frac{1}{\alpha}$، $b_{-1} = 0$، $b_n = |\lambda|^n$ و

$$b_k = a_k|\lambda|^k, \qquad 0 \leq k \leq n - 1$$

در این صورت $|\alpha| = |\beta| = 1$ و

$$0 < b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n$$

$$b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0$$

اگر دو طرف تساوی بالا را در $\alpha - 1$ ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} 0 &= b_n\alpha^{n+1} + (b_{n-1} - b_n)\alpha^n + \cdots + (b_0 - b_1)\alpha - b_0 \\ &= \alpha^{n+1}\Big((b_n - b_{n-1})(1 - \beta) + (b_{n-1} - b_{n-2})(1 - \beta^2) + \cdots \\ &\quad + (b_1 - b_0)(1 - \beta^n) + (b_0 - b_{-1})(1 - \beta^{n+1})\Big) \end{aligned}$$

اگر $0 \leq k \leq n$، چون $b_n - b_{k-1} \geq 0$ و $|\beta| = 1$، پس

$$\text{Re}\left((b_k - b_{k-1})(1 - \beta^{n+1-k})\right) \geq 0$$

چون مجموع قسمتهای حقیقی این $n + 1$ عدد برابر با صفر است، پس هر یک از آنها برابر با صفر است. چون

$$\text{Re}\left((b_0 - b_{-1})(1 - \beta^{n+1})\right) = 0, \qquad b_0 - b_{-1} > 0$$

پس

$$\text{Re}\,(1 - \beta^{n+1}) = 0$$

چون $|\beta| = 1$، پس $\beta^{n+1} = 1$ و درنتیجه $\alpha^{n+1} = 1$. چون λ ریشه‌ای از معادلهٔ موردنظر است،

پس عددی حقیقی نیست. بنابراین $\alpha \neq ۱$ و $\beta \neq ۱$. چون $|\beta| = ۱$، پس $\text{Re}\,(۱-\beta) \neq ۰$. چون

$$\text{Re}\,\big((b_n - b_{n-۱})(۱-\beta)\big) = ۰$$

پس $b_n = b_{n-۱}$ و درنتیجه

$$|\lambda|^n = a_{n-۱}|\lambda|^{n-۱}$$

بنابراین

$$a_{n-۱} = |\lambda| \geq ۱$$

اما $۱ \leq a_{n-۱}$. بنابراین $|\lambda| = ۱$ و

$$\lambda^{n+۱} = |\lambda|^{n+۱}\alpha^{n+۱} = \alpha^{n+۱} = ۱$$

مسألهٔ ۲. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی و غیرمنفی باشند و a کوچکترین این عددها باشد. ثابت کنید

$$\frac{۱+x_۱}{۱+x_۲} + \frac{۱+x_۲}{۱+x_۳} + \cdots + \frac{۱+x_{n-۱}}{۱+x_n} + \frac{۱+x_n}{۱+x_۱}$$

از

$$n + \frac{(x_۱-a)^۲ + (x_۲-a)^۲ + \cdots + (x_n-a)^۲}{(۱+a)^۲}$$

کمتر یا با آن برابر است. همچنین، ثابت کنید برابری وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n$$

راه‌حل اول

حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۱$، هر دو عبارت برابر با ۱ هستند و حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای عددی طبیعی مانند n درست باشد. فرض کنید a کوچکترین عدد در میان عددهای غیرمنفی $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{n+۱}$ باشد. می‌توانیم فرض کنیم $x_{n+۱}$ بزرگترین این عددهاست. بنابر فرض استقرا،

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{۱+x_i}{۱+x_{i+۱}} + \frac{۱+x_n}{۱+x_{n+۱}} \leq n + \frac{۱}{(۱+a)^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-a)^۲$$

پس کافی است ثابت کنیم

$$\frac{۱+x_n}{۱+x_{n+۱}} + \frac{۱+x_{n+۱}}{۱+x_۱} - \frac{۱+x_n}{۱+x_۱} \leq ۱ + \left(\frac{x_{n+۱}-a}{۱+a}\right)^۲$$

این نابرابری با نابرابری

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1)}{(1 + x_{n+1})(1 + x_1)} \leq \left(\frac{x_{n+1} - a}{1 + a}\right)^2$$

هم‌ارز است. این نابرابری هم درست است، زیرا $a \leq x_1, x_n \leq x_{n+1}$. برای اینکه در این نابرابری تساوی برقرار باشد، باید $x_1 = x_n = x_{n+1} = a$ و درنتیجه

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$$

راه‌حل دوم

فرض کنید $x_{n+1} = x_1$. چون

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + a} = 0$$

نابرابری موردنظر با نابرابری

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + a} + \left(\frac{x_{i+1} - a}{1 + a}\right)^2\right)$$

هم‌ارز است. اگر $1 \leq i \leq n$، نابرابری

$$\frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} \leq 1 + \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + a} + \left(\frac{x_{i+1} - a}{1 + a}\right)^2$$

با نابرابری

$$\frac{(x_i - x_{i+1})(a - x_{i+1})}{(1 + a)(1 + x_{i+1})} \leq \left(\frac{x_{i+1} - a}{1 + a}\right)^2$$

هم‌ارز است. اگر $x_i > x_{i+1}$، سمت چپ این نابرابری غیرمثبت و نابرابری درست است. اگر $x_i \leq x_{i+1}$، چون $a \leq x_i$، پس باز هم این نابرابری درست است. بنابراین نابرابری موردنظر درست است. برای اینکه تساوی پیش بیاید، باید (به‌ازای $1 \leq i \leq n$)

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1}} = \frac{x_{i+1} - a}{1 + a}$$

که هم‌ارز است با

$$(x_{i+1} - a)^2 + (1 + a)(x_i - a) = 0$$

چون هر دو جملهٔ سمت چپ این تساوی غیرمنفی‌اند، پس هر دو آنها صفرند. یعنی

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

مسألهٔ ۳. به هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 9×9 در ابتدا به دلخواه ۱ یا ۱− را نسبت می‌دهیم. به‌ازای هر خانه مانند C، حاصل‌ضرب عددهای خانه‌هایی را حساب کنید که دقیقاً یک ضلع مشترک با C دارند و بعد همهٔ این عددها را با مقدار این حاصل‌ضرب جایگزین کنید. آیا می‌توان این کار را چندبار (متناهی) انجام داد و همهٔ ۸۱ عدد را به ۱ تبدیل کرد؟

راه‌حل اول

ابتدا حالت 4×4 را بررسی می‌کنیم. در ابتدا فقط به یکی از گوشه‌ها ۱− را نسبت می‌دهیم و پس از مدتی به دو جدول می‌رسیم که یکی در میان تکرار می‌شوند. اگر این دو شکل را روی هم قرار دهیم، به شکل ۱۲ (الف) می‌رسیم که با انجام عمل موردنظر تغییری نمی‌کند. می‌توانیم چهار نسخه از این شکل را مانند شکل ۱۲ (ب) کنار هم قرار دهیم، که این شکل هم با انجام عمل موردنظر تغییری نمی‌کند. بنابراین همواره نمی‌توان همهٔ ۸۱ عدد را به ۱ تبدیل کرد.

	−۱	−۱	−۱
−۱		−۱	
−۱	−۱		
−۱			

(الف)

	−۱	−۱	−۱		−۱	−۱	−۱	
−۱		−۱				−۱		−۱
−۱	−۱						−۱	−۱
−۱								−۱
−۱								−۱
−۱	−۱						−۱	−۱
−۱		−۱				−۱		−۱
	−۱	−۱	−۱		−۱	−۱	−۱	

(ب)

شکل ۱۲

راه‌حل دوم

فرض کنید در ابتدا فقط یک ۱−، آن هم به مربع مرکزی نسبت داده باشیم. در این صورت دنباله‌ای به‌دست می‌آوریم که عضو نهم آن با عضو سومش یکسان است. این روند همین‌طور ادامه پیدا می‌کند و هیچ‌گاه همهٔ ۸۱ عدد به ۱− تبدیل نمی‌شوند.

مسألهٔ ۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. قطرهای AC و

BD این چهارضلعی یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند. دایره‌های محیطی مثلثهای ABP و CDP برای بار دوم یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع کرده‌اند. اگر O، P و Q سه نقطهٔ متمایز باشند، ثابت کنید OQ بر PQ عمود است.

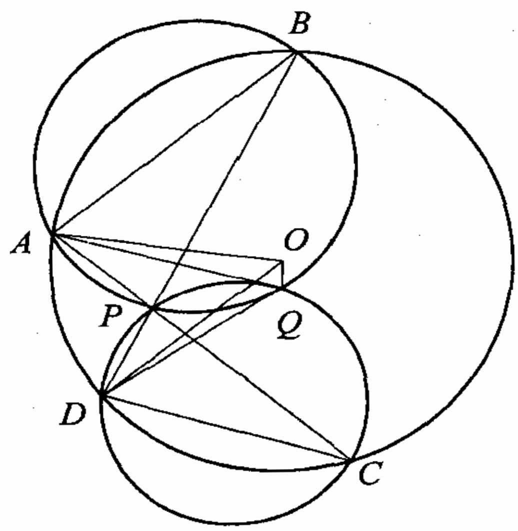
راه‌حل

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\angle AQD &= \angle AQP + \angle PQO\\ &= \angle ABP + \angle ACD\\ &= ۲\angle ABP = \angle AOD\end{aligned}$$

بنابراین $AOQD$ چهارضلعیی محاطی است. درنتیجه

$$\begin{aligned}\angle OQP &= \angle OQA + \angle AQP\\ &= \angle ODA + \angle ABD\\ &= \angle ODA + \frac{۱}{۲}\angle AOD = ۹۰^\circ\end{aligned}$$



شکل ۱۳

مسألهٔ ۵. گرافی ۸ رأسی داریم که طوق، یال چندگانه یا دوری به‌طول ۴ ندارد. این گراف حداکثر چند یال ممکن است داشته باشد؟

راه‌حل

شکل ۱۴ گرافی را با ۱۱ یال نشان می‌دهد که ویژگیهای موردنظر را دارد. فرض کنید گرافی با ویژگیهای موردنظر وجود داشته باشد که ۱۲ یال دارد. فرض کنید A رأسی با بزرگترین درجهٔ ممکن باشد. اگر

درجهٔ A برابر با n باشد، آن‌وقت $n \geq ۳$. فرض کنید A با رأسهای $B_۱$، $B_۲$، ... و B_n مجاور باشد و بقیهٔ رأسهای گراف هم $C_۱$، $C_۲$، ... و $C_{۷-n}$ باشند. اگر B_i و C_i با هر دو B_j و B_k مجاور باشند، دوری به طول ۴ که یک رأسش A است به‌وجود می‌آید. بنابراین، حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ یال به شکل B_iB_j و حداکثر $n - ۷$ یال به شکل B_iC_j وجود دارد. همچنین، تعداد یالهای به شکل C_iC_j حداکثر برابر است با $\binom{۷-n}{۲}$. بنابراین تعداد یالهای گراف موردنظر حداکثر برابر است با

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + (۷ - n) + \binom{۷ - n}{۲}$$

اما

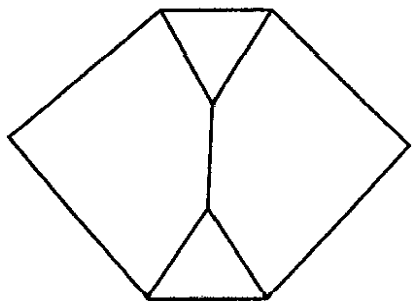
$$f(۵) = f(۶) = f(۷) = ۱۰ < ۱۲$$

در حالی‌که

$$f(۴) = ۱۲$$

اگر $n = ۴$، تعداد یالهای به شکل B_iB_j، B_iC_j و C_iC_j به‌ترتیب حداکثر ۲، ۳ و ۳ است. می‌توانیم فرض کنیم $B_۱$ و $B_۲$ مجاور باشند، $B_۳$ و $B_۴$ مجاور باشند و $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ با هم مجاور باشند. هیچ‌یک از B_iها ممکن نیست با دوتا از C_jها مجاور باشد، زیرا در غیر این صورت با رأس باقی‌مانده از C_jها دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند. بنابراین سه‌تا از B_iها با C_jهای متمایزی مجاورند. اما در این صورت یا $B_۱$ و $B_۲$ یا $B_۳$ و $B_۴$ با دوتا از C_jها دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند.

اگر $n = ۳$، درجهٔ همهٔ رأسها برابر با ۳ است. اگرچه $f(۳) = ۱۴$، اما حداکثر ۴ یال به شکل C_iC_j ممکن است وجود داشته باشد. بنابراین تعداد یالهای به شکل B_iB_j، B_iC_j و C_iC_j به‌ترتیب حداکثر برابر با ۱، ۳ و ۴ است. علاوه بر این، یکی از C_jها با سه‌تای دیگر مجاور است. پس یکی دیگر از C_jها با دوتا از B_iها مجاور است که به این ترتیب با A دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۴

مسألهٔ ۶. فرض کنید $a_۰$ و $a_۱$ عددهایی صحیح باشند. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_۲ = ۲a_۱ - a_۰ + ۲$ و اگر $n \geq ۲$،

$$a_{n+۱} = ۳a_n - ۳a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

اگر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m، این دنباله شامل m جملهٔ متوالی باشد که همهٔ آنها مربع کامل‌اند، ثابت کنید هر عضو این دنباله مربع کامل است.

راه‌حل اول

فرض کنید $d_n = a_n - a_{n-1}$، $n \geq 1$. در این صورت، اگر $n \geq 2$، آن‌وقت

$$0 = a_{n+1} - 3a_n + 3a_{n-1} - a_{n-2} = d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1}$$

بنابراین، اگر $n \geq 1$،

$$d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2} = \cdots = d_2 - d_1 = a_2 - 2a_1 + a_0 = 2$$

و درنتیجه

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i \\ &= a_0 + nd_1 + n(n-1) \\ &= n^2 + (a_1 - a_0 - 1)n + a_0 \end{aligned}$$

بنابر فرض مسأله، عددی طبیعی مانند t وجود دارد که a_t و a_{t+2} هر دو مربع کامل‌اند. درنتیجه

$$a_{t+2} - a_t \not\equiv 2 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 4)$$

چون

$$a_{t+2} - a_t = 4t + 4 + 2(a_1 - a_0 - 1)$$

پس عددی صحیح مانند λ وجود دارد که $a_1 - a_0 - 1 = 2\lambda$ و اگر $n \geq 0$،

$$a_n = (n+\lambda)^2 + a_0 - \lambda^2 \qquad (*)$$

اگر $a_0 - \lambda^2 \neq 0$، فرض کنید $a_0 - \lambda^2$، m مقسوم‌علیه داشته باشد. چون ضریب جملهٔ درجهٔ دوم در سمت راست تساوی $(*)$ مثبت است، پس عددی طبیعی مانند n_0 وجود دارد که به‌ازای $n \geq n_0$، $a_{n+1} > a_n$. بنابر فرض مسأله، عددی طبیعی و بزرگتر از n_0 مانند k وجود دارد که به‌ازای هر i، $1 \leq i \leq m$، عددی طبیعی مانند b_i وجود دارد که $a_{k+i} = b_i^2$. به این ترتیب،

$$a_0 - \lambda^2 = b_i^2 - (k+i+\lambda)^2 = (b_i - k - i - \lambda)(b_i + k + i + \lambda)$$

عددهای

$$b_i + k + i + \lambda, \qquad 1 \leq i \leq m$$

متمایزند، زیرا

$$b_i + i < b_{i+1} + i + 1$$

بنابراین $a_\circ - \lambda^2$ دست‌کم $m+1$ مقسوم‌علیه دارد، که تناقض است. پس $a_\circ - \lambda^2 = \circ$ و

$$a_n = (n+\lambda)^2, \qquad n \geq \circ$$

راه‌حل دوم

مانند راه‌حل اول می‌توان نتیجه گرفت

$$a_n = n^2 + \mu n + a_\circ, \qquad n \geq \circ$$

که در آن $\mu = a_1 - a_\circ - 1$. بنابراین

$$\begin{aligned} a_n &= \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 + a_\circ - \frac{\mu^2}{4} \\ &= \left(n + \frac{\mu+1}{2}\right)^2 - n + a_\circ - \frac{(\mu+1)^2}{4} \\ &= \left(n + \frac{\mu-1}{2}\right)^2 + n + a_\circ - \frac{(\mu-1)^2}{4} \end{aligned}$$

فرض کنید $n_\circ$ عددی طبیعی باشد و

$$n_\circ > \max\left\{\frac{|\mu|+1}{2}, \frac{(|\mu|+1)^2}{4} + |a_\circ|\right\}$$

اگر $n > n_\circ$، آن‌وقت $a_{n+1} > a_n$ و

$$\left(n + \frac{\mu-1}{2}\right)^2 < a_n < \left(n + \frac{\mu+1}{2}\right)^2$$

بنابر فرض مسأله، عددی طبیعی و بزرگتر از $n_\circ$ مانند t وجود دارد که به‌ازای عددی طبیعی مانند b، $a_t = b^2$. بنابراین

$$t + \frac{\mu-1}{2} < b < t + \frac{\mu+1}{2}$$

درنتیجه μ باید زوج باشد و $b = t + \frac{\mu}{2}$. پس

$$a_t = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2$$

درنتیجه $a_\circ - \frac{\mu^2}{4} = \circ$. بنابراین

$$a_n = \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2, \qquad n \geq \circ$$

هشتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۳

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید $۲n$ عدد صحیح مانند $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، $b_۱$، $b_۲$، ... و b_n وجود دارند که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $k < n$، هیچ دو تایی از $۳n$ عدد صحیح

$$a_i + a_{i+۱}, \qquad a_i + b_i, \qquad a_i + b_{i+k}, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

که در آنها اندیسها را به‌پیمانهٔ n حساب می‌کنیم، به‌پیمانهٔ $۳n$ همنهشت نیستند.

راه‌حل

فرض کنید

$$a_i = ۳i - ۲, \qquad b_i = ۳i - ۳, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

در این صورت

$$\alpha_i = a_i + a_{i+۱} = ۶i - ۱, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

بنابراین

$$\alpha_j - \alpha_i = ۶(j - i), \qquad ۱ \leq i < j \leq n$$

چون n عددی فرد است، پس (به‌پیمانهٔ $۳n$) $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$. همچنین،

$$\beta_i = a_i + b_i = ۶i - ۵, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

$$\gamma_i = b_i + b_{i+k} = ۶i - ۶ + ۳k, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

بنابراین

$$\beta_j - \beta_i = ۶(j-i) = \gamma_j - \gamma_i, \qquad ۱ \leq i < j \leq n$$

و مانند قبل،

$$\beta_i \not\equiv \beta_j \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳n)$$

$$\gamma_i \not\equiv \gamma_j \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳n)$$

از طرف دیگر،

$$\alpha_i \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

$$\beta_i \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

$$\gamma_i \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

بنابراین حکم مسأله درست است.

مسألهٔ ۲. فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی و مثبت باشد. بیشترین مقدار

$$a^{k(۱)} + a^{k(۲)} + \cdots + a^{k(s)}$$

را تعیین کنید، که در اینجا s عددی طبیعی است، $s \leq n$ و $k(۱)$، $k(۲)$، ... و $k(s)$ عددهایی طبیعی‌اند که مجموعشان برابر با n است.

راه‌حل اول

اگر $۱ > a > ۰$، تابع a^x نزولی است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $s = n$ و $k(i) = ۱$، $۱ \leq i \leq s$. در این صورت، بیشترین مقدار

$$a^{k(۱)} + a^{k(۲)} + \cdots + a^{k(s)} \qquad (*)$$

برابر است با na.

فرض کنید $a > ۱$. اگر u و v عددهایی طبیعی باشند، آن‌وقت

$$a(a^{u-۱} - ۱)(a^{v-۱} - ۱) \geq ۰$$

و درنتیجه

$$a^u + a^v \leq a + a^{u+v-۱}$$

پس باید $k(i) = ۱$، $۱ \leq i \leq s-۱$. در این صورت بیشترین مقدار عبارت $(*)$ حداکثر برابر است با

$$(s-۱)a + a^{n-(s-۱)} \qquad (**)$$

توجه کنید که اگر $m = \log_a \frac{a}{a-۱}$، آن‌وقت $a + a^m = a^{m+۱}$. درنتیجه، اگر

$$s \leq (n+۱) - \log_a \frac{a}{a-۱}$$

وقتی که مقدار s کوچک و کوچکتر می‌شود، مقدار عبارت $(**)$ هم کمتر و کمتر می‌شود، پس باید فرض کنیم $s = n$ و در این صورت بیشترین مقدار موردنظر برابر با na است. از طرف دیگر، اگر

$$s > (n+۱) - \log_a \frac{a}{a-۱}$$

وقتی که مقدار s بزرگ و بزرگتر می‌شود، مقدار عبارت $(**)$ کوچک و کوچکتر می‌شود. پس باید فرض کنیم $s = ۱$ و بیشترین مقدار موردنظر برابر است با a^n. بنابراین، بیشترین مقدار عبارت $(**)$ و نیز عبارت $(*)$ برابر است با $\max\{na, a^n\}$. اگر $n = ۱$، آن‌وقت $na = a^n$. فرض کنید $n \geq ۲$. در این صورت، اگر $a = n^{\frac{۱}{n-۱}}$، آن‌وقت $na = a^n$. بنابراین اگر $a \leq n^{\frac{۱}{n-۱}}$، بیشترین مقدار عبارت $(*)$ برابر na است و اگر $a > n^{\frac{۱}{n-۱}}$، بیشترین مقدار عبارت $(*)$ برابر با a^n است.

راه‌حل دوم

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که بیشترین مقدار عبارت $(*)$ برابر است با $\max\{na, a^n\}$. اگر $n = ۱$، حکم درست است. فرض کنید که حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد. فرض کنید

$$k(۱) + k(۲) + \cdots + k(s) = n + ۱$$

چون $n + ۱ - k(۱) \leq n$، از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$a^{k(۲)} + a^{k(۳)} + \cdots + a^{k(s)} \leq \max\left\{(n+۱-k(۱))\,a, a^{n+۱-k(۱)}\right\}$$

پس بیشترین مقدار عبارت $(*)$ حداکثر برابر است با

$$\max\left\{a^{k(۱)} + (n+۱-k(۱))\,a, a^{k(۱)} + a^{n+۱-k(n)}\right\}$$

تابعهای $a^x + (n+۱-x)a$ و $a^x + a^{n+۱-x}$ هر دو محدب‌اند. بنابراین بیشترین مقدار هر یک از آنها در نقاط انتهایی دامنهٔ تعریفشان به‌دست می‌آید. درنتیجه

$$a^{k(۱)} + (n+۱-k(۱))\,a \leq \max\left\{(n+۱)a, a^{n+۱}\right\}$$

$$a^{k(۱)} + a^{n+۱-k(۱)} \leq a + a^n \leq \max\left\{(n+۱)a, a^{n+۱}\right\}$$

نابرابری آخر به این دلیل درست است که اگر $k(۱) = n$، آن‌وقت

$$a^{k(۱)} + (n+۱-k(۱))\,a = a^n + a$$

اکنون می‌توانید مانند راه‌حل اول استدلال کنید.

مسألهٔ ۳. شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز برابر با R و R_1 است و $R_1 > R$. چهارضلعی $ABCD$ در دایرهٔ کوچکتر و چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ در دایرهٔ بزرگتر محاط شده است و A_1 بر امتداد CD، B_1 بر امتداد DA، C_1 بر امتداد AB و D_1 بر امتداد BC قرار دارد. ثابت کنید

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_1^2}{R^2}$$

راه‌حل

فرض کنید

$$a = AB, \quad b = BC, \quad c = CD, \quad d = DA$$
$$w = A_1D, \quad x = B_1A, \quad y = C_1B, \quad z = D_1C$$

در این صورت

$$x(x+d) = y(y+a) = z(z+b) = w(w+c) = R_1^2 - R^2$$

چون

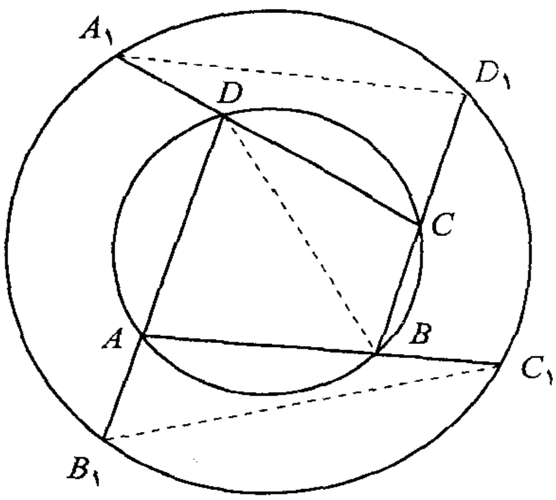
$$\angle B_1AC_1 = 180^\circ - \angle DAB = \angle BDC = 180^\circ - \angle A_1CD_1$$

پس

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABCD}} = \frac{x(a+y)}{ad+bc}, \qquad \frac{S_{A_1CD_1}}{S_{ABCD}} = \frac{z(c+w)}{ad+bc}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$\frac{S_{BC_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{y(b+z)}{ab+cd}, \qquad \frac{S_{A_1B_1D}}{S_{ABCD}} = \frac{w(d+x)}{ab+cd}$$



شکل ۱۵

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} &= 1 + \frac{x(a+y)+z(c+w)}{ad+bc} + \frac{y(b+z)+w(d+x)}{ab+cd} \\ &= 1 + (R_1^2 - R^2)\left(\frac{x}{y(ad+bc)} + \frac{z}{w(ad+bc)}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{y}{z(ab+cd)} + \frac{w}{x(ab+cd)}\right) \\ &\geq 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}\end{aligned}$$

(در نابرابری آخر از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کرده‌ایم.) همچنین،

$$\begin{aligned}2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} &\leq (ad+bc)+(ab+cd) = (a+c)(b+d) \\ &\leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \leq 8R^2\end{aligned}$$

که در آخرین نابرابری از این نکته استفاده کرده‌ایم که در میان همهٔ چهارضلعیهای محاط در یک دایره، مربع بیشترین محیط را دارد. بنابراین

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{4R^2} = \frac{R_1^2}{R^2}$$

مسألهٔ ۴. فرض کنید S مجموعه‌ای از ۱۹۹۳ بردار غیرصفر در صفحه باشد. ثابت کنید گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی S وجود دارد که ویژگیهای زیر را دارند:

۱. هر بردار S متعلق به دقیقاً یکی از این زیرمجموعه‌هاست.

۲. زاویهٔ میان هر بردار در هر زیرمجموعه و بردار برایند این زیرمجموعه حداکثر برابر با 90° است.

۳. زاویهٔ میان برایندهای هر دو زیرمجموعه از 90° بیشتر است.

راه‌حل

چون تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی S متناهی است، زیرمجموعه‌ای مانند A وجود دارد که طول بردار برایندش، که آن را $\mathbf{a}$ می‌نامیم، بیشترین مقدار ممکن باشد. به‌ازای هر بردار مانند $\mathbf{v}$ در A، اگر زاویهٔ میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ از 90° بیشتر باشد، آن‌وقت طول برایند $A - \{\mathbf{v}\}$ بیشتر است. بنابراین A ویژگی ۲ را دارد. اگر $A = S$، گردایهٔ موردنظر فقط از A تشکیل می‌شود و ویژگیهای ۱ و ۳ را هم دارد. فرض کنید $S - A \neq \varnothing$. از میان همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی $S - A$ زیرمجموعه‌ای مانند B انتخاب کنید که طول برایندش، که آن را $\mathbf{b}$ می‌نامیم، بیشترین مقدار ممکن باشد. به همان دلیل که A ویژگی ۲ را دارد، B هم این ویژگی را دارد. به‌ازای هر $\mathbf{v}$ در B، زاویهٔ میان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ از 90° بیشتر است، زیرا در غیر این

صورت طول برایند $A \cup \{\mathbf{v}\}$ بیشتر خواهد شد. پس A و B ویژگی ۳ را دارند. اگر $A \cup B = S$، گردایهٔ مطلوب از A و B تشکیل می‌شود. فرض کنید $C = S - (A \cup B) \neq \varnothing$. ثابت می‌کنیم گردایهٔ موردنظر از A، B و C تشکیل می‌شود. مانند قبل، اگر $\mathbf{v}$ در C باشد، زاویهٔ میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ و زاویهٔ میان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{v}$ از ۹۰° بیشتر است. اگر $\mathbf{c}$ برایند C باشد، زاویهٔ میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ و زاویهٔ میان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم از ۹۰° بیشتر است. بنابراین گردایهٔ موردنظر ویژگی ۳ را دارد. به‌ازای هر $\mathbf{v}$ در C، اگر زاویهٔ میان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{c}$ از ۹۰° بیشتر باشد، زاویهٔ میان $\mathbf{v}$ و هر یک از $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ منفرجه می‌شود که ممکن نیست. بنابراین C ویژگی ۲ را دارد و حکم را ثابت کرده‌ایم.

مسألهٔ ۵. ده نفر رفته‌اند کتاب بخرند. می‌دانیم

۱. هر یک از آنها سه کتاب مختلف خریده است.

۲. هر دوتا از آنها دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند.

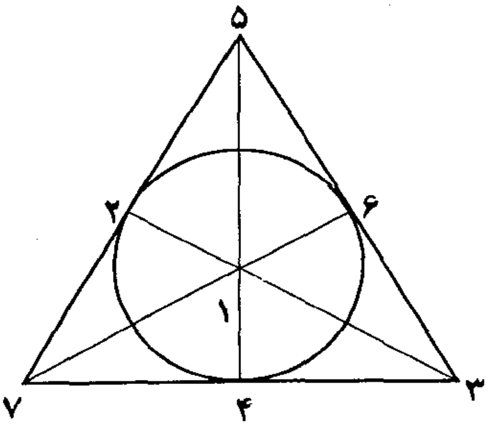
کتابی را در نظر بگیرید که تعداد بیشتری از این ده نفر آن را خریده‌اند. کمترین مقدار این بیشترین تعداد چقدر است؟

راه‌حل اول

فرض کنید هفت کتاب مختلف خریده شده است و آنها را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری کنید. این ده نفر ممکن است کتابهای زیر را خریده باشند:

$$(۱, ۲, ۳), \quad (۱, ۴, ۵), \quad (۱, ۶, ۷), \quad (۲, ۴, ۶), \quad (۲, ۵, ۷)$$
$$(۲, ۵, ۷), \quad (۳, ۴, ۷), \quad (۳, ۴, ۷), \quad (۳, ۵, ۶), \quad (۳, ۵, ۶)$$

از روی شکل ۱۶ معلوم است که هر دو نفر دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند. هر کتاب را حداکثر پنج نفر خریده‌اند. فرض کنید A یکی از این ده نفر باشد. هر یک از نه نفر دیگر دست‌کم یک کتاب مثل سه کتاب A خریده است. درنتیجه، بنابر اصل لانه کبوتری، دست‌کم یک کتاب را دست‌کم سه نفر دیگر



شکل ۱۶

بجز A خریده‌اند. بنابراین کمترین مقدار موردنظر دست‌کم ۴ است. اگر این مقدار برابر با ۴ باشد، بنابر تقارن، هر کتاب را دقیقاً چهار نفر خریده‌اند. اما کلاً ۳۰ کتاب فروخته شده است، و چون ۳۰ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، پس کمترین مقدار موردنظر ۵ است.

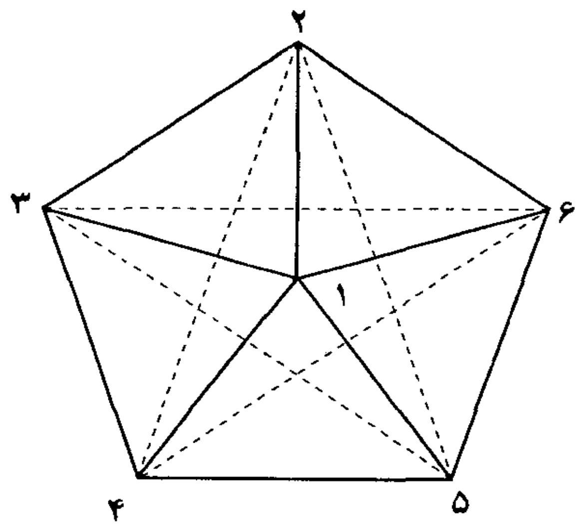
راه‌حل دوم

فرض کنید شش کتاب مختلف خریده شده است و آنها را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کنید. این ده نفر ممکن است کتابهای زیر را خریده باشند:

$$(۱,۲,۳),\quad (۱,۳,۴),\quad (۱,۴,۵),\quad (۱,۵,۶),\quad (۱,۶,۲)$$
$$(۲,۳,۵),\quad (۳,۴,۶),\quad (۴,۵,۲),\quad (۵,۶,۳).\quad (۶,۲,۴)$$

از روی شکل ۱۷ معلوم است که هر دو نفر دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند. هرکتاب را دقیقاً پنج نفر خریده‌اند. فرض کنید که هر کتاب را حداکثر چهار نفر خریده باشند. فرض کنید n کتاب مختلف خریده شده باشد و هر یک از آنها را به‌ترتیب m_i نفر خریده باشند، $۱ \le i \le n$. اگر x و y هر دو کتاب b را خریده باشند، (x,y,b) را جفت می‌نامیم. هر دو نفر دست‌کم در یک جفت قرار دارند و کتاب iام در دقیقاً $\binom{m_i}{۲}$ جفت آمده است. بنابراین

$$\binom{m_۱}{۲}+\binom{m_۲}{۲}+\cdots+\binom{m_n}{۲} \le ۷\binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$



شکل ۱۷

توجه کنید که

$$m_۱+m_۲+\cdots+m_n = ۳۰$$

$$\binom{۴}{۲}=۶,\qquad \binom{۳}{۲}=۳,\qquad \binom{۲}{۲}=۱,\qquad \binom{۱}{۲}=۰$$

بنابراین، برای اینکه مقدار

$$\binom{m_1}{2}+\binom{m_2}{2}+\cdots+\binom{m_n}{2}$$

بیشترین مقدار ممکن شود، باید تعداد حالتهایی که $m_i = 4$ بیشترین تعداد ممکن باشد. بنابراین

$$\binom{m_1}{2}+\binom{m_2}{2}+\cdots+\binom{m_n}{2}\leq 7\binom{4}{2}+\binom{2}{2}=43$$

که تناقض است. بنابراین کمترین مقدار موردنظر برابر با ۵ است.

مسألهٔ ۶. فرض کنید f تابعی از مجموعهٔ عددهای حقیقی و مثبت به‌همین مجموعه باشد، به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت مانند x و y،

$$f(xy)\leq f(x)f(y)$$

ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x و هر عدد طبیعی مانند n،

$$f(x^n)\leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

راه‌حل

فرض کنید

$$F_n(x)=f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم $F_n(x)\geq f(x^n)$. اگر $n=1$، باید ثابت کنیم $f(x)\leq f(x)$ که درست است. فرض کنید حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x)^{n+1} &= F_n(x)^{n+1}f(x^{n+1})\\
&= F_n(x)^n f(x^{n+1})F_n(x)\\
&= F_{n-1}(x)^n f(x^n)f(x^{n+1})F_n(x)\\
&= F_{n-1}(x)^{n-1} f(x^n)f(x^{n+1})F_n(x)F_{n-1}(x)\\
&\vdots\\
&= f(x)f(x^2)\cdots f(x^{n+1})F_n(x)F_{n-1}(x)\cdots F_1(x)\\
&\geq f(x)f(x^2)\cdots f(x^{n+1})f(x^n)f(x^{n-1})f(x)\\
&\geq f(x^{n+1})^{n+1}
\end{aligned}$$

درنتیجه $F_{n+1}(x)\geq f(x^{n+1})$.

نهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۴

مسألهٔ ۱. الف) فرض کنید $ABCD$ ذوزنقه‌ای باشد که در آن AB و CD موازی‌اند. فرض کنید E و F نقطه‌هایی به‌ترتیب روی AB و CD باشند. اگر CE، BF را در نقطهٔ H و ED، AF را در نقطهٔ G قطع کند، ثابت کنید مساحت $EGFH$ حداکثر $\frac{۱}{۴}$ مساحت $ABCD$ است.

ب) اگر $ABCD$ چهارضلعی محدب دلخواهی باشد، آیا حکم قسمت (الف) باز هم درست است؟

راه‌حل

الف) فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ پای عمودهای مرسوم از G به‌ترتیب بر AB و CD باشند. در این صورت، چون مثلثهای AEG و DFG متشابه‌اند، یا $AE \geq DF$ و $GH_۱ \geq GH_۲$، یا $AE < DF$ و $GH_۱ < GH_۲$. پس بنابر نابرابری چبیشف،

$$\begin{aligned} S_{AEG} + S_{DFG} &= \frac{۱}{۲}(AE \times GH_۱ + DF \times GH_۲) \\ &\geq \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}(AE + DF)(GH_۱ + GH_۲)\right) \\ &= \frac{۱}{۲}S_{AEFD} \end{aligned}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$S_{BEH} + S_{CFH} \geq \frac{۱}{۲}S_{BEFC}$$

به این ترتیب

$$S_{AEG}+S_{DFG}+S_{BEH}+S_{CFH}\geq \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

اکنون توجه کنید که

$$S_{AFB}+S_{CED}=S_{ABCD}$$

بنابراین

$$۲S_{EGFH}+S_{AEG}+S_{DFG}+S_{BEH}+S_{CFH}=S_{ABCD}$$

درنتیجه

$$S_{ABCD}-۲S_{EGFH}\geq \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

و

$$S_{ABCD}\geq \frac{۱}{۴}S_{EGFH}$$

ب) اگر AB با CD موازی نباشد، می‌توانیم ABD را مثلثی متساوی‌الاضلاع انتخاب کنیم و C را نزدیک B، E را نزدیک A و F را نزدیک D انتخاب کنیم. در این صورت مساحت $EGFH$ با مساحت $ABCD$ تقریباً برابر است و حکم قسمت (الف) دیگر درست نیست.

مسألهٔ ۲. دست‌کم چهار شکلات در n ظرف گذاشته‌ایم ($n\geq ۴$). در هر حرکت دو ظرف غیرخالی را انتخاب می‌کنیم، از هر کدام شکلاتی برمی‌داریم و این دو شکلات را در ظرفی دیگر می‌گذاریم. آیا می‌توانیم چندبار (متناهی) این حرکت را انجام دهیم و همهٔ شکلاتها را در یک ظرف قرار دهیم؟

راه‌حل

ثابت می‌کنیم که می‌توانیم همهٔ شکلاتها را در یک ظرف جمع کنیم. این حکم را به استقرا روی تعداد شکلاتها ثابت می‌کنیم. فرض کنید کلاً m شکلات داریم. اگر $m=۴$، حداکثر چهار ظرف غیرخالی وجود دارد. ظرفهای خالی را در نظر نمی‌گیریم و همهٔ حالتهای ممکن توزیع شکلاتها را بررسی می‌کنیم:

الف) $(۱,۱,۱,۱)$ **ب)** $(۱,۲,۱,۰)$

ج) $(۲,۲,۰,۰)$ **د)** $(۱,۳,۰,۰)$

در حالت (الف) حرکتهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$(۱,۱,۱,۱)\rightarrow(۳,۱,۰,۰)\rightarrow(۲,۰,۲,۰)\rightarrow(۱,۰,۱,۲)\rightarrow(۰,۰,۰,۴)$$

بقیهٔ حالتها را هم می‌توان به‌همین ترتیب بررسی کرد.

اکنون فرض کنید حکم در مورد عدد طبیعی m، $m\geq ۴$، درست باشد. فرض کنید $m+۱$ شکلات داشته باشیم. یکی از آنها را خوشمزه می‌نامیم و در ابتدا آن را کنار می‌گذاریم و m شکلات

باقی‌مانده را در نظر می‌گیریم. بنابر فرض استقرا می‌توانیم این m شکلات را در یک ظرف جمع کنیم اگر این ظرف همان ظرفی باشد که خوشمزه در آن قرار دارد که حکم را ثابت کرده‌ایم. در غیر این صورت، دو ظرف خالی انتخاب می‌کنیم و مانند زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(۱, m, ۰, ۰) &\to (۰, m-۱, ۲, ۰) \to (۰, m-۲, ۱, ۲)\\ &\to (۲, m-۳, ۰, ۲) \to (۱, m-۱, ۰, ۱) \to (۰, m+۱, ۰, ۰)\end{aligned}$$

بنابراین باز هم همهٔ شکلاتها در یک ظرف جمع می‌شوند.

مسألهٔ ۳. همهٔ تابعها مانند $f: [۱, +\infty) \to [۱, +\infty)$ را پیدا کنید که به‌ازای هر x در بازهٔ $[۱, +\infty)$،

$$f(x) \le ۲(x+۱)$$

و

$$f(x+۱) = \frac{۱}{x}\Big((f(x))^۲ - ۱\Big)$$

راه‌حل

فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. در این صورت

$$f(x)^۲ = xf(x+۱) + ۱ \le x\,(۲(x+۲)) + ۱ \le ۲(x+۱)^۲$$

بنابراین

$$f(x) \le \sqrt{۲}(x+۱)$$

مانند قبل، می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $k \ge ۲$،

$$f(x) \le ۲^{\frac{۱}{۲^k}}(x+۱)$$

بنابراین $f(x) \le x+۱$.

اکنون فرض کنید $x_۰$ عددی در بازهٔ $[۱, +\infty)$ باشد و $f(x_۰) < x_۰ + ۱$. در این صورت عددی مثبت مانند r وجود دارد که

$$f(x_۰) < x_۰ + ۱ - r$$

بنابراین

$$\begin{aligned}f(x_۰+۱) &= \frac{۱}{x_۰}\Big((f(x_۰))^۲ - ۱\Big)\\ &< \frac{۱}{x_۰}\Big((x_۰+۱-r)^۲ - ۱\Big)\\ &= (x_۰+۱) + ۱ - ۲r - \frac{۲r}{x_۰} + \frac{r^۲}{x_۰} \qquad (*)\end{aligned}$$

اگر $r \leq \frac{x_\circ}{۲}$، آن‌وقت

$$۲r + \frac{۲r}{x_\circ} - \frac{r^۲}{x_\circ} \geq ۲r + \frac{۲r}{x_\circ} - \frac{r}{۲} > \frac{۳}{۲}r$$

و درنتیجه

$$f(x_\circ + ۱) < (x_\circ + ۱) + ۱ - \frac{۳}{۲}r$$

به‌همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت

$$f(x_\circ + m) < (x_\circ + m) + ۱ - \left(\frac{۳}{۲}\right)^m r$$

چون $\left(\frac{۳}{۲}\right)^m$ سریعتر از m به بینهایت میل می‌کند، می‌توانیم m را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که

$$x_\circ + m < \left(\frac{۳}{۲}\right)^m r$$

و درنتیجه

$$f(x_\circ + m) < ۱$$

که تناقض است. بنابراین

$$f(x) = x + ۱$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که تابع $f(x) = x + ۱$ ویژگیهای موردنظر ما را دارد.

مسألهٔ ۴. ثابت کنید به‌ازای هر چندجمله‌ای با ضریبهای مختلط مانند

$$f(z) = c_\circ z^n + c_۱ z^{n-۱} + \cdots + c_{n-۱} z + c_n$$

عددی مختلط مانند $z_\circ$ وجود دارد که $|z_\circ| \leq ۱$ و

$$|f(z_\circ)| \geq |c_\circ| + |c_n|$$

راه‌حل

می‌توانیم فرض کنیم $c_\circ \neq \circ$. فرض کنید

$$\frac{f(z)}{c_\circ} = z^n + a_۱ z^{n-۱} + \cdots + a_{n-۱} z + a_n$$

فرض کنید $a_n \neq \circ$ و چندجمله‌ای

$$\frac{f(z)}{c_\circ} - a_n - \frac{a_n}{|a_n|}$$

را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب ریشه‌های این چندجمله‌ای برابر است با $(-۱)^{n+۱} \frac{a_n}{|a_n|}$. پس قدرمطلق حاصل‌ضرب این ریشه‌ها برابر با ۱ است و درنتیجه، این چندجمله‌ای ریشه‌ای مانند $z_\circ$ دارد که $|z_\circ| \leq ۱$. به این ترتیب

$$\left|\frac{f(z_\circ)}{c_\circ}\right| = a_n\left(۱ + \frac{۱}{|a_n|}\right)$$

و درنتیجه

$$\left|\frac{f(z_\circ)}{c_\circ}\right| = |a_n|\left(۱ + \frac{۱}{|a_n|}\right) = ۱ + |a_n|$$

بنابراین

$$f(z_\circ) = |c_\circ| + |c_n|$$

اگر $a_n = \circ$، چندجمله‌ای $\frac{f(z)}{c_\circ} - ۱$ را در نظر بگیرید. مانند قبل، این چندجمله‌ای ریشه‌ای مانند $z_\circ$ دارد که $|z_\circ| \leq ۱$. در این صورت،

$$\left|\frac{f(z_\circ)}{c_\circ}\right| = ۱$$

و درنتیجه

$$|f(z_\circ)| = |c_\circ| + |c_n|$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\sum_{k=\circ}^{n} \binom{n}{k} ۲^k \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{۲} \right\rfloor} = \binom{۲n+۱}{n}$$

راه‌حل

سمت راست تساوی موردنظر تعداد راههای انتخاب n شیء از میان $۲n + ۱$ شیء است. ثابت می‌کنیم سمت چپ این تساوی نیز همین تعداد است. $۲n + ۱$ شیء را به n زوج و یک تک شیء تقسیم کنید. به‌ازای بر عدد طبیعی مانند k، $k \leq n$، دقیقاً k زوج و از هرکدام دقیقاً یک شیء انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب k شیء $\binom{n}{k}$ راه و برای انتخاب اشیای این زوجها ۲^k راه وجود دارد. اکنون $\left\lfloor \frac{n-k}{۲} \right\rfloor$ تا از $n-k$ زوج باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و هر دو شیء هر یک از آنها را برمی‌داریم. به این ترتیب $k + \left\lfloor \frac{n-k}{۲} \right\rfloor$ شیء انتخاب کرده‌ایم. اگر $n-k$ عددی فرد باشد، کلاً $n-۱$ شیء انتخاب کرده‌ایم و تک شیء را هم انتخاب می‌کنیم. اگر $n-k$ عددی زوج باشد، کلاً n شیء انتخاب کرده‌ایم. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که وقتی k از ۱ تا n تغییر می‌کند، همهٔ راههای ممکن برای انتخاب n

شیء را به‌دست آورده‌ایم. بنابراین تعداد راههای انتخاب n شیء از $۲n + ۱$ شیء برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{n} \binom{n}{k} ۲^k \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{۲} \right\rfloor}$$

درنتیجه

$$\sum_{k=۱}^{n} \binom{n}{k} ۲^k \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{۲} \right\rfloor} = \binom{۲n+۱}{n}$$

مسألهٔ ۶. فرض کنید M نقطه‌ای به مختصات $(۱۹۹۴p, ۷ \times ۱۹۹۴p)$ باشد، که در آن p عددی اول است. تعداد مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که رأس زاویهٔ قائمهٔ آنها در نقطهٔ M است، مختصات رأسهای دیگرشان عددهایی صحیح‌اند و مرکز دایرهٔ محاطی آنها مبدأ مختصات است.

راه‌حل

فرض کنید مثلث MNP ویژگیهای موردنظر را داشته باشد و $u \doteq ۱۹۹۴p$. در این صورت، اگر مختصات N، (x, y) و شیب پاره‌خط MN برابر با k باشد، معادلهٔ خطی که این پاره‌خط روی آن قرار دارد

$$y - ۷u - k(x-u) = ۰$$

است. فاصلهٔ مبدأ تا این خط برابر است با

$$\frac{|۷u - ku|}{\sqrt{۱+k^۲}}$$

از طرف دیگر، پاره‌خط MP بر پاره‌خط MN عمود است و درنتیجه، معادلهٔ خطی که این پاره‌خط روی آن قرار دارد

$$k(y - ۷u) + x - u = ۰$$

است. فاصلهٔ مبدأ تا این خط برابر است با

$$\frac{|u + ۷ku|}{\sqrt{۱+k^۲}}$$

چون مبدأ مختصات مرکز دایرهٔ محاطی مثلث MNP است، پس فاصلهٔ آن از ضلعهای MP و MN برابر است، یعنی

$$|۷u - ku| = |u + ۷ku|$$

بنابراین یا $k = \frac{۳}{۴}$ یا $k = -\frac{۴}{۳}$. چون حاصل‌ضرب این دو مقدار برای k برابر با -۱ است، این دو

درحقیقت یک جواب‌اند. بنابراین شیب یکی از ضلعها $\frac{۳}{۴}$ و شیب ضلع دیگر $-\frac{۴}{۳}$ است. پس شعاع دایرهٔ محاطی مثلث MNP برابر با $۵u$ است.

می‌توانیم فرض‌کنیم N و P نقطه‌های $(u+۳n, ۷u-۴n)$ و $(u-۴m, ۷u-۳m)$ هستند، که در آنها m و n عددهایی صحیح‌اند. پس معادلهٔ خطی که NP روی آن قرار دارد

$$(۳n+۴m)y + (۴n-۳m)x - ۲۵(mu+nu-mn) = ۰$$

است. فاصلهٔ مبدأ تا این خط برابر است با

$$\frac{۲۵|mu+nu-mn|}{\sqrt{(۳n+۴m)^۲+(۴n-۳m)^۲}}$$

یا

$$\frac{۵|mu+nu-mn|}{\sqrt{m^۲+n^۲}}$$

این فاصله برابر است با $۵u$ و درنتیجه

$$u^۲(m^۲+n^۲) = (mu+nu-mn)^۲$$

یا

$$۲u^۲ - ۲(m+n)u + mn = ۰ \qquad (*)$$

محل تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلع MN نقطهٔ $(۴u, ۳u)$ است، پس فاصلهٔ N تا این نقطه از فاصلهٔ M تا این نقطه بیشتر است. بنابراین $n > ۲u$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که دایرهٔ محاطی مثلث در نقطهٔ $(-۳u, ۴u)$ بر ضلع NP مماس است و فاصلهٔ P تا این نقطه از فاصلهٔ M تا این نقطه بیشتر است. بنابراین $m > ۲u$. فرض کنید

$$m = ۲u + r, \qquad n = ۲u + s$$

در این صورت از تساوی $(*)$ نتیجه می‌شود $rs = ۲u^۲$. از طرف دیگر،

$$۲u^۲ = ۲^۳ \times ۹۹۷^۲ \times p^۲$$

پس اگر $p = ۲$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $۲u^۲$ برابر با ۱۸ است و اگر $p = ۹۹۷$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $۲u^۲$ برابر با ۲۰ است و در بقیهٔ موارد تعداد مقسوم‌علیه‌های $۲u^۲$ برابر با ۳۶ است.

دهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۵

مسألهٔ ۱. فرض کنید $2n$ عدد حقیقی a_1، ...، a_n، b_1، ... و b_n $(n \geq 3)$ در شرطهای زیر صدق می‌کنند:

الف) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$؛

ب) $0 < a_1 = a_2$ و $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$، $i = 1, 2, \ldots, n-2$؛

ج) $0 < b_1 \leq b_2$ و $b_i + b_{i+1} \leq b_{i+2}$، $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

ثابت کنید

$$a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$$

راه‌حل

فرض کنید F_n، nاُمین عدد فیبوناتچی باشد (که در آن $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$). در این صورت $a_i = F_i a_1$. فرض کنید $d_2 = b_2 - b_1$ و به‌ازای $i > 2$،

$$d_i = b_i - b_{i-1} - b_{i-2}$$

در این صورت به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$b_i = F_{i-1} d_2 + \cdots + F_1 d_i + F_i b_1$$

همچنین به استقرا معلوم می‌شود که

$$F_1 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$$

به این ترتیب

$$\frac{b_{n-1}+b_n}{b_1+\cdots+b_{n-2}}=\frac{F_n d_2+\cdots+F_2 d_n+F_{n+1}b_1}{(F_{n-1}-1)d_2+\cdots+(F_1-1)d_n+(F_n-1)b_1}$$
$$\geq \frac{F_{n+1}b_1}{(F_n-1)b_1}=\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1+\cdots+a_{n-2}}$$

در اینجا از این نکته استفاده کرده‌ایم که اگر b و d مثبت باشند و $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$، آنگاه

$$\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+d}$$

فرض کنید $s=a_1+\cdots+a_n$. در این صورت، درحقیقت ثابت کرده‌ایم که

$$\frac{a_{n-1}+a_n}{s-a_{n-1}-a_n}\leq\frac{b_{n-1}+b_n}{s-b_{n-1}-b_n}$$

چون تابع $f(x)=\frac{x}{s-x}$ روی بازهٔ $[0,s]$ صعودی است، از این نابرابری نتیجه می‌شود

$$a_{n-1}+a_n\leq b_{n-1}+b_n$$

مسألهٔ ۲. دربارهٔ تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ می‌دانیم $f(1)=1$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

الف) $3f(n)f(2n+1)=f(2n)\,(1+3f(n))$

ب) $f(2n)<6f(n)$

همهٔ جوابهای معادلهٔ $f(k)+f(l)=293$، $k<l$، را پیدا کنید.

راه‌حل

بنابر شرط (الف)، $3f(n)$، $f(2n)\,(1+3f(n))$ را می‌شمارد. از طرف دیگر، $3f(n)$ و $1+3f(n)$ نسبت به هم اول‌اند؛ پس $3f(n)$، $f(2n)$ را می‌شمارد. بنابراین $\frac{f(2n)}{3f(n)}$ عددی طبیعی است و چون بنابر شرط (ب) از ۲ کوچکتر است، پس درحقیقت $f(2n)=3f(n)$ و درنتیجه به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$f(2n+1)=1+3f(n)$$

با استفاده از این تساویها به‌سادگی می‌توان به استقرا ثابت کرد که اگر

$$n=2^{a_0}+2^{a_1}+\cdots+2^{a_k}$$

که در آن $a_۰$، $a_۱$، ... و a_k متمایزند، آنگاه

$$f(n) = ۳^{a_۰} + ۳^{a_۱} + \cdots + ۳^{a_k}$$

بنابراین، برای حل کردن معادلهٔ $f(k) + f(l) = ۲۹۳$ باید عددهایی را پیدا کنیم که مجموعشان ۲۹۳ است و بسط آنها در مبنای ۳ فقط شامل رقمهای ۰ و ۱ است. چون $(۱۰۱۲۱۲)_۳ = ۲۹۳$، پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} ۲۹۳ &= (۱۰۱)_۳ + (۱۰۱۱۱۱)_۳ \\ &= (۱۱۱)_۳ + (۱۰۱۱۰۱)_۳ \\ &= (۱۱۰۱)_۳ + (۱۰۰۱۱۱)_۳ \\ &= (۱۱۱۱)_۳ + (۱۰۰۱۰۱)_۳ \end{aligned}$$

اگر این جوابها را در مبنای ۳ بنویسیم جوابهای موردنظر به‌دست می‌آیند، یعنی

$$(k, l) = (۵, ۴۷), (۷, ۴۵), (۱۳, ۳۹), (۱۵, ۳۷)$$

مسألهٔ ۳. کمترین مقدار عبارت

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰}\sum_{k=۱}^{۱۰} |k(x + y - ۱۰i)(۳x - ۶y - ۳۶j)(۱۹x + ۹۵y - ۹۵k)|$$

را پیدا کنید، که در آن x و y عددهایی حقیقی‌اند.

راه‌حل

مجموع موردنظر را می‌توان به شکل

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} |x + y - ۱۰i| \sum_{j=۱}^{۱۰} |۳x - ۶y - ۳۶j| \sum_{k=۱}^{۱۰} |k(۱۹x + ۹۵y - ۹۵k)|$$

نوشت. توجه کنید که کمترین مقدار تابعی به شکل

$$f(x) = |x - a_۱| + |x - a_۲| + \cdots + |x - a_{۲n}|$$

که در آن $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{۲n}$ به‌ازای هر xای از بازهٔ $[a_n, a_{n+۱}]$ به‌دست می‌آید (این تابع قطعه به قطعه خطی است و شیب آن در رأسی غیرانتهایی مانند x برابر است با $۲m - ۲n$، که در آن m بزرگترین عدد صحیحی است که $a_m < x$). بنابراین در حاصل‌ضرب بالا، مجموع اول به‌ازای $۵۰ \leq x + y \leq ۶۰$ و مجموع دوم به‌ازای $۱۸۰ \leq ۳x - ۶y < ۲۱۶$ کمترین مقدار ممکن است.

برای به‌دست آوردن کمترین مقدار مجموع سوم، دوباره هر جمله را تابعی برحسب $t = ۱۹x + ۹۵y$ در نظر بگیرید و شیبها را حساب کنید. شیب تا $t = ۹۵$ برابر است با $-۱۰ - \cdots - ۲ - ۱$ و در این نقطه -۱ تبدیل به $+۱$ می‌شود. سپس در $t = ۲ \times ۹۵$، -۲ تبدیل به $+۲$ می‌شود و همین‌طور تا آخر. جایی که شیب از منفی به مثبت تبدیل می‌شود $t = ۷ \times ۹۵$ است. پیش از این نقطه شیب برابر با

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰$$

یا -۱۳ است و پس از این نقطه شیب برابر با

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ + ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰$$

یا $+۱$ است.

اگر همزمان نامعادله‌های $۵۰ \le x + y \le ۶۰$ و $۱۸۰ \le ۳x - ۶y \le ۲۱۶$ و معادلهٔ

$$۱۹x + ۹۵y = ۷ \times ۹۵$$

را حل کنیم، جواب باید نقطه‌ای باشد که کمترین مقدار عبارت موردنظر به‌دست می‌آید. از معادله و نامعادلهٔ اول به‌دست می‌آید $۵۳/۷۵ \le x \le ۶۶/۲۵$. از معادله و نامعادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $۵۲/۸۵۷ \le x \le ۶۱/۴۲۸$. چون این نامعادله‌ها جواب مشترک دارند، پس کمترین مقدار عبارت موردنظر برابر با حاصل‌ضرب کمترین مقدارهای سه مجموع موردنظر است. کمترین مقدار این مجموعها به‌ترتیب برابر است با ۲۵۰، ۹۰۰ و ۱۰۶۴۰ که حاصل‌ضربشان برابر است با ۲۳۹۴۰۰۰۰۰۰.

مسألهٔ ۴. شعاعهای چهار گلوله به‌ترتیب ۲، ۲، ۳ و ۳ است. هر گلوله بر سه‌تای دیگر مماس است. گلولهٔ کوچک دیگری بر هر یک از این چهار گلوله مماس است. شعاع این گلوله چقدر است؟

راه‌حل

فرض کنید A و B مرکز گلوله‌های به شعاع ۲ و C و D مرکز گلوله‌های به شعاع ۳ باشند، O مرکز گلولهٔ دیگر باشد و M و N به‌ترتیب وسط AB و CD باشند. در این صورت، بنابر تقارن، O روی صفحه‌های عمودمنصف AB و CD قرار دارد، که این صفحه‌ها هم یکدیگر را در خط MN قطع می‌کنند. چون $AC = AD = ۵$، پس AN بر CD عمود است و درنتیجه

$$AN^۲ = AD^۲ - DN^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۴^۲$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $BN^۲ = ۴^۲$. همچنین، MN بر AB عمود است (زیرا صفحهٔ CDM بر AB عمود است) و درنتیجه

$$MN^۲ = AN^۲ - AM^۲ = ۴^۲ - ۲^۲ = ۱۲$$

فرض کنید r شعاع گلولهٔ کوچکتر باشد. در این صورت

$$MO^۲ = (r+۲)^۲ - ۲^۲ = r^۲ + ۴r$$
$$NO^۲ = (r+۳)^۲ - ۳^۲ = r^۲ + ۶r$$

اکنون توجه کنید که $MO + NO = MN$. پس

$$\sqrt{r^۲ + ۴r} + \sqrt{r^۲ + ۶r} = \sqrt{۱۲}$$

به‌سادگی می‌توان این معادله را حل کرد و نتیجه گرفت $r = \frac{۶}{۱۱}$.

مسألهٔ ۵. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۱۰}$ عددهایی طبیعی و متمایز باشند که مجموعشان ۱۹۹۵ است. کمترین مقدار عبارت

$$a_۱a_۲ + a_۲a_۳ + \cdots + a_۹a_{۱۰} + a_{۱۰} + a_۱$$

چقدر است؟

راه‌حل

کمترین مقدار عبارت موردنظر برابر با ۴۰۶۹ است و وقتی به‌دست می‌آید که

$$(a_۱, \ldots, a_{۱۰}) = (۱۹۵۰, ۱, ۹, ۲, ۸, ۳, ۷, ۴, ۶, ۵)$$

این مطلب را به این ترتیب ثابت می‌کنیم که ابتدا آرایشی دلخواه در نظر می‌گیریم و آن را در چند گام بدون اینکه مقدار عبارت موردنظر کمتر بشود به شکل موردنظر درمی‌آوریم. ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $a_۱$ بزرگترین a_iهاست، زیرا اگر $a_i > a_۱$، می‌توانیم

$$a_۱, \ldots, a_i$$

را با

$$a_i, \ldots, a_۱$$

جایگزین کنیم، و به این ترتیب مجموع موردنظر به‌اندازهٔ $(a_i - a_۱)(a_{i+۱} - ۱)$ کم می‌شود.

به‌همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که اگر ترتیب جمله‌های میان جملهٔ دوم و کوچکترین جمله را برعکس کنیم، مقدار عبارت موردنظر زیاد نمی‌شود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a_۲$ کوچکترین عدد در میان a_iهاست.

معلوم است که $a_۱ \leq ۱۹۵۰$، زیرا

$$a_۲ + \cdots + a_{۱۰} \geq ۱ + \cdots + ۹ = ۴۵$$

اگر $a_1 > 1950$، آن‌وقت عددهای 0، a_2، ... و a_{10} متوالی نیستند. درنتیجه می‌توانیم یکی از a_iها را یکی کم کنیم و باز هم همگی مثبت و متمایز باقی می‌مانند. فرض کنید a_k این ویژگی را داشته باشد. در عبارت موردنظر a_1 در a_2 ضرب می‌شود و a_k در عددی طبیعی و بزرگتر از a_2 ضرب می‌شود (این عدد طبیعی را M می‌نامیم. اگر $k = 10$، $M = a_9 + 1$ و در غیر این صورت $M = a_{k-1} + a_{k+1}$. در هر دو حالت، چون a_2 کوچکترین a_iهاست، $M > a_2$). بنابراین، اگر a_1 را با $a_1 + 1$ و a_k را با $a_k - 1$ جایگزین کنیم، مقدار عبارت موردنظر به‌اندازهٔ عدد مثبت $M - a_2$ کم می‌شود.

پس $a_1 = 1950$ و a_2، ... و a_{10} باید به‌ترتیبی یکی از عددهای ۱، ... و ۹ باشند. علاوه بر این، چون a_2 کوچکترین a_iهاست، پس $a_2 = 1$. اکنون می‌توانیم روند معکوس کردن را تکرار کنیم و نتیجه بگیریم که a_3، ... و a_{10} باید به همان ترتیبی باشند که در ابتدای راه‌حل گفتیم.

مسألهٔ ۶. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد و

$$X_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = (1, 0, \ldots, 0, 1)$$

فرض کنید، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$،

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & x_i^{(k-1)} = x_{i+1}^{(k-1)} \\ 1 & x_i^{(k-1)} \neq x_{i+1}^{(k-1)} \end{cases}$$

که در آن

$$x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}$$

فرض کنید

$$X_n = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ثابت کنید اگر m عددی طبیعی باشد و $X_m = X_n$، آن‌وقت m مضرب n است.

راه‌حل

اگر $i \equiv j$ (به‌پیمانهٔ n)، به‌طور کلی می‌نویسیم $x_i^{(k)} = x_j^{(k)}$. فرض کنید T تبدیلی باشد که $(x_1, \ldots, x_n)$ را به

$$(x_1 + x_2, \ldots, x_n + x_1)$$

می‌برد، که در آن مجموعها به‌پیمانهٔ ۲ هستند. در این صورت اگر v و w بردار باشند، $T(v) = T(w)$ اگر و فقط اگر یا v و w برابر باشند یا v و w متمم باشند. علاوه بر این، برداری در تصویر T قرار دارد

اگر و فقط اگر تعداد زوجی ۱ داشته باشد (معلوم است که چنین شرطی لازم است و چون T دو به یک است، پس هر چنین برداری در تصویر T قرار دارد). بنابر تعریف X_k، $T(X_k) = X_{k+1}$. به‌سادگی می‌توان به استقرا ثابت کرد که

$$x_i^{(k+m)} \equiv \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} x_{i+j}^{(k)} \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2)$$

فرض کنید $X_{-1} = (1, \ldots, 1, 0)$. توجه کنید که اگر به‌ازای a و bای غیرمنفی $X_a = X_b$، آنگاه تصویرهای X_{a-1} و X_{b-1} تحت اثر T هر دو برابر با X_a هستند و چون در تصویر T هستند، پس تعداد زوجی ۱ دارند (توجه کنید که X_{-1} را طوری انتخاب کرده‌ایم که این ویژگی را داشته باشد). پس X_{a-1} و X_{b-1} متمم یکدیگر نیستند و درنتیجه $X_{a-1} = X_{b-1}$. اگر این کار را تکرار کنیم معلوم می‌شود که $X_{|a-b|-1} = X_{-1}$. از طرف دیگر، می‌توان X_{t-1} را به شکل $T^t(X_{-1})$ یا

$$T^t(0, \ldots, 0, 1)$$

نوشت. به این ترتیب

$$\begin{aligned} x_i^{(t-1)} &\equiv \sum_{j\equiv i(n \text{ به‌پیمانهٔ})} \binom{t}{j} \\ &\equiv \sum_{j\equiv -i(n \text{ به‌پیمانهٔ})} \binom{t}{t-j} \\ &\equiv \sum_{k\equiv t+i(n \text{ به‌پیمانهٔ})} \binom{t}{j} \equiv x_{-t-i}^{(t-1)} \end{aligned}$$

به‌ویژه $x_0^{(i)} \equiv x_{-t}^{(t-1)}$. پس اگر $X_{t-1} = X_{-1}$، آنگاه $x_{-t}^{(-1)} \equiv 0$، که فقط وقتی ممکن است که $t \mid n$. به‌ویژه اگر $X_m = X_n$، آنگاه $X_{|m-n|-1} = X_{-1}$، و درنتیجه $m - n \mid n$. یعنی m مضرب n است.

یازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶

مسألهٔ ۱. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABC باشد. مماسهایی که از نقطهٔ A بر دایرهٔ به قطر BC رسم شده‌اند، در نقطه‌های P و Q بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید نقطه‌های P، Q و H روی یک خط راست قرار دارند.

راه‌حل

خط PQ، قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ به قطر BC است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم نقطهٔ A روی قطب نقطهٔ H است. فرض کنید D و E به‌ترتیب پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A و B باشند. این نقطه‌ها روی دایرهٔ به قطر BC هم قرار دارند و H نقطهٔ برخورد AD و BE است. قطبی خط AD محل برخورد مماسهای AA و DD است و قطبی خط BE محل برخورد مماسهای BB و EE است. اکنون اگر از قضیهٔ پاسکال در شش‌ضلعیهای محاطی $AABDDE$ و $ABBDEE$ استفاده کنیم، معلوم می‌شود که این دو نقطهٔ برخورد و C (که محل برخورد AE و BD است) روی یک خط راست قرار دارند.

مسألهٔ ۲. کوچکترین عدد طبیعی مانند k را پیدا کنید که هر زیرمجموعهٔ k عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۵۰\}$، شامل دو عضو متمایز مانند a و b باشد که ab بر $a+b$ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل

ثابت می‌کنیم کمترین مقدار موردنظر برای k برابر با ۳۹ است. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ

$\{1, 2, \ldots, 50\}$ باشد و a و b دو عضو متمایز S باشند که ab بر $a+b$ بخش‌پذیر است. فرض کنید c بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد و $a = ca_1$ و $b = cb_1$ (درنتیجه a_1 و b_1 نسبت به هم اول‌اند). در این صورت $c^2a_1b_1$ بر $c(a_1+b_1)$ بخش‌پذیر است، پس ca_1b_1 بر a_1+b_1 بخش‌پذیر است. چون a_1 و b_1 نسبت به هم اول‌اند، پس a_1 و a_1+b_1 و نیز b_1 و a_1+b_1 نسبت به هم اول‌اند. بنابراین c بر a_1+b_1 بخش‌پذیر است.

چون S زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 50\}$ است، پس $a+b \le 99$ و درنتیجه $c(a_1+b_1) \le 99$؛ پس $a_1+b_1 \le 9$. از طرف دیگر، $a_1+b_1 \ge 3$. اکنون به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که ۲۳ زوج از a و b ویژگی موردنظر را دارند:

$$\begin{aligned}
a_1+b_1=3: &\quad (6,3),(12,6),(18,9),(24,12)\\
&\quad (30,15),(36,18),(42,21),(48,24)\\
a_1+b_1=4: &\quad (12,4),(24,8),(36,12),(48,16)\\
a_1+b_1=5: &\quad (20,5),(40,10),(15,10),(30,20),(45,30)\\
a_1+b_1=6: &\quad (30,6)\\
a_1+b_1=7: &\quad (42,7),(35,14),(28,21)\\
a_1+b_1=8: &\quad (40,24)\\
a_1+b_1=9: &\quad (45,36)
\end{aligned}$$

فرض کنید

$$M = \{6, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 35, 40, 42, 45, 48\}$$
$$T = \{1, 2, \ldots, 50\} - M$$

چون هریک از زوجهایی که در بالا آوردیم شامل عضوی از M است، پس T ویژگی موردنظر را ندارد. بنابراین

$$k \ge |T| + 1 = 39$$

از طرف دیگر، از میان زوجهایی که در بالا ذکر کردیم می‌توانیم ۱۲ زوج دوبه‌دو متمایز انتخاب کنیم:

$$(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9)$$
$$(40,10),(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36)$$

هر زیرمجموعهٔ ۳۹ عضوی باید شامل هر دو عضو یکی از این زوجها باشد. پس کمترین مقدار موردنظر برای k برابر با ۳۹ است.

مسألهٔ ۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f(x^{3}+y^{3})=(x+y)\left(f(x)^{2}-f(x)f(y)+f(y)^{2}\right)$$

ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(1996x)=1996f(x)$.

راه‌حل

اگر در معادلهٔ مفروض فرض کنیم $x=y=0$، نتیجه می‌شود $f(0)=0$. همچنین، اگر در این معادله فرض کنیم $y=0$، نتیجه می‌شود $f(x^{3})=xf(x)^{2}$، پس

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$$

از این نابرابری نتیجه می‌شود که اگر $x\geq 0$، آنگاه $f(x)\geq 0$ و اگر $x<0$ آنگاه $f(x)<0$.

فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ عددهای مثبت مانند a باشد که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(ax)=af(x)$$

معلوم است که ۱ عضو S است. ثابت می‌کنیم که اگر a عضوی از S باشد، $a^{\frac{1}{3}}$ هم عضو S است. درحقیقت،

$$axf(x)^{2}=af(x^{3})=f(ax^{3})=f\left(\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^{3}\right)=a^{\frac{1}{3}}f\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^{2}$$

و درنتیجه

$$\left(a^{\frac{1}{3}}f(x)\right)^{2}=f\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^{2}$$

چون علامت x و $f(x)$ یکسان است، پس

$$f\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)=a^{\frac{1}{3}}f(x)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر a و b عضو S باشند، $a+b$ هم عضو S است. توجه کنید که اگر a و b عضو S باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}f((a+b)x)&=f\left(\left(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^{3}+\left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^{3}\right)\\&=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(f\left(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}-f\left(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)f\left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)+f\left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\right)\\&=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)x^{\frac{1}{3}}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}=(a+b)f(x)\end{aligned}$$

یعنی $a+b$ هم عضو S است. به این ترتیب، از استقرایی ساده نتیجه می‌شود که هر عدد طبیعی عضو S است. به‌ویژه، به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(۱۹۹۶x) = ۱۹۹۶f(x)$$

مسألهٔ ۴. هشت خواننده در یک جشنوارهٔ هنری که m آواز در آن خوانده می‌شود شرکت کرده‌اند. هر آواز را چهار خواننده خوانده‌اند و تعداد آوازهایی که هر دو خواننده هر دو خوانده‌اند یکسان است. کوچکترین مقدار m را طوری پیدا کنید که چنین کاری ممکن باشد.

راه‌حل

فرض کنید تعداد آوازهایی که هر دو خواننده هر دو خوانده‌اند برابر با r باشد. در این صورت

$$m\binom{۴}{۲} = r\binom{۸}{۲}$$

پس $m = \frac{۱۴r}{۳}$. بنابراین $m \geq ۱۴$. همچنین، اگر خواننده‌ها را به شکل زیر دسته‌بندی کنیم معلوم می‌شود که حالت $m = ۱۴$ ممکن است:

$$\begin{array}{llll}
\{۱,۲,۳,۴\}, & \{۵,۶,۷,۸\}, & \{۱,۲,۵,۶\}, & \{۳,۴,۷,۸\} \\
\{۳,۴,۵,۶\}, & \{۱,۳,۵,۷\}, & \{۲,۴,۶,۸\}, & \{۱,۳,۶,۸\} \\
\{۲,۴,۵,۷\}, & \{۱,۴,۵,۸\}, & \{۲,۳,۶,۷\}, & \{۱,۴,۶,۷\} \\
\{۱,۲,۷,۸\}, & \{۲,۳,۵,۸\} & &
\end{array}$$

مسألهٔ ۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $x_۰ = ۰$، $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی مثبت باشند و $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱$. ثابت کنید

$$۱ \leq \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱ + x_۰ + \cdots + x_{i-۱}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{۲}$$

راه‌حل

توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی‌ـمیانگین هندسی،

$$\sqrt{۱ + x_۰ + \cdots + x_{i-۱}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n} \leq \frac{۱}{۲}(۱ + x_۰ + \cdots + x_n) = ۱$$

و درنتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱ + x_۰ + \cdots + x_{i-۱}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} \geq \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱$$

اکنون فرض کنید

$$\theta_i = \arcsin\,(x_۰ + \cdots + x_i), \qquad i = ۰, ۱, \ldots, n$$

در این صورت

$$\sqrt{۱ + x_۰ + x_۱ + \cdots + x_{i-۱}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n} = \cos\theta_{i-۱}$$

پس نابرابری

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{۱ + x_۰ + \cdots + x_{i-۱}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{۲}$$

با نابرابری

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-۱}}{\cos\theta_{i-۱}} < \frac{\pi}{۲}$$

هم‌ارز است. توجه کنید که

$$\sin\theta_i - \sin\theta_{i-۱} = ۲\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-۱}}{۲}\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-۱}}{۲} < \cos\theta_{i-۱}(\theta_i - \theta_{i-۱})$$

زیرا $\theta_{i-۱} < \theta_i$ و اگر $x > ۰$، $\sin x < x$. درنتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-۱}}{\cos\theta_{i-۱}} < \sum_{i=۱}^{n}(\theta_i - \theta_{i-۱}) = \theta_n - \theta_۰ < \frac{\pi}{۲}$$

مسألهٔ ۶. در مثلث ABC، $\angle C = ۹۰^\circ$، $\angle A = ۳۰^\circ$ و $BC = ۱$. کمترین مقدار ممکن طول بلندترین ضلع مثلثی را پیدا کنید که در مثلث ABC محاط شده است (یعنی هر رأسش روی یک ضلع مثلث ABC قرار دارد).

راه‌حل

ابتدا کمترین مقدار ممکن طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا می‌کنیم که در مثلث ABC محاط شده است. فرض کنید D نقطه‌ای روی BC باشد و $BD = x$. نقطه‌های E و F را به‌ترتیب روی CA و AB طوری انتخاب می‌کنیم که

$$CE = \frac{\sqrt{۳}x}{۲}, \qquad BE = ۱ - \frac{x}{۲}$$

به این ترتیب، از قانون کسینوسها نتیجه می‌شود

$$DF^۲ = DE^۲ = EF^۲ = \frac{۷}{۴}x^۲ - ۲x + ۱ = \frac{۷}{۴}\left(x - \frac{۷}{۴}\right)^۲ + \frac{۳}{۷}$$

پس مثلث DEF متساوی‌الاضلاع است و کمترین مقدار طول ضلع آن برابر است با $\sqrt{\frac{۷}{۳}}$.

اکنون ثابت می‌کنیم که کمترین مقدار ممکن طول بلندترین ضلع مثلثهای محاطی به‌ازای مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. مثلثی محاطی در نظر بگیرید و فرض کنید که متساوی‌الساقین نباشد. در این صورت می‌توانیم یکی از دو سر بلندترین ضلع این مثلث را آنقدر بلغزانیم تا طولش کمتر شود. این کار را ادامه می‌دهیم تا اینکه به دو ضلع مانند DE و EF که بلندترین ضلعها هستند برسیم. اکنون D را ثابت نگه می‌داریم، E را طوری حرکت می‌دهیم که طول DE کمتر شود و F را طوری حرکت می‌دهیم که طول EF کمتر شود. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم که طول هر سه ضلع برابر شود.

بنابراین کمترین مقدار موردنظر برابر با $\sqrt{\frac{۳}{۷}}$ است.

دوازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۷

مسألهٔ ۱. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۱۹۹۷}$ عددهایی حقیقی باشند و

الف) $-\frac{۱}{\sqrt{۳}} \leq x_i \leq \sqrt{۳}$، $۱ \leq i \leq ۱۹۹۷$؛

ب) $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۱۹۹۷} = -۳۱۸\sqrt{۳}$.

بیشترین مقدار ممکن $x_۱^{۱۲} + x_۲^{۱۲} + \cdots + x_{۱۹۹۷}^{۱۲}$ را پیدا کنید.

راه‌حل

چون $x^{۱۲}$ تابعی محدب است، مجموع $x_۱^{۱۲} + x_۲^{۱۲} + \cdots + x_{۱۹۹۷}^{۱۲}$ وقتی بیشترین مقدار ممکن است که هر یک x_iها بجز حداکثر یکی از آنها یکی از دو سر بازهٔ $\left[-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \sqrt{۳}\right]$ باشد. فرض کنید nتا از x_iها برابر با $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $۱۹۹۶ - n$تا از آنها برابر با $\sqrt{۳}$ باشند. در این صورت تنها عدد باقی‌مانده برابر است با

$$-۳۱۸\sqrt{۳} + \frac{n}{\sqrt{۳}} - (۱۹۹۶ - n)\sqrt{۳}$$

این عدد هم باید در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \sqrt{۳}\right]$ باشد و درنتیجه

$$-۱ \leq ۳(-۳۱۸) + n - ۳(۱۹۹۶ - n) \leq ۳$$

یا

$$-۱ \leq ۴n - ۶۹۴۲ \leq ۳$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n = ۱۷۳۶$ و عدد موردنظر $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ است. بیشترین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$۱۷۳۶ \times ۳^{-۶} + ۲۶۰ \times ۳^{۶} + \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۶}$$

مسألهٔ ۲. فرض کنید $A_۱B_۱C_۱D_۱$ چهارضلعیی محدب و P نقطه‌ای درون آن باشد. فرض کنید زاویه‌های $PA_۱B_۱$ و $PA_۱D_۱$ حاده باشند و همین‌طور در مورد سه رأس دیگر. A_k، B_k، C_k و D_k را به‌ترتیب قرینه‌های P نسبت به $A_{k-۱}B_{k-۱}$، $B_{k-۱}C_{k-۱}$، $C_{k-۱}D_{k-۱}$ و $D_{k-۱}A_{k-۱}$ بگیرید.

الف) از چهارضلعیهای $A_kB_kC_kD_k$، $۱ \leq i \leq ۱۲$، کدام‌یک لزوماً با چهارضلعی ۱۹۹۷ام متشابه است؟

ب) فرض کنید چهارضلعی ۱۹۹۷ام محاطی باشد. کدام‌یک از ۱۲ چهارضلعی نخست هم محاطی است؟

راه‌حل

می‌توانیم A_k را پای عمود وارد از P به $A_{k-۱}B_{k-۱}$ بگیریم و همین‌طور در مورد بقیهٔ نقطه‌ها. در این صورت با در نظرگرفتن چهارضلعیهای محاطی به قطرهای PA_k، PB_k، PC_k و PD_k معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} \angle PA_kB_k &= \angle PD_{k+۱}A_{k+۱} \\ &= \angle PC_{k+۲}D_{k+۲} \\ &= \angle PB_{k+۳}C_{k+۳} \\ &= \angle PC_{k+۴}D_{k+۴} \end{aligned}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $\angle PB_kA_k = \angle PB_{k+۱}A_{k+۱}$ و غیره. بنابراین از میان چهارضلعیهای موردنظر، فقط چهارضلعیهای ۱، ۵ و ۹ با چهارضلعی ۱۹۹۷ام متشابه‌اند. از طرف دیگر، اگر چهارضلعی ۱۹۹۷ام محاطی باشد (یعنی زاویه‌های روبه‌رو در این چهارضلعی مکمل باشند)، چهارضلعیهای ۳، ۷ و ۱۱ هم محاطی‌اند.

مسألهٔ ۳. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و $۳n$ را به‌ترتیبی با

$$a_۱, \ldots, a_n, b_۱, \ldots, b_n, c_۱, \ldots, c_n$$

طوری برچسب زد که

الف) $a_1+b_1+c_1$، ... و $a_n+b_n+c_n$ با هم برابر باشند و هر یک از آنها بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

ب) $a_1+\cdots+a_n$، $b_1+\cdots+b_n$ و $c_1+\cdots+c_n$ هم با هم برابر باشند و هر یک از آنها بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل

مجموع عددهای از ۱ تا $3n$ برابر است با $\frac{3n(3n+1)}{2}$، که می‌خواهیم هم بر $6n$ بخش‌پذیر باشد هم بر ۹. پس n باید مضربی از ۳ و به‌پیمانهٔ ۴ همنهشت ۱ باشد. ثابت می‌کنیم که اگر $n=9^m$، آنگاه عدد n ویژگی موردنظر را دارد. به‌ازای $n=9$ از آرایش

۸	۱	۶	۱۷	۱۰	۱۵	۲۶	۱۹	۲۴
۲۱	۲۳	۲۵	۳	۵	۷	۱۲	۱۴	۱۶
۱۳	۱۸	۱۱	۲۲	۲۷	۲۰	۴	۹	۲

استفاده کنید (که در آن سطر اول a_1، a_2، ... است و همین‌طور در مورد بقیهٔ سطرها). کافی است از آرایشهایی برای k (که آنها را با a_iها، b_iها و c_iها نشان می‌دهیم) و l (که آنها را با a'_iها، b'_iها و c'_iها نشان می‌دهیم) آرایشی برای kl (که آنها را با a''_iها، b''_iها و c''_iها نشان می‌دهیم) تشکیل دهیم:

$$a''_{i+(j-1)k}=a_i+(k-1)a'_j,\qquad 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$$

همین‌طور در مورد b_i و c_i.

مسألهٔ ۴. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. خطهای AB و CD در نقطهٔ P و خطهای AD و BC در نقطهٔ Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. فرض کنید E و F نقطه‌های تماس مماسهای مرسوم از نقطهٔ Q بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید نقطه‌های P، E و F روی یک خط راست قرار دارند.

راه‌حل

فرض کنید X' مماس بر دایرهٔ محیطی در نقطهٔ X روی آن باشد. نگاشت قطبی نسبت به دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ را در نظر بگیرید. برای اینکه ثابت کنیم نقطه‌های P، E و F روی یک خط راست قرار دارند، ثابت می‌کنیم قطبهای آنها روی یک خط راست قرار دارند. E و F به E' و F' نگاشته می‌شوند که یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع می‌کنند. چون P نقطهٔ برخورد AB و CD است، قطب P خطی است که از نقطهٔ برخورد A' و B' و نقطهٔ برخورد C' و D' می‌گذرد و درنتیجه، باید

ثابت کنیم که این نقطه‌ها و Q روی یک خط راست قرار دارند.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ پاسکال در مورد شش‌ضلعی $AADBBC$، نقطهٔ برخورد A' و B'، نقطهٔ Q و نقطهٔ برخورد AC و BD روی یک خط راست قرار دارند. همچنین، بنابر قضیهٔ پاسکال درمورد شش‌ضلعی $ADDBCC$، نقطهٔ برخورد C' و D' هم با نقطهٔ Q و نقطهٔ برخورد AC و BD روی یک خط راست قرار دارد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید $A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۷\}$ و به‌ازای هر تابع مانند $f : A \to A$ فرض کنید $f^{[۱]}(x) = f(x)$ و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$f^{[k+۱]}(x) = f\left(f^{[k]}(x)\right)$$

بزرگترین عدد طبیعی مانند M را طوری پیدا کنید که تابعی یک‌به‌یک و پوشا مانند $f : A \to A$ وجود داشته باشد که

الف) اگر $m < M$ و $۱ \leq i \leq ۱۷$، آنگاه

$$f^{[m]}(i+۱) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۷)$$

ب) به‌ازای $۱ \leq i \leq ۱۷$،

$$f^{[M]}(i+۱) - f^{[M]}(i) \equiv \pm ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۷)$$

(در اینجا $f^{[k]}(۱۸) = f^{[k]}(۱)$.)

راه‌حل

اگر $M = ۸$، مقدار تابع f را به‌ازای x برابر با باقیماندهٔ تقسیم $۳x$ بر ۱۷ بگیرید. در این صورت تابع f ویژگیهای موردنظر را دارد. ثابت می‌کنیم بیشترین مقدار M برابر با ۸ است. توجه کنید که با ترکیب f با یک تغییرجای دوری، می‌توانیم فرض کنیم که $f(۱۷) = ۱۷$. در این صورت M کوچکترین عدد صحیحی است که $f^{[M]}(۱)$ یا ۱ است یا ۱۶ و همین‌طور در مورد ۱۶. اگر ۱ و ۱۶ در یک مدار جایگشت f قرار داشته باشند، طول این مدار حداکثر ۱۶ است و درنتیجه یا ۱ یا ۱۶ باید پس از ۸ مرحله به دیگری نگاشته شود؛ پس $M \leq ۸$. اگر این عددها در مدارهای مختلفی قرار داشته باشند، طول یکی از این مدارها (و درنتیجه طول هر دو) حداکثر ۸ است، و درنتیجه باز هم $M \leq ۸$.

مسألهٔ ۶. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... عددهایی نامنفی باشند و

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \qquad m, n \geq ۱$$

ثابت کنید اگر $n \geq m$،

$$a_n \leq ma_۱ + \left(\frac{n}{m} - ۱\right) a_m$$

راه‌حل

به استقرا روی k معلوم می‌شود که اگر $k < \frac{m}{n}$، آنگاه

$$a_n \leq ka_m + a_{n-mk}$$

فرض کنید که $n = mk + r$، که در آن $r \in \{۱, \ldots, m\}$. در این صورت

$$a_n \leq ka_m + a_r = \frac{n-r}{m} a_m + a_r \leq \frac{n-m}{m} a_m + ma_۱$$

زیرا

$$a_m \leq ma_۱, \qquad a_r \leq ra_۱$$

سیزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۸

مسألهٔ ۱. فرض کنید ABC مثلثی غیرمنفرجه باشد، $AB > AC$ و $\angle B = ۴۵^\circ$. فرض کنید O و I به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. فرض کنید $\sqrt{۲}OI = AB - AC$. همهٔ مقدارهای ممکن $\sin A$ را پیدا کنید.

راه‌حل اول

فرض کنید R و r به‌ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. توجه کنید که

$$\sin B = \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \qquad \tan\frac{B}{۲} = \sqrt{۲} - ۱$$

و بنابر قانون سینوسها،

$$BC = ۲R\sin A, \qquad AC = ۲R\sin B, \qquad AB = ۲R\sin C$$

پس

$$\begin{aligned} r &= \frac{AB + BC - AC}{۲}\ \tan\frac{B}{۲} \\ &= R\big(\sqrt{۲} - ۱\big)(\sin C + \sin A - \sin B) \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ اویلر، $OI^۲ = R(R - ۲r)$ و درنتیجه

$$OI^۲ = R^۲\left(۱ - ۲\big(\sqrt{۲} - ۱\big)(\sin C + \sin A - \sin B)\right) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، $\sqrt{۲}OI = AB - AC$ و درنتیجه

$$OI^۲ = \frac{(AB - AC)^۲}{۲} = ۲R^۲(\sin C - \sin B)^۲ \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$۲(\sin C - \sin B)^۲ = ۱ - ۲(\sqrt{۲} - ۱)(\sin C + \sin A - \sin B) \qquad (۳)$$

اما

$$\sin C = \sin(۱۳۵^\circ - A) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin A + \cos A)$$

بنابراین تساوی (۳) با تساویهای زیر هم‌ارز است

$$\begin{aligned}(\sin A + \cos A)^۲ - ۲(\sin A + \cos A) \\ = (\sqrt{۲} - ۲)(\sin A + \cos A) + ۲(۱ - \sqrt{۲}) \sin A + ۲ - \sqrt{۲} \\ ۱ + ۲ \sin A \cos A = (۲ - \sqrt{۲}) \sin A + \sqrt{۲} \cos A + ۲ - \sqrt{۲} \\ (\sqrt{۲} \sin A - ۱)(\sqrt{۲} \cos A - \sqrt{۲} + ۱) = ۰\end{aligned}$$

پس یا $\sin A = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یا $\cos A = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و درنتیجه

$$\sin A = \sqrt{۱ - \cos^۲ A} = \frac{\sqrt{۴\sqrt{۲} - ۲}}{۲}$$

راه‌حل دوم

فرض کنید I_a، I_b و I_c به‌ترتیب پای عمودهای وارد از نقطهٔ I بر ضلعهای BC، AC و AB باشند و D پای عمود وارد از O بر BC باشد. چون OD روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد، پس $BD = CD$. همچنین، چون I روی نیمساز زاویه‌های A، B و C قرار دارد،

$$AI_b = AI_c, \qquad BI_a = BI_c, \qquad CI_a = CI_b$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\sqrt{۲}OI &= AB - AC \\ &= (AI_c + I_cB) - (AI_b + I_bC) \\ &= I_cB - I_bc = BI_a - CI_a\end{aligned}$$

چون $AB > AC$ و D روی BI_a است،

$$BI_a = BD + DI_a, \qquad CI_a = CD - DI_a$$

بنابراین $\sqrt{۲}OI = ۲DI_a$ و درنتیجه $OI = \sqrt{۲}DI_a$. پس زاویهٔ میان OI و $DI_۲$ برابر با ۴۵° است. بنابراین دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. OI بر AB عمود است. در این صورت OI عمودمنصف AB است. بنابراین $\angle A = \angle B$ و $\sin A = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

حالت ۲. OI با AB موازی است. فرض کنید E پای عمود وارد از O بر AB باشد. در این صورت $\angle AOE = \angle C$. پس

$$R\cos\angle AOE = R\cos C = OE = II_c = r$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است. اکنون توجه کنید که اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد،

$$r = ۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\cos C &= ۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \\
&= ۲\sin\frac{B}{۲}\left(\cos\frac{A-C}{۲} - \cos\frac{A+C}{۲}\right) \\
&= ۲\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{A-C}{۲} - ۲\sin^۲\frac{B}{۲} \\
&= \sin\frac{A+B-C}{۲} + \sin\frac{B+C-A}{۲} + \cos B - ۱ \\
&= \cos C + \cos A + \cos B - ۱
\end{aligned}$$

پس

$$\cos A = ۱ - \cos B = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

و درنتیجه

$$\sin A = \sqrt{۱ - \cos^۲ A} = \frac{\sqrt{۴\sqrt{۲} - ۲}}{۲}$$

مسألهٔ ۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۲$. آیا $۲n$ عدد طبیعی متمایز مانند $a_۱$، . . .، a_n، $b_۱$، . . . و b_n وجود دارند که

الف) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$؛

ب) $n - 1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}$.

راه‌حل

ثابت می‌کنیم که $2n$ عدد با ویژگیهای موردنظر وجود دارند. ابتدا توجه کنید که اگر a_1، ...، a_n، b_1، ... و b_n عددهایی طبیعی و متمایز باشند و

$$a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$$

آنگاه

$$n - 1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$$

برای اثبات این مطلب توجه کنید که jای وجود دارد که $b_j > a_j$، پس

$$\frac{2b_j}{a_j + b_j} > 1$$

درنتیجه

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2b_i}{a_i + b_i}\right)$$
$$= n - \sum_{i=1}^{n} \frac{2b_i}{a_i + b_i} < n - 1$$

اکنون فرض کنید N عددی طبیعی باشد و

$$a_i = (2i - 1)N, \qquad b_i = 2i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = n(n-1)N - (n-1)N$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i = n(n-1)$$

برای اینکه شرط (الف) برقرار باشد، باید

$$b_n = a_n + (n-1)\left(N(n-1) - n\right)$$

در این صورت

$$n - ۱ > \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = n - \frac{۲a_n + ۲(n-۱)\left(N(n-۱) - n\right)}{۲a_n + (n+۱)\left(N(n-۱) - n\right)} - \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{۴i}{۲i + N(۲i-۱)} \qquad (*)$$

به این ترتیب، اگر

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{a_n}{N^۲} = +\infty$$

(مثلاً وقتی که $a_n = N^۲$) مقدار سمت راست $(*)$ به $n - ۱$ میل می‌کند. بنابراین اگر ε عددی مثبت باشد (مثلاً $\varepsilon = \frac{۱}{۱۹۹۸}$)، می‌توانیم عددهایی طبیعی مانند N و a_n پیدا کنیم که a_iها و b_iها متمایز باشند و

$$a_۱ + \cdots + a_n = b_۱ + \cdots + b_n$$

$$n - ۱ > \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - ۱ - \epsilon$$

مسألهٔ ۳. فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, ۹۸\}$. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ nعضوی از S مانند T بتوان زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی از T پیدا کرد که هر طور که آن را به دو زیرمجموعهٔ پنج‌عضوی افراز کنیم، در یکی از آنها عضوی وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول باشد و در دیگری عضو وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول نباشد.

راه‌حل

چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عضو مجموعهٔ ۴۹ عضوی $\{۲, ۴, ۶, \ldots, ۹۸\}$ بزرگتر از ۱ است، پس باید $n > ۴۹$. ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعهٔ ۵۰ عضوی از S ویژگی موردنظر را دارد.

فرض کنید T زیرمجموعه‌ای ۵۰عضوی از S باشد. ابتدا توجه کنید که اگر T عضوی فرد مانند x داشته باشد که نسبت به دست‌کم ۹عضو زوج T اول باشد، ویژگی موردنظر را دارد. درحقیقت، فرض کنید $T_{۱۰}$ مجموعهٔ x و ۹ عدد زوج عضو T باشد که نسبت به x اول‌اند. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $T_{۱۰}$ ویژگیهای موردنظر را دارد. تعداد عددهای زوج عضو T را با $e(T)$ نشان می‌دهیم. چند حالت وجود دارد.

حالت ۱. $e(T) \geq ۳۱$. چون T حداکثر ۴۹عضو زوج دارد، پس عددی فرد مانند x هم عضو T است. چون $۱۰۵ = ۷ \times ۵ \times ۳$، پس x حداکثر دو مقسوم‌علیه اول متمایز دارد. اگر x عددی اول باشد، هر عدد زوج عضو S که مقسوم‌علیه مشترکی با x داشته باشد باید مضربی از $۲x$ باشد؛ پس

حداکثر $\lfloor \frac{۹۸}{۶} \rfloor$ یا ۱۶ عدد این‌چنینی وجود دارد. اگر x حاصل‌ضرب دو عدد اول متمایز باشد، حداکثر $\lfloor \frac{۹۸}{۶} \rfloor + \lfloor \frac{۹۸}{۱۰} \rfloor - \lfloor \frac{۹۸}{۳۰} \rfloor$ یا ۲۲ عدد زوج عضو S وجود دارند که مقسوم‌علیه مشترکی با x دارند. اما $e(T) \geq ۳۱$، پس T دست‌کم ۹ عضو زوج دارد که نسبت به x اول‌اند. پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۲. $۲۱ \leq e(T) \leq ۳۰$. در این صورت T دست‌کم ۲۰ عضو فرد دارد. تعداد مضربهای فرد ۳ در S برابر با ۱۶ است، بنابراین می‌توان در T عددی مانند x انتخاب کرد که بر ۳ بخش‌پذیر نباشد و ۳۵ یا ۵۵ هم نباشد. اگر $x = ۵$، $\lfloor \frac{۹۸}{۱۰} \rfloor$ یا ۹ عدد زوج در S وجود دارند که مقسوم‌علیه مشترکی با x دارند. اگر $x = ۵p$، که در آن p عددی اول است و $p \geq ۱۳$، در S حداکثر $\lfloor \frac{۹۸}{۱۰} \rfloor + \lfloor \frac{۹۸}{۲۶} \rfloor$ یا ۱۲ عدد زوج وجود دارد که مقسوم‌علیه مشترکی با x دارند. اگر x عددی اول و بزرگتر از ۷ باشد، در S حداکثر $\lfloor \frac{۹۸}{۱۴} \rfloor$ یا ۷ عدد زوج وجود دارد که مقسوم‌علیه مشترکی با x دارند. اگر x حاصل‌ضرب دو عدد اول باشد که یکی از آنها از ۵ بزرگتر است، در S حداکثر $\lfloor \frac{۹۸}{۱۴} \rfloor + \lfloor \frac{۹۸}{۲۲} \rfloor$ یا ۱۱ عدد زوج وجود دارد که مقسوم‌علیه مشترکی با x دارند. پس همواره حداکثر ۱۲ عدد زوج در S مقسوم‌علیه مشترکی با x دارند. پس دست‌کم $۲۱ - ۱۲$ یا ۹ عدد زوج در T وجود دارند که نسبت به x اول‌اند. به این ترتیب، بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۳. $۱۱ \leq e(T) \leq ۲۰$. در این صورت T دست‌کم ۳۰ عضو فرد دارد. S، ۱۶ عضو فرد دارد که کوچکترین مقسوم‌علیه اولشان ۳ است، ۷ عضو فرد دارد که کوچکترین مقسوم‌علیه اولشان ۵ است، ۴ عضو فرد دارد که کوچکترین مقسوم‌علیه اولشان ۷ است و به‌ازای هر عدد اول مانند p که $۷ < p \leq ۹۷$، یک عضو دارد که کوچکترین مقسوم‌علیه اولش p است. چون

$$۱۶ + ۷ + ۴ + ۱ + ۱ = ۲۹$$

می‌توانیم x را طوری انتخاب کنیم که کوچکترین مقسوم‌علیه اولش دست‌کم ۱۷ باشد. بنابراین حداکثر $\lfloor \frac{۹۸}{۳۴} \rfloor$ یا ۲ عدد زوج در X وجود دارند که نسبت به x اول‌اند. بنابراین T دست‌کم ۹ عضو زوج دارد که نسبت به x اول‌اند. پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۴. $e(T) = ۹$ یا $e(T) = ۱۰$. در این صورت T دست‌کم ۴۰ عضو فرد دارد. بنابراین دست‌کم یکی از عددهای اول ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹ یا ۹۷ باید در T باشد. فرض کنید x یکی از این عددهای اول باشد. در این صورت عدد زوجی در T وجود ندارد که مقسوم‌علیه مشترکی با x داشته باشد. بنابراین دست‌کم ۹ عدد زوج در T وجود دارند که نسبت به x اول‌اند. پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۵. $e(T) \leq ۸$. در این صورت T دست‌کم ۴۲ عضو فرد دارد. بنابراین دست‌کم یکی از

عددهای اول ۶۱، ۶۷، . . . و ۹۷ عضو T است. فرض کنید x یکی از این عددهای اول باشد. تعداد مضربهای فرد ۳ در S برابر با ۱۶ است. چون حداکثر ۷ عدد فرد عضو T نیستند، پس دست‌کم ۹ تا از این مضربهای ۳ عضو T هستند. فرض کنید $T_{۱۰}$ مجموعهٔ x و این ۹ مضرب ۳ باشد. در این صورت $T_{۱۰}$ ویژگیهای موردنظر را دارد.

مسألهٔ ۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $n \geq ۳$ و $۲^{۲۰۰۰}$ بر

$$۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳}$$

بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل

فرض کنید عدد طبیعی n ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. چون ۲ عددی اول است، پس عددی طبیعی مانند k وجود دارد که $k \leq ۲۰۰۰$ و

$$۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳} = ۲^k$$

اما

$$۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳} = \frac{(n+۱)(n^۲ - n + ۶)}{۶}$$

پس

$$(n+۱)(n^۲ - n + ۶) = ۳ \times ۲^{k+۱}$$

فرض کنید $m = n + ۱$. در این صورت $m \geq ۴$ و

$$m(m^۲ - ۳m + ۸) = ۳ \times ۲^{k+۱}$$

دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. عددی طبیعی مانند r وجود دارد که $m = ۲^r$. توجه کنید که چون $m \geq ۴$، پس $r \geq ۲$. عددی صحیح و نامنفی مانند t وجود دارد که

$$۲^{۲r} - ۳ \times ۲^r + ۸ = ۳ \times ۲^t$$

اگر $r \geq ۴$، آنگاه باید

$$۸ \equiv ۳ \times ۲^t \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۶)$$

بنابراین $۸ = ۲^t$. درنتیجه $m^۲ - ۳m + ۸ = ۲۴$، که در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد. بنابراین $r = ۲$ یا $r = ۳$. درنتیجه $n = ۳$ یا $n = ۷$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر

$n=۳$ یا $n=۷$، عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را دارد.

حالت ۲. عددی طبیعی مانند s وجود دارد که $m=۳\times ۲^s$. بنابراین عددی طبیعی مانند u وجود دارد که

$$۹\times ۲^{۲s}-۹\times ۲^s+۸=۲^u$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $s\neq ۱,۲$. بنابراین $s\geq ۳$. اگر $s\geq ۴$، آنگاه

$$۸\equiv ۲^u \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۶)$$

بنابراین $۲^u=۸$. درنتیجه $m^۲-۳m=۰$، که ممکن نیست. پس $s=۳$ و درنتیجه $n=۲۳$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $n=۲۳$، عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را دارد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید D نقطه‌ای درون مثلث حادهٔ ABC باشد و

$$DA\times DB\times AB+DB\times DC\times BC+DC\times DA\times CA=AB\times BC\times CA$$

جای نقطهٔ D را مشخص کنید.

راه‌حل

ثابت می‌کنیم

$$DA\times DB\times AB+DB\times DC\times BC+DC\times DA\times CA\geq AB\times BC\times CA$$

و تساوی فقط وقتی پیش می‌آید که D محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد.

نقطه‌های E و F را طوری انتخاب کنید که $BCDE$ و $BCAF$ متوازی‌الاضلاع باشند. در این صورت $EDAF$ هم متوازی‌الاضلاع است. بنابراین

$$AF=DE=BC,\qquad EF=AD,\qquad BE=CD,\qquad BF=AC$$

بنابر قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی $ABEF$،

$$\begin{aligned}AB\times AD+BC\times CD&=AB\times EF+AF\times BE\\&\geq AE\times BF=AE\times AC\end{aligned}$$

همچنین، بنابر قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی $AEBD$،

$$\begin{aligned}BD\times AE+AD\times CD&=BD\times AE+AD\times BE\\&\geq AB\times DE\\&=AB\times BC\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} DA \times DB \times AB + DB \times DC \times BC + DC \times DA \times CA & \\ &= DB(AB \times AD + BC \times CD) + DC \times DA \times CA \\ &\geq DB \times AE \times AC + DC \times DA \times CA \\ &= AC(BD \times AE + AD \times CD) \\ &\geq AC \times AB \times BC \end{aligned}$$

توجه کنید که تساوی وقتی پیش می‌آید که $ABEF$ و $AEBD$ محاطی باشند، که هم‌ارز با این است که $AFED$ محاطی باشد. چون $AFED$ متوازی‌الاضلاع و محاطی است، مستطیل هم هست. یعنی AD بر DE عمود است و چون DE با BC موازی است، پس AD بر BC عمود است. چون $AEBD$ محاطی است، زاویهٔ ABE با زاویهٔ ADE برابر است، یعنی BE و درنتیجه CD بر AB عمود است. یعنی D محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است.

مسألهٔ ۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۲$. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی باشند و

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ + \sum_{i=۱}^{n-۱} x_i x_{i+۱} = ۱$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $k \leq n$، بیشترین مقدار $|x_k|$ را پیدا کنید.

راه‌حل

توجه کنید که

$$x_۱^۲ + (x_۱ + x_۲)^۲ + \cdots + (x_{n-۱} + x_n)^۲ + x_n^۲ = ۲$$

همچنین

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{x_۱^۲ + (x_۱ + x_۲)^۲ + \cdots + (x_{k-۱} + x_k)^۲}{k}} \\ &\geq \frac{|x_۱| + |x_۱ + x_۲| + \cdots + |x_{k-۱} + x_k|}{k} \\ &\geq \frac{\left|x_۱ - (x_۱ + x_۲) + \cdots + (-۱)^{k-۱}(x_{k-۱} + x_k)\right|}{k} \\ &= \frac{|x_k|}{k} \end{aligned}$$

بنابراین

$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2 \geq \frac{x_k^2}{k}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$(x_k+x_{k+1})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2 \geq \frac{x_k^2}{n-k+1}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} 2 &= x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2 \\ &= \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)x_k^2 \end{aligned}$$

پس

$$|x_k| \leq \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$$

و تساوی وقتی پیش می‌آید که

$$x_1=-(x_1+x_2)=x_2+x_3=\cdots=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)$$
$$x_k+x_{k+1}=-(x_{k+1}+x_{k+2})=\cdots=(-1)^{n-k}x_n$$

یعنی وقتی که

$$x_i=\begin{cases}(-1)^{k-i}\dfrac{x_k}{k} & i=1,2,\ldots,k-1\\ (-1)^{i-k}\dfrac{x_k(n+1-i)}{n-k+1} & i=k+1,\ldots,n\end{cases}$$

چهاردهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۹

مسألهٔ ۱. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد و $\angle C > \angle B$. فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد، زاویهٔ ADB منفرجه باشد و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABD باشد. فرض کنید F نقطه‌ای درون مثلث ABC و روی دایرهٔ محیطی مثلث ABD باشد. ثابت کنید F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است، اگر و فقط اگر HD و CF موازی باشند و H روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد.

راه‌حل

همهٔ زاویهٔ را به‌پیمانهٔ ۱۸۰° حساب می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که اگر نقطهٔ P محل برخورد ارتفاعهای مثلث UVW باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\angle VPW &= (۹۰^\circ - \angle PWV) + (۹۰^\circ - \angle WVP)\\ &= \angle WVP + \angle UWV\\ &= ۱۸۰^\circ - \angle VUW\end{aligned}$$

فرض کنید F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. در این صورت

$$\angle ACB = ۱۸۰^\circ - \angle AFB = ۱۸۰^\circ - \angle ADB = \angle AHB$$

پس چهارضلعی $ACHB$ محاطی است. از طرف دیگر، خطهای CF و HD هر دو بر ضلع AB عمودند، درنتیجه با هم موازی‌اند.

برعکس، فرض کنید HD و CF موازی باشند و H روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد. چون چهارضلعیهای $AFDB$ و $AHCB$ محاطی‌اند، پس

$$\angle AFB = \angle ADB = ۱۸۰^\circ - \angle AHB = ۱۸۰^\circ - \angle ACB$$

بنابراین F نقطهٔ برخورد دایره‌ای که با شرط $\angle AFB = ۱۸۰^\circ - \angle ACB$ تعریف می‌شود با خطی است که با شرط $CF \perp DB$ تعریف می‌شود. فقط دو نقطهٔ این‌چنینی وجود دارد: محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط AB. نقطهٔ دوم بیرون مثلث ABC قرار دارد و درنتیجه F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است.

مسألهٔ ۲. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. فرض کنید $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها باشد به‌طوری که $f_\circ(x) = ۱$ و

$$f_{n+۱}(x) = xf_n(x) + f_n(ax), \qquad n = \circ, ۱, ۲, \ldots$$

الف) ثابت کنید

$$f_n(x) = x^n f_n\left(\frac{۱}{x}\right), \qquad n = \circ, ۱, ۲, \ldots$$

ب) عبارتی صریح برای $f_n(x)$ پیدا کنید.

راه‌حل

اگر $a = ۱$، آنگاه $f_n(x) = (x+۱)^n$، $n \geq \circ$، و به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که حکم درست است. پس فرض می‌کنیم که $a \neq ۱$.

توجه کنید که درجهٔ f_n برابر با n و جملهٔ ثابت آن برابر با ۱ است. فرض کنید

$$f_n(x) = c_\circ + c_۱ x + \cdots + c_n x^n$$

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $\circ \leq i \leq n$، آنگاه

$$(a^i - ۱)c_i = (a^{n+۱-i} - ۱)c_{i-۱}$$

(فرض کنید $c_{-۱} = \circ$).

اگر $n = \circ$ معلوم است که ادعایمان درست است. فرض کنید ادعایمان در مورد

$$f_{n-۱}(x) = b_\circ + b_۱ x + \cdots + b_{n-۱}x^{n-۱}$$

درست باشد، یعنی اگر $i \geq ۱$،

$$(a^i - ۱)b_i = (a^{n-i} - ۱)b_{i-۱}$$

و

$$(a^{n+1-i}-1)b_{i-2}=(a^{i-1}-1)b_{i-1}$$

اگر $i=0$، باید ثابت کنیم $0=0$، که درست است. اگر $i\geq 1$، از رابطهٔ بازگشتی داده شده نتیجه می‌شود

$$c_i=b_{i-1}+a^ib_i,\qquad c_{i-1}=b_{i-2}+a^{i-1}b_{i-1}$$

بنابراین ادعایمان با تساویهای زیر هم‌ارز است:

$$(a^i-1)(b_{i-1}+a^ib_i)=(a^{n+1-i}-1)(b_{i-2}+a^{i-1}b_{i-1})$$
$$(a^i-1)b_{i-1}+a^i(a^i-1)b_i=(a^{n+1-i}-1)b_{i-2}+(a^n-a^{i-1})b_{i-1}$$
$$(a^i-1)b_{i-1}+a^i(a^{n-i}-1)b_{i-1}=(a^{i-1}-1)b_{i-1}+(a^n-a^{i-1})b_{i-1}$$
$$(a^n-1)b_{i-1}=(a^n-1)b_{i-1}$$

پس ادعایمان درست است.

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned}c_i=\frac{c_i}{c_0}=\prod_{k=1}^{i}\frac{c_k}{c_{k-1}}\\ &=\prod_{k=1}^{i}\frac{a^{n+1-k}-1}{a^k-1}=\frac{\prod_{k=n+1-i}^{n}(a^k-1)}{\prod_{k}^{i}=(a^k-1)}\\ &=\frac{\prod_{k=i+1}^{n}(a^k-1)}{\prod_{k=1}^{n-i}(a^k-1)}=\prod_{k=1}^{n-i}\frac{a^{n+1-k}-1}{a^k-1}\\ &=\prod_{k=1}^{n-i}\frac{c_k}{c_{k-1}}=\frac{c_{n-i}}{c_0}=c_{n-i}\end{aligned}$$

که عبارت صریح موردنظر را به‌دست می‌دهد. همچنین توجه کنید که $f_n(x)=x^nf\left(\frac{1}{x}\right)$ اگر و فقط اگر $c_i=c_{n-i}$، $0\leq i\leq n$.

مسألهٔ ۳. ۹۹ ایستگاه فضایی وجود دارد. هر دوتا از این ایستگاههای فضایی با تونلی به هم وصل‌اند. ۹۹ تونل دوطرفهٔ اصلی وجود دارد و بقیهٔ تونلها یک‌طرفه‌اند. گروهی از ۴ ایستگاه فضایی را همبند می‌نامیم، هرگاه بتوان از هر یک از ایستگاههای این گروه به هر یک از بقیهٔ ایستگاههای دیگر این گروه رفت، به‌طوری که فقط از ۶ تونلی که آنها را به هم وصل می‌کنند استفاده شود. بیشترین تعداد گروههای همبند را مشخص کنید.

راه‌حل

فرض کنید $f(x) = \frac{x(x-۱)(x-۲)}{۶}$؛ f تعمیم تعریف $\binom{x}{۳}$ به‌عددهای حقیقی مانند x است.

درگروهی از ۴ ایستگاه فضایی، ایستگاهی را مشکل‌آفرین می‌نامیم که یا سه تونل یک طرفه به آن ختم شود یا سه تونل یک طرفه از آن خارج شود. در هر گروه، از هر نوع ایستگاه مشکل‌آفرین حداکثر یکی وجود دارد.

اگر گروهی چهارتایی از ایستگاهها شامل ایستگاهی مشکل‌آفرین مانند A باشد، یا رفتن به A از دیگر ایستگاهها ممکن نیست یا رفتن به دیگر ایستگاهها از A ممکن نیست.

ثابت می‌کنیم اگر درگروهی چهارتایی از ایستگاهها مانند A، B، C و D ایستگاهی مشکل‌آفرین یا تونل دوطرفه وجود نداشته باشد، این گروه همبند است. از ایستگاهی راه می‌افتیم و در امتداد تونلهای یک‌طرفه حرکت می‌کنیم تا دوباره به نقطهٔ شروع حرکتمان برگردیم. اگر از هر چهار ایستگاه گذشته باشیم که هیچ. در غیر این صورت باید از دقیقاً سه ایستگاه مانند A، B و C گذشته باشیم. از هر یک از این سه ایستگاه می‌توانیم به هر کدام دیگر برویم. اکنون توجه کنید که چون D مشکل‌آفرین نیست، بدون اینکه ازکلی بودن استدلالمان چیزی کم شود، می‌توانیم فرض کنیم که تونلی یک‌طرفه از A به D وجود دارد. بنابراین، می‌توانیم از هر ایستگاهی به D برویم. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که می‌توانیم از D به هر ایستگاهی برویم. بنابراین گروه موردنظر همبند است.

ایستگاهها را با ۱، ۲، . . . و ۹۹ شماره‌گذاری کنید. به‌ازای $۱ \leq i \leq ۹۹$ فرض کنید a_i تونلی یک‌طرفه باشد که به ایستگاه i می‌رسد و b_i تونلی یک‌طرفه باشد که از این ایستگاه خارج می‌شود. ایستگاه i در $\binom{a_i}{۳} + \binom{b_i}{۳}$ گروه چهارتایی مشکل‌آفرین است. بنابراین ایستگاهها درکل در

$$\sum_{i=۱}^{۹۹} \left(\binom{a_i}{۳} + \binom{b_i}{۳}\right)$$

گروه مشکل‌آفرین‌اند. این مقدار برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{۱۹۸} f(x_i)$$

که در آن $x_۱$، $x_۲$، . . . و $x_{۱۹۸}$ عددهایی صحیح و غیرمنفی‌اند و

$$\sum_{i=۱}^{۱۹۸} x_i = ۹۶ \times ۹۹$$

بدون اینکه ازکلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $x_۱$، $x_۲$، . . . و x_k دست‌کم برابر با ۱اند و $x_{k+۱}$، $x_{k+۲}$، . . . و $x_{۱۹۸}$ برابر با صفرند. چون تابع f روی بازهٔ $[۱, +\infty)$ محدب

است، از نابرابری ینسن نتیجه می‌شود که مجموع $f(x_i)$ها دست‌کم برابر است با

$$k\binom{\frac{۹۶ \times ۹۹}{k}}{۳}$$

همچنین، اگر $۱ \leq m$ و $mx \geq ۲$، آنگاه $mf(x) \geq f(mx)$. فرض کنید

$$m = \frac{k}{۱۹۸}, \quad mx = \frac{۹۶ \times ۹۹}{۱۹۸} = ۴۸$$

پس مجموع موردنظر دست‌کم $۱۹۸\binom{۴۸}{۳}$ است. چون هر گروه ناهمبند حداکثر دو ایستگاه مشکل‌آفرین دارد، حداقل $۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه ناهمبند و حداکثر $\binom{۹۹}{۴} - ۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه همبند وجود دارد.

ثابت می‌کنیم آرایشی وجود دارد که در آن $\binom{۹۹}{۴} - ۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه همبند وجود دارد. ایستگاهها را دور دایره‌ای بچینید و میان هر دو ایستگاه مجاور تونلی دوطرفه قرار دهید. میان هر دو ایستگاه غیرمجاور مانند A و B تونلی از A به B قرار دهید، اگر و فقط اگر فاصلهٔ A از B در جهت ساعتگرد ۳، ۵، ... یا ۹۷ باشد. در این آرایش هر ایستگاه $۲\binom{۴۸}{۳}$ بار مشکل‌آفرین است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که در این آرایش، هر گروه چهارتایی که شامل تونلی دوطرفه است همبند است. اکنون فرض کنید ایستگاه A در گروه چهارتایی A، B، C و D مشکل‌آفرین باشد، که در آن B در جهت ساعتگرد نزدیکترین ایستگاه به A و D در جهت ساعتگرد دورترین ایستگاه به A است. اگر از A به بقیهٔ ایستگاهها تونلی دوطرفه وجود داشته باشد، سه تونل یک‌طرفه باید از ایستگاههای دیگر به D وجود داشته باشد و اگر سه تونل یک‌طرفه از دیگر تونلها به A وجود داشته باشد، سه تونل یک‌طرفه باید از B به ایستگاههای دیگر وجود داشته باشد. بنابراین هر گروه ناهمبند دقیقاً دو ایستگاه مشکل‌آفرین دارد. پس بنابر آنچه در بند قبل گفتیم، دقیقاً $\binom{۹۹}{۴} - ۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه همبند وجود دارد.

مسألهٔ ۴. فرض کنید m عددی طبیعی باشد. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a، b و k وجود دارند که a و b هر دو فردند، k منفی نیست و

$$۲m = a^{۱۹} + b^{۹۹} + k \times ۲^{۱۹۹۹}$$

راه‌حل

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $\{t_۱, \ldots, t_n\}$ به‌پیمانهٔ ۲^n با $\{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲n - ۱\}$ برابر باشد، به‌ازای هر عدد طبیعی فرد مانند s، $\{t_۱^s, \ldots, t_n^s\}$ هم چنین است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که اگر $i \neq j$،

$$t_i^s - t_j^s = (t_i - t_j)(t_i^{s-۱} + t_i^{s-۲}t_j + \cdots + t_j^{s-۱})$$

و چون $t_i^{s-1} + t_i^{s-1}t_j + \cdots + t_j^{s-1}$ عددی فرد است، پس

$$t_i \equiv t_j \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2^n)$$

اگر و فقط اگر

$$t_i^s \equiv t_j^s \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2^n)$$

بنابراین عددی فرد مانند a_0 وجود دارد که

$$2m - 1 \equiv a_0^{19} \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2^{1999})$$

پس اگر عدد منفی a را طوری انتخاب کنیم که

$$a \equiv a_0 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2^{1999})$$

و

$$2m - 1 - a^{19} > 0$$

آنگاه جوابی برای معادلهٔ موردنظر به شکل زیر است

$$(a, b, k) = \left(a, 1, \frac{2m - 1 - a^{19}}{2^{1999}}\right)$$

مسألهٔ ۵. بیشترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که اگر ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سوم

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

همگی نامنفی باشند، آنگاه به‌ازای هر عدد حقیقی و نامنفی مانند x،

$$f(x) \geq \lambda(x - a)^3$$

در چه صورتی تساوی پیش می‌آید؟

راه‌حل

فرض کنید ریشه‌ها α، β و γ باشند. می‌توانیم فرض کنیم $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$. اگر $x \geq 0$، می‌توان نوشت

$$x - a = x + \alpha + \beta + \gamma \geq 0$$

و

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

اگر $0 \leq x \leq \alpha$، از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$-f(x) = (\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)$$

$$\le \frac{۱}{۲۷}(\alpha+\beta+\gamma-۳x)^۳$$
$$\le \frac{۱}{۲۷}(x+\alpha+\beta+\gamma)^۳ = \frac{۱}{۲۷}(x-a)^۳$$

درنتیجه

$$f(x) \ge -\frac{۱}{۲۷}(x-a)^۳$$

و تساوی وقتی پیش می‌آید که در نابرابری اول

$$\alpha - x = \beta - x = \gamma - x$$

و در نابرابری دوم

$$\alpha+\beta+\gamma-۳x = x+\alpha+\beta+\gamma$$

یعنی وقتی که $x = ۰$ و $\alpha=\beta=\gamma$.

اگر $\beta \le x \le \gamma$، از نابرابری میانگین حسابی_میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$-f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x) \le \frac{۱}{۲۷}(x+\gamma-\alpha-\beta)^۳$$
$$\le \frac{۱}{۲۷}(x+\alpha+\beta+\gamma)^۳ = \frac{۱}{۲۷}(x-a)^۳$$

پس باز هم

$$f(x) \ge -\frac{۱}{۲۷}(x-a)^۳$$

تساوی وقتی پیش می‌آید که در نابرابری اول

$$x-\alpha = x-\beta = \gamma - x$$

و در نابرابری دوم

$$x+\gamma-\alpha-\beta = x+\alpha+\beta+\gamma$$

یعنی وقتی که $\alpha=\beta=۰$ و $\gamma = ۲x$.

اگر $\alpha < x < \beta$ یا $x > \gamma$، آنگاه

$$f(x) > ۰ \ge -\frac{۱}{۲۷}(x-a)^۳$$

بنابراین بیشترین مقدار موردنظر برای λ برابر است با $-\frac{۱}{۲۷}$، چون در غیر این صورت نابرابری برای چندجمله‌ای $f(x) = x^۲(x-۱)$ در نقطهٔ $x = \frac{۱}{۲}$ درست نیست. تساوی وقتی پیش می‌آید که یا $\alpha=\beta=\gamma$ و $x = ۰$، یا $\alpha=\beta=۰$ و γ عددی نامنفی باشد و $x = \frac{\gamma}{۲}$.

مسألهٔ ۶. مکعبی $۴ \times ۴ \times ۴$ از ۶۴ مکعب واحد تشکیل شده است. وجه‌های ۱۶تا از این مکعبها را قرمز می‌کنیم. رنگ‌آمیزیی را جالب می‌نامیم، هرگاه در هر جعبهٔ مستطیلی $۱ \times ۱ \times ۴$ که از ۴ مکعب واحد تشکیل شده است فقط یک مکعب قرمز وجود داشته باشد. تعداد رنگ‌آمیزیهای جالب را پیدا کنید (اگر حتی بتوان رنگ‌آمیزیی را با یک‌سری دوران از رنگ‌آمیزی دیگری به‌دست آورد، این‌دو متمایزند).

راه‌حل

یکی از وجه‌ها را به‌عنوان وجه زیرین انتخاب کنید. به‌ازای هر مربع واحد مانند A روی این وجه، جعبهٔ $۱ \times ۱ \times ۴$ عمودیی را در نظر می‌گیریم که کف آن A است. اگر iامین مکعب (با شمارش از A) رنگی باشد، روی A عدد i را بنویسید. به این ترتیب، هر رنگ‌آمیزی جالب به‌طور یک‌به‌یک به مربع لاتینی ۴×۴ روی وجه زیرین نگاشته می‌شود. (در هر مربع لاتین $n \times n$ هر یک از نمادهای a_1، ... و a_n در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک‌بار آمده است.) برعکس، اگر مربع لاتینی ۴×۴ مفروض باشد، می‌توانیم به روش عکس، رنگ‌آمیزیی جالب به‌دست آوریم. بنابراین، برای حل مسأله باید تعداد مربعهای لاتین ۴×۴ متمایز را حساب کنیم.

توجه کنید که با عوض کردن سطرهای مربعی لاتین، مربع لاتین دیگری به‌دست می‌آید. بنابراین اگر نمادها a، b، c و d باشند، هر یک از $۴! \times ۳!$ آرایش سطر اول و ستون اول نظیر یک تعداد مربع لاتین‌اند. بنابراین $۴! \times ۳! \times x$ مربع لاتین ۴×۴ وجود دارد، که در اینجا x تعداد مربعهای لاتینی است که در سطر اول و ستون اول آنها نمادهای a، b، c و d به‌همین ترتیب آمده‌اند. درایه‌های سطر دوم و ستون دوم a، c یا dاند و درنتیجه مربعهای لاتین زیر به‌وجود می‌آیند

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & b & a \\ d & c & a & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \\ c & a & d & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}$$

بنابراین $x = ۴$ و تعداد رنگ‌آمیزیهای جالب، $۴! \times ۳! \times ۴$ یا ۵۷۶ است.

پانزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۲۰۰۰

مسألهٔ ۱. در مثلث ABC، $BC \le CA \le AB$. فرض کنید R و r به‌ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. برحسب مقدار $\angle C$ مشخص کنید که $BC + CA - ۲R - ۲r$ چه‌وقت مثبت، منفی یا صفر است.

راه‌حل

فرض کنید

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b$$
$$\angle A = ۲x, \quad \angle B = ۲y, \quad \angle C = ۲z$$

در این صورت $z \le y \le x < ۹۰^\circ$ و $x + y + z = ۹۰^\circ$. فرض کنید

$$s = BC + CA - ۲R - ۲r = a + b - ۲R - ۲r$$

با استفاده از تساویهای

$$۲R = \frac{a}{\sin ۲x} = \frac{b}{\sin ۲y} = \frac{c}{\sin ۲z}$$
$$r = ۴R \sin x \sin y \sin z$$

به‌دست می‌آید

$$s = ۲R(\sin ۲x + \sin ۲y - ۱ - ۴ \sin x \sin y \sin z)$$

توجه کنید که اگر $\angle C = ۹۰^\circ$، آنگاه $c = ۲R$ و $۲r = a + b - c$ و درنتیجه $s = ۰$. فرض کنید زاویهٔ C قائمه نباشد. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{s}{۲R} &= ۲\sin(x+y)\cos(x-y) - ۱ + ۲\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)\sin z \\ &= ۲\cos z\cos(x-y) - ۱ + ۲\left(\sin z - \cos(x-y)\right)\sin z \\ &= ۲\cos(x-y)(\cos z - \sin z) - \cos ۲z \\ &= ۲\cos(y-x)\frac{\cos^۲ z - \sin^۲ z}{\cos z + \sin z} - \cos ۲z \\ &= \left(\frac{۲\cos(y-x)}{\cos z + \sin z} - ۱\right)\cos ۲z\end{aligned}$$

(توجه کنید که چون $۰^\circ < z < ۹۰^\circ$، $\cos z + \sin z$ مخالف صفر است.)

توجه کنید که

$$۰^\circ \le y - x < \min\{y, x+y\} \le \min\{z, ۹۰^\circ - z\}$$

چون $z < ۹۰^\circ$ و $۹۰^\circ - z < ۹۰^\circ$، پس

$$\begin{aligned}\cos(y-x) &> \max\{\cos z, \cos(۹۰^\circ - z)\} \\ &= \max\{\cos z, \sin z\}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{۲\cos(x-y)}{\cos z + \sin z} - ۱ > ۰$$

پس برحسب اینکه $\angle C < ۹۰^\circ$، $\angle C = ۹۰^\circ$ یا $\angle C > ۹۰^\circ$، s به‌ترتیب مثبت، صفر یا منفی است.

مسألهٔ ۲. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_۱ = ۰$، $a_۲ = ۱$ و اگر $n \ge ۳$،

$$a_n = \frac{۱}{۲}na_{n-۱} + \frac{۱}{۲}n(n-۱)a_{n-۲} + (-۱)^n\left(۱ - \frac{n}{۲}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + ۲\binom{n}{۱}a_{n-۱} + ۳\binom{n}{۲}a_{n-۲} + \cdots + n\binom{n}{n-۱}a_۱$$

پیدا کنید.

راه‌حل

عبارت موردنظر را f_n بنامید. رابطهٔ بازگشتی موردنظر را به شکل

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n\left((-1)^{n-1} + (n-1)a_{n-2}\right)$$

بنویسید. از استقرایی ساده معلوم می‌شود که

$$a_n = (-1)^n + na_{n-1}$$

و درنتیجه

$$a_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}$$

بنابراین، a_n تعداد پریشهای $(1, 2, \ldots, n)$ است، یعنی برابر است با تعداد جایگشتهایی از این nتایی که هیچ نقطهٔ ثابتی ندارند.

به هر زوج مانند (σ, j) از جایگشت غیرهمانی σ و عدد j در مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$، اگر j نقطهٔ ثابتی از σ نبود، علامتی نسبت دهید. اگر k عددی ثابت (از میان عددهای ۱، ۲، ... و n) باشد، $\binom{n}{n-k}a_k$ جایگشت مانند σ وجود دارند که دقیقاً $n-k$ نقطهٔ ثابت دارند: $\binom{n}{n-k}$ انتخاب برای نقطه‌های ثابت و a_k پریش برای k نقطهٔ دیگر وجود دارد. به‌ازای هر یک از این جایگشتها مانند σ، دقیقاً به $n-k$ زوج مانند (σ, j) یک علامت نسبت داده شده است. با احتساب همهٔ جایگشتها، معلوم می‌شود که تعداد علامتهای نسبت داده شده برابر است با

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\binom{n}{n-k}a_k = f_n - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{n-k}a_k = f_n - (n! - 1)$$

توجه کنید که $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{n-k}a_k$ برابر است با تعداد جایگشتهایی که کمتر از n نقطهٔ ثابت دارند، یعنی برابر است با $n! - 1$.

از طرف دیگر، به‌ازای هر j در مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$، دقیقاً $(n-1)! - 1$ جایگشت غیرهمانی وجود دارند که j را ثابت نگه می‌دارند. بنابراین تعداد علامتهای نسبت داده شده برابر است با

$$\sum_{j=1}^{n}\left((n-1)! - 1\right) = n(n-1)! - n$$

بنابراین $f_n = 2n! - n - 1$.

مسألهٔ ۳. یک باشگاه تنیس روی میز می‌خواهد یک دوره مسابقات دو نفره برگزار کند، یعنی یک سری مسابقه که در هر یک دو نفر بازیکن با دو نفر دیگر مسابقه می‌دهند. تعداد بازیهای هر بازیکن در

این دوره، تعداد بازیهایی است که در آنها شرکت کرده است. مجموعهٔ $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ از عددهای طبیعی متمایز که هرکدام بر ۶ بخش‌پذیر است مفروض است. کمترین تعداد بازیکنانی را پیدا کنید که می‌توان در میان آنها یک دوره مسابقات دو نفره ترتیب داد به‌طوری که

الف) هر دو تیم دونفرهٔ مختلف حداکثر یک‌بار با هم بازی کنند.

ب) اگر دو بازیکن عضو یک تیم دونفره باشند، هیچ‌گاه در مقابل هم بازی نکنند.

د) مجموعهٔ تعداد بازیهای بازیکنان مجموعهٔ A باشد.

راه‌حل

لم. فرض کنید $k \geq ۱$ و $۱ \leq b_۱ < b_۲ < \cdots < b_k$. در این صورت گرافی $b_k + ۱$ رأسی وجود دارد که مجموعهٔ درجهٔ رأسهای آن $\{b_۱, b_۲, \ldots, b_k\}$ است.

برهان. حکم را به استقرای قوی روی k ثابت می‌کنیم. اگر $k = ۱$، گراف کامل $b_۱ + ۱$ رأسی ویژگیهای موردنظر را دارد. اگر $k = ۲$، $b_۲ + ۱$ رأس در نظر بگیرید، $b_۱$ رأس انتخاب کنید و دو رأس را به هم وصل کنید اگر و فقط اگر یکی از آنها یکی از این $b_۱$ رأس باشد.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر حکم به‌ازای هر k، $i < k$، درست باشد، به‌ازای $k = i$، $i \geq ۳$، هم درست است. $b_i + ۱$ رأس در نظر بگیرید و آنها را به سه مجموعه مانند $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ طوری افراز کنید که

$$|S_۱| = b_۱$$

$$|S_۲| = b_{i-۱} - b_۱ + ۱$$

$$|S_۳| = b_i - (b_{i-۱} + ۱)$$

بنابر فرض استقرا می‌توانیم طوری یالهایی بین رأسهای مجموعهٔ $S_۲$ رسم کنیم که مجموعهٔ درجهٔ رأسها $\{b_۲ - b_۱, \ldots, b_{i-۱} - b_۱\}$ باشد. سپس همهٔ رأسهایی را رسم کنید که رأسی از $S_۱$ یکی از دو سر آن باشد. در این صورت درجهٔ هر رأس در $S_۱$ برابر با b_i است، درجهٔ هر رأس در $S_۳$ برابر با $b_۱$ است و مجموعهٔ درجهٔ رأسهای $S_۲$ مجموعهٔ $\{b_۲, \ldots, b_{i-۱}\}$ است. بنابراین، مجموعهٔ درجهٔ $b_i + ۱$ رأس گراف موردنظر مجموعهٔ $\{b_۱, b_۲, \ldots, b_i\}$ است. اثبات کامل شده است.

فرض کنید طوری مسابقات را بین n نفر ترتیب داده باشیم که شرطهای موردنظر برقرار باشند. تعداد بازیهای دست‌کم یکی از بازیکنان، مثلاً X، برابر با $\max(A)$ است. فرض کنید تعداد تیمهای دونفرهٔ مختلفی که او با آنها بازی کرده است برابر با m باشد. هر یک از این تیمها دو نفر بازیکن دارد، پس درکل $۲m$ بازیکن دارند. در این شمارش هر بازیکن حداکثر دوبار شمرده شده است، زیرا هر بازیکن عضو حداکثر دو تیم است، بنابراین بازیکن X باید دست‌کم با m بازیکن بازی کرده باشد. اگر X در j تیم عضو باشد (که j یا ۱ است یا ۲)، درکل دست‌کم $m + j + ۱$ بازیکن داریم. همچنین، X در

دست‌کم jm بازی شرکت کرده است، و درنتیجه $jm \geq \max(A)$. بنابراین

$$n \geq m + j + ۱ \geq \frac{۱}{j}\max(A) + j + ۱ \geq \min\{\max(A) + ۲, \frac{۱}{۲}\max(A) + ۳\}$$

چون $\max(A) \geq ۶$، پس

$$\max(A) + ۲ > \frac{۱}{۲}\max(A) + ۳$$

و درنتیجه $n \geq \frac{۱}{۲}\max(A) + ۳$.

ثابت می‌کنیم می‌توان مسابقات را طوری ترتیب داد که $n = \frac{۱}{۲}\max(A) + ۳$. بنابر لم می‌توانیم گرافی مانند G با $\frac{۱}{۶}\max(A) + ۱$ رأس رسم کنیم که مجموعهٔ درجهٔ رأسهایش $\{\frac{a_۱}{۶}, \frac{a_۲}{۶}, \ldots, \frac{a_k}{۶}\}$ باشد. n بازیکن را به $\frac{۱}{۶}\max(A) + ۱$ گروه سه‌تایی تقسیم کنید و فرض کنید دو بازیکن وقتی و فقط وقتی در یک تیم هستند که در یک سه‌تایی قرار داشته باشند. هر سه‌تایی (و سه زوجی که از بازیکنان آن تشکیل شده‌اند) را به زوجی از G نسبت دهید و فرض کنید که دو تیم با هم مسابقه می‌دهند اگر و فقط اگر رأسهای نظیرشان مجاور باشند. فرض کنید زوجی داریم که به رأسی مانند v با درجهٔ $\frac{a_i}{۶}$ نسبت داده شده است. به‌ازای هر $\frac{a_i}{۶}$ رأس مانند w که مجاور v هستند، این زوج با سه زوجی که به w نسبت داده شده‌اند مسابقه داده است، پس این زوج درکل $\frac{a_i}{۲}$ مسابقه داده است. هر بازیکنی که به v نسبت داده شده است در دو زوج حضور دارد و درنتیجه تعداد بازیهایش برابر با $۲\left(\frac{a_i}{۲}\right)$ یا a_i است. بنابراین مجموعهٔ بازیهای بازیکنان برابر با $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ است.

مسألهٔ ۴. عدد طبیعی n مفروض است و $n \geq ۲$. به‌ازای هر nتایی مرتب از عددهای حقیقی مانند $A = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$، فرض کنید نمرهٔ تسلط A تعداد عددهایی مانند k در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد که به‌ازای هر j که $۱ \leq j \leq k$، $a_k > a_j$. همهٔ جایگشتهای $(۱, ۲, \ldots, n)$ مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ را در نظر بگیرید که نمرهٔ تسلط آنها ۲ است. میانگین حسابی عضوهای اول این جایگشتها (یعنی میانگین حسابی $a_۱$ها) را پیدا کنید.

راه‌حل

در هر nتایی مرتب از عددهای حقیقی مانند $A = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$، اگر به‌ازای هر j، $۱ \leq j \leq k$، a_k از a_j بزرگتر باشد، a_k را حاکم می‌نامیم. اگر نمرهٔ تسلط جایگشتی مانند $A = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ از $(۱, ۲, \ldots, n)$ برابر با ۲ باشد، آن‌وقت حاکمان باید $a_۱$ و n باشند، که در اینجا به‌ازای kای که $۲ \leq k \leq n$، $n = a_k$.

عددی ثابت مانند m در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$ در نظر بگیرید. عددهای $m + ۱$، $m + ۲$، ... و n را بزرگ و عددهای ۱، ۲، ... و $m - ۱$ را کوچک می‌نامیم. در جایگشتی که دو

حاکم دارد و در آن $m = a_1$، n باید جایی پیش از همهٔ عددهای بزرگ دیگر بیاید. بنابراین، برای تشکیل همهٔ این جایگشتها، ابتدا $n - m$ جایی را که باید عددهای بزرگ قرار بگیرند انتخاب می‌کنیم، n را در اولین جای انتخاب شده قرار می‌دهیم و سپس $n - m - 1$ عدد بزرگ دیگر را در جاهای انتخاب‌شدهٔ باقی‌مانده قرار می‌دهیم. بعد همهٔ عددهای کوچک را در $m - 1$ جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم. به این ترتیب تعداد این جایگشتها برابر است با

$$x_m = \binom{n-1}{m-1}(n-m-1)!(m-n)! = \frac{(n-1)!}{n-m}$$

بنابراین میانگین حسابی موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{m=1}^{n-1} m x_m}{\sum_{m=1}^{n-1} x_m} &= \frac{(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{n-m}}{(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n-m}} \\
&= \frac{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{n-m}}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n-m}} \\
&= \frac{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n-m}{m}}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}} \\
&= \frac{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n}{m} - \sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{m}}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}} \\
&= n - \frac{n-1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

مسألهٔ ۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که عددهایی طبیعی مانند n_1، n_2، ... و n_k همگی بزرگتر از ۳ وجود داشته باشند که

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1$$

راه‌حل

اگر عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد، عددی طبیعی مانند m وجود دارد که $n = 2^m - 1$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که تنها عدد کوچکتر از ۱۰ مانند m که $n = 2^m - 1$ و n ویژگی موردنظر را داشته باشد ۳ است.

ثابت می‌کنیم که اگر $m \geq ۱۰$، $۲^m - ۱$ ویژگی موردنظر را ندارد. فرض کنید چنین نباشد و به‌ازای عددهایی صحیح مانند $n_۱$، $n_۱$، ... و n_k،

$$m = \frac{۱}{۲^k}(n_۱ - ۱)(n_۲ - ۱)\cdots(n_k - ۱) \geq ۱۰$$

توجه کنید که اگر $l \geq ۱۰$، آنگاه

$$\left(\frac{l+۱}{l}\right)^۳ < \left(\frac{۵}{۴}\right)^۳ < ۲$$

با استفاده از این مطلب، به‌سادگی می‌توان به استقرا ثابت کرد که اگر l عددی طبیعی باشد و $l \geq ۱۰$، آنگاه $۲^l - ۱ > l^۳$. بنابراین

$$۲^m - ۱ > m^۳ = \left(\frac{n_۱ - ۱}{۲}\right)^۳ \left(\frac{n_۲ - ۱}{۳}\right)^۳ \cdots \left(\frac{n_k - ۱}{۲}\right)^۳ \qquad (*)$$

چون $۲^m - ۱$ فرد است، پس n_iها همگی فردند و چون هر یک از n_iها از ۳ بزرگتر است، پس هر یک از آنها دست‌کم ۵ است. بنابراین

$$\left(\frac{n_i - ۱}{۲}\right)^۲ \geq ۴\frac{n_i - ۱}{۲} > n_i, \qquad ۱ \leq i \leq k \qquad (**)$$

به این ترتیب، از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود

$$n = ۲^m - ۱ > n_۱ n_۲ \cdots n_k = n$$

که درست نیست. پس تنها عددی که ویژگی موردنظر را دارد ۷ است.

مسألهٔ ۶. یک برگهٔ امتحانی شامل ۵ سؤال چندگزینه‌ای است که هرکدام چهارگزینهٔ مختلف دارد. ۲۰۰۰ دانش‌آموز در امتحان شرکت کرده‌اند و هر دانش‌آموز فقط یکی از گزینه‌های هر سؤال را انتخاب می‌کند. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان برگه‌های امتحانی هر n دانش‌آموز، ۴ برگه وجود داشته باشد که در هر دوتا از آنها حداکثر سه پاسخ یکسان باشند.

راه‌حل

فرض کنید عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم $n \geq ۲۵$. فرض کنید ۱، ۲، ۳ و ۴ چهارگزینهٔ مختلف هر سؤال باشند. برگهٔ جواب هر دانش‌آموز را با پنج‌تایی مرتب $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵)$ نشان دهید که در آن $a_i \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و پاسخ دانش‌آموز به سؤال iام a_i است. می‌گوییم دو برگهٔ جواب از یک نوع‌اند، هرگاه پنج‌تاییهای نظیر آنها متعلق به مجموعه‌ای به شکل

$$\{(k, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵) : \ k \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}\}$$

باشند، که در اینجا

$$a_۲, a_۳, a_۴, a_۵ \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

چون ۲۵۶ مجموعهٔ این‌چنینی وجود دارد و $۲۰۰۰ = ۲۵۶ \times ۷ + ۲۰۸$، بنابر اصل لانه کبوتری، دست‌کم هشت برگهٔ جواب از یک نوع‌اند. در میان ۱۹۹۲ برگهٔ جواب باقی‌مانده هم هشت‌تا از یک نوع‌اند و سرانجام، از میان ۱۹۸۴ برگهٔ جواب باقی‌مانده هم هشت‌تای دیگر از یک نوع‌اند. فرض کنید A مجموعهٔ این ۲۴ برگهٔ جواب باشد. از هر چهار برگهٔ جواب در A، دوتا باید از یک نوع باشند، یعنی جوابهای ۴تا سؤال آخر آنها یکسان است. این نتیجه با این فرض که ۴ برگهٔ امتحانی در A وجود دارند که هر دوتا از آنها حداکثر ۳ جواب یکسان دارند تناقض دارد. بنابراین $n \geq ۲۵$.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $n = ۲۵$، آن‌وقت n ویژگی موردنظر را دارد. فرض کنید

$$S = \left\{(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵) : \ \sum_{i=۱}^{۵} a_i \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴), \qquad a_i \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}\right\}$$

که در این صورت $|S| = ۴^۴ = ۲۵۶$، و اگر پنج‌تایی نظیر دو برگهٔ جواب عضوهای متمایزی از S باشند، حداکثر ۳ پاسخ یکسان دارند. ۲۵۰ عضو از S انتخاب کنید و فرض کنید دقیقاً هشت دانش‌آموز برگه‌های جوابی را تحویل داده باشند که نظیر هر یک از این ۲۵۰ پنج‌تایی هستند. از میان هر ۲۵ برگهٔ جواب (چون $۸ \times ۳ < ۲۵$)، چهار برگه وجود دارند که پنج‌تاییهای نظیرشان عضوهای متمایزی از S هستند و در شرطهای مسأله صدق می‌کنند.

منابع

1. Li Cheung-Zhang; Zhang Zhu-Sheung, *Chinese Mathematical Olympiads* 1986-1993. Chiu Chang Math. Publishing, 1994.
2. The 1994 Chinese Mathematical Olympiad, *Mathematics Competitions*, Vol 9, No 1, 1996, pp. 40-47.
3. Andreescu, T.; Kedlaya, K.; Zeitz, P., *Mathematical Contests* 1995-1996, AMC, 1997.
4. Andreescu, T.; Kedlaya, K.; *Mathematical Contests* 1996-1997, AMC, 1998.
5. Andreescu, T.; Kedlaya, K.; *Mathematical Contests* 1997-1998, AMC, 1999.
6. Andreescu, T.; Feng, Z., *Mathematical Olympiads* 1998-1999, AMC, 2000.
7. Andreescu, T.; Feng, Z., *Mathematical Olympiads* 1999-2000, MAA, 2001.
8. Andreescu, T.; Feng, Z., Lee, G., *Mathematical Olympiads* 2000-*2001, MAA, 2003.*